ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(1)

ROČNÍK 67, 1988/89
ZÁŘÍ
CENA 2 Kčs

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Milí čtenáři! 1

Ivan Štoll: Vůně fyziky 1

Emil Calda: Množiny bodů v rovině a jejich grafické znázornění 5

Pavel Pech: O Petrově větě 9

Ladislav Drs: Geometrické a malířské zobrazení 15

Eva Veselá: Stačí chtít 18

Eva Bittnerová: Fyzika v prírode – čo môže stať turistu kilojoule 20

František Jáchim: Před 30 lety zemřel Fréderik Joliot-Curie . 24

Z matematiky a fyziky ZŠ . 28

Přemýšlíme, řešíme 31

Olympiády a SOČ . 32

Informace 39

Kalendár M–F 40

Z nových knih 43

Humory matematicko-fyzikální 3. str. obálky

Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (109–112) příloha

Milí čtenáři!

Dostáváte do rukou první číslo nového, již 67. ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních. Jen málokterý populárně vědecký časopis určený především mládeži se může pochlubit tak dlouhou tradicí.

Matematika a fyzika se neustále rozvíjejí, přinášejí nové objevy a jsou základem vědeckotechnické revoluce, kterou dnes prožíváme. Ovládnout tyto vzrušující poznatky, porozumět světu kolem sebe znamená naučit se používat matematiku a výpočetní techniku, pochopit základní fyzikální zákony a jejich uplatnění, seznámit se s historií a perspektivami těchto věd. Řešení matematických a fyzikálních úloh, samostatná práce při středoškolské odborné činnosti rozvíjejí naše logické myšlení, učí nás lépe chápat přírodu a přinášejí radost a uspokojení.

Chtěli bychom vám, studentům gymnázií, ale i středních odborných škol a učilišť (a od letošního ročníku také žákům základních škol s rozšířeným vyučováním matematice a přírodovědným předmětům) při tom pomáhat, radit, seznamovat vás s novými zajímavými zprávami, problémy, nápady. Rádi bychom se dozvídali i vaše názory a zkušenosti ze studia matematiky a fyziky, vaše návrhy a připomínky k obsahu a zaměření Rozhledů.

Od letošního ročníku dochází ke změnám v redakční radě a redakčním kruhu našeho časopisu, chtěli bychom postupně zvýšit jeho náklad a zdokonalovat jeho obsah i podobu. Nejvíc nám však záleží na tom, aby se Rozhledy pravidelně dostávaly k vám, ke svým čtenářům, a nacházely u nich odezvu.

Redakce

Vůně fyziky

Doc. Ing. IVAN ŠTOLL, CSc., ČVUT Praha

Bylo to v roce 1947, když angličtí fyzikové *Clifford Charles Butler* a *Georges Dickson Rochester* z universizy v Manchesteru objevili při studiu kosmického záření nové, neznámé částice. Používali přitom Wilsonovu mlžnou komoru, která umožňuje zviditelnit dráhy nabitých částic v podobě sledů nepatrných vodních kapiček. Elektricky nenabité částice stopy nezanechávají, ale v případě, že se rozpadají například na dvojici kladně a záporně nabitých částic, je možno o nich soudit právě podle stop těchto produktů rozpadu.

V mlžné komoře byly patrné stopy *záporných kosmických pionů* (mezonů π), které náhle končily; v určité vzdálenosti od tohoto místa se pak objevovaly charakteristické vidlice, jako by se zde rozdvojovaly dráhy nějakých neviditelných částic. Takový obrázek bylo možno rozšifrovat následujícím způsobem. Dopadající pion se sráží s protonem tvořícím jádro atomu vodíku, po srážce vznikají neviditelné, elektricky neutrální částice a ty se pak opět rozpadají na dvojice nabitých částic. Objevitelé nazvali neznámé neutrální částice podle charakteristických vidlic částicemi V.

Zkoumání těchto nových částic, jejichž objev byl zcela neočekávaný, pokračovalo až do poloviny padesátých let, a to jak v kosmickém záření, tak i pomocí velkých urychlovačů. Zjistilo se, že tyto částice mohou být jak neutrální, tak i nabité a že jsou dvojího druhu. Jedny mají hmotnost rovnou přibližně polovině hmotnosti protonu a dostaly název *kaony* (mezony K), druhé mají hmotnost o něco větší než proton a ty dostaly název *hyperony*. Přitom však vyšly najevo podivné věci. Především se ukázalo, že tyto částice vznikají vždy v párech — s každým kaonem vzniká vždy také hyperon. Při průchodu kosmického záření látkou vznikají tyto částice velmi ochotně a rychle. Charakteristická doba jejich vzniku při srážkách pionů a nukleonů (protonů nebo neutronů) je 10^{-23} sekundy, a to odpovídá procesům, na nichž se účastní silné jaderné síly. Naproti tomu mají kaony a hyperony dobu života 10^{-8} až 10^{-10} sekundy a žijí tedy, samozřejmě vzhledem k životnímu tempu v mikrosvětě, poměrně dlouho. Jejich rozpad je mnohem váhavější než jejich vznik a je způsoben slabými silami, které vyvolávají například radioaktivní rozpad beta.

Kdybychom měli vysvětlit, proč se kaony a hyperony rodí vždy společně, napadne nás jistě analogie s elektricky nabitými částicemi. Má-li se neutrální částice rozpadnout na nabité, musí vznikat vždy dvojice kladných a záporných částic, aby celkový elektrický náboj zůstával nulový. Tak se molekula nebo atom může rozdělit na kladný a záporný iont, z fotonu o vysoké energii může vzniknout elektron — pozitronový pár. Proto se elektron nemůže rozpadnout na dva fotony a zůstává stabilní — brání tomu mimo jiné zákon zachování elektrického náboje.

Zdá se tedy, že i nové podivné částice mají nějakou vlastnost podobnou náboji, pro niž platí zákon zachování. *Murray Gell-Mann* a *Katsuhiko Nishijima* nazvali tuto vlastnost *podivností* a vysvětlili tak záhadné chování kaonů a hyperonů. Vznikají-li při srážkách obyčejných, „nepodivných" částic částice podivné, musí vzniknout vždy jedna částice s kladnou podivností (kaon) a jedna částice se zápornou podivností (hyperon), aby celková podivnost soustavy zůstala nulová.

Když se později zrodila *hypotéza kvarků*, podle níž jsou všechny částice podrobené silným jaderným silám (nazývané *hadrony*) složeny ze základnějších komponent, nabyla i podivnost svého nového významu a po-

tvrzení. Hadrony dělíme na *mezony* a *baryony*, k baryonům pak počítáme *nukleony* a *hyperony*. Během času se podařilo objevit několik stovek hadronů, situace se stávala nepřehlednou a představa o tom, že hmota je vybudována z tolika druhů cihel, se stávala absurdní. Ukázalo se však, že všechny tyto částice je možno složit jako ze stavebnie z několika málo složek nazvaných kvarky.

Kvarky mají elektrický náboj rovný — 1/3 nebo 2/3 elementárního náboje e, vyskytují se ve třech „*barvách*" (žluté, červené a modré) a rozlišujeme je též podle „*vůně*" na kvark horní, dolní a podivný (označované písmeny u, d a s). Existují k nim ovšem i antikvarky s opačným znaménekm elektrického náboje a podivnosti a v doplňkových barvách. Přitom považujeme mezony za složené vždy z jednoho kvarku a jednoho antikvarku, baryony vždy ze tří kvarků nebo antikvarků. Mezon φ složený z *podivného kvarku* a jeho antikvarku má pak podivnost nulovou a nazýváme jej mezon se *skrytou podivností*.

Na tom však není dosti. V roce 1974 objevili nezávisle na sobě *Samuel Ting* a *Burton Richter* novou částici označenou jako J/ψ a bylo pro ni nutno zavést další kvark s novou vůní, která byla nazvána *půvabem* a označena písmenem c. Částice J/ψ se ukázala být mezonem se *skrytým půvabem* a brzy byla objevena celá řada půvabných mezonů a baryonů. V roce 1977 *L. Lederman* z Fermiho národní laboratoře ve Spojených státech amerických oznámil objev mezonu ypsilon (kvark b). Je tvořen takzvaným *krásným kvarkem* a jeho antikvarkem a představuje tak mezon se *skrytou krásou*. Nové částice se *zjevnou krásou* na sebe nedaly čekat. A konečně roku 1984 proskočily první zprávy, že bude třeba zavést ještě šestou vůni kvarku zvanou *pravdivost* (kvark t).

V současné době si představujeme, že hmota je složena z 36 kvarků a antikvarků) v šesti vůních, třech barvách a dvou znaménkách elektrického náboje), 12 leptonů a antileptonů (sem patří lehké částice elektron, mion, tauon, jejich neutrina a antičástice) a konečně z několika částic, které zprostředkují vzájemné silové působení. Jsou to *foton* (elektromagnetické působení), tři intermediální *bosony* (slabé síly), 8 *gluonů*, které drží pohromadě kvarky v hadronech a přenášejí jako motýlci barvu z kvarku na kvark. Celkem činí tedy tato inventura 60 základních částic, což se sice může zdát mnoho, ale přesto v nich panuje mnohem větší pořádek a symetrie, než v předkvarkové éře. Těžko říci, jaké nové částice budou ještě objeveny, fyzikové očekávají například objev *gravitonu* (zprostředkujícího gravitační síly), částice s magnetickým nábojem a některé jiné.

Takové stručné shrnutí dnešní představy o stavbě hmoty může budit smíšené pocity. Na jedné straně lze vytušit, že tyto poznatky jsou výsledkem složitých a velmi abstraktních matematických teorií a zároveň komplikovaných experimentů vyžadujících náročná experimentální zařízení. Abychom mohli objevovat nové částice a ověřovat naše teore-

tické představy o mikrosvětě, potřebujeme stále větší urychlovače, které by byly schopny dodávat částicím energii bilionů elektronvoltů. Takové urychlovače se budují v Sovětském svazu, ve Spojených státech amerických, k jejich výstavbě se sdružují velké skupiny států. Je to výzkum vyžadující mírovou mezinárodní spolupráci a týmovou práci; jeden pokus provádějí často desítky i stovky fyziků a inženýrů za pomoci velkých počítačů.

Fyzika vyžaduje však zároveň velké nadšení, hluboký vztah k přírodě, bohatou fantazii, schopnost dialektického myšlení a smysl pro paradoxy. Při stále hlubším pronikání do podstaty přírodních zákonitostí zjišťujeme, že věci nejsou takové, jak se nám jeví na první pohled v běžném denním životě, že jsou jiné a mnohem zajímavější. Fyzika přináší stále nová a nová překvapení a i když dnes je vědecká činnost řízena plánovitě, nové objevy naplánovat nelze. Dobrodružství poznání a radost z pronikání k podstatě věcí zůstávají. A právě takové neočekávané objevy, k jakým patří například objev rentgenového záření, radioaktivity, štěpení atomového jádra, laseru nebo supravodivosti, nacházejí též společenské uplatnění a mění náš způsob života.

Prvním požadavkem fyzikálního přístupu ke zkoumání přírody, jako vůbec každého vědeckého poznání, je schopnost všimnout si. Kolik lidí chodí nevšímavě kolem věcí, kolik velkých objevů uniklo vědcům pod rukama jen proto, že si nevšimli nějaké maličkosti — v tom se práce fyzika podobá činnosti detektiva. Nestačí si však jen všimnout, je třeba si také uvědomit mimořádnost zdánlivě všedního jevu, podivit se mu. Údiv je velký dar, který je dán především dětem a ne každý si dokáže zachovat tuto vlastnost po celý život. Přesně tak tomu bylo při objevu podivných částic a údiv nad jejich neobyčejnými vlastnostmi se stal hybnou silou ve fyzice elementárních částic po několik desetiletí.

Fyzik musí být okouzlen krásou přírody, musí vnímat její půvab. Jde mu však o víc — o pochopení podstaty věcí, přírodních zákonitostí, o pravdivý obraz světa. A zde přichází na pomoc jednak matematika, která může vyjádřit a popsat zákonitosti přírody v logické, obecné podobě, a jednak záměrný, promyšlený experiment. Nemusí přitom jít vždy o experimenty takzvané „velké vědy" na urychlovačích, laserových systémech, jaderných reaktorech a termojaderných zařízeních.

Svou intuici, důvtip a experimentální zručnost může fyzik uplatnit i s jednoduššími prostředky a dostupnou technikou. Důležité však je, aby věděl, co dělá, jaký je cíl jeho experimentu, aby znal podmínky, za nichž zkoumaný jev probíhá, a dovedl výsledek experimentu správně vyhodnotit. Tento výsledek pak musí konfrontovat s teorií, matematickým výpočtem, a tak se postupně dobírat pravdy.

Není to vždy snadné a je třeba se tomu učit, znovu a znovu ověřovat své závěry, postupně odstraňovat nezbytné omyly a nepřesnosti. I ve fyzice elementárních částic, která dnes představuje přední kraj fyzikální-

ho bádání, vznikalo v posledních desetiletích mnoho teorií, které se ukázaly nesprávnými, neobstály ve srovnání s výsledky experimentů, a naopak mnoho experimentů, které vedly do slepé uličky. Ty poznatky, které se podaří nakonec ověřit a prokázat, vedou dál k novým předpovědím, ukazují nový směr bádání a přinášejí radost z poznání.

Na závěr ještě jednu připomínku. V dnešní době rychlého šíření záplavy informací sdělovacími prostředky a honby za různými senzacemi se často setkáváme s povrchními, neověřenými a neseriozními zprávami a předčasnými závěry. Čteme a slyšíme o tom, že byla objevena nová, neznámá síla, nový druh energie, částice pohybující se nadsvětelnou rychlostí, průchody černými dírami do jiných světů a podobně. Někteří lidé, někdy i z řad odborníků, podléhají lehkověrně různým představám a iluzím, subjektivním přáním. Domnívají se, že stačí vymyslet název, vědecky znějící termín, a tím už nový jev nebo částice musí existovat. Vyvozují ukvapené závěry z povrchních, neprůkazných pozorování.

I s tím musí mladý, začínající fyzik počítat, přistupovat kriticky a střízlivě ke sdělovaným poznatkům, nespoléhat slepě na autority, i kdyby to byly třeba samotné Rozhledy matematicko-fyzikální. Základním pravidlem vědce (i detektiva) je pochybovat, nevěřit tomu, čemu by se nám věřit chtělo, ale jen tomu, co můžeme nade vší pochybnost ověřit, přesvědčit se o tom. To samozřejmě nevylučuje vytváření různých domněnek, hypotéz, fantazií, pokud si uvědomujeme, že mezi domněnkou (samozřejmě podloženou) a skutečností leží ještě velká a usilovná práce. Právě zdravé pochybování již mnohokrát v minulosti popohnalo fyziku kupředu.

MATEMATIKA

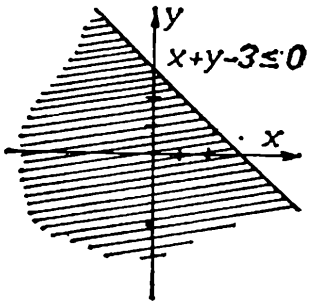
Množiny bodů v rovině a jejich grafické znázornění

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

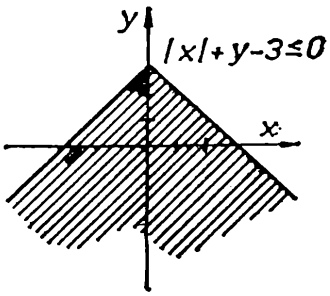
Není pro vás jistě žádným problémem zobrazit v dané kartézské soustavě souřadnic množiny bodů, které znáte ze školy, jako jsou např. tyto:

$$A = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\, x + y - 3 \leqq 0\}\,,$$
$$B = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\, y - x^2 \geqq 0\}\,,$$
$$C = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\, x^2 + y^2 - 9 = 0\}\,.$$

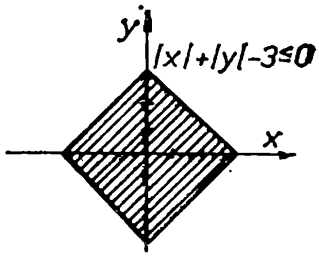
V některých úlohách je však zapotřebí znázornit množiny, při jejichž zobrazování je obvyklý postup (rozlišováním všech možností) příliš



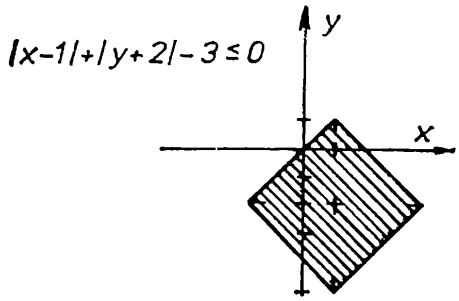
Obr. 1



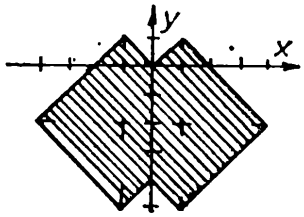
Obr. 2



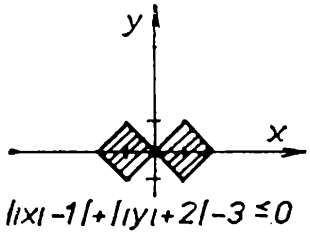
Obr. 3



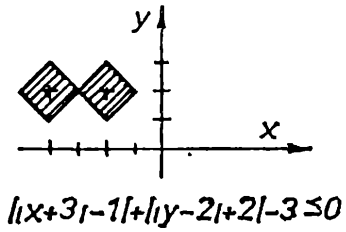
Obr. 4



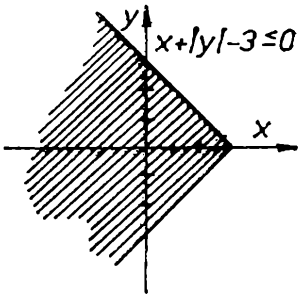
Obr. 5.



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

komplikovaný. Ukážeme si, jakým způsobem můžeme od zobrazen „jednoduchých množin" dospět rychle a snadno k zobrazení množin, které jsou dány předpisem „složitějším".

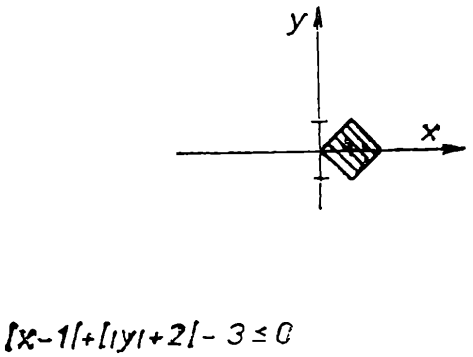
Vysvětlíme si tento postup podrobně na příkladu množiny

$$A' = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ ||x + 3| - 1| + ||y - 2| + 2| - 3 \leqq 0\}\,.$$

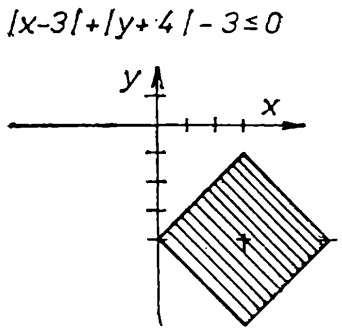
(Tvrzení obsažená v jednotlivých krocích následujícího postupu si jistě zdůvodníte sami.)

1. krok: Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic zobrazíme množinu $A = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ x + y - 3 \leqq 0\}$, což je provedeno šrafováním na obr. 1.

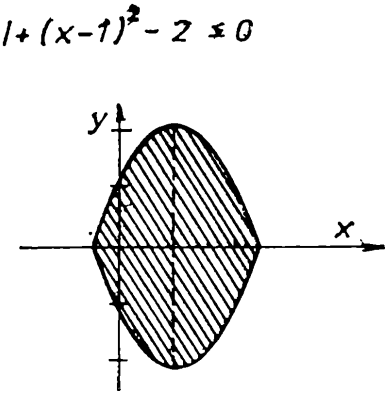
2. krok: Utvoříme množinu $\mathbf{A}_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ |x| + y - 3 \leqq 0\}$, kterou znázorníme (viz. obr. 2) takto:
Obraz množiny $\mathbf{A}_1$ je sjednocením útvarů $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ z obr. 1, kde $\mathbf{U}_1$ je částí obrazu množiny $\mathbf{A}$ ležící v polorovině $x \geqq 0$ a $\mathbf{U}_2$ je obrazem $\mathbf{U}_1$ v osové souměrnosti podle osy y.



Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11

3. krok: Utvoříme množinu $\mathbf{A}_2 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ |x| + |y| - 3 \leqq 0\}$ kterou znázorníme (viz obr. 3) takto:
Obraz množiny $\mathbf{A}_2$ je sjednocením útvarů $\mathbf{U}_3$, $\mathbf{U}_4$ z obr. 2, kde $\mathbf{U}_3$ je částí obrazu množiny $\mathbf{A}_1$ ležící v polorovině $y \geqq 0$ a $\mathbf{U}_4$ je obrazem $\mathbf{U}_3$ v osové souměrnosti podle osy x.

4. krok: Utvoříme množinu $\mathbf{A}_3 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ |x - 1| + |y + 2| - 3 \leqq 0\}$, kterou znázorníme (viz obr. 4) takto:
Obraz množiny $\mathbf{A}_3$ dostaneme posunutím obrazu množiny $\mathbf{A}_2$, které převádí bod [0, 0] do bodu [1, — 2].

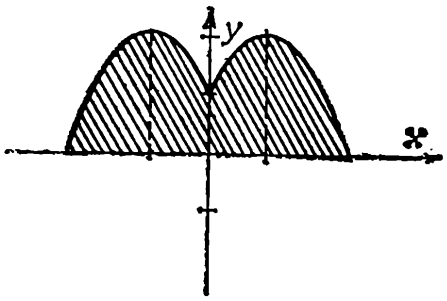
5. krok: Utvoříme množinu $\mathbf{A}_4 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ ||x| - 1| + |y + 2| + 3 \leqq 0\}$, kterou znázorníme (viz obr. 5) takto:
Obraz množiny $\mathbf{A}_4$ je sjednocením útvarů $\mathbf{U}_5$, $\mathbf{U}_6$ z obr. 4, kde $\mathbf{U}_5$ je částí obrazu množiny $\mathbf{A}_3$ ležící v polorovině $x \geqq 0$ a $\mathbf{U}_6$ je obrazem $\mathbf{U}_5$ v osové souměrnosti podle osy y.

6. krok: Utvoříme množinu $\mathbf{A}_5 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ ||x| - 1| + ||y| + 2| - 3 \leqq 0\}$, kterou znázorníme (viz obr. 6) takto:
Obraz množiny $\mathbf{A}_5$ je sjednocením útvarů $\mathbf{U}_7$, $\mathbf{U}_8$ z obr. 5, kde $\mathbf{U}_7$ je částí obrazu množiny $\mathbf{A}_4$ ležící v polorovině $y \geqq 0$ a $\mathbf{U}_8$ je obrazem $\mathbf{U}_7$ v osové souměrnosti podle osy x.

7. krok: Zobrazíme danou množinu $\mathbf{A}' = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ ||x + 3| - 1| + ||y - 2| + 2| - 3 \leqq 0\}$, a to takto (viz obr. 7):
Obraz množiny $\mathbf{A}'$ dostaneme posunutím obrazu množiny $\mathbf{A}_5$, které převádí bod [0, 0] do bodu [— 3, 2].

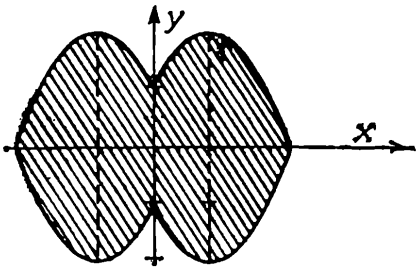
Tento postup není samozřejmě „závazný". K množině zobrazené na obr. 3. můžeme také dospět tak, že ve 2. kroku zobrazíme (viz obr. 8) množinu $\mathbf{A}'_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ x + |y| - 3 \leqq 0\}$, a to takto: Obraz množiny $\mathbf{A}'_1$ je sjednocením útvarů $\mathbf{U}'_1$, $\mathbf{U}'_2$, kde $\mathbf{U}'_1$ je částí obrazu množiny $\mathbf{A}$ ležící v polorovině $y \geqq 0$ a $\mathbf{U}'_2$ je obrazem útvaru $\mathbf{U}'_1$ v osové souměrnosti podle osy x. Obraz množiny $\mathbf{A}_2 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ |x| + |y| - 3 \leqq 0\}$ pak dostaneme jako sjednocení útvarů $\mathbf{U}'_3$, $\mathbf{U}'_4$ z obr. 8, kde $\mathbf{U}'_3$ je část obrazu množiny $\mathbf{A}'_1$ ležící v polorovině $x \geqq 0$ a $\mathbf{U}'_4$ je obrazem $\mathbf{U}'_3$ v osové souměrnosti podle osy y. Podobně jsme v 5. kroku

$y+(|x|-1)^2-2\leq 0$



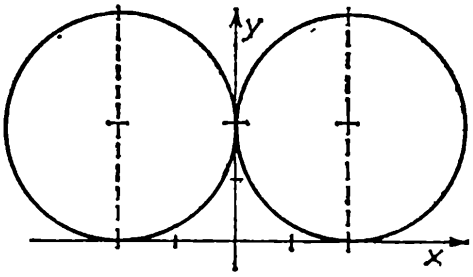
Obr. 12

$|y|+(|x|-1)^2-2\leq 0$



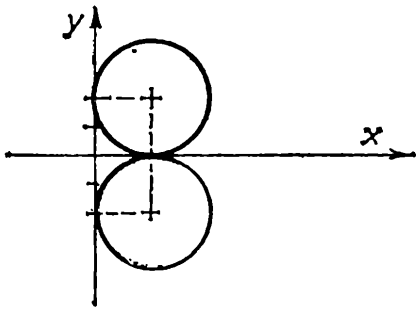
Obr. 13

$(|x|-2)^2+(y-2)^2-4=0$



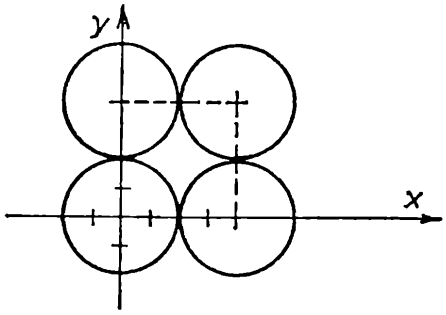
Obr. 14

$(x-2)^2+(|y|-2)^2-4=0$



Obr. 15

$(|x-2|-2)^2+(|y-2|-2)^2-4=0$



Obr. 16

mohli místo množiny $\mathbf{A}_4$ zobrazit (viz obr. 9) množinu $\mathbf{A}'_4 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \times \mathbf{R};\ |x-1| + ||y|+2| - 3\} \leqq 0$ a z ní v 6. kroku dojít k množině $\mathbf{A}_5$.

V postupu, který jsme si právě vysvětlili, je zapotřebí věnovat pozornost zejména těm krokům, ve kterých je sestrojován obraz útvaru ležícího v polorovině $x \geqq 0$ nebo $y \geqq 0$ v osové souměrnosti podle osy y nebo x. Může se totiž stát, že tento útvar je prázdná množina, takže bude prázdnou množinou i jeho obraz! Pro ilustraci takovéhoto případu vezměme množinu $\mathbf{M} = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ |x-3| + ||y|+4| - 3 \leqq 0\}$. Postupujeme-li stejně jako výše, dospějeme ve 4. kroku k množině $\mathbf{M}_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ |x-3| + |y+4| - 3 \leqq 0\}$, jež je znázorněna na obr. 10. Od této množiny umíme už přejít k dané množině $\mathbf{M}$. Její obraz je sjednocením útvarů $\mathbf{V}_1$ a $\mathbf{V}_2$ z obr. 10, kde $\mathbf{V}_1$ je část obrazu

množiny $\mathbf{M}_1$ ležící v polorovině $y \geqq 0$ a $\mathbf{V}_2$ je obrazem útvaru $\mathbf{V}_1$ v osové souměrnosti podle osy x. Protože však je $\mathbf{V}_1 = \emptyset$, jde i $\mathbf{V}_2 = \emptyset$, takže je také $\mathbf{M} = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ |x - 3| + ||y| + 4| - 3 \leqq 0\} = \emptyset$.

Na závěr se můžete prověřit sami. Vyjděte z toho, že umíte zobrazit množiny $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ z úvodu tohoto článku, a zakreslete množiny:

$\mathbf{B}_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ |y| + (x - 1)^2 - 2 \leqq 0\}$, $\mathbf{B}_2 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ y + (|x| - 1)^2 - 2 \leqq 0\}$,

$\mathbf{B}_3 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ |y| + (|x| - 1)^2 - 2 \leqq 0\}$, $\mathbf{C}_1 = \{[x, y] \in R \times R;\ (|x| - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0\}$,

$\mathbf{C}_2 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ (x - 2)^2 + (|y| - 2)^2 - 4 = 0\}$ $\mathbf{C}_3 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ (|x - 2| - 2)^2 + (|y - 2| - 2)^2 - 4 = 0\}$.

Pro kontrolu vašich výsledků jsou množiny $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ po řadě graficky znázorněny na obr. 11, 12, 13, 14, 15, 16.

O Petrově větě

RNDr. PAVEL PECH, PeF JČ. Budějovice

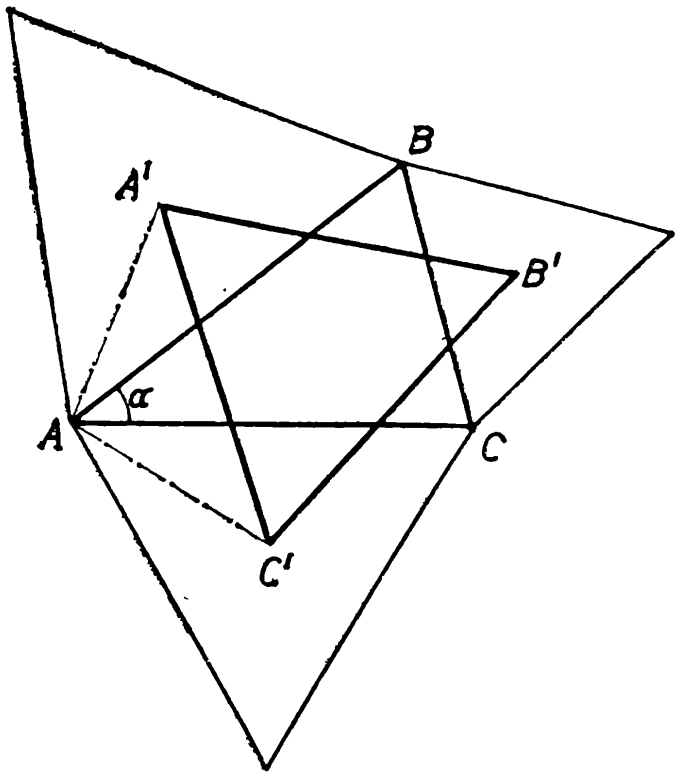
Jedním z největších českých matematiků byl *Karel Petr* (1868—1950), který byl v letech 1903—1938 profesorem na Karlově universitě v Praze. Hlavním oborem jeho vědecké činnosti byla algebra a teorie čísel. V těchto oborech si Karel Petr získal světovou proslulost. (Viz článek v desátém čísle minulého ročníku Rozhledů.) Z geometrie je známo málo jeho prací. Jednou z těchto geometrických prací je věta, kterou Petr publikoval již v roce 1904. Tato věta se vztahuje na libovolný rovinný n-úhelník. V tomto článku se budeme zabývat pouze případem trojúhelníka a čtyřúhelníka.

Věta 1. Nechť je dán libovolný trojúhelník ABC. Sestrojme v jeho rovině nad jeho stranami rovnostranné trojúhelníky, a to buď všechny vně trojúhelníka ABC nebo všechny dovnitř. Potom středy těchto rovnostranných trojúhelníků jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

Důkaz. Označme středy sestrojených rovnostranných trojúhelníků A', B', C' (obr. 1). Důkaz proveďme pro případ, že trojúhelníky jsou sestrojeny vně trojúhelníka ABC. Důkaz pro „vnitřní" trojúhelníky byl uveden v článku *S. Horáka*, Napoleonovy trojúhelníky, Rozhledy mat.-fyz. roč. 62, č. 9, 373—377. Nechť při obvyklém označení jsou a, b, c délky stran trojúhelníku ABC. V trojúhelníku $C'AA'$ platí

$$|\sphericalangle C'AA'| = \alpha + 60^\circ \qquad |C'A| = \frac{b\sqrt{3}}{3}, \quad |AA'| = \frac{c\sqrt{3}}{3}$$

a podle kosinové věty



Obr. 1

$$|C'A'|^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(\alpha + 60°) .$$

Použitím součtového vzorce dostáváme

$$|C'A'|^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos\alpha \cos 60° + \frac{2bc}{3} \sin\alpha \sin 60° =$$

$$= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{bc}{3} \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3} bc \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{6} (2b^2 + 2c^2 - 2bc \cos\alpha + 2\sqrt{3}\, bc \sin\alpha) .$$

Protože

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha ,$$

dostáváme

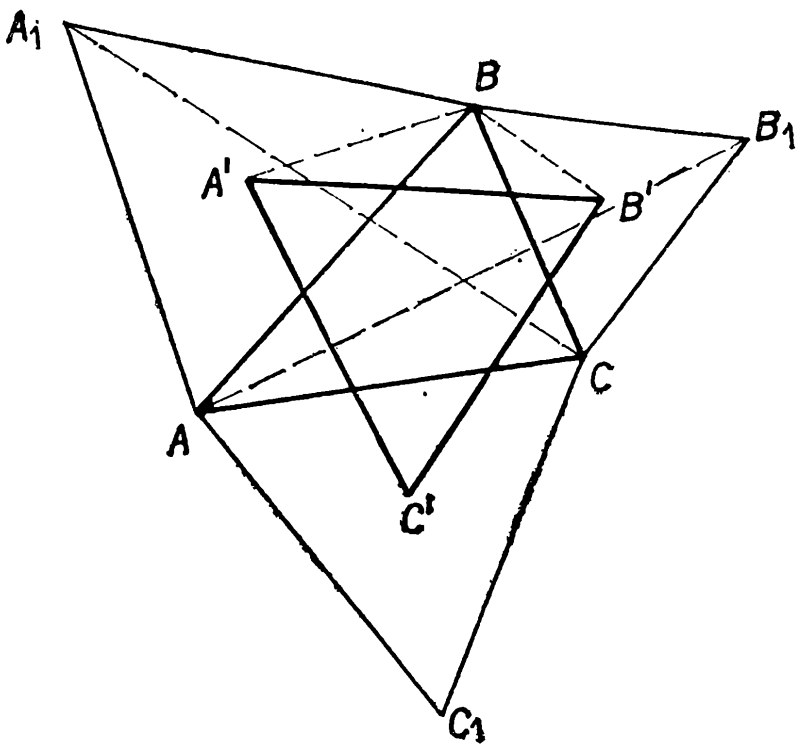
$$|C'A'|^2 = \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}\, bc \sin\alpha) =$$

$$= \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\, S) ,$$

kde S je obsah trojúhelníka ABC.
Zcela analogicky vychází (poslední výraz se cyklickou záměnou nemění)

$$|B'C'|^2 = \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\, S) ,$$

$$|A'B'|^2 = \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\, S) .$$



Obr. 2

Odtud plyne, že skutečně platí $|A'B'| = |B'C'| = |C'A'|$. Trojúhelník $A'B'C'$ je tedy rovnostranný.

Z věty 1 plyne, že každému trojúhelníku jsou přiřazeny dva rovnostranné trojúhelníky (jeden „vnější" a jeden „vnitřní"). Tyto trojúhelníky se nazývají na počest slavného vojevůdce *Napoleonovy trojúhelníky*. Jejich objev je skutečně připisován Napoleonovi, ačkoliv byly zřejmě známy mnohem dříve. Proto také věta 1 je ve světě spíše známa jako Napoleonova věta. Méně je známo, že tato věta je speciálním případem Petrovy věty pro $n = 3$. Pro trojúhelník ABC a přiřazený trojúhelník $A'B'C'$ navíc platí, že mají stejná těžiště. Pokuste se sami o důkaz. Nyní uvedeme další důkaz věty 1, který je více geometrický.

Vrcholy rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami trojúhelníka ABC označme písmeny A_1, B_1, C_1; jejich středy označme podobně jako v předchozím důkazu A', B', C' (obr. 2). Snadno nahlédneme, že platí

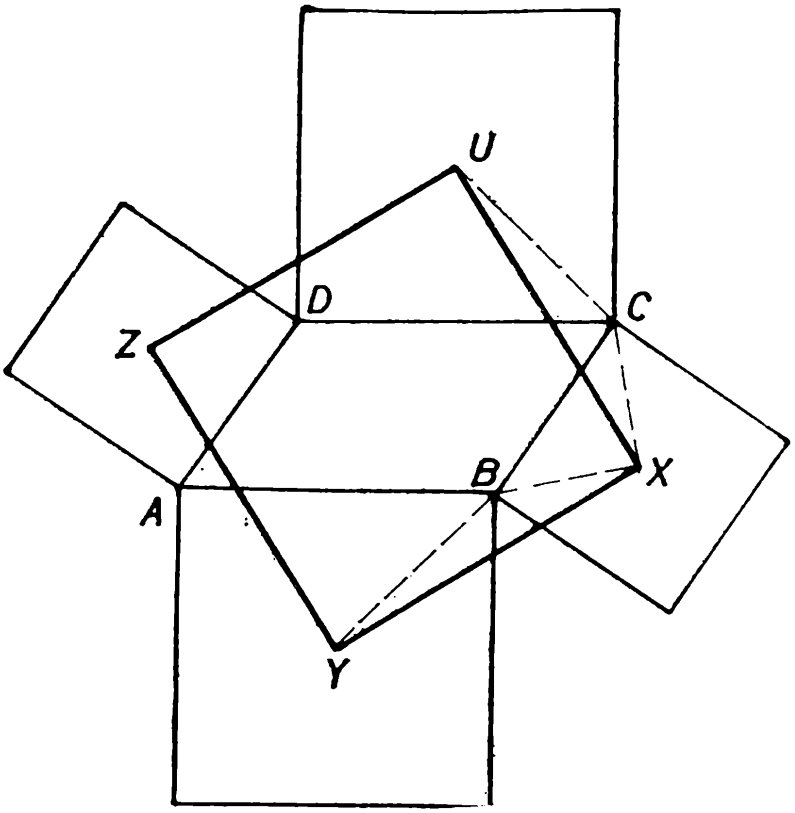
$$|B_1B| = |BC|\ , \quad |AB| = |A_1B|\ , \quad |\sphericalangle ABB_1| = \beta + 60° = |\sphericalangle A_1BC|$$

Podle věty sus je tedy $\triangle BCA_1 \cong \triangle BB_1A$. Proto je $|A_1C| = |AB_1|$. Dále platí:

$$\frac{|A'B|}{|AB|} = \frac{|B'B|}{|BC|} = \frac{|B'B|}{|BB_1|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ a } |\sphericalangle B'BA'| = \beta + 60° =$$
$$= |\sphericalangle B_1BA|$$

Z toho plyne, že je $\triangle A'BB' \sim \triangle ABB_1$. Proto je také

$$\frac{|A'B'|}{|AB_1|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ čili } |A'B'| = \frac{\sqrt{3}}{3}\,|AB_1|\,.$$



Obr. 3

Analogicky vychází

$$|B'C'| = \frac{\sqrt{3}}{3}|BC_1|\,, \quad |C'A'| = \frac{\sqrt{3}}{3}|CA_1|$$

Podle předchozího je $|AB_1| = |BC_1| = |CA_1|$. Proto z posledních vztahů dostaneme rovnost $|A'B'| = |B'C'| = |C'A'|$ což znamená, že trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný.

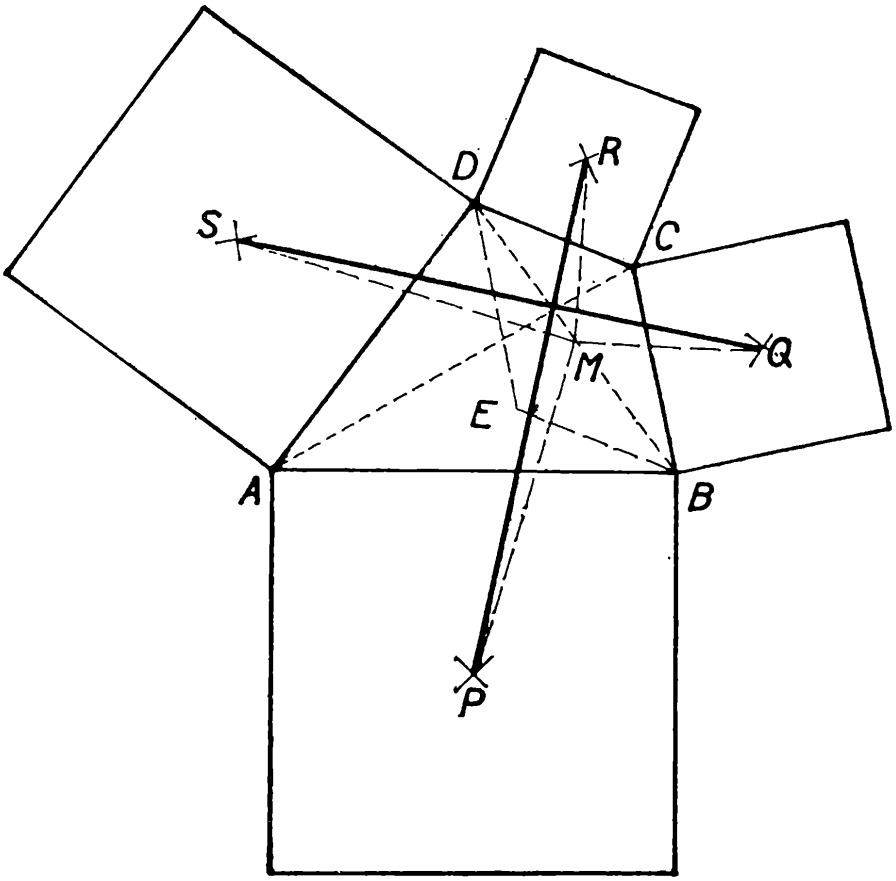
Nyní se budeme zabývat Petrovou větou pro případ čtyřúhelníka. Sestrojme nad stranami libovolného rovinného čtyřúhelníka v jeho rovině čtverce, a to buď všechny vně čtyřúhelníka nebo naopak. Vzniká tato otázka: Jakou vlastnost mají středy těchto čtverců? Podle věty 1 by se dalo očekávat, že jsou opět vrcholy čtverce. Toto tvrzení však správné není, jak za chvíli uvidíme. Situace je trochu složitější.

Pomocná věta 1. Nechť v rovině ϱ je dán libovolný rovnoběžník $ABCD$. Potom středy čtverců sestrojených v rovině ϱ nad jeho stranami jsou vrcholy čtverce.

Důkaz. Nechť čtverce jsou sestrojeny vně rovnoběžníka $ABCD$ (obr. 3). Středy čtverců označme X, Y, Z, U. Otočením o úhel 90° se středem v bodě X přejde trojúhelník XCU do trojúhelníka XBY, neboť

$$|XC| = |XB|\,,\ XC \perp XB \text{ a } |UC| = |BY|\,,\ UC \perp BY$$

Vlastnost $UC \perp BY$ plyne ze skutečnosti, že se jedná o rovnoběžník. Tedy dostáváme $|XU| = |XY|$, $XU \perp XY$ Analogicky to dokážeme pro zbývající případy. Čtyřúhelník $XYZU$ je proto čtverec.



Obr. 4

Každému rovnoběžníku tedy umíme předchozí konstrukcí přiřadit čtverec. Uvědomme si, že střed čtverce je průsečík úhlopříček daného rovnoběžníka.

Pomocná věta 2. Nechť P, Q, R, S jsou středy čtverců sestrojených v rovině libovolného čtyřúhelníku $ABCD$ nad jeho stranami (buď vně nebo naopak). Potom úhlopříčky čtyřúhelníka $PQRS$ jsou shodné a vzájemně kolmé (obr. 4).

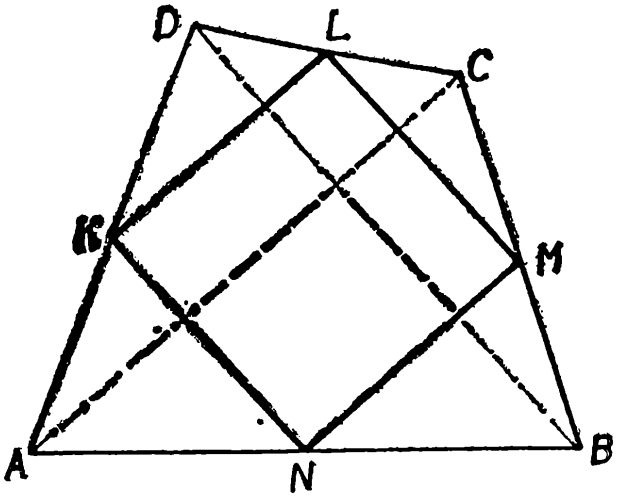
Důkaz: Nechť M je střed úsečky BD. Dokážeme, že trojúhelník PRM je obrazem trojúhelníka SQM v otočení se středem v bodě M o úhel 90°. Odtud totiž plyne, že $|SQ| = |PR|$ a $PR \perp SQ$, což potřebujeme dokázat. Avšak z pomocné věty 1 plyne např. $|MR| = |MQ|$, $MR \perp MQ$. Doplníme-li totiž trojúhelník BCD na rovnoběžník $BCDE$, je M střed čtverce, který přísluší rovnoběžníku $BCDE$ podle pomocné věty 1. Jak víme, úhlopříčky čtverce se navzájem půlí a jsou na sebe kolmé. Tedy $|MR| = |MQ|$, $MR \perp MQ$. Stejně se odvodí, že platí $|SM| = |MP|$, $SM \perp MP$.

Poznámka: S pomocnou větou 2 se mohl čtenář seznámit ve článku *E. Kraemera* v Rozhledech, roč. 63, č. 3, 136—138, kde je úloha dokázána podobným způsobem.

Pomocná věta 3. Středy stran libovolného čtyřúhelníka jsou vrcholy rovnoběžníku.

Důkaz: Je snadný a přenechávám jej čtenáři.

Obr. 5



Pomocná věta 4. Nechť úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ jsou shodné a navzájem kolmé. Potom středy stran čtyřúhelníku $ABCD$ jsou vrcholy čtverce (obr. 5).

Důkaz: Označme středy stran čtyřúhelníka $ABCD$ písmeny K, L, M, N. Podle pomocné věty 3 je $KLMN$ rovnoběžník a dále je

$$|KL| = |MN| = |KN| = |LM| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|BD|$$

a zároveň $KL \perp KN$. Tedy $KLMN$ je skutečně čtverec.

A nyní již slíbená Petrova věta pro čtyřúhelníky.

Věta 2. Nechť v rovině je dán libovolný čtyřúhelník $ABCD$ a dva úhly o velikostech 90°. Označme libovolný z nich α_1 a zbývající α_2. Nad stranami čtyřúhelníka jako základnami sestrojme rovnoramenné trojúhelníky s úhlem α_1 při hlavním vrcholu (buď všechny vně čtyřúhelníka nebo naopak). Hlavní vrcholy trojúhelníků jsou vrcholy čtyřúhelníku $A_1B_1C_1D_1$. Nyní celý postup opakujme, tj. nad stranami čtyřúhelníku $A_1B_1C_1D_1$ jako základnami sestrojme rovnoramenné trojúhelníky s úhlem α_2 při hlavním vrcholu. Dostáváme další čtyřúhelník $A_2B_2C_2D_2$. Tento čtyřúhelník je čtverec.

Důkaz plyne z pomocných vět 1 až 4.

Poznámka: Podobně jako v případě trojúhelníka i zde platí, že čtyřúhelníky $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ mají společné těžiště.

Geometrické a malířské zobrazení

Doc. ing. dr. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT v Praze

Základem metod deskriptivní geometrie je promítání z jednoho bodu (perspektiva) a promítání jedním směrem (volné rovnoběžné promítání). Tato promítání můžeme nazvat jednopohledovými, vzhledem k jejich fyziologickému významu.

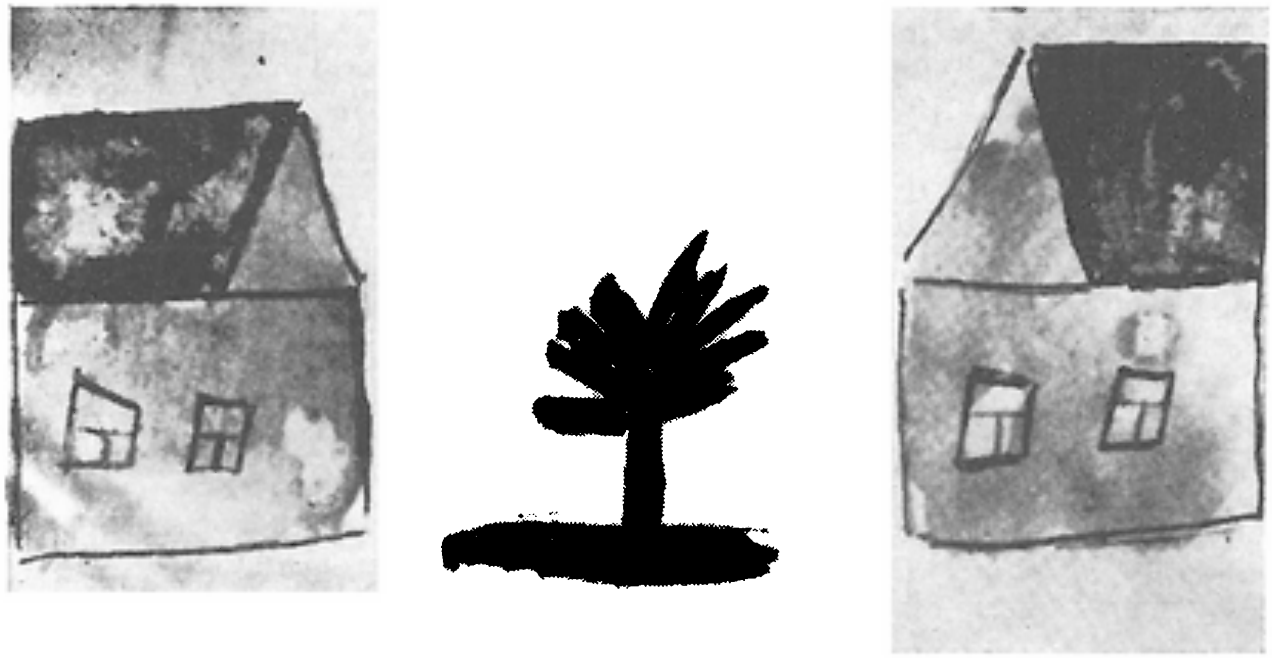
Jednopohledové promítání je extrémním zjednodušením procesu vidění. Dojem o viděném nevzniká jen na základě jednoho pohledu (láska na první pohled je výjimkou), zejména jde-li o rozsáhlý prostorový objekt.

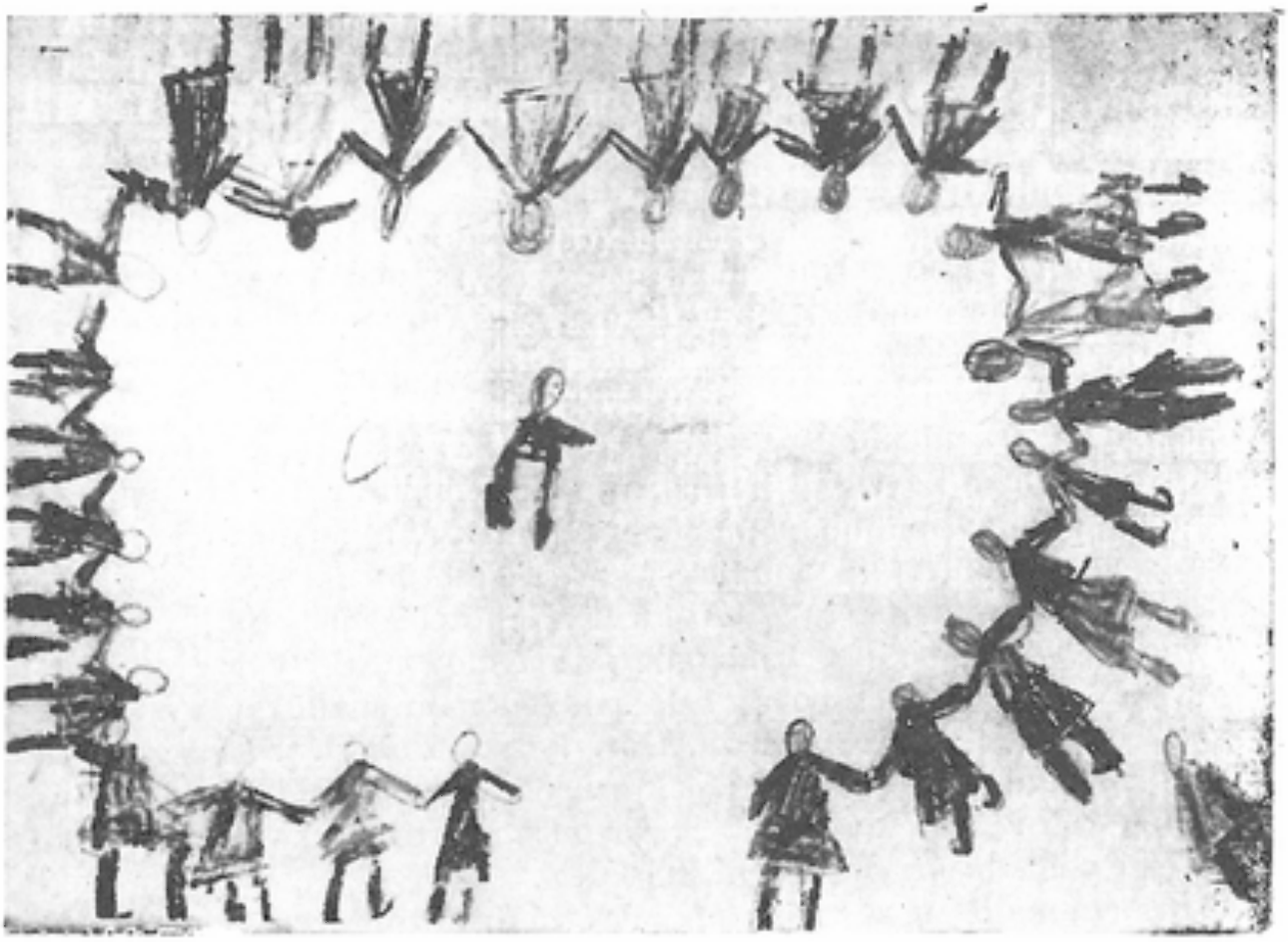
Proto se v malířství setkáváme s *vícepohledovým zobrazením*, pokud se umělec snaží co nejvíc se přiblížit viděné skutečnosti.

Už v dětské kresbě, dosud neovlivněné jednopohledovými geometrickými pravidly, lze vystopovat tuto podvědomou snahu po vystihnutí celkového dojmu z více pohledů. Obr. 1 dvou domků je složen ze tří pohledů: z pohledu zpředu na jejich průčelí a z pohledu zleva a zprava na jejich štítové zdi. Na obr. 2 je dokonce patrná touha po vyjádření spojitosti pohledů při obcházení kola dětí.

V ruském malířství se vyskytuje zvláštní druh zobrazení, v němž jsou pohledy z různých stran spojeny v jediný obraz vysokého uměleckého účinu. Říkáme mu antiperspektiva, což vyjadřuje skutečnost, že rovnoběžky se zobrazují do přímek, které se k horizontu (tj. do hloubky) rozbíhají. Pravým opakem je zobrazení rovnoběžek v perspektivě. Ty se v bodě na horizontu sbíhají.

Obr. 1



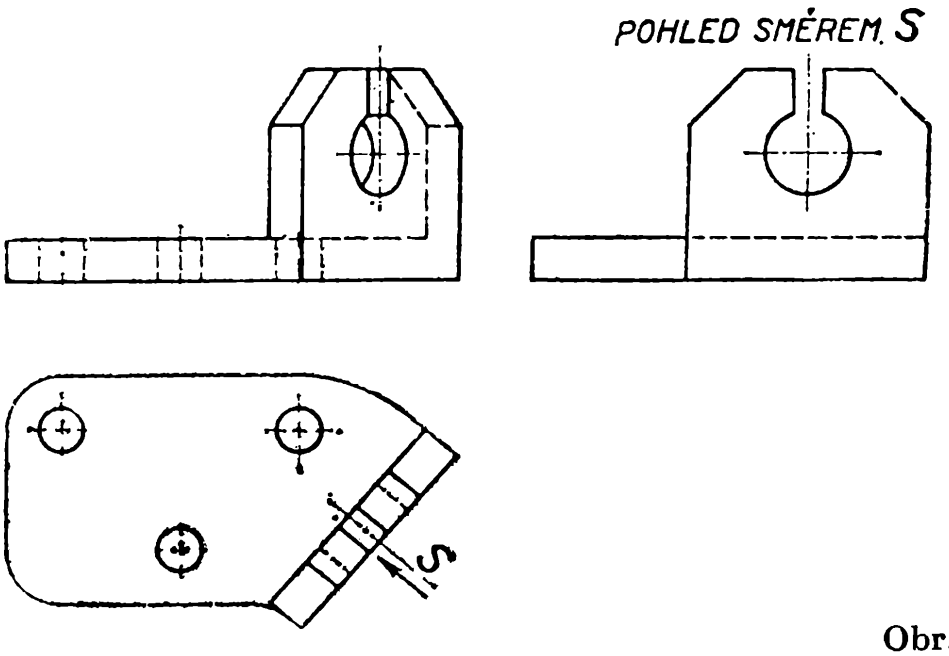


Obr. 2

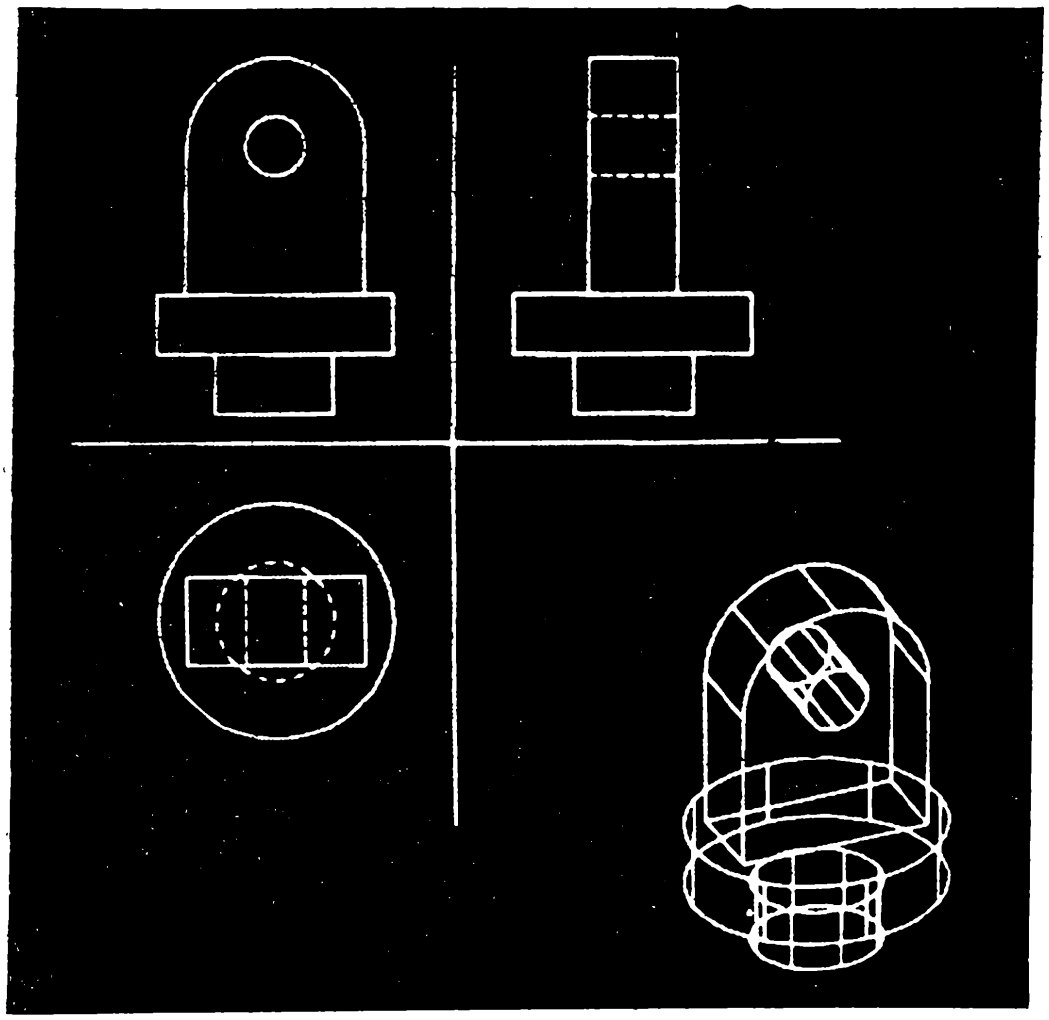
Obr. 3

Obr. 4

Obr. 5



Obr. 6



Na obr. 3 (evangelista Lukáš, miniatura z evangeliáře z počátku 15. století) je zobrazeno sedátko, stolek i opěra nohou v nadhledu zprava. Ale pravý otvor na sedátku je nakreslen v podhledu, dolní části nohou

jsou zobrazeny v pohledu zpředu, obraz vchodu do levé budovy je podhledem a kresba okna pravé budovy je nadhledem. Antiperspektiva tak vytváří z různých pohledů jediný „nadpohled".

V moderním malířství vyústila snaha shrnout do jednoho obrazu pohledy z různých stran v malířský směr „kubismus". Místo jediného nadpohledu antiperspektivy skládají kubističtí malíři různé pohledy, většinou značně zjednodušené, vedle sebe a do sebe, obr. 4, Pablo Picasso, Hlava dívky, 1910.

Srovnáme-li tedy malířské a geometrické zobrazení, zjišťujeme, že obojí má své specifické cíle a jim jsou přizpůsobeny metody a pravidla. V žádném případě by geometr neměl pohlížet s despektem na některé malířské směry jen proto, že nesplňují pravidla jednopohledového promítání. Nebylo by správné odsuzovat dětské kresby, antiperspektivu ruského malířství, kubismus a různé pokubistické malířské směry jen proto, že se odchylují od perfektní perspektivy renesančních malířů.

Koneckonců i deskriptivní geometrie používá zcela běžně dvojpohledového zobrazení k popisu prostorového útvaru (půdorys a nárys). V technickém výkresu mohou být kromě těchto pohledů obsaženy ještě další pohledy navíc. Na obr. 5 je součástí technického výkresu pohled shora, zpředu a (vodorovným) směrem *S*. Na obr. 6 je kromě půdorysu, nárysu a bokorysu i pohled směrem „obecným", tj. směrem, který není rovnoběžný s žádnou souřadnicovou rovinou (volný rovnoběžný průmět). Tento obecný pohled je sice nadbytečný, ale velmi ilustrativní. Byl vygenerován automaticky počítačem ze základních tří průmětů.

FYZIKA

Stačí chtít

Ing. EVA VESELÁ, CSc., ČVUT Praha

Při zběžném seznámení s nějakým všeobecně známým jevem máme všichni občas pocit zdánlivé jednoduchosti a nenáročnosti. To, že některé technické aplikace nebyly dosud vyřešeny, považujeme pak jen za otázku šikovnosti, nápaditosti, popřípadě ještě finančních možností řešitele.

S takto zkreslenými představami se setkáváme zejména v těch případech, kdy dané věci nebo oboru příliš do hloubky nerozumíme. Uveďme si příklad z optiky. Známe hned celou řadu přístrojů, které nám umožňují pozorované předměty zvětšovat — brýle, lupu, mikroskop, daleko-

hled. Jaké podrobnosti ale dokážeme pomocí těchto optických přístrojů rozlišit?

Uvažujme například mikroskop. Skládá se vždy ze dvou částí: okuláru a objektivu. Poměrně snadno se dá zjistit, že zvětšení tohoto přístroje je dáno součinem zvětšení okuláru a objektivu. Můžeme se tedy domnívat, že STAČÍ CHTÍT a nám se podaří sestrojit mikroskop s libovolně velkým zvětšením? Proč bychom nemohli mít přístroj zvětšující třeba miliónkrát? Anebo ještě vícekrát, abychom se konečně mohli svýma vlastníma očima podívat na atomy, jejich jádra i na elektrony!

Překážkou jsou však právě naše oči. I když lidské oko je velice složitá soustava buněk různých tvarů, velikostí i funkcí, z fyzikálního hlediska můžeme jeho nejdůležitější část přirovnat k obyčejné spojné čočce — také se nazývá oční spojka. Při správném vidění musí světelný obraz vytvořený oční čočkou ležet na zadní straně oka, která je vystlána citlivou vrstvou sítnice. Hlavní složky sítnice, tyčinky a čípky, jsou buňky, které jsou schopny reagovat na světelné podněty. Mění světelný signál na nervový a ten se pak přenáší až do mozku.

Fyzikální a fyziologickou stavbou a funkcí lidského oka se zabýval již v polovině minulého století slavný německý matematik a fyzik *Herman Helmholtz*. Podařilo se mu vysvětlit způsob prostorového vidění, akomodaci oka a vynalezl oční zrcátko, které umožnilo vyšetřovat sítnici. O tomto našem orgánu se však Helmholtz nevyjádřil právě nejlichotivěji: „Kdyby nějakého optika napadlo prodat mi přístroj s takovými vadami, jaké má lidské oko, považoval bych za správné vytknout mu nedbalou práci a přístroj s protestem vrátit".

Buďme však rádi, že oči vůbec máme, a podivujme se spíš tomu, jak vhodně jsou přizpůsobeny podmínkám na naší planetě. Citlivost lidského oka totiž odpovídá složení slunečního záření, ve kterém má největší intenzitu barva zelená — barva pozemské vegetace. Pro spodní okraj spektra, červenou barvu, je citlivost očí asi 1000 krát menší než pro barvu zelenou a žlutozelenou a pro nejkratší vlnové délky, které oko je schopno registrovat, tedy pro fialovou barvu, se světelné vnímání snižuje asi 25 000 krát. Přitom z celé ohromné šíře elektromagnetického záření reagují buňky sítnice pouze na úzké rozmezí vlnových délek, které nazýváme světlo, a to od 0,35 do 0,75 mikrometru.

Jestliže však pozorujeme předměty, které mají rozměry řádově srovnatelné s vlnovou délkou použitého světla nebo jsou ještě menší, pak se kolem nich nešíří světlo přímočaře, ale dochází k jeho ohybu. A právě ohybové jevy způsobují neostrost všech takto malých detailů — bod se již nezobrazí jako bod, ale jako ploška.

Již v minulém století odvodil německý fyzik *Ernst Abbe* podmínku pro nejmenší velikost částice, kterou můžeme v mikroskopu pozorovat — a to rovné poloviční vlnové délce použitého záření. Z toho důvodu by

však byla naprosto zbytečná námaha spojená s konstrukcí takových optických mikroskopů, které by zvětšovaly ještě víc než asi 1000 krát.

Rozborem funkce ostatních podobných optických přístrojů zjistíme, že jejich zvětšení je podobným způsobem omezeno. Nepomůže nám ani další zvětšování obrazu z filmu nebo desky — rozlišovací schopnost závisí totiž na zrnitosti jejich citlivé vrstvy a ta nemůže být libovolně malá.

A tak ani s pomocí těch nejdokonalejších optických přístrojů nemůžeme přímo pozorovat menší předměty nebo jejich části, než které dokážeme změřit mikrometrem! Naše oči zkrátka „nevidí" kratší vlnové délky elektromagnetického záření než je 0,53 mikrometru.

Dosáhnout většího zvětšení nám umožnily až poznatky moderní fyziky. Teorie francouzského fyzika *Luise de Broglieho* z roku 1924 o vlnové povaze částic se ukázala jako správná. K prozkoumávání předmětů můžeme využívat částice, kterým přísluší vlnová délka podstatně kratší než je vlnová délka viditelného světla. Podle toho, které částice používáme, rozeznáváme mikroskopy elektronové nebo iontové. I když se již v iontovém mikroskopu podařilo dosáhnout až 300 tisícinásobného zvětšení, při kterém se již jednotlivé atomy zobrazují jako body, tak ani zde nemůžeme očekávat zcela libovolně velké zvětšení. Omezují nás zde zase jiné zákonitosti mikrosvěta.

A tak raději vždy, když si řeknete „STAČÍ CHTÍT", vzpomeňte na zvětšení optického mikroskopu a uvažte, zda neexistují (a dokonce nejsou už dávno známé) nějaké omezující podmínky.

Fyzika v prírode — čo môže stať turistu kilojoule

EVA BITTNEROVÁ, ÚDPM KG Bratislava

Ľudstvo si vydobíja svoje miesto v prírode pomocou techniky. Občas sa tomu hovorove hovorí, že technika je nástroj človeka, ktorým si podmaňuje prírodu. V tomto článku si povieme niekoľko zaujímavostí o dnes už raritných dopravných prostriedkoch, ktoré sa pred sto rokmi stávali symbolom technického víťazstva nad prírodou. Vypočítame si, čo môže stať turistu kilojoule.

V horských oblastiach si tu a tam železnice vypomáhajú ozubnicou. Podľa približných dohadov je dnes na svete asi 500 km traťových úsekov a krátkych vysokohorských tratí s veľkým stúpaním, po ktorých premávajú lokomotívy, alebo dopravné jednotky, vybavené pomocným ozubením, t. zv. ozubnicové dráhy, alebo jednoducho zubačky. Hladké kolesá moderných lokomotív, ťahajúce ťažké vlakové súpravy, sa začínajú prekĺzovať, keď stúpanie trate presiahne 6 %. S ohľadom na bez-

pečnosť železničnej dopravy sa na hlavných tratiach nepripúšťa stúpanie nad 2,5 %. Vedľajšie trate sa stavajú so stúpaním nie väčším ako 4 %.

Ozubené súkolia a ozubené prevody sú známe z 5. storočia pr. n. l. Sám uznávaný tvorca prvných lokomotív, Angličan *George Stephenson* (1781—1848) dlho neveril, že by ťažké stroje mohli hladkými, tuhými kolesami vyjsť po kovových koľajniciach do väčšieho stúpania. Predstava „zubačiek" bola ľuďom bližšia, ako dnes široko rozvinuté trate s hladkými koľajnicami. Nevýhodou zubačiek je malá maximálna rýchlosť, prednosťou je ich stúpavosť. Za najstrmšiu sa pokladá zubačka, premávajúca vo švajčiarskom horstve Pilatus pri Vierwaldstättskom jazere. Budovali ju pred sto rokmi. Trasu pre koľaje s výškovým rozdielom 1628 viedli čtyrmi strmo razenými tunelmi. Denne položili 10 m koľají.

V roku 1940 boli parné motorové vozy tohoto technického unikátu nahradené elektrickými. Dnešné vozy s pantografom na streche a šikmo skosenými čelami dorazia na vrcholovú stanicu Pilatus—Kulm v nadmorskej výške 2068 m za necelú polhodinu. Výškový rekord ozubnicových dráh v Európe drží dráha na Jungfraujoch (3454 m n. m.). Zaujímavá je konečná stanica tejto dráhy. Umiestnená je v upravenej skalnej jaskyni. Okrem stanice je do skalného podzemia vytesaná pošta, hotel s reštauráciou. Trať je dlhá 9336 m s výškovým rozdielom vyše dvoch kilometrov. Otvorená bola v roku 1912. V súčasnosti desať elektrických dvojvozňových súprav prepraví ročne niečo cez pol milióna cestujúcich. Dráha má aj jednu sympatickú pozornosť: denne zváža jeden vagón odpadu a smetí do spaľovne pri údolnej stanici.

Ozubnicové trate sú ako atrakcie vo Veľkej Británii, v Pakistáne, Indii, Japonsku, na Sumatre, v Chile a v Spojených štátoch, kde v Skalistých horách na Pike's Peaku má zubačka svetový výškový rekord 4312 m n. m. Táto vyhliadková 15 kilometrová dráha má v priemere 25 % stúpania a dopravuje turistov do pohoria, v ktorom mali lovištia legendárni Cheyenni.

Na zubačky nebola chudobná ani naša vlasť. Prvá zubačka bola na našom území vybudovaná v roku 1896, a to na Slovensku medzi Tisovcom a Pohronskou Polhorou. Kořenovská dráha vznikla roku 1902 a viedla cez Jizerské hory na poľskú stranu do Jelení Góry. Kořenovská zmiešaná trať bola v rokoch 1958—62 rekonštruovaná. Na ozubnicovom úseku premávajú súpravy rýchlosťou 20 km . h^{-1}, v adhéznych úsekoch dosahujú rýchlosť 50 km . h^{-1}. Po rekonštrukcii dosahuje trať na okraj Harrachova. Veľký záujem a volanie po predĺžení trate do centra harrachovského športového areálu dávajú nádej, že sláva už osemdesiatročnej Kořenovskej zubačky potrvá i naďalej. Posledná zubačka sveta bola vybudovaná u nás. Do prevádzky ju dali z príležitosti Majstrovstvá sveta v Tatrách v roku 1970. Jej trať vedie takmer presne miestami, ktorými premávala tatranská zubačka zo Štrby na Štrbské Pleso v období 1896 až 1932. Na trati je stúpanie aj 15 %. Premávajú po nej dve dvoj-

dielne súpravy, z ktorých každá pojme 250 cestujúcich. Medzi oboma konenčými stanicami je výškový rozdiel 400 m a vzdialenosť 5 km. Plne naložená súprava ju prekoná smerom nahor za 14 minút. Dole sa spúšťa 18 minút. Pritom sa stačí zastaviť v medzistanici Tatranský Lieskovec, 954 m n. m. Jedna jazda smerom hore stojí dospelého 7 Kčs.

Štrnásť minút stúpania tatranskej zubačky nám postačí na zodpovedanie napríklad takýchto otázok: Aký minimálny výkon musí mať hnacia jednotka našej súpravy, aby splnila požiadavky cestovného poriadku? Aku prácu naviac vykoná zubačka, teď Ťa, milý mladý priateľ, vyvezie zo Štrby na Štrbské Pleso? Koľko zaplatíš ČSD za kilojoule tejto práce? Je lacnejšia energia, ktorú by si vynaložil pri zdolanie tejto cesty pešo?

Samozrejme máme na pamäti, že robíme fyziku v prírode. Preto nebudeme robiť žiadne veľké počty a využijeme len základné poznatky z fyziky. Veď otázky sme si položili len tak pre skrátenie chvíle a odpovede na ne hľadáme len tak pre pobavenie.

Hnacia jednotka môže byť aj predimenzovaná. No určite musí mať výkon, ktorý jej dovolí, povedzme za 700 s (zvyšných 140 s možno stojí v Tatranskom Lieskovci) vystúpať v normálnom gravitačnom poli ($g = 10\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$) o 400 m s plným nákladom, ktorý odhadneme podľa maximálneho počtu cestujúcich (nabalených) na $25\,.\,10^3$ kg. Hmotnosť prázdnej súpravy je $45\,.\,10^3$ kg. Spomínajme: Výkon je práca, vykonaná za čas

$$W = A\,.\,T^{-1}\,,$$

práca je súčin sily a dráhy

$$A = F\,.\,L\,,$$

sila je daná druhým Newtonovým zákonom

$$F = m\,.\,a\,.$$

V našom prípade sme maximálnu hmotnosť (m) odhadli, zrýchlenie (a) sme prijali rovné $g = 10\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$, dráha vykonaná proti silám gravitačného poľa nie je, ako vieme, vzdialenosť oboch konečných, ale ich výškový rozdiel, no a čas sme si zvolili tak, aby sa v medzizastávke pohodlne nastupovalo a aby súprava vyhovela cestovnému poriadku. Jednotlivé hodnoty dosadíme do vzorca:

$$W = m\,.\,a\,.\,h\,.\,T^{-1}$$
$$W = 70\,000\,.\,10\,.\,400\,.\,700^{-1} \quad \mathrm{kg\,.\,m^2\,.\,s^{-3}}$$
$$W = 400\ \mathrm{kW}$$

Výkon hnacej jednotky nesmie byť menší ako 400 kW. Len s takýmto výkonom je schopná splniť za ideálnych podmienok limity cestovného poriadku. Neuvážili sme odpor vzduchu, vplyv vetra a trenia všetkého druhu. Museli sme tak urobiť, lebo na podrobnejšie úvahy nám stúpajúca zubačka nedáva čas, preto rýchlo postúpme ku druhej otázke. Možno máš, milý mladý čitateľ, aj s chlebníkom s desiatou, hmotnosť práve

RADIOTELEGRAFIE (v. *radio-*[2] a *telegrafie*) — telegrafické spojení uskutečněné pomocí rádiových, elektromagnetických vln; bezdrátová telegrafie

RADIOTELEKOMUNIKACE (v. *radio-*[2] a *telekomunikace*) — spojení na dálku pomocí rádiových, elektromagnetických vln

RADIOTELESKOP (v. *radio-*[2] a *teleskop*) — rádiový dalekohled; anténa nebo systém antén k zachycování rádiových vln z kosmického prostoru

RADIUS (z lat. *radius* = hůlka, loukoť kola, paprsek) — „paprsek"; „dosah paprsku"; hranice působnosti kolem jistého pevného bodu (středu); srov.: akční rádius letadla — krajní mez doletu letadla bez doplňování pohonných hmot. Pozn.: Slovo „*radius*" = loukoť pro podobnost s narýsovanou kružnicí a jejími poloměry nabylo už v klasické latině význam „poloměr". Význam „paprsek" pak ovlivnil další významový vývoj. V. t. radiace, radiační, radiální, radiála, radián, radiant, radiátor; steradián; rádio, radio-

RE- (z lat. předpony *re-* mající význam „zpět") — předpona s významem „opětování, opakování, návrat zpět, znova, opět; zmenšení činnosti"; v. reagovat, receptor, reciprocita, redukce, redundance, reemise, rekurentní, relace, respektive, restituce, reziduum, rezistence, rezonance. *Pozn.*: Předpona re- je velmi častá, ale (pozor!) není předponou ve slovech realizace, regulace, rektascenze, rentgeno-, reostat, retikulární, retrográdní.

REAGOVAT (slož. z lat. *re-*, v. t. + *ago*, *-ere*, ptc. pf. *actus* = hnát, dělat; v. akce) — odpovídat na vnější popud nebo podnět; projevovat odezvu; v chemii: podléhat chemické změně — reakci.

REAKCE (v. akce) — čin, projev, stav apod. jako odezva na nějaký popud nebo podnět; ve fyzice: síla opačného smyslu a stejné velikosti jako síla, která ji vyvolala; jaderná reakce — pochod, při němž bombardováním jádra určitými částicemi vzniká nové jádro a nová částice; v chemii: děj, při kterém dochází působením jiné látky, teploty apod. ke změnám látkového složení hmoty

REAKTIVITA (v. aktivita) — zpětné působení; schopnost reagovat; reaktivnost

REAKTIVNÍ (v. aktivní) — 1. reagující na něco, schopný reagovat (např. reaktivní pohyb); 2. založený na reakci, využívající reakce (např. reaktivní motor — založený na principu reaktivní síly, na základě fyzikálního zákona akce a reakce)

REAKTOR (v. -or) — zařízení, „které působí zvrat, štěpení", zařízení na štěpení jaderného paliva

REALIZACE (slož. z latiniz. *realis* = věcný; od *res* = věc, předmět + + *-isatio*; v. -izace) — uskutečnění; REALIZOVAT — uskutečňovat; REÁLNÍ (dnes už zastaralé) = reálný; REÁLNÝ — skutečně existu-

 jící, skutečný, hmotný; hledící ke skutečnosti, vycházející ze skutečnosti, věcný, uskutečnítelný

RECEPTOR (z lat. *receptor*; od *recipio*, *-ere*, ptc. pf. *receptus*; slož. z *re-* = nazpět; v. *re-* + *capio*. -ere = brát, chytat; v. akceptor + -or, v. t.) — „zachycovač"; osoba něco přijímající, příjemce; technické zařízení nebo tělesný orgán přijímající nějaký podnět; přijímač, čidlo

RECIPROCITA (od lat. *reciprocus*; slož. z *re-* = zpět; v. *re-* + pro — zde ve významu „vpřed"; v. pro[1]) — vzájemnost, vzájemný vztah; RECIPROČNÍ — založený na zásadě vzájemnosti; vzájemný, vzájemně závislý, navzájem související, obrácený; RECIPROKÝ — „směřující vpřed i vzad"; „vracející se k východišti"; vzájemný, vzájemně závislý, převrácený,; např. RECIPROKÁ hodnota čísla — převrácená hodnota vyjádřená zlomkem, v jehož čitateli je jmenovatel a ve jmenovateli čitatel čísla původního (čitatel a jmenovatel jsou „vzájemně prohozeny, převráceny").

REDUKCE (z lat. *reductio*; od *reduco*, *-ere*, ptc. pf. *reductus*; slož. z *re-* = zpět; v. *re-* + *duco*, *-ere* = táhnout, vést; v. indukce) — „vedení nazpět", „stažení nazpět, odtažení"; snížení, omezení, zmenšení (počtu, rozměru, výkonu); zjednodušení; převedení na menší hodnoty; ve fyzice: převedení změřené veličiny na hodnotu, jakou by měla za normálních podmínek

REDUKČNÍ — týkající se redukce, způsobující redukci. Ve fyzice: REDUKČNÍ činitel — číslo, kterým se provádí redukce veličiny; REDUKČNÍ clona — clona propouštějící jen část světelného toku; REDUKOVAT — provádět redukci; REDUKOVANÝ tvar rovnice — zjednodušený; REDUKTOR (v. -or) — přístroj nebo zařízení, kterým se provádí redukce tlaku, teploty, rychlosti apod.

REDUNDANCE (z lat. *redundantia*; od *redundo*, *-are*, ptc. préz. *redundans*, *-antis* = přetékat; slož. z *re-* — zde ve významu „opakování", v. *re-* + *undo*, *-are*; od *unda* = voda, vlna; v. undulační) — „přetékání, stálé proudění"; nadbytečnost

REEMISE (slož. z lat. *re-* = opět, znova; v. *re-* + *emissio* = vypuštění; v. emise) — „opětné vypuštění"; opětné vyzáření, stálé vyzařování

REFERENCE (od lat. *refero*, *referre*, ptc. préz. *referens*, *-entis*; slož. z *re-* = zpět, opět; v. *re-* + *fero*, *ferre* = nosit, nést; v. diference) — „opětné přinášení tj. zprávy"; ústní nebo písemná zpráva, dobrozdání, doporučení, posudek; REFERENČNÍ — 1. doporučující, informující; např. referenční vzorek — posílaný na ukázku zákazníkovi (má „doporučovat" nabízené zboží). 2. doporučený, doporučovaný; REFERENČNÍ tón — základní tón, jehož absolutní výška byla stanovena („doporučena") mezinárodní dohodou; REFERENČNÍ elipsoid — — rotační plocha, které se používá při zobrazování zemského povrchu místo plochy geoidu (pro tuto metodu byl elipsoid „doporučen" pro svou podobnost s geoidem pokud jde o tvar, velikost a polohu; nej-

lépe geoidu „odpovídá"); REFERENTNÍ — „opět, zpět přinášející„

REFLEKTOR (od lat. *reflecto, -ere*; slož. z *re-* = zpět, nazpět; v. *re-* + + *flecto, -ere* = ohýbat, obracet; v. reflex; v. t. -or) — přístroj, který „nazpět ohýbá, obrací" světelné paprsky; osvětlovací zařízení soustřeďující světlo do určitého bodu pomocí odrazu; přístroj k odrážení světla, světlomet

REFLEX (z lat. *reflexus*; slož. z *re-* = zpět; v. *re-* + *flecto, -ere*, ptc. pf. *flexus* = ohýbat, obracet) — „ohnutí nazpět"; bezděčná reakce („otočení se") na nějaký popud; ve fyzice: odraz světla; odražené světelné paprsky; odraz, odlesk

REFLEXE (z lat. *reflexio*) — 1. přemýšlení, přemítání („myšlenky se různě vracejí") 2. ve fyzice: odraz jakýchkoli paprsků, které se při dopadu „ohnou nazpět"; totální REFLEXE — úplný odraz

REFLEXIVITA — odrazová schopnost

REFLEXÍVNÍ — 1. souvisící s reflexí, na reflexi založený, přemítavý 2. souvisící s reflexem, založený na reflexu, mimovolný, bezděčný, neuvědomělý

REFLEXNÍ (příd. jméno k „reflexe i k „reflex") — reflexní pohyb (= reflexívní) — neuvědomělý, mimovolný; reflexní koeficient — udávající poměr mezi intenzitou odraženého záření a intenzitou dopadajícího záření

REFRAKCE (slož. z lat. *re-* = zpět, nazpět; v. *re-* + *fractio*; od *frango, -ere*, ptc. pf. *fractus* = lámat; v. frakce) — „zlom směrem zpátečním"; zlom, změna směru, lom světelných paprsků, zvukových vln apod.; astronomická refrakce — situace, kdy se světlo v atmosféře láme a vzniká úchylka světelného paprsku; REFRAKČNÍ vady — způsobené úchylkami lomu světelných paprsků

REFRAKTOMETR (řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — přístroj na měření indexu lomu (světla) pevných látek a kapalin

REFRAKTOR (v. -or) — čočkový dalekohled; součást svítícího zařízení pro usměrnění světelných paprsků požadovaným způsobem

REGELACE (z lat. *regelatio*, od *regelo, -are*, ptc. pf. *regelatus*; slož. z *re-* = opět, znova; v. *re-* + *gelo, -are* = zmrazit; od *gel* = led, mráz) — znovuzmrazení

REGULOVAT (z lat. *regulo, -are* = řídit, upravovat; od *regula* = pravítko, a to od *rego, -ere* = řídit, vést; v. korekce) — upravovat, řídit, určitým způsobem usměrňovat; uvádět do náležitého, pravidelného, žádaného stavu a v něm udržovat; REGULACE — usměrňování, řízení; stavební úprava vodního toku a jeho břehů („usměrňování toku"; REGULAČNÍ; REGULÁTOR (v. -or) — zařízení, které něco reguluje; např. regulátor tlaku — zařízení k udržování neměnného tlaku v potrubí a soustrojí

REKAPITULACE (od lat. *recapitulo, -are*, ptc. pf. *recapitulatus*; slož. z *re-* = opět, znova; v. *re-* + *capitulum*, zdrobnělina od *caput, -itis* =

= hlava, hlavní část knihy, kapitola; srov. KAPITULACE — „sepsání hlavních bodů o vydání města, pevnosti apod.“) — „znovu proběhnout jednotlivé kapitoly“; shrnutí hlavních bodů; v. t. precipitace

REKOMBINACE (slož. z *re-* = opět, znova; v. *re-* + *kombinace*, v. t.) — opětné spojování; zpětné sloučení iontů v neutrální molekuly

REKTASCENZE (z lat. *ascensio recta* = vystoupení přímé; od *scando*, *-ere*, ptc. pf. *scansus* = stoupat; v. transcendentní a od *rectus* = rovný, přímý, správný, dobrý) — hvězdná souřadnice zdávající polohu hvězdy („v jakém úhlu vystoupila“). Pozn.: S lat. *rectus* = rovný, přímý souvisí matematický termín REKTIFIKACE — napřímení, „udělat rovným“; rektifikace kružnice

REKURENTNÍ (slož. z lat. *re-* = nazpět, znova; v. *re-* + *curro*, *-ere*, ptc. préz. *currens*, *-entis* = běžet; srov. KURS — běh) — „běžící nazpět“, „běžící znovu“; rekurentní zadání posloupnosti — člen posloupnosti určíme, „odběhneme-li nazpět“, „vrátíme-li se“ k jednomu nebo několika členům předchozím; ve fyzice: rekurentní nova — hvězda, u níž byla pozorována alespoň dvě vzplanutí („znova přiběhla na oblohu“)

RELACE (z lat. *relatio*; od *referro*, *-ferre*, ptc. pf. *relatus*; slož. z *re-* = zpět, znova, v. *re-* + *fero*, *ferre* = nosit, nést; v. diference a -lace) — „nošení zpět, odnášení, opětné nesení“; podávání zprávy, zpráva, hlášení, vysílání, pořad; vztah, poměr; v. t. korelace; RELATIVITA (lat. relativus = vztahující se na něco) — vztah dvou nebo více věcí, jevů; ve fyzice: vztah fyzikálních dějů pozorovaných v různých vztažných soustavách; teorie relativity — zabývá se základními matematickofyzikálními pojmy (jako je čas, prostor, délka, pohyb) z hlediska jejich vzájemné podmíněnosti a jejich vzájemných vztahů. RELATIVNÍ — jsoucí ve vztahu k něčemu, poměrný, podmíněný, vzájemný; „relativní“ nevyjadřuje stav skutečný, absolutní, ale stav posuzovaný vždy v nějakém poměru, vztahu (relativní hodnota — poměrná; relativní metoda — srovnávací).

RELAXACE (z lat. *relaxatio*; od *relaxo*, *-are*, ptc. pf. *relaxatus*; slož. z *re-* = zpět, znova; v. *re-* + *laxo*, *-are* = uvolňovat, povolovat) — uvolnění, povolení; v lékařství: uvolnění svalů, ochablost svalů; ve fyzice: pokles napětí v tělese dlouhodobě namáhaném; zpoždění fyzikálního děje vnějším popudem; např. dopružování; když náhle odstraníme vnější sílu, která prodloužila kaučukovou tyč, nezmizí ihned celé prodloužení, ale jisté malé prodloužení zbývá. To zmizí úplně až časem — „zkrácení se opozdilo“; doba k tomu potřebná je doba RELAXAČNÍ („uvolňující, zvolňující“).

RELIKT (z lat. *relictus*, ptc. pf. od *relinquo*, *-ere* = zanechat, zůstavit; srov. RELIKVIE — ostatky) — pozůstatek, zbytek; RELIKTNÍ; RELIKTOVÉ záření — jakýsi „šum“, který není zářením vesmírných

50 kg. Potom tým, že ťa zubačka vyviezla zo Štrby na Štrbské Pleso, vykonala naviac prácu

$$A = m \,.\, a \,.\, h \,,$$

teda $A = 50 \,.\, 10 \,.\, 400 \quad \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^2 \,.\, \mathrm{s}^{-3} \,,$

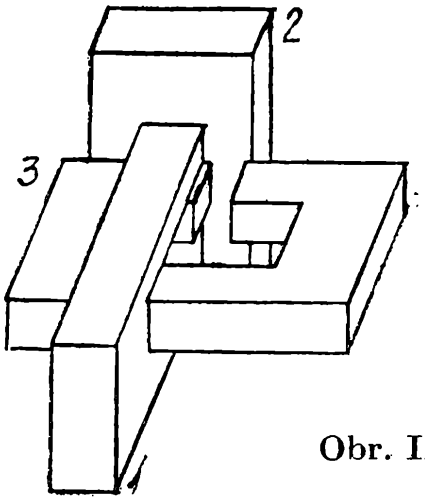
čo je $A = 200 \ \mathrm{kJ} \,.$

Tvojím vyvezením súprava vykonala prácu 200 kJ. Neplatil si zľavné cestovné, a tak si za túto prácu vyplatil ČSD 7,— Kčs, teda za každý kilojoule 3,5 haliera. Ak máš vyššiu hmotnosť, ako sme uvažovali, si na tom lepšie. Možno budeš mať niekedy čas a graficky si zobrazíš, ako bude v závislosti od tvojho budúceho telesného rozvoja táto práca pre teba lacnieť.

Neviem, milý čitateľ, čo najradšej pri turistike ješ. Preto si myslíme, že si pred pešou túrou zo Štrby na Štrbské Pleso v celkom príjemnom letnom predpoludní zjedol slaninku, chlieb so zeleninou. Všetko si to zapil osviežujúcim citrónovým čajom a zajedol čokoládou. Po ceste dobre ti padli dve jablká. Patríš medzi dospievajúcich chlapcov, o ktorých sa vie, že pri telesnej námahe, akou túra, na ktorú si sa vydal, je, spotrebuješ denne 15 000 kJ energie (dievčatám stačí 11 300 kJ). Vykračuješ si rezko, cesta ti potrvá asi hodinu a vedie stále nahor. Z fyzikálneho hľadiska si vykonal po príchode na zastávku zubačky pod Štrbským Plesom, prácu, ako zubačka, tým, že by ťa viezla. Vydal si preto 200 kJ energie, ktorú si získal raňajkami na Štrbe. Keď zisťujeme v knihách o zdravej výžive (alebo aj z maminej kuchárskej knihe), zistíme, že si sa obohatil o 6000 kJ, keď si zjedol 99 g slaniny za 2 Kčs (3021 kJ), 50 g chleba (0,20 Kčs, 500 kJ), 120 g sviežej zeleniny (1,20 Kčs, 110 kJ), 0,2 l čaju (1,80 Kčs, 300 kJ), 80 g čokolády (8 Kčs, 1859 kJ) a 100 g jabĺk (0,80 Kčs, 210 kJ). Táto energia, prijatá potravou, ťa stála 14 Kčs, teda jeden kilojoule ťa stál 0,233 haliera. Pohodlné využitie techniky v tomto prípade 15krát preplácaš. Na druhej strane ti však technika šetrí čas, v prípade potreby zdravie a ušetrenú energiu môžeš často účelnejšie využiť.

Řešení trojdílného hlavolamu ze str. 30

První díl nasuneme na třetí (podle obr. III) a druhý potom na první tak, aby zúžení za výřezem „a“ směřovalo proti výřezu „c“ na třetím dílu. Díly dotlačíme na jejich místo, aby vzniklo požadované těleso.



Obr. III

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Před 30 lety zemřel Fréderik Joliot-Curie

PaedDr. FRANTIŠEK JÁCHIM, Základní škola, Volyně

Své vědecké krédo vyjádřil Fréderic Joliot-Curie (19. 3. 1900—14. 8. 1958) v časopise La Nef (č. 2, 1957) ve stati Několik úvah o významu vědy pro lidstvo takto: „Věda — a to je jejím nejkrásnějším přívlastkem — je základním prvkem spojujícím myšlenky lidí, roztroušených po celém světě. Pokud vím, neexistuje jiný obor lidské činnosti, kde by bylo možno se shodnout se stejnou jistotou . . . Přes vážné chyby, kterých se člověk dopouští, jsem přesvědčen, jako Pierre Curie, že každý nový úspěch vědy přinese nakonec více dobra než zla."

Rok nato Fréderic Joliot-Curie umírá. Zanechal za sebou velkolepé vědecké dílo.

1. Počátky

Když v říjnu 1925 vstoupil *Frédéric Joliot* s doporučujícím dopisem prof. Langevina do pařížského Institute du Radium, Pavilon Curie, měl za sebou první část maturity na Lakanalově lyceu (1917), studium na Vysoké škole průmyslové fyziky a chemie a několik měsíců práce v továrně Arbed v lucemburském městě Esch sur Alzette. Co hledal inženýr ve středisku základního výzkumu radioaktivity? Ve vědě jej vždy přitahovala experimentální práce. Byl velmi zručným a nápaditým technikem. A tak s Langevinovým doporučením nastupuje budoucí nositel Nobelovy ceny u madame Curie. Jeho první pracovní zařazení je preparátor. Dobře věděl, že jeho průprava pro vědeckou práci je nedostatečná nejen fakticky, nýbrž i formálně. Teprve ve svých 25 letech skládá druhou část maturity a v roce 1930 se stává doktorem přírodních věd. Nejde však ani o vysvědčení ani o tituly. Protože u „patronky Curie" se pracuje na radioaktivitě, musí se Joliot učit především z jejího díla — studuje rozsáhlé dílo Traité de Radiactivité, které má 971 stran. Technické vzdělání Joliota nepřišlo vůbec vniveč. V laboratoři se uvedl velmi dobře přípravou vysokoohmových odporů k ionizačním komorám. Zejména technologie nástřiku tenkých kovových vrstev na izolant se ukázala jako velmi perspektivní. Jeho disertační prací byla elektrochemie polonia, zejména vylučování polonia na kovových elektrodách účinkem elektrického proudu. Zvládl techniku měření velmi malých proudů pomocí elektrometru. Ionizační proudy způsobené radioaktivitou

látek vyvolávají rozdíl potenciálů, který je proudu úměrný. Rozdíl potenciálů byl daleko snáze měřitelný než přímé měření proudu. Nezapomeňme, že v této době byl hlavním přístrojem v rukou fyziků zabývajících se radioaktivitou elektrometr. Uvedené metody použil Frédéric Joliot i při studiu neradioaktivních látek. Okénka, na kterých je nanesena kovová elektroda, jsou průsvitná, prvek na nich vyloučený je činí méně průsvitnými. Nahradil tedy ionizační komůrku fotočlánkem a měřil intenzitu světla. Tím mohl studovat elektrochemické vlastnosti prvků ve velmi malé koncentraci (10^{-4} až $10^{-6}/5$ cm^3 elektrolytu).

Do slavné rodiny vstupuje 4. října 1926 sňatkem s dcerou Marie a Petra Curieových Irenou. Do vědeckého života vstupuje tímto *Frédéric Joliot-Curie*. Zůstanou Irena a Frédéric „malými dětmi velkých rodičů"? Co chtějí na poli radioaktivity ještě dokázat? Vždyť se zdá, že svět již vše zná.

2. Velké objevy

Již několikrát se v historickém vývoji vědy stalo, že zdání ukončeného poznání v některém vědním oboru bylo jen klidem před bouří. V takové situaci se nacházela radioaktivita na počátku třicátých let. Musíme zdůraznit, že Irena a Frédéric byli výborní experimentátoři a řadě svých vědeckých výsledků vděčí příkladné důslednosti ve své práci. Pokus byl pro ně alfou a omegou celé vědecké činnosti. Frédéric svým technickým vzděláním vnášel do práce konstrukční vynalézavost a nápaditost. Postavil např. Wilsonovu komoru umožňující 76 krát větší zředění, zdokonalil Hoffmannův elektrometr pro měření proudů až do hodnot 10^{-15} A apod.

V roce 1930 si němečtí fyzikové W. Bothe a H. Becker povšimli, že emisi *částic alfa* z polonia doprovází záření, které závisí na typu podložky, na niž částice alfa dopadají. Joliot-Curieovi toto záření pozorovali také. Jeho energetickou hodnotu odhadli na 14 MeV. Jak Bothe s Beckerem, tak i Curieovi při pokusu o vysvětlení se drželi teze o elektromagnetické povaze záření. Bývá to už někdy ve vědě, že myšlenku je třeba v zájmu poznání rychle opustit. Právě na tomto záření se ukázalo, že výchozí teze byla brzdou jeho správného vyhodnocení. Vysvětlit, jak nové — dosud *gama záření* — vzniká, se touto cestou nepodařilo.

Protože Joliot-Curieovi publikovali rychle, aby na jejich problémech mohl pracovat kdokoli, stává se neobvyklé záření předmětem zájmu v Anglii. James Chadwick, nezatížen „hypotézou gama", zkoušel teorii neutrální částice. Podařilo se mu skutečně neutron objevit. Dostal za něj Nobelovu cenu.

Roku 1932 se podařilo najít v kosmickém záření *pozitron*, předpověděný P. Diracem v roce 1928. Protože i Irena a Fréderic pozorovali ve Wilsonově komoře částice zakřivené magnetickým polem obráceně než elektrony

a protože žádný výsledek pokusů nenechávali bez pozornosti, pustili se do hledání důkazu, že mají před sebou skutečně pozitron. Kde však je jejich zdroj? A jaká je příčina jejich vzniku? To byly dvě hlavní otázky, na které bylo třeba najít odpověď. Jako zdroj pozitronů sloužila hliníková destička se slabou vrstvou polonia. Byla-li navrch ještě další vrstvička hliníku, tok pozitronů rostl. Vše nasvědčovalo tomu, že zdrojem pozitronů je hliník, avšak musí být „živen" zářením alfa z polonia. Po mnoha pokusech, měřeních a úvahách dospěli k následujícímu schématu přeměny

$$^{4}_{2}\alpha + ^{27}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow ^{30}_{15}\mathrm{P} + ^{1}_{0}\mathrm{n}\,, \qquad (1)$$

$$^{30}_{15}\mathrm{P} \longrightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si} + \mathrm{e}^{+} \qquad (2)$$

První rovnice říká, že při ozařování hliníku částicí alfa se vytvoří atom fosforu a vyzáří se neutron. Daleko zajímavější byla rovnice druhá. Bez jakéhokoli zásahu (tedy po oddálení zdroje alfa částic) dojde k přeměně atomu fosforu na atom křemíku a vyzáří se pozitron. Že jde o radioaktivitu nebylo pochyb, ale o radioaktivitu umělou. Své sdělení pod názvem *Nový typ radioaktivity* zasílají manželé 15. ledna 1934 Akademii věd.

V listopadu téhož roku přišel do Paříže telegram: DD Stockholm 2017 46 2339 Northem CTF: Mám čest vám sdělit, že Švédská akademie věd udělila Nobelovu cenu za chemii pro rok 1935 vám a paní Curie-Joliot. Podepsán Pleijel, sekretář. Dvojnásobná nositelka Nobelovy ceny Marie Curie se však Nobelovy ceny své dcery a zetě nedožila, ve stejném roce umírá. Čtenáře patrně napadne, proč cena zrovna za chemii? Především musíme říci, že radioaktivita byla oborem mezním. Těžko stanovit, které pokusy byly chemickými a které fyzikálními. Konečně prokázat prvky vzniknuvší rozpadem bylo nutno cestou chemickou. Hlavní význam objevu tkvěl především v odhalení existence radioizotopů stabilních prvků i metody jejich laboratorní přípravy. O tom, jaké dominantní postavení ve vědě měla radioaktivita, svědčí i stockholmské setkání: Nobelovu cenu za fyziku pro stejný rok přijal objevitel neutronu Chadwick.

Neutron se vůbec ukázal jako velmi účinná „dělová koule". Částice poměrně těžká a ke všemu bez náboje pronikala do jader poměrně snadno. Proto se stal prodlouženou rukou vědců při zkoumání jader. Když se vědecký svět seznámil s Fermiho paradoxním objevem, že do jádra atomu snáze proniknou pomalejší neutrony než rychlé, byla tu tři fakta:

1. Neutron proniknuvší do atomového jádra rozštěpí je na dva lehčí fragmenty.
2. Přitom se uvolní dosti velká energie.
3. Fragmenty původního jádra budou mít nadbytek neutronů a budou se jich chtít zbavit.

Joliot se spolupracovníky H. Halbanem a L. Kowarským se pouští do hledání počtu uvolněných neutronů. Stať *Uvolnění neutronů při jaderném výbuchu uranu* od těchto tří autorů v anglickém časopise Nature z 8. března 1939 referuje o možnosti řetězové reakce v případě, že se uvolní více než jeden neutron. Následuje další sdělení z dubna 1939, v němž se tvrdí, že neutronů bude uvolněno průměrně 3,5. Cesta k řetězové reakci — a v duchu Joliotovy práce k mírové atomové energii — byla otevřena.

3. Zoe — první francouzský atomový reaktor

Joliot-Curie soustředil kolem sebe kvalitní tým spolupracovníků a v pevnosti Chatillonu začal uskutečňovat svůj program rozvoje atomové energie. Organizačně byla práce spojena s činností Collège de France, Laboratoří atomové syntézy v Ivry i Radiového institutu. Vědecký tým zvládl přípravu čistého oxidu uraničitého i technologii výroby reaktorové nádoby. Jako moderátor byla užita těžká voda. Ke konci roku 1948 byl reaktor spuštěn. Jmenoval se Zoe a podával nulový výkon, udržoval v chodu pouze sám sebe. Zastavme se trochu u jeho názvu: „Z ze slova zéro = nula, „o" oxyde d'uranium = palivo, „e" eau lourd = těžká voda. Zoe však také v řečtině znamená život.

4. Závěr

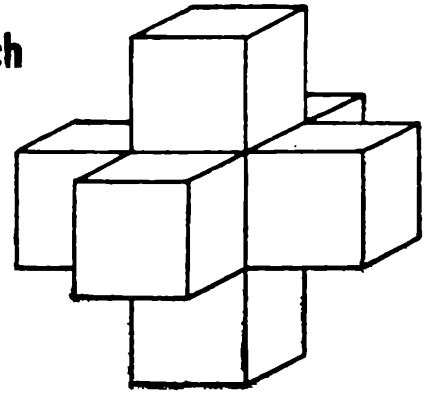
Osobnost Frédérica Joliota-Curie je ve vědě osobností zcela mimořádnou. Vědecká erudice, smysl pro badatelskou techniku, osobní vlastnosti i pracovní elán — to vše činilo z nositele Nobelovy ceny a mnoha dalších cen, medailí, uznání a poct vůdčí osobnost francouzské, ale i světové vědy. Kromě vlastní vědecké práce vyvíjel vždy i mimořádné úsilí, aby vědeckých výsledků nebylo zneužito. Pokud čtenáře hlouběji zajímá vědcova politická činnost, vřele mu doporučuji k přečtení knihu *Michela Rouzého* Frédéric Joliot-Curie, Praha 1951, popř. stejnojmenné knihy *Čestmíra Šimáně* (Praha 1980) a *Františka Běhounka* (Praha 1965). Oba naši vědci se s rodinou Curie velmi dobře znali, neboť v Pavilonu Curie pracovali.

Rešení problému o sedmi hracích kostkách ze str. 31

a) K jedné z kostek je přilepeno zbývajících šest kostek (viz obr. 1).

b) 105

c) 120, 90



Obr. 1

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Od letošního ročníku zavádíme v Rozhledech nový oddíl každého čísla nazvaný Z matematiky a fyziky základní školy. Je určen především žákům navštěvujícím základní školu s rozšířeným vyučováním matematice a přírodovědným předmětům. Jako první otiskujeme úlohy pro žáky pátého ročníku základní školy; na Slovensku jsou úlohami matematické olympiády.

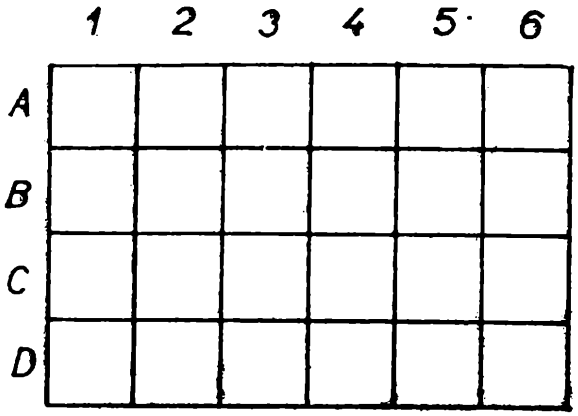
Úlohy pro žáky 5. ročníků

1. V zápise

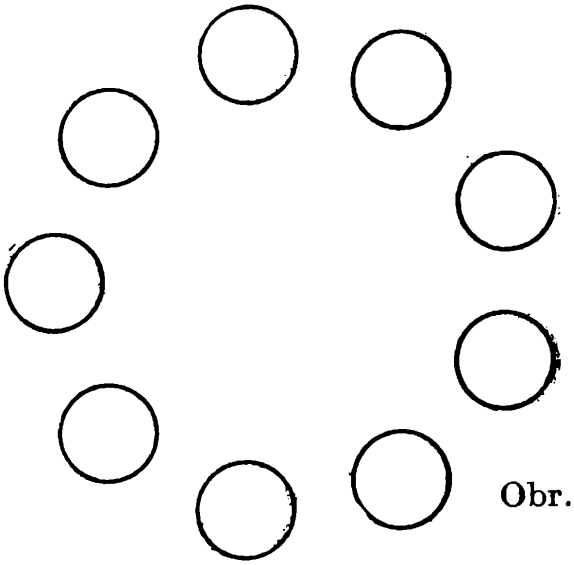
$$\begin{array}{cccc} & 9 & 6 & 5 \\ & 6 & 7 & 4 \\ & 8 & 6 & 6 \\ & 7 & 9 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

nahraďte některé číslice jednotkou tak, aby byl součet správně. Najděte všechna řešení.

2. Kolik je na obrázku 1 pravoúhelníků?



Obr. 1



Obr. 2

Kolik z nich obsahuje pole C2?
Kterých pravoúhelníků je více, těch, které obsahují pole C2, nebo těch, které obsahují pole B3?

3. Máme 100 shodných krychlí o hranách dlouhých 1 cm. Kolik různých kvádrů z nich můžete sestavit, jestliže použijete vždy všechny krychle?
4. Na jistém ostrově je 7 měst. Spojaři měli spojit tato města kabely tak,

aby se dalo z každého města telefonovat do všech ostatních měst. (Jestliže se dá telefonovat z A do B a z B do C, je možno telefonovat i z A do C.) Spojaři položili 15 kabelů. Po jistém čase přišla z jednoho města stížnost, že se nemohou dovolat, kam potřebují. Je to možné? Svou odpověď zdůvodněte.

5. Sourozenci Adam, Běta, Cyril a Dana zdědili zahradu tvaru čtverce o straně dlouhé 100 m. V zahradě je studna. Zahradu si rozdělili čtyřmi přímými ploty, které vedly z každého rohu zahrady přímo ke studni. Adam dostal čtyřikrát větší část než Dana, Běla třikrát větší část než Dana a Cyril dvakrát větší než Dana. Nakreslete zmenšený obrázek zahrady a polohu studny. Správnost konstrukce odůvodněte.
6. Vepište do kroužků na obrázku 2 čísla 1, 2, 3, . . . , 9 tak, aby součet žádných dvou sousedních čísel nebyl dělitelný 3, 4, 7. Najděte jedno řešení.

Tři úlohy se sedmičkou

1. Z krabičky vyklopíme na stůl několik hracích kostek. Kolik jich musí být, abychom mohli očekávat, že aspoň na dvou jejich horních stěnách bude týž počet ok?

2. Na šachovnici v levém předním rohu stojí věž. Po několika tazích ve směru sloupců a řad, přičemž nebyly nikdy dva tahy vedeny v témže sloupci ani v téže řadě bezprostředně za sebou, se věž dostala na původní místo. Mohl být počet těchto tahů sedm? [ano]

3. Na kapesních kalkulátorech a digitálních hodinách se setkáváme se znázorněním číslic pomocí sedmisegmentových číslicovek. Segmenty jsou v každé číslicovce uspořádány tak, že svítí-li všechny, je zobrazena osmička.

Která číslice je zobrazena, svítí-li v číslicovce právě pět segmentů? [Řešení není jediné.]

Líbily se vám tyto úlohy? Zkuste je vzít jako námět pro tvorbu vlastních matematických úloh. Jako vzor vám nabízíme tyto obdoby výše uvedených úloh. Např. vezmeme neprůhledný sáček s červenými, zelenými a modrými kuličkami a obdobně jako v 1. úloze můžeme položit otázku: Kolik je třeba vytáhnout (nejlépe se zavřenýma očima) kuliček, aby aspoň dvě byly téže barvy. I k 2. úloze lze snadno sestavit její varianty — věž lze nahradit např. koněm. Také podle 3. úlohy můžeme zformulovat další úlohy; např.: Které číslo je zobrazeno na displeji kapesního kalkulátoru, jestliže svítí právě čtyři segmenty?

Jiří Mída

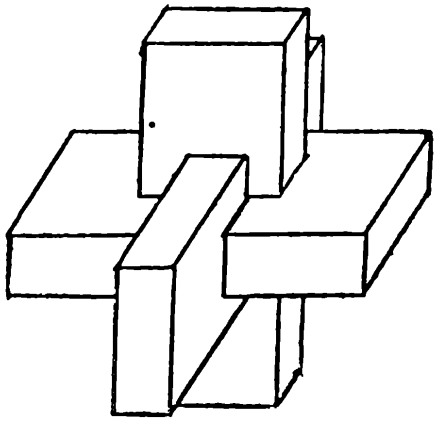
Poznámka redakce

Budete-li pokládat některé úlohy, které sestavíte, za zdařilé a zajímavé, zašlete je redakci Rozhledů; samozřejmě s řešením. Podle možnosti budou otištěny.

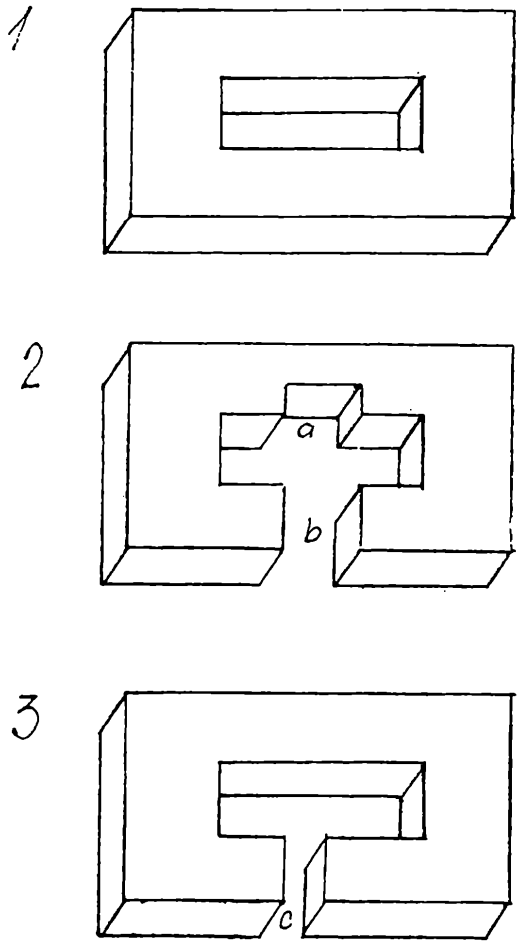
Trojdílný hlavolam

JOSEF SVOBODA, Třebíč

Mezi hlavolamy patří také skládání těles z různě opracovaných hranolů, rámečků apod., cílem je spojit tyto díly v jeden celek jen prostým zasunutím. Na obr. 1. vidíte těleso, které je třeba sestavit z dílů zobrazených na obr. II 1, 2, 3; věnujme se nejprve výrobě těchto dílů.



Obr. I



Obr. II

Připravíme si dubové nebo bukové prkénko vysoké 10—15 mm a široké 60—90 mm; dále budeme potřebovat pilku, lupénkovou pilku, svěrák, čtyřhranný pilník a smirkový papír. Rozměry dílů budou záviset na výšce prkénka, označme ji jako parametr p. Z prkénka odřízneme tři shodné hranoly o rozměrech p, $3p$, $6p$; vnitřní výřezy hranolů provedeme tak, aby vypadl hranolek o rozměrech $3p$, p, p souměrný podle téhož středu jako původní hranol. Vzniklým otvorem musí projít každý z dalších dvou hranolů svou nejmenší stěnou, ale jen těsně.

Zatímco první hranol ponecháme ve tvaru rámečku, ve druhém vytvoříme zářez „a“ do hloubky 0,5 p a o šířce p; zářez „a“ i průřez „b“ jsou

souměrné podle osy hranolu a mají touž šířku. Ve třetím hranolu je umístěn průřez „c“ vlevo od osy hranolu, má šířku 0,5 p a lze do něho zaklesnout tu část rámečku na druhém dílu, která je zobrazena za zářezem „a“. Pracujeme lupenkovou pilkou a zářez i výřezy dopracujeme pilníkem a smirkovým papírem na potřebnou velikost; zasunuté díly rámečků musí k sobě přiléhat těsně, nevypadávat jeden z druhého. Hotové díly můžeme natřít fermeží.

Mnoho zdaru při práci i při řešení hlavolamu! (Uvedeno je na str. 33.)

Atmosférická tlaková síla

Zkuste jednoduchý pokus z látky probírané ve fyzice v 7. roč. ZŠ. Na stůl položte půlmetrové pravítko (z umělé hmoty) tak, aby asi jednou třetinou přečnívalo okraj stolní desky. Potom jeho část na stole překryjte rozloženými novinami. Uhoďte pěstí na přečnívající konec pravítka. Podařilo se vám pravítko shodit ze stolu?

Pokus vám objasní výpočet. Určete plošný obsah rozložených novin a vypočtěte, jaká tlaková atmosférická síla na ně působí. Uvažujte atmosférický tlak $p_a \doteq 100$ kPa.

Tlaková síla působící na rozložené noviny je značně velká. Umíte vysvětlit, proč tato síla neprolomí desku stolu?

-jm-

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Problém sedmi hracích kostek

Ze sedmi shodných hracích kostek slepte (nekonvexní) těleso tak, aby každé dvě spolu slepené kostky přiléhaly k sobě celými stěnami a přitom celá jedna kostka byla uvnitř vzniklého tělesa a nebyla ani částečně vidět.

a) Načrtněte těleso, které slepením vzniklo.
b) Kolik je na vzniklém tělese vidět ok, jestliže při lepení byly spolu slepeny vždy dvě stěny, na nichž byl týž počet ok?
c) Popište, jak je třeba kostky slepit, aby na vzniklém tělese byl vidět co největší (nejmenší) počet ok.

Poznámka: Na správné hrací kostce je součet ok na protějších stěnách roven sedmi.

Řešení naleznete na str. 27

Jiří Mída

Úlohy ze zahraničních časopisů

Úloha 1. V trojúhelníku je délka jedné strany rovna 6,31 m a délka druhé strany 0,82 m. Čemu je rovna délka třetí strany, víme-li, že je vyjádřena celým počtem metrů?

Úloha 2. Na kružnici je vyznačeno 1977 bílých bodů a jeden červený. Sestrojíme všechny možné trojúhelníky s vrcholy v „obarvených" bodech. Vezmeme nyní množinu všech sestrojených trojúhelníků s jedním červeným vrcholem a množinu všech sestrojených trojúhelníků se třemi bílými vrcholy. Která bude početnější?

Úloha 3. Buď a libovolné číslo o 1979 cifrách takové, že je dělitelné 9. Součet cifer tohoto čísla označíme A. Součet cifer čísla A označíme B. Součet cifer čísla B označíme C. Jaká je hodnota čísla C?

Úloha 4. Na políčku B8 na šachovnici je číslo + 1 a na všech ostatních políčkách je číslo — 1. Povoluje se provádět tyto operace: v některém řádku vyměnit všechna znaménka za obrácená nebo totéž učinit v některém sloupci. Dokažte, že žádným počtem operací tohoto druhu není možno dosáhnout toho, aby ve všech políčcích byla současně + 1.

Úloha 5. Mademoiselle Dubois má ráda domácí zvířata. Všichni její miláčci kromě dvou jsou psi, všichni kromě dvou jsou kočky, všichni kromě dvou jsou papoušci a ostatní jsou myši. Kolik má doma jednotlivých druhů zvířat?

Úloha 6 (obtížnější). V sešitu je napsáno několik čísel. Dovoluje se připsat k těmto číslům další číslo, rovné aritmetickému průměru dvou či více z nich, ovšem za předpokladu, že je různé od všech dosud napsaných čísel. Dokažte, že máme-li na začátku 0 a 1, můžeme takto dospět k libovolnému racionálnímu číslu mezi 0 a 1.

Tomáš Schütz

OLYMPIÁDY A SOČ

29. ročník fyzikální olympiády

Dvacátý devátý ročník fyzikální olympiády vyvrcholil celostátním kolem, které bylo uspořádáno ve dnech 23. až 26. března 1988 v *Gottwaldově*. Organizačně zajistil velmi dobře průběh celostátního kola Jihomoravský KVFO. Nejvyššího kola se zúčastnilo 77 soutěžících, což byli v letošním ročníku všichni úspěšní řešitelé krajských kol v kategorii A.

Úlohy zadané v soutěži byly přiměřeně náročné. Nejlepší dosažený

výsledek byl 55 bodů z celkového počtu 60 možných bodů. Tím se úspěšnými řešiteli stalo 42 soutěžících, kteří dosáhli 27 a více bodů.

Na závěrečném zasedání předal akademik *Armin Delong* 24 soutěžícím čestná uznání a 18 vítězům diplomy a věcné odměny.

Vítězové 29. ročníku fyzikální olympiády:

1.	*Katarína Kis Petiková*, g. maď. Komárno	55,0 b.
2.	*Radek Vystavěl*, g. Prostějov	54,0 b.
3.	*Pavel Kryštof*, SPŠ elektro Brno	53,0 b.
4.	*Tibor Bartoš*, g. A. Markuša Bratislava	51,0 b.
5.	*David Swigoň*, g. Liberec	50,0 b.
6.	*Pavel Kozlovský*, g. Jindřichův Hradec	49,5 b.
7.	*Zbynčk Vašata*, g. J. K. Tyla Hradec Králové	46,5 b.
8.—9.	*David Maxera*, g. Praha, Hellichova	46,0 b.
	Petr Merta, g. J. K. Tyla Hradec Králové	46,0 b.
10.	*Arnošt Kobylka*, g. W. Piecka Praha	45,5 b.
11.	*Kristián Kostecký*, SPŠ chemická Šaľa	45,0 b.
12.—14.	*Tomáš Brodský*, g. Brno, tř. kpt. Jaroše	43,0 b.
	Radoslav Derka, g. J. Hronca Bratislava	43,0 b.
	Pavel Jirůtka, g. W. Piecka Praha	43,0 b.
15.—16.	*Milan Pokorný*, g. Přerov	42,5 b.
	Ladislav Sedláček, g. Olomouc-Hejčín	42,5 b.
17.	*Miroslav Nývlt*, g. Trutnov	42,0 b.
18.	*Martin Bujdák*, g. A. Markuša Bratislava	41,5 b.

Pět úspěšných řešitelů, kteří byli vybráni na základě svých výsledků v minulých letech a na soustředěních, odjelo bezprostředně po soutěži do Moskvy, kam je pozvala Moskevská státní univerzita M. V. Lomonosova na soutěž mladých fyziků. Z vítězů byli vybráni účastníci závěrečného soustředění olympioniků v Nitře, na jehož závěr bude nominováno československé reprezentační družstvo na 19. mezinárodní fyzikální olympiádu, jež proběhne v druhé polovině června 1988 v Rakousku.

D. Kluvanec — I. Volf

Celostátní kolo 37. ročníku matematické olympiády — kategorie P

Ve dnech 27.—30. 4. 1988 se v Bratislavě konalo celostátní kolo 37. ročníku MO kategorie P. Toto v pořadí třetí celostátní kolo kategorie P přineslo soutěžícím jednu vítanou organizační změnu. Obě celostátní kola matematické olympiády — v kategoriích A a P — byla totiž uspo-

řádána v průběhu jednoho týdne a na stejném místě. Řada studentů se každoročně probojuje do obou celostátních kol MO zároveň. Letos bylo takovýchto úspěšných řešitelů celkem osmnáct. Těmto soutěžícím tak ubylo mnoho zbytečného cestování po republice.

Soutěžící, opravující i přítomní členové ÚV MO byli po dobu soutěže ubytováni v internátech SOU chemického o. p. Slovnaft a SOU stavebního o. p. Hydrostav. V objektech závodu Slovnaft Bratislava bylo zajištěno i stravování účastníků, prostory pro vlastní soutěž a pro opravování úloh. Celostátního kola MO kategorie P se zúčastnilo nejlepších 51 řešitelů krajských kol z celé republiky. Opravování zajišťovali pracovníci tří odborných center z *MFF UK Praha, PřF UJEP Brno* a *MFF UK Bratislava*. Během soutěže pravidelně zasedala ke svým jednáním sekce kategorie P ústředního výboru matematické olympiády. Předmětem jednání byla zejména příprava úloh pro další ročník olympiády. Ve volných chvílích měli soutěžící i hosté dostatek příležitostí k poznávání krás hlavního města SSR Bratislavy na výletech, které pro ně připravili organizátoři z *KV MO Bratislava* a z *Ústředního domu pionýrů a mládeže Klementa Gottwalda v Bratislavě*.

Úlohy pro 37. ročník MO kategorie P připravili pracovníci centra MO na přírodovědecké fakultě UJEP Brno. Ve dvou soutěžních dnech řešili studenti vždy po dvou úlohách, které byly hodnoceny maximálně 10 body. Každý den byla zadána jedna úloha na návrh algoritmu, přičemž důraz byl kladen nejen na správnost a dostatečné zdůvodnění, ale také na časovou složitost vytvořeného algoritmu. V těchto úlohách č. 1 a č. 3 dosáhli řešitelé průměrného hodnocení 5,14 a 4,41 bodu. Soutěžní úloha č. 2 byla nejobtížnější, její průměrné hodnocení bylo jen 3,55 bodu. Jednalo se o úlohu matematického charakteru, v níž bylo třeba podat důkaz, že zadaný algoritmus skončí v jistém stavu popisovaného systému. Naopak závěrečná 4. úloha byla pro soutěžící nejsnadnější, získali za ni v průměru 7,39 bodu. Byla to úloha na vytvoření algoritmů k převádění čísel mezi číselnými soustavami ve formalismu Markovových algoritmů. S tímto prostředkem pro zápis algoritmů se všichni seznámili již v domácím kole soutěže z krátkého studijního textu připojeného k zadáním úloh.

Z celkového počtu 51 účastníků celostátního kola matematické olympiády kategorie P bylo 26 nejlepších označeno za úspěšné řešitele a 13 z nich bylo prohlášeno za vítěze celostátního kola. Zvláštní ceny věnované prorektorem SVŠT Bratislava obdrželi absolutní vítěz soutěže *Petr Brož* (jako jediný dosáhl maximálního možného hodnocení 40 bodů), jediný úspěšný řešitel z 1. ročníku gymnázia *Štěpán Kasal* (skončil dokonce na 10. místě mezi vítězi) a jediná účastnice celostátního kola *Marta Sochorová* (je úspěšnou řešitelkou). Všichni tři odměnění studují na gymnáziu Wilhelma Piecka v Praze.

Seznam úspěšných řešitelů celostátního kola 37. ročníku matematické olympiády — kategorie P:

Vítězové

1. *Petr Brož*, 3. D, G. W. Piecka, Praha
2.—3. *Arnošt Kobylka*, 3. D, G. W. Piecka, Praha
Marek Velešík, 3. A, G Koněvova, Brno
4.—5. *Václav Bohdanecký*, 3. D, G W. Piecka, Praha
Petr Čížek, 3. D, G W. Piecka, Praha
6. *Juraj Šimko*, 4. B, G Párovská ul., Nitra
7. *Ilja Martišovitš*, 3. B, G J. Hronca, Bratislava
8. *Jiří Fürst*, 3. A, G J. Fučíka, Plzeň
9. *Jozef Saniga*, 4. B, G V. okružná, Žilina
10. *Štěpán Kasal*, 1. E, G W. Piecka, Praha
11. *Vladimír Chvátil*, 2. B, G Koněvova, Brno
12.—13. *Martin Bujdák*, 4. B, G A. Markuša, Bratislava
Pavel Kozlovský, 4. C, G Jindřichův Hradec

Ostatní úspěšní řešitelé

14.—16. *Andrej Lúčny*, 3. B, G Piešťany
Zdeněk Pavlas, 3. B, G Jarošova, Brno
René Pázman, 3. B, G J. Hronca, Bratislava
17.—18. *Martin Dindoš*, 2. B, G J. Hronca, Bratislava
Gregor Raýman, 3. E, G Wolkerova ul., Žilina
19.—21. *Jan Macháček*, 2. C, G Pelhřimov
Marta Sochorová, 4. D, G W. Piecka, Praha
Vladimír Šolc, 2. A, G Beroun
22.—23. *Miroslav Šrol*, 4. B, G J. Hronca, Bratislava
Petr Vyhňák, 4. A, G Mladá Boleslav
24. *Štefan Dobrev*, 3. B, G A. Markuša, Bratislava
25.—26. *Jozef Gemeľa*, 4. A, G V. B. Nedožerského, Prievidza
Radek Porazil, 4. D, G Bílovec

Pro zajištění dalších ročníků této soutěže je třeba připravit řadu soutěžních úloh zaměřených na návrh a analýzu algoritmů nebo čerpajících z různých oblastí matematické informatiky. Organizátoři proto velice přivítají spolupráci všech, kdo mohou nabídnout vhodné náměty. Návrhy na úlohy můžete zasílat přímo do odborných center MO kategorie P (naše pražské má adresu: RNDr. Pavel Töpfer, MFF UK, katedra kybernetiky a informatiky, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1) nebo do vyhlášeného konkursu ústředního výboru matematické olympiády na soutěžní úlohy MO všech kategorií (na adresu: ÚV MO, Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1). Návrhy úloh, které budou použity v soutěži, budou honorovány.

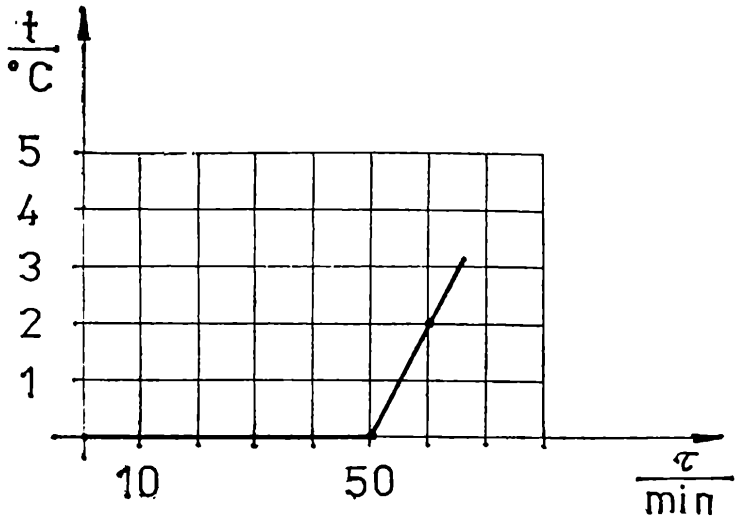
P. Töpfer

Fyzikální olympiáda v SSSR

RNDr. IVO VOLF, ÚVFO Hradec Králové

Družstvo Sovětského svazu se zúčastnilo skoro všech mezinárodních fyzikálních olympiád. Na sedmnácti MFO bylo celkem 84 účastníků, z čehož 36 získalo první cenu, 20 druhou cenu, 18 obdrželo třetí cenu a 10 účastníků čestné uznání za úspěšnou účast — za celou dobu tedy ani jeden účastník nebyl neúspěšný, družstvo SSSR získávalo v neoficiální soutěži vždy jedno z předních umístění, přičemž skoro vždy obsadilo první nebo druhé místo.

I když různé matematické a fyzikální soutěže byly v Sovětském svazu pořádány více než 50 let, byly zaměřeny převážně na získávání středoškolské mládeže k vysokoškolskému studiu technických a přírodovědných oborů. V souvislosti se zrodem mezinárodní fyzikální olympiády byla vytvořena v SSSR v r. 1967 celosvazová soutěž, kterou řídí a organizačně i odborně zabezpečuje společnost ZNANIJE, společnost pro řízení vědeckých znalostí, za spolupráce Akademie pedagogických věd SSSR. Soutěž má pět kol. Úvodní kolo se pořádá na školách a zúčastní se ho každým rokem více než 2 milióny soutěžících ze 7.—10. ročníků střední školy v termínu listopad—prosinec. Druhé kolo probíhá na úrovni okresů a větších měst, účastní se ho vítězové školního kola a uskutečňuje se v prosinci pro 300 000 účastníků. Třetím kolem jsou fyzikální olympiády na úrovni autonomních republik, krajů a oblastí v termínu o lednových zimních prádzninách; kola se zúčastní zpravidla 10 000 žáků. Soutěžícím jsou předkládány teoretické i praktické úlohy, které připravují příslušné komise v daném geografickém celku. Čtvrté kolo probíhá na úrovni republik, v největší svazové republice — RSFSR na úrovni zón. Účastní se ho vítězové oblastních a krajských kol a také vítězové soutěže v časopise Kvant, je pořádáno pro žáky 8.—10. ročníků v době jarních prázdnin, účastní se ho asi 1500 žáků. Úlohy připravují republikové komise, ale je nutné, aby byly mezi nimi zařazeny i ty, které byly připraveny organizačním výborem celosvazové fyzikální olympiády. Nejvyššího kola, které probíhá vždy v dubnu v některé svazové republice, se účastní každým rokem asi 150 soutěžících z 8.—10. ročníků. Organizačně zajišťuje celé svazové kolo všesvazový výbor fyzikální olympiády ve spolupráci s republikovými orgány (výborem FO, ministerstvem osvěty aj.). Úlohy připravuje metodická komise Ústředního výboru FO. Zpravidla je soutěžícím předloženo 4 až 5 úloh teoretických a 2 úlohy experimentální v každé ze tří věkových kategorií. Protokoly o řešení jsou hned opraveny a na závěr celostátního kola jsou vyhlášeny výsledky — účastníci obdrží diplomy vítězů a čestná uznání.



Obr. 1

Nejlepší řešitelé jsou pozváni na měsíční soustředění, pořádané Akademií pedagogických věd, mohou být přijati bez přijímací zkoušky na libovolnou vysokou školu a vybírá se z nich reprezentační družstvo SSSR na mezinárodní fyzikální olympiádu. Diplomy vítězů třetího až pátého kola fyzikální olympiády dávají jisté výhody při přijímání na vysokou školu.

Úlohy zadávané v nejvyšším kole soutěže jsou společně se zprávou o průběhu publikovány v časopise KVANT [3]; byly také zpracovány ve studijním materiálu [2], podrobnější informace o Sovětské fyzikální olympiádě je uvedena v práci [1]. Úlohy jsou pro řešitele československé fyzikální olympiády trochu obtížné — především svým volnějším zadáním, nutností řešit úlohu jako fyzikální problém, přičemž někdy volba modelu pro řešení úlohy je nesnadná.

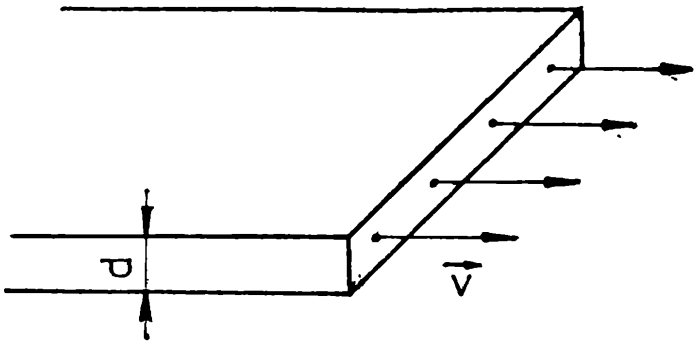
Zkuste si vyřešit úlohy z celostátního kola:

1. Z jižního a severního pólu Země startují současně dvě rakety se stejnými počátečními rychlostmi ve vodorovném směru. Za dobu $\tau = 3$ h 20 min byly rakety v největší vzájemné vzdálenosti. Určete maximální vzdálenost raket od sebe. Gravitační zrychlení na povrchu Země a_g je známé, poloměr Země $R_Z = 6400$ km.

2. Ve vědru je směs ledu a vody. Hmotnost směsi je $M = 10$ kg. Vědro bylo přeneseno do místnosti a hned byla zapsána řada naměřených hodnot teploty t směsi. Na obr. 1 je zakreslen graf teploty jako funkce času, $t = t(\tau)$. Měrná tepelná kapacita vody $c = 4200$ J . (kg . K)$^{-1}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_t = 340$ kJ . kg^{-1}. Určete, kolik ledu bylo ve vědru v okamžiku, kdy bylo přeneseno do místnosti. Tepelnou kapacitu vědra neuvažujte.

3. Velká kapka deště opustila mrak za bezvětří ve velké výšce. V okamžiku, kdy velikost zrychlení kapky $a = 7{,}5$ m . s^{-2}, byla její rychlost rovna $v = 10$ m . s^{-1}. V blízkosti povrchu Země již kapka padá stálou rychlostí a dopadne na boční sklo automobilu, přičemž na něm zanechá stopu pod úhlem $\alpha = 30°$ vzhledem ke svislému směru. Bude řidič

Obr. 2



pokutován příslušníkem bezpečnosti, jestliže v daném úseku je předepsána maximální povolená rychlost $v = 60$ km . h^{-1}? Síla, jíž vzduch odporuje proti pohybu kapky, je úměrná druhé mocnině velikosti rychlosti kapky, $F = k \,.\, v^2$.

4. Směrovaný proud elektronů vyletuje z tenké, ale široké štěrbiny rychlostí $v = 1{,}0 \;\; 10^5$ m . s^{-1} (obr. 2). V jaké vzdálenosti od štěrbiny se tloušťka svazku zvětšila na dvojnásobek? Hmotnost elektronu $m = 9{,}1 \;\; 10^{-31}$ kg, náboj $e = 1{,}6 \;\; 10^{-19}$ C, permitivita vakua $\varepsilon_0 = 8{,}85 \;\; 10^{-12}$ F . m^{-1}.

5. Model vrtulníku, vytvořený v poměru 1 : 10 vzhledem ke skutečnosti, se udržuje ve vzduchu pomocí motoru o výkonu 30 W. Jaký nejmenší výkon musí mít skutečný vrtulník, který je vytvořen z téhož materiálu jako model?

Na závěr jsme vám připravili stručné výsledky a návody k řešení předložených úloh:

1. Podle Keplerových zákonů stanovíme velkou poloosu trajektorií, $a = 2{,}8\, R_Z$, vzdálenost $s = 9{,}2\, R_Z = 59\,000$ km.

2. Po dobu 50 min led tál, pak se začala voda zahřívat. Označíme q tepelný výkon, pak platí $ml_t = qt_1$, $Mc \,.\, t = qt_2$, odtud $m = 1{,}24$ kg.

3. Pro sílu $F = kv^2$, $v_2 = v_1 \sqrt{\dfrac{g}{g - a}}$, $v_2 = 85$ km . h^{-1} — řidič bude v daném úseku pokutován.

4. Vzdálenost $l = v \sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0 m}{e^2 \,.\, n}} = 2{,}5$ cm.

5. Vrtulník či jeho model se udržují ve vzduchu silou $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \varrho \,.\, S \;\; v^2$. Dále platí $\varrho \,.\, S \;\; v^2 = M \,.\, g$, tedy $v = \sqrt{\dfrac{M \,.\, g}{\varrho \,.\, S}}$. Odtud výkon při předávání impulsu vzduchu $P = \dfrac{1}{2}\, Mg \sqrt{\dfrac{Mg}{\varrho \,.\, S}}$, pro dané hodnoty je součinitel $10^{\frac{7}{2}}$, tedy výkon vrtulníku musí být $p_1 \doteq 96$ kW.

INFORMACE

Matematická literatura ze Sovětského svazu

RNDr. TOMÁŠ SCHÜTZ, katedra matematiky PeF UK v Praze

K sepsání tohoto článku mě inspirovala zkušenost z výuky matematické analýzy ve druhém ročníku učitelského studia na pedagogické fakultě University Karlovy v Praze. Při vhodné příležitosti jsem se rozhovořil o problematice, která není částí tematiky určené osnovami, ale úzce s ní souvisí, a může studentům poskytnout určitý nadhled. Po dokončení svého výkladu jsem řekl: „Koho by tato oblast zajímala, nalezne další informace v Natansonově knize Těorija funkcij věščestvennoj peremennoj". Studenti vypadali velice překvapeně. Po chvíli se jeden z nich zeptal: „To bychom měli číst rusky?" Nyní jsem byl zase překvapen já, nikoli však radostně, a to tím více, že šlo o dobrou studijní skupinu, kterou jsem měl velmi rád.

Nechci tvrdit, že Sovětský svaz vždy byl a je na prvním místě ve všech odvětvích vědy a techniky. Ale ruská a sovětská matematika má velikou tradici a v této disciplíně se Sovětský svaz řadí na jedno z nejpřednějších míst.

Dobře víte, že některé matematické pojmy a věty jsou označeny jmény význačných matematiků. Tak například znáte Pythagorovu větu, Thaletovu kružnici, Moivreův vzorec atd. Půjdete-li však studovat některou vysokou školu, kde se vyučuje matematice, uslyšíte pojmy jako Čebyševova aproximace, Buňakovského nerovnost, Ostrogradského metoda, Tichonovovy věty, Sobolevův prostor.

V SSSR je také vydáván velký počet matematických titulů sovětských autorů, ale i autorů zahraničních. Přitom knihy sovětských autorů vynikají nejen po stránce odborné, ale i po stránce didaktické. Jsou totiž zpravidla zpracovány s nesmírnou přesností a metodičností. Znamená to velkou námahu pro autora, avšak čtenářům je studium

---

Literatura k článku FO v SSSR:

[1] Vněuročnaja rabota po fizike. Red. O. F. Kabardin. Moskva, Prosvěščenije 1983.

[2] Sloboděckij, I. Š.—Orlov, V. A.: Vsesojuznyje olimpiady po fizike. Posobje dlja učaščichsja 8—10 klassov sredněj školy. Moskva Prosvěščenije 1982.

[3] KVANT, populárně vědecký časopis (vychází měsíčně).

těchto knih značně usnadněno. To oceníte, až když se setkáte s publikacemi, které se vyznačují notnou dávkou „velkorysosti" a hemží se výrazy „zřejmé, evidentní, triviální, čtenář si snadno dokáže" atd. Pro autora je napsání takové knihy pohodlné, ale jediný řádek z ní může někdy znamenat pro čtenáře půl hodiny práce.

Nesporným kladem ruských překladů jinojazyčných knih je také jejich cenová dostupnost. V kapitalistických zemích jsou totiž na knižním trhu zcela jiné cenové relace než u nás. Tak např. v USA je velmi laciná beletrie v kartonových vydáních (tzv. paperbacks), ale odborná literatura je velmi drahá. Je-li dovážena k nám, je pochopitelné, že není dotována, a to se odrazí v její ceně. Naproti tomu její ruské překlady stojí nejvýše několik desítek korun . . .

Uvedu dva příklady výborných sovětských matematických knih. Jako sbírka cvičení z matematické analýzy byla po léta pokládána za vzor *Děmidovičova* kniha Sborník zadač i upražněnij po matěmatičeskomu analizu. Vyšla v několika vydáních a dobře si pamatuji, že na podzim roku 1979 zmizela z prodejny sovětské literatury ve Vodičkově ulici v Praze rychleji, než mizí z knihkupeckých pultů detektivní romány Agathy Christie. Za ještě lepší však pokládám dvoudílný Sbornik zadač po matěmatičeskomu analizu, jehož autory jsou *Kudrjavcev*, *Kutasov*, *Čechlov* a *Šaburin*. Oba tyto díly mají asi tisíc stran úloh ze všech oblastí diferenciálního a integrálního počtu. Před každou kapitolkou je shrnuta teorie potřebná k řešení příslušných úloh a několik typových příkladů je podrobně vyřešeno. Podle mého soudu nedosahuje žádná z našich knih obsahující úlohy z matematické analýzy kvality citovaných dvou sovětských publikací.

Pojedete-li někdy do Moskvy, zahrňte do svého programu návštěvu Moskevského domu knihy na prospektu Kalinina. V oddělení matematické literatury si jistě vyberete. Naleznete tu však i jinou odbornou literaturu, beletrii a nejrůznější publikace, a to nejen sovětské. Určitě tu objevíte něco, co bude odpovídat vašim zájmům.

Kalendár M-F: August 1988

2. 8. 1823 zomrel *Lazare Nicolas Carnot*, francúzsky politik a matematik. Prispel k reforme matematickej analýzy.
9. 8. 1853 zomrel *Jozef Maria Hoene Wroński*, poľský matematik a filozof. Prispel do teórie riešenia diferenciálnych rovníc.
14. 8. 1958 v Paríži zomrel *Frédéric Joliot-Curie*, francúzsky fyzik

a chemik. Skúmal žiarenie rádioaktívnych prvkov, objavil umelú radioaktivitu. Spolu s manželkou získal roku 1935 Nobelovu cenu za chémiu.

15. 8. 1863 sa vo Visjage narodil *Alexej Nikolajevič Krylov*, sovietsky matematik a lodný konštruktér. Racionalizoval približné výpočty v rôznych oblastiach fyziky a techniky.

15. 8. 1798 zomrel *Edward Waring*, anglický matematik. Ovplyvnil rozvoj algebry, teórie algebraických kriviek a teórie čísel.

19. 8. 1888 zomrel *Erik Edlund*, švédsky fyzik. Zaoberal sa atmosférickou elektrinou, telegrafiou, termoelektrinou.

20. 8. 1898 sa v Krakove narodil *Leopold Infeld*, poľský fyzik. Riešil problémy teórie relativity, nelineárnej elektrodynamiky, teórie gravitácie.

20. 8. 1968 zomrel *George Gamow*, americký fyzik. Úspešne pôsobil v oblasti kvantovej mechaniky, atómovej a jadrovej fyziky, astrofyziky, kozmológii, biológii. Objasnil alfa i beta rozpad, objavil tunelový efekt.

22. 8. 1913 sa v Pise narodil *Bruno Maximovič Pontekorvo*, sovietsky fyzik talianského pôvodu. Vedecky pracoval v jadrovej fyzike, fyzike vysokých energií, neutrónovej fyzike i astrofyzike.

24. 8. 1888 v Bonne zomrel *Rudolf Julius Emanuel Clausius*, nemecký fyzik. Prispel k vybudovaniu kinetickej teórie plynov a mechanickej teórie tepla. Vypracoval termodynamickú teóriu termoelektriny, založil teóriu polarizácie dielektrík.

24. 8. 1923 sa v Rostove na Done narodil *Viktor Michajlovič Gluškov*, sovietsky matematik. Zaoberal sa teóriou grúp, topológiou, technickou kybernetikou, teóriou číslicových počítačov.

25. 8. 1908 v Le Croisie zomrel *Henri André Becquerel*, francúzsky fyzik. Za objav prirodzenej radioaktivity získal v roku 1903 spolu s P. Curiem a M. Curie-Skłodowskou Nobelovu cenu.

26. 8. 1728 sa v Mülhausene narodil *Johann Heinrich Lambert*, nemecký matematik, filozof, fyzik a astronóm, Ovplyvnil fotometriu, sférickú trigonometriu, algebru.

27. 8. 1958 sa v Cuneu narodil *Giuseppe Peano*, taliansky matematik. Zaoberal sa formálno-logickými základmi matematiky.

27. 8. 1958 v Palo Alto zomrel *Ernest Orlando Lawrence*, americký fyzik. Konštruoval urýchlovače častíc — cyklotróny, študoval umelú transmutáciu prvkov a vplyv radioaktívneho žiarenia na živý organizmus.

28. 8. 1883 sa v Amsterdame narodil *Jan Arnoldus Schooten*, holandský matematik. Rozvinul tenzorovú analýzu.

31. 8. 1663 sa v Paríži narodil *Guillaume Amontons*, francúzsky prírodovedec. Systematicky študoval trenie, zaviedol pojem teplotnej absolútnej nuly.

September 1988

1. 9. 1648 v Paríži zomrel *Marin Mersenne*, francúzsky vedec. Organizoval výmenu informácii medzi učencami, z vedeckého krúžku okolo neho vznikla neskôr akadémia vied.
1. 9. 1848 sa v Prahe narodil *Emil Weyr*, český matematik. Zaoberal sa projektívnou geometriou, patrí k zakládajúcim členom Jednoty českých matematikov a fyzikov.
2. 9. 1878 sa v Maligny narodil *René Maurice Fréchet*, francúzsky matematik. Prispel k rozvoju funkcionálnej analýzy a teórie Markovových reťazcov.
8. 9. 1588 sa v Soultiere narodil *Marin Mersenne*, francúzsky matematik, fyzik. Študoval akustiku, určil rýchlosť zvuku vo vzduchu, predložil schému zrkadlového ďalekohľadu, uviedol zaujímavé dôkazy v teórii čísel.
9. 9. 1908 sa v Jelšave narodil *Ján Chrapan*, slovenský fyzik. Vedecky pracoval v toretickej mechanike.
13. 9. 1873 sa narodil *Constantin Carathéodory*, nemecký matematik. Pracoval v oblasti variačného počtu, parciálnych diferenciálnych rovníc a v teórii reálnych funkcií.
17. 9. 1743 sa narodil *Antoine Cordorcet*, francúzsky matematik, encyklopedista, filozof a politik. Zaoberal sa diferenciálnymi rovnicami a uplatnením teórie pravdepodobnosti.
18. 9. 1783 v Petrohrade zomrel *Leonhard Euler*, švajčiarsky matematik, fyzik, mechanik, astronóm. Jeho meno nesie asi 50 viet, formúl, funkcií, rovníc a iných matematických pojmov. Zaoberal sa aj optikou, kartografiou, stavbou lodí. Všade úspešne aplikoval matematické metódy. Ustálil symboliku algebry, trigonometrie, diferenciálneho a integrálneho počtu.
18. 9. 1908 sa v Tbilisi narodil *Viktor Amazapovič Ambarcumian*, sovietsky astrofyzik. Zaoberal sa fyzikou hmlovín, vývojom hviezd a hviezdnych sústav. Objavil hviezdne asociácie, študoval vývoj galaxií.
21. 9. 1853 sa v Gröningene narodil *Heike Kamerlingh-Onnes*, holandský fyzik. Pracoval v oblasti fyziky nízkych teplôt. Objavil supravodivosť kovov.
25. 9. 1888 sa vo Varšave narodil *Stefan Mazurkiewicz*, poľský matematik. Pracoval v oblasti teórie množín, topológii a riešil otázky základov matematiky.
25. 9. 1893 sa v Štokholme narodil *Carl Harald Cramer*, švédsky matematik. Prispel do teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.
25. 9. 1933 zomrel *Paul Ehrenfest*, rakúsky fyzik. Rozvíjal štatistické metódy v termodynamike, rozvinul jadrovú fyziku, teóriu relativity a kvantovú teóriu.

26. 9. 1868 v Lipsku zomrel *August Ferdinand Möbius*, nemecký astronóm a matematik. Ovplyvnil projektívnu geometriu, topológiu, viacrozmernú geometriu. Známy je Möbiov list, príklad pre tzv. jednostrannú plochu.
26. 9. 1978 zomrel *Karl Manne Georg Siegbahn*, švédsky fyzik. V roku 1924 dostal Nobelovu cenu za objavy v oblasti röntgenovej spektroskopie.
27. 9. 1783 zomrel *Etienne Bézout*, francúzsky matematik. Zaoberal sa vyššou algebrou, teóriou determinantov.
29. 9. 1803 sa v Ženeve narodil *Jacques Charles Francois Sturm*, francúzsky matematik a fyzik. Riešil úlohy matematickej fyziky, optiky, mechaniky. Určil počet koreňov algebraickej rovnice v danom intervale.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Danil Danin:

NIELS BOHR, JEHO DIELO A ŽIVOT

Vydala Alfa Bratislava 1987, 95 strán, 1200 výt., brož. Kčs 6,50

Útla knižočka, ktorá vyšla vo vydavateľstve technickej a ekonomickej literatúry v decembri 1987, je majstrovskou oslavou jednej z najväčších postáv fyziky prvej polovice dvadsiateho storočia. Knižka vyšla v ruskom origináli z príležitosti stého výročia narodenia veľkého vedca, vynikajúceho filozofa, revolucionára vedy, popredného verejného činiteľa — neúnavného bojovníka za mierovú spoluprácu atómových mocností. Niels Bohr je autorom otvoreného listu Spojeným národom, v ktorom triezvo vyslovoval slovo utópia pri myšlienkach o medzinárodnej kontrole využitia jadrovej energie a v ktorom jednoznačne ukazoval, že jediná možná cesta, ktorou môže ľudstvo kráčať do budúcnosti, je uvedenie tejto utópie do života. Autorom dielka je majster slova D. Danin, od ktorého sme v edícii Kolumbus nakladateľstva Mladá fronta čítali už v roku 1963 Dramata z divného sveta. Z učebníc je nám známy Bohrov model atómu vodíka, avšak strohé vety učebníc nám nič nehovoria o dobe, v ktorej sa rúcali múry klasických predstáv fyziky 19. storočia.

Knižočka je rozdelená do troch častí. Prvá časť hovorí o kryštalizácii vzťahov Nielsa Bohra k Rutherfordovi a k jeho planetárnemu modelu atómu, o ktorom Bohr vyhlasoval, že ho nikdy nebral doslovne. Táto časť končí stavom myslenia na začiatku prvej svetovej vojny. Tento stav sa dobre odráža v Rutherfordovom liste Bohrovi z 20. 3. 1913, v ktorom sa hovorí: „. . . vo Vašej hypotéze je vážny kameň úrazu: ako rozho-

duje elektrón, s akou frekvenciou má kmitať... zdá sa, že budete nútený pripustiť, že elektron vie vopred, kde sa chystá zastaviť...". Ako sa veľkí myslitelia vyrovnávali s týmto prejavom rozmarov náhody v mikrosvete, hovorí druhá časť knihy. Tu sa dozvedáme o Bohrovom postoji k vlnovo-korpuskulárnemu charakteru mikrosveta a o počiatkoch kvantovej mechaniky. Prečítame si, ako bol Bohr ochotný obetovať zákon zachovania energie a ako nebol ochotný uznať realitu Einsteinových fotónov. Bohrove predstavy o kvantovaní zachránili takmer súčasne a z dvoch nezávislých strán: 38 ročný Erwin Schrödinger a 24 ročný Werner Heisenberg. O Heisenbergovi povedal jeho učiteľ Max Born: „Akým talentovaným nevedomcom bolo potrebné byť! Nepoznal súčasný matematický aparát, ale keď ho potreboval, vedel si ho vytvoriť." V tretej časti hovorí kniha o osudoch fyzicky síce stárnuceho, no duševne stále mladého Bohra v rokoch rodiaceho sa hitlerovského Nemecka, v rokoch druhej svetovej vojny a v období studenej vojny. Celou knihou sa nesie Bohrovo krédo: „Veda nie je zamestnanie, ale vášeň."

Štylisticky náročný Daninov text veľmi dobre vystihuje preklad RNDr. Tatiany Medekovej. Treba konštatovať, že redakcia teoretickej literatúry nakladateľstva Alfa pod vedením Anny Známovej opäť obohatila náš knižný trh.

Eva Tokáriková

Ľ. Molnár, M. Češka, B. Melichar:
GRAMATIKY A JAZYKY

Vydala ALFA, Bratislava 1987, jako společné vydání se SNTL v Praze, 192 str., 36 obr., 10 tabulek, 5000 výtisků, 16,50 Kčs.

Autoři knížku zpracovali pro předmět „Gramatiky a jazyky" studijního oboru elektronické počítače na vysokých školách technických.

Způsob sdělování úloh počítači se nazývá programovacím jazykem. Těchto formálních jazyků za posledních čtyřicet let vznikla celá řada, např. basic, pascal, fortran, algol, cobol, lisp apod. Každý z nich byl vytvořen pro zcela konkrétní potřebu.

Formální jazyky mají svou teorii, kterou založil americký jazykovědec *Noam Chomsky* (čti „čomsky"), profesor univerzity v Cambridgi. V roce 1956 vytvořil matematický model gramatiky. Teprve pak se dalo přistoupit k důkladnějšímu studiu jazykových problémů a otevřela se i cesta k řešení praktických otázek spojených s definováním a překladem programovacích jazyků.

Knížku může studovat s větším porozuměním pouze ten, kdo ovládá základy některého programovacího jazyka. Po prostudování této učebnice se pak bude dívat na programovací jazyky s větším pochopením a mnohé se vyjasní a stane samozřejmějším.

Knížku doporučujeme všem čtenářům Rozhledů, kteří mají hlubší zájem o výpočetní techniku.

Jiří Mída

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

O metrickém čase

Základem Mezinárodní soustavy jednotek, kterou dnes používáme, je metrická soustava, zrozená v bouři Velké francouzské revoluce koncem osmnáctého století. Tato okolnost též způsobila, že se mettické jednotky s jejich dekadickými násobky tak pomalu prosazovaly zejména v anglosaských zemích. Tím více překvapilo sdělení o tom, že konzervativní Velká Británie chce zavést dokonce dekadické jednotky času. Tato informace kolovala před několika lety na Generální konferenci Evropské fyzikální společnosti v Praze a vzbudila zasloužené veselí:

„Od půlnoci na 1. duben 1984 přejde celá Velká Británie (s výjimkou ostrova Man) na metrický čas. Od tohoto data bude mít minuta 10 sekund, hodina 10 minut, den 10 hodin, atd. a názvy těchto jednotek se změní na miliden, centiden a deciden; místo týdne, měsíce a roku bude zaveden dekaden, hektoden a kiloden. Protože stará hodina představuje jen 5/12 decidne, bude pracovní doba rovna $3\frac{1}{3}$ decidne neboli miliměsíce denně. Protože to může působit potíže při výpočtu mzdy, navrhuje se zkrátit polední přestávku o 2/3 decidne tak, aby pracovní doba činila 4 miliměsíce za směnu. S dodatečnou náhradou mzdy se přitom nepočítá, pouze v přestupných kilodnech bude na konci každého hektodne prováděna oprava na 1,46 dekaměsíců. Důchod bude vypočítáván na základě odpracovaných superkilodní."

-ll

REDAKČNÍ KRUH
Doc. dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava, dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topoľčany, doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc. UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha,; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

Řekli, napsali...

Věda — a to je jejím nejkrásnějším přívlastkem — je základním prvkem spojujícím myšlenky lidí, roztroušených po celém světě.

Frédéric Joliot-Curie (1900 — 1958)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00 — 15.00 hod.,
pátek 7.00 — 13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1988.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 67, 1988/89
ŘÍJEN
CENA 2 Kčs

(2)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovshý Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedrich Fedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Pavel Krbec, Štefan Švabík: Cesty a cíle matematiky 45

Lubomír Železný: Nová maximální aritmetická posloupnost prvočísel 48

Jarmila Novotná: O diskrétních analogiích Wirtingerovy nerovnosti 49

Josef Kotyk: Dálka vrhu šikmo vzhůru 56

Ladislav Ženíšek: Problematika neviditelnosti 60

Anton Albrecht, Miroslav Chrapan: Neutróny okolo nás 62

Ivan Štoll: O životě a díle Ernsta Macha 68

Z matematiky a fyziky ZŠ . 72

Přemýšlíme, řešíme . 76

Výsledky loňské soutěže Rozhledů 79

Naše soutěž; ročník 1988–89 80

Kalendár M–F 83

Celostátní kolo 37. ročníku MO kategorie A 85

Z nových knih 87

Korespodenční semináře MFF UK v Praze 88

Humory matematicko-fyzikální 3. str. obálky

Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (113–116) příloha

Cesty a cíle matematiky

Dr. PAVEL KRBEC, CSc., VZLÚ Praha dr. ŠTEFAN ŠVABÍK, CSc., MÚ ČSAV Praha

Zhruba před dvěma tisíciletími vznikly slavné Euklidovy „Základy" a tento geometrický systém také téměř dva tisíce let byl vzorem dokonalé a čisté teorie — v Anglii se podle něj přednášela geometrie ještě v 19. století. To je jistě neobvyklá věc. Za dobu mnohem kratší než dvě tisíciletí se přece musí shromáždit tolik nových poznatků, že každou vědeckou teorii je nutno revidovat. S euklidovskou geometrií tomu bylo jinak. Euklides totiž zvolil postup, při kterém všechna geometrická tvrzení, tj. tvrzení týkající se bodů, přímek, jejich vzdáleností atd., dokazoval na základě čtrnácti jednoduchých a zřejmých tvrzení, tzv. axiomů; jeho metoda je proto nazývána axiomatickou.

Euklides tedy stanovil objekty geometrie (body, přímky, úhly atd.) a pravidla jak s nimi zacházet — axiomy. Geometrické tvrzení pak bylo správné, pokud se dalo logickou úvahou odvodit z axiomů — nebo, což je totéž, pokud se dalo odvodit z jiných geometrických tvrzení, o kterých už bylo dokázáno, že se z axiomů odvodit dají. *Euklides* axiomy rozdělil na dvě skupiny — na tzv. postuláty, které se týkaly jen geometrických veličin (těch bylo 5) a na vlastní axiomy. Jeho cílem pak bylo na základě axiomů vybudovat celou geometrii.*)

Všech čtrnáct axiomů bylo opravdu jednoduchých, s výjimkou pátého, který zněl takto: „Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší než dva pravé, se vždy protínají a to po té straně přímky, kde je součet menší." Tento postulát je co do složitosti opravdu výjimečný a není divu, že už v době Euklidově se ho někteří řečtí matematici pokoušeli odvodit z ostatních axiomů. Tyto pokusy trvaly až do 19. století, kdy byl celý problém rozřešen zcela nečekaným způsobem.

Provedl to v roce 1826 ruský matematik *N. I. Lobačevskij* a nezávisle na něm maďarský matematik *J. Bolyai*. Lobačevskij začal tak, jako mnoho matematiků před ním. Rozhodl se, že důkaz toho, že 5. postulát plyne z ostatních, provede sporem. Vynechal 5. postulát a nahradil ho

*) Teprve v 19. století se ukázalo, že Euklides tohoto cíle vlastně nedosáhl. Používal totiž i některé axiomy, které ve svém seznamu neměl. Šlo o axiomy týkající se spojitosti čar a o axiomy užívající pojmů „uvnitř", „vně" a „mezi".

jeho negací: „Existuje alespoň jeden pár neprotínajících se přímek v rovině, které protínají tutéž přímku a tvoří s ní po jedné její straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší než dva pravé." Pak postupoval obvyklým způsobem. Pomocí třinácti Euklidových axiomů a negace pátého se snažil odvozovat tvrzení obsahující spor. Tak ostatně postupovalo mnoho Lobačevského předchůdců.

Tvrzení, která Lobačevskij dokázal, byla sice podivná a nezvyklá, logický spor však neobsahovala. A Lobačovskij neudělal stejnou chybu jako všichni jeho předchůdci — totiž nespokojil se s tím, že tvrzení, která dokázal, jsou „zřejmě" absurdní, a že tedy negace pátého axiomu je neslučitelná s ostatními. Naopak, začal si postupně uvědomovat, že věty, které odvozuje, mají určitý řád. V tomto okamžiku si Lobačevskij uvědomil něco, na co nepřišel žádný z jeho předchůdců. Systém axiomů, který používal, je bezesporný a věty, které odvozuje tvoří novou geometrii.

Lobačevskému nescházela odvaha tento výsledek v roce 1829 publikovat. Ke stejnému výsledku došel v roce 1832 nezávisle J. Bolyai. Dodejme, že až na výjimky se jejich práce nesetkala s porozuměním.

Všimněme si v čem byl krok, který Lobačevskij a Bolyai udělali, tak revoluční: Nenechali se zmást tím, že dva tisíce let fungující systém — navíc dobře fungující systém Euklidovské geometrie — musí být jedině možný.

Zhruba o sto let později došlo k podobné situaci v teorii množin. Na konci 19. století bylo zřejmé, že je opravdu nejvyšší čas vytvořit teorii nekonečných množin. Slavný výrok „Uvnitř Země je ještě jedna a to větší" měl totiž už od 16. století analogie ve světě nekonečných množin. *Galileo Galilei* znal např. paradox tohoto typu: Sudých čísel je více než čísel dělitelných čtyřmi (to je zřejmé), ale čísel dělitelných čtyřmi (což jsou čísla tvaru $4 \cdot n$, kde n je přirozené číslo) je stejně jako přirozených čísel — každé číslo $4 \cdot n$ má odpovídající protějšek n. Tedy sudých čísel je více než všech přirozených čísel.

Teorii velikosti nekonečných množin vytvořil na konci 19. století německý matematik *G. Cantor* a jeho teorie paradoxy zmíněného typu vysvětlovala.*) Přitom se ukázalo, že každé dvě množiny lze porovnat (tj. buď jsou stejně velké nebo je jedna větší) a že ke každé množině existuje množina větší — tedy přesně stejná situace jako u konečných množin. Je-li např. N množina přirozených čísel a R množina reálných čísel, pak R je větší než N.

G. Cantor vyslovil hypotézu, že pokud se velikosti týče, neexistují množiny větší než N a zároveň menší než R. Tedy protože N je nejmenší nekonečná množina, znamená to, že R je druhá nejmenší. To je slavná

*) Obsahovala však paradoxy jiné a jak se ukázalo, jejich podstata byla vážnější. V současné době se zdá, že díky axiomatizaci, kterou provedl *Zermelo* a *Fraenkel* je teorie množin bezesporná.

hypotéza kontinua a na mezinárodním kongresu matematiků v roce 1900 v Paříži figurovala na prvním místě mezi 23 problémy, které formuloval *David Hilbert* a kterými se měla matematika v budoucnu zabývat.

Řešení tohoto problému bylo podobné jako u pátého Euklidova axiomu. V roce 1939 dokázal geniální brněnský rodák, německý matematik žijící ve Spojených státech, *Kurt Gödel*, že negaci hypotézy kontinua nelze dokázat. Dokázal, že to není možné v přirozeném systému axiomů, kterého všichni intuitivně používáme a který je přirozeným rozšířením systému navrženého Zermelem a Fraenkelem. V této souvislosti je zajímavé uvést, že na svém maturitním vysvědčení měl Kurt Gödel samé jedničky — kromě matematiky. Přesto jeho dílo v matematice znamená totéž co přínos Alberta Einsteina ve fyzice. O dvacet let později, v roce 1960, dokázal pak *P. Cohen*, že ani hypotézu kontinua nelze (v tomtéž systému axiomů) dokázat.

Uvědomme si, že situace je v tomto případě obrácená než u Euklidova pátého postulátu. Tam jsme měli axiom a vyslovili jsme hypotézu, že je ho možno odvodit z ostatních, ale nepodařilo se to. Nyní máme takové tvrzení, že všichni intuitivně cítíme, že buď je nebo naopak není pravdivé a přitom toto tvrzení je možné považovat za axiom.

V obou případech šlo jistě o neobyčejně obtížné úlohy, které ukazují, v čem jsou krásy i úskalí matematiky. Vzrušují vás podobné záležitosti? Jste připraveni přistupovat k problémům s nezbytnou skepsí, ale i nadějí? Využívat názoru, ale nespoléhat se na něj? Pracovat dál i když výsledky, které dostáváte, vypadají beznadějně a vše se vám skoro hroutí pod rukama?

Matematika se řadí mezi přírodní vědy, absolventi studia matematiky se mohou stát doktory přírodních věd. Ve světle toho, co bylo řečeno výše, by se však mohlo zdát, že matematika s přírodními vědami nemá nic společného, že čerpá podněty z abstraktních pojmů a z výsledků logických manipulací s nimi. Samotné základní matematické pojmy jsou však spjaty s tím, že vycházejí ze snahy popsat a modelovat vnější svět, fyzikální zákonitosti, jevy v biologii, ekonomii a dalších vědách. Cílem matematického popisu reality je pochopení přírodních zákonů a možnost předvídat vývoj situací v přírodě.

Podstatné kroky v tomto směru byly učiněny na konci 17. století, kdy byly položeny základy moderní matematiky a jsou spjaty se jmény *I. Newtona* a *G. W. Leibnize*. Tím, že matematika prokázala svou schopnost popisovat přírodu, že dovedla lidstvo k novým objevům, prokázala také svoji sílu a životaschopnost.

Pro matematika není větší radostí, než potěšení z vyřešeného problému, který dlouho odolával úsilí mnoha lidí a který mnoha lidem přináší užitek. Radost z objevu v matematice je to, kvůli čemu stojí za to se matematice věnovat, odhalovat její krásy a získávat v ní nové poznatky.

MATEMATIKA

Nová maximální aritmetická posloupnost prvočísel

LUBOMÍR ŽELEZNÝ, Praha

Ve svém článku Nové aritmetické posloupnosti prvočísel, který byl uveřejněn v Rozhledech matematicko-fyzikálních 1987/88, č. 3, jsem seznámil čtenáře s výsledky svých systematických i nesystematických výzkumů při hledání nových aritmetických posloupností prvočísel. Výsledky mých dvou systematických výzkumů jsou následující:

1. V roce 1975 jsem nalezl pomocí počítače IBM 360/135 všechny aritmetické posloupnosti prvočísel s délkou $k \geqq 8$ s diferencí 2310 v intervalu $\langle 1, 2\,670\,000 \rangle$.
2. V srpnu až říjnu roku 1983 jsem nalezl pomocí počítače EC 1011 všechny aritmetické posloupnosti prvočísel s délkou $k \geqq 8$ s diferencemi

$$d = 30\,030 \,.\, A \;; \quad A = 1, 2, 3, 4, \quad ., 39 \,,$$

jejichž prvních osm členů se vyskytuje v intervalu

$$\langle -8\,348\,339 \;; \quad 8\,348\,340 \rangle .$$

Po čtyřleté přestávce jsem v listopadu 1987 zahájil svůj třetí systematický výzkum aritmetických posloupností prvočísel pomocí počítače, pro nějž jsem sestavil čtyři verze programu, v nichž je však nutno ještě opravit chyby. Přesto jsem podle nich nalezl několik aritmetických posloupností prvočísel a dne 19. ledna 1988 jednu maximální aritmetickou posloupnost prvočísel:

$$145\,530n + 8\,877\,331 \;; \quad k = 12$$

Tato maximální aritmetická posloupnost prvočísel — s délkou $k = 12$ — je v pořadí čtvrtá známá.

Prvních osm členů této posloupnosti jsem ověřil pomocí Lehmerových tabulek prvočísel a její poslední čtyři členy jsem ověřil v tabulkách prvočísel od 10 000 000 do 14 000 000, které mám k dispozici. Pro zajímavost ještě uvádím rozklad diference:

$$145\,530 = 2 \,.\, 3^3 \,.\, 5 \,.\, 7^2 \,.\, 11$$

O diskrétních analogiích Wirtingerovy nerovnosti

RNDr. JARMILA NOVOTNÁ, CSc., Pedagogická fakulta UK, Praha

Pro integrály z funkce a jejích derivací je známa řada nerovností (viz např. [2], [3]). Mezi nejznámější patří *Wirtingerova nerovnost;* její znění i důkaz lze najít např. v knize W. Blaschkeho [1]. Je známo mnoho analogií a zostření Wirtingerovy nerovnosti a některé podobné nerovnosti pro funkce více proměnných. Tyto nerovnosti jsou označovány jako nerovnosti Wirtingerova typu. Mají rozsáhlé využití v teorii konvexních útvarů.

Protějškem nerovností Wirtingerova typu jsou *diskrétní nerovnosti*, v nichž se vyskytují konečné posloupnosti čísel. Jejich význam v praxi roste s rozvojem výpočetní techniky. Na rozdíl od spojitého případu je literatura věnovaná těmto nerovnostem poměrně málo bohatá.

Věta 1 (diskrétní Wirtingerova nerovnost). Nechť $x_1, \ldots, x_n$ je n reálných čísel takových, že

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 . \tag{1}$$

Označme

$$x_{n+1} = x_1 . \tag{2}$$

Pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{3}$$

Rovnost v (3) nastává, právě když

$$x_i = A \cos \frac{2\pi i}{n} + B \sin \frac{2\pi i}{n} , \; i = 1, \qquad n, \; A, \; B = \text{konst.} \tag{4}$$

Poznámka. V limitním případě $n \to \infty$ dostáváme z nerovnosti (3) Wirtingerovu nerovnost.

Větu 1 je možno dokázat různými postupy. V tomto článku si všimneme podrobněji důkazu, v němž se využívají trigonometrické mnohočleny (viz [1]). Důkaz nebudeme provádět podrobně. Jeho hlavní myšlenku budeme pouze ilustrovat na případech $n = 2, 3, 4, 6$.

Nechť nejprve $n = 2$. Nerovnost (3) má pro $n = 2$ tvar

$$\sum_{i=1}^{2} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \left((= 4 \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \right) \tag{5_2}$$

s podmínkou pro rovnost

$$x_i = A \cos \frac{2\pi i}{2} + B \sin \frac{2\pi i}{2} , \quad i = 1, 2, \; A, \; B = \text{konst.} \tag{6_2}$$

Zvolme v E_2 vektory

$$\mathbf{e}_0 = (1, 1)\,, \quad \mathbf{e}_1 = (\cos \pi, \cos 2\pi) = (-1, 1) \tag{7_2}$$

Zřejmě vektory $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ tvoří bázi*) v E_2, a proto lze každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in E_2$ vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_0\mathbf{e}_0 + c_1\mathbf{e}_1\,,$$

tj.

$$\begin{aligned} x_1 &= c_0 - c_1\,, \\ x_2 &= c_0 + c_1 \end{aligned} \tag{8_2}$$

Protože podle (1) předpokládáme, že $x_1 + x_2 = 0$, dostáváme

$$x_1 + x_2 = 2c_0 = 0\,, \text{ tj. } c_0 = 0 \tag{9_2}$$

Z (8_2) a (9_2) plyne

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 2\,c_1^2\,, \\ (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 &= 8c_1^2\,. \end{aligned} \tag{10_2}$$

Tedy dokazovaná nerovnost (5_2) má tvar

$$8c_1^2 = 4\,.\,2c_1^2 \tag{11_2}$$

Z (11_2) odvodíme, že pro $n = 2$ nastává v (3) rovnost pro libovolné c_1, což podle (7_2) znamená, že platí podmínka (6_2).

Nechť $n = 3$. Postupujeme analogicky jako v případě $n = 2$. Nerovnost (3) má pro $n = 3$ tvar

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \left(= 3 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \right) \tag{5_3}$$

s podmínkou pro rovnost

$$x_i = A \cos \frac{2\pi i}{3} + B \sin \frac{2\pi i}{3}\,, \; i = 1, 2, 3, \; A, B = \text{konst.} \tag{6_3}$$

Zvolme v E_3 vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= (1, 1, 1)\,, \\ \mathbf{e}_1 &= \left(\cos \frac{2\pi}{3}\,, \cos \frac{4\pi}{3}\,, \cos 2\pi\right) = \left(-\frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2}\,, 1\right) \\ \mathbf{e}_2 &= \left(\sin \frac{2\pi}{3}\,, \sin \frac{4\pi}{3}\,, \sin 2\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,, -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, 0\right) \end{aligned} \tag{7_3}$$

Pak platí

$$|\mathbf{e}_0|^2 = 3, \; |\mathbf{e}_1|^2 = |\mathbf{e}_2|^2 = \frac{3}{2}\,,$$

$$\mathbf{e}_i \,.\, \mathbf{e}_j = 0 \text{ pro } i \neq j, \; i, j = 0, 1, 2$$

---

*) Skupinu n vektorů $\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ nazveme bází prostoru E_n n-rozměrných reálných aritmetických vektorů (tj. uspořádaných n-tic reálných čísel), jestliže lze libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$ vyjádřit jednoznačně jako jejich lineární kombinaci.

Zřejmě vektory $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ tvoří bázi v E_3, a proto lze každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in E_3$ vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_0\mathbf{e}_0 + c_1\mathbf{e}_1 + c^*{}_1\mathbf{e}_2 ,$$

tj.

$$\begin{aligned} x_1 &= c_0 - \frac{1}{2} c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_1^* , \\ x_2 &= c_0 - \frac{1}{2} c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} c_1^* , \\ x_3 &= c_0 + c_1 \end{aligned} \tag{8_3}$$

Protože podle (1) předpokládáme, že $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, dostáváme

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3c_0 = 0 \text{ , tj. } c_0 = 0 \tag{9_3}$$

Z (8_3) a (9_3) plyne

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{3}{2} (c_1^2 + c_1^{*2}) ,$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = \frac{9}{2} (c_1^2 + c_1^{*2}) . \tag{10_3}$$

Tedy dokazovaná nerovnost (5_3) má tvar

$$\frac{9}{2}\left((c_1^2 + c_1^{*2}) \geqq 3 \,.\, \frac{3}{2} (c_1^2 + c_1^{*2}\right) \tag{11_3}$$

Z (11_3) plyne, že pro $n = 3$ nastává rovnost v (5_3) pro libovolné c_1, $c^*{}_1$, což podle (7_3) znamená, že platí podmínka (6_3).

Všimněme si nyní případů $n = 4$, 6 a postupujme opět analogicky jako v předchozích případech. Postup zapíšeme pouze stručně, podrobné výpočty si může podle vzoru případů $n = 2$, 3 čtenář doplnit sám.

Pro $n = 4$ má nerovnost (3) tvar

$$\sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \left(= 2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \right) \tag{5_4}$$

s podmínkou pro rovnost

$$x_i = A \cos \frac{2\pi i}{4} + B \sin \frac{2\pi i}{4} , \; i = 1, 2, 3, 4, \; A, B = \text{konst.} \tag{6_4}$$

Zvolme v E_4 bázi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= (1, 1, 1, 1) , \\ \mathbf{e}_1 &= \left(\cos \frac{\pi}{2} , \cos \pi, \cos \frac{3\pi}{2} , \cos 2\pi\right) = (0, -1, 0, 1) \\ \mathbf{e}_2 &= \left(\sin \frac{\pi}{2} , \sin \pi, \sin \frac{3\pi}{2} , \sin 2\pi\right) = (1, 0, -1, 0) , \\ \mathbf{e}_3 &= (\cos \pi, \cos 2\pi, \cos 3\pi, \cos 4\pi) = (-1, 1, -1, 1) \end{aligned} \tag{7_4}$$

a vyjádřeme vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_4$ v této bázi. Dostaneme

$$\mathbf{x} = c_0\mathbf{e}_0 + (c_1\mathbf{e}_1 + c^*{}_1\mathbf{e}_2) + c_2\mathbf{e}_3 ,$$

tj. (opět $c_0 = 0$)

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad c_1^* - c_2 , \\ x_2 &= -c_1 \quad + c_2 , \\ x_3 &= \quad -c_1^* - c_2 , \\ x_4 &= c_1 \quad + c_2 . \end{aligned} \tag{8_4}$$

Odtud

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 2(c_1^2 + c_1^{*2}) + 4c_2^2 ,$$

$$\sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i+1})^2 = 4(c_1^2 + c_1^{*2}) + 16\, c_2^2 . \tag{9_4}$$

Z (9_4) plyne, že dokazovaná nerovnost (5_4) má tvar

$$4(c_1^2 + c_1^{*2}) + 16\, c_2^2 \geqq 2[2(c_1^2 + c_1^{*2}) + 4\, c_2^2] ,$$

tj.

$$16\, c_2^2 \geqq 8\, c_2^2 . \tag{10_4}$$

Z (10_4) dostáváme, že pro $n = 4$ je nerovnost (3) splněna a rovnost nastává, právě když $c_2 = 0$, tj. je splněna podmínka (6_4).

Pro $n = 6$ má nerovnost (3) tvar

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i - x_{i+1})^2 = 4 \sin^2 \frac{\pi}{6} \sum_{i=1}^{6} x_i^2 \left(= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 \right) \tag{5_6}$$

s podmínkou pro rovnost

$$x_i = A \cos \frac{2\pi i}{6} + B \sin \frac{2\pi i}{6} , i = 1, \quad ., 6, A, B = \text{konst.} \tag{6_6}$$

Zvolme v E_6 bázi

$\mathbf{e}_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$,

$$\mathbf{e}_1 = \left(\cos 1 \quad 1 . \frac{2\pi}{6} , \cos 1 . 2 . \frac{2\pi}{6} , \cos 1 . 3 \quad \frac{2\pi}{6} , \cos 1 . 4 . \frac{2\pi}{6} , \right.$$

$$\left. \cos 1 . 5 . \frac{2\pi}{6} , \cos 1 . 6 . \frac{2\pi}{6} \right) = \left(\frac{1}{2} , -\frac{1}{2} , -1, -\frac{1}{2} , \frac{1}{2} , 1 \right),$$

$$\mathbf{e}_2 = \left(\sin 1 . 1 . \frac{2\pi}{6} , \sin 1 . 2 . \frac{2\pi}{6} , \sin 1 . 3 . \frac{2\pi}{6} , \sin 1 . 4 . \frac{2\pi}{6} , \right.$$

$$\left. \sin 1 . 5 . \frac{2\pi}{6} , \sin 1 \quad 6 \quad \frac{2\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2} , 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} , -\frac{\sqrt{3}}{2} , 0 \right),$$

$$\mathbf{e}_3 = \left(\cos 2 . 1 . \frac{2\pi}{6} , \cos 2 . 2 . \frac{2\pi}{6} , \cos 2 . 3 . \frac{2\pi}{6} , \cos 2 . 4 . \frac{2\pi}{6} , \right.$$

$$\cos 2 . 5 . \frac{2\pi}{6}, \cos 2 . 6 \frac{2\pi}{6}\Big) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \tag{7_6}$$

$$\mathbf{e}_4 = \left(\sin 2 . 1 . \frac{2\pi}{6}, \sin 2 . 2 . \frac{2\pi}{6}, \sin 2 . 3 \frac{2\pi}{6}, \sin 2 . 4 . \frac{2\pi}{6},\right.$$

$$\left.\sin 2 . 5 . \frac{2\pi}{6}, \sin 2 . 6 . \frac{2\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$\mathbf{e}_5 = \left(\cos 3 . 1 . \frac{2\pi}{6}, \cos 3 . 2 \frac{2\pi}{6}, \cos 3 . 3 . \frac{2\pi}{6}, \cos 3 . 4 . \frac{2\pi}{6},\right.$$

$$\left.\cos 3 . 5 . \frac{2\pi}{6}, \cos 3 . 6 . \frac{2\pi}{6}\right) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1)$$

a vyjádřeme vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in E_6$ v této bázi. Dostaneme

$$\mathbf{x} = c_0\mathbf{e}_0 + (c_1\mathbf{e}_1 + c_1^*\mathbf{e}_2) + (c_2\mathbf{e}_3 + c_2^*\mathbf{e}_4) + c_3\mathbf{e}_5 ,$$

tj. (opět $c_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2} c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_1^* - \frac{1}{2} c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2^* - c_3 , \\
x_2 &= -\frac{1}{2} c_1 + \frac{3}{2} c_1^* - \frac{1}{2} c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} c_2^* + c_3 , \\
x_3 &= - \quad c_1 \qquad + \quad c_2 \qquad - c_3 , \\
x_4 &= -\frac{1}{2} c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} c_1^* - \frac{1}{2} c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2^* + c_3 , \\
x_5 &= \frac{1}{2} c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} c_1^* - \frac{1}{2} c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} c_2^* - c_3 , \\
x_6 &= \quad c_1 \qquad + \quad c_2 \qquad + c_3 .
\end{aligned} \tag{8_6}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} x_i^2 &= 3(c_1^2 + c_1^{*2} + c_2^2 + c_2^{*2}) + 6c_3^2 , \\
\sum_{i=1}^{6} (x_i - x_{i+1})^2 &= 3(c_1^2 + c_1^{*2}) + 9(c_2^2 + c_2^{*2}) + 24c_3^2 .
\end{aligned} \tag{9_6}$$

Dokazovaná nerovnost (5_6) s podmínkou pro rovnost (6_6) plyne ihned z (9_6).

Pro obecné n je myšlenka důkazu nerovnosti (3) stejná jako v případech, které jsme probrali.

K větě 1 existují stejně jako ve spojitém případě některá zostření. Ta můžeme rozdělit do dvou skupin, a) zostření, jejichž limitním případem pro $n \to \infty$ je *Wirtingerova nerovnost* a b) zostření, jejichž limitním případem pro $n \to \infty$ je *zostřená Wirtingerova nerovnost*. Příkladem nerovnosti typu a) je věta 2, typu b) věta 3.

Věta 2. Nechť $n = 2m$, $n \geqq 4$. Nechť $x_1, \ldots, x_n$ je n reálných čísel takových, že platí (1). Položme $x_{n+i} = x_i$, $i = 1, \ldots, m$. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left(\sin^2 \frac{2\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i+m})^2 . \tag{12}$$

Rovnost v (12) nastává, právě když

$$x_i = A \cos \frac{2\pi i}{n} + B \sin \frac{2\pi i}{n} + C \cos \frac{4\pi i}{n} + D \sin \frac{4\pi i}{n}, \; i = 1, \ldots, n,$$

$$A, B, C, D = \text{konst.} \tag{13}$$

Věta 3. Nechť $n = 2m$. Nechť jsou splněny předpoklady (1), (2). Pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n \sin \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{2\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n}\right) \cdot (x_m + x_{2m})^2. \tag{14}$$

Rovnost v (14) nastává, právě když platí (4).

K důkazům vět 2 a 3 se používá analogický postup jako v důkazu věty 1, který jsme probírali v předchozím výkladu. Výpočty jsou však pro obecné n hlavně v důkazu věty 3 mnohem komplikovanější. Ilustrujme postup na případu $n = 6$. V tomto případě má nerovnost (12) tvar

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i - x_{i+1})^2 \geqq \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} (x_i + x_{i+3})^2 \tag{15_6}$$

s podmínkou pro rovnost

$$x_i = A \cos \frac{2\pi i}{6} + B \sin \frac{2\pi i}{6} + C \cos \frac{4\pi i}{6} + D \sin \frac{4\pi i}{6}, \; i = 1, \ldots, 6,$$

$$A, B, C, D = \text{konst}, \tag{16_6}$$

nerovnost (14) tvar

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i - x_{i+1})^2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + 3 \frac{\sqrt{3} - 1}{2} (x_3 + x_6)^2 \tag{17_6}$$

s podmínkou pro rovnost (6_6).

Ze vztahů (8_6) dostáváme

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{6} (x_i + x_{i+3})^2 = 12 (c_2^2 + c_2^{*2}), \\ &(x_3 + x_6)^2 = 4c_2^2 . \end{aligned} \tag{18_6}$$

Použitím (9_6) a (18_6) můžeme dokazovanou nerovnost (15_6) přepsat do tvaru

$$3(c_1^2 + c_1^{*2}) + 9(c_2^2 + c_2^{*2}) + 24c_3^2 \geqq 3(c_1^2 + c_1^{*2} + c_2^2 + c_2^{*2}) + \\ + 6c_3^2 + 6(c_2^2 + c_2^{*2}),$$

tj.

$$18c^2{}_3 \geqq 0\,. \tag{19_6}$$

Nerovnost (19_6) je splněna pro libovolné c_3, rovnost nastává pouze pro $c_3 = 0$, tj. platí podmínka pro rovnost (16_6).

Nerovnost (17_6) přepíšeme do tvaru

$$3(c_1^2 + c_1^{*2}) + 9(c_2^2 + c_2^{*2}) + 24c_3^2 \geqq 3(c_1^2 + c_1^{*2} + c_2^2 + c_2^{*2}) + \\ + 6c_3^2 + 3\,\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\,.\,4c_2^2\,,$$

tj.

$$(12 - 6\sqrt{3})\;c_2^2 + 6c_2^{*2} + 18c_3^2 \geqq 0\,. \tag{20_6}$$

Protože $12 - 6\sqrt{3} > 0$, je nerovnost (20_6) splněna pro libovolné c_2, c_2^*, c_3. Rovnost v (20_6) nastává pouze pro $c_2 = c_2^* = c_3 = 0$, tj. je-li splněna podmínka (6_6).

Rozsáhlý přehled známých nerovností Wirtingerova typu jak pro spojitý, tak i pro diskrétní případ je možno najít např. v pracech [2], [3].

Literatura

[1] Blaschke, W.: Kreis und Kugel. Leipzig 1916, 1956. Ruský překlad Moskva, Nauka 1967.

[2] Hardy, G. H. — Littlewood, J. E. — Pólya, G.: Inequalities. 2. vyd. London, Cambridge Univ. Press 1952.

[3] Mitrinovič, D. S.: Analytic Inequalities. Berlin —Heidelberg—New York, Springer Verlag 1970.

Řešení úloh ze str. 76

a) $164^2 = 26\,896$

b) $154^2 = 23\,716$

c) $103^2 = 10\,609$

d) $301^2 = 90\,601$

e) $328^2 = 107\,584$

f) $213^2 = 45\,369$

$304^2 = 92\,416$

g) $\sqrt{39\,204} = 198$

h) $\sqrt{390\,625} = 625$

i) $\sqrt{26\,569} = 163$

j) $\sqrt{501\,264} = 708$

$\sqrt{502\,681} = 709$

k) $\sqrt{43\,681} = 209$

$\sqrt{67\,081} = 259$

l) $\sqrt{32\,041} = 179$

$\sqrt{35\,721} = 189$

FYZIKA

Dálka vrhu šikmo vzhůru

JOSEF KOTYK, Pardubice

Zvýšenému zájmu našich čtenářů se těší úlohy, v nichž se tážeme, jak daleko by bylo možno dostřelit při počáteční rychlosti $v_0 = 600$ m/s puškou, jak daleko doletí střela, která opouští hlaveň děla namířenou v elevačním (výškovém) úhlu $\alpha = 60°$ počáteční rychlostí $v_0 = 1000$ m/s apod. Řešení můžeme (a často musíme) žákům usnadnit užitím elementárních početních prostředků. Úvodem stačí zpravidla podnítit je k přemýšlení, jak sestrojit několik bodů dráhy tělesa vrženého ve vakuu z počátku soustavy pravoúhlých souřadnic šikmo vzhůru pod daným výškovým úhlem danou počáteční rychlostí. Konstrukce je provedena pro $\alpha = 52°$, $v_0 = 25$ m/s v měřítku 1 1000 v obr. 1.

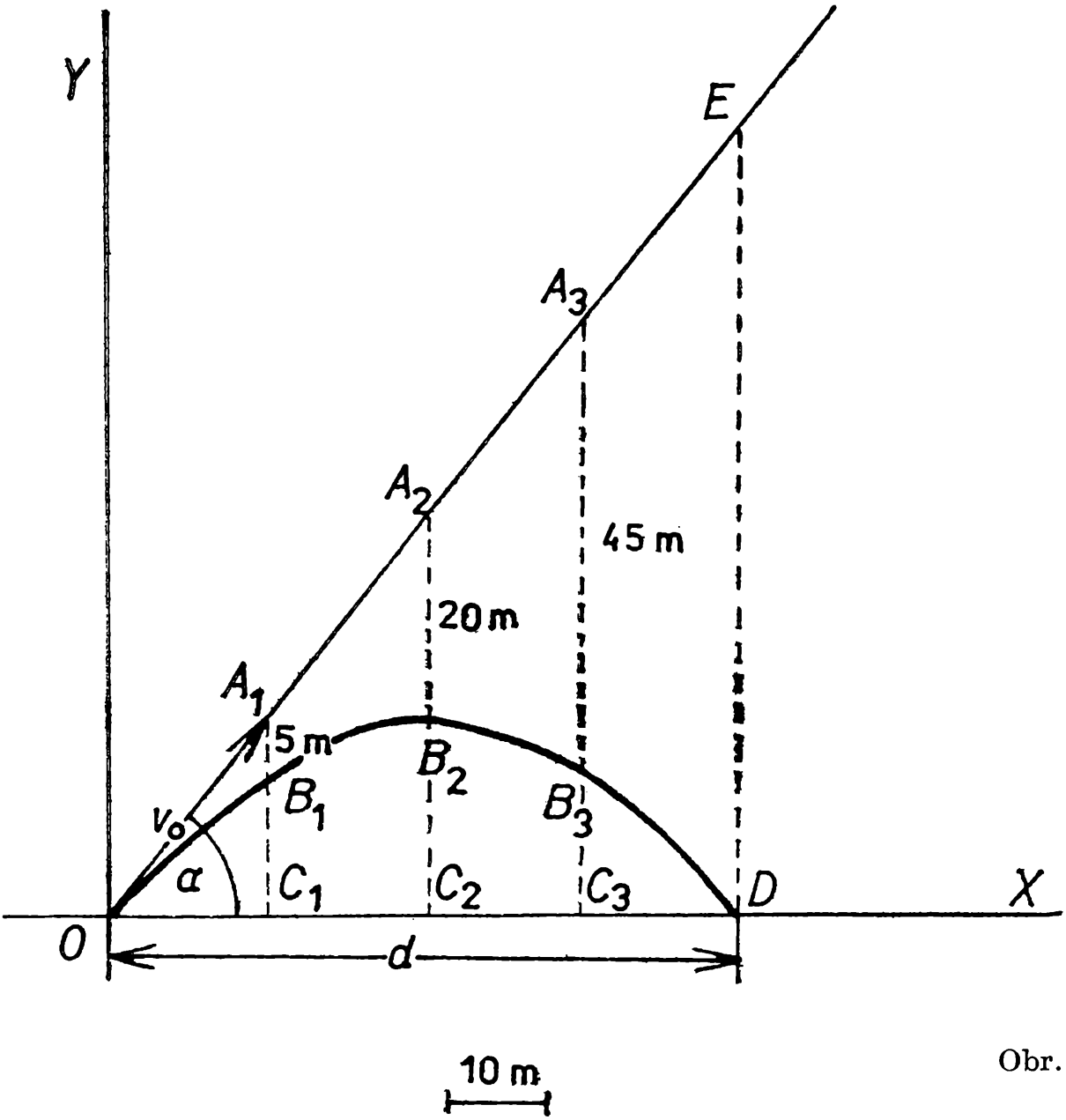
Těleso koná dva pohyby současně: přímočarý rovnoměrný (setrvačností) v daném směru a volný pád. Tyto pohyby si navzájem nepřekážejí; každý se koná podle svých zákonitostí nezávisle na druhém, můžeme je tedy sledovati jednotlivě, po sobě. Výsledná poloha tělesa nezávisí ani na jejich pořadí. Užitím tohoto principu nezávislosti pohybů sestrojíme pak polohu tělesa na konci každé sekundy takto:

Za první sekundu vykoná těleso směrem šikmo vzhůru dráhu $v_0 = OA_1$ a spadne volným pádem z A_1 do B_1 o $\frac{1}{2}$g 1² ≐ 5 m. (Celý rovnoběžník pohybů není třeba rýsovat.)

Za dvě sekundy urazí těleso směrem šikmo vzhůru dráhu $2v_0 = OA_2$ a volným pádem z A_2 do B_2 vzdálenost $\frac{1}{2}$ g . 2² ≐ 20 m.

Doporučuji čtenáři, aby sám vyslovil další věty pro 3s, 4s, počítané od začátku pohybu. Nad obr. 1 přemýšlejme zároveň takto:
Bod A_2 je ve výšce $A_2C_2 = 2v_0 \,.\, \sin\alpha$, bod B_2 ve výšce $B_2C_2 = A_2C_2 - A_2B_2 = 2v_0 \,.\, \sin\alpha - \frac{1}{2}$ g 2²; bod A_3 je ve výšce $A_3C_3 = 3v_0$ sin α, bod B_3 ve výšce $B_3C_3 = A_3C_3 - A_3B_3 = 3v_0 \,.\, \sin\alpha - \frac{1}{2}$ g . 3²;

Tak můžeme pokračovat. Pro bod D (d, 0), místo dopadu, které střela



Obr. 1

zasáhne po čase t_d, počítaném od začátku pohybu, platí obdobně

$t_d \quad v_0 \,.\, \sin\alpha - \frac{1}{2} g \quad t^2{}_d = 0$. Poněvadž $t_d \neq 0$, musí $v_0 \,.\, \sin\alpha - \frac{1}{2} g \,.$

$. \, t_d = 0$, z čehož $\qquad t_d = \dfrac{2v_0 \,.\, \sin\alpha}{g}$.

Dálku vrhu (dostřel) vyjádříme pak snadným počtem z trojúhelníka ODE; vychází

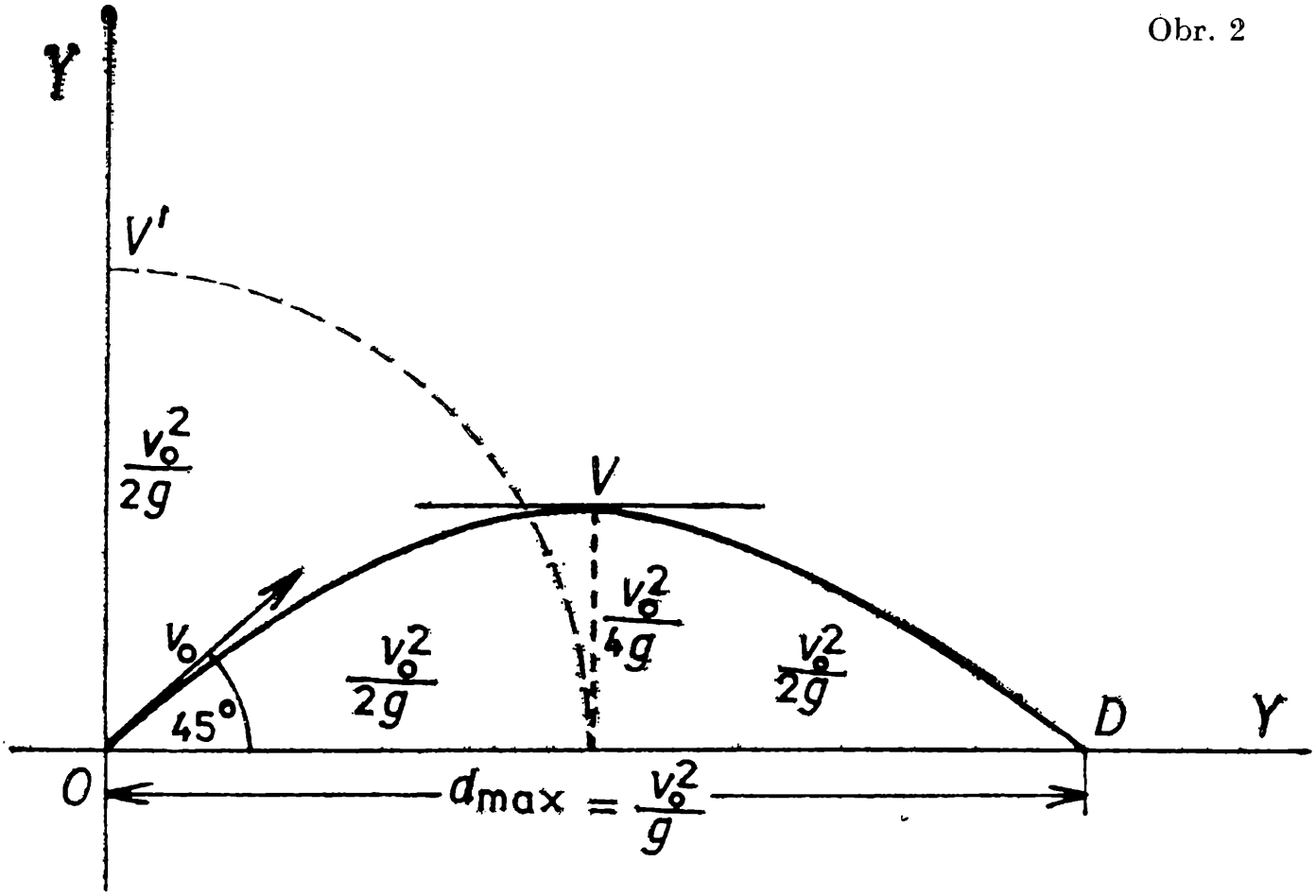
$$d = OD = OE \quad \cos\alpha = t_d \quad v_0 \,.\, \cos\alpha$$

neboli

$$d = \frac{2v_0^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{g}. \tag{1}$$

Správnost nalezeného výrazu ověříme v případě $\alpha = 90°$; potom $d = 0$, neboť $\cos 90° = 0$. To souhlasí se známou zkušeností, že při vrhu svislém vzhůru $D = O$.

Obr. 2



Součin $\sin\alpha \,.\, \cos\alpha$ je zajímavý tím, že nabývá pro doplňkové úhly $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 90° - \alpha$ stejné hodnoty, neboť $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Pro *elevační úhly doplňkové* vychází tedy při stejné počáteční rychlosti *táž dálka vrhu d*. Přesvědčte se o tom např. dvojicí $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 60°$, a to výpočtem $\left(d_1 = d_2 = \frac{v_0^2\sqrt{3}}{2g}\right)$ i obrázkem, jenž vám názorně objasní názvy obvykle užívané: vrh plochý a vrh strmý.

K řešení úlohy „Jakou elevaci musíme dát hlavni děla, jež udílí střele počáteční rychlost 500 m/s, aby zasáhla pozemský cíl vzdálený 5 km?" se výraz (1) bezprostředně nehodí. Poněvadž však $2\sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \sin 2\alpha$, je

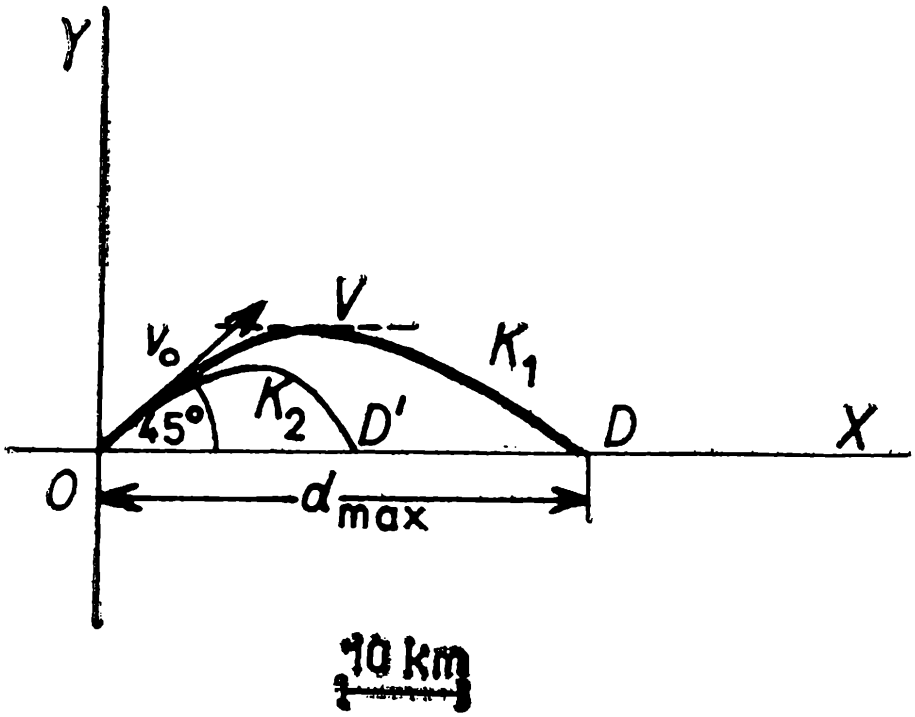
$$d = \frac{v_0^2}{g} \,.\, \sin 2\alpha, \tag{2}$$

z čehož ihned

$$\sin 2\alpha = \frac{g \,.\, d}{v_0^2} \doteq \frac{10 \quad 5000}{250\,000} = 0{,}2\,;$$

nyní buď $2\alpha \doteq 11°32'$ anebo $2\alpha \doteq 180° - 11°32' = 168°28'$; úloze vyhovují tedy dva elevační úhly $\alpha_1 = 5°46'$, $\alpha_2 \doteq 84°14'$, zřejmě doplňkové. Nastává obvyklý případ vrhu plochého i strmého téhož dostřelu.

Výraz (2) je způsobilý zodpovědět ihned také otázku, pro který elevační úhel je při dané počáteční rychlosti *dálka vrhu maximální* (největší). Shledáváme, že tento případ nastane, jestliže $\sin 2\alpha$ nabude



Obr. 3

také hodnoty největší; musí tedy být $\sin 2\alpha = \sin 90° = 1$ a velikost příslušného elevačního úhlu činit $\alpha = 45°$. Ze vztahu (2) vychází pak $d_{max} = \frac{v_0^2}{g}$. (Obr. 2) Zodpovědění dalších otázek „Jaká je při tom výška vrhu?", „Jaká je při téže počáteční rychlosti výška výstupu vrhu svisle vzhůru?" a provedení příslušných výpočtů i srovnání s veličinou d_{max}, naznačené rovněž v obr. 2, ponechávám již zájmu čtenářů.

Závěrem článku doložím jeden příklad numerickými údaji, z nichž vynikne, jak se dráha střely zejména za značných počátečních rychlostí pozměňuje odporem vzduchu. Pro $\alpha = 45°$, $v_0 = 640$ m/s měří dálka vrhu ve vakuu 41,8 km, výška výstupu 10,4 km. Na obr. 3 je narýsována v měřítku 1 10^6 dráha teoretická (křivka K_1) a dráha skutečná (křivka K_2). Místo paraboly vzniká pohybem ve vzduchu křivka zv. *balistická*. Odpor vzduchu má na dráhu střely značný vliv. Balistická křivka na rozdíl od paraboly není souměrná; sestup střely se děje příkřeji. Dálka vrhu i výška výstupu je menší, než jak vyplývá z teorie, která předpokládá pohyb hmotného bodu ve vakuu.

Cvičení

1. Vypočítejte dálku šikmého vrhu vzhůru, které při stejné počáteční rychlosti dosáhneme elevačními úhly $\alpha_1 = 45° + \beta$, $\alpha_2 = 45° - \beta$. Proveďte zkoušku správnosti pro $\beta = 15°$!

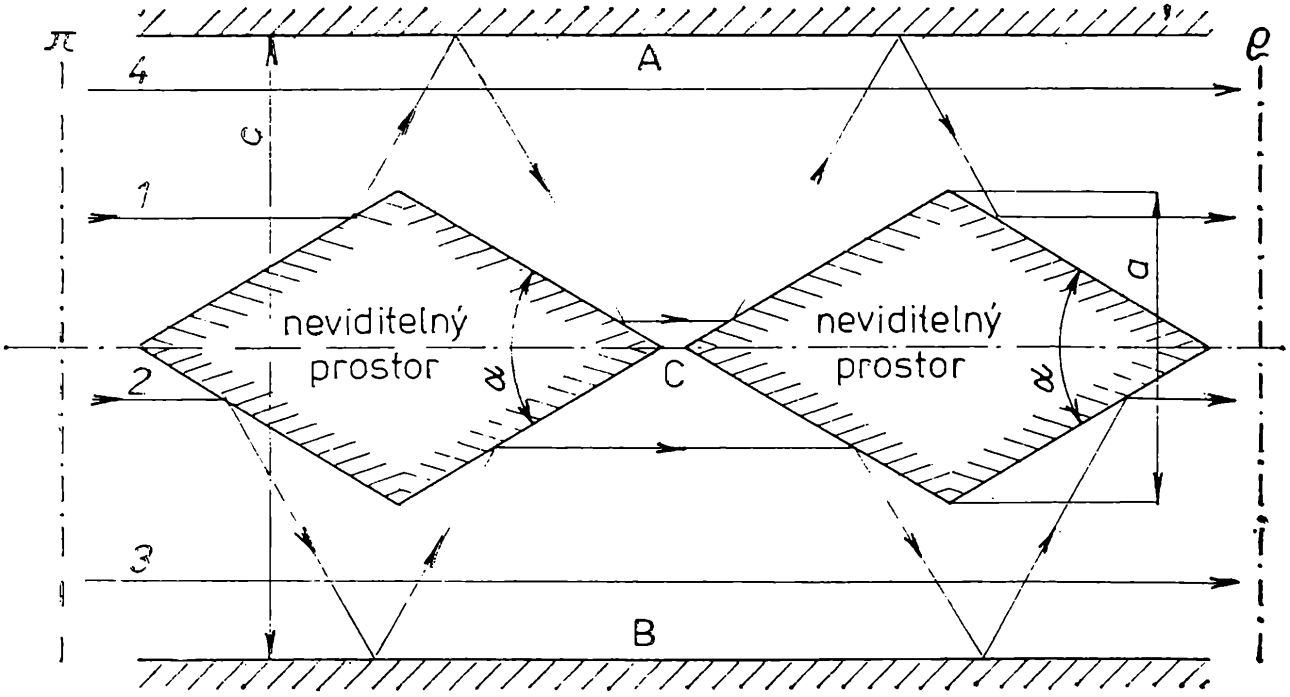
2. Otázku, jaká je okamžitá rychlost vrženého tělesa v místě dopadu, zodpovíme snadno pomocí zákona o zachování mechanické energie. Učiňte tak!

Problematika neviditelnosti

Ing. LADISLAV ŽENÍŠEK, CSc., Praha

Schopnost být podle své vůle neviditelným a sám všechno vidět je téma, na které bylo již v minulosti napsáno mnoho vědeckofantastických románů a sehráno mnoho inscenací. Vzpomeňme jen např. na román „Neviditelný kráčí městem", který byl před válkou zfilmován. Před léty uvedla naše televize volně zpracovanou inscenaci podle Julese Vernea „Tajemství Viléma Storitze". Na rozdíl od originálu V. Storitz, provaznický mistr, přišel sice z Německa za vlády Marie Terezie, ale nepůsobil v Uhrách, nýbrž v Praze na Malé Straně. Jakožto fyzik-amatér (či spíše alchymista) vynalezl tinkturu, po jejíž aplikaci se stal neviditelným a v tomto stavu páchal různé protispolečenské darebnosti, dokud nebyl zneškodněn.

Každý, kdo se jen povrchně vyzná v optice, ví bezpečně, že být neviditelný a přitom vidět jsou dva požadavky, které se navzájem vylučují. Aby mohl být někdo neviditelný, musel by mít materiál celého jeho těla relativní index lomu (vůči vzduchu) — alespoň pro sodíkovou čáru D — rovný jedné ($n = 1{,}000$). Protože absolutní index lomu vzduchu se od jedné příliš neliší, můžeme říci, že i absolutní index lomu jeho těla by musel být roven jedné ($N = 1{,}000$). Samozřejmě, materiál těla by musel



Obr. 1. Zrcadlová konstrukce

být bezbarvý. Ovšem, kdyby zase oční čočka měla $N = 1{,}0$, pak by její nositel jen rozeznal, je-li tma nebo světlo, jinak nic.

Absolutní index lomu látky závisí na rychlosti šíření světla v dané látce, a je tedy funkcí její elektrické permitivity a magnetické permeability

$$N = \sqrt{c^2 \varepsilon\mu} = \sqrt{c^2 \varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r\mu_r} = \sqrt{e^2 \frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \tag{1}$$

Dalo by se tedy formálně říci, že absolutní index lomu je geometrickým průměrem číselné hodnoty relativní permitivity a permeability.

Relativní permitivity průhledných látek jsou vždy větší než 1,00 a pokud jsou to kapaliny nebo látky pevné, pak jsou vždy větší než 2,00. Např. celuloid má $\varepsilon_r = 4{,}1$; křemen 3,8; parafinový olej 2,3; plexisklo 3 až 4,5; skla 3,7 až 6,9 (olovnaté) atd.

Relativní permeability těchto látek se jen nepatrně liší od jedničky. Permeabilitu $\mu_r < 1{,}00$ mají jen látky diamagnetické, jejichž μ_r se od jedničky liší asi až na čtvrtém desetinném místě. Neviditelná látka, tj. látka, která by vůbec nelámala (ale ani neodrážela) světlo, by musela mít vlastnosti

$$N = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \doteq 1{,}000 \Rightarrow \tag{2}$$

$$\mu_r \doteq \frac{N^2}{\varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_r}, \tag{3}$$

tj. látka by musela mít $\mu_r = 0{,}2$ až 0,5, aby výraz pod odmocninou (2) byl roven jedné.

Taková diamagnetická látka neexistuje. Vyvstává ovšem i otázka, z čeho by musela být krev, aby byla bezbarvá a čirá, a z čeho by měly být kosti, ne-li z oseinu.

Je tedy „biochemická" neviditelnost pustou fantazií, která nikdy nemůže být realizována.

A přesto existuje způsob, jak učinit osobu nebo předmět neviditelným. Nemáme tu na mysli různé davové sugesce nebo eskamotérské odvádění pozornosti apod. Je to způsob čistě katoprický, známý už ve starověku.

Mějme dva duté hranoly (obr. 1) s kosočtverečnými základnami, sestavené z rovinných zrcadel. V místě C může (ale nemusí) být nepříliš velká mezera. Oba hranoly musí být ovšem přesně v ose. Rovnoběžně s jejich osou jsou dvě rovinná zrcadla A, B stejné výšky jako hranoly. Vzájemná vzdálenost zrcadel A a B, vzdálenost c, je závislá na vrcholovém úhlu α a na šířce a hranolů vztahem

$$c = k \,.\, a \text{ kde } k = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{2tg(\alpha/2)} + \frac{1}{2}, \tag{4}$$

který zde nebuddeme odvozovat, ač je to celkem snadné. Na tomto místě jen uveďme, že pro

$$\alpha \to 90° \text{ je } k \to \infty\,,$$
$$\alpha = 60° \quad k = 2{,}000\,,$$
$$\alpha = 45° \quad k = 1{,}707\,,$$
$$\alpha = 30° \quad k = 1{,}577\,,$$

a proto vrcholový úhel α nemá být příliš větší než 60°, aby celá konstrukce příliš nenarůstala do šířky, ba nade všechny meze.

Sledujeme-li paprsky *1* a *2*, vidíme, že „obcházejí oba zrcadlové hranoly a ze soustavy vycházejí v původních přímkách. Vnitřky hranolů jsou neviditelné prostory, takže pozorovatel vidí na rovině ϱ celé pozadí z roviny π, protože paprsky *3* a *4* procházejí přímo.

Závěrem je třeba uvést, že snaha po neviditelnosti se uplatňuje u mnoha vodních živočichů (láčkovci, prvoci, hromadinky, ale i některé drobné ryby) jako speciální forma tzv. *mimikri*, tj. schopnosti splynout s okolím. Prakticky neviditelné jsou i mikroorganismy, které musíme obarvit, než je můžeme spatřit v drobnohledu. Ještě menší a rovněž neviditelné viry se musí k tomuto účelu pokovit, abychom viděli aspoň jejich stíny.

Neviditelnosti bychom mohli při dnešních technice dosáhnout také převedením pozadí do popředí soustavou světlovodů, popř. snad i televizním přenosem přes „neviditelný" prostor. Bylo by to však fantasticky drahé a kdoví, zda dokonalé.

Neutróny okolo nás

ANTON ALBRECHT, MIROSLAV CHRAPAN, Gymnázium M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš

Neutróny z kozmického žiarenia

Z hodín fyziky vieme, čo je kozmické žiarenie (KŽ) a čo sú neutróny a protóny, jedným slovom nukleóny. Menej nám je už známe, že v KŽ k nám z kozmu doletí len veľmi málo neutrónov. Väčšina sa ich vytvorí zrážkami protónov z KŽ s atómami vrchných vrstiev atmosféry. Najviac neutrónov vzniká vo výškach 18 km nad povrchom Zeme. Tu na každý centimeter štvorcový povrchu myslenej gule s polomerom 6396 km vzniknú každú sekundu asi 4 neutróny. Presnejšie povedané ony nevzniknú, ale pri jadrových reakciách sa uvoľňujú z jadier atómov vzduchu. Ľahko si vypočítame, že na celej myslenej guli každú sekundu vznikne $5{,}14 \,.\, 10^{18}$ neutrónov. Tieto letia rôznymi rýchlosťami a rôznym smerom.

Neutróny v gravitačnom poli Zeme

Skutočnosť, že sa neutróny, ktoré vznikli v atmosfére, nachádzajú v gravitačnom poli Zeme, neovplyvňuje ich pohyb. Aby sme to ukázali, vypočítajme, ako vysoko by sa mohli dostať neutróny z miesta svojho vzniku, keby ich počiatočná rýchlosť v_0 bola 4400 m . s^{-1}. Táto rýchlosť odpovedá energii neutrónov 0,1 eV (1,6 . 10^{-20} J). Počítajme s neutrónmi, ktoré sa vzďalujú od Zeme vo smere jej polomeru. Výška výstupu (h) týchto neutrónov za predpokladu, že sa po ceste (s) s ničím nezrazia, bude daná vzťahom

$$h = h_0 + s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + h_0 , \qquad (1)$$

kde t je čas výstupu. Vypočítame ho z rovnice

$$v_0 = g t$$

a po dosadení do (1) dostaneme

$$h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} + h_0 , \qquad (2)$$

za g dosadíme hodnotu gravitačného zrýchlenia vo výške vzniku neutrónu, ktorú vypočítame zo známeho vzťahu

$$g = \varkappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} ;$$

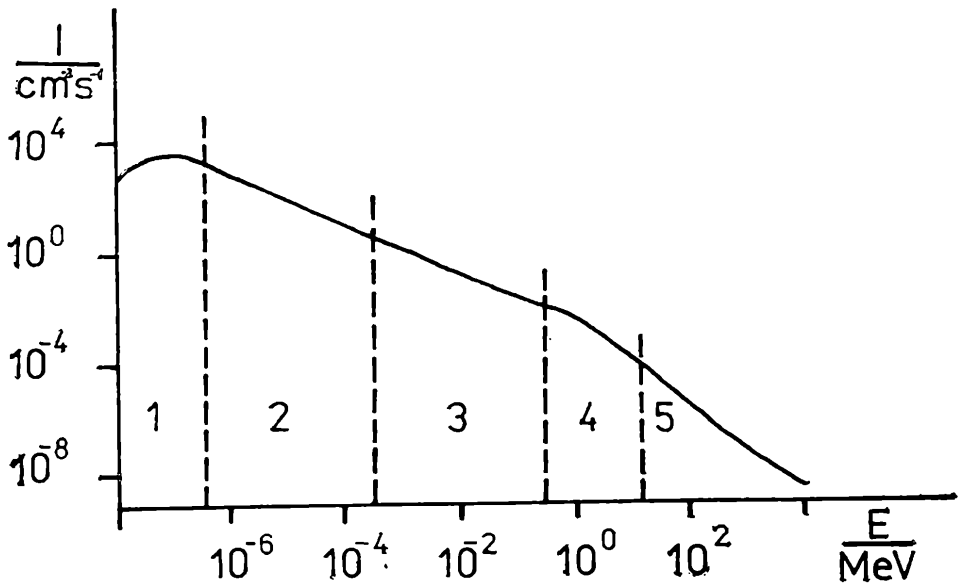
tu hmotnosť Zeme $M_Z = 5{,}983 \,.\, 10^{24}$ kg, $\varkappa = 6{,}670 \,.\, 10^{-11}$ N . m^2 . kg^{-2} je gravitačná konštanta a $h_0 = 18\,000$ m. Po dosadení takto vypočítanej hodnoty $g = 9{,}75$ m . s^{-2} do (2), dostaneme pre výšku $h = 1011$ km. V týchto výškach by už bolo $g = 7{,}31$ m . s^{-2}. Teda naše neutróny by vyleteli ešte vyššie ako sme vyrátali, ak by sa samozrejme pri výstupu s ničím nezrazili. Ak áno, potom by už menili smer svojho výstupu a nestúpali by radiálne.

Ukázali sme, ako málo vplýva gravitačné pole Zeme na neutróny a im podobné častice.

Neutróny pri povrchu Zeme

Neutróny s energiou nižšou ako desatiny eV sa volajú *tepelné neutróny*. Tieto sa v atmosfére (ale aj v iných prostrediach) pohybujú difúznym pohybom. Tento chaotický pohyb zodpovedá tepelnému pohybu molekúl plynu. Z celkového počtu neutrónov, ktoré vzniknú v atmosfére, 83 % vyvolá rozmanité jadrové reakcie, alebo sa voľne rozpadne. Do kozmu unikne asi 16,8 % neutrónov z atmosféry. Na jeden meter štvorcový povrchu Zeme, redukovaného na hladinu mora, dopadne každú sekundu priemerne 90 neutrónov. Z toho by sa zdalo, že pri zemskom povrchu letí plochou 1 cm^2 jeden neutrón každých 111 s. V skutočnosti to tak nie je, lebo mnoho neutrónov sa od povrchu Zeme odrazí a mnoho ich zasa tesne pod povrchom vzniká. Takto je tok neutrónov pri povrchu

Obr. 1



Energetická závislosť toku neutrónov pri hladine mora na 45° s. z. š.
Energetické pásma neutrónov:
1 — ultrachladné, 2 — chladné a tepelné, 3 — rezonančné a stredne energetické, 4 — rýchle, 5 — vysokoenergetické
Plochy pod krivkou predstavujú počet neutrónov z príslušnej energetickej oblasti, pripadajúci na 1 cm² za 1 sekundu:
1 — $5 . 10^{-4}$ neutrónov $cm^{-2} . s^{-1}$, 2 — $3,5 . 10^{-2}$ neutrónov $cm^{-2} . s^{-1}$,
3 — $2,5 . 10^{-1}$ neutrónov $cm^{-2} . s^{-1}$, 4 — $6 . 10^{-2}$ neutrónov $cm^{-2} . s^{-1}$,
5 — $5 . 10^{-2}$ neutrónov $cm^{-2} . s^{-1}$, celkom: 0,39 neutrónov $cm^{-2} . s^{-1}$.

Zeme závislý od zloženia pripovrchových vrstiev a od ich vlhkosti. Dostatočne citlivý detektor neutrónov dáva zaujímavé informácie o vlastnostiach pripovrchových vrstiev Zeme a o pôdach. Pred štvrťstoročím sa zistilo, že asi 100 m nad Zemou je neutrónov najmenej. Sem už neutróny z povrchu Zeme nedoletia. Pri vodnej hladine sa nameral o polovicu nižší tok neutrónov ako nad pôdou. Od vodnej hladiny sa ich totiž menej odrazí a menej ich aj vo vodách vzniká. S rastúcou hĺbkou pod povrchom Zeme neutrónov najprv pribúda. Najviac ich je asi pol metra pod povrchom. Tu ich je takmer toľko, ako v atmosfére vo výške 18 km. Ďalej ich s hĺbkou ubúda. V hĺbce 5 m ich je už len toľko, ako nad povrchom a ich množstvo sa s rastúcou hĺbkou pomaly zmenšuje. Uvoľňujú sa už len pri jadrových premenách, lebo obzvlášť v granitoch je dosť rozptýleného uránu a tória. Neutrónov výrazne ubudne 5 až 6 km pod povrchom Zeme, kde ich je podľa odbornej literatúry len milióntina maximálneho množstva.

Energia neutrónov v našom okolí

Merať energiu neutrónov nie je nijako ľahké. Vypracovalo sa na to viacero metód. Všetko sú to metódy s malou energetickou rozlišovacou schopnosťou a každá z nich je výhodná pre inú oblasť energií. Tieto metódy využívajú:

1. *Aktiváciu vhodných materiálov neutrónmi.* Neutróny sa zachytia jadrami atómov týchto detektorov, vytvoria nestabilné jadrá a tým sa detektor aktivuje. Ak poznáme podmienky aktivácie, môžeme posúdiť vlastnosti aktivujúceho neutrónového toku.

2. *Prahové detektory* využívajú tzv. *prahovú energiu jadrových reakcií.* To je energia, potrebná na uskutočnenie jadrovej reakcie. Preto ak zistíme, že neutróny vyvolali určitú reakciu, tak vieme, že mali energiu väčšiu, ako je prahová energia príslušnej reakcie. Z množstva vyvolaných prípadov reakcie možno usudzovať aj na množstvo neutrónov.

3. Využíva sa aj priama zámena neutrónov nabitými časticami, schopnými ionizovať, tzv. *konverzia neutrónov.* Jedná sa predovšetkým o zrážky neutrónov s atómami vodíka, alebo vznik protónov pri jadrových reakciách. Na detekciu neutrónov možno využiť reakciu

$$\mathrm{n} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} \rightarrow \mathrm{T} + \mathrm{p} \qquad (3)$$

protón (p) a jadro trícia (T) majú spolu kinetickú energiu 768 keV.

Energetické zloženie atmosferických neutrónov sa skúma teoreticky aj experimentálne. Na obr. 1 je energetické spektrum neutrónov v atmosfére na úrovni mora na 45° severnej zemepisnej šírky. Na os x sme vyniesli energiu neutrónov v MeV, na os y počet neutrónov cez 1 cm² za jednu sekundu.

Energia reakcie

Ešte v roku 1936 vypracoval *Niels Bohr* predstavu, podľa krorej jadrové reakcie prebiehajú v dvoch etapách. V prvej etape vytvoria častice, vstupujúce do reakcie, tzv. *zložené jadro.* Toto jadro je vysoko nestabilné a v druhej etape sa v krátkom čase (rádove 10^{-15} s) mení na produkty jadrovej reakcie. V súlade so zákonom zachovania energie sa musí celková energia častíc vstupujúcich do reakcie rovnať celkovej energii častíc, ktoré z reakcie vystupujú. Pod celkovou energiou častíc sa tu rozumie súčet kinetických energií a tzv. vlastných energií častíc. *Vlastná energia* častice je podľa Einsteina $E = m\,c^2$, kde c je rýchlosť svetla vo vákuu, m hmotnosť častice.

Do reakcie (3) vstupuje neutrón (n) a jadro izotopu hélia (^{3}He). Ich celková energia bude

$$E_{\mathrm{kn}} + E_{\mathrm{kHe}} + (m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{He}})c^2 .$$

Celková energia častíc po reakcii je

$$E_{\mathrm{kp}} + E_{\mathrm{kT}} + (m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{T}})c^2 .$$

Zákon zachovania energie hovorí, že

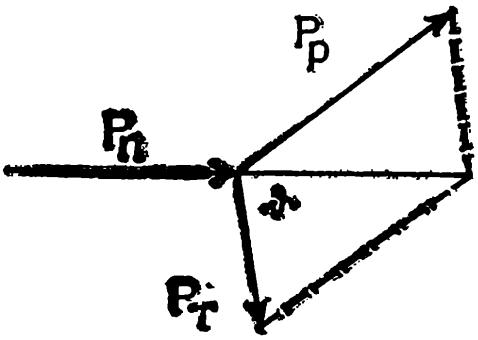
$$E_{\mathrm{kn}} + E_{\mathrm{kHe}} + (m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{He}})c^2 = E_{\mathrm{kp}} + E_{\mathrm{kT}} + (m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{T}})c^2 ,$$

čo môžeme upraviť

$$(m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{He}})c^2 - (m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{T}})c^2 = E_{\mathrm{kp}} + E_{\mathrm{kT}} - E_{\mathrm{kn}} - E_{\mathrm{kHe}} ;$$

rozdiel kinetických energií označme

$$E_{\mathrm{kp}} + E_{\mathrm{kT}} - (E_{\mathrm{kn}} + E_{\mathrm{kHe}}) = Q , \qquad (4)$$



Obr. 2

potom tiež platí

$$(m_n + m_{He})c^2 - (m_p + m_T)c^2 = Q\,, \tag{5}$$

tu Q je tzv. *energia reakcie*. Táto sa pri reakcii uvoľní vo forme kinetickej energie častíc vystupujúcich z reakcie, alebo sa musí dodať, aby sa reakcia uskutočnila. Dodáva sa v podobe kinetickej energie častíc, ktoré do reakcie vstupujú.

Vypočítajme, aká energia sa uvoľní pri reakcii (3). Použijeme na to vzťah (5), do ktorého dosadíme

$$m_n = 1{,}674\,91 \,.\, 10^{-27}\ \mathrm{kg}\,, \qquad m_p = 1{,}673\,51 \,.\, 10^{-27}\ \mathrm{kg}\,,$$
$$m_{He} = 5{,}008\,21 \,.\, 10^{-27}\ \mathrm{kg}\,, \qquad m_T = 5{,}008\,24 \,.\, 10^{-27}\ \mathrm{kg}\,,$$
$$c = 2{,}997\,93 \,.\, 10^{8}\ \mathrm{m\ s^{-1}}\,, \qquad 1\mathrm{J} = 6{,}241\,90 \,.\, 10^{18}\ \mathrm{eV}\,,$$

a po vyčíslení dostaneme $Q = 768{,}6$ keV.

Energia častíc po reakcii

Rozoberme situáciu reakcie (3) v laboratórnej súradnicovej sústave, použijúc zákony zachovania hybnosti a energie. Na obr. 2 sú zakreslené hybnosti častíc pri skúmanej jadrovej reakcii. Z kosínusovej vety dostaneme pre zákon zachovania hybnosti

$$p_p^2 = p_n^2 + p_T^2 - 2p_n p_T \cos\vartheta\,.$$

Vieme, že hybnosť je definovaná ako $p = m\,v$ a kinetická energia $E_k = \frac{1}{2}\,m\,v^2$. Medzi nimi platí vzťah $p^2 = 2mE_k$, a tak rovnicou medzi hybnosťami môžeme písať pomocou energie

$$2m_p E_{kp} = 2m_n E_{kn} + 2m_T E_{kT} - 4\cos\vartheta\,\sqrt{m_n\,m_T\,E_{kn}\,E_{kT}}\,,$$

po úprave

$$E_{kp} = \frac{m_n}{m_p}\,E_{kn} + \frac{m_T}{m_p}\,E_{kT} - \frac{2\cos\vartheta}{m_p}\sqrt{m_n\,m_T\,E_{kn}\,E_{kT}} \tag{6}$$

Dosadením (6) do (4) dostaneme

$$Q = E_{kT}\left(1 + \frac{m_T}{m_p}\right) - E_{kn}\left(1 - \frac{m_n}{m_p}\right) - E_{kHe} - \frac{2\cos\vartheta}{m_p}\sqrt{m_n\,m_T\,E_{kn}\,E_{kT}} \tag{7}$$

srov. RELIKVIE — ostatky) — pozůstatek, zbytek; RELIKTNÍ; RELIKTOVÉ záření — jakýsi „šum", který není zářením vesmírných těles, jaká známe dnes, ale asi je pozůstatkem-reliktem z nejstarších období vývoje vesmíru

REMANENCE (od lat. *remaneo*, *-ere*, ptc. préz. *remanens*, *-entis*; slož. z *re-* = zpět, znova, v. *re-* + *maneo*, *-ere* = zůstávat, trvat; v. permanentní) — „zůstávání, přetrvávání"; ve fyzice: remanence magnetická — jev, kdy i po zániku vnějšího magnetického pole magnetizace zůstává (látka si podržuje jistou kladnou hodnotu); REMANENTNÍ — trvající, setrvalý, zbytkový, zbývající; remanentní magnetická indukce — „zbytková"; nepřestává působit ani při ubírání proudu; remanentní magnetismus — slabý magnetismus; jakýsi zbytek, který zůstal v železném jádru elektromagnetu od dřívějška

RENTGENO- (podle jména lékaře a fyzika *W. C. Roentgena*, objevitele záření X-paprsků) — počáteční část složených slov mající význam „rentgenové záření"; ve vztahu k další části složeného slova buď vyjadřuje její předmět, např. RENTGENOMETR (v. -metr[1]) — přístroj měřící množství rentgenového záření, nebo vyjadřuje její bližší okolnost; např. RENTGENOGRAFIE (v. -grafie) — pořizování snímků struktury materiálu rentgenovým zářením; RENTGENOLUMINISCENCE (v. luminiscence) — světélkování nějaké látky podmíněné rentgenovým zářením

REOSTAT (slož. z řec. *rheó* = téci; srov. známý výrok starořeckého filozofa Herakleita PANTA RHEI [REJ] — všechno neustále plyne, vše se mění + *statos* = postavený, stojící, od histémi = stavět, postavit; v. -stat) — „nastavený tok"; přístroj umožňující „nastavovat" žádanou sílu elektrického proudu; srov. termostat

REPRODUKCE (slož. z lat. *re-* = zpět; opět, znova; v. *re-* + *productio* = „vyvedení"; v. produkce) — „opětné vyvedení"; předvádění, slovní opakování něčeho dříve poznaného, vyslechnutého, zažitého; ve fyzice: zvukový přenos nějakým prostředkem sdělovací techniky; ve sdělovací technice: přeměna zvukových elektrických signálů na signály slyšitelné („opětné vydávání signálů, ale v jiné podobě"); REPRODUKOVAT; REPRODUKTOR (v. -or) — zařízení reprodukující zvuk; amplion, tlampač; elektroakustický měnič („vydává zvuk, když předtím změnil vlny elektrické na akustické")

RESIDUUM v. REZIDUUM

RESPEKTIVE (od lat. *respicio*, *-ere*, ptc. pf. *respectus*; slož. z *re-* = zpět, znova, opět; v. *re-* + *spicio*, *-ere* = hledět; srov. RESPEKT — „ohlížíme-li se na někoho s úctou, se strachem") — „při opětném, upřesňujícím pohlédnutí"; „podíváme-li se na to ještě jednou, a to přesněji"; vlastně, lépe řečeno, popřípadě

RESTITUCE (z lat. *restitutio*; od *restituo*, *-ere*, ptc. pf. *restitutus*; slož. z *re-* = zpět, znova, opět; v. *re-* + *statuo*, *-ere* = postavit, stanovit;

 srov. INSTITUCE — ústav, zařízení) — „opětné postavení"; znovuzřízení, navrácení do dřívějšího stavu, obnovení: ve fyzice: vzpruživost; případ, kdy se nárazem stlačené těleso, zejména koule, znovu vrací buď zcela nebo jen částečně do dřívějšího tvaru (vzpružuje se); RESTITUČNÍ, RESTITUOVAT

RESUBLIMACE (slož. z lat. *re-* = zpět, opět, znova; v. *re-* + *sublimace*, v. t.) — „zpětná sublimace"; přeměna látky ze skupenství plynného zpět do skupenství pevného (totéž co „desublimace")

RETARDACE (z lat. *retardatio;* od *retardo, -are*, ptc. pf. *retardatus*; slož. z *re-* = zpět, znova, opět; v. *re*; + *tardo, -are*; od *tardus* = zdlouhavý, dlouhotrvající, dlouhý; srov. v hudbě: RITARDANDO — postupně zvolňovat, zpomaleně) — zpomalení, zpožďování; ve fyzice: záporná hodnota zrychlení; RETARDAČNÍ — způsobující zpoždění, zpomalení; zvolňovací; retardační moment — moment zpomalení; retardační nádrž — nádrž zpomalující průtok

RETIKULÁRNÍ (od lat. *reticulum*; zdrobnělina od *rete, retis* = síť; srov. RETIAROVÉ [reciárové] — gladiátoři bojující se sítí v ruce) — síťkovitý; retikulární pojivo — síťovitě uspořádané; tvořené rozvětvenými buňkami a tenkými svazečky vláken, mezi nimiž jsou četné prostory; retikulární hustota — mřížková hustota, tj. počet elementů mřížky v buňce připadajících na plošnou jednotku v strukturní rovině

RETROGRÁDNÍ (z lat. *retrogradis*; slož z *retro* = zpět, zpátky, dozadu, vzadu; srov. RETROSPEKTIVNÍ — hledící zpět do minulosti + *gradior, -i* = kráčet; v. gradient) — pohybující se nazpět, zpětně postupující, opačný; ve fyzice: retrográdní směr — zpětný; retrográdní pohyb planet — zdánlivý zpětný pohyb planet, tj. od východu na západ

REVERZIBILNÍ (od lat. *reverto, -ere*, ptc. pf. *reversus;* slož. z *re-* = zpět, znovu, opět + *verto, -ere* = obracet, otáčet; v. inverze) — „schopný otáčet se zpět"; schopný probíhat opačným směrem, schopný probíhat oběma směry; vratný; ve fyzice: reverzibilní děj — fyzikální děj, kdy se těleso vrací do původního fyzikálního stavu

REVERZNÍ — „otáčející se zpět"; návratný; schopný probíhat v opačných směrech; ve fyzice: reverzní kyvadlo — převratné; je upraveno tak, že se může kývat na dvou různých osách umístěných na opačných stranách od těžiště

REZIDUUM (z lat. *residuus* = pozůstalý, zbylý; slož. z *re-* = zpět, znovu, opět; v. *re-* + *sedeo, -ere* = sedět; srov. SEDIMENT — usazenina) — „to, co zůstalo sedět"; zbytek, přebytek; ve fyzice: zbytek některé veličiny (např. magnetismu, elektrického náboje apod.)

REZISTENCE (z lat. *resistentia*; od *resisto, -ere*, ptc. préz. *resistens, -entis*; slož. z *re-* = zpět, znova, opět; v. *re-* + *sisto, -ere* = stavět, postavit; srov. ASISTENT — „ten, kdo je postaven k druhému, aby mu pomáhal"; lat. *ad* = k, u) — „postoj proti"; odpor; schopnost

odolávat, vzdorovat; odolnost vůči vnějším vlivům; projev nesouhlasu; ve fyzice: termín pro veličinu (velikost, míru) odporu; v technice: stupeň tvrdosti látky; REZISTENTNÍ sklo — ve zvýšené míře odolávající různým vnějším vlivům, zvláště tepelným a chemickým; REZISTOR (v. -or) — část přístroje účinkující svým elektrickým odporem. Pozn.: Protože základem lat. slovesa sisto, -ere je sto, stare, s ptc. préz. stans, stantis = státi, existuje též výraz REZISTANCE — málo obvyklý termín pro ohmický odpor.

REZONANCE (z lat. *resonantia;* od resono, *-are,* ptc. préz. *resonans, -antis;* slož. z *re-* = zpět, znova, opět; v. *re-* + *sono, -are* = zníti; v. disonance) — „vydávání, tj. odrážení zvuku nazpátek"; předávání zvuku předmětům schopným souznění; ozvuk; ve fyzice: jev, při kterém jsou vyvolávány mechanické, elektrické nebo akustické kmity („znovu se rozezvučí") působením periodicky se opakujících kmitů o stejném kmitočtu; REZONANTNÍ — ozvučný; vyvolávající, umožňující ozvuk; ve fyzice: založený nebo působící na principu rezonance

ROTACE (z lat. *rotatio;* od *roto, -are,* ptc. pf. *rotatus* = pohybovat v kruhu, kroužit; od *rota* = kolo, kruh) — „kolotání"; otáčení, otáčivý pohyb; ROTAČNÍ — otáčivý, vzniklý otáčením; ROTOR (v. -or) — otáčivá část stroje, zpravidla elektrického motoru nebo turbiny (ta část, která se otáčí — rotuje); otočný válec využívající síly větru k pohonu lodi; soustava otáčejících se nosných ploch sloužící k vzlétnutí a pohonu vrtulníku

S (psáno malým písmenem) (od lat. *spatium* = prostor, délka, vzdálenost) — v mechanice: označení pro dráhu hmotného bodu

SACHAROMETR (slož. z řec. *sakcharon* = cukr; srov. SACHARIN — druh umělého sladidla + *metron* = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — přístroj k měření cukernatosti, množství cukru v roztocích

SATELIT (z lat. *satelles, -itis* = osobní stráž, průvodce; srov. SATELITNÍ města — přidružená města) — v astronomii: měsíc nebo družice obíhající kolem planety

SCINTILACE (z lat. *scintillatio;* od *scintillo, -are,* ptc. pf. *scintillatus;* od *scintilla* = jiskra) — jiskření; velmi krátké světelné záblesky vznikající v některých organických i anorganických látkách při dopadu částic nebo kvant ionizujícího záření; scintilace hvězd — jiskření, třpytění se hvězd

SEGMENT (z lat. *segmentum* — původně *secamentum* = nástroj na řezání; od *seco, -are* = řezat, sekat, dělit; v. sektor) — „řez, odřezek"; úsek, část; ve fyzice: součást mající tvar kruhové výseče; v matematice: úsek (kružnice nebo jiné čáry), úseč kruhu apod.

SEGREGACE (z lat. *segregatio*; od *segrego, -are,* ptc. pf. *segregatus*; slož. ze *se-* — zde ve významu „oddělení" + *grex, gregis* — stádo; v. agregace) — „oddělení, odloučení od stáda"; oddělování, odlučová-

 ní; odlišení, vyloučení z většího celku; rozrůznění. Pozn.: V politice: oddělení barevných obyvatel od bílých; zabraňování styku barevných obyvatel s bílými.

SEIZMICKÝ (od řec. *seismos* = otřes) — týkající se zemětřesení; SEIZMIKA (v. -ika[1]) — nauka o otřesech půdy a o zemětřesení; v. t. seizmograf, teleseizmy

SEIZMOGRAF (slož. z řec. *seismos* = otřes; v. seizmický + *grafó* = rýti psát; v. -graf) — přístroj zaznamenávající otřesy půdy

SEKTOR (od lat. *seco*, *-are*, ptc. pf. *sectus* = sekat, řezat, dělit; srov. SEKCE — „oddělení"; v. t. -or) -úsek, část, díl nějakého většího celku; ohraničený úsek, pracovní obor; v. t. segment. Pozn.: Z čistě jazykového hlediska by „sektor" měla být „osoba nebo věc, která něco rozřezává,; lat. sector opravdu znamenalo „sekáč, řezač". Došlo však k posunu významu z „věci, která seká" na „věc, která je useknutá".

SEKUNDA (z lat. *secundus* = následující; jsoucí druhý, na druhém místě — „druhý v pořadí"; 1. dřívější název pro druhé třídy gymnazií, 2. druhý stupeň diatonické stupnice; výškový rozdíl dvou tónů, při němž vyšší tón tvoří druhý stupeň diatonické stupnice vzhledem k tónu nižšímu, 3. termín jednotky časové i jednotky goniometrické. Pozn.: Ve fyzikálním názvosloví vznikl nejprve termín „minuta", a to z lat. *minuta hora* = zmenšená hodina, případně z *minuta pars hora* = zmenšená část hodiny. Když se však ukázala potřeba termínu pro ještě kratší časový úsek, opět, tj. podruhé se vyšlo ze „zmenšené hodiny", takže teď byla „*minuta hora prima*" = zmenšená hodina první (tj. poprvé) a „*minuta hora secunda*" — zmenšená hodina druhá, tj. podruhé. V prvním případě termín „minuta" už byl vžitý bez přívlastku „prima", kdežto v druhém případě musel být přívlastek „secunda" zdůrazněn. Proto, ač jde o obdobné případy, jednou do terminologie přešlo zpodstatnělé příd. jméno (minuta), jednou zpodstatnělá řadová číslovka (secunda). V hudební terminologii jde o zcela jiný postup, takže tam máme jak „prima" — první stupeň, tak „sekunda" — druhý stupeň, atd.

SEKUNDÁRNÍ (z lat. *secundarius* = v druhé řadě, druhotný, druhý; od *secundus* = následující, jsoucí na druhém místě, druhý, v. sekunda) — druhotný, nepůvodní; sekundární síť (elektr. proudu) — napájející; (rozvádí se po menších oblastech)

SELEKCE (z lat. *selectio*; od *seligo*, *-ere*, ptc. pf. *selectus* = vybírat; slož. ze *se-* — zde ve významu odluky + *lego*, *-ere* = sbírat, číst; v. kolektiv) — schopnost výběru, výběr; ve sdělovací technice: odladitelnost; schopnost přenosového zařízení vybrat ze spektra přicházejících signálů signál žádaný a potlačit signály nežádoucí, z dopadajících vln různých frekvencí vlnu příslušnou. SELEKČNÍ — výběrový; SELEKTIVNÍ — schopný si vybírat

SELEN (z latiniz. *selenium*, od řec. *seléné* = měsíc) — nekovový prvek;

Rovnicu (7) môžeme použiť pri riešení rôznych situácií. Energiu reakcie Q môžeme určiť napríklad z rovnice (5). Potom treba, aby sme ešte poznali kinetickú energiu terčového jadra E_{kHe}. Obvykle je to energia tepelného pohybu, ktorá je malá voči kinetickým energiám častíc po reakcii a možno ju zanedbať. Keď poznáme kinetickú energiu neutrónov, môžeme zo vzťahu (7) určiť energiu jadra trícia E_{kT}, ktoré očakávame pod uhlom ϑ voči pôvodnému smeru provokujúcich častíc, v našom prípade neutrónov. Ak je nízka aj kinetická energia neutrónov ($E_{kn} \doteq 0$), tak sa rovnica (7) zjednoduší

$$Q = E_{kT}\left(1 + \frac{m_T}{m_p}\right).$$

Platí $m_T \doteq 3\, m_p$, takže

$$E_{kT} \doteq 0{,}25\, Q\,.$$

Za Q dosadíme z (5) a uvážiac konkrétne podmienky nami skúmanej reakcie, máme

$$E_{kp} + E_{kT} = E_{kT}\left(1 + \frac{m_T}{m_p}\right) \tag{8}$$

a po úprave

$$\frac{E_{kp}}{E_{kT}} = \frac{m_T}{m_p}\,.$$

Keď počítame s hmotnosťami trícia a protónu, dostaneme

$$\frac{E_{kp}}{E_{kT}} = 2{,}992\,65\,.$$

Určili sme, že $E_{kp} + E_{kT} = 768{,}6$ keV, takže z (8) dostaneme

$$E_{kT} = \frac{768{,}6}{1 + 2{,}992\,65} = 192{,}5 \text{ keV}\,,$$

$$E_{kp} = 768{,}6 - 192{,}5 = 576{,}1 \text{ keV}$$

Záver

S problematikou, ktorú sme v tomto článku podali, sme sa stretli pri našej práci SOČ, ktorú robíme od septembra 1985. Našim konečným cieľom je prispieť k vybudovaniu pracoviska, na ktorom sa bude dať merať extrémne nízka aktivita prírodných objektov, vyvolaná prirodzeným neutrónovým tokom. Tieto merania sú potrebné napríklad pri hydrologických, geologických a archeologických výskumoch a v rádioekológii. Sú základom rádiochronometrie.

Literatúra:

[1] ODVÁRKO, O. a kol.: Matematika pre 2. ročník gymnázia, SPN Bratislava 1985.

[2] GORŠKOV, G. V. a kol.: Estestvennyj nejtronnyj fon atmosfery i zemnoj kory, Atomizdat Moskva 1966.

[3] USAČEV, S. a kol.: Experimentálna jadrová fyzika, Alfa Bratislava, 1982.

[4] FLOREK, M.: Neutrónová fyzika, ERUK Bratislava 1979.

[5] CHRAPAN, J.: Radiačná chronológia, Alfa Bratislava 1974.

O životě a díle Ernsta Macha

Doc. ing. IVAN ŠTOLL, CSc., ČVUT v Praze

Zamyslíme-li se nad otázkou, kteří fyzikové světoznámých jmen působili a vytvářeli alespoň některá ze svých objevitelských děl u nás, zejména v Praze, vybavíme si okamžitě *Jana Keplera, Christiana Dopplera, Alberta Einsteina.* K nim se řadí i *Ernst Mach,* kterého si připomínáme v letošním jubilejním roce 150 let od jeho narození.

Ernst Mach se narodil 18. února 1838 v *Chrlicích,* malé moravské vesničce, která je dnes součástí čtvrtého brněnského obvodu. Jeho matka byla dcerou správce biskupského panství a Machovi rodiče bydleli nějaký čas na chrlickém zámečku, v němž byla správa umístěna. Později začal objekt sloužit slepeckému a sociálnímu ústavu, který má zde své sídlo dosud. V letošním roce byla na rodném domě Ernsta Macha péčí brněnské pobočky Jednoty československých matematiků a fyziků umístěna pamětní deska. Předchozí deska z roku 1938 s reliéfem Machova portrétu zmizela koncem druhé světové války nebo krátce po ní.

Mach tedy vyrůstal v dvojjazyčném prostředí, uměl česky, a za svého pozdějšího působení na pražské univerzitě vyjádřil ochotu i přednášet v českém jazyce. Přestože po rozdělení university na českou a německou v roce 1882 přešel na její německou část, podporoval i nadále rozvoj české fyziky, činnost Jednoty českých matematiků (která sdružovala i fyziky) a vychoval řadu významných českých fyziků, k nimž patřili například *Čeněk Dvořák, Čeněk Strouhal, František Koláček* a další.

Svá gymnaziální léta strávil Mach rovněž na Moravě, v Kroměříži, a v roce 1855 odjel studovat na vídeňskou universitu. V roce 1860 zde získal titul doktora, po několik let zde působil jako soukromý docent a v létech 1864—1867 byl profesorem matematiky a fyziky na univerzitě ve Štýrském Hradci. Tam se také oženil a poté přesídlil do Prahy, kde zůstal celých 28 let (1867—1895) jako profesor experimentální fyziky na univerzitě. V roce 1895 odjel do Vídně, kde se však již věnoval spíše filosofiii a historii. Postižen mozkovou příhodou s následným částečným ochrnutím odešel roku 1901 do důchodu a poslední léta života strávil u svého syna Ludwiga, rovněž fyzika, nedaleko Vaterstättenu u Mnichova. Zde také zemřel 19. února 1916.

Počátek vědecké dráhy Ernsta Macha je spjat s diskusemi, které se tehdy rozvinuly kolem objevu Dopplerova jevu. *Christian Doppler*

(1803—1854), původem z rodiny kamenického mistra v Salcburku, působil v Praze dvě desetiletí před Ernstem Machem, a to v létech 1835—1847. Učil matematice na německé reálce a později na pražské technice. Jeho pedagogické působení na technice bylo pro něho velmi namáhavé (trpěl tuberkulosou hrtanu), setkával se s necitlivostí, nepochopením a dokonce anonymním osočováním.

Šťastnější bylo jeho působení na půdě *Královské české společnosti nauk*, kde také prezentoval většinu svých objevů. Doppler byl nadšenec a snílek, trávil celé noci vědeckou prací a hýřil nápady. Mnohé z nich se ukázaly scestnými či nereálnými, jindy znovuobjevoval výsledky svých předchůdců (stroboskopická metoda). Nezatěžoval se příliš studiem literatury a detailním zdůvodňováním a experimentálním ověřováním svých myšlenek, pracoval spíše intuitivně. Tím ovšem narážel nejen na zkostnatělé myšlení kolegů přidržujících se tradičních způsobů, ale vyvolával i živé vědecké spory. K jeho přátelům a ochráncům patřil především velký matematik a filosof *Bernard Bolzano* (1781—1848), člověk ušlechtilého ducha a bojovník za spravedlnost, nikoli ovšem fyzik.

Tím šťastným nápadem, který učinil jméno Dopplerovo nesmrtelným, byl poznatek o tom, že výška tónu či barva světla se mění v závislosti na rychlosti pohybu zdroje či pozorovatele. Doppler jej publikoval 25. května 1842. Neměl přitom svůj objev podepřen žádným spolehlivým experimentálním důkazem. Vycházel z úvahy o tom, že podobně jako u jevu aberace musíme korigovat skutečnou polohu stálic s ohledem na pohyb Země, musíme rozlišovat i kmitočet a intenzitu zvuku či světla, jak je vydává zdroj a jak je registruje pohybující se pozorovatel. Svůj vzorec pro změnu kmitočtu v závislosti na rychlosti zdroje či pozorovatele odvodil Doppler velmi jednoduchým a mimořádně nešikovným způsobem (uvažoval několi sled vln, ale jen jednu vlnovou délku). Se změnou intenzity si ovšem poradit nemohl, důsledné řešení této komplikované otázky vyžaduje znalost kvantové teorie záření.

Hlavním Dopplerovým argumentem bylo poukazování na změnu barvy u složek dvojhvězd. Zdálo se mu, že barvy složky pohybující se směrem k nám a směrem od nás jsou doplňkové a skládají se v bílé světlo. Doppler ve své práci nastínil velkolepý obraz hvězdného nebe a vysvětloval pomocí svého jevu nejen různé zbarvení hvězd, ale i vlastnosti hvězd proměnných, vznik nov a supernov a další jevy. Vyslovil přesvědčení, že jeho jev umožní proniknout do takových dálav vesmíru, kde již jiné měřicí prostředky astronomie selhávají. Dopplerovy argumenty se ukázaly stejně krásnými jako nesprávnými. Brzy bylo zřejmé, že bílé světlo nemůže při pohybu zdroje měnit barvy tak, jak si to Doppler představoval. Nicméně přinesl Dopplerův jev přece jen převrat v astrofyzice, a to když se ukázalo možným přesně měřit posuny spektrálních čar pohybujících se zdrojů záření, jak to navrhoval již *Armand Fizeau* (1819—1896).

Spory o Dopplerův jev pokračovaly i po Dopplerově smrti a jedním z hlavních odpůrců Dopplerovy teorie byl *Jozef Petzval* (1807—1891), rodák ze Spišské Belé, profesor vídeňské univerzity, matematik a vynálezce v oboru geometrické optiky, který má nehynoucí zásluhu na dnešní podobě fotografického aparátu. Petzval kritizoval Dopplerovu teorii jednak pro její matematickou nedostatečnost a nepřesvědčivost experimentálních důkazů, ale zejména jí vytýkal, že je v rozporu se „zákonem zachování doby kmitů (kmitočtu)", který sám zformuloval.

A právě v této situaci se dostává na scénu *Ernst Mach*, který se v roce 1860 i v následujících létech vehementně opřel jako mladý dvaadvacetiletý docent vývodům váženého profesora Petzvala a vystoupil na obranu Dopplera, jehož si hluboce vážil. Mach dokázal, že Petzval uvažuje jinou experimentální situaci než Doppler, a sice případ, kdy se pohybuje prostředí mezi zdrojem a pozorovatelem. Potom skutečně nebude docházet ke změnám kmitočtu a orchestr v zahradní restauraci bude hrát stejně harmonicky za větrného počasí jako za bezvětří. Jako rozený experimentátor začal Mach také vymýšlet důmyslná zařízení, která by umožnila Dopplerův jev ověřit.

Nejprve požádal přítele, aby vystřeloval v jeho směru kulky z pušky a jak mu svištěly nad hlavou, sledoval Mach závislost změny výšky tónu na rychlosti kulky. Později realizoval přístroj, v němž rotovala dutá tyč s píšťalkou na konci. Píšťalku rozezníval vzduch dodávaný dutou tyčí z měchu, takže intenzita zvuku zůstávala stejná. Podle místa pozorování bylo možno sledovat změny výšky tónu v závislosti na příslušné projekci rychlosti píšťalky.

Mach se zabýval akustickými a optickými pokusy i v následujících létech za svého pobytu v Praze. Zdokonalil stroboskopickou metodu, zkoumal změny v průchodu světla chvějícím se vzduchem a naopak změny při průchodu zvuku plamenem, dvojlom vyvolaný tlakem v pevných látkách. V osmdesátých létech se zabýval aerodynamickými jevy, které vznikají při explozích a při pohybech těles rychlostí větší než je rychlost zvuku. Ostatně již v mládí se zamýšlel nad tím, co se stane s Dopplerovými vzorci v případě, že rychlost zdroje bude rovna nebo větší než rychlost zvuku v daném prostředí a pozorovaný kmitočet pak vychází nekonečně velký nebo záporný.

Při těchto výzkumech, které patří k jeho nejvýznamnějším, vypracoval Mach experimentální zařízení umožňující fotografovat letící kulku a zároveň zviditelnit i zvukové vlny vznikající při průletu projektilu nadzvukovou rychlostí. Ukázal, že vzniká rázová vlna kuželového tvaru (takzvaný *Machův kužel*), a touto vlnou se též přenáší zvuk, který se tedy šíří rychlostí náboje. *Machovým číslem* dnes nazýváme poměr rychlosti proudění nebo rychlosti letu k rychlosti zvuku v daném prostředí. Machovy práce v oblasti nadzvukových pohybů našly další

rozvoj a uplatnění v souvislosti s moderní technikou a nadzvukovou dopravou.

V Machově době neexistovala celá řada přístrojů umožňujících objektivní měření různých fyzikálních veličin a experimentátor se musel mnohem více spoléhat na své smysly. To vedlo Macha k detailnímu zkoumání fyziologie sluchu a zraku a obecnějšímu zamyšlení nad počitky a vjemy, které zprostředkují lidské poznání. Přitom dospěl k závěrům o tom, že předmětem zkoumání jsou v podstatě pouze naše vjemy a nemá smysl si klást otázku, zda tyto vjemy odpovídají či nikoli nějaké objektivní skutečnosti. Taková filosofie se nazývá *pozitivistickou* a je projevem *subjektivního idealismu.*

Potřeba ujasnit si základní fyzikální pojmy a formy nazírání, jako jsou pojmy hmoty, prostoru, času, síly vedla Macha k přehodnocení Newtonovy mechaniky. Machovy názory na prostor a čas, úlohu neinerciálních souřadných soustav a podstatu setrvačných sil, i když nebyly moderní fyzikou přijaty, inspirovaly Einsteina při úvahách nad obecnou teorií relativity, i mnohé další fyziky, a jsou dodnes předmětem diskusí.

Machův názor na svět a přírodu je silně poznamenán jeho postojem experimentátora, který si uvědomuje vzájemnou souvislost jevů a pojímá svět jako celek. Vystihuje to i citát, který uvádíme na zadní straně obálky tohoto čísla. Tento Machův postoj jej vedl nakonec k tomu, že odmítal uznat atomovou teorii látky (atomy nebylo možno přímo experimentálně pozorovat) a nepřijal ani další ideje, na nichž je založena moderní fyzika, fyzika kvantová a relativistická. Mach zůstal fyzikem devatenáctého století.

Svým mistrovstvím a svědomitostí experimentátora, kritickým přístupem k hodnocení základních, zdánlivě neotřesitelných fyzikálních pojmů a názorů a výsledky dosaženými v optice, akustice, ve studiu pohybů nadzvukovými rychlostmi, ale i fyziologii a dalších oblastech si získal trvalé místo v dějinách vědy.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Šest úloh z matematiky

1. Jak odůvodníte tyto rovnosti:

$9 = 0 \,.\, 9 + (0 + 9)$	.....
$19 = 1 \,.\, 9 + (1 + 9)$	$99 = 9 \,.\, 9 + (9 + 9)$
$29 = 2 \,.\, 9 + (2 + 9)$	$109 = 10 \,.\, 9 + (10 + 9)$
$39 = 3 \,.\, 9 + (3 + 9)$	.....
.....	atd.

2. Žák má knihy, jejichž počet je větší než 50 a menší než 100. Z těchto knih je 20 % románů a 1/7 jsou knihy básní. Kolik má žák knih?
3. Ve čtyřciferném čísle jsou první dvě číslice stejné a rovněž poslední dvě číslice jsou stejné. Zároveň je toto číslo dvojmocí dvojciferného čísla. Které je to číslo?
4. Čtverec, jehož strana má délku 3 cm, rozdělte na několik dílů tak, aby se z nich daly složit dva čtverce mající po řadě obsahy 4 cm^2, 5 cm^2.
5. Narýsujte trojúhelník, který se dá rozdělit na tři trojúhelníky tak, že každý z nich má stejně velké úhly jako narýsovaný trojúhelník. Poznamenejme, že s hledaným trojúhelníkem se často setkáváme při rýsování.
6. Je možné, aby trojúhelník měl výšky o délkách 1 cm, 2 cm, 3 cm? (V matematice vyslovujeme uvedenou otázku takto: „Existuje trojúhelník, jehož výšky mají délky 1 cm, 2 cm, 3 cm?“) — *Návod*: Při řešení této úlohy vystačíme se vzorcem pro obsah trojúhelníku a s nerovností pro délky jeho stran. Řešení těchto úloh najdete v příštím čísle Rozhledů.

Emil Kraemer

V textech úloh mohou být chyby

V jedné české knížce z roku 1967 se uvádí úloha: „Napište si nějaké trojciferné číslo, tj. libovolné číslo mezi 100 až 999, ve kterém však první a poslední číslice nesmějí být stejné (nesmí to být např. číslo 282). Pod ně napište totéž číslo čtené pozpátku, s obráceným pořadím číslic.

Odečtěte menší od většího. Pod to napište výsledek opět s obráceným pořadím číslic, a když nyní čísla sečtete, vyjde vždycky 1089. Příklad:

Původní číslo	123	499
obrácené	321	994
rozdíl	198	495
obrácený	891	594
Součet vždy	1089	1089

Jak si to vysvětlíme? Napsané číslo má číslice a, b, c. Stovky jsou a, desítky b, jednotky c. Celé číslo je $100a + 10b + c$. Obrácené číslo je $100c + 10b + a$. Když s tím číslem provedeme předepsané úkony, dostáváme vždy číslo $100 . 10 + 8 . 10 + 9 = 1089$."

Zvolíme-li si např. číslo 372, pak podle postupu uvedeného v textu úlohy dostaneme 198. Jak je to možné? Snadno zjistíme, že je tomu tak zřejmě proto, že první a poslední cifra čísla 372 se liší o jedničku.

Prozkoumejme úvahu z konce textu úlohy. Zvolené trojciferné číslo nechť má v desítkové soustavě zápis $100a + 10b + c = (abc)_{10}$, kde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ a číslice b, c jsou z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Dále ještě předpokládejme, že $a > c$. Potom

$$r = (abc)_{10} - (cba)_{10} = 100 . (a - c) + 10 \quad 0 + (c - a)$$

Chceme-li nalézt vyjádření rozdílu r v desítkové soustavě, pak je třeba provést úpravy. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} r &= 100(a - c) + 10 . 0 + [(10 + c) - a] - 10 = \\ &= 100(a - c) + (-10) + [(10 + c) - a] = \\ &= 100(a - c) - 100 + 90 + [(10 + c) - a] = \\ &= 100[a - (c + 1)] + 10 . 9 + [(10 + c) - a] . \end{aligned}$$

Dále je třeba vypočítat součet:

$$100 . [a - (c + 1)] + 10 . 9 + [(10 + c) - a] + 100[(10 + c) - a] + \\ + 10 . 9 + [a - (c + 1)] = 100 . 9 + 180 + 9 = 1089 .$$

Výsledek vyšel v souhlase s textem úlohy. Ovšem nezabývali jsme se otázkou, zda zápis čísla r v desítkové soustavě je trojmístný. Takovým není, je-li

$$a - (c + 1) = 0 ,$$

tj.

$$a = c + 1$$

Potom

$$r = 100 . 0 + 10 . 9 + [(10 + c) - (c + 1)] = 99$$

a závěrečný součet je 198.

Závěr: V textu úlohy v knížce by mělo být uvedeno, že první a poslední číslice ve zvoleném čísle nemají být nejen sobě rovny, ale ani se nemají lišit o jedničku.

Jiří Mída

Co praotec Čech netušil

Podle tradice a legend, které podpořily též Jiráskovy „Staré pověsti české", se praotec Čech rozhodl po výstupu na Říp nevést dál svůj kmen a osídlit kraj, který se kolem rozkládal. I když pronesl nadšenou řeč, nedovedl si představit, že vršek kopce, z něhož hleděl věštecky v dál, se stane jednou vrcholem trojúhelníku, jenž bude sloužit ke zkušebním letům letadel. Dalšími jeho vrcholy se staly zámek v Benátkách nad Jizerou a maják u letiště ve Kbelích nad pražskou kotlinou. Také tyto dva další body mají zajímavou historii, a to novověkou, neopředenou legendami.

Benátecký zámek stojí na vysokém ostrohu nad řekou Jizerou. Kolem roku 1600 zde pobýval asi rok Tycho Brahe a konal zde astronomická pozorování. Bylo to v době, kdy ještě nebyl vynalezen dalekohled. Tycho Brahe vynikal dokonalým zrakem a záznamy jeho pozorování přilákaly do Prahy a také na návštěvu do Benátek i Johanna Keplera.

Kbely, dnes část Prahy, mají své místo v dějinách české techniky. Zde 29. října roku 1920 byla zahájena u nás veřejná letecká doprava letem Praha—Bratislava. Konečně 18. května 1923 v místě označeném dnes památníkem, jenž symbolizuje šíření rozhlasových vln, stál stan, který byl provizorním studiem, z něhož začalo u nás pravidelné rozhlasové vysílání. Dnes je ve Kbelích expozice letectví a kosmonautiky Vojenského muzea.

Z našeho vyprávění o jistém středočeském trojúhelníku plyne úloha vhodná pro turisty. Užijte mapy a určete obvod trojúhelníku vrchol Řípu — zámek Benátky n. J. — maják u letiště ve Kbelích. Při pečlivém měření na mapě a výpočtu skutečné délky obvodu podle měřítka mapy by měla vyjít vzdálenost v kilometrech rovná číslu, v němž na místě jednotek i desítek jsou nuly.

Jiří Mído

Laboratoř doma

Kouzelné vajíčko

K pokusu budete potřebovat láhev od mléka nebo smetany (se širším hrdlem), natvrdo uvařené oloupané vajíčko a proužek novinového papíru přibližně stejné délky, jako je výška láhve. Šířku proužku volte tak, aby ho bylo možno po přehnutí snadno vhodit do láhve.

Za laboratorní místo se nejlépe hodí kuchyňský dřez, do kterého láhev postavíte. Opatrně zapalte připravený proužek, vhoďte ho do láhve a na hrdlo co nejrychleji položte připravené vajíčko špičkou dovnitř.

Potom už můžete jenom pozorně sledovat překvapující chování vajíčka.

Úkoly pro vás:

1. Dříve, než pokus provedete, přemýšlejte o dějích, které v láhvi asi nastanou. Zapište svou domněnku o tom, co se bude dít.
2. Popište, jak jste pokus připravili a co jste skutečně pozorovali.
3. Pokuste se chování vajíčka při pokusu vysvětlit.

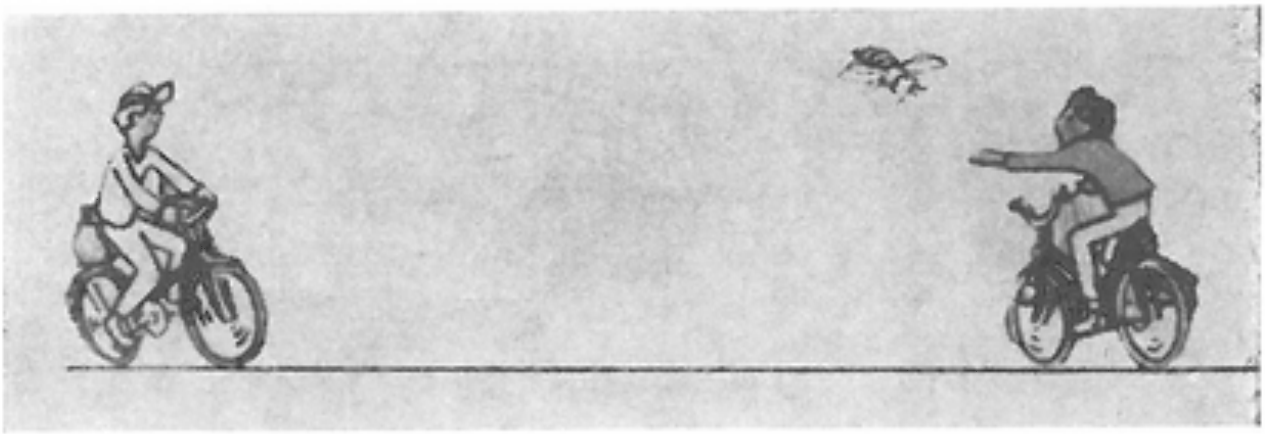
Poznámka: Vajíčko můžeme z láhve bez poškození vyjmout tak, že na hrdlo láhve navlékneme plátěný pytlíček (dobře poslouží i nepoužívaná ponožka) a pevně jej na hrdle stiskneme. Když prudčeji lahví švihneme, vyletí vajíčko do připraveného pytlíčku a můžeme pokus zopakovat.

Milan Rojko

Zajímavá fyzikální úloha

Divoká vosa

Dva kamarády, kteří jedou proti sobě po rovné silnici, si vybrala ke své pomstě zdivočelá vosa. Na počátku, když byli od sebe 1200 m, vyletěla od jednoho z nich ve směru k druhému rychlostí 40 km/h. Když si s ním vyřídila své účty, obrátila se a letěla stejnou rychlostí nazpět



k prvému a od něho zase k druhému atd. až do chvíle, kdy se oba pobodaní kamarádi setkali. Rychlosti kamarádů — cyklistů jsou 18 km/h a 12 km/h.

Úkol pro vás:

Vypočtěte, kolik metrů přitom vosa nalétala. Ztráty času při bodání a obrácení směru letu vosy zanedbejte.

Milan Rojko

Řešení úkolů posledních dvou článků zašlete na adresu: RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2. Nejlépe zpracovaná řešení odměníme zajímavou knihou.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Hrátky s mocninami a odmocninami

Stejná písmena nahraďte stejnými číslicemi:

a) $(\mathrm{T\,A\,H})^2 = \mathrm{S\,A\,Z\,K\,A}$

b) $(\mathrm{L\,Á\,N})^2 = \mathrm{O\,B\,I\,L\,Í}$

c) $(\mathrm{S\,O\,B})^2 = \mathrm{S\,O\,K\,O\,L}$

d) $(\mathrm{V\,O\,R})^2 = \mathrm{P\,O\,N\,O\,R}$

e) $(\mathrm{R\,Y\,S})^2 = \mathrm{K\,O\,Ř\,I\,S\,T}$

f) $(\mathrm{V\,E\,S})^2 = \mathrm{M\,Ě\,S\,T\,O}$

g) $\sqrt{\mathrm{S\,Ý\,Č\,E\,K}} = \mathrm{V\,Ý\,R}$

h) $\sqrt{\mathrm{P\,R\,A\,L\,E\,S}} = \mathrm{L\,E\,S}$

i) $\sqrt{\mathrm{Z\,E\,L\,E\,Ň}} = \mathrm{K\,E\,Ř}$

j) $\sqrt{\mathrm{P\,E\,R\,N\,Í\,K}} = \mathrm{M\,E\,D}$

k) $\sqrt{\mathrm{Č\,T\,Y\,Ř\,I}} = \mathrm{D\,V\,Ě}$

l) $\sqrt{\mathrm{D\,E\,V\,Ě\,T}} = \mathrm{T\,Ř\,I}$

Úlohy a—e, g—i mají po jednom řešení, zbývající úlohy mají po dvou řešeních (ověřeno počítačem).

Jindřich Pěnčík

Problém z antické matematiky

Prohlédněte si níže vytištěnou číselnou pyramidu. Na jejím vrcholu je jednička. V n-té řádce ($n \geqq 1$) je vždy n za sebou jdoucích lichých přirozených čísel, jež jsou seřazena podle velikosti zleva doprava. Končí-li n-tá řádka číslem k, pak $(n + 1)$-ní řádka začíná číslem $k + 2$.

			1				$1 = 1^3$
		3		5			$8 = 2^3$
	7		9		11		$27 = 3^3$
13		15		17		19	$64 = 4^3$

Vpravo od pyramidy jsou napsány součty všech čísel příslušné řádky. Lze se domnívat, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 1$ je v n-té řádce součet všech čísel $s_n = n^3$. Důkaz tohoto tvrzení jen naznačíme, neboť jsme v rubrice „Přemýšlíme, řešíme . . “.

Posloupnost lichých čísel 1, 3, 5, 7, má k-tý člen

$$a_k = 2k - 1\,, \qquad k = 1, 2, 3,$$

Prohlédneme-li si řádky pyramidy, vidíme, že n-tá řádka ($n > 1$) začíná číslem a_t, kde

$$t = [1 + 2 + 3 + \quad + (n - 1)] + 1$$

K dokončení důkazu stačí vypočítat součet

$$s_n = a_t + a_{t+1} + \quad + a_{t+(n-1)}.$$

Problém, o němž hovoříme, je velmi starý. Bývá nazýván Nikomachovou úlohou. *Nikomachos z Gerasy* žil v 1. polovině 2. století našeho letopočtu.

Jiří Mída

Úlohy ze zahraničních časopisů

Úloha 1. Nahraďte písmena čísly tak, aby platila rovnost

M . A = T − E = M : A = T I = K − A

Přitom stejným písmenům odpovídají čísla stejná a písmenům navzájem různým čísla navzájem různá.

Úloha 2. Říká se, že Tortila nevydala zlatý klíček Buratinovi tak snadno, jak vypráví A. N. Tolstoj. Vynesla tři krabičky: červenou, modrou a zelenou. Na červené krabičce byl nápis „Zde leží zlatý klíček", na modré krabičce „Zelená krabička je prázdná" a na zelené krabičce „Zde je had" Tortila ukázala na nadpisy a řekla: „Skutečně, v jedné krabičce je zlatý klíček, ve druhé je had a třetí je prázdná, ale ani jeden nadpis není pravdivý." Kde leží zlatý klíček?

Úloha 3. Kolja, Víťa a Jura měli 12, 14 a 22 ořechů. Nejprve dal Kolja Víťovi tolik ořechů, kolik Víťa původně měl. Potom dal Víťa Jurovi tolik ořechů, kolik Jura původně měl. Nakonec dal Jura Koljovi tolik ořechů, kolik Koljovi zůstalo po obdarování Víti. Nyní měl každý stejný počet ořechů. Kolik měli jednotliví chlapci původně ořechů?

Úloha 4. V konvexním čtyřúhelníku spojíme středy proti sobě ležících stran. Tím se nám čtyřúhelník rozpadne na čtyři části. Dokažte, že je možno složit z nich obdélník.

Úloha 5 (obtížnější). V ostroúhlém trojúhelníku ABC je $\sphericalangle BAC = 60°$. Dokažte, že jedna z os úhlu, vytvořeného výškami spuštěnými z vrcholů B, C, prochází středem kružnice opsané.

Úloha 6 (obtížnější). V intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ zvolíme k různých bodů a každému bodu přiřadíme součin jeho vzdáleností od zbývajících $k - 1$ bodů. Symbolem S označíme součet převrácených hodnot těchto součinů. Dokažte, že $S \geqq 2$ při $k = 3$ a dále $S \geqq 4$ při $k = 4$.

Tomáš Schütz

Diskuse k fyzikální úloze z čísla 8 v roč. 66

Stav beztíže je spojen s neinerciální vztažnou soustavou, vzhledem ke které jej uvažujeme. Představme si kabinu zdviže, padající vzhledem k Zemi. V této padající vztažné soustavě (v kabině) nevyvolává gravitační pole zrychlení těles, která jsou v kabině, vzhledem k „padající" vztažné soustavě. Kabina padá s týmž zrychlením jako všechna tělesa, která jsou uvnitř kabiny. V důsledku rovnosti tíhové a setrvačné hmotnosti je zrychlení kabiny a všech těchto těles stejné. Člověk, jenž stojí na podlaze kabiny, nebude pociťovat tlak na podrážky svých bot; tíha tělesa v takové kabině je nulová, tj. jako by zmizela. (Princip ekvivalence tíhové a setrvačné hmotnosti platí pouze v malých oblastech s homogenním gravitačním polem; v nehomogenním gravitačním poli jej zobecňuje obecná teorie relativity.) Případ družice obíhající okolo Země po kruhové dráze lze považovat za vrh s nenulovou počáteční rychlostí rovnou první kosmické rychlosti.

Nyní se vraťme ke znění předkládané úlohy. Uvádí se v ní, že „družice je v beztížném stavu". Nikoliv družice vzhledem k Zemi, ale tělesa v ní umístěná jsou vzhledem k družici v beztížném stavu. Dále je v družici „umístěna nádoba s vodou, jejíž povrch je rovinný". Povrch kapaliny v beztížném stavu nemůže být rovinný, neboť v beztížném stavu neexistuje síla, která by definovala směr uvedené roviny (hladiny). Pojem „nahoře" a „dole" zde nemá smysl. Kapaliny v beztížném stavu zaujímají zpravidla tvar kulových kapek, jejichž poloměry jsou určeny poměrem mezi silami mezimolekulárního působení a povrchovým napětím.

Závěr autora, že koule, uvedené v zadání problému, zůstanou v poloze, ve které byly na počátku ponechány, je správný. Nelze však souhlasit s tvrzením, že v „beztížném prostoru neexistuje ani tíhové, ani jiné silové pole a $g = 0$". Na těleso v družici nadále působí Země, Slunce a jiná tělesa gravitačními silami, ale toto působení je vykompenzováno setrvačnými silami.

Miroslava Trchová

NAŠE SOUTĚŽ

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve školním roce 1987/88 se zúčastnilo soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních celkem 25 jednotlivců a 5 dvojčlenných kolektivů. Všech řešitelů bylo 35. Proti loňskému roku, kdy byli celkem 104 řešitelé, počet účastníků Naší soutěže velmi klesl. Úlohy z matematiky řešilo celkem 19 žáků, úlohy z fyziky 13 a úlohy z konstrukční geometrie 6. Tři studující řešili úlohy z matematiky i úlohy z fyziky. Nejúspěšnější řešitelé úloh z jednotlivých předmětů byli tito studující:

Matematika

1. Radek Porazil, 4D gymnázia M. Koperníka v Bílovci
2. Marek Velešík, 3A gymnázia se zaměřením na programování v Brně, Ukrajinská ulice

Fyzika

1. Petr Duczynski, 3 G gymnázia v Nové Pace
2. Pavel Kryštof, A4 střední průmyslové školy elektrotechnické v Brně, Leninova ulice

Konstrukční geometrie

Dvojice Sebastian Csemez, Csaba Szépvölgyi, 4B gymnázia s maďarským vyučovacím jazykem v Galantě.

Nakonec připojujeme abecední seznam všech řešitelů. Za jménem každého řešitele uvádíme školu, kde studoval. Nejprve otiskujeme jména jednotlivců a potom řešitelské dvojice. Uvádíme jen příjmení.

Řešitelé úloh z matematiky:

Bohucký, G Bílovec; Čábelka, G Bílovec; Gaál, G maď. Komárno; Gyenes, G maď. Komárno; Horvát, G Győr (MLR); Janeba, G Bílovec; Janglová, G Jura Hronca, Bratislava; Krkoška, G Bílovec; Kučera, G Bílovec,; Lengyel, SPŠ maď. Komárno; Mocek, G Bílovec; Němeček, G Bílovec; Oláh, G maď. Komárno; Porazil, G Bílovec; Velešík, G program. Brno, Ukrajinská ulice.

Ábel—Pál, SPŠ maď. Komárno; Kessler—Merva, SPŠ maď. Komárno.

Řešitelé úloh z fyziky:

Anýřová, G Bílovec; Bohucký, G Bílovec; Buba, G Bílovec; Dil, G Giraltovce; Duczynski, G Nová Paka; Hrubý, G Bílovec; Janeba, G Bílovec; Kořízek, G Bílovec; Kryštof, SPŠE Brno; Mandát, G Havířov; Mocek, G Bílovec; Planka, G Bílovec; Strnad, G Hradec Králové, Šimkova ulice.

Řešitelé úloh z konstrukční geometrie:

Csemez—Szépvölgyi, G maď. Galanta; Miklósová—Kreizingerová, G maď. Galanta; Szabová—Zsigová, G maď. Galanta.

Redakce Rozhledů děkuje všem řešitelům za řešení úloh, vítězům blahopřeje a zašle jim z prostředků Státního pedagogického nakladatelství věcné odměny

Naše soutěž; ročník 1988—89

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních a Státní pedagogické nakladatelství v Praze opět vypisují soutěž o ceny v řešení úloh z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Nyní otiskujeme první část úloh z matematiky a první část úloh z fyziky. Další úlohy otiskneme v příštím čísle Rozhledů. Soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, avšak maximálně trojčlenné. Při případném umístění má však kolektiv nárok na jedinou cenu.

Obecné pokyny řešitelům:

Řešení každé úlohy pište česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Na každém listu vlevo nahoře uveďte *čitelně* celé své jméno, třídu i školu, kde studujete, a připojte také svou bytovou adresu se směrovacím číslem. Každý kolektiv uvede tyto údaje za každého svého člena. *Příjmení pište opravdu čitelně, nejlépe hůlkovým písmem.* Nejdříve napište číslo a text úlohy, potom její řešení. Pište srozumitelně a čitelně. Obrázky připojené k řešení narýsujte pečlivě a řádně je popište.

Řešení všech nyní otištěných úloh zašlete nejpozději do konce ledna 1989 na adresu redakce Rozhledů, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla Rozhledů. Na obálku své zásilky připište slova Naše soutěž.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic celých kladných čísel x, y, pro které je číslo $x^2 + xy + y^2$ dvojmocí celého kladného čísla.

Stanislav Horák

2. Nechť ABC je libovolný trojúhelník, jehož úhly ABC, BCA nejsou shodné; průsečík osy vnitřního úhlu CAB se stranou BC označte D. Dokažte tato tvrzení:

a) Kružnice se středem C a poloměrem $r = |CD|$ protíná přímku AD ještě v bodu $E \neq D$;

b) $\triangle ABC \sim \triangle ACE$;
c) $|AD| \; |CD| = |AE| \; |BD|$

Stanislav Horák

3. Jsou dány různé body P, Q a dva úhly o velikostech $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby jeho strana AB ležela na přímce PQ a aby $|\sphericalangle APC| = \alpha$, $|\sphericalangle BQD| = \beta$.

Stanislav Horák

4. Z obdélníku, jehož sousední strany mají délky 42 cm, 21 cm, vystřihněte síť pravidelného šestibokého hranolu, který má objem větší než 1 dm^3.

Milan Koman

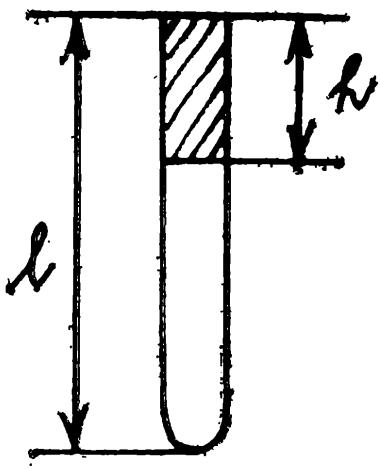
5. Nechť ABC je libovolný trojúhelník. V polorovině opačné k polorovině ACB sestrojte čtverec $ACDE$ a v polorovině opačné k polorovině BCA sestrojte čtverec $BCFG$. Dokažte, že přímky AG, BE jsou různoběžky, jejichž průsečík leží na přímce $p \perp AB$ procházející bodem C.

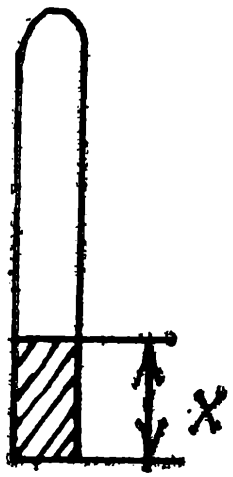
Emil Kraemer

Fyzika

1. Ve skleněné trubici o délce $l = 90$ cm s uzavřeným dolním koncem je sloupec vzduchu, nad kterým je sloupec rtuti o výšce $h = 30$ cm, dosahující až k hornímu otevřenému okraji trubice (obr. 1). Trubici

Obr. 1



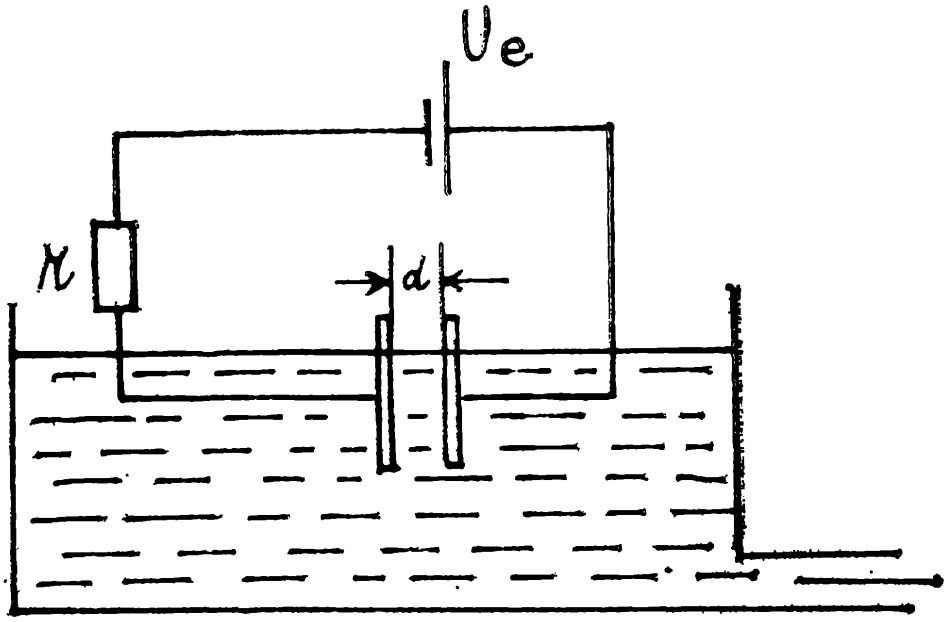


Obr. 2

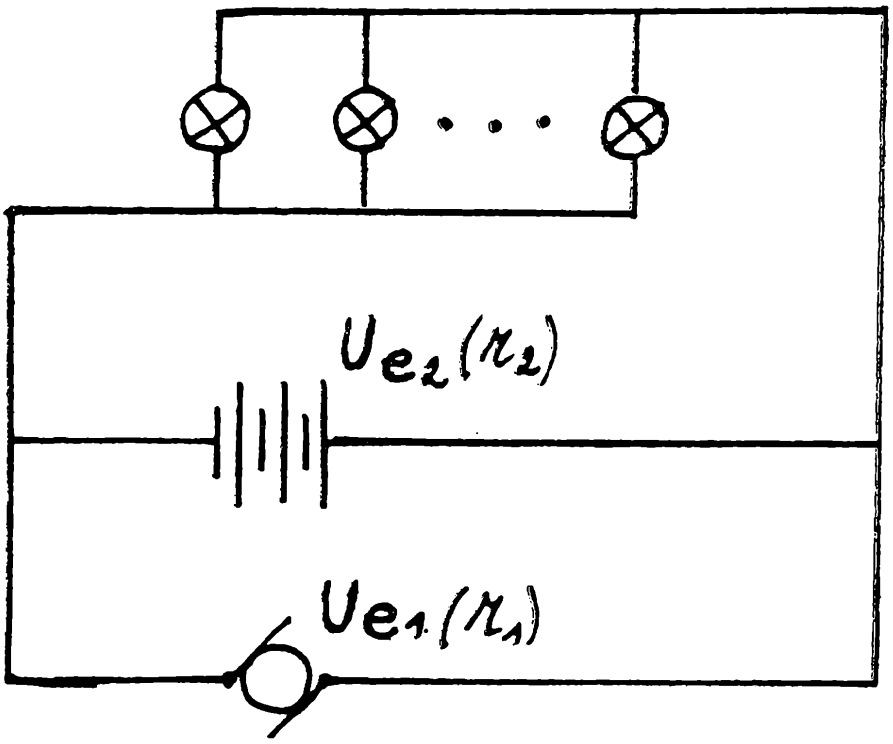
opatrně převrátíme otevřeným koncem dolů, přičemž část rtuti vyteče. Jaká je výška zbylého rtuťového sloupce (obr. 2) při atmosférickém tlaku $p_n = 10^3$ hPa? (hustota rtuti $\varrho = 13{,}6 \,.\, 10^3$ kg . m^{-3})

Miroslava Trchová

2. Kondensátor s obdélníkovými deskami o délce vodorovné strany l (kolmé k rovině, obr. 3) a o vzdálenosti mezi deskami d je ponořen do kapalného dielektrika o relativní permitivitě ε. Hladina dielektrika rovnoměrně klesá rychlostí o velikosti v. Kondensátor je připojen paralelně ke



Obr. 3



Obr. 4

zdroji o elektromotorickém napětí U_e a k rezistoru o odporu r, které jsou zapojeny v serii. Určete proud v obvodu.

Miroslava Trchová

3. Obvod osvětlení vagónu se skládá ze 30 stejných paralelně zapojených žárovek, z nichž každá má odpor $r = 30\,\Omega$. Žárovky jsou připojeny ke generátoru stejnosměrného napětí o vnitřním odporu $r_1 = 0{,}04\,\Omega$, jehož elektromotorické napětí U_{e1} závisí na rychlosti pohybu vagónu. Paralelně ke generátoru je připojena baterie akumulátorů o elektromotorickém napětí $U_{e2} = 24$ V a vnitřním odporu $r_2 = 0{,}02\,\Omega$ (obr. 4). Při jakém minimálním elektromotorickém napětí $(U_{e1})_m$ generátoru nebude baterií protékat proud?

Miroslava Trchová

Kalendár M-F: október 1988

6. 10. 1903 sa v Dunganane narodil *Ernest Thomas Sinton Walton*, írsky fyzik. Študoval urýchlovanie častíc. Za priekopnícke práce v transmutácii atómových jadier získal roku 1951 spolu s J. D. Cockcroftom Nobelovu cenu za fyziku.

6. 10. 1908 sa v Petrohrade narodil *Sergej Lvovič Sobolev*, sovietsky matematik. Zaoberal sa matematickou fyzikou, diferenciálnymi rovnicami, numerickou matematikou. Člen mnohých akadémií vied.

7. 10. 1903 v Bonne zomrel *Rudolf Otto Lipschitz*, nemecký matematik. Prispel k rozvoju matematickej analýzy, teórie čísel, mechaniky a fyziky.

8. 10. 1873 sa vo Frederiksbergu narodil *Ejnar Hertzsprung*, dánsky astronóm. Navrhol metódu merania svietivosti hviezd pomocou spektra, objavil obrie a trpasličie hviezdy. Pozoroval premenné hviezdy a dvojhviezdy.

9. 10. 1863 v Prahe — Vysočanoch zomrel *Rudolf Skuherský*, český matematik. Prednášal deskriptívnu geometriu na pražskej polytechnike česky, bol spolupracovníkom M. Tyrša pri zakladaní Sokola.

9. 10. 1873 sa vo Frankfurte nad Mohanom narodil *Karl Schwarzschild*, nemecký astronóm a fyzik. Položil základy fotografickej fotometrie a teórie hviezdnych atmosfér. Prispel k rozvoju teórie relativity a teórie gravitácie, predvídal gravitačný kolaps hviezd.

9. 10. 1943 v Amsterdame zomrel *Pieter Zeeman*, holandský fyzik. Odhalil, že magnetické pole rozštepí spektrálne čiary na zložky. Za výskumy v oblasti pôsobenia silných magnetických polí na žiarenie získal spolu s Lorentzom roku 1902 Nobelovu cenu za fyziku.

11. 10. 1758 sa narodil *Heinrich Wilhelm Olbers*, nemecký astronóm a lekár. Objavil päť komét, asteroidy Pallas a Vesta. Vypracoval metódu na určovanie dráh komét, sformuloval fotometrický paradox.

15. 10. 1608 sa vo Faenze narodil *Evangelista Torricelli*, taliansky fyzik a matematik. Položil základy hydrodynamiky, zmeral tlak vzduchu. Študoval parabolické dráhy v balistike, bol zručným brusičom šošoviek.

16. 10. 1918 zomrel *Marcel Depréz*, francúzsky fyzik a elektrotechnik. Študoval prenos elektrickej energie a konštrukciu elektromotorov.

17. 10. 1888 sa v Londýne narodil *Isaak Paul Bernays*, nemecký matematik. Zaoberal sa základmi matematiky a matematickou logikou.

17. 10. 1963 v Paríži zomrel *Jacques Salomon Hadamard*, francúzsky matematik. Dokázal asymptotický zákon rozloženia prvočísel, sformuloval pojem korektnosti úloh matematickej fyziky. Ovplyvnil variačný počet i funkcionálnu analýzu.

19. 10. 1903 sa narodil *Jean Frederik Delsart*, francúzsky matematik. Základné práce z harmonickej analýzy a funkcionálnej analýzy. Patril k zakladateľom skupiny bourbakistov.

21. 10. 1823 sa v Pistoi narodil *Enrico Betti*, taliansky matematik. Rozvinul Galoisovu teóriu, dosiahol vynikajúce výsledky v topológii.

21. 10. 1833 sa v Stockholme narodil *Alfred Bernhard Nobel*, švédsky chemik. Prihlásil okolo 350 vynálezov. Založil nadáciu, ktorá udeľuje ceny za významné objavy.

23. 10. 1873 sa v Hudsone narodil *Wiliam David Coolidge*, americký fyzik. Vynašiel vysokovákuovú trubicu vyžarujúcu röntgenove lúče.

23. 10. 1908 sa v Petrohrade narodil *Ilja Michailovič Frank*, sovietsky fyzik. Študoval jadrovú fyziku a fyziku neutrónov. Za teoretické objasnenie Čerenkovovho javu získal roku 1953 Nobelovu cenu za fyziku.

25. 10. 1733 v Mailande zomrel *Girolamo Saccheri*, taliansky matematik a logik. Svojimi prácami prispel k začiatkom axiomatických systémov v matematike.

26. 10. 1968 zomrel *Sergej Natanovič Bernštejn*, sovietsky matematik. Významne prispel ku konštruktívnej teórii funkcií a teórii pravdepodobnosti.

27. 10. 1898 sa v Prahe narodil *František Běhounek*, český fyzik a radiológ. Študoval atmosférickú elektrinu, ionizáciu atmosféry; rozpracoval metódy dozimetrie. Zúčastnil sa Nobileho výpravy k severnému pólu, napísal zaujímavé vedeckopopulárne práce.

27. 10. 1968 v Cambridgi zomrela *Lise Meitnerová*, rakúska fyzička. Vysvetlila štiepenie uranu, s O. Hahnom objavila prvok protaktínium.

28. 10. 1703 v Oxforde zomrel *John Wallis*, anglický matematik. Zaviedol nekonečné rady a súčiny, používal imaginárne čísla. Ovplyvnil aritmetiku, algebru i geometriu.

29. 10. 1783 v Paríži zomrel *Jean Baptiste le Rond d'Alembert*, francúzsky matematik, fyzik, encyklopedista. Prispel k rozvoju mechaniky, statiky, dynamiky. Zaoberal sa hudobnou teóriou i astronómiou.

dj

OLYMPIÁDY A SOČ

Celostátní kolo 37. ročníku matematické olympiády kategorie A

Doc. dr. LEO BOČEK, CSc., UK Praha

Vítězi celostátního kola kategorie A 37. ročníku matematické olympiády se stali:

1.	Petr Hliněný	2. roč. gymnázia M. Koperníka, Bílovec
2.—3.	Petr Čížek	3. roč. gymnázia W. Piecka, Praha
	Pavol Gvozdjak	4. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava
4.—5.	David Pancza	4. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava
	Ondřej Pokluda	4. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše
6.	Stanislav Krajči	4. roč. gymnázia, Košice, Šmeralova
7.—12.	Štěpán Kasal	1. roč. gymnázia W Piecka, Praha
	Martin Kraus	2. roč. gymnázia W Piecka, Praha
	Ilja Martišovitš	3. roč. gymnázia J. Hronca, Bratislava
	Pavol Ševera	2. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava
	Marek Velešík	3. roč. gymnázia, Brno, Koněvova
	Martin Žufan	3. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše
13.—14.	František Kuminiak	3. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava
	Ondrej Šuch	2. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava
15.—17.	Petr Brož	3. roč. gymnázia W Piecka, Praha
	Martin Kučera	3. roč. gymnázia M. Koperníka, Bílovec
	Stanislav Januschke	3. roč. gymnázia J. Hronca, Bratislava
18.—21.	Tibor Bartoš	4. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava
	Andrej Doboš	3. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava
	Ondřej Kalenda	2. roč. gymnázia W. Piecka, Praha
	Arnošt Kobylka	3. roč. gymnázia W Piecka, Praha

Další úspěšní řešitelé se umístili v pořadí:

22.	Daniel Elleder	3. roč. gymnázia W. Piecka, Praha
23.—24.	Tomáš Brodský	3. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše
	Radomír Měch	4. roč. gymnázia M. Koperníka, Bílovec
25.—26.	Dalibor Procházka	4. roč. gymnázia, Karlovy Vary
	Zbyněk Šír	3. roč. gymnázia J. K. Tyla, Hradec Králové
27.—28.	Vladimír Ďuračka	2. roč. gymnázia J. Hronca, Bratislava
	Jiří Zatloukal	4. roč. gymnázia M. Koperníka, Bílovec

29.—31.	Peter Eliáš	4. roč. gymnázia, Prešov, Konštantínova
	Jaroslav Masár	4. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava
	Jan Vomlel	2. roč. gymnázia J. K. Tyla, Hradec Králové
32.—36.	Tomáš Dvořák	4. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše
	Jiří Fürst	3. roč. gymnázia J. Fučíka, Plzeň
	Dalibor Jakuš	4. roč. gymnázia, Žilina, V. Okružná
	Vladimír Komár	2. roč. gymnázia, Košice, Šmeralova
	Milan Sekanina	4. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše
37.—43.	Radovan Čížek	4. roč. gymnázia, Mladá Boleslav
	Karol Hrivnák	4. roč. gymnázia A. Markuša, Bratislava
	David Krásenský	2. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše
	Jozef Skokan	2. roč. gymnázia, Žilina, V. Okružná
	Marta Sochorová	4. roč. gymnázia W. Piecka, Praha
	Pavel Truhlář	4. roč. gymnázia, Liberec, Partyzánská
	Gabriel Varga	3. roč. maď. gymnázia, Šamorín

Všichni obdrželi diplom za své umístění, žák St. Krajči ještě zvláštní diplom matematické vědecké sekce JSMF za originální řešení jedné úlohy.

Žáci z tříd, které nejsou zaměřeny na matematiku, se umístili v tomto pořadí:

1.—2.	Ilja Martišovitš	G J. Hronca, Bratislava
	Marek Velešík	G Brno, Koněvova
3.	Dalibor Procházka	G Karlovy Vary
4.	Vladimír Ďuračka	G J. Hronca, Bratislava
5.	Peter Eliáš	G Prešov, Konštantínova
6.—7.	Radovan Čížek	G Mladá Boleslav
	Gabriel Varga	G maď., Šamorín

První dva obdrželi také za svůj úspěch zvlástní diplom matematické vedecké sekce JSMF.

A na závěr ještě šestice úloh, kterou soutěžící řešili:

1. Nechť f je zobrazení množiny $M = \{1, 2, \quad , 1988\}$ do M. Pro libovolné n přirozené položme $x_1 = f(1)$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Zjistěte, zda existuje takové m, že $x_{2m} = x_m$.
2. Jestliže pro koeficienty rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, jejíž všechny kořeny jsou reálné, platí $a^2 = 2(b + 1)$, potom $|a - c| \leqq 2$. Dokažte.
3. Je dán čtyřstěn $ABCD$ s hranami $|AD| = |BC| = a$, $|AC| = |BD| = b$, $|AB| = c$, $|CD| = d$. Určete nejmenší hodnotu součtu $|AX| + |BX| + |CX| + |DX|$, kde X je libovolný bod prostoru.
4. Dokažte, že každé z čísel 1, 2, 3, 4, 5, . . , 2^n lze zapsat jednou ze dvou barev (červenou a modrou) tak, že žádná nekonstantní $2n$-členná aritmetická posloupnost vybraná z těchto čísel není jednobarevná.
5. Najděte všechna čísla $a \in (-2, 2)$, pro která je mnohočlen $x^{154} - ax^{77} + 1$ násobkem mnohočlenu $x^{14} - ax^7 + 1$

6. V trojúhelníku $A_1A_2A_3$ se stranami a_1, a_2, a_3 jsou dány tři body, které označíme P_1, P_2, P_3 tak, aby součin jejich vzdáleností od odpovídajících stran a_1, a_2, a_3 byl co největší. Dokažte, že trojúhelníky $P_1A_2A_3$, $A_1P_2A_3$, $A_1A_2P_3$ pokrývají trojúhelník $A_1A_2A_3$.

Vidíte, že to nebyly úlohy lehké, tím více je třeba ocenit výsledek těch žáků, kteří se umístili mezi úspěšnými řešiteli. Řešení všech úloh i úloh předcházejících kol a úloh ostatních kategorií najdete v brožurce „37. ročník matematické olympiády na středních školách", která vyjde v SPN Praha. Zkuste si však aspoň jednu z uvedených úloh vyřešit sami. Za každou úlohu mohl soutěžící žák získat sedm bodů. Nejlehčí úlohou byla jistě první úloha, kterou všichni vítězové vyřešili na plný počet bodů a průměr všech soutěžících byl 4,94. Jako nejtěžší se ukázala 4. úloha, průměr dosažených bodů za tuto úlohu nebyl ani půl bodu.

Z NOVÝCH KNIH

Ferko, V

SLOVNÍK NA KAŽDÝ DEŇ

1. vydanie, Smena Bratislava 1985, 408 strán, 30,— Kčs.

Úlohou knihy je zoznámiť čitateľa s modernými pojmami, ktoré sa udomácnili v našom slovníku, často sa používajú a ich význam nie je každému jednoznačne jasný.

Štruktúra knihy rešpektuje abecedné zoradenie pojmov, ktoré sú vysvetľované formou, prijateľnou pre široký okruh čitateľov. Pokiaľ sa pri tom vyskytnú slová, o ktorých možno predpokladať, že nie sú všeobecne známe, vysvetľuje ich autor pod čiarou. Takto obsahuje publikácia celkove 206 „veľkých" hesiel a 901 hesiel „malých". Veľké heslá sú pojmy, ktoré autor približuje čitateľovi uvádzajúc zaujímavosti napríklad historického rázu. Malé heslá uvádzajú len obsahovú náplň pojmov.

Hľadanie problémového slova uľahčujú registre. Sú samostatné pre veľké a malé heslá. Čitateľa so záujmom o fyziku zaujmú pojmy KVAZAR, LASER, NEUTRÓN, METEORIT, RÁDIOAKTIVITA a ďalšie. Napriek širokému záberu — heslá z ekonómie, filozofie, spoločenských a prírodných vied — slovník neobsahuje nepresnosti. Výnimkou je azda jediná vážnejšia nepresnosť na str. 289. Hovorí sa tu: „^{14}C sa rozpadá za polovičnú časovú hodnotu 5730 rokov na ^{12}C." Správne by malo byť: „^{14}C sa rozpadá s polčasom rozpadu 5730 rokov na ^{14}N."

V publikácii nechýbajú pojmy, ktoré by mal poznať absolvent strednej školy ľubovoľného typu. Kniha poučí až pobaví, bude dobrým doplnkom každej knižnice.

Július Baráth

INFORMACE

Korespondenční semináře MFF UK v Praze

V letošním školním roce se můžete opět zúčastnit korespondenčních seminářů z matematiky, fyziky a programování. Soutěže jsou určeny pro studenty středních škol ČSR (v SSR jsou organizovány obdobné semináře). Přihláška musí obsahovat jméno a příjmení, rodné číslo, číslo obč. průkazu, adresu trvalého bydliště, třídu a adresu školy a adresu pro korespondenci. V případě většího počtu zájemců z jedné školy bude korespondence zasílána na adresu školy.

Třicet až čtyřicet nejlepších řešitelů každého semináře bude pozváno na pětidenní soustředění, které se bude konat na podzim dalšího školního roku. Program soutředění nezahrnuje jen přednášky o atraktivních partiích zvoleného oboru, ale také besedy, sportovní činnost, soutěže a hry.

Přihlášky můžete zaslat kdykoliv, i když pro zařazení do první série je bylo nutno zaslat do 20. září.

Adresy jednotlivých seminářů jsou:

matematika —
dr. Jiří Kottas, KMA MFF UK,
Sokolovská 83, 186 00 Praha 8 - Karlín

fyzika —
dr. Leoš Dvořák, CSc., KMF MFF UK,
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8

programování —
dr. Pavel Töpfer, KKI MFF UK,
Malostranské náměstí 2, 118 00 Praha 1 - Malá Strana

REDAKČNÍ KRUH

Doc. dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava, dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha,; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Jak změřit výšku domu pomocí barometru

Před časem vyšla pěkná knížka o fyzice a fyzicích pod názvem „Newton by se divil" (nakladatelství Albatros 1975). Vznikla na základě poznámek zesnulého akademika *Františka Běhounka*, známého odborníka v oboru radioaktivity a polárního badatele, žáka Marie Curieové a spisovatele populárních dobrodružných knížek pro mládež. Zpracovali ji Ivan Boháček a Zdeněk Pinc a zahrnuli do ní mnoho historek anekdotického charakteru, které ilustrují významné momenty v dějinách fyziky.

Jedna z nich se týká samostatného přístupu studentů k řešení zadaných úloh. Tak student, který byl u zkoušky dotázán, jak lze stanovit výšku budovy pomocí barometru, odpověděl takto:

„Barometr se vynese na střechu, přiváže se na dlouhý provaz a spustí se na úroveň ulice. Pak se vytahuje nahoru a měří se přitom délka provazu." Zkoušející profesor nechtěl odpověď uznat za správnou, a tak student navrhl nepřeberné množství dalších řešení:

„Vyneseme barometr na střechu budovy, pustíme ho na ulici, změříme stopkami dobu volného pádu a výšku budovy pak určíme jako $s = \frac{1}{2} gt^2$."

„Uvážeme barometr na provaz délky l, rozkýváme jej na úrovni ulice a na střeše budovy a určíme tíhové zrychlení g podle vzorce pro dobu kyvu $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Vzhledem k tomu, že toto zrychlení závisí přesně vzato na vzdálenosti od středu Země r podle Newtonova gravitačního zákona jako $g = \varkappa \frac{M}{r^2}$ ($\varkappa$ je gravitační konstanta a M hmotnost Země), lze tímto způsobem rovněž určit výšku budovy."

„Za slunečného dne změříme výšku barometru, délku jeho stínu a délku stínu budovy a jednoduchou úměrou vypočteme výšku budovy."

„Budeme vystupovat po schodech, přikládat barometr na zeď a dělat si znaménka. Pak změříme výšku barometru a vynásobíme počtem znamének."

„Barometr nabídneme domovníkovi výměnou za informaci o výšce budovy."

A tak student pokračoval. Znáte sami ještě nějaké další způsoby, jak změřit barometrem výšku budovy? Napište nám o nich.

-ll-

Řekli, napsali...

Příroda nezačíná od elementů, s nimiž jsme nuceni začínat my. Máme ale štěstí, když se nám na jistou dobu podaří odvrátit pohled od obrovského celku a soustředit se na jeho jednotlivé části. Nesmíme však zapomenout ihned znovu zkoumat to, co jsme nevzali prozatím v úvahu, a vnésti doplňky a opravy.

Ernst Mach (1838—1916)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.
% Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1988.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 67, 1988/89
LISTOPAD
CENA 2 Kčs

(3)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovshý Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Ivan Štoll: Objevy dosud neobjevené 89

Jiří Herman, Jaromír Šimša: Neznámé množiny známých (I.) 93

Vladimír Ilkovič: Kinematika rovinného pohybu tuhého telesa (zrýchlenie) 96

Dušan Jedinák: Andrej Nikolajevič Kolmogorov 104

Z matematiky a fyziky ZŠ 106

Přemýšlíme, řešíme 116

Naše soutěž 117

Olympiády a SOČ 127

Kalendár M–F 129

Z nových knih . 130

Informace 131

Humory matematicko-fyzikální . 3. str. obálky

Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (117–120) příloha

Objevy dosud neobjevené

Doc. ing. IVAN ŠTOLL, CSc., ČVUT v Praze

V dřívějších dobách byly vědecké, zejména fyzikální objevy a vynálezy spojovány s náhodnými okolnostmi, mimořádnou intuicí a šťastným nápadem jednotlivce. Tito objevitelé se jevili širší veřejnosti jako poněkud vyšinutí podivíni, se svými objevy a vynálezy měli obyčejně jen starosti a většinou umírali v bídě a nepochopení. Teprve mnohem později, když se jejich objev stal pro lidstvo dobrodiním, jim vděční potomci stavěli v rodném městě pomník. Jinak objevování bylo celkem snadné — *Archimédovi* stačilo pohrát si dětinsky ve vaně s plovoucím kusem dřeva, *Newtonovi* sednout si pod strom a čekat, až mu spadne na hlavu jablko. Kdyby si byl býval sedl pod třešeň, věda se mohla rozvíjet jinak.

Tímto poněkud zlehčujícím úvodem jsem chtěl naznačit, jakou úlohu hraje náhoda v rozvíjení vědeckého pokroku a jak se vyvíjel vztah mezi objeviteli a společností. I když každý objev je důsledkem určitého zákonitého historického vývoje a vyžaduje souhrn materiálních i duchovních předpokladů ke svému vzniku a uplatnění, přináší vždy moment překvapení, vzrušení a romantiky. Dnes si již lidská společnost uvědomila, že se nemůže dále rozvíjet bez neustále hlubšího poznávání přírody a jejích zákonitostí, že toto poznávání vyžaduje náročné a nákladné společenské úsilí, ale že je vlastně tou nejvýhodnější a nejrozumnější investicí.

Věda se dnes považuje za jednu z rozhodujících výrobních sil a mnoho se diskutuje o tom, kolik prostředků a sil má být věnováno na tak zvaný základní výzkum (který se provádí zdánlivě jen pro uspokojení zvědavosti vědců, ale může se nečekaně mnohonásobně vyplatit) a kolik na výzkum aplikovaný, tedy na technické a další využití již známých vědeckých poznatků. Protože společenské zdroje nejsou neomezené, a to ani v mezinárodním měřítku, je třeba vědecký výzkum plánovat, snažit se určovat nejslibnější směry výzkumu, vytypovávat ty oblasti, v nichž by mohlo dojít k novým objevům. Ani vědci sami nemohou již čekat na pouhé nápady, pracují kolektivně, v týmech a pomocí vědeckých časopisů, konferencí a dalšími způsoby se stále snaží být informováni o tom, k čemu dospěli jejich kolegové ve všech oblastech světa. Je to vzrušující hra a ani dnes nepostrádá překvapení. Skutečně velké, významné objevy totiž prostě naplánovat nelze.

Pokusme se přesto na základě znalosti současného stavu odhadnout, jaké objevy a překvapení nám fyzika v nejbližší budoucnosti chystá, které objevy čekají na čtenáře našeho časopisu. Víme, že jedna z nejnáročnějších a nejnákladnějších oblastí fyziky, takříkajíc přední kraj fyzikálního bádání, je fyzika elementárních částic. Vyžaduje velké urychlovače a další zařízení, výkonnou výpočetní techniku, ale díky rozvinuté mezinárodní spolupráci se na ní mohou podílet fyzikové všech zemí. Pokrok v této oblasti za poslední období je nesmírný. Jestliže ještě nedávno byly stále objevovány nové a nové částice bez hlubšího chápání jejich vlastností a souvislostí a fyzikové si připadali jako zoologové, kteří objevují v pralese stále nová zvířata, víme dnes mnohem více o kvarkové stavbě většiny těchto částic, o jejich symetriích, zákonech zachování (i nezachování) jejich různých vlastností.

Přesto však nemáme v elementárních částicích ještě takový pořádek, jaký vnesl například Mendělejevův zákon do chaosu chemických prvků, nevíme, kolik existuje všech částic (nebo zda počet jejich druhů je nekonečný), proč je *mion* 207 krát a *tauon* 3490 krát těžší než elektron, jaké jsou zákonitosti spektra těchto částic. Z teorie vyplývá, že by měly existovat ještě některé další částice, dosud neobjevené, jako jsou takzvané *Higgsovy bosony*, *graviton* a některé jiné. Senzačním by byl objev *magnetického monopólu*, jehož existence byla předpověděna anglickým fyzikem *Diracem* ve třicátých létech. Z fyziky víme, že severní a jižní pól magnetu nelze navzájem nijak oddělit — rozřízneme-li magnet napolovic, vzniknou opět dva magnety se severními a jižními póly. Diracův monopól by měl být tou kouzelnou částicí, která by představovala jen jeden magnetický pól. Musela by být přitom natolik těžká, že není naděje ji „vyrobit" na některém velkém urychlovači. Je však možné, že takové monopóly poletují vesmírem jako zbytek po známém *velkém třesku*. Otevřenou zůstává i otázka, zda se podaří *kvarky* a *gluony*, které je váží v částicích, izolovat a také zda existují nějaké ještě elementárnější složky kvarků.

Fyzika elementárních částic souvisí také s výzkumem základních sil (interakcí) v přírodě, vlastností prostoru a času v malých měřítcích. Podle obecné teorie relativity je geometrie našeho prostoru ovlivněna gravitačními poli. Přitom je docela možné, že na velmi malých vzdálenostech nebudou již platit nám známé geometrické poučky, že například vůbec nebude možno používat pojem délky. V poslední době se objevily různé zprávy o objevu *antigravitace* působící na středních vzdálenostech desítek a stovek metrů. Tyto experimenty však zdaleka nejsou průkazné a ověřené a rozhodně se jimi nepodaří vysvětlit levitaci krásných slečen v cirkusové manéži.

Mnoho nových objevů může přinést *jaderná fyzika*. Víme, že existuje na 6000 radioaktivních jader, přičemž je z nich prozkoumáno něco kolem 1500. Mnoho z těchto neznámých jader by mohlo najít důležité uplatnění

ve vědě, technice nebo medicíně. Vedle atomových jader složených z protonů a neutronů tak, jak je známe, byla objevena nebo na svůj objev čekají různá další jádra exotických vlastností. Tak známe jádra obsahující navíc hyperony, které jim dodávají podivnost (hyperjádra), očekává se, že by mohla existovat stabilní jádra transuranů s protonovým číslem větším než 108. Taková jádra by při reakci štěpení mohla uvolňovat kolem deseti neutronů, což by znamenalo fantastické možnosti při uskutečňování řetězových reakcí. Velmi vzrušující je možnost existence supertěžkých jader, která připomínají svými vlastnostmi látku vytvářející neutronové hvězdy. Díky jevu takzvané kondenzace pionů se může stát, že při překročení určité kritické hustoty při stlačování jaderné látky budou se jádra dále sama smršťovat a stanou se zdrojem obrovské energie. Tato energie se uvolňuje například při výbuchu supernov.

Od fyziků objevitelů se očekává brzké vyřešení způsobu získávání *termojaderné energie*. Budujeme sice obrovské tokamaky a laserové systémy, které mají ohřát plazma na teploty stamiliónů stupňů, ale jsou to způsoby natolik komplikované a je s nimi spojeno tolik dosud nerozřešených otázek, že dnes nikdo nemůže říci, kdy budou první termojaderné elektrárny uvedeny do provozu, ani jakou budou mít podobu. Je docela možné, že nějaký nový vtipný nápad usnadní řešení této obtížné úlohy a učiní ji technicky schůdnější. Jeden čas se zdálo, že třeba takzvaná *mionová katalýza* (použití atomů vodíku, v nichž je elektron nahrazen mionem) učiní termojadernou reakci možnou při podstatně menších teplotách a tato naděje není ještě zdaleka ztracena.

Kromě termojaderné energie může fyzika přispět i k rozvoji netradičních energetických zdrojů a vůbec přeměn energie, najít nové polovodičové materiály, které by dokázaly měnit sluneční energii na elektrickou s vysokou účinností, nové chemické zdroje elektrické energie pro rozvoj elektromobilové dopravy, nové způsoby laserového a mikrovlnného dálkového přenosu energie, například z družicových slunečních elektráren. Celý rozvoj jaderné energetiky vůbec musí směřovat ke zvyšování bezpečnosti a spolehlivosti s využitím nových fyzikálních principů a nakonec přechodu na takové jaderné či termojaderné reakce, které by nevytvářely vůbec žádné radioaktivní zamoření.

Řada významných fyzikálních objevů, za něž byly v posledních letech uděleny Nobelovy ceny, se týkala nových kvantových jevů projevujících se v makroskopickém měřítku a umožňujících konstruovat nové přístroje fantastických vlastností. Tak r. 1973 bylo takto oceněno využití *tunelového jevu* v elektronice a objev *Josephsonova jevu*, který umožňuje měřit magnetická pole vyvolávaná lidským mozkem, srdcem nebo okem. Roku 1985 byla udělena cena za objev *kvantového Hallova jevu*, který se může uplatnit v mikroelektronice, r. 1986 za objev *elektro-*

nového a *elektronového tunelového mikroskopu* a konečně r. 1987 za objev *supravodivosti* při poměrně vysokých teplotách. Řada těchto objevů není uzavřena a další Nobelovy ceny čekají.

Všechny tyto fyzikální přístroje založené na nových fyzikálních principech, stejně tak jako nové generace laserů, zejména ultrafialových a rentgenových, nové zdroje synchrotronového záření mají zásadní význam nejen pro fyzikální výzkum, ale i pro další oblasti vědy a techniky. Umožní zavádět nové technologie do mikroelektroniky, konstruovat nové počítače, informační systémy, ale také zkoumat chemické a biologické objekty, molekuly, buňky, viry a pomáhat chránit lidské zdraví. Jsou to objevy, které postupně změní náš život, urychlí informační revoluci. Již dnes se uvažuje o tom, že místo četby odborných časopisů a učebnic, psaní dopisů a pořádání schůzí nebo namáhavého cestování do cizích krajů budou lidé ležet na gauči a moderní supervýkonné systémy jim všechnu potřebnou informaci zprostředkují . . .

Ani zdaleka jsme nevyčerpali všechny směry fyzikálního výzkumu, které jsou těhotné novými objevy. Vedle zmíněné supravodivosti, která slibuje převrat v elektrotechnice a při přenosu elektrické energie, ale i v konstrukci počítačů, výkonných magnetů, vysílačů apod. existuje též kvantový jev *supratekutosti*. Podobně jako při supravodivosti vymizí elektrický odpor, vymizí při supratekutosti tření. Každý si dovede představit, jak by to změnilo naši techniku a jaké energetické úspory by to znamenalo.

Nepřehledné pole pro další výzkum představuje fyzika pevných látek a uspořádaných částicových struktur. Teprve postupně začínáme rozumět tomu, jak jsou elektrony a atomová jádra v polovodičích, krystalech a tenkých vrstvách rozmístěny, jak se vzájemně ovlivňují a jak na ně působí elektrická a magnetická pole. Podařilo se vytvořit materiály zcela nových vlastností — tekuté krystaly známé z displejí kalkulaček a digitálních hodinek, kovová skla, amorfní polovodiče, kompozitní materiály, magnetická skla, ale tento proces zdaleka není ukončen.

Elektrony, atomy a molekuly představují velkolepou stavebnici přírody, z níž jsou vybudovány nejen krystaly, ale i buněčné komponenty, živé tkáně, naše tělo a náš mozek. Teprve se učíme si s touto stavebnicí hrát. Až se to naučíme, otevře se nám cesta nejen k pochopení fyzikálních zákonitostí, ale i vytváření nových forem látky, novým způsobům organizace hmoty. Fyzika, chemie a biologie se pak budou navzájem doplňovat a vytvoří tak jednotnou vědu o přírodě, z níž jsme vyšli a kterou se učíme poznávat a přetvářet.

MATEMATIKA

Neznámé množiny známých (I.)

RNDr. JIŘÍ HERMAN, G Brno, tř. kpt. Jaroše,
RNDr. JAROMÍR ŠIMŠA, CSc., PřF UJEP Brno

Sejde-li se na určitém místě jistý počet lidí, z nichž někteří se znají a jiní ne, může zvídavý pozorovatel obdařený logickým myšlením a kombinačními schopnostmi vyřknout o takové skupině lidí řadu zajímavých závěrů. Pokusíme se vás o tom přesvědčit ve dvou článcích. Chcete-li se takovými pozorovateli stát, nabízíme vám několik situací, ve kterých můžete svůj důvtip vyzkoušet.

V řadě úloh vám řešení usnadní dobře známý Dirichletův princip, který pro naše účely zformulujeme takto:

(DP) Je-li více než $n \cdot k$ objektů (např. osob, dvojic osob apod.) rozděleno do k skupin, pak aspoň jedna skupina obsahuje aspoň $n + 1$ objektů.

Poznamenejme, že užití tohoto jednoduchého principu je rozmanité, jak se můžete přesvědčit v knize *L. Bukovského* a *I. Kluvánka* „Dirichletov princíp", která vyšla v r. 1970 jako 25. svazek edice ŠMM.

Příklad 1. V 1. A třídě gymnázia v městě N se 1. září sešlo 19 chlapců a 12 dívek, přitom každá z dívek znala již z dřívějška aspoň 5 chlapců. Dokažte, že některý chlapec měl mezi novými spolužákyněmi aspoň 4 známé z dřívějška.

Řešení: Jestliže každá dívka znala aspoň 5 chlapců, pak celkový počet dvojic chlapec—dívka, kteří se již dříve znali, je aspoň 60. Rozdělme nyní tyto dvojice do 19 skupin podle toho, který chlapec je v nich zastoupen. Pak podle (DP) jsou aspoň v jedné skupině aspoň 4 dvojice, tedy některý chlapec má mezi děvčaty ve třídě aspoň 4 známé z dřívějška.

Úloha 1. Na výlet se sešla skupina 17 děvčat a několika chlapců. Každá z dívek zná aspoň 4, nejvýše však 6 z přítomných chlapců; každý chlapec zná aspoň 5, nejvýše však 8 dívek. Dokažte, že ve skupině výletníků bylo aspoň 9, nejvýše však 20 chlapců!

Příklad 2. Filmového představení se zúčastnilo 95 diváků. Dokažte, že někteří dva z nich mají mezi ostatními stejný počet známých.

Řešení: Rozdělme všechny přítomné diváky do 95 skupin T_0, T_1, T_{94} tak, že do skupiny T_i zařadíme ty diváky, kteří mají mezi ostatními právě i známých ($i = 0, 1, \quad 94$). Pak platí: pokud $T_0 \neq \emptyset$, pak

$T_{94} = \emptyset$ a naopak, je-li $T_{94} \neq \emptyset$, pak $T_0 = \emptyset$ (promyslete!). V obou případech je 95 osob rozděleno do nejvýše 94 neprázdných skupin T_i, tzn. podle (DP) jsou aspoň v jedné skupině aspoň dva diváci.

Úloha 2. Jestliže v situaci popsané v předchozím příkladě víme, že každý divák má v sále sudý počet známých, pak někteří tři diváci mají stejný počet známých. Dokažte!

Příklad 3. V sále je přítomno N osob, přitom každý z přítomných má v sále alespoň k známých.

a) Dokažte, že je-li $N = 100$ a $k = 67$, pak v sále je aspoň jedna čtveřice osob, které se navzájem znají.

b) Dokažte, že je-li $N = 100$ a $k = 66$, pak tato situace nastat nemusí, tedy může se stát, že v každé čtveřici lidí, kterou z přítomných vybereme, je aspoň jedna dvojice osob, které se neznají.

Řešení: a) Vybereme libovolnou dvojici osob A, B, které se znají. Ze zbylých 98 osob každá z osob A, B zná aspoň 66 a nezná nejvýše 32 osob, tzn. dvojice A, B má aspoň $66 - 32 = 34$ společných známých $C_1, C_2, \ldots, C_{34}$. Osoba C_1 nezná mezi osobami $C_2, C_3, \ldots, C_{34}$ nejvýše 32 osob, tedy zná aspoň jednu osobu C_i pro $i > 1$. Hledanou čtveřicí je tedy čtveřice A, B, C_1, C_i.

b) Rozdělme uvažovaných 100 osob do tří skupin po 33, 33 a 34 osobách a předpokládejme, že se znají právě ty dvojice osob, které patří do různých skupin. Pak každá osoba má aspoň 66 známých a při výběru libovolné čtveřice osob z těchto tří uvažovaných skupin musíme podle (DP) vždy vybrat aspoň dvě osoby z téže skupiny — a ty se neznají. Tedy vskutku v každé vybrané čtveřici osob existují aspoň dvě, které se neznají.

K řešení části b) předchozího příkladu poznamenejme, že jsme dvojice známých určili pomocí rozdělení osob do několika skupin. Tak jsme rychle a přehledně rozhodli, které ze $100 \cdot 99/2 = 4950$ dvojic osob se znají a které ne. Tento postup bude výhodný i při řešení některých dalších úloh.

Úloha 3. V situaci z předchozího příkladu položme $N = 89$.

a) Dokažte, že je-li $k = 67$, pak v sále je aspoň jedna pětice osob, které se navzájem znají.

b) Dokažte, že je-li $k = 66$, pak tato situace nastat nemusí.

Příklad 4. V autobuse je 38 cestujících, přitom ti, kteří se neznají, mají mezi spolucestujícími společného známého. Dokažte, že některý cestující má v autobuse aspoň 7 známých.

Řešení: Připusťme, že tvrzení úlohy neplatí, tzn. přepokládejme, že každý z cestujících zná nejvýše 6 osob. Vyberme z cestujících jednoho, označme jej A a jeho známé $B_1, B_2, \ldots, B_k$ ($k \leq 6$). Pak mezi ostatními cestujícími, které osoba A nezná — těch je aspoň 31 — je nejvýše

5 $k \leqq 5$ 6 = 30 osob, které se znají s některým cestujícím B_i, tedy existuje aspoň jeden cestující C, který A nezná, ani s ním nemá žádného společného známého, a to je spor.

Úloha 4. V kupé železničního vozu cestuje 8 osob, z nichž každé dvě se znají nebo mají společného známého. Dokažte, že někdo v kupé má aspoň tři známé.

Úloha 5. Rozhodněte, zda lze tvrzení z předchozí úlohy zesílit, tzn. zda za daných podmínek musí v kupé být aspoň jeden cestující, který má v tomto kupé aspoň čtyři známé!

Příklad 5. Na taneční zábavě se sešla společnost 8 mužů a 8 žen, v této skupině se zná právě 33 párů muž—žena. Dokažte, že ze skupiny lze vybrat současně k tanci 5 párů, v nichž se partneři znají.

Řešení 1. Výběr hledaných pěti párů bude možno uskutečnit, najdeme-li ve skupině 5 mužů M_1, M_2, , M_5 takových, že muž M_k zná ve skupině aspoň k žen ($k = 1, 2,$, 5) — promyslete! Rozdělme proto daných 33 párů do 8 skupin podle toho, který muž je v nich zastoupen. Pak podle (DP) existuje aspoň jeden muž M_5, který zná aspoň 5 žen; protože však zná nejvýše 8 žen, je zbylých 7 mužů zastoupeno aspoň v 33 — 8 = 25 párech. Podle (DP) zná tedy některý muž M_4 aspoň 4 ženy. Počet párů, v nichž není zastoupen ani M_4, ani M_5, je však aspoň 25 — 8 = 17. Odsud plyne, že existuje muž M_3, který zná aspoň 3 ženy. Pokračováním tohoto postupu nalezneme zbylé dva muže M_2 a M_1.

Řešení 2. Označme přítomné muže i ženy M_k, $Ž_k$ ($k = 1, 2, \ldots, 8$). Všech 64 párů $M_iŽ_k$ rozdělíme do 8 skupin T_j($j = 1, 2, \ldots, 8$) takto: $T_1 = \{M_1Ž_1, M_2Ž_2, \ldots, M_8Ž_8\}$, $T_2 = \{M_1Ž_2, M_2Ž_3, \quad , M_7Ž_8, M_8Ž_1\}$, , $T_8 = \{M_1Ž_8, M_2Ž_1, \quad , M_8Ž_7\}$ (znázorněte si situaci tabulkou). Všimněme si, že v každé skupině T_j je každý muž M_i i každá žena $Ž_k$ právě v jednom páru, tedy všech 8 párů z jedné skupiny T_j může současně tančit. Protože z celkového počtu 64 párů je 33 dvojic známých, je podle (DP) v některé z 8 skupin T_j aspoň 5 párů známých.

Úloha 6. Na taneční zábavě se sešla společnost n mužů a n žen, v této skupině se zná právě k párů muž—žena. Určete vztah mezi čísly n, p, k tak, aby bylo vždy možno vybrat současně k tanci p párů, v nichž se partneři znají.

Příklad 6. Dokažte, že v situaci z příkladu 5 lze vybrat současně k tanci 6 dvojic známých, víme-li navíc, že každý muž zná nejvýše 5 žen a každá žena zná aspoň 3 muže.

Řešení: Podle výsledku příkladu č. 5 lze vybrat 5 párů známých $M_1Ž_1$, $M_2Ž_2$, $M_3Ž_3$, $M_4Ž_4$, $M_5Ž_5$. Zřejmě stačí zkoumat případ, kdy žádná dvojice vytvořená ze zbylých tří mužů M_6, M_7, a M_8 a tří žen $Ž_6$, $Ž_7$, $Ž_8$ se nezná. Pět mužů M_1, M_2, . . . , M_5 je zastoupeno v nejvýše

$5 . 5 = 25$ dvojicích známých, zbylí tři muži tedy v aspoň $33 - 25 = 8$ párech. Podle (DP) některý z těchto tří mužů zná tedy aspoň 3 ženy — předpokládejme, že osoby jsou označeny tak, že muž M_6 zná ženy $Ž_1$, $Ž_2$, a $Ž_3$. Protože žena $Ž_6$ nezná M_6, M_7 ani M_8, zná však aspoň tři muže, zná tedy některého z mužů M_1, M_2, M_3 — řekněme muže M_1. Hledanou šestici tanečních párů pak tvoří $M_1Ž_6$, $M_2Ž_2$, $M_3Ž_3$, $M_4Ž_4$, $M_5Ž_5$, $M_6Ž_1$.

Úloha 7. Ukažte, že tvrzení příkladu 6 zůstane v platnosti, zeslabíme-li doplňující podmínku takto: Každý muž zná nejvýše 5 žen a nejvýše dvě ženy znají méně než 3 muže.

Uveďme na závěr tohoto článku problém, který souvisí s posledními dvěma příklady:

Problém: Uvažme následující hypotézu:

Jestliže ve skupině 10 žen a 10 mužů zná každá žena aspoň 4 muže a každý muž zná nejvýše 6 žen, pak lze vždy vybrat k tanci současně k párů známých.

a) Dokažte tuto hypotézu pro $k = 5$; vyvraťte ji pro $k = 8$.
b) Dokažte hypotézu pro $k = 6$.
c) Rozhodněte o platnosti hypotézy pro $k = 7$.

Domníváme se, že jde o poměrně obtížný problém (zejména částí b) a c)), proto jsme zvědavi na vaše řešení. Zašlete je do dvou měsíců od zveřejnění na adresu: dr. J. Herman, G tř. kpt. Jaroše 14, 658 70 Brno. Nejhezčí řešení otiskneme v některém z příštích čísel Rozhledů.

FYZIKA

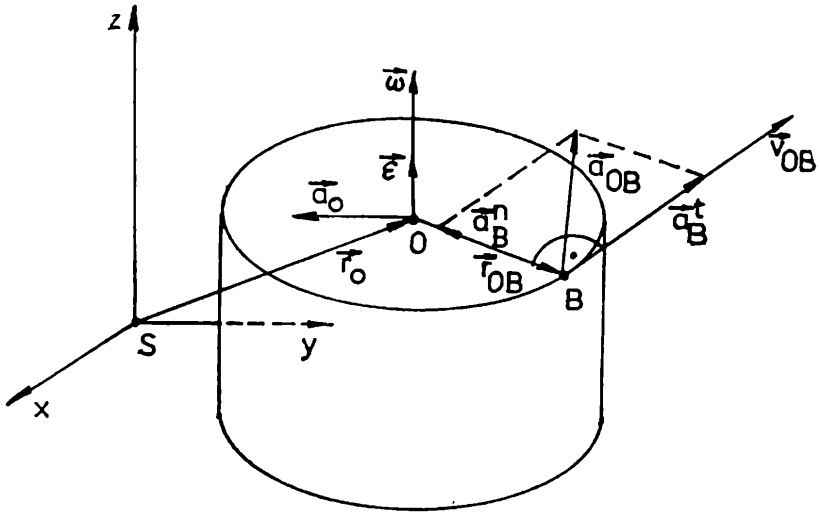
Kinematika rovinného pohybu tuhého telesa (zrýchlenie)

(*Študijná téma pre kategóriu A XXX. roč. FO*)

Doc. RNDr. VLADIMÍR ILKOVIČ, CSc., PF UPJŠ Košice

1. *Zrýchlenie rovinného pohybu tuhého telesa*

V študijnej téme XXIX. ročníka FO pre kategóriu B (pozri Rozhledy mat.-fyz., roč. 66, č. 3, s. 101—109) sme sa zoznámili s tým, že pohyb rovinného útvaru možno považovať za pohyb zložený z dvoch druhov pohybov: z posuvného pohybu a z otáčavého pohybu okolo pólu.



Obr. 1

Celkové zrýchlenie $\boldsymbol{a}_B$ ľubovoľného bodu B rovinného útvaru sa rovná vektorovému súčtu zrýchlenia $\boldsymbol{a}_O = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_O}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_O}{\mathrm{d}t}$ posuvného pohybu pólu a zrýchlenia $\boldsymbol{a}_{OB}$ bodu B vzhľadom na pól O, t.j. v sústave pevne spojenej s telesom pri jeho otáčaní okolo pólu, obr. 1:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{OB} \,. \tag{1}$$

Zrýchlenie $\boldsymbol{a}_{OB}$ je vektorovým súčtom tangenciálneho zrýchlenia $\boldsymbol{a}_B^t = \vec{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{OB}$ a normálového zrýchlenia $\boldsymbol{a}_B^n = \vec{\omega} \times \boldsymbol{v}_{OB}$, kde $\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ je uhlové zrýchlenie, ktoré rovnako ako uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$ má v danom okamihu určitú veľkosť, meranú v inerciálnej vzťažnej sústave, vzhľadom na ktorú popisujeme pohyb telesa.

$\boldsymbol{v}_{OB} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_{OB}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{OB}}{\mathrm{d}t}$ je rýchlosť bodu B vzhľadom na pól O, t.j. v sústave pevne spojenej s telesom, $\boldsymbol{r}_{OB}$ je polohový vektor bodu B vzhľadom na pól O. Platí

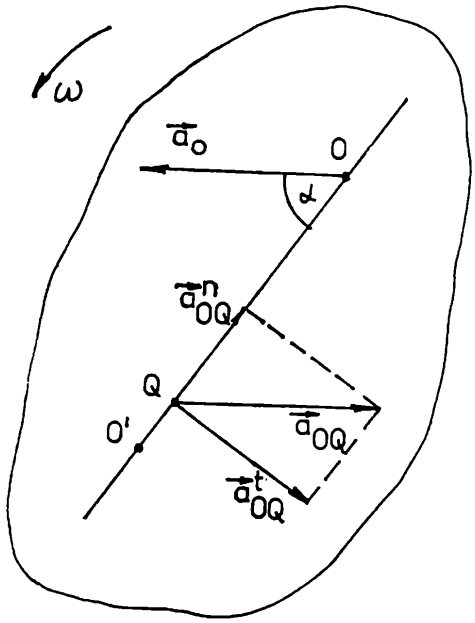
$$\boldsymbol{a}_{OB} = \vec{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{OB} + \vec{\omega} \times \boldsymbol{v}_{OB} \,. \tag{2}$$

Vektor $\boldsymbol{a}_B^t = \vec{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{OB}$ má smer dotyčnice k trajektórii bodu B (ku kružnici s polomerom r_{OB}), t.j. je rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{v}_{OB}$ (pozri obr. 1). Veľkosť vektora $\boldsymbol{a}_B^t$ je

$$a_B^t = \varepsilon\, r \sin(\boldsymbol{r}, \vec{\varepsilon}) = \varepsilon\, r \,. \tag{3}$$

Vektor $\vec{\omega} \times \boldsymbol{v}$ je v rovine rovinného útvaru a smeruje do bodu O. Veľkosť vektora $\boldsymbol{a}_B^n$ je

$$a_B^n = \omega\, v = \omega^2 r \,. \tag{4}$$



Obr. 1a

Veľkosť zrýchlenia $\boldsymbol{a}_{OB}$ bodu B je

$$a_{OB} = \sqrt{(a_B^t)^2 + (a_B^n)^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{5}$$

Platí: $\boldsymbol{a}_B^t \perp \boldsymbol{a}_B^n$.

2. *Okamžitý stred zrýchlenia*

Ukážeme, že v každom okamihu pri rovinnom pohybe rovinného útvaru (telesa) existuje v telese (prípadne v sústave pevne spojenej s telesom) bod, ktorého zrýchlenie sa rovná nule. Tento bod voláme okamžitým stredom zrýchlenia.

Nech rovinný útvar koná v inerciálnej sústave zrýchlený otáčavý pohyb v smere proti pohybu hodinových ručičiek s uhlovým zrýchlením $\vec{\varepsilon}$ a s uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$. Nech zrýchlenie ľubovoľného bodu O je $\boldsymbol{a}_O$. Odpočítame od vektora $\boldsymbol{a}_O$ v smere otáčania útvaru uhol $\alpha =$ $= \operatorname{arctg} \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ $(\alpha \in (0, \pi))$, (pozri obr. 1a). Na polpriamku OO' nanesieme úsečku veľkosti $OQ = \dfrac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ Pre celkové zrýchlenie $\boldsymbol{a}_Q$ bodu Q platí

$$\boldsymbol{a}_Q = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{OQ}\,. \tag{6}$$

Veľkosť vektora $\boldsymbol{a}_{OQ}$ je

$$a_{OQ} = \sqrt{(a_{OQ}^t)^2 + (a_{OQ}^n)^2} = OQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_O \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = a_O\,.$$

Vektor zrýchlenia $\boldsymbol{a}_{OQ}$ zviera s priamkou OQ uhol β, ktorý určíme zo vzťahu

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a^{\mathrm{t}}_{OQ}}{a^{\mathrm{n}}_{OQ}} = \frac{\varepsilon\, OQ}{\omega^2\, OQ} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{tg}\alpha$$

Vidíme, že platí $\alpha = \beta$, teda zrýchlenia $\boldsymbol{a}_{OQ}$ a $\boldsymbol{a}_0$ majú rovnaké veľkosti, ale opačné smery, t.j. $\boldsymbol{a}_{OQ} = -\boldsymbol{a}_0$. Podľa vzťahu (1) je $\boldsymbol{a}_Q = \boldsymbol{0}$.

Tým sme ukázali, že existuje bod telesa (príp. vo vzťažnej sústave pevne spojenej s telesom), ktorého zrýchlenie v danom okamihu sa rovná nule. Tento bod Q je okamžitý stred zrýchlenia. Bod Q leží na priamke, ktorá zviera s vektorom zrýchlenia $\boldsymbol{a}_0$ pólu uhol

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}\,, \quad \alpha \in (0, \pi)\,, \tag{7}$$

pričom uhol α sa odpočítava od vektora $\boldsymbol{a}_0$ v smere otáčania telesa a vzdialenosť OQ okamžitého stredu Q zrýchlenia od pólu je

$$OQ = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \tag{8}$$

Ak zvolíme okamžitý stred Q zrýchlenia telesa za pól ($\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_Q = \boldsymbol{0}$) potom celkové okamžité zrýchlenie ľubovoľného bodu rovinného útvaru v danom okamihu sa rovná zrýchleniu tohto bodu pri otáčavom pohybe rovinného útvaru okolo bodu Q. Veľkosť zrýchlenia ľubovoľného bodu A_i ($i = 1, 2, 3$) je potom podľa (5) daná vzťahmi

$$a_{A_1} = QA_1\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,, \quad a_{A_2} = QA_2\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,, \quad a_{A_3} = QA_3\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,, \tag{9}$$

kde QA_i je vzdialenosť bodov A_i od stredu Q. Platí:

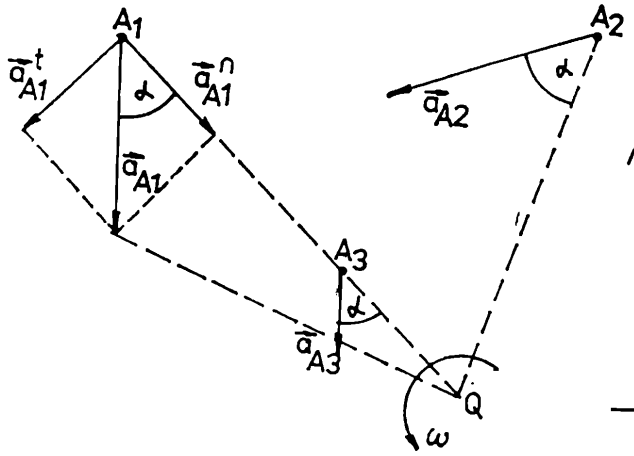
$$\frac{a_{A_1}}{a_{A_2}} = \frac{QA_1}{QA_2}\,, \quad \frac{a_{A_3}}{a_{A_1}} = \frac{QA_3}{QA_1} \tag{10}$$

Môžeme tvrdiť, že veľkosť zrýchlenia ľubovoľných bodov rovinného útvaru je úmerná vzdialenosti týchto bodov od okamžitého stredu Q zrýchlenia telesa a ich vektory zrýchlenia zvierajú s priamkou, ktorá spája tieto body s bodom Q, rovnaký uhol $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ (pozri obr. 2).

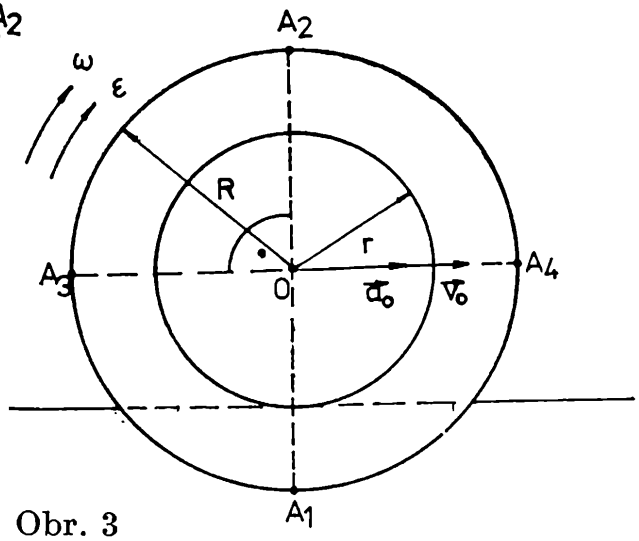
Príklad 1. Valec s polomerom r sa valí po rovine bez kĺzania. Rýchlosť a zrýchlenie bodov jeho osi v danom okamihu sú $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{a}_0$ (pozri obr. 3). Kotúč s polomerom $R < r$ je pevne osovo spojený s valcom na jeho základni. Určte v danom okamihu zrýchlenia bodov A_1, A_2, A_3, A_4. Predpokladáme, že otáčanie kotúča je zrýchlené.

Riešenie

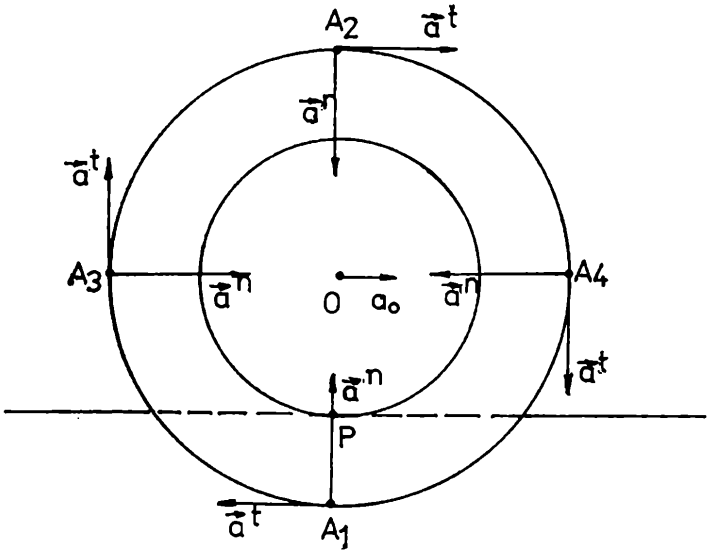
Určíme uhlovú rýchlosť $\vec{\omega}$ a uhlové zrýchlenie $\vec{\varepsilon}$ kotúča vzhľadom



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

na inerciálnu vzťažnú sústavu. Zrýchlenia bodov A_1, A_2, A_3, A_4 potom určíme zo vzorca

$$\boldsymbol{a}_{Ai} = \boldsymbol{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \boldsymbol{OA}_i + \vec{\omega} \times \boldsymbol{v}_{Ai} \quad (i = 1, 2, 3, 4)\,, \tag{1.1}$$

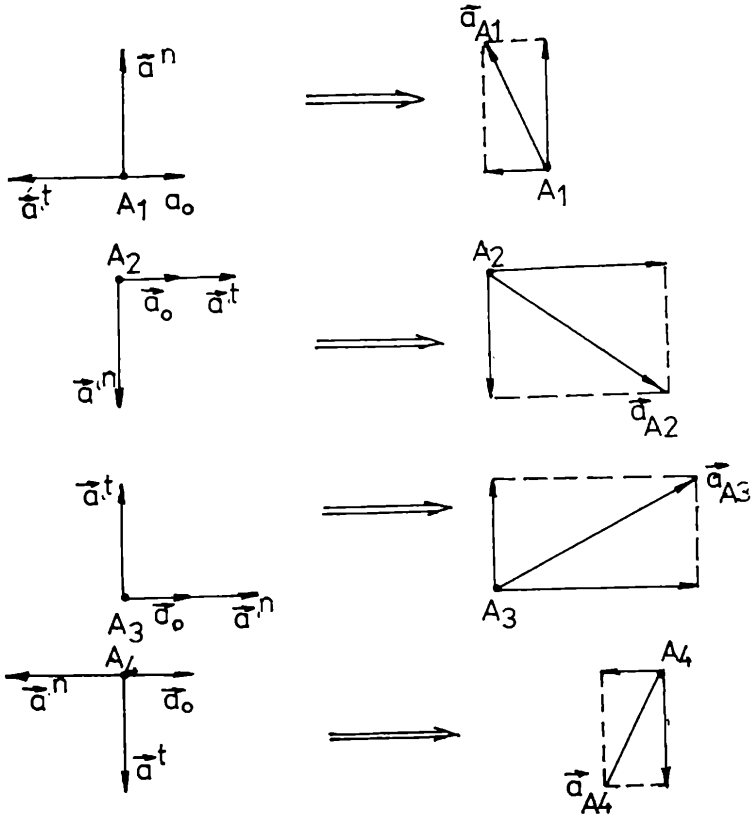
kde $\boldsymbol{v}_{Ai}$ sú rýchlosti príslušných bodov, $\boldsymbol{OA}_i$ polohové vektory bodov vzhľadom k zvolenému pólu (pozri vzťahy (1) a (2)).

1. Určenie ω a ε. Okamžitý stred P rýchlosti valca je bod dotyku priečného rezu valca s vodorovnou rovinou (pozri obr. 4). Veľkosť uhlovej rýchlosti valca (teda aj kotúča) určíme zo vzťahu

$$v_0 = \omega\, OP = \omega r, \quad \omega = \frac{v_0}{r}\,. \tag{1.2}$$

Okamžité uhlové zrýchlenie otáčavého pohybu valca (kotúča) má veľkosť

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t} = \frac{a_0}{r}\,. \tag{1.3}$$



Obr.

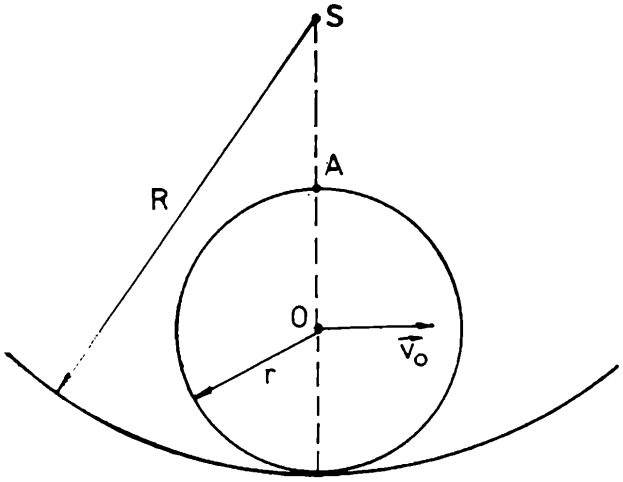
2. Určenie zrýchlení bodov A_i. Za pól volíme stred valca (jeho zrýchlenie totiž poznáme). Zrýchlenia bodov A_i sú dané vzťahom (1.1). Veľkosť tangenciálneho zrýchlenia bodov A_i pri otáčaní okolo pólu O je $a^t = |\vec{\varepsilon} \times \mathbf{OA}_i| = \varepsilon R$. Veľkosť normálového zrýchlenia $\boldsymbol{a}^n$ bodov A_i je $a^n = |\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{Ai}| = \omega^2 OA_i = \omega^2 R$. Smery vektorov $\boldsymbol{a}^t$, $\boldsymbol{a}^n$ zrýchlenia sú určené z významu vektorového súčinu (pozri obr. 5). Výsledné zrýchlenie vzhľadom k inerciálnej vzťažnej sústave jednotlivých bodov je dané vektorovým súčtom vektorov $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}^t$, $\boldsymbol{a}^n$ v príslušnom bode. Veľkosti vektorov $\boldsymbol{a}_{A_1}$, $\boldsymbol{a}_{A_2}$, $\boldsymbol{a}_{A_3}$, $\boldsymbol{a}_{A_4}$ sú vyjadrené vzťahmi (pozri obr. 5)

$$a_{A_1} = \sqrt{(a^t - a_0)^2 + (a^n)^2} = \sqrt{(\varepsilon R - a_0)^2 + (\omega^2 R)^2},$$
$$a_{A_2} = \sqrt{(a^t + a_0)^2 + (a^n)^2} = \sqrt{(\varepsilon R + a_0)^2 + (\omega^2 R)^2},$$
$$a_{A_3} = \sqrt{(a^t)^2 + (a_0 + a^n)^2} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (a_0 + \omega^2 R)^2},$$
$$a_{A_4} = \sqrt{(a^t)^2 + (a^n - a_0)^2} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R - a_0)^2}.$$

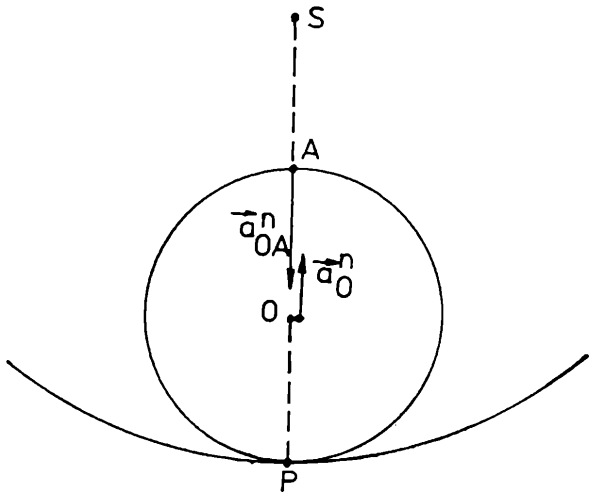
Príklad 2. Valec s polomerom r základne sa kotúľa bez kĺzania po vnútornej strane pevnej valcovej plochy s polomerom $R \geqq 2r$ (pozri obr. 6) tak, že keď je v najnižšom bode plochy, rýchlosť bodov jeho osi je $\mathbf{v}_0$. Určte veľkosť zrýchlenia bodu A vyznačeného na obrázku.

Riešenie

1. Určenie veľkostí zrýchlenia bodu O, uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ a uhlového zrýchlenia $\vec{\varepsilon}$ valca.



Obr. 6



Obr. 7

Zo zadania úlohy vyplýva možnosť určenia zrýchlenia bodu O, ktorý potom volíme za pól.

Bod O sa pohybuje po kružnici so stredom v bode S a s polomerom $R - r$ uhlovou rýchlosťou ω_{SO}:

$$\omega_{SO} = \frac{v_O}{R - r} = \text{konšt.}\,, \tag{2.1}$$

pretože platí

$$v_O = \omega_{SO}\,(R - r) \tag{2.2}$$

Zrýchlenie bodu O vzhľadom na bod S je vyjadrené takto:

$$\boldsymbol{a}_O = \boldsymbol{a}_O^t + \boldsymbol{a}_O^n \tag{2.3}$$

Veľkosť tangenciálneho zrýchlenia bodu O vzhľadom na bod S určíme takto:

$$a_O^t = |\vec{\varepsilon}_{SO} \times \boldsymbol{SO}| = \varepsilon_{SO}\,(R - r) = 0\,, \tag{2.4}$$

pretože uhlové zrýchlenie bodu O je $\varepsilon_{SO} = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \dfrac{\triangle \omega_{SO}}{\triangle t} =$

$= \dfrac{\mathrm{d}\omega_{SO}}{\mathrm{d}t} = 0$ (derivácia konštanty sa rovná nule).

Veľkosť normálového zrýchlenia je určená takto

$$a_O^n = |\boldsymbol{w}_{SO} \times \boldsymbol{v}_O| = \omega_{SO}^2\,(R - r) \tag{2.5}$$

Pre veľkosť celkového zrýchlenia bodu O vzhľadom na bod S dostaneme

$$a_O = \sqrt{(a_O^t)^2 + (a_O^n)^2} = \omega_{SO}^2\,(R - r) = \left(\frac{v_O}{R - r}\right)^2 (R - r) = \frac{v_O^2}{R - r}\,,$$

$$(a_0 = a_0^n)\,. \tag{2.5}$$

Za pól volíme bod O (poznáme jeho zrýchlenie).

Okamžitý stred rýchlosti je bod P valca (pozri obr. 7), lebo $\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}$ pri kotúľaní bez kĺzania. Využijeme vlastnosti bodu P na určenie veľkosti uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}_v$ otáčajúceho valca. Platí: $v_0 = \omega_v PO = \omega_v r$, teda

$$\omega_v = \frac{v_0}{r} \tag{2.6}$$

Pre uhlové zrýchlenie otáčajúceho valca dostaneme

$$\varepsilon_v = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \omega_v}{\triangle t} = \frac{d\omega_v}{dt} = 0 \text{ (pretože } \omega_v \text{ je konštantné).} \qquad 2.7)$$

2. Určenie zrýchlenia bodov A a P.

Podľa vzťahov (1) a (2) pre zrýchlenie bodu A platí:

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_{OA}^t + \boldsymbol{a}_{OA}^n\,, \tag{2.8}$$

kde $\boldsymbol{a}_0$ je zrýchlenie pólu O $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_0^t + \boldsymbol{a}_0^n$; $\boldsymbol{a}_{OA}^t$ je tangenciálne zrýchlenie bodu A pri otáčaní valca, $\boldsymbol{a}_{OA}^n$ je normálové zrýchlenie.

Pre veľkosti zložiek vektora zrýchlenia bodu A máme: $a_0 = \dfrac{v_0^2}{R - r}$ (pozri vzťah (2.5)), $a_{OA}^t = \varepsilon_v r = 0$ (pozri vzťah (2.7)), $a_{OA}^n = \omega_v^2 r = \dfrac{v_0^2}{r^2} r = \dfrac{v_0^2}{r}$ (pozri vzťah (2.6)).

Smery vektorov $\boldsymbol{a}_{OA}^n$, $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_0^n$ určíme z významu vektorového súčinu a sú znázornené na obr. 7.

Pre veľkosť vektora $\boldsymbol{a}_A$ dostaneme:

$$a_A = \frac{v_0^2}{r} - \frac{v_0^2}{R - r} = v_0^2 \frac{R - 2r}{r(R - r)} \geqq 0\,. \tag{2.9}$$

(*Dokončenie v č. 4*)

Řešení algebrogramů ze str. 117

a) BRATISLAVA
b) ALESSANDRO VOLTA

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903 — 1987)

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topoľčany

Kedy sa človek stáva matematikom? Možno vtedy, keď prvýkrát samostatne odhalí matematickú závislosť. Keď vybadá štruktúru javov, keď uvidí súvislosti medzi zdanlivo nezávislými okolnosťami. Univerzálnosť poznatkov bola vždy ozdobou matematických úvah.

Zdá sa vám jasné na prvý pohľad, že

$$1 + 3 + 5 + 7 \ldots + (2n - 1) = n^2 ,$$

pre každé prirodzené číslo n? Ak to skúsite vyčísliť napr. pre $n = 5$, tak bude $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, teda naozaj 5^2. Ale ako to dokázať všeobecne, pre každé prirodzené číslo n? Vyšetrime situáciu najprv pre párne n, potom pre nepárne. (Iná možnosť už nie je.) Ak n je párne číslo, tak rad je takýto:

$$1 + 3 + 5 + \quad + (2n - 5) + (2n - 3) + (2n - 1)$$

Môžeme sčítať prvý člen s posledným, druhý s predposledným atď. Dvojíc sčítancov je $n/2$ a tie majú vždy súčet $2n$. Teda celý súčet radu je

$$\frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$$

Ak bude počet členov n číslo nepárne, tak prostredný člen bude práve číslo n, takto:

$$1 + 3 + 5 + \quad + n + \quad + (2n - 5) + (2n - 3) + (2n - 1)$$

Opäť sčítame prvý s posledným, druhý člen s predposledným atď. Ich jednotlivé súčty sú $2n$, ich počet je $(n - 1)/2$. Celkový súčet spolu by bol $\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot 2n$. Ale treba ešte pripočítať prostredný člen n (ten

nie je do páru, lebo všetkých sčítancov bol nepárny počet). Teda spolu je súčet

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) . 2n + n = \frac{2n^2 - 2n}{2} + n = n^2 - n + n = n^2 .$$

Opäť vyšlo n^2. Tým je dokázané, že vždy, pre každé prirodzené číslo n, platí $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Možno takto uvažoval šesť—sedemročný Andrej Kolmogorov, budúci svetoznámy sovietsky matematik, keď samostatne prišiel k záveru, že súčet nepárnych čísel idúcich za sebou sa rovná druhej mocnine čísla, ktoré udáva ich počet. Už vtedy sa prejavil jeho matematický talent. Dvanásťročný sa naučil základy vyššej matematiky. Devätnásťročný Kolmogorov napísal prvú vedeckú prácu o všeobecnej teórii operácií s množinami. Odvtedy ho matematika neopustila. Stal sa matematikom.

Andrej Nikolajevič Kolmogorov sa narodil v *Tambove* 25. apríla 1903. Matka zomrela hneď po jeho narodení. Otec, agronóm, nechal syna vychovávať sestrám svojej ženy. Tie v mladíkovi prebudili zmysel pre zodpovednosť, neznášanlivosť k nečinnosti, samostatnosť a usilovnú pracovitosť. Andrej si predsavzal pozorované javy nielen si zapamätať, ale aj pochopiť ich a porozumieť súvislostiam medzi nimi. V roku 1920 sa stal študentom Moskovskej univerzity. Nevedel sa rozhodnúť o svojich záujmoch. Okrem matematiky a fyziky si medzi prednášky zapísal aj dejepis, lebo ho priťahovala ruská história a umenie. Prednášky v seminároch *V. V Stepanova* a *N. N. Luzina* mu nadhodili množstvo zaujímavých matematických problémov z oblasti teórie konvergencie trigonometrických radov. Kolmogorov ako prvý zostrojil príklad všade divergentného Fourierovho radu. Stal sa známym matematikom.

Po skončení štúdia na univerzite zostal tam ašpirantom. V roku 1931 bol vymenovaný za vysokoškolského profesora. Akademikom sa stal v roku 1939, bol iba tridsaťšesťročný. Od roku 1925 sa Kolmogorov intenzívne zaoberal teóriou pravdepodobnosti. Spolu s *A. Ja. Chinčinom* položil základy axiomatizácie teórie pravdepodobnosti. V rokoch 1934—1941 Kolmogorov vytvoril viac ako 50 vedeckých pojednaní, ktoré riešili úlohy z oblasti matematickej štatistiky, geometrie, topológie, funkcionálnej analýzy, teórie funkcií, matematickej logiky. Kolmogorov sa stal svetoznámym.

Počas druhej svetovej vojny Kolmogorov prispel k riešeniu obranných úloh sovietského národného hospodárstva, vyriešil otázky štatistickej kontroly kvality hromadnej priemyslovej produkcie. Rozvinul teóriu náhodných procesov, ktorá sa uplatnila v teórii procesov jadrového rozpadu.

Tvorivá matematická práca A. N. Kolmogorova prispela k riešeniu úloh v oblasti teórie informácií, teórie dynamických systémov, teórie

automatickej regulácie a matematickej lingvistike. Kolmogorov vynikal hlbokými komplexnými vedomosťami a výbornými analytickými a kombinačnými schopnosťami. Po celý život sledoval aj otázky pedagogické a metodologické. Podielal sa na zostavení Veľkej sovietskej encyklopédie. Podstatne prispel k založeniu a organizácii internátnej školy pre žiakov s nadaním pre matematiku a fyziku pri Moskovskej štátnej univerzite. Spolu s akademikom *I. K. Kikoinom* založili v roku 1970 populárnovedecký matematicko-fyzikálny časopis *Kvant*, ktorý úspešne šíri osvetu nielen v ZSSR, ale aj v iných krajinách.

Za úspešnú vedeckú, pedagogickú a organizátorskú prácu získal A. N. Kolmogorov titul Hrdina socialistickej práce, sedem ráz bol odmenený Leninovým rádom, dostal Rád Októbrovej revolúcie, Leninovu cenu, Štátnu cenu, Čebyševovu cenu a celý rad ďalších ocenení. V roku 1963 dostal Bolzanovu medailu za zásluhy v matematických vedách. Bol členom viac než 20 zahraničných akadémií vied, napr. vo Francúzsku, Anglicku, Holandsku, Poľsku, Maďarsku i USA.

Andrej Nikolajevič Kolmogorov zomrel 20. októbra 1987. Zanechal hlbokú stopu v mnohých matematických disciplínach. Skromnou dušou a tvorivým rozumom prispel k rozvoju celej ľudskej kultúry.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Řešení šesti úloh z matematiky

Texty úloh, jejichž řešení nyní uvádíme, byly otištěny v předešlém čísle Rozhledů.

1. Uvedené rovnosti lze obecně zapsat takto ($n \geqq 0$, celé):

$$10n + 9 = n \quad 9 + (n + 9)$$

Tato rovnost je zřejmě pravdivá.

2. Počet všech žákových knih je x a platí tyto nerovnosti:

$$50 < x < 100 \tag{1}$$

Počet románů je $\frac{x}{5}$, počet knih básní je $\frac{x}{7}$, takže počet všech románů a všech knih básní je

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = \frac{7x + 5x}{35} = \frac{12x}{35}$$

Protože $\frac{12x}{35}$ je přirozené číslo a protože čísla 12, 35 nemají společného dělitele, je číslo x dělitelno 35. Z toho a z nerovností (1) plyne, že je $x = 70$.

3. Úlohu můžeme řešit tak, že postupně vypočteme (třeba pomocí kalkulátoru) čtyřciferné dvojmoci dvojciferných čísel. Nejmenší takovou dvojmocí je číslo $1024 = 32^2$. Tento postup je ovšem zdlouhavý a není příliš nápaditý. Úlohu však můžeme řešit bez velkého počítání úvahou, kterou nyní provedeme.

Hledané čtyřciferné číslo je $aabb$, kde a, b jsou celá čísla, pro něž platí tyto nerovnosti:

$$1 \leqq a \leqq 9\,, \qquad 0 \leqq b \leqq 9\,, \tag{1}$$

$$1 \leqq a + b \leqq 18 \tag{2}$$

Zároveň je

$aabb = 1000a + 100a + 10b + b = 100a(10 + 1) + b(10 + 1) =$
$= 11 \quad 100a + 11b$, takže

$$aabb = 11 \quad (100a + b) \tag{3}$$

Protože číslo $11 \quad (100a + b)$ je dvojmocí, je číslo $100a + b$ dělitelno jedenácti. Avšak

$$100a + b = 99a + a + b \tag{4}$$

Protože čísla $100a + b$, $99a$ jsou dělitelna číslem 11, je také číslo $a + b$ dělitelné jedenácti; zároveň platí nerovnosti (2). Z toho plyne, že je $a + b = 11$. Podle rovnosti (4) je tedy

$$100a + b = 99a + 11 = 11(9a + 1)\,,$$

takže podle rovnosti (3) je

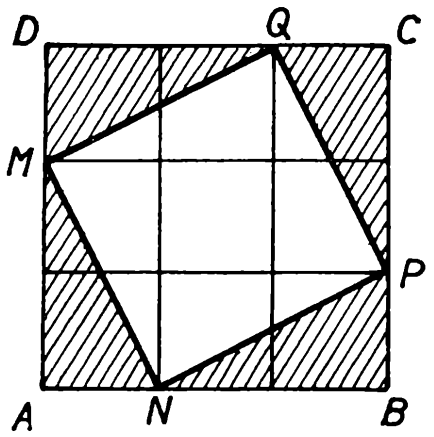
$$aabb = 11^2 \quad (9a + 1) \tag{5}$$

Číslo $aabb$ je dvojmoc přirozeného čísla. Proto z rovnosti (5) plyne, že číslo $9a + 1$ je dvojmoc přirozeného čísla. Zároveň podle nerovností (1) je $1 \leqq a \leqq 9$. Z toho plyne, že je $a = 7$, $9a + 1 = 64$. Podle rovnosti (5) je tedy

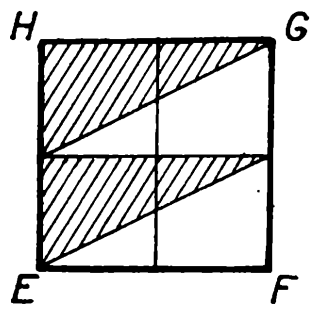
$$aabb = 11^2 \quad 8^2 = 88^2 = 7744$$

Vidíme, že při prvním způsobu řešení bychom museli dlouho počítat, než bychom úlohu rozřešili.

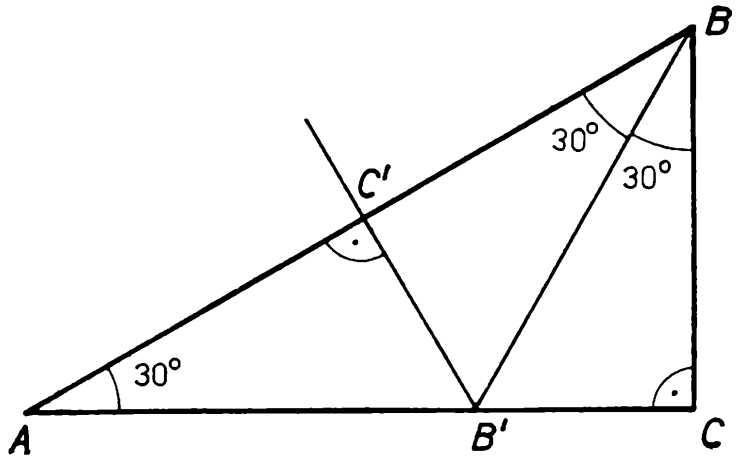
4. Daný čtverec $ABCD$ je na obr. 1. Vyšrafované pravoúhlé trojúhelníky (obr. 1) jsou shodné, neboť mají shodné odvěsny. Jejich složením podle obr. 2 vznikne čtverec $EFGH$, jehož strana má délku 2 cm; jeho



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

obsah je tedy 4 cm². Obrazec $MNPQ$ (obr. 1) má shodné strany (přepony shodných pravoúhlých trojúhelníků) a jeho vnitřní úhly jsou pravé. Má-li totiž nejmenší úhel kteréhokoli vyšrafovaného trojúhelníku velikost α, je velikost zbývajícího ostrého úhlu tohoto trojúhelníku rovna $90° - \alpha$. Z toho plyne, že např. velikost úhlu NMQ je $180° - (\alpha + 90° - \alpha) = 90°$. Obrazec $MNPQ$ je tedy čtverec. Jeho obsah je $(9-4)$ cm², tj. 5 cm².

5. Hledaný trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník, jehož ostré úhly mají velikosti 30° a 60° (obr. 3). Polopřímka BB' je osou úhlu ABC, přímka $B'C'$ je kolmá k přímce AB.

6. Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Délky jeho stran jsou (v centimetrech) a, b, c; délky výšek k těmto stranám jsou po řadě 1 cm, 2 cm, 3 cm.

Pro obsah P tohoto trojúhelníku platí tyto vzorce:

$$P = \frac{a \cdot 1}{2}, \qquad P = \frac{b \cdot 2}{2}, \qquad P = \frac{c \cdot 3}{2}.$$

Z těchto vzorců plyne, že je $a = 2P$, $b = P$, $c = \frac{2P}{3}$;

proto je

$$b + c = P + \frac{2P}{3} = \frac{5P}{3} < 2P$$

Je tedy $b + c < a$. To však není možno, neboť v každém trojúhelníku je součet délek kterýchkoli dvou stran větší než délka zbývající strany. Proto předpoklad, že uvedený trojúhelník existuje, nebyl pravdivý. Hledaný trojúhelník tedy neexistuje.

Emil Kraemer

Devítková zkouška

Ze 6. ročníku znáte znak dělitelnosti devíti. Můžeme jej vyslovit třeba takto:

Přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě je násobkem čísla 9, *právě když jeho ciferný součet je násobkem čísla* 9.

Dokonce platí více: Dané přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě a jeho ciferný součet dávají při dělení číslem 9 týž zbytek. Vyjde-li ciferný součet větší než devět, můžeme toto pravidlo užít znovu; např. ciferný součet čísla 1079 je 17, ciferný součet 17 je 8, takže čísla 1079 i 17 dávají při dělení devíti zbytek 8.

Pravidlo, o kterém jsme hovořili, použijeme na čísla $a = 6812$, $b = 201$, $a + b = 7013$, $a \,.\, b = 1\,369\,212$. Sestavíme tabulku:

Čísla	Ciferné součty	
$a = 6\,812$	17	8
$b = 201$	3	
$a + b = 7\,013$	11	2
$a \,.\, b = 1\,369\,212$	24	6

Sečteme-li zbytky získané při dělení čísel a, b devíti, dostaneme $8 + 3 = 11$, což odpovídá zbytku 2 při dělení devíti čísla $a + b$. Znásobíme-li zbytky při dělení devíti čísel a, b dostaneme $8 \,.\, 3 = 24$, což odpovídá zbytku 6 při dělení devíti čísla $a \,.\, b$.

Takové postupy doporučovali ke kontrole výpočtů již v 10. století indičtí matematici. My jsme tak ověřili správnost výpočtu součtu $a + b$ i součinu $a \,.\, b$. Při této kontrole výpočtů se hovořilo o *devítkové zkoušce*.

Nyní problém pro vás, čtenáře Rozhledů. Zjistěte, zda jde skutečně o zkoušku, anebo jen o kontrolu, při níž se může stát, že se chyba ve

výpočtu neobjeví. Přesvědčte se o tom na případech, že by někdo tvrdil, že součet čísel 6812 a 201 se rovná 7913 a že jejich součin se rovná 1 459 212. Přemýšlejte nad tímto problémem, zda jde o zkoušku anebo o pouhou kontrolu, která může selhat. Vymyslete další vhodné příklady. Dále si rozmyslete, kdy není objevena chyba v jedné cifře.

Jiří Mída

Příhoda z Anapy

V posádce v lázeňském městě Anapa u Černého moře sloužil v roce 1841 romantický ruský básník *Michail Jurjevič Lermontov*. V tomto roce též zahynul ve vyprovokovaném souboji ve věku 27 let.

Na jednom důstojnickém večírku kdosi řekl, že Lermontov je znamenitý matematik. Slovo dalo slovo a Lermontov byl vyzván, aby své umění předvedl. Lermontov se obrátil na jednoho přítomného a postupně mu dával k vyplnění tyto příkazy:

Myslete si číslo, stačí dvojciferné. Přičtěte k němu číslo 25 a potom ještě číslo 125. Od součtu odečtěte číslo 37 a potom číslo, které jste si myslel. Poslední výsledek vynásobte pěti. Vzniklý součin vydělte dvěma a dostanete číslo $282\frac{1}{2}$ Nastalo ticho plné napětí a k úžasu všech bylo závěrečné Lermonovovo tvrzení potvrzeno.

Výpočet se potom ještě několikrát opakoval s jiným výchozím číslem a vždy nakonec vyšlo $282\frac{1}{2}$. Důstojnická sešlost se shodla, že Lermontov je kouzelník, což on odmítal a zdůrazňoval, že jen studoval matematiku.

Zkuste výsledek Lermontovovy úlohy odůvodnit a potom sestavte obdobné úlohy.

Jana Mídová

Omyly, kleré ovládly svět

Stav beztíže

Seznámíme se dnes s jedním z omylů, který patří mezi nejrozšířenější i u lidí, kteří si fyziku oblíbili. Není bez zajímavosti, že mezi pomýlené patřil dokonce i slavný francouzský spisovatel *Jules Verne*, jehož romány svědčí o hlubokých fyzikálních znalostech autora.

Ve filmu i televizi každý z nás určitě několikrát viděl postavu, vznášející se ve stavu beztíže v kabině kosmické lodi. Společně s kosmonau-

jeho objevitel Berzelius jej tak nazval, aby tím naznačil jeho příbuznost s telurem (lat. *tellus*, *-uris* = země).

SEMI- (z lat. *semi-* = polo-) — počáteční část složených slov mající význam „polo-, půl, poloviční"; srov. SEMIFINÁLE — polofinále

SEPARACE (z lat. *separatio;* od *separo*, *-are*, ptc. pf. *separatus;* slož. ze *se-* — zde ve významu odluky + *paro*, *-are* = připravovat, strojit, chystat; v. aparát) — oddělování, oddělení, odloučení, rozdělení; místnost určená k osamocení (nemocných apod.); v jaderné fyzice: separace izotopů — oddělování nebo obohacování frakcí izotopů ze směsi

SEPTIMA (z lat. *septimus* = sedmý, od *septem* = sedm) — „sedmá v pořadí"; 1. sedmá třída bývalých gymnázií, 2. sedmý stupeň diatonické stupnice; výškový rozdíl dvou tónů, při němž vyšší tón tvoří sedmý stupeň diatonické stupnice vzhledem k tónu nižšímu

SÉRIE (z lat. *series* = řetěz, řada) — řada, sled; řada jednotlivostí majících něco společného a tvořících nějaký celek; řada činností po sobě následujících; ve fyzice např.: řada čar různé vlnové délky v emisním a absorpčním spektru; řadit do série, sériově — v řadě za sebou (opak: paralelně; v. t.) ;SÉRIOVÝ — řadový, jdoucí za sebou, ve fyzice: sériové zapojení — řadové, v řadě za sebou

SERVOMOTOR (slož. z lat. *servio*, *-ire* = být otrokem, sloužit; srov. *SERVIS* — opravářská, „pomáhající" dílna + *moveo*, *-ere* = hýbat; v. motor) — pomocný motor

SEXTA (z lat. *sextus* = šestý; od *sex* = šest) — „šestá v pořadí"; 1. šestá třída bývalých gymnázií, 2. šestý stupeň diatonické stupnice; výškový rozdíl dvou tónů, při němž vyšší tón tvoří šestý stupeň diatonické stupnice vzhledem k tónu nižšímu

SEXTANT (od lat. *sex* = šest; v. *sexta*) — 1. šestina (jedna ze šesti částí) kruhu, kulovitého tělesa, na tomto principu sestrojený přístroj k měření výšky hvězd; pracuje s úhlem 60° (6 . 60 = 360), 3. poloha Měsíce vzhledem k Zemi a Slunci, kdy rozdíl délky Měsíce a délky Slunce je úhel 60° nebo jeho dvoj-, čtyř- a pětinásobek

SFÉRA (z řec. *sfaira* = koule) — koule, kulatá plocha, zvláště pak „nebeská koule"; oblast, okruh, obor (působnosti, vlivu); ve fyzice: vesmírný prostor kolem zeměkoule vymezený dvěma kulovými plochami soustřednými se Zemí

-SFÉRA — koncová část složených slov mající obojí základní význam, tj. „koule" a „oblast"; např. ATMOSFÉRA (v. t.) — „kulový obal par"; EKOSFÉRA (v. t.) — „oblast domova"; v. t. exo-, foto-, hemi, chromo-, iono-, strato-, troposféra

SFÉRICKÝ — týkající se sféry; kulový; týkající se geometrického útvaru na kulové ploše; sférická trigonometrie — „trigonometrie na kouli"; zabývá se vlastnostmi sférického trojúhelníka, tj. troj-

úhelníka na kulové ploše; sférické zrcadlo — kulové zrcadlo; v. t. asférický

SCHÉMA (z řec. *schéma, -atos* = postava, podoba, tvářnost) — v základních rysech naznačená struktura něčeho; jednoduché znázornění; SCHEMATICKÝ — znázorněný schématem; naznačený, názorný, přehledný; „jenom naznačený", zjednodušený, povrchní, mechanicky zjednodušující

SIDERICKÝ (od lat. *sidus, -eris* = souhvězdí, hvězda) — hvězdný; siderický měsíc — doba, za kterou Měsíc zaujme opět totéž postavení mezi hvězdami; siderický oběh, oběžná doba — doba, za kterou Měsíc opíše mezi stálicemi 360°; srov. synodický

SIGNÁL (od lat. *signum* = znamení, značka) — smluvené znamení, kterým se předává nějaká zpráva; podnět, popud, náznak; nositel informace; v. t. videosignál; SIGNALIZACE (v. -izace) — předávání zprávl pokynů

SINGLET, SINGLETA (přes angličtinu od lat. *singuli* = jednotliví, po jednom; v. singulární) — jednoduchá čára v čárovém spektru; srov. dublet, triplet, multiplet

SINGULÁRNÍ (z lat. *singularis*; od *singuli* = jednotliví, po jednom; srov. SINGULÁR — jednotné číslo) — ojedinělý, jednotlivý, jednotlivce se týkající, vyskytující se ojediněle, jedinečný; ve fyzice a matematice: nevyskytující se všeobecně, nýbrž jen „ojediněle, jednotlivě" a mající proto zvláštní vlastnosti

SIRÉNA (z řec. *Seirén, -énos* = jméno mořské víly, která svým kouzelným zpěvem lákala mořeplavce do záhuby) — signalizační zařízení vydávající pronikavý zvuk, zpravidla výstražný

SKALÁR (od lat. *scalae* = žebřík, schody) — číselný údaj, který lze zobrazit na číselné ose, tj. „na stupnici"

SKLEROSKOP (slož. z řec. *skléros* = tvrdý; srov. SKLERÓZA — kornatění + *skopeó* = hledět, pozorovat; v. -skop) — přístroj na měření tvrdosti kovů

-SKOP (z řec. *skopos* = pozorovatel, hlídač, od *skopeó* = hledět, pozorovat) — koncová část složených slov dodávající slovu význam „nástroj nebo přístroj k pozorování, k prohlížení", „-hled"; předcházející část složeného slova upřesňuje, „co přístroj pozoruje" (např. MIKROSKOP — drobnohled pozoruje „malé částečky", nikoliv „pomocí malých čoček"), nebo upřesňuje, „jak, pomocí čeho přístroj pozoruje" (např. TELE-SKOP — dalekohled nepozoruje „dálky", ale „na dálku, do dálky"; právě tak MEGA-SKOP — „velkohled" — nepozoruje „velké předměty", ale „pomocí velkého přístroje"). V. t. elektroskop, epidiaskop, episkop, galvanoskop, gyroskop, hygroskop, chronoskop apod.

-SKOPIE (souvztažná koncová složka ke -skop) — koncová část

složených slov, mající význam „druh pozorování" nebo „způsob pozorování, prohlížení; pozorovatelská činnost, přímé vyšetřování zrakem"; např. DEFEKTOSKOPIE — vyhledávání skrytých vad (defektů) v materiálu

SKOTOPTICKÝ (slož. z řec. *skotos* = tma, temnota, + *opt-* — kmen slovesa *horaó* = vidět; v. optický) — skotoptické vidění — „vidění za tmy"; vidění oka adaptovaného na šero nebo tmu; vidění v šeru tyčinkami sítnice bez rozlišování barvy předmětů; vidění tyčinkové; srov. vidění fotoptické. Pozn.: Někdy se místo „skotoptické" používá podoby „skotopické" a obdobně „fotopické".

SMEKTICKÝ (z řec. *sméktikos*; od *smégma* = mazání, drhnutí, stírání; vlastně čistící prostředek) — „sloužící k čištění, drhnutí, mytí; jeden ze tří typů termotropních kapalných krystalů — krystalických kapalin, nazvaný tak nikoliv podle své struktury, jako je tomu u nématických (v. t.), ale podle svých představitelů — některých mýdlových roztoků. Pozn.: Protože v řec. slově „*smégma*" je *éta*, měli bychom vyslovovat a tedy i psát „sméktický" a ne „smektický".

SOLÁRNÍ (z lat. *solaris*; od *sol, solis* = slunce) — sluneční, pocházející ze Slunce; v. t. solsticium

SOLENOID (slož. z řec. *sólén* = rýha, trouba + latiniz. *oideus* = podobající se, od řec. *eidos* = podoba; v. -oid) — „těleso podobající se trubce"; magnetizační cívka, kde elektrický vodič má podobu válcovité cívky, na níž jsou stejnosměrné závity. Pozn.: V termínu „solenoid" není nic společného s lat. *sol, solis* = slunce

SOLIDUS (z lat. *solidus* = hmotný, hustý, pevný, tuhý; srov. SOLIDNÍ — spolehlivý, důkladný) — čára diagramu, která spojuje teploty konce krystalizace jednotlivých poměrů slitin, tj. znázorňuje situaci, kdy slitina začne tuhnout; opakem: likvidus (v. t.)

SOLSTICIUM (slož. z lat. *sol, solis* = slunce; v. solární + *sisto, -ere* = stavět, postavit; v. rezistence) — „zastavení slunce", tj. „slunce se zastaví"; slunovrat; SOLSTICIÁLNÍ, SOLSTICIONÁLNÍ — slunovratný

SON (z lat. *sonus* = zvuk, hlas; od *sono, -are* = znít; v. disonance) — jednotka hlasitosti zvuku

SONAR (od lat. *sono, -are* = znít; v. disonance) — zařízení k zjišťování objektu pod vodou pomocí velmi krátkých zvukových vln

SONICKÝ (od lat. *sonus* = zvuk, hlas; od *sono, -are* = znít; v. disonance) — zvukový, související se zvukem; srov. subsonický, supersonický, transsonický, ultrasonický

SPECIÁLNÍ (z lat. *specialis;* od *species* = pohled, vzhled, podoba, představa, vzor, druh) — zaměřený, určený jen k určité věci, k určitému cíli; zvláštní

SPECIFICKÝ (slož. z lat. *species* + *facio, -ere* = dělat; v. -fikace) —

příznačný pro něco, pro někoho; vlastní něčemu, někomu; osobitý, zvláštní

Pozn.: Někdy se dosti přesně nerozlišuje „speicální" a „specifický". „Speciální" všeobecně znamená „mající zvláštní, osobitý charakter", ve vědeckém názvosloví „zvláštní, osobitý, jen určité věci se týkající"; dále pak též „podrobný, zevrubný, jdoucí do jednotlivostí". V technickém názvosloví označuje všeobecně materiál, předmět, nástroj, stroj, ale i výrobu, když se svým složením, tvarem, vlastnostmi, provedením apod. odlišuje od jiných podobných a hodí se (je přizpůsoben ,určen) jen pro zcela zvláštní účel, práci, výrobek apod. Např.: speciální případ; speciální nářadí; speciální mapa — podrobná topografická mapa středního měřítka na rozdíl od mapy generální. Naproti tomu SPECIFICKÝ obecně znamená „příznačný pro něco, pro někoho, charakteristický" (např. specifické vlastnosti). Ve fyzice pak znamená určitou vlastnost látky, vztahovanou buď na jednotku objemovou (např. specifická hmota — obsažená v jednotce objemové) nebo na jednotku hmoty (např. specifický objem — objem jednotky hmotné) nebo jinak definovanou pro jednotlivé poměry.

SPEKTRÁLNÍ v. spektrum

SPEKTRO- (z lat. *spectrum* = obraz; v. spektrum) — počáteční část složených slov mající význam „obraz", přičemž vzhledem k druhé části složeného slova buď je jejím předmětem (např. spektrometr — přístroj, který měří spektrum), nebo vyjadřuje její vlastnost (např. spektrochemie — spektrální chemie)

SPEKTROGRAF (řec. *grafó* = rýti, psát; v. -graf) — „přístroj zapisující spektrum"; ve fyzice: přístroj k fotografickému zobrazení zkoumaného spektra

SPEKTROGRAM (v. -gram[1]) — „zapsané spektrum"; snímek spektra pořízený spektrografem

SPEKTROHELIOGRAF (řec. *helios* = slunce; v. heliocentrický + *grafó* = rýti, psát; v. graf) — přístroj k fotografování Slunce v jednobarevném světle; SPEKTROHELIOGRAM — snímek získaný spektroheliografem

SPEKTROMETR (řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — přístroj k proměřování spektra a zjišťování vlnových délek světelného záření

SPEKTROSKOP (řec. *skopeó* = hledět, pozorovat; v. -skop) — přístroj k pozorování spekter ve viditelné oblasti spektra; SPEKTROSKOPICKÁ dvojhvězda — její dvě složky nelze odlišit dalekohledem, ale jen spektroskopy (ve spektru se objeví zdvojená čára); SPEKTROSKOPIE — nauka o vzniku a druzích spekter

SPEKTRUM (z lat. *spectrum* = obraz; od *spicio, -ere* = hledět; toto

tem pluly kabinou i některé předměty, např. tužka nebo kapky rozlité vody, zkrátka vše, co nebylo upevněno. Zkuste se zeptat ve svém okolí dospělých nebo kamarádů, čím je to způsobeno. Většina z nich určitě vysvětlí tento jev sice jednoduše, ale špatně tím, že družice letí oblastí, kde již nepůsobí zemská přitažlivost. Stejně nesprávné je „učenější" vyjádření, že do výšek, ve kterých létají družice, již gravitační pole Země nesahá.

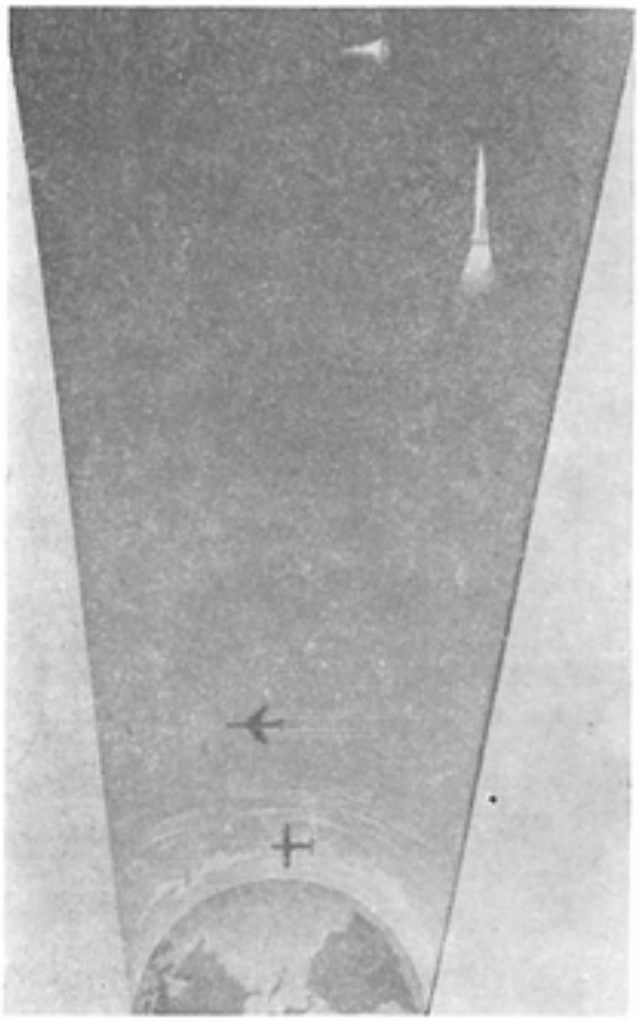
Myslíte si totéž? Jistě ne, jinak byste se museli zeptat sami sebe, proč družice krouží kolem Země a nenamíří si to do vzdálených částí Vesmíru. Gravitační pole Země určitě sahá k družici, vždyť ji drží jako na vodítku u Země a dovoluje jí jen obíhat kolem dokola.

Popravdě řečeno, k rozšíření omylu, že jsou družice za hranicemi zemské přitažlivosti, pomohly i některé obrázky v novinách, časopisech, ale i učebnicích. Ve snaze zdůraznit „kosmičnost" letu lodí s lidskou posádkou jsou obrázky trajektorií obydlených družic kresleny ve velmi zkresleném měřítku. Vidíme to například i na prvním obrázku z jedné zahraniční učebnice fyziky. Při velikosti, ve které je znázorněna na obrázku Země, by totiž mračna, obě letadla, raketa i družice letící ve výšce 270 mil (430 km) měly být namačkány méně než 1 mm od obrysu Země.

Ve správném měřítku načrtnutý druhý obrázek vyhlíží zcela jinak, i když i zde má být letadlo ještě blíž k povrchu (0,1 mm). Abychom do něj mohli zakreslit celou Zemi, musel by mít náš časopis rozměry jako arch balicího papíru. Takový obrázek by už nikoho nesvedl k myšlence, že družice je za hranicemi zemské gravitace.

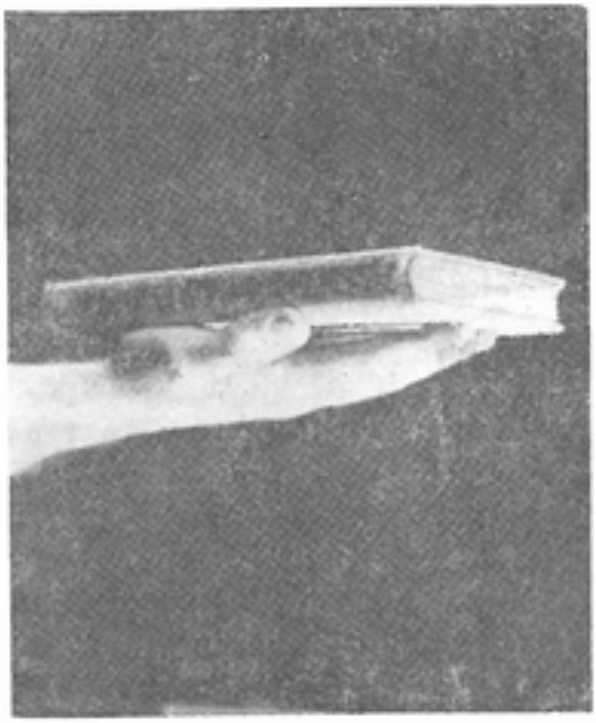
Většina kosmických lodí s lidskou posádkou létá ve vzdálenostech do 300 km nad Zemí a v této výšce je gravitační síla jen o málo menší ve srovnání s pozemskou. Kilogramové závaží přitahuje Země na svém povrchu silou o velikosti přibližně 10 N, ve 300 km výšce stále ještě silou větší než 9 N.

Jak tedy může být v kabině takové družice stav beztíže? Na tuto otázku si dokážete odpovědět sami pomocí jednoduchého pokusu.



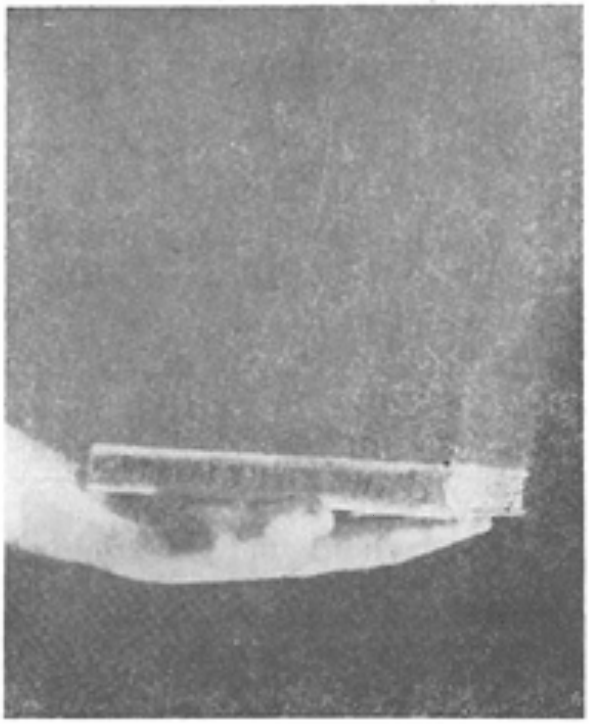
Obr. 1

Obr. 2



Obr. 3

Obr. 4



Vylezte na stůl a na vodorovně namířenou dlaň položte knihu. Sílu, kterou tlačí kniha na vaši dlaň, zřetelně ucítíte. Skočte nyní opatrně se stolu a sledujte přitom, jak během skoku tlak na dlaň ustal. Je to zcela samozřejmé, neboť ruka klesá k zemi stejně rychle jako kniha. Po dobu skoku jste pociťovali stav beztíže, i když jenom na zlomek sekundy. Mezi vaším skokem a „skokem" družice, který zahájila pomocí raketových motorů, není zásadní rozdíl. „Skok" družice je jen z větší výšky, je rychlejší a trvá delší dobu. I v kabině družice na dlaň kosmonauta kniha netlačí jen proto, že kosmonaut, kniha i všechny ostatní věci v kabině vlastně neustále padají. Stav beztíže

v družici při jejím volném letu (bez zapálených motorů) je tedy způsoben tím, že družice i všechny věci uvnitř jsou v neustálém pádu.

Úkol pro vás:

Navrhněte jiný pokus, kterým byste mohli přesvědčit svého kamaráda, že se během vašeho skoku projevuje stav beztíže.

Milan Rojko

Laboratoř doma

Je možné odstínit gravitační sílu?

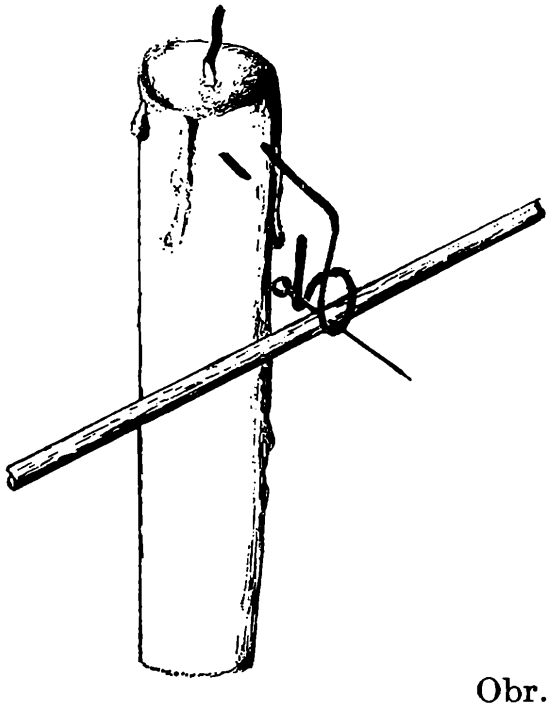
Příprava pokusu, který vám tentokrát nabízíme, je trochu náročnější. Potřebné pomůcky, přestože je jich víc, však určitě doma najdete.

Připravte si:

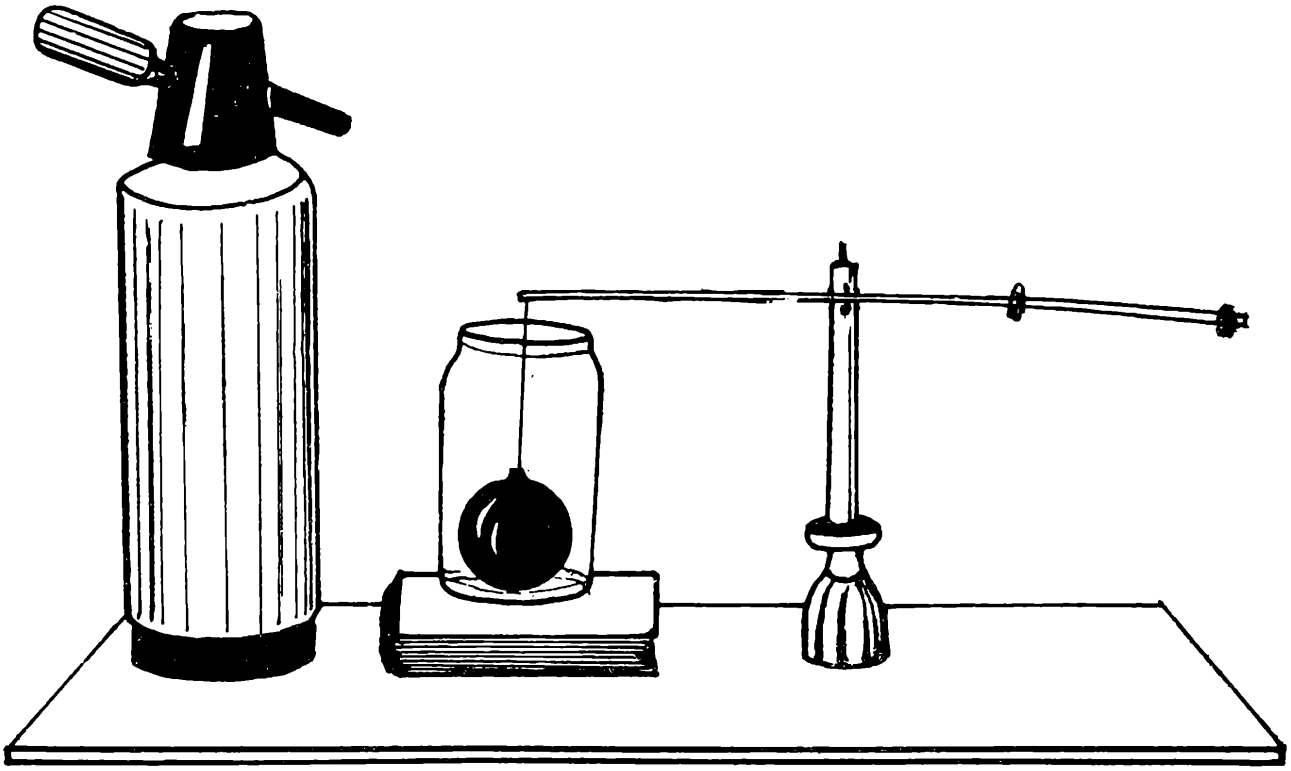
třičtvrtělitrovou sklenici od zavařeniny
lehkou, nezdobenou vánoční skleněnou kouli, která projde volně hrdlem sklenice
sifonovou láhev na sodovku s bombičkou plněnou CO_2
nebo kypřící prášek do pečiva
dřevěnou špejli
tenkou jehlu
dvě kancelářské sponky
větší matici s otvorem zaplněným plastickou gumou
svíčku ve stojánku nebo v hrdle láhve
lepidlo Kanagom, Herkules nebo pod.

Z jemného papíru umneme mezi prsty malou kuličku, která se těsně vejde do hrdla vánoční koule. Na kuličku uvážeme nit a lepidlem potřenou kuličku opatrně zatlačíme do okraje hrdla. Abychom otvor vzduchotěsně uzavřeli, kápneme ještě na papírovou zátku lepidlo a necháme vše dobře zaschnout. Zatím si připravíme špejli, která bude tvořit vahadlo. Její střed opatrně kolmo propíchneme jehlou nebo tenkým špendlíkem.

Z kancelářské svorky potom vytvarujeme lůžko pro jehlu, jeho



Obr. 1



Obr. 2

tvar vidíte na obr. 1. Konec lůžka zahřejeme v plameni svíčky a zatlačíme do svíčky asi 1 cm pod horním okrajem. Ne jeden konec špejle navážeme ozdobu na niti, na opačný konec upevníme matku jako protizávaží. Po nasazení jehly do lůžka vyvážíme své jemné váhy do rovnováhy — hrubě posouváním matice — jemně pomocí druhé kancelářské sponky zachycené na špejli.

Nakonec kouli opatrně vložíme do připravené zavařovací sklenice a upravíme vše tak, aby koule visela těsně nad dnem, ale nedotýkala se ho. Pokud nemáte sodovkovou láhev s bombičkami, nasypte pod kouli na suché dno sklenice prášek do pečiva. Na obr. 2 vidíte celé připravené zařízení.

Naplňte prázdnou sodovkovou láhev z bombičky oxidem uhličitým a pomalu ho potom napusťte do sklenice. Používáte-li kypřící prášek, zalijte ho lžící vody.

Pozorně sledujte porušení rovnováhy.

Úkoly pro vás:

1. Dřív, než pokus provedete, vyslovte domněnku o jeho průběhu a zdůvodněte ji.
2. Popište přípravu svého pokusu, svá zlepšení i průběh pokusu.
3. Zeslabuje opravdu oxid uhličitý gravitační sílu působící na vánoční ozdobu nebo jde o jiný fyzikální jev? Vysvětlete!

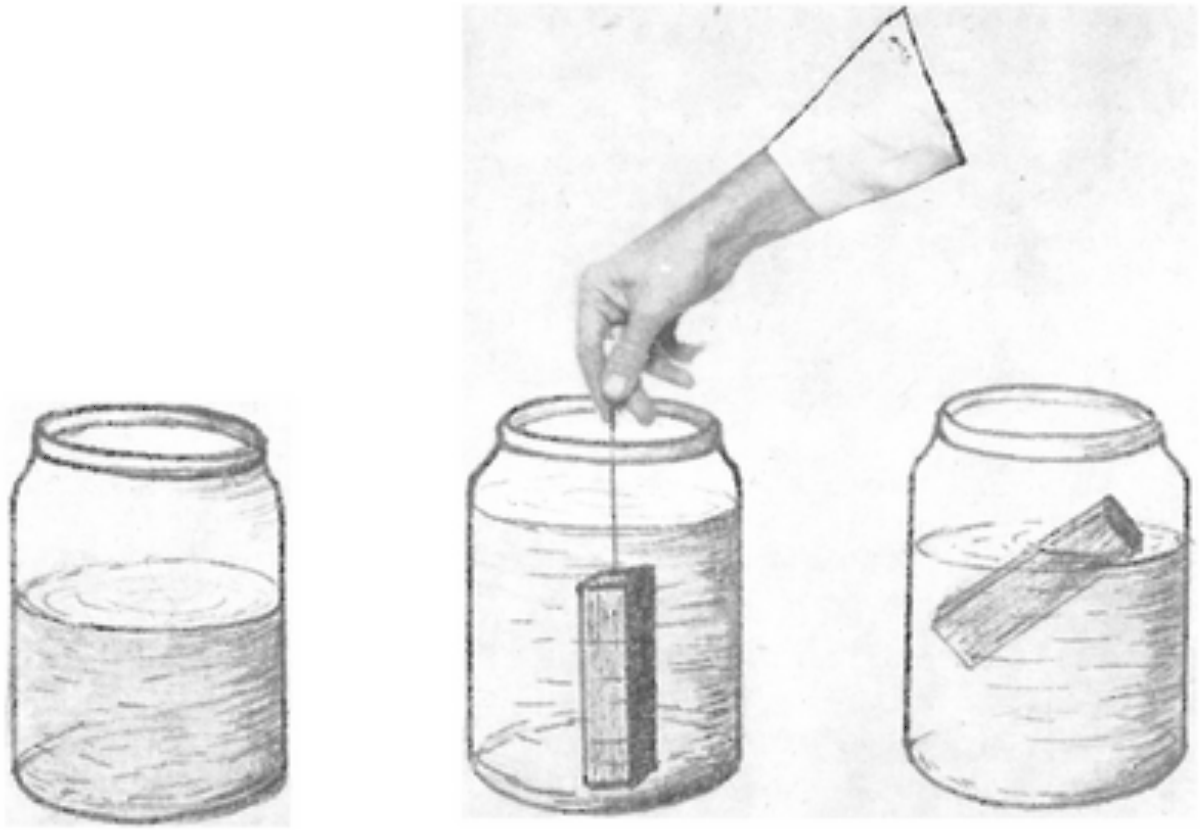
Milan Rojko

Fyzikální úloha

Měření hmotnosti bez vah

Jistě doma najdete dřevěnou kostku ze stavebnice, se kterou jste si již přestali hrát. Také malou sklenici od zavařeniny nebude obtížné získat. Potom už zbývá připravit si úzký proužek lepenky a ostře ořezanou tužku, centimetrové měřítko a jehlu.

Prozradíme vám jen, že proužek lepenky nalepený na sklenici poslouží k zaznamenání výšky hladiny vody ve sklenici (ve škole byste asi museli



říci „k zaznamenání výšky volného povrchu kapalného tělesa" Brrr!). Jehlu použijeme k úplnému potopení kostky pod vodu.

Úkol pro vás:

Z délek, které naměříte měřítkem, vypočtěte hmotnost kostky. Jestliže se vám zdá úkol příliš jednoduchý, můžete vypočítat i hustotu dřeva, ze kterého je kostka vyrobena. To, že má 1 cm^3 vody hmotnost 1 g, bychom vám asi nemuseli připomínat.

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu: RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK Praha, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2. Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Procvičte si představivost

Představte si, že z bílých krychlí o hranách délky 1 slepíte dutý pravidelný čtyřboký hranol H o podstavné hraně délky n, výšce $6n$ a tloušťce stěny rovné číslu 1; n je přirozené číslo. Potom si představte, že hranol natřete modrou barvou.

Určete, u kolika malých krychlí byla natřena pouze jedna stěna, u kolika dvě stěny a u kolika tři stěny.

Představte si dále, že natřený hranol H byl rozebrán a že všechny malé krychle byly znovu bez dalšího nátěru slepeny v modrou dutou krychli K o hraně délky $2n$ a tloušťce stěn rovnou číslu 1. Vypočtěte číslo n, pro které je to možno. Zároveň vysvětlete postup lepení.

Řešení otiskneme v příštím čísle.

Jiří Mída

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Za písmeno X dosaďte cifry 1, 2, . . . , 9 tak, aby platily rovnosti

$$XX : X = X - X = X + X = X \,.\, X\,,$$

přičemž každá z cifer 1, 2, . . . , 9 musí být zastoupena.

2. Které číslo patří na místo znaku „?“ v posloupnosti 7, 17, 37, 77, ?, 317, . . . ; odůvodněte.

3. Z bodu A vypluly současně po proudu řeky prám a motorový člun. Ve stejný okamžik jim vyplul naproti jiný motorový člun z bodu B. Když první motorový člun dosáhne bod B, bude prám blíže bodu A či druhému motorovému člunu?

4. Kolik existuje přirozených čísel dělitelných 11, menších než 100 000, takových, že součet jejich cifer je roven 11?

5. Ve výkladní skříni obchodu jsou uložena jablka a hrušky do tvaru trojúhelníka, přičemž v prvé řadě je jedno jablko, ve druhé dvě hrušky, ve třetí tři jablka, ve čtvrté čtyři hrušky atd. Kolik je jablek, resp. hrušek, je-li počet řad roven n?

6. Vymodelujte si ze zápalek nesprávnou rovnost VII + III = V. Nyní přemístěte jednu zápalku tak, aby rovnost platila. Zkuste to třemi různými způsoby.

7. Vezměte šachovnici 3 × 3 “otočenou“ tak, že jedna její diagonála bude svislá a druhá vodorovná. Do jejích 9 políček vepište cifry 1, 2, . . . , 9 tak, aby každá cifra byla zastoupena a aby 5 čísel, jejichž zápis

v desítkové soustavě získáme po vodorovných přímkách, byly vesměs čtverce celých čísel.

8 (obtížnější). Dokažte, že z libovolných n čísel je možno vybrat několik čísel (třeba jen jedno) tak, že jejich součet se neliší od nejbližšího celého čísla o více než $1/(n+1)$.

Tomáš Schütz

Algebrogramy s tajenkami

Stejná písmena nahraďte stejnými číslicemi tak, aby v každém algebrogramu platilo všech šest rovnic. Písmena pak dosaďte do tajenky.

a)
$$\begin{array}{ccccccccc} S & B & L & + & L & B & = & I & L & V \\ & + & & & & - & & & - & \\ & S & S & + & V & L & = & S & B & A \\ \hline I & L & T & & V & R & = & & L & T \end{array}$$

Tajenka:
9765432616

b)
$$\begin{array}{ccccccccc} S & V & L & \times & & D & = & L & A & S & R \\ & - & & & & \times & & & & + & \\ S & E & N & + & A & D & = & & S & O & D \\ \hline & D & L & \times & E & O & = & R & D & N & T \end{array}$$

Tajenka:
1357710426 96381

Řešení naleznete na str. 103.

Jindřich Pěnčík

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

MATEMATIKA

1. Nejmenší společný násobek 37 různých přirozených čísel je $28^{10}.19^{17}$. Dokažte, že z těchto 37 přirozených čísel je možno vybrat právě tři tak, že jejich součin je třetí mocninou přirozeného čísla.
(Došla 4 řešení.)

Jiří Herman

Řešení Martina Kučery, 3C gymnázium Mikuláše Koperníka, Bílovec:
Protože 28^{10} 19^{18} lze zapsat jako 2^{20} 7^{10} . 19^{18} a číslo 28^{10} . 19^{18} je

nejmenším společným násobkem uvažovaných 37 přirozených čísel, lze každé z těchto čísel zapsat jednoznačně ve tvaru $2^a\ 7^b\ 19^c$, kde $a \in \{0, 1, \quad , 20\}$, $b \in \{0, 1, \quad , 10\}$, $c \in \{0, 1, \quad 18\}$.

Označme si uvažovaná čísla $n_1, n_2, \ldots, n_{37}$ a ke každému n_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 37\}$ najděme taková celá nezáporná čísla a_i, b_i, c_i, aby bylo $n_i = 2^{a_i} . 7^{b_i}{}_i\ 19^{c_i}$ Rozdělme exponenty a_i do tří skupin podle toho, zda dávají při dělení třemi zbytek 0, 1, nebo 2. Podle Dirichletova principu musí být aspoň v jedné z těchto skupin aspoň 13 prvků. Označme si takovouto skupinu A — je-li takových skupin víc, vybereme libovolnou z nich. Zkoumejme nyní taková n_i, pro která a_i patří do skupiny A. Rozdělme exponenty b_i těchto n_i do tří skupin podle stejného pravidla jako předtím a_i. Podle Dirichletova principu musí být aspoň v jedné z těchto skupin aspoň pět prvků. Označme tuto skupinu B. Nyní zkoumejme těch pět čísel n_i, jejichž exponenty a_i patří do A a b_i do B. Pro zjednodušení předpokládejme, že jde o čísla $n_1, n_2, \quad , n_5$. Rozdělme exponenty $c_1, c_2, \quad , c_5$ do tří skupiny podle stejného kritéria jako předtím a_i a b_i:

Pokud v jedné z těchto skupin jsou aspoň tři prvky, je důkaz hotov: Označíme-li tyto tři prvky c_k, c_l, c_m, je $n_k . n_l . n_m = 2^{a_k + a_l + a_m}.$ $7^{b_k + b_l + b_m}\ 19^{c_k + c_l + c_m}$ Protože $a_k, a_l, a_m \in A$, platí $3 \mid a_k + a_l + a_m$, tj. $a_k + a_l + a_m = 3a'$ pro vhodné celé nezáporné číslo a'. Obdobně je i $3 \mid b_k + b_l + b_m$ a $3 \mid c_k + c_l + c_m$, tj. $b_k + b_l + b_m = 3b'$ $c_k + c_l + c_m = 3c'$

Je tedy $n_k\ n_l\ n_m = 2^{3a'}\ 7^{3b'}\ 19^{3c'} = (2^{a'}\ 7^{b'} . 19^{c'})^3$.

Pokud v každé ze tří skupin, do kterých jsme rozdělili exponenty $c_1, c_2, \ldots, c_5$, jsou nejvýše dva prvky, musí být v každé z těchto skupin aspoň jeden prvek. Označme c_k prvek z první skupiny (tedy $c_k = 3j_0$), c_l prvek z druhé skupiny ($c_l = 3j_1 + 1$), c_m prvek ze třetí skupiny ($c_m = 3j_2 + 2$)

Tedy $c_k + c_l + c_m = 3j_0 + 3j_1 + 1 + 3j_2 + 2 = 3(j_0 + j_l + j_2 + 1) = 3c'$ Stejně jako v předchozím případě je $3 \mid a_k + a_l + a_m$ i $3 \mid b_k + b_l + b_m$, takže $n_k . n_l . n_m = 2^{3a'}\ 7^{3b'} . 19^{3c'} = (2^{a'}\ 7^{b'} . 19^{c'})^3$.

Tím je důkaz proveden.

2. Každý pravoúhlý trojúhelník, který má tu vlastnost, že velikost kterékoli jeho strany je číslo přirozené, se nazývá *pythagorejský trojúhelník*. Dokažte, že existuje šest různých tříd nekonečně mnoha pythagorejských trojúhelníků, jejichž obsah je vyjádřen k-krát větším číslem, než je číslo udávající jeho obvod.
(Došla 3 řešení.)

Stanislav Horák

Autorovo řešení:

Délky stran pythagorejského trojúhelníku označme x, y, z. Jsou to čísla přirozená a předpokládejme, že jsou i nesoudělná. Platí o nich

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

Podle úlohy platí

$$k\,(x + y + z) = \frac{1}{2}\,xy\,, \tag{2}$$

kde k je přirozené číslo různé od nuly. Z rovnic (1) a (2) vyloučíme z a úpravou dojdeme k rovnici

$$xy - 4kx - 4ky = -\,8k^2$$

Této rovnici dáme konečný tvar

$$(x - 4k)\,(y - 4k) = 8k^2 \tag{3}$$

Nyní musíme přihlédnout k několika možnostem. Přitom musíme mít stále na mysli, že čísla x, y, k jsou přirozená.

1. Rovnici (3) je jistě vyhověno, když

$$x - 4k = k\,,$$

$$y - 4k = 8k$$

Odtud plyne

$$x = 5k\,, \quad y = 12k\,, \quad z = 13k$$

Dostali jsme tak jednu třídu (navzájem podobných) pythagorejských trojúhelníků žádané vlastnosti. Budeme ji značit (I). Ještě se přesvědčíme, zda nalezené řešení vyhovuje požadavku úlohy.

$$S = \frac{1}{2}\,.\,5k \quad 12k = 30k^2\,,$$

$$o = 5k + 12k + 13k = 30k$$

Skutečně platí $S = k \quad o$.

2. Rovnici (3) se dá vyhovět také tak, že

$$x - 4k = 2k\,,$$

$$y - 4k = 4k$$

Řešení soustavy je

$$x = 6k\,, \quad y = 8k\,, \quad z = 10k$$

Dostali jsme další třídu (navzájem podobných) pythagorejských trojúhelníků požadované vlastnosti. Označíme ji (II). Sami se přesvědčte, že je splněn požadavek úlohy.

3. Nyní položme

$$x - 4k = 1\,,$$
$$y - 4k = 8k^2$$

Z toho

$$x = 1 + 4k\,, \quad y = 4k + 8k^2\,, \quad z = 8k^2 + 4k + 1\,.$$

Tato třída (III) už nedává trojúhelníky navzájem podobné. Proveďme ještě zkoušku.

$$S = \frac{1}{2}(1 + 4k)(4k + 8k^2) = 2k(1 + 6k + 8k^2)\,,$$

$$o = 1 + 4k + 4k + 8k^2 + 8k^2 + 4k + 1) = 2(1 + 6k + 8k^2)\,.$$

Skutečně platí $S = k\,.\,o$.

4. Další možnost plynoucí z rovnice (3) je

$$x - 4k = 2\,,$$
$$y - 4k = 4k^2\,,$$

z čehož

$$x = 2 + 4k\,, \quad y = 4k + 4k^2\,, \quad z = 4k^2 + 4k + 2\,.$$

To představuje další třídu (IV) pythagorejských trojúhelníků žádaných vlastností. Zkoušku správnosti vynecháme.

5. Rovnice (3) připouští i rozklad

$$x - 4k = 4\,,$$
$$y - 4k = 2k^2\,.$$

Dostali jsme tak další třídu (V) pythagorejských trojúhelníků

$$x = 4 + 4k\,, \quad y = 4k + 2k^2\,, \quad z = 4 + 4k + 2k^2$$

6. Z rovnice (3) můžeme dostat ještě soustavu rovnic

$$x - 4k = 8\,,$$
$$y - 4k = k^2\,.$$

Odtud máme poslední třídu (VI) pythagorejských trojúhelníků

$$x = 8 + 4k\,, \quad y = 4k + k^2\,, \quad z = 8 + 4k + k^2\,.$$

Ani zde nebudeme provádět zkoušku správnosti.

Na ukončení neškodí malá poznámka. Některé z nalezených tříd mohou mít nějaký trojúhelník společný. Bližším šetřením se dá celkem snadno zjistit, že to jsou tyto trojúhelníky:

(I) a (III) mají společný trojúhelník pro $k = 1$, (5, 12, 13),
(I) a (IV) pro $k = 2$, (10, 24, 26),
(I) a (V) pro $k = 4$, (20, 48, 52),

(I) a (VI) pro $k = 8$, (40, 96, 104),
(II) a (IV) pro $k = 1$, (6, 8, 10),
(II) a (V) pro $k = 2$, (12, 16, 20),
(II) a (VI) pro $k = 4$, (24, 32, 40).

Radek Podrazil, 4. D G M. Koperníka v Bílovci vyšel při řešení ze vzorců pro velikosti stran pythagorejských trojúhelníků

$$a = 2ruv\,, \quad b = r(u^2 - v^2)\,, \quad c = r(u^2 + v^2)\,, \quad (r \in N)$$

a došel v podstatě k témuž výsledku.

3. Nechť L je libovolný vnitřní bod daného pravého úhlu XOY. Uvnitř polopřímky OX zvolte bod P a uvnitř polopřímky OY zvolte bod Q. Body P, Q veďte kolmice k polopřímce OL a jejich paty označte P', Q' Jak musíte zvolit bod L, aby součet $s = |OP'| + |OQ'|$ byl maximální? Řešte bez užití diferenciálního počtu.
(Došlo 6 řešení.)

Stanislav Horák

První řešení je od Libora Němečka, 3. C G M. Koperníka, Bílovec:

Sestrojme obrazy Q_1, Q'_1 bodů Q, Q' ve středové souměrnosti se středem O. Potom platí (obr. 1, 2):

$$s = |OP'| + |OQ'| = |OP'| + |OQ'_1| = |P'Q'_1|$$

Bodem Q_1 veďme rovnoběžku s přímkou OL a její průsečík s přímkou PP' označme P_0. Všimněme si, že $\triangle OQ_1Q'_1 \cong \triangle OQQ'$ podle věty sus. $[|OQ'| = |OQ'_1|\,, \quad |OQ| = |OQ_1|\,, \quad |\sphericalangle QOQ'| = |\sphericalangle Q_1OQ'_1|\,.]$ Proto

$$|\sphericalangle QQ'O| = |\sphericalangle Q_1Q_1'O| = 90°$$

V důsledku toho

$$s = |Q_1P_0|$$

Nyní mohou nastat dva případy.

a) $P \neq P_0$ a úsečka Q_1P_0 je odvěsnou a úsečka Q_1P je přeponou pravoúhlého trojúhelníku Q_1PP_0 (obr. 1, 2). Je tedy

$$s = |Q_1P_0| < |Q_1P|\,.$$

b) $P = P_0$ a potom

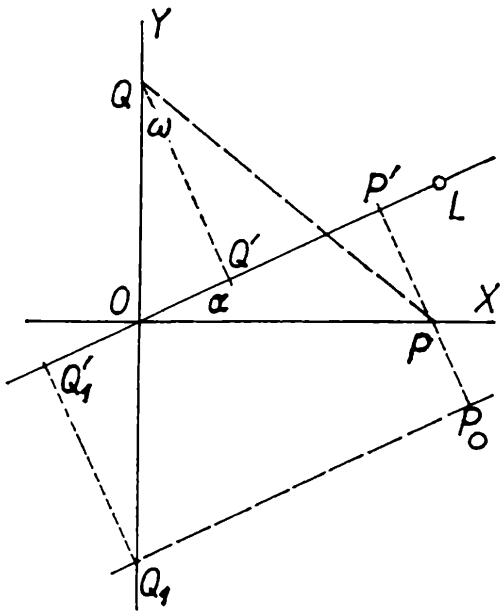
$$s = |Q_1P_0| = |Q_1P|\,;$$

důsledek toho je

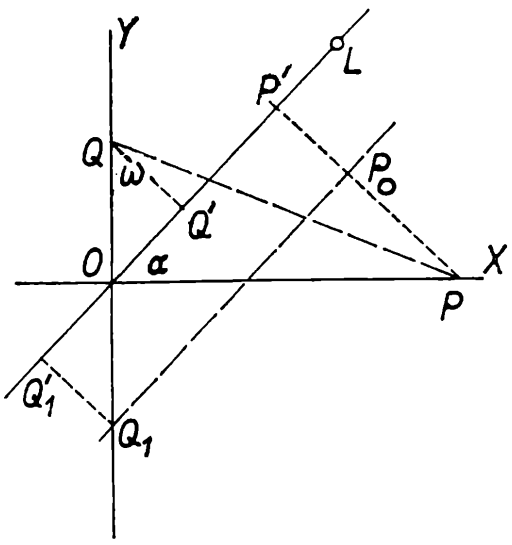
$$\alpha = |\sphericalangle POL| = |\sphericalangle QPO|$$

Podle tohoto výsledku je nutno zvolit bod L (nebo přímku OL).

Druhé řešení je od Gabriely Janglové, 2. B G Bratislava:



Obr. 1



Obr. 2

Označme $|\sphericalangle LOP| = \alpha$ a $|OP| = p$, $|OQ| = q$; potom platí:

$$s = |OP'| + |OQ'| = p \cos \alpha + q \sin \alpha = q\left(\frac{p}{q} \cos \alpha + \sin \alpha\right).$$

Nyní položme

$$\frac{p}{q} = \operatorname{tg} \omega \,.$$

Výraz pro s je

$$s = q(\operatorname{tg} \omega \cos \alpha + \sin \alpha) =$$

$$= \frac{q}{\cos \omega} (\sin \omega \cos \alpha + \sin \alpha \cos \omega) =$$

$$= \frac{q}{\cos \omega} \sin (\omega + \alpha) \,.$$

Zlomek $\dfrac{q}{\cos \omega}$ má konstantní velikost, a proto s bude mít maximální hodnotu, právě když $\sin(\omega + \alpha)$ bude maximální, tj. právě tehdy, když bude

$$\omega + \alpha = 90° \tag{a}$$

Ale z trojúhelníku OPQ je patrno, že

$$\omega + |\sphericalangle QPO| = 90° \tag{b}$$

Porovnáním rovnic (a), (b) máme $\alpha = |\sphericalangle QPO|$, tj.

$$\alpha = |\sphericalangle LOP| = |\sphericalangle QPO|$$

Výsledek: Bod L musíme zvolit tak, aby $\dfrac{q}{p} = \operatorname{tg} \alpha$.

Třetí řešení zaslal Marek Vetešík, 3. A G Brno:

K bodům P, P' sestrojíme body P_1, P'_1 středově souměrně sdružené podle středu O. Potom

$$s = |OP'| + |OQ'| = |OP'_1| + |OQ'|$$

Nyní si všimněme, že úsečka P'_1Q' je pravoúhlý průmět úsečky P_1Q do přímky OL. Platí tedy

$$|P'_1Q'| \leqq |P_1Q| = |PQ|$$

Rovnost nastane, právě když přímka P_1Q je rovnoběžná s přímkou OL. Bod L je tudíž nutno zvolit tak, aby ležel na přímce jdoucí bodem O rovnoběžně s přímkou P_1Q.

Ve všech třech řešeních bylo upozorněno na to, že hledaná přímka OL prochází středem úsečky PQ.

4. Jsou dány rovnice

$$\sin x + \sin y = a\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b\,, \tag{2}$$

$$x + y = \frac{\pi}{2}\,. \tag{3}$$

Dokažte, že mezi čísly a, b existuje rovnice, která neobsahuje žádné z čísel x, y, $\frac{\pi}{2}$ Napište tuto rovnici a po rozřešení proveďte zkoušku.

(Došlo 10 řešení.)

Stanislav Horák

První řešení od Libora Krkošky, 3. D G M. Koperníka, Bílovec:

Poněvadž platí (3), lze prvním dvěma rovnicím dát tvar

$$\sin x + \cos x = a\,, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = b\,. \tag{5}$$

Rovnici (4) umocníme na druhou a s použitím základního vzorce dostaneme

$$1 + 2 \sin x \cos x = a^2$$

Levou stranu rovnice (5) upravíme

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}\,.$$

Máme teď tuto soustavu rovnic

$$1 + 2 \sin x \cos x = a^2 ,$$

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = b .$$

Vyloučením součinu $\sin x \cos x$ dospíváme k výsledku

$$a^2 b - b - 2 = 0 . \qquad \text{(V)}$$

Zkouška se provede tak, že za a, b dosadíme z daných rovnic do výsledku (V).

$$\mathrm{L} = (\sin x + \sin y)^2 (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) - (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) - 2 =$$

$$= (1 + 2 \sin x \cos x) . \frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{1}{\sin x \cos x} - 2 = 0 .$$

$$\mathrm{P} = 0 \Rightarrow \mathrm{L} = \mathrm{P} .$$

Jiné řešení podal Zd. Bohubký, 2. C G M. Koperníka, Bílovec:

Z rovnice (3) se dá usuzovat, že x, y jsou velikosti ostrých úhlů. Existuje tedy pravoúhlý trojúhelník, jehož ostré úhly mají velikost x, y. Velikosti stran tohoto trojúhelníka označme p, q, r. Pak platí

$$\sin x = \frac{p}{r} , \quad \sin y = \frac{q}{r} , \quad \operatorname{tg} x = \frac{p}{q} , \quad \operatorname{tg} y = \frac{q}{r} .$$

Dosaďme tyto výrazy do prvních dvou daných rovnic

$$\frac{p + q}{r} = a , \qquad (1)$$

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = b . \qquad (2)$$

První rovnici umocněme na druhou a v druhé rovnici sečtěme zlomky.

$$\frac{p^2 + q^2 + 2pq}{r^2} = a^2 , \qquad (3)$$

$$\frac{r^2}{pq} = b . \qquad (4)$$

Přitom nesmíme zapomenout, že $p^2 + q^2 = r^2$. Rovnice (3) a (4) mezi sebou vynásobíme

$$\frac{r^2 + 2pq}{pq} = a^2 b , \quad \text{jinak} \quad \frac{r^2}{pq} + 2 = a^2 b .$$

S použitím rovnice (4) a po krátké úpravě dospíváme k výsledku

$$a^2 b - b - 2 = 0 .$$

Zkouška se provádí jako v prvním řešení.

Úlohy k řešení

V tomto čísle otiskujeme zbývající úlohy z matematiky a fyziky, jakož i úlohy z konstrukční geometrie. Řešení každé úlohy pište čitelně česky nebo slovensky na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Na každém listu uveďte nahoře vlevo opravdu *čitelně* celé své jméno, třídu i školu, kde studujete. Zároveň připojte svou bytovou adresu se směrovacím číslem. Je-li řešitelem kolektiv (nejvýše tročjlenný), uvedou se uvedené údaje pro každého jeho člena. *Řešení úloh zašlete nejpozději do 15. dubna 1989* na adresu redakce Rozhledů, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla Rozhledů.

Matematika

6. Nechť α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů libovolného trojúhelníka. Dokažte, že potom je $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqq \frac{3}{2}$.

Emil Kraemer

7. Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž je $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 90°$; středy jeho základen AB, CD jsou po řadě body M, N. Vypočtěte délku úsečky MN pomocí čísel $a = |AB|$, $c = |CD|$

Jiří Mída

8. Nechť a, b, c jsou délky stran libovolného trojúhelníku; poloměry kružnice vepsané a opsané jsou po řadě ϱ, r. Dokažte, že je

$$abc \geqq (6\,\varrho r)^{\frac{3}{2}};$$

kdy nastává rovnost?

Dmitrij P. Mavlo, Moskva

9. Nechť $2s$ je obvod libovolného trojúhelníku; ϱ, r_a, r_b, r_c nechť jsou po řadě poloměry kružnice vepsané a kružnic tomuto trojúhelníku připsaných. Dokažte, že platí

$$\sqrt{\varrho r_a} + \sqrt{\varrho r_b} + \sqrt{\varrho r_c} \leqq s\,;$$

kdy nastává rovnost?

Jaroslav Švrček

10. Víme, že součet prvních n celých kladných čísel je $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Dokažte, že vhodným výběrem čísel z množiny $\{1, 2, \quad , n\}$ a jejich sečtením lze získat libovolně vybrané číslo s, pro něž platí:

$$1 \leqq s \leqq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Milan Trch

Fyzika

4. Určete interval kinetických energií částic alfa tak, aby neutrony vznikající v reakci $\alpha + {}^{7}\mathrm{Li} \longrightarrow {}^{10}\mathrm{B} + \mathrm{n}$ a vyletující pod pravým úhlem vzhledem ke směru dopadajících částic alfa měly energii v intervalu od 0 do 10 MeV.

Zdeněk Janout

5. Střela se v nejvyšším bodě své dráhy ve výšce $h = 20$ m roztrhla na dvě stejné části. Za dobu $\tau = 1$s po výbuchu dopadla první část střely na zem přesně pod bod dráhy, ve kterém nastal výbuch. Jaká je vzdálenost s_2 místa dopadu druhé části střely od místa výstřelu, dopadla-li první část střely do vzdálenosti $s_1 = 1000$ m od místa výstřelu.

Poznámka: Odpor vzduchu neuvažujte. Při číselném výpočtu položte tíhové zrychlení $g = 10\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$.

Eva Havránková

6. Určete, zda čočka je spojkou nebo rozptylkou, vypočtěte její ohniskovou dálku a polohu hlavních rovin v těchto dvou případech:

a) lámavé plochy jsou soustředné kulové plochy, větší poloměr křivosti je r, tloušťka čočky je d, index lomu $n > 1$;

b) lámavé plochy mají stejný poloměr křivosti r, tloušťka čočky je d, index lomu $n > 1$

Proveďte číselný výpočet pro $r = 5$ cm, $d = 1$ cm, $n = 1{,}5$ a nakreslete schematické obrázky; vyznačte v nich polohu hlavních rovin a polohu ohnisek.

Poznámka. Pro vyřešení této úlohy vám asi nebudou stačit vaše znalosti z geometrické optiky. Prostudujte si proto kapitolu o čočkách (str. 59—73) v brožuře *Rostislava Košťála* „Optické soustavy". Vydalo ji SPN v Praze r. 1979 v knižnici Škola mladých fyziků.

Eva Havránková

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány dvě různoběžné roviny ϱ, φ a bod A, který neleží v žádné z těchto rovin. Sestrojte krychli $ABCDEFGH$, jejíž stěna $EFGH$ leží v rovině ϱ tak, že vrchol G (který je protilehlý k vrcholu A) leží v rovině φ.

Stanislav Horák

2. Je dána rovina ϱ a přímka p, která má od roviny ϱ odchylku α, pro kterou platí: $0 < \alpha < 90°$. Bodem $P = p \cap \varrho$ veďte v rovině ϱ přímku tak, aby měla od přímky p odchylku β $(0 < \beta < 90°)$.

Stanislav Horák

3. Jsou dána kladná čísla d, ϱ, rovina π a v ní dva různé body M, N. Sestrojte pravidelný osmistěn $ABCDEF$ se středem O a tělesovými úhlopříčkami AC, BD, který má tyto vlastnosti: 1. Přímky AC, BD procházejí po řadě body M, N; 2. Bod O má od roviny π vzdálenost d a je stejně vzdálen od bodů M, N; 3. Kulová plocha vepsaná osmistěnu má poloměr ϱ.

Emil Kraemer

OLYMPIÁDY A SOČ

O tvůrčí práci ve fyzice

Projev akademika Armina DELONGA při slavnostním vyhlášení výsledků celostátního kola 29. ročníku fyzikální olympiády konaném v Gottwaldově 23. až 26. března 1988.

Vážení mladí přátelé,

s potěšením jsem přijal možnost říci vám, finalistům celostátního kola fyzikální olympiády, několik slov, kterými bych vás chtěl povzbudit k dalšímu úsilí v rozvíjení vašich znalostí i schopností ve vědním oboru, který stále významně ovlivňuje strategické inovace v technice.

Není tajemstvím, že současné uplatňování vědeckotechnického pokroku v naší průmyslové praxi je krajně neuspokojivé a je příčinou vážného zaostávání v řadě oborů, které v současnosti představují klíčová, nejrychleji se rozvíjející průmyslová odvětví, jako jsou například elektronika, mikroelektronika, optoelektronika, informatika a výpočetní technika, energetika, vysoce přesné strojírenství a robotika, ale i kvalifikovaná chemie a řada dalších, ve kterých se všude ve velké míře uplatňují nejmodernější poznatky fyzikálního výzkumu.

Jak vůbec došlo k tomuto stavu, když jsme v období mezi oběma světovými válkami, ale i po druhé světové válce představovali například ve strojírenství velmi uznávanou zemi? Zejména po druhé světové válce, po osvobození z područí vyhlazovací mašinerie, jakou dějiny nepoznaly, se v opojném pocitu ze svobody zdálo, že všechno můžeme, že všechno zvládneme. Začal jsem tehdy studovat na Vysoké škole technické v Brně. Při jedné ze zkoušek nabídl mi

prof. Bláha, tehdejší vedoucí ústavu teoretické a experimentální elektrotechniky, místo studentské vědecké síly, které jsem s nadšením přijal. Po určité době experimentování v oblasti elektronové optiky a vakuové techniky malá skupina studentů, kterou jsem vedl, dostala za úkol zkonstrovat elektronový mikroskop, v té době určitým tajemstvím zahalený přístroj, na který si mohli troufnout především nezkušení studenti, kteří neměli zábrany zkušených profesionálů. Odložil jsem kvůli tomuto vzrušujícímu úkolu i ukončení studia o půl roku. Tehdy to bylo možné, tehdy se určitou volností v nakládání s časem pěstovaly velmi významné vlastnosti studentů: vůle, píle, vytrvalost, samostatnost rozhodování o sobě. Pracovali jsme velmi intenzívně. Přicházeli jsme domů často až hluboko v noci. Tehdy jsem však zažil poprvé a od těch dob mnohokrát opojný pocit úspěchu, který bohatě odměnil za nezdary a obtíže, které bylo nutné neúnavně překonávat. Takové zaujetí se však začalo postupně vytrácet. Zejména se podcenil význam tvůrčí práce, která se v porovnání s manuální prací jevila jako problematická, přinejmenším méně významná, nepřinášející hmatatelné hodnoty. Toto podcenění nám přišlo velmi draho a cesta k zaujetí místa ve světovém žebříčku někde na úrovni menší západoevropské země, jako je například Holandsko, nás bude stát nesmírné úsilí a oběti.

Základním předpokladem je ovšem dostatek kvalifikovaných kádrů, především tvůrčích vysokoškolských. Přesto, že to není profese atraktivní z ekonomických důvodů (absolvent vědecké přípravy, tedy kandidát věd okolo 35 let dosáhne v průměru o 230 000,— Kčs menší příjem než soustružník stejného věku), je to povolání a nikoliv zaměstnání, přinášející smysluplný život. Přitom není tvůrčí pracovník ochuzen o žádné radosti života, naopak, prožívá je tím intenzívněji, čím opravdověji se věnuje své práci. Partner, děti, umění, poznávání cizích zemí a mnoho jiného je organickou součástí života tvůrčího pracovníka, jeho tvůrčí potenciál neodčerpává, ale znásobuje.

Nechtěl bych ve vás vzbudit zdání, že je to cesta lehká a příjemná, že studium a poznávání je procesem, který přináší jen příjemné uspokojení. Naopak, zejména studium fyziky je obzvláště náročné, laťka je v tomto oboru zvlášť vysoko, řečeno sportovní terminologií. Projevili jste již nyní to, co se žádá od studenta, který se má stát tvůrčím pracovníkem, odborníkem s vysokou kvalifikací: zájem, píli, nadání, pracovitost, ale i znalosti, invenci a tvořivost.

Chtěl bych vás proto požádat, abyste zvolili nelehkou dráhu náročného vzdělání, jste tím do značné míry povinováni svým spoluobčanům, společnosti, ve které vyrůstáte, se kterou jste spojeni mnoha složitými vazbami. Mohu vám na základě své celoživotní zkušenosti zaručit, že prožijete bohatý, smysluplný život. Přeji vám mnoho úspěchů.

Kalendár M-F: november 1988

3. 11. 1643 v Štajerskom Hradci zomrel *Paul Guldin*, švajčiarsky matematik. Zaoberal sa analýzou nekonečne malých veličín a základmi kombinatoriky.

3. 11. 1918 v Petrohrade zomrel *Alexander Michajlovič Ljapunov*, ruský matematik a mechanik. Sformuloval teóriu stability rovnováhy a pohybu mechanických systémov. Rozvinul matematickú fyziku a teóriu pravdepodobnosti.

4. 11. 1698 zomrel *Erasmus Bartholin*, dánsky fyzik a lekár. Objavil dvojlom svetla na kryštáloch islandského vápenca.

7. 11. 1878 sa vo Viedni narodila *Lise Meitnerová*, rakúska fyzička. Skúmala jadrové izotópy, objasnila Hahnove pokusy so štiepnymi produktmi.

7. 11. 1888 sa v Trišinopoli narodil *Chandrasekhara Venkata Raman*, indický fyzik. Venoval sa štúdiu rozptylu svetla, pomocou ktorého možno usudzovať na zmeny energetických stavov a štruktúru molekul. V roku 1930 získal Nobelovu cenu za fyziku.

8. 11. 1843 sa vo Wroclawi narodil *Moritz Pasch*, nemecký matematik. Prispel k základom axiomatickej metódy v geometrii.

8. 11. 1848 sa vo Weismare narodil *Friedrich Gottlob Frege*, nemecký matematik. Pokúsil sa odvodiť aritmetické pojmy z logiky, položil základy modernej matematickej logiky.

8. 11. 1868 sa vo Wroclawi narodil *Felix Hausdorff*, nemecký matematik. Podstatne prispel k rozvoju teórie množín.

15. 11. 1738 sa v Hannoveri narodil *Friedrich Wilhelm Herschel*, anglický astronóm a optik nemeckého pôvodu. Roku 1781 objavil planétu Urán, vlastný pohyb Slnka zistil v roku 1783.

15. 11. 1938 zomrel *André Eugéne Blondel*, francúzsky fyzik. Zostrojil elektromagnetický oscilograf a rozvinul oscilografické metódy.

20. 11. 1938 zomrel *Edwin Herbert Hall*, americký fyzik. Zistil, že silový účinok magnetického poľa na pohybujúci sa elektrický náboj vo vodiči vyvoláva elektrické napätie.

22. 11. 1803 sa v Bassane narodil *Gino Bellavitis*, taliansky geometer. Prispel k rozvoju deskriptívnej a analytickej geometrie.

26. 11. 1893 sa v Panevežise narodil *Alexandr Alexejevič Lebedev*, sovietsky fyzik. Zaoberal sa fotoelektrickými javmi, elektrónovou optikou. Skonštruoval polarizačný interferometer.

27. 11. 1848 sa narodil *Henry Augustus Rowland*, americký fyzik. Skonštruoval reflexnú mriežku pre spektroskopiu. Dokázal, že pohyblivé elektricky nabité teleso má magnetické účinky.

29. 11. 1803 sa v Salzburgu narodil *Johann Christian Doppler*, rakúsky fyzik a matematik. Vedecky pracoval v oblasti optiky, akustiky a teórie farieb. Formuloval tzv. Dopplerov princíp.
30. 11. 1603 zomrel *William Gilbert*, anglický fyzik a lekár. Objasnil základné elektrické a magnetické javy.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Pyramidy a atomy

Obě tato díla — jedno lidského ducha a druhé přírody — mají něco společného: tajemství své konstrukce. V obou případech nás láká řešení podobných záhad. Svým způsobem totiž jak pyramidy, tak i atomy „porušují" fyzikální zákony. Jestliže sypeme písek, pak úhel, který může kužel svírat s vodorovnou rovinou, je nejvýše 43°30′ Při větším úhlu již nastane jeho zhroucení. Ale u pyramid, které lidé stavěli již před více než třemi tisíci lety, je tento úhel 51°52′. Kdo si přečetl nějakou publikaci o těchto pozoruhodných stavbách, ví, kolik dalších tajemství skrývaly, co všechno bylo zapotřebí vysvětlit, a kolik zajímavých a nesmírně cenných poznatků toto bádání přineslo.

A u atomů?

Jejich struktura i vlastnosti jsou podle klasické fyziky naprosto absurdní a vyloučené. Takové, jaké jsou, by zkrátka vůbec být neměly. Tento rozpor se skutečností ukazuje především na omezenou platnost newtonských principů a jeho vysvětlení si žádá novou teorii.

Co všechno je jinak?

Především jsou to rozměry atomů. Proč jsou tak velké a tak neuvěřitelně prázdné? Vždyť bychom očekávali, že vliv přitažlivých účinků gravitačních a elektrostatických sil způsobí, že záporné elektrony se přemístí do blízkosti kladně nabitých protonů. Ale naše poznatky o skutečných atomech ukazují, že elektrony se přesto pohybují značně velkými rychlostmi kolem jader po přibližně kruhových drahách, které jsou ovšem „rozmazané" v závislosti na jejich vlnové funkci. Přitom vlastně porušují platnost Maxwellovy teorie elektromagnetického pole, protože nevyzařují žádnou energii.

A i kdybychom zavřeli oči nad touto záhadou, jak si vysvětlíme, že vůbec můžeme sedět na židli nebo chodit po podlaze? Tlak našeho těla by měl přece posunout elektrony směrem k jádrům a my bychom se

měli propadnout. Nebo vlastně podle zákona akce a reakce působí stejně veliké síly i na nás, a tak by se atomy našeho těla měly spíš prolínat s atomy podložky. Hrůzná představa, že?

Také se můžeme ptát po důvodu, proč v jádře jsou protony a v atomovém obalu se nacházejí elektrony, a není to právě naopak. Jistě nás bude také zajímat původ a velikost sil působících v jádrech. Čím více vlastností atomů a jejich částí poznáváme, tím více nejasností a podivností objevujeme.

Mezi velké úspěchy kvantové mechaniky patří právě to, že na většinu těchto našich otázek dokázala nalézt spolehlivé odpovědi.

Jediný jednoduchý vztah, .

Ale který vztah to je, to už si přečtěte sami v knížce ing. Evy Veselé, CSc., *Co nám příroda nedovolí*, kterou v nejbližších dnech vydá nakladatelství *Panorama* v edici *Pyramida*. Zde se dozvíte o dalších principiálních rozdílech mezi fyzikou klasickou a moderní, které nás do jisté míry svazují a tak nám nedovolí vše.

-V-

INFORMACE

Pokyny pro autory článků do Rozhledů

Rozhledy matematicko-fyzikální mohou otisknout jenom ty články, které byly zaslány redakci ve dvou exemplářích s úplným autorovým jménem, jeho akademickými a vědeckými tituly, s udáním pracoviště, bytové adresy a rodného čísla autora.

O otištění rozhoduje redakční rada nebo vedoucí redaktor po vyjádření recenzenta. *Nevyžádané rpkopisy se nevracejí.*

Rozhledy matematicko-fyzikální jsou určeny především studentům středních škol, středních odborných učilišť s maturitou a žákům základních škol s rozšířeným vyučováním matematice a přírodovědným předmětům. Proto všechny uveřejňované články musí být psány srozumitelně a nemají být příliš dlouhé. Autoři se samozřejmě řídí pravidly českého nebo slovenského pravopisu, respektují přijaté názvy a značky a (ve fyzice) zákonem stanovené jednotky a označení.

V rukopise článku je třeba uvést nejprve titul příspěvku, potom jméno a působiště autora. Text se píše na stroji (nikoliv však perličkou) černou páskou ob řádek, a to po jedné straně bílého papíru formátu A4. *Na každé stránce má být nejvýše 30 řádek, z nichž každý obsahuje 60 úhozů.* Nadpisy nebo zdůrazněná slova textu podtrhujte jenom obyčejnou (ne propisovací) tužkou. Poznámky pod čarou — pokud možno v mini-

málním počtu — je třeba v textu vyznačit postupně číslicemi v exponentu a psát je hned za řádek rukopisu, k němuž patří; od ostatního textu se oddělí vodorovnými čarami. *Obrázky se nekreslí do textu článků!*

Matematické výrazy a vzorce se píší vždy na zvláštní řádek a doplňují se ručně (čitelně!) inkoustem, tuší nebo propisovací tužkou; zvláštní pozornost je třeba věnovat připisování indexů a exponentů. Vzorce se číslují v oblých závorkách na pravé straně, a to jenom tehdy, jestliže se na ně odvoláváme v dalším textu. V odkazech na literaturu uvádíme jenom publikace dostupné čtenářům Rozhledů, tj. především literaturu psanou v českém nebo slovenském jazyce; ze zahraniční literatury se uvádí nanejvýš publikace knižní.

Obrázky se rýsují tuší na pauzovací papír nebo na bílou čtvrtku a popisují se normalizovaným písmem šablonou 5 mm; čáry musí být ostré a nerozpité. Očíslované texty k obrázkům se přikládají na konec rukopisu. Je třeba pamatovat na to, že se obrázky pro tisk zmenšují v poměru 1 : 2. Fotografie musí být ostré, kvalitní a zhotovené na lesklém bílém papíru. Autor může také zaslat redakci jenom obrázky narýsované tužkou; redakce dá takové obrázky pro tisk narýsovat. I v tomto případě je třeba dodat obrázky jasně narýsované a čitelně popsané.

Adresa redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních:
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1—Nové Město

Ústřední výbor matematické olympiády upozorňuje, že se v kategorii P letošního ročníku MO přesouvá termín pro odevzdání úloh I. kola na 12. prosince 1988 (v letáku MO je nesprávně uveden termín 10. leden 1989).

REDAKČNÍ KRUH

Doc. dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava, dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha,; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Matematické drobnosti

Jeden z nejvýznamnějších anglických matematiků nové doby *John Edensor Littlewood* (1885 až 1977) je znám nejen svými pracemi v oblasti teorie funkcí a analytické teorie čísel a svou obdivuhodnou matematickou intuicí, ale též svou schopností živého a humorného výkladu, samozřejmě při zachování vysokých nároků na přesné logické myšlení. Ve své knížce „A Mathematician's Miscellany", která vyšla v Londýně r. 1975 a byla přeložena do ruštiny pod názvem „Matěmatičeskaja směs", podává celou řadu nevšedných pohledů na významné matematické problémy a jejich historii a také humorných epizod ze svých bohatých životních zkušeností.

Tak se zmiňuje o tom, že jeho přítel Marcel Riesz přeložil jednu z jeho matematických statí do francouzštiny pro časopis Comptes Rendus. Na konci francouzského překladu článku byly pak umístěny tři poznámky ve francouzštině: „Jsem velmi vděčen prof. Rieszovi za překlad tohoto článku." Druhá poznámka zněla: „Jsem vděčen prof. Reiszovi za překlad předcházející poznámky." A konečně třetí: „Jsem vděčen prof. Rieszovi za překlad předcházející poznámky." Někteří matematikové upozorňovali, že tento sled poznámek by měl pokračovat do nekonečna. Littlewood však tyto připomínky logicky vyvrátil. I když připustíme, že autor stati francouzsky vůbec neumí, je přesto schopen opsat francouzsky napsanou větu. Z toho důvodu třetí poznámku napsal francouzsky Littlewood sám a nemusí již za překlad děkovat.

K jiné příhodě došlo při korektuře matematického článku, k němuž byla dopsána poznámka: „Je tedy třeba, aby σ bylo co možná nejmenší." V definitivním textu se tato poznámka vůbec neobjevila. Teprve po pečlivé prohlídce bylo na konci článku objeveno miniaturní řecké písmenko sigma — sazeči se svědomitě snažili najít pro ně skutečně nejmenší typ písma.

Littlewood uvádí případ jednoho aspiranta, který se svému školiteli již zprotivil neustálými dotazy. Aby se ho zbavil, uložil mu školitel najít euklidovskou konstrukci pravidelného mnohoúhelníka o 65 537 stranách. Protože toto číslo lze zapsat jako $2^{16}+1$, taková konstrukce v principu možná je. Svědomitý aspirant se vrátil za dvacet let a přinesl požadované řešení úlohy — to je dnes uloženo v archivu univerzity v Göttingenu.

-ll

Povedali, napísali...

„Musíme si uvedomiť, ako budovať trvalú, veľkú, rozvíjajúcu sa ľudskú kultúru. Ako vystihnúť celú šírku tohto pojmu a stať sa účastníkom budovania najkrajšej budovy pre ľudstvo a človeka... Budúcnosť si predstavujem ako kráľovstvo rozumu...“

Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903—1987)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1988.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 67, 1988/89
PROSINEC
CENA 2 Kčs

(4)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Martin Šolc: Nekonstantní sluneční konstanta . . 133

Jiří Herman, Jaromír Šimša: Neznámé množiny známých (II.) 134

Emil Kraemer: Zajímavá úloha o krychli 138

Milan Hofman: Zákonitosti symetrie obsažené v Escherových periodických kresbách 141

Milan Rojko: O jedné pověře 143

Vladimír Ilkovič: Kinematika rovinného pohybu tuhého tělesa (zrýchlenie) . 147

Ivo Kraus: Wilhelm Konrád Röntgen – osobnost známá i neznámá 153

Z matematiky a fyziky ZŠ 156

Přemýšlíme, řešíme 164

Naše soutěž 167

Olympiády a SOČ 172

Kalendár M–F 174

Humory matematicko-fyzikální . 3. str. obálky

Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (121–124) . . . . příloha

Nekonstantní sluneční konstanta

Doc. dr. MARTIN ŠOLC, CSc., MFF UK v Praze

Takováto slovní hříčka bývá nazývána „contradictio in adjecto", ale tentokrát bezpochyby úplně neprávem. Sluneční konstanta je název fyzikální veličiny, která představuje množství energie slunečního záření, jež dopadá na naši Zemi a ohřívá ji. Teprve v posledních letech umožnil kosmický výzkum natolik přesné měření sluneční konstanty, že se ukázala její malá, ale nesporná proměnnost. Podívejme se proto na celou záležitost podrobněji.

Slunce je hvězda, která vysílá do okolního prostoru elektromagnetické záření všech vlnových délek (anebo fotony nejrůznějších energií, chcete-li), od rádiových vln přes tepelné infračervené záření a světlo až k energetickému záření ultrafialovému a rentgenovému. Zářivý výkon Slunce v celém tomto spektru je asi $3{,}83 \,.\, 10^{26}$ W, (je to energie všech druhů záření, vyslaného Sluncem za 1 sekundu), bývá označován $L_\odot$ a zjišťuje se právě měřením sluneční konstanty. Záření je vysíláno zhruba všemi směry stejně do plného prostorového úhlu 4π steradiánů. Soustředíme-li záření dopadající na plochu 1 m^2 (postavenou kolmo k paprskům) na detektor citlivý v celém rozsahu spektra — radiometr, pak naměříme za jednu sekundu množství zachycené energie rovné právě sluneční konstantě. Rozměr sluneční konstanty K je $W \,.\, m^{-2}$ a zřejmě platí

$$L_\odot = 4\pi r^2 K \,,$$

kde r je vzdálenost od Slunce, v níž jsme měřili. Pokud budeme měřit ve vzdálenosti Země ($r \doteq 150 \,.\, 10^6$ km), dostaneme $K \doteq 1370 \; W \,.\, m^{-2}$. Měřit se ovšem musí mimo zemskou atmosféru, kde se záření zčásti pohlcuje a zčásti odráží.

V poslední době bylo radiometrem vybaveno několik družic, například astronomická SMM (Solar Maximum Mission 1980) nebo meteorologická Nimbus-7. Po deseti letech pozorování se prokázalo, že hodnota K se mění v rozsahu asi 0,2 % své velikosti s periodou několika dnů až týdnů. Změny jsou způsobené přítomností aktivních oblastí na viditelné části slunečního povrchu. Rozumíme tím zejména výskyt *slunečních skvrn*, které jsou temnější než okolní povrch, a vyzařují tedy méně, a jasnějších míst zvaných *fakule*, vyzařujících více a trvajících déle než průměrné skvrny. Z aktivních oblastí zejména při erupcích proudí oblaka energetických protonů, která mohou zasáhnout Zemi, porušit její vysoké vrstvy atmosféry a způsobit např. *polární záře* nebo *magnetické bouře*. Počet skupin skvrn a fakulí na viditelné části povrchu se mění jednak proto, že se Slunce otáčí a aktivní oblasti zapadají či vycházejí, jednak

proto, že výskyt aktivních oblastí na celém povrchu Slunce kolísá s jedenáctiletou periodou. Zdá se, že Slunce je v maximu tohoto cyklu sluneční aktivity asi o 0,05 až 0,1 % zářivější než v minimu (poslední minimum bylo v září 1986). Odtud plyne, že úbytek zářivosti způsobený skvrnami se více než vyrovnává přítomností fakulí.

V minulém roce byla pravděpodobně také nalezena dlouho hledaná přímá souvislost mezi sluneční aktivitou a změnami zemského klimatu. Průměrná teplota oceánů sledovaná od roku 1860 ukazuje například periodu 11 let, přitom v maximu slunečního cyklu je voda zhruba o desetinu stupně teplejší než v předchozím a následném minimu. Pozorování stratosférických větrů ukazuje tuto souvislost ještě výrazněji. V tropickém pásmu vane stratosférický vítr rovnoběžně s rovníkem a vždy po několika letech mění svůj směr. Vane-li ze západu na východ, pak je stratosférický vítr nad severním pólem rychlejší a chladnější, což nastává právě při nižší sluneční aktivitě. Vysoká sluneční aktivita tedy zabraňuje ochlazování atmosféry nad zemskými póly. Teplota polární stratosféry reaguje přitom bezprostředně na výskyt aktivních oblastí na Slunci — při vyšším momentálním počtu skvrn na viditelném povrchu roste a při nižším počtu skvrn klesá, jak to ukazují měření z ledna a února. Tato pozorování tedy znamenají další článek v řetězu jevů, jimiž se přenáší vliv sluneční aktivity na Zemi a způsobuje zde již dávno známé úkazy jako jsou například jedenáctileté periody v tloušťce letokruhů u stromů nebo podobné periody v tloušťkách ročních usazenin na dně některých jezer.

MATEMATIKA

Neznámé množiny známých (II.)

RNDr. JIŘÍ HERMAN, G Brno, tř. kpt. Jaroše,
RNDr. JAROMÍR ŠIMŠA, CSc., PřF UJEP Brno

V předchozím článku, který byl otištěn v minulém čísle Rozhledů, jsme řešili několik úloh o skupinách lidí, v nichž se některé dvojice znají a jiné ne. Věříme, že vás tato problematika zaujala a že se s chutí pustíte do řešení dalších, poněkud obtížnějších úloh. Ty naleznete právě v tomto pokračování.

Příklad 7. O jisté skupině 19 osob je známo, že v každé trojici se aspoň dvě osoby znají. Dokažte, že těch, kteří většinu ostatních přítomných neznají, je menšina.

Řešení: Přeformulujme nejprve tvrzení příkladu do „matematického jazyka": máme dokázat, že počet těch osob, které neznají aspoň 10 přítomných, je nejvýše 9.

Pokud vůbec nějaká taková osoba existuje, pak nezná některých 10 osob $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$. Pak těchto 10 osob se navzájem zná (promyslete!), tedy každá osoba B_i nezná nejvýše 9 osob. Je tedy počet osob, které neznají aspoň 10 přítomných, nejvýše 9.

Příklad 8. Ukažte, že v situaci z předchozího příkladu může existovat právě 9 osob, které neznají většinu přítomných.

Řešení: Rozdělme oněch 19 osob do dvou skupin U, V po 10 a 9 osobách a prohlašme, že se znají právě ty dvojice osob, které patří do téže z obou skupin. Pak při výběru libovolné trojice některé dvě z vybraných osob patří současně do U nebo současně do V, tedy se znají. Zároveň každá osoba A ze skupiny U (těch je 10) nezná právě 9 osob, každá osoba B ze skupiny V (těch je 9) nezná právě 10 osob.

Příklad 9. O skupině 28 osob je známo, že v každé čtveřici se aspoň dvě osoby znají. Dokažte, že některých 10 osob zná aspoň 9 přítomných.

Řešení: Připusťme, že mezi uvažovanými 28 osobami je aspoň jedna, která zná nejvýše 8 osob, pak tato osoba nezná některých 19 osob A_1, $A_2, \ldots, A_{19}$. Pak však v každé trojici utvořené z těchto 19 osob se aspoň dvě osoby znají. (Promyslete, jaká situace by nastala v opačném případě!) Podle příkladu 7. však ve skupině osob $A_1, A_2, \ldots, A_{19}$ má aspoň 10 osob aspoň 9 známých.

Úloha 8. Ukažte, že v situaci z předchozího příkladu může existovat právě 10 osob, které znají právě 9 přítomných.

Úloha 9. Ve skupině 41 lidí se v každé pětici aspoň dvě osoby znají. Dokažte, že počet těch osob, které mají ve skupině aspoň 10 známých, je aspoň 11.

Úloha 10. Nechť $p \geqq 3$ je přirozené číslo. Ve skupině, která čítá $N(p) = (p - 1) . n + 1$ osob, se v každé p-tici aspoň dvě osoby znají. Dokažte, že zde existuje skupina o aspoň $(n + 1)$ osobách, jejíž každý člen má mezi ostatními $N(p) - 1$ osobami aspoň n známých!
(Návod: Užijte matematické indukce vzhledem k číslu p; přitom zobecněte úvahy provedené při řešení předcházejících úloh.)

Příklad 10. Ve skupině, která čítá N osob ($N \geqq 4$), je v každé čtveřici aspoň jedna osoba, která se zná s ostatními třemi. Určete nejmenší počet osob, které znají všechny ostatní členy této skupiny.

Řešení: Označme U množinu všech N osob ve skupině a uvažujme dvě osoby A, B z U, které se neznají. Pak v množině $V = U - \{A, B\}$ zbylých $(N - 2)$ osob se všichni navzájem znají — pokud by totiž existovala dvojice osob E, $F \in V$, které se neznají, pak by čtveřice

A, B, E, F odporovala zadání úlohy. Předpokládejme nyní, že v množině V existuje osoba C, která nezná některou z osob A, B. Pak každá jiná osoab $D \in V$ musí všechny tři osoby A, B, C znát (promyslete). Z uvedených úvah vyplývá, že existují nejvýše tři osoby A, B, $C \in U$, které někoho z U neznají, tzn. aspoň $(N - 3)$ osob musí všechny ostatní osoby ze skupiny znát. Jistě snadno sami sestrojíte příklad takové skupiny, v níž právě $(N - 3)$ osob zná všechny ostatní.

Příklad 11. Ve skupině, která čítá N lidí ($N \geqq 3$), je v každé trojici aspoň jedna osoba, která se zná s ostatními dvěma. Určete nejmenší počet osob, které se znají se všemi ostatními.

Řešení: Je nutno rozlišit dva případy: $N \geqq 4$ sudé; $N \geqq 3$ liché.

a) Nechť $N \geqq 4$ sudé, $N = 2k$.

Ukážeme, že v tomto případě může nastat situace, v níž každá osoba ve skupině někoho nezná. Rozdělme uvažovaných $2k$ osob do k dvoučlenných skupin a prohlašme, že dvě osoby se neznají právě tehdy, když jsou z téže skupiny. Pak vskutku platí, že v každé trojici libovolně vybraných osob aspoň jedna zná ostatní dvě, každá osoba však právě jednu osobu nezná.

b) Nechť $N \geqq 3$ liché, $N = 2k + 1$

Nyní ukážeme, že aspoň jedna osoba musí znát všechny ostatní, a uvedeme takový příklad skupiny, kdy je taková osoba právě jedna.

Připusťme, že první tvrzení neplatí, tzn. že každá osoba má nejvýše $(2k - 1)$ známých. Nemůže nastat případ, že by každá z $(2k + 1)$ osob měla právě $(2k - 1)$ známých, neboť pak by počet párů známých $(2k + 1) \cdot (2k - 1)/2$ nebyl celé číslo. Má tedy aspoň jedna osoba A nejvýše $(2k - 2)$ známých, tedy některé dvě osoby B, C nezná. Pak ale v trojici A, B, C není žádná osoba, která by znala obě ostatní, a to je spor. Popišme nyní situaci, kdy právě jedna osoba zná všechny ostatní: Rozdělme daných $(2k + 1)$ osob do $(k + 1)$ skupin, z nichž prvních k bude dvoučlenných, do poslední dáme zbylou osobu X a řekneme, že dvě osoby se neznají právě tehdy, když jsou v téže skupině. Pak jsou podmínky úlohy splněny a osoba X je jediná, která zná všechny ostatní.

Úloha 11. O skupině, která čítá N osob ($N \geqq 5$), je známo, že v každé pětici je aspoň jedna osoba, která zná ostatní čtyři. Dokažte:

a) je-li N liché, pak aspoň $(N - 4)$ osob zná všechny ostatní členy skupiny;

b) je-li N sudé, pak nemusí existovat žádná osoba, která by znala všechny ostatní.

Příklad 12. V každé skupině 9 osob existují 4 osoby, které se navzájem znají, nebo 3 osoby, které se navzájem neznají. Dokažte.

Řešení: Ukážeme nejprve, že nastane vždy aspoň jedna z těchto dvou (nevylučujících se) možností: V dané skupině existuje aspoň jedna

osoba A, která nezná aspoň 4 ostatní nebo nezná nejvýše 2 ostatní. Kdyby toto tvrzení neplatilo, tzn. kdyby každá z uvažovaných 9 osob neznala právě 3 ostatní, pak by počet dvojic navzájem se neznajících osob byl $3 \cdot 9/2$, což není celé číslo. Rozebereme nyní obě výše uvedené možnosti:

1. Nechť v dané skupině existuje taková osoba A, která nezná některé 4 osoby B_1, B_2, B_3, B_4. Je-li v této čtveřici aspoň jedna dvojice osob B_i, B_j, které se neznají, je hledanou trojicí (navzájem se neznajících) osob trojice A, B_i, B_j. V opačném případě tvoří čtveřice osob B_1, B_2, B_3, B_4 tu čtveřici, v níž se každé dvě osoby znají.

2. Nechť nyní A je ta osoba, která nezná nejvýše dvě ostatní, tzn. osoba A zná některých 6 osob $B_1, B_2, \ldots, B_6$. Vyberme z této šestice některou osobu (např. B_1) a zbylých pět rozdělme do dvou skupin podle toho, zda se s B_1 znají, nebo ne. Podle Dirichletova principu jsou v jedné skupině aspoň 3 osoby.

Předpokládejme nejprve, že osoba B_1 některé 3 osoby (např. B_2, B_3, B_4) zná. Jestliže v trojici B_2, B_3, B_4 existuje dvojice osob B_i, B_j, které se znají, je hledanou čtveřicí společných známých čtveřice A, B_1, B_i, B_j. Není-li tomu tak, pak se v trojici B_2, B_3, B_4 žádné dvě osoby neznají — opět je tedy hledaná skupina nalezena.

Rozbor situace, v níž osoba B_1 některé tři osoby (např. B_2, B_3, B_4) nezná, se provede analogicky, proto jej přenecháváme čtenářům.

Úloha 12. Ukažte, že tvrzení předchozího příkladu zůstává v platnosti, nahradíme-li v textu slovo „znají" slovem „neznají" a naopak.

Úloha 13. Dokažte, že ve skupině 18 osob existují vždy 4 osoby, které se navzájem znají, nebo 4 osoby, které se navzájem neznají.

Předchozí příklad i na něj navazující úlohy patří do tzv. *Ramseyovy teorie.*

Ramseyovým číslem $R(a, b) = n$ nazveme nejmenší přirozené číslo n, pro které platí: v každé skupině n osob existuje a osob, které se navzájem znají, nebo b osob, které se navzájem neznají (přitom obě možnosti se nevylučují).

Zřejmě platí: $R(a, b) = R(b, a)$ a $R(a, 2) = a$; přitom podle úmluvy je $R(a, 1) = 1$.

V příkladě 12 jsme dokázali, že $R(4, 3) \leqq 9$, a v průběhu jeho řešení, že $R(3, 3) \leqq 6$. Ve skutečnosti ovšem platí $R(3, 3) = 6$ a $R(4, 3) = 9$. To plyne z následující úlohy.

Úloha 14. Na příkladě skupiny o 5 (resp. 8) osobách ukažte, že $R(3, 3) > 5$ (resp. $R(4, 3) > 8$).

Poznamenejme, že není snadné ukázat, že číslo $R(a, b)$ pro $a \geqq 3$, $b \geqq 3$ vůbec existuje — není totiž vůbec jasné, zda i ve velmi početné skupině osob nalezneme a osob, které se navzájem znají, nebo b osob,

které se navzájem neznají. Pro zdatné čtenáře uvádíme nakonec úlohy, které existenci čísla $R(a, b)$ potvrzují a zároveň udávají odhad pro jeho velikost.

Úloha 15. Nechť $a \geqq 2$, $b \geqq 2$ jsou přirozená čísla a nechť čísla $R(a-1, b)$, $R(a, b-1)$ existují. Pak existuje i číslo $R(a, b)$ a platí: $R(a, b) \leqq R(a-1, b) + R(a, b-1)$. Dokažte!

Úloha 16. Dokažte, že z výsledku předchozí úlohy plyne tento odhad:

$$R(a, b) \leqq \binom{a+b-2}{a-1}.$$

(Řešení předchozích dvou úloh lze nalézt v knize J. Sedláčka: „Úvod do teorie grafů", Praha, Academia 1977, na stranách 143 a 144.)

Zajímavá úloha o krychli

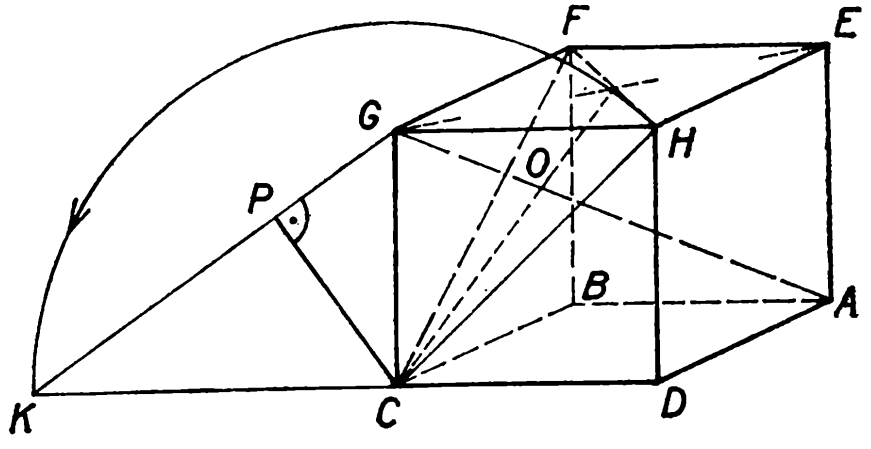
Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Autorství jedné zajímavé úlohy o krychli se v německé literatuře připisuje princi *Ruprechtu von der Pfalz*, který žil v letech 1619 až 1682. Je to tato úloha:

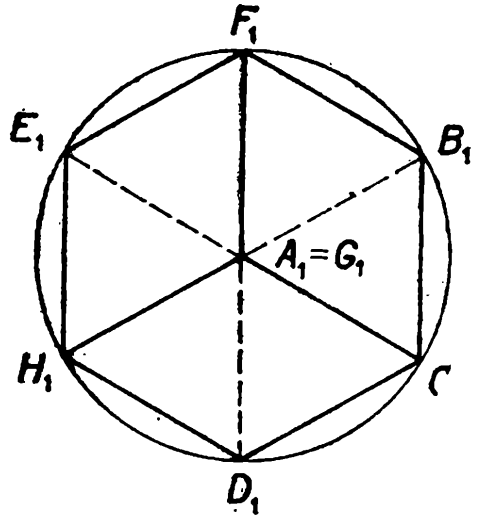
Jedna ze dvou shodných krychlí se má provrtat tak, aby se vzniklým otvorem dala protáhnout (posunutím) druhá krychle.

Dost snadno se přesvědčíme, že tato úloha je skutečně řešitelná, jestliže směr posunutí druhé krychle určíme tělesovou úhlopříčkou první krychle. Řešení této úlohy věnujeme další výklad.

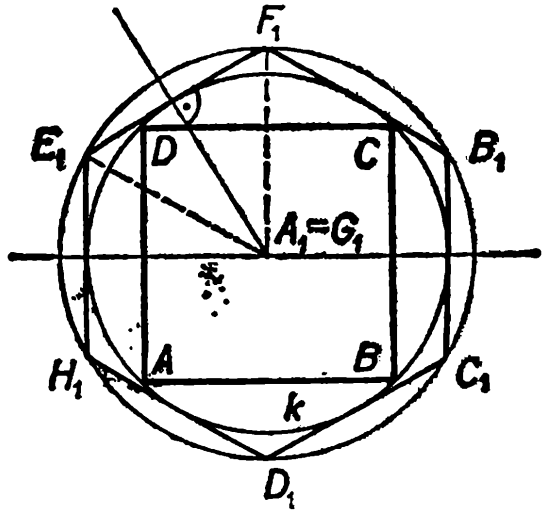
Nechť jednou tělesovou úhlopříčkou dané krychle $ABCDEFGH$ je úsečka AG; délka hrany této krychle budiž a. Na obr. 1 je krychle zobrazena ve volném rovnoběžném promítání tak, že rovina její stěny $ABFE$



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

je v průmětně. Střed rovnostranného trojúhelníku CFH ležícího v rovině ϱ označme O. Tento trojúhelník je společnou podstavou pravidelných trojbokých jehlanů $ACFH$, $GCFH$; proto je $AO \perp \varrho$, $GO \perp \varrho$. Protože bodem O prochází jediná kolmice k rovině ϱ, splývá přímka AO s přímkou GO; je tedy $AG \perp \varrho$. Protože je $AG \perp \varrho$, je přímka CO roviny ϱ kolmá k přímce AG. Z toho plyne, že úsečka CO je výškou pravoúhlého trojúhelníku ACG s přeponou AG. Odvěsny CG, CA tohoto trojúhelníku mají po řadě délky a, $a\sqrt{2}$; jeho přepona má délku $a\sqrt{3}$. V obr. 1 je sestrojen pravoúhlý trojúhelník GCK shodný s trojúhelníkem GCA. Výška CP k přeponě GK je tedy shodná s výškou CO trojúhelníku GCA, tj.

$$|CP| = |CO| = r\,. \tag{1}$$

Bod O je středem rovnostranného trojúhelníku CFH. Proto je také středem kružnice, která je tomuto trojúhelníku opsána; její poloměr je $r = |CO| = |CP|$.

Promítněme krychli $ABCDEFGH$ pravoúhle do průmětny π zvolené tak, že je kolmá k přímce AG. Potom pravoúhlým průmětem přímky AG do průmětny π je bod $A_1 = G_1$, který je zároveň průmětem bodu O (obr. 2). Protože je $\varrho \perp AG$, $\pi \perp AG$, je rovina $\varrho = CFH$ rovnoběžná s průmětnou π. Proto je pravoúhlým průmětem rovnostranného trojúhelníku CFH do roviny π trojúhelník $C_1F_1H_1$, který je s trojúhelníkem CFH shodný. Trojúhelník $C_1F_1H_1$ je tedy rovnostranný trojúhelník vepsaný do kružnice, která má střed $A_1 = G_1$ a poloměr $r = |CO| = |CP|$.

Vrcholy B, D, E krychle jsou po řadě souměrně sdruženy k vrcholům H, F, C podle středu S krychle. Pravoúhlý průmět bodu S úhlopříčky AG do průmětny π je bod $S_1 = A_1 = G_1$. Protože pravoúhlý průmět středu úsečky je středem jejího průmětu, jsou průměty vrcholů B, D, E po řadě body B_1, D_1, E_1 souměrně sdružené k bodům H_1, F_1, C_1 podle středu $S_1 = A_1 = G_1$. Proto body B_1, D_1, E_1 leží na kružnici, do níž

je vepsán trojúhelník $C_1F_1H_1$. Pravoúhlým průmětem krychle ABC $DEFGH$ je tedy pravidelný šestiúhelník $B_1C_1D_1H_1E_1F_1$ (obr. 2).

Je-li přímka AG svislá, je průmětna π vodorovná. Je-li zároveň vrchol A pod vrcholem G, jsou při pohledu shora viditelné hrany GC, GF, GH, kdežto hrany AB, AD, AE nejsou viditelné. Průměty viditelných hran krychle jsou na obr. 2. vytaženy plně, kdežto průměty neviditelných hran jsou narýsovány čárkovaně.

Podle Eukleidovy věty o odvěsně užité na trojúhelník GCK je

$$|GC|^2 = |GK| \ \ |GP| \quad \text{čili} \quad a^2 = a\sqrt{3} \,.\, |GP| \,,$$

takže

$$|GP| = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \,,$$

což je třetina délky přepony GK. Podle Eukleidovy věty o výšce je

$$|CP|^2 = |GP| \,.\, |KP| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \,.\, \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a^2}{3} \,.$$

Z toho podle rovnosti (1) plyne, že je

$$r = |CO| = |CP| = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \,. \tag{2}$$

Na obr. 3 je znovu sestrojen pravidelný šestiúhelník $B_1C_1D_1H_1E_1F_1$, který je pravoúhlým průmětem dané krychle. Trojúhelník $A_1E_1F_1$ je rovnostranný a jeho strana má délku r udanou rovností (2). Výška v tohoto trojúhelníku je

$$v = \frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \,.\, \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \,.$$

Číslo v je zároveň poloměrem kružnice k vepsané šestiúhelníku $B_1C_1D_1$ $H_1E_1F_1$; je však také poloměrem kružnice opsané čtverci $ABCD$, který je stěnou dané krychle.

Vepišme čtverec $ABCD$ do kružnice k tak, aby jeho střed splynul se středem $A_1 = G_1$ pravidelného šestiúhelníku $B_1C_1D_1H_1E_1F_1$ a přímka AB byla kolmá k úhlopříčce D_1F_1 uvedeného šestiúhelníku. Potom celý čtverec $ABCD$ náleží vnitřku tohoto šestiúhelníku, který je pravoúhlým průmětem dané krychle. Každý vnitřní bod šestiúhelníku je průmětem určité svislé úsečky náležející dané krychli. Z toho plyne, že v této krychli je možno vyvrtat otvor, jehož průmětem do roviny π je čtverec $ABCD$. Tímto otvorem je potom možno protáhnout krychli, jejíž stěna je shodná se čtvercem $ABCD$, tj. krychli shodnou s danou krychlí. Tak je úloha prince *Ruprechta von der Pfalz* rozřešena.

Zákonitosti symetrie obsažené v Escherových periodických kresbách

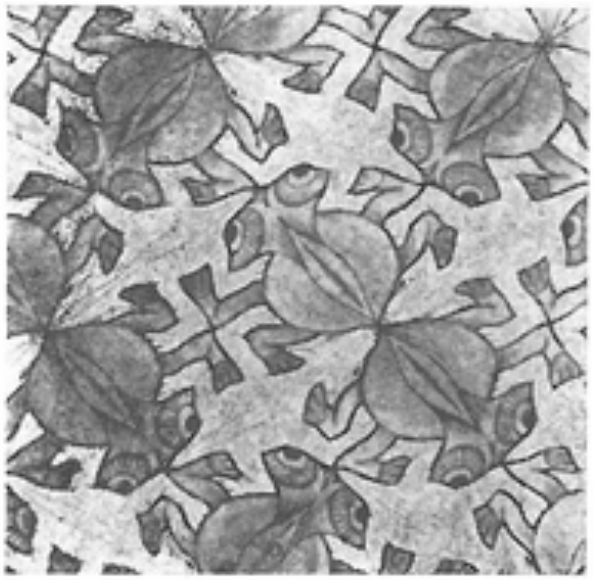
RNDr. MILAN HOFMAN, CSc., PedF UK v Praze

Pro současnost je charakteristické, že věda a umění se ubírají odlišnými cestami v krajině duchovna, tyto cesty se dokonce většinou rozcházejí. Tím překvapivěji působí objevení umělce, jehož tvůrčí práce je úzce spjata s problémy, které se svou podstatou těsně dotýkají vybraných oblastí moderní matematiky, fyziky a chemie.

Holandský malíř *M. C. Escher* navázal ve 20. letech tohoto století při tvorbě grafiky a dřevořezby na maurské umění z 13. až 14. století, jež lze spatřit například na hradě *Alhambra* nad Granadou ve Španělsku. Většina síní vrcholného díla arabské architektury je dekorována maureskami a majolikovými dlaždicemi, které vytvářejí bizarní magické obrazce. Escher rovněž vyplňoval danou plochu mozaikou elementů bez mezer, ale na rozdíl od Maurů se nejedná o abstraktní elementy, používal totiž tvary připomínající živé tvory — ryby, ptáky, ještěrky apod. Ačkoliv takový přístup nepřináší nezbytně opakující se obrázky, mnoho kreseb se vyznačuje periodicitou ve dvou dimenzích. Každý periodický obraz je podřízen zákonům symetrie určovaným charakterem periodicity. Lze říci, že umělec intuitivně obdržel a rozvinul celou řadu zákonitostí symetrie.

Není divu, že vědce z oboru rentgenové krystalografie výrazně zaujaly Escherovy obrazy. V roce 1960 byla na 5. mezinárodním kongresu Mezinárodního svazu krystalografů v Anglii instalována výstava jeho prací. Vědci živě reagovali na Escherovy periodické obrazy a vysoce ocenili předložený materiál zejména z hlediska použitelnosti k dokreslení pojmů při výuce posunutí, barevného posunutí, barevné symetrie apod. Zajímavým momentem je, že první práce o černobílé symetrii nebo antisymetrii se objevily v krystalografické literatuře kolem roku 1930 v souvislosti s kapalnými krystaly a první zmínky o vícebarevné symetrii jsou z roku 1956, přičemž řada poznatků byla již implicitně obsažena v Escherových kresbách.

Zkusme se pohroužit na chvíli do podivuhodného světa Escherových magických her se symetrií. Na obr. 1 jsou zvířata připomínající ještěrky a žáby, jež oplývají téměř zrcadlovou symetrií, ale při podrobnějším pohledu lze zjistit, že pravá a levá strana bílých ještěrek je obklopena odlišným okolím. Vzhledem k pseudosymetrii zvířat se nejedná o globálně symetrický obraz. Na druhé straně však všechna tmavá zvířata jsou stejná (liší se orientací) a totéž platí pro bílá.



Obr. 1

Obr. 2

Na obr. 2 se jedná o tzv. barevné posunutí. Černý Pegas je obklopen bílými a naopak. Všechny koně mají stejný tvar a tutéž orientaci. Totožný obraz získáme posunutím o vzdálenost mezi černým a bílým koněm (tj. vzdálenost sobě odpovídajících bodů, např. očí bílého a černého koně) za současného „přepnutí" barev. Právě v „přepnutí" je rozdíl mezi normálním a barevným posunutím. Dvojnásobné barevné posunutí v daném případě odpovídá normálnímu posunutí (dvojnásobné „přepnutí" totiž způsobí přechod k původní barvě). Barevné i normální posunutí se bude jevit stejné i pozorovateli, který by nerozlišoval světlou a temnou barvu. Poněkud hypoteticky vyhlížející případ má velmi blízkou analogii v chemii a fyzice krystalů. Například v kubické struktuře chloridu draselného se střídají ve stejných vzdálenostech K^+ a Cl^- ionty podél hran buňky. Jestliže daný krystal umístíme do rentgenového svazku, oba druhy atomů rozptylují rentgenové paprsky prakticky stejně. Ačkoliv tedy reálné posunutí podél hrany krychle KCl je od jednoho K^+ k dalšímu K^+, z rozptylu rentgenových paprsků by se došlo k poloviční vzdálenosti, jež fakticky odpovídá „barevnému posunutí" od K^+ k Cl^-. Tento problém lze vyřešit pomocí rozptylu neutronů, pomocí nichž lze postřehnout rozdíl mezi K^+ a Cl^- ionty. Po návratu z krystalu KCl ke koním na obr. 2. ještě poznamenejme, že je zde i rotační symetrie. Po otočení o 360° dojde rovněž ke splynutí původního obrazu s nově vytvořeným.

Na obr. 3 je jeden z prvních Escherových obrazů. Zaměříme-li svou pozornost na bílé ještěrky, zjistíme, že můžeme ztotožnit dvě bílé ještěrky, jež se dotýkají levou zadní nohou, otočením o 180 ° kolem bodu dotyku. Totéž platí ještě pro další body dotyku (u pravé zadní nohy a spodní čelisti), ale kupodivu také pro šedivé ještěrky. Po syntéze daných poznatků zjišťujeme, že totožné obrázky dostáváme postupně při otáčení

Obr. 3

Obr. 4

o 90 ° za současného barevného „přepnutí". Obr. 4. je ukázkou složitějšího případu, kdy je rekonstruována původní barva ještěrky až po trojnásobném otočení o 60 °.

S analogickými jevy se setkáváme v chemii a fyzice krystalů. Některé neohrabaně vyhlížející organické molekuly jsou náchylné ke krystalizaci podle různých vazebních zákonů a vytvářejí polymorfní látky s malými rozdíly ve stabilitě. Pestré modifikace symetrií krystalizovaly i v představivosti umělce a daly vzniknout celému spektru kreseb a dřevorytů.

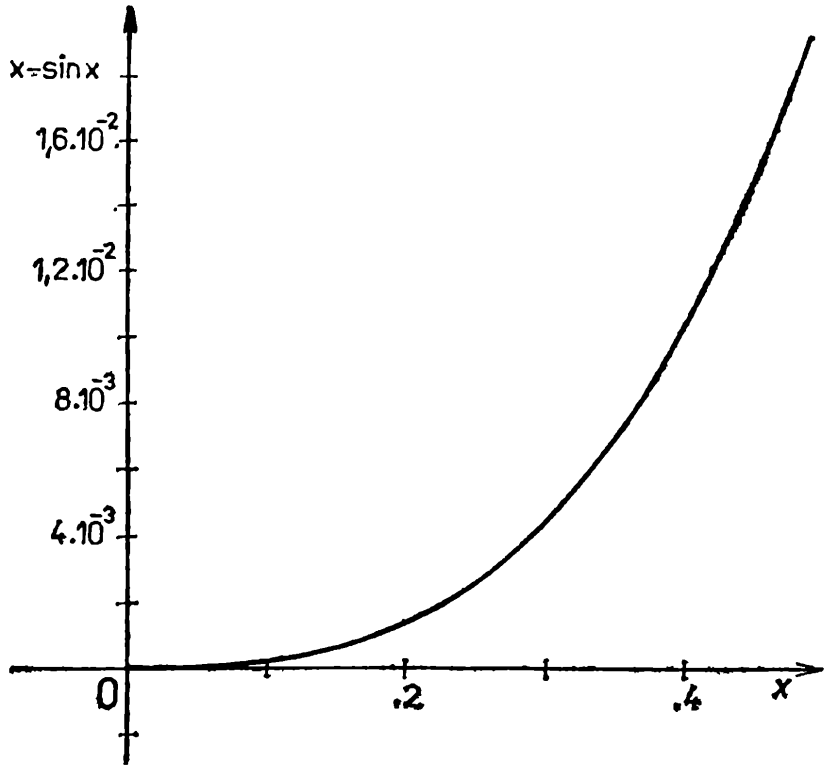
FYZIKA

O jedné pověře

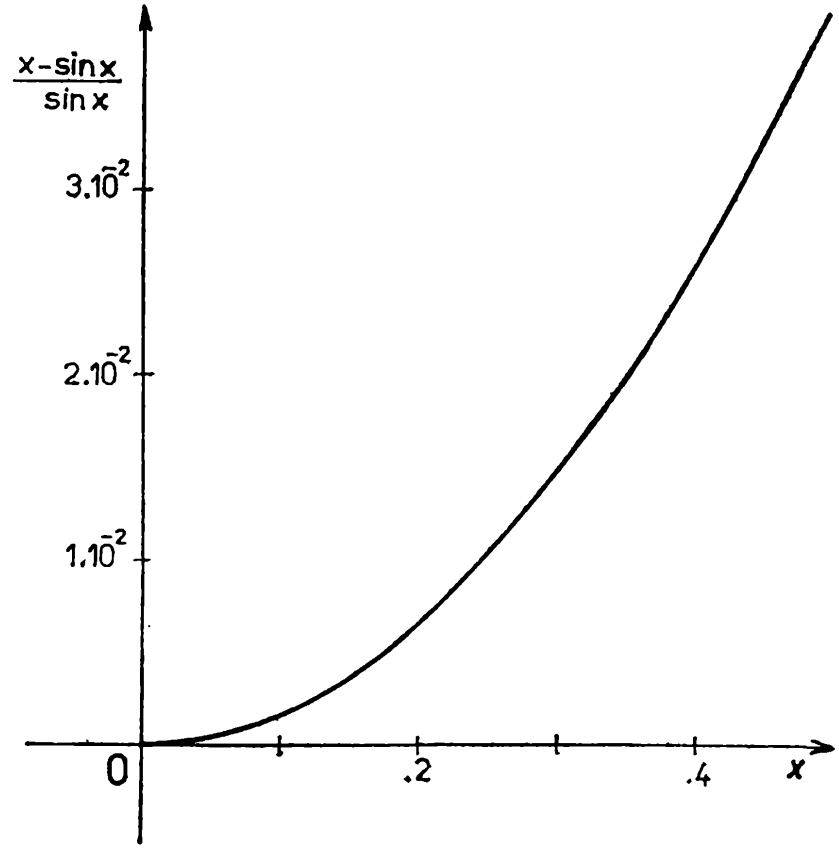
RNDr. MILAN ROJKO, CSc., MFF UK v Praze

Ve fyzice se nejednou setkáváme s přibližným vzorcem $\sin x \doteq x$, u kterého se uvádí, že platí pro malé úhly. Když se zvídavý student zeptá, co to jsou malé úhly, dostane se mu zpravidla odpovědi, že jsou to úhly menší velikosti než pět stupňů ([1], [2], [3]). Tazatel bývá uspokojen a stane se neorganizovaným členem klubu, jehož členové by mohli na svém tričku nosit nápis:

$$\text{IF } x < 5^\circ \text{ THEN } \sin x \doteq x$$



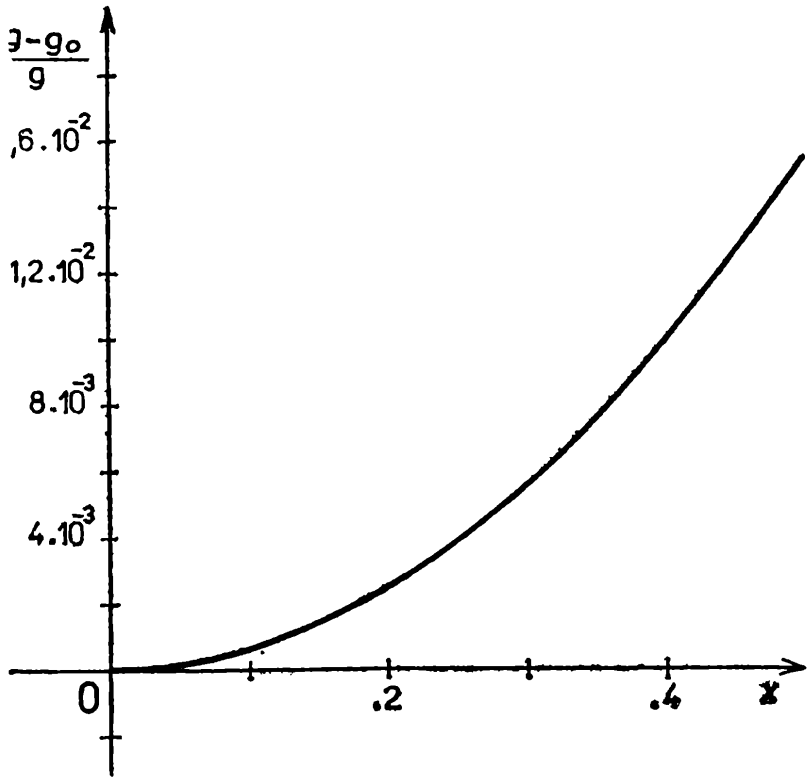
Obr. 1



Obr. 2

Nebudu se v této poznámce zmiňovat o divoké sektě zmíněného klubu, jejíž příslušníci věří, že $\sin 1° \doteq 1$. Popravdě řečeno nepatří však mezi čtenáře tohoto časopisu, kteří samozřejmě vědí, že uvedený vzorec platí pro obloukovou míru.

Přemýšleli jste však někdy o tom, jaké jsou důvody, že právě 5°, tj. $\pi/36$ radiánů se stalo téměř uzákoněnou hranicí platnosti uvedeného



Obr. 3

přibližného vzorce? Mohlo by nás napadnout, že s velikostí úhlů větších než 5° začne náhle prudčeji růst chyba, které se dopouštíme, nahradíme-li $\sin x$ velikostí x.

Graf rozdílu obou hodnot ($x - \sin x$) v závislosti na x (obr. 1) však takovou hypotézu vyvrací. Žádné dramatické změny na grafu v okolí 5° nevidíme. Stejně nevzrušivý průběh má i závislost poměru

$\dfrac{x - \sin x}{\sin x}$ na x (obr. 2).

Teď kritický čtenář jistě namítne: „Znamená to snad, že mohu uváděný vzorec použít třeba i pro úhel o velikosti 10°, tj. $\pi/18$ radiánů? Odpovědí nebude ani prosté NE ani ANO, jak ukáže následující příklad.

Studenti měřili při laboratorní práci kyvadlem velikost tíhového zrychlení pomocí vztahu pro periodu matematického kyvadla

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}} \tag{1}$$

Použili olověnou kuličku na silonovém vládně. Změřili přitom tyčovým metrem vzdálenost od bodu závěsu ke středu kuličky $l = (1000 \pm 2)$ mm a stopkami z dvaceti kmitů periodu $T_0 = (2{,}01 \pm 0{,}02)$ s. K výpočtu použili vztah $g_0 = 4\pi^2 l/T_0^2$ (1′). Indexem o u g naznačujeme, že jde o vypočtenou hodnotu ze vzorce (1′). Jestliže bychom složili relativní chyby vyplývající z nepřesnosti měření délky a periody (viz [4]), vyjde chyba ve výsledku výpočtu tíhového zrychlení přibližně 2 %. Kde je však v tomto příkladu ukryt přibližný vztah $\sin x \doteq x$? Za předpokladu

jeho platnosti byl odvozen vzorec (1). Obecně je doba kmitu závislá i na amplitudě kmitů x_m podle vztahu (2) (viz [4])

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{x_m}{2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \sin^4\frac{x_m}{2} + \ldots\right]. \qquad (2)$$

TAB. 1

$\frac{x}{\text{stupňů}}$	$\frac{x}{\text{rad}}$	$\frac{x - \sin x}{\sin x}$	$\frac{g - g_0}{g}$
0	0	není def.	nemá fyz. smysl
1	0,01745	0,000051	0,000019
2	0,03491	0,000203	0,000076
3	0,05399	0,000457	0,000171
4	0,06981	0,000813	0,000305
5	0,08727	0,001270	0,000476
6	0,10472	0,001830	0,000685
7	0,12217	0,002492	0,000933
8	0,13963	0,003257	0,001218
9	0,15708	0,004124	0,001542
10	0,17453	0,005095	0,001904
12	0,2094	0,007348	0,002740
14	0,2443	0,0100	0,00373
16	0,2793	0,0131	0,00487
18	0,3142	0,0166	0,00616
20	0,3491	0,0206	0,00761
25	0,4363	0,0325	0,01188
30	0,5236	0,0472	0,01709

Relativní chyba vzniklá výpočtem g_0 ze vzorce (1') místo výpočtu g podle upraveného vzorce (2) je v tabulce I. a v grafu na obr. 3.

Z uvedeného je vidět, že i při rozkmitu 10° je použití aproximace $\sin x \doteq x$ v tomto případě zcela vyhovující, neboť do výpočtu tíhového zrychlení vnáší chybu o celý řád menší, než je chyba, pramenící z malé přesnosti použitých měřidel. V uváděné laboratorní práci je proto možno bez obav rozkývat kyvadlo s podstatně větší amplitudou než 5°. Umožní to lépe určit okamžik, kdy kyvadlo prochází rovnovážnou polohou, což se projeví nikoli snížením, ale zvýšením přesnosti výsledku! V jiném případě, například při mnohonásobně přesnějších spektroskopických měřeních by však aproximace $\sin x \doteq x$ citelně zkreslila výsledky již pro úhly o několik řádů menší.

Pevná hranice pro použití vzorce $\sin x \doteq x$ tedy neexistuje obdobně, jako neexistuje pro žádné přibližné vzorce.

Můžeme však vyslovit obecnější pravidlo: Přibližné vztahy jsou použitelné potud, pokud chyby plynoucí z jejich aplikace jsou alespoň o řád menší než předepsaná přesnost výpočtu nebo chyba pramenící z nepřesností měření.

Literatura

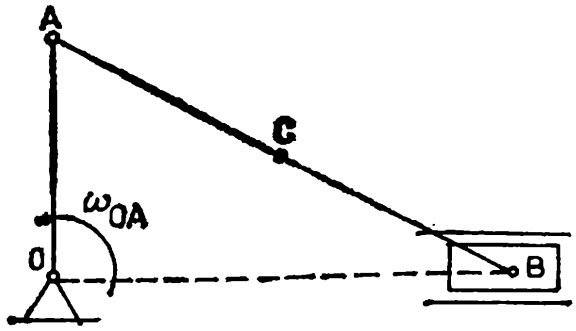
[1] Lepil, O. a kol.: Fyzika pro III. roč. gymnázií; Praha, SPN 1986, s. 275
[2] Bednařík, M. a kol.: Fyzika pro studijní obory SOU; Praha, SPN 1985, s. 149
[3] Svoboda, E. a kol.: Fyzika pro technické obory SOŠ; Praha, SPN 1984, s. 245
[4] Horák, Z. a kol: Technická fyzika; Praha, SNTL 1960, s. 39 a s. 266

Kinematika rovinného pohybu tuhého telesa (zrýchlenie)

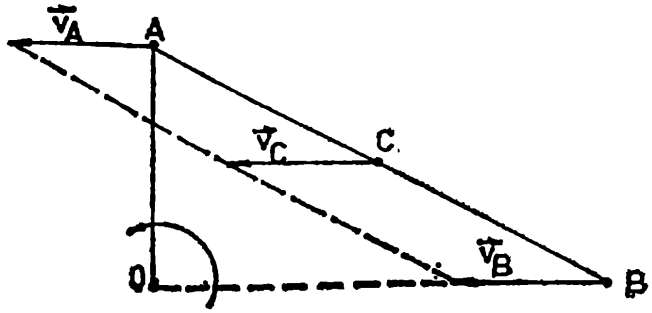
(dokončenie)

Doc. dr. VLADIMÍR ILKOVIČ, CSc., PF UPJŠ Košice

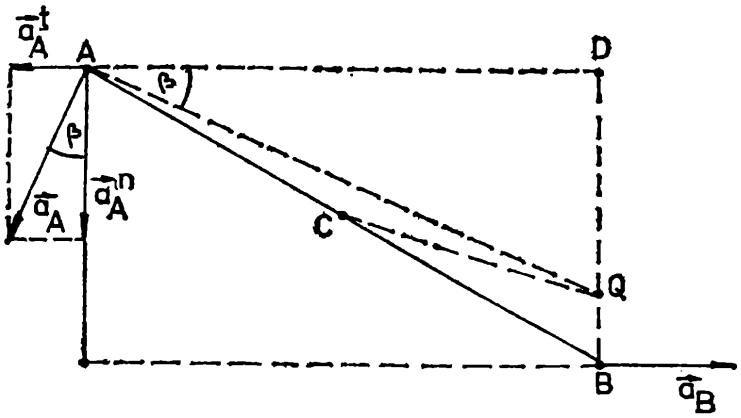
Príklad 3. Páka OA mechanizmu zobrazeného na obr. 8 sa otáča okolo bodu O a v polohe zobrazenej na obr. 8 má uhlovú rýchlosť s veľkosťou $\omega_{OA} = 1{,}0\ \mathrm{s}^{-1}$ a uhlové zrýchlenie s veľkosťou $\varepsilon_{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{s}^{-2}$. Určte zrýchlenie bodov B, C, keď sú okrem toho dané dĺžky ramien: $OA = AC = BC = d = 0{,}1$ m. Spoje sú kĺbové.



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

Riešenie.

Rýchlosť bodu A má veľkosť $v_A = \omega_{OA}\, OA = \omega_{OA}\, d$. Zrýchlenie bodu A je $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_A^t + \boldsymbol{a}_A^n$, pričom pre veľkosti tangenciálneho $\boldsymbol{a}_A^t$ a normálového zrýchleni $\boldsymbol{a}_A^n$ platí:

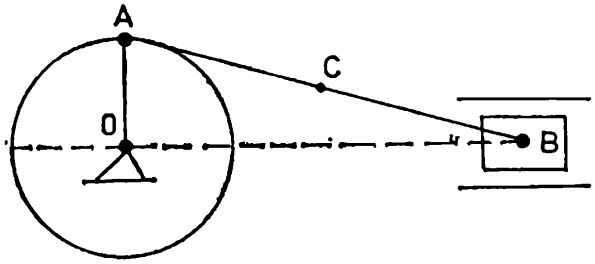
$$a_A^t = |\vec{\varepsilon}_{OA} \times \vec{OA}| = \varepsilon_{OA}\, d\,, \quad a_A^n = |\vec{\omega}_{OA} \times \vec{\boldsymbol{v}}_A| = \omega_{OA}^2\, d\,.$$

Veľkosť celkového zrýchlenia bodu A vypočítame zo vzťahu: $a_A = d\sqrt{\omega_{OA}^4 + \varepsilon_{OA}^2}$ Pre dané hodnoty: $a_A = 0{,}115\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$. V danej polohe mechanizmu okamžitý stred rýchlosti páky AB je v nekonečnu, pretože rýchlosti všetkých bodov páky AB v tomto okamihu sú rovnaké (pozri obr. 9): $v_A = v_C$. V danej polohe rýchlosti $\boldsymbol{v}_A$ a $\boldsymbol{v}_B$ sú rovnobežné, ale vektor $\boldsymbol{v}_A$ nie je kolmý na $\vec{AB}$. V tomto prípade okamžitý stred rýchlosti je v nekonečnu. Podľa teorémy o priemetoch rýchlosti (Rozhledy mat.-fyz. roč. 66, č. 3) platí: $v_A = v_B$. Ďalej platí: $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}$, teda $\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} = 0$, tj. $\omega_{AB} = 0$.

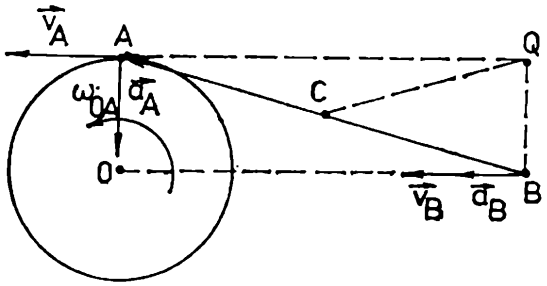
Uhlová rýchlosť páky AB je $\omega_{AB} = 0$. Zrýchlenie bodov B, C určíme pomocou okamžitého stredu Q zrýchlenia páky AB.

Na určenie okamžitého stredu zrýchlenia potrebujeme poznať uhol α (pozri vzťah (6)), pre ktorý platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} \to \infty\,, \quad \text{tj.} \quad \alpha = 90^\circ$$



Obr. 11



Obr. 12

Bod B sa posúva po priamke, preto jeho zrýchlenie $\boldsymbol{a}_B$ je v smere tejto priamky. Zrýchlenie bodu A je určené jeho zložkami $\boldsymbol{a}_A^t$, $\boldsymbol{a}_A^n$ (pozri obr. 10). Priesečník kolmíc na smery vektorov $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$ je okamžitý stred Q zrýchlenia. Veľkosti zrýchlení bodov B, C sa určia zo vzťahu (9):

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{QA}{QB} \Rightarrow a_B = a_A \frac{QB}{QA}, \quad \frac{a_c}{a_A} = \frac{QC}{QA} \Rightarrow a_c = a_A \frac{QC}{QA}.$$

Potrebujeme určiť dĺžky úsečiek QB, QA, QC. Pre uhol β platí:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_A^t}{a_A^n} = \frac{\varepsilon_{OA}\, d}{\omega_{OA}^2\, d} = \frac{\varepsilon_{OA}}{\omega_{OA}^2}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \beta = 30°$$

Z $\triangle$ AQD určíme stranu QD a tým aj $QB = d - QD$. Platí $\operatorname{tg}\beta = \frac{QD}{AD} \Rightarrow QD = AD \operatorname{tg}\beta$, $QD = \sqrt{3}\, d \frac{\sqrt{3}}{3} = d$, a teda $QB = 0$. Okamžitý stred zrýchlenia je totožný s bodom B. Zrýchlenie bodu B je nulové.

Z $\triangle ABD$ (Q) určíme vzdialenosť $QA = AB = 2\,d$ a $QC = BC = d$. Pre veľkosť zrýchlenia bodu C potom máme:

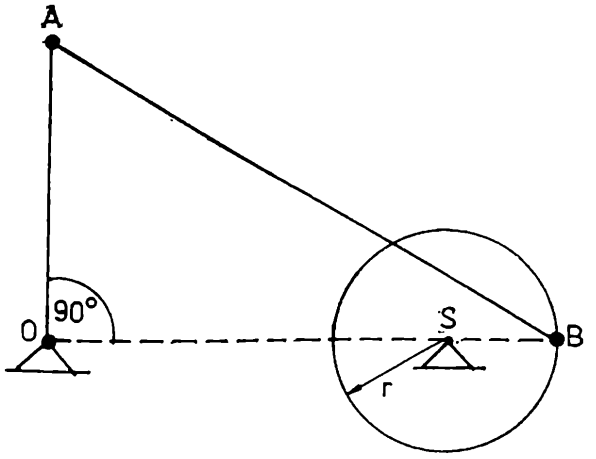
$$a_c = a_A \frac{QC}{QA} = a_A \frac{d}{2d} = \frac{a_A}{2}.$$ Pre dané hodnoty $a_c = 0{,}0577\,\mathrm{m\,.\,s^{-2}}$.

Príklad 4. Tyč OA mechanizmu, zobrazeného na obr. 11, má otáčky $n = 3000\ \mathrm{min^{-1}}$. Určte uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie tyče AB, rýchlosť a zrýchlenie bodu C páky AB v okamihu, keď $\sphericalangle\, AOB = 90°$. Dĺžky ramien $OA = 0{,}1$ m, $AB = 0{,}3$ m. Spoje sú kĺbové.

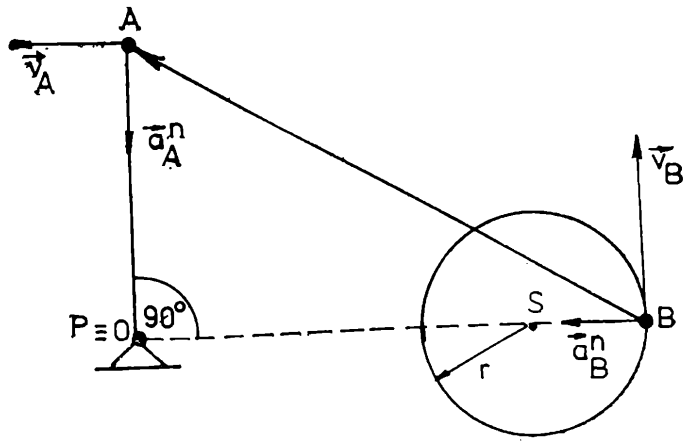
Riešenie.

Podľa teorémy o priemetoch rýchlosti platí (pozri obr. 12) $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_c$, teda $\omega_{BA} = 0$. Zo zadania príkladu vyplýva táto veľkosť rýchlosti bodu A:

$$v_A = \omega_{OA}\, OA = \frac{2\pi n}{60}\, OA, \quad v_A = 100\,\pi\, 0{,}1 = 10\,\pi\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}} = 31{,}4\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}.$$



Obr. 13



Obr. 14

Zrýchlenie bodu A má veľkosť

$$a_A = \omega_{OA}^2\, OA = \left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2 OA, \quad a_A = 1000\,\pi^2\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}} = 9{,}9\ \ 10^3\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}.$$

Označme ε_{BA} veľkosť uhlového zrýchlenia páky $\overrightarrow{BA}$. Polohu okamžitého stredu zrýchlenia určíme pomocou vzťahov

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\omega_{BA}^4 + \varepsilon_{BA}^2}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon_{BA}}{\omega_{BA}^2}.$$

Pretože $\omega_{BA} = 0$, potom $\operatorname{tg}\alpha = \infty$ a $\alpha = 90°$. Okamžitý stred Q zrýchlenia je priesečník kolmíc na vektory $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$ (bod B sa posúva po priamke preto jeho zrýchlenie $\boldsymbol{a}_B$ je v smere tejto priamky). Podľa vzťahu (6) zrýchlenie bodu A má veľkost

$$a_A = QA\sqrt{\varepsilon_{BA}^2 + \omega_{BA}^4} = AQ\ \varepsilon_{BA},$$

pretože $\omega_{BA} = 0$. Z tohto vzťahu dostaneme

$$\varepsilon_{BA} = \frac{a_A}{QA} = \frac{a_A}{\sqrt{(BA)^2 - (OA)^2}}, \qquad \varepsilon_{BA} = \frac{1000\,\pi^2}{0{,}28} = 3{,}5\,.\,10^4\ \mathrm{s^{-2}}.$$

Zrýchlenie bodu C potom má veľkosť

$$a_C = \varepsilon_{BA}\, QC\,; \quad a_C = 3{,}5\,.\,10^4\,.\,0{,}15\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}} = 5{,}2\,.\,10^3\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}.$$

Pre veľkosť zrýchlenia bodu B dostaneme

$$a_B = \varepsilon_{AB}\, QB\,, \quad a_B = 3{,}5\,.\,10^4\ \ 0{,}1\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}} = 3{,}5\,.\,10^3\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}.$$

Príklad 5. Kľuka OA s dĺžkou 0,2 m sa otáča rovnomerne s uhlovou rýchlosťou veľkosti $\omega_0 = 2{,}0\ \mathrm{s^{-1}}$ okolo osi O a privádza do pohybu prostredníctvom tyče AB s dĺžkou 0,4 koleso s polomerom $r = 0{,}1$ m, ktoré sa otáča okolo osi, prechádzajúcej bodom S. Určte rýchlosť a zrýchlenie bodu B v polohe, ktorá je zobrazená na obr. 13. Spoje sú kĺbové.

Riešenie.

Rýchlosť bodu A, ktorý sa otáča okolo bodu O, má veľkosť

$$v_A = OA\,\omega_0\,, \quad v_A = 0{,}2\,.\,2{,}0\ \mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-1} = 0{,}4\ \mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-1}\,. \tag{5.1}$$

Tangenciálne zrýchlenie bodu A, $\boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}{}_A = 0$, pretože $\omega_0 =$ konšt. Normálové zrýchlenie $\boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}{}_A$ bodu A sa rovná celkovému zrýchleniu $\boldsymbol{a}_A$ bodu A, pre ktoré platí (pozri obr. 14):

$$a_A = a_A^{\mathrm{n}} = \omega_0^2\,OA\,, \quad a_A = 0{,}8\ \mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-2}\,. \tag{5.2}$$

Okamžitý stred P rýchlosti je bod O. Pre veľkosť rýchlosti bodu B potom máme

$$v_B = v_A\,\frac{OB}{OA}\,, \quad v_B = 0{,}4\,\frac{0{,}34}{0{,}2}\ \mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-1} = 0{,}68\ \mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-1}\,. \tag{5.3}$$

Vypočítame teraz zrýchlenie bodu B. Najprv určíme veľkosti uhlových rýchlostí: $\vec{\omega}_{BA}$ (uhlová rýchlosť tyče BA), $\vec{\omega}_{SB}$ (uhlová rýchlosť bodu B pri otáčaní okolo bodu S).

Veľkosť uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}_{BA}$ určíme pomocou okamžitého stredu P rýchlosti. Platí

$$\omega_{BA} = \frac{v_A}{PA}\,, \quad \omega_{BA} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2{,}0\ \mathrm{s}^{-1}\,, \tag{5.4}$$

alebo

$$\omega_{BA} = \frac{v_B}{PB} = \frac{v_B}{\sqrt{BA^2 - OA^2}}\,, \quad \omega_{BA} = \frac{0{,}68}{\sqrt{0{,}16 - 0{,}04}} = 2{,}0\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Uhlovú rýchlosť ω_{SB} určíme zo vzťahu

$$\omega_{SB} = \frac{v_B}{SB} = \frac{v_B}{r}\,, \quad \omega_{SB} = 6{,}8\ \mathrm{s}^{-1}. \tag{5.5}$$

Pretože bod B súčasne patrí dvom telesám: tyči BA a kolesu, potom zrýchlenie tohto bodu určíme pomocou dvoch vyjadrení zrýchlenia bodu B:

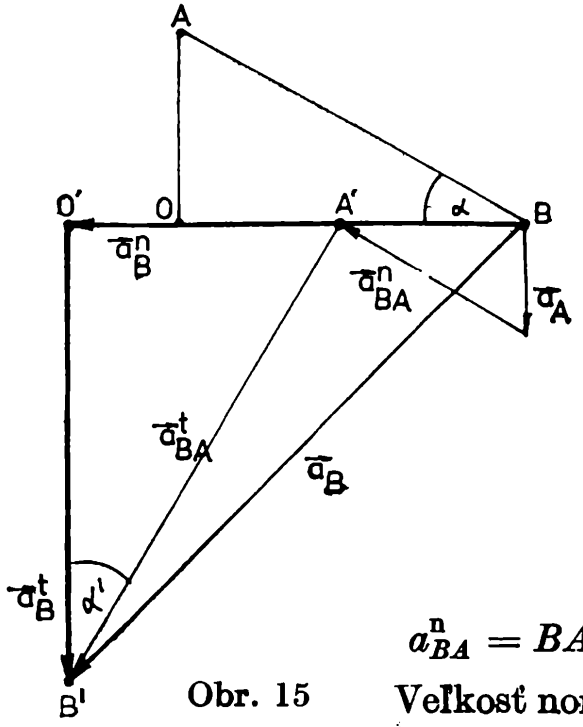
1. Považujeme bod B za súčasť tyče BA a bod A za pól. V tomto prípade platí:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}\,. \tag{5.6}$$

2. Považujeme bod B za súčasť kolesa, ktoré sa otáča okolo bodu S. V tomto prípade platí:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_B^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_B^{\mathrm{t}}\,. \tag{5.7}$$

Normálové zrýchlenie $\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$ bodu B pri otáčavom pohybe okolo pólu A smeruje pozdĺž tyče BA od bodu B ku A a jeho veľkosť je



Obr. 15

$$a_{BA}^n = BA\,\omega_{BA}^2\,, \quad a_{BA}^n = 1{,}6\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}\,. \tag{5.8}$$

Veľkosť normálneho zrýchlenia bodu B pri otáčavom pohybe okolo bodu S je (pozri obr. 14)

$$a_B^n = BS\,\omega_{SB}^2 = r\,\omega_{SB}^2\,, \quad a_B^n = 4{,}7\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}\,. \tag{5.9}$$

K určeniu zrýchlenia $\boldsymbol{a}_B$ bodu B potrebujeme poznať buď tangenciálne zrýchlenie $\boldsymbol{a}_{BA}^t$ (vo vzťahu (5.6)), alebo tangenciálne zrýchlenie $\boldsymbol{a}_B^t$ (vo vzťahu (5.7)).

Tieto zrýchlenia určíme vektorovým sčítaním už známych vektorov zrýchlenia a využitím skutočnosti, že platí: $\boldsymbol{a}^n \perp \boldsymbol{a}^t$. Konštrukcia je znázornená na obr. 15. Súčet vektorov (5.6) je znázornený tenkou čiarou, súčet vektorov (5.7) hrubšou čiarou. Z konštrukcie na obr. 15 môžeme určiť veľkosti vektorov $\boldsymbol{a}_B^t$ a $\boldsymbol{a}_{BA}^n$.

Z podobnosti trojuholníkov $\triangle\ AOB$, $\triangle\ A'O'B'$ vyplýva:

$$\alpha' = \alpha = 30°$$

Z $\triangle\ A'O'B'$ máme:

$$\sin\alpha' = \frac{a_B^n - \sqrt{(a_{BA}^n)^2 - (a_A)^2}}{a_{BA}^t}\,, \quad \sin\alpha' = \frac{3{,}32\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}}{a_{BA}^t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{BA}^t = 6{,}6\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}\,.$$

Z $\triangle\ A'O'B'$ ďalej máme

$$a_B^t = a_{BA}^t \cos 30°\,, \quad a_B^t = 5{,}7\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}\,.$$

Veľkosť zrýchlenia $\boldsymbol{a}_B$ vypočítame z $\triangle\ BO'B'$:

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^t)^2}\,, \quad a_B = 7{,}4\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}\,.$$

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

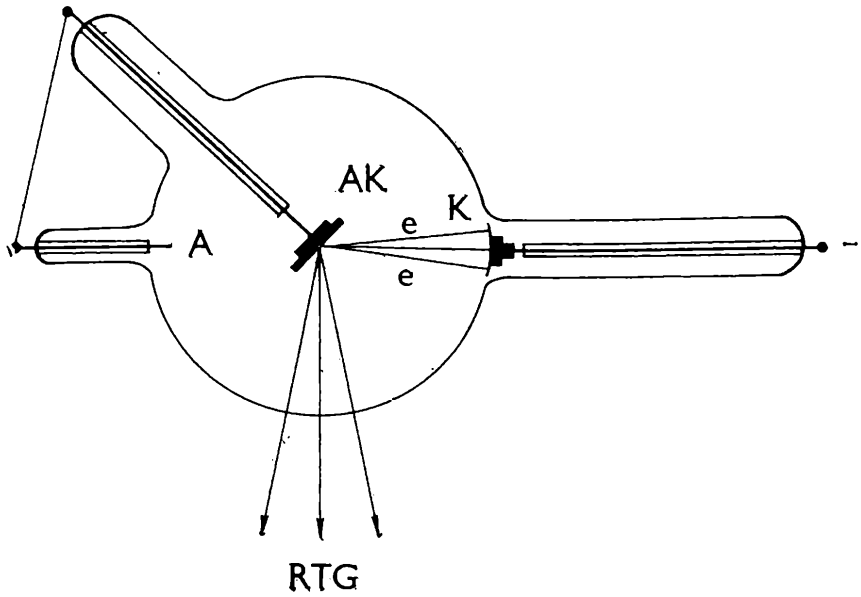
Wilhelm Konrád Röntgen — osobnost známá i neznámá

Doc. RNDr. IVO KRAUS, CSc., FJFI ČVUT v Praze

Počítače se staly neodmyslitelnou součástí fyzikálních laboratoří i pracoven teoretiků. Díky jim je možno automatizovat experimenty, zvýšením počtu měření získat spolehlivější závěry výzkumu (omezit vliv náhodných chyb), využívat i složité statistické metody vyhodnocování výsledků. Počítač však může svou úlohu plnit jen tehdy, jestliže mu připravíme vhodný návod k činnosti — program. Rozhodující roli ve vědecké práci hraje tedy stejně jako dříve člověk, jeho invence, šíře a hloubka fyzikálního vzdělání, schopnost správně formulovat otázky, na něž hledáme odpověď. Na rozdíl od minulých dob nyní dosahují významných objevů především dobře sehrané kolektivy specialistů, z nichž každý své práci dokonale rozumí a je ochoten jí přispět ke společnému dílu. Perspektivy jsou v kolektivní vědecké práci. Jeden z posledních „osamělých" fyziků, legendární svou náročností k sobě i svým spolupracovníkům, byl nositel Nobelovy ceny *Wilhelm Konrád Röntgen* (1845—1923). Letos uplynulo od jeho smrti 65 let.

Röntgen nepatřil k vědcům s úzkým odborným zaměřením. Byl talentovaný matematik, pro diplomovou práci si však zvolil řešení „prozaických" strojírenských problémů. V doktorské disertaci se zabýval teorií termodynamiky, přitom na univerzitě navštěvoval také přednášky z chemie, zoologie a botaniky.

Jeho vědeckou erudici ovlivnil zejména vynikající fyzik profesor *August Kundt*. U něho se naučil s malými prostředky navrhovat originální měřící postupy a dosahovat při nich vysoké přesnosti. Hodnoty některých veličin, určené Röntgenem v minulém století, např. poměr měrných tepel plynů při kostantním tlaku a objemu, neztratily platnost dodnes. Röntgenovy experimenty byly jednoduché, pečlivě promyšlené, výsledky analyzovány z hlediska všech možných chyb měření. Názorně to ilustruje způsob, jímž vyřešil dlouholetý spor dvou slavných fyziků *Magnuse* a *Tyndalla* o absorpci infračervených paprsků ve vodních parách. Zatímco Němec H. G. Magnus a Angličan J. Tyndall prověřovali existenci tohoto efektu náročným měřením mezi vrcholem a úpatím Mont Blancu, dospěl Röntgen k jednoznačnému závěru prostě tak, že změřil vzrůst tlaku vodní páry v uzavřené nádobě po zahřátí absorbovanými paprsky.



Obr. 1. Původní rentgenky byly konstruovány jako výbojky naplněné plynem o tlaku (10^0 až 10^{-1}) Pa. Skleněná koule o objemu (3 až 4) l obsahovala v nestejně dlouhých a nestejně širokých hrdlech sféricky zakřivenou katodu *K*, rovinnou antikatodu *AK* a drátovou anodu *A*. Záření RTG je buzené v povrchové vrstvě (tloušťky $\approx$ μm) antikatody, na níž dopadají elektrony *e*.

K objevu neviditelného záření X, které má dnes Röntgenovo jméno, došlo při studiu katodových paprsků. I když už dříve řada fyziků zjistila, že v místnostech, kde se pracovalo s katodovými trubicemi, fotografické desky černají, nikdo po příčině tohoto jevu nepátral. Objev, patřící bezesporu k největším dobrodiním, které fyzika dala lidstvu, nebyl náhodným úspěchem experimentátora, ale zákonitým důsledkem pečlivého, systematického pozorování a hlubokého zájmu všestranně připraveného vědce o příčiny vedlejších, zdánlivě nepodstatných efektů, doprovázejících hlavní směr cílevědomého výzkumu.

„O novém druhu paprsků", „Nový druh paprsků" a „Další pozorování vlastností paprsků X" jsou názvy tří článků s celkovým rozsahem 37 stran, na nichž Röntgen od prosince 1895 do března 1897 popsal stručně a přesvědčivě všechny základní vlastnosti nového záření. (O důkladnosti jeho pokusů svědčí skutečnost, že stále platí vše, co o paprscích zjistil.) V té době uplatnil Röntgen své inženýrské schopnosti a na používaných zdrojích záření doporučil některé konstrukční změny (obr. 1, 2).

Výsledky výzkumů nezveřejnil dříve, pokud práci zcela neukončil. Přesto seznam jeho publikací má více než 50 položek. Známý je Röntgenův odmítavý postoj k takzvaným „předběžným" sdělením, kterými si někteří autoři zajišťovali v odborných časopisech prioritu svých objevů, i když ještě třeba nebyly do všech důsledků prověřeny. (Podobná praxe se udržuje i v současnosti; v řadě časopisů je určitý rozsah věnován „krátkým sdělením".)

sloveso existovalo jen ve spojení s předponami) — uspořádání složeného záření podle vlnových délek; sled základních barev vzniklých rozkladem světla. Pozn.: S tímto termínem přišel Newton, když viděl na kusu trojbokého skla barevný rozklad bílého slunečního světla.

SPEKTRÁLNÍ — jsoucí v nějakém vztahu ke spektru; spektrální analýza — určování látky podle jejího spektra; spektrální klasifikace (v astronomii) — roztřiďuje hvězdy podle vzhledu spektra; spektrální přístroj — přizpůsobený k pozorování spekter

SPINTARISKOP (slož. z řec. *spinthér*, *-éros* = jiskra + *skopéo* = hledět, pozorovat; v. -skop) — přístroj k pozorování jiskření — scintilace (v. t.) — vznikajícího dopadem částic alfa

SPONTÁNNÍ (z lat. *spontaneus*; od *spons*, *spontis* = vůle; 6. pád: *sponte* = po vůli, z vlastní vůle, o své újmě, sám o sobě)— samovolný, dobrovolný, živelný, bezděčný

SPORADICKÝ (z řec. *sporadikos* = roztroušený; od *speiró* = rozsévat; srov. SPORA — výtrus; ostrovy SPORADY — „Roztroušené") — „roztroušený" (časově nebo místně); vzácný, řídký, řídce se vyskytující, ojedinělý

STABILITA (z lat. *stabilitas;* od *stabilis* = stálý, ustálený, pevný, neměnlivý, trvalý; od sto, stare = státi; v. stator) — „pevný postoj, nepohnutost"; pevnost, stálost, schopnost podržet určitou vlastnost i za vnějšího rušivého momentu; rovnováha; takový rovnovážný stav nějaké soustavy, při kterém se při malé poruše rovnováhy soustava sama vrací do původního stavu. (Kdyby se naopak soustava po malé výchylce ze svého působního stavu vzdalovala, byla by to labilita; v. t.)

STABILIZACE (v. -izace) — dosahování, dosažení, udržování stálosti; ustalování, ustálení; uvedení do původního nebo do normálního stavu

STABILIZÁTOR (v. -or) — stabilizační zařízení nebo prostředek; 1. přístroj samočinně udržující elektrické napětí nebo proud na požadovaných hodnotách, 2. zařízení, kterým se v zatáčkách zmenšuje odklon vozidla a příčný výkyv vozu

STABILNÍ — pevný, stálý, ustálený (opak: labilní)

STACIONÁRNÍ (z lat. *stationarius* = k stanovišti příslušný; od *statio* = stání, postavení, stanoviště; od *sto*, *stare* = státi, zastavit se; v. stator) — s pevným stanovištěm, ustálený, stálý, časově neproměnný, nezávislý na čase; ve fyzice: nepohyblivý, setrvávající na stejném místě; např. stacionární fronta (v meteorologii); stacionární družice (nehybná vzhledem k rotaci Země); stacionární proudění tekutin — ustálené proudění, při němž na témže místě jsou tlak, hustota a rychlost (co do velikosti a směru) stále stejné (nezávislé na čase); v. t. kvazistacionární

 STALAGMOMETR (slož. z řec. *stalagma* = kapka; od *stalassó* = kapat; srov. STALAGMIT — „nakapaný" krápník, tj. rostoucí zdola + *metron* = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — přístroj na měření povrchního napětí kapalin, přičemž se vychází z povrchového napětí jedné kapky

-STAT (z řec. *statos* = postavený, stojící; od *histémi* = stavět, postavit; v. statika) — koncová část složených slov, která jsou termíny pro přístroje, „jež nastavují" to, co vyjadřuje předcházející část složeného slova; např. termostat (řec. thermos = horký, teplý) — přístroj nastavující teplotu na určitém stupni; v. t. reostat

STATICKÝ v. STATIKA

STATIKA (z řec. *statiké techné* = nauka o rovnováze; od *histémi* = stavět, postavit; v. -ika[1]) — klid, nehybnost; ve fyzice: část mechaniky, která se zabývá podmínkami rovnováhy sil; zkoumá příčiny pohybu a tedy i klidu tělesa; v. t. elektrostatika, hydrostatika

STATICKÝ (z řec. *statikos*) — klidný, nehybný, stálý; ve fyzice: jsoucí ve stavu klidu; statická elektřina — elektrický náboj, který na rozdíl od elektrického proudu není v pohybu; statická rovnováha — takový stav soustavy, za něhož se v soustavě nic nemění; statické tření — tření v klidu, klidové; statický tlak — síla, kterou působí klidná kapalina svou tíží na nějakou plochu

STATISTIKA (z latiniz. *statisticus;* od *status* = postoj, postavení, stav, poměry; srov. STATUS — stav, situace) — „údaje týkající se určitého stavu, určitých poměrů"; obor, zabývající se zkoumáním a kvantitativní charakteristikou hromadných jevů; číselná evidence hromadných jevů; číselné odvozování fyzikálních veličin a zákonitostí z pozorování nejmenších částic na základě pravděpodobnosti

STATOR (od lat. *sto, stare,* ptc. pf. *status* = státi, zastavit se; v. -or) — nepohyblivá část (ta část, jež stojí) stroje, zpravidla elektrického motoru nebo turbiny; ve všeobecném strojírenství: nehybně stojící část motoru nebo pracovního stroje, v níž se otáčí rotor — část obíhající; v. t. aretace, distance, ekvidistance, konstanta, stabilita, stacionární. Pozn.: Na Koperníkově pomníku v rodné Toruni je nápis: Motor terrae — stator Solis; volně přeloženo: Pohnul Zemí, zastavil Slunce. Doslovně: „Hybatel Země, Zastavitel Slunce". Zde je však „stator" od lat. *sisto, -ere* = zastavit.

STELÁRNÍ (od lat. *stella* = hvězda; srov. KONSTELACE — „sestavení hvězd") — hvězdný, hvězdnatý; v. t. interstelární, kvasary

STERADIÁN (slož z řec. *stereos* = tuhý, tvrdý, pevný; v. *stereo-* + lat. *radius* = hůlka, paprsek; v. radius; koncové „-reo" první části složeného slova odpadlo, protože následující část začínala také na „r") — radián pojatý v prostoru

STEREO —[1] (z řec. *stereos* = tuhý, tvrdý, pevný) — počáteční část složených slov mající význam: 1. „pevnost, tuhost"; srov. STEREO-

TYP — pevný, neměnný tvar; stav, návyk; v. t. stereomechanika; 2. „prostorovost, týkající se prostoru" (tento význam původní řecké slovo nemělo; vznikl až rozšířením pojmu na další vlastnost tuhých těles)

STEREOFONICKÝ, STEREOFONNÍ (řec. *fóné* = hlas, zvuk; v. fonický, -fonní) — plastický, při němž vzniká prostorový vjem zvuku

STEREOGRAFICKÝ, STEREOGRAFNÍ (řec. *grafó* = rýt, psát; v. -grafie) — „píšící v prostoru"; stereografické promítání — středové promítání kulové plochy do roviny v případě, kdy střed promítání leží na kulové ploše

STEREOMECHANIKA (v. mechanika) — mechanika dokonale tuhých těles

STEREOMETRIE (řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metrie) — „měření v prostoru"; část geometrie, která zkoumá vlastnosti prostorových útvarů

STEREOSKOP (řec. *skopeó* = hledět, pozorovat; v. -skop) — optický přístroj umožňující pozorovateli prostorové vnímání dvojice stereoskopických obrázků; STEREOSKOPICKÝ — jevící se prostorově; prostorový; umožňující prostorové vidění

STEREOTYP (z řec. *typos*; od *typtó* = tepat, bít; v. typ) — pevný odlitek ze sazby nebo štočku, používaný pro svou pevnost při sazbě ve velkých nákladech; odtud: STEREOTYPNÍ — „stále se opakující, stále stejný, obvyklý"; z toho pak druhotný význam pro „stereotyp", a to s hanlivým zabarvením, „ustálená, automatizovaná představa, navyklý způsob jednání; mechanický vzor"; posléze pak bez onoho hanlivého přídechu, např. stereotyp pracovního procesu, tj. osvojit si mnohým opakováním určitý účelný sled pracovních úkonů, které lze pak provádět automaticky

STEREO-[2] (zkrácením ze „stereofonický" nebo ze „stereofonní") — počáteční část hybridních složenin vyjadřující, že to, co naznačuje další část složeného slova, je stereofonní, tj. vyvolává prostorový vjem zvuku nebo je zhotoveno či pracuje na podkladě stereofonie; např. STEREODESKA není „pevná deska" ani „trojrozměrná, tj. prostorová", ale deska „stereofonická", tj. se stereofonní nahrávkou. Právě tak STEREOKINO, STEREOMAGNETOFON apod. Pozn.: Ve slangu se vyskytuje i samostatné STEREO ve významu „stereofonní magnetofon" apod.

STIGMATICKÝ (od řec. *stigma* = vbodnuté, vpálené znamení; bod; od *stidzó* = bodat; srov. STIGMATA — stopy po bodné ráně na těle) — bodový; v optice: stigmatické zobrazování — dokonalé optické zobrazování, kdy svítící bod předmětu se zobrazuje jako bod, tj. rozbíhavé paprsky vycházející ze svítivého bodu stanou se paprsky sbíhajícími se zase do bodu; v. t. astigmatismus, anastigmat

STIMUL, STIMULUS (z lat. *stimulus* = bodec, kolík se železnými háčky, osten, pobídka) — podnět, popud, pobídka; STIMULACE, STIMULOVAT. Pozn.: Synonymem je IMPULS. Zatímco však u stimulu jde o déle trvající nebo opakované podněty, u impulsu zpravidla o jednorázový popud.

STRATOSFÉRA (slož. z řec. *stratos;* od *stornymi* = stlát, ukládat; v. *stratus* + *sfaira* = koule; v. sféra) — „oblast vrstev"; původně: horní ze dvou vrstev zemského ovzduší — atmosféry. Název vznikl buď podle toho, že v r. 1902 byla objevena „jakožto horní vrstva" (lat. *stratus* = vrstva), nebo podle původní domněnky, že jsou v ní její plynné složky rozvrstveny podle svých hustot (v nižších by převládal kyslík a dusík, ve vyšších helium a vodík); dnes se tímto nevhodným názvem označuje jen vrstva nad troposférou a pod ionosférou v rozsahu od 10 do 60—80 km.

STRATUS (z lat. *stratus* = rozložení, vrstva; od *sterno, -ere,* ptc. pf. *stratus* = prostírat, rozkládat; souvisí s řec. *stornymi* = stlát, ustýlat) — „rozprostřený mrak"; sloha; rovnoměrně šedivá vrstva mraků; v. t. stratosféra

STRIKTNÍ (z lat. *strictus,* ptc. pf. od *stringo, -ere* = svírat, stahovat; srov. RESTRIKCE — omezení) — „sevřený"; strohý, stručný, úsečný, řízný, přísný, nepřipouštějící námitky

STROBOSKOP (slož. z řec. *strobos* = vír, otáčení v kruhu; od *strefó* = točit, obracet; srov. KATASTROFA — „převrácení" + *skopeó* = hledět, pozorovat; v. -skop) — 1. optický přístroj pro pozorování rychle se v kruhu otáčejících obrázků; 2. přístroj k pozorování a měření periodických pohybů nebo otáčení; podstatou přístroje je kruhová, na obvodu otvorem opatřená deska, kterou lze prudce roztočit a udržovat ve stálých otočkách. V. t. strofoida

STROFOIDA (slož. z řec. *strofé* = obrat; od *strefó* = točit, obracet; v. stroboskop + latiniz. *oideus* = podobající se; od řec. *eidos* = podoba; v. -oid) — rovinná křivka 3. stupně, která připomíná smyčku

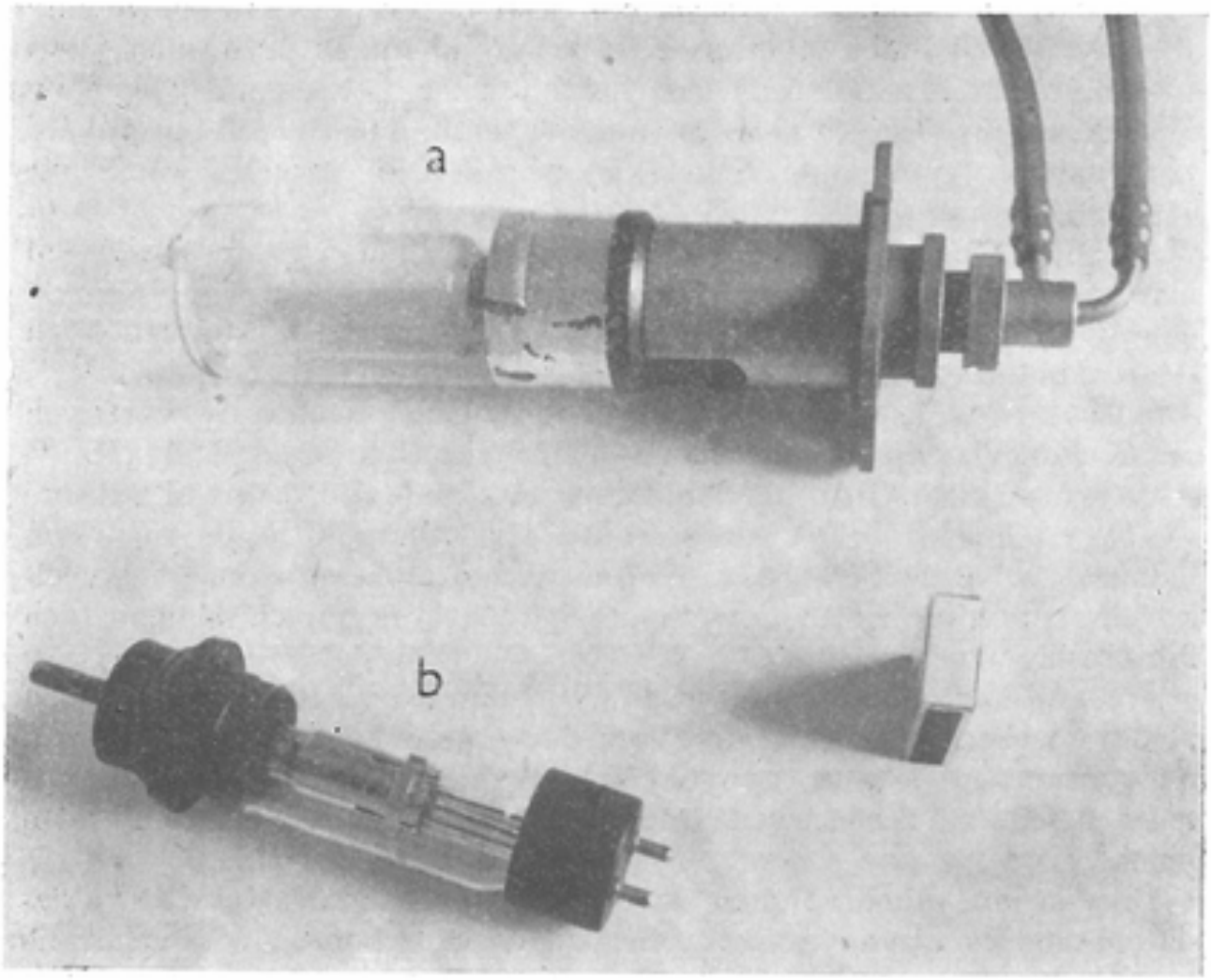
STRUKTURA (z lat. *structura* = stavba, sestavení; od *struo, -ere,* ptc. pf. *structus* = vrstvit, stavět; srov. KONSTRUKCE — „sestavení") — způsob složení, uspořádání („vstvení") nějaké látky, prvků, např. krystalová struktura — vnitřní uspořádání základních částic v krystalové mřížce

SUB- (z lat. *sub* = pod) — předpona s významem „poloha pod, dole, spodní; zastupování, nástupnictví; tajená činnost; zmenšování; méně než"; opak: super-

SUBALTERNACE (v. alternace) — podřízenost, podřízení

SUBDETERMINANT (v. determinant) — „poddeterminant"; determinant nižšího stupně

SUBGRAVICKÝ stav (lat. *gravis* = těžký; v. gravitace) — stav se zmenšenou (zvýšenou) gravitací; přetížení



Obr. 2. Typický vzhled současných mikrostrukturních rentgenek chlazených vodou (a) nebo vzduchem (b).

Těžko lze uvěřit, že Röngen, který získal titul strojního inženýra, doktorát filosofie i Nobelovu cenu, propadl u maturity, přestože se na ni usilovně připravoval. Jeden ze členů zkušební komise si tímto způsobem vyřídil se sedmnáctiletým studentem osobní účty. Od té doby Röntgen neuznával žádnou zkoušku za objektivní kritérium skutečných znalostí.

Styl jeho vědecké práce i prezentaci zjištěných poznatků považujeme dnes za konzervativní. Význam přikládal pouze faktům, nikoliv jejich interpretaci. Trval důsledně na detailním výkladu pokusů, nesouhlasil však, aby naměřené údaje byly vysvětlovány z hlediska závěrů, které z nich vyplývaly. Stejný způsob práce vyžadoval i od všech svých žáků a asistentů.

Nikdy si nedal své vynálezy patentovat, odmítl rovněž výhodnou nabídku přenechat je německým průmyslníkům. Všechny objevy odkázal bez nároku na odměnu budoucím pokolením.

Na studium záření X se soustředil ještě v roce 1896 zájem většiny světových fyzikálních laboratoří. Brzy byly získány i první zkušenosti s účinky nových paprsků na biologické objekty. Četné pokusy svědčily o poškození živočišných nebo rostlinných tkání, z některých pozorování však naopak vyplývalo, že krátkodobé působení paprsků může být užitečné (podporuje se jím např. růst rostlin). Rokem 1896 jsou datovány nejstarší zprávy o těžkých popáleninách pokožky a vypadávání vlasů osob, pracujících se zářením. Počátkem našeho století (1902) byla popsána rakovina kůže na rukou výrobce a demonstrátora rentgenových lamp. Podařilo se zjistit, že rozsah poškození vyvolaného paprsky X souvisí s počtem iontových párů vzniklých v molekulách vody ozářených organizmů. Později byla zavedena dozimetrická jednotka HED (Haut-Erythema-Dosis). Tato dávka se rovná „množství paprsků", které vyvolá u člověka do 10 dnů zrudnutí a sloupnutí kůže. Je to ovšem jednotka velmi nepřesná, závisející na věku ozářeného jedince, jeho celkovém zdravotním stavu, pigmentaci kůže i na jiných biologických faktorech.

Přes všechny pocty, kterých se Wilhelmu Konrádu Röntgenovi za života dostalo, zůstal skromný, ve vědecké práci až úzkostlivě seriózní. Měl uzavřenou povahu, vyhýbal se velkým shromážděním. Jeho přímost v jednání nerozlišovala mezi studenty nebo představiteli státní moci.

Díky svému mimořádnému talentu se Röntgen stal jedním ze zakladatelů moderní atomové teorie, přestože byl až do konce života na straně klasické fenomenologické školy. I u generací fyziků konce dvacátého století budí obdiv jeho experimentální nápaditost, založená na širokém přírodovědném vzdělání. Příkladem je svou důkladností v přípravě pokusů, pečlivé analýze chyb měření a schopností nalézt mezi nepřehlednými fakty charakteristické rysy nových jevů.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Sčítalkové trojuholníky

Pozorne si prezri trojuholník vytvorený z desiatich čísel. V ňom pod každou dvojicou susedných čísel stojí jej súčet; pod 3 a 1 stojí číslo $3 + 1 = 4$, pod 4 a 9 stojí číslo $4 + 9 = 13$ a p. Takéto trojuholníky budeme volať

3 1 8 5
4 9 13
13 22
35

sčítalkové. Keby v prvom riadku sčítalkového trojuholníka bolo 5 čísel, mal by celý trojuholník 15 čísel v piatich riadkoch. Keby v prvom riadku bolo 7 čísel, mal by celý trojuholník 28 čísel. Skús vyriešiť aspoň niektoré z tucta čoraz náročnejších úloh.

1. Do prvého riadku sčítalkového trjuholníka zapíš štyri čísla 1, 2, 3, 4 v takom poradí, aby spodné číslo trojuholníka bolo a) 18, b) čo najväčšie, c) čo najmenšie.
2. Nájdi taký sčítalkový trojuholník, ktorý je vytvorený z desiatich navzájom rôznych prirodzených čísel neprevyšujúcich číslo 20.
3. Nájdi taký sčítalkový trojuholník, aby súčet všetkých jeho desiatich čísel bol a) 26, b) 4, c) 38.
4. Do prvého riadku sčítalkového trojuholníka napíš štyri desatinné čísla 0,5, 0,7, 1,1, 1,3 v takom poradí, aby spodné číslo bolo a) 6,8, b) celé.
5. Do prvého riadku sčítalkového trojuholníka zapíš 5 po sebe idúcich prirodzených čísel (napr.: 4 5 6 7 8) tak, aby spodné číslo bolo a) 96, b) 160, c) 1600.
6. V sčítalkovom trojuholníku je 21 čísel, z toho presne 7 jedničiek. Spodné číslo je a) 18, b) 19, c) 20. Nájdi taký trojuholník.
7. Urč zvyšných 6 čísel sčítalkového trojuholníka, ak poznáš tieto 4 jeho čísla:
   a) $a = 1$, $e = 2$, $h = 3$, $j = 12$;
   b) $a = 3$, $d = 1$, $e = 1$, $i = 3$;
   c) $a = 1$, $d = 2$, $f = 0$, $j = 4$.

   $a \quad b \quad c \quad d$
   $e \quad f \quad g$
   $h \quad i$
   j
8. V prvom riadku sčítalkového trojuholníka je n jedničiek. Zisti, aké bude spodné číslo trojuholníka ak a) $n = 4$, b) $n = 7$, c) $n = 1989$.
9. Nájdi pravidlo, pomocou ktorého v úlohe 5 možno rýchlo vypočítať spodné číslo trojuholníka.
10. V sčítalkovom trojuholníku z úlohy 7 viem vypočítať spodné číslo j, ak poznám a) čísla a, d, f, b) súčty $s = a + b + c + d$, $r = e + f + g$. Nájdi príslušný návod.
11. Urč spodné číslo sčítalkového strojuholníka, ktorého prvý riadok je a) 1 2 4 8, b) 1 2 4 8 16 32 64.
12. Urč spodné číslo sčítalkového trojuholníka, ktorého prvý riadok má tvar $x\ x^2\ x^3\ x^4 \ldots x^n$, kde x je niektoré prirodzené číslo a n je prirodzené číslo väčšie ako 1.

-ný

Úloha ke stému výročí turistického značení cest v českých zemích

Se značením cest pro turisty se u nás začalo v roce 1888. V pásovém označení se užívá čtyř barev — červené, modré, zelené a žluté. Představte si, že všech čtyř barev bylo použito k označení cest spojujících šest míst, které se jmenují *Borek*, *Milíře*, *Luh*, *Náhon*, *Rokle* a *Viklan*. Půjdeme-li po červené značce po celé její délce, pak po řadě projdeme místy Milíře, Rokle a Náhon; při chůzi podle modré od začátku do jejího konce postupně jdeme od Viklanu přes Milíře do Luhu; při sledování zelené se jde z Borku k Náhonu a pak do Luhu; konečně žlutá je vedena od Viklanu přes Rokli do Luhu. Přitom žádné dvě značky nemají společnou část trasy a křižují se, po případě na sebe navazují, jen v pojmenovaných místech, která jsme při popisu cest uvedli.

Načrtněte schematický plánek popsaných turistických cest. Potom nalezněte aspoň jednu okružní cestu, na níž se jde po všech možných barvách, přičemž se začíná červenou značkou, po žádné cestě se nejde dvakrát a jediné místo, do kterého se vracíme (a to pouze při ukončení cesty) je výchozí místo.

Jiří Mída

Úloha ze starého Ruska

Kdo byl *Lev Nikolajevič Tolstoj*, nemusíme snad připomínat. Právě letos v září se vzpomínalo 160. výročí jeho narození. Málo se ovšem ví, že měl po celý život zálibu v matematických úlohách, jejichž řešení vyžadovalo vtipné obraty.

V sovětských školách se dodnes pro zpestření výuky řeší úlohy, které jsou spojovány s Tolstého jménem. Uveďme nyní jednu, již měl velmi rád. Je také z prostředí, které mu, jako venkovskému šlechtici a statkáři, bylo velmi blízké.

Skupina sekáčů měla pokosit dvě louky, přičemž jedna z nich měla dvakrát větší rozlohu než druhá. Půl dne všichni sekali velkou louku společně. Potom se ženci rozdělili na dvě stejné skupiny. První část z nich za druhou polovinu dne do večera dosekala větší louku, druhá část sekala po tutéž dobu menší palouk a na další den zanechala pro jednoho sekáče práci na celý jeden den. Vypočtěte, kolik ženců sklízelo louky.

Úlohu jistě vyřešíte snadněji než Tolstoj, který neužíval rovnic. Mělo by vám vyjít, že počet sekáčů byl osm. Přesvědčte se o tom též zkouškou.

Návod: Zaveďte dvě neznámé: x je počet všech ženců, y je část louky, kterou poseče jeden sekáč za jeden den.

Jana Mídová

Logické úlohy

1. Při výslechu si vyšetřující zapsal:

a) A říká, že B lže.
b) B tvrdí, že C lže.
c) C vypovídá, že A i B lžou

Kdo tedy mluví pravdu?

2. V restauraci sedí u stolu 4 muži (dva a dva proti sobě): Novák, Procházka, Dvořák a Král. Jejich zaměstnání: úředník, redaktor, technik a spisovatel.

Naproti Novákovi sedí spisovatel.
Král je švagrem úředníka.
Úředník sedí vedle Nováka.
Král vypravuje, jak byli se spisovatelem a Procházkou na výstavě.
Redaktor má chatu vedle Nováka.

Dovedete podle těchto údajů určit, jak sedí muži u stolu a kdo má které zaměstnání?

Jindřich Pěnčík

Řešení všech matematických úloh rubriky „Z matematiky a fyziky ZŠ" budou v příštím čísle Rozhledů.

Omyly, které ovládly svět

Síla a pohyb

Omyl, který vám dnes předkládáme, je velmi starý. Nalezneme ho již ve spisu *Physica* význačného řeckého učence *Aristotela ze Stageiry*, který žil před 2400 lety.

Protože se však zdá být ve shodě s tzv. „zdravým selským rozumem," nedaří se ho dodnes z myslí nefyziků vykořenit. Místo všeobecného výkladu uvedeme jeden příklad. S jeho pomocí se můžete sami otestovat, zda jsou vaše představy o vztahu síly a pohybu správné či mylné.

Na obr. 1 je chlapec, který táhne vozík. Určitě si uvědomujete, že na vozík nepůsobí jen jeho síla, ale i několik dalších sil. Pro přehlednost si je vypíšeme a znázorníme šipkami do druhého schématického obrázku.

F_1 — tahová síla, kterou působí chlapec na vozík.
F_2 — přitažlivá síla, kterou působí na vozík Země.
F_3 — tlakové síly, kterými působí vozovka na vozík.

F_4 — brzdící síly, kterými působí na vozík povrch vozovky proti směru jeho pohybu.

F_5 — brzdící síla, kterou působí na vozík proti směru jeho pohybu okolní vzduch (tzv. odpor vzduchu).

Kromě těchto sil působí ještě např. magnetické pole Země na železné součástky vozíku, okolní vzduch nadlehčuje vozík vztlakovou (Archimédovou) silou a našli bychom jistě i další síly. Protože však velikosti těchto sil jsou podstatně menší než prvních pět vyjmenovaných, znázornili jsme do obrázku jenom je.

Nyní dvě otázky pro vás. Co můžete říci o výslednici všech sil působících na vozík v těchto dvou případech:

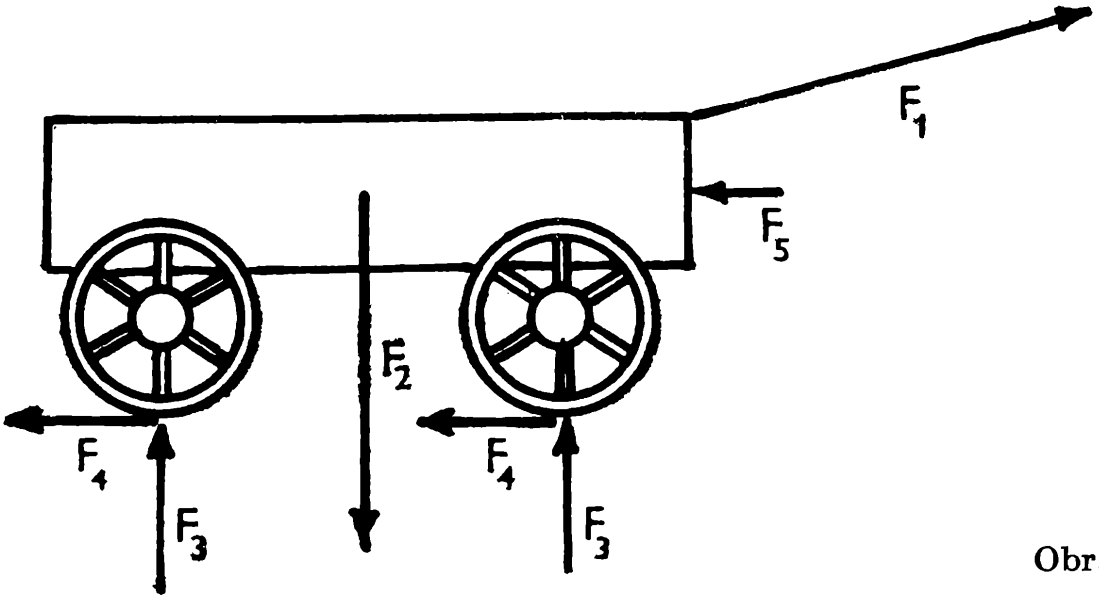
Vozík stojí nehybně na vozovce.
Vozík jede stálou rychlostí přímo vpřed.

Vyberte pro každý z uvedených případů jednu z odpovědí, které vám nabízíme:

a) Výslednice působících sil je sice nenulová, ale je tak malá, že nestačí vyvolat pohyb vozíku.
b) Působící síly se vzájemně ruší.
c) Výslednice působících sil míří kolmo k vozovce, a vozíkem proto po vozovce nehýbe.
d) Výslednice míří ve směru pohybu a má stálou velikost.

Pro případ nehybného vozíku jste jistě vybrali správně odpověď b). Pokud jste však ve druhém případě vybrali odpověď d), můžete se počítat

Obr. 1



Obr. 2

mezi stoupence Aristotelova učení o pohybu — správná je i v tomto případě odpověď b).

Již v 18. století anglický fyzik *Isaac Newton* objevil, že rovnoměrný přímočarý pohyb je pohybem bezsilovým, to je takovým, při kterém se vnější síly působící na pohybující se předmět vzájemně ruší. To, že ve svém okolí vidíme u každého rovnoměrného pohybu působení „hnací" síly, je svým způsobem optický klam. Pro dobře viditelné působení jedněch sil většinou zapomínáme nebo neoprávněně zanedbáváme další, méně nápadné síly, kterými je např. tření, odpor vzduchu aj. Přitom jde o síly, které nemusí být o nic menší než ty, které neoprávněně považujeme za hlavní.

Měli bychom si tedy zapamatovat, že síla není příčinou pohybu samotného, ale že je příčinou změn pohybu.

Úkol pro vás:

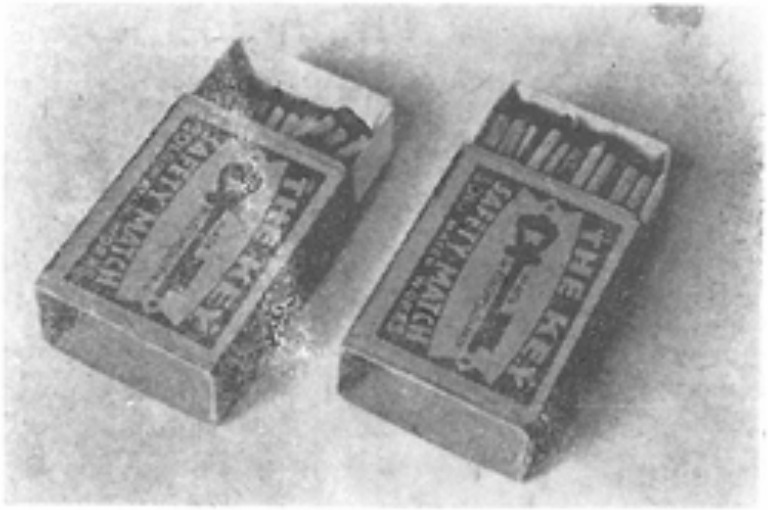
Vysvětlete, proč ve vyčerpané trubici peříčko padá rovnoměrně zrychleně, zatím co ve vzduchu se za okamžik jeho rychlost ustálí a pohyb pokračuje rovnoměrně.

Milan Rojko

Laboratoř doma

Pokusy bez receptu

Na pokusy, které budete tentokrát dělat, návody nedostanete. Ani potřebné pomůcky vám nemůžeme prozradit, protože mohou být tak různorodé, že k jejich vypsání nemusí stačit ani celá stránka. Ale dost tajností.



Připravte si dvě stejné krabičky zápalek a polovinu zápalek z jedné krabičky doplňte do druhé. Obě krabičky zamíchejte tak, abyste nevěděli, která je poloprázdná a která přeplněná.

Úkol pro vás:

Navrhněte a pokud můžete i vyzkoušejte co největší počet způsobů, kterými byste mohli zjistit krabičku s menším počtem zápalek. Nevylučujeme žádnou metodu s výjimkou metod destruktivních, tj. takových, které by měly za výsledek zničení krabičky se zápalkami. Snažte se, aby vaše řešení úkolu byla co nejvíce různorodá. I my při výběru nejlepších řešení budeme dávat přednost kvalitě před množstvím.

Milan Rojko

Úloha

Dva výsadkáři

Při leteckém dnu v Praze mohli návštěvníci sledovat dvojici výsadkářů při jejich seskoku. První vyskočila žena, okamžitě otevřela padák a po chvilce se už snášela rychlostí 6 m/s rovnoměrně k zemi.

Druhý výsadkář předvedl skok se zpožděným otevřením padáku. Jeho rychlost se zvětšovala až se posléze ustálila na hodnotě 60 m/s. Teprve

tehdy otevřel padák, který prudce zbrzdil jeho rychlost, takže potom padal stálou rychlostí 7 m/s. Když se oba výsadkáři před seskokem vážili, ukázaly váhy u výsadkářky hmotnost 70 kg (s úplnou výstrojí, včetně padáku), výsadkář s výstrojí vážil 90 kg. Hustota vzduchu je přibližně 1,3 kg/m^3, teplota vzduchu toho dne byla 18 °C, jeho relativní vlhkost 82 %. Průměr vrchlíků obou padáků byl stejný a měřil 9 m. Výsadkářce bylo 23 let a měla kolem krku obvod 33 cm. Výsadkář byl o dva roky starší a kolem krku měřil 41 cm . ..

Ale dost. Jistě jste už poznali, že jsme cestu k velmi jednoduchému řešení úkolu, který níže zadáváme, zamaskovali řadou nadbytečných údajů. Jestli jste však pozorně pročetli toto číslo časopisu, určitě řešení naleznete.

Úkoly pro vás:

1. Jak velkou silou brzdil vzduch pád výsadkářky s otevřeným padákem při rychlosti 6 m/s?
2. Jak velkou silou brzdil vzduch výsadkáře při pádu s uzavřeným padákem rychlostí 60 m/s?
3. Jak velkou silou brzdil vzduch pád výsadkáře s otevřeným padákem při rychlosti 7 m/s?

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu:

RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2. Za nejlépe zpracovaná řešení můžete jako odměnu získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Vánoce u matematických kutilů

JIŘÍ MANN, Dvůr Králové n. L.

Pořadové číslo letošního roku lze sestavit z cifer A, B, C, D, kde

$$A = 3^2 \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 9^2}{1^4 + 4^4 + 5^4}, \quad C = \frac{1^4 + 4^4 + 5^4}{1^4 + 2^4 + 3^4},$$

$$B = \sqrt[4]{14^3 + 14^2 + 34^2}, \quad D = \sqrt[4]{12^3 + 8^2 + 48^2}.$$

V celku pak, a to už je 1. úloha:

Do složeného zlomku

$$d = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

dosaďte za a, b, c čísla α) 1992, 990025, 980148510600, β) 2004, 248998, 61999755006, γ) 2037, 82645, 683011338, δ)2184, 22153, 49733256. Nalezení obecného vzorce vám umožní zapsat další trojice a, b, c s týmž d.

I v 2. úloze je skryto letošní datum.

$$86^2 - 72^2 - 15^2 + 1^2 = 87^2 - 73^2 - 16^2 + 2^2 = \ldots$$
$$150^2 - 143^2 - 8^2 + 1^2 = 151^2 - 144^2 - 9^2 + 2^2 = \ldots,$$
$$500^2 - 498^2 - 3^2 + 1^2 = 501^2 - 499^2 - 4^2 + 2^2 = \ldots,$$

Rozšíření vpravo je snadné, najděte však také 4. řádek.

3. Součet 3 přirozených čísel je o 366 menší než součet jejich čtverců; určete je.

4. Určete nejmenší přirozené číslo $k > 1$, pro které platí $1988 \mid k^3 + 12k^2 - 27k + 14$.

5. O velikostech úhlů α, β, γ v trojúhelníku ABC platí $6\alpha + 2\beta + 3\gamma = 366$, $9\alpha + 11\beta + 16\gamma = 1988$. Určete je.

6. Čtvrtina z 1988 zaměstnanců dostala prémie, a to asi 22 % počtu mužů a 29 % počtu žen. Určete, kolik mužů a kolik žen pracovalo v závodě.

7. Součet několika po sobě jdoucích přirozených čísel je 1988; určete je.

8. $$1988^2 + 1393^2 + 348^2 + 144^2 = 44^4 + 38^4 + 20^4 + 14^4,$$
$$1988^2 + 1296^2 + 1188^2 + 528^2 = 50^4 + 28^4 + 26^4 + 4^4,$$
$$1988^2 + 1500^2 + 1200^2 + 720^2 = 52^4 + 28^4 + 22^4 + 2^4,$$

Najděte pokračování této hříčky.

9. Hříček se smíšenými čísly takových, jako je následující, sestavíte jistě dost:

$$29\frac{1}{366} \,.\, 1988\frac{1}{29} \,.\, 366\frac{1}{1988} =$$

$$= 29\frac{1}{366} + 1988\frac{1}{29} + 366\frac{1}{1988} + 29 \,.\, 366 \,.\, 1988 +$$

$$+ \frac{1}{29} \cdot \frac{1}{366} \cdot \frac{1}{1988} \,.$$

10. Také sami sestavte hříčku z čísel, jako jsou

$$\sqrt{1 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 8}, \quad \sqrt{1 + 9 \,.\, 8 + 8}, \quad (1 - 9) : 8 + 8, \ldots.$$

Tím v podstatě končí tento článek. Příští rok končí na

$$11\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 11\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{3}\right)^2$$

případně — jistě vám to stačí — na

$$\sqrt[3]{1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3}\,.$$

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. V krabičce ležely sirky. Jejich počet zdvojnásobili a potom odebrali 8 sirek. Počet sirek, které v krabičce zbyly potom, opět zdvojnásobili a znovu odebrali 8 sirek. Poté, co tato operace byla provedena potřetí, v krabičce nezůstalo nic. Kolik sirek bylo původně v krabičce?

2. Řešte následující číselný rébus; přitom za písmeno X je možno na různých místech dosazovat různé hodnoty, avšak za písmeno A je nutno dosazovat všude stejnou cifru a rovněž tak za písmeno K. Navíc musí platit $K \neq A$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
X & X & X & X & X & X & X & X & K \\
 & & & & & & & \cdot & K \\
\hline
A & A & A & A & A & A & A & A & A
\end{array}$$

3. Co je možno říci o bodech A, B, C v rovině, víme-li, že pro každý bod M roviny délka úsečky AM je menší než alespoň jedna z délek úseček BM, CM?

4. Sáša a Gríša často jezdili po lesní cestě od jednoho konce lesa k druhému. Jednoho dne Gríša ujel 2 kilometry po lese a potkal Sášu, jak spravuje kolo. Popovídali si o škole a Gríša jel dále. Když dosáhl druhého okraje lesa, uvědomil si, že od vjezdu do lesa uplynulo 24 minut. Obrátil se, jel zpátky a po 2 kilometrech opět potkal Sášu, jak opět spravuje kolo, ale tentokrát na jiném místě. „Kolik jsi s tím svým kolem ujel?" zeptal se Gríša. „Jen 900 metrů" odpověděl Sáša. Určete délku trvání jejich prvého rozhovoru, víte-li, že Gríša jezdil po lese rychlostí 10 kilometrů za hodinu.

5 (obtížnější). Z cifer 1, 2, . . . , 7 vzatých v různém pořadí je sestaveno sedm sedmimístných čísel. Dokažte, že součet sedmých mocnin některých z těchto čísel se nemůže rovnat součtu sedmých mocnin zbývajících z těchto čísel.

Tomáš Schütz

Procvičte si představivost

V předešlém čísle Rozhledů byla pod stejným názvem uveřejněna úloha o natření dutého hranolu **H** modrou barvou a slepení modré duté krychle **K**. Uveďme řešení této úlohy.

Má-li být hranol **H** dutý, pak zřejmě $n \geqq 3$. Totiž pro podstavnou hranu délky 1 nebo 2 nemůže mít v sobě dutinu; pro $n = 3$ dutý již být může.

Prohlédněme si hranol **H** po natření modrou barvou. Uvnitř jeho stěn je celkem

$$4 . (n - 2) . (6n - 2) + 2 . (n - 2)^2 = 26n^2 - 64n + 24$$

malých krychlí; ty mají natřenu jen jednu stěnu. Právě dvě stěny má modré

$$2 . 4 . (n - 2) + 4 . (6n - 2) = 32n - 24$$

malých krychlí. Tři stěny byly natřeny u „vrcholových" krychlí, kterých je osm.

Podívejme se nyní na krychli **K**. Má také osm „vrcholových" krychlí. „Hranových" krychlí je celkem

$$12 . (2n - 2) = 24n - 24$$

a „stěnových" celkem

$$6 \,.\, (2n - 2)^2 = 24 \,.\, (n - 1)^2 \,.$$

Z hranolu H tedy přebývá $8n$ „hranových" krychlí, které mají natřené právě dvě stěny; při lepení krychle K jich užijeme jako „stěnové". Máme-li slepit modrou krychli K bez dalšího nátěru, pak musí platit

$$(26n^2 - 64n + 24) + 8n = 24 \,.\, (n - 1)^2 \,.$$

Poslední rovnice má jediné kladné řešení $n = 4$. Hranol H měl tedy podstavné hrany o délce 4 a výšku 24; krychle K má hranu o délce 8. O správnosti tohoto řešení se přesvědčte zkouškou.

Pro čtenáře, jež úloha o hranolu H a krychli K zaujala, uvádíme úlohu, kterou řešili účastníci soutěže Rozhledů v 61. ročníku. Úloha zní:

Představte si, že máte krychli o hraně délky a cm, kde a je přirozené číslo. Tuto krychli rozřežeme na krychle, z nichž každá má hranu o délce 1 cm. Zjistěte, pro která čísla a se podaří ze všech získaných jednotkových krychlí slepit krychli, která má hranu délky $2a$ cm a má uvnitř dutinu, jež však nemusí mít tvar krychle.

[Řešením je každé přirozené číslo $a \geqq 23$.]

Poznámka.

Ve 33. ročníku matematické olympiády se řešila v kategorii C velmi podobná úloha úloze o hranolu H a krychli K. Dutá však byla jen krychle K a při jejím slepování se nemuselo použít všech malých krychlí.

-jm-

NAŠE SOUTĚŽ

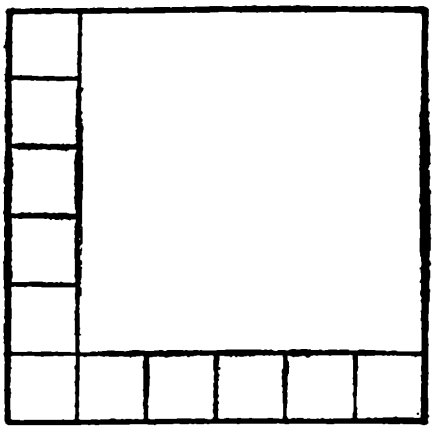
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

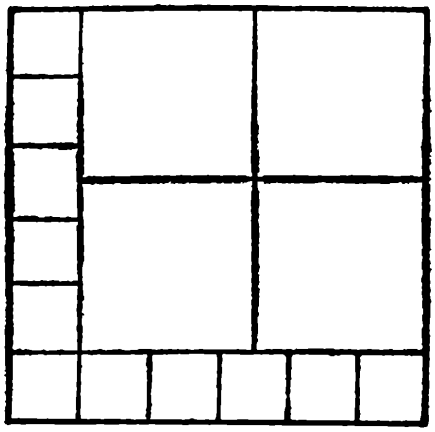
5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 4$, $n \neq 5$ je možno rozdělit každý čtverec na n menších čtverců nejvýše dvou různých velikostí.

(Došlo 8 řešení.) *Milan Koman*

Autorovo řešení: Je-li n sudé, odřízneme od daného čtverce $n - 1$ shodných čtverců rozmístěných podél jeho dvou stran, např. levé a dolní (obr. 1, kde $n = 12$). Délky jejich stran se rovnají dvojnásobku



Obr. 1



Obr. 2

$\frac{1}{n}$ strany daného čtverce. Těchto $n - 1$ čtverců spolu se zbylým čtvercem při pravém horním rohu dává pro sudé n hledané řešení.

Je-li n liché ($n > 5$), odřízneme podobným způsobem od daného čtverce $n - 4$ čtverců, které rozmístíme podél dvou stran původního čtverce (obr. 2, kde $n = 15$). Zbylý čtverec při pravém horním rohu rozdělíme na čtyři shodné čtverce. Tím dostaneme řešení i pro lichá $n > 5$.

Poznámka. Úloha 5 je zobecněním soutěžní úlohy matematické olympiády kategorie Z7 z II. kola 36. ročníku. V ní měli soutěžící rozdělit aspoň dvěma různými způsoby daný čtverec na 27 menších čtverců dvou různých velikostí.

6. V jednom malém království chtěl král jmenovat nového velitele Královské gardy. Velitelem se měl stát ten muž, který nejdříve vypočítá, kolik členů má Královská garda. Král všem uchazečům sdělil, že gardu tvoří 7 praporů. Celá garda nastupuje denně ráno na nádvoří královského hradu do obdélníkového útvaru. Jeho strany tvoří každý den jiný prapor. Během týdne se tak na stranách útvaru vystřídá každý člen gardy právě jednou. Nejchytřejší z uchazečů však prohlásil, že mu tyto údaje nestačí. Král proto ještě uvedl, že počet členů gardy je násobkem pouze dvou různých prvočísel. To už tomu to nejchytřejšímu uchazeči stačilo, aby se stal novým velitelem Královské gardy. Kolik příslušníků měla Královská garda?
(Došla 2 řešení.) *Milan Koman*

Řešení 1. (Podle *M. Velešíka, Brno*). Počet lidí v každém praporu označíme x. Celkový počet členů gardy je $7x$, tzn. násobek čísla 7. Počty osob na stranách obdélníku, ve kterém nastupuje garda, označme a, b.

Na jeho obvodu je $2 . (a + b - 2)$ lidí. Každý prapor stojí někdy na obvodu, proto je

$$x = 2 . (a + b - 2) . \tag{1}$$

V každém praporu, a tedy i v celé gardě je sudý počet osob. Celkový počet členů gardy musí být proto násobkem čísel 7 a 2. Protože počet členů gardy je podle zadání násobkem pouze dvou prvočísel, lze tento počet napsat ve tvaru $2^m . 7^n$, kde m, n jsou vhodná přirozená čísla.

Počet členů gardy je

$$7x = a . b .$$

Dosadíme za x z rovnosti (1):

$$14 . (a + b - 2) = a . b .$$

Tuto rovnost upravíme na tvar

$$(a - 14) . (b - 14) = 12 . 14 . \tag{2}$$

Ukážeme, že oba činitelé na levé straně (2) musí být kladní. Čísla a, $b \geqq 2$. Kdyby byli oba činitelé na levé straně (2) záporní, bylo by

$$-12 \leqq a - 14 < 0 , \qquad -12 \leqq b - 14 < 0$$

neboli

$$0 < -(a - 14) \leqq 12 , \qquad 0 < -(b - 14) \leqq 12 . \tag{3}$$

Vynásobením nerovností (3) pak dostaneme

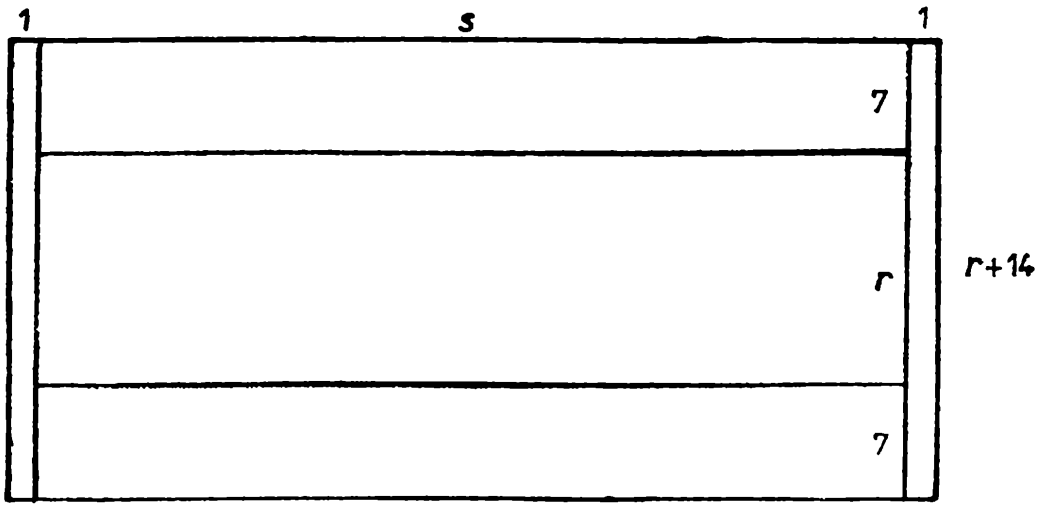
$$0 < (a - 14) . (b - 14) \leqq 12 . 12 ,$$

ale to je spor s rovností (2). Tedy oba činitelé na levé straně (2) jsou kladné. Vzykoušíme všechny možnosti rozkladu $12 . 14 = 168$ na dva činitele a vypočteme příslušná a, b. Vyhovovat budou jen taková a, b, která jsou současně součinem mocnin čísel 2 a 7.

$a - 14$	$b - 14$	a	b	Poznámka
1	168	15	182	nevyhovuje
2	84	16	98	*vyhovuje*: $ab = 2^5 . 7^2$
3	56	17	70	nevyhovuje
4	42	18	56	nevyhovuje
6	28	20	42	nevyhovuje
7	24	21	38	nevyhovuje
8	21	22	35	nevyhovuje
12	14	26	38	nevyhovuje

Podmínce úlohy vyhovuje pouze možnost $a = 16$, $b = 98$, $a . b = 2^5 . 7^2 = 1568$. Královská garda měla tedy 1568 vojáků.

Řešení 2. Aspoň jedna strana obdélníku, ve kterém nastupuje garda, musí být větší než 14. (V opačném případě by nemohlo být v celém



Obr. 3

obdélníku 7krát více osob než na jeho obvodu.) Útvar rozdělíme na pět obdélníků (obr. 3): dva obdélníkové útvary $(r + 14) \times 1$, dva obdélníkové útvary $s \times 7$ a jeden obdélníkový útvar $r \times s$. Má-li být splněna podmínka úlohy, musí být v obdélníku $r \times s$ šestkrát více osob než v obou obdélnících $(r + 14) \times 1$ dohromady. Tedy

$$12 \,.\, (r + 14) = r \,.\, s \,.$$

Po úpravě dostaneme

$$s = 12 + \frac{12 \,.\, 14}{r} \,.$$

Má-li být s celé číslo, musí r dělit součin $12 \,.\, 14 = 168$. Vyšetřením všech možností (je jich 16) dojdeme ke stejnému výsledku jako v řešení 1.

Fyzika

1. Vypočítejte podle rovnice van der Waalsovy tlak kysličníku uhličitého o hmotnosti 1,1 kg uzavřeného v bombě o objemu 20 l při teplotě $t = 13$ °C. Výsledek srovnejte s tlakem ideálního plynu za stejných podmínek.

(Univerzální plynová konstanta $R = 8{,}314\ 41\ \mathrm{J\,.\,mol^{-1}\,.\,K^{-1}}$, van der Waalsovy konstanty pro kysličník uhličitý $a = 0{,}365\ 4\ \mathrm{J\,.\,m^3\,.\,mol^{-2}}$, $b = 42{,}81\ .\ 10^{-6}\ \mathrm{m^3\,.\,mol^{-1}}$.)

(Došlo 13 řešení.)

Eva Havránková

Upravené řešení Petra Duczynského ze 3. G gymnázia v Nové Pace:

a) Výpočet tlaku kysličníku uhličitého, pokládáme-li ho za ideální plyn.

Platí stavová rovnice $pV = nRT$ (p je tlak, V objem, R univerzální

plynová konstanta, T absolutní teplota, n počet molů). Počet molů $n = m/M_m$ (m je hmotnost, M_m molární hmotnost); $n = 1100/44 = 25$. Pro tlak plynu platí

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{25 \,.\, 8{,}314 \,.\, (273 + 13)}{20 \,.\, 10^{-3}} \text{ Pa} \doteq 2{,}97 \,.\, 10^6 \text{ Pa} \,.$$

b) Výpočet tlaku kysličníku uhličitého, pokládáme-li ho za van der Waalsův plyn.

Vyjdeme z van der Waalsovy stavové rovnice pro jeden mol plynu

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot (V_m - b) = RT \,,$$

kde V_m je molární objem plynu, n molů plynu má objem $V = nV_m$. Význam p, V, R, T, n je stejný jako u stavové rovnice ideálního plynu, a, b jsou van der Waalsovy konstanty.

Dosadíme za $V_m = V/n$ a vynásobíme n; po úpravě dostaneme

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right) \cdot (V - nb) = nRT \,.$$

To představuje van der Waalsovu rovnici pro n molů plynu.
Pro tlak plynu pak platí

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} =$$

$$= \frac{25 \,.\, 8{,}314 \,.\, (273 + 13)}{20 \,.\, 10^{-3} - 25 \,.\, 42{,}81 \,.\, 10^{-6}} - \frac{0{,}3654 \,.\, 25^2}{(20 \,.\, 10^{-3})^2} =$$

$$= (3{,}14 \,.\, 10^6 - 0{,}57 \,.\, 10^6)\text{Pa} \doteq 2{,}57 \,.\, 10^6 \text{ Pa} \,.$$

Tlak vypočtený pro van der Waalsův plyn je v uvedeném případě menší asi o 15 % než tlak vypočtený pro plyn ideální. Zmenšení tlaku je způsobeno existencí kohézního tlaku $a \,.\, n^2/V^2$.

2. Tenká skleněná čočka je ve vzduchu spojkou s optickou mohutností 6 dioptrií. Ponoříme-li ji do kapaliny, stane se rozptylkou s optickou mohutností — 1 dioptrie. Vypočítejte index lomu této kapaliny. Index lomu skla uvažujte rovný 1,5.
(Došlo 10 řešení.)

Eva Havránková

Řešení Petra Duczynského ze 3. G gymnázia v Nové Pace:

Označme optickou mohutnost čočky ve vzduchu φ_1, v kapalině φ_2, index lomu skla n_1, index lomu dané kapaliny n_2, poloměry křivosti čočky r_1, r_2.

Pro mohutnost čočky ve vzduchu a v kapalině platí:

$$\varphi_1 = (n_1 - 1) \,.\, (1/r_1 - 1/r_2) \tag{1}$$

$$\varphi_2 = ((n_1/n_2) - 1) \,.\, (1/r_1 - 1/r_2) \tag{2}$$

Vydělením rovnice (2) rovnicí (1) ($\varphi_1 \neq 0$) dostaneme

$\varphi_2/\varphi_1 = [(n_1/n_2) - 1]/(n_1 - 1)$ a odtud vztah pro n_2;

$n_2 = n_1/[(1 + (n_1 - 1)\varphi_2/\varphi_1] \doteq 1{,}6$.

Index lomu kapaliny je přibližně 1,6.

OLYMPIÁDY A SOČ

19. mezinárodní fyzikální olympiáda

Doc. RNDr. ing. DANIEL KLUVANEC, CSc.,—RNDr. IVO VOLF, ÚVFO

Ve dnech 23. června až 2. července 1988 proběhla v lázeňském městečku *Bad Ischl* v Rakousku 19. mezinárodní fyzikální olympiáda, kterou organizovalo ministerstvo vzdělávání, umění a sportu Rakouské spolkové republiky. Soutěž byla organizačně i materiálně perfektně zajištěna. Vysokohorské prostředí malého města bylo velmi vhodně zvoleno — v okolí byla vysokohorská jezera a alpský pás s nejvyšší horou *Dachstein* (2993 m n. m.), nebylo daleko ani do *Salzburgu*. Soutěžícím tak bylo poskytnuto klidné prostředí k práci a pro volný čas připravili rakouští hostitelé hodnotný kulturní i turistický program. Soutěžící byli ubytováni v exkluzivním internátě střední školy pro povolání cizineckého ruchu, stravovali se v menze školy.

Soutěže se zúčastnila družstva z 27 zemí ze čtyř kontinentů: Austrálie, Bulharsko, Spolková republika Německa, Německá demokratická republika, Finsko, Island, Itálie, Kanada, Kolumbie, Kuba, Kuvait, Nizozemí, Norsko, Rakousko, Polsko, Rumunsko, Švédsko, Sovětský svaz, Československo, Spojené státy americké, Vietnam, Kypr, Belgie, Čína, Velká Británie, Jugoslávie, Maďarsko. Všechna družstva měla po pěti účastnících, výjimku činila družstva Kypru, Kolumbie a Belgie (4 účastníci). Celkový počet soutěžících činil 132. Pozorovatele na 19. MFO měl Írán, Dánsko, Španělsko (předpokládá se, že příští rok se zúčastní soutěže). Přítomen byl také zástupce Uneska.

Na 19. mezinárodní fyzikální olympiádě byly připraveny velmi zajímavé, avšak dosti náročné fyzikální úlohy, které vyžadovaly do značné míry (s výjimkou úlohy 2) poznatky ze 4. ročníku gymnázia, takže účastníci z nižších ročníků byli handicapováni. Úloha 1 se zabývala spektroskopií rychlosti částic pomocí Dopplerova jevu, přičemž se bralo v úvahu řešení klasické i relativistické. Úloha 2. řešila problém Maxwellova kyvadla. Ve 3. úloze byl studován proces rekombinace iontů při výboji v plynech, přičemž bylo nutno uvážit Heisenbergovy relace neurčitosti. Další dvě úlohy byly experimentální — 4. úloha se zabývala studiem jevů při použití polarizovaného světla, 5. úloha představovala stanovení výstupní práce elektronu v klasické diodě.

Obtížnost úloh charakterizují mj. i výsledky. Maximální dosažený počet bodů byl 39,38 z celkového počtu 50 možných bodů. Zajímavost úloh vynikne při jejich řešení, neboť úlohy charakterizuje spojení s moderní fyzikou. Teoretické úlohy vyžadovaly poznatky z teorie relativity i kvantové fyziky. Experimentální úlohy měly dosti obtížnou část teoretickou, náročné bylo i praktické měření a většina soutěžících tyto úlohy nedokončila. Nejhůře dopadly úlohy 3, 4, 5, a to u většiny soutěžících. Obtížnost potvrzuje i to, že diskuse o textech úloh teoretických i praktických trvala v mezinárodní komisi (bez překladů) vždy asi 8 h. Texty pak byly zpracovány na počítači (včetně změn a doplňků) a vedoucí delegací obdrželi oficiální texty úloh v ruské a anglické verzi. Opravy řešení byly velmi korektní, korektoři se vyznačovali pečlivostí, objektivností, ale také zásadovitostí.

Nejlepší výsledek britského účastníka *Conrada McDonnella* stanovil i meze pro úspěšnost na 19. MFO a jednotlivé ceny. Hranicí úspěšnosti bylo 19,00 bodů; účastníci, kteří dosáhli menšího hodnocení (celkem 46 účastníků), obdrželi potvrzení o účasti na 19. MFO. 27 účastníků obdrželo pochvalné uznání jako úspěšní řešitelé, 29 účastníků získalo III. cenu — bronzovou medaili a kapesní kalkulátor, 22 účastníků II. cenu — stříbrnou medaili a digitální měřicí přístroj. První cenu — zlatou medaili a kapesní počítač — si odváželo 7 účastníků 19. MFO. Za nejlepší řešení každé úlohy byla udělena zvláštní cena.

Československé družstvo odjelo do Bad Ischl pod vedením doc. dr. ing. Daniela Kluvance, CSc., předsedy ÚVFO, a dr. Ivo Volfa, 1. místopředsedy ÚVFO. Soutěžící byli vybráni na základě mnoha kritérií ze širšího výběru, který prošel řadou soustředění. 19. MFO se zúčastnili:
David Maxera, žák 4. ročníku gymnázia v Praze, Hellichova ul.,
Tibor Bartoš, žák 4. ročníku gymnázia v Bratislavě, Červenej armády,
Katarína Kis Petiková, žákyně 4. ročníku gymnázia-maď. v Komárně,
Zbyněk Vašata, žák 3. ročníku gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové,
Radek Vystavěl, žák 4. ročníku gymnázia v Prostějově.
Náhradníkem družstva byl *Tomáš Brodský*, žák 3. ročníku gymnázia v Brně, kpt. Jaroše. Ještě ve dnech 12. až 17. června 1988, týden před

soutěží, bylo uskutečněno soustředění úzkého výběru, které bylo zaměřeno na speciální přípravu na soutěž. A jak jsme dopadli?

Radek Vystavěl se umístil na 21. místě, dosáhl 31,25 bodu a získal II. cenu, Tibor Bartoš byl na 40. místě, dosáhl 28,38 bodu a získal III. cenu, David Maxera byl na 58. místě, dosáhl 25,00 bodů a získal III. cenu, Katarína Kis Petiková byla na 66. místě z 86 úspěšných řešitelů (a jako jediná úspěšná dívka 19. MFO — ostatních 5 účastnic bylo neúspěšných v soutěži — dvě z Kuvaitu, dvě z Islandu, jedna z Velké Británie), získala 23,75 bodů a pochvalné uznání. Zbyněk Vašata byl na 101. místě, dosáhl 15,00 bodů a nebyl v soutěži úspěšný. V neoficiální soutěži družstev byla na prvních místech družstva Rumunska a Sovětského svazu, Maďarska, NSR a Číny, naše družstvo zůstalo na 13. místě mezi sedmi družstvy, jejichž výsledky se lišily o 6 %.

Menší úspěch našich soutěžících oproti minulým rokům vidíme v tom, že do soutěže byly zadány poměrně obtížné úlohy, především nezvyklého zaměření, jež svou tematikou vybočovaly z obvyklých kolejí středoškolské fyziky. Úlohy měly velmi dlouhé texty (v anglické verzi měly teoretické úlohy 8 stran, experimentální úlohy dokonce 11 stran). V podstatě tři úlohy byly z učiva 4. ročníku, a tak náš třeťák v nich neuspěl. Úloha s použitím Heisenbergových relací neurčitosti dopadla všeobecně špatně. Stejně tomu bylo s úlohou o polarizovaném světle (využívalo se jako polarizátoru zrcadla a Brewsterovy podmínky, jako analyzátor měli soutěžící polaroidovou fólii). Přesto se však domníváme, že bylo v silách našich soutěžících dosáhnout o 4 až 5 bodů více, a tak v hodnocení družstev posunout výsledek značně kupředu. V letošním roce je třeba vyzdvihnout osobní vlastnosti našich soutěžících. Vcelku můžeme hodnotit účast našeho družstva na 19. mezinárodní fyzikální olympiádě kladně — naše pětice soutěžících získala lepší výsledky než v leckterém sportu, a to při výdajích na přípravu nesporně mnohokrát menších.

Kalendár M-F: december 1988

4. 12. 1798 v Bologni zomrel *Luigi Galvani*, taliansky prírodovedec a lekár. Položil základy elektrofyziológie.
4. 12. 1893 zomrel *John Tyndall*, írsky fyzik. Študoval optické vlastnosti roztokov, vysvetlil modrú farbu oblohy i červenkasté sfarbenie Mesiaca a Slnka pri východe i západe.
4. 12. 1978 zomrel *Samuel Abraham Goudsmit*, americký fyzik holandského pôvodu. Prispel k zavedeniu elektrónového spinu.

5. 12. 1968 sa v Königsbergu (dnes Kaliningrad) narodil *Arnold Sommerfeld*, nemecký fyzik a matematik. Rozpracoval teóriu atómu, zaviedol tri kvantové čísla. V matematike našiel integrálny tvar cylindrických funkcií.

5. 12. 1903 sa v Tonbridge narodil *Cecil Frank Powell*, anglický fyzik. Skúmal kozmické žiarenie, objavil pí-mezón. Za fotografické metódy skúmania jadrových procesov získal v roku 1950 Nobelovu cenu za fyziku.

5. 12. 1923 sa v Iliji pri Banskej Štiavnici narodil *Štefan Veis*, slovenský fyzik. Prispel k rozvoju fyziky plazmy. Vydal monografiu „Magnetohydrodynamické generátory".

6. 12. 1778 sa v Saint-Léonard narodil *Louis Joseph Gay-Lussac*, francúzsky fyzik a chemik. Študoval vlastnosti plynov, zistil závislosť objemu plynu od teploty pri konštantnom tlaku. Prispel k zavedeniu molekulových vzorcov pre zápis chemických reakcií.

6. 12. 1973 zomrel *Robert Alexander Watson-Watt*, americký fyzik škótskeho pôvodu. Skonštruoval prvý radarový systém.

7. 12. 1823 sa v Liegnitzi narodil *Leopold Kronecker*, nemecký matematik. Zaslúžil sa o systematizáciu algebry, teóriu eliptických funkcií a teóriu čísel.

9. 12. 1883 sa v Tomsku narodil *Nikolaj Nikolajevič Luzin*, sovietsky matematik. Vytvoril významné práce z teórie množín a teórie reálnych funkcií. Založil tzv. moskovskú matematickú školu.

13. 12. 1603 v Paríži zomrel *Francois Viète*, francúzsky matematik a právnik. Vytvoril základy teórie algebraických rovníc, prispel k zavedeniu symbolickej algebry.

13. 12. 1923 sa narodil *Philipp Wassen Anderson*, americký fyzik. Za teoretický výskum elektrónovej štruktúry magnetických a neusporiadaných sústav získal v roku 1977 spolu s N. F. Mottom a J. H. van Vleckom Nobelovu cenu.

15. 12. 1958 v Zürichu zomrel *Wolfgang Pauli*, švajčiarsky fyzik rakúskeho pôvodu. Skúmal štruktúru elektrónového obalu atómovych jadier a stanovil vylučovací princíp. Predvídal existenciu neutrina.

17. 12. 1778 sa v Penzance narodil *Humphrey Davy*, anglický chemik a fyzik. Objavil sedem prvkov, demonštroval elektrický oblúk, skonštruoval bezpečnostnú banícku lampu.

17. 12. 1973 zomrel *Charles Greeley Abbot*, americký astrofyzik. Skúmal rozloženie energie v slnečnom spektre, určil slnečnú konštantu.

18. 12. 1849 v Praze zomrel *Bernard Bolzano*, matematik a logik. Spresnil definície dôležitých pojmov z teórie reálnych čísel a teórie funkcií. Formuloval niektoré základné pojmy a vzťahy matematickej logiky.

19. 12. 1843 sa narodil *Marcel Depréz*, francúzsky elektrotechnik a fyzik. Zriadil prvé diaľkové elektrické vedenie. Spolu s J. A. d'Arsonvalom vytvoril elektromagnetický galvanometer.

19. 12. 1953 zomrel v San Marine (USA) *Robert Adrews Millikan*, americký fyzik. Skúmal kozmické žiarenie a stavbu atómov. Zmeral náboj elektrónu, objasnil premenu svetelnej energie na elektrickú.

21. 12. 1878 sa vo Lvove narodil *Jan Lukasiewicz*, poľský matematik a logik. Prispel k viachodnotovej logike a formalizácii výrokovej logiky.

22. 12. 1828 zomrel *William Hyde Wollaston*, anglický prírodovedec, lekár. Zaoberal sa optikou, astronómiou, kryštalografiou. Objavil paládium a ródium, skonštruoval refraktomer.

22. 12. 1898 sa v Petrohrade narodil *Vladimír Alexandrovič Fok*, sovietsky teoretický fyzik. Dosiahol vedecký výsledky v oblasti kvantovej mechaniky a elektrodynamiky i v teórii difrakcie svetla.

23. 12. 1973 zomrel *Gerard Peter Kuiper*, americký astronóm holandského pôvodu. Zaoberal sa planetárnou astronómiou, objavil piaty mesiac Uránu Mirandu a druhý mesiac Neptúna Nereidu.

24. 12. 1818 sa v Salforde narodil *James Prescott Joule*, anglický fyzik. Určil mechanický ekvivalent tepla. Prispel k rozvoju termodynamiky. Je jedným z objaviteľov zákona zachovania a premeny energie.

28. 12. 1663 zomrel *Francesco Maria Grimaldi*, taliansky fyzik a stronóm. Študoval svetelné javy, vlnovú teóriu svetla.

28. 12. 1903 sa v Budapešti narodil *John von Neumann*, americký matematik a kybernetik. Rozvinul matematický aparát kvantovej mechaniky. Zasiahol do mnohých matematických disciplín. Napr.: teória miery, topológia, teória automatov, funkcionálna analýza, matematická logika.

31. 12. 1913 zomrel *Seth Carlo Chandler*, americký astronóm. Objavil periódu pohybu zemského pólu.

dj

REDAKČNÍ KRUH

Doc. dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava, dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha,; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Jan Neruda a metrická soustava

Novoty se nevžívají snadno a často se musí vystřídat celé generace, než si široká veřejnost zvykne a vnitřně se smíří s novým stavem věcí. Tak se u nás postupně prosazuje hmotnost sýrů nebo přívěsů automobilů, malé děti se naučily z televize používat hektopascaly a slovanskou vteřinu nahradila internacionální sekunda (i když nám zůstala alespoň vteřina úhlová a v poezii vteřina ticha či vteřiny lásky). Nevíme si rady s výrazem váha a nezvykli jsme si dosud na nadhmotnost u pacientů (není ostatně jasné, zda zdravotní potíže působí nadbytečná hmotnost nebo tíha pacienta), případně na boxery těžké hmotnosti.

Jan Neruda měl velmi blízký vztah k přírodním vědám a jejich popularizaci. Při tvorbě Písní kosmických se inspiroval nejen novými poznatky astronomie, ale zaujala ho i skutečnost, že krevní barvivo hemoglobin obsahuje železo. Dnešní vědeckotechnický pokrok by ho jistě podnítil nejen k tvorbě poetické, ale i k nejednomu humornému či kousavému fejetonu. Svědčí o tom jeho fejeton „Nové míry" (Národní listy 17. 10. 1875), který později zařadil do sbírky „Žerty hravé i dravé" Uchoval nám v něm dobové svědectví o pocitech veřejnosti při zavádění metrické soustavy měr a vah v tehdejším Rakousku-Uhersku (závazně od 1. 1. 1876).

Předně si nedovedl představit, že by se Češi mohli vzdát své holby piva a začít konzumovat tento národní nápoj v metrických půllitrech. Největší potíže však spatřoval v literatuře a lidové poezii. Říká-li například matka synáčkovi: „Počkej jen, až budu šest stop pod zemí, špendlíčkem budeš hrabat!", zní to jistě poetičtěji a jímavěji než v metrické soustavě „Počkej jen, až budu 1,896484 metru pod zemí . .!" Nedovedl si též představit, jak se bude zpívat česká posvícenská, kde například verš „po šesti korcích koláčů napekla žena" se bude muset upravit s ohledem na to, že český korec má 93,6098 litrů.

Nepřekonatelné problémy vzniknou podle Nerudy při překladech světové poezie a dramatu. Tak král Lear ve 4. dějství slavné Shakespearovy hry říká „Ba, každým coulem král " a upravený překlad bude nyní znít „Ba, každými 2 centimetry a 6,34008 milimetru král" Stejně tak žid Shylock v Kupci benátském se ušklíbá: „Aj, ptáte se, proč raděj libru mršiny chci, nežli tři tisíce dukátů?" V nové soustavě se budou muset herci vypořádat s pořádným oříškem, jak vyslovit „Aj, ptáte se, proč raděj 0,560060 kilogramu mršiny chci ?"

-ll

47 233

Řekli, napsali...

Svými názory i vědeckou prací byl Röntgen typickým představitelem klasické fyziky druhé poloviny minulého století. Přesto se mezi jeho současníky nenajde osobnost, která by více než on přispěla ke vzniku nové fyziky našeho století — fyziky elementárních procesů a elektronových jevů.

Abram Fjodorovič Ioffe (1880 — 1960)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.
Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1988.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 67, 1988/89
LEDEN
CENA 2 Kčs

(5)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:
Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:
Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:
Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Emil Calda: O Ludolfově čísle převážně vážně 177

Jiří Mída: O jednom pozoruhodném binárním kódu 179

Štefan Holienčík: Dva vzťahy v trojuholníku 183

Emil Kraemer: Möbiusovy čtyřstěny . 185

Eva Bittnerová: Fyzika v prírode – dýchanie pod vodou 188

D. Kluvanec, D. Kluvanec, ml.: Metóda obrazovej sústavy (MOSDAK) . 193

František Jáchim: Matematika středověké Indie a Pellova rovnice 199

Z matematiky a fyziky ZŠ 201

Přemýšlíme, řešíme 207

Naše soutěž 209

Olympiády a SOČ 214

Kalendár M–F 216

Z nových knih 218

Informace 220

Humory matematicko-fyzikální . 3. str. obálky

Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (125–128) příloha

MATEMATIKA

O Ludolfově číslu převážně vážně

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

S Ludolfovým číslem jsme se seznámili v hodinách matematiky již na základní škole, a to v souvislosti se vzorci pro délku kružnice a obsah kruhu. Toto seznámení bylo přitom velmi stručné: dověděli jsme se, že Ludolfovo číslo se značí řeckým písmenem π, že jeho přibližná hodnota je 3,14, případně $\frac{22}{7}$, a že má jméno po holandském matematikovi *Ludolfu van Ceulenovi*, který je v 17. století vypočetl na 35 desetinných míst. Teprve později jste poznali, že *číslo π je iracionální* a že je tedy nelze vyjádřit ve tvaru zlomku, jehož čitatel i jmenovatel jsou celá čísla. Odtud, jak víte, vyplývá, že desetinný rozvoj čísla π je neukončený a neperiodický, takže je neúplné i následující jeho vyjádření, byť na 40 desetinných míst:

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ldots$

Je velmi pravděpodobné, že tímto poznatkem jsou u většiny z vás znalosti o čísle π vyčerpány; nebude tedy na škodu, když si o něm řekneme více.

Vysvětlíme si nejprve *pojem algebraického čísla:* algebraické číslo je každé číslo, které je kořenem nějaké rovnice tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0\,,$$

kde n je celé kladné číslo a koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ jsou racionální čísla, $a_0 \neq 0$. Algebraickými čísly jsou např. čísla $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\mathrm{i}\sqrt{5}$ a $\sin\frac{\pi}{3}$, neboť ke každému z nich existuje rovnice výše uvedeného tvaru, jejímž je kořenem; jsou to pořadě tyto rovnice: $x^3 - 2 = 0$, $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 5 = 0$, $4x^2 - 3 = 0$. Snadno zdůvodníte, že mezi algebraická čísla patří také každé číslo racionální.

Čísla, která nejsou algebraická, se nazývají *transcendentní;* jsou to tedy čísla, která nejsou kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty. I když je v jistém smyslu — jak si ještě ukážeme — transcendentních čísel mnohem více než čísel algebraických, není tak jednoduché je nalézt. Několik transcendentních čísel objevil v polovině

19. století francouzský matematik *J. Liouville;* jedním z nich je číslo 0,10100100000010 . . ., které je utvořeno tak, že po první jedničce následuje jedna nula, po druhé jedničce je počet nul dán součinem 1 . 2, po třetí jedničce součinem 1 . 2 . 3, obecně po n-té jedničce následuje 1 . 2 . 3 . . . . . n nul. Teprve od konce minulého století víme, že je transcendentní i číslo e (základ přirozených logaritmů); v nedávné době bylo ukázáno, že ani číslo $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ není algebraické.

Otázka, kam zařadit číslo π, byla vyřešena v roce 1882, kdy německý matematik *Lindemann* dokázal, že *číslo π je transcendentní.* Tento výsledek je pozoruhodný i v tom směru, že ukončil více než dva tisíce let trvající nejistotu o tom, zda je možno provést kvadraturu kruhu, tj. sestrojit pouze pomocí pravítka a kružítka úsečku, která je stranou čtverce majícího týž obsah jako daný kruh. Z transcendentního charakteru čísla π vyplývá, že takováto konstrukce je neproveditelná.

Na základě uvedených příkladů by se mohlo zdát, že transcendentní čísla jsou vzhledem k číslům algebraickým jevem poměrně vzácným. Dá se však ukázat, že pravý opak je pravdou! Stačí k tomu vědět, že platí:

a) *množina všech komplexních čísel je nespočetná;*
b) *množina všech algebraických čísel je spočetná;*
c) *je-li spočetná množina* A *podmnožinou nespočetné množiny* B, *pak množina všech prvků z* B, *které nepatří do* A, *je nespočetná.*

Užitím těchto výsledků snadno zdůvodníte, že množina všech transcendentních čísel je nespočetná. Vztah mezi výskytem algebraických a transcendentních čísel lze poněkud volněji formulovat takto: algebraická čísla, s nimiž se ve škole setkáváme téměř neustále, jsou v porovnání s čísly transcendentními, které potkáváme jen málokdy, v naprosté menšině. Ale i když se s transcendentními čísly setkáváme poměrně zřídka, s jedním se potkáme určitě téměř všichni — s číslem π.

Závěrem se seznámíme s obdivuhodným objevem profesora Ypsilona, který ukazuje Ludolfovo číslo v souvislostech zcela neočekávaných a vystačí přitom pouze s několika prvními ciframi jeho desetinného rozvoje. Ukážeme si několik údajů, které jsou podle této hypotézy v čísle 3,1415926 . . . zašifrovány:

1. Ciferné skupiny 1415 a 1592 udávají pořadě rok upálení Mistra Jana Husa a rok narození J. A. Komenského.
2. Vynecháním vhodných cifer dostaneme skupiny 1126, 1526, 1459, které znamenají pořadě rok vítězství vojska českého knížete Soběslava I. nad německým králem Lotharem, rok nástupu Habsburků na český trůn, rok prvního výročí volby Jiřího z Poděbrad českým králem.
3. Počáteční cifra 3 udává počet všech tří Krokových dcer za předpokladu, že každé dvě z nich byly různé.

4. Skupina 314 určuje stáří Karlovy university v roce 1662.
5. Skupinu 3141 lze interpretovat jako součet čísel 631 (Sámovo vítězství u Vogatisburgu), 935 (zavraždění Václava), 1278 (bitva na Moravském poli) a 1422 (porážka 2. křižácké výpravy u Německého (Havlíčkova) Brodu zmenšený o číslo 1125 (úmrtí kronikáře Kosmy).

Ke svému objevu byl profesor Ypsilon inspirován 12. kapitolou knihy V. Zamarovského *Jejich veličenstva pyramidy* (Čs. spisovatel, Praha, 1975), ve které se pojednává o pyramidologii, tj. „nauce" o tom, kterak z rozměrů Velké pyramidy vyčíst všechny údaje, které do nich staří Egypťané údajně vložili. Pyramidologové např. „odhalili", že v Chufevově pyramidě je — nastojte! — ukryto i číslo π, a to v poměru obvodu její čtvercové podstavy a dvojnásobné výšky. Význam objevu profesora Ypsilona spočívá v tom, že k tomu, abychom získali některá data z české historie, není nutno cestovat do Egypta a provádět náročná měření na Velké pyramidě; stačí znát prvních několik cifer desetinného rozvoje čísla π.

O jednom pozoruhodném binárním kódu

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PeF UK v Praze

Známý román Julese Verna „Děti kapitána Granta" začíná vylovením lahve z moře, v níž jsou tři listiny podávající zprávu o ztroskotání Grantova trojstěžníku Britania Glasgow. Snadno se dalo zjistit, že jde o anglickou, francouzskou a německou verzi téhož textu. Listiny však byly poškozeny mořskou vodou, chyběly v nich i celé řádky. Kapitán Grant chtěl trojjazyčností dosáhnout, aby jeho výzva o pomoc byla srozumitelná většímu počtu nálezců. Kdyby počítal s poškozením listin, potom by bylo lépe, kdyby všechny listiny byly v témže jazyce. Byla-li by tímto jazykem francouzština, přičemž by byla k dispozici francouzská mapa, pak by byl Verneův román značně kratší. Brzo by se totiž zjistilo, že trosečníci jsou na ostrově, který se francouzsky nazýval Tabor, zatímco v angličtině a němčině se užívalo názvu ostrov Maria-Theresa.

Obdobná situace, k níž došlo při romantickém přenosu psaného textu v lahvi po moři, může nastat i při užití binárních kódů. U kódu z čl. [1] si ukážeme, že u něj lze opravit kódové slovo, z něhož vypadl jeden znak.

Tabulka 1 udává zobrazení desítkových číslic, jež jsou ve sloupci označeném v záhlaví d, na kódová slova, jimiž jsou uspořádané šestice nul a jedniček. V záhlaví nad kódovými slovy jsou pořadová čísla 1, 2, . . . , 6 bitů kódových slov. Přesvědčte se, že kódová slova v tab. 1

Tabulka 1

d	Kódové slovo 1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	0
4	1	1	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	1
6	1	0	1	1	0	1
7	1	1	0	0	1	1
8	0	1	1	1	1	0
9	1	1	1	1	1	1

mají vlastnost: Je-li (x, y, z, u, v, w) kódové slovo, pak součet $s = 1 . x + 2 . y + 3 . z + 4 . u + 5 . v + 6 . w$ je dělitelný sedmi. V článku [1] se hovořilo, jak lze opravit (korigovat) jednu chybu v kódovém slově za předpokladu, že žádná jednička není změněna na nulu anebo žádná nula na jedničku.

Chyba vniklá vypadnutím znaku se snadno zjistí — kódové slovo je kratší. Předpokládáme-li, že po vypadlém znaku nezůstala žádná mezera, pak určit, na kterém místě znak vypadl a zda šlo o 1 nebo o 0, není nijak jednoduché.

Původní slovo nechť je $X = (x, y, z, u, v, w)$, kde x, y, z, u, v, w jsou vesměs 0 nebo 1. Zkreslené slovo, které vzniklo z X, nechť je $Y = (a, b, c, d, e)$. Označme

$$s(X) = 1 . x + 2 . y + 3 . z + 4 . u + 5 . v + 6 . w ,$$
$$s(Y) = 1 . a + 2 . b + 3 . c + 4 . d + 5 . e .$$

Předpokládejme, že slovo Y vzniklo ze slova X vypadnutím znaku na k-tém místě počítáno ve slově X zleva (k-tý bit, $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$) a že na dalších místech vpravo od k-tého bitu bylo ve slově X právě n_0 nul a právě n_1 jedniček. Platí

$$0 \leqq n_0 \leqq 5 , \qquad 0 \leqq n_1 \leqq 5 , \tag{1}$$
$$k + n_0 + n_1 = 6 . \tag{2}$$

Dále označme $j(Y)$ počet jedniček ve slově Y. Potom platí

$$n_1 \leqq j(Y) \leqq 5 - n_0 ,$$

neboli

$$n_1 \leqq j(Y) < 6 - n_0 . \tag{3}$$

Dále rozlišíme dva případy.

1. Nechť slovo Y vzniklo ze slova X vypadnutím znaku 0. Pak každá z n_1 jedniček za k-tým bitem ve slově X má ve slově Y pořadové číslo menší o jedničku, takže

$$s(X) - s(Y) = n_1 . \tag{4}$$

Slovo X je kódové slovo z tab. 1. Číslo $s(X)$ je tedy násobkem sedmi. Z rovnosti (4) plyne, že $-s(Y)$ a n_1 dávají při dělení sedmi týž zbytek r. Pro číslo $-s(Y)$ tento zbytek samozřejmě umíme určit. Podle podmínky (1) pak $n_1 = r$.

2. Nechť slovo Y vzniklo ze slova X vynecháním jednoho znaku 1. Jestliže tento znak byl na k-tém místě zleva, pak

$$s(X) - s(Y) = k \,.\, 1 + n_1 \,,$$

po úpravě podle (2)

$$s(X) - s(Y) = 6 - n_0 \,.$$

Obdobně jako v odstavci 1. docházíme k závěru, že čísla $-s(Y)$ a $6 - n_0$ dávají při dělení sedmi týž zbytek r. Podle (1) $r = 6 - n_0$, takže $n_0 = 6 - r$.

Nyní již můžeme popsat postup při rekonstrukci slova X ze slova Y.

Nejprve určíme číslo $j(Y)$ a číslo $-s(Y)$. Potom vypočteme nezáporné celé číslo r, které je zbytkem při dělení čísla $-s(Y)$ sedmi. Mohou nastat dvě možnosti:

a) Nechť $r \leqq j(Y)$. Potom podle odstavce 1. a podle (3) položíme $r = n_1$ a vynechaný znak je 0. Kódové slovo X dostaneme vložením znaku 0 do slova Y tak, aby napravo od něj bylo n_1 jedniček.

b) Nechť $j(Y) < r$. Potom podle odstavce 2. a podle (3) položíme $r = 6 - n_0$, takže $n_0 = 6 - r$. Vypadl tedy znak 1. Kódové slovo X získáme vložením znaku 1 do slova Y tak, aby za ním napravo bylo n_0 nul.

Postupem, který jsme právě popsali, se získá ze slova Y vždy slovo X, pro něž je $s(X)$ násobkem sedmi. Toto slovo X je pak kódové slovo z tab. 1, neboť pro tento kód jsou jako kódová slova použity právě všechny uspořádané šestice (x, y, z, u, v, w) nul a jedniček, pro něž je součet $1 \,.\, x + 2 \,.\, y + 3 \,.\, z + 4 \,.\, u + 5 \,.\, v + 6 \,.\, w$ dělitelný sedmi.

Příklady:

1. Nechť $Y = 11011$. Potom $j(Y) = 4$, $s(Y) = 12$. Číslo -12 dává při dělení sedmi nezáporný zbytek 2, neboť $-12 = (-2) \,.\, 7 + 2$. Tedy $r = 2$. Protože $2 < 4$, je $n_1 = r = 2$. Do slova Y vložíme znak 0 tak, aby od něj vpravo byly dvě jedničky. Odtud plyne, že $X = 110011$, což je kódové slovo pro desítkovou číslici 7.

2. Nechť $Y = 00100$. Pak $j(Y) = 1$, $s(Y) = 3$. Pro $-s(Y) = -3$ platí $-3 = (-1) \,.\, 7 + 4$, tj. $r = 4$. Ovšem $1 < 4$, takže $r = 4 = 6 - n_0$, tj. $n_0 = 2$. Do slova Y vložíme jedničku tak, aby za ní napravo byly dvě nuly. Dostáváme tak $X = 001100$, tj. kódové slovo pro desítkovou číslici 3.

Kód z tab. 1 je velmi užitečný. Umožňuje řešit další problém, a to nalézt kódové slovo X ze sedmibitového slova Y, o němž víme, že vzniklo ze slova X vložením znaku 1 nebo 0.

Zavedeme obdobnou symboliku jako v případě vypadnutí některého znaku. Původní slovo X je šestibitové, $j(X)$ je počet jedniček v něm,

číslo $s(X)$ je dělitelné sedmi. Zkreslené slovo je $Y = (a, b, c, d, e, f, g)$, $j(Y)$ je počet jedniček ve slově Y a

$$s(Y) = 1 \,.\, a + 2 \,.\, b + 3 \,.\, c + 4 \,.\, d + 5 \,.\, e + 6 \,.\, f + 7 \,.\, g \,. \tag{5}$$

Dále své úvahy rozdělíme na dva základní případy.

I. Nechť číslo $s(Y)$ je dělitelné sedmi. To znamená, že buď $s(Y) = s(X)$, anebo $s(Y) = s(X) + 7$. To je možno podle rovnosti (5) jedině tak, že $X = (a, b, c, d, e, f)$ a $g = 0$ nebo $g = 1$. Slovo X získáme ze slova Y vynecháním posledního bitu.

II. Nechť číslo $s(Y)$ není dělitelné sedmi, tj. pro zbytek r při dělení čísla $s(Y)$ sedmi platí $0 < r \leqq 6$. Nechť vložený znak je ve slově Y na k-tém místě počítáno zleva. Za tímto místem vpravo nechť je v Y právě n_0 nul a n_1 jedniček. Platí tedy

$$k + n_0 + n_1 = 7 \,, \tag{6}$$

$$0 \leqq n_0 \leqq 6 \,, \qquad 0 \leqq n_1 \leqq 6 \,, \tag{7}$$

$$n_1 \leqq j(Y) \leqq 7 - n_0 \,. \tag{8}$$

Uvažujme rozdíl $s(Y) - s(X)$. Zde jsou dvě možnosti.

α) Pokud přidaný bit je nula, pak

$$j(Y) = j(X) \,, \tag{9}$$

$$s(Y) - s(X) = n_1 \,.$$

Zřejmě $s(Y)$ a n_1 dávají při dělení sedmi týž zbytek r. Podle (7) platí $r = n_1$. Za přidaným bitem je vpravo právě r jedniček.

β) Pokud přidaný bit je jednička, pak

$$j(Y) = j(X) + 1 \,, \tag{10}$$

$$s(Y) - s(X) = n_1 + k \,.\, 1 \,.$$

Tedy podle rovnosti (6)

$$s(Y) - s(X) = 7 - n_0 \,.$$

Čísla $s(Y)$ a $7 - n_0$ tedy dávají při dělení sedmi týž zbytek r, tj. podle (7) platí $r = 7 - n_0$. Za přidaným bitem je právě $n_0 = 7 - r$ nul.

Odstavce α), β) ovšem vyžadují ještě doplněk. Podle nerovností (8)

$$n_1 \leqq 7 - n_0 \,.$$

Rovnost nastat nemůže, neboť z rovnosti (6) by pak vyplývalo $k = 0$. Je třeba ovšem vyšetřit, kdy nastává rovnost $r = j(Y)$. Rozlišíme opět dvě možnosti.

α) Pokud je přidaný bit nula, pak platí rovnost (9) a rovnosti $j(Y) = r = n_1$. Tedy $n_1 = j(X)$, takže za přidaný bit ve slově Y lze považovat první bit zleva.

β) Pokud je přidaný bit jednička, pak platí rovnost (10) a $j(Y) = 7 - n_0$. Tedy $j(X) + 1 = 7 - n_0$, tj. $n_0 = 6 - j(X)$, takže za přidaný bit ve slově Y lze považovat první bit zleva. Můžeme vyslovit závěr: Pokud $r = j(Y)$, pak slovo X získáme, když ve slově Y vynecháme první bit zleva.

Nyní popíšeme postup, jak získat ze slova Y slovo X.

Nejprve určíme číslo $s(Y)$. Jestliže je $s(Y)$ dělitelné sedmi, vynecháme ve slově Y poslední bit a dostaneme slovo X.

Není-li číslo $s(Y)$ dělitelné sedmi, pak určíme zbytek r při dělení sedmi čísla $s(Y)$. Dále určíme $j(Y)$. Nyní nastávají tři případy:

1. Je-li $r < j(Y)$, pak vynecháme ve slově Y některý nulový bit, za nímž je vpravo právě r jedniček.
2. Je-li $r = j(Y)$, pak vynecháme ve slově Y první bit zleva.
3. Je-li $r > j(Y)$, pak vynecháme ve slově Y některou jedničku, za níž je vpravo právě $7 - r$ nul.

Příklady:

3. Nechť $Y = 1101001$. Pak $s(Y) = 14$, tj. $X = 110100$.
4. Nechť $Y = 1100100$. Tedy $s(Y) = 8$, $r = 1$, $j(Y) = 3$. Platí $1 < 3$, takže $X = 110100$.
5. Nechť $Y = 0100001$. Potom $s(Y) = 9$, $r = 2$, $j(Y) = 2$. Odtud plyne $X = 100001$.
6. Nechť $Y = 0111110$. Pak $s(Y) = 20$, $r = 6$, $j(Y) = 5$. Platí $5 < 6$, $7 - r = 1$, takže $X = 011110$.

Literatura:

[1] Mída J.: O jednom druhu speciálních samoopravných kódů, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 65, 1986/87, č. 5, s. 185—187

[2] Vasiljev J. L. a kol.: Diskretnaja matematika i matematičeskije voprosy kibernetiki, díl 1, Nauka, Moskva 1974

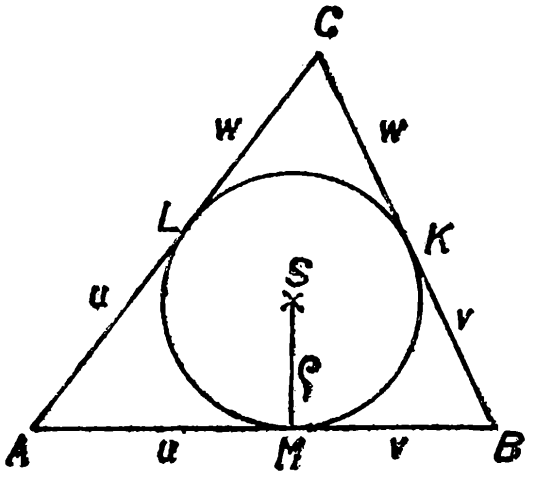
Následujúci článok, ktorý sme redakčne upravili, nám zaslal autor, ktorý sa narodil v roku 1893. Hoci je už 20 rokov nevidomý, jeho hlavným matematickým koníčkom ostala geometria.

Dva vzťahy v trojuholníku

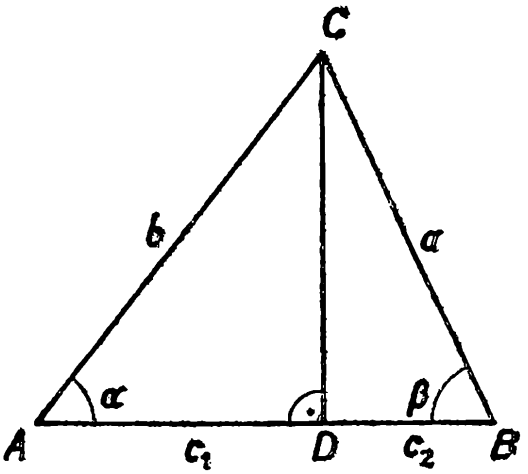
ŠTEFAN HOLIENČÍK, Bratislava

Uvažujeme o všeobecnom trojuholníku ABC. Kružnica $k(S, \varrho)$ vpísaná do trojuholníka dotýka sa jeho strán v bodoch K, L, M tak, ako je ukázané na obrázku 1. Označme $u = |AM| = |AL|$, $v = |BM| = |BK|$, $w = |CK| = |CL|$. Potom $s = u + v + w = \frac{1}{2}(a + b + c)$ je polovičný obvod trojuholníka, $P = s \,.\, \varrho$ jeho obsah a $u = s - a$, $v = s - b$, $w = s - c$. Dokážeme, že platí

$$(a + b)^2 = c^2 + 4s \,.\, (s - c) \tag{1}$$



Obr. 1



Obr. 2

Dôkaz. Umocnením rovnosti $s - w = c$ a úpravou dostaneme $s^2 + w^2 = c^2 + 2sw$, čiže $(s + w)^2 = c^2 + 4sw$, t.j. (1).

Z tohto jednoducho vyvodeného vzťahu možno dokázať Pytagorovu vetu. Nech teda trojuholník ABC je pravouhlý, $\gamma = 90°$. Potom $SKCL$ je štvorec, a preto $\varrho = w$. Ďalej $P = \frac{1}{2}ab$, odkiaľ $2ab = 4sw = 4s \,.\, (s - c)$. Po dosadení tohto vzťahu do (1) a úprave dostaneme $a^2 + b^2 = c^2$, čo sme chceli dokázať.

Prejdime k druhému vzťahu. Bude sa týkať päty kolmice spustenej z vrchola C na priamku AB — tento bod označme D. Predpokladajme sprvoti, že bod D náleží úsečce AB, a označme $c_1 = |AD|$, $c_2 = |BD|$ — pozri obrázok 2. Dokážeme, že platí

$$2(s - b) \,.\, (s - c) = c \,.\, (b - c_1) \tag{2a}$$

a

$$2(s - a) \,.\, (s - c) = c \,.\, (a - c_2) \,. \tag{2b}$$

Dôkaz. Z Pytagorovej vety vyplýva $b^2 - c_1^2 = |CD|^2 = a^2 - c_2^2$ Odtiaľ $b^2 - a^2 = (c_1 - c_2) \,.\, (c_1 + c_2) = (2c_1 - c) \,.\, c$. Po úprave $b^2 - a^2 - 2bc = 2c_1c - c^2 - 2bc$ a ďalej $a^2 - (b - c)^2 = 2c(b - c_1)$. Ľavá strana poslednej rovnosti je rozdiel štvorcov, ktorý možno upraviť na tvar $(a - b + c) \,.\, (a + b - c) = 4(s - b) \,.\, (s - c)$. Tým je vzťah (2a) dokázaný. Vzťah (2b) je analogický.

Predpokladajme ďalej, že bod D nenáleží úsečce AB. Nastávajú dva prípady:

1. bod A leží medzi bodmi B a D, t.j. $\alpha > 90°$,
2. bod B leží medzi bodmi A a D, t.j. $\beta > 90°$.

Nakoľko oba prípady sú súmerné, stačí vyšetriť prvý z nich. Teraz je $c = c_2 - c_1$. Podobný výpočet ako hore dá vzťah

$$2(s - b) \,.\, (s - c) = c \,.\, (b + c_1) \tag{2a'}$$

a vzťah (2b), ktorý ostane nezmenený.

Tak ako sme zo vzťahu (1) vyvodili vetu Pytagorovu, môžeme zo vzťahov (2a) a (2a′) vyvodiť vetu kosínovu. Túto úlohu prenecháme čitateľovi.

Möbiusovy čtyřstěny

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Leží-li každý vrchol čtyřstěnu $A_0A_1A_2A_3$ uvnitř jedné stěny čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$, přičemž každý z vrcholů A_0, A_1, A_2, A_3 leží v jiné stěně čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$, říkáme, že čtyřstěn $A_0A_1A_2A_3$ je vepsán čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$. O tomto čtyřstěnu pak říkáme, že je čtyřstěnu $A_0A_1A_2A_3$ opsán. Obecněji říkáme, že čtyřstěn $A_0A_1A_2A_3$ je vepsán čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$, právě když každý z vrcholů A_0, A_1, A_2, A_3 leží v rovině právě jedné stěny čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$, přičemž v rovině téže stěny leží vždy jen jeden vrchol čtyřstěnu $A_0A_1A_2A_3$. O čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$ pak říkáme, že je čtyřstěnu $A_0A_1A_2A_3$ opsán. Přijmeme-li tuto obecnější definici, můžeme sestrojit dva čtyřstěny, z nichž každý je druhému vepsán a zároveň je mu opsán. Takové čtyřstěny snadno sestrojíme, užijeme-li větu, kterou nyní (bez důkazu) uvedeme.

Věta. Nechť $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ jsou trojúhelníky ležící v téže rovině nebo ve dvou různých rovinách, které jsou vzájemně rovnoběžné. Nechť B_0 je těžiště trojúhelníku $A_1A_2A_3$ a A_0 je těžiště trojúhelníku $B_1B_2B_3$. Je-li

$$B_1B_2 \parallel B_0A_3\,, \qquad B_2B_3 \parallel B_0A_1\,, \qquad B_3B_1 \parallel B_0A_2\,, \tag{1}$$

je také

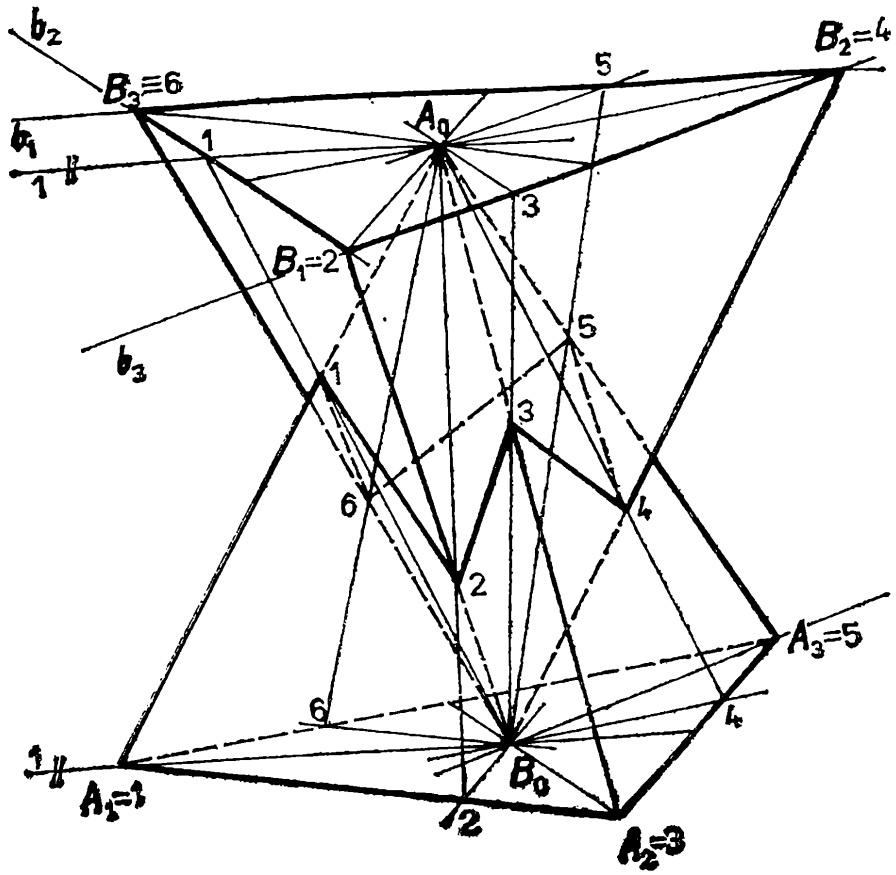
$$A_0B_3 \parallel A_1A_2\,, \qquad A_0B_1 \parallel A_2A_3\,, \qquad A_0B_2 \parallel A_3A_1\,. \tag{2}$$

Trojúhelníky $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ mající uvedené vlastnosti vidíme na obr. 1.

Proveďme nyní v prostoru tuto konstrukci (která je na obr. 1 provedena ve volném roznoběžném promítání):

1. V libovolné rovině ϱ sestrojme libovolný trojúhelník $A_1A_2A_3$ a jeho těžiště B_0. 2. Mimo rovinu ϱ zvolme libovolný bod B_1 a veďme jím přímky $b_2 \parallel B_0A_2$, $b_3 \parallel B_0A_3$ určující rovinu $\sigma \neq \varrho$. 3. Na přímce b_3 zvolme bod $B_2 \neq B_1$ a sestrojme rovinu $\varrho_1 = B_2B_0A_1$. 4. Sestrojme přímku $b_1 = \varrho_1 \cap \sigma$. 5. Sestrojme bod $B_3 = b_1 \cap b_2$. 6. Sestrojme těžiště A_0 trojúhelníku $B_1B_2B_3$.

Tuto konstrukci je možno skutečně provést, neboť platí: Přímky B_0A_1, B_0A_2, B_0A_3 leží v rovině ϱ a jsou vesměs různé. Podle vět známých ze stereometrie je $b_2 \parallel \varrho$, $b_3 \parallel \varrho$, $\sigma \parallel \varrho$, $b_1 \parallel B_0A_1$. Přímky b_1, b_2, b_3 leží v rovině σ a každé dvě z nich jsou různoběžné; proto je $B_3 \neq B_1$, $B_3 \neq B_2$. Zároveň je $b_3 = B_1B_2$, $b_1 = B_2B_3$, $b_2 = B_3B_1$ a pro tyto přímky platí vztahy uvedené na řádku (1). Trojúhelníky $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ leží ve dvou různých rovinách, které jsou vzájemně rovnoběžné, mají po řadě těžiště B_0, A_0 a zároveň platí vztahy (1). Podle výše uvedené věty platí také vztahy uvedené na řádku (2).



Obr. 1

Z provedeného výkladu plynou pro vrcholy a stěny sestrojených čtyřstěnů tato tvrzení:

1. Vrchol A_0 leží uvnitř stěny $B_1B_2B_3$. 2. Vrchol $A_3 \neq B_0$ leží v rovině stěny $B_0B_1B_2$ (neboť průsečnice této roviny s rovninou ϱ je přímka $B_0A_3 \parallel B_1B_2$). 3. Vrchol $A_1 \neq B_0$ leží v rovině stěny $B_0B_2B_3$ (neboť průsečnice této roviny s rovinou ϱ je přímka $B_0A_1 \parallel B_2B_3$). 4. Vrchol $A_2 \neq B_0$ leží v rovině stěny $B_0B_3B_1$ (neboť průsečnice této roviny s rovinou ϱ je přímka $B_0A_2 \parallel B_3B_1$). Přitom v rovině každé stěny čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$ leží právě jeden z vrcholů A_0, A_1, A_2, A_3. Čtyřstěn $A_0A_1A_2A_3$ je tedy vepsán čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$, který je proto čtyřstěnu $A_0A_1A_2A_3$ opsán.

Vrchol B_0 leží uvnitř stěny $A_1A_2A_3$. Dokázali jsme, že platí také vztahy uvedené na řádku (2). Proto zcela obdobně jako v předešlém případě zjistíme, že vrcholy B_3, B_1, B_2 leží po řadě v rovinách stěn $A_0A_1A_2$, $A_0A_2A_3$, $A_0A_3A_1$. Přitom v každé z uvedených rovin leží právě jeden z vrcholů B_0, B_1, B_2, B_3. To znamená, že čtyřstěn $B_0B_1B_2B_3$ je vepsán čtyřstěnu $A_0A_1A_2A_3$, který je tedy čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$ opsán.

Nazveme-li stěny $A_1A_2A_3$. $B_1B_2B_3$ podstavami sestrojených čtyřstěnů, tvoří zbývající tři stěny každého čtyřstěnu jeho plášť. Protože vrchol A_0 leží v podstavě $B_1B_2B_3$ a vrchol B_0 leží v podstavě $A_1A_2A_3$, mají čtyřstěny neprázdný průnik. Patří k němu také průnik hranic těchto čtyřstěnů, který je tvořen jedině body A_0, B_0 a průnikem plášťů obou

čtyřstěnů. Při zobrazení tohoto průniku (obr. 1) sestrojujeme průsečíky hran A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 s pláštěm čtyřstěnu $B_0B_1B_2B_3$ a průsečíky hran B_0B_1, B_0B_2, B_0B_3 s pláštěm čtyřstěnu $A_0A_1A_2A_3$. Přitom užijeme pomocné roviny, které procházejí přímkou A_0B_0 tak, že každá prochází ještě jedním z vrcholů A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3; jde tedy o šest pomocných rovin. Každá z nich protíná roviny ϱ, σ ve vzájemně rovnoběžných přímkách (neboť je $\varrho \parallel \sigma$). Ty, které leží v rovině ϱ, procházejí bodem B_0 a ty, které leží v rovině δ, procházejí bodem A_0. Zobrazení průniku si usnadníme, jestliže pomocné roviny vhodně očíslujeme.

Označíme číslicí 1 třeba tu pomocnou rovinu, která prochází vrcholem A_1; proto k bodu A_1 připíšeme číslici 1. Otáčíme-li rovinu č. 1 kolem její přímky A_0B_0 tak, že projde vrcholem A_2 dříve než vrcholem A_3, splyne nejdříve s pomocnou rovinou, která prochází vrcholem B_1 (nikoli tedy s rovinou procházející vrcholem A_2). Proto k vrcholu B_1 připíšeme číslici 2 označující pomocnou rovinu číslo 2. Při popsaném otáčení roviny č. 1 následují potom roviny 3 až 6 procházející po řadě vrcholy A_2, B_2, A_3, B_3. Rovina č. 1 protíná rovinu σ v přímce B_2A_1 a rovinu σ v přímce, která prochází bodem A_0 rovnoběžně s přímkou B_0A_1. Tato průsečnice roviny č. 1 s rovinou σ protíná hranici trojúhelníku $B_1B_2B_3$ ve dvou různých bodech. Jestliže rovinou č. 2 je rovina procházející vrcholem B_1, pak je zřejmé, že z uvedených dvou průsečíků označíme na hranici trojúhelníku $B_1B_2B_3$ číslicí 1 bod ležící na úsečce B_3B_1 (nikoli bod ležící na úsečce B_1B_2). Průsečík roviny č. 2 s hranicí trojúhelníku $A_1A_2A_3$ je potom ten bod hrany A_1A_2, pro který je přímka B_02 rovnoběžná s přímkou A_0B_1. Průsečíky roviny č. 3 s hranicemi podstav čtyřstěnů jsou body $3 = A_2$ a bod 3 hrany B_1B_2, pro který je přímka A_03 rovnoběžná s přímkou B_0A_2 atd.

V rovině č. 1 leží přímky A_0A_1, B_01, a tedy i jejich průsečík, který označíme opět číslicí 1. V rovině č. 2 leží přímky B_0B_1, A_02, a tedy i jejich průsečík, který označíme číslicí 2. Potom úsečka 12, která spojuje tyto dva průsečíky, je průnikem stěny $B_0B_1B_3$ se stěnou $A_0A_1A_2$; je to část průsečnice rovin těchto dvou stěn. Obdobně sestrojíme průsečnice 23, 34, 45, 56, 61 dalších dvojic stěn náležejících plášťům obou čtyřstěnů. Průnikem těchto plášťů je lomená čára s vrcholy 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dva čtyřstěny, z nichž každý je druhému vepsán a je mu zároveň opsán, nazýváme Möbiusovy čtyřstěny, neboť tuto pozoruhodnou prostorovou konfiguraci objevil vynikající německý matematik a fyzik *August-Ferdinand Möbius*, který žil v letech 1790 až 1868.

FYZIKA

Fyzika v prírode — dýchanie pod vodou

EVA BITTNEROVÁ, ÚDPMKG Bratislava

Vlani sme si sľúbili, že sa k problematike športového potápania ešte vrátime. Dnes budeme hovoriť o otázke dýchania pod vodou. Potápači si, ako vieme, nesú zásobu dýchacieho média v tlakových fľašiach. Pľúcam sa dodáva pomocou automatiky, a to s tlakom, ktorý sa rovná tlaku okolitej vody, ktorý sa samozrejme so zmenou hĺbky mení. Od tohoto tlaku závisia fyziologické účinky dýchacieho média, ale aj jeho spotreba. Nebude nezaujímavé všimnúť si prípravu potápačov aj z tohto hľadiska.

Pripomenieme si, že pojem „zásoba" nemá charakter fyzikálnej veličiny. Platí to aj pre pojem „spotreba". Preto ak ich chceme merať, musíme sa rozhodnúť pre niektorú fyzikálnu veličinu, ktorá ich charakterizuje. Musíme zvoliť ich mieru. Nezávisle od teploty a tlaku by by nám ako miera zásob a spotreby dýchacieho prostriedku poslúžila jeho hmotnosť (m) alebo látkové množstvo (udané v moloch). Pri určitom dohodnutom tlaku a teplote (normálnom tlaku p a teplote T_n), môže touto charakteristikou byť „normálny objem" V_n. V tomto prípade možno písať stavovú rovnicu ideálneho plynu (dýchacie médium sa pre jednoduchosť aj v praxi považuje za ideálny plyn)

$$V_n = \frac{RT_n}{p_n}, \tag{1}$$

$p_n = 100$ kPa, $T_n = 288$ K $\doteq 15$ °C. Normálna teplota T_n leží asi v strede teplotného intervalu, s ktorým prídu potápači do styku. Zmena teploty v intervale $\pm$ 10 °C okolo normálnej teploty vnesie do určenia zásob a spotreby chybu $\pm$ 3,5 %. V praxi možno obvykle pripustiť aj väčšie chyby.

Pre plyn v dvoch stavoch platí

$$\frac{V_n p_n}{RT_n} = \frac{V_k p_k}{RT_k}, \text{ z toho } V_n = \frac{p_k}{p_n} \cdot \frac{T_n}{T_k} \cdot V_k,$$

pomer teplôt sa v praxi potápačov málo líši od jedničky, a tak sa môže využívať Boyleov — Mariottov zákon, takže

$$V_n = \frac{p_k}{p_n}. \tag{2}$$

Pri našich úvahách bude vhodné oboznámiť sa niektorými fyziologickými pojmami. Z nášho hľadiska je veľmi dôležitá minútová ventilácia pľúc. Je to množstvo vzduchu, ktoré prejde pľúcami za jednu minútu. Silne závisí od telesnej činnosti. Meria sa normálnym objemom a udáva sa v litroch. V kľude, keď človek dýcha s frekvenciou 10 až 20 dychov za minútu, pohybuje sa minútová ventilácia pľúc medzi 6 až 8 litrami. U plavca, ktorý pomaly pláva na hladine, dosahuje až 30 l. Pri námahe alebo stresoch je to 100 l za minútu. Preto u trénovaného potápača, ktorý sa dokáže vo vode pohybovať ekonomicky a na ktorého nepôsobí strach, spotreba dýchacieho plynu nezávisí od hĺbky, v ktorej sa nachádza. Spotreba dýchacieho plynu za čas t je zrejme

$$V_h = Q_{\min} t ,$$

kde $Q_{\min}$ je minútová ventilácia pľúc a t je doba, počas ktorej potápač dýcha z prístroja, udaná v minútach. Dýchaný plyn je pod tlakom, ktorý zodpovedá tlaku vody (p_h) v hĺbke h. Podľa (2) potom pre normálny objem plynu dostaneme:

$$V_n = \frac{p_h}{p_n} Q_{\min} t$$

Potápač preto potrebuje za rovnakú dobu napr. v hĺbke 10 m dvakrát väčší normálny objem dýchacieho plynu ako pri hladine. Pre výpočty, ktoré by ste si teraz mohli robiť pri plánovaní vašich potuliek pod vodou, potrebujete vedieť, že potápači mávajú pri štandartných dýchacích prístrojoch fľaše s objemom 10 dm^3, 12 dm^3 alebo 2 . 10 dm^3 a napĺňajú ich na tlak 20 MPa. Podľa predpisov sa musia vynoriť so zbytkovým tlakom 3 PMa. To je železná rezerva pre prípad skutočne nepredvídaných okolností.

Dýchacie plyny a ich vlastnosti z hľadiska plánovania pohybu pod hladinou.

Potápači používajú ako dýchací plyn vzduch alebo zmes hélia a kyslíka pri potápaní do veľkých hĺbok (nad 40 m). Čistý kyslík sa používa len ojedinele. Preto si povedzme, ako sa chovajú plyny v zmesiach v rozsahu tlakov a teplôt, s ktorými prichádzajú do styku potápači-amatéri.

Predovšetkým si musíme uvedomiť, že hovoríme o zmesiach chemicky nereagujúcich plynov. V opačnom prípade by počet molekul v zmesi klesol (molekuly chemicky reagujúcich látok by sa zlúčili). Pre zmesi tak, ako si ich predstavujeme a ako ich používajú aj potápači, platí Daltonov zákon: „Každá zo zložiek sa chová tak, ako keby celý objem zaujímala sama". Tlak zmesi sa skladá z parciálnych tlakov zložiek:

$$p = p_1 + p_2 + \dots p_n ,$$

n je počet zložiek zmesi. Z Daltonovho zákona ďalej vyplýva, že chemicky nereagujúce ideálne plyny možno miešať v ľubovolných pomeroch. Parciálny tlak i-tej zložky vypočítame zo známej objemovej koncentrácie k_V a naopak. Platí:

$$p_i = p \cdot k_V .$$

Objemová koncentrácia k_V sa obvykle udáva v %.

Pri možných úvahách si budete zrejme predstavovať, že ako potápači dýchate stlačený vzduch. Suchý čistý atmosferický vzduch má nasledovné objemové zloženie:

zložka	k_V [%]	zložka	k_V [%]
N_2	78,09	CO_2	0,03
O_2	20,95	Ne	0,00187
Ar	0,9275	ostatné	0,00063

Takýto vzduch možno bez rizika použiť do hĺbky 40 m. Jeho použitie pod 60 m je už veľmi nebezpečné. Súvisí to s výmenou O_2 a CO_2 medzi krvou a vzduchom v pľúcach (alveolárny vzduch). Táto výmena prebieha difúziou a to z miest s vyšším parciálnym tlakom do miest s tlakom nižším. V alveolárnom vzduchu, ktorý má trochu iné zastúpenie zložiek ako voľný vzduch, je za normálnych okolností parciálny tlak kyslíka 13,3 kPa a CO_2 5,3 kPa. Krv zo žíl, ktorá vstupuje do pľúc, má parciálny tlak kyslíka 5,3 a parciálny tlak oxidu uhličitého 6,1 kPa. Preto difunduje kyslík v pľúcach do krve a z nej naopak odchádza CO_2. Pri zvýšenom tlaku okolia, napr. pri potápaní, rastie aj parciálny tlak kyslíka a oxidu uhličitého v pľúcach. Množstvo užitočného kyslíka v tepnách však stúpne len málo. Hemoglobín, ktorý ho viaže, je nasýtený už pri normálnom tlaku. Preto krv viac kyslíka neviaže, zato nemôže uvoľňovať proti vyššiemu alveolárnemu parciálnemu tlaku CO_2, čím si znižuje možnosť príjmu kyslíka. Hrozí udusenie.

Vlhkosť vzduchu

Úplne suchý vzduch, o akom sme hovorili vyššie, bežne nestretáme. Preto sa pristavme pri jeho vlhkosti a pri všetkom, čo v súvislosti s ňou zaujíma športových potápačov. Vieme, že podiel hmotnosti vodných pár k objemu vzduchu, v ktorom sa nachádzajú, voláme „absolútna vlhkosť vzduchu". Vzduch sa vodnou parou nasycuje. Čím má vyššiu teplotu, tým viac vodnej pary pojme, absolútna vlhkosť vzduchu je vyššia, tlak nasýtených vodných pár je tiež vyšší. Keď sa vzduch s nasýtenými vodnými parami schladí, vznikne presýtená vodná para. Táto sa neudrží, ale na kondenzačných jadrách (prachových časticiach, aerosóloch, ba aj na iónoch) rýchlo kondenzuje. Teplota, pri ktorej sa začína vodná para vo vzduchu kondenzovať, je tzv. rosný bod. V takom prípade hovoríme, že prší. Pri normálnych podmienkach vzduch nie je vodnou parou úplne nasýtený. Pomer skutočného parciálneho tlaku vodnej pary k parciálnemu tlaku nasýtených vodných pár pri danej teplote je „relatívna vlhkosť vzduchu". V našich klimatických podmienkach býva relatívna vlhkosť vzduchu 0,7 až 0,8. Relatívna vlhkosť vzduchu sa

obvykle udáva v %. Ak presiahne 80 %, stáva sa človeku fyziologicky nepríjemnou, lebo sťažuje odparovanie potu (preto sa tropické vlhké horúčavy ťažko znášajú).

Vo vzduchu, ktorý stláčame kompresorom, sa obsah vodných pár nemení, vzrastá však ich parciálny tlak, až sa dosiahne situácia, že vodná para z kompresora vychádzajúca kondenzuje a musí sa odlúčiť v odlučovačoch, napr. chemickým vysušením (soľ kuchynská, silikágel a i.). Neodlúčená vodná para po schladnutí v tlakových nádobách kondenzuje, nádoby z vnútra korodujú. V tlakových nádobách pri tlaku 20 MPa sa počíta s odlučovačmi, ktoré zabezpečia rosný bod asi 11 °C. Z týchto dôvodou je výhodné nechať vo fľaši čo najvyšší zbytkový tlak a takúto fľašu dopĺňať. Množstvo vody, ktoré skondenzuje, je totiž úmerné pomernej zmene tlaku.

Vzduch, stlačený vo fľaši, môže mať maximálne 100 % relatívnu vlhkosť. Teda parciálny tlak vodných pár vo fľaši sa maximálne vyrovná tlaku nasýtených pár. Znižovaním tlaku vo fľaši dýchacieho prístroja klesá parciálny tlak všetkých zložiek úmerne poklesu celkového tlaku. V tomto pomere teda klesá aj relatívna vlhkosť vzduchu. Preto sa stáva, že potápač dýcha nepríjemne suchý vzduch. Vdychovaný vzduch má 100 % relatívnu vlhkosť a je pomerne teplý. Vodné pary z vydychovaného vzduchu sa zrážajú na chladnejších vnútorných stenách dýchacieho prístroja, resp. na priezoroch masky. S týmto nepríjemným úkazom musia počítať konštrukéri potápačskej výstroje ako aj sami potápači, napr. natrením takýchto častí glycerínovým mydlom, saponátmi, či v krajnom prípade naslinením s následným omytím.

Rozpúšťanie plynov v kvapalinách, dekompresia.

Ak vystupuje potápač príliš rýchlo na povrch, začnú sa plyny, ktoré sa pri zvýšenom tlaku rozpustili v tkanivách jeho tela, vylučovať v podobe bublín. Najtesnejšie kapiláry v tele majú priemer asi 0,003 mm, takže ak vzniknú bublinky väčšie, poškodia telo. Ak vzniknú na kritických miestach, vyvolajú tzv. chorobu z dekompresie alebo kesonovú chorobu. Jej prejavy závisia od toho, na ktorom mieste tela bublinky vznikli. Keďže sa môžu vytvoriť takmer vo všetkých tkanivách a v krvi, sú prejavy tejto choroby rôznorodé. Treba zdôrazniť, že sú všetky nebezpečné. Preto si pozrime fyziku tvorby týchto bubliniek.

Vzhľadom na veľký obsah vody v ľudskom organizme plyny sa v ňom dobre rozpúšťajú. Zvlášť, ak ich ponorený potápač vdychuje pod zvýšeným tlakom (o tom, že takýto zvýšený tlak musí byť, sme už na stránkach Rozhledov hovorili). Rozpustnosť plynu v kvapaline závisí od vlastností oboch. Charakterizuje ho tzv. Henryho zákon, podľa ktorého látkové množstvo plynu fyzikálne rozpusteného a v ustálenom stave v kvapaline je pri danej teplote priamo úmerné parciálnemu tlaku tohoto plynu nad povrchom kvapaliny. Preto parciálne tlaky plynu nad

kvapalinou a v nej rozpusteného plynu sú v ustálenom stave rovnaké, no nevyjadrujú látkové množstvá plynu, ale sú im len úmerné. Z predstáv molekulárne kinetickej teórie vyplýva, že deje sýtenia a vylučovania plynu sú vo svojej predstave rovnaké. Líšia sa len smerom, v ktorom sa pohybuje viac molekúl plynu. Rýchlosť sýtenia je úmerná konštante difuzie a rozdielu parciálnych tlakov plynu nad kvapalinou a v nej.

Keď zanedbáme priestorový charakter kvapaliny (čo v prípade kontaktu dýchacieho plynu a ľudského tkaniva môžeme dobre urobiť), časovú závislosť rozpúšťania plynu v kvapaline vyjadruje experimentálna rovnica

$$p_r = p_0 + p\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{3}$$

kde p_r je parciálny tlak rozpúšťaného plynu, p_0 je parciálny tlak plynu v kvapaline na počiatku rozpúšťania, p je parciálny tlak plynu nad hladinou kvapaliny, τ je časová konštanta, charakterizujúca strednú dobu rozpúšťania. Odpovedá dobe, počas ktorej dosiahne rozdiel parciálneho tlaku rozpúšťaného plynu nad hladinou na počiatku rozpúšťania a parciálneho tlaku tohto plynu v ustálenom stave 63 % maximálnej hodnoty.

Exponenciála, vystihujúca sýtenie kvapaliny plynom, stúpa po nasýtený rovnovážny stav. Keď sa kvapalina sýti zmesou plynov, jej zložky sa vzájomne neovplyvňujú a sýtenie prebieha u každej zložky nezávisle podľa jej parciálnych tlakov a difúznych konštant.

Vylučovanie plynu z kvapaliny nastane vtedy, keď jeho rovnovážny parciálny tlak nad kvapalinou klesne. Prebieha inverzne sýteniu, ale aj tak, že sa začnú v celom objeme kvapaliny tvoriť na rôznych zárodkoch (nečistotách, ale aj nehomogenitách v hustote, spôsobených napr. lokálnym prehriatim či miestnymi poruchami pri prúdení) bubliny. Ich tvorba je ovplyvnená pomerom celkového tlaku v kvapaline, teda k súčtu hydrostatického tlaku a tlaku na povrch kvapaliny, čo je celkový tlak zmesi plynov nad voľným povrchom kvapaliny. Tento pomer sa nazýva koeficient presýtenia. Od jeho hodnoty závisí tvorba bubliniek. Napriek tomu, že sme situáciu značne zjednodušili, predstavy a výraz (3) dobre vyhovujú podmienkam v pľúcach potápačov, kde sa bublinky nemôžu vylučovať, ak je koeficient presýtenia menší ako 1. Pri pomalom znižovaní vonkajšieho tlaku prebieha vylučovanie plynov difúziou, teda neškodne. Dekompresia sa teda musí diať tak pomaly, aby sa neprekročil prípustný koeficient presýtenia. Tento sa vo všeobecnosti nerovná 1, ale závisí od druhu tkaniva a od ďalších fyziologických momentov. Vylučovanie v tkanive rozpustených plynov, ako dusíka alebo hélia, z dýchacích médií možno zrýchliť, ak nahradíme pri dekompresii dýchaný vzduch kyslíkom tak, aby sa celkový tlak zachoval. V takomto prípade parciálny tlak dusíka v pľúcach klesne na nulu, tým sa prudko zrýchli

jeho vylučovanie z krve a dekompresia sa značne skráti, takže sa vytvoria predpoklady pre záchranu postihnutého.

Na záver si už len pripomeňme, ako dôležité je všade okolo seba vidieť fyziku a vedieť, že fyzikálne vzorce, ktoré sa v škole učíme, nie sú samoúčelné, ale že postihujú dianie v prírode okolo nás.

Literatúra:

Piškula F.—Piškula M.—Štetina J.: Sportovní potápění, Naše vojsko, vydanie 1., Praha 1985

Bittnerová E.: Fyzika v prírode — človek pod vodou, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 65, 1986/87, č. 9. s. 359—365

Metóda obrazovej sústavy (MOSDAK)

Doc. RNDr. ing. D. KLUVANEC, CSc., ing. D. KLUVANEC, ml., Nitra

Metódu obrazovej sústavy (MOS) venujeme účastníkom fyzikálnej olympiády, žiakom a študentom, ktorí vo fyzike vedia nájsť jej krásu a pôvab, pre ktorých sa fyzika stala nielen učebným predmetom, ale koníčkom a obľúbenou zábavou na vyplnenie voľného času.

1. Úvod

Riešenie pohybu telies spojených vláknami patrí medzi náročné úlohy, lebo s každým telesom vstupujú do riešenia (do sústavy pohybových rovníc) najmenej dve neznáme veličiny, sila $\boldsymbol{F}_i$ pôsobiaca na teleso a jeho zrýchlenie $\boldsymbol{a}_i$.

Riešenie pohybu sústavy, ktorá pozostáva z troch a viac telies, je i pre zručného žiaka náročná úloha, lebo vyžaduje správne zostaviť väčší počet fyzikálnych rovníc a vyriešiť ich. To sú príčiny, pre ktoré žiaci na stredných školách (včítane účastníkov FO), ale i študenti vysokých škôl nemajú v obľube úlohy tohto typu.

Viacero telies a s nimi súvisiaci väčší počet neznámych veličín skutočne vnáša do riešenia pohybu sústavy fyzikálnu i matematickú náročnosť a zložitosť. S tým je spojená možnosť výskytu omylov a chýb v riešení úloh. Zo skúseností vo FO plynie, že úlohy o pohyboch sústavy telies patria medzi úlohy s najmenšou úspešnosťou.

Princíp novej metódy, ktorý sme označili MOS, spočíva v transformácii skutočnej sústavy telies do obrazovej (modelovej) sústavy. Telesá v skutočnej sústave konajú posuvný, otáčavý a valivý pohyb, kým telesá v obrazovej sústave konajú len posuvný pohyb. Pravda, medzi veličinami skutočnej s obrazovej sústavy telies je izomorfizmus. Výpočet

neznámych veličín v obrazovej sústave je oveľa jednoduchší v porovnaní s tradičným výpočtom pomocou pohybových rovníc aplikovaných na skutočnú sústavu.

2. Princípy MOS

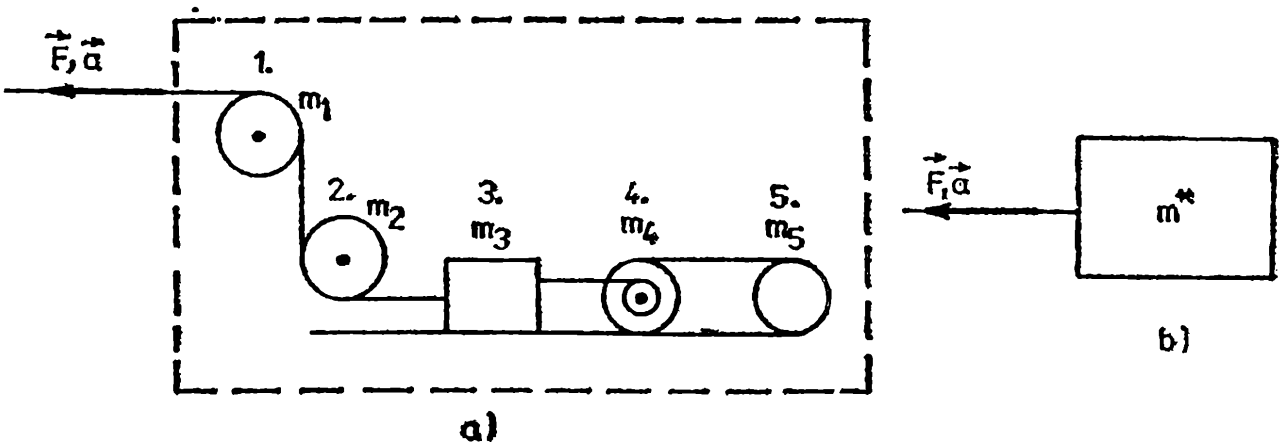
Pod sústavou telies spojených vláknami obvykle rozumieme sústavu hranolov, valcov a kladiek, ktoré konajú posuvný pohyb po podložke, alebo otáčavý pohyb v pevnom spojení s podložkou (kladky).

Predpokladáme, že hmotnosti vlákien, ktorými sú telesá spojené, sú zanedbateľné voči hmotnostiam telies, vlákna sú dokonale ohybné a neroztiahnuteľné.

Pohyb telies sústavy budeme uvažovať v inerciálnej sústave spojenej s podložkou, po ktorej sa telesá pohybujú.

Ďalej budeme predpokladať, že sily trenia pri posuvnom pohybe a odpor prostredia sú veľmi malé, avšak dostatočné k tomu, aby valce pri pohybe po podložke a ani vlákna po telesách neprekĺzali. Všetky telesá v sústavách považujeme za homogénne.

Príklad sústavy telies spojenej vláknami je na obr. 1a.



obr. 1

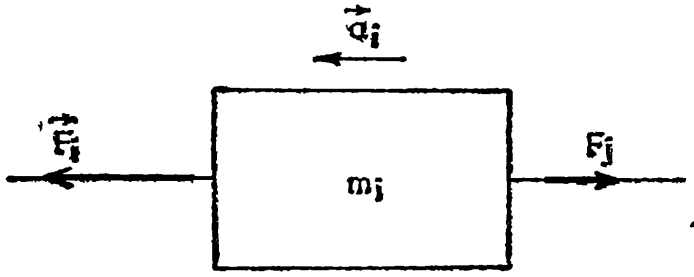
Na okamih myslenia uzavrieme telesá skutočnej sústavy do čiernej skrinky, okrem „ťahajúceho" vlákna 1. telesa. Sila F, ktorá pôsobí na ťahajúce vlákno 1. telesa, je priamo úmerná zrýchleniu a pohybu vlákna.

Nahraďme skutočnú sústavu telies modelom, ktorý nazveme obrazová sústava. Obrazové teleso má hmotnosť

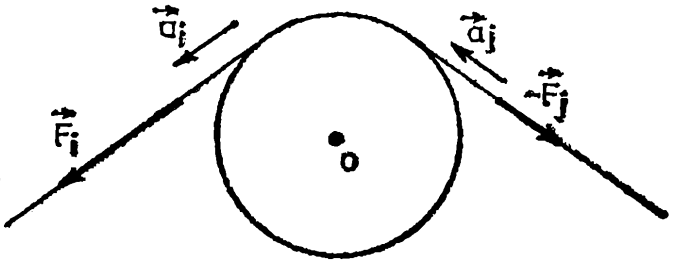
$$m^* = \frac{F}{a}. \tag{1}$$

Obrazová hmotnosť m^* je hmotnosť telesa, ktorým fyzikálne ekvivalentne nahradzujeme sústavu telies v čiernej skrinke. K tomu, aby sme túto transformáciu mohli uskutočniť, treba nájsť jednoduchý postup, ako obrazovú hmotnosť m^* sústavy určiť.

Všetky telesá a veličiny, ktorými budeme opisovať modelovú sústavu telies, budeme nazývať obrazové a príslušné obrazové veličiny budeme označovať hviezdičkami, napr. m^*, a^*.



obr. 2



obr. 3

Ako vyplýva z uvedeného, obrazová hmotnosť m^* je veličina, ktorá v konkrétnom prípade charakterizuje zotrvačné vlastnosti sústavy telies pri ich posuvnom, valivom a otáčavom pohybe.

Odvodíme vzťahy pre určenie obrazových hmotností jednotlivých telies a obrazovej hmotnosti sústavy telies.

1.1 *Teleso s hmotnosťou m_i koná v skutečnej sústave iba posuvný pohyb* (obr. 2).

Sila pôsobiaca v ťahajúcom vlákne je F_i, sila pôsobiaca v ťahanom vlákne smerom k j-tému telesu je $-F_j$. Platí

$$m_i^* = \frac{F_i - F_j}{a_i} = m_i ,$$

a_i je zrýchlenie pohybu ťahajúceho vlákna (v tomto prípade a_i je aj zrýchlenie pohybu telesa).

Obrazová hmotnosť m_i^* telesa v sústave, ktoré koná len posuvný pohyb, sa rovná jeho skutečnej hmotnosti m_i.

1.2 *Valec koná otáčavý alebo valivý pohyb*

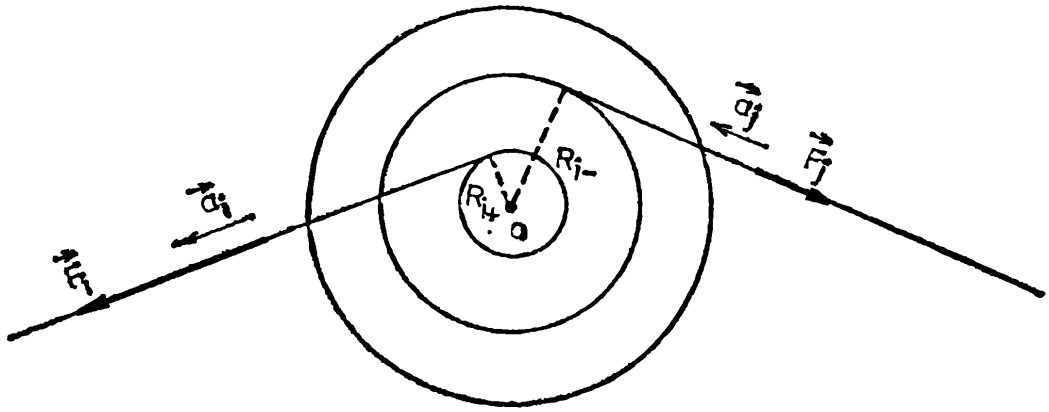
Na každý valec pôsobia spravidla pomocou dvoch vlákien dve sily (obr. 3). Vlákno, v ktorom pôsobí väčšia sila z týchto dvoch alebo prostredníctvom ktorého pôsobí väčší moment sily, nazveme „ťahajúce", druhé vlákno nazveme „ťahané".

Silu pôsobiacu v ťahajúcom vlákne i-tého telesa označme F_i, silu pôsobiacu na ťahané vlákno i-tého telesa označme $-F_j$.

Zrýchlenie pohybu ťahajúceho vlákna označme a_i, zrýchlenie pohybu ťahaného vlákna a_j. Moment zotrvačnosti i-tého valca vzhľadom na jeho geometrickú os označme I_{0i}, moment zotrvačnosti vzhľadom na inú okamžitú os otáčania valca označme I_i (táto os je totožná s priamkou dotyku valca s podložkou).

1.2.1 Valec s hmotnosťou m_i koná iba otáčavý pohyb okolo svojej geometrickej osi o (obr. 3).

Nech R_i je polomer valca.



obr. 4

Z 2. impulzovej vety máme

$$(F_i - F_j)R_i = I_{0i}\,\alpha_i = \frac{1}{2}\,m_i\,R^2_i\,\frac{a_i}{R_i}\,,$$

z toho

$$F_i - F_j = \frac{1}{2}\,m_i a_i\,. \tag{2}$$

Obrazová hmotnosť m_i^* valca v tomto prípade, ako to vyplýva z (1) a (2), je

$$m_i^* = \frac{F_i - F_j}{a_i} = \frac{1}{2}\,m_i\,.$$

Obrazová hmotnosť m_i^* valca, ktorý koná iba otáčavý pohyb okolo svojej geometrickej osi, je rovná polovici jeho skutočnej hmotnosti m_i, $m_i^* = \frac{1}{2}\,m_i$.

1.2.2 Na valec s hmotnosťou m_i otáčajúci sa okolo svojej geometrickej osi pôsobí sila $\boldsymbol{F}_i$ s ramenom R_{i+} a sila $-\boldsymbol{F}_j$ s ramenom R_{i-} (obr. 4). Pre otáčavý pohyb valca z 2. impulzovej vety máme

$$F_i R_{i+} - F_j R_{i-} = I_{0i}\,\alpha_i = I_{0i} = \frac{a_i}{R_{i+}}\,,$$

z toho

$$F_i = I_{0i}\,\frac{a_i}{R^2_{i+}} + F_j\,\frac{R_{i-}}{R_{i+}}\,. \tag{3}$$

Silu $\boldsymbol{F}_j$ však môžeme napísať

$$F_j = m^*_{j,n} a_j\,, \tag{4}$$

kde $m^*_{j,n}$ je obrazová hmotnosť telies počnúc j-tým až po posledné n-té teleso sústavy.

Z obr. 4 platí

$$\frac{a_i}{R_{i+}} = \frac{a_j}{R_{i-}} . \tag{5}$$

Dosadením a_j z (5) do (4) a potom F_j do (3) dostaneme vzťah

$$F_i = \left[\frac{I_{oi}}{R_{i+}^2} + \left(\frac{R_{i-}}{R_{i+}} \right)^2 m_j^*{}_{,n} \right] a_i$$

a z neho

$$m_i^*{}_{,n} = \frac{F_i}{a_i} = m_i^* + \left(\frac{R_{i-}}{R_{i+}} \right)^2 m_j^*{}_{,n} , \tag{6}$$

kde $m_i^* = \dfrac{I_{oi}}{R_{i+}^2}$.

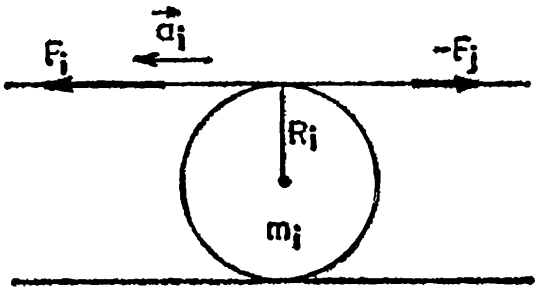
Obrazová hmotnosť m_i^* valca, ktorý koná iba otáčavý pohyb okolo svojej geometrickej osi, ak rameno sily $\mathbf{F}_i$ je R_{i+} a rameno sily $-\mathbf{F}_j$ je R_{i-}, je daná vzťahom

$$m_i^* = \frac{I_{oi}}{R_{i+}^2} .$$

Ako však vyplýva zo vzťahu (6), obrazovú hmotnosť $m_j^*{}_{,n}$ ďalších telies v sústave, počnúc j-tým, vynásobíme súčiniteľom k_i^2, kde

$$k_i = \frac{R_{i-}}{R_{i+}} .$$

1.2.3 Valec s hmotnosťou m_i koná valivý pohyb po vodorovnej podložke. Ramená sil $\mathbf{F}_i$ a $-\mathbf{F}_j$ sú rovnaké, $2R_i$, kde R_i je polomer valca (obr. 5).



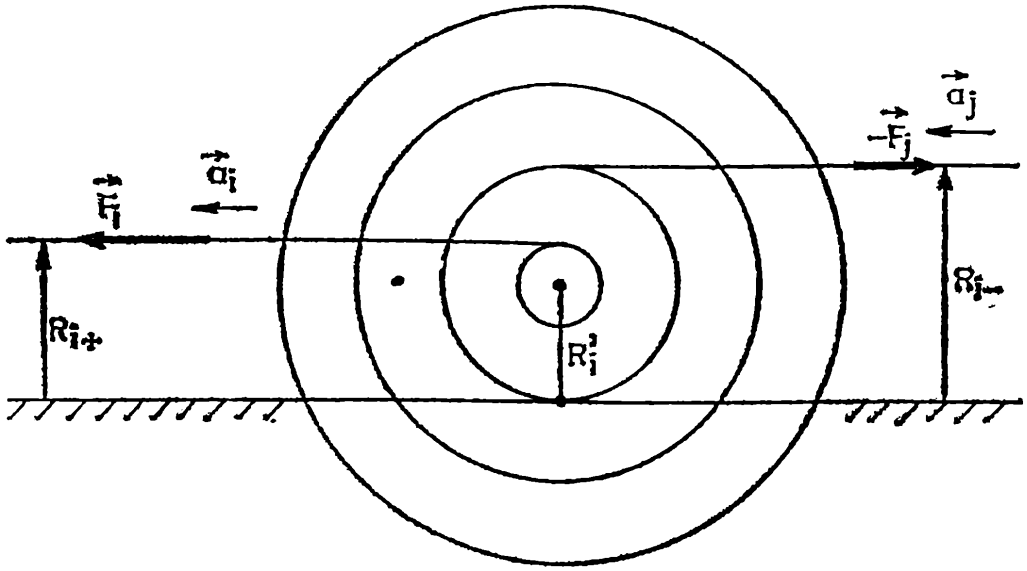
obr. 5

Podobne ako v prechádzajúcich prípadoch určíme

$$m_i^* = \frac{3}{8} m_i ,$$

(podrobné odvodenie ponecháme na čitateľa).

1.2.4 Valec s hmotnosťou m_i koná valivý pohyb po obvode s polomerom R'_i, rameno sily $\mathbf{F}_i$ je R_{i+}, rameno sily $\mathbf{F}_j$ R_{i-} (obr. 6).



obr.6

V tomto prípade z 2. impulzovej vety máme

$$F_i R_{i+} - F_j R_{i-} = I_i \alpha_i = I_i \frac{a_i}{R_{i+}},$$

ďalej platí

$$\frac{a_i}{R_{i+}} = \frac{a_j}{R_{i-}},$$

$$F_j = a_j m^*_{j,n}.$$

Z posledných troch vzťahov po úprave dostaneme

$$F_i = \left(\frac{I_i}{R^2_{i+}} + k_i^2 \, m^*_{j,n} \right) a_i .$$

Z toho

$$m^*_{i,n} = \frac{F_i}{a_i} = m^*_i + k_i^2 m^*_{j,n}, \tag{7}$$

kde $m^*_i = \dfrac{I_i}{R^2_{i+}}$.

Obrazová hmotnosť m^*_i valca, ktorý koná valivý pohyb po obvode s polomerom R'_i, je $m^*_i = \dfrac{I_i}{R_{i+}} = \dfrac{I_{0i} + m_i R'^2_i}{R^2_{i+}}$. Obrazovú hmotnosť $m^*_{j,n}$ ďalších telies v sústave za i-tým telesom, ako to vyplýva zo vzťahu (7), vynásobíme súčiniteľom k_i^2, $k_i = \dfrac{R_{i-}}{R_{i+}}$.

Zhrnutie: 1. Obrazová hmotnosť telesa s hmotnosťou m_i, ktoré koná len posuvný pohyb, $m^*_i = m_i$.

SUBJEKT (lat. *subiectum*, slož. ze *sub* + *iacio*, *-ere*, ptc. pf. *iactum* = házet, metat; v. projekce) — „co je hozeno, vmeteno pod"; podmět; jednotlivec, jedinec; činitel; opak: objekt

SUBKONTRAOKTÁVA (v. kontraoktáva) — oktáva nižší než kontraoktáva

SUBLIMACE (lat. *sublimis* = zvedající se šikmo vzhůru; ve výši, do výše se vznášející; slož ze *sub* + limus = šikmý, kosý) — vypařování („vznášení se do výše") tuhých látek, tj. přeměna látky z pevného skupenství přímo do skupenství plynného (aniž by předtím roztála); opak: desublimace nebo resublimace (v. t.)

SUBMIKROSKOPICKÝ (v. mikroskopický) — „menší než mikroskopický"; „tak malý, že není pozorovatelný mikroskopem"; submikroskopická částice — tak malá, že podle současného stavu vědy už není dále dělitelná; zkoumat submikroskopicky — pod mikroskopem

SUBSONICKÝ (v. sonický) — podzvukový; pomalejší než rychlost zvuku; opak: supersonický

SUBSTITUCE (lat. *statuo*, *-ere* = postavit, stanout; v. restituce) — zastoupení, nahrazení, záměna; substituční metoda — nahrazovací, dosazovací

SUBSYSTÉM (v. systém) — „podsystém"; jedna z částí, na které se dále rozdělil systém

SUPER- (z lat. *super* = nahoře, nad) — předpona s významem poloha nad, nahoře, horní; nadřazenost; přehnanost v množství nebo jakosti: opak: sub-

SUPERCENTRIFUGA (v. centrifuga) — rychloběžná odstředivka; odstředivka s mnohem větším počtem otáček než odstředivka volnoběžná; srov. ultracentrigufa

SUPERGALAXIE (v. galaxie) — galaxie vyššího řádu

SUPERHET — SUPERHETERODYN (v. heterodyn) — „zdokonalený typ heterodynu"

SUPERIKONOSKOP (v. ikonoskop) — vylepšený typ ikonoskopu (název souvisí s vývojem systémů záznamu)

SUPERNOVA (v. nova) — nova, jejíž zjasnění je o několik hvězdných tříd vyšší (až 10 000 krát)

SUPERPONOVAT (lat. *pono- -ere* = klást, pokládat; v. expozice) — „nakládat na sebe"; nadřaďovat; ve fyzice: superponovat kmity — skládat; SUPERPOZICE (lat. positio = položení, poloha; v. expozice) — „naskládání na sebe"; ve fyzice: skládání několika na sebe nezávislých kmitů, takže výsledný kmitavý pohyb — superpozice — je dán jejich složením („naskládáním na sebe")

SUPERSONICKÝ (v. sonický) — nadzvukový; větší než rychlost zvuku

 SUPRA- (z lat. *supra* = nahoře, nad) — předpona mající význam „nad, nahoře, nadřazenost, nadměrnost" a sloužící zpravidla k významovému rozlišování a k třídění fyzikálních jevů podle určitých příznaků; např. SUPRATEKUTOST — jev, kdy kapalina za určitých fyzikálních podmínek ztrácí viskozitu a tím se mimořádně lehce rozlévá

SY-, SYM-, SYN- (z řec. *syn* = s, spolu) — předpona s významem „s, spolu, společně, dohromady, zároveň, současně; spojení, svaz, sdružení, sestava, součinnost" (opak bývá dia-; srov. synchronní — diachronní)

SYMBIOTICKÝ (řec. *bios* = život; v. bio-) — žijící v SYMBIÓZE, tj. ve vzájemně prospěšném soužití dvou nebo více organismů; symbiotická hvězda — termín pro hvězdu, v jejímž spektru jsou široké absorpční pásy kysličníků různých kovů a sloučenin uhlíku

SYMBOL (řec. *balló* = házet, vrhat; v. balistika) — „naházené dohromady"; předmět, který v sobě zahrnuje obecnější pojem, mající hlubší, obvykle skrytý význam

SYMETRIE (řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metrie) — souměrnost; SYMETRICKÝ — souměrný; v. t. asymetrický, antisymetrický

SYNCHROFÁZOTRON (uměle složeno ze *syn* + řec. *chronos* = čas, doba; v. *chrono-* + *fasis*; v. fáze + -tron — přípona analogicky utvořená a použitá zde pro termíny urychlovačů; v. -tron) — urychlovač, ve kterém fáze střídavého napětí musí být přesně synchronizovány s fázemi oběhu elektronů; srov. synchrotron

SYNCHRONICKÝ (řec. *chronos* = čas, doba; v. chrono-) — 1. týkající se dané, zpravidla současné doby (např. synchronická mluvnice — podávající obraz současného jazyka); 2. probíhající ve stejnou, tutéž dobu (v. synchronní); SYNCHRONIZACE (v. -izace) — „zavedení společného času"; uvedení jedné činnosti v časový soulad s činností druhou; synchronizace převodů — vyrovnání otáček hnací a hnané části převodů motoru (synchron); SYNCHRONIZOVANÝ — uvedený v časový soulad s jinou činností; SYNCHRONNÍ — 1. probíhající ve stejnou, tutéž dobu; synchronní motor — jeho otáčky v hnací i hnané části jsou časově totožné; 2. týkající se dané, zpravidla současné doby (v. synchronický)

SYNCHROTRON (uměle složeno ze *syn* + řec. *chronos* = doba, čas; v. *chrono-* + *-tron* — přípona analogicky utvořená a používaná, zde pro termíny urychlovačů; v. -tron) — urychlovač, ve kterém střídavé napětí musí být přesně časově sladěno s oběhem elektronů; v. t. betasynchrotron, synchrofázotron

SYNODICKÝ (řec. *hodos* = chod, chůze, cesta; v. anoda) — „vykonaný na společné cestě"; synodický měsíc — doba, za kterou Měsíc vykoná oběh kolem Země při jejich společné dráze vesmírem, tj. dráhu dlouhou nejenom oněch 360°, ale ještě prodlouženou o úsek, který mezitím urazí Země vesmírem.

SYNOPTICKÝ (od řec. *synopsis* = přehled, pozorování; slož. ze *syn* + + *opt-* — kmen slovesa *horaó* = vidět; v. optika) — „současně přehlédnutelný; přehledný"; takový, kde jsou sestaveny a současně přehlíženy různé souběžné jevy; synoptická mapa — zeměpisná mapa se zakreslenými hodnotami současného měření a pozorování počasí; synoptický profil — grafické znázornění nějakého jevu, poskytující přehled o vybraných podrobnostech, jak za sebou v určitém čase nebo vzdálenosti následují vzhledem k celku.

SYNTÉZA (řec. *thesis*, od *tithémi* = klásti, stavět; v. teze) — „spojování jednotlivostí v jeden celek; skládání, složení"; organické spojení; pochod, při kterém se slučováním látek jednodušších získávají látky složitější.

SYSTÉM (řec. *stasis*; od *histémi* = stavět, postavit; v. statika) — „sestavení"; soustava; způsob uspořádání („sestavení") věcí, myšlenek apod. podle určitého hlediska; v. t. subsystém

T — psáno malým písmenem (od lat. *tempus* = doba, čas; srov. TEMPO) — ve fyzice: značka pro dobu

TACHOMETR (slož. z řec. *tachys* = rychlý + *metron* = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — rychloměr, měřič rychlosti; v. t. tachymetr, tachymetrie, tachyon. Pozn.: Od „tachometru" — přístroje, který „měří rychlost", nutno rozlišovat „tachymetr" — přístroj, který „měří rychle".

TACHYMETR (slož. z řec. *tachys* = rychlý; v. *tachometr* + *metron* = = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — rychloměřič, „rychlý měřič"; přístroj, který „neměří rychlost" (v. tachometr), ale který „měří rychlým způsobem" (ve srovnání se starší metodou) vzdálenost a výšku bodu v terénu; TACHYMETRICKÝ — 1, umožňující rychlé měření (např. tachymetrické pravítko, tabulky); 2. sloužící k měření rychlosti (např. tachymetrická spirála).

TACHYON (z řec. *tachys* = rychlý; v. *tachometr* + *-on* — umělá přípona, používaná analogicky podle „elektron" pro označení částic; v. -on) — druh částic s vysokou rychlostí

TAUTOCHRONA (slož. z řec. *tauton* = totéž; srov. TAUTOLOGIE — vyjádření pojmu týmiž slovy + *chronos* = ča, sdoba; v. chrono-) — křivka, která má tu vlastnost, že kterýkoliv hmotný bod po ní se pohybující a spuštěný z kteréhokoliv jejího bodu dospěje vlivem tíže k nejnižšímu jejímu bodu za stejnou, za tutéž dobu; TAUTOCHRONNÍ — stejnodobý, tj. že opakující se děj má vždy tutéž časovou periodu, nezávisle na vnějších podmínkách; tautochronní kyvadlové hodiny — jejich doba kyvu je nezávislá na amplitudě

TAUTOLOGIE (slož. z řec. *tauton* = totéž + *logos* = slovo, řeč; v. -logie) — „řeč o tomtéž"; vyjádření téhož jinými slovy; v logice: tautologie výrokového počtu — výroková formule, která je pravdivá,

 ať jsou hodnoty výrokových proměnných v nich užité jakékoliv

TECHNIKA (z řec. *technikos*; od *techné* = řemeslo, dovednost, zručnost) — 1. souhrn výrobních a pracovních prostředků, postupů, oborů (např. rozvoj vědy a techniky); 2. některý z oborů výrobní pracovní činnosti; 3. souhrn strojů a vybavení pro výrobní a podobnou činnost (např. přístrojová technika); 4. způsob nebo postup provádění nějaké činnosti (např. technika sváření, hlasová technika); 5. praktická odborná dovednost; 6. technická vysoká škola; budova této školy.

TELE- (z řec. *téle* = daleko, v dáli, do dáli) — počáteční část složených slov mající význam „dálka, vzdálenost, dálkový"; telemetr — přístroj měřící vzdálenost, nebo vyjadřuje bližší okolnost (případ častější); proto fyzikální termíny takto začínající zpravidla jsou názvy pro zařízení, která přenášejí nějaký úkaz z velké dálky nebo do velké dálky.

TELEFON (řec. *fóné* = hlas, zvuk; v. *-fon*) — „hlas na dálku, z dálky"; elektroakustické zařízení k přenášení hlasu na dálku

TELEGRAF (řec. *grafó* = rýti, psát; v. *-graf*) — „přístroj píšící na dálku"; elektrické zařízení k přenášení písemných zpráv na dálku smluvenými značkami

TELEKOMUNIKACE (v. komunikace) — „spojení na dálku"; 1. souhrn opatření a zařízení k dálkovému přenášení zpráv, zvuku a obrazu pomocí elektrické nebo elektromagnetické energie; 2. sdělovací technika; v. t. radiotelekomunikace

TELEMECHANIKA (v. mechanika) — oblast techniky zabývající se otázkou řízení mechanismu na dálku

TELEMECHANIZACE (v. mechanizace) — řízení a kontrola výrobních procesů na dálku

TELEMETR (v. -metr[1]) — dálkoměr, tj. přístroj určený k přímému měření vzdálenosti

TELEOBJEKTIV (v. objektiv) — objektiv k fotografování velmi vzdálených předmětů

TELESEIZMY (řec. *seismos* = otřes; v. seizmický) — otřesy v dálce; vzdálené zemětřesení

TELESKOP (v. *-skop*) — hvězdářský dalekohled; dalekohled „pro nesmírné dálky"; srov. radioteleskop

TELEVIZE (lat. *video*, *-ere*, ptc. pf. *visus* = vidět) — „obraz viděný na dálku"; bezdrátové elektromagnetické přenášení na dálku nejen zvuku, ale i obrazu

TELURICKÝ (od lat. *tellus*, *-uris* = země, půda; srov. TELUR — prvek nazvaný podle Země) — vztahující se k Zemi; telurická fyzika — zkoumá fyzikální vlastnosti Země; telurické čáry spektra kosmického tělesa — vznikají při průchodu záření zemskou atmosférou.

TEMPERATURA (z lat. *temperatura*; od *tempero*, *-are*, ptc. pf. *temperatus* = náležitě smísit, rozřeďovat, mírnit, krotit, zachovávat mí-

2. Obrazová hmotnosť valca s momentom zotrvačnosti I_i vzhľadom k osi otáčania je

$$m_i^* = \frac{I_i}{R_{i+}^2},$$

kde R_{i+} je rameno sily F_i (ťahajúcej sily). Obrazovú hmotnosť m_j^*, n všetkých ďalších telies za i-tým telesom vynásobíme súčiniteľom

$$k_i^2 = \left(\frac{R_{i-}}{R_{i+}}\right)^2$$

Poznámka: Môžete sa presvedčiť, že princíp uvedený v 2. bode platí pre všetky prípady 1.2.1 až 1.2.4. Napr. v prípade 1.2.1 $R_{i+} = R_{i-} = R_i$, $I_i = I_{0i}$

$$m_i^* = \frac{\frac{1}{2} m_i R_i}{R_i^2} = \frac{1}{2} m_i, \qquad k_i = 1.$$

(Dokončenie v č. 6)

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Matematika středověké Indie a Pellova rovnice

PaedDr. FRANTIŠEK JÁCHIM, základní škola Volyně

Bude řeč o jédné rovnici se dvěma neznámými. Čtenář znalý řešení neurčitých (diofantských) rovnic si patrně řekne: Nic nového, jednu neznámou mohu zvolit a druhá mi vyjde. A při troše trpělivosti nalezne i řešení celočíselná. Následující řádky nechť čtenáře přesvědčí, že jím vyřčená správná úvaha nebude příliš užitečná při řešení rovnice $ax^2 + b$ vyřčená správná úvaha nebude příliš užitečná při řešení rovnice $ax^2 + b = y^2$. Řešení této rovnice již potrápilo středověké Indy, řešením rovnice se zabýval i náš matematik *Jan Tesánek* (1728—1788) a patrně nejúplnější řešení nalezl roku 1769 francouzský matematik a fyzik *Joseph Louis Lagrange* (1736—1755).

Uvažujme nejprve rovnici jednodušší ($b = 1$)

$$ax^2 + 1 = y^2. \tag{1}$$

Tato rovnice se jmenuje Pellova, přestože anglický matematik *John Pell* (1610—1685) nemá k řešení zmíněné rovnice pražádný vztah. Ke

spojení jeho jména s rovnicí (1) došlo až v 18. století, patrně z nedorozumění. Pellovy rovnice nalézáme již v matematice starořecké. V Diofantově díle jsou uvedeny dvě: $26x^2 + 1 = y^2$, $20x^2 + 1 = y^2$. Rovněž Archimédova úloha o Heliových býcích vede na rovnici Pellovu: $4\,729\,494x^2 + 1 = y^2$. Postup řešení však staří Řekové nenalézají. Čtenář patrně namítne, že v oboru přirozených čísel je řešením uspořádaná dvojice [0, 1], a to vždy, bez ohledu na volbu konstanty a. Jistě má pravdu. Tomuto řešení říkejme triviální. Buďme však náročnější a hledejme další celočíselná řešení. Čtenáře však musím varovat. Zkusmo hledat se nevyplácí, vždyť například rovnice $67x^2 + 1 = y^2$ má nejmenší netriviální řešení $x = 5967$, $y = 48\,842$. A u rovnice $991x^2 + 1 = y^2$ vypadá nejmenší netriviální řešení dokonce takto (našel je polský matematik *Sierpinski*):

$x = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$,

$y = 379\,516\,400\,906\,811\,930\,638\,014\,896\,080$.

Pro řešení Pellovy rovnice nalezli Indové nžkolik významných tvrzení. První pochází od *Brahmagupty:*

Jestliže $x = x_1$, $y = y_1$ jsou řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$ a jestliže $x = x_2$, $y = y_2$ jsou řešením rovnice $a'x^2 + b' = y^2$, pak $x = x_1y_2 \pm x_2y_1$ a $y = y_1y_2 + ax_1x_2$ jsou řešením rovnice $ax^2 + bb' = y^2$.

Uvedené tvrzení ověříme tak, že do rovnice $ax^2 + bb' = y^2$ nabízené řešení dosadíme. Dostaneme

$$a(x_1y_2 \pm x_2y_1)^2 + bb' = (y_1y_2 \pm ax_1x_2)^2$$

a po umocnění dvojčlenů

$$ax_1^2y_2^2 \pm 2ax_1x_2y_1y_2 + ax_2^2y_1^2 + bb' = y_1^2y_2^2 \pm 2ax_1x_2y_1y_2 + a^2x_1^2x_2^2 .$$

Další úpravou získáme jednodušší rovnici

$$ax_1^2y_2^2 + ax_2^2y_1^2 + bb' = a^2x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2$$

a po vytknutí

$$ax_1^2(y_2^2 - ax_2^2) - y_1^2(y_2^2 - ax_2^2) + bb' = 0 .$$

Dále ještě vytkneme dvojčlen a dostáváme

$$(y_2^2 - ax_2^2)(ax_1^2 - y_1^2) + bb' = 0 . \qquad (2)$$

Vzhledem k tomu, že x_1 a y_1 jsou řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$ (to je totiž v předpokladu námi ověřovaného tvrzení), je výraz $ax_1^2 - y_1^2$ roven $-b$. Obdobně je $y_2^2 - ax_2^2 = b'$. Rovnost (2) přejde na tvar $b' . (-b) + bb' = 0$, čímž je tvrzení ověřeno.

Přímým důsledkem Brahmaguptova tvrzení je věta:

Jestliže platí $ax_1^2 + b = y_1^2$, pak též platí

$$a(2x_1y_1)^2 + b^2 = (y_1^2 + ax_1^2)^2 . \qquad (3)$$

Důkaz: Položíme-li v rovnicích $ax^2 + b = y^2$ a $a'x^2 + b' = y^2$ $a = a'$ i $b = b'$, zmizí i indexové rozlišení ve výrazech $x = x_1y_2 \pm x_2y_1$ a $y = y_1y_2 + ax_1x_2$, které přejdou na tvar $x = 2x_1y_1$ a $y = y_1^2 + ax_1^2$. (4)

Pro $b = 1$ dávají formule (4) návod na nalezení dalšího celočíselného řešení. Poněkud nás zarazí, když zjistíme, že nemůžeme vyjít z řešení triviálního, neboť po jeho dosazení do (4) dostaneme opět řešení triviální.

Podaří-li se nalézt alespoň jedno netriviální řešení, pak vztahy (4) umožňují nalézt celou posloupnost řešení.

Vezměme nyní určitou rovnici, např.

$$3x^2 + 1 = y^2 . \tag{5}$$

Jestliže se nám podaří nalézt např. řešení $x_1 = 1$ a $y_1 = 2$, pak dosazením do (4) nalezneme řešení $x_2 = 4$ a $y_2 = 7$. Několik dalších řešení rovnice (5) je v tabulce:

x	0	1	4	56	9864
y	1	2	7	97	18817

O existenci nekonečného počtu celočíselných řešení se zmiňují již staří indičtí matematici *Šřípati* a *Bháskara* II.

Závěrem ještě jedno Brahmaguptovo tvrzení:
Jestliže x_1 a y_1 jsou řešením rovnice $ax^2 + b^2 = y^2$, potom $x = x_1/b$, $y = y_1/b$ jsou řešením rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Několik úloh z matematiky

1. Každé z různých celých kladných čísel a, b, c, d je menší než 10. Přitom platí: (1) a je sudé; (2) $a + b = 7$; (3) $c < b$; (4) součin $b \,.\, c$ končí číslicí 5; (5) d je dělitelem každého celého čísla. Určete čísla a, b, c, d.

2. Ve škole jsou tři sedmé třídy, tj. 7a, 7b, 7c. Ve všech třech je celkem 89 žáků. Přitom v 7a je chlapců o dva více než děvčat, v 7b je chlapců o 7 méně než dívek a v 7c je počet děvčat o dvě větší než počet hochů. Kolik je celkem v těchto třech třídách hochů a kolik děvčat? Kolik je v jednotlivých třídách chlapců a kolik děvčat, jestliže je v každé třídě nejvýše 30 žáků?

3. Které z čísel

$$A = \frac{2\,222\,221}{2\,222\,223}, \qquad B = \frac{3\,333\,331}{3\,333\,334}$$

je větší?

4. Najděte dvě celá kladná čísla, jejichž součet je 168 a jejichž společný dělitel je 24.

5. Dokažte, že číslo $n^2 + n + 1$ (n je celé kladné číslo) je násobkem čísla 19 pro nekonečně mnoho celých kladných čísel n.

6. Pěticiferné číslo, které má na prvním a čtvrtém místě číslici 4 a na druhém číslici 2, je dělitelné 72. Které je to číslo?

7. Kterou číslicí končí dekadický zápis čísla 12^{100}?

Emil Kraemer

Řešení úloh ze 4. čísla Rozhledů

Sčítalkové trojuholníky

1. a) Napríklad 2 1 3 4, b) čísla 3 a 4 sú v strede a čísla 1, 2 na kraji, c) v strede sú 1 a 2, na kraji 3 a 4.
2. Prvý riadok je napríklad 4 1 2 7 alebo 4 2 1 7.
3. Prvý riadok je napríklad a) 4 3 4 1, b) 1 0 0 0, c) 7 2 8 1.
4. a) 0,7 0,5 1,1 1,3, b) 1,1 0,5 0,7 1,3
5. Prostredné číslo hľadanej pätice je a) 6, b) 10, c) 100.
6. Prvý riadok môže mať napríklad tvar 1 0 1 0 1 a, pričom číslo a je a) 2, b) 3, c) 4.
7. Prvý riadok je a) 1 1 0 8, b) 3 - 2 2 1, c) neexistuje
8. a) 2^3, b) 2^6, c) 2^{1988}.
9. Spodné číslo je 16-násobok prostredného čísla prvého riadku.
10. a) $j = a + d + 3f$; odtiaľto vidieť dôvod neexistencie riešenia úlohy 7 c), b) $j = 2r - s$.
11. a) 27, b) 3^6.
12. $(x + 1)^n$

Úloha ze starého Ruska

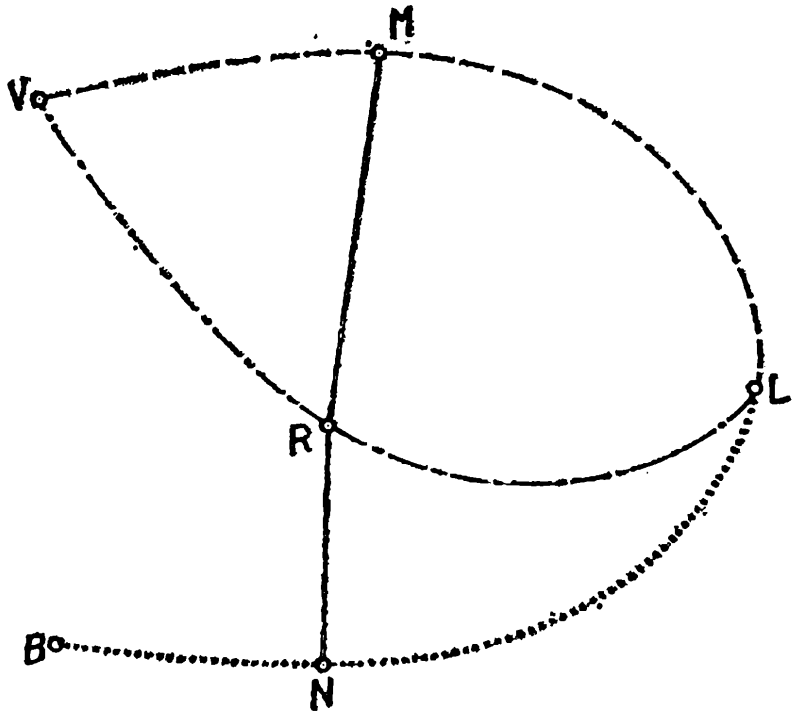
Větší louka má rozlohu $x \cdot \frac{y}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2}$, menší $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} + y$. Odtud již plyne rovnice $\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = 2 \cdot \left(\frac{xy}{4} + y\right)$. Obě její strany vydělíme y a máme rovnici pro neznámou x.

Úloha ke stému výročí turistického značení cest v českých zemích

Schematickou mapku situace zachycuje obr. 1. Váš náčrt může vypadat trochu jinak — podstatné je, kolik cest vychází z jednotlivých křižovatek a jak jsou pojmenovaná místa barevně spojena. Okružní cesty požadovaných vlastností jsou dvě:

Rokle—Náhon—Luh—Milíře—Viklan—Rokle

Náhon—Rokle—Viklan—Milíře—Luh—Náhon



Obr. 1

Legenda: *B* . . .Borek, *L* . . . Luh, *M* . . . Milíře, *N* . . . Náhon, *R* . . . Rokle, *V* . . . Viklan
— červená, - - - modrá, . . . zelená, - . - . - žlutá

Logické úlohy:
1. *B* mluví pravdu, *A* a *C* lžou.
2. U stolu sedí: Procházka (úředník) — Novák (technik)
Král (redaktor) — Dvořák (spisovatel)

Domácí učitel

Takto se jmenuje jedna z povídek ruského spisovatele *Antona Pavloviče Čechova* (1860—1904). Domácím učitelem je student vyššího ročníku gymnázia a přiučuje dvanáctiletého synka carského úředníka ve výslužbě. Samozřejmě mezi předměty je i matematika. Před náhodně vybranou úlohou ze sbírky se oba dostanou do rozpaků. Šlo o úlohu:

„Kupec koupil 138 loktů černého a modrého sukna za 540 rublů. Vypočtěte, kolik bylo loktů toho a onoho, jestliže loket modrého stál 5 rublů a černého 3 rubly?"

Pokud jste z posledního ročníku základní školy, pak tuto úlohu starou asi sto let umíte jistě vyřešit.

Jak vše dopadlo v povídce, si můžete přečíst sami; Čechovovy povídky vyšly v českém překladu. Pokud knížku nemáte náhodou doma, zkuste si ji vypůjčit ve školní nebo jiné veřejné knihovně.

Jana Mídová

Číselné doplňovačky

Objevíte zákonitosti, podle nichž jsou vytvořeny trojice čísel? Které číslo tedy doplníte do druhé řádky?

a) 28417 (6917) 87569
35046 ( ) 19291

b) 6302 (2586) 3716
4094 ( ) 1258

c) 438129 (1863) 253686
125744 ( ) 832461

d) 3607 (1399) 1792
4952 ( ) 2836

e) 9031 (54) 6478
7754 ( ) 8103

f) 243 (260) 178
401 ( ) 326

Jindřich Pěnčík

Řešení všech úloh rubriky „Z matematiky a fyziky ZŠ" budou v příštím čísle Rozhledů.

Omyly, které ovládly svět

Známe opravdu Archimédův zákon?

Dva omyly, se kterými se tentokrát seznámíme, opět ukazují, že umět fyzikální zákon odříkat je mnohem snadnější, než mu rozumět. Ještě obtížnější je ovšem naučit se ho správně používat.

Archimédův zákon patří mezi poučky, které si pamatuje ze školy téměř každý. Asi proto, že se musíme usmát při představě, jak nahý Archimédes vybíhá z koupele na ulici s výkřikem „HEUREKA!" (objevil jsem). „Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené."

Ve vašich současných učebnicích fyziky zní Archimédův zákon trochu méně libozvučně:

„Na těleso ponořené do kapaliny působí hydrostatická vztlaková síla. Její velikost se rovná tíze kapalného tělesa se stejným objemem, jaký má ponořená část tělesa."

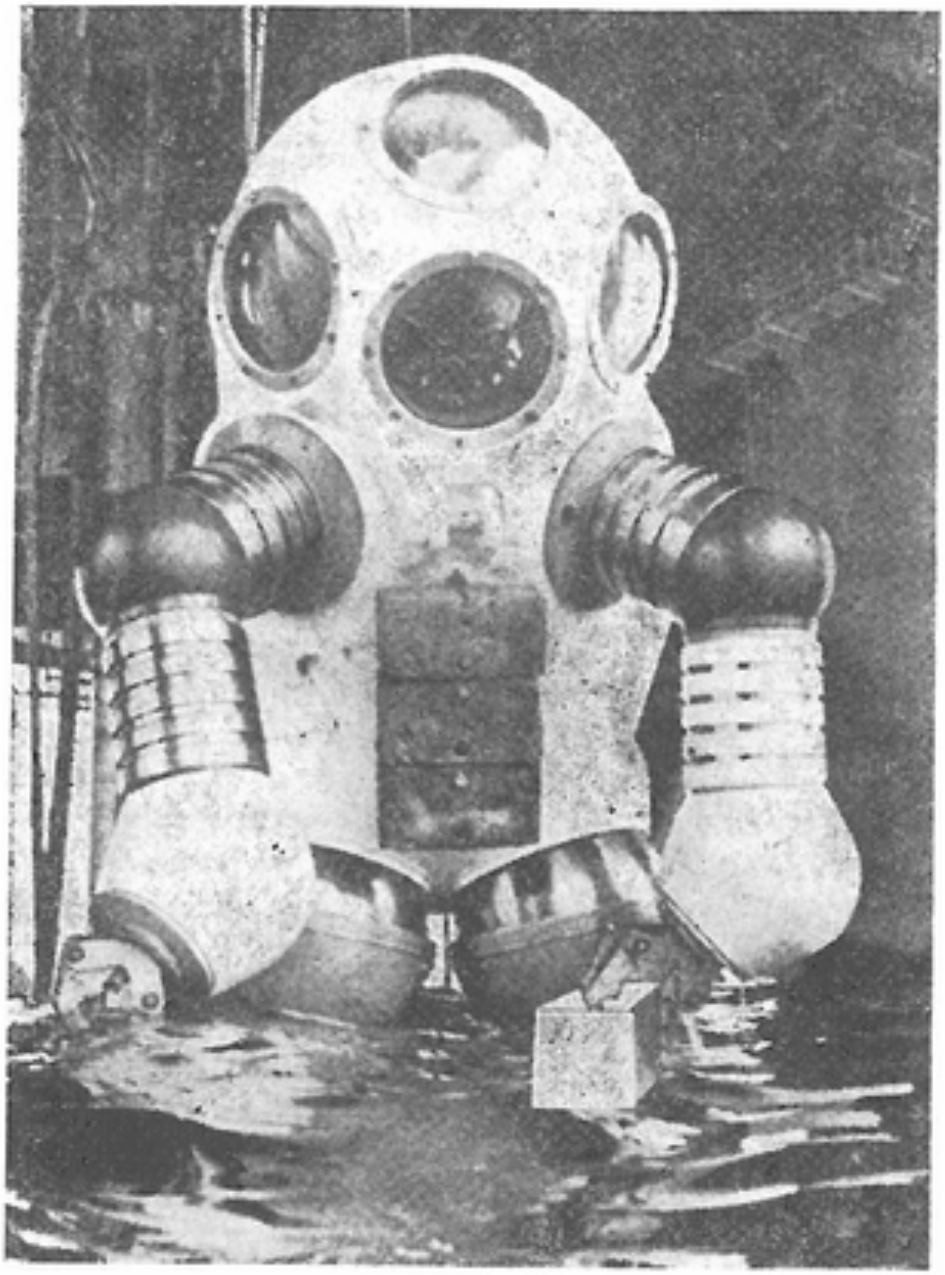
I takto vyslovený Archimedův zákon se většina žáků dokáže naučit nazpaměť. Přesto mnoho lidí věří, že kostka polystyrenu je ve vodě nadlehčována o hodně více, než stejně velká žulová dlažební kostka. Vždyť přece každý ví, že potopený polystyren sám vyskočí nad hladinu, zatím co dlažební kostka jde ke dnu. Myslíte si totéž? Nebo si uvědomujete, že vztlak musí být v obou případech stejný? Různé chování potopených kostek není způsobeno rozdílnou vztlakovou silou, kterou na ně působí okolní voda, ale různou silou, kterou na kostky působí Země.

Slíbili jsme vám však omyly dva. Zde je ten druhý:

Představte si, že polystyrenovou kostku zatlačíte hlouběji pod hladinu, třeba do desetimetrové hloubky. Většina nefyziků je přesvědčena,

síly, ke kterému dojde vlivem opačného působení vrchních vodních že z větší hloubky bude kostka vytlačována větší vztlakovou silou, než když byla potopena těsně pod hladinu. Ani to však není pravda. Mezi oběma silami je sice malý rozdíl, ale obrácený, než jaký je všeobecně očekáván. Vztlaková síla na polystyrenovou kostku se s rostoucí hloubkou nepatrně, avšak měřitelně zmenšuje. Je to způsobeno tím, že zvětšování tlaku vody s hloubkou má za následek zmenšení objemu kostky, a proto i zmenšení „tíhy kapaliny tělesem vytlačené".

Všimneme si i žulové kostky, která se tlakem vody v malých hloubkách měřitelně nezmenší. Teprve kdybychom ji spustili do největších hlubin oceánů, kde je tlak více než tisíckrát větší než na povrchu Země byla by kostka stlačena asi o miliardtinu svého původního objemu. Tedy opět menší vztlak? Ještě nejsme u konce. Bude přece stlačena, a to tisíckrát více, i okolní voda. Takže bude vztlak větší? Ne! Vztlaková síla přesto poklesne, protože největší vliv bude mít zmenšení gravitační



mas. Rozdíly ovšem budou velmi malé a navíc budou překrývány dalšími vlivy, například různým obsahem soli ve vodě, různou teplotou aj.

Mohli bychom tedy shrnout, že pro tělesa, která nejsou poddajná, je vztlaková síla na hloubce ponoření prakticky nezávislá. Znatelně však klesá s hloubkou u snadno stlačitelných těles.

Úkol pro vás:

Je snadnější udržet nafouknutý pouťový balónek těsně pod hladinou nebo ve větší hloubce?

Napište nám svou domněnku i zdůvodnění. Pokuste se o ověření pokusem s balónkem, ve kterém je asi jeden litr vzduchu. Balónek zatěžkejte, tak, aby se téměř celý potopil, a potom ho ponořte do větší hloubky.

Milan Rojko

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Sáša se podíval na číslo automobilu, který přijel před jeho dům. Opravdu zajímavé! Bylo 85—87 STO. Přičteme-li k prvému dvojčíslí cifry druhého, dostaneme 100, a přičteme-li k druhému dvojčíslí cifry prvého, dostaneme opět 100. Která jsou další čísla s touž vlastností?

2. Nahraďte písmeno x ciframi tak, aby platil písemný součin (stejné písmeno x může na různých místech představovat různé cifry).

$$
\begin{array}{r}
5\ x\ x\ 4 \\
.\ 5\ x\ x\ 7 \\
\hline
4\ 0\ x\ x\ x \\
1\ x\ 4\ x\ x \\
1\ 7\ x\ x\ x \\
2\ x\ x\ x\ 0 \\
\hline
x\ 0\ x\ x\ 5\ x\ 1\ x
\end{array}
$$

3. Dokažte že rovnice

$$x^3 - x - 1 = 0$$

nemá racionální řešení.

4. (obtížnější) Dokažte, že součin délek úseček, na které dělí přeponu pravoúhlého trojúhelníka bod dotyku kružnice vepsané, je roven obsahu tohoto trojúhelníka.

5. (obtížnější). Dokažte, že libovolné přirozené číslo můžeme právě jedním způsobem zapsat ve tvaru

$$a = a_1 \,.\, 1! + a_2 \,.\, 2! + \ldots + a_n \,.\, n!\,,$$

kde a_k je celé číslo, které není menší než 0 a větší než k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

6. (obtížnější). Jestliže $a + b + c = 0$, potom $\sin a + \sin b + \sin c = -4 \sin a/2 \sin b/2 \sin c/2$. Dokažte!

Tomáš Schütz

Vánoce u matematických kutilů — řešení

1. Obecný vzorec je $\dfrac{1}{h(g-h)} = \dfrac{1}{g(g-h)} + \dfrac{1}{1+gh} + \dfrac{1}{gh(1+gh)}$

Zde $d = h(g-h) = 1988 = 1 \,.\, 1988 = 2 \,.\, 994 = 4 \,.\, 497 = 7 \,.\, 284 = 14 \,.\, 142 = 28 \,.\, 71$. $(g, h) = \{(1989, 1), (1989, 1988), (996, 2), (996, 994), (501, 4), (501, 497), (291, 7), (291, 284), (156, 14), (156, 142), (99, 28),$

$(99, 71)\}$. $a = g(g - h)$, $b = 1 + gh$, $c = gh(1 + gh)$. Někdy je nutno zaměnit výrazy pro a, b tak, aby platilo $a < b$. Trojice a, b, c určete sami.

2. Jde o užití identity $2kl = (k + l + m)^2 - (k + m)^2 - (l + m)^2 + m^2$. $kl = 1988 : 2 = 1 . 994 = 2 . 497 = 7 . 142 = 14 . 71$. $(k, l) = \{(71, 14), (142, 7), (497, 2), (994, 1)\}$, $m = \{1, 2, 3, \ldots\}$. 4. řádek začíná $996^2 - 995^2 - 2^2 + 1^2 = \ldots$ Po provedení naznačených početních operací dostanete vždy 1988.

3. Při řešení příslušné diofantovské rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 366$ se lze omezit na případy, kdy $x \leqq y \leqq z$. Jádrem je její úprava na tvar $(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 + (2z - 1)^2 = 1467$. Pak $(x, y, z) = \{(2, 14, 14), (4, 4, 19), (6, 6, 18)\}$. S číslem 1988 namísto 366 je úloha pracnější.

4. $k^3 + 12k^2 - 27k + 14 = (k - 1)^2 (k + 14) . 1988 = 28 . 17 = 14 . 142 = 4 . 497 = 2 . 994 = 1 . 1988$. Zkoušíme postupně činitele jednotlivých rozkladů a najdeme $k + 14 = 71$, $k = 57$, $k - 1 = 56 = 2 . 28$. Pro $k = 57$ je $k^3 + 12k^2 - 27k + 14 = 112 . 1988$.

5. $\alpha = 1°$, $\beta = 177°$, $\gamma = 2°$.

6. $\left.\begin{array}{l}\text{Muži } 22\\ \text{Ženy } 29\end{array}\right\rangle 25 \left\langle \begin{array}{l}4\\3\end{array}\right.$ Pomocí směšovacího pravidla najdeme, že v závodě jsou 4/7 z celkového počtu zaměstnaných muži a 3/7 ženy, tj. 1136 mužů a 852 ženy. (Pokuste se dokázat správnost tohoto pravidla.)

7. Hledáme aritmetickou posloupnost s $d = 1$, $s_n = 1988$. Úpravou vztahu $s_n = na_1 + 0{,}5n(n - 1)d$ a dosazením dostáváme postupně $n^2 - n + 2a_1n = 3976$, $n(n + 2a_1 - 1) = 3976 = 7 . 568 = 8 . 497 = 56 . 71$ a dvojice $(n, a_1) = \{(7, 281), (8, 245), (56, 8)\}$. Řešením jsou 3 aritmetické posloupnosti s prvky $(a_1, d, n) = \{(8, 1, 56), (245, 1, 8), (281, 1, 7)\}$.

8. Podkladem hříčky je identita $(2(a^2 + b^2 + c^2))^2 + (4ab)^2 + (4ac)^2 + (4bc)^2 = (a + b + c)^4 + (a + b - c)^4 + (c + a - b)^4 + (b + c - a)^4$. Stačí nalézt rozklady čísla $994 = 1988 : 2$ na součty 3 čtverců.

9. Zde $(a + b^{-1})(b + c^{-1})(c + a^{-1}) = abc + (abc)^{-1} + a + b + c + a^{-1} + b^{-1} + b^{-1}$.

10. Ku příkladu: $\sqrt{1 . 98 . 8} - \sqrt{1 . 9 . 8 . 8} + \sqrt{1 + 9 . 8 + 8} - \sqrt{1 . 9 . 8 - 8} = \sqrt[3]{(19 + 8)8} - \sqrt[3]{19 + 8} + \sqrt[3]{8}$

Jiří Mann

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

7. Je dán obrazec O, jehož hranicí je uzavřená křivka o délce l. Dokažte, že obvod každého rovnostranného trojúhelníku ABC, který je opsán obrazci O, není větší než $2l$.

Poznámka: Trojúhelníkem opsaným obrazci O se rozumí každý trojúhelník, který má tu vlastnost, že obrazec O leží uvnitř tohoto trojúhelníku a každá strana tohoto trojúhelníku má s obrazcem O společný aspoň jeden bod.

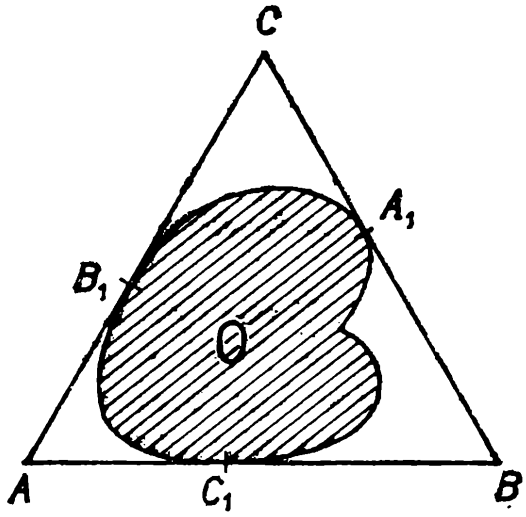
(Došla 2 řešení.)

Dmitrij P. Mavlo, Moskva

Řešení Marka Velešíka, 3.A G, Koněvova, Brno:

Dokážeme obráceně, že každý obrazec O vepsaný rovnostrannému trojúhelníku ABC o obvodu $2l$ má hraniční křivku o délce alespoň l.

Označme A_1 (obdobně B, C_1) některý ze společných bodů obrazce O a strany BC (AC, AB) rovnostranného trojúhelníku ABC. Hraniční křivka (obr. 1) obrazce O je rozdělena na části mezi body A_1 a B_1, B_1 a C_1, C_1 a A_1. Jestliže budou mít tyto tři části minimální délku, bude



Obr. 1

i délka hraniční křivky minimální. Tato minimální situace nastává, právě když části mezi A_1 a B_1, B_1 a C_1, C_1 a A_1 jsou úsečky; délka hranice obrazce O je přitom $|A_1B_1| + |B_1C_1| + |C_1A_1|$. Kdyby některé dva z bodů A_1, B_1, C_1 splývaly, pak by splývaly s vrcholem $\triangle ABC$. Nechť např. $A_1 = B_1 = C$. Potom minimální vzdálenost bodu $C_1 \in AB$ od bodu A_1

a také B_1 je $l/\sqrt{3}$, takže hraniční křivka obrazce O má minimální délku $2l/\sqrt{3} > l$.

Pro pevné dva body — např. A_1, B_1 — je délka $|C_1A_1| + |C_1B_1|$ minimální, právě když $|\sphericalangle B_1C_1A| = |\sphericalangle BC_1A_1|$. To plyne z řešení známé školské úlohy, v níž se užívá osové souměrnosti (v našem případě podle přímky AB). Ke každému případu, v němž

$$|\sphericalangle B_1C_1A| \neq |\sphericalangle BC_1A_1| \text{ nebo } |\sphericalangle C_1A_1B| \neq |\sphericalangle CA_1B_1| \text{ nebo } |\sphericalangle A_1B_1C| \neq |\sphericalangle AB_1C_1|, \tag{1}$$

můžeme najít takové body $A_2 \in BC$, $B_2 \in AC$, $C_2 \in AB$, že

$$|A_2B_2| + |B_2C_2| + |A_2C_2| < |A_1B_1 + |B_1C_1| + |A_1C_1|.$$

Zabývejme se případem, v němž v (1) budou všude rovnosti, tj. právě když bude zároveň platit

$$\alpha = |\sphericalangle B_1C_1A| = |\sphericalangle BC_1A_1|, \quad \beta = |\sphericalangle C_1A_1B| = |\sphericalangle CA_1B_1|,$$
$$\gamma = |\sphericalangle A_1B_1C| = |\sphericalangle AB_1C_1|. \tag{2}$$

Odtud plyne

$$|\sphericalangle A_1C_1B_1| = 180° - 2\alpha, |\sphericalangle B_1A_1C_1| = 180° - 2\beta,$$
$$|\sphericalangle C_1B_1A_1| = 180° - 2\gamma. \tag{3}$$

V $\triangle A_1B_1C_1$ je součet vnitřních úhlů 180°, takže z rovností (3) vyplývá

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Z trojúhelníků ACB a AC_1B_1 pak dostáváme

$$60° = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle B_1AC_1| = 180° - \alpha - \gamma - \beta.$$

Obdobně se dokáže, že také $\alpha = 60°$ a $\gamma = 60°$. Tedy $\triangle A_1B_1C_1$ musí být rovnostranný. Rovnostranné jsou i trojúhelníky AC_1B_1, C_1BA_1, A_1CB_1, takže

$$|A_1B_1| = \frac{1}{2}|AB|, \quad |B_1C_1 = \frac{1}{2}|BC|, \quad |A_1C_1| = \frac{1}{2}|AC|.$$

Tedy minimální délka hraniční křivky vepsaného obrazce O je l.

Opíšeme-li tedy obrazci O o délce hraniční křivky l rovnostranný trojúhelník ABC, musí mít tento $\triangle ABC$ obvod nejvýše $2l$. Kdyby měl totiž obvod větší než $2l$, měla by hraniční křivka obrazce O délku větší než l.

8. Je dán trojúhelník O_1O_2T. Řešte tyto úlohy:

a) Sestrojte takový trojúhelník ABC, v němž bod T je jeho těžištěm a úsečka O_1O_2 je jeho střední příčkou rovnoběžnou se stranou AB.

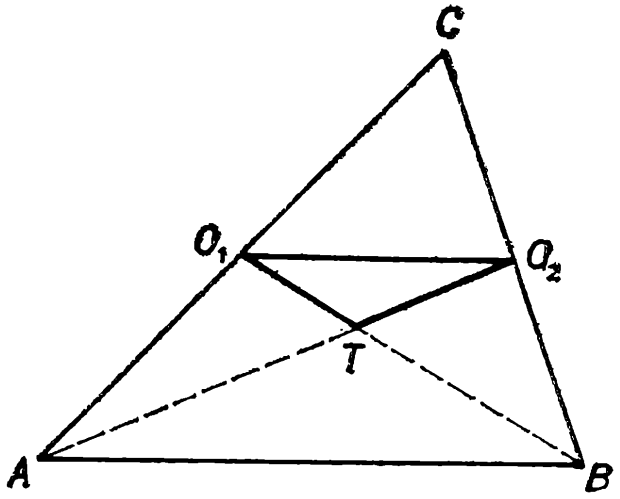
b) Vypočtěte poměr obsahů trojúhelníků ABC, O_1O_2T.

(Došlo 28 řešení.)

Jiří Mída

Řešení Marka Velešíka, 3. A. G, Koněvova, Brno:

a) Nejprve provedeme rozbor. Bod T je těžištěm a body O_1, O_2 (obr. 2) jsou po řadě středy stran AC, BC. Bod A (resp. bod B) musí ležet na polopřímce opačné k polopřímce TO_2 (resp. TO_1) tak, že $|AT| = 2 \cdot |TO_2|$, $|BT| = 2 \cdot |TO_1|$.



Obr. 2

Konstrukci tedy provedeme tak, že sestrojíme úsečku AB jako obraz úsečky O_1O_2 ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem - 2. (Bod B nechť je obrazem bodu O_1, bod A obrazem bodu O_2.) Bod C získáme jako průsečík přímek AO_1 a BO_2.

Dále se přesvědčíme o správnosti konstrukce. V $\triangle ABC$ je podle ní $O_1O_2 \parallel AB$, $|AB| = 2 \,.\, |O_1O_2|$. Je tedy úsečka O_1O_2 střední příčkou trojúhelníka ABC a body O_1, O_2 jsou středy stran AC, BC. Úsečky AO_2, BO_1 jsou proto těžnice trojúhelníku ABC. Jejich průsečík T je skutečně těžištěm $\triangle ABC$.

Úloha má dvě řešení — v jednom z nich jsou těžnice AO_2, BO_1 a ve druhém AO_1 a BO_2.

b) Označme v výšku $\triangle ABC$ z vrcholu C na stranu AB. Obsah $\triangle ABC$ je

$$S = \frac{1}{2} v \,.\, |AB|$$

Přitom $|O_1O_2| = \frac{1}{2} |AB|$ a vzdálenost přímek O_1O_2 a AB je $\frac{1}{2} v$. Dále vzdálenost těžiště T od strany AB je $\frac{1}{3} v$. Pokud v $\triangle ABC$ je $AC = BC =$, pak jde o vlastnost těžnice z bodu C na stranu AB. Není-li $AC = BC$, potom to vyplývá z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků, které získáme spuštěním kolmic z bodů T a C na stranu AB, přičemž jejich přepony leží na polopřímce CT. Výška v $\triangle O_1O_2T$ z bodu T na stranu O_1O_2 je tedy

$$\frac{1}{2} v - \frac{1}{3} v = \frac{1}{6} v \,.$$

Pro obsah S' trojúhelníka O_1O_2T dostáváme

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot \frac{1}{6} v = \frac{1}{12} S \,.$$

Tedy poměr $S' : S = 1 : 12$.

3. Kondenzátor o kapacitě C_1 a rezistor o odporu R_1 jsou spojeny sériově, kondenzátor o kapacitě C^2 a rezistor o odporu R_2 jsou spojeny paralelně. Jaké vztahy musí platit mezi kapacitou C_1, odporem R_1 a kapacitou C_2 a odporem R_2, aby obě soustavy byly ekvivalentní?

(Došla 3 řešení.) *Eva Havránková*

Upravené a doplněné řešení Petra Duzsynskiho ze 3. G. gymnázia v Nové Pace:

Dvě soustavy jsou ekvivalentní právě tehdy, mají-li tutéž komplexní impedanci.

Pro sériové zapojení kondenzátoru o kapacitě C_1 a rezistoru o odporu R_1 je komplexní impedance

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\, C_1} = R_1 - \frac{\mathrm{j}}{\omega\, C_1}\,,$$

pro paralelní zapojení kondenzátoru o kapacitě C_2 a rezistoru o odporu R_2 dostaneme pro komplexní impedancí Z_2 vztah

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2}\,\mathrm{j}\,\omega\, C_2\,, \quad \text{tedy } Z_2 = \frac{R_2}{1 + (\omega\, R_2 C_2)^2} - \mathrm{j}\,\frac{\omega\, R_2^2 C_2}{1 + (\omega\, R_2 C_2)^2}\,.$$

Ve vzorcích pro Z_1 a Z_2 je j imaginární jednotka a ω úhlová frekvence střídavého proudu.

a) Musí tedy platit $Z_1 = Z_2$. Porovnáním reálných a imaginárních částí u komplexních impedancí Z_1 a Z_2 dostaneme pro R_1 a C_1 vztahy

$$R_1 = \frac{R_2}{1 + (\omega\, R_2 C_2)^2}\,, \quad C_1 = \frac{C_2[1 + (\omega\, R_2 C_2)^2]}{(\omega\, R_2 C_2)^2}\,.$$

b) Obrácený vztah, tj. vyjádření R_2 a C_2 pomocí R_1 a C_1, dostaneme pohodlně, položíme-li $1/Z_2 = 1/Z_1$ a porovnáme reálné a imaginární části těchto komplexních admitancí. Dostaneme

$$R_2 = \frac{R_1[1 + (\omega\, R_1 C_1)^2]}{(\omega\, R_1 C_1)^2}\,, \quad C_2 = \frac{C_1}{1 + (\omega\, R_1 C_1)^2}\,.$$

4. Při jaké kinetické energii protonu bude neutron vznikající v reakci $\mathrm{p} + {}^7\mathrm{Li} \rightarrow {}^7\mathrm{Be} + \mathrm{n}$ v klidu? Předpokládejte, že terčíkové částice (tj. jádra ^{7}Li) jsou před srážkou s protonem v klidu. K číselnému výpočtu použijte relativní atomové hmotnosti $A_r(\mathrm{n}) = 1{,}008665$, $A_r({}^1\mathrm{H}) =$

$= 1{,}007825$, $A_r(^7\mathrm{Li}) = 7{,}016004$ a $A_r(^7\mathrm{Be}) = 7{,}016923$. Kinetickou energii protonu vyjádřete v energetických jednotkách MeV.

(Došla dvě řešení.) *Zdeněk Janout*

Řešení Petra Duczynskiho ze 3. G. gymnázia v Nové Pace.

Podle zákona zachování energie musí být rozdíl klidových energií produktů a reaktantů (označme jej Q, zřejmě $Q = m_u \,.\, c^2[A_r(\mathrm{Be}) + A_r(\mathrm{n}) - A_r(\mathrm{H}) - A_r(^7\mathrm{Li})]$, kde m_u je atomová hmotnostní konstanta, c rychlost světla ve vakuu) roven rozdílu kinetických energií protonu E_p před srážkou a jádra ^{7}Be po srážce:

$$Q = E_p - E_{Be} \,. \tag{1}$$

Podle zákona zachování hybnosti musí být za daných podmínek hybnost protonu rovna hybnosti jádra ^{7}Be. Využijeme-li relativistický vztah pro hybnost $(pc)^2 = E^2 + 2mc^2E$ (E je kinetická energie, m je klidová hmotnost) dostaneme rovnici

$$E_p^2 + 2A_r(\mathrm{H}) \,.\, m_u \,.\, c^2 \,.\, E_p = E_{Be}^2 + 2A_r(\mathrm{Be}) \,.\, m_u \,.\, c^2 \,.\, E_{Be} \,. \tag{2}$$

Dosadíme-li za E_{Be} do rovnice (2) z rovnice (1), dostaneme po úpravě pro energii protonu E_p vztah

$$E_p = \frac{Q(Q - 2 \,.\, A_r(\mathrm{Be}) \,.\, m_u \,.\, c^2)}{2 \,.\, m_u \,.\, c^2[A_r(\mathrm{H}) - A_r(\mathrm{Be})] + 2 \,.\, Q} \,.$$

Dosadíme-li dále za energii reakce Q, dospějeme ke konečnému vztahu

$$E_p = \frac{1}{2} \,.\, m_u \,.\, c^2 \, \frac{[A_r(\mathrm{Be})]^2 - [A_r(\mathrm{Li}) + A_r(\mathrm{H}) - A_r(\mathrm{n})]^2}{A_r(\mathrm{Li}) - A_r(n)} \,.$$

Číselný výpočet:

$$E_p = \frac{1}{2} \,.\, 1{,}66 \,.\, 10^{-27} \,.\, (3 \,.\, 10_r)^2$$

$$\frac{7{,}016923^2 - (7{,}016004 + 1{,}007825 - 1{,}008665)^2}{7{,}016004 - 1{,}008665} \ \mathrm{J}$$

$$E_p = 3{,}0692 \,.\, 10^{-13} \ \mathrm{J} = 1{,}916 \ \mathrm{MeV}.$$

Kinetická energie protonu bude rovna 1,916 MeV.

O P R A V A

Ve 2. čísle letošního ročníku ve výsledcích Naší soutěže má být u příjmení G a á l a G y e n e s o v á uvedeno, že jde o žáky SPŠ Komárno, triedy s vyučovacím jazykem maďarským (nikoli gymnázia). Oběma soutěžícím se omlouváme.

OLYMPIÁDY A SOČ

Jak zlepšit úroveň středoškolské odborné činnosti?

RNDr. ZDENĚK POKORNÝ, CSc., Hvězdárna a planetárium, Brno
RNDr. ZDENĚK KLUIBER, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Středoškolská odborná činnost (SOČ) jubilovala. Po deseti ročnících je jistě dostatek podnětů ke srovnávání, hodnocení i návrhů, jak dál. SOČ nepochybně přispívá k rozvoji tvůrčích schopností žáků a má již své stálé místo v systému vzdělávání žáků středních škol [1]. Má však i svá úskalí. Chceme nyní diskutovat otázku volby vhodného tématu práce, předkládané v rámci přehlídek SOČ. Vycházíme přitom ze svých zkušeností, získaných při posuzování prací v oboru fyzika.

Volba tématu práce je nepochybně závažná už proto, že SOČ bývá v převážné většině prvním případem samostatné práce účastníka, navíc završené obhajovou získaných výsledků. Víme, že nic neodrazuje více než první neúspěch. V současnosti se často ze škol žádá, aby odborníci vypsali témata prací, která by pak kterýkoliv ze zájemců mohl řešit. Bohužel zdá se, že tento postup nijak nezvyšuje šanci na úspěch, tak potřebný při prvním pokusu o samostatnou a smysluplnou odbornou práci. Důvodů je celá řada; my se však teď jejich rozborem zabývat nebudeme, ale uvedeme naše návrhy, jak by si měli počínat účastníci SOČ i jejich konzultanti. Srovnáním s daným stavem pak budou každému čtenáři zřejmé i příčiny, proč dnešní běžná praxe mnohdy nevyhovuje.

Rady pro účastníka SOČ:

Písemná práce, kterou každý účastník obhajuje v rámci přehlídek SOČ, by měla vycházet z jeho vlastní činnosti, které se věnuje bez ohledu na existenci SOČ. Celý systém SOČ dává sice jedinečnou možnost porovnat své schopnosti s druhými („soutěžit"), nicméně práce v rámci SOČ musí mít pro účastníka hlubší smysl než jen příležitost zúčastnit se soutěže (ostatně každý zkušený člen hodnotící komise okamžitě pozná, jestli předložená práce vznikla bez hlubšího zájmu účastníka, tedy jen na nátlak zvnějšku).

V práci musí být poznat *vlastní příspěvek* účastníka, byť nevelký. Pozor — nejde o množství popsaného papíru! Ve školních a okresních kolech SOČ se často stává, že onen vlastní příspěvek není ze soutěžního oboru (tedy v oboru fyzika není fyzikální!). Typický příklad: příspěvek účastníka spočívá pouze v programování (často jen „zakódování") již

existujícího postupu (algoritmu). Ten se sice může týkat fyziky, programování je však záležitostí matematickou.

Práce by vždy měla být užitečná ještě pro někoho jiného než jen pro autora. Jistě — autor práce se při SOČ hodně naučí, musí však také vědět, že „práce pro nikoho" je outsider (a to nejen v SOČ!). Práce by měla být nějak zužitkovatelná, některé její výsledky by mohly být např. i publikovány. Při posuzování, komu práce poslouží, je ovšem třeba velké dávky sebekritičnosti. Vyžaduje to též, aby i konzultanti byli kritičtí; tak např. učitel by neměl utvrzovat žáka v dojmu, že jeho nepřesná kompilace z náhodně vybraných a často pochybených zdrojů bude vítaným doplňkem učiva, když ví, že i pro zkušeného pedagoga je mimořádně obtížné sestavit dobrý výukový text. Konzultant by proto měl takové téma účastníku předem rozmluvit.

Účastník SOČ by měl mít možnost prohlédnout si nejúspěšnější minulé práce. Ty by proto měly být někde soustředěny spolu s hodnotícími posudky konzultantů i komisí. Na těchto názorných konkrétních příkladech by se účastník SOČ naučil i technice, jak napsat odbornou práci tak, aby odpovídala zvyklostem, normám a měla naději na úspěch.

Rady pro konzultanta prací SOČ:

Je tařka nemyslitelné, aby dobrá práce v rámci SOČ vznikla bez konzultanta. Vždyť ani daleko zkušenější diplomanti a mladí vědečtí pracovníci se neobejdou bez pomoci ještě zkušenějších. Bohužel konzultant nejsnáze zavede účastníka do slepé uličky, a to především návrhem nevhodného tématu.

Konzultant (ať je jím učitel, vedoucí zájmového kroužku či kursu, vědecký pracovník apod.) by měl účastníka, jemuž radí, zřejmě znát osobně i mimo SOČ. Měl by vědět, jak je schopný, a co se zajímá. V nejhorším případě by měl získat o účastníku podrobné reference od učitele, rodičů . . . , kteří účastníka dobře znají. Teprve *pak* mu může zadat problém (téma práce), v podstatě problém „na míru", takový, jejž účastník dokáže úspěšně vyřešit. Přitom problém musí být samotnému konzultantovi *zcela jasný* včetně toho, jak by měly vypadat výsledky. Prakticky jediným důvodem, proč jej sám už nevyřešil, může být pouze nedostatek času.

Důrazně upozorňujeme na časté chyby vedoucí nakonec k nezdaru:

1. Konzultant zadá problém, do jehož řešení se mu samotnému nechce (ale přál by si, aby byl vyřešen). Ví jen rámcově, jaký by mohl být výsledek, a možná, že řešení ani neexistuje.

2. Konzultant se domnívá, že účastník je začínající vědec, a proto musí řešit problém výhradně vědecký. To si většinou myslí konzultanti, kteří neznají úroveň středoškoláků, nebo jsou v tomto směru nekritičtí. Takoví zadávají témata, jejichž zpracování vyžaduje 200—400 (i více) hodin soustředěné práce. Reálně lze však požadovat dobu o mnoho kratší.

Nejsou požadavky kladené na konzultanta přehnaně vysoké? Po pravdě řečeno — jsou i nejsou. V každém případě by konzultant měl být odborníkem v oboru se znalostmi mnohonásobně převyšujícími ty, jež má středoškolák. To je předpoklad zcela samozřejmý. Měl by však navíc spolupracovat se středoškoláky i mimo rámec SOČ a tato spolupráce mu musí poskytovat dostatek podnětů, které uplatní při zadávání témat prací. Nemá-li konzultant možnost se středoškoláky systematicky spolupracovat, pak je alespoň třeba, aby důkladně poznal jejich schopnosti a možnosti. Tyto velké požadavky na konzultanta nelze odmítnout s poukazem na skutečnost, že takových bude vždy nedostatek. Vždyť jde o závažný výchovně-vzdělávací problém, na němž se SOČ nemalou měrou podílí: naučit mladé zájemce systematické a samostatné odborné práci, která později přeroste v činnost vpravdě tvůrčí, tak potřebnou pro rozvoj naší společnosti.

Literatura

[1] Kluiber Z.: K rozvoji tvůrčích schopností žáků při práci v odborném fyzikálním kroužku SOČ. MFvŠ, roč. 15, 1985, č. 9, str. 633—635.

Kalendár M-F: január 1989

1. 1. 1894 v Bonne zomrel *Heinrich Rudolf Hertz*, nemecký fyzik. Dokázal základné vlastnosti elektromagnetických vĺn, pozoroval uvoľňovanie elektrónov z kovu pôsobením ultrafialového svetla. Jeho menom je označena jednotka kmitočtu.
2. 1. 1904 sa v Karlsruhe narodil *Walter Heinrich Heitler*, nemecký fyzik. Zaoberal sa kvantovou elektrodynamikou, fyzikou kozmických lúčov, fyzikou mezónov a teóriou jadrových síl. Vysvětlil kovalentnú väzbu kvantovomechanickými zákonitosťami.
5. 1. 1884 sa v Auche narodil *Arno Danjoy*, francúzsky matematik. Dosiahol významné výsledky v teórii funkcií, topológii, teórii trigonometrických radov.
5. 1. 1909 sa v Chartforde (štát Connecticut, USA) narodil *Stephan Cole Kleene*, americký logik a matematik. Ovplyvnil teóriu algoritmov a rekurzívnych funkcií. Zaoberal sa problémami intuicionistickej matematiky.
9. 1. 1864 sa v Nižnom Novgorode narodil *Vladimír Andrejevič Steklov*, ruský matematik. Zaoberal sa matematickou fyzikou — teóriou

potenciálu, hydromechanikou, teóriou pružnosti. Položil základy Matematického ústavu AV ZSSR.

12. 1. 1909 v Göttingene zomrel *Hermann Minkowski*, nemecký matematik. Zaviedol geometrické metódy do teórie čísel, odvodil rad významných nerovností, vytvoril pojem štvorrozmerného časopriestoru.

13. 1. 1864 sa v Gaffkene narodil *Wilhelm Carl Wien*, nemecký fyzik. Za objavy týkajúce sa zákonov tepelného žiarenia dostal roku 1911 Nobelovu cenu za fyziku.

13. 1. 1889 sa narodil *Vasilij Grigorjevič Fesenkov*, sovietsky astronóm. Zaoberal sa fyzikálnymi vlastnosťami Slnka, teóriou vzniku slnečnej sústavy, kozmogóniou.

16. 1. 1834 zomrel *Jean Nicolas Pierre Hachette*, francúzsky matematik. Rozvinul analytickú geometriu kuželosečiek a kvadrík.

17. 1. 1954 zomrel *Leonard Eugene Dickson*, americký matematik. Bol vynikajúcim špecialistom v teórii čísel.

19. 1. 1879 sa v Benátkach narodil *Guido Fubini*, taliansky matematik. Zaoberal sa teóriou reálnych funkcií a diskrétnych grúp. Formuloval vetu o viacrozmerných integráloch.

21. 1. 1874 sa v Paríži narodil *René Baire*, francúzsky matematik. Zaoberal sa teóriou funkcií, vytvoril klasifikáciu reálnych funkcií.

21. 1. 1974 zomrel *Arno Danjoy*, francúzsky matematik. Zaujímavé výsledky dosiahol v deskriptívnej teórii množín a teórii kontinua. V roku 1970 dostal Zlatú medailu M. V. Lomonosova.

22. 1. 1874 sa narodil *Leonard Eugene Dickson*, americký matematik. Zaoberal sa modernou algebrou, teóriou grúp a teóriou čísel.

24. 1. 1679 sa narodil *Christian Wolff*, nemecký matematik a filozof. Zaviedol do praxe niektoré termíny a symboly elementárnej matematiky.

25. 1. 1849 vo Viedni zomrel *Emil Weyr*, český matematik. Zaoberal sa teóriou algebrických kriviek a plôch, projektívnou syntetickou geometriou. Od roku 1874 bol stálym tajomníkom Jednoty českých matematikov.

28. 1. 1884 sa v Bazileji narodil *Auguste Piccard*, švajčiarsky fyzik. Študoval kozmické lúče, zaoberal sa oceánografiou, skúmal stratosféru, zostrojil batyskaf.

dj

Z NOVÝCH KNIH

G. N. Fljorov—A. S. Iljinov:

NA CESTĚ K NOVÝM PRVKŮM

Preklad z ruštiny ing. J. Málek, upravil dr. I. Volf, vydalo nakladateľstvo Mir Moskva, 1987, 95 strán, 33 obrázkov, vydanie prvé, brož. Kčs 6,50.

Akademik Georgij Nikolajevič Fljorov počas dvoch desaťročí riaditeľ Laboratória jadrových reakcií Spojeného ústavu jadrových výskumov v Dubne, sa v roku 1988 dožíva 75 rokov. Meno tohto významného sovietskeho vedca, ktorý začal svoju vedeckú dráhu priamo pod vedením J. V. Kurčatova, sa spája s objavom samovoľného štiepenia jadier (rok 1940, spolu s K. A. Petržakom) a s úmornou mnohoročnou prácou, ktorá priniesla poznanie šiestich nových prvkov Mendelejevovej periodickej tabuľky. Tento významný vedec, ktorého meno nachádzame na viac ako 200 vážnych vedeckých pojednaní nám dokázal, že okrem ostrého logického myslenia vládne aj rozprávačským talentom. So svojim mladším kolegom Alexandrom Sergejevičom Iljinovom, odborníkom v otázkach jadrových reakcií, pripravili populárne rozprávanie o zaujímavej ceste k novým prvkom, ktoré vyšlo v ruskom originále v nakladateľstve Pedagogika, Moskva, v roku 1982.

Začiatkom roka 1988 sa dostal na pulty predajní Zahraničnej literatúry preklad tejto knižôčky od ing. Jiřího Máleka, upravený dr. Ivom Volfom, dlhoročným čelným funkcionárom fyzikálnej olympiády, osvedčeným pedagógom, členom katedry fyziky a základov techniky Pedagogickej fakulty v Hradci Králové. Knihu v českom jazyku vydalo nakladateľstvo Mir Moskva v roku 1987. Táto kniha by nemala chýbať ani v jednej knižnici, ku ktorej má prístup mládež. K dispozícii by ju mali mať aj učitelia fyziky a to aj na základných školách a pedagogickí pracovníci prírodovedeckého zamerania v pionierskych domoch. Poslúži im ako inšpirácia i zdroj faktov pre pútavé rozprávanie o pevninách stabilných nuklidov, obklopených morom nestability a o boji ľudského umu na cestách poznávania súostrovia Stability. Náklad 7000 kusov azda postačí na to, aby sa toto ojedinelé dielko dostalo aj k slovenskému čitateľovi a pomáhalo v ňom prebudiť záujem o problémy zo samotného počiatku vzniku vesmírnej látky.

Eva Bittnerová

V. P. Šelest:

„O ELEMENTÁRNYCH ČASTICIACH“

Bratislavské nakladatelství technické a ekonomické literatury Alfa vydalo v roce 1987 ve dru-

hém vydání poněkud doplněný překlad populárně vědecké publikace známého ukrajinského teoretického fyzika a popularizátora fyziky Vitalije Petroviče Šelesta „O elementárnych časticiach". Knížka má 223 stránek, stojí 15 Kčs, je určena studentům a učitelům na středních i vysokých školách a svým charakterem i formátem se dobře hodí i ke čtení o prázdninách, v autobuse nebo ve vlaku místo detektivky. Je vyzdobena legračními obrázky a do slovenštiny ji přeložil Ivan Lukáč, CSc., který též sestavil velmi užitečný doplněk — životopisné údaje a charakteristiky významných fyziků v knížce připomínaných.

Nepřeberné bohatství a rozmanitost elementárních částic, které se fyzikové snaží různě třídit, vedly k představě o jakési „zoologii" nebo „zoologické zahradě" částic. Navíc je tato zoologická zahrada stále obohacována o nové a nové přírůstky částic stále exotičtějších, se stále neuvěřitelnějšími vlastnostmi. Díky moderní matematice a obrovským urychlovačům se fyzikové postupně prokousávají houštinami subnukleárního světa elementárních částic, ale zároveň narážejí na stále nová překvapení a problémy. Vyznat se v této situaci pro neodborníka je velmi obtížné, a proto je velký zájem o knížky, které podávají alespoň trochu srozumitelný výklad, který je zároveň poutavý a v „odlehčeném" tónu. K takovým knížkám patří právě publikace V. P. Šelesta, jak o tom svědčí i poměrně neobvyklá situace, kdy se překlad populárně vědecké práce dočkal druhého vydání.

Jak je obvyklé, knížka je pojata jako historický vývoj poznávání zákonitostí elementárních částic, tedy to, čemu se obvykle říká biografie (životopis) částic. Vývoj v této oblasti je natolik rychlý, že třetího vydání se již patrně nedočkáme; muselo by být již podstatně přepracováno a doplněno. Znalost dosavadního vývoje, sledu poznatků o této vzrušující oblasti moderní fyziky a úlohy jednotlivých badatelů nám však pomáhá i v pochopení dalšího vývoje.

V oblasti populárně vědecké literatury můžeme rozlišovat řadu odrůd a stylů. Na jedné straně jsou knížky, které objasňují nové objevy v podstatě vědeckým jazykem přizpůsobeným neodborníkovi (tj. bez matematiky) — k takovým patří třeba publikace J. Fischera *Průhledy do mikrokosmu*. Na druhé straně existují jiné, které si kladou za cíl kromě poučení čtenáře také pobavit, používají fiktivních a pohádkových bytostí, literárních a humorných obratů, nadsázky. Klasikem tohoto žánru je jistě Lewis Carroll se svou *Alenkou v říši divů*, ale také třeba nedávno u nás přeložená knížka G. Gamova o *Panu Tompkinsovi*. Šelestova knížka se pohybuje mezi oběma žánry a spíše se přibližuje druhému. Oba přístupy apelují zřejmě na různé čtenářské vkusy, a bylo by proto velmi zajímavé znát i názory čtenářů na tyto různé přístupy a pojetí populárně vědecké literatury. *iš*

J. Jančina—A. Pekárek:

KINEMATIKA

V poslední době vychází celá řada vysokoškolských učebnic z matematiky, fyziky a technických oborů, které postupně zaplňují mezery v naší pedagogické literatuře a nahrazují provizorní skripta. Tak nakladatelství ALFA v Bratislavě společně s pražským SNTL vydalo v roce 1987 slovenskou učebnici Kinematiky autorů doc. ing. Jozefa Jančiny, CSc., a doc. ing. Františka Pekárka, CSc. Učebnice má 331 stran a stojí 24 Kčs a je určena studentům konstrukčních oborů strojních fakult vysokých škol technických, českých i slovenských. Její obsah odpovídá platným osnovám předmětu Kinematika. Může však být užitečná i aspirantům, konstruktérům, učitelům a všem těm, kdo se chtějí seznámit s moderními metodami řešení kinematických úloh ve fyzice a technice. V souladu s dnešní potřebou využívá i moderních numerických metod s aplikací počítačů.

iš

INFORMACE

Studentům středních škol nabízíme příručky:

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKY NA VYSOKÉ ŠKOLY

MATEMATIKA Kčs 3,50

FYZIKA . . . . . Kčs 4,50

Příručky byly vypracovány na základě rozhodnutí MŠ ČSR a obsahují přehled učiva, jehož znalost je požadována při přijímacím řízení na vysokých školách technického směru.

ČVUT
Prodejna technické literatury
Bílá 90
160 00 Praha 6 - Dejvice

REDAKČNÍ KRUH

Doc. dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava, dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topoľčany, doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; Eva Peškova, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Ještě matematické drobnosti

Na stránce Humorů jsme se již jednou zmiňovali o tom, že známý anglický matematik *John E. Littlewood* shromáždil ve své knížce „A Mathematician's Miscellany" mnoho nápadů a historek spojených s řešením matematických problémů. Uveďme jich ještě několik.

První z nich má charakter matematického paradoxu podobného těm, které známe z teorie množin. Jeden anglický časopis vyhlásil soutěž na téma „Co bych si s největší radostí přečetl v příštím čísle?". První cenu získala odpověď tohoto znění:

„Naše soutěž. První cenu v naší soutěži získal pan Arthur Robinson, jehož vtipnou odpověď můžeme bez přehánění označit za nejvíce originální. Jeho odpověď na otázku „Co bych si s největší radostí přečetl v příštím čísle?" měla název „Naše soutěž" a zněla takto: „První cenu v naší soutěži získal pan Arthur Robinson, jehož vtipnou odpověď můžeme bez přehánění označit za nejvíce originální. Jeho odpověď na otázku „Co bych si s největší radostí přečetl v příštím čísle?" měla název „Naše soutěž" a z důvodu omezeného množství papíru ji nemůžeme opublikovat v plném znění."

V matematice se často setkáváme s formulacemi, které s hlediska běžné řeči působí šroubovaně až nesmyslně. Tak jeden korektor stále nemohl pochopit, že v tvrzení o tom, že nějaký výrok platí „tehdy a jen tehdy, když . " není jedno „tehdy" nadbytečné. Naopak i v matematických textech najdeme řadu perliček, které vznikly díky přílišné důkladnosti autorů: „Velké X je velmi malé."

V jedné učebnici mechaniky se uvádělo: „Osy x a y volíme jako obvykle, osa z je vertikální." Littlewood k tomu namítá, že pro něho je osa z horizontální, neboť je zvyklý číst zakloněn v křesle s nohama na stole a držet text ve svislé poloze.

Nakonec uveďme ještě výrok učitele: „Předpokládejme, že v naší úloze x znamená počet ovcí" a následující dotaz žáka: „A co když x neznamená počet ovcí?" Tento dialog silně připomíná rozhovor medvídka Pú ze známé dětské knížky A. Milna s jeho kamarádem Prasínkem vystrašeným vichřicí v lese. Na Prasínkovu otázku „A co kdyby na nás spadl strom?" odpovídá Pú po chvíli uvažování s nezdolným optimismem: „A co kdyby nespadl?".

-ll

Řekli, napsali...

Přicházet na udivující objevy je snadné. Velmi obtížné je zdokonalit je do té míry, aby mohly nalézt praktické využití.

Thomas Alva Edison (1847—1931)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(6)

ROČNÍK 67, 1988/89
ÚNOR
CENA 2 Kčs

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; † doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Matematika a fyzika – výzva pro mladou generaci 221

Ladislav Bican, Jaroslav Hora: Permutace, cykly, znaménko permutace 224

Daniel Kluvanec, Daniel Kluvanec ml.: Metóda obrazovej sústavy . 227

Ivo Kraus: Krystalografie v antice . 234

Z matematiky a fyziky ZŠ 239

Přemýšlíme, řešíme 246

Naše soutěž 250

Olympiády a SOČ 254

Z nových knih 261

Kalendár M–F 263

Humory matematicko-fyzikální 3. str. obálky

Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (129–132) příloha

Matematika a fyzika — výzva pro mladou generaci

Jak jsme v našem časopise již informovali, konal se v srpnu 1987 v Praze jubilejní sjezd Jednoty československých matematiků a fyziků. Bylo to u příležitosti 125 let trvání této naší vědecké společnosti, která sdružuje vědecké a odborné pracovníky, učitele, ale i studenty těchto oborů. Sjezd se zabýval mezi jiným i dalšími perspektivami matematiky a fyziky a dospěl k závěru, že mají-li se tyto obory u nás dále rozvíjet a zaujímat to místo, které jim v soustavě vědních oborů, v praxi a naší společnosti náleží, musí nezbytně najít odezvu u mladé generace, získat nové nadšené zájemce o jejich studium. Sjezd se proto obrátil i k naší širší veřejnosti s výzvou, kterou zde otiskujeme.

Před 125 léty položila hrstka nadšených posluchačů pražské filosofické fakulty základy první české vědecké společnosti, zaměřené na „vědecké vzdělání v matematice a fyzice a šíření známosti těchto věd po národě českém". Přímou pokračovatelkou této společnosti je dnešní Jednota československých matematiků a fyziků (JČSMF), vědecká společnost při Československé akademii věd. Spolupráce Čechů a Slováků v Jednotě má dlouholetou tradici a vyústila v ustavení sesterské Jednoty slovenských matematiků a fyziků (JSMF) v r. 1969. Obětavé úsilí našich předchůdců v Jednotě významně přispělo k rozvoji matematiky a fyziky jako věd i jako středoškolských předmětů a vysokoškolských oborů a vedlo k povznesení našeho národního uvědomění a kultury. Současná Jednota si proto s pocitem závazku a odpovědnosti k úsilí dřívějších generací bere za své cíle zakladatelů a budovatelů Jednoty — rozvíjet matematiku a fyziku, vychovávat vědecký dorost a podporovat všestranný přínos matematiky a fyziky pro naši společnost. Závažnost a náročnost těchto úkolů je dnes ještě větší než před stoletím.

Jubilejní sjezd JČSMF konaný v Praze v srpnu 1987 s uspokojením konstatoval stálý růst počtu členů na dnešních více než 7000. Jednota má své členy prakticky na všech školských a vědeckých pracovištích ve všech krajích republiky a může sledovat problematiku obou oborů v plné šíři.

Sjezd Jednoty schválil podrobný program, v němž vystupují tyto důležité směry dalšího úsilí:

— informovat širokou veřejnost o významu, výsledcích a metodách matematiky a fyziky a přispívat tak k odpovědné orientaci našich spoluobčanů ve světě utvářeném moderní vědou,

— získávat pro oba naše obory mládež, vycházet jí vstříc přednáškami, besedami a dalšími vhodnými akcemi včetně matematických a fyzikálních olympiád,

— podporovat mladé pracovníky v jejich vědecké práci a umožňovat jim styk se světovou vědou,

— věnovat pozornost školám všech typů, zejména pokud jde o didakticky vhodný, přitažlivý a přiměřený výklad matematiky a fyziky,

— rozvíjet publikační činnost Jednoty a zpřístupňovat studijní prameny jako prostředek ke vzdělávání.

S matematikou a fyzikou se moderní člověk setkává stále, přímo či nepřímo. Nároky těchto školních předmětů prožívají s dětmi často i dospělí. Technické důsledky obou věd rychlým tempem přetvářejí nejen výrobu, ale i domácnosti, volný čas člověka i tvářnost krajiny. Počítače jsou na postupu a stále více ovlivňují náš život.

Odezva na tento vývoj bývá někdy i kritická, a to ve všech vyspělých zemích. Mnozí lidé se těžce smiřují s přetechnizovaným a ekologicky porušeným prostředím, v němž žijí, a vinu přisuzují matematice a fyzice, z nichž soudobá technika vyrůstá. Někdy se lidé dokonce chlubí svou neznalostí exaktních věd a odporem k nim. Ale to je buď nepěkná póza nebo slepá ulička. Existující potíže přece nepramení z nadbytku vědění, nýbrž spíše z jeho nedostatku nebo z jeho nekompetentního užití. V této souvislosti proto Jednota klade velký důraz na solidní popularizaci matematiky a fyziky, na pochopení jejich metod a tím i smyslu, hranic a možností současné vědy.

Tradici Jednoty a skutečné vědy vůbec je zcela cizí odtrženost od života, jeho reálných potřeb a nesnází. Členům JČSMF jako občanům i jako odborníkům velice záleží na praktickém přínosu obou oborů pro národní hospodářství a uspíšení technického rozvoje. Aktuálním úkolem Jednoty je proto též prohlubování spolupráce matematiků a fyziků s průmyslem a hledání cest účinnějšího přenášení výsledků vědy do praxe. Zbytečné ztráty v tomto článku roztrpčují vědecké pracovníky a poškozují nás všechny. Náprava však předpokládá — mimo jiné — informovanost a podporu veřejnosti.

Dlouhodobě patří k rozhodujícím podmínkám dalšího rozvoje naší vlasti také úspěšná školní výuka v matematice a fyzice. Stálý růst poznání si v ní vynucuje změny. Znepokojené části rodičů bychom však chtěli zdůraznit, že nejde a nemůže jít o stálý růst objemu učiva, nýbrž především o lepší kvalitu výuky: atraktivnost, srozumitelnost, návaznost, přiměřenost různým stupňům a zaměřením od přípravy na dělnické profese až po postgraduální studium. Současné potíže žáků plynou často z nedostatečného počtu kvalifikovaných učitelů a z dalších problémů, na jejichž řešení Jednota aktivně spolupracuje s orgány školské správy. Slibný je rostoucí kontakt s učiteli v terénu,

doufáme v plnější využívání jejich zkušeností i v širší a účinnější pomoc Jednoty v jejich práci.

Na adresu mládeže — zvláště středoškolské — bychom rádi vyzdvihli, že matematika a fyzika nejsou jen nutné a užitečné jako základ přírodních věd a klíč k oborům technickým, ale přinášejí také radost z poznání a uspokojení ze zvládnutých problémů, obdobně jako sport nebo umělecká činnost. Vedou k odkrývání síly lidského rozumu, k samostatnosti v myšlení, ke kritičnosti i zdravé sebedůvěře, k pronikání do tajů přírody a světa techniky. To vše se dobře uplatní v každém povolání i v osobním a veřejném životě.

Zvláštní pozornost věnuje Jednota už odedávna těm děvčatům a chlapcům, kteří mají o některý z obou oborů hlubší zájem. Pořádá pro ně matematické a fyzikální olympiády a prázdninové kursy, pečuje o Rozhledy matematicko-fyzikální a hledá další cesty: přednášky, besedy, exkurse na vědecká a technická pracoviště, vydávání populárně vědecké literatury. Snaží se též podporovat odborný růst učitelů. Vysokoškolskému studenstvu chce Jednota též vycházet vstříc přednáškami, besedami a exkurzemi zejména k těm otázkám, na něž v běžné výuce nebývá místo. Zralejší posluchače uvítáme jako čtenáře Československého časopisu pro fyziku a jako budoucí spolupracovníky a členy Jednoty. Pro ně vydává Jednota členský časopis Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.

Budoucnost našich oborů nyní velmi závisí na tom, zda je posílí dnešní talentovaní středoškoláci. Zejména příliv schopných učitelů na naše školy by podstatně zvýšil jejich úroveň a jejich výchovně vzdělávací výsledky. Jsme si vědomi, že povolání badatele a zvláště učitele v obou oborech vyžaduje namáhavou přípravu a neslibuje pohodlný život. Je to však povolání vysoce čestné, pro společnost velmi užitečné a potřebné a navazuje na bohatou a záslužnou tradici Jednoty. Věříme, že naši chlapci a děvčata se zamyslí i se svými rodiči nad svou životní cestou a zváží i své uplatnění v těchto vzrušujících a perspektivních oblastech lidského poznání a činnosti. Matematika a fyzika jsou vědy pro mladé, nabízejí hluboké vnitřní uspokojení tvůrčí prací a jsou jednou z hnacích sil pokroku a rozvoje lidské společnosti.

Hlavní výbor JČSMF

MATEMATIKA

Permutace, cykly, znaménko permutace

Prof. dr. L. BICAN, DrSc., MFF UK Praha, dr. J. HORA, CSc., PF Plzeň

V tomto článku se seznámíme se základními pojmy z teorie permutací a s jednou metodou určení znaménka permutace.

Permutací množiny **M** rozumíme každé vzájemně jednoznačné zobrazení konečné množiny **M** na sebe. Bývá zvykem volit $\mathbf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$; potom můžeme permutaci π $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ zapsat ve tvaru $\pi = \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{pmatrix}$, kde $\pi(i) = s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Samodružným bodem permutace π rozumíme každý $s \in \mathbf{M}$ takový, že $\pi(s) = s$. Identické zobrazení množiny **M** na **M** je rovněž permutací, jejíž každý bod je samodružný — hovoříme proto o identické permutaci množiny **M**. Identickou permutaci budeme značit I.

Součinem $\pi_1\pi_2$ dvou permutací $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix}$ a $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{pmatrix}$ rozumíme permutaci definovanou takto: $\pi_2\pi_1(i) = \pi_2(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad 1. Nechť $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 1, 4, 2 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 4, 3, 1 \end{pmatrix}$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 4, 1, 3 \end{pmatrix}$. Permutace π_1, π_3 nemají samodružné body, permutace π_2 má jeden samodružný bod, a to číslo 3. Dále $\pi_2\pi_1 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 2, 1, 4 \end{pmatrix}$, $\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 2, 4, 3 \end{pmatrix}$, takže součin permutací není komutativní. Vypočtěte $\pi_2\pi_3$, $\pi_3\pi_2$!

Povšimněme si, že $\pi_1\pi_3 = \pi_3\pi_1 = I$. Obecně platí, že ke každé permutaci π existuje tzv. inverzní permutace π^{-1} tak, že $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = I$. V příkladu 1 je $\pi_1^{-1} = \pi_3$, a ovšem také $\pi_3^{-1} = \pi_1$.

Je dobře známo, že počet permutací na n-prvkové množině je $n!$. Na čtyřprvkové množině $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ existuje tedy $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ permutací.

Nechť $\mathbf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina, $s_1, s_2, \ldots, s_k$ její prvky a π permutace na **M** taková, že $\pi(s_1) = s_2$, $\pi(s_2) = s_3, \ldots, \pi(s_{k-1}) = s_k$, $\pi(s_k) = s_1$ a každý $s \in \mathbf{M} - \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ je samodružným bodem

permutace π. Permutaci π pak nazýváme *cyklem* a zapisujeme $\pi = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$. Číslo k se nazývá *délka cyklu*. *Transpozicí* nazýváme cykl délky 2. Dva cykly $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ a $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ se nazývají *nezávislé*, jestliže $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \cap \{t_1, t_2, \ldots, t_m\} = \emptyset$. Konečná množina cyklů se nazývá *nezávislá*, jsou-li každé dva cykly z této množiny nezávislé. V opačném případě říkáme, že cykly jsou *závislé*.

Příklad 2: a) Je dán cykl (1, 2, 3, 4) na množině $\mathbf{M} = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Dokážete obnovit zápis této permutace ve smyslu úvodní definice?

b) Cykly (1, 2, 3, 4) a (3, 5, 7, 8) na $\mathbf{M} = \{1, 2, \ldots, 10\}$ jsou závislé, zatímco $\{(1, 3, 5), (2, 4, 6), (9, 10, 8)\}$ je množinou nezávislých cyklů.

Povšimněme si, že zápis cyklu není určen jednoznačně, např. místo (1, 2, 3, 4) můžeme psát (2, 3, 4, 1) či (4, 1, 2, 3). Obecněji, platí $(s_1, s_2, \ldots, s_k) = (s_i, s_{i+1}, \ldots, s_k, s_1, \ldots, s_{i-1})$ pro každé $i = 2, \ldots, k$. Dále $(s_1, s_2, \ldots, s_k)^{-1} = (s_k, s_{k-1}, \ldots, s_2, s_1)$. Součin nezávislých cyklů nezávisí na jejich pořadí, tj. jsou-li π_1, π_2 dva nezávislé cykly, je $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$.

Věta 1: Každou permutaci na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ lze rozložit v součin nezávislých cyklů, a to až na pořadí jednoznačně.

Důkaz této věty nebudeme provádět. Metoda nalezení požadovaného rozkladu bude zřejmá z následujícího příkladu.

Příklad 3: Rozložme v součin nezávislých cyklů permutaci

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ 2, & 3, & 1, & 6, & 7, & 4, & 5, & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Protože $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 1$, získáváme cykl (1, 2, 3). Nejmenším přirozeným číslem z množiny $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$, které není obsaženo v námi nalezeném cyklu, je číslo 4. Přitom $\pi(4) = 6$, $\pi(6) = 4$, tj. získáváme cykl (4, 6). Obdobně $\pi(5) = 7$, $\pi(7) = 5$ — cykl (5, 7) a konečně $\pi(8) = 8$ — napišme formálně jako „cykl" (8). Máme tedy $\pi = (8)\,(5, 7)\,(4, 6)\,(1, 2, 3)$. (Vynecháním „cyklů délky 1" lze psát $\pi = (5, 7)\,(4, 6)\,(1, 2, 3)$, ale tento zápis určuje permutaci jen tehdy, je-li dána množina $\mathbf{M}$).

Příklad 4: Rozložte v součin nezávislých cyklů permutaci

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ 4, & 3, & 1, & 5, & 8, & 7, & 2, & 6 \end{pmatrix}!$$

Řešení: Permutace je (jediným) cyklem délky 8, $\pi = (1, 4, 5, 8, 6, 7, 2, 3)$.

Věta 2: Každou permutaci na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ je možno rozložit v součin transpozic.

Důkaz: Vzhledem k větě 1 stačí ukázat, že každý cykl lze rozložit v součin transpozic. Snadno však ověříme, že $(s_1, s_2, \ldots, s_k) = (s_1, s_k)\,(s_1, s_{k-1}) \ldots (s_1, s_3\,(s_1, s_2)$.

Příklad 5: Rozložme permutaci π z příkladu 3 v součin transpozic.

Řešení: Protože již víme, že $\pi = (8)\,(5, 7)\,(4, 6)\,(1, 2, 3)$, můžeme psát

např. $\pi = (5, 7)\ (4, 6)\ (1, 3)\ (1, 2)$, čímž jsme π rozložili v součin 4 transpozic. Je však též možno psát např. $\pi = (5, 7)\ (1, 3)\ (4, 6)\ (1, 3)\ (1, 3)\ (1, 2)$ nebo $\pi = (4, 6)\ (5, 7)\ (4, 6)\ (4, 6)\ (1, 3)\ (1, 2)$ atd. Vidíme, že počet transpozic v rozkladu permutace π není jednoznačně určen, ale zdá se, že to v daném případě bude vždy sudé číslo. Následující větu uvedeme bez důkazu.

Věta 3: Buď π permutace a $\pi = T_m T_{m-1} \ldots T_2 T_1 = T'_n T'_{n-1} \ldots T'_2 T'_1$ dva rozklady permutace π v součin transpozic. Pak $m + n$ je sudé číslo, tj. čísla m a n jsou buďto obě lichá nebo obě sudá.

Tím je oprávněna *definice:* Říkáme, že permutace π je *sudá* a její znaménko zn $\pi = 1$, jestliže π lze rozložit v součin sudého počtu transpozic. V opačném případě říkáme, že permutace π je *lichá* a její znaménko zn $\pi = -1$.

Věta 4: Buďte π_1, π_2 dvě permutace. Pak zn $\pi_2\pi_1 =$ zn π_2 . zn π_1 a zn $\pi_1^{-1} =$ zn π_1. Je-li $\pi = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ cykl délky k, pak zn $\pi = (-1)^{k-1}$.

Důkaz: Jsou-li $\pi_1 = T_m \ldots T_2 T_1$, $\pi_2 = T'_n \ldots T'_2 T'_1$ rozklady permutací v součin transpozic, je zn $\pi_1 = (-1)^m$, zn $\pi_2 = (-1)^n$; dále $\pi_2\pi_1 = T'_n \ldots T'_1 T_m \ldots T_2 T_1$, takže zn $\pi_2\pi_1 = (-1)^{n+m} = (-1)^n\ (-1)^m =$ zn π_1 zn π_2. Druhé tvrzení plyne z právě dokázaného a z rovností $\pi^{-1}{}_1\pi_1 = I$, zn $I = 1$. Konečně buď $\pi = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ cykl. Jak již víme z důkazu věty 2, platí $(s_1, s_2, \ldots, s_k) = (s_1, s_k)\ (s_1, s_{k-1}) \ldots (s_1, s_3)\ (s_1, s_2)$, takže vskutku zn $\pi = (-1)^{k-1}$.

Nyní uvedeme větu, která poskytuje metodu pro výpočet znaménka permutace.

Věta 5: Nechť permutace π je součinem nezávislých cyklů $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$ a nechť každý cykl π_i má délku $k_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Potom zn $\pi = (-1)^{k_s} . (-1)^{k_{s-1}} \ldots (-1)^{k_2} . (-1)^{k_1} =$

$$= (-1)^{\sum_{i=1}^{s} k_i}$$

Důkaz: Podle věty 4 je zn $\pi =$ zn $\pi_s \ldots$ zn π_2 . zn π_1 a z téže věty plyne, že zn $\pi_i = (-1)^{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Odtud již dokazované tvrzení bezprostředně plyne.

Příklad 6: Určete znaménka permutací:

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 2, 3, 1, 6, 7, 4, 5, 8 \end{pmatrix}$,

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \\ 4, 7, 9, 6, 11, 15, 12, 3, 1, 10, 13, 2, 5, 8, 14 \end{pmatrix}$.

Řešení: a) Víme již z příkladu 3, že $\pi = (1, 2, 3)\ (4, 6)\ (5, 7)$ (nezávislé cykly komutují), takže zn $\pi = (-1)^2 . (-1)^1 . (-1)^1 = 1$. Permutace je sudá.

b) Nejprve provedeme rozklad π v součin nezávislých cyklů. Máme

$\pi = (1, 4, 6, 15, 14, 8, 3, 9)\ (2, 7, 12)\ (5, 11, 13)$, takže zn $\pi = (-1)^7 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^2 = -1$. Jde o lichou permutaci.

c) Určete sami znaménko permutace $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 5, 3, 7, 4, 6, 8, 2, 1 \end{pmatrix}$!

Věta 6: Každou permutaci π na množině $\mathbf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$ lze zapsat jako součin transpozic tvaru $(1, i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Důkaz: Podle věty 2 lze každou permutaci zapsat ve tvaru součinu transpozic. Stačí tedy ukázat, že každou transpozici (r, s) lze psát jako součin transpozic tvaru $(1, i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Platí však $(r, s) = (1, r)\ (1, s)\ (1, r)$.

Věta 7: Každou sudou permutaci na množině $\mathbf{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqq 3$, lze zapsat jakou součin cyklů délky 3 tvaru $(1, 2, i)$, $i = 3, \ldots, n$.

Důkaz: Každou sudou permutaci lze psát jako součin sudého počtu transpozic. Přitom $(k, m)\ (i, j) = (i, j, k)\ (j, k, m)$ a $(k, j)\ (j, i) = (i, k, j)$. Každou sudou permutaci tedy lze zapsat jako součin cyklů délky 3. Dále platí $(i, j, k) = (1, k, i)\ (1, i, j)$ a $(1, i, j) = (1, 2, j)\ (1, 2, i)\ (1, 2, i)$, takže každou sudou permutaci lze vskutku zapsat v požadovaném tvaru.

Příklad 7: Zapište sudou permutaci $\pi = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 2, 3, 1, 6, 7, 4, 5, 8 \end{pmatrix}$ jako součin cyklů tvaru $(1, 2, i)$, $i = 3, 4, \ldots, 8$.

Řešení: Z příkladu 1 již víme, že $\pi = (5, 7)\ (4, 6)\ (1, 2, 3)$. Užitím postupů z důkazu věty 7 máme $\pi = (4, 6, 5)\ (6, 5, 7)\ (1, 2, 3) = (1, 5, 4)\ (1, 4, 6)\ (1, 7, 6)\ (1, 6, 5)\ (1, 2, 3) = (1, 2, 4)\ (1, 2, 5)\ (1, 2, 5)\ (1, 2, 6)\ (1, 2, 4)\ (1, 2, 4)\ (1, 2, 6)\ (1, 2, 7)\ (1, 2, 7)\ (1, 2, 5)\ (1, 2, 6)\ (1, 2, 6)\ (1, 2, 3)$.

FYZIKA

Metóda obrazovej sústavy (MOSDAK) (dokončenie)

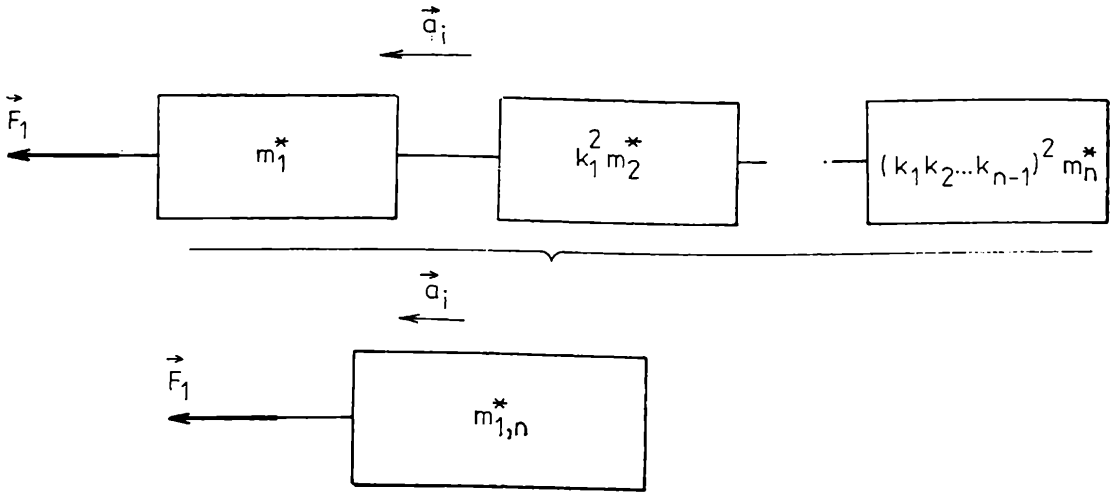
Doc. RNDr. ing. D. KLUVANEC, CSc., ing. D. KLUVANEC ml., Nitra

2. Zovšeobecnenie princípov MOS na n-telies

Nech skutočná sústava obsahuje n-telies. Označíme ich $1, 2, \ldots, n$. Sústava sa pohybuje pôsobením sily $\boldsymbol{F}_1$. Pre veľkosť sily F_1 platí

$$F_1 = (m_1^* + k_1^2 m_{2,n}^*) a_1 \,. \tag{8}$$

Za $m_{2,n}^*$ do (8) môžeme však dosadiť



Obr. 7

$$m_{3,n}^* = m_2^* + k_2^2 m_{3,n}^* , \tag{9}$$

potom všeobecne za $m_{\nu,n}^*$, kde $\nu = 1, 2, \ldots, n - 1$, máme

$$m_{\nu,n}^* = m_\nu^* + k_\nu^2 m_{\nu+1,n}^* , \tag{10}$$

$m_{n,n}^* = m_n^*$

Dosadením (9) do (8) a ďalšími substitúciami podľa vzťahu (10) dostaneme

$$F_1 = [m_1^* + k_1^2 m_2^* + (k_1 k_2)^2 m_3^* + \ldots + (k_1 k_2 \ldots k_{i-1})^2 m_i^* + \ldots + (k_1 k_2 \ldots k_{n-1})^2 m_n^*] a_1 ,$$

$$F_1 = a_1 \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu^* \prod_{\mu=1}^{\nu-1} k_\mu^2 = a_1 m_{1,n}^* . \tag{11}$$

Vzťah (11) považujeme za 2. pohybový zákon pre obrazovú sústavu telies. Veličinu

$$m_{1,n}^* = m^* = \frac{F_1}{a_1} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu^* \prod_{\mu=1}^{\nu-1} k_\mu^2 \tag{12}$$

nazveme obrazová hmotnosť sústavy telies. Ako vyplýva z (12), obrazová hmotnosť $m_{1,n}^*$ sústavy nie je daná jednoduchým súčtom obrazových hmotností m_i^* jednotlivých telies. Obrazovú hmotnosť m_ν^* každého telesa musíme najskôr vynásobiť súčiniteľom

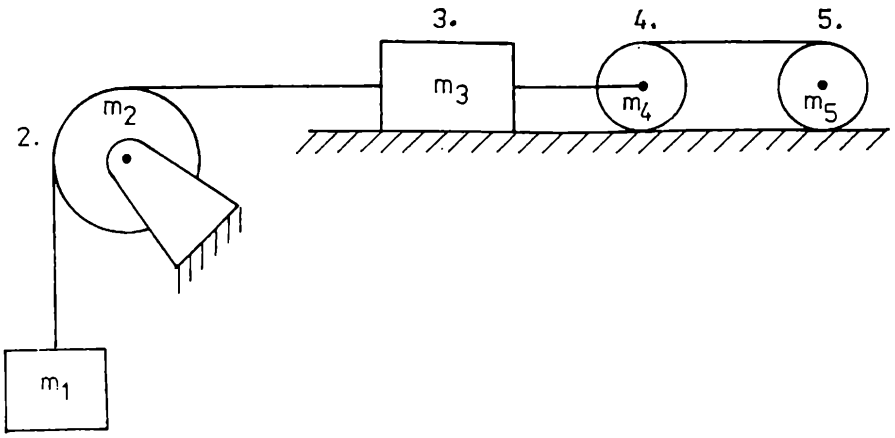
$$(k_1 k_2 \ldots k_{\nu-1})^2 = \prod_{\mu=1}^{\nu-1} k_\mu^2 ,$$

kde $k_i = \dfrac{R_{i-}}{R_{i+}}$ sú činitele pre valce v sústave, a potom tieto veličiny sčítame.

Použitie MOS na riešenie pohybu sústavy telies, ako to vyplýva z uvedenej teórie, je pomerne jednoduché:

a) Označíme telesá 1, 2, . . . , n, počnúc 1. telesom v smere pohybu.

b) Určíme obrazové hmotnosti m_i^* jednotlivých telies.



Obr. 8

c) Určíme obrazovú hmotnosť $m^*_{1,n}$ sústavy. Ako vyplýva z (12), obrazovú (modelovú) sústavu telies, ktorou nahradzujeme skutočnú sústavu, si možno predstaviť ako sústavu vláknami spojených n-telies, ktoré konajú len posuvný pohyb (obr. 7). (Oprav $\vec{a}_i$ na $\vec{a}_1$.)

d) Ak poznáme napr. silu $\boldsymbol{F}_1$, veľkosť zrýchlenia a_1 pohybu ťahajúceho vlákna 1. telesa možno určiť zo vzťahu

$$a_1 = \frac{F_1}{m^*_{1,n}} .$$

Zrýchlenie pohybu ťahajúceho vlákna i-tého telesa je

$$a_i = a_1 \prod_{\mu=1}^{i-1} k_\mu .$$

3. Príklady na použitie MOS v riešení úloh

Uvedieme 3 príklady. Prvý príklad budeme najskôr riešiť tradičným postupom a potom MOS, aby sme porovnali náročnosť oboch postupov na myslenie, počítanie, písanie i čas.

1. príklad

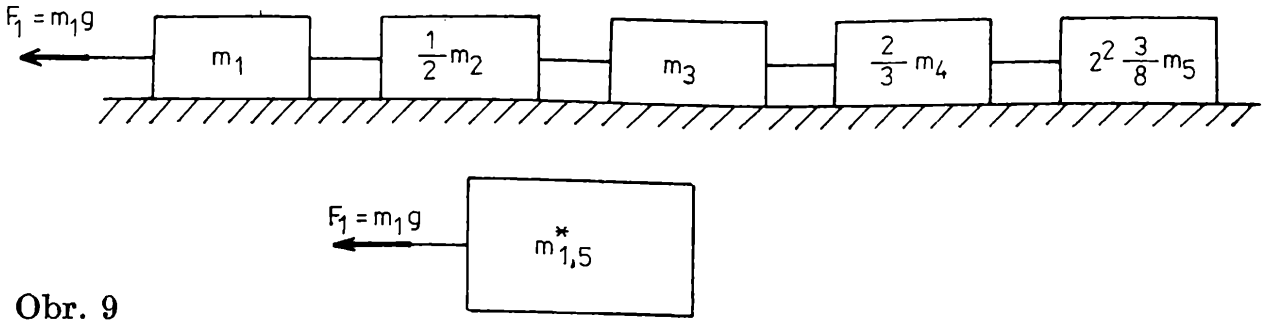
Homogénne telesá, hranoly 1 a 3, valec (kladka) 2 a valce 4, 5, sú spojené vláknami podľa obr. 8. Hmotnosti jednotlivých telies v sústave sú $m_1 = 1{,}0$ kg, $m_2 = 2{,}0$ kg, $m_3 = 1{,}0$ kg, $m_4 = 1{,}5$ kg, $m_5 = 0{,}50$ kg.

Určte veľkosť a_1 zrýchlenia pohybu 1. telesa, veľkosť a'_5 zrýchlenia hmotného stredu 5. telesa a veľkosť F_4 sily, ktorá napína vlákno medzi 3. a 4. telesom.

Tradičný postup

Pre 1. až 5. teleso platia pohybové rovnice

$$m_1 g - F_2 = m_1 a_1 ,$$
$$a_1 = a_2 ,$$
$$(F_2 - F_3) R_2 = I_{02}\, \alpha_2 = \frac{1}{2}\, m_2 R_2^2 \frac{a_2}{R_2} ,$$



Obr. 9

$$a_2 = a_3 ,$$
$$F_3 - F_4 = m_3 a_3 ,$$
$$a_3 = a_4 ,$$
$$F_4 R_4 - F_5\, 2R_4 = I_4\, \alpha_4 = \left(\frac{1}{2}\, m_4 R_4^2 + m_4 R_4^2\right) \frac{a_4}{R_4} ,$$
$$\frac{a_4}{R_4} = \frac{a_5}{2R_4} ,$$
$$F_5\, 2R_5 = I_5\, \alpha_5 = \left(\frac{1}{2}\, m_5 R_5^2 + m_5 R_5^2\right) \frac{a_5}{2R_5} ,$$

spolu 9 rovníc, v nich vystupuje 9 neznámych veličín a_1 až a_5 a F_2 až F_5. Sústavu rovníc treba riešiť, aby sa určili neznáme veličiny. Samozrejme, pred napísaním rovníc sme mali urobiť náčrtok, označiť sily a zrýchlenia. Pre skrátenie postupu a šetrenie miesta sme náčrtok a podrobné riešenie neurobili. Čitateľ sa môže pokúsiť o výpočet neznámych veličín, ktorý pozostáva z úpravy rovníc a vylúčenia veličín F_2 až F_5, a_2 až a_5 eliminačnou metódou, aby sme určili a_1

$$a_1 = \frac{2m_1 g}{2(m_1 + m_3) + m_2 + 3(m_4 + m_5)} .$$

Analogickým postupom vypočítame

$$a_5' = \frac{a_5}{2} = \frac{2m_1 g}{2(m_1 + m_3) + m_2 + 3(m_4 + m_5)} ,$$

$$F_4 = \frac{3m_1(m_4 + m_5)g}{2(m_1 + m_3) + m_2 + 3(m_4 + m_5)}$$

Riešenie MOS

Obrazové hmotnosti telies sú: $m_1^* = m_1$, $m_2^* = \frac{1}{2}\, m_2$, $m_3^* = m_3$,

$$m_4^* = \frac{3}{2}\, m_4,\ m_5^* = \frac{3}{8}\, m_5;\ k_1 = k_2 = k_3 = 1,\ k_4 = 2.$$

Obrazovú sústavu môžeme znázorniť, obr. 9. $\left(\text{Oprav } \frac{2}{3} \text{ na } \frac{3}{2} .\right)$

Potom máme

$$m^*_{1,5} = m_1 + \frac{1}{2} m_2 + m_3 + \frac{3}{2} m_4 + \frac{3}{2} m_5 ,$$

a ihneď

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{1}{2} m_2 + m_3 + \frac{3}{2}(m_4 + m_5)} ,$$

$$a_5 = a_1 \prod_1^4 k_\mu = 2a_1 ,$$

$$a'_5 = \frac{a_5}{2} = a_1$$

Silu F_4 možno najjednoduchšie určiť zo vzťahu

$$F_4 = a_4 m^*_{4,5} ,$$

no $a_4 = a_1 \prod_1^3 k_\mu = a_1$ a $m^*_{4,5} = \frac{3}{2} m_4 + 2^2 \frac{3}{8} m_5 = \frac{3}{2}(m_4 + m_5)$; dosadením do vzťahu pre F_4 máme

$$F_4 = \frac{3}{2}(m_4 + m_5) a_1 = \frac{3 m_1 (m_4 + m_5) g}{2(m_1 + m_3) + m_2 + 3(m_4 + m_5)} .$$

Dosadením hodnôt daných veličín dostaneme

$$a_1 = a'_5 \doteq 1{,}6 \text{ m . s}^{-2} , \quad F_5 \doteq 4{,}9 \text{ N}$$

2. príklad

Určte veľkosť a zrýchlenia telesa s hmotnosťou m_1 a veľkosť F sily, ktorou je napínané vlákno medzi 1. a 2. telesom, obr. 10. Vlákno je navinuté na valci, ktorého hmotnosť je m_2.

Riešenie

Obrazová hmotnosť

$$m^*_{1,2} = m_1 + \frac{1}{2} m_2 .$$

Veľkosť sily

$$F_1 = m_1 g ,$$

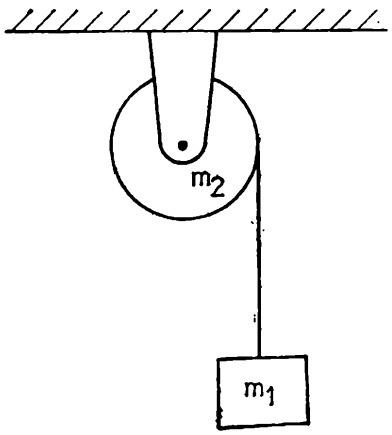
veľkosť zrýchlenia

$$a = a_1 = \frac{F_1}{m^*_{1,2}} = \frac{2 m_1 g}{2 m_1 + m_2} ,$$

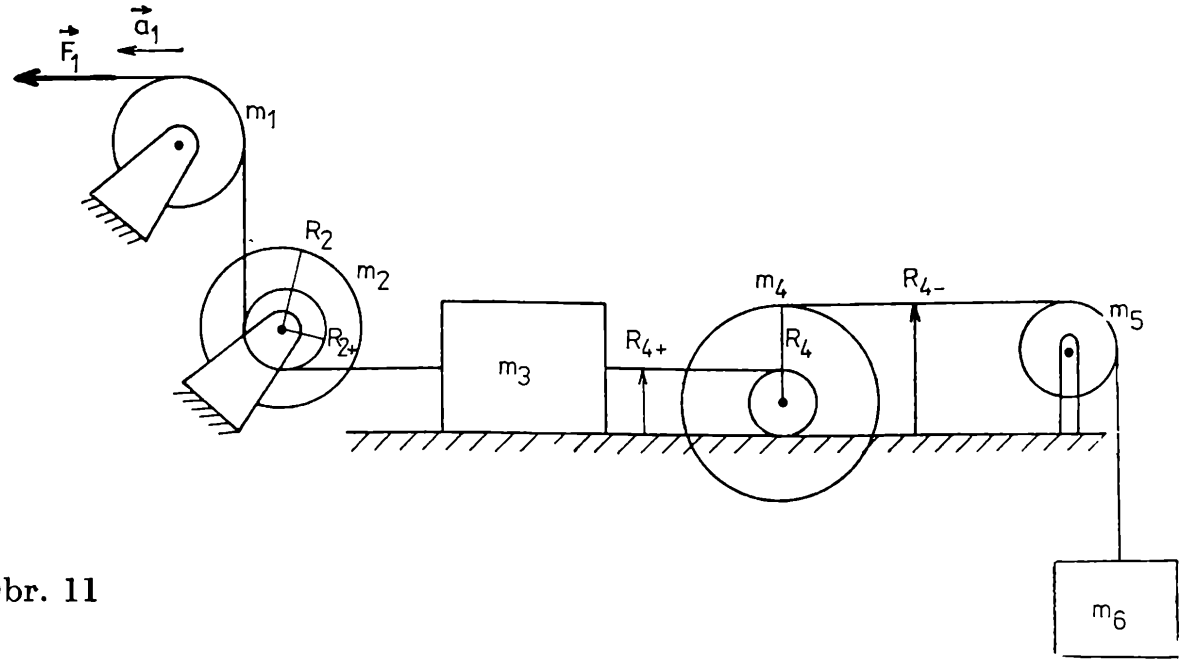
veľkosť sily

$$F = F_2 = a_2 m^*_2 = a_1 \frac{m_2}{2} = \frac{m_1 m_2 g}{2 m_1 + m_2} ,$$

lebo $a_2 = a_1$



Obr. 10



Obr. 11

3. príklad.

Na obr. 11 je znázornená sústava 6-tich telies: 3 otáčajúce sa valce (kladky) 1., 2., 5., 2 hranoly 3., 6. a jeden valiaci sa valec 4. Hmotnosti telies sú $m_1 = 2{,}0$ kg, $m_2 = 0{,}25$ kg, $m_3 = 0{,}50$ kg, $m_4 = 0{,}44$ kg, $m_5 = 0{,}40$ kg, $m_6 = 0{,}60$ kg, $\frac{R_2}{R_{2+}} = 2$, $\frac{R_4}{R_{4+}} = 2$. Na vlákno pred 1. kladkou pôsobí sila s veľkosťou $F_1 = 28$ N.

Presvedčte sa o tom, že sústava sa bude pohybovať v smere zrýchlenia $\boldsymbol{a}_1$ podľa obr. 11.

Určte veľkosť zrýchlenia a_3 3. telesa a veľkosť sily F_5, ktorou je napínané vlákno medzi 4. a 5. telesom.

Riešenie

Podmienka, ktorá musí byť splnená, aby sa sústava telies pohybovala v smere $\boldsymbol{a}_1$ podľa obr., je

$$F_1 R_{4+} > m_6 g R_{4-} ,$$

$$F_1 > m_6 g \frac{R_{4-}}{R_{4+}} .$$

Úloha je neobvyklá tým, že na 6. teleso pôsobí okrem ťahovej sily vlákna tiažová sila $F_G = m_6 g$. Pôsobenie tejto sily prepočítame na 1. vlákno

$$F'_1 = F_1 - k_4 m_6 g \doteq 3{,}5 \text{ N} , \quad k_4 = \frac{5}{2}$$

Silu $\boldsymbol{F}_1$ nahradíme silou $\boldsymbol{F}'_1$ a sústavu riešime tak, ako keby na 6. teleso tiažová sila nepôsobila.

Zo zadania vyplýva $\frac{R_{4-}}{R_{4+}} = \frac{5}{2}$, dosadením máme

$$28\ \mathrm{N} > 9{,}81\ .\ \frac{5}{2}\ \mathrm{N} \doteq 24{,}5\ \mathrm{N}\ .$$

Sústava sa pohybuje v smere $\boldsymbol{a}_1$.

Určíme obrazovú hmotnosť $m^*_{1,6}$ $m^*_1 = \frac{1}{2} m_1$,

$$m^*_2 = \frac{\frac{1}{2} m_2 R_2^2}{R_{2+}^2} = 2m_2,\ m^*_3 = m_3,\ m^*_4 = \frac{\frac{1}{2} m_4 R_4^2 + m_4 \left(\frac{R_4}{4}\right)^2}{\left(\frac{R_4}{2}\right)^2} = \frac{9}{4} m_4$$

$$\left(\text{zo zadania } R_4 = 2R_{4+},\ R_{4-} = R_4 + \frac{R_{4+}}{2} = \frac{5}{4} R_4,\ \frac{R_{4-}}{R_{4+}} = \frac{5}{2},\right.$$

$$\left. R'_4 = \frac{R_{4+}}{2} = \frac{R_4}{4}\right),\ m^*_5 = \frac{1}{2} m_F,\ m^*_6 = m_6\ ;\ k_1 = k_2 = k_3 = k_5 = 1\ ,$$

$$k_4 = \frac{5}{2}\ .$$

$$m^*_{1,6} = \frac{1}{2} m_1 + 2m_2 + m_3 + \frac{9}{4} m_4 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} m_5 + m_6\right).$$

Pretože pre žiadané veličiny a_3, F_5 vychádzajú zložité vzorce, rozumné bude použiť súborné označenia $m^*_{1,6}$, F'_1 a počítať neznáme veličiny len pre dané hodnoty

$$a_3 = a_1 = \frac{F'_1}{m^*_{1,6}}\ ;$$

ak $F'_1 = 3{,}5$ N, $m^*_{1,6} = 8{,}0$ kg, potom $a_3 \doteq 0{,}44\ \mathrm{m\ .\ s^{-2}}$.

Veľkosť sily F^*_5 najjednoduchšie určíme zo vzťahu

$$F_5 = a_5 m^*_{5,6} + m_6 g\ ,$$

pričom $a_5 = a_1 \prod_1^4 k_\mu = \frac{5}{2} a_1$, $m^*_{5,6} = \frac{1}{2} m_5 + m_6$,

$$F_5 = \frac{5}{3} \frac{m^*_{5,6}}{m^*_{1,6}} F'_1 + m_6 g\ .$$

Pre dané hodnoty $m^*_{5,6} = 0{,}80$ kg a

$$F_5 \doteq 6{,}8\ \mathrm{N}$$

Úlohy na riešenie čitateľom nezadávame, lebo cvičné úlohy si možno zostaviť. Čitatelia môžu tiež použiť úlohy z predchádzajúcich ročníkov fyzikálnej olympiády, ktoré boli riešené tradičným postupom.

Ak si MOS osvojíte, môžete aj zložité úlohy tohto typu počítať veľmi rýchlo, takmer spamäti.

Autori článku s radosťou príjmu pripomienky, názory i podnetné návrhy čitateľov k teórii MOS.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Krystalografie v antice

Doc. RNDr. Ivo KRAUS, CSc., FJFI ČVUT

1. O původu slova krystal

Krystalografie se stala samostatnou vědní disciplínou teprve v novověku, jako součást nauky o minerálech lze však její počátky hledat už v době nejstarších civilizací. Pravidelné tvary krystalů byly možná modelem stavitelům pyramid, přírodní geometrií a souměrností krystalových mnohostěnů se mohli inspirovat tvůrci dekorativních motivů na špercích, užitkové keramice, architektonické výzdobě apod.

Všechna pojednání o dějinách krystalografie věnují alespoň zmínku, že slovem *kristallos* nazývali staří Řekové led (ledový kus). V písemné formě se s tímto pojmem setkáváme poprvé v Homérových[1]) eposech Ílias a Odysseia:

„Ke zdrojům krásných proudů již přiběhli, ze kterých prýští / na povrch prameny dva, z nichž vírnatý Skamandros vzniká: / vyvěrá v jednom z nich vždy teplounká voda a vůkol / valí se ze zdroje dým, jak kdyby tam plápolal oheň. / Druhý však teče i v létě, vždy studený tak jako kroupy, / nebo jak mrazivý sníh neb led, jenž ztuhl z vody./“
(Ílias, Odeon, Praha 1980, zpěv XXII, překlad R. Mertlík)

„Když jsme se dostali k městu a k strmým ílijským hradbám, / my jsme tam museli ležet kol hradeb po hustých křovích, / v rákosí v dolině mokré a pod svými velkými štíty / schouleni. Mrazivá, zlá noc nastala, neboť se přihnal / severák, z oblohy sníh jak hustá vlna se sypal, / studený však, kol štítu si led nám sedal a tuhnul.“
(Odysseia, SNKLHV, Praha 1956, zpěv XIV, překlad O. Vaňorný a F. Stiebitz).

V obou ukázkách je „led“ překladem řeckého slova „kristallos“.

Podobná ledu je čirá odrůra křemene (oxid křemičitý, SiO_2), známá již ve starověku z nalezišť v lednatých alpských pohořích. Řekové jej považovali za zkamenělý led, který trvalým silným mrazem nabyl velké tvrdosti a odolnosti. Průhledný křemen byl prvním a téměř do konce 17. století prakticky jediným nerostem nazývaným „krystal“. (Čeština má pro tento druh křemene zvláštní termín — „křišťál“.

[1]) Homéros (8. stol. př. n. l.) nejstarší známý řecký epický básník; podle starověkého podání autor eposů Ílias a Odysseia.

Jeho typické vlastnosti — průzračnost a lesk — jsou charakteristickými znaky vysoce jakostního skla, nazývaného „český křišťál".)

Hypotéza o vzniku horského křišťálu z ledu, připisovaná Aristotelovi[2]) se však ukázala málo univerzální.

Při taženích Alexandra Makedonského (356—323 př. n. l.) byly nalezeny horské křišťály v místech, kde příčinou jejich ztuhnutí z vody nemohl být rozhodně velký chlad. Stejný účinek jako mrazu se proto přisuzoval také síle nebeského ohně, božího slunce.

Řecké kultuře vědčí krystalografie nejen za své jméno, ale i za termín „*symetrie*" (souměrnost), který označuje nejzákladnější vlastnost každé krystalické látky. Pojem symetrie zavedl pro vyjádření krásy a harmonie v přírodě i umění dnes už jen málokdy připomínaný řecký kovolijec Pythagoras z Rhégia[3]).

2. Počátky fyzikální krystalografie

Ve starověkém Řecku byly formulovány zjednodušeným způsobem první správné představy o stavbě hmotných těles, k nimž patří i všechny krystaly. Už pět století před naším letopočtem vzniklo Démokritovo[4]) učení o hmotě tvořené neviditelnými částicemi — atomy.

Démokritos byl pokračovatelem Leukippa z Milétu (5. stol. př. n. l.). Vytvořil tzv. atomistickou teorii, podle níž se svět skládá z hmoty a prostoru. Hmota je tvořena nesčíslným množstvím nesmírně malých homogenních částeček neustále se pohybujících v prázdnu, tj. v prostoru. Prázdno hmotu odděluje a umožňuje jí pohyb. Mnoho věcí, jejich vznik a zánik i změna se zakládá na vzájemném spojování a oddělování těchto neměnných, nedělitelných částí hmoty. K jejich pojmenování použil Leukippos výrazu „atomos", který v řečtině znamená „nesmírně malý" a zároveň „nedělitelný".

Hlavní zásady Démokritova atomismu přijal i největší materialis-

---

[2]) Aristotelés ze Stageiry (384—322 př. n. l.), největší filosof starověku; jeho přínos k rozvoji mnoha filosofických i vědeckých disciplín byl zcela výjimečný. O přírodních vědách pojednává např. v 8 knihách svého spisu Fysiké akroásis. Aristotelés se v něm zabývá základy přírodní filosofie (o látce a tvaru, účelnosti, pohybu, prostoru, času atd.).

[3]) Pythagoras z Rhégia (5. stol. př. n. l.), narodil se na ostrově Samos později se vystěhoval do řecké kolonie Rhégion v nejjižnějším cípu Itálie, na pobřeží sicilské úžiny. V letech 480—448 př. n. l. se zasloužil o řeckou plastiku zejména tím, že věnoval velkou péči zobrazení detailů těla (vlasy, žíly, šlachy . . .) a že dbal správnosti vzájemného poměru jedné části těla k druhé a k celku.

[4]) Démokritos z Abdér (460—370 př. n. l.), vynikající řecký materialistický filosof a vědec. Zabýval se nejen filosofickými disciplínami, ale také matematikou, hudbou, básnictvím, zeměpisem a zemědělstvím.

tický filosof helénistické doby Epikúros (341—270 př. n. l.). Na rozdíl od Démokrita však Epikúros v představách o pohybu atomů uvažuje moment náhody. Princip neměnné nutnosti je tak nahrazen schopností atomů odchylovat se při pohybu z vlastního podnětu od svislého směru, a to v náhodném místě i čase. Zavedením samovolné odchylky atomů chtěl Epikúros překonat Démokritův přísný determinismus (nutnou příčinnou podmíněnost všech jevů) a teoreticky zdůvodnit svobodu vůle, kterou přijímal jako nesporný fakt.

Na materialistické učení Démokrita a Epikúra navázal v antickém období také římský básník Titus Lucretius Carus (asi 97—55 př. n. l.). Jeho rozsáhlá báseň De rerum natura (O přírodě) představuje nejúplnější výklad starověkého atomismu. Citujme z tohoto díla o 6 knihách několik veršů, v nichž poznáme klasifikaci pevných látek a kapalin na základě vazbových sil. Názornost starého poetického modelu snadno obstojí i při popularizaci fyziky pevných látek na konci dvacátého století.

„Jestliže látka nám připadá hutná a tuhá, pak z tělísek o mnoha háčcích je skloubena v hloubi, které se pospolu drží jak spletené větve. Této skupině v čele je nezdolná žula na prvém místě, co údery pohrdá ráda, sveřepý křemen i kalené oceli síla a bronz, který skřípe a brání závoře zamknout. Naopak věc, jejíž hmota se lije a teče, je z tělísek hladších a oblejších složena jistě; vždyť makový odvar se pije lehko jako voda; kulaté atomy na sobě neváznou nikdy a docela hladce se linou a klouzají dolů.“
(O přírodě, Svoboda, Praha 1971, překlad Julie Nováková).

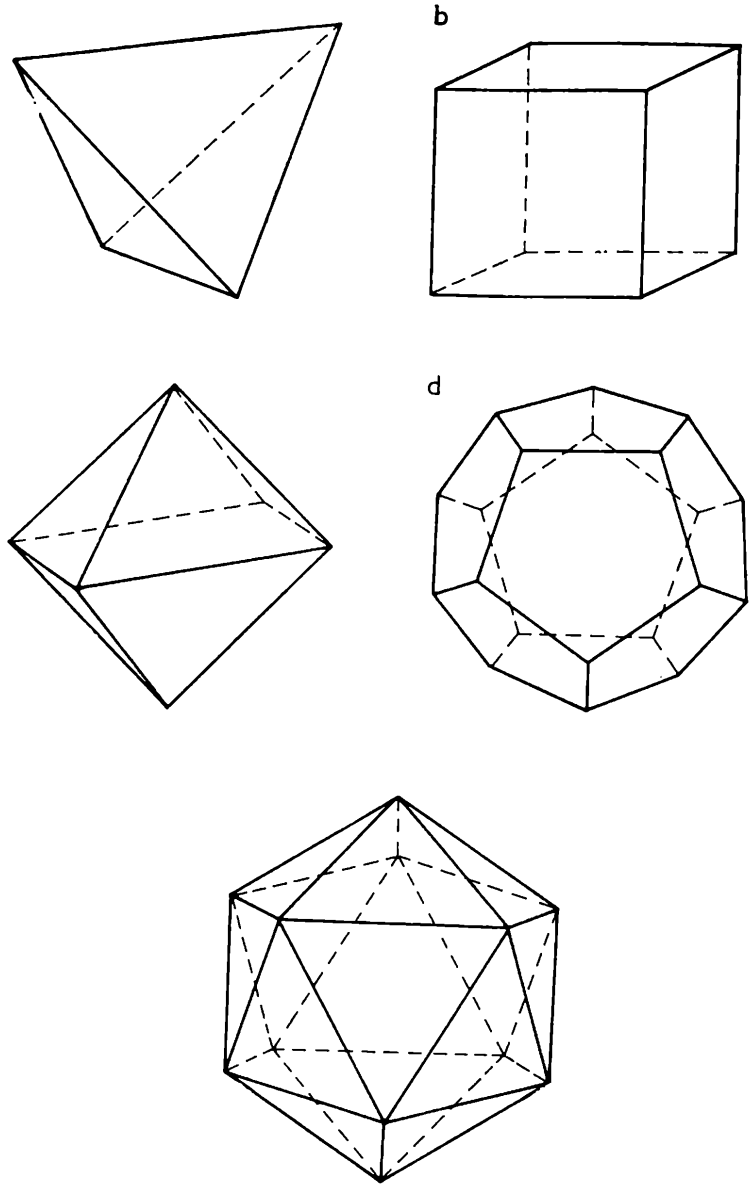
3. Od Platóna ke geometrické krystalografii

Nebude žádnou nadsázkou tvrzení, že reálné krystaly měly podíl na rozvoji starověké řecké geometrie i filosofie. A bez jakýchkoliv pochyb rovněž platí, že oba tyto obory později významně obohatily naše znalosti o vnitřní stavbě krystalů (systematice rozložení strukturních jednotek — atomů, iontů, molekul) i o zákonitostech jejich vnějšího tvaru. Specifickou roli při tom sehrálo pět konvexních polyedrů (vypuklých mnohostěnů) ohraničených pravidelnými mnohoúhelníky (obr. 1):

čtyřstěn (tetraedr) — jeho stěnami jsou 4 rovnostranné trojúhelníky,
krychle (hexaedr) — 6 čtvercových stěn,
osmistěn (oktaedr) — 8 rovnostranných trojúhelníků,
dvanáctistěn (dodekaedr) — 12 pravidelných pětiúhelníků,
dvacetistěn (ikosaedr) — 20 rovnostranných trojúhelníků.

Čtyřstěn, krychli a dvanáctistěn znal zřejmě už řecký filosof, vědec a politik Pythagoras ze Samu[5]) (asi 590—500 př. n. l.)

[5]) O Pythagorovi ze Samu se vypráví, že po objevu proslulého vztahu mezi čtverci nad stranami pravoúhlého trojúhelníka přinesl bohům oběť sta volů.



Obr. 1. Platónova tělesa; tetraedr (a), hexaedr (b), oktaedr (c), dodekaedr (d), ikosaedr (e)

Je velmi pravděpodobné, že všechna tato geometrická tělesa měla své vzory u běžných minerálů. Tetraedrické jsou např. krystaly tetraedritu (sulfantimonit mědi, $Cu_8Sb_2S_7$), kubická byla kamenná sůl (chlorid sodný, NaCl), oktaedr poznali Řekové jistě u diamantu a spinelu (oxid hlinitohořečnatý, $MgAl_2O_4$). Zbývající dva typy z pěti možných pravidelných mnohostěnů se daly pozorovat na pyritu (sirník železičitý, FeS_2), který se vyskytuje nejčastěji jako pětiúhelníkový dvanáctistěn. Kromě tohoto tvaru krystaluje FeS_2 také např. v osmistěnech. Vzájemnou kombinací těchto dvou forem vzniká dvacetistěn.

Do dějin filosofie vstoupily pravidelné mnohostěny díky řeckému

filosofu Platónovi[6]), který jejich tvar přisoudil elementárním částečkám ohně, vzduchu, vody a země.

Podle Platóna stvořil kosmos božský tvůrce — demiúrgos. Měl při tom k dispozici látku (rozprostraněnou hmotu bez vlastních zákonitostí) a model (svět idejí). Aby byl kosmos co nejkrásnější a nejúčelnější, vytvořil jej demiúrgos jako živou bytost z duše a těla. Do těla, skládajícího se ze čtyř prvků — ohně, vzduchu, vody a země — vložil duši s rozumem jako vládnoucí složkou. Základní prvky se liší tím, že jejich částečky mají různý geometrický tvar: oheň je z tetraedrů, země z krychlí, vzduch z oktaedrů a vodu tvoří ikosaedry. Pátý pravidelný mnohostěn — dodekaedr — je v Platónových představách odrazem geometrie celé Země. Za příčinu mnohotvárnosti těles pokládal Platón různé velikosti elementárních mnohostěnů, resp. trojúhelníků, z nichž se skládají. (Tetraedr, oktaedr a ikosaedr mají stěny z rovnostranných trojúhelníků, čtverce omezující krychli vznikají složením dvou pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků.) Platónova tělesa představují stavební jednotky všech látek. Zlato a měď je např. směsí krychlí (země) a ikosaedrů (vody), krásné a průzračné minerály vznikají z velkých krychlí stejných rozměrů apod. Přes zřejmou naivitu těchto úvah se uchovalo pět Platónových těles v teoriích o stavbě krystalů až do počátku 19. století.

Další svědectví zájmu o krystaly v antickém Řecku nalezneme u Aristotelova žáka Theofrasts[7]). V dochované části jeho pojednání „O kamenech" je popsáno šestnáct minerálů, a to jak z hlediska vnějšího vzhledu, tak vlastností (tvrdost, průzračnost) i možného praktického využití.

Nejobsáhlejší přehled starověkých poznatků o krystalech vytvořil Gaius Plinius Secundus[8]) v encyklopedii Naturalis historia (Přírodověda), obsahující na 20 000 údajů z 2000 knih několika stovek řeckých a římských autorů. Dílo bylo až do vzniku novodobého empirického bádání zásobárnou vědomostí. Kromě cenných závěrů vlastních nebo převzatých pozorování z různých oblastí přírodovědy jsou v něm však i fantastické myšlenky, např. o kamenech, které se rozmnožují jako živé bytosti apod. Jiná tvrzení získala naopak časem platnost obecných

---

[6]) Platón (427—347 př. n. l.), první vyhraněně idealistický filosof v dějinách řeckého myšlení. Poznání chápal jako rozpomínání na to, co duše už před narozením viděla ve světě idejí a co po spojení s tělem, které je pro ni vězením, zapomněla. Základem rozpomínání je soustavně vedený dialog.

[7]) Theofrastos z Eresu na Lesbu (373—288 př. n. l.); své encyklopedické znalosti zaznamenal ve více než 200 dílech, vynikal především jako empirický badatel.

[8]) Gaius Plinius Secundus, zvaný Starší (23—79 n. l.), vysoký římský úředník; jako samouk se zabýval mnoha vědními obory.

krystalografických zákonů: stěny krystalů jsou dokonale rovinné (tzv. zákon rovinných ploch), různé látky krystalují v různých krystalových tvarech.

Gaius Plinius Secundus zahynul při pozorování výbuchu Vesuvu v roce 79 n. l. Historie nauky o krystalech byla pak přerušena na patnáct století. Uplynul celý středověk i období renesance, než bylo napsáno první novodobé krystalografické pojednání.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Věšíme záclonu

Na záclonové tyči je navléknuto 57 kroužků opatřených skřipci. Na horní obrubě záclony mají být skřipce rozmístěny tak, aby každé dva sousední vždy měly od sebe stejnou vzdálenost. Zjistěte, zda je možno záclonu zavěšovat tímto postupem:

1. Nejprve zachytíme skřipci konce záclony.
2. Ze zbývajících 55 skřipců vybereme prostřední a upevníme jej na střed záclony.
3. Potom vždy vybereme dva již upevněné skřipce a z volných skřipců mezi nimi určíme prostřední a upevníme jej na záclonu tak, aby měl od obou nejbližších upevněných skřipců na obrubě záclony stejnou vzdálenost.

V případě, že popsaný způsob nelze užít, doporučte, jaký nejmenší počet kroužků se skřipci je třeba na záclonovou tyč přidat, aby uvedený postup byl použitelný.

Jste-li s výpočtem potřebného počtu záclonových kroužků hotovi, máme pro vás drobnou hříčku s kapesním kalkulátorem. Zvolte si libovolné trojciferné číslo a na tlačítkách kalkulátoru je vyťukejte dvakrát za sebou. Jestliže jste se např. rozhodli pro číslo 941, pak na displeji vidíte 941941. Potom dělte za sebou prvočísly 7, 11, 13. Jaké číslo se objevilo na displeji? Umíte výsledek vysvětlit?

Celkově jste dělili číslem 7 11 13 = 1001, jež se vyskytuje v názvu slavné knihy arabských lidových pohádek, jež vyprávěla princezna *Šeherezáda*. Není divu, že číslo 1001 se někdy nazývá Šeherezádiným. Od prozaické záclony přes elektronickou kalkulačku jsme se tak dostali až do dávného Orientu.

Jiří Mída

(Řešení naleznete v čísle 7.)

Řešení několika úloh z matematiky

Prof. Emil KRAEMER, UK Praha

Texty úloh, jejichž řešení nyní uvádíme, byly otištěny v předešlém čísle Rozhledů.

1. Z (5) plyne, že $d = 1$. Z (1) a (2) plyne, že b je liché, $b < 7$. Protože je $b \neq$ d, je $b = 3$ nebo $b = 5$. Ze (4) plyne, že c je liché. Protože je $c \neq d$ a podle (3) je $c < b$, je $b = 5$, $c = 3$. Z (2) plyne, že je $a = 2$.

2. Počty chlapců ve třídách 7a, 7b, 7c označme po řadě x, y, z. Potom počty děvčat v těchto třídách jsou po řadě $x - 2$, $y + 7$, $z + 2$. Protože všech žáků je 89, je

$$2(x + y + z) + 7 = 89\,,$$

takže počet chlapců je $x + y + z = 41$ a počet dívek je 48. Je-li v každé třídě nejvýše 30 žáků, pak musí být v každé třídě nejméně 29 žáků. Kdyby jich bylo 28 nebo méně, bylo by ve zbývajících dvou třídách 61 žáků nebo více, a tedy v jedné třídě by jich bylo 31 nebo více. Z daných podmínek plyne, že 29 žáků může být jen ve třídě 7b; ve zbývajících dvou třídách je po 30 žácích. Z toho pak plyne, že počet hochů ve třídách 7a, 7b, 7c je po řadě 16, 11, 14 a počet děvčat je po řadě 14, 18, 16.

3. Pro daná čísla A, B platí

$$A = 1 - \frac{2}{2\,222\,223} = 1 - \frac{6}{6\,666\,669}\,,$$

$$B = 1 - \frac{3}{3\,333\,334} = 1 - \frac{6}{6\,666\,668}$$

Protože poslední zlomek ve druhé řádce je větší než poslední zlomek v prvním řádku, je $A > B$.

4. Z daných podmínek plyne, že je $a = 24x$, $b = 24y$, $24x + 24y = 168$, čili $x + y = 7$. Protože x, y jsou celá kladná čísla, mohou nastat jen tyto případy:

x	1, 2, 3
y	6, 5, 4

x	6, 5, 4
y	1, 2, 3

Z toho a z rovnosti $a = 24x$, $b = 24y$ plyne, že hledanými dvěma čísly jsou čísla

(24, 144) (48, 120) (72, 96).

5. Pro libovolné kladné číslo n platí rovnost

$$(n^2 + n + 1) = (n + 8)(n - 7) + 3 \quad 19$$

Je-li číslo $n^2 + n + 1$ dělitelno číslem 19, je podle předešlé rovnosti také číslo $(n + 8)(n - 7)$ dělitelno číslem 19. To však znamená, že je

buď $\quad n + 8 = 19k \quad$ čili $\quad n = 19k - 8 \qquad (1)$

nebo $\quad n - 7 = 19m \quad$ čili $\quad n = 19m + 7 \qquad (2)$

Z (1) plyne, že číslo n je kladné, právě když je $k = 1, 2, 3$ a z (2) plyne, že n je kladné, právě když je $m = 0, 1, 2$

6. Podle předpokladu je hledané číslo $42x4y$ dělitelno 72. Protože je $72 = 8 \quad 9$, je hledané číslo dělitelno čísly 8 a 9. Hledané číslo je proto sudé, takže

$$\text{číslo } y \text{ je sudé.} \qquad (3)$$

Protože hledané číslo je dělitelno číslem 9, je také jeho ciferný součet

$$s = 4 + 2 + x + 4 + y = 10 + x + y \qquad (4)$$

dělitelný devíti; zároveň je

$$0 \leqq x \leqq 9\,, \qquad 0 \leqq y \leqq 9 \qquad (5)$$

Proto je $x + y \leqq 18$. Z toho a z rovnosti (4) plyne, že je $s \leqq 28$. Protože je s zároveň dělitelno devíti a je $s \geqq 10$, je buď $s = 27$ nebo $s = 18$. Z toho podle rovností (4) plyne, že je

$$x + y = 17 \quad \text{nebo} \quad x + y = 8$$

Je-li $x + y = 17$, pak vzhledem k nerovnostem (5) a k řádku (3) může být jen $x = 9$, $y = 8$. Potom hledané číslo by bylo 42948. Avšak toto číslo není dělitelno osmi. Zbývá tedy jedině případ, kdy je $x + y = 8$. Protože je $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ a y je sudé, mohou nastat jen tyto možnosti:

x	0, 2, 4, 6, 8
y	8, 6, 4, 2, 0

Tak dostáváme pro hledané číslo tyto možnosti:

42048, 42246, 42444, 42642, 42840

Avšak z těchto pěti čísel jsou dělitelna osmi jen tato dvě čísla: 42048, 42840. To jsou tedy hledaná čísla.

7. Pro dané číslo 12^{100} platí:

$$12^{100} = 12^{4.25} = (12^4)^{25} = \underbrace{12^4 \quad 12^4 \ldots 12^4}_{25\text{krát}}$$

Dekadický zápis čísla 12^4 končí číslicí 6, neboť $2^4 = 16$. Součin každých dvou čísel končících číslicí 6 končí také číslicí 6. Proto dekadický zápis daného čísla končí číslicí 6.

Omluva redakce

Omlouváme se spoluautorovi úvodního článku v 2. čísle letošního ročníku *RNDr. Štefanovi Schwabikovi, CSc.*, za chybné uvedení příjmení.

Řešení dalších úloh z 5. čísla Rozhledů

Domácí učitel

Podle textu úlohy sestavíme soustavu lineárních rovnic

$$x + y = 138\,,$$
$$5x + 3y = 540\,,$$

kde x a y označují po řadě počet loktů modrého a černého sukna. Modrého sukna bylo 63 lokte a černého 75 loktů.

JM

Číselné doplňovačky

a) 9146 — číslo utvořené z koncových dvojčíslí druhého a prvního čísla
b) 2836 — rozdíl prvního a druhého čísla
c) 7542 — číslo utvořené z prostředních dvojčíslí prvního a druhého čísla, napsaných obráceně
d) 1788 — součet koncových trojčíslí obou krajních čísel
e) 56 — součin prvních číslic obou čísel
f) 300 — čtyřnásobek rozdílu obou čísel

JP

Omyly, které ovládly svět

Ztrácí se kyslík při hoření?

Ve druhém čísle našeho časopisu jsme vám nabídli zajímavý pokus s natvrdo uvařeným vajíčkem. O tom, že se vám pokus dařil, svědčily dopisy, které jsme od vás obdrželi. *Eva Marušková* z Nové Bane např. napsala:

Predpoveď: Vajíčko asi zmení svoj tvar.

Pozorovanie: Do suchej čistej fľaše od mlieka som dala horiaci na polovičku preložený prúžok papiera, ktorý bol dlhý približne ako výška fľaše. Hned potom som na vrch fľaše dala natvrdo uvarené olúpané vajíčko obrátené špicom do vnútra. Vajíčko začalo nadskakovať a po chvíli, keď skončilo horenie, sa vtiahlo dnu do fľašky. -

Ze zápisu je vidět, že Eva umí nejen výborně pozorovat, ale dokáí že svá pozorování také výstižně popsat. Zajímavé je i její vysvětlen průběhu pokusu, tím spíš, že se objevilo téměř u všech řešitelů když není zcela správné.

Vysvetlenie: Vieme, že pri horení je potrebný kyslík. Keď sme však na vrch fľaše dali vajíčko, tak sme prístup vzduchu s kyslíkom zamedzili a vznikajúci podtlak vo fľaške začal vajíčko nadvihovať.

rul) — „správné smíšení, náležitý stav"; 1. teplota; 2. temperované a dění; TEMPEROVAT — 1. zahřívat na určitou teplotu;znenáhla a mírně žíhat; tepelně zpracovávat; 2. ve fyzice a v hudbě: provádět temperaturu, tj. upravovat na temperované ladění; temperované ladění — ladění, kdy všechny půltóny mají stejnou relativní výšku („jsou správně odměřeny"). *Pozn.:* S lat. tempero, -are = náležitě smísit souvisí termín TEMPERAMENT — „směs látek v náležitých poměrech"; starověcí lékaři se totiž domnívali, že člověk má povahu podle toho, v jakém poměru jsou smíšeny jeho tělesné šťávy, tj. krev, žluč, černá žluč a hlen.

TENZE (z lat. *tensio;* od *tendo, -ere,* ptc. pf. *tensus* = pnout, napínat, natahovat; v. intenze) — „napnutí; napětí; TENZOR (v. -or) — 1. (v anatomii) napínač; 2. ve fyzice: soubor složek určujících v daném systému souřadnic fyzikální nebo geometrickou veličinu; 3. pojem, který vznikl v teorii prostorové napjatosti pružných těles

TEODOLIT (od řec. *theaomai* = dívat se; srov. AMFITEÁTR — divadlo s kruhovým hledištěm; koncové -lit vzniklo analogií) — přístroj k měření vodorovných a svislých úhlů (jednou z jeho podstatných součástí je dalekohled)

TEORÉM (z řec. *theóréma* = věc viděná, na podívanou; od *theóreó* = být divákem, pozorovat; v. teorie) — všeobecně platná poučka; správně utvořená věta, pro kterou (na rozdíl od axiómu) existuje důkaz („věta vystavená na podívanou, tj. i z jiného hlediska")

TEORIE (z řec. *theória* = podívaná, dívání se; od *theóreó* = být divákem, pozorovat; souvisí s *theaomai* = dívat se; v. teodolit) — „dívání se, pozorování, poučení; pohled na problémy"; abstraktní systém poznatků o určitém okruhu jevů; často pokus o výklad jevů; v. t. teorém, teodolit

TERA- (z řec. *teras* — věštné znamení, nepříznivý tvar, nestvůra) — počáteční část názvů násobných jednotek majících význam 10^{12} („obludně vysoká hodnota")

TERCIÁRNÍ (z lat. *tertiarius,* od *tertius* = třetí, a to od *tres* = tři; v. tri-) — jsoucí třetí v nějakém pořadí; třetího stupně; terciární síť — spotřební, pro místní spotřebitele (primární — spojující velké oblasti, sekundární — spojující menší oblasti)

TERCIE (z lat. *tertius* = třetí; od tres = tři; v. *tri-*) — „třetí v pořadí"; třetí třída bývalých gymnazií; třetí stupeň diatonické stupnice; výškový rozdíl dvou tónů, při němž vyšší tón tvoří třetí stupeň diatonické stupnice vzhledem k tónu nižšímu

TERESTRICKÝ (z lat. *terrestris*; od *terra* = země; srov. TERÉN — úsek zemského povrchu nějak členěný, upravený) — týkající se země, pozemní, zemský; vzniklý, vytvořený na pevnině; terestrický dalekohled — pozemský, přizpůsobený k pozorování pozemskému, v terénu

 TERMICKÝ (od řec. *thermos* = horký, teplý; v. *termo-*) — tepelný (např. tepelný článek, v. termočlánek);

TERMIKA (v. -ika[1]) — 1. nauka o tepelných jevech a zákonitostech jejich vztahů; 2. vertikální činnost tepelných proudů vzduchu

TERMÍN (z lat. *terminus* = mezník, hranice, cíl — „přesně ohraničená mez" v oblasti času nebo jazykového vyjadřování; lhůta (pevně stanovená doba); odborné pojmenování s jednoznačným významem; v. t. terminologie

TERMINOLOGIE (slož. z lat. *terminus* — mezník, hranice, cíl; v. termín + řec. *logos* = slovo, řeč; v. -logie) — 1. nauka o termínech; 2. soustava termínů z určitého oboru; odborné názvosloví

TERMO- (z řec. *thermos* = horký, teplý; srov. TERMOSKA — láhev tepelně izolovaná) — počáteční část složených slov mající význam „teplo, teplota"; vzhledem k následující části složeného slova 1. je jejím předmětem (např. termograf — přístroj měřící a zapisující teplotu), 2. vyjadřuje její vlastnost (např. termočlánek — tepelný článek); termo- v těchto případech zpravidla vzniklo zkrácením složeného slova „termoelektrický"; 3. vyjadřuje bližší okolnost (např. termoplast — plastická hmota, která je teplem tvárná); v. t. termický, termika

TERMOČLÁNEK — 1. (z *thermos*) termický, tepelný článek; 2. (zkrácením z „termoelektrický") založený na termoelektrickém jevu

TERMODIFÚZE (v. difúze) — termická (tepelná) difúze; difúze podmíněná teplotou

TERMODYNAMIKA (v. dynamika) — „nauka o pohybu tepla"; nauka o přeměnách tepelné energie na jiný druh energie a naopak o jejich proměnách na teplo

TERMOELEKTRET (v. elektret) — elektret získaný zahřátím dielektrika

TERMOELEKTRICKÝ (v. elektrický) — „elektrický působením tepla"; termoelektrický článek — založený na termoelektrickém jevu; termoelektrický jev — fyzikální jev, při kterém vzniká elektrický proud vlivem tepla, vlivem tepelných rozdílů; termoelektrické napětí — vytvořený rovnovážný stav elektronů mezi kovy, odpovídající dané teplotě

TERMOEMISE (v. emise) — nikoliv „vysílání tepla", ale „vysílání prostřednictvím tepla"; termoemise elektronů — uvolňování elektronů z povrchu pevných nebo kapalných těles při vysoké teplotě; vysílání elektronů ze žhavé katody

TERMOFON (v. -fon) — přístroj, v němž se elektrické kmity mění v akustické tepelným účinkem proudu ve vodiči

TERMOFOR (v. -for) — 1. přístroj umožňující přivádět („přiná-

šet") do kalorimetru stále stejné množství tepla; 2. zahřívač (zastaralá lékařská pomůcka)

TERMOGENERÁTOR (v. generátor) — přístroj vyrábějící elektrický proud z tepelné energie

TERMOGRAF (v. -graf) — přístroj na měření a zapisování teploty, teplotních změn; „zapisující teploměr" (zápisu se říká TERMOGRAM)

TERMOCHEMIE (v. chemie) — zabývá se tepelnými jevy, které vznikají při chemických reakcích

TERMOJADERNÝ v. termonukleární

TERMOLUMINISCENCE (v. luminiscence) — teplem podmíněné světélkování nějaké látky

TERMONUKLEÁRNÍ (v. nukleární) — termojaderný; termonukleární reakce — jaderná reakce probíhající při nesmírně vysokých teplotách

TERMOSKOP (v. -skop) — přístroj k pozorování změn teploty

TERMOSTAT (v. -stat) — „přístroj nastavující teplotu na určitém stupni"; zařízení k udržení stálé teploty; srov. reostat

TERMOTROPNÍ (řec. *trepó* = obracet; v. tropy) — schopný měnit („obracet") svou polohu vzhledem k teplu (ať už směrem ke zdroji tepla nebo od něho); ve fyzice: termotropní kapalné krystaly — ty, které se do této fáze dostanou zahřátím některých pevných organických látek

TEST (z lat. *testis* = svědek, svědectví, důkaz) — zkouška k ověření hodnot, vlastností, vědomostí; TESTOVAT — zkoušet, vyšetřovat testem

TETRODA (slož. z řec. *tetra-* = čtyř-, čtver-, čtvero-; srov. TETRALOGIE — umělecké dílo složené ze čtyř samostatných celků + + *hodos* = chod, chůze, cesta; zde však uměle zkráceno z „elektroda"; v. t.) — elektronka se čtyřmi elektrodami

TEZE (z řec. *thesis* = uložení, ustanovení, poloha; od *tithémi* = klást, pokládat) — „to, co je položeno"; tvrzení (dané); stručně shrnutá základní myšlenka. Pozn.: Jako koncová složka má často podobu -TÉZA (v. hypotéza, syntéza). Od jiného kmene téhož slovesa vznikají pak koncové složky -TETIE a -TETICKÝ (v. homotetie, hypotetický, syntetický)

TITAN (z řec. *Titan*, *-anos* — starořecký bůh Titan; obr) — Titan, družice planety Uran; titan — druh kovového prvku, nazvaný podle družice Titanu; TITANÁT — nerost odvozený od kyseliny titaničité

TOLERANCE (z lat. *tolerantia*; od *tolero*, *-are*, ptc. préz. *tolerans*, *-antis* = snášet, trpět, vydržet; srov. TOLEROVAT — dovolovat) — snášenlivost, trpělivost; rozsah přípustné nepřesnosti (nepřesnost, kterou „ještě sneseme"); dovolená odchylka

TÓN (z řec. *tonos* = natažení, napětí; od *teinó* = napínat, táhnout, natáhnout) — zvuk vydávaný pravidelným chvěním napjaté struny nebo blány; zvuk určité výšky. Pozn.: Už lat. slovo tonus má kromě významu „zvuk" též náš dnešní význam „tón"; odtud pak vznikají další dnešní výrazy jako TÓNIKA, TÓNINA apod. Z řec. „tonos" vznikla koncová složka složených slov -TONIE ve významu „napětí, tlak" (srov. HYPOTONIE a HYPERTONIE — snížení a zvýšení krevního tlaku; v. t. monotonie, pentatonie)

-TONICKÝ — 1. příd. jméno k „tonikum"; posilující; 2. příd. jméno k „tonus"; týkající se napětí, tlaku

TÓNICKÝ — tónický trojzvuk — vybudovaný na tónice

TÓNIKA — základní tón tóniny; první stupeň stupnice; v. t. pentatonika

TONIKUM — posilující, sílící lék

TÓNINA — příslušnost tónů hudební skladby k určité stupnici; stupnice; sled tónů a půltónů v tónové stupnici

TONUS — trvalý stupeň napětí živé tkáně; v. t. monotonní; anténa

TOPO- (z řec. *topos* = *místo, kraj)* — počáteční část složených slov mající význam „místo"

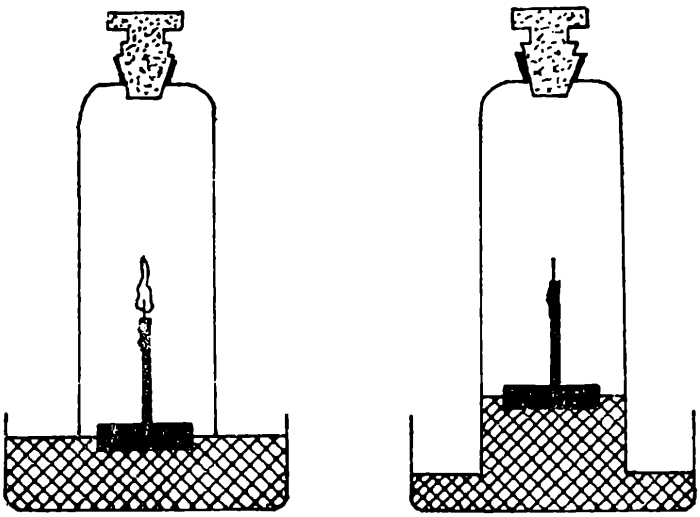
TOPOCENTRICKÁ souřadnice (v. centrický) — v astronomii: souřadnice udávající pozici („místo") tělesa vzhledem k pozorovacímu místu na zemském povrchu (srov. geocentrický)

TOPOGRAFIE (v. *-grafie*) — „popisování míst"; popis území pomocí map; místopis

TOPOLOGIE (v. -logie) — „nauka o místech"; původně „analýza polohy" geometrických útvarů s využitím vlastností spojitosti, dnes rozsáhlá část moderní matematiky, usilující o geometrizaci matematiky, tj. o výtvarné vyjadřování vycházející z geometrických útvarů

TORZE (z lat. *torsio*; od *torqueo*, *-ere*, ptc. pf. *torsus* = točit, kroutit, mučit) — točení, kroucení, stáčení; ve fyzice: druhy namáhání tělesa, kterým se mají podélná vlákna tělesa stočit do šroubovnice; úhel, o který se stočí průřez vlákna, tyče apod. oproti rovnoběžnému průřezu pevnému

TORZNÍ — kroutivý (např. kmity, kmitání); torzní kyvadlo — zavěšené na svislém vlákně, které může konat torzní kmity („může se otáčet"); podstatou je periodický vratný pohyb kolem stálé osy; torzní váhy — jsou založeny na kroucení vlákna nebo vlasové pružiny. Pozn.: Nespojovat se slovem TORZO (socha bez hlavy a bez končetin), které vzniklo přes italské „torso" = = okleštěný kmen, z řec. *thyrsos* = Bakchova hůl ověnčená břečťanem.



Začátek pokusu Konec pokusu

Z výsledku pokusu vyplývá, že vzduch není jednoduchá látka, ale že se skládá z několika látek. Jedna z nich, která umožňovala hoření svíčky, se nazývá *kyslík*. Kyslík se při hoření svíčky spotřeboval.

Avšak ani tento prístup kyslíka nebol dostačujúci a tým čoraz väčší podtlak vtiahol vajíčko dnu do fľašky.

V čem jsou chyby ve vysvětlení? První v tvrzení, že by podtlak v lahvi mohl nadzvedávat vajíčko. Druhá chyba je v představě, že kyslík se hořením „spotřebuje", a tedy nějak z lahve ztratí. Je ovšem pravda, že k tomuto pohledu na hoření nemálo přispěl jeden školní pokus, který bychom našli i s nepřesným vysvětlením v řadě učebnic. Pokus si můžete provést i doma.

Na dno větší misky nalejte asi čtvrt litru vody a na ni položte plátek uříznutý z korkové zátky s přilepeným kouskem dortové nebo vánoční svíčky o výšce do jednoho centimetru. Svíčku zapalte a přiklopte sklenicí od zavařeniny. Uvidíte, že svíčka po chvilce zhasne a do sklenice vnikne určité množství vody. Jaká vysvětlení dříve pokus provázela, si můžete přečíst z textu u obrázku převzatého z jedné starší učebnice. Není divu, že žáci pochopili pokus tak, že se kyslík spotřeboval (zanikl) a na jeho místo vproudila voda.

Nepřesnost podobných představ je v tom, že kyslík jako ostatně i jakákoliv jiná látka nemůže zanikat, může jen „obrazně řečeno" přecházet z jedné společnosti do druhé. V tomto případě atomy kyslíku svázané ve vzduchu v molekuly O_2 nahradí svá vzájemná pouta spojením s atomy uhlíku a vodíku, které předtím tvořily částice parafinu. Změní se ale přitom objem plynů?

Při hoření svíčky vzniká oxid uhličitý CO_2 a vodní pára H_2O. Pokud by vznikal pouze oxid uhličitý, byl by jeho objem při stejném tlaku a teplotě stejný jako původní objem kyslíku. Na každou vzniklou molekulu CO_2 připadá jedna „spotřebovaná" molekula O_2. Při slu-

čování kyslíku s vodíkem je dokonce objem vznikající vodní páry dvojnásobný — na jednu molekulu O_2 připadají dvě molekuly H_2O. Proč přesto dojde k poklesu tlaku ve sklenici?

Hořením rychle roste teplota a tím i tlak plynu ve sklenici, takže někdy i část vzduchu vybublá pod okrajem sklenice. I když k tomu nedojde, po zhasnutí svíčky plyny ve sklenici stykem se studenými stěnami rychle chladnou, zmenšují svůj tlak i objem a vnějším tlakem do sklenice vniká voda z misky. Navíc přitom dochází k rozpouštění CO_2 ve vodě. I o tom se můžeme přesvědčit, jestliže místo obyčejné vody nalejeme do misky vápennou vodu, která se rozpuštěným oxidem uhličitým zkalí do běla. Poklesu tlaku napomáhá i kapalnění vzniklé vodní páry, o kterém svědčí orosení vnitřních stěn sklenice.

Podobně probíhají děje i při hoření papírku v láhvi uzavřené vajíčkem. Zpočátku silně zahřátý vzduch společně se zplodinami hoření zvedají svým tlakem vajíčko a unikají z lahve. Jakmile papír zhasne, dochází k rychlému ochlazování plynů v láhvi od stěn, ke kapalnění vodních par a rozpouštění CO_2 ve vzniklých kapičkách vody. To vše vede k poklesu tlaku uvnitř láhve, a proto vnější tlak vzduchu dokáže vtlačit vajíčko hrdlem dovnitř.

Nemáte chuť vyzkoušet si pokus znova a podívat se na jeho průběh novým pohledem?

Úkol pro vás: Navrhněte pokus, kterým byste se mohli v laboratoři přesvědčit, že při hoření dochází pouze k přeměnám látek a nikoli k jejich ztracení.

Milan Rojko

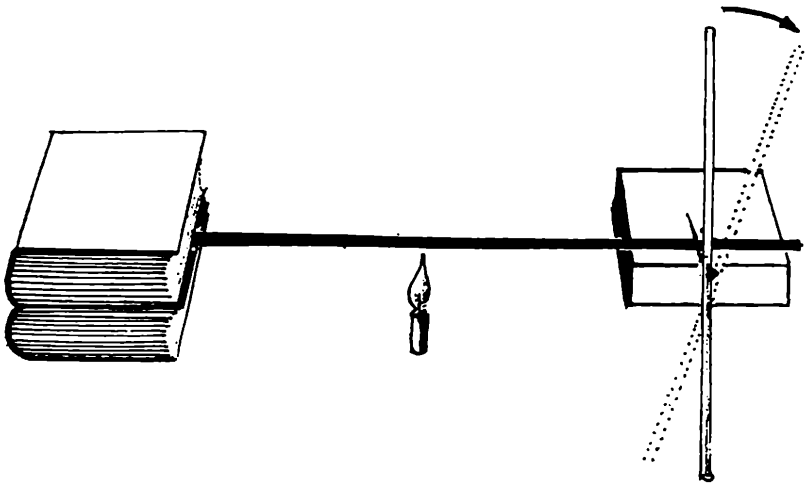
Laboratoř doma

Jednoduchý dilatometr

V předcházejícím článku jsme vysvětlili podivuhodné chování vajíčka posazeného na hrdlo láhve od mléka v podstatě roztahováním vzduchu při jeho zahřívání a jeho smršťováním při ochlazování. I když je teplotní roztažnost pevných látek mnohem menší než plynů, nepotřebujeme ani na její pozorování nijak složité zařízení.

Připravíme si dvě brčka slepená pomocí nastrčené zápalky, špendlík, hladkou podložku (např. kapesní zrcátko), delší kovový rovný drát (např. pletací jehlici) a svíčku.

Uspořádání pokusu ukazuje obrázek. Jeden konec jehlice je upevněn tak, aby se nemohl pohybovat. Pokud máte svorku, poslouží vám lépe než knihy, které jsou na obrázku. Druhý konec jehlice podložíme podložkou. Ručku vašeho dilatometru budou tvořit slepená brčka, propíchnutá uprostřed kolmo špendlíkem. Špendlík vložíme jako



váleček pod volný konec jehlice na podložku a seřídíme tak, aby jehlice na špendlík dostatečně silně tlačila a ten neprokluzoval.

Jestliže jehlici zahřejeme svíčkou či zápalkou, projeví se její prodloužení odvalením špendlíku a pootočením brčka o určitý úhel. Změříme-li průměr špendlíku, lze z úhlu pootočení ručky zhruba vypočítat prodloužení jehlice.

Úkol pro vás: Dokážete vypočítat, o jakou délku se váš drát při pokusu prodloužil? Průměr špendlíku si změřte ve škole mikrometrickým šroubem nebo posuvným měřítkem.

Pošlete nám případně i fotografii svého dilatometru k uveřejnění.

Milan Rojko

Fyzikální úloha

K přemýšlení do vlaku

Pevné látky se s rostoucí teplotou (pokud není příliš vysoká) roztahují tak, že rozměry těles, která jsou z nich zhotovena, rostou podle vztahu

$$l_t = l_0(1 + \alpha t) ,$$

kde l_t je délka při teplotě t °C,

l_0 je délka při teplotě 0 °C,

α je teplotní součinitel délkové roztažnosti příslušného materiálu.

Dokázali byste tohoto vztahu využít k výpočtu teplotního součinitele délkové roztažnosti oceli, ze které jsou vyrobena kola železničního vagónu? Ale pozor! Musí vám k tomu stačit jen údaj z přesného měřiče otáček kola, kterým je vagón vybaven, a teploměr.

Trochu vám ještě napovíme: Představte si, že stejným vagonem jedete z Pardubic do Prahy jednou v zimě, jednou v létě.

Úkol pro vás: Odvoďte vzorec pro výpočet teplotního součinitele délkové roztažnosti α z hodnot N_1, t_1 a N_2, t_2.

N_1 — je údaj měřiče otáček na zvoleném úseku tratě v létě při teplotě t_1,

N_2 — je údaj měřiče otáček na stejném úseku tratě v zimě při teplotě t_2.

Milan Rojko

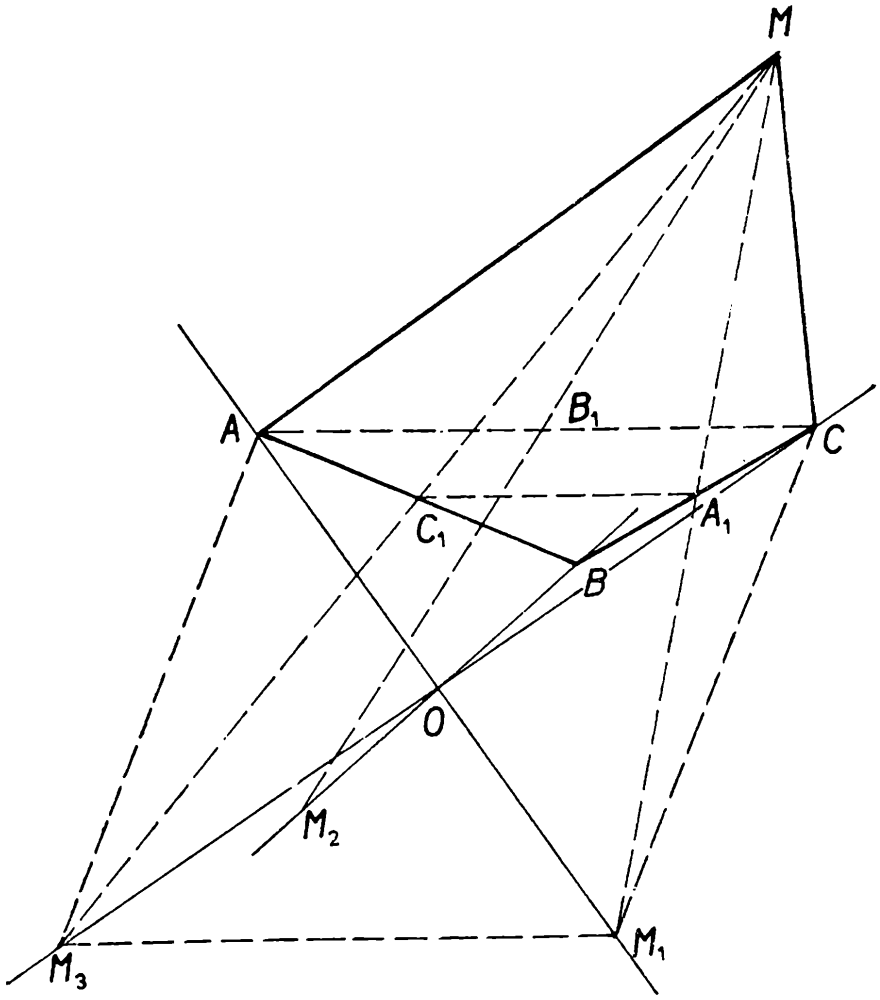
Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu:
RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.
Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Úloha zprvu planimetrická, pak stereometrická

V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCM$, který není rovnoběžníkem. Označme A_1, B_1, C_1 středy úseček BC, CA, AB. Body M_1, M_2, M_3 jsou po řadě obrazy bodu M ve středových souměrnostech podle bodů A_1, B_1, C_1. Na obr. 1 se zdá, že přímky AM_1, BM_2, CM_3 procházejí týmž bodem O. Je tomu tak skutečně?

Obr. 1



Úsečka A_1C_1 je střední příčkou trojúhelníku ABC a její délka je tedy $\frac{1}{2}|AC|$. Úsečka A_1C_1 je však zároveň střední příčkou v trojúhelníku M_3M_1M, takže $|M_1M_3| = 2 \,.\, |A_1C_1| = |AC|$. Dále platí $M_1M_3 || AC$. Čtyřúhelník M_3M_1CA je proto rovnoběžník a jeho úhlopříčky AM_1 a CM_3 se půlí. Jejich průsečík je na obr. 1 označen O. Nyní je třeba ještě nalézt další rovnoběžník o úhlopříčkách AM_1 a BM_2 (popř. CM_3 a BM_2). K tomu je třeba poznamenat, že $B \neq M_2$, neboť čtyřúhelník $ABCM$ není rovnoběžník. Řešení lze již snadno dokončit. Navíc jsme dokázali, že společný průsečík O je středem všech tří úseček AM_1, BM_2 a CM_3.

Přejděme ke stereometrické úloze, která je slibována v nadpisu. Překreslete obr. 1. a narýsujte v něm i úsečku BM; užijte stejné tloušťky čáry jako u obvodu čtyřúhelníku $ABCM$. Potom se na nový obrázek stačí pozorně podívat a uvidíme na něm obraz čtyřstěnu $ABCM$ ve volném rovnoběžném promítání. Máme tak před sebou problém k přemýšlení i řešení: Procházejí přímky AM_1, BM_2 a CM_3 i v prostoru týmž bodem?

Jiří Mída

Slovní algebrogramy

Ve slovních algebrogramech musíte nahradit stejná písmena stejnými číslicemi tak, aby platil součet.

a)
```
  K O Č Á R
      J E L
  K O L E M
-----------
M O Č Á L U
```

b)
```
    A L E N A
      D A L A
  L E N C E
-----------
M A L I N Y
```

c)
```
K L O K A N
  S K Á Č E
-----------
D A L E K O
```

d)
```
  L U D M I L A
O K L A M A L A
---------------
K O M I N Í K A
```

Každá úloha má jen jedno řešení — ověřeno počítačem.
Řešení naleznete na str. 249.

Jindřich Pěnčík

Proti větru

Jeden z nejvýznamnějších sovětských fyziků *Petr Leonidovič Kapica* (1894—1984) je znám jako žák a spolupracovník *Ernesta Rutherforda* a laureát Nobelovy ceny roku 1978 za objev supratekutosti kapalného helia. Kapica byl vědcem světového formátu, širokého okruhu zájmů, velké osobní statečnosti a sehrál významnou úlohu i při organizaci sovětské vědy, prosazování jejího společenského poslání a při výchově nových generací fyziků. Usiloval vždy o to, učit své žáky samostatnému tvořivému myšlení, hledání nových originálních řešení. Úlohy, které zadával, nejsou toho druhu, aby je bylo možno řešit dosazením do známého vzorečku a porovnáním výsledku s údajem na konci knížky. Vyžadují rozbor situace a jejích variant, doplnění dalších předpokladů a často ani nemají jednoznačné řešení. Jednu z Kapicových úloh bychom mohli formulovat takto:

Na lodi je umístěn motor poháněný větrem na způsob větrného mlýna. Tento motor otáčí hřídelí lodního šroubu. Může se taková loď pohybovat přímo proti větru?

Rozbor úlohy Proti větru

Možnost pohybu lodi za bezvětří nebo dokonce proti větru měla v historii lidstva vždy velký praktický význam. Plachetní lodi dokáží dosáhnout míst ležících ve směru proti větru metodou zvanou lavírování (křižování). Osa lodního trupu svírá přitom s vytčeným kursem úhel o něco menší než pravý a pohyb vpřed se dociluje vhodným nastavením plachet. Loď přitom musí střídavě měnit svou orientaci tak, aby zachycovala vítr jednou z levého a jednou z pravého boku. Dosahuje tedy cíle po dráze představující lomenou čáru a nemůže plout proti větru *přímo*.

Využití větru pro pohon lodí neztratilo svůj význam ani dnes, kdy máme k dispozici jiné autonomní zdroje energie. Také lodě poháněné větrným motorem, o kterém je řeč v naší úloze, byly zkonstruovány a dokázaly proti větru plout. Na první pohled se to může zdát v rozporu se zákonem zachování hybnosti — hybnost větru předávaná lodi má opačný směr než výsledná hybnost lodi. Je však třeba vzít v úvahu též hybnost vody odhazované lodním šroubem ve směru větru. Energie větru se tak transformuje v energii pohybu vody a je otázka, zda zbude ještě dostatek energie k pohonu lodi v požadovaném směru.

Ve zjednodušeném modelu si můžeme situaci představit jako pružný (v prvním přiblížení) ráz dvou těles. Těleso vzduchu o hmotnosti m_1 a rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ dopadá na nehybnou loď o hmotnosti M. Poté se loď dostává do pohybu rychlostí $\boldsymbol{V}$ opačného směru, než má rychlost $\boldsymbol{v}_1$,

a těleso vody o hmotnosti m_2 se pohybuje rychlostí $\mathbf{v}_2$ ve směru $\mathbf{v}_1$. Zapíšeme zákony zachování energie a složky hybnosti ve směru větru:

$$m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2 + M V^2 ,$$
$$m_1 v_1 = m_2 v_2 - M V$$

Z první rovnice je patrno, že má-li se loď pohybovat, musí platit

$$0 < \alpha = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_1^2} = 1 - \frac{M V^2}{m_1 v_1^2} < 1$$

Z druhé rovnice pak dostáváme podmínku

$$m_2 > \frac{m_1}{\alpha} ,$$

která je jistě principiálně splnitelná. Z praktického hlediska je ovšem třeba vzít v úvahu ztráty energie třením, odporem vzduchu a vody a výpočet účinnosti celého procesu není jednoduchý. Ukazuje se, že plachetnice dosáhne lavírováním svého cíle přece jen dříve.

iš

Úlohy ze zahraničních časopisů

Úloha 1. Máme tři prvočísla, o kterých víme, že jedno z nich je rovno rozdílu třetích mocnin zbývajících dvou. Určete tato prvočísla a zdůvodněte, proč úloha má jen jediné řešení.

Úloha 2. Ve vesnici Semidvorje stojí sedm domů. Vybereme-li libovolné tři z nich, nalezneme v každé trojici alespoň jednu dvojici domů s tou vlastností, že vzdálenost mezi nimi je 100 metrů. Načrtněte plán rozložení domů ve vesnici.

Úloha 3. Není těžké dokázat, že součet úhlů pravidelné pěticípé hvězdy je roven 180 stupňům. Dokažte, že stejnou hodnotu má i součet úhlů libovolné pěticípé hvězdy.

Úloha 4. Máme osmiciferné číslo sestrojené z cifer 1, 2, 3, 4 tak, že každá z těchto cifer je užita dvakrát. Dále platí, že mezi jedničkami je jedna cifra, mezi dvojkami dvě cifry, mezi trojkami tři cifry, mezi čtyřkami čtyři cifry. Určete toto číslo.

Tomáš Schütz

Řešení algebrogramů ze str. 247

a) 74 986 + 523 + 74 321 = 149 830
b) 49 764 + 2 494 + 97 607 = 149 865
c) 461 439 + 74 802 = 536 241
d) 8 917 280 + 56 807 080 = 65 724 360

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

9. Zkoumejte rozmanité trojúhelníky ABC, které mají délky stran a, b, c a délky těžnic t_a, t_b, t_c. Každému přiřaďte tato čísla p, q:

$$p = \frac{t_a + t_b + t_c}{a + b + c}, \qquad q = \frac{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

a) Dokažte, že je $p \in (0{,}75;\ 1)$.

b) Najděte minimální interval obsahující všechna čísla q.

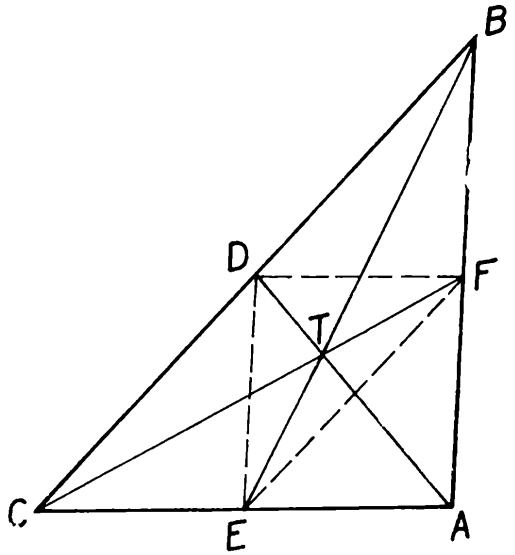
c) Najděte minimální interval obsahující všechna čísla p.

Poznamenejme ještě, že úloha c) je obtížnější než úloha a). (Došla dvě řešení.)

† Jaroslav Šedivý

Nízký počet řešení způsobily patrně nesnáze s úkolem c). Redakce sdílí autorův názor, že tato dílčí úloha měla být označena jako nepovinná.

Úkol a) rozřešil *Radek Porazil, 4D G v Bílovci* (obr. 1):



Obr. 1

Z trojúhelníků ABT, BCT, CAT postupně plyne:
$|AT| + |BT| > |AB|$, $|BT| + |CT| > |BC|$, $|CT| + |AT| > |CA|$.
Sečtením těchto tří nerovností dostaneme výsledek:
$2|AT| + 2|BT| + 2|CT| > |AB| + |BC| + |CA|$,

$$\frac{4}{3}(t_a + t_b + t_c) > a + b + c, \quad \text{čili} \quad p > \frac{3}{4}.$$

Z trojúhelníků ADF, BDE, CEF postupně plyne:
$|AD| < |FD| + |AF|$, $|BE| < |BD| + |ED|$, $|CF| < |EF| + |CE|$
Přitom je:

$$|FD| = |EC| = \frac{b}{2}, \quad |AF| = |ED| = \frac{c}{2}, \quad |BD| = |EF| = \frac{a}{2}.$$

Sečtením výše uvedených tří nerovností tedy dostaneme, že je

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c, \quad \text{čili} \quad p < 1$$

Úkol b) byl formulován tajemněji než zasluhoval. Postačilo užít známé vzorce (k nimž se dospěje užitím kosinové věty):

$$4t_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2,$$
$$4t_b^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2,$$
$$4t_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme výsledek:

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Z toho plyne, že je $q = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Fyzika

5. Na vodorovný dopravní pás, který se pohybuje rychlostí v_0, byl postaven roztočený plný kruhový kotouč o poloměru r tak, že jeho rotační osa byla vodorovná a kolmá na směr rychlosti ω_0. Kotouč se otáčí kolem své osy úhlovou rychlostí o velikosti μ_0. Koeficient smykového tření mezi kotoučem a pásem je f. Vypočtěte, za jak dlouho od postavení kotouče na pás se kotouč začal valit po pásu bez prokluzování a jaká přitom byla rychlost osy kotouče.
(Došla 2 řešení.)

Miroslava Trchová

Řešení autorky:

Při řešení probereme postupně tři případy, které následují v odstavcích a), b), c).

a) Kotouč se otáčí tak, že jeho bod dotyku s pásem se v čase $t = 0$ s pohybuje ve stejném směru jako pás, přičemž je $\omega_0 r < v_0$ (obr. 1):

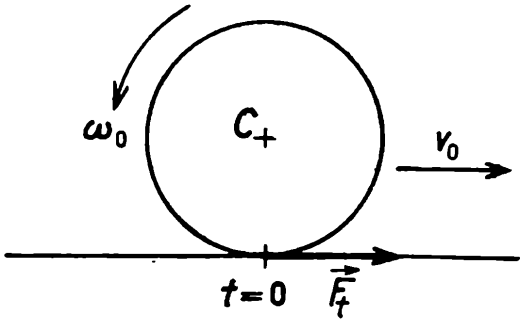
Na kotouč působí třecí síla $\boldsymbol{F}_t$ ve směru pohybu pásu. Její velikost je rovna $F = fmg$; tíhová síla je v rovnováze se silou reakce podložky. Pro pohyb hmotného středu C kotouče platí první impulsová věta:

$$m v_c = F t, \tag{1}$$

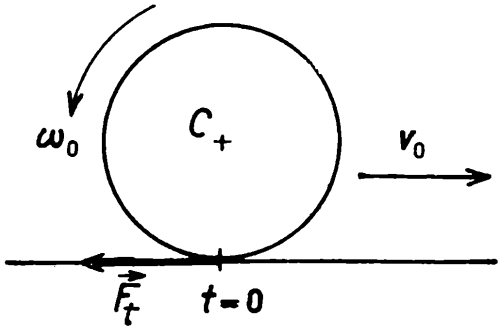
kde v_c je rychlost hmotného středu a t je hledaná doba. Pro rotační pohyb kotouče platí druhá věta impulsová:

$$I_c(\omega - \omega_0) = Frt, \tag{2}$$

kde I_c je moment setrvačnosti kotouče vzhledem k hmotnému středu,



Obr. 1



Obr. 2

který je roven $\frac{1}{2}\,mr^2$; ω je úhlová rychlost otáčení kotouče v okamžiku, kdy právě nastal pohyb bez prokluzování. Za těchto podmínek je

$$\omega = \frac{v_0 - v_c}{r}\,.$$

Dosazením těchto vztahů do rovnosti (2) dostaneme

$$\frac{1}{2}\,mr^2\left(\frac{v_0 - v_c}{r} - \omega_0\right) = rfmgt\,,$$

z čehož plyne, že

$$v_0 - v_c - r\omega_0 = 2fgt\,.$$

Z (1) plyne, že je $v_c = fgt$. Po dosazení do předešlé rovnice dostaneme pro hledanou dobu

$$t = \frac{v_0 - r\omega_0}{3fg}\,;$$

z (1) pro rychlost osy kotouče dostaneme

$$v_c = \frac{v_0 - r\omega_0}{3}$$

b) Kotouč se otáčí ve stejném směru jako pás, avšak $\omega_0 r > v_0$ (obr. 2): Na kotouč působí třecí síla $\boldsymbol{F}_t$ proti směru pohybu pásu. Pro pohyb hmotného středu kotouče platí první impulsová věta:

$$mv_c = fmgt\,. \tag{3}$$

Pro rotační pohyb kotouče platí druhá impulsová věta:

$$I_c\,(\omega - \omega_0) = -\,Frt\,. \tag{4}$$

Z podmínky neprokluzování plyne, že je

$$\omega = \frac{v_0 + v_c}{r}$$

Z toho po dosazení do (4) dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2}\,mr^2\,.\left(\frac{v_0 + v_c}{r} - \omega_0\right) = -\,fmgrt\,,$$

z níž plyne, že je

$$v_0 + v_c - r\omega_0 = -2fgt\,.$$

Protože podle (3) je $v_c = fgt$, je

$$v_0 - r\omega_0 = -3fgt\,,$$

takže

$$t = \frac{r\omega_0 - v_0}{3fg}\,, \qquad v_c = \frac{r\omega_0 - v_0}{3}\,.$$

c) Kotouč se otáčí proti směru pohybu pásu.
Na kotouč působí třecí síla ve směru pohybu pásu.
Impulsové věty mají tvary:

$$mv_c = fmgt\,,$$
$$I_c(\omega + \omega_0) = Frt\,.$$

Podmínka neprokluzování má v tomto případě tvar

$$\omega = \frac{v_0 - v_c}{r}\,.$$

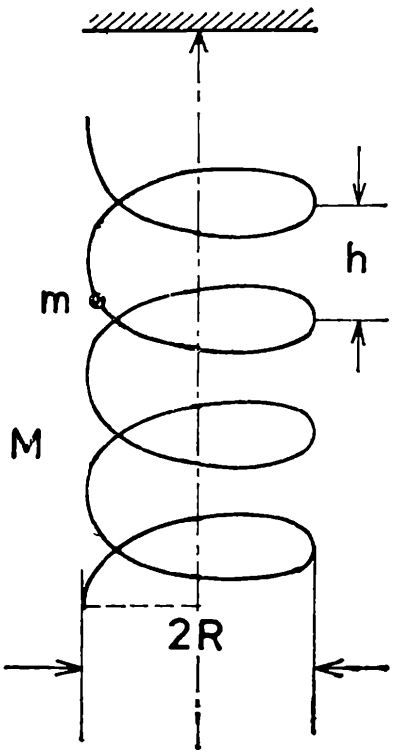
Pro hledanou dobu t a rychlost pohybu v_c hmotného středu dostaneme tyto výsledky:

$$t = \frac{v_0 + r\omega_0}{3fg}\,, \qquad v_c = \frac{v_0 + r\omega_0}{3}\,.$$

Poznámka. Řešení autorky se nejvíc blíží řešení *Pavla Kryštofa* A4 SPŠE v Brně, Leninova 40.

6. Tuhá spirála o hmotnosti M a poloměru R má výšku závitu h (obr. 3). Je zavěšena na niti tak, že se může volně otáčet kolem své svislé osy. Na spirále je navléknuta malá kulička o hmotnosti m. Do okamžiku $t = 0$ udržujeme spirálu i kuličku v klidu; v tomto okamžiku začne kulička klouzat bez tření po spirále. Určete úhlovou rychlost otáčení spirály v okamžiku, kdy kulička proběhne n závitů spirály.
(Došla 2 řešení.)

Miroslava Trchová



Obr. 3

Řešení autorky:

Pro soustavu spirála — kulička platí zákon zachování mechanické energie

$$mghn = \frac{1}{2}\,mv_z^2 + \frac{1}{2}\,m^2R^2\omega_m^2 + \frac{1}{2}\,MR^2\omega_M^2 \qquad (1)$$

kde v_z je svislá složka rychlosti kuličky, ω_m je velikost úhlové rychlosti otáčení kuličky, ω_M je velikost úhlové rychlosti otá-

čení spirály, vše v okamžiku, kdy kulička proběhl a n závitů spirály. Vztah mezi ω_m a ω_M získáme ze zákona zachování momentů hybnosti

$$mR^2\omega_m = -MR^2\omega_M ,$$

takže

$$\omega_m = \frac{M}{m}\omega_M . \tag{2}$$

Je-li z svislá souřadnice kuličky, ψ_m velikost úhlu otočení kuličky a ψ_M velikost úhlu otočení spirály v pevné soustavě souřadnic, platí v každém okamžiku jednoduchý vztah

$$z = \frac{h}{2\pi}(\psi_m - \psi_M) ,$$

odkud plyne podobný vztah i pro časové změny těchto veličin, tj. pro příslušné rychlosti

$$v_z = \frac{h}{2\pi}(\psi_m - \psi_M) . \tag{3}$$

Dosazením vztahů (2) a (3) do rovnice (1) dostaneme po jednoduchých algebraických úpravách pro úhlovou rychlost otočení spirály vztah

$$\omega_M^2 = \frac{8\pi^2 n m^2 g h}{(M+m)\left[(M+m)h^2 + 4\pi^2 M R^2\right]}$$

Poznámka. Obě došlá řešení správně vycházela ze zákona zachování energie a zákona zachování momentu hybnosti. Nesprávný však byl předpoklad o analogii s pohybem po nakloněné úsečce pro rozklad rychlostí kuličky, zejména však opomenutí vztahu (3) uvedeného v řešení autorky.

OLYMPIÁDY A SOČ

28. mezinárodní matematická olympiáda

proběhla od 9. do 21. července 1988 v rámci oslav 200. výročí vylodění prvních 776 britských trestanců v Austrálii. Na soutěž se sjel rekordní počet 268 studentů ze 49 zemí světa. V této nemalé konkurenci jsme nedopadli nejhůře, ale bohužel ani lépe než v předchozích ročnících. Naše dvě II. ceny si shodou okolností odnesli studenti 3. ročníků (ti se také podělí o cenu pro nejlepšího československého reprezentanta) a dvě III. oba maturanti. Nejhůře tentokrát dopadli oba nejmladší z 2. ročníku; zejména od vítěze našeho celostátního kola jsme očekávali lepší výsledek. Jejich výsledky shrnuje tabulka:

Petr Čížek								
3 GWP Praha	7	7	7	1	5	1	28	II
Pavol Gvozdjak								
4 GAM Bratislava	4	7	7	3	0	0	21	III
Petr Hliněný								
2 GMK Bílovec	6	0	1	2	1	0	10	
Stanislav Krajči								
4 G Šmeralova Košice	7	7	2	2	3	0	21	III
Ilja Martišovitš								
3 GJH Bratislava	7	7	7	0	7	0	28	II
Ondrej Šuch								
2 GAM Bratislava	4	0	7	1	0	0	12	

V neoficiálním pořadí zúčastněných zemí jsme spadli z loňského 9. na letošní 12. místo:

1.	SSSR	4	2	—	217	
2.—3.	ČLR, RSR	4	2	—	201	
4.	NSR	1	4	1	174	
5.	VSR	1	4	—	166	
6.	USA	—	5	1	153	
7.	NDR	1	4	—	145	(pětičlenné družstvo)
8.	BLR	—	4	2	144	
9.	Francie	1	1	3	128	
10.	Kanada	1	1	2	124	
11.	Velká Británie	—	3	2	121	
12.	ČSSR	—	2	2	120	

Systém bodování se už řadu let nemění: za každou ze šesti úloh lze získat nejvýše 7 bodů, takže porovnání celkových výsledků dává teď lepší představu o obtížnosti toho kterého ročníku. Letos na I. cenu stačily 32 body (obdrželo ji 16 účastníků včetně pěti, kteří dosáhli maxima 42 bodů), II. se udělovala za 23—31 bod (44 držitelů) a III. za 14—22 body. Zvláštní cenu získal bulharský student Emanuil Atanasov.

Vlastní soutěž proběhla ve dnech 15. a 16. července v australském hlavním městě *Canberra* a mezinárodní jury pro ni vybrala následující šestici úloh (nás může těšit, že po letech se mezi nimi opět objevila československá úloha, jejímž autorem je *dr. Jan Kratochvíl; CSc.*). Texty úloh vám předkládáme v původní česko-slovenské verzi tak, jak je obdrželi naši studenti v překladu vedoucího naší delegace a člena mezinárodní jury *dr. Františka Zítka, CSc.* (Zemřel náhle 18. 11. 1988 ve věku 59 let.)

1. V rovině jsou dány dvě kružnice s týmž středem a s poloměry R a r, $R > r$. Na kružnici s poloměrem r je dán pevný bod P, kružnici

s poloměrem R probíhá proměnný bod B. Označíme C ($C \neq B$) průsečík přímky BP s kružnicí o poloměru R. V bodě P vztyčíme kolmici l k přímce BP; l protíná kružnici o poloměru r v bodech A, P (je-li l tečna v P, je $A = P$).

(I) Určete množinu všech hodnot výrazu $|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2$.

(II) Určete množinu všech středů úseček AB.

(*Lucembursko*)

2. Je dáno kladné celé číslo n, množina B a její podmnožiny A_1, A_2, ..., A_{2n+1} takové, že

(a) každá množina A_j ($1 \leqq j \leqq 2n + 1$) obsahuje právě $2n$ prvků;

(b) každý průnik $A_i \cap A_j$ ($1 \leqq i < j \leqq 2n + 1$) obsahuje právě jeden prvek;

(c) každý prvek množiny B je obsažen v alespoň dvou množinách A_j.

Pro které hodnoty n lze v takové množině B přiřadit každému jejímu prvku jedno z čísel 0, 1 tak, aby v každé množině A_j ($j = 1, 2, 2n + 1$) bylo právě n prvků, jimž je přiřazeno číslo 0?

(*ČSSR*)

3. Funkcia f je definovaná na množine všetkých kladných celých čísel podmienkami

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3\,,$$
$$f(2n) = f(n)\,,$$
$$f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)\,,$$
$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Určte počet takých celých čísel n, $1 \leqq n \leqq 1988$, pre ktoré je $f(n) = n$.

(*Velká Britanie*)

4. Dokážte, že množina takých reálnych čísel x, pre ktoré

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x - k} \geqq \frac{5}{4}\,,$$

je zložená z disjunktných intervalov a že súčet dĺžok týchto intervalov je 1988.

(*Irsko*)

5. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC označme D patu výšky z vrcholu A. Přímka, která spojuje středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC a ACD, protíná strany AB, AC v bodech K, L. Označme S, resp. T, obsah trojúhelníku ABC, resp. AKL. Dokažte, že $S \geqq 2T$.

(*Řecko*)

6. Nech a, b sú také kladné celé čísla, že číslo $ab + 1$ je deliteľom čísla $a^2 + b^2$. Dokážte, že číslo $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ je štvorcom celého čísla.

(*NSR*)

Na řešení první i druhé trojice úloh měli soutěžící jako vždy čtyři a půl hodiny čistého času.

Vedením československé delegace byl již tradičně pověřen *dr. František Zítek, CSc.*, z MÚ ČSAV, dlouholetý organizátor naší matematické olympiády. Jeho zástupcem byl *dr. Tomáš Hecht, CSc.*, z MFF UK Bratislava. 30. MMO se bude konat letos ve Spolkové republice Německa.

Karel Horák

Balkaniáda

RNDr. IVO VOLF, ÚVFO Hradec Králové

V mnoha sportovních odvětvích se stalo obvyklým, že soutěžící ve vrcholových soutěžích, světových či evropských, mají už za sebou řadu zkušeností ze závodů s mezinárodní účastí. Trenéři těchto sportovců se snaží, aby jejich svěřenci dostali co nejvíce příležitostí se takových soutěží zúčastnit. Účastníci mezinárodních fyzikálních olympiád jsou ve všech zemích vybíráni na základě výsledků v národní soutěži, většinou s celostátní působností. Zcela výjimečně některý soutěžící svou účast na MFO jednou či dvakrát zopakuje, přičemž své výsledky zlepšuje.

Dát účastníkům fyzikální olympiády příležitost mezinárodního soutěžení umožňuje nová fyzikální soutěž — *Balkaniáda*, kterou v r. 1986 zorganizovalo poprvé Bulharsko. Iniciátorem byl N. Velčev, dlouholetý pedagogický vedoucí bulharského družstva na MFO.

1. Balkaniáda proběhla v Plovdivu od 3. 5. do 10. 5. 1986, a to podle organizačního řádu obdobného MFO. Na soutěž byla pozvána družstva všech balkánských států, zúčastnila se jí pětičlenná družstva z BLR, RSR a SFRJ; kromě toho dali organizátoři možnost zúčastnit se mimo soutěž dalším 10 soutěžícím z BLR, v pořadí nejlepším ze Sofie a z Plovdivu. Účastníkům byly předloženy během dvou půldnů 3 teoretické a 2 experimentální úlohy; každá byla hodnocena 10 body. Nejlepšího výsledku dosáhl Zoltán Gagyi-Palffi z RSR — 47 bodů (na 17. MFO dosáhl 3. ceny), na 2. místě byl Cyprian Necula (třetí na 17. MFO).

2. Balkaniáda proběhla od 10. 5. do 17. 5. 1987 v Bukurešti, zúčastnila se jí pětičlenná družstva z RSR, BLR, SRJF a Kypru. Na tři teoretické úlohy byla vymezena doba 4,5 hodiny, na dvě experimentální úlohy 5 h. Nejlepší účastník Cyprian Necula z RSR dosáhl výsledku 48,5 bodu (příští vítěz 18. MFO v Jeně).

Další 3. Balkaniáda se v roce 1988 neuskutečnila.

V této souvislosti napadne i naše soutěžící, zda by jejich příprava na

mezinárodní fyzikální olympiády nemohla probíhat také s mezinárodní účastí. Druhým důvodem zřízení určitých zonálních soutěží může v budoucnu být i vysoký počet účastníků MFO — již letos bylo pro organizátory náročné zajistit soutěž pro 132 soutěžících. Také výsledky sovětských soutěžících, kteří procházejí řadou kol až k všesvazové olympiádě, ukazují, že vrcholná soutěž v SSSR je vlastně zonálního charakteru (pro 50 soutěžících z 15 svazových republik).

Přeneseme se na pár hodin na Balkaniádu — pokuste se vyřešit úlohy 1 až 3 (z 1. Balkaniády, připravené v BLR) a úlohy 4 až 6 (ze 2. Balkaniády, připravené v RSR).

Úlohy:

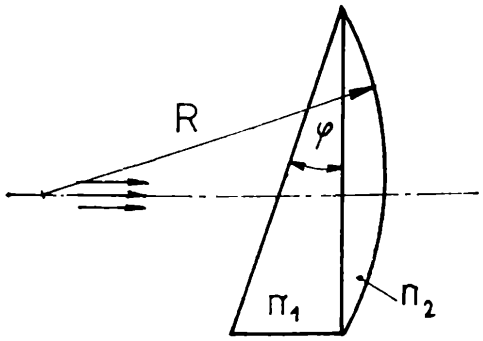
1. Kosmická loď se pohybuje kolem Země po trajektorii tvaru kružnice s periodou $T_0 = 88{,}8$ min. Poté, co byl zapojen manévrovací motor kosmické lodi, přešla loď na jinou trajektorii téhož tvaru, takže se perioda změnila na $T_1 = 89{,}6$ min. O kolik se změnila vzdálenost lodi od povrchu Země? Jak se změnila rychlost pohybu lodi? Gravitační zrychlení na povrchu Země $a_g = 9{,}80\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$ a poloměr Země $R_Z = 6370$ km.

2. Ocelová nádoba byla naplněna směsí vodíku H_2 a kyslíku O_2 při teplotě $T_0 = 293$ K. Nádoba je dostatečně pevná a v důsledku výbuchu způsobeného jiskrou se v ní tlak zvýšil na k-násobek. Při hoření 1 molu vodíku se vyděluje teplo $q = 485\ \mathrm{kJ\,.\,mol^{-1}}$. Při izochorickém ději je molární teplo kyslíku i vodíku $C_V = 5/2\ R$, pro vodní páry $C'_V = 7/2\ R$, kde R je plynová konstanta. Určete, jak závisí zvětšení tlaku plynu na poměru skladby směsi před výbuchem. Určete poměr k, je-li hmotnost vodíku ve směsi 0,5 % hmotnosti kyslíku. Obsah nádoby po reakci považujte za ideální plyn. Teplotní závislost tepelných kapacit na teplotě ani proces disociace neuvažujte.

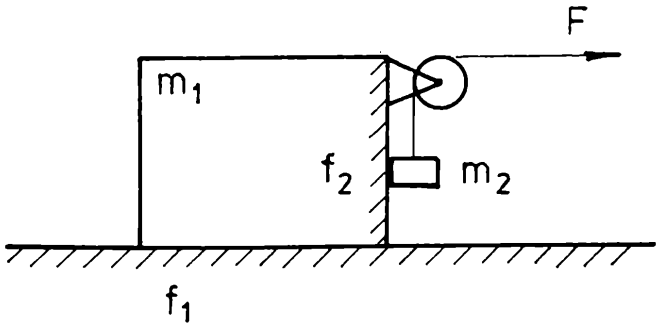
3. Optická soustava se skládá z pravoúhlého hranolu s lámavým úhlem φ a indexem lomu n_1, k němuž je přilepena tenká ploskovypuklá čočka o poloměru křivosti R a indexu lomu n_2, $n_2 > n_1$. Ze strany hranolu dopadá na čočku úzký monochromatický svazek ve směru osy čočky z nekonečně vzdáleného zdroje (obr. 1). Určete polohu, do níž se zdroj zobrazí. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\varphi = 18°$, $R = 10$ cm, $n_1 = 1{,}4$, $n_2 = 1{,}8$. Sledujte alespoň kvalitativně polohu obrazu, bude-li se čočka vzdalovat od hranolu.

4. V soustavě na obr. 2 je dána hmotnost hranolu $m_1 = 2{,}00$ kg, závaží $m_2 = 1{,}00$ kg, součinitelé smykového tření $f_1 = 0{,}20$, $f_2 = 0{,}40$. Kladku považujeme za ideální, u niti neuvažujeme hmotnost ani roztažnost. Při různých hodnotách velikosti síly $\boldsymbol{F}$ zůstává soustava v klidu podle obr. 2. Určete počáteční zrychlení tělesa m_1, tj. $a_1 = f(F)$, a znázorněte graficky. Směr působící síly i rovina podložky jsou vodorovné.

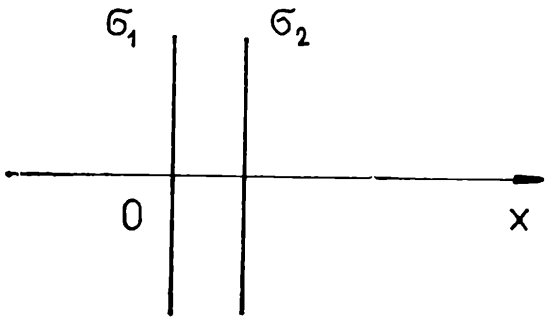
5. a) Určete velikost intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ soustavy dvou stej-



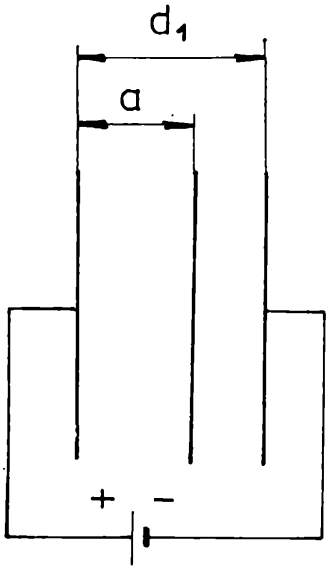
Obr. 1



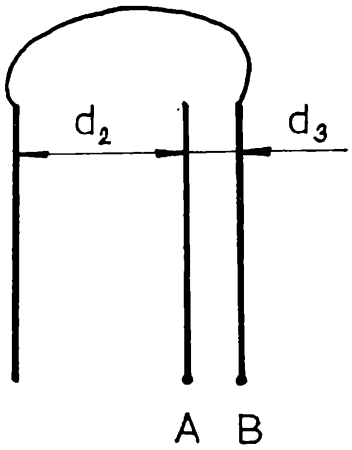
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



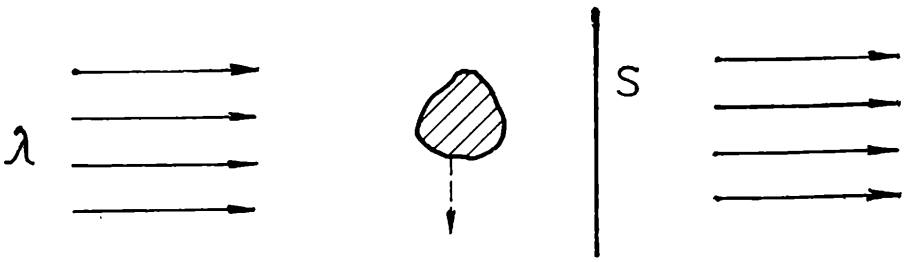
Obr. 5

ných kovových tenkých desek, umístěných ve vzduchu. Desky jsou rovnoměrně nabité s plošnou hustotou náboje $\sigma = Q/S$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, $\sigma_1 > |\sigma_2|$. Určete vektor intenzity $\mathbf{E}$ elektrického pole v následujících případech: uvnitř mezi deskami, mimo desky (obr. 3). Znázorněte graf intenzity elektrického pole $E(x)$; číselně při malých hodnotách $|x|$, kvalitativně pro místa velmi vzdálená od desek.

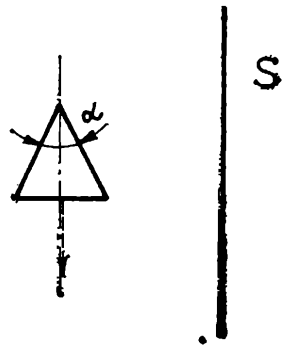
b) Takové dvě desky tvoří kondenzátor, k němuž připojíme zdroj stálého napětí U. Určete toto napětí U, je-li obsah každé d $= 1{,}0 \,.\, 10^{-2}$ cm^2, vzdálenost mezi deskami $d = 1{,}0$ mm, síla, jíž se desky přitahují, $F = 1{,}0 \,.\, 10^{-4}$ N. Stanovte plošnou hustotu náboje na deskách.

c) Když byly desky vzdáleny na $d_1 = 5{,}0$ mm, byl k nim připojen zdroj o napětí $U_1 = 100$ V. Mezi desky byla vložena třetí, zcela stejná deska do vzdálenosti $a = 3{,}0$ mm od první desky (obr. 4). Určete sílu, kterou působí soustava původních desek na tuto třetí desku, je-li na ní rovnoměrně rozložen náboj $Q = 1{,}0 \,.\, 10^{-8}$ C.

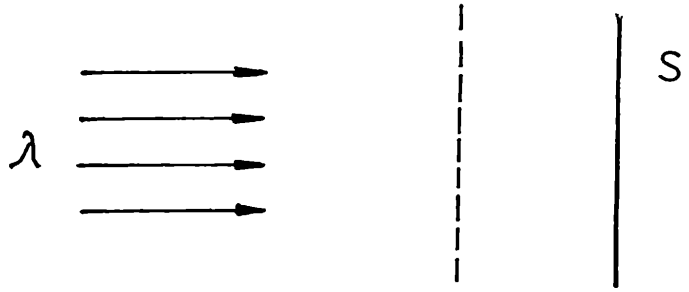
d) Tři desky představují soustavu podle obr. 5. Vzdálenost mezi deskami je $d_2 = 10$ mm, $d_3 = 1{,}0$ mm. Napětí mezi body A, B je $U_2 = -100$ V.



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

Prostor mezi deskami je zaplněn látkou s permitivitou $\varepsilon = 1{,}77 \,.\, 10^{-11}$ $\mathrm{F} \,.\, \mathrm{m}^{-1}$. Určete náboj q vnitřní desky.

6. Koherentní monochromatický svazek světla s vlnovou délkou λ dopadá kolmo na svislé stínítko. Ve vzdálenosti D od stínítka volně padají různé předměty (podle obr. 6, 7, 8). V prvním případě jde o pád neprůhledného předmětu s rozměry mnohem většími, než je vlnová délka λ. Ve druhém případě padá optický hranol; řezem hranolu je rovnoramenný trojúhelník, jehož podstava je kolmá ke stínítku a lámavý úhel je α, index lomu n. Hranol je upevněn v neprůhledném absorbujícím držáku. Ve třetím případě padá nekonečná rovinná ohybová mřížka rovnoběžně se stínítkem, která má N vrypů na 1 mm. Popište jevy, které lze pozorovat na stínítku, a určete, jak závisejí na pohybu padajícího tělesa.

Přejeme vám k tomu hodně odvahy a mnoho úspěchů. Dojdete-li k zajímavému řešení, pošlete je autorovi článku, jehož adresu najdete v letáku fyzikální olympiády.

Literatura

[1] Zlatev, I.: Prva balkanska olimpiada po fizika. Fizika 11 (1986), č. 3, s. 44—46.
[2] Zadači ot prvata balkanska olimpiada po fizika. Fizika 11 (1986), č. 4, s. 38—40.
[3] Maksimov, M.: Vtora balkanska olimpiada po fizika. Fizika 12 (1987), č. 4, s. 39—44.

Z NOVÝCH KNIH

Benesch, H. a kol.:

KĽÚČ K POČÍTAČU — PRAX

Vydala Alfa, Bratislava 1988, preklad z nemčiny, 240 strán, 239 obr., viaz Kčs 16,—

Základné vedomosti o používaní výpočtovej techniky patria už k všeobecnému vzdelaniu. Aby sa každý mohol zoznámiť s princípmi práce pri počítačoch, podnietilo MŠ SSR vydanie trojdielnej série príručiek zo základov výpočtovej techniky.

Prvý zväzok prináša najjednoduchšie poznatky z oblasti technického a programového vybavenia počítačov — opis podstaty práce počítača a jeho zariadení, možnosti použitia a organizačného zabezpečenia pri nasadení počítačov. Čo je obsahom piatich kapitol prvej knižky? Celkový pohľad na počítač s programom, otázky technického vybavenia, údaje v základnej jednotke, programové vybavenie, organizácia práce s počítačom.

Jednotlivé kapitoly sú spracované do krátkych článkov, po ktorých hneď nasledujú kontrólne otázky s odpoveďou na druhej strane listu. Takto koncipovaná publikácia vedie už začiatočníkov k presnejšej práci s pojmami, upevňuje súvislosti medzi nimi, zdôrazňuje podstatné poznatky. Súčasťou výkladu sú obrázky, náčrty a grafické zvýraznenia textu spolu s odkazmi na predchádzajúce články. Treba si tento spôsob príručky skúsiť, privyknúť a potom môžete spoznať jeho cenu.

Knižka môže poslúžiť pri prvom zoznámení sa s problematikou počítačov už na základnej škole i v predmete informatika v 1. roč. stredných škôl. Určite privedie čitateľa k potrebe nielen ďalších dvoch zväzkov: Kľúč k počítaču — Programové vybavenie, Kľúč k počítaču — Technické vybavenie, ale aj k podrobnejšej literatúre z počítačovej oblasti. Otázky programovania a použitia počítačov sú stále aktuálnejšie.

Dušan Jedinák

Berger, I.—Čihák, P.—Kadlic, A.:

MLÁDEŽ, ELEKTRONIKA, MIKROPOČÍTAČE

Vydala Smena, Bratislava 1988, edícia Zväzácka knižnica, 168 strán, 28 obr., viaz. Kčs 15,—

Nadpis knižky trochu zavádza, nevystihuje obsah. Nebude reč o všeobecnej nutnosti mládeže používať mikropočítače v rámci elektronizácie. Obsah publikácie je dosť vecný: základné princípy činnosti a stavby mikropočítačov, inštrukčný súbor u nás dosiaľ najrozšírenejšieho mikroprocesora 8080, ukážky tvorenia krátkych strojových programov a otázky prepojovania mikropočítačov s okolím. Konkrétnejšie: Princípy počítačového spracovania informácií, súčinnosť častí mikropočítača a mikroprocesora, architektúra mik-

roprocesora typu 8080, jeho jazyk symbolických inštrukcií, jednoduché strojové programy, jednočipové mikropočítače, využitie mikropočítačových systémov. V závere je prehľad významov niektorých skratiek a termínov, tabuľka kódov inštrukcií mikroprocesora 8080 a tabuľka medzinárodného znakového kódu ISO-7.

Knižka určite dobre poslúži v predmete počítačové systémy v bloku programovania na gymnáziách. Patrí všetkým záujemcom pre prvé zoznámenie sa s mikropočítačovou technikou.

Dušan Jedinák

Kvasnica, J.:

PRIEKOPNÍCI MODERNEJ FYZIKY

Vydala Smena, vydavateľstvo SÚV SZM, v Bratislave roku 1987, v edicii Sputnik, 8 strán čiernobielej fotografickej prílohy, 168 strán, viazané Kčs 25,—

Zaujímajú vás osudy významných fyzikov? Chcete poznať niektoré ich názory z prvej ruky? Ste zvedaví na niektoré postrehy z osobného života a vedeckej práce? Knižka, ktorá prináša zaujímavé údaje o slávnych fyzikoch a výsledkoch ich práce, spracovaná pútavou formou a jasným štýlom, je pripravená aj pre vás. Vydaných bolo iba 3000 kusov.

V knižke sa dozviete o tvorcoch klasickej fyziky, zakladateľoch teórie relativity, budovateľoch a obhajcoch kvantovej teórie. Zoznámite sa s tými, ktorí rozbíjali atóm, odhalili rádioaktivitu, ovládli jadrovú energiu. Spoznáte princípy supravodivosti, suprateku-tosti, kvantových generátorov a zosilňovačov. Vždy za novými poznatkami uvidíte ľudí — fyzikov, ktorí hľadali podstatu javov a chceli pochopiť zákonitosti, ktoré pred nimi mnohí nevedeli vysvetliť. Ľudia a ich myšlienky, tvorivý nepokoj a sila ducha, experimentálna šikovnosť a zaujatosť pre princípy. Údaje o ľudských osudoch, fyzikálnych výsledkoch a nových teóriách. To všetko ponúka knižka „Priekopníci modernej fyziky" z pera vysokoškolského profesora.

Vymenujem aspoň niekoľko mien význačných fyzikov, o ktorých sa môžete v knižke dozvedieť: Max Planck, Pierre Curie, Mária Sklodowská, Ernest Rutheford, Niels Bohr, Albert Einstein, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Wolfgang Pauli, Max Born, Paul Dirac, Otto Hann, Enrico Fermi, Hideki Yukawa, Piotr Kapica, Lev Landau, John Bardeen, Charles Townes, Nikolaj Basov a ďalší. Namiesto výkladu o ich zásluhách radšej uvediem Einsteinovu myšlienku, použitú pri hodnotení diela M. Plancka: „Človek, ktorému bolo súdené obdarovať svet veľkou, konštrukčnou myšlienkou, nie je odkázaný na pochvaly potomkov. Jeho práca mu dala oveľa väčšie blaho."

Nebudem vás už presvedčovať o tom, že dobrá kniha patrí vždy do vašej knižnice. Zapamätajte si aspoň slová G. W. Leibniza: „Kto sa obmedzuje len na súčasné bez vedomostí o minulom, ten nikdy súvislosti nepochopí."

Dušan Jedinák

Kalendár M-F: február 1989

1. 2. 1969 zomrel *Alfréd Rényi*, maďarský matematik. Sformoval maďarskú školu teórie pravdepodobnosti
2. 2. 1704 zomrel *Guillaume Francois Antoine l'Hospital*, francúzsky matematik. Autor prvej učebnice diferenciálneho počtu (1696).
3. 2. 1774 sa v Wolfenbütteli narodil *Karl Brandan Mollweide*, nemecký matematik a astronóm. Prispel k rozvoju rovinnej a sférickej trigonometrie.
4. 2. 1974 zomrel *Šatendranáth Bose*, indický fyzik. Vypracoval kvantovú štatistiku pre fotóny, prispel k rozvoju fyziky vysokých energií, fyziky nízkych teplôt a fyzikálnej optiky.
6. 2. 1804 v Northumberlande zomrel *Joseph Priestley*, anglický chemik, fyzik a filozof. Študoval plyny, ako prvý pripravil kyslík, dusík, chlorovodík, oxid dusný.
8. 2. 1834 sa v Toboľsku narodil *Dmitrij Ivanovič Mendelejev*, ruský vedec. Bol úspešný v oblasti chémie, fyziky, metrológie, meteorológie. Objavil periodický zákon prvkov (1869).
9. 2. 1894 sa v Rostove na Done narodil *Jakov Iljič Frenkel*, sovietsky teoretický fyzik. Úspešne pracoval v oblasti fyziky elementárnych častíc, teórie feromagnetizmu a využitia kvantovej teórie poľa. Patrí k zakladateľom sovietskej teoretickej fyzikálnej školy.
10. 2. 1839 sa na Kamčatke narodil *Alexander Nikolajevič Strannoljubskij*, ruský matematik-pedagóg. Pripravil prvú metodiku algebry v Rusku, vyučoval S. V. Kovalevskú a A. N. Krylova.
11. 2. 1839 sa v New Havene narodil *Josiah Willard Gibbs*, americký fyzik a matematik. Prepísal do vektorovej formy Maxwellove rovnice, položil základy štatistickej mechaniky. Ovplyvnil rozvoj termodynamiky i fyzikálnej optiky.
11. 2. 1909 sa narodil *Claude Chevalley*, francúzsky matematik. Základné práce vytvoril v teórii grúp a teórii čísel. Patril ku skupine bourbakistov.
11. 2. 1974 zomrel *Vladimír Ivanovič Smirnov*, sovietsky matematik. Zaoberal sa teóriou funkcií komplexnej premennej a teóriou šírenia vĺn v pružných prostrediach.
14. 2. 1869 sa v Glencorse narodil *Charles Thomson Rees Wilson*, škótsky fyzik. Skonštruoval hmlovú komoru na registráciu a pozorovanie elementárnych častíc. Nobelovu cenu za fyziku dostal roku 1927.
15. 2. 1564 sa v Pise narodil *Galileo Galilei*, taliansky fyzik. Položil základy matematického spracovania fyzikálnej dynamiky, harmonicky spájal experiment a teóriu. Obhajoval heliocentrický systém, skonštruoval ďalekohľad.

15. 2. 1959 v Altone zomrel *Owen Wiliams Richardson, anglický fyzik.* Študoval fotoelektrický jav, objavil zákon o emisii elektrónov z rozžeravených kovov.

17. 2. 1864 sa v Tajove pri Banskej Bystrici narodil *Jozef Murgaš,* slovenský vynálezca. Získal v USA niekoľko patentov z oblasti bezdrôtovej telegrafie.

18. 2. 1899 v Oslo zomrel *Marius Sophus Lie,* nórsky matematik. Študoval spojité grupy transformácií a ich invarianty.

19. 2. 1859 sa na panstve Wijk pri Uppsale narodil *Svante August Arrhenius,* švédsky fyzik a chemik. Zaoberal sa problémami fyzikálnej chémie, vytvoril teóriu elektrolytickej disociácie.

20. 2. 1844 sa vo Viedni narodil *Ludwig Eduard Boltzmann,* rakúsky fyzik. Objavil zákon vyžarovania čierneho telesa, prispel k rozvoju kinetickej teórie plynov a základom štatistickej fyziky.

22. 2. 1824 sa narodil *Pierre Jules César Janssen,* francúzsky astronóm. Bol priekopníkom využívania fotografie a spektroskopie v astronómii. Vynašiel spektrohelioskop.

22. 2. 1804 sa narodil *Emilij Christianovič Lenz,* ruský fyzik nemeckého pôvodu. Zaoberal se elektrinou a elektromagnetizmom. Stanovil pravidlo určujúce smer elektrického prúdu indukovaného zmenou magnetického poľa.

25. 2. 1909 sa v Moskve narodil *Lev Andrejevič Arcimovič,* sovietsky fyzik. Pracoval v oblasti atómovej a jadrovej fyziky. Skúmal podmienky termojadrovej syntézy.

26. 2. 1799 sa v Paríži narodil *Benoit Pierre Emile Clapeyron,* francúzsky fyzik a inžinier. Rozvíjal teóriu tepelného stroja, prispel k rozvoju termodynamiky.

27. 2. 1904 sa v Petrohrade narodil *Julij Borisovič Chariton,* sovietsky fyzik. Spolu s J. B. Zeľdovičom vypracoval teóriu reťazovej reakcie pri rozpade atomu uranu.

d

REDAKČNÍ KRUH

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP, Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava, dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha,; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Jak uspořádat naprosto strašlivou přednášku

Jeden fyzikální časopis přinesl návod, jak uspořádat naprosto strašlivou odbornou přednášku na fyzikální konferenci. Přednášku je nejlépe zařadit na odpolední zasedání v pátek v 17.30 hodin. Během přednášky se doporučuje promítat co nejvíce diapozitivů nebo průsvitných fólií tak, aby se střídaly po 5 až 10 sekundách. Pokud autor nemá dostatek vlastních diapozitivů, může si půjčit od kolegy, nebo je může promítat střídavě dopředu a pozpátku. Na každém diapozitivu musí být co nejvíce křivek a bodů; jsou-li promítány rovnice, musí mít každá nejméně 15 členů a 20 proměnných. Písmenka a číslice je třeba volit co nejmenší. Doporučuje se během přednášky promítnout alespoň 2 až 3 diapozitivy vzhůru nohama — uvolňuje to napětí v sále.

Pokud jde o vlastní přednášku, je důležité se na ni vůbec nepřipravovat a nezkoušet si ji předem. Doporučuje se také nedělat si písemnou přípravu, protože by se ještě mohla dostat někomu do rukou. Je konec konců záležitostí posluchačů, aby si sami urovnali chod autorových myšlenek. Je dobré každý promítaný obrázek sáhodlouze komentovat a soustředit se hlavně na detaily, které nemají s hlavním tématem přednášky nic společného. Pokud někdo z posluchačů ještě neusnul, je třeba promítnout obrázek znovu a zopakovat komentář.

Při přednášení stojíme vždy zásadně zády k posluchačům, díváme se na projekční plátno a mluvíme co nejtišeji. Způsob přednesu můžeme volit dvojí. Buď hovoříme velmi rychle, zejména je-li řeč o podstatných otázkách, nebo naopak mluvíme rozvlekle pomalu, protahujeme slova, necháváme některé věty nedokončeny a časové mezery vyplňujeme sděleními jako „ehm“ nebo „eee“ a podobně. Máme-li k dispozici světelné ukazovátko, opisujeme jím v pravidelném rytmu malé kroužky na projekčním plátně. Je zjištěno, že u 50 až 60 procent posluchačů v prvních třech řadách se v takovém případě dostavuje žaludeční nevolnost.

Důležité je využít ke své přednášce nejen všechen vyhrazený čas, ale i čas k diskusi a také alespoň část času určeného pro dalšího přednášejícího. Vyhneme se tím zbytečným dotazům z publika. Kromě toho ti, kdo budou přednášet po nás, stejně nemají nic zajímavého a důležitého, co by mohli posluchačům sdělit.

-ll

47 233

Povedali, napísali...

Nikdy nemáme definitívne pravdu. Môžeme si byť istí iba tým, že sa mýlime.

Richard Phillips Feynman (1918—1988)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.
Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(7)

ROČNÍK 67, 1988/89
BŘEZEN
CENA 2 Kčs

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

VEDOUCÍ REDAKTOR:
Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:
Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:
Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; † doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Rudolf Kryl: Co je informatika a co by o ní měl vědět středoškolák . 265

Zdeněk Papež: Vzdálenosti li ích útvarů v prostoru 269

Josef Kotyk: Sférometr 275

René Hudec: Nový pohled na gravitační čočky 277

Dušan Jedinák: Zvedený matematikou 281

Z matematiky a fyziky ZŠ 285

Přemýšlíme, řešíme 288

Naše soutěž 293

Olympiády a SOČ 295

Emil Calda: Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v roce 1988 303

Z nových knih 306

dj: Kalendár M–F 307

Humory matematicko-fyzikální 3. str. obálky

Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (133–136) příloha

Co je informatika a co by o ní měl vědět středoškolák

RNDr. RUDOLF KRYL, MFF UK Praha

Když jsem se dověděl o rozhodnutí redakce Rozhledů věnovat se v časopise systematičtěji informatice než dosud, velmi mne to potěšilo. Když mě však jeden ze členů redakční rady požádal, abych pro Rozhledy připravil úvodní článek o informatice, přivedlo mě to z míry více, než jsem předpokládal. Ne, že by nebylo o čem psát, naopak. Věnovat se však hned v „úvodním článku" jen jedinému speciálnímu problému (který by v něm bylo možno postihnout beze zbytku) se nehodí a předstírat, že v něm lze, byť jen z části, postihnout obsah, poslání, současný stav nebo perspektivy informatiky by bylo nezodpovědné. Tím spíše, že takových nesolidních článků můžete v různých časopisech najít více než dost.

Po delším váhání jsem zvolil formu subjektivního zamyšlení (co myslíte, lze se zamyslet objektivně?) nad otázkou, kterou najdete v názvu článku. Protože čtenáři Rozhledů (i já) mají rádi matematiku, zamyslíme se i nad vztahem matematiky a informatiky.

Přiznávám-li se k subjektivitě, musím ještě odpovědět na jistě oprávněnou, i když v minulosti velmi často zneužívanou otázku „Z jakých pozic vlastně mluvíte?"

Učím již deset let programování v prvním ročníku na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Mám tedy nezprostředkované znalosti o vědomostech, které studenti na střední škole získávají. Navíc mám jisté zkušenosti s vedením (kolektivů) studentů při práci na softwérových projektech. Někteří ze studentů středních škol mají možnost seznámit se ve škole s jedním z našich produktů — operačním systémem AMOS pro počítač IQ 151 (některé jeho součásti — překladač Pascalu a úprava Basicu pro práci se soubory pracují na tomto počítači i pod sítí FELNET).

Otázka „Co je to informatika?" položená dnešnímu středoškoláku vypadá na první pohled jako špatný vtip. Vždyť přece již třetím rokem mají všichni studenti gymnázií předmět tohoto jména!

Přesto bychom na ni dostali zcela jistě velmi rozpačité a nejednoznačné odpovědi. Není divu, vždyť ani ti, kdo jsou považováni za odborníky v této oblasti se většinou neshodnou na jediné stručné a výstižné definici tohoto oboru a dokonce ani na jeho názvu.

Jde totiž o velmi mladé, vlastně teprve se formující vědní odvětví, jehož vznik si vynutil prudký růst významu zpracování informací a využívání výpočetní techniky ve společnosti. Ve velké části Evropy (i u nás) se mu říká informatika, v anglicky hovořících zemích je obvyklejší název computer science (česky, chcete-li, počítačová věda). Pro každou vědu — a pro mladou tím spíše — je totiž velmi nebezpečné exkomunikovat některou oblast jen pro to, že nevyhovuje požadavkům úzkého vymezení jejího předmětu zkoumání. Proto informatika sdružuje pod svými prapory široké spektrum oborů patřících dříve do zcela různých vědních odvětví. Od zkoumání konstrukce počítačů a jejich architektury přes teorii a praktické použití informačních systémů v různých oblastech (ekonomika, lékařství . . .), programování a teorii programovacích jazyků až k matematicky přesnému zkoumání vlastností algoritmů pro řešení konkrétních úloh i algoritmů obecně.

Jak se pro informatiku připravit?

Informatika má řadu společných rysů s matematikou. Bez dobrého pochopení matematiky a ovládnutí „matematického způsobu myšlení" nelze dosáhnout úspěchů ani v informatice. Proto je dobrá nepovrchní znalost matematiky tím nejlepším základem, který si ten, kdo chce pracovat v informatice, může ze střední školy odnést. Především jde o schopnost abstraktního a přesného myšlení. Zatím využívá informatika více matematického způsobu myšlení než konkrétních matematických výsledků. Teprve budoucnost ukáže, zda je to náhoda, nebo to má hlubší příčiny.

Další oblastí, jejíž znalosti se vám mohou hodit, jsou základy elektrotechniky, které probíráte ve fyzice. Budete-li schopni vyznat se alespoň v jednoduchých elektrických schématech, ušetříte si mnoho starostí a zbavíte se závislosti na jiných. Dosavadní vývoj ve využívání výpočetní techniky je dialektickou jednotou dvou protichůdných tendencí. Na jedné straně dochází s pokrokem v programování k osvobození uživatelů i programátorů od nutnosti znát detaily o počítači, se kterým pracují, na straně druhé proniká „programování" i do oblastí, které dosud s počítači přímo nesouvisely. „Programem" se řídí dnes nejen obráběcí stroje, válcovací stolice nebo kravíny, ale i předměty denního použití v domácnosti: rádia, televize, pračky, hudební nástroje či auta. Tím se stává i „pro obyčejného smrtelníka" aktuální potřeba řídit tato zařízení pomocí počítače. Abyste v budoucnosti rozuměli dokumentaci, jak připojit taková zařízení ke (svému) počítači, je dobré již dnes získat alespoň minimum znalostí o hardwéru, jak se technickému řešení počítačů říká.

Z vlastního obsahu předmětu informatika je patrně nejdůležitější pochopit podstatu pojmu algoritmus a získat vlastní zkušenosti s vytvářením algoritmů pro řešení konkrétních úloh. Je dobré umět dovést řešení problému až do stadia programu pro počítač a (máme-li tu možnost)

alespoň několik z nich na počítači „odladit" Někteří autoři dokonce mluví o programování jako o „druhé gramotnosti". I když o správnosti tohoto názoru lze vést dlouhé spory, nelze pochybovat o tom, že programování má být jednou z nejdůležitějších částí výuky informatiky. Dokud totiž nejste schopni dovést svůj algoritmus až do fáze, kdy pracuje, resp. kdy by mohl pracovat na počítači, nemůžete si být jisti, že vám neuniká podstatná část problému.

Přitom velmi záleží na výběru problému, který řešíte. Měl by to být problém, který vás zajímá, a takový, pro nějž je použití počítače přirozené. Použití počítače se totiž nesmí stát samo sobě účelem. Nepochopení tohoto prostého faktu stálo již naši společnost velmi mnoho prostředků i sil. Chcete-li se skutečně naučit programovat, neměli byste se spokojit jen s řešením lehkých úloh. Zkušenost ukazuje, že řešení mnoha jednoduchých úloh má menší efekt než vyřešení několika úloh obtížných (nezáleží přitom tolik na tom, jak jsou obtížné „absolutně"). Jinými slovy, programovat je třeba se učit „na hranici vlastních možností". Každá úloha by měla být přitom vybírána tak, aby byla přirozeným způsobem řešitelná na počítači a v programovacím jazyku, který máme k dispozici. Jinak si kazíme smysl pro přirozené programátorské myšlení.

Jedním z podstatných rozdílů informatiky od matematiky je její velká závislost na vývoji technologie. Zatímco objevení se nové generace počítačů (menších, lacinějších, rychlejších a majících větší paměť) znamená pro matematiku jen kvantitativní změnu, může takový vývoj od základu změnit velkou část informatiky.

V této souvislosti je třeba mít na zřeteli jedno velké nebezpečí. Není jistě ani pro vás žádným tajemstvím, že nejen naše země, ale i ostatní země RVHP zaostávají v současné době za světovou špičkou jak ve výrobě, tak především v kvalitě a kvantitě nasazení počítačů ve společnosti (i když je těžké toto zaostávání změřit, odhaduje se na 8 až 12 let).

Tento fakt, i když je nepříjemný, je třeba vzít na vědomí. Jednou z (mnoha) nutných podmínek k zastavení rychlosti tohoto zaostávání v budoucnu je již dnes volba správné koncepce výuky informatiky. Tato volba je samozřejmě úkolem nás starších, v menší míře se to však týká i každého z vás.

Je třeba nepodlehnout ani jednomu ze dvou škodlivých extrémních stanovisek.

Je velmi nebezpečné přeceňovat význam detailních informací technického rázu o (dnešním) způsobu ovládání počítače a programování. Jinak bychom si totiž mohli přeplnit hlavy spoustou nepotřebných detailů, které při přechodu na jiný počítač budou naprosto k ničemu. Jediné, co dnes jistě víme o práci s počítači v budoucnosti, je, že bude zcela jiná než dnes. Proto je potřeba ovládnout především její principy.

Zároveň není pochopitelně dobré odkládat konkrétní práci s počítačem až na dobu, kdy budeme mít k dispozici počítač „světového" standardu.

Zde mají velkou odpovědnost výrobci systémového programového vybavení našich počítačů. Dobrým programovým vybavením lze totiž podstatně ovlivnit kulturu uživatelské práce s počítačem.

Na závěr bych chtěl uklidnit ty z vás, kteří nemají dosud možnost přímé práce s počítačem a mají proto obavy, že se nebudou moci vyrovnat kamarádům, kteří mají osobní počítač doma. Zkušenosti z vysoké školy jasně ukazují, že daleko víc záleží na schopnosti správně uvažovat a na chuti do práce než na konkrétních zkušenostech. Ty se dají poměrně snadno dohnat.

Protože naše povídání bylo přece jen příliš teoretické, chci vám na závěr předložit jednu pěknou úlohu na algoritmizaci. Pokuste se o vlastní řešení, dříve než si přečtete naše. Je to tato úloha:

Byl jednou jeden starý a moudrý král, který měl jediné dítě, krásnou a spanilou princeznu. Když se králova léta naplnila a jeho život visel již na vlásku, rozhodl se, že musí ještě před smrtí najít pro svou dceru vhodného manžela a pro své království budoucího krále. Proto vymyslel, jak již to v pohádkách bývá, pro nápadníky úkol:

Nápadníka přivedou se zavázanýma očima ke čtvercovému otáčivému stolu, v jehož každém rohu bude stát jeden pohár. Každý pohár může být v poloze dnem dolů nebo v poloze opačné, dnem vzhůru. Úkolem nápadníka bude dosáhnout situace, ve které budou všechny čtyři poháry na stole stát ve stejné poloze. Jakmile taková situace nastane, nápadník úkol splnil. Princezna mu sejme šátek z očí a budou se slavit zásnuby.

Nápadník má k dispozici pět pokusů. V každém z nich vezme do ruky dva z pohárů na stole a může, chce-li, změnit jejich polohu (jednoho, obou nebo žádného). Poté král stolem zatočí a nápadník má k dispozici další pokus. Pokud se nápadníkovi nepodaří splnit úkol na pět pokusů, neuspěl, a úkol bude plnit další nápadník.

Když král seznámil princeznu s procedurou výběru ženicha, velmi posmutněla. Měla totiž ženicha, jak již to nejen v pohádkách bývá, sama vybraného. Třebaže jí otec dovolil, aby určila pořadí, ve kterém budou nápadníci úkol plnit, a tak ovlivnila jejich šance na úspěch, těžce nesla, že otec svěřuje její štěstí náhodě.

Dovedli byste princezninu milému, který bude úkol plnit jako první, poradit, jak má postupovat, aby měl jistotu, že získá ruku své vyvolené (a království k tomu)? Může vůbec takový postup zaručující úspěch existovat?

Návod:

Uvědomte si, že nápadník má při plnění úkolu zavázány oči, takže nemůže vidět na stůl. Proto také neví, jak král stolem po jeho minulém pokusu otočil. Může se vlastně v každém pokusu rozhodovat jen mezi dvěma možnostmi: vzít do ruky poháry na úhlopříčce (úhlopříčky jsou dvě) nebo vzít do ní poháry po straně stolu (strany jsou čtyři).

Řešení:

Princeznin chlapec byl po chvíli přemýšlení na vrcholu štěstí. Věděl totiž, že princeznu při zítřejších zásnubách získá právě on. Seznámíme vás s jeho plánem.

V poznámce po každém pokusu uvádíme kurzivou podmínku, která je splněna v případě, že do té doby nikdy na stole nebyly všechny čtyři poháry ve stejné poloze (tj. že nápadník svůj úkol ještě nesplnil).

1. Vezmu poháry po jedné straně stolu a postavím je oba dva dnem dolů.
2. Vezmu poháry na úhlopříčce a postavím je oba dva dnem dolů.
   Na stole jsou jistě tři poháry dnem dolů a jeden dnem vzhůru.
3. Vezmu poháry na úhlopříčce.
   Je-li jeden z nich dnem vzhůru, obrátím ho (pak jsem již jistě úkol splnil). Jsou-li oba poháry dnem dolů, obrátím jeden z nich.
   Na jedné straně stolu jsou oba poháry dnem vzhůru a na druhé dnem dolů.
4. Vezmu poháry po jedné straně stolu. Jsou-li oba ve stejné poloze, pak jejich polohu změním (a jistě jsem vyhrál). Jsou-li v různé poloze, změním polohu obou.
   Na jedné z úhlopříček jsou oba poháry dnem vzhůru, na druhém dnem dolů.
5. Vezmu poháry na úhlopříčce (oba jsou jistě ve stejné poloze) a změním jejich polohu. Tím jsem vyhrál.

MATEMATIKA

Vzdálenosti lineárních útvarů v prostoru

RNDr. ZDENĚK PAPEŽ, gymnázium Karlovy Vary

Mezi obvyklé úlohy analytické geometrie patří výpočty vzdáleností lineárních útvarů v prostoru. Dosud užívaný středoškolský matematický aparát umožňuje většinu z nich nejen řešit, ale i užít různých způsobů řešení (viz [1]). Problémy však nastanou, požadujeme-li jejich algoritmizaci.

Čtenář je v rámci nového pojetí výuky matematiky obeznámen s pojmy skalární, vektorový a smíšený součin vektorů. Dovede těchto operací s vektory užít při výpočtu obsahu rovnoběžníku a objemu rovnoběžnostěnu.

Cílem tohoto příspěvku je ukázat čtenáři, že tyto jeho znalosti plně postačují k nalezení algoritmizovatelného řešení všech úloh o vzdálenosti lineárních útvarů v prostoru.

Osnovu celého řešení tvoří odvození takových vztahů pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky a vzdálenosti bodu od roviny, jejichž užitím lze řešit všechny ostatní uvažované úlohy.

Protože však potřebné znalosti z vektorové algebry získalo prozatím malé procento středoškoláků, uvedeme řešení jednotlivých úloh malou rekapitulací:

Nechť jsou dány vektory $\boldsymbol{u}(u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\boldsymbol{w}(w_1; w_2; w_3)$. Je-li α velikost úhlu vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$; S obsah rovnoběžníku se stranami $|\boldsymbol{u}|$, $|\boldsymbol{v}|$ a V objem rovnoběžnostěnu s hranami $|\boldsymbol{u}|$, $|\boldsymbol{v}|$, $|\boldsymbol{w}|$, pak platí

$$\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\ \ |\boldsymbol{v}|\ \cos\alpha = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\,,$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2v_3 - u_3v_2\,;\ u_3v_1 - u_1v_3\,;\ u_1v_2 - u_2v_1)\,,$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}\,,\ \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}\,,$$

$$S = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|\ \ |\boldsymbol{v}|\,.\,\sin\alpha\,,$$

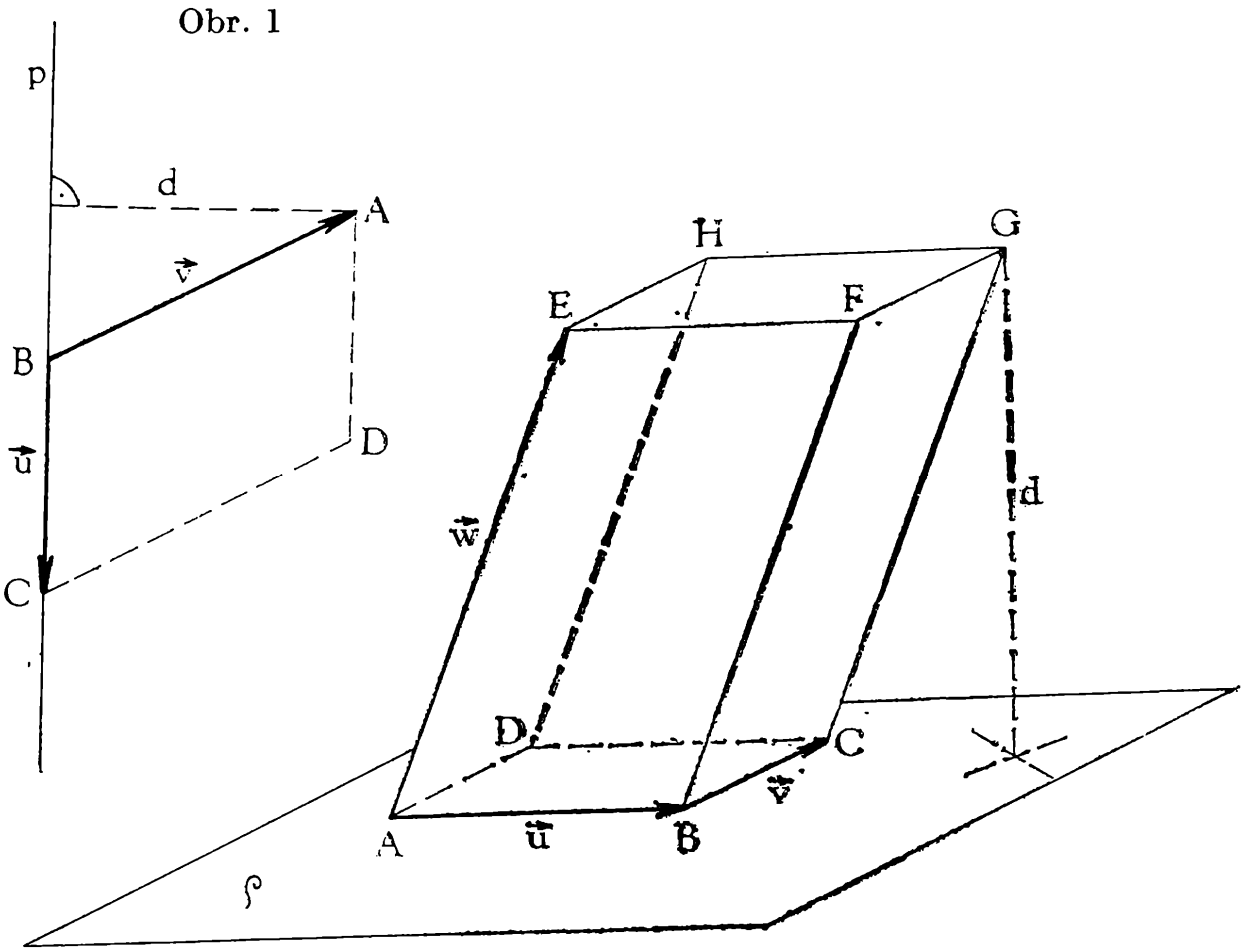
$$V = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\,.\,\boldsymbol{w}|$$

1. Vzdálenost bodu od přímky

Úloha: Vypočtěte vzdálenost bodu $A[6; -6; 5]$ od přímky $p : x = 6 + 2t;\ y = 2t;\ z = 2 + t;\ t \in \mathbf{R}$.

Řešení: (viz obr. 1)

Obr. 1



Obr. 2

Směrovým vektorem přímky p je vektor $\boldsymbol{u}$ (2; 2; 1). Pro $t = 0$ je $x = 6$, $y = 0$, $z = 2$, proto je $B[6; 0; 2] \in p$. Vektor $\boldsymbol{v}(0; -6; 3)$ je definován vztahem $\boldsymbol{v} = A - B$. Umístíme-li vektor $\boldsymbol{u}$ do bodu B, pak jistě existuje bod $C \in p$ tak, že je $\boldsymbol{u} = C - B$. Neleží-li bod A na přímce p, můžeme úsečky AB a BC považovat za strany rovnoběžníku $ABCD$ ($\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = D - B$) s obsahem $S = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$. Týž obsah vyjadřuje součin $|BC| \,.\, d$, kde je $|BC| = |\boldsymbol{u}|$, $d = v(A; p)$. Potom platí $|\boldsymbol{u}| \,.\, v(A; p) = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$, neboli

$$v(A; p) = \frac{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|} \,. \tag{1}$$

Po dosazení souřadnic vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ postupně získáme:
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (12; -6; -12)$; $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = 18$, $|\boldsymbol{u}| = 3$, $v(A; p) = 6$ (viz [1]).
Uvědomme si ještě, že vztah (1) je platný i v případě, že bod A leží na přímce p, neboť tehdy je $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = 0$.

Cvičení: Vypočtěte vzdálenost bodu $A[1; 1; 1]$ od přímky BC, je-li $B[-2; 0; 2]$, $C[0; 0; 0]$. $(\sqrt{3})$

2. Vzdálenost dvou rovnoběžek

Zvolíme-li na jedné ze dvou rovnoběžek p, q libovolný bod A, je úloha převedena na výpočet vzdálenosti bodu od přímky. (I tehdy, je-li $p = q$.)

Cvičení: Vypočtěte vzdálenost přímek:
p: $x = 2 + t$; $y = 1 - t$; $z = 2t$; $t \in \mathbf{R}$,
q: $x = 3 + s$; $y = -s$; $z = 1 + 2s$; $s \in \mathbf{R}$. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

3. Vzdálenost bodu od roviny

Úloha: Vypočtěte vzdálenost bodu $E[1; 1; 0]$ od roviny $\varrho = \leftrightarrow ABC$, je-li $A[0; 0; 1]$, $B[-1; 0; 0]$, $C[1; -1; 0]$.

První způsob řešení:

Je třeba získat rovnici roviny ϱ. Užitím vektorů $\boldsymbol{u} = B - A$ a $\boldsymbol{v} = C - B$, tedy vektorů $\boldsymbol{u}(-1; 0; -1)$ a $\boldsymbol{v}(2; -1; 0)$, nalezneme normálový vektor $\boldsymbol{n}$ roviny ϱ dle vztahu $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, konkrétně $\boldsymbol{n}(-1; -2; 1)$. Uvážíme-li, že je $A \in \varrho$, je rovina ϱ dána rovnicí $x + 2y - z + 1 = 0$. Užitím vztahu

$$v(E; \varrho) = \frac{|ae_1 + be_2 + ce_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

při značení $\varrho : ax + by + cz + d = 0$, $E[e_1; e_2; e_3]$, získáme výslednou hodnotu $v(E; \varrho) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Druhý způsob řešení: (viz obr. 2)

Užijeme vektorů $\boldsymbol{u} = B - A$ a $\boldsymbol{v} = C - B$ z předešlého řešení. Navíc definujme vektor $\boldsymbol{w} = E - A$, $\boldsymbol{w} = (1; 1; -1)$. Je-li rovina ϱ jednoznačně zadána, jsou vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ lineárně nezávislé. Úsečky AB a BC pak lze považovat za strany rovnoběžníku $ABCD$ ($\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = D - B$), ležícího v rovině ϱ. Neleží-li bod E v rovině ϱ, lze jím vést rovinu EFG rovnoběžnou s rovinou ϱ tak, aby útvar $ABCDEFGH$ byl rovnoběžnostěn. Pro objem tohoto rovnoběžnostěnu užijeme vztah $V = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \,.\, \boldsymbol{w}|$. Uvážíme-li, že $ABCD$ je rovnoběžník s obsahem $S = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ a hledaná vzdálenost $d = v(E; \varrho)$ je v tělese příslušnou výškou, získáme rovnost

$$V = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{w}| = S \,.\, d = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \quad v(E; \varrho)\,,$$

odkud ihned plyne

$$v(E; \varrho) = \frac{|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{w}|}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}\,. \tag{2}$$

Pro konkrétní řešení naší úlohy vypočteme: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}(-1; -2; 1)$,

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \sqrt{6}\,,\ |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{w}| = 4, v(E; \varrho) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Poznamenejme, že v případě, kdy bod E leží v rovině ϱ, jsou vektory $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ kolmé, $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{w} = 0$ a vztah (2) zůstává v platnosti. Je-li rovina ϱ zadána přímo obecnou rovnicí $ax + by + cz + d = 0$, položíme $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}(a; b; c)$ a zvolíme bod $A \in \varrho$ pro výpočet vektoru $\boldsymbol{w} = E - A$.

Cvičení: Vypočtěte vzdálenost bodu $E[-2; 0; 1]$ od roviny $\alpha : 2x - y + 3z - 1 = 0$ $\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right)$

4. Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin, resp. přímky a s ní rovnoběžné roviny

Zvolíme-li libovolný bod v jedné z rovin, resp. na přímce, řešíme pak úlohu vzdálenosti bodu od roviny. (I tehdy, je-li tato vzdálenost rovna nule.)

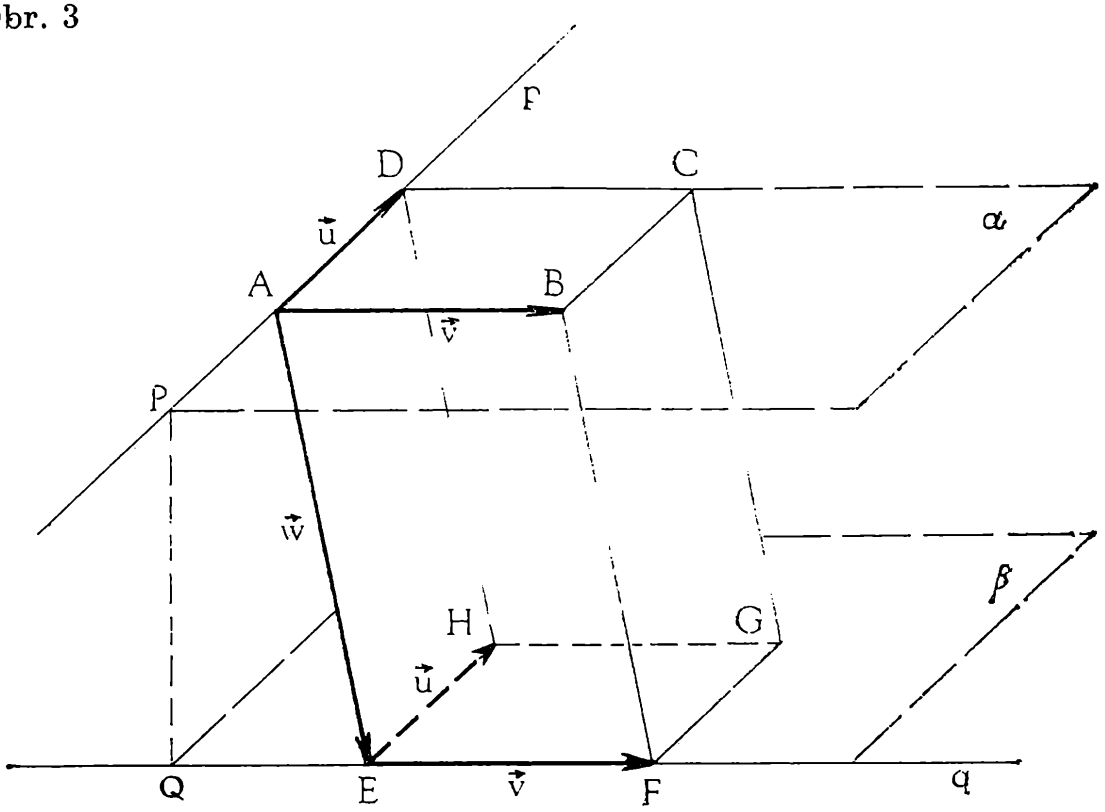
Cvičení: Stanovte vzdálenost rovin $\alpha : x + y - 2z + 1 = 0$, $\beta : 2x + 2y - 4z - 2 = 0$. $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

5. Vzdálenost dvou mimoběžek

Vzdáleností dvou mimoběžných přímek rozumíme délku jejich nejkratší příčky, kolmé k oběma přímkám. Analytické řešení této úlohy se na střední škole neprovádí. Čtenář však sezná jeho jednoduchost a posléze analogičnost s úlohami již vyřešenými.

Úloha: Vypočtěte vzdálenost mimoběžných přímek p: $x = 2 + t$; $y = 1 - t$; $z = 2t$; $t \in \mathbf{R}$, q: $x = s$; $y = -s$; $z = 2 + s$; $s \in R$
(Ověření mimoběžnosti ponecháme čtenáři.)

Obr. 3



První způsob řešení: (viz obr. 3)

Snadno ověříme: $A[2; 1; 0] \in p$, $E[0; 0; 2] \in q$. Směrové vektory přímek p, q jsou pořadě vektory $\boldsymbol{u}(1; -1; 2)$, $\boldsymbol{v}(1; -1; 1)$.

Přímkou p proložíme rovinu α, rovnoběžnou s přímkou q. Normálový vektor $\boldsymbol{n}$ roviny α musí být proto kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, což lze vzhledem k nenulovosti všech uvažovaných vektorů ekvivalentně vyjádřit soustavou rovnic $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ (s nejednoznačným řešením), respektive rovnicí jedinou $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Je-li $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, je $\boldsymbol{n} = (1; 1; 0)$. Normálovým vektorem $\boldsymbol{n}(1; 1; 0)$ a bodem $A[2; 1; 0]$ ($A \in p$, $p \subset \alpha$) je jednoznačně určena hledaná rovina $\alpha : x + y - 3 = 0$. Uvážíme-li kolmý průmět přímky q do roviny α a jeho polohu vzhledem k přímce p, pak zřejmě platí

$$d = |PQ| = v(p; q) = v(q; \alpha) = v(E; \alpha)$$

Tím je úloha převedena na výpočet vzdálenosti bodu od roviny. (Proveďte výpočet s užitím rovnice roviny α.)

Také však lze užít vztahu (2), položíme-li $\boldsymbol{w} = E - A = (-2; -1; 2)$.

Pak je postupně $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \sqrt{2}$ $|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}| = 3$, $v(p; q) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Druhý způsob řešení:

Zavedený význam vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ v obr. 3 ponechejme. Umístíme-li vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ do bodu A, získáme body B, D, pro které platí $\boldsymbol{u} = D - A$, $\boldsymbol{v} = B - A$. Úsečky AB, AD lze považovat za strany rovnoběžníku $ABCD$ ($\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = C - A$). Umístěním vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ do bodu E získáme

analogicky rovnoběžník $EFGH$. Roviny ABC (α) a EFG (β) jsou rovnoběžné a útvar $ABCDEFGH$ je rovnoběžnostěn. (Zdůvodněte obě tvrzení.)

Analogicky předchozímu odvození platí vztahy:

$$|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \,.\, d = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \quad v(p; q)\,,$$

odkud

$$v(p; q) = \frac{|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \,.\, \boldsymbol{w}|}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|} \tag{3}$$

Příčka PQ má skutečně délku rovnu hledané vzdálenosti obou mimoběžek — je kolmá k rovinám ABC a EFG, k libovolným přímkám, které v nich leží, a tedy i k přímkám p, q.

Vztah (3) lze užít i v případě přímek různoběžných, neboť pak jsou body A, B, C, D, E, F, G, H komplanární, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ a $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{w} = 0$.

Cvičení: Vypočtěte vzdálenost přímek AB, CD při zadání

$A[1; 2; 3]$, $B[0; 0; 0]$, $C[3; 2; 1]$, $D[-1; 2; 1]$. $\left(\frac{4\sqrt{13}}{13}\right)$

Pročtením předchozího textu a samostatným řešením v něm uvedených cvičení se čtenář přesvědčil o možnosti řešit všechny úlohy o vzdálenosti lineárních útvarů v prostoru užitím dvou jednoduchých vztahů:

a) $$d = \frac{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|}\,,$$

použitelným pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky a vzdálenosti dvou rovnoběžek v prostoru;

b) $$d = \frac{|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \,.\, \boldsymbol{w}|}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}\,,$$

platným pro stanovení vzdálenosti bodu od roviny, vzdálenosti libovolné dvojice rovnoběžných lineárních útvarů (přímka — rovina, rovina — rovina) a vzdálenosti dvou mimoběžných přímek. Vše při výše uvedeném významu vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

Navíc lze takto řešit i případné úlohy v rovině (vzdálenosti dvojic bod — přímka, přímka — přímka) přechodem do některé roviny v prostoru, např. roviny π: $z = 0$.

Až si čtenář vytvoří algoritmy, nebo přímo podprogramy v jazyce BASIC, které numericky řeší oba odvozené vztahy, získá obecný algoritmus řešící všechny úlohy uvedené oblasti.

Literatura:

[1] Bušek, J.: Vzdálenost bodu od přímky v analytické geometrii, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 65, 1986/87, č. 10, s. 401—403

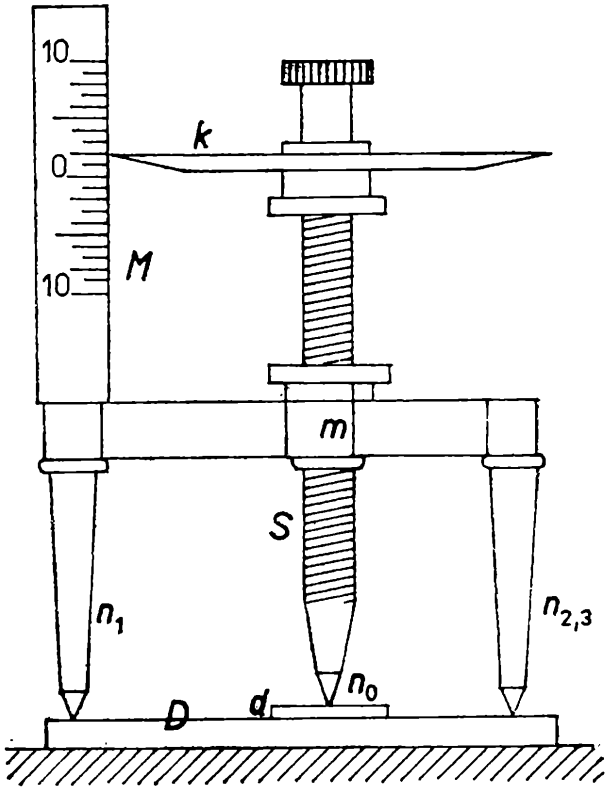
[2] Šedivý, J. a kol.: Matematika pro 3. ročník gymnázií, SPN Praha, 1986, s. 107—129

FYZIKA

Sférometr

JOSEF KOTYK, Pardubice

K základním poznatkům při práci se šroubem patří zkušenost, že jím lze snadno provádět převod hrubého pohybu na pohyb jemný. Otočí-li se hlavice šroubu o celou otočku, postoupí jeho vřeteno v matici o výšku závitu; otočí-li se hlavice např. o setinu otočky, postoupí vřeteno v matici o setinu výšky závitu. Má-li vřeteno šroubu malou výšku závitu (např. 1 mm), dospíváme k poznání, že šroubem můžeme vzbuzovat velmi jemné pohyby a též je měřit. Přístroje k tomu účelu (např. k měření malé tloušťky drátů a destiček) používané jsou zejména *mikrometry* a méně již známé *sférometry*.

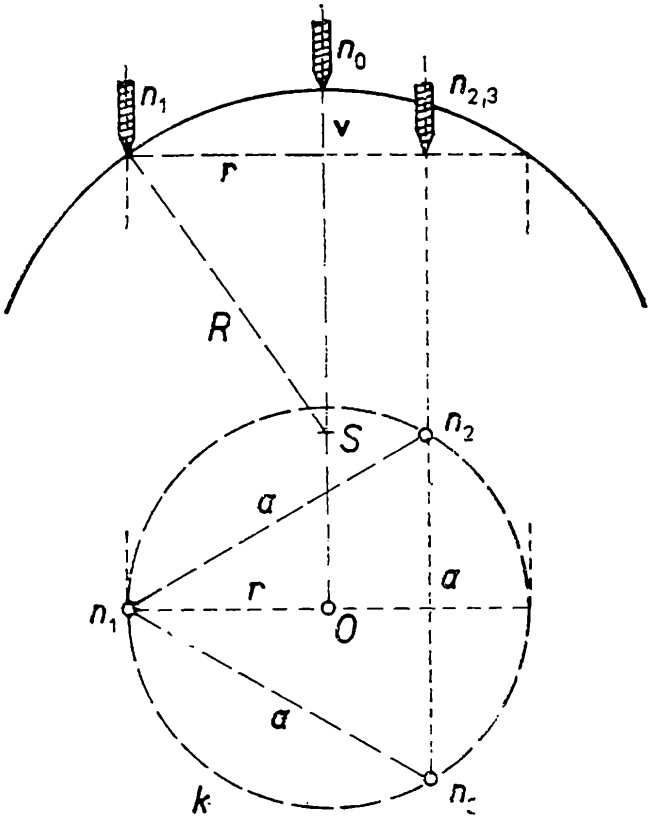


Obr. 1

Matice m sférometru (obr. 1) stojí na třech ostrých nožkách n_1, n_2, n_3, umístěných ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. V ní se pohybuje vřeteno jemně řezaného šroubu S s malou výškou závitu (např. 0,5 mm), zakončené dole ostrým hrotem n_0 jako nožky stativu. Osa šroubu směřuje ke středu trojúhelníka. Nulovou polohu sférometru stanovíme tak, že přístroj postavíme na dokonale rovnou plochu desky D z broušeného skla a otáčíme šroubem k desce tak dlouho, až se všecky čtyři hroty

základní roviny (zv. planum) dotýkají. Poznáme to snadno mírným postranním tlakem na některou nožku přístroje; jestliže šroub je hrotem příliš nízko, přístroj se tímto tlakem pootočí kolem středu. Podobně zjistíme postavení prostředního hrotu, dotýkajícího se předmětu položeného pod sférometr na základní rovinu a stanovíme tím jeho tloušťku na místě dotyku. Počet celých otoček určíme na svislém měřítku M, upevněném na jedné nožce stativu, části otočky na kruhovém kotouči k, který je připojen k hlavici šroubu a má obvod rozdělen např. na 500 stejných dílů. (V uvedeném příkladě lze při měření číst přesně na 0,001 mm.) Jako u všech šroubových měřítek je ovšem třeba přihlížet též k mrtvému chodu šroubu; při měření otáčíme šroubem proto stále v témž směru.

Chceme-li měřit tloušťku planparalelní vrstvy omezené dvěma rovnoběžnými rovinami — v obr. 1 je realizována destičkou d — položíme ji na základní rovinu desky D pod prostřední hrot sférometru, který vyšroubujeme do takove výšky, aby se destičky právě dotýkal. Podobným způsobem měříme na plankonvexní (ploskovypuklé) čočce (viz obr. 2) výšku vrchlíku v kulové plochy, z čehož lze určit i její poloměr R a křivost.



Obr. 2

Při výpočtu uvažujeme takto:

Hroty nožek sférometru nechť tvoří rovnostranný trojúhelník o straně a a výšce $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; poloměr jemu opsané kružnice k má velikost

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{3}, \text{ takže } r^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Poněvadž zároveň $r^2 = v\ (2R - v)$, neboli $\frac{a^2}{3} = v\ (2R - v)$,

dostáváme ihned

$$R = \frac{a^2 + 3v^2}{6v}.$$

Reciprokou hodnotou stanovíme pak i křivost kulové plochy.

Cvičení:

Při laboratorní práci užívali žáci sférometru, na němž odměřili vzdálenosti nožek stativu $a = 7{,}7$ cm. Když přístroj postavili na ploskovypuklou čočku, shledali, že střední nožka je vyvýšena o $v = 1{,}03$ mm. Velikost poloměru příslušné kulové plochy odhadovali pak na $R \doteq 1$ m. Přezkoumejte jejich úsudek výpočtem! Stanovte také křivost plochy!

Nový pohled na gravitační čočky

RNDr. RENÉ HUDEC, CSc., AÚ ČSAV, Ondřejov

Gravitační čočky se objevily v astronomické terminologii teprve nedávno v souvislosti s objevy těchto úkazů v extragalaktickém prostoru.

Nicméně myšlenka existence gravitačních čoček ve vesmíru je již téměř 70 let stará. Souvisí úzce s Einsteinovým předložením *obecné teorie relativity* v roce 1916. Po prvním testu nové teorie (byl to posuv perihelu Merkura) následoval v květnu 1919 další. Odklon chodu paprsků ze vzdálených hvězd při průchodu těsně kolem Slunce a zachycený během úplného slunečního zatmění znamenal tehdy pro Einsteina velký úspěch. Byl to současně první experimentální poznatek o tom, že hmotná tělesa mohou na světelné paprsky působit jako čočka — a první „gravitační čočka" byla na světě.

Analogie s čočkou známou z optiky je ovšem dost nepřesná. Jednak gravitační čočka zakřivuje světelný paprsek postupně, jednak nejde o fokusaci do jednoho bodu, ale do různých bodů podle vzdálenosti paprsku od hmotného tělesa. Tak například zatímco světelný paprsek procházející v tečně k povrchu Slunce bude fokusován do bodu vzdáleného 18 poloměrů Neptunovy dráhy (9000 těchto poloměrů představuje zhruba vzdálenost k nejbližší hvězdě), jiný paprsek procházející ve vzdálenosti jednoho slunečního poloměru od slunečního okraje bude zakřiven do bodu ve vzdálenosti 164 poloměrů Neptunovy dráhy.

Ačkoli se první zmínka o gravitačních čočkách objevila již v roce 1919, těsně po potvrzení Einsteinovy teorie, v dalších letech tento pojem upadl v zapomnění. Od té doby až do konce 30. let byly zveřejněny pouze dvě vědecké práce z této oblasti. Nicméně již tehdy byl astronomy *F. Zwickym* a *E. B. Frostem* navržen první experimentální program pro hledání gravitačních čoček v mezihvězdném prostoru. V roce 1936 publikoval *A. Einstein* práci zabývající se výpočtem podobného jevu u dvojhvězd, kdy může gravitace jedné složky působit na světlo druhé. Málo známé je, že k této Einsteinově studii dal popud český inženýr, žijící ve Washingtonu, *R. Mandl*. Koncem 30. let se na toto téma objevily ještě další publikace, mj. i sovětského vědce *G. A. Tichonova*. Z hlediska dnešního je podstatná myšlenka F. Zwickyho z roku 1937, podle níž mohou jako gravitační čočky působit i galaxie. Zwicky tehdy věřil, že se potvrzení tohoto jevu stane dalším testem obecné teorie relativity — a k tomu opravdu došlo, i když o plných 42 let později.

Od konce 30. let totiž upadla myšlenka gravitačních čoček opět na dvě desetiletí v zapomnění. Až v roce 1950 objevil *A. Hoag*, aspirant pracující na Harvardově observatoři v USA, zvláštní extragalaktický objekt sestávající z modrého mlhavého haló obklopující červené jádro. Jako jedno z možných vysvětlení byla navržena — gravitační čočka. Ale jak se ukázalo, nešlo o gravitační čočku, ale pouze o zvláštní kompaktní galaxii obklopenou prstencem hvězd „přibraných" ke galaxii jejím těsným přiblížením k jiné galaxii.

Ke skutečnému objevu gravitační čočky došlo téměř o 30 let později, a jak už to v astronomii často bývá, náhodou. Britský astrofyzik *D. Walsh* našel počátkem roku 1979 při rutinní práci hledání optických protějšků rádiových zdrojů na listech Palomarského atlasu zajímavý jev. Optický protějšek kvazaru 0957 + 561 ležícího v souhvězdí Velké Medvědice byl tvořen dvěma téměř identickými hvězdnými objekty vzdálenými od sebe jen šest obloukových sekund. Několik takových případů bylo sice známo již dříve, šlo však vždy pouze o náhodné promítnutí kvazaru těsně vedle mnohem blíže ležící hvězdy. Tentokrát však spektrální analýza obou objektů prokázala, že oba jsou kvazarem. Navíc tzv. rudý posuv ve spektru byl v obou případech stejný, $z = 1{,}4136$, dokumentující stejnou vzdálenost obou objektů. Jako z označujeme poměr $\Delta\lambda/\lambda$, kde $\Delta\lambda$ je Dopplerův posuv spektrální čáry a λ je její klidová vlnová délka. Při totožném spektru byl jeden z objektů, označený jako 0957 + 561 B, shledán asi o 30 % slabší v modré barvě než druhý objekt, 0957 + 561 A. V červené barvě byly oba kvazary stejné jasnosti.

Jako vysvětlení existence dvojitého kvazaru byla předložena gravitační čočka. Podle této hypotézy leží mezi kvazarem (který je ve skutečnosti jediný) a Zemí galaxie o hmotnosti asi 10^{13} hmot našeho Slunce. Nestejná jasnost obou obrazů kvazaru se dá vysvětlit polohou masivní galaxie asi 0,4″ od spojnice kvazar—Země. Tato hypotéza dobře vy-

světlovala pozorování až na relativní červenost objektu B. Gravitační čočka (jak vyplývá z principu ekvivalence obecné teorie relativity) musí totiž být perfektně achromatická, tj. velikost zakřivení nezávisí na vlnové délce.

Ale je tomu opravdu tak? Když astronomové na místo objektu zaměřili největší pozemní dalekohledy, žádnou galaxii, která by mohla být původcem gravitační čočky, nenalezli. Teprve osm měsíců později byla detekována vzdálená, a tudíž opticky velice slabá obří eliptická galaxie. Překvapením však bylo, že nebyla nalezena uprostřed mezi obrazy kvazaru, jak se původně předpokládalo, ale naopak východně od spojnice obou obrazů, poněkud blíže obrazu B. A jak se později ukázalo, tato poněkud výstřední poloha dokáže dobře vysvětlit fakt, který dosud nezapadal do hypotézy, totiž enormní červenost objektu B. K obrazu B totiž přispívá i červená oblast z galaxie.

Pro zdroj gravitační čočky — obří eliptickou galaxii — byl odvozen rudý posuv $z = 0,36$, což dobře odpovídá předpokladu, totiž poloze mezi kvazarem a naší Zemí. Je to ve skutečnosti — jak se ukázalo později — nikoli jediná galaxie, ale vlastně celá kupa galaxií rozložených zdánlivě na ploše několika čtverečních úhlových minut. Dříve nalezená galaxie je z celé kupy nejjasnější. Na světelné paprsky z kvazaru pochopitelně působí gravitačně nejen hlavní galaxie, ale i ostatní příslušnice kupy, a proto leží galaxie mimo spojnici obou obrazů.

Podívejme se nyní na vlastní funkci gravitační čočky trochu podrobněji. Zatímco u analogie z optiky — klasické čočky — je úhel lomu přímo úměrný vzdálenosti dopadu paprsku od optické osy (a proto se všechny lomené paprsky od bodového zdroje sejdou v jednom bodě — ohnisku), u gravitační čočky (pro jednoduchost představované hmotným bodem) je tento úhel úměrný hmotnosti tohoto bodu a záměrné vzdálenosti. Skutečná galaxie ovšem není ideálním hmotným bodem, protože podstatná část její hmoty je mimo jádro. Pochopitelně světelné paprsky projdou galaxií bez problémů — je to téměř prázdný prostor, většina hmoty galaxie je soustředěna v jejích hvězdách. Proto galaxie láme světelné paprsky jinak než optická čočka, ale i jinak než jeden jediný hmotný bod — skutečnost je někde mezi tím. Gravitační čočka nemá — na rozdíl od svého optického protějšku — jediné ohnisko, a proto může vytvářet i násobné obrazy světelného bodového zdroje. Podle vzájemné polohy zdroje, čočky a pozorovatele (tedy naší Země) tak mohou vzniknout 1 až 3 obrazy původního předmětu (kvazaru). Tak dochází např. k tomu, že u některých kvazarů zobrazených gravitační čočkou pozorujeme sice několik obrazů, ale některé struktury pozorujeme pouze u jednoho z nich.

Nyní jsou gravitační čočky ve středu zájmu a byly nalezeny ještě další, většina z nich opět náhodou. Jako druhý objekt rozštěpený do několika obrazů byl nalezen kvazar 115 + 080. V tomto případě jde

dokonce o obraz trojitý, rozložený na vrcholech téměř rovnostranného trojúhelníka se stranou přibližně dvě úhlové sekundy a se složkou A asi šestinásobně jasnější než složky B a C. Pro těsnou blízkost všech složek bylo v tomto případě extrémně obtížné získat oddělená spektra jednotlivých komponent. Přesto se to podařilo a ukázalo se, že i v tomto případě je rudý posuv všech tří složek identický, a to $z = 1{,}723$. Další výzkum však přesto přinesl nová překvapení. Obraz A se zdá být totiž protažený a není vyloučeno, že i on je dvojitý. Možná jde o vzácný případ ohybu světla spirální galaxií.

Z dalších detekovaných případů působení gravitační čočky uveďme ještě alespoň kvazar 2345 + 007, rozštěpený do dvou obrazů ležících sedm obloukových sekund od sebe a lišících se v jasnosti čtyřnásobně. Rudý posuv ve spektrech obou objektů opět souhlasí, neboť $z = 2{,}15$. Ve většině případů se však — zřejmě pro přílišnou slabost ve viditelném světle — nepodařilo najít galaxii způsobující gravitační ohyb světla.

I přes nalezené gravitační čočky je zřejmé, že jde o jev velice vzácný, představující jen několik promile z celkového počtu známých kvazarů. Kromě vlastního potvrzení závěrů obecné teorie relativity nám nicméně případy gravitačních čoček ve vesmíru přinášejí ještě další aspekty. Je to například možnost získání informace o rozložení hmoty v eliptických, případně i spirálních galaxiích. Ale jev je zajímavý i z časového hlediska. Světelné paprsky putují v tomto případě k pozorovateli po různých drahách, tedy po různou dobu. Zdálo by se, že tento rozdíl je při obrovské rychlosti světla zanedbatelný, ovšem při kosmologických vzdálenostech řádu miliard světelných let může časový rozdíl dosáhnout i několika let. To např. znamená, že nějaký jev (např. zjasnění) pozorovaný v obraze A by se měl v obraze B projevit se zpožděním možná až několika let. Byla by to první přímá možnost měření kosmologických vzdáleností, i když zřejmě s některými vedlejšími vlivy jako je např. distribuce hmoty v galaxii působící jako gravitační čočka a patrně i distribuce mezigalaktické hmoty podél celé trasy paprsku mezi vzdáleným kvazarem a naší Zemí. I s těmito zanesenými nepřesnostmi by ovšem mělo takové měření nedocenitelný význam, mimo jiné i pro nezávislé určení expanzní rychlosti vesmíru. Optické projevy, které by pro takovouto analýzu mohly být použity, byly pozorovány např. u kvazaru 00957 + 561 B, u něhož došlo k zjasnění a pak k opětovnému poklesu světelné intenzity. Bohužel v tomto případě muselo dojít k analogickému projevu v obraze A již dříve. Dlouhodobé optické monitorování zde však má rozhodně naději na úspěch.

Není v možnostech tohoto příspěvku se vlastnostmi a projevy gravitačních čoček zabývat hlouběji. Za zmínku snad ještě stojí fakt, že na rozdíl od jiných astronomických objevů jde v případě objevu gravitačních čoček o jev předpověděný již dlouho předtím, tedy o úkaz, v němž teorie o řadu desetiletí předběhla pozorování.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Zvedený matematikou

DUŠAN JEDINÁK,
Gymnázium Topoľčany

Noc na 7. januára 1610 bola priaznivá pre pozorovanie oblohy. Galileo Galilei zamieril ďalekohľad na Jupiter. V jeho blízkosti zbadal štyri slabé „hviezdičky". Nasledujúcu noc svoju polohu nápadne zmenili, ale predsa sa len držali v jednej čiare blízko ekliptiky: zrejme krúžili okolo Jupitera. Obloha odhalila novú pravdu nebeskej mechaniky.

Už predtým Galilei spoznal, že povrch Mesiaca nie je plochý, že z neho vystupujú horské hrebene a je pokrytý krátermi. Pomocou ďalekohľadu rozpoznal v bledom páse Mliečnej cesty zástupy jednotlivých hviezd. Vesmír v poli ďalekohľadu javil nové rozmery a nečakané situácie.

Neskôr Galileiho ďalekohľad odhalil slnečné škvrny a objavil Venušine fázy. Predstava rotujúceho Slnka, totožnosť fyzikálneho charakteru Zeme a iných nebeských telies, odraz slnečného svetla od Mesiaca a Venuše, pohyb Jupiterových mesiačikov, to všetko presvedčovalo Galileiho o Kopernikovej pravde: Stredom vesmíru je Slnko, planéty a Zem ako planéta krúžia okolo. Tradičné geocentrické názory sa otriasli.

Galileo Galilei vydáva v roku 1632 svoj slávny spis *Dialóg o dvoch najväčších svetových sústavách.* Tu rozvíja nové myšlienky kinematiky, definuje pojem rýchlosti a zrýchlenia. Rozobral problém skladania pohybov a formuloval myšlenku relatívnosti pohybov. Galileiho princíp relativity sa stal jedným zo základných postulátov klasickej mechaniky. Myšlienky Galilea Galileiho rozvinuté formou rozhovoru Salviatiho, Simplícia a Sagreda sú zrejmou ukážkou neudržateľnosti vtedajšieho geocetrizmu. (Po slovensky vyšlo toto dielo pod názvom „Dialóg o dvoch systémoch sveta" vo Vydavateľstve SAV, Bratislava 1962.)

Zaujímavú skutečnosť okolo astronomických pozorovaní G. Galileiho odhalili v roku 1982 americký astronóm *C. T. Kowal* a kanadský historik *S. Drake.* Prehliadli pozorovacie náčrtky Galilea Galileiho, do ktorých zakresloval relatívne polohy ním objavených Jupiterových mesiačikov voči samotnej planéte. Zistili, že Galilei zaznačil v decembri 1612

a januári 1613 planétu Neptún ako „hviezdičku". Galilei si nevšimol, že sa behom mesiaca táto „hviezdička" oproti ostatným hviezdam posunula. Bol by tak objavil novú planétu, ktorú takto objavil *J. Galle* až o 234 rokov neskôr. Vďaka Galileiho pozorným náčrtkom polohy „hviezdičky" Neptún, ktorá je však oproti dnešným výpočtom dosť rozdielna, vzniká v súčasnosti otázka, či na dráhu planéty Neptún nemá vplyv okrem Pluta aj iné teleso.

Ako žil, pracoval a myslel Galileo Galilei?

V roku, keď zomiera Michelangelo Buonarroti, sa 15. II. 1564 v Pise narodil Galieo Galilei, aby sa stal vrstovníkom Shakespeara, Descarta, Keplera a Rubensa, aby v dobe doznievajúcej renesancie, po vlnách reformácie a antifeudálnych vzbúrach, vo víre protireformačného ťaženia poukázal na slobodu vedeckého výskumu.

Od otca pochytil vzťah k hudbe a literatúre. Už v mladosti rád konštruoval modely strojov a mechanických hračiek. Gréčtinu a latinčinu si osvojil v kláštore Vallombros. Na žiadosť otca šiel študovat medicínu na univerzitu v Pise. Ale medicína, v tej podobe ako sa vtedy vyučovala, nebola pre Galileiho príťažlivá. *Ostilio Ricci* zasvätil mladého Galilea do Euklidovej matematiky a Archimedových matematických aplikácií vo fyzike. Nový svet racionálnych dôkazov, presných vzorcov a logického myslenia očaroval mladého Galileiho. Spoznal, že matematika je prostriedok poznávania a presného popisu prírodných javov. Odvtedy sa nezaujímal o nič iné ako o matematiku a fyziku. „Ak by som sa mal znovu začať vzdelávať, tak by som postupoval podľa Platónovej rady a začal by som najskôr s matematikou ako vedou vyžadujúcou presnosť a presadzujúcou za pravdivé iba to, čo z dokázaného vyplýva ako dôsledok."

Vzhľadom k svojim bohatým vedomostiam a na príhovor matematika *Guidobalda del Monte* dostal Galilei v roku 1589, i napriek tomu, že nemal žiadny diplom, miesto na katedre matematiky na univerzite v Pise. V roku 1592 presídlil na univerzitu do Padovy. Tu pôsobil celých osemnásť rokov. V roku 1610 prijal ponuku *Cosima II.* a stal sa vo Florencii „prvým matematikom a filozofom vojvodcu toskánskeho".

Neslávne spory o Kopernikovej náuke priviedli Galileiho v roku 1611 do Říma. Vtedy ešte obhájil svoje astronomické objavy a z nich vyplývajúce netradičné hypotézy. Ale odvtedy sa polemika ideologickej moci a túžby po pravde už iba stupňovala. Cesta do Říma v roku 1633 priviedla starnúceho Galileiho k pokoreniu a mocenskému popretiu jeho objavov. Ďalších deväť rokov prežil v Arcetri neďaleko Florencie. Tu zomrel 8. I. 1642. Pochovaný je v kostole Santa Croce vo Florencii. Až po 95 rokoch mu tu postavili dôstojný náhrobok.

Galileo Galilei sa stal tvorcom moderných vedeckých názorov. Spoznal, že najhlavnejším prameňom poznania je skúsenosť. Vedel sa pýtať pozorovateľných javov matematickými termínmi. V jeho textoch splýva

často vzletnosť vízie a presnosť experimentu. Zaviedol pokus ako previerku hypotézy. Dokázal, že priame poznanie faktov, oddelené od metafyziky, dáva prírodnej vede praktický zmysel.

Už v roku 1583 uskutočnil prvý objav. Zistil, že doba kyvu kyvadla nezávisí od jeho hmotnosti a veľkosti rozkyvu, ale mení sa iba s dĺžkou kyvadla. Svoj vynález hydrostatických váh a stanovenie poučiek o určovaní ťažiska niektorých pevných telies opísal Galilei v roku 1586. Termoskop ako prototyp teplomeru a stroj na zdvíhanie vody ho zamestnávali do roku 1593.

V roku 1609 pri pobyte v Benátkach sa Galilei dozvedel o holandskom vynáleze ďalekohľadu. Sám skonštruoval pomerne účinný ďalekohľad a ako prvý ho použil na astronomické pozorovanie. Svoje astronomické objavy uverejnil po latinsky v roku 1610 v spise *Sidereus nuntius* — Hviezdny posol. Galileiho oči uvideli nové „hviezdy", ich fyzikálne zvláštnosti a meniace sa polohy. Jeho pozorná dedukcia ho nezadržateľne viedla k novému planetárnemu systému. Rozchod s náboženskou tradíciou bol už iba logickým dôsledkom: „Biblia učí, ako sa dostať do neba, a nie, ako sa nebo točí."

Galilei rád písal listy a v nich vysvetľoval svoje názory. Dopis *Benedettovi Castellimu* z 21. XII. 1613 sa mu stal pravdepodobne osudným. V ňom zaujal jasný a netradičný postoj v diskusii o vzťahu pravdy biblie a pravdy vedy. Otvorený súboj o autonómiu vedy sa začal. Galilei chráni vedu ako pravdivého interpréta prírody tým, že odhaľuje zákony stvoreného sveta. Je pevne presvedčený o tom, že „dve pravdy si nemôžu nikdy odporovať". V liste *Kristíne Lotrinskej* píše: „Skutočne nemyslím, že by bolo treba pripustiť, že ten istý Boh, ktorý nám dal zmysly, rozum a pochopenie, by chcel, aby sme zanedbávali ich použitie, že by nám chcel poučenie, ktoré môžeme dostať cez ne, poskytnúť iným spôsobom a že by nás takto chcel priviesť k popretiu skúsenosti a rozumu . ."

Napriek tomu, že rímska cenzúra schválila vydanie „Dialógu" v roku 1632, spor o nový svetonázor vyvrcholil inkvizičným súdnym procesom v roku 1633. Vo veľkej sále kláštora Santa Maria sopra Minerva v stredu 22. júna 1633 skoro sedemdesiatročný Galileo Galilei, po vyslovení podozrenia z kacírstva, podpisuje odvolanie.

Slávny nemecký matematik *D. Hilbert* raz v debate o G. Galileovi poznamenal: „Len idiot môže veriť, že vedecká pravda potrebuje mučeníctvo; to je možno nevyhnutné v náboženstve, no vedecké výsledky sa overujú časom."

Spor cirkevnej politiky s negeocentrickými predstavami na pozadí protireformačného ťaženia dosiahol veľmi ťažko na plecia Galilea Galileiho, ktorý poznal silu a mohutnosť ľudského rozumu: „Kto by chcel tvrdiť, že bolo videné a poznané všetko, čo je vo svete prístupné zmyslom a poznateľné?" Vedeckého bádania sa Galilei nikdy nevzdal. Vedel, že

nie je sám. V roku 1634 uverejnil *Mersenne* francúzsky preklad jeho Mechaniky, v Holandsku vyšiel latinsky preklad Dialógu. V roku 1636 dokončil Galilei svoje hlavné dielo *Discorsi* . . . — Rozhovory a matematické dôkazy o dvoch nových vedách, o mechanike a pohybe telies. Vyšlo v holandskom Leydene v roku 1938.

Tu odvodil základné poznatky o pevnosti telies. Hlbokou analýzou stanovuje zákony rovnomerne zrýchleného pohybu, rozoberá zložené pohyby, rozpracúva teóriu kyvadiel, skúma vplyv trenia na pohyb telies. Galilei objavil, že výšku tónu určuje kmitočet. Vysvetlil budenie tónov rezonanciou. Celá kniha je návratom k „čistej vede".

Galilei zostane príkladom vedca, ktorý objavuje matematické zákony v lone prírody, aby hľadal pravdu, ktorá pomáha človeku pri pochopení vesmíru. „Základný motív Galileiho diela vidím vo vášnivom boji proti akejkoľvek viere opierajúcej sa o autoritu. Jediným kritériem pravdy bola pre neho vlastná skúsenosť a svedomitá rozvaha. Dnes si už ťažko môžeme predstaviť, akým nebezpečným a revolučným bol takýto postoj v jeho dobe." Takto vystihol všeobecný prínos Galileiho života a diela Albert Einstein.

Z Galileiho sa stal symbol. Spôsob jeho práce v poznávaní prírody sa stal prelomom. Galilei poznal zásadný význam príčinnosti vo vede a vykonal rozhodujúci krok pre kvantitatívne poňatie vedy. Vypozoroval, že „ľudský intelekt poznáva niektoré pravdy tak dokonale a s takou absolútnou istotou, ako sama príroda!" Jeho myšlienkové konštrukcie už obsahovali matematizáciu skutočnosti. Väzba prírodných vied a matematiky s ľudským životom je odvtedy stále tesnejšia, bezprostrednejšia a plodnejšia.

Literatúra:

Baláž, P.: Význační fyzici. Bratislava, SPN 1966.
Golovanov, Ja. K.: Etjudy ob učenych. Moskva, Molodaja gvardija 1983.
Chramov, J. A.: Fyziki. Kiev, Naukova dumka 1977.
Kuznecov, B. G.: Od Galileiho po Einsteina. Bratislava, Pravda 1975.
Namer, E.: Případ Galilei. Praha, Mladá fronta 1982.

Pokyny pro autory článků do Rozhledů byly naposledy uveřejněny ve 3. čísle tohoto ročníku.

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Při stavbě přehrady

Inženýr Václav Kadlec, stavbyvedoucí přehrady, přijížděl každodenně vlakem na nejbližší nádraží ráno v 5 hodin 30 minut. Ve stejném čase vždy přijížděl k nádraží osobní automobil, který ho odvezl na přehradu.

Jednou v pondělí přijel ing. V. Kadlec na nádraží již ve 4 hodiny 30 minut a šel automobilu naproti. Jakmile se s ním setkal, nasedl a přijel na přehradu o 20 minut dříve než obvykle. V kolik hodin se setkal stavbyvedoucí s automobilem a jak dlouho šel pěšky?

Rozdíl mezi běžným a předčasným pondělním příjezdem je 20 minut. Stavbyvedoucí ušetřil tedy šoférovi 20 minut jízdy, tj. 10 minut před tím, než by dojel z místa setkání k nádraží, a 10 minut při návratu z nádraží k místu setkání.

$$5\text{ h }30\text{ min} - 10\text{ min} = 5\text{ h }20\text{ min}$$
$$5\text{ h }20\text{ min} - 4\text{ h }30\text{ min} = 50\text{ min}$$

Stavbyvedoucí ing. V. Kadlec se setkal s osobním automobilem v 5 hodin 20 minut, pěšky šel 50 minut.

Josef Trejbal

Ještě jedna úloha pro turisty a nejen pro ně

Ve 4. čísle Rozhledů byla úloha o turistických cestách. Uveďme ještě další.

Chlapec si zapsal pro okolí svého bydliště turistické značené cesty podle význačných míst, kterými procházejí:

ČERVENÁ: Úvoz (Ú) — Alej (A) — Lhota (L) — Zářečí (Z)
MODRÁ: Strž (S) — Zářečí (Z)
ZELENÁ: Alej (A) — Tvrz (T) — Strž (S)
ŽLUTÁ: Hrušov (H) — Úvoz (Ú) — Tvrz (T) — Zářečí (Z)

Načrtněte schematický plánek uvedených turistických cest; cesty se kříží (popř. na sebe navazují) jen v místech, která mají názvy, jež si chlapec poznamenal. Žádné dvě cesty nemají společný úsek.

a) Z kterého místa lze přímo dojít bez průchodu jiným místem s uvedeným názvem do největšího počtu míst, které se v popisu cest uvádějí?

b) Navrhněte prodloužení některé ze značených cest (při zachování výše uvedených podmínek o křížení a navazování na sebe a při nevytvoření společných úseků různých cest), aby bylo možno z místa nale-

TRANSSONICKÝ (v. sonický) — jsoucí v oblasti rychlosti zvuku; jsoucí „nahoře nad zvukem" (mezi oblastí subsonickou a supersonickou)

TRANSURANY (v. uran) — prvky, které jsou v periodické soustavě za urany; které mají atomové číslo vyšší než uran

TRANSVERZÁLA (od lat. *versor*, *-ari* = otáčet se, obracet se; od *verto*. *-ere* = točit, obracet; v. inverze) — „příčka natočená mezi útvary"; přímka protínající obrazec; „přes celé území vedoucí" komunikace, která spojuje okrajové oblasti; TRANSVERZÁLKA — trať vedoucí napříč územím

TRANZISTOR (uměle zkráceno z angl. *tran(sfer) (re)sistor* = přechodový odpor) — 1. polovodičový prvek, kterého se používá pro zesilování a usměrňování signálu; 2. polovodičový rozhlasový přijímač. *Pozn.:* Protože existuje lat. *sisto*, *-ere* = stavět, postavit, nesmí nás to svést k výkladu „přístroj, který se dá snadno přestavět z jednoho místa na druhé". Angl. transfer ovšem souvisí s lat. transfero = přenášet a angl. resistor s lat. resistentia = odpor, v. rezistence.

TRI- (z lat. *tres*, *tria* nebo z řec. *treis* = tři) — počáteční část složených slov mající význam „tří-, troj-, trojčetnost"; v. t. trichotomie, trinární, terciární, tercie

TRIANGULACE (lat. *angulus* = kout, roh, úhel matematický) — vyměřování v terénu na základě trojúhelníků; TRIANGULAČNÍ — sloužící k triangulaci; TRIANGL — zastaralý název pro trojúhelník i pro terénní značku vrcholu trojúhelníkové sítě

TRIEDR (řec. *hedra* = „plocha, na které se sedí; sedadlo"; v. -edr) — „trojstěn"; dvojitý dalekohled, kde je obraz vzpřímen dvěma trojbokými pravoúhlými hranoly; hranolový dalekohled

TRIGONOMETRIE (řec. *gónia* = úhel, kout; v. goniometr + metron = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — „měření trojúhelníků"; nauka o vztazích mezi stranami a úhly v trojúhelníku; TRIGONOMETRICKÝ — trojúhelníkový; týkající se trigonometrie. Pozn.: Název „trigonometrie" vznikl koncem 16. století z potřeby vyřešit početně vztahy mezi velikostmi stran a úhlů v trojúhelníku.

TRICHOTOMIE (slož. z řec. *trichós* = trojmo, trojím způsobem; od *treis* = tři; v. *tri-* + *tomé* = řez; od *temnó* = řezat; v. atom) — rozdělení na tři části, do tří skupin; TRICHOTOMICKÝ — dělený na tři části

TRIKVETR (z lat. *triquetrus* = trojrohý) — starý nástroj k měření úhlů a zenitových vzdáleností, popsaný již Ptolemaiem; v podstatě: svislá tyč—pravítko a na ní připojená dvě pohyblivá, průzory opatřená ramena—pravítka tvoří „trojroh" — trojúhelník.

TRINÁRNÍ (od lat. *trinus*; od *tres* = tři; v. tri-) — potrojný, skládající

se ze tří složek, trojitý; srov. BINÁRNÍ — podvojný, skládající se ze dvou složek;

TRIODA (slož. z řec. *treis* = tři; v. *tri-* + *hodos* = chod, chůze, cesta; zde však uměle zkráceno z „elektroda", v. t.) — elektronka s třemi elektrodami

TRIPLET (přes angl. z lat. *tres* = tři; v. *tri-* + *plico*, *-are* = vinout; v. duplikát — trojitá čára, vinoucí se v čárovém spektru

TRIPLEX (z lat. *triplex* = trojmo složený, trojitý; slož. z *tres* = tři; v. *tri-* + *plecto*, *-ere*, ptc. pf. *plexus* = plésti; v. komplexní) — bezpečnostní sklo, které má tři slepené vrstvy (dvě vrstvy skla a mezi nimi vrstvu celuloidu); v. duplex

TRITIUM (uměle utvořeno od lat. *tres* = tři; v. tri-) — radioaktivní izotop vodíku mající trojnásobek hmotnosti obyčejného vodíku

TRITON (slož. ze zkráceného slova *tritium*, v. t. + *-on*, — umělá přípona, analogicky používaná podle „elektron", zde pro označení jádra; v. -on) — atomové jádro tritia

TRIVIÁLNÍ (slož. z lat. *tres* = tři; v. *tri-* + *via* = cesta; v. deviace) — v tereziánském školství bylo tzv. trivium („tři cesty k vědění"), tj. čtení, psaní, počty; protože to byly nejzákladnější předměty, nabylo slovo „triviální" též významu „zcela obyčejný, všední, jednoduchý"

-TRON (utvořeno analogií podle „elektron") — umělá přípona podst. jmen používaná ve fyzice: 1. pro termíny částic a elektronických součástek (v. kryotron, megatron, negatron, optron, pozitron); 2. pro termíny urychlovačů elektronů (v. betasynchrotron, betatron, cyklotron, fázotron, kosmotron, mikrotron, synchrotron, synchrofázotron

TROPY (z řec. *tropos* = obrat; od *trepó* = obracet) — 1. (pomnožné) zemské pásmo mezi „obraty Slunce", mezi obratníky; 2. (jedn. číslo: tropus) stylistické, básnické ozdoby, kdy se mění význam slov

TROPICKÝ — 1. týkající se tropů, pásma ležícího mezi obratníky; charakteristický pro stropy; 2. obrazný, přenesený, „přetočený". Pozn.: Tropický rok — (v astronomii) doba mezi oběma po sobě následujícími průchody Slunce jerním bodem (obratníkem Raka).

-TROPIE — koncová část složených slov mající význam „obrat; vlastnost, že se něco otáčí"; v. entropie, izotropie

-TROPNÍ — koncová část složených slov (zvláště ve fyzice) s významem často už přeneseným; např. izotropní látka (řec. *isos* = rovný, stejný) — látka, u které dochází k fyzikálním změnám všemi směry stejně („na všechny strany se stejně obrací"). Této vlastnosti se říká IZOTROPIE. V. t. lyotropní, anizotropní

TROPOSFÉRA (v. sféra) — název vznikl současně s termínem „stratosféra" (v. t.) s přihlédnutím k tomu, že se v této oblasti, vyznačující se průměrným ubýváním teploty s výškou, vše „důkladně promíchává, převrací", že zde je dějiště všech povětrnostních změn souvisejících s vertikální výměnou vzduchu.

zeného v a) dojít přímo bez průchodu jiným místem, které si chlapec poznamenal, do každého ze zbývajících šesti míst s uvedenými názvy. Předpokládejte, že uskutečnění návrhu neznemožňuje např. řeka, prudká strmá stráň apod.
(Řešení naleznete v č. 8.)

Jiří Mída

Úloha o Rozhledech

Na titulní straně obálky tohoto čísla Rozhledů jsou právě čtyři prvočísla. Jde o cenu 2 Kčs, pořadové číslo 7, ročník 67 a v údaji školního roku číslo 89.

Za předpokladu, že se nezmění cena čísla Rozhledů a na první straně obálky nedojde k úpravě číselných údajů, tj. nadále zde bude číslem uvedena cena časopisu, pořadové číslo, ročník a školní rok tak, že první letopočet bude celý a druhý letopočet bude vyjádřen jen posledním dvojčíslím, zjistěte, kdy na první straně obálky Rozhledů budou opět právě čtyři prvočísla.

Jiří Mída

Řešení úlohy o záclonĕ z čísla 6

Na záclonovou tyč je třeba přidat 8 kroužků. Při popsaném způsobu věšení záclony se užívá $2^n + 1$ kroužků, kde n je vhodné přirozené číslo.

Označme $(abc)_{10}$ libovolné trojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě. Potom číslo $(abcabc)_{10} = (abc000)_{10} + (abc)_{10} = (abc)_{10} \,.\, 1001 = (abc)_{10} \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13$.

jm

Laboratoř doma

Pokus téměř detektivní

Seznámíme se tentokrát s fyzikální metodou dělení směsí, která se často používá i v chemii. Jmenuje se *papírková chromatografie* a využívá se v ní nestejné pohyblivosti částic různých látek v roztoku, při jeho vzlínání porézní látkou.

K pokusu si připravte sklenici, proužek filtračního papíru asi 15 cm dlouhý a 5 cm široký a různobarevné fixy.

Přehněte podélně proužek a udělejte uprostřed proužku asi 2,5 cm od konce na sebe tři různobarevné tečky — např. červenou, modrou a žlutou. Do sklenice potom nalejte vodu, aby dosahovala asi 2 cm od dna. Do sklenice postavte papírový proužek se skvrnou u dolního konce, jak ukazuje obrázek. Voda začne vzlínat papírem a vymývat ze skvrny

totální reflex — úplný odraz. Pozn.: TOTALITNÍ režim — režim jednotný, zpravidla však zavedený násilím.

TRAKCE (z latiniz. *tractio*; od *traho*, *-ere*, ptc. pf. *tractus* = tahat, vléci; srov. TRAKTOR — tahač) — „tahání"; tah, tažná síla, pohon; v. t. abstrakce, atrakce, distrakce, extrakce, kontrakce

TRANS-, TRANZ- (z lat. *trans* = přes, za) — předpona mající význam: 1. přesahování nějaké meze, polohy, nějakého stupně; např. transurany (v. t.); 2. směr napříč, z jedné strany na druhou, z jedné oblasti do druhé; např. transport; v. t. transakce, transfúze, translace, transmise; 3. pronikání něčím; v. transfúze (ve fyzice)

TRANSAKCE (v. akce) — převedení, převod

TRANSFIGURACE (z lat. *figuratio*; od *figuro*, *-are*, ptc. pf. *figuratus*; od figura — utváření, podoba, postava) — přetváření, přetvoření, přeměna, přepracování; v elektrotechnice: změna uspořádání prvků elektrického obvodu, při kterém se nemění jeho funkce; v. t. konfigurace; TRANSFORMÁTOR (v. -or) — „přeměnitel"; zařízení k přeměně různých veličin; v elektrotechnice: stroj přeměňující střídavý proud na proud střídavý se stejnou frekvencí, ale se změněným napětím

TRANSFÚZE (v. fúze) — „přelití, přelévání"; ve fyzice: vzájemné pronikání dvou plynů průlinčitou stěnou

TRANSLACE (v. -lace) — „přenášení"; přenos; ve fyzice: posunutí, posuvný pohyb tuhého tělesa (tj. „přenesení z jednoho místa na druhé"); TRANSLAČNÍ — posuvný, vzniklý translací. Pozn.: RETRANSLAČNÍ stanice (re- = zpět, znova) — stanice k zpětnému přenosu televizního signálu na velkou vzdálenost

TRANSMISE (lat. *mitto*, *-ere*, ptc. pf. *missus* = posílat; v. emise) — „přesílání, přenášení"; přenos, převod, tj. přenášení a převádění hnací síly z hnacího stroje na stroj pracovní; ve fyzice: transmise energie — přenos energie z místa, kde se získává, na místo, kde se jí využívá; transmise světla — prostup světla; TRANSMISNÍ — převodový, přenosný

TRANSMUTACE (v. mutace) — přeměna

TRANSPONOVAT (lat. *pono*, *-ere*, ptc. pf. *positus* = klást, pokládat; v. expozice) — přenést, přenášet, převádět; přenést z jedné oblasti roviny do druhé; TRANSPOZICE — přenesení, přenášení, převádění

TRANSPORT (lat. *porto*, *-are*, = nést, vézt, doprovázet; srov. EXPORT — vývoz) — přeprava, převoz osob nebo věcí; v. t. suport; TRANSPORTÉR (přes franštinu) — 1. přepravce, dopravce 2. dopravník; zařízení k plynulé přepravě drobného materiálu pomocí nekonečného pásu

 TUBUS (od lat. *tubus* = roura, trubice; srov. TUBA — válcovitý obal) — roura, trubice; ve fyzice tubus dalekohledu nebo mikroskopu — část spojující objektiv s okulárem

TURBINA (uměle od lat. *turbineus* = vířivý; od *turbo*, *-inis* = vír, vichr, víření) — rotační lopatkový motor; v. t. turbo-

TURBO- (zkrácením slova „turbina", v. t.) — počáteční část složených slov mající význam „turbinový, poháněný turbinou"

TURBOALTERNÁTOR (v. alternátor) — alternátor poháněný turbinou

TURBOKOMPRESOR (v. kompresor) — otočný kompresor, poháněný turbinou; srov. turbodynamo, turbogenerátor aj.

TURBULENCE (z lat. *turbulentia*; od *turbulentus* = vyrušený z pořádku, nespořádaný, rozbouřený; a to od turba = ruch, hřmot, vřava) — „neklid, víření"; souborný název pro jevy, které souvisí s turbulentním prouděním, tj. prouděním neuspořádaným, vířivým, složeným z několika větších nebo menších vírů s osami všech možných směrů;

TURBULENTNÍ — bouřlivý, nespoutaný, vířivý; v meteorologii:

TURBULENTNÍ POHYBY — pohyb ovzduší, ve kterém se jeho molekuly pohybují chaoticky po velmi složitých drahách; TURBULENTNÍ PROUDĚNÍ — vírové; spojené s nepravidelnými víry jak do velikosti, tak směru

TYP (z řec. *typos* = ráz, úder; ráz podoby člověka; podoba, obraz, znak; od *typtó* = tepat, bít; srov. TYMPÁNY — laděný bicí nástroj; TYPOGRAF — „pisatel znaků"; tiskař) — vzor; znak, příklad; základní tvar; představitel skupiny, který má všechny základní znaky společné všem jednotlivcům; v. t. prototyp, stereotyp

TYPICKÝ — jevící se jako typ; příznačný, svérázný, osobitý

TYPIZACE (v. -izace) — 1. vystižení základních společných znaků větší skupiny lidí nebo věcí; 2. soubor činností směřujících k výrobě technicky, technologicky, ekonomicky co nejúčelnějších druhů výrobků; 3. přípravná činnost pro normalizaci, tj. tvoří se zcela nové typy výrobků bez ohledu na dosavadní výrobu

TYPIZOVAT — „vytvářet typy" ,nejčastěji ve smyslu „omezovat, omezit" počet existujících na několik málo a stanovit je jako doporučený nebo závazný vzor.

Pozn.: Ne vždy se přesně rozlišuje „typovat" a „tipovat", „typ" a „tip". TIPOVAT (z angl. *tip* = krok, ťuknutí, nápověď) znamená vystavovat předpověď (tip) výsledků zápasu, sázky apod.

ULTRA- (z lat. *ultra* = nad, přes, nad obvyklou míru) — počáteční část složených slov, dodávající významu následující části slova vlastnost „nad, přes, neobyčejně, hojně", často s hanlivým přídechem (např. ultravlastenec, ultrapravicový); u fyzikálních

jednotlivé barvy. Pozorně sledujte průběh pokusu a zaznamenávejte si své pozorování.

Vyzkoumejte touto metodou, z jakých složek je namícháno barvivo fialové, hnědé nebo zelené fixky.

Úkol pro vás: Zašlete nám svůj papírový proužek s oddělenými složkami barviva i svůj záznam pozorování. Můžete případně i změřit, zaznamenat a porovnat i rychlosti vzlínání.

Navrhněte pokus, kterým byste podpořili či zamítli domnénku, že různá rychlost stoupání barviva je způsobena různou gravitační silou na částice barviva vzhledem k jejich odlišné hmotnosti.

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Koza na ledě

Franta a Honza se rozhodli, že na zamrzlém rybníku vyzkouší pocity Eskymáků při jízdě na saních tažených spřežením. Vzhledem k nedostatku eskymáckých psů použili babiččinu kozu Lízu.

Pokus skončil neslavně. Přestože siloměr, kterým zjišťovali tah, ukázal až 50 N, sáňky se nepohnuly. Nebylo divu, hmotnost kluků se sáňkami byla 95 kg a součinitel klidového tření pro ocel na ledě má přibližně hodnotu 0,06.

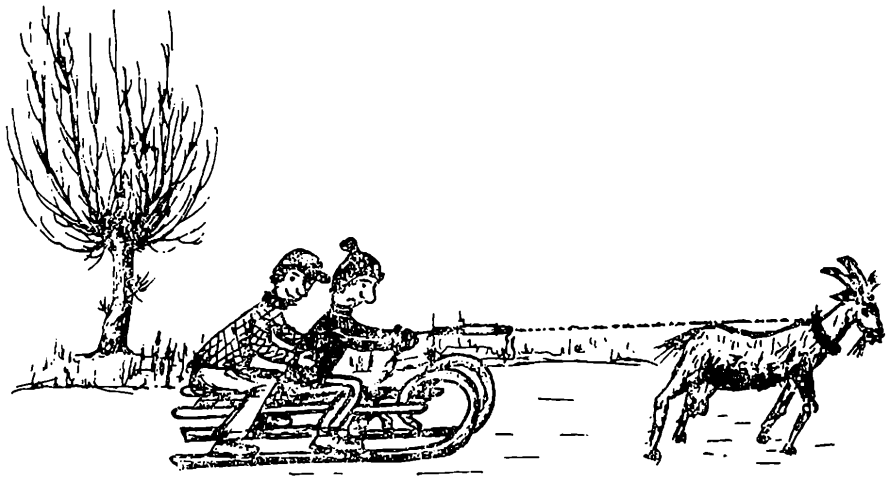
Úkol pro vás:

Odpovězte na následující tři otázky:

1. Jaká byla největší třecí síla působící na sáňky při Františkově a Honzově pokusu?

2. Jaká byla největší třecí síla působící na kozu?
3. Jakou sílu by musel ukázat siloměr, aby se sáňky s oběma chlapci daly do pohybu a jak bylo možno takové zvýšení tahové síly dosáhnout?

Milan Rojko



Řešení úkolů z posledních dvou článků zašlete na adresu:
RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.
Za nejlépe zpracovaná řešení můžete jako odměnu získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Jak dříve lidé počítali

RNDr. MILAN KOMAN, CSc., MÚ ČSAV, Praha

Dnes umí vynásobit libovolná dvě celá čísla každý školák. Postup, který se běžně používá. se může zdát zcela samozřejmý. Málokdo si však uvědomuje, že jeho jednoduchost spočívá v tom, že se čísla zapisují v poziční desítkové soustavě. Napadlo vás však někdy, jak by se násobila čísla zapsaná například římskými číslicemi? Zkuste pro zajímavost znásobit čísla

(1) XXXVII . LXIV

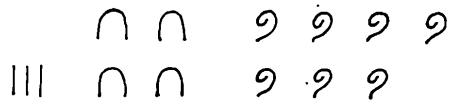
aniž byste je přepsali do poziční desítkové soustavy.

Přesto někteří staří kulturní národové dovedli násobit dvě čísla ještě dříve, než poznali poziční desítkovou soustavu. Byli to například

staří Egypťané již tři a půl tisíce let před naším letopočtem. K zápisu čísel používali těchto hieroglyfů:

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000

Například číslo 743 zapisovali takto



3 + (4 . 10) + (7 . 100) = 743

Egypťané používali v té době pro násobení dvou čísel metodu „zdvojování a půlení". Ukážeme si ji na příkladu. Máme znásobit čísla 85 a 43.

Číslo 85 budeme postupně násobit dvěma a číslo 43 dělit dvěma. Zbytky při dělení dvěma zanedbáme.

	85	43	(43 : 2 = 21; zb. 1)
	170	21	(21 : 2 = 10; zb. 1)
škrtneme	340	10	(10 : 2 = 5; zb. 0)
	680	5	(5 : 2 = 2; zb. 1)
škrtneme	1360	2	(2 : 2 = 1; zb. 0)
	2720	1	

Vznikne tabulka, kde škrtneme všechny řádky, ve kterých je v pravém sloupci sudé číslo. Ve zbylé tabulce sečteme všechna čísla z prvního sloupce

$$85 + 170 + 680 + 2700 = 3635$$

Součet je roven hledanému součinu čísel 85 . 43. Přesvědčte se o tom sami.

Podobným způsobem můžete znásobit čísla zapsaná také římskými číslicemi. Zkuste vypočítat součin čísel (1). Násobení dvěma a dělení dvěma lze provádět z hlavy. Také sčítání musíme provádět z hlavy, můžeme ovšem sčítat postupně.

O tom, že tento postup násobení dvou čísel vede vždy ke správnému výsledku, si povíme příště. Využijte proto doby do vyjití příštího čísla Rozhledů k tomu, abyste se pokusili sami odůvodnit správnost egyptské metody násobení. Podaří-li se vám to, napište nám. Jména správných řešitelů uveřejníme.

Podle knihy Claudie Zaslavské: Africa Counts (Afrika počítá)

Hrátky se sčítáním

Stejná písmena nahraďte stejnými číslicemi:

a)
```
      A
    B A
  C B A
    B A
      A
  -----
  D D D
```

b)
```
        A
      B B
    C C C
      B B
        A
  -------
  A A A A
```

c)
```
  A A A A A
    B B B B
        C
    B B B B
  A A A A A
  ---------
  B B B B B
```

d)
```
        A
    C B A
  D C B A
    C B A
      A
  -------
  E E E E
```

e)
```
  A A A A
  A B B A
  A C C A
  A B B A
  A A A A
  -------
  D D D D
```

f)
```
      B A
    C B A
  D C B A
    C B A
      B A
  -------
  E E E E
```

Každá úloha má jen jedno řešení — ověřeno počítačem.
(Řešení je na str. 302.)

Jindřich Pěnčík

Babylónské „oslí čelo"

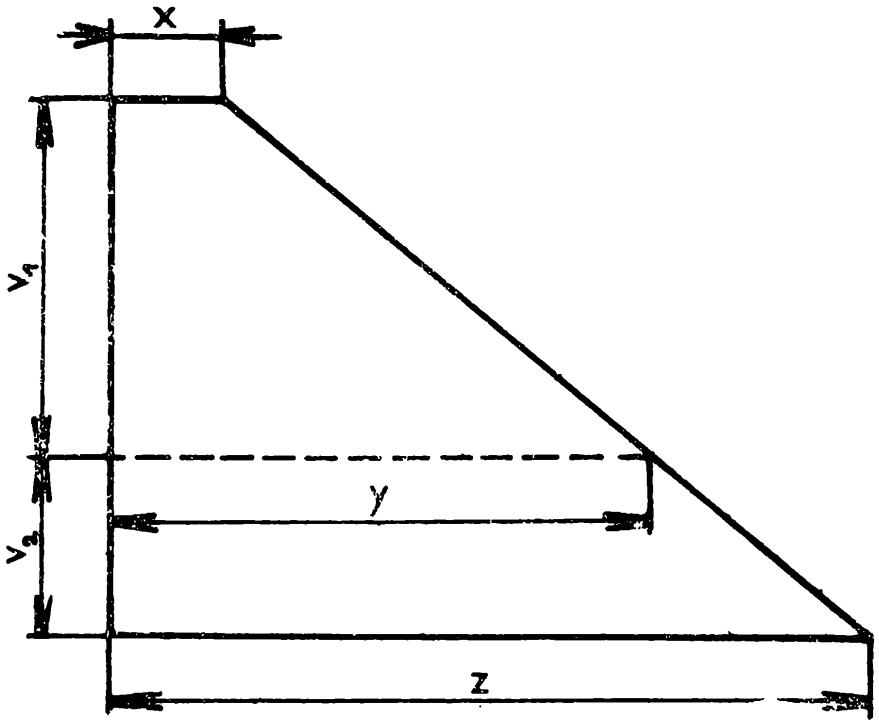
O babylónských matematicích je všeobecně známo, že po celá dlouhá staletí, ba tisíciletí počítali v šedesátkové soustavě a že dovedli úspěšně vyřešit mnoho praktických úloh. Zabývali se problémy, které se týkaly vybírání různých poplatků, určování množství osevu na pole různých tvarů a velikostí. Zajímavou počtářskou a měřickou tematiku nabízely zejména meliorační práce, zeměměřičství, stavebnictví a válečnictví. Tisíc let před Pythagorem znali Babylóňané pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran vyjadřovali trojicemi přirozených čísel, např. (45; 60; 75), (65; 72; 97), (3367; 3456; 4825).

Úlohu, kterou se budeme zabývat, lze dát do souvislosti s požadavkem rozdělení pole závlahovým kanálem. Požaduje taková tři přirozená čísla, která by vyjadřovala délky obou základen pravoúhlého lichoběžníku a délku jeho příčky (nikoli střední), jež rozděluje tento lichoběžník na dvě části stejného obsahu. Pro samotný lichoběžník byl zvolen název „oslí čelo".

Babylóňané vypočítali, možná jen zjistili a pak si početně ověřili, že jde o uspořádané trojice přirozených čísel

[1; 5; 7], [7; 13; 17], [17; 25; 31] . . .

Proveďme si kontrolu správnosti těchto číselných údajů ve smyslu označení na obr. 1.



Obr. 1

Pro $x = 1$, $y = 5$ a $z = 7$ platí:

$$S_1 = \frac{(1 + 5) \cdot v_1}{2} = 3v_1$$

$$S_2 = \frac{(5 + 7) \cdot v_2}{2} = 6v_2$$

$S_1 = S_2$, proto $3v_1 = 6v_2$ a odtud $v_1 : v_2 = 2 : 1$

Rovnost obsahů obou částí lichoběžníku nastane s podmínkou, že pro délky jejích výšek v_1 a v_2 zároveň platí poměr 2 : 1.

Obdobně lze zjistit, že pro $x = 7$, $y = 13$ a $z = 17$ musí zároveň platit $v_1 : v_2 = 3 : 2$ a pro $x = 17$, $y = 25$ a $z = 31$ musí být poměr $v_1 : v_2$ roven 4 : 3.

Dá se dokázat, že uspořádaných trojic přirozených čísel $[x; y; z]$ požadovaných vlastností je nekonečně mnoho a že je lze určit pomocí vzorců:

$x = 2n^2 - 1$, $y = n^2 + (n + 1)^2$, $z = 2(n + 1)^2 - 1$, kde $n \in \mathbf{N}$; $\mathbf{N}$ je množina všech přirozených čísel. Velikosti příslušných výšek v_1 a v_2 budou zároveň vytvářet celočíselný poměr

$$(2n^2 + 3n + 1) : (2n^2 + n)$$

O rozluštění uvedeného problému, které se neoprávněně přisuzuje Egypťanům, Řekům nebo Arabům, se zasloužil A. A. Vajman. Příslušné klínopisné texty jsou uloženy v depozitáři leningradské Ermitáže.

Josef Trejbal

Úlohy ze zahraničních časopisů

Úloha 1. Můj bratr dosáhne v roce x^2 věku x let. Ve kterém roce se narodil?

Úloha 2. Lakomý stařec zakopal poklad jeden metr hluboko. Zdálo se mu to málo, proto poklad vykopal a prohloubil jámu do dvou metrů. Opět se mu to zdálo málo, proto poklad znovu vykopal a prohloubil jámu o další metr, tj. do 3 metrů. Poté, co jámu zasypal, připadalo mu to stále málo, a tak prohloubil jámu do 4 metrů. I to mu bylo málo, a tak lakomec posléze prohloubil jámu do 5 metrů, 6 metrů, 7 metrů atd. Zemřel vyčerpáním 1015 den. Spočítejte, do jaké hloubky se stařec prokopal, víte-li, že k vykopání jámy hluboké n metrů potřebuje n^2 dnů. Čas potřebný k zasypávání jámy zanedbejte.

Úloha 3. Dvě čísla se budou nazývat zrcadlová tehdy, když jedno získáme z druhého převrácením pořadí cifer v dekadickém zápise. Zrcadlová čísla jsou tedy např. 5421 a 1245. Součin dvou zrcadlových čísel je roven 92 565. Která jsou to čísla?

Úloha 4. Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a jeho hranicí nazvěme sjednocení úseček AB, BC, CD, DA. Označme písmeny S_1, S_2, S_3, S_4 středy úseček AB, BC, CD, DA v tomto pořadí. Sestrojme úsečky DS_1, AS_2, BS_3, CS_4 (kreslete si obrázek). Tím je čtyřúhelník $ABCD$ rozložen na 4 trojúhelníky, 4 čtyřúhelníky, jejichž jedna strana vždy leží na hranici čtyřúhelníka $ABCD$, a 1 čtyřúhelník, který je s hranicí čtyřúhelníku $ABCD$ disjunktní a který nazveme vnitřním. Dokažte, že obsah vnitřního čtyřúhelníka je roven součtu obsahů trojúhelníků.

Úloha 5 (obtížnější). Dokažte, že předposlední cifra čísla 3^n je sudá pro libovolné přirozené číslo $n > 2$.

Úloha 6. Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a v jeho vnitřku zvolme zcela libovolně bod P. Označme písmeny X, Y, Z paty kolmic spuštěných na strany AB, BC, AC v tomto pořadí z bodu P. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků AXP, BYP, CZP je roven součtu obsahů trojúhelníků PXB, PYC, PZA.

Úloha 7 (obtížnější). Dokažte, že pro libovolná tři nezáporná čísla x, y, z splňující podmínky $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$, platí nerovnost

$$\frac{x}{1 - x^2} + \frac{y}{1 - y^2} + \frac{z}{1 - z^2} \geqq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Tomáš Schütz

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

10. Je dán trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c. V rovině tohoto trojúhelníku sestrojte bod D tak, aby konvexní čtyřúhelník o vrcholech A, B, C, D měl co nejmenší obvod a zároveň měl dvakrát větší obsah než trojúhelník ABC.
(Došla 3 řešení.)

Jaroslav Švrček

Jediné správné řešení zaslal *Radek Porazil*, 4D G M. Koperníka v Bílovci. Otiskujeme však poněkud jednodušší a kratší autorovo řešení.

Označení vrcholů daného trojúhelníku ABC zvolme tak, aby pro čísla $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ platily nerovnosti

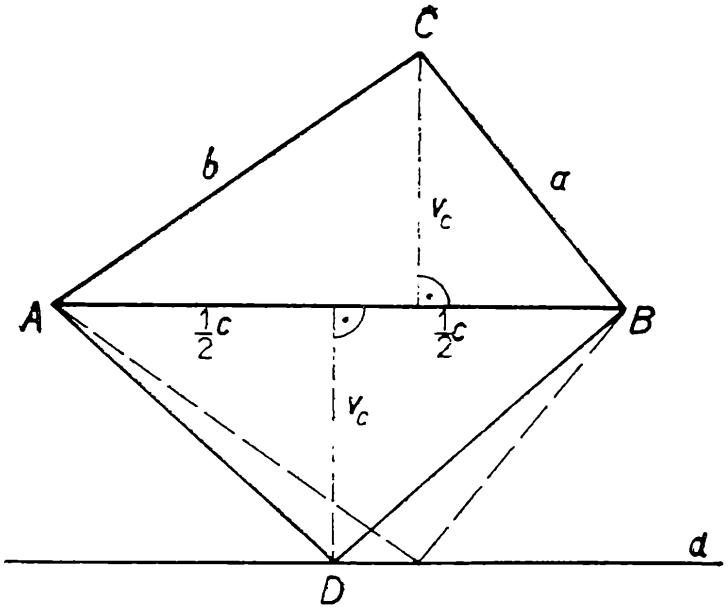
$$a \leqq b \leqq c\,. \tag{1}$$

Z toho a ze vzorce pro obsah trojúhelníku plyne, že pro výšky v_a, v_b, v_c trojúhelníku ABC platí nerovnosti

$$v_a \geqq v_b \geqq v_c\,. \tag{2}$$

Hledaný bod D může ležet uvnitř poloroviny opačné k polorovině ABC nebo uvnitř poloroviny opačné k polorovině BCA nebo uvnitř poloroviny opačné k polorovině CAB. Z toho plyne, že musíme vyšetřovat čtyřúhelníky $ADBC$, $BDCA$, $CDAB$.

Sestrojme nejprve bod D čtyřúhelníku $ADBC$. Podle podmínky naší úlohy má být obsah trojúhelníku ABD stejný jako obsah trojúhelníku ABC. Proto musí být výška ke straně AB trojúhelníku ABD stejná jako výška ke straně AB trojúhelníku ABC. Z toho plyne, že bod D leží na přímce $d \| AB$, která má od přímky AB vzdálenost v_c (obr. 1). Ze



Obr. 1

všech takto sestrojených trojúhelníků ABC má nejmenší obvod ten, pro který je součet $|AD| + |BD|$ nejmenší. Užitím osové souměrnosti s osou d snadno zjistíme, že to nastane, právě když trojúhelník ABD je rovnoramenný se základnou AB.

Obdobně bude mít ze všech trojúhelníků BCD ležících v polorovině opačné k polorovině BCA nejmenší obvod (při výšce ke straně BC rovné v_a) rovnoramenný trojúhelník BCD' se základnou BC. Obdobně tak dostaneme rovnoramenný trojúhelník CAD'' ležící v polorovině opačné k polorovině CAB s výškou ke straně CA rovnou v_b. Tak sestrojíme tři konvexní čtyřúhelníky, a to $ADBC$, $BD'CA$, $CD''AB$. Obvod prvního z nich je roven součtu $|BC| + |CA| + 2\,|AD|$, tj

$$a + b + 2\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + v_c^2} = a + b + \sqrt{c^2 + 4v_c^2}$$

Obdobně jsou obvody čtyřúhelníků $BD'CA$, $CD''AB$ po řadě

$$b + c + \sqrt{a^2 + 4v_a^2}\,, \quad c + a + \sqrt{b^2 + 4v_b^2}\,.$$

Nyní musíme zjistit, který z těchto tří obvodů je nejmenší. Je-li o_3 obvod daného trojúhelníku ABC a o_4 obvod kteréhokoli ze tří sestrojených čtyřúhelníků, pak z rovnosti $R = o_4 - o_3$ plyne, že o_4 je nejmenší, právě když je číslo R nejmenší. Protože je $o_3 = a + b + c$, je

$$R_D = \sqrt{c^2 + 4v_c^2} - c\,, \quad R_{D'} = \sqrt{a^2 + 4v_a^2} - a\,, \quad R_{D''} = \\ = \sqrt{b^2 + 4v_b^2} - b \tag{3}$$

Funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ je pro $x > 0$, $y > 0$ funkcí proměnných x, y, která je zřejmě neklesající v proměnné y a je nerostoucí v proměnné x, jak plyne z této rovnosti:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

Protože je $4v^2 = (2v)^2$, je podle řádku (3) $f(a, 2v_a) = R_{D'}$, $f(b, 2v_b) = R_{D''}$, $f(c, 2v_c) = R_D$. Z toho, z řádků (1), (2) a z výše uvedených vlastností funkce $f(x, y)$ plyne, že je

$$R_{D'} \geqq R_{D''} \geqq R_D\,.$$

Z čísel $R_{D'}$, $R_{D''}$, R_D je tedy nejmenší číslo R_D, které přísluší k čtyřúhelníku $ADBC$, jehož vrchol D leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině ABC, přičemž podle řádku (1) je AB nejdelší strana daného trojúhelníku ABC.

OLYMPIÁDY A SOČ

10. ročník středoškolské odborné činnosti ve fyzice

Dr. Z. KLUIBER, CSc., ČSAV Praha, V. KŘIVOHLÁVKOVÁ, PF Hradec Králové

10. celostátní přehlídka prací středoškolské odborné činnosti se uskutečnila v Prešově v posledním červencovém týdnu r. 1988. Přehlídka probíhala na střední průmyslové škole strojní. Vedení školy vytvořilo optimální podmínky pro jubilejní vyvrcholení nejrozšířenější odborné aktivity žáků středních škol.

Na celostátní přehlídku středoškolské odborné činnosti v oboru fyzika bylo z krajských přehlídek doporučeno celkem 23 prací. Autoři těchto prací byli žáci gymnázií (Bratislava, Brno, Bruntál, České Budějovice, Dačice, Hradec Králové, Humenné, Karlovy Vary, Kolín, Kralupy n. Vlt., Litoměřice, Martin, Ostrava, Pardubice, Pezinok, Plzeň, Poprad, Praha, Ružomberok, Žďár) a střední průmyslové školy (Trnava). A bohužel jen v Pezinoku, Humenném a Karlových Varech, jak uvedli žáci, existují fyzikální kroužky (které by měly být základem práce ve středoškolské odborné činnosti), avšak do práce v nich byli zapojeni pouze dva žáci (vedoucími uvedených kroužků byli pracovník hvězdárny, učitelé). Jen dva žáci se již středoškolské odborné činnosti v minulých letech zúčastnili, do krajského kola postoupil jen jeden.

Obhajované práce z fyziky na celostátní přehlídce lze rozdělit do čtyř skupin: astronomie — 8 prací, využití počítačů pro fyzikální měření — 4 práce, využití počítačů pro výpočet hodnot fyzikálních veličin — 3 práce, experimentální fyzika — 8 prací.

Odborná hodnotící komise celostátní přehlídky v oboru fyzika vyhodnotila jako nejlepší práce:

1. *Martin Baier*, gymnázium Ostrava: Gravitační ovlivnění meteorického roje Kvadrantid planetami Jupiter a Saturn. (Práce se zabývá studiem gravitačního působení Jupitera a Saturna na meteorické roje. Autor ukázal, že rušivým vlivem obou planet se mění dráha roje — byly vzaty do úvahy údaje po dobu 30 let. Řešení problému bylo provedeno užitím počítačů, byly získány výsledky, které budou uplatněny i v rámci dalšího výzkumu.)

2. *Vojtěch Klusáček*, gymnázium Praha: Měření cívek, kondenzátoru a LC obvodu za pomoci osobního mikropočítače. (Autor sestrojil stykové rozhraní pro osobní mikropočítač ZX Spectrum, které umožňuje měření

indukčností, kapacit a frekvenčních charakteristik LC obvodu; počítá se s využitím zařízení v rámci vysokoškolských praktik.)

3. *Stanislav Daniš—Vojtěch Franc*, gymnázium Karlovy Vary: Světlé křivky rentgenových zdrojů BY Dra a II Peg. (Autoři stanovili jasnost obou zdrojů v optickém oboru v časovém intervalu 8 let na základě využití archivních materiálů z Astronomického ústavu ČSAV v Ondřejově).

4. *Igor Baník—Ilja Martišovitš*, gymnázium Bratislava: Použitie osobného počítača pri meraní tepelných parametrov látok. Práce získala čestné uznání ÚR ČSVTS.

5. *Linda Chaloupková*, gymnázium Bruntál: Vliv vytvrzování na mechanické vlastnosti hliníkových slitin. Práce získala čestné uznání ÚV SSM.

6. *Jaroslav Moravec—Zdeněk Štěpka*, gymnázium Hradec Králové: Rozmítaný generátor funkcí s měřícími obvody. Práce získala čestné uznání ÚR ČSVTS.

7. *Pavol Šompľák—Marián Parada*, gymnázium Humenné: Rektifikácia svetelnej krivky zákrytovej dvojhviezdy.

8. *Ondrej Červinka—Radim Novotný*, gymnázium Pardubice: Měření fyzikálních veličin prostřednictvím interface k IQ 151.

9. *Jozef Kristek*, gymnázium Poprad: Určovanie dráh nebeských telies pomocou počítača.

10. *Patrik Bánik*, SPŠ stavebná Trnava: Určovanie výšok útvarov na Mesiaci. Práce získala čestné uznání časopisu VTM.

Témata prací byla zhruba z jedné čtvrtiny žákům nabídnuta z patronátních závodů škol, z výzkumných ústavů, z vysokých škol atd. Ve většině případů však téma práce vyplynulo z dlouhodobého zájmu o obor, tj. žáci jej získali na základě svého přání práci zpracovat od učitele fyziky, v rámci odborné praxe, ze studia odborné literatury. Kolektivně bylo zpracováno 9 prací. Konzultanty praxí žáků byli vědečtí a odborní pracovníci, vedoucí kroužků, učitelé fyziky a vysokoškolští učitelé; při zpracování jedné práce působil jako konzultant student vysoké školy, pouze jediná práce byla zpracována bez účasti konzultanta. Pomoc konzultanta spočívala především v poskytnutí nezbytných rad a v usměrnění v postupu řešení úkolu, v sestavení osnovy práce, v zajištění potřebné odborné literatury, v umožnění práce na jinak těžko dostupných přístrojích a zařízeních, v upozornění na chyby a nedostatky. Žákům pomáhali rodiče: zajišťovali především konečné úpravy práce — přepsání textu, zpracování fotodokumentů, kopií, svázání práce; důležitá byla i morální podpora žáků.

Žáci většinou studovali z odborných knih a časopisů, které získali ve školních a universitních knihovnách a studovnách, někteří se opírali i o speciální literaturu poskytnutou konzultanty, o starší práce zpracované ve středoškolské odborné činnosti (v jistém smyslu se projevuje

odborná návaznost na dříve zpracované práce středoškolské odborné činnosti, především jde-li o práce vzniklé na bázi spolupráce školy s patronátním podnikem), o technické příručky, odborné články, vědecké práce, ročenky. Právě se sháněním literatury měli žáci velké problémy — setkávali se s nedostatkem moderní literatury přístupné jejich možnostem (chybí u nás práce psané na vědecko-populární úrovni známé ze SSSR a dalších zemí), s nedostatkem překladů odborné literatury.

U žáků jsou v největší oblibě časopisy Věda v technika mládeži a Rozhledy matematicko-fyzikální. Dále žáci sledují časopisy: Elektronika, Amatérské rádio, Elektro, Vesmír, Kozmos, Říše hvězd, Sdělovací technika; Kvant, Computer, Bajtek. Jazykové znalosti žáků jsou vcelku dobré: ruština, angličtina, dále němčina, u jednotlivců polština, francouzština.

Měření, resp. vlastní tvůrčí práci věnovali žáci zhruba 250 hodin. Komplexní vyhotovení práce (zahrnuje studium literatury, tvůrčí práci, zpracování a úpravu práce) představuje pak asi 350 hodin. Žáci odhadují jednotlivé díly práce: komplikace — 15 %, vlastní tvůrčí práce — 65 %, aplikace — 20 %. 12 prací bylo prakticky využito, z toho 4 přímo ve výuce fyziky, 3 v laboratorních cvičeních, 2 v odborném kroužku; jedna práce je součástí podkladů pro udělení zlepšovacího návrhu, dvě byly uplatněny i v rámci řešení dílčích problémů v základním výzkumu.

Po vlastní přehlídce prací byla uspořádána beseda žáků se členy odborné hodnotící komise oboru fyzika a dále pracovníky, které na tuto akci vyslala Slovenská akademie věd (prof. ing. M. Šlezár, DrSc., člen korespondent ČSAV a SAV, ředitel Ústavu experimentálnej metalurgie SAV, Košice; RNDr. M. Báno, CSc., Ústav experimentálnej fyziky SAV, Košice). Prof. Šlezár charakterizoval základní výzkum v ČSSR, účast Československa ve výzkumu v pěti prioritních směrech — elektronizaci, jaderné energetice, nových materiálech a technologiích, biotechnologiích, automatizaci a robotizaci. Vzhledem k tomu, že měl možnost seznámit se s pracemi žáků na celostátní přehlídce středoškolské odborné činnosti v oboru fyzika, zdůraznil význam odborné práce žáků střední školy a i dosažených výsledků ve prospěch jejich předpokládané budoucí odborné a vědecké práce. Všechny dotazy žáků svědčí o jejich hlubokém studiu fyzikálních problémů, o velkém zájmu zejména o moderní poznatky z jednotlivých oborů fyziky. Takto pojatá beseda — informace o rozvoji československé vědy, fyziky, živá diskuse nad nejnovějšími objevy fyziky — se stala pro žáky významným odborným přínosem vzhledem k jejich účasti na celostátní přehlídce středoškolské odborné činnosti. Besedy se zúčastnila také tajemnice ÚV SSM Hana Entlerová; besedu řídil předseda Ústřední hodnotící komise 10. celostátní přehlídky středoškolské odborné činnosti RNDr. Z. Kluiber, CSc.

Nadstavbou nad celostátní přehlídkou středoškolské odborné čin-

nosti v oboru fyzika se stala 5. *Letní škola mladých vědců oboru fyzika*, uspořádaná Centrem pro mládež, vědu a techniku ÚV SSM a Fyzikálním ústavem ČSAV.

I v dalším období by měly být práce z fyziky ve středoškolské odborné činnosti zaměřeny zejména na problémy z astronomie a kosmonautiky, fyziky pevných látek, využití počítačů ve fyzikálním výzkumu, studium vztahů fyziky a ekologie, problémy jaderné fyziky, vzájemné vztahy fyziky s ostatními přírodními vědami, modelování fyzikálních dějů na počítači, fyzikální základy technických zařízení, studium problémů biofyziky atd.

Další rozvoj středoškolské odborné činnosti, která vstupuje ve školním roce 1988—89 do nové etapy své existence (22 oborů, nové organizační a obsahové pojetí), by měl zahrnout posílení její výchovně vzdělávací složky: umožnit žákům systematické konzultace při zpracovávání prací, rozšířit jejich možnosti při seznamování se s aktuálními úkoly fyziky, motivovat je pro studium fyziky a ostatních technických oborů. Obsahová i organizační zkvalitňování středoškolské odborné činnosti musí začít zejména od smysluplné práce odborných kroužků na školách, od kvalitních školních přehlídek, objektivního posuzování podílu samostatné práce žáků. Společná práce ve středoškolské odborné činnosti v oboru fyzika a ve fyzikální olympiádě musí nadále napomáhat rozvoji zájmu žáků o fyziku, rozvoji talentů ve fyzice.

Fyzikální olympiáda v BLR

Dr. IVO VOLF, ÚVFO Hradec Králové

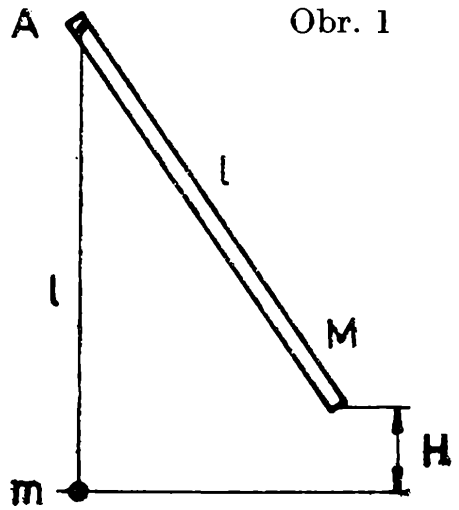
Bulharské družstvo se účastní mezinárodní fyzikální olympiády od samého začátku; i když nedosáhlo pronikavých výsledků, řada soutěžících se umístila velmi dobře. Z iniciativy ministerstva osvěty BLR je od roku 1969 každoročně organizována národní fyzikální olympiáda pro žáky 6.—11. ročníků střední školy. Do začátku února každého školního roku organizují učitelé na školách 1. kolo soutěže; žákům jsou zadány tři teoretické úlohy, které připravují učitelé. Po opravě úloh jsou stanoveni postupující do dalšího kola. Do konce února je na vybraných školách uspořádáno 2. kolo soutěže pro všechny kategorie. Úlohy rozesílá ústřední komise fyzikální olympiády. Na základě výsledků v tomto kole jsou účastníci vybíráni do prázdninové školy fyziky. Žáci 10. a 11. ročníků (výjimečně 9. ročníků), kteří získali největší počet bodů, postupují do dalšího kola, které probíhá koncem března. Z jeho výsledků jsou vybráni nejlepší soutěžící v počtu asi 60, kteří se účastní tzv. výběrového

kola. Jeho cílem je objevit žáky talentované pro fyziku, které má smysl připravovat na mezinárodní fyzikální olympiádu. Ústřední komise připravuje každým rokem 4 teoretické úlohy, na jejichž řešení mají soutěžící 5 h času. Náročnost úloh je značná, na jejich řešení nepostačuje jen školní příprava soutěžících. Pro 25 nejlepších je pak organizováno pokračování — dvě experimentální úlohy, na jejichž řešení je vymezena doba 4 h. Každá teoretická úloha je hodnocena 15 body, každá experimentální 20 b, účastník může obdržet 100 bodů. Nejlepší výsledky bývají zpravidla mezi 70 a 80 body, avšak mnoho účastníků se neprobojuje ani do experimentální části. Podle dosažených výsledků je vybráno 10 účastníků další měsíční přípravy (asi 25 pracovních dní). Těmto účastníkům je nabídnuto přijetí na fyzikální fakultu sofijské univerzity (bez přijímacích zkoušek), jejíž pracovníci se podílejí na výběru, organizaci i na přípravě budoucích účastníků MFO.

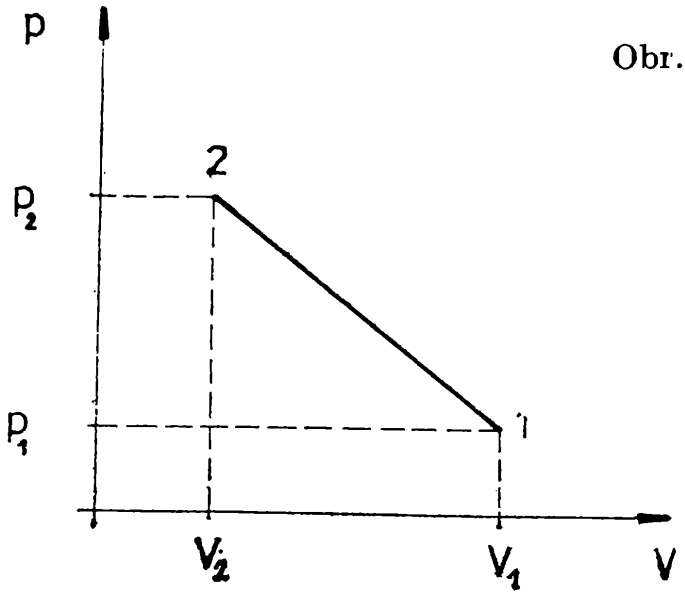
Soutěžící mají možnost se na všechna kola fyzikální olympiády připravovat formou dobře organizované mimotřídní činnosti (při práci fyzikálních kroužků na školách), popř. v tzv. fyzikálních školách, organizovaných v každé oblasti. Není neobvyklé, že kromě povinné výuky se účastní tito soutěžící dalších 4 h až 6 h týdně zájmové činnosti v oblasti fyziky. Uvedeme dále několik úloh z bulharské fyzikální olympiády; pokuste se je sami vyřešit.

Ú 1: Matematické kyvadlo s kuličkou o hmotnosti m a délce l je zavěšeno v témž bodě A společně s homogenní tyčkou téže délky a hmotnosti M. Vzhledem k vodorovné ose procházející bodem A mohou obě tělesa volně kmitat (obr. 1). Tyčku odkloníme od svislého směru tak, že dolní konec je ve výšce H nad místem, které zaujímá v rovnovážné poloze. Při pohybu zpět, který nastane po uvolnění tyčky, narazí tyčka do kyvadla. Ráz je dokonale nepružný, doba trvání rázu velmi malá. Odporové síly proti pohybu těles zanedbáváme.

a) Určete, jak se budou dále pohybovat obě tělesa po rázu; své tvrzení dokažte.



Obr. 1



Obr. 2

b) Do jaké výšky nad rovnovážnou polohu vystoupí kulička matematického kyvadla i dolní konec tyčky po rázu?

Moment setrvačnosti tyče vzhledem k vodorovné ose procházející koncem tyče je $I = \frac{1}{3} Ml^2$.

Ú 2: Ideální plyn o hmotnosti m a molární hmotnosti M_m se nachází ve válci uzavřeném pístem. Na počátku je objem plynu V_1, tlak plynu p_1. Pak je plyn stlačen na objem V_2, přičemž tlak plynu je p_2. Stlačení probíhá tak, jak je znázorněno na obr. 2 v pV-diagramu úsečkou 1—2.

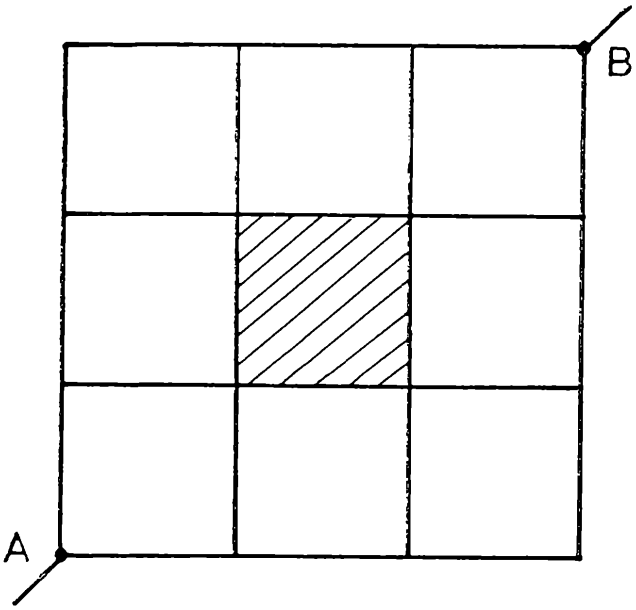
a) Podle jakého vztahu se mění teplota plynu v závislosti na objemu plynu?

b) Načrtněte graf této závislosti $T = f(V)$.

c) Určete maximální teplotu plynu při tomto ději.

Plynová konstanta R je známá.

Ú 3: Na obr. 3 je znázorněna mřížka, představující 9 čtverců. Prostřední z nich je kovová destička s velmi malým odporem. Odpor každé další drátěné tyčky u dalších čtverců je $R_1 = 5\,\Omega$.

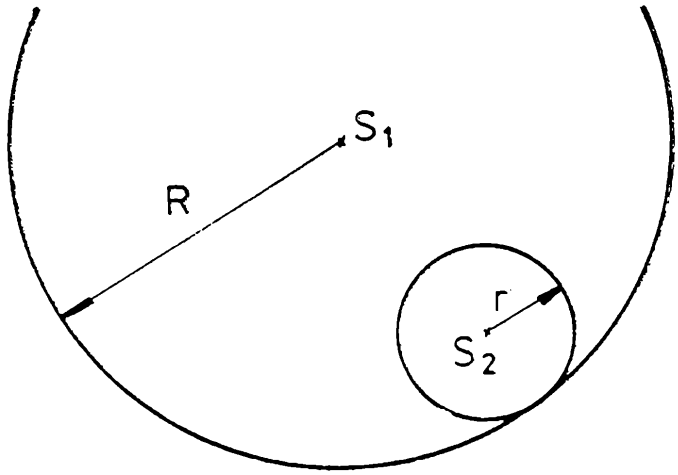


Obr. 3

a) Určete výsledný odpor soustavy mezi body A, B.

b) Určete, jaké proudy protékají jednotlivými větvemi, jestliže mezi body A, B je stálé napětí $U_0 = 80$ V

Ú 4: Dva žáci nosí brýle. Jeden je krátkozraký, druhý je dalekozraký. Když každý z nich si vezme své brýle, vidí jako lidé s normálním zrakem. Jednou si omylem brýle zaměnili. Dalekozraký žák, který si vzal brýle krátkozrakého, poznamenal, že vidí jasně a ostře jen velmi vzdálené předměty. Krátkozraký si vzal brýle dalekozrakého. Z jaké nejmenší vzdálenosti očí od knihy může krátkozraký žák s těmito brýlemi číst drobný tisk, tj. vidí nejostřeji? Při řešení uvažte, že brýle i oční čočka jsou čočky tenké a jsou umístěny jedna těsně vedle druhé.



Obr. 4

Ú 5: Po kružnici o poloměru R (obr. 4) se může bez valivého odporu a bez klouzání valit obruč o hmotnosti m a poloměru r.

a) Dokažte, že pohyb obruče kolem její rovnovážné polohy lze považovat za harmonický pohyb, jestliže výchylka z této polohy je malá.

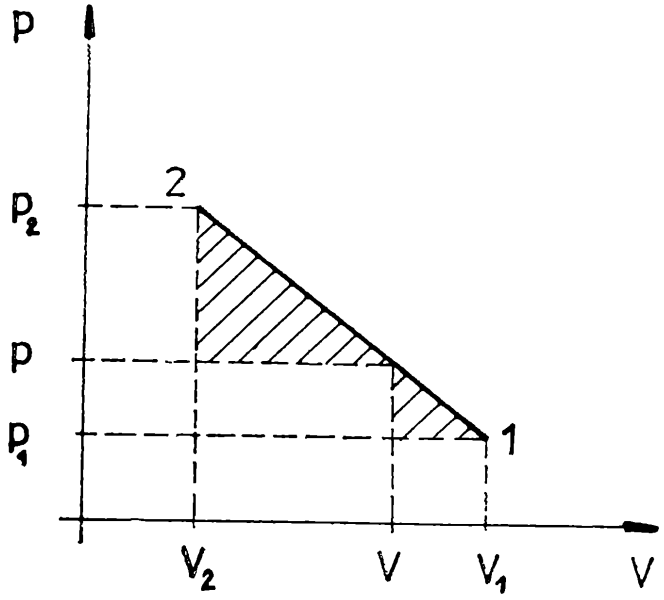
b) Určete periodu malých kmitů obruče kolem rovnovážné polohy.

Jak jste dopadli s řešením? Účastníci bulharské fyzikální olympiády měli na řešení každé úlohy dobu asi 1 h. Ověřte si, zda jste dospěli ke stejným výsledkům jako autoři sbírky [1].

Ú 1: Těsně po nárazu bude mít konec tyče a kulička stejnou rychlost. Pak se kulička dostane do výšky $h_1 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{M}{M + 3m}\right)^2 H$, konec tyčky do výšky $h_2 = \left(\frac{M}{M + 3m}\right)^2 H$.

Ú 2: a) Po studiu grafu vychází $T = \frac{M_m}{mR} (AV^2 + BV)$, kde $A = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2}$, $B = \frac{p_2 V_1 - V_2 p_1}{V_1 - V_2}$

b) Graf je na obr. 5.



Obr. 5

c) Objem pro maximální teplotu určíme $V = \dfrac{p_2V_1 - V_2p_1}{2(p_2 - p_1)}$,

maximální dosažená teplota $T_{\max} = \dfrac{M_m}{2mR} \dfrac{p_2V_1 - V_2p_1}{(V_1 - V_2)\ (p_2 - p_1)}$

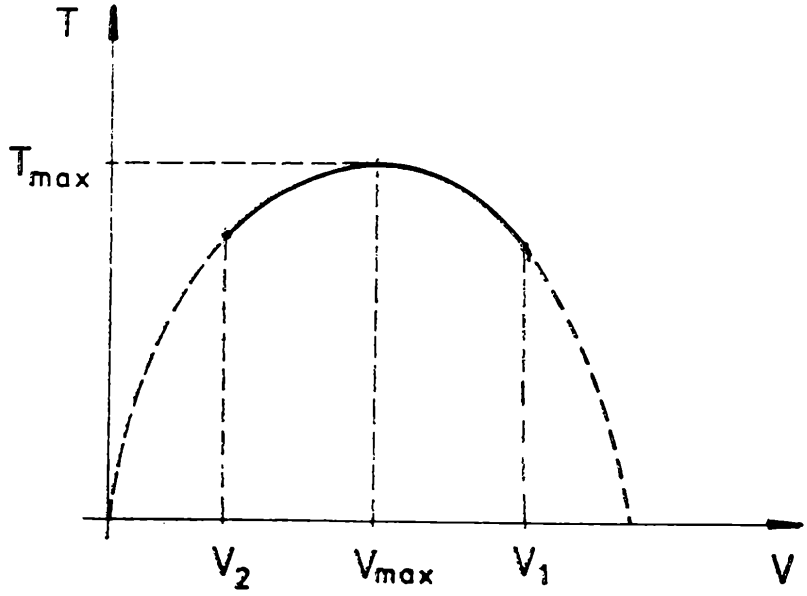
(obr. 6).

Ú 3: a) $R^* = 8\ \Omega$, b) proudy jsou 5A, 3A, 1A, — 1A, — 3A, 10 A.

Ú 4: $x = 12{,}5$ cm.

Ú 5: a) Řešením pohybové rovnice $a = \dfrac{R - r}{2R - r} g \sin \varphi$; pro

$\varphi \to 0$ je $a = \dfrac{R - r}{2R - r} g \varphi$, b) $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{(R - r)\ (2R - r)^2}{g[(R - r)^2 + R^2]}}$



Obr. 6

Použitá literatura:

[1] Velčev, N.—Zadorožnyj, G.: Izbrani zadači ot nacionalnite olimpiady po fizike. Sofia, Narodna Prosveta 1983.

[2] Out-of-School Scientific and Technical Education. Bruxelles, UNESCO 1981.

Řešení „Hrátek" ze str. 290

a) 9 + 79 + 379 + 79 + 9 = 555

b) 1 + 55 + 999 + 55 + 1 = 1111

c) 22 222 + 5 555 + 1 + 5 555 + 22 222 = 55 555

d) 7 + 847 + 3 847 + 847 + 7 = 55 555

e) 1 111 + 1 001 + 1 331 + 1 001 + 1 111 = 5 555

f) 91 + 791 + 3 791 + 791 + 91 = 5 555

INFORMACE

Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v roce 1988

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

Ve dnech 14.—16. 6. 1988 proběhly na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy přijímací zkoušky. V písemné zkoušce z matematiky řešil každý uchazeč jeden ze tří níže uvedených souborů pěti úloh, na jehož vypracování měl devadesát minut čistého času. Abyste měli možnost kontroly, jsou jednotlivé příklady — na rozdíl od přijímacích zkoušek — doplněny výsledky.

Soubor pro uchazeče o matematické obory:

1. Určete všechna reálná čísla x taková, že $\log\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n\right) > 0$

   $\left(\text{Výsledek: právě všechna } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).\right)$

2. Určete všechna reálná čísla a taková, že pro libovolné reálné číslo x platí

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

   (Výsledek: právě všechna $a \in (-1, 2)$.)

3. Určete koeficient při x^4 v mnohočlenu $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$
   Návod: Je $1 + 2x + 3x^2 = 1 + (2x + 3x^2)$
   (Výsledek: 8085.)

4. Kouli o poloměru R je opsán rotační kužel o výšce v. Nalezněte objem tohoto kužele.

   $\left(\text{Výsledek: } \frac{\pi}{3}\,\frac{v^2R^2}{v - 2R}\right)$

5. Určete rovnici přímky p, procházející bodem $A = [4, 2]$ a vytvářející spolu s osami pravoúhlý trojúhelník o obsahu 2.

   $\left(\text{Výsledek: } p_1 : y = x - 2,\ p_2 : y = \frac{x}{4} + 1\right)$

Soubor pro uchazeče o fyzikální obory:

1. Najděte všechna reálná čísla x, pro která

$$x^{2\log^3 x} - \frac{3}{2}\log x = \sqrt{10}$$

(Výsledek: $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$)

2. Určete všechna reálná čísla x, pro která

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$$

$\left(\text{Výsledek: } \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k\pi\right)$

3. Mějme geometrickou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

$$a_1 - a_4 = 189\,,$$
$$a_2 - a_3 = 36$$

Určete a_1 a kvocient q této posloupnosti.

$\left(\text{Výsledek: } a_1 = -3,\ q = 4 \text{ nebo } a_1 = 192,\ q = \frac{1}{4}\right)$

4. Nalezněte délku nejkratší tětivy kružnice $k: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ procházející bodem $M = [4, -3]$

(Výsledek: $2\sqrt{14}$)

5. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou dány přirozenými čísly, délka jedné z odvěsen je rovna 5.
   a) Určete délky stran všech pravoúhlých trojúhelníků, které vyhovují této podmínce.
   b) Pro každý takový trojúhelník nalezněte objem tělesa vzniklého rotací tohoto trojúhelníku kolem přepony.

(Výsledek: a) Existuje jediný, $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$.

b) $V = \frac{1200}{13}\pi$)

Soubor pro uchazeče o učitelské studium:

1. V množině R všech reálných čísel řešte rovnici $p^2x + p = x + p^2$ s neznámou x a s reálným parametrem p. Určete, pro která p má daná rovnice jediný kladný kořen.

(Výsledek: Pro $p = 1$ vyhovuje každé reálné číslo, pro $p = -1$ žádné a pro $p \neq 1$ a pro $p \neq -1$ vyhovuje jediné, a to $x = \frac{p}{p+1}$. Jediný kladný kořen je právě pro $p \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$)

2. Vypočtěte výšku a objem pravidelného čtyřstěnu, jehož hrana má délku 6 cm.

(Výsledek: Výška má délku $2\sqrt{6}$ cm, objem je $V = 18\sqrt{2}$ cm^3.)

3. Určete odchylku přímky p a roviny ϱ. Přímka p je dána parametricky $x = 1 + t$, $y = 3 - t$, $z = \sqrt{2} + 2t$ a rovina ϱ je dána rovnicí $x + z - \pi = 0$.

$\left(\text{Výsledek: Odchylka má velikost } \frac{\pi}{3}.\right)$

4. Určete všechna $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pro něž platí

$$|\sin^2 x - 1| = |\cos x| - \frac{1}{4}.$$

$\left(\text{Výsledek: } \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$

5. Užitím vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti určete součet všech přirozených čísel dělitelných třemi, která jsou větší než 100 a menší než 760. (Výsledek: 94 710)

Pokud vás zajímají údaje o směrném čísle, počtu přihlášených a počtu přijatých na jednotlivé obory pro školní rok 1988—89, najdete je v následujícím přehledu. Nepozastavujte se nad tím, že u některých oborů je počet přijatých vyšší než počet původně přihlášených — na žádost uchazeče může totiž dojít ke změně oboru.

Obor	Směrné číslo	Počet přihlášek	Počet přijatých
Matematická analýza	30	38	33
Přibližné a numerické metody	25	42	28
Pravděpodobnost a matematická statistika	35	19	36
Teoretická kybernetika, matematická informatika a teorie systémů	50	105	50
Fyzika mezních oborů	20	48	20
Fyzika pevných látek	20	17	22
Fyzikální elektronika a mikroelektronika	20	22	21
Optika a optoelektronika	20	25	21
Biofyzika a chemická fyzika	20	18	22
Jaderná fyzika	15	18	15
Učitelství, matematika a fyzika	20	35	21
Učitelství, matematika a výpočetní technika	50	50	51
Učitelství, fyzika a výpočetní technika	20	11	20

Z NOVÝCH KNIH

K. Sedláček—J. Tůma:

ATOM SKRÝVÁ NADĚJI

Atomová a jaderná fyzika osudově poznamenala vývoj lidstva dvacátého století a postavila člověka do mimořádně odpovědné situace, jak dál. Použití jaderné energie pro vojenské účely, ale i havárie atomových elektráren a hrozba radioaktivního zamoření vyvolaly v široké veřejnosti obavy a nedůvěru v další technický pokrok založený na poznatcích jaderné fyziky. Na druhé straně ovšem lidstvo nemá jiné zdroje energie, které by mohly zajistit další rozvoj hospodářství, než jaderné a jaderná technologie a medicina mohou pomoci při řešení mnoha naléhavých problémů. Jedinou cestou je tedy hlubší poznání a pochopení zákonitostí a vývoje jaderné fyziky a techniky tak, abychom mohli vyloučit hrozící nebezpečí a využít těchto výsledků pro dobro člověka.

Proto je třeba uvítat, že nakladatelství Naše vojsko vydalo v loňském roce knížku Karla Sedláčka a Jana Tůmy, zkušených popularizátorů vědy, se sympatickým názvem „Atom skrývá naději". Knížka má 304 stránek, mnoho obrázků a fotografií, vyšla v nákladu 11 500 výtisků a stojí 28,— Kčs.

Obsahově je publikace zaměřena na vývoj a perspektivy jaderné energie a všímá si především dnešní situace a výhledů nejbližší budoucnosti. Výstižně a srozumitelně seznamuje jak se základními principy nejrůznějších jaderných zařízení, tak i s dosaženými výsledky. Autoři navštívili mnoho zajímavých pracovišť u nás i v zahraničí a poutavě zachytili rozhovory s významnými odborníky.

Tak se seznámíme s postupem výstavby našich jaderných elektráren, Ústavem jaderného výzkumu v Řeži, prvním československým tokamakem v Ústavu fyziky plazmatu ČSAV, výrobními podniky i výzkumnými ústavy, ale i s atomovými ponorkami a ledoborci nebo velkými laserovými systémy určenými k zapálení termojaderné reakce.

Pro usnadnění orientace je knížka doplněna přehledem významných historických dat a slovníčkem fyzikálních pojmů. Při výkladu autoři vycházejí z fyzikálních principů ilustrovaných názornými schématy a grafy a ukazují, jak se tyto principy uplatňují v praktických aplikacích. Jediná nepřesnost, která mne zarazila v rozhovoru na str. 35, se týká definice jednotky aktivity becquerelu; ve slovníčku na konci knihy je ovšem tento pojem vysvětlen správně.

Chtěl bych tuto novou a užitečnou knížku doporučit všem, kdo se zajímají o jadernou fyziku a techniku, jejich fyzikální základy, nové úspěchy a perspektivy.

iš

Kalendár M-F: marec 1989

3. 3. 1879 zomrel *William Kingdon Clifford*, anglický matematik. Rozvinul geometriu pohybu, zovšeobecnil kvaternióny na bikvaternióny. Vysoko ocenil činnosť N. I. Lobačevského.

3. 3. 1919 sa v Koroče narodil *Alexej Vasilievič Pogorelov*, sovietsky matematik. Rozpracoval problematiku všeobecnej geometrie a teórie priestorov.

4. 3. 1904 sa v Karse narodil *Abram Izakovič Alichanov*, sovietsky experimentálny fyzik. Zaoberal sa jadrovou fyzikou, fyzikou kozmických lúčov, technikou jadrových reaktorov a urýchlovačov.

4. 3. 1904 sa v Odese narodil *George Gamow*, americký fyzik. Vyriešil zaujímavé problémy v oblasti kvantovej mechaniky, atómovej a jadrovej fyziky, astrofyziky i kozmológie. Napísal podnetné vedeckopopulárne knižky.

8. 3. 1804 sa narodil *Alvan Clark*, americký optik a astronóm. Zhotovil objektívy veľkých rozmerov, objavil Síriovho sprievodcu.

8. 3. 1879 sa vo Frankfurte nad Mohanom narodil *Otto Hahn*, nemecký chemik a fyzik. Študoval radioaktivitu, objavil štiepenie atómového jadra uranu.

8. 3. 1914 sa v Minsku narodil *Jakob Borisovič Zeľdovič*, sovietsky fyzik. Napísal viac než 500 vedeckých prác z fyziky, chémie a matematiky. Prispel k rozvoju jadrovej energetiky, relativistickej astrofyziky a kozmogónie.

9. 3. 1564 sa narodil *David Fabricius*, nemecký astronóm. Objavil prvú známu premennú hviezdu Miru Ceti.

9. 3. 1869 sa narodil *Veniamin Fedorovič Kagan*, sovietsky matematik. Prispel k axiomatizácii geometrie, rozvinul tenzorový počet.

12. 3. 1824 sa v Kráľovci (dnes Kaliningrad) narodil *Robert Gustav Kirchhoff*, nemecký fyzik. Spolu s Bunsenom objavil princíp spektrálnej analýzy. Objavil zákony pre výpočet prúdov v elektrickej sieti.

13. 3. 1899 sa v Middletowne narodil *John Hasbrouck van Vleck*, americký fyzik. V roku 1977 dostal za základný teoretický výskum elektrónovej štruktúry magnetických a neusporiadaných sústav Nobelovu cenu.

14. 3. 1879 sa v Ulme narodil *Albert Einstein*, americký fyzik nemeckého pôvodu. Vytvoril špeciálnu a všeobecnú teóriu relativity, prispel k rozvoju kvantovej teórie a štatistickej fyziky.

15. 3. 1969 zomrel *Alexander Alexejevič Lebedev*, sovietsky fyzik. Pracoval v oblasti interferencie, fotoelektrických javov, v elektrónovej optike.

16. 3. 1859 sa v Turinskych Rudnikoch narodil *Alexander Stepanovič Popov*, ruský fyzik a elektrotechnik. Prispel k prenosu signálov

elektromagnetickou cestou, zostrojil anténu a iskrový prístroj pre bezdrôtovú telegrafiu.

18. 3. 1964 v Stockholme zomrel *Norbert Wiener*, americký matematik. Pracoval v oblasti teórie pravdepodobnosti a štatistiky, položil základy kybernetiky a teórie informácie.

21. 3. 1884 sa v Overiseli (Michigan, USA) narodil *Georg David Birkhoff*, americký matematik. Prispel k rozvoju teórie riešenia diferenciálnych rovníc, všeobecnej teórie systémov a matematickej fyziky.

22. 3. 1394 sa narodil *Muhhamad Taragaj Ulug Beg*, uzbecký sultán, astronóm a matematik. Spresnil katalóg hviezd, založil observatórium v Samarkande.

23. 3. 1749 sa v Beaumont-en-Auge narodil *Pierre Simon Laplace*, francúzsky astronóm, fyzik a matematik. Vydal významný päťzväzkový Traktát o nebeskej mechanike, vyslovil hypotézu o vzniku slnečnej sústavy. Ovplyvnil metódy matematickej fyziky.

24. 3. 1809 sa v St. Omer narodil *Joseph Liouville*, francúzsky matematik. Rozvinul teóriu eliptických funkcií, dokázal podnetné vety v teórii analytických funkcií a štatistickej mechanike.

24. 3. 1884 sa v Maastrichte narodil *Peter Joseph Debye*, holanský fyzik a chemik. Objasnil štruktúru molekul, rozpracoval interferenčnú metódu röntgenových lúčov.

26. 3. 1859 sa v Hildesheime narodil *Adolf Hurwitz*, nemecký matematik. Rozvinul teóriu funkcií komplexnej premennej, algebru i teóriu čísel.

26. 3. 1974 zomrel *Edward Condon*, americký fyzik. Zaoberal sa kvantovou mechanikou, atómovou a jadrovou fyzikou, molekulovou spektroskopiou. Vytvoril teóriu alfa rozpadu.

30. 3. 1914 zomrel *John Henry Poynting*, anglický fyzik. Študoval elektrické a magnetické javy, prenos energie, tlak svetla.

31. 3. 1894 zomrel *Pavel Nikolajevič Jabločkov*, ruský elektrotechnik. Vynašiel elektrickú oblúkovú lampu. Jeho patenty získali ocenenie na svetovej výstave v Paríži roku 1878. *dj*

REDAKČNÍ KRUH

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava, dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., ÚK Prah; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Osudy kamarádů A, B, C

Kdo z vás četl sbírku humoristických povídek *Stephena Leacocka* „Literární poklesky", jistě si vzpomíná na dojemné příběhy tří kamarádů A, B a C. Byli to hlavní představitelé, kteří vystupovali ve sbírkách příkladů z aritmetiky známých jako „slovní úlohy" V těchto úlohách A, B a C většinou vykonávali nějakou pracovní činnost, jako je kopání příkopů, pumpování vody do (často děravých) nádrží, rovnání dříví, anebo soutěžili v pohybu nejrůznějšího druhu. Ve zvláště komplikovaných úlohách si zvali na výpomoc ještě kamaráda D.

Leacock uvádí některé z těchto typických úloh starých sbírek: „A vykoná za jednu hodinu tolik práce, kolik B za dvě hodiny nebo C za čtyři hodiny. Vypočtěte, jak dlouho jim ta práce trvá." Nebo „A, B a C kopají příkop. A vykope za jednu hodinu dvakrát tolik než B a B kope dvakrát rychleji než C. Vypočtěte, za jak dlouho atd."

Z těchto a podobných příběhů se Leacockovi podařilo zrekonstruovat životní osudy a povahové vlastnosti tří kamarádů. Zjistil, že A je neobyčejně výkonný a vytrvalý muž, který dokáže nepřetržitě osmačtyřicet hodin závodit v chůzi a šestadevadesát hodin pumpovat; přitom vůbec nejí a nespí. Vždycky vítězí, při závodění používá nejrychlejších dopravních prostředků, neustále se sází a vnucuje svou vůli B a C. B je celkem klidný a tichý člověk, který dosahuje při závodění a pumpování jen průměrných výsledků a podřizuje se vůli A. Nejhůř je na tom C, na kterého vždy připadne děravá nádrž. Je zakrslý a neduživý, stálé kráčení a pumpování mu podlomilo zdraví a pocuchalo nervy. Při posledním pumpování přepjal své síly a zemřel vyčerpáním.

Zajímal jsem se o další osudy alespoň kamarádů A a B a nahlédl proto do sbírky příkladů F. Bělouna. Jak se však doba změnila! Pumpování do nádrží dnes obstarávají čerpadla (velkého, středního a malého výkonu), výkopy jsou většinou mechanizovány a palivové dříví už nikdo nerovná. Ve slovních úlohách soutěží žáci v prospěchu a ve sběru léčivých bylin. A přesto jsem zachytil stopu v příkladu 681:

„Dělník A by sám provedl výkop pro vodovodní přípojku za 7 hodin, dělník B za 6 hodin. Poněvadž výkop má být skončen za 2 hodiny, byl přibrán ještě dělník C. Za kolik hodin by provedl výkop sám C?

Kamarád A, nejspíš pracující důchodce dělnické profese, již zdaleka nedosahuje někdejších výkonů, kope o hodinu déle než B. Protože by tímto tempem nesplnili normu, musí přizvat C, zřejmě jmenovce nebo potomka nešťastného C z Leacockových úloh. Mladý muž plný sil kope 4/3 krát rychleji než A a 8/7 krát rychleji než B.

-ll

47 233

Povedali, napísali...

„Prírodoveda je napísaná vo veľkej knihe, ktorú máme neustále otvorenú pred sebou. Myslím tým vesmír. Tejto knihe porozumieme, ak si osvojíme jej jazyk a spoznáme litery, ktorými je napísaná. Jej jazyk je jazykom matematiky a písmenami jsou trojuholníky, kruhy a iné geometrické útvary."

Galileo Galilei (1564—1642)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.
Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(8)

ROČNÍK 67, 1988/89
DUBEN
CENA 2 Kčs

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; † doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Jiří Anděl: Hrací kostky a tranzitivita . 309

Jaroslav Flejberk: Diofantická rovnice $x^n + y^n = z^k$ 313

Jaroslav Pospíšil: Rázové mechanické vlny 315

Jaroslav Hora: Dr. E. Lasker – mistr světa v šachu a matematik 319

Albert Hlaváč: Dr. Andrej Radlinský a jeho silozpyt čili fyzika 321

Z matematiky a fyziky ZŠ 326

Přemýšlíme, řešíme 335

Naše soutěž 339

dj: Kalendár M–F 344

Milan Bednařík, Miroslava Široká: Písemná přijímací zkouška z fyziky na PřF UP v Olomouci 346

Z nových knih . 350

Pokyny pro autory článků do Rozhledů 351

Emil Calda: Doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., nás opustil 352

Humory matematicko-fyzikální . 3. str. obálky

Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (137–140) příloha

MATEMATIKA

Hrací kostky a tranzitivita

Prof. RNDr. JIŘÍ ANDĚL, DrSc., MFF UK Praha

Počátky teorie pravděpodobnosti jsou spojeny s rozborem různých hazardních her, ve kterých má rozhodující roli náhoda. K docílení náhodného efektu se používá vrhání kostek, míchání karet a různé typy losování.

Hrací kostky mají obzvlášť dlouhou tradici. Snad každý si vzpomene na výrok „Kostky jsou vrženy", který svědčí o jejich používání ještě před začátkem našeho letopočtu. Ve skutečnosti však byly hrací kostky v módě již v období 1. dynastie ve starém Egyptě. Teprve později se s nimi hrálo ve starém Řecku a v říši římské. Podle řecké tradice vynalezl kostky *Palamedeo*, aby pobavil nudící se řecké vojáky při obléhání Tróje.

První knížku věnovanou teorii pravděpodobnosti pod titulem „De Ludo Aleae" napsal *Gerolamo Cardano* (1501—1576). Jak je vidět již z jejího názvu, je věnována převážně hracím kostkám. Pro úplnost uveďme, že dílo bylo vydáno až roku 1663, prakticky 100 let poté, co ho autor napsal. (Dnešní dlouhé výrobní lhůty nejsou tedy také ničím novým.) Od 14. století začínají být v Evropě stále více populární karetní hry, ale to je už zas jiná historie.

V teorii pravděpodobnosti se obvykle předpokládá, že každá hrací kostka je pravidelná. To znamená, že pravděpodobnost padnutí kteréhokoli čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 je rovna jedné šestině. To je samozřejmě určitá idealizace reálné situace. Rozsáhlé pokusy ukázaly, že není tak snadné získat kostku, která by se dala pokládat za pravidelnou. To se musí brát v úvahu zejména v hernách, kde se o velkých výhrách či prohrách rozhoduje vrháním kostek. U běžných her, které slouží jen k pobavení, nebýváme tak úzkostliví.

V mnoha případech bývá ve výhodě ten hráč, jemuž na jeho kostce padne větší číslo. A tak bychom si někdy mohli přát takovou hrací kostku, která by místo jedničky měla další šestku. Jenže pozor! Kdyby si právě tuto upravenou kostku na začátku hry vybral náš protihráč, rázem by se situace změnila v náš neprospěch. A kdyby se upravily všechny kostky stejným způsobem, jsme vlastně tam, kde jsme byli na začátku. Nikdo z hráčů by neměl předem žádnou výhodu.

Avšak sama možnost úpravy hracích kostek vede k neobyčejně zajímavým situacím. Jednu z nich pod názvem „Paradox transitivity"

uvádí *G. J. Székely* v roztomilé knížce „Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics".

Jsou dva hráči, které tradičně označíme písmeny A a B. Hráč A má k dispozici tři hrací kostky (řekněme I, II, III), na nichž nejsou uvedena žádná čísla. Jeho úkolem je tyto kostky popsat. Smí přitom použít jen běžných čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, ale může je také libovolně opakovat. Má tedy právo vytvořit kostku se samými šestkami stejně tak jako kostku klasickou, na níž se čísla neopakují, nebo i výše zmíněnou kostku typu 2, 3, 4, 5, 6, 6, kde jednička je nahrazena šestkou. Jakmile hráč A tuto práci ukončí, podá všechny tři kostky hráči B. Ten si je prohlédne, vybere si tu, kterou pokládá na nejlepší, ponechá si ji a zbývající dvě kostky vrátí hráči A. Ten si jednu z nich také ponechá a druhou odloží. Nyní A i B házejí současně svými kostkami. Komu padne větší číslo, vyhrává jednu korunu. (V případě, že by oběma padlo stejné číslo, výsledek se nepočítá a hráči házejí znovu.)

Pokud A vytvoří tři stejné hrací kostky, pak samozřejmě je hra spravedlivá, protože A i B mají stejnou pravděpodobnost výhry při každém hodu. Otázkou je, zda A může popsat kostky tak, aby z toho vytěžil nějakou výhodu, tj. aby si zajistil větší pravděpodobnost výhry.

„Zdravý rozum" nám říká, že to možné není. Kdyby např. kostka I byla nejlepší, vybere si ji samozřejmě B, protože má právo první volby. Zdá se tedy, že jakékoli rozdíly mezi kostkami mohou vést jen ke zhoršení situace hráče A. Není to však pravda. Rozebereme případ, kdy A popíše kostky takto:

kostka I: 1, 4, 4, 4, 4, 4,
kostka II: 2, 2, 2, 5, 5, 5,
kostka III: 3, 3, 3, 3, 3, 6.

Porovnejme nejprve kostku I s kostkou II. Stejně jako u klasických kostek může nastat $6 \times 6 = 36$ stejně pravděpodobných případů, z nichž některé však nyní dávají stejný výsledek. Přehledně jsou tyto případy vyznačeny v tab. 1. Podtrženy jsou ty dvojice, kde číslo na kostce I je větší než číslo na kostce II. Těchto dvojic je 15. Proto hráč mající kostku I vyhrává s pravděpodobností 15/36, zatímco hráč mající kostku II vyhrává s pravděpodobností 21/36. Kostka II je tedy lepší než kostka I.

Podobně porovnáme kostku II a kostku III (viz tab. 2.).
Dvojice, kde číslo na kostce II je větší než na kostce III, jsou podtrženy. Je jich 15. Hráč s kostkou II vyhrává tedy s pravděpodobností 15/36 a hráč s kostkou III vyhrává s pravděpodobností 21/36. Kostka III je lepší než kostka II.

A teď porovnejme kostky III a I. V tab. 3 jsou uvedeny všechny stejně pravděpodobné případy. Podtrženy jsou ty, kde číslo na kostce III je větší než na kostce I. Je jich 11. Pravděpodobnost, že vyhraje hráč mající kostku III, je tudíž 11/36 a hráč mající kostku I vyhraje s prav-

Tab. 1

I \ II	2	2	2	5	5	5
1	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 5)	(1, 5)	(1, 5)
4	(4, 2)	(4, 2)	(4, 2)	(4, 5)	(4, 5)	(4, 5)
4	(4, 2)	(4, 2)	(4, 2)	(4, 5)	(4, 5)	(4, 5)
4	(4, 2)	(4, 2)	(4, 2)	(4, 5)	(4, 5)	(4, 5)
4	(4, 2)	(4, 2)	(4, 2)	(4, 5)	(4, 5)	(4, 5)
4	(4, 2)	(4, 2)	(4, 2)	(4, 5)	(4, 5)	(4, 5)

Tab. 2

II \ III	3	3	3	3	3	6
2	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 6)
2	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 6)
2	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 6)
5	(5, 3)	(5, 3)	(5, 3)	(5, 3)	(5, 3)	(5, 6)
5	(5, 3)	(5, 3)	(5, 3)	(5, 3)	(5, 3)	(5, 6)
5	(5, 3)	(5, 3)	(5, 3)	(5, 3)	(5, 3)	(5, 6)

Tab. 3

III \ I	1	4	4	4	4	4
3	(3, 1)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)
3	(3, 1)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)
3	(3, 1)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)
3	(3, 1)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)
3	(3, 1)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)	(3, 4)
6	(6, 1)	(6, 4)	(6, 4)	(6, 4)	(6, 4)	(6, 4)

děpodobností 25/36. Musíme konstatovat, že kostka I je lepší než kostka III.

Vidíme, že kostky I, II a III odmítají podřídit se zákonu tranzitivity.

Pokud hráč A označí kostky uvedeným způsobem, vzroste při daných pravidlech pravděpodobnost jeho výhry nejméně na hodnotu $21/36 = 0{,}583\,333$. Ať si totiž hráč B vybere kteroukoli kostku, ve zbývajících dvou si najde A prostě tu, která je lepší než kostka hráče B. Jak jsme ukázali, je to vždy možné.

Dá se dokázat, že právě 21/36 je maximální pravděpodobnost, které A může dosáhnout. Uvedený popis kostek je tedy pro hráče A nejlepší možný.

Přemýšlivý čtenář by však mohl přijít s následující námitkou. Co když budou hrát tři hráči současně? Hráč A bude mít kostku I, B bude mít kostku II a C bude mít kostku III. Pak B bude vyhrávat častěji než A, C častěji než B a A častěji než C. To je ovšem logický spor, takže v provedených úvahách bude nějaký háček.

Ukazuje se, že chyba je právě v argumentaci, kterou jsme použili ve zdůvodnění námitky. Výsledek současné hry všech tří hráčů se musí propočítat samostatně, nelze k němu dojít jen porovnáváním dvojic.

Při hře třemi kostkami nastává celkem $6 \times 6 \times 6 = 216$ stejně pravděpodobných případů. Každý z nich určuje trojici čísel. Např. (4, 5, 6) znamená, že na kostce I padlo číslo 4, na kostce II padlo číslo 5 a na kostce III padlo číslo 6. V této situaci vítězí hráč C. V tab. 4 jsou uvedeny případy, kdy na kostce III padlo číslo 3 na jedné z pěti takto označených stran. Protože však takových stran je pět, měli bychom tuto tabulku napsat celkem pětkrát. To samozřejmě neuděláme, ale musíme s tím počítat v dalších úvahách.

Tab. 4

(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 5, 3)	(1, 5, 3)	(1, 5, 3)
(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)
(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)
(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)
(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)
(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 2, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)	(4, 5, 3)

V tab. 5 jsou uvedeny případy, kdy na kostce III padlo číslo 6.

Hráč A vyhraje v těch případech, kdy první číslo v trojici je největší. Jak zjistíme z tab. 4 a 5, celkový počet takových případů je $15 \times 5 = 75$. (Nezapomeňme, že tab. 4 musíme počítat pětkrát.) Podobně zjistíme, že B vyhraje v $18 \times 5 = 90$ případech a C vyhraje v $3 \times 5 + 6 \times 6 =$

Tab. 5

(1, 2, 6)	(1, 2, 6)	(1, 2, 6)	(1, 5, 6)	(1, 5, 6)	(1, 5, 6)
(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)
(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)
(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)
(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)
(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 2, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)	(4, 5, 6)

= 51 případech. Pravděpodobnosti výher jednotlivých hráčů, pokud hrají všichni tři současně, jsou dány čísly

$$P(A) = 75/216 = 0{,}347\,222,$$
$$P(B) = 90/216 = 0{,}416\,667,$$
$$P(C) = 51/216 = 0{,}236\,111.$$

V této variantě hry je nejlepší kostka II a nejhorší je kostka III. K žádnému sporu se tedy nedochází.

Poznamenejme, že podobné hry jsou vyšetřovány i pro obecný počet n hracích kostek.

Článek by v čtenáři neměl vzbudit dojem, že se teorie pravděpodobnosti zabývá převážně hracími kostkami. Ty byly jen jedním z podnětů, které vedly k jejímu vzniku. Moderní teorie pravděpodobnosti je založena zejména na matematické analýze, abstraktní algebře a topologii. Její výsledky se používají v mnoha praktických aplikacích. To však neubírá na půvabu jednoduchým úlohám, i když je třeba formulujeme pomocí kostek.

Diofantická rovnice $x^n + y^n = z^k$ (n, k nesoudělná)

JAROSLAV FLEJBERK, Pardubice

Nejdříve si připomeňme základní pojmy. Dvě přirozená čísla se nazývají *nesoudělná*, je-li jejich největší společný dělitel roven jedné. *Diofantickou rovnicí* nazveme rovnici, jejíž řešení hledáme mezi celými nenulovými čísly. U každé diofantické rovnice se snažíme odpovědět na otázku, má-li daná rovnice nebo nemá řešení. Příkladem diofantické rovnice, která nemá řešení, je rovnice $x^4 + y^4 = z^4$.

Pro diofantickou rovnici $x^n + y^n = z^k$ (n, k nesoudělná) ukážeme,

jak najít řešení vyhovující podmínce nenulovosti a celočíselnosti, a tím dokážeme, že rovnice připomínající rovnici ze slavné *Velké Fermatovy věty*, má řešení.

Věta: Diofantická rovnice $x^n + y^n = z^k$ (n, k nesoudělná) má řešení. Toto řešení má tvar $z = c^i$, $x = c^j a$, $y = c^j b$. (Význam a, b, c, i, j popsán v důkazu.)

Důkaz: Vezměme si celá nenulová čísla a, b, $a \neq b$. Dopočítejme celé číslo c podle vztahu

$$c = a^n + b^n\,, \tag{1}$$

přirozená čísla i, j vybereme tak, aby platilo

$$j\ \ n + 1 = i\,.\,k\,. \tag{2}$$

Nyní přímo dosadíme do obou stran rovnosti

$$x^n + y^n = z^k \tag{3}$$

levá strana bude mít tvar

$x^n + y^n = (c^j a)^n + (c^j b)^n = c^{jn}\,(a^n + b^n)$;

ze vztahu (1) a (2) dostáváme

$$x^n + y^n = c^{jn}\,.\,c = c^{jn+1} = c^{ik}$$

Pravá strana rovnosti (3) bude po dosazení

$$z^k = (c^i)^k = c^{ik}$$

Pravá strana rovnosti (3) rovná se levé. Hodnoty x, y, z, které vypočteme ze vztahů ve větě a v důkaze, jsou řešením diofantické rovnice $x^n + y^n = z^k$, n, k nesoudělná.

Tímto je důkaz hotov.

Ukažme si na konkrétním případě, jak toto řešení nalézt.

Mějme diofantickou rovnici

$$x^5 + y^5 = z^4\,.$$

Zvolíme konstanty $a = 1$, $b = 2$.

Dopočteme

$$c = 1^5 + 2^5 = 33$$

a ze vztahu (2) dostaneme postupným dosazováním

$$i = 4\,,\ j = 3$$

Teď už můžeme dosadit do dané diofantické rovnice

$$z = c^i = 33^4\,,$$
$$x = c^j a = 33^3\ \ 1 = 33^3\,,$$
$$y = c^j b = 33^3\,.\,2 = 2\,.\,33^3$$

Tato trojice čísel je řešením diofantické rovnice $x^5 + y^5 = z^4$. Vybaví se nám okamžitě problém:

Na jaké diofantické rovnice lze tento postup rozšířit?

Popište tuto skupinu úloh.

FYZIKA

Rázové mechanické vlny

Doc. RNDr. ing. JAROSLAV POSPÍŠIL, CSc., UP Olomouc

Vlny (vlnění) jsou časově a prostorově proměnné jevy, jejichž velikosti (výchylky) periodicky nebo neperiodicky nabývají rovnovážných hodnot a jsou konečné. Jde o vratné jevy a jejich časový průběh v jednom neměnném bodě prostoru tvoří kmity v tomto bodě.

Postupné vlny lze chápat jako šíření kmitů (kmitavého rozruchu) teoreticky neomezeným prostorem (prostředím). Nejčastějším případem mechanických postupných vln jsou elastické vlny. Je to šíření elastických (pružných) deformací v látkovém nosném prostředí. Při něm částice (body) prostředí v nejjednodušším případě harmonicky kmitají se stejnou frekvencí na místě a nepohybují se ve směru šíření vln (nepřenáší se látka). Ve směru postupného vlnění se jen přenáší kmitová energie (hybnost a případně i moment hybnosti) od jedné k následujícím částicím prostředí prostřednictvím elastické vazby mezi částicemi. Energie (hybnost a moment hybnosti) každé částice nosného prostředí zůstává při netlumeném vlnění v ustáleném stavu konstantní, protože energie (hybnost a moment hybnosti) předaná následující částici je nahrazena energií (hybností a momentem hybnosti) přijatou od předcházející částice daného nosného prostředí, případně od zdroje vlnění. Kmity každé následující částice jsou zpožděny oproti kmitům předcházející částice. U netlumeného postupného vlnění s rovinnými vlnoplochami jsou amplitudy kmitů jednotlivých částic nosného prostředí stejné a v čase i prostoru konstantní. Existuje-li tlumení vln, pak se jejich amplitudy s rostoucím časem a s rostoucí vzdáleností od zdroje vlnění zmenšují. Zdrojem (generátorem) elastického mechanického postupného vlnění je každá kmitající mechanická soustava (mechanický oscilátor) elasticky spřažená s nosným látkovým prostředím, kterým se mají postupné vlny šířit. Mechanické kmity oscilátoru se přenáší elastickou vazbou na toto prostředí.

Typickými případy elastických mechanických postupných vln je zvuk, ultrazvuk a infrazvuk. Jejich vlastnosti jsou uvedeny v běžných učebnicích fyziky. Ve zvláštních případech se v přírodě objevují speciální a zajímavé druhy mechanických postupných vln, jejichž podstata a vlastnosti se více nebo méně liší od vlastností běžných elastických mechanických postupných vln. Patří k nim například *rázové vlny*, *vlny vznikající při pohybu tělesa v látkovém prostředí* a *povrchové vlny*. V tomto článku

je pojednáno o rázových vlnách. Zbývající zmíněné druhy vln jsou popsány v následujících dvou článcích.

Rázová (nárazová) mechanická postupná vlna je šířící se prudká (skoková) změna hustoty (a s tím i tlaku, rychlosti, teploty a dalších termodynamických veličin) plynného nebo kapalného prostředí, popřípadě i plazmy. Místa těchto změn tvoří frontu rázové vlny o struktuře a šířce závislé na druhu a vlastnostech prostředí a případně i na způsobu generace vln.

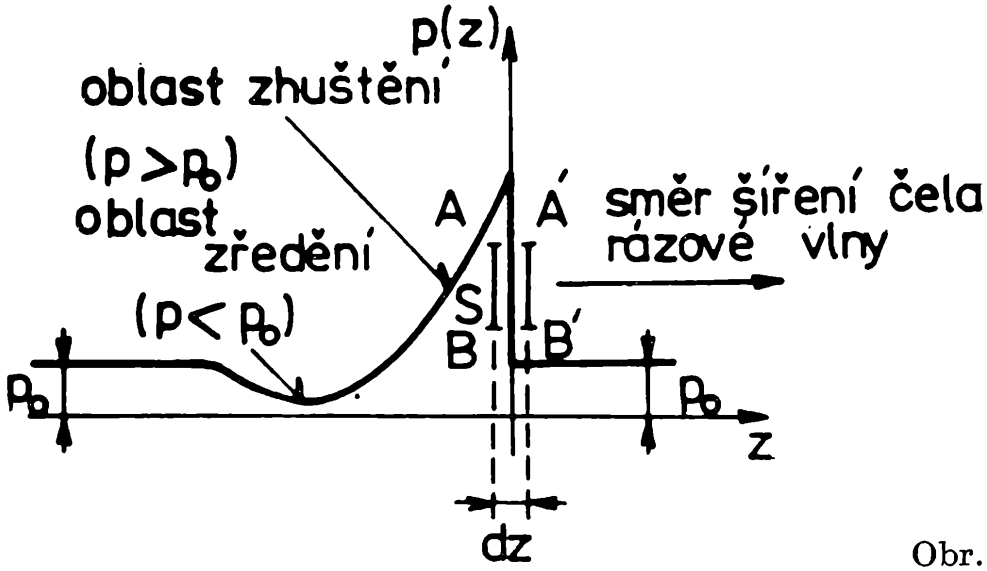
Rázové vlny vznikají například při výbuších, jiskrových výbojích a při letu tělesa (střely, letadla, rakety) nadzvukovou rychlostí ve vzduchu. Mají význam pro studium těchto jevů a případně i chemických procesů doprovázejících tyto jevy při vysokých teplotách. Vyskytují se i při termonukleárních reakcích v přehřáté plazmě.

Zabývejme se nejběžnějším případem rázové mechanické vlny v plynu (vzduchu). Je důsledkem šíření podélné mechanické postupné vlny o velké amplitudě (velké intenzitě), kdy deformace nosného prostředí (plynu) již nejsou přesně elastické (tj. nejsou přímo úměrné amplitudě vlnění) a prostředí je tedy nelineární. Rozdíly hustoty a tlaku v místech zředění (expanze) a zhuštění (komprese) prostředí jsou nyní značné, a vedou tudíž k proudění prostředí (k přenosu látky). Části prostředí, ve kterých nastává zředění a které tvoří vlnu zředění, se pohybují pomaleji v porovnání s rychlostí vlnění v nevzbuzeném (klidném) plynu, a to proto, že rychlost pohybu vlny zředění je složena z rychlosti vlny vzhledem k plynu a z rychlosti samotného plynu, který se pohybuje v opačném smyslu, než se šíří vlna zředění (rychlosti se odečítají). Navíc hraje roli fakt, že zředění plynu je v podstatě adiabatickým expanzním dějem provázeným poklesem teploty plynu a vedoucím k poklesu rychlosti šíření vlny. Naproti tomu části prostředí, ve kterých nastává zhuštění a které tvoří vlnu zhuštění, se pohybují rychleji ve srovnání s rychlostí vlnění v nevzbuzeném plynu, neboť smysl šíření vlny zhuštění je stejný se smyslem pohybu plynu (rychlosti se sčítají) a navíc adiabatickou kompresí se plyn zahřívá a tím se ještě více zvětšuje rychlost šíření vlny.

Zmíněná diference rychlosti šíření vlny zředění a vlny zhuštění vede k tomu, že s rostoucím časem se výsledná vlna velké amplitudy deformuje. Deformace probíhá tak dlouho, až v určitém místě a v určitém čase nastane skoková změna hustoty prostředí. To znamená, že vznikne rázová vlna, která se svou strukturou a vlastnostmi liší od běžných elastických podélných mechanických postupných vln a i od běžných vln zhuštění a zředění velké amplitudy. To je patrné ze závislosti $p = p(z)$ tlaku p plynu v rovinné rázové vlně na vzdálenosti z od jejího čela, znázorněné na obr. 1. V oblasti čela rázové vlny (na čelní ploše rozruchu) je skoková změna tlaku prostředí. Za šířícím se čelem rázové vlny se pohybuje oblast zhuštění, tj. vrstva plynu, jehož tlak p převyšuje

rovnovážný tlak p_0 plynu. Za oblastí zhuštění je pak oblast zředění, v níž je tlak p menší, než je rovnovážný tlak p_0.

K odvození vzorců pro postupné rychlosti v_r a v_p translačního pohybu rovinného čela rázové vlny podle obr. 1 a translačního pohybu stlačeného plynu (oblasti zhuštění) za čelem této vlny lze využít zákona zachování hmotnosti a zákona zachování hybnosti plynu. K tomu účelu uvažujme malou část čela rázové vlny o ploše S, která v počátečním



Obr. 1

okamžiku má polohu $\overline{AB}$ a během časového intervalu dt postoupí do polohy $\overline{A'B'}$ (obr. 1). Tlak a objemová hustota plynu před čelem vlny jsou p_0 a ϱ_0 a za čelem vlny mají hodnoty p a ϱ. V průběhu času dt plochou $\overline{AB}$ projde plyn o hmotnosti $(\varrho - \varrho_0)\, S\, dz$ a o objemové hustotě ϱ rychlostí v_p. V důsledku toho se hmotnost plynu mezi plochami $\overline{AB}$ a $\overline{A'B'}$ zvětší v souladu se zákonem zachování hmotnosti o hodnotu

$$(\varrho - \varrho_0)\, S\, dz = \varrho\, S\, v_p\, dt\,. \tag{1}$$

Protože $v_r = dz/dt$ je postupná rychlost čela rázové vlny, plyne z předcházejícího vztahu následující relace mezi rychlostmi v_r a v_p:

$$v_r = \frac{\varrho}{\varrho - \varrho_0}\, v_p\,. \tag{2}$$

Existence nespojitého skoku $\Delta p = p - p_0$ tlaku v čele rázové vlny vyvolává sílu $(p - p_0)S$ ve směru šíření vlny, jejíž impuls za dobu dt je $(p - p_0)\, S\, dt$. Působením této síly se dosud nehybný plyn ve vrstvě o šířce dz mezi plochami $\overline{AB}$ a $\overline{A'B'}$ dá do pohybu postupnou rychlostí v_p, a jeho hybnost tedy bude $v_p\, \varrho_0\, S\, dz$. V souladu se zákonem zachování hybnosti (impulsu síly) lze psát vztah

$$v_p\, \varrho_0\, S\, dz = (p - p_0)\, S\, dt\,. \tag{3}$$

Z něho plyne relace

$$v_r = \frac{p - p_0}{\varrho_0} \frac{1}{v_p}, \tag{4}$$

která je ekvivalentem vztahu (2).

Z odvozených vztahů (2) a (4) dostaneme hledané vzorce pro rychlosti v_r a v_p:

$$v_r = \sqrt{\frac{p - p_0}{\varrho - \varrho_0} \frac{\varrho}{\varrho_0}}, \qquad v_p = \sqrt{\frac{p - p_0}{\varrho_0} \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho}} \tag{5}$$

Z nich plyne, že obě rychlosti závisí na rozdílu $(p - p_0)$ amplitud tlaku.

Protože ve vztazích (5) platí $\varrho/(\varrho - \varrho_0) > 1$, je rychlost čela uvažované rázové vlny vždy větší, než je rychlost stejného smyslu stlačeného plynu v této vlně, tj, $v_r > v_p$, takže při šíření rázové vlny vzniká tok plynu jejím čelem v opačném smyslu, tj. z oblasti před čelem do oblasti za čelem rázové vlny. Během šíření rázové vlny se tlakový skok $(p - p_0)$ stále zmenšuje a nakonec se stane nekonečně malým. Nekonečně malou se stane i změna hustoty $(\varrho - \varrho_0)$. Z relací (5) plyne, že veličina v_p se stane nulovou a tomuto nehybnému plynu můžeme přiřadit známý vzorec

$$v_\varphi = \sqrt{\varkappa \frac{p_0}{\varrho_0}} \tag{6}$$

pro fázovou rychlost šíření elastického mechanického postupného vlnění v nehybném plynu ($\varkappa$ je Poissonova konstanta, tj. podíl tepelných kapacit při stálém tlaku a objemu plynu dané hmotnosti m, známá z termodynamiky adiabatických dějů v plynech).

Rychlost (6) nyní na amplitudě tlaku $(p - p_0)$ nezávisí (závisí jen na poměru p_0/ϱ_0), a nejde tedy již o rázovou mechanickou vlnu.

Řešení algebrogramů ze str. 338

a) $7^4 = 2401$
b) $3481 = 59^2$
$7056 = 84^2$
c) $324 = 18^2$
d) $4096 = 8^4$
e) $2187 = 3^7$
f) $78^2 = 6084$
g) $3249 = 57^2$
$6241 = 79^2$
h) $16^3 = 4096$
$19^3 = 6859$
$71^2 = 5041$
i) $6084 = 78^2$
j) $41^2 = 1681$

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Dr. E. Lasker — mistr světa v šachu a matematik

RNDr. JAROSLAV HORA, CSc., PdF Plzeň

V uplynulých letech jsme byli svědky zajímavých soubojů dvou velkých K, Kasparova a Karpova, o šachový trůn. Sotva však někdo z těchto dvou velikánů udrží nejvyšší titul po dobu tak dlouhou jako druhý mistr světa dr. E. Lasker, který vládl šachovému světu v období od konce května 1894 do konce dubna 1921, tj. téměř 27 let.

Emanuel Lasker se narodil 24. 12. 1868 v *Berlineku* v Polsku. Již v době středoškolských studií se projevilo matematické nadání chudého studenta. Jeho středoškolský profesor matematiky později vzpomínal, že s maturitní písemnou prací z matematiky, na kterou ostatní potřebovali zhruba 5 hodin, byl Lasker hotov za dvě hodiny a požádal dokonce o „příklad navíc", který vyřešil také.

Vzhledem k tomu, že Lasker pocházel z chudé rodiny, přivydělával si v kavárnách hrou v šachy. Tím začala jeho dlouhá a úspěšná šachová kariéra. Pozdější zisk titulu mistra světa a honoráře za turnaje a zápasy poskytly Laskerovi materiální zabezpečení. Dr. Lasker byl prvním, kdo docenil roli psychologických faktorů v šachu. Nesnažil se vždy najít „nejsilnější" tah, ale často i za cenu ohrožení svého postavení převáděl hru do pozic protivníkovi co nejnepříjemnějších, pro něj nezvyklých. Soupeři pak velmi často ztráceli orientaci, chybovali a prohrávali. Podobný styl hry ovšem vyžadoval chladnokrevnost, hlubokou znalost lidských povah i slabin soupeřů a samozřejmě i veliký kus bojovnosti a hráčského umění. Ukázky partií a podrobný komentář k nim nalezne čtenář např. ve velmi zajímavé knížce [1]. I po ztrátě titulu mistra světa v souboji s legendárním Kubáncem Capablancou si Lasker udržel vynikající výkonnost a ještě dlouho patřil mezi nejsilnější turnajové hráče.

Dr. Emanuel Lasker byl originálním myslitelem i v jiných oblastech, než je hra v šachy. Napsal několik filosofických prací, zabýval se teorií her, byl přítelem A. Einsteina. Byl též významným matematikem; studoval některé algebraické problémy (tzv. teorie ideálů). Seznamme se ve velmi zjednodušené formě s touto problematikou.

Je dobře známo, že každé přirozené číslo můžeme zapsat jako součin mocnin prvočísel (např. $120 = 2^3 \,.\, 3^1 \,.\, 5^1$). Otázky související s dělitelností však můžeme studovat i v okruhu celých čísel nebo v okruzích polynomů, jak to činil Lasker (vždyť např. polynom $x + 2$ dělí polynom $x^2 - 4$). Připomeňme si, že množina **R** spolu se dvěma binárními

operacemi, které budeme značit $+$, i když nemusí nutně splývat s obvyklým sčítáním a násobením, se nazývá *komutativním okruhem* jestliže

1. pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ je $x + y \in R$, $x \,.\, y \in \mathbf{R}$,
2. obě operace $+$, jsou v $\mathbf{R}$ komutativní a asociativní,
3. existuje prvek množiny R (budeme jej značit 0) takový, že $x + 0 = x$ pro každé $x \in \mathbf{R}$,
4. pro každý $x \in \mathbf{R}$ existuje v $\mathbf{R}$ prvek (značíme jej $(-x)$), že $x + (-x) = 0$,
5. pro všechna $x, y, z \in \mathbf{R}$ platí $x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$.

Čtenář dokáže jistě sám prověřit, že např. množina všech celých, resp. racionálních, resp. reálných čísel se sčítáním a násobením, jakož i množina všech polynomů s celočíselnými, resp. racionálními, resp. reálnými koeficienty s obvyklými operacemi sčítání a násobení polynomů tvoří okruh.

Dále, množinu $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ nazýváme *ideálem komutativního okruhu* $(\mathbf{R}, +, .)$, jestliže pro všechna $x, y \in \mathbf{I}$ platí $x + y \in \mathbf{I}$, $(-y) \in \mathbf{I}$ a pro každé $r \in \mathbf{R}$ je $r \,.\, x \in \mathbf{I}$.

Buď a libovolné celé číslo. Označme (a) množinu všech celočíselných násobků čísla a. Např. pro $a = 3$ máme $(3) = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$. Snadno se zjistí, že (a) je vždy ideálem v okruhu $(\mathbf{Z}, +, .)$. Podobně je množina všech polynomů s celočíselnými koeficienty majícími sudý absolutní člen ideálem okruhu $(\mathbf{Z}[x], +, .)$.

Všimněme si teď některých vlastností ideálů v okruhu $(\mathbf{Z}, +, .)$. Platí např. $2|6$, a z druhé strany ideál (2) obsahuje ideál (6). (Pozor, v tomto případě „menšímu" číslu 2 náleží v inkluzi „větší" ideál (2).) Obecně se snadno nahlédne, že $a|b$ platí právě tehdy, když $(a) \supseteq (b)$. Můžeme tedy relaci „a dělí b" vyjádřit též pomocí inkluze. Dále může čtenář snadno dokázat, že průnik dvou ideálů okruhu $\mathbf{R}$ je opět ideálem v $\mathbf{R}$. V $(\mathbf{Z}, +, .)$ např. platí $(2) \cap (3) = (6)$, $(5) \cap (10) = (10)$, $(12) \cap (9) = (36)$. Obecně je zřejmě $(a) \cap (b) = (c)$, kde c je nejmenším společným násobkem čísel a, b. Vrátíme-li se k rozkladu přirozených čísel v součin mocnin navzájem různých prvočísel, můžeme např. místo $120 = 2^3 \,.\, 3^1 \,.\, 5^1$ psát $(120) = (2^3) \cap (3) \cap (5)$.

V jiných okruzích je ovšem situace složitější než v okruhu $(\mathbf{Z}, +, .)$, a to mj. proto, že v nich mohou existovat i jiné ideály než tzv. *hlavní ideály*, které jsou tvaru (a). Nelze se tu ani opřít o pojmy jako prvočíslo, složené číslo aj. E. Lasker nicméně formuloval za pomoci jiných pojmů (prvoideál, primární ideál) důležitou větu o rozkladu ideálů v nezkratitelný průnik primárních ideálů, a to v okruzích polynomů.

Laskerovy výsledky byly pochopitelně dále zobecňovány, přesto má zmíněná „věta šachového mistra světa" v teorii ideálů významné místo.

Závěrem se pokuste vyřešit jeden příklad ze shora uvedené maturitní písemné práce z r. 1888:

Rozložte zlomek $\dfrac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4}$ na parciální zlomky!

Návod: Rozklad je nutno hledat ve tvaru

$$\frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} = \frac{A}{(x-1)^4} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}, \tag{1}$$

kde A, B, C, D jsou neznámá reálná čísla (tzv. neurčité koeficienty). Vynásobte rovnost (1) výrazem $(x-1)^4$, upravte pravou stranu a porovnejte koeficienty u odpovídajících mocnin x^i, $i = 0, 1, 2, 3$. Vyjde $A = 3$, $B = -2$, $C = 4$, $D = 5$.)

Literatura:

[1] Veselý, J.: Psychologický průvodce šachovou partií, 2. vyd., Olympia, Praha 1987.

Dr. Andrej Radlinský a jeho silozpyt čili fyzika

RNDr. ALBERT HLAVÁČ, Bratislava

V Bratislave, ako aj v iných slovenských mestách máme možnosť ísť Radlinského ulicou. Priemerne vzdelaný občan vie, že Andrej Radlinský bol rím.-kat. kňazom, ktorý spolu s *Martinom Hattalom* a ďalšími prispeli ku konštituovaniu slovenčiny. Málokto však pozná Radlinského dielo natoľko, aby vedel, že jeho hlavnou životnou náplňou bola vydavateľská a redaktorská činnosť. Radlinský nesporne patril medzi popredných vzdelancov a slovenských národných buditeľov v hornom Uhorsku minulého storočia. Narodil sa 8. júla 1817 v *Dolnom Kubíne* v rodine úradníka, neskôr kubínskeho richtára *Ondreja*, ktorý vyštudoval gymnázium v Ružomberku a v Jágri. Jeden z jeho predkov bol pobočníkom známého grófa *Mórica Beňovského*. Andrejova matka Alžbeta bola dcérou Bernolákovho brata. Andrej sa vzdelával v Kubíne, na gymnáziu v Ružomberku, Kremnici a v Budíne. Seminár absolvoval v Bratislave a v Trnave, kde študoval filozofiu. Teológiu odišiel študovať do Viedne, kde v tom čase pôsobili význační slovanskí lingvisti. Radlinský takto nadobudol všestranné vzdelanie a po skončení teológie (1841) získal doktorát filozofie na peštianskej univerzite.

Pôsobil v Banskej Štiavnici, vo Viedni, v Budíne a v Kútoch. Všetku svoju energiu a bystrý um dal do služieb rozvoja slovenského národa, pre jeho duchovné, kultúrne a materiálne povznesenie. Nebolo na

Slovensku hnutia, na ktorom by sa nebol podieľal, alebo ho priamo neorganizoval. Nesmrteľné zásluhy si získal pri napomáhaní rozvoja slovenského školstva, najmä pri jeho záchrane.

Viem, že keď študujete fyziku zo svojej učebnice, máte dosť starostí s pochopením a osvojením si učiva a vôbec vás netrápi, akými cestami sa týchto poznatkov ľudstvo zmocnilo a ako ich videli naši predkovia pred viac ako sto rokmi. Zaiste nepohrdnete niekoľkými výpiskami z Radlinského učebnice *Školník*, ktorú vydal vo Viedni vlastným nákladom v r. 1871. Ba možno vám bude po ich prečítaní pripadať aj vaša fyzika pochopiteľnejšia a záživnejšia. Radlinský v „predmluve" k Školníkovi píše: „ požaduje i sám duch času a svetská vláda, aby sa tiež v elementárnych čiže národných školách obzvláštny zreteľ bral na vyučovanie mládeže v reálnych vedách." Ďalej tam uvádza učebné predmety, ktorých vyučovanie bolo uzákonené v roku 1868. Sú to: „viero- a mravoveda; čítanie a písanie; počtovanie z hlavy a písmom; ako aj nauka krajinských mier; mluvnica; cvičenia mluvy a umu; prírodozpyt (silozpyt a zemeznalstvo); prírodopis so zreteľom na spôsob výživy a na kraj, k nemuž väčšina rodičov detí patrí; krajinský zeme- a dejepis; nečo zo všeobecného zeme- a dejepisu; praktické úpravy v poľnom hospodárstve a zahradníctve; krátka nauka občanských práv a povinností; spev; telocvik ohľadom na telocvik vojanský."

Radlinský z úsporných dôvodov nevydal pre každý predmet osobitnú učebnicu. Mienil vydať dva zväzky Školníka. Prvý sväzok vo viazanej úprave stál 65 krajciarov, druhý z neznámych dôvodov nenapísal. Na 316 strán prvého zväzku vmestnal autor „hviezdovedu, zemepis, silozpyt, zemeznalstvo, prírodopis, domáce a poľné hospodárstvo, ovocinárstvo, včelárstvo, hodbabníctvo, nauku o právach a povinnosťach občanských"

Silozpytu čiže fyzike venoval Radlinský 62 strán. Hovorí v ňom „o vlastnosťach telies, o príťažlivosti, ťarche, ťažišti a rovnováhe, o sochore, vážkach, mincieri, kolovrate a iných z kolovratu poskladaných strojoch, o povetrí, o plynoch, o vode, o liehu alebo o silici (spiritus), o svetle, o teplote, o hromovine, o zvuku." Dodáva dva prídavky „O nešťastlivých prípadoch horúčosti, ohňa, chladna a zimy" a „O nešťastlivých prípadoch zadusených a hromom ohlušených ľudí."

Školníka napísal Radlinský vo forme otázok a odpovedí. Bol presvedčený, že to je forma najbližšia mentalite a chápaniu detí okolo 12 rokov.

Hneď na začiatku časti, venovanej fyzike, sa Radlinský pýta: „*Čo je silozpyt?*" a odpovedá: „Je umenie o silách, ktorými úkazy prírody sa stávajú."

Uveďme si niektoré otázky a odpovede z ďalších strán silozpytu. „*Keď do nejakého veľkého hrnca, až do preliaťa, vody nalejem, a do neho kameň pustím, či kameň vo vode utratí nečo z váhy svojej?* Áno, on utratí

toľko váhy svojej, koľko váži voda, ktorú on objemom svojím vytiskol. K. pr. kameň váži 3 funty, voda ale skrze kameň ten z hrnca von na podloženú misu vytisnutá váži 1 funt: ztratí teda kameň vo vode zo svojej váhy 1 funt, a tak bude pod vodou vážiť len 2 funty; o čom sa môžeme presvedčiť, keď kameň ten najprv na slobodnom, von z vody, odvážime, a potom ho na mocnú niť priviažeme, túto ku spodku vážok pripravíme a zpustený kameň do vody odvážime. A preto pod vodou sú všetkie telesá ľahčie. Pod vodou i veliké skaly ľahko dvíhame, keď ale nektorý z nich hore nad vodu vydvihneme, vypadne nám pre svoju ťarchu z rúk, a v tomto zmysle má pravdu i to porekadlo: že keď sa človek topí, i o slamku sa lapá; lebo i ľudské telo toľko vo vode zo svojej váhy ztratí, koľko voda ním vytisnutá váži.

Jaké stroje majú svoj základ na kolovrate?

Škripec, kotúč alebo kotúlka, klin, šroba, preš, hodiny, hodinky, všelijaké mlyny, rušne, parostroje na loďach a železniciach, súkennícke prádelnice a tisíce inších spletených strojov a poskladaných kolovratov. Sú už aj také poskladané stroje, že sa na nich do 6000 všelijakých čiastok, rozložiť sa mohúcich, nachodí.

Čo je povetrie?

Povetrie je veľmi riedka, na všetky strany celú zem otáčajúca tekutina, ktorú všetko, čo je živé, do seba dýcha.

Do jakej vysokosti môže povetrie svojím tlakom od spodku vydvihnúť vodu v prázdnej trubici, v ktorej neni žiadneho povetria?

Do vysokosti 32 stôp: (to jest: do 5 siah a 3 stôp) a preto v strebavej studni ďalekosť medzi hladinou vody a žliebkom, z ktorého voda pri ťahaní siváka vytekať má, nesmie byť väčšia od 5 siah (30 stôp), aby stroj i potom ešte vodu dával, keď by ona v studni následkom suchoty trochu zpadla. Tu sa ale nerozumie studňa, ktorá má ku siváku ešte nástroj, vodu dvihajúci, pripojený; lebo s týmto vodu i z väčšej vysokosti vydvihnúť možno.

Čo je barometer?

Je nástroj k meraniu tlaku povetria.

K čomu sa upotrebuje tento tlakomer?

1. K meraniu vysokosti vrchov; 2. k poznaniu nastávajúcich premien v povetrí.

Čo je voda?

Je kvapkavá, prezračná a bezbarevná tekutina.

Či by sa parením plynu amoniackého pri pomoci ohňa voda nedala na ľad premeniť?

Áno. A síce týmto spôsobom: Nech sa vezmú dve guľaté nádoby zo železa alebo z mosadze: jedna väčšia a druhá menšia, ktoré do pôl kolesa nakrívená rúra spojuje. Jedna z nich sa naplní vodou, plynom amoniackým napustenou, druhá zostane prázdna. Tamtá plná postaví sa na žeravé uhlie. Palčivosť ohňa vypudí plyn amoniakový z vody a pre-

ženie ho cez nakrívenú rúru do malej práznej gule; poneváč on ale z tejto gule nemôže sa von dostať, a sila ohňa z vätšej gule nový plyn odháňa: týmto tlakom samej nádoby premení sa na tekutinu. Keď sa potom vätšia guľa z ohňa odstráni a vychladnúť nechá: hneď po vychladnutí počne sa tekutina amoniaková, v menšej guli obsažená, veľmi rýchle a násilne v plyn premieňať, ktorý zas do veľkej gule prechodí, aby sa tam s vodou spojil; menšia ale guľa následkom silného parenia toho vnútri tak ochladne, že keď ju do vody zamočíme, táto hneď mrznúť počne.

K čomu je tento ľadostroj užitočný?

Že si môžeme ľadu narobiť aj v lete, keď ho potrebujeme, či k zachovaniu čerstvosti jedla a nápojov, či k lekárskemu upotrebeniu pre ranených a nemocných.

Čo je svetlo?

Dľa mienky nektorých učených svetlo je plyn, pozostávajúci z najútlejších, váhe ľudskej nepodrobených čiastok, ktoré zo svieťacieho telesa s ohromnou rýchlosťou na všetky strany v rovnej čiare vyplývajú a svojim pôsobením na oči zvierat a ľudí k videniu pomáhajú. Dľa mienky druhých svetlo je najútlejší, žiadnej váhy nemajúci plyn, aeterom menovaný, ktorým je obloha nebeská na všetky strany naplnená, tak že on i povetrie zeme našej preniká. Jaknáhle ale svieťacie teleso počne na tento plyn pôsobiť: povstane v ňom isté vlnenie, ktoréžto vlny plynu v oku ľudskom cit videnia spôsobujú.

Čo ešte pôsobí svetlo slnca?

Ono pôsobí i to, že jeho pomocou obraz človeka alebo ktoréhokoľvek iného predmetu na pripravenej k tomu ploche v úplnej pravdivosti vyrazí, a tento spôsob menuje sa svetlopis čili fotografia.

Čo je hromovina?

Je istá, v celej prírode rozšírená, priveľmi riedka, nijakej váhy nemajúca, pôsobiť ale neprestävajúca látka, elektrinou alebo hromovinou menovaná, najlepšie vidomá v blesku.

Jako sa spraví hrmenie?

Keď sa poveterná hromovina prerazí z jedného mračna do druhého, pretrhne ona povetrie, ktoré ale učinenú takto prázninu s rachotom hneď zaplní, a tak slyšíme hrmenie, ktoré sa ozýva ďaleko.

Čo je zvuk?

Je rýchly, trasavý pohyb telesa, ktorý až k uchu našemu donesený, od sluchových čuvov (nervov) zpozorovaný býva.“

Radlinský si uvedomoval, že úlohou prírodných vied, predovšetkým fyziky, je viesť ľudí k osvete, vyvracať povery, a tak v silozpyte píše:

„Či je to pravda: že sú tam peniaze zakopané, kde sa svetlonos ukáže?

To neni pravda; lebo vieme: že svetlonos neni nič iné, jako vodík v povetrí hromovinou zapálený, a len na to poukazuje: že na takých miestach je plno hnilotiny, z ktorej ten plyn vodíkový vychádza.

Či je to pravda, že tam strašidlo a jakýsi duch chodí, kde zabitý alebo obesený je pochovaný?

To neni pravda; lebo ho ešte žiaden striezlivý človek nevidel, len bojazliví a poverčiví ľudia si hneď myslia, že videli ducha, keď vo tme nemohli dačo rozpoznať."

Zmysel školy — pripraviť človeka pre život, Radlinský napĺňal poučnými vsuvkami, ako:

„*Či nekedy aj dobré teplovody ochranu proti horúčnosti dávajú?*

Áno, dávajú i tieto proti horúčosti ochranu, keď túto z druhých s nimi spojených telies do seba ťahajú. Tak na príklad môže sa vrelá voda do pohára naliať, a nikdy sa nepukne, jestli je v ňom ližica položená, preto, že táto jako lepší teplovod, horúčosť dychtivo ťahá do seba; v cínovom kotlíku môže sa voda variť pri jakomkoľvek ohni, on sa žiadnym spôsobom neroztopí, pokuď má v sebe vodu; ba i v papierovom hrnci uvre voda, a papier sa nechytí od ohňa, len tam, kde papier na ňom neleží; niť okolo studeného klinca železného okrútená, čo sa aj do plameňa sviečky vopchá, nezhorí hneď na počiatku, bo tú horúčosť klinec vťahuje do seba.

Čím sa majú zaopatriť tí, ktorí na poli robia a je veľmi parno?

Vodou, s octom smiešanou, a túto majú pomalí piť; lebo so studenou vodou sebe ľahko uškodiť môžu.

Jako si má pomáhať človek, keď sa mu zapáľa šaty a horia na ňom?

Nemá utekať; lebo keby utekal, ešte by viac oheň skrze povetrie rozdúchal, i dom by mohol podpáliť; lež má sa zvaliť na čistú holú zem a válať po nej; pritom má volať na ľudí, aby mu prišli na pomoc.

Čo má činit človek, keď v zime ide na cestu, a je veľmi chladno?

Má si dobre teplé šaty obliecť, teplej polievky alebo mlieka sa napiť; pálenky ale ani nekoštovať.

Čo sa robí s človekom, keď v zime na ceste pije pálenku alebo mnoho vína?

Zostane ospanlivým tak, že ľahko potom poblúdi, a zaspí i zamrzne."

Z uvedených príkladov vidíme, ako Radlinský dôsledne využíval základné didaktické pravidlá — nadväzoval na staršie vedomosti, používal názorné príklady, nabádal k jednoduchým experimentom.

Povšimnite si tiež, ako sa postupne vyvíjal obsah niektorých fyzikálnych pojmov. Dobre to vidieť pri hromovine — elektrine, kde sa od predstáv o fluide prešlo k názorom o elektrickom stave základných častíc.

Radlinského učebnica Školník bola významným prostriedkom pri dvíhaní vzdelanostnej úrovne slovenských ľudí v poslednej štvrtine minulého storočia, a to nielen žiakov, ale aj mládeže a dospelých. Splnila aj dôležitú úlohu udržiavať slovenský jazyk v ťažkých časoch, keď v rokoch 1874—1918 nemali sme ani jednej slovenskej strednej školy.

O jej kvalite svedčí skutočnosť, že sa používala na slovenských ľudových školách (v ročníkoch 6.—8.) ešte aj v tridsiatych rokoch po prvej svetovej vojne.

Vysvetlivky k článku na str. 321:
aeter — čítaj podľa latinského spôsobu éter
hromovina — elektrina
lingvisti — jazykovedci
prírodozpyt — na rozdiel od prírodopisu, ktorý opisuje javy v prírode, sa pýta na príčiny týchto javov
sochor — páka
strebavá studňa — pumpa
škripec — kladka
trasavý pohyb — kmitavý pohyb

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Vyletělo zrána několik včel

V letech 1114 až 1178 n. l. žil v Indii významný matematik *Bháskara II.* s přívlastkem Akarja (Učený). Je autorem relativně dokonalého čtyřsvazkového díla z oboru matematiky a astronomie s názvem *Siddhánta — širómani* (Koruna vědy). První část této pozoruhodné práce pojednávající o aritmetice má půvabný název *Lílavati* (Krasavice). Byla určena jeho dcerám. Je zajímavá tím, stejně jako některá další indická díla zabývající se matematikou, že byla částečně psána ve verších. V odborné literatuře jde o zjev zvláštní a přinejmenším obdivuhodný. Mimo jiné svědčí o krásném vztahu Indů k vědě a umění a zároveň naznačuje, že dávní indičtí učenci vytvářeli svá díla za mimořádně klidných a příznivých podmínek. Není pochyb o tom, že žili na výsluní úcty, vážnosti a obdivu vládnoucích vrstev i samotného panovníka. Z bohatého rejstříku veršovaných indických úloh se pokuste vyřešit úlohu z Lílavati, jejíž překlad jsem si dovolil částečně přebásnit (snad k jejímu prospěchu).

Vyletělo zrána několik včel
nasbírat nektar, zlatý pel.
Tisícem vůní jaro hýří,
za kterou z nich včelky míří?

Pětina z nich si našla hned
jasmínu křehký, vonný květ.
Kadamba zvábila včel třetinu
na připravenou hostinu.

Třemi když rozdíl znásobíš
těch skupin, které sedly již,
máš počet včel, jež kutík zve
na půvabné kvítky své.

Poslední včelka zbývá právě,
vybere si snad kopretinu v trávě
či v sadu květy jabloně?

A kolik těch včel celkem je?
Spočti je, rozkošná krasavice,
vždyť zítra už nepřiletí více.

Josef Trejbal

Konstrukce trojúhelníku nejmenšího obvodu

Je dán ostrý úhel XVY a jeho vnitřní bod A. Narýsujte trojúhelník ABC, který bude mít co nejmenší obvod a jehož vrchol B bude ležet na rameni VX a vrchol C na rameni VY úhlu XVY

Josef Trejbal

Řešení obou úloh bude v příštím čísle Rozhledů.

Hra „Člověče, nezlob se" trochu jinak

Chceš si s kamarády zahrát tuto známou hru v úpravě pro kapesní kalkulátory? Každý z vás bude užívat jeden kalkulátor. Dále musíte mít hrací kostku.

Nejprve se určí pořadí hráčů. Všichni hodí kostkou a o pořadí rozhodnou počty ok. Hráči, kteří mají stejný počet ok, hází ještě jednou.

Potom hráči začnou házet kostkou pro vlastní hru. Nejprve čekají na padnutí šestky. Komu se to podaří, vloží do kalkulátoru číslo 100. Pak další číslo, jež hráči padne, vždy odečte na svém kalkulátoru. Tedy např. po padnutí šestky a po dvou dalších hodech, při nichž padla čísla 5 a 3, má hráč na displeji svého kalkulátoru číslo 92. Komu padne šestka, hází ještě jednou.

V situaci, kdy dva hráči mají na kalkulátoru stejná čísla, ten z nich, jenž k tomu číslu dospěl jako první, si vynuluje kalkulátor a vyťuká na tlačítkách číslo 100. Potom čeká, až mu padne šestka, a po tomto šestkovém hodu další počty ok již začne odečítat a postupuje podle výše uvedených pravidel.

Vítězí hráč, na jehož kalkulátoru se nejdříve objeví nula. V závěru hry je možno číslo určené kostkou buď odečíst, anebo přičíst.

Kapesní kalkulátory mohou sloužit nejen k výpočtům, ale také ke hrám a různým kouzlům s čísly. Můžete se o tom přesvědčit v nedávno již po třetí vydané knížce *Hry s kalkulátory* (SPN, Praha 1988, cena 5,50 Kčs), kterou napsal vynikající popularizátor matematiky, fyziky a kosmonautiky *RNDr. Jiří Mrázek, CSc.* Letos v dubnu je tomu již jedenáct let od jeho předčasné smrti. V uvedené publikaci se seznámíte nejen s hrami, ale zároveň lépe poznáte kapesní kalkulátory a naučíte se je s porozuměním používat.

Jiří Mída

Řešení dvou úloh ze 7. čísla Rozhledů

Ještě jedna úloha pro turisty a nejen pro ně

a) Nejen z plánku cest, ale i přímo ze zápisu cest podle míst, kterými procházejí, je vidět, že do největšího počtu míst, a to do čtyř, lze dojít z místa zvaného Tvrz.

b) Lze prodloužit modrou cestu o část Strž—Hrušov—Tvrz—Lhota. V textu úlohy se neuvádí podmínka, že žádná ze značených cest nesmí dvakrát procházet týmž místem, a proto další možností je také prodloužení žluté cesty Hrušov—Tvrz—Lhota a zelené cesty Strž—Hrušov—Tvrz—Lhota.

Úloha o Rozhledech

Na titulní straně obálky minulého čísla Rozhledů byla právě čtyři prvočísla. Šlo o cenu 2 Kčs, pořadové číslo 7, ročník 67 a v údaji školního roku číslo 89. Jinak také můžeme říci, že na titulní straně bylo jediné složené číslo, a to letopočet 1988.

Nedojde-li k úpravě číselných údajů na titulní straně Rozhledů, mohou být na ní opět čtyři prvočísla, až zase ročník Rozhledů bude prvočíslo a jedno z čísel udávajících školní rok bude také prvočíslem. Lze zjistit, že to bude až ročník 71 ve školním roce 1993/94. Na titulní straně druhého čísla tohoto ročníku by pak mělo být podle dnešních zvyklostí dvakrát prvočíslo 2 a prvočísla 71 a 1993. Kdyby někdo požadoval čtyři různá prvočísla, pak tomu tak bude na obálce třetího čísla 71. ročníku Rozhledů.

Poznámka.

K důkazu, že číslo 1993 je prvočíslo, stačí ověřit, že není dělitelné žádným prvočíslem p menším než $\sqrt{1993}$. Toto tvrzení odůvodníme.

Kdyby číslo 1993 bylo složené, pak by existovala taková přirozená čísla $a \neq 1$, $b \neq 1$, pro něž by platilo

$$a \,.\, b = 1993 \,.$$

Předpokládejme, že

$$a \leqq b \,.$$

Potom

$$a^2 \leqq ab = 1993,$$

tj.

$$a \leqq \sqrt{1993} \,. \tag{1}$$

Je-li číslo 1993 složené, pak má dělitele a, který splňuje podmínku (1). Číslo a může být buď prvočíslo, nebo složené. Je-li složené, pak má aspoň jednoho prvočíselného dělitele $a' < a$, tj. $a' < \sqrt{1993}$; toto číslo a' je zároveň dělitelem čísla 1993.

Dokázali jsme tedy, že kdyby číslo 1993 bylo složené, pak by mělo aspoň jednoho prvočíselného dělitele $p \leqq \sqrt{1993}$. Nemá-li jej, pak je číslo 1993 prvočíslem. *-jm-*

Omyly, které ovládly svět

Jsme v létě blíž u Slunce?

Když slyším hovořit o příčinách změn ročních období, připomenu si vždy poznámku studenta, budoucího učitele, po přednášce, ve které byly vysvětlovány příčiny změn ročních období.

„Já bych to stejně vysvětlil svým žákům jednodušeji tím, že se během roku mění vzdálenost Země od Slunce."

To je opravdu velmi prosté, názorné a každému pochopitelné vysvětlení. Má jen jedinou vadu — je nepravdivé!! Jak to můžeme tvrdit? Pokud by roční doby byly vyvolány přibližováním a vzdalováním Země

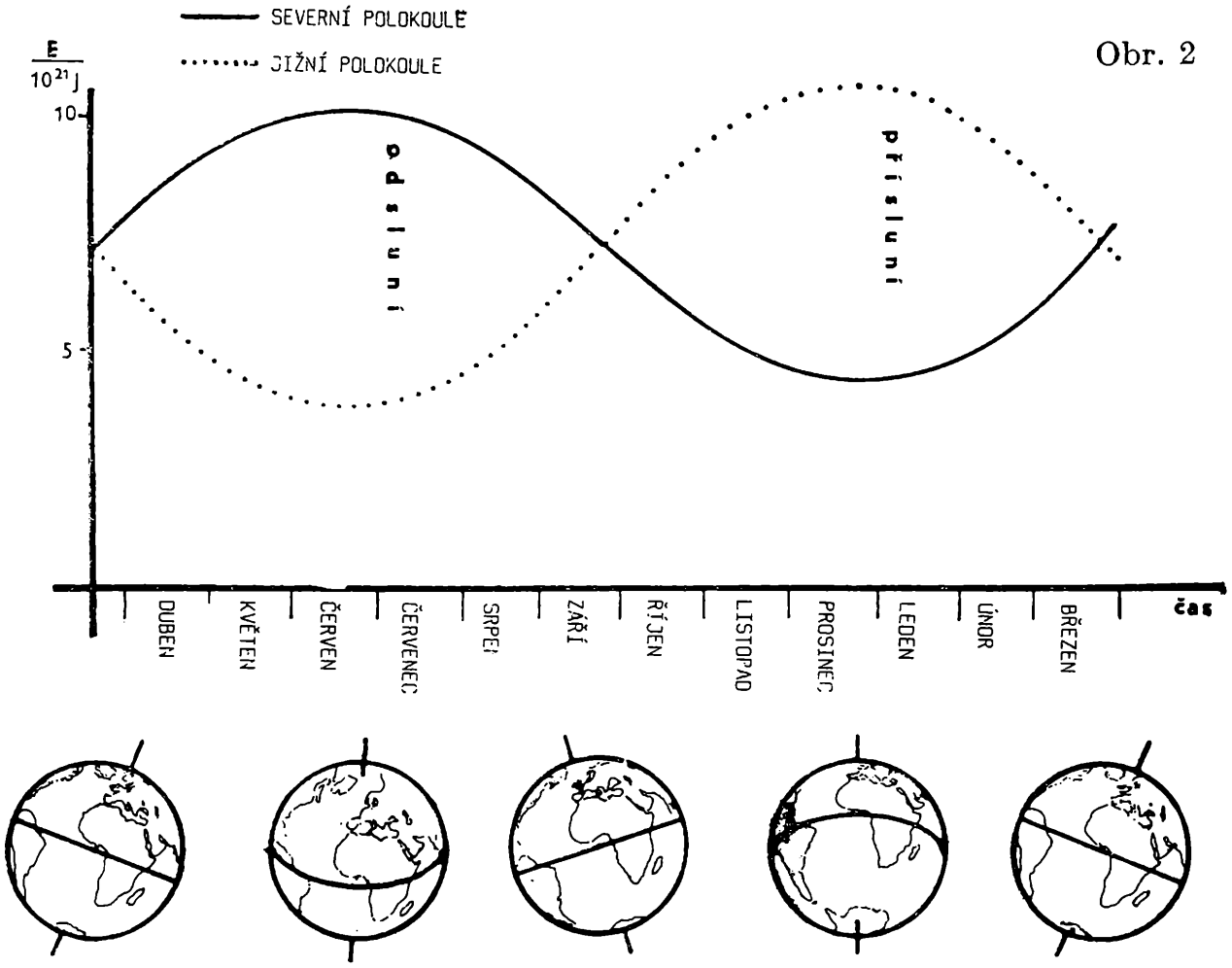
Obr. 1

od Slunce, muselo by být letní období na severní i jižní polokouli současně. Ve skutečnosti je na jižní polokouli chladnější období, když je u nás léto, a obráceně v prosinci začíná na jižní polokouli nejteplejší roční doba.

My, obyvatelé severní polokoule, musíme dát na otázku v nadpisu jednoznačně zápornou odpověď. V letním období jsme od Slunce nejdále.

Nejjednodušší představu o příčinách nerovnoměrného zahřívání různých částí Země během roku dává obr. 1. Slunce je na něm modelováno ohníčkem, naši Zemi představuje špekáček napíchnutý na prutu, kterým jsme znázornili zemskou osu. Levý špekáček představuje Zemi koncem června, pravý špekáček polohu Země v prosinci.

Musíme si včas připomenout, že poměry velikostí Země, Slunce a jejich vzdálenost jsou na našem špekáčkovém modelu silně zkresleny. Pokud by velikost Země, nehledě na tvarový rozdíl, měla odpovídat velikosti špekáčku, muselo by být Slunce znázorněno vatrou o desetimetrovém průměru a špekáček bychom opékali z úctyhodné vzdálenosti jednoho



kilometru. Přes tyto slabiny obrázku je okamžitě jasné na první pohled, že levý špekáček v červnové poloze je opékán více na horní polovině, kterou představuje severní polokouli, zatímco pravý (prosincