

ROZHLEDY

matematicko^v
-fyzikální

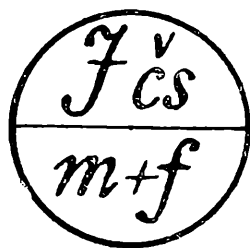
$\left(\frac{1}{89-90} \right)$

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

ZÁŘÍ

CENA 2,00 Kčs



ROZHLEDY
matematicko
-fyzikální
Nositel vyznamenání za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT, Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Ján Chrapan: K 45. výročiu Karpatsko-Dukelskej operácie	1
Jiří Mída: Lagrangeův interpolační polynom	9
Emil Calda: Guldinovo pravidlo pro objem rotačního tělesa	11
Emil Kašpar: „Tajemný“ pohyb čarodějného proutku ve světle fyziky a matematiky I.	15
Martin Chmelař: Historie a současnost budovy Fyzikálního ústavu UK v Praze	20
Z matematiky a fyziky ZŠ	24
Přemýšlíme, řešíme	29
Olympiády a SOČ	32
Kalendár M-F	42
Z nových knih	46
Informace	47
Humory matematicko-fyzikální	3. str. obálky

K 45. výročiu Karpatsko-Dukelskej operácie

Prof. dr. JÁN CHRAPAN, DrSc., VVTŠ—ČSSP, Liptovský Mikuláš

Udalosti, vzdialené 45 rokov, už majú historický charakter a história môže prispieť súčasnosti, ak sa skúmajú celkové tendencie vývoja a robí sa objektívna analýza činnosti ľudí. Najcennejšie je pochopiť rozhodnutia a analyzovať použité metódy.

Slovenské národné povstanie sa začalo 29. 8. 1944 a jeho centrom bola Banská Bystrica. Bolo prirodzeným dôsledkom neustávajúceho protifašistického a národnooslobodzovacieho boja. Dokument prezídia Exekutívy Komunistickej internacionály z 5. 1. 1943, inštrukcie J. Dimitrova a Zahraničného byra KSČ v Moskve, ktoré priniesol na Slovensko v auguste 1943 Karol Šmidke, viedlo V. ilegálne ústredné vedenie KSS (Husák, Novomeský, Šmidke) k príprave ozbrojeného vystúpenia. Komunisti však nemohli viesť tento boj sami. Predstavitelia časti buržoázneho odboja doma i v zahraničí pod tlakom víťazného postupu Sovietskej armády pochopili, že už naďalej nemôžu odkladať dohodu s komunistami o spoločnom postupe v protifašistickom boji. Takto vznikla v decembri 1943 ilegálna Slovenská národná rada ako celonárodný vrcholný orgán odboja. SNR mala pracovať po dohode s československou vládou v Londýne a zahraničným odbojom, uznávať a podporovať ich na politickom i vojenskom poli (Rozhledy M-F, 1, 63, 1984/85, s. 1—5).

Na jar 1944 velenie slovenskej armády po dohode s fašistickým Nemeckom vyslalo na východné Slovensko dve divízie, aby tam v priestore Lupkovského a Dukelského priesmyku vybudovali obranu. Slovenská národná rada zverila vojenskú stránku povstania Vojenskému ústrediu. Podľa jeho plánu malo týchto 24 000 dobre vycvičených a vyzbrojených vojakov zaútočiť do chrbta nemeckých jednotiek koordinovane so Sovietskou armádou a takto jej uľahčiť priechod horským masívom Karpát.

Veliteľ zboru generál Malár ani vtedajší minister národnej obrany Čatloš nenadviazali spojenie so Sovietskou armádou. Keď sa od polovice augusta 1944 množili otvorené diverzné akcie partizánov, nemecký vyslanec Ludin hlásil do Berlína, že situácia vyžaduje neodkladný vojenský zásah. Prezident Tiso s tým súhlasil.

Vojenské ústredie určilo za veliteľa východoslovenských divízií plu-

kovníka Talského. Tento svoju úlohu nesplnil. Neujaľ sa velenia, ale v noci na 31. 8. odletel na sovietsku stranu dohodnúť súčinnosť bez toho, aby uviedol jednotky do bojovej pohotovosti, a tak rozhodný a rýchly zásah nemeckého velenia umožnil odzbrojiť východnú armádu už 1. a 2. septembra. Spôsobilo to veľkú vojenskú stratu SNP a sťažilo priebeh bojov na východných hraniciach Československa.

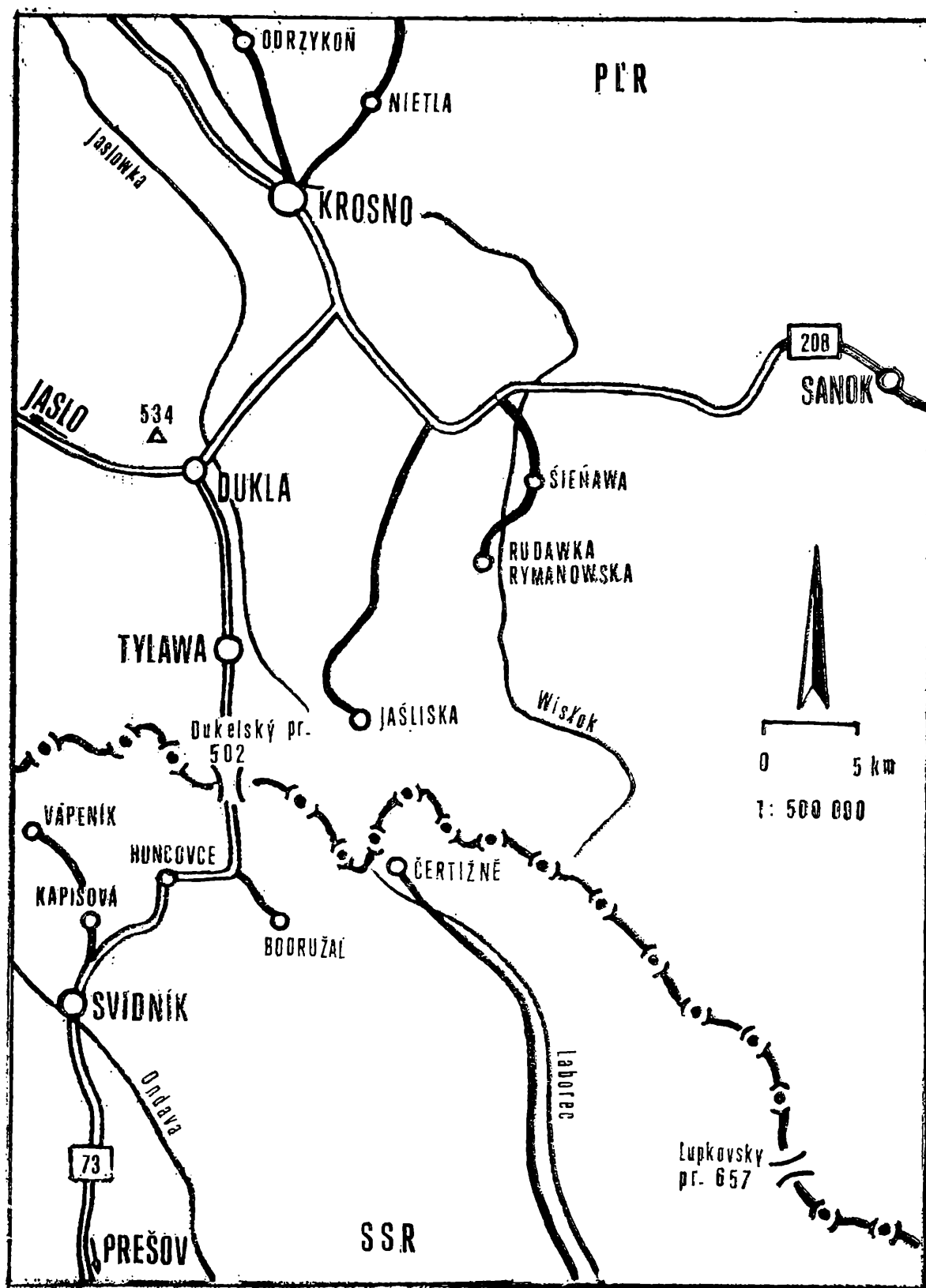
Sovietske velenie pôvodne nemalo v úmysle prekročiť Karpaty. Veď vojenské úspechy v Poľsku, v Rumunsku a potom v Maďarsku hrozili nacistom hlbokým obchvatom. Neostávalo by im nič iné, ako stiahnuť sa z Karpát. Napriek tomu na žiadosť československej vlády, tlmočenú v Moskve Gottwaldom, rozhodla dňa 2. 9. 1944 sovietska vláda uskutočniť na pomoc SNP útočnú operáciu 38. armádou generála K. S. Moskalenka z priestoru severovýchodne od poľského mesta Krosno.

Situácia pred 38. armádou začiatkom septembra 1944

V lete 1944 bojovala 38. armáda na ľavom krídle 1. ukrajinského frontu maršala I. S. Koneva v predhorí Karpát, kde v auguste prešla do obrany. Jej divízie boli unavené, neúplné, mali nedostatok bojovej techniky a nutne potrebovali odpočinok.

Krosensko-Dukelskému smeru venovalo nemecké velenie veľkú pozornosť. Právom sa obávalo, že 38. armáda tadiaľ prenikne cez Slovensko do Maďarska a spojí sa s vojskami útočiacimi v Rumunsku, čím by sa lacno stratila výhodná obranná čiara Karpát. Na smere Krosno—Dukla mali Nemci niečo cez 20 tisíc mužov, 221 diel, 140 mínometov a asi 800 ľahkých a ťažkých guľometov. Na pešiu divíziu pripadal asi 20 km široký úsek obrany. Zvlášť silne sa Nemci opevnili v Krosne. Do začiatku útočnej operácie mali opevňovacie práce ukončené len asi na 30 %, ale odolnosť opevnení pozoruhodne zvyšovali terénne tvary zalesneného horstva. V pásme predpokladanej činnosti 38. armády a na priľahlých úsekoch nemal nepriateľ operačné zálohy a aj taktické zálohy boli slabé. V situácii, ktorá panovala začiatkom septembra medzi Sanokom, Krosnom a Dukelským priesmykom, malo rozhodujúci význam rozvinúť prekvapivú, ráznu a veľmi rýchlu operáciu.

Veliteľ 1. ukrajinského frontu maršal Sovietskeho zväzu I. S. Konev dostal úlohu: V súlade s partizánskym hnutím na Slovensku pripraviť a uskutočniť takú operáciu na styku 1. a 4. ukrajinského frontu, v ktorej by sa úderom z priestoru Krosno—Sanok vo všeobecnom smere na Prešov dosiahli slovenské hranice a vytvorilo by sa spojenie s bojujúcimi jednotkami na Slovensku. Na podporu operácie dostal front povolenie pribrať 1. československý armádny zbor a po predchádzajúcej dohode využiť slovenské vojská, rozložené severovýchodne od Prešova. Predpokladalo sa, že strelecké zväzky 38. armády rýchlo rozdrtia nepriateľské zoskupenie v predhorí Karpát a tento úspech potom rozvinú na smere



Dukla—Dukelský priesmyk sily 1. gardového jazdeckého zboru, 25. tankového zboru a druhého sledu armády, ktorý bude tvoriť 1. čs. armádný zbor. Na Dukelskom priesmyku sa mali vojská spojiť so silami východoslovenského zboru, ktorý by vyrazil do nemeckého týla v tretí deň

operácie. Prielom nepriateľskej obrany mal byť vedený v šírke 8 km severozápadne od Krosna.

Rozhodnutie veliteľa 38. armády a zabezpečenie operácie

Veliteľ 38. armády sa 4 dni pred začatím operácie (lebo viac času mu neostávalo) rozhodol hlavnými silami prelomiť nepriateľskú obranu na úseku Niepla—Odrzykoň, zničiť protistojace útvary a rozvinúť útok smerom na Duklu—Tylawu—Prešov. Pridelil úlohy jednotlivým zborom a rozdelil posilové jednotky. V operácii sa zvlášť veľký význam pripisoval delostrelectvu. K dispozícii bolo 1724 diel a minometov a skupina gardo-vých minometov (kaťuší). Plán delostreleckej činnosti bol účelný. Delostrelcom však chýbali skúsenosti z činnosti v horskom teréne, čo sa odrazilo na priebehu boja. Letecké zabezpečenie operácie bolo zverené častiam síl 2. leteckej armády, ktoré čítali 465 lietadiel. Tankové jednotky mali pred začatím operácie len 214 pojazdných tankov a samohybných diel. Tankisti nemali skúsenosti s činnosťou v horskom teréne a technika nebola po predchádzajúcich bojoch v dobrom stave. Na ženijné práce mala armáda k dispozícii 71 ženijných rôt a armádne cestné útvary. Neobyčajnosť Karpatsko-Dukelskej operácie kládla vysoké nároky aj na jej politické zabezpečenie. V predchádzajúcich bojoch sa mnohé rotné stranícke organizácie rozpadli. V prípravnom období museli byť opäť oživené. Pozornosť sa venovala aj miestnemu obyvateľstvu, s ktorým sa robili besedy, poskytovala sa im pomoc pri vytváraní demokratických samosprávnych orgánov moci, pri vytváraní ľudových milícií a pri voľbách robotníckych rád na závodoch.

V 1. čs. armádnom zbore sa na besedách a zhromaždeniach vysvetľovalo vojakom, akej cti sa im dostalo, keď môžu ako prví po boku sovietskych vojakov vstúpiť na územie svojej vlasti. Každá formálnosť a rutinovanosť v politickej práci obdobia príprav operácie sa neskôr v podmienkach boja vypomstila.

Bojové zabezpečenie operácie spočívalo v prieskume, organizácii protivzdušnej a protitankovej obrany, v maskovacích opatreniach, v utajení manévrov a v organizácii velenia.

Prieskumníci mali mimoriadne ťažkú úlohu. Nedostatok času a členitosť terénu ich nútili prenikať hlboko do obrannej zostavy nepriateľa. Celkove bol však prieskum, ako vývoj operácie ukázal, slabý. Letecký prieskum splnil svoju úlohu: velitelia zborov a divízií dostali mapy so zreteľným zoskupením nepriateľa, jeho ženijnými objektami a systémom palieb. Výpadové skupiny si počínali iniciatívne. Boli úspešné a denne privádzali aj niekoľkých zajatcov. Deň pred samotným útokom sa na celom fronte armády uskutočnil prieskum bojom. Takto sa odhalili zoskupenia nepriateľa s presnosťou na prápor a neprezradil sa hlavný smer pripravovaného útoku. Proti vzdušnému napadnutiu boli vojská

chránené silami 21. protiletadlovej delostreleckej divízie. Protitankové delostrelectvo armády bolo dostatočne silné. Hustota na hlavnom smere dosahovala 30 až 40 protitankových diel na 1 km frontu.

V záujme utajovania prebiehali presuny vojsk výhradne v noci. Delostrelci sa začali zastreľovať len dva dni pred útokom a aj to vo veľmi obmedzenej miere.

Veliteľské stanovištia a pozorovateľne sa vysúvali tesne za jednotky, spájali sa linkovým vedením a rádiovým spojením. Linkové a rádiové spojenie sa zdvojovalo od peších spojok cez autá až k lietadlám. Organizácia spojenia sa ukázala na dobrej úrovni. Zabezpečila velenie vojskám počas celej operácie.

Tylové a materiálno-technické zabezpečenie trpelo na nedostatok času, vojská boli zásobované provijantom a strelivom len s krajným vypätím síl.

Prielom v predhorí

V prvých hodinách boja 8. 9. 1944 nepriateľ rýchlo ustupoval. Ukázalo sa však, že je tomu tak len na hlavnom smere, na ktorom za necelé tri hodiny postúpili útočiace jednotky do hĺbky 8 km. Okolo poludnia sa vynorili prvé ťažkosti. Západná časť postupujúcich jednotiek bola zastavená. Zvyšná časť síce v postupe pokračovala, ale stratiac pravého suseda, musela časť svojich síl rozvinúť aj smerom na západ. K večeru bol útok zastavený. Nepredvídane neúspešný bol postup útočiacich divízií na východnom kridle. Mesto Krosno, dopravný uzol, sa nepodarilo obsadiť, čím sa celkový prielom zúžil takmer na polovicu. Do prielomu nastupujúce druhosledové jednotky nemohli použiť pôvodne plánované trasy. Regulačná služba len s krajným vypätím udržiavala na cestách aký — taký pohyb. Dokiaľ nepriateľ držal Krosno, možnosť manévru bola odmedzená. Druhosledové jednotky sa pre nepriechodnosť ciest oneskorili a nezasiahli do bojov v noci. Ráno 9. 9. sa už situácia zmenila. Nemei stačili stiahnuť z juhovýchodu celú pešiu divíziu a aj 1. nemecká tanková divízia, ktorá mala byť prepravená do Maďarska, zmenila svoj program a už ráno 9. 9. jej prvé pluky narazili na útočiace jednotky zo západu. To bol len začiatok veľkého presunu síl, ktoré uskutočnilo hitlerovské velenie, aby zadržalo útok 38. armády. Tento presun nakoniec vyrovnal sily a z pôvodne očakávanej rýchlej operácie urobil namáhavú, mnoho týždňov trvajúcu bitku.

V nočných podmienkach a v zalesnenom teréne neboli presuny nemeckých vojsk spozorované a zmena situácie sa v bojových úlohách na deň 9. 9. neodrazila. Tento deň bol ešte menej úspešný ako prvý deň operácie. V noci na 10. 9. veliteľ 1. ukrajinského frontu posilnil 38. armádu tankovým zborom zo svojej zálohy. Bez toho by hrozilo pri zmenenom pomere síl zrútenie celej operácie.

Ráno 10. 9. jednotky v prielome nastúpili po polhodinovej delostreleckej palebnej príprave do útoku. Stretli sa s veľmi silným odporom. Len predpoludním museli odraziť 15 protiútokov, vedených vždy celým plukom pechoty, podporovanej tankami. O 16⁴⁰ zasiahlo 27 bitevných lietadiel Il-2. Sovietske jednotky sa húževnate prebýjali ku hradskej z Jasla do Dukly. Velenie 1. čs. armádneho zboru prebral od generála Kratochvíla generál Svoboda. Tento preskupil 1. pešiu brigádu, ktorá potom prekvapivým útokom obsadila legendárnu kótu 534.

Veliteľ armády sa rozhodol 11. 9. o 02⁴⁰ nasadiť na vytlačenie nemeckej posádky z Krosna pešiu divíziu spolu s tankovou brigádou a okolo pol šiestej ráno bolo Krosno dobyté. O 9 hodine po polhodinovej palebnej príprave a po náletoch bitevného letectva obnovili zväzky armády útok vo smere postupu a preťali hradskej z Jasla. Obsadili ju v úseku dlhom asi 3 km. Nemci sa nemohli so stratou hradskej zmieriť a v nasledujúcich dňoch sem vrhli postupne tri divízie tankov. Veliteľ 38. armády presunul na tento úsek samohybný delostrelecký pluk a ďalšie delostrelecké a tankoborné útvary. Na celé dva dni prijali sovietski delostrelci boj s nemeckými tigrami.

12. 9. sa rozpútali zvlášť prudké boje o kótu 534. Stačí uviesť, že len medzi 17 a 19 hodinou odrazili čs. útvary za podpory letectva päť nemeckých útokov. V tomto dni prešla výšina niekoľkokrát z rúk do rúk, až sa konečne k večeru opevnili čs. jednotky na jej južnom úbočí. Boj o kótu riadil veliteľ zboru generál Svoboda priamo v bojových zostavách.

Úder na ľavom krídle

15. 9. 1944 našiel sovietske vojská v kritickej situácii. Jazdecký zbor obklúčený hlboko v tyle nepriateľa, 52. strelecký zbor ležiaci pozdĺž 30 km dlhej západnej hranice prielomu a ďalší strelecký zbor, tvorený dvoma divíziami, ktorý v dĺžke asi 10 km kryl západný okraj prielomu a pred sebou mal dve nepriateľské tankové divízie. 1. čs. armádny zbor stál pred Duklou a proti nemu bola divízia horskej pechoty a jedna pešia divízia. Ďalší strelecký zbor, dve strelecké divízie a 2. čs. paradesančná brigáda držali oneskorené ľavé krídlo v dĺžke asi 30 km. Hlavné nepriateľské sily sa sústredili pred pravým krídlom 38. armády.

Veliteľ frontu nariadil v tejto situácii viesť úder na ľavom krídle v smere na Jašísko juhovýchodne od Dukly. Tým sa armáda dostane skokom do tylu silných nemeckých zoskupení, brániacich postup k Dukle. Na splnenie úlohy bol nasadený preriedený 4. gardový tankový zbor, ktorý mal len 59 mobilných tankov T-34 a 9 samohybných diel SAU-85. S ohľadom na neustále posilňovanie fašistickej obrany prideliť veliteľ frontu 38. armáde dve strelecké divízie, tankový zbor a protitankovú delostreleckú brigádu. Nepriateľ vystihol úmysel prelomiť jeho obranu na východnom okraji prielomu a svoju obranu tam posilnil delostrelec-

kými oddielmi. Preto sovietske velenie vytvorilo údernú skupinu z praporu samopalníkov, troch tankov, batérie minometov, diel a ťažkých guľometov, ktorá 17. 9. o 1 hodine po polnoci prekvapivým útokom obsadila Sienawu. Účelné by bolo poslať na prekvapeného nepriateľa hneď hlavné sily. Velenie sa však neodvážilo k takémuto kroku. Bolo treba očakávať fašistický protiúder. Tento prišiel hneď ráno pozdĺž čelnej línie prielomu od západu na východ. Fašisti pri ňom stratili 15 tankov a asi 300 samopalníkov. Priebeh boja a organizácia sovietskej obrany ich definitívne vyliečila z predstáv, že opäť získajú spojovaciu cestu Dukla—Jaslo.

Na poludnie začal útok 38. armády na ľavom krídle so 144 tankami a samohybnými delami. Doprovodné strelecké jednotky ale včas neukončili preskupovanie, a tak nevyrazili spolu s tankami. Pred útočiacimi vojskami sa bránili dva pešie prapory, podporované 50 delami a minometmi, 45 guľometmi a 10 tankami. Okolo 12 hodiny vnikli sovietske tanky do úžľabiny za Sienawou a v nej prijali delostrelecký súboj, v ktorom pomaly prevládli sovietske zbrane. Asi 3 kilometre južne bol ich postup zastavený priamou paľbou kanónov a samohybných diel v palebnom postavení. Cestu prehradzovali aj minové polia, zaistované paľbou nemeckých pešiakov, ukrytých na okraji lesa. Postup bol veľmi namáhavý, a tak až k večeru obsadili Rudawku Rymanovskú, kde sa opevnili. Chýbalo 10 tankov.

Na druhý deň vyrazili úžinou ďalšie sovietske tankové jednotky spolu so streleckými jednotkami. Keďže deň predtým nebolo možné vyčistiť svahy úžľabiny, opäť sa bojovalo zvlášť o prepravište cez rieku Wisłok, okolo ktorého sa na oboch brehoch opevnili nemeckí samopalníci a zakopali sa tankoborci. Prekročiť rieku rýchlo mostom sa nepodarilo, lebo ho zahatali poškodené tanky. Nad ráno 19. 9. tankový výsadek zneškodnil obrancov mostu, a tak mohli do večera preniknúť sovietske tanky natoľko na juh, že sa mohli obrátiť na západ a prenikať do boku a tylu nepriateľských jednotiek, brániacich sa pred Duklou.

20. 9. dostali z východu prenikajúce tanky príkaz pokračovať juhozápadným smerom s cieľom likvidovať obranu severných horských chrbátov a obklúčiť a zničiť dukelské zoskupenie nepriateľa. Nemecké velenie však v noci stiahlo svoje jednotky od Dukly a posilnilo ich prapormi zo Slovenska a Maďarska. Sovietski tankisti po vyčerpávajúcom presune dosiahli priestor Dukly, prispeli na pomoc 1. čs. armádnemu zboru, ktorý namáhavo postupoval od kóty 534 na Duklu, do večera postúpil ešte 2 km južne od Dukly a tu sa opevnil.

Zväzky 1. gardovej armády 4. ukrajinského frontu postúpili do 20. 9. do priestoru Čertižné, čím významne napomohli postupu ľavého krídla 38. armády. Táto prenikla 25. 9. až k Dukelskému priesmyku a spolu s 1. čs. armádnym zborom stála pri československých hraniciach.

Z nemeckej strany priestor Dukelského priesmyku obsadila 1. lyžiarska divízia horských strelcov a proti 38. armáde stálo celkom desať nepriateľských divízií. 27. 9. sa spustili v horách silné dažde. Rozmoknutý povrch znemožnil činnosť bojovej techniky a nízke mraky vylúčili nasadenie letectva. Preto sa s útočnou akciou začalo až 30. 9., avšak sústredený odpor, ťažký terén a krajne nepriaznivé počasie spôsobili, že útok sa zastavil v hĺbke asi 10 km. Nepriateľ preskupil decimované jednotky a v noci na 6. 10. začal skracovať frontovú čiaru. Keď jednotky 1. čs. armádneho zboru zistili, že nepriateľ odchádza, prešli do útoku a obsadili Dukelský priesmyk. Preto je 6. október pre ČSLA významným pamätným dňom. V útočných operáciach už na území Slovenska sa malo pokračovať 12. 10., ale krátka doba na prípravu neumožnila ich všestrannú prípravu. Na každý kilometer čiaru útoku páliło vyše 220 hlavni. Napriek tomu nedosiahli jednotky 38. armády významnejší úspech a v posledných októbrových dňoch prešli do obrany. Do 25. 11. 1944 zotrvala 38. armáda na dosiahnutých čiarach Bodružal—Hunkovce—Kapišová—Vápeník. Jednotky 1. čs. armádneho zboru viedli boje miestneho významu. Ďalší vývoj súvisel so situáciou v Maďarsku. V noci na 26. 11. sa začal nepriateľ pred 38. armádou sťahovať na juhozápad a sovietske jednotky ho prenasledovali až po rieku Ondavu, kde prešli koncom novembra do obrany.

Karpatsko-Dukelská operácia, zamýšľaná ako priama bojová podpora Slovenského národného povstania, stratila svoje pôvodné poslanie ešte skôr, ako sa začala. Napriek tomu je neoddeliteľnou súčasťou SNP. Vstup 1. československého armádneho zboru na naše územie dal reálny mocenský základ povojnovému vývoju u nás. Nech nám preto 45. výročie Karpatsko-Dukelskej operácie poslúži k tomu, aby sme sa podrobnejšie oboznámili s jej priebehom a aby sme z nej načerpali poučenia pre naše rozhodnutia a činy v mierových podmienkach. Súčasne môže slúžiť ako zdroj príkladov osobného hrdinstva, húževnatosti a kolektívneho odhodlania dosiahnuť vytýčený cieľ bez ohľadu na obete. Veď Karpatsko-Dukelská operácia stála životy 80 000 sovietskych a 6500 československých vojakov. Podľa slov Klementa Gottwalda na Dukle sa rodilo známe heslo: „So Sovietskym zväzom na večné časy a nikdy inak“.

V priestore bojov v priesmyku je teraz areál národného pamätníka — cintorín padlých s pamätníkom a exponáty Dukelského múzea, umiestnené priamo v teréne: pôvodné zbrane, obnovené pozorovateľne a palebné postavenia.

Lagrangeův interpolační polynom

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PeF UK v Praze

Joseph Louis de Lagrange [žozef lui d'lagránž] žil v letech 1736 až 1813 a zasloužil se o rozvoj matematiky, mechaniky, astronomie a matematické kartografie. Svým členem ho zvolilo několik akademií věd. Byl předsedou komise pro vytvoření metrické soustavy měr a vah.

V aplikované matematice se řeší problém: Je dáno $n \geq 2$ navzájem různých reálných čísel

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

a dalších n reálných čísel

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

(získaných např. měřeními), která nemusí být navzájem různá. Chceme nalézt aspoň jednu polynomickou funkci f jedné proměnné, pro kterou platí

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Tuto úlohu lze řešit „stavebnicovým“ postupem. Kdybychom totiž měli takové funkce $g_1, g_2, \dots, g_n$, pro něž by platilo

$$g_1(a_1) = b_1, g_1(a_2) = 0, g_1(a_3) = 0, \dots, g_1(a_n) = 0,$$

$$g_2(a_1) = 0, g_2(a_2) = b_2, g_2(a_3) = 0, \dots, g_2(a_n) = 0,$$

$$g_n(a_1) = 0, g_n(a_2) = 0, g_n(a_3) = 0, \dots, g_n(a_n) = b_n,$$

pak by bylo možno položit

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x).$$

Stačily by však jen takové funkce $h_1, h_2, \dots, h_n$, které by splňovaly rovnosti

$$h_1(a_1) = 1, h_1(a_2) = 0, h_1(a_3) = 0, \dots, h_1(a_n) = 0,$$

$$h_2(a_1) = 0, h_2(a_2) = 1, h_2(a_3) = 0, \dots, h_2(a_n) = 0,$$

$$h_n(a_1) = 0, h_n(a_2) = 0, h_n(a_3) = 0, \dots, h_n(a_n) = 1$$

Pro tyto funkce totiž

$$f(x) = h_1(x) \cdot b_1 + h_2(x) \cdot b_2 + \dots + h_n(x) \cdot b_n. \quad (1)$$

Nejprve se zabývejme případem, kdy $n = 2$. Hledejme funkce h_1, h_2 , pro které platí

$$\begin{aligned} h_1(a_1) &= 1, \quad h_1(a_2) = 0, \\ h_2(a_1) &= 0, \quad h_2(a_2) = 1. \end{aligned}$$

Omezme se jen na lineární funkce h_1, h_2 . Za tohoto předpokladu vypočteme

$$h_1(x) = \frac{x - a_2}{a_1 - a_2}, \quad h_2(x) = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}.$$

Prohlédneme-li si strukturu těchto zlomků, pak pro případ $n > 2$ lze analogicky psát

$$h_1(x) = \frac{(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)}, \quad (2)$$

$$h_k(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \dots (x - a_n)}{(a_k - a_1)(a_k - a_2) \dots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \dots (a_k - a_n)}, \quad (3)$$

kde $2 \leq k < n$,

$$h_n(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})}{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})}. \quad (4)$$

Poznamenejme ještě, že polynomy $h_2, h_3, \dots, h_n$ lze získat z polynomu h_1 cyklickou záměnou

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n - 1 \rightarrow n \rightarrow 1.$$

Polynomická funkce f , kterou zkonstruujeme užitím rovností (1) až (4), se nazývá *Lagrangeův interpolační polynom*.

Úloha

Nalezněte aspoň jednu polynomickou funkci f , pro kterou platí $f(0) = -4$, $f(1) = -4$, $f(2) = -2$, $f(3) = 8$.

Řešení:

Nejprve vypočteme

$$h_1(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6),$$

$$h_2(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x),$$

$$h_3(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3) = -\frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x),$$

$$h_4(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x).$$

Potom určíme

$$f(x) = -4h_1(x) - 4h_2(x) - 2h_3(x) + 8h_4(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4.$$

Proveďte zkoušku, že tato funkce f splňuje požadavky uvedené v textu úlohy.

Cvičení

Nalezněte aspoň jednu polynomickou funkci f , pro kterou platí:

a) $f(-1) = 6$, $f(2) = 3$, $f(4) = 21$;

b) $f(-3) = 11$, $f(0) = -7$, $f(1) = -5$;

c) $f(-1) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = -18$, $f(3) = -73$.

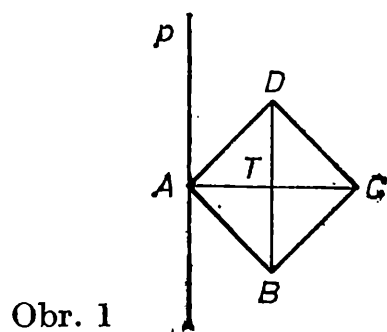
Výsledky: a) $2x^2 - 3x + 1$, b) $2x^2 - 7$, c) $-3x^3 + 2x + 2$.

Guldinovo pravidlo pro objem rotačního tělesa

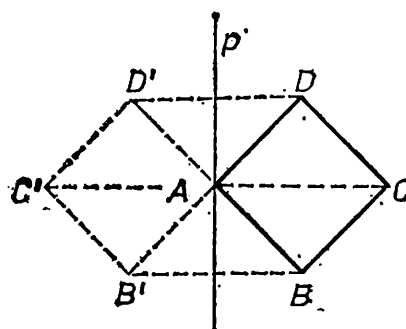
RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK v Praze

Ve sbírkách středoškolských úloh ze stereometrie se vyskytují příklady požadující určit objem těles, která vzniknou rotací nějakého rovinného obrazce kolem jisté přímky. V tomto článku se pokusíme ukázat, jaké obecné závěry o objemu těchto těles lze z úloh tohoto typu odvodit.

Vezměme nejprve tento příklad: Určete objem tělesa, které vznikne rotací čtverce $ABCD$ o straně velikosti a kolem přímky p , jež prochází vrcholem A a je rovnoběžná s jeho úhlopříčkou BD (viz obr. 1, v němž T značí těžiště čtverce $ABCD$).



Obr. 1



Obr. 2

[Snadno nahlédneme, že tímto způsobem vznikne těleso skládající se ze dvou shodných komolých kuželů se společnou podstavou, z nichž je vyňat kužel s vrcholem v bodě A , jehož podstava splývá se zbývajícím podstavou každého z těchto dvou komolých kuželů; řez tímto tělesem rovinou, v níž leží daný čtverec $ABCD$, je zobrazen na obr. 2. Označme

V_1 objem komolého kužele, jehož řezem je na obr. 2 rovnoramenný lichoběžník $C'CDD'$. Vzhledem k tomu, že tento komolý kužel má výšku velikosti $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ a že poloměry jeho podstav jsou $a\sqrt{2}$, $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, platí

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \frac{a}{2}\sqrt{2} \left[\left(a\sqrt{2} \right)^2 + \left(a\sqrt{2} \right) \left(\frac{a}{2}\sqrt{2} \right) + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2} \right)^2 \right],$$

což dá po úpravě

$$V_1 = \frac{7}{12} \pi a^3 \sqrt{2}$$

Označíme-li dále V_2 objem kužele, jehož řezem je na obr. 2 rovnoramenný trojúhelník $DD'A$, platí

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{2}\sqrt{2} \right) \left(\frac{a}{2}\sqrt{2} \right)^2,$$

odkud je

$$V_2 = \frac{1}{12} \pi a^3 \sqrt{2}$$

Pro objem V tělesa vzniklého rotací čtverce $ABCD$ kolem přímky p tedy platí

$$V = 2(V_1 - V_2) = \pi a^3 \sqrt{2}$$

Tím je daná úloha vyřešena.

Pokusme se nyní pohlédnout na tento výsledek „jinými očima“, tj. provést transformaci získaného výsledku do obecnější polohy. Vyjádříme-li objem V našeho tělesa pomocí obsahu S čtverce $ABCD$, dostaneme

$$V = S \cdot \pi a \sqrt{2},$$

odkud jsme vedeni k otázce po matematickém významu součinu $\pi a \sqrt{2}$.

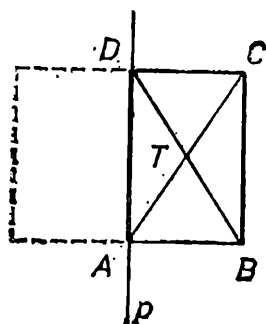
Z obr. 1 snadno usoudíme, že výraz $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ udává vzdálenost těžiště T čtverce $ABCD$ od osy p , což znamená, že součin

$$\pi a \sqrt{2} = 2\pi \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

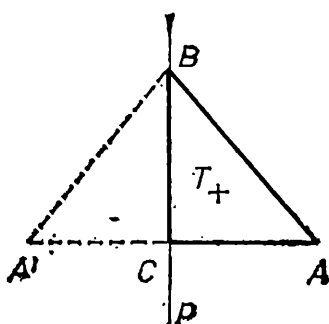
určuje délku kružnice, kterou při rotaci čtverce $ABCD$ kolem osy p opíše jeho těžiště T . Dostáváme tak pozoruhodný výsledek:

Objem vzniklého tělesa je roven součinu obsahu rotujícího čtverce a délky kružnice, kterou při rotaci opisuje jeho těžiště.

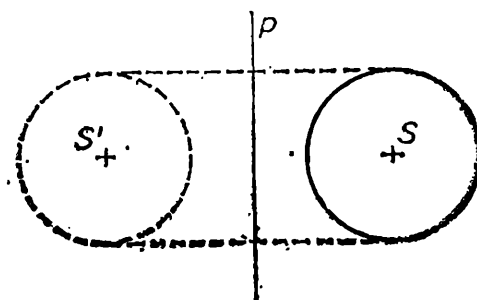
Můžete se sami přesvědčit, že obdobný výsledek platí i pro válec



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

a kužel. Představíme-li si, že válec vznikne rotací obdélníka $ABCD$ s těžištěm T (viz obr. 3) kolem přímky AD a označíme-li $|AB| = a$, $|BC| = b$, pak pro jeho objem V platí $V = \pi a^2 b$ neboli $V = ab \cdot 2\pi \frac{a}{2}$;

objem válce je tedy vyjádřen jako součin obsahu obdélníka, jehož rotací vznikl, a délky kružnice opsané jeho těžištěm.

Vznikne-li kužel rotací pravoúhlého trojúhelníka ABC s těžištěm T kolem přímky BC (viz obr. 4) a je-li $|BC| = a$, $|AC| = b$, potom pro jeho objem V platí $V = \frac{1}{3} \pi b^2 a$ neboli $V = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi \frac{b}{3}$. Uvědomíme-li si, že vzdálenost těžiště T trojúhelníku ABC od přímky BC je rovna $\frac{b}{3}$, je tím objem kužele vyjádřen požadovaným způsobem.

Na základě těchto příkladů se naskytá otázka, zda lze takto určovat objemy i jiných těles a jestliže ano, za jakých předpokladů. Odpověď na tuto otázku podal švýcarský matematik *P. H. Guldin* (1577–1643), a to v následujícím pravidle (tzv. Guldinovo pravidlo pro objem rotačního tělesa):

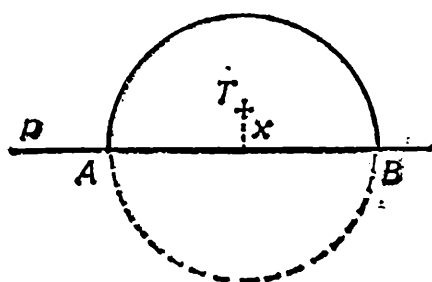
Objem rotačního tělesa, jež vznikne rotací rovinného obrazce kolem osy, která leží v rovině tohoto obrazce a neprotíná jej, je roven součinu obsahu rotujícího obrazce a délky kružnice opsané jeho těžištěm.

Užitím tohoto pravidla určíme ještě objem tělesa, s nímž se ve svých učebnicích nesetkáváte. Jedná se o anuloid, tj. o těleso, které vznikne rotací kruhu kolem přímky, jež leží v jeho rovině a nemá s ním žádný společný bod (viz obr. 5). Označíme-li poloměr tohoto kruhu písmenem r , vzdálenost jeho středu S od přímky p písmenem a a vezmeme-li v úvahu, že těžiště kruhu splývá s jeho středem, dostáváme pro objem V anuloidu

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 r^2 a.$$

(Tento vzorec jistě uvítají přátelé cyklistiky, neboť jim umožní určit objem pneumatiky na jejich velocipedu.)

Guldinovo pravidlo lze užít i k určení těžiště rovinného obrazce,



Obr. 6

jestliže známe objem tělesa rotací tohoto obrazce vzniklého. Tak např. v případě půlkruhu o poloměru r , jehož rotací kolem přímky p , na níž leží jeho průměr AB (viz obr. 6), vznikne koule, platí

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot 2 \pi x ,$$

kde x je vzdálenost těžiště T půlkruhu od přímky p . Odtud dostaneme

$$x = \frac{4r}{3\pi} ,$$

čímž je poloha těžiště půlkruhu (vzhledem k tomu, že leží na jeho ose souměrnosti) určena. Přesvědčte se sami, že těžiště rovnoramenného lichoběžníka o výšce velikosti v , jehož základny mají velikosti a , c , ($a > c$) leží ve vzdálenosti $x = \frac{v}{3} \frac{a + 2c}{a + c}$ od základny velikosti a .

K osvětlení významu a způsobu užití Guldinova pravidla pro objem rotačního tělesa tyto příklady jistě postačují. Uvedme ještě pro úplnost, že Guldinova pravidla existují dvě; to druhé umožňuje určit obsah pláště rotačního tělesa pomocí délky křivky, jejíž rotací je plášť tohoto tělesa vytvořen, a délky kružnice opsané těžištěm této křivky. Ale o tom snad až někdy příště.

Řešení algebrogramů ze str. 31

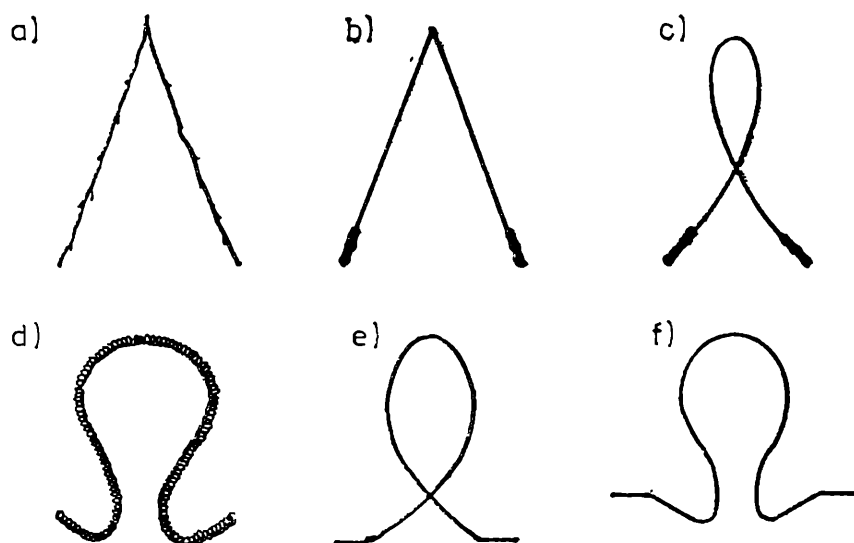
- a) $49\,673 + 87\,132 = 136\,805$
 $85\,273 + 47\,136 = 132\,409$
 $92\,536 + 73\,168 = 165\,704$
- b) $872 + 69\,512 = 70\,384$
 $253 + 49\,873 = 50\,126$
 $724 + 19\,654 = 20\,378$
- c) $93\,264 + 830 + 53\,252 = 147\,346$
 $72\,945 + 320 + 82\,989 = 156\,254$
 $83\,045 + 239 + 73\,070 = 156\,354$

"Tajemný" pohyb čarodějného proutku ve světle fyziky a matematiky I.

Prof. RNDr. EMIL KAŠPAR, DrSc., Praha

Co je čarodějný proutek

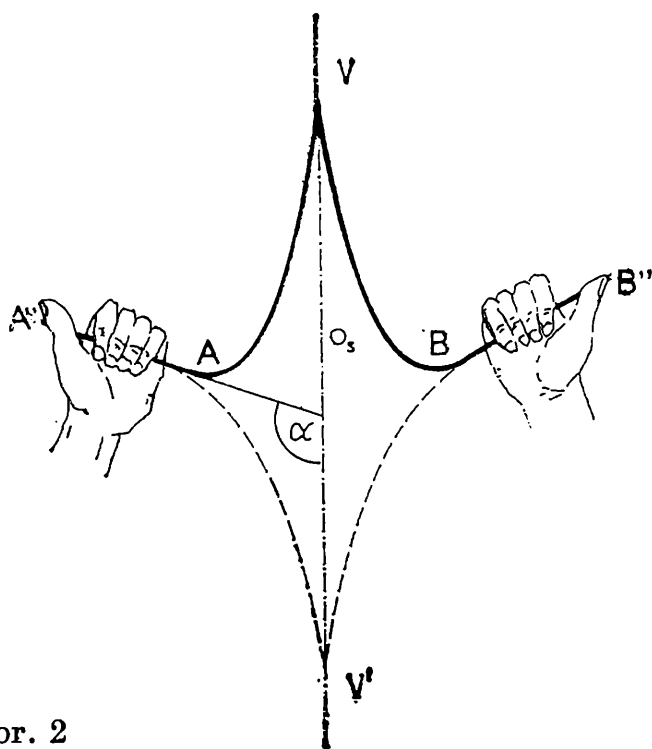
Čarodějný proutek (virgule) je přirozená větévka ve tvaru vidlice nebo podobná napodobenina z pružného drátu (obr. 1). Proutkař ohne konce ramen podle obr. 2, tj, tak, že ohnuté konce ramen svírají s osou souměrnosti o_s virgule tupý úhel ($\alpha > 90^\circ$). Účastníci proutkařovy akce pak pozorují, že se virgule samovolně vykroutí z polohy AV_0B do polohy $AV'B$ podle osy otáčení o_o (obr. 3). Tento zvláštní pohyb je někdy nazýván „proutkohybný jev“, nejnověji „jev biofyzikální“.



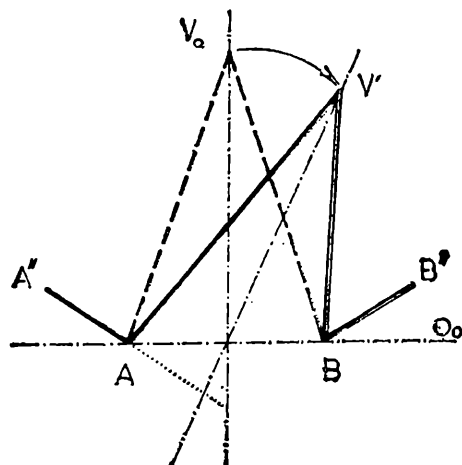
Obr. 1

Proč je pohyb virgule tajemný

Dojem fyzikální záhady plyne ze skutečnosti, že proutkař ohýbá ramena virgule silami, které působí v rovině počáteční polohy $A''AV_0BB''$, ale virgule se začne otáčet kolmo ke směru působících sil (na obr. 3 kolmo k nákresně). Z fyziky však víme, že se těleso, které je jinak volné, dá z klidu do pohybu jen *ve směru* působící síly.



Obr. 2

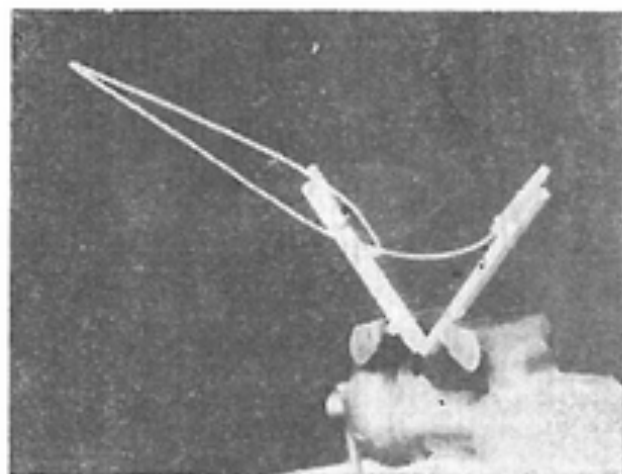
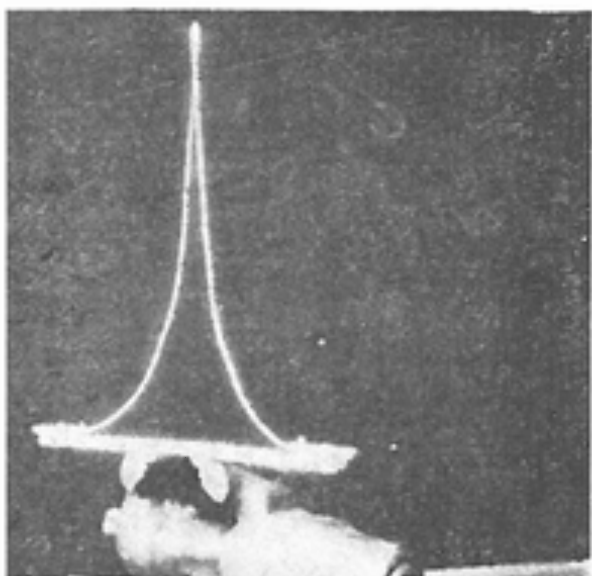


Obr. 3

Nefyzikální výklady proutkohybného jevu

Záhada vzniku pohybu proutku dala podnět k mnoha výkladům, přičemž fantazie neznala a dosud nezná mezí. Kritičtí pozorovatelé sice odedávna upozorňovali na to, že původ těchto sil je v pružnosti a ve zvláštní deformaci virgule, ale teorie a z ní plynoucí přesný fyzikální výklad byl podán teprve v posledních desetiletích. Ostatně širokou veřejnost mnohem více zajímaly a zajímají praktiky, při nichž proutkaři údajně obdaření mimořádnými schopnostmi objevovali a dosud objevují mnohé a tak rozmanité objekty, že by na jejich pouhý výčet sotva stačila celá tisková strana. Podle toho vznikaly i různé „teorie“, z nichž jmenujme aspoň nejtypičtější. Ještě v 18. století byl církví prosazován výklad, že podstatou proutkaření je posedlost ďáblem. Řada jiných výkladů vycházela z předpokladu, že virgule je přitahována silami, kterými na ni působí vnější zdroje, ať už to jsou zakopané poklady, ložiska rud, podzemní „prameny“ vody či skryté dutiny nebo místní geologické anomálie a mn. j. Do jiné skupiny patří výklady, které pohyb virgule připisují svalům proutkře, excitovaným vnějšími zdroji přes centrální nervovou soustavu proutkařského prospektora. Některé výklady hledají příčinu jevu ve zvláštních schopnostech proutkařů vyzařovat elektromagnetické záření, částice duševní energie ap. a po odrazu od hledaného objektu je detekovat a (neobjasněným způsobem) jich využít ke vzniku pohybu proutku.

Společným znakem všech těchto a podobných teorií je, že se jejich autoři nezajímají o fyzikální funkci proutku, ačkoliv při vědeckém získávání informací musí být složení a funkce užitých přístrojů po všech stránkách naprosto jasná. Není-li tato podmínka splněna, pak



Obr. 4a

Obr. 4b

badatel ani neví, o čem ho užitá pomůcka zpravuje. To se týká povýtce virgule.

Jak se musí postupovat při objasňování funkce virgule, aby výsledky měly vědeckou platnost

Především musí být jasný úkol, který má být řešen. V našem případě jde o zjištění fyzikálních zákonů pohybu virgule, a to až na úroveň teorie. Teorie fyzikálních jevů je zpravidla soubor matematicky vyjádřených zákonů, z nichž studované jevy plynou. O tom, že fyzikální teorie jsou nejvyšším stupněm poznání, svědčí skutečnost, že z nich lze často předpovídat existenci jevů, které dosud nebyly známy.

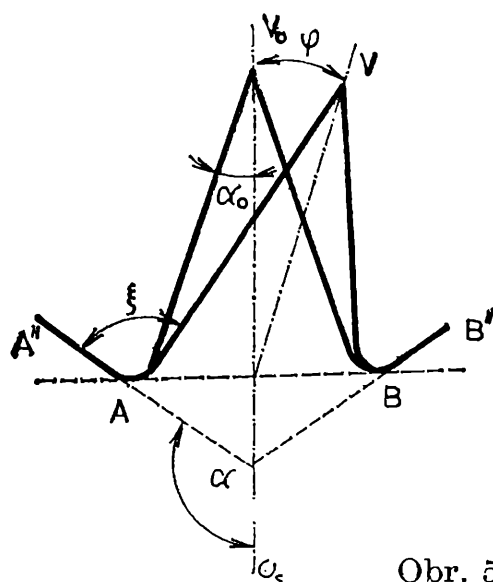
Při vlastní práci musíme nejprve o jevu, zde o studovaném pohybu virgule, získat pokud možno nejvíce fenomenologických poznatků. Znamená to, že získáváme informace zkušeností, popř. speciálními experimenty. Hlavní z těchto informací jsou:

a) Virgule musí být z tak pružného materiálu, že se dá ohnout podle obr. 2 a po uvolnění se vrátí do původního tvaru.

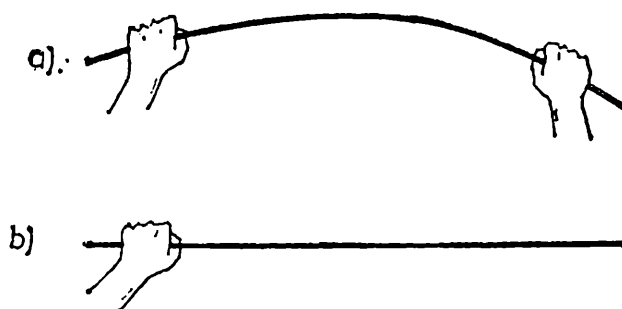
b) Experimentálně bylo zjištěno, že virgule reaguje každému, kdo má zdravé ruce a byl správně poučen, jak s ní má zacházet. Odtud dostáváme závažný důsledek, že *k vyvolání proutkohybného jevu nejsou nutné výjimečné osobní schopnosti.*

Samovolný pohyb virgule lze dokonce vyvolat *bez přítomnosti člověka.* V obr. 4 jsou dva snímky s přístrojem, jímž se demonstruje, že se virgule dá samovolně do pohybu, jakmile úhel α přesáhne 90° . Přitom se přístroje nedotkne lidská ruka. Proutkaře zde nahrazuje svěrák.

c) Další experimenty ukázaly, že virgule „reaguje“ v každém místě, i v jedoucím dopravním prostředku. Odtud plyne závěr, že pohyb virgule není působen vnějšími zdroji sil. *Vychylující síly vznikají uvnitř tělesa virgule.*



Obr. 5



Obr. 6

d) Pro zjišťování podstaty pohybových sil je důležitá zkušenost proutkařů, že při samovolném vyklonění virgule mají pocit, jako by se jim sama násilím vykrucovala v rukách, aniž by předcházel jakýkoliv vzruch, ať nervový nebo svalový, který by pohyb virgule vyvolal. Tuto skutečnost si čtenář může potvrdit vlastními experimenty. Je také svědectvím, že pohybové síly vznikají uvnitř virgule.

Ideální model virgule

Přesný fyzikální výklad pohybových sil a objasnění jejich účinků při praktickém proutkaření je možné jen na jednoduchém geometrickém modelu, který má *základní společné znaky* speciálních typů, z nichž některé jsou naznačeny na obr. 1. Vhodný stylizovaný model virgule musí být oproštěn od parametrů, kterými se speciální typy navzájem liší. V tom případě všechny odvozené zákony platí pro všechny jednotlivé typy. Model definujeme pomocí čtyř úhlů (obr. 5):

$2\alpha_0$... úhel při srůstu ramen

α ... řídicí úhel mezi ohnutou částí ramen a osou souměrnosti o_s

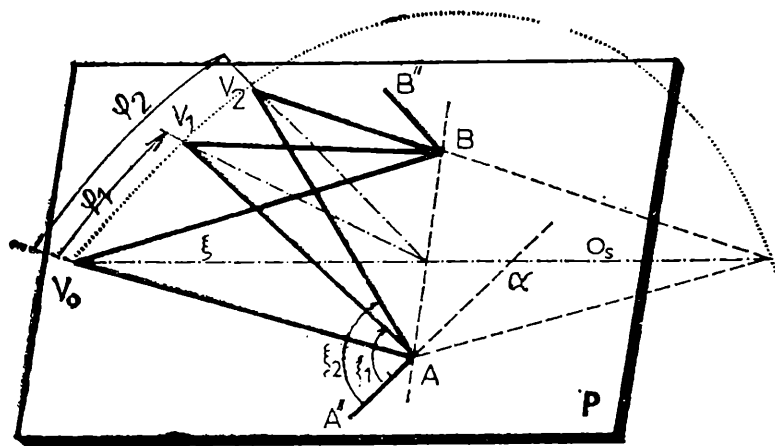
ξ ... deformační úhel mezi ohnutou a neohnutou částí ramena

φ ... úhlová výchylka virgule (úhel mezi osami souměrnosti virgule v počáteční a vychýlené poloze).

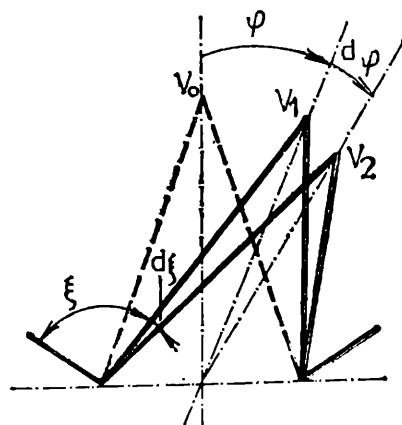
Úhly α_0 a α jsou konstantní, zatímco navzájem závislé úhly ξ a φ jsou proměnné.

Pružnost a vznik proutkohybného jevu

Základní informaci pro vysvětlení samovolného pohybu virgule získáme z běžné zkušenosti. Jestliže ohneme rovný pružný prut a jeden konec pustíme, prut se samovolně (vnitřními silami) napřímí (obr. 6). Obecně platí: Pružné těleso zdeformované vnějšími silami se samovolně, tj.



Obr. 7



Obr. 8

působením vnitřních sil vrátí do původního stavu, jestliže deformující síly zaniknou.

Takovým překvapivě prostým jevem je v podstatě i vyklánění proutku. Náznorně to ukážeme pomocí jednoduché pomůcky schématicky znázorněné na obr. 7. Na rovném prkénku P jsou k místům A a B připevněny konce niti AV_0B . Úsečka AA'' nakreslená na prkénko znázorňuje ohnutý konec ramene, který svírá s osou souměrnosti o_s tupý úhel ($\alpha > 90^\circ$). Nit uchopíme v místě znázorňujícím srůst. Napneme ji a otáčíme kolem osy AB . Pozorujeme, že při zvětšení úhlové výchylky φ vzroste též úhel deformace ξ , tj. *zmenšuje se deformace virgule*. Tak jsme potvrdili, že se při vyklánění virgule napřimuje rameno $AA''V$ (stejně tak rameno $BB''V$), podobně jako zdeformovaný prut, který je uvolněn.

Matematika a virgule

Nabízí se myšlenka, zda by právě uvedený a z názoru plynoucí výsledek nebylo možno potvrdit pomocí matematického vztahu, který platí mezi čtyřmi úhly α_0 , α , ξ , φ , jimiž jsme definovali model virgule. Tento vztah byl odvozen pomocí pouček prostorové analytické geometrie ve tvaru

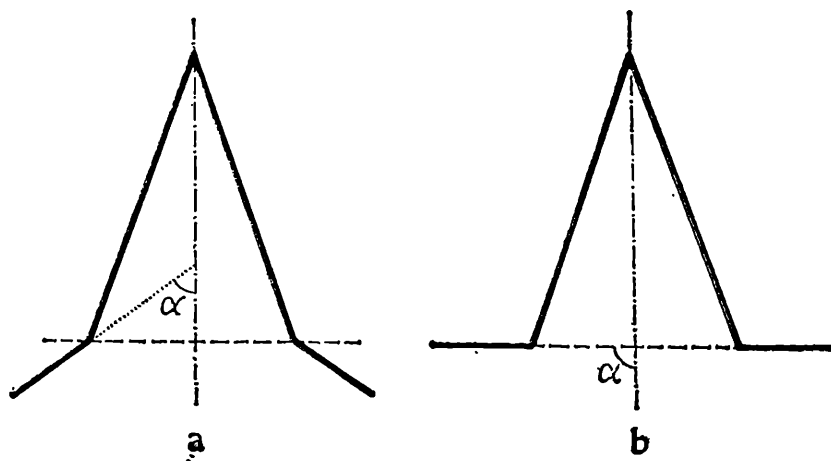
$$\cos \xi = -(\sin \alpha_0 \sin \alpha + \cos \alpha_0 \cos \alpha \cos \varphi) \quad (1)$$

Chceme zjistit, zda deformační úhel ξ skutečně vzrůstá, když se virgule vyklání, tj. když se zvětšuje úhlová výchylka φ .

Jestliže úhlová výchylka vzroste o malý přírůstek $d\varphi$, změní se též úhel deformace o $d\xi$ (obr. 8). Úkolem je odvodit matematický vztah mezi těmito elementárními změnami. Za tím účelem diferencujeme rovnici (1) a dostaneme tak po malé úpravě výsledku

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = -\frac{\cos \alpha_0 \cos \alpha \sin \varphi}{\sin \xi} \quad (2)$$

Aby při vzrůstu výchylky φ o $d\varphi$ vzrostl též úhel ξ , musí být změna $d\xi$ kladná, což také musí platit o pravé straně vztahu (2). Pravá strana



je kladná jen pro $\cos \alpha < 0$, tedy pro $\alpha > 90^\circ$, neboť ostatní goniometrické funkce jsou zde kladné ($\alpha_0 < 90^\circ$, $\varphi < 180^\circ$, $\xi < 180^\circ$).

Tak nám matematika pomohla teoreticky zdůvodnit to, co jsme našli experimentálně, tj. že se virgule spontánně vychýlí jen v případě, je-li řídicí úhel $\alpha > 90^\circ$.

Vztah (2) nám umožňuje též zjistit, proč se virgule nevychýlí samovolně, je-li řídicí úhel $\alpha \leq 90^\circ$.

Kdyby řídicí úhel $\alpha < 90^\circ$ (obr. 9a), pak by podle vztahu (2) při vzrůstu výchylky $d\varphi$ byla změna $d\xi$ deformačního úhlu záporná. Zakřivení ramene proutku by se stupňovalo. Takový děj nemůže samovolně nastat. Naopak, kdyby virgule byla vnějším zásahem vychýlena a puštěna, vrátila by se spontánně do počáteční polohy!

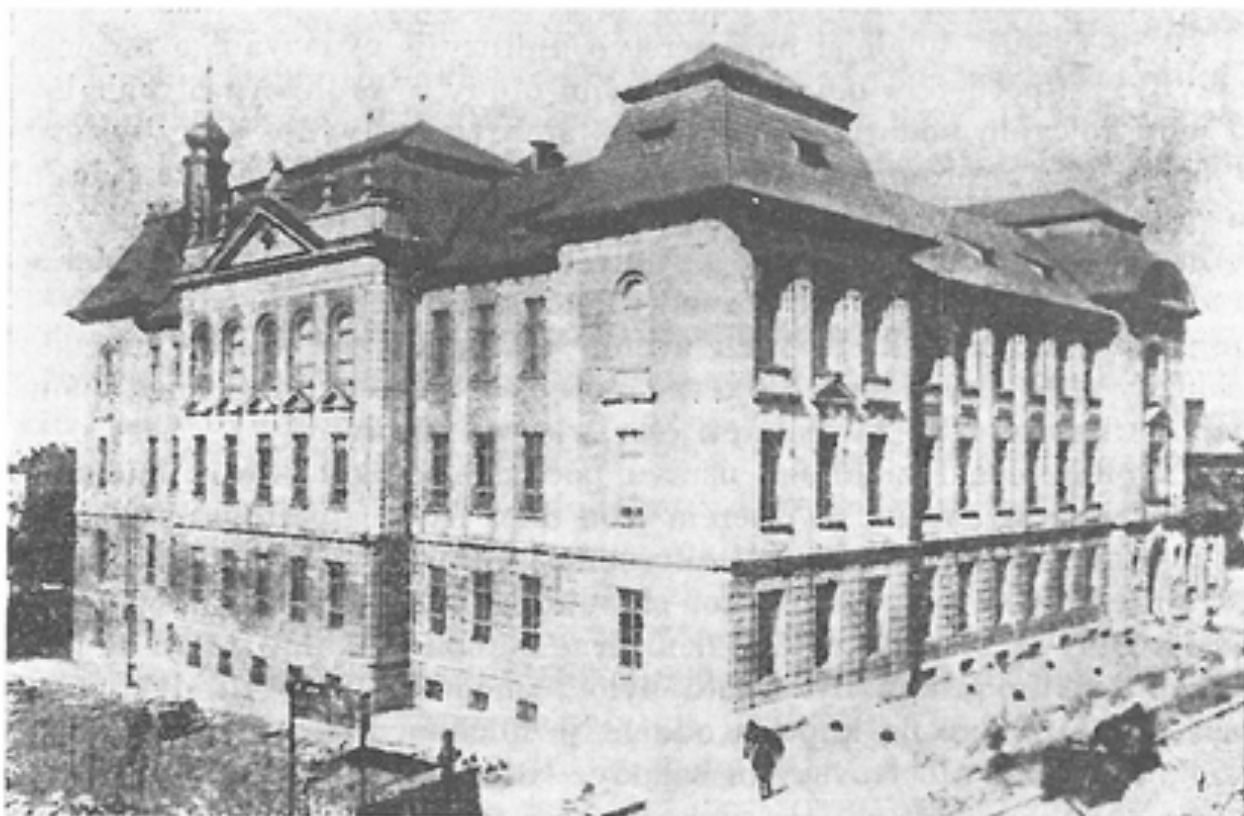
Při úhlu $\alpha = 90^\circ$ (obr. 9b) je $\cos \alpha = 0$. Podle (2) je nyní změna $d\xi = 0$, tj. úhel deformace ξ se při vychylování virgule nemění. Virgule zůstává v klidu při každé výchylce, do které je vnějším zásahem uvedena.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Historie a současnost budovy Fyzikálního ústavu UK v Praze

MARTIN CHMELÁŘ, posluchač MFF UK v Praze

V současné době je mezi vědami, které přispívají k velkému vědeckotechnickému pokroku, na předním místě fyzika. Je to věda, z níž v minulosti vyšly impulsy k zahájení útoku člověka na tajemství přírody a na její využití. Zároveň je to však věda, která ke svému rozvoji potře-



buje a vždy potřebovala nákladná experimentální zařízení spojená s jejich umístěním v neméně nákladných, ale fyzice svým provedením vyhovujících budovách. A jako v každém oboru lidské činnosti i ve fyzice je potřeba předávat nashromážděné vědění do rukou dalším generacím, a tedy i fyzika potřebuje svůj stánek učitelský. Podívejme se nyní, jak česká fyzika dostala budovu se zařízením i posluchárnami, na které mohla být ve své době právem pyšná a které svému úkolu slouží bezchybně dodnes.

Po rozdělení Karlo-Ferdinandovy univerzity v Praze na českou a německou část univerzitním zákonem z roku 1882 se začaly aktivovat české fakulty. Profesorský sbor filozofické fakulty, do které tehdy patřily všechny přírodovědné obory včetně fyziky, se ustavil na jaře téhož roku. Fyzikální části fakulty byly přiděleny tyto učební a experimentální prostory: První část tvořil tzv. „domeček“ — domek na nádvoří Klementina, kde byla vedle laboratorí i pracovna profesora. Druhá část ústavu byla ve druhém poschodí Klementina. Zde byla posluchárna a sbírky. V přízemí jižního křídla sídlila třetí část fyzikálního ústavu — mechanická dílna, chemická laboratoř a strojovna. Vcelku velice neutěšené a stísněné podmínky, které rozhodně nemohly dobře sloužit výzkumu ani výuce.

Proto se vedení filozofické fakulty v čele s *profesorem Čeňkem Strouhalem* dalo do boje za postavení důstojných budov nejen pro fyziku, ale i pro ostatní přírodovědné obory, které na tom nebyly o mnoho lépe.

Úsilí o postavení nových budov mělo tři etapy. V první šlo vlastně o to, přesvědčit tehdejší ministerstvo kultury a vyučování o nutnosti stavby. Po pětiletém boji s rakouskými úřady se profesoru Strouhalovi a jeho kolegům podařilo vydobýt na ministerstvu výnos o nezbytnosti nových prostor pro přírodovědné obory. Druhá fáze spočívala ve vybrání a zakoupení nových, vhodných pozemků. Po dvou letech nekonečných tahanic a bojů mezi rektorátem univerzity, ministerstvem a městskou radou se nakonec koupily pozemky jiné, než o které původně usiloval profesor Strouhal, které však svému účelu, jak se později ukázalo, sloužily ještě o něco lépe. Šlo o tzv. pozemky Slupské, které dnes známe jako Albertov. Tím začala třetí část, vlastní výstavby.

Původní plán fyzikálního ústavu počítal s jednou velkou budovou, postavenou ve svahu, na kterém jsou dnes např. albertovské zahrady a tenisové kurty. Při kopání zkušebních základů se však ukázalo, že stráž je vlastně násypem, starou skládkou, na které se budova postavit nedá. Byly by se musely dělat neúměrně hluboké základy, které by byly stavbu velice prodražily. Proto bylo rozhodnuto postavit dva menší ústavy až nahoře na kopci a oddělit je uličkou, která nyní pokračuje dolů známými albertovskými schody. Když se mělo 13. června 1904 začít stavět, objevily se další překážky. Lékaři se ohrazovali proti stísnění dosud volného prostoru před budovou tehdejšího nalezince, dnešní dětské nemocnice. Budovy se proto měly postavit 10 metrů od ulice do svahu. Tento vzhledem k sypkosti svahu nepřijatelný požadavek byl nakonec zmírněn na 2,5 metru, což budovám vlastně prospělo.

Pro tato jednání se začalo stavět až na jaře roku 1905. Fyzikální ústav byl postaven v dnes pro nás nepředstavitelně krátké době dvou let a činnost byla zahájena první experimentální přednáškou 13. ledna 1908. Samotná budova byla okomentována slovy jejího iniciátora profesora Strouhala: „Provedení budovy se všeobecně uznává jakožto nejen velmi účelné, nýbrž i velmi úhledné a pěkné.“ O pravdivosti jeho slov se dnes může přesvědčit každý sám.

Stavba druhého ústavu, dnes nazývaného matematický ústav (budova blíže Nuselskému údolí), začala o dva roky později. V něm byly umístěny matematický ústav a seminář, ústav a seminář teoretické fyziky, meteorologický a zoologický ústav. Dnes jsou v této budově některé fyzikální katedry a děkanát MFF. Postavení nových ústavů bylo velkou společenskou událostí české veřejnosti a hlavně české části univerzity.

Ústav byl díky profesoru Strouhalovi postaven s velkou účelností. Ve stěnách byly zabetonovány skoby a kamenné konzoly pro budoucí zařízení, byly upraveny speciální laboratoře — korkem obložená akustická laboratoř, laboratoř pro magnetické práce, ze které byly s ohromnou pečlivostí odstraněny všechny železné předměty (dokonce i radiátory byly nahrazeny radiátory z mědi), bylo sem zavedeno zesílené plynové potrubí apod. Vcelku bylo zařízení ústavu na svou dobu velice moderní

a budilo údiv a závist návštěvníků z ostatních ústavů univerzity. Láska a úsilí profesora Strouhala, vtištěná do každé cihly, se projevila v optimistickém kamenném čtyřlístku v dláždění před vchodem. Jeho radost vlastence pouze lehce kalil skleněný nápis na dveřích: „C. k. fyzikální ústav“. V roce 1918 však budoucí prof. Šafránek odstranil písmena C. k. a „vytvořil“ tak ryze český Fyzikální ústav. Skleněný nápis zdobí vchod ústavu dodnes a je krásnou památkou na dny vítězství československého lidu.

Činnost ústavu byla od počátku poznamenána vynikající prací profesora Strouhala. Jeho vzorně připravované fyzikální přednášky byly vždy plně obsazeny a posluchači často stáli i na chodbě. Přednášky nenavštěvovali jen odborníci fyzikové, ale i medicí, přírodovědci či budoucí farmaceuti. Patřilo k dobrému studentskému mravu alespoň jednou za semestr si „poslechnout Strouhala“.

V laboratořích ústavu rostli mnozí vynikající představitelé české fyziky, kteří naši vědu proslavili i v zahraničí — *prof. Bohumil Kučera* (1874—1921), *prof. August Žáček* (1886—1961), *prof. Václav Dolejšek* (1895—1945) a další. Ústav navštívili a přednesli v něm několik přednášek někteří slavní fyzikové, mezi nimi například i slavná paní *Curieová*.

Po odchodu profesora Strouhala se ústavu ujímá nadaný prof. Kučera. Jeho práce v atomové fyzice, navazující na tehdejší nejmodernější výzkumy, byla všeobecně velice ceněna. Bohužel však v roce 1921 umírá a na jeho místo nastupuje prof. Žáček, jehož oborem byly především elektromagnetické vlny. Svými výzkumy dal základ budoucí vysokofrekvenční elektronice. V té době dostává ústav další profesuru — místo přijal prof. Dolejšek. Ten zřídil Ústav spektroskopický a zabýval se hlavně rentgenovskou spektroskopií, která podstatně přispěla k ověření platnosti kvantové fyziky a k průmyslovému výzkumu vlastností kovů.

Období války je poznamenáno přirozenou stagnací české fyziky, v ústavu se usadili Němci. Dále pracoval pouze Státní meteorologický ústav, umístěný v sousední budově, kde fyzikové ukryli nejcennější věci a zařízení Fyzikálního ústavu, především knihovnu.

Po skončení války v r. 1945 je možno zaznamenat velký nápor zájemců o studium, který posléze vede k růstu počtu pracovníků ústavu a k tomu, že se po roce 1948 vytvářejí jednotlivé katedry. Růst počtu pracovníků a studentů má za následek jisté stísnění v ústavu, nedostatek místností v obou budovách. Dochází k přepažování místností a bohužel i k rušení sbírek demonstračních přístrojů. S postupující dobou si ústav vyžaduje různé stavební úpravy a v roce 1957 dokonce generální opravu Fyzikálního ústavu, v 60. letech pak i budovy ústavu matematického.

Matematicko-fyzikální fakulta dostává časem nové prostory na Malostranském náměstí, prostory bývalé Obchodní akademie na Šokolovské ulici, kam je přestěhován Matematický ústav. Na jeho původní

místo pak přichází především velmi důležité fyzikální praktikum. Konečně dochází i k výstavbě nového areálu v Troji, kde vznikají nová fyzikální pracoviště určená pro vysokoškolskou výuku a výzkum.

Při stavebních úpravách v historických budovách se bohužel někdy poškozují místnosti i inventář velké historické hodnoty. Jako příklad může sloužit katedra v posluchárně F2 Fyzikálního ústavu. Tento 200 let starý stůl si velmi oblíbil profesor Strouhal již v dobách, kdy pracoval v Klementinu. Se vznikem Fyzikálního ústavu ho sem nechal převézt, aby v prostředí exaktní fyziky zastupoval svět krásy a umění. Tento stůl byl v nedávné době při zavádění elektroinstalace doslova zohyzděn rozvodnými deskami.

Jdete-li kolem Fyzikálního ústavu kolem architektonicky velice zajímavé porodnice, kolem oddělení fakulty medicíny, po Albertovských schodech, dýchá na vás nejen krásná architektonická ukázka přelomu století, ale i zcela neocenitelný akademický duch, duch sta let české univerzity, který v návštěvníkovi vzbuzuje úctu podtrženou jmény slavných osobností vědy, vytesaných na stěnách budov.

Fyzikální život jde dál, nezastavuje se, vynucuje si věci, zařízení, budovy, které se od starých velice liší. Mohlo by se zdát, že tyto staré budovy začínají spět k nepotřebě. Ale ony ve skutečnosti zaznamenávají kontinuitu vývoje české fyziky od počátků až do dneška. Zároveň je také pro život potřeba uchovávat památky na minulost, které oživují a vyvolávají na světlo minulé doby, kdy život neutíkal tak horečným tempem, kdy bylo možno i do vědy zaklít něco z umění a krásy.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Přemýšlejte a počítejte

1. Rovnici $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ nemusíte umět řešit, a přece snadno zjistíte, že jejím kořenem není žádné záporné číslo. Jak to provedete?

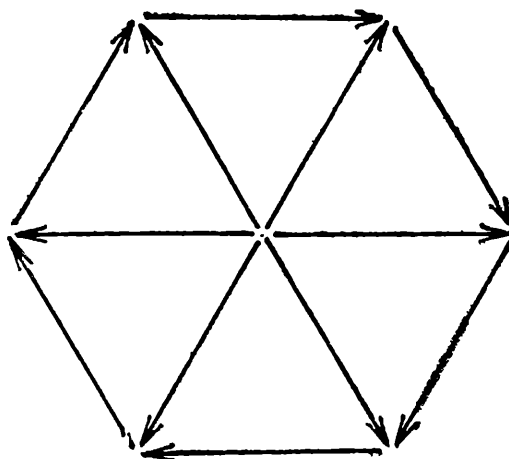
2. Je-li $ab - cd = 0$, je $(b^2 + c^2)(a^2 + d^2) = (ac + bd)^2$. Dokažte!

3. Dokažte, že pro $a > 0$, $b > 0$ je

$$\left(\frac{2a}{b} + 1\right) \cdot \left(\frac{2b}{a} + 1\right) \geq 9$$

Návod: Násobte tuto nerovnost číslem ab .

4. Z dvanácti zápalek je sestaven pravidelný šestiúhelník, který



Obr. 1

vidíte na obr. 1, kde zápalky jsou znázorněny šipkami. Přemístěte jen čtyři z těchto zápalů tak, aby vznikly tři rovnostranné trojúhelníky.

5. Rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB , CD je rozdělen úhlopříčkou AC ve dva rovnoramenné trojúhelníky tak, že základna AC trojúhelníku ACD je ramenem trojúhelníku ABC . Jaké velikosti mají úhly lichoběžníku $ABCD$?

6. Uvnitř čtverce $ABCD$ je sestrojen bod E tak, že trojúhelník CDE je rovnoramenný se základnou CD a úhlem CED o velikosti 150° . Jaké velikosti mají úhly trojúhelníku ABE ? — Návod: Sestrojte trojúhelník BCF shodný s trojúhelníkem CDE tak, aby bod F ležel uvnitř čtverce $ABCD$ a potom zjistěte, jaký je trojúhelník EFC .

7. Uvnitř čtverce $ABCD$ leží bod E tak, že je $|AE| : |BE| : |CE| = 1 : 2 : 3$. Jakou velikost má úhel AEB ? — Návod: Otočte trojúhelník BEA okolo vrcholu B o 90° ve směru pohybu hodinových ručiček; tak přejde bod E do bodu F . Zjistěte, jaký je trojúhelník EFC .

Řešení uvedených sedmi úloh najdete v příštím čísle Rozhledů.

Emil Kraemer

Dva šifrované dopisy

Pavel si psal do zápisníku tajným písmem, které si sám vytvořil. Jeho kamarád Jarda se proto rozhodl, že mu sdělí šifrovaně den, kdy k němu přijde. Napsal mu dopis, který zněl:

„Přijdu v týdnu, který začíná pondělím 4. září. Bude to po druhé hodině. Den v týdnu si vyluští z přiloženého tiketu sportky.“ Na tiketu byla přešketnuta čísla, 1, 5, 11, 16, 20.

Pavel dopis dešifroval a odpověděl:

Ehoj! GIOEQ XI“

Pokuste se oba dopisy vyluštít.

-jm-

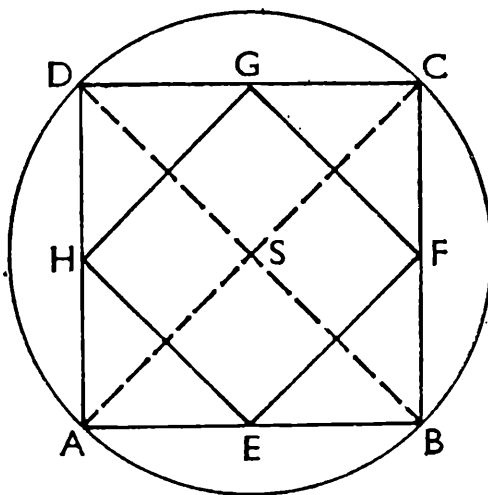
Dárky

Lékař MUDr. Pavel Dobrý byl půl roku na vědecké stáži v USA. Po jejím skončení přivezl manželce, dcerám Dáše a Aleně a synu Petrovi dárky. Cena za všechny dárky bez manželčina dárku byla 254 dolarů, bez Dášina dárku 296 dolarů, bez Alenina dárku 304 dolarů a bez Petrova dárku činila 283 dolarů. Kolik dolarů zaplatil dr. Dobrý za dárky pro jednotlivé členy své rodiny?

Josef Trejbal

Obsahy a obvody v postupném poměru

Prohlédněte si obr. 1 a napište postupný poměr pro velikosti
a) obsahů, b) obvodů



Obr. 1

kruhu se středem S a poloměrem SA , čtverce $ABCD$ vepsaného tomuto kruhu a čtverce $EFGH$, jestliže body E, F, G, H jsou po řadě středy stran AB, BC, CD a DA .

Josef Trejbal

Řešení všech tří úloh naleznete ve 2. čísle Rozhledů.

Omyly, které ovládly svět

Platí zákony mechaniky i pro živé organismy?

Odpověď se zdá být jednoznačná. Živý jestřáb se dokáže bez znatelného pohybu křídel hodiny vznášet nad krajinou. Stačí však jediná střela — z krásného dravce se stává beztvárá změť masa a peří, která padá k zemi. Můžeme přesto tvrdit, že v obojím případě platí stejné zákony pohybu? Lidé byli dlouhá tisíciletí přesvědčeni o opaku. Soudili,

že jen ptáci mohou létat. Nebylo to však proto, že by naši předkové uměli hůř myslet ve srovnání se současnými vědci, nebo že by zákony pohybu pro let jestřába byly zásadně jiné než např. pro náboj vystřelený z děla. Newtonovy zákony, které lze poměrně snadno použít k předvídání průběhu letu ocelového projektilu, platí i pro pohyb dravce. Obtížnost však spočívá v tom, že zatímco u letící střely se z působících sil uplatňuje prakticky stále stejně velká přitažlivá síla Země a v poněkud menší míře odpor vzduchu (ostatní síly jsou většinou zanedbatelné), je silové působení vzduchu při letu ptáka mnohem výraznější a hlavně komplikovanější.

Konstrukci závěsného kluzáku, tzv. rogalla, umožnily např. teprve počítače, pomocí nichž bylo možno provést komplikované výpočty. Oč složitější je však tělo jestřába než tento kluzák!

První dojem, že zákony fyziky pro jestřába neplatí, vyplývá z toho, že při jeho letu je všechno ohromně složité. Znalost samotných zákonů nám neumožňuje podrobně chápat jeho let, tím méně předpovídat jeho další průběh. Schopnosti jestřába ovládat i některá jednotlivá pera letek či ocasu, měnit při letu tvar těla, vyhledávat vhodné vzdušné proudění nejsme schopni ve všech detailech pochopit. Můžeme je však chápat v hrubých rysech. Slovy R. P. Feynmana jsme v podobné situaci, jako je divák, který zná šachová pravidla a přihlíží velmistrovské komplikované partii.

Zákony mechaniky se však zdají být popřeny i v jiných, jednodušších případech. V jedné práci z oboru tělovýchovy byly uváděny jako příklad takového rozporu fyzikální teorie a skutečnosti změny rychlosti a směru rotace skokanů do vody.

Když se však na tento problém podíváme pozorněji, zjistíme, že nejde o neplatnost fyzikálních zákonů samotných, ale o jejich nepřiměřené zjednodušení při aplikaci. Ani skok sportovce není volným pádem ve vzduchoprázdnu. Kromě vnitřních sil působí na skokana při jeho letu nezanedbatelné síly okolního vzduchu. Ten je neuvědoměle využívá k plavbě vzduchem podobně, jako to daleko účinněji dělá potápeč ve vodě. Jakmile však možnost opírat se o vzduch neexistuje, jako např. při pohybu kosmonautů ve volném prostoru, objeví se platnost zákonů mechaniky i pro lidské tělo v krystalicky čisté formě.

Devět životů, které prisuzujeme padající kočce, není tedy důkazem, že jsou zákony mechaniky v tomto případě pro kočku, ale svědčí pouze o tom, že také kočka dokáže svůj pád zmírnit instinktivním využíváním fyzikálních zákonů.

Úkol pro vás :

Najděte jiné podobné příklady, které se zdají svědčit o tom, že fyzikální zákony neplatí pro živý organismus.

Milan Rojko

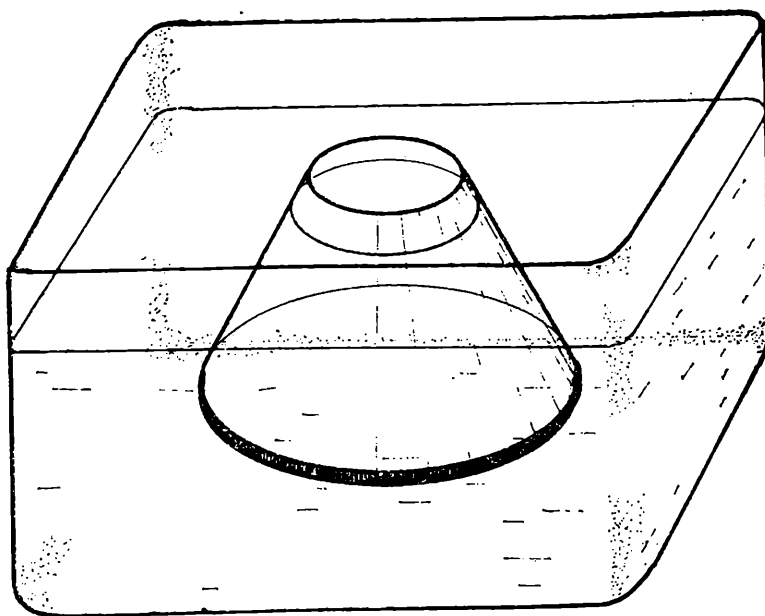
Laboratoř doma

Neplovoucí korková zátka

Každý ví, že zátka potopená pod vodu sama vyplave. Je možno tomu zabránit, aniž bychom zátku zatěžkali či jinak připevnili?

Připravte si nádobu na vodu, zrcátko, nepoškozenou korkovou zátku a svíčku.

Na větší podstavu zátky nakapejte souvislou vrstvu parafinu, zahřejte ji a rychle přitiskněte na hladkou plochu zrcátka. Po ztuhnutí



parafinu zátku tlakem do strany odtrhněte. Tak získáte hladký povrch na jedné z podstav zátky.

Postavte nyní zátku hladkou stranou na dno prázdné nádoby. Pokud není dno nádoby zcela rovné, použijte opět zrcátko jako podložku. Pevně přitiskněte zátku na dno např. tužkou a nalejte do nádoby vodu tak, aby její hladina byla několik centimetrů nad zátkou. Jestliže poté zátku pustíte, zůstane u dna.

Úkol pro vás:

Vysvětlete, proč se zátka z vody nevynoří přesto, že hustota vody je větší než hustota korku. Proč se zátka vynoří, jestliže ji poněkud nakloníme?

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Úloha s neuvěřitelným výsledkem

V nádobě s vodou je vnořena kuželovitá trubice, jejíž strany svírají s osou trubice úhel o velikosti 30° . Spodní podstava trubice je vodotěsně uzavřena plochou destičkou, jejíž hmotnost i tloušťka je zanedbatelně malá. Průměr spodního otvoru trubice je 100 mm a tento otvor je 50 mm pod úrovní hladiny. Do trubice opatrně vléváme vodu.

Úkol pro vás:

Vypočtete, jakou hmotnost má voda v trubici v okamžiku, kdy začne dno trubice odpadávat.

Představte si nyní, že do trubice neležeme vodu, ale zatěžkáváme její dno opatrným přidáváním bročků. Při jaké minimální hmotnosti této zátěže dojde opět k odpadnutí dna?

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu:

RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.
Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

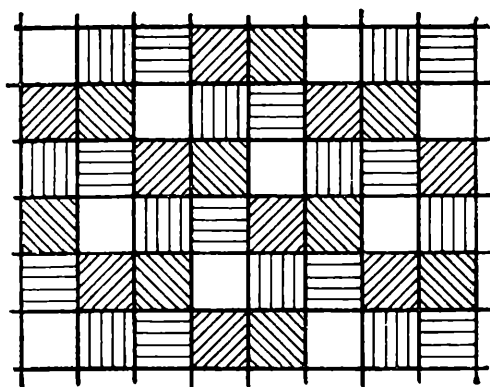
PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Řešte s námi (1)

„Jediný způsob, jak se naučit matematice, je dělat matematiku“, říká významný americký matematik *Paul R. Halmos* v předmluvě ke své knize *Hilbertův prostor v úlohách*. To mimo jiné znamená i řešit úlohy. My v tomto ročníku Rozhledů uveřejníme sérii článků s úlohami, kterou bychom vám rádi aspoň zčásti vynahradili nedostatek sbírek pěkných úloh na našem trhu. Nebude to řešitelská soutěž, nicméně řešení všech úloh budeme otiskovat s případným komentářem hned v následujících číslech našeho časopisu. Pokud ovšem sami přijdete na nějaké pěkné řešení, o němž se v časopise nedočtete, budeme samozřejmě rádi, když nám napíšete.

Ještě snad několik slov k úlohám, které vás budou v každém novém čísle čekat. Budou většinou ze zahraničních zdrojů, zejména z nejstarších Zadačníků Kvantu (pokud náhodou tento skvělý časopis neznáte, stojí za to se s ním seznámit, stručnou informaci o něm najdete v [1]),

ze zahraničních olympiád, materiálů jury MMO apod. V jistém smyslu to ale budou úlohy už „zdomácnělé“ — většina z nich prošla buď korespondenčním seminářem ÚV MO, anebo různými soustředěními, jejichž účastníci se připravovali na MMO. Úlohy korespondenčních seminářů jsou sice pravidelně publikovány v příslušných ročenkách MO, ale jejich řešení jsou mimo okruh tehdejších řešitelů těžko dostupná. A nám zas jejich předchozí použití pomáhá v tom, že nejsme odkázáni jen na „akademická“ řešení (většinou autorská) dostupná v pramenech. Studenti jsou totiž vynalézavější a nalézají často řešení jednodušší a vtipnější než autoři úloh. Po tomto úvodu si možná řeknete: Zase nějaké těžké úlohy. Ale snad to nebude tak zlé. Ty těžší pro jistotu označíme hvězdičkou. Pět úloh do měsíce není tak moc, a tak můžete začít!



Obr. 1

1. V jedné zemi, kde vládne prezident Miraflores, mají být nové prezidentské volby. V zemi je právě 20 miliónů voličů, z nichž pouze jedno procento (pravidelná armáda) podporuje Miraflorea. Miraflores přirozeně chce být opět zvolen, ale chce také, aby volby proběhly „demokraticky“, tj. všichni voliči jsou rozděleni do několika stejně velkých skupin, každá taková skupina je znovu rozdělena na stejně velké skupiny, atd. V těch posledních, nejmenších skupinách si její členové zvolí svého zástupce, pak si zvolení zástupci zvolí svého zástupce ve větší skupině atd. Nakonec zvolení zástupci prvních (největších) skupin zvolí nového prezidenta. Miraflores sám dělí voliče do skupin a instruuje své zastánce, jak mají hlasovat. Může zorganizovat „demokratické volby“ tak, aby byl opět zvolen prezidentem? (Při rovnosti hlasů vítězí opozice.)

2. Na povrchu jednotkové koule jsou dány kružnice $k_0, k_1, \dots, k_n$ o poloměru r ($n \geq 3$) tak, že kružnice k_0 se dotýká všech kružnic $k_1, k_2, \dots, k_n$ a rovněž kružnice k_1 s k_2, k_2 s $k_3, \dots, k_n$ s k_1 se dotýkají. Pro jaká n je to možné? Spočítejte příslušný poloměr r .

3.* Na obr. 1 je část roviny pokryta čtverci pěti barev. Středů čtverců téže barvy leží ve vrcholech čtvercové sítě, přičemž příslušné čtvercové sítě dostaneme vzájemným posunutím. S jakým počtem barev lze takového pokrytí dosáhnout? Řešte stejnou úlohu pro pokrytí roviny

pravidelnými šestiúhelníky takové, že středy šestiúhelníků stejné barvy leží ve vrcholech pravidelné trojúhelníkové sítě, přičemž jednotlivé sítě dostaneme vzájemným posunutím.

4. Je dána úsečka AB . Najděte množinu bodů C v rovině takovou, že v trojúhelníku ABC je velikost těžnice z vrcholu A rovna velikosti výšky z vrcholu B .

5.* Jestliže n -prvková množina E má m různých vlastních podmnožin takových, že libovolné dva prvky E jsou právě v jedné z uvedených podmnožin, pak $m \geq n$. Dokažte. V jakých případech může být $m = n$?

[1] T. Schütz: K jubileu časopisu Kvant, RMF 65 (1986/87), 302—4.

Karel Horák

Vyzkoušejte si, jak umíte přesně rýsovat

Ze školy znáte, že výšky každého trojúhelníku procházejí týmž bodem. U tupohlého trojúhelníku tento společný bod leží vně trojúhelníku. Osy stran každého trojúhelníku se protínají ve středu kružnice jemu opsané; osy vnitřních úhlů ve středu kružnice jemu vepsané. Těžnice trojúhelníku také procházejí týmž bodem.

Francouzský matematik *Joseph Diaz Gergonne* (1771 až 1859) našel další tři příčky, které v každém trojúhelníku procházejí týmž bodem.

Zvolte si libovolný trojúhelník ABC a sestrojte jeho kružnici vepsanou. Její dotykové body se stranami AB , BC , CA označte po řadě G_c , G_a , G_b . Narýsujte přímky CG_c , AG_a , BG_b . Pokud jste rýsovali dostatečně přesně, pak na vašem obrázku všechny tyto přímky procházejí týmž bodem, tzv. *Gergonnovým* (čti „žergonovým“). Důkaz naleznete v nedávno vydané knížce *Geometrie trojúhelníka*, kterou napsali Jaroslav Švrček a Jiří Vanžura (SNTL, Praha 1988).

-jm-

Slovní algebrogramy

Stejná písmena nahraďte stejnými číslicemi tak, aby platil součet.

a)	$\begin{array}{rcccccc} H & U & D & B & A & \\ O & B & R & A & Z & \\ \hline R & A & D & O & S & T \end{array}$	b)	$\begin{array}{rcccccc} P & S & I & & & \\ N & A & Š & L & I & \\ \hline S & T & O & P & U & \end{array}$	c)	$\begin{array}{rcccccc} Z & R & Á & N & A & \\ & & P & R & Ý & \\ & & K & R & Á & K & Á \\ \hline H & A & V & R & A & N \end{array}$
----	---	----	---	----	--

Každá úloha má tři řešení — ověřeno počítačem.

(Řešení naleznete na str. 14)

Jindřich Pěncík

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Čtyři kamarádky přišly na kluziště, každá se svým bratrem. Vytvořili dvojice a začali spolu bruslit. Ukázalo se, že každý mládenec je vyšší než jeho partnerka a že každý z hochů dal přednost nějaké jiné dívce před svou sestrou. Nejvyšší z celé společnosti je Jurij Vorobjev, dále následují v pořadí podle výšky Andrej Jegorov, Liza Jegorovová, Serjoža Petrov, Olga Petrovová, Dima Krymov, Inka Krymovová a Anna Vorobjevová. Kdo s kým bruslil?

2. Dokažte, že rovnice

$$x^5y = xy^5 + 1987$$

nemá řešení v oboru celých čísel.

3. List papíru ve tvaru pravoúhlého čtyřúhelníka je rozstřížen na tři kusy ve tvaru trojúhelníků. Obsah jednoho kusu je roven aritmetickému průměru obsahů zbývajících dvou. Jaké jsou obsahy jednotlivých kusů?

4. Mějme dvě dvouciferná čísla tak, že jedno získáme z druhého záměnou cifer, obě cifry jsou různé a absolutní hodnota rozdílu těchto dvou čísel je rovna druhé mocnině nějakého přirozeného čísla. Která jsou to čísla?

5. (obtížnější) Na tabuli jsou napsána čísla 1 a 2. Další čísla je možno přepisovat podle pravidla:

Jsou-li na tabuli čísla a , b , můžeme doplnit i číslo $ab + a + b$.

Je možno tímto způsobem získat čísla 13121, resp. 12131? Dokažte dále, že existuje nekonečně mnoho celých nezáporných čísel, která nelze zapsat ve tvaru $x + y + 2yx$, kde x , y jsou celá nezáporná čísla, a že obdobné tvrzení platí i pro výraz $x + y + yx$.

Tomáš Schütz

OLYMPIÁDY A SOČ

Úlohy I. kola 39. ročníku matematické olympiády

Celostátně se vyhlašuje MO na základních školách pro žáky 6. až 8. ročníků. Kromě toho vyhlašuje Jednota slovenských matematiků a fyziků pro žáky ze Slovenska již od roku 1980 matematickou soutěž MOZ pro žáky 5. ročníků ZŠ a od roku 1983 též pro žáky 4. ročníků ZŠ. Zveřejněním úloh MOZ chce ÚV MO umožnit učitelům i žákům z ČSR seznámit se s těmito úlohami. Učitelé jich mohou využít k rozvíjení

matematických talentů z řad žáků 4. a 5. ročníků ZŠ a získávat žáky současně pro účast v MO v příštích letech. Doporučujeme uspořádat na školách třídní nebo školní soutěže v řešení těchto i dalších úloh, které si učitelé připraví sami, např. z ročenek MO základních škol. (První samostatná ročenka MO základních škol vyšla v roce 1988 v SPN Praha.) Úlohy MOZ mohou učitelé zařadit také do náplně matematických kroužků a do nepovinného předmětu „Cvičení z matematiky“.

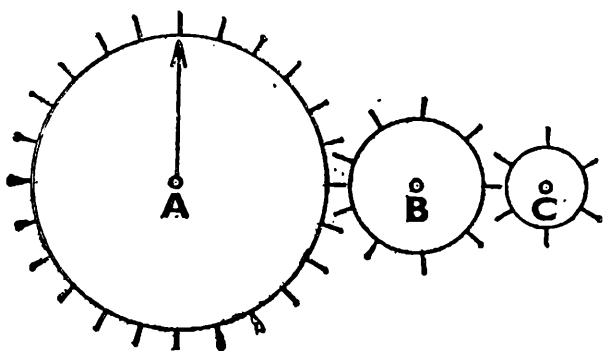
Úlohy MOZ pro žáky 5. ročníků

1. Petr a Pavel si chtěli koupit v cukrárně čokoládu. Domů se však vrátili s prázdnou. Petr řekl: „Chyběla mi 1 Kčs.“ Pavel řekl: „I já měl málo peněz. Mně chybělo 9 Kčs. Ani když jsme složili peníze dohromady, neměli jsme dost peněz na čokoládu.“ „Jste obyčejní žrouti a lháři“, nazlobila se jejich sestra Dana.

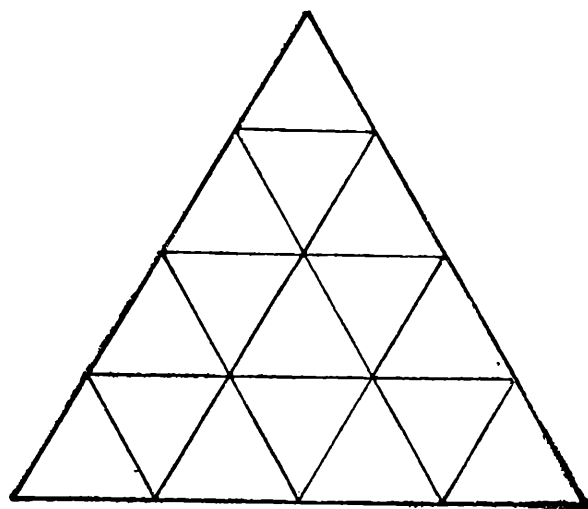
Zjistěte, zda měla Dana pravdu. Jestliže ano, odůvodněte to, jestliže ne, uveďte, kolik mohla stát čokoláda.

(Poznámka překladatele: Cena čokolády nemusí být vyjádřena celými korunami.)

2. Petr nosil staré náramkové hodinky. Rozebral je a ze tří ozubených koleček A, B, C sestavil soukolí (obr. 1). Počet zubů na jednotlivých



Obr. 1



Obr. 2

kolečkách je 24, 9, 6. Na největším kolečku je ryskou vyznačena minutová ručička. Kolikrát se musí otočit kolečko C, aby se minutová ručička otočila o 1 hodinu a 45 minut?

3. Kolik trojúhelníků je na obr. 2?

4. Sestrojte body A, B vzdálené od sebe 8 cm. Dále nesmíte měřit. Můžete pracovat jen s kružítkem a pravítkem bez měřítka. Sestrojte trojúhelník se stranami dlouhými 13 cm, 14 cm a 15 cm.

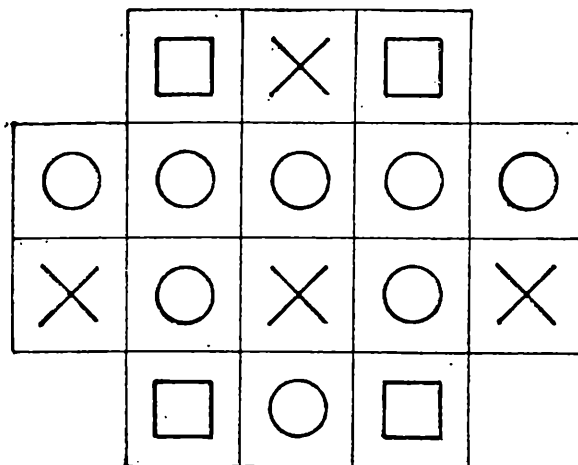
5. Když k neznámému čtyřcifernému číslu přičtu jeho desetinu a jeho setinu, dostanu číslo 4773. Které je to číslo?

6. V zápise

$200 - 199 + 198 - 197 + 196 - 195 + \dots + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1$)
jsou uvedena postupně všechna přirozená čísla od 200 až do 1. Mezi nimi se střídají znaménka $+$ a $-$. Na konci je pravá závorka. Kam je třeba umístit levou závorku, abyste dostali výsledek a) 73; b) 72?

Úlohy MOZ pro 4. ročník ZŠ

1. Na stole leží rozvinutý krejčovský metr. Když na něj posadíme žabku — skočku, skočí o pět políček dopředu. Například z políčka 26 na 31 a odtud na 36 atd. Na prvních 5 políček skočí najednou 5 žabek. Začnou skákat současně, ale pozor. Žabka, která doskočí na políčko, které se dá dělit třemi beze zbytku, jednou odpočívá a neskáče. Která ze žabek první skočí za políčko 60?

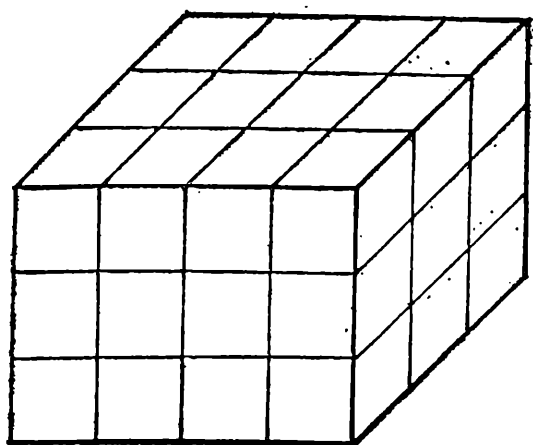


Obr. 3

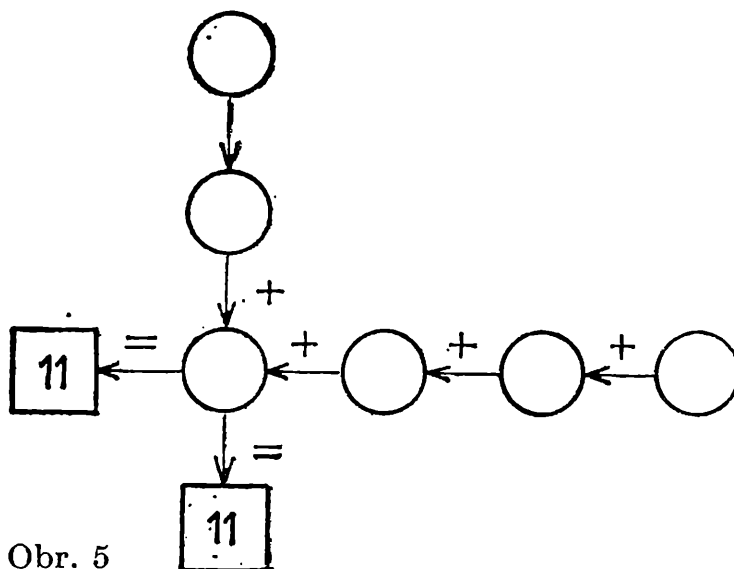
2. Otec má čtyři syny a pozemek (obr. 3), na kterém rostou 4 hrušně $\times$, 4 meruňky $\square$ a 8 jabloní $\circ$. Pozemek chce rozdělit po vyznačených čarách na 4 zahrady stejné velikosti i tvaru tak, aby v každé byly dvě jabloně, jedna hrušeň a jedna meruňka. Nakreslete 3 různé způsoby jak je to možné udělat.

3. Na tenisovém dvorci se sešli Adam, Boris a Cyril s Dášou a Evou. Dohodli se, že budou hrát smíšenou čtyřhru, tedy jeden muž a jedna žena proti jednomu muži a jedné ženě. Zbývající pátý vždy rozhoduje. Aby si však každý zahrál, bude se po každém setu měnit rozhodčí. Hrát se bude tak dlouho, dokud se nevystřídají všechny možné dvojice soupeřů. Jakmile by měly na dvorec nastoupit takové dvojice soupeřů, které už proti sobě hrály, zápas končí. Kolik setů odehrají?

4. Na místa koleček запиšte znaky početních operací $+$, $-$, $.$, $:$ a doplňte závorky tak, abyste dostali správný výsledek



Obr. 4



Obr. 5

$$\begin{aligned} 5 \circ 5 \circ 5 &= 0 \\ 5 \circ 5 \circ 5 &= 2 \\ 5 \circ 5 \circ 5 &= 4 \\ 5 \circ 5 \circ 5 &= 6 \end{aligned}$$

(Pokuste se dostať i jiné výsledky.)

5. Kvádr na obrázku 4 je složený ze 36 krychlí o hranách délky 3 cm. Chceme ho rozložit na krychle o hranách délky 3 cm, popřípadě 6 cm. Dá se to udělat několika způsoby. Kolik krychlí o hranách dlouhých 3 cm a 6 cm při jednotlivých rozkladech dostanete?

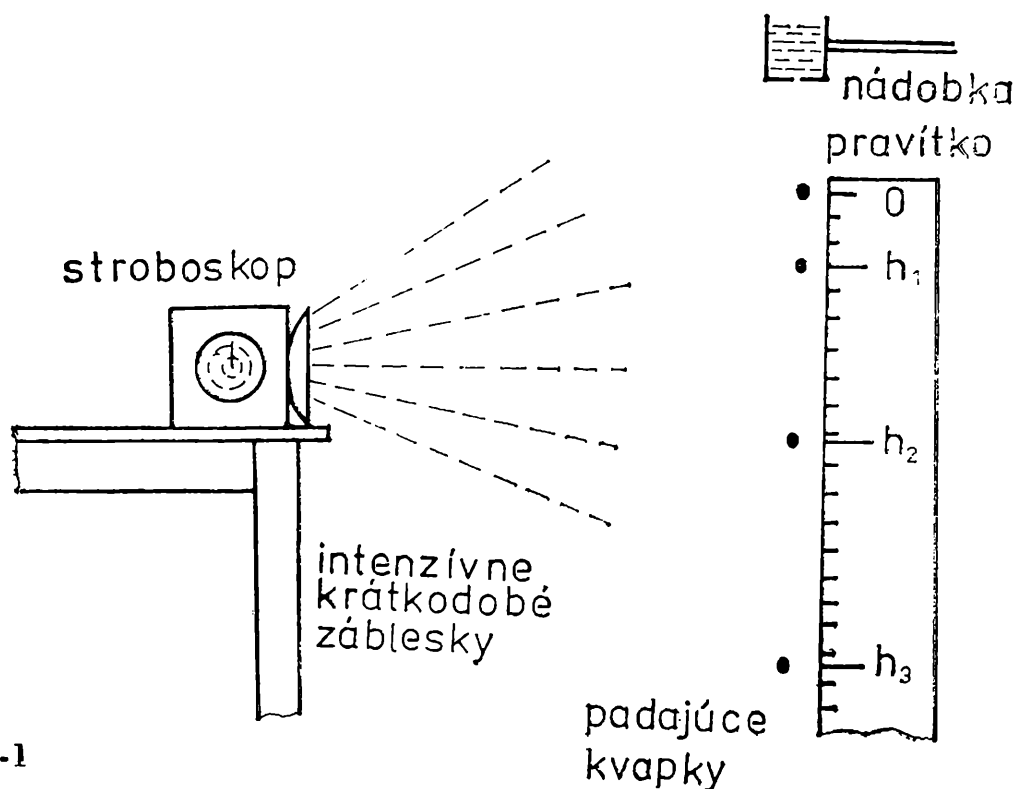
6. Do každého kroužku vpište jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 (každé jen jednou) tak, aby platily naznačené součty (obr. 5).

Úlohy pro I. kolo kategorie D a E ve 31. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie D

1. Z nádoby pravidelne odkvapkávají kvapky vody a padajú popri zvisle umiestnenom pravítku. Počiatok pravítka sa nachádza na jeho hornej časti vo vzdialenosti h_0 pod otvorom nádoby. Padajúce kvapky osvetľujeme svetlom stroboskopu, ktorého intenzívne záblesky sa pravidelne opakujú s frekvenciou f . Frekvenciu môžeme podľa potreby nastaviť a odčítat na stupnici stroboskopu. Stroboskop nastavíme tak, aby každú kvapku osvetlil práve vtedy, keď prechádza začiatkom pravítka (bod 0), a nasledujúci raz bodom o úsek h_1 nižšie pod bodom 0 (obr. D-1)

a) Určte periódu T a frekvenciu f zábleskov stroboskopu.



Obr. D-1

b) V ktorých ďalších polohách h_k budú padajúce kvapky ešte osvetľované? Vzdialenosti $h_1, h_2, \dots, h_k$ sú merané od začiatku pravítka. Určte všeobecný vzťah pre h_k , pričom k môže nadobudnúť hodnoty $0, 1, 2, \dots$. Úlohu riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty: $h_0 = 10 \text{ cm}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $h_1 = 5,0 \text{ cm}$. Odpor vzduchu zanedbávame a kvapky považujeme za hmotné body.

2. Pomocou hydraulického lisu a silomera sa zistilo, že na vníkanie klinca do dubovej klady je potrebné pôsobiť silou F , ktorá je pomerne veľká. Keď chceme vtláčiť kliniec do klady holými rukami, zistíme, že sa nám to nepodariť. Použitím kladiva takýto kliniec do klady vtĺkame pomerne ľahko.

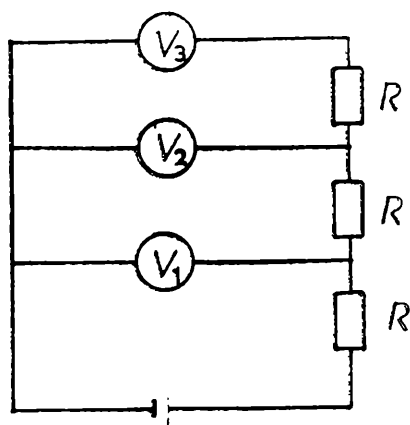
a) Opíšte a bližšie objasnite, ako použitím kladiva vzniká tak veľká sila, ktorá je potrebná na vníkanie klinca do klady. Kladivo s hmotnosťou m uvedieme do pohybu v smere zvislom nadol tak, že narazí na zvisle stojací kliniec, ktorý vnikne do klady o úsek s .

b) Určte veľkosť v rýchlosti, s ktorou kladivo narazí na hlavičku klinca.

c) Akú dobu t trvá vníkanie klinca do klady pri uvedenom náraze kladiva?

d) Z akej výšky h by sme museli spustiť kladivo na zvislý kliniec, aby vnikol do klady o uvedený úsek s ?

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: $F = 10\,000 \text{ N}$, $s = 2,0 \text{ cm}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $m = 0,50 \text{ kg}$. Hmotnosť klinca považujeme v porovnaní s hmotnosťou kladiva za zanedbateľne malú. Odpor vzduchu zanedbá-



Obr. D-2

vame a silu potrebnú na vnikanie klinca do klady považujeme za konštantnú. Ráz považujeme za nepružný.

3. Po naklonenej rovine s dĺžkou d a so sklonom α spúšťame hranolček s hmotnosťou m . Dolný koniec naklonenej roviny je vo výške h_0 nad vodorovnou dlážkou.

a) Určte veľkosť v rýchlosti hranolčeka na konci naklonenej roviny.

b) Akú dobu t trvá pohyb hranolčeka od opustenia roviny po jeho dopad na dlážku?

c) V akej vodorovnej vzdialenosti x od konca naklonenej roviny dopadne hranolček na dlážku?

Trenie a odpor vzduchu zanedbávame. Hranolček považujeme za hmotný bod.

Úlohu riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty: $d = 1,2 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $m = 0,10 \text{ kg}$, $h_0 = 1,0 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4. Elektrický obvod, ktorého schéma je na obr. D-2, je zostavený z troch rovnakých rezistorov s odporom R , troch rovnakých voltmetrov s odporom r a zdroja napätia. Voltmetrom V_1 sme namerali napätie $U_1 = 10 \text{ V}$, voltmetrom V_3 napätie $U_3 = 8,0 \text{ V}$.

Určte napätie U_2 medzi svorkami voltmetra V_2 . Odpory spojovacích vodičov sú veľmi malé.

5. Dve priame rúry s dĺžkou d a s polomerom R sú priložené tesne k sebe a takto vytvárajú žliabok naklonenej roviny, po ktorej môžeme spúšťať ocelovú guľu s polomerom r . Výška naklonenej roviny je h . Predpokladáme, že guľa sa valí bez klzania, t.j. predpokladáme veľmi veľké šmykové trenie medzi povrchmi gule a rúry. Odpor vzduchu a valivý odpor sú zanedbateľne malé.

a) Určte veľkosť v rýchlosti posuvného pohybu gule na konci naklonenej roviny.

b) Určte uhlovú rýchlosť gule na konci naklonenej roviny.

c) Určte kinetickú energiu E_1 posuvného pohybu gule na konci naklonenej roviny.

d) Určte kinetickú energiu E_2 rotačného pohybu gule na konci naklonenej roviny.

- e) Určte pomer $k = E_1 : E_2$ podľa bodov c), d).
- f) Závisí pomer k podľa bodu e) od výšky h naklonenej roviny?
- g) Určte frekvenciu f rotácie gule na konci naklonenej roviny.

6. Určovanie hustoty pevných látok

Pomôcky k meraniu: vhodná pružina bez predpätia, nepravidelná nádoba s vodou (napr. miska), pravítko, nitka, lepiaca páska, štatívový materiál, skúmané telesá (hliníková súčiastka, oceľová súčiastka, sklenený predmet, kúsok vápenca, feritový magnet).

Úloha: Použitím uvedených pomôcok určte hustotu látky piatich predmetov, ktoré neplávajú na vode. Vychádzajte pritom zo známej hustoty vody, $\rho_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Navrhните postup merania. Načrtnite meraciu zostavu a postup merania tiež vystihnite jednoduchými obrázkami. Každú skúmanú látku merajte desaťkrát a určte priemerné hodnoty hustoty každej meranej látky. Určte odchýlku merania. Získané výsledky porovnajte s údajmi v matematicko-fyzikálnych tabuľkách.

7. Dve gule sa pohybujú v smere osi x a dôjde k ich centrálnemu rázu, pričom gule nie sú dokonale pružné. Prvá guľa s hmotnosťou m_1 sa pohybovala pred rázom rýchlosťou $\mathbf{v}_1$, druhá guľa s hmotnosťou m_2 rýchlosťou $\mathbf{v}_2$. Súčiniteľ restitúcie tejto dvojice gúl je q . Uvedené rýchlosti sa vzťahujú na sústavu spojenú s povrchom Zeme.

a) Určte rýchlosť $\mathbf{v}_t$ ťažiska obidvoch gúl vzhľadom na povrch Zeme.
b) Určte rýchlosti $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ gúl v sústave spojenej s ich spoločným ťažiskom pred rázom.

c) Určte rýchlosti $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$ gúl po ráze v súradnicovej sústave spojenej s ich spoločným ťažiskom.

d) Určte rýchlosti $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ gúl po ráze v sústave spojenej s povrchom Zeme.

e) Určte úhrnnú kinetickú energiu E_k sústavy pred rázom a energiu E'_k po ráze v sústave spojenej so spoločným ťažiskom gúl.

f) Určte úhrnnú kinetickú energiu E_{kZ} pred rázom a energiu E'_{kZ} po ráze v sústave spojenej s povrchom Zeme.

g) Aká časť celkovej kinetickej energie pred rázom sa pri ráze premenila na iné formy energie v sústave spojenej s povrchom Zeme a v sústave spojenej so spoločným ťažiskom?

Úlohu riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty: $m_1 = 2,0 \text{ kg}$, $m_2 = 1,0 \text{ kg}$, $\mathbf{v}_1 = 10 \text{ i m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\mathbf{v}_2 = -5,0 \text{ i m} \cdot \text{s}^{-1}$, $q = 0,90$. Rotačné pohyby gúl, odpor prostredia a trenie neuvažujeme.

Kategorie E

Kategorie E fyzikální olympiády je určena pro žáky 8. ročníků základní školy. Řešení úloh 1 až 3 napište na listy papíru formátu A4 a odevzdejte nejpozději do 30. listopadu svému učiteli fyziky, který vám také poradí, jak dál v soutěži.

1. Petr s Jirkou cestují vlakem, který jede po přímé trati stálou rychlostí $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. V určitém okamžiku, kdy chlapci míjejí stožár světelného návěstidla, se začne Petr od Jirky vzdalovat podélnou uličkou vagónu rychlostí $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ve směru jízdy vlaku. Jirka se vzhledem k vagónu nepohybuje.

- Jak velkou rychlostí se Petr pohybuje vzhledem ke stožáru?
- Jak velkou rychlostí se Petr pohybuje vzhledem ke stojícímu Jirkovi?
- V jaké vzdálenosti bude Petr od Jirky za dobu 10 s od okamžiku, kdy ho opustil?
- V jaké vzdálenosti bude Petr od stožáru za dobu 10 s od okamžiku, kdy opustil Jirku?

Všchny části úlohy řešte také pro případ, že se bude Petr pohybovat uličkou vagónu proti směru pohybu vlaku.

2. Chlapci trénovali běh na přímém úseku cesty, na které si vytyčili dráhu 300 m. Adam uběhl danou dráhu za 1 minutu, Bořek vyběhl z téhož místa o 10 s později a uběhl ji za 40 s. U obou chlapců předpokládáme rovnoměrný pohyb.

- Dostihne Bořek Adama na vytyčené dráze? Za jak dlouho od okamžiku startu se to stane?
- V jaké vzdálenosti od startu Bořek předběhne Adama?

Úlohu řešte výpočtem i graficky. Pro grafické řešení sestroj na milimetrový papír grafy závislosti dráhy na čase pro pohyb obou chlapců.

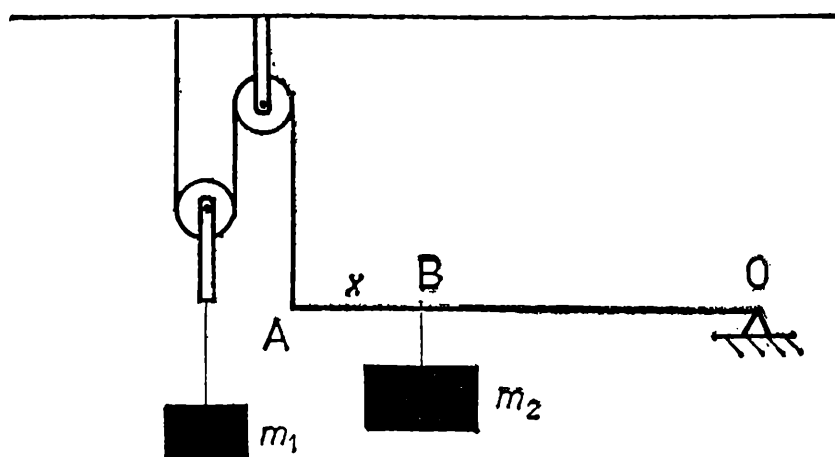
3. Před provozní halou továrny svítí lampa ve výšce h nad zemí. Ve vzdálenosti a od místa přesně pod lampou je svislá informační tabule dosahující do výšky v . Tabule vrhá stín na dveře haly, jejichž vzdálenost od tabule je b .

- Nakresli obrázek popsané situace.
- Do jaké výšky y sahá stín na dveře haly?
- Do jaké vzdálenosti dopadá stín na podlahu provozní haly, jsou-li její dveře otevřeny?

Řeš nejprve obecně, potom pro hodnoty: $h = 5,0$ m, $v = 3,0$ m, $a = 8,0$ m, $b = 2,0$ m.

4. Soustava těles na obr. E-1 je v rovnovážné poloze. Těleso o hmotnosti m_1 je zavěšeno na volné kladce, těleso o hmotnosti m_2 na páce délky d , podepřené v bodě O.

- Urči vzdálenost x místa, v němž je na páce zavěšeno těleso o hmotnosti m_2 . Vzdálenost x měříme od volného konce páky. Hmotnost páky, kladky a provazu neuvažuj.



Obr. E-1

b) Urči vzdálenost x' místa, v němž je na páce zavěšeno těleso o hmotnosti m_2 . Uvažuj, že hmotnost volné kladky je m_3 a hmotnost stejnorodé páky je m_4 . Vzdálenost x' měříme od volného konce páky. Hmotnost provazu je vzhledem k hmotnosti ostatních těles zanedbatelně malá.

Řeš nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m_1 = 300$ g, $m_2 = 250$ g, $d = 1,0$ m, $m_3 = 50$ g, $m_4 = 150$ g.

5. Turisté připravovali na vysokohorské chatě vodu na čaj. Nabrali do hrnce sníh o objemu $V = 4$ litry a o teplotě $t_0 = 0$ °C a zahřívali ho na propan-butanovém vařiči.

a) Jaká byla hmotnost sněhu?

b) Jaká byla hmotnost a jaký byl objem vody, kterou ze sněhu získali?

c) Jaké teplo bylo potřeba dodat, aby sníh roztál a získaná voda se zahřála na teplotu $t = 90$ °C?

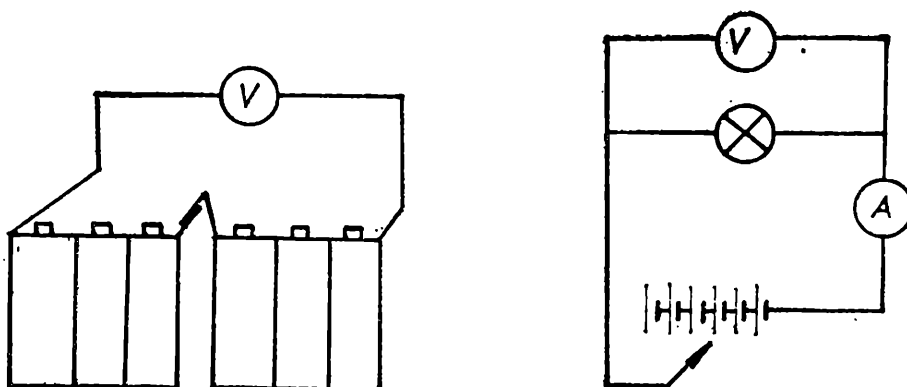
d) Jaká byla spotřeba propan-butanu, jestliže účinnost zahřívání byla 20 %?

Hustota sněhu $\rho = 125 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, hustota vody $\rho_0 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, měrné skupenské teplo tání sněhu $l_s = 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, měrná tepelná kapacita

vody $c = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$. Při dokonalém spálení 1 kg propan-butanu získáme teplo 50 MJ.

6. Měření v elektrickém obvodu

Uprav v horní části dvě ploché baterie do kapesní svítilny tak, abys mohl připojit vodiče (např. pomocí krokosvorky) k jednotlivým článkům baterií. Měřením na voltmetru si ověř, že postupným připojováním článků zvyšujeme elektrické napětí po 1,5 V. Potom sestav elektrický



Obr. E-2

obvod podle obr. E-2, který obsahuje žárovku s údaji 12 V, 0,25 A, ampérmetr a voltmetr.

a) Změř napětí U na žárovce a proud I v obvodu při několika hodnotách napětí mezi svorkami baterie a naměřené hodnoty zapiš do tabulky:

Měření	1	2	3	4	5
$\frac{U}{V}$					
$\frac{I}{A}$					
$\frac{R}{\Omega}$					

b) Pro jednotlivá měření vypočítej odpor $R = \frac{U}{I}$ žárovky a vypočítané hodnoty zapiš do tabulky.

c) Sestroj graf závislosti proudu na napětí pro naměřené hodnoty. Na vodorovnou osu grafu nanášej hodnoty napětí, na svislou osu hodnoty proudu.

d) Nakreslený graf porovnej s grafem na s. 96 v učebnici fyziky pro 8. ročník. Napiš, co jsi zjistil.

7. Milan koupil mladšímu bratrovi hračku — elektrický traktor. Nejprve si ho sám vyzkoušel, přičemž provedl několik měření. Zjistil, že průměr předních kol $d_1 = 5,0$ cm, průměr zadních kol $d_2 = 9,0$ cm. Také zjistil, že při jízdě traktoru vykonají zadní kola $n_0 = 20$ otáček za dobu $t_0 = 1,0$ min. Nakonec nechal traktor jet rovnoměrným pohybem po dráze $s = 3,0$ m.

a) Jak velkou rychlostí v se traktor pohyboval za předpokladu, že zadní kola neprokluzují a konají uvedený počet n_0 otáček?

b) Za jakou dobu t projel traktor dráhu s ?

c) Urči počet n_1 otáček předního kola a počet n_2 otáček zadního kola na dráze s .

d) Urči počet n_3 otáček předního kola za dobu $t_0 = 1,0$ min.

e) Urči dobu T_1 jedné otáčky předního kola a dobu T_2 jedné otáčky zadního kola.

f) Při jízdě traktoru lze vždy nalézt na zadním kole bod, který se v daném časovém okamžiku vzhledem k podlaze nepohybuje. Který je to bod?

g) Na zadním kole traktoru jsou však také body, které se v určitém okamžiku pohybují vzhledem k podlaze rychleji než traktor. Najděte bod, který se pohybuje nejrychleji, a určete jeho rychlost.

Přejeme vám při řešení úloh fyzikální olympiády prožití mnoha pěkných chvil.

ÚVFO

Kalendár M-F: júl 1989

4. 7. 1934 v Sancellemože zomrela *Marie Curie-Skłodowska*, francúzska fyzička poľského pôvodu. Študovala prirodzené jadrové premeny, zdokonalila metódy merania rádioaktivity. Bola dvojnásobnou laureátkou Nobelovej ceny (1903, 1911).
6. 7. 1889 sa v Charkove narodil *Vladimír Pavlovič Linnik*, sovietsky fyzik. Študoval fyziku röntgenových lúčov, optické metódy. Skonstruoval nové astronomické prístroje.
7. 7. 1854 v Mníchove zomrel *Georg Simon Ohm*, nemecký fyzik. Dokázal, že elektrický odpor je priamo úmerný dĺžke vodiča a nepriamo úmerný jeho priečnemu prierezu a mernej vodivosti. Jednotka elektrického odporu je pomenovaná na jeho počesť.
7. 7. 1909 zomrel v Göttingene *Walter Ritz*, švajčiarsky fyzik a matematik. Objavil spektrálny vzorec a kombinačný princíp čiarových spektier. Vytvoril metódu na približné riešenie variačných úloh.
8. 7. 1904 sa v Nancy narodil *Henri Paul Cartan*, francúzsky matematik. Oplyvnil teóriu analytických funkcií, topológiu, homologickú algebru, teóriu grúp Lie, matematickú logiku. Patril k zakladateľom bourbakistov.
9. 7. 1859 sa v Darmstadte narodil *Wilhelm Ludwig Franz Hallwachs*, nemecký fyzik. Študoval optiku a elektromagnetizmus. Poukázal na elektrické účinky svetla, objavil základný fotoelektrický jav.

9. 7. 1894 sa v Kronštadte narodil *Piotr Leonidovič Kapica*, sovietsky fyzik. Navrhol spôsob skvapalňovania hélia, študoval supratekutosť, objavil vznik vysokoteplotnej plazmy vo vysokofrekvenčnom výboji. Získal Nobelovu cenu za fyziku (1978).
9. 7. 1969 zomrel *Boris Pavlovič Konstantinov*, sovietsky fyzik. Zaoberal sa akustikou, fyzikálnou chémiou, fyzikou plazmy, astrofyzikou i holografiou. Bol viceprezidentom AV ZSSR.
13. 7. 1974 zomrel *Patrick Maynard Stuart Blackett*, anglický fyzik. Meral a sledoval rôzne druhy žiarenia, prispel k rozvoju jadrovej fyziky. Získal Nobelovu cenu (1948).
19. 7. 1894 sa v Kondrove (Kalužská oblasť) narodil *Alexander Jakovlevič Činčin*, sovietsky matematik. Prispel k rozvoju teórie pravdepodobnosti, teórii funkcií, teórii informácií a ich aplikáciám.
22. 7. 1784 sa v Mindene narodil *Friedrich Wilhelm Bessel*, nemecký astronóm a matematik. Zmeral ročnú paralaxu hviezdy v súhvezdí Labute, spresnil základné astronomické konštanty.
22. 7. 1959 zomrel *David van Danzig*, holandský matematik. Študoval metriku homologických priestorov, teóriu relativity i všeobecné otázky filozofie matematiky.
22. 7. 1974 zomrel *James Chadwick*, anglický fyzik. Objavil neutrón, určil jeho hmotnosť. Pracoval v Los Alamos, získal Nobelovu cenu (1935).
24. 7. 1954 zomrel *Hans Hahn*, rakúsky matematik. Medzi prvými vyložil abstraktnú teóriu miery a integrovania.
27. 7. 1844 v Manchestri zomrel *John Dalton*, anglický chemik a fyzik. Objavil pravidlo jednoduchých zlučovacích pomerov, zaoberal sa meteorológiou, popísal farbosleposť.
28. 7. 1904 sa v Novej Čigli narodil *Pavel Alexejevič Čerenkov*, sovietsky fyzik. Skúmal luminiscenciu, objavil nový druh žiarenia, ktoré vysvetlili I. M. Frank a I. J. Tamm. Všetci traja dostali Nobelovu cenu (1958).
29. 7. 1839 sa vo Vladimire narodil *Alexandr Grigorjevič Stoletov*, ruský fyzik. Dokázal možnosť priamej premeny svetelnej energie na elektrickú. Venoval sa aj elektromagnetizmu, optike, molekulárnej fyzike.
29. 7. 1904 sa v Poltave narodil *Dmitrij Dmitrijevič Ivanenko*, sovietsky teoretický fyzik. Vypracoval hypotézu o štruktúre atómového jadra, položil základy teórie výmenných jadrových síl.
31. 7. 1704 sa narodil *Gabriel Cramer*, švajčiarsky matematik. Študoval algebrické krivky vyšších stupňov, položil základy teórie determinantov.

August 1989

1. 8. 1889 sa vo Wiesbadene narodil *Walther Gerlach*, nemecký fyzik. Vedecky pracoval v oblasti atómovej a jadrovej fyziky, kvantovej teórie, magnetizmu a histórie fyziky. Zmeral magnetický moment atómu.
3. 8. 1914 sa v Kremenci narodil *Mark Kac*, americký matematik poľského pôvodu. Aplikoval teóriu pravdepodobnosti vo fyzike, rozvinul matematickú a štatistickú fyziku.
4. 8. 1834 sa v Drypoole narodil *John Venn*, anglický matematik a logik. Študoval Booleovu algebru, rozvinul symbolickú logiku.
4. 8. 1874 v Mnichove zomrel *Ludwig Otto Hesse*, nemecký matematik. Zasiahol do projektívnej geometrie, teórie algebraických funkcií, teórie invariantov.
9. 8. 1969 v Como (Taliansko) zomrel *Cecil Frank Powell*, anglický fyzik. Zdokonalil Wilsonovu hmlovú komoru, skúmal kozmické žiarenie. Získal Nobelovu cenu (1950).
10. 8. 1859 sa v Archangelsku narodil *Ivan Vsevolodovič Meščerskij*, sovietsky vedec, mechanik. Prispel k riešeniu problémov teoretickej mechaniky, reaktívnej techniky a kozmických letov.
10. 8. 1979 zomrel *Walther Gerlach*, nemecký fyzik. Odhalil, že magnetický moment atómov je kvantovateľná veličina.
12. 8. 1964 zomrel *Dmitrij Dmitrijevič Maksutov*, sovietsky fyzik, optik. Navrhol nové optické astronomické systémy.
13. 8. 1814 sa v Lögdö narodil *Anders Jöns Angström*, švédsky fyzik a astronóm. Venoval sa spektrálnej analýze, spektroskopii a astrofyzike.
13. 8. 1819 sa v Skreen (Írsko) narodil *George Gabriel Stokes*, anglický matematik a fyzik. V hydrodynamike rozvinul teóriu pohybu viskózných tekutín, študoval absorpciu svetla.
16. 8. 1899 v Heidelbergu zomrel *Robert Wilhelm Bunsen*, nemecký chemik a fyzik. Zdokonalil chemické analytické metódy, stal sa spoluzakladateľom spektrálnej analýzy.
17. 8. 1924 zomrel *Pavel Samuilovič Uryson*, sovietsky matematik. Dosiahol podnetné výsledky v teórii topologických priestorov.
18. 8. 1969 v Berkeley zomrel *Otto Stern*, americký fyzik nemeckého pôvodu. Priamo zmeral rýchlosti pohybu molekúl plynu, objavil magnetický moment protónu. Nobelova cena (1943).
19. 8. 1819 v Handsworth zomrel *James Watt*, škótsky vynálezca. Bol priekopníkom výroby parných strojov.
19. 8. 1939 sa v Londýne narodil *Alan Baker*, anglický matematik. Za práce v teórii čísel dostal Fieldsovu cenu (1970).
20. 8. 1899 sa v Krakove narodil *Salomon Bochner*, americký matematik.

Pracoval v oblasti diferenciálnej geometrie, teórie funkcií, funkcionálnej analýzy.

21. 8. 1789 sa v Paríži narodil *Augustin Louis Cauchy*, francúzsky matematik a fyzik. Rozvinul teóriu komplexných funkcií, snažil sa o arimetizáciu matematickej analýzy.
21. 8. 1909 sa v Nižnom Novgorode narodil *Nikolaj Nikolajevič Bogoljubov*, sovietsky matematik a fyzik. Rozvinul variačný počet, približné metódy matematickej analýzy, asymptotické metódy nelineárnej mechaniky.
23. 8. 1829 sa v Mannheime narodil *Moritz Cantor*, nemecký historik matematiky. Zozbieral bohatý historiografický materiál matematiky do konca 18. storočia.
30. 8. 1819 sa v Paríži narodil *Joseph Alfréd Serret*, francúzsky matematik. Rozvinul nové metódy algebraickej topológie a teórie grúp. Napísal vynikajúce učebnice.

September 1989

3. 9. 1814 sa v Londýne narodil *James Joseph Sylvester*, anglický matematik. Vedecky pracoval v algebre, teórii invariantov, matematickej fyzike. Prispel k rozkvetu matematiky v USA.
4. 9. 1889 sa v Smolensku narodil *Vjačeslav Vasilievič Stepanov*, sovietsky matematik. Prispel k rozvoju teórie diferenciálnych rovníc a jej uplatneniu v mechanike. Bol viceprezidentom Moskovskej matematickej spoločnosti.
4. 9. 1969 zomrel *Marcel Riesz*, švédsky matematik maďarského pôvodu. Pracoval v oblasti teórie radov, teórie nerovností a matematickej fyziky. Bol zakladateľom švédskej školy teórie diferenciálnych rovníc.
8. 9. 1894 v Berlíne zomrel *Hermann Helmholtz*, nemecký fyzik a fyziológ. Zaoberal sa fyzikou, mechanikou i geometriou. Rozpracoval niektoré matematické metódy v optike a akustike. Riešil problémy elektrodynamiky, termodynamiky a elektrochémie.
15. 9. 1894 sa v Štokholme narodil *Oskar Benjamin Klein*, švédsky fyzik. Uplatnil sa v kvantovej mechanike, fyzike elementárnych častíc, všeobecnej teórii relativity a kozmológii.
15. 9. 1929 sa v New Yorku narodil *Murray Gell-Mann*, americký fyzik. Rozvinul kvantovú teóriu poľa, jadrovú fyziku a fyziku elementárnych častíc. Za práce pri klasifikácii základných častíc a poznanie ich interakcií získal Nobelovu cenu (1969).

18. 9. 1819 sa v Paríži narodil *Léon Jean Bernard Foucault*, francúzsky fyzik a astronóm. Študoval ohyb, interferenciu a polarizáciu svetla. Experimentálne dokázal rotáciu Zeme okolo vlastnej osi.
20. 9. 1969 v Bratislave zomrel *Ján Chrapan*, slovenský fyzik. Na Univerzite Komenského prednášal teoretickú mechaniku a štatistickú fyziku. Publikoval vedecké práce z teoretickej mechaniky.
21. 9. 1814 v Auteuil pri Paríži zomrel *Benjamin Thompson*, gróf Rumford, anglický fyzik. Vyvrátil fluidovú teóriu tepla, bol autorom viacerých praktických vynálezov.
23. 9. 1819 sa v Paríži narodil *Armand Hippolyte Louis Fizeau*, francúzsky fyzik. Skúmal vlnovú teóriu svetla, optické javy. Zmeral rýchlosť svetla.
27. 9. 1879 sa vo Viedni narodil *Hans Hahn*, rakúsky matematik. Vedecky pracoval v oblasti variačného počtu, funkcionálnej analýzy a teórie trigonometrických radov.
30. 9. 1894 sa v Rotterdame narodil *Dirk Jan Struik*, americký matematik a historik vedy holandského pôvodu. Zaoberal sa tenzorovou diferenciálnou geometriou, hydrodynamikou a dejinami matematiky.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Korec, I.:

ÚLOHY O VEĽKÝCH ČÍSLACH

Vydal ÚV Matematickej olympiády v nakladateľstve Mladá fronta, Praha 1988, 136 strán, brož. Kčs 7,—

Práca s číslami vždy patrila do matematiky. Veľké čísla udivujú aj v časoch samočinných počítačov. Odhaľovanie vlastností čísel patrí do teórie čísel. Súčasťou knižky, o ktorej hovoríme, je aj prehľad viet z tejto matematickej disciplíny. Sú tam uvedené pravidlá deliteľnosti, rozloženie prvočísel, rozklad na prvočinitele, kongruencie a zvyškové triedy, faktoriály a kombinačné čísla, rekurent-

né postupnosti a prehľad základných nerovností či tzv. približných vzorcov.

Úlohy o veľkých číslach sú rozdelené do ôsmi kapitol — nerovnosti s mocninami, posledné číslice mocnín, deliteľnosť, mocniny, úlohy s faktoriálmi, číslice okolo desatinnej čiarky, algebraické rovnice, iné úlohy. Predkladané príklady majú rôznu náročnosť. Niektoré z nich budú vhodné pre prípravu žiakov v matematickej olympiáde.

Pre ilustráciu obsahu knižky aspoň tri úlohy:

1. Určte posledné trojčíslicie čísla $C = 7^{8^9}$.
2. Dokážte, že číslo $B = 18^{17^{19}} + 18^{19^{17}}$ nie je mocninou, ktorej

základ je prirodzené číslo a exponent je prirodzené číslo väčšie než 1.

3. Nájdite najmenšie prirodzené číslo x také, že $10^{10^{10}}$ delí $x!$.

Pozrite sa do knižky, ktorá otvára novú, už šiestu desiatku publikácií „Škola mladých matematikov“. Získate možnosť riešiť úlohy o veľkých číslach.

Dušan Jedinák

INFORMACE

KSP po dvou letech

RNDr. PAVEL TÖPFER, MFF UK Praha

Zkratku KSP uvedenou v nadpisu znají pravděpodobně jenom asi tři stovky mladých lidí, kteří měli příležitost osobně se s ní setkat. Organizátoři korespondenčního semináře z programování ji začali používat k označení této soutěže ve všech písemných materiálech, které připravují a rozesílají účastníkům semináře. Na stránkách Rozhledů jsme již jednou o korespondenčním semináři z programování psali (č. 10, roč. 66 — ve šk. r. 1987—88). Nyní vás chceme stručně informovat o dosavadním průběhu soutěže a o tom, co je v KSP nového po dvou letech existence.

Korespondenční seminář z programování s působností pro celou ČSR vznikl na podzim roku 1987 z iniciativy studentů matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Organizátorem soutěže je fakultní výbor SSM na MFF UK Praha, spolupředatelem je ústřední výbor matematické olympiády. Ve školním roce 1987/88 proběhl experimentální „nultý“ ročník semináře. Postupně se při něm formoval tým organizátorů schopných vymýšlet a opravovat soutěžní úlohy, hledala se řešení různých technických a administrativních problémů, souvisejících například s rozmnožováním textů úloh a vzorových řešení, pracně se sháněly peníze a vhodný objekt na závěrečné soustředění. Úvodní potíže doprovázející vznik každého velkého projektu způsobily, že v nultém ročníku KSP obdrželi řešitelé pouze tři série po čtyřech soutěžních úlohách. Na podzim 1988 potom úspěšně proběhlo týdenní soustředění vybraných nejlepších účastníků semináře.

Od začátku školního roku 1988/89 se korespondenční seminář z programování rozběhl již naostro svým prvním ročníkem. Nabídku k účasti v semináři bylo možno nalézt na mnoha místech — v Rozhledech, v Mla-

dém světě, ve VTM, v Mladé frontě. Úlohy první série obdrželi jak všichni zájemci, kteří si o ně napsali, tak i účastníci loňského „nultého“ ročníku a ředitelství všech gymnázií a vybraných středních průmyslových škol v celé ČSR. První ročník KSP byl již tvořen čtyřmi koly po čtyřech soutěžních úlohách. Po vzoru jiných korespondenčních seminářů se v něm uplatnilo nové organizační uspořádání. Ihned po termínu, kdy bylo třeba zaslat řešení úloh 1. kola k opravě, obdrželi soutěžící zadání úloh 2. kola. Vzorová řešení úloh první série a svoje vlastní opravená a ohodnocená řešení pak každý účastník dostal zároveň se zadáním úloh 3. kola soutěže atd. Tento způsob „překrývání soutěžních kol“ dává řešitelům i opravujícím dostatek času pro práci s úlohami. Plně se proto osvědčil, i když přinesl také vlastně jediný závažnější problém, který se v 1. ročníku KSP objevil. Při rozesílání 2. série soutěžních úloh nebyla ještě zpracována řešení úloh 1. série a neexistoval tudíž úplný adresář účastníků. Znali jsme pouze adresy těch, kdo se sami do semináře předem přihlásili nebo soutěžili již v loňském ročníku, ale ne těch, kteří se do soutěže zapojili až na základě úloh rozesílaných na střední školy. Soutěžní úlohy 2. kola proto organizátoři KSP zaslali opět, stejně jako v 1. kole, na ředitelství škol. Je smutné, že se touto cestou k některým zájemcům texty úloh 2. kola KSP nedostaly. Po této špatné zkušenosti se již všechny další zásilky posílaly na domácí adresy řešitelů a vše probíhalo k naprosté spokojenosti účastníků.

V době psaní tohoto článku nebyl ještě první ročník korespondenčního semináře z programování uzavřen a vyhodnocen. S jeho výsledky vás proto seznámíme v některém z dalších čísel Rozhledů. Pro nejúspěšnější řešitele se opět připravuje týdenní soustředění, které se uskuteční na podzim tohoto roku.

Organizátoři semináře si již nyní lámou hlavy s vymýšlením úloh pro chystaný druhý ročník KSP. Pokud se ho budete chtít zúčastnit, přihlaste se během září 1989 na adrese:

Korespondenční seminář z programování
MFF UK Praha
Katedra kybernetiky a informatiky
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Na stejné adrese čekáme také na vaše nápady a náměty na soutěžní úlohy. Přivítáme každou zajímavou programátorskou úlohu, ve které nejde jen o naprogramování zcela zřejmého postupu řešení, ale kde se uplatní zejména dobré nápady a důvtip řešitele. Budeme rádi, když nám napíšete co nejdříve a pomůžete nám tímto způsobem s přípravou dalšího ročníku semináře.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

O vědeckém jazyce ve fyzice

Každá věda a dokonce každý obor lidské činnosti mají svůj vlastní jazyk a svůj způsob vyjadřování. Řekne-li matematik, že konečné regulární zobecněné borelovské míry na borelovských množinách lokálně kompaktního Hausdorffova prostoru tvoří lineární svaz, napíše-li fyzik, že stavové vektory je možno generovat aplikací příslušných kreačních operátorů na vektor vakua, nebo prohlásí-li lékař, že došlo k náhlé příhodě břišní, nemusí být laikovi vždy okamžitě zřejmé, o čem je vlastně řeč. Proto se čas od času objevují příručky a návody, jak překládat různé výrazy a výroky odborníků do lidské řeči. Podobnou výkladovou pomůcku kdysi na základě zahraničních pramenů sestavil a uveřejnil *Československý časopis pro fyziku*. Protože může být užitečná i pro mladé začínající fyziky, uvádíme z ní alespoň výňatky.

Řekne-li fyzik

„Je dobře známo, že

„To má velký teoretický a praktický význam.“

„Zřejmě “

„Přístroj je polopřenosný.“

„Přístroj je přenosný.“

„Vzorek byl lehce poškozen během práce.“

„Pracovali jsme s ním velmi opatrně.“

„Řádově platí .

„Souhlas naměřené a vypočtené křivky je výborný (dobrý, vyhovující, rozumný, uspokojivý).“

„Jako nejvhodnější jsme vybrali tyto tři vzorky.“

znamená to, že

„Neměl jsem čas ani náladu hledat původní práci, kde to bylo publikováno.“

„Mne osobně to zajímá.“

„Neověřoval jsem to, ale snad to tak bude.“

„Přístroj má rukojeť.“

„Přístroj má dvě rukojeti.“

„Upustili jsme ho na podlahu.“

„Neupustili jsme ho na podlahu.“

„Neplatí.“

„Souhlas je rozumný (špatný, pochybný, vymyšlený, žádný).“

„Ostatní vzorky nebyly naprosto k ničemu.“

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20 — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpalkova 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKČNÍ KRUH

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc.; MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topolčany; doc. dr. Stanislav Jendroň, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

ROZHLEDY

matematicko
-fyzikální

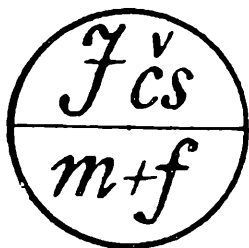
2
89 – 90

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

ŘÍJEN

CENA 2,00 Kčs



ROZHLEDY

matematicko -fyzikální

Nositel Vyznamenání za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Ivan Štoll: O takzvaných sporných jevech	49
Ladislav Drs: Nejkratší cesta kolem hory	54
Emil Kašpar: „Tajemný“ pohyb čarodějného proutku ve světle fyziky a matematiky II.	57
Luděk Pekárek: Poznámka k článkům ing. V. Patrovského, CSc.	63
Věnceslav Patrovský: Komentář k poznámce RNDr. L. Pekárka, DrSc.	66
Poznámka redakce	68
Ján Chrapan: Aurel Stodola — otec parných turbín	68
Z matematiky a fyziky ZŠ	71
Přemýšlíme, řešíme	80
Výsledky loňské soutěže Rozhledů	85
Naše soutěž; ročník 1989—90	86
Celostátní kolo 38. roč. MO kategorie A	89
Celostátní kolo 30. roč. FO	91
dj: Kalendár M-F	93
Z nových knih	95
Korespondenční semináře MFF UK Praha	96
Humory matematicko-fyzikální	3. str. obálky

O takzvaných sporných jevech

Doc. ing. IVAN ŠTOLL, CSc., FJFI ČVUT

V poslední době se setkáváme v novinách, časopisech, magazínech, ale i v televizi a jiných sdělovacích prostředcích s nejrůznějšími zprávami o proutkaření, magnetizované vodě (vzpomeňme někdejší módy magnetických náramků), živé a mrtvé vodě, geopatogenních zónách, telepatii, telekinezi, biopolích, léčitelských praktikách a dalších podobných jevech. Určitou obdobu těchto zpráv představovaly i informace a úvahy o létajících talířích, překvapujících technických znalostech dávných civilizací, stopách po návštěvách mimozemšťanů a dalších událostech, které lze historicky obtížně doložit, ale i vyvrátit.

Spektrum těchto zpráv a informací, jakož i serióznosti jejich autorů nebo zprostředkovatelů je velmi široké a asi by nebylo správné házet všechny zprávy tohoto druhu do jednoho pytle i s jejich autory a označovat je jedinou nálepkou. Naproti tomu věda má svůj způsob zkoumání přírodních jevů založený na určité metodice pozorování a experimentování, vyhodnocování získaných výsledků, vytváření hypotéz a teorií, jejich ověřování experimentem a praxí. Tomu je třeba se učit, dbát o dodržování pravidel vědecké práce, vědecké etiky, dokázat přiznat chybu, vědecký omyl. Cesty vědy nejsou přímé, jsou nejen historií objevů a úspěchů, ale i vášnivých sporů, mylných teorií, špatně postavených či interpretovaných experimentů, které pozdější vývoj vyvrátil a uvedl na pravou míru. I mezi vědci, přesněji řečeno lidmi s vědeckými tituly, se našli lidé charakterově vadní, kariéristé toužící po slávě, kteří neváhali falšovat nebo „mírně přizpůsobovat“ své výsledky, aby získali vrch nad oponentem, dosáhli určitého postavení, neváhali dokonce používat i mocenských metod, které nemají s vědou nic společného. I o tom nás historie poučuje.

Ze strany zastánců existence různých senzačních, problematických a vědci odmítaných jevů se zejména ozývají poukazy na historické omyly vědy a vědců, krátkozraké předpovědi, které se nevyplnily. Zejména tvrzení o tom, že něco neexistuje nebo nemůže existovat, že přírodní zákony něco „zakazují“, bývá přijímáno podrážděně a nedůvěřivě. Připomeňme dlouhou a v podstatě nekončící historii strůjců perpetua mobile, kteří se urputně snaží popřít či obejít zákon zachování energie nebo alespoň druhou větu termodynamickou. Z historie je známo, že francouz-

ská Akademie kdysi odhlasovala, že z nebe nemohou padat kameny a popřela možnost existence meteoritů. Ty, kdo podávali zprávy o pádech meteoritů, dokonce kázeňsky trestala. S druhé strany ovšem nešlo o pouhou svévoli nebo zabeďněnost — existence takových těles se zdála být v rozporu s vědecky podloženou Newtonovou a Laplaceovou mechanikou nebeských pohybů.

Je známo, že známí vědci vyvraceli a matematickými výpočty dokazovali nemožnost využití parního stroje, letadel těžších než vzduch, používání svítiplynu ke svícení, mechanický záznam lidského hlasu atd. Prof. Petzval složitými výpočty vyvracel existenci Dopplerova jevu, Ernest Rutherford deset let před spuštěním prvního jaderného reaktoru tvrdil, že jadernou energii nebude možno prakticky využívat. Z podobných a dalších historických příkladů vyplývá určitá nedůvěřivost vůči „oficiální“ vědě, přesvědčení o tom, že vědci jsou zkosnatělí, uzavření do svých dogmat, omezení ve své specializaci, neschopní fantazie, intuice, velkorysosti, a jde-li o představitele oficiálních vědeckých institucí, tedy navíc i domýšliví, zbyrokratičtělí a zneužívající svých privilegií a monopolu na vědu.

Rozvoj vědy a techniky na jedné straně zrevolucionizoval náš způsob života, ale přinesl i určité odcizení vědy širokým vrstvám obyvatelstva (ačkoli by tomu mělo být naopak), vyvolal nedůvěru k vědeckým (i jiným) autoritám. Příčin je zde celá řada — věda se stává složitou, objem speciálních poznatků roste, komplikuje se vědecký jazyk a matematické způsoby popisu jevů. Přitom věda sama přiznává, že nedokáže vysvětlit a vyřešit všechny problémy, vyléčit všechny nemoci, mezi vědci se vedou spory, důsledky vědeckotechnického pokroku mají i své negativní stránky, s nimiž si často neumíme poradit. Bývalo období, kdy lidé věřili v boží prozřetelnost a vysvětlovali si vše neznámé božím zásahem, bylo období víry v takřka neomezenou moc vědy („poručíme větru, dešti“) a dnes prožíváme období, kdy místo prostoduché víry nastupuje klopotné hledání, zkoumání, pochybování a ověřování nejen ve vědě, ale i v politice a v životě vůbec. Tím více se lidé upínají k věcem, které se zdají být senzační, povznášející, vše řešící a vyžadují v podstatě jen víru.

Zkoumáme-li příčiny toho, proč různé senzační, problematické — či jak se jim dnes říká — sporné jevy získávají sluchu a plní stránky časopisů, zjistíme, že je jich celá řada a jejich analýza by vyžadovala rozsáhlou sociologickou studii. Předně jakákoli informace vycházející z oficiálních či alespoň vědecky etablových míst budí vždy více nedůvěry než informace ze zdrojů, které jsou nějakým způsobem potlačovány, omezovány či alespoň obviňovány z nevědeckosti. Lidé budou vždy spíše věřit něčemu, co je senzační, šokující, neobvyklé, než sebevýznamnějším vědeckým výsledkům vyžadujícím dlouhodoý úmorný výzkum. Objev intermediálních bosonů nemůže laika nadchnout více, než výkon prout-

kaře, který našel na jeho pozemku zakopaný poklad. Vědecké výsledky jsou publikovány v odborném tisku s omezeným okruhem čtenářů a způsobem, který je srozumitelný pouze odborníkům v úzké dané oblasti. V tomto ohledu má velký dluh vědecká popularizace nejen pro široké publikum, ale i pro odborníky a vědecké pracovníky příbuzných oblastí a oborů. Naproti tomu senzační zprávy se šíří po světě masovými sdělovacími prostředky. Dále, známý a zcela nevědecký argument „viděl jsem to na vlastní oči“, „sám jsem to pocítil“, „znám osobně člověka, který to dokáže“, tisíckrát předčí svou přesvědčivostí jakékoli vědecké námitky. Je-li věda v pozici, kdy má dokazovat, že něco neexistuje, je v nesmírné psychologické nevýhodě, zejména, jde-li o jev, který není přímo v rozporu s nějakým přírodním zákonem a tento jev je předmětem víry. Moderní fyzika dokonce sama uplatňuje podvědomé přesvědčení, že vše, co není zakázáno přírodními zákony, by mělo existovat. Jestliže se k víře přidruží vášně, osobní nevraživosti, obviňování a ironizování, dostáváme se pak zcela mimo oblast vědy.

Sporné jevy se velmi často týkají různých hraničních oblastí, k nimž se odborník jedné profese nemůže dost dobře kompetentně vyjadřovat. Jde-li třeba o oblast mezi fyzikou a biologií, znamená to, že by se biologické procesy vymykaly obecným zákonům fyzikálním, mají však svou specifikou, které by měl rozumět biolog. Prohlásí-li lékař, že zlomeniny se hojí rychleji v magnetickém poli, nemohu to jako fyzik apriorně popřít či vyloučit, i když si nedovedu představit důvod, proč by to tak mělo být a vyvolá to u mne rezervovanou nedůvěru. Lékař ostatně také neví proč. Přitom je známo, že vlivy na organismus prostřednictvím centrální nervové soustavy, ať již sugescí, drážděním nervových center nebo zakončení aj. mohou být skutečně překvapující, i když je nedovedeme kauzálně vědecky vysvětlit.

Zde je právě jeden z kamenů úrazu. Vezměme si příklad duhy. O existenci tohoto přírodního fenoménu nemůže být sporu. Lidstvo ho pozoruje odjakživa, a to vždy za stejných podmínek — když prší a svítí slunce. Kauzální souvislost je tu prokázána experimentálně i teoreticky, pomocí matematické teorie lomu světla na vodních kapkách a na jevu nemůže být nic sporného. Jiná situace vzniká, máme-li vysvětlit vliv laserového paprsku na vlastnosti semen, magnetického pole na vlastnosti vody nebo vliv geologické anomálie na chování proutku. Prvním úkolem je vůbec takovou souvislost prokázat — přesně definovat a reprodukovat příčinu, přesně definovat a kvantifikovat důsledek, vyloučit další možné vlivy a příčiny (což může být enormně nesnadné). Výsledek se přitom nedostavuje s takovou železnou zákonitostí jako duha, jsou výsledky příznivé a nepříznivé, oba případy mohou být důsledkem náhody. Při „telepatickém“ přenosu myšlenek je dokonce vysoce pravděpodobná časová shoda, jestliže se dva lidé zabývají tímž problémem, mají obavy o osud třetí osoby apod. Pripusťme však, že se podaří statisticky pro-

kázat časovou souvislost nebo spíše korelaci dvou takových jevů nad míru čisté náhody. Ani s tím se však věda nemůže spokojit. Jev bude poznán a pochopen až tehdy, když se podaří určit mechanismus, podstatu působení na základě přírodních zákonů. I to je nesmírně obtížné, zejména na rozhraní dvou přírodních věd. Někteří lidé namítají, že toto „štouralství“ je právě rysem naší „západní“ vědy, že orientální mágové prostě tyto takřka nadpřirozené jevy prakticky využívají a nehlobají nad jejich příčinami. Pak jde ovšem o nedorozumění o podstatě vědy — věda je lidské snažení, které usiluje o poznání příčin a podstaty věcí.

Řekli jsme v úvodu, že není správné házet všechny sporné jevy a jejich zastánce do jednoho pytle a snažit se je vědecky vyvracet. Připomíná to úsilí Honzy, který aby si uspořil práci, svázal všechny stromy v lese dohromady a chtěl je odnést domů najednou. Proto je nutno diferencovat. Pomineme vyslovené spiritisty a okultisty, kteří se zabývají jevy nadpřirozenými, kteří vždy existovali a budou existovat a kteří s vědou do kontaktu nepřicházejí. Někteří zastánci sporných jevů vycházejí z experimentů, které jsou fyzikálně zcela neprůkazné, porušují zásady experimentu a jeho vyhodnocování, nebo jsou založeny na teoriích matematicky a fyzikálně neudržitelných, v rozporu se základními poznatky ověřenými během historického vývoje fyziky. Objev nové částice nebo nového druhu silového pole má ve fyzice zásadní význam a k jeho důkazu je třeba složité experimentální techniky, výpočtů a nezávislého experimentálního ověřování. Teorie předpověděla řadu částic, které by mohly existovat, ale které nebyly dosud experimentálně zjištěny, a proto také nemají právo na prokázanou existenci. Pokud jde o silová pole, jsou dnes ve fyzice známa čtyři (gravitační, elektromagnetické, silné a slabé) a z nich se odvozuje celé bohatství interakcí v přírodě. Tím, že zavedeme nový název nebo označení jako „mention“, „biopole“ apod., existenci nového jevu samozřejmě nedokazujeme.

Existuje však řada výzkumníků a odborníků různých s fyzikou hraničících profesí, kteří se snaží vysvětlovat neobvyklé, sporné jevy pomocí známých fyzikálních zákonitostí, účinkem prokázaných a měřitelných polí — elektrických, magnetických, elektromagnetických, akustických. Zejména v oblasti magnetismu pokročila měřicí technika natolik, že pomocí kvantových magnetometrů, skvidů umožňuje detekovat magnetická pole vyvolávaná elektrickými proudy lidského mozku, srdce či oka. Je známo, že v lidském těle probíhá mnoho fyzikálních a fyzikálně-chemických procesů a jejich účinky jsou v poslední době předmětem výzkumu, měření a využívání. Lidské tělo jako těleso zahřáté na 36° až 37 °C vyzařuje svým povrchem elektromagnetické vlny s maximem v infračervené, tepelné oblasti. Různé části povrchu lidského těla jsou přitom zahřáty různě a metodou tekutých krystalů je lze podrobně teplotně mapovat. Z hlouběji položených míst a orgánů lze detekovat decimetrové elektromagnetické vlny, i když velmi malé intenzity. Na

povrchu těla existují elektrické náboje vznikající zejména třením o oděv a tím vzniká i elektrostatické pole v blízkosti pokožky. O biomagnetických polích jsme se již zmiňovali. Některé biochemické reakce vyvolávají i vyzařování viditelného světla — několik desítek fotonů za sekundu na čtvereční centimetr. Tato intenzita ovšem zdaleka neoprávnňuje tvrzení o pozorování nějaké „aury“. Organismus vyzařuje i akustické šумы v ultrazvukové a infrazvukové oblasti, dochází k odpařování vlhkosti a dýchání pokožky. Vliv elektromagnetického záření různých vlnových délek na hojení ran je dávno znám a využíván. Na tom všem není nic tajuplného, biofyzika se těmito jevy zabývá a medicína jich využívá.

Je zde však třeba rozlišovat fyzikálně zdůvodněné a měřitelné jevy a vlivy od různých dohadů a tvrzení předkládaných často široké veřejnosti jako nesporná a prokázaná, přestože jejich vědecké ověření provedeno nebylo. Vezměme například proutkařský fenomén. V prvních dvou číslech našeho časopisu jsme uveřejnili článek prof. RNDr. E. Kašpara, DrSc., který podle známých zákonů mechaniky ukazuje, že proutek představuje mechanickou soustavu, u níž malý silový podnět uvolní značnou energii pružné deformace, a ta se projeví silovým momentem stáčejším proutek k zemi. To ovšem ponechává volné pole dohadům, co vyvolává tento „malý podnět“, zda proutkařova vědomá zkušenost, podvědomé pocity, elektromagnetické či akustické vlny působící přes jeho nervovou soustavu nebo prostě náhoda a okolnost, že u nás je pod zemí voda skoro všude, a tak se proutkař málokdy může zmýlit.

Jako fyzik se těžko mohu smířit s představou, že organismus proutkaře je chodící vysílač elektromagnetických či akustických vln tak velké intenzity, aby už dávno nebyly změřeny a pozorovány, a že tyto vlny jej po odrazu informují o tak různorodých jevech, jaké je údajně schopen detekovat. Hovoříme-li o vlivu elektrického či magnetického pole na různé biologické objekty, nervovou soustavu, rostliny či semena, dostáváme se do oblasti biologie, která je ovšem při kauzálním zdůvodňování jevů ještě daleko za fyzikou. K průkazu hospodářské využitelnosti těchto jevů dosavadní výsledky a experimenty zdaleka nestačí. A pokud jde o jejich vědeckou průkaznost, mám jistě alespoň právo na pochybování v duchu starého latinského hesla „de omnibus dubitandum est“.

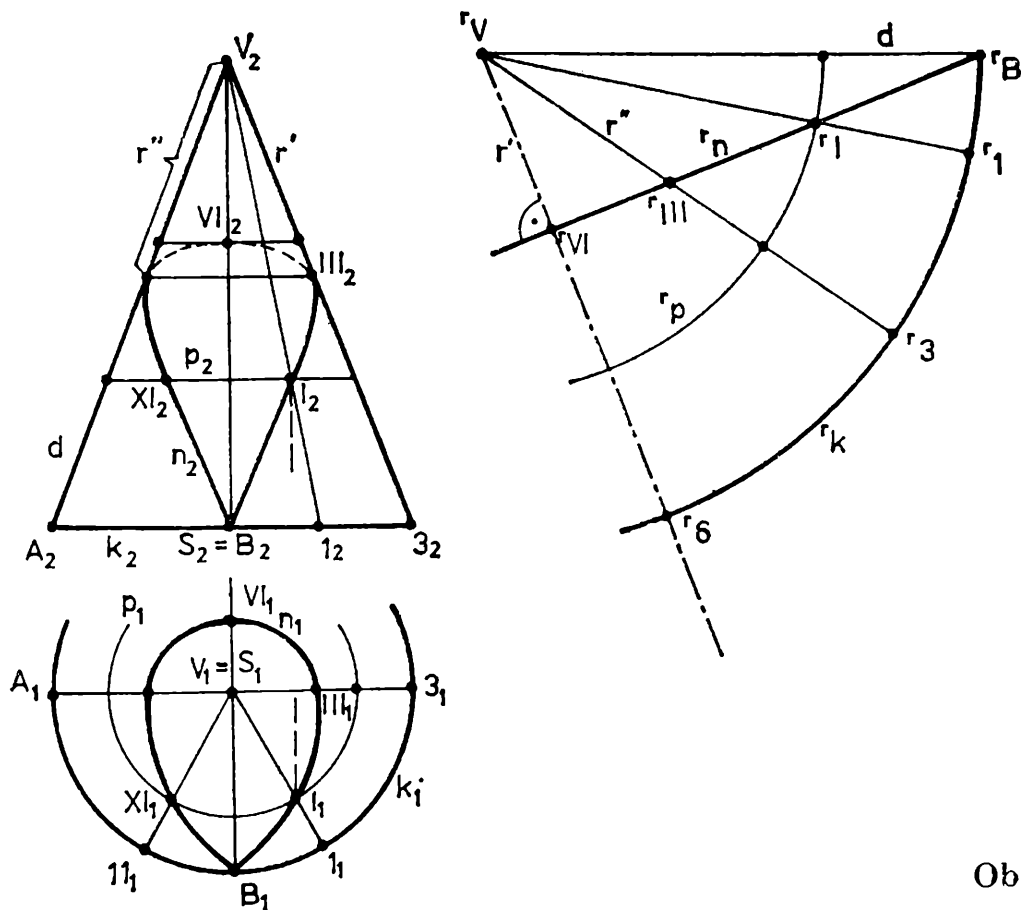
Nejkratší cesta kolem hory

Doc. ing. dr. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT v Praze

Odpověď na otázku „Jakou nejkratší cestou obejdeme horu?“ se zdá snadná. Nejkratší cesta je po vrstevnici. Kdybychom totiž při obcházení hory buď scházeli dolů nebo stoupali nahoru, jistě bychom cestu prodlužovali.

Je však tato úvaha správná? Vyjádříme-li náš problém geometricky, máme určit nejkratší uzavřenou křivku n na plášti P rotačního kužele K , vycházející z daného bodu B pláště. Kužel K zobrazíme v Mongeově promítání. Zadáme jeho kruhovou podstavu o hraně k (střed S , poloměr r) v půdorysně a jeho vrchol V , $V_1 = S_1$. Dále zvolíme bod B na kružnici k , např. tak, aby $B_2 = S_2$, obr. 1.

Plášť P rozstříhneme podél strany VB . Její délka s je rovna průmětu V_2A_2 obrysové strany VA . Plášť rozvineme do roviny. Rozvinuté útvary označíme indexy r . Protože všechny strany rotačního kužele jsou stejně



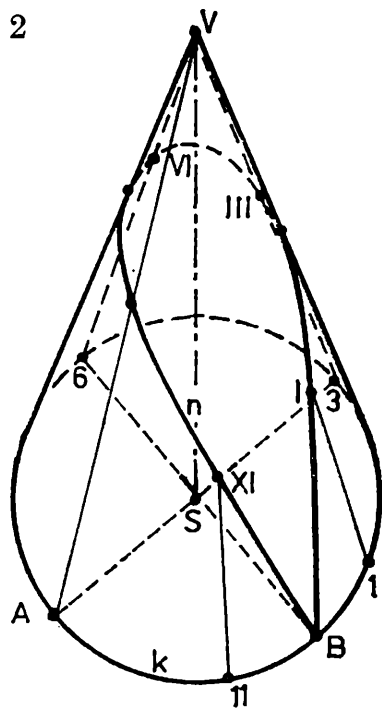
Obr. 1

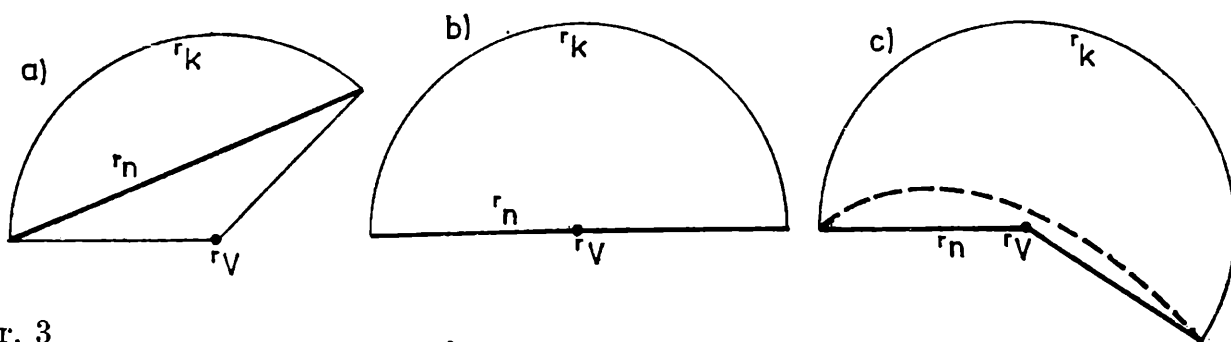
dlouhé, plášť se rozvine do kruhové výseče rP . Krajní poloměr výseče $rVrB$ vhodně umístíme. Na kružnici rk (střed rV , poloměr s) navineme od bodu rB délku podstavné hrany, tj. délku $2\pi r$. Postupujeme např. takto: sestrojíme vrcholy $1, 2, \dots, 11, 12 = B$ pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice k . Na kružnici rk sestrojíme vrcholy $r1, r2, \dots, r12$ tak, že $rBr1 = r1r2 = \dots = r11r12 = B1$. Spojnice $rVr12$ je druhým krajním poloměrem výseče rP (na obr. je pouze polovina výseče). Nejkratší křivka n přejde rozvinutím pláště P do úsečky $rn = rBr12$. Oblouk $rk = rBr12$, který na rozvinutém plášti rP odpovídá vrstevnici k kužele K , je delší. Proto naše intuitivní řešení úvodního problému nebylo správné. Nejkratší křivka n vznikne z úsečky $rn = rBr12$ po svinutí výseče rP do pláště P . Určíme několik bodů křivky n . Na výseči rP sestrojíme poloměry $rVr1, rVr2, \dots, rVr11$ a jejich průsečíky s úsečkou rn označíme $rI, rII, \dots, rXI$. Svinutím výseče na plášť přejdou poloměry do stran $V1, V2, \dots, V11$ kužele a průsečíky do bodů $I, II, \dots, XI$ křivky n . Konstrukci sdružených průmětů těchto bodů popíšeme pro bod I : kruhový oblouk $rp(rV, rVrI)$ výseče rP přejde svinutím do rovnoběžkové kružnice p kužele K . Její nárys p_2 je úsečka s krajními body na nárysech obrysových stran ve vzdálenosti $d = rIrI$ od bodů A_2, B_2 . Půdorys p_1 je kružnice se středem V_1 a průměrem rovným délce úsečky p_2 . Hledané sdružené průměty bodu I jsou: $I_1 = p_1 \cap V_1I_1, I_2 = p_2 \cap V_2I_2$. Přesnost kontrolujeme ordinálou I_1I_2 . Podobně sestrojíme další body křivek n_1 a n_2 . Na obr. 1 jsou ještě určeny sdružené průměty bodů III a VI křivky n . Ke konstrukci jsme použili délky $r' = rVrVI$ a $r'' = rVrIII$. Křivka je souměrná vzhledem k rovině $\delta = (BVS)$. Tuto souměrnost využijeme při konstrukci křivek n_1 a n_2 .

Pro větší názornost jsme křivku n na kuželi K nakreslili ještě ve vojenské perspektivě (obr. 2).

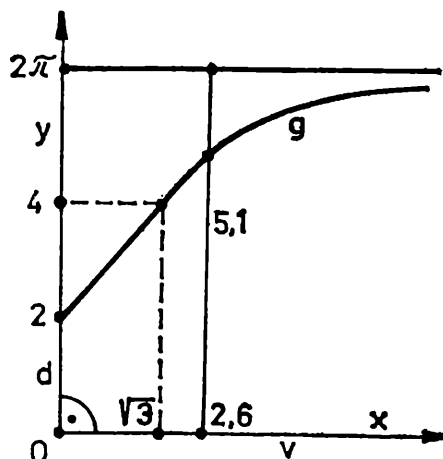
Popsaná konstrukce nejkratší uzavřené křivky na plášti kužele platí ovšem jen pro ty kužele, jejichž plášť se rozvine do výseče s vrcholovým úhlem menším než 180° , tj. pro ty kužele, jejichž strana s je větší než průměr $2r$ nebo jejichž výška je větší než $r\sqrt{3}$ (obr. 3a). Je-li strana kužele rovna $2r$, pak se plášť rozvine do půlkruhu a nejkratší křivka do průměru, který půlkruh omezuje (obr. 3b). Nejkratší cesta „kolem“ kopce je přímá cesta na vrchol a zpět. Má-li

Obr. 2





Obr. 3



Obr. 4

kužel stranu menší než $2r$, plášť P se rozvine do výseče rP jejíž vrcholový úhel je větší než 180° (obr. 3c). Každá uzavřená křivka vedená kolem kužele na jeho plášti je delší nežli přímá cesta na vrchol a zpět, neboť v rozvinutí je délka krajních poloměrů výseče rP vždy menší nežli délka jakékoli křivky vedené po výseči s krajními body v koncových bodech oblouku r_k . Naobr. 3c je jedna z možností vyznačena čárkovaně.

Na obr. 4 je podle předchozích výsledků sestrojen graf g závislosti výšky v kužele (osa x) a délky d nejkratší cesty kolem něho (osa y) v porovnání s délkou vrstevnice. Graf je konstruován pro poloměr $r = 1$. Je-li $0 < v < \sqrt{3}$, je nejkratší křivkou cesta na vrchol a zpět. Grafem je úsečka, spojující bod $(0, 2)$ s bodem $(\sqrt{3}, 4)$. Pro $v > \sqrt{3}$ je grafem křivka, která se asymptoticky blíží rovnoběžce s osou x ve vzdálenosti $2\pi \doteq 6,3$ (délka vrstevnice). Určíme jeden její bod. Využijeme k tomu obr. 1. Odměření zjistíme, že $v/r \doteq 2,6$ a $d/r \doteq 5,1$. Jeden bod křivky g má tedy souřadnice $x = 2,6$ $y = 5,1$. Určete podobně sami nějaký další bod křivky g !

Podmínku $v > r\sqrt{3}$ splňují jen horské štíty. Např. kužel z obr. 1 odpovídá přibližně štítu Kostielok ve Vysokých Tatrách. Z grafu zjistíme, že cesta po vrstevnici Kostieloku je asi o 23 % delší, nežli nejkratší cesta.

Hory a kopce ovšem nejsou zdaleka tak strmé ($v < r\sqrt{3}$). Proto je nejkratší cestou „kolem“ nich přímý výstup na vrchol a zpět.

„Tajemný“ pohyb čarodějného proutku ve světle fyziky a matematiky II.

Prof. RNDr. EMIL KAŠPAR, DrSc., Praha

Dynamické zákony pohybu virgule

Při objasňování zákona pohybu virgule vyjdeme z následujících fyzikálních principů a poznatků:

1. Podle *zákona zachování energie* bude potenciální energie pružnosti v ohybu, kterou proutkař na počátku virguli dodá při ohýbání jejích ramen, přecházet na stejně velkou kinetickou energii samovolného pohybu virgule.

2. Virgule se dá z klidu do pohybu v takovém směru, kdy její *potenciální energie* pružnosti v ohybu *klesá* a *kinetická energie* pohybu virgule *roste*.

3. Při pohybu virgule se uplatní dva momenty sil:

deformační moment M_ξ , kterým se ohnutá ramena virgule snaží napřímit;

pohybový moment M_φ , který je příčinou otáčení virgule kolem osy $o_0 = AB$. Tento pohybový moment síly je podle *druhé impulsové věty* roven časové změně momentu hybnosti virgule. Známe-li tedy pohybový moment síly M_φ , mohli bychom principiálně stanovit zákon pohybu virgule, tj. časový průběh změny úhlové výchylky $\varphi(t)$.

4. Situace je komplikována tím, že pohybový moment M_φ není stálý, ale závisí dosti složitým způsobem na úhlové výchylce φ . Kdybychom odvodili tuto závislost (nazvěme ji *základním dynamickým vztahem*), mohli bychom alespoň kvalitativně analyzovat průběh otáčivého pohybu virgule.

Odvození základního dynamického vztahu

Nechť virgule je již vychýlena o úhel φ při úhlu deformace ramen ξ (viz obr. 5). Při otáčivém pohybu tělesa kolem pevné osy je změna energie rovna práci vykonané nebo spotřebované silovým momentem po příslušných úhlových výchylkách. Platí tedy (práce se koná na dvou větvích virgule)

$$M_\varphi d\varphi = 2M_\xi d\xi \quad (3)$$

Odtud

$$M_{\varphi} = 2 \frac{d\xi}{d\varphi} M_{\xi}. \quad (4)$$

Podíl $d\xi/d\varphi$ známe jako funkci úhlu φ (vztah (2)), takže

$$M_{\varphi} = -2 \frac{\cos \alpha_0 \cos \alpha \sin \varphi}{\sin \xi} M_{\xi}, \quad (5)$$

kde podle (1)

$$\sin \xi = \sqrt{1 - \cos^2 \xi} = \sqrt{1 - (\sin \alpha_0 \sin \alpha + \cos \alpha_0 \cos \alpha \cos \varphi)^2}. \quad (6)$$

Zbývá ještě vyjádřit na pravé straně vztahu (5) moment M_{ξ} jako funkci úhlové výchylky φ . Experimentálně bylo zjištěno, že moment M_{ξ} závisí přibližně lineárně na úhlu ξ . Podle Hookova zákona platí v dosti širokém rozmezí přímá úměrnost mezi momentem síly M_{ξ} a úhlem $\pi - \xi$ (obr. 10). Úhly zde vyjadřujeme v obloukových jednotkách radiánech. Platí tedy

$$M_{\xi} = M_{\xi}^d (\pi - \xi), \quad (7)$$

a po dosazení za ξ podle (1) máme základní dynamický vztah ve tvaru

$$M_{\varphi} = -2M_{\xi}^d \frac{\cos \alpha_0 \cos \alpha \sin \varphi}{\sqrt{1 - (\sin \alpha_0 \sin \alpha + \cos \alpha_0 \cos \alpha \cos \varphi)^2}} \cdot [\pi - \arccos(\sin \alpha_0 \sin \alpha + \cos \alpha_0 \cos \alpha \cos \varphi)]. \quad (8)$$

(Součinitel 2 je zde proto, že moment M_{ξ} působí na každé rameno virgule.)

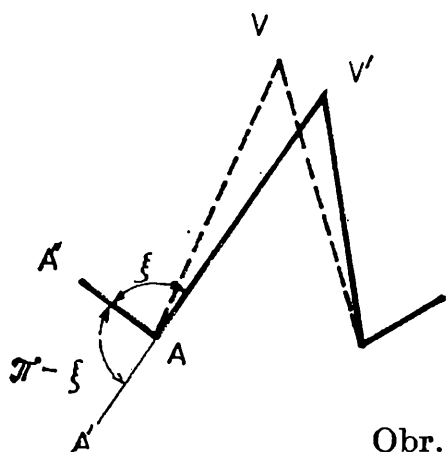
Veličina M_{ξ}^d je „direkční“ moment, tj. hodnota M_{ξ} při úhlu deformace $\pi - \xi = 1$ rad (obr. 10). Závisí na parametrech té které speciální virgule. Z experimentů plyne, že je přibližně konstatní pro hodnoty výchylky $\varphi = 0^\circ \rightarrow 180^\circ$, resp. $0^\circ \rightarrow -180^\circ$.

Fyzikální výklad manipulací s virgulí v proutkařské praxi

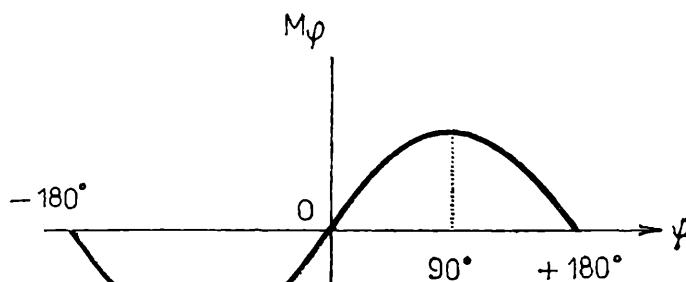
Vlastnosti pohybového momentu M_{φ}

Rozborem pravé strany vztahu (8) lze zjistit, že moment M_{φ} se mění s úhlovou výchylkou podobně jako goniometrická funkce sinus. Svědčí o tom také grafické znázornění této závislosti v obr. 11. Odtud plynou vlastnosti momentu M_{φ} , které známe též z experimentů. Tyto vlastnosti mají důležité místo při proutkařských akcích. Jsou to:

1. Je-li virgule na počátku ($\varphi = 0^\circ$) ve svislé rovině srůstem nahoru, má rovnovážnou polohu labilní, neboť vychylující moment je zde roven nule, ale při sebemenší výchylce má nenulovou hodnotu a způsobí samo-



Obr. 10



Obr. 11

volné vychýlení virgule. Virgule se může z této labilní polohy vychýlit jen vnějším zásahem. Dále poznáme, že proutkař prakticky nikdy nedrží na počátku akce virguli v rovnovážné poloze labilní.

2. Moment M_φ vzrůstá s úhlovou výchylkou φ plynule od nulové hodnoty na počátku až do nejvyšší hodnoty při $\varphi = 90^\circ$ nebo -90° , pak klesá, až při $\varphi = 180^\circ$ nebo -180° je roven nule. V těchto polohách má virgule rovnovážnou polohu stabilní.

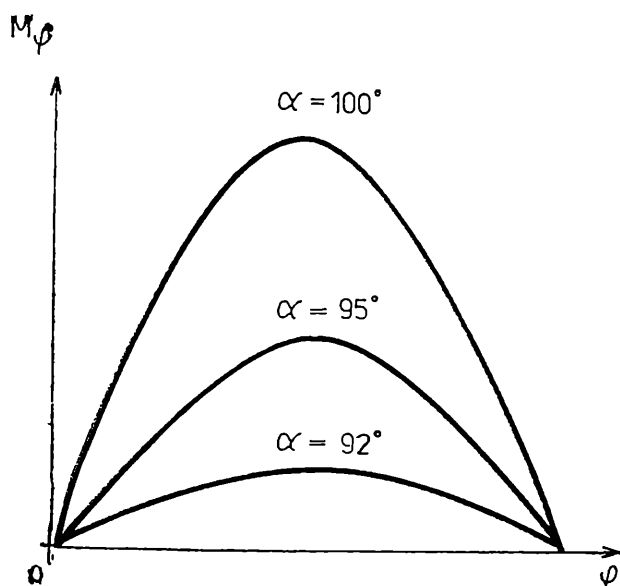
Vychylující moment M_φ působí na virguli po celou dráhu od $\varphi = 0^\circ$ až do 180° v témže smyslu, přičemž úhlové zrychlení ε je přímo úměrné momentu M_φ . To má za následek intenzivní vzrůst úhlové rychlosti, který je největší v oblasti výchylky $\varphi = 90^\circ$. S tím souvisí prudký vzrůst rychlosti v této poloze.

3. Křivka závislosti momentu M_φ pro záporné hodnoty výchylky ($\varphi = 0^\circ \rightarrow -180^\circ$) je symetrická s větví pro kladné hodnoty výchylky φ , přičemž středem symetrie je počátek O . Proto se virgule vychyluje od počáteční svislé polohy na obě strany stejně.

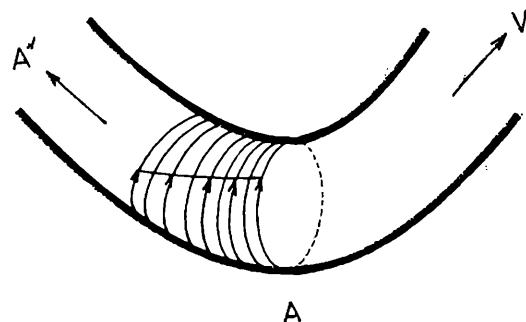
4. Řídící úhel α , který je dán ohnutím konců ramen, má funkci parametru. V obr. 12 je graficky zobrazena závislost vychylujícího momentu při různých velikostech úhlu α ($92^\circ, 95^\circ, 100^\circ$). Z grafu je zřejmé, že velikost vychylujícího momentu lze účinně regulovat změnou úhlu α , a to i při hodnotách o málo větších než 90° .

Poznámky. 1. U skutečných virgulí je velikost momentu M_φ silně závislá na parametrech pružnosti, které ovlivňují směrný moment M_ξ^d . Pohybový moment je např. u kovových virgulí při stejném úhlu α , při stejné délce a průřezu ramen nesrovnatelně větší než u přirozených virgulí.

2. Z představ o souvislosti pružnosti s molekulovou stavbou látek je možno vznik samovolného pohybu virgule vysvětlit takto (obr. 13). Rameno virgule v místě ohbí rozdělíme příčnými řezy ve velmi tenké lamely. Ty se torzí navzájem stáčejí ve stejném smyslu. Stočení lamel



Obr. 12



Obr. 13

se počítá tak, že vně pozorujeme výsledné vytočení ramene z. polohy AV_0 do AV' . Analogické stočení je u druhého ramene.

Jak se virgule udržuje v počáteční poloze v klidu

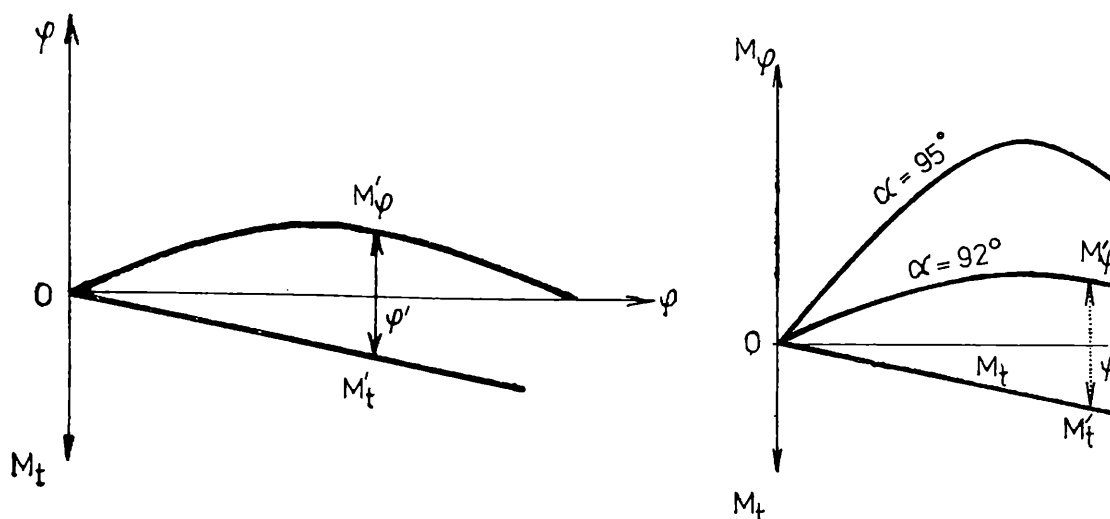
Často se uvádí, že virgule je na počátku v labilní rovnovážné poloze ve významu, jak se mu rozumí ve fyzice základní školy. Virgule by však mohla být v labilní rovnovážné poloze jen v případě, že by byla držena přesně ve svislé poloze srůstem nahoru. Tento stav však není prakticky uskutečnitelný, protože virgule je neustále vychylována třesem (tremorem) rukou. Přibližně ve svislé poloze ji proutkař udržuje vědomě nebo nevědomky balancováním.

Je-li virgule v základní poloze jiné než svislé, např. vodorovné, pak nelze mluvit o rovnovážné labilní poloze vůbec. Virgule zůstává v klidu, když se rovná nule výslednice momentu její tíhy, ale také vychylujícího momentu M_φ a momentů sil, kterými na ni působí proutkař — opět vědomě či nevědomky.

Jak se ovlivňuje pohyb virgule

Ze závislosti pohybového momentu M_φ na výchylce φ můžeme vysvětlit fyzikální podstatu základních manipulací s virgulí.

Když jsme předváděli základní pokus s proutkem, ohnuli jsme jeho ramena podle obr. 2. Pozorovali jsme, že se proutek samovolně otočil z počáteční polohy zhruba o 180° , jakmile řídicí úhel α přesáhl hodnotu 90° . Ale když pozorujeme proutkaře v akci, tak tu něco nesouhlasí. Proutkař drží virguli se správně ohnutými rameny AA'' a BB'' , virgule



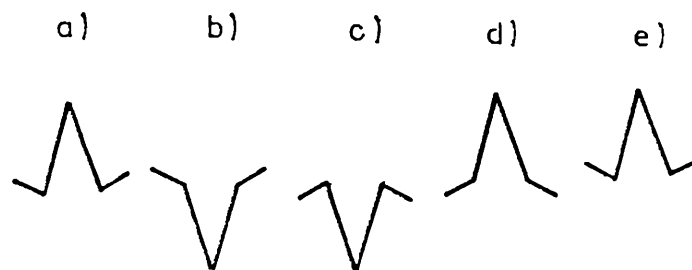
Obr. 14

se poněkud vychýlí a zůstane v klidu. *) Teprve nad údajným „pramenem“ nebo jiným „zdrojem“ v podzemí se náhle vychýlí nebo od ní.

Fyzikální vysvětlení tohoto jevu je nasnadě. Proutkař virgule tak pevně, že se nemohou díky brzdícímu momentu v dlaních vykrucovat. Zato se podélně zkrucují ramena a vzniká torzní (krouťící) moment M_t , který má opačný směr než moment M_φ . Pro moment M_t platí přibližně Hookův zákon, vzrůstá přímo úměrně s výchylkou φ . Tato závislost je v grafu znázorněna polopřímkou OM_t . Virgule se vykloní působením M_φ do výchylky φ' , při které je kompenzován moment M_t neboť platí $M_t = -M_\varphi$. Proutkař přitom cítí, jak se mu v rukách vykroutit a soudí na existenci nějakého faktoru, který ji přitahuje. Po chvíli se svaly jeho rukou unaví, sev uvolní, třecí moment klesne na nulu a virgule se působením M_φ vychýlí. Prudkost vychýlování je tím větší, čím je blíže 90° .

Složitější je vysvětlení děje, při němž se virgule poněkud pochoďou proutkaře sklání, až nad „pramenem“ míří. Přitom nepozorujeme, že by proutkař s virgulí zřetelně reagoval. Jeho akce se od předešlé liší tím, že ohnuté konce AA'' a BB'' jsou pevně v rukách, že třecí momenty zabrání jejich vykrucování. Se opět ustálí v poloze, kde platí $M_\varphi = -M_t$. Nyní však zvětší úhlovou výchylku φ' tím, že zvětší řídicí úhel α (zvětší úhel ramen (obr. 15). Virgule pak přejde působením většího momentu M_φ do větší výchylky φ' .

*) Není tedy v rovnovážné poloze labilní, při které by na virgule nepůsobil silou.



Obr. 16

z polohy φ' do větší úhlové výchylky φ'' . Takto povlovným zvětšováním úhlu α proutkař řídí plynulý růst výchylky virgule. Přitom si tuto svou činnost třeba ani neuvědomuje.

Virgule koná několikanásobné otáčky

V praktickém proutkaření, ale i při experimentech se virgule často uvádí do pohybu, při němž se několikrát otočí kolem osy $o_0 = AB$. Z počtu otoček se pak soudí na polohu, popř. jiné vlastnosti údajných zdrojů proutkohybných sil. Užívá se k tomu často kovových virgulí, u nichž jsou konce ramen přibližně v jedné přímce (obr. 1e,f).

Výklad tohoto jevu se opírá opět o zákonitost, vyjádřenou vztahem (8). Virgule se drží bez tření a na počátku se uvede do tvaru podle obr. 16a. Proutek se vychýlí o 180° do stabilní polohy b), ve které je α menší než 90° . Aby virgule pokračovala v pohybu, proutkař ji ohne v dolní úvrati do tvaru c). Tak vznikne pohybový moment, který udrží virguli v otáčivém pohybu stejného smyslu. Totéž se opakuje v každé další úvrati (obr. 16d atd.). K udržení periodického pohybu se musí nacvičit rytmické střídavé ohýbání ramen proutku ve vhodných okamžicích.

Tajemství samovolného překroucení virgule

Překroucení virgule je efektní trik, který se předvádí buď tak, že proutkař drží obě ramena proutku sám nebo jedno z ramen drží druhá osoba. Fyzikální vysvětlení této produkce je následující: Proutkař stiskne virguli tak pevně, že se nemůže v dlaních vykrucovat. Pak deformuje konce ramen do té míry, že úhel α je větší než 90° . Na těleso virgule pak působí otáčecí moment M_φ a proti němu stejně veliký torzní moment M_t . Proutkař zvětšuje úhel α , až se rameno virgule samo překroutí. Nízkou pevnost v kroucení zajistí proutkař volbou přirozené virgule s dlouhými a tenkými rameny.

Na závěr

Původ sil, které působí „podivné“ chování čarodějného proutku, je vysvětlen ze známých zákonů fyziky. O jiných hypotézách, z nichž některé byly uvedeny na začátku článku a které nic o vlastním vzniku

„proutko-hybných“ sil nevysvětlují, platí citát z díla I. Newtona „Philosophiae naturalis principia mathematica“:

Nelze připustit více příčin přírodních jevů,
než které jsou pravdivé
a dostatečně je vysvětlují.

Poznámka k článkům ing. V. Patrovského, CSc.

V ročníku 66 (1987/1988) tohoto časopisu vyšly dva články ing. V. Patrovského, CSc. „Mylné cesty psychické energie“ (č. 2 str. 60) a „Proutkaření bez proutku a bez virgule“ (č. 8 str. 335). Autor v člancích mimo jiné doporučuje mladým čtenářům, aby si správnost některých tvrzení, která v článku uvádí, ověřili vlastními pokusy. V článku v 8. čísle navrhuje i experimenty vhodné údajně pro studentskou odbornou činnost.

Pokládám za svou povinnost upozornit na to, že některá tvrzení v člancích obsažená nelze pokládat za prokázaná; některá jiná — jak bude ukázáno dále — jsou dokonce prokazatelně nesprávná.

Tak například v článku „Proutkaření bez proutku a bez virgule“ popisuje ing. V. Patrovský, CSc., změny intenzity příjmu vysílače VKV při přemísťování přijímače v terénu a dává tyto změny do souvislosti s geologickými anomáliemi a s reakcí proutkaře. Z autorova popisu je však naprosto zřejmé, že pozoroval důsledky interference přímé a odražené vlny (případně i většího počtu odražených vln) naladěné stanice. K střídání silné a slabé intenzity přijímaného signálu při přemísťování přijímače, případně k vymizení signálu na některých velmi ostře ohraničených místech dochází interferencí dvou vln s přibližně stejnou intenzitou podle toho, zda se na daném místě vlny setkávají se stejnou nebo s opačnou fází. Jev je dobře znám a souvisí s přítomností překážek v terénu (např. budov, stromů, lesa, stráně, skály), od kterých se elektromagnetické vlny odrážejí, a s polohou vysílače (projevuje se zvláště výrazně, je-li vlna přicházející přímo od vysílače zeslabena například kopcem). Při vysílání přes údolí, jak se o něm autor zmiňuje, dochází v místě příjmu k interferenci mezi přímým signálem a signálem odraženým od dna údolí. Účinnost odrazu závisí samozřejmě i na vodivosti **povrchu** terénu.

Je nabíledni, že tyto interferenční jevy nijak nesouvisejí s geologickými anomáliemi, pokud tyto anomálie nejsou v daném terénu provázeny velkými a náhlými změnami vertikálního reliéfu povrchu — například strmou strání, skalní stěnou či podobně.

Tím méně lze interferenční jevy na vlnách z vysílačů VKV spojovat s tzv. proutkařskou reakcí, kterou autor nazývá „biofyzikálním jevem“ a tvrdí, že jeho podstata není dosud uspokojivě vysvětlena. Ve skutečnosti byla proutkařova reakce vysvětlena již před delší dobou, a to tzv. Carpenterovým ideomotorickým jevem dobře známým z fyziologie: svalové napětí se v rukou proutkaře — zpravidla aniž si to proutkař uvědomuje — mění při jeho nevědomém pocitu, že je v místě, které hledá. Způsob držení proutku, kterému je nutno se naučit, je přitom takový, že nepatrný pohyb rukou (změna úhlu držení konců proutku) vychýlí proutek z jeho labilní rovnováhy a potenciální energie, uložená v pružné deformaci proutku, se projeví momentem síly. To budí mylný dojem, že na proutek působí síla zvenku. Mechaniku pohybu proutku v rukou proutkaře velmi důkladně prostudoval a matematicky zpracoval univerzitní profesor RNDr. Emil Kašpar, DrSc. Popsal ji i v tomto časopise (roč. 52, 1973/1974, čísla 2, 3 a 4 a také č. 1 a 2 letošního ročníku). V článkách v časopise Matematika a fyzika ve škole (roč. 9, 1979, č. 9 a 10) prof. Kašpar navrhl, aby se paradoxního chování proutku v rukou proutkaře využilo i při vyučování fyzice; návrh však zatím nebyl realizován.

Pokud jde o otázku účinnosti proutkaření při „hledání pramenů, rudných i vodních žil a dnes i geologických anomálií“ (viz článek v 8. čísle), byla studována mnoha vědeckými výzkumy opakovaně a velmi důkladně. Při důsledném dodržení vědeckých metod se nikdy nepodařilo prokázat, že údaj proutkaře překročil pravděpodobnost pouhého hádání. Nejpodrobněji jsou výsledky vědeckých experimentů i s vysvětlením příčin zdánlivých úspěchů popsány v knize O. Prokopa a W. Wimmera „Wünschelrute, Erdstrahlen und Radiästhesie. Die okkulten Strahlenfühligkeitslehren im Lichte der Wissenschaft“ (Enke Verlag, Stuttgart 1985). Kniha popisuje i případy odhalených podvodů. V češtině vyšla jiná kniha O. Prokopa a kol.: „Lékařské vědy proti pověrám a šarlatánství v medicíně (Avicenum 1984), v které jsou otázky spojené s proutkařskou reakcí rovněž probírány. V roce 1971 uveřejnil R. A. Foulkes v časopise Nature (sv. 229 (1971) str. 163—168) velmi důkladnou studii nazvanou „Dowsing Experiments“ (experimenty s proutkařením). Experimenty měly za úkol ověřit tehdy velmi rozšířené mínění, že proutkař je s to proutkem najít miny ukryté pod povrchem terénu. Proti očekávání samotného autora však ani jeden z 22 proutkařů nepřekročil při experimentech pravděpodobnost náhodného hádání. Článek je poučný i z hlediska metodiky. Autor v ní dbal nejen na to, aby pokusy byly prováděny bez možnosti získat informace jinak než podle pohybu proutku, ale velmi důkladně zpracoval výsledky i statisticky, což v těchto případech není jednoduché.

Všechny tyto výsledky jsou ovšem naprosto ve sporu s tvrzeními vyznavačů proutkaření, kteří často vystupují v televizi a v rozhlase

a publikují v denním tisku. Není proto zbytečné citovat alespoň část závěru z tzv. odborné akce Čs. vědeckotechnické společnosti, která se s názvem „Výzkum a praktické využití biolokace“ konala v Praze ve dnech 6. a 7. listopadu 1987. Účastníci, kteří se na této akci sešli, byli téměř všichni bezvýhradně přesvědčeni o účinnosti proutkařské reakce. Nicméně v konečném hodnocení výsledků jednání bylo mimo jiné konstatováno: „Cílem akce bylo seznámit účastníky se stavem biolokace a vyvolat hodnotnou diskusi. Z jednání akce vyplynulo, že na fenomén — s ohledem na stanovení nehomogenity prostředí bioindikací — existují různé názory. Většina účastníků je přesvědčena, že tento fenomén existuje, nelze jej však za současného stavu znalostí objektivně vysvětlit. Jedinou možností, jak tento fenomén dokázat nebo popřít, je hledání vědecky prokazatelných experimentů podle závěrů ze všech tří pracovních skupin.“

Ani nejpřesvědčenější zastánci účinnosti proutkařského jevu (nazývaného nejnověji fenomén biolokace) nebyli tedy s to koncem roku 1987 uvést kromě svého „přesvědčení“ nic, co by tuto účinnost podle pravidel vědy dokazovalo.

Pokus navržený v článku ing. V. Patrovského, CSc., „Mylné cesty psychické energie“ a spočívající v tom, že se experimentátor má dvakrát denně po pěti minutách dívat na deset fazolí v květináči, aby později ve „většině případů“ zjistil, že rostou rychleji, než deset fazolí kontrolního vzorku (na něž se takto nedíval), brali racionálně uvažující čtenáři patrně spíše jako legraci. Mohli se totiž domnívat, že autor článku od čtenářova experimentu očekává, že takový vliv neprokáže. V zájmu pravdy je však třeba konstatovat, že návrh na experiment s pohlížením na fazole takto míněn nebyl. Je to patrné z poměrně obsáhlé publikace téhož autora nazvané „Bioterapie, magnetoterapie“ (vydal oddíl jógy VŠ UK). V ní — mimo jiné — uveřejnil ing. V. Patrovský, CSc., fotografie květináčů s vyklíčenými fazolemi, na nichž je zřetelně vidět, že v květináči s fazolemi, na které upíral pohled svých očí, jsou rostliny nápadně vyšší, než rostliny v květináči s „kontrolním vzorkem“, v němž fazole pohledem očí ovlivňovány nebyly. Zatímco o rozdílu ve vzrůstu vyfotografovaných fazolí nelze pochybovat, o interpretaci, že vyšší vzrůst byl způsoben pohledem, pochybovat lze. Vždyť dodržet to, co se obvykle nazývá „jinak stejné podmínky pokusu“, tj. zajistit, aby se při pokusu změnil jen jediný parametr, je obtížné i ve fyzice. U biologických objektů, jejichž chování závisí na velkém množství faktorů často velmi obtížně kontrolovatelných, je to ještě obtížnější.

A tak z obou uveřejněných článků ing. V. Patrovského, CSc., vyplývá především to poučení, že dovednost vyvarovat se unáhlených interpretací a neřídit se při nich vlastním přáním, není nijak snadné získat. Patří ovšem k základnímu požadavku na vědeckého pracovníka.

RNDr. Laděk Pekárek, DrSc.

Komentář k poznámce RNDr. L. Pekárka, DrSc.

K poznámce dr. Pekárka, DrSc., stručně uvádím: Co se týče článku Proutkaření bez virgule, nejde zde o interferenci, ale jde o stočení polarizační roviny kmitů, což je jednak uvedeno v literatuře, jednak se lze o tom přesvědčit natočením přijímače. Je to specifická vlastnost VKV a UKV, která je popsána třeba J. Klabalem v Amat. rádiu č. 4/87 str. 134 jako dodatek k mému článku na téže straně. Ing. Klabal je odborník na VKV a musel by tedy o tom, co píše dr. Pekárek, DrSc., něco vědět. Dále, nejsem to já, kdo nazývá proutkařství biofyzikálním jevem, ale sovětští hydrogeologové (Sočevanov, Tarajev, Simonov aj.), kteří od roku 1965 předložili mnoho cenných informací. Že podloží má vliv na příjem VKV, upozornil před lety v článku Rádio na cestách dr. Mrázek. Jev znají i montéři televizních antén. Při mých pokusech byl souhlas útlumu VKV s reakcí proutkařů asi 90 %. Ti ovšem o zonách nevěděli předem a v terénu šli asi 15 m přede mnou.

Carpentierův jev lze použít k vysvětlení pohybů pendlu, ale nikoliv virgule. Nicméně v obou případech hraje roli autosugesce, tu však zkušený operátor dovede vyloučit. U dobrého operátora probíhá reakce zcela spontánně, což budí někdy dojem, že pohyb je způsoben jinou silou, než silou (křečí) svalů. To však nelze považovat za úmyslný pohyb; je to naopak jen potvrzení reality.

Prof. E. Kašpar, DrSc., kterého dr. Pekárek, DrSc., cituje (Rozhl. mat. fyz. č. 2—4, 1973/74) sice popsal řadu mechanismů s drátky, provázky, proutky a lafkami, ale to není adekvátní věda. Lze zde uvést vyjádření dr. Odehnala z Fyzikálního ústavu ČSAV v Řeži, který ve sborníku z Pedagog. dialogů, Skalský dvůr 1986, díl 4, str. 309, doslova píše (na adresu jednoho pracovníka z Psychoenergetické laboratoře prof. Kahudy): „Pracoviště, které není vybaveno moderní technikou a dělá vývody na základě provázek, magnetů a magnetek, je nesmysl“. Jako příklad adekvátního výzkumu proutkařství lze uvést MUDr. Bradnu, který měřil svalová napětí tenzometrem a elektrické potenciály, a to i na dálku. Pochopitelně, že za spolupráce elektroniků. Ne tak prof. Kašpar, DrSc. Nelze také argumentovat matematikou, neboť víme, že papír snese všechno a řada badatelů matematicky prokázala např. nemožnost létání vzduchem (Lalande, Newcomb) nebo nemožnost vytvoření vodíkové bomby (I. Curiová).

Již jsem několikrát zdůraznil, že fyzik nemůže rozhodovat ani řešit jevy, které patří do biologie, medicíny, biofyziky, popř. do psychologie. Dnes je obecně známo, že problémy se musí řešit za spolupráce několika adekvátních oborů, což již dávno vědí lékaři a biologové, kteří využívají chemie, chemici pak zase fyziky atd. Žádný odpovědný pracovník se

už dávno nesnaží dokazovat, že jedině ten jeho obor na všechno stačí! Fyzika se dostane k určité hranici, kterou nemůže překročit. Např. od kritických fyziků nikdo nic nikdy neslyšel (ale ani od prof. Kahudy) o ATP, myosinu, membránových potenciálech, sodíkové pumpě atd. Dr. Pekárek, DrSc., rád cituje knihy O. Prokopa, který jednostranně vybírá, co se mu hodí, a naopak ignoruje práce, které se nehodí, a názoru, že zkušený proutkař podvědomě vyhodnocuje terén, se musí vysmát každý hydrogeolog. Nechápu, proč dr. Pekárek, DrSc., cituje pokusy s hledáním min popsané R. A. Foulkesem a ve Vesmíru č. 10/83 zase argumentuje lyonským pokusem s mincemi z r. 1935 nebo s určováním pohlaví psa podle fotografie pendlem, když se jedná o vodu! Lze snad počítat hrušky a jablka, tedy předměty nesourodé? Dr. Pekárek, DrSc., také zásadně necituje takové knihy jako Ch. Bird: „The Divining Rod“, články MUDr. Bradny, informace uvedené v knize „Telepatie a jasnovidnost“ (Svoboda 1970) atd. Snad o nich neví nebo nechce vědět, ačkoliv nabádá k důkladnému studiu literatury (Symposium Alšovice str. 8, 1984).

Co se týče přesvědčivosti proutkařského jevu, potom kromě potvrzení jinými proutkaři a skutečného výsledku existuje potvrzení místa anomálie řadou geofyzikálních metod (viz např. Sdělovací technika č. 4, 131, 1976), chce to ovšem dělat rešerši a nikoliv se jen pít. O těchto geofyzikálních metodách se dr. Pekárek, DrSc., nikdy nezmínil.

Co se týče kritiky pokusu s fazolemi a brachem v článku „Mylné cesty k psychické energii“, je podivné, že dr. Pekárek, DrSc., (a před rokem J. K.) předpokládají, že vědecký pracovník pustí do tisku něco, co nebylo ověřeno a že neumí správně provést a interpretovat pokus (62 let, 70 odborných prací, 30 prací z biofyziky, a to i v zahraničí, pobyt v cizině) nebo že se předem neinformovali. Jistota dr. Pekárka, DrSc., že jde o legraci, ačkoliv číslo vyšlo v říjnu a nikoliv 1. dubna, jen dokazuje, že fyzik nedovede překlenout bariéru živé a neživé hmoty. Ve zmíněném článku je jasně řečeno, že jde o generování elektrických nábojů organismem a že nejde o žádnou magii. M. Faraday, který kdysi dělal pokusy s elektrickými rybami, také nedovedl přijít na to, že jde o Galvaniho živočišnou elektřinu a že elektrický úhoř nemá v sobě žádné dva kovy. Doporučuji prostudovat práce A. S. Presmana a prof. Kogana. Kritizovaný jev byl i náplní úkolu VŠCHT F 39927, říjen 1983 a oponován. Jev je popsán v sovětské literatuře (Presman, Kažinský), dále na 2. Psych. konferenci Monte Carlo, str. 150, 1975. Dr. Pekárek, DrSc., by si měl uvědomit, že v minulosti mnoho lidí soudilo, že něco je nesmysl (létání, atom. energie, bakterie, echolokace). Mám dojem, že soudný člověk se předem informuje, konzultuje, popř. provede pokusy. Provázky, prkénka ani ignorace autorů není věda a apriorní spekulace nás pak vrací jen do dob scholastiky.

ing. V. Patrovský, CSc.

Poznámka redakce

Některé články ing. V. Patrovského, CSc., opublikované v 66. ročníku našeho časopisu, vzbudily kritickou odezvu mezi našimi fyziky. Články se týkaly tzv. sporných jevů, k nimž počítáme proutkařství a různé, často populární, ale z vědeckého hlediska sporné vlivy různých fyzikálních faktorů na živé organismy a naopak. Problematická zde bývá metodika experimentů a jejich vyhodnocování, chybí kauzální vysvětlení jejich případné podstaty, přičemž tyto jevy mají často nádech senzačnosti. Přitom jde o jevy hraniční, které se dotýkají biologie, neurologie a dalších funkcí živého organismu, včetně jeho psychologických reakcí.

Ze všech těchto důvodů nepovažujeme časopis Rozhledy matematicko-fyzikální ani za kompetentní ani za vhodnou tribunu k diskusím a rozebírání těchto a podobných témat. Vzhledem k tomu, že odezva na publikované články dostala publicitu i v dalších časopisech (v časopise Vesmír č. 2, 1988 pod výmluvným názvem Kapka dehtu), rozhodli jsme se vrátit se ještě naposled k tomuto tématu, uveřejnit kritickou poznámku RNDr. L. Pekárka, DrSc., a dát přitom možnost i autorovi ing. V. Patrovskému, CSc., na tuto kritiku reagovat. Podrobněji rozvádíme redakční stanovisko k těmto otázkám v úvodníku tohoto čísla. Pokud jde o vlastní fyzikální problematiku mechanického pohybu proutku, objasňuje ji článek prof. RNDr. E. Kašpara, DrSc., v 1. a 2. čísle tohoto ročníku.

Tím považujeme diskusi k podobným tématům v našem časopise za ukončenou, neboť by nás odvedla daleko od našeho vlastního poslání a úkolu — pěstovat v mladých lidech zájem a lásku k matematice a fyzice, těmto pilířům našeho přírodovědného poznání.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Aurel Stodola — otec parných turbín

Prof. dr. JÁN CHRAPAN, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš

Dňa 10. 5. 1989 uplynulo 130 rokov od narodenia zakladateľa teórie parných a plynových turbín, vrbického rodáka Aurela Stodolu. Práve v tento deň sa podarilo spoločným úsilím *Slovenskej spoločnosti pre dejiny vied a techniky*, *Slovenskej akadémie vied*, *Ministerstva kultúry SSR* ako aj *Okresného a Mestského národného výboru* a *Literárno-historického*

múzea Janka Kráľa v Liptovskom Mikuláši uložiť popol Aurela Stodolu a jeho manželky Dariny, rod. Pálkovej, na čestnom mieste mestského cintorína v Liptovskom Mikuláši.

Vo Vrbici, obci, ktorú dnes pohltil Liptovský Mikuláš, mal otec Ondrej Stodola podiel na menšej garbiarskej*) dielni. Na rodnom dome Aurela je pamätná tabuľa. Pripomína sté výročie narodenia „otca parných a plynových turbín“, ktorý započal svoju púť za vzdelaním v Liptovskom Mikuláši, pokračoval v Levoči a maturoval na maďarskom gymnáziu v Košiciach (slovenské gymnáziá boli od polovice sedemdesiatych rokov zatvorené). Rok študoval na budapeštianskej technike, kde mu v roku 1877 poskytli ako talentovanému študentovi trojročné štipendium na chýrnej vysokej škole technickej v Zürichu. V rokoch 1880 a 1881 získava mladý Stodola praktické skúsenosti v Strojárni štátnych uhorských železníc v Budapešti, odkiaľ odchádza do Charlottenburgu, kde v tom čase prednášal Helmholtz, a potom do Paríža na Sorbonn. V rokoch 1884 až 1892 pracoval ako inžinier konštruktér firmy Ruston v Prahe. Tu dostal pozvanie prednášať a viesť katedru stavby strojov na techniku v Zürichu, kde mal ešte zo štúdií dobré meno. Pozvanie prijal a ako profesor tu pôsobil do roku 1929, kedy odišiel do penzie. V Zürichu zotrval až do svojej smrti. Umrel 25. 12. 1942. Na Slovensku bol poslednýkrát v roku 1912, keď mu umrela matka. Z Liptovského Mikuláša pochádzala aj jeho manželka, dcéra tamojšieho garbiara, s ktorou sa oženil v roku 1887. Mali dve dcéry. Staršia bola nadpriemerne nadaná, no duševne sa zrútila a ešte mladá umrela. Obe dcéry sa narodili v Liptovskom Mikuláši. Mladšia, Olga, sa vydala za veterinára. Jej pričinením sa zachovali dokumenty, osvetľujúce súkromný život jej otca. Testamentom zabezpečila pre svojich rodičov miesto na zürichskom cintoríne do konca roka 1988.

V literatúre možno nájsť asi 80 Stodolových vedeckých pojednaní. Vrcholným je jeho dielo „*Parné turbíny a vyhlídky tepelných strojov*“, ktoré vyšlo v nemčine v roku 1903 a bolo preložené do viacerých svetových jazykov. Stodola sa zaoberal problémami kmitania a kritického momentu síl, pôsobiacich na rotujúce telesá. Zamýšľal sa nad možnosťami zvýšiť účinnosť tepelných strojov, z čoho pochádza *Gayov—Stodolov zákon* o energetických stratách pri nedokonale vratných termodynamických dejoch. Študoval podmienky prúdenia pary. Ako 72 ročný Stodola vyjadril svoje filozofické a sociálne myšlienky v práci „*Myšlienky o svetonázore z hľadiska inžiniera*“. Techniku v nej považuje za základ civilizácie. Predvídal dnešný rozvoj automatizácie. Pracoval v oblasti teórie automatickej regulácie. Podal základ analýzy kvality regulačného pochodu. Teóriu dôsledne overoval experimentom, na svojej katedre vybudoval pozoruhodné laboratórium.

*) česky koželužské (pozn. red.)

Aurel Stodola bol okrem vynikajúceho technika a vedca aj dobrým pedagógom. Svojim prednáškam dával okrem naučných aj výchovné ciele. Podľa Komenského tvrdil, že učivo má byť podané názorne, prednáška musí poslucháča prinútiť myslieť, učiteľ má byť trpezlivý, citlivý, taktný a musí pociťovať vnútornú potrebu sebavzdelávania. Podľa jeho názoru bolo rozsiahle všeobecné vzdelanie podmienkou pre vysokoškolské štúdium, ktorému sa majú venovať len primerane nadaní. Volal po vyučovaní dejín vied a techniky. Jeho prednášky považovali študenti za také hodnotné, že nechceli prísť ani o slovo z nich, ani o drobný detail presných a prehľadných nákresov, ktoré Stodola pri prednáškach kreslil cvičenou rukou bývalého priemyselného konštruktéra. Študenti si preto vytvárali skupinky, z ktorých každá verne zaznamenávala fakty, podané počas Stodolových prednášok iným vyjadrovacím prostriedkom: jedna skupina sledovala matematické operácie, druhá doslovne zapisovala slovný doprovod, ďalšia kreslila detaily náčrtov a pod. Vo voľných chvíľach si potom takto zachytené prednášky kompletovali.

Vedecké dielo profesora Stodolu našlo všeobecné uznanie. Jeho žiak Albert Einstein o ňom písal: „Keď beriem do rúk pero, aby som napísal niekoľko slov o profesorovi Stodolovi, o majstrovi techniky, o jemnom a pritom pevnom mužovi, cítim, že moje vyjadrovacie schopnosti sú príliš odmedzené, aby som sa o tom človeku vyjadril tak, ako si to zasluhuje“. Stodola dostal mnohé významenia a pocty. Mezi nimi vyniká anglická zlatá medaila Jamesa Watta, ktorú mu udelili v roku 1940. Čestný doktorát dostal od züríjskej univerzity i techniky, Vyskej školy technickej v Hannoveri i od nemeckej techniky v Brne a pražského Českého vysokého učení technického. Spolok nemeckých inžinierov ocenil Stodolovu prácu udelením pamätnej medaily Grashofovej roku 1908. Stodola bol aj členom korešpondentom Francúzskej akadémie vied. Prvý doktorát Slovenskej vysokej školy technickej, hneď po jej vzniku v roku 1938, patrila Aurelovi Stodolovi.

Život a dielo Aurela Stodolu, technika, dobrého matematika, fyzika a vysokoškolského pedagóga, nie sú dosiaľ uspokojivo spracované a zverejnené. Synovec Aurela Stodolu, slovenský dramatik, národný umelec *Ivan Stodola* (1888–1977), podal jeho životopis v knihe „*Náš strýko Aurel*“, ktorá vyšla v roku 1968. Z príležitosti 130. výročia narodenia Aurela Stodolu bola o ňom zmienka v dennej tlači, televízii a rozhlase. Vedecký seminár zo dňa 10. 5. 1989 v Liptovskom Mikuláši bol impulzom pre historické zhodnotenie významu diela tohto, na svoju vlasť nikdy nezabúdajúceho, vedca svetového mena.

Přemýšlejte a počítejte — řešení

Texty úloh, jejichž řešení nyní uvádíme, byly otištěny v předešlém čísle Rozhledů.

1. Danou rovnici můžeme napsat takto:

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 5x^3 + 7x$$

$$(x^2 - 2)^2 = 5x^3 + 7x.$$

Levá strana poslední rovnosti je pro každé x nezáporná. Pro záporné x je však pravá strana téže rovnosti záporná. Proto pro záporné x nemůže uvedená rovnost platit, takže žádné záporné číslo x není kořenem dané rovnice.

2. Je-li pravdivá daná rovnost, platí to i o této rovnosti:

$$(b^2 + c^2)(a^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = 0 \quad (1)$$

Obráceně, z rovnosti (1) plyne daná rovnost. Vypočteme-li levou stranu rovnosti (1), dostaneme

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - 2abcd - b^2d^2 = a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2 = (ab - cd)^2 = 0,$$

neboť podle předpokladu je $ab - cd = 0$. Rovnost (1), a tedy i daná rovnost, je pravdivá.

3. Danou rovnost můžeme napsat takto:

$$\frac{2a + b}{b} \cdot \frac{2b + a}{a} \geq 9 \quad (1)$$

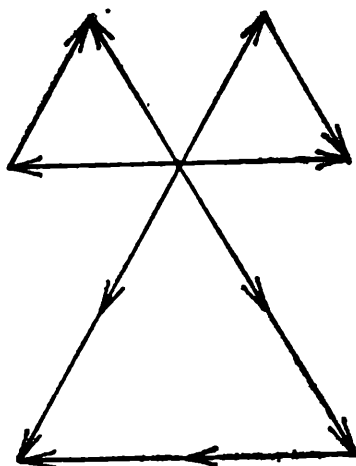
Protože je $a > 0$, $b > 0$, je také $ab > 0$. Proto z nerovnosti (1) plyne nerovnost

$$(2a + b) \cdot (2b + a) \geq 9ab. \quad (2)$$

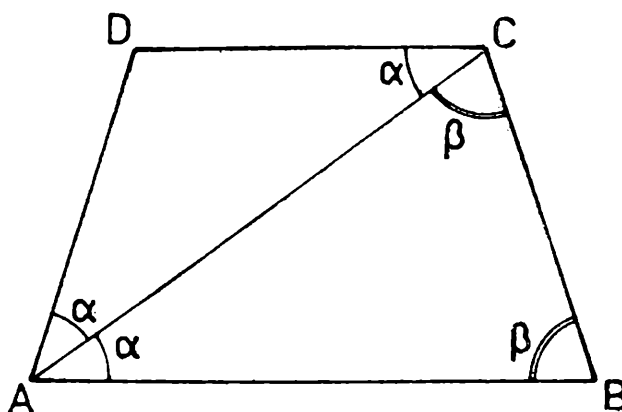
Obráceně, z nerovnosti (2) plyne nerovnost (1). Z nerovnosti (2) však postupně plyne

$$\begin{aligned} 4ab + 2b^2 + 2a^2 + ab - 9ab &\geq 0 \\ 2(a^2 - 2ab + b^2) &\geq 0 \\ 2(a - b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je správná. Protože z ní plynou postupně předešlé nerovnosti, je správná i nerovnost (2), a tedy i nerovnost (1).



Obr. 1



Obr. 2

4. Řešení úlohy 4 je provedeno na obr. 1.

5. Podle věty o střídavých úhlech jsou úhly BAC , DCA shodné (obr. 2). Protože trojúhelník ACD je rovnoramenný se základnou AC , jsou také úhly DCA , DAC shodné. Je tedy

$$|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle BAC| = \alpha.$$

Protože trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou BC , jsou úhly ABC , ACB shodné, takže je

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACB| = \beta.$$

Protože lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný s rameny AD , BC , je $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAD| = 2\alpha$. Podle věty o součtu velikostí úhlu trojúhelníku je $2\beta + \alpha = 180^\circ$ čili $5\alpha = 180^\circ$ a tedy $\beta = 72^\circ$.

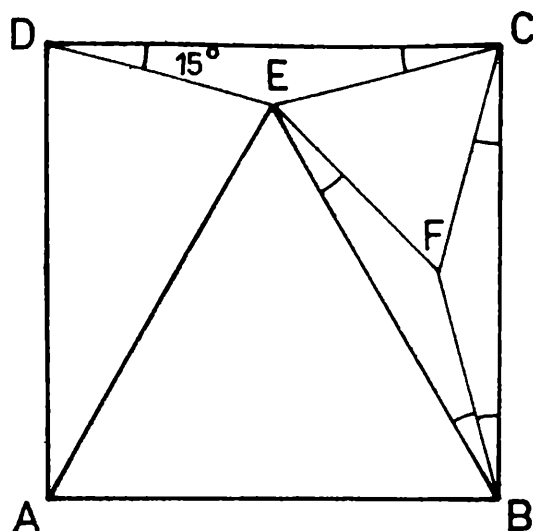
6. Trojúhelník CDE je rovnoramenný se základnou CD a s úhlem CED o velikosti 150° (obr. 3). Proto jsou úhly ECD , EDC shodné a podle věty o součtu velikostí úhlů trojúhelníku je $|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle EDC| = 15^\circ$. Sestrojíme trojúhelník CBF , který je částí čtverce $ABCD$ a je shodný s trojúhelníkem CDE . Potom jeho vrchol F je vnitřním bodem úhlu BCE . Zároveň je

$$|CF| = |CE| \text{ a } |\sphericalangle ECF| = |\sphericalangle BCD| - 2|\sphericalangle ECD| = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

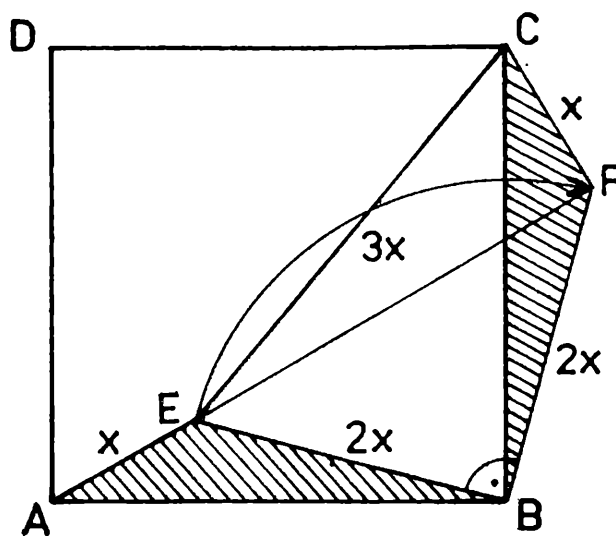
Z toho a z věty o součtu velikostí úhlů v trojúhelníku plyne, že rovnoramenný trojúhelník CEF se základnou EF je rovnostranný. Proto je $|\sphericalangle EFC| = 60^\circ$. Zároveň je

$$\begin{aligned} |\sphericalangle EFC| + |\sphericalangle CFB| + |\sphericalangle BFE| &= 360^\circ, \text{ čili} \\ 60^\circ + 150^\circ + |\sphericalangle BFE| &= 360^\circ, \end{aligned}$$

takže $|\sphericalangle BFE| = 150^\circ$. Z toho a z rovností $|EF| = |FC| = |FB|$ plyne, že je $\triangle BEF \cong \triangle BCF$ (sus). Proto je $|BE| = |BC| = |AB|$. Ze sou-



Obr. 3



Obr. 4

měrnosti trojúhelníku ABE podle společné osy stran AB , CD čtverce $ABCD$ plyne, že je $|AE| = |BE| = |AB|$. Trojúhelník ABE je tedy rovnostranný, takže každý jeho úhel má velikost 60° .

7. Z dané podmínky plyne, že můžeme psát

$$|AE| = x, \quad |BE| = 2x, \quad |CE| = 3x. \quad (1)$$

Otočíme-li trojúhelník BEA kolem vrcholu B tak, aby vrchol A přešel do vrcholu C , je velikost tohoto otočení 90° . Trojúhelník BEA přejde tímto otočením do trojúhelníku BFC , který leží v opačné polorovině k polorovině BCD . Je tedy

$$|CF| = |AE| = x \quad (2)$$

$$|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle CFB|. \quad (3)$$

Protože velikost otočení je 90° , je podle rovností (1)

$$BF \perp BE, \quad |BF| = |BE| = 2x, \quad (4)$$

takže trojúhelník EFB je pravoúhlý rovnoramenný s přeponou EF . Z toho a z věty o součtu velikostí úhlů v trojúhelníku plyne, že je

$$|\sphericalangle EFB| = |\sphericalangle FEB| = 45^\circ. \quad (5)$$

Podle Pythagorovy věty platí pro trojúhelník EFB rovnost

$$|BE|^2 + |BF|^2 = |EF|^2$$

čili podle rovností (1) a (4) je $|EF|^2 = 4x^2 + 4x^2 = 8x^2$. Z toho podle rovnosti (2) a (1) plyne, že je

$$|EF|^2 + |CF|^2 = 8x^2 + x^2 = 9x^2 = |CE|^2.$$

Podle obrácení věty Pythagorovy je trojúhelník $EF C$ pravoúhlý s přeponou CE , takže

$$|\sphericalangle CFE| = 90^\circ \quad (6)$$

Z rovnosti (3), z obr. 4 a z rovností (5), (6) plyne, že je

$$|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle CFB| = |\sphericalangle EFB| + |\sphericalangle CFE| = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

Emil Kraemer

Dva dešifrované dopisy

V 1. čísle letošního ročníku Rozhledů jste si možná přečetli a pak řešili úlohu, v níž bylo úkolem rozluštit dva šifrované dopisy. Jak při dešifrování postupovali oba chlapci, si nyní popíšeme.

Pavel se podíval na tiket sportky, na kterém Jarda přeškrtl čísla 1, 5, 11, 16, 20. Usmál se a v duchu si řekl: To znám. Napsal do jedné řádky přirozená čísla podle velikosti od 1 do 20 a pod ně napsal prvních dvacet písmen abecedy, přičemž se rozhodl vynechat písmena opatřená háčkem, čárkou i kroužkem. Když došel k písmenu *ch*, chvíli zaváhal a pak je nenapsal. Pomyslel si přitom, že v základním Morseově kódu se také neuvádí. Obdobně je tomu na klávesnici psacích strojů a počítačů.

Dostal tak dva řádky:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t

Podtrhl čísla, jež byla přeškrtnuta na tiketu, a pod nimi přečetl pětici písmen

a, e, k, p, t.

Z nich lze vytvořit celkem

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

slov. Na první místo zleva totiž můžeme dát některé z těchto pěti písmen, na druhé místo některé ze zbývajících čtyř písmen atd. Názvy dní v týdnu o pěti písmenech jsou v češtině jen dva, a to úterý a pátek. Pro náš případ přichází v úvahu pouze pátek. Posloupnost *ae k p t* je pro slovo pátek šifra, která se nazývá *anagram*. O anagramech se psalo v Rozhledech v článku *O jednom neobvyklém kódování* (roč. 63, 1984/85, č. 10).

Zbývá ještě dešifrovat záhadný vzkaz Pavla Jardovi, který zněl:

Ehoj! GIOEQ XI

Slovo „Ehoj!“, které vzniklo z pozdravu „Ahoj!“, je klíčové slovo,

z něhož plyne, že písmenu A odpovídá v šifře písmeno E. Jde o posun v abecedě o čtyři písmena. Jarda podle toho napsal kódovací tabulku:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
<u>E</u>	<u>F</u>	<u>G</u>	<u>H</u>	<u>I</u>	J	K	L	M	<u>N</u>	<u>O</u>	<u>P</u>	<u>Q</u>	R	S	T	U	V	W	<u>X</u>	<u>Y</u>	<u>Z</u>				

Ve druhém řádku je pod každým písmenem abecedy napsáno písmeno, které je nahrazuje v šifře. Vzkaz po dešifrování tedy zní:

CEKAM TE

Je ovšem třeba doplnit dva háčky a jednu čárku. Zbývá ještě nedořešená záležitost, která se našeho problému netýkala. Kdyby totiž v šifře byla písmena A, B, C, D, potom zatím nevíme, kterým písmenům by odpovídala. Lze se dohodnout, že tato písmena v naší tabulce napíšeme po řadě pod W, X, Y, Z. O tomto typu kódování se můžete dočíst v článcích A. Bicanové a M. Trcha *O komunikaci, kódování a kryptografii I, II* (Rozhledy m.-f., roč. 62, 1983/84, č. 9 a 10).

Uvedené příklady šifrování byly celkem jednoduché. Dešifrování by ztížila i taková maličkost, kdybyste mezi písmena abecedy zařadili písmeno *ch*, jež v češtině v běžné praxi nepovažujeme za dvojici písmen, tj. spřežku. Jistě by vás překvapilo, kdybyste se setkali se zprávou napsanou ve stylu původních obyvatel Vánočního ostrova, kteří řadili znaky v jednom řádku zleva doprava a v dalším zprava doleva. Na každém druhém řádku byly přitom znaky obrácené „vzhůru nohama“. Celek tedy budil dojem dlouhé řádky, která je složena do stránky.

Jiří Mida

Dodatek pro přemýšlivé čtenáře

Zamyslete se nad možností využít šachovnice k šifrování. Své náměty nám zašlete, nejzajímavější otiskneme.

Řešení dvou úloh z 1. čísla

Dárky

Označíme cenu v dolarech dárku pro manželku m , pro Dášu d , pro Alenu a a pro Petra p . Sestavíme rovnice:

$$\begin{aligned}d + a + p &= 254 \\m + a + p &= 296 \\m + d + p &= 304 \\m + d + a &= 283\end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic pro neznámé m, d, a, p dostaneme $m = 125$, $d = 83$, $a = 75$, $p = 96$. Zbývá ještě provést zkoušku a sestavit odpověď.

Kruh a čtverce v postupném poměru

a) Označíme-li $|SA| = r$, S_1 obsah daného kruhu, S_2 obsah čtverce $ABCD$ a S_3 obsah čtverce $EFGH$, platí

$$S_1 = \pi r^2, S_2 = |AC| \cdot |BS| = 2r^2, S_3 = |EF|^2 = \frac{1}{4} |AC|^2 = r^2; \text{ tj.}$$

$$S_1 : S_2 : S_3 = \pi : 2 : 1.$$

b) Označíme-li $|SA| = r$, o_1 obvod kruhu (délku kružnice), o_2 obvod čtverce $ABCD$ a o_3 obvod čtverce $EFGH$, platí

$$o_1 = 2\pi r, o_2 = 4 \cdot |AB| = 4r\sqrt{2}, o_3 = 4 \cdot |EF| = 4r, \text{ tj. } o_1 : o_2 : o_3 = \pi : 2\sqrt{2} : 2.$$

Josef Trejbal

Zveřejňujeme jména řešitelů úlohy z článku RNDr. Milana Komana, CSc., *Jak dříve lidé počítali*, který byl otištěn v rubrice PŘEMYŠLÍME, ŘEŠÍME . . . v 7. čísle 67. ročníku (1988/89):

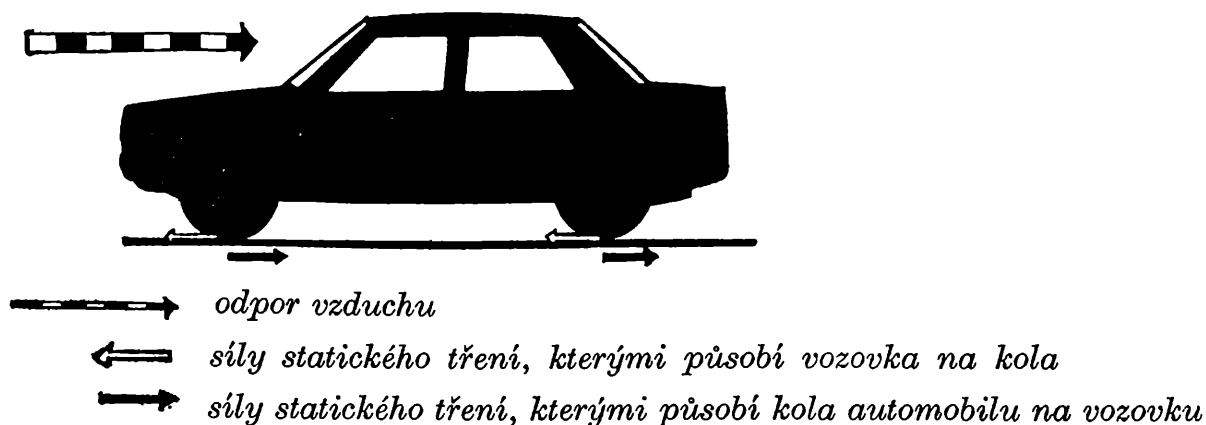
Michal Bulant, G, kpt. Jaroše, Brno; Martin Kočtář, 4. C, G Bruntál; Otakar Pitrmuc, 4. C, G Jilemnice; Jan Sekyra, Budovatelská, České Budějovice

Omyly, které ovládly svět

Zpomaluje síla tření mezi vozovkou a pneumatikou pohyb automobilu?

Kladná odpověď na uvedenou otázku se zdá být jednoznačná. „Motor automobil pohání, tření kol o vozovku a odpor vzduchu působí při jízdě po rovině brzdícími silami“, tak by se dala ve stručnosti vyslovit běžná, ale nesprávná představa o největších silách, které působí při jízdě automobilu.

Jestliže se však nad uvedenou situací trochu zamyslíme, brzy si uvědomíme, že motor sám nemůže vyvolat pohyb automobilu, protože je jeho součástí. Síly, kterými hnací soustava působí na kola, jsou vnitřní síly a ty se vzhledem k principu akce a reakce projeví na automobilu jako celku jen malými deformačními účinky. Podmínkou, aby se automobil po vodorovné silnici rozjížděl, nebo alespoň udržoval stálou rychlost, je, aby na něj působila mimo odporu vzduchu další vnější síla. Která vnější síla má tuto hnací funkci, okamžitě vyplyne z myšlenkového pokusu, při kterém necháme rozjíždět automobil po



Schematické znázornění sil působících při rovnoměrné jízdě automobilu po vodorovné vozovce. Síly působící ve svislém směru a valivý odpor nejsou znázorněny.

dokonale kluzké zledovatělé silnici. Otáčející se kola budou zřejmě prokluzovat a automobil zůstane stát na místě. Na drsném podkladu se však výsledek změní. Motorem a hnací soustavou poháněná kola začnou působit. Nikoliv však na auto, ale na vozovku silou, která míří vzad. Motor automobilu tedy nepohání samotný vůz, ale vlastně postrkuje vozovku, a tedy i celou Zemi. Vzhledem k nepředstavitelně velké hmotnosti Země a v kosmickém měřítku nicotné velikosti působící síly se ovšem toto působení znatelným pohybovým účinkem na rotaci Země neprojeví. Jistě byste si však dovedli představit podobnou situaci v případě, že by „vozovka“, po které se auto rozjíždí, byla pohyblivá a směřovala podél obvodu velkého koníčkového kolotoče, který by byl otáčivý a měl s automobilem srovnatelnou hmotnost.

✱ Nemusím asi nikoho přesvědčovat, že výsledkem takové jízdy by bylo i roztočení kolotoče ve směru dozadu, ve kterém na vozovku působí otáčející se kola. Roztlačují-li však pneumatiky auta vozovku, musí podle principu akce a reakce působit stejně velkou silou i vozovka na auto. Tření, kterým působí pneumatiky na vozovku směrem dozadu, je současně provázáno silami tření, kterými působí vozovka na kola v opačném směru. Tření mezi vozovkou a pneumatikami tedy není silou, která by pohyb automobilu brzdila, ale je naopak silou hnací.

Velikost této síly omezují dva faktory. Jedním je výkon motoru, druhým kvalita pneumatik a povrchu vozovky. Ani při sebevětším výkonu motoru nemůže totiž síla statického tření mezi vozovkou a pneumatikou, která tlačí auto vpřed, překročit určitou maximální hodnotu $F_{\max}$ danou součinem kolmé tlakové síly F_n mezi pneumatikou a vozovkou a součinitelem statického tření f_0 mezi vozovkou a pneumatikou, $F_{\max} = F_n f_0$. Proto je např. pro sportovní úspěch v závodech automobilů technologie výroby pneumatik závodních vozů stejně důležitá

jako hledání cest ke zvýšení výkonů motorů. K dosažení maximální třecí síly směřují i úpravy tvaru karoserií a jejich doplňků, které mají za cíl zvětšit přitlačení pneumatik k vozovce, tedy sílu F_n .

Vše, co jsme doposud řekli o síle tření, platí ovšem pouze v případě, že se automobil po vodorovné vozovce rozjíždí, nebo na ní udržuje stálou rychlost. Pokud motorem nebo brzdami se otáčky kol snižují, budou třecí síly mezi vozovkou a pneumatikami namířené opačně, než jsme výše uváděli. Vodorovně na vozovku bude působit síla mířící vpřed, na kola automobilu působit třecí síla proti směru jízdy.

Síla tření mezi vozovkou a pneumatikami tedy může být někdy silou hnací, v jiném případě silou brzdící.

Úkol pro vás :

Nakreslete obdobný schematický obrázek působících sil pro případ, že se auto rozjíždí a má pouze náhon předních kol.

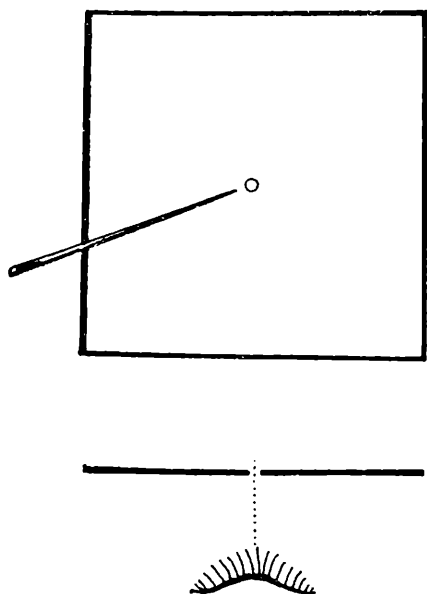
Laboratoř doma

Pohled dírkou

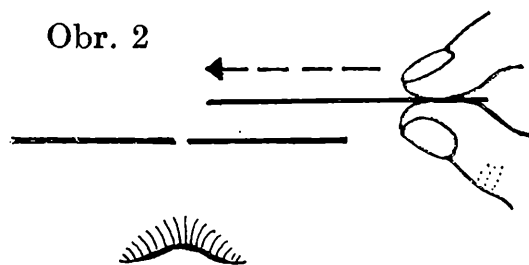
Do ústřížku alobalu o rozměrech přibližně $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ udělejte jehlou malou díрку. Přidržte alobal asi 1 cm před svým okem a dívejte se dírkou.

Druhý kousek alobalu současně posunujte před dírkou zprava doleva. Pozorujte, jak se díрка postupně od pravé strany zakrývá (obr. 4).

Zopakujte svůj pokus s tím rozdílem, že clonu budete posunovat mezi dírkou a okem. Při pohybu clony zprava doleva budete asi očekávat, že se díрка bude zatmívat stejným způsobem jako v prvním případě. Bude však obrázek s otazníkem pravdivý (obr. 5).

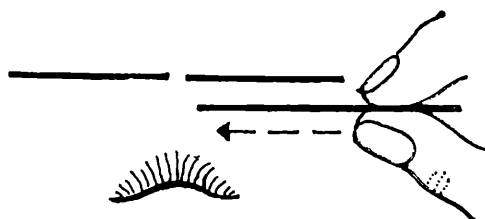


Obr. 1

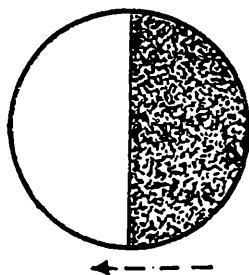


Obr. 2

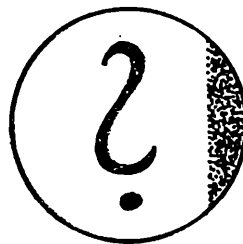
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Úkol pro vás :

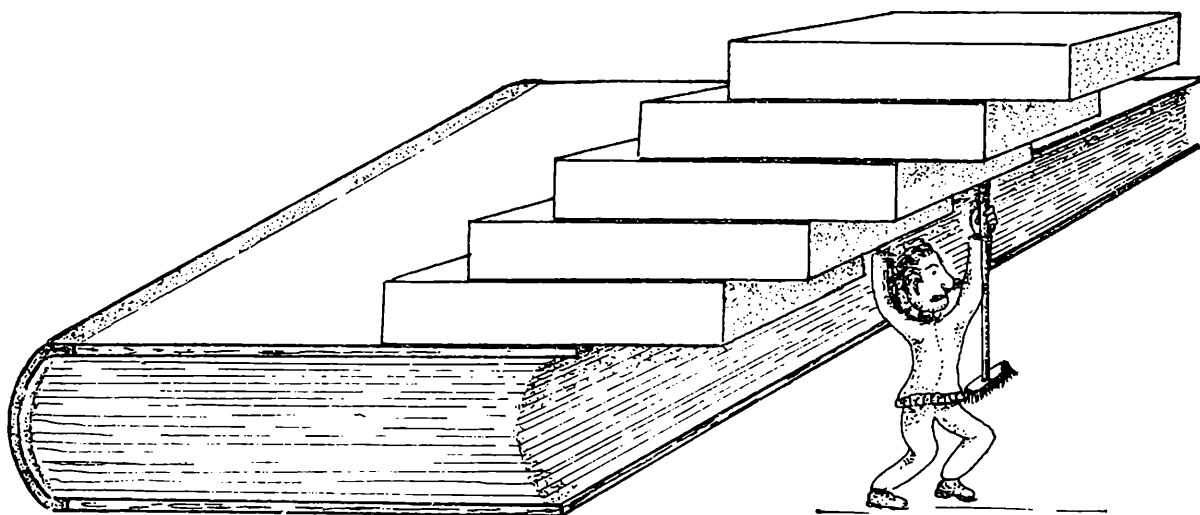
1. Vyslovte svou hypotézu o výsledku pokusu a zdůvodněte ji obrázkem.
2. Proveďte pokus a popište své pozorování.
3. Jestliže se vaše hypotéza nepotvrdila, vysvětlete obrázkem výsledek pokusu.

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Úloha, kterou můžete řešit i pokusem.

Na obrázku je pět kostek domina postavených tak, aby přesahovaly okraj knihy. Můžete však použít i stejné krabičky se zápalkami. V tomto případě přesahuje krajní kostka okraj téměř o jeden a půl délky kostky. Jaký největší přesah lze s pěti ležícími kostkami dosáhnout bez toho, aby byly kostky zespoda podepřeny či shora jiným předmětem zatíženy?



Úkol pro vás :

Nakreslete na čtverečkovaný papír svůj návrh sestavy s co největším přesahem kostek a zakreslete do obrázku těžiště této soustavy kostek.

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu :

RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK v Praze, Ke Karlovu 3, 121 16
Praha 2. Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Řešte s námi (2)

Pokračujeme další pětici úloh (budeme je i nadále číslovat průběžně).

6.*Dokažte, že v rovině nelze rozmístit sedm přímek a sedm bodů tak, aby každým z bodů procházely právě tři přímky a na každé z přímek ležely právě tři body.

7. Kolik existuje (možných) poloh hodinových ručiček, při nichž nelze určit, kolik je právě hodin, když nevíme, která ručička je malá a která velká, a hodiny se zastavily?

8. Jsou-li a, b, c velikosti stran trojúhelníku, pak

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Dokažte.

9. Dva hráči hrají následující hru: Z hromádky 25 zápalek si každý postupně bere jednu, dvě nebo tři zápalky. Vyhrává ten, který bude mít nakonec (až hromádku rozeberou) sudý počet zápalek. Kdo vyhraje při správné hře — začínající hráč nebo jeho soupeř? A jak má hrát, aby vyhrál? Jak se změní odpověď, jestliže za vítěze budeme považovat toho, který získá lichý počet zápalek?

10.*Je dán konvexní čtyřúhelník pokrytý čtyřmi kruhy se středy v jeho vrcholech. Dokažte, že z daných kruhů lze vybrat tři tak, že pokrývají trojúhelník určený jejich středy.

A nyní, jak jsme slíbili v minulém čísle, uvádíme řešení prvních pěti úloh. Pokud jste se do jejich řešení ještě nepustili, máte k tomu teď nejlepší příležitost!

1. Uvažujme stát s N obyvateli s volebním právem a podívejme se, jaký nejmenší počet voličů může prosadit svého kandidáta proti opozici všech ostatních. O voličích předpokládáme, že jsou rozděleni do n_1

skupin (1. řádu), každá tato skupina do n_2 menších skupin (2. řádu), . . až po nejmenší skupiny $(k - 1)$ -tého řádu po n_k voličích (tj. $N = n_1 n_2 \dots n_k$). Abychom si usnadnili vyjadřování, řekněme, že každý volič tvoří jednočlennou skupinu k -tého řádu a všichni obyvatelé tvoří skupinu řádu 0 (tj. $n_0 = 1$). Řekneme, že skupina řádu i je vyhraná, jestliže její zástupce je přívržencem dosavadního prezidenta. Aby skupina řádu i byla vyhraná, musí obsahovat nejméně $\left\lfloor \frac{n_i + 1}{2} \right\rfloor + 1$ vyhraných skupin řádu $i + 1$, a to je zároveň i postačující.

Skupina, která není vyhraná, nemusí obsahovat žádné vyhrané podskupiny. Aby tedy skupina řádu 0 byla vyhraná (což znamená vítězství prezidenta Miraflora), musí být alespoň

$$\left(\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \dots \left(\left\lfloor \frac{n_k}{2} \right\rfloor + 1 \right) \quad (1)$$

skupin řádu k vyhraných, tj. aspoň uvedený počet voličů musí být pro dosavadního prezidenta. Na druhé straně je z předchozí úvahy jasné, jak je třeba rozmístit prezidentovy přívržence a jak mají hlasovat.

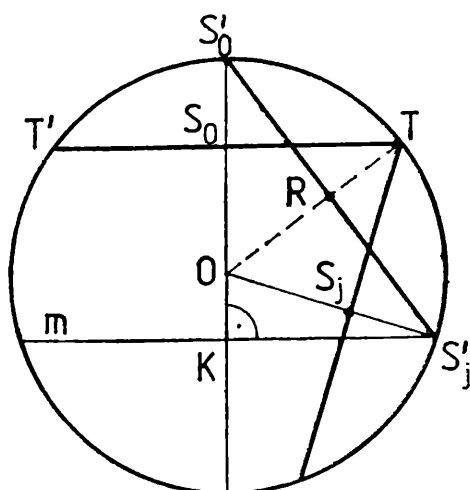
Budeme nyní minimalizovat číslo (1). Označme $f(q) = \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1$.

Snadno ověříme, že platí

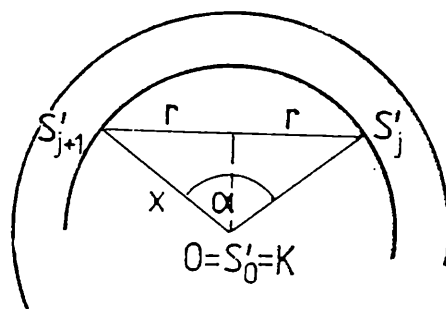
- (2) $f(p)f(q) \leq f(pq)$ pro $p > 2, q > 2$,
- (3) $f(2p) = f(2)f(p)$ pro liché $p \geq 1$,
- (4) $f(2)f(2) > f(4)$, $f(2)f(4) > f(8)$, $f(2)f(8) > (f(4))^2$,
 $(f(4))^3 > (f(8))^2$.

V některém optimálním rozkladu daného čísla N na součin $n_1 \dots n_k$ bude každé n_i liché prvočíslo nebo 2, 4 či 8. Dále, pokud je N dělitelné čtyřmi, nebude mezi čísly n_i žádná dvojka. A nejvýše dvě z čísel n_i budou čtyřky. Tím je už jistý optimální rozklad určen až na pořadí činitelů. Pro $N = 2 \cdot 10^7 = 5^7 \cdot 2^8$ je optimální rozklad $4 \cdot 8^2 \cdot 5^7$, potřebných prezidentových voličů je $164\,025 < 2 \cdot 10^5$. Existují však i jiné rozklady vyhovující podmínkám úlohy. Ještě štěstí, že v zemi nebyl prvočíselný počet voličů!

2. Dvě kružnice o poloměru 1 na jednotkové kouli se nemohou dotýkat (dotykem rozumíme jeden společný bod), je tedy $r < 1$. Označme O střed dané koule, S_i střed i -té kružnice a S'_i průsečík polopřímky OS_i s povrchem koule. Jestliže se kružnice k_i a k_j dotýkají, leží body S_i, S_j, O a bod dotyku T v jedné rovině (kdyby bod T ležel mimo rovinu $S_i S_j O$, musel by bod souměrný s T podle zmíněné roviny být rovněž společným bodem obou kružnic). Situaci v této rovině pro $i = 0$ zachycuje obr. 1.



Obr. 1



Obr. 2

Ze souměrnosti plyne $|T'S'_0| = |S'_0T| = |TS'_j|$, $|S_0T| = |S_0T'| = r$ a odtud také $|S'_0R| = |RS'_j| = r$, tj. $|S'_0S'_j| = 2r$. Označme ještě $x = |KS'_j|$, $h = |S'_0K|$. Podle Pythagorovy věty je

$$x^2 = (2r)^2 - h^2 \quad (2)$$

a z podobných trojúhelníků $S'_0S'_jK$, S'_0OR vyjde

$$h = 2r^2. \quad (3)$$

Bod S'_{j+1} leží v rovině kolmé k OS_0 proložené bodem S'_j a je $|S'_jS'_{j+1}| = |S'_0S'_{j+1}| = 2r$. Nechť $\alpha = |\sphericalangle S'_jKS'_{j+1}| \leq \pi$ (obr. 2 znázorňuje průmět do roviny $KS'_jS'_{j+1}$). Pak je

$$r = x \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

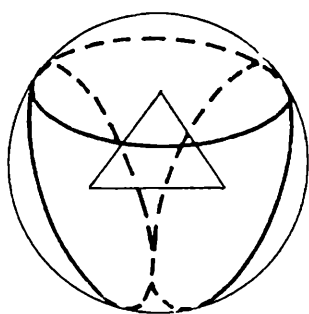
Jak se snadno spočte, soustava (2), (3), (4) má řešení

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \quad (5)$$

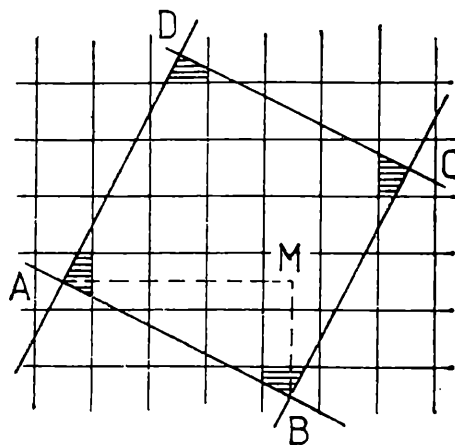
v intervalu $(0, 1)$ pouze pro $\frac{\pi}{3} < \alpha \leq \pi$.

Určíme-li nyní úhel α z uvedeného intervalu a body S'_0, S'_1 tak, aby jejich vzdálenost byla $2r$, jsou tím určeny i body S'_2, S'_3 , (až na orientaci úhlů $S'_jOS'_{j+1}$). Aby se i kružnice k_n dotýkala k_1 , musí platit $n\alpha = 2k\pi$ pro nějaké k přirozené, tedy $\alpha = \frac{2k\pi}{n}$. Protože $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$,

dostaneme nerovnosti $2 \leq \frac{n}{k} < 6$. Pokud požadujeme, aby žádné dvě



Obr. 3



Obr. 4

kružnice k_i, k_j ($i \neq j$) nesplynuly, předpokládáme, že k a n jsou nesoudělná přirozená čísla.

Obráceně, pro každou dvojici nesoudělných přirozených čísel splňujících nerovnosti $2 \leq \frac{n}{k} < 6$ lze sestavit soustavu kružnic požadovaných vlastností. Úloha je tedy řešitelná pro všechna $n \geq 2$ (pro $n = 2$ stačí vzít tři kružnice, jejichž středy jsou středy stran rovnostranného trojúhelníku vepsaného do hlavní kružnice dané koule, obr. 3).

Tato úloha byla zadána v celostátním kole kategorie A 18. ročníku naší MO. Nahlédnutím do příslušné ročenky zjistíte, že jak autor, tak patrně i tehdejší řešitelé přehlédli, že nemusí být jen $k = 1$. V korespondenčním semináři 1986/87 na to přišli dva řešitelé R. Levínský a M. Beneš.

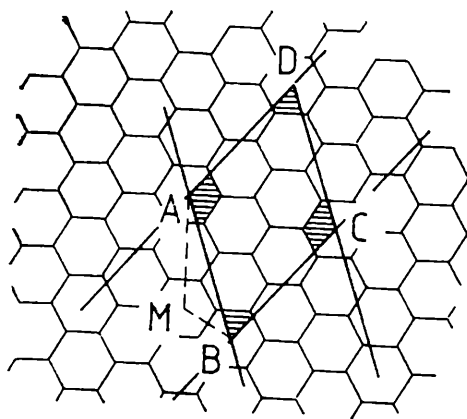
3. Předpokládejme, že dané čtverce mají stranu 1. Označme $ABCD$ jeden ze čtverců sítě, v jejichž vrcholech leží středy stejně obarvených čtverců. Z pravoúhlého trojúhelníku ABM (obr. 4) plyne, že pro vzdálenost sousedních vrcholů sítě platí

$$|AB|^2 = k^2 + l^2,$$

kde k, l jsou nezáporná celá čísla (jedno z nich může být rovno nule). Snadno nahlédneme, že ve čtverci $ABCD$ je každou z barev obarvena část o obsahu 1 (neleží-li obarvený čtvereček celý ve čtverci $ABCD$, jsou v něm obsaženy dvě, případně čtyři jeho části, jejichž složením daný čtvereček vznikne). Je-li počet barev n , bude obsah čtverce $ABCD$

$$n = k^2 + l^2 \quad (6)$$

Pro každé číslo n tvaru (6) existuje pokrytí roviny čtverci n různých barev, které splňuje podmínky úlohy. Přitom je zřejmé, že stačí sestavit čtverec $ABCD$ se stranou $|AB| = \sqrt{k^2 + l^2}$ a obarvit čtverečky či jejich části uvnitř $ABCD$.



Obr. 5

Úlohu pro šestiúhelníky vyřešíme obdobně. Označme $ABCD$ kosočtverec, který vznikne spojením dvou rovnostranných trojúhelníků sítě se společnou stranou (obr. 5). Nyní sestrojíme trojúhelník ABM tak, aby přímky AM , BM byly kolmé na některou ze stran daných šestiúhelníků a svíraly úhel $|\sphericalangle AMB| = 120^\circ$. Bude-li vzdálenost středů dvou sousedních šestiúhelníků 1, bude mít každý z nich obsah $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a pro stranu AB uvedeného kosočtverce dostaneme z kosinové věty rovnost

$$|AB|^2 = k^2 + l^2 - 2kl \cos 120^\circ = k^2 + l^2 + kl.$$

Kosočtverec $ABCD$ bude mít tedy obsah $\frac{\sqrt{3}}{2} (k^2 + l^2 + kl)$. Přitom zcela analogicky nahlédneme, že každou z barev je v kosočtverci $ABCD$ obarvena část s obsahem rovným obsahu jednoho šestiúhelníku, takže pro počet m barev dostaneme vyjádření

$$m = k^2 + l^2 + kl$$

A obráceně, pro každé takové m najdeme obarvení šestiúhelníků pokrývajících rovinu m barvami, které bude splňovat podmínky úlohy.

Snad bychom si měli ještě uvědomit, jak mnoho přirozených čísel může být uvedeného tvaru. Mezi čísla 1, 2, ..., n^2 čísla tvaru $k^2 + l^2$ leží v prvním oktantu v kruhu o poloměru n . Uvažujme síť jednotlivých čtverců, jejichž středy mají celočíselné souřadnice. Celkový obsah všech čtverců se středy v bodech (k, l) , $k \geq l$, $k^2 + l^2 \leq n^2$, je nejvýše $\frac{\pi n^2}{8} + 3n + 4$, přičemž některá čísla mají více než jedno vyjádření ve tvaru $k^2 + l^2$. Čísel tvaru $k^2 + l^2 + kl$ je ovšem ještě méně.

Karel Horák

(Pokračování v č. 3.)

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve školním roce 1988/89 se zúčastnilo soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních celkem 38 jednotlivců a 6 dvojčlenných kolektivů. Všech řešitelů bylo 50. Úlohy z matematiky řešilo celkem 46 žáků, úlohy z fyziky 3 a úlohy z konstrukční geometrie rovněž 3 žáci. Jeden studující řešil úlohy z matematiky, z fyziky i z konstrukční geometrie.

Nejúspěšnějším řešitelem byl Marek Velešík, 4.A G Brno, Koněvova ulice, neboť řešil správně 9 úloh z matematiky, 3 úlohy z fyziky a 3 úlohy z konstrukční geometrie, tedy celkem 15 úloh. Je zároveň nejlepším řešitelem úloh z fyziky a z konstrukční geometrie.

Nejúspěšnější řešitelé úloh z matematiky byli tito studující :

1. Martin Kučera, 4. C G Mikuláše Koperníka v Bílovci
2. Štěpán Čábelka, 3. C G Mikuláše Koperníka v Bílovci
3. Petr Hliněný, 3. C G Mikuláše Koperníka v Bílovci

Nakonec připojujeme abecední seznam všech řešitelů; přitom uvádíme jen příjmení. Za jménem každého řešitele uvádíme školu, kde studoval. Nejprve otiskujeme jména jednotlivců a potom řešitelské dvojice.

Řešitelé úloh z matematiky :

Ángyó, G Szetendre (MLR); Boryová, G J. Hronca, Bratislava; Csemezová, G maď. Galanta; Čábelka, G Bílovec; Dermíšek, G Skalica; Drinka, G maď. Galanta; Futó, G maď. Galanta; Gútay, SPŠ maď. Komárno; Henry, Ostrava; Hliněný, G Bílovec; Horváth (MLR); Kapsa, G Frýdek-Místek; Kováč, SPŠ maď. Komárno; Krkoška, G Bílovec; Kúcs, G Levice; Kučera, G Bílovec; Majerník, G Galanta; Mocek, G Bílovec; Němeček, G Bílovec; Oláh, G maď. Komárno; Pataki, G Radnóti, Budapest (MLR); Paraszti, SPŠ maď. Komárno; Patkós, G Radnóti, Budapest (MLR); Popule, G Volgogradská, Ostrava; Renácsvá, G maď. Galanta; Repiský, G J. Hronca, Bratislava; Schiffauer, G Bílovec; Šmídek, G tř. kpt. Jaroše, Brno; Timea, G Radnóti, Budapest; Tóth, G maď. Galanta; Varalgay, G maď. Komárno; Varga, SPŠ maď. Komárno; Veczey, G Bílovec; Velešík, G Koněvova, Brno; Wollent, SPŠ maď. Komárno; Zaszlavik, G Szentendre (MLR);

Gáál-Merva, SPŠ maď. Komárno; Gyenes-Csiba, SPŠ maď. Komárno; Lengyel-Élesztös, SPŠ maď. Komárno; Szeif-Tóth, SPŠ maď. Komárno; Trestyánsky-Jalszovsky, SPŠ maď. Komárno.

Řešitelé úloh z fyziky :

Buba, G Bílovec; Janeba, G Bílovec; Velešík, G Koněvova, Brno.

Řešitelé úloh z konstrukční geometrie :

Velešík, G Koněvova, Brno; Róka-Toth, G maď. Galanta.

Redakce Rozhledů děkuje všem řešitelům za řešení úloh, vítězům blahopřeje a zašle jim z prostředků Státního pedagogického nakladatelství v Praze věcné odměny.

Naše soutěž; ročník 1989—90

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních a Státní pedagogické nakladatelství v Praze opět vypisují soutěž o ceny v řešení úloh z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Nyní otiskujeme první část úloh z matematiky a první část úloh z fyziky. Další úlohy otiskneme v příštím čísle Rozhledů. Soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, avšak maximálně trojčlenné. Při případném umístění má však kolektiv nárok na jedinou cenu.

Obecné pokyny řešitelům :

Řešení každé úlohy pište česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Na každém listu vlevo nahoře uveďte čitelně celé svoje jméno, třídu i školu, kde studujete, a připojte také svou bytovou adresu se směrovacím číslem. Každý kolektiv uveďte tyto údaje za každého svého člena. *Příjmení pište opravdu čitelně, nejlépe hůlkovým písmem.* Nejdříve napište číslo a text úlohy, potom její řešení. Pište srozumitelně a čitelně. Obrázky připojené k řešení narýsujte pečlivě a řádně je popište.

Řešení všech nyní otištěných úloh zašlete nejpozději do konce ledna 1990 na adresu redakce Rozhledů, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla Rozhledů.

Matematika

1. Čtyřciferné číslo je zapsáno čtyřmi vesměs různými číslicemi. Toto číslo má tyto vlastnosti: a) je dělitelné číslem 9; b) vynecháme-li v jeho zápisu poslední číslici, dostaneme trojciferné číslo dělitelné číslem 15; c) vynecháme-li v jeho zápisu první číslici, dostaneme trojciferné číslo dělitelné číslem 11. Určete všechna čtyřciferná čísla, která mají uvedené tři vlastnosti.

Stanislav Horák

2. Nechť ABC je libovolný rovnostranný trojúhelník. Nechť přímka p protíná strany AC , BC v jejich vnitřních bodech. Vzdálenosti vrcholů A , B , C od přímky p jsou po řadě a , b , c . Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby přímka p procházela středem S kružnice opsané trojúhelníku ABC , je $a + b = c$. Dokažte.

Stanislav Horák

3. Hraje-li se odbíjená na dva vítězné sety, může zápas probíhat šesti různými způsoby:

1. $1 : 1$, $2 : 0$

4. $0 : 1$, $1 : 1$, $1 : 2$

2. $1 : 0$, $1 : 1$, $2 : 1$

5. $1 : 0$, $1 : 1$, $1 : 2$

3. $0 : 1$, $1 : 1$, $2 : 1$

6. $0 : 1$, $0 : 2$

Kolika způsoby může probíhat zápas, který se hraje na n ($n > 2$) vítězných setů?

Milan Koman

4. Uvnitř stran AB , AC rovnostranného trojúhelníku ABC jsou dány po řadě body D , E tak, že $|BD| = 2 \cdot |AD|$, $|AE| = 2 \cdot |CE|$. Potom se úsečky BE , CD protínají v bodu P . Vypočtěte velikost úhlu APB .

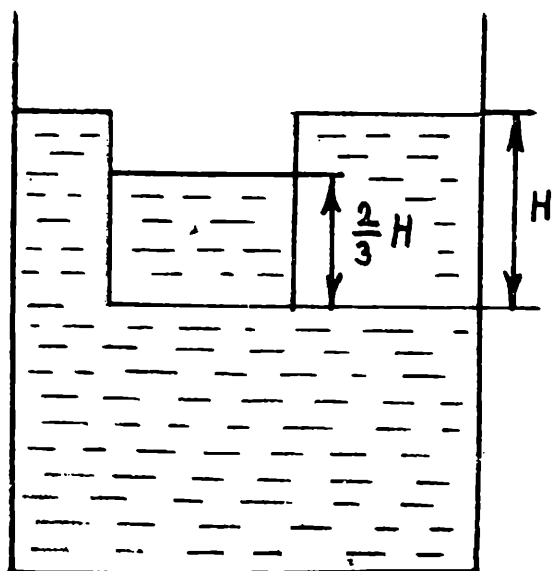
Emil Kraemer

5. Je dán trojúhelník DTV . Sestrojte trojúhelník ABC , v němž je bod V průsečíkem výšek, bod T těžištěm a bod D středem strany AB . Proveďte diskusi řešitelnosti.

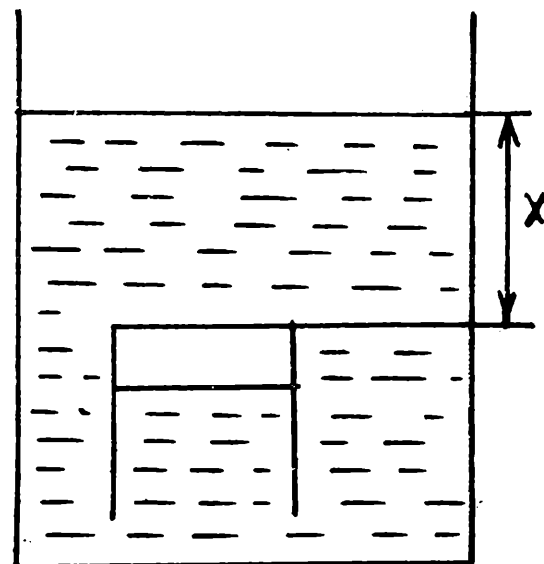
Jiří Mída

Fyzika

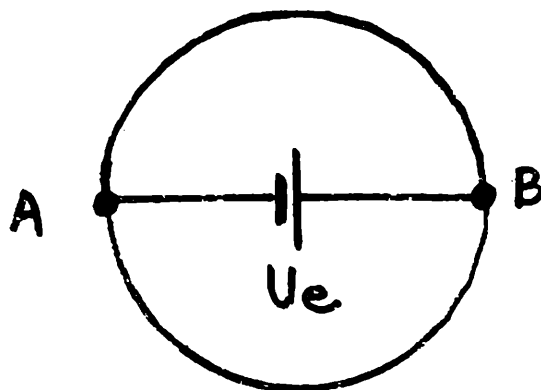
1. Sklenice o výšce $H = 9$ cm je naplněna ze $2/3$ vodou a plave ve vodě tak, že její horní okraj je na úrovni hladiny (obr. 1). Tutéž sklenici se vzduchem o teplotě $t_1 = 87^\circ\text{C}$ ponoříme do velmi hluboké vody dnem vzhůru (obr. 2). Do jaké hloubky je nutno ponořit dno sklenice, aby



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

po ochlazení vzduchu ve sklenici na teplotu okolní vody $t_2 = 27^\circ\text{C}$ nestoupala, ani neklesala? Atmosférický tlak je $p_0 = 10^3 \text{ hPa}$, hustota vody $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Miroslava Trchová

2. Dvě stejně nabitě kuličky, zavěšené na nitích o stejné délce v témže bodě závěsu, se rozestoupily ve vakuu tak, že nitě svírají úhel α . Jaká musí být hustota látky, ze které jsou kuličky vyrobeny, nemá-li se při jejich ponoření do lihu tento úhel změnit? Hustota lihu je $\rho_1 = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a jeho relativní permitivita je $\epsilon_r = 2$.

Miroslava Trchová

3. Niklový drát je ohnut do tvaru prstence o poloměru $a = 1 \text{ m}$ (obr.3). Ve středu prstence je umístěn zdroj o elektromotorickém napětí $U_e = 2 \text{ V}$ a o vnitřním odporu $r = 1,5 \Omega$. Zdroj napětí je spojen s body A, B prstence podél průměru týmž niklovým drátem. Určete napětí mezi body A, B . Měrný odpor niklu je $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$, průřez drátu je $S = 1 \text{ mm}^2$. Délku drátu AB pokládejte za rovnou průměru prstence.

Miroslava Trchová

OLYMPIÁDY A SOČ

Celostátní kolo 38. ročníku matematické olympiády kategorie A

Celostátní kolo 38. ročníku matematické olympiády se uskutečnilo společně s celostátním kolem v kategorii P v Klatovech ve dnech 24. až 28. 4. Organizaci vlastní soutěže i doprovodného programu zajistil Západočeský KV MO.

Soutěže v kategorii A proběhly ve dvou dnech 24. a 25. 4. a hned následující den bylo vyhlášení výsledků.

Vítězi celostátního kola se stali:

1. <i>Petr Čížek</i>	4. roč. G W. Piecka, Praha
2. <i>Ondrej Šuch</i>	3. roč. G A. Markuša, Bratislava
3. <i>Ilja Martišovič</i>	4. roč. G J. Hronca, Bratislava
4. <i>Marek Velešík</i>	4. roč. G, Brno, Koněvova
5. <i>Tomáš Brodský</i>	4. roč. G, Brno, tř. kpt. Jaroše
6.—7. <i>Štěpán Kasal</i>	2. roč. G W. Piecka, Praha
<i>Arnošt Kobylka</i>	4. roč. G W. Piecka, Praha
8.—9. <i>Petr Brož</i>	4. roč. G W. Piecka, Praha
<i>Štěpán Holub</i>	4. roč. G, Trutnov
10. <i>Petr Hliněný</i>	3. roč. G M. Koperníka, Bílovec
11.—12. <i>Vladimír Komár</i>	3. roč. G Košice, Šmeralova
<i>Jan Vomlel</i>	3. roč. G J. K. Tyla, Hradec Králové
13. <i>Martin Kraus</i>	3. roč. G, Karlovy Vary
14.—16. <i>Martin Durdiak</i>	4. roč. G A. Markuša, Bratislava
<i>Ondřej Kalenda</i>	3. roč. G W. Piecka, Praha
<i>Vladimír Skalský</i>	3. roč. G, Prešov
17.—19. <i>Jaromír Javůrek</i>	4. roč. G W. Piecka, Praha
<i>Michal Konečný</i>	2. roč. G, Brno, tř. kpt. Jaroše
<i>Jozef Skokan</i>	3. roč. G, Žilina, V. Okružná

Další úspěšní řešitelé se umístili v tomto pořadí:

20.—22. <i>Aleš Černý</i>	4. roč. G, Žilina, V. Okružná
<i>Štefan Dobrev</i>	4. roč. G A. Markuša, Bratislava
<i>Stanislav Januschke</i>	4. roč. G J. Hronca, Bratislava

23.—27.	<i>Viliam Búr</i>	7. roč. ZŠ, Bratislava, K. Šmidkeho
	<i>Daniel Elleder</i>	4. roč. G W. Piecka, Praha
	<i>Jan Hannig</i>	2. roč. G W. Piecka, Praha
	<i>Jakub Těšínský</i>	2. roč. G W. Piecka, Praha
	<i>Miroslav Vicher</i>	4. roč. G, Karlovy Vary
28.	<i>Gabriel Varga</i>	4. roč. maď. G, Šamorín
29.—30.	<i>Andrej Doboš</i>	4. roč. G A. Markuša, Bratislava
	<i>Jan Macháček</i>	3. roč. G, Pelhřimov
31.—32.	<i>Vladimír Glasnák</i>	2. roč. G, Žilina, V. Okružná
	<i>Petr Tobiška</i>	2. roč. G J. K. Tyla, Hradec Králové
33.—34.	<i>Šimon Kos</i>	4. roč. G J. Fučíka, Plzeň
	<i>Zbyněk Šír</i>	4. roč. G J. K. Tyla, Hradec Králové
35.—37.	<i>Petr Gvozdiak</i>	4. roč. G A. Markuša, Bratislava
	<i>Robert Mitka</i>	4. roč. G, Žilina, V. Okružná
	<i>Petr Štěpán</i>	4. roč. G W. Piecka, Praha

Žáci z tříd, které nejsou zaměřeny na matematiku, se umístili v tomto pořadí:

1.	<i>Ilja Martišovič</i>	G J. Hronca, Bratislava
2.	<i>Marek Velešík</i>	G, Brno, Koněvova
3.	<i>Štěpán Holub</i>	G, Trutnov
4.	<i>Martin Kraus</i>	G, Karlovy Vary
5.	<i>Vladimír Skalský</i>	G, Prešov
6.	<i>Stanislav Januschke</i>	G J. Hronca, Bratislava
7.	<i>Miroslav Vicher</i>	G, Karlovy Vary
8.	<i>Gabriel Varga</i>	G, Šamorín
9.	<i>Jan Macháček</i>	G, Pelhřimov
10.	<i>Vladimír Glasnák</i>	G, Žilina, V. Okružná

První den řešili soutěžící úlohy:

1. V rovině jsou dány tři různé body A, B, C ležící na kružnici se středem S a přímka p kolmá na AS . Průsečíky přímky p s přímkami AB, AC označme D a E . Dokažte, že body B, C, D, E leží na jedné kružnici.

2. V rovině je dáno mn úseček, které spojují n daných bodů. Dokažte, že z nich lze vybrat posloupnost $V_0, V_1, \dots, V_m$ různých bodů tak, že V_{i-1} a V_i jsou spojeny úsečkou ($1 \leq i \leq m$).

3. Pro daná nesoudělná čísla $p > q > 0$ najděte všechny dvojice reálných čísel c, d tak, aby pro množiny

$$A = \left\{ \left[n \frac{p}{q} \right]; n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{a} \quad B = \{[cn + s]; n \in \mathbb{N}\}$$

platilo $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina všech přirozených čísel.

Druhý den byla zadána trojice úloh:

4. Délky stran trojúhelníka T' se rovnají délkám těžnic trojúhelníka T . Jestliže se trojúhelníky T a T' shodují v jednom úhlu, pak jsou podobné. Dokažte.

5. Uvažujme obdélníkový pás $2 \times n$ a označme P_n počet všech takových obarvení některých jeho polí, že žádný čtverec 2×2 v něm nebude celý obarven. Dokažte, že číslo P_{1989} je dělitelné třemi, a najděte největší mocninu trojky, která je dělí.

6. Uvažujme konečnou posloupnost $a_1, a_2, \dots, a_k$, jejíž členy jsou přirozená čísla nejvýše rovná n . Určete maximální délku takové posloupnosti, jestliže víte, že každé dva její sousední členy jsou různé a přitom v ní neexistuje čtveřice členů taková, že $a_p = a_r \neq a_q = a_s$ pro $p < q < r < s$

Pěknou první úlohou vzpomenu účastníci soutěže zesnulého dlouholetého člena a předsedy ÚV MO *dr. Františka Zítka, CSc.*

Přestože některé úlohy byly poměrně obtížné (zejména 2., 3. a 4. úloha), dosáhl absolutní vítěz *Petr Čížek* plný počet bodů a druhý v pořadí zůstal o pouhý jeden bod zpět. Velmi pěkného výsledku dosáhl také *Viliam Búr*, který je teprve žákem sedmé třídy ZŠ.

Na závěr přejeme všem účastníkům celostátního kola mnoho dalších úspěchů při studiu na vysoké škole nebo v příštím již 39. ročníku matematické olympiády.

Jiří Binder

Celostátní kolo 30. ročníku fyzikální olympiády

Ve dnech 6. až 10. dubna 1989 proběhlo v areálu SPŠ strojnické v Praze Na Třebešíně celostátní kolo jubilejního 30. ročníku kategorie A fyzikální olympiády. Soutěže se zúčastnilo 81 soutěžících, vybraných ze 132 úspěšných řešitelů krajských kol. Mezi soutěžícími byly tři dívky. Celostátní kolo bylo zahájeno ve čtvrtek v podvečer v Brožíkově síni Staroměstské radnice za přítomnosti představitelů města Prahy.

V pátek 7. dubna proběhla teoretická část soutěže. Účastníkům byly předloženy čtyři poměrně náročné úlohy — první z elektřiny, druhá z optiky, třetí ze studijního tématu o rovinných pohybech, čtvrtá z teorie relativity. O náročnosti svědčí průměrné bodové hodnocení, dosažené z 10 bodů: první 3,07, druhá 5,14, třetí 4,02, čtvrtá 3,40, v teoretické části byl průměr 15,63 bodu. Nejlepším řešitelem byl *Tomáš Brodský*, který dosáhl 37 bodů ze 40 možných, přičemž tři úlohy vyřešil na plný počet bodů.

V sobotu dopoledne navštívili soutěžící i členové ÚVFO matematicko-fyzikální fakultu UK v Praze, odpoledne byli pozváni na Novou scénu

Národního divadla. V neděli 9. dubna 1989 proběhla praktická část soutěže — účastníci řešili náročnou úlohu na stanovení indexu lomu neprůhledného skla metodou polarizace. Nejlepším řešitelem byl *Tomáš David* z Českých Budějovic, oceněný plným počtem 20 bodů, průměrné hodnocení představovalo 10,89 bodu.

Po všechny večery byly pořádány v kinosále domova mládeže pro účastníky besedy s významnými československými fyziky a byly jim promítány fyzikální filmy.

ÚVFO na závěrečném zasedání stanovil podmínky pro úspěšnost v soutěži — úspěšným řešitelem (a bylo jich 49) se stal ten soutěžící, který obdržel hodnocení 24 bodů a více. Mezi úspěšnými byly i dvě dívky — *Barbora Krylová* z Prahy, Štěpánská ul., která získala 30,5 bodu a umístila se na 27. až 28. místě, *Jana Daňková* z gymnázia v Praze, Budějovická ul., která získala 24,5 bodu.

Z úspěšných řešitelů bylo stanoveno 19 vítězů celostátního kola fyzikální olympiády:

1. *Tomáš Brodský*, gymnázium Brno, kpt. Jaroše — 52 bodů
2. *Petr Duczynski*, gymnázium Nová Paka — 46,5 bodu
3. *Andrej Doboš*, gymnázium A. Markuša, Bratislava — 46 bodů
4. *Michael Juřek*, gymnázium Boskovice — 43 bodů
5. *Miroslav Vicher*, gymnázium Karlovy Vary — 41,5 bodu
- 6.—9. *Michal Šmidek*, gymnázium Brno, kpt. Jaroše — 50,5 bodu
Tomáš Pospíchal, gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové — 40,5 bodu
Pavel Pešek, gymnázium K. Šatala, České Budějovice — 40,5 bodu
Petr Merta, gymnázium, J. K. Tyla, Hradec Králové — 40,5 bodu
- 10.—11. *Zbyněk Vašata*, gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové — 40 bodů
Arnošt Kobylka, gymnázium W. Piecka, Praha 2 — 40 bodů
12. *Ilja Martišovitš*, gymnázium J. Hronca, Bratislava — 39,5 bodu
13. *Šimon Kos*, gymnázium J. Fučíka, Plzeň — 38,5 bodu
14. *Robert Myška*, gymnázium Jiřího z Poděbrad, Olomouc — 37 bodů
- 15.—17. *Richard Rišňovský*, gymnázium Nitra — 36,5 bodu
Milan Mosný, gymnázium J. Hronca, Bratislava — 36,5 bodu
Jan Macháček, gymnázium Pelhřimov — 36,5 bodu
- 18.—19. *Maroš Rusňák*, gymnázium Košice — 35 bodů
Aleš Černý, gymnázium Žilina — 35 bodů.

Nejlepším řešitelem úlohy 1 byl *Andrej Doboš*, úlohy 2 *Richard Musil* z gymnázia v Brně, kpt. Jaroše, úlohy 3 *Peter Žilavý* z Prešova, úlohy 4 *Barbora Krylová*.

Výsledky byly soutěžícím oznámeny na slavnostním zakončení v aule Karolina v Praze v pondělí dopoledne za účasti zástupce ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy *doc. dr. V. Šenkýře, CSc.*, náměstka ministryně, dále *prof. dr. B. Nováka, DrSc.*, předsedy JČSMF, *prof. dr. J. Moravčíka, CSc.*, předsedy JSMF, *ing. S. Nováka, CSc.*, zástupce ČÚV SSM.

U příležitosti 30. výročí založení fyzikální olympiády bylo vyznamenáno asi 250 pedagogických pracovníků, kteří se podílejí na organizaci soutěže, na přípravě úloh a na rozvoji forem péče o žáky talentované na fyziku.

Za třicet let se soutěže zúčastnilo v I. kole 503 078 žáků základních a středních škol, úspěšných ve druhých kolech bylo 107 196 účastníků. V současné době se soutěže účastní zpravidla 22,5 tisíce žáků základních škol a 9900 žáků škol středních. Fyzikální olympiáda byla propracována jako komplexní systém péče o mládež talentovanou na fyziku, přičemž samotná účast v soutěži by měla být vyvrcholením dlouhodobé činnosti žáků v kroužcích, na soustředěních atd.

Pokoušíme se nalézt cesty ke středoškolské odborné činnosti, neboť této soutěže se účastní mnoho olympioniků. Již druhým rokem zorganizoval ÚVFO výjezd našich soutěžících na Turnaj mladých fyziků — soutěž pětičlenných družstev zastupujících soutěžící školy.

Na závěr chce ÚVFO poděkovat všem soutěžícím i jejich vyučujícím fyziky za přízeň, kterou věnují fyzikální olympiádě, a budeme se těšit, že v následujícím ročníku se v co největším počtu soutěže zúčastníte — kromě toho, že se připravujete na své budoucí vysokoškolské studium, můžete v rámci různých akcí fyzikální olympiády vhodně využívat volného času.

D. Kluvanec, I. Volf, ÚVFO

Kalendár M-F: október 1989

3. 10. 1854 sa narodil *Herman Struve*, nemecký astronóm. Podal teóriu pohybu mesiacov Saturna.
6. 10. 1979 vo Vyšných Hágoch zomrela *Ludmila Pajdušáková*, slovenská astronómka. Objavila päť komét.
9. 10. 1704 sa v Bratislave narodil *Ján Andrej Segner*, nemecký fyzik a lekár. Zaoberal sa hydraulikou, matematikou, chémiou, astronómiou i optikou.
9. 10. 1879 sa v Pfaffendorfe pri Koblenzi narodil *Max von Laue*, nemecký fyzik. Pracoval v optike, teórii relativity, kvantovej teórii

- a jadrovej fyzike. Za objav difrakcie röntgenových lúčov pri prechode kryštálmi získal Nobelovu cenu (1914).
11. 10. 1889 v Cheshire zomrel *James Prescott Joule*, anglický fyzik. Študoval otázky vzniku a premeny tepla, odhalil zákon zachovania energie. Jednotka práce a energie je pomenovaná na jeho počesť.
 11. 10. 1954 zomrel *Theodore Lyman*, americký fyzik. Študoval atómové spektrá.
 13. 10. 1979 zomrel *Andrej Andrejevič Markov*, sovietsky matematik. Pracoval v oblasti topológie, teórie dynamických systémov, teórie algoritmov.
 15. 10. 1959 zomrel *Lipót Fejér*, maďarský matematik. Študoval Fourierove rady, dosiahol podnetné výsledky v teórii interpolácie a v konštruktívnej teórii funkcií.
 17. 10. 1919 sa v Dnepropetrovsku narodil *Isaak Markovič Chalatnikov*, sovietsky fyzik. Prispel k rozvoju kvantovej elektrodynamiky, relativistickej hydrodynamiky, teórie relativity a kozmológie.
 20. 10. 1984 v Tallahassee (USA) zomrel *Paul Dirac*, anglický fyzik. Stal sa jedným zo zakladateľov kvantovej mechaniky, elektrodynamiky a teórie poľa. Sformuloval zákony štatistickej mechaniky sústavy elektrónov. Spolu s E. Schrödingerom získal Nobelovu cenu (1933).
 21. 10. 1969 vo Varšave zomrel *Wacław Sierpinski*, poľský matematik. Dosiahol pozoruhodné výsledky v teórii čísel, teórii množín, topológii. Zostrojil zjednodušené Peanove krivky, študoval problematiku hypotézy kontinua.
 23. 10. 1944 v Edinburghu zomrel *Charles Glover Barkla*, anglický fyzik. Skúmal šírenie sa elektromagnetických vĺn a vlastnosti röntgenového žiarenia. Za objav charakteristického röntgenového žiarenia chemických prvkov získal Nobelovu cenu za fyziku (1917).
 24. 10. 1804 sa vo Wittenbergu narodil *Wilhelm Eduard Weber*, nemecký fyzik. Zaoberal sa elektromagnetizmom, zostavil prvý elektromagnetický telegraf.
 26. 10. 1849 sa v Berlíne narodil *Ferdinand Georg Frobenius*, nemecký matematik. Prispel k rozvoju algebrickej teórie čísel, teórie grúp a teórie hyperkomplexných čísel.
 27. 10. 1449 zomrel *Muhhamad Taragaj Ulugbeg*, uzbecký astronóm a matematik. Založil hvezdáreň v Samarkande, zostavil trigonometrické tabuľky a hviezdny katalóg.
 30. 10. 1844 sa v Rouene narodil *Georges Henri Halphen*, francúzsky matematik. Bol úspešný v diferenciálnej geometrii, matematickej analýze i teórii diferenciálnych rovníc.
 30. 10. 1909 sa narodil *Boris Vasilievič Kukarkin*, sovietsky astronóm. Študoval premenné hviezdy, zdokonalil triedenie hviezdnych pod sústav.

dj

Z NOVÝCH KNIH

TŘICÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH

Milan Koman a kol.:

Vydalo SPN, Praha 1988, edice Pomocné knihy pro žáky, 108 stran, 40 obrázků, 6000 výt., brož., 5,50 Kčs.

Tradiční ročenka informující o průběhu matematické olympiády vychází v jejím 35. ročníku poprvé ve dvou částech. Brožura věnovaná MO na středních školách byla v této rubrice představena v osmém čísle minulého ročníku. Druhá brožura informuje o soutěži v kategoriích určených pro žáky základních škol. Ve školním roce 1985/86, kdy 15. ročník soutěže probíhal, to byly celostátní kategorie Z8 a Z7 a v SSR též kategorie Z6, Z5 a Z4.

Obsah ročenky je tradiční. V úvodní kapitole se čtenář seznámí s průběhem soutěže a s celkovým zhodnocením ročníku. Dále je informován o doprovodných akcích pro žáky (korespondenční semináře, soustředění a přednášky) a pro referenty MO na školách.

Jádro knížky tvoří texty soutěžních úloh všech kategorií. S výjimkou kategorií Z4 a Z5 jsou uvedena řešení všech úloh.

Ročenka poslouží nejen pro přípravu žáků na další kola soutěže, ale poskytne též celou řadu originálních a zajímavých úloh.

Většina z nich je přitom v souladu s posláním soutěže v kategoriích Z přístupná relativně širokému okruhu žáků. Je proto škoda, že knížka vyšla v poměrně malém nákladu, který byl okamžitě rozebrán.

Jiří Binder

NÁZVY A ZNAČKY ŠKOLSKÉ MATEMATIKY.

Publikaci vypracovala Česká terminologická komise pro matematiku Jednoty čs. matematiků a fyziků a vědeckého kolegia matematiky při ČSAV. Jde již o šesté vydání; prvé vyšlo před půl stoletím v roce 1939. Od doby, kdy se připravovalo poslední, tj. páté, vydání, došlo ke změnám ve vyučování matematice i v její didaktice. Toto nové vydání je přizpůsobeno změnám obsahu některých termínů, na což upozorňuje předmluva. Na příklad *přirozená čísla* jsou 1, 2, 3, . . . , přičemž 0 není přirozené číslo. Dále *směr* je množina všech souhlasně rovnoběžných polopřímek. Uvedené změny nejsou jediné.

Proti 5. vydání je zde zcela nová kapitola, která se jmenuje „Matematické symboly“, jež je zpracována velmi přehledně v podobě tabulky. Svou vlastní kapitolu má nově i výpočetní technika a programování. Pro snazší orientaci je opět zařazen rejstřík.

-jm-

Korespondenční semináře MFF UK Praha

Také v letošním školním roce se můžete zúčastnit korespondenčních seminářů z matematiky, fyziky a programování. Soutěže jsou určeny pro studenty středních škol ČSR (v SSR jsou organizovány paralelně obdobné semináře). Zájemci, kteří zašlou přihlášky na níže uvedené adresy, od nás obdrží v průběhu října první série soutěžních úloh. Přihláška na korespondenčním lístku by měla obsahovat jméno a příjmení, rodné číslo, číslo občanského průkazu, adresu trvalého bydliště, třídu a adresu školy a adresu pro korespondenci. V případě většího počtu zájemců z jedné školy bude korespondence zasílána na adresu školy.

Třicet až čtyřicet nejlepších řešitelů každého semináře bude pozváno na pětidenní soustředění, které se bude konat na podzim dalšího školního roku. Program soustředění nezahrnuje jen přednášky o atraktivních partiích zvoleného oboru, ale také besedy, sportovní činnost, soutěže a hry.

Přihlášky můžete zaslat kdykoliv, ale pro zařazení do první série je nutno odeslat přihlášku co nejdříve.

Adresy jednotlivých seminářů jsou:

matematika

dr. Jiří Kottas
KMA MFF UK
Sokolovská 83
186 00 Praha 8-Karlín

fyzika

dr. Leoš Dvořák, CSc.
KMF MFF UK
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

programování

dr. Pavel Töpfer
KKI MFF UK
Malostranské nám. 2
118 00 Praha 1-Malá Strana

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ještě o vědeckém jazyce ve fyzice

Navazujeme na výkladový slovníček, který má umožnit nezasvěceným přeložit si do srozumitelného jazyka termíny a jazykové obraty vyskytující se ve fyzikálních pojednáních a přednáškách. První část slovníčku jsme uveřejnili v 1. čísle našeho časopisu.

Řekne-li fyzik

„Byla vypracována nová metoda.“

„Nejprve vyložíme teorii.“

„Byla použita přímá metoda.“

„I když při reprodukci byly některé detaily zkresleny, z původní mikrofotografie vyplývá, že . . .“

„Uvádíme typické výsledky.“

„Bude třeba ještě rozsáhlé další práce, než plně pochopíme . . .“

„Parametry aparatury byly podstatně zlepšeny . . .“

„Výsledky budou publikovány později.“

„Panuje jednomyslný názor, že . . .“

„Byla použita slitina vizmutu a olova, kde se tento jev podle teoretického očekávání musí projevovat nejvýrazněji.“

„Děkuji panu X za pomoc při experimentech a panu Y za cenné diskuse.“

znamená to, že

„Je to metoda, kterou používal XY před čtyřiceti léty.“

„Řeknu vám, co se mi podařilo vypočítat včera večer.“

„Použili jsme hrubé síly.“

„Z původní mikrofotografie nevyplývá vůbec nic.“

„Uvádíme nejlepší výsledky, kterých se nám podařilo dosáhnout.“

„Zatím jsme nepochopili vůbec nic.“

„ . . . ve srovnání s loňským stavem, kdy aparatura byla prakticky nepoužitelná.“

„Uznávám, že se to nedá vůbec publikovat.“

„Ještě jeden můj známý si to také myslí.“

„Jinou slitinu jsme neměli k dispozici.“

„Pan X to všechno změřil a pan Y mi vysvětlil, co to všechno znamená.“

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20 — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2, — Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpalkova 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

ADRESA REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1 - Nové Město
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

REDAKČNÍ KRUH:

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevičko; Dušan Jedinák, G Topolčany; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

ROZHLEDY

matematicko
-fyzikální

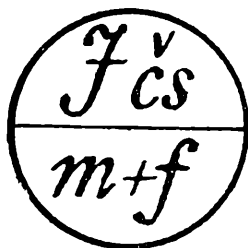
3
89 – 90

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

LISTOPAD

CENA 2,00 Kčs



ROZHLEDY matematicko -fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUČÍ REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Karel Drábek: Nezapomeneme na 17. listopad	97
Jaroslav Švrček: Cévoa a Van Aubelova věta	99
Milan Rojko: Vousy pevnější než ocel	103
Dušan Jedinák: Opojenie z poznania	110
Z matematiky a fyziky ZŠ	112
Přemýšlíme, řešíme	118
Naše soutěž	128
Pavel Töpfer: Celostátní kolo 38. ročníku MO-kategorie P	135
Petr Novotný: Srovnání slovních procesorů z hlediska psaní češtiny se slovním procesorem ChiWriter	137
dj: Kalendár M-F	142
Humory matematicko-fyzikální	3. str. obálky

Nezapomeneme na 17. listopad 1939

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT Praha

Je velmi potřebné právě v dnešní době připomínat si vše, co prožila mládež Československé republiky od Mnichovského diktátu v roce 1938 přes okupaci od 15. března 1939 až po osvobození v květnu 1945 Sovětskou armádou.

Mezi významné dny tohoto období nesporně patří pražské demonstrace studentů a pracující mládeže proti okupaci Československa dne 28. října 1939. Tyto demonstrace ve výroční den vzniku Československé republiky byly zaměřeny proti fašistické okupaci a je dnes známo, že měly značný ohlas ve všech zemích světa. Jejich rozsah, který ukázal pravou tvář začínajícího odboje, překvapil i samotné okupanty, kteří do té doby rozšiřovali zprávy o pokojném životě v českých zemích.

Ve večerních hodinách tohoto dne byl postřelen student lékařské fakulty z Hlávkovy koleje *Jan Opletal* podle vlastního sdělení na rohu Žitné ul. a ulice Ve Smečkách. Ještě téhož dne byl na klinice prof. MUDr. Arnolda Jiráska operován, projektil byl po operaci zabaven německou policií. Zranění se ukázalo jako velmi těžké a přes veškerou lékařskou péči Jan Opletal zemřel 11. listopadu 1939. Jeho pohřeb 15. listopadu 1939 měl z počátku klidný a důstojný průběh, jak to ve svém svolání ke studentům pražských vysokých škol žádal předseda samosprávy Hlávkových kolejí. Rozloučení s Janem Opletalem proběhlo z kaple Českého ústavu pro soudní lékařství v Preslově ul. přes Albertov až na roh ulice Na slupi. Tam za zpěvu československé hymny byla rakev uložena do pohřebního vozu a odvezena do Lhoty u Nákla na Moravě. Po zásahu policie proti rozcházejícím se studentům vznikly nové demonstrace u české techniky na Karlově náměstí, na Národní třídě, před budovou právnické fakulty a jinde. Tyto události se staly důvodem pro uzavření českých vysokých škol dne 17. listopadu 1939, a to údajně na tři roky. Dále bylo bez soudu, a tedy bez rozsudku zastřeleno devět funkcionářů Svazu vysokoškolského studentstva. Tato hromadná policejní vražda byla provedena v ranních hodinách v kasárnách bývalého dělostřeleckého pluku v Ruzyni. K tomu téměř 1200 studentů z kolejí v Praze, Brně a Příbrami bylo odvezeno do koncentračního tábora Sachsenhausen (Oranienburg u Berlína).

Akce 17. listopad byla připravena již dříve a byla zaměřena k likvidaci české inteligence, neboť jsou to právě vysoké školy, které ji vychovávají a připravují pro život. Národ, který by byl zbaven této možnosti, je odsouzen k postupnému zániku, jak je to pro nás zřejmé z tzv. konečného řešení české otázky.

Jsem jedním z přímých účastníků těchto událostí a po příchodu do koncentračního tábora Sachsenhausen stal jsem se jako politický vězeň číslem 3896 (shodou okolností je to také první studentské číslo z transportu, později po přečíslování 14 305).

V táboře jsme poznali politické vězně z mnoha národů, z nichž němečtí byli tehdy vězněni již téměř šest let. Všichni velmi a rádi vzpomínáme na své učitele z této doby naší „Vysoké školy života“, zvláště pak na Antonína Zápotockého, Ivana Sekaninu a Pavla Prokopa. Jím vděčíme za realistický postoj při pobytu v táboře a za předané zkušenosti z období mezi oběma světovými válkami a po porážce Francie a napadení Sovětského svazu fašistickými vojsky.

Samotná akce 17. listopad 1939 je první odvetou německého fašismu proti okupovaným národům, která byla rozhlasem rozšířena po celém světě. Právě proto rok od roku stoupal odpor proti fašismu a 17. listopad 1939 se stal pojmem, který symbolizuje fašistickou zvůli, jeho zločinnost a totální brutalitu. S tím je také spojeno obnovení Ústředního svazu čs. studentstva (Anglie, 18. 11. 1940) a vyhlášení tohoto dne na shromáždění v Londýně (17. 11. 1941) zástupci 26 národů za *Mezinárodní den studentstva*. Jako uznání českým studentům je předsedou Mezinárodního svazu studentstva vždy československý delegát.

Důležité je však také to, že 17. listopad 1939 nepatří vůbec ještě do historie, že jeho odkaz zůstává stále závazkem dosud trvajících boje proti fašismu, a proto je nutno v duchu této tradice bojovat proti němu všude tam, kde dosud není poražen.

Vy, naši nejmladší následovníci nejen na středních, ale i na vysokých školách, se tohoto aktivního boje proti fašismu účastníte již tím, že se snažíte dosáhnout co nejlepších výsledků ve svém studiu tak, abyste získaných znalostí využili při budování naší krásné vlasti. Tak jsme činili a dosud činíme i my, kteří jsme celou akci „17. listopad“ prožili a tehdejší dobu přežili pod heslem „Tvrdě do tvrdého“.

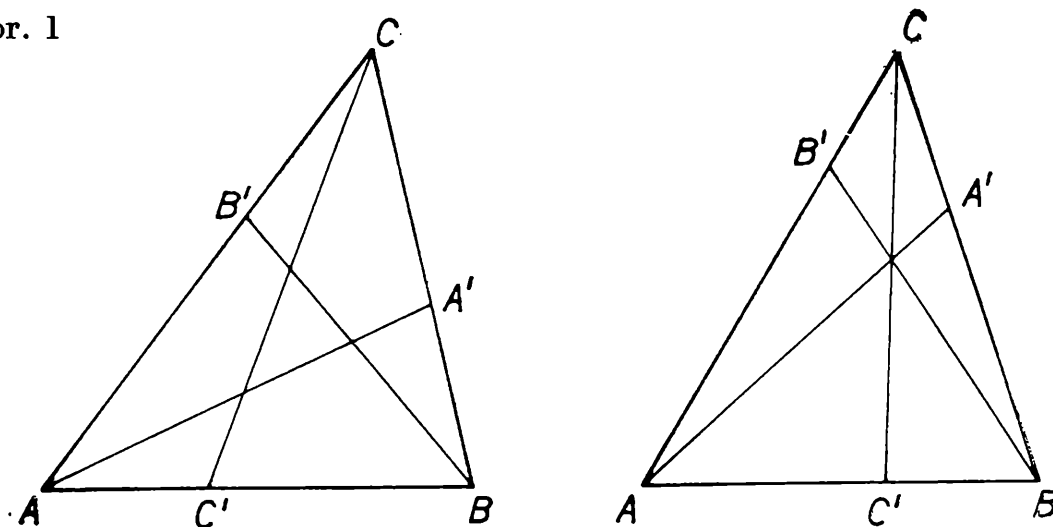
Cévova¹⁾ a Van Aubelova²⁾ věta

RNDr. JAROSLAV ŠVRČEK, PŘF UP Olomouc

Uvažujme libovolný trojúhelník ABC . Uvnitř jeho stran BC , CA , AB sestrojíme po řadě body A' , B' , C' . Přímky AA' , BB' , CC' se mohou protínat buď po dvou ve třech různých bodech uvnitř trojúhelníka ABC nebo — jako speciální případ — v jednom bodě uvnitř trojúhelníka ABC (viz obr. 1). Za příklad druhého z obou uvedených případů nám poslouží např. těžnice nebo osy úhlů daného trojúhelníka.

Cílem tohoto článku je ukázat čtenářům dvě užitečné metrické vlastnosti týkající se případu, kdy se přímky AA' , BB' , CC' protínají v jednom společném bodě uvnitř daného trojúhelníka ABC .

Obr. 1



Věta 1 (Cévova) Necht A' , B' , C' jsou po řadě vnitřními body stran BC , CA , AB daného trojúhelníka ABC . Přímky AA' , BB' , CC' se protínají v jednom bodě uvnitř trojúhelníka ABC , právě když platí

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

¹⁾ G. Céva — italský matematik, žil v 17. století — čti Čéva

²⁾ H. Van Aubel — profesor na Athéneu v Antverpách, žil v polovině 19. století — čti Obel

Důkaz: a) Průsečík přímek AA' , BB' , CC' označíme R , obsah trojúhelníka ABC označíme symbolem P_{ABC} . Pak platí (viz. obr. 3)

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{P_{AC'C}}{P_{C'BC}} = \frac{P_{AC'R}}{P_{C'BR}} = \frac{P_{AC'C} - P_{AC'R}}{P_{C'BC} - P_{C'BR}} = \frac{P_{CAR}}{P_{BCR}}.$$

Cyklickou záměnou obdržíme dále vztahy

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{P_{ABR}}{P_{CAR}} \quad \text{a} \quad \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{P_{BCR}}{P_{ABR}}.$$

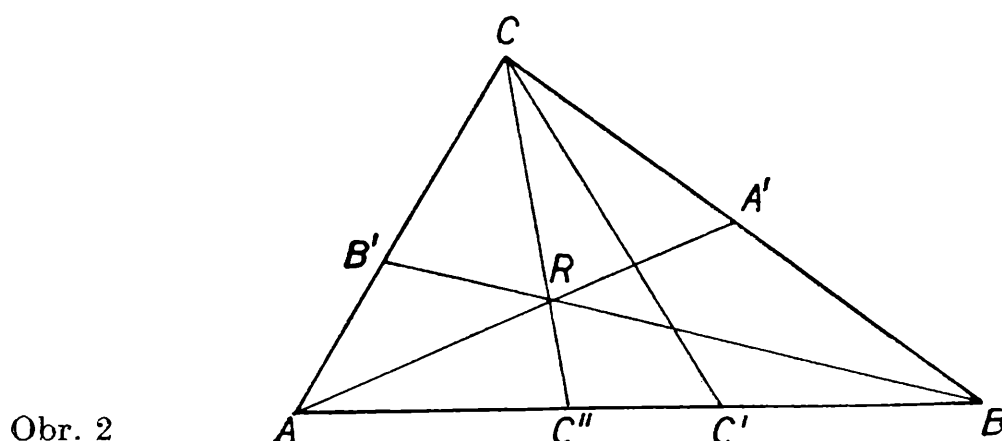
Platí tedy

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{P_{CAR}}{P_{BCR}} \cdot \frac{P_{ABR}}{P_{CAR}} \cdot \frac{P_{BCR}}{P_{ABR}} = 1$$

b) Nechť nyní A' , B' , C' jsou po řadě vnitřními body stran BC , CA , AB trojúhelníka ABC a nechť dále platí

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1$$

Dokážeme, že přímky AA' , BB' , CC' se protínají v jednom bodě. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme tedy, že za daných předpokladů se přímky AA' , BB' , CC' protínají po dvou ve třech různých bodech uvnitř trojúhelníka ABC . Průsečík přímek AA' a BB' označme R , společný bod přímek CR a AB označme dále C'' . Bod C'' je přitom vnitřním bodem úsečky $\overline{AB}$. Podle části a) platí dále (viz obr. 2)



$$\frac{|AC''|}{|C''B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1, \text{ ale současně pak podle předpokladů části}$$

b) platí rovněž

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1, \text{ z čehož bezprostředně plyne } C' \equiv C''$$

To je spor s předpokladem, že přímky AA' , BB' , CC' se protínají po dvou ve třech různých bodech. Tím je věta dokázána.

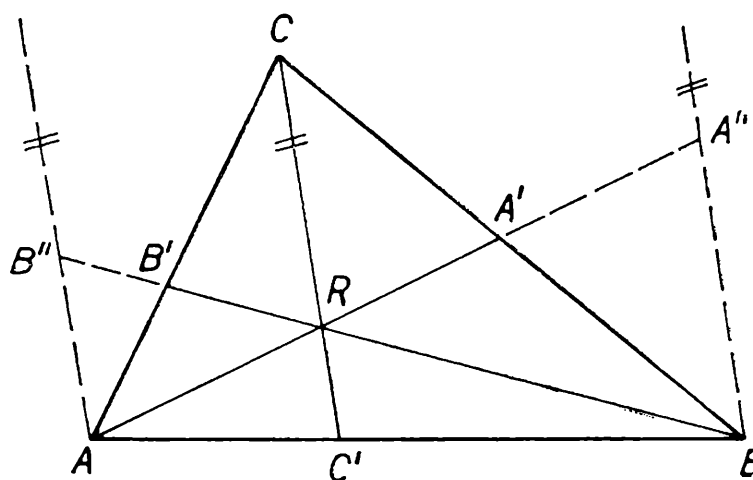
Věta 2 (Van Aubelova) Je dán trojúhelník ABC . Nechť A' , B' , C' jsou po řadě vnitřními body stran BC , CA , AB trojúhelníka ABC takové, že se přímky AA' , BB' , CC' protínají v jednom společném bodě R . Pak platí vztahy

$$\frac{|AR|}{|RA'|} = \frac{|AC'|}{|C'B|} + \frac{|AB'|}{|B'C|}, \quad \frac{|BR|}{|RB'|} = \frac{|BA'|}{|A'C|} + \frac{|BC'|}{|C'A|},$$

$$\frac{|CR|}{|RC'|} = \frac{|CB'|}{|B'A|} + \frac{|CA'|}{|A'B|}.$$

Důkaz: Provedeme pouze pro poslední z uvedených vztahů, zbývající dva je možno odvodit užitím principu cyklické záměny.

Vedme rovnoběžky s přímkou CC' vrcholy A , B trojúhelníka ABC (viz obr. 3). Průsečíky těchto rovnoběžek s přímkami AA' a BB' označme po řadě A'' , B'' .



Obr. 3

Z podobnosti trojúhelníků CRB' a $AB''B'$ dostáváme $\frac{|CR|}{|AB''|} = \frac{|CB'|}{|AB'|}$,

z podobnosti trojúhelníků CRA' a $BA''A'$ dostáváme $\frac{|CR|}{|BA''|} = \frac{|CA'|}{|BA'|}$

Sečtením obou uvažovaných vztahů máme

$$|CR| \left(\frac{1}{|AB''|} + \frac{1}{|BA''|} \right) = \frac{|CA'|}{|BA'|} + \frac{|CB'|}{|AB'|} \quad (1)$$

Z podobnosti trojúhelníků BRC' a $BB''A$ plyne dále $\frac{|RC'|}{|AB''|} = \frac{|BC'|}{|AB|}$,

a z podobnosti trojúhelníků ARC' a $AA''B$ plyne $\frac{|RC'|}{|BA''|} = \frac{|AC'|}{|AB|}$.

Sečtením posledních dvou vztahů obdržíme dále

$$\begin{aligned} |RC'| \left(\frac{1}{|AB''|} + \frac{1}{|BA''|} \right) &= \frac{|AC'|}{|AB|} + \frac{|BC'|}{|AB|} = \frac{|AC'| + |C'B|}{|AB|} = \\ &= \frac{|AB|}{|AB|} = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) již snadnou úpravou dostáváme

$$\frac{|CR|}{|RC'|} = \frac{|CA'|}{|BA'|} + \frac{|CB'|}{|AB'|}, \text{ což bylo dokázat.}$$

Poznámka: Obě uvedené věty lze dokázat i za předpokladu, že některé z bodů A' , B' , C' leží vně stran trojúhelníka ABC . Důkaz Cévy věty za těchto předpokladů (užitím jiné techniky) je možno nalézt v knize [2].

Příklad 1: Užitím Cévy věty dokažte, že těžnice daného trojúhelníka se protínají v jednom bodě uvnitř trojúhelníka.

Řešení: Označme po řadě T_a, T_b, T_c středy stran BC, CA, AB daného trojúhelníka ABC . Pak platí

$$\frac{|AT_c|}{|T_cB|} \cdot \frac{|BT_a|}{|T_aC|} \cdot \frac{|CT_b|}{|T_bA|} = 1. \text{ Podle Cévy věty se tedy těžnice protínají v jednom bodě (těžišti) uvnitř daného trojúhelníka } ABC.$$

Příklad 2: Je dán trojúhelník ABC a na jeho stranách $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ jsou sestrojeny postupně body X, Y, Z tak, že $|BX| = |XC|$, $|CY| = 2|YA|$ a $2|AZ| = |ZB|$. Dokažte, že úsečky $\overline{AX}, \overline{BY}$ a $\overline{CZ}$ procházejí jedním bodem P a že platí $|CP| : |PZ| = 3 : 1$.

Řešení: Užitím Cévy věty ověříme, že se úsečky $\overline{AX}, \overline{BY}$ a $\overline{CZ}$ protínají v jednom bodě P uvnitř trojúhelníka ABC . K důkazu druhé části pak použijeme Van Aubelovu větu. Platí

$$\frac{|CP|}{|PZ|} = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} = 3, \text{ čímž je důkaz proveden.}$$

Cvičení 1: Dokažte užitím Van Aubelovy věty, že těžiště dělí každou z těžnic v poměru 2 : 1.

Cvičení 2: Dokažte tuto analogii Van Aubelovy věty pro čtyřstěn: Nechť je dán libovolný čtyřstěn $ABCD$ a bod S jeho vnitřku takový, že roviny SBC, SCA, SAB protínají přímky AD, BD, CD po řadě v bodech A', B', C' a přímka DS protíná rovinu ABC v bodě D' . Pak platí

$$\frac{|DS|}{|D'S|} = \frac{|DA'|}{|A'A|} + \frac{|DB'|}{|B'B|} + \frac{|DC'|}{|C'C|}$$

Literatura:

- [1] Niederle, A.: Zajímavé dvojice trojúhelníků (Praha 1980, ŠMM)
- [2] Švrček, J., Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka (Praha, 1988, SNTL)

Vousy pevnější než ocel

RNDr. I ILAN ROJKO, CSc., MFF UK Praha

Jedním ze směrů, kterým míří zájem fyziků je i hledání nových materiálů, které jsou velmi pevné, houževnaté a přitom co možná nejlehčí. Takové materiály se mohou široce uplatnit nejen v leteckém průmyslu a astronautice, ale i v běžném životě, např. ve výrobě sportovních potřeb.

Nejnadějnější se ukázalo nahrazení běžných kovových slitin či přírodních materiálů látkami tvořenými pevnými vlákny. Dnes se již daří připravit tenká vlákna — „whiskers“ (přeloženo doslova vousy), ze kterých lze „spřádat“ materiály tak pevné, že by při tloušťce obyčejné nitě do šicího stroje unesly dospělého člověka.

Pátrání po materiálech co nejpevnějších má svůj počátek dávno před rozvinutím fyziky. Starověcí zbrojíři i jejich středověcí následovníci dokázali na základě pečlivě utajovaných zkušeností, děděných celá staletí z otců na syny, různým sléváním kovů a jejich kování společně se složitými recepty jejich zahřívání a opětného zchlazování dosáhnout dodnes nepřekonaných výsledků ve výrobě mečů, kordů a jiné zbroje



Teprve fyzika však vnesla do tohoto úsilí nový prvek — teorii založenou na znalostech atomové stavby látek. Tak ukázala, kterým směrem by měly být zaměřeny další experimenty i úsilí techniků.

Jestliže hovoříme o pevnosti materiálu, měli bychom předem uvést, o jaký druh pevnosti jde. Zda vzorek stlačujeme či natahujeme, zkracujeme nebo namáháme smykem (stříháme).

V tomto článku si ke svým úvahám zvolíme jednoduchý tah v jednom směru.

Jestliže při takovém pokusu zatížíme např. ocelovou tyčinku o velikosti zápalky (počáteční délka 40 mm a průřez 4 mm²) dvoukilogramovým závažím, tj. přibližně silou 20 N, prodlouží se asi o 0,001 mm. Dosáhne tedy poměrné prodloužení, tj. poměr protažení k původní délce $\varepsilon = 2,5 \cdot 10^{-5}$. Ve vzorku přitom vzniká tahové napětí dané poměrem

$$\frac{\text{působící síla}}{\text{plošný obsah vzorku}}, \quad \sigma = \frac{20 \text{ N}}{4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 5 \cdot 10^6 \text{ Pa (pascal), které}$$

při dalším zvětšování zatížení roste. Pokud zatížení nevyvolá příliš velké prodloužení (u ocelí je hranice v okolí $\varepsilon < 10^{-3}$), jsou prodloužení a napětí veličiny přímo úměrné. Kolikrát vzroste napětí, tolikrát vzroste i relativní prodloužení. Po odtížení se při těchto malých deformacích vzorek opět smrští na původní délku. V praxi se pro hodnocení napětí používá jednotka MPa (megapascal). Pro názornou představu — bylo by to napětí v naší kovové tyčince při zatížení zavěšeným čtyřistagramovým závažím.

Pro teoretické pevnosti je vhodné používat jednotku tisíckrát větší GPa (gigapascal). Abychom docílili této hodnoty napětí v našem vzorku, musela by „sirka“ udržet činku o hmotnosti 400 kg.

Většina materiálů běžně používaných ve strojírenství má pevnost v tahu pod touto hranicí (TAB I.). Můžeme tedy trochu zjednodušeně chápat jednotku GPa jako měřítko nejvyšších pevností současných materiálů a užívat ji i jako názornou jednotku k udávání velkých teoretických pevností.

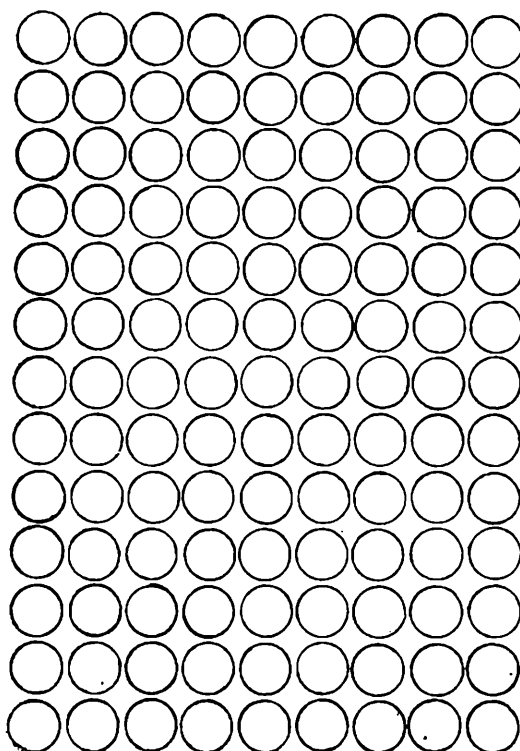
Každý materiál má v zásadě teoretickou mez pevnosti, označovanou někdy „ideální pevnost“, která je určena napětím, při kterém dojde k překonání sil poutajících částice ve vzorku. Při odhadu horní hranice pevnosti budeme vycházet z představy, že vzorek má naprosto stejnou dokonalou stavbu v celém svém objemu, nemá trhlinky a neobsahuje ani jiný druh poruch. Už z tohoto předpokladu je každému jasné, že u skutečných materiálů musíme očekávat pevnost podstatně menší, než bude ideální mez, kterou takto odhadneme.

Ukážeme nyní, jak lze i pomocí velmi zjednodušeného modelu, který vychází ze znalosti průběhu interakční energie dvojice atomů, velmi hrubě vyčíslit ideální pevnost uhlíkového vlákna. To nám současně naznačí, mezi kterými látkami bychom měli hledat ty nejpevnější.

TABULKA I. *Orientační hodnoty pevnosti v tahu některých běžných materiálů*

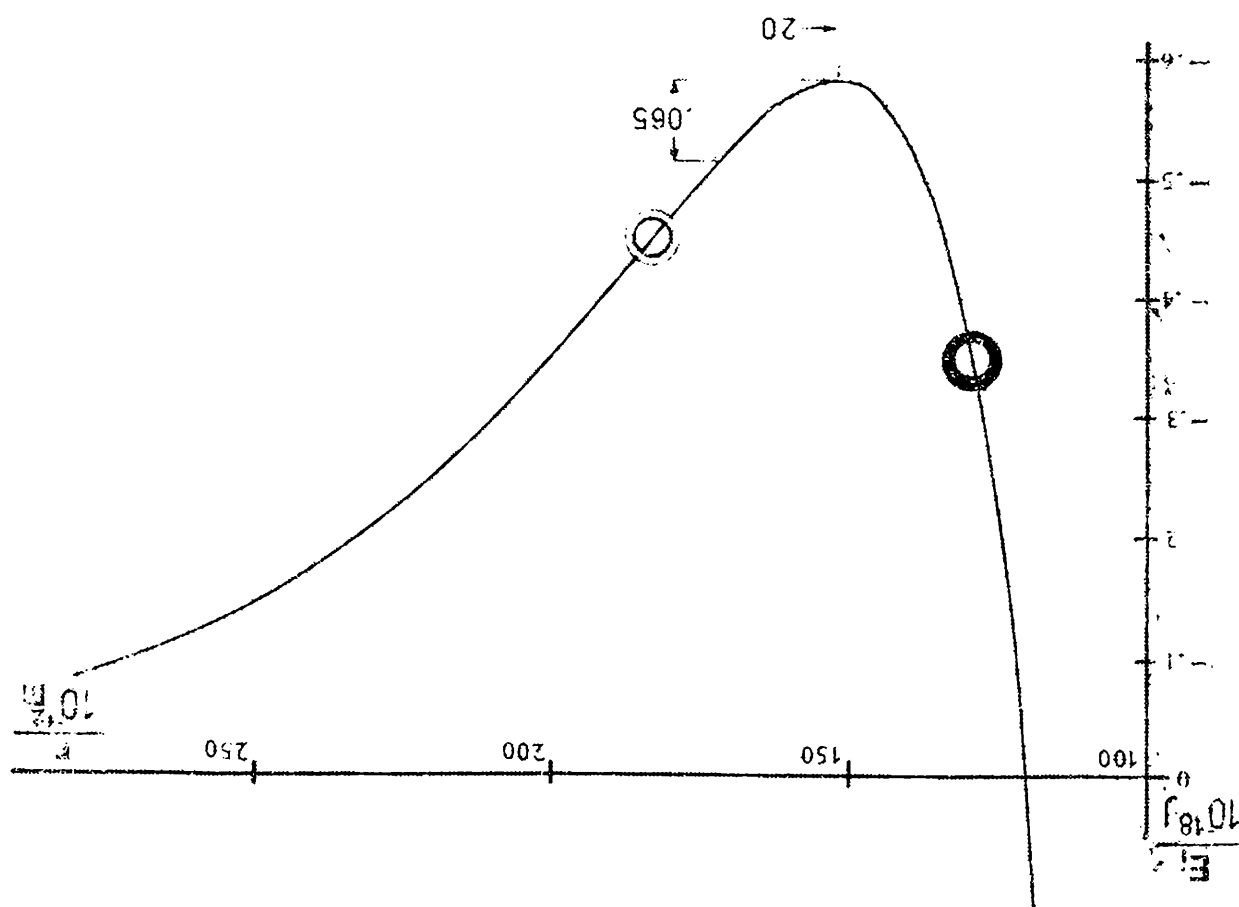
materiál	pevnost v tahu [GPa]	závaží, potřebné k přetržení vlákna o tloušťce lidského vlasu [g]
ocel	0,5–4	100–800
hliníkové slitiny	0,1–0,4	20–80
nylon	0,5	100
dřevo	0,2	40
pavučina	0,5	100
len	0,6	120
hedvábí	0,3	60
vlas	0,4	80

Na obr. 1 je schematicky znázorněn vzorek tvořený několika „řetízky atomů“, které chceme přetrhnout. Vyjdeme ze zjednodušujícího předpokladu, že pro jeho pevnost jsou rozhodující jen vazby mezi nejbližšími sousedy nad sebou. V přesnějším odhadu je ovšem potřeba uvažovat také síly do stran a mezi vzdálenějšími sousedy, ale spokojíme se s naším zjednodušeným modelem. Závislost energie vazby mezi dvěma atomy na jejich vzdálenosti se sice pro vazby různých částic liší, ale kvalitativně má podobný průběh, jako ukazuje graf na obr. 2 pro atomy uhlíku.

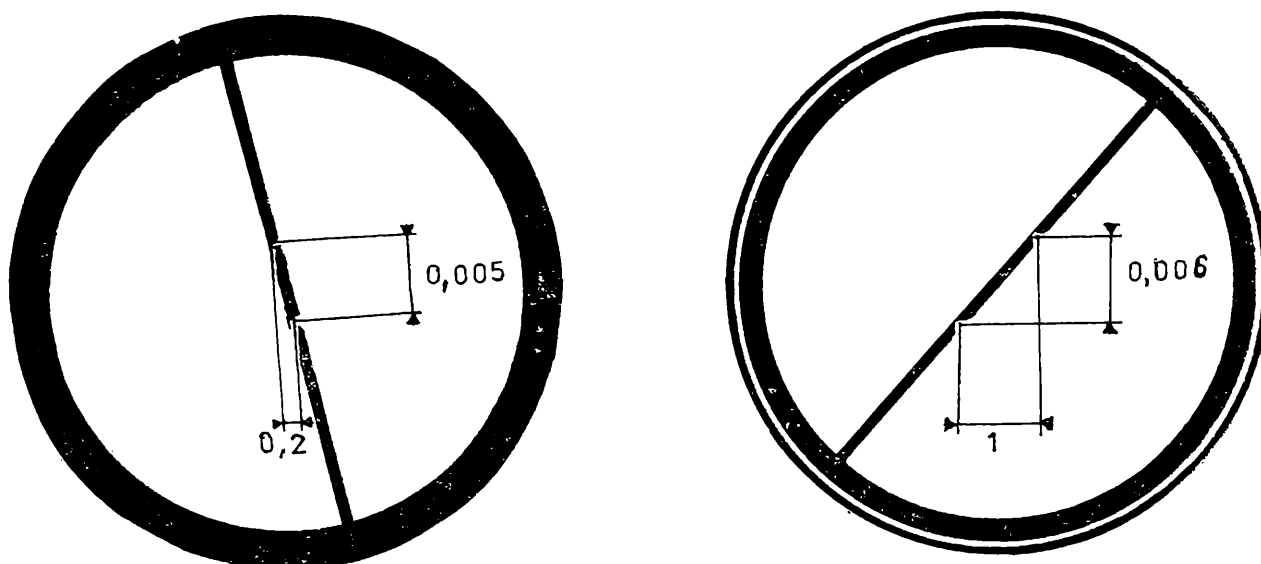


Obr. 1. Schematické plošné znázornění atomů ve vzorku

Kde je ale v uvedené křivce ukryta informace o síle, která poutá atomy? Představte si, že atomy od sebe odtáhneme z rovnovážné vzdálenosti o 20 pm ($20 \cdot 10^{-12}$ m). Energie se zvětšila o $0,065 \cdot 10^{-18}$ J. Stejně velkou práci jsme tedy museli vykonat. Protože jsme táhli ve směru dráhy, můžeme použít vztah: práce = síla · dráha. V tomto případě byla vykonaná práce $0,065 \cdot 10^{-18}$ J, dráha je $20 \cdot 10^{-12}$ m a pro velikost síly přibližně dostaneme $F = 3 \cdot 10^{-9}$ N. To je samozřejmě jen průměrná velikost síly, protože ta se bude se vzdáleností atomů měnit. Z uvedené úvahy je vidět, že i velikost síly při určité vzdálenosti atomů udává sklon křivky energie. Čím strmější bude v uvažované vzdálenosti r graf energie $E_1(r)$, tím větší je síla, kterou na sebe atomy z této vzdálenosti vzájemně působí. Přitom levá část křivky energie odpovídá odpudivým silám, při přibližování atomů zde interakční energie roste. Pravá část grafu odpovídá přitažlivým silám, při zmenšování vzdálenosti atomů interakční energie klesá. Z obr. 2 je patrné, že je v této oblasti křivka energie nejstrmější, když jsou atomy C vzdáleny asi o pětinu víc, než je jejich rovnovážná vzdálenost. Pro velikost maximální přitažlivé síly vychází z hodnot na detailním obr. 3.



Obr. 2. Graf interakční energie pro dvojici atomů uhlíku



Obr. 3. Detaily grafu $E'(r)$ vyznačené na obr. 2

$$F_{\text{maz}} = \frac{0,006 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{10^{-12} \text{ m}} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

To je tedy mez, které musí dosáhnout vnější síla, aby přetrhla jeden atomový řetízek.

Zbývá odhadnout počet řetízků, tj. počet atomů rozmístěných podél příčné roviny vzorku. Vyjdeme-li ze známé hustoty uhlíku ($\approx 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) a hmotnosti jednoho uhlíkového atomu ($\approx 2 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$), vychází pro počet atomů v uhlíkové zápalcí o rozměrech $2 \times 40 \times 2$ v milimetrech:

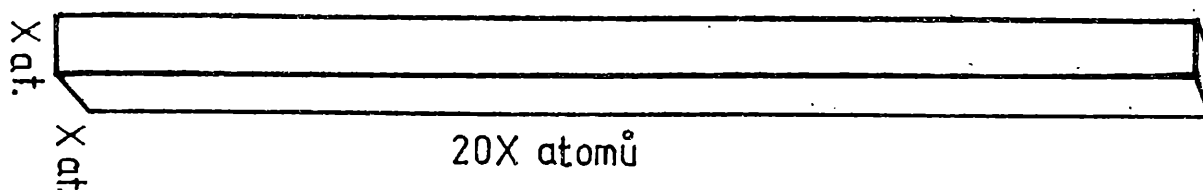
$$\text{počet atomů} = \frac{\text{hmotnost vzorku}}{\text{hmotnost jednoho atomu}} = \frac{16 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-26}} = \approx 16 \cdot 10^{21} \text{ atomů.}$$

Pro hrubý odhad si můžeme představit, že atomy uhlíku jsou narovnány v celém objemu jakoby v krychlových krabičkách.

Označíme počet atomů v dvoumilimetrové hraně naší zkušební „uhlíkové zápalcí“ X . Podle obr. 4 potom platí pro celkový počet atomů ve vzorku

$$X \cdot X \cdot 20X = 16 \cdot 10^{21},$$

$$\text{odtud } X = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10^{21}}{20}} = 9,3 \cdot 10^6$$



Obr. 4. K odhadu počtu atomů v průřezu vzorku

V jedné vrstvě je potom $X \cdot X \doteq 8,6 \cdot 10^{13}$ atomů a síla potřebná k přetržení $8,6 \cdot 10^{13}$ atomových řetízků je tedy

$$F = 8,6 \cdot 10^{13} \cdot 6 \cdot 10^{-9} \text{ N} = 5,2 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Napětí pro současné přetržení všech řetízků v dokonalém uhlíkovém vzorku tím vychází:

$$\sigma = \frac{5,2 \cdot 10^5 \text{ N}}{4 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \approx 10^{11} \text{ Pa} = 100 \text{ GPa}$$

Obdobně lze dělat odhady pro další materiály. Avšak i tento jednotlivý příklad ukazuje, že nejpevnější materiály máme hledat mezi látkami s úzkou a hlubokou křivkou energie. Budou to látky, jejichž atomy jsou malé (úzká křivka) a jejichž částice jsou vázány nejpevnější, tj. chemickou, vazbou (hluboká křivka) jako např. u uhlíku nebo křemíku. Proto je uhlík vhodnější než kovy a teprve potom následují látky s iontovou vazbou.

V Tab. II jsou uvedeny teoretické pevnosti a největší pevnosti v tahu dosažené při tahových zkouškách pro některé materiály.

TABULKA II.

Materiál	Teoretický odhad meze pevnosti [GPa]	Experimentálně dosažená hodnota pevnosti [GPa]	Druh vzorku
C	100	25	tenká mono- krystalická vlákna (whiskery)
SiO ₂	70	25	
Al ₂ O ₃	50	20	
MgO	30	24	
NaCl	6	1	
Fe	22	13	
W	42	20	

Jak už bylo řečeno na počátku, nejvyšší pevnosti, blízké teoretickým, by bylo možno dosáhnout u vzorků s dokonalou krystalickou stavbou bez trhlin a jiných poruch. Takové vzorky se již daří průmyslově připravovat ve tvaru vláken (whiskers, čti wiskez) o průměrech řádově tisíce milimetru a milimetrových až centimetrových délkách. Přestože i taková vlákna obsahují určitý počet poruch, ať to jsou chybějící jednotlivé atomy v mřížkových bodech nebo atomy umístěné mimo svou pravidelnou polohu či atomy příměsí, blíží se u nich naměřené hodnoty pevnosti teoretické hranici. To ukazuje, že tyto místní nedokonalosti snižují pevnost materiálů podstatně méně než poruchy, např. dislokace, zasahující větší oblasti.

V současné době se „materiály s téměř dokonalou stavbou“ nejčastěji využívají v tzv. kompozitech. Vysoce pevná uhlíková, křemenná či



Obr. 5. Radarem neviditelný letoun z kompozitních materiálů

safírová vlákna jsou v nich zapuštěna do houževnatého „tmelu“, kterým může být kov nebo různé druhy umělých pryskyřic, např. EPOXY. Účelem výplně je přenášet zatížení na vlákna a oddělením svazků vláken od sebe bránit šíření trhliny, když jedno nebo několik vláken praskne. Lákavá myšlenka na široké užití takových superpevných materiálů však naráží i na překážky. Obtížné je zpracování a spojování takových materiálů, častějšímu uplatnění brání i vysoká cena. Proto se dnes materiály s pevností blízkou teoretické pevnosti používají zejména pro speciální účely v kosmické technice, v letectví a vrcholovém sportu.

Závěrem můžeme shrnout:

Ideální pevnost závisí na průběhu interakční energie mezi atomy a na struktuře materiálu a *nelze ji v principu přesáhnout*. Nekonečně pevný materiál tedy zůstane navždy nesplněným snem spisovatelů fantastických románů. Pevnost skutečných látek s poruchami bude vždy menší než teoretická pevnost, i když nás nové výrobní postupy k této hranici ještě více přiblíží.

Řešení algebrogramů ze str. 127

- a) $98\,423 + 95 + 10\,967 + 40 = 109\,525$
 $98\,427 + 95 + 10\,963 + 40 = 109\,525$
- b) $10\,425 + 10\,425 + 10\,425 + 5 + 9\,096 = 40\,376$
 $10\,425 + 10\,425 + 10\,425 + 5 + 9\,098 = 40\,378$
- c) $32\,239 + 645 + 95\,750 + 8\,405 = 137\,039$
 $36\,638 + 745 + 85\,250 + 9\,405 = 132\,038$

Opojenie z poznania

Táles z Milétu

(asi 624 — 547 pred n. l.)

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topolčany

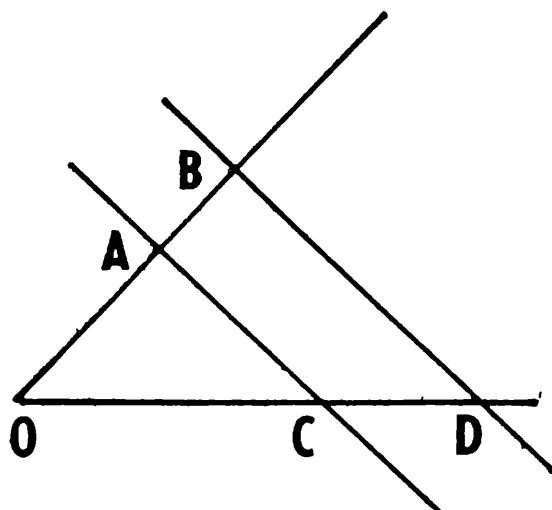


Slniečny deň neďaleko pyramíd. Egyptský kňaz a mladý kupec Táles z Milétu uvažujú, ako určiť výšku jednej z nich. Táles sa pousmial: „Zmeriam výšku pyramídy“. Kňaz sa nedôverčivo spýtal: „Ako?“ Táles vysvetlil: „Ak bude môj tieň práve taký dlhý, ako je moja telesná výška, tak v tom okamihu musí dĺžka tieňa pyramídy merať práve toľko, ako je vysoká pyramída.“ Jednoduchosť riešenia skrývala matematickú podstatu podobnosti trojuholníkov. Táles už vtedy o nej vedel.

Táles sa narodil v Miléte, meste ruží, na maloázijskom pobreží. Túžba po poznaní rástla s jeho kupeckým povoláním — obchodoval s olejom a soľou. Veľa cestoval a poznával. Najviac v Egypte, možno i v Babylone. V staršom veku sa zamýšľal nad poznanými prírodnými javmi a snažil sa ich usporiadať do nejakého systému a odvodiť z jednotného princípu. Chcel dôjsť od zrejmých tvrdení k menej jasným pomocou rozumovej úvahy. Takéto poznávanie ho očarovalo. Začal milovať múdrosť, stal sa filozofom.

Táles určil, koľko má rok dní, poznal výsledky astronomických pozorovaní tak dobre, že dokázal ako prvý v histórii, predpovedať zatmenie Slnka v roku 585 pred naším letopočtom. Táles, ako prvý, začal klásť na vtedajšie matematické poznatky požiadavku dôkazu. Vedel napríklad, že v rovnoramennom trojuholníku sú uhly pri základni zhodné, že dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v strane a príslušných uhloch, že súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku sa rovná priamemu uhlu. Dokázal, že uhol vpísaný do polkruhu je pravý — dnes je to tzv. Tálesova veta. Viete, že v kruhovom divadle sa dívajú diváci na scénu pod rovnakým uhlom? Dokážete to zdôvodniť?

Táles dobre pochopil poznatky o podobnosti trojuholníkov. Poznal, že ak sú dve rôznobežky pretaté dvomi rôznymi rovnobežkami (pozri obrázok) tak platí: ak $AC \parallel BD$, tak $|OA| : |AB| = |OC| : |CD|$.



Využitím podobnosti trojuholníkov vedel ukázať, ako a prečo, sa dá určiť vzdialenosť lode plávajúcej na mori od vyvýšeného brehu, ak poznáme výšku pozorovateľne nad hladinou mora. Zostrojil jednoduchý dialkometer pre určenie vzdialenosti lodi od brehu.

Táles bol človek praktický, šikovný technik, obchodník i cestovateľ. Vedel, že pri trení jantáru látkou vzniká elektrická príťažlivosť. Skúmal aj magnetické vlastnosti niektorých železných rúd. Mal veľa skúseností a patril k prvým ľuďom, ktorí chceli poznať odpoveď nielen na otázku „Ako to je, ako sa to vypočíta?“, ale aj logickú odpoveď na „Prečo práve tak?“

Táles založil *milétsku školu iónskych filozofov*, ktorí sa snažili, rozumne a logicky, vyložiť pozorované prírodné javy i vtedajšie vedecké poznatky. Domnievali sa, že pralátkou, z ktorej je všetko zložené, je voda. Začali tým postupne vytvárať svetonázor — pohľad na svet ako celok, ktorý má zmysel. Ukazovali ostatným cestu pre rozumové uvažovanie. Táles z Milétu dostal označenie „prvý filozof, fyzik, matematik a astronóm“. Stal sa jedným zo starogréckych mudrcov — slávnych ľudí s praktickou životnou múdrosťou, politickou prezieravosťou a morálnymi kvalitami.

Medzi Tálesových žiakov patrí aj slávny *Pytagoras*. Tálesove deduktívne úvahy o geometrických poznatkoch boli dovŕšené v Euklidových „Základoch“.

Už aj v tých časoch ľudia „ohovárali“ filozofov i matematikov. O Tálesovi rozširovali legendu: Vraj raz pri chôdzi pozoroval hviezdy a pritom spadol do studne. Jazyčnatá deva sa nezdržala a situáciu komentovala: „Chcel vedieť, čo sa deje na nebi, a zabudol, čo má pod nohami.“

Iná legenda pripomína, že na hrobe Táles z Milétu, ktorý zomrel ako veľmi vážený občan, bol nápis: Malý hrob, ale veľká sláva tohoto kráľa astronómov medzi hviezdami. Aj to naznačuje, že Táles z Milétu zanechal hlbokú stopu vo vedomí ľudí, ktorí túžia po pravdivom poznaní.

Omyl nebo básnická nadsázka?

Pohled prakticky uvažujícího člověka na verše může někdy dopadnout pro básníka velmi nepříznivě. Jeden takový příklad uvádí známý sovětský popularizátor matematiky a fyziky *J. I. Perelman* v knize „Zajímavá geometrie“ (překlad z ruštiny, Mladá fronta, Praha 1954) v souvislosti s básní „Skoupý rytíř“ od A. S. Puškina (1789–1837). Vypráví v ní báji východních národů:

*Císař, čet' jsem kdes,
prý jednou nakázal svým vojákům,
hrst po hrsti by kopec vršili;
i povstal pyšný chlum — a panovník
moh' s jeho výše rozradostněn hledět
i po údolí s bělostnými stany
i po moři, jímž pluly koráby.*

Po přečtení básně se vnucuje otázka: Je možno navršit ručně tak vysoký vrch? V současné době se v Praze na rozhraní Vinohrad a Žižkova staví nová televizní věž, ze které by mělo televizní vysílání pokrýt v podstatě celou Prahu. Výška této věže od paty ke špičce bude zhruba 200 metrů. Představme si, že takovou výšku by měl vrch tvaru rotačního kužele, jehož strana by svírala s podstavou úhel 45° . Šlo by o kužel, v němž by byla výška v rovna poloměru r podstavy. Jeho objem by byl

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v = \frac{1}{3} \pi v^3$$

Hrubý odhad dává, že při $v = 200$ m by tento objem byl 8 000 000 m³. Tedy v představě Puškinovy básně by musela nastoupit víc než osmi-miliónová armáda a každý její voják by musel donést 1 m³ zeminy. Přitom výška 200 metrů k dohlédnutí z vnitrozemí na moře s plujícími koráby je jistě nedostačující.

Jana Mířová

Tři zajímavé úlohy

Okurky pana Roubínka

Pan Roubínek pěstoval v minulém roce okurky nakládačky na čtvercovém záhonu. V tomto roce ve snaze získat stejnou úrodu se rozhodl, že je bude pěstovat na obdélníkovém záhonu, jehož délka bude o 4 metry delší a šířka o 4 metry kratší, než byla strana loňského čtvercového

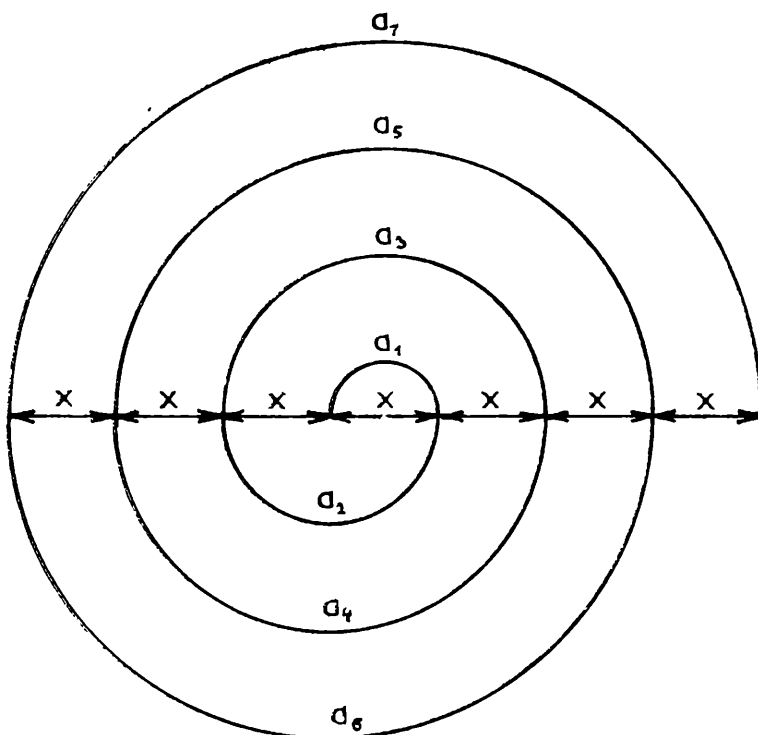
záhonu. Netušil však, že obsah obdélníkového záhonu bude tvořit 96 procent obsahu čtvercového záhonu. Loni sklídl na 1 metru čtverečném 0,95 kilogramu okurek. O kolik kilogramů okurek poklesla panu Roubínkovi úroda, byla-li na 1 metru čtverečném stejná jako loni?

Obsah čtyřúhelníku ve čtyřúhelníku

Je dán libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Bod E je středem strany AB , bod F středem strany CD . Vypočítejte obsah čtyřúhelníku $EBFD$ v centimetrech čtverečných, jestliže obsah čtyřúhelníku $ABCD$ se rovná obsahu čtverce o straně dlouhé 49 milimetrů.

V dílně kováře Jecha

Kovář Jech nahřál silnou ocelovou spirálu (obr. 1) ve výhni a pak ji překoval na dekorativní prvek tvaru čtverce. Vypočítejte délku jeho strany, jestliže se spirála kováním neprodloužila ($x = 1$ cm; počítejte s $\pi \doteq \frac{22}{7}$).



Obr. 1

(Řešení těchto tří úloh naleznete v čísle 4.)

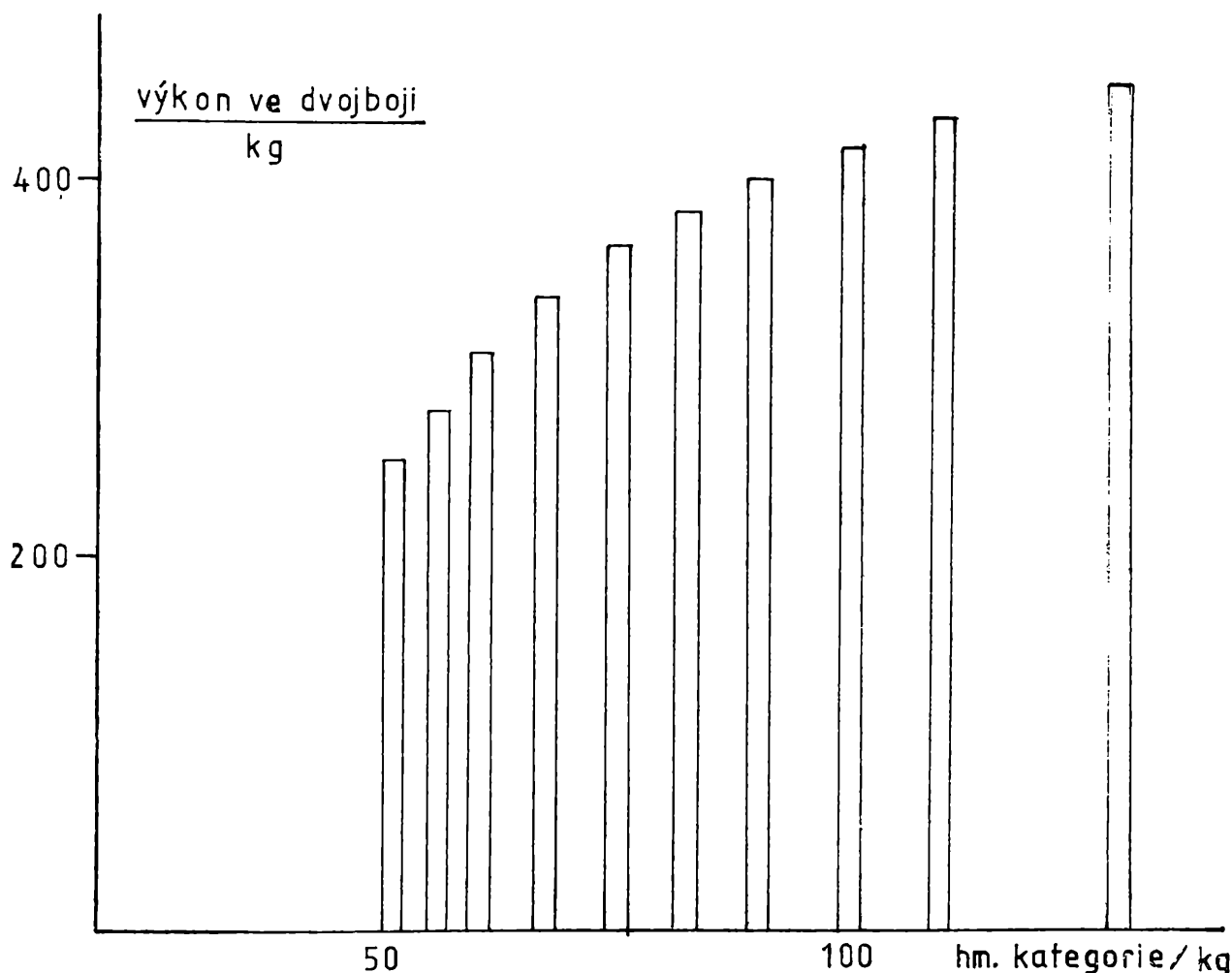
Josef Trejbal

Omyly, které ovládly svět

Kdyby se blecha proměnila v chlapečka

Myšlenku tohoto článku jsem si vypůjčil ze známé knížky pro děti spisovatele Ondřeje Sekory *Ferda v cizích službách*. Pohádka, která popisuje rekordní výkony blechy, kterou kouzelník proměnil v chlapečka, vychází ze všeobecně rozšířeného omylu o vztahu tělesné velikosti a výkonu.

Nejen skoky blechy nebo lučního koníka, ale i např. síla lesních mravenců bývá často promítána do lidských měřítek a předpokládá se přitom, že by vzrostla úměrně s velikostí živočicha. Tak můžeme často



Obr. 1

Průměry deseti nejlepších světových výkonů ve vzpírání — dvojboj (trh + nadhoz) v závislosti na hmotnostní kategorii. Na diagramu je patrné, že výkony nerostou rovnoměrně s hmotností vzpěrače. Lze ukázat, že průběh je přibližně lineární s hmotností umocněnou na $2/3$, jak plyne z modelu, který v článku uvádíme.

číst fantastická čísla o břemenech, která by zvednul mravenec o velikosti člověka, nebo o světových rekordech blechy — chlapečka. ¶

Rostla by opravdu úměrně s velikostí blechy i výška jejího skoku?

Zkusíme na tuto otázku odpovědět na základě velmi zjednodušujících předpokladů, kdy zanedbáme např. i rozdíly mezi kvalitou tkání u odlišných živočišných druhů a budeme uvažovat pouze přímou úměrnost mezi příčným průřezem svalu a silou, kterou může sval vyvinout.

Z jednoduchých geometrických úvah vyplývá, že vzrostou-li všechny lineární rozměry blechy na dvojnásobek, vzroste současně čtyřnásobně i síla, kterou dokáže vyvinout příslušná svalová vlákna. To by mohlo svádět k optimistickým předpovědím o výkonech takové obří blechy.

Situaci však podstatně změní skutečnost, že současně s tím, neuvažujeme-li o změnách kvality svalů, vzroste také osmkrát hmotnost živočicha. Velikost síly takové blechy v poměru k její zvětšené hmotnosti by tedy byla jen poloviční ve srovnání se standardní blechou.

Blecha, která by měla velikost chlapečka, by tedy nejen nedosahovala světových rekordů, které jí připisuje výše uvedená pohádka, ale byla by zřejmě zcela neschopná pohybu, protože by ji její opěrný systém a svaly vůbec neunesly.

Příroda řeší tento problém u největších savců tak, že příčné rozměry jejich kostí i svalů jsou ve srovnání s menšími živočichy podstatně větších velikostí, než by odpovídalo úměrnému zvětšení např. výšky těla. To lze pozorovat u slona, hrocha či nosorožce.

V jiných případech, mezi které lze zařadit např. žirafu, je příznivého poměru mezi fyzickou silou a hmotností živočicha docíleno obráceně co největším snížením hmotnosti, tj. štíhlým tělem a končetinami.

Nelineární závislost mezi fyzickou silou a hmotností u živočichů můžeme pozorovat i na výkonech vzpěračů, jak naznačuje graf na obr. 1. Je z něho patrné na první pohled, že s rostoucí hmotnostní kategorií, která do určité míry koresponduje s výškou vzpěračů, nevzrůstají úměrně i jejich výkony. Relativně nejlepší vzpěračské rekordy přísluší zcela zákonitě nejnižším vahám.

Můžeme tedy uzavřít konstatováním, že blecha skáče jako blecha a mravenec má sílu jako mravenec právě proto, že nemají velikost chlapečka.

Milan Rojko

Laboratoř doma

Aerodynamické paradoxon

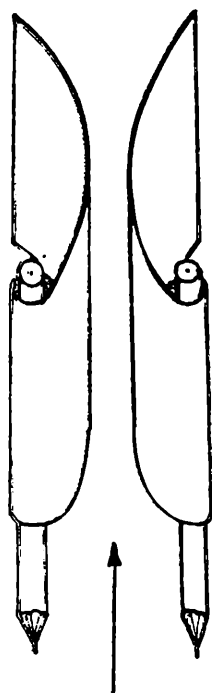
Paradoxon je podle slovníku cizích slov zdánlivě nesmyslné tvrzení nebo jev, který odporuje zdravému rozumu. Název aerodynamické paradoxon označuje překvapivé jevy, které jsou vyvolány skutečností, že tlak v proudícím vzduchu klesá za jinak stejných podmínek s rostoucí rychlostí a je tedy maximální, pokud je vzduch v klidu.

1. Na dvě kulaté tužky otáčivě připevněte dvě pohlednice vytvarované podle obr. 1. Jestliže mezi pohlednice foukneme, nerozestoupí se, jak bychom očekávali, ale budou přetlakem okolního vzduchu přitlačeny k sobě.
2. Do nálevky vložíme papírový kornout vytvarovaný tak, aby dosedl na vnitřní stěnu nálevky. Ani v tomto případě fouknutí do nálevky nevytlačí kornout ven, ale obráceně přisaje papírový kužel ke stěně (obr. 2).
3. Do proudu vzduchu ze sušiče vlasů, který namíříme svisle vzhůru vložíme pinpongový míček. Míček se udrží v proudu vzduchu i když fén poněkud nakloníme.

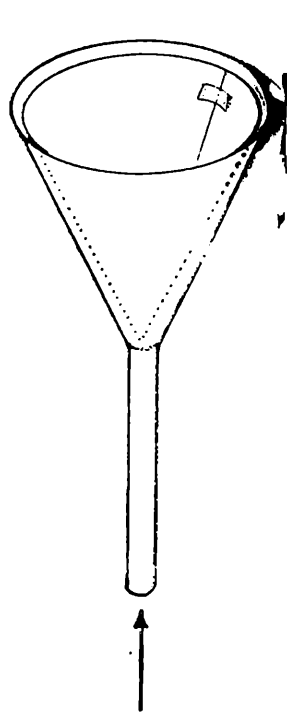
Úkol pro vás :

Vyslovte hypotézu o tom, co se stane s míčkem při posledním pokusu, jestliže k míčku z boku přiblížíte láhev, jak naznačuje třetí obrázek. Popište své pozorování. Vysvětlete pozorovaný jev.

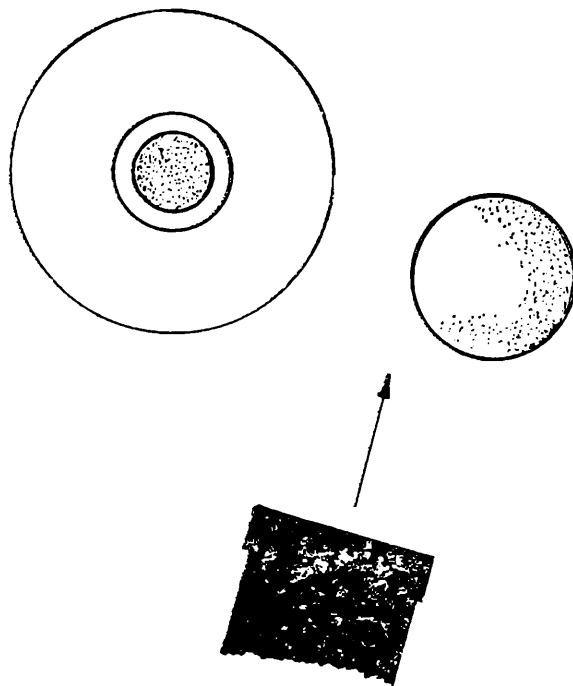
Milan Rojko



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

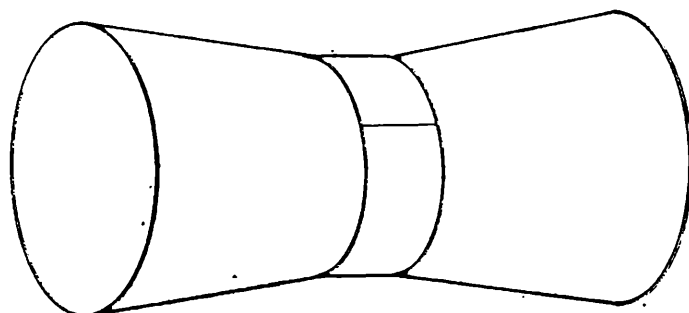
Fyzikální úloha

Najdete vysvětlení?

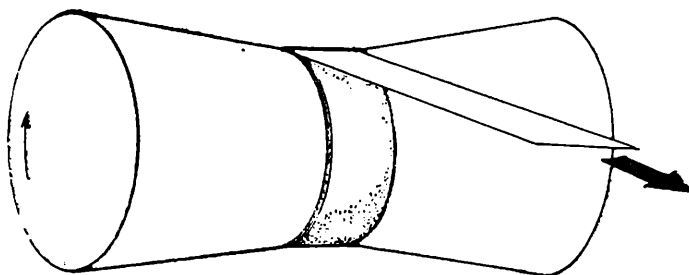
Na prvním obrázku vidíte dva papírové kelímky, jejichž dna jsou uprostřed slepená lepicí páskou. Jestliže namotáme na střední část asi 60 cm dlouhou stužku a odstartujeme kelímky rychlým vodorovným tahem za stužku rovnoběžně podél desky stolu, bude se let kelímků podstatně lišit podle toho, jak byla stužka na kelímcích namotána.

V případě vyobrazeném na druhém obrázku budou kelímky prudce klesat k zemi.

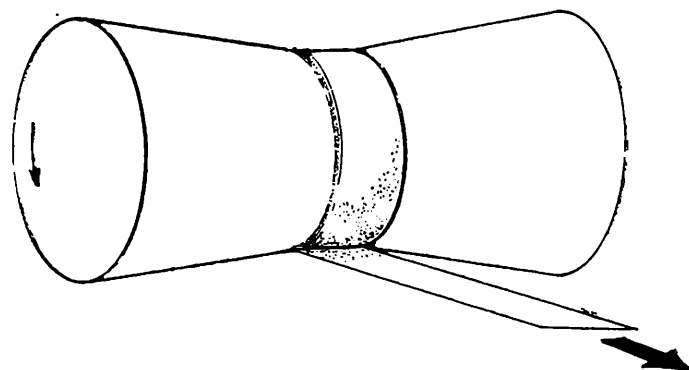
Při opačném navinutí stužky, které ukazuje třetí obrázek, poletí kelímky zpočátku téměř vodorovně.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Úkol pro vás :

Vysvětlete původ síly, která nadnáší kelímky v případě, že jsou při letu roztočeny způsobem, který znázorňuje třetí obrázek.

(Uvažte, jaký vliv má na rychlost obtékání vzduchu rotace kelímků a souvislost rychlosti obtékání s tlakem vzduchu.)

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních dvou článků zašlete na adresu:

RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.
Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

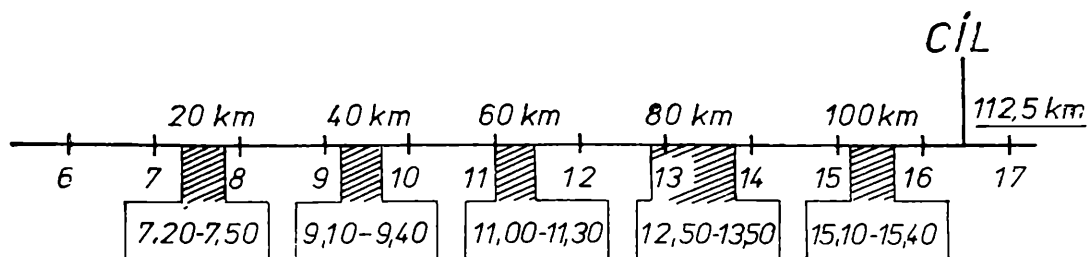
Úlohy na celou část reálného čísla

Doc. dr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK v Praze

V rámci akce *Pohybem ke zdraví* uspořádal o jednom jarním víkendu profesor Ypsilon pro žáky své třídy cykloturistický výlet. Během krátké pracovní neschopnosti, která po této zdařilé akci následovala, vytvořil pak na základě hlubokých zážitků z této vyjíždky dílko, v němž dal plně zaznít touze svého sportovního srdce po modravých dálkách. Šlo o tuto úlohu:

Cyklista vyjel na trasu v 6 hodin ráno průměrnou rychlostí $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a vždy po ujetí dvaceti kilometrů odpočíval. Každý odpočinek trval třicet minut s výjimkou zastávky čtvrté, jež trvala hodinu. Určete, jakou vzdálenost ujel, jestliže v 16.30 hodin téhož dne přijel do cíle své cesty.

Úlohu lze snadno vyřešit tak, že na časovou osu (viz obr. 1) s vyznačenými hodinovými údaji postupně zakreslíme jednotlivé zastávky, neboť známe rychlost cyklisty a dobu trvání těchto přestávek. Takto zjistíme, že v 15.40 hod., kdy se po uplynutí 5. zastávky vydává znovu na cestu, má ujetu rovných 100 km; vzhledem k tomu, že během padesáti minut, jež zbývají do půl páté, ujede 12,5 km, je celková vzdálenost, kterou od šesti hodin ráno urazil, rovna 112,5 km.



Obr. 1

S užitím pojmu celé části reálného čísla můžeme však tuto úlohu řešit i rovnicí. Označíme-li x vzdálenost (v kilometrech), kterou cyklista ujel, pak — jak si sami zdůvodníte — platí:

celkový počet zastávek je $\left\lceil \frac{x}{20} \right\rceil$, trvání zastávek v hodinách určuje

výraz $\left(\left\lceil \frac{x}{20} \right\rceil - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \left\lceil \frac{x}{20} \right\rceil + \frac{1}{2}$ a „čistá doba jízdy“ v ho-

dinách je dána výrazem $10,5 - \left(\frac{1}{2} \left\lceil \frac{x}{20} \right\rceil + \frac{1}{2} \right)$. S použitím známého

fyzikálního vzorce tak dostáváme rovnici $10,5 - \left(\frac{1}{2} \left\lceil \frac{x}{20} \right\rceil + \frac{1}{2} \right) = \frac{x}{15}$,

kterou upravíme na tvar $\left\lceil \frac{x}{20} \right\rceil = -\frac{2x}{15} + 20$.

Vzhledem k tomu, že s rovnicí tohoto typu jste se patrně ještě nesetkali, budeme jednotlivé kroky při jejím řešení podrobně zdůvodňovat. Ukázaný postup vám tak bude moci posloužit při řešení libovolné rovnice typu $[ax + b] = cx + d$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla, $a \neq 0$.

Připomeňme si nejprve, že číslo b nazýváme celou částí čísla a (píšeme $b = [a]$), jestliže b je celé číslo, pro něž je $b \leq a < b + 1$. V případě dané rovnice jsou tedy jejími kořeny právě ta čísla x , pro něž platí:

$$-\frac{2x}{15} + 20 \in \mathbb{Z} \wedge -\frac{2x}{15} + 20 \leq \frac{x}{20} < -\frac{2x}{15} + 21.$$

Soustavu

$$-\frac{2x}{15} + 20 \leq \frac{x}{20},$$

$$\frac{x}{20} < -\frac{2x}{15} + 21$$

splňují právě všechna $x \in \left\langle \frac{1200}{11}, \frac{1260}{11} \right\rangle$; z nich je nutno vybrat ta,

pro něž je číslo $-\frac{2x}{15} + 20$ číslem celým. Z této podmínky, kterou zapí-

šeme ve tvaru $-\frac{2x}{15} + 20 = k$, kde $k \in \mathbb{Z}$, dostáváme $x = \frac{300 - 15k}{2}$.

Ptáme se nyní, pro která celá čísla k platí

$$\frac{300 - 15k}{2} \in \left\langle \frac{1200}{11}, \frac{1260}{11} \right\rangle,$$

neboli pro snazší určení těchto čísel k

$$\frac{3300 - 165k}{22} \in \left\langle \frac{2400}{22}, \frac{2520}{22} \right\rangle.$$

Snadno se přesvědčíte, že takovéto celé číslo k existuje jediné, a to $k = 5$. Existuje tedy i jediné číslo x , které splňuje požadované podmínky, a je tedy kořenem naší rovnice; je to číslo

$$x = \frac{300 - 15.5}{2} = \frac{225}{2} = 112,5$$

Tím je úloha profesora Ypsilon vyřešena. Přesvědčte se, že jste tomuto postupu dobře porozuměli, a ověřte, že rovnice

$$\left[\frac{5 + 6x}{8} \right] = \frac{15x - 7}{5}$$

má právě dva kořeny $x_1 = \frac{7}{15}$, $x_2 = \frac{12}{15}$, zatímco rovnice

$$\left[\frac{15x - 7}{5} \right] = \frac{5 + 6x}{8}$$

nemá kořeny žádné.

Seznámíme se ještě se způsobem řešení rovnic typu

$$[ax + b] = [cx + d],$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla $a \neq 0, c \neq 0$, a to na konkrétním příkladu rovnice

$$\left[\frac{3 + 2x}{4} \right] = \left[\frac{5 - 3x}{2} \right].$$

Obvyklý postup spočívá v tom, že tuto rovnici nahradíme rovnicemi

$$\left[\frac{3 + 2x}{4} \right] = k, \quad \left[\frac{5 - 3x}{2} \right] = k$$

s parametrem $k \in \underline{\mathbb{Z}}$. První z těchto rovnic vede k soustavě nerovnic

$$k \leq \frac{3 + 2x}{4} < k + 1,$$

jejímž řešením jsou právě všechna $x \in I_k$, kde $I_k = \left\langle \frac{4k - 3}{2}, \frac{4k + 1}{2} \right\rangle$

Druhá z uvedených rovnic vede na soustavu

$$k \leq \frac{5 - 3x}{2} < k + 1,$$

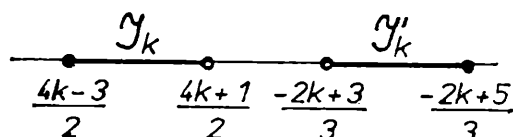
kterou splňují právě všechna $x \in I'_k$, kde $I'_k = \left(\frac{-2k+3}{3}, \frac{-2k+5}{3} \right)$.

K tomu, aby daná rovnice měla řešení, musí mít parametr $k \in \mathbb{Z}$ takovou hodnotu, aby oba intervaly I_k, I'_k měly neprázdný průnik, neboť kořen této rovnice (existuje-li) musí ležet v obou intervalech I_k, I'_k . Vyloučíme proto všechny hodnoty parametru $k \in \mathbb{Z}$, pro něž je $I_k \cap I'_k = \emptyset$; všimněte si podle obrázků 2 a 3, že to nastane pouze

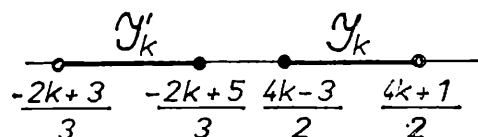
v těchto případech: jednak v případě $\frac{4k+1}{2} \leq \frac{-2k+3}{3}$, jednak

v případě $\frac{-2k+5}{3} < \frac{4k-3}{2}$. Přesvědčte se, že první z těchto

nerovnic, kterou řešíme v množině $\mathbb{Z}$, je splněna pro $k = 0$ a všechna k záporná, a že druhá je v $\mathbb{Z}$ splněna pro všechna $k \geq 2$. Vyloučíme-li tedy tyto hodnoty, zůstává pro parametr k jediná možnost, a to $k = 1$.



Obr. 1



Obr. 2

V tomto případě je pak $I_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$, $I'_1 = \left(\frac{1}{3}, 1 \right)$. Znamená to, že

rovnici $\left[\frac{3+2x}{4} \right] = 1$ vyhovují právě všechna $x \in I_1$ a že rovnici

$\left[\frac{5-3x}{2} \right] = 1$ vyhovují právě všechna $x \in I'_1$. Oběma těmito rovnicím

zároveň, a tedy i rovnici

$$\left[\frac{3+2x}{4} \right] = \left[\frac{5-3x}{2} \right]$$

vyhovují právě všechna $x \in I_1 \cap I'_1$, tj. právě všechna $x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$.

Chcete-li, můžete si závěrem vyřešit rovnici $\left[\frac{5+6x}{8} \right] = \left[\frac{15x-7}{5} \right]$,

jejímž oborem pravdivosti je množina $\left(\frac{14}{30}, \frac{15}{30} \right) \cup \left(\frac{24}{30}, \frac{34}{30} \right)$

Gergonnův bod

V 1. čísle Rozhledů letošního ročníku jste si mohli přečíst radu na vyzkoušení, jak umíte přesně rýsovat. Šlo o tzv. Gergonnův bod v trojúhelníku. V tomto čísle Rozhledů jste se v článku dr. Jaroslava Švrčka mohli seznámit s Cérovou větou. Užijeme ji nyní k důkazu věty o Gergonově bodě.

Věta

Nechť ABC je libovolný trojúhelník a G_c, G_a, G_b jsou dotykové body jeho kružnice vepsané (obr. 1) a po řadě stran AB, BC, CA . Potom přímky CG_c, AG_a, BG_b procházejí týmž bodem (tzv. Gergonovým).

Důkaz: Z vlastnosti tečen z bodu ke kružnici plyne, že platí rovnosti:

$$|AG_c| = |AG_b|, \quad |BG_c| = |BG_a|, \quad |CG_b| = |CG_a|$$

Odtud dostáváme

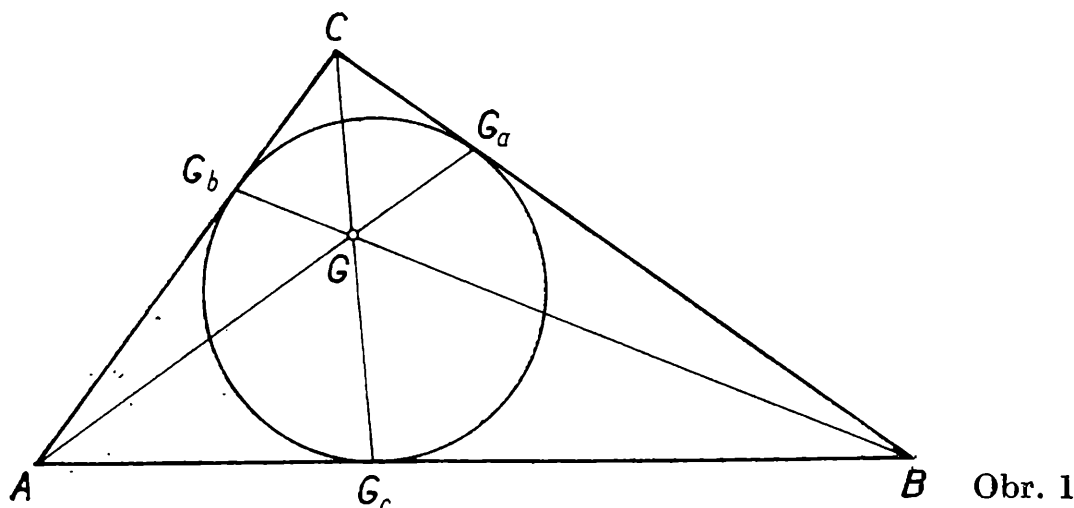
$$\frac{|AG_c|}{|G_cB|} \cdot \frac{|BG_a|}{|G_aC|} \cdot \frac{|CG_b|}{|G_bA|} = \frac{|AG_c|}{|G_cB|} \cdot \frac{|G_cB|}{|G_aC|} \cdot \frac{|G_aC|}{|AG_c|} = 1$$

Podle Cérovy věty tedy přímky CG_c, AG_a, BG_b procházejí týmž bodem; na obr. je označen G .

Problém Gergonova bodu jsme uzavřeli. Jistě je vhodné, aby zůstala nějaká inspirace pro další úvahy.

Většinou asi víte, jak vypadají připsané kružnice daného trojúhelníku. Jsou celkem tři. Každá z nich se dotýká jedné strany daného trojúhelníku a dalších dvou stran v jejich prodloužení. Např. pro trojúhelník ABC se jedna z nich dotýká strany AB a opačných polopřímek k polopřímám AC a BC . Dotykové body těchto připsaných kružnic a stran AB, BC, CA označme po řadě N_c, N_a, N_b . Při použití týchž znalostí jako v předešlém důkazu lze dokázat, že v $\triangle ABC$ přímky AN_a, BN_b, CN_c procházejí týmž bodem, který se nazývá *Nagelův*. Pokuste se o důkaz.

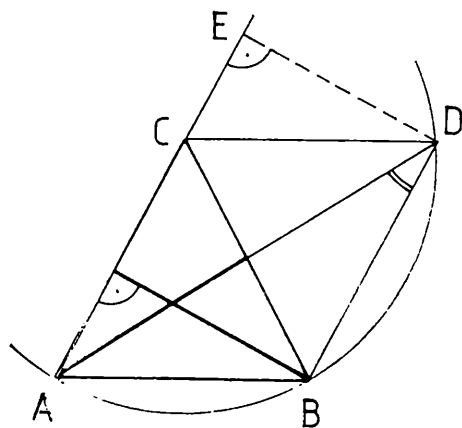
-jm-



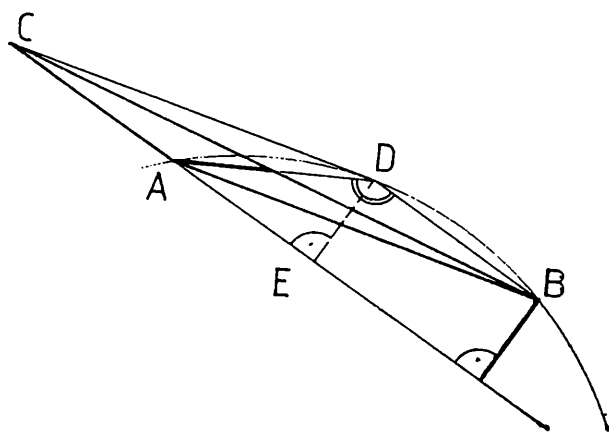
Řešte s námi (3)

4. Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABDC$ (obr. 6) a označme E patu kolmice z bodu D na přímku AC . Podmínka $t_a = v_b$ je pak ekvivaletní rovnosti $|DE| = \frac{1}{2} |AD|$. V pravoúhlém trojúhelníku ADE

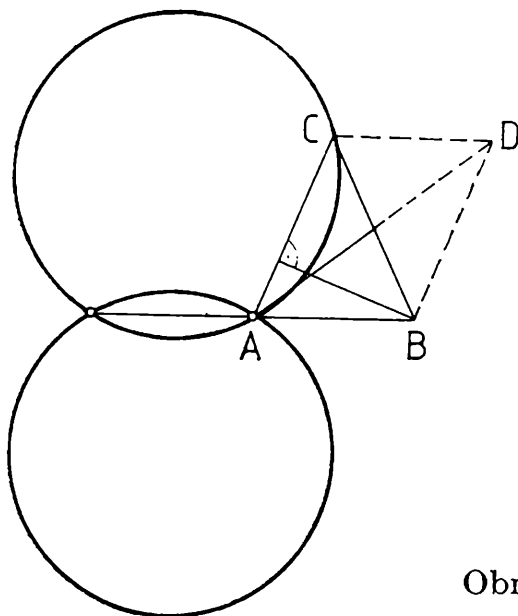
tedy bude $|\sphericalangle DAE| = 30^\circ$. Podle vzájemné polohy bodů A, C, E pak dostaneme dvě možnosti: Buď bod E leží na polopřímce AC (obr. 6) a je $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ADB| = 30^\circ$, anebo E leží na polopřímce opačné k polopřímce AC (obr. 7) a je $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DAC| = 180^\circ - |\sphericalangle DAE| = 150^\circ$. Bod D proto musí ležet na kruhovém oblouku, z něhož je úsečka AB vidět pod obvodovým úhlem 30° , resp. 150° . Tyto oblouky dohromady tvoří dvě kružnice, z nichž jsou vyňaty body A a B . Posunutím této množiny o vektor $\mathbf{BA} = \mathbf{DC}$ dostaneme hledanou množinu bodů C (obr. 8).



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

Obrácením celého postupu se přesvědčíme, že pro každý bod C z nalezené množiny dostaneme trojúhelník ABC vyhovující podmínkám úlohy.

Jednoduchá formulace úlohy svádí k analytickému řešení. Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, aby bylo $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, pak pro $C = (x, y)$ vyjde

$$t_a = \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}}, \quad v_b = \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Je tedy $t_a = v_b$, právě když

$$(x^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2) = 4y^2,$$

neboli

$$y^2 + 2y^2(x^2 + x) + x^2(x+1)^2 = 3y^2,$$

$$(y^2 + x^2 + x)^2 = 3y^2,$$

$$(y^2 + \sqrt{3}y + x^2 + x)(y^2 - \sqrt{3}y + x^2 + x) = 0, \quad (7)$$

což je rovnice sjednocení dvou kružnic

$$\left(y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

s poloměrem 1 a středy $\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Obrácením postupu je vidět, že kromě bodů (x, y) , pro něž $y = 0$, naopak každý bod sjednocení obou kružnic vyhovuje požadavkům úlohy.

Najít rozklad (7) původně bikvadratické rovnice není ovšem jednoduché ani v tomto „pěkném“ případě.

5. Pro $n = 1$ a $n = 2$ nemohou být splněny předpoklady tvrzení; budeme proto předpokládat, že $n \geq 3$. Uvažujme systém $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ vlastních podmnožin množiny E , který splňuje dané předpoklady, zřejmě musí být $m \geq 2$. Také stačí uvažovat jen takové systémy, které neobsahují jednoprvkové množiny.

Z toho, že libovolné dva prvky E jsou v právě jedné množině systému, plyne, že každý prvek E leží aspoň ve dvou množinách z S a zároveň neexistuje prvek, který by ležel ve všech množinách z S . Kdyby totiž $e \in E$ ležel jen v jedné množině $S_1 \in S$, pak by v S_1 ležely i všechny ostatní prvky E , což nelze. A podobně pro $e \in S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m$ vidíme, že kromě e obsahují všechny množiny z S vesměs různé prvky (každé dvě množiny z S mají nejvýše jeden společný prvek). Prvky $e_1 \in S_1$, $e_2 \in S_2$, $e_1 \neq e \neq e_2$, nemohou tedy současně ležet v žádné z množin S .

Označme nyní s_i počet prvků množiny $S_i \in S$ a k_j počet těch množin

v S , které obsahují prvek $e_j \in E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Zřejmě platí $2 \leq k_j < m$,

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = s_1 + s_2 + \dots + s_m \quad (8)$$

Zvolme navíc označení prvků E tak, aby k_n bylo nejmenší, a množiny v S označme tak, aby

$$e_n \in S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{k_n}, \quad e_n \notin S_{k_n+1} \cup \dots \cup S_m. \quad (9)$$

Protože množiny $S_1, S_2, \dots, S_{k_n}$ jsou až na společný prvek e_n vesměs různé (každé dvě množiny v S mají nejvýše jeden společný prvek), můžeme dokonce prvky z E označit tak, aby $e_1 \in S_1, \dots, e_{k_n} \in S_{k_n}$. Při takovémto označení pro $1 \leq i, j \leq k_n$ platí $e_i \notin S_i$, ale zároveň $e_i \notin S_j$ pro $i \neq j$. V tom případě musí prvek e_i s každým prvkem $x \in S_j$, $x \neq e_n$, ležet v nějaké jiné množině systému S , nikoli však se dvěma současně (každá dvojice leží právě v jedné množině systému S). Odtud plyne, že je $k_i \geq s_j$ (nakreslete si obr.). Podle toho je tedy

$$\begin{aligned} s_1 &\leq k_2, & s_1 &\leq k_3, & s_1 &\leq k_{k_n}, \\ s_2 &\leq k_1, & s_2 &\leq k_3, & s_2 &\leq k_{k_n}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$s_{k_n} \leq k_1, \quad s_{k_n} \leq k_2, \quad s_{k_n} \leq k_{k_n-1},$$

takže sečtením dostaneme

$$\begin{aligned} (k_n - 1)(s_1 + s_2 + \dots + s_{k_n}) &\leq (k_n - 1)(k_1 + k_2 + \dots + k_{k_n}), \\ s_1 + s_2 + \dots + s_{k_n} &\leq k_1 + k_2 + \dots + k_{k_n} \end{aligned} \quad (11)$$

Protože podle (9) žádná z množin S_j , $k_n < j \leq m$, neobsahuje prvek e_n , najdeme libovolnou dvojici tvaru (e_n, e) v některé z množin $S_1, \dots, S_{k_n}$, tj. $E \subset S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{k_n}$. A protože libovolné dvě z množin S mají společný nejvýše jeden prvek, znamená to, že pro $k_n < j \leq m$ je $s_j \leq k_n \leq k_j$. Spolu s nerovností (11) tak z rovnosti (8) plyne

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_m &= \\ &= (s_1 + s_2 + \dots + s_{k_n}) + s_{k_n+1} + \dots + s_m \leq \\ &\leq (k_1 + k_2 + \dots + k_{k_n}) + k_{k_n+1} + \dots + k_m < \\ &< k_1 + k_2 + \dots + k_m + \dots + k_n \end{aligned}$$

To však znamená, že $m \geq n$.

Zbývá zjistit, kdy může nastat rovnost $m = n$.

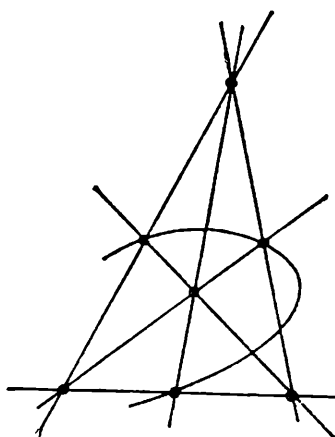
Snadno nahlédneme, že rovnost musí nastat nejen v (11), ale i v každé z nerovností (10) a navíc musí být $s_{k_n+1} = \dots = s_n = k_{k_n+1} = \dots =$

$= k_n$ (v řešení jsme dokázali, že pro $k_n < j \leq n$ je $s_j \leq k_j$). Je-li $k_n = 2$, dostaneme následující systém

$$\mathbf{S} = \{\{e_n, e_1\}, \{e_n, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \dots, \{e_1, e_{n-1}\}\}.$$

Pro $k_n > 2$ dostaneme s rovnostmi $s_{k_n+1} = \dots = s_n = k_{k_n+1} = \dots = k_n$ ještě i rovnosti $s_1 = s_2 = \dots = s_{k_n} = k_1 = k_2 = \dots = k_n$. Zřejmě nemůže být $k_n = n - 1$ (proč?), a protože $e_{n-1} \notin S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{k_n}$, existuje S_j , $1 \leq j \leq k_n$, tak, že $e_{n-1} \notin S_j$, proto e_{n-1} leží nejméně v s_j množinách systému $\mathbf{S}$ (s každým prvkem $x \in S_j$ leží e_{n-1} v jiné množině), jinými slovy $k_{n-1} \geq s_j$, což znamená, že je $k_n = k_{n-1} \geq s_j = k_j \geq k_n$, neboli $s_1 = s_2 = \dots = s_n = k_1 = k_2 = \dots = k_n$.

Pro $k_n > 2$ nastane tedy rovnost $m = n$, právě když pro nějaké k každá množina systému $\mathbf{S}$ obsahuje k prvků a zároveň každý prvek množiny $\mathbf{E}$ je obsažen v k množinách z $\mathbf{S}$. Protože tyto množiny jsou až na jeden společný prvek navzájem disjunktní, plyne odtud, že je $n = k(k - 1) + 1$. Pro $k = 3$ vyjde $n = 7$ a dostaneme známý příklad konečné projektivní roviny řádu 2, která má 7 bodů na 7 „přímkách“ (podle úlohy č. 6 nelze (obr. 9) model této roviny vylepšit tak, aby všechny „přímky“ v této projektivní rovině byly přímkami i v eukleidovské rovině).



Obr. 9

Otázku, kdy může nastat rovnost $m = n$, jsme kromě případu $k_n = 2$ převedli na problém existence konečné projektivní roviny řádu $k - 1$ s $n = k(k - 1) + 1$ body a přímkami. Je známo, že existují konečné projektivní roviny řádu p^m , kde p je prvočíslo a m přirozené. Naopak se ví, že neexistují projektivní roviny řádů 6, 14, 21, 22, Ale např. pro řád 10 není zatím nic známo.

Karel Horák

Slovní algebrogramy

Stejná písmena nahradte stejnými číslicemi tak, aby platil součet.

a) <table style="margin-left: 40px;"> <tr><td>S</td><td>R</td><td>N</td><td>C</td><td>I</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>S</td><td>E</td><td></td></tr> <tr><td>P</td><td>A</td><td>S</td><td>O</td><td>U</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>N</td><td>A</td><td></td></tr> <tr><td colspan="5"> </td></tr> <tr><td>P</td><td>A</td><td>S</td><td>E</td><td>C</td></tr> </table>	S	R	N	C	I			S	E		P	A	S	O	U			N	A							P	A	S	E	C	b) <table style="margin-left: 40px;"> <tr><td>J</td><td>E</td><td>D</td><td>N</td><td>A</td></tr> <tr><td>J</td><td>E</td><td>D</td><td>N</td><td>A</td></tr> <tr><td>J</td><td>E</td><td>D</td><td>N</td><td>A</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>A</td></tr> <tr><td colspan="5"> </td></tr> <tr><td></td><td>Š</td><td>E</td><td>S</td><td>T</td></tr> <tr><td colspan="5"> </td></tr> <tr><td>D</td><td>E</td><td>V</td><td>Ě</td><td>T</td></tr> </table>	J	E	D	N	A	J	E	D	N	A	J	E	D	N	A					A							Š	E	S	T						D	E	V	Ě	T	c) <table style="margin-left: 40px;"> <tr><td>A</td><td>L</td><td>L</td><td>A</td><td>N</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>P</td><td>O</td><td>E</td></tr> <tr><td>N</td><td>E</td><td>V</td><td>E</td><td>R</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>M</td><td>O</td><td>R</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>E</td><td></td><td></td></tr> <tr><td colspan="5"> </td></tr> <tr><td>H</td><td>A</td><td>V</td><td>R</td><td>A</td></tr> </table>	A	L	L	A	N			P	O	E	N	E	V	E	R			M	O	R			E								H	A	V	R	A
S	R	N	C	I																																																																																																							
		S	E																																																																																																								
P	A	S	O	U																																																																																																							
		N	A																																																																																																								
P	A	S	E	C																																																																																																							
J	E	D	N	A																																																																																																							
J	E	D	N	A																																																																																																							
J	E	D	N	A																																																																																																							
				A																																																																																																							
	Š	E	S	T																																																																																																							
D	E	V	Ě	T																																																																																																							
A	L	L	A	N																																																																																																							
		P	O	E																																																																																																							
N	E	V	E	R																																																																																																							
		M	O	R																																																																																																							
		E																																																																																																									
H	A	V	R	A																																																																																																							

Každá úloha má dvě řešení — ověřeno počítačem.
(Řešení naleznete na str. 109.)

Jindřich Pěňčík

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Mějme šachovnici 3×3 . Do jejích obvodových políček rozmístěte čísla 1, 2, ..., 8 tak, abychom v řádcích získali druhé mocniny celých čísel a aby součty čísel v středově souměrných políčkách byly konstantní. Do prostředního políčka žádné číslo nedosazujte.

2. Nalezněte nejmenší přirozené číslo, které končí dvojčíslím 56, je dělitelné 56 a má ciferný součet rovný 56.

3. Na tabuli byla napsána dvě stejná čísla. Míša připsal k jednomu z nich zleva 100 a k druhému zprava 1. Ukázalo se, že první číslo je nyní 37krát větší než druhé. Jaká čísla byla napsána na tabuli?

4. Slavný pistolník Křížový Pete vkročil do saloonu a poručil si lahev whisky. „Jsou to 3 dolary,“ odvětil barman. Pete si poručil dýmku. „Dohromady 6 dolarů,“ řekl barman. Konečně si Pete poručil 3 balíčky tabáku a 9 krabiček zápalek. „Dohromady to činí 11 dolarů 80 centů,“ řekl barman. Než bys řekl švec, Pete tasil revolver ... Barman vyhrkl: „Promiňte, zmýlil jsem se.“

Podle čeho poznal Pete, že jej chtěl barman ošidit?

5. (obtížnější) Součet pěti nezáporných čísel je roven jedné. Dokažte, že je možno je sestavit do kruhu takovým způsobem, aby suma součinů dvojic sousedních čísel nepřevýšila $\frac{1}{5}$. Dokažte, že obdobné tvrzení

platí i pro n čísel ($n = 4, 5, 6, \dots$) a pro limit $\frac{1}{4}$.

Tomáš Schütz

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic celých kladných čísel x, y , pro které je číslo $x^2 + xy + y^2$ dvojnásobkem celého kladného čísla.

(Došlo 20 řešení.)

Stanislav Horák

Řešení Radovana Dermiška, 3. A gymnázia M. Nešpora, Skalica :

Jde v podstatě o řešení neurčité rovnice

$$x^2 + xy + y^2 = z^2 \quad (1)$$

celými kladnými čísly. Předpokládejme, že x, y, z jsou čísla nesoudělná. Kdyby tomu tak nebylo, vydělili bychom rovnici (1) největším společným dělitelem. Danou rovnici budeme postupně upravovat

$$\begin{aligned} z^2 - x^2 &= y(x + y) \\ (z + x)(z - x) &= y(x + y) \\ \frac{z - x}{y} &= \frac{x + y}{x + z} = \frac{m}{n}, \end{aligned} \quad (2)$$

kde m, n jsou nesoudělná celá čísla. Úpravou vztahů (2) dostaneme

$$\begin{aligned} n(x + y) &= m(x + z), \\ my &= n(z - x). \end{aligned}$$

Obě rovnice upravíme

$$\begin{aligned} (n - m)x + ny - mz &= 0, \\ nx + my - nz &= 0. \end{aligned}$$

Máme tu soustavu dvou homogenních rovnic o třech neznámých, z níž vypočítáme poměr $x : y : z$.

$$x : y : z = (n^2 - m^2) : (2mn - n^2) : (m^2 + n^2 - mn)$$

Poněvadž x, y, z jsou nesoudělná čísla, můžeme položit

$$\begin{aligned} x &= n^2 - m^2, \\ y &= 2mn - n^2, \\ z &= m^2 + n^2 - mn, \end{aligned} \quad (3)$$

kde m, n jsou různá kladná celá čísla. Proto musí být splněny vztahy

$$n^2 - m^2 > 0 ,$$

$$2mn - n^2 > 0 .$$

Po zjednodušení

$$n > m , \quad 2m > n ,$$

což dá

$$2m > n > m . \quad (4)$$

Rovnice (3) spolu se (4) jsou řešením předložené úlohy.

Řešení Štěpána Čábelky, III. C gymnázia v Bílovci :

Předpokládejme, že čísla x, y jsou nesoudělná čísla. Položme

$$x + y = k \quad (2)$$

a platí

$$x^2 + 2xy + y^2 = k^2 , \quad \text{kde } k > 0 , \quad k \in \mathbb{N} ,$$

$$x^2 + xy + y^2 = (k - c)^2 , \quad \text{kde } c > 0 , \quad c \in \mathbb{N} .$$

Odečtením obou rovnic

$$xy = 2kc - c^2 ,$$

což spojeno s rovnicí (2) lze přepsat

$$xy = 2cx + 2cy - c^2$$

Vypočítáme y :

$$y = \frac{c(2x - c)}{x - 2c} \quad (3)$$

Aby číslo y bylo celé, musí $(x - 2c)$ beze zbytku dělit čitatele $c(2x - c)$.
K tomu stačí

$$x - 2c = 1 \Rightarrow x = 2c + 1$$

Potom

$$y = c(4c + 2 - c) = c(3c + 2) .$$

Dospěli jsme tak k řešení

$$x = 2c + 1 ,$$

$$y = c(3c + 2) ,$$

kde c je libovolné přirozené kladné číslo.

Autorovo řešení (stručně uvedené jen pro zajímavost) :

Jde o řešení neurčité kvadratické rovnice

$$x^2 + xy + y^2 = U^2 , \quad \text{kde } U \in \mathbb{N} .$$

Vypočítáme x :

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{4U^2 - 3y^2}}{2}$$

Aby $x \in \mathbb{N}$, musí být diskriminant D dvojmoc přirozeného čísla V :

$$4U^2 - V^2 = 3y^2.$$

Tato kvadratická neurčitá rovnice se dá převést třemi různými způsoby na soustavu dvou lineárních rovnic.

$$\text{a) } 2U + V = 3y, \quad 2U - V = y$$

Tento případ nedává řešení.

$$\text{b) } 2U + V = y^2, \quad 2U - V = 3.$$

Řešením je $x = t^2 - 2t$, $y = 2t - 1$, kde $t \in \mathbb{N}$

$$\text{c) } 2U + V = 3y^2, \quad 2U - V = 1.$$

Řešení: $x = 3t^2 - 4t + 1$, $y = 2t - 1$.

Je až s podivem, kolik vzorců pro x, y existuje, které řeší tuto úlohu.

2. Necht ABC je libovolný trojúhelník, jehož úhly ABC, BCA nejsou shodné; průsečík osy vnitřního úhlu CAB se stranou BC označte D . Dokažte tato tvrzení:

a) Kružnice se středem C a poloměrem $r = |CD|$ protíná přímku AD ještě v bodě $E \neq D$;

b) $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

c) $|AD| \cdot |CD| = |AE| \cdot |BD|$

(Došlo 16 řešení.)

Stanislav Horák

Upravené řešení Martina Kučery IV. C gymnázia Bílovec:

a) Předpokládejme, že kružnice $k = (C; |CD|)$ má s přímkou AD společný jediný bod $D = E$. To znamená, že AD je tečnou kružnice k . Ale potom $\angle ADC = 90^\circ$. Všimněme si, že strana AB je souměrně sdružená se stranou AC podle osy AD , tj. $|AC| = |AB|$ a $\angle ACB = \angle ABC$. To je však v rozporu s předpokladem, a proto neplatí $E = D$. Na obr. 1 je $|AC| < |AB|$, na obr. 2 je $|AC| > |AB|$.

b) Podobnost $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ skutečně platí, neboť

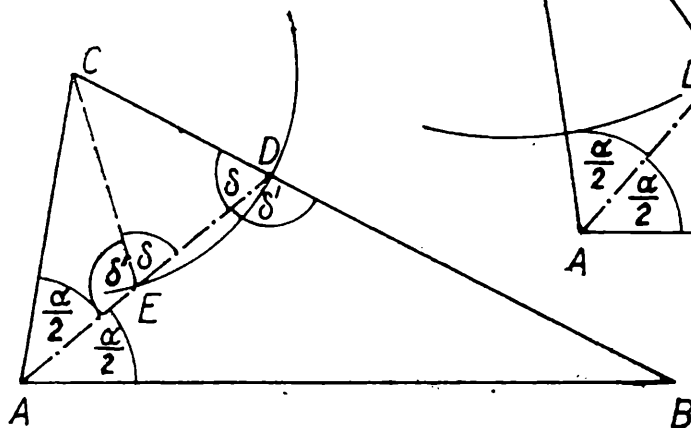
$$1. \angle BAD = \angle CAE = \frac{\alpha}{2}.$$

Označíme-li $\angle EDC = \angle DEC = \delta$, potom

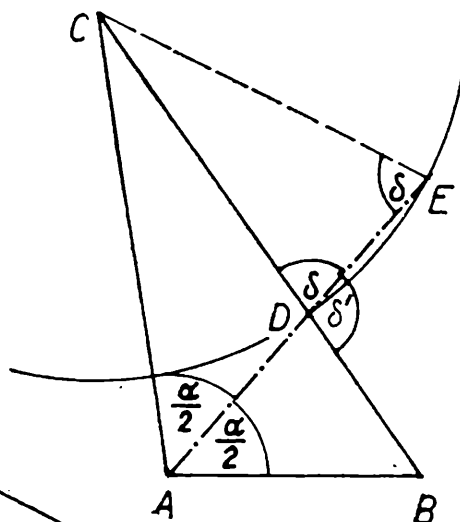
$$2. \angle ADB = 2\alpha - \delta = \angle AEC,$$

což stačí k důkazu podobnosti trojúhelníků ABD, ACE .

Obr. 1



Obr. 2



Poznámka. Všichni řešitelé si všimli, že v textu úlohy mělo správně být:

b) $\triangle ABD \sim \triangle ACE$. Redakce se omlouvá.

b) Z právě dokázané podobnosti plyne

$$|AD| \cdot |BD| = |AE| \cdot |CE|$$

Ale $|CE| = |CD|$, a proto

$$|AD| : |BD| = |AE| \cdot |CD|$$

Jinak psáno

$$|AD| \cdot |CD| = |AE| \cdot |BD|,$$

čímž je důkaz proveden.

Fyzika

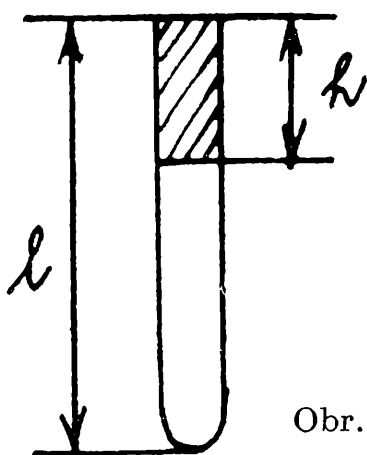
1. Ve skleněné trubici o délce $l = 90$ cm s uzavřeným dolním koncem je sloupec vzduchu, nad kterým je sloupec rtuti o výšce $h = 30$ cm, dosahující až k hornímu otevřenému okraji trubice (obr. 1). Trubicí opatrně převrátíme otevřeným koncem dolů (obr. 2), přičemž část rtuti vyteče. Jaká je výška zbylého rtuťového sloupce při atmosférickém tlaku $p_n = 10^3$ hPa? (hustota rtuti $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m $^{-3}$).

(Došla 4 řešení.)

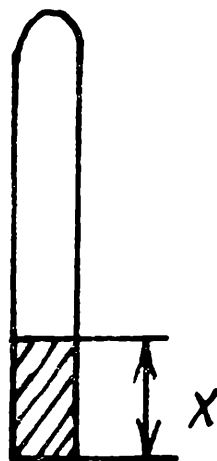
Miroslava Trchová

Řešení autorky: Označme S průřez trubice. V poloze podle obr. 1 je objem vzduchu V_1 a jeho tlak p_1 :

$$V_1 = (l - h)S, \quad p_1 = p_n + \rho gh.$$



Obr. 1



Obr. 2

V poloze podle obr. 2 je objem vzduchu V_2 a jeho tlak p_2 :

$$V_2 = (l - x)S, \quad p_2 = p_n - \rho g x.$$

Podle Boyleova-Mariottova zákona je $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Ze všech uvedených rovností plyne pro x rovnice:

$$(p_n + \rho g h) (l - h) = (p_n - \rho g x) (l - x),$$

která má řešení

$$x_{1,2} = \frac{(p_n + \rho g l) \pm \sqrt{(p_n + \rho g l)^2 - 4\rho g [p_n h + g h(h - l)]}}{2\rho g}.$$

Kořen $x_1 = 1,622$ m nevyhovuje, $x_2 = 0,028$ m.

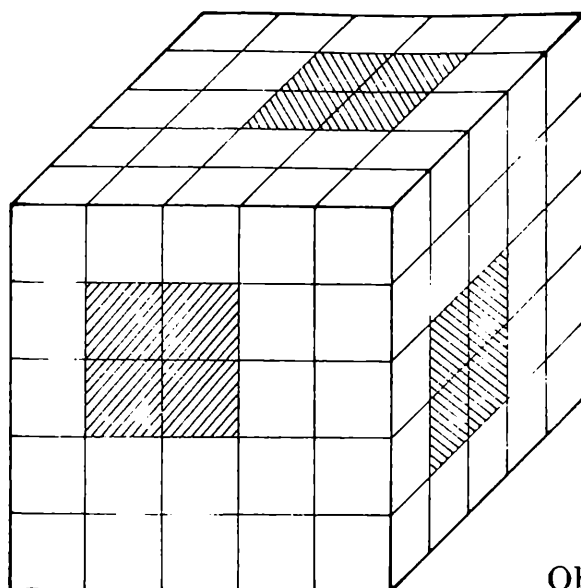
Úlohy k řešení

V tomto čísle otiskujeme zbývající úlohy z Naší soutěže ročníku 1989/90. Řešení každé úlohy pište čitelně česky nebo slovensky na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Na každém listu uveďte nahoře vlevo čitelně celé své jméno, třídu i školu, kde studujete. Zároveň připojte svou bytovou adresu se směrovacím číslem. Je-li řešitelem kolektiv (nejvýše trojčlenný), uvedou se uvedené údaje pro každého jeho člena. Řešení úloh zašlete nejpozději do 15. dubna 1990 na adresu Rozhledů, která je uvedena na čtvrté straně obálky každého čísla Rozhledů.

Matematika

6. Ve velké krychli sestavené z 5^3 menších shodných krychlí byly provrtány tři tunely tvaru kolmých hranolů, jejichž podstavy jsou vyznačeny na obr. 1 šrafováním. Vypočítejte objem a povrch provrtané krychle.

Milan Koman



Obr. 1

7. Úhel při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABC má velikost 40° . Na polopřímce CA je sestrojen bod D tak, že je $|CD| = |AB|$. Vypočtěte velikosti úhlů trojúhelníku BCD .

Emil Kraemer

8. Péťa sbíral a nosil do sběrný pravidelně starý papír. Do své kasičky si však ze získaných peněz ukládal pouze koruny, dvoukoruny a pětikoruny. Když do kasičky házel dvacátoupátou mincí, zjistil, že našetřil právě padesát korun.

Určete, kolik mohl mít v té chvíli v kasičce korunových, dvoukorunových a pětikorunových mincí. Kolik různých možností vůbec je?

Milan Trch

9. Martina má právě pět korunových mincí a chce zavolat své kamarádce z prázdnin. Na papírku, kde měla poznamenané telefonní číslo, jsou však dvě prostřední cifry zcela nečitelné. Martina si však pamatuje, že toto číslo bylo dělitelné sedmi a třemi. Dokážete Martině poradit, jak doplnit cifry do čísla $12XY45$ tak, aby se na pět pokusů mohla dovolat a přitom nemusela prověřovat dělitelnost všech ze sta možných čísel?

Milan Trch

10. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo

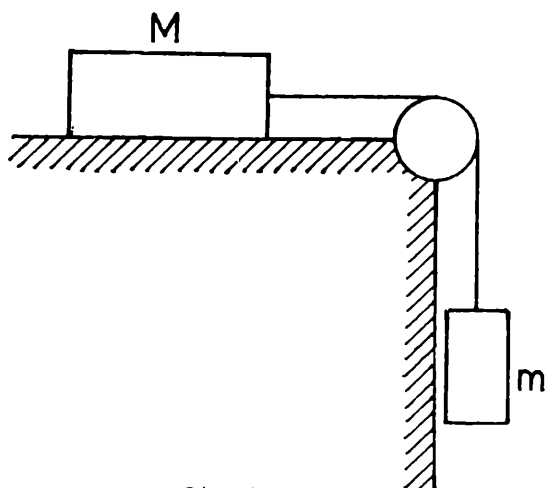
$$19^{2n} + 89^{2n+1}$$

dělitelné devadesáti.

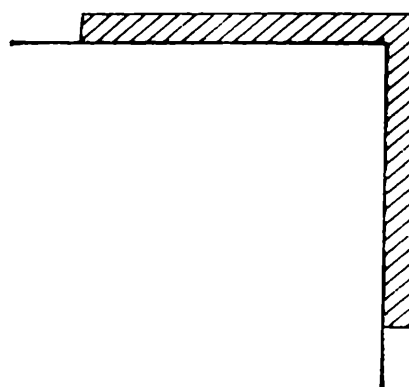
Milan Trch

Fyzika

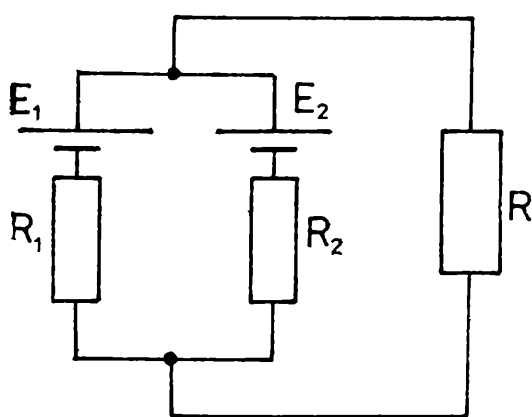
4. Na hladké vodorovné desce leží těleso o hmotnosti M a je spojeno vláknem jdoucím přes kladku s tělesem o hmotnosti m (obr. 1). Tření



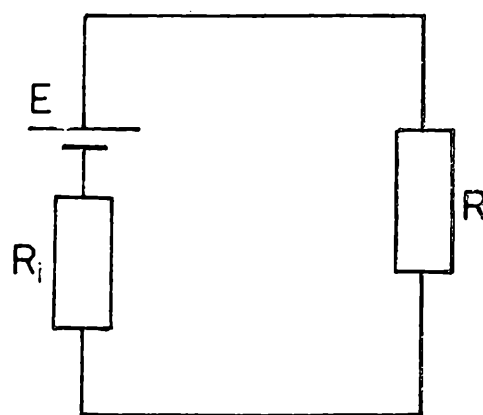
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

na desce a tření kladky zanedbejte, kladku i vlákno pokládejte za velmi lehké.

- a) Vypočítejte zrychlení těles.
- b) Vypočítejte namáhání vlákna.
- c) Pomocí úvahy, kterou jste museli udělat pro odvození výsledku a), vypočítejte zrychlení lana, které volně leží na vodorovné desce tak, že jeden jeho konec je ohnut přes její okraj (obr. 2). Na počátku pohybu je délka visícího lana l_0 . Tření mezi deskou a lanem zanedbejte.

Eva Havránková

5. Do obvodu byly omylem zapojeny paralelně dva galvanické články s různými elektromotorickými napětími E_1 , E_2 a různými vnitřními odpory R_1 , R_2 . Články byly uzavřeny přes vnější odpor R (obr. 3).

- a) Jaké proudy tečou články, jaký je jejich směr a jaké je napětí na vnějším odporu, je-li $E_1 = 1,9 \text{ V}$, $E_2 = 1,1 \text{ V}$, $R_1 = 0,1 \text{ } \Omega$, $R_2 = 0,8 \text{ } \Omega$, $R = 10 \text{ } \Omega$?

- b) Najděte elektromotorické napětí E a vnitřní odpor R_i takového

zdroje, který dává do vnějšího obvodu s odporem R stejný proud jako předcházející zdroj s paralelním uspořádáním dvou článků (obr. 4).

Eva Havránková

6. Malé zrníčko leží pod skleněnou deskou silnou 15 cm. Kde se vytvoří jeho zdánlivý obraz, díváme-li se na desku přibližně v kolmém směru k jejímu povrchu? Index lomu skla $n = 1,5$.

Eva Havránková

Konstrukční geometrie

1. Je dána rovina ρ , v ní ležící přímka c a bod A , který není bodem roviny ρ . Sestrojte pravidelný čtyřsten $ABCD$, jehož rovinou souměrnosti je rovina ρ a jehož vrchol C leží na přímce c .

Stanislav Horák

2. V prostoru jsou dány dva různé trojúhelníky ABC , HKL , pro které platí: $AB \parallel HK$, $|AB|^2 = |HK|^2$. Určete rovinu π tak, aby pravoúhlé průměty obou daných trojúhelníků do této roviny byly shodné.

Stanislav Horák

3. Sestrojte pravidelný čtyřstěn $ABCD$, jehož hrana AB je částí dané přímky p , je-li dán ještě střed S hrany CD .

Emil Kraemer

Celostátní kolo 38. ročníku matematické olympiády — kategorie P

Ve dnech 26.—29. 4. 1989 proběhlo v Klatovech celostátní kolo 38. ročníku matematické olympiády kategorie P. Bylo to v pořadí čtvrté celostátní kolo kategorie P; v této nejmladší kategorii MO určené všem studentům středních škol se zájmem o programování se začalo soutěžit ve 35. ročníku matematické olympiády.

Již podruhé byla celostátní kola matematické olympiády v kategoriích A a P uspořádána společně na jednom místě a v průběhu jednoho týdne. Oprávněnost a výhodnost tohoto řešení zavedeného před rokem bratislavskými organizátory se letos ještě více potvrdila. Vždyť z 51 účastníků celostátního kola MO kategorie P jich mohlo plných 26 zůstat bez dalšího zbytečného cestování v Klatovech po ukončení celostátního kola kategorie A, které bezprostředně předcházelo.

Pořadatelem celostátního kola byl západočeský KV MO, který pro soutěž vybral krásné prostředí okresního města Klatovy. V prostorách místní střední zemědělské školy a jejího internátu bylo výborně zajištěno ubytování a stravování všech účastníků, soutěžní sál i prostory pro opravování úloh. Organizátoři připravili pro soutěžící i bohatý doprovodný program, který zahrnoval besedy, exkurze a zájezd na nejkrásnější místa Šumavy.

Vlastní soutěž probíhala ve dvou soutěžních dnech 27. a 28. 4. 1989. V každém z těchto dnů řešili účastníci dvě soutěžní úlohy. Všechna odevzdaná řešení opravili na místě pracovníci tří odborných center MO-P z matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, přírodovědecké fakulty Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Brně a z matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Komenského v Bratislavě. Letošní úlohy se ukázaly být pro mnohé soutěžící poměrně snadné. Řešitelé v nich dosáhli průměrného hodnocení 4,2; 6,3; 7,9 a 4,9 bodu z 10 možných za každou úlohu. Průměrný bodový zisk dosažený v celé soutěži byl tedy více než 23 bodů. Při hodnocení přihlíželi opravující nejen ke správnosti navržených algoritmů a vytvořených programů, ale také k jejich efektivitě, hodnotili přesnost a srozumitelnost popisu algoritmů a zdůvodnění jejich správnosti.

Celkem 24 z 51 účastníků soutěže bylo oceněno jako úspěšní řešitelé a dvanáct nejlepších z nich bylo vyhlášeno vítězi celostátního kola 38. ročníku matematické olympiády v kategorii P.

Výsledky celostátního kola 38. ročníku MO kategorie P

Vítězové:

1. <i>Ilja Martišovitš</i>	4. r. G J. Hronca, Bratislava	38 b.
2.—3. <i>Petr Čížek</i>	4. r. G W. Piecka, Praha	37 b.
<i>Štefan Dobrev</i>	4. r. G A. Markuša, Bratislava	37 b.
4.—5. <i>Václav Bohdanecký</i>	4. r. G W. Piecka, Praha	35 b.
<i>Vladimír Chvátil</i>	3. r. G, Brno, Koněvova	35 b.
6.—7. <i>Petr Brož</i>	4. r. G W. Piecka, Praha	32 b.
<i>Miroslav Vicher</i>	4. r. G, Karlovy Vary	32 b.
8.—9. <i>Martin Čížek</i>	3. r. G, Rožnov pod Radhoštěm	30 b.
<i>Jaroslav Šprongl</i>	2. r. G W. Piecka, Praha	30 b.
10.—12. <i>Andrej Lúčny</i>	4. r. G, Piešťany	29 b.
<i>Róbert Mitka</i>	4. r. G, Žilina, Veľká okružná	29 b.
<i>Pavel Vanoušek</i>	3. r. G, Cheb	29 b.

Další úspěšní řešitelé:

13.—14. <i>René Pázman</i>	4. r. G J. Hronca, Bratislava	28 b.
<i>Vladimír Šolc</i>	3. r. G, Beroun	28 b.
15. <i>Milan Mosný</i>	4. r. G J. Hronca, Bratislava	27 b.

16.—17.	<i>Petr Štěpán</i>	4. r. G W. Piecka, Praha	26 b.
	<i>Oldřich Vojtíšek</i>	4. r. G, Liberec, Partyzánská	26 b.
18.—21.	<i>Jakub Čermák</i>	3. r. G, Č. Budějovice, Jírovcova	25 b.
	<i>Štěpán Kasal</i>	2. r. G W. Piecka, Praha	25 b.
	<i>Vladimír Skalský</i>	3. r. G, Prešov	25 b.
	<i>Michal Šmídek</i>	4. r. G, Brno, kpt. Jaroše	25 b.
22.—24.	<i>Martin Dindoš</i>	3. r. G J. Hronca, Bratislava	24 b.
	<i>Zdeněk Pavlas</i>	4. r. G, Brno, kpt. Jaroše	24 b.
	<i>Zbyněk Šír</i>	4. r. G J. K. Tyla, Hr. Králové	24 b.

Pavel Töpfer

V Rozhledech budeme od letošního ročníku otiskovat ukázky z prací, které byly oceněny v přehlídkách SOČ.
Začínáme prací Petra Novotného.

Srovnání slovních procesorů z hlediska psaní češtiny se slovním procesorem ChiWriter

PETR NOVOTNÝ, 2. D, Gymnázium W. Piecka v Praze

Poslední dobou se v Československu začaly rychle rozšiřovat 16-bitové počítače řady PC a český uživatel je postaven před problém, jak psát text obsahující česká, resp. slovenská písmena s diakritickými znaménky.

Čeština má totiž asi 30 znaků s diakritickými znaménky. Některé z těchto znaků jsou téměř „standardní“, protože jsou obsaženy i ve standardní extendované části ASCII tabulky (např. á — kód 160), jiné jsou naopak naprosto nestandardní a v jiných jazycích se nevyskytující (např. ů). U slovenštiny je problém podobný.

Existuje několik základních možností řešení tohoto problému:

- (a) Používat standardní alfanumerické slovní procesory, znaky zobrazované na obrazovce v textovém módu grafických karet změnit výměnou paměti ROM¹⁾ nebo nahráním fontu do paměti RAM²⁾, na tiskárně používat buď dodávané znaky české abecedy³⁾, standardní textové znaky a funkce tiskárny, nebo vyměnit paměť ROM tiskárny.

¹⁾ zejména u karet CGA a HERCULES

²⁾ pouze u karet EGA/VGA, HERCULES+

³⁾ tiskárna ROBOTRON K 6313/14

Na počítačích *PP-06* je to zjednodušeno, protože zde osazená paměť ROM u grafické karty již obsahuje generátor naší národní abecedy. K tomuto způsobu práce se hodí např. slovní procesor *WordPerfect*, jehož verze 5.0 umožňuje dokonce vkládat do textu libovolné obrázky, tisknout barevně atd. Již méně vhodný, ale stále ještě postačující, je k tomuto způsobu práce s textem slovní procesor *WordStar*, který je však mezi československými uživateli velmi rozšířen.

- (b) Používat grafické procesory, v nichž je znak na tiskárně nebo na obrazovce definován jako obrazec tvořený „černými“ a „bílými“, resp. „rozsvícenými“ a „zhasnutými“ body. Tvorbu znaků je možno provádět dalšími dodávanými programy. Tímto způsobem pracuje např. program *ChiWriter*.
- (c) Používat speciální slovní procesory. Text v tomto případě píšeme v ASCII podobě s použitím řídicích sekvencí, následuje kompilace a text je zobrazován, resp. tisknut v grafickém módu s použitím dodávaných typů písma (dále jen fontů). Jedná se např. o systémy *PageMaker*, *Ventura*, *TeX*, které jsou zaměřené profesionálně hlavně na vydávání tiskovin a knih. Jsou však cenově náročné, potřebují dost uživatelské paměti a hlavně vyžadují pevný disk. Dalším takovýmto programem je program *LETTRIX*, který však neumožňuje zobrazení výsledného textu na monitoru.
- (d) Vytvořit si vlastní slovní procesor, rezidentní program nebo např. programovatelná rozhraní, což bude napomáhat práci s českými a slovenskými texty.

Problémům kódování českých a slovenských znaků do extendované části ASCII tabulky se věnuje [1]. Problémy kódování se zabývá také [2], kde autor navíc podrobně rozebírá i technické a softwarové aspekty různých řešení kódování. Autor v tomto článku též navrhuje kódování národní abecedy v generátoru znaků v rastru 8×8 . Zároveň však vyslovuje názor, že na kvalitní vzhled českého, resp. slovenského textu je třeba kódovat znaky v rastru o výšce 11.

V dalším textu se budu věnovat bodu (b), tedy výhodám, nevýhodám a aspektům práce s programem *ChiWriter*.

Program *ChiWriter* je zdařilé dítko firmy *Horstmann Software Design Corporation*.

Mezi československými uživateli je často používán. Jsou pro to dva velmi dobré základní předpoklady: většina uživatelů si své počítače přivezla ze zahraničí a tam z cenových nebo jiných důvodů koupila počítače bez pevného disku a s grafickou kartou HERCULES. Právě na této grafické kartě lze český text zpracovávat velmi obtížně, protože v dodávané paměti ROM jsou pouze standardní ASCII znaky. Program *ChiWriter* splňuje podmínku, aby výška rastru byla minimálně 11 bodů, a přitom může spolupracovat se všemi základními grafickými kartami, tedy i kartou HERCULES, v grafickém režimu. Druhý důvod je takový,

že uživatelé odkázání na práci s disketami na drivech 360 kB mohou tento systém instalovat podle použitých tiskárnových fontů na 2 diskety (24-ti jehličková nebo laserová tiskárna) nebo dokonce na 1 disketu (ostatní tiskárny s menším rastrem).

Dále je na programu výhodné, že si každý uživatel může vytvořit znaky podle vlastní potřeby. K vytváření fontů lze efektivně využít ne sice příliš vhodně zvolený, ale přesto dobře použitelný program *Font Designer*. Každý uživatel si tím vlastně vytváří svoji vlastní modifikaci. Je to výhodné z hlediska efektivity práce, ale způsobuje to obrovskou roztržitost a nejednotnost používaných fontů.

Vzhledem k uvedeným výhodám se program *ChiWriter* jeví jako velmi efektivní pro práci s texty na počítačích *PP-06*. Bude pouze nutné sjednotit onu roztržitost, která panuje mezi modifikacemi jednotlivých uživatelů.

Dalšími výhodami programu jsou:

- Snadná práce s textem, která nevyžaduje vůbec žádné předchozí zkušenosti s počítačem.
- Možnost psaní indexů, exponentů apod. Z toho vyplývá možnost jednoduše psát matematické vztahy, fyzikální vzorce, chemické rovnice atd.
- Různé pomůcky, které jsou v slovních procesorech osazovány, jako je zarovnávání zprava, středování textu, poznámky pod čarou, přeformátování, kontrola lámání do stránek atd.

Hlavní nevýhodou programu je obtížná přenositelnost textů z jedné modifikace na druhou, a to právě kvůli nejednotnosti fontů. Je tedy nutno důsledně dodržovat jednotu fontů v okruhu uživatelů, kteří chtějí navzájem spolupracovat. Dále je nevýhodná nedokonalá součinnost programu s ASCII kódem. Veškerý text je zaznamenáván na paměťová média v interní podobě *ChiWriteru*, a je tedy při nahrávání do paměti i při nahrávání na paměťové médium vždy znovu překládán. V neposlední řadě musím též uvést neefektivní práci s pamětí. Nenáročný uživatel vystačí i s 512 kB, ale náročnému uživateli nestačí ani 640 kB. Nároky na paměť totiž rostou velmi rychle s nároky na fonty, podpůrné programy atd.

Většina uživatelů v Československu má možnost tisknout pouze na devítijehličkové tiskárně. 24-ti jehličkové tiskárny v Československu nejsou běžné.

24-ti jehličková tiskárna může též tisknout v draftovém módu, kdy tiskne v grafickém režimu přibližně stejně rychle jako 24-ti jehličková tiskárna v módu letter quality. Jediný rozdíl v rychlosti lze pozorovat, využíváme-li standardních fontů tiskárny. V tomto případě je mód draf rychlejší a nekvalitnější. Tisknutí 24-ti jehličkovou tiskárnou

v letter quality režimu je z hlediska estetičnosti výsledného textu uspokojivé. Nejvýhodnější z hlediska estetičnosti textu jsou laserové tiskárny, které mají jak hustší rastr, tak i řádově vyšší rychlost než jehličkové tiskárny.

V tabulce 1 jsou pro srovnání uvedeny doby tisku programem *ChiWriter* za různých podmínek (použitá tiskárna Epson LQ-2500, Epson FX-80, použitý počítač IBM PC/XT 8 MHz).

Tabulka 1: Srovnání časů při použití programu ChiWriter

Doba tisku	9 jehl.	24 jehl. letter quality	24 jehl. draft
tisk 1 stránky A4 s hustým písmem	84 s	230 s	230 s
tisk 1 stránky A4 s méně hustým písmem	65 s	205 s	205 s
tisk 1 stránky v textovém módu tiskárny	45 s	60 s	35 s
načtení 15 fontů z pevného disku	35 s	93 s	93 s

Z tabulky 1 je ihned vidět, že při grafickém tisku je devítijehličková tiskárna značně rychlejší (což jde však na úkor kvality). U devítijehličkové tiskárny a u 24-ti jehličkové tiskárny v textovém módu spolupráci počítače s tiskárnou brzdila tiskárna, která nestačila dostatečně rychle tisknout. U 24-ti jehličkové tiskárny v grafickém módu již nestačil počítač dostatečně rychle počítat velké množství bodů a zpomaloval tím spolupráci tiskárny s počítačem. Je to způsobeno hlavně tím, že nevhodně zvolený driver tiskárny (z hlediska rychlosti, výhodný z hlediska nároků na paměťová média) způsobí zahlcování procesoru někdy i zbytečnými daty a tím zpomaluje počítání.

Doba načítání fontů je různá na různých počítačích a nezáleží jen na taktovacím kmitočtu procesoru, ale i na procesoru samotném. Načtení 15 fontů pro 24-ti jehličkovou tiskárnu z pevného disku trvá na počítači typu XT (procesor 8088—8 MHz) 93 s, zatímco na počítači typu AT (procesor 80286—12,5 MHz) jen 31 s.

Z hlediska tvorby fontů se ukázala jako nejvýhodnější pro všeobecné použití tato struktura:

Existují dvě možnosti tvorby diakritických znamének: vytvořit pro ně speciální font nebo vytvořit jakousi makroinstrukci, která by k standardnímu znaku tiskárny dodala háček. Protože však program *ChiWriter* neumí efektivně pracovat s tiskárnou v kombinovaném textovém reži-

mu, rozhodl jsem se pro první řešení. Druhé řešení má navíc tu nevýhodu, že jednotně zobrazovaná diakritická znaménka rozptylují pozornost.

Nejprve se ukázalo jako vhodné utvořit si jakýsi normálový font, protože *ChiWriter* jako normálový font používá zabudovaný font tiskárny. Tvary písmen tiskárnového fontu jsou jednotné pouze v rámci jedné řady výrobků, resp. jednoho výrobce, a ještě navíc nejsou dodávány v podobě fontů pro *ChiWriter*. Bylo tedy nutné vytvořit normálový font vlastní. Tvorba tohoto fontu je nejtěžší částí práce fontového vybavení. Podle mé osobní zkušenosti je vhodné velká písmena převzít a upravit z dodávaného fontu *MATHII* a malá písmena buď upravit z fontu *FOREIGN* nebo dotvořit samostatně, přičemž lze velmi výhodně používat částí písmen z ostatních fontů. Takto vytvořený font jsem si uložil pod klíč F1 pod názvem *INORMAL*.

Tento font obsahoval stále jen standardní znaky anglické abecedy (jinak by jej totiž nebylo možno použít jako „základní font“). Proto jsem k fontu *INORMAL* dotvořil diakritická znaménka a ta uložil pod klíč F2 pod názvem *CNORMAL*. Důvod, proč jsem uložil znaky s diakritickými znaménky do zvláštního fontu, byl hlavně ten, že na standardní klávesnici je sice možno uložit 30 českých a další slovenské znaky s diakritickými znaménky, ovšem pouze za cenu toho, že v tomto fontu nebudou již žádné další znaky, jako třeba závorky, čísla, interpunkční znaménka apod.

Pod klíče F11 a F12, tedy Shift + F1 a Shift + F2, jsem utvořil podtržením z fontů *INORMAL* a *CNORMAL* fonty *UNORMAL* a *CUNORMAL*.

K dodávané kurzívě, kterou jsem uložil pod názvem *IITALIC* pod klíč F3, jsem dotvořil do dalšího fontu, který jsem pod názvem *CITALIC* uložil pod klíč F4, diakritická znaménka. Protože hlavním posláním programu *ChiWriter* je pomoc při psaní matematického textu, uložil jsem pod klíče F13 a F14 dva fonty pro psaní matematického textu: *UITALIC*, který obsahuje podtržené kurzívní znaky (např. abcd), a *PITALIC*, který obsahuje kurzívní znaky s čarou (např. abcd).

K dodávanému tučnému písmu (*IBOLD* - F5) a psacímu písmu (*SCRIPT* - F15) jsem dotvořil odpovídající české fonty (*CBOLD* - F6, *SCRIPT* - F16).

Beze změny jsem nechal tyto fonty: *GREEK* - F7, *SMALL* - F8 a *STANDARD* - F19.

Pro psaní poznámek pod čarou jsem k fontu *SMALL* dotvořil český font *CSMALL*, který jsem uložil pod klíč F18.

Do dodávaného fontu *MATHI* jsem dotvořil značku pro úhel a font jsem uložil pod klíč F9.

Do dodávaného fontu *SYMBOL* jsem dodal některá velká písmena z kurzívy s krátkým podtržením. Při psaní součinu matic apod. je totiž třeba, aby byla jednotlivá písmena podtržena odděleně (např. A B, ne AB). Výsledný font jsem uložil pod klíč F20.

Při praktickém používání se ukázalo, že dodávané fonty *MATH1* a *LINEDRAW*, ačkoliv byly čáry na tiskárně stejně silné, měly na obrazovce různou tloušťku. Bylo tedy nutno zajistit kompatibilitu fontů na tiskárnu a na obrazovku.

Výsledné fonty byly prakticky ověřeny při tvorbě skript

Novotná—Treh:

Algebra a teoretická aritmetika — sbírka příkladů,
SPN, Praha 1989.

Práce SOČ

Vytvoření fontů pro psaní vědeckých textů v češtině
programem *ChiWriter* pro 24-ti jehličkovou tiskárnu

získala v městské přehlídce SOČ, obor 01 — *matematika a matematická informatika*, III. místo.

Literatura

- [1] Pacht, Z.: *Čeština v počítači — abeceda v kódu*. ELEKTRONIKA, 1989, č. 3, str. 8—9.
- [2] Krchnavý, J.: *Spracovanie textov na 16-bitových osobných počítačoch*. MECHANIZACE A AUTOMATIZACE ADMINISTRATIVY, 1988, č. 11, str. 433—439.
- [3] Horstmann, C.: *ChiWriter — The Scientific/Multifont Word Processor*. Ann Arbor, Horstmann Software Design Corporation 1986.
- [4] Moravčík, F.: *Metodika tvorby a radenie písma*. Bratislava, SPN 1979.

Kalendár M-F: november 1989

- 1. 11. 1974 zomrel *Vladimír Knichal*, český matematik. Pracoval v teórii čísel, teórii funkcií reálnej premennej. Aplikoval matematické poznatky v technickej praxi.
- 2. 11. 1954 zomrel *Henri Fehr*, švajčiarsky matematik, pedagóg. Bol generálnym sekretárom Medzinárodnej komisie pre reformy školskej matematiky.

4. 11. 1954 zomrel *Archibald Reed Richardson*, anglický matematik. Študoval problémy algebry, teórie invariantov, konvergenzie radov a hydrodynamiky.
5. 11. 1879 v Cambridge zomrel *James Clerk Maxwell*, škótsky fyzik. Položil základy elektrodynamiky i štatistickej fyziky. Ukázal, že viditeľné svetlo je elektromagnetickým žiarením.
6. 11. 1809 sa v Göttingene narodil *Rudolf Hermann Arndt Kohlrausch*, nemecký fyzik. Študoval elektrické javy.
8. 11. 1719 zomrel *Michel Rolle*, francúzsky matematik. Zaoberal sa algebrou a riešením rovníc.
8. 11. 1834 sa narodil *Johann Karl Zöllner*, nemecký fyzik a astronóm. Skonstruoval astrofotometer.
8. 11. 1854 sa narodil *Johannes Robert Rydberg*, švédsky fyzik. Odhalil systematiku atómových spektier.
8. 11. 1914 sa v Portlande (Oregon, USA) narodil *George Bernard Dantzig*, americký matematik. Položil základy lineárneho programovania a optimalizácie.
10. 11. 1799 zomrel *Joseph Black*, anglický chemik a fyzik. Rozpracoval teóriu latentného tepla, rozlíšil pojmy tepla a teploty.
11. 11. 1829 v Montjoie sa narodil *Elvin Bruno Christoffel*, nemecký matematik. Prispel k teórii kvadratických diferenciálnych foriem.
12. 11. 1944 v Cambridge (Massachusetts, USA) zomrel *Georg David Birkhoff*, americký matematik. Vedecky prispel do štatistickej mechaniky, do teórie dynamických systémov a riešenia diferenciálnych rovníc.
15. 11. 1959 v Carlops (Škótsko) zomrel *Charles Thomson Rees Wilson*, škótsky fyzik. Vypracoval metódu identifikovania stôp dráh elektricky nabitých častíc pomocou kondenzovaných pár.
16. 11. 1934 zomrel *Karl Paul Gottfried Linde*, nemecký fyzik. Rozvinul techniku umelého ochladzovania.
17. 11. 1954 v Krakove zomrel *Tadeusz Banachiewicz*, poľský matematik, astronóm. Študoval nebeskú mechaniku, rozvinul metódy matematického spracovania výsledkov meraní.
18. 11. 1839 sa vo Schwerine narodil *August Adolf Kundt*, nemecký fyzik. Pracoval v akustike, určil metódy merania zvuku v pevných látkach i plynch.
18. 11. 1959 zomrel *Alexandr Jakovlevič Činčín*, sovietsky matematik. Uplatnil metódy metrickej teórie funkcií v teórii čísel i v teórii pravdepodobnosti. Prispel k rozvoju teórie informácií.
20. 11. 1889 sa v Marshfiede (Missouri, USA) narodil *Edwin Powell Hubble*, americký astronóm. Stanovil vzťah pre určovanie vzdialeností galaxií, klasifikoval extragalaktické hmloviny.

20. 11. 1934 zomrel *Willem de Sitter*, holandský astronóm. Zaoberal sa kozmológiou, vytvoril prvý kozmologický model vesmíru.
22. 11. 1904 sa v Lyone narodil *Louis Eugène Félix Néel*, francúzsky fyzik. Študoval javy v oblasti feromagnetizmu a antiferomagnetizmu. Získal za to Nobelovu cenu (1970).
22. 11. 1944 v Cambridge zomrel *Arthur Stanley Eddington*, anglický astronóm. Položil základy modernej astrofyziky.
25. 11. 1814 sa v Heilbronne narodil *Julius Robert Mayer*, nemecký lekár a fyzik. Odhalil, že teplo a práca sú podmienené rovnakými chemickými reakciami v organizme.
26. 11. 1894 sa v Columbii (Missouri, USA) narodil *Norbert Wiener*, americký matematik. Formuloval základy kybernetiky, rozpracoval otázky harmonickej analýzy, vytvoril matematický model pre náhodný pohyb častíc.
27. 11. 1754 v Londýne zomrel *Abraham Moivre*, anglický matematik francúzskeho pôvodu. Študoval teóriu rekurentných radov, ovplyvnil teóriu pravdepodobnosti i matematickú analýzu.
27. 11. 1909 sa v Mišeronskom narodil *Anatolij Ivanovič Malcev*, sovietsky matematik. Získal podnetné výsledky v teórii abstraktných grúp, teórii modelov a teórii algoritmických systémov.
27. 11. 1944 zomrel *Leonid Isaakovič Mandelštam*, sovietsky fyzik. Položil základy teórie nelineárnych kmitov, vytvoril novú metódu rádointerferencií.
28. 11. 1914 zomrel *Johann Wilhelm Hittorf*, nemecký fyzik a chemik. Zaoberal sa elektrochémiou, určil niektoré vlastnosti katódových lúčov.
28. 11. 1954 v Chicagu zomrel *Enrico Fermi*, taliansky fyzik. Za objav jadrovej reakcie vyvolanej pomalými neutrónmi a objav nových rádioaktívnych prvkov získal Nobelovu cenu (1938).
29. 11. 1849 sa v Lancasteri narodil *John Ambrose Fleming*, anglický fyzik. Vynikol v rádiatelegrafii a rádiatelefónii.
29. 11. 1879 sa v Petrohrade narodil *Nikolaj Mitrofanovič Krylov*, sovietsky matematik a mechanik. Rozpracoval metódy približného integrovania diferenciálnych rovníc matematickej fyziky a nelineárnej mechaniky.
30. 11. 1869 sa v Stenstorpe narodil *Nils Gustaf Dalén*, švédsky fyzik a technik. Za vynález automatickej regulácie acetylénových lúčov na majákoch a osvetľovacích vežiach získal Nobelovu cenu za fyziku (1912).
30. 11. 1874 sa vo Viedni narodil *Friedrich Hasenöhrl*, rakúsky fyzik. Rozvíjal kinetickú teóriu plynov, hľadal vzťah medzi hmotnosťou a energiou.

dj

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

O roztržitých a přísných matematících

O profesorech matematiky se traduje, že jsou roztržití, zapomínají klobouky a deštníky, nepamatují si, kde zaparkovali své auto a zda vůbec přijeli autem. Otec kybernetiky Norbert Wiener prý v době konání mezinárodní konference zastavil na chodbě hotelu známého s dotazem: „Nevšiml jste si, ze kterých dveří jsem vyšel?“ Znamý ukázal na dveře hotelové restaurace, načež Wiener s uspokojením konstatoval: „Tak to jsem patrně již obědval.“ Říká se, že když matematik píše svůj výklad na tabuli, obvykle něco jiného píše, něco jiného říká, něco jiného má na mysli a něco jiného tam má být.

Druhý rys připisovaný profesorům matematiky je přísnost a krvelačnost, takže se stávají postrachem nebohých studentů. Podobná pověst provázela profesora matematiky na jedné z pražských fakult. Nebudeme jmenovat a zavedeme pro něho označení pomocí počátečních písmen abecedy A. A. Tento profesor — ještě jako docent — podrobil jednou studenta při zkoušce pravému křížovému výslechu, ale student přece jen obstál. Když pak pan profesor otevřel dveře na chodbu, našel studenta ležet schouleného na zemi. Trochu se zarazil, zda nepodrobil studentovu nervovou soustavu příliš velké zátěži, avšak ihned vyjel: „Co tady člověče blbnete?“ Student rychle vstal a odpověděl: „Pán docent, já som slúbil, keď tu skúšku u vás urobím, že pobozkám tu zem tuná.“ Podotýkám, že to bylo ještě v dobách, kdy naše mládež byla nervově mnohem odolnější než dnes, a studenti, kteří prošli podobnou tvrdou školou, po letech rádi vzpomínali na důkladnou matematickou přípravu, jíž se jim dostalo. ¹

Profesor A. A. byl znám též tím, jak vedl své studenty k pořádku a přesnému dodržování povinností, při čemž šel sám příkladem. Opoz-dilo-li se n studentů o m minut při příchodu na přednášku, prodlužovala se přednáška o $n \cdot m$ minut. Naopak, přišel-li pan profesor sám o n minut pozdě, končila přednáška o n^2 minut dříve.

Nakonec ještě jeden důkaz o důslednosti profesorů matematiky a jejich smyslu pro fair play. Vypráví se o jednom již zesnulém profesorovi, který byl znám jako člověk spíše laskavý, a za autentičnost historky se nemohu zaručit. Při výkladu o teorii čísel zapisovali si studenti do sešitu Peanovy axiomy. Jeden student neměl zřejmě pana profesora v lásce a doplnil si soustavu axiomů o jeden v typicky českém znění „profesor XY je ...“ Sešit se však dostal panu profesorovi do rukou a ten se obořil na nešťastníka slovy: „Dokažte to!“. Studenta v této překerní situaci však zachránila jeho duchapřítomnost: „Prosím, pane profesore, axiomy se nedokazují!“

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20 — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpalkova 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

ADRESA REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1 -
Nové Město
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

REDAKČNÍ KRUH:

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topolčany; doc. dr. Stanislav Jendroň, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

ROZHLEDY

matematicko
-fyzikální

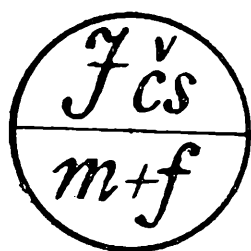
4
(89 – 90)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

PROSINEC

CENA 2,00 Kčs



ROZHLEDY
matematicko
-fyzikální
Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Dušan Jedinák: O matematice a matematikoch	145
Karol Habart: Kde sa vzali?	148
Jiří Mída: O Eulerově přímce	154
Jiří Machalický: O Brownově pohybu	156
Dušan Jedinák: V. J. Buňakovskij (1804-1889)	165
Z matematiky a fyziky ZŠ	167
Přemýšlíme, řešíme	173
Naše soutěž	182
Karel Horák: 30. MMO	186
dj: Kalendár M—F	189
Alan Svoboda: Matematická mytologie	191
Z nových knih	192
Humory matematicko-fyzikální	3. str. obálky

O matematike a matematikoch

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topoľčany

Číslo je vodcom a pánom ľudského myslenia. Bez jeho sily by všetko zostalo tajuplným a nejasným.

*Filolaos z Krotonu,
grécky filozof, matematik,
astronóm (koniec 5. stor. pred n. l.)*

Všetko, čo je okolo nás, čo nachádzame v prírode, čo vytvárame ľudskými rukami, sa skladá z častí, má nejakú štruktúru. Ak prvky majú vlastnosti a medzi prvkami existujú vzťahy i pravidlá pre skladanie, môžeme takýto systém študovať pomocou matematiky. Vzrušujúca harmónia prírody prebúdza v nás cit, ktorý nazývame matematikou. Matematika je výsledkom myšlienkového procesu, pri ktorom sú reálne procesy nahradené myslenými matematickými modelmi. Matematiku môžeme chápať ako také bádanie, ktoré pomocou určitých stanovených pravidiel odvodzuje závery z definovaných pojmov a prijatých princípov. Matematika sa snaží odhaliť nové súvislosti a logicky ich usporiadať. Z matematiky sa vytvoril systém organizovaného myslenia, ktorý sa neustále rozvíja. Matematika sa stala jednou z metód poznania sveta, v ktorom žijeme.

Matematika vznikla z potrieb ľudí, z merania zeme, určovania objemov nádob, z počítania času, zo sporov a hádok, čo sa v budúcnosti stane. Prvé matematické vedomosti boli potrebné pri poľnohospodárskych prácach, pri stavbe obydlií, pri love, v boji s prírodnými podmienkami. Človek, ktorý triedil a pamätal si skúsenosti, vybadal príčinnosť, snažil sa vysvetliť podmienky a následky javov. Idealizoval predstavy, vytváral abstraktné pojmy, pripravil si symboly. Začal zovšeobecňovať, pýtať sa na argumenty, odvodzovať. Prišiel na metódu dôkazov, začal skúmať svoju reč, spôsob vyjadrovania. Z matematiky sa stal nástroj ľudského ducha pre správne a presné myslenie.

Už v časoch *Pytagora* zo *Samu* chápali slovo „mathema“ ako pozorovanie, znalosť, vedenie o niečom. Pojem „techné“ bol vyhradený pre umenie, zručnosť. Veľmi názorné je chápanie slova „atema, matano“ v zmysle „učím sa premýšľaním“. Neskôr sa slovo matematika používalo pre učenie, vedenie, náuku vôbec; bolo aj označením druhu filozofie,

spôsobu uvažovania. Z vyriešenia rôznych problémov zostávajú účinné spôsoby, metódy. Ak odhaľujeme a zhrňame všeobecné univerzálne myšlienkové metódy a idey, tak robíme matematiku.

Na ceste k dnešnej matematike boli v histórii rozvoja matematického myslenia aj ťažké chvíle. Nejednen problém museli preklenúť ľudia, ktorým záležalo na dokonalosti matematiky. Vznikalo množstvo kríz, nejasností a pohľadov z rôznych strán. Rôznorodé problémy si vynútili vznik nových matematických disciplín. Bolo treba axiomatizovať, prijať nečakané pravidlá, pozorne definovať. Matematika ako veda o číslach, priestore a funkciách sa prerodila na univerzálny jazyk, vhodný pre jednoduché i veľmi všeobecné vyjadrovanie. Matematika vyrástla do vnútornej krásy i všeobecného úžitku. Došlo k matematizácii celého vedeckého poznania. Ukázalo sa, že matematika je nevyhnutná vo vede i v technike, pomáha napr. hudbe, architektúre, ekonómii, sociológii, ba i športu. Ťažko sa hľadá odbor ľudskej činnosti, kde by nemohla zasiahnuť.

To, čo matematika v súčasnosti skúma, sa nedá jednoznačne vyjadriť. Neexistuje úplná vedecká definícia matematiky. Predmetom matematiky sa môže stať čokoľvek. Podstatou matematiky sú princípy ľudského myslenia upravené do logického systému. Matematika sa stala metódou, dômyselným nástrojom ľudského ducha, ktorý používa človek pri správnom a presnom myslení. Keby dnes žili takí matematici ako *Archimedes*, *Euklides* alebo *Newton*, boli by možno zmätení rozmanitosťou súčasných pojmov, ale metódy by boli pre nich pochopiteľné. Aspoň základy matematických metód by sa mal naučiť každý človek.

Matematika je oblasťou, v ktorej môže každý sám prežívať objavy bez toho, aby cestoval do iných krajín alebo k iným planétam. Bez veľkých nákladov na technické prostriedky, často len s ceruzkou a papierom, si môžete preveriť svoje sily a schopnosti logicky uvažovať a tvorivo myslieť. Matematika vám umožní uspokojiť ľudskú túžbu odhaľovať neznáme. Matematika ako impozantná stavba ľudského ducha a pyramída myšlienok poskytuje rozumu veľký priestor pre rozlet nových nápadov, cesty intuície až k tajomstvám nekonečna. Zdá sa, že ju máme iba pre potrebu ducha a nepokojnú cestu za pravdou. Ale neustále sa presvedčujeme v modernej vede i technike, že je aj nepochopiteľne praktická.

V rozvoji matematiky zohrali dôležitú úlohu osobnosti, významní matematici. Tých úplne prvých nepoznáme po mene. Z hĺbok dejín sa zachovalo meno *Imhotep*. Bol nielen matematikom, ale aj vojvodom, kňazom, lekárom, hvezdárom a staviteľom na dvore egyptského faraóna Džósera. Zmienka o ňom je zo zachovaných nápisov pri stavbe pyramíd z doby Starej ríše (okolo rokov 3600—2700 pred naším letopočtom).

Celý rad ďalších matematikov nezostal v histórii utajený. O niektorých z nich sa môžete dozvedieť v našom časopise. Niekedy viac, niekedy menej. Často je málo údajov, inokedy je dielo rozsiahle a na pochopenie odborných výsledkov predsa len musíte ešte podrásť. Ale aj tak máte možnosť vybadať silu odborných schopností a hodnotu ľudských vlastností tých, ktorí sú zapísaní medzi slávnych matematikov.

O matematikoch, ľuďoch oddaných svojej presnej vede, sa popísalo veľa historiek. Veselých a vtipných, posmievačných i kritických. Posúďte tento „rozhovor matematikov“:

A: Súčin veku mojich troch synov je 36.

B: Táto informácia mi nestačí na určenie veku každého z nich.

A: Súčet ich veku je rovnaký, ako počet okien v tomto dome (a ukázal na dom, pred ktorým stáli).

B: Ani teraz sa nedá určiť jednoznačne vek tvojich synov.

A: Najstarší z nich má čierne vlasy.

B: Ďakujem, to mi stačí. Už poznám vek tvojich synov.

Viete rozhodnúť, koľko rokov mal každý z matematikových synov? A dokonca, koľko okien je na budove spomínanej v rozhovore? Tvrdím, že určite na to potrebné vedomosti máte. S kúskom papiera, ceruzkou a trochu odvahy v myslení to určite dokážete. Skúste to. Ak sa vám to podarí, urobili ste krok k tomu, aby ste sa aspoň trochu mohli cítiť ako matematici. Tak, veľa zdaru!

Záver našej úvahy o postavení matematiky by mal byť predsa len vážny. Dejiny matematiky predstavujú neudržateľnú silu vývoja ľudských myšlienok. Tisíce matematikov súčasnosti predkladá ročne desaťtisíce matematických viet aj s dôkazmi. Zmocňujú sa sveta bez meča a bez štítu. Spoločenská potreba výsledkov z matematických výskumov vzrásta, zvlášť v období samočinných počítačov. V práci s nimi treba poznať pravidlá hry, algoritmy. Celé tisícročia ukladala matematika svoje výpočtové postupy pre potreby celého ľudstva. Treba ich rozumne používať. To je vecou ľudskej cti a zodpovednosti. Poľský matematik a logik *Alfréd Tarski* vyjadril možnosti matematiky v spoločenskej oblasti slovami: „Hlavným problémom, pred ktorým dnes ľudstvo stojí, je problém normalizácie a racionalizácie vzťahov medzi ľuďmi. Nemám ilúzie, že rozvoj matematiky, alebo v tomto ohľade ktorejkoľvek inej teoretickej vedy, povedie sám o sebe k uspokojivému riešeniu tohoto problému, ale verím, že väčšie rozšírenie znalostí môže k jeho riešeniu pozitívne prispieť. Lebo na jednej strane tým, že matematika spresňuje a zjednocuje významy pojmov vo svojej oblasti a že zdôrazňuje nutnosť takéhoto spresňovania a zjednocovania v každom inom odbore, vedie k možnosti lepšieho porozumenia medzi tými, ktorí majú snahu ho dosiahnuť. A na druhej strane tým, že zdokonaľuje a zjemňuje

nástroje myslenia, robí ľudí kritickejšími a znižuje tak pravdepodobnosť toho, že budú zvedení všetkými možnými pseudoúvahami, ktorým sú dnes vystavení v rôznych oblastiach sveta.“

Každý slávny matematik bol predovšetkým človekom. „Mravné kvality vynikajúcich osobností majú možno väčší význam pre dané pokolenie a celý priebeh dejín ako čisto intelektuálne úspechy. Tie závisia od veľkosti charakteru v oveľa väčšej miere, než sa to obyčajne predpokladá.“ Tieto slová *Alberta Einsteina* zdôrazňujú poznanie ľudských charakterov a životných osudov významných vedeckých osobností. Myslím, že matematiku pochopíme až vtedy, keď spolu s jej vedeckou podstatou a históriou spoznáme dobre aj ľudí, ktorí nezištne prispeli k jej rozvoju.

MATEMATIKA

Kde sa vzali?

RNDr. KAROL HABART, CSc., MÚ SAV Bratislava

Ešte ako žiaka gymnázia ma veľmi trápili známe goniometrické vzorce z tabuliek, teda hlavne súčtové vzorce

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Používali sme ich veľmi často, ale nevedel som, *kde sa vzali*. Možno ich vôbec dokázať? A ako ich možno dokázať?

Mladému adeptovi matematiky, ktorého trápia podobné veci, venujem tento článok.

Dôkaz súčtových vzorcov je veľmi prostý. Hľa:

Dôkaz: Za predpokladu, že uhol α meriame v radiánoch, platí známy vzťah:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (2)$$

kde e je Eulerovo číslo (iracionálne číslo, $e = 2,71828 \dots$). Z neho dostávame:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \\ = e^{i(\alpha + \beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) \\
&= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta),
\end{aligned}$$

a keďže rovnosť dvoch komplexných čísel znamená rovnosť ako jeho reálnej, tak aj imaginárnej časti, dokázali sme rovnosti (1),
q. e. d.

Ale drahý autor! Veď tento dôkaz je obrovský podfuk! Na konci dôkazu si síce vzosne uviedol podľa vzoru seriózných matematických traktátov skratku latinskej vetičky *quod erat demonstrandum*¹⁾, ale pri dôkaze obskúrnych rovností (1) si využil ešte obskúrnejšiu rovnosť (2). A tá sa vzala kde?

Uznávam, drahý čitateľ, polepším sa. Daný dôkaz však naznačuje, že goniometrické vzorce, ktoré stredoškooláci využívajú ako pravdu čisto geometrickú, súvisia s pravdou čisto aritmetickou. A práve tento fenomén, keď na prvý pohľad navzájom vôbec nesúvisiace oblasti (nielen) matematiky nájdú spoločného menovateľa, je najvzrušujúcejším momentom v matematike. Takéto okamihy nám vnukajú vieru v existenciu objektívnej pravdy a v poznateľnosť sveta. Nie všetky výsledky v matematike majú túto vlastnosť. Práve naše storočie je charakteristické výsledkami podporujúcimi agnosticizmus²⁾. Niektorí matematici dokonca dospeli k takej zvrhlosti, že sa pokúšali degradovať (oni tomu vraveli povýšiť) matematiku na náboženstvo.

Ale príliš neodbočujme.

Vzťah (2) ma trápil ako študenta ešte viac ako rovnosti (1). A veru právom. Pretože ak sa niekoho spýtate na dôkaz rovností (1), možno sa dajakého dôkazu dočkáte. Ale ak chcete na niekom dôkaz rovnosti (2), dotyčný, ktorého ste zastavili na chodbe a ktorý sa síce veci rozumie, ale na vás čas nemá, len nevrlo odvrkne, že to je tak definované a nemá sa na tom čo ukazovať.

Ale preboha! Ako to? Veď definovať si môžem čokoľvek akokoľvek a keď čo len zmením znamienko $+$ na $-$ v pravej strane rovnosti (2), dostal by som nesprávne sumačné vzorce! Kde sa vzal tento „správne zdefinovaný“ vzorec?

To, čo dnes spája geometriu s aritmetikou, je zásluhou *Reného Descartesa* (1596—1650) analytická geometria. Aj my si na začiatku našich úvah zavedieme pravoúhlú sústavu súradníc x, y v rovine, ktorá sa práve po Descartesovom polatinčenom mene — Cartesius — volá kartézska. Každému vektoru $\vec{a}$ vieme jednoznačne priradiť komplexné číslo $p + iq$, kde p, q sú súradnice vektora $\vec{a}$. Keď O je začiatok súradnicovej sústavy,

¹⁾ čo malo byť dokázané

²⁾ nepoznateľnosť sveta

tak aj každému bodu P roviny vieme jednoznačne priradiť komplexné číslo $p + iq$, kde p, q sú súradnice vektora $\vec{OP}$.

Pri tomto „preklade“ zodpovedá súčtu dvoch vektorov súčet príslušných komplexných čísel. Zodpovedá $p + iq$ vektoru $\vec{a}$, tak súčinu $c \cdot (p + iq)$ zodpovedá vektor $c \cdot \vec{a}$, súčinu $i \cdot (p + iq)$ prislúcha vektor $\vec{b}$ rovnako veľký ako $\vec{a}$ otočený o pravý uhol v kladnom smere (súradnice vektora $\vec{b}$ sú $-q, p$).

Skúmajme geometrický význam súčinu

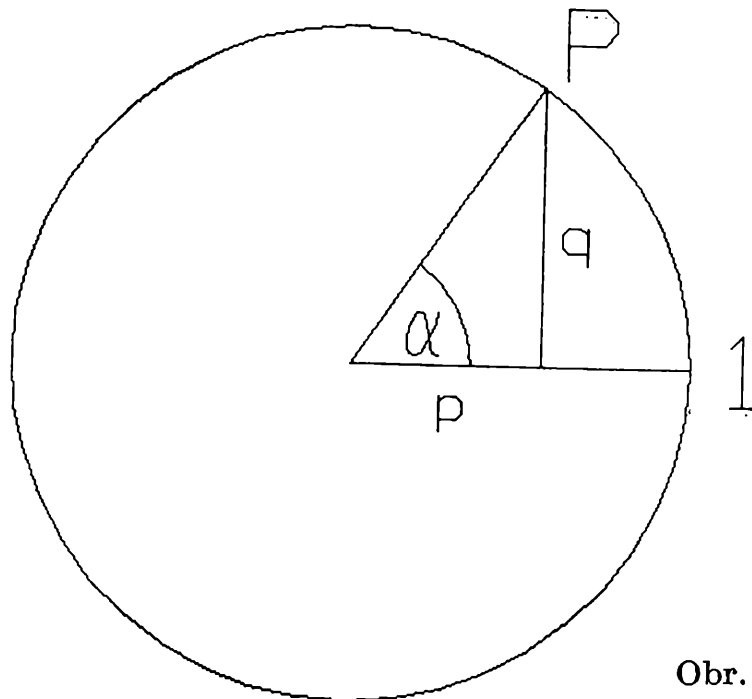
$$(p_1 + iq_1) \cdot (p_2 + iq_2).$$

Pritom predpokladajme, že

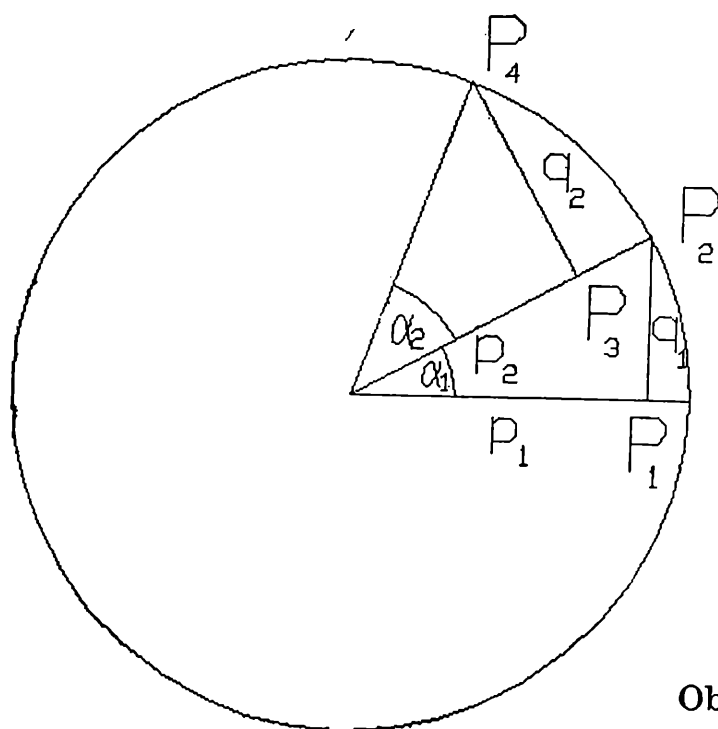
$$|p_j + iq_j| = \sqrt{p_j^2 + q_j^2} = 1 \quad (j = 1, 2).$$

Je jasné, že komplexné číslo $p + iq$ s jednotkovou absolútnou hodnotou je jednoznačne určené uhlom α , ktorý zvierá kladná poloos x -ovej osi (reálnej osi) s polpriamkou OP , kde P je bod roviny zodpovedajúci číslu $p + iq$ (obr. 1).

Súradnice bodov P_1 až P_4 na obr. 2 sú určené nasledovnými komplexnými číslami:



Obr. 1



Obr. 2

$$\begin{aligned}
 P_1 &: p_1, \\
 P_2 &: p_1 + iq_1, \\
 P_3 &: p_2 \cdot (p_1 + iq_1), \\
 P_4 &: p_2 \cdot (p_1 + iq_1) + iq_2 \cdot (p_1 + iq_1).
 \end{aligned}$$

Z konštrukcie bodu P_4 je jasné, že polpriamka OP_4 zvierá s kladnou reálnou poloosou uhol $\alpha_1 + \alpha_2$, kde α_j určuje číslo $p_j + iq_j$ pre $j = 1, 2$.

Uvedomme si, že táto konštrukcia je správna aj vtedy, keď uhly α_1 , α_2 alebo $\alpha_1 + \alpha_2$ presiahnu prvý kvadrant.

Z uvedeného vidíme, že súčin dvoch komplexných čísel s jednotkovou absolútnou hodnotou, ktoré sú určené uhlami α_1 a α_2 , je komplexné číslo s jednotkovou absolútnou hodnotou určené uhlom $\alpha_1 + \alpha_2$. Na základe pravidiel pre súčin komplexných čísel z toho vyplývajú sumačné vzorce (1).

Takže dôkaz v úvode článku bol skutočne veľký podfuk! Vzťahy (1) už máme dokázané, ale kde sa nabrala rovnosť (2), to je ešte stále vo hviezdach.

Vzťah (2) je odôvodnený „vhodnou“ definíciou umocňovania komplexných čísel. A pes je zakopaný práve v tom slovíčku „vhodnom“.

Všimnime si najprv, že rovnosť (2) nám umožňuje vypočítať ľubovoľnú mocninu komplexných čísel. Povedzme, že chceme vypočítať

$$(p_1 + iq_1)^{(p_2 + iq_2)}. \quad (3)$$

Na základe (2) vieme, že

$$p_1 + iq_1 = c \cdot e^{i\alpha},$$

kde $c = |p_1 + iq_1|$ a $\alpha = \arctan \frac{q_1}{p_1}$ ($\arctan$ je funkcia opačná k $\tan$, t. j. keď $y = \tan x$, tak $\arctan y = x$). Takže (3) môžeme napísať ako

$$c p_1 \cdot e^{i\alpha p_1} \cdot c^{i q_1} \cdot e^{-\alpha q_1} \quad (4)$$

a keďže $c = e^d$, kde $d = \ln c$ ($\ln$ je prirodzený logaritmus — je to funkcia opačná k e^x , t. j. keď $y = e^x$, tak $\ln y = x$), (4) môžeme upraviť na tvar

$$c p_1 \cdot e^{i\alpha p_1} \cdot e^{i q_1 d} \cdot e^{-\alpha q_1} \quad (5)$$

čoho konečnú hodnotu v tvare $p + iq$ vieme vypočítať pomocou (2).

Vzťah (2) takto definuje umocňovanie komplexných čísel. Aby toto umocňovanie bolo „vhodne“ definované, musí platiť rovnosť (2) a žiadna iná. To si teraz ukážeme.

Čo sú však naše požiadavky na „vhodnosť“? Určite chceme, aby pre umocňovanie komplexných čísel platili rovnaké pravidlá ako pre umocňovanie čísel reálnych. Napríklad už pri upravovaní výrazu (3) na tvar (5) sme využívali nasledovné rovnosti (k_1, k_2 budú označovať komplexné čísla):

$$k_1^{k_2+k_3} = k_1^{k_2} \cdot k_1^{k_3} \quad (6)$$

$$(k_1^{k_2})^{k_3} = k_1^{k_2 \cdot k_3}.$$

Základnou požiadavkou ovšem bude, že pre prirodzené n platí:

$$k^n = k \cdot k \cdot \dots \cdot k \quad (7)$$

n -krát

a keďže sme už ukázali, že násobenie komplexných čísel súvisí so sumačnými vzorcami (1), tým tajomným styčným bodom medzi vzťahmi (1) a (2) je práve rovnosť (7).

Skúmame naprv reálne mocniny čísla i . Číslo i má absolútnu hodnotu 1 a je určené uhlom $\pi/2$ (pravý uhol v radiánoch). Aké komplexné číslo k môže byť $i^{\frac{1}{n}}$ pre prirodzené n ? Určite je $k = |k| \cdot k'$, kde k' má absolútnu hodnotu 1 a je určené nejakým uhlom α . Keďže

$$i = (i^{\frac{1}{n}})^n = k^n = |k|^n \cdot k'^n,$$

zo vzťahu (7) a našich úvah o súčine komplexných čísel s jednotkovou absolútnou hodnotou vyplýva, že $|k| = 1$ a $\alpha = \frac{\pi/2}{n}$, t. j. pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí:

$$i^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{\pi/2}{n} + i \sin \frac{\pi/2}{n}.$$

Ak m -krát vynásobíme číslo $i^{\frac{1}{n}}$, podľa našich úvah bude platiť:

$$i^{\frac{m}{n}} = \cos (\pi/2) \frac{m}{n} + i \sin (\pi/2) \frac{m}{n} \quad (8)$$

Vzťah (8) hovorí, že pre ľubovoľné racionálne číslo x platí:

$$i^x = \cos \frac{\pi}{2} x + i \sin \frac{\pi}{2} x. \quad (9)$$

Predstavme si teraz dajaké iracionálne číslo y . Toto číslo má nekonečný dekadický rozvoj. Každá konečná časť tohto rozvoja je racionálne číslo. Všimnime si, že pre ľubovoľne malé číslo $\varepsilon > 0$ nájdeme takú dlhú časť rozvoja y , t. j. také racionálne číslo y' , že $|y - y'|$ bude menší ako ε . Čiže k ľubovoľnému iracionálnemu číslu sa vieme s ľubovoľnou presnosťou „priblížiť“ vhodným racionálnym číslom.

Funkcia a^x , kde a je dajaké reálne číslo, má tú vlastnosť, že ak sa budeme blížiť nejakou postupnosťou čísel x_n ($n = 1, 2, \dots$) k číslu y , tak čísla a^{x_n} sa budú blížiť k číslu a^y . Takéto funkcie voláme *spojité*. Ak požadujeme (čo aj urobíme), aby aj funkcia i^x bola spojitá, tak z predchádzajúcich úvah, keďže aj funkcie $\sin$ a $\cos$ sú spojité, vyplýva, že vzťah (9) musí platiť pre *všetky* reálne čísla x .

Drobnou úpravou vzťahu (9) dostávame:

$$i^{\frac{x}{\pi}} = \cos x + i \sin x. \quad (10)$$

Rovnosť (10) sa už veľmi podobá vzťahu (2). Potrebujeme vlastne len ukázať, že

$$i^{\frac{x}{\pi}} = e^{ix}. \quad (11)$$

Na odôvodnenie vzťahu (11) však potrebujeme ďalšie pojmy z matematickej analýzy. Sem patrí aj pojem spojitosti, ktorý bez presnej definície sme už v našich úvahách použili.

V ďalšom nám postačí vedieť, že v analýze existuje pojem *derivácie funkcie*, t. j. operácie, ktorá funkcii $f(x)$ priradzuje funkciu $f'(x)$. My budeme potrebovať derivácie funkcií $\sin x$, $\cos x$, a a^{bx} , kde a a b sú pevne zvolené reálne čísla. Tu sú:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, \\ (\cos x)' &= -\sin x, \\ (a^{bx})' &= b \cdot a^x \cdot \ln a. \end{aligned} \quad (12)$$

Okrem toho musíme vedieť, že pre dve funkcie $f(x)$, $g(x)$ a reálne číslo c platí:

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x), \\ (c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Pridajme k našim požiadavkam na „vhodnosť“ operácií s komplexnými číslami platnosť vzťahov (12–13) aj pre komplexné čísla. Potom z (10) odvodíme:

$$(i^{\frac{x}{\pi}})' = (\cos x + i \sin x)',$$

z čoho úpravou dostaneme:

$$\frac{2}{\pi} \cdot i^{\frac{x}{\pi}} \cdot \ln i = -\sin x + i \cos x.$$

Po ďalšej úprave to bude

$$\frac{2}{\pi} \cdot \ln i \cdot i^{\frac{x}{\pi}} = i(\cos x + i \sin x),$$

z čoho pomocou (10) dostaneme

$$\frac{2}{\pi} \cdot \ln i \cdot i^{\frac{x}{\pi}} = i \cdot i^{\frac{x}{\pi}},$$

čiže

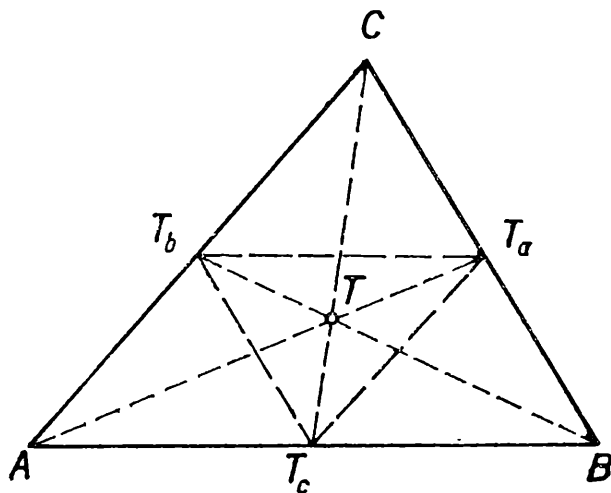
$$\frac{2}{\pi} \ln i = i. \quad (14)$$

Podľa definície prirodzeného logaritmu musí platiť, že $e^{\ln i} = i$. Umocnením e na pravú a ľavú stranu rovnosti (14) priamo odvodíme našu tajomnú rovnosť (11).

0 Eulerově přímce

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

Na obr. 1 jsou body T_a , T_b , T_c po řadě středy stran BC , CA a AB trojúhelníku ABC . Úsečky AT_a , BT_b , CT_c jsou těžnice tohoto trojúhelníku; protínají se v těžišti T . Ze známé vlastnosti těžiště a těžnic trojúhelníka plyne, že trojúhelníky ABC a $T_aT_bT_c$ jsou stejnohlé se středem stejnohllosti T a koeficientem



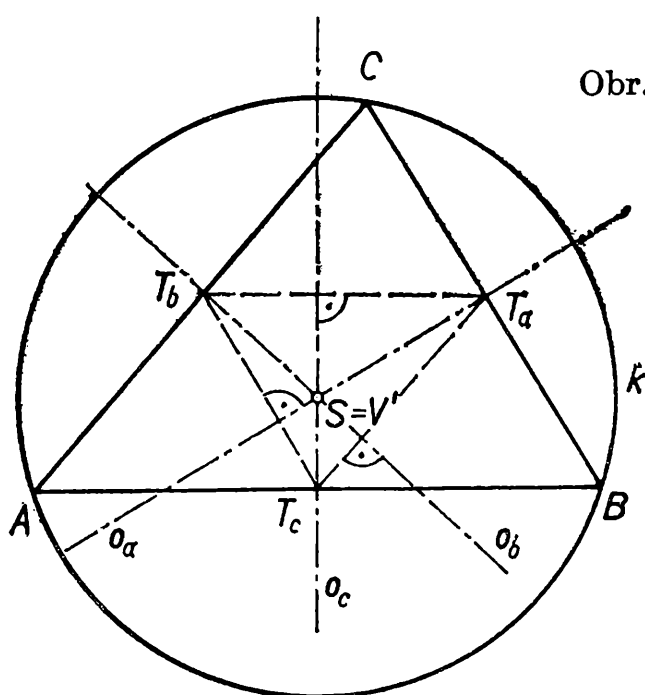
Obr. 1

$$-\frac{|TT_a|}{|AT|} = -\frac{1}{2}.$$

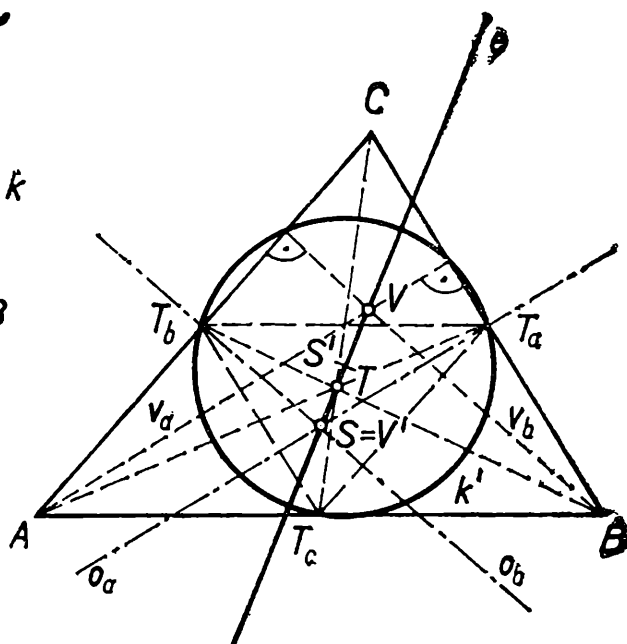
Bod T je těžištěm jak trojúhelníka ABC , tak $T_aT_bT_c$.

Trojúhelníky ABC a $T_aT_bT_c$ jsou nejen stejnohlede, ale mají k sobě ještě další vztahy. Sestrojíme-li střed S kružnice k opsané trojúhelníku ABC , pak zjistíme, že bod S je zároveň průsečíkem V' výšek trojúhelníku $T_aT_bT_c$ (obr. 2). Osa o_a strany BC je totiž zároveň výškou z vrcholu T_a na stranu T_bT_c v trojúhelníku $T_aT_bT_c$. Obdobně je tomu pro další osy o_b a o_c stran AC a AB .

Výšky $\triangle ABC$ se protínají v bodě V (obr. 3). Ze stejnohledosti trojúhelníků ABC , $T_aT_bT_c$ vyplývá, že body T , V , $S = V'$ buď splývají



Obr. 2



Obr. 3

s bodem T , anebo leží v téže přímce. Na obr. 3 je označena e . Tato přímka se nazývá *Eulerova*. Z uvedené stejnohledosti vyplývá

$$2 \cdot |TS| = |TV|.$$

Poznámky a problémy

1. Ve kterých trojúhelnících body T , V , S splývají?
2. Může Eulerova přímka v jiném než rovnoramenném trojúhelníku obsahovat jako svou část některou těžnici příslušného trojúhelníku?

3. Na Eulerově přímce leží střed S opsané kružnice k trojúhelníku ABC (obr. 3), a proto na ní leží též střed S' kružnice k' opsané trojúhelníku $T_aT_bT_c$. Přitom $2 \cdot |TS'| = |TS|$ a polopřímky TS a TS' jsou opačné. Kružnice k' je tzv. *Feuerbachova kružnice*, která se též nazývá kružnicí devíti bodů, neboť vedle středů T_a, T_b, T_c stran trojúhelníku ABC jsou jejími body paty výšek trojúhelníku ABC na jeho strany a středy úseček AV, BV, CV , kde V je průsečík výšek trojúhelníku ABC . O této kružnici se můžete dočíst např. v příručce *O podobnosti v geometrii* od Jaroslava Šedivého (ŠMM, Mladá fronta, Praha 1963, 1967) a v knížce *Geometrie trojúhelníka* od Jaroslava Švrčka a Jiřího Vanžury (Polytechnická knihovna, SNTL, Praha 1988).

FYZIKA

0 Brownově pohybu

Ing. JIŘÍ MACHALICKÝ, CSc., ČVUT Praha

V r. 1827 objevil anglický botanik R. Brown¹⁾ při svých pozorováních pod mikroskopem charakteristický pohyb mikroskopických částic suspendovaných ve vodě.

I když v průběhu 18. století se začala rozvíjet kinetická teorie plynů (v r. 1856 R. E. Clausius odvodil vzorec pro tlak plynu, zavedl pojmy střední volná dráha a srážková frekvence, v r. 1860 J. C. Maxwell odvodil zákon rozdělení rychlostí molekul plynu, v r. 1868 L. E. Boltzmann odvodil obecnější tvar rozdělovacího zákona ... atd.), trvalo téměř 80 let, než se podařilo podat statistickou teorii Brownova pohybu. Uveřejnil ji v r. 1904 M. Smoluchowski.²⁾ Nezávisle na něm vysvětlil (v r. 1905) pohyb mikroskopických částic suspendovaných v kapalině nebo plynu A. Einstein³⁾ v práci, kterou předložil jako podklad k získání doktorátu filosofie na universitě v Zürichu.

V historických pramenech se uvádí, že ani A. Einstein, ani nikdo z členů rigorosní komise nevěděl, že zkoumaný pohyb už dávno předtím objevil R. Brown. Výtah z této disertace uveřejnil A. Einstein v časopise *Annalen der Physik* 19 (1906), str. 289—306, po názvem „Nový způsob určení rozměrů molekul“. Zevrubný rozbor tohoto pohybu, doplněný pečlivými experimenty J. B. Perrina⁴⁾ (provedenými v r. 1908) se staly na začátku našeho století pádnými argumenty pro zastánce atomistického výkladu fyzikálních jevů.

V literatuře je tento jev označován stručně jménem svého objevitele — *Brownův pohyb*. My se jím budeme v následujících řádcích zabývat trochu podrobněji. Nejprve si uvedme několik výsledků získaných pozorováními:

- a) *Brownův pohyb může částice vykonávat neomezeně dlouho, aniž by se jakkoli tlumil či ochaboval.* Částice přitom opisují naprosto nepravidelnou dráhu. Charakter pohybu je nezávislý na chemickém složení částic a na vnějších podmínkách, působících na prostředí, v němž jsou částice suspendovány (např. nestejnoměrné zahřívání nebo osvětlení, chemické či elektrické působení . . . atd.).
- b) *Intenzita pohybu je tím větší, čím menší jsou rozměry suspendovaných částic a čím vyšší je teplota prostředí.* Zmenšuje se však s rostoucí viskozitou prostředí.
- c) *Ze všech provedených experimentů je možno učinit závěr, že příčinou Brownova pohybu je nepřetržitý termický pohyb molekul prostředí, v němž jsou částice suspendovány.* Molekuly prostředí narážejí neustále na povrch částice a předávají jí při každé srážce určitý impuls. Jinak řečeno působí molekuly na částici tlakem. Nárazy molekul na povrch částice jsou ze všech stran naprosto nepravidelné. Má-li částice takové rozměry, že na ni během krátkého časového intervalu narazí velký počet molekul, ukazuje se, že impulsy předávané částici ze všech stran se kompenzují. Molekuly prostředí tlačí na částici ze všech stran stejně, takže se nepohybuje. Když je však suspendovaná částice *velmi malá* (řádově 10^{-6} m), narazí na ni v průběhu krátkého

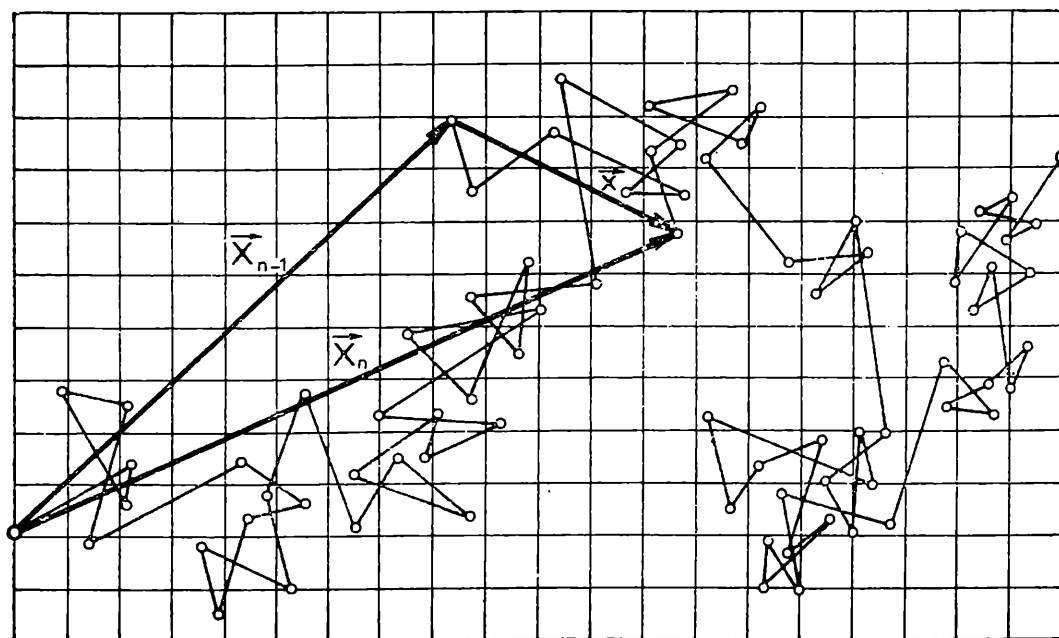
¹⁾ Robert Brown (1773—1858) vynikl svými pracemi z oboru rostlinné morfologie a geografie. Objevil též jádro rostlinné buňky.

²⁾ Marian von Smoluchowski (1872—1917), polský fyzik, profesor na universitě v Krakově, zabýval se zejména kinetickou teorií plynů, difuzí a osmosou, teorií Brownova pohybu, teorií opalescence v kritickém stavu plynů, úvahami z počtu pravděpodobnosti. Experimentálně vyšetřoval rozptyl světla v ovzduší.

³⁾ Albert Einstein (1879—1955), německý teoretický fyzik, myslitel, veřejný činitel, humanista a pacifista. Vystudoval polytechniku v Zürichu. Po skončení studia pracoval v patentním úřadě v Bernu. V r. 1909 se stal profesorem na universitě v Zürichu, od r. 1911 byl profesorem na německé universitě v Praze, od r. 1914 působil na universitě v Berlíně, odkud odešel v r. 1933 na protest proti fašismu do USA. Až do konce života pracoval v Institutu pro pokročilá studia v Princetonu, stát New Jersey. Za svůj plodný život publikoval přes 300 vědeckých prací. Nobelova cena mu byla udělena v r. 1921 za rozvoj teoretické fyziky (teorie fotoelektrického jevu a Brownova pohybu), i když jeho největším přínosem je bezesporu teorie relativity.

⁴⁾ Jean Baptiste Perrin (1870—1942), francouzský fyzik, od r. 1899 profesor fyzikální chemie na Sorbonně v Paříži. Zabýval se rentgenovým a katodovým zářením a kinetickou teorií. Vykonal práce o Brownově pohybu mikroskopických částic pryskyřičných emulzí, v nichž určil dosti přesně Avogadrovu konstantu. V r. 1926 mu byla udělena Nobelova cena. Za 2. světové války emigroval do USA.

časového intervalu jen malý počet molekul. Impulsy, které částici předají molekuly v každém okamžiku, *nejsou vyrovnány*, takže výslednice sil působících na částici není vždy rovna nule. Mění se její velikost i směr. Výsledkem toho je, že částice vykonává nepravidelný pohyb, jehož směr i rychlost se velmi rychle mění (řádově 10^{12} krát za sekundu). Každý z těchto pohybů nelze samozřejmě pod mikroskopem zachytit. K pozorovatelným posunutím dochází jen tehdy, nastane-li náhodně více těchto drobných pohybů jedním směrem. Charakter Brownova pohybu je zachycen na obr. 1 (podle [4], str. 12), v němž jsou vyznačeny tečkami polohy částice v časových intervalech 30 s. Úsečky spojující sousední polohy částice v těchto intervalech nejsou skutečnou drahou, kterou částice při tomto pozorování opsala.



Obr. 1

Každá ze zakreslených úseček reprezentuje přibližně 10^{23} nepozorovatelných posunutí. Také je třeba si uvědomit, že Brownův pohyb se ve skutečnosti děje v prostoru, nikoli v rovině. V obr. 1 jsou znázorněny průměty poloh sledované částice do roviny zorného pole mikroskopu. Získaná klikatá čára je jen hrubým přiblížením skutečnému obrazu dráhy, pohybující se částice ⁵⁾. Pro úplnost poznamenejme ještě, že strana čtverečku sítě na obr. 1 má ve skutečnosti délku $3 \mu\text{m}$.

⁵⁾ Známý americký teoretický fyzik a výborný popularizátor moderní fyziky R. Ph. Feynman použil při výkladu Brownova pohybu následujícího vtipného přirovnání: Částice vykonává pohyb typu „náhodného kráčení“, který připomíná počínání rozjařeného opilého námořníka na cestě z přístavní krčmy.

I když Brownova částice obsahuje velký počet molekul, je přece jen v určitém smyslu indikátorem molekulárního pohybu molekul oné tekutiny, v níž je částice suspendována.

V obdobné situaci se ve fyzice, ale i v jiných oborech činnosti ocítáme častěji. Meteorologové např. využívají k popisu složitých pohybů vzdušných vrstev zemské atmosféry větrné růžice, resp. různých anemometrů, které jsou rovněž indikátorem složitého pohybu velkého počtu molekul plynů, par, kouře a dalších částic, které tvoří vzdušný obal Země.

Při teoretickém vyšetření pohybu Brownovy částice vyjdeme ze základního experimentálního poznatku o nezníitelnosti tohoto pohybu. Jeho příčinou nemohou být vnější síly. Pohyb se udržuje tím, že částice čerpá energii z prostředí, které ji obklopuje (v němž je částice suspendována).

Uložíme si následující úkol:

Určete průměrnou vzdálenost, do níž se dostane vybraná částice při Brownově pohybu, sledujeme-li ji po určitou dobu t , hodně velkou proti době, která uplyne mezi dvěma po sobě následujícími nárazy molekul prostředí na ni.

Celkovou dobu pozorování rozdělme na kratší stejně dlouhé časové intervaly (kroky). Dvě libovolně vybrané sousední polohy (tj. na začátku a konci časového intervalu) vyšetřované částice vyznačme průvodiči $\vec{X}_{n-1}$, $\vec{X}_n$, $\vec{x}$ (viz obr. 1). Pak platí

$$\vec{X}_n = \vec{X}_{n-1} + \vec{x}. \quad (1)$$

Abychom určili průměrnou vzdálenost, do níž se vzdálí vybraná Brownova částice po n krocích, provedeme následující matematické operace: rov. (1) umocníme na druhou a v tak získaném vztahu provedeme součet pro $n = 1, 2, 3 \dots$. Tak dostaneme

$$\sum_{(n)} X_n^2 = \sum_{(n)} X_{n-1}^2 + 2 \sum_{(n)} (\vec{X}_{n-1} \cdot \vec{x}) + \sum_{(n)} x^2. \quad (2)$$

Druhý člen na pravé straně této rovnice je s ohledem na statistický charakter Brownova pohybu roven nule. Vzájemná poloha i velikosti obou vektorů $\vec{X}_{n-1}$, $\vec{x}$ jsou totiž zcela náhodné, takže v součtu se jejich skalární součiny vzájemně zruší. Dostaneme tedy

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n-1}^2 + X_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n-1}^2 + nx^2, \\ X_n^2 = nx^2, \quad (3a)$$

resp.

$$X_n = \sqrt{n} x. \quad (3b)$$

Délka X_n je střední kvadratická vzdálenost částice po n krocích, přičemž x je průměrná délka jednoho kroku. Protože počet kroků je v našem pozorování úměrný času, lze podle (3a) střední hodnotu kvadrátu vzdálenosti, již urazí Brownova částice za pozorovací čas t , vyjádřit vztahem

$$\overline{X^2} = \alpha t, \quad (4)$$

v němž α je zatím neurčená konstanta úměrnosti. K jejímu stanovení je možno vyjít z pohybové rovnice Brownovy částice a zákonů, které byly přijaty v kinetické teorii (zejména velmi obecný zákon rovnoměrného rozdělení energie, neboli *ekvipartiční teorém*⁶⁾; název je odvozen z řeckých slov ekvus = stejný, part = dělit).

Na částici suspendované v nějakém tekutém prostředí působí kromě nepravidelné síly $\mathbf{F}$ vyvozované nárazy molekul, ještě tlumící síla $\mathbf{F}_0$ (odpor prostředí) úměrná rychlosti částice.

Uvažujme pro jednoduchost o jednorozměrném pohybu částice (např. ve směru osy X kartézské soustavy souřadnic). Pak podle II. Newtonova zákona platí pohybová rovnice

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x - \mu \frac{dx}{dt}, \quad (5)$$

v níž F_x je x -ová složka síly $\mathbf{F}$, $\frac{dx}{dt}$ složka rychlosti $\mathbf{v}$ částice v ose X a μ konstanta úměrnosti (měřená v $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$), která je závislá na druhu tekutiny, v níž je částice suspendována, a na tvaru a velikosti částice. Při řešení úlohy není třeba znát mechanismus brzdění pohybu částice; postačí, když si uvědomíme, že tento odpor je podstatně závislý na vizkozitě prostředí.

K určení konstanty úměrnosti α v rov. (4) je možno užít následujících matematických úprav rov. (5): převedeme člen $\mu \frac{dx}{dt}$ na levou stranu

⁶⁾ Za rovnovážného stavu při teplotě T je střední energie soustavy (plynu) rozdělena rovnoměrně na všechny nezávislé kvadratické složky (části, sčítance), z nichž se energie skládá, a to tak, že každá kvadratická složka energie má střední hodnotu rovnou $1/2 kT$ (k je Boltzmannova konstanta). Např. průměrnou energii jednoatomové molekuly nějakého plynu lze vyjádřit vztahem

$$\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 3 \cdot \frac{1}{2} kT.$$

U molekul, které vznikly složením dvou, tří nebo více atomů, je průměrná energie určena pěti, event. šesti nezávislými členy, neboť kromě translačního pohybu vykonávají tyto molekuly také rotační pohyby, pro které mají kvadratické členy výrazu pro energii tvar $1/2 J\omega^2$ (kde J je moment setrvačnosti molekuly, vzhledem k níž se otáčí, a ω je příslušná úhlová rychlost).

rovnice, vynásobíme celou rovnici okamžitou hodnotou souřadnice x částice a určíme časové průměry všech členů takto upravené rovnice

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} + \mu x \frac{dx}{dt} = F_x x. \quad (6)$$

Před středováním ještě upravíme oba členy levé strany rov. (6). K úpravě prvního členu provedeme derivaci součinu $x \frac{dx}{dt}$ podle času

$$\frac{d}{dt} \left[x \frac{dx}{dt} \right] = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + x \frac{d^2x}{dt^2},$$

odkud vyjádříme

$$x \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[x \frac{dx}{dt} \right] - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (7)$$

V druhém členu levé strany rov. (6) zřejmě můžeme provést náhradu

$$\mu x \frac{dx}{dt} \longrightarrow \mu \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2, \quad (8)$$

neboť derivováním x^2 podle času vychází

$$\frac{d}{dt} x^2 = 2x \frac{dx}{dt}.$$

Dosadíme-li z obou posledních vztahů (7) a (8) do rov. (6), dostaneme

$$m \frac{d}{dt} \left[x \frac{dx}{dt} \right] - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \mu \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2 = F_x x. \quad (9)$$

A nyní provedeme sestředování všech čtyř členů rov. (9), což formálně vyznačíme vodorovnou čarou nad nimi

$$\overline{m \frac{d}{dt} \left[x \frac{dx}{dt} \right] - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{d(x^2)}{dt}} = \overline{F_x x}. \quad (10)$$

Protože Brownův pohyb má statistický charakter, nabývají v průběhu pozorování veličiny x , $\frac{dx}{dt}$, F_x , zcela náhodných hodnot. Časový průměr prvního a posledního členu v rov. (10), v nichž vystupují tyto náhodné veličiny v součinu, je proto roven nule. Rov. (10) tak nabývá tvaru

$$- \overline{mv_x^2} + \frac{1}{2} \mu \frac{d}{dt} \overline{(x^2)} = 0. \quad (11)$$

Podle zákona rovnoměrného rozdělení energie (o němž jsme se stručně zmínili) je

$$\overline{\frac{1}{2} m v_x^2} = \frac{1}{2} kT = \frac{1}{2} \frac{R_m}{N_A} T, \quad (12)$$

když jsme Boltzmannovu konstantu vyjádřili jako podíl molární plynové konstanty R_m a Avogadrovy konstanty N_A .

Dosadíme-li odtud za $\overline{m v_x^2}$ do rov. (11), dostáváme

$$d(\overline{x^2}) = \frac{2R_m T}{\mu N_A} dt. \quad (13)$$

Integrací v intervalu $(0, t)$ vychází pro hledaný průměr kvadrátu vzdálenosti, které dosáhne pozorovaná částice za dobu t , výraz

$$\overline{x^2} = \frac{2R_m T}{\mu N_A} t. \quad (14)$$

Pro součinitele α v rov. (4) jsme tak dostali vyjádření

$$\alpha = \frac{2R_m T}{\mu N_A}.$$

Učiníme-li předpoklad, že suspendované částice mají tvar koule ⁷⁾ poloměru a , můžeme pro odpor prostředí proti pohybu částice užít Stokesova⁸⁾ vzorce

$$F_0 = 6\pi\eta a \frac{dx}{dt}, \quad (15)$$

v němž η je dynamická viskozita prostředí. Konstantu k , kterou jsme zavedli v rov. (5), můžeme tedy nahradit součinem $6\pi\eta a$.

Pro průměrnou hodnotu vzdálenosti, do které se vzdálí Brownova částice během pozorovací doby t , pak vychází

$$\sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{R_m T t}{3\pi\eta a N_A}} \quad (16)$$

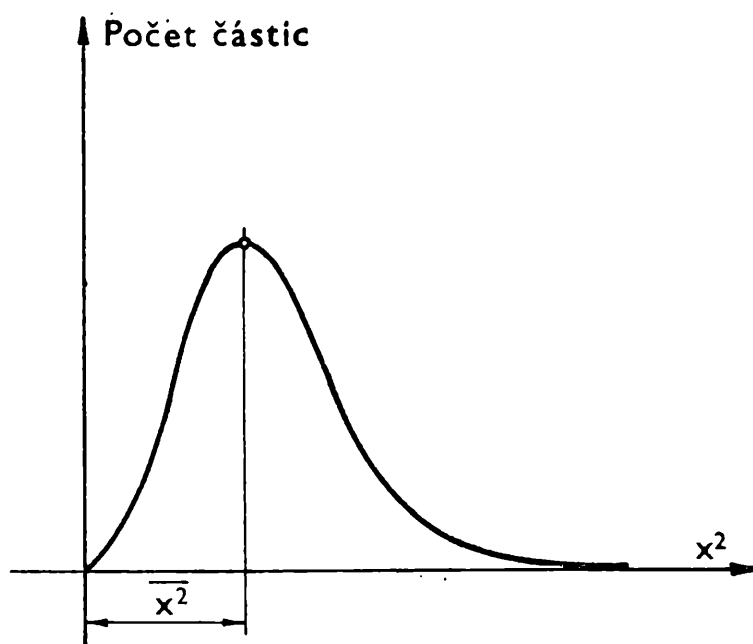
Brownova částice vykonává ve skutečnosti složitý prostorový pohyb. V mikroskopu však pozorujeme jeho průmět do roviny, na níž je mikroskop zaostřen. Změřená hodnota $\sqrt{\overline{x^2}}$ představuje tedy průmět této prostorové vzdálenosti do libovolného směru (který jsme v našem řešení ztotožnili se směrem osy X).

Tento výsledek (tj. vzorec (16)) má velkou historickou cenu, neboť jím byla jednoznačně prokázána správnost hypotézy o termickém pohybu

⁷⁾ ukážeme dále, že tento předpoklad byl při Perrinových experimentech splněn)

⁸⁾ Sir Georg Gabriel Stokes (1819—1903), anglický matematik a fyzik, universitní profesor v Cambridgi, president britské Královské společnosti věd. Zabýval se optikou, hydrodynamikou. Objevil fluorescenci.

molekul (kinetické teorie). Mimoto bylo možno vzorce (16) užít k určení Avogadrovy konstanty (byl to jeden z prvních způsobů). Všechny veličiny (kromě N_A), které v rov. (16) vystupují, lze totiž přímo změřit. Měření bylo mnohokrát opakováno v různých režimech (různé kapaliny, různé suspendované částice, různé teploty i pozorovací časy). Pro každý zvolený režim bylo třeba postupně sledovat trpělivě mnoho částic. Získané hodnoty byly zaneseny do grafu, na jehož vodorovnou osu byla vynášena naměřená hodnota x^2 a na svislou osu počet částic. Závislost měla průběh znázorněný schematicky na obr. 2. Je na ní patrný zřetelný extrém.



Obr. 2

Za hodnotu $\overline{x^2}$ lze pak dosadit do rov. (16) tu hodnotu, která byla naměřena u největšího počtu Brownových částic. Podrobně jsou tato měření popsána v knize J. Perrina „Atoms“, kterou vydalo nakladatelství D. Van Nostrand Co., Inc., New York v r. 1923.

Pro ilustraci si uveďme jako příklad určení Avogadrovy konstanty na základě jedné série Perrinových experimentů. Mnohonásobným odstředováním získal Perrin z pryskyřice garcinia morela (gumiguta) dokonale stejnorodou emulsi, jejíž částice měly tvar stejně velkých kuliček o poloměru a řádu 10^{-1} mikrometru. Při pozorování mikroskopem vykonávají tyto částice intenzivní Brownův pohyb.

V konkrétním případě byl proměřován pohyb částic o poloměru $a = 0,385 \mu\text{m}$ suspendovaných v glycerinu teploty 20°C (viskozita glycerinu při této teplotě byla $\eta = 0,125 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$). Pro časový průměr kvadrátu vzdálenosti, již částice urazily za $t = 5 \text{ min}$ ve zvoleném směru, dostal Perrin hodnotu $\overline{x^2} = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$. Dosazením těchto hodnot do vzorce (16) vychází pro Avogadrovu konstantu

$$N_A = \frac{R_m T t}{3\pi\eta a x^2} = \frac{8314,4 \cdot 293 \cdot 300}{3\pi \cdot 0,125 \cdot 0,385 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 \cdot 10^{-12}} =$$

$$= 6,445 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$$

To je hodnota, která se liší od hodnoty považované v současné době za nejpřesnější ($N_A = |6,022094 \pm 0,000\,046| \cdot 10^{23} \text{ kmol}^{-1}$) asi o 7 ‰.

Mnohokrát opakované měření a výpočet podle vzorce (16) vedlo k hodnotě $N_A \doteq 6,5 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$. K přesnějšímu stanovení této důležité fyzikální konstanty byly hledány a vyvinuty jiné metody.⁹⁾

Správné teoretické řešení Brownova pohybu, potvrzené experimenty, mělo pro fyziku nesmírný význam také proto, že podnítilo teoretické i experimentální fyziky k odhalování dalších neznámých oblastí mikrosvěta. Brownův pohyb byl prvním flukтуаčním¹⁰⁾ jevem, který byl teoreticky podrobně vyřešen a jeho teorie experimentálně potvrzena. Teorie fluktuací, kterou se zabývali význační fyzikové, se pak stala základnou, z níž povstala moderní statistická termodynamika.

Použitá literatura:

- [1] Pokroky M. F., A č. 2 (1979)
- [2] Čs. čas. fyz. A 29 č. 3 (1979)
- [3] R. P. Feynman a kol.: Feynmanove přednášky z fyziky (2. díl) ALFA Bratislava, 1982
- [4] E. E. Anderson: Introduction to Modern Physics, CBS College Publishing, New York 1982
- [5] R. E. Peierls: Zákony přírody, 22. sv. Malé moderní encyklopedie, nakl. ORBIS, Praha 1963
- [6] V. G. Levič: Úvod do statistické fyziky, nakl. ČSAV, Praha 1954
- [7] K. Bartuška, E. Svoboda: Molekulová fyzika a termika, 13 sv., edice ŠMF, SPN Praha 1978
- [8] E. V. Špoliskij: Atomová fyzika, I. Díl, TVV Praha 1952
- [9] O. Lepil: Brownův pohyb, časopis Rozhledy MF č. 8 (1957)
- [10] J. Perrin, Atoms, D. Van Nostrand Co., Inc., 1923
- [11] Handbuch der Physik, Bd IV., J. Springer, Berlin 1929

⁹⁾ viz např. RMF č. 8 (1958) str. 363 a č. 9 (1958) str. 406 nebo knihu [8], str. 133.

¹⁰⁾ Fluktuace jsou procesy probíhající v souborech atomů, molekul, iontů, ale také např. v proudu elektronů, fotonů, eventuálně dalších tzv. základních částic. Vyznačují se tím, že určitá měřitelná veličina, jíž charakterizujeme chování studovaného souboru, vyvolávaná náhodným působením těchto částic, kolísá kolem jisté střední hodnoty a tyto odchylky jsou tím větší, čím menší je počet molekul v pozorovaném souboru. Brownův pohyb je vyvoláván fluktuacemi tlaku na suspendovanou částici. Fluktuace hustoty plynu způsobují jev, který se nazývá molekulární rozptyl světla (díky tomuto jevu můžeme obdivovat krásně modré zbarvení oblohy a červánky při západu Slunce). Náhodné odchylky od středního počtu elektronů dopadajících na anodu vedou k fluktuacím slabých proudů v katodových trubiciích. Velmi názorný výklad fluktuací a Brownova pohybu podal R. E. Peierls v knize [8] (v kapitole, již nazval „Jistota a zákony náhody“, str. 108).



Viktor Jakovlevič Buňakovskij (1804—1889)

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topolčany

Pre ľubovoľné reálne čísla $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ a $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ platí nerovnosť

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2).$$

Nazývame ju *Cauchyova nerovnosť*, niekedy *Schwarzova* alebo *Buňakovského* nerovnosť. Prečo je spojená s menom ruského matematika V. J. Buňakovského? V roku 1859 ako prvý dokázal jej zovšeobecnenie v tvare

$$\left[\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

(G. A. Schwarz odhalil nezávisle túto nerovnosť až roku 1875.)

Ako žila pracoval V. J. Buňakovskij?

V mestečku Bar v Podolskej gubernii sa 16. decembra 1804 (podľa starého ruského kalendára bolo 4. XII.) narodil Viktor Jakovlevič Buňakovskij. Od roku 1808 žila rodina vo fínskom meste Tavastgute. Tridsaťsedemročný otec im zomrel roku 1809. Matka sa so synmi - Viktor mal ešte brata Vladimíra - odsťahovala do Petrohradu a neskôr do Moskvy. Mladý Viktor Jakovlevič odišiel roku 1820 za hranice Ruska. Študoval v Koburgu, Laussanne a Paríži. Spoznal Laplacea, Poissona, Fouriera, Ampéra a ďalších. Najviac sa zaujímal o matematické štúdium u Cauchyho. V roku 1825 získal Buňakovskij v Paríži doktorát matematiky. V roku 1826 sa vrátil do Petrohradu a začal prednášať matematiku na kadetskej škole. Neskôr vyučoval na námornej akadémii a v Inštitúte dopravných spojov (1830—1846). Od roku 1846 prednášal ako riadny profesor analytickú mechaniku, teóriu pravdepodobnosti a matematickú analýzu na Petrohradskej univerzite.

Vzťah k učiteľskej práci poznačil celý život Buňakovského. Za štyrid-

sať rokov učiteľskej služby nevynechal žiadnu prednášku. Pripravoval príručky, učebnice, osnovy. V roku 1831 preložil Cauchyho knižku „Krátky výklad o diferenciálnom a integrálnom počte“. Vydal prvý zväzok „Lexikónu čistej a aplikovanej matematiky“ (od A do D) v roku 1839, preložil „Kurz deskriptívnej geometrie“ od Ch. Leroya. Napísal učebnicu „Aritmetika“ (1844).

Vedecká matematická práca priviedla Buňakovského do Akadémie vied. V roku 1828 sa stal adjunktom, roku 1830 mimoriadnym a v roku 1841 riadnym akademikom v Petrohrade. V rokoch 1864 až 1889 bol viceprezidentom Akadémie vied. Pracoval odborne, metodicky, organizačne. V roku 1830 bol v komisii pre preskúmanie gregoriánskej úpravy kalendára, od roku 1844 pracoval v skupine pre vydanie zobraňných spisov L. Eulera. Originálny výklad podal v knižke „Základy matematickej teórie pravdepodobnosti“ (1846). V Rusku i vo svete sa stal známym pri riešení problémov matematickej analýzy, teórie nerovností, teórie čísel, teórie pravdepodobnosti. Zaviedol nový spôsob sčítovania niektorých radov, dokázal integrálnu nerovnosť, neskôr po ňom pomenovanú.

Viktor Jakovlevič Buňakovskij vytvoril okolo 150 vedeckých prác z matematiky, teoretickej mechaniky, histórie matematiky a matematickej fyziky. Bol redaktorom matematickej časti „Encyklopedického slovníka“, ktorý vyšiel v rokoch 1861–1863, prispel k tvorbe ruskej matematickej terminológie. Z oblasti teórie čísel publikoval „Aritmetické pojednania“ (1830), „O Legendreovom symbole“ (1870) a ďalšie práce. Zaoberal sa vlastnosťami desatinných periodických zlomkov, skúmal vlastnosti prvočísel. V matematickej analýze rozšíril spôsoby integrovania racionálnych zlomkov. Veľmi často recenzoval nové matematické práce. I keď nepochopil idey Lobačevského neeuklidovskej geometrie, často ukazoval smery ďalšieho výskumu v matematike.

Buňakovskij mal veľmi dobrý vzťah k praktickým aplikáciám matematických poznatkov. Určoval najlepšie rozdelenie bleskozvodov na budovách. Zostavil pohyblivú tabuľku pre určenie dňa v týždni, na ktorý prípadne určitý dátum mesiaca. Skonštruoval nový typ planimetra pre uľahčenie prác zememeračov (1856). Navrhoval nové spôsoby realizácie „samoščitov“ — pomôcok pre mechanické sčítanie. Svoje názory na uplatnenie poznatkov z pravdepodobnosti v hospodárskom živote realizoval ako expert vlády pre poistenie a štatistiku.

Súkromný život v rodine Viktora Buňakovského bol tichý a pokojný. S manželkou vychovali troch synov a tri dcéry. Nemali rodové majetky, prostriedky na živobytie získavali výhradne osobnou prácou. V Petrohrade žili v štátnom byte pre akademikov. Buňakovského charakterizovala v osobnom živote starostlivosť o ľudí — študentov, spolupracovníkov. Nezavrel sa do problémov čistej vedy, zapájal sa do riešenia spoločenských záležitostí. Mal vždy veľkú radosť z úspechov svojich

žiakov. Napríklad P. L. Čebyševovi navrhol svoje miesto na katedre čistej matematiky v Petrohradskej univerzite a priviedol ho aj do Akadémie vied. Dosiahol veľkú úctu, stal sa vzorom pre mnohých vedeckých pracovníkov i učiteľov matematiky.

Viktor Jakovlevič Buňakovskij zomrel v Petrohrade 12. decembra 1889 (podľa vtedajšieho kalendára 30. XI.). Bol pochovaný na Smolenskom cintoríne.

Akademik Buňakovskij odbornou i metodickou činnosťou obohatil ruskú vedu, ukázal nové vedecko-výskumné prístupy v matematike, významnou mierou prispel k pozdvihnutiu vedeckej úrovne vyučovania matematiky.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Řešení tří úloh z čísla tři

Okurky pana Roubínka

Délku strany v metrech původního čtvercového záhonu (obr. 1) označíme a . Podle textu úlohy sestavíme rovnici

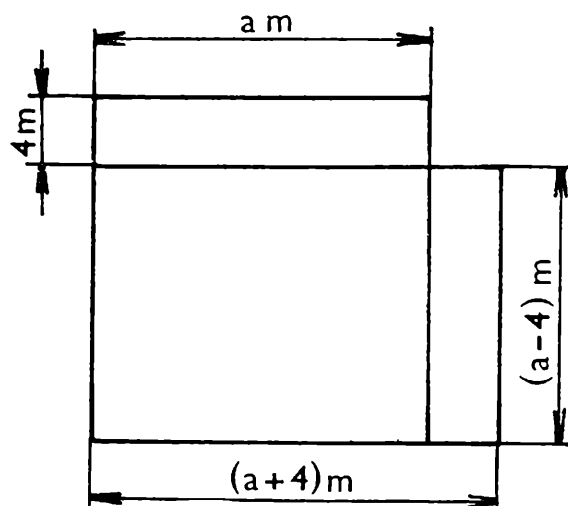
$$(a + 4)(a - 4) = 0,96 a^2.$$

Má jediné řešení $a = 20$. Loňského roku tedy byla sklizeň

$$(400 \cdot 0,95) \text{ kg} = 380 \text{ kg okurek}.$$

Předpokládaná letošní úroda měla být menší o

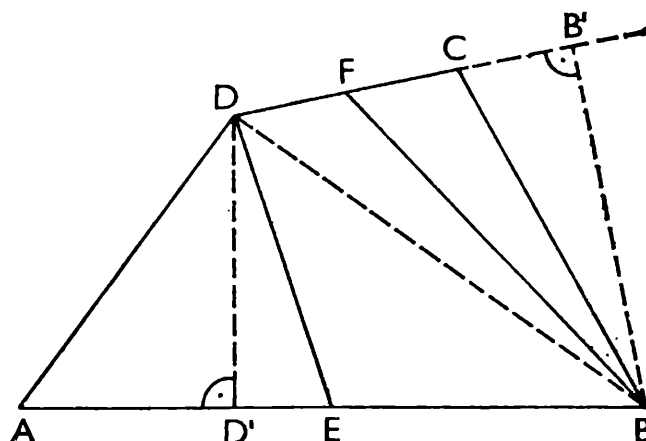
$$380 \cdot (1 - 0,96) \text{ kg} = 15 \text{ kg okurek}.$$



Obr. 1

Obsah čtyřúhelníku ve čtyřúhelníku

V obr. 2 narýsovaném podle textu úlohy doplňte úhlopříčku BD a výšky DD' a BB' trojúhelníků ABD a CDB . Úsečka ED je v trojúhelníku ABD těžnicí, která jej rozděluje na trojúhelníky AED a EBD stejného obsahu (ke dvěma stejně dlouhým stranám přísluší táž výška DD'). Obdobně sobě rovné obsahy mají také trojúhelníky CFB a DFB , kterým přísluší táž výška BB' . Odtud již plyne, že obsah čtyřúhelníku $EBFD$ se rovná polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$, tj. polovině z 49^2 mm^2 , tj. přibližně 12 cm^2 .



Obr. 2

V dílně kováře Jecha

Délky polokružnic $a_1, a_2, \dots, a_7$, které jsou vyznačeny na obrázku ve 3. čísle RMF, jsou po řadě $0,5\pi; \pi; 1,5\pi; 2\pi; 2,5\pi; 3\pi; 3,5\pi$ (centimetrů). Obvod dekorativního čtverce tedy byl $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = 14\pi \doteq 44$, takže jeho strana měla délku 11 cm .

Josef Trejbal

Vzpomínka na prázdniny

Jižní Čechy jsou bohaté na vodní plochy vytvořené lidskou rukou. Některé z nich tak srostly s krajinou, že si ani neuvědomujeme, že nejsou dílem přírody. Největší jezero je lipenské, jež bylo vybudováno před třiceti roky v letech 1950 až 1959. Při stavbě přehrady v Lipně se navázalo na tradice, které založili slavní rybníkáři Štěpánek Netolický a Jakub Krčín. Lipenská přehrada byla totiž postavena jako sypaná hráz. Její výška je 22 metrů a vodní plocha za ní má 4870 hektarů.

Vrcholným dílem jihočeského rybníkářství je rybník Rožmberk. Postavil jej před čtyřmi sty lety regent rožmberských panství Jakub Krčín z Jelčan a Sedlčan jako přehradní jezero na Lužnici. Hráz má vysokou až 12 metrů a zatopená rozloha je 489 hektarů. Tedy plocha

lipenské přehrady je desetkrát větší a hráz je vyšší asi dvakrát. Obě vodní díla mají v současné době společné i to, že na obou jsou vodní elektrárny. Hráz Rožmberku je ovšem zpevněna kořeny staletých dubů.

Na lipenském jezeře je v létě živá lodní doprava. Pravidelná linka má celkem šest přístavišť: Lipno, Frymburk, Lojzovy Paseky, Černá v Pošumaví, Jenišov a Horní Planá.

Petr byl v létě na Lipně. Svému kamarádovi Pavlovi v dopise zadal úlohu. Uvedl ji takto:

„Opsal jsem částečně jízdní řád sezónní lodní dopravy z Lipna do Horní Plané:

Lipno	9 ⁰⁰	10 ⁵⁰	17 ³⁰
Frymburk		11 ²⁰	
Lojzovy Paseky	9 ⁴⁵		
Černá v Pošumaví			15 ⁴⁰ 19 ⁰⁰
Jenišov		12 ⁴⁰	
Horní Planá			16 ¹⁰

Doplň na vytečkovaných místech chybějící časové údaje!

Pokud se o řešení také pokusíte, pak si je můžete zkontrolovat v příštím čísle Rozhledů.

Jiří Mída

Nákladní auta v horském terénu

Nákladní auta Tatra a LIAZ převážela těžký náklad horským terénem z města A do města B , která byla vzdálena 160 kilometrů. Průměrná rychlost tatrovky byla o 8 km/h větší než průměrná rychlost liazky. Z tohoto důvodu přijela Tatra do města B o 40 minut dříve než liazka. Vypočítejte průměrné rychlosti obou aut.

Josef Trejbal

Aritmetický průměr a trojúhelník

Libovolný trojúhelník ABC rozdělte dvěma úsečkami CC' a CC'' , kde $C' \in AB$, $C'' \in AB$, na tři trojúhelníky $AC'C$, $C'C''C$ a $C''BC$ tak, aby platilo, že obsah trojúhelníka $AC'C$ se rovná jedné čtvrtině obsahu trojúhelníka ABC a obsah trojúhelníka $C'C''C$ se rovná aritmetickému průměru obsahů trojúhelníků $AC'C$ a $C''BC$. V jakém postupném poměru jsou obsahy trojúhelníků $AC'C$, $C'C''C$ a $C''BC$?

Josef Trejbal

Řešení posledních dvou úloh naleznete v příštím čísle Rozhledů.

Omyly, které ovládly svět

Fyzika a brambory

Omyl, o kterém budete tentokrát číst, je rozšířen zejména mezi kuchařkami, a to nejen těmi, které fyzika ve škole příliš nezajímala.

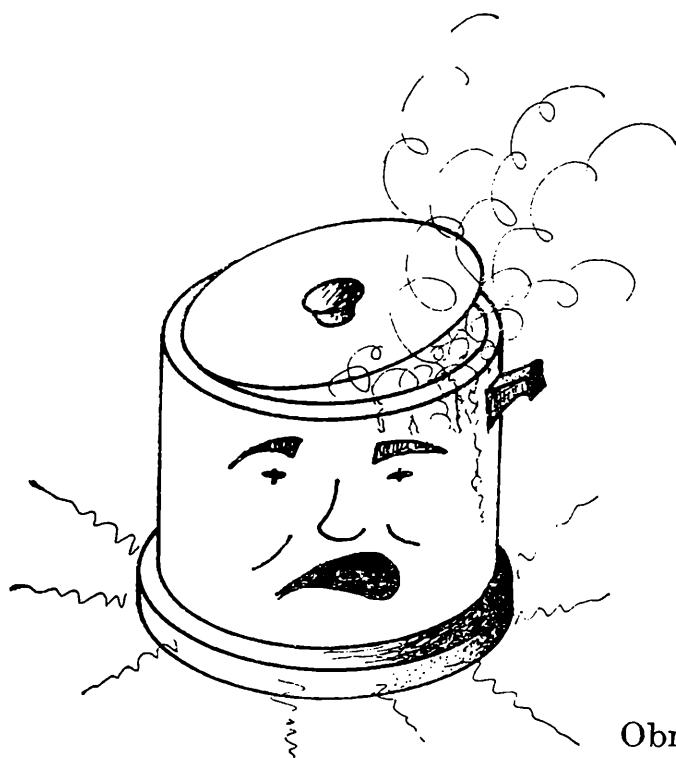
Jde o otázku, zda se brambory uvaří na sporáku rychleji při zapnutém vyšším ohřevu elektrické plotýnky či větším plameni plynového sporáku než při mírném varu.

Při počátečním zahřívání k teplotě varu je situace nesporná. Dříve se začne vařit voda v nádobě na plotýnce nastavené na větší výkon. Další vaření brambor při tomto maximálním ohřevu je však úplně zbytečné. Teplota vody nepřekročí, pokud nepoužíváme tlakový hrnec s hermeticky upevněnou pokličkou, teplotu $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, i když se voda bude vařit s takovým kлокotem, že bude utíkat z hrnce.

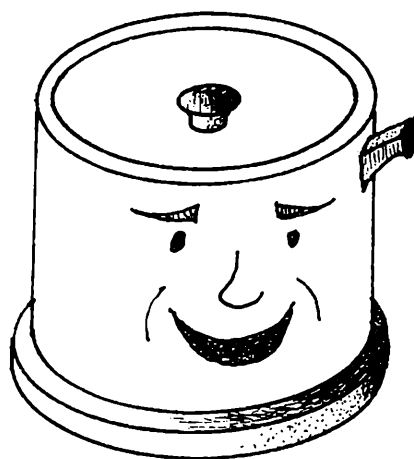
Proto příprava vařených pokrmů v hrncích, jejichž pokličky nadskakují zvedány párou, dokazuje, že kuchařka při výkladu tepelných dějů, které probíhají při varu kapalin, chyběla ve škole, nebo nedávala pozor. Některé kuchařky se zase domnívají, že platnost fyzikálních zákonů je omezena jen na laboratoře, mezi které území kuchyně nepatří.

Na závěr bychom měli pro úplnost poctivě přiznat, že naše poznámka se vztahuje skutečně jen k vaření a nikoliv např. ke smažení nebo pečení v troubě.

Teplota vzduchu v troubě, či oleje nebo jiného tuku na pánvi může dosahovat v závislosti na příkonu mnohem větších rozdílů teplot,



Obr. 1



Obr. 2

maximální teplota, které lze v těchto případech dosáhnout, dřív než začne docházet k chemickým změnám, tzv. přepalování, leží podstatně výše než teplota varu vody.

Můžeme tedy shrnout, že s výjimkou počáteční doby zahřívání k teplotě varu nemá zvýšený ohřev vliv na rychlost uvaření pokrmu, ale pouze způsobuje větší vypařování vody. Proto hospodárná kuchařka stahuje po dosažení varu tepelný příkon na co nejnižší stupeň potřebný k jeho udržení.

Úkol pro vás:

Napište nám, jakými dalšími způsoby lze dosahovat úspor energie při vaření.

Milan Rojko

Laboratoř doma

Cedník do pohádky

Možná, že jste i vy četli pohádku o zlé čarodějnici, která dala Honzovi úkol, o kterém byla přesvědčena, že je nesplnitelný — přenášet vodu cedníkem.

Věříte, že nám fyzikální znalosti pomohou vyřešit i tento úkol, aniž bychom potřebovali pomoc kouzelného dědečka?

Jestliže opatříme povrch cedníku s nepříliš velkými dírkami povlakem parafínu, nebude voda jeho otvory protékat, pokud výška hladiny nepřekročí určitou hodnotu. Pružná a poměrně pevná blanka, která je na volném povrchu vody, se stykem s parafínem neporuší a může zabránit vytékání vody.

Cedník do pohádky si vytvoříme z čajového celoplastového sítko na čaj. Sítko nejdříve důkladně vymyjeme a vysušíme. Potom jeho spodní část s otvory ponoříme do roztaveného parafínu, který si připravíme např. v plechovém víčku sklenice od zavařeniny. Sítko z parafinové lázně rychle vyjmeme a přebytečný parafín oklepeneme na novinový papír. Pohledem proti světlu se přesvědčíme, že dírký v cedníku zůstaly volné.

Jestliže opatrně nalijeme do cedníku vodu, můžeme ji přenášet jako naběračkou.

Úkol pro vás:

Popište jiný jev, který můžete pozorovat a který také souvisí s existencí tenké blanky na volném povrchu vody.

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Var kapalin

Do dvou stejných nádob umístěných na dvou stejných elektrických plotýnkách s příkonem 1000 W jsme nalili dvě různé kapaliny, z nichž každá měla hmotnost 200 g a počáteční teplotu 10 °C. Průběh teplot obou kapalin v závislosti na čase udává následující tabulka.

doba zahřívání s	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	...	375	...	980
teplota 1. kapaliny °C	10	27	45	60	78	78	78	78	78	78	78	...	78 právě vyvařena		
teplota 2. kapaliny °C	10	20	31	40	51	60	72	81	91	100	100	...	100	...	100 právě vyva- řena

Úkoly pro vás:

1. Nakreslete do grafu průběh teplot obou kapalin v závislosti na době zahřívání.
2. Určete teploty varu obou kapalin a odhadněte, které kapaliny byly zahřívány.
3. Určete z grafu, která z kapalin má větší měrnou tepelnou kapacitu, a určete poměr těchto veličin. Pomocí tabulek a této hodnoty ověřte, zda jste ve druhé odpovědi uvedli správné kapaliny.
4. Určete z grafu, která z kapalin má větší měrné skupenské teplo varu, a určete poměr těchto veličin. Pomocí tabulek a této hodnoty ověřte znova druhou odpověď.
5. Určete účinnost vařiče v průběhu zahřívání obou kapalin a v průběhu jejich varu. Porovnejte tyto hodnoty a vyslovte domněnku o možné příčině rozdílu.

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu: RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2. Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Matematickým kutilům pod stromeček

JIŘÍ MANN, Dvůr Králové n. L.

Rok $1968 + 7 + 5 + 4 + 3 + 2 = 1948 + 25 + 7 + 6 + 3 =$
 $= 1698 + 257 + 34 = 794 + 683 + 512$, který zanedlouho skončí,
lze jistě zapsat i jinými způsoby. Číslo

$$\frac{12^2 + 99^2}{5} = \frac{27^2 + 96^2}{5} = \frac{36^2 + 93^2}{5} = \frac{69^2 + 72^2}{5},$$

jeho části cifry i z nich vytvořené skupiny jsou složkami různých hříček zde úloh. Chcete-li, pak dvě neočíslované už znáte.

1. Končí 80. léta, většina z nich je vázána vztahem $1980^2 - 1982^2 -$
 $- 1984^2 + 1986^2 = 1983^2 - 1985^2 - 1987^2 + 1989^2$. Prověřte.

2. $1 + 9 + 8 + 9 + (1 + 19 + 198) \cdot 9 = 1989$. Co říkáte této hříčce?

3. K následujícím pěti rovnostem najděte šestou:

$$\begin{aligned} 439578^2 + 439560^2 - 1989^2 &= 441549^2 + 437571^2 + 1989^2, \\ 48922^2 + 48760^2 - 1989^2 &= 50749^2 + 46771^2 + 1989^2, \\ 23578^2 + 23240^2 - 1989^2 &= 25229^2 + 21251^2 + 1989^2, \\ 13978^2 + 13400^2 - 1989^2 &= 15389^2 + 11411^2 + 1989^2, \\ 4122^2 + 1080^2 - 1989^2 &= 3069^2 + 909^2 + 1989^2. \end{aligned}$$

4. Zmenšíme-li hledané číslo o 19 a rozdíl dělíme číslem 89, dostaneme též podíl, jako když ono číslo zmenšíme o 89 a rozdíl dělíme číslem 19. Najděte to číslo.

5. Upravte zlomek $u = \frac{154249}{111989}$ tak, aby rozdíl čitatele a jmenovatele nového zlomku byl 100.

6. Zkrafte zlomek $e = \frac{198919891989}{486248624862}$.

7. Ve zlomku $f = \frac{h - 19}{h - 89}$ jsou f , h , čítec i jmenovatel přirozená čísla. Určete f .

8. Pro jaká b je zlomek $g = \frac{1 + 9b}{8 + 9b}$ v základním tvaru.

9. Zlomek $v = \frac{1989^2 + 1990^2}{1989 + 1990}$ je v základním tvaru. Dokažte.
10. Najděte zlomek v základním tvaru, jenž dělen kterýmkoliv ze zlomků $\frac{9}{91}, \frac{13}{133}, \frac{17}{175}$ dá za podíl přirozené číslo.
11. Určete zbytek při dělení $19^8 : 9$.
12. Při dělení čísel 365, 1989, 3333 stejným číslem je zbytek vždy týž. Najděte dělitele a zbytek.
13. Hříčky $\frac{19}{89} + \frac{19}{89} \cdot \frac{35}{54} + \frac{35}{54} = 1$, $19\frac{3}{89} : 89\frac{3}{19} = \frac{19}{89}$ zřejmě nejsou jediné: $\frac{18}{48} + \frac{18}{48} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{11} = 1$, $18\frac{7}{48} : 48\frac{7}{18} = \frac{18}{48}$. Prověřte.
14. Dokažte: $11 \mid 1^{5n} - 9^{5n} + 8^{5n} - 9^{5n} - (19^{5n} - 89^{5n})$.
15. Dokažte: $\alpha) 19 \mid 2^{1989} + 1$, $\beta) 19 \mid 3^{1989} + 1$.
16. Řešte soustavu rovnic $2k + l + m = k + 3l + m = k + l + 4m = 1989$.
17. Řešte rovnice: $\alpha) \sqrt[3]{1989 + p} - \sqrt[3]{1989 - p} = 30$,
 $\beta) \sqrt[3]{1989 + t} - \sqrt[3]{1989 - t} = 60$.
18. Součet 2. odmocnin z několika různých přirozených čísel je $\sqrt[3]{1989}$. Určete je.
19. Řešte neurčitou rovnici $\frac{1989}{x + y + z} = 19x + 8y + 9z$.
20. Určete základ m soustavy, v níž $19_m \mid 89_m$.
21. Řešte rovnici $\binom{p+3}{2} + \binom{p-3}{2} = 1989$.
22. Řešte soustavu $\binom{u+1}{2} + \binom{v+1}{2} = 1989 \wedge u + v = 88 \wedge u < v$.
23. Určete n -té členy posloupností: a) 19, 89, 19, 89, ...; b) 19, -89, 19, -89,
24. Velikosti úhlů trojúhelníku jsou po dvou nesoudělné a jejich součin je dělitelný číslem 1989. Určete je.
25. Dárce rozdělil 1989 Kčs mezi několik lidí. Kolik bylo obdarovaných a kolik dostal první, jestliže druhý dostal dvakrát víc než on, obecně každý n -tý dostal n -krát víc než předchozí, všichni v celých korunách. ($n > 1$)

26. Dva magické čtverce jako vzor jistě postačí, další „zkompletujte“.

19	8	9
2	12	22
15	16	5

19	89	75
117	61	5
47	33	103

	19	89

19	89	

19		
	89	

	19	
		89

19		
		89

	19	
		89

19		
89		

	19	
	89	

	19	8
		9

	1	98
9		

Řešte s námi (4)

Úlohy

11. Na 44 stromech zasázených na hranici kruhu sedí 44 ptáčků zpěváků (na každém stromě jeden). Čas od času dva z nich současně přeletí na sousední stromy v opačných směrech (jeden ve směru a druhý proti směru hodinových ručiček). Dokažte, že nikdy nebudou všichni ptáci na stejném stromě. A je-li stromů i ptáků n ?

12. Které čtyřúhelníky lze rozdělit přímkou na dva navzájem podobné čtyřúhelníky?

13. Je-li d rozdíl mezi největším a nejmenším z n daných reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ a $s = \sum_{i < j} |a_i - a_j|$ součet absolutních hodnot všech

$\binom{n}{2}$ rozdílů těchto čísel, pak $(n - 1) d \leq s \leq \frac{n^2}{4} d$. Dokažte.

14. Některé stěny konvexního mnohostěnu jsou obarveny černě, přičemž žádné dvě černé stěny nemají společnou hranu. Dokažte, že takovému mnohostěnu nelze vepsat kulovou plochu, je-li splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

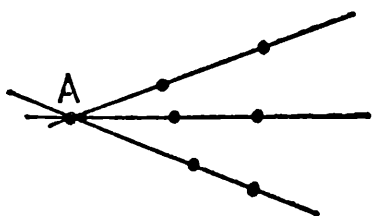
- a) černých stěn je více než polovina;
- b) obsah černých stěn tvoří více než polovinu povrchu daného mnohostěnu.

15.* Ve čtvercové tabulce $n \times n$ jsou zapsána nezáporná čísla tak, že součet čísel v každém řádku i v každém sloupci je 1. Dokažte, že v tabulce můžeme najít n kladných čísel (ne nutně různých), z nichž žádná dvě neleží v témže sloupci ani v témže řádku.

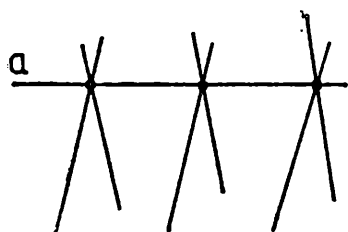
Řešení minulých úloh

6. Předpokládejme, že takové umístění sedmi bodů a sedmi přímek v rovině existuje. Je-li A libovolný z daných bodů (obr. 1), procházejí jím tři přímky, z nichž každá obsahuje ještě další dva dané body, tj. každý ze zbylých šesti bodů je s bodem A spojen přímkou. Podobně je-li a libovolná z daných přímek (obr. 2), leží na ní tři body a každým z nich procházejí ještě další dvě přímky, tj. přímka a protíná každou ze zbylých šesti přímek v jednom z daných bodů. Každé dva dané body jsou tedy spojeny jednou z daných přímek a každé dvě z daných přímek se protínají v jednom z daných bodů.

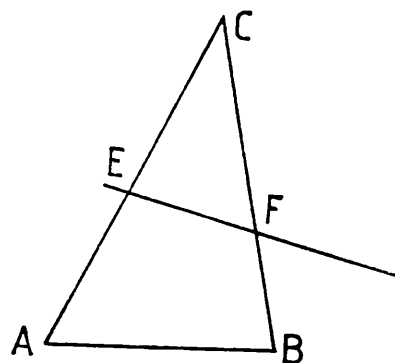
Uvažujme nyní konvexní obal daných sedmi bodů (tj. nejmenší konvexní množinu, která dané body obsahuje). To bude nějaký konvexní n -úhelník kde $n \leq 7$. Protože na každé jeho straně leží ještě třetí bod, musí být $n \leq 3$, a protože každým z daných bodů procházejí tři přímky, může být jedině $n = 3$.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Je-li trojúhelník ABC uvažovaným konvexním obalem a jsou-li E, F ty z daných bodů, které leží uvnitř AC, BC (obr. 3), pak rozhodně společný bod přímek AB, EF nemůže ležet uvnitř ABC . Dospěli jsme tedy ke sporu, takže předpokládané rozmístění sedmi přímek a sedmi bodů v rovině neexistuje.

7. Je jasné, že z okamžité polohy malé ručičky lze jednoznačně určit polohu velké ručičky (při zadání této úlohy jsme mlčky předpokládali, že se obě ručičky otáčejí spojitě, což u některých typů elektrických hodin nebývá splněno). Ciferník hodin si představme jako kružnici se zavedenou souřadnou soustavou a označme x, y ($0 \leq x < 12, 0 \leq y < 12$) souřadnice obou ručiček.

Je-li x souřadnice malé ručičky, musí platit

$$x = a + \frac{y}{12},$$

kde $a = [x]$ je celá část čísla x ; je-li naopak y souřadnice malé ručičky, musí analogicky platit

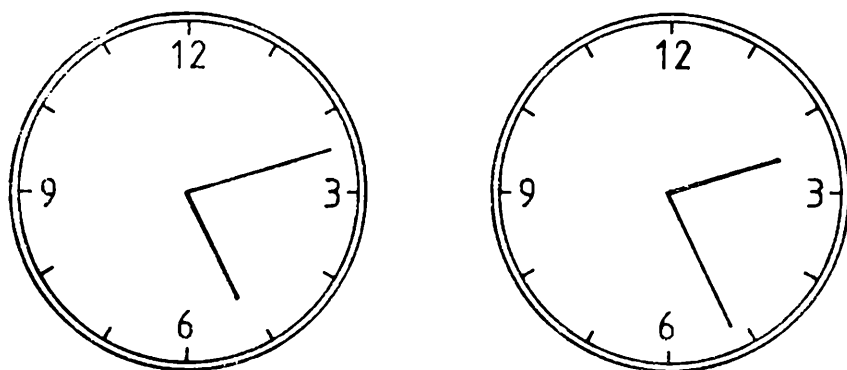
$$y = b + \frac{x}{12},$$

kde $b = [y]$. Substitucí zjistíme, že uvedená soustava má řešení

$$x = 12 \frac{12a + b}{143}, \quad y = 12 \frac{12b + a}{143}$$

pro každá dvě celá čísla a, b ($0 \leq a < 12, 0 \leq b < 12$).

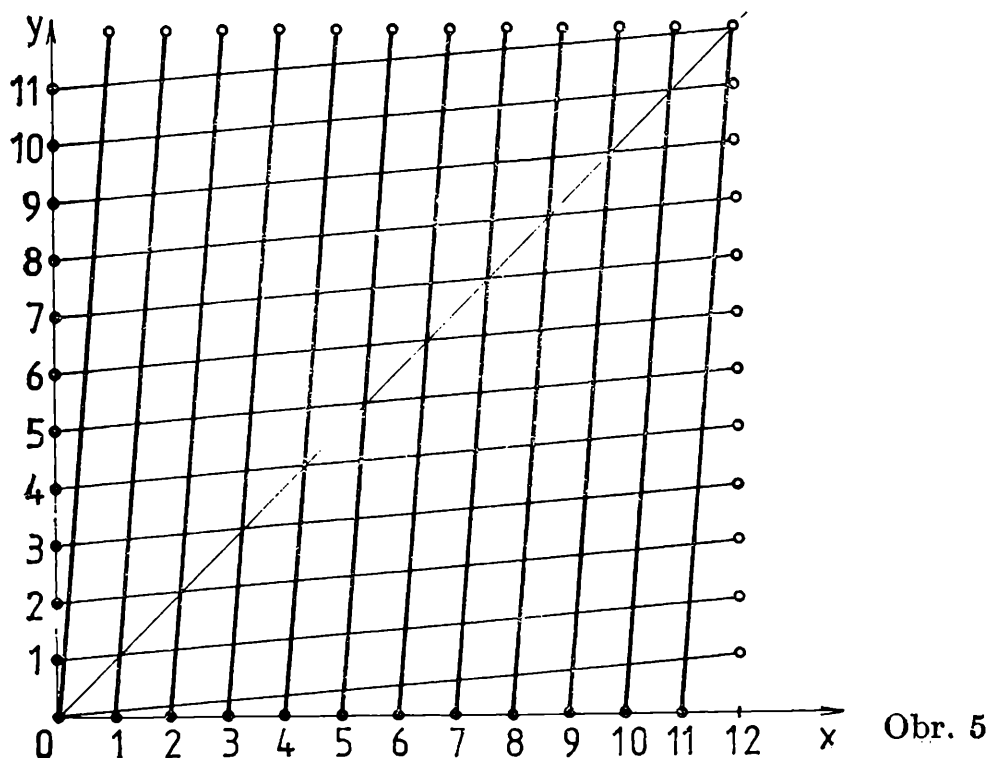
Pro každou ze 144 uspořádaných dvojic (a, b) tak dostáváme řešení (x, y) , pro něž lze obě ručičky zaměnit. Je jasné, že odpovídající čas nelze určit jen pro $x \neq y$ (tj. pro $a \neq b$). Celkem tedy existují 132 polohy hodinových ručiček, které jsou řešením úlohy (obr. 4 ukazuje dvě z nich pro $a = 2, b = 5$ a $a = 5, b = 2$).



Obr. 4

Názorné je následující řešení. Poloha y velké ručičky je funkcí polohy x malé ručičky, jejím grafem je 12 (polootevřených) úseček na obr. 5 (je to množina všech poloh (x, y) malé a velké ručičky, které mohou

nastat). Nás zajímají ty dvojice (x, y) , které po záměně na (y, x) rovněž patří do této množiny. Protože bod (y, x) dostaneme z bodu (x, y) osovou souměrností podle osy o prvního kvadrantu, leží všechny odpovídající body (y, x) na 12 úsečkách, které dostaneme uvedenou souměrností ze zmíněného grafu (na obr. 6 slaběji). Obě množiny mají zřejmě 144 společných bodů, z nichž musíme odečíst ty, které leží na ose o .



8. Protože a, b, c jsou velikosti stran trojúhelníku, hodí se následující označení: $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$; přitom díky trojúhelníkové nerovnosti je $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Potom

$a = \frac{y+z}{2}$, $b = \frac{z+x}{2}$, $c = \frac{x+y}{2}$ a dosazením do levé strany dané nerovnosti dostaneme

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \right) \geq \frac{1}{2} (2 + 2 + 2) = 3.$$

Přitom jsme použili všeobecně známou nerovnost

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2,$$

která platí pro libovolná dvě kladná čísla m, n , jak se snadno přesvědčíte.

Analogicky dokážeme i obecnější nerovnost

$$\frac{a_1}{a_2 + \dots + a_n - a_1} + \frac{a_2}{a_3 + \dots + a_n + a_1 - a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1 + \dots + a_{n-2} - a_{n-1}} + \frac{a_n}{a_1 + \dots + a_{n-1} - a_n} \geq \frac{n}{n-2}$$

za předpokladu, že jmenovatele všech uvedených zlomků jsou kladné.

9. Pro výsledek uvedené hry jsou v kterémkoli okamžiku podstatné tři informace: kolik zápalek je v hromádce, kdo je na tahu a kolik zápalek má příslušný hráč.

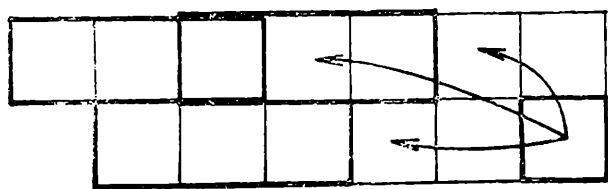
Uvažujme hráče, který je právě na tahu a má sudý počet zápalek. Zřejmě může vyhrát, pokud na hromádce zbývají 2 nebo 3 zápalky (odebere 2); pokud je tam jen jedna anebo 4 zápalky, nemůže zabránit prohře (za předpokladu, že soupeř neudělá chybný tah). Takto můžeme postupně sestavit následující tabulku

n	1	2	3	4	5	6	7	8
S	0	2	2	0	1	1	3	3
L	1	1	3	3	0	2	2	0

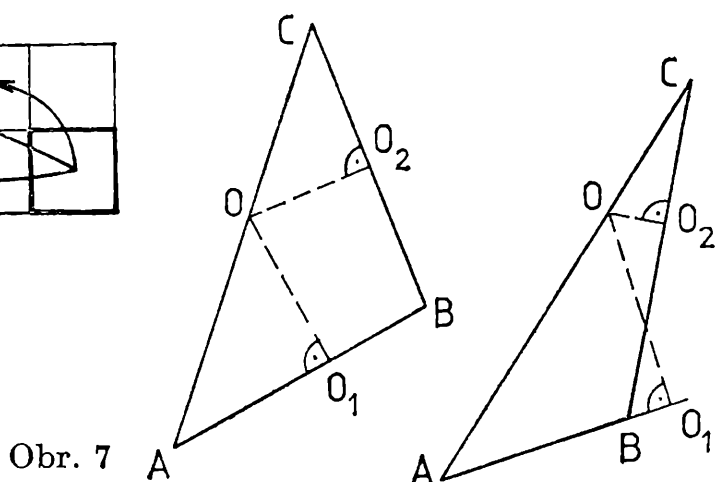
Číslo n označuje počet zápalek v hromádce, v řádku S je pak uveden počet zápalek, které musí odebrat hráč na tahu, aby vyhrál, má-li právě sudý počet zápalek, a podobně v řádku L pro hráče na tahu s lichým počtem zápalek. Nulou jsme pochopitelně označili ty pozice, v nichž hráč při další správné hře soupeře nemůže vyhrát.

Jak tabulku sestavujeme? Nejlépe to ozřejmíme na konkrétním příkladě. Předpokládejme, že máme prvních pět sloupců a doplníme šestý (tj. v hromádce zbývá šest zápalek): Má-li hráč na tahu sudý počet zápalek, vezme jednu, protože tím změní řádek a po libovolném tahu soupeře se dostane do jednoho z polí $2S$, $3S$, $4S$, kde má podle tabulky zajištěnu vyhrávající strategii (stejnou úvahou zjistíte, že při jiných tazích už vyhrát nemusí). Podobně má-li hráč na tahu lichý počet zápalek, odebráním dvou zápalek zůstane ve stejném řádku a po libovolném tahu soupeře se dostane do jednoho z polí $1S$, $2S$, $3S$, kde má zaručenu vyhrávající strategii. Podobně také zjistíme, že z pole $8L$ nemá hráč žádný vyhrávající tah (na 2 hraje soupeř 1, na 1 či 3 hraje soupeř 3, resp. 1).

Protože hodnota v tabulce závisí vlastně jen na rozložení nul v určitých osmi polích předcházející části tabulky (obr. 7), je zřejmé, že tabulka musí být periodická (s délkou periody nejvýše 2^8). Snadno zjistíme, že naše tabulka má periodu 8, takže vyjde, že v dané úloze má pro sudý



Obr. 6



Obr. 7

počet zápalek vyhrávající strategii druhý hráč, zatímco pro lichý počet zápalek má vyhrávající strategii začínající hráč (v uvedené tabulce stačí zaměnit oba řádky — můžeme si totiž myslet, že první hráč má už na začátku hry jednu zápalku v kapse a dále mu jde o získání sudého počtu zápalek).

Pokuste se analyzovat obecnější hru, kdy hráč na tahu může z hromádky odebrat $1, 2, \dots, m$ zápalek. Měly by vám vyjít následující dvě tabulky (pro sudé a liché m), jejichž perioda je $m + 2$ pro m sudé a $2m + 2$ pro m liché.

n	0	1	2	3	...	$m - 1$	m	$m + 1$	$m + 2$
S		0	2	2	...	$m - 2$	m	m	1
L	0	1	1	3	...	$m - 1$	$m - 1$	0	0

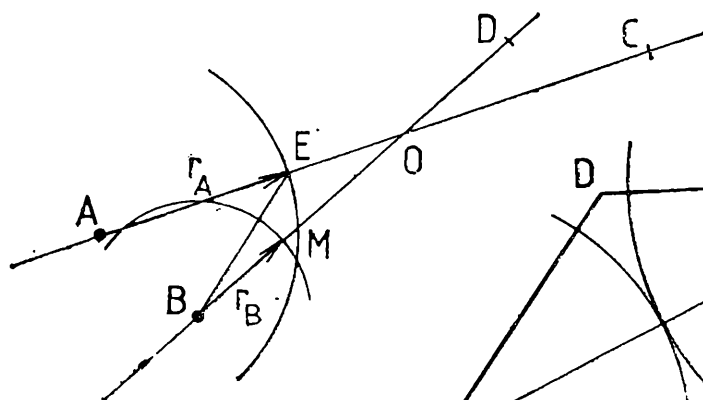
n	0	1	2	3	...	$m - 1$	m	$m + 1$	$m + 2$	$m + 3$	...	$2m + 1$	$2m + 2$
S		0	2	2	...	$m - 1$	$m - 1$	0	1	1	...	m	m
L	0	1	1	3	...	$m - 1$	m	m	0	2	...	$m - 1$	0

Z připojených tabulek je také vidět, že ve většině případů vyhrává hráč, který je první na tahu, bez ohledu na to, zda zvítězí hráč se sudým či lichým počtem zápalek.

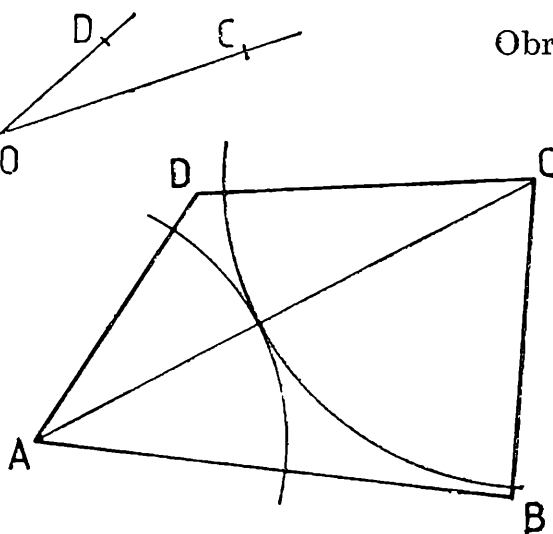
10. Daný konvexní čtyřúhelník označme $ABCD$ a dále označme K_A , K_B , K_C , K_D příslušné kruhy s poloměry r_A , r_B , r_C a r_D . Předpokládejme, že tvrzení úlohy neplatí, tj. že každý z uvedených kruhů obsahuje bod „protějšího“ trojúhelníku, který není obsažen v žádném ze zbylých

kruhů. Je-li O průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníku, můžeme navíc předpokládat, že pro jeden z vrcholů (označme ho A) platí $r_A < |AO|$, protože jinak bychom z nerovností $r_A \geq |AO|$, $r_B \geq |BO|$, $r_C \geq |CO|$ snadno zjistili, že sjednocení kruhů $K_A \cup K_B \cup K_C$ pokrývá trojúhelník ABC (obr. 7). Ten lze totiž pokrýt kruhy s průměry AO , BO , CO .

Zvolme tedy na úsečce AO bod E tak, že $|AE| = r_A < |AO|$ (obr. 8) a označme B ten ze sousedních vrcholů čtyřúhelníku, pro který je úhel AOB ostrý (kdyby bylo $AC \perp BD$, kruh K_A by nemohl mít s trojúhelníkem BCD žádný společný bod). Ten z průsečíků úhlopříčky DO s hranicí kruhu K_A , který leží blíže bodu O , označme M . Podle našeho předpokladu musí kruh K_A obsahovat nějaký bod trojúhelníku BOC ležící vně kruhu K_B , proto musí jednak bod B ležet mimo polopřímku MO a navíc musí být $r_B < |BM| < |BE|$ (úhel BME je tupý). V tom případě však nemůže kruh K_B obsahovat žádný bod trojúhelníku ACD , který by neležel v K_A . (Uvědomte si, že bod E má z bodů, které leží v trojúhelníku ACD a neleží uvnitř K_A , od bodu B nejmenší vzdálenost!) To je ve sporu s naším předpokladem a tvrzení úlohy je tím dokázáno.

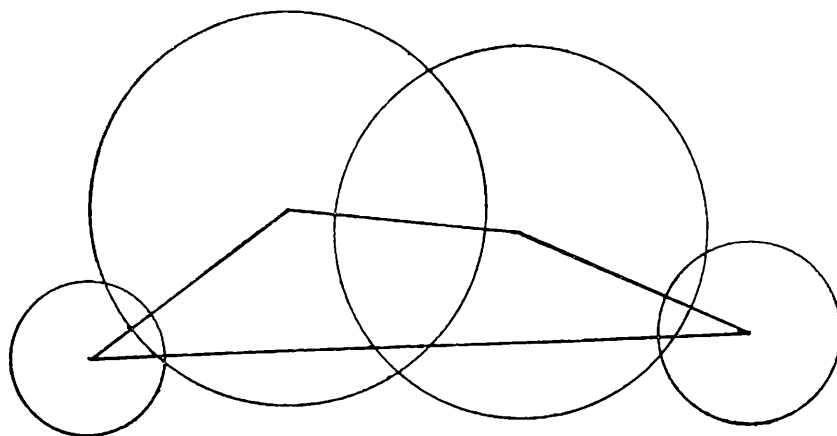


Obr. 8



Obr. 9

Řešení, které jsme předvedli, je vtipné a poměrně jednoduché. Instruktivní je i v tom, že vždycky stojí za to podívat se, co se stane, jestliže dokazované tvrzení neplatí. Zkusme ještě jiný postup. Mají-li tři z daných kruhů společný bod, víme už z předchozího řešení, že odpovídající trojúhelník je jimi pokryt (to, že bod O ležel na jedné straně tohoto trojúhelníku, nebylo podstatné). Podobně uvažujeme i v případě, kdy dva z kruhů odpovídajících protějším vrcholům daného čtyřúhelníku pokrývají příslušnou úhlopříčku (obr. 9). Snadno ovšem zjistíte, že tato situace nastane, právě když tři z daných kruhů mají společný bod (jinak by dané kruhy nepokryly celý čtyřúhelník $ABCD$). Potíž je



Obr. 10

ovšem v tom, že může nastat ještě jiná možnost (obr. 10)! Obecný důkaz v tomto případě je poněkud pracný a zdlouhavý. A i pak je nutno ještě uvážit, zda se nemůže stát, že by společný bod měly právě jen dvojice kruhů K_A, K_B ; K_B, K_C ; K_C, K_D a K_D, K_A .

Karel Horák

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

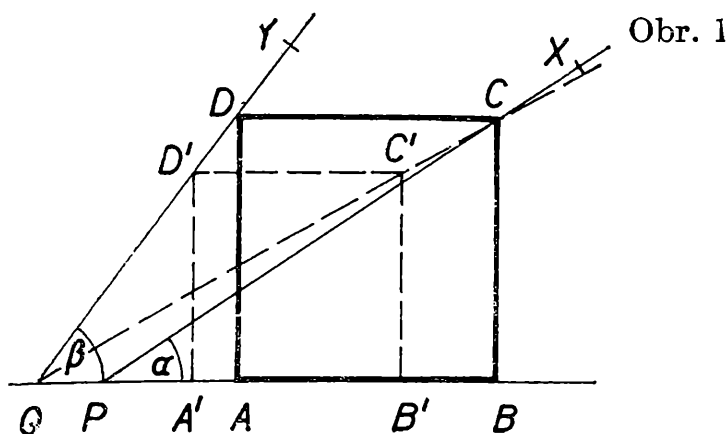
Matematika

3. Jsou dány různé body P, Q a dva úhly o velikostech $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby jeho strana AB ležela na přímce PQ a aby $|\sphericalangle APC| = \alpha$, $|\sphericalangle BQD| = \beta$.
(Došlo 15 řešení.)

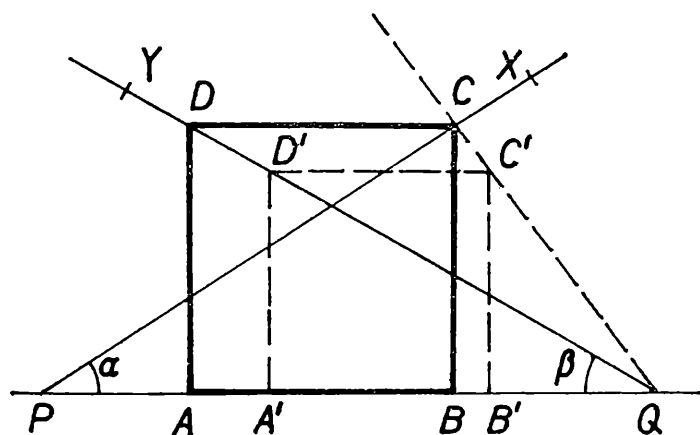
Stanislav Horák

Upravené řešení Tomáše Schiffauera, 4 D a Štěpána Čábelky, 3 C G v Bílovci:

Žádný z bodů P, Q neleží uvnitř strany AB . Je-li totiž bod P (resp. Q) uvnitř strany AB , je $|\sphericalangle APC| > 90^\circ$ (resp. $|\sphericalangle BQD| > 90^\circ$). Proto strana AB leží buď uvnitř úsečky PQ nebo vně této úsečky. V prvním případě nastává buď situace znázorněná na obr. 1 nebo bod P leží uvnitř polopřímky opačné k polopřímce BA a bod Q leží uvnitř polopřímky opačné k polopřímce AB . Obdobně jsou dvě možnosti v případě, kdy strana AB leží vně úsečky PQ . Jedna z nich je na obr. 2. Libovolný čtverec $A'B'C'D'$ mající stranu $A'B'$ uvnitř polopřímky QA a vrchol



Obr. 1



Obr. 2

D' na přímce QD je stejnolehý ke čtverci $ABCD$ podle středu stejnolehlosti Q . Z toho plyne tato konstrukce:

1. Sestrojíme libovolný čtverec $A'B'C'D'$ mající stranu $A'B'$ na přímce PQ a vrchol $D' = Q$ na přímce QY , kde polopřímka QY je ramenem úhlu PQY o velikosti β . 2. Sestrojíme průsečík C přímky QC' s ramenem PX úhlu $B'PX$ o velikosti α . 3. Sestrojíme čtverec $ABCD$ s vrcholy A, B na přímce PQ .

Je zřejmé, že sestrojený čtverec splňuje dané podmínky.

4. Z obdélníku, jehož sousední strany mají délky 42 cm, 21 cm, vystřihněte síť pravidelného šestiúhelníkového hranolu, který má objem větší než 1 dm^3 .

(Došlo 15 řešení.)

Milan Koman

Řešení Martina Kučery, 4 C GMK v Bílovci:

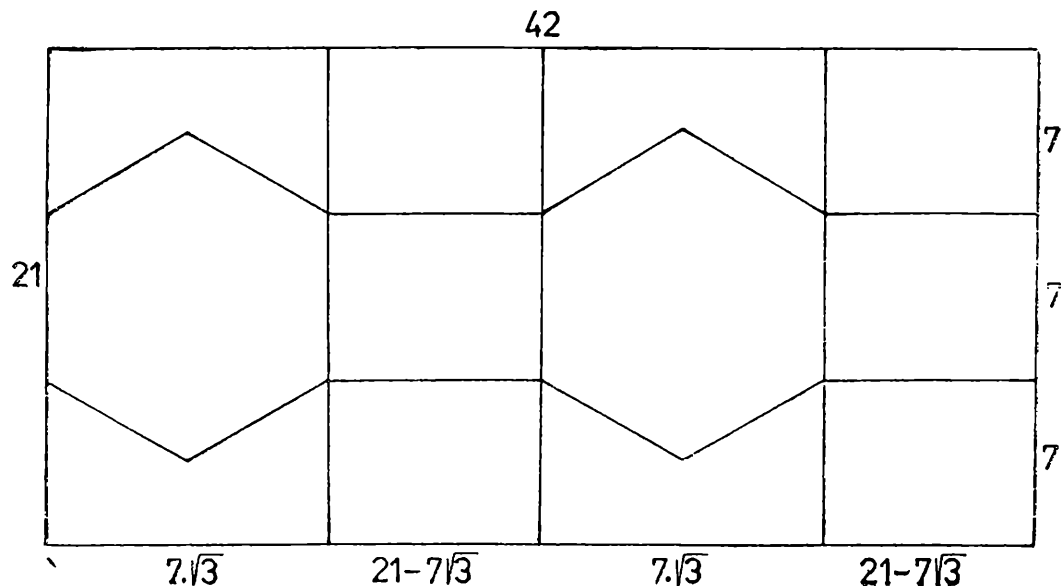
Úloze vyhovuje např. síť z obr. 3. Délka strany šestiúhelníkové podstavy je $a = 7 \text{ cm}$ a výška hranolu je $v = 7(3 - \sqrt{3}) \text{ cm}$. Objem hranolu, jehož povrch vznikne složením sítě, je

$$V = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \cdot v.$$

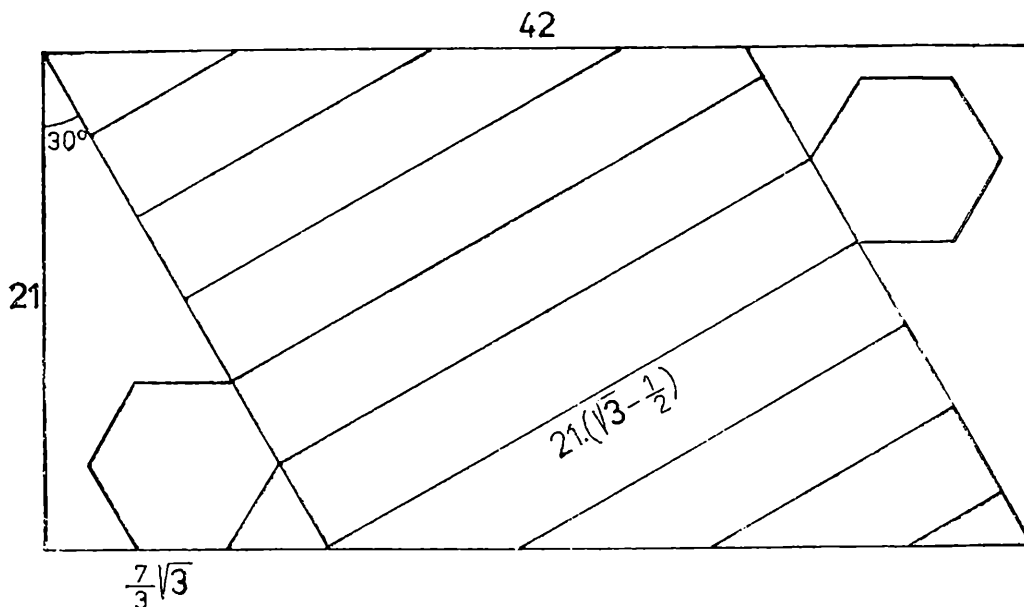
Po dosazení za a , v a po úpravě dostaneme

$$V = \frac{9}{2} \cdot 7^3 \cdot (\sqrt[3]{3} - 1) \text{ cm}^3 \doteq 1130 \text{ cm}^3 > 1 \text{ dm}^3$$

Poznámky: 1. Stejná řešení poslali ještě: *P. Hliněný*, 3 C GMK v Bílovci, *L. Němeček*, 4 C GMK v Bílovci, *Š. Čábelka*, 3 C GMK v Bílovci, *K. Boryová*, 3 C GJH v Bratislavě a *J. Repický*, 3 B GJH v Bratislavě.



Obr. 3



Obr. 4

2. Úlohu se pokusili řešit i další soutěžící, ale jejich řešení nesplňovala podmínku, že síť hranolu se musí skládat z „celých“ stěn, tj. ze dvou šestiúhelníků a šesti obdélníků. Nejčastěji tito soutěžící zasílali triviální „řešení“, ve kterých byly podstavy „rozstříhány“ na rovnostranné trojúhelníky. Za zmínku však stojí „řešení“ *Tomáše Schiffauera*, 4 C

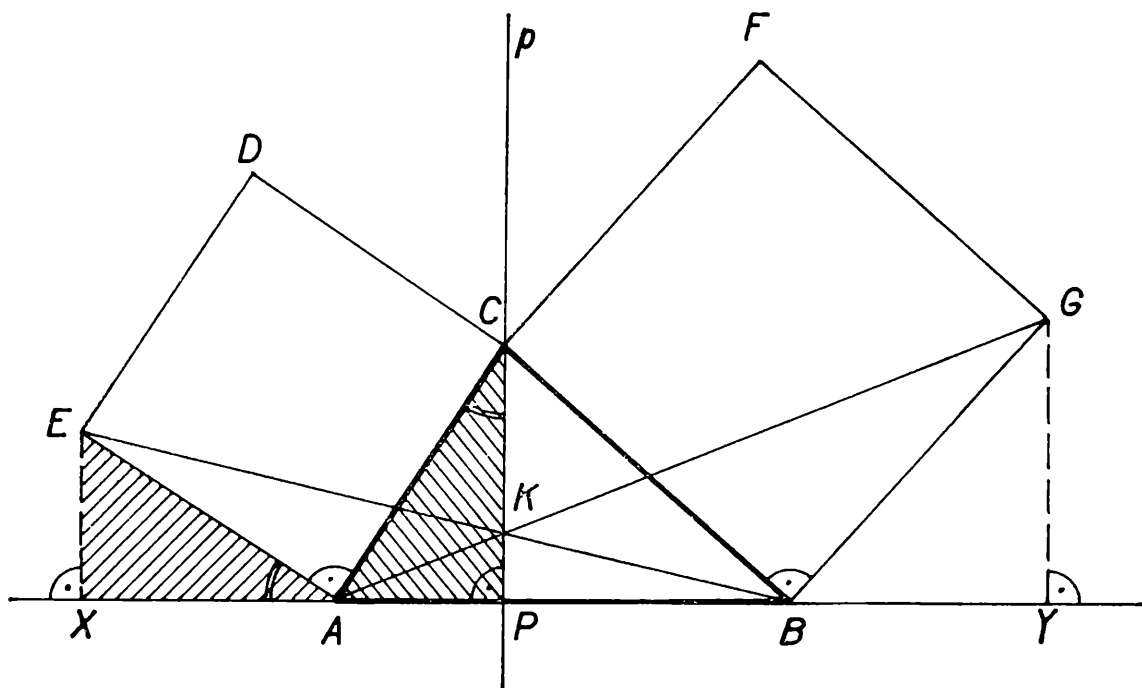
GMK v Bílovci. Jeho „sít“ je na obr. 4. Z ní lze sestavit povrch hranolu, který má objem $V \doteq 1098 \text{ cm}^3$.

5. Necht ABC je libovolný trojúhelník. V polorovině opačné k polorovině ACB sestrojte čtverec $ACDE$ a v polorovině opačné k polorovině BCA sestrojte čtverec $BCFG$. Dokažte, že přímky AG , BE jsou různoběžky, jejichž průsečík leží na přímce $p \perp AB$ procházející bodem C . (Došlo 15 řešení.)

Emil Kraemer

Řešení Martina Kučery, 4 C GMK v Bílovci:

Je-li $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$, je $p = CA$ a průsečíkem přímek AG , BE je vrchol A . Je-li $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$, je $p = CB$ a průsečíkem přímek AG , BE je vrchol B .



Obr. 5

Necht úhly BAC , ABC jsou ostré (obr. 5). Potom polopřímka AE leží v polorovině ABC a úhel BAE je tupý. Proto pata X kolmice vedené bodem E k přímce AB leží na prodloužení strany AB za vrchol A . Z toho plyne, že je

$$|XB| = |XA| + |AB|. \quad (1)$$

Je-li $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, je $|\sphericalangle EAX| = 90^\circ - \alpha = |\sphericalangle ACP|$. Přitom průsečík P přímek AB , p leží uvnitř strany AB . Pravoúhlé trojúhelníky EAX , ACP mají shodné přepony a shodné úhly, takže je $\triangle EAX \cong \triangle ACP$. Z toho plyne, že je

$$|XE| = |PA|, \quad |XA| = |PC|. \quad (2)$$

Z druhé rovnosti řádku (2) a z rovnosti (1) plyne, že je

$$|XB| = |PC| + |AB|. \quad (3)$$

Body B , E leží v navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou p a v polorovině ABC . Proto úsečka BE protíná přímkou p v bodu K ležícím uvnitř poloroviny ABC . Pravoúhlé trojúhelníky PBK , XBE jsou stejnohlé podle středu B . Proto je

$$\frac{|PK|}{|PB|} = \frac{|XE|}{|XB|}.$$

Z toho, z první rovnosti v řádku (2) a z rovnosti (3) plyne, že

$$|PK| = \frac{|PB| \cdot |PA|}{|PC| + |AB|}. \quad (4)$$

Polopřímka AG protíná přímkou p v bodu L , který leží uvnitř poloroviny ABC . Patu kolmice vedené bodem G k přímce AB označme Y . Obdobně jako v předešlém případě zjistíme, že je $|YA| = |YB| + |AB|$, $\triangle GBY \cong \triangle BCP$ a trojúhelníky PAL , YAG jsou stejnohlé podle středu A . Nakonec zjistíme, že je $|PL|$ rovno témuž zlomku jako $|PK|$. Z toho a z polohy bodů K , L uvnitř poloroviny ABC plyne, že je $L = K$. To znamená, že se přímky AG , BE protínají na přímce p .

Je-li $\sphericalangle BAC$ nebo $\sphericalangle ABC$ tupý, probíhá důkaz v podstatě stejně jako v předešlém případě. Průsečík přímek AG , BE leží však uvnitř poloroviny opačné k polorovině ABC .

OLYMPIÁDY A SOČ

30. mezinárodní matematická olympiáda

se konala od 13. do 24. července 1989 v rodišti slavného německého matematika *Karla Friedricha Gausse* (1777—1855), v západoněmeckém městě *Braunschweigu*. A tentokrát nás naši olympionici opravdu potěšili — v konkurenci 291 studentů z 50 zemí světa získali hned dvě I. ceny a jako družstvo skončili v neoficiálním pořadí na skvělém 6. místě. Myslím, že je to zatím jeden z nejlepších výsledků našeho družstva v historii mezinárodních matematických olympiád (srovnatelný je úspěch na 10. MMO v Moskvě v r. 1968, kde T. Mašek a B. Sivák rovněž získali dvě I. ceny). Přitom Petr Čížek získal maximální počet bodů (a tím i pohár našeho nejúspěšnějšího reprezentanta, o který se vloni dělil s I. Martišovítem; ten se letošní MMO nemohl bohužel ze zdravotních důvodů zúčastnit) a druhý šťastný majitel nejvyšší ceny Ondřej

Šuch měl jen o bod méně. Jejich výsledek se tak vzácně shoduje s výsledkem letošního celostátního kola kategorie A. Podrobné výsledky našich účastníků ukazuje následující tabulka:

<i>Tomáš Brodský</i> 4 G kpt Jaroše, Brno	1	7	0	7	7	7	29	III
<i>Petr Čížek</i> 4 GWP Praha	7	7	7	7	7	7	42	I
<i>Petr Hliněný</i> 3 GMK Bílovec	7	7	1	7	7	7	36	II
<i>Vladimír Komár</i> 3 G Šmeralova, Košice	7	7	0	0	7	6	27	III
<i>Ondřej Šuch</i> 3 GAM Bratislava	7	7	7	7	7	6	41	I
<i>Marek Velešík</i> 4 G Koněvova, Brno	6	0	0	7	7	7	27	III

Za každou z úloh bylo možno získat 7 bodů, přičemž na I. cenu letos stačilo 38 bodů (získalo ji 20 účastníků včetně deseti, kteří dosáhli maxima 42 bodů), II. se udělovala za 30—37 bodů (55 držitelů) a III. za 18—29 bodů (72 držitelů).

Neoficiální pořadí na prvních deseti místech letos bylo (včetně počtu získaných cen)

1.	ČLR	4	2	—	237
2.	RSR	2	4	—	223
3.	SSSR	3	2	1	217
4.	NDR	3	2	1	216
5.	USA	1	4	1	207
6.	ČSSR	2	1	3	202
7.	BLR	1	3	2	195
8.	NSR	1	3	2	187
9.	VSR	2	1	3	183
10.	MLR	—	4	1	175

Vlastní soutěž proběhla ve dnech 18. a 19. července. Úlohy jako vždy vybrala mezinárodní jury z návrhů zaslaných začátkem roku zúčastněnými zeměmi. Chcete-li si aspoň trochu ozkoušet, jaké to je na mezinárodní matematické olympiádě, zavřete se někde na čtyři a půl hodiny a řešte některou ze dvou následujících trojic úloh!

1. Dokažte, že množinu $\{1, 2, \dots, 1989\}$ lze vyjádřit jako sjednocení 117 navzájem disjunktních množin, z nichž každá má 17 prvků s týmž součtem.

(Filipíny)

2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme po řadě A_1, B_1, C_1 průsečíky os jeho vnitřních úhlů s kružnicí opsanou. Dále označme A_0 průsečík přímky AA_1 s osami vedlejších úhlů při vrcholech B, C , analogicky definujeme body B_0 a C_0 . Dokažte, že pak platí:

- (a) Obsah trojúhelníku $A_0B_0C_0$ je dvojnásobek obsahu šestiúhelníku $AC_1BA_1CB_1$;
 (b) obsah trojúhelníku $A_0B_0C_0$ je nejméně čtyřnásobek obsahu trojúhelníku ABC .

(Austrálie)

3. Jsou dána přirozená čísla n a k . Je-li S množina n bodů v rovině taková, že žádné její tři body neleží v přímce a ke každému bodu $P \in S$ existuje v množině S aspoň k bodů, které mají od P stejnou vzdálenost, pak je

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Dokažte.

(Nizozemí)

4. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, pro jehož strany platí $|AB| = |AD| + |BC|$. Uvnitř něho je dán bod P , který leží ve vzdálenosti h od přímky CD , přičemž $|AP| = h + |AD|$, $|BP| = h + |BC|$. Dokažte, že

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}}.$$

(Island)

5. Pro každé přirozené číslo n existuje n po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž žádné není celočíslnou mocninou prvočísla. Dokažte.
 (Švédsko)

6. Řekneme, že pořadí $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ čísel $1, 2, \dots, 2n$, kde n je přirozené, má vlastnost P , jestliže $|x_i - x_{i+1}| = n$ pro aspoň jedno $i \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$. Dokažte, že pro každé n existuje více pořadí s vlastností P než těch, které vlastnost P nemají.

(PLR)

Na řešení první i druhé trojice úloh měli soutěžící jako obvykle čtyři a půl hodiny čistého času. Na první pohled mě zaujala první úloha, i když není nijak zvlášť krásná, ani příliš obtížná, protože se dá spočítat „na prstech“, ale možná ne náhodou řešení, které mě hned napadlo,

připomíná známou historku o žáku Gaussovi, který prý ohromil učitele tím, jak rychle (a správně) sečetl řadu $1 + 2 + \dots + 40$. Jeho trik spočíval v tom, že z daných čísel utvořil 20 stejných součtů $1 + 40 = 2 + 39 = \dots = 20 + 21$.

Vedením československé delegace byl tentokrát pověřen nový předseda ÚV MO doc. dr. Leo Boček, CSc., z MFF UK Praha a jeho zástupcem byl dr. Tomáš Hecht, CSc., z MFF UK Bratislava. 31. MMO by se snad měla konat v Čínské lidové republice.

Nakonec mě ještě napadá, že letošní úspěch mohl být tím nejlepším dárkem k nedožitým šedesátinám dr. Františka Zítka, CSc., dlouholetého organizátora naší MO a tradičního člena naší delegace na MMO.

Karel Horák

Kalendár M-F: december 1989

1. 12. 1764 v Petrohrade zomrel *Christian Goldbach*, nemecký matematik. Bol samoukom, zaoberal sa teóriou čísel, teóriou radov i geometriou.
1. 12. 1959 v Bratislave zomrel *Jur Hronec*, slovenský matematik. Venoval sa matematickej analýze a problematike diferenciálnych rovníc. Napísal prvé slovenské vysokoškolské učebnice, ovplyvnil rozvoj vysokých škôl na Slovensku.
5. 12. 1859 zomrel *Louis Poincaré*, francúzsky matematik a fyzik. Dovršil mechaniku tuhých telies, zaviedol pojmy moment hybnosti a dvojica síl.
5. 12. 1884 sa v Prahe narodil *Bohuslav Hostinský*, český matematik. Zaoberal sa teóriou pravdepodobnosti, diferenciálnou geometriou i matematickou fyzikou.
6. 12. 1799 v Edinburghu zomrel *Joseph Black*, škótsky fyzik a chemik. Vypracoval fluidovú teóriu tepla, objavil kalorimetrickú rovnicu.
8. 12. 1864 v Corku zomrel *George Boole*, írsky matematik a logik. Študoval invarianty lineárnych transformácií, operátory v analýze i kvaterniony. Vytvoril symbolickú kalkulu pre usudzovanie, prispel k algebraizácii logiky.
8. 12. 1894 v Petrohrade zomrel *Pafnutij Lvovič Čebyšev*, ruský matematik. Prispel k teórii aproximácií funkcií, dokázal centrálnu limitnú vetu v teórii pravdepodobnosti, rozvinul teóriu mechanizmov. Založil petrohradskú matematickú školu, mal veľký zmysel pre vzťah medzi matematickou teóriou a praxou.
10. 12. 1804 sa v Postupime narodil *Carl Gustav Jacob Jacobi*, nemecký matematik. Rozvinul teóriu kvadratických foriem, vybudoval teóriu eliptických funkcií, zaslúžil sa o rozvoj mechaniky.

12. 12. 1889 v Petrohrade zomrel *Viktor Jakovlevič Buňakovskij*, ruský matematik. Napísal okolo 150 vedeckých prác z matematiky, teoretickej mechaniky a matematickej fyziky. Zaviedol nový spôsob sčítovania niektorých radov, dokázal integrálnu nerovnosť, neskôr po ňom pomenovanú.
15. 12. 1834 sa narodil *Charles Augustus Young*, americký astrofyzik. Skúmal spektrum Slnka, zistil rotačnú rýchlosť Slnka.
16. 12. 1804 sa v Bare (Podolská gubernia) narodil *Viktor Jakovlevič Buňakovskij*, ruský matematik. Prispel k riešeniu problémov matematickej analýzy, teórie čísel i teórie pravdepodobnosti. Pozdvihol vedeckú úroveň vyučovania matematiky.
17. 12. 1964 v Zürichu zomrel *Victor Franz Hess*, rakúsky fyzik. Skúmal rôzne druhy žiarenia a elektrické vlastnosti atmosféry. Nobelovu cenu za fyziku (1936) získal za objav kozmického žiarenia.
19. 12. 1909 sa narodil *Václav Votruba*, český fyzik. Zaoberal sa fyzikou elementárnych častíc a kvantovou teóriou elektromagnetického poľa.
22. 12. 1824 sa v Milane narodil *Francesco Brioschi*, taliansky matematik. Rozpracoval metódy riešenia rovníc vyšších stupňov, rozvinul teóriu determinantov a invariantov. Založil taliansku matematickú školu.
22. 12. 1859 sa v Stuttgarte narodil *Ludwig Otto Hölder*, nemecký matematik. Zaoberal sa teóriou funkcií, teóriou čísel a teóriou grúp.
22. 12. 1869 sa v Moskve narodil *Dmitrij Fedorovič Jegorov*, sovietsky matematik. Patril k zakladateľom moskovskej matematickej školy.
26. 12. 1904 sa v Hamburgu narodil *Gerhard Herzberg*, kanadský fyzik nemeckého pôvodu. Za systematický výskum štruktúry molekúl a atómov s použitím spektroskopických metód získal Nobelovu cenu za chémiu (1971).
27. 12. 1974 zomrel *Vladimír Alexandrovič Fok*, sovietsky fyzik. Prispel k rozvoju kvantovej mechaniky, kvantovej teórii poľa, teórie relativity i matematickej fyziky.
28. 12. 1919 zomrel *Johannes Robert Rydberg*, švédsky fyzik. Študoval atómové spektrá, odhalil zákonitosti ich rozloženia.
28. 12. 1984 zomrel *Isaak Konstantinovič Kikoin*, sovietsky fyzik. Zaoberal sa fyzikou pevných látok, atómovou i jadrovou fyzikou. Prispel k rozvoju využitia atómovej energie.
31. 12. 1719 zomrel *John Flamsteed*, anglický astronóm. Založil hvezdáreň v Greenwichi, vydal prvý moderný katalóg hviezd.
31. 12. 1894 zomrel *Thomas Jean Stieltjes*, holandský matematik. Riešil problémy matematickej analýzy, zaviedol nový pojem integrálu.
31. 12. 1899 sa narodil *Lazar Aronovič Ljusternik*, sovietsky matematik. Rozpracoval metódy funkcionálnej analýzy, variačného počtu, topológie i numerickej matematiky.

dj

Matematická mytologie

Za devatero horami, za devatero řekami a matematickou bariérou časoprostoru byla odedávna říše Nekonečna. Vládli zde dva králové Minusmax a Plusmax. Každý obýval spolu se svým služebnictvem polovinu paláce, jehož půdorys se nekonečně blížil tvaru ležaté osmičky. Obě jeho křídla si vládcové dokonale opevnili. Vysoké hradby byly sbity z těch nejpevnějších konců souřadných systémů. V bezkonečně hlubokém hradním příkopu se proháněli krvežízniví fraktální medvědi — takový medvěd - a to nepřeháním - vás může sežrat na libovolnou vzdálenost. Hradní zdi poskládali stavitelé z kamenných kvádrů o nekonečných hranách a věže paláce sahaly až k samým hranicím definovatelnosti této mocné říše. Nic zde nebylo absolutní; všechno, nač jste jen pomysleli, se měnilo, přetvářelo, mizelo a znovu se zjevovalo, jednu chvíli hrálo všemi barvami, aby se v zápětí utápělo v mrtvé šedi. Taktéž existence, neřkuli bytí zdejších obyvatel bylo nadmíru pochybné. Královské služebnictvo tvořily poslední cifry dekadických rozvojų iracionálních čísel. Netřeba jistě připomínat, že jeden každý musel králi oddaně sloužit, neboť jeho moc byla neomezená, takže byl hegemonelem celé nekonečné půlříše. Aby vládl chytře a politicky, měl i svého dvorního rádce — samotnou poslední číslici Ludolfova čísla.

Mezi oběma částmi paláce protékala časoprostorová stoka. Nepřejte si blíže popisovat, jak nepřekonatelná překážka to byla pro kohokoliv, kdo by měl v úmyslu zběhnout z jedné Půlříše do druhé. Kdysi, když Minusmax a Plusmax nastoupili na trůn, dali oba společně postavit vysoký lomenný most přes tuto stoku. Most sestával z nespočetného množství tangentských křivek, neboť právě ty jsou spojnicemi mezi minusnekonečnem a plusnekonečnem. Tak vzniklo i malé neutrální území, protože zatímco všude kolem byly bezrozměrné imaginární dálavy, právě to maličké místo na mostě bylo reálno nepatřící žádnému z vládců. Most se stal dějištěm posvátných obřadů. Konala se zde setkání na nejvyšší úrovni obou hegemonů, kde se dlouze a urputně přeli o svá nekonečná bohatství fantazie.

Existují-li už jednou bezkonečné říše, pak ovšem na jejich obranu musíte mít i bezpočetnou armádu. A právě takovou si na obou stranách vládcové vytvořili. Byla to armáda žoldáků — všech zlomků s nulou ve jmenovateli. Je vám doufám jasné, že toto vojsko i patřičně vyzbrojili. Každý voják dostal svoji primitivní, zato účinnou sečnou zbraň - důkladně nabroušený průsečík dvou rovnoběžek. Teď už se není čemu divit, že přišel jednou den, kdy zasvištěla vzduchem první rána a vypukla válka. Válčilo se urputně a dlouho. Pomalu oba vládcové zapomněli, proč vlastně posílají nekonečné armádní šiky na smrt, a válčení se stalo jen pečlivě střeženou a udržovanou tradicí.

A v této krvavé bojové vřavě se zrodil náš svět. Neutrální most reálna byl poset nespočetnou množinou padlých vojáků, kteří v boji přišli o svého jmenovatele a stali se obyčejnými čísly. Z čísel se zrodily grupy, z grup algebra, z algebry matematika a z matematiky vyklíčily další vědy i pavědy. Na svět přišla filozofie a objevil se první člověk. Postavil si první obydlí, obdělal své první pole a vytvořil první říši. Za čas jiní lidé vytvořili i druhou říši, vymysleli zbraně a tehdy, za devatero horami a devatero řekami začala první reálná válka . . .

Alan Svoboda

Z NOVÝCH KNIH

Edice „Matematika pro vysoké školy technické“

Většina z vás patrně půjde studovat na vysoké školy technické a zde se setkáte nejen se skripty, ale jistě také se sešitovým souborem matematických textů označených na obálce MVŠT; význam zkratky je v nadpisu. Knižnice právě letos jubluje, je jí již deset let. První svazky vychovávaly inženýry, kteří už mají několik let od úspěšného vysokoškolského studia.

Jednotlivé sešity jsou zaměřeny monotematicky na jednu matematickou disciplínu potřebnou v inženýrské praxi. Představují malou inženýrskou matematickou knihovničku. Setkáváme se v ní se základy intuitivní teorie množin, s algebrou včetně vektorové, diferenciálním a integrálním počtem, několik svazků je věnováno obyčejným i parciálním diferenciálním rovnicím, zpracovány jsou zde i základy teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, nezapomnělo se ani na analytickou a diferenciální geometrii. Poslední vydaný svazek, a to v pořadí XXXI., je věnován jedné z partií informatiky, plyne to z jeho názvu „Kódování“. S dalšími vydávanými sešity se počet autorů stále rozrůstá; jsou jimi vysokoškolští učitelé s dlouholetou pedagogickou praxí.

Informaci ještě doplníme tím, že vydavatelem knižnice MVŠT je pražské SNTL — Nakladatelství technické literatury.

-jm-

Od 1. ledna 1990 se upravují ceny novin a časopisů. Cena jednoho výtisku čísla Rozhledů matematicko-fyzikálních bude 3 Kčs.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Jára Cimrman fyzik

Jára Cimrman, tento náš stále populárnější polyhistor a všeueměl, zanechal stopy svého génia ve všech oblastech lidského snažení a samozřejmě též ve fyzice. Souhrnnou studii o přínosu Járy Cimrmána na tomto poli publikoval *Československý časopis pro fyziku* v roce 1973 (č. A 23, str. 180) u příležitosti stého výročí narození tohoto velikána. I když rok jeho narození není vlastně znám, zdá se jistým, že se Cimrman narodil 1. dubna, alespoň podle análů heidelberské university. Článek o Cimrmanovi fyzikovi pochází z pera nejzasvěcenějšího; jeho autor *Ladislav Smoljak* je nejen naším předním cimrmanologem, ale svým původním povoláním také fyzikem.

V teoretické fyzice jsou známy Cimrmanovy „katastrofální téze“ z roku 1898, které zapůsobily šokujícím způsobem na takové giganty vědy, jakými byli Rutherford, Einstein, Max von Laue a Planck. Je znám Thomsonův výrok „Štěstí, že se toho nedožil Helmholtz!“ Na přímé dotazy, co je podstatou Cimrmanových tezí, odpovídali tito fyzikové vyhýbavě, klopili oči a rychle stáčeli hovor na jiné téma. Proto také upadla Cimrmanova teorie brzy v zapomenutí. Zachovala se sice ústřední rovnice v Cimrmanově rukopisu, ale v místě druhého, nejdůležitějšího členu je papír poškozen a zeje v něm osudná díra.

Fyzikální experimenty Cimrman neprováděl z úsporných důvodů a od teorie přecházel přímo k technickým aplikacím. Škoda, že tento jeho odkaz není dnes dostatečně oceněn a prakticky využíván — jak by se tím urychlil přenos výsledků vědy do praxe! Přesto však existuje dokonce fotografický snímek zachycující skupinu Cimrmanových spolupracovníků při provádění náročného, klíčového experimentu, který měl ověřit Cimrmanovy téze. Experiment probíhal paralelně v Praze a v Heidelbergu a měl znamenat revoluci (Rutherford to označil přímo za pohromu) ve fyzice. Bohužel není známo, oč při experimentu šlo.

Ve své pedagogické a popularizačnické činnosti se Cimrman vždy držel názorného výkladu. Tak demonstroval chodcům na pražských ulicích rovnoměrný pohyb přímočarý, nechal závodit žáky s rozžatou svíčkou nebo znějícím zvoncem v ruce, aby dokázal, že světlo je rychlejší než zvuk (svíčku musel ovšem nést sportovně zdatnější žák) a při upuštění rozžaté svíce na podlahu demonstroval, že světlo se při dopadu láme.

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20 — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpalkova 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

ADRESA REDAKCE:

M. D. Rettigové 4,
116 39 Praha 1 - Nové Město
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

REDAKČNÍ KRUH:

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topolčany; doc. dr. Stanislav Jendroň, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

ROZHLEDY

matematicko
-fyzikální

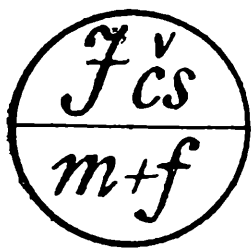
5
89 – 90

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

LEDEN

CENA 3,00 Kčs



ROZHLEDY matematicko -fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Emil Kraemer: Za docentem Otou Setzerem	193
Ivan Štoll: Studená jaderná syntéza	194
Helena Husová: Matematická podstata genetických zákonitostí	199
Ján Chrapan: Jadrová energetika a životné prostredie	205
Dušan Jedinák: Muž vědy a činu	212
Z matematiky a fyziky ZŠ	215
Přemýšlíme, řešíme	217
Naše soutěž	233
Olympiády a SOČ	237
dj: Kalendár M-F	239



Za docentem Otou Setzerem

V redigování našich Rozhledů, které se blíží už sedmdesátému ročníku, se vystřídala řada našich významných matematiků a fyziků. Mimořádně dlouhou dobu (21 let) vykonával tuto náročnou práci loni zesnulý (17. 5. 1989) docent Ota Setzer, který byl také pilným autorem mnoha článků a úloh otištěných v našem časopisu. První článek do Rozhledů (zvaných původně Rozhledy matematicko-přírodovědecké) napsal již v roce 1928, kdy byl studentem přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Ota Setzer se narodil v Praze roku 1906, vystudoval reálku v Praze-Holešovicích a na přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy získal aprobaci pro vyučování matematice a deskriptivní geometrii na středních školách. Potom vyučoval na různých gymnáziích, řadu let byl ředitelem gymnázia dr. Antonína Dvořáka v Kralupech nad Vltavou a od roku 1951 přednášel deskriptivní geometrii na stavební fakultě Českého vysokého učení technického v Praze. Kromě řady článků, vesměs z oblasti geometrie, napsal několik skript a byl spoluautorem dvou středoškolských učebnic a jedné vysokoškolské učebnice deskriptivní geometrie. V Rozhledech si však připomínáme především jeho mnohaletou práci pro náš časopis. Byla velmi náročná a obtížná, hlavně v prvních letech po obnoveném vydávání Rozhledů (v roce 1957), kdy bylo nutno získat nejen autory článků a úloh, ale také odběratele, jichž bylo velmi málo.

Redakční rada Rozhledů, ale i Jednota československých matematiků a fyziků (jejímž členem byl Setzer od roku 1923), vděčně na docenta Setzera vzpomínají a vysoko hodnotí jeho zásluhy.

Emil Kraemer

Studená jaderná syntéza

Doc. ing. IVAN ŠTOLL, CSc., ČVUT v Praze

Otázka nových zdrojů energie, zejména ekologicky čistých, zůstává v popředí zájmu fyziků, inženýrů, ekonomů, celé společnosti. I když jsme již opustili představy o tom, že výroba energie bude neomezeně vzrůstat a za jeden z nejdůležitějších a nejčistších zdrojů energie považujeme úspory energie, přesto si vzrůst a udržení životní a civilizační úrovně vyžádá osvojení nových energetických zdrojů. Předpokládáme, že jaderná energetika dosáhne kvalitativně vyššího a bezpečnějšího stupně, že se budou stále více uplatňovat energie sluneční, větrná, geotermální, energie přílivu a odlivu a další obnovitelné druhy energie. Za stěžejní energetický zdroj, alespoň v blízké a střednědobé perspektivě, však považujeme energii jaderné syntézy (jaderné fúze), kterou jsme si ne zcela prozíravě zvykli nazývat též energií termojadernou. V poslední době se totiž stále častěji objevují různé nové koncepce získávání „termojaderné“ energie „za studena“ či „při pokojové teplotě“ a takové spojení ovšem nedává smysl.

Energie jaderné syntézy se uvolňuje díky tomu, že při spojení, slití dvou lehkých atomových jader vznikne jádro těžší, jehož klidová energie je menší než součet klidových energií původních jader. Přebytek energie se projeví jako kinetická energie vznikajících částic, případně jako energie záření. Tuto energii lze pak využít k zahřívání vhodné teplotnosné látky a prostřednictvím parního cyklu k výrobě elektřiny, případně k rozkladu vody k získání vysoce ušlechtilého paliva — vodíku. Reakcí jaderné syntézy je velmi mnoho. Nejschůdnější z nich je spojování jader deuteria a tritia, při němž vzniká helium (částice alfa) a neutron a uvolňuje se celková energie 17,6 MeV. Z ní připadá 14,1 MeV na kinetickou energii neutronu, 3,5 MeV odnáší částice alfa. Nevýhodou reakce je nutnost manipulovat s tritiem, které je radioaktivní (má poločas rozpadu 12,3 let) a silně toxické. V přírodě se ve využitelném množství nevyskytuje a je třeba ho vyrábět ostřelováním lithia neutrony. Jiná je situace s deuteriem, jehož je v obyčejné vodě 0,015 %, a tedy ve světových oceánech nepřeberné množství.

Při spojení dvou jader deuteria (deuteronů) by mohlo vzniknout jádro atomu helia 4 (částice alfa) a uvolnila by se energie 24 MeV. Byla by to reakce naprosto „čistá“, nevznikaly by ani radioaktivní produkty, ani záření a navíc by rychle letící částice alfa byla možno použít k přímé výrobě elektřiny bez parního cyklu. Takovou reakci dvou částic za vzniku jediné částice třetí však zakazuje zákon zachování hybnosti. Proto se uvažuje o dalších dvou reakcích, které nastávají při spojení dvou jader deuteria paralelně se srovnatelnou pravděpodobností — při

jedné vzniká jádro helia 3, neutron a uvolňuje se 3,25 MeV energie, při druhé jádro tritia, proton a uvolňuje se 4,00 MeV energie.

K tomu, aby mohlo dojít ke spojení dvou atomových jader, je třeba překonat elektrické odpuzivé síly, které rychle rostou se zmenšující se vzdáleností. Teprve při přiblížení jader na 10^{-13} až 10^{-14} metru převládnou přitažlivé síly jaderné, obrovské, ale krátkého dosahu. Je to jako kdybychom stlačovali proti sobě dvě části mechanismu oddělené silnou pružinou, nebo zavírali dveře proti působící pružné síle až do okamžiku, kdy se uvede do chodu západka silného zámku. Z praxe známe dva způsoby takového uzavírání. Buď můžeme působit vzrůstající tlakovou silou, nebo můžeme dodat dveřím kinetickou energii, „třísknout“ jimi. Existuje i třetí způsob — uvolnit pružinu.

Dosud využívané způsoby byly všechny založeny na „třískání“ dveřmi. Dvě jádra deuteria se urychlují na vysoké energie, při vzájemné srážce se sblíží na jaderné vzdálenosti a proběhne reakce syntézy. Urychlení atomových jader je možno provést buď na urychlovači, kde je ovšem hustota svazku nabitých částic nevelká, nebo zahřátím plazmatu tvořeného nabitými částicemi na vysoké teploty. Energie jednoho elektronvoltage odpovídá teplotě 11 640 kelvinů a k dosažení jaderných energií vyjádřených v miliónech elektronvoltů (MeV) je tedy třeba zahřát plazma na stamiliony a miliardy kelvinů. Samozřejmě částice zahřátého plynu nebo plazmatu nemají všechny stejnou energii, jsou charakterizovány určitým energetickým rozdělením a i při nižších teplotách se vždy může najít určitý, byť malý, počet dostatečně energetických částic. Pak ovšem záleží i na koncentraci částic a době, která je pro jejich vzájemné srážky k dispozici. Tak známé Lawsonovo kritérium pro dosažení energetického zisku v termojaderném plazmatu zahřátém na sto miliónů kelvinů pro reakce mezi jádry deuteria a tritia požaduje, aby součin koncentrace a doby udržení byl větší než $2 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \cdot \text{s}$, pro reakci mezi jádry deuteria než $2 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \cdot \text{s}$.

Dosažení reakce syntézy s uvolněním jaderné energie proto obvykle spojujeme s představou o vysokých teplotách, které existují uvnitř hvězd (v centrální části Slunce řádově 10^7 kelvinů), nebo které vyvolává výbuch jaderné bomby. O dosažení termojaderných teplot a splnění Lawsonova kritéria v laboratořích usilují fyzikové již více než čtyřicet let pomocí nejrůznějších, většinou velmi komplikovaných a nákladných zařízení. K nejznámějším patří prstencové magnetické nádoby, kde se plazma zahřívá jednak protékajícím elektrickým proudem, jednak elektromagnetickými vlnami a vstřikovanými částicemi. Systém tokamak sovětské konstrukce se zdá být nejnadějnější. Dnešní tokamaky (k největším patří západoevropský JET, americký TFTR, sovětský T-15 a japonský JT-60) jsou ovšem obrovská monstra s prstencí o průměru kolem 6 m a trubicemi s vnitřním průměrem kolem 2 m, jimiž protékají elektrické proudy až 5 miliónů ampérů. Přitom tyto tokamaky

stále více energie spotřebovávají než vyrábějí a jejich parametry k získávání energie dosud nestačí. V rámci Mezinárodní agentury pro atomovou energii je plánována výstavba mezinárodního tokamaku ITER za účasti Euratomu, Spojených států amerických, Sovětského svazu a Japonska. Tento tokamak má být umístěn v Garchingu u Mnichova a jeho projekt má být hotov v roce 1990.

Vedle tokamaků probíhají nákladné experimentální výzkumy s termojaderným plazmatem na prstencových nádobách americké konstrukce zvaných stellarátory, lineárních magnetických nádobách s nejfantastičtějšími uspořádáními magnetických siločar, zkoumá se využití výkonných laserů, elektronových a iontových svazků k zahřátí plazmatu. V případě laserového či svazkového ohřevu dochází ke krátkodobému zahřátí velmi hustého plazmatu na termojaderné teploty, tedy k jakési explozi vodíkové minibomby. Protože reakce syntézy proběhne ve velmi krátké době, není třeba plazma udržovat magnetickým polem (někdy mluvíme o tzv. „inerciálním“ udržení, kdy plazma drží pohromadě před expanzí jen svou setrvačností). V magnetických nádobách probíhá tedy jakési „doutnání“ velmi řídkého plazmatu a Lawsonovo kritérium má být splněno díky dlouhé době udržení, zatímco při laserovém ohřevu probíhá série explozí jako ve výbušném motoru a splnění Lawsonova kritéria je založeno na vysoké hustotě (stlačení) plazmatu.

Z předchozího výkladu je patrné, jak složitým a náročným úkolem je ohřát plazma na stamilióny kelvinů. Je proto třeba se zamyslet, zda by nebylo možno vyvolat reakce jaderné syntézy bez ohřívání. Jedna z cest je známa již od samého počátku termojaderného výzkumu, ale zdála se neschůdnou — je to takzvaná mionová katalýza. V roce 1937 byly v kosmickém záření objeveny částice, které dnes nazýváme miony. Patří do skupiny leptonů a jsou ve všech směrech obdobné elektronům. Liší se od nich pouze hmotností (jsou 207 krát těžší) a tou okolností, že žijí jen krátce — $2,2 \cdot 10^{-6}$ sekundy. Mohou nahradit elektron v atomech a molekulách, vytvářet takzvané mezoatomy a mezomolekuly. Díky své velké hmotnosti se však pohybují mnohem blíže atomovému jádru než elektron — atom mezovodíku je 207 krát menší než atom vodíku. Setká-li se takový mezoatom (například mezotritium) s deuteronem, vznikne složitý útvar, mezomolekulární iont, sestávající ze dvou protonů, tří neutronů a mionu. Mion přitom oslabí coulombovské odpuzování dvou kladných jader deuteria a tritia a v mezomolekulárním iontu se obě jádra dostanou na dosah jaderných sil. Proběhne tedy jaderná fúze bez ohřívání, uvolní se jeden neutron a vytvoří se jádro helia 4. Volný mion pak putuje dále, aby zprostředkoval, katalyzoval další reakce tohoto typu.

Původ myšlenky mionové katalýzy sahá do roku 1947, kdy anglický fyzik *F. C. Franck* vyslovil myšlenku, že mion může vytvářet mezomolekulu (tenkrát se mion ještě nazýval mí mezonem), kde dojde k ja-

derné syntéze, a uvolněnou energii bude mion unášet dále. Známý sovětský fyzik, akademik *A. D. Sacharov*, jeden ze spoluautorů myšlenky magnetických nádob k udržení horkého plazmatu, v roce 1948 ukázal, že vznikne-li mezomolekula z jader deuteria a tritia, nastane jaderná fúze prakticky okamžitě a mion může katalyzovat další reakce. Tato Sacharovova práce publikovaná ve zprávách Fyzikálního ústavu Akademie věd SSSR prošla tenkrát bez povšimnutí. Pravděpodobnost vzniku mezomolekul se zřetelem ke krátké době života mionu odhadl roku 1954 akademik *Ja. B. Zeldovič*.

Všechny uvedené práce měly teoretický charakter a teprve v roce 1957 americký fyzik *L. Alvarez* z kalifornské university v Berkeley poprvé pozoroval reakci jaderné syntézy katalyzované mionem. Myšlenka využití tohoto jevu k získání energie jaderné syntézy za studena vyvolala tenkrát mimořádné, avšak dočasné vzrušení. Teoretické výpočty brzy ukázaly, že mion během svého života stačí katalyzovat stěží několik reakcí syntézy, že proces vytváření mezomolekulárního iontu je zdlouhavý, mion se navíc „přilepuje“ k těžším částicím a vypadává ze hry. Klidová hmotnost mionu odpovídá 106 MeV a k tomu, aby se uvolnila energie potřebná k výrobě mionů na urychlovačích a ke kompenzaci všech energetických ztrát, by musel jeden mion vyvolat několik stovek reakcí.

A tak zájem o tento problém postupně utuchal a výzkumem se zabývalo již jen několik nenapravitelných optimistů v Dubně v SSSR a v CERNu v Ženevě. V Dubně to byl *V. P. Dželepov* se spolupracovníky, kterým nedalo spát to, že při experimentech se objevovalo přece jen o něco víc katalyzovaných reakcí, než předvídala teorie. Když se pak zjistilo, že četnost těchto reakcí rychle stoupá při zahřátí na několik set stupňů Celsia (optimálně kolem 900 °C), vznikla zcela kuriózní situace. Jadernou syntézu při 900 °C sice nelze nazývat přímo „studenou“, ale ve srovnání s teplotami stamiliónů stupňů v tokamacích jsou to teploty nepatrné. Navíc jsou to teploty, které právě zajímají energetiky používající parní turbíny. Jak by však tak malá teplota mohla ovlivnit průběh jaderných reakcí, při nichž se uvolňují a pohlcují energie miliónkrát větší?

Vysvětlení podal tehdy mladý estonský fyzik z university v Tartu *E. A. Vesman*. Ukázal, že vytváří-li se mezomolekulární iont v obyčejné molekule deuteria, bude jeho vazbová energie velmi malá (kolem 2 eV pro mezomolekulu se dvěma deuterony, 0,7 eV pro mezomolekulu s jedním deuteronem a jedním tritonem). Tato energie se při vzniku iontu uvolní a předá se molekule deuteria, u níž vybudí rezonanční kmity s touž energií. Jde tedy o rezonanční mechanismus a relativně malou změnou teploty lze splnění rezonanční podmínky ovlivnit.

Následující podrobné výpočty, které provedli *S. S. Gerštejn* a *L. I. Ponomarev* v Dubně, a další výzkumy v Ústavu I. V. Kurčatova v Moskvě,

Ústavu jaderné fyziky B. M. Konstantinova v Leningradě, práce amerických, kanadských a švýcarských vědců na mezonových továrnách (urychlovačích produkujících miony) v Los Alamos, ve Vancouveru a v Ženevě ukázaly, že mion ve skutečnosti dokáže katalyzovat 100–200 reakcí syntézy.

A tak se začaly rodit nové technické projekty, které místo ohřívání plazmatu na vysoké teploty usilují o získání co největšího počtu mionů a překonání opět nových problémů, které se do cesty využití mionové katalýzy staví. Pokud by se zatím nepodařilo vytvořit čistý miokatalytický reaktor, bylo by alespoň možno využívat vznikající neutrony v hybridních reaktorech jaderných pro výrobu jaderných paliv nebo povzbuzení řetězové reakce.

Na jaře loňského roku vzrušila odbornou i širší veřejnost nová senzační zpráva o studené jaderné syntéze, tentokrát skutečně za pokojové teploty a s velmi jednoduchými prostředky. Přišli s ní anglický fyzikální chemik *Martin Fleischman* (rodem z Karlových Var) a *Stan Pons*, oba pracující na universitě v Utahu. Se svým objevem seznámili veřejnost kolem 1. dubna jednak v listu *Financial Times* (!), jednak na tiskové konferenci. Vezmeme-li v úvahu, že *Fleischman* je znám svým sklonem k žertování, není divu, že zpráva byla přijata s nedůvěrou.

Při elektrolýze těžké vody s příměsí hydroxidu LiOD v nádobě kalorimetru naměřili větší množství energie, než odpovídá příkonu elektrického zdroje. Jedna z elektrod byla palladiová, a protože palladium dychtivě absorbuje vodík, vědci vyslovili hypotézu, že uvnitř palladia dochází k tak vysokým lokálním koncentracím jader deuteria, že mezi nimi začínají probíhat reakce jaderné syntézy. Počet pozorovaných neutronů a tritonů, které by při těchto reakcích měly vznikat, však neodpovídal pozorované energii. Je sice možné, že uvnitř krystalové mřížky by mohla probíhat i reakce spojování dvou deutronů na částici alfa (jak jsme se již zmínili, tato reakce není ve volném plazmatu možná), ale ani to nebylo potvrzeno. Protože jev leží na pomezí fyzikální chemie, jaderné fyziky a fyziky pevných látek, vědci se zatím (v době, kdy vzniká tento článek) neshodli na jeho vysvětlení.

Ať již se zdrojem pozorované energie ukáže být jaderné reakce, chemické procesy nebo chyba experimentátorů, je to historie jistě poučná. Představa o tom, že bychom si mohli vytvořit jaderný reaktor doma v akváriu pomocí obyčejné baterky je jistě nezvyklá. Není však snadné být v těchto dobách prorokem, a tak najdete-li doma nebo na ulici kousek palladia, nezhazujte ho.

Matematická podstata genetických zákonitostí

RNDr. HELENA HUSOVÁ, CSc., PřF UK Praha

Genetika je — jak známo — nauka o dědičnosti a proměnlivosti. Otázky přenosu dědičných vlastností z „rodičů“ na potomstvo zajímaly učence odpradáвна. Skutečným zakladatelem vědecké genetiky byl však teprve moravský badatel *Johann Gregor Mendel* (1822—1884), který v r. 1865 odvodil z výsledků svých pokusů s křížením rostlin základní genetické zákonitosti.

V seriálu tří článků si ukážeme některé pravděpodobnostní a statistické výpočty v genetice. Nebudeme předpokládat u čtenáře žádné předběžné znalosti z biologie (i když se mnozí s genetikou možná již setkali ve škole) a potřebné pojmy si nejprve stručně objasníme.

Utváření dědičných vlastností organismu je řízeno tzv. *geny*. Každý z genů zodpovídá za určitý genetický (dědičný) znak. Dědičných znaků (barva květu, tvar plodu apod.) je u každého druhu organismu obrovské množství. Při řešení konkrétních problémů se však zpravidla omezujeme na jeden nebo několik z nich.

Soubor tzv. genetických informací nazýváme *genotypem*. V čem vlastně spočívá informace obsažená v genu, jak se projevuje navenek a jak se přenáší na potomstvo? Omezíme se pouze na nejtypičtější případ. (Názvy pojmů, které zde uvedeme, jsou řeckého původu a v biologické literatuře jsou všeobecně používány.)

Každý z uvažovaných genů má právě dvě možné formy existence, tzv. *alely*. Jedna z nich, plně funkční, je tzv. *úplně dominantní* nad druhou, nefunkční formou, kterou nazýváme *recesivní*. V genotypu organismu je každý gen zastoupen párově. Značíme-li dominantní alely velkými a recesivní alely malými latinskými písmeny, pak jedinec má vzhledem k nějakému genu *A* některý z těchto tří genotypů: *AA*, *Aa* nebo *aa* (genotypy *Aa*, *aA* považujeme za totožné).

Dominantnost neboli převaha „funkční“ alely *A* nad recesivní (ustupující) alelou *a* se uplatňuje ve vnějším, tzv. *fenotypovém* projevu příslušného genetického znaku. Recesivní alela se vzhledem ke své „nefunkčnosti“ navenek vůbec neprojeví. Osvětleme si to na jednoduchém příkladu. Dejme tomu, že přítomnost dominantní alely *A* v genotypu způsobuje červené zbarvení květu. Má-li tedy jedinec genotyp *AA* nebo alespoň *Aa*, je květ červený; je-li však genotyp *aa*, je květ bílý. Jedinci

s genotypem AA nebo Aa (zkráceně je někdy označujeme jako genotypy tvaru A —) mají tedy tentýž „dominantní“ fenotyp A , zatímco jedinci s genotypem aa mají odlišný, „recesivní“ fenotyp a .

K fenotypovému, navenek pozorovatelnému projevu ještě poznamenáme, že je určen nejen genotypem příslušného jedince, ale často zároveň i spolupůsobením vnějších faktorů. (Genotyp může např. podmiňovat vznik dědičné choroby, která se však projeví jen za určitých „příznivých“ vnějších podmínek.) Tuto okolnost však nebudeme do našich úvah zahrnovat, takže genotypem jedince bude jeho fenotyp vždy jednoznačně určen.

Přenos genetické informace z „rodičů“ na potomky se uskutečňuje následujícím způsobem. Dospělý jedinec vytváří pohlavní buňky (gamety), které obsahují vždy jen jednu z alel přítomných v jeho genotypu. Jedinec genotypu AA (resp. aa) tedy vytváří pouze gamety typu A (resp. a). Jedinec s genotypem Aa vytváří jednak gamety typu A , jednak typu a ; budeme vždy předpokládat, že oba typy gamet se zúčastňují oplození se stejnou pravděpodobností a nezávisle na typu gamet druhého z „rodičů“.

Potomek tedy získá od každého z rodičů po jedné alele každého genu. V jeho genotypu je tak každý gen zastoupen opět párově. Jedince s genotypem AA nebo aa , kteří tedy získali od obou rodičů tentýž typ alely, nazýváme *homozygotní*. Má-li jedinec genotyp Aa , tj. získal od rodičů alely různého typu, nazývá se *heterozygotní*. Je přitom lhostejné, která z alel byla předána otcovským a která mateřským organismem.

Nyní se již dostáváme k početním příkladům.

Pokud jsou oba „rodiče“ vzhledem ke sledovaným znakům homozygotní, je genotyp (a tedy i fenotyp) jejich potomků určen jednoznačně. Jestliže tomu tak není, může docházet k navzájem odlišným kombinacím rodičovských gamet; podle *Mendelových zákonů* dochází ke všem teoreticky možným kombinacím. Potomstvo se tak *štěpí* do několika genotypových, resp. fenotypových *tříd*. Úkolem je pak vypočítat tzv. *teoretické štěpné poměry*, vyjadřující poměr mezi pravděpodobnostmi výskytu jednotlivých tříd.

Mendel ve svých pokusech s hrachem sledoval mimo jiné tyto dva genetické znaky: tvar semen — kulatý (dominantní, A), hranatý (recesivní, a) a zbarvení — žluté (dominantní, B), zelené (recesivní, b). Pro zpěstření si budeme některé úvahy ilustrovat na těchto konkrétních znacích.

Příklad 1. Provádíme křížení typu

$$Aa \times Aa,$$

tj. oba „rodiče“ jsou genotypu Aa . Určíme teoretické genotypové a fenotypové štěpné poměry v jejich potomstvu.

Řešení. Podle uvedené teorie mohou oba typy gamet vznikat se stejnou pravděpodobností a kombinují se nezávisle na sobě. Potomek tedy získá alelu A od prvního z „rodičů“ s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, od druhého z rodičů nezávisle na tom rovněž s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Podle předpokladu nezávislosti obou těchto jevů je pravděpodobnost, že potomek je genotypu AA , rovna

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Podobně zjistíme, že náhodně vybraný potomek má genotyp Aa s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ (uvědomme si, že tato kombinace vzniká dvěma navzájem se vylučujícími stejně pravděpodobnými způsoby) a genotyp aa s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Nalezené výsledky vyjádříme ve tvaru teoretického genotypového štěpného poměru

$$1AA : 2Aa : 1aa.$$

Podle fenotypu se potomstvo štěpí do dvou tříd. Fenotypová třída A je sjednocením genotypových tříd AA a Aa , fenotypová třída a je totožná s genotypovou třídou aa . Fenotypový štěpný poměr je tedy

$$3A : 1a.$$

Pro naše účely postačí následující interpretace např. posledního z nalezených výsledků. Z rozsáhlého souboru rostlin hrachu, vzniklých křížením typu $Aa \times Aa$, vybírejme náhodně, nezávisle na sobě, jednotlivé rostliny. U každé z nich zjistíme tvar semena a zapíšeme si relativní četnost výskytu dosud vybraných rostlin s kulatými semeny (tj. počet rostlin s kulatými semeny dělený počtem všech dosud vybraných rostlin). Dostaneme posloupnost čísel, která bude kolísat kolem teoretické relativní četnosti, tj. kolem čísla $\frac{3}{4}$. Odchyly mezi teoretickou a empiricky nalezenou relativní četností budou mít (zpravidla) tendenci zmenšovat se tím více, čím větší počet rostlin bude prozkoumán. V tomto smyslu je možno pravděpodobnosti vypočtené v příkladu 1 interpretovat jako předpovědi relativních četností výskytu sledovaného jevu v rozsáhlých souborech.

Čtenáře, který se chce o této problematice i o řadě dalších otázek teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky dozvědět mnohem více, odkazují na doporučenou literaturu [1].

Při výpočtech štěpných poměrů vzhledem ke dvěma nebo více gene-

tickým znakům budeme vždy předpokládat, že potomstvo se štěpí vzhledem k těmto znakům nezávisle na sobě.

Příklad 2. Určeme teoretické štěpné poměry v potomstvu vzniklém křížením

$$AaBb \times AaBb$$

heterozygotních „rodičů“.

Řešení. Vzniká celkem devět genotypových tříd, vypsanych níže. Podle předpokladu nezávislosti vzniku jednotlivých kombinací vzhledem ke genům A , B je např. pravděpodobnost vzniku kombinace $AABB$ rovna součinu pravděpodobnosti kombinace AA a pravděpodobnosti kombinace BB , tedy $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Obdobně určíme pravděpodobnost výskytu ostatních genotypových tříd. Hledaný teoretický genotypový štěpný poměr je

$$1AABB : 2AABb : 1AAbb : 2AaBB : 4AaBb : 2Aabb : 1aaBB : 2aaBb : 1aabb.$$

Teoretický fenotypový štěpný poměr lze určit dvěma způsoby. Obou postupů jsme vlastně již užili a v pravděpodobnostních výpočtech se používají velmi často.

První způsob. Má-li mít potomek např. fenotyp AB , znamená to, že nastane právě jeden z těchto navzájem se vylučujících jevů: genotyp tohoto potomka je $AABB$, resp. $AABb$, resp. $AaBB$, resp. $AaBb$. Pravděpodobnost výskytu ve fenotypové třídě AB je tedy rovna součtu pravděpodobností výskytu v uvedených čtyřech genotypových třídách, tj.

$$p = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{4}{16} = \frac{9}{16}$$

Podobně pro ostatní tři fenotypové třídy. Hledaný štěpný poměr je tedy

$$9AB : 3Ab : 3aB : 1ab.$$

Druhý způsob. Pravděpodobnost výskytu fenotypu AB , tj. fenotypu A (vzhledem ke genu A) a zároveň fenotypu B (vzhledem ke genu B) je, podle předpokladu *nezávislosti* obou jevů, rovna součinu pravděpodobností výskytu fenotypu A a fenotypu B , tedy

$$p = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Docházíme ke stejným závěrům jako při prvním způsobu řešení.

Při jiných kombinacích genotypů „rodičů“ mohou být štěpné poměry v potomstvu zcela odlišné. Jeden takový případ si ukážeme, další dva se může čtenář pokusit vyřešit samostatně.

Příklad 3. Uvažujme křížení typu

$$Aa \times aa.$$

Určeme teoretické štěpné poměry v první a druhé generaci potomstva.

Řešení. V první generaci potomstva jsou teoretické štěpné poměry zřejmě

$$1Aa : 1aa, \text{ resp. } 1A : 1a$$

Druhá generace vzniká náhodným křížením jedinců první generace potomstva. S pravděpodobností $\frac{1}{4}$ tedy dochází ke křížení typu $aa \times aa$,

při němž vzniká pouze genotypová třída aa ; s pravděpodobností $\frac{1}{2}$

dochází ke křížení typu $Aa \times aa$ s teoretickým štěpným poměrem $1Aa : 1aa$; konečně s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ je křížení typu $Aa \times Aa$,

s teoretickým štěpným poměrem $1AA : 2Aa : 1aa$. Pravděpodobnosti výskytu genotypových tříd AA , Aa , aa jsou tedy po řadě

$$p_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = \frac{6}{16},$$

$$p_3 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16}.$$

Teoretický genotypový štěpný poměr je tedy

$$1AA : 6Aa : 9aa$$

a fenotypový $7A : 9a$.

Úloha 1. Podobně jako v příkladu 2 křížíme rostliny hrachu s kulatými žlutými semeny, avšak genotyp druhého z „rodičů“ je odlišný:

$$AaBb \times AABb$$

Určete pro tento typ křížení teoretické genotypové a fenotypové štěpné poměry v první generaci potomstva.

(Výsledek: vzniká pouze šest genotypových tříd v poměru (po vykrácení číslem 2): $1AABB : 2AABb : 1AAbb : 1AaBB : 2AaBb : 1Aabb$ a dvě fenotypové třídy v poměru $3AB : 1Ab$.)

Úloha 2. Uvažujme „rodičovskou“ dvojici s genotypy $AaBb$ a $aabb$. Určete teoretické fenotypové štěpné poměry v první a druhé generaci potomstva.

(Výsledek: $1AA : 1Ab : 1aB : 1ab$ v první generaci z tohoto křížení;

49AB : 63Ab : 63aB : 8lab v následující generaci po náhodném křížení jedinců předchozí generace).

Zobecněme si ještě výsledky příkladu 2.

Úloha 3. Uvažujme obecně n znaků a nechť oba rodiče jsou vůči těmto znakům heterozygotní. Ukažte, že v první generaci potomstva vzniká teoreticky 3^n genotypových a 2^n fenotypových tříd. Rozepište teoretické štěpné poměry pro $n = 3$.

Podstatou *Mendelových* objevů je zejména to, že rozpoznal párové založení genů a rozlišil homozygotní jedince AA od heterozygotních Aa . V genetických studiích jeho předchůdců byl popisován v podstatě jen vnější, tj. fenotypový projev jedinců. Příklady, které jsme si uvedli, snad alespoň trochu dávají představu, jak různorodé štěpné poměry vznikají v populacích, kde jsou genotypy rodičů promíchány. To, že Mendel dokázal utřídit zpočátku velmi nepřehledné poznatky svých předchůdců, rozpoznat a zformulovat správné hypotézy a posléze je v mnoha systematicky zakládaných pokusech ověřit, bylo možno jen díky jeho matematickému vzdělání.

Následující příspěvek bude věnován tzv. rodokmenovým metodám. Bohatý materiál k této i další genetické problematice nalezne čtenář v doporučené literatuře [2].

Doporučená literatura :

[1] Fabian, F.: Z teorie pravděpodobnosti a Matematická statistika. Kapitoly 8 a 9 v knize Havlíček a kol.: Cesty moderní matematiky. Praha, Horizont 1976.

[2] Sokolovskaja, B. Ch., Pikálek, P.: Genetika v příkladech. Praha, SPN 1983.

Chtěla bych na tomto místě poděkovat prof. ing. Františku Fabianovi, CSc. a doc. RNDr. Petru Pikálkovi, CSc., za cenné konzultace, které mi ke genetické problematice a k některým otázkám aplikace statistických metod v biologii poskytli.

Řešení algebrogramů ze str. 217

a) $62\,403 + 62\,403 + 62\,403 = 187\,209$

$$81\,703 + 81\,703 + 81\,703 = 245\,109$$

b) $872\,161 + 62\,104 = 934\,265$

$$862\,171 + 72\,104 = 934\,275$$

c) $869\,631 + 2\,454 + 68\,696 = 940\,781$

$$869\,651 + 2\,434 + 68\,696 = 940\,781$$

Jadrová energetika a životné prostredie

Prof. dr. JÁN CHRAPAN, DrSc., VVTŠ-ČSSP, Liptovský Mikuláš

Význam jadrovej energetiky ako zdroja ionizujúceho žiarenia, ohrozujúceho životné prostredie, sa v súčasnosti preceňuje. Verejnosť žije v domnení, že už dnes je jadrová energetika významným zdrojom rádioaktívneho znečistenia životného prostredia. Napríklad prieskum uskutočnený v USA začiatkom osemdesiatych rokov ukázal, že za najnebezpečnejšiu činnosť považujú respondenti prácu spojenú s jadrovou energetikou. Štatistiky však ukazujú, že na jeden prípad úmrtia následkom práce v jadrovej energetike pripadá 1500 úmrtí v dôsledku fajčenia. Riziko, ktoré prináša jadrová energetika, pozostáva z rizika od normálnej prevádzky jadrových reaktorov, z rizika možnej nehody a z rizika, súvisiaceho s ťažbou a spracovaním jadrového paliva a odkladaním jadrového palivového odpadu. Do polovice roka 1988 bolo pri prevádzke jadrových reaktorov známych okolo 200 mimoriadnych udalostí. O troch z nich bude tento článok.

Trochu dozimetrie

Zavedieme základné pojmy, ktoré sa používajú na vyjadrovanie vplyvu zdrojov ionizujúceho žiarenia na prírodu a človeka.

Mierou schopnosti zdroja emitovať rádioaktívne žiarenie nazývame jeho *aktivitou* (A). Je to podiel stredného počtu (dN) rádioaktívnych premien za časový interval (dt) a tohoto časového intervalu

$$A = \frac{dN}{dt}. \quad \text{Bq}$$

Jedna premena za jednu sekundu predstavuje aktivitu jeden *becquerel* (Bq). Z aktivity je odvodená objemová $\left(\frac{A}{V}\right)$ a plošná aktivita $\left(\frac{A}{S}\right)$.

Pole ionizujúceho žiarenia (priestor dosahu žiarenia rádioaktívneho žiariča) je definované *fluenciou* (Φ)

$$\Phi = \frac{dN}{dS}, \quad \text{m}^{-2}$$

kde dN je počet častíc, ktoré vstúpili do gule, ktorej hlavný rez má plošný obsah dS .

Časová zmena fluencie častíc sa volá *hustota toku častíc* φ , alebo tiež *fluenčný príkon*

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

Podobné veličiny sa zavádzajú aj pre energiu prenesenú plochou a jej hustotu.

Celkové pôsobenie jadrového žiarenia na látku sa vystihuje pojmom *dávka* (D). Je to podiel strednej energie dE odovzdanej ionizujúcim žiarením v objemovom elemente látky s hmotnosťou dm :

$$D = \frac{d\bar{E}}{dm} \quad \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Jednotkou dávky je jeden *gray*, $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J} \cdot 1 \text{ kg}^{-1}$.

Žiarenie, ktoré samo neionizuje, napríklad neutróny, ionizuje nepriamo — prechodom látkovým prostredím vyvoláva v ňom sekundárne žiarenie, ktoré už má schopnosť ionizovať. V takomto prípade primárne žiarenie interaguje na inom mieste, nie tam, kde sekundárne častice odovzdávajú svoju energiu ionizovaním prostredia. Pre takéto prípady sa zaviedla veličina *kerma* (K) definovaná v danom mieste prostredia ako podiel súčtu počiatočných kinetických energií (dE_k) všetkých nabitých častíc, ktoré uvoľnilo nepriamo ionizujúce žiarenie v objemovom elemente látky k hmotnosti tohto elementu (dm):

$$K = \frac{dE_k}{dm}$$

Vidíme, že kerma (K) je definovaná obdobne ako dávka (D). V čom sa tieto dve veličiny líšia? Predstavme si, že do elementárneho objemu prostredia s hmotnosťou dm vstupuje neionizujúca častica, ktorá tu vytvára sekundárne, elektricky nabité častice. Dávka bude predstavovať pomer tej časti energie, ktorý ionizujúce častice odovzdajú v uvažovanom elemente prostredia k hmotnosti tohto elementu. Naproti tomu kerma v tomto mieste udáva podiel súčtu počiatočných kinetických energií týchto elektricky nabitých sekundárnych častíc a hmotnosti dm elementu látky na dotyčnom mieste. Pri kerme nie je dôležité, koľko energie stratili jednotlivé častice v danom objeme prostredia. Obvykle je preto kerma väčšia ako dávka. Táto sa vyrovná kerme, keď je dolet sekundárnych častíc pomerne krátky.

Pre vystihnutie biologického účinku dávky sa zavádza *relatívna biologická účinnosť*. Je to bezrozmerné číslo, ktorým treba násobiť dávku, aby sa vystihol jej biologický účinok. Jeho hodnota je typická pre rôzne situácie.

Pri radiačnej ochrane sa zavádza pojem *dávkový ekvivalent* (H). Je to súčin dávky a *činiteľa akosti* (Q). Charakterizuje makroskopický bio-

logický účinok ionizujúceho žiarenia, ktoré dávku spôsobilo. Činiteľ Q je bezrozmerné číslo a nadobúda rôzne hodnoty od 1 pre fotóny a energetické elektróny až po 25 pre ľahké ióny s neznámym energetickým spektrom a pre rýchle neutróny. Keďže koeficient Q nemá rozmer, je dávkový ekvivalent opäť udávaný v $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$. Vplyv ostatných činiteľov, ovplyvňujúcich účinky radiačnej ochrany, vystihuje koeficient N , ktorý sa obvykle považuje rovný 1. Preto:

$$H = Q \cdot D \cdot N$$

Jednotkou dávkového ekvivalentu (H) je jeden *sivert* (Sv.) Dávkový ekvivalent odpovedá pravdepodobnosti, s akou sa vyskytnú účinky krátkodobého ožiarenia až neskôr po ožiarení. Nie je určený pre vysti-hnutie okamžitých účinkov ožiarenia. Dlhodobý účinok ožiarenia ľudského organizmu vyjadruje „*úväzok dávkového ekvivalentu*“. Je to príkon dávkového ekvivalentu po dobu 50 rokov od prijatia rádionuklidu organizmom. Súvisí s vnútornou kontamináciou organizmu. Príkon dávkového ekvivalentu je $\frac{dH}{dt}$.

Nešťastie nechodí po horách . . .

. . . ale po ľuďoch. Nemá toto príslovie aj preto pravdu, že si nešťastie spôsobujú ľudia sami, často svojou ľahkomyselnosťou a neopatrnosťou? S čím väčšou energiou ľudia pri svojej činnosti narábajú, tým má ich neopatrnosť zhubnejšie následky. Dnes najkoncentrovanejšou, a teda potenciálne najnebezpečnejšou formou energie je jadrová energia. Obzvlášť nebezpečná je pre jej koncentrácie v energetických reaktoroch jadrových elektrární. Už v úvode sme povedali, že táto skutočnosť vedie k domnienke, že práve jadrové elektrárne sú najrizikovejšími pracoviskami, a to obávanéjšími ako bane. Vedomie nebezpečia, ktoré predstavuje nahromadená jadrová energia, viedlo už od prvopočiatku (prvá jadrová elektráreň s výkonom 5 MW začala pracovať 27. 6. 1954 v *Obninsku*, ZSSR) k mimoriadne precíznym bezpečnostným opatreniam ako v konštrukčných detailoch, navrhovaných s vysokým koeficientom bezpečnosti, tak aj v riadiacich a zabezpečovacích systémoch, ktorých aktívne prvky sa väčšinou zdvojujú.

Prvé varovanie prišlo v októbri 1957 z Veľkej Británie, kde sa v jadrovej elektrárni vo *Windscale* poškodil následkom požiaru ochranný betónový obal reaktora a do okolia unikli rádioaktívne látky s úhrnnou aktivitou asi 10^{16} Bq. Mlieko kráv, ktoré sa pásli v okruhu 10 km od reaktora, javilo aktivitu 30 kBq na liter a ešte týždeň po nehode sa namerala aktivita mlieka získaného 100 km od miesta nešťastia v hodnote 1 kBq $\cdot \text{l}^{-1}$ (prípustné je, aby dospelý človek pil počas jedného roka tekutiny s aktivitou rádovo 10^{-2} Bq $\cdot \text{l}^{-1}$).

Ľudstvo sa poučilo. Konštruktéri vydumali ďalšie bezpečnostné

opatrenia a roky utekali. Zdalo sa, že technika je neporaziteľná, živel spútaný a prinútený pokojne pracovať. Takémuto sebaklamu podľahlo ľudstvo už neraz, nerátajúc so zradou či lstou. Rub úspešnej zrady či lsti je čias nepozornosť, nedôslednosť, nepremyslené rozhodnutie.

Ako to bolo 28. 3. 1979 na druhom bloku jadrovej elektrárne *Three Mils Island 2* v USA? Vonku bola ešte tma, keď štyria operátori, sledujúci viac ako 1200 rôznych signálnych svetiel konštatovali pokojný chod agregátov. Zrazu, tesne po 4. hodine spozorovali pokles prívodu vody ku parogenerátorom. Turbína sa zastavila. Generátor prestal dodávať elektrickú energiu, no jadrová energia sa v reaktore naďalej uvoľňovala. Preto v primárnom okruhu stúpala teplota a tlak. Tým vytlačené chladivo unikalo do kompenzačných priestorov. Avšak tieto nestačili všetko toto chladivo pojať. Po 3 sekundách automatika prerušila činnosť reaktora. Na digitálnych hodinách vo veľine naskočil údaj 04,03, keď obsluha vyčítala z panelov, že chladivo preniklo poistným ventilom do ochranného obalu primárneho okruhu. Dezorientovaná obsluha ohlásila poruchu a s napätím očakávala ďalšie príkazy. Po 11 minútach sa pretrhla poistná membrána nádrže chladiva. Okamžite sa začal plniť príkaz: prečerpávať pretekajúce chladivo primárneho okruhu, teda nebezpečný rádioaktívny materiál, do bazénu v pomocnej budove reaktora. Bazén nestačil a chladivo vytekalo na podlahu. Do 06,00 uniklo z primárneho okruhu 570 m³ vody. Nebezpečie však nepominulo, naopak v reaktorovej nádobe sa začala tvoriť vodíková bublina z teplom rozloženej vody. 07,00 bol vyhlásený výnimočný stav a boli informované miestne úrady a federálna vláda. V priestoroch okolo reaktorovej haly začal nebezpečne stúpať príkon dávkového ekvivalentu (H). Keď v riadiacej miestnosti nadobudol hodnotu 80 mSv . h⁻¹, hermeticky uzavreli ochranný obal reaktora. Tým sa však vylúčila možnosť znižovať v ňom tlak vypúšťaním hromadiacich sa plynov. Tlak pomaly stúpал. Po 14. hodine zapol havarijný systém ochladzujúce sprchovanie reaktora. Vodíková bublina znemožnila prístup chladiva do aktívnej zóny reaktora, ktorá už síce nepracovala, ale stále sa hriala energiou rozpadu štiepných produktov. Hrozilo jej úplné roztavenie. Možná však bola aj ďalšia záhuba — mohla vybuchnúť vodíková bublina, ktorú tvorilo 460 kg H₂ a ktorá predstavovala 3000 kg ekvivalentu TNT. Kritický tlak sa nakoniec rozhodli znížiť vypúšťaním rádioaktívnych plynov do ovzdušia. Takto sa podarilo do 29. 3. vodíkovú bublinu zlikvidovať. Aktívneho jódu pritom uniklo len asi 600 GBq, lebo komíny boli vybavené jódoými filtrami. Vypustené aktívne plyny predstavovali aktivitu celkove asi 4 . 10⁸ GBq. V okruhu 50 km od elektrárne evakuovali 63 000 obyvateľov. Dobrovoľne odišlo ďalších 144 400 ľudí.

Príčiny a priebeh havárie aj v tomto prípade slúžili ako cenný zdroj poučenia. Pôvodne nepodstatná porucha v sekundárnom obvode, násos-

bená nevhodným konštrukčným riešením niektorých prvkov reaktora a chybami, či nerozhodnosťou obsluhy, takmer prerástla do tragédie.

Ďalšie nešťastie nedalo na seba čakať 22 rokov. Prišlo 25. 4. 1986. Tentoraz na opačnej pologuli v ZSSR v *Černobyle*. Černobyl bol súčasne aj experiment globálneho dosahu. Experiment, ktorý by ľudstvo nemalo zažiť, ale ktorý poskytol veľa cenných informácií.

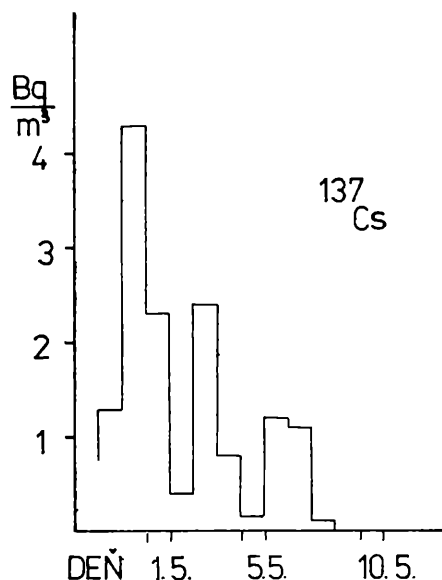
O príčinách a priebehu havárie heterogénneho reaktora na obohatený urán, moderovaného grafitom a chladeného vodou, ktorý nemá mimo ZSSR konštrukčnú obdobu (až na reaktor v *Hanforde* USA na výrobu plutónia pre vojenské účely), sa veľa písalo. Preto sa sústredíme len na najzávažnejšie okolnosti vyslovené jednou vetou: Podcenenie problému zapríčinené ľahkomyselnou nedbalosťou, vyvolanou nekomplexným pohľadom a rutinou; neoptimálne konanie pod tlakom krízovej situácie.

Začalo sa to veľmi nevinne, ba stimulom ku katastrofe bola snaha zvýšiť bezpečnosť prevádzky jadrových elektrární. Prax nastolila problém: zabezpečiť na počiatku prípadnej havárie, kým sa ešte neaktivovali pomocné zdroje, neprerušenú dodávku elektrickej energie agregátom obsluhujúcim reaktor. Vznikla myšlienka využiť energiu rotora turbogenerátora, danú výrazom $W = 0,5 J\omega^2$, kde veľký moment zotrvačnosti (J) a vysoká uhlová frekvencia (ω) by mali túto úlohu splniť. Zo vzťahu pre okamžité indukované napätie $E_i = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t$ vidíme, že s poklesom otáčok rotora (ω) klesá aj E_i (počet závitov N a ich plocha S v generátore sa nemenia), a tak treba použiť regulátor napätia. Na odskúšanie tejto situácie vybrali černobyľskú jadrovú elektrárňu, na ktorej štvrtom bloku bola na 25. 4. 1986 plánovaná pravidelná technická prehliadka s vypnutím reaktora. Prikázaný experiment sa mal vykonať pri polovičnom výkone reaktora, kedy sa mala simulovať havária — prerušiť prívod pary do turbíny. Krátko po 14.00 hodine žiadal dispečer, aby blok dodával elektrickú energiu nerušene až do nočných hodín. Pracovníci elektrárne stáli pred otázkou: Vykonať experiment podľa dopredu premysleného plánu s pripravenými ľuďmi alebo vyhovieť požiadavke národného hospodárstva? Prijali tretie, žiaľ, ako sa ukázalo, silácke riešenie — odložili experiment na noc, kedy bola prítomná len minimálna obsluha, ktorá nebola dokonale oboznámená s podmienkami experimentu. Hneď na začiatku operátor chybné nastavil parametre znižovania výkonu reaktora. Výkon klesol tak silne, že reaktor začal pracovať nepravidelne. V takejto situácii sa nedá nič robiť, len reaktor zastaviť. To by ale znemožnilo vykonať experiment v plnom plánovanom rozsahu, ktorý vyžadoval niekoľkokrát za sebou rozkrútiť zastavený turbogenerátor. Administratívne miesta rozhodli výkon reaktora opäť zvýšiť a tým ho vyviesť z nestabilného režimu práce. Bolo to už 26. 4. 1986 o 01.00 hodine. Aby sa predišlo samočinnému odstaveniu reaktora systémom haváriovej ochrany, vypla obsluha, vedená snahou stoj čo stoj vykonať experiment, tento systém a zvyš-

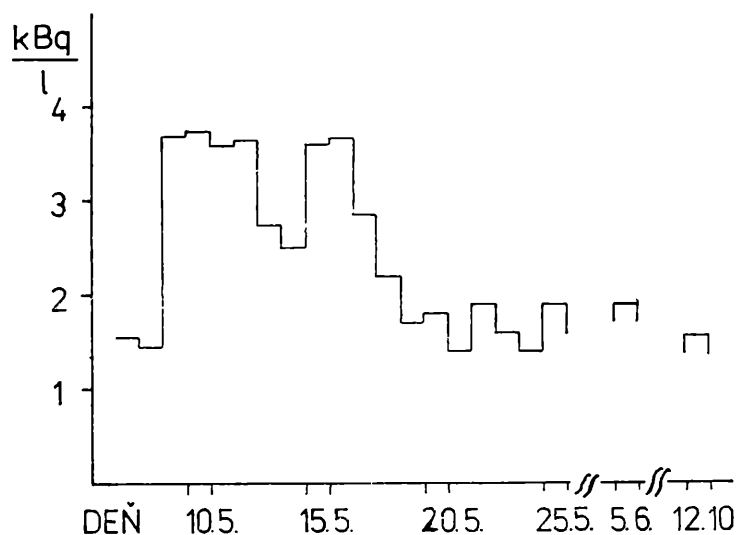
vala výkon (ktorý stále kolísal) vyťahovaním regulačných tyčí z aktívnej zóny reaktora. Odborníci vedia, že v takýchto podmienkach sa reaktor dostáva do tzv. jódovej jamy a hrozí, že sa vymkne spod kontroly. Obsluha, zameraná na experiment, si vážnosť situácie neuvedomila, ba navyiac v obave, že experiment znemožní ochrana reaktora reagujúca na prípadné prerušenie dodávky pary do turbíny, vypla aj tento ochranný systém. O niekoľko minút prerušili prívod pary a pristúpili k plánovanému experimentu. Dňa 26. 4. 1986 o 01,23 h výkon nestabilne pracujúceho reaktora desaťnásobne prevýšil pracovnú hodnotu. Obsluha, ktorá už len ručne riadila reaktor, okamžite spustila všetky regulačné tyče do rozohriatej aktívnej zóny. Tento zásah bez súčasného účinného odoberania tepla už nemohol zabrániť katastrofe. Trubice, v ktorých prúdila chladiaca voda pod tlakom 7 MPa, popraskali, voda prišla do styku so zirkónom zo zliatin obalov palivových tyčí a pri teplote nad 1100 K sa prudko rozkladala na vodík a kyslík. Výbušná zmes týchto dvoch plynov dovršila dielo skazy. Výbuch v reaktore vážne poškodil systém základného chladenia a celú budovu. Množstvo tepla stačilo na zapálenie grafitových blokov. Regulačnými tyčami a zmenou usporiadania aktívnej zóny po výbuchu sa síce prerušila reťazová štiepna reakcia, ale príkon energie z rozpadu štiepných produktov sa neznížil a navyše časť z nich výbuch rozmetal po okolí a vyniesol až 1200 m nad povrch do atmosféry. Vytvorili sa podmienky pre šírenie rádioaktívneho mraku. Tento za dva dni prenikol vo smere prúdenia vzduchu nad Švédsko, kde ho aj prví identifikovali. Po zmene smeru vetra 29. 4. sa dostal až na naše územie a prenikol až nad Taliansko a Alpy. Po 29. 4. bol spad černobyľského pôvodu zistený nad Veľkou Britániou. Celkove uniklo asi $1,8 \cdot 10^{18}$ Bq štiepných produktov. V Alpách, ktoré boli spадom najviac postihnuté, miestami dosahovala aktivita zemského povrchu až $120 \text{ kBq} \cdot \text{m}^{-2}$. Priebeh objemovej aktivity vzduchu od ^{131}Cs v prízemnej vrstve atmosféry v Bratislave podľa meraní pracovníkov Katedry jadrovej fyziky MFF UK je na obr. 1. Mliekom môže človek konzumovať spад už 24 hodín po jeho uložení. Najvyššiu aktivitu mlieka namerali v Rakúsku a v Taliansku. Dosahovala $6 \text{ kBq} \cdot \text{l}^{-1}$. V kravskom mlieku zo dňa 27. 4. sme namerali $0,04 \text{ kBq} \cdot \text{l}^{-1}$, zo dňa 5. 5. to už bolo $0,36 \text{ kBq} \cdot \text{l}^{-1}$, ale z 15. 5. už len $0,12 \text{ kBq} \cdot \text{l}^{-1}$. Neskôr sa hladina ustálila na pôvodnej hodnote zo dňa 27. 4. 1986. V kravskom mlieku sa na našom území nameralo najviac $0,5 \text{ kBq} \cdot \text{l}^{-1}$.

Dažde, ktoré u nás po 8.5. 1986 zmývali výpadok, uložený na povrchu rastlín a zeme, vyvolali zvýšenie aktivity pripovrchových vôd. V konkrétnej lokalite (Vitálišovce pri Liptovskom Mikuláši) sme namerali hodnoty, ktoré sú na obr. 2.

Meteorologická situácia nad územím ČSSR spôsobila, že spад tu bol pomerne malý. Priemerná hodnota aktivity povrchu zeme od ^{131}Cs sa pohybovala okolo $4 \text{ kBq} \cdot \text{m}^{-2}$. Aktivita bežných potravín a čerstvej



Obr: 1



Obr: 2

zeleniny nepresahovala limit, uznávaný v krajinách EHS, a to $0,6 \text{ kBq} \cdot \text{kg}^{-1}$. Obsah ^{131}I sa u syrov znižoval (s polčasom premeny 8,06 dní) ich skladovaním). Vypočítalo sa, že hodnota dávkového ekvivalentu z vonkajšieho ožiarovania na jedného dospelého občana bola počas jedného roka po havárii $H = 0,12 \text{ mSv}$. Inhaláciou a ingesciou prijaté vnútorné ožiarovanie bolo $0,32 \text{ mSv}$ za rok. Pritom medzná hodnota dávkového ekvivalentu pre radového občana je podľa súčasných noriem v prípade rovnomerného ožiarovania celého tela (čo v praxi nikdy nie je) $5 \text{ mSv} \cdot \text{r}^{-1}$.

Havária v Černobyle bola prvá, ktorá si vyžiadala priame obete na ľudských životoch. Uvážme, že elektrárne v Černobyle produkovala každú sekundu 4 GJ elektrickej energie. Rovnaké množstvo energie, vyrobené akoukoľvek inou cestou si tiež žiada svoje obete. Napríklad prevádzka tepelných elektrární si vyžaduje obete v uhoľných baniach, pri doprave paliva a obete, spôsobené znečisťovaním ovzdušia a krajiny. Aj priehrada vodnej elektrárne sa za nepredvídaných okolností stáva nebezpečím. Najväčším nebezpečím pre ľudstvo je však vojenský jadrový potenciál. Čo je niekoľko desiatok ľudí, ktorí zahynuli pri haváriách rôzneho druhu v jadrovej energetike voči 80 000 ľudí, ktorí prišli o život výbuchom jedinej jadrovej bomby v Hirošime!

Literatúra

- [1] ŠEDA, J. a kol.: Dozimetrie ionizujúceho záření, SNTL/ALFA, Praha 1983.
- [2] FLOREK, M — CHUDÝ, M.: Prečo bola havária v Černobyle? Pas 9, 1988, s. 8—12.
- [3] JANDL, J.—PETR, I.: Ionizující záření v životním prostředí, SNTL Praha 1988.



Muž vedy a činu

Pytagoras zo Samu
(asi 570 — 496 pred n. l.)

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topoľčany

*„Nepoznám žiadneho iného človeka,
ktorý by zapôsobil na ľudské myslenie
tak silno ako Pytagoras.“*

Bertrand Russell

(anglický filozof, logik, matematik,
sociológ, 1872—1970)

Ktorý poznatok z matematiky je asi najdôležitejší? Ťažká a nejasná otázka. Ktorá geometrická veta patrí medzi základné charakteristiky priestoru a číselne vystihuje jeden zo základných matematických zákonov? Neľahké je pýtať sa, lepšie je prezradiť: *Pytagorova veta!*

Skoro každý ju pozná. Už pred 4000 rokmi vedeli v Babylóne, že „posvätné trojuholníky“ napr. so stranami 3, 4, 5 alebo 5, 12, 13 dielov vytvárajú oproti najdlhšej strane pravý uhol. Pytagoras poznatok zo-všeobecnil: Pre každý trojuholník s dĺžkami strán a , b , c platí: Ak pre strany platí $a^2 + b^2 = c^2$, tak trojuholník je pravouhlý s pravým uhlom oproti strane c . Vedel aj, že platí i veta obrátená: Ak trojuholník so stranami a , b , c je pravouhlý s pravým uhlom oproti strane c , tak platí $a^2 + b^2 = c^2$. Túto vetu nazývame Pytagorova veta. V škole ste ju počuli takto: Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad oboma odvesnami. V Pytagorovej škole asi vedeli jeho žiaci tieto vety aj dokázať. Viete to aj vy? Súčasná matematika pozná viac ako 50 rôznych dôkazov slávnej Pytagorovej vety.

Dodnes sa prirodzeným číslam a , b , c , pre ktoré platí $a^2 + b^2 = c^2$ hovorí „pytagorejské“. Pytagoras odhalil, že takéto čísla možno vytvárať podľa vzťahov $a = 2n + 1$, $b = 2n^2 + 2n$, $c = 2n^2 + 2n + 1$, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo. Vtedy bude číslo a vždy nepárne. Pre párne a vedel určovať pytagorejské čísla Platón takto: $a = 2n$, $b = n^2 - 1$, $c = n^2 + 1$, kde $n > 1$. Spôsobov, ako určovať pytagorejské

čísla, je celý rad. Napríklad: $c = x^2 + y^2$, $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, kde za x , y zvolíme dve nesúdeliteľné prirodzené čísla $x > y$. Niektoré trojice pytagorejských čísel majú aj ďalšie zaujímavé vlastnosti.

O Pytagorovom živote nevieme veľa a správy sú neisté. Narodil sa na ostrove *Samos* pri brehoch Malej Ázie. Veľa cestoval, bol v Egypte, Babylóne, Perzii a možno aj v Indii. Usadil sa v *Krotone* na juhu Talianska. Tam založil filozofickú školu, náboženský spolok i politickú organizáciu v jednom celku. Príslušníci sa neskôr nazývali *pytagorejci*. Verili v prevetľovanie duší, ostro cvičili pamäť i disciplínu, rešpektovali učiteľskú autoritu a pečať tajomstva. Venovali sa skúmaniu svedomia. Duševná práca, zdržanlivosť, striedmosť a sebaovládanie boli pre nich cestou a cieľom bolo poznanie harmónie kozmu. Zamýšľali sa nad spôsobom života, hľadali správne miery v rôznych ľudských činnostiach. Nevie sa, čo odhalil Pytagoras sám a čo príslušníci jeho školy — patriarchálneho aristokratického spolku filozofov, mystikov, matematikov. Celé hnutie zaniklo okolo rokov 460—400 pred naším letopočtom.

Pytagoras vo svojej škole poznal radosť z matematického objavu. Nadchli ho večné zákonitosti geometrie i aritmetiky. Vycítil, že prostredníctvom čísel sa dozvedáme skutočnú pravdu. Objavil matematiku ako metódu argumentácie a logického odvodenia. On a jeho žiaci odhalili až neskutočnú harmóniu celočíselných vzťahov v štruktúre ich sveta. Mysticismus im prerástol do tvrdenia, že prirodzené čísla a vzťahy medzi nimi sú mierou všetkých vecí. Svet prirodzených čísel pochopili ako riadiaci princíp vesmíru. Videli čísla všade, dokonalé a absolútne. Harmóniu vesmíru pozorovali v harmónii čísel. S pomocou čísel vyjadrovali napríklad aj vzťahy medzi ľuďmi; 3 — manželstvo, 4 — spravodlivosť, 10 — priateľstvo a pod. Pravdou je, že to s úctou k tajomstvám číselného sveta prehrali až do mystiky a mágie. Napriek tomu, pytagorejci vytvorili zaujímavé číselné pojmy a odhalili ich vlastnosti. Napríklad: *Dokonalé čísla* sú také prirodzené čísla, ktoré sa rovnajú súčtu svojich vlastných deliteľov. Napr. $6 = 1 + 2 + 3$ alebo $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Aj čísla 496 a 8 128 sú dokonalé. Viete, kedy sú čísla *spriaznené*? Ak sa rovnajú navzájom súčtu vlastných deliteľov toho druhého. Napr. 220 a 284. Overte si to! Zoskupovaním kamienkov do tvaru trojuholníkov, štvorcov, päťuholníkov a pod. vedeli šikovne operovať s figurálnymi číslami. To im umožnilo sčítovať aj takéto rady čísel:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2},$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \text{ a podobne.}$$

Takýmito poznatkami prispeli k prvej matematickej teórii čísel.

Pytagorejci objavili číselné pomery pre základné hudobné akordy.

Vedeli, že pomer dĺžky struny a výšky tónu možno vyjadriť v pomere prirodzených čísel (2 : 1 oktáva, 3 : 2 kvinta, 4 : 3 kvarta). V pytagorejskom bratstve pestovali nielen teóriu hudby a matematiku, ale aj astronómiu, medicínu a filozofiu. Hlásali, že Zem má tvar gule a otáča sa raz okolo svojej osi za deň. Z geometrických poznatkov im pripisujú znalosť troch či štyroch pravidelných telies (štvorsten, kocka, osemsten, dvanásťsten), poznanie súčtu uhlov v trojuholníku, rozdelenie úsečky v pomere zlatého rezu, štúdium pravidelných mnohouholníkov, výsledky v teórii priemerov (aritmetický, geometrický, harmonický), začiatky učenia o rovnobežkách. Geometriu podriaďovali aritmetike uctievaných celých čísel.

Zaujímavou skutočnosťou je fakt, že pytagorejci vyvrátili svoju základnú tézu o všemocnosti prirodzených čísel. Odhalili, že $\sqrt{2}$ sa nedá vyjadriť ako podiel dvoch prirodzených čísel, to znamená, že nestačia ani na vyjadrenie uhlopriečky štvorca pomocou jeho strany. Objavili nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca. Vlastnou metódou prerušili svoje ilúzie.

Pytagoras zomrel vo vysokom veku v *Metaponte*. Zo svojej teórie sám nič nezapísal. Myšlienky šírili jeho žiaci (Archytas, Hippiasos, Filolaos a iní). O Pytagorovi písali Diogenes, Isokrates, Proklos, ale aj Platón a Aristoteles.

! Niektoré myšlienky, ktoré sa pripisujú Pytagorovi, sú aj dnes zaujímavé a možno budú pre vás podnetné:

„Pravé a dokonalé priateľstvo znamená spojiť veľa vecí a tiel v jedno srdce a jediného ducha.“

„Úlohou výchovy je prebudiť v človeku génia.“

„Rob veľké veci bez sľubov.“

„Najkratšie odpovede — áno a nie — vyžadujú najdlhšie rozmýšľanie.“

„Nerob to, čo nepoznáš. Nauč sa všetko, čo potrebuješ poznať, a budeš mať spokojný život.“

„Mlč, alebo povedz niečo, čo je lepšie ako mlčať.“

Možno lenivcom, spoliehajúcim sa na zázraky, určil Pytagoras slová: „Boh dal človeku dve ruky, aby ho neobťažoval s každou maličkosťou.“

Posledným citátom nech sú slová, ktoré vložil Diogenes Laertios do úst Pytagora: „Život sa podobá zhromaždeniu pri hrách. Jedni tam prichádzajú, aby sa pretekali, druhí za obchodom, tretí, najlepší, ako diváci. Tak sa v živote jedni, ľudia otrockí, rodia ako lovci slávy a bohatstva a druhí, filozofi, ako lovci pravdy.“

Pre osvieženie našich spomienok aspoň jedna jednoduchá úloha: Keď sa spýtali Pytagora, koľko má žiakov, odpovedal: Polovica z nich sa učí len matematiku, štvrtina študuje len prírodovedu, sedmina iba mlčanlivo premýšľa a zvyšok sú tri dievčatá. Koľko žiakov mal Pytagoras?

Vážna matematika a mystika čísel tvorili u pytagorejcov zjednotenie filozofie a náboženstva, ktoré zdôrazňovalo kvantitatívne stránky javov. Stretli sa dve tendencie — vedecká a mysticko-politická. Aj cez rozpory, ktoré toto spojenie prinieslo, požiadavky po presnosti a jasnosti úsudkov zvýrazňovali kult rozumu, ukazovali myslenie ako cnosť a odhaľovali túžbu poznávať pravú povahu vecí. Matematika sa začala odvtedy dôslednejšie budovať ako deduktívna veda zdôvodňujúca svoje výsledky. Pytagorovo meno zostane zapísané do základov matematickej kultúry civilizovaného ľudstva.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Řešení úloh ze 4. čísla

Vzpomínka na prázdniny

Jízdní řád zněl takto:

Lipno	9 ⁰⁰	10 ⁵⁰	14 ¹⁰	17 ³⁰
Frymburk	9 ³⁰	11 ²⁰	14 ⁴⁰	18 ⁰⁰
Lojzovy Paseky	9 ⁴⁵	11 ³⁵	14 ⁵⁵	18 ¹⁵
Černá v Pošumaví	10 ³⁰	12 ²⁰	15 ⁴⁰	19 ⁰⁰
Jenišov	10 ⁵⁰	12 ⁴⁰	16 ⁰⁰	19 ²⁰
Horní Planá	11 ⁰⁰	12 ⁵⁰	16 ¹⁰	19 ³⁰

Při doplňování časových údajů se vychází z toho, že při každé plavbě jsou časové intervaly mezi týmiž přístavišti stejné.

-jm-

Nákladní auta v horském terénu

Podle podmínek úlohy sestavíme dvě základní rovnice:

1. pro dráhu liazky: $160 = vt$, tj. $t = \frac{160}{v}$,

2. pro dráhu tatrovky: $160 = (v + 8) \left(t - \frac{2}{3} \right)$.

Do druhé rovnice dosadíme podle první rovnice a po úpravách dostáváme rovnici

$$v^2 + 8v - 1920 = 0,$$

která má dva kořeny $v_1 = -48$ a $v_2 = 40$. Slovní úloze může vyhovovat

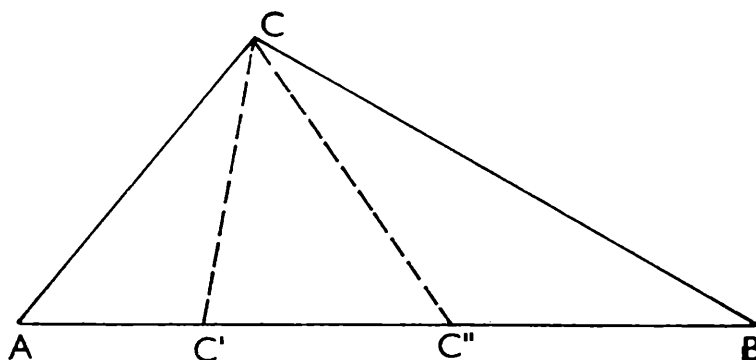
pouze kladný kořen. Zkouškou se přesvědčíme, že liazka jela průměrnou rychlostí 40 km/h a tatrovka 48 km/h.

JT

Aritmetický průměr a trojúhelník

Pro lepší názornost si zvolme trojúhelník ABC (obr. 1) s tupým úhlem u vrcholu C . Označíme-li S obsah $\triangle ABC$, S_1 , S_2 a S_3 po řadě obsahy trojúhelníků $AC'C$, $C'C''C$ a $C''BC$, můžeme napsat výchozí vzorce:

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \quad S_1 = \frac{1}{4} S, \quad S_2 = \frac{1}{2} (S_1 + S_3)$$



Obr. 1

Odtud vypočteme

$$S = \frac{1}{4} S + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} S + S_3 \right) + S_3$$

a potom dostaneme

$$S_3 = \frac{5}{12} S, \quad S_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} S + \frac{5}{12} S \right) = \frac{1}{3} S$$

Hledaný postupný poměr je

$$S_1 : S_2 : S_3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{5}{12} = 3 : 4 : 5.$$

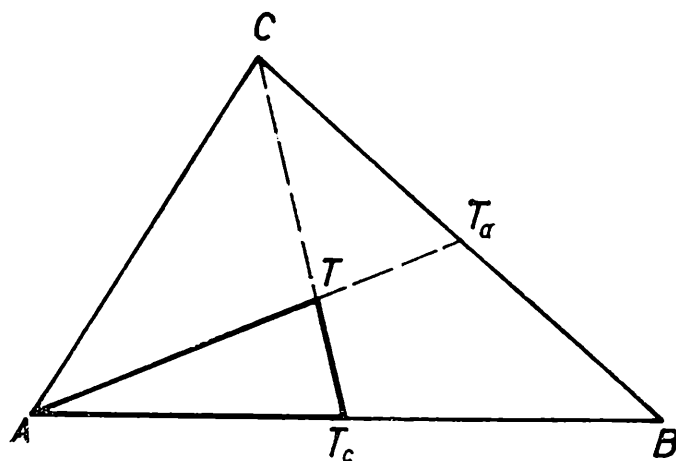
JT

Je lepší znát jeden způsob řešení než dva?

Nadpis zní trochu nepochopitelně. Znalost dvou postupů řešení však může přinést další problém. Kdybychom našli jeden způsob řešení, pak bychom byli hotovi.

Eva řešila úlohu:

Je dán $\triangle AT_cT$. Sestrojte $\triangle ABC$, v němž bod T je těžiště a bod T_c střed strany AB .



Obr. 1

Nalezla dva postupy konstrukce (obr. 1). Oba začínaly stejně:

Sestrojíme bod C na polopřímce opačné k polopřímce TT_c tak, aby bylo $|CT| = 2 |TT_c|$.

V jednom postupu se pak sestrojil vrchol B na polopřímce opačné k polopřímce T_cA tak, že platilo $|T_cB| = AT_c$.

Ve druhém se postupovalo složitěji. Určil se na polopřímce opačné k polopřímce TA bod T_a tak, aby platilo $|TT_a| = 1/2 |TA|$. Potom se našel bod B jako průsečík přímek AT_c a CT_a .

Eva ze dvou postupů příliš šťastna nebyla. Nevěděla si rady s problémem, zda oba postupy vedou k témuž bodu B . Narýsované obrázky jí totiž nestačily a hledala důkaz. Uměli byste jí poradit?

Vraťme se ještě k nadpisu. Vystihuje Evin pocit. Historie matematiky však ukazuje, že hledání nových postupů vedle již nalezených bylo matematikům vždy vlastní. Nespokojit se s jedním způsobem řešení by mělo platit ve všech oblastech lidské činnosti.

Jiří Mída

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Slovní algebrogramy

Stejná písmena nahradte stejnými číslicemi tak, aby platil součet.

a) L O U K A L O U K A L O U K A Š I R O K Á	b) S T R A K A K R A D E Š P E R K Y	c) K O L O N A J E D E O K O L O L E S Í K A
---	--	---

Každá úloha má dvě řešení — ověřeno počítačem. Řešení naleznete na str. 204.

Jindřich Pěňčík

Řešte s námi (5)

Úlohy

16.* Pro každý rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ platí

$$|AF| + |AH| + |AC| \leq |AB| + |AD| + |AE| + |AG|.$$

Dokažte a zjistěte, kdy může nastat rovnost.

17. Uvažujme reálnou funkci f , která splňuje následující podmínky:

(1) $f(0) = 1$,

(2) $f(x)f(y) = f(xf(y) + yf(x) - xy)$,

(3) $f(1987) \leq 1988$,

(4) rovnice $f(x) = 0$ má aspoň jedno řešení a mezi těmito řešeními existuje největší,

(5) je-li $x < y$ a $f(x) - x \geq v \geq f(y) - y$, pak existuje takové $z \in \langle x, y \rangle$, že $f(z) = z + v$.

Najděte $f(1987)$.

18. Jsou dány tři shodné kružnice k_1, k_2, k_3 , které se navzájem dotýkají, a kružnice k , která je jim opsána. Vedeme-li bodem $M \in k$ tečny ke kružnicím k_1, k_2, k_3 , je vzdálenost bodu M od jednoho z bodů dotyku rovna součtu vzdáleností od druhých dvou. Dokažte.

19. Elektronické prvky, které se mohou nacházet ve dvou stavech 0 a 1, jsou rozmístěny na přímce. Během následující milisekundy předá každý prvek ve stavu 1 signál oběma sousedním prvkům. Ve stavu 1 pak budou právě jen ty prvky, které dostaly signál od právě jednoho ze svých sousedů (pokud dostane prvek signál z obou sousedních prvků současně, přejde do stavu 0).

Je-li v čase $t = 0$ ve stavu 1 jediný prvek, kolik bude takových prvků v čase t milisekund?

Co se stane v případě, kdy bude konečný počet N prvků rozmístěn na kružnici? Může se stát, že všechny prvky přejdou po čase do nulového stavu?

20. Je možné rovnostranný trojúhelník rozložit na milión konvexních mnohoúhelníků tak, aby libovolná přímka proťala z nich nejvýše čtyřicet? (Říkáme, že přímka protíná mnohoúhelník, jestliže s ním má aspoň jeden společný bod.)

Řešení minulých úloh

11. Budeme úlohu řešit rovnou pro obecné n . Je-li n liché, lze snadno zorganizovat přelety tak, aby se všichni ptáčci slétli na předem určeném stromě. Stačí označit zvolený strom nulou a ostatní stromy očíslovat

symetricky čísla $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$ ($n = 2k + 1$). Ptáci na stromech s čísly $-i, i$ ($1 \leq i \leq k$) pak zřejmým způsobem postupně přelétnou na zvolený strom.

Dále dokážeme, že pro n sudé se ptáci nikdy neslétnou na stejném stromě. Očíslujme postupně jednotlivé stromy čísla $1, 2, \dots, n$ (třeba ve směru hodinových ručiček, stromy s čísly 1 a n spolu sousedí). Sečteme-li na začátku čísla stromů pod každým ptákem, dostaneme součet

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1).$$

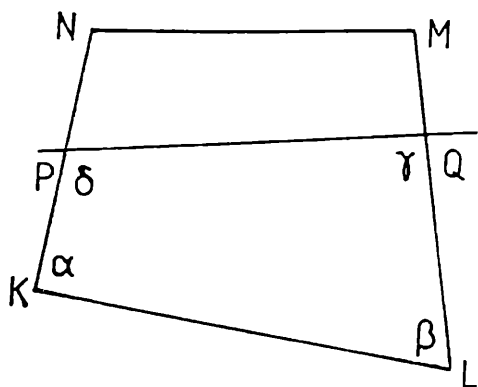
Co se stane, přelétnou-li teď dva ptáčci způsobem popsaným v zadání úlohy? Pokud nedojde k přeletu mezi stromy s čísly 1 a n , přelétne jeden z ptáků na strom s číslem o 1 větším a druhý na strom s číslem o 1 menším, takže výsledný součet zůstane stejný. To se stane i v případě, kdy se mezi sebou vymění ptáčci sedící na stromech s čísly 1 a n . Pokud ovšem právě jeden z ptáků přelétne ze stromu 1 na strom n či obráceně, uvedený součet se zvětší, resp. zmenší přesně o n . V každém případě bude tedy příslušný součet $\frac{1}{2} n(n + 1) + kn$, kde k je celé číslo. Pro

sudé n není číslo $\frac{1}{2} n(n + 1)$ dělitelné n , proto nikdy nebude výsledný součet jn , což by odpovídalo situaci, kdy všichni ptáci sedí na jediném stromě s číslem j .

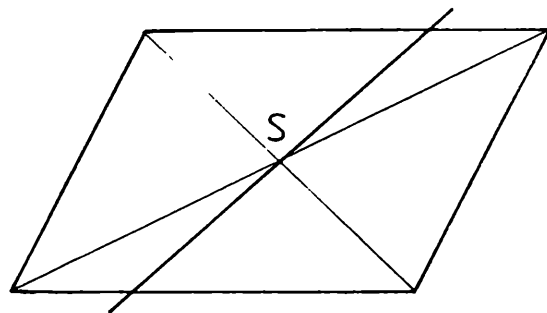
Jinými slovy, podařilo se nám ukázat, že při zvoleném označení dává součet čísel stromů pod jednotlivými ptáky během prováděné „operace“ stále stejný zbytek mod n (říkáme, že je toto číslo vůči dané operaci *invariantní*). A protože v případě přeletu všech ptáků na jediný strom vyjde uvažovaný součet dělitelný n , zatímco na začátku pro sudé n dělitelný není, nelze takové situace popsanou operací dosáhnout. Zkuste nyní vyřešit i tuto obecnější úlohu: Na n stromech (označených čísly $1, 2, \dots, n$) na kružnici sedí po řadě $a_1, a_2, \dots, a_n$ ptáčků. Dvě různé n -tice $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$, budeme považovat za ekvivalentní, jestliže po nějakém počtu přeletů popsaných v úloze bude na n stromech sedět postupně $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ ptáčků. Jak poznáme, že dvě n -tice jsou ekvivalentní? Množina všech rozdělení $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ptáčků na n stromech se rozpadne na třídy ekvivalentních rozdělení. Kolik bude takových tříd? (Odpověď najdete na konci těchto řešení.)

12. Je zřejmé, že uvažovaná přímka musí protínat protější strany takového čtyřúhelníku. Budeme zatím využívat jen toho, že vzniklé čtyřúhelníky musí mít shodné úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, a to buď ve stejném pořadí, nebo v pořadí $\alpha, \delta, \gamma, \beta$. To je ovšem jen nutná podmínka.

Je-li $KLMN$ uvažovaný čtyřúhelník a PQ dělicí příčka (obr. 1), máme čtyři možnosti:



Obr. 1



Obr. 2

1. Pokud je $|\sphericalangle NPQ| = |\sphericalangle PKL| = \alpha$, tedy také $|\sphericalangle NMQ| = |\sphericalangle PQL| = \gamma$, je $KL \parallel PQ \parallel NM$, takže $KL \parallel MN$

2. Pokud $|\sphericalangle PQM| = \alpha$, tedy $|\sphericalangle PNM| = \gamma$, vychází $\alpha + \gamma = \pi$, tedy také $|\sphericalangle PKL| + |\sphericalangle PNM| = \pi$ a je opět $KL \parallel MN$.

3. Pokud $|\sphericalangle NMQ| = \alpha$, neboli $|\sphericalangle NPQ| = |\sphericalangle PQL| = \gamma$, vyjde tentokrát $KN \parallel ML$

4. Pokud $|\sphericalangle PNM| = \alpha$, $|\sphericalangle PQM| = \gamma$, je buď $|\sphericalangle NPQ| = \beta$, takže je zas $\beta + \delta = \pi$ a stejně jako ve 2. vyjde $KL \parallel MN$, anebo $|\sphericalangle NPQ| = \delta$, pak ovšem vyjde $\gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$, což dává $KN \parallel ML$

V každém případě nám za uvedených předpokladů vyšlo, že některé dvě z protějších stran takového čtyřúhelníku jsou rovnoběžné. V úvahu tedy přichází jen rovnoběžník nebo lichoběžník. Snadno zjistíme, že každý rovnoběžník i lichoběžník lze rozdělit vhodnou příčkou na dva podobné čtyřúhelníky.

Rovnoběžník rozdělíme libovolnou příčkou procházející jeho středem (průsečíkem úhlopříček, obr. 2), která není úhlopříčkou. A lichoběžník $KLMN$ můžeme vždycky rozdělit příčkou PQ rovnoběžnou se základnami (obr. 3), budeme-li požadovat, aby platilo

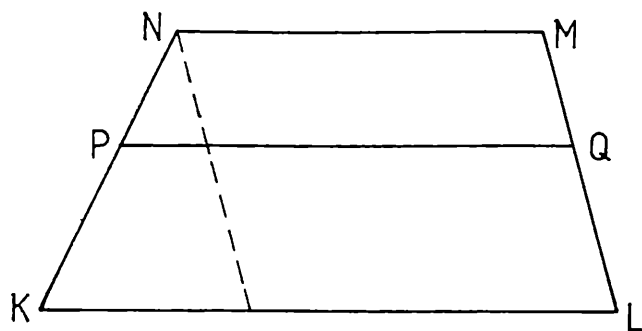
$$\frac{|MN|}{|PQ|} = \frac{|PQ|}{|KL|} = \frac{|NP|}{|PK|}.$$

Pro $|PQ| = \sqrt{|MN| \cdot |KL|}$ pak skutečně vyjde (předpokládejme např. $|MN| < |KL|$)

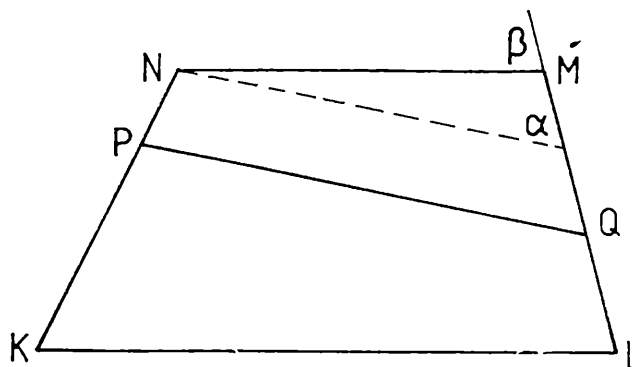
$$\frac{|NP|}{|PK|} = \frac{|NP| + |PK|}{|PK|} \cdot \frac{|NP|}{|NP| + |PK|} = \left(1 + \frac{|NP|}{|PK|}\right) \frac{|PQ| - |MN|}{|KL| - |MN|},$$

neboli

$$\frac{|NP|}{|PK|} = \frac{|PQ| - |MN|}{|KL| - |PQ|} = \sqrt{\frac{|MN|}{|KL|}} = \frac{|MN|}{|PQ|}.$$



Obr. 3



Obr. 4

Lichoběžník můžeme také rozdělit na dva podobné čtyřúhelníky způsobem rozebraným v bodě 2). Nejde to ovšem vždy. Za předpokladu $|MN| < |KL|$ vyjde pro velikost příčky PQ (obr. 4) stejný vztah $|PQ| = \sqrt{|MN| \cdot |KL|}$ jako v předchozím případě. Jak ale zjistíme pomocí sinové věty, lze ji sestavit jen tehdy, pokud

$$\sqrt{\frac{|MN|}{|KL|}} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

kde $\alpha < \beta$ jsou úhly při větší základně.

13. Úloha se notně zjednoduší, jakmile si uvědomíme, že můžeme daná čísla označit tak, aby bylo např. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Pro součet s pak dostaneme

$$\begin{aligned} s &= (a_n - a_1) + (a_n - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_1) + \\ &\quad + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) = \\ &= (n-1)a_n + (n-2)a_{n-1} + \dots + a_2 - (n-1)a_1 - \\ &\quad - (n-2)a_2 - \dots - a_{n-1} = (n-1)(a_n - a_1) + \\ &\quad + (n-2)(a_{n-1} - a_2) + \dots + 2(a_3 - a_{n-2}) + (a_2 - a_{n-1}) = \\ &= (n-1)(a_n - a_1) + (n-3)(a_{n-1} - a_2) + \dots + \\ &\quad + \left(\left[\frac{n+3}{2} \right] - \left[\frac{n}{2} \right] \right) \left(a_{\left[\frac{n+3}{2} \right]} - a_{\left[\frac{n}{2} \right]} \right). \end{aligned}$$

Místo abychom rozlišovali sudé a liché n , napsali jsme poslední nenulový sčítanec v předchozí rovnosti pomocí celé části: uvedené sčítance jsou totiž tvaru $((n-k) - (k+1))(a_{n-k} - a_{k+1})$, kde $0 \leq k < n$ a $(n-k) - (k+1) = n - 2k - 1 > 0$, tj. $0 \leq k \leq \left[\frac{n-2}{2} \right]$. A protože pro každé celé n platí

$$n = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right],$$

vyjde v posledním sčítanci $k + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ a $n - k = \left\lfloor \frac{n + 3}{2} \right\rfloor$.

Za uvedených předpokladů je $a_n - a_1 = d$ a zároveň

$$0 \leq a_{n-k} - a_{k+1} \leq d \quad \left(0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \right),$$

takže pro součet s dostáváme odhady

$$(n-1)d \leq s \leq \left((n-1) + (n-3) + \dots + \left(\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \right) d.$$

Přitom pro součet $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sčítanců na pravé straně poslední nerovnosti vychází

$$\begin{aligned} (n-1) + (n-3) + \dots + \left(n - \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \right) &= \\ &= n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Celkem tedy je

$$(n-1)d \leq s \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor d, \quad (1)$$

přičemž

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{pro sudé } n, \\ \frac{n^2-1}{4} & \text{pro liché } n. \end{cases}$$

Jiné řešení. Budeme opět předpokládat, že $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Označme $d_i = a_{i+1} - a_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) rozdíly dvou sousedních čísel a vyjádříme pomocí nich součet s . Protože pro $i < j$ je

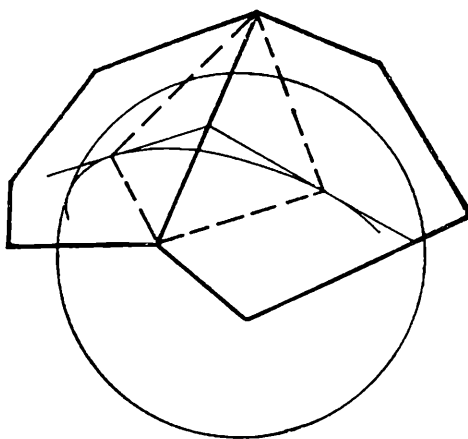
$$|a_i - a_j| = d_i + \dots + d_{j-1},$$

je jasné, že rozdíl d_k se vyskytne ve všech sčítancích $|a_i - a_j|$, kde $1 \leq i \leq k < j \leq n$. Takových sčítanců je právě $k(n-k)$, proto

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k.$$

Nyní využijeme toho, že pro každé k , $1 \leq k \leq n-1$, platí

$$n-1 \leq k(n-k) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$



Obr. 5

protože, jak známo, součin $k(n - k)$ nabývá své největší hodnoty pro $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (to je vidět např. z rovnosti $4k(n - k) = n^2 - (n - 2k)^2$).

A poněvadž $d = a_n - a_1 = d_1 + \dots + d_{n-1}$, vycházejí pro součet s odhady (1).

Rozmyslete si, kdy v uvedených nerovnostech nastane rovnost!

14. Předpokládejme naopak, že danému mnohostěnu lze vepsat kulovou plochu. Sestrojme body dotyku a spojme s nimi vrcholy ležící v odpovídající stěně (obr. 5). Rozdělíme tak každou stěnu na trojúhelníky, přičemž dva trojúhelníky se společnou hranou mnohostěnu jsou shodné, protože příslušný vrchol má od obou bodů dotyku stejnou vzdálenost. Podle předpokladu každému černému trojúhelníku odpovídá shodný bílý trojúhelník se společnou hranou, takže obsah všech černých stěn je nejvýše roven obsahu všech bílých stěn. Odtud plyne tvrzení úlohy spojené s podmínkou b).

Označme dále b_k a c_k ($k \geq 3$) počet bílých, resp. černých k -úhelníkových stěn daného mnohostěnu a h počet těch hran, které jsou společné dvěma bílým stěnám. Pro rozdíl součtů vnitřních úhlů bílých a černých stěn pak z předchozí úvahy plyne, že je

$$\sum_{k \geq 3} b_k(k-2)\pi - \sum_{k \geq 3} c_k(k-2)\pi < 2\pi h,$$

přičemž rozdíl počtu bílých a černých trojúhelníků ve všech stěnách je

$$2h = \sum_{k \geq 3} kb_k - \sum_{k \geq 3} kc_k = \sum_{k \geq 3} k(b_k - c_k)$$

Spojením obou těchto vztahů vychází

$$\sum_{k \geq 3} (k-2)(b_k - c_k) < \sum_{k \geq 3} k(b_k - c_k),$$

neboli

$$\sum_{k \geq 3} (b_k - c_k) > 0.$$

To znamená, že bílých stěn je více než černých. Odtud plyne tvrzení úlohy s podmínkou a).

Tvrzení, které jsme právě dokázali, charakterizuje některé mnoho-
stěny, kterým nelze opsat kulovou plochu čistě z kombinatoricko-topo-
logických důvodů. Uvedenou skutečnost objevil v roce 1927 německý
matematik *E. Steinitz* a příslušná věta nese jeho jméno.

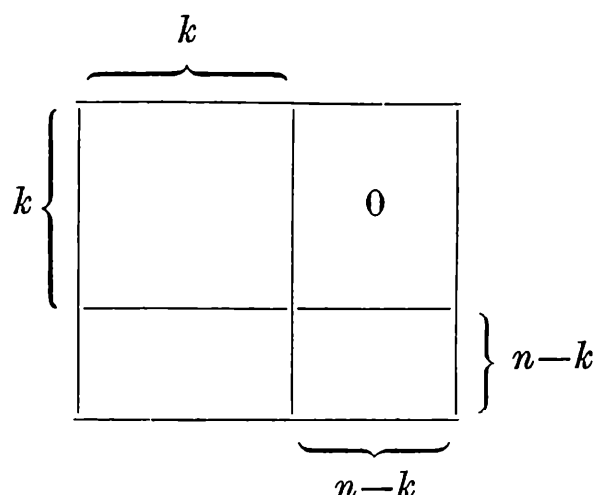
15. Především je jasné, že přerovnání řádků a sloupců dané tabulky nemá vliv ani na předpokládanou, ani na dokazovanou vlastnost.

Předpokládejme, že tabulka obsahuje nějaké nuly (jinak není co dokazovat) a že jsme po nějakém přerovnání řádků a sloupců dosáhli tabulky, v níž jsou v pravém horním rohu samé nuly:

$k \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \dots \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{l} \end{array} \right.$	0 0 0
	0 0 0

Sečteme-li čísla v příslušných k řádcích a $n - l$ sloupcích, vidíme, že musí být $k + (n - l) \leq n$, což je součet všech čísel v tabulce, takže je vždy $k \leq l$. Znamená to, že ať v dané tabulce vybereme k řádků jakkoli ($1 \leq k \leq n$), vždycky v nich najdeme aspoň k nenulových čísel v různých sloupcích. Dokážeme teď matematickou indukcí, že v každé tabulce s touto vlastností najdeme n nenulových prvků, které budou ležet vesměs v různých sloupcích a řádcích (předpoklad o součtu čísel v řádcích a sloupcích už nebudeme potřebovat).

Pro $n = 1$ je uvedené tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro každé k , $1 \leq k \leq n - 1$, a uvažujme tabulku $n \times n$. Najde-
me-li v této tabulce nějakých $k < n$ řádků takových, že obsahují
nenulová čísla právě jen v k různých sloupcích, takže po vhod-
ném přerovnání řádků a sloupců dostaneme tabulku na vedlejší straně.
Pak zřejmě i tabulka $(n - k) \times (n - k)$, která vznikne vynecháním
příslušných k řádků a k sloupců, bude mít předpokládanou vlastnost:
libovolných r jejích řádků bude obsahovat aspoň r nenulových čísel
v různých sloupcích, protože dle předpokladu i $k + r$ řádků původní



tabulky obsahovalo aspoň $k + r$ nenulových čísel v různých sloupcích. V tomto případě můžeme tedy na obě podtabulky $k \times k$ a $(n - k) \times (n - k)$ použít indukční předpoklad.

V opačném případě najdeme v libovolných k řádcích ($1 \leq k \leq n - 1$) aspoň $k + 1$ nenulových čísel ležících v různých sloupcích. Vezmeme-li libovolné nenulové číslo, pak vyškrtnutím odpovídajícího řádku a sloupce dostaneme tabulku $(n - 1) \times (n - 1)$, v níž každých k řádků ($1 \leq k \leq n - 1$) obsahuje aspoň k nenulových čísel v různých sloupcích. Na tuto tabulku opět použijeme indukční předpoklad. Tím je tedy dokázáno i tvrzení úlohy.

Tvrzení, které jsme právě dokázali, je trochu silnější než tvrzení původní úlohy. Můžeme je také interpretovat takto: Jestliže ve skupině n chlapců a n dívek pro $1 \leq k \leq n$ každých k dívek zná dohromady alespoň k chlapců, můžeme všechny chlapce a dívky spárovat tak, že se chlapec s dívkou ve dvojici už zná. Stačí, když každému chlapci přiřadíme jeden sloupec a každé dívce jeden řádek tabulky $n \times n$, v níž budou nenulová čísla znamenat, že se příslušný chlapec a dívka znají.

Abychom mohli chlapce a dívky požadovaným způsobem spárovat, je samozřejmě nutné, aby každých k dívek znalo dohromady aspoň k chlapců; uvedená věta říká, že je to zároveň i podmínka postačující.

11 (dokončení). Protože nám jde jen o rozdělení ptáčků na jednotlivých stromech, nebudeme ptáky navzájem rozlišovat. Podobně jako v řešení původní úlohy budeme zkoumat součet $s = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$. Z uvedeného řešení je také jasné, že zbytek čísla $s \pmod n$ se při jednotlivých přeletech nemění. Samozřejmě se nemění ani celkový počet ptáků $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Jsou-li tedy dvě rozdělení $(a_1, \dots, a_n)$, $(a'_1, \dots, a'_n)$ ekvivalentní, musí být $a_1 + \dots + a_n = a'_1 + \dots + a'_n$ a $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \equiv a'_1 + 2a'_2 + \dots + na'_n \pmod n$.

Máme-li naopak nějaké rozdělení s příslušnými součty a a $s \equiv r \pmod n$, kde $0 \leq r \leq n - 1$, pak lze dosáhnout toho, že všichni ptáčci budou až na jednoho sedět na stromě s číslem n a jeden bude sedět na

stromě s číslem r . K tomu stačí zvolit libovolného z ptáčků a s jeho „pomocí“ postupně přesouvat (s ním ve dvojici) všechny ostatní ptáky na strom n . Odtud plyne, že pro dané přirozené n a každé pevné a existuje právě n různých (neekvivalentních) tříd uvedených rozdělení.

Karel Horák

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Na škole se konala soutěž ve sběru starého papíru. Ukázalo se, že třída 6. A sebrala více papíru než třídy 6. B a 6. C dohromady. Avšak 6. A a 6. B sebraly dohromady tolik papíru jako třídy 6. C a 6. D. Dále 6. B a 6. D sebraly dohromady více papíru než 6. A a 6. C. V jakém pořadí se umístily jednotlivé třídy?

2. Na stole ležely tři kartičky s ciframi. Nejprve z nich složili největší možné trojciferné číslo a potom druhé největší možné. Součet obou takto vzniklých čísel je 1233. Jaké cifry byly na kartičkách?

3. V rovině jsou dány body A, B, C, D o souřadnicích $A = [0, 0]$, $B = [4, 0]$, $C = [3, 1]$, $D = [4, 3]$. Dokažte, že úhly BAC a CAD jsou shodné.

4. Součet 13 různých přirozených čísel je roven 92. Nalezněte tato čísla.

6. (obtížnější) Jestliže a, b, c jsou délky stran trojúhelníka, potom platí:

$$2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 3$$

Dokažte!

6. (obtížnější) Jedna velmi stará kniha o geometrii obsahuje úlohu: Vypočtěte délku stran rovnostranného trojúhelníka vepsaného parabole $y = x^2$. Autor knihy tvrdí, že jeden vrchol trojúhelníka musí nutně být ve vrcholu paraboly. Je tomu skutečně tak? Spočítejte, zda strana takového trojúhelníka může být rovna a) 3; b) 1988?

7. (obtížnější). Pro dané přirozené číslo $n > 1$ vezměte největší společné dělitele všech dvojic navzájem různých čísel od 1 do n ; je jich celkem $\frac{n(n-1)}{2}$, nejsou však všichni navzájem různí. Dokažte, že

jejich aritmetický průměr roste nade všechny meze při n rostoucím nade všechny meze, avšak nepřesáhne hodnotu $\log n + 1$.

Tomáš Schütz

Matematickým kutilům pod stromček — řešení

V úvodní úloze jsou možné další typy: $1989 = 1697 + 285 + 4 + 3 = 1897 + 66 + 34 + 2$. Tím však řešení nekončí. Dále

$$1989 = p^2 + m^2 = \frac{(ap \pm bm)^2 + (bp \mp am)^2}{a^2 + b^2},$$

$$a = 1, \quad b = 2, \quad (p, m) \in \{(16, 42), (30, 33)\}.$$

1. Obecně je $g^2 + (g+1)^2 + (g+2)^2 + (g+7)^2 = (g-2)^2 + (g+3)^2 + (g+4)^2 + (g+5)^2$.

2. Obecně je $ABCD = A + B + C + D + (ABC + AB + A) \cdot 9$

3. $3956122^2 + 3956120^2 - 1989^2 = 3958109^2 + 3954131^2 + 1989^2$.
Obecně je $(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + ab - b^2)^2 + (a^2 - ab - b^2)^2 + (ab)^2$. Zde $ab = 1 \cdot 1989 = 3 \cdot 663 = 9 \cdot 221 = 13 \cdot 153 = 17 \cdot 117 = 39 \cdot 51$.

4. 108.

$$5. u = \frac{365}{266}.$$

$$6. e = \frac{9}{22}.$$

7. Zavedeme $j = h - 89, f = \frac{j+70}{j} = 1 + \frac{70}{j}$. $j \in \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}, f \in \{2, 3, 6, 8, 11, 15, 36, 71\}$.

8. $D(1+9b, 8+9b) = D(1+9b, 7) = D(1+2b, 7)$. $1+2b = 7c$,
 $b = 3c + \frac{c-1}{2}$, $d = \frac{c-1}{2}$, $c = 2d+1$, $b = 7d+3$, lépe $b = 7e-4$. Pro $b \neq 7e-4, e \in \mathbb{N}$, je zlomek g v základním tvaru.

9. Obecně. Čitatel je $n + (n+1) = 2n+1$, jmenovatel $n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1$. $D(2n+1, 2n^2 + 2n + 1) \leq D(4n^2 + 4n + 1, 4n^2 + 4n + 2) = 1$. Zde $n = 1989$.

$$10. \frac{1989}{7}.$$

11. $19^8 : 9 = (18+1)^8 : 9 = (18k+1) : 9 = 2k(\text{zb. } 1)$. Zbytek je 1.

12. $3333 - 1989 = 1624$, $1989 - 365 = 1344$, $D(1344, 1624) = 56$, $365 = 6 \cdot 56 + 29$, $1989 = 35 \cdot 56 + 29$, $3333 = 59 \cdot 56 + 29$. Dělitel je 56, zbytek 29.

13. Obecně platí $\frac{i}{r} + \frac{i}{r} \cdot \frac{r-i}{r+i} + \frac{r-i}{r+i} = 1, \left(k + \frac{l}{m}\right) :$
 $\left(m + \frac{l}{k}\right) = \frac{k}{m}.$

14. Mnohočlen označíme z. $8^{5n} - 19^{5n} = 11a, 9^{5n} = 59049^n = (5368 \cdot 11 + 1)^n = 11b + 1, 89^{5n} = (8 \cdot 11 + 1)^{5n} = 11c + 1. z = 1 -$
 $- 2(11b + 1) + 11a + (11c + 1) = 11(a - 2b + c), 11 \mid z.$

15. $\alpha) 2^{1989} + 1 = (2^9)^{221} + 1 = 512^{221} + 1 = 513k = 19 \cdot 27k,$
 $19 \mid 2^{1989} + 1. \beta) 3^{1989} + 1 = (3^9)^{221} + 1 = 19683^{221} + 1 = 19684l =$
 $= 19 \cdot 1036l, 19 \mid 2^{1989}.$

16. $k = 702, l = 351, m = 234.$

17. $\alpha) p = 1260, \beta) t = 1980.$

18. $\sqrt[3]{1989} = \sqrt[3]{221} + \sqrt[3]{884}.$

19. Najdeme omezení $10 < x + y + z < 16$ a řešíme soustavu
 $x + y + z = 13 \wedge 19x + 8y + 9z = 153. y = 10x - 36, z = 49 -$
 $- 11x,$

Řešení: $x = y = 4, z = 5.$

20. $\frac{8m+9}{m+9} = 8 - \frac{63}{m+9} \in \mathbb{N} \wedge m > 10. m \in \{12, 54\}.$

21. $p^2 - p + 9 = 1989 \wedge p > 3. p = 45.$

22. $u^2 + u + v^2 + v = 3978, u^2 + v^2 = 3890, (u + v)^2 = 7744,$
 $(v - u)^2 = 2(u^2 + v^2) - (u + v)^2 = 36, v - u = 6, u = 41, v = 47.$

23. a) $\{54 + 35(-1)^n\},$ b) $\{-35 - 54(-1)^n\}$

24. Velikosti úhlů v trojicích mají některý z tvarů: $9k, 13l, 17m, 13k,$
 $153l, m$ nebo $17k, 117l, m.$ Řešení: 1, 26, 153; 9, 52, 119; 13, 14, 153;
 13, 68, 99; 17, 46, 117; 17, 72, 91; 29, 34, 117; 34, 65, 81 ve stupních.

25. Najdeme vhodné částečné součty řady faktoriálů. Jsou to: $1! +$
 $+ 2! = 3, 1! + 2! + 3! = 3^2, 1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 3^2 \cdot 17.$
 $(1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17).$ Možné počty obdarovaných a výše darů, jež dosta-
 nou první, jsou: 2 a 663 Kčs, 3 a 221 Kčs, 5 a 13 Kčs.

26. Řešení:

117	19	89	69	19	89	103	131	33
47	75	103	79	59	39	19	89	159
61	131	33	29	99	49	145	47	75
19	149	99	194	19	264	19	82	61
169	89	9	229	159	89	96	54	12
79	29	159	54	299	124	47	26	89

509 19 369
159 299 439
229 579 89

19 145 61
117 75 33
89 5 131

82 19 61
33 54 75
47 89 26

6 19 8
13 11 9
14 3 16

183 1 98
9 94 179
90 187 5

Jiří Mann

Několik problémů z učiva fotometrie

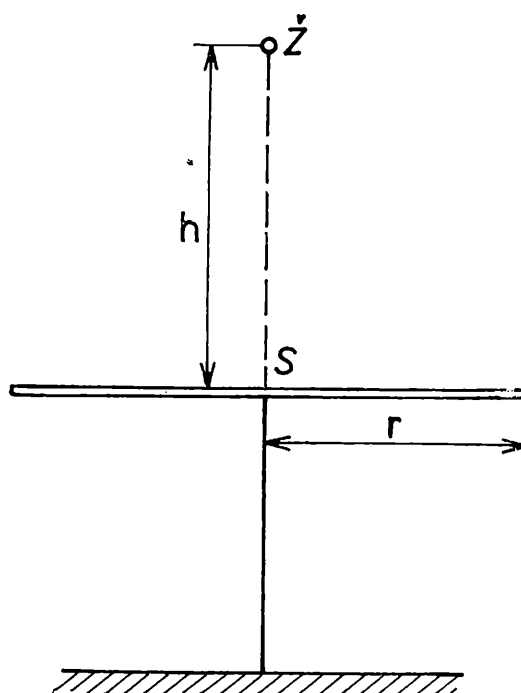
(pro čtvrtáky gymnázií)

Mnozí z vás, žáků čtvrtých ročníků středních škol a zvláště gymnázií, jste podali přihlášku ke studiu na vysoké škole a po úspěšné maturitě budete dělat přijímací zkoušky. Mezi předměty, z nichž vás budou zkoušet, patří na některých vysokých školách také fyzika.

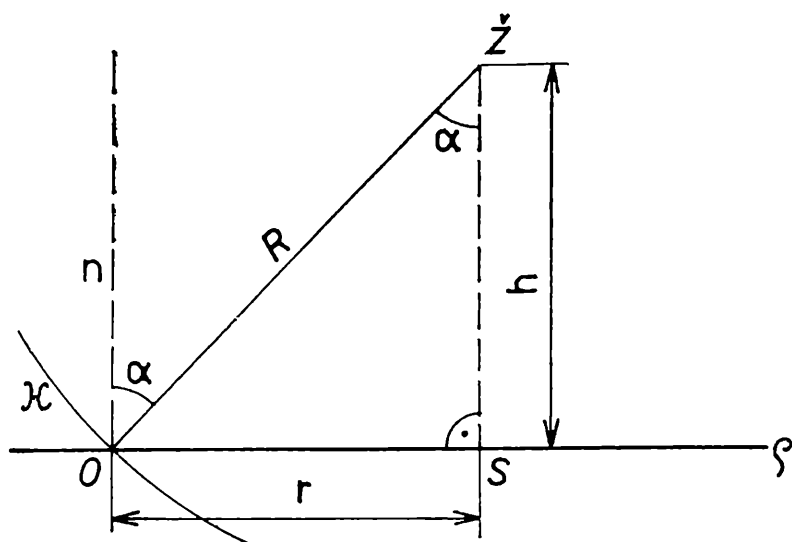
V soustavě učiva školské fyziky nepatří fotometrie patrně k nejoblíbenějším, přestože se například se základy techniky a hygieny osvětlování každý z nás denně setkává a některé problémy z této oblasti i prakticky běžně řeší. Nebude tedy na škodu, podívat se na některé základní problémy zblízka.

Na začátku zkuste otestovat své základní vědomosti z učiva fotometrie malým „autotestem“. Správné odpovědi zaškrtněte nebo doplňte svůj výsledek.

TEST: Nad středem vašeho pracovního stolku, který je kruhový, je umístěna ve výšce 0,80 m nad stolem žárovka svítivosti 100 cd. Poloměr stolu je 0,60 m (obr. 1).



Obr. 1



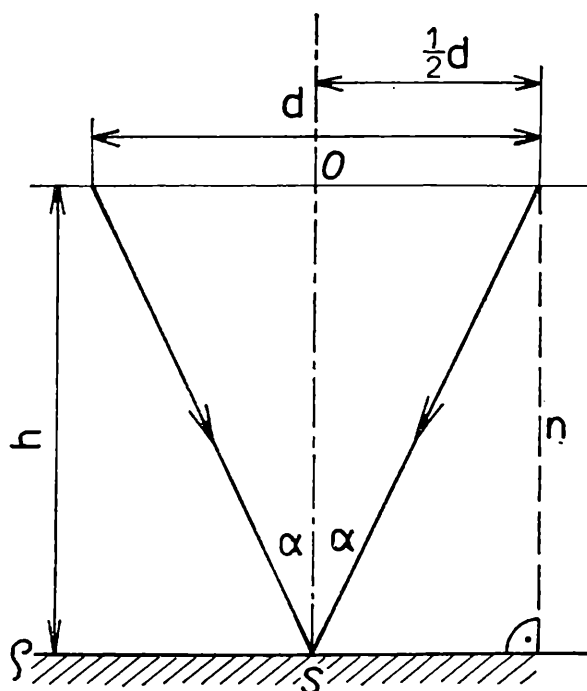
Obr. 2

Z obrázku je patrné, že $R^2 = h^2 + r^2$ a $\cos \alpha = \frac{h}{R}$, takže potom máme $\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$ a hledané osvětlení $E = \frac{I}{h^2 + r^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$.

Po dosazení numerických hodnot dostaneme $\{E\} = \frac{100}{0,8^2 + 0,6^2}$.

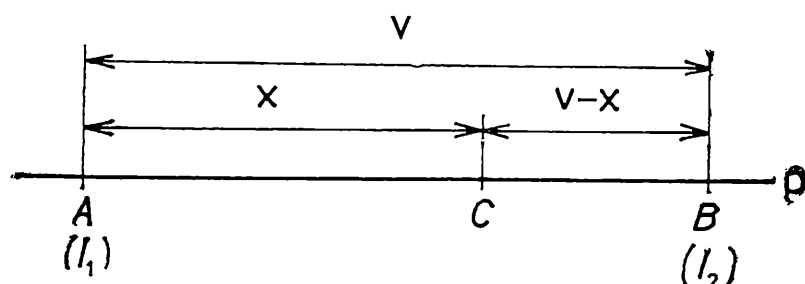
$\cdot \frac{0,8}{\sqrt{0,8^2 + 0,6^2}} = 80$. Osvětlení okraje stolu je tedy 80 lx (platí pro všechny body na okraji stolu.).

ÚLOHA 2: Nad pracovní deskou visí ve výšce 1,80 m dvě žárovky téže svítivosti 130 cd. Vzdálenost obou žárovek je 4,80 m. Určete osvětlení stolu uprostřed mezi oběma žárovkami (obr. 3). Řešte úlohu samostatně, výsledek i počet bodů za správné řešení je na konci článku.



Obr. 3

ÚLOHA 3: Ve dvou různých bodech A, B jsou světelné zdroje svítivosti $I_1 = 100$ cd a $I_2 = 36$ cd. Zdroje jsou od sebe vzdáleny $|AB| = v = 0,96$ m. Zjistěte, který bod na spojnici bodů A, B ležící mezi nimi je od obou světelných zdrojů stejně osvětlen.



Obr. 4

Představu o situaci si nejlépe uděláme z obrázku (obr. 4). Předpokládejme, že podmínkám úlohy vyhovuje bod C , který je od bodu A vzdálen o x . Osvětlení v bodě C vyvolané zdrojem v A bude

$$E_A = \frac{I_1}{x^2}.$$

Podobně zdroj v bodě B vyvolá v bodě C osvětlení

$$E_B = \frac{I_2}{(v - x)^2}.$$

Obě osvětlení mají být stejná, $E_A = E_B$, odkud plyne

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{x^2}{(v - x)^2}$$

neboli

$$\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \frac{x}{v - x}.$$

Je tedy

$$x = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} (v - x);$$

dosazením číselných hodnot a řešením této jednoduché rovnice zjistíme, že $x = 0,60$ m.

ÚLOHA 4: Řešte úlohu 3 se změnou v zadání. Určete polohu bodu, který je na spojnici bodů A, B a neleží mezi nimi. Přitom má být opět stejně osvětlen od obou zdrojů. Řešení a odměna v bodech je opět na konci článku.

ÚLOHA 5: Světelný zdroj osvětluje malou plošku vzdálenou 36 cm od zdroje a světelné paprsky dopadají na plošku pod úhlem 60° . V jakém úhlu by muselo dopadnout světlo na plošku vzdálenou 45 cm, aby osvětlení bylo v obou případech stejné?

Výsledky úloh a bodová dotace:

Úloha 2 — správné řešení je 16 lx a získáváte za ně 5 bodů. V případě, že jste dospěli k výsledku 8 lx, zapomněli jste, že jde o dvě žárovky a máte 4 body.

Úloha 4 — $|AX| = 2,40$ m, $|BX| = 1,44$ m, správné řešení 10 bodů.

Úloha 5 — úhel $\beta = 38^\circ 37'$. Dospěli jste k této hodnotě? Jestliže ano, náleží vám 5 bodů.

Jestliže jste získali 20 nebo 19 bodů, napište si „jedničku“, jestliže jste dospěli k 15 nebo 14 bodům, napište si „dvojku“. Za 10 nebo 9 bodů obdržíte dobrou, za 5 bodů nebo 4 body si dejte „čtyřku“. Domnívám se, že k eventualitě 0 bodů jste nedospěl nikdo!

Doufám, že většina z vás se mohla ohodnotit „jedničkou“ nebo „dvojkou“. V tom případě se nemusíte ani trochu bát, bude-li v maturitní nebo přijímací zkoušce z fyziky také otázka z fotometrie.

Mnoho úspěchů vám přeje vaše

RNDr. Eva Pešková

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

6. Nechtě α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku. Dokažte, že potom je

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Emil Kraemer

(Došlo 22 řešení.)

Upravené řešení Jána Repiského, GJH Bratislava:

$$\begin{aligned} \text{Protože je } \gamma &= 180^\circ - (\alpha + \beta), \text{ je } \cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta), \text{ takže} \\ \cos \gamma &= -\cos 2 \frac{\alpha + \beta}{2} = -\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= -2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 \end{aligned}$$

Z toho plyne, že je

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1. \quad (2)$$

Zároveň je $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$, přičemž rovnost nastává, právě když je $\alpha - \beta = 0$ čili $\alpha = \beta$. Z toho a z rovnosti (2) plyne, že je

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1. \quad (3)$$

Rovnost nastává, právě když je $\alpha = \beta$. Pravá strana rovnosti (3) je rovna výrazu

$$\begin{aligned} & -2 \left(\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{2} = \\ & = \frac{3}{2} - 2 \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Rovnost nastává, právě když je výraz v poslední závorce rovný nule, tj. právě tehdy, je-li $\alpha + \beta = 120^\circ$. Zároveň podle nerovnosti (3) musí být $\alpha = \beta$. To znamená, že v rovnosti (1) nastává rovnost, právě když je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tj. právě tehdy, je-li trojúhelník rovnostranný.

7. Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž je $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 90^\circ$; středy jeho základů AB , CD jsou po řadě body M , N . Vypočtěte délku úsečky MN pomocí čísel $a = |AB|$, $c = |CD|$.

Jiří Mída

(Došlo 27 řešení.)

Řešení Petra Hliněného, 3. C G M. Koperníka, Bílovec:

Bodem N vedeme rovnoběžky s rameny AD , BC lichoběžníku $ABCD$ (obr. 1), jejich průsečíky se stranou AB označíme A' , B' . Bod M je středem úsečky AB , bod N je středem úsečky CD a čtyřúhelníky $AA'ND$, $B'BCN$ jsou rovnoběžníky, takže bod M je středem úsečky $A'B'$. Dále $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 90^\circ$, a proto $\triangle A'B'N$ je pravoúhlý a pro jeho těžnici MN platí

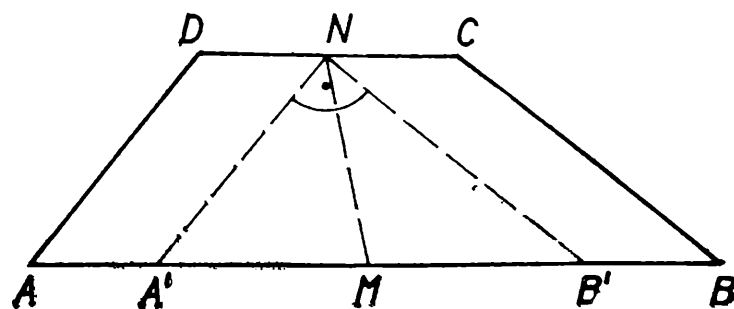
$$|MN| = |A'M| = \frac{1}{2}(a - c).$$

Řešení Libora Němečka, 4. C G M. Koperníka, Bílovec:

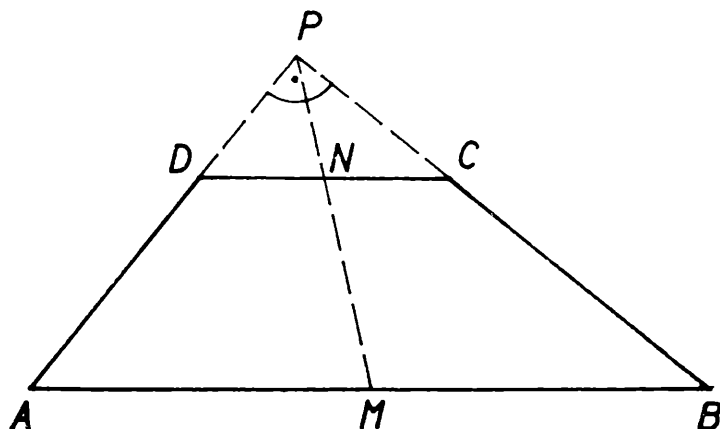
Označme P průsečík přímek AD a BC (obr. 2). Body M , N jsou středy rovnoběžných úseček, a proto bod P leží na přímce MN . Dále $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC| = 90^\circ$, takže $|\sphericalangle APB| = 90^\circ$. Tedy $\triangle ABP$ i $\triangle DCP$ jsou pravoúhlé s pravým úhlem při vrcholu P . Z toho plyne, že

$$|MP| = |AM| = |MB| = \frac{a}{2},$$

$$|NP| = |DN| = |NC| = \frac{c}{2}.$$



Obr. 1



Obr. 2

Dále platí $|MN| = |MP| - |NP| = \frac{1}{2}(a - c)$

8. Nechť a, b, c jsou délky stran libovolného trojúhelníku; poloměry kružnice vepsané a opsané jsou po řadě ρ, r . Dokažte, že je

$$abc \geq (6\rho r)^{\frac{3}{2}};$$

kdy nastává rovnost?

Dimitrij P. Mavlo, Moskva

(Došlo 17 řešení.)

Řešení Silvie Renácsové, 3. C G s vyuč. jaz. maď., Galanta

Pri riešení použijeme nasledovné vzorce na vypočítanie obsahu T trojuholníka:

$$T = \frac{1}{2}(a + b + c)\rho, \quad (1)$$

$$T = \frac{abc}{4r}. \quad (2)$$

Z (2) vyjadríme

$$abc = 4Tr$$

Namiesto T dosadíme z (1) $\frac{1}{2}(a + b + c)\rho$, teda

$$abc = 2(a + b + c)\rho r.$$

Pravú stranu vynásobíme a delíme tromi, čo môžeme napísať nasledovne:

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot 6qr.$$

Použijeme vzťah medzi aritmetickým a geometrickým stredom:

$$abc = \frac{a+b+c}{3} \cdot 6qr \geq \sqrt[3]{abc} \cdot 6qr, \quad (3)$$

teda

$$(abc)^{\frac{2}{3}} \geq 6qr,$$

t. j.

$$abc \geq (6qr)^{\frac{3}{2}},$$

čo sme mali dokázať.

Rovnosť vzhľadom na (3) platí práve vtedy, keď

$$a = b = c.$$

Fyzika

2. Kondensátor s obdĺžnikovými deskami o dĺžke vodorovnej strany l (kolmé k rovině, obr. 1) a o vzdálenosti medzi deskami d je ponořen do kapalného dielektrika o relativní permitivitě ε . Hladina dielektrika rovnoměrně klesá rychlostí o velikosti v . Kondensátor je připojen paralelně ke zdroji o elektromotorickém napětí U_e a k rezistoru o odporu r , které jsou zapojeny v sérii. Určete proud v obvodu.

Miroslava Trchová

(Došlo 1 řešení.)

Otiskujeme řešení autorky:

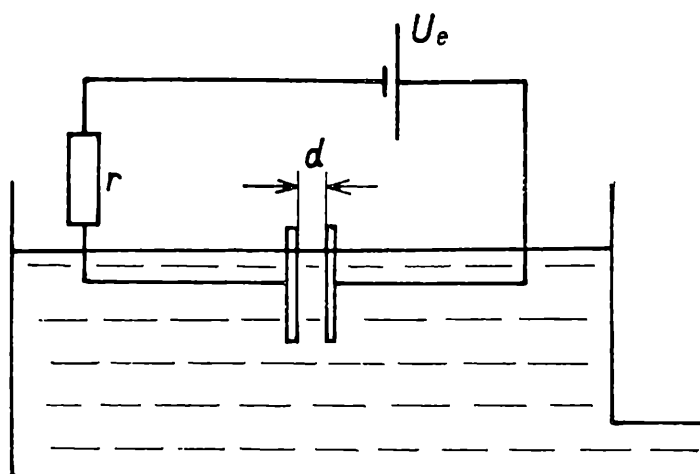
Změna kapacity kondensátoru za dobu Δt je rovna

$$\Delta C = \frac{(\varepsilon - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot v \cdot l}{d} \Delta t$$

a změna náboje na deskách kondensátoru je $\Delta q = U \Delta C$, protože napětí $U = \text{konst.}$, neboť kondensátor je připojen ke zdroji. Je tedy změna náboje za 1s (neboli proud) rovna

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = I = U \cdot \frac{\Delta C}{\Delta t}, \text{ odkud } I = \frac{(\varepsilon - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot v \cdot l}{d} U.$$

Podle Ohmova zákona je $U = U_e - I \cdot r$, a tedy



Obr. 1

$$I = \frac{(\varepsilon - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot v \cdot l \cdot U_e}{d + (\varepsilon - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot v \cdot l \cdot r}$$

Proud $I \neq 0$ jen po dobu, než hladina klesne od horního okraje desek po jejich dolní okraj.

OLYMPIÁDY A SOČ

K jedné úloze matematické olympiády

RNDr. ZDENĚK PAPEŽ, Gymnázium Karlovy Vary

V rámci školní klauzurní části 37. ročníku matematické olympiády kategorie A byla soutěžícím předložena úloha:

Určete všechna přirozená čísla n ($n \geq 2$), pro která má rovnice

$$x^n - 4x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0 \quad (1)$$

s reálnými koeficienty všechny kořeny reálné a nezáporné.

Ukážeme, že nejednoznačnost zadání této úlohy vede ke dvěma různým výsledkům jejího řešení.

Rovnice (1) nechť má reálné a nezáporné kořeny $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ze vztahů mezi těmito kořeny a koeficienty dané rovnice plyne

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 4, \quad (2)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \quad (3)$$

Protože je $x_i \geq 0$ pro každé uvažované i , je vzhledem ke (3) $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^+$. Pro nezáporná reálná čísla x_i ($i = 1, \dots, n$) platí

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (4)$$

Aplikací (4) na (2) a (3) obdržíme podmínku $\frac{4}{n} \geq 1$, odkud je $n \leq 4$, a tedy nutně $n = 2$ nebo $n = 4$.

Pro $n = 2$ získáme rovnici $x^2 - 4x + 1 = 0$ s kořeny $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, které vyhovují podmínce úlohy.

Pro $n = 4$ řešíme rovnici

$$x^4 - 4x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 1 = 0,$$

která např. pro $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = 0$ přejde ve tvar

$$x^4 - 4x^3 - \frac{1}{4}x + 1 = 0,$$

neboli

$$\left(x^3 - \frac{1}{4}\right)(x - 4) = 0.$$

Získaná rovnice však nemá všechny kořeny reálné (jejími kořeny jsou i imaginární čísla $x_1 = \frac{a}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $x_2 = \bar{x}_1$, kde je $a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$).

Chápeme-li zadání úlohy v tom smyslu, že je třeba nalézt všechna ta přirozená čísla n ($n \geq 2$), pro která má *každá* rovnice uvedeného typu všechny kořeny reálné a nezáporné, pak vyhovuje jedině $n = 2$.

Máme-li však zaručit pouze *existenci alespoň jedné* rovnice daného typu, která má pro hledané n všechny kořeny kladné a nezáporné, je řešením i číslo $n = 4$.

Pro $n = 4$ je totiž

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$$

Odtud s přihlédnutím k podmínce rovnosti ve vztahu (4) plyne $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Existuje tedy rovnice 4. stupně

$$(x - 1)^4 = 0,$$

neboli

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

vyhovující podmínkám úlohy.

Upravte nyní sami zadání úlohy tak, aby byla rozlišena obě uvedená řešení.

Kalendár M-F: január 1990

1. 1. 1905 sa vo Lvove narodil *Stanislav Mazur*, poľský matematik. Zaviedol do funkcionálnej analýzy geometrické metódy, rozvinul všeobecnú teóriu lineárnych topologických priestorov.
3. 1. 1945 v Terezíne zahynul *Václav Dolejšek*, český fyzik. Prispel k rozvoju röntgenovej spektroskopie.
4. 1. 1940 sa narodil *Brian David Josephson*, anglický fyzik. Za výskum v oblasti tunelových javov pri supravodičoch získal Nobelovu cenu (1973).
5. 1. 1970 v Göttingene zomrel *Max Born*, nemecký fyzik. Patril k zakladateľom kvantovej mechaniky, podal štatistickú interpretáciu vlnovej funkcie. Nobelovu cenu za fyziku dostal v roku 1954.
7. 1. 1935 zomrel *Ivan Vsevolodovič Meščerskij*, sovietsky vedec v oblasti teoretickej mechaniky. Prispel k riešeniu problémov reaktívnej techniky a kozmických letov.
8. 1. 1915 sa v Beloj Cerkvi narodil *Jurij Vladimirovič Linnik*, sovietsky matematik. Rozvinul teóriu čísel, dosiahol vážne výsledky v teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistike. Bol prezidentom Leningradskej matematickej spoločnosti, získal Leninovu cenu (1970).
9. 1. 1975 zomrel *Piotr Sergejevič Novikov*, sovietsky matematik. Vytvoril zásadné práce v teórii množín, matematickej logike i v algebre. Prispel aj k rozvoju topológie, teórie funkcií a matematickej fyziky.
11. 1. 1800 sa v Zemnom pri Kolárove narodil *Štefan Anián Jedlík*, slovenský priekopník elektrotechniky. Bol profesorom fyziky peštianskej univerzity. Zostrojil malý pohyblivý elektromagnet, elektromotorček i dynamo.
12. 1. 1665 zomrel *Pierre de Fermat*, francúzsky matematik a právnik. Prispel k základom teórie čísel a počtu pravdepodobnosti. Zaoberal sa aj problémami optiky.
14. 1. 1905 zomrel *Ernst Karl Abbe*, nemecký fyzik. Položil základy modernej teórie optických prístrojov.
14. 1. 1970 zomrel *William Feller*, americký matematik. Bol špecialistom v teórii pravdepodobnosti, objasnil úlohu operátorov zviazaných s markovskými procesmi.
15. 1. 1850 sa v Moskve narodila *Sofia Vasiljevna Kovalevská*, ruská matematická. Vyriešila niektoré problémy teoretickej fyziky a riešenia diferenciálnych rovníc. Bola prvou univerzitnou profesorkou matematiky v Európe (od roku 1884 v Stockholme).
17. 1. 1910 zomrel *Friedrich Kohlrausch*, nemecký fyzik. Zaoberal sa elektrickým a magnetickým meraním, objavil tepelnú závislosť vodivosti elektrolytov.

17. 1. 1975 zomrel *Georgij Jevgenejevič Šilov*, sovietsky matematik. Pracoval v oblasti teórie funkcií, funkcionálnej analýzy i algebry.
18. 1. 1880 sa vo Viedni narodil *Paul Ehrenfest*, rakúsky teoretický fyzik. Rozpracoval termodynamiku termoelektrických javov a teóriu fázových prechodov. Ovplynvil aj štatistickú mechaniku, jadrovú fyziku, kvantovú teóriu.
19. 1. 1930 zomrel *Frank Penningstone Ramsey*, anglický matematik a logik. Natrvalo sa zapísal do diskkrétnej matematiky a kombinatoriky.
20. 1. 1935 sa v Moskve narodil *Jevgenij Pavlovič Velichov*, sovietsky fyzik. Vedecky pracuje na problematike jadernej syntézy, kvantovej elektroniky, magneto-hydrodynamických generátorov a fyziky plazmy.
22. 1. 1775 sa v Polémieux pri Lyone narodil *André Marie Ampère*, francúzsky fyzik a matematik. Vybudoval základy elektrodynamiky. Matematickými metódami riešil problémy optiky a teórie plynov.
22. 1. 1880 zomrel v Györi *Frigyes Riesz*, maďarský matematik. Patril k zakladateľom funkcionálnej analýzy a teórie topologických priestorov.
22. 1. 1973 zomrel *Paul Antoine Montel*, francúzsky matematik. Pracoval v teórii funkcií, geometrii.
23. 1. 1840 sa v Eisenachu narodil *Ernst Karl Abbe*, nemecký fyzik. Skonštruoval moderné mikroskopy a optické prístroje.
25. 1. 1915 sa narodil *André Lichnerowicz*, francúzsky matematik. Svojimi vedeckými prácami ovplyvnil matematickú fyziku, diferenciálnu geometriu, teóriu grúp i topológiu.
26. 1. 1895 zomrel *Arthur Cayley*, anglický matematik. Položil základy súčasnej algebraickej geometrie, odhalil súvislosti medzi teóriou invariantov a projektívnou geometriou.
27. 1. 1860 v Targu-Mures (Rumunsko) zomrel *János Bolyai*, maďarský matematik. Samostatne odhalil základy neeuklidovskej geometrie.
29. 1. 1755 sa v Bazileji narodil *Nikolaj Ivanovič Fuss*, ruský matematik švajčiarskeho pôvodu. Bol žiakom i priateľom L. Eulera. Zaoberal sa sférickou geometriou, teóriou radov, astronómiou.
29. 1. 1810 sa v Sorau narodil *Ernst Eduard Kummer*, nemecký matematik. Teóriou ideálnych čísel prispel k rozvoju algebraických číselných telies.

dj

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Jára Cimrman astronom

Před nedávnem jsme v této rubrice psali o přínosu známého českého génia Járy Cimrmana k rozvoji fyziky a jejích technických aplikací. Tak je znám Cimrmanův projekt přístroje k čištění koberců bombardováním částicemi alfa (Cimrmanových výsledků později použil Rutherford, když v roce 1911 na základě pokusů s rozptylem těchto částic objevil atomové jádro), Cimrmanův transportní fenomén v gravitačním poli, v jehož důsledku dochází k nadměrnému hromadění horníků v dolech, Cimrmanova perforovaná lžice hladomorka a další podobné vynálezy.

Při nespoutaném vzletu svého génia se Cimrman ovšem zamýšlel také nad otázkami vesmíru jako celku a zasáhl významně i do oblasti astronomie. Jak bylo konstatováno na konferenci čs. astronomů v Brně v roce 1973, měl k tomu Cimrman i zvláštní předpoklady. Při dlouhodobém působení na slepičí farmě se u něho vyvinula jako nemoc z povolání hyperbolická šilhavost. To mu umožňovalo pozorovat na obloze dvě různé hvězdy současně, porovnávat jejich intenzity a působil tak vlastně jako dvoukanálový vizuální fotometr. K pozorování meteorů vyvinul Cimrman dírkovou komoru kolosálních rozměrů (dírkou měla průměr 6 km), takže se v komoře zobrazovala celá obloha najednou. Ohnisková délka této celooblohové dírkové komory činila 330 km. Na jedné straně to sice práci komory znemožňovalo (ve výškách odpovídajících ohnisku již žádné meteory nesvítí), ale na druhé straně rozměry komory samé umožňovaly meteory místo fotografování přímo lapat. Obdivuhodná byla Cimrmanova schopnost dosahovat primitivními prostředky vynikajících výsledků. Tak například pomocí dvou kapesních zrcátek jednoznačně prokázal, že světlo se šíří stejnou rychlostí tam i nazpátek.

Největší Cimrmanův přínos však znamenaly jeho práce při studiu černých děr. Díry byly vůbec Cimrmanovou mání, nejen ve fyzice (včetně fyziky polovodičů), ale i ve filosofii, stavebnictví, anatomii a dalších vědních oborech. Cimrman též vyřkl rozhodující slovo ke kosmogonii. Jak upozornil časopis Věda a technika mládeži (č. 24, 1988), dokázal Cimrman, že po velkém třesku musí následovat velký plesk, a že tedy vývoj vesmíru není vlastně nic jiného než třesky — plesky.

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, Praha 1, Karlovská 17, Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20 — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpalkova 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1990

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

ADRESA REDAKCE:

M. D. Rettigové 4,
116 39 Praha 1 - Nové Město
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

REDAKČNÍ KRUH:

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topolčany; doc. dr. Stanislav Jendroň, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

ROZHLEDY

matematicko
-fyzikální

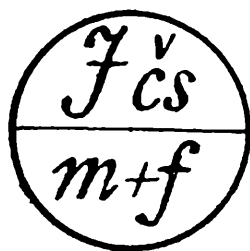
6
89 – 90

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

ÚNOR

CENA 3,00 Kčs



ROZHLEDY matematicko -fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUČÍ REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Luděk Granát: Co je počítačová grafika	241
Emil Calda: Svítí nebo nesvítí?	246
Cyril Höschi: Regulace osvětlení měřicích přístrojů	249
Dušan Jedinák: Uctievač geometrie	253
Z matematiky a fyziky ZŠ	257
Přemýšlíme, řešíme	264
Naše soutěž	275
Olympiády a SOČ	279
dj: Kalendár M-F	282
Emil Calda: Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v roce 1989	285
Z nových knih	287
-IV-: Úsměvy Nielse Bohra	3. str. obálky

Co je počítačová grafika

Doc. dr. LUDĚK GRANÁT, CSc., VÚMS Praha

Lidé jsou vybaveni pěti smysly, z nichž za nejdůležitější se pokládá zrak. Člověk vnímá své okolí hlavně tak, že zpracovává obrazovou informaci získanou svými zrakovými orgány a snad od začátku existence lidstva se pokouší graficky vyjádřit svoje představy a myšlenky. O tom svědčí např. obrazy, které pocházejí z doby kamenné, uchované v jeskyních. Velmi důležitá je komunikace mezi lidmi pomocí obrázků, zvláště mezi těmi, kteří jsou zvyklí pracovat s výkresy, s grafickou a obrazovou informací, např. mezi inženýry, techniky, designéry.

Obdobně důležitou — a ze strany člověka přirozenou — je komunikace člověka s výpočetním systémem pomocí obrázků. Tu část informatiky (výpočetní techniky), která umožňuje člověku na základě jeho příkazů vytvářet pomocí počítače obrazy, různě je zpracovávat, ukládat jejich reprezentace do paměti počítače a komunikovat pomocí obrazů s výpočetním systémem — to je počítačová grafika.

Počítačová grafika umožňuje prezentaci velkého množství údajů v přehledném tvaru, jehož informační obsah je člověk schopen pochopit mnohem rychleji než obsah odpovídajícího textu nebo souboru čísel. Tato přehlednost zmenšuje i výskyt chyb, kterými je lidská činnost doprovázena.

Mezi obory využití počítačové grafiky vede dnes automatizované projektování a konstruování a automatizovaně řízené výrobní procesy. Zde počítačová grafika poskytuje např. prostředky pro automatizované vytváření technických výkresů, zobrazování navrhovaných strojů, resp. jejich částí, vytváření různých pohledů na projektované budovy. Některé velmi složité výrobky, např. integrované obvody velmi velké integrace, by ani nebylo možno navrhnout bez výpočetní techniky včetně počítačové grafiky.

Počítačová grafika se využívá v kartografii, při návrzích komunikací, při návrzích tvarů různých výrobků spotřebního průmyslu (obuvi, nábytku, sklenic, lahví). Velmi perspektivní je uplatnění počítačové grafiky v obchodní a řídicí sféře. Vedoucí pracovníci potřebují pro svá rozhodování přehledné podklady, v nichž by se mohli rychle orientovat. Sloupce čísel tento požadavek nesplňují. Mnohem výhodnější jsou různé typy grafů a diagramů. V poslední době se začíná rozvíjet vytváření obrázků k článkům a knihám hlavně technického zaměření. To umožňuje

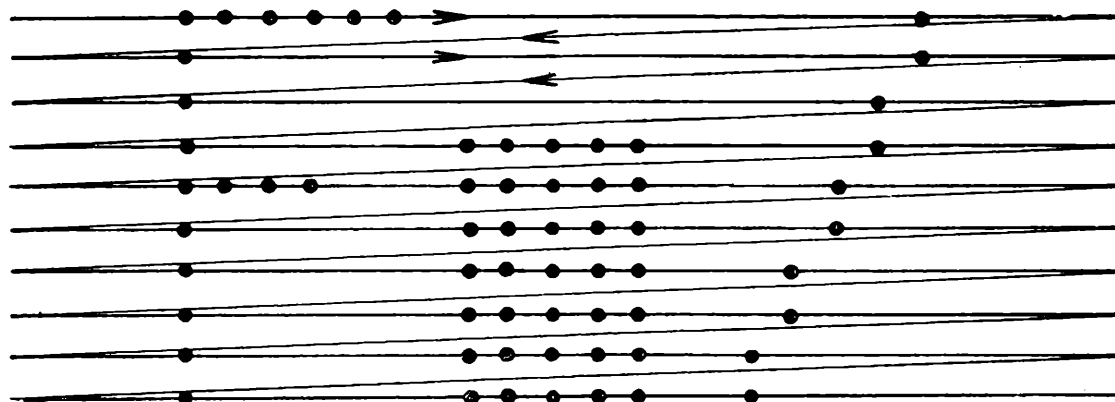
v rámci publikačních systémů podporovaných výpočetní technikou podstatně urychlovat vydávání technické literatury. V oblasti výuky umožňuje počítačová grafika přípravu kvalitních vizuálních pomůcek, které jednak urychlují pochopení toho, co vyučující chce sdělit, jednak značně zvyšují množství zapamatovaných poznatků. Takto bychom mohli v uvádění aplikací počítačové grafiky pokračovat dále. Lze říci, že s počítačovou grafikou se můžeme setkat snad již ve všech oborech lidské činnosti.

Vývoj počítačové grafiky je závislý ve značné míře na vývoji technických prostředků, a to jak těch, které tvoří obvyklé součásti výpočetních systémů, tak grafických zařízení, z nichž uvedeme nejdůležitější představitele.

Grafická zařízení bývají dělena na výstupní a vstupní. Některá spojují funkce obou těchto tříd.

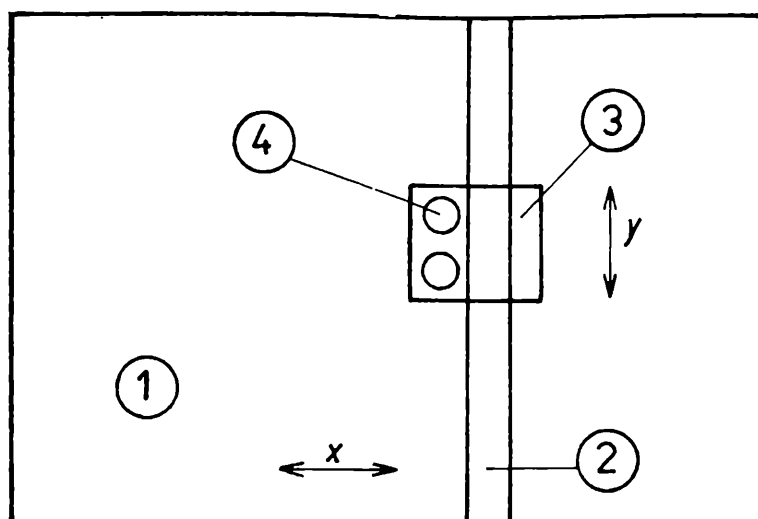
Výstupní grafická zařízení si dále rozdělíme na zařízení vektorového a rastrového typu. *Vektorová grafická zařízení* zobrazují grafické prvky tak, jak je kreslíme tužkou na papíru, tj. např. hrot písátka upevněného na kreslicí hlavě kresliče se pohybuje při zobrazování úsečky od počátečního bodu této úsečky směrem k jejímu koncovému bodu. Nebývá to ovšem přesně po uvažované úsečce, ale po její vhodné aproximaci (srovnej s [1]).

Rastrová zařízení pracují obdobně, jako se vytváří obraz u televizoru. Zobrazovaná plocha je reprezentována maticí bodů (obrazových prvků). Rastrové zařízení řídí po řádcích intenzitu, případně barvu po sobě v řádcích umístěných bodů (obr. 1).



Obr. 1

Zpočátku převládala vektorová zařízení. Byly to hlavně kreslicí stoly, kde záznamové médium (obvykle papír) leží na desce kreslicího stolu. Nad deskou jezdí rameno (most), jehož pohyb odpovídá změně jedné souřadnice (obvykle x), po rameni se pohybuje kreslicí hlava, jejíž pohyb odpovídá změně druhé souřadnice (obr. 2). Při vývoji a výrobě zařízení



Obr. 2 : Schéma kreslicího stolu

1 — zobrazovací plocha, 2 — rameno stolu, 3 — kreslicí hlava, 4 — pisátko

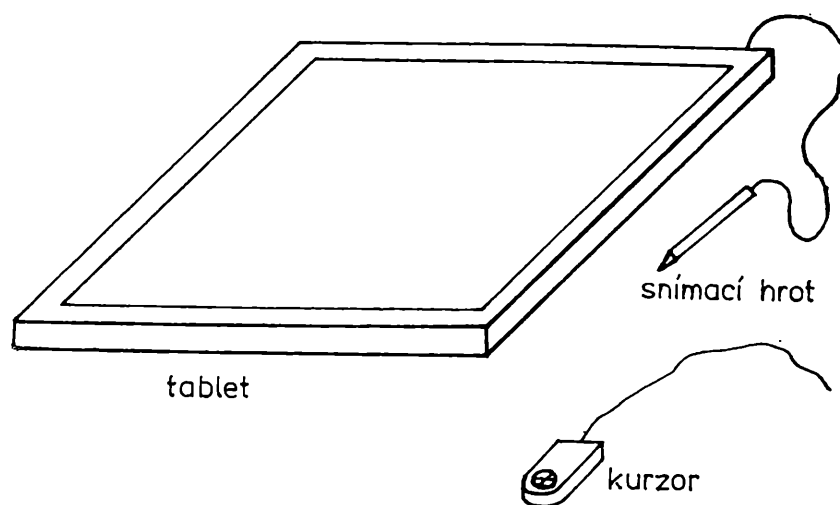
této skupiny bylo ČSSK úspěšné i v mezinárodním měřítku. Stoly DIGIGRAF vyvinuté ve Výzkumném ústavu matematických strojů v Praze a vyrobené v ZPA Nový Bor představovaly významnou vývozní položku do zemí RVHP.

Další typy vektorových kresliců odvozují pohyb jedné souřadnice z rotace válce, na kterém je záznamové médium upevněno, nebo z pohybu válců, které papír pomocí odpružených kladek posouvají. Druhá souřadnice je opět realizována pohybem po rameni kolmém ke směru pohybu média. Z těchto zařízení jste se možná již setkali s kreslicí MINIGRAF nebo COLORGRAF vyráběnými st. podnikem Aritma.

Stále častěji jsou vektorové kreslice nahrazovány rastrovými kreslicí, které pracují na principech různých druhů tiskáren (např. mechanických mozaikových, tryskových, elektrostatických, laserových). Tato zařízení lze podle potřeby využívat jak pro běžný tisk textů, tak pro kreslení obrázků.

Kreslice vytvářejí trvalý záznam naprogramovaného zobrazení daného objektu. Při změně objektu nebo jeho části je nutno pořídit celý výkres znovu. To trvá u složitějších objektů neúnosně dlouho. Proto pro interakční práci operátora s výpočetním systémem je pro navrhování nových objektů nebo provádění změn daných objektů nutné zařízení, které je schopno velmi rychle vytvořit nový obraz, a to je grafický displej. Do sedmdesátých let to byly většinou vektorové displeje, u nichž byl elektronový paprsek řízen vychylovacími obvody tak, aby vykresloval vektorovým způsobem obraz na obrazovce. Dnes však převládá užívání rastrových displejů, které relativně snadno realizují vícebarevná zobrazení a zobrazování celých plošek.

Další třídu zařízení tvoří *vstupní zařízení*. Pro snímání polohy daných bodů (pomocí volného kurzoru s nitkovým křížem nebo snímacího hrotu) se užívá různých typů *digitalizátorů*. Tato zařízení předávají sejmuté souřadnice bezprostředně počítači, nebo je zaznamenávají např. na magnetickou pásku.



Obr. 3

Při interakční práci s grafickým systémem se užívá menších a jednodušších digitalizátorů, které nazýváme *tablet* (obr. 3). Po sejmutí nastavené polohy se zobrazí na obrazovce grafického displeje na místě odpovídající této poloze speciální znak, grafický kurzor, nejčastěji ve tvaru křížku. Místo tabletu se mnohdy užívá ke vstupu polohové informace některého z levnějších zařízení, např. *pákového ovládače* (joystick) nebo tzv. *myši*. Pro ilustraci zde uvedeme princip druhého z těchto zařízení. Myš má tvar krabičky s kuličkou na spodní straně. Při pohybu myši po podložce se kulička otáčí a její pohyb se snímá potenciometry, jejichž hodnoty se mění analogo-číslicovými převodníky na digitální. Tyto hodnoty může číst připojený procesor a zobrazovat ve tvaru grafického kurzoru na obrazovce. U přesnějšího typu myši, tzv. optické myši, musí podložka obsahovat speciální mřížku a pohyb myši vzhledem k podložce se snímá fotobuňkami.

Uváděná vstupní zařízení patří do třídy tzv. *lokátorů*, které poskytují informaci o poloze, tj. souřadnice bodů. Druhá třída vstupních grafických zařízení slouží k vybírání určitého grafického objektu z několika zobrazených grafických objektů. Poskytuje hlavně jméno tohoto objektu. Typickým zařízením této třídy je *světelné pero*. Ukážeme-li světelným perem na nějaký zobrazený objekt na displeji, světelné pero obsahující fotobuňku vyšle impuls a procesor zjistí jméno objektu, který je zobrazován v tento okamžik.

Kromě uváděných zařízení vstupu grafické informace, která vyžadují součinnost operátora, existují automatická vstupní zařízení. Tyto snímače např. po řádcích prohlížejí daný obraz a každému bodu určité pravoúhelníkové matice přiřazují barvu a intenzitu.

Zájemci o další informace o zařízeních počítačové grafiky je mohou získat např. v [2], [3] nebo v dalších publikacích o počítačové grafice.

Vzhledem k důležitosti a perspektivnosti využívání počítačové grafiky je potřeba se s ní včas seznámit. Zde se naskytá otázka: Co bychom o ní měli znát? Zatím jsme se velmi stručně věnovali zařízením počítačové grafiky. V základních kursech počítačové grafiky bývá uváděna soustava základních grafických prvků dvojrozměrné grafiky, které slouží jako stavební kameny, z nichž se skládají výsledné obrazy. Těmito prvky bývají úsečka, resp. sled úseček — lomená čára, různé značky, text, mnohoúhelníky. Mohou to být též oblouky určitých křivek (kružnice, kuželoseček, dalších křivek), plochy ohraničené těmito křivkami, pole buněk pro vytváření různých vzorů. S těmito prvky se pracuje většinou pomocí souboru podprogramů. Kromě definování prvků se určuje i způsob jejich zobrazení (např. zda lomená čára má být zobrazena jako plná, čárkovaná, čerchovaná, jaká má být tloušťka jejího obrazu, jaká barva). Další programy umožňují provádění transformací daných prvků (translace, rotaci, změnu měřítka). Neměly by chybět ani informace o interakčních grafických vstupních technikách.

Je vhodné seznámit se s algoritmy pro generování základních prvků (i když mnohé z nich mohou být realizovány technickými prostředky). Algoritmům pro zobrazování úsečky byl již věnován příspěvek [1] v 66. ročníku Rozhledů.

S počítačovou grafikou úzce souvisí i řešení různých geometrických úloh pomocí počítače. Proto se do ní často zahrnují tyto úlohy alespoň v rámci jejích aplikací. Jde např. o prokládání hladkých křivek danými body, o řešení elementárních planimetrických úloh. Právě tato poslední skupina úloh může přispět k ujasnění si různých geometrických vztahů, kterým se učíte v matematice. Protože se příslušné výpočty provádějí na počítači, je nutno se vypořádat např. s problémy numerického řešení těchto úloh.

V pokročilejších kursech se seznamují účastníci se zobrazováním trojrozměrných útvarů. Zde pro získání názorných obrázků je kromě uplatnění promítacích metod potřeba mít k dispozici podprogramy pro odstraňování neviditelných částí zobrazovaných útvarů, případně podprogramy pro zpracování osvětlení těchto útvarů.

Protože jde o řešení pomocí výpočetní techniky, je nutno řešit též např. úlohy reprezentace útvarů, s nimiž pracujeme, v paměti počítače, metody práce uživatele (operátora) s grafickým systémem a způsoby, jak nejvhodněji pro danou aplikaci využít možnosti počítačové grafiky.

Rozhledy neumožňují samozřejmě systematicky uveřejňovat kurs počítačové grafiky, to není jejich účel. Budou se však snažit publikovat alespoň příspěvky, které by měly poskytovat určité informace o jejích metodách a vzbuzovat o ni zájem.

- [1] Granát, L.: Počítačová grafika — zobrazování úsečky. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 66, č. 5, 1987/88, str. 190—196.
- [2] Pejčoch, J.: Počítačová grafika. Řada MIKRO QUO VADIS, svazek 11, Výzkumný ústav pro sdělovací techniku A. S. Popova, Praha, 1989.
- [3] Baudiš, P., Granát, L.: Úvod do počítačové grafiky. TESLA ELTOS — IMA, Praha 1989.

MATEMATIKA

Svítlí nebo nesvítlí?

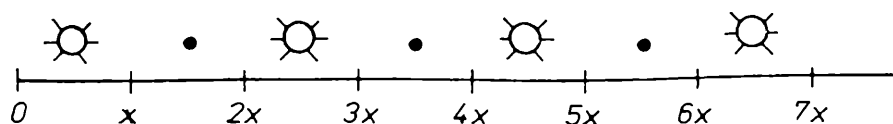
Doc. dr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

Při svém prázdninovém pobytu za hranicemi všedních dnů si jednoho večera profesor Ypsilon povšiml vzdáleného majáku, který se rozsvítil přesně ve 22.00 hodin. Obíraje se jinými záležitostmi věnoval mu nadále pozornost jen letmou, takže zjistil pouze tyto údaje: ve 22.19 hod. nesvítlí, ve 22.57 svítlí a ve 23.46 nesvítlí. Naším úkolem je určit, v jakém stavu se maják (nikoli profesor Ypsilon!) nalézal v 01.05 hodin, víme-li, že během noci tento maják střídavě celý počet minut svítlí a stejný počet minut nesvítlí.

Než začneme úlohu řešit, připomeneme si jednoduchý pojem celé části reálného čísla: celou částí reálného čísla a je to celé číslo, které je největší ze všech celých čísel, která jsou menší nebo rovna číslu a ; celou část čísla a značíme $[a]$. Je tedy např. $[0,8] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[\pi] = 3$, $[4] = 4$, $[-\sqrt{2}] = -2$ atd. S touto výzbrojí, kterou již většinou máte k dispozici, se pustíme do řešení příkladu profesora Ypsilon.

Ujasněme si nejprve, že údajům typu „maják v okamžiku 22.19 hodin nesvítlí“ budeme rozumět tak, že maják nesvítlí i v jistém okolí tohoto okamžiku, tj. že v tomto okamžiku nezhasl, resp. se nerozsvítl. A protože doba, po kterou souvisle nesvítlí, je dána celým počtem minut, pak v čase 22.19 hod. už nesvítlí aspoň jednu minutu a ještě aspoň jednu minutu svítit nebude! Odtud plyne, že doba, po kterou maják souvisle svítí, resp. nesvítlí, trvá alespoň dvě minuty. Uvědomme si dále, že z faktu, že maják se rozsvítl ve 22.00 hod. a ve 22.19 nesvítlí, plyne, že doba, během které souvisle svítí, je rovna nejvýše osmnácti minutám. Shrňme-li tyto jednoduché úvahy a označíme-li x počet minut, v nichž maják souvisle svítí, resp. nesvítlí, dostaneme

$$x \in \{2, 3, 4, 5, \dots, 16, 17, 18\}.$$



Obr. 1

Mysleme si nyní, že měříme čas od okamžiku, kdy se maják poprvé rozsvítí, a jednotlivé intervaly délky x minut nanese na zvolenou polopřímku od jejího počátku O (viz obr. 1); prázdný kroužek s paprsky resp. plný kroužek bez paprsků nad jednotlivými intervaly znamenají, že v těchto intervalech maják svítí, resp. nesvítí. S pomocí tohoto znázornění rozebereme údaje, které jsou o majáku k dispozici. Snadno nahlédneme, že maják ve 22. 19 nesvítí právě tehdy, když číslo 19 je vnitřním bodem intervalu označeného plným kroužkem; vzhledem k tomu, že levé krajní body všech těchto intervalů jsou liché násobky čísla x , platí, že číslo $\left\lfloor \frac{19}{x} \right\rfloor$ je liché. Necháme tedy x probíhat množinu $\{2, 3, 4, \dots, 18\}$

a prozkoumáme výraz $\left\lfloor \frac{19}{x} \right\rfloor$:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\left\lfloor \frac{19}{x} \right\rfloor$	9	6	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Pomocí této tabulky dostáváme, že

$$x \in \{2, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}.$$

Sami si už jistě zdůvodníte, že k tomu, aby maják ve 22.57 svítil, je nutné a stačí, aby číslo $\left\lfloor \frac{57}{x} \right\rfloor$ bylo sudé. Probereme-li všechny možnosti, které zůstaly po splnění předchozí podmínky, dostaneme

x	2	5	6	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\left\lfloor \frac{57}{x} \right\rfloor$	28	11	9	5	5	4	4	4	3	3	3	3

Odtud je patrné, že mohou vyhovovat už jen ta x , pro něž platí

$$x \in \{2, 12, 13, 14\}.$$

Poslední podmínka vede k požadavku, aby číslo $\left\lfloor \frac{106}{x} \right\rfloor$ bylo liché:

x	2	12	13	14
$\left\lfloor \frac{106}{x} \right\rfloor$	53	8	8	7

což znamená, že je $x = 2$ nebo $x = 14$.

Dostáváme tak celkově tento výsledek: K tomu, aby za uvedených podmínek maják ve 22.19 hod. nesvítí, ve 22.57 svítí a ve 23.46 nesvítí, musí být délka intervalu, v němž souvisle svítí resp. nesvítí, rovna dvěma nebo čtrnácti minutám.

A v jakém stavu se nalézá maják v 01.05 hodin? Je-li $x = 2$, je

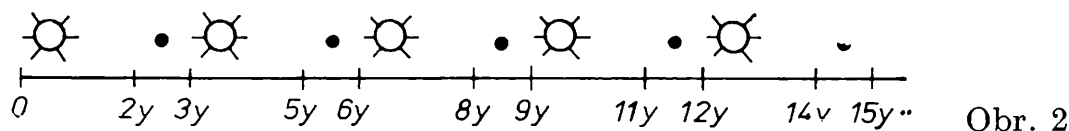
$$\left\lfloor \frac{185}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{185}{2} \right\rfloor = 92 ;$$

je-li $x = 14$, je

$$\left\lfloor \frac{185}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{185}{14} \right\rfloor = 13 .$$

Znamená to tedy, že za předpokladu $x = 2$ maják v 01.05 hod. nesvítí, neboť 92 je číslo sudé; v případě, že je $x = 14$, maják svítí, neboť číslo 13 je liché. Z daných údajů nelze tedy rozhodnout, zda maják o 01.05 hodin svítí či nesvítí. Jestliže se však na maják v 01.05 hod. podíváme, poznáme, která z těchto dvou možností platí: svítí-li, je $x = 14$, nesvítí-li, je $x = 2$.

Zkoumejme nyní úlohu, která se od právě vyřešené úlohy profesora Ypsilonu liší pouze tím, že doba, po kterou maják svítí, je dvakrát delší než doba, po kterou nesvítí. Označme y počet minut, během nichž maják souvisle nesvítí a nakresleme si obrázek (viz obr. 2) analogický k obr. 1.



Nebude vám už činit velkých potíží zdůvodnit, že ve 22.19 hod. maják nesvítí, právě když číslo $\left\lfloor \frac{19}{y} \right\rfloor$ lze vyjádřit ve tvaru $3k + 2$, kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; levými krajními body intervalů, v nichž maják nesvítí, jsou totiž čísla $2y, 5y, 8y, 11y, \dots$, tj. čísla tvaru $(3k + 2)y$. S využitím tabulky pro $\left\lfloor \frac{19}{x} \right\rfloor$ je vidět, že číslo $\left\lfloor \frac{19}{y} \right\rfloor$ lze psát ve tvaru $3k + 2$ pouze pro $y = 7$ nebo $y = 8$ nebo $y = 9$.

Aby maják ve 22.57 hod. svítí, je nutné a stačí, aby číslo $\left\lfloor \frac{57}{y} \right\rfloor$ nebylo možno vyjádřit ve tvaru $3k + 2$; z tabulky

y	7	8	9
$\left[\frac{57}{y} \right]$	8	7	6

je patrné, že to nastane jen pro $y = 8$ a $y = 9$.

Podmínka, aby maják ve 23.46 nesvítí, je ekvivalentní s tím, aby číslo $\left[\frac{106}{y} \right]$ bylo možno vyjádřit ve tvaru $3k + 2$; z tabulky

y	8	9
$\left[\frac{106}{y} \right]$	13	11

je zřejmé, že to platí pouze pro $y = 9$.

Z údajů dané úlohy tedy vyplývá, že maják střídavě 18 minut svítí a 9 minut nesvítí. V tomto případě maják v 0.1.05 hodin nesvítí, neboť je $\left[\frac{185}{y} \right] = \left[\frac{185}{9} \right] = 20 = 3 \cdot 6 + 2$.

Vyřešením obou těchto příkladů je otázka v záhlaví tohoto článku zodpovězena.

FYZIKA

Regulace osvětlení měřicích přístrojů

Prof. ing. CYRIL HÖSCHL, ÚT-ČSAV Praha

Indikátory různých měřicích a kontrolních přístrojů v dopravních prostředcích i jinde mívají osvětlení, jehož intenzitu lze různě nastavit. To má velký význam např. pro řidiče automobilů. Příliš velké osvětlení může řidiče oslňovat, příliš malé zase ztěžuje vnímání a unavuje zrak. Existuje tedy intenzita osvětlení, která řidiči nejlépe vyhovuje, avšak ta závisí na světelném kontrastu k okolí a je u každého řidiče trochu jiná. Proto je výhodné, lze-li osvětlení „palubních přístrojů“ plynule regulovat; řidič si pak nastaví takovou intenzitu světla, která mu v daných podmínkách nejlépe vyhovuje. Nejjednodušěji se toho dosáhne tak, že se před žárovky vestavěné do přístrojů zařadí v sérii reostat s pohyblivým běžcem. Napájecí zdroj stejnosměrného proudu má konstatní na-

pětí U . Schéma uspořádání je na obr. 1. Nastavitelný odpor reostatu je R_1 , odpor žárovek R_2 . Protékající proud označíme I .

Je-li $R_1 = 0$, mají žárovky maximální výkon. Z Ohmova zákona vypočteme proud $I = U/R_2$. Odebíraný výkon je dán součinem napětí U a proudu I . To platí, používáme-li jednotek SI. Tedy

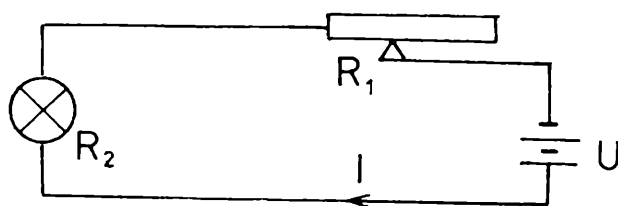
$$P = UI = \frac{U^2}{R_2}. \quad (1)$$

Jiná situace nastane, je-li $R_1 > 0$. Tehdy bude celkový odpor $R_1 + R_2$ a protékající proud

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}. \quad (2)$$

Vlivem protékajícího proudu I vznikne na svorkách reostatu rozdíl potenciálů

$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad (3)$$



Obr. 1

a na žárovkách

$$U_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \quad (4)$$

Zřejmě $U = U_1 + U_2$. Výkon odebraný žárovkami bude

$$P_2 = U_2 I = \frac{U^2}{R_2} \cdot \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}. \quad (5)$$

Dosadíme-li $R_1 = 0$, dostaneme odtud vztah (1). První činitel na pravé straně (5) představuje maximální výkon P spotřebovaný žárovkami podle (1) při $R_1 = 0$. Druhý činitel představuje poměrné zmenšení výkonu. Upravíme jej zavedením bezrozměrového poměru

$$x = \frac{R_1}{R_2}, \quad (6)$$

který popisuje nastavení reostatu. Dostaneme závislost

$$\frac{P_2}{P} = \frac{1}{(x + 1)^2}. \quad (7)$$

Je-li $x = 0$, musí být $P_2 = P$. Při x rostoucím bez omezení se P_2 blíží

k nule. Vidíme, že výkon žárovek není nepřímo úměrný poměru x nastavení reostatu. Platí sice, že při větším R_1 je P_2 menší, ale nejde o nepřímou úměrnost.

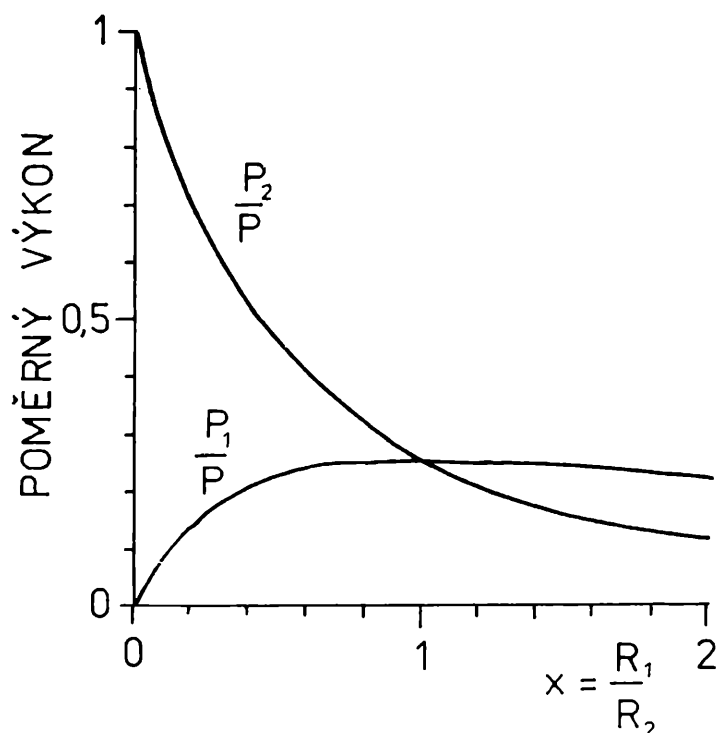
Z praktického hlediska je důležité znát i výkon P_1 zmařený reostatem. Tento výkon se mění v teplo, které se rozptýlí do okolí. Kdyby byl tento výkon příliš velký, reostat by se mohl nepřiměřeně ohřívat a za zvýšené teploty rychle zkorodovat nebo se jinak poškodit. Zřejmě

$$P_1 = U_1 I = \frac{U^2}{R_2} \cdot \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}, \quad (8)$$

čili

$$\frac{P_1}{P} = \frac{x}{(x+1)^2}. \quad (9)$$

Závislosti (7) a (9) jsou znázorněny na obr. 2. K maximálnímu ohřevu reostatu dochází při $x = 1$, tj. při $R_1 = R_2$. Tehdy je $P_2 = P_1 = 0,25 P$, výkon žárovek je snížen na čtvrtinu původní hodnoty. To už by žárovky prakticky nesvítily. Bude-li tedy reostat navržen tak, aby se jeho povrchem stačil odvádět tepelný výkon $0,25 P$, bude pracovat spolehlivě za každého nastavení x .



Obr. 2

Odhadneme-li součinitel α přestupu tepla z povrchu A pouzdra reostatu do okolí, zahřeje se povrch pouzdra reostatu proti okolí maximálně o teplotní rozdíl

$$\Delta t = \frac{0,25 P}{\alpha A}. \quad (10)$$

Bude-li např. $P = 5 \text{ W}$, $\alpha = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $A = 0,005 \text{ m}^2$, vyjde

$$\Delta t = \frac{0,25 \cdot 5}{10 \cdot 0,005} = 25 \text{ }^\circ\text{C}.$$

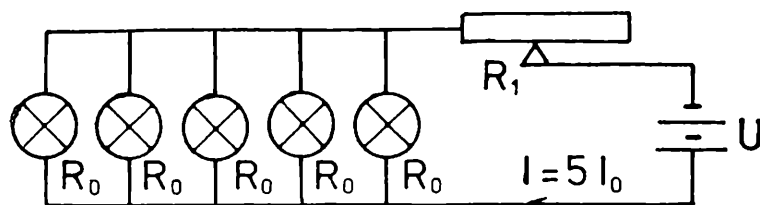
Odporové těleso uvnitř pouzdra by mělo teplotu pochopitelně ještě vyšší. Materiály, z nichž je reostat vyroben, je třeba vybrat tak, aby toto zvýšení teplot dlouhodobě snášely bez poškození.

Rovnice (7) a (9) jsme upravili tak, že jde o závislosti bezrozměrových veličin. Určili jsme závislost bezrozměrového poměru P_1/P , popř. P_2/P , na činiteli $x = R_1/R_2$. To má velkou výhodu v tom, že pracujeme pouze s třemi proměnnými (místo s pěti). Obr. 2 lze pak použít k přibližnému výpočtu výkonů P_1 , popř. P_2 v závislosti na R_1 , ať už jsou hodnoty P , popř. R_2 , jakékoli. Bezrozměrové veličiny mají velký význam v teorii podobnosti a modelování.

Pokuste se odpovědět na následující čtyři otázky. Odpovědi si pak můžete zkontrolovat podle dále uvedených výsledků.

Otázky:

1. Při jakém nastavení x by se výkon odebraný žárovkami zmenšil právě na polovinu původního výkonu $P = 5 \text{ W}$ a jaký by přitom byl výkon rozptýlený reostatem?
2. Jaký je obecně celkový výkon dodávaný napájecím zdrojem?
3. Jaký je odpor R_0 jedné žárovky o výkonu 1 W při napětí 12 V a jaká je hodnota výsledného odporu R_2 , jsou-li žárovky zapojeny paralelně podle obr. 3?



Obr. 3

4. Jaký by byl odpor R_2 , kdyby dvě žárovky na obr. 3 měly každá výkon 1 W a tři 2 W (celkem tedy 8 W)? Jaký výkon by odváděl reostat v takovém případě?

Výsledky:

1. $x = \sqrt{2} - 1 \doteq 0,414$; $P_1 \doteq 0,207 P \doteq 1,036 \text{ W}$.
2. $P = P_1 + P_2 = P/(x + 1)$
3. $R_0 = U/I_0 = U^2/P_0 = 12^2/1 = 144 \Omega$,
 $R_2 = R_0/5 = 28,8 \Omega$.
4. Jejich odpory by byly 144Ω , resp. 72Ω , a výsledný odpor by byl
 $R_2 = (2/144 + 3/72)^{-1} = 18 \Omega$;
 $P_1 = 8x/(x + 1)^2$, $P_{1\text{max}} = 2 \text{ W}$.

Uctievač geometrie

Euklides

(asi 340—287 pred n. l.)

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topolčany



Ktorá kniha po biblii je na svete najrozšírenejšia? Možno sa budete diviť, ale sú to matematické „Základy“ od gréckeho matematika Euklida. Boli napísané okolo roku 300 pred naším letopočtom, pred viac ako 2200 rokmi. Odvtedy vyšli v rôznych svetových jazykoch vo viac ako tisíc vydaniach a vo veľkých nákladoch. Až donedávna sa mnohé stredoškolské učebnice, napr. v Anglicku, veľmi podobali na klasické „Základy“.

O Euklidovom živote vieme veľmi málo. Pravdepodobne sa narodil v Aténach okolo roku 340 pred n. l. Patril k žiakom filozofa Platóna. Za vlády egyptského kráľa Ptolemaia I., ktorý vládol v rokoch 306—283 pred n. l., Euklides založil a viedol v Alexandrii matematickú školu. Tu zhrnul vtedajšie geometrické a matematické poznatky, obohatil ich vlastnými matematickými výsledkami a usporiadal do znamenitého diela *Stoicheia* — Základy. Táto práca sa stala jedinou učebnicou matematiky pre celé stáročia. Tradícia hovorí, že keď sa kráľ Ptolemaios I. spýtal Euklida, či k hlbšiemu poznaniu matematiky nevedie ľahšia a kratšia cesta ako cez jeho Základy, dostal vraj takúto odpoveď: „Ani pre kráľov! niet lepšej cesty ku geometrii.“

Matematici Pappos (druhá polovica 3. storočia) a Proklos (410—486) nám vo svojich komentároch k Základom zanechali poznámky o samotnom Euklidovi: Bol vraj mužom jemného charakteru, skromný a nezávislý. V alexandrijskej škole vyučoval pod vplyvom Platónovej filozofie aritmetiku, geometriu, harmóniu (teóriu hudby) a astronómiu. Matematickým poznatkom, zhromažďovaným do jeho doby, dal prísnu logickú štruktúru a presnú formu. K úspechom matematickým si pripísal i zásluhy pedagogické. Stal sa učiteľom pre zástup priateľov matematiky v celých tisícročiach.

Dielo „Základy“ (latinsky: *Elementa*, grécky *Stoicheia*) sa skladá z trinástich kníh. Sú tu vyložené základy planimetrie, stereometrie, geometrie a geometrickej algebry. Prvá kniha pojednáva o zhodnosti

strojuholníkov, teórii rovnobežiek, vlastnostiach rovnobežníkov a premeny mnohouholníkov na trojuholníky rovnakého obsahu. Tu je uvedená aj známa Pytagorova veta. Druhá kniha sa dotýka premeny mnohouholníka na štvorec a otázok geometricky chápaných identít. V tretej knihe sa píše o kružnici, vzájomných polohách kružníc a priamok, o vzťahu stredového a obvodového uhla. Štvrtá až šiesta kniha sú záležitosťami vpísaných a opísaných mnohouholníkov, teóriou pomerov, náukou o podobnosti mnohouholníkov a poznámkou o iracionálnych veličinách. Siedma, ôsma a deviata kniha venujú pozornosť axiomatike a teórii čísel, desiata obsahuje teóriu iracionálnych veličín. Jedenásta a dvanásta sa dotýkajú základov stereometrie, trinásta kniha rozvíja náuku o pravidelných mnohostenoch.

Originálny text Základov sa nezachoval, zostali len komentáre k nemu. Latinské preklady niektorých častí sú doložené z 5. storočia nášho letopočtu (*Boëthius*). Vedecké vydanie všetkých Euklidových spisov v gréckom znení a s latinským prekladom pripravil *David Gregory* roku 1703. Český preklad Základov bol vydaný roku 1907 v tristoštrnásťstránkovej knižke od *F. Servíta*.

■ Celá Euklidova práca je budovaná podľa jednotnej logickej schémy. Každá kniha začína definovaním — objasnením, názorným popisom všetkých základných objektov. Za nimi nasledujú postuláty — požadované konkrétne vlastnosti týchto geometrických útvarov. Ďalej sú uvedené axiómy — výpovede o všeobecných vlastnostiach veličín aj negeometrických. Potom sú uvedené matematické vety. Každá z nich je najprv sformulovaná, potom sa konštatuje, čo je dané a čo treba dokázať. Nasleduje dôkaz so všetkými odkazmi na predchádzajúce vety, postuláty a axiómy.

Ukážme si aspoň niekoľko Euklidových definícií, postulátov a axióm:

Z definícií: Bod je to, čo nemá častí. Čiara je dĺžka bez šírky. Hranice čiary sa nazývajú body. Rovinou sa nazýva tá plocha, ktorá je rovnako položená vzhľadom ku všetkým priamkám, ktoré v nej ležia.

(Neviete, čo je plocha? Plocha je to, čo má dĺžku a šírku!)

Niektoré Euklidove postuláty:

Každý bod možno spojiť s každým bodom priamkou.

Každú časť priamky možno neohraničene predĺžiť.

Všetky pravé uhly sa rovnajú.

Z Euklidových axióm: Dve veličiny rovnajúce sa tretej, sa rovnajú aj navzájom.

Ak ku vzájomne rovnajúcim sa veličinám pripočítame rovnaké veličiny, dostaneme opäť rovnajúce sa veličiny.

Celok je väčší ako jeho časť.

Pripomeňme si niektoré matematické výsledky spojené s Euklidovým menom. Euklidove vety s použitím podobnosti trojuholníkov sú učivom strednej školy. Tridsiata prvá veta štvrtej knihy vyslovuje tvrdenie, že súčet plôch podobných obrazcov nad odvesnami pravouhlého trojuholníka sa vždy rovná obsahu podobného útvaru nad preponou. Je to zovšeobecnený dôsledok Pytagorovej vety. Zamyslite sa nad tým.

Poznáte postup na určenie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch prirodzených čísel? Všeobecnú metódu ukazuje postupnosť

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b \\ b &= r_1q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}, \end{aligned}$$

kde a, b sú zadané prirodzené čísla, pre ktoré hľadáme najväčší spoločný deliteľ, $r_1, r_2, \dots, r_n$ je klesajúca postupnosť zvyškov po delení. Číslo r_n je posledným nenulovým zvyškom a zároveň hľadaným spoločným deliteľom.

Ukážme si príklad: Nech $a = 777, b = 629$.

$$\begin{aligned} \text{Potom } 777 &= 629 \cdot 1 + 148, \\ 629 &= 148 \cdot 4 + 37 \\ 148 &= 37 \cdot 4. \end{aligned}$$

Posledným nenulovým zvyškom je 37 a to je aj najväčší spoločný deliteľ čísel 777 a 629. Celý postup sa volá *Euklidov algoritmus*.

Viete dokázať, že prvočísel je nekonečne veľa? Euklid to vedel takto (veta 20., z deviatej knihy):

Predpokladajme, že existuje len konečne mnoho prvočísel a označme ich $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$. Skúmame číslo $P = p_1 p_2 \cdot \dots p_k + 1$. Číslo P je buď prvočíslo alebo zložené číslo. Keď je prvočíslo, tak počet prvočísel nie je ohraničený predpokladaným počtom k . Ak P je zloženým číslom, tak je deliteľné nejakým prvočíslo, napr. p_i . Potom p_i delí 1. (Pretože $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots p_k + 1$.) To je ale spor, lebo jednotka nie je deliteľná nijakým prvočíslo. Predpoklad o konečnosti množiny všetkých prvočísel vedie k sporu. Prvočísel musí byť nekonečne veľa!

Učený lekár a dobrý znalec matematiky *Hieronymus Cardano* (1501 až 1576) sa vo svojej dobe o Euklidovom diele *Základy* vyjadril: „Ich nezvratnosť a ich dokonalosť sú tak absolútne, že s nimi nemožno porovnávať žiadne iné dielo. Preto sa v nich odráža svetlo pravdy tak, že iba ten môže odlíšiť pravdu od klamu v zložitých otázkach geometrie, kto si osvojil Euklida.“ Platí to ešte aj dnes?

Euklides nevypracoval iba Základy. Napísal spis *O daných veličinách*, *O delení obrazov*, *Kuželosečky*, *Miesta na ploche*. Logické chyby v matematike vysvetlil v spise *Pseudaria — Chybné úsudky*. Astronomický spis *Fenomena* obsahuje aj sférickú trigonometriu.

V Euklidových časoch chápali matematiku ako cestu k filozofii, ako umenie systematického myslenia. Aj názov Základy naznačuje cestu k porozumeniu ostatných vecí a javov. O tom, že takto chápal svoju vedu aj Euklides, svedčí táto príhoda: Istý žiak sa pri vyučovaní spýtal Euklida: Aký zisk budem mať, ak sa naučím túto poučku? Euklides zavolať otrocka a rozkázal: — Dajte mu tri oboly (vtedajšie peniaze), lebo tento človek musí zarábať tým, čo sa učí. Aké poučenie plyní z príhody? Matematické poznatky majú okrem materiálneho úžitku aj cenu krásy ľudskej myšlienky.

Spomienkou na Euklidovu dobu je aj jednoduchá úloha z tých časov: *Somár a osol kráčali s nákladom vriec. Osol nariekal pod bremenom. Somár ho povzbudil: Dvakrát toľko by som niesol ako ty, ak by si mi dal jedno vrece. Keby si mi jedno zobral, niesli by sme obaja rovnako mnoho vriec. Určite už viete, koľko vriec niesol každý z nich.*

Euklides podstatne ovplyvnil vývoj matematiky. Pripravil vedecký základ geometrie s úsilím o axiomatické vybudovanie teórie a zvýraznení deduktívnej metódy. Význam jeho diela nenarušujú ani pochybnosti o autorskom podiele na jednotlivých knihách Základov, ani niektoré logické chyby v nich. Euklides skoncentroval bohatý matematický materiál, zvýraznil primeraný metodický výklad a naznačil smer pre prísne exaktné diela nielen v matematických disciplínach, ale aj v iných odboroch prírodných vied.

Euklides dovršil dielo predchádzajúcich generácií a vytvoril svojimi Základmi úžasnú knihu, ktorá naznačila ideál presnosti pre rozvíjajúcu sa matematiku. Moderní matematici odhalili niektoré nedokonalosti a snažili sa postaviť nové základy geometrie iným výberom systému axiém vhodných pre celú matematiku. Ich úsilie ešte neskončilo. Význam Euklidovej práce stačí nielen na to, aby sme ho spomínali, ale aj niektoré z jeho matematických myšlienok dobre poznali a vedeli ich používať.

Úloha k výročí našich parních lokomotiv

Loni se slavilo 150 let železnice na území ČSSR. Připomeňme si, že v roce 1839 přijel první vlak z Vídně do Brna. Na rok 1990 připadají dvě významná výročí českých výrobců lokomotiv. Dne 26. dubna 1900 opustila tehdejší První českomoravskou továrnu na stroje v Praze-Libni (dnešní ČKD) první česká parní lokomotiva. Plzeňská škodovka začala s výrobou parních lokomotiv až po 1. světové válce při přechodu na mírovou výrobu. První plzeňská lokomotiva byla předána do provozu 11. 6. 1920.

Ze staré příručky otiskujeme úlohu jako vzpomínku na již minulé doby dýmajících strojů na našich železnicích.

Na každý kilometr stoupání spotřebuje lokomotiva 22 kg uhlí, na každý kilometr klesání a po rovině spotřebuje 10 kg uhlí. Na trati dlouhé 62 km bylo spáleno 800 kg uhlí. Kolik kilometrů stoupání bylo na trati?

-jm-

Psí spřežení

Seznámíme vás s úlohou, která nebyla vymyšlena v teple u šálku čaje nebo kávy, ale přinesl ji drsný život v zasněžené pustině.

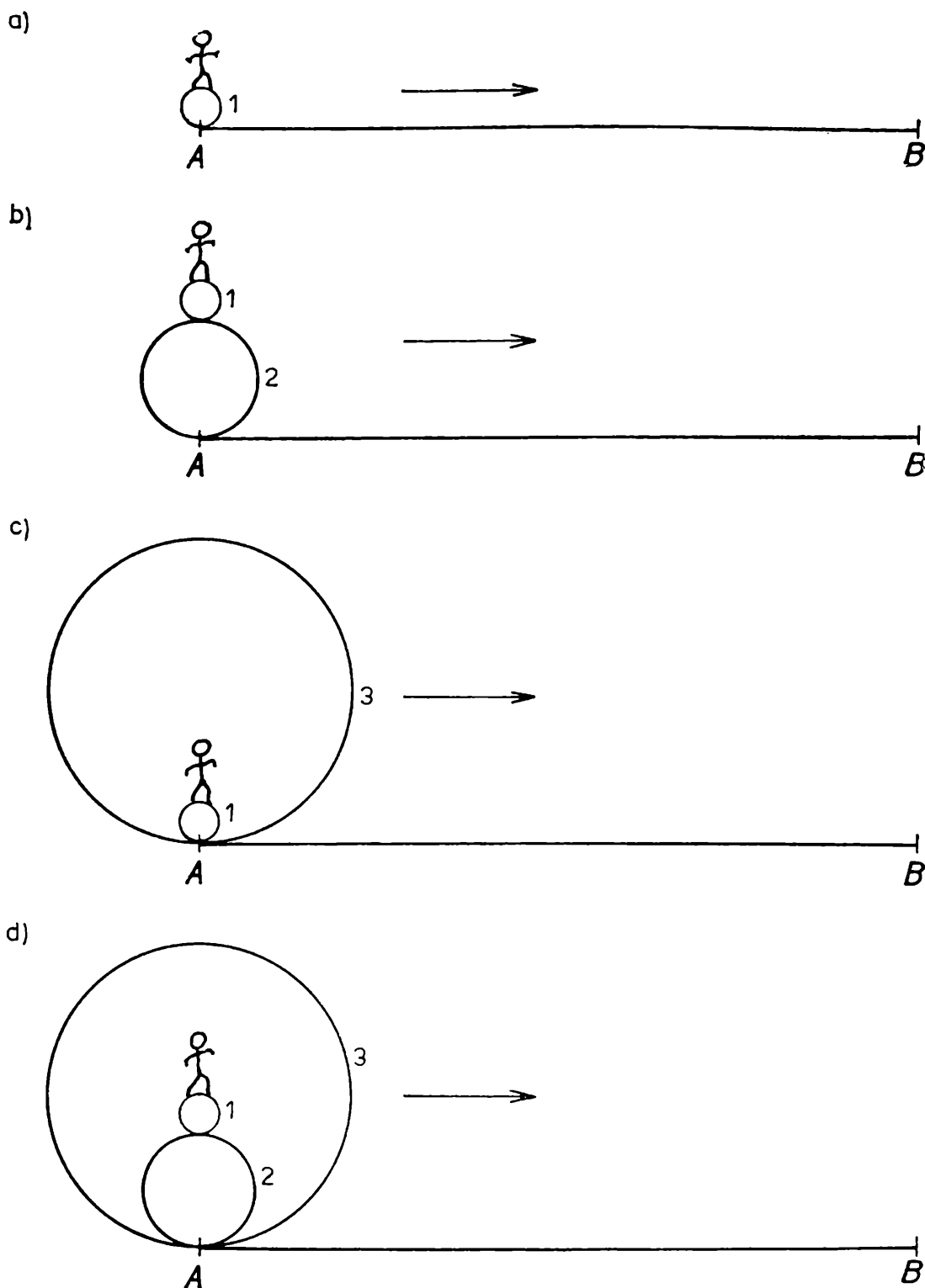
Známý americký spisovatel *Jack London* jel kdysi na saních tažených pěti psy za nemocným přítelem. Na konci prvního dne dva psi podlehli volání divočiny, přetrhali postroje a utekli s vlčí smečkou. Na další cestě se zbylými třemi psy byla rychlost saní rovna jen třem pětinám původní rychlosti, a tak London přijel k cíli o dva dny později, než předpokládal. Kdyby uprchlí dva psi byli běželi se spřežením ještě 50 mil, byl by se opozdil jen o jeden den. Jak dlouhou cestu vykonal London ke svému příteli?

Fouká-li venku za okny vítr a chumelí-li se, pak máte tu nejlepší kulisu pro řešení Londonovy úlohy. Možná, že slyšíte i psí štěkot a k iluzi jen chybí křik psovoda a práskání biče.

-jm-

Úloha z manéže

Obrázky 1a až 1d znázorňují artistu pohybujícího se pomocí válců a obruče. Obvod malého válce (1) je 1 metr, obvod většího válce (2) je 3 metry, obvod obruče (3) je 8 metrů.

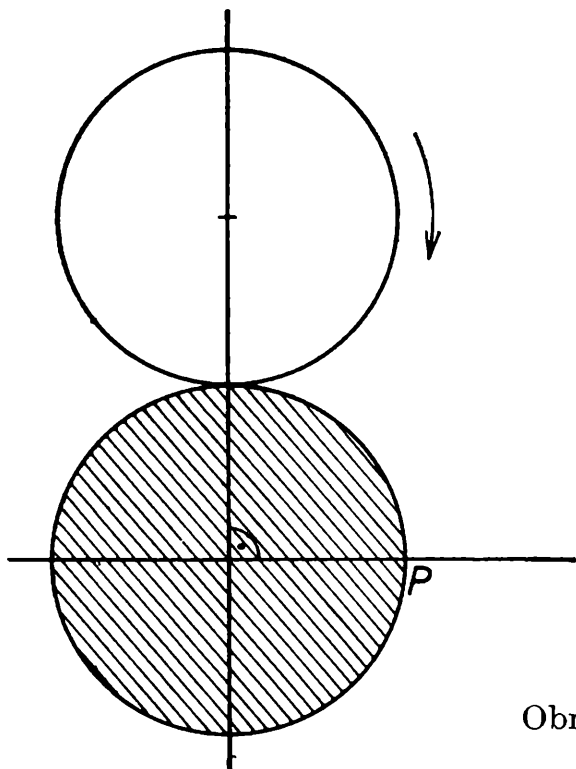


Obr. I
a — d

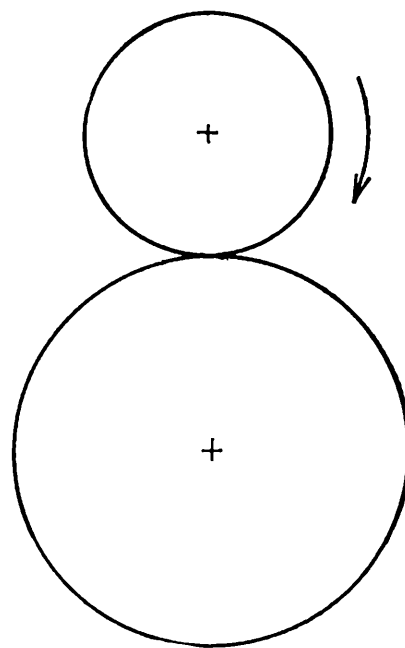
- a) Kterým směrem musí artista na válci kráčet, aby se výsledný pohyb uskutečnil ve směru šipky?
- b) Kolikrát se otočí malý válec kolem svého středu v jednotlivých případech a, b, c, d během pohybu artisty z místa A do místa B , jestliže $|AB| = 8 \text{ m}$?

Pokud jste vyřešili úlohu o artistovi, máme pro vás ještě dvě úlohy.

Na obr. 2 jsou znázorněna dvě kolečka o stejném poloměru. Šrafované je v klidu, bílé se odvaluje po jeho obvodu vyznačeným směrem bez prokluzování.



Obr. 2



Obr. 3

- O jaký úhel se otočí bílé kolečko kolem své osy, zastaví-li se otáčení v tom okamžiku, kdy bod P je dotykovým bodem obou koleček?
- Kolikrát se otočí bílé kolečko kolem vlastní osy, aby se všechny jeho body dostaly do svých výchozích poloh?

Mějme dvě kolečka, jejichž poměr poloměrů je $5 : 3$. Větší kolečko je v pevné poloze, kolečko o menším poloměru se po něm odvaluje bez prokluzování (obr. 3). Kolikrát se pohybující se kolečko otočí kolem svého středu, než jeho jednotlivé body přejdou do svých výchozích poloh?

Eva Blažková

Někdy je lepší znát jeden způsob řešení než dva

Nalezněte si v 5. čísle Rozhledů na str. 217 obr. 1. Případně si na něm doplňte úsečku $T_c T_a$.

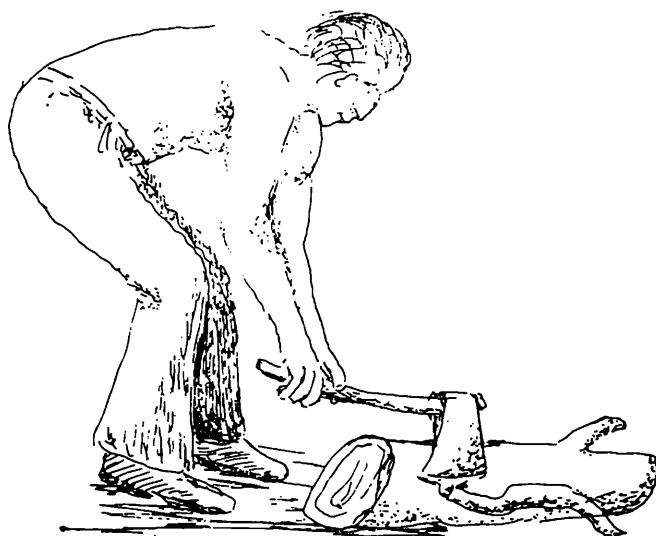
Při druhém postupu se sestrojily body C a T_a tak, že trojúhelníky ATC a $T_a T T_c$ byly stejnohlé se středem T . Odtud plyne, že $AC \parallel T_a T_c$ a $|AC| : |T_a T_c| = 2 : 1$. Podle druhého postupu se bod B sestrojil jako průsečík přímk AT_c a CT_a . Trojúhelníky ACB a $T_c T_a B$ jsou pak také stejnohlé, a to se středem B , odkud plyne $T_c B = AT_c$. Při obou postupech se tedy sestrojí též bod B .

-jm-

Omyly, které ovládly svět

Přenáší sekyrka sílu?

Nevím, zda omyl, o kterém budete tentokrát číst, ovládl svět, ale přiznávám se, že dlouho ovládal mne, dokonce i v době, kdy jsem už studoval na gymnáziu a měl jsem si svou nesprávnou fyzikální představu opravit.



Vysvětlím vám svůj omyl na jednoduchém příkladu. Když jsem štípal dříví, představoval jsem si, že se síla, kterou se svými pažemi opírám do sekyrky, přelévá do ní a spolu se sekyrkou potom putuje ke špalíku. Zde, při nárazu, se opět projeví ve své původní, v mém případě nepřiliš značné, velikosti.

Jinak řečeno, myslel jsem si, že síla, kterou sekyrka púlí špalík nebo palice zarází kolík či kladívko zatluoká hřebík, je jednoznačně určena tím, jak jsem při náprahu zabral za topůrko.

Jak bych dnes fyzikálně výstižněji popsal rozštípnutí špalíku dřeva?

Začnu okamžikem, kdy jsem sekyrku zvedl nad hlavu. Mé paže na ni působí při jejím pohybu dolů silou společně s gravitační silou.

Účinkem těchto sil získá sekyrka „švunk“. Nelíbí se vám toto nespisovné slovo? Nahradte si ho tedy všude v další části odborně i jazykově správným pojmem hybnost, ale pokud se vám zamlouvá, můžete ho dále pro sebe používat. Možná, že si pod slovem „švunk“ dokážete lépe představit vlastnost sekyrky, kterou mám na mysli.

Hybnost sekyrky samozřejmě závisí na celé řadě faktorů, na tom, jak jsem se do topůrka opřel, jak dlouho jsem svou silou působil, z jaké výšky sekyrka na špalek dopadla — objevili bychom jistě ještě mnoho dalších vlivů. Jejich společným výsledkem zřejmě bude, že sekyrka dosáhne před zásahem cílového předmětu určité rychlosti.

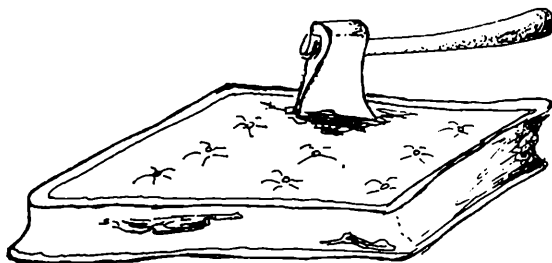
Sama rychlost však „švunk“ — hybnost neurčuje. Ta závisí i na hmotnosti sekyrky. Při stejné rychlosti má těžší sekyrka větší hybnost než sekyrka lehčí. Za hybnost sekyrky proto označujeme součin její hmotnosti a rychlosti.

Je však hybností sekyrky už dána jednoznačně síla, kterou naráží na cíl? Nikoliv! Náraz, který může mít samozřejmě velmi složitý průběh, nezávisí jenom na hybnosti sekyrky, ale je podstatně ovlivněn i předmětem, s nímž se sekyrka střetne. Vztah mezi průměrnou silou, kterou naráží špalík na sekyrku, a změnou její hybnosti lze zapsat do tvaru:

síla na zabrzdnění sekyrky	doba brzdění	=	změna hybnosti sekyrky
-------------------------------	-----------------	---	---------------------------

Přitom ovšem síla, kterou zasažený předmět brzdí sekyrku, má stejnou velikost jako síla, kterou sekyrka působí na terč.

$$\Delta(mv) = F t$$



$$\Delta(mv) = F \cdot t$$

Jaký fyzikální obsah máme např. přiřadit tvrzení, že stará matrace dokáže náraz sekyrky ztlumit? Jde v podstatě o to, že při zatnutí sekyrky do matrace se její hybnost mění delší dobu, tedy pomaleji než při zaseknutí do dubového špalíku. Proto je náraz do matrace menší než do dubového špalíku i v případě, že je změna hybnosti v obou případech stejná. Například z maximální velikosti, dejme tomu $100 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, klesne na nulovou hodnotu — sekyrka se zastaví. Podstatný rozdíl v síle při úderu spočívá v tom, že matrace brzdí pohyb čtyřikrát až pětikrát pomaleji — matrace zastaví sekyrku za desetinu sekundy, špalík už za několik setin sekundy. Proto je průměrná síla při nárazu na špalík čtyřikrát až pětikrát větší než při úderu do matrace.

Podobně jako v případě sekyrky nemůžeme předpovídat sílu zásahu

letící ledovkou. Při neočekávaném úderu vám může způsobit pořádnou bouli, při troše šikovnosti ji můžete bezbolestně zachytit rukou, jestliže zpětným pohybem prodloužíte dostatečně dobu brzdění.

Můžeme tedy shrnout: Libovolná „střela“, která naráží na cíl, s sebou nenese sílu, ale hybnost. Přitom síla nárazu není dána jen samotnou změnou hybnosti, ale je spoluurčena cílem, přesněji dobou, po kterou brzdění střely na cíli probíhá.

Milan Rojk

Laboratoř doma

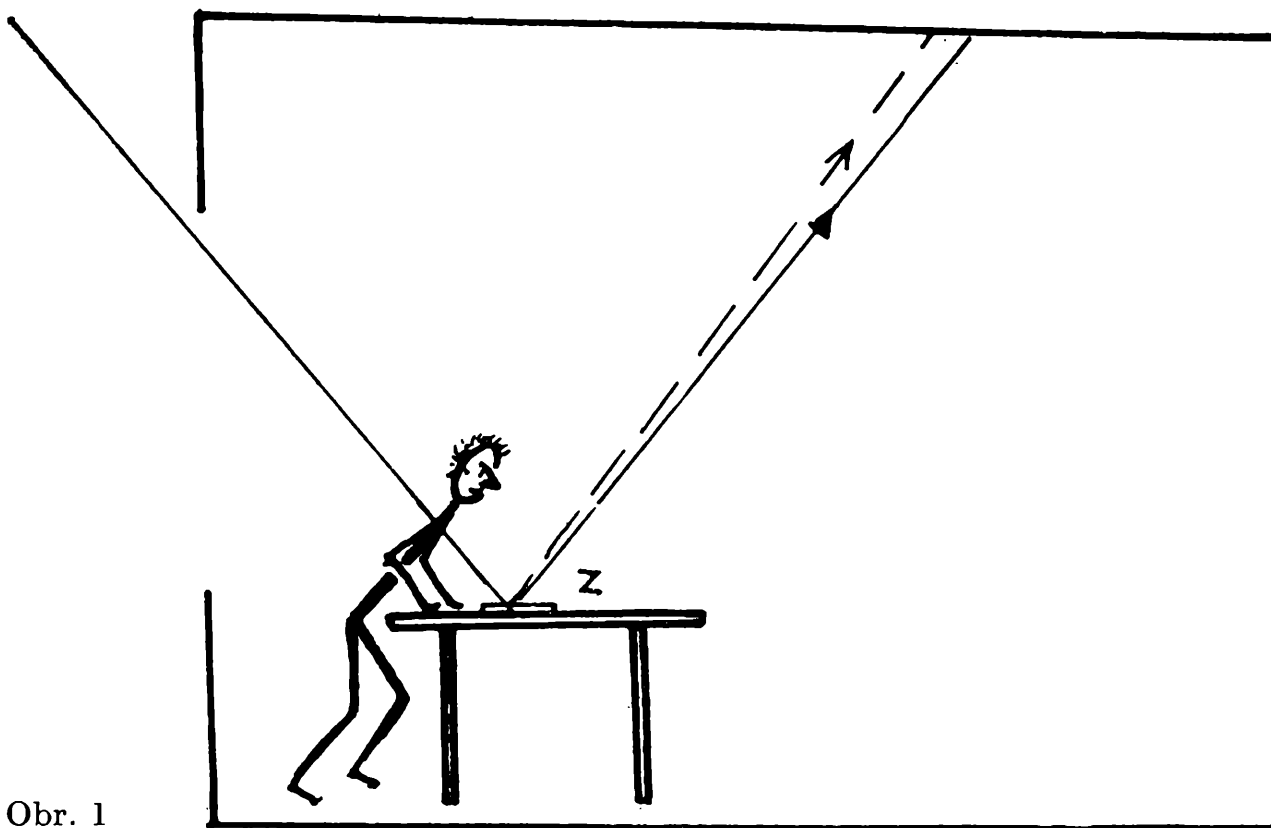
Kniha na stole

Jestliže položíme na vodorovnou desku stolu knihu, zůstane v klidu i když na ni působí Země gravitační silou. Opačnou silou, kterou zřejmě působí stůl na knihu, se účinek této síly ruší.

Jestliže na stůl položíme místo knihy pětikilogramové závaží, zůstane v klidu rovněž. I v tomto případě tlaková síla stolní desky, působící na knihu, vykompenzuje gravitační sílu.

Jak stolní deska pozná, jak silně musí na břemeno zatlačit?

Odpověď je jednoduchá, pokud si místo dřevěné desky představíme gumu. Předmět položený na gumě podložku zdeformuje. Velikost této deformace roste s hmotností předmětu. Těžší závaží stlačí gumu více a ta proto silněji zespodu tlačí na něj.



Obr. 1

O tom, že se pružně deformuje relativně malou silou i deska stolu, nás přesvědčí zajímavý pokus, který si můžete provést za slunečného dne, kdy lze osvětlit desku přímými slunečními paprsky. Položte na místo, kam dopadá sluneční světlo, kapesní zrcátko překryté papírem s otvorem o průměru asi jeden centimetr. Světlo odražené od zrcátka vytvoří na stropě či stěně místnosti malé prasátko (obr. 1).

Zatlačte rukou do stolní desky v blízkosti zrcátka a pozorujte přitom prasátko. Jeho zřetelný pohyb ukazuje, že tlakem došlo k deformaci stolu a malému naklonění zrcátka. K podobné, avšak menší deformaci dojde, když položíme na stůl knihu.

Síla, kterou stolní deska působí na knihu, je tedy vyvolána nepatrným stlačením a prohnutím desky stolu v místě, kde kniha leží.

Úkol pro vás :

Odhadněte velikost úhlu, o který se deska v místě zrcátka vychýlila, když jste do ní zatlačili rukama. (Uvědomte si, že úhel, o který se stočilo zrcátko, má poloviční velikost než úhel, o který se pootočil odražený paprsek.)

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Otazníky kolem házení

Atleti vrhači dokáží vrhnout kouli o hmotnosti 7,25 kg za dvacetimetrovou hranici.

Podstatně lehčí atrapou granátu je však možno dohodit téměř do pětikrát větší vzdálenosti a tenisový míček doletí těm nejlepším ještě dál.

Zdálo by se tedy, že ještě lehčím pinpongovým míčkem by se daly tyto výkony ještě překonat. Každý však z nás ví, že opak je pravdou.

Úkol pro vás :

Vysvětlete, proč atrapa granátu doletí dál než vrhačská koule, ale pinpongovým míčkem se nelze takové vzdálenosti ani přiblížit. Předpokládejte přitom, i když to není reálné, že všechna tři tělesa mají v okamžiku, kdy opouštějí ruku sportovce, stejnou hybnost co do směru i velikosti.

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních dvou článků zašlete na adresu :

RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.
Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Tři digitální stupnice

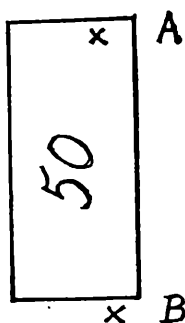
Digitální stupnice tří přístrojů ukázaly hodnoty: 24,05, 17,00 a 7,85. Víte-li, že šlo o pH-metr, hodiny a přesný teploměr, rozhodněte, kolik bylo hodin, jaká byla naměřena teplota a jaká byla hodnota pH.

VP

Případ padající bankovky

Před několika lety se vysílal v televizi soutěžní pořad, v němž moderátor pořadu předváděl zajímavý experiment s padesátikorunovou bankovkou. Prohlásil, že bankovku si může ponechat kdokoli z obecnstva, komu se podaří se jí určitým způsobem zmocnit. Tento způsob byl zdánlivě velmi jednoduchý a snadný. Moderátor vzal bankovku mezi prsty a podržel ji ve svislé poloze. Zájemce toužící po bezpracném zisku padesáti Kčs se připravil k uchopení bankovky tak, že s rozevřenými prsty (ukazováčkem a palcem) jedné ruky ostražitě vyčkával pod dolním okrajem bankovky, až ji moderátor upustí. Pak jen stačilo sevřít prsty a padající bankovku zachytit. Přitom ovšem musela zůstat ruka v původní výšce nad zemí.

Popsanou situaci názorně ukazuje obr. 1, v němž bod A představuje místo, kde bankovku drží moderátor, bod B místo, kde jsou připraveny rozevřené prsty čekajícího zájemce.



Obr. 1

Na první pohled by se zdálo, že naděje na získání bankovky tímto způsobem je značně velká. Leč, jak se ukázalo v televizním pořadu, skutečnost byla zcela jiná. Ani jednomu zájemci se nepodařilo (a pokoušelo se jich tehdy o to asi pět) padající bankovku mezi prsty zachytit. Byla to náhoda nebo snad nešikovnost jedinců lačnicích po nabízeném obnosu? Nebo, že by šlo o mimořádnou schopnost moderátora každého jedince nějak oklamat?

Pokusme se výsledek daného pokusu vysvětlit z hlediska zákonitostí volného pádu těles v souvislosti s reakčními možnostmi člověka. Nejprve vypočítáme dobu t , kterou potřebuje volně padající bankovka k tomu, aby proběhla celá mezi prsty čekajícího zájemce, aniž by jím byla zachycena. V tom případě urazí horní okraj bankovky přibližně dráhu, která se rovná její délce l . Zanedbáme-li odpor vzduchu, což lze předpokládat v prvních okamžicích pádu u bankovky rovné, nepřeložené a jinak nedeformované, můžeme pro tuto dráhu zapsat známý vztah

$$l = \frac{1}{2} gt^2 \quad \text{Odtud doba}$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g}}. \quad (1)$$

Víme-li, že délka padesátikorunové bankovky $l = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$ a velikost tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, dostáváme do dosazení do vztahu (1) výsledek $t \doteq 0,17 \text{ s}$. Upustí-li tedy moderátor padesátikorunovou bankovku, pak tato bankovka proletí mezi prsty zájemce přibližně za dobu 0,17 sekundy (pokud ji náhodou nezachytí dříve).

Porovnejme nyní vypočítanou dobu t s reakční dobou τ člověka. Četnými pokusy bylo zjištěno, že u většiny lidí je reakční doba v intervalu (0,4 s; 0,8 s). Aktuální hodnota reakční doby pak závisí na mnoha okolnostech, např. na stupni soustředěnosti člověka, na jeho momentální psychické kondici, na jeho zkušenostech apod. Někteří zvláště cvičení jedinci, např. letci, sportovci, dosahují za příznivých podmínek reakční doby o hodnotě menší než 0,3 s, přičemž však větší než 0,2 s.

Jak vidíme, pro všechny případy platí pro reakční dobu $\tau > t$. Proto také ani velmi pozorný a doslova číhající jedinec nemůže volně padající bankovku zachytit. A pokud by se to přece jen někomu podařilo, pak jde buď o jev náhodný, nebo o situaci, v níž číhající jedinec předem vytuší okamžik, kdy se moderátor rozhodne bankovku upustit. V tom případě se totiž nervový impuls k sevření prstů dostaví dříve, než se bankovka uvolní z ruky moderátora. To si konečně můžete sami vyzkoušet, ovšem bez sázky o padesátikorunu.

Případ padající bankovky vás však může inspirovat k jinému zajímavému pokusu, ke změření vaší reakční doby. K tomu postačí, když si pořídíte pravítko nebo tenkou laťku o délce nejméně 80 cm a provádíte s ní v podstatě totéž co s bankovkou. Požádáte kamaráda, aby pravítko podržel ve svislé poloze, a vy se připravíte s rozevřenými prsty u jeho dolního konce. Jakmile kamarád v nestřeženém okamžiku pravítko upustí, sevřete rychle prsty a pravítko zachytíte. Potom změříte délku l té části pravítka, která během pádu proběhla mezi vašimi prsty, a podle vztahu (1) vypočítáte dobu t , která se v tomto případě rovná vaší reakční

době. Naměříte-li např. $l = 45$ cm, pak máte velmi dobrou reakční dobu 0,3 s. Kdyby se vám náhodou podařilo zachytit pravítko na délce $l = 20$ cm, pak byste dosáhli rekordní reakční doby 0,2 s, což by byla opravdu náhoda.

Milan Bednařík

Kdo chová zebra a kdo pije vodu?

Před více než čtvrt stoletím obletěla snad celý svět úloha, která končila otázkami uvedenými v nadpisu. Slovo „zebra“ se tak vtisklo do mysli milovníků zábavných hříček, problémů a hádanek, že obdobné úlohy se dokonce začaly nazývat „zebrami“

Příslušnou, dnes již klasickou, úlohu otiskujeme jako ukázkou problému, který s lety neztratil na zajímavosti a přitažlivosti. V Rozhledech byla tato úloha otištěna v únoru roku 1964.

V ulici cizinecké čtvrti stojí vedle sebe pět domků různých barev, v každém bydlí muž jiné národnosti, v každém se pije jiný oblíbený nápoj, v každém domku je oblíben jiný sport, resp. se nesportuje vůbec a konečně v každém se pěstuje jiný druh zvířat.

O domcích a jejich obyvatelích známe tyto informace:

1. Angličan bydlí v červeném domku.
2. Španěl chová psa.
3. Káva se pije v zeleném domku.
4. Polák pije vodu.
6. Zelený domek stojí vpravo vedle domku bílého (z hlediska pozorovatele domků).
6. Fotbalista pěstuje hlemýžď.
7. Ve žlutém domku bydlí cyklista.
8. Mléko se pije v prostředním domku.
9. V prvním domku bydlí Nor.
10. Nesportovec bydlí vedle domku, v němž je chována liška.
11. Domek cyklisty sousedí s domkem, v němž je chován kůň.
12. Zápasník pije pomerančovou šťávu.
13. Japonec je hokejista.
14. Nor bydlí vedle modrého domku.
15. V jednom domku se pije voda.
16. V jednom domku je chována zebra.

Z údajů v textu úlohy lze zjistit, kdo chová zebra a kdo pije vodu. Podaří se vám to také?

-jm-

Řešte s námi (6)

Úlohy

21. Uvnitř jednotkového čtverce je rozmístěno několik kružnic, jejichž obvody mají součet 10. Dokažte, že existuje přímka, která protíná aspoň čtyři z těchto kružnic.

22. a) Rovinnému úhlu jsou vepsány dvě kružnice, jež mají společnou ještě další tečnu T_1T_2 (s body dotyku T_1, T_2), která protíná ramena úhlu v bodech A_1, A_2 . Dokažte, že $|A_1T_1| = |A_2T_2|$.

b) Úhlu jsou vepsány dvě kružnice, jež se dotýkají jeho ramen v bodech K_1, K_2 , resp. L_1, L_2 . Dokažte, že přímka K_1L_2 vytíná na obou kružnicích shodné tětivy.

23. Dokažte, pro každé přirozené $n > 1$ platí

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

24. Každý zlomek $\frac{m}{n}$, $0 < \frac{m}{n} < 1$, je možno vyjádřit ve tvaru

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_r},$$

kde $0 < q_1 < q_2 < \dots < q_r$ jsou celá čísla a q_k dělí q_{k+1} pro $1 \leq k \leq r-1$. Dokažte.

25. Z n -prvkové množiny je vybráno 2^{n-1} podmnožin, z nichž každé tři mají společný prvek. Dokažte, že všechny takto vybrané podmnožiny mají neprázdný průnik.

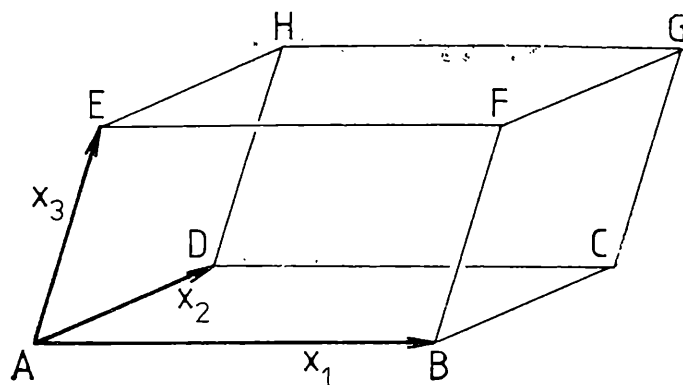
Řešení minulých úloh

16. Použijeme vektorové algebry. Označíme-li $\mathbf{x}_1 = \mathbf{AB}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{AD}$, $\mathbf{x}_3 = \mathbf{AE}$ (obr. 1), dostane dokazovaná nerovnost tvar

$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2| + |\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3| + |\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1| \leq |\mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2| + |\mathbf{x}_3| + |\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|. \quad (6)$$

Nyní provedeme následující důmyslnou úpravu (můžeme předpokládat, že každý z vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ je nenulový, jinak dostaneme triviální rovnost)

$$\left(\sum_{i=1}^3 |\mathbf{x}_i| + \left| \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \right| \right) \left(\sum_{i=1}^3 |\mathbf{x}_i| - \left| \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \right| \right) = \left(\sum_{i=1}^3 |\mathbf{x}_i| \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \right|^2 =$$



Obr. 1

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{i < j} (|\mathbf{x}_i| |\mathbf{x}_j| - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)) = \sum_{i < j} ((|\mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_j|)^2 - |\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j|^2) = \\
 &= \sum_{i < j} (|\mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_j| + |\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j|) (|\mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_j| - |\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j|) \leq \\
 &\leq \sum_{i < j} (|\mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_j| + |\mathbf{x}_k| + |\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_k|) (|\mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_j| - |\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j|),
 \end{aligned}$$

kde index k je dvojicí $i < j$ jednoznačně určen tak, že $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, přičemž na první činitel před posledního součtu jsme použili trojúhelníkovou nerovnost

$$|\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j| \leq |\mathbf{x}_k| + |\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_k| \quad (7_k)$$

Po zkrácení kladným činitelem $|\mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_j| + |\mathbf{x}_k| + |\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_k| = |\mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2| + |\mathbf{x}_3| + |\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|$ vyjde

$$\left(\sum_{i=1}^3 |\mathbf{x}_i| - \left| \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \right| \right) \leq 2 \sum_{i=1}^3 |\mathbf{x}_i| - \sum_{i < j} |\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j|,$$

což dává dokazovanou nerovnost.

Zjistíme ještě, kdy v (6) nastane rovnost. Budeme zas rovnou předpokládat, že každý z vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ je nenulový. V předchozích výpočtech jsme odhadovali tři sčítance pomocí trojúhelníkových nerovností; v každém z těchto odhadů nastane rovnost buď v případě rovnosti v (7_k), anebo když je příslušný činitel $|\mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_j| - |\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j|$ nulový, tj. příslušná dvojice vektorů $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ je kolineární (tak nazýváme vektory, které umístěny do jednoho bodu leží v přímce) a souhlasně orientovaná (nakreslete si obrázek!). Rovnost v (7_k) zas znamená, že vektory $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$ jsou kolineární, ale opačně orientované. Kombinací všech těchto možností zjistíme, že rovnost v (6) nastane buď pro tři kolineární vektory, z nichž dva jsou souhlasně orientované a třetí má směr součtu $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$, anebo pro tři vektory splňující rovnost $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = \mathbf{o}$. Obě možnosti odpovídají degenerovanému rovnoběžnostěnu.

Předchozí řešení vypadá jednoduše, ale jistě si rozmyslíte, že uvedená úprava není zrovna nasnadě. Uvedeme proto ještě jiný postup, který se může hodit i na jiné podobné úlohy.

Jiné řešení. Uvažujme libovolné tři dané vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ v prostoru (opět budeme předpokládat, že každý z nich je nenulový) a označme x , y , z kosiny jejich vzájemných úhlů. Protože dokazujeme nerovnost (6), zajímá nás výraz

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + \\ & + \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|x + 2|\mathbf{b}||\mathbf{c}|y + 2|\mathbf{c}||\mathbf{a}|z} - \\ & - \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|x} - \end{aligned} \quad (8)$$

Budeme se na něj chvíli dívat jako na funkci jediné proměnné, např. x , tj. kromě velikostí vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ budeme považovat za pevné i velikosti y , z . Rozdíl

$$\sqrt{M + \alpha x} - \sqrt{N + \alpha x} = \frac{M - N}{\sqrt{M + \alpha x} + \sqrt{N + \alpha x}}$$

je pro $M - N \neq 0$ ryze monotónní funkce $x \in \langle -1, 1 \rangle$, nabývá tedy nejmenší hodnoty jen v jednom z krajních bodů příslušného intervalu, tj. pro $x = \pm 1$, což odpovídá tomu, že vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ jsou kolineární. Pokud $M = N$, je funkce $f(\cdot, y, z)$ konstantní, takže pro libovolná x , y , z je $f(x, y, z) \geq \min(f(-1, y, z), f(1, y, z))$. Zapomeneme teď i na to, že $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ byly původně vektory v prostoru a budeme výraz (8) minimalizovat pro libovolná daná čísla $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{c}|$. Analogicky zjistíme, že stačí uvažovat jen $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, protože $f(\pm 1, y, z) \geq \min(f(\pm 1, -1, z), f(\pm 1, 1, z)) \geq \min\{f(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$. Odtud plyne, že výraz (8) bude minimální, když původně dané vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ budou kolineární.

Leží-li body A, B, C, D, E, F, G, H v přímce (máme samozřejmě na mysli tzv. degenerovaný rovnoběžnostěn, v němž jsou ovšem zachovány příslušné relace mezi „hranami“), daná nerovnost platí. Jednoduše se o tom přesvědčíme, probereme-li jednotlivé možnosti vzájemné polohy daných bodů. Je tedy $f(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \geq 0$, čímž je nerovnost (6) dokázána.

Uvedený postup má ovšem tu nevýhodu, že v něm není úplně snadné odhalit, kdy v dokazované nerovnosti nastane rovnost. To je způsobeno tím, že velikostem $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{c}|$, x , y , z ne vždy odpovídají skutečné vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ v prostoru. Projdeme-li ještě jednou znovu celý postup, zjistíme, že jediný případ, ve kterém uvedený variační postup nemusí fungovat, je možnost $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = 0$.

Na závěr ukážeme ještě jednu elegantní úpravu, pomocí níž lze dokázat nerovnost (6) pro kolineární vektory, tj. pro reálná čísla a , b , c (jejich souřadnice). Položme $a = x_1 + x_2$, $b = x_2 + x_3$, $c = x_3 + x_1$.

Nerovnost (6) pak bude mít tvar

$$|a| + |b| + |c| \leq \frac{1}{2} |a - b + c| + \frac{1}{2} |b - c + a| + \frac{1}{2} |c - a + b| + \\ + \frac{1}{2} |a + b + c|$$

Poslední nerovnost je nejen symetrická, ale má navíc i tu vlastnost, že se nezmění, změníme-li znaménko libovolného z čísel a, b, c . Můžeme proto předpokládat, že je $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$. V tom případě je ovšem

$$|a| + |b| + |c| = a + b + c = \frac{1}{2} (a - b + c) + \frac{1}{2} (b - c + a) + \\ + \frac{1}{2} (c - a + b) + \frac{1}{2} (a + b + c) \leq \frac{1}{2} |a - b + c| + \frac{1}{2} |b - c + a| + \\ + \frac{1}{2} |c - a + b| + \frac{1}{2} |a + b + c|$$

17. Označme u největší řešení rovnice $f(x) = 0$, které existuje podle podmínky (4). Předpokládejme nejprve, že $u > 0$ (z (1) plyne, že $u \neq 0$). Protože

$$f(0) - 0 = 1 > 0 > f(u) - u = -u,$$

existuje podle (5) $z \in \langle 0, u \rangle$ takové, že $f(z) = z$ (vzali jsme $v = 0$). Z (2) pak vyjde

$$0 = f(u)f(z) = f(uf(z) - uz) = f(0) = 1,$$

což je spor.

Musí tedy být $u < 0$; z (2) ovšem opět plyne, že $uf(x) - ux$ je pro libovolné x kořenem funkce f , takže pro každé x dostaneme nerovnost

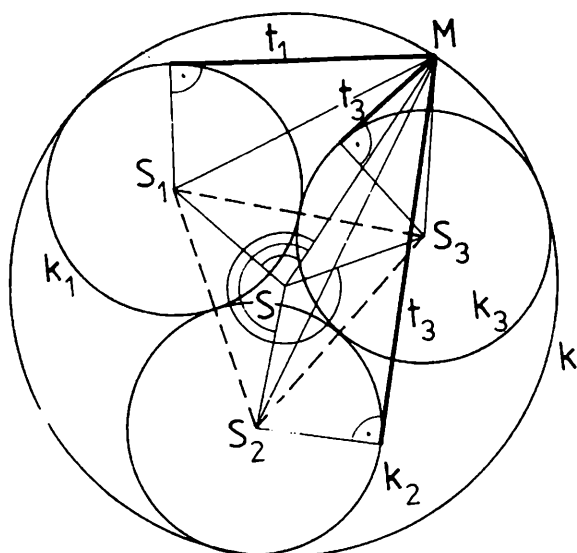
$$uf(x) - ux \leq u, \quad \text{neboli} \quad f(x) \geq x + 1$$

Poslední nerovnost spolu s podmínkou (3) dává $f(1987) = 1988$.

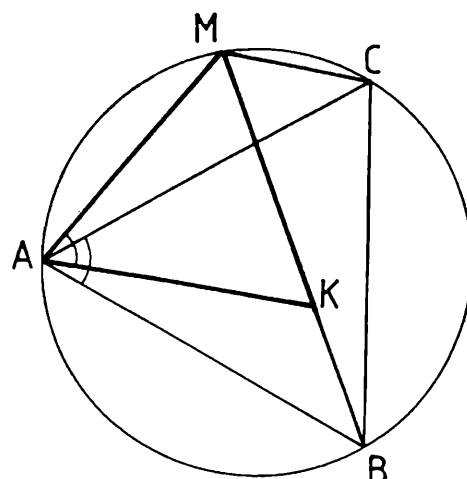
Pozn. Vlastnost (5) uvažované funkce svádí k tomu, že taková funkce f musí být spojitá, což je omyl. Pokuste se sestavit jednoduchou funkci f , která bude splňovat podmínky (1), (3)–(5) a nebude spojitá! [Zkuste třeba funkci $f(x) = k + 1, x \in \langle k, k + 1 \rangle$. Dá se dokonce ukázat, že tato funkce splňuje všechny podmínky úlohy!]

18. Označme S_i ($i = 1, 2, 3$) střed kružnice k_i , S střed kružnice k , R poloměr k , r poloměr kružnic k_i , t_i vzdálenost bodu M od bodu dotyku tečny ke kružnici k_i a α_i orientovaný úhel MSS_i (obr. 2). Pak je $|SS_i| = R - r$ a podle kosinové věty

$$|MS_i|^2 = R^2 + |SS_i|^2 - 2R|SS_i| \cos \alpha_i$$



Obr. 2



Obr. 3

(to platí pro všechna α_i , protože $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$). Z Pythagorovy věty

$$t_i^2 = |MS_i|^2 - r^2$$

po dosazení a úpravě dostaneme

$$t_i^2 = 2R(R - r)(1 - \cos \alpha_i),$$

$$t_i = 2 \sqrt{R(R - r)} \left| \sin \frac{\alpha_i}{2} \right| \quad (9).$$

Zvolíme-li označení kružnic tak, aby bylo $0 \leq \alpha_1 \leq \frac{2\pi}{3}$, bude $0 \leq \alpha_2 \leq \frac{2\pi}{3}$, čili $\sin \frac{\alpha_i}{2} > 0$, a podle známých vzorečků vyjde

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha_1}{2} + \sin \frac{\alpha_3}{2} &= 2 \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{4} \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{4} = \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\alpha_2}{4} = \sin \frac{\alpha_2}{2}. \end{aligned}$$

Podle (9) je tedy při zvoleném označení $t_2 = t_1 + t_3$.

Snadno zjistíme, že uvedené tvrzení platí i pro tři shodné kružnice, jejichž středy leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku, a pro bod M ležící na kružnici, která je jim opsána. Speciálně tedy pro bod M ležící na kružnici opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC platí, že jedna ze tří úseček MA , MB , MC je rovna součtu druhých dvou. Pokuste se poslední tvrzení dokázat jinak (např. pomocí Ptolemaiovy věty, ale existuje ještě jednodušší důkaz (obr. 3)). Toto tvrzení můžeme ještě dále zobecnit: Je-li M bod na oblouku A_1A_{2n+1} kružnice opsané pravidelnému $(2n + 1)$ -úhelníku $A_1A_2 \dots A_{2n+1}$, je

$$|MA_1| + |MA_3| + \dots + |MA_{2n+1}| = |MA_2| + |MA_4| + \dots + |MA_{2n}|$$

19. Stačí si namalovat situaci během prvních deseti až patnácti milisekund, abychom odhalili některé z následujících zákonitostí, které snadno dokážeme matematickou indukcí:

1. V okamžiku $t = 2^k$ pro k celé nezáporné jsou ve stavu 1 právě dva prvky pro $x = \pm 2^k$.
2. V okamžiku $t = 2^k - 1$ je ve stavu 1 právě 2^k prvků pro všechna lichá x od $x = -2^k + 1$ do $x = 2^k - 1$.
3. Je-li $0 \leq t < 2^k$, bude v čase $2^k + t$ ve stavu 1 právě dvakrát tolik prvků než v čase t .

Při důkazu těchto vlastností indukcí podle k využijeme toho, že části uvedené tabulky odpovídající aktivním prvkům v čase 2^k se navzájem nepřekrývají až do času $2^{k+1} - 1$, a proto každá z nich vypadá úplně stejně jako začátek naší tabulky pro $t < 2^k$.

-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	x_t
																*	1	*															1
																	2																10
																*	3	*															11
																	4																100
																	5																101
															*	6																	110
															*	7	*																111
																8																	1000
																9																	1001
																10																	1010
																11																	1011
					*											12																	1100
																13																	1101
																14																	1110
*		*		*				*							*	15	*	*															1111
																16															*		10000
																$\downarrow$	t																

Počet prvků $p(t)$ v čase t určíme teď snadno pomocí 3. pravidla: Je např. $p(1000) = 2p(1000 - 2^9) = 2p(488) = 4p(488 - 2^8) = 4p(232) = \dots = 32p(8) = 64$. Když si tento postup dobře rozmyslíme, zjistíme, že $p(t)$ je vlastně rovno 2^m , kde m je počet jedniček ve dvojkovém zápisu čísla t . I toto pravidlo můžeme snadno dokázat matematickou indukcí pomocí uvedených pravidel.

Uvědomme si však ještě následující souvislost: uvedený proces odpovídá sčítání čísel mod 2 ($1 + 0 = 0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$), takže hvězdičky v naší tabulce vlastně odpovídají lichým číslům v Pascalově trojúhelníku známých binomických koeficientů a číslo $p(n)$ tak udává počet

lichých binomických koeficientů $\binom{n}{k}$ pro $0 \leq k \leq n$.

Odpověď na druhou otázku je jen trochu obtížnější. Nejprve si uvědomíme, že pro libovolný prvek na kružnici platí: Jsou-li v čase $t = 4$ ve vzdálenosti 2^k (jednotkou vzdálenosti tu je vzdálenost dvou sousedních prvků) od zvoleného prvku a oba prvky ve stejném stavu, bude zvolený prvek v čase $t = 2^k$ ve stavu 0, a jsou-li v různých stavech, bude a a ve stavu 1. I toto tvrzení snadno dokážeme matematickou indukcí podle k . Následující tabulka jasně ukazuje, na čem vlastně závisí stav prvku a po čtyřech krocích ($k = 2$, čísla a, u, v, x, y označují stavy příslušných prvků, stavy v dalším kroku přirozeně upravujeme mod 2):

$$\begin{array}{cccccccc}
 x & * & u & * & a & * & v & * & y \\
 & u+x & * & u+a & * & a+v & * & v+y & \\
 & & x+a & * & u+v & * & a+y & & \\
 & & & a+x+u+v & * & u+v+a+y & & & \\
 & & & & x+y & & & &
 \end{array}$$

Z uvedeného tvrzení tedy pro $N = 2^m$ (m přirozené) hned plyne, že po $\frac{N}{2}$ krocích přejdou všechny prvky (bez ohledu na počáteční rozmístění) do nulového stavu.

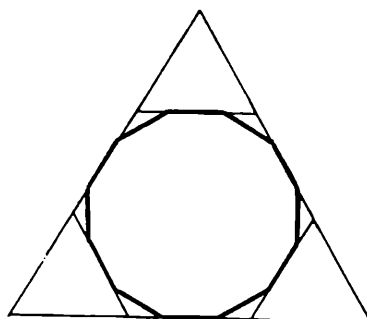
Uvažujme teď $N = 2^m l$, kde l je liché číslo, a podívejme se na libovolných l prvků, z nichž každé dva sousední mají vzdálenost 2^m . Takové prvky leží vlastně ve vrcholech pravidelného l -úhelníku, a pokud se na ně budeme dívat vždy po 2^m krocích, budou se chovat, jako kdyby tam žádné další prvky nebyly.

Pro lichý počet l prvků na kružnici je však jasné, že nikdy nemohou všechny přejít do nulového stavu. V takovém případě by totiž v předchozím okamžiku musely být všechny ve stavu 1 a o okamžik dříve by se nutně musely jednotky a nuly střídát. To však pro lichý počet prvků není možné.

Abychom tedy ve vrcholech některého z pravidelných l -úhelníků dostali samé nuly, musely by být oba prvky ve vzdálenosti 2^k ($k \leq m$) od každého z vrcholů ve stejném stavu. Odtud tedy plyne, že pro $N = 2^m l$ mohou být všechny prvky v nulovém stavu, jen když příslušné počáteční rozložení 0 a 1 bude periodické s periodou 2^m . Obráceně je zřejmé, že pro každé takové rozložení se nejdéle po 2^m krocích octnou všechny prvky ve stavu 0.

20. Rozklad je možno provést např. takto: Vedme rovnoběžně se stranami daného trojúhelníku přímky, které z něj oddělí tři trojúhelníky (nazveme je 1. řádu) tak, že zbude pravidelný šestiúhelník. Od každého

jeho vrcholu odřízneme trojúhelníček (2. řádu) tak, aby z šestiúhelníku zbyl pravidelný 12-úhelník (obr. 4). Od každého jeho vrcholu opět odřízneme trojúhelníček (už 3. řádu) tak, aby zůstal pravidelný 24-úhelník atd. Tuto operaci provedeme celkem 19krát. Při posledním kroku odřežeme z každého vrcholu $3 \cdot 2^{18}$ -úhelníku trojúhelníček 19. řádu a zbude pravidelný $3 \cdot 2^{19}$ -úhelník.



Ob1. 4

Ukažme, že libovolná přímka protíná nejvýše dva trojúhelníky téhož řádu. Trojúhelník k -tého řádu ($k = 1, 2, \dots, 19$) má právě dvě strany, které leží na obvodu pravidelného $3 \cdot 2^{k-1}$ -úhelníku, z něhož byl odříznut. Přímka protínající tento trojúhelník musí protnout aspoň jednu z těchto stran. Kdyby zvolená přímka protínala tři různé trojúhelníky téhož řádu, musela by protnout obvod $3 \cdot 2^{k-1}$ -úhelníku aspoň ve třech různých bodech. Z konvexity ovšem plyne, že by tyto tři body musely ležet na jedné straně $3 \cdot 2^{k-1}$ -úhelníku. S tou však sousedí jen dva trojúhelníky k -tého řádu, a to je spor.

Libovolná přímka protne tedy nejvýše dva trojúhelníky stejného řádu a možná ještě i zbylý $3 \cdot 2^{19}$ -úhelník — celkem tedy nejvýše $2 \cdot 19 + 1 = 39$ mnohoúhelníků z těch, na něž je daný trojúhelník po 19 krocích rozdělen. Těch je

$$3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{18} + 1 = 3(2^{19} - 1) + 1 = 1\,572\,862.$$

Vyberme nyní jakkoli 572 862 trojúhelníků 19. řádu a přidejme je zpět k $3 \cdot 2^{19}$ -úhelníku. Dostaneme tak rozklad daného trojúhelníku na milión konvexních mnohoúhelníků, který vyhovuje požadavkům úlohy.

Karel Horák

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

9. Nechť $2s$ je obvod libovolného trojúhelníku; ρ , r_a , r_b , r_c nechť jsou po řadě poloměry kružnice vepsané a kružnic tomuto trojúhelníku připsaných. Dokažte, že platí:

$$\sqrt{\rho r_a} + \sqrt{\rho r_b} + \sqrt{\rho r_c} \leq s;$$

kdy nastává rovnost?

(Došlo 17 řešení.)

Jaroslav Švrček

Řešení Martina Kučery, 4C G MK, Bílovec:

Nechť a , b , c jsou délky stran daného trojúhelníku a P je jeho obsah. Potom platí tyto vzorce:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\rho = \frac{P}{s}, \quad r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c}.$$

Zároveň víme, že pro kladná čísla x , y platí:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y), \quad (1)$$

přičemž rovnost nastává, právě když je $x = y$. Z výše uvedených rovností a z nerovností (1) plyne, že je

$$\sqrt{\rho r_a} = \frac{P}{\sqrt{s(s-a)}} = \sqrt{(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{2}(s-b+s-c), \quad (2)$$

$$\sqrt{\rho r_b} = \frac{P}{\sqrt{s(s-b)}} = \sqrt{(s-a)(s-c)} \leq \frac{1}{2}(s-a+s-c), \quad (3)$$

$$\sqrt{\rho r_c} = \frac{P}{\sqrt{s(s-c)}} = \sqrt{(s-a)(s-b)} \leq \frac{1}{2}(s-a+s-b). \quad (4)$$

Je tedy

$$\sqrt{\rho r_a} + \sqrt{\rho r_b} + \sqrt{\rho r_c} \leq \frac{1}{2}(6s - 4s) = s$$

Přitom rovnost nastává, právě když je v nerovnostech (2) až (4) $s-b = s-c = s-a$ čili $a = b = c$, tj. pro rovnostranný trojúhelník.

10. Víme, že součet prvních n přirozených čísel $1, 2, \dots, n$ je $\frac{1}{2}n(n+1)$. Dokažte, že vhodným výběrem čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a jejich sečtením lze získat libovolně vybrané číslo s , pro něž platí:

$$1 \leq s \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

(Došlo 14 řešení.)

Milan Trch

Řešení Libora Němečka, 4C GMK, Bílovec:

Nechť je dána množina $\{1, 2, \dots, n\}$. Výběrem a sečtením prvků utvoříme požadované součty takto:

Čísla od 1 do n : výběrem příslušného čísla $1, 2, \dots, n$.

Čísla od $n+1$ až do $2n-1$: součtem čísla n s příslušným číslem z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$.

Čísla od $2n$ až do $3n-3$: součtem čísel $n, n-1$ s příslušným číslem z množiny $\{1, 2, \dots, n-2\}$.

Čísla od $3n-2$ až do $4n-6$ a další analogickým způsobem.

Poslední z čísel lze vytvořit právě součtem všech čísel z množiny:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Takto jsme z prvků množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ skutečně vytvořili všechna přirozená čísla, pro něž platí nerovnosti (1).

Fyzika

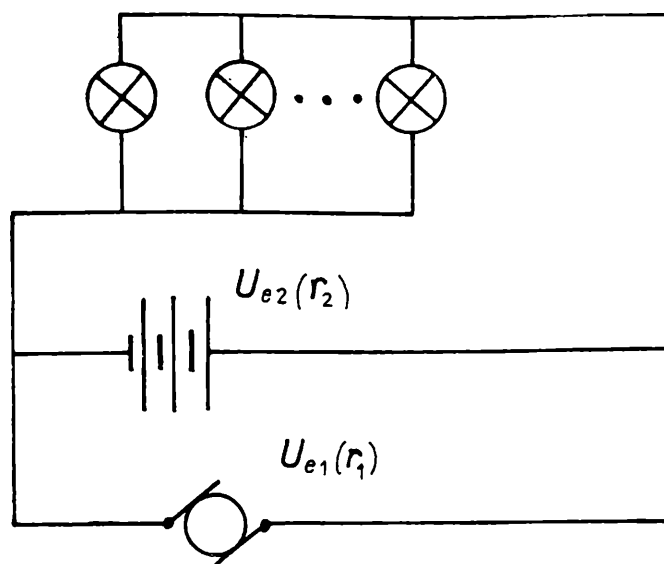
3. Obvod osvětlení vagónu se skládá ze 30 stejných paralelně zapojených žárovek, z nichž každá má odpor $r = 30 \Omega$. Žárovky jsou připojeny ke generátoru stejnosměrného napětí o vnitřním odporu $r_1 = 0,04 \Omega$, jehož elektromotorické napětí U_{e1} závisí na rychlosti pohybu vagónu. Paralelně ke generátoru je připojena baterie akumulátorů o elektromotorickém napětí $U_{e2} = 24 \text{ V}$ a vnitřním odporu $r_2 = 0,02 \Omega$ (obr. 1). Při jakém minimálním elektromotorickém napětí $(U_{e1})_m$ generátoru nebude baterií protékat proud?

Miroslava Trchová

(Došla 3 řešení.)

Otiskujeme řešení autorky:

Pro proudy v jednotlivých větvích obvodu platí $I = I_1 + I_2$. Na žárovkách je spád napětí U a teče jimi proud $I = nU/r$. Z Ohmova zákona plyne pro proudy v ostatních větvích



Obr. 1

$$I_1 = \frac{U_{e1} - U}{r_1} \quad \text{a} \quad I_2 = \frac{U_{e2} - U}{r_2}.$$

Je tedy

$$\frac{n \cdot U}{r} = \frac{U_{e1} - U}{r_1} + \frac{U_{e2} - U}{r_2},$$

odkud

$$U = \left(\frac{U_{e1}}{r_1} + \frac{U_{e2}}{r_2} \right) \cdot \left(\frac{n}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \doteq 23,8 \text{ V}.$$

Při takovémto napětí na žárovkách je proud I_2 nenulový. Baterií nepoteče proud při $U = U_{e2}$.

Potom
$$\frac{n \cdot U}{r} = \frac{(U_{e1})_m - U}{r_1},$$

odkud
$$(U_{e1})_m = U \left(1 + \frac{r_2}{r} \cdot n \right) \doteq 25 \text{ V}.$$

4. Určete interval kinetických energií částic alfa tak, aby neutrony vznikající v reakci $\alpha + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^{10}\text{B} + \text{n}$ a vyletující pod pravým úhlem vzhledem ke směru dopadajících částic alfa měly energii v intervalu od 0 do 10 MeV.

(Nedošlo žádné řešení.)

Zdeněk Janout

Autorovo řešení:

K řešení úlohy použijeme zákona zachování energie a zákona zachování hybnosti.

Podle zákona zachování energie platí, že součet kinetických a klidových energií (mc^2) částic a jader vstupujících do jaderné reakce se rovná

součtu kinetických a klidových energií částic a jader vystupujících z reakce. Označíme-li symbolem T kinetickou energii a symbolem m klidovou hmotnost a použijeme-li index 1 pro částici alfa, index 2 pro jádro lithia, 3 pro neutron a 4 pro jádro bóru, můžeme zákon zachování energie napsat ve tvaru

$$m_1c^2 + T_1 + m_2c^2 + T_2 = m_3c^2 + T_3 + m_4c^2 + T_4, \quad (1)$$

kde $c = 299\,792\,458\text{ ms}^{-1}$ je rychlost světla ve vakuu. Rovnice (1) se zpravidla zapisuje ve tvaru

$$T_1 + T_2 + Q = T_3 + T_4, \quad (2)$$

kde veličina

$$Q = m_1c^2 + m_2c^2 - m_3c^2 - m_4c^2 \quad (3)$$

se nazývá energií reakce. Je-li $Q > 0$, je reakce exoergická, je-li $Q < 0$, je endoergická a je-li $Q = 0$, dochází k pružné srážce. Jelikož jsou tabulovány nikoliv hodnoty m_1, m_2, m_3, m_4 , nýbrž hodnoty relativních atomových hmotností neutrálních atomů $A_r(\text{He}), A_r(\text{Li}), A_r(\text{n}), A_r(\text{B})$, přepíšeme vztah (3) na tvar

$$Q = [A_r(\text{He}) + A_r(\text{Li}) - A_r(\text{n}) - A_r(\text{B})]m_{\text{u}}c^2, \quad (4)$$

kde byl použit vztah $m = A_r m_{\text{u}}$ mezi klidovou hmotností a relativní atomovou hmotností. Symbolem m_{u} je označena atomová hmotnostní konstanta, $m_{\text{u}} = 1,66 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$. Hodnoty relativních atomových hmotností lze nalézt např. v knize *J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky*, vydalo SNTL v Praze v roce 1980, kde na str. 170 najdeme: $A_r(\text{He}) = 4,00260$, $A_r(\text{Li}) = 7,01600$, $A_r(\text{n}) = 1,008665$, $A_r(\text{B}) = 10,01294$. Provedeme-li číselný výpočet, dostaneme $Q = -2,80\text{ MeV}$, kde energie reakce Q je vyjádřena v jednotkách MeV používaných v atomové a jaderné fyzice. Mezi jednotkami MeV a J platí převodní vztah $1\text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13}\text{ J}$.

Předpokládejme, že tak jak tomu bývá v praxi, jaderná reakce probíhá v laboratoři tak, že terčíková jádra lithia jsou v klidu; platí $T_2 = 0$. Rovnice (2) nabývá potom tvaru

$$T_1 + Q = T_3 + T_4 \quad (5)$$

Podle zákona zachování hybnosti platí, že výsledný vektor vektorového součtu hybností částic a jader vstupujících do reakce je roven výslednému vektoru vektorového součtu hybností částic a jader produktů reakce. Označíme-li symbolem $\mathbf{p}$ vektor hybnosti a použijeme-li pro částice a jádra tytéž indexy jako výše, dostaneme

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \quad (6)$$

Jelikož terčíkové jádro lithia je v klidu, platí $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. Dále nás zajímají pouze neutrony vyletující pod úhlem 90° vzhledem ke směru dopada-

jících částic alfa, tedy lze podle Pythagorovy věty použít místo zápisu (6) zápis

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2, \quad (7)$$

kde p_1, p_3, p_4 jsou velikosti hybností. Vyjádříme-li v (7) velikosti hybností pomocí kinetických energií užitím vztahu $T = \frac{p^2}{2m}$, dostaneme po jednoduché úpravě vztah

$$m_4 T_4 = m_1 T_1 + m_3 T_3 \quad (8)$$

Rovnice (5) a (8) představují soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé T_1 a T_4 . Vyjádříme-li z (8) T_4 a dosadíme-li tento vztah do (5), dostaneme po jednoduché úpravě hledaný vztah mezi kinetickými energiemi částice alfa T_1 a vyletujícího neutronu T_3 :

$$T_1 = \frac{T_3 \left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) - Q}{1 - \frac{m_1}{m_4}}. \quad (9)$$

Dosadíme-li do (9) za T_3 hodnotu 0 MeV, obdržíme kinetickou energii částice alfa $T_1 = 4,66$ MeV, pro hodnotu $T_3 = 10$ MeV obdržíme $T_1 = 23,0$ MeV

Závěr:

Neutrony vyletující v reakci ${}^7\text{Li}(\alpha, n){}^{10}\text{B}$ pod úhlem 90° vzhledem ke směru dopadajících částic alfa budou mít energii v intervalu od 0 do 10 MeV, budou-li částice alfa, dopadající na jádra lithia, mít kinetickou energii v intervalu od 4,66 MeV do 23,0 MeV

OLYMPIÁDY A SOČ

Fyzikální olympiáda v Polsku

RNDr. IVO VOLF, CSc., ÚV FO Hradec Králové

Fyzikální soutěže mají v Polské republice již dlouholetou tradici. Některé z nich jsou pořádány v jednotlivých vojvodstvích a jsou určeny pro žáky základní školy. Nejdůležitější soutěží je fyzikální olympiáda, která ve školním roce 1989/90 postoupila již do 39. ročníku své existence.

Soutěž pořádá *Polská společnost fyziků* pod péčí ministerstva vzdělávání a výchovy. Fyzikální olympiáda má tři kola — školní kolo, oblastní kolo, zahrnující území vždy několika vojvodství, a celostátní kolo. Má však pouze jednu kategorii, které se mohou zúčastnit žáci z různých ročníků střední školy.

První kolo probíhá od počátku října do konce listopadu a obsahuje dvě části. Vstupní část, jíž se pravidelně účastní asi 3000 soutěžících, obsahuje tři teoretické úlohy a jednu experimentální; jejich řešení opravuje učitel fyziky. Úlohy druhé části školního kola zasílá učitel fyziky oblastnímu výboru fyzikální olympiády neopraveny a opravu řešení pěti teoretických úloh a jedné experimentální od 2000 řešitelů zajišťují výbory FO. K postupu je potřeba, aby řešitel správně vyřešil alespoň tři teoretické úlohy a úlohu experimentální.

Druhé kolo pořádají oblastní výbory fyzikální olympiády, kterých je v Polsku celkem 13. Toto kolo obsahuje tři teoretické úlohy a jednu úlohu experimentální. Oblastního kola se účastní zpravidla asi 1000 soutěžících. Celostátního kola FO se v Polsku účastní asi 80 soutěžících, kterým je předložena jedna experimentální úloha a tři úlohy teoretické.

Po stránce organizační a administrativní se polská fyzikální olympiáda příliš neliší od naší. Nemá však tolik rozpracovány různé formy činnosti se soutěžícími, které jsou rozšířeny u nás. Úspěšní řešitelé však získávají určité výhody, jež jsou uvedeny každým rokem v letáku fyzikální olympiády a které se rok od roku poněkud mění.

Např. účastníci třetího kola FO:

- nemusejí konat maturitní zkoušku z fyziky, přičemž na vysvědčení obdrží hodnocení „výborně“,
- jsou osvobozeni od přijímací zkoušky z fyziky na těch vysokých školách, kde se zkouška koná (s výjimkou medicíny),
- byli přijímáni bez přijímací zkoušky na obory s fyzikou na univerzitách a na vysokých školách pedagogických.

Vítězové fyzikální olympiády, kterých bývá 20 až 30, mají právo být přijati bez přijímací zkoušky na univerzity a vysoké školy pedagogické (obory s matematikou, informatikou, fyzikou, astronomií, chemií, základy techniky), na libovolný směr vysokých škol technických a na některé obory vysokých škol zemědělských a vojenských.

Úspěch ve fyzikální olympiádě, tj. účast na soutěži ve II. a III. kole a vítězství ve fyzikální olympiádě mají být zaznamenány na maturitní vysvědčení.

Podstatný rozdíl mezi naší a polskou fyzikální olympiádou nacházíme v oblasti úloh. Úlohy pro soutěž připravuje ÚVFO. Pro I. kolo mívají někdy delší text, některé úlohy mají i testový charakter (několik jednodušších otázek představuje jedinou úlohu). Ve vyšších kolech se zadávají především úlohy tvořivé. Ve II. a ve III. kole mohou řešitelé používat

neprogramovatelný elektronický kalkulátor, školní matematicko-fyzikální tabulky, vlastní učebnice fyziky a je povoleno, aby si vzali k řešení jeden dosti tlustý sešit s vlastními poznámkami z fyzikální literatury (při vytváření těchto zápisků může soutěžící užívat libovolných pomůcek podle svého uvážení).

Abyste si udělali představu o náročnosti úloh, zadávaných do polské fyzikální olympiády, vybrali jsme pro vás následující pětici teoretických úloh. Pokuste se o jejich řešení. Pokud se budete domnívat, že jste dospěli k mimořádně zajímavému řešení, zašlete ho prostřednictvím redakce autorovi tohoto článku. Řešení polských úloh je dobrou přípravou také pro naši fyzikální olympiádu.

1. Tři stejné rezistory o odporu r byly zapojeny do jedné soustavy, jejíž výsledný odpor je R . Připojíte-li k této soustavě jako k celku další dva rezistory o odporu r , zmenší se odpor nové soustavy na sedminu odporu soustavy původní. Zjistěte, zda je to možno a jak muselo být zapojeno všech pět rezistorů. Zjistěte dále, zda je možno zapojit tyto další dva rezistory k původní soustavě tak, aby výsledný odpor nové soustavy byl R .

2. Na tenké vlákno velmi malé hmotnosti zavěsíme závaží, jehož působením se vlákno prodloužilo o délku $\Delta x_0 = 10$ cm. Vypočtete periodu kmitů tohoto závaží ve svislém směru, když ho vychýlíte z rovnovážné polohy, víte-li, že síla, kterou vlákno působí na závaží, je vyjádřena vztahem

$$F = -k_1 \Delta x - k_2 (\Delta x)^3,$$

kde Δx značí změnu délky vlákna vzhledem k původní hodnotě, konstanty k_1, k_2 mají hodnoty $k_1 = 294 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $k_2 = 9800 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$. Jak by se změnila perioda, kdybychom změnili hmotnost závaží?

3. Duté sférické zrcadlo má poloměr $R = 60$ cm a jeho optická osa má svislý směr. Potom bylo zrcadlo naplněno vodou. Určete ohniskovou vzdálenost této soustavy. Index lomu vody $n = 1,33$. Uvažte, že hloubka vody je malá vzhledem k poloměru křivosti R .

4. Na nehybném šroubu, jehož osa je svislá a který má poloměr r , stoupání s , je nasunuta matice s momentem setrvačnosti I a s hmotností m . Předpokládejte, že tření matice o šroub není nutno uvažovat. Matice se začne pohybovat rychlostí v_0 ve svislém směru. Jak závisí rychlost pohybu matice ve svislém směru na čase? Určete, o jaký druh pohybu jde. Tíhové zrychlení považujte za známé.

5. Experimentálně byly zjištěny následující skutečnosti:

- úhlový průměr Slunce pozorovaný ze Země je $\alpha = 32'$,
- solární konstanta $k = 1360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (je rovna číselně energii záření,

- dopadajícího ze Slunce kolmo na desku o obsahu 1 m^2 za 1 s , umístěné ve vzdálenosti astronomické jednotky od Slunce,
- Stefanova-Boltzmannova konstanta $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$,
 - Slunce vydává záření prakticky jako dokonale černé těleso, tj. intenzita vyzařování $H_0 = \sigma T^4$.

Na základě těchto údajů stanovte:

- a) teplotu povrchových vrstev Slunce,
- b) teplotu povrchu Země, předpokládáte-li, že Země vyzařuje jako dokonale černé těleso (to dovoluje učinit předpoklad, že teplota ve všech bodech povrchu Země je stejná).

Abyste se mohli přesvědčit o správnosti svého řešení, uvádíme výsledky:

1. Původní tři rezistory jsou zapojeny sériově, přidané rezistory paralelně k dané soustavě. Nakreslíme všechny možnosti — lze uvážit pouze sériovo-paralelní zapojení. V matematickém řešení vychází kvadratická rovnice vedoucí k iracionálnímu kořenu. Spojením tří rezistorů však nelze dostat iracionální hodnotu odporu. Druhá část úlohy je tedy nereálná.

$$2. T = 0,52 \text{ s, obecný vztah } T = 2\pi \sqrt{\frac{k_1 \Delta x_0 + k_2 (\Delta x_0)^2}{g(k_1 + 3k_2 (\Delta x_0)^2)}}$$

$$3. f = \frac{R}{2n} = 22,5 \text{ cm}$$

$$4. v = v_0 + \frac{gt}{1 + 4\pi^2 I m^{-1} s^{-2}}$$

$$5. T_s = 5600 \text{ K, obecně } T_s = \sqrt[4]{4k \sigma^{-1} \alpha^{-2}},$$

$$T_z = \sqrt[4]{0,25 k \sigma^{-1}} = 280 \text{ K}$$

Kalendár M-F: február 1990

1. 2. 1905 sa v Tivoli narodil *Emilio Gino Segré*, americký fyzik talianskeho pôvodu. Zaoberal sa atómovou a jadrovou fyzikou, spektroskopiou. Skúmal neutróny a ich účinkovanie v jadrových reakciách. Za objav antiprotónu dostal spolu s O. Chamberlainom Nobelovu cenu za fyziku (1959).
2. 2. 1870 sa narodil *Henri Fehr*, švajčiarsky matematik. Zaslúžil sa o vytvorenie medzinárodnej komisie pre reformy školskej matematiky.

2. 2. 1960 zomrel *Constantin Carathéodory*, nemecký matematik. Dosiahol zaujímavé výsledky v teórii konformných zobrazení, vo všeobecnej teórii miery množín a v teórii abstraktného integrálu.
2. 2. 1965 zomrel *George Watson*, anglický matematik. Prispel k rozvoju matematickej analýzy.
2. 2. 1970 v Penrhynyndendraethe (Wales) zomrel *Bertrand Artur William Russell*, anglický matematik a filozof. Spolu s Whiteheadom napísal *Principia Mathematica*, snažil sa vytvoriť uzavretý systém matematickej logiky. Prispel k rozvoju teórie množín a k tvorbe modernej logickej symboliky.
3. 2. 1925 zomrel *Oliver Heaviside*, anglický fyzik a matematik. Objavil vodivú vrstvu v atmosfére dôležitú pre šírenie rádiových vln.
3. 2. 1975 zomrel *William David Coolidge*, americký fyzik. Zaoberal sa elektronikou, vytvoril nové zdroje (trubice) röntgenových lúčov.
4. 2. 1975 zomrel *Anatolij Arkadievič Blagonravov*, sovietsky fyzik a mechanik. Prispel k rozvoju teórie mechanizmov i teórie letu do kozmu.
4. 2. 1980 v Bratislave zomrel *Ján Fischer*, slovenský fyzik. Skúmal teóriu rozptylu a absorpcie röntgenového žiarenia.
5. 2. 1915 sa v New Yorku narodil *Robert Hofstadter*, americký fyzik. Skúmal štruktúru elektrónového obalu atómového jadra, prispel k vývoju scintilačných počítačov. Za výskumy elektrických oscilácií elektrónov v atómovom jadre získal spolu s R. L. Mössbauerom Nobelovu cenu (1961).
7. 2. 1960 v Moskve zomrel *Igor Vasilievič Kurčatov*, sovietsky fyzik. Prispel k vybudovaniu prvého sovietského cyklotrónu (1937), atómovej (1949) i vodíkovej bomby (1953) a spusteniu prvej atómovej elektrárne na svete (1954).
8. 2. 1700 sa v Groningene (Holandsko) narodil *Daniel Bernoulli*, švajčiarsky matematik a fyzik. Položil základy hydrodynamiky.
9. 2. 1800 sa v Pécsi narodil *Lipót Fejér*, maďarský matematik. Rozpracoval teóriu trigonometrických radov.
10. 2. 1866 zomrel *Emilij Christianovič Lenz*, ruský fyzik nemeckého pôvodu. Študoval elektromagnetické javy, sformuloval pravidlo o smere indukovaného elektrického prúdu.
11. 2. 1650 v Stockholme zomrel *René Descartes*, francúzsky matematik, fyzik a filozof. Položil základy analytickej geometrie, konštruoval optické prístroje, skúmal meteorologické javy.
12. 2. 1785 sa v Rouene narodil *Pierre Louis Dulong*, francúzsky chemik a fyzik. Študoval rozťažnosť a merné teplo látok, odvodil pravidlo o merných teplotách prvkov.
13. 2. 1845 sa v Dürene narodil *Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, nemecký matematik. Ovplyvnil teóriu čísel, variačný počet, matematickú analýzu i fyziku.

13. 2. 1910 sa v Londýne narodil *William Bradford Shockley*, americký fyzik anglického pôvodu. Zaoberal sa fyzikou pevných látok, prispel k objavu a vývoju tranzistorov.
14. 2. 1950 v Prahe zomrel *Karel Petr*, český matematik. Prednášal na Univerzite Karlovej, modernizoval vysokoškolské učebnice, zdôrazňoval význam numerických metód.
16. 2. 1940 zomrel *Valerij Ivanovič Glivenko*, sovietsky matematik. Pracoval v matematickej logike, teórii pravdepodobnosti.
18. 2. 1745 sa v Come narodil *Alessandro Giuseppe Volta*, taliansky fyzik. Skúmal elektrické javy, zostavil stály zdroj elektrického napätia.
18. 2. 1900 zomrel *Eugenio Beltrami*, taliansky matematik. Rozpracoval diferenciálnu geometriu a teóriu analytických funkcií.
20. 2. 1620 zomrel *Simon Stevin*, holadský matematik. Zaviedol desatinné zlomky, študoval hydrauliku.
20. 2. 1865 v Milínove pri Sušici sa narodil *Matyáš Lerch*, český matematik. Zaoberal sa matematickou analýzou a teóriou funkcií. Bol prvým prof. matematiky na univerzite v Brne.
20. 2. 1895 sa v Prahe narodil *Václav Dolejšek*, český fyzik. Založil spektroskopický ústav UK.
22. 2. 1785 sa narodil *Jean Charles Peltier*, francúzsky fyzik. Objavil termoelektrický jav, konštruoval prístroje.
23. 2. 1855 v Göttingene zomrel *Karl Friedrich Gauss*, nemecký matematik, fyzik a astronóm. Vydal 155 vedeckých prác a veľa pojednaní zanechal v rukopisoch. Spájal teóriu s praxou.
24. 2. 1810 v Londýne zomrel *Henry Cavendish*, anglický chemik a fyzik. Objavil vodík, zistil chemické zloženie vody i vzduchu.
28. 2. 1930 sa v New Yorku narodil *Leon Cooper*, americký fyzik. Za vypracovanie teórie supravodivosti dostal spolu s J. Bardeenom a J. Schriefferom Nobelovu cenu (1972).
28. 2. 1964 zomrel *Nikolaj Nikolajevič Luzin*, sovietsky matematik. Prispel k rozvoju teórie funkcií.

dj

Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v roce 1989

Doc. dr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

Ve dnech 13. až 15. 6. 1989 se na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy konaly přijímací zkoušky. V písemné zkoušce z matematiky řešil každý uchazeč jeden ze tří souborů pěti úloh, k čemuž měl k dispozici půldruhé hodiny čistého času. Abyste si mohli ověřit možnost svého přijetí, jsou u jednotlivých souborů uvedeny některé údaje o počtu uchazečů a získaných bodech; za řešení každého příkladu z každého souboru bylo možno získat nejvýše pět bodů, takže každý uchazeč mohl získat maximálně 25 bodů.

Soubor pro uchazeče o matematické obory:

Písemnou zkoušku konalo celkem 182 studentů; z nich 132 získalo aspoň 20 bodů (25 bodů získalo 43 studentů), 18 studentů získalo nejvýše 15 bodů.

1. V reálném oboru řešte nerovnici $\frac{5x^2 + 19x - 4}{4x - 3} \leq 0$

Výsledek: $\left(-\infty, -4\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{4}\right)$

2. V oboru přirozených čísel řešte rovnici $\binom{n-1}{n-3} + \binom{n-2}{n-4} = 9$

Výsledek: $n = 5$

3. Dokažte, že pro všechna reálná x platí nerovnost $4 \cos x + \cos 2x \geq -3$.

4. Podstava kolmého hranolu je pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky v poměru 3 : 4. Výška hranolu je o 2 cm menší než větší odvěsna podstavy a povrch hranolu je roven 468 cm². Vypočtete objem hranolu.

Výsledek: 540 cm³

6. Světelný paprsek prochází bodem $A[0, 4]$, odráží se od přímky $p: x + y = 0$ a prochází bodem $B[2, 2]$.

a) Určete rovnice přímek dopadajícího a odraženého paprsku.

b) Přímkou obou paprsků jsou tečnami kružnice o poloměru $\sqrt{10}$, jejíž střed S leží v prvním kvadrantu. Určete souřadnice bodu S .

Výsledek: a) dopadající p.: $3x - y + 4 = 0$, odražený p.: $x - 3y + 4 = 0$
b) $S[4, 6]$

Soubor pro uchazeče o fyzikální obory:

Písemnou zkoušku konalo celkem 58 studentů; 23 z nich získalo aspoň 20 bodů (maximální počet získalo 5 studentů), 26 studentů získalo nejvýše 15 bodů.

1. V reálném oboru řešte nerovnici $\sqrt{x(x-3)} \geq x-2$.

Výsledek: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

2. Délky hran kváдру jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, jejichž součet je 21 cm. Objem kváдру je 216 cm^3 . Určete délky hran.

Výsledek: 3 cm, 6 cm, 12 cm

3. V reálném oboru řešte rovnici

$$5^{\log x} + 5^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} + 3^{\log x - 1}$$

Výsledek: $x = 100$

4. Objem pravidelného šestibokého hranolu je $540\sqrt{3} \text{ cm}^3$, délka podstavné hrany je k délce výšky v poměru 3 : 5. Vypočtěte povrch hranolu.

Výsledek: $36(10 + 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

6. Vypočtěte délku strany čtverce $ABCD$ s vrcholem $A[0, 0]$, jestliže úhlopříčka BD leží na přímce $p: 3x + 4y - 25 = 0$. Určete rovnici kružnice opsané čtverci $ABCD$.

Výsledek: Délka strany je $5\sqrt{2}$, rovnice kružnice je $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Soubor pro uchazeče o studium učitelství a o dálkové studium:

Písemnou zkoušku konalo celkem 109 studentů; 70 z nich získalo aspoň 20 bodů (maximální počet získalo 27 studentů), 22 studentů získalo nejvýše 15 bodů.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9x + 14}$ a množinu K všech x , pro která je $f(x) < 0$

Výsledek: Def. obor je $(-\infty, 2) \cup (2, 7) \cup (7, \infty)$, $K = (-\infty, 0) \cup (2, 7)$

2. Bod M je středem hrany EF krychle $ABCD EFGH$ o hraně $|AB| = a$, $|AE| = |BF| = |CG| = |DH|$. Vypočítejte obsah trojúhelníku BMH .

Výsledek: $\frac{a^2}{4} \sqrt{6}$

3. Určete průsečíky přímky $x + y = 43$ s kružnicí, která prochází bodem $[1, 8]$ a dotýká se osy x i osy y .

Výsledek: $[25, 18], [18, 25]$

4. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, je-li součet jejích prvních tří členů roven 62 a součet dekadických logaritmů těchto členů roven 3.

Výsledek: Dvě řešení — jedna posl. má první člen 2 a kvocient 5, druhá má první člen 50 a kvocient $\frac{1}{5}$.

6. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q . Na přímce p je dáno pět navzájem různých bodů, na přímce q čtyři navzájem různé body; z těchto daných bodů neleží žádné čtyři na kružnici. Určete počet kružnic, které mají tu vlastnost, že procházejí třemi z daných devíti bodů.

Výsledek: 70

Z NOVÝCH KNIH

Zdeněk Opava :

MATEMATIKA KOLEM NÁS

Vydalo nakladatelství pro děti a mládež ALBATROS, Praha 1989, 368 str., 743 obr., 1. vydání, 30 000 výt., cena 70,— Kčs

Na pultech našich knihkupectví se objevila publikace, která jistě potěší a zaujme každého zájemce o matematicko-fyzikální obory. Po svých předcházejících dvou knihách „Elektřina kolem nás“ (vyšlo 1981 a 1985) a „Chemie kolem nás“ (vyšlo 1986) přichází Zdeněk Opava s dalším titulem — „Matematika kolem nás“ Kniha je určena čtenářům od 13 let. Bude

jistě vítaným dárkem pro mnohé žáky, zvláště pak tříd s rozšířeným vyučováním matematice. A možná nejen pro ně. Myslím si totiž, že najde své místo i v knihovničce leckterého učitele matematiky.

Rozsah matematických poznatků se v tomto století více než zdvojnásobil a za posledních sto let vznikla celá řada nových matematických oborů. Matematika je známa svou náročností na přesné formulace, logickou stavbu poznatků a sled úvah. Proto sepsání populární knihy o matematice pro mladé čtenáře jistě nebylo pro autora snadnou záležitostí. Sám v úvodu uvádí, cituji: „Tato kniha není učebnicí. Snaží se mluvit

o matematice jednoduchou řečí, a tak například neuvádí vždy přesné definice a kvantifikátory platnosti matematických vztahů, některé stati jsou zjednodušeny, některé zpracovány jen encyklopedickou formou. .“.

Vlastní text je členěn do článků, které na sebe volně navazují. Jednotlivé kapitoly pak představují jakýsi průřez matematickými obory. Srozumitelnosti přispívají do textu začleněné barevné obrázky, schémata a ilustrace. K prověření toho, zda vysvětlovaná látka byla pochopena, slouží články zvané „Minitesty“ — tj. otázky s variantou odpovědi a zpětnou vazbou. Čtivost zvyšují odstavce nazývané „Zajímavosti a otázky“ i problémy formulované přímo v textu — ty jsou vždy po straně označené i s údajem, na které straně lze nalézt jejich řešení. Kniha je doplněna přehledem značek a symbolů, pěknou tabulkou vzorců pro obvody a obsahy rovinných útvarů, věcným a jmenným rejstříkem.

Milan Trch

Repáš, V — Pribišová, A. — Vantuch, J.:

ÚLOHY Z MATĚMATICKÝCH OLYMPIÁD ZÁKLADNĚJŠKOLY

Vydalo Slovenské pedagogické nakladatelstvo, Bratislava 1989, strán 208, Kčs 10,—

Zbierky úloh s riešeniami pomáhali vždy v školskej práci. Súbor

úloh z matematickej olympiády pre 4. až 7. roč. základnej školy za školské roky 1980/81 až 1985/86 rozširuje bežný príkladový materiál o zaujímavé typy, ktoré sa osvedčili v matematických súťažiach. Knižka dobre poslúži nielen nadaným žiakom a učiteľom základných škôl, ale aj študentom v prvých ročníkoch stredných škôl. Na vybraných úlohách možno ukázať účinnosť nového matematického aparátu i niektoré osvedčené obraty.

V knižke sú najprv uvedené texty jednotlivých úloh podľa ročníkov MO a v druhej časti sú naznačené riešenia, prispôbolené veku žiakov, pre ktorých sú určené.

Pre mladších čitateľov nášho časopisu uvádzam tri zaujímavé úlohy:

Tri rovnako veľké kocky a veľká guľa majú tú istú hmotnosť ako 12 malých rovnakých gulôčok. Hmotnosť veľkej gule sa rovná hmotnosti jednej kocky a 8 malých gulôčok. Koľko gulôčok má tu istú hmotnosť ako veľká guľa?

Veľkosti strán trojuholníka ABC sú v pomere $a : b : c = 2 : 3 : 4$. Veľkosť výšky v_a na stranu a je 9. Určete veľkosti ostatných výšok daného trojuholníka.

Nájdite najväčšie trojciferné číslo, ktorého ciferný súčet je prvočíslo a ciferný súčin sa rovná tretej mocnine prirodzeného čísla.

Ak chcete ďalšie úlohy, pozrite sa do spomínanej knižky.

Dušan Jedinák

HUMORY MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ

Úsměvy Nielse Bohra

Niels Hendrick David Bohr (7. 14. 1886 až 18. 11. 1962) byl významný dánský fyzik, jeden ze zakladatelů moderní teoretické fyziky. Byl čestným členem více než dvaceti akademií věd v různých zemích světa, nositelem Nobelovy ceny za fyziku od r. 1922. Založil mezinárodní školu teoretických fyziků.

Zamilovaným Bohrovým úvodem k jakékoliv poznámce bylo „I don't mean to criticize“ — „Ne že bych chtěl kritizovat . . .“ Dokonce po přečtení zcela špatné práce Bohr obyčejně zvolal: „Nechci kritizovat, ale prostě nemohu pochopit, jak člověk může napsat takový nesmysl!“ Ohleduplnost jeho soudů byla všeobecně známa. Jednou byl jeden z fyziků po svém referátu na semináři ve velmi špatné náladě. Přítel se ho zeptal, co se stalo. „Je to hrozné,“ dostal odpověď, „profesor Bohr mi řekl, že to bylo velmi zajímavé.“

V diskusi o Gibbsově statistické mechanice, knize kterou lze číst pouze s velkými obtížemi, se jednou Bohr vyjádřil takto: „Když člověk dokonale ovládne předmět, potom o něm píše tak, že mu téměř nikdo nemůže rozumět.“

To nám trochu připomíná známou korespondenci mezi Albertem Einsteinem a Charlie Chaplinem, v níž se tito dva velikáni navzájem vyznávali ze svého obdivu jeden k druhému. „Jste velký člověk,“ psal Einstein Chaplinovi, „protože Vašemu umění porozumí každý!“ Na to Chaplin Einsteinovi odpověděl: „Jste velký člověk, protože Vaši teorii relativity neporozumí nikdo!“

Richard Courant vzpomíná, jak se Bohra na počátku jejich známosti snažil přimět k tomu, aby své myšlenky vyjadřoval srozumitelněji. Bohr tehdy rozzlobeně protestoval: „Je jasné, že nemůžete chápat, co se nyní snažím říci. Možná, že se to stane pochopitelným, až vyslechnete můj výklad celý a pochopíte jeho konec.“

Na Bohrův způsob psaní článků reagoval jednou P. A. M. Dirac svým tichým a mírným způsobem, plným suchého anglického humoru: „Když jsem byl malý chlapec, tak mne vždycky učili, abych nezačínal psát větu, aniž znám její konec.“

A na závěr výrok Nielse Bohra: „Některé věci jsou tak vážné, že o nich můžete mluvit jenom žertem.“

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20 — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, s. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpalkova 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1990

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

ADRESA REDAKCE:

M. D. Rettigové 4,
116 39 Praha 1 - Nové Město
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

REDAKČNÍ KRUH:

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topolčany; doc. dr. Stanislav Jendroň, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

ROZHLEDY

matematicko
-fyzikální

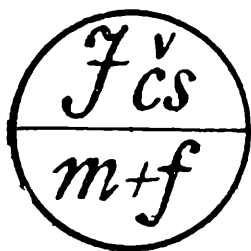
7
89 – 90

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

BŘEZEN

CENA 3,00 Kčs



ROZHLEDY

matematicko

-fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Ivan Štoll: O náhodě, která přeje připraveným	289
Helena Husová: Pravděpodobnostní výpočty v rodokmenových metodách	295
Zbyněk Šidák: Soutěž o královnu krásy a teorie uspořádání	298
Luděk Granát: Počítačová grafika — zobrazování oblouku kružnice	305
Jaroslav Pospíšil: Paprskové optické zobrazení rovinnými zrcadly	313
Josef Kotyk: Akademik Bohumil Bydžovský	317
Rudolf Zajac: 120 rokov periodickej sústavy prvkov	319
Z matematiky a fyziky ZŠ	325
Přemýšlíme, řešíme	329
Naše soutěž	330
dj: Kalendár M-F	333
Z nových knih	335
Milan Bednařík: Žákovské perličky z hodin fyziky	3. str. obálky

O náhodě, která přeje připraveným

Doc. ing. IVAN ŠTOLL, CSc., FJFI ČVUT Praha

V dnešní době, kdy vědecké objevy nejrozumnějšího druhu a významu nejsou ojedinělými a izolovanými událostmi, ale představují celý řetěz vzájemně propojených poznatků, a kdy si od nich slibujeme vyřešení nejrozumnějších problémů společnosti a další pokrok lidstva, se musíme stále častěji zamýšlet, jak k novým objevům vlastně dochází. Je to záležitost celé společnosti, neboť vědecké experimenty vedoucí k novým objevům jsou často nákladné (i když ne vždy!), vyžadují velké finanční prostředky a technické kapacity, je třeba vytvářet velké týmy vědců a dalších odborníků a zaměřovat jejich práci tak, aby skutečně nové výsledky a objevy přinášela. Je třeba říci, že způsob plánování a řízení vědeckého výzkumu, jak byl u nás prováděn v posledních desetiletích, tomuto cíli neodpovídal, že zdaleka nedával možnost uplatnění tvůrčích schopností vědeckých osobností a často se spokojoval s vykazováním počtu odpracovaných a odbádaných hodin, sepsaných zpráv a publikací. Musíme proto čerpat zkušenosti z minulosti i současnosti o tom, jak vlastně vědecké objevy vznikají, jaké podmínky a atmosféru je třeba pro ně vytvořit, jak zaměřit výchovu nových vědeckých pracovníků, jak výzkum řídit, plánovat a financovat.

Již samo slovo objev naznačuje, že jde o něco nečekaného, skrytého, o čem jsme neměli tušení a co se náhle našim zrakům a našemu myšlení odhalilo. Objev je tak spojován se šťastnou náhodou a dokreslován nejrozumnějšími historkami o Archimédově náhlém osvětlení ve chvíli koupele, Newtonově jablku a podobnými. Především je třeba říci, že ve vědě nejde ani tak o objevy, jako o práci mezi nimi. Soustavná, mravenčí práce jednotlivých vědců, kolektivů a celých generací, shromažďování a třídění poznatků, ověřování hypotéz, to vše je nezbytným předpokladem pro vznik objevu. Je známo, jaké úsilí, včetně fyzického, museli vynaložit Marie a Pierre Curieovi, než došli k objevu radia, dnes v době počítačů si stěží můžeme představit, jak klopotné výpočty musel provádět Johann Kepler při zpracovávání observačního materiálu o pohybu planety Marsu, který neméně pracně pořídil Tycho Brahe, nebo jak namáhavé byly výpočty astronomů Johna Adamse a Urbaina Leveriera, kteří z poruch dráhy Uranu určili existenci nové planety Neptuna.

Při nahromadění bohatého experimentálního materiálu, poznatků a souvislostí, kdy nový objev visí tak říkajíc ve vzduchu, se pak může

snadno stát, že sebemenší podnět vyvolá ono krátké spojení, je kapkou, kterou přeteče pohár, a nastane historický okamžik objevu. Pak zpravidla dochází k současným objevům na různých místech a nezávisle pracujícími vědci, jak známe četné příklady z minulosti i současnosti. Za těchto okolností bych připustil, že i neočekávaný dopad jablka na hlavu může přispět k podobnému myšlenkovému propojení.

Má-li dojít k objevu, a tím spíše k jeho společenskému uznání a využití, musí tedy existovat určitá atmosféra ve vědě i ve společnosti. Věda si na každém stupni vývoje formuje určitý obraz světa, vychází z určitých poznatých přírodních zákonů. Tyto zákony však nikdy neplatí absolutně, ale v určitých podmínkách, za určitých předpokladů, byly vlastně odvozeny pro určité modelové situace. Tím spíše je třeba vážit, zda všechny podmínky pro uplatnění zákonů jsou splněny, než prohlásíme, že nějaký nový objev nebo pozorovaný jev je důsledkem chybných pozorování či úsudků; i to se samozřejmě stává. Naproti tomu bývá často situace, že vědecká veřejnost je přesvědčena o tom, že ten či onen jev nastat nemůže, proto jej vědci ani nehledají a neověřují. Nakonec přijde někdo, kdo neví, že to nejde, často i z jiné vědní oblasti, a objev učiní.

V roce 1986 vzrušil odbornou veřejnost objev vysokoteplotní supravodivosti, s nímž přišli západoněmecký fyzik Karl Alex Müller a švýcarský profesor Georg Bednorz, oba pracovníci curyšských laboratoří firmy IBM. Jev supravodivosti, náhlé ztráty elektrického odporu při takzvané kritické teplotě, byl znám již od roku 1911, kdy nizozemský fyzik Heike Kamerling Onnes zkapalnil helium, ponořil do něho rtuť a změřil její elektrický odpor (proč to vlastně dělal?). Od té doby zkoušeli fyzikové různé supravodivé materiály, zejména slitiny, a dospěli nakonec k supravodivému materiálu složení Nb_3Ge , který se stává supravodivým při teplotě nižší než 23 K. Této teploty lze již dosahovat pomocí zkapalněného vodíku, levnějšího než helium, ale přesto pro běžné technické aplikace je to teplota příliš nízká.

Po tři čtvrti století zůstávala ve fyzice otevřenou otázka, zda mohou existovat látky supravodivé při vyšších, zejména běžných pokojových teplotách, a které to jsou. Všichni si uvědomovali nedožitelný praktický význam případného objevu takových látek. Úsilí mnoha desetiletí přineslo sice mnoho experimentálních poznatků a nakonec i úspěšný teoretický model supravodivosti, ale přesto postupně narůstala skepse v tom, že se někdy podaří takové materiály najít. Jedna laboratoř za druhou se postupně přestávaly tímto problémem zabývat a byly dokonce i teoretické pokusy zdůvodnit nemožnost vysokoteplotní supravodivosti.

Jednou ze skupin vědců, která se od sedmdesátých let začala problémem znovu seriózně zabývat, byli fyzikové seskupení kolem akademika Vitalije Lazareviče Ginzburga ve Fyzikálním ústavu AV SSSR. Skupiny s podobným programem pracovaly i ve Spojených státech amerických a v některých dalších zemích. Sám Ginzburg již v roce 1976 teoreticky

prokázal, že není principiálních důvodů, proč by vysokoteplotní supra-
vodiče nemohly existovat, a navrhl nové teoretické modely tohoto jevu.
Tito fyzikové vyzývali k tomu, aby byly na široké frontě zkoušeny nej-
různější materiály na supravodivost, ale nenašli odezvu — nebyla k tomu
příslušná „psychologická“ atmosféra. Současně s tím probíhal i výzkum
různých keramických, izolačních materiálů, jemuž se věnovali především
chemici. Přitom již v roce 1973 se u některých oxidů lithia a titanu
objevovaly náznaky supravodivých vlastností, ale vědci je blíže ne-
zkoumali. Jednak to bylo v rozporu s teorií, jednak neměli po ruce
kapalně helium a pak — kdo by mohl připustit tak pošetilou myšlenku,
že právě izolanty, keramické látky, by se mohly stát supravodiči! A když
konečně Müller a Bednorz zjistili supravodivé vlastnosti u keramického
materiálu tvořeného baryem, lanthanem, mědí a kyslíkem při teplotě
30 K a vyšších, měli potíže s publikací zprávy, hrozilo, že tento objev
zapadne. Nestalo se tak, další výzkumy a experimenty mnohých labora-
toří potvrdily nadějnost cesty a dnes si již fyzikové mohou objednat
supravodivou keramiku v nejrůznějším provedení za přijatelné ceny . . .

Do jisté míry podobná situace nastala v případě takzvané mionové
katalýzy, o níž jsme psali v 5. čísle Rozhledů a která slibuje usnadnění
reakcí jaderné fúze a získávání jaderné energie touto cestou. Jde o to,
že pokud částice zvané miony, vlastně jakési „těžké elektrony“, nahradí
v molekule deuteria nebo tritia elektrony, dojde k tak velkému sblížení
atomových jader, že může proběhnout jejich syntéza při běžných teplo-
tách, bez zahřívání na stamilióny stupňů. Po počáteční myšlence F. C.
Francka a A. D. Sacharova ve čtyřicátých letech a experimentálním
objevu této reakce Luisem Alvarezem roku 1956 nastoupilo období
nedůvěry a odmítání. Na základě teoretických výpočtů a úvah byli
fyzikové přesvědčeni, že je to cesta nemožná a neperspektivní. Když
něco nejde, proč se tím zabývat. Nakonec přišly nové experimenty,
kohosi napadlo zahřát takový plyn na 900—1000 stupňů Celsia (proč
vlastně, vždyť je známo, že to nemůže ovlivnit průběh jaderných pro-
cesů!) a zjistilo se, že mionová katalýza je mnohem pravděpodobnější
a nadějnější, než se myslo.

Vidíme tedy, že ke skutečnému objevu je třeba nahromadit co nejvíce
znalostí a poznatků, a to nejen ze svého oboru, ale často i z okorů sou-
sedních a hraničních, dále nepodléhat všeobecnému mínění a psycholo-
gické atmosféře, všimnout si sebemenší maličkosti či zvláštnosti a ne-
odbyť ji povrchním či laciným vysvětlením a konečně zkusit i něco, co
zdánlivě nemá smysl zkoušet. Erasmus Darwin, děd slavného Charlese
Darwina a známý podivín (tj. člověk nepodléhající konvencím) byl
významným lékařem a přírodovědcem své doby. Doporučoval provést
čas od času nějaký zcela nesmyslný a fantastický experiment; většinou
z toho samozřejmě nic nebude, ale co kdyby náhodou? Připomíná to
trochu cimrmanovskou metodu slepých uliček a zkoumání, zda fouká-

ním kouře do vody nevznikne zlato. Proč to však nezkusit a mít jistotu, že takto zlato nevznikne?

Všimněme si ještě několika pověstných fyzikálních objevů, o nichž se traduje, že k nim došlo šťastnou shodou náhod. Jedním z nich je objev „galvanismu“. V druhé polovině osmnáctého století byla dovršena syntéza poznatků o elektrostatičce a atmosférické elektřině a formulován kvantitativní Coulombův zákon o silách mezi statickými elektrickými náboji. Různé elektrostatičké generátory, třecí elektriky a leidské láhve byly běžnou součástí fyzikálních a přírodovědeckých laboratoří, působení elektrické jiskry na lidský organismus bylo zdrojem obveselení na mnohá společenská akce. Nebyly však známy zdroje elektromotrického napětí, které by umožnily vyvolat dlouhodobý průchod elektrického proudu, nikoliv jen přeskok jiskry. První takový zdroj, galvanický článok, sestrojil Alessandro Volta na přelomu století a předznamenal tak cesty výzkumu elektřiny a magnetismu na mnoho příštích desetiletí. Volta byl inspirován „náhodným“ objevem Luigiho Galvaniho, italského lékaře (!) z Bologni.

Existuje řada historek o tom, jak to bylo s Galvaniho „žabími stehýnkami“. Jedna z nich praví, že Galvani zavěsil čerstvě preparovaná žabí stehýnka na balkoně na měděných háčcích na železná zábradlí. Stehýnka se houkala a při jejich náhodném doteku se železným zábradlím se uzavřel elektrický obvod, prošel proud a nastalo škubnutí, kontrakce stehýnek. Toto líčení pochází zjevně z pozdější doby, kdy již bylo známo, že v galvanickém článku musí být dvě elektrody z různých kovů ponořeny do elektrolytu. Galvani nic takového nevěděl a sám se také o žádných měděných háčcích nezmiňuje. Experimentoval se statickou elektřinou již třicet let a pozoroval kontrakci žabích stehýnek za nejrůznějších podmínek — při doteku různými vodiči, při přeskoku elektrické jiskry v sousedství a na balkoně chtěl vyzkoušet jejich chování v době bouřky. Žabí stehýnka prostě fungovala jako elektroskop pro registraci indukovaných elektrických nábojů. Galvani sám připisoval jejich pohyby živočišné elektřině a jevům, které dnes známe jako elektrofyziologické. Nešlo tedy o pozorování náhodné, ale o výsledek systematického výzkumu jiných jevů. Důležité je, že Galvani na své výsledky upozornil a že Volta jejich význam domyslel a dal dalšímu výzkumu správný směr. Přesně vzato neměl však Galvani s „galvanismem“ nic společného.

Dalším, podle tradice „náhodným“ objevem v oblasti elektromagnetismu byl slavný pokus dánského fyzika Hanse Christiana Oersteda z roku 1820. Při přednášce studentům medicíny na kodaňské univerzitě předváděl Oersted experiment s propouštěním elektrického proudu platinovým drátem, jehož konce byly připojeny k elektrodám Voltova sloupu (tedy galvanické baterie). Drát se při průchodu proudu zahříval, teplem se prohýbal, rozžhavoval se do běla. Oersted se věnoval právě těmto tepelným účinkům proudu, které považoval za důsledek jakéhosi

„elektrického konfliktu“ probíhajícího v drátu. Při tomto pokusu byl v těsné blízkosti drátu umístěn kompas (náhodou?) a jeho střílka se při zapnutí a vypnutí zdroje pohnula. Nastal historický okamžik — všimne si toho někdo? Podle jedné verze si toho všiml přímo Oersted, podle jiné jeden z posluchačů. Magnetické účinky elektrického proudu byly objeveny, rozvoj elektrotechniky mohl začít.

Také tato tradovaná historie je ovšem silně zjednodušená. Především překvapuje, že si magnetických účinků proudu nevšiml za předchozích dvacet let již někdo jiný. V desítkách laboratorí byly připojovány vodiče k bateriím Voltových článků a magnetické střílky byly běžně k dispozici. Vědělo se dokonce, že za bouře při bleskových výbojích sebou magnetická střílka pohne. Najít souvislost mezi elektřinou a magnetismem byl dokonce přímo program, který si vytyčila řada vědců, mezi nimi i Oersted. Magnetickými střílkami byl propouštěn proud, byly ponořovány do elektrolytu baterií. Tento vlastně systematický výzkum však nepřinášel žádné výsledky, byl postupně opouštěn a považován za bezperspektivní. I když tedy Oerstedova aparatura byla sestavena promyšleně, pozorovaný jev nakonec samotného Oersteda překvapil. Přitom se ho pokoušel vysvětlit právě zahřátím drátu, vznikem jakési „smrště“ v jeho okolí. Nepochopitelné bylo také to, že elektrický proud nepůsobí na střílku přitažlivými nebo odpudivými silami, ale právě silovým momentem. A tak vidíme, že Oerstedovu objevu předcházela dlouhá práce, bloudění, ujasňování teoretických pojmů (pojmy proud, napětí a odpor nebyly ještě ujasněny a definovány jako dnes) a také správné vysvětlení pozorovaného jevu si vyžádalo ještě velké úsilí.

Jiným „hvězdným okamžikem“ fyziky se stal bezesporu objev rentgenových paprsků. Došlo k němu 8. listopadu 1895 v 8 hodin večer. Wilhelm Conrad Röntgen, profesor fyziky na univerzitě ve Würzburgu pracoval ve své laboratoři sám, a tak jen on věděl, jak k objevu vlastně došlo. Přitom byl Röntgen pověstný svou malou sdílností. Ani jeho nejbližší spolupracovníci nedokázali podrobněji vysvětlit průběh experimentu a další okolnosti, které vedly k epochálnímu objevu. Většina historek o Röntgenově objevu pochází proto od lidí vzdálenějších, kteří je měli z druhé, třetí ruky. Podle jedné z nich Röntgen experimentoval s katodovými paprsky (svazkem elektronů urychlených v evakuované výbojové trubici) a chtěl zjistit, zda fluorescence skleněných stěn trubice má vliv na světélkování tetrakyanoplatnatanu barnatého. Podle jiné verze se stínítko z tohoto fluorescenčního materiálu nacházelo náhodou opodál trubice a Röntgen si všiml jeho světélkování, a to přesto, že trubice byla zakryta černým kartonem. Jiná verze hovoří o tom, že Röntgen chtěl vyzkoumat příčinu černání fotografických desek umístěných v černém papíru v blízkosti katodové trubice.

Vlastnosti katodových paprsků a jejich podstatu podrobně zkoumal Philipp Lenard, bratislavský rodák, německý fyzik, který se později silně angažoval pro nacistickou ideologii. Lenard zkonstruoval výbojovou trubicí s okénkem z tenké fólie, která propouštěla katodové paprsky ven. Lenard přitom konstatoval, že tyto paprsky procházejí i kovovými destičkami. Neuvědomil si však, že toho nemohou být schopny katodové paprsky, letící elektrony, ale nějaké nové, dosud neznámé a vysoce pronikavé neviditelné paprsky. Také Röntgen pracoval s trubicemi zkonstruovanými Lenardem, ale jeho přístup byl odlišný. Röntgen, který se předtím katodovými paprsky nezabýval, přistoupil k této tehdy dosti zamotané problematice z nového pohledu, uvědomil si nedokonalosti některých experimentů, a když byl později dotazován na motivy svého objevu, odpověděl zcela lakonicky a jasně: „Hledal jsem neviditelné paprsky.“ Tady už může být stěží řeč o náhodnosti objevu.

Nejen Lenard, ale i řada dalších fyziků pracujících s tehdy oblíbenými katodovými paprsky zřejmě pozorovali účinky rentgenového záření, aniž si toho všimli a uvědomili si to. Americký fyzik Arthur Goodspeed, když se dozvěděl o Röntgenově objevu, zjistil, že vlastně již před pěti lety pořídil první rentgenový snímek, dokonce poměrně dobré kvality, aniž si uvědomil, že jde o nový pronikavý druh záření. Uvědomíme-li si historii, která předcházela Röntgenovu objevu, charakter experimentů a metodiku práce tehdejších fyziků, nemůže nás překvapit ani to, že v následujícím roce 1896 přichází profesor Henri Becquerel s novým epochálním objevem radioaktivity, který předznamenal éru jaderné fyziky a techniky.

Řešení algebrogramů ze str. 329

a) $14\ 974 + 4 + 74\ 574 + 3\ 468 + 9\ 034 = 102\ 054$

b) $4\ 624 + 462\ 076 + 14\ 161 + 318\ 147 + 14\ 161 = 813\ 169$

c) $43\ 721 + 76 + 189\ 460 + 852\ 019 + 3 = 1\ 085\ 279$

Pravděpodobnostní výpočty v rodokmenových metodách

RNDr. HELENA HUSOVÁ, CSc., PřF UK Praha

V předchozím pojednání jsme si objasnili základní genetické pojmy a prováděli jsme výpočty tzv. štěpných poměrů v potomstvu, pokud byly známy genotypy „rodičů“. Daleko častěji však známe zpočátku pouze vnější, *fenotypový projev* „rodičů“. Jestliže některý z rodičů má vůči sledovanému znaku dominantní fenotyp A , pak je prvním úkolem pokusit se zjistit, zda jde o jedince homozygotního (genotyp AA) či heterozygotního (Aa).

V živočišné a zejména rostlinné genetice lze často postupovat takto: jedince, u něhož chceme rozlišit, zda má genotyp AA nebo Aa (přičemž nemůžeme předem vyloučit ani jednu z těchto možností), zkřížíme s jedincem genotypu aa :

$$A - \times aa .$$

Vyskytne-li se v potomstvu jedinec s recesivním fenotypem a , měl „rodičovský“ jedinec genotyp Aa . Mají-li naopak všichni příslušníci rozsáhlého potomstva dominantní fenotyp A , bude tento jedinec mít s velkou pravděpodobností genotyp AA .

V lidské genetice je samozřejmě třeba volit jiné postupy. Snažíme se určit genotyp nebo alespoň pravděpodobnosti možných genotypů tazatele na základě dostupných informací o fenotypech příbuzných osob. Podaří-li se nám to u obou členů rodičovského páru, je možno pak činit předpovědi o pravděpodobnostech výskytu určitých vlastností u jejich potomků. Na tomto principu jsou založeny tzv. *rodokmenové metody*.

Pro jednoduchost budeme uvažovat, že znakem A je barva očí — tmavá (dominantní) nebo modrá (recesivní), znakem B je pravorukost (dominantní) a levorukost (recesivní).

Nejprve se budeme zabývat pouze upřesněním genotypu tazatele.

Příklad 1. Co lze říci o genotypu tmavookého praváka, jestliže:

- jeho rodiče jsou tmavooký pravák a tmavooká levačka;
- jedno z jeho dětí je modroooký levák;
- jedno z jeho dětí je tmavooký levák a druhé modroooký pravák?

Řešení. Tazatel má jistě některý z genotypů $A-B-$. V případě a) zdědil po matce recesivní alelu b ; ohledně genu A nic bližšího říci nelze. V tomto

případě tedy přicházejí v úvahu genotypy $AABb$ nebo $AaBb$. V případech b) a c) nám fenotypy dětí poskytují tutéž informaci, a to, že tazatel je genotypu $AaBb$.

Úloha 1. Co lze říci o genotypu tmavookého praváka, jestliže:

- a) jeho rodiče jsou tmavooký levák a modrooká pravačka;
 - b) jeho matka je tmavooká levačka a jeho dítě je modrooký pravák?
- (Výsledek: v obou případech je možný pouze genotyp $AaBb$).

V dalších příkladech budeme již provádět i určité genetické předpovědi.

Příklad 2. Oba rodiče jsou tmavoocí, jejich první dítě je modrooké. Jaká je pravděpodobnost, že druhé dítě bude rovněž modrooké?

Řešení. První dítě má genotyp aa ; oba rodiče tedy mají genotyp Aa . Pravděpodobnost, že druhé dítě bude modrooké (tj. že bude genotypu aa) je tedy $p = \frac{1}{4}$.

V následujícím příkladu nebude genotyp jednoho z rodičů (matky) určen jednoznačně, ale bude možno vypočítat pravděpodobnosti, že jde o genotyp AA , resp. Aa .

Příklad 3. Uvažujme rodičovskou dvojici, v níž otec je modrooký, matka tmavooká. Oba matčini rodiče jsou tmavoocí, ale její bratr je modrooký. Určete pravděpodobnost, že první dítě těchto rodičů bude modrooké.

Řešení. Z uvedených informací vyplývá, že oba matčini rodiče jsou genotypu Aa . Vzhledem k tomu, že matka je tmavooká, má tedy s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ genotyp AA a s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ genotyp Aa . Pouze v tomto druhém případě je možné, aby dítě mělo genotyp aa , a to s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Úloha 2. Nechť opět otec je modrooký a matka tmavooká, přičemž jeden z matčinyh rodičů je modrooký. Jaká je pravděpodobnost, že první dítě těchto rodičů bude modrooké?

(Výsledek: $p = \frac{1}{2}$)

Mnohem více kombinací nastává, uvažujeme-li dva různé genetické znaky (popřípadě více znaků). Ilustrujme si některé případy.

Příklad 4. Otec i matka jsou tmavookí praváci. Všichni čtyři prarodiče mají genotyp $AaBb$ (tento poznatek vyplynul na základě dalších informací z rodokmenových úvah, obdobně jako v předchozích příkladech). Určete:

- pravděpodobnost, že druhé dítě bude modrooký levák, jestliže první dítě je modrooký levák;
- pravděpodobnost, že druhé dítě bude modrooký levák, jestliže první dítě je modrooký pravák;
- pravděpodobnost, že první dítě bude modrooký levák.

Řešení. Za předpokladu a) mají oba rodiče genotyp $AaBb$. Pravděpodobnost, že druhé dítě bude genotypu $aabb$, je tedy

$$p_1 = \frac{1}{16}$$

Za podmínky b) mají oba rodiče vzhledem ke genu A genotyp Aa , takže potomek má genotyp aa s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Vzhledem ke genu B

mají oba rodiče některý z genotypů $B-$. Pouze při kombinaci $Bb \times Bb$, která v důsledku předpokladů o prarodičích nastane s pravděpodobností

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, může však potomek mít genotyp bb , a to s pravděpodob-

ností $\frac{1}{4}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$p_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$$

V případě c) je pravděpodobnost „příznivé“ kombinace rodičovských genotypů $AaBb \times AaBb$ rovna $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ a při této kombinaci je

pravděpodobnost genotypu $aabb$ u potomka rovna $\frac{1}{16}$. Je tedy

$$p_3 = \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{81}$$

Úloha 3. Uvažujme rodičovskou dvojici, v níž otec je tmavooký pravák, matka je modrooká levačka a všichni čtyři prarodiče mají genotyp $AaBb$. Určete pravděpodobnost, že:

- druhé dítě bude tmavooký pravák, je-li první dítě modrooký levák;
- třetí dítě bude tmavooký pravák, je-li první dítě modrooký pravák a druhé dítě tmavooký levák;
- druhé dítě bude tmavooký pravák, je-li první dítě modrooký pravák;
- první dítě bude tmavooký pravák.

$$\left(\text{Výsledky: } p_1 = p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \frac{1}{3}, \quad p_4 = \frac{4}{9} \right)$$

V ukázkových příkladech bylo samozřejmě možno provádět úplnější výpočty — určovat pravděpodobnosti všech fenotypů, resp. genotypů, které v potomstvu přicházejí v úvahu, tj. určovat teoretické štěpné poměry.

Nalezené pravděpodobnosti je opět možno chápat jako předpovědi relativních četností v rozsáhlých souborech — v tom smyslu, jak jsme si objasnili v předchozím článku.

V závěrečné části tohoto seriálu se budeme zabývat hodnocením tzv. statistické významnosti odchylek mezi štěpnými poměry nalezenými v konkrétních souborech jedinců a teoretickými štěpnými poměry.

Doporučená literatura :

- [1] Fabian, F.: Z teorie pravděpodobnosti a Matematická statistika. Kap. 8 a 9 in: Havlíček a kol.: Cesty moderní matematiky. Praha, Horizont 1976.
- [2] Sokolovskaja, B. Ch., Pikálek, P.: Genetika v příkladech. Praha, SPN 1983

Soutěž o královnu krásy a teorie uspořádání

RNDr. ZBYNĚK ŠIDÁK, DrSc., Matematický ústav ČSAV, Praha

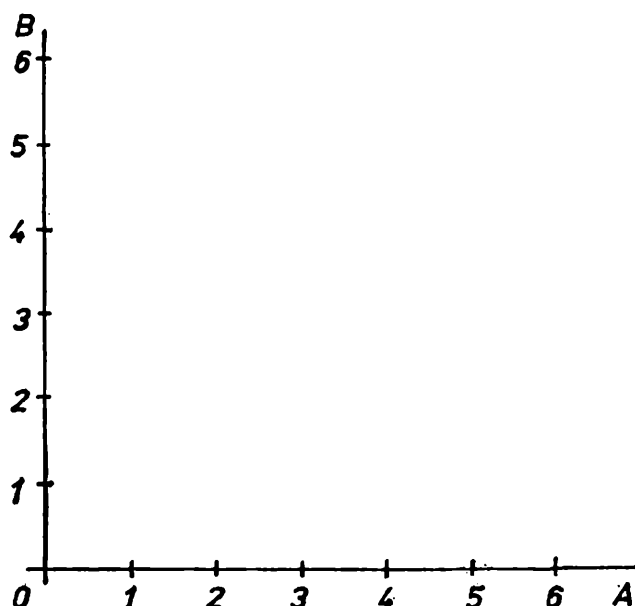
V tomto článku se naučíme, kdy dvě uspořádání n objektů lze považovat za závislá čili nějak si podobná anebo za nezávislá, tedy vzniklá náhodně. Začneme příkladem.

Příklad 1. Do finále soutěže o královnu krásy postoupilo 6 uchazeček. Posuzovatelé mají za úkol pouze je uspořádat podle krásy (nikoli např. nějak bodovat). Pro jednoduchost se soustředíme jen na 2 posuzovatele, kteří postupně přicházejícím uchazečkám dali následující pořadí:

posuzovatel A:	4	6	3	1	5	2
posuzovatel B:	6	5	4	1	2	3

(Viz obr. 1.) Oba posuzovatelé tedy shodně dali 4. uchazečku na 1. místo, v umístění ostatních se příliš neliší s výjimkou 5. uchazečky, kde se liší poměrně dost. Máme tedy říci, že tito posuzovatelé se celkově více méně shodují anebo naopak že se od sebe znatelně liší?

K zodpovězení této otázky potřebujeme nějak měřit odlišnost dvou uspořádání. Za vhodnou míru odlišnosti můžeme vzít např. číslo v



Obr. 1

vzniklé odečtením sobě odpovídajících pořadí, umocněním rozdílů na druhou a sečtením výsledků. Zřejmě oba posuzovatelé se perfektně shodují právě tehdy, když $v = 0$; čím více se odlišují, tím větší je v . V našem případě $v = (4 - 6)^2 + (6 - 5)^2 + (3 - 4)^2 + (1 - 1)^2 + (5 - 2)^2 + (2 - 3)^2 = 16$. Je však toto v vlastně malé anebo velké? Abychom se uměli orientovat v takových problémech, věnujeme se nyní trochu matematické teorii.

Základy teorie. Představme si, že nějakých n objektů máme uspořádáno podle dvou kritérií. Výsledky můžeme zapsat do schématu (v matematické terminologii: do „matice“)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r_1, r_2, \dots, r_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde r_i (resp. s_i) je pořadí i -tého objektu podle prvního (resp. druhého) kritéria. Čísla $r_1, r_2, \dots, r_n$ (a podobně $s_1, s_2, \dots, s_n$) jsou tedy nějakou permutací čísel $1, 2, \dots, n$. Jak jsme již řekli, za míru odlišnosti obou

řádků v $\mathbf{M}$ můžeme vzít číslo $v = v(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^n (r_i - s_i)^2$. (Vhodnost této

míry je také vidět z toho, že $\sqrt{v(\mathbf{M})}$ je vzdálenost bodů $(r_1, \dots, r_n)$ a $(s_1, \dots, s_n)$ v n -rozměrném eukleidovském prostoru.)

Samozřejmě hodnota $v(\mathbf{M})$ se nezmění, když dvojice r_i, s_i v $\mathbf{M}$ současně libovolně přeuspořádáme tak, že opět všechna r_i, s_i stojí nad sebou. Zejména je pro názornost výhodné přeuspořádání, při němž v prvním řádku $\mathbf{M}$ stojí základní permutace $1, 2, \dots, n$.

V dalším budeme potřebovat:

Za první vzorce

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1), \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1); \quad (2)$$

za druhé, protože $r_1, r_2, \dots, r_n$ je permutace čísel $1, 2, \dots, n$, zřejmě

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n i^2 \text{ a podobně pro } s_i^2, \text{ resp. } r_i, \text{ resp. } s_i. \quad (3)$$

Abychom mohli posoudit, kdy je $v(\mathbf{M})$ malé a kdy velké, potřebujeme především znát minimální a maximální hodnotu, kterých může $v(\mathbf{M})$ dosáhnout. S minimem je věc snadná: samozřejmě $v(\mathbf{M}) \geq 0$ a hodnota 0 je dosažena při $s_i = r_i, i = 1, \dots, n$. Pro odvození maxima použijeme určitý trik. K původní matici $\mathbf{M}$ v (1) definujeme „sduženou“ matici

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} n+1-r_1 & n+1-r_2 & \dots & n+1-r_n \\ s_1 & s_2 & & s_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Je snadno vidět, že první řádek v $\mathbf{M}'$ je opět permutace čísel $1, 2, \dots, n$ (v jakém si smyslu „obrácená“ k permutaci $r_1, r_2, \dots, r_n$). Pomocí (2), (3) a jednoduchých algebraických úprav si pak můžete sami dokázat, že

$$\begin{aligned} v(\mathbf{M}) + v(\mathbf{M}') &= \sum_{i=1}^n (r_i - s_i)^2 + \sum_{i=1}^n [(n+1-r_i) - s_i]^2 = \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n-1) = \frac{1}{3} (n^3 - n). \end{aligned} \quad (5)$$

Samozřejmě máme také $v(\mathbf{M}') \geq 0$, to znamená $-v(\mathbf{M}') \leq 0$; přičteme-li tuto nerovnost k rovnosti (5), dostáváme

$$v(\mathbf{M}) \leq \frac{1}{3} (n^3 - n) \quad (6)$$

Definujeme-li matici

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n-1, & n \\ n, & n-1, & & 2, & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

(tj. v níž $s_i = n+1-r_i, i = 1, \dots, n$), opět pomocí (2), (3) a snadných úprav zjistíme, že $v(\mathbf{M}^*)$ se rovná pravé straně v (6). Shrňme-li všechny tyto poznatky, vidíme, že platí

Věta 1. $0 \leq v(\mathbf{M}) \leq \frac{1}{3} (n^3 - n)$, přičemž dolní mez je dosažena při

$s_i = r_i, i = 1, \dots, n$, horní mez je dosažena při $s_i = n + 1 - r_i, i = 1, \dots, n$ (tj. pro $\mathbf{M}^*$ v (7) a pro $\mathbf{M}$ vzniklé z $\mathbf{M}^*$ libovolným přeuspořádáním dvojic stojících v $\mathbf{M}^*$ nad sebou).

Horní mez pro $v(\mathbf{M})$ ovšem závisí na n , takže hodnoty $v(\mathbf{M})$ nemůžeme pro různá n přímo srovnávat. Je proto účelné hodnoty $v(\mathbf{M})$ nějak normovat, aby vždy ležely v pevných mezích nezávislých na n . Obvyklé normování je, že definujeme

$$\varrho(\mathbf{M}) = 1 - \frac{6 v(\mathbf{M})}{n^3 - n}; \quad (8)$$

toto $\varrho(\mathbf{M})$ (dále budeme psát krátce ϱ) je dobře známo a používáno v matematické statistice; nazývá se *Spearmanův korelační koeficient* nebo *Spearmanův koeficient pořadové korelace*.

Z věty 1 podle pravidel pro počítání s nerovnostmi vyplývá

Věta 2. Pro všechna n je $-1 \leq \varrho(\mathbf{M}) \leq 1$, přičemž horní mez 1 je dosažena při $s_i = r_i, i = 1, \dots, n$, dolní mez -1 je dosažena při $s_i = n + 1 - r_i, i = 1, \dots, n$ (tj. pro $\mathbf{M}^*$ atd. jako ve větě 1).

S pomocí (5) také snadno spočteme, že $\varrho(\mathbf{M}) + \varrho(\mathbf{M}') = 0$, tedy máme $\varrho(\mathbf{M}') = -\varrho(\mathbf{M})$.

Ověřování závislosti dvou uspořádání. Formulujeme nyní problém tak, jak se to dělá v matematické statistice. Předpokládáme, že permutace $r_1, \dots, r_n$ a $s_1, \dots, s_n$ (nebo aspoň jedna z nich) jsou náhodné (nebo se v nich aspoň částečně projevuje náhodné kolísání). To ovšem zahrnuje širokou škálu „typů“ náhodnosti, o nichž v praktických příkladech máme určité domněnky, hypotézy. Naším úkolem pak je na základě zjištěných dat o těchto hypotézách rozhodnout.

Základní, nejjednodušší hypotézou H_0 je, že obě uspořádání jsou nezávislá, tedy že hodnoty r_i nijak neovlivňují hodnoty s_i ; jinak řečeno, s_i budou vůči r_i asi „dobře promíchána“, takže je málo pravděpodobné, že ϱ by bylo rovno 1 nebo -1 nebo blízké těmto číslům, naopak je nejpravděpodobnější, že bude $\varrho = 0$ nebo blízké 0.

Proti tomu můžeme postavit hypotézu H_1 (tzv. kladné závislosti, viz příklad 2, obr. 2), kdy sice r_i, s_i jsou také náhodné, ale s_i mají tendenci být blízko r_i , takže ϱ bude pravděpodobně blízko 1 (v extrémním případě $s_i = r_i, \varrho = 1$). V jiných situacích může být vhodné proti H_0 stavět hypotézu H_2 (tzv. záporné závislosti, viz příklad 3, obr. 3), kdy s_i mají tendenci být blízko $n + 1 - r_i$, tedy ϱ bude asi blízko -1 (v extrémním případě $s_i = n + 1 - r_i, \varrho = -1$ jako v matici $\mathbf{M}^*$). Případy závislosti H_1, H_2 se vyskytují zejména v situacích, kdy jedno uspořádání ovlivnilo druhé, nebo kdy při vzniku obou uspořádání působil nějaký společný vliv: v H_1 šlo o vliv se souhlasnými účinky na obě uspořádání, činící průběh r_i a s_i aspoň přibližně souhlasný, v H_2 šlo o vliv s protichůdnými účinky, činící průběh r_i a s_i přibližně protichůdný. (Ale

pozor: závislost může být také jen ryze formální, žádný společný vliv nemusí existovat!). Ovšem hypotézy H_1 , H_2 tvoří stále ještě širokou škálu: může jít o silné závislosti, kdy ρ bývá blízko 1 nebo -1 , nebo naopak o slabé závislosti, kdy ρ bývá relativně blízko k 0.

Podle principů matematické statistiky pak při zpracování dat z konkrétních případů předcházející argumentaci vlastně obracíme: dostaneme-li ρ blízke 1 (resp. -1), přikloníme se k tomu, že platí hypotéza H_1 (resp. H_2). Co to však znamená, že ρ je „blízke“ 1 (resp. -1)? To se posuzuje podle tzv. kritických hodnot ρ_0 , jejichž tabulku zde uvedeme a objasníme její použití (abyste si případně sami mohli posoudit vlastní příklady).

Tabulka kritických hodnot ρ_0

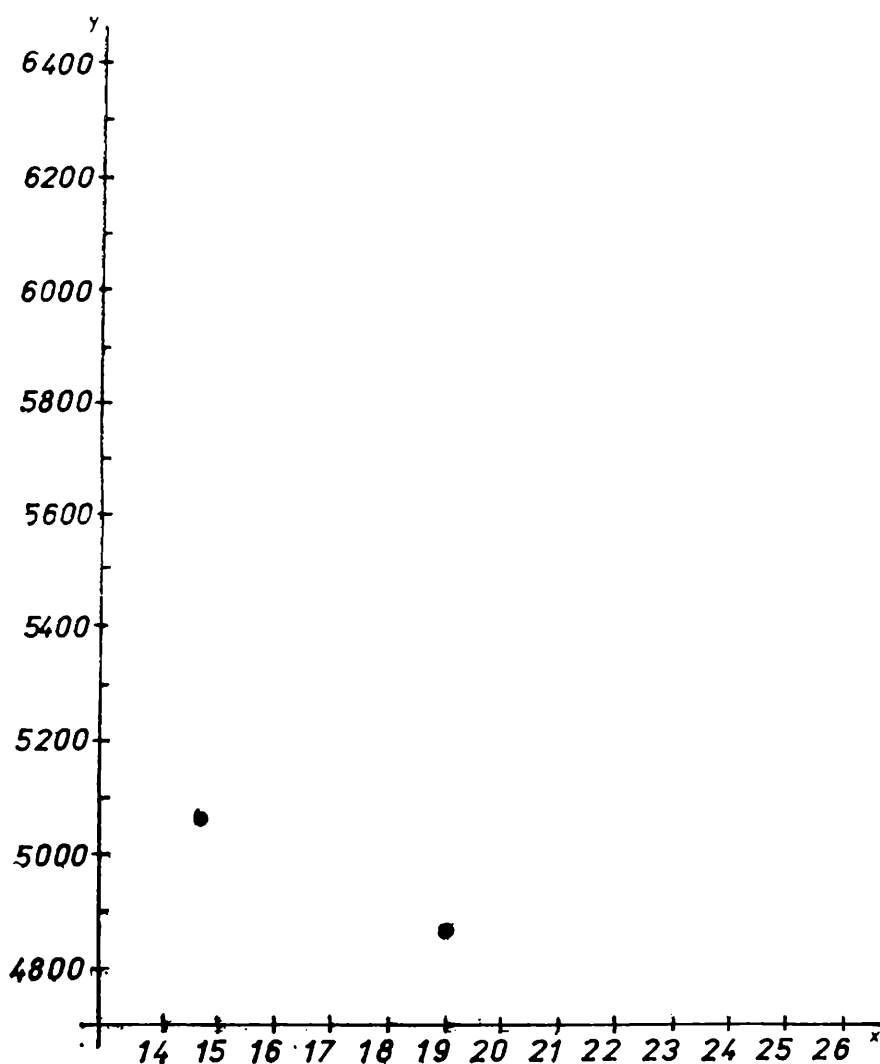
n	4	5	6	7	8	9	10
ρ	1,000	0,900	0,829	0,714	0,643	0,600	0,564

Pro $n > 10$ je možno použít přibližné hodnoty $\rho_0 = 1,645/\sqrt{n-1}$.

A nyní tedy přesně — při hodnocení konkrétních dat postupujeme podle následujícího tzv. *rozhodovacího pravidla*: Jestliže proti hypotéze H_0 stavíme H_1 a když vypočtené ρ je $\geq \rho_0$, pak zamítneme H_0 a prohlásíme, že je správná H_1 ; když však $\rho < \rho_0$, nemáme důvod H_0 zamítnout a zdržujeme se úsudku. Jestliže v jiných případech proti H_0 stavíme H_2 a když $\rho \leq -\rho_0$, zamítneme H_0 a prohlásíme za správnou H_2 ; když však $\rho > -\rho_0$, nemáme důvod H_0 zamítnout.

Všude tu jde o pravděpodobnostní úvahy, takže při svém rozhodování máme určité riziko chyby; ρ_0 je zvoleno právě tak, abychom se dopouštěli chyby jen s velmi malou pravděpodobností, tedy velice zřídka. (Tabulka ρ_0 začíná až od $n = 4$, protože uspořádání $n \leq 3$ objektů dávají příliš málo informace, takže zde není možno rozumně rozhodovat. Dále vidíme, že ρ_0 klesá s rostoucím n . To je proto, že pro malá n data obsahují málo informace, takže jen při silné závislosti lze zamítnout H_0 , kdežto pro větší n data obsahují více informace, takže i slabší závislost stačí k zamítnutí H_0 .)

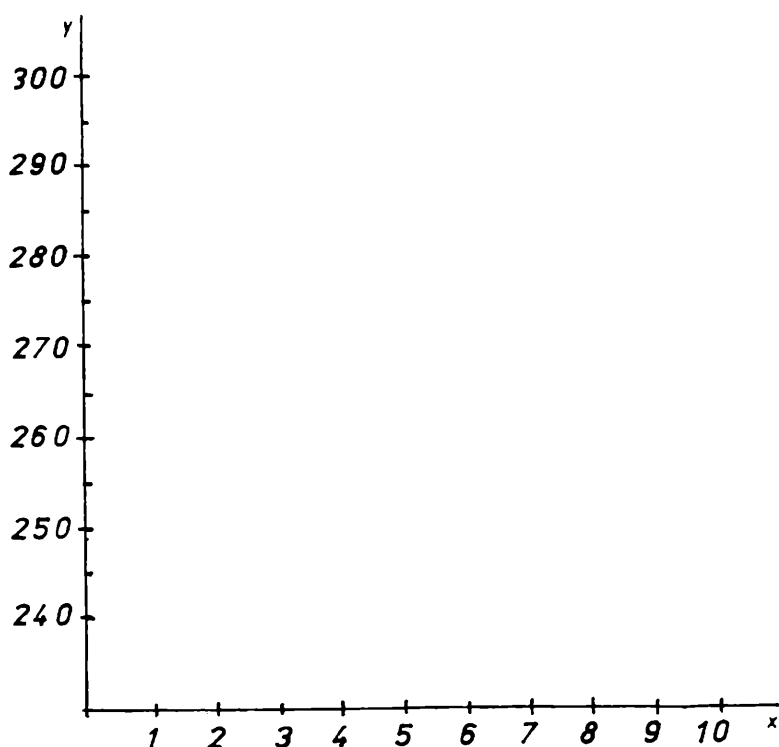
Po teoretické části se teď vrátíme k dokončení příkladu 1. Podle (8) v něm dostaneme $\rho = 0,543$, takže $\rho < \rho_0 = 0,829$ a nemáme důvod zamítnout H_0 . Praktický důsledek tedy není příliš potěšující: ačkoliv si představujeme, že vlivem jakési „objektivní krásy“ uchazeček by měla být uspořádání od obou posuzovatelů podobná (tedy by měla platit H_1), ρ je natolik malé (čili *v* velké), že existence takového vlivu nebyla zde prokázána; buď je n příliš malé, nebo dokonce můžeme mít podezření, zdali posuzování není příliš subjektivní.



Obr. 2

Zde popsaný postup rozhodování se však neomezuje jen na případy, kdy jsou dána přímo uspořádání. Jeho použitelnost je daleko širší, jak uvidíme v dalších příkladech. (Uvedeme jen stručně data a výsledky, výpočty si proveďte sami za cvičení.)

Příklad 2. (viz obr. 2) V průběhu $n = 9$ týdnů od poloviny dubna do poloviny června bylo zjišťováno, zdali velikost víkendové dopravy závisí kladně na teplotě před víkendem. Konkrétně bylo zapisováno: x_i = teplota vzduchu ve stupních Celsia ve čtvrtek i -tého týdne ve 12 hodin, y_i = počet osobních aut jedoucích po určité výpadové silnici z Prahy v pátek i -tého týdne mezi 16 a 19 hod. Zjištěné hodnoty uvedeme v zápisu $(x_i; y_i)$ pro úsporu místa do řádku: (18,2; 5239), (17,4; 5481), (19,1; 4875), (15,9; 5612), (20,1; 5793), (25,2; 6317), (21,8; 5976), (14,7; 5065), (21,3; 6159). Nyní použijeme trik, který se v matematické statistice leckdy používá pro transformaci dat: každé číslo x_i nahradíme jeho pořadím r_i podle velikosti mezi čísly $x_1, \dots, x_n$ (např. nejmenší x_i nahradíme 1, druhé nejmenší nahradíme 2 atd.), podobně y_i nahradíme pořadím s_i podle velikosti mezi $y_1, \dots, y_n$. Tím dostaneme dvojice $(r_i,$



Obr. 3

s_i), v našem případě (4, 3), (3, 4), (5, 1) atd., a dále postupujeme jako dříve. Vypočteme $v = 30$, $\varrho = 0,75$; tedy $\varrho > \varrho_0 = 0,600$ a můžeme prohlásit, že skutečně velikost víkendové dopravy v pátek závisí kladně (samozřejmě s náhodným kolísáním) na teplotě v předcházející čtvrtěk. (Tím ovšem netvrdíme, že by teplota byla příčinou zvýšené dopravy; společnou příčinou může být prostě čas postupující k létu.)

Příklad 3. (viz. obr. 3) Atlet trénuje běh na 1500 m a chceme zjistit, zdali trénink skutečně má vliv na zlepšení jeho výkonů. Při $n = 10$ závodech bylo zapisováno x_i = pořadové číslo závodu, y_i = čas v sekundách na 1500 m při i -tém závodu a $(x_i; y_i)$ jsou tato: (1; 292,5), (2; 282,9), (3; 268,3), (4; 253,8), (5; 270,9), (6; 254,1), (7; 271,3), (8; 247,4), (9; 249,5), (10; 255,8). Čísla y_i opět nahradíme jejich pořadími s_i jako v příkladu 2, čísla x_i jsou přímo rovna r_i a tvoří základní permutaci 1, 2, ..., n ; to bývá dosti časté v časových výzkumech. Dvojice (r_i, s_i) jsou pak (1, 10), (2, 9), (3, 6) atd. Spočítáme $v = 272$, $\varrho = -0,648$. Je nutno si uvědomit, že zjišťujeme, zdali tréninkem se dosažené časy zmenšují, tedy že zde stavíme hypotézu H_2 záporné závislosti. Poněvadž $\varrho < -\varrho_0 = -0,564$, dostaneme závěr, že během tréninku se výkony atleta skutečně vcelku zlepšují (ovšem zase s náhodnými výkyvy).

Počítačová grafika — zobrazování oblouku kružnice

Doc. dr. LUDĚK GRANÁT, CSc., VÚMS Praha

Po úsečce (zobrazování viz [1] a [2]) nejčastěji zobrazovanou čarou je oblouk kružnice. V tomto příspěvku budeme předpokládat, že kruhový oblouk je určen svým počátečním bodem P daným dvojicí souřadnic (XP, YP) , středem $S(XS, YS)$ a koncovým bodem $K(XK, YK)$. Ještě je potřeba stanovit smysl pohybu po tomto oblouku od počátečního do koncového bodu. Pro jednoduchost budeme převážně uvažovat kladný smysl, tj. smysl proti pohybu hodinových ručiček. V případě zobrazování na rastrovém displeji lze vyhovět této podmínce vhodnou volbou, který z daných krajních bodů oblouku vybereme jako počáteční a který jako koncový. U zařízení, jako jsou např. kreslicí stoly, kde pro vyloučení nadbytečných přejezdů a tím zbytečného zpomalování kreslení není možno zaměňovat počáteční a koncový bod, je zapotřebí připravit i obdobný program pro záporný smysl pohybu po kružnici nebo uvedený program rozšířit o možnost pohybu v obou smyslech.

Při výpočtu bodů, které budou zobrazeny, vycházíme z analytického vyjádření kružnice. Implicitní tvar rovnice kružnice

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0,$$

případně po provedení transformace souřadnic, kdy počátek nové soustavy souřadnic bude ve středu kružnice,

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

není pro naše účely nejvhodnější. Volíme-li x -ové souřadnice bodů kružnice, y -ové souřadnice jsou dány vztahem

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

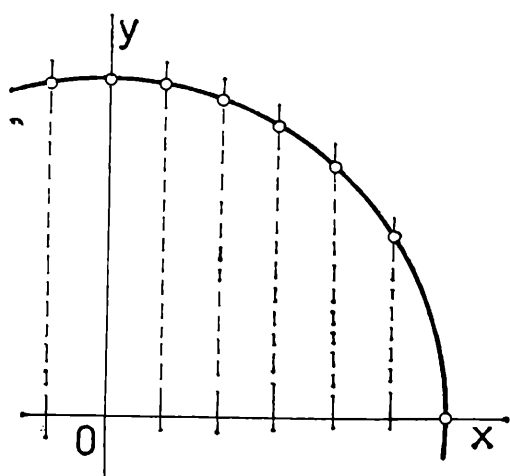
a musíme zvlášť uvažovat půlkružnici nad osou x a půlkružnici pod osou x . Pro každý bod půlkružnice je nutno provádět výpočet odmocniny a rovnoměrně voleným vzdálenostem x -ových souřadnic odpovídají nerovnoměrně rozložené body na uvažovaném oblouku — obr. 1.

Nejvhodnější je vycházet z parametrického vyjádření kružnice, a to z tvaru

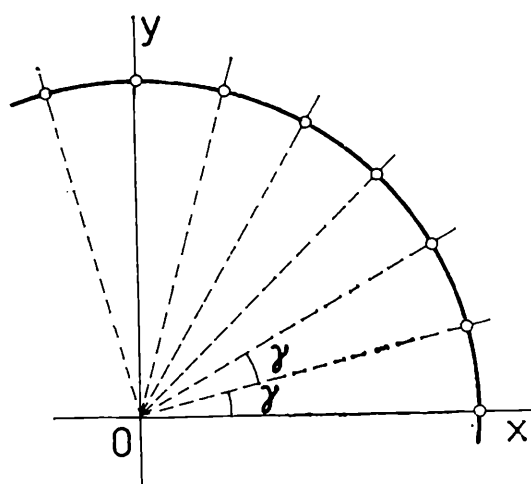
$$x = r \cos \alpha,$$

$$y = r \sin \alpha,$$

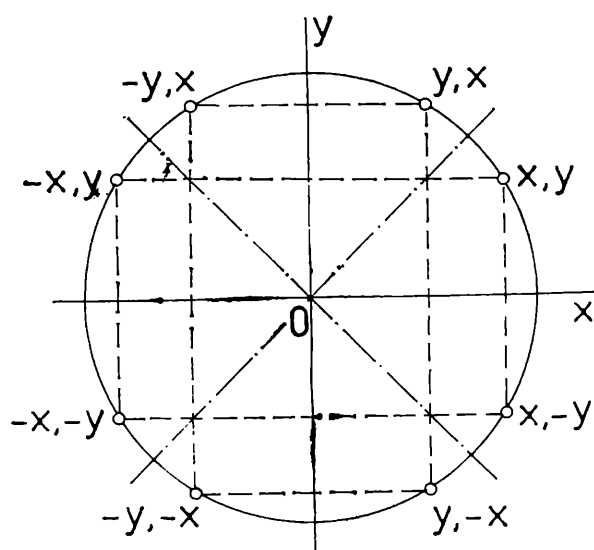
který sice vyžaduje výpočet goniometrických funkcí, ale k rovnoměrně daným hodnotám úhlu α poskytuje rovnoměrně rozložené body na kružnici — obr. 2.



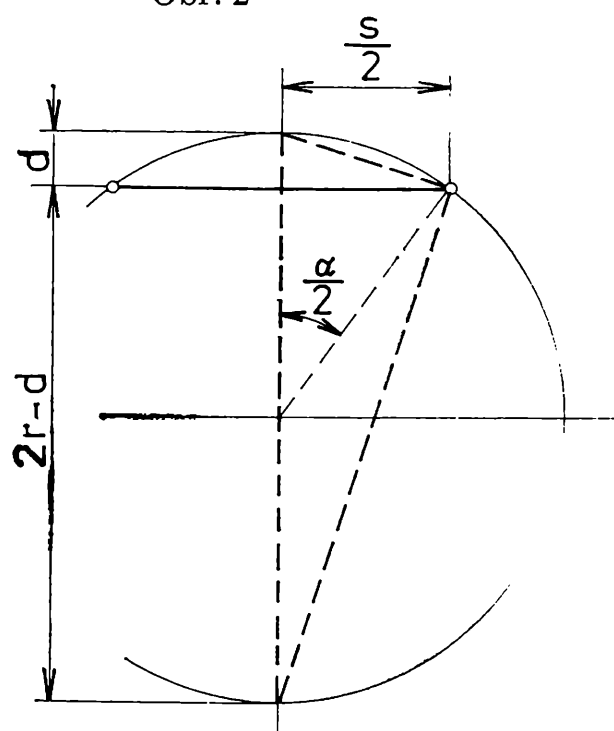
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Uvědomíme-li si, že následující bod kružnice lze získat z předchozího (odpovídajícího parametru α) užitím vztahů

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= r \cos (\alpha + \gamma) = r (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) = \\ &= x_n \cos \gamma - y_n \sin \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= r \sin (\alpha + \gamma) = r (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) = \\ &= x_n \sin \gamma + y_n \cos \gamma, \end{aligned}$$

stačí pro zjišťování souřadnic dalších bodů kružnice vypočítat sinus a kosinus přírůstku parametru γ jen jednou.

Takto bychom mohli např. na grafickém displeji zobrazovat oblouk nebo celou kružnici bod po bodu, přičemž lze zvláště u zobrazování celé

kružnice s výhodou využít té vlastnosti, že uvedeným způsobem stačí vypočítat souřadnice bodů pro zobrazení osminy kružnice a z nich získat souřadnice bodů dalších částí kružnice jen případnou záměnou souřadnic a vhodnou změnou znaménka — obr. 3. Pro každý bod je možno zároveň zjistit, zda leží v zobrazovacím poli nebo ne.

Častěji se však nahrazuje kružnice, respektive její oblouk, vhodným mnohoúhelníkem. Nechť při nahrazování je povolena odchylka d . Mají-li vrcholy lomené čáry ležet na kružnici o poloměru r , pak z Euklidovy věty vychází

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = d(2r - d),$$

kde s je délka úseček lomené čáry, která nahrazuje kružnici — viz. obr. 4.

Označíme-li písmenem α středový úhel odpovídající tětivě délky s , dostaneme vztah

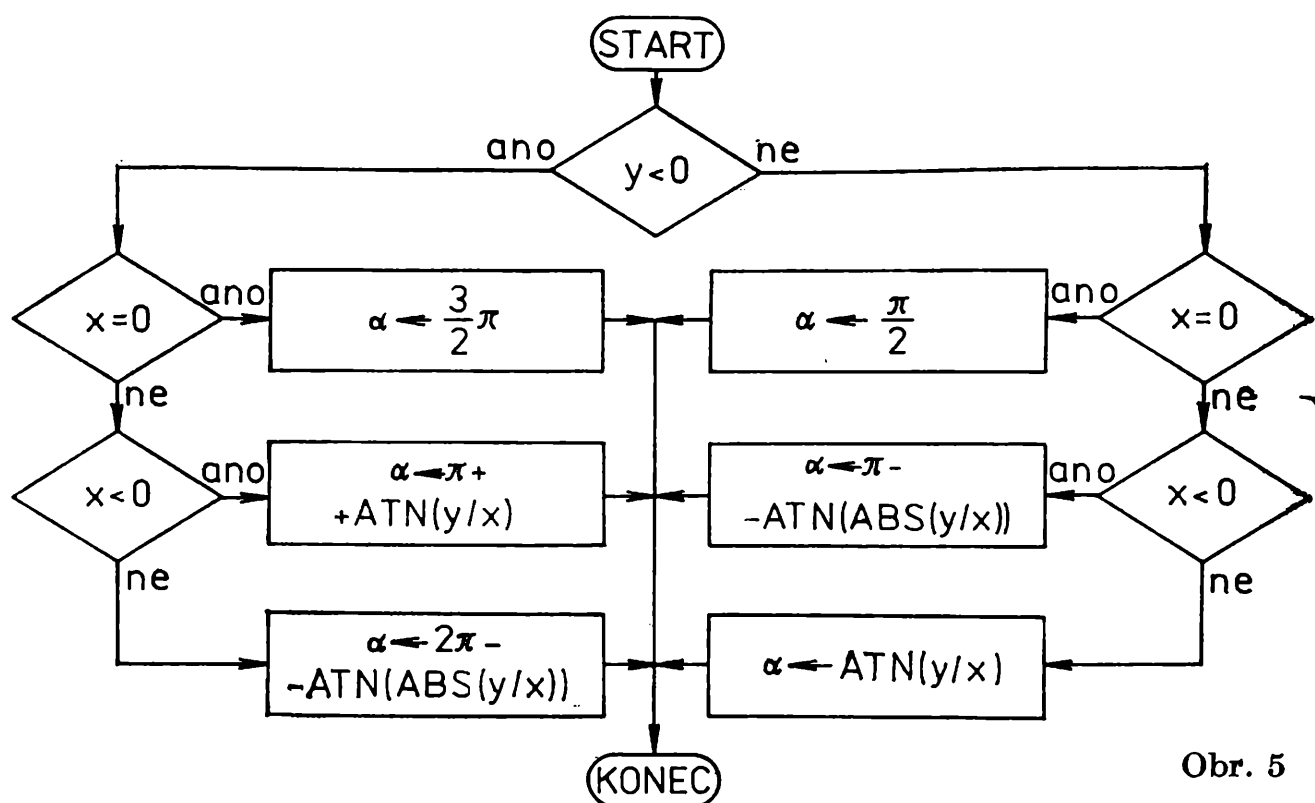
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{d(2r - d)}}{r - d}.$$

Uvažujeme-li dovolenou odchylku rovnou kroku rastru, tj. vzdálenosti sousedních bodů rastru ve směru osy x nebo y (předpokládáme, že jsou stejné) a tento krok rastru je základní délkovou jednotkou, dostáváme

$$\frac{s}{2} = \sqrt{2r - 1}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2r - 1}}{r - 1}.$$

Chceme-li si udělat konkrétní představu, kolik úseků má lomená čára nahrazující kružnici, a vynecháme-li kružnice s velmi malým poloměrem, lze pro odchylku rovnou kroku rastru aproximovat výraz $r - 1$, resp. $2r - 1$, výrazem r , resp. $2r$. Pak délka úseku lomené čáry nahrazující kružnici je přibližně $s = 2\sqrt{2r} = \sqrt{8r}$. Kružnici lze nahradit mnohoúhelníkem, který má $2\pi r/s = \pi\sqrt{r/2}$ stran. Pro největší kružnici, která ještě celá leží v zobrazovacím poli rastru 256×256 bodů, vychází $\pi\sqrt{128/2} = 8\pi$, tj. přibližně 25 stran. Pro některé aplikace stačí uvažovat pevný počet stran mnohoúhelníka nahrazujícího kružnici nebo vycházet z uvedených přibližných jednoduchých vztahů.

V případě oblouku kružnice je ještě nutno zajistit správné zakončení nahrazování oblouku lomenou čarou. K tomu účelu vypočteme úhly α_P, α_K , které svírají poloměry procházející počátečním bodem P a koncovým bodem K daného oblouku s kladně orientovanou osou x . Jako jednotky úhlové míry budeme užívat radiány. Protože uvažujeme pohyb v kladném smyslu, bude $0 \leq \alpha_P < 2\pi$ a $\alpha_P < \alpha_K < 4\pi$. Úhel α_K překročí 2π jen v případě, že oblouk po vyjití z bodu P obsahuje průsečík kružnice s poloměrem rovnoběžným s osou x a souhlasně orientovaným s jejím kladným smyslem.



Obr. 5

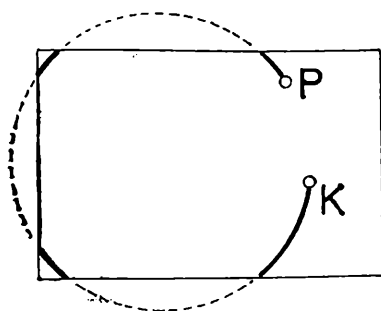
K zjištění úhlu z intervalu $< 0, 2\pi$), který svírá paprsek vycházející z počátku soustavy souřadnic a procházející bodem o souřadnicích (x, y) různým od počátku s kladně orientovanou osou x , se obvykle užívá funkce arkustangens. V jazyku BASIC se označuje ATN. Vývojový diagram příslušného programu je na obr. 5.

V případě, že vyjde $\alpha_K < \alpha_P$, zvětšíme α_K o 2π . Protože jsme ukázali, jak lze odvodit velikost středového úhlu odpovídajícího jedné úsečce lomené čáry nahrazující kruhový oblouk, můžeme spočítat souřadnice vrcholů této lomené čáry. Pak stačí vzít podprogram pro zobrazení úsečky (včetně podprogramu pro ořezávání) a spojit vždy poslední vypočítaný vrchol lomené čáry s předposledním.

Uvedený postup lze snadno modifikovat pro případy, kdy máme zobrazit kruhový oblouk čárkovaně, čerchovaně apod.

Potřebujeme-li velmi rychlé zobrazování oblouku kružnice, může opakované provádění ořezávání u každého volání zobrazované úsečky zdržovat. Potom je potřeba provést nejprve ořezání částí oblouku, které jsou mimo zobrazovací pole, a to je složitější než u úsečky, protože částí, které se mají zobrazit, může být více — obr. 6. Řešení ořezání přenecháme čtenáři a přejdeme k některým postupům, které pak lze užít pro zobrazování oblouku kružnice, hlavně při jejich vytváření technickými prostředky (postupy nevyžadují např. možnost dělení, výpočet složitějších funkcí).

V Rozhledech v článku [3] byl již jeden algoritmus vytváření oblouku kružnice uveřejněn. Jeho základem je vztah $U(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$,



Obr. 6

jehož levá strana nabývá po dosazení souřadnic x_i, y_i bodu A_i do pravé strany hodnoty

$U(x_i, y_i) < 0$, je-li A_i uvnitř kružnice k (se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r),

$U(x_i, y_i) = 0$, leží-li A_i na kružnici k ,

$U(x_i, y_i) > 0$, je-li A_i vně kružnice k .

Pro další bod dostaneme

$$U(x_i \pm 1, y_i) = U(x_i, y_i) \pm 2x_i + 1,$$

$$U(x_i, y_i \pm 1) = U(x_i, y_i) \pm 2y_i + 1,$$

$$U(x_i \pm 1, y_i \pm 1) = U(x_i, y_i) + 2(\pm x_i \pm y_i + 1).$$

Tak např. pro kladně orientovaný oblouk kružnice k ležící v 1. kvadrantu v bodech ležících uvnitř kružnice k můžeme pokračovat při vytváření schodovité lomené čáry nahrazující oblouk k bodu, který má y -ovou souřadnici o 1 vyšší, v bodech ležících vně kružnice k k bodu, který má x -ovou souřadnici o 1 menší.

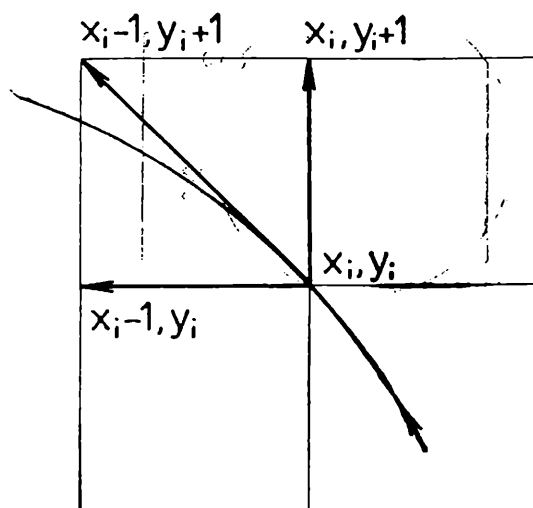
V r. 1977 uveřejnil J. E. Bresenham postup s možností též současné změny obou souřadnic (diagonální krok). Omezme se na oblouk kružnice k ležící v 1. kvadrantu a probíhající v kladném smyslu. Předpokládejme, že při nahrazování jsme došli do bodu (x_i, y_i) . Bude-li bod $(x_i - 1, y_i + 1)$ ležet uvnitř, resp. vně kružnice k , tj. $U(x_i - 1, y_i + 1) < 0$, resp. $U(x_i - 1, y_i + 1) > 0$, budeme za další bod čáry nahrazující kružnici k volit mezi tímto bodem a mezi bodem $(x_i, y_i + 1)$, resp. $(x_i - 1, y_i)$. Výraz U je určitou mírou vzdálenosti bodu (x, y) od dané kružnice. Jako kritérium, kterou z uvažovaných možností zvolíme, můžeme vzít znaménko rozdílu

$$d = |U(x_i, y_i + 1)| - |U(x_i - 1, y_i + 1)|, \text{ resp.}$$

$$d = |U(x_i - 1, y_i + 1)| - |U(x_i - 1, y_i)|.$$

Proberme podrobněji případ, kdy je bod $(x_i - 1, y_i + 1)$ vnějším bodem kružnice k (obr. 7).

$$\begin{aligned} d &= |U(x_i - 1, y_i + 1)| - |U(x_i - 1, y_i)| = \\ &= |(x_i - 1)^2 + (y_i + 1)^2 - r^2| - |(x_i - 1)^2 + y_i^2 - r^2| \end{aligned}$$



Obr. 7

Protože $(x_i - 1, y_i + 1)$ je vnější bod kružnice k , $U(x_i - 1, y_i + 1) > 0$ a $d = (x_i - 1)^2 + (y_i + 1)^2 - r^2 - |(x_i - 1)^2 + y_i^2 - r^2|$. Bude-li bod $(x_i - 1, y_i)$ ležet uvnitř kružnice k , bude $U(x_i - 1, y_i) < 0$ a $d =$
 $= (x_i - 1)^2 + (y_i + 1)^2 - r^2 + (x_i - 1)^2 + y_i^2 - r^2 =$
 $= 2[(x_i - 1)^2 + (y_i + 1)^2 - r^2] - 2y_i - 1 = 2U(x_i - 1, y_i + 1) -$
 $- (2y_i + 1).$

Pro $d < 0$ volíme bod $(x_i - 1, y_i + 1)$, jinak bod $(x_i - 1, y_i)$.

Pro případ, že by bod $(x_i - 1, y_i)$ ležel též vně kružnice k , musíme jako další vzít bod $(x_i - 1, y_i)$. Tento případ lze však zahrnout pod předchozí kritérium, neboť z toho, že body $(x_i - 1, y_i)$ i $(x_i - 1, y_i + 1)$ jsou vnější, tj. $(x_i - 1)^2 + y_i^2 - r^2 > 0$ a současně $(x_i - 1)^2 + (y_i + 1)^2 - r^2 > 0$, plyne, že i součet levých stran $2[(x_i - 1)^2 + (y_i + 1)^2 - r^2] - (2y_i + 1) > 0$, tj. $2U(x_i - 1, y_i + 1) - (2y_i + 1) > 0$ a to ve shodě s předchozím vede k volbě bodu $(x_i - 1, y_i)$.

Obdobně lze postupovat v případě, že bod $(x_i - 1, y_i + 1)$ je bod vnitřní vzhledem ke kružnici k .

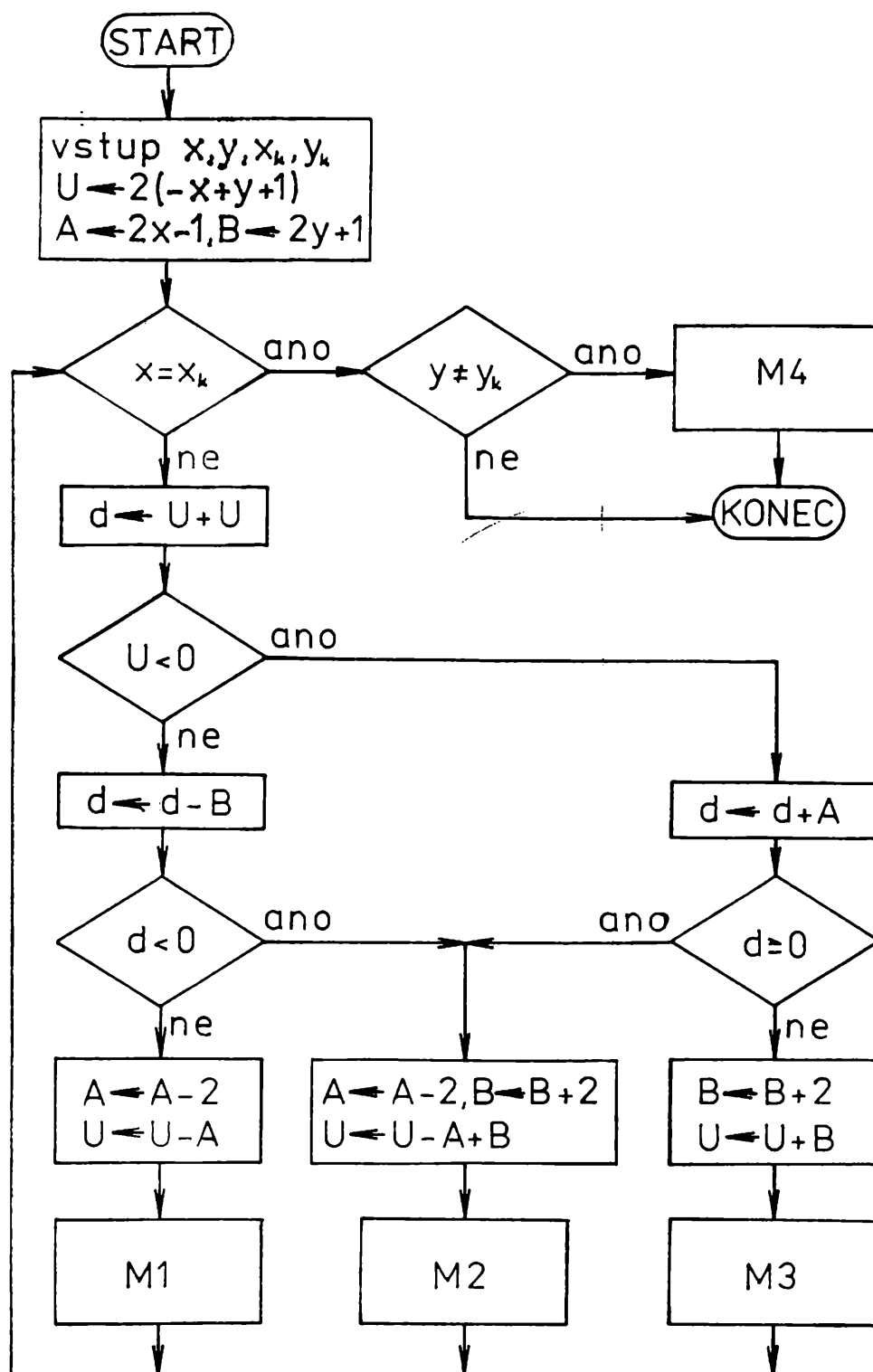
Na základě těchto úvah lze znázornit postup při vytváření čáry nahrazující oblouk kružnice (se středem v počátku soustavy souřadnic) ležící v 1. kvadrantu a probíhající v kladném smyslu vývojovým diagramem uvedeným na obr. 8. Přitom platí toto označení:

. x, y — souřadnice určujících bodů čáry nahrazující oblouk kružnice k (včetně počátečního bodu).

Předpokládáme přitom, že oblouk kružnice prochází daným počátečním bodem (x, y) a odtud $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Proto na začátku programu $U(x - 1, y + 1) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2 + 2(-x + y + 1) = 2(-x + y + 1).$

x_K, y_K — koncový bod čáry nahrazující oblouk kružnice k

Výraz $2x - 1$ označíme písmenem A, výraz $2y + 1$ písmenem B.



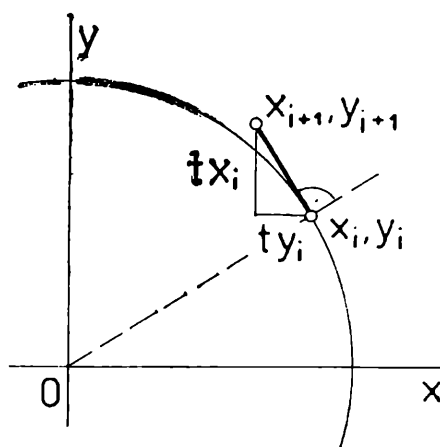
M1 představuje operaci $x \leftarrow x - 1$ a zobrazení bodu s vypočtenými souřadnicemi x, y nebo posun pisátka kreslicího zařízení o 1 krok ve směru osy x , a to v záporném smyslu.

M2 představuje operaci $x \leftarrow x - 1, y \leftarrow y + 1$ a zobrazení bodu s vypočtenými souřadnicemi x, y nebo posun pisátka v diagonálním směru o 1 krok ve směru osy x (v záporném smyslu) a současně o 1 krok ve směru osy y (v kladném smyslu).

M3 představuje operaci $y \leftarrow y + 1$ a zobrazení bodu s vypočtenými souřadnicemi x, y nebo posun pisátka o 1 krok ve směru osy y , a to v kladném smyslu.

M4 představuje zobrazení bodu (x_K, y_K) nebo dojezd pisátka do tohoto bodu.

V případě, že chceme zobrazit libovolný oblouk kružnice (se středem v počátku soustavy souřadnic), je nutno určit přechody přes osy souřadnic a provést potřebné úpravy uvedeného algoritmu pro ostatní kvadranty, případně pro pohyb v záporném smyslu.



Obr. 9

Nakonec se zmíníme ještě stručně o dalším typu postupu při vytváření oblouku kružnice, který je velmi jednoduchý a byl v dřívějších letech často užíván. Spočívá v postupném nahrazování malé části oblouku kružnice, která vychází z právě uvažovaného průběžného bodu, úsekem na tečně příslušné kružnice (obr. 9):

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i - ty_i, \\y_{i+1} &= y_i + tx_i\end{aligned}$$

Hodnoty ty_i , resp. tx_i , můžeme načítat a vždy, když součet překročí nebo dostoupí velikost základního kroku, zobrazíme další bod. Vezme-li t dosti malé, dostáváme pro méně náročné aplikace vyhovující výsledek, i když dochází ke stálé kumulaci chyby. Existují vylepšení této metody poskytující výsledky zatížené menšími chybami; vedou ovšem na složitější algoritmy.

Literatura :

- [1] Granát, L.: Počítačová grafika — zobrazování úsečky. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 66, č. 5, 1987/88 s. 190—196.
- [2] Granát, L.: Počítačová grafika — ořezávání. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 66, č. 7, 1987/88 s. 270—274.
- [3] Granát, L.: Nahrazování křivek lomenými čarami (2. část). Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 45, č. 9, 1967 s. 420—423.

Paprskové optické zobrazení rovinnými zrcadly

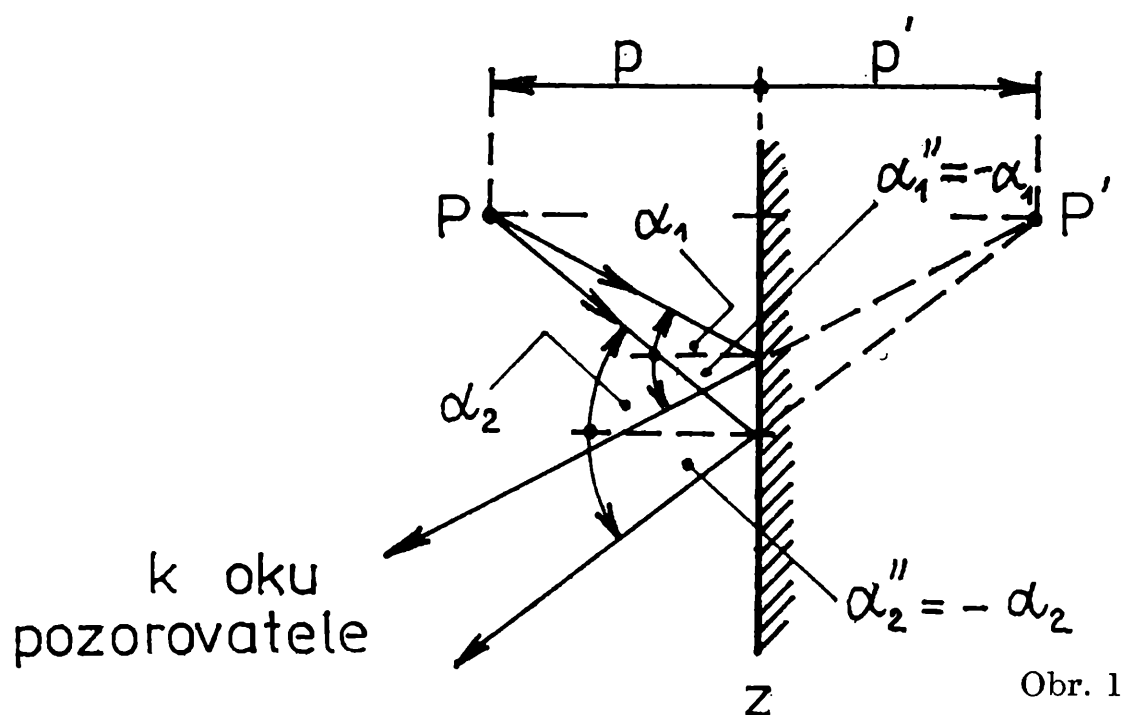
Doc. RNDr. ing. JAROSLAV POSPÍŠIL, CSc., UP Olomouc

V praxi se často k zobrazení a především ke změně směru šíření světelných paprsků využívá rovinných zrcadel. Rovinné zrcadlo je rovinná odrazná plocha, která rovnoběžné světelné paprsky odráží opět jako rovnoběžné, a to při platnosti optického zákona odrazu: V homogenním a izotropním optickém prostředí se vždy velikost úhlu odrazu každého paprsku rovná velikosti jeho úhlu dopadu. Přitom dopadající a odpovídající odražený (opticky sdružený) paprsek leží v jedné rovině — rovině dopadu (určené dopadajícím paprskem a kolmicí dopadu). Zavedeme-li jednosměrnou orientaci obou zmíněných úhlů od kolmice dopadu (kladně orientované do původního prostředí, tj. od prostředí dopadajícího a odraženého paprsku) k příslušným kladně orientovaným paprskům ve směrech jejich šíření a považujeme-li kladný smysl úhlů jako pravo-
točivý, pak lze optický zákon odrazu napsat ve formě

$$\alpha'' = -\alpha. \quad (1)$$

Přitom α'' je úhel odrazu, který přísluší úhlu dopadu α (viz obr. 1).

Rovinné zrcadlo můžeme pokládat za zvláštní případ kulového (sférického) zrcadla (části kulové odrazné plochy) s nekonečným poloměrem



Obr. 1

křivosti. Paprskové zobrazení zrcadlem (zrcadlení, při kterém neuvažujeme vlnovou vlastnost světla) se v neabsorbujícím prostředí uskutečňuje zcela přesně pro body libovolně vzdálené od zrcadla i od jeho optické osy (kterou tvoří přímka procházející středem rovinného zrcadla a k němu kolmá) a libovolně širokými svazky světelných paprsků (zasahujícími uvažované zrcadlo). Je to jediné optické zobrazení odrazem světelných paprsků, které nemá paprskové (geometrické) optické vady. Poskytuje paprskové obrazy, které se řídí zrcadlovou zobrazovací rovnicí, nyní ve tvaru

$$p' = -p. \quad (2)$$

V ní p a p' jsou opačně orientované předměťová a obrazová vzdálenost (vzdálenosti předměťového a obrazového bodu P a P' od roviny zrcadla). Kladné znaménko můžeme přiřadit vzdálenostem ve směru šíření dopadajícího paprsku (v kladném smyslu optické osy zrcadla).

Opačně orientované vzdálenosti p a p' vystihují fakt, že rovinné zrcadlo dává vždy zdánlivý paprskový obraz, který je na opačné straně zrcadla než předmět (nelze jej přímo objektivně zachytit na stínítku, ale lidské oko jej prostřednictvím jeho spojně optické soustavy zobrazí na sítnici jako skutečný obraz). Označíme-li příčné rozměry (rozměry kolmé k optické ose zrcadla) předmětu a jeho obrazu znaky y a y' , pak lze zavést příčné zvětšení obrazu (příčné měřítko zobrazení) $\beta = \frac{y'}{y}$,

které vyhovuje u kulového a rovinného zrcadla relaci

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{p'}{p}, \quad (3)$$

známé ze středoškolské optiky. Protože u rovinného zrcadla platí vztah (2), je vždy $\beta = 1$. To znamená, že paprskový obraz je vždy stejně velký jako předmět ($|\beta| = 1$) a je přímý ($\beta > 0$), tj. je výškově nepřevrácený, ale stranově převrácený (příčné strany pozorovaného optického obrazu jsou opačné než u předmětu), jak to známe ze zkušenosti.

Z rovnosti $\beta = 1 = \text{konst.}$ plyne, že užitečnost paprskového zobrazení rovinným zrcadlem je omezena tím, že nelze měnit jeho příčné zvětšení. Zrcadlením na rovinné odrazné ploše se pouze přenáší předmětové rozdělení intenzity světla v nezměněném tvaru a v nezměněné velikosti na jiné místo.

Praktickým problémem u rovinných zrcadel je správná geometrická (paprsková) konstrukce optického obrazu. Ta je v porovnání s kulovými zrcadly jednodušší a prakticky spočívá ve využití rovinné symetrie předmětových a obrazových bodů a případně i ve využití zákona odrazu světelných paprsků. Některé její zvláštnosti jsou patrné z následujících konkrétních úloh:

1. Geometrická konstrukce obrazu P' předmětového bodu P na rovinném zrcadle z je patrná z obr. 1. Na něm je též znázorněn chod dvou světelných paprsků do oka pozorovatele při platnosti zákona odrazu (1). Úhly dopadu a odrazu uvažovaných paprsků nyní jsou α_1 , α_2 a α''_1 , α''_2 a při zvolené orientaci těchto úhlů platí $\alpha''_1 = -\alpha_1$, $\alpha''_2 = -\alpha_2$.

2. Vypočteme nyní minimální výšku h svislého rovinného zrcadla z k tomu, aby člověk výšky $y = H$ (schematicky na obr. 2 vyznačený orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$) mohl v něm vidět celou svou postavu. Protože platí vztah (2), určíme hledanou výšku h z geometrické podobnosti trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A'Q'P'$. Při využití naší znaménkové dohody lze psát vztahy

$$\frac{h}{H} = \frac{-p}{-p + p'} = \frac{1}{2}, \quad (4)$$

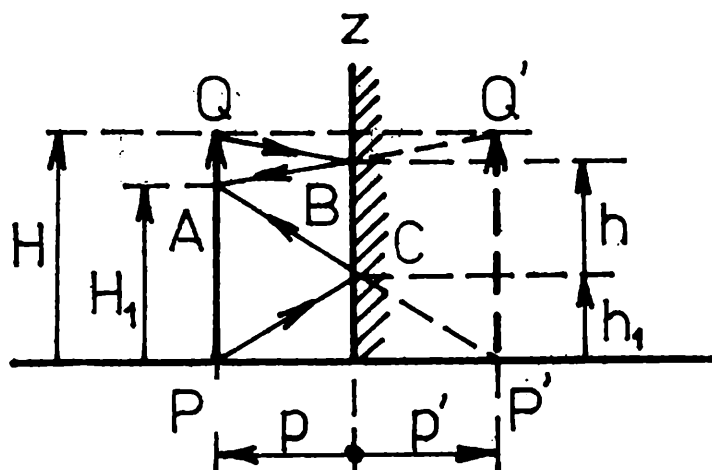
přičemž úsečky směřující nahoru pokládáme za kladné. Odtud dostaneme hledanou výšku

$$h = \frac{H}{2}. \quad (5)$$

Je vidět, že minimální výška svislého rovinného zrcadla nezávisí na vzdálenosti p člověka (pozorovatele) od něho a ani na výšce H_1 jeho očí. Příslušná výška h_1 spodního okraje rovinného zrcadla z nad vodorovnou rovinou (podlahou) rovněž nezávisí na vzdálenosti p člověka (pozorovatele), ale závisí na výšce jeho očí H_1 nad podlahou, a to podle vztahu

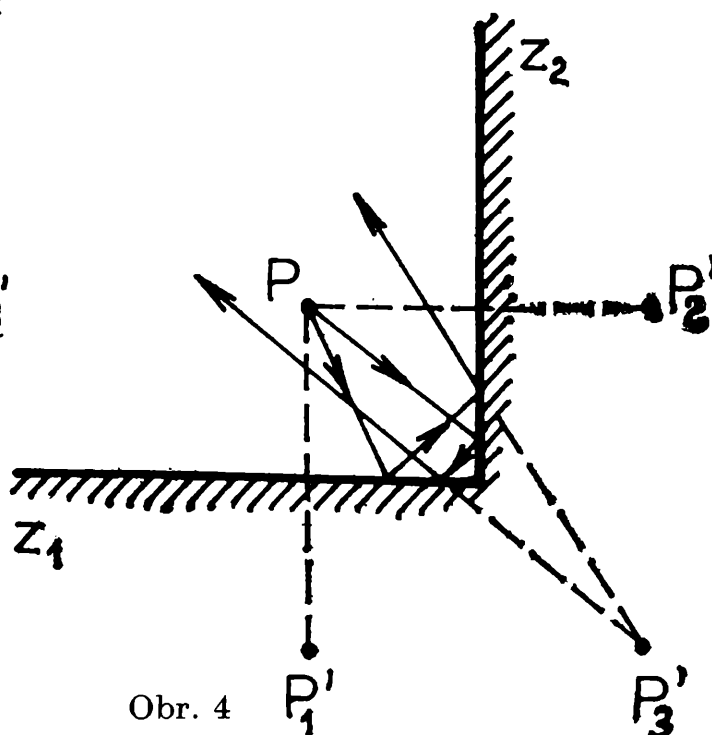
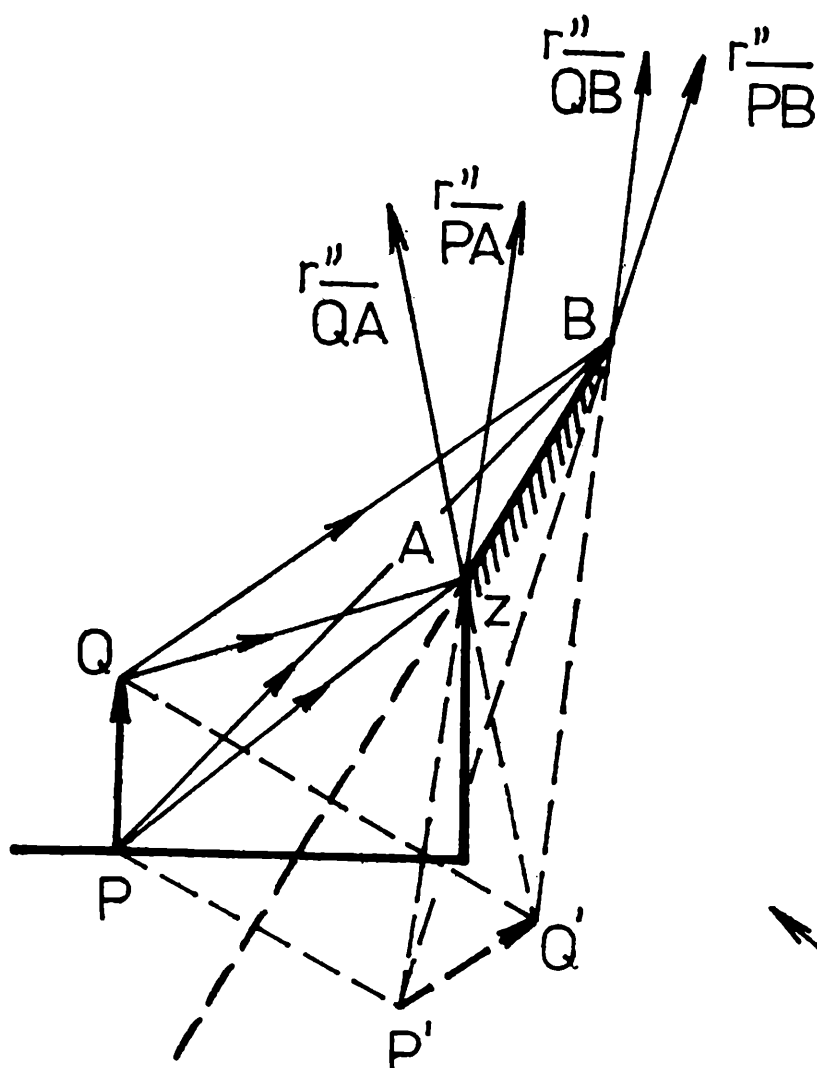
$$h_1 = \frac{H_1}{2}, \quad (6)$$

patrného z obr. 2.



Obr. 2

3. Všimněme si nyní geometrické konstrukce obrazu člověka (obecně předmětu) $y = \overrightarrow{PQ}$ v rovinném zrcadle z , umístěném podle obr. 3. Na první pohled by se zdálo, že v daném případě se člověk $\overrightarrow{PQ}$ v zrcadle



Obr. 4

nezobrazí, protože zrcadlo je příliš vysoko a je nevhodně skloněné. To je však běžný omyl. Optický obraz v zrcadle vznikne. Jeho geometrická konstrukce je znázorněna na obr. 3. Pro sestrojení paprskového optického obrazu totiž stačí prodloužit rovinu zrcadla a symetricky sestrojít obraz $\overrightarrow{P'Q'}$ člověka vzhledem k této rovině. Je třeba si však uvědomit, že člověk svůj vzniklý obraz nevidí. Tento obraz vidí jiní pozorovatelé, kteří jsou v rozsahu úhlu tvořeného krajními paprsky r''_{PB} a r''_{QA} ,

když se do oka pozorovatele dostane svazek světelných paprsků od zobrazeného člověka (předmětu) $\overrightarrow{PQ}$. Oko pozorovatele vidí optický obraz $\overrightarrow{P'Q'}$ předmětu $\overrightarrow{PQ}$, který tvoří průsečíky prodloužení světelných paprsků odražených od zrcadla z (obr. 3).

4. Předpokládejme závěrem soustavu dvou navzájem kolmých rovinných zrcadel z_1 a z_2 podle obr. 4 a určíme paprskové optické obrazy předmětového bodu P . Při povrchnější úvaze bychom došli k závěru, že dostaneme jen dva paprskové obrazy P'_1 a P'_2 , vzniklé zobrazením předmětu P samostatně zrcadly z_1 a z_2 . Ve skutečnosti vznikne ještě třetí paprskový optický obraz P'_3 , a to odrazy paprsků postupně na obou plochách z_1 a z_2 . Paprsky vycházející z předmětu P uvnitř pravého úhlu $\angle P'_1 P P'_2$ podléhají totiž ne jedinému, ale postupně dvěma odrazům. Na obr. 4 jsou nakreslené dráhy dvou takových paprsků. Průsečík prodloužení těchto paprsků dává třetí zmíněný paprskový optický obraz P'_3 předmětového bodu P .

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Akademik Bohumil Bydžovský

JOSEF KOTYK, Pardubice

„Ideálním učitelem matematiky je ten, na kterého budou jeho žáci vzpomínat po celý život. Vložil do jejich srdcí zvědavost — posvátný Prometheův oheň, podněcující lidstvo k stálému pokroku“, napsal sovětský matematik B. V. Gnedenko¹⁾.

Je krásným rysem vzdělaného člověka, že dovede ctít vědecké pracovníky, kteří reprezentují kulturní výši jeho národa. V dějinách české vědy zůstane zachována trvalá památka universitnímu profesoru matematiky dr. BOHUMILU BYDŽOVSKÉMU. Výročí, jež si připomínáme, 110 let od jeho narození, je bohatým zdrojem vzpomínek vděčných žáků na tohoto vynikajícího vědce a vzácného učitele.

Prof. dr. Bohumil Bydžovský se narodil dne 14. března 1880 v Duchcově. S jeho jménem jsem se setkal již jako studující střední školy, pro

¹⁾ *Boris Vladimirovič Gnedenko* (* 1912), profesor na universitě v Kyjevě, se zabýval počtem pravděpodobnosti, kybernetikou a programováním.

jejíž všeobecně vzdělávací typy (býv. gymnásia a reálky) napsal v letech 1910 až 1912 výtečné učebnice matematiky. Vynikaly metodickou propracovaností, srozumitelností, jasným stylem i jazykovou čistotou; byly proto velice oblíbeny a dlouhá léta v mnoha vydáních užívány (např. *Aritmetika pro IV. tř. střed. škol* vyšla roku 1948 v 7. vyd., *Aritmetika pro V.—VII. tř. střed. škol* roku 1947 v 6. vyd., *Sbírka úloh z matematiky* — spoluautor prof. dr. Jan Vojtěch²⁾ — v roce 1948 ve 4. vyd.). Neocenitelné služby prokazovaly naší studující mládeži po léta zejména učebnice Bydžovský—Vojtěch: *Matematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií*, resp. *Matematika pro nejvyšší třídu reálků* (vyd. JČMF roku 1912), jež podávaly v Části I. (Přehled věcný) prohloubení a rozšíření dosavadních poznatků v soustavný přehled, v Části II. (Myšlení matematické) přinášely úvahy o postavení matematiky v lidském myšlení, v Části III. (Náčrtek historický) líčily stručně vývoj matematiky, čímž uváděly v souvislost historické poznámky rozptýlené v dřívějších výkladech. Pro tyto své přednosti byly žákům nejvyšší třídy středních škol velmi přitažlivou a oblíbenou předmaturitní četbou; zůstaly jim také trvalou ozdobou jejich knihoven a stálým zdrojem hezkých vzpomínek.

Osobně jsem dr. Bohumila Bydžovského poznal teprve za svých vysokoškolských studií v letech 1922 až 1926 jako řádného profesora tehdejší přírodovědecké fakulty Karlovy univerzity v Praze a člena Vědecké zkušební komise pro učitelství na středních školách. Jeho zájem se soustřeďoval především na geometrii. Přednášky měl vždy dobře připraveny, vynikaly proto přesnou formulací problémů; upoutávaly také jasným přednesem. Aby posluchačům zajistil spolehlivé a snadno přístupné prameny ke studiu, napsal prof. Bydžovský tři vysokoškolské učebnice (vyd. rovněž JČMF): [a] *Úvod do analytické geometrie* (1923), [b] *Základy theorie determinantů a matic a jejich užití* (1930) a [c] *Úvod do algebraické geometrie* (1948). Svědčí opět o jejich vysokých kvalitách, že první dvě vyšly v letech 1946 a 1947 ve 2. vydání a třetí byla roku 1948 odměněna státní cenou.

Studující, kteří toužili vniknout v obor vyšší analytické geometrie a očekávali v učebnici [a] toliko elementární úvod do analytické geometrie v rovině a v prostoru, byli mile překvapeni, že autor pojal do své knihy i některé problémy složitější, dost důsledně přihlížel k útvarům nevlastním a imaginárním, zavedl pojem invariantu, prováděl úvahy v souřadnicích kosoúhlých, obyčejných i homogenních, připravoval čtenáře pro projektivní geometrii kuželoseček a sestavil řadu úloh, jejichž řešení není vždy bezprostřední aplikací výsledků odvozených

²⁾ Dr. Jan Vojtěch (1879—1953), profesor české vysoké školy technické v Brně, proslulo spisem *Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických*. (Vyd. Jednota českých matematiků a fyziků ve dvou svazcích.)

v textu. Důsledné užívání determinantů, základy jejichž teorie si však posluchači ze středních škol nepřinášeli, přimělo prof. Bydžovského, učitele velmi svědomitého a pečlivého, k rozhodnutí napsat učebnici [b]; od běžných učebnic jednajících o determinantech liší se jeho učebnice tím, že obsahuje také základy teorie maticového počtu i poučení o formách lineárních, bilineárních a kvadratických.

Všechny učebnice prof. Bydžovského podávají žákům podle požadavků Komenského, učitele národů, „světlo, s jehož pomocí mohou porozumět i bez učitele, sami...“ Tak plnily také po mnohé desítky let velmi úspěšně své poslání.

Mnoho úvah věnoval prof. Bydžovský také otázkám školské reformy. Svědčí o tom mimo jiné jeho kniha *Naše středoškolská reforma* (1937). Některé z jeho podnětů byly ve školství poválečné republiky skutečně uvedeny v život.

Prof. dr. Bohumil Bydžovský, od roku 1952 člen ČSAV, zemřel dne 6. května 1969. Dodnes je ve vzpomínkách vděčných žáků s jeho jménem spjata představa vynikajícího badatele a ideálního učitele, jenž stál vždy na straně pokroku a bojoval za nové vyšší cíle. Končíme proto své řádky přáním, aby také z řad naší studující mládeže vyrostlo českému národu mnoho obětavých pracovníků charakteru Bydžovského.

120 rokov periodickej sústavy prvkov

RNDr. RUDOLF ZAJAC, CSc., MFF UK Bratislava

V marci roku 1869 uplynulo 120 rokov od Mendelejevovho objavu periodickej sústavy prvkov. *Dmitrij Ivanovič Mendelejev* (1834–1907) sa zúčastnil v roku 1860 na medzinárodnom kongrese chemikov v Karlsruhe, na ktorom *Stanislao Cannizzaro* (1826–1910) rozvinul *Avogadrove* myšlienky o zložení látok z molekúl a atómov. V tom čase už chemici izolovali okolo 60 prvkov a určili so značnou presnosťou ich atómové hmotnosti. Mendelejev sa stal zástancom Avogadrových a Cannizzarových myšlienok a svoju pozornosť sústredil na závislosť medzi vlastnosťami chemických prvkov a ich atómovými hmotnosťami.

V druhej polovici 19. storočia sa touto problematikou zaoberali viacerí chemici, Mendelejev však bol prvý, čo našiel solídne riešenie. Nie je bez zaujímavosti, že mu k tomu dopomohla pedagogická činnosť. V roku 1869, keď formuloval svoj periodický zákon, bol riadnym profesorom anorganickej chémie na univerzite v Peterburgu. Uvažoval o tom, ako by svojim poslucháčom čo najpresvedčivejšie vysvetlil súvislosť medzi vlastnosťami chemických prvkov a ich atómovými hmotnosťami. Sám o tom neskôr písal:

„Funkčnú závislosť individuálnych vlastností prvkov od ich atómových hmotností treba hľadať. Dačo hľadať, či už sú to huby, alebo nejaká závislosť, nemožno ináč, iba pozeraním a skúšaním. Začal som teda skladať podobné prvky a blízko seba ležiace atómové váhy. Napísal som na osobitné kartičky prvky s ich atómovými váhami a základnými vlastnosťami. To ma rýchle priviedlo k záveru, že vlastnosti prvkov periodicky závisia od ich atómových váh...“

Mendelejev uverejnil výsledky svojich úvah v článku *Vzťah vlastností prvkov k atómovým váham* v časopise *Žurnal ruskogo chimičeskogo občestva* (Tom 1, s. 60—77). Článok vyšiel v tomto časopise v máji 1869 a v tom istom roku aj v Nemecku.

Mendelejev už v tomto článku uviedol, že bude treba objaviť mnohé neznáme látky, napr. prvky, ktoré sú podobné hliníku a kremíku s relatívnou atómovou hmotnosťou od 65 po 75. Objav germánia (1866) a gália (1875) potvrdili Mendelejevove predpovede. Mendelejev bol natoľko presvedčený o platnosti svojho zákona, že upravil atómové hmotnosti niektorých prvkov.

Mendelejevovým blízkym priateľom a horlivým propagátorom jeho zákona bol český chemik *Bohuslav Brauner* (1855—1935). Brauner prepracoval v periodickej tabuľke postavenie vzácnych zemín a určil atómové hmotnosti céria, lantánu, praseodýmu, neodýmu a samária.

William Ramsay (1852—1916) spolu s lordom *Rayleighom* (1842—1919) a s inými spolupracovníkmi objavil koncom minulého storočia argón a ďalšie inertné plyny. Určil aj ich umiestnenie v Mendelejevovej periodickej tabuľke. Tým sa v podstate vyčerpali možnosti chemikov pri zdokonaľovaní periodického systému prvkov.

Obmedzené možnosti chemikov formuloval sám Mendelejev v roku 1891 takto: „Doteraz nám chýbajú prostriedky, aby sme pochopili povahu a tiež príčiny tohto zákona. Podľa všetkej pravdepodobnosti príčina tkvie vo vnútornej mechanike atómov a molekúl.“

To bola výzva fyzikom. Prvú serióznu teóriu štruktúry atómov vypracoval *Joseph John Thomson* (1856—1940), ktorý objavil v roku 1897 elektrón, určil jeho merný náboj a hmotnosť a dokázal, že všetky atómy obsahujú identické elektróny. J. J. Thomson vypracoval v roku 1903 model atómu, v ktorom kladný náboj je rozptýlený v celom jeho objeme a elektróny sa v ňom vznášajú ako hrozienka v koláči. Tento model (nazvaný „pudingový“) bol časom prekonaný, ale Thomsonovi treba priznať prvenstvo v myšlienke, podľa ktorej práve počet elektrónov v atóme určuje jeho zaradenie v periodickej tabuľke prvkov.

Pokusy *Ernesta Rutherforda* (1871—1937) a jeho spolupracovníkov *Hansa Geigera* (1882—1945) a *Ernesta Marsdena* (1889—1970) ukázali v roku 1911, že atóm každého prvku sa skladá z kladne nabitého malého jadra a záporného elektrónového obalu. Lineárny rozmer jadra je rádove

10^{-15} m, zatiaľ čo rozmer atómu (spolu s elektrónovým obalom) je o päť rádov väčší.

V tom čase už prenikla do fyziky kvantová teória, ktorú založil *Max Planck* (1858—1947) koncom roku 1900 a ktorú od r. 1905 úspešne rozvíjal *Albert Einstein* (1879—1955). *Niels Henrik David Bohr* (1885—1962) spojil v r. 1913 Rutherfordov model atómu (s malým jadrom, okolo ktorého obiehajú elektróny) s kvantovou teóriou. Prihliadal pri tom na empirické vzorce, ktoré formulovali *Johann Jakob Balmer* (1825—1898), *Johannes Robert Rydberg* (1854—1919) a *Walther Ritz* (1878—1909). Tieto vzorce vyjadrujú pravidelnosti, ktoré sa vyskytujú v čiarových optických spektrách atómov.

Röntgenové spektrá ako prvý analyzoval *Henry Gwyn-Jeffreys Moseley* (1887—1915) v roku 1913. Ukázal, že poradie prvkov v Mendeleevej periodickej tabuľke je lineárnou funkciou odmocniny z vlnočtu spektrálnej čiary K-série röntgenových spektier. Ďalšie série s nižšími frekvenciami objavili *Karl Manne Georg Siegbahn* (1886—1978) a *Václav Dolejšek* (1895—1945).

Pokiaľ ide o optické spektrá, prvé vysvetlenie podal N. Bohr, ktorý aj teoreticky zdôvodnil empiricky určenú konštantu R v *Rydbergovom vzorci* pre atóm vodíka

$$\nu = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

V tomto vzorci ν je frekvencia vyžiareného svetla, $\nu = c/\lambda$ (c je rýchlosť svetla vo vákuu, λ vlnová dĺžka monochromatického žiarenia), n , m sú celé kladné čísla, pričom $m > n$.

Podľa Bohra môže elektrón v atóme vodíka nadobúdať iba diskkrétne hodnoty energie $E_1, E_2, E_3, \dots$. V základnom stave je energia E_1 nuluová, do vyšších energetických hladín preskočí elektrón v atóme buď zohriatím plynného vodíka, buď zrážkou s iným elektrónom, alebo iným spôsobom, pri ktorom atóm prijme energiu zvonka. Elektrón sa na vyšších energetických hladinách dlho neudrží, pri samovoľnom prechode na nižšiu energetickú hladinu vyžiari atóm elektromagnetické žiarenie s frekvenciou ν_{mn} , pričom

$$\nu_{nm} = \frac{E_m - E_n}{h},$$

kde $h = 6,626 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ je Planckova konštanta. Posledný vzťah sa nazýva Bohrova podmienka frekvencií, ktorú v roku 1925 *Werner Heisenberg* (1901—1976) prevzal do kvantovej mechaniky. Pre atóm vodíka po výpočte E_m, E_n Bohrova podmienka frekvencií dáva

$$\nu_{nm} = \frac{2k^2 \pi^2 \mu e^4}{h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

pričom $k = 1/4 \pi \varepsilon_0$, μ je hmotnosť, e náboj elektrónu, ε_0 je permitivita vákua. Číselná hodnota činiteľa pred zátvorkou v poslednom vzorci sa zhoduje s výsledkami meraní, na základe ktorých bola určená Rydbergova konštanta.

N. Bohr vo svojej práci v roku 1913 dokázal, že z kvantovania energetických hladín elektrónu v atóme vodíka vyplýva aj kvantovanie jeho momentu hybnosti. Ak sa elektrón v atóme vodíka pohybuje rovnomerne rýchlosťou v po kruhovej dráhe s polomerom r , potom jeho moment hybnosti má veľkosť μvr a s Bohrovou podmienkou frekvencií je ekvivalentný výraz

$$\mu vr = nh/2\pi,$$

kde μ je hmotnosť elektrónu, h je Planckova konštanta, $n = 1, 2, 3$, *hlavné kvantové číslo*.

Dráha elektrónu, viazaného coulombovským potenciálom, je podľa klasickej fyziky vo všeobecnosti eliptická. Takéto dráhy elektrónov v atómoch zaviedol *Arnold Sommerfeld* (1868—1951), pričom veľká poloos a (v atóme vodíka) mohla nadobúdať iba kvantované hodnoty

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 \mu k e^2} n^2$$

a malú poloos b určil vzťahom

$$b = \frac{h^2}{4\pi^2 \mu k e^2} nk$$

Sommerfeld v poslednom vzťahu zaviedol *druhé, azimutálne kvantové číslo* $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Stav elektrónu bol v Sommerfeldovej teórii určený dvoma kvantovými číslami n, k . V súčasnej kvantovej mechanike korešponduje s azimutálnym kvantovým číslom *orbitálne kvantové číslo* $l = k - 1$, ktoré môže nadobúdať hodnoty $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Dráhy, pre ktoré $k = 1$, alebo $l = 0$, označili v spektroskopii písmenom s (od anglického sharp series = ostré série), pre $k = 2$, alebo $l = 1$ písmenom p (principal series = hlavné série), pre $k = 3$, alebo $l = 2$ písmenom d (diffuse series = difúzne série), pre $k = 4$, alebo $l = 3$ písmenom f (fundamental series, neskoršie nazvané Bergmannova série).

V spektroskopii sa hlavné kvantové číslo označuje príslušnou číslicou, orbitálne kvantové číslo príslušným písmenom. V súčasnej kvantovej mechanike hlavné kvantové číslo určuje príslušnú energetickú hladinu elektrónu, orbitálne kvantové číslo veľkosť momentu hybnosti. Ak označíme veľkosť orbitálneho momentu hybnosti písmenom L , potom v súčasnej kvantovej mechanike $L^2 = (\hbar^2/4\pi^2)l(l+1)$. (Jednoduchší vzťah pre veľkosť momentu hybnosti v starej kvantovej teórii tu neuvádzame.)

V starej kvantovej teórii aj v kvantovej mechanike sa však ukázalo, že aj veľkosť momentu hybnosti s výnimkou atómu vodíka ovplyvňuje energiu elektrónov, viazaných v atómoch. Prejavuje sa to v rozštiepení spektrálnych čiar na viaceré, blízko seba ležiace čiary. Ďalšie rozštiepenie spektrálnych čiar nastáva v magnetickom poli. Tento efekt objavil *Pieter Zeeman* (1865—1943) už v roku 1896. A. Sommerfeld a *Peter Debye* (1884—1966) vysvetlili Zeemanov jav tým, že vektor momentu hybnosti nemôže nadobúdať spojite všetky možné smery v priestore. Zaviedli ďalšie kvantové číslo (*magnetické kvantové číslo m*), ktoré kvantovalo priemet momentu hybnosti elektrónu (a teda aj jeho magnetického momentu) do význačného smeru, napríklad do osi z kartézskej vzťažnej sústavy. Stav elektrónu v atóme bol teda začiatkom dvadsiatych rokov nášho storočia určený tromi kvantovými číslami n , k , m . V tom čase už bolo známych a v periodickej tabuľke umiestnených takmer 90 prvkov.

Niels Bohr podal v roku 1922 prvé vysvetlenie Mendelejevovej tabuľky prvkov. Poradové číslo (teraz sa nazýva protónovým číslom), t. j. počet elektrónov v atóme, určilo poradie prvku v tabuľke. Spektroskopické údaje svedčili o tom, že pri atómoch ťažších ako hélium obsadzujú elektróny v základnom stave nielen najnižšiu energetickú hladinu s kvantovým číslom $n = 1$ a $l = 0$, teda stav $1s$, ale aj ďalšie energetické hladiny, teda stavy $2s$, $2p$, ďalej stavy $3s$, $3p$, $3d$ atď.

N. Bohr pomocou röntgenových spektier určoval rozmiestnenie elektrónov v nižších energetických hladinách a pomocou optických spektier zadelenie elektrónov do najvzdialenejšej, takzvanej valenčnej hladiny. Analyzoval vlastnosti a spektrá každého známeho prvku osobitne, až napokon zadelil elektróny všetkých (aj ešte neobjavených) prvkov do jednotlivých stavov. Podobnosť chemických vlastností prvkov vyplývala z podobného obsadenia stavov s najvyššou energiou. V základnom stave malo lítium jediný elektrón v stave $2s$, sodík jediný elektrón v stave $3s$, draslík v stave $4s$ atď. Tým sa vysvetlili podobné vlastnosti alkalických kovov.

V nasledujúcej tabuľke uvedieme usporiadanie elektrónov v elektrónovom obale inertného plynu kryptónu podľa Bohra:

stav	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$
počet elektrónov	2	4	4	6	6	6	4	4	—	—

Z hľadiska našich súčasných znalostí Bohr zadelil tridsaťšesť elektrónov atómu kryptónu správne do energetických hladín, nevedel si však

poradiť so zadelením elektrónov do jednotlivých stavov. Volil preto najjednoduchší spôsob rovnomerného zadelenia. I keď tento spôsob nebol dokonalý, priniesol isté úspechy. Bohrovým spolupracovníkom v Kodani sa podarilo podľa tohto „receptu“ identifikovať v roku 1922 72. prvok v Mendeleevej tabuľke, nazvali ho hafnium (podľa latinského názvu Kodane) a správne predpovedali jeho chemické vlastnosti.

Predsa však Bohrovo zadelenie do stavov nebolo dostatočne odôvodnené. V roku 1924 *Edmund Clifton Stoner* (1889—1973) zaviedol ďalšie kvantové číslo, ktoré korešponduje s dnešným kvantovým číslom $j = l \pm \frac{1}{2}$ a navrhol pravidlo, podľa ktorého každý stav môže byť

obsadený $(2j + 1)$ elektrónmi. Napríklad pre kryptón stav $2p$ ($n = 2$, $l = 1$, $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$) môže byť obsadený $2 + 4 = 6$ elektrónmi. Totiž $j = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$ a tiež $j = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$. Stav $3d$ môže byť obsadený $4 + 6$ elektrónmi a pod. Celkové obsadzovacie číslo stavov súhlasí s dnešnou schémou. Usporiadanie elektrónov v elektrónovom obale podľa Stonera:

stav	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f
počet elektrónov	2	2	6	2	6	10	2	6	—	—

Wolfgang Pauli (1900—1958) prijal koncom roku 1924 Stonerovu schému štyroch kvantových čísiel. Vypracoval pritom nasledujúce pravidlo, ktoré prepíšeme podľa súčasného označenia: „V atóme sa nemôžu v silných poliach vyskytovať dva alebo viaceré ekvivalentné elektróny s hodnotami kvantových čísiel n , l , m , m_s . Ak sa nachádza v atóme elektrón, pre ktorý majú tieto kvantové čísla (vo vonkajšom poli) určité hodnoty, potom je tento stav, obsadený“. Pauli potom na základe termodynamických úvah zovšeobecnil toto pravidlo aj pre atómy v slabých a napokon aj miznúcich poliach. Toto Pauliho vylučovacie pravidlo je spolu s princípom minimalizácie energie v základných stavoch atómov rozhodujúce pri obsadzovaní energetických hladín a možných stavov elektrónmi. Kvantové číslo m_s , ktoré sme tu uviedli, sa nazýva *spinové kvantové číslo* a určuje hodnotu priemetu vlastného momentu hybnosti (alebo spinu) elektrónu do význačného smeru. Môže nadobúdať iba hodnoty $\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$. Pravda, Pauli spočiatku o spine

nechcel ani počuť, vo svojom článku, uverejnenom v roku 1925, hovoril o akejsi dvojznačnosti elektrónu. Až po vypracovaní kvantovej mechaniky zaviedol pre operátor spinu elektrónu matice, nesúce jeho meno.

Kvantová mechanika v Heisenbergovej aj Schrödingerovej formulácii potvrdila teóriu, podľa ktorej je stav elektrónu v atómovom obale určený štvoricou kvantových čísiel n, l, m, m_s . Prvé tri vyplývajú priamo z rovnice, ktorú formuloval *Erwin Schrödinger* (1887—1961) z roku 1926, posledné z rovnice, ktorú vypracoval *Paul Adrien Maurice Dirac* (1902 až 1984) v roku 1928. Vznikom kvantovej mechaniky sa zavŕšilo vyše štvrtstoročné úsilie o vysvetlenie elektrónovej štruktúry atómov. Mendelejevova tabuľka prvkov z roku 1869 slúžila fyzikom počas celého tohto obdobia ako empirické východisko v ich experimentálnych aj teoretických výskumoch.

Objav neutrónu v roku 1932 sa stal impulzom búrlivého rozvoja jadrovej fyziky. To umožnilo od začiatku štyridsiatych rokov vytvoriť umelé prvky s protónovým číslom väčším ako 92, ktoré nazývame transurány. Americkí fyzici *Glenn Seaborg* (nar. 1912), *Albert Chiorso* (nar. 1915) a *Stanly Thompson* (1912—1976) syntetizovali v roku 1955 deviaty transurán, 101. prvok v periodickej tabuľke prvkov, ktorý na počesť zakladateľa periodického zákona nazvali mendelejevium.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Obsah trojúhelníku v algebrogramu

V trojúhelníku ABC je narysována těžnice AM . Bod K leží na těžnici AM tak, že $|AK| : |AM| = 1 : 3$. Body K a B prochází přímka p , která protíná stranu AC v bodu L . Vypočítejte obsah trojúhelníku AKL , jestliže obsah trojúhelníku ABC je vyjádřen výslednou poslední řádkou (v mm^2) v algebrogramu:

$$\begin{array}{cccc} & S & S & L \\ & . & 3 & 9 \\ \hline S & L & S & L \\ S & L & L & \\ \hline L & L & L & L & L \end{array}$$

Písmena S nahrazují číslce 2, 4, 6 nebo 8 (stejně nebo různé), obdobně písmena L zastupují liché číslce.

Josef Trejbal

Nejen v Královci

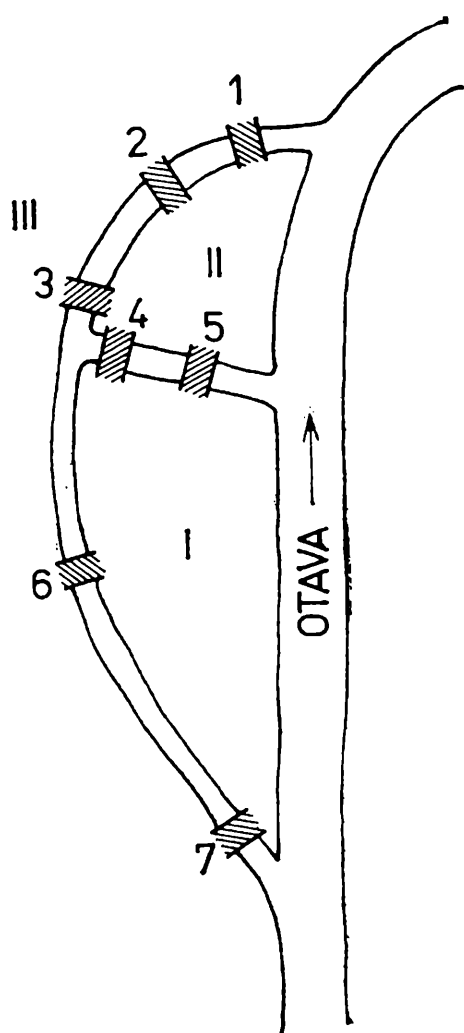
Možná, že znáte problém sedmi mostů města Královce. Pokud ne, můžete se s ním seznámit např. v knížce *Matematika hrou i vážně* od Bohdana Zelinky, kterou vydala Mladá fronta v edici Škola mladých matematiků jako 44. svazek v roce 1979.

S podobnou situací se lze setkat i u nás v Čechách. V *Horažďovicích* tvoří říční ramena Otavy dva ostrovy. Na schematickém obr. 1 jsou označeny I a II. Přes ramena je celkem sedm mostů a lávek, k nimž jsou na obr. 1 připsány číslice 1 až 7. Poznamenejme, že ostrov I se nazývá zcela prostě *Ostrov* a rozkládá se na něm chráněný anglický park, na ostrově II je část města zvaná *Zářečí*. V rameni, přes které vedou lávky 6 a 7, se do roku 1945 pěstovaly perlorodky.

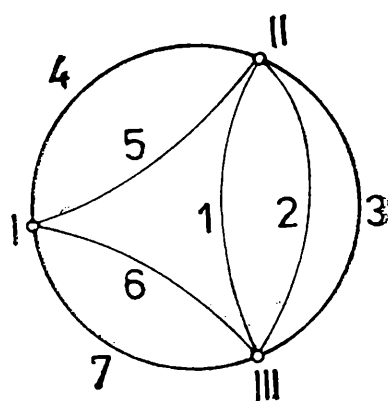
Podle vzoru klasické úlohy z Královce můžeme zformulovat problém:

Lze při procházce vyjít z jednoho místa, přejít jednou po každém mostě a lávce dle obr. 1 a vrátit se na výchozí místo?

Původní problém z Královce vedl *Leonarda Eulera* (1707 až 1783) k vytvoření *teorie grafů*. Při řešení naší úlohy také využijeme grafu. Na



Obr. 1



Obr. 2

obr. 2 body I a II označují ostrovy, bod III znamená území na levém břehu Otavy, které nenáleží ostrovům. Spojnice 1 až 7 představují mosty a lávky. V teorii grafů se body I, II, III v obr. 2 nazývají *uzly*, pro spojnice uzlů se užívá názvu *hrany*.

Požadovanou procházku můžeme uskutečnit, právě když půjde nakreslit obr. 2 jedním tahem (tj. bez zvednutí tužky z papíru a bez kreslení některé spojnice dvakrát), přičemž vyjdeme z jednoho z uzlů I, II, III a zase se do něj vrátíme. Je-li to možno, pak z každého uzlu musí vycházet sudý počet hran. Uzlem totiž buď procházíme, anebo v něm začínáme a končíme.

Na obr. 2 vidíme, že žádanou procházku nemůžeme vykonat. Brání tomu tři spojnice uzlů II a III.

Na naší procházku po mostech a lávkách můžeme požadavky zeslabit. Nebudeme požadovat, abychom se po jejím ukončení vrátili na výchozí místo. Budeme pouze chtít, abychom šli jedenkrát po každém mostu a lávce. Řešení tohoto problému přenechávám čtenáři.

Blíží se období prvních výletů do přírody. Dívejte se pozorně kolem sebe, zda by někde nešlo pokusit se o vycházku připomínající úlohu z Královce.

Jiří Mída

Řešení tří úloh z únorového čísla Rozhledů

Úloha k výročí našich parních lokomotiv

Celkovou délku stoupajících částí trati v kilometrech označme x . Potom snadno sestavíme rovnici

$$22x + 10(62 - x) = 800,$$

která má jediný kořen $x = 15$. Na trati je tedy 15 km stoupání.

Psí spřežení

Z textu úlohy vyplývá, že kdyby uprchlí psi běželi ve spřežení ještě dvakrát padesát mil, tj. 100 mil, pak by žádné zpoždění nevzniklo. Označme rychlost úplného spřežení v mílích za den písmenem v . Po útěku dvou psů pak byla rychlost $\frac{3}{5}v$ mílů za den. Závěrečných 100 mil by úplná smečka vykonala za $100 : v$ dní. Neúplná smečka k tomu potřebovala $100 : \frac{3}{5}v$ dní. Tedy platí

$$\left(100 : \frac{3}{5}v\right) - 2 = 100 : v$$

Odtud dostáváme, že $v = 33\frac{1}{3}$ míle za den. První den Jack London urazil $33\frac{1}{3}$ míle, takže cesta byla dlouhá $133\frac{1}{3}$ míle.

-jm-

Úloha z manéže

1. a) V případech podle obr. 1a, 1c musí artista na válci kráčet dozadu, v případě dle obr. 1b a 1d musí kráčet dopředu.

b) Ve všech případech se obvod válce 1 odvalí o úsek o celkové délce 8 metrů; tomu odpovídá 8 otáček. „Meziválec“ mohou ovlivnit pouze směr odvalování. Obruč nemá žádný vliv, neboť se pohybuje stejně jako k ní přiléhající nejnižší válec.

2. Pohyb odvalování bílého kolečka po šrafovaném kolečku lze rozložit na dva pohyby — na rotaci bílého kolečka kolem vlastní osy a na otáčení bílého kolečka jako celku kolem osy šrafovaného kolečka.

a) Otáčení bílého kolečka kolem vlastní osy vzniklo odvalením se po čtvrtině obvodu šrafovaného kolečka, což vzhledem k tomu, že obě kolečka mají stejný poloměr, odpovídá otočení o 90° . Dále se bílé kolečko (jako celek) otočí kolem osy šrafovaného kolečka o 90° , tedy celkem o $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.

Obdobnou úvahou jako v části a) zjistíme, že bílé kolečko se otočilo kolem své osy celkem o $2 \cdot 360^\circ$, tj. otočilo se kolem své osy celkem dvakrát.

3. Poměr obvodů velkého a malého kolečka je $5 : 3$. Při jednom oběhu se otočí malé kolečko kolem své osy $\left(\frac{5}{3} + 1\right) = \frac{8}{3}$ krát. Malé kolečko se poprvé „umístí“ do výchozí polohy po třech obězích; přitom se otočí kolem vlastní osy osmkrát.

Eva Blažková

Úloha Bézoutova

Zkuste si vyřešit problém z XVIII. století:

Někdo koupil koně a po jistém čase ho prodal za 24 pistolí¹⁾. Při tom ztratil tolik procent, kolik pistolí ho stál kůň. Za kolik pistolí ho koupil?

Autor této úlohy *Étienne Bézout* se narodil 31. 3. 1730. Stručnou informaci o něm si můžete přečíst na str. 334.

-jm-

¹⁾ zlatá mince ražená v jižních evropských zemích

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Slovní algebrogramy

Stejná písmena nahraďte stejnými číslicemi tak, aby platily součty:

a)	R A D K A	b)	K L U K	c)	P A S Á K
	A		K L U S A L		S I
	K A T K A		O K O L O		K O U P I L
	M A J Í		P O T O K A		O B Á L K U
	D O M A		O K O L O		A
	<u>RO B O T A</u>		<u>T O P O L Ů</u>		<u>K L O B Á S U</u>

Každá úloha má jen jedno řešení — ověřeno počítačem.
(Řešení naleznete na str. 294.)

Jindřich Pěnčík

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Mějme schéma

$$\begin{array}{ccccc} X & & Y & & Z \\ & R & & S & \\ T & & U & & V \end{array}$$

Pospojováním nejbližších písmen vzniknou trojúhelníky orientované dolů (XY , YSZ , RUS) a trojúhelníky orientované nahoru (RTU , SUV , YRS). Za písmena dosadte cifry od 1 do 8 tak, aby součty hodnot ve vrcholech trojúhelníků orientovaných dolů byly 13 a ve vrcholech trojúhelníků orientovaných nahoru 14. Každé číslo bude užito právě jednou.

2. Řešte číselný rébus ze sportovního prostředí:

$$\begin{array}{rcccccc} & A & T & A & K & A & \\ & + & U & D & A & R & \\ & + & U & D & A & R & \\ \hline N & O & K & A & U & T & \end{array}$$

Stejným písmenům odpovídají stejná čísla a písmenům navzájem různým čísla navzájem různá.

3. Počítač vytiskl v plné šíři čísla 2^{1987} a 5^{1987} . Kolik vytiskl cifer?

4. (obtížnější) Je možno rozmístit $4n - 4$ po sobě jdoucích celých čísel (která nemusí být nutně kladná) do $4n - 4$ čtverečků, které tvoří obvod čtverce $n \times n$, tak, aby součty čísel ve vrcholech všech čtverců které mají strany rovnoběžné s diagonálami čtverce $n \times n$, jakož i součty čísel v krajních bodech těchto úhlopříček byly rovny jednomu a témuž číslu s ? Řešte úlohu pro $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ a $n = 1985$. Pokuste se dále nalézt možné hodnoty čísla s .

5. (obtížnější) Kladná celá čísla splňují rovnost $ab = cd$. Dokažte, že číslo $a^{1984} + b^{1984} + c^{1984} + d^{1984}$ není prvočíslo.

Tomáš Schütz

Výsledky úloh z únorového čísla Rozhledů

Kdo chová zebra a kdo pije vodu?

Pokud jste správně uvažovali a úspěšně kombinovali, zjistili jste, že zebra chová Japonec v 5. domku a že vodu si oblíbil Nor v 1. domku.
-jm-

Tři digitální stupnice

Údaj 7.85 patří pH-metru, který nemůže ukazovat vyšší hodnotu než 14. Potom tedy 17,00 patří hodinám, neboť digitální hodiny ukazují jen do 23,59 a následující údaj je 00,00. Zbývající údaj 24,05 znamená teplotu.
VP

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Fyzika

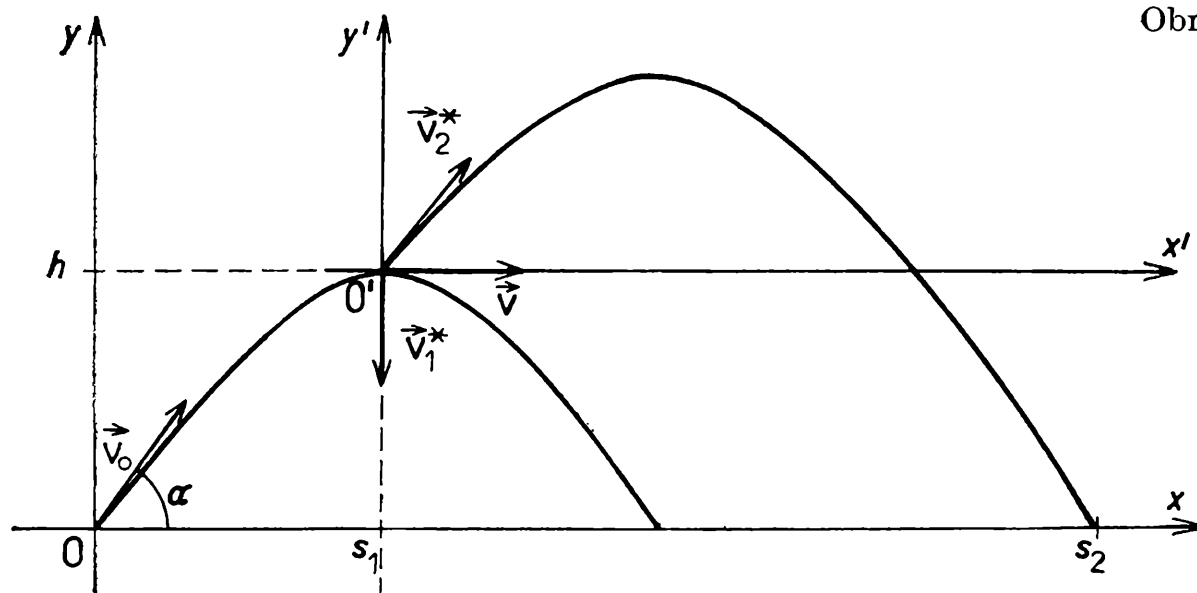
6. Střela se v nejvyšším bodě své dráhy ve výšce $h = 20$ m roztrhla na dvě stejné části. Za dobu $\tau = 1$ s po výbuchu dopadla první část střely na zem, přesně pod bod dráhy, ve kterém nastal výbuch. Jaká je vzdálenost s_2 místa dopadu druhé části střely od místa výstřelu, dopadla-li první část střely do vzdálenosti $s_1 = 1000$ m od místa výstřelu?

(Odpor vzduchu neuvažujte. Při číselném výpočtu položte tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.)
(Došlo jedno řešení.)

Eva Havránková

Řešení autorky

Po roztržení střely v okamžiku t^* se první část střely pohybuje rychlostí $\vec{v}_1^*$, druhá část střely rychlostí $\vec{v}_2^*$ (obr. 1). Rychlost $\vec{v}_1^*$ vypočteme z doby pádu první části střely na zem. Rychlost $\vec{v}_2^*$ vypočteme pomocí zákona zachování hybnosti ze znalosti $\vec{v}_1^*$ a rychlosti $\vec{v}$, kterou má ještě celá střela těsně před výbuchem. Rychlost $\vec{v} = (v_0 \cos \alpha, 0)$. Symbolem v_0 je označena velikost počáteční rychlosti střely $\vec{v}_0$, α je úhel výstřelu (v_0 a α se spočítají z maximální výšky h a její polohy s_1).



Obr. 1

Platí zákon zachování hybnosti:

$$m \vec{v} = \frac{m}{2} \vec{v}_1^* + \frac{m}{2} \vec{v}_2^*,$$

kde m je hmotnost střely. Pro hledanou rychlost $\vec{v}_2^*$ dostaneme rovnost

$$\vec{v}_2^* = 2\vec{v} - \vec{v}_1^*. \quad (1)$$

Nyní vypočteme $\vec{v}_1^*$. Z výšky $h = 20 \text{ m}$ dopadne první část střely na zem za dobu $\tau = 1 \text{ s}$. Protože jde o vrh svislý dolů, je

$$y = h - v_1^* t - \frac{gt^2}{2}.$$

V čase $t = \tau$ je $y = 0$, takže

$$h - v_1^* \tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0.$$

Z toho plyne, že je

$$v_1^* = \frac{h - \frac{g\tau^2}{2}}{\tau}.$$

Po dosazení za h a τ dostáváme

$$v_1^* = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dále je

$$\vec{\mathbf{v}} = (v_0 \cos \alpha, 0). \quad (2)$$

Pohyb střely popíšeme parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \alpha)t, \\ y &= (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice plyne

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dt} \right)_{t=t^*} &= (v_0 \sin \alpha - gt)_{t=t^*} = 0, \\ t^* &= \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \end{aligned} \quad (3)$$

Čas, kdy střela dosáhne maximální výšky a dojde k výbuchu, je udán v řádku (3).

Pro souřadnice bodu O' platí

$$\begin{aligned} (y)_{t=t^*} &= h, & h &= \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}, \\ (x)_{t=t^*} &= s_1, & s_1 &= \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic vypočteme výraz $v_0 \cos \alpha$, který ve vzorci (2):

$$gs_1 = v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = v_0^2 \cos^2 \alpha \frac{2h}{s_1},$$

tj.

$$v_0 \cos \alpha = s_1 \sqrt{0,5 \cdot gh^{-1}} \doteq 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Podle rovnosti (1) platí:

$$\vec{\mathbf{v}}_2^* = 2\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}_1^* = 2(v_0 \cos \alpha, 0) - (0, -v_1^*) = (2v_0 \cos \alpha, v_1^*).$$

Dráhu druhej časti strely vzťahujeme k súradnicovej sústave x', y' (viz obr. 1).

Čas počítame nyní od okamžiku výbuchu. Můžeme psát rovnice

$$x' = (2v_0 \cos \alpha)t,$$

$$y' = v_1^* t - gt^2/2.$$

Potřebujeme spočítat místo dopadu druhej časti strely na zem (na osu x).

V čase dopadu t_d je $y' = -h$. Odtud řešením kvadratické rovnice dostaneme pro $t_d = (v_1^* + \sqrt{v_1^{*2} + 2hg})/g$ [$t_d > 0$].

Místo dopadu strely má souřadnici $(x')_{t=t_d} = (2v_0 \cos \alpha)t_d = 2 \cdot 500 \cdot (15 + \sqrt{225 + 400})/10 = 4000$ m.

Hledané $s_2 = s_1 + (x')_{t_d} = 1000 + 4000 = 5000$ m.

Druhá část strely dopadne ve vzdálenosti $s_2 = 5000$ m od místa výstřelu celé strely.

Kalendár M-F: marec 1989

2. 3. 1840 zomrel *Heinrich Wilhelm Olbers*, nemecký astronóm. Vypracoval metódu na výpočet dráh komét, objavil planétky Pallas a Vesta i niekoľko komét.
2. 3. 1885 zomrel *Joseph Alfred Serret*, francúzsky matematik. Rozpracoval diferenciálnu geometriu kriviek a plôch.
3. 3. 1845 sa v Petrohrade narodil *Georg Cantor*, nemecký matematik. Rozpracoval teóriu nekonečných množín i teóriu transfinitečných čísel. Obhajoval uznanie aktuálneho nekonečna.
5. 3. 1575 sa narodil *William Oughtred*, anglický matematik. Rozvinul algebraickú a trigonometrickú symboliku.
6. 3. 1880 sa v Odese narodil *Sergej Natanovič Bernštejn*, sovietsky matematik. Prispel do teórie diferenciálnych rovníc a k aproximácii funkcií mnohočlenmi.
7. 3. 1765 sa narodil *Joseph Nicéphore Niepce*, francúzsky fyzik a fotografista. Podielal sa na vynáleze fotografie.
7. 3. 1900 sa vo Wroclawi narodil *Friedrich Wolfgang London*, americký fyzik nemeckého pôvodu. Zaoberal sa kvantovou teóriou atómových a molekulových síl, prispel k pochopeniu supravodivosti.
9. 3. 1900 sa narodil *Howard Hathaway Aiken*, americký matematik a inžinier. Skonstruoval prvý programovateľný univerzálny releový počítač.
10. 3. 1825 v Lipsku zomrel *Karl Brandan Mollweide*, nemecký matematik a astronóm. Odhalil vzťahy pre riešenie tupouhlých trojuholníkov.

10. 3. 1860 sa narodil *Vasilij Afanasievič Anisimov*, ruský matematik. Prispel k analytickej teórii diferenciálnych rovníc.
11. 3. 1780 sa narodil *August Leopold Crelle*, nemecký matematik a inžinier. Zaoberal sa geodéziou, vydával známy matematický časopis.
11. 3. 1890 sa narodil *Vannevar Bush*, americký elektrotechnik a matematik. Skonštruoval prvý diferenciálny analyzátor.
12. 3. 1925 sa narodil *Leo Esaki*, japonský fyzik. Za objav tunelovej diódy dostal Nobelovu cenu (1973).
14. 3. 1880 sa v Duchcove narodil *Bohumil Bydžovský*, český matematik. Napísal viac než 50 odborných prác, hlavne z algebraickej geometrie.
15. 3. 1900 v Strasbourgu zomrel *Elwin Bruno Christoffel*, nemecký matematik. Prispel k teórii kvadratických diferenciálnych foriem, teórii invariantov a konformnému zobrazeniu.
15. 3. 1915 sa v Paríži narodil *Laurent Schwartz*, francúzsky matematik. Zaoberal sa topológiou, funcionálnou analýzou a matematickou fyzikou. Získal Fieldsovu cenu (1950).
15. 3. 1960 v Praze zomrel *Eduard Čech*, český matematik. Bol popredným odborníkom z kombinatorickej a množinovej topológie. Prispel k vybudovaniu Matematického ústavu ČSAV i Matematického ústavu Univerzity Karlovej.
16. 3. 1750 sa narodila *Lucretia Caroline Herschelová*, anglická astronómka. Zostavila katalóg hmlovín a hviezd, objavila niekoľko komét.
18. 3. 1690 sa v Königsbergu narodil *Christian Goldbach*, nemecký matematik. Vyslovil hypotézu, že každé párne číslo väčšie než 2 je súčtom dvoch prvočísel.
19. 3. 1900 sa v Paríži narodil *Frédéric Joliot-Curie*, francúzsky fyzik a chemik. Skúmal alfa žiarenie rádioaktívnych prvkov. Spolu s manželkou Irène objavili umelú rádioaktivitu (1934). Projektovad jadrový reaktor, viedol výskumné stredisko.
20. 3. 1905 sa narodil *Václav Petržílka*, český fyzik. Študoval vzájomné pôsobenie jadrových častíc veľmi vysokých energií.
24. 3. 1820 sa narodil *Alexandre Edmond Becquerel*, francúzsky fyzik. Skúmal fosforescenciu, atmosférickú elektrinu, fotografiu.
24. 3. 1835 sa narodil *Josef Stefan*, rakúsky fyzik. Objavil závislosť žiarenia absolútne čierneho telesa na jeho absolútnej teplote.
27. 3. 1845 sa v Lenepe narodil *Wilhelm Conrad Röntgen*, nemecký fyzik. Zistil, že rotujúce dielektrikum v elektrickom poli má magnetické účinky. Za objav lúčov X dostal Nobelovu cenu (1901).
27. 3. 1905 sa narodil *Laszlo Kalmar*, maďarský matematik. Zaujímal sa o matematickú logiku, kybernetiku, teóriu programovania.
31. 3. 1730 sa v Nemours narodil *Étienne Bézout*, francúzsky matematik.

Rozpracoval všeobecné metódy riešenia sústav algebraických rovníc ľubovoľného stupňa.

31. 3. 1890 sa v Adeleide (Austrália) narodil *Lawrence William Bragg*, anglický fyzik. Za výskum štruktúry kryštálov pomocou röntgenových lúčov získal spolu s otcom W. H. Braggom Nobelovu cenu za fyziku (1915).

dj

Z NOVÝCH KNIH

Bero, P.:

MATEMATICI, JA A TY.

Vydali Mladé letá, slovenské vydavateľstvo kníh pre mládež, Bratislava, 1989, 216 strán, ilustrované, Kčs 31,—

Začnime listovať touto pútavou knižkou určenou pre čitateľov od 13 rokov. Prvá stránka — *Matematici* (Pytagoras, Zenón, Euklides, Archimedes, Diofantos, Nicole Oresme, Galileo Galilei, Johannes Kepler, Pierre de Fermat, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz), druhá — *ja* (Peter Bero, v čase písania stredoškolský profesor matematiky, teraz odborný asistent SVŠT), tretia — *ty* (milý mladý čitateľ, záujemca o popularizáciu matematiky). Po úvode, v ktorom sa dozviete, že knižka nie je učebnicou matematiky ani príručkou histórie tejto vedy, sa začne odvíjať jedenásť nezávislých rozprávaní o matematikoch a ich matematike.

Autor pozorne a citlivo vykresľuje osudy i objavy spomínaných

matematikov. Grafické znázornenie v ilustráciach D. Tótha umožňuje zvýrazniť základné myšlienkové postupy tých, ktorí odhalili magickú moc čísel, paradoxy nekonečna, systematickú prácu s dôkazmi, vtip pri určovaní obsahov a objemov, čaro číselných vzťahov, špekulácie so slovami a pojmami, účinnosť myšlienkových experimentov, hľadanie dokonalosti, silu argumentov, zákony pohybu i symfóniu matematických úvah v každom vednom odbore. Súvislosti sú dopĺňané krátkymi textami, vtipnými myšlienkami a postrehmi na okraji knižky. Tí, ktorí chcú skúsiť svoje sily, môžu využiť predložené úlohy rôznej obťažnosti súvisiace s textom. Na konci knihy je časť „Pre tých, ktorí si chcú porovnať výsledok a spôsob riešenia“.

Knižka je účinným a podnetným krokom v úsilí pre pochopenie matematiky ako dobrodružstva poznania, pre radosť z myslenia. Som presvedčený, že presvedčí každého, kto chce pochopiť základy matematického spôsobu usudzovania a argumentovania, spolu s poznaním osobností, ktoré posú-

vali objavné myšlienky vpred. Možno prídete na to, že podobným štýlom by sa mohlo rozprávať aj o ďalších významných matematikoch a ich objavoch. To ale znamená, že aj pre vás môže byť matematika zaujímavá. Tak došlo na nadpis tejto knižky. Stal sa výstižným. Správne tam patrí aj to — ty. Ešte raz nové heslo: Matematici, ja a ty. Pozrite sa na to, do knižky s týmto nadpisom.

Dušan Jedinák

36. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

František Zítek a kol.:

Vydalo SPN, Praha 1989, edice Pomocné knihy pro žáky, 216 str., 41 obr., 3200 výtisků, brož. Kčs 8,—

Ročenka obsahuje zprávu o matematické olympiádě v kategoriích A, B, C, P v jejím 36. ročníku, který proběhl ve školním roce 1986/87. Dále v knížce získáte úplné informace o 28. ročníku mezinárodní MO v Havaně na Kubě. Pokud jste se v uvedeném ročníku umístili na předních místech v krajských II. kolech a v celostátním III. kole kategorie A, pak se zde naleznete v příslušných seznamech.

Kategorie P (programování) se v celostátním měřítku uskutečnila v tomto ročníku MO teprve podruhé. V srpnu byla v Bratislavě završena i první mezinárodní soutěž v tomto oboru. V kategorii P dostávají příležitost všichni středoškoláci, jejichž zájem o programování se nevyčerpává jen sestavováním programů v určitém programovacím jazyku, ale směřuje k hlubšímu matematickému pohledu, v němž se uplatňují dobré nápady a důvtip řešitele.

Matematická olympiáda se za 39 let na středních školách (v současnosti běží již její 39. ročník) dokonale vžila, má zde své místo, i když není již jako ve svých počátcích jedinou soutěží svého druhu. Konkuruje jí nejen nejrozličnější předmětové olympiády a soutěže, ale také SOČ.

Publikace je nejen zprávou o soutěži, ale poslouží také jako sbírka úloh pro matematické kroužky, pro přípravu řešitelů MO i pro všechny zájemce o matematiku. V příručce se lze seznámit i s úlohami korespondenčního semináře ve 36. ročníku MO.

Zpráva o kategorii Z, jež je určena pro žáky základních škol, bude obdobně jako pro 35. ročník uveřejněna ve zvláštní ročence.

Jiří Mída

HUMORY MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ

Žákovské perličky z hodin fyziky

Ze sbírky Václava Richtera vybral *Milan Bednařík*.

Volný pád končí vždy na zemi.

Newton se proslavil tím, že mu spadlo jablko na hlavu.

Přitažlivost našel Newton, objevuje se na podzim, když padají jablka.

Nejsilnější nápoj je voda, pohání i elektrárny.

Pára má velkou sílu, dokáže utíkat i z hrnců.

Hmota je nezničitelná, ale všechno se dá rozbít.

Hmota se může přeměnit, ale nemůže se ztratit. Jenom ukradnout.

Barometr na počasí neklesá. Pořád visí.

Barometrem se měří procento alkoholu v baru.

Teploměr je přístroj, který klesá, když je zima, a padá, když je špatně zavěšený.

Meteorologové vydávají předpovědi navzdory počasí.

Archimédes našel zákon ve vaně, protože ho nadlehčovala.

Zvuk se šíří vzduchem. Jaký vzduch, takový zvuk.

Světlo se šíří přímočaře a pořád.

Průhledné těleso je třeba sklo nebo plot.

Příkladem průhledného tělesa je zámek s klíčovou dírkou.

Světlo se šíří rychleji než zvuk, ale ve tmě se to nepozná.

Optický klam je, když někdo potřebuje brýle a nenosí je.

Elektron má krátkou budoucnost.

Příklad roztahování těles teplem a smršťování chladnem jsou letní a zimní prázdniny.

Fyziku jsme měli rádi, dokud jsme se ji neučili.

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR. Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20 — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 3,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, s. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpalkova 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1990

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

ADRESA REDAKCE:

M. D. Rettigové 4,
116 39 Praha 1 - Nové Město
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

REDAKČNÍ KRUH:

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topolčany; doc. dr. Stanislav Jendrof, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

ROZHLEDY

matematicko
-fyzikální

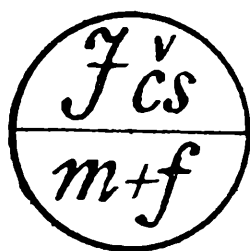
8
89 – 90

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

DUBEN

CENA 3,00 Kčs



ROZHLEDY
matematicko
-fyzikální
Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Marcel Grün: Quo vadis, kosmonautiko?	337
Luděk Granát: Planimetrické konstrukce v aplikacích počítačové grafiky	342
Helena Husová: Statistické testování genetických hypotéz	346
Jaroslav Pospíšil: Geometrické konstrukce obrazových světelných paprsků u kulových čoček	350
Ivo Kraus: O školních a studentských letech Maxe von Laueho	355
iš: O Čeňku Strouhalovi	360
Z matematiky a fyziky ZŠ	361
Přemýšlíme, řešíme	367
Naše soutěž	371
Zbyněk Šidák, Ondřej Šidák: Variabilita sportovních soutěží	374
dj: Kalendár M-F	381
Z nových knih	383
Anton Hnáth: Ešte jedno riešenie úlohy S. Horáka	384
Milan Bednařík: Rébusy — jména fyziků	384
-ll: Landauova trojka	. 3. str. obálky

Quo vadis, kosmonautiko?

Ing. MARCEL GRÜN, Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy

Vstoupili jsme do posledního desetiletí 20. století, které hrdě označujeme přívlastky „století atomové energie“ a počátků kosmické éry lidstva. Již dávno vyprchalo prvotní okouzlení z netušených technických možností, které si člověk vytvořil. Poměrně rychle jsme si zvykli na měnící se fáze permanentní vědeckotechnické revoluce a v kosmonautice dokonce ani zdaleka nevyužíváme všeho, co nám špičková technika poskytuje. Spíše každý nový let do vesmíru podrobujeme kritice z hlediska efektivnosti a posuzujeme jej pohledem ekonoma (byť někdy šetřícího způsobem „ať to stojí, co to stojí“). Po extenzivním rozvoji kosmonautiky, plně opodstatněném v jejích počátcích a v době, kdy prestižní cíle měly přednost před vědeckými požadavky, následoval rozvoj intenzivní, v němž věda usilovala o dominantní postavení. Posléze se v některých oblastech začaly vyskytovat i prvky stagnace, a to zejména tam a tehdy, když nad systematickým výzkumem s následným zaváděním do praxe začaly vítězit krátkodobé komerční zájmy. Zcela jasně to ukazuje právě nyní kosmický program SSSR.

Vývoj výzkumu a využívání kosmického prostoru zatím na všech frontách postupoval podle víceméně shodného schématu. Na počátku byla aktivita tady na Zemi — např. v astronomii nejprve pozorování pouhým okem, od počátku 17. století využívání dalekohledů, ve 20. století rozšíření o radioastronomii a krátce poté o první přímý průzkum okolí kolem Země. Jednoduché družice předávaly svá pozorování radiovou cestou na Zemi. Následovala další, kvalitativně vyšší etapa, při níž se člověk sám vydal do vesmíru: nejprve do nejbližšího okolí (1961), posléze na Měsíc (1969) a na Mars (snad kolem r. 2020). Další etapa představuje počátek praktického využívání nového prostředí — na dráze kolem Země se právě nyní stává realitou, u Měsíce ji lze očekávat po r. 2000 a na Marsu nejdříve po r. 2030. Přitom každý přechod na kvalitativně vyšší úroveň představuje i další rozvoj metod předchozích etap, které však přestávají dominovat.

Logickým základem kosmických úspěchů jsou nosné rakety, dostatečně výkonné a spolehlivé. Jejich vývoj byl vždy spojen s tím nejprogresivnějším, co mohl pokrok v dané historické době poskytnout letecko-kosmickému průmyslu. Ve svém období byly takovými špičkami nepochybně raketa Vostok, Saturn 5 nebo oba raketoplány jako prostředky

mnohonásobného použití — americký „Shuttle“, který odstartoval poprvé r. 1981, i sovětský Buran, který je dosud ve stadiu bezpilotních zkoušek. Např. u sovětského raketoplánu bylo z 80 % použito zcela nových materiálů a výrobních technologií, dosud v SSSR neznámých.

Na druhé straně právě vývoj těchto špičkových prostředků bývá — a někdy právem — kritizován pro svou ekonomickou náročnost a zdánlivou odtrženost od okamžitých potřeb. Saturn 5 poprvé odstartoval v listopadu 1967 a až na čestnou výjimku posloužil jen pro lety člověka na Měsíc v rámci programu Apollo. Jistě by to stačilo na zapsání zlatým písmem do historie — avšak tato raketa mohla sloužit mnoha jiným oblastem snad i dodnes; stále ještě naše nejtěžší sondy k planetám mají hmotnost 4–5 krát menší, než by utáhla nejsilnější raketa všech dob. Až absurdní bezkonceptnost, způsobená řadou faktorů od nákladné války ve Vietnamu až po moc veřejného mínění, které se už nasytilo triumfů . . .

Také americký raketoplán má své odpůrce. Svou koncepcí je kompromisem mezi prostředkem s nejlevnějším vývojem a nejlevnějším provozem, svou kapacitou nevhodně dimenzován a navíc začal nepříliš šťastně nahrazovat všechny jednorázové rakety, zatímco svůj hlavní úkol — stavbu a obsluhu velké orbitální stanice — může začít plnit až po r. 1993.

Obdobně je kritizován vývoj systému Energija—Buran, ačkoliv jde o špičkové zařízení. Řada sovětských odborníků je nyní přesvědčena, že nejde o úspěch, nýbrž o poškození sovětského výzkumného programu. Na raketoplán za mnoho miliard rublů nyní v hangáru usedá prach, protože pro něj zatím není využití. Energija by již nyní mohla začít s přípravami pilotovaných letů k Marsu — avšak realizace těchto cílů je z hlediska globálních možností zatím velmi vzdálená.

Za této situace jsou na jedné straně umrtvené ohromné investice do nové raketové techniky, na druhé straně nejsou finanční prostředky na stavbu nových užitečných zařízení. Většina družic pro základní výzkum je již dávno zastaralá a několik ojedinělých nových konstrukcí se potýká s nekvalitním provedením a obsluhou (čehož drastickým příkladem je dvojice sond Fobos). Podobně můžeme srovnat dvě družice pro ultrafialová pozorování oblohy, které v druhé polovině 80. let souběžně pracovaly. Západoevropsko-americký satelit IUE fungoval celkem deset let prakticky 24 hodin denně; sovětský Astron pět let, avšak čistého času necelé čtyři měsíce! Zcela nedostatečné je vybavení moderní elektronikou. „Sotva můžeme provádět měření s prvky CCD, máme-li k dispozici operační paměť počítače EC-1033“, konstatuje akademik R. Sagdějev.

Rozvážný přístup k rozvoji jak raketové techniky, tak nových typů sond a družic prokazuje Západní Evropa, již po léta integrovaná v organizaci ESA. Nyní je připravována již pátá generace mimořádně úspěšné

série raket Ariane: v polovině desetiletí umožní dopravit na oběžnou dráhu přes 20 tun. A ještě před koncem století bude mít Evropa svůj vlastní miniraketoplán Hermes.

Vyvážené a ambiciózní plány má Japonsko. Brzy bude mít k dispozici moderní raketu H-II s přídatnými motory, schopnou konkurence na světovém trhu a prakticky na každý rok jsou připravovány zajímavé výzkumné programy základního výzkumu. Japonsko a ESA rovněž chystají samostatné moduly pro americkou orbitální stanici Freedom.

Když odstartoval první Sputnik, měli jsme jen mlhavé představy o tom, jak vypadá okolní kosmický prostor, kam sahá atmosféra, jaké jsou vazby mezi tělesy sluneční soustavy, o zákonitostech vývoje vesmírných objektů nebo dokonce o dynamice kosmického dění. Kosmonautika významně rozšířila možnosti experimentální fyziky — ve vesmíru můžeme zkoumat fyzikální procesy za podmínek, jaké v pozemních laboratorích těžko můžeme dosáhnout. Výzkum procesů na nejbližší hvězdě je kardinálně důležitý pro pochopení mechanismu vývoje počasí, klimatických změn a snad i jednotlivých článků biosféry, člověka nevyjímaje.

Kosmonautika umožnila vynést detekční přístroje nad atmosféru a zkoumat záření přicházející z vesmíru v celém rozsahu elektromagnetického spektra. Vznikla a úspěšně se rozvíjí tzv. kosmická astronomie a na vesmír se začínáme dívat doslova jinýma očima — v oboru záření gama, rentgenového, ultrafialového a infračerveného.

V poslední době patřila mezi nejzajímavější nesporně pozorování superno vy ve Velkém Magellanově mračnu. Kromě pozemských přístrojů fungovaly tehdy na oběžné dráze dvě ultrafialové družice a v srpnu 1987 zaregistroval tvrdé rentgenové záření modul Kvant na orbitální stanici Mir. Exploze této supernovy představuje vynikající příklad vzdáleného projevu jaderného rozpadu látky. Současně se kosmická pozorování stala příspěvkem k uzavření dohody o 50 % snížení strategických jaderných zbraní, protože získané zkušenosti s detekcí záření gama a rentgenového lze použít při kontrole jaderného zbrojení.

Na devadesátá léta je připraveno několik specializovaných družic pro výzkum rentgenového záření kosmického původu — sovětský Granat, západoněmecký Rosat, italský Sax, japonský Astro-D a konečně sovětský Spektr-Rentgen-Gama. Novinkou ze SSSR bude Radioastron s desetimetrovým radioteleskopem, který se stane součástí radiointerferometru s rozlišovací schopností několik milióntin obloukové vteřiny.

V polovině 90. let bude vypuštěna sovětská astronomická observatoř, pracující v submilimetrovém a infračerveném oboru, která naváže na výsledky družice IRAS, a bude-li mít štěstí, bude fungovat souběžně s několika dalšími podobnými satelity ESA a USA. V SSSR byl již vyroben prototyp dalekohledu se zrcadlem o průměru 1 m, které je chlazeno tekutým neonem na teplotu 35 K (aby detektory neregistrovaly i tepelný

šum materiálu zrcadla) a jehož detektor pracuje při teplotě kapalného helia (pro zvýšení odstupu signálu od šumu). V druhé polovině by měla pracovat také americká observatoř pro detekci rentgenového záření a obří infračervený teleskop SIRTf. V oblasti astrofyziky pak bude USA koncem 20. století operovat zařízením pro výzkum elektromagnetického záření kosmického původu v celé šířce spektra od infračerveného až po tvrdé gama záření. Zajímavé výsledky můžeme očekávat i od družic, zkoumajících tepelné záření oblohy v oboru vlnových délek několika milimetrů, tj. reliktového záření, které je pozůstatkem z raných fází vývoje vesmíru krátce po Velkém třesku.

Vrcholnou událostí bude však jistě letošní start dlouho očekávaného velkého teleskopu o průměru zrcadla 2,4 m, jemuž v optické oblasti nemůže konkurovat žádný pozemní přístroj a v ultrafialovém oboru bude naprosto unikátní. Jeho rozlišení bude desetkrát lepší, než umožňuje atmosféra na povrchu Země, takže na vzdálenost 1 km umožní přečíst běžné novinové řádky. Kromě toho ukáže objekty pětkrát slabší, než lze vidět ze Země, a objem pozorovatelného vesmíru se stonásobně rozšíří ...

Kosmonautika se stále více stává jednou z metod — a to nejen základního výzkumu, jehož astronomické části jsme se věnovali podrobněji, nýbrž i řady praktických aplikací. Již v 60. a 70. letech jsme si zvykli na zpřesnění meteorologických předpovědí pomocí družicových snímků a na mezikontinentální přenos informací, počítačových dat i telefonních hovorů via vesmír. Nyní k tomu přibyla i družicová televizní služba.

80. léta byla ve znamení vítězného nástupu dálkového průzkumu Země, který se uplatňuje v široké škále od geologie, geografie přes lesnictví a zemědělství až k urbanistice a ekologické kontrole. Z komerčních sítí družic Landsat nebo Spot lze objednat požadovaný záběr s rozlišením až deset metrů. Až to všechno v tomto desetiletí začneme opravdu účelně využívat, ušetříme desítky miliard dolarů.

Avšak kosmonautika mezitím přichází s novou lákavou nabídkou: výrobou na oběžné dráze. V podmínkách mikrogravitace (10^{-5} G) začínáme vyrábět to, co na Zemi nedovedeme — mimořádně čisté suroviny pro léky, speciální slitiny a třeba i kovy s vlastnostmi polystyrénu ...

Kosmické sondy se dostávají do stále větších vzdáleností od Země a tak se objekty, zkoumané dříve jen pozemskou astronomií, stávají cílem bezprostředního výzkumu „in situ“. Za tři desítky let prošla touto proměnou pozorování téměř všech planet sluneční soustavy. Kromě Pluta máme nyní planety a jejich měsíce prozkoumány s takovou přesností, jako bychom si je přenesli do vzdálenosti Měsíce a pozorovali ze Země. Přitom např. od Neptunu letěl radiový signál déle než čtyři hodiny. Státisíce snímků a miliardy dat informací ze sond změnilo náš pohled na planetární systém, jeho vznik a vývoj.

Za zmínku stojí, že řada amerických sond funguje dlouhá desetiletí

a podává zprávy mj. z hranic slunečního systému, jako dvojice Pioneerů a Voyagerů! Jak trpké zklamání pro sovětské odborníky přinesly sondy Fobos, které měly 25 krát menší informační propustnost a přitom nebyly schopny fungovat ani několik měsíců.

Pro 90. léta je připraveno několik rozsáhlých programů. Již od loňska je na cestě sonda Magellan, která bude pokračovat v radarovém mapování Venuše, a sonda Galileo, která po složitých gravitačních manévrech dorazí v r. 1995 k Jupiteru, stane se jeho umělou družicí a do atmosféry navede speciální přístrojové pouzdro.

Několik sond, jako např. západoevropský Ulysses, se vydá do těch částí sluneční soustavy, kde dosud žádný lidský výrobek nebyl — totiž mimo oblast roviny ekliptiky.

K Marsu je na r. 1992 připravován americký Mars Orbiter, jehož úkolem bude klimatologický a geochemický výzkum. Při další vhodné konfiguraci obou planet (tedy Země a Rudé planety) o dva roky později přijde na řadu program Kolumb pod sovětskou taktovkou, v jehož rámci bude mj. vysazeno na povrch několik penetrátorů a do řídké atmosféry umístěny francouzské aerostaty s vědeckými přístroji z několika zemí. Marsochody budou na Mars dopraveny až později, snad r. 1996 nebo 1998, kdy se rovněž uvažuje o odběru vzorků hornin a jejich dopravě k Zemi. To vše jsou široce koncipované mezinárodní projekty.

Totéž platí o západoevropsko-americkém programu Cassini. V dubnu 1996 sonda odstartuje a za šest a půl roku dorazí k Saturnu, jehož umělou družicí se stane. Přístrojové pouzdro Huyghens by mělo přistát na povrchu měsíce Titan před vánocemi r. 2002 . . . V 90. letech by mělo rovněž dojít k dalšímu studiu malých těles sluneční soustavy — připravují se sondy pro odběr vzorků z atmosfér komet i z jejich povrchu a na programu je též výzkum planetek, které nás vědecky zajímají stále více.

Je paradoxem, že základní výzkum, který stojí jen zlomek celkových nákladů na kosmonautiku a do něhož výzkum sluneční soustavy patří, zůstává stále trnem v oku krátkozrakým . . .

Největší prostředky musí být vynakládány na pilotované lety, které jsou však právem považovány za jeden z vrcholů dosavadní kosmonautiky. Od Gagarinova jediného obletu kolem Země jsme dospěli až k jednoročnímu pobytu na dráze, počet kosmonautů již dávno překročil druhou stovku a mezi nimi je řada příslušníků menších států. Z hlediska lékařsko-biologického výzkumu však zůstává ještě stále řada otázek, na něž musíme najít odpovědi dříve, než se vydáme na meziplanetární lety.

Výzkumy a pozorování, uskutečňované na orbitálních stanicích, mohou být mimořádně efektivní, jestliže jsou dobře připraveny. Zůstává však riziko havárie — prakticky každý současný sovětský let se potýká s technickými závadami a následky větších katastrof, jako např. Chal-

lengeru v lednu 1986 poznamenávají rozvoj světové kosmonautiky na mnoho následujících let.

Protože Spojené státy dosud nemají orbitální stanici, nemohou uskutečňovat lety delší než 7–10 dní. Sověti mohou, avšak stanice Mir odvozená od Saljutu postupně zastarává a neumožňuje dlouhodobý nerušený výzkum. Kromě toho se v SSSR potýkají s nedostatkem koordinace, nekritickým resortismem a v posledním roce i ekonomickými bariérami, které mají za následek oddalování plánovaných termínů a další technické i morální zastarávání vědeckých aparatur.

Na obou stranách kosmického oceánu jsou však podmínky pro to, aby se v dohledné době pilotované lety vrátily opět do popředí rozvoje kosmonautiky. Koncem století budou na oběžné dráze nejméně dvě poměrně velké orbitální stanice s širokou mezinárodní účastí. Počátkem příštího tisíciletí je reálné vrátit se znovu na Měsíc. Podle japonsko-amerických plánů by po r. 2000 měla začít fungovat stálá základna s pěti kosmonauty, kteří by se měnili vždy po několika týdnech.

Až do konce 60. let převládalo v kosmonautické strategii soutěžení Sovětského svazu a Spojených států s řadou politických motivů, posléze vystřídané nesmělým pokusem o odstranění nedůvěry a následujícím obdobím militarizace vesmíru. Vždyť prestižním americkým cílem byla tzv. Strategická obranná iniciativa a tři čtvrtiny sovětských družic sloužilo vojenským aplikacím. Současná doba přináší seriózní úsilí o mnohostrannou spolupráci mezi USA, SSSR, zeměmi Západní Evropy a dalšími rovnoprávnými partnery. To je příslib, že uvolňování mezinárodního napětí bude mít za následek po létech relativní stagnace opět oživení světové aktivity v kosmickém prostoru.

MATEMATIKA

Planimetrické konstrukce v aplikacích počítačové grafiky

Doc. dr. LUDĚK GRANÁT, CSc., VÚMS Praha

V mnohých úlohách technického charakteru, jakými jsou např. konstruování strojírenských výrobků nebo určování dráhy nástroje při frézování, je potřeba řešit různé geometrické úlohy. Vhodným pomocníkem při této činnosti je počítač.

Tento příspěvek má ukázat, jak je možno využívat výpočetní prostředky pro jednu skupinu těchto úloh, a to pro řešení planimetrických

úloh. Předpokládáme, že čtenář zná alespoň středoškolskou analytickou geometrii.

Základními prvky, s kterými budeme pracovat, budou body, přímky a kružnice. Pro ukládání údajů, které tyto prvky určují, do paměti počítače je vhodné přesně stanovit standardní tvar reprezentace základních prvků. Předpokládejme, že je dána určitá kartézská soustava souřadnic.

Standardní určení bodů bude realizováno dvojicemi jejich kartézských souřadnic, kterým vyhradíme určité pole paměti. Předpokládejme, že k programování použijeme jazyk Basic. Protože implementace tohoto jazyka se od sebe značně různí, je třeba, aby čtenář, který bude chtít využít uvedené podprogramy, provedl potřebné úpravy. Protože jsme vycházeli z velmi nízké úrovně implementace, bude možno většinou napsané části programů zestručnit, např. u přiřazovacích příkazů vynechat „LET“. Pole pro souřadnice bodů označme B. Pro naši práci většinou postačí pole pro uložení čtyřiceti bodů, z čehož ještě několik posledních bodů může být rezervováno jako vnitřní pomocné body v popisovaných podprogramech. Body, s nimiž budeme pracovat, očísujeme B1 až B40 a příslušné pole budeme deklarovat

DIM B(40, 2).

Složka B(I, 1) bude obsahovat x -ovou souřadnici a složka B(I, 2) y -ovou souřadnici bodu B(I) (je-li číslo prvku dáno proměnnou, uzavřeme ji do závorek).

Standardní určení přímek může vycházet z jejich rovnic tvaru $ax + by + c = 0$. Mnohdy je výhodné užívat normalizovaný tvar rovnice přímky, tj. takový, kde $a^2 + b^2 = 1$. Tento tvar, který dostaneme z původní rovnice jejím vydělením výrazem $\sqrt{a^2 + b^2}$ budeme v našich úvahách dále předpokládat. Přímky opět očísujeme a příslušné pole pro ukládání koeficientů a , b , c můžeme deklarovat např.

DIM P(20, 3).

Lze samozřejmě vycházet i z jiného standardního určení přímek, např. z určení bodem a vektorem, ale jednou zvolené standardní určení je nutno v celém systému dodržovat.

Standardní určení kružnic bývá realizováno souřadnicemi jejich středů a příslušným poloměrem. Pole pro ukládání souřadnic středů a poloměrů můžeme deklarovat např.

DIM K(20, 3).

Body chceme určovat ovšem i dalšími způsoby, např. jejich polárními souřadnicemi nebo jako průsečík dvou přímek. Výsledkem našich úvah, resp. odpovídajících částí programu na nich založených, bude uložení určovaných prvků ve standardním tvaru, tj. u bodů jejich kartézských souřadnic, do příslušného pole.

Jsou-li dány polární souřadnice r , α bodu, jeho pravoúhlé kartézské souřadnice vypočteme snadno:

$$x = r \cdot \cos \alpha ,$$

$$y = r \cdot \sin \alpha .$$

Příslušné příkazy v jazyce Basic mohou vypadat takto (uvažovaný bod necht' má číslo 3, úhel α (v programu pojmenovaný AL) necht' je dán v radiánech):

LET B(3, 1) = R * COS(AL)

LET B(3, 2) = R * SIN(AL).

Pro výpočet souřadnic průsečíku dvou přímek je potřeba řešit soustavu dvou lineárních rovnic

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 ,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 .$$

Předně v případě, že dané přímky jsou rovnoběžné nebo svírají velmi malý úhel, takže při reprezentaci čísel, jaká je dostupná na užitém výpočetním systému, nelze souřadnice průsečíku dostatečně přesně vypočítat, je potřeba oznámit uživateli, že průsečík nebude vypočten. Kritériem je hodnota výrazu $W = a_1b_2 - a_2b_1$; je-li tato hodnota menší než vhodně zvolené číslo WW (např. 0,00001), program oznámí tuto skutečnost a přiřadí určité proměnné (pojmenujme ji WQ) hodnotu 1, která umožní hlavnímu programu provést potřebné opatření, např. zastavit výpočet. V ostatních případech souřadnice průsečíku budou

$$x = (b_1c_2 - b_2c_1)/W \quad y = (a_2c_1 - a_1c_2)/W$$

Podprogram pro určení průsečíku B(I) přímek P(J) a P(M) v jazyce Basic může vypadat takto:

1010 REM PRUSECIK B(I) PRIMEK P(J) A P(M) — BPP

1020 LET W = P(J, 1)*P(M, 2) — P(J, 2)*P(M, 1)

1030 IF ABS (W) < WW THEN GOTO 1070

1040 LET B(I, 1) = (P(J, 2)*P(M, 3) — P(M, 2)*P(J, 3))/W

1050 LET B(I, 2) = (P(M, 1)*P(J, 3) — P(J, 1)*P(M, 3))/W

1060 GOTO 1090

1070 PRINT „BPP“, I, J, M

1080 LET WQ = 1

1090 RETURN

Pracujeme-li s body, potřebujeme často určit jejich vzdálenost. Příkaz pro výpočet vzdálenosti WD dvou bodů B(I) a B(J) může vypadat takto:

$$\text{LET WD} = \text{SQR}((\text{B(I, 1)} - \text{B(J, 1)}) \wedge 2 + (\text{B(I, 2)} - \text{B(J, 2)}) \wedge 2)$$

Přímku $P(I)$ můžeme určit např. také tak, že budeme požadovat, aby procházela bodem $B(I)$ a byla rovnoběžná s přímkou $P(M)$. Připomeneme-li si, že přímka rovnoběžná s přímkou danou rovnicí $ax + by + c = 0$ a procházející bodem se souřadnicemi x_1, y_1 je určena rovnicí $ax + by + c' = 0$, kde $c' = -ax_1 - by_1$, je zřejmé, že příkazy určující koeficienty přímky $P(I)$ mohou být

$$\text{LET } P(I, 1) = P(M, 1)$$

$$\text{LET } P(I, 2) = P(M, 2)$$

$$\text{LET } P(I, 3) = -B(J, 1) \cdot P(M, 1) - B(J, 2) \cdot P(M, 2).$$

Kružnici $K(I)$ můžeme určit např. jejím středem $B(J)$ a bodem $B(M)$, kterým má procházet. Vzdálenost bodů $B(J)$ a $B(M)$ již umíme zjistit. Údaje určující kružnici $K(I)$ budou

$$\text{LET } K(I, 1) = B(J, 1)$$

$$\text{LET } K(I, 2) = B(J, 2)$$

$$\text{LET } K(I, 3) = \text{SQR}((B(J, 1) - B(M, 1))^2 + (B(J, 2) - B(M, 2))^2) \wedge 2)$$

Tento příspěvek a dva další, které budou v dalších číslech Rozhledů na něj navazovat, nemají za cíl popsat celý systém vhodný pro řešení elementárních planimetrických úloh. Vhodné sestavení takového systému závisí na velikosti paměti počítače, na předpokládaných aplikacích apod. Jednou možností je ke každému typu úlohy přiřadit program a pak pracovat s těmito podprogramy obdobně, jako pracujeme s pravítkem a kružítkem. Vstupní údaje, které má příslušný podprogram zpracovat, se připraví před jeho voláním. Je však možno jednodušší příkazy nebo jejich skupiny vkládat přímo do sestavovaného programu. Jako pomocných proměnných uvnitř našich podprogramů budeme užívat proměnné začínající písmenem W , proto tyto proměnné nebudeme jinde používat. Chceme-li zobrazit prvky, s nimiž pracujeme, a máme k tomu potřebné technické prostředky i programové vybavení pro zobrazování úseček a kruhových oblouků, lze snadno pomocí námi připravených podprogramů a příkazů vyjádřit údaje potřebné pro program zajišťující zobrazení (nakreslení).

Řešení „Hrátek s čísly“ ze str. 370

$$\text{a) } 7 + 847 + 3847 + 847 + 7 = 5555$$

$$1 + 851 + 3851 + 851 + 1 = 5555$$

$$\text{b) } 71 + 8471 + 38\,471 + 8471 + 71 = 55\,555$$

$$\text{c) } 222 + 55 + 1 + 55 + 222 = 555$$

$$\text{d) } 248^2 = 61\,504$$

$$\text{e) } 564^2 = 318\,096$$

$$\text{f) } 174^2 = 30\,276$$

$$\text{g) } 198^2 = 39\,204$$

Statistické testování genetických hypotéz

RNDr. HELENA HUSOVÁ, CSc., PŘF UK Praha

Ve dvou předchozích příspěvcích jsme odvozovali teoretické štěpné poměry za určitých přesně definovaných předpokladů. Takto odvozené štěpné poměry byly tedy vlastně *pravděpodobnostními modely* genetických hypotéz. Ve skutečnosti se však výsledky pokusů více či méně od teoretického modelu odchylují. Pokud jsou tyto odchylky, pozorované v rozsáhlejších souborech, větší, ukazuje to zpravidla na nesprávnost hypotézy, tj. na porušení některého z předpokladů modelu — např. nesprávný předpoklad o genotypech „rodičů“. V obecnějších genetických studiích může být porušení původních předpokladů způsobeno např. existencí určitých vazeb mezi sledovanými geny, vyšší úmrtností jedinců některého genotypu apod.

Mějme tedy určitou hypotézu (vyjádřenou teoretickým štěpným poměrem), o níž předpokládáme, že by mohla platit; nejsme si tím však jisti. Máme k dispozici tzv. *výběrový soubor*, tj. soubor náhodně vybraných jedinců splňujících podmínky, za nichž byla hypotéza formulována. (Například: Hypotéza se týká genotypů „rodičovské“ dvojice. Máme k dispozici množinu všech potomků těchto „rodičů“, kterou lze považovat za náhodný výběr z množiny všech teoreticky možných potomků těchto „rodičů“.) Chceme zjistit, zda pozorování na výběrovém souboru není v příkrém rozporu s naší hypotézou. Jde tedy o to zjistit, zda se teoretické a pozorované četnosti výskytu tříd štěpného poměru navzájem příliš neliší. *Teoretickou četností* přitom rozumíme pravděpodobnost výskytu příslušné třídy násobenou rozsahem (počtem prvků) zkoumaného výběrového souboru.

V případě štěpných poměrů na dostatečně rozsáhlých výběrových souborech je k tomu nejvhodnější tzv. χ^2 — test (čti chí — kvadrát test), který nyní popíšeme.

Uvažujme pevně zvolený výběrový soubor jedinců. V každé ze tříd štěpného poměru budiž m teoretická četnost, d rozdíl mezi teoretickou a skutečnou četností této třídy v daném souboru. (Použití χ^2 -testu se doporučuje v souborech natolik rozsáhlých, aby bylo $m \geq 6$ v každé třídě štěpného poměru.) Kritériem významnosti odchylek mezi teoretickým a pozorovaným štěpným poměrem je hodnota

$$\chi^2 = \sum \frac{d^2}{m},$$

kde sčítáme přes všechny třídy štěpného poměru. Dále určíme číslo f jako tzv. *počet stupňů volnosti*; je to počet tříd štěpného poměru zmenšený o jednu třídu.

Chceme zjistit, zda vypočtená hodnota testového kritéria není příliš velká, tj. zda nepadne do tzv. *kritického oboru* testu. K tomu účelu ji porovnáváme s tzv. kritickými hodnotami[†] (vždy[†] pro příslušný počet stupňů volnosti). *Kritickou hodnotou* $\chi_f^2(\alpha)$ (kde $0 < \alpha < 1$) rozumíme číslo, pro které platí: je-li testovaná hypotéza správná, pak pravděpodobnost, že $\chi^2 \geq \chi_f^2(\alpha)$, je rovna α .

Jestliže $\chi^2 \geq \chi_f^2(\alpha)$, hypotézu zamítneme na *hladině významnosti* α ; v opačném případě ji na této hladině nezamítáme. Zdůrazněme však, že *nezamítnutí hypotézy neznamená její důkaz* (dokonce ani v tom případě, že by se teoretické a pozorované četnosti[†] navzájem rovnaly).

Hladinu testu α volíme s přihlédnutím k důsledkům testovaného jevu. Jsou-li jeho důsledky závažné a je nutno zmenšit riziko, že bychom hypotézu zamítli v případě, že je správná, volíme hodnotu α nižší než v běžných případech. Nejčastěji používanými hladinami jsou $\alpha = 0,05$ nebo $\alpha = 0,01$. Je-li hodnota testového kritéria χ^2 menší než $\chi_f^2(0,05)$, bývá odchylka považována za statisticky nevýznamnou; je-li naopak větší než $\chi_f^2(0,01)$, bývá již považována za statisticky vysoce významnou.

Kritické hodnoty $\chi_f^2(\alpha)$ jsou tabelovány. Zde uvádíme první řádky tabulky (pro $f \leq 5$).

Tab. 1. Kritické hodnoty $\chi_f^2(\alpha)$ pro vybrané hodnoty α (zaokrouhleno na dvě desetinná místa).

f	α					
	0,99	0,95	0,90	0,05	0,01	0,001
1	0,00	0,00	0,02	3,84	6,63	10,83
2	0,02	0,10	0,21	5,99	9,21	13,82
3	0,11	0,35	0,58	7,81	11,34	16,27
4	0,30	0,71	1,06	9,49	13,28	18,47
5	0,55	1,15	1,61	11,07	15,09	20,52

Celý postup si nyní osvětlíme na příkladech.

Příklad 1. Ve výběrovém souboru o rozsahu 50 jedinců byly zjištěny četnosti genotypů:

$$20AA : 20Aa : 10aa .$$

Testujme hypotézu, že tito jedinci tvoří náhodný výběr z potomstva vzniklého křížením typu $Aa \times Aa$.

Řešení. Při splnění obecných předpokladů, které jsme si uvedli dříve, odpovídá této hypotéze — jak již víme — teoretický štěpný poměr

1AA : 2Aa : 1aa, takže teoretické četnosti výskytu jednotlivých genotypů v souboru 50 jedinců jsou

$$12,5AA : 25Aa : 12,5aa .$$

Hodnota testového kritéria je tedy

$$\chi^2 = \frac{(12,5 - 20)^2}{12,5} + \frac{(25 - 20)^2}{25} + \frac{(12,5 - 10)^2}{12,5} = 6,00 .$$

Počet stupňů volnosti je $f = 2$. Protože

$$\chi^2 = 6,00 \geq \chi^2_2(0,05) = 5,99 ,$$

hypotézu zamítáme na hladině $\alpha = 0,05$. Chceme-li však snížit riziko zamítnutí hypotézy v případě, že je správná, je nutno volit hladinu významnosti nižší — např. $\alpha = 0,01$. Na této hladině hypotézu nemůžeme zamítnout, neboť

$$\chi^2 = 6,00 < \chi^2_2(0,01) = 9,21 .$$

Příklad 2. Ve výběrovém souboru o rozsahu 720 jedinců byl nalezen fenotypový štěpný poměr:

$$412AB : 125Ab : 145aB : 38ab .$$

Testujme hypotézu, že jde o náhodný výběr z potomstva vzniklého křížením $AaBb \times AaBb$.

Řešení. Hypotéze odpovídá teoretický štěpný poměr $9AB : 3Ab : 3aB : 1ab$, takže teoretické četnosti štěpných tříd jsou $405AB : 135Ab : 135aB : 45ab$. Odtud vypočteme hodnotu testového kritéria

$$\chi^2 = 2,6914 = 2,69$$

s počtem stupňů volnosti $f = 3$. Poněvadž $\chi^2 < \chi^2_3(0,05) = 7,81$, nelze na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ hypotézu zamítnout.

Příklad 3. V pokusu z příkladu 2 se pokračovalo až do desetinásobného rozsahu výběrového souboru. Byly zjištěny výsledky:

a) $4120AB : 1250Ab : 1450aB : 380ab$,

b) $4020AB : 1320Ab : 1410aB : 450ab$.

V obou případech testujme tutéž hypotézu jako v příkladu 2.

Řešení. Teoretické četnosti jsou $4050AB : 1350Ab : 1350aB : 450ab$, počet stupňů volnosti a kritické hodnoty jsou tytéž jako v předchozím příkladu. V případě a) je hodnota testového kritéria desetkrát větší než v příkladu 2, tj. $\chi^2 = 26,91$ (ověřte přímým výpočtem). Toto číslo výrazně převyšuje kritické hodnoty i na nižších hladinách významnosti. Nalezené odchylky jsou tedy statisticky vysoce významné a hypotézu zamítneme. V případě b) je hodnota $\chi^2 = 3,56 < \chi^2_3(0,05)$, takže hypotézu nemůžeme na hladině $\alpha = 0,05$ zamítnout.

Nyní si může čtenář samostatně vyřešit tři úlohy.

Úloha 1. V potomstvu „rodičovské“ dvojice byly nalezeny tyto četnosti fenotypových tříd: 16 jedinců fenotypu A , 12 jedinců fenotypu a . Testujte hypotézu, že šlo o křížení typu $Aa \times Aa$.

(Výsledek: teoretické četnosti jsou $21A : 7a$; $\chi^2_1(0,05) < \chi^2 \doteq 4,76 < \chi^2_1(0,01)$, takže hypotézu zamítáme na hladině $\alpha = 0,05$, ale nemůžeme ji zamítnout na hladině $\alpha = 0,01$).

Úloha 2. Zastavme se ještě u příkladu 3a). Dokažte, že platí: Mějme dva výběrové soubory o rozsazích $N_1, N_2 = k \cdot N_1$, přičemž na obou souborech testujeme tutéž hypotézu o štěpných poměrech. Jsou-li relativní četnosti odpovídajících si tříd v obou souborech stejné, pak hodnota testového kritéria χ^2 v druhém souboru je rovna k -násobku hodnoty kritéria χ^2 z prvního souboru.

Lze tedy říci: Jsou-li relativní četnosti tříd štěpného poměru, které byly empiricky zjištěny ve výběrovém souboru, odlišné od relativních četností teoretických, pak tyto odchylky jsou tím významnější, čím je rozsah výběrového souboru větší. Poznamenejme, že obdobná tvrzení o větší statistické významnosti odchylek ve větších výběrových souborech — vždy v přesně definovaném smyslu — platí při statistickém testování hypotéz obecně.

Úloha 3. Vraťme se na závěr k jednomu z klasických *Mendelových* pokusů. Byly sledovány tyto dva znaky: tvar semen — kulatý (A), hranatý (a); jejich zbarvení — žluté (B), zelené (b). Při křížení heterozygotních „rodičů“ bylo získáno 556 „potomků“ s četnostmi $315AB : 108Ab : 101aB : 32ab$. Testujte hypotézu, že teoretický štěpný poměr je $9AB : 3Ab : 3aB : 1ab$.

(Výsledek: $\chi^2 \doteq 0,47 < \chi^2_3(0,05)$, takže hypotézu nezamítáme.)

V této poslední úloze bylo dokonce $\chi^2 < \chi^2_3(0,90) \doteq 0,58$. V takovýchto případech, kdy odchylky jsou velmi nevýznamné, říkáme, že nalezené empirické výsledky *ukazují na velmi dobrou shodu* s testovanou hypotézou. Připomeňme však znovu, že výsledek žádného statistického testu sám o sobě nemůže být důkazem zkoumané hypotézy.

Je ovšem nutno zdůraznit, že hypotézy, které mají obecnější dosah, jsou testovány na mnoha výběrových souborech a jsou studovány i jinými vědeckými metodami.

Doporučená literatura :

- [1] Fabian, F.: *Z teorie pravděpodobnosti a Matematická statistika*. Kap. 8 a 9 in: Havlíček a kol.: *Cesty moderní matematiky*. Praha, Horizont 1976.
- [2] Sokolovskaja, B. Ch., Pikálek, P.: *Genetika v příkladech*. Praha, SPN 1983.

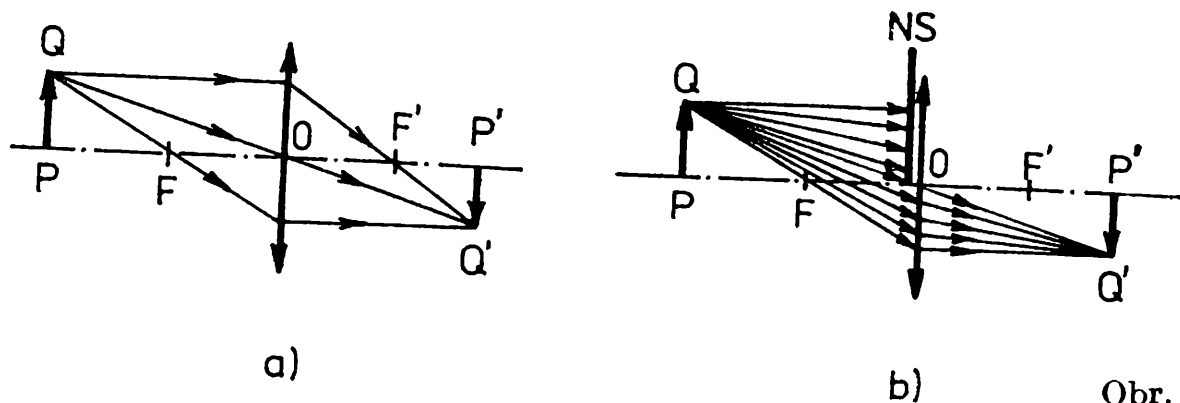
Geometrické konstrukce obrazových světelných paprsků u kulových čoček

Doc. RNDr. ing. JAROSLAV POSPÍŠIL, CSc., UP Olomouc

Kulová (sférická) čočka je průsvitné prostředí (např. sklo) omezené dvěma kulovými lámavými plochami. Ke kulovým čočkám řadíme i čočky, u kterých je jedna plocha kulová a druhá rovinná. Tlustá kulová čočka má vzdálenost d mezi vrcholy omezujících kulových ploch, měřenou na optické ose čočky (na spojnici středů křivosti kulových ploch) a nazývanou tloušťka čočky, nezanedbatelnou v porovnání s poloměry křivosti hraničních ploch. Lze-li tloušťku d vůči zmíněným poloměrům křivosti zanedbat, hovoříme o tenké čočce. V tomto článku si všimneme některých zvláštních případů geometrické (paprskové) konstrukce obrazových světelných paprsků (kdy neuvažujeme vlnovou vlastnost světla a šíření světla znázorňujeme paprsky) u kulových čoček, které jsou někdy ve středoškolské optice opomenuty. Pro jednoduchost se zaměříme na tenké kulové čočky se středem O , které jsou z látky o indexu lomu $n > 1$ a jsou umístěny ve vzduchu (o indexu lomu, jehož hodnota je prakticky jednotková). K znázornění těchto čoček budeme využívat známých schematických znaků.

Ze středoškolské optiky je známo, že čočky realizují zobrazení lomem světelných paprsků a že ke geometrické konstrukci paprskového optického obrazu, vytvořeného tenkou kulovou čočkou ve vzduchu (u níž známe její střed O a polohy jejího předmětového a obrazového ohniska F a F'), stačí využít dvou pomocných význačných paprsků (případně pro kontrolu i třetího pomocného význačného paprsku). Jde o paprsek dopadající na čočku rovnoběžně s optickou osou, který se čočkou láme do obrazového ohniska F' , dále o paprsek, který prochází předmětovým ohniskem F a po průchodu čočkou se šíří rovnoběžně s optickou osou, a případně o paprsek, který dopadá šikmo do středu O čočky, a za přijatého předpokladu, že předmětové a obrazové prostředí jsou stejná (vzduchová), se za čočkou šíří v nezměněném směru (viz obr. 1a, kde je spojnou čočkou zobrazovaný předmět vyznačen orientovanou šipkou

$\vec{y} = \overrightarrow{PQ}$ a jeho paprskový optický obraz je $\vec{y}' = \overrightarrow{P'Q'}$). Uvedená konstrukce je samozřejmě aplikovatelná i na rozptylné čočky, u nichž pořadí význačných bodů F , O , F' je opačné (tj. F' , O , F), než tomu je u spojných čoček. Přitom předpokládáme, že optická osa čočky je vodo-



Obr. 1

rovná a že světlo se šíří v kladném smyslu zleva doprava. Je známo, že rozptylné čočky dávají vždy přímý, zmenšený a zdánlivý optický obraz, kdežto u spojně čočky vlastnosti optického obrazu závisí na vzdálenosti předmětu od čočky.

Všimněme si nyní případu, kdy polovina spojně čočky je zakryta neprůsvitným stínítkem NS tak, jak to je znázorněno na obr. 1b, a určíme, zda paprskový optický obraz v tomto případě vznikne. Přitom si musíme uvědomit, že paprskový optický obraz libovolného předmětového bodu je vždy výsledkem protnutí teoreticky nekonečného počtu světelných paprsků, i když se při jeho geometrické konstrukci omezujeme na dva nebo tři význačné paprsky. V daném případě podle obr. 1b stínítko NS zadrží jen část světelných paprsků, které dopadají na čočku. Zbývající paprsky čočkou procházejí a vytváří tedy paprskový optický obraz předmětu, takže i v tomto případě optický obraz předmětu vznikne a protože je vytvořen menším počtem paprsků, bude tmavší (méně jasný).

Zvolíme-li stínítko s kruhovým otvorem, umístěné před celou reálnou čočkou, pak optický obraz bude sice méně jasný, ale bude ostřejší (jak to známe například z fotografické optiky). Tuto skutečnost lze snadno vysvětlit, uvědomíme-li si, že při uvedených geometrických konstrukcích se předpokládaly zanedbatelné paprskové (geometrické) optické vady (odchyly od ideálního paprskového optického zobrazení), kterým v případě jednobarevného světla patří otvorová vada, zkreslení, zklenutí, astigmatismus a koma (jejich vlastnosti jsou popsány v běžných učebnicích fyziky). To znamená, že se předpokládalo ideální paprskové optické zobrazení, kdy obrazem bodu je bod, přímkou přímka, křivka křivka téhož tvaru, roviny rovina a plochy plocha téhož tvaru. V praxi se však u reálných zobrazovacích optických elementů a soustav tyto vady více nebo méně projevují, a to tím více, čím je zobrazující světelný svazek širší a více skloněný k optické ose. Při zaclonění čočky uvedeným stínítkem prochází čočkou užší svazek světelných paprsků, a tedy zmí-

něné paprskové optické vady se projevují méně a obraz je ostřejší (kvalitnější).

Někdy je potřebné určit chod obrazového světelného paprsku r'_1 za spojnou čočkou ve vzduchu o neznámých polohách jejích ohnisek F a F' , známe-li jeho chod r_2 před touto čočkou a známe-li celý chod nějakého jiného světelného paprsku danou čočkou (například paprsku r_1 na obr. 2a). Komplikovanější řešení spočívá ve využití geometrických konstrukcí podle obr. 1a. K tomu účelu se sestrojí pomocný předmět

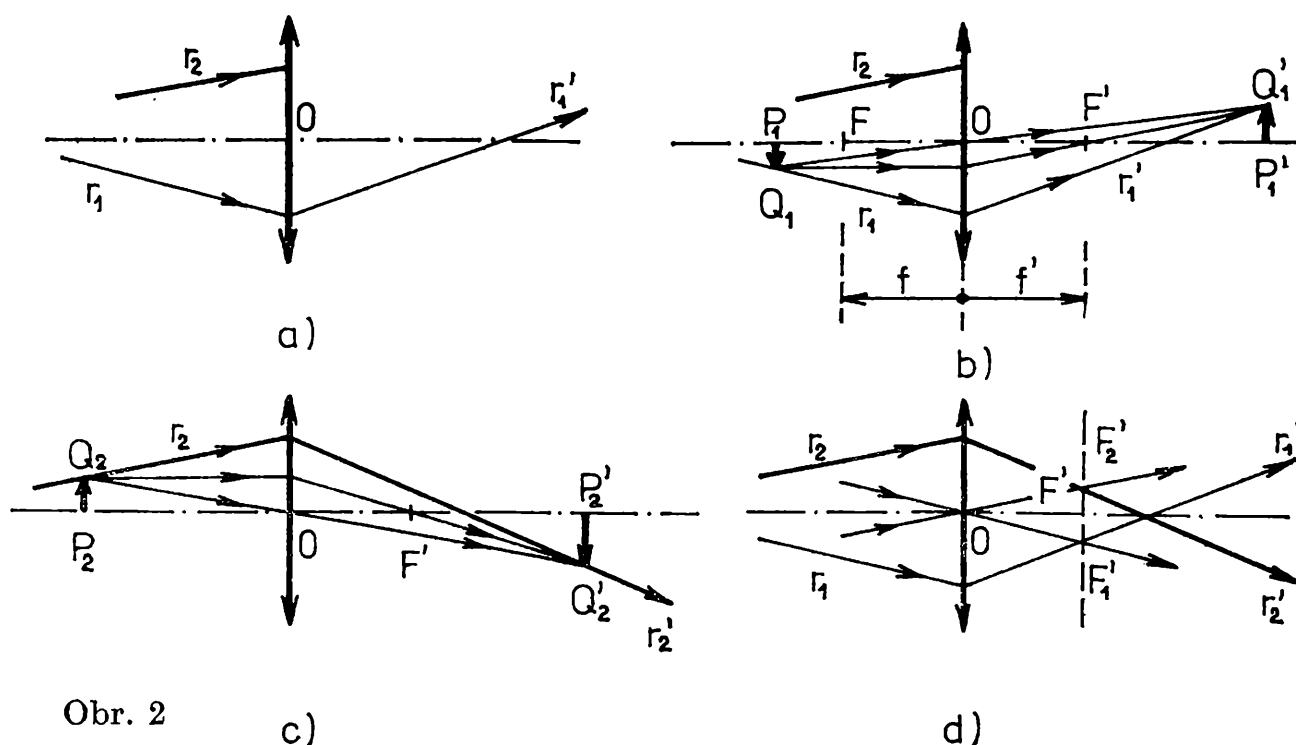
(šipka) $\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{P_1Q_1}$ tak, aby se jeho konec (špička) dotýkal paprsku r_1 (bod Q_1 na obr. 2 b). Dále vedeme z pomocného bodu Q_1 pomocný význačný paprsek, který prochází středem O čočky. Tento paprsek projde v našem případě stejného předmětového a obrazového prostředí středem čočky bez lomu a v určitém bodě Q'_1 protne obrazový paprsek r'_1 . Bod Q'_1 je zřejmě paprskový obraz pomocného bodu Q_1 . Nyní stačí vést z bodu Q_1 druhý pomocný význačný paprsek, rovnoběžný s optickou osou čočky. Tento paprsek po lomu čočkou prochází také obrazem Q'_1 a jeho průsečík s optickou osou čočky je hledané obrazové ohnisko F'

čočky. Odpovídající ohniskové vzdálenosti $f = \overrightarrow{OF}$ a $f' = \overrightarrow{OF'}$ jsou v našem případě stejného předmětového a obrazového prostředí stejně velké ($|f| = |f'|$), ale opačně orientované. Zvolíme-li kladnou orientaci ve směru dopadajících světelných paprsků, pak na obr. 2b platí $f < 0$ a $f' > 0$.

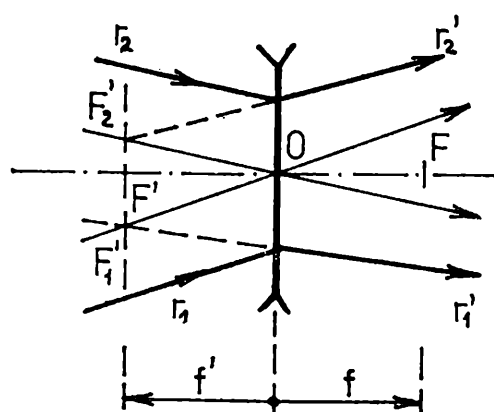
Po předchozím určení polohy ohniska F' naší čočky sestrojíme chod paprsku r_2 po jeho lomu čočkou tak, že nakreslíme ještě jeden pomocný

předmět (šipku) $\overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{P_2Q_2}$, jehož bod Q_2 se dotýká paprsku r_2 (obr. 2c). Využitím určeného obrazového ohniska F' a dvou pomocných význačných paprsků můžeme pomocí konstrukce podle obr. 1a sestrojit paprskový obraz $\overrightarrow{y'_2} = \overrightarrow{P'_2Q'_2}$ předmětu $\overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ (obr. 2c). Hledaný paprsek r'_2 bude procházet bodem Q'_2 .

Jednodušší a tím rychlejší způsob konstrukce paprsků r'_2 vypadá takto: K určení polohy obrazového ohniska F' naší spojně čočky vedeme jejím středem O pomocný význačný paprsek, rovnoběžný s paprskem r_1 (obr. 2d). Protože tyto dva k optické ose čočky skloněné předmětové paprsky jsou rovnoběžné (jako kdyby se šířily v předmětovém prostoru z nekonečna), protnou se v obrazovém prostoru v obrazové ohniskové rovině čočky, a to v mimoosovém bodě F'_1 . Ta protíná optickou osu čočky v hledaném obrazovém ohnisku F' . Potom vedeme středem O čočky další pomocný význačný paprsek, nyní rovnoběžný s předmětovým paprskem r_2 . Tyto dva předmětové paprsky se po průchodu čočkou také protínají v její obrazové ohniskové rovině, a to v mimoosovém bodě F'_2 . Tímto způsobem najdeme hledaný paprsek r'_2 .



Obr. 2



Obr. 3

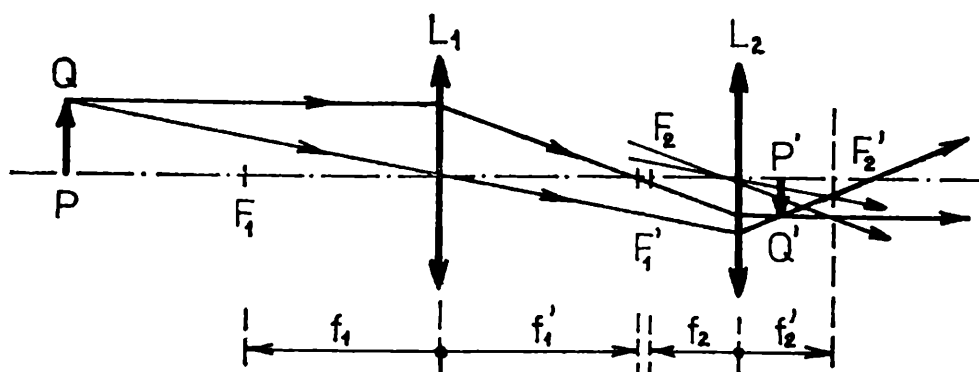
Uvedené geometrické konstrukce lze aplikovat i na rozptylnou čočku (viz obr. 3, na němž znázorněná konstrukce odpovídá konstrukci podle obr. 2d).

Zajímavý případ nastane, když část předmětu konečné šířky bude před předmětovým ohniskem F spojně čočky a část bude za ním. Ze středoškolské optiky víme, že předmětové body před předmětovým ohniskem F (před předmětovou ohniskovou rovinou) se zobrazí ve skutečné obrazy za čočkou a předmětové body za ohniskem F (mezi ohniskem F a čočkou) se zobrazí před čočkou jako zdánlivé body. Čím je předmětový bod blíže k předmětové ohniskové rovině, tím dále (za nebo před čočkou) se vytvoří jeho obraz. Předmětovým bodům v předmětové ohniskové rovině přísluší obrazy v nekonečnu obrazového a předmětového prostoru. K určení paprskového optického obrazu uvažovaného

předmětu sestrojíme paprskové obrazy jeho několika typických bodů, které jsou v různých vzdálenostech od čočky, a to metodou podle obr. 1a. Výsledkem je paprskový optický obraz předmětu, který se skládá ze dvou částí. Jedna (skutečná) je za a druhá (zdánlivá) je před čočkou. Každá z těchto částí spojitě proměnného příčné zvětšení opačného znaménka začíná v jisté konečné vzdálenosti od čočky (kde je příčné zvětšení nejmenší) a rozprostírá se do nekonečna (jemuž přísluší nekonečné příčné zvětšení). Takže předmět se vlivem spojně čočky může současně zobrazit ve skutečný převrácený a zdánlivý přímý optický obraz.

Dále je ukázána geometrická konstrukce chodu světelného paprsku centrovanou soustavou dvou tenkých spojných čoček L_1 a L_2 ve vzduchu (dvěma tenkými spojnými čočkami se společnou optickou osou), jejichž známá ohniska jsou F_1, F'_1 a F_2, F'_2 . Předmět je tvořen orientovanou

úsečkou $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{PQ}$ (obr. 4). Správný postup geometrické konstrukce se zakládá na tom, že využitím význačných paprsků způsobem podle obr. 1a se sestrojí odpovídající paprsky za první čočkou L_1 , které dopadají na druhou čočku L_2 . K získání příslušných paprsků za čočkou L_2 vedeme pomocné význačné paprsky, rovnoběžné s našimi paprsky a procházející středem druhé čočky L_2 . Při tom využijeme konstrukce podle obr. 2d (rovnoběžné paprsky se po průchodu čočkou L_2 protínají v její obrazové ohniskové rovině). V průsečíku paprsků za druhou čočkou L_2 bude výsledný paprskový obraz Q' bodu Q uvažovaného předmětu $\overrightarrow{PQ}$.



Obr. 4

Uvědomíme si, že konstruovat výsledný paprskový optický obraz tak, že sestrojíme nejdříve meziobraz vytvořený první čočkou L_1 (druhou čočkou L_2 nebereme v úvahu) a potom tento meziobraz považujeme za předmět pro druhou čočku L_2 a sestrojíme jeho obraz (bez ohledu na první čočku L_1), který má být výsledným obrazem, nevede vždy k správnému výsledku. To lze například ukázat na optické soustavě podle obr. 4. Obě zmíněné metody vedou k stejnému výsledku jen při některých

uspořádáních čoček L_1 a L_2 a při některých vzdálenostech předmětu vzhledem k první čočce L_1 . V uspořádání podle obr. 4 dostaneme stejný výsledek oběma zmíněnými způsoby například tehdy, když předmět $\vec{Q}$ je mezi předmětovým ohniskem F_1 a čočkou L_1 .

! DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD



O školních a studentských letech Maxe von Laueho

Doc. RNDr. IVO KRAUS, DrSc.,
FJFI ČVUT

Encyklopedické heslo „Max Felix Theodor von Laue“

Narodil se 9. října 1879 ve Pfaffendorfu u Koblence (NSR), zemřel 4. dubna 1960 v Berlíně na následky zranění při autohavárii. Studoval

Göttingen, Mnichově a Berlíně. Byl žákem a později (1905—1908) asistentem Maxe Plancka v berlínském Ústavu teoretické fyziky. Při svém působení na univerzitě v Mnichově (1909—1912) navrhnul experiment, kterým byla prokázána zároveň jak vlnová povaha rentgenového záření, tak i existence krystalové mřížky.¹⁾

¹⁾ O Laueho pokusu pojednává článek „Objevy, které se staly základem fyziky pevných látek“, *Rozhledy matematicko-fyzikální* 63, 1984/85, 76—84.

Byl profesorem univerzit v Curychu (1912—1913), ve Frankfurtu (1914—1918), v Berlíně (1919—1943) a v Göttingen (po roce 1946). Řadu let vykonával funkci zástupce ředitele Fyzikálního ústavu v Berlíně a v Göttingen; od roku 1951 do 1955 řídil Ústav fyzikální chemie a elektrochemie v Berlíně-Dahlemu.

Největších vědeckých úspěchů dosáhl v oblasti teorie interakce rentgenových paprsků s krystalickou látkou. Za objev difrakce rtg. záření na krystalech (1912) mu byla udělena Nobelova cena (1914). Zabýval se také supravodivostí a teorií relativity. Do mnoha jazyků byly přeloženy jeho Dějiny fyziky.

První představy o tom, jaké by mělo být naše životní poslání, se obvykle ztotožňují s profesí osobních vzorů v rodině. Časem však ztratí zaměstnání rodičů svou přitažlivost, v očích dětí se stane dokonce až příliš prozaické. Jestliže nepřerostla naše přání meze rozumné romantiky, to posoudí ve většině případů dostatečně včas škola. Rozhodující úlohu, ať už přímo nebo nepřímo, hraje při volbě povolání učitel, jeho přirozená autorita, získaná hloubkou znalostí v oboru i uměním probudit k němu lásku u svých žáků.

Berlínská Uranie

Podle Laueho vzpomínek na dětství to byl dědeček, kdo se jako první pokusil usměrnit jeho zájmy. V 10 letech dal svému vnukovi k vánocům bohatě ilustrovaný desetidílný Brehmův život zvířat. Zůstalo však jen při četbě a častém prohlížení obrázků, hlubší vztah k biologii Laue nikdy nezískal. Odezvu nenašlo ani pozdější matčino přání, aby se stal právníkem. O jeho budoucnosti snad rozhodlo setkání s fyzikou v tercii berlínského gymnázia. „Tehdy jsem uslyšel, ani nevím v jaké souvislosti, o vylučování mědi z roztoku modré skalice (síranu měďnatého) účinkem elektrického proudu. Několik dnů se mi nedařilo přemýšlet o ničem jiném. Mé podivné chování znepokojilo matku natolik, že nezbývalo, než se jí svěřit. Když poznala, oč jde, zařídila, abych mohl chodit do Uranie.“ Tak se jmenovala populárně vědecká společnost, která ve svých objektech na Tauberstrasse instalovala velký počet přístrojů pro jednoduché pokusy umožňující pochopit podstatu různých fyzikálních jevů. Stačilo pouze podle návodu stisknout správný knoflík.

Gymnázium ve Strasbourgu

Návštěvy Uranie však trvaly jen krátce, rodina se přestěhovala do Strasbourgu. Na tamějším protestantském gymnáziu prožil Laue šťastná studentská léta. Bylo to především díky profesoru Göhringovi, který ho učil matematice a fyzice. „Profesor Göhring, starý mládenec a podivín, měl tisíce chyb, které by každého jiného před třídou gymnazistů zcela znemožnily. Všechny své nedostatky však kompenzoval duševní

převahou, kterou uznávali i ti nejprohnanější darebové. Provést při jeho hodině nějakou lumpárnu nikoho ani nenapadlo. Proto nemusel trestat a rovněž napomenutí byla jen výjimečná. Mládí má velmi jemný cit pro duševní hodnoty člověka a umí si jich vážit.“ Profesoru Göhringovi vděčí Laue za dobré základy geometrie, algebry a trigonometrie.

Při středoškolském studiu je stejně důležité získat konkrétní vědomosti jako rozvíjet logické myšlení. „Vzdělání je to, co zůstane, jestliže zapomeneme všechno naučené“ — v tomto duchu vychovával profesor Göhring. Když se přesvědčil o nadání svého žáka, pobízel ho čas od času, aby řešil i úlohy, které už do školské matematiky nepatřily.

S nadprůměrnými schopnostmi teoreticky uvažovat kontrastovaly Laueho problémy při mechanickém počítání. „U maturitní písemné práce, kde byl jeden z příkladů numerického charakteru, mi dohlížející profesor doporučil, abych se o výpočet ani nepokoušel, protože to stejně k ničemu nebude.“ Později na univerzitě musel ovšem Laue spolehlivě zvládnout i tuto oblast matematiky.

U Göhringa poprvé poznal skutečnou fyziku. Tentokrát to však, na rozdíl od berlínské Uranie, nebyly experimenty (gymnázium nemělo k vybavení fyzikální laboratoře dostatek finančních prostředků), které na něj zapůsobily. V rozvoji Laueho osobnosti je toto období spojeno s počátky samostatného studia vědeckých prací. „Profesor Göhring byl mezi ostatními učiteli výjimečný i tím, že uměl doporučit četbu vhodných odborných knih. Na jeho radu jsem si v říjnu 1896 obstaral Přednášky a proslovy od H. Helmholtze²⁾. Byla to četba velice obtížná, vydržel jsem však až do konce. Nemohl jsem se vzdát, protože podle profesora Göhringa šlo o populární spisy pro toho, kdo není zcela padlý na hlavu.“ Laue nečetl jen stati s fyzikální tematikou nebo akademické proslovy, ale poctivě se snažil pochopit i filozofické úvahy. Mimořádně na něj zapůsobila Helmholtzova autobiografie. Tehdy začal uvažovat o studiu na univerzitě.

Školní léta by životní osudy Laueho ovlivnila patrně mnohem méně, kdyby mezi svými spolužáky nenašel dva kamarády stejných zájmů. „Náš matematický triumvirát brzy znalo celé gymnázium, přestože jsme náplň „činnosti“ před ostatními skrývali. Naším „tajemstvím“ byly první kontakty se základy diferenciálního a integrálního počtu, zápolení s učebnicí fyziky a vymýšlení různých pokusů. Experimenty začaly být zvláště zajímavé, když se nám podařilo koupit malý indukční přístroj a získávat s ním vysoká elektrická napětí. Počátkem roku 1896 jsme se dozvěděli o Röntgenově objevu X-paprsků. Zopakovat historickou událost s dostupnými jednoduchými výbojkami bylo pro nás ovšem nemožné.“

²⁾ Hermann von Helmholtz (1821–1894), německý fyzik, fyziolog, matematik a filozof.

Velký problém při mnoha pokusech představovaly primární zdroje proudu, protože připojení soukromých bytů na městskou elektrickou síť nebylo koncem minulého století ještě zcela běžné. Východisko našel Laue se svými spolužáky v konstrukci různých elektrických článků.³⁾ „Velmi jasně si vzpomínám i na galvanometr vlastní výroby, na náš zájem o optiku, zvláště interferenci světla, a tehdy ještě záhadnou difrakci. Přitažlivost a kouzlo optických jevů byly v tom, že jsme je mohli vnímat přímo smyslově, bez měřících přístrojů.“

Vztah ke geometrické a fyzikální optice, který Laue získal na gymnáziu, sehrál neobyčejně významnou roli v roce 1912 při objevu difrakce rentgenových paprsků na krystalech.

Maturitní zkoušku skládal v březnu 1898. Rozhodně stojí za to uvést, jak komise klasifikovala studenta, který o 16 let později přebíral Nobelovu cenu. „Dostatečný“ z němčiny, francouzštiny a dějepisu, „dobrý“ v náboženství, latině a řečtině, „velmi dobrý“ ve fyzice a matematice. U známky z němčiny bylo poznamenáno: „Jeho duševní možnosti jsou vyšší než schopnost písemného nebo ústního vyjadřování.“ (Laue často vzpomínal: „Jako můj vlastní je Schillerův vzdech o duši, která sice hovoří, ale není schopna se vyjádřit.“)

Angličtina na tehdejších německých gymnáziích chyběla. Laue se ji později naučil sám četbou vědeckých časopisů a knih. Zcela odkázaný na tento jazyk byl při svých pobytech v Americe. Přesto se vždy cítil jistější s „dostatečnou“ gymnaziální francouzštinou. Jeho vzpomínky potvrzují pravdivost německého přísloví „Co se nenaučil Honzíček, to se Honza už nenaučí.“

Na univerzitě

Pár dnů po maturitě musel Laue na vojnu, která pro něj znamenala „zastavení duševního vývoje“ Situaci mu poněkud ulehčilo, že splnil přání svého otce a složil zkoušky pro záložní důstojníky; díky tomu získal povolení v zimním semestru 1898/99 navštěvovat na strasbourgské univerzitě přednášky z experimentální fyziky.

Přestože z přírodních věd dával Laue jednoznačně přednost matematice, fyzice a chemii, užší zaměření — teoretickou fyziku — si zvolil teprve v Göttingen, kde studoval od podzimu 1899 do konce roku 1901. Na jeho konečné rozhodnutí měl největší vliv profesor Voigt⁴⁾ a texty přednášek Gustava Kirchhoffa.⁵⁾

³⁾ Elektrochemický (galvanický) článek — soustava schopná přímo měnit chemickou energii na energii elektrickou.

⁴⁾ Waldemar Voigt (1850—1919), německý fyzik, zabýval se zejména krystalografií, termodynamikou a magnetooptikou.

⁵⁾ Gustave-Robert Kirchhoff (1824—1887), německý fyzik, formuloval zákony pro výpočet elektrického proudu nebo napětí v elektrické síti, zákony pro teplotní zářič, objevil cesium a rubidium.

„Žasnul jsem, jak mnoho se dá o přírodě vypovědět pomocí matematických metod, jak je teorie schopna objasnit dosud nepochopitelné skutečnosti. S úctou a obdivem jsem poslouchal přednášky vynikajícího matematika Davida Hilberta.“⁶⁾

U něho si Laue uvědomil, že hlavní význam matematiky pro všeobecné vzdělání člověka je v tom, aby nám dala možnost nejčistšího a nejbezprostřednějšího prožitku pravdy.

„I když na gymnáziu patřily k mým největším radostem elegantně provedené důkazy matematických tvrzení, hlouběji mě zajímalo jen využití matematiky ve fyzice. Zabývat se čistou matematikou bylo pro mne jako plavat v prázdném prostoru nebo působit silou na těleso, které neexistuje.“

Laue byl velmi disciplinovaný posluchač univerzitních přednášek. Přesto se přiznává, že více než mluvené slovo pro něj znamenaly knihy — to, co viděl „černé na bílém“ Vyhovovalo mu, že četbu mohl kdykoliv přerušit, o přečteném přemýšlet a k nejasnému se podle potřeby znovu vracet. Přednášky ho mnohdy jen inspirovaly, s jakými otázkami se má do hloubky seznámit v odborné literatuře.

Uprostřed zimy 1901/1902 přešel Laue z Göttingen na univerzitu do Mnichova. Užitek mu však zde přineslo jen fyzikální praktikum u Wilhelma Conrada Röntgena. O půl roku později se v Berlíně setkává s Planckem,⁷⁾ a to nejen na přednáškách z teoretické optiky, termodynamiky a teorie plynů, ale i jako s vedoucím své disertace o teorii interferenčních jevů na planparalelních destičkách.

S prací je hotov uprostřed léta 1903; v téže době získává také doktorát z matematiky a z filozofie. Vysokoškolská studia si potom prodloužil ještě o čtyři semestry v Göttingen. Navštěvoval zde přednášky z elektro nové teorie a geometrické optiky a složil zkoušky, které ho opravňovaly učit na vysoké škole.

Koncem roku 1905 nastoupil Laue do svého prvního místa — stal se asistentem Maxe Plancka v berlínském Ústavu teoretické fyziky.

⁶⁾ David Hilbert (1862—1943), německý matematik a logik; základní význam mají jeho práce o algebře, teorii čísel a analýze.

⁷⁾ Max Planck (1858—1947), německý fyzik, zakladatel kvantové mechaniky.

O Čěku Strouhalovi



Záříjový trochu poeticky laděný článek o historii a současnosti budovy Fyzikálního ústavu matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy byl vlastně také mimo jiné věnován památce významného českého fyzika profesora Čěka (Vincence) Strouhala (10. 4. 1850—23. 1. 1922), jehož 140. výročí narození si připomínáme v tomto měsíci. Profesor Strouhal věnoval organizaci výuky a výzkumu a budování stánku české univerzitní fyziky mnoho svých sil a času, a to i na úkor vlastní vědecké práce, a jeho úsilí bylo korunováno úspěchem.

Strouhal byl jedním z českých žáků *Ernsta Macha* (1838—1916) na pražské univerzitě. Po absolutoriu pracoval po tři roky na hvězdárně, kde se velmi sblížil s předním českým astronomem a teoretickým fyzikem *Augustem Seydlerem* (1849—1891). V letech 1875—1882 pracoval ve Würzburgu u Friedricha Kohlrausche, kde se zdokonalil zejména v experimentální fyzice. Tam se také roku 1878 habilitoval svou prací o vzniku třecích tónů a s Američanem C. Barusem publikoval svou nejvýznamnější výzkumnou práci o magnetických a galvanických vlastnostech oceli. V hydrodynamice a aerodynamice je známo bezrozměrné takzvané *Strouhalovo číslo*, které udává vlastnosti kmitavých pohybů v proudící tekutině. Vyjadřuje poměr rychlosti proudění k součinu kmitočtu a charakteristické délky.

V roce 1882 se Strouhal stal prvním profesorem experimentální fyziky na české univerzitě a věnoval mnoho obětavého úsilí pedagogické práci a materiální základně našeho fyzikálního výzkumu. Patří k průkopníkům, na které dnešní generace našich fyziků i široká kulturní obec vděčně vzpomínají.

iš

Stačí jen přemýšlet

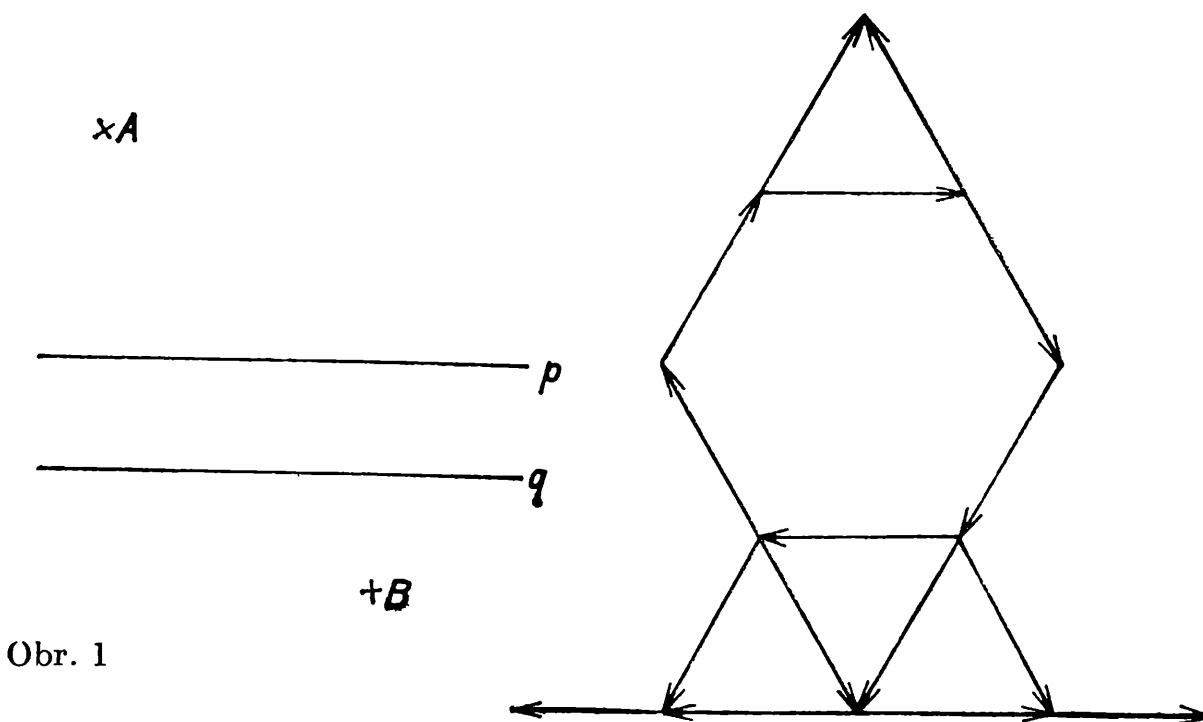
Osm úloh, které postupně uvedeme, lze jednoduše vyřešit bez počítání. V úlohách 4 až 8 stačí znát jen vzorec pro obsah trojúhelníku.

1. Které z čísel 17^{100} , 31^{80} je větší? Při řešení této úlohy se uplatní mocniny čísla 2 a tato věta:

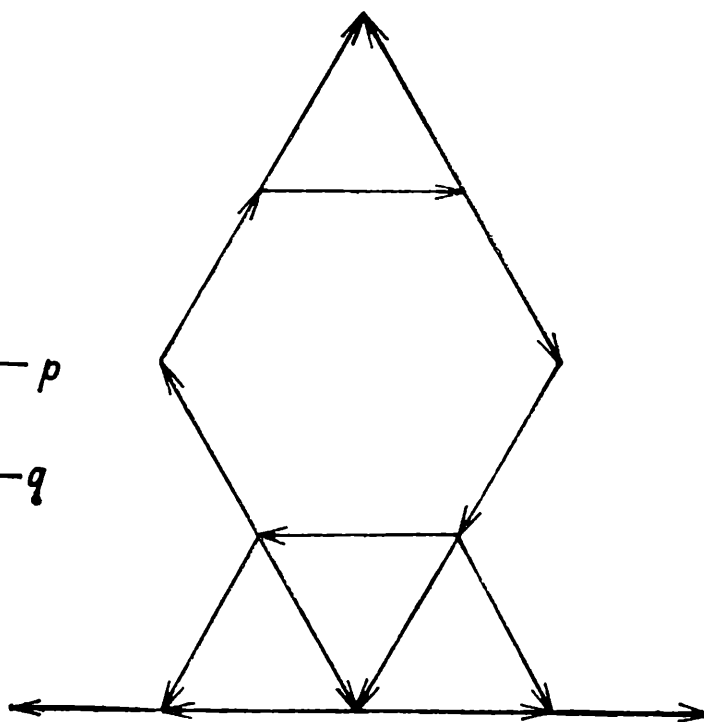
Je-li $a > b > 0$, $n > 0$ celé, je $a^n > b^n$.

2. V rovném volném terénu, kde jsou dána místa A , B , vede přímá silnice, jejíž okraje jsou na obr. 1 znázorněny rovnoběžkami p , q . Při přecházení silnice se musí jít kolmo na její kraje p , q . Jaká je potom nejblíže cesta z A do B ? Narýsujte ji!

3. Ze šestnácti zápalek je sestaven obrazec nakreslený na obr. 2. Jeho částí je pravidelný šestiúhelník. Přeložte šest z uvedených zápalek tak, aby na obr. 2 byly tři pravidelné šestiúhelníky.

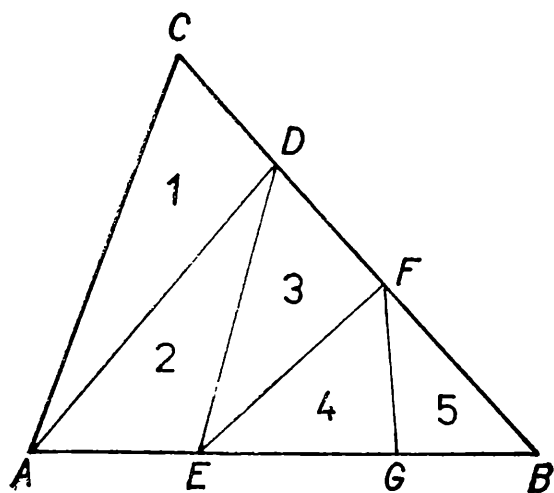


Obr. 1

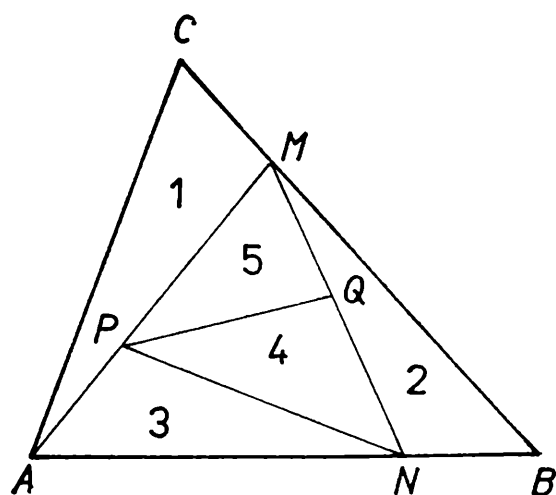


Obr. 2

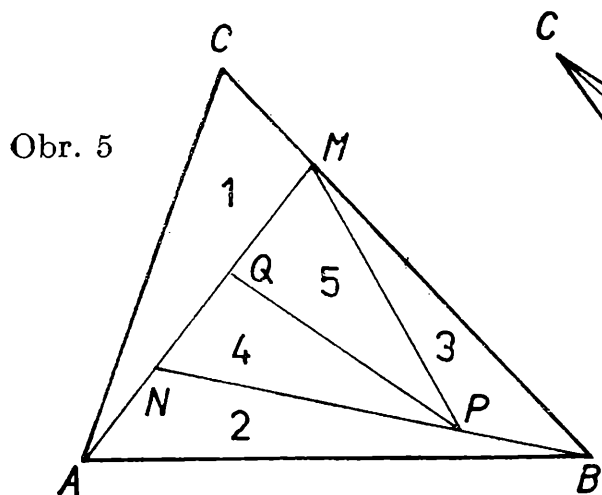
4. Na obr. 3 je narýsován libovolně zvolený trojúhelník ABC a lomená čára $ADEFG$. Jak musíte po řadě sestavit body D , E , F , G , má-li mít každý z trojúhelníků označených na obrázku číslicemi 1 až 5 obsah rovný jedné pětíně obsahu daného trojúhelníku ABC ?



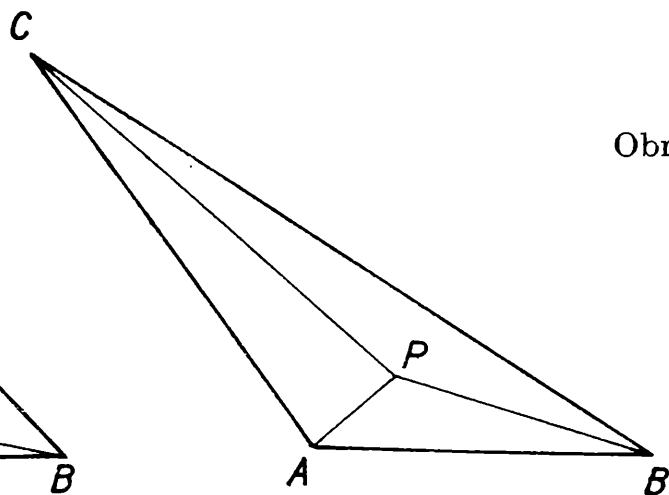
Obr. 3



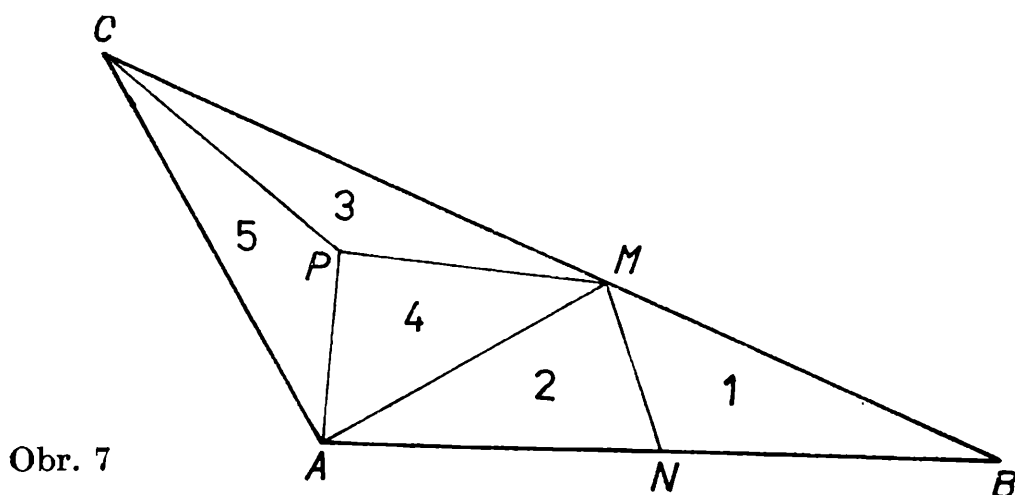
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

5. Na obr. 4 je libovolně zvolený trojúhelník ABC rozdělen na pět trojúhelníků označených číslicemi 1 až 5. Jak musíte po řadě sestavit body M , N , P , Q , má-li mít každý z těchto trojúhelníků obsah rovný jedné pětině obsahu trojúhelníku ABC ?

6. Řešte tutéž úlohu pro body M, N, P, Q (v tomto pořadí), které vidíte na obr. 5.

7. Na obr. 6 je narysován libovolný trojúhelník ABC . Sestrojte uvnitř tohoto trojúhelníku bod P tak, aby obsah trojúhelníku ABP byl rovný jedné třetině obsahu trojúhelníku ABC a obsah trojúhelníku BCP byl rovný jedné čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC . Jaký je obsah trojúhelníku ACP , jaká je jeho výška a co z toho plyne pro bod P ?

8. Na obr. 7 je narysován libovolný trojúhelník ABC . Jak musíte po řadě sestrojit body M, N, P , má-li mít každý z trojúhelníků označených číslicemi 1 až 5 obsah rovný jedné pětině obsahu trojúhelníku ABC ?

Emil Kraemer

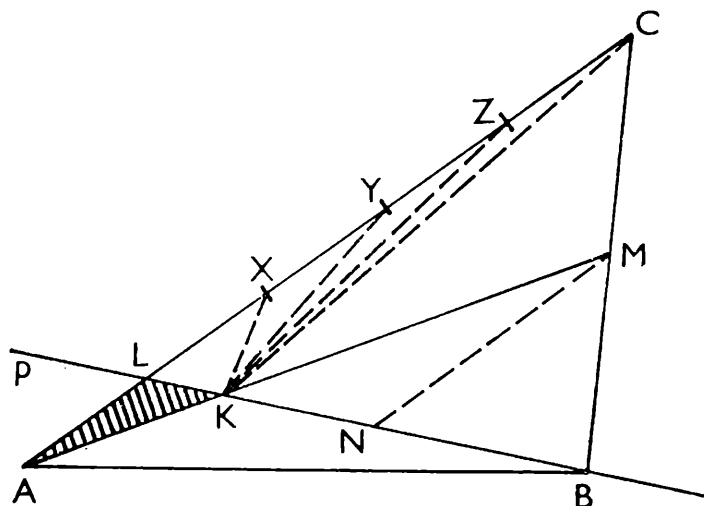
Řešení úloh ze sedmého čísla Rozhledů

Obsah trojúhelníku v algebrogramu

V trojúhelníku BCL narýsujeme (viz obr. 1) střední příčku $MN \parallel CL$. Potom podle věty *uu* platí $\triangle AKL \sim \triangle MKN$. Tedy

$$\frac{|AL|}{|MN|} = \frac{|AK|}{|MK|} = \frac{1}{2}, \quad \text{tj. } |AL| = \frac{1}{2} |MN|$$

Ovšem $|MN| = \frac{1}{2} |CL|$, a proto $|AL| = \frac{1}{4} |CL|$, takže $|AL| = \frac{1}{5} |AC|$



Obr. 1

Označme S obsah $\triangle ABC$. Bod M je středem strany BC , a proto $S_{\triangle AMC} = S/2$. Dále vypočteme:

$$S_{\triangle AKC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AMC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{6} S,$$

$$S_{\triangle AKL} = \frac{1}{5} S_{\triangle AKC} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} S = \frac{1}{30} S.$$

Algebrogram má řešení:

$$\begin{array}{r} 285 \\ .39 \\ \hline 2565 \\ 855 \\ \hline 11115 \end{array}$$

Obsah $\triangle ABC$ je $S = 11\,115 \text{ mm}^2$. Obsah $\triangle AKL$ je tedy $S/30 = 370,5 \text{ mm}^2$.

Josef Trejbal

Úloha Bézoutova

Předpokládejme, že kuň stál při koupi x pistolí. Při prodeji koně ze 24 pistolí došlo ke ztrátě $x\%$ původní ceny, tj. cena při prodeji činila $(100 - x)\%$ původní ceny. Můžeme tedy sestavit rovnici

$$x \cdot (100 - x)/100 = 24.$$

Má dvě řešení 40 a 60. Přesvědčte se zkouškou, že obě ceny splňují podmínky úlohy.

-jm-

Omyly, které ovládly svět

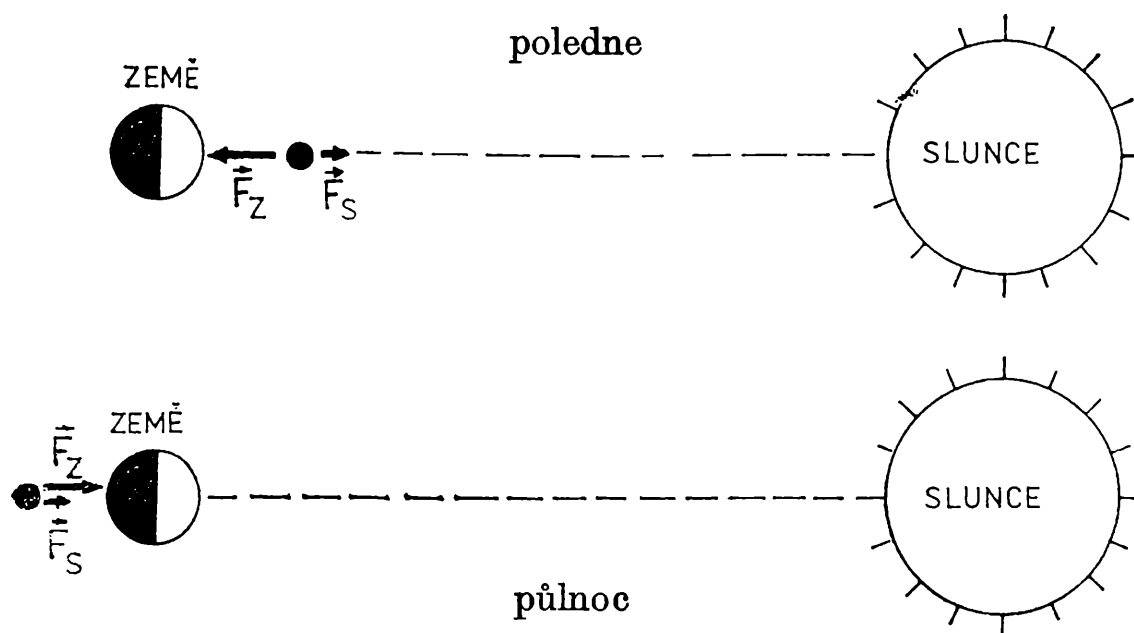
Padají na rovníku předměty o půlnoci větší rychlostí než v poledne?

Kdo z nás nečetl pohádky o začarovaných mlýnech nebo strašidelných hospodách s ďábelskou obsluhou? Myšlenka, že tradiční půlnoční padání obrazů, svíců či lebek má fyzikální příčiny, však asi nikoho z nás nenapadla. S touto zajímavou hypotézou jsem se setkal až při rozhovoru s jednou studentkou fyziky. Její argumenty byly zdánlivě zcela logické. O půlnoci působí na předmět padající na rovníku větší síla, neboť je ve směru k Zemi přitahován jak gravitační silou Země, tak působením gravitační síly Slunce.

V poledne je obráceně gravitační síla Slunce namířena proti gravitační síle, kterou na předmět působí Země, a výsledná síla je tedy menší.

Nebude jistě nezajímavé spočítat, jak velké je silové působení gravitačního pole Slunce na kilogramové závaží při střední vzdálenosti Země—Slunce (150 miliónů km) a srovnat tuto hodnotu s působením Země na těleso při jejím povrchu.

Podle Newtonova gravitačního zákona je velikost působící síly dána vztahem:



$$F_s = \kappa \frac{\text{hmotnost Slunce} \cdot \text{hmotnost závaží}}{(\text{vzdálenost Slunce} - \text{závaží})^2},$$

kde κ je tzv. gravitační konstanta, $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Prostým dosazením příslušných hodnot, které naleznete v tabulkách, do uvedeného vztahu si jistě dokážete sami ověřit, že ve srovnání s gravitační silou, kterou působí Země ($F_Z \doteq 10 \text{ N}$), je silové působení Slunce vlivem obrovské vzdálenosti jen přibližně $F_s \doteq 6 \cdot 10^{-3} \text{ N}$. To je hodnota velmi malá, avšak nikoliv neměřitelná.

Je tedy reálnou skutečností, že o půlnoci padají na rovníku předměty k Zemi poněkud rychleji než v poledne? Odpověď je jednoznačně: NE! Zdůvodnění záporné odpovědi není však jednoduché.

Vysvětlení se bude lišit podle toho, kam postavíme pozorovatele, který výklad podává. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že předmět padá na rovníku přesně ve směru spojnice Země—Slunce, a odhlédneme od jeho společné rotace se Zemí.

Jako první dostane slovo fyzik, který si pro svůj popis zvolil vztažnou soustavu spojenou se Sluncem a stálicemi:

„O půlnoci působí na padající kámen stejným směrem gravitační pole Země a gravitační pole Slunce. Součet obou sil určuje rychlosti pohybu v soustavě spojené se Sluncem a stálicemi. Nesmíme ale zapomenout, že Slunce působí nejen na závaží, ale i na celou Zemi. Pohybové účinky tohoto působení jsou pro Zem i kámen zcela stejné, a proto na průběh vzájemné rychlosti kamene k Zemi nemají vliv. V kteroukoliv roční i denní dobu probíhá pád předmětů vzhledem k Zemi na daném místě stejně.“

Pozorovatel, který zvolil za svou vztažnou soustavu Zemi bude argumentovat jinak:

„Z hlediska mé soustavy, která obíhá Slunce, působí na všechny předměty setrvačná odstředivá síla, která míří ve směru od Slunce na všechny strany. Odstředivá síla působící na Zemi ruší gravitační silové působení Slunce na Zem, odstředivá síla působící na padající předmět ruší gravitační silové působení Slunce. Proto se působení gravitačního pole Slunce na průběh volného pádu neuplatňuje.“

Můžeme tedy shrnout, že silové působení gravitačního pole Slunce se na průběh vzájemného pohybu kamene a Země neprojeví, neboť z hlediska vztažné soustavy spojené se Sluncem jsou pohybové účinky jeho silového působení na kámen zcela stejné jako pohybové účinky gravitačního silového působení Slunce na Zemi.

Z hlediska vztažné soustavy, která je spojena se Zemí obíhající Slunce, je gravitační silové působení Slunce vykompenzováno setrvačnou odstředivou silou.

Nemáme tedy žádný důvod, abychom stěhování těžkých předmětů odkládali na poledne.

Úkol pro vás: Ovlivňuje vzájemná poloha Země a Měsíce padání předmětů na povrchu Měsíce?

Milan Rojko

Laboratoř doma

Zajímavý stav přechlazení

Do zkumavky nasypeme thiosíran sodný (ustalovač) do $\frac{3}{4}$ její výšky a zkumavku vnoříme do vroucí vody. Když se teplota thiosíranu přiblíží asi 60 °C, thiosíran roztaje. Poté dále zvyšuje svou teplotu ke 100 °C.

V této fázi zkumavku z vroucí vody vyjmeme a ponoříme ji do sklenice se studenou vodou, kterou umístíme na místo, kde nedochází k otřesům. Během několika minut se teplota thiosíranu vyrovná s teplotou vody ve sklenici. Thiosíran je tedy hluboko pod teplotou tuhnutí, avšak zůstává v kapalném skupenství. Jestliže do zkumavky vhodíme malý krystalek thiosíranu proběhne během několika sekund ztuhnutí thiosíranu, přičemž se zkumavka zřetelně zahřeje. Průběh tuhnutí je velmi efektní a dochází při něm ke zřetelnému růstu krystalů.

Úkol pro vás: Vysvětlete, proč se při tuhnutí thiosíran zahřívá.

Milan Rojko

Fyzikální úloha

V malém odměrném válci plove zkumavka. Je zatížena několika oblázkami na dně. Hladina vody ve válci dosahuje určité výšky. Náplň zkumavky vhodíme do válce a zkumavku necháme plovat prázdnou. Změní se výška hladiny vody ve válci?

Jaký bude výsledek podobného pokusu, bude-li zátěž zkumavky ze dřeva či jiného materiálu, který bude ve vodě plovat?

Úkol pro vás: Odpovězte na uvedené otázky a ověřte správnost své odpovědi pokusem.

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu:

RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.
Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. V šachovém turnaji sehráli Žeňa a Sáša stejný počet utkání, načež onemocněli a z turnaje museli odstoupit. Ostatní účastníci dohráli turnaj do konce. Celkem bylo v turnaji odehráno 23 utkání. Hráli Žeňa a Sáša vzájemný zápas?

2. Mějme papírovou krabičku ve tvaru krychle s odříznutou střechou. Úhrnný obsah jejích stěn a jejího dna je roven 5. Rozstříhnete krabičku na 3 kusy tak, aby bylo možno z nich složit čtverec o obsahu 5.

3. Ahoj, Káto, konečně jsme dostali telefon. Dám ti svoje číslo. Je pěticiferné, stejně jako tvoje. První cifra představuje prvočíslo, druhé dvě cifry vytvářejí dvoumístné prvočíslo a poslední dvě cifry se získají záměnou předchozích dvou cifer, jsou čtvercem nějakého celého čísla a v součtu dávají cifru na prvním místě. Tak jaképak máme číslo?

4. Může existovat trojúhelník o stranách $a = 7$ cm, $b = 2$ cm s tou vlastností, že výška spuštěná na třetí stranu je rovna geometrickému průměru zbývajících dvou výšek?

5. Mějme šestiúhelník, který je konvexní a má navíc tu vlastnost, že každá přímka spojující středy jeho protějších dvou stran jej dělí na dvě části stejného obsahu. Dokažte, že tyto tři přímky procházejí jedním bodem.

6. (obtížnější) Mějme takový konvexní n -úhelník, jehož žádné tři úhlopříčky neprocházejí týmž bodem. Rýsujeme-li do n -úhelníku jeho úhlopříčky, vznikají uvnitř něho nové polygony. Jaký největší počet úhlopříček můžeme narýsovat, aby vznikly pouze trojúhelníky?

Tomáš Schütz

Hra v kódu BCD

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

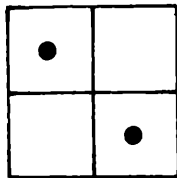
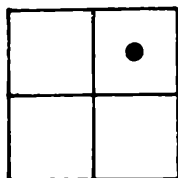
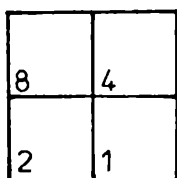
Seznámíme vás s hrou, v níž se sice užívá tak starobylé pomůcky, jako je hrací kostka, avšak se zde zároveň setkáváme s kódem BCD, známým z počítačů. Zkratka BCD značí „Binary Coded Decimal“, což vyjadřuje, že v desítkové soustavě se číslice zapisují ve dvojkové soustavě. O obdobné hře, kde se užívá zápisu ve dvojkové soustavě, se psalo v článku [1].

Zhotov si tři desky ve tvaru shodných čtverců o straně délky asi 10 cm. Vystříhni je z tvrdého papíru, stačí i ze čtvrtky na kreslení. Středů každých dvou protějších stran spoj úsečkou.

Na jeden z těchto čtverců připeš do rohů vzniklých menších čtverců podle obr. 1 číslice 1, 2, 4, 8. Potom bude možno na něm pomocí figurek z některé stolní hry (popř. mincí nebo knoflíků) znázorňovat desítkové číslice 0, 1 až 9.

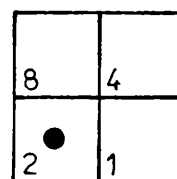
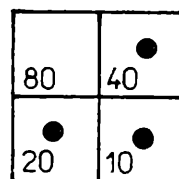
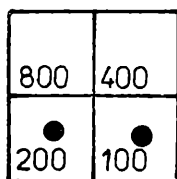
Není-li na čtvercové desce postavena žádná figurka, jako na obr. 1, je znázorněna nula. Postavíme-li figurku podle obr. 2a, je vyjádřena čtyřka. Obdobně vyznačíme cifry 1, 2 a 8. Dvěma figurkami se znázorňují číslice 2, 5 a 9; na obr. 2b je vyjádřena číslice 9. Pro sedmičku můžeme užít tří figurek podle rovnosti $7 = 1 + 2 + 4$.

Na našich třech deskách lze znázorňovat trojčiferná čísla; prohlédni si obr. 3, na kterém je vyznačeno číslo 372. Myšlenka tohoto znázorňování přirozených čísel pochází od belgické didaktičky matematiky *Frederique Pappyové* (viz čl. 2).



Obr. 2 a, b

Obr. 1



Obr. 3

stovky

desítky

jednotky

Desky, které jste si připravili pro hru, můžete vzhledově vylepšit. Jistě by prospělo, kdybyste menší čtverce, na něž se staví figurky, odlišně vybarvili.

Nyní přejdeme k vysvětlení hry.

Pravidla

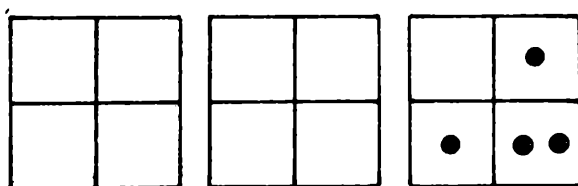
1. Hra se hraje na trojici desek podle obr. 3, na nichž lze znázorňovat celá čísla od 0 do 999.

2. Každý z hráčů má šest figurek (mincí, knoflíků apod.). Figurky různých hráčů se liší barvou, velikostí nebo tvarem. Ke hře se dále potřebuje hrací kostka.

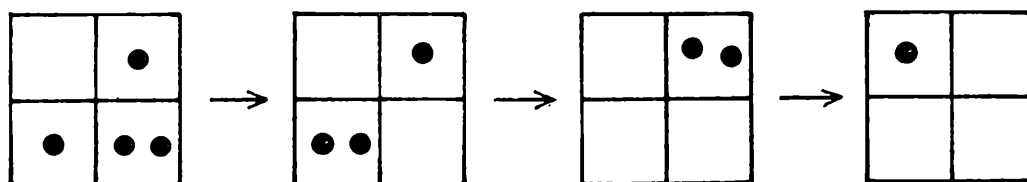
3. Nejříve se stanoví pořadí (např. losováním), v němž budou hráči házet kostkou a umísťovat své figurky na deskách.

4. Na počátku hry každý hráč ve stanoveném pořadí hodí kostkou a číslo, které padne, znázorní svými figurkami na první desce zprava.

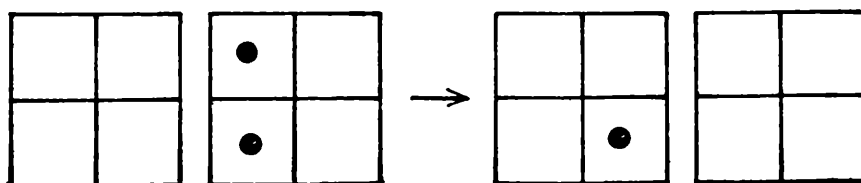
5. Ve druhém kroku každý hráč opět hodí kostkou a číslo, jež padne, znázorní opět na první desce zprava, a to nezávisle na prvním kroku. Například jestliže někdo v prvním kroku hodí číslo 3 a ve druhém číslo 5, pak má na deskách rozmístěny své figurky podle obr. 4.



Obr. 4



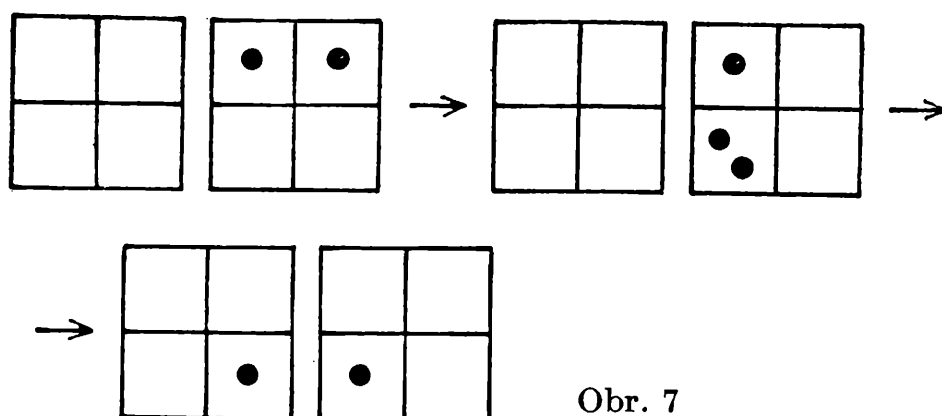
Obr. 5



Obr. 6

6. Ve třetím a dalším kroku má každý hráč tři možnosti. Pro jednu z nich se musí rozhodnout. Má tuto volbu:

a) Vezme vhodné své dvě figurky z desek a jednu z nich pak znovu položí tak, aby jeho figurky znázorňovaly totéž číslo (viz obr. 5 a 6). Druhá figurka mu zbude pro použití v případném dalším kroku.



Obr. 7

b) Vezme jednu svou figurku z některé desky a na vhodný menší čtverec téže desky položí dvě své figurky tak, aby se nezměnilo číslo znázorněné jeho figurkami na deskách. To se provádí např. v situaci, kterou ukazuje obr. 7.

c) Hodí kostkou. Číslo, které mu padlo, má možnost znázornit na deskách (nezávisle na předchozích krocích, obdobně jako se uvádí v bodě 5.). Znázornit číslo samozřejmě nemůže, nemá-li k dispozici dostatečný počet figurek neležících na deskách. Znázornění čísla se může hráč vzdát, považuje-li to pro sebe za výhodné.

7. Vítězí hráč, který jako první při úpravě dle bodu 6.a) postaví svou figurku na desku stovek (tj. první desku zleva).

POZOR! Hra není bez nečekaných komplikací, neboť lze narazit na „past“. Šachisté by možná vynechali písmeno „s“ a řekli by, že jde o pat. Na příklad si je třeba dávat pozor na číslo 77. Jestliže má hráč na deskách znázorněno toto číslo, pak nemá žádné volné figurky a ve hře může pokračovat jedině dle bodu 6.c), což k vítězství nevede. Existují ještě další pasti. Při hře je jistě sami objevíte. Souvisejí s čísly 7 a 13.

Literatura

- [1] Jiří Mída: Hra „Jedna ze dvou“, RMF, roč. 60, 1981/82, č. 9
 [2] Jan Vyšín: Minicomputer — počítačový stroj pro šestileté děti, MvŠ, roč. XX, 1969/70, č. 6

Hrátky s čísly

Stejná písmena nahraďte stejnými číslicemi.

a)

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & A & \\
 & C & B & A & \\
 D & C & B & A & \\
 & C & B & A & \\
 & & & A & \\
 \hline
 B & B & B & B &
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & B & A & \\
 & D & C & B & A & \\
 E & D & C & B & A & \\
 & D & C & B & A & \\
 & & & B & A & \\
 \hline
 F & F & F & F & F &
 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcccc}
 A & A & A & & \\
 & B & B & & \\
 & & C & & \\
 & B & B & & \\
 A & A & A & & \\
 \hline
 B & B & B & &
 \end{array}$$

$$d) (HAD)^2 = KOBRA$$

$$e) (HAD)^2 = UŽOVKA$$

$$f) (DEN)^2 = PÁTEK$$

$$g) (PLŽ)^2 = SLUKA$$

(Řešení naleznete na str. 345.)

Jindřich Pěňčík

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Fyzika

6. Určete, zda čočka je spojkou nebo rozptylkou, vypočítejte její ohniskovou vzdálenost a polohu hlavních rovin v těchto dvou případech:

a) lámavé plochy jsou soustředné kulové plochy, větší poloměr křivosti je r , tloušťka čočky je d , index lomu $n > 1$,

b) lámavé plochy mají stejný poloměr křivosti r , tloušťka čočka je d , index lomu $n > 1$.

Provedte číselný výpočet pro $r = 5$ cm, $d = 1$ cm a $n = 1,5$ a nakreslete schematické obrázky. Vyznačte v nich polohu hlavních rovin a polohu ohnisek.

Poznámka: Pro vyřešení tohoto příkladu vám asi nebudou stačit vaše znalosti z geometrické optiky. Prostudujte si proto kapitolu o čočkách (str. 59–73) v brožuře *Rostislava Košťála* „Optické soustavy“. Vydalo ji SPN v Praze v r. 1979 v knižnici „Škola mladých fyziků“.

Eva Havráňková

Na tuto úlohu nedošlo žádné řešení, uvádím tedy svůj výpočet. Vycházím z výkladu v citované příručce R. Košťála.

V obou zadaných případech se jedná zobrazování centrovanou soustavou (skládající se ze dvou kulových ploch, které ohraničují prostředí s indexem lomu $n > 1$ (např. sklo)). Obě kulové plochy mají středy křivosti na jedné přímce; tato přímka se nazývá optická osa. Zobrazování provádíme (z důvodů, aby se neprojevovaly optické vady) monochromatickými paraxiálními (blízkými optické ose) paprsky, které s optickou osou svírají malé úhly. Zobrazovací soustavou je v prostoru vymezen prostor předmětový a obrazový. Veličiny vztažené k předmětovému prostoru budou označeny bez čárky, veličiny vztažené k obrazovému prostoru budou označeny čárkou.

Zobrazovací vlastnosti této soustavy jsou popsány polohou ohniskových rovin φ , φ' (resp. ohnisek F , F'), polohou hlavních rovin χ , χ' (resp. hlavních bodů H , H') a polohou uzlových bodů U , U' .

Ohniskovou rovinou φ' obrazového prostoru rozumíme obraz úběžné (nekonečně vzdálené) roviny předmětového prostoru, ohnisková rovina φ předmětového prostoru je taková rovina, jejímž obrazem je úběžná rovina obrazového prostoru. Ohniskové roviny φ , φ' (předmětová a obrazová) jsou kolmé k optické ose a jejich průsečíky F , F' s optickou osou se nazývají ohniska (předmětové a obrazové).

Hlavními rovinami χ , χ' nazýváme takové dvě sdružené roviny, jejichž body se navzájem zobrazují s příčným zvětšením rovným jedné. Tyto roviny jsou kolmé k optické ose a jejich průsečíky H , H' s optickou osou se nazývají hlavní body. U tenké čočky obě hlavní roviny splývají

a procházejí jejím středem. Vzdálenost $\overrightarrow{HF} = f$ se nazývá předmětová ohnisková vzdálenost, vzdálenost $\overrightarrow{H'F'} = f'$ je obrazová ohnisková vzdálenost. Obě vzdálenosti uvažujeme jako orientované, např. f je kladné, má-li orientovaná úsečka $\overrightarrow{HF}$ stejný směr jako paprsky přicházející do soustavy. Pro čočky platí $f = -f'$; jestliže f' je kladné, je čočka spojkou, jestliže f' je záporné, je rozptylkou.

Uzlové body U , U' jsou dva navzájem sdružené body optické osy, které mají tu vlastnost, že paprsky jimi procházející se zobrazují s úhlovým zvětšením rovným jedné. U tenké čočky oba uzlové body splývají a leží v průsečíku čočky s optickou osou.

Poloměry kulových ploch čočky se nazývají poloměry křivosti čočky a pokládáme je za kladné, jestliže je kulová plocha obrácená vypuklou stranou směrem k přicházejícím paprskům.

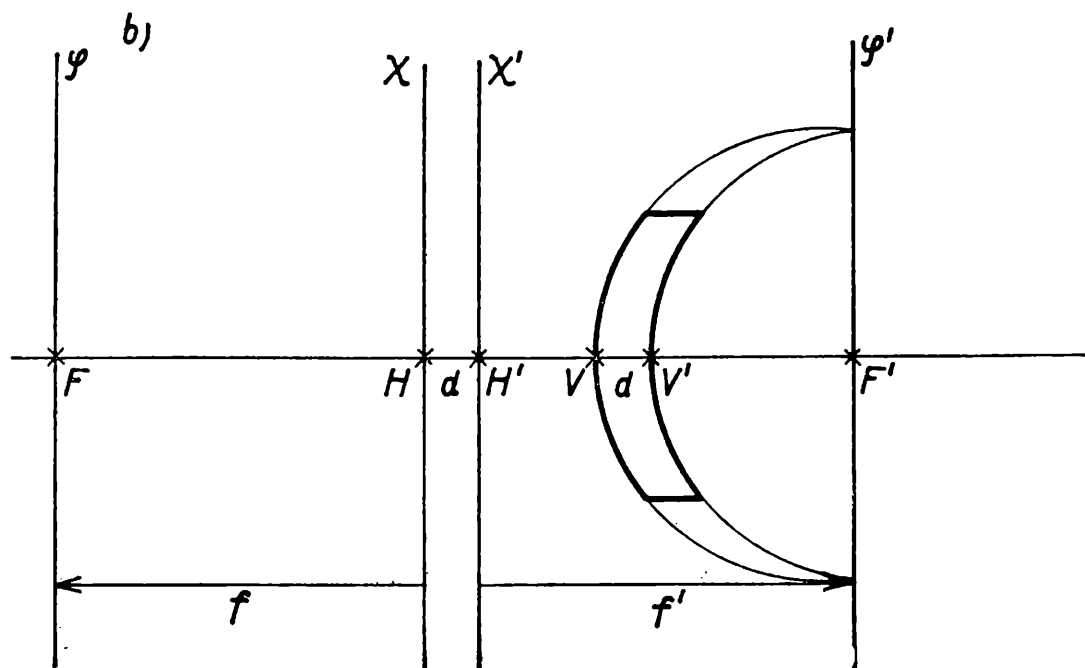
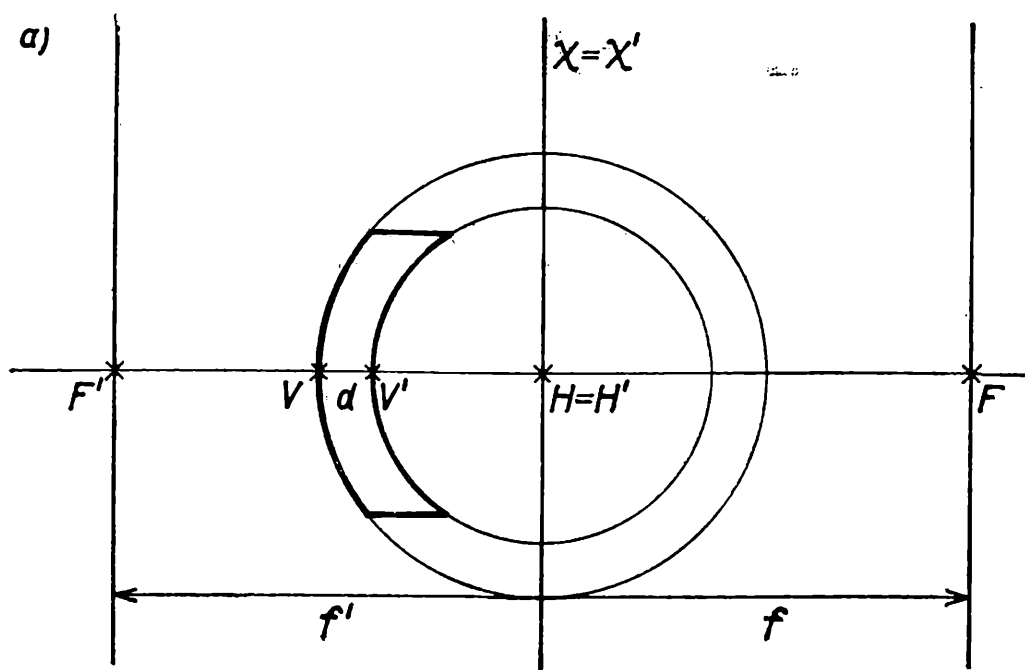
Známe-li poloměry r_1 , r_2 kulových ploch tlusté čočky, její tloušťku d a index lomu n , umíme určit polohu bodů F , F' , H , H' , U , U' (kardiálních bodů soustavy) vzhledem k čočce. (Stačí znát jen polohy bodů F , F' , H , H' .) Umíme pak k předmětu sestavit jeho obraz, podobně jako to umíme pro tenkou čočku, známe-li polohy ohnisek F , F' .

Pro ohniskové vzdálenosti f , f' tlusté čočky platí podle citované Košťálovy příručky vztah (viz vztah (2') na str. 62)

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (n-1)_i \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{r_1 r_2} \frac{d}{n}. \quad (1)$$

Symbolem r_1 je označen poloměr křivosti té kulové plochy, které se dopadající paprsek dotkne nejdříve. Průsečík této kulové plochy s optickou osou, nazývaný vrchol čočky, označíme písmenem V . U druhé kulové plochy analogické veličiny označíme symboly r_2 a V' .

Pro orientované vzdálenosti h , h' vrcholů kulových ploch V , V' od hlavních bodů H , H' platí



$$h = \overrightarrow{VH} = - \frac{r_1 d}{(n-1)d - n(r_1 - r_2)},$$

$$h' = \overrightarrow{V'H'} = - \frac{r_2 d}{(n-1)d - n(r_1 - r_2)}. \quad (2)$$

(Viz vztah (4) na str. 64 v Košťálově příručce.)

Spočítejme nyní ohniskové vzdálenosti, polohy ohniskových rovin a hlavních rovin pro zadané případy a), b). (Viz obr. a a obr. b.)

a) $r_1 = r = 5$ cm, $d = 1$ cm, $r_2 = r - d = 4$ cm, $n = 1,5$. (Předpokládám, že paprsky dopadají na optickou soustavu zleva.)

Potom $f' = -f = \frac{nr(r-d)}{(n-1)(-d)} = -60 \text{ cm}$, $h = \overrightarrow{VH} = r = 5 \text{ cm}$,
 $h' = \overrightarrow{V'H'} = r - d = 4 \text{ cm}$.

Uvedená čočka je rozptylkou ($f' < 0$), hlavní body H , H' splývají a procházejí společným středem křivosti obou kulových ploch. (Viz obr. a; není zakreslen v měřítku.)

b) $r_1 = r = 5 \text{ cm}$, $r_2 = r = 5 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$, $n = 1,5$. (Předpokládám, že paprsky dopadají na optickou soustavu zleva.)

Potom $f' = -f = \frac{nr^2}{(n-1)^2d} = 150 \text{ cm}$, $h = \overrightarrow{VH} = -\frac{r}{n-1} =$
 $= -10 \text{ cm}$, $h' = \overrightarrow{V'H'} = -\frac{r}{n-1} = -10 \text{ cm}$.

Tato čočka je spojkou ($f' > 0$), hlavní roviny χ , χ' leží na straně vypuklého povrchu čoček ve vzdálenosti $d = 1 \text{ cm}$ od sebe. (Viz obr. b; není zakreslen v měřítku.)

OLYMPIÁDY A SOČ

Variabilita sportovních soutěží

RNDr. ZBYNĚK ŠIDÁK, DrSc., Matematický ústav ČSAV, Praha
 ONDŘEJ ŠIDÁK,¹⁾ gymnázium Přípotoční, Praha 10

Úvod. Hodnocení vzestupu či sestupu jednotlivého oddílu ve sportovní soutěži z roku na rok je jednoduché — podle jeho umístění v tabulce soutěže. Je však také zajímavé nějak hodnotit změny všech umístění v takových soutěžích globálně, tedy jak celkově mnoho se mění pořadí všech oddílů v tabulkách z roku na rok. Mění-li se málo, lze říci, že soutěž je *stabilní*, mění-li se hodně, soutěž je málo stabilní čili má *velkou variabilitu*. Specifickým problémem sportovních soutěží, pro který není možno použít známé matematické metody (jako např. v [2]), je však to, že oddíly v tabulkách nejsou stále stejné, některé oddíly do soutěže během let přistupují a jiné sestupují.

V této práci je matematicky zavedena *míra celkové variability* sportovních soutěží. S její pomocí je možno porovnávat variabilitu (či sta-

¹⁾ Článek je zkrácená a aktualizovaná verze práce SOČ druhého z autorů viz [1].

bilitu) v různých sportech nebo v různých obdobích a případně z toho vyvozovat další důsledky.

Matematická formulace problému. Nejvyšší soutěž ve sportu, o který nám jde, budeme nazývat I. liga, bezprostředně nižší soutěž II. liga (i když faktické názvy v různých sportech bývají odlišné); II. liga se zpravidla hraje ve více skupinách. Dejme tomu, že I. liga má n účastníků, z nichž po ukončení hracího období k posledních podle výsledné tabulky sestupuje do II. ligy. Naopak k nejlepších účastníků II. ligy postupuje do I. ligy (není podstatné pro matematickou teorii, zdali k nejlepších z II. ligy postupuje automaticky nebo zdali z více skupin II. ligy více než k nejlepších hraje ještě mezi sebou kvalifikační turnaj o postup).

Označme ještě konec jednoho hracího období jako čas T , konec následujícího hracího období jako čas $T + 1$. Naším úkolem je matematicky hodnotit celkové změny v pořadí oddílů v tabulkách mezi časy T a $T + 1$, a to v I. lize, která je samozřejmě nejzajímavější.

V čase T je tedy v I. lize n oddílů, které označíme, $A_1, \dots, A_n$. V čase $T + 1$ je v I. lize $n - k$ „starých“ oddílů a k „nových“, postoupivších oddílů, které označíme $A_{n+1}, \dots, A_{n+k}$. Celkem tedy se v našem problému vyskytuje $n + k$ oddílů $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+k}$. Jim příslušná pořadí v čase T nechť jsou $r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots, r_{n+k}$, pořadí v čase $T + 1$ pak jsou $s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+k}$. Poznamenejme, že pořadí v II. lize prostě navazují na pořadí z I. ligy čísla $n + 1, n + 2, \dots$; je-li více skupin II. ligy, pak navazují jakoby „paralelně“ ve všech skupinách, takže tato pořadí může mít více oddílů.

Pořadí v čase T a v čase $T + 1$ zapíšeme pro přehlednost do schématu, (v matematické terminologii) do matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r_1, & \dots, & r_{n+k} \\ s_1, & \dots, & s_{n+k} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Jako míru celkové variability mezi těmito dvěma pořadími definujeme (podobně jako v článku [2])

$$v = v(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{n+k} (r_i - s_i)^2; \quad (2)$$

v je funkcí matice $\mathbf{M}$; bude-li to třeba, budeme konkrétní argument $\mathbf{M}$ vypisovat, bude-li však $\mathbf{M}$ zřejmá, budeme psát jen v .

Oddíly A_i s příslušnými r_i, s_i můžeme psát za sebou libovolně, jak se nám nejlépe hodí, protože tím nejvýše měníme pořadí sčítanců v (2). Pišme tedy oddíly $A_1, \dots, A_n$ v tom pořadí, jak se umístily ve výsledné tabulce v čase T , takže $r_i = i$ pro $i = 1, \dots, n$. Další oddíly $A_{n+1}, \dots, A_{n+k}$ pišme v takovém pořadí, že $s_{n+1} > s_{n+2} > \dots > s_{n+k}$;

tyto posledně zmíněné oddíly jsou zpravidla vítězi II. ligy v různých skupinách v čase T , takže $r_{n+1} = r_{n+2} = \dots = r_{n+k} = n + 1$ (je-li postupové pravidlo jiné a nejde-li vesměs o vítěze II. ligy, pro jednoduchost jim přidělíme stejná „fingovaná“ pořadí $n + 1$). Všechny $n + k$ oddílů, braných v úvahu, můžeme rozdělit do tří skupin: oddíly $A_1, \dots, A_{n-k}$, které zůstávají v I. lize i v čase $T + 1$, oddíly $A_{n-k+1}, \dots, A_n$, které sestupují do II. ligy, a oddíly $A_{n+1}, \dots, A_{n+k}$, které naopak z II. ligy postupují do I. ligy. Sestupujícím oddílům $A_{n-k+1}, \dots, A_n$ také pro jednoduchost přidělíme „fingovaná“ pořadí $s_{n-k+1} = \dots = s_n = n + 1$, tj. v čele II. ligy v čase $T + 1$ (ačkoliv to nemusí odpovídat skutečnosti). Vzhledem k tomu všemu matice M z (1) nabývá tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n-k, n-k+1, \dots, n & , n+1, \dots, n+1 \\ s_1, s_2, \dots, s_{n-k} & , n+1, \dots, n+1, s_{n+1}, \dots, s_{n+k} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

kde $n + 1$ na konci 1. řádku se vyskytuje k -krát a $n + 1$ uprostřed 2. řádku rovněž k -krát, přičemž

$$1 \leq s_1, s_2, \dots, s_{n-k} \leq n, \quad (4)$$

$$n \geq s_{n+1} > s_{n+2} > \dots > s_{n+k} \geq 1, \quad (5)$$

$$s_1, s_2, \dots, s_{n-k}, s_{n+1}, \dots, s_{n+k} \text{ je permutace čísel } 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Nutnost normování v . V různých sportech (někdy i v jednom sportu v různých časových obdobích) bývají čísla n a k odlišná. Příslušná minima a maxima míry celkové variability v se pak také liší, takže hodnoty v nemůžeme pro takové různé situace porovnávat přímo.

Aby je bylo možno porovnávat, je třeba je nejdříve vhodným způsobem normovat, aby nabývaly hodnot ze stejného číselného intervalu. Pro daná n a k označme $v_{\min}$ minimální možnou hodnotu v , $v_{\max}$ maximální možnou hodnotu. Nejjednodušší normovanou mírou celkové variability je pak

$$V = \frac{v - v_{\min}}{v_{\max} - v_{\min}} \quad (7)$$

a tuto míru V budeme používat v příkladech na konci článku. Je snadno vidět, že V nabývá vždy hodnoty z intervalu $<0, 1>$.

Nalezení minima a maxima v . Nalezení $v_{\min}$ je snadné. Platí

Věta 1. $v_{\min} = k(k + 1)(2k + 1)/3$.

Důkaz. Pro minimalizaci v ze vzorce (2) stačí zvolit s_i co možno nejblíže r_i při zachování podmínek (3), (4), (5), (6). To zřejmě nastává pro matici

$$M_{\min} = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n-k, n-k+1, \dots, n & , n+1, \dots, n+1 \\ 1, 2, \dots, n-k, n+1 & , \dots, n+1, n & , \dots, n-k+1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Potom máme } v_{\min} = v(\mathbf{M}_{\min}) &= \sum_{i=n-k+1}^n (i - (n+1))^2 + \\
&+ \sum_{i=n-k+1}^n ((n+1) - i)^2 = 2 \sum_{i=n-k+1}^n (n+1-i)^2 = \\
&= 2[k^2 + (k-1)^2 + \dots + 1^2] = 2k(k+1)(2k+1)/6.
\end{aligned}$$

Nalezení $v_{\max}$ je obtížnější. Pro důkaz budeme potřebovat dvě pomocná tvrzení, která zde nejdříve uvedeme. V dalším také budeme používat funkci v , jejímž argumentem je matice s 2 řádky a n sloupci; definice v je stejná jako (2), pouze místo $n+k$ máme všude n .

Z věty 1 v článku [2] vyplývá (kromě jiného):

Pomocné tvrzení 1. Jestliže $q_1, q_2, \dots, q_n$ je libovolná permutace čísel $1, 2, \dots, n$, pak

$$v \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n-1, n \\ q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n \end{pmatrix} \leq v \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n-1, n \\ n, n-1, \dots, 2, 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Pomocné tvrzení 2. Jestliže reálná čísla x_1, x_2, u splňují $x_2 \leq x_1, u \geq 0$, potom

$$x_2^2 - (x_2 - u)^2 \leq x_1^2 - (x_1 - u)^2. \quad (9)$$

Důkaz. Po algebraické úpravě vidíme, že (9) je ekvivalentní nerovnosti $2x_2u \leq 2x_1u$; tato nerovnost je však zřejmá, poněvadž vznikne z předpokládaného $x_2 \leq x_1$ násobením nezáporným číslem $2u$.

Věta 2.

$$v_{\max} = v \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n-k, n-k+1, \dots, n, n+1, \dots, n+1 \\ n, n-1, \dots, k+1, n+1, \dots, n+1, k, \dots, 1 \end{pmatrix},$$

kde $n+1$ na konci 1. řádku se vyskytuje k -krát a $n+1$ uprostřed 2. řádku rovněž k -krát.

Důkaz. Máme vlastně dokázat

$$\begin{aligned}
&v \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n-k, n-k+1, \dots, n, n+1, \dots, n+1 \\ s_1, s_2, \dots, s_{n-k}, n+1, \dots, n+1, s_{n+1}, \dots, s_{n+k} \end{pmatrix} \leq \\
&\leq v \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n-k, n-k+1, \dots, n, n+1, \dots, n+1 \\ n, n-1, \dots, k+1, n+1, \dots, n+1, k, \dots, 1 \end{pmatrix}, \quad (10)
\end{aligned}$$

kde s_i splňují (4), (5), (6). Protože však členy v (10) vlevo i vpravo uprostřed na místech $n-k+1, \dots, n$ jsou stejné, stačí vlastně dokázat

$$\begin{aligned}
& v \left(1, 2, \dots, n-k, n+1, \dots, n+1 \right) \leq \\
& \leq v \left(1, 2, \dots, n-k, n+1, \dots, n+1 \right) - \\
& \quad \left(s_1, s_2, \dots, s_{n-k}, s_{n+1}, \dots, s_{n+k} \right) \leq \\
& \leq v \left(1, 2, \dots, n-k, n+1, \dots, n+1 \right) - \\
& \quad \left(n, n-1, \dots, k+1, k, \dots, 1 \right). \quad (11)
\end{aligned}$$

Dokazujeme tedy (11). Zřejmě máme

$$\begin{aligned}
& v \left(1, 2, \dots, n-k, n-k+1, \dots, n \right) = \\
& = v \left(1, 2, \dots, n-k, n+1, \dots, n+1 \right) - \\
& \quad - \sum_{i=1}^k (n+1 - s_{n+i})^2 + \sum_{i=1}^k ((n-k+i) - s_{n+i})^2, \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v \left(1, 2, \dots, n-k, n-k+1, \dots, n \right) = \\
& = v \left(1, 2, \dots, n-k, n+1, \dots, n+1 \right) - \\
& \quad - \sum_{i=1}^k (n+1 - (k+1-i))^2 + \sum_{i=1}^k ((n-k+i) - (k+1-i))^2. \quad (13)
\end{aligned}$$

Protože podle (6) je $s_1, s_2, \dots, s_{n-k}, s_{n+1}, \dots, s_{n+k}$ permutací čísel $1, 2, \dots, n$, můžeme použít nerovnosti (8) z pomocného tvrzení 1 a vidíme, že levá strana (12) je menší nebo rovna levé straně (13); totéž tedy platí o pravých stranách (12) a (13), takže

$$\begin{aligned}
& v \left(1, 2, \dots, n-k, n+1, \dots, n+1 \right) - \\
& \quad - \sum_{i=1}^k (n+1 - s_{n+i})^2 + \sum_{i=1}^k ((n-k+i) - s_{n+i})^2 \leq \\
& \leq v \left(1, 2, \dots, n-k, n+1, \dots, n+1 \right) - \\
& \quad - \sum_{i=1}^k (n+1 - (k+1-i))^2 + \\
& \quad + \sum_{i=1}^k ((n-k+i) - (k+1-i))^2.
\end{aligned}$$

Jestliže zde převedeme všechny součty na levou stranu a jestliže položíme

$$z_i = [(n+1-(k+1-i))^2 - ((n-k+i)-(k+1-i))^2] - [(n+1-s_{n+i})^2 - ((n-k+i)-s_{n+i})^2], \quad (14)$$

dostáváme dále

$$v \left(\begin{matrix} 1, 2, & & , n-k, n+1, & \dots, n+1 \\ s_1, s_2, & & , s_{n-k}, s_{n+1}, & \dots, s_{n+k} \end{matrix} \right) + \sum_{i=1}^k z_i \leq \\ \leq v \left(\begin{matrix} 1, 2 & & , \dots, n-k, n+1, \dots, n+1 \\ n, n-1, \dots, k+1, k & & \dots, 1 \end{matrix} \right). \quad (15)$$

Budeme chtít nyní použít pomocné tvrzení 2 a položíme $x_1 = n+1-(k+1-i)$, $u = k-i+1$, z čehož máme $x_1 - u = (n-k+i)-(k+1-i)$. Dále položíme $x_2 = n+1-s_{n+i}$, takže $x_2 - u = (n-k+i)-s_{n+i}$. Z předpokladu (5) je však snadno vidět, že

$$s_{n+k} \geq 1, s_{n+k-1} \geq 2, s_{n+k-2} \geq 3, \dots, s_{n+k-j} \geq j+1, \dots, \text{atd.},$$

pro $j = 0, 1, \dots, k-1$. Píšeme-li tedy např. $k-j = i$, máme

$$s_{n+k-j} = s_{n+i} \geq j+1 = k-i+1. \quad (16)$$

Z (16) pak vyplývá $x_2 = n+1-s_{n+i} \leq n+1-(k-i+1) = x_1$. Poněvadž také $u \geq 0$, předpoklady pomocného tvrzení 2 jsou splněny a platí tedy (9). Vzorec (14) lze pak přepsat $z_i = [x_1^2 - (x_1 - u)^2] - [x_2^2 - (x_2 - u)^2]$. Podle (9) je pak ovšem $z_i \geq 0$, tedy také $\sum_{i=1}^k z_i \geq 0$. Z tohoto faktu a z (15) nyní již snadno vyplývá (11), což jsme měli dokázat.

Příklady. Uvedeme nyní v tab. na str. 380 malou ukázkou, jaké hodnoty normované míry celkové variability V , definované v (7), vyšly pro některé sporty.

Připojme ještě jediný další údaj: průměrná hodnota V pro hokej v letech 1966–1971 byla 0,105. Řada dalších údajů i pro jiné sporty bude uvedena v článku [3].

Odborníci ve sportu by nyní mohli analyzovat příčiny, proč dostáváme různé hodnoty V pro různé sporty a různá období; zejména by bylo zajímavé objasnit případy velkých rozdílů, např. proč je basketbal mužů mnohem variabilnější než basketbal žen, nebo proč hokej v období 1982–86 je značně variabilnější než v období 1966–71.

rozdlí mezi roky	fotbal muži	hokej	basketbal muži	basketbal ženy
1982—83	0,197	0,249	0,271	0,055
1983—84	0,194	0,310	0,160	0,077
1984—85	0,237	0,215	0,397	0,099
1985—86	0,155	0,114	0,241	0,011
průměr	0,196	0,222	0,267	0,060

Poznámka 1. Fakt, že hodnoty V nejsou příliš velké, že jsou dost vzdálené od maximální možné hodnoty $V = 1$, není překvapující. Z názorného hlediska je totiž pochopitelné, že pořadí oddílů z času T se stěží do času $T + 1$ změní na prakticky obrácené pořadí, které figuruje ve $v_{\max}$, takže lze čekat, že skutečné hodnoty v budou značně menší než $v_{\max}$.

Poznámka 2. „Fingovaná“ pořadí $s_{n-k+1} = \dots = s_n = n + 1$ oddílů $A_{n-k+1}, \dots, A_n$ v čele II. ligy v čase $T + 1$ bychom mohli nahradit jejich skutečnými pořadími v II. lize (pokud jsou známa), tedy pořadími $s_i \geq n + 1$. Podobně jako nahoře by se pak odvodilo $v_{\max}$ atd. Je ovšem jasné, že v tomto $v_{\max}$ by nyní pořadí $s_{n-k+1}, \dots, s_n$ byla až na konci II. ligy, takže toto $v_{\max}$ by bylo podstatně větší než dosavadní; tím by se všechny normované hodnoty V silně „zmáčkly“ k nule a dosavadní rozdíly v hodnotách V by se značně zredukovaly. Ačkoliv tedy tento postup je vlastně teoreticky správnější, z praktického hlediska se zdá být méně vhodný.

Literatura :

- [1] O. Šidák: Využití kombinatoriky pro hodnocení stability sportovních soutěží. Práce SOČ, Praha 1987.
- [2] Z. Šidák: Soutěž o královnu krásy a teorie uspořádání. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 68, č. 7, s. 298—304
- [3] Z. Šidák, O. Šidák: Matematické hodnocení variability soutěží v kolektivních sportech. Teorie a praxe tělesné výchovy

Řešení rébusů ze str. 384

Einstein, Volta, Watt, Popov

Kalendár M-F: apríl 1990

3. 4. 1900 zomrel *Joseph Louis Bertrand*, francúzsky matematik. Jeho hypotézu, že pre prirodzené $n > 3$ existuje medzi n a $2n - 2$ aspoň jedno prvočíslo, dokázal P. L. Čebyšev.
4. 4. 1870 zomrel *Heinrich Gustav Magnus*, nemecký fyzik a chemik. Zaoberal sa hydrodynamikou, mechanikou, optikou.
9. 4. 1770 sa v Talline narodil *Thomas Johann Seebeck*, nemecký fyzik. Zistil, že tepelné rozdiely v obvode z dvoch kovov vyvolávajú elektrický prúd. Skonštruoval polariskop.
10. 4. 1850 sa v Seči pri Chrudime narodil *Čeněk Strouhal*, český fyzik. Skúmal elektrické a magnetické vlastnosti oceli, prispel k rozvoju fyzikálnej akustiky. Vybudoval moderný fyzikálny ústav.
10. 4. 1920 zomrel *Moritz Cantor*, nemecký historik matematiky. Vydal štvorzväzkové *Lekcie z histórie matematiky*.
13. 4. 1905 sa v Benátkach narodil *Bruno Rossi*, americký fyzik talianskeho pôvodu. Zaoberal sa kozmickou fyzikou. Dokázal existenciu „slnečného vetra“.
14. 4. 1935 v Bryn Mawr (USA) zomrela *Emmy Noetherová*, nemecká matematická. Prispela k teórii invariantov a aritmetickej teórii algebraických funkcií. V teoretickej fyzike sformulovala jednu zo základných teorém.
15. 4. 1765 v Moskve zomrel *Michail Vasiljevič Lomonosov*, ruský prírodovedec. Vyslovil a dokázal zákon o zachovaní hmotnosti a pohybu. Skúmal atmosférickú elektrinu, venoval sa geológii, metalurgii, optike i literatúre.
17. 4. 1790 vo Philadelphii zomrel *Benjamin Franklin*, americký fyzik a politik. Dokázal elektrickú podstatu blesku, zostrojil bleskozvod. Bojoval za zrušenie otroctva.
17. 4. 1945 v Gifhorne zomrel *František Závíška*, český fyzik. Študoval teóriu odrazu svetla, teóriu elektromagnetického poľa. Bol uznávaným znalcom teoretickej fyziky.
18. 4. 1945 zomrel *John Ambrose Fleming*, anglický fyzik a elektrotechnik. Zaoberal sa bezdrôtovou telegrafiou, určil pravidlo pre smer pohybu vodiča s prúdom v magnetickom poli.
18. 4. 1955 v Princetone zomrel *Albert Einstein*, americký fyzik nemeckého pôvodu. Vysvetlil zákony fotoelektrického javu, vytvoril špeciálnu a všeobecnú teóriu relativity. Získal Nobelovu cenu (1921), obhajoval humanizmus vo svete.
19. 4. 1905 sa narodil *Josef Novák*, český matematik. Pracoval v teórii množín a topológii. Prispel k aplikáciám matematických a štatistických metód v biológii.

21. 4. 1930 sa narodil *Jiří Fábora*, český matematik. Zaoberal sa všeobecnou topológiou, funkcionálnou analýzou a tenzorovou algebrou.
21. 4. 1965 v Edinburghu zomrel *Edward Victor Appleton*, anglický fyzik. Za výskum vyšších vrstiev atmosféry a za objav vrstvy odrážajúcej elektromagnetické vlny získal Nobelovu cenu (1947).
21. 4. 1975 zomrel *Lucien Auguste Godeaux*, belgický matematik. Hlavné práce mal v oblasti diferenciálnej, projektívnej a algebraickej geometrie.
24. 4. 1930 v Berlíne po autonehode zomrel *Max Theodor Felix Laue*, nemecký fyzik. Skúmal interferenciu röntgenových lúčov, zaoberal sa aj termodynamikou a štatistickou fyzikou. Medzi prvými pochopil, prijal a rozvíjal špeciálnu teóriu relativity. Získal Nobelovu cenu (1914).
25. 4. 1840 v Paríži zomrel *Siméon Denis Poisson*, francúzsky matematik a fyzik. Prispel k matematickej analýze, teórii potenciálu, teórii kapilarity i teórii pružnosti.
25. 4. 1900 sa vo Viedni narodil *Wolfgang Pauli*, švajčiarsky fyzik rakúskeho pôvodu. Prispel k rozvoju kvantovej mechaniky a kvantovej teórie elektromagnetického poľa. Za objav tzv. vylučovacieho princípu získal Nobelovu cenu (1945).
26. 4. 1920 zomrel *Srinivasa Ramanujan*, indický matematik. Prispel k rozvoju analytickej teórie čísel. Bol najlepším znalcom reťazových zlomkov.
26. 4. 1925 sa v Moskve narodil *Vladimír Grigorievič Boltjanskij*, sovietsky matematik. Zaoberal sa kombinatorickou geometriou, topológiou i kybernetikou.
26. 4. 1960 zomrel *Wander Johannes Hass*, holandský fyzik. Skúmal fyziku nízkych teplôt, odhalil vzťah medzi mechanickým a magnetickým momentom atómu..
27. 4. 1875 sa v Paríži narodil *Maurice Broglie*, francúzsky fyzik. Rozvinul röntgenovú spektroskopiu.
27. 4. 1970 zomrel *Alexej Vasiljevič Šubnikov*, sovietsky fyzik. Prispel k rozvoju kryštalografie.
28. 4. 1765 sa v Paríži narodil *Sylvestre François Lacroix*, francúzsky matematik. Prispel k zlepšeniu vyučovania diferenciálneho a integrálneho počtu.

dj

Z NOVÝCH KNIH

František Hanzelík a kolektiv:

**Zbierka riešených úloh z fyziky
pre uchádzačov o štúdium na
vysokých školách technických**

Potrebuje pomoci při zkvalitnění své přípravy na přijímací pohovory z fyziky? Nebo již studujete v prvním ročníku některé vysoké školy fyziku a zjistili jste mezery ve své středoškolské přípravě? Pak vám jistě pomůže tato sbírka řešených úloh, kterou vydala Alfa, vydavatelství technické a ekonomické literatury, n. p. Bratislava, v nákladu 10 000 výtisků. Má 480 stran, 68 obrázků a stojí 25,— Kčs.

V knize jsou zahrnuty všechny nejdůležitější oblasti fyziky: mechanika, molekulová fyzika a termika, elektřina a magnetismus, geometrická optika a fotometrie, fyzika atomu. Je doplněna tabulkou fyzikálních veličin s jejich označeními a jednotkami a přehledem základních fyzikálních konstant. Jednotlivé kapitoly obsahují stručný teoretický úvod, přehled použitých vztahů a řešené příklady a úlohy. Dále jsou doplněny neřešenými úlohami s návodem na řešení a výsledky.

Úlohy sbírky byly vybírány na základě současných platných učebních osnov fyziky pro gymnázia a pro technické obory středních odborných škol. Jde o úlohy s úspěchem vyzkoušené při přijí-

macích zkouškách na vysoké školy technické a dále o úlohy ze známých sbírek.

Uváděná řešení jsou z pochopitelných důvodů velmi stručná a často až schematická. To může někdy vést k povrchnímu převzetí uvedených postupů bez hlubšího fyzikálního porozumění. Jako příklad uveďme stručně několik problémů z mechaniky: řada výsledků platí pouze číselně (viz př. 1.23), ve druhém Newtonově pohybovém zákoně v inerciální soustavě nelze výraz $m \cdot a$ považovat za nějakou další působící sílu (viz př. 1.50), v příkladech se dvěma tělesy zavěšenými na kladce je metodicky správné nejprve napsat pohybový zákon pro každé těleso zvlášť a nevydávát za druhý Newtonův zákon jejich aritmetický součet (ten má totiž obecně vektorový tvar a zde mají zrychlení obou částí soustavy opačný směr, viz př. 1.57). Proto je nutno, aby si každé předkládané řešení čtenář sám důkladně fyzikálně promyslel.

Předkládaná sbírka jistě doplní nedostatek podobných publikací v našich pedagogických knihkupectvích. Je určena studentům gymnázií, středních odborných škol a středních odborných učilišť, kteří se ucházejí o studium na vysokých školách technických. Jistě ji uvítají i učitelé fyziky na středních i vysokých školách.

Miroslava Trchová

Ešte jedno riešenie úlohy Stanislava Horáka

ANTON HNÁTH, Gymnázium P. Horova, Michalovce

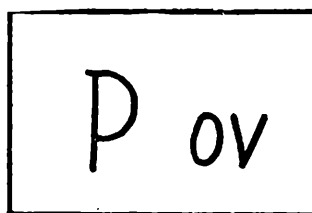
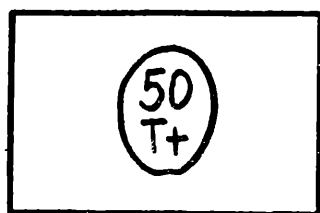
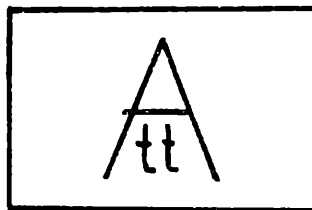
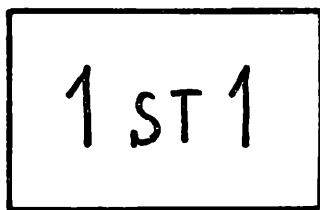
Uvedme najskôr text úlohy č. 1 zo súťaže Rozhľadov mat. fyz. v matematike v minulom ročníku:

Dokážte, že existuje nekonečne mnoho dvojíc celých kladných čísel x, y , pre ktoré je číslo $x^2 + xy + y^2$ druhou mocninou celého kladného čísla.

Túto úlohu, ktorej tri riešenia sú uvedené v 3. čísle Rozhľadov, ročník 68, možno riešiť aj „experimentálne“. Dosadzovaním „malých čísel“ nájdeme riešenie $x_0 = 7, y_0 = 8$. Stačí teraz položiť $x = 7k, y = 8k$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo, a máme úlohu vyriešenú, lebo:

$$x^2 + xy + y^2 = (7k)^2 + 7k \cdot 8k + (8k)^2 = (13k)^2.$$

Rébusy — jména fyziků



Řešení si můžete zkontrolovat na str. 380.

Milan Bednařík

HUMORY MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ

Landauova trojka

Lev Davidovič Landau (1908—1968) patří k nejvýznamnějším světovým teoretickým fyzikům, u něhož fyzikální myšlení bylo přímo součástí jeho bytosti. Na vysoké škole začal studovat již ve 14 letech (a to dvě fakulty najednou, matematicko-fyzikální a chemickou) a prohlašoval, že si ze svého dětství vůbec nepamatuje na období, kdy by neuměl diferencovat a integrovat. Své první vědecké práce publikoval v zahraničních časopisech, když mu bylo devatenáct let a zavedl v nich nový matematický pojem *matice hustoty*.

Zvláštní kapitolou je Landauovo pedagogické působení a způsob, jakým kolem sebe vytvářel školu teoretických fyziků. Měl svůj vlastní systém soukromých zkoušek, při nichž zadával pouze úlohy k řešení; naučené výklady ho nezajímaly. Systém známkování měl také jednoduchý — student úlohu buď vyřešil a dostal pětku (tj. výbornou) nebo nevyřešil a dostal dvojku (nevyhovující). A přece se stalo, že jeden student dostal od Landaua trojku.

Vzpomíná na to Landauův žák, náš *prof. J. Kvasnica*, který za svého působení na fyzikální fakultě Moskevské státní univerzity pomáhal při zkoušení studentů. Když se pak objevil Landau osobně, studenti se porůznu rozprchli a bylo třeba je odchytávat a přemlouvát, aby se dali vyzkoušet. Landau dokonce ve snaze dodat studentům odvahu neprozřetelně prohlásil: „Zaručuji vám čestným slovem, že kdo se přihlásí dobrovolně jako první, dostane o stupeň lepší známku.“ Jeden student vsadil vše na jednu kartu, vstal a požádal Landaua: „Napište mi Lve Davidoviči rovnou trojku.“ Landau splnil svůj slib a proti svému zvyku dal studentovi bez zkoušení trojku. Pak trochu litoval, neboť tak důvtipný student by si bezpochyby zasloužil známku lepší.

Akademik Kapica kdysi vyjádřil rozdíl mezi vědeckou školou Landauovou a školou jeho učitele *Nielse Bohra* těmito slovy: „Bohr se nikdy neostýchal před svými žáky přiznat, že je hlupák, zatímco Landau se nikdy neostýchal svým žákům říci, že jsou hlupáci.“ Vzpomínám si, jak se Landau naposledy sešel se svým učitelem N. Bohrem v roce 1961 na veselici studentů fyzikální fakulty v Moskvě, kteří se rozhodli tímto způsobem oslavit fiktivní narozeniny Archiméda. Bohužel v následujícím roce postihla Landaua těžká autohavárie s osudnými následky a v témž roce zemřel Niels Bohr.

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20 — Kčs. v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 3,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, s. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpalkova 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1990

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

ADRESA REDAKCE:

M. D. Rettigové 4,
116 39 Praha 1 - Nové Město
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

REDAKČNÍ KRUH:

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevičko; Dušan Jedinák, G Topoľčany; doc. dr. Stanislav Jendroň, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

ROZHLEDY

matematicko
-fyzikální

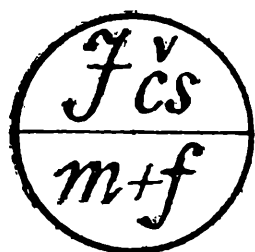
9
89 – 90

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

KVĚTEN

CENA 3,00 Kčs



ROZHLEDY

matematicko -fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Miroslav Bartošek: Pozvání do historie	385
Luděk Granát: Užití orientovaných přímk v aplikacích počítačové grafiky	388
Otakar Wilfert, Alena Vodilová: História vzniku laseru a jeho použitie pri výučbe fyziky — 1	394
Jan Kopka: Několik vět o Petru Vopěnkovi	403
Z matematiky a fyziky ZŠ	405
Přemýšlíme, řešíme	413
Naše soutěž	419
Olympiády a SOČ	422
Úlohy 1 části I. kola kategorií A, B, C 40. ročníku MO	422
dj: Kalendár M-F	430
Z nových knih	432
-ll: Jak uvést přednášejícího do rozpaků	3. str. obálky

Pozvání do historie

RNDr. Miroslav BARTOŠEK, gymnázium Přerov

Opět se blíží čas plánování školních výletů a prázdninových cest. V tomto článku vás chceme pozvat na cestu do historie. Možná si teď někteří vzpomenete na film „Cesta do pravěku“, ve kterém mladí hrdinové při cestě tajuplnou jeskyní navštíví prehistorická údobí naší Země. Místo, kam zveme, archeologickými nálezy proslulo. Ve vesnici Předmostí, která je dnes městskou čtvrtí Přerova na Moravě, bylo r. 1894 objeveno dnes již světoznámé sídliště pravěkého člověka. Sbíрка předmětů z tohoto naleziště je vystavena v muzeu, jež sídlí v přerovském zámku.

Po prohlídce této expozice můžete přejít z pravěku rovnou do 17. století. V letech 1608—1611 trávil v Přerově část svého mládí a v letech 1614—1618 i vyučoval nejsvětovější muž našich dějin — J. A. Komenský. Možná vás napadlo: „Co všechno znal Komenský z matematiky? Jak vypadalo perpetuum mobile, které se Komenský pokoušel sestavit? Jaký byl názor Komenského na heliocentrický systém M. Koperníka, co soudil o stavbě vesmíru?“ To vše se dozvíte v expozici „J. A. Komenský a přírodní vědy“, která je rovněž v přerovském zámku.

Zkusili jste si někdy představit, jak vypadala škola, do které chodila vaše prababička? Představu školy z konce 19. století nabízí prohlídka dalších expozic zámku (obr. 1). Vstoupíte např. do *třídy měšťanské školy*. Před námi jsou lavice, sedačka i stolek pěkně v jednom celku. Mnoho pohodlí staré lavice neposkytují. (Teď už víme, proč se místům pro žáky dodnes říká lavice, i když jsou to vlastně stolky se židlemi.)

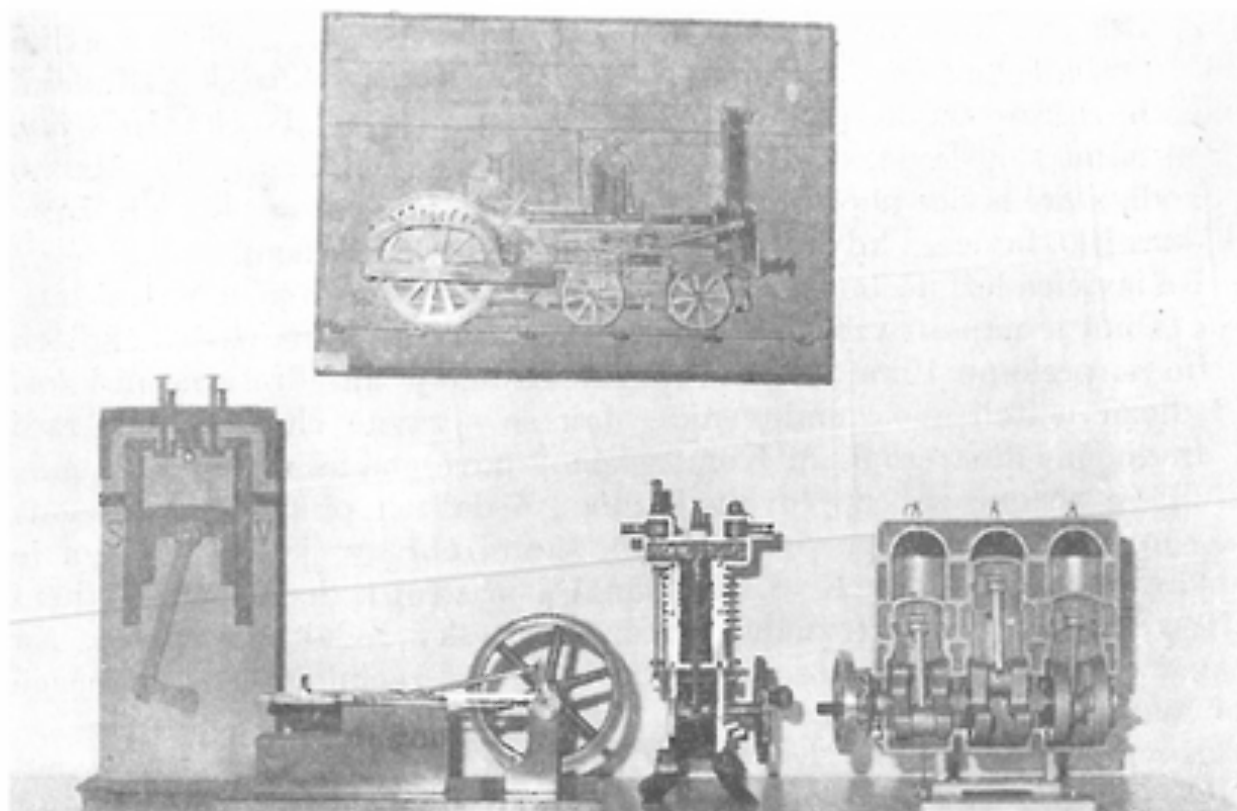
Na lavicích leží učebnice a sešity, které používali nám již neznámí žáci. Na tabuli je napsán vzor krasopisného písma, jaké se na našich školách učilo na přelomu 19. a 20. století. Vedle tabule je katedra a na ni kdosi předložil učiteli svou omluvenku. Jak se správně chovat, nám radí „Mravoučné desatero J. A. Komenského“ pověšené na zdi vedle tabule. Teplo v učebně zabezpečovala kamna. Z dalších předmětů v učebně nás upoutá stará mapa, harmonium, školní obrazy (jejich autorem je známý český pedagog K. S. Amerling) a přístroj k demonstraci vlnění (jeho tvůrcem je světoznámý fyzik, moravský rodák, E. Mach). Na závěr prohlídky si přečteme „Řád školní“ a zacinkáme na zaručeně původní školní zvonek.

Rovněž *přírodovědný kabinet* je vybaven nábytkem a pomůckami, jaké se používaly ve škole na přelomu 19. a 20. století. V učitelově knihov-



Obr. 1

Obr. 2



ně jsou pedagogické časopisy a školní zprávy. Je to přírodovědný kabinet, a proto zde nalezneme sbírku archeologických nálezů, vycpaniny zvířat, školní obrazy a mapy.

Nás však zaujmou především zasklené skříně, ve kterých jsou uloženy *pomůcky pro fyziku*. V první skříní je patrně nejstarší pomůcka našich sbírek — dřevěný mikroskop z 18. století. Vedle něj jsou dřevěné modely vah a jednoduchých strojů. Velkou část další skříně zabírají rozmanité funkční modely parních strojů. Nechybí ani fotografické přístroje z doby, kdy se fotografická technika začínala prosazovat v našem životě. I učitel fyziky bude překvapen množstvím různých provedení třecích elektrů pro pokusy z elektřiny. Zajímavé jsou i skleněné pomůcky pro školní pokusy z hydromechaniky a termiky. Mnohé z nich se již u nás nevyrábějí. V poslední skříní se lesknou krásná stará teluria. Tyto pomůcky byly používány k vysvětlení střídání dne a noci, ročních období a dalších astronomických úkazů na obloze. Poněkud záhadný je účel pomůcky připomínající vzhledem rumpál. Teprve když ve spodní části přístroje objevíme dvojici elektromagnetů je vše jasné — pomůcka sloužila k předvádění magnetických účinků elektrického proudu. Nechybí ani krásné mosazné dalekohledy — hned v sousedství starých globusů. Na stolku v rohu místnosti je souprava elektrického telegrafu.

Po prohlídce přírodovědného kabinetu vystoupíme do dalšího podlaží přerovského zámku. Zde si můžeme prohlédnout, jak se měnil vzhled i funkce školních pomůcek u nás od konce 19. století do současnosti. Exponáty jsou uloženy v prosklených vitrinách i volně umístěny v sále. V části nazvané „*Srovnávejte s námi*“ můžete porovnat, jak učitelé vysvětlovali vašim babičkám a dědečkům zákony fyziky s tím, jak je vysvětlovali vašim rodičům a jak je vysvětlují vám (obr. 2). Pokusy se „vzduchoprázdňem“ byly vždy velmi zajímavé a staré ruční vývěvy se vám budou líbit i dnes.

Elektrotechnické stavebnice vaši dědečkové ve škole neměli, zato jim učitel ukazoval pokusem, jak vzniká blesk a jak funguje hromosvod (bleskosvod). Budete asi překvapeni zjištěním, že už na počátku 20. století mohli žáci ve škole pozorovat pokusy s elektromagnetickým vlněním. Pokud nevíte, jak pracoval parní stroj, nevadí, funkci parního stroje můžete studovat na starých modelech, které stisknutím tlačítka uvedete v chod. Zaujmou vás pomůcky vyrobené učiteli. Na jedné z nich čteme „Dne 24. srpna 1904 dokončil A. Šepela, profesor české reálky v Kroměříži“. Zajímavé je sledovat, jak se měnily projekční přístroje. Od těch, ve kterých se svítilo petrolejkou, až po ty, jež máte ve škole. Prohlédnout si můžete ručně malované diapozitivy. A což teprve nechat se vyzkoušet vyučovacím strojem, vyráběným před 20 lety.

Možná vás bude zajímat, jak vypadaly první elektronické kalkulatory, s nimiž se učili počítat žáci v našich školách. Jsou zde vystaveny. Nakonec si můžete zkusit, jaké to je učit se fyziku v učebně vybavené počíta-

tači a televizním okruhem. Také můžete vyzkoušet svého učitele, jestli pozná osobnosti československé matematiky a fyziky zobrazené na reliéfu pamětní medaile Jednoty československých matematiků a fyziků.

Tak už víte, kam pojedete na výlet? Muzeum na Horním náměstí v Přerově je otevřeno od října do dubna vždy ve středu a sobotu od 14 h do 16 h, v neděli od 9 h do 12 h. V létě, od dubna do září denně v úterý až pátek od 9 h do 12 h a od 14 h do 17 h, v sobotu od 14 h do 16 h a v neděli od 9 h do 12 h.

MATEMATIKA

Užití orientovaných přímk v aplikacích počítačové grafiky

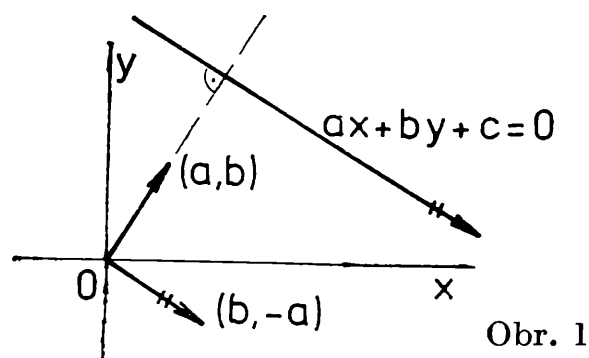
Doc. dr. Luděk GRANÁT, CSc., VÚMS Praha

Chceme-li určit bod jako průsečík přímky a kružnice, řešíme soustavu lineární a kvadratické rovnice

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Je-li vzdálenost přímky od středu kružnice menší než její poloměr, dostáváme dvě řešení. Výběr jednoho z nich můžeme provést např. na základě požadavku, aby zvolené řešení mělo menší nebo větší x -ovou, případně y -ovou, souřadnici než druhé. Tento způsob výběru je názorný (bývají užity např. parametry vlevo nebo vpravo), proto se často užívá, je však závislý na soustavě souřadnic. Otočíme-li dané prvky kolem určitého bodu, může průsečík s původně menší x -ovou souřadnicí mít novou x -ovou souřadnici větší než druhý průsečík.

Vhodným východiskem je přiřazení určité orientace uvažované přímce. Tento příspěvek se bude zabývat prací s orientovanými přímkami. Přímce reprezentované rovnicí $ax + by + c = 0$, kde $a^2 + b^2 = 1$, přiřadíme (viz obr. 1) orientaci úsečky, která je rovnoběžná a souhlasně orientovaná s vektorem $(b, -a)$. Rovnice přímk můžeme násobit jen kladnými čísly, aby reprezentovaly tutéž orientovanou přímku. Při vynásobení rovnice záporným číslem změni přímka orientaci. Protože v našich úvahách vždy předpokládáme, že $a^2 + b^2 = 1$ ([1]), vektor $(b, -a)$ má velikost 1 a budeme mu říkat jednotkový směrový vektor.



Orientace přímky umožní určit průsečík přímky a kružnice jako bližší a vzdálenější ve smyslu orientace přímky. Než však přistoupíme k sestavení podprogramu pro průsečík přímky a kružnice, zastavíme se u některých jednodušších úloh.

Přímku často určujeme dvojicí bodů. Protože nyní pracujeme s orientovanými přímkami, půjde o uspořádané dvojice bodů určujících též orientaci. Označme je $B(J)$ a $B(M)$. Tyto body nesmějí být nejen totožné, ale má-li být přímka určena dostatečně přesně při užití počítače, nesmějí být ani velmi blízko sebe. Proto nejprve spočteme vzdálenost těchto bodů a jen je-li větší než dané číslo WW , pokračujeme ve výpočtu koeficientů rovnice přímky:

```

1110 REM P(I) URCENA B(J) A B(M) — PBB
1120 LET W1 = B(M, 1) - B(J, 1)
1130 LET W2 = B(J, 2) - B(M, 2)
1140 LET W = SQR(W1*W1 + W2*W2)
1150 IF W < WW THEN GOTO 1200
1160 LET P(I, 1) = W2/W
1170 LET P(I, 2) = W1/W
1180 LET P(I, 3) = - B(J, 1)*P(I, 1) - B(J, 2)*P(I, 2)
1190 GOTO 1220
1200 PRINT "PBB", I, J, M
1210 LET WQ = 1
1220 RETURN

```

Určujeme-li kolmici k orientované přímce, budeme ji orientovat tak, aby její jednotkový směrový vektor mohl vzniknout otočením jednotkového směrového vektoru dané přímky o pravý úhel v kladném smyslu, tj. proti smyslu pohybu hodinových ručiček. Přímka $P(I)$ vedená bodem $B(J)$ a kolmá k přímce $P(M)$ bude určena koeficienty:

```

LET P(I, 1) = - P(M, 2)
LET P(I, 2) = P(M, 1)
LET P(I, 3) = B(J, 1)*P(M, 2) - B(J, 2)*P(M, 1)

```

Pracujeme-li s orientovanými přímkami, můžeme definovat orientovanou vzdálenost bodu od přímky, a to např. tak, že vzdálenost bodů

ležících vlevo od dané přímky bereme kladně a vzdálenost bodů ležících vpravo od dané přímky bereme záporně. Orientovanou vzdálenost bodu $B(I)$ od orientované přímky $P(J)$ lze vypočítat na základě příkazu

$$\text{LET } WD = B(I, 1) * P(J, 1) + B(I, 2) * P(J, 2) + P(J, 3)$$

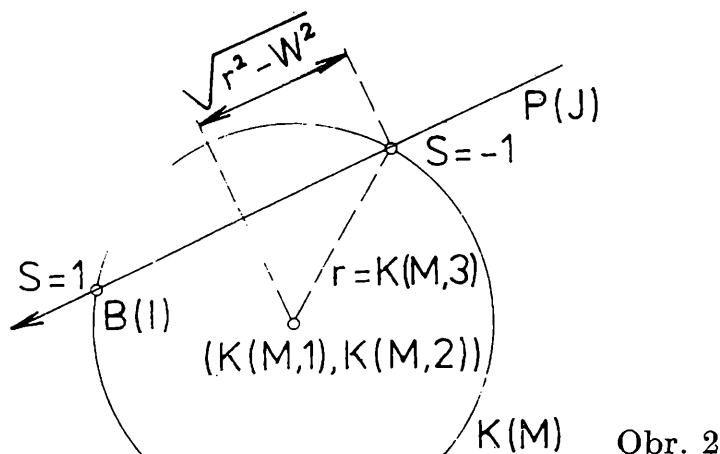
Takto definovaná orientovaná vzdálenost umožňuje určit jednoznačně přímku $P(I)$, která je s přímkou $P(J)$ rovnoběžná a má od ní orientovanou vzdálenost WD (tj. její body mají od ní tuto vzdálenost):

$$\text{LET } P(I, 1) = P(J, 1)$$

$$\text{LET } P(I, 2) = P(J, 2)$$

$$\text{LET } P(I, 3) = P(J, 3) - WD$$

Vraťme se zpět k určení průsečíku přímky s kružnicí. Předchozí úvahy dávají návod i na zjištění (neorientované) vzdálenosti W středu kružnice od přímky. Bude-li rovna velikosti poloměru kružnice (můžeme připustit i odchylku o WW , která „opraví“ chyby vzniklé zaokrouhlováním při výpočtech, můžeme za společný bod přímky a kružnice vzít průsečík kolmice spuštěné ze středu kružnice na danou přímku s touto přímkou. Kolmici můžeme nazvat např. P_{20} a pokud vytvoříme a budeme využívat podprogram pro řešení průsečíku přímky a kružnice s takto pojmenovanou pomocnou přímkou, nesmíme jinou přímku, kterou chceme uchovávat v paměti počítače, takto nazvat. Bude-li W menší než velikost poloměru, můžeme také vypočítat souřadnice zmíněného průsečíku, který přechodně označíme shodně s výsledným průsečíkem a od něho nanést ve správném směru a smyslu vzdálenost rovnou $\sqrt{r^2 - W^2}$ — viz obr. 2.



Obr. 2

Položíme-li $S = -1$ pro bližší a $S = 1$ pro vzdálenější průsečík orientované přímky $P(J)$ s kružnicí $K(M)$, bude hledaný průsečík určen příkazy

1240 REM PRUSECIK B(I) PRIMKY P(J) S KRUZNICI K(M),
PRIZNAK S — BPK

1250 LET P(20, 1) = — P(J, 2)

1260 LET P(20, 2) = P(J, 1)

```

1270 LET P(20, 3) = K(M, 1)*P(J, 2) -- K(M, 2)*P(J, 1)
1280 LET WM = M
1290 LET M = 20
1300 GOSUB 1020
1310 LET M = WM
1320 LET W = ABS(K(M, 1)*P(J, 1) + K(M, 2)*P(J, 2) + P(J, 3))
1330 IF ABS(ABS(K(M, 3)) - W) < WW THEN GOTO 1410
1340 IF ABS(K(M, 3) < W THEN GOTO 1390
1350 LET WD = S*SQR(K(M, 3) ^ 2 - W*W)
1360 LET B(I, 1) = B(I, 1) + WD*P(J, 2)
1370 LET B(I, 2) = B(I, 2) - WD*P(J, 1)
1380 GOTO 1410
1390 PRINT "BKP", I, J, M
1400 LET WQ = 1
1410 RETURN

```

Určení průsečíku dvou kružnic $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, kde S_i má souřadnice $x_i, y_i, i = 1, 2$, lze převést na řešení předchozí úlohy. Řešení soustavy dvou kvadratických rovnic pro nalezení společných bodů kružnic

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2,$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$$

nebo
$$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_2 - 2yy_2 + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 = 0$$

vede na řešení soustavy skládající se z jedné z těchto rovnic a jejich rozdílu

$$2x(x_1 - x_2) + 2y(y_1 - y_2) - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 + r_1^2 - r_2^2 = 0$$

Tato poslední (lineární) rovnice reprezentuje přímku, která je kolmá na orientovanou spojnicí středů daných kružnic (od S_1 k S_2). Můžeme tedy převést danou úlohu na určení průsečíku jedné z daných kružnic s orientovanou přímkou danou koeficienty

$$a = 2(x_1 - x_2)/u,$$

$$b = 2(y_1 - y_2)/u,$$

$$c = (-x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 + r_1^2 - r_2^2)/u,$$

kde $u^2 = 4[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]$

Tuto přímku můžeme pojmenovat P19.

Volbu požadovaného průsečíku z dvou možných můžeme provádět obdobně jako u průsečíku přímky s kružnicí pomocí hodnoty proměnné S , jen s tím rozdílem, že zde $S = 1$ bude znamenat vlevo a $S = -1$ vpravo od orientované spojnice středů daných kružnic.

Podprogram pro určení souřadnic průsečíku dvou kružnic může vypadat takto:

```

1430 REM PRUSECIK B(I) KRUZNIC K(J), K(M), PRIZNAK S —
      BKK
1440 LET W1 = K(J, 1) — K(M, 1)
1450 LET W2 = K(J, 2) — K(M, 2)
1460 LET W = SQR(W1*W1 + W2*W2)
1470 IF W < WW THEN GOTO 1560
1480 LET P(19, 1) = W1/W
1490 LET P(19, 2) = W2/W
1500 LET P(19, 3) = (K(M, 1) ^ 2 — K(J, 1) ^ 2 + K(M, 2) ^ 2 —
      — K(J, 2) ^ 2 — K(M, 3) ^ 2 + K(J, 3) ^ 2)/(2*W)
1510 LET WJ = J
1520 LET J = 19
1530 GOSUB 1250
1540 LET J = WJ
1550 GOTO 1580
1560 PRINT "BKK", I, J, M
1570 LET WQ = 1
1580 RETURN

```

Na závěr tohoto článku uvedeme příklad, v němž ukážeme, jak lze na základě uvedených vztahů a podprogramů vypočítat souřadnice středu B3 kružnice K3 nakreslené na obr. 3. Kružnice K3 se dotýká kružnic K1 a K2 a má poloměr 70.

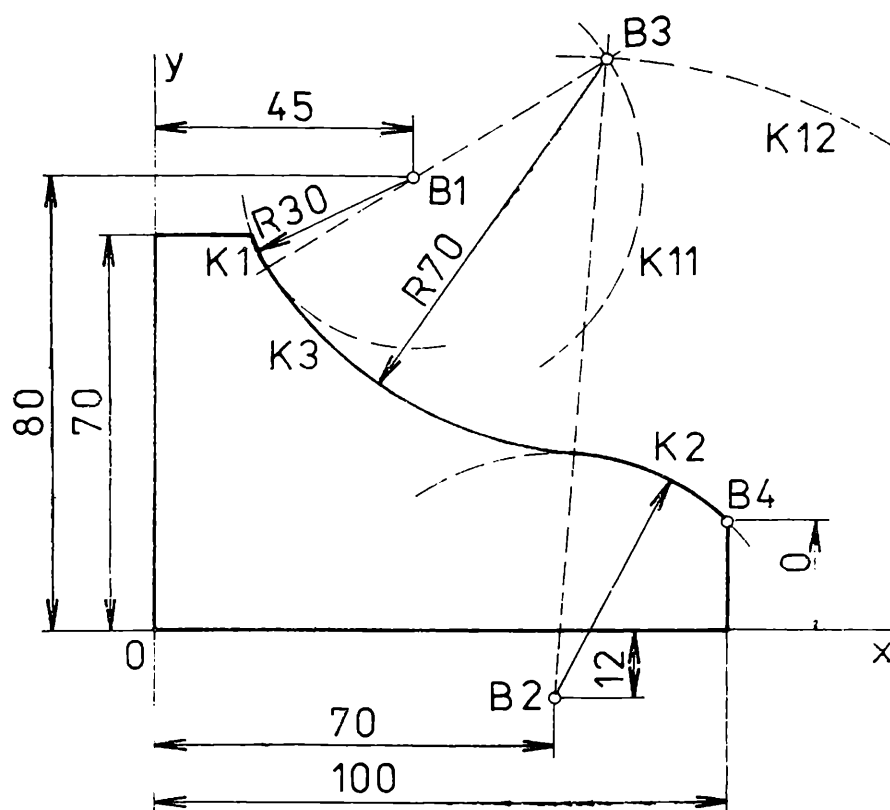
Počátek soustavy souřadnic a souřadnicové osy zvolíme, jak znázorněno na obr. 3. Souřadnice středu B1 kružnice K1 jsou 45, 80 a její poloměr je 30. Souřadnice středu B2 kružnice K2 jsou 70, — 12. Na základě požadavku, že kružnice K2 má procházet bodem B4 o souřadnicích 100, 20, umíme vypočítat její poloměr K(2, 3). Střed kružnice K3 musí být průsečíkem pomocných kružnic K11 a K12 soustředných s K1 a K2. Poloměr kružnice K11, tj. K(11, 3), bude roven 30—70 a poloměr K(12, 3) bude roven K(2, 3) + 70. Z obrázku plyne, že hledaný střed B3 má ležet vlevo od orientované spojnice středů pomocných, a tedy i daných kružnic (v pořadí K1, K2).

Příslušná část programu pro určení pomocných kružnic a jejich průsečíku (v celém programu musí být deklarována pole B, P, K, určena konstanta WW, anulována proměnná WQ a uvedeny užité podprogramy) může vypadat takto:

```

100 LET K(11, 1) = 45
110 LET K(11, 2) = 80
120 LET K(11, 3) = 40
130 LET K(12, 1) = 70
140 LET K(12, 2) = — 12

```



Obr. 3

```

150 LET K(12, 3) = SQR(30*30 + 32*32) + 70
160 LET I = 3
170 LET J = 11
180 LET M = 12
190 LET S = 1
200 GOSUB 1430

```

Nejsme-li si jisti, že jsme se někde nespletli, a chceme-li v programu jen při správném výsledku pokračovat bez zastavení, vložíme podmínku

```
210 IF WQ = 1 THEN STOP
```

Hledané souřadnice středu kružnice můžeme přepočítat uplatněním příkazu

```
PRINT B(3, 1), B(3, 2).
```

Čtenáři jistě nebude nesnadné napsat další část programu např. pro určení souřadnic dotykových bodů kružnice K3 s kružnicemi K1 a K2.

Literatura

- [1] Granát, L.: Planimetrické konstrukce v aplikacích počítačové grafiky. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 68, 1989/90, č. 8 (duben), s. 342

História vzniku laseru a jeho použitie pri výučbe fyziky — 1

Doc. ing. OTAKAR WILFERT, CSc., dr. ALENA VODILOVÁ, VVTŠ-ČSSP
Liptovský Mikuláš

V prvej časti článku je stručne zhrnutá história vzniku laseru. Zhodnotené sú podstatné vlastnosti laserového žiarenia a zvážené možnosti využitia laseru pri výučbe fyziky. S ohľadom na pedagogické aplikácie je podrobnejšie rozobraný He-Ne laser. V druhej časti článku je uvedený prehľad pomôcok a zariadení potrebných pre úpravu laserového zväzku a jeho elektronické vyhodnocovanie. Článok končí stručným prehľadom možných aplikácií He-Ne laseru vo výučbe fyziky.

1. História vzniku laseru

Nobelova cena za základnú prácu v kvantovej teórii poľa, ktorá viedla ku konštrukcii oscilátorov a zosilňovačov založených na princípe maserov — laserov, bola udelená 11. 12. 1964

*Charlesovi Hardovi Townesovi¹⁾,
Nikolajovi Gennadijevičovi Basovovi²⁾,
Alexandrovi Michajlovičovi Prochorovovi³⁾.*

¹⁾ Charles Hard Townes sa narodil 28. júla 1915 v Greenville v štáte South Carolina (USA) [18, 19]. Po skončení vysokoškolských štúdií pracoval do roku 1947 vo výskumných laboratóriách Bell Telephone Laboratories v Murray Hill v štáte New Jersey. V roku 1948 sa stal profesorom na Kolumbijskej univerzite a od roku 1961 pôsobil ako rektor na Massachusettskom technologickom inštitúte. Od roku 1967 pracuje na Kalifornskej univerzite.

Známym sa stal prácami v oblasti spektroskopie mikrovln. Tieto práce vyvrcholili v roku 1954 a viedli ho ku konštrukcii prvého kvantového generátora, ktorému spolu so svojimi študentmi dal názov maser. Ako pracovnú látku spočiatku používal čpavkový plyn, neskôr tuhé látky (kryštál kremíka a iné.) Townes použil maser na overenie Michelsonovho pokusu. Úspešne ho uplatnil tiež v rádioastronómii pri overení rôznych medicínsko-biologických teórií.

²⁾ Nikolaj Gennadijevič Basov sa narodil 14. decembra 1922 vo Voronežskej oblasti v malom mestečku Usman [18, 19]. Študoval na Moskovskom inžiniersko-fyzikálnom inštitúte. V roku 1963 sa stal profesorom tohto inštitútu a od roku 1973 bol riaditeľom výskumného ústavu FIAN (Fizičeskij institut Akademii nauk).

Townesovi patrí prvá polovica Nobelovej ceny, o druhú polovicu sa rovnakým dielom delí Basov a Prochorov [1].

Začiatok kvantovej elektroniky sa počíta už od roku 1954, kedy *Gordon, Zeiger a Townes* (USA) súčasne s *Basovom a Prochorovom* (ZSSR) predviedli prvú konštrukciu masera [2, 3]. Počínajúc týmto rokom je možné konštatovať, že existujú teoretické základy kvantových generátorov (maserov — laserov) a ich prvé technické aplikácie. Aktívnym prostredím prvého maseru bol plyný čpavok. Žiarenie čpavkového maseru (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) je kontinuálne s dĺžkou vlny 12,559 mm.

Prvý laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) bol zostrojený v roku 1960 *Theodorom Haroldom Maimanom*⁴⁾. Jednalo sa o pevnolátkový rubínový impulzne pracujúci laser [4]. Žiarenie rubínového laseru obsahuje dve zložky, ktoré majú blízke vlnové dĺžky 694,3 nm a 692,9 nm.

Teória kvantových generátorov vychádza z objasnenia javu stimulovanej emisie, ktorú v roku 1917 podal [5] *Albert Einstein*. Einstein vo

Vo svojich vedeckých prácach spočiatku rozpracoval fyzikálne princípy štandardov frekvencie. V roku 1954 spolu s Prochorovom vyvinul prvý kvantový generátor na báze molekúl čpavku a v roku 1955 vypracoval teoretické základy činnosti trojhladinového kvantového generátora svetelných impulzov. Basovovi prislúcha myšlienka použitia polovodičov v laseroch (1957). V roku 1961 Basov poukázal na možnosti použitia laserov pri termojadrových syntézach. V roku 1963 objavil nové metódy tepelného vzбудenia laserových systémov — chemické kvantové generátory.

³⁾ Alexander Michajlovič Prochorov sa narodil 11. júla 1916 v Atortone v Austrálii [18, 19]. Roku 1923 sa spolu s rodičmi presťahoval do Sovietskeho zväzu. Študoval na Fyzikálnej fakulte Leningradskej univerzity. V r. 1939 štúdium ukončil a prešiel do Moskvy, kde nastúpil ako vedecký aspirant do výskumného ústavu FIAN. Od roku 1968 bol zástupcom riaditeľa tohto ústavu, neskôr riaditeľom Ústavu všeobecnej fyziky AV.

Jeho vedecké práce sú z oblasti kvantovej elektroniky a jej aplikácií. V spolupráci s Basovom sa venoval konštrukcii štandardov frekvencií, čo ich v roku 1954 priviedlo k objavu čpavkového kvantového generátora. Neskôr v roku 1955 spoločne navrhli trojhladinový kvantový generátor. V sérii prác preskúmal kryštál rubínu z hľadiska jeho použitia v tzv. paramagnetických kvantových generátoroch. V roku 1958 predložil nový typ rezonátora pre submilimetrové vlny. Spolu so spolupracovníkmi v roku 1963 rozpracoval nový princíp činnosti kvantových generátorov s použitím dvojkvantových prechodov.

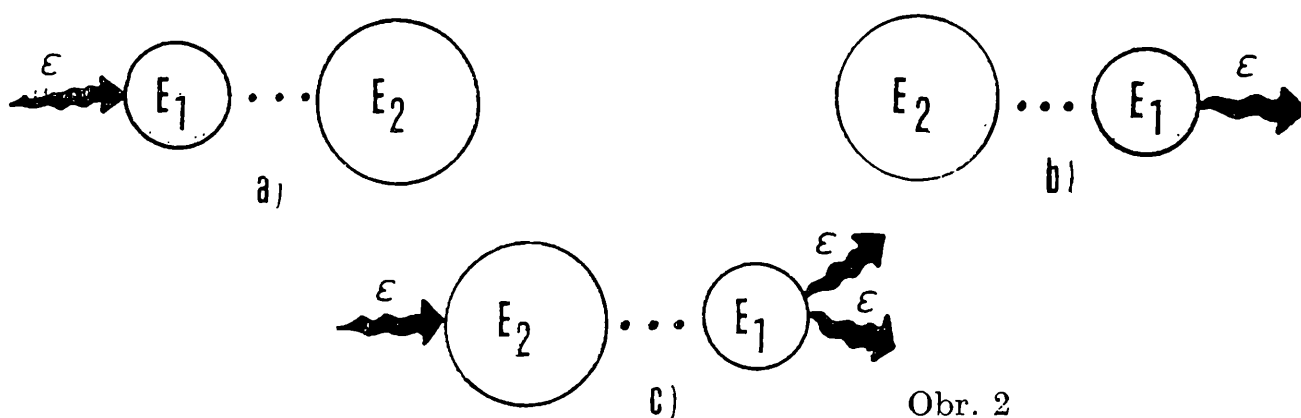
⁴⁾ Theodor Harold Maimann sa narodil 11. 7. 1927 v Los Angeles [18]. V roku 1949 skončil univerzitu a v roku 1958 získal titul doktora filozofie Stanfordskej univerzity. Skonštruoval v roku 1960 prvý optický kvantový generátor — rubínový laser a prvýkrát získal koherentné žiarenie vo viditeľnej oblasti spektra. V roku 1962 založil spoločnosť „Corad Corporation“, ktorá pracovala na vývoji a výskume laserov.

Jeho vedecké práce sa zaoberajú kvantovou elektronikou, hlavne zdokonaňovaním maserov a laserov.

svojej teórii zdôvodnil, že častica (atóm, molekula) v určitom energetickom stave môže prejsť na nižší energetický stav nielen spontánne, ale aj stimulovane za súčasného vyžiarovania fotónu. Pravdepodobnosti všetkých možných energetických prechodov častice vyjadril Einstein v [5] pomocou veličín, ktorým dnes hovoríme „Einsteinove koeficienty“.

Z teórie stimulovanej emisie vyplýva, že popri vynútenom prechode častice z nižšieho energetického stavu na vyšší (absorpcia) existuje tiež vynútený prechod častice z vyššieho energetického stavu na nižší (stimulovaná emisia). Sú teda možné tri druhy energetických prechodov častice (obr. 1):

*absorpcia,
spontánna emisia,
stimulovaná emisia.*



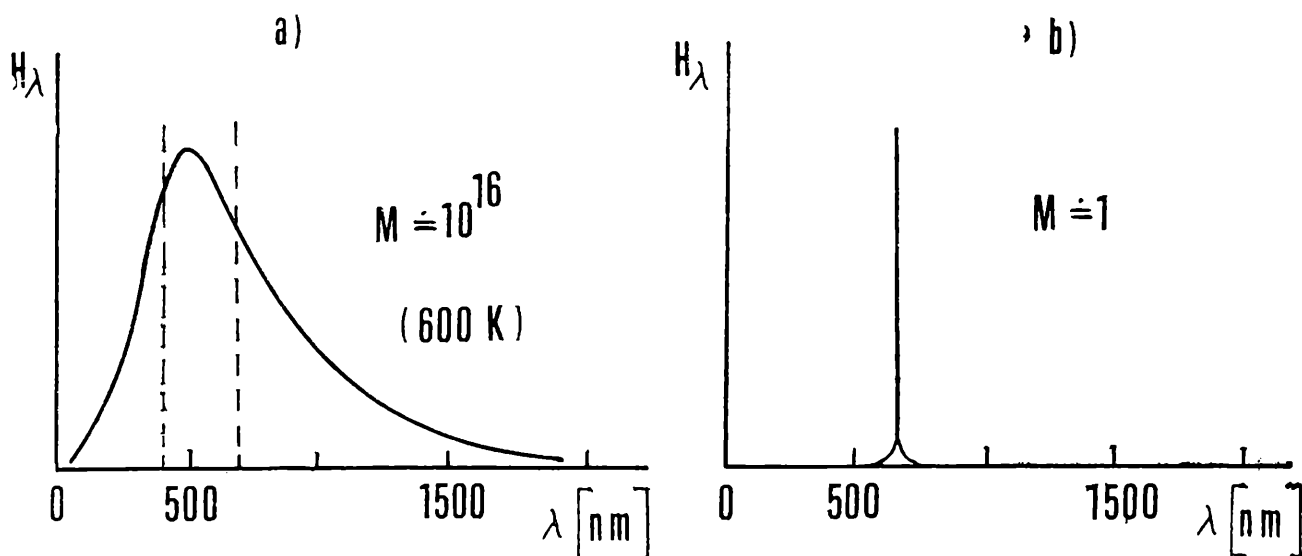
Obr. 2

Obr. 1. Znázornenie absorpcie (a), spontánnej emisie (b) a stimulovanej emisie (c). E_1, E_2 — energetické stavy častice, ϵ — energia fotónu.

Objasnením javu stimulovanej emisie sa vyriešila nezrovnalosť, ku ktorej dochádzalo pri overovaní Planckovho zákona žiarenia čierneho telesa. Energetické hodnotenie absorpcie a spontánnej emisie bez stimulovanej emisie nepostihlo všetky prítomné javy.

Zosilňovaním svetla pomocou stimulovanej emisie sa zaoberal už v roku 1939 vo svojej doktorskej dizertačnej práci *Valentin Alexandrovič Fabrikant* (ZSSR). Ďalšie Fabrikantove práce s touto tematikou sa objavujú aj v povojnových rokoch, ale nevenovala sa im dostatočná pozornosť a so vznikom kvantovej elektroniky nie sú priamo spojované.

Konštrukciou laserov vznikli zariadenia, ktoré vysielajú žiarenie podstatne odlišných vlastností, ako sú vlastnosti žiarenia čierneho telesa a tiež bežných zdrojov žiarenia (obr. 2). Špeciálnou vlastnosťou žiarenia laserov je ich vysoká časová a priestorová koherencia. Žiarenie čierneho telesa je naproti tomu nekoherentné. Dôsledkom koherencie laserového žiarenia je jeho vysoká monochromatickosť a smerovosť. Tieto vlastnosti určujú aplikácie laserov v mnohých vedných a technických oboroch, aj pri vyučovaní.



Obr. 2. Znázornenie odlišných vlastností žiarenia čierneho telesa (a) a laseru (b). H_λ — spektrálna intenzita vyžarovania, λ — vlnová dĺžka, M — počet možných modov žiarenia.

2. He-Ne laser pre výučbu fyziky

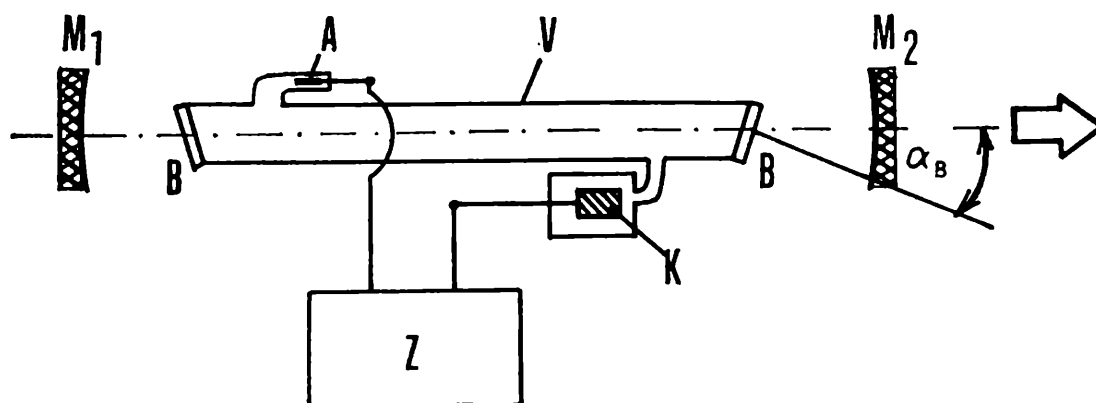
Pri výbere zo súčasne vyrábaných typov laserov a po zvážení ich dostupnosti je pre demonštrácie fyzikálnych javov a laboratórne cvičenia vhodné použiť kontinuálny He-Ne laser, ktorý žiari vo viditeľnej oblasti spektra pri výkone 1 mW až 10 mW. Uvedený laser pracuje na vlnovej dĺžke 632,8 nm, čo ľudské oko vníma ako šarlátovo červenú farbu [6].

Pri pohľade na stopu laserového žiarenia rozptyľovaného bielou difúznou plochou (papier, stena) je možné demonštrovať jav koherenčnej zrnitosti [7]. Malé škvrnky viditeľné v stope laserového žiarenia sa pri nepatrnom pohybe hlavy alebo difúznej plochy veľmi rýchlo pohybujú. Pritom sa ponúka niekoľko technických aplikácií, napr. pri meraní rýchlosti pohybu difúznej plochy alebo drsnosti jej povrchu a pod. Na prvý pohľad je charakter stopy rozptyľovaného laserového žiarenia odlišný od stopy svetla vytváraného žiarovkou alebo žiarivkou. Pozorovaný jav koherenčnej zrnitosti je dôsledkom vysokej koherencie laserového žiarenia. Niekedy však býva vytváranie škvŕniiek nedostatkom meracieho zariadenia a vysoká koherencia laserového žiarenia je potom jeho negatívnou vlastnosťou.

⁵⁾ Ali Javan sa narodil 27. 12. 1926 v Teheráne [18]. V rodnom meste navštevoval univerzitu a v roku 1948 odcestoval do USA, kde r. 1954 získal titul doktora filozofie. V rokoch 1958–1961 pôsobil v laboratóriách Bell Telephone Laboratories a od roku 1960 aj v Massachusettskom technologickom inštitúte. Vedecké práce sa týkajú kvantovej elektroniky a jej aplikácií. V roku 1961 zostrojil so svojimi spolupracovníkmi prvý He-He laser.

Prvý He-Ne laser bol zostrojený vo februári 1961 Javanom⁵⁾ a jeho spolupracovníkmi Bennettom a Herriettom v laboratóriách Bell Telephone Laboratories [8]. Ich laser žiaril kontinuálne v infračervenej oblasti spektra. Najväčšiu intenzitu malo žiarenie s vlnovou dĺžkou 1152,3 nm.

Generáciu žiarenia He-Ne laseru vo viditeľnej oblasti spektra sa podarilo získať Whiteovi a Ridgenovi (USA) v roku 1962 [9]. Laser bol konštruovaný s vnútornými zrkadlami. Zrkadlá v lasere tvoria Fabryov-Perotov rezonátor, ktorý zabezpečuje kladnú spätnú väzbu. V tom istom roku Rigrod (USA) so svojimi spolupracovníkmi uskutočnil konštrukciu He-Ne laseru s vonkajšími zrkadlami a s Brewsterovými okienkami. Táto konštrukcia je dnes najpoužívanější (obr. 3). Brewsterove okienka



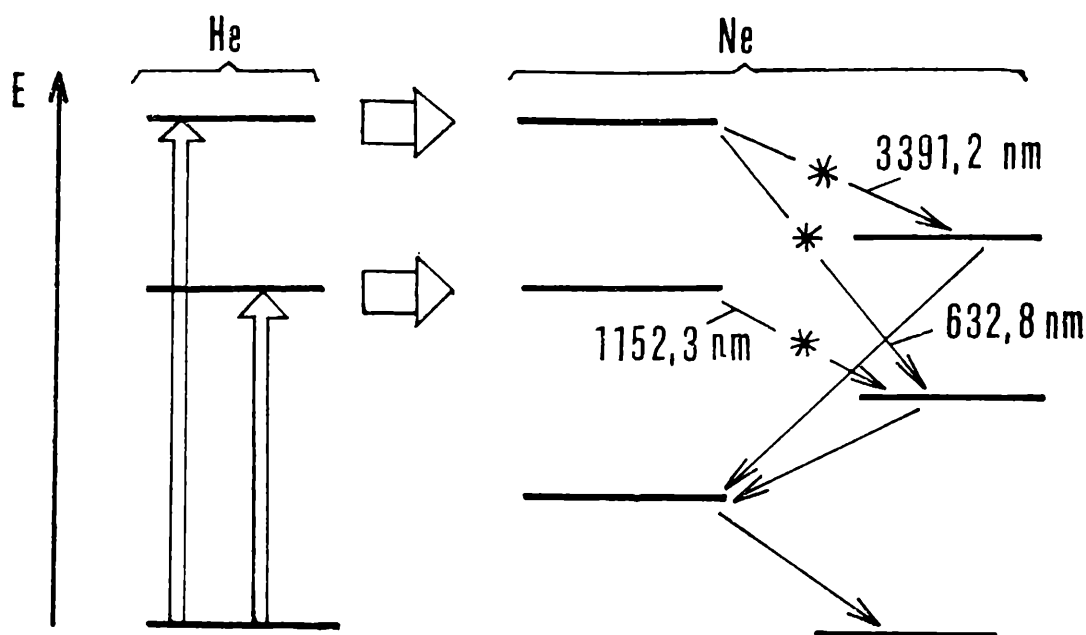
Obr. 3. Znáznornenie konštrukcie He-Ne laseru.

M_1 — totálne odrážajúce zrkadlo, M_2 — výstupné zrkadlo, B — Brewsterove okienka, α_B — Brewsterov uhol, V — výbojová trubica, A — anóda, K — katóda, Z — zdroj.

zabezpečujú minimálne straty žiarenia pri prechode skleneným obalom výbojovej trubice. Žiarenie je po prechode Brewsterovými okienkami lineárne polarizované s definovanou rovinou polarizácie, čo je možné pri niektorých výučbových aplikáciach využiť.

He-Ne laser je budený elektrickým výbojom v héliu. Výboj v héliu je sprevádzaný nepružnými zrážkami atómov héliu s atómami neónu, pri ktorých sa atómy neónu dostávajú do vzbuđeného stavu (obr. 4). Na obr. 4 sú znázornené energetické hladiny a prechody v aktívnom prostredí He-Ne laseru. Útlm žiarenia iných vlnových dĺžok, ako je 632,8 nm, sa prevádza pomocou selektívnych zrkadiel rezonátora, interferenčným filtrom alebo nehomogénnym magnetickým poľom pozdĺž výbojovej trubice.

Výstupný výkon He-Ne laserov (Φ_L) býva od 0,2 mW do 150 mW. Veľkosť výstupného výkonu ovplyvňujú podmienky, pri ktorých prebieha budenia laseru: celkový tlak plynnej zmesi (p), pomer parciálnych tlakov héliu a neónu ($p_{He} : p_{Ne}$), vnútorný priemer výbojovej trubice (D), dĺžka výboja (l), prúd výboja (I), teplota plynu v aktívnej zóne a teplota stien výbojovej trubice [10].



Obr. 4. Znáznornenie energetických hladín a prechodov v He-Ne lasere. Hviezdičkou je označená stimulovaná emisia.

Nasledujúca tabuľka udáva optimálne číselné hodnoty niektorých veličín na získanie maximálneho výkonu He-Ne laseru.

Tab. 1. Optimálne číselné hodnoty niektorých veličín k získaniu maximálneho výkonu He-Ne laseru. Približná úroveň získaného výkonu je uvedená v poslednom stĺpci.

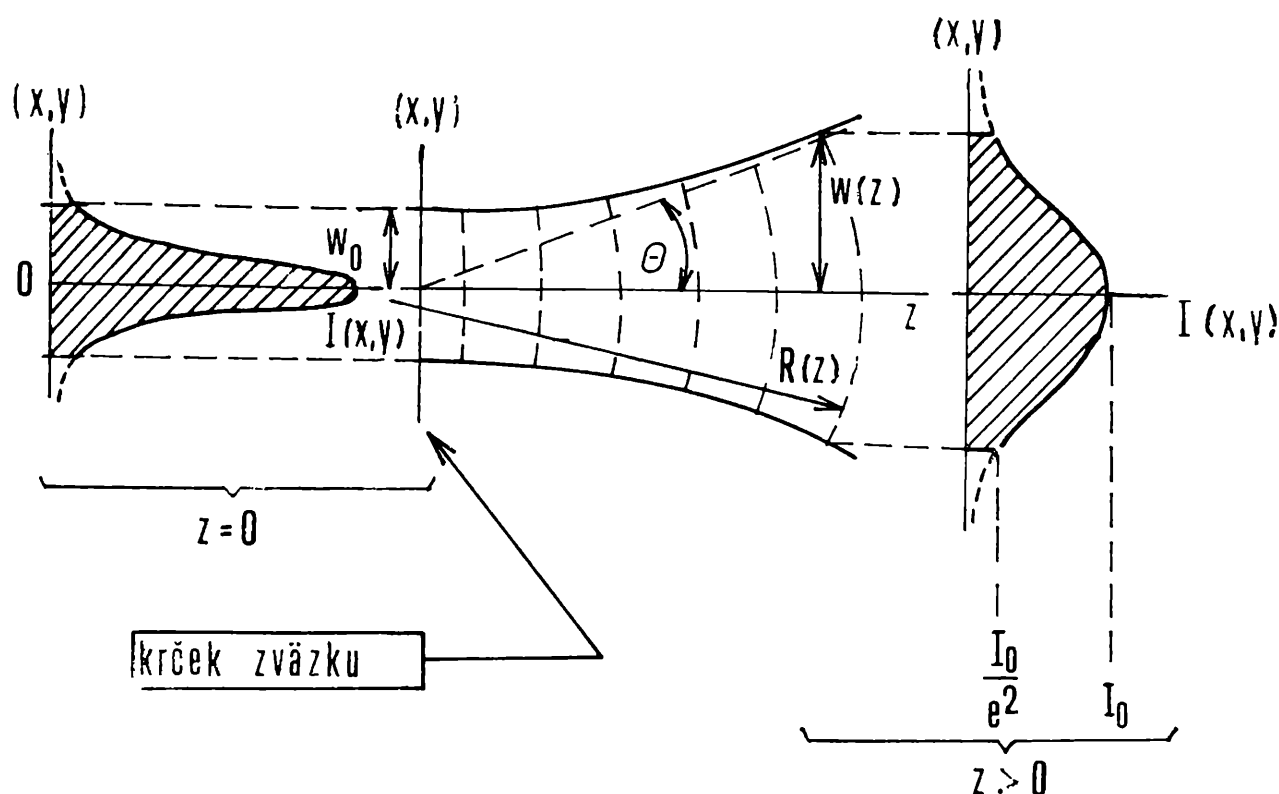
$\frac{D}{\text{mm}}$	$\frac{p}{\text{Pa}}$	$P_{\text{He}} : P_{\text{Ne}}$	$\frac{I}{\text{mA}}$	$\frac{l}{\text{m}}$	$\frac{\Phi_L}{\text{mW}}$
1,5	320	7 1	12	0,125	1,9
3,0	160	6 1	40	0,550	16,5
5,0	96	5 1	77	0,650	32,5
8,0	60	4 1	133	1,500	120,0

Predpokladá sa, že laser pracuje v laboratórnych podmienkach pri izbovej teplote. Teplotné zmeny prostredia, kde laser pracuje, ovplyvňujú nielen podmienky optimálneho stavu výboja, ale tiež narušujú mechanickú stabilitu nastavenia zrkadiel rezonátora. Uvedené číselné hodnoty v tabuľke majú len orientačný význam. Konkrétne prevedenie He-Ne laseru má rozmanitý charakter a podriaďuje sa účelu, ku ktorému je laser určený. Existujú He-Ne lasery s dĺžkou výbojovej trubice 0,08 m aj 3 m. Aktívne prostredie He-Ne laseru má relatívne malé zosilnenie (účinnosť laseru je približne 0,02 %), čo vysvetľuje použitie väčšinou pomerne dlhej výbojovej trubice. Optimálna priepustnosť zrkadla rezonátora na výstupe laseru je od 1 % do 5 % [11].

V ČSSR bol prvý He-Ne laser daný do prevádzky v roku 1963 v ÚPT ČSAV Brno. Laser pracoval kontinuálne v infračervenej oblasti spektra žiarenia. Generáciu vo viditeľnej oblasti spektra žiarenia sa podarilo uskutočniť na tom istom pracovisku na jar v roku 1964.

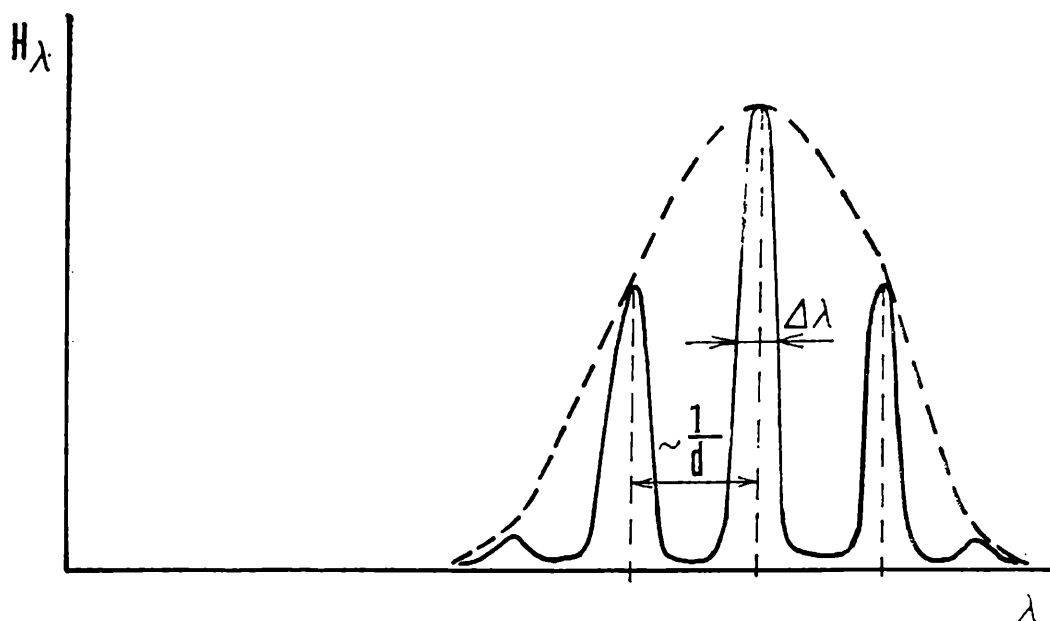
Pre úplnosť histórie kvantových generátorov v Československu uvedme, že prvý kvantový generátor (čpavkový maser) bol v ČSSR realizovaný začiatkom roku 1962 na VTA Brno a ÚRE ČSAV Praha. Prvý laser (neodýmový) sa podarilo uviesť do činnosti v roku 1963 vo FÚ ČSAV Praha [12].

V súčasnej dobe inzeruje výrobu He-Ne laserov vhodných na výučbu *Metra Blansko* [13, 14] a *Tesla Holešovice Praha*. Všetky nové typy He-Ne laserov, vyrábaných v Metre Blansko, pracujú v základnom priečnom mode TEM_{00} . Rozloženie intenzity žiarenia vo zväzku je znázornené na obr. 5 [15].



Obr. 5. Rozloženie intenzity vo zväzku jednomodového lasera. $I(x, y)$ — rozloženia intenzity v rovine (x, y) , I_0 — intenzita na ose zväzku, $2w(z)$ — šírka zväzku, $2w_0$ — šírka zväzku v krčku, $R(z)$ — polomer krivosti vlnoplochy, Θ — uhol divergencie zväzku.

Žiarenie laserov s relatívne dlhým optickým rezonátorom môže obsahovať niekoľko pozdĺžnych modov (obr. 6). Vzdialenosť pozdĺžnych modov na ose vlnových dĺžok λ je nepriamo úmerná vzdialenosti zrkadiel rezonátora d . So zmenšovaním vzdialenosti zrkadiel rezonátora sa vzdialenosť pozdĺžnych modov na ose vlnových dĺžok zväčšuje a pri



Obr. 6. Znázornenie pozdĺžnych modov vo spektre žiarenia lasera (čiarkovane je nakreslená krivka zosilnenia aktívneho prostredia). H_λ — spektrálna intenzita vyžarovania, λ — vlnová dĺžka, $\Delta\lambda$ — šírka spektrálnej čiary, d — vzdialenosť zrkadiel rezonátora.

určitej vzdialenosti sa pod krivkou zosilnenia aktívneho prostredia objaví len jediné maximum spektrálnej intenzity vyžarovania rezonátora. Takýto prípad odpovedá situácii, kedy laser pracuje na jednej spektrálnej čiare a hovoríme o *jednofrekvenčnom lasere*. Ak pracuje laser v jedinom priečnom a jedinom pozdĺžnom mode, hovoríme mu *jednomodový, jednofrekvenčný laser*.

Šírka spektrálnej čiary $\Delta\lambda$ jednomodového, jednofrekvenčného He-Ne laseru je približne $7 \cdot 10^{-18}$ m, čo dáva približnú hodnotu relatívnej šírky spektrálnej čiary $\Delta\lambda/\lambda \doteq 10^{-11}$ [16]. Ohodnotenie časovej koherencie laserového žiarenia môžeme urobiť stanovením koherenčnej dĺžky L alebo koherenčného času τ . Koherenčná dĺžka sa určuje podľa vzťahu

$$L \doteq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Pre jednomodový, jednofrekvenčný laser vychádza koherenčná dĺžka približne 59 km. To znamená, že pri vylúčení vplyvu atmosféry môžeme fázou vlny, ktorá prešla dráhu 59 km, určiť ešte pomocou fázy vlny, ktorá práve vychádza z laseru. Koherenčný čas súvisí s koherenčnou dĺžkou definičným vzťahom

$$\tau = L/c,$$

kde c je rýchlosť šírenia vlny.

Laser, ktorého žiarenie má koherenčnú dĺžku 59 km, je vhodný najmä pre extrémne presné interferometrické merania, lebo v takýchto prípadoch často ku interferencii dochádza pri pomerne značnom dráhovom rozdiely interferujúcich vln. Pre aplikácie vo výučbe obyčajne stačí laser

s menšou koherenčnou dĺžkou, ktorá pre lasery pracujúce na mnohých pozdĺžnych modoch vychádza asi 0,3 m. Šírka spektrálnej čiary je v tomto prípade určená šírkou krivky zosilnenia aktívneho prostredia. Táto šírka závisí od pohybu aktívnych častíc výboja a je asi 10^{-12} m.

Vysoká priestorová koherencia žiarenia laseru spočíva v definovanom rozložení fáze v priereze laserového zväzku. V prípade jednomodového laseru, pracujúceho na základnom priečnom mode TEM_{00} , existujú v jeho žiarení vlnoplochy, ktoré tvoria rotačné paraboloidy. V blízkosti osi zväzku žiarenia sa tieto vlnoplochy aproximujú rovinou alebo guľovou plochou. Guľová vlnoplocha s najmenším polomerom krivosti $R(z)$ je vo vzdialenosti $z = \pi w_0^2 / \lambda$. Túto vzdialenosť je možné považovať za hranicu medzi blízkou a vzdialenou zónou žiarenia [17]. V blízkej zóne žiarenia majú vlnoplochy približne tvar rovín, vo vzdialenej zóne žiarenia majú približne tvar guľí.

Okraj zväzku žiarenia je definovaný v takej vzdialenosti $w(z)$ od osi zväzku, kde intenzita poklesne na hodnotu $I_0(z)/e^2$ voči intenzite na ose $I_0(z)$. V priestore okraj zväzku vytvára rotačný hyperboloid (obr. 5). Uhol asymptoty hyperboly, ktorá je prienikom rotačného hyperboloidu zväzku a roviny xOy , sa nazýva uhlom divergencie zväzku Θ ($\Theta \doteq 0,5 \cdot 10^{-3}$ rad).

Literatúra :

- [1] Nobel Lectures Physics 1963—1970. Amsterdam—London—New York.
- [2] Basov, N. G., Prochorov, A. M., ŽEFT, 27, 1954, s. 431.
- [3] Gordon, J. P., Zeiger, H. J., Townes, C. H., Phys. Rev., 95, 1954, s. 282.
- [4] Maiman, T. H., Nature, 187, 1960, s. 493.
- [5] Einstein, A., Phys. Zeit. 18, 1917, s. 121.
- [6] Holló, D., Kun, M., Vásárhelyi, I.: Příručka filmaře — amatéra. Praha, SNTL 1982.
- [7] Françon, M.: Optika speklov. Moskva, Mir 1980.
- [8] Javan, A., Bennett, W. R., Herriott, D. R., Phys. Rev. Lett., 6, 1961.
- [9] White, A. D., Ridgen, J. D., Proc. IRE, 50, 1962, s. 2366.
- [10] Spravočník po lazeram. Tom I. Red. A. M. Prochorov. Moskva, Sovjetskoje radio 1978.
- [11] Jariv, A.: Kvantovaja elektronika. Moskva, Sovjetskoje radio 1980.
- [12] Sochor, V.: 25 let laseru — historie a perspektivy. In: Sborník z 5. celostátní konference Lasery ve výzkumu a průmyslu. Palkovice 1985.
- [13] Štěpánek, R.: Výroba laserové techniky v Metře Blansko. In: Sborník přednášek Lasery ve výuce fyziky. Brno 1981, s. 16.
- [14] Petrů, F. a kol.: Rozvoj laserové techniky v ÚPT ČSAV Brno. In: sborník z 5. celostátní konference Lasery ve výzkumu a průmyslu. Palkovice 1985, s. 9.
- [15] Maitland, A., Dunn, M. H.: Vvedeniye v fiziku lazerov. Moskva, 1978.
- [16] Petrů, F., Veselá, Z.: Některé vlastnosti a použití Ne-Ne laseru. In: Sborník přednášek Lasery ve výuce fyziky. Brno 1981, s. 3.
- [17] Gerrard, A., Burch, J. M.: Vvedeniye v matričnuju optiku. Moskva, Mir 1978.
- [18] Chramov, J. A.: Fiziki. Biografičeskij spravočnik. Kyjev, Naukova dumka 1977.
- [19] Kvasnica, J.: Priekopníci modernej fyziky. Bratislava, Smena 1987.



Několik vět o Petru Vopěnkovi

Doc. RNDr. Jan KOPKA, CSc., PF Ústí nad Labem

Skutečně velkých osobností nemá žádný národ nadbytek a už vůbec ne v takovém oboru, jako je matematika. Proto se zdá logické, že pokud se takový člověk vyskytne, pak mu rozumná společnost jistě poskytne co nejlepší podmínky pro jeho práci, aby mohl dosáhnout — i v zájmu této společnosti — co nejvyšších cílů. A protože doc. dr. Petr Vopěnka, DrSc., beze zbytku takovou mimořádnou osobností je, popíšeme ho trochu a ukažme, jaké měl ke své práci podmínky.

Petr, jak mu říkají spolupracovníci, kolegové a přátelé, je prostý, přátelský a velmi pracovitý člověk. Z jeho civilního jednání určitě nepoznáte jeho matematickou velikost. Přednášky mají vysokou úroveň, a to zdaleka ne jen odbornou. Vždy si dobře uvědomuje, komu přednáší, a tomu pak přizpůsobí i své vyjadřování. Při přednášce si počíná neokázale, stejně jako v životě. Netají se tím, že tohle mu dalo hodně práce, tohle zatím nerozřešil a tady vůbec neví, jak do toho. Nikdy nedává na obdiv, že dělá vědu. Je osobností, která přitahuje lidi, a tak není divu, že přitahuje a i v minulosti přitahoval mnoho dobrých studentů. Někteří z jeho žáků dnes působí jako profesori i na zahraničních univerzitách.

A teď se dostáváme k jeho vědecké činnosti. Lze říci, že dokáže špičkově pracovat v jedné problematice a brzy nato se ponoří do problematiky ve zcela jiné oblasti a opět tam dosáhne vynikajících výsledků. Má schopnost vyhledávat novou problematiku, jejíž řešení podstatně prohloubí to, co bylo známo. Dokáže k ní vytvořit novou teorii, která je odlišná od původní teorie. Jeho směr zkoumání však stále prohlubuje pohled na základní problém.

V jeho výzkumné činnosti bychom mohli objevit tři hlavní okruhy. Nejprve to byla *Booleovská teorie množin*. Podílel se na ní originálně. Završil obecnou teorii a překročil ji, když dospěl k pojmu polomnožiny. Tato teorie byla zkonstruována pro řešení problémů základů matematiky.

V druhém okruhu pomocí polomnožin a nestandardních metod vytvořil *alternativní teorii množin*. K této teorii se v loňském roce vážala první mezinárodní konference uspořádaná ve Vysokých Tatrách. V současné době se zabývá především *historií matematiky*. Nejde mu o faktografii. Snaží se nalézt základní kroky a činy, které daná epocha provedla. Ve všech okruzích dosáhl pozoruhodných výsledků, ale jeho hlavním cílem vždy bylo dobrat se hlubokých a původních pohledů na svět. Nechme na tomto místě promluvit samotného doc. Vopěnku: „Osobně mě na matematice zajímají právě takové filozofické otázky. Nesmírně mě duševně obohacují. Protože vývoj matematiky se odehrával souběžně s vývojem lidstva. I kdyby měla časem zahynout, je to svědectví myšlenkového vývoje. Svědectví, jak lidstvo dospívalo.“

A teď se podívejme, jak se o doc. Vopěvku starala naše minulá společnost. Ačkoliv měl velkou vědeckou publikační činnost, u nás se to prakticky neprojevilo, neboť většinu věcí nemohl publikovat. Jistě je vám např. známa kniha „Množiny a přirozená čísla“, na níž se podstatným způsobem podílel, a která vyšla v roce 1977. Protože však nesměl být uveden jako autor, vymysleli jeho spoluautoři na titulní stránku tento neobvyklý text:

Zpracoval doc. dr. Jaroslav Blažek, CSc., a dr. Blanka Kussová, CSc., podle námětů doc. dr. Petra Vopěnky, DrSc.

Z matematicko-fyzikální fakulty ho nevyhodili snad jen proto, že by to před vědeckým světem vypadalo divně, ale přednášet mohl jen občas pro menší skupinky studentů. Nenahraditelnou škodou bylo, že měl kolem sebe pouze úzký kroužek spolupracovníků, který nemohl rozšiřovat o mladé lidi. A tak právě na osobě doc. Petra Vopěnky si můžeme naplno uvědomit ubohost toho bývalého režimu a lidí, kteří mu nesahali ani po kotníky a přitom mu všemožnými příkazy a zákazy ztrpčovali život a práci.

Proč si minulé zřízení doc. Vopěnky tak málo vážilo, řekneme-li to hodně mírně? On se totiž nebál stýkat se a přátelit s lidmi, kteří byli naprosto vyřazeni ze společnosti. Naopak, cílevědomě se po celé období tzv. normalizace snažil zabránit tomu, aby disidenti byli izolováni. Byl také např. jedním z prvních signatářů iniciativy kulturních pracovníků v lednu 1989 i petice za osvobození Václava Havla.

Přes potíže, které měl, byl občas zván osvícenými matematiky k přednáškám pro studenty a především učitele i mimo Prahu. A právě při jedné takové akci, kdy jsme oba přednášeli v Zadově na Šumavě, jsem měl to štěstí, že jsem Petra blíže poznal. Zajížděl i na Slovensko, kam ho na letní školy zval jeho spolužák z fakulty doc. Milan Hejný*). A ještě historku, která patří do této oblasti a která pěkně charakterizuje nejen

*) Nyní je náměstkem ministra MŠMT SR.

jeho přednášky, ale i celý způsob jeho jednání. Když před dvěma lety zakončil na naší fakultě v Ústí nad Labem přednášku, v níž se zabýval vývojem pojmu nekonečno, a my jsme spolu vycházeli z posluchárny, jeho první věta byla: „Doufám, že jsem ti neudělal průšvih.“ Řekl jsem mu, že ne, ale nebyl jsem si tím tak docela jist. Až potud před 17. listopadem 1989.

Dnes píšeme už novou kapitolu. S velkou radostí jsme se dověděli, že se doc. Vopěnka stal dne 26. 1. 1990 prorektorem University Karlovy. Jistě i v tom je kousek ocenění jeho obrovské práce a rovných politických postojů. A abych nezapomněl. O tento článek jsem byl požádán redakcí především proto, že se doc. Petr Vopěnka v květnu tohoto roku dožívá 55 let.

A ještě dodatek. Mezi napsáním tohoto článku koncem ledna 1990 a jeho uveřejněním byl Petr Vopěnka konečně jmenován univerzitním profesorem. Stalo se to sice s dvacetiletým zpožděním, ale už je to tady.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Jedna ze slavných hádanek Sama Loyda

Sam Loyd (1841 až 1911) je dodnes znám jako autor šachových úloh, originálních matematických problémů a hádanek. Uvedme jednu z nejkrásnějších, kterou kdysi řešili i účastníci soutěže „Setkání s talenty“ v naší televizi.

Marie a Anna jsou dohromady staré 44 let. Marie je dvakrát starší, než byla Anna tehdy, když Marii bylo o polovinu méně let, než bude Anně, až bude Anna třikrát starší, než byla Marie, když byla Marie třikrát starší než Anna. Jak jsou staré?

Text úlohy se zdá velmi zamotaný, ba zmatený. V takovém případě je nejlépe si údaje zapisovat do tabulky. Sestavíme ji počínaje poslední větou před otázkou. Pro její další doplňování si je třeba uvědomit, že rozdíl věků se nemění. Jestliže jsme v prvním sloupci tabulky věk Anny označili x , pak věk Marie je $3x$ a rozdíl jejich věků je $2x$. Postupně získáme tabulku:

Marie	$3x$	$11x$	$4,5x$	$5x$
Anna	x	$9x$	$2,5x$	$3x$

Čtvrtý sloupec odpovídá první větě hádanky, takže pro x dostáváme rovnici

$$5x + 3x = 44,$$

která má řešení $x = 5,5$. Odtud již vyplývá, že Marii je nyní 27,5 let a Anně 16,5 let. Přesvědčte se o tom zkouškou.

Zaujala vás Loydova hádanka? Přidáváme tedy ještě jednu obdobnou:

Věkový rozdíl mezi Pavlem a Petrem jsou čtyři roky. Pavlovi je tolik, kolik bude Petrovi, až Pavlovi bude třikrát tolik, kolik bylo Petrovi, když Pavlovi bylo dvakrát tolik, kolik bylo Petrovi, když Pavlovi bylo půlkrát tolik, kolik je Petrovi teď. Kolik let je Pavlovi a kolik Petrovi?

[Pavlovi je 26, Petrovi 22.]

Jiří Mída

Stačí jen přemýšlet — řešení

Texty úloh, jejichž řešení nyní uvádíme, byly otištěny v čísle 8 letošního ročníku Rozhledů.

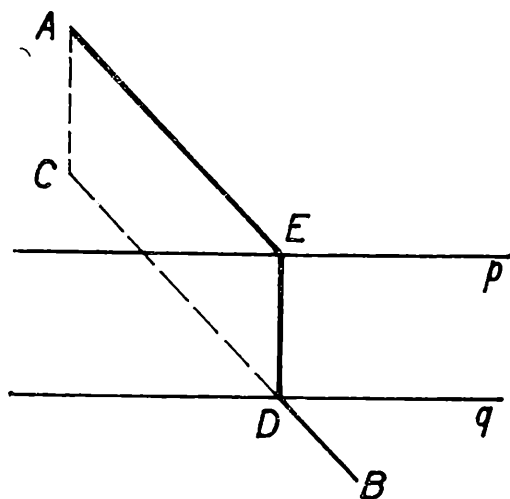
1. Víme, že pro $a > b > 0$, $n > 0$ celé je $a^n > b^n$ a pro celá čísla p , q je $(a^p)^q = a^{pq}$. Proto je

$$17^{100} > 16^{100} = (2^4)^{100} = 2^{400} = (2^5)^{80} = 32^{80} > 31^{80}$$

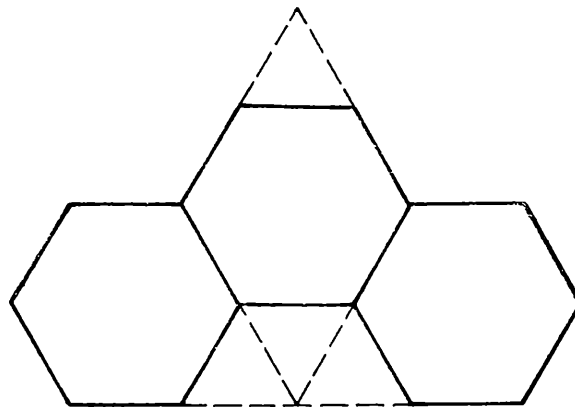
Je tedy

$$17^{100} > 31^{80}$$

2. Střední část DE cesty $AEDB$ z A do B je úsečkou kolmou k přímkám p , q . Zároveň $|DE|$ je vzdáleností d rovnoběžek p , q (obr. 1). Proto sestrojíme nejdříve úsečku $AC \perp p$, $|AC| = d$ a potom úsečku CB , která je nejkratší cestou z C do B . Průsečíkem D úsečky CB s přímkou q prochází úsečka $DE \perp p$, jejíž krajní bod E je na přímce p . Protože $|AC| = |DE|$, $AC \parallel DE$, je obrazec $ACDE$ rovnoběžníkem, takže je $|CD| = |AE|$. Z toho plyne, že nejkratší cestou z A do B je lomená čára $AEDB$.



Obr. 1



Obr. 2

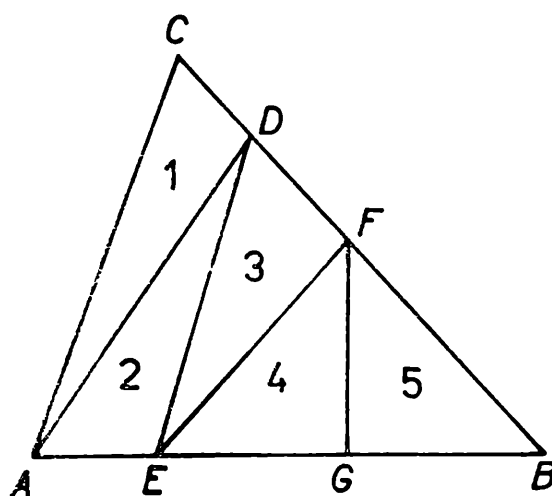
3. Řešení úlohy 3 je na obr. 2. Čárkovaně naryšované úsečky znázorňují dřívější polohu šesti přeložených zápalek.

V řešení úloh 4 až 8 užijeme vzorec

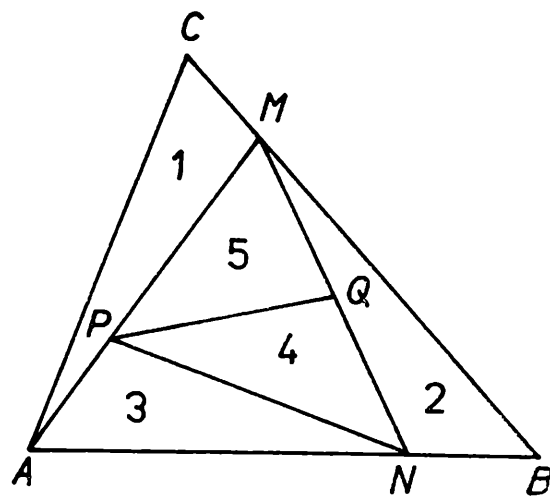
$$P = \frac{1}{2} zv$$

pro obsah P trojúhelníku. Přitom z je délkou jeho libovolné strany a v je výškou k této straně.

4. Každý z trojúhelníků označených na obr. 3 číslicemi 1 až 5 má obsah rovný pětině obsahu trojúhelníku ABC . Výška trojúhelníku



Obr. 3



Obr. 4

ACD ke straně CD ležící na přímce BC je zároveň výškou trojúhelníku ABC ke straně BC . Z toho a z předpokladu o obsahu trojúhelníku ACD plyne, že je

$$|CD| = \frac{1}{5} |BC|.$$

Z rovností obsahů trojúhelníků označených číslicemi 2 až 5 plyne, že obsah každého z nich je čtvrtinou obsahu trojúhelníku ABD , jehož výška ke straně AB je zároveň výškou trojúhelníku ADE ke straně AE . Proto je

$$|AE| = \frac{1}{4} |BA|.$$

Obdobně zjistíme, že je

$$|DF| = \frac{1}{3} |BD| \text{ a } |EG| = |BG| = \frac{1}{2} |BE|$$

5. Zcela obdobně jako v řešení úlohy 4 zjistíme (obr. 4), že je

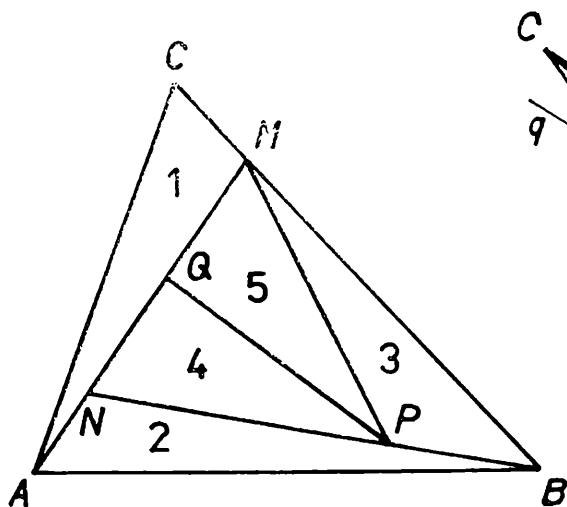
$$|CM| = \frac{1}{5} |BC|, \quad |BN| = \frac{1}{4} |BA|, \quad |AP| = \frac{1}{3} |AM|,$$

$$|MQ| = \frac{1}{2} |MN|$$

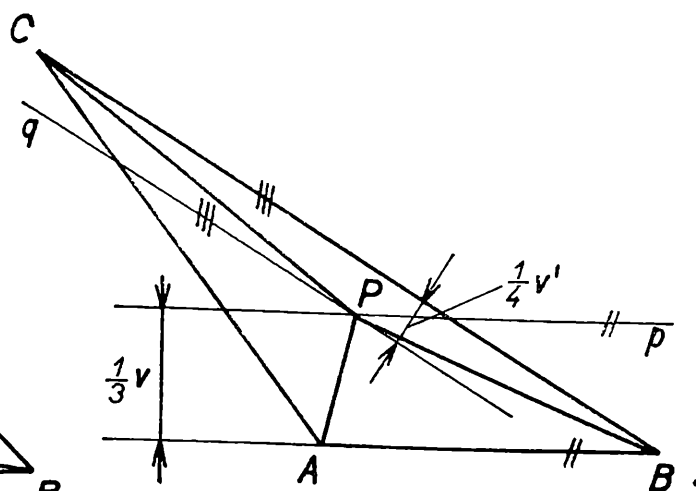
6. Obdobně jako v řešení úlohy 4 zjistíme (obr. 5), že je

$$|CM| = \frac{1}{5} |BC|, \quad |AN| = \frac{1}{4} |AM|, \quad |BP| = \frac{1}{3} |BN|,$$

$$|MQ| = \frac{1}{2} |MN|$$



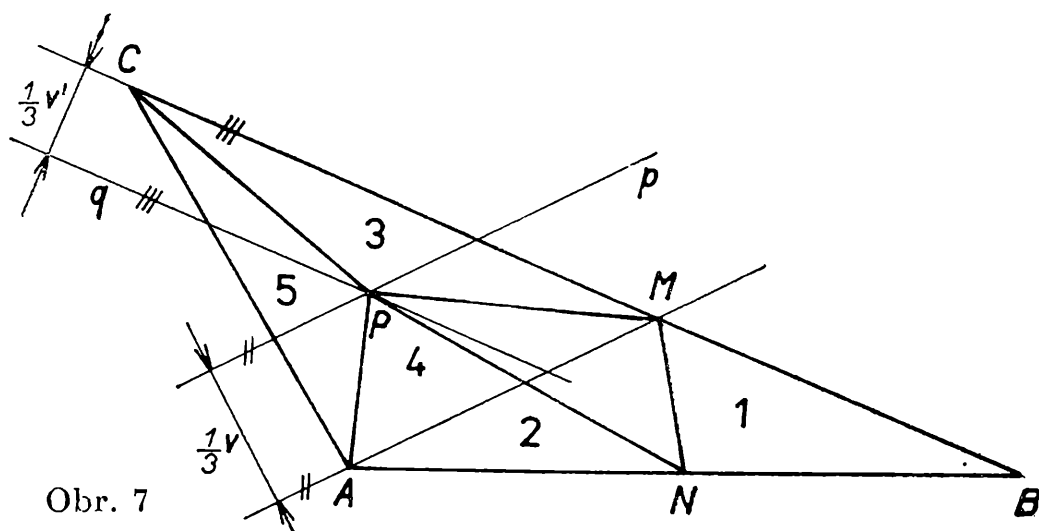
Obr. 5



Obr. 6

7. Trojúhelníky ABC , ABP mají společnou stranu AB (obr. 6). Je-li obsah trojúhelníku ABP rovný třetině obsahu trojúhelníku ABC , je výška trojúhelníku ABP ke straně AB rovna třetině výšky v trojúhelníku ABC ke straně AB . Proto P je bodem přímky $p \parallel AB$, která leží v polorovině ABC a má od přímky AB vzdálenost rovnou třetině výšky v . Obdobně zjistíme, že výška ke straně BC trojúhelníku BCP s obsahem rovným čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC je rovna čtvrtině výšky v' trojúhelníku ABC ke straně BC . Proto bod P leží na přímce $q \parallel BC$, která náleží polorovině BCA a má od přímky BC vzdálenost rovnou čtvrtině výšky v' . Obsah trojúhelníku ACP je potom rovný pěti dvanáctinám obsahu trojúhelníku ABC . Proto bod P leží také na přímce $r \parallel AC$, která leží v polorovině ACB a má od přímky AC vzdálenost rovnou pěti dvanáctinám výšky ke straně AC trojúhelníku ABC .

8. Obsahy trojúhelníků označených na obr. 7 číslicemi 1 až 5 jsou si rovny. Z toho plyne, že poměr obsahů trojúhelníků ABM , ACM je $2 : 3$. Výška ke straně BM trojúhelníku ABM je také výškou ke straně CM trojúhelníku ACM . Z toho a z poměru obsahů trojúhelníků ABM , ACM plyne, že je $|BM| : |CM| = 2 : 3$, takže je



Obr. 7

$$|BM| = \frac{2}{5} |BC|, \quad |CM| = \frac{3}{5} |BC|.$$

Z rovnosti obsahů trojúhelníků AMN , BMN se společnou výškou procházející vrcholem M plyne, že je

$$|AN| = |BN|$$

Obsahy trojúhelníků AMP , ACP , CMP jsou si rovny. Každý z nich má tedy obsah rovný třetině obsahu trojúhelníku ACM . Z toho a z řešení úlohy 7 plyne, že bod P leží na přímkách $p \parallel AM$, $q \parallel CM$ ležících po řadě v polorovinách AMC , CMA . Zároveň vzdálenost přímky p od přímky AM je rovna třetině výšky v ke straně AM trojúhelníku ACM a vzdálenost přímky q od přímky MC je rovna třetině výšky v' ke straně MC trojúhelníku ACM .

Emil Kraemer

Omyly, které ovládly svět

Padají ve vzduchu lehčí předměty pomaleji než těžké?

Na první pohled se zdá, že otázka v nadpisu má jednoznačnou odpověď. Vždyť jsme mnohokrát viděli, jak pozvolna klesá k zemi chmýří pampelišky ve srovnání s padajícím kamenem.

Pokus, který si může provést každý, naznačí, že s padáním lehkých a těžkých předmětů ve vzduchu to není zdaleka tak jednoduché. Z nového dvojlistu utrhnete růžek a z natažených paží vypustíte současně noviny i papírový útržek. Výsledek potvrdí, že lehčí papírek dopadne na zem později. Zkuste však umnout v prstech z tohoto útržku malou kuličku. Tím se samozřejmě jeho hmotnost nezvětší, avšak výsledek

pokusu to zcela převrátí. Rychleji bude k zemi klesat lehčí útržek, těžší arch dopadne později.

Všechno naznačuje, že ve výsledku pokusu hraje důležitou, avšak ne jednoduchou roli, odpor vzduchu. Proto je nejdříve třeba zjistit, jak probíhá pád ve vzduchoprázdnu. Na obr. 1 vidíte tzv. *Newtonovu trubici*, která umožňuje takový pokus snadno provést. V trubici je ocelový broček a peříčko opatřené na brčku mikroskopicky malou ocelovou třískou. Zachytíme oba předměty nahoře magnetem přiloženým ke stěně trubice a jeho odtržením oba objekty odstartujeme.

Jestliže z trubice vyčerpáme vzduch, skončí závod nerozhodně, oba předměty dopadnou na dno trubice prakticky současně. Použijeme-li k pokusu trubici naplněnou vzduchem, je výsledkem jednoznačně vítězství bročku.

Všimneme si trochu podrobněji, jaké síly působí na předmět padající ve vzduchu. Hlavní roli zřejmě hraje působení gravitačního pole Země, dále vztlak a odpor vzduchu.

První i druhou z uvedených sil můžeme při pádu z nepříliš velkých výšek považovat za stálou. Odpor vzduchu však závisí nejen na vlastnostech prostředí, kterým se padající těleso prodírá, a na tvaru a velikosti předmětu, ale i na rychlosti pohybu prostředím. Odpor vzduchu tedy ovlivňuje rychlost pohybu, avšak obráceně také rychlost pohybu spoluurčuje velikost odporu vzduchu.

Jednoduchým příkladem pádu, při kterém se značně uplatňuje odpor vzduchu, je klesání vzduchem nafouknutého kulového pouťového balónku. Pouhý pohled na balónek vypuštěný volně z ruky svědčí o tom, že se po krátkém zrychleném pohybu ustálí jeho rychlost na určité velikosti. Pokusíme se tuto rychlost odhadnout. Vyjdeme přitom z Newtonova vztahu pro odpor vzduchu ve tvaru:

$$\left(\begin{array}{c} \text{odpor vzduchu} \\ \text{při dané} \\ \text{rychlosti} \\ \text{balónku} \end{array} \right) = 0,2 \cdot \left(\begin{array}{c} \text{plošný} \\ \text{obsah} \\ \text{průřezu} \\ \text{balónku} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{hustota} \\ \text{okolního} \\ \text{vzduchu} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{rychlost} \\ \text{balónku} \\ \text{vzhledem} \\ \text{ke vzduchu} \end{array} \right)^2$$

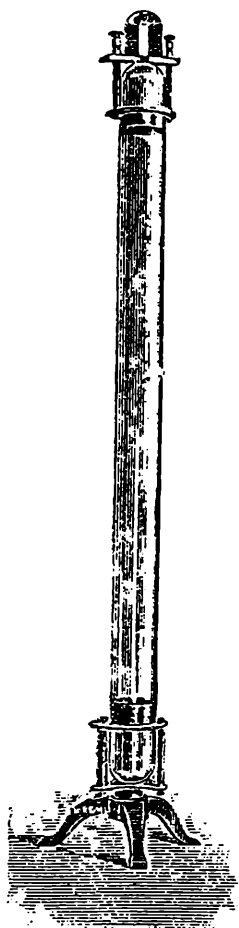
Pro balónek o poloměru $r = 0,13$ m tedy přibližně platí pro odporovou sílu vzduchu

$$F_0 = 0,014 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \cdot v^2.$$

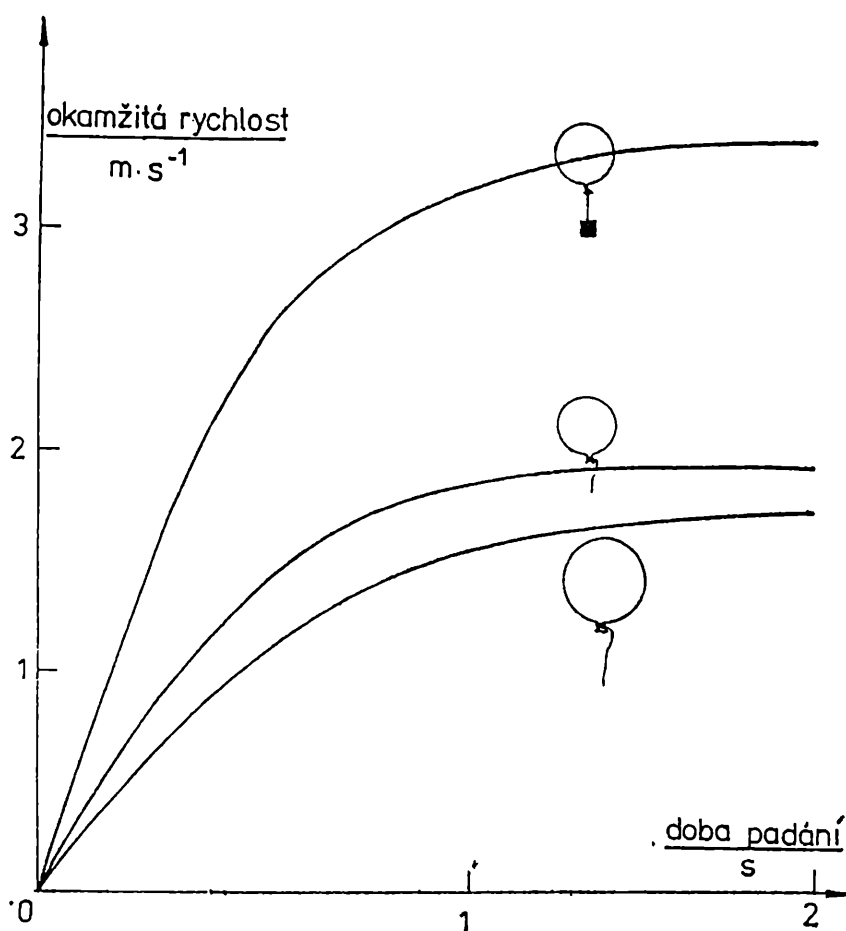
Jestliže už dosáhl balónek ustálené rychlosti, je odpor vzduchu v rovnováze s výslednicí F_v gravitační síly na balónek a vztlaku, která má přibližně velikost $F_v = 0,05$ N, jak můžeme zjistit zvážením balónku.

Porovnáním obou sil vychází, že k jejich vyrušení dojde při rychlosti, při které platí

$$0,05 \text{ N} = 0,014 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \cdot v^2, \quad \text{tj.} \quad v = 1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



Obr. 1



Obr. 2

Jak se tento výsledek změní, jestliže balónek zatížíme desetigramovým závažím? Změna vztlaču bude zanedbatelně malá a podobně se podstatně nezmění ani odpor vzduchu. Gravitační síla se však zvětší přibližně o 0,1 N. Při dosažení ustálené rychlosti bude tedy v rovnováze odpor vzduchu $F_0 = 0,014 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \cdot v^2$ se silou $F_v = 0,15 \text{ N}$ při rychlosti

$$\text{o větší velikosti } v = \sqrt{\frac{0,15}{0,014}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Jestliže však místo přidání závaží zvětšíme hmotnost padajícího balónku o 10 gramů přifouknutím vzduchu, situace se podstatně změní. Poloměr balónku vzroste přibližně na 0,16 m, a proto se zvětší jak odpor vzduchu $F_0 = 0,02 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \cdot v^2$, tak i gravitační síla a vztlač. Výslednice dvou posledně jmenovaných sil se však prakticky nezmění $F_v = 0,05 \text{ N}$, protože jejich změny se téměř vyruší.

Pro rovnoměrný pád se vzájemně vykompenzovanými silami F_0 a F_v vychází v tomto případě pro rychlost balónku $v = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Závěr našich úvah je již téměř tradičně nejednoznačný (obr. 2):

Při volném pádu těles (ve vakuu) je průběh rychlosti všech těles (v daném místě) stejný, nezávisle na jejich hmotnosti.

U předmětů stejného tvaru i velikosti padajících ve vzduchu se po určité době ustálí rychlost na tím větší hodnotě, čím větší je hmotnost padajícího tělesa.

U předmětů, které se liší tvarem i velikostí, může být ustálená rychlost lehčího tělesa větší i menší než rychlost tělesa o větší hmotnosti.

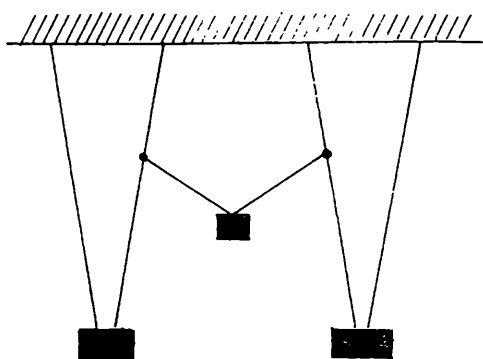
Úkol pro vás: Načrtněte graf závislosti ustálené rychlosti pádu kovové kuličky ve vzduchu na velikosti jejího poloměru.

Milan Rojko

Laboratoř doma

Spoutaná kyvadla

Jestliže dvojici stejných kyvadel vzájemně spřáhneme pomocí závěsu s malým přívažkem a rozkýváme jedno z kyvadel, bude energie kmitů tohoto kyvadla prostřednictvím vazby přecházet na druhé kyvadlo. Očekáváte asi, že energie bude předávána tak dlouho, dokud nebudou kmity, a tedy i energie obou kyvadel, stejné. Experiment vám však ukáže něco jiného.



Úkol pro vás:

Zjistěte pokusem, jak se změní předávání energie, jestliže na vazebný závěs dáme větší přívažek.

Zjistěte, zda se změní průběh pokusu, jestliže zvětšíme hmotnost jednoho z kyvadel, aniž změníme jeho délku.

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Let balónem

Balón kulového tvaru plněný horkým vzduchem má celkovou hmotnost 250 kg, nepočítaje v to hmotnost vzduchu uvnitř balónu, která však

není zanedbatelně malá. Poloměr balónu $r = 5$ m, hustota okolního vzduchu $\rho_0 = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Úkoly pro vás:

1. Vypočítejte, jaký musí být teplotní rozdíl Δt vzduchu uvnitř a vně balónu, aby se balón ve vzduchu vznášel ve stálé výšce.

2. Vypočítejte, jak se změnil tento teplotní rozdíl, jestliže balón začal rovnoměrně klesat rychlostí $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Nápověda: Hustota vzduchu ρ_0 při vzrůstu teploty o Δt klesne na hodnotu $\rho_t \doteq \rho_0 \left(1 - \frac{\Delta t}{273^\circ\text{C}}\right)$. Vztah pro odpor vzduchu při ustáleném pádu kulového balonu najdete v oddílu „Omyly, které ovládly svět“ (odpor vzduchu lanoví a koše balónu zanedbejte).

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu:

RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.
Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

O jednom čísle s pozoruhodnými vlastnostmi

Hloubání a přemýšlení o různých zajímavých vlastnostech čísel náleželo odedávna k úkolům vždy znovu a znovu se vracejícím, poskytujícím dostatek zábavy i poučení.

V publikaci, která před lety vyšla v zahraničí a nese název „Short cuts in arithmetic and curious calculations“, je uvedeno číslo velmi zvláštních vlastností, jež tam jsou sice uvedeny, ale nejsou vysvětleny. Je to číslo:

526315789473684210.

O tomto čísle se ve zmíněné práci říká, že je s ním možno provést všechny čtyři základní početní úkony a že vždycky obdržíme — v součtu, rozdílu, součinu i podílu stejné cifry, následující po sobě ve stejném pořadí.

Příklad:

a) sečítání:

$$\begin{array}{r} 526315789473684210 \\ + 315789473684210526 \\ \hline 842105263157894736 \end{array}$$

K tomuto součtu je možno přičíst opět dané číslo začínající některou číslicí a nový součet obsahuje opět tytéž cifry, například:

$$\begin{array}{r} 842105263157894736 \\ + 105263157894736842 \\ \hline 947368421052631578 \end{array}$$

b) odečítání:

$$\begin{array}{r} 526315789473684210 \\ - 473684210526315789 \\ \hline 052631578947368421 \end{array}$$

c) násobení:

$$\begin{array}{r} 526315789473684210 \times 4 \\ \hline 2105263157894736840 \end{array}$$

nebo násobení číslem dvojciferným:

$$\begin{array}{r} 526315789473684210 \times 15 \\ \hline 7894736842105263150 \end{array}$$

d) dělení:

$$526315789473684210 : 5 = 105263157894736842 .$$

Poznámka: Budete-li mít trpělivost a zkoušet uvedené číslo v dalších různých případech, budete zajisté překvapeni zvláštností tohoto čísla. Je zapotřebí poznamenat, že ne vždy je výsledek zcela uspokojivý. Tak například, jestliže volíme první číslici druhého sčítance takovou, aby její součet s číslicí 5 (první číslicí daného čísla) byl 10 nebo větší než 10, vzniká jakási nesrovnalost. Například:

$$\begin{array}{r} 526315789473684210 \\ + 789473684210526315 \\ \hline 1315789473684210525 \end{array}$$

Aby byl pořad číslic v součtu stejný jako v daném čísle, třeba první a poslední jeho číslicí (totiž 1 a 5) sečíst, čímž obdržíme číslici 6, která jinak v pořadí číslic schází, a pak je i zde pravidlo zachováno. Také při dělení uvedené pravidlo někdy selže, avšak i zde je možno nalézt pozoruhodné zajímavosti; přesto zůstává toto číslo skutečně mimořádným a zvláštním

Vysvětlení :

Když se každý matematik nad uvedenými skutečnostmi zamyslí, pozná, že uvedené číslo je úplná osmnácticiferná perioda desetinného rozvoje zlomku $\frac{10}{19}$. Podobně jsou i ostatní zápisy „úplnými osmnácticifernými

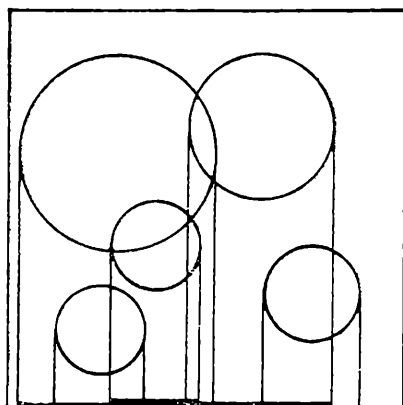
periodami zlomků se jmenovateli 19. Tím se také dají vysvětlit všechny uváděné zajímavosti; tak v příkladě a) je klíčem k vysvětlení součet zlomků $\frac{10}{19} + \frac{6}{19} = \frac{16}{19}$.

Alois J. Rychlík

Řešte s námi (7)

Řešení minulých úloh

21. Promítněme všechny kružnice kolmo na některou stranu daného čtverce. Součet jejich průměrů je roven součtu obvodů dělenému číslem π , tedy $10/\pi$, což je větší než 3. Krajní body průmětů jednotlivých kružnic rozloží stranu čtverce na několik úseček, které mají společné pouze krajní body. Alespoň jedna z těchto úseček musí ležet v průmětu nejméně čtyř kružnic (jinak by součet průměrů všech kružnic byl nejvýše 3 (obr. 1)). Nyní stačí z některého bodu této úsečky vztyčit kolmici ke straně čtverce a ta protne požadované čtyři kružnice.



Obr. 1

Úplně stejně se dá dokázat obecnější tvrzení: Nazvěme *průřezem* konvexního obrazce šířku nejužšího rovnoběžného pásu, do něhož lze celý obrazec umístit. Pak platí, že je-li součet průřezů několika obrazců umístěných do obrazce o průřezu h větší než kh , existuje přímka, která protíná alespoň $k + 1$ těchto obrazců.

22. Je-li k kružnice v rovině a M bod ležící vně kruhu ohraničeného kružnicí k , označme C_1, C_2 dotykové body tečen ke kružnici k z bodu M a D_1, D_2 krajní body tětiny, jež leží na přímce procházející bodem M . V řešení úlohy využijeme jednak toho, že $|MC_1| = |MC_2|$, a jednak toho, že $|MD_1| \cdot |MD_2| = |MC_1|^2$ (mocnost bodu M ke kružnici k).

a) V daném případě platí (obr. 2)

$$\frac{(2k-1)^2}{(2k-2)2k} = \frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2-1} > 1,$$

je

$$P_n^2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \quad \text{a} \quad P_n > \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Na druhé straně pro každé přirozené k platí

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{(2k)^2-1}{(2k)^2} < 1,$$

takže

$$P_n^2 = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{3}{4^2} \cdot \frac{5}{6^2} \cdot \frac{5}{6^2} \cdot \frac{7}{6^2} \cdots \frac{(2n-1)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{(2n-3)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{2n-1}{(2n)^2} < \frac{3}{4} \frac{1}{2n}$$

a

$$P_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Jiné řešení. Označme

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n},$$

$$Q_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1}.$$

Zřejmě pro každé přirozené n platí $P_n > Q_n$, takže $P_n^2 > P_n Q_n = \frac{1}{4n}$, tj.

$$P_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Podobně je

$$R_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} > P_n,$$

takže

$$P_n^2 < P_n R_n = \frac{3}{8n} \quad \text{a} \quad P_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Poznámka. Pokuste se najít ještě lepší odhad tvaru

$$\frac{c}{\sqrt{n}} < P_n < \frac{d}{\sqrt{n}}, \quad \text{kde} \quad \frac{1}{2} < c < d < \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Zkoušeli jste použít matematickou indukci? Pomocí indukce se dá pro vhodné α dokázat např. nerovnost

$$P_n < \frac{1}{\sqrt{3,1n + \alpha}},$$

pro každé $n > 1$ tedy platí $P_n < \frac{1}{\sqrt{3,1n}}$, ale neplatí už $P_n < \frac{1}{\sqrt{3,2n}}$

Ve skutečnosti je (Wallisův vzorec)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^2 = \frac{1}{\pi}.$$

24. Dokážeme tvrzení úlohy matematickou indukcí podle m . Pro $m = 1$ uvedené tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že $n > m > 1$ a že tvrzení platí pro dané n a pro všechna m' , $1 \leq m' \leq m - 1$; dokážeme, že pak platí i pro daná čísla n a m .

Napišme zlomek $\frac{m}{n}$ ve tvaru

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} + \frac{m'}{nq}.$$

To není nic jiného než dělení čísla n číslem m se záporným zbytkem m' ,

$$n = mq - m' \quad 0 \leq m' < m,$$

přičemž díky nerovnosti $m < n$ musí být $q > 1$.

Je-li nyní $m' = 0$, jsme hotovi, protože $\frac{m}{n} = \frac{1}{q}$. Je-li $0 < m' < m$, je podle indukčního předpokladu

$$\frac{m'}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_r}, \quad 0 < q_i < q_{i+1}, q_i \mid q_{i+1},$$

takže

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \frac{m'}{n} = \frac{1}{q} + \frac{1}{qq_1} + \dots + \frac{1}{qq_r},$$

což dává požadované vyjádření i pro $\frac{m}{n}$.

Předvedené řešení poskytuje zároveň i jednoduchý algoritmus, kterým lze libovolný zlomek rozložit na součet kmenových zlomků, jejichž jmenovatele jsou uspořádány podle dělitelnosti. Poznamenejme, že uvedené vyjádření není určeno jednoznačně. Je např.

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}.$$

25. Jistě dobře víte, že n -prvková množina A má 2^n různých podmnožin (včetně prázdné množiny a množiny A). Vybraných 2^{n-1} podmnožin tvoří tedy přesně polovinu všech podmnožin dané množiny. Přitom průnik libovolných dvou vybraných podmnožin je prázdný, což znamená, že z každé dvojice doplňkových podmnožin B, B' , kde $B \cup B' = A$ a $B \cap B' = \emptyset$, je vybrána právě jedna.

Jsou-li dále vybrány množiny B a C , musí být vybrána i množina $D = B \cap C$, protože množina $D' = A \setminus D$ nemá s množinami B a C žádný společný prvek. Zcela analogicky ukážeme, že jsou-li vybrány množiny $B_1, B_2, \dots, B_k$, je mezi vybranými množinami i jejich průnik $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k$. To znamená, že i průnik všech 2^{n-1} vybraných množin patří mezi vybrané množiny, a je tedy neprázdný (prázdná množina nemůže mezi vybrané množiny patřit.)

Vlastně jsme ukázali, že každou takovou soustavu podmnožin dané množiny A dostaneme tak, že vezmeme všechny její podmnožiny, které obsahují daný prvek $a \in A$.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstruktivní geometrie

1. Jsou dány dvě různoběžné roviny ρ, φ a bod A , který neleží v žádné z těchto rovin. Sestrojte krychli $ABCDEFGH$, jejíž stěna $EFGH$ leží v rovině ρ tak, že vrchol G (který je protilehlý vrcholu A) leží v rovině φ . (Došla dvě řešení.)

Stanislav Horák

Autorovo řešení:

Bod G leží v rovině ρ i v rovině φ . Proto leží na průsečnici c rovin $\varphi \cdot \rho$. Pata E kolmice vedené vrcholem A k rovině ρ je vrcholem dané krychle, takže délka hrany krychle $a = |AE|$. V rovině ρ je vrchol G protějším vrcholem k vrcholu E čtverce $EFGH$, jehož strana má délku a . Proto bod G leží na kružnici k , která leží v rovině ρ , má střed E a poloměr $z = a/\sqrt{2}$. Zároveň bod G leží na přímce c , takže je společným bodem této přímky a kružnice k .

Je-li d vzdálenost vrcholu E od přímky c , pak mohou nastat právě tyto tři možnosti:

1. Je-li $d < a/\sqrt{2}$, existují dva různé body G , a tedy dvě krychle splňující podmínky dané úlohy.

2. Je-li $d = a/\sqrt{2}$, existuje jediný bod G , a tedy také jediná krychle splňující dané podmínky.

3. Je-li $d > a/\sqrt{2}$, neexistuje žádný bod G a úloha nemá řešení.

2. Je dána rovina ρ a přímka p , která má od roviny ρ odchylku α , pro kterou platí: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Bodem $P = p \cap \rho$ vedte v rovině ρ přímku tak, aby měla od přímky p odchylku β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$). (Došla dvě řešení.)

Stanislav Horák

Autorovo řešení:

Všechny přímky, které procházejí bodem P a mají od přímky p odchylku β , jsou zároveň všemi přímkami rotační kuželové plochy K . Jejím vrcholem je bod P a její osou je přímka p . Hledaná přímka je tedy přímkou plochy K a zároveň leží v rovině ρ . Přitom mohou nastat právě tyto tři možnosti:

1. Je-li $\beta > \alpha$, protíná rovina ρ plochu K ve dvou různých přímkách. Úloha má tedy dvě řešení.

2. Je-li $\beta = \alpha$, má rovina ρ s plochou K společnou jedinou přímku. Úloha má tedy jedno řešení.

3. Je-li $\beta < \alpha$, nemá rovina ρ s plochou K žádnou společnou přímku. Úloha nemá tedy žádné řešení.

3. Jsou dána kladná čísla d , ρ , rovina π a v ní dva různé body M , N . Sestrojte pravidelný osmistěn $ABCDEFGH$ se středem O a tělesovými úhlopříčkami AC , BD , který má tyto vlastnosti: 1. Přímky AC , BD procházejí po řadě body M , N ; 2. Bod O má od roviny π vzdálenost d a je stejně vzdálen od bodů M , N ; 3. Kulová plocha vepsaná osmistěnu má poloměr ρ .

(Došla dvě řešení.)

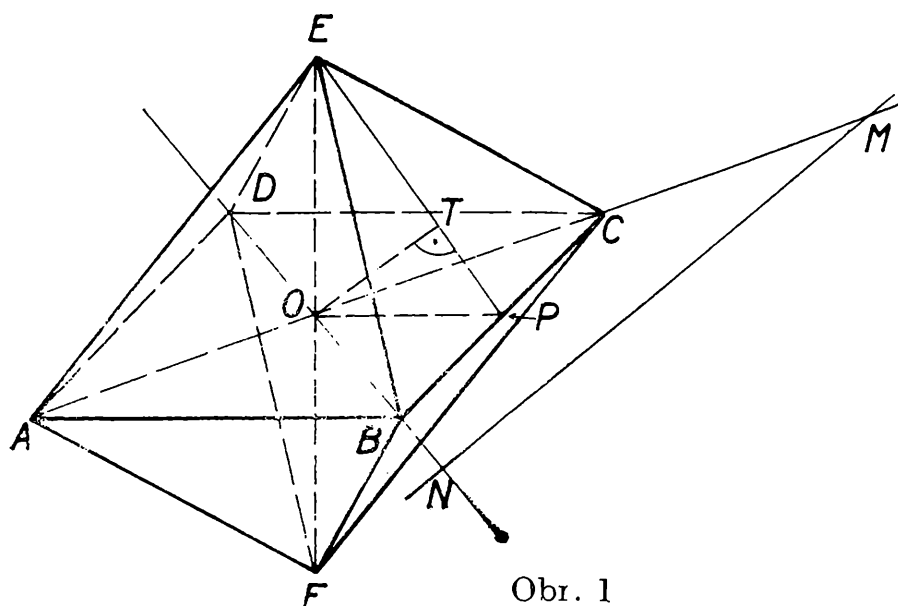
Emil Kraemer

Autorovo řešení:

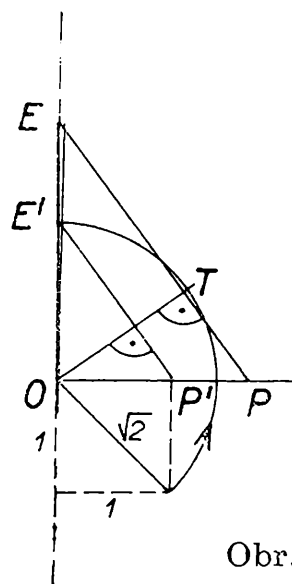
Při řešení této úlohy jde o tyto dvě konstrukce: a) Určení polohy středu O osmistěnu; b) určení délky jeho tělesové úhlopříčky.

Rozřešíme nejdříve úlohu b), neboť řešení není obtížné. Kulová plocha vepsaná osmistěnu má střed v jeho středu O a dotýká se kterékoli jeho stěny v bodu T . Tento bod je v rovině stěny (např. BCE , obr. 1) patou kolmice vedené bodem O k této rovině. Jde tedy o určení bodu T v rovině stěny BCE .

Víme, že úhlopříčky AC , BD , EF pravidelného osmistěnu jsou shodné, mají společný střed O a každé dvě jsou navzájem kolmé. Je tedy $EO \perp AC$, $EO \perp BD$, takže přímka EO je kolmá k rovině čtverce $ABCD$. Proto je $EO \perp OP$, kde P je středem hrany BC . Trojúhelník EOP je tedy pravoúhlý s přeponou EP . Dokážeme, že pata T jeho výšky k pře-



Obr. 1



Obr. 2

poně EP je hledaným bodem T . Protože je $BC \perp OP$, $BC \perp EP$, je přímka BC kolmá k rovině EOP , v níž leží přímka OT . Proto je $OT \perp BC$; zároveň je $OT \perp EP$. Z toho plyne, že přímka OT je kolmá k rovině stěny BCE a bod T je patou této kolmice.

Pro délky odvěsen OP , OE pravoúhlého trojúhelníku EOP platí: $|OP| \cdot |EO| = 1 \cdot \sqrt{2}$. Je-li dáno $\rho = |OT|$, sestrojíme trojúhelník EOP takto (obr. 2):

1. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník $E'OP'$ tak, aby $|OP'| \cdot |OE'| = 1 \cdot \sqrt{2}$. 2. Bodem O sestrojíme kolmici k přímce $E'P'$ a na ní sestrojíme v polorovině $OP'E'$ bod T tak, aby $|OT| = \rho$. 3. Bodem T vedeme rovnoběžku s přímkou $E'P'$ a určíme její průsečíky E , P s polopřímkami OE' , OP' . Potom $|OE|$ je rovna polovině délky tělesové úhlopříčky pravidelného osmistěnu.

Je-li sestroyen střed O osmistěnu, pak jeho úhlopříčky AC , BC leží na přímkách OM , ON a jeho úhlopříčka EF prochází bodem O kolmo k rovině OMN .

a) 1. Úhel MON splývající s úhlem COB je pravý (obr. 1). Množinou vrcholů O všech pravých úhlů MON je kulová plocha K , jejíž střed S je středem úsečky MN a jejíž poloměr r je roven polovině délky úsečky MN . 2. Množinou všech bodů O stejně vzdálených od bodů M , N je rovina $\delta \perp MN$ procházející středem S (rovina souměrnosti úsečky MN). 3. Množina všech bodů O majících od roviny π vzdálenost d je sjednocením dvou rovin $\pi' \parallel \pi$, $\pi'' \parallel \pi$, z nichž každá má od roviny π vzdálenost d . — Z tohoto rozboru plyne tato konstrukce bodu O :

1. Sestrojíme výše uvedenou kulovou plochu K . 2. Sestrojíme rovinu souměrnosti δ úsečky MN . 3. Sestrojíme uvedené dvě roviny $\pi' \parallel \pi$, $\pi'' \parallel \pi$.

Z bodů 1 a 2 rozboru plyne, že bod O je bodem řezu roviny δ s plochou

K , tj. bodem kružnice k (S, r), kde $r = \frac{1}{2} |MN|$. Z toho a z bodu 3 roz-
 boru plyne, že bod O je bodem průniku kružnice k (ležící v rovině δ)
 a sjednocení rovin π', π'' tj. bodem průniku kružnice k se sjednocením
 přímek $p_1 = \pi' \cap \delta$, $p_2 = \pi'' \cap \delta$.

Rovina δ , kružnice k , roviny π', π'' i přímky p_1, p_2 vždy existují.
 Avšak průnik kružnice k se sjednocením přímek p_1, p_2 existuje, právě
 když je $d \leq r$. Je-li $d < r$, je tímto průnikem množina čtyř různých
 bodů O_1, O_2, O_3, O_4 . Je-li $d = r$, je tímto průnikem množina obsahující
 dva různé body O_1, O_2 . Je-li $d > r$, je uvedený průnik prázdný, takže
 bod O neexistuje.

OLYMPIÁDY A SOČ

Úlohy 1. části I. kola kategorií A, B, C 40. ročníku matematické olympiády

Kategorie A

1. Pro každé přirozené číslo $n \geq 6$ platí $n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$. Dokažte.
2. Pravidelný štvorboký antihranol $ABCDEFGH$ má dve štvorcové
 steny $ABCD, EFGH$ a osem stien tvaru rovnostranného trojuholníka
 $ABE, BCF, CDG, DAH, EFB, FGC, GHD, HEA$. Všetky hrany majú
 dĺžku a . Vypočítajte objem daného antihranola.
3. V rovině je dáno 9 bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou.
 Přitom jsou splněny podmínky:
 a) z každé trojice daných bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou,
 b) počet úseček je minimální.
 Kolik úseček obsahuje útvar, který tyto podmínky splňuje? Načrtněte
 příklad takového útvaru.
4. Každý mnohoúhelník M (ne nutně konvexní) lze rozřezat na troj-
 úhelníky s vrcholy ve vrcholech mnohoúhelníku M . Dokažte.
5. Najděte takový mnohočlen p s celočíselnými koeficienty, pro který
 platí $p(1) = 1$, $p(2) = 3$, $p(3) = 15$ a který má nejmenší součet absolut-
 ních hodnot svých koeficientů. Změní se odpověď, budeme-li uvažovat
 mnohočleny p s libovolnými reálnými koeficienty?
6. Funkce f je spojitá na intervalu $<0, 1>$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a pro

každá dvě čísla $x \leq y$ z intervalu $<0, 1>$ je splněna rovnice $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y)$ Určete $f\left(\frac{1}{7}\right)$.

Tematické okruhy: nerovnosti, mnohočleny, kombinatorika

Kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici $3x^3 - [x] = 3$; $[x]$ značí celou část čísla x , tj. největší celé číslo, které není větší než x .

2. Na straně AB trojúhelníku ABC jsou dány body K, L tak, že $|AK| = |KL| = |LB|$, podobně na straně CB body M, N tak, že $|CM| = |MN| = |NB|$. Průsečík úseček AN a KM označme P , průsečík přímk LP a AC je bod Q . Určete obsah čtyřúhelníku $CQPM$, jestliže se obsah trojúhelníku ABC rovná 18.

3. V rovine je daných 7 bodov, z ktorých niektoré sú spojené úsečkou. Pritom sú splnené podmienky:

- a) z každej trojice daných bodov sú aspoň dva spojené úsečkou,
- b) počet úsečiek je minimálny.

Koľko úsečiek obsahuje útvar, ktorý spĺňa tieto podmienky? Nakreslite príklad takého útvaru.

4. Sestrojte trojúhelník, jestliže je dán poloměr r kružnice mu vepsané, poměr poloměru R kružnice mu opsané a strany a se rovná 2 a poměr velikostí β, γ úhlů přilehlých k straně a se rovná 3.

5. Pro reálná čísla a, b, c ($ac \neq 0$) má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ reálný kořen r , rovnice $ax^2 - bx - c = 0$ má reálný kořen s . Dokažte, že rovnice $ax^2 - 2bx - 2c = 0$ má reálný kořen, který leží mezi r a s .

6. Dokažte, že pro velikosti α, β, γ úhlů v trojúhelníku platí

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3}{8} \sqrt{3}.$$

Tematické okruhy: planimetrie, rovnice

Kategorie C

1. Koľko je štvorciferných čísel s nasledujúcou vlastnosťou: Ak v danom čísle škrtujeme ktorúkoľvek číslicu, nedostaneme číslo deliteľné tromi?

2. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k , pre ktoré budú mať súčiny $384k, 2592k$ rovnaký počet deliteľov.

3. Tri futbalové družstvá hrajú turnaj systémom každý s každým k kôl. Po odehraní turnaja sa zistilo, že družstvá získali rôzny počet bodov. Víťazom turnaja sa nestalo ani družstvo, ktoré získalo najviac výhier, ani družstvo, ktoré malo najmenej prehier. Určte najmenšie k , pre ktoré mohla nastať uvedená situácia.

4. Rozhodněte, zda existuje tětíový čtyřúhelník s těmito vlastnostmi:

- a) úhlopříčky ho dělí na čtyři pythagorejské trojúhelníky,
- b) čtyřúhelník není osově souměrný.

Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými stranami.

5. Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$, $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CD| = 5,5$ cm, $|DA| = 4,5$ cm, $|BD| = 9$ cm. Nájdite množinu všetkých bodov, z ktorých kolmice zostrojené na všetky 4 strany štvoruholníka majú svoje päty na obvode štvoruholníka $ABCD$. Hľadanou množinou je istý n -uholník. Zistite veľkosť jeho vnútorných uhlov.

6. Strany čtyřúhelníku mají délky 5, 5, 5, 3. Dokažte, že jeho obsah je větší než $2\sqrt{6}$, a je-li čtyřúhelník konvexní, je jeho obsah větší než 12.

Tematické okruhy : dělitelnost, mnohoúhelníky

Astronomické olympiády v Polsku

První astronomická olympiáda v Polsku vznikla v r. 1957 z iniciativy Slezského planetária v Chorzově, jehož ředitelem byl *doc. dr. J. Salabun*.

V současnosti má soutěž již tradici, každým rokem se jí účastní 250 žáků středních škol. Soutěž má tři kola. Úlohy I. kola jsou rozesílány na všechna všeobecně vzdělávací lycea začátkem září; jsou také publikovány jako příloha *Urania* — měsíčníku Polské společnosti amatérských astronomů. V I. kole jsou zařazeny dvě série teoretických úloh i úlohy na pozorování.

Úlohy II. kola jsou převážně teoretické, jedna má však praktické zaměření a vychází ze zpracování fotografií nebo údajů z tabulek. Úlohy řeší účastníci klauzurně na vybraných místech v Polsku. Ústřední kolo je počátkem dubna v Chorzově, účastníkům jsou předkládány úlohy teoretické i praktické (ať přímo na pozorování na obloze nebo na umělé obloze v planetáriu).

Uvedeme několik úloh na ukázkou — pokuste se je vyřešit. Ke kontrole uvádíme v závěru článku výsledky.

1. Na základě snímků Země, které pořídila umělá družice, bylo zjiš-

těno, že úhlový průměr zemského kotouče se měnil během úplného oběhu od $\alpha_1 = 1^\circ 32'$ do $\alpha_2 = 13^\circ 40'$.

Vypočtete dobu oběhu této družice, vycházíte-li z předpokladu, že Země má tvar koule o poloměru $R_Z = 6370$ km. Stacionární družice Země obíhá ve vzdálenosti $r_0 = 42\,200$ km od středu Země.

2. Orbitální stanice Saljut-6, na níž se uskutečnil let prvního polského kosmonauta M. Hermaszewského, se pohybovala po trajektorii přibližně tvaru kružnice ve výšce $H = 350$ km nad povrchem Země. Rovina oběžné trajektorie svírala s rovinou rovníku úhel $i = 51,6^\circ$. Poloměr Země $R_Z = 6370$ km. Určete, jakou část povrchu Země mohl kosmonaut zahlédnout z určitého místa trajektorie. Jakou část povrchu Země mohli kosmonauté vidět během dlouhotrvajícího letu?

3. Doby oběhu Země a Venuše kolem Slunce jsou $T_Z = 1,000$ roku, $T_V = 0,615$ roku. V jakých časových intervalech pro pozorovatele na povrchu Země dochází k po sobě následujícím největším elongacím Venuše? Předpokládejte, že roviny kružnicových trajektorií obou planet jsou totožné.

4. V jakých mezích se mění solární konstanta pro Merkur? Úlohu řešte obecně, přičemž je dáno: číselná výstřednost ε eliptické trajektorie Merkuru, délka a velké poloosy, efektivní teplota T Slunce, poloměr R Slunce, Stefan-Boltzmannova konstanta σ .

5. Určete, při jaké závislosti gravitační síly F_g na vzdálenosti r jsou rychlosti pohybu družic o malých hmotnostech na libovolných trajektoriích tvaru kružnice stejné. Vypočtete velikost této rychlosti pro centrální těleso o hmotnosti M . Diskutujte též problém druhé kosmické rychlosti pro zjištěnou závislost gravitační síly $F_g(r)$.

A ještě ukázka úloh praktických:

6. Pomocí dalekohledu pozorujte následující astronomické objekty:

- Mlhovinu M 31 v souhvězdí Andromédy.
- Mlhovinu M 42 v souhvězdí Orion.
- Jupiter a jeho galileovské měsíce.
- Planetku Vesta (byla připojena tabulka předpokládaných poloh planety v následujících dvou měsících — α , δ).

Nakreslete náčrtek pozorovaného vzhledu objektu i jeho polohu na pozadí okolních hvězd. Označte stupnici úhlových vzdáleností.

7. Pomocí dalekohledu proveďte dvě pozorování Venuše v časovém odstupu nejméně 2 týdny. Podobné pozorování proveďte pro Saturn.

8. Pomocí dalekohledu a stopek stanovte s co možná největší přesností úhlový průměr Měsíce během pozorování. Vypočítejte na základě těchto měření vzdálenost Měsíce od pozorovatele. Poloměr Měsíce je $R_m = 1740$ km.

Pro kontrolu uvádíme výsledky:

1. Vzdálenost $r = R_Z / \sin \alpha/2$, využijeme III. Keplerův zákon:

$$T = T_0 \left(\frac{R_Z(\sin \alpha_1/2 + \sin \alpha_2/2)}{2r_0 \sin \alpha_1/2 \sin \alpha_2/2} \right)^{3/2} \quad \text{číselně } T \doteq 15,7 \text{ d.}$$

2. Kosmonaut vidí $S_1 = \frac{2\pi R_Z H}{R_Z + H}$, $p_1 = \frac{H}{2(R_Z + H)} \doteq 2,6\%$.

Celkem je vidět z družice pás se středovým úhlem, který určíme: $i + \arccos \frac{H}{R_Z + H} = \alpha$, výška kulového pásu je $2R \sin \alpha$, $p_2 = 94\%$.

3. Synodická doba oběhu $T_S = \frac{T_Z T_V}{T_Z - T_V}$, hledaná doba $t = T_S \frac{\varphi_1}{180^\circ}$. Avšak $\cos \varphi_1 = r_V / r_Z$, současně platí $r_V^3 : r_Z^3 = T_V^2 : T_Z^2$

odtud $t = 0,39$ roku (nebo také $t' = 1,21$ roku).

4. Platí $r_p = a(1 - \varepsilon)$, $r = a(1 + \varepsilon)$, hledané hodnoty solární konstanty jsou

$$\frac{\sigma T^4 R^2}{a^2(1 - \varepsilon)^2}, \quad \frac{\sigma T^4 R^2}{a^2(1 + \varepsilon)^2}.$$

5. Platí $\frac{mv^2}{r} = F(r)$, $v = \sqrt{\frac{r}{m} F(r)}$ tedy $F(r) = \frac{k}{r}$. Potom rychlost $v = \sqrt{\frac{k}{m}}$. K určení druhé kosmické rychlosti stanovíme práci

$$W = \int_{r_0}^r \frac{k}{r} dr = k(\ln r - \ln r_0). \text{ Pro } r \text{ rostoucí k nekonečnu poroste}$$

práce nade všechny meze. Proto by musela být druhá kosmická rychlost nekonečně velká.

6. Pozorované objekty jsou dobře viditelné nevelkým dalekohledem.

7. Pozorování je jednoduché — při nákresu obrázků je třeba uvážít, jaký obraz v dalekohledu vidíme.

8. Pro Měsíc $d = r(\sin \alpha/2)^{-1}$, $x = 0,00418 \triangle t \cos \delta$, kde δ je deklinace Měsíce a $\triangle t$ je čas, v němž Měsíc urazí denním pohybem svůj průměr. Měření provedeme za úplňku.

Turnaj mladých fyziků

RNDr. Zdeněk KLUIBER, CSc., FzÚ ČSAV Praha

Všichni, kdo čtou časopis Kvant, vědí, že od r. 1978 existuje v SSSR velmi zajímavá a efektivní soutěž „Turnaj mladých fyziků“ (TMF). Tato forma podchycení a rozvoje zájmu žáků o fyziku vznikla ve stejné době jako u nás Středoškolská odborná činnost (SOČ).

Je sympatické, že zrod mezinárodního TMF je výrazně spojován s podílem Československa. Právě vzájemné informace představitelů TMF a SOČ ve fyzice v r. 1987 o dosavadních zkušenostech z pojetí práce v obou odborných aktivitách daly zásadní podnět ke vzniku mezinárodního TMF. Původně se totiž jednalo jen o soutěž moskevských škol, avšak v r. 1988 proběhl všesvazový a 1. mezinárodní TMF za účasti družstev BLR, ČSSR a SSSR. V r. 1989 se uskutečnil 2. mezinárodní TMF za účasti družstev Bulharska, Československa, Holandska, Maďarska, Německé spolkové republiky a Sovětského svazu. 3. mezinárodní TMF původně plánovaný k realizaci v Československu se uskuteční opět v SSSR.

TMF je soutěž pětičlenných kolektivů žáků specializujících se na studium fyziky, při níž se učí řešit složité fyzikální úlohy, prezentovat svá řešení a obhajovat je formou vědecké diskuse. TMF umožňuje vytvářet vlastní pracovní kontakty žáků s vědci, vysokoškolskými učiteli, odbornými pracovníky. Vzhledem k tomu, že některé úlohy žáky více zaujmou (např. jde o úlohy vyžadující složitější experimentální práci), mohou být řešení těchto úloh prezentována i v rámci SOČ ve fyzice. Úlohy z TMF — v každém ročníku je jich zpravidla 17 — jsou uveřejňovány obvykle v 8. čísle Kvantu. Lze je tedy chápat i jako vhodná témata pro práci ve fyzice v rámci SOČ.

Družstva žáků školy (žáci jsou i z různých ročníků) dobrovolně řeší stanovené úlohy pro daný ročník; vedoucím družstva je učitel školy. Úlohy TMF jsou netradiční, problémové, podobné úkolům řešeným i vědci při zkoumání reálných fyzikálních jevů a jsou formulovány maximálně stručně. Účastníci TMF musí sami nalézt nezbytné údaje důležité k řešení, vybrat optimální model pro popsání studovaného jevu, zvolit vlastní metody řešení, provést diskusi získaných výsledků. V 1. kole soutěže se řeší úlohy písemně, všechna řešení jsou ohodnocena a nejlepší družstva jsou pozvána do 2. kola soutěže. 2. kolo — čs. finále pak probíhá formou „fyzboje“. Vědecká diskuse — fyzboj — je forma předvedení řešení úloh TMF jeho účastníky. Ve fyzboji se družstva postupně střídají v roli Referenta, Oponenta a Recenzenta. V diskusi se obhazuje pravdivost tvrzení, což předpokládá hluboké porozumění problematice,

pohotovou argumentaci. Průběh fyzboje hodnotí veřejně porota podle dohodnutých bodových ocenění.

Fyzboj zahajuje Oponent výběrem libovolné úlohy, jejíž řešení má předvést Referent. Referující (jeden nebo několik členů družstva) předkládá podstatná fakta řešení úlohy, zaměří se na základní fyzikální ideje, využívá připravené obrázky, schémata, fotografie atd. Oponent ve svém vystoupení uvádí svůj názor na základní myšlenky referátu a vyjadřuje k nim kritické připomínky, kterými ukazuje na chyby, nejasnosti a nedostatky v řešení v užitých metodách. Kritika se vztahuje k referátu — Oponent nepředkládá své řešení. V polemice po referátu se všestranně posuzuje řešení předložené referujícím. Recenzent krátce vystihuje hlavní pozitivní momenty v řešení Referenta a nejpodstatnější momenty z kritiky Oponenta. V závěrečné polemice mohou být všestranně posuzována vystoupení Oponenta a Recenzenta. Oponent a Recenzent mohou podle uvážení hodnotící poroty předložit svá řešení.

Předpokládá se, že celostátní finále se bude od příštího ročníku konat v anglickém jazyce. Vítěz čs. finále TMF pak reprezentuje Československo na mezinárodním TMF.

Odbornou záštitu nad TMF mají JČSMF, FzÚ ČSAV, MFF UK Bratislava, Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR a SR, časopis Rozhledy matematicko-fyzikální a další spolupracující organizace.

TMF našel svoje místo vedle dosud existujících mimoškolních odborných aktivit ve fyzice. Významně přispívá ke zvýšení úrovně žáků střední školy, připravujících se ke studiu fyziky jak po odborné stránce, tak i jazykové.

Na závěr uvádíme texty úloh 2. mezinárodního TMF, který proběhl na jaře 1989. Můžete se sami přesvědčit, že úlohy jsou netradiční, vyžadují samostatný přístup a jsou vhodným podnětem k diskusi o různých fyzikálních jevech. V zářijovém čísle Rozhledů uveřejníme texty úloh 3. mezinárodního TMF. K diskusi o těchto úlohách se chceme vrátit v příštím ročníku Rozhledů a uvítáme proto vaše názory, nápady, komentáře a podněty.

Úlohy Turnaje mladých fyziků 1988 — 89

1. *Vymysli sám.* Zkonstruuje a vyrobte přístroj k demonstraci vlnových vlastností zvuku ve vzduchu.

2. *Poledne.* Je možno nazývat polednem okamžik uprostřed časového intervalu mezi východem a západem Slunce? Za použití kalendáře se snadno přesvědčíte o tom, že tento okamžik během roku kolísá vzhledem k určitému časovému okamžiku. Vysvětlete příčinu vzniku tohoto jevu.

3. *Příliv.* Odhadněte výšku přílivů na Černém moři 1. dubna roku 1989.

4. *Valivé tření.* Zkoumejte, jak závisí síla valivého tření na rychlosti. Pro určitost uvažujte valení dřevěného kotouče na dřevu (desce dřevěného stolu).

5. *Hodiny.* Navštívili jste nějakou planetu a chystáte se na ni vrátit za deset tisíc nebo dokonce za milión let. Jaké hodiny zanecháte na této planetě, aby přesně změřily dobu vaší nepřítomnosti na planetě?

6. *Duha.* Mohou se na nebi objevit tři a více duh najednou?

7. *Jiskry.* Při broušení nožů na brusném kotouči odlétají „jiskry“. Nejčastěji se jednotlivá jiskra na konci svého letu „rozsype“ na všechny strany. Vysvětlete tento jev.

8. *Metro.* Navrhněte způsoby a změřte rychlost vlaku metra uprostřed mezi stanicemi. Totéž proveďte u autobusu, v němž jedete, jestliže podél cesty nejsou žádné spolehlivé ukazatele vzdálenosti.

9. *Astronaut.* S jakou maximální cestovní vzdáleností může počítat astronaut

- a) za současné úrovně rozvoje techniky,
- b) v daleké budoucnosti, kdy budou prakticky všechny technické obtíže překonány?

10. *Vodní planeta.* Jaké množství vody může vytvořit planetu s neměnnou hmotností

- a) daleko od Slunce,
- b) ve vzdálenosti 1 a. j. od Slunce?

11. *Komár.* V jaké maximální výšce může létat komár?

12. *Písek v trubici.* Skleněná trubice je upevněna svisle a její spodní konec je těsně uzavřen příklopem. Do trubice je nasypán písek. Za jakou dobu T se písek z trubice vysype, otevřeme-li příklop? Prozkoumejte závislost T na následujících parametrech: d — průměr pískových zrn, L — délka trubice, D — průměr trubice. Předpokládejte konstatní „stupeň zhutnění“ písku — tento parametr zaveďte a zdůvodněte sami. Z důvodu srovnatelnosti výsledků neuvažujte příliš velký „stupeň zhutnění“. Je žádoucí brát $10\text{ cm} < L < 1\text{ m}$.

13. *Elektrolytická buňka.* Připravte nasycený roztok kuchyňské soli NaCl. Ponořte do ní dvě uhlíkové elektrody (tyčinek z manganozinkových baterií 373 (R 20)) tak, aby jejich kovové přípoje nebyly ponořeny do roztoku. Zkoumejte:

- a) voltampérovou charakteristiku vzniklé elektrolytické buňky v rozmezí proudů od $10\text{ }\mu\text{A}$ do 50 mA ,
- b) jak se změní voltampérová charakteristika při zředění roztoku.

14. *Plot*. Vzdálený rozlehlý objekt je od vás oddelen laťkovým plotom. Ukazuje sa, že si objekt môžete lépe prohlédnout, nebudete-li stát u plotu, ale projedete-li podél plotu v automobilu. Vysvětlete tento jev. Jaké rychlosti je k tomu třeba, je-li a — šířka plotové latky, b — šířka mezery mezi latkami, L — vzdálenost k plotu ($L \gg a, b$), γ — úhlový rozměr vzdáleného objektu, $\gamma \gg \frac{a+b}{L}$

15. *Elektron*. Elektron o rychlosti $3 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ prolétá se srážkovým parametrem d kolem kovové kuličky o poloměru několika centimetrů. Náboj kuličky se mění v čase podle zákona $q(t) = q_0 \cos \omega t$, kde $q_0 = 10^{-3} \text{ C}$, $\omega = 10^8 \text{ s}^{-1}$. Sestrojte závislost úhlu odchýlení elektronu φ na srážkovém parametru d .

16. *Informace*. Kolik bitů informace jste získali, když jste si pročetli úlohy Turnaje mladých fyziků? Kolik bitů informace získáte při pohledu na zeměpisnou mapu o velikosti jedné stránky?

17. *Carlson*. Kolik zavařeniny musí sníst Carlson, aby během letu nezhubl?

Úlohy připravili pracovníci fyzikální fakulty Moskevské státní university V. B. Braginskij, Š. D. Varlamov, P. V. Jeljutin, A. N. Korotkov, A. Ju. Kusenko, M. M. Cypin, Je. N. Junosov.

Kalendár M — F: máj 1990

1. 5. 1825 sa v Lausanne narodil *Johann Jakob Balmer*, švajčiarsky fyzik. Prispel k výskumu štruktúry atómu.
3. 5. 1860 sa v Ancone narodil *Vito Volterra*, taliansky matematik. Prispel k rozvoju funkcionálnej analýzy a matematickej fyziky. Rozvinul teóriu integrálnych rovníc.
4. 5. 1845 sa v Exeteri narodil *William Kingdon Clifford*, anglický matematik. Prispel k rozvoju vektorového počtu a asociatívnych algebier.
5. 5. 1905 sa v Martine narodil *Ján Fischer*, slovenský fyzik. Prednášal teoretickú fyziku na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave.
8. 5. 1880 zomrel *Christian August Peters*, nemecký astronóm. Skúmal nepravidelnosti v pohybe Sírja.
8. 5. 1905 sa vo Varšave narodil *Karol Borsuk*, poľský matematik. Prispel k rozvoju súčasnej topológie a základov geometrie.
9. 5. 1850 v Paríži zomrel *Louis Joseph Gay-Lussac*, francúzsky chemik a fyzik. Položil základy chemickej analýzy plynov, skúmal zemskú atmosféru. Odhalil niekoľko zákonov.
11. 5. 1955 zomrel *Nikolaj Mitrofanovič Krylov*, sovietsky matematik a mechanik. Svojimi prácami prispel k aplikáciám vo fyzike i technike.

12. 5. 1910 zomrel *William Huggins*, anglický astronóm. Dokázal existenciu plynných hmlovín, využíval spektrálnu analýzu.
14. 5. 1750 sa narodil *Lorenzo Mascheroni*, taliansky geometer. Zaujímal sa o konštrukcie uskutočniteľné použitím len kružidla.
15. 5. 1720 sa v Banskej Štiavnici narodil *Maximilián Rudolf Hell*, slovenský astronóm. Pozoroval prechod Venuše pred Slnkom, vypočítal paralaxu Slnka a vzdialenosť Zeme od Slnka.
16. 5. 1830 v Paríži zomrel *Jean Baptiste Joseph Fourier*, francúzsky matematik a fyzik. Dokázal vetu o počte reálnych koreňov algebraickej rovnice medzi danými hodnotami. Podal teóriu vedenia tepla, ukázal novú metódu na riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc.
16. 5. 1935 sa v Prahe narodil *Petr Vopěnka*, český matematik (viď str. 403).
17. 5. 1765 v Paríži zomrel *Alexis Claude Clairaut*, francúzsky matematik a astronóm. Venoval sa nebeskej mechanike, analytickej a diferenciálnej geometrii, štúdiu priestorových kriviek i problému troch telies.
18. 5. 1850 sa v Londýne narodil *Oliver Heaviside*, anglický fyzik. Prispel k rozvoju vektorového počtu, objavil vrstvu atmosféry, dôležitú pre šírenie rádiových vln.
23. 5. 1895 zomrel *Franz Ernst Neumann*, nemecký fyzik a mineralóg. Zaoberal sa optikou, magnetizmom, kryštalografiou.
23. 5. 1960 zomrel *Georges Claude*, francúzsky chemik a fyzik. Skvapalňoval vzduch, skonštruoval neónovú lampu.
25. 5. 1865 sa v Amsterdame narodil *Pieter Zeeman*, holandský fyzik. Skúmal vplyv magnetického poľa na rôzne druhy žiarenia.
25. 5. 1905 sa narodil *Milton Stanley Livingstone*, americký fyzik. Prispel k rozvoju jadrovej fyziky a výstavbe urýchlovačov.
28. 5. 1980 zomrel *Rolf Hermann Nevanlinna*, fínsky matematik. Zaoberal sa analytickými funkciami komplexnej premennej, rozpracoval všeobecnú teóriu meromorfných funkcií.
30. 5. 1800 sa v Jene narodil *Karl Wilhelm Feuerbach*, nemecký matematik. Dokázal zaujímavú vetu o kružnici deviatich bodov.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Dvořák, J.—Křivský, L.:

SLUNCE NÁŠ ŽIVOT

Vydalo nakladatelství Panorama,
Praha 1989, 344 str., 18,— Kčs.

Spoluprací dvou odborníků z oblastí lékařství a astrofyziky Slunce vznikla velmi zajímavá kniha o vlivu Slunce na život člověka. Těžiště knihy spočívá v hledání odpovědí na otázky důsledků změn aktivity Slunce v životě lidské populace. Jsou zde uvedeny různé hypotézy o možných druhotných účincích sluneční aktivity na chování a zdraví člověka. K těmto hypotézám autoři shromáždili bohatý statistický materiál pro tak velký časový úsek, jak jej jen bylo možno získat. Čtenáře jistě zaujme skutečnost, že řada domněnek o vztahu periodických aktivit Slunce k některým nemocem se neprokázala (virová hepatitida, chřipka, záškrť, tyfus, mor). Plně

však je prokázán vliv kolísání sluneční aktivity na bioklimatické děje. Tak např. výskyt suchých a vlhkých period se v zásadě shoduje se sekulárním kolísáním aktivity Slunce. Zajímavé jsou především údaje získané v Československu. Je uvedeno periodické kolísání průtoku Labe v Děčíně korespondující s grafem šířek letokruhů stromů v USA.

Prokázán je vliv Slunce na počasí a klima. Doposud se však nepodařilo ve větší míře prokázat přímé účinky slunečních emisí na biosféru a pokud jsou, projevují se pouze v nejvyšších vrstvách atmosféry.

Kniha zaujme jistě široký okruh čtenářů. Nalézáme v ní řadu historických údajů o průběhu velkých epidemií chorob, přehled klimatických podmínek v Evropě za 5000 posledních let, vývoj klimatu v Čechách po roce 1000 apod.

Knihu doporučuji studentům středních škol. Je i příkladem mezioborové spolupráce.

František Jáchim

HUMORY MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ

Jak uvést přednášejícího do rozpaků

Československý časopis pro fyziku přetiskl před časem článek německého fyzika J. Liebertze, v němž se podává návod, jak se účastnit diskuse k fyzikální přednášce, i když jejímu obsahu vůbec nerozumíme, a nadto ještě uvést přednášejícího do rozpaků. Uvedme alespoň některé doporučené postupy.

Postřehneme například, že přednášející popisuje experimenty, které prováděl při tlaku 10 atmosfér a teplotě 80 °C. Můžeme tedy bez obav položit otázku: „Pracoval jste také při tlaku 50 atmosfér?“ Zvolíme-li dostatečně vysokou nebo nízkou hodnotu, o níž víme, že byla přednášejícímu nedostupná, vynutíme na něm přiznání, že experiment za těchto podmínek bohužel neprováděl. Můžeme pak ještě dodat, že výsledky za těchto podmínek by byly jistě velmi zajímavé a budeme mít určité pravdu. V zápalu horlivosti se nesmíme ovšem zeptat, zda byly prováděny pokusy také při minus 300 °C, abychom se sami neztrapnili.

Velice účinné jsou otázky typu „Byla použita látka skutečně čistá?“, „Platí odvozené vztahy úplně přesně?“ a podobně. Nikdy na ně totiž nelze odpovědět kladně a připustí-li přednášející, že podmínky experimentu nebo výpočty nebyly ve skutečnosti absolutně dokonalé, stačí se pak jen posadit s potřásáním hlavou a případnou poznámkou „Děkuji, teď už je mi to jasné.“ Umocněného psychologického účinku se dosáhne takzvanou „metodou hloupé otázky“. Začneme větou „Dovolte mi jednu docela hloupou otázku“, po níž následuje neobyčejně rafinovaná (nebo tak stupidní) otázka, na niž nelze prakticky odpovědět. Přednášející se pak jeví - alespoň nezasvěcené části obecnstva - jako někdo, kdo si neví rady ani s tak banálními problémy.

Naprosto spolehlivá je metoda záměrného nedorozumění. Při ní si vybereme z přednášky nějaký fakt, překroutíme ho a na tomto základě pak formulujeme otázku. Jestliže přednášející hovořil o tom, že nějaká látka měla modrou barvu, zeptáme se: „Jestliže jsem přednášejícímu dobře rozuměl, má být uvedená látka šedá. Myslím ale, že podle teoretických předpokladů to není možné a že barva musí být modrá, nanejvýš ještě šedomodrá.“ Přednášející ve své odpovědi upozorní, že jde o nedorozumění, že hovořil právě o barvě modré, a dokonce přizná, že látka mohla mít šedomodrý nádech. Metoda je neškodná, uplatnili jsme se v diskusi, nedotkli jsme se přednášejícího a všichni jsou spokojeni.

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 30 — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 3,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, s. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, gen. Píky 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1990

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. Ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

ADRESA REDAKCE:

M. D. Rettigové 4,
116 39 Praha 1 - Nové Město
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

REDAKČNÍ KRUH:

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topolčany; doc. dr. Stanislav Jendroň, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; Ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; Ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vicha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; prof. dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

ROZHLEDY

matematicko
-fyzikální

10
89 – 90

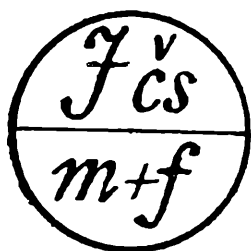
**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

ROČNÍK 68, 1989/90

ČERVEN

CENA 3,00 Kčs

9. červce 1990



ROZHLEDY
matematicko
-fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Doc. dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

OBSAH

Jiří Mída: Tip na prázdniny — putování za technickými památkami	433
Jaroslav Hora: Eisensteinovo kritérium ireducibility	434
Jiří Mída: O trojúhelníku skoro „bermudském“	436
Luděk Granát: Užití orientovaných kružnic v aplikacích počítačové grafiky	438
Otakar Wilfert, Alena Vodilová: História vzniku laseru a jeho použitie pri výučbe fyziky — 2	443
Rudolf Kolomý: K prvním ohlasům na Röntgenův objev	455
Z matematiky a fyziky ZŠ	459
Přemýšlíme, řešíme	463
Úlohy I. kola kategorie P 40. ročníku MO	464
Úlohy I. kola MO pro ZŠ (1990/91)	467
dj: Kalendár M—F	472
Z nových knih	474
Upozornění příspěvatelům a čtenářům	476
—II: Referát o fyzikální přednášce	.3. str. obálky



Tip na prázdniny — putování za technickými památkami

V celkem nedávné minulosti byly památky vývoje výroby, techniky a věd nedoceňovány a přezírány. Tak se stalo, že staré mlýny, cihelny, slévárny, manufaktury, důlní stavby, opevnění a komunikační objekty pustly a mnohé z nich nakonec nenávratně zmizely.

V létě budete často u řek, potoků a různých vodních ploch. Právě zde máte možnost se seznámit s objekty, v nichž se využívalo energie vody. Nebyly to jen mlýny, patřily mezi ně i pily, hamry, brusírny skla a ve středověku i mlýny na zlatou rudu. Později vznikaly vodní elektrárny.

U vodních toků můžeme vidět zařízení sloužící ke splavnění řek a zabránění povodním. Jde o jezy a přehrady, u nichž jsou vorové propustě a plavební komory. Nad údolími a řekami se klenou mosty, z nichž některé překvapují odvahou; v minulosti to byl např. pražský Karlův most, dnes Žďákovský most nad Orlickou přehradou nebo most SNP v Bratislavě.

Ze starých dob se můžeme u nás setkat i s průplavy. Jde např. o šumavské pro plavení dřeva: Schwarzenberský a Vchynicko-Tetovský. Dokonce součástí prvního z nich je 389 metrů dlouhý tunel.

Technických památek naleznete u nás mnoho, stačí jen dívat se kolem.

Jiří Mída

Eisensteinovo kritérium ireducibility

RNDr. Jaroslav HORA, CSc., PdF Plzeň

Při různých výpočtech se častokrát setkáváme s mnohočleny s celočíselnými koeficienty. Mnohdy, např. při úpravách algebraických výrazů, bývá zapotřebí takovýto polynom rozložit v součin několika polynomů s celočíselnými koeficienty. Kupříkladu máme $(x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2)$, $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$, $x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x^2 - 9) = (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$. Přitom polynomy $x^2 - 2x + 4$, resp. $x^2 + 9$ již nelze dále rozložit v součin polynomů prvního stupně s celočíselnými koeficienty, jak se snadno přesvědčíme. Ovšem ukázat, že některý polynom vyššího stupně, např. $f_1(x) = x^6 + 4x^3 - 14x^2 + 6x + 2$, je nerozložitelný (ireducibilní), je již podstatně obtížnější. V některých případech můžeme použít jednoduchý „test“, pocházející od F. Eisensteina (1823–1852).

Fakt, že $f(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty, budeme zapisovat $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Víme též, že stupeň polynomu $f_1(x)$ je 6 (zápis st $f_1(x) = 6$), že každá nenulová konstanta (např. polynom $g(x) = 3$) má stupeň 0 a že nulovému polynomu nepřipisujeme žádný stupeň. Nakonec si uvědomme, že polynom $f_2(x) = x^2 - 2$ je sice v $\mathbf{Z}[x]$ nerozložitelný, ale rovnost $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ ukazuje, že jej lze rozložit v součin dvou polynomů prvního stupně s reálnými koeficienty. Naším cílem je studovat rozložitelnost v $\mathbf{Z}[x]$, tj. rozklady tvaru

$$f(x) = g(x) \cdot h(x), \quad (1)$$

kde $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $g(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $h(x) \in \mathbf{Z}[x]$, st $g(x) > 0$, st $h(x) > 0$

Věta (Eisensteinovo kritérium ireducibility):

Nechť $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ je polynom n -tého stupně, $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Nechť existuje

prvočíslo p takové, že

- (i) p nedělí a_n ,
- (ii) p dělí koeficienty $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$,
- (iii) p^2 nedělí a_0 .

Potom polynom $f(x)$ nelze zapsat ve tvaru (1), tj. jako součin dvou polynomů kladných stupňů s celočíselnými koeficienty.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme naopak, že existují dva

polynomy s celočíselnými koeficienty $g(x) = \sum_{i=0}^r b_i x^i$, $h(x) = \sum_{i=0}^s c_i x^i$,

$r > 0$, $s > 0$, $r + s = n$. Podle (ii) dělí prvočíslo p součin $a_0 = b_0 \cdot c_0$, takže p musí dělit buď b_0 , nebo c_0 . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že p dělí b_0 . Zároveň si všimněme, že p již nemůže dělit c_0 — jinak by totiž a_0 bylo dělitelné p^2 , což není možno vzhledem k (iii). Dále je $a_n = b_r \cdot c_s$ a podle (i) nedělí p koeficient a_n , takže p nedělí ani b_r . Prvočíslo p tudíž nedělí všechny koeficienty polynomu $g(x)$. Buď i nejmenší číslo takové, že p nedělí b_i , $0 < i \leq r$. Koeficient a_i však můžeme zapsat ve tvaru $a_i = b_i \cdot c_0 + b_{i-1} \cdot c_1 + \dots + b_0 \cdot c_i$ (zde případně položíme $c_j = 0$ pro $j > s$). Vzhledem k tomu, že p dělí $b_0, b_1, \dots, b_{i-1}$, dělí p i součet $b_{i-1}c_1 + \dots + b_0c_i$. Prvočíslo p však dělí též a_i , takže i součin $b_i \cdot c_0$ musí být dělitelný p . Víme ale, že prvočíslo p nedělí c_0 , proto p musí dělit b_i , což je spor.

Z polynomů, vyhovujících právě dokázanému kritériu, lze nanejvýš „vytknout“ číselnou konstantu (polynom stupně 0), tj. psát

$$f(x) = k \cdot g(x), \text{ kde } f(x) \in \mathbf{Z}[x], g(x) \in \mathbf{Z}[x], k \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Můžeme tedy např. psát $2x^2 - 6 = 2(x^2 - 3)$ atd. Samozřejmě pro každý $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ dostaneme volbou $k = 1$ či $k = -1$ triviální rozklad v součin. Existují mnohočleny, které v $\mathbf{Z}[x]$ jiným způsobem v součin rozložit nelze.

Definice: Buď $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $f(x) \neq 0$, $f(x) \neq \pm 1$ polynom, který nelze psát ve tvaru (1) ani ve tvaru (2), kde $k > 1$. Potom říkáme, že $f(x)$ je *nerozložitelný (ireducibilní)* v $\mathbf{Z}[x]$.

Ukažme teď na několika příkladech užití Eisensteinova kritéria.

1. Polynom $f_1(x) = x^6 + 4x^3 - 14x^2 + 6x + 2$ je ireducibilní (volme $p = 2$). Rovněž polynom $f_2(x) = x^2 - 2$ je ireducibilní (opět volme $p = 2$).
2. Polynomy $f_3(x) = x^5 - 12x^3 + 6x + 12$ a $f_4(x) = x^2 - 15x + 65$ jsou též ireducibilní v $\mathbf{Z}[x]$ ($p = 3$, resp. $p = 5$). Každý polynom tvaru $f(x) = x^n - p$ či $f(x) = x^n + p$, kde $n \in \mathbf{N}$, p je prvočíslo, je ireducibilní.
3. Na polynom $f(x) = x^2 + 9$ nemůžeme užít Eisensteinovo kritérium. Pišme ale $x = z + 1$; potom snadno zjistíme, že polynom $F(z) = (z + 1)^2 + 9 = z^2 + 2z + 10$ je ireducibilní ($p = 2$). Kdyby existoval rozklad polynomu $f(x)$ ve tvaru (1), $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, pak bychom dosazením $x = z + 1$ ukázali, že $F(z)$ je reducibilní — spor. Obecněji platí: Je-li polynom $f(x + k)$ ireducibilní v $\mathbf{Z}[x]$, $k \in \mathbf{Z}$, pak i $f(x)$ je ireducibilní v $\mathbf{Z}[x]$.

O trojúhelníku skoro „bermudském“

Doc. RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK Praha

Na obr. 1 vidíte ostroúhlý trojúhelník ABC . Jsou v něm mimo jiné sestrojeny paty V_a , V_b , V_c výšek z jeho vrcholů na protější strany. Považujme strany trojúhelníku ABC za rozhraní dvou optických prostředí. Potom vyšleme-li světelný paprsek z bodu V_a do bodu V_b , v bodě V_b se odrazí podle zákona odrazu a to tak, že dorazí do bodu V_c , zde se opět odrazí a vrátí se jako bumerang do bodu V_a , V_b atd. Uvedené tvrzení v dalších odstavcích dokážeme. Obvod trojúhelníku $V_aV_bV_c$ je tedy pro světelný paprsek jako „bermudský“ trojúhelník, neboť z něho není vyváznutí. Ovšem nejmenuje se tak, nýbrž bývá nazýván *trojúhelníkem optickým*.

Na obr. 1 dále ještě vidíme trojúhelníky AV_cV_b , V_aV_cB a V_aCV_b . O těchto třech trojúhelnících lze dokázat, že jsou podobné s trojúhelníkem ABC .

Označme V průsečík výšek (tzv. *ortocentrum*) trojúhelníku ABC . Úhly $\triangle ABC$ popište obvyklým způsobem řeckými písmeny α , β , γ . Nejprve dokážeme, že $|\sphericalangle AV_cV_b| = \gamma$. Sestrojíme-li nad průměrem AV kružnici k_1 , pak na ní podle Thaletovy věty leží body V_c a V_b . Podle věty o obvodových úhlech platí

$$|\sphericalangle AV_cV_b| = |\sphericalangle AVV_b| \quad (1)$$

Pravoúhlé trojúhelníky AVV_b a ACV_a mají společný úhel při vrcholu A , takže

$$|\sphericalangle AVV_b| = |\sphericalangle ACV_a| = \gamma \quad (2)$$

Podle (1) a (2) dostáváme $|\sphericalangle AV_cV_b| = \gamma$.

Odtud již vyplývá $\triangle ABC \sim \triangle AV_bV_c$. Také byste měli zjistit, že na obr. 1 je $\sphericalangle V_cV_bV$ označen chybně γ .

Obdobně dokážeme, že $|\sphericalangle V_aV_cB| = \gamma$. Užijeme k tomu kružnici k_2 nad průměrem BV . Dospějeme k závěru, že $\triangle ABC \sim \triangle V_aBV_c$. Podíváme-li se na obr. 1, pak zcela oprávněnou analogií dojdeme k závěru, že

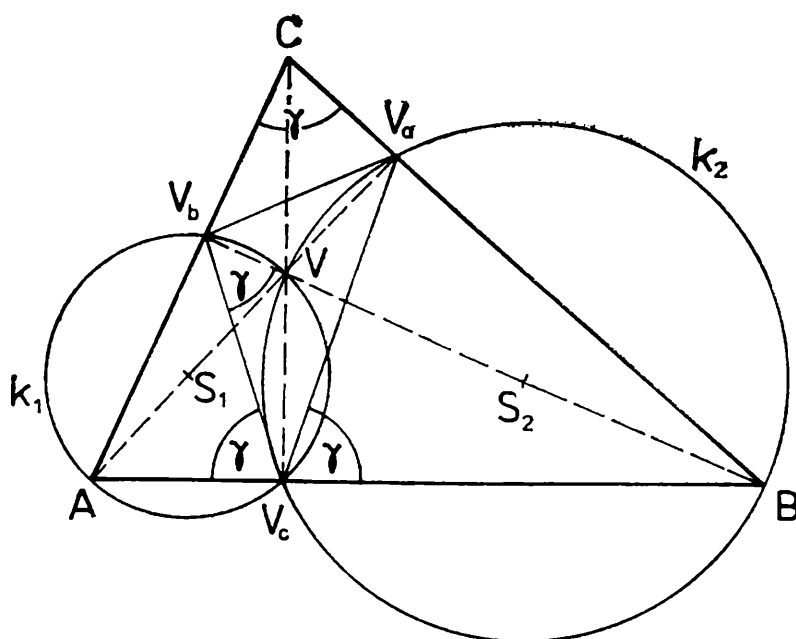
$$|\sphericalangle V_bV_aC| = \alpha \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CV_bV_a| = \beta.$$

Odtud již plyne, že $\triangle ABC \sim \triangle V_aV_bV_c$.

Všimněme si nyní výšky CV_c na stranu AB . Platí

$$|\sphericalangle AV_cV_b| = |\sphericalangle V_aV_cB| = \gamma, \quad (3)$$

a proto výška CV_c je osa $\sphericalangle V_bV_cV_a$. Skutečně se tedy světelný paprsek přicházející z bodu V_b do bodu V_c v něm odrazí do bodu V_a .



Obr. 1

Poznámky :

1. Z rovnosti (3) vyplývá, že pro každý bod $X \in AB$ platí

$$|V_b X| + |X V_a| \geq |V_b V_c| + |V_c V_a|.$$

Lze dokázat, že ortický trojúhelník $V_a V_b V_c$ daného ostroúhlého trojúhelníku ABC je trojúhelník nejmenšího obvodu ze všech strojůhelníků, které mají jeden vrchol uvnitř strany AB , další uvnitř strany BC a třetí uvnitř strany CA .

2. Výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou osami vnitřních úhlů ortického trojúhelníku $V_a V_b V_c$. Tedy průsečík výšek trojúhelníku ABC je zároveň středem vepsané kružnice $\triangle V_a V_b V_c$.

Cvičení :

1. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů ortického trojúhelníku ostroúhlého trojúhelníku ABC pomocí velikostí vnitřních úhlů $\triangle ABC$.

2. Dokažte pro ostroúhlý trojúhelník větu *Nagelovu*, která zní:

Buď O střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC . Potom přímky OA , OB , OC jsou postupně kolmé k přímkám $V_b V_c$, $V_c V_a$, $V_a V_b$ procházejícími stranami ortického trojúhelníku.

3. Je dán $\triangle V_a V_b V_c$. Sestrojte ostroúhlý trojúhelník ABC , v němž body V_a , V_b , V_c jsou paty výšek po řadě z vrcholů A , B , C na protější strany.

Užití orientovaných kružnic v aplikacích počítačové grafiky

Doc. dr. LUDĚK GRANÁT, CSc., VÚMS Praha

Určujeme-li tečnu ke kružnici k vedenou daným bodem, který leží vně této kružnice, úloha má dvě řešení. Jedno z nich můžeme volit např. na základě požadavku, že dotykový bod má být vlevo, resp. vpravo, od orientované spojnice středu kružnice a daného bodu. Jiným vhodným způsobem volby určité z těchto tečen je přiřazení vhodné orientace nejen hledané tečny, např. od dotykového bodu k danému bodu (v tomto příspěvku budeme stále předpokládat užití orientovaných přímk), ale i kružnici. Pokud se týče systému souřadnic, budeme předpokládat kladně orientovaný kartézský souřadnicový systém.

Kružnicím s orientací ve smyslu proti pohybu hodinových ručiček budeme říkat *kladně orientované* a jejich poloměr bude vždy kladné číslo rovné velikosti poloměru příslušné neorientované kružnice. Kružnicím s orientací shodnou se smyslem pohybu hodinových ručiček budeme říkat *záporně orientované* a jejich poloměr bude záporné číslo, jehož absolutní hodnota bude rovna velikosti poloměru příslušné neorientované kružnice.

Obdobně jako u orientované přímky je časté její určení uspořádanou dvojicí bodů, u orientované kružnice je důležité její určení uspořádanou trojicí bodů. Bývá to počáteční bod, další bod a koncový bod oblouku, který na hledané kružnici leží.

Označme tyto body $B(I)$, $B(J)$, $B(M)$ a vypočtěme nejprve souřadnice středu $B(S)$ kružnice, která jimi prochází. Pro zjednodušení výpočtu provedme transformaci

$$\begin{aligned}x' &= x - B(I, 1), \\y' &= y - B(I, 2),\end{aligned}$$

takže bod $B(I)$ bude počátkem nové soustavy souřadnic. Nové souřadnice bodů $B(J)$ a $B(M)$ budou

$$\begin{aligned}B'(J, 1) &= B(J, 1) - B(I, 1), \\B'(J, 2) &= B(J, 2) - B(I, 2), \\B'(M, 1) &= B(M, 1) - B(I, 1), \\B'(M, 2) &= B(M, 2) - B(I, 2).\end{aligned}$$

Rovnice kružnice, která prochází počátkem soustavy souřadnic, je

$$x'^2 + y'^2 - 2m'x' - 2n'y' = 0.$$

Aby procházela dalšími body, musí platit

$$\begin{aligned} 2m'B'(J, 1) + 2n'B'(J, 2) &= B'(J, 1)^2 + B'(J, 2)^2, \\ 2m'B'(M, 1) + 2n'B'(M, 2) &= B'(M, 1)^2 + B'(M, 2)^2 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic dostaneme souřadnice středu kružnice m' , n' , v původní soustavě souřadnic $m = m' + B(I, 1)$, $n = n' + B(I, 2)$. Pro poloměr r kružnice platí $r = \sqrt{m'^2 + n'^2}$.

Pokud body $B(I)$, $B(J)$, $B(M)$ leží na přímce nebo v rámci zobrazení čísel se řešená soustava lineárních rovnic od tohoto případu velmi málo liší, lze nahradit v některých aplikacích oblouk určený danými body úsečkou $B(I)$, $B(M)$. Nenastává-li tento singulární případ, zbývá ještě určit orientaci kružnice. Sestrojíme orientovanou spojnici bodů $B(I)$ a $B(M)$. Dosadíme-li do levé strany její rovnice souřadnice bodu $B(J)$, znaménko výsledku určí, zda bod $B(J)$ leží vlevo, resp. vpravo, od uvažované orientované spojnice a tím, zda daný oblouk je kladně, resp. záporně, orientovaný.

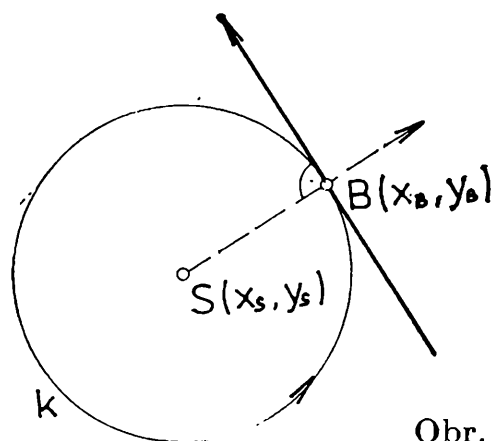
Tečna orientované kružnice $k(S, r)$ v jejím bodě B bude orientovaná přímka (obr. 1) reprezentovaná rovnicí

$$\frac{x_S - x_B}{r} x + \frac{y_S - y_B}{r} y - \frac{x_S - x_B}{r} x_B + \frac{y_S - y_B}{r} y_B = 0,$$

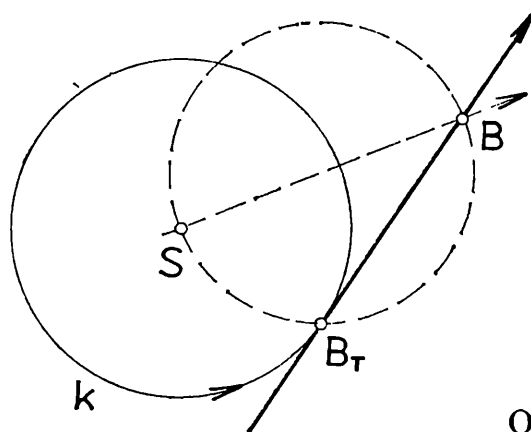
při kladné orientaci kružnice k kolmá na orientovanou spojnici středu S kružnice a dotykového bodu B na kružnici, při záporné orientaci kružnice k bude mít opačnou orientaci.

Chceme-li sestrojit určitou tečnu kružnice k , aby procházela daným bodem (obecně neležícím na kružnici k), zvolíme orientaci dané kružnice tak, aby hledaná orientovaná tečna směřovala od bodu dotyku na kružnici k danému bodu (obr. 2). Je možno uvažovat i orientaci od daného bodu k bodu dotyku, avšak jednou provedenou volbu je třeba stále dodržovat.

Víme, že dotkový bod B' lze sestrojit jako průsečík dané kružnice s Thaletovou kružnicí nad průměrem SB . Pro kladně orientovanou kružnici dostaneme hledaný průsečík jako průsečík, který je vpravo od orientované spojnice SB .



Obr. 1



Obr. 2

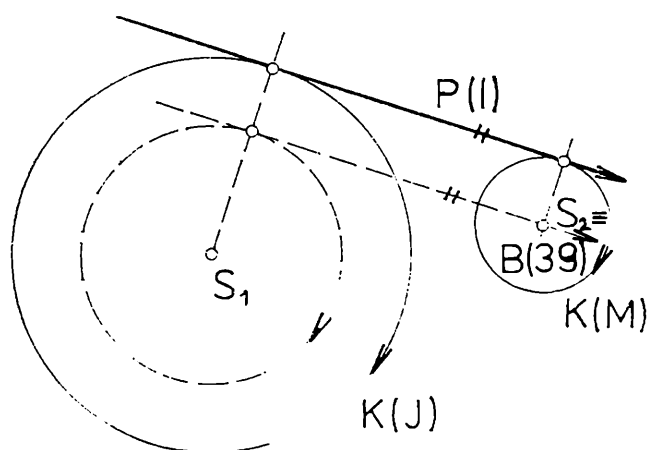
V případě, že bod B je velmi blízko dané kružnice (jeho vzdálenost od ní je menší než dané číslo WW), lze předpokládat, že poloha bodu B byla nepřesně spočtena při jeho předchozím výpočtu a můžeme provést korekci a určit tečnu jako kolmici na spojnici středu kružnice a tohoto bodu (při záporné orientaci kružnice s opačným smyslem). V ostatních případech, je-li B uvnitř dané kružnice, program hlásí chybu. Dostaneme-li poloměr kružnice jako výsledek nějakého předchozího výpočtu, může se snadno stát, že je roven nule nebo nule velmi blízký (jeho absolutní hodnota je menší než předem uvažované číslo WW). Pak za hledanou tečnu možno prohlásit spojnici středu kružnice a daného bodu.

Program pro sestrojení orientované tečny $P(I)$ k orientované kružnici $K(J)$, kde tato tečna prochází bodem $B(M)$, může vypadat takto:

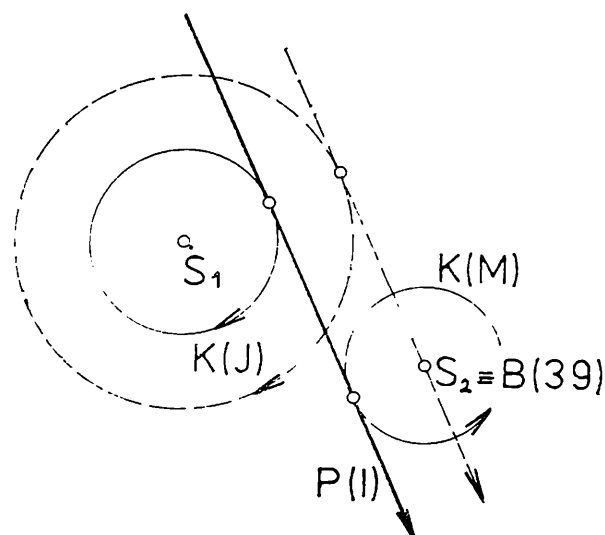
```

1610 REM TECNA P(I) KRUZNICE K(J) BODEM B(M) — PKB
1620 LET WL = J
1630 LET WZ = M
1640 IF ABS(K(J, 3)) < WW THEN GOTO 1880
1650 LET W1 = B(M, 1) - K(J, 1)
1660 LET W2 = B(M, 2) - K(J, 2)
1670 LET W = SQR(W1*W1 + W2*W2)
1680 IF ABS(ABS(K(J, 3)) - W) < WW THEN GOTO 1840
1690 IF W < ABS(K(J, 3)) THEN GOTO 1910
1700 LET K(20, 1) = K(J, 1) + B(M, 1)/2
1710 LET K(20, 2) = (K(J, 2) + B(M, 2))/2
1720 LET K(20, 3) = W/2
1730 LET S = -SGN(K(J, 3))
1740 LET WI = I
1750 LET I = 40
1760 LET M = 20
1770 GOSUB 1440
1780 LET I = WI
1790 LET J = 40
1800 LET M = WZ
1810 GOSUB 1120
1820 LET J = WL
1830 GOTO 1930
1840 LET P(I, 1) = -W1/K(J, 3)
1850 LET P(I, 2) = -W2/K(J, 3)
1860 LET P(I, 3) = -P(I, 1)*B(M, 1) - P(I, 2)*B(M, 2)
1870 GOTO 1930
1880 LET B(40, 1) = K(J, 1)
1890 LET B(40, 2) = K(J, 2)
1900 GOTO 1790
1910 PRINT "PKB", I, J, M

```



Obr. 3a



Obr. 3b

1920 WQ = 1

1930 RETURN

Na předchozí úlohu lze převést sestrojení společné tečny $P(I)$ dvou orientovaných kružnic $K(J)$ a $K(M)$. První z těchto kružnic zaměníme nejprve soustřednou s ní kružnicí o poloměru $r = K(J, 3) - K(M, 3)$ — obr. 3a, b. K ní sestrojíme tečnu vedenou středem druhé kružnice $K(M)$. Tuto tečnu pak posuneme o $K(M, 3)$ v záporném smyslu orientované kolmice na tuto tečnu. Jako chybný stav vyloučíme případ, kdy vzdálenost středů kružnic je menší než dané číslo WW .

Program pro sestrojení orientované tečny k daným orientovaným kružnicím může vypadat takto:

1960 REM TECNA $P(I)$ KE KRUZNICIM $K(J)$, $K(M)$ — PKK

1970 LET $W = \text{SQR}((K(J, 1) - K(M, 1))^2 + (K(J, 2) - K(M, 2))^2)$

1980 IF $W < WW$ THEN GOTO 2100

1990 LET $WR = K(J, 3)$

2000 LET $B(39, 1) = K(M, 1)$

2010 LET $B(39, 2) = K(M, 2)$

2020 LET $K(J, 3) = K(J, 3) - K(M, 3)$

2030 LET $WQ = M$

2040 LET $M = 39$

2050 GOSUB 1620

2060 LET $K(J, 3) = WR$

2070 LET $M = WQ$

2080 LET $P(I, 3) = P(I, 3) + K(M, 3)$

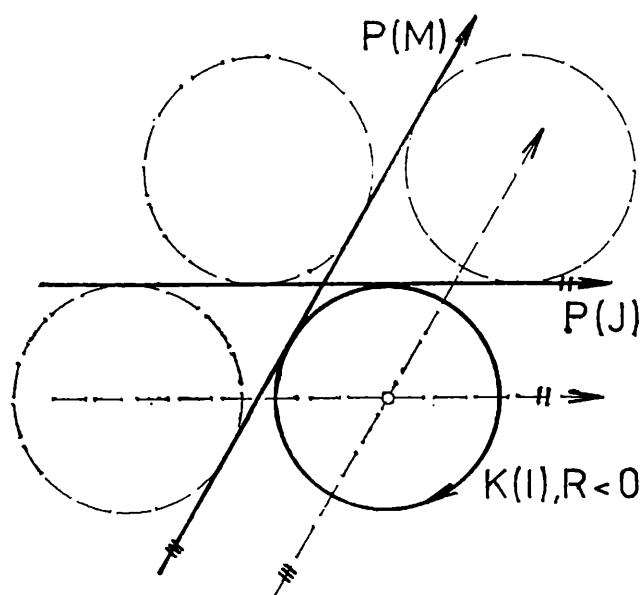
2090 GOTO 2120

2100 PRINT "PKK", I, J, M

2110 WQ = 1

2120 RETURN

Jako příklad úloh, kdy určujeme kružnici, která má mezi svými určujícími prvky dotyk dané přímky nebo kružnice, uvedeme sestavení kružnice $K(I)$ o poloměru R , která se dotýká dvou různoběžných přímek $P(J)$ a $P(M)$. Pokud bychom pracovali s neorientovanými přímkami, měla by obdobná úloha čtyři řešení. Pro výběr určitého z těchto řešení zvolíme vhodné orientace daných prvků včetně hledané kružnice (značímko poloměru). Na obr. 4 jsou čárkovaně nakreslena i další řešení, která dostáváme, neuvažujeme-li orientaci daných prvků.



Obr. 4

Střed hledané kružnice lze vypočítat jako průsečík přímek, které jsou rovnoběžné s danými a jsou vzdáleny od nich o R . Po stanovení těchto rovnoběžek s danými přímkami užijeme již hotový podprogram (viz [1]) pro průsečík dvou přímek. Zda nejsou přímky $P(J)$ a $P(M)$ rovnoběžné si můžeme otestovat hned na začátku programu, nebo při šetření místem dostaneme hlášení o této situaci v průběhu výpočtu průsečíku přímek, a to ve tvaru BPP následovaném číslem 38 a čísly daných přímek.

Příslušný program v jazyku Basic může znít:

```

2150 REM K(I) O POLOMERU R DOTYKAJICI SE P(J), P(M) —
      KPP
2160 LET W3 = P(J, 3)
2170 LET W4 = P(M, 3)
2180 LET WI = I
2190 LET P(J, 3) = P(J, 3) - R
2200 LET P(M, 3) = P(M, 3) - R
2210 LET I = 38
2220 GOSUB 1020
2230 LET K(WI, 1) = B(38, 1)

```

2240 LET $K(WI, 2) = B(38, 2)$
2250 LET $K(WI, 3) = R$
2260 LET $P(J, 3) = W3$
2270 LET $P(M, 3) = W4$
2280 LET $I = WI$
2290 RETURN

Literatura

- [1] — Granát, L.: Planimetrické konstrukce v aplikacích počítačové grafiky. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 68, č. 8, s. 342
[2] — Granát, L.: Užití orientovaných přímků v aplikacích počítačové grafiky. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 68, č. 9, s. 388

FYZIKA

História vzniku laseru a jeho použitie pri výučbe fyziky — 2

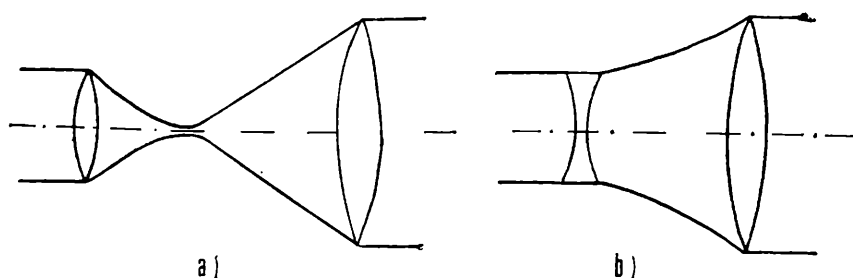
Doc. ing. OTAKAR WILFERT, CSc., dr. ALENA VODILOVÁ, VVTŠ — ČSSP
Liptovský Mikuláš

V prvej časti článku, ktorá vyšla v minulom čísle Rozhľadov, bola stručne zhrnutá história vzniku laseru a s ohľadom na pedagogické aplikácie bol podrobnejšie rozobraný He-Ne laser. V závere boli uvedené základné charakteristiky žiarenia He-Ne laseru s dĺžkou vlny 632,8 nm.

V tejto druhej časti článku je pojednané o najdôležitejších optických prvkoch a optických sústavách používaných pri pedagogických aplikáciách He-Ne laseru. Uvedený je stručný prehľad možností použitia laseru vo výučbe a predložené sú niektoré príklady demonštračných pokusov a príklady laboratórnych úloh. Jednotlivé pokusy sú doplnené obrázkami, stručným komentárom a odkazmi na literatúru.

3. Optické prvky pre prácu s He-Ne laserom

Na vykonávanie niektorých demonštračných pokusov alebo laboratórnych úloh je šírka zväzku, ktorý vychádza z rezonátora lasera veľmi malá (v blízkej zóne žiarenia je približne rovná 1,7 mm) [20]. Na rozšírenie zväzku — pri zachovaní takmer rovinnej vlnoplochy — sa používa Keplerov alebo Galileov teleskop [21] (obr. 7). Pre popis laserového zväzku a teoretické výpočty jeho transformácie optickými prvkami alebo optickými sústavami je vhodné použiť metódy maticovej optiky [22].



Obr. 7. Teleskopy pre zväčšenie šírky laserového zväzku.

- a) Keplerov teleskop
- b) Galileov teleskop

V prvej časti článku [20] bolo na obr. 5 znázornené rozloženie intenzity v priereze zväzku v základnom priečnom mode. Podľa Gaussovej krivky, ktorá charakterizuje rozloženie intenzity žiarenia v priereze zväzku, sa laserový zväzok označuje tiež ako Gaussov zväzok.

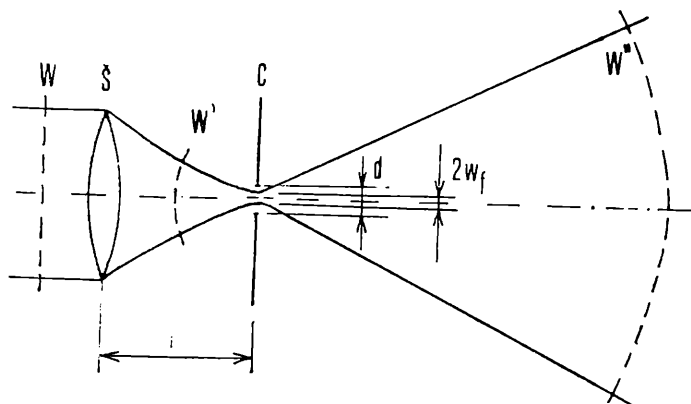
Ak obsahuje žiarenie lasera viac priečných modov, je možné jednodovosť žiarenia zabezpečiť priestorovým filtrom (modovou clonkou). Priestorový filter je tvorený spojnou šošovkou (prípadne mikroskopovým objektívom) a clonkou s kruhovým otvorom. Clonka je umiestnená v ohniskovej rovine spojenej šošovky (obr. 8). Optimálny pomer priemeru otvoru v clonke d ku priemeru kruhového prierezu zväzku v ohniskovej rovine $2w_f$ je [23]

$$\frac{d}{2w_f} = 4.$$

Veľkosť polomeru kruhového prierezu zväzku w_f môžeme určiť vzťahom [23]

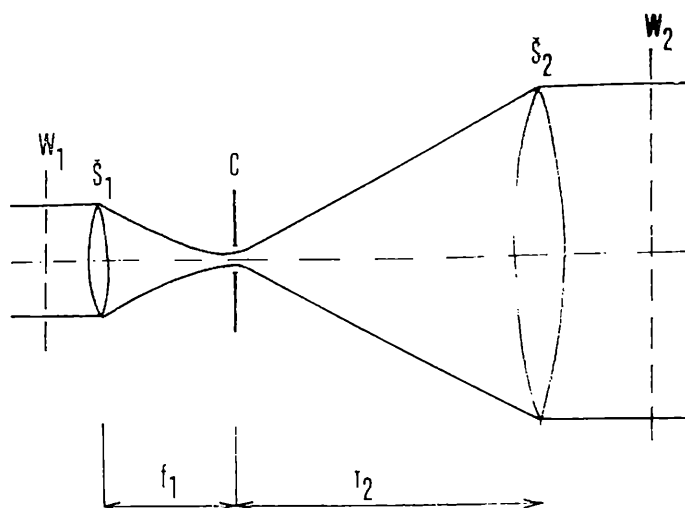
$$w_f = \frac{\lambda f}{\pi w_0},$$

kde λ je vlnová dĺžka, f je ohnisková vzdialenosť šošovky a w_0 je polomer kruhového prierezu zväzku v krčku pred priestorovým filtrom.



Obr. 8. Priestorový filter — modová slonka.

$\check{S}$ — šošovka; f — ohnisková vzdialenosť; C — clonka; d — priemer kruhového otvoru v clonke; $2w_f$ — priemer zväzku v ohniskovej rovine; W , W' , W'' — vlnoplochy.



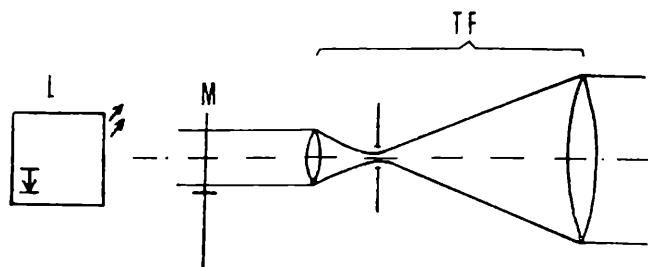
Obr. 9. Teleskopická optická sústava s priestorovým filtrom.
 $\check{S}_1, \check{S}_2$ — spojné šošovky; f_1, f_2 — ohniskové vzdialenosti; C — clonka;
 W_1, W_2 — rovinné vlnoplochy.

Vlna vstupujúca do priestorového filtra je približne rovinná (vlnoplocha W). Vlna vystupujúca z priestorového filtra je guľová, rozbiehavá (vlnoplocha W''). Rovinnú vlnu z guľovej rozbiehavej vlny môžeme znovu získať spojnou šošovkou (obr. 9). Zariadenie, ktoré je znázornené na obr. 9, nazývame teleskopická optická sústava s priestorovým filtrom. Namiesto šošovky $\check{S}_1$ sa používa aj mikroskopový objektív.

Laser s upraveným zväzkom môžeme použiť ako pri demonštráciách fyzikálnych javov [24], tak aj v laboratórnych cvičeniach [25] alebo pri zhotovovaní diapozitívov [26] zobrazujúcich fyzikálne javy. Laserové žiarenie môže byť jednak prostriedkom výučby (s využitím vysokej koherencie žiarenia) a tiež predmetom výučby, kedy sa najmä demonštrujú alebo premeriavajú vlastnosti laserového žiarenia. Fyzikálne javy, ktoré sa pomocou laserového žiarenia zobrazujú, môžeme pozorovať v nezatemnenej miestnosti za denného svetla, fotografovať alebo elektronicky premeriavať.

Pri elektronickom meraní intenzity laserového žiarenia používame jednosmernú alebo striedavú metódu. Striedavá metóda má niekoľko predností (môžeme merať za prítomnosti denného svetla alebo umelého osvetlenia, je väčší pomer medzi signálom a šumom a pod.), ale laserové žiarenie je nutné modulovať. Najčastejšie sa používa amplitúdová modulácia mechanickým alebo elektrooptickým modulátorom. Mechanický modulátor môžeme vyrobiť pomocou perforovaného kotúča upevneného na hriadeli vhodného motora. Elektrooptické modulátory sa vyrábajú v Monokryštáloch Turnov. Mechanické modulovanie laserového zväzku je znázornené na obr. 10.

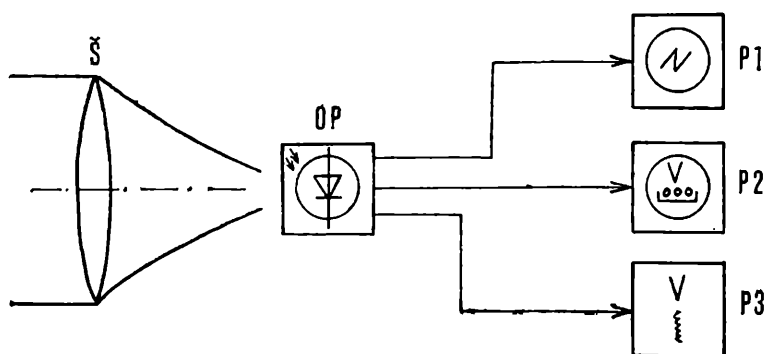
Pri niektorých meraniach je optickým prijímačom detekovaný rozptýlený žiarivý tok s veľmi nízkou úrovňou intenzity. Detekovaná je potom len veľmi nízka úroveň žiarivého toku. Na zvýšenie úrovne detekovaného



Obr. 10. Mechanické modulovanie laserového zväzku.

L — laser, M — mechanický modulátor, TF — teleskopická optická sústava s priestorovým filtrom.

žiarivého toku sa používajú spojné šošovky, ktoré sústredia žiarivý tok na aktívnu plochu fotodetektora. Spojnú šošovku nepoužívame vtedy, keď by jej použitie viedlo k menšej názornosti experimentu. V takých prípadoch je požadovaný veľmi citlivý optický prijímač. Výstup optického prijímača môžeme pripojiť súčasne k číslicovému voltmetru, zapisovaču a oscilografu. Zaradenie oscilografu je vhodné pre názornosť a rýchle ohodnotenie pozorovaného signálu. Číslicový voltmeter je vhodný na získanie relatívne presnej číselnej hodnoty úrovne signálu a zapisovač slúži na dokumentáciu experimentu. Optický prijímač spolu s prijímacou spojnou šošovkou a vyhodnocovacím zariadením je znázornený na obr. 11.



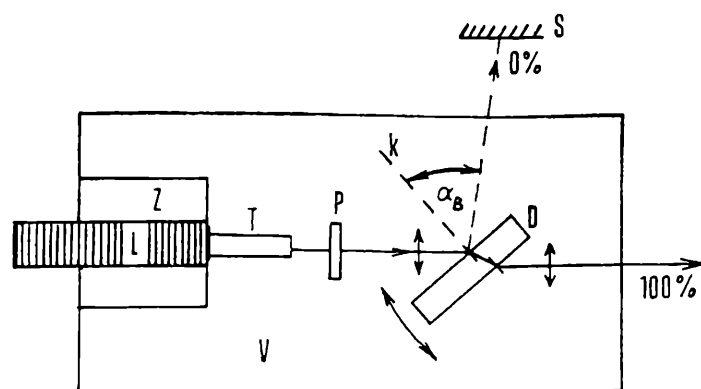
Obr. 11. Optický prijímač so šošovkou.

OP — optický prijímač, $Š$ — prijímacia spojná šošovka, $P1$ — oscilograf, $P2$ — číslicový voltmeter, $P3$ — zapisovač.

4. Vybrané príklady použitia laseru vo výučbe

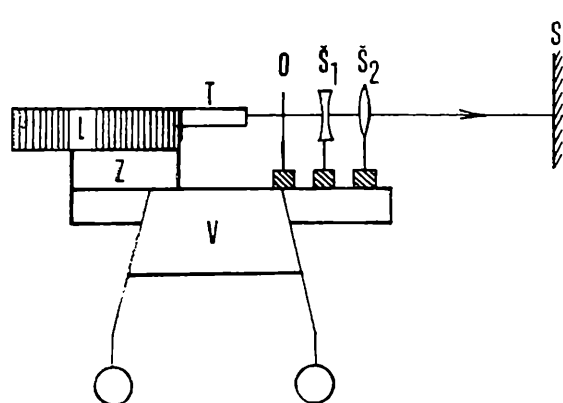
a) Príklady demonštračných pokusov

Lasery sa obyčajne používajú na demonštrácie javov vlnovej optiky: difrakciu, interferenciu a polarizáciu. Výhoda ich použitia spočíva v tom, že interferenčné a difrakčné pokusy môžeme vykonávať bez podrobného objasňovania pojmu koherencie. Demonštrované javy sú názorné, pozorovateľné voľným okom aj v nezatemnených učebniach. Zobrazované javy je vhodné pozorovať na bielej difúznej ploche. Dobré poslúži aj niektorá svetlá stena priamo na učebni.

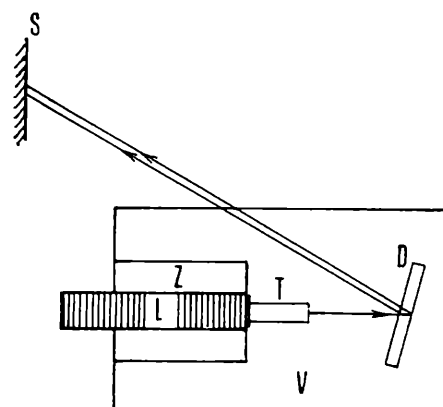


Obr. 12. Usporiadanie pomôcok pri demonštrácii polarizácie optického žiarenia odrazom.

V – vozík, L – laser, Z – zdroj, T – teleskop, P – polarizátor, D – planoparalelná sklenená doska, k – kolmica k doske D , α_B – Brewsterov uhol, S – zobrazujúca plocha.



Obr. 13. Usporiadanie pomôcok pri demonštrácii Fraunhoferovho ohybu. L – laser, Z – zdroj, T – teleskop, V – vozík, O – difraktujúci objekt, $\check{S}_1$ – rozptylka, $\check{S}_2$ – spojka, S – zobrazujúca plocha.



Obr. 14. Usporiadanie pomôcok pre demonštráciu interferencie pomocou planoparalelnej sklenenej dosky. V – vozík, L – laser, T – teleskop, Z – zdroj, D – planoparalelná sklenená doska, S – zobrazujúca plocha.

V demonštráciách znázornených na obr. 12, 13, 14 bol použitý He-Ne laser TKG-205, vyrobený vo Výskumnom ústave vákuovej elektroniky v Prahe. Laser má relatívne malé rozmery ($428\text{mm} \times 111\text{mm} \times 77\text{mm}$) a malú hmotnosť (6,5 kg). Napájať môžeme laser zo siete (pomocou sieťového napájача TKG 205), alebo z akumulátorovej batérie 12 V, 50 Ah. Laser bol vybavený objektívom Zeiss $15 \times$ (upravený pre laser TKG 205). Výstupný výkon lasera je minimálne 1 mW a zaručená životnosť 1000 hodín.

Laser bol umiestnený na pojazdnom vozíku BS 511. Pracovná plocha vozíka je ($0,4 \times 0,7$) m^2 a je možné na nej okrem lasera rozložiť aj potrebný statívový materiál spolu s optickými prvkami.

Výstupné žiarenie použitého lasera nemá definovanú rovinu polarizácie (laser je konštruovaný s vnútornými zrkadlami), preto pri de-

monštrácii polarizácie optického žiarenia (obr. 12) bol použitý polarizátor. Polarizátor sa nastaví tak, aby rovina polarizácie laserového žiarenia prichádzajúceho na sklenenú dosku bola kolmá k pracovnej ploche vozíka. Pri použití laseru, ktorého výstupné žiarenie je lineárne polarizované, nie je nutné polarizátor používať. Ak ho v zostave ponecháme, môžeme jeho natočením okolo osi zväzku meniť úroveň žiarivého toku. Ostatné príklady demonštrácií sú zrejmé z obrázkov 13 a 14.

Na demonštráciu javov vlnovej optiky môžeme okrem reálnych prístrojov použiť tiež diapozitívy. Intenzita laserového žiarenia je dostatočne vysoká na to, aby difrakčné alebo interferenčné obrazce boli zachytené na bežnom fotografickom záznamovom materiáli. Pri fotografovaní postupujeme tak, že z fotoaparátu odstránime objektív a rovinu filmu stotožníme s rovinou pozorovania. Ak má fotoaparát zabudovaný expozimeter, exponujeme podľa údajov, ktoré nám expozimeter poskytuje. V opačnom prípade je nutné správnu expozíciu odskúšať.

Existuje vhodná sada diapozitívov (Difraktografické album [26]) v dvoch verziách (pre vysokú alebo strednú školu) s podrobným komentárom.

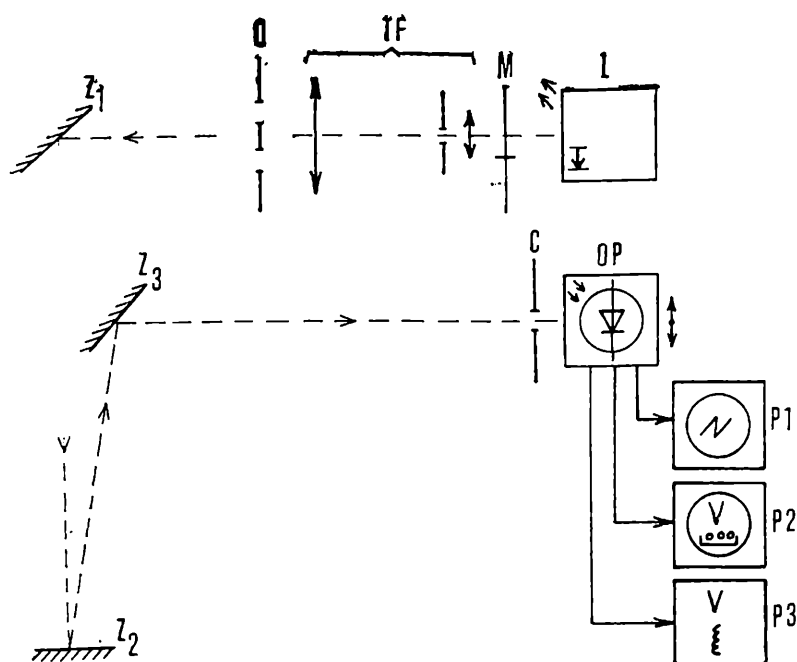
b) Príklady laboratórnych úloh

Uvádzame dve zložitejšie laboratórne úlohy, vhodné napr. pre fyzikálne praktikum. Použitý bol jednomodový He-Ne laser LA 1001 (výkon 60 mW), vyrobený v Metre Blansko. V úlohách sú výsledky experimentov vyhodnocované elektronickou metódou. Číselné hodnoty detekovaného žiarivého toku sú v rozsahu 10^{-8} W až 10^{-10} W, preto predpokladom úspešného merania je použitie dostatočne citlivého optického prijímača. V úlohách bol použitý optický prijímač, ktorého hlavnými prvkami sú fotodióda PIN a aktívny filter [27]. Spektrálna napäťová citlivosť použitého prijímača pre vlnovú dĺžku 632,8 nm je $1,7 \cdot 10^4$ V W $^{-1}$ a výkon ekvivalentný šumu je $3,4 \cdot 10^{-12}$ W . Hz $^{-1/2}$.

V prvom prípade laboratórnej úlohy je laserové žiarenie použité na premeriavanie difrakčných javov. Usporiadanie experimentu je znázornené na obr. 15. Optické prvky sú rozložené na stabilnom holografickom stole. Optický prijímač OP je upevnený na posuve s mikrometrickou skrutkou, ktorá umožňuje snímanie difrakčného obrazca v rôznych miestach roviny pozorovania. Výstup z optického prijímača je spojený so vstupom oscilografu P1, digitálneho voltmetra P2 a zapisovača P3.

Pomocou uvedeného zariadenia je možné študovať Fresnelove aj Fraunhoferove difrakčné javy. Pre ilustráciu predkladáme výsledky meraní:

- Fresnelovej difrakcie na dvojštrbine,
- Fresnelovej difrakcie na kruhovom disku,
- Fraunhoferovej difrakcie na kruhovom otvore.



Obr. 15. Schématické znázornenie usporiadania experimentu pre meranie Fresnelovej difrakcie.

L — laser; M — mechanický modulátor; TF — teleskop s priestorovým filtrom; O — difraktujúci objekt; Z_1, Z_2, Z_3 — zrkadlá; C — tienidlo s kruhovým otvorom; OP — optický prijímač; $P1$ — oscilograf; $P2$ — číslicový voltmeter; $P3$ — zapisovač.

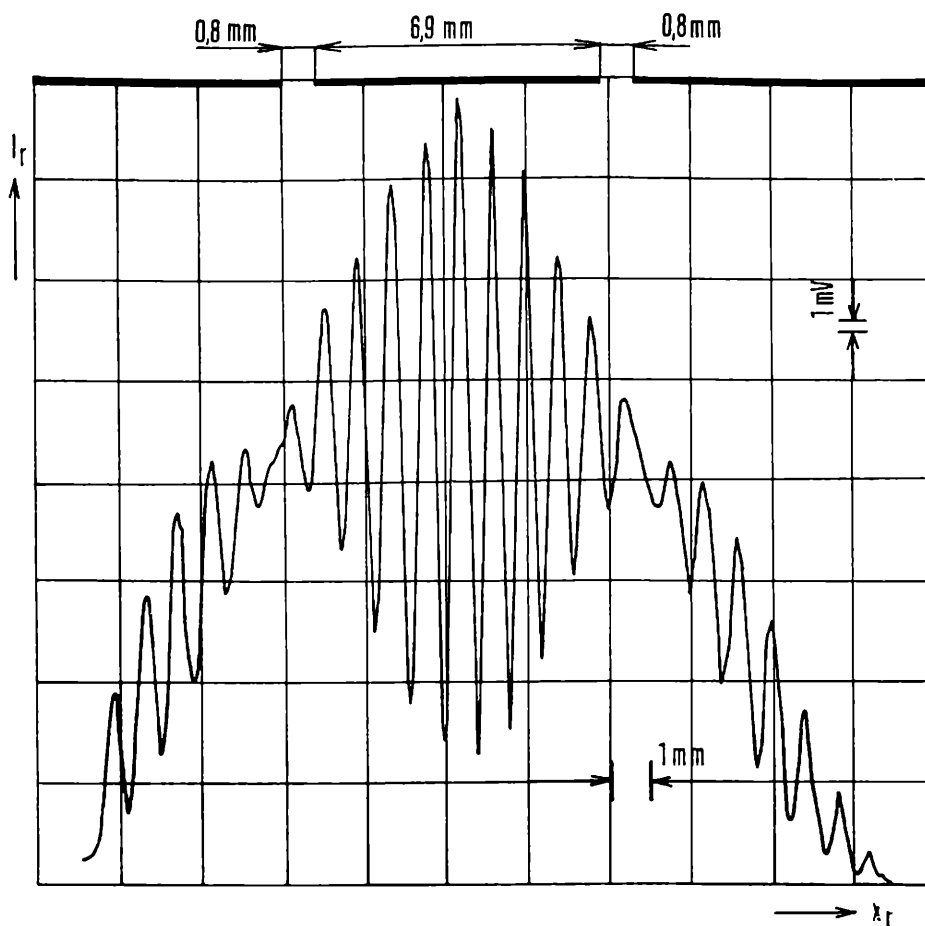
Rozloženie relatívnej intenzity je merané na priamke ležiacej v rovine pozorovania. Priamka prechádza stredom difrakčného obrazca a orientovaná je kolmo na obrazce, tvoriace difrakčné maximá.

Význam laboratórnej úlohy je v niekoľkých aspektoch. Študenti získajú väčšie skúsenosti v experimentálnej práci, zoznámia sa s usporiadaním Youngovho pokusu (obr. 16) a objasnia si rozdielnosť javov interferencie a difrakcie. Zvlášť je významné pozorovanie Poissonovej bodky pri Fresnelovej difrakcii na kruhovom disku (obr. 17), ktorá je experimentálnym potvrdením vlnovej teórie (Huygensovho-Fresnelovho princípu). Ak odpovedá situácia zakrytiu práve prvej Fresnelovej zóny, je v bode pozorovania Poissonovej bodky (v geometrickom tieni kruhového disku) rovnaká intenzita, ako pri odstránení disku (obr. 17).

Fraunhoferova difrakcia na kruhovom otvore (obr. 18) má mnoho aplikácií, napr. pri stanovení rozlišovacej schopnosti niektorých optických prístrojov. V teoretickej časti tejto pracovnej úlohy sú študenti vedení k počítaniu s Besselovými funkciami.

Uvedená laboratórna úloha v sebe teda zahrňuje praktické, teoretické aj historické zložky výučby.

V druhom príklade laboratórnej úlohy je stanovovaná povrchová drsnosť optoelektronickou metódou, ktorá vyplýva z amplitúdovej korelácie polí koherenčnej zrnitosti. Interferujúce polia sú vytvorené odrazom laserového žiarenia od difúzneho povrchu materiálu pri dvoch

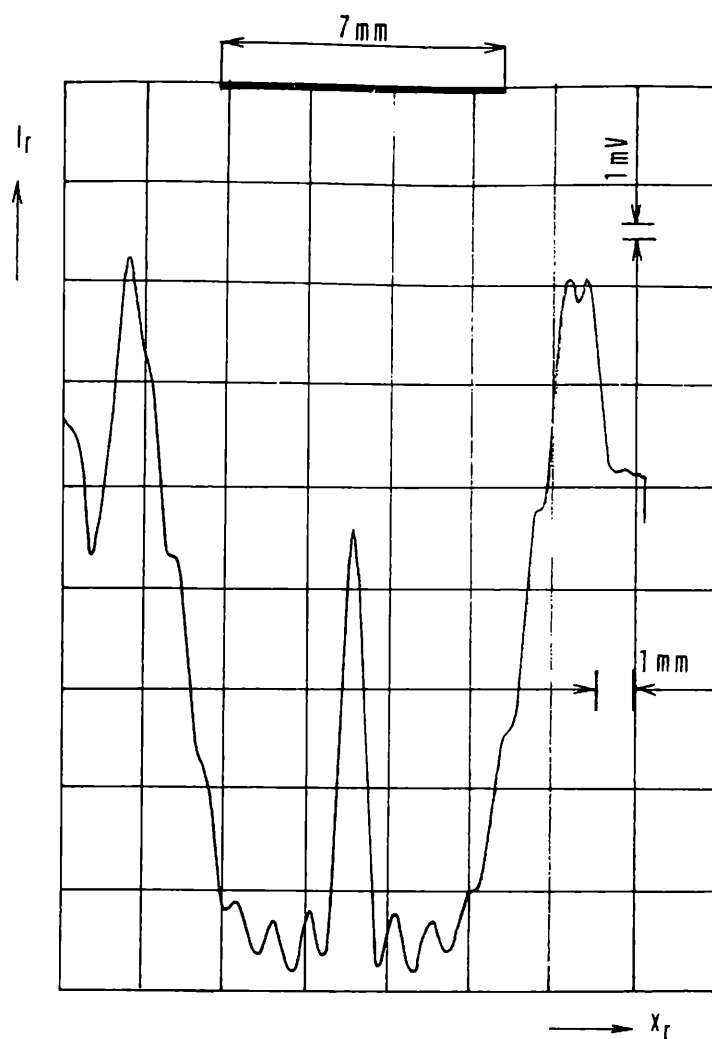


Obr. 16. Fresnelova difrakcia na dvojštrbine.
(Šírka štrbín dovoľuje prepustiť práve jednu Fresnelovu zónu.)
 I_r — relatívna intenzita, x_r — relatívna poloha optického prijímača.

rôznych dopadoch primárnej vlny [28]. Stupeň korelácie amplitúdy svetla takýchto polí sa vyhodnocuje meraním kontrastu interferenčných krúžkov (v reálnom čase). Získanie maximálnej presnosti merania spočíva v správnom nastavení experimentálneho zariadenia [28]. Pre stanovenie miery povrchovej drsnosti bola zvolená stredná kvadratická odchýlka R_q reálneho povrchu od jeho stredného profilu. Rozsah merateľných hodnôt tejto veličiny je od $1 \mu\text{m}$ do $30 \mu\text{m}$ s presnosťou ohodnotenou relatívnou chybou $\pm 8 \%$.

Schéma experimentálneho zariadenia, ktorým môžeme merať povrchovú drsnosť, je na obr. 19. Povrch je ožarovaný laserom ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$) pomocou afokálneho systému, ktorý tvoria šošovky $\check{S}_1$ a $\check{S}'_1$. Rovinné vlny W_1 a W'_1 dopadajú na povrch D pod uhlami dopadu $\Theta_1 - \delta\Theta_1/2$ a $\Theta_1 + \delta\Theta_1/2$. Uhlová diferencia $\delta\Theta_1$ smerov šírenia vln bola získaná natočením zrkadiel Z_2 a Z'_2 v Michelsonovom interferometri I_1 .

Šošovky $\check{S}_2$ a $\check{S}'_2$ tvoria afokálny systém, ktorý zobrazuje ožiarený povrch D na zrkadlá Z_3 a Z'_3 v Michelsonovom interferometri I_2 . Zrkadlá Z_3 a Z'_3 je dôležité nastaviť tak, aby došlo k interferencii medzi vlnami rozptýlenými povrchom D pod uhlami $\Theta_2 - \delta\Theta_2/2$ a $\Theta_2 + \delta\Theta_2/2$.



Obr. 17. Fresnelova difrakcia na kruhovom disku.
(Vzdialenosť kruhového disku od roviny pozorovania je 9,5 m.)
 I_r — relatívna intenzita, x_r — relatívna poloha optického prijímača.

Pre ľahké nastavenie optických prvkov je vhodné usporiadanie experimentu voliť tak, aby platilo

$$\Theta_1 = \Theta_2 = 45^\circ$$

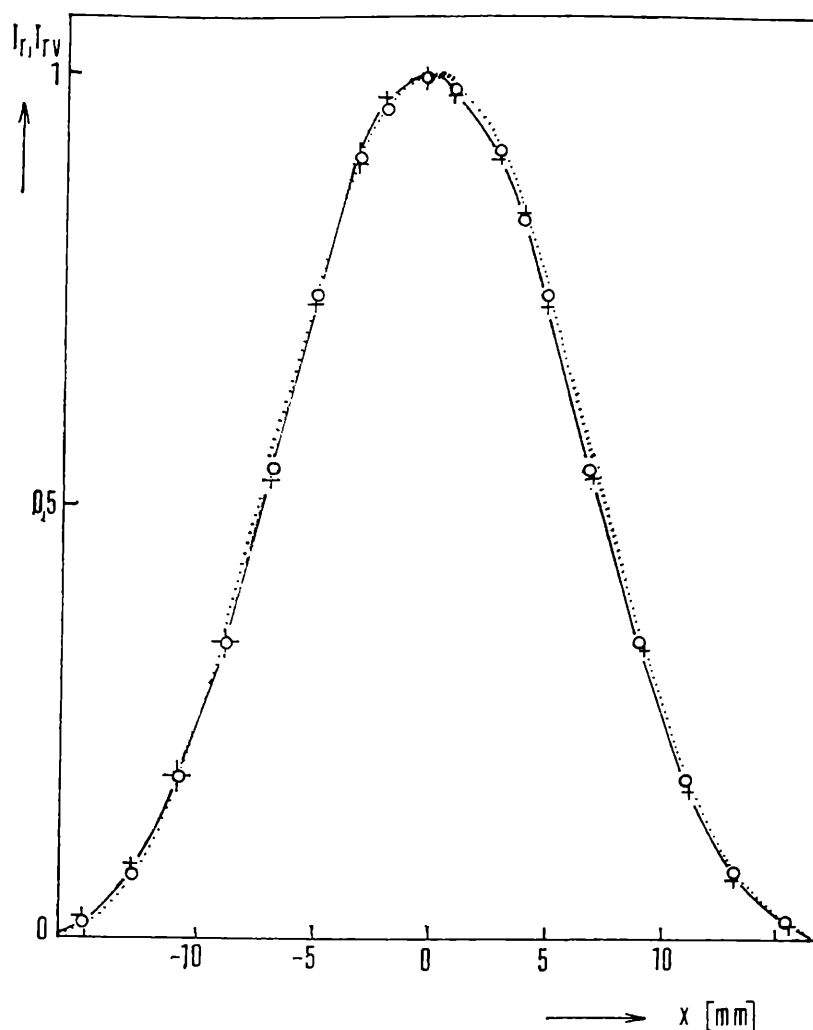
$$\delta\Theta_1 = \delta\Theta_2 = \delta\Theta$$

Za týchto podmienok môžeme strednú kvadratickú odchýlku R_q reálneho povrchu od jeho stredného profilu vyjadriť vzťahom [29]

$$R_q = 1,007 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{-\ln 2V}}{\delta\Theta},$$

kde V je kontrast interferenčných krúžkov pozorovaných v ohniskovej rovine šošovky $\mathcal{S}$. Kontrast V je definovaný výrazom

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$



Obr. 18. Fraunhoferova difrakcia na kruhovom otvore.
(Priemer kruhového otvoru je 0,28 mm a je vzdialený od roviny pozorovania 7,67 m.)

I_r — relatívna intenzita získaná experimentálne (plná čiara),

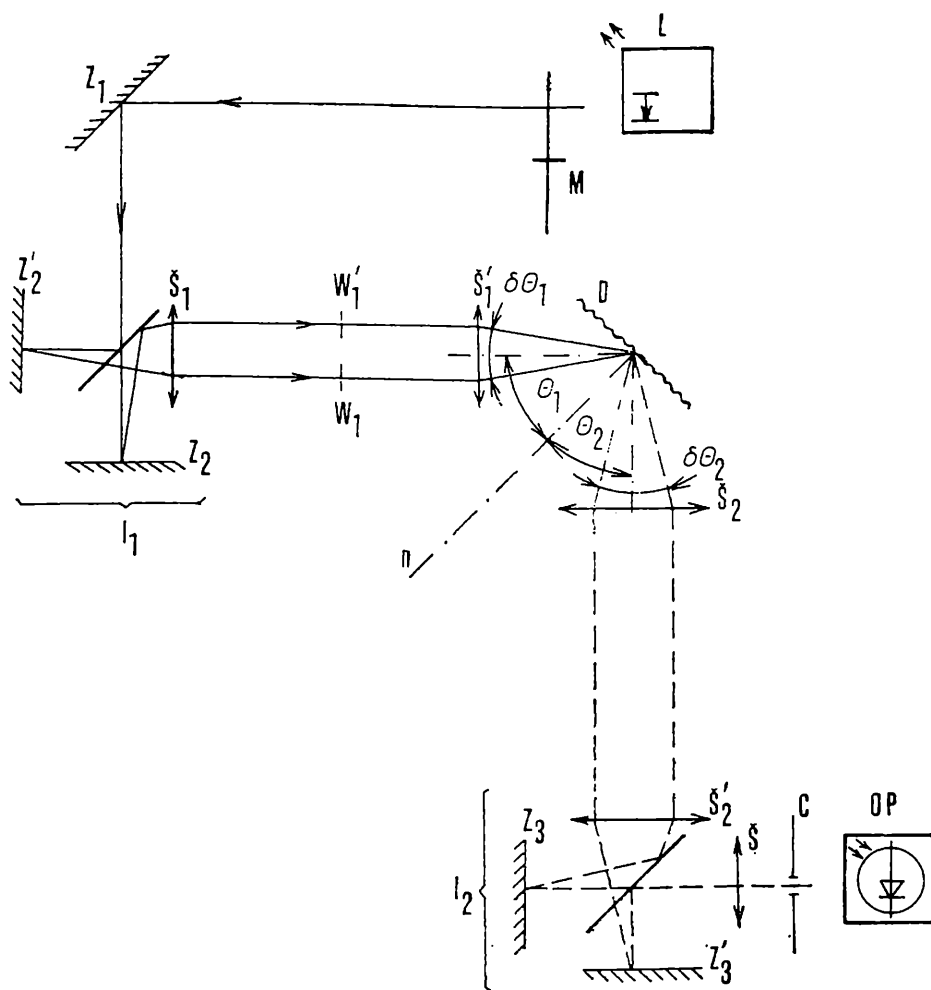
I_{rv} — relatívna intenzita získaná výpočtom na mikropočítači (bodkovaná čiara),

x — poloha optického prijímača.

kde $I_{\max}$ a $I_{\min}$ sú maximálne a minimálne hodnoty intenzít svetla v interferenčnom obraze.

Grafické vyjadrenie závislosti strednej kvadratickej odchýlky R_q na kontraste V pri niektorých uhlových diferenciách $\delta\theta$ je na obr. 20. Na obrázku je vidieť, že vzhľadom k vytvoreniu optimálnych podmienok pre meranie strednej kvadratickej odchýlky R_q daného povrchu je vhodné voliť uhlovú diferenciu $\delta\theta$ takú, aby kontrast V bol v intervale od 0,15 do 0,35.

Interferenčný obrazec je premeriavaný lineárnym selektívnym optickým prijímačom OP s clonkou C , ktorá má malý kruhový otvor. Otvor clony bol nastavený do stredu interferenčných prúžkov. Intenzita interferenčného obrazca sa menila posúvaním zrkadla Z'_3 interferometra I_2 .

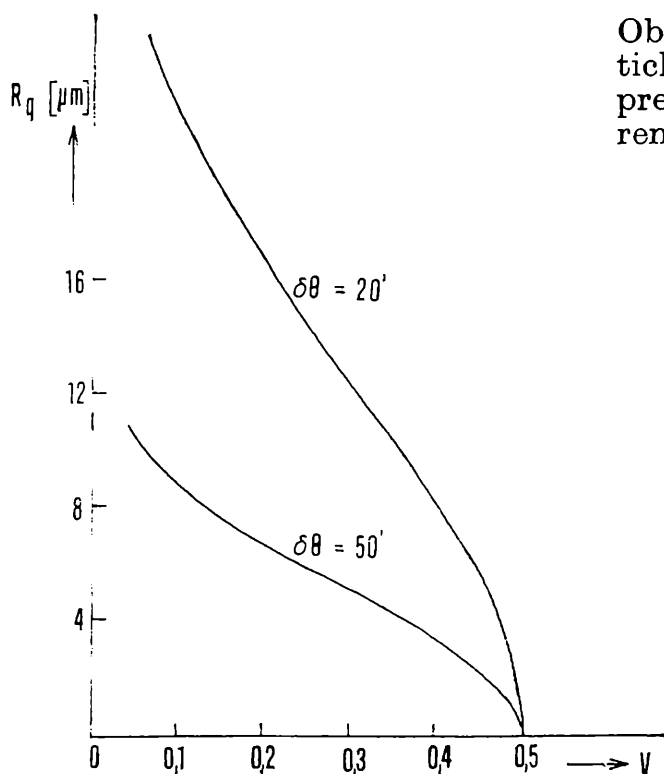


Obr. 19. Usporiadanie experimentu pre meranie povrchovej drsnosti. L — He—Ne laser; M — mechanický modulátor; Z_1 — zrkadlo; I_1 — Michelsonov interferometer so zrkadlami Z_2, Z_2' pre získavanie dvoch rovinných vln zvierajúcich úhol $\delta\theta_1$; S_1, S_1' — šošovky afokálneho systému ožarujúceho drsnú plochu D dvoma rovinnými vlnami W_1, W_1' ; S_2, S_2' — šošovky afokálneho systému zobrazujúce ožiarenú plochu D na zrkadlá Z_3, Z_3' interferometra I_2 ; n — normála k ploche D ; S — šošovka pre zobrazenie interferenčného poľa na clonku C ; OP — selektívny detektor optického žiarenia.

Význam tejto laboratórnej úlohy spočíva v získavaní návykov trpezlivej a presnej práce s optickými prvkami. Študenti sa zoznámia s aplikáciou javu koherentnej zrnitosti a Michelsonovým interferometrom. Pri meraní je nutné vyriešiť súvislosti medzi veľkosťou škvŕniok koherentnej zrnitosti na clonke C , veľkosťou otvoru v clonke, presnosťou merania a citlivosťou optického prijímača. Tieto problémy metódy detekcie optického žiarenia sú súčasťou tvorivého prístupu študentov k zvládnutiu uvedenej laboratórnej úlohy.

Záver

V článku, ktorý vyšiel na pokračovanie v dvoch častiach, je v prvej časti podaná stručná história vzniku lasera, súčasné možnosti jeho zakú-



Obr. 20. Závislosť strednej kvadratickej odchylky R_q na kontraste V pre niektoré hodnoty uhlových diferencií $\delta\Theta$.

penia pre pedagogické účely a charakterizované sú typické vlastnosti laserového žiarenia, hlavne jeho vysoká časová a priestorová koherencia. Pozornosť je sústredená na He-Ne laser pracujúci na vlnovej dĺžke 632,8 nm, ktorý je pre účely výučby najvhodnejší.

V druhej časti článku je objasnený spôsob tvarovania laserového zväzku, jeho modulovanie a spôsob detekcie. Uvedené sú niektoré príklady demonštrácií a laboratórnych úloh, pri ktorých sa výhodne používa He-Ne laser. Táto časť článku má mať inšpirujúci charakter.

Laser môže byť nielen pomocníkom pri výučbe fyzikálnych javov, ale môže byť priamo predmetom výučby. Existujú jednoduché metódy, ako počítať a premeriavať základné parametre laserového zväzku. Preme-riavanie niektorých parametrov laserového zväzku je uvedené napr. v [30, 31].

Aj keď He-Ne lasery nemajú extrémne vysoké výkony žiarenia, je nutné pri práci s nimi prísne dodržiavať špeciálne pravidlá bezpečnosti práce. Pri zaobchádzaní s laserom môže dôjsť k vážnemu poškodeniu oka. Ožarovanie kože sa v niektorých lekárskejších metódach používa na liečenie, ale pretože môže dôjsť k nežiadúcim biologickým javom, je nutné sa ožarovaniu kože vyhýbať.

V miestnosti, kde sa laser používa, je dôležité zamedziť nežiadúcim odrazom laserového žiarenia. Študenti sa nesmú dostať do nebezpečného stretnutia s laserovým zväzkom. Miestnosť musí byť dostatočne osvetle-ná, aby sa očná zornica či najviac zúžila, čím sa zníži úroveň žiarivého toku vstupujúceho do oka.

Literatúra

- [20] WILFERT, O. — VODILOVÁ, A.: História vzniku laseru a jeho použitie pri výučbe fyziky — 1. Rozhledy matematicko-fyzikální, 68, 1989/90, č. 9, s. 394
- [21] BEGUNOV, B. N. a kol.: Teorija optičeskich sistem. Moskva, Mašinstrojenije 1981.
- [22] GERRARD, A. — BURCH, J. M.: Vvedeniye v matričnuju optiku. Moskva, Mir 1978.
- [23] HORNA, O.: Zařízení k úpravě laserového svazku a k odstranění nežádoucích obrazů prostorovou filtrací. [Diplomový úkol]. Brno 1980. — VUT. Fakulta strojní.
- [24] WILFERT, O.: Příklady použití laseru pro demonstrace jevů vlnové optiky. In: Sborník přednášek Lasery ve výuce fyziky. Brno 1981.
- [25] WILFERT, O. a kol.: Laboratorné návody — I, Optika a kvantová elektronika. Lipt. Mikuláš, VVTŠ—ČSSP 1987.
- [26] KOMRSKA, J.: Difraktografické album. Brno, ÚPT ČSAV 1983.
- [27] PARMA, L. — MALÝ, P.: Využití Antoniova mutátoru pro detekci optického záření. In: Zborník vedeckých prác VVTŠ—ČSSP. 2. Lipt. Mikuláš 1984.
- [28] LÉGER, D. — PERRIN, J. C.: Real-time measurement of surface roughness by correlation of speckle patterns. J. Opt. Soc. Am., 66, 1976, s. 1210—1217.
- [29] WILFERT, O. — DUŠEK, J.: Experimentální zařízení pro stanovení povrchové drsnosti optoelektronickou metodou. Elektrotechnický čas., 37, 1986, č. 3, s. 196—201.
- [30] SVĚTLÍK, J.: Simple Methods for the Measurement of Laser Beam Parameters. Applied Optics, 13, 1974, č. 6, s. 1276—1278.
- [31] LOVICH, M.: Aplikácie Fourierovej optiky. [Diplomový úkol]. Lipt. Mikuláš 1988. — VVTŠ ČSSP. Katedra mikroelektroniky a laserové techniky.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

K prvním ohlasům na Röntgenův objev

Rudolf KOLOMÝ, Moravská Třebová

Ve 4. čísle RMF roč. 67 (1988/89) byl zveřejněn článek doc. RNDr. Ivo Krause, CSc., „Wilhelm Konrád Röntgen — osobnost známá i neznámá“ K tomuto článku bych si dovil připojit několik poznámek, týkajících se prvních ohlasů a užití jeho významného objevu.

Od r. 1855 se vědci zabývali studiem výbojů v plynech a není pochyb o tom, že v mnoha případech vznikly rentgenové paprsky. Ostatně bylo známo, že v místnostech, kde se konají pokusy s katodovými paprsky, nelze přechovávat fotografické desky, protože černají. Avšak žádný z pozorovatelů nebyl s to podat nějaké vysvětlení. Tak např. v r. 1890, pět let před objevem rentgenových paprsků, pozoroval *Goodspeed* v jed-

nom americkém ústavu na negativu fotografické desky obrysy některých laboratorních předmětů, které se nacházely poblíž Crookesovy trubice, s kterou prováděl experimenty. Avšak nikdo nedovedl tento náhodně získaný obraz vysvětlit a rovněž nikdo si jej nevzal za podnět ke zkoumání jeho příčin. Po Röntgenově objevu vyhledal odloženou a zapomenutou fotografickou desku a zopakoval tehdejší experiment. Bezpochyby zhotovil rentgenový snímek, aniž si toho povšiml.

Také u nás byli dva fyzikové, kteří prováděli pokusy nezávisle na Röntgenovi současně s ním nebo snad i dříve než on, aniž byly jejich výsledky dostatečně propracovány, zveřejněny a také odlišeny od studia katodových paprsků. Byl to profesor německé techniky v Praze *dr. Ivan Puluž* (1845 až 1918) a *dr. František Nábělek* (1852 až 1916), profesor gymnazia v Kroměříži. Nábělkovi žáci dlouho vzpomínali, jak jim několi-krát prosvítil svou ruku neznámými paprsky a přitom říkal: „Abyste viděli, jak bude vypadat váš profesor po smrti“.

Málokterý z vědeckých objevů způsobil ve veřejnosti takový rozruch. F. Herneck v knize „Průkopníci atomového věku“ o tom píše: „Rozšíření Röntgenova spisu a jeho fotografií vyvolalo takový ohlas, jaký se v dějinách přírodovědy neudál zajisté od Galileiho zprávy o objevu Jupiterových měsíců. Dokonce ani o velkolepých pokusech Hertzových se před sedmi lety zdaleka tolik nemluvalo . . .“.

Šokujícím dojmem na všechny působila rentgenová fotografie lidské ruky. Röntgen 22. prosince 1895 prosvítil novými paprsky a vyfotografoval ruku své manželky. Již v nedělním čísle vídeňských novin „Die Presse“ z 5. ledna 1896 redaktor Z. K. Lecher v dosti obsírném článku pod názvem „Eine sensationelle Entdeckung“ zasvěcuje čtenáře do tajemných účinků nových paprsků. V několika málo týdnech byl Röntgenův objev znám na celém světě a učinil hluboký dojem na lidi, což se pouze zřídka stává v dějinách vědy (zároveň se stal i předmětem nesčetných kabaretních vtipů a karikatur v populárních časopisech, takže se lidé začali bát i o své soukromí). Již 12. ledna 1896 požádal Röntgena německý císař na základě krátké novinové zprávy o osobní informaci.

Podle Hernecka jen v r. 1896 vyšlo o rentgenových paprscích dohromady 50 knih a brožur, přes tisíc vědeckých článků; počet populárně vědeckých a novinářských článků, jež vyšly o Röntgenovi na celém světě, nelze spočítat.

Röntgen nazval neznámé záření paprsky X, ale 23. ledna 1896 na zasedání Fyzikální a lékařské společnosti ve Würzburgu navrhl skoro osmdesátiletý anatom *Albert von Kölliker* (1817 až 1905), aby nové paprsky byly pojmenovány Röntgenovým jménem. Vynálezce to odmítl stejně jako nabídky berlínské společnosti AEG na získání patentu a další spolupráci s tímto podnikem ve využití svých budoucích objevů a vyná-

lezů a odmítl ve své skromnosti i šlechtický titul. Dobrovolně odevzdal svůj vynález celému lidstvu, když prohlásil, že ho mají užívat všichni ti, kteří to budou potřebovat. Odmítl čestné a vysoce placené místo člena berlínské akademie věd i Helmholtzovu katedru fyziky na univerzitě v Berlíně. Vedle četných domácích poct, jako např. udělení čestného doktorátu lékařské fakulty würzburgské univerzity a jmenování korespondujícím členem mnichovské akademie, následovala i uznání z ciziny. Londýnská Royal Society mu udělila zlatou Rumfordovu medaili a kolumbijská univerzita v New Yorku ho r. 1900 poctila Barnardovou medailí. Největším uznáním bylo, když r. 1901 obdržel za svůj objev jako první Nobelovu cenu za fyziku. Finanční částku s ní spojenou (50 000 švédských korun) odkázal své univerzitě pro podporu dalšího vědeckého bádání.

Ačkoliv byl Röntgen vzděláním inženýr, nepodílel se na budování a dalším rozvoji rentgenové techniky. Mezi prvními, kteří se vrhli na Röntgenův objev, byl *T. A. Edison*. Z jeho podnětu byla již v květnu r. 1896 v New Yorku uspořádána výstava, seznamující návštěvníky s Röntgenovým objevem, a kde pro atrakci bylo instalováno zvláštní prohlížecké zařízení, pomocí něhož si mohl každý zájemce prohlédnout na stínítku skelet vlastní ruky. Později Edison tyto experimenty zakázal, když jeden z jeho pomocníků zemřel na těžké popáleniny, které si přivodil neustálým předváděním. Fyziologickým účinkům rentgenových paprsků se zpočátku nevěnovala žádná pozornost. Sám Röntgen uskutečňoval pokusy ve velké zinkové bedně, jejíž stěny zesílil olověnými deskami, aby uchránil fotografické desky v místnosti od nepříznivého působení paprsků X. Toto opatření ovšem chránilo i jeho samotného, aniž by si byl toho vůbec vědom.

Röntgenův objev sehrál velkou úlohu v rozvoji přírodních a technických věd. Rentgenové paprsky umožnily podrobné studium struktury atomů i krystalů. Významné uplatnění našly v průmyslu, zejména v defektoskopii, na což již Röntgen upozorňoval ve svém prvním a třetím sdělení. Je znám první rentgenový snímek kovového materiálu, podle něhož Röntgen našel vnitřní vadu (dutinu v lovecké pušce), a tím v podstatě — nevědomky — založil významný obor zkoušení materiálu bez porušení. Neocenitelné služby poskytly rentgenové paprsky medicíně, a to nejen k účelům diagnostickým, nýbrž i léčebným, kde se začaly z Röntgenovy iniciativy používat ihned po jejich objevu.

A nyní stručně k ohlasu Röntgenova objevu v našich zemích. V lednu r. 1896 *prof. I. Puluj* pomocí katodové trubice vlastní konstrukce zjistil na rentgenovém snímku ruky tuberkulózu kosti článku prstu. Dne 19. února 1896 byl v Praze ve fyzikálním ústavu v Klementinu na přednášce *prof. V. Strouhala* předveden u nás první lékařský rentgenogram, zachycující zlomené předloktí. V této době si zakoupil pro reklamní

účely rentgenový přístroj podnikavý pražský hotelier Céfka. A právě v jeho hotelu „U Černého koně“ se podařilo 11. února 1897 mladému chirurgovi z Maydlovy chirurgické kliniky, pozdějšímu významnému odborníkovi v rentgenologii, *MUDr. R. Jedličkovi* zjistit pomocí rentgenových paprsků malý kovový předmět v žaludku jednoho návštěvníka, který jej předtím náhodou spolkl s jídlem. A právě díky pohotové a správné diagnóze mohl prof. K. Maydl hned druhý den operací zmíněný předmět odstranit. V březnu 1898 se právě na této klinice zásluhou dr. Jedličky zřizuje první „rentgenové instrumentárium“ v Praze.

Rovněž velmi brzo se dostávají zprávy o novém objevu do slovenských novin a časopisů. K nejvýznamnějším průkopníkům rentgenologie nejen na Slovensku, ale pokud jde o její aplikace a nové metodiky v medicíně i v celosvětovém měřítku, patří *MUDr. Vojtěch Alexander* (1857 až 1916). Narodil se v Kežmaroku, vystudoval lékařskou fakultu v Budapešti a ve svém rodišti začal vykonávat i lékařskou praxi. Seznámil se s Röntgenovými články a ty ho zaujaly natolik, že ještě na počátku r. 1896 navštívil objevitele ve Würzburgu, aby od něho získal cenné informace o paprscích X, o přístroji i o perspektivních možnostech jejich uplatnění v medicíně. Po návratu domů přednášel ve Spolku spišských lékařů a lékárníků o novém epochálním objevu a publikoval o něm články, které byly zveřejněny v Ročence Spolku spišských lékařů a lékárníků. V r. 1897 dal Spolek souhlas k zakoupení rentgenového přístroje od firmy Reiniger-Gebbert und Schall z Erlangenu a k užívání jej dostal právě Vojtěch Alexander. Na tomto a později na novém technicky dokonalejším přístroji zhotovoval nejprve pokusné a později lékařské snímky. Vypracoval metodiku tzv. plastického snímkování a prakticky založil plastickou rentgenologii. Zúčastňoval se mezinárodních kongresů rentgenologů, často jim i předsedal a publikoval ne jenom v maďarských nebo německých, ale i v anglických odborných časopisech. Rovněž jeho plastické snímky se objevovaly v různých zahraničních příručkách a učebnicích rentgenologie a v mnohých, zejména fyzikálních časopisech. V r. 1907 přijímá místo na lékařské fakultě v Budapešti a začíná budovat rentgenologickou laboratoř, v r. 1909 se stává docentem rentgenologie a v r. 1914, dva roky před smrtí, řádným profesorem rentgenologie a radiologie. Zcela právem při příležitosti 11. mezinárodního kongresu rentgenologů v Mnichově r. 1959 byla fotografie MUDr. Vojtěcha Alexandra umístěna na čelném místě ve vstupní hale společně s fotografiemi nejvýznamnějších rentgenologů světa.

Velkou úlohu sehrál Röntgenův objev i v dějinách přírodních věd. Objevením těchto paprsků spolu s Becquerelovým objevem přirozené radioaktivity z r. 1896 a objevem nových radioaktivních prvků radia a polonia manžely Curieovými r. 1898 se uzavřelo klasické období fyziky a zároveň se otevřela její nová část — atomistika.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Využití šachovnice k šifrování

V 1. a 2. čísle letošního ročníku Rozhledů jsme společně šifrovali a dešifrovali zprávy, které si mezi sebou vyměnili Jarda a Pavel. Nyní si ukážeme, jak můžeme pro obdobné účely využít šachovnici.

Základem této šifry je tabulka, která se skládá z šifrovacího řádku, šifrovacího sloupce a mřížky s abecedou. Do řádku napíšeme libovolné souhlásky v jakémkoli pořadí a do sloupce samohlásky. Šifrovací a zároveň dešifrovací tabulku vidíte na obr. 1.

ŠIFROVACÍ ŘÁDEK		C	D	K	M	P
ŠIFROVACÍ SLOUPEC	A	A	B	C	D	E
	E	F	G	H	I	J
	I	K	L	M	N	O
	O	P	Q	R	S	T
	U	U	V	X	Y	Z

Obr. 1

Popišme postup šifrování. Za každé písmeno jednotlivých slov šifrované zprávy zapíšeme slabiku vytvořenou ze šifrovacích znaků: A → CA, B → DA, C → KA, D → MA apod.

Souhrn těchto slabik pak vytvoří dané slovo:

AHOJ → CAKEPIPE

Znaménka jako „ , , ; ! ? ” zařazujeme mezi souhrny slabik přesně podle šifrované zprávy. Šifrovaná zpráva poté pro nezasvěceného vypadá jako záhadný nesmyslný text.

Při dešifrování je postup opačný. Podle slabik vyhledáme pomocí tabulky příslušná písmena, která sestavíme do slov a vět.

Pro ztížení dešifrovatelnosti zprávy si může každý individuálně změnit znaky v šifrovacím řádku a sloupci, zaměnit pořadí šifrovacích znaků v jednotlivých slabikách, psát zprávu zprava doleva apod. Je ovšem bezpodmínečně nutno, aby tabulku i šifrovací postup měli odesílatel i příjemce tytéž. Z toho plyne, že je tato šifra prakticky nedešifrovatelná nepovolanou osobou.

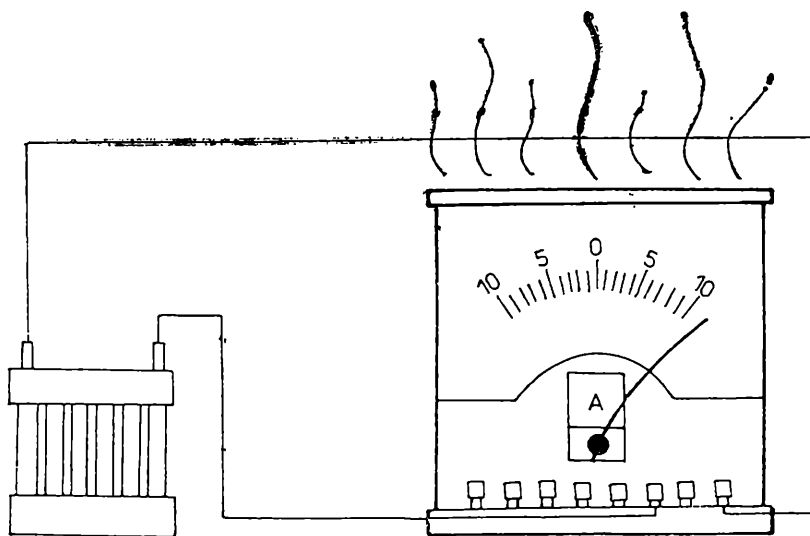
Luděk Machát

žák 2. roč. SOU elektrotechnického, Bučovice

Omyly, které ovládly svět

Jak velký elektrický proud dává zdroj?

O nesmrtelnosti omylu, který budu popisovat v tomto článku, by mohly svědčit stovky úmrtních oznámení školních ampérmetrů, které použili žáci k experimentálnímu hledání odpovědi na otázku v nadpisu prostě tak, že připojili ampérmetr ke svorkám zdroje. Přesto má v nadpisu uvedená otázka svůj smysl.



Název elektrický zdroj navozuje ve čtenáři zcela přirozeně představu, že např. baterie je zdrojem — pramenem elektrického proudu, ať už si elektrický proud v kovovém vodiči modelujeme tekutinou, která protéká vodičem jako potrubím, nebo nověji jako hejno záporně nabitých kuliček — volných elektronů, jejichž chaotický pohyb ve vodiči elektrické pole vytvářené zdrojem směřuje od záporné elektrody ke kladné. Tak či onak není na první pohled zřejmé, proč bychom nemohli změřit „naplno puštěný elektrický proud“ podobně, jako proud vody vystřikující ze zcela otevřeného vodovodního kohoutku.

Důvod, proč běžný ampérmetr taková měření většinou nepřežije, je prostý. Maximální hodnota elektrického proudu, který bude procházet

ampérmetrem připojeným bezprostředně ke svorkám zdroje, je většinou velmi vysoká, takže zpravidla přesáhne mez, kterou je schopen měřicí systém ampérmetru vydržet.

Hodnota elektrického proudu procházejícího ampérmetrem při jeho připojení ke zdroji je ve většině případů vzhledem k malému odporu ampérmetru určena rozhodujícím způsobem vnitřním odporem zdroje R_i a jeho elektromotorickým napětím U_e . U běžných článků a baterií není poměr U_e/R_i , který udává maximální proud, příliš velký, a proto je prakticky měřitelný i běžnými ampérmetry. V tabulce je uvedeno několik typických příkladů, pomocí nichž si můžete udělat názornou představu o hodnotách proudu při zkratu, tj. spojení svorek zdroje vodičem zanedbatelného odporu, u některých elektrochemických zdrojů

Druh zdroje	elektromoto- rické napětí zdroje V	vnitřní odpor* Ω	zkratový proud* A
velký monočlánek	1,5	0,3	4
malý monočlánek	1,5	0,4	4
tužkový monočlánek	1,5	0,5	3
plochá baterie	4,5	0,9	5
destičková malá baterie	9	10	1
automobilový akumulátor	12	10^{-2}	$\sim 10^3$
školní oceloniklový akumulátor	6	10^{-1}	$\sim 10^2$

* Uvedené hodnoty jsou orientační, přísluší plně nabitým zdrojům.

U zdrojů se střídavým napětím je situace ještě složitější v tom, že efektivní hodnota elektrického proudu při zkratu je zpravidla omezena pojistkou či jističem hluboko pod největší hodnotu, kterou by bylo možno dosáhnout, kdyby nebyly v obvodu zařazeny. Při spojení svorek zdroje vodičem se zanedbatelným odporem, za které lze považovat i bezprostřední připojení ampérmetru, však dojde v počátečních okamžicích k proudovému nárazu, který může několikanásobně překročit jmenovitou hodnotu proudu, pro kterou je dimenzována pojistka či jistič. Výsledkem takového spojení je proto opět spálení měřidla.

Můžeme tedy závěrem doporučit, abyste se raději o měření maximálního proudu, který může poskytnout zdroj, ampérmetrem nepokoušeli a ampérmetr zařazovali do obvodu jen se spotřebičem s dostatečně velkým odporem ve spojení za sebou.

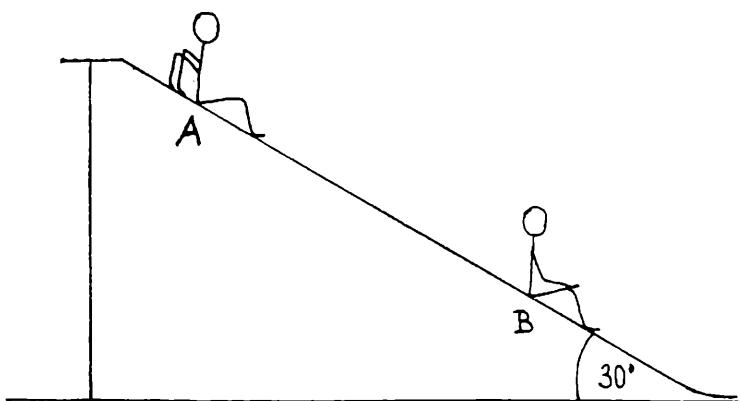
Úkol pro vás: Proč je možno měřit napětí zdroje připojením voltmetru ke svorkám zdroje, ale ampérmetr obdobným způsobem zapojit nesmíme?

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Na skluzavce

Na vodní skluzavce sedí v bodě *A* chlapec a přidržuje se tlakem dlaní na skluzavce tak, že je v klidu. Za okamžik se pustí a začne sjíždět dolů, přičemž dosáhne v bodě *B* ustálené rychlosti (obr. 1).



Obr. 1

Úkol pro vás: Jaká je velikost třecí síly v těchto dvou bodech, je-li úhel sklonu skluzavky od vodorovné roviny 30° a hmotnost chlapce je 40 kg? Úlohu řešte graficky, odpor vzduchu považujte za zanedbatelný.

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních dvou článků zašlete na adresu:

RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.
Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Řešte číselný rébus

$$\text{ŠIFER} + \text{ŠIFER} = \text{KRYŠI}$$

za předpokladů, že stejným písmenům odpovídají stejná čísla, písmenům navzájem různým odpovídají čísla navzájem různá a žádné písmeno neodpovídá číslu 1 (slovo „šifer“ znamená rusky brídlice).

2. Sud byl plný vody. Vodu stejným dílem rozlili do tří nádob. V první nádobě voda naplnila polovinu jejího objemu, ve druhé nádobě dvě třetiny jejího objemu a ve třetí nádobě tři čtvrtiny jejího objemu. Objemy všech tří nádob i sudu jsou vždy celé počty litrů. Při jakém nejmenším objemu sudu je možná tato situace?

3. Mějme dvacetimístné číslo n . Součet jeho cifer je roven 10, součet cifer čísla $7n$ je roven 70 a součet cifer čísla $19n$ je roven 19. O jaké jde číslo?

4. V rovnosti $101 - 102 = 1$ přesuňte jednu cifru tak, aby rovnost platila.

5. Čtyři neformální ekologické organizace se rozhodly sjednotit. Propukl spor, zda nová organizace má mít název „Zelená patrola“ nebo bojovnější název „Zelený mstitel“. Na ustavující schůzi vyslala každá organizace stejný počet delegátů. Delegáti první organizace hlasovali jednomyslně. Delegáti druhé organizace odevzdali tolik hlasů pro první název, jako delegáti třetí organizace pro název druhý. Delegáti čtvrté organizace nebyli jednomyslní a v jejich řadách je třetina tábora „Mstitelů“. Jaký název byl vybrán?

6. (obtížnější) Mějme celá čísla $0 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_n$. Vezměme polynomy $P_1(x) = \sum_{i=1}^n (1+x)^{r_i}$, $P_2(x) = (1+x)^{r_1}$. Dokažte, že počet lichých koeficientů polynomu $P_1(x)$ není menší než počet lichých koeficientů polynomu $P_2(x)$.

Tomáš Schütz

Úlohy I. kola kategorie P 40. ročníku matematické olympiády

1. V rovině je dáno N bodů, očíslovaných od 1 do N . Dvojice celých čísel $(X[i], Y[i])$ pro $1 \leq i \leq N$ reprezentuje kartézské souřadnice bodu i . Robot projde všemi body v pořadí jejich očíslování podle těchto pravidel:

1. Na začátku stojí robot v bodě 1 a dívá se k bodu 2.
2. Robot se pohybuje vždy přímo tím směrem, kterým se dívá.
3. V bodě i pro $1 \leq i \leq N$ se robot otočí ve směru pohybu hodinových ručiček o úhel α , $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ tak, aby se díval k bodu $(i + 1) \bmod N$.
4. Robot skončí svůj pohyb v bodě 1 tak, že se opět dívá k bodu 2.

Během svého pohybu se robot celkem d krát úplně otočí kolem své osy. Navrhněte co nejlepší algoritmus, který pro zadaná celočíselná pole $X[1 \dots N]$, $Y[1 \dots N]$ vypočítá hodnotu d . Je povoleno používat jen celočíselné proměnné. Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.

2. Je dáno celočíselné pole $P[1 \dots M]$, které obsahuje permutaci čísel $1, 2, \dots, M$, tj. pro každé i , $1 \leq i \leq M$, existuje právě jedno h , $1 \leq h \leq M$ takové, že $P[h] = i$. Dále je dáno celočíselné pole $X[1 \dots N]$. Navrhněte co nejlepší algoritmus, který určí, kolikrát se permutace P vyskytuje v poli X , tj. kolik existuje různých rostoucích celočíselných posloupností $R[1 \dots M]$ takových, že pro všechna i , $1 \leq i \leq M$ platí

$$1 \leq R[i] \leq N \wedge P[i] = X[R[i]].$$

Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.

3. *Orientovaný graf* je dvojice $G = (V, E)$ kde V je konečná množina, jejíž prvky se nazývají *vrcholy* nebo *uzly* grafu, a E je binární relace na množině V . Je-li $(x, y) \in E$, říkáme, že v orientovaném grafu vede *hrana* z vrcholu x do vrcholu y , y se nazývá *následník* uzlu x a x *předchůdce* uzlu y . *Cesta délky k* v orientovaném grafu je posloupnost $v_0, v_1, \dots, v_k$ vrcholů, $k \geq 0$, taková, že pro všechna i , $0 \leq i < k$ je v_i předchůdce v_{i+1} . Říkáme, že vrchol y je *dosažitelný* z vrcholu x , jestliže existuje cesta z x do y . Poznamenejme, že každý vrchol je dosažitelný sám ze sebe cestou délky 0.

Graf G budeme reprezentovat dvěma celočíselnými poli $B[1 \dots N + 1]$ a $E[1 \dots M]$, kde N je počet vrcholů a M počet hran v grafu G . Vrcholy jsou očíslovány od 1 do N . Uzel j má $B[j + 1] - B[j]$ následníků; jsou zachyceni v prvcích $E[B[j] + 1], \dots, E[B[j + 1]]$ pole E . Položíme $B[1] = 0$, $B[N + 1] = M$

Cyklus v orientovaném grafu je cesta, jejíž délka je alespoň 1 a v níž je první uzel totožný s posledním uzlem. Graf, který neobsahuje žádný cyklus, se nazývá *acyklický*.

Navrhněte co nejlepší algoritmus, který pro zadaná celočíselná pole B, E reprezentující orientovaný graf G zjistí, zda graf G je acyklický. Při řešení nepoužívejte rekurzi. Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.

4. (a) Navrhněte Turingův stroj, který počítá součet dvou přirozených čísel.
- (b) Navrhněte Turingův stroj, který počítá funkci *zdvojení vstupního slova* nad abecedou $\{a, b\}$. Pro vstupní slovo P bude tedy výsledkem výpočtu slovo PP .

Turingovy stroje

Abecedou nazveme konečnou neprázdnou množinu. Její prvky nazýváme *symbols*. Konečnou posloupnost symbolů abecedy Σ nazveme *slovem* nad abecedou Σ (např. $aba, 01AB, 1234$ jsou slova nad abecedou $\Sigma = \{a, b, A, B, 0, 1, 2, 3, 4\}$). Prázdnou posloupnost symbolů abecedy, značenou ε , nazveme *prázdné slovo*. Počet symbolů ve slově nazveme *délkou slova* (slovo ε má délku 0, slovo $abaa$ má délku 4). *Zřetězení* slova $P = a_1 \dots a_n$ se slovem $Q = b_1 \dots b_m$ je slovo $PQ = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ (např. je-li $P = aabb, Q = bba$, pak $PQ = aabbbba$; je-li $Q' = \varepsilon$, pak $PQ' = aabb$).

Turingův stroj M nad abecedou Σ má *řídící jednotku*, která se může dostávat do konečně mnoha různých stavů a pracuje nad *páskou* rozdělenou na jednotlivá pole. Na pásce existuje nejlevější pole, směrem doprava je však nekonečná. Každé pole obsahuje vždy právě jeden symbol páskové abecedy Π . *Pásková abeceda* Π je tvořena jednak symboly vstupní abecedy Σ , dále symboly pomocné abecedy $V, \Sigma \cap V = \emptyset$ a speciálním prázdným symbolem $\triangle, \triangle \notin \Sigma \cup V$. Tedy $\Pi = \Sigma \cup V \cup \{\triangle\}$.

V každém okamžiku výpočtu je řídící jednotka Turingova stroje v právě jednom ze svých možných vnitřních stavů a stroj má přístup k právě jednomu poli pásky prostřednictvím čtecí a zapisovací *hlavy*. V této situaci stroj provede krok výpočtu následovně: Hlava zapíše nový symbol páskové abecedy na pole, nad kterým je umístěna, a tím nahradí původně zapsaný symbol; po tomto zápisu přejde nad levé nebo pravé sousední pole. Současně řídící jednotka může změnit svůj stav. Všechny tyto změny závisí jednak na vnitřním stavu řídící jednotky, jednak na obsahu čteného pole pásky.

Činnost Turingova stroje je zadána dvourozměrnou *tabulkou*, která obsahuje pro každý vnitřní stav řídící jednotky jeden řádek a pro každý symbol páskové abecedy jeden sloupec. Jeden zvolený stav řídící jednotky je označen jako *počáteční* a žádný, jeden nebo více stavů jako *koncové*.

Položka tabulky odpovídající stavu i a symbolu s páskové abecedy (průsečík i -tého řádku a s -tého sloupce) je buď prázdná, nebo je tvořena trojicí (α, β, γ) , kde α je stav, β symbol páskové abecedy, $\gamma \in \{L, P\}$.

Každá taková trojice popisuje jeden možný *krok výpočtu* Turingova stroje M : je-li během výpočtu stroj M ve stavu i a hlava je umístěna nad polem pásky se symbolem s , pak stroj přejde do stavu α , zapíše na pásku symbol β do pole, nad nímž se nachází čtecí hlava, a posune hlavu na pásce o jedno pole doleva nebo doprava podle toho, zda $\gamma = L$ nebo P . Na počátku výpočtu je dané vstupní slovo w nad abecedou Σ umístěno zcela vlevo na začátku pásky a všechna zbývajících pole vpravo od slova w obsahují prázdný symbol Δ . Hlava je na počátku výpočtu umístěna nad nejlevějším polem a řídicí jednotka je v počátečním stavu. Výpočet dále probíhá podle tabulky. Dosáhne-li stroj některého koncového stavu, výpočet končí. Pokud výpočet dojde do nekonečného stavu i , přičemž ve čteném poli pásky je symbol s a položka tabulky odpovídající stavu i a symbolu s je prázdná, pak výpočet rovněž končí (nelze v něm pokračovat). Pod tento případ zahrnujeme i situaci, kdy hlava je nad nejlevějším polem pásky a má se posunout směrem doleva (zápis symbolu β na pásku se však ještě provede). Výpočet pro vstupní slovo w může být ovšem také nekonečný. Řekneme, že funkce $f(w_1, w_2, \dots, w_n)$, $n \geq 1$, zobrazující množinu n -tic slov nad abecedou Σ do množiny slov nad Σ je počítána Turingovým strojem M nad $\Sigma \cup \{*\}$, kde $* \notin \Sigma$, jestliže pro každé vstupní slovo $w_1 * w_2 * \dots * w_n$ zadané na pásce se stroj M chová následovně:

1. je-li funkční hodnota $f(w_1, w_2, \dots, w_n)$ definována a rovna slovu w , pak výpočet stroje M končí a po skončení je na pásce od začátku zapsáno slovo w , následované pouze prázdnými symboly Δ ;
2. není-li funkční hodnota $f(w_1, w_2, \dots, w_n)$ definována, pak výpočet stroje M neskončí.

Příklad. Turingův stroj T nad $\{a, b, *\}$ počítá funkci zřetězení slov nad abecedou $\{a, b\}$, která dvojici slov (w_1, w_2) přiřadí slovo $w_1 w_2$.

T	a	b	*	Δ
START 1	(1, a , P)	(1, b , P)	(1, $*$, P)	(2, Δ , L)
2	(3, Δ , L)	(4, Δ , L)	(5, Δ , L)	
3	(3, a , L)	(4, a , L)	(5, a , L)	
4	(3, b , L)	(4, b , L)	(5, b , L)	
STOP 5				

Pomocná abeceda V je v tomto případě prázdná. Stroj začíná ve stavu 1 a jeho hlava se pohybuje doprava, dokud nenarazí na první prázdný symbol Δ ; pak přejde do stavu 2. Dále se pohybuje doleva, dokud nenarazí na symbol $*$ a nepřejde do koncového stavu 5. Přitom vždy přečte

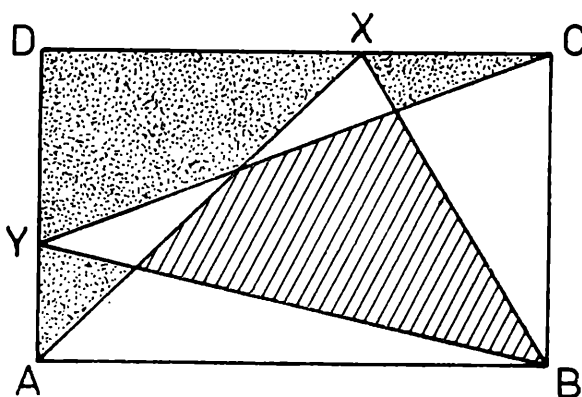
symbol z pásky, zapamatuje si ho a zapíše ho do levého sousedního pole. Kdykoliv si takto pamatuje symbol a , je ve stavu 3, kdykoliv si má pamatovat symbol b , je ve stavu 4.

Turingovy stroje můžeme používat i k práci s přirozenými čísly. Pro její usnadnění se často přirozené číslo n reprezentuje slovem $\overline{n}$ nad abecedou $\Sigma = \{a\}$, které je definováno induktivně takto: $\overline{0} = a$, $\overline{n+1} = \overline{na}$. Každou k -tici přirozených čísel $(n_1, \dots, n_k)$ reprezentujeme slovem $\overline{(n_1, \dots, n_k)} = \overline{n_1} * \overline{n_2} * \dots * \overline{n_k}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, *\}$. Například $(3, 1, 2) = aaaa * aa * aaa$. Poznamenejme, že jsou možné i jiné reprezentace.

Úlohy I. kola matematické olympiády pro základní školy (1990/91)

Kategorie Z8

1. Ve třídě je méně než 50 dětí. Chlapců je 72 % z počtu děvčat. Kolik dětí je ve třídě?
2. V obdélníku $ABCD$ jsme zvolili na straně CD bod X a na straně AD bod Y . Pak jsme sestrojili úsečky AX , BX , BY , a CY ; obr. 1. Zjistěte, co je větší: obsah vyšrafované části nebo součet obsahů vytečkovaných částí?



Obr. 1

3. Sečteme-li největší společný dělitel a nejmenší společný násobek dvou neznámých čísel, dostaneme výsledek 121. Která jsou to čísla? Určete všechny možnosti.
4. Narýsujte různoběžky a , b , které svírají úhel velikosti 45° . Najděte množinu všech bodů X , jejichž součet vzdáleností od přímk a , b se rovná 3 cm. Množinu narýsujte a dokažte, že každý bod narýsované množiny má uvedenou vlastnost.

5. Máme 10 kartiček a na každou napíšeme dvě čísla, jedno na jednu stranu, druhé na druhou stranu. Jsou to čísla

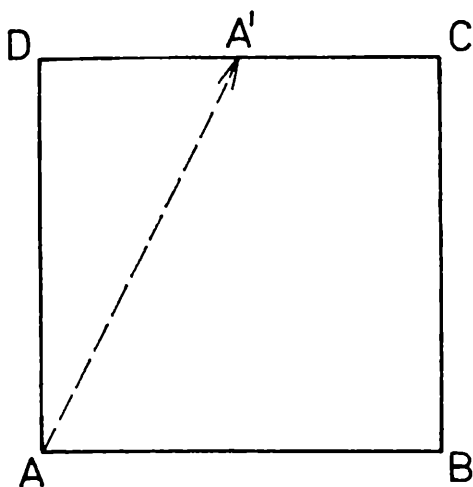
47 a 98	113 a 30	107 a 35	78 a 65	84 a 68
130 a 10	91 a 50	71 a 73	21 a 123	100 a 42.

Položte je na prázdná místa (obr. 2) tak, abyste dostali co nejmenší výsledek. (Sčítáme a odčítáme jen viditelná čísla. Přitom na pořadí prvních pěti ani na pořadí druhých pěti kartiček nezáleží.) Výsledek zdůvodněte.

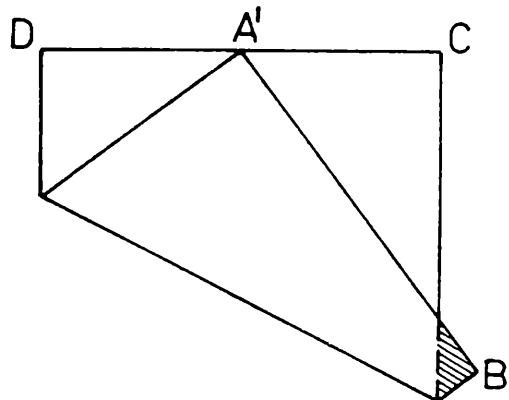
$$\square + \square + \square + \square + \square - \square - \square - \square - \square - \square =$$

Obr. 2

6. Čtverec $ABCD$ o straně 8 cm byl přeložen tak, že vrchol A se přemístil do středu strany CD ; obr. 3a, b. Zjistěte obsah vyšrafovaného trojúhelníku.



Obr. 3a



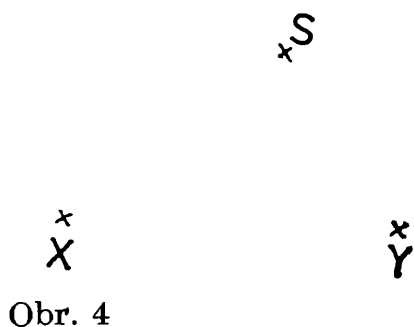
Obr. 3b

Kategorie Z7

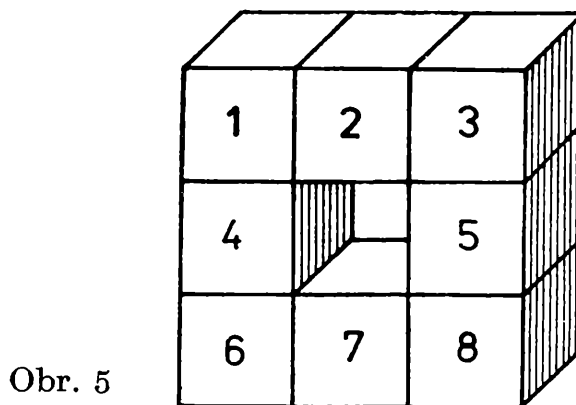
1. Délka hrany dané krychle je v centimetrech vyjádřena celým číslem. Její objem je v cm^3 šesticiferné číslo, které je násobkem 1008. Vypočítejte délku hrany této krychle.
2. Je dána kružnice k o středu S a poloměru r a bod C , který na ní neleží. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC s vrcholy A, B na kružnici k . Zjistěte, kdy má úloha 0, 1, 2, 3 a více řešení. Svě tvrzení odůvodněte.
3. Nahradte hvězdičky číslicemi tak, aby platilo naznačené násobení.

$$\begin{array}{r}
 * * \\
 * * \\
 \hline
 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 9 * * *
 \end{array}$$

4. Čtyři kamarádi mají kuličky. Každý z nich má o 34 kuliček více než je pětina kuliček, které mají ostatní dohromady. Kolik kuliček má každý z nich?
5. Jsou dány body X , Y , S (obr. 4). Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod X ležel na přímce AB , bod Y na přímce BC a S byl střed čtverce.



Obr. 4



Obr. 5

6. Anička pěstovala 6 různých pokojových květin. Věděla, že květiny je třeba občas pohnojit. Jednotlivé květiny potřebovaly tyto dávky hnojiva: 1 dl, 2 dl, 3 dl, 4 dl, 5 dl a 6 dl. Anička si připravila 21 dl hnojiva do větší nádoby. Kromě ní měla dvě odměrky; jednu na 5 dl a druhou na 12 dl. Jak pomocí těchto odměrek může rozdělit jednotlivým květinám potřebné množství hnojiva? (Značky na nádoby se nedají udělat.)

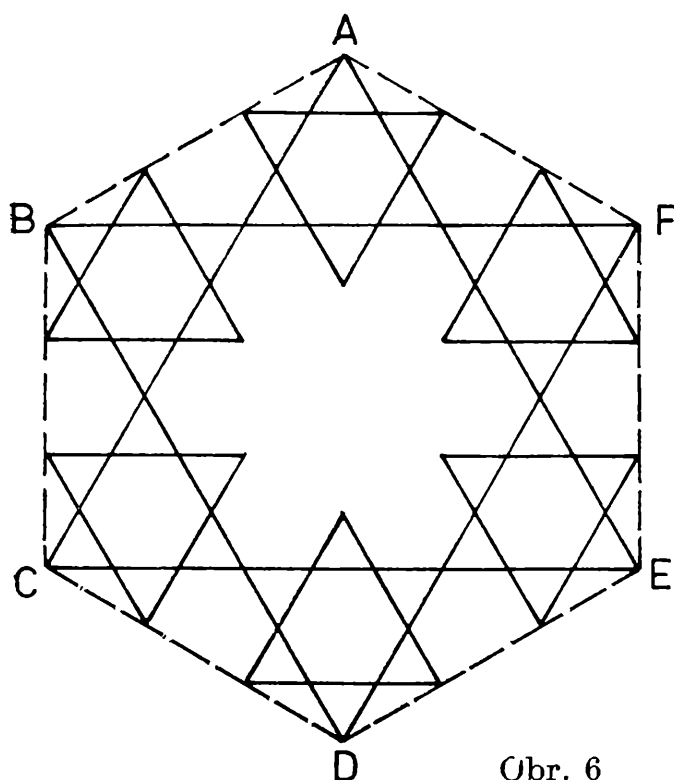
Kategorie Z6

1. Na obr. 5 je znázorněno těleso složené z osmi krychlí o hraně 1 cm. Kolik čtverců o straně 1 cm tvoří povrch tohoto tělesa? Jaký je nejmenší počet barev, kterými lze obarvit tyto čtverce tak, aby žádné dva, které mají společnou stranu, nebyli obarveny stejnou barvou? Způsob obarvení popište nebo nakreslete.
2. Hvězdičky nahradte číslicemi tak, aby platilo naznačené násobení.

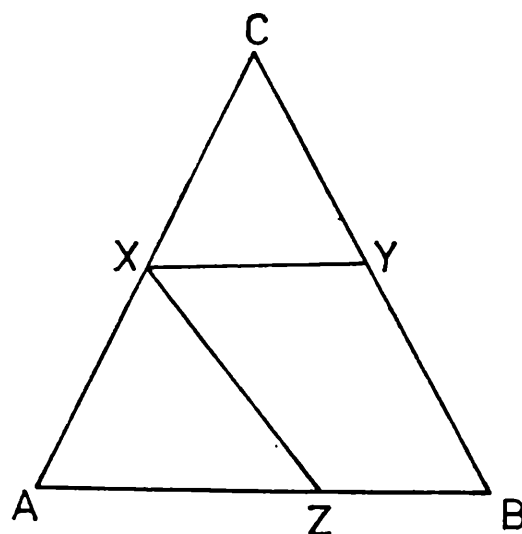
$$\begin{array}{r}
 * * \\
 * * \\
 \hline
 * 6 * \\
 * 8 * \\
 \hline
 2052
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 * * \\
 * * \\
 \hline
 * 5 * \\
 * 8 * \\
 \hline
 2052
 \end{array}$$

- Jsou dány 3 body X, D, S . Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby bod S byl jeho střed a aby bod X ležel na přímce AB .
- Čtyři kamarádi mají dohromady 206 kuliček. Každý z nich (kromě nejmladšího) má o 5 kuliček více, než je polovina kuliček, které mají dohromady jeho mladší kamarádi. Kolik kuliček má každý z nich?
- Z lesklé hliníkové folie tvaru pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ byla vystřízena vánoční ozdoba, kterou tvoří 6 pravidelných hvězd, obr. 6. Narýsujte ozdobu, která vznikne ze šestiúhelníku o straně $a = 6$ cm. Rýsujte co nejpřesněji. Vyjádřete zlomkem velikost odpadu.



Obr. 6



Obr. 7

- V trojúhelníku ABC (obr. 7) platí:

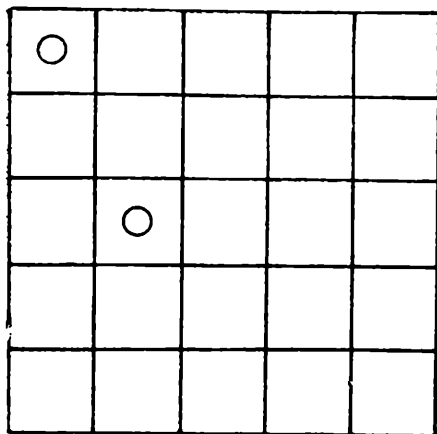
$$|\angle ZBY| = 61^\circ, \quad |\angle XCY| = 55^\circ, \quad |\angle ZXY| = 53^\circ$$

Dále je $AZ \cong ZX$. Zjistěte, zda jsou dvojice přímek AB, XY nebo dvojice BC, XZ rovnoběžné.

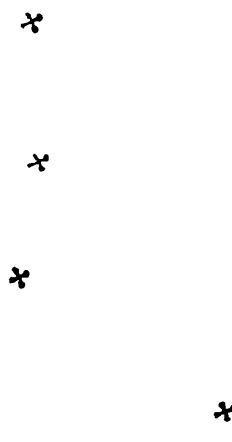
Podobně jako v předešlých letech mohou učitelé na školách organizovat matematickou soutěž i pro zájemce z 5. ročníků.

Úkoly pro 5. ročník

- Na šachovnici 5×5 jsou položeny dvě figurky (obr. 8). Na šachovnici budeme klást další figurky, ale tak, aby žádné dvě figurky nestály na sousedních polích (tj. polích se společnou stranou). V kladení figur



Obr. 8



Obr. 9

pokračujeme tak dlouho, dokud je možné umístit další figurku. Kolik nejméně a kolik nejvíce může být figur na šachovnici?

2. Nahradte hvězdičky číslicemi tak, aby platilo naznačené násobení.

$$\begin{array}{r}
 * * \\
 . * 7 \\
 \hline
 2 2 * \\
 * * * \\
 \hline
 * * 2 *
 \end{array}$$

3. Kterých trojciferných čísel je více? Těch, které při dělení 7 dávají zbytek 3, nebo těch, které dávají při dělení 7 zbytek 6? O kolik?
4. Na obr. 9 je 5 bodů. Podle toho, jak je spojíme, dostaneme různé pětiúhelníky. Najděte aspoň 8 řešení. Může mít úloha 10 řešení?
5. Čtyři chlapci mají spolu 157 kuliček. Každý z nich — kromě nejmladšího — má o 5 kuliček méně než mají jeho mladší kamarádi dohromady. Kolik kuliček má každý chlapec?
6. Jsou dány čtyři body X , Y , S , T ; obr. 10. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , jestliže víte, že body X , Y leží na přímce BC , bod S leží na přímce AC , bod T leží na přímce AB a délka strany BC je 4 cm.



Obr. 10

Kalendár M - F: jún 1990

4. 6. 1615 v Prahe zomrel *Vavrinec Benedikti z Nedožier*, slovenský humanista, pedagóg a školský reformátor. Bol profesorom matematiky a klasickej filológie na pražskej univerzite. Napísal Základy aritmetiky, bol autorom prvej gramatiky českého jazyka.
4. 6. 1925 zomrel *Nicolas Camille Flammarion*, francúzsky astronóm. Založil Francúzsku astronomickú spoločnosť (1887), vydal hviezdny atlas, popularizoval astronomické poznatky.
5. 6. 1900 sa v Budapešti narodil *Dennis Gabor*, anglický fyzik maďarského pôvodu. Zaoberal sa elektrónovou mikroskopiou, katódovými lúčmi, výbojmi v plynch. Za objav holografie — priestorovej fotografie získal Nobelovu cenu (1971).
6. 6. 1850 sa vo Fulde narodil *Karl Ferdinand Braun*, nemecký fyzik. Vytvoril kryštálový detektor, trubicu s katódovými lúčmi. Za zásluhy v rozvoji bezdrôtovej telegrafie dostal spolu s Marconim Nobelovu cenu (1909).
8. 6. 1625 sa narodil *Giovanni Domenici Cassini*, francúzsky astronóm talianskeho pôvodu. Objavil rotáciu planét, rozdelenie Saturnovho prstenca a jeho štyri mesiace.
8. 6. 1745 sa v Jonsrude (Nórsko) narodil *Caspar Wessel*, dánsky matematik. Prispel k teórii vektorov a geometrickej predstave komplexných čísel.
8. 6. 1925 sa v dedinke Petro-Chersonec narodil *Gurij Ivanovič Marčuk*, sovietsky matematik a fyzik. Aplikoval numerické metódy pri výpočtoch parametrov jadrových reaktorov, modeloval ďalšie fyzikálne procesy.
9. 6. 1885 sa v Rochestri narodil *John Edensor Littlewood*, anglický matematik. Prispel k rozvoju teórie čísel, teórie funkcií komplexnej premennej a teórii nerovností.
12. 6. 1900 zomrel *Jean Frédéric Frénet*, francúzsky matematik. Zaoberal sa diferenciálnou geometriou a matematickou analýzou.
13. 6. 1815 sa narodil *Osip Ivanovič Somov*, ruský matematik a mechanik. Aplikoval eliptické funkcie v mechanike, využil vektorový počet v mechanike.
18. 6. 1980 vo Varšave zomrel *Kazimierz Kuratowski*, poľský matematik. Prispel k rozvoju deskriptívnej teórie množín a topológie.
19. 6. 1945 zomrel *Stefan Mazurkiewicz*, poľský matematik. Pracoval v oblasti matematickej analýzy, topológie a teórie pravdepodobnosti. Prispel k rozvoju matematického vzdelania v Poľsku.
21. 6. 1820 zomrel *Alexis Thérèse Petit*, francúzsky fyzik a chemik. Rozpracoval metódy na zisťovanie tepelnej rozťažnosti a merného tepla tuhých látok.

22. 6. 1925 v Göttingene zomrel *Felix Klein*, nemecký matematik. Prispel k rozvoju teórie funkcií, neeuklidovskej geometrie, teórie transformácií, teórie algebraických rovníc i teórie spojitých grúp.
24. 6. 1880 sa v Dekore (Iowa) narodil *Oswald Veblen*, americký matematik. Rozpracoval projektívnu i diferenciálnu geometriu a topológiu.
24. 6. 1915 sa narodil *Fred Hoyle*, anglický astrofyzik. Aplikoval všeobecnú teóriu relativity v kozmológii, vytvoril teóriu vzniku prvkov vo hviezdach.
24. 6. 1980 v Prahe zomrel *Vladimír Guth*, český astronóm. Študoval meteóry, kométy, zákryty hviezd. Bol členom Medzinárodnej astronomickej únie.
25. 6. 1825 v Košiciach zomrel *Matej Daniel Kmeth*, slovenský astronóm. Robil astronomické pozorovania a výpočty v Budíne, popularizoval astronomické poznatky.
25. 6. 1940 zomrel *Dmitrij Sergejevič Roždestvenskij*, sovietsky fyzik. Rozpracoval nové metódy experimentálnej optiky i atómovej fyziky.
25. 6. 1960 zomrel *Walter Baade*, americký astronóm nemeckého pôvodu. Určoval vzdialenosti kozmických objektov, objavil hviezdne populácie.
26. 6. 1675 v Edinburku zomrel *James Gregory*, škótsky matematik. Poznal idey diferenciálneho a integrálneho počtu, vedel rozvinúť mnohé funkcie do mocninného radu.
26. 6. 1885 sa v Prahe narodil *František Kadeřávek*, český matematik. Študoval teóriu kriviek a špeciálnych plôch, aplikoval geometriu v technickej praxi.
27. 6. 1880 zomrel *Karl Wilhelm Borchardt*, nemecký matematik. Pracoval v oblasti matematickej analýzy i algebry.
28. 6. 1875 sa v Beauvais narodil *Henri Léon Lebesgue*, francúzsky matematik. Rozvinul Borelovu teóriu miery, prispel k rozvoju klasickej teórie potenciálu i topológie. Svojou teóriou integrovania podporil funkcionálnu analýzu.
30. 6. 1660 zomrel *William Oughtred*, anglický matematik. Zaviedol znak $\times$ pre násobenie, využil logaritmickú stupnicu pre konštrukciu logaritmického pravítka.
30. 6. 1900 sa narodil *Gheorghe Vranceanu*, rumunský matematik. Rozvinul abstraktnú diferenciálnu geometriu.
30. 6. 1975 zomrel *Miron Nicolescu*, rumunský matematik. Zaoberal sa funkcionálnou analýzou a teóriou diferenciálnych rovníc.
30. 6. 1980 zomrel *Naum Iljič Achiezer*, sovietsky matematik. Prispel k rozvoju približných a numerických metód i variačného počtu.

Júl 1990

3. 7. 1915 sa v Kluži (Rumunsko) narodil *Anton Huta*, slovenský matematik. Vedecky pracoval v oblasti numerického riešenia diferenciálnych rovníc a matematickej štatistiky.
4. 7. 1965 zomrel *Alexandru Myller*, rumunský matematik. Zaoberal sa diferenciálnou geometriou, rozvinul teóriu kontravariantných vektorov.
5. 7. 1925 zomrel *Otto Lummer*, nemecký fyzik. Urobil dôležité merania rozdelenia energie v spektre absolútne čierneho telesa. Prispel k zostrojeniu nového typu fotometra.
8. 7. 1695 v Haagu zomrel *Christian Huygens*, holandský fyzik a matematik. Položil základy vlnovej teórie svetla, rozvinul teóriu kyvadla, zdokonalil ďalekohľad.
8. 7. 1895 zomrel *Joseph Loschmidt*, rakúsky fyzik. Vedecky pracoval v oblasti kinetickej teórie plynov.
8. 7. 1895 sa vo Vladivostoku narodil *Igor Jevgenievič Tamm*, sovietsky fyzik. Vypracoval kvantovú teóriu rozptylu svetla v pevných látkach. Za podiel na vysvetlení Čerenkovovho javu získal Nobelovu cenu (1958).
10. 7. 1910 zomrel *Johann Gottfried Galle*, nemecký astronóm. Podľa Le Verrierových výpočtov objavil planétu Neptún.
10. 7. 1920 sa v San Francisku narodil *Owen Chamberlain*, americký fyzik. Pracoval v oblasti fyziky vysokých energií. Za objav antiprotonu získal spolu s E. Segrém Nobelovu cenu (1959).
14. 7. 1980 zomrel *Felix Alexandrovič Berezin*, sovietsky matematik. Pracoval v oblasti funkcionálnej analýzy, algebry a matematickej fyziky.
14. 7. 1960 zomrel *Maurice de Broglie*, francúzsky fyzik. Pracoval v röntgenovej spektroskopii, atómovej a jadrovej fyzike.
16. 7. 1855 sa narodil *Hans Friedrich Geitel*, nemecký fyzik. Spolu s J. Elsterom skonštruoval fotónku (1983).
17. 7. 1860 sa v Gere narodil *Otto Richard Lummer*, nemecký fyzik. Zaoberal sa experimentálnou optikou, spektroskopiou, výskumom žiarenia.
17. 7. 1885 sa v Tarvaste (Estonsko) narodil *Ivan Jakovlevič Depman*, sovietsky pedagóg a historik matematiky. Zaoberal sa metodikou vyučovania a dejinami matematiky.
17. 7. 1980 v Moskve zomrel *Boris Nikolajevič Delone*, sovietsky matematik. Vedecky pracoval na pomedzí algebry, geometrie a teórie čísel.
18. 7. 1635 sa vo Freshwateri (ostrov Wight, Anglicko) narodil *Robert Hooke*, anglický prírodovedec a fyzik. Spoznal zákon o deformácii

- telies, podnietil rozvoj merania teplôt, dôkladne študoval farby tenkých vrstiev. Vynašiel a zdokonalil mnohé fyzikálne prístroje.
21. 7. 1810 sa narodil *Henri Victor Regnault*, francúzsky fyzik a chemik. Určil mechanický ekvivalent tepla, vytvoril tabuľky rozpínavosti ortuti a plynov.
21. 7. 1880 sa v Košariskách (okres Senica) narodil *Milan Rastislav Štefánik*, slovenský astronóm a politik. Rozvíjal a uplatňoval pozitívne smery astrofyziky, podnikol niekoľko vysokohorských výprav za zatmením Slnka.
22. 7. 1795 sa v Tours narodil *Gabriel Lamé*, francúzsky matematik a inžinier. Uplatnil sa v matematickej fyzike a teórii pružnosti.
22. 7. 1950 zomrel *Vjačeslav Vasilievič Stepanov*, sovietsky matematik. Rozvinul teóriu riešenia diferenciálnych rovníc a jej uplatnenie pre úlohy mechaniky.
26. 7. 1925 v Bad Kleinen zomrel *Friedrich Ludwig Gottlob Frege*, nemecký matematik a logik. Predložil systém formalizovanej aritmetiky, položil základy logickej sémantiky.
28. 7. 1715 v Brne zomrel *Jakub Kresa*, český matematik. Medzi prvými začal vyjadrovať vzťahy medzi goniometrickými funkciami pomocou algebraických výrazov. Ovládal 11 jazykov, prednášal v Olomouci, Prahe i Madride. Získal prezývku Euklid Západu.
28. 7. 1915 sa v Greenville (USA) narodil *Charles Hard Townes*, americký fyzik. Skonštruoval prvý maser i laser. Za práce v oblasti kvantovej elektroniky získal Nobelovu cenu (1964) spolu s N. G. Basovom a M. A. Prochorovom.

Z NOVÝCH KNIH

Petr Vopěnka :

Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín

Vydala Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava 1989, 1. vydání, 200 výt., váz., 36,— Kčs.

Teorii množín objavil pražský matematik *Bernard Bolzano* (1781 až 1848) a zároveň vypracoval její počáteční pojetí. Německý mate-

matik *Georg Cantor* (1845—1918) si potom vybral jednu z cest, z nichž Bolzano otevřel přinejmenším dvě. Dále se již vyvíjela jen Cantorova teorie množín.

Autor knížky se v roce 1973 rozhodl vybudovat alternativní teorii množín. Nedošlo však jen k rozvíjení druhé z cest otevřených v Bolzanově prvopojetí. Alternativní teorie se v důležitých výkladech rozchází i s Bolzanovým počátečním pojetím.

Pro svůj záměr získal prof. dr. Petr Vopěnka, DrSc., spolupracovníky mezi svými kolegy a studenty. S pražským seminářem začali spolupracovat i bratislavští kolegové a díky jim vychází tato knížka ve slovenštině dříve než v češtině. Podotkněme ještě, že stručný Vopěnkův nástin matematiky v alternativní teorii množin vydalo anglicky nakladatelství Teubner v Lipsku v roce 1979

a jeho překlad v ruštině nakladatelství Mir v Moskvě v roce 1983.

Kniha je určena široké matematické veřejnosti. Podnětné myšlenky zde naleznou také čtenáři, kteří se zajímají o filozofické a světonázorové problémy matematiky.

O osobnosti prof. dr. Petra Vopěnky, DrSc., si můžete přečíst článek v květnovém čísle Rozhledů.

Jiří Mída

Vícejazyčné odborné slovníky vydavatelství ALFA

Studujete-li cizojazyčnou matematickou, fyzikální nebo technickou literaturu, pak s běžnými slovníky nevystačíte, odborné termíny v nich prostě chybí. Bratislavské technické a ekonomické vydavatelství Alfa ve spolupráci s VEB Verlag Technik v Berlíně obohatilo náš knižní trh edicí, v níž byly vydány anglicko-německo-francouzsko-rusko-slovenské slovníky specializované na matematiku, zpracování informací, mikroprocesorové systémy, robotiku, jadernou techniku a další technické obory. Poslední vydaný slovník se jmenuje *Subjadrová fyzika* a zpracoval jej *Ralf Sube* s autorským kolektivem.

Slovníky jsou určeny vědeckým a technickým pracovníkům ve výzkumu, vývoji a praxi, dokumentaristům, překladatelům a studentům vysokých škol. Užitečné mohou být samozřejmě i středoškolákům, zvláště těm, kteří se účastní SOČ.

Vydavatelství Alfa těmito slovníky zpřístupňuje cizojazyčnou literaturu a přispívá i k rozvoji slovenské terminologie v příslušných oborech.

-jm-

Upozornění přispěvatelům a čtenářům

Od 1. 6. 1990 má redakce Rozhledů m.—f. novou adresu:

MFF UK, doc. Kadleček
Sokolovská 83
186 00 Praha 8

HUMORY MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ

Referát o fyzikální přednášce

(Podle Stephena Leacocka)

Vzdělávací spolek v jednom okresním městě na americkém Západě mě pozval, abych přednesl přednášku o úspěších moderní fyziky. Po přednášce za mnou přišel reportér místního listu.

„Nevadilo by vám,“ řekl, „zopakovat mi jenom hlavní body své řeči? Nedostal jsem se k tomu, abych ji slyšel.“ „Vy jste na té přednášce nebyl?“ „Ne,“ odpověděl a odmlčel se, aby si zašpičatil tužku, „byl jsem na hokeji.“ „Abyste o něm referoval?“ „Ne, o takových věcech já nepíšu. Mám na starosti jenom přednášky a takové ty inteligentní pindy. Ten hokej byl ale ohromnej. O čem jste říkal, že byla ta přednáška?“ „Dal jsem jí název Triumfální pokrok fyziky.“ „Fyziky, jo?“ řekl a rychle přitom psal. „Jak píšete fyzika, píšete tam zet nebo es?“ zeptal se. Řekl jsem mu, jak to píšu já. „A teďka,“ pokračoval, „jakou měla základní myšlenku, jen to hlavní, víte, ta vaše přednáška?“ „Říkal jsem, jak se prohlubují naše vědomosti o radiaci a emanaci a jaké to vrhá světlo na teorii atomické struktury.“ „Moment, než si to napíšu. Vrhá to světlo, jo? Dobrá, už to mám.“

Chystal se sklapnout blok. „Byl jste u nás už někdy dřív?“ „Ne,“ řekl jsem, „jsem tady poprvé.“ „Viděl jste ta velká nová jatka, co právě stavějí?“ „Ne,“ řekl jsem, „o těch jsem neslyšel.“ „Říká se, že si na té stavbě radní namastili kapsu. Co si o tom myslíte?“ „Nic o tom nevím,“ odpověděl jsem. „No dobrá,“ poznamenal, „třeba nevíte, ale nezdá se vám, že by radní mohli být nepoctiví?“ „Někdy se to stává,“ připustil jsem, „dokonce je to dost často banda šejdířů.“ „Jakže to říkáte, banda šejdířů? To je dobré, to je senzační!“ přímo se rozplýval nadšením, „tak vám teda mockrát děkuju.“

Druhý den jsem si přečetl v místních novinách článek s tučným titulkem: „POKLÁDÁ MĚSTSKÉ RADNÍ ZA BANDU ŠEJDÍŘŮ“ Psalo se v něm: „Náš význačný host pohovořil zajímavě o městském fyzikátu v posluchárně vzdělávacího spolku před naplněným hledištěm. Prohlásil, že žijeme ve věku rádia a že městští radní jsou podle něho banda šejdířů. Velice zevrubně rozebral anatomickou strukturu, o které řekl, že vrhá světlo na emancipaci. Vyjádřil politování, že nemůže rozvést otázku úplatků při stavbě nových jatek, která pokládá za nejlepší, jaká kdy viděl při svých přednáškách. Přednáška, přerušovaná hojným potleskem, byla sledována s napjatou pozorností.“

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 30,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 3,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, s. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, gen. Píky 26, 160 00 Praha 6.

Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.

Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1990

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SFM Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

ADRESA REDAKCE:

M. D. Rettigové 4,
116 39 Praha 1 - Nové Město
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

REDAKČNÍ KRUH:

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topoľčany; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlln, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ ČSAV Praha; prof. dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 68, 1989-90

VEDOUcí REDAKTOR: Doc. ing. Ivan ŠTOLL, ČVUT Praha

ODBORNÝ REDAKTOR: Doc. dr. Jiří Mída. CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA: Doc. dr. Emil Calda, CSc., UK Praha; doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVT — ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKČNÍ KRUH: Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topoľčany; doc. dr. Stanislav Jendroň, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; prof. dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

**Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR
ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné
péče Jednoty československých matematiků a fyziků**

OBSAH

Úvodní články

Bartošek Miroslav: Pozvání do historie	385
Drábek Karel: Nezapomeneme na 17. listopad 1939	97
Granát Luděk: Co je počítačová grafika	241
Grün Marcel: Quo vadis, kosmonautiko?	337
Chrapan Ján: K 45. výročiu Karpatsko-Dukelskej operácie	1
Jedinák Dušan: O matematike a matematikoch	145
Kraemer Emil: Za docentem Otou Setzerem	193
Mída Jiří: Tip na prázdniny — putování za technickými památkami	433
Štoll Ivan: O takzvaných sporných jevech	49
Studená jaderná syntéza	194
O náhodě, která přeje připraveným	289

Matematika:

Calda Emil: Guldinovo pravidlo pro objem rotačního tělesa	11
Svítil nebo nesvítil?	246
Drs Ladislav: Nejkratší cesta kolem hory	54
Granát Luděk: Počítačová grafika — zobrazování oblouku kružnice	305
Planimetrické konstrukce v aplikacích počítačové grafiky	342
Užití orientovaných přímek v aplikacích počítačové grafiky	388
Užití orientovaných kružnic v aplikacích počítačové grafiky	438
Habart Karol: Kde se vzali?	148
Hora Jaroslav: Eisensteinovo kritérium ireducibility	434
Husová Helena: Matematická podstata genetických zákonitostí	199
Pravděpodobnostní výpočty v rodokmenových metodách	295
Statistické testování genetických hypotéz	346
Mída Jiří: Lagrangeův interpolační polynom	9

O Eulerově přímce	154
O trojúhelníku skoro „bermudském“	436
Šidák Zbyněk: Soutěž o královnu krásy a teorie uspořádání	298
Švrček Jaroslav: Cévova a Van Aubelova věta	99

Fyzika

Höschl Cyril: Regulace osvětlení měřicích přístrojů	249
Chrapan Ján: Jadrová energetika a životné prostredie	205
Kašpar Emil: „Tajemný“ pohyb čarodějného proutku ve světle fyziky a matematiky I., II.	15, 57
Machalický Jiří: O Brownově pohybu	156
Patrovský Věnceslav: Komentář k poznámce RNDr. L. Pekárka, DrSc.	66
Pekárek Luděk: Poznámka k článkům ing. V. Patrovského, CSc.	63
Pospíšil Jaroslav: Paprskové optické zobrazení rovinnými zrcadly	313
Geometrické konstrukce obrazových světelných paprsků u kulových čoček	350
Rojko Milan: Vously pevnější než ocel	103
Wilfert Otakar, Vodilová Alena: História vzniku laseru a jeho použitie pri výučbe fyziky — 1, 2	394, 443

Z dějin exaktních věd

Chmelař Martin: Historie a současnost budovy Fyzikálního ústavu UK v Praze	20
Chrapan Ján: Aurel Stodola — otec parných turbín	68
iš: O Čeňku Strouhalovi	360
Jedinák Dušan: Opojenie z poznania — Táles z Milétu	110
Viktor Jakovlevič Buňakovskij (1804—1889)	165
Muž vedy a činu — Pytagoras zo Samu	212
Uctievač geometrie — Euklides	253
Kolomý Rudolf: K prvním ohlasům na Röntgenův objev	455
Kopka Jan: Několik vět o Petru Vopěnkovi	403
Kotyk Josef: Akademik Bohumil Bydžovský	317
Kraus Ivo: O školních a studentských letech Maxe von Laueho	355
Zajac Rudolf: 120 rokov periodickej sústavy prvkov	319

Z matematiky a fyziky ZŠ

Rubriku obsahovalo každé číslo. Autorsky do ní přispěli: Eva Blažková, Emil Kraemer, Luděk Machát, Jiří Mída, Jana Mídová, Milan Rojko, Josef Trejbal

Přemýšlíme, řešíme . . .

Rubriku obsahovalo každé číslo. Autorsky do ní přispěli: Milan Bednařík, Emil Calda, Karel Horák, Jiří Mann, Jiří Mída, Věnceslav Patrovský, Eva Pešková, Jindřich Pěnčík, Alois J. Rychlík, Tomáš Schütz

Naše soutěž

Výsledky loňské soutěže Rozhledů	85
Řešení úloh minulého ročníku	128, 182, 233, 275, 330, 371, 384, 419
Úlohy k řešení	86, 132

Olympiády a SOČ

MO	32, 89, 135, 186, 237, 422, 464, 467
FO	35, 94, 279
SOČ	
Novotný Petr: Srovnání slovních procesorů z hlediska psaní češtiny se slovním procesorem ChiWriter	137
Šidák Zbyněk, Šidák Ondřej: Variabilita sportovních soutěží	374

Informace

Töpfer Pavel: KSP po dvou letech	47
Korespondenční semináře MFF UK v Praze	96
Calda Emil: Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v roce 1989	285

Kalendár M — F (Připravil Dušan Jedinák)

42, 93, 142, 189, 239, 282, 333, 381, 432, 472

Z nových knih 46, 95, 192, 287, 335, 383, 430, 475

Humory matematicko-fyzikální (Připravili Milan Bednařík, Ivan Štoll a Ivo Volf.) 3. str. všech obálek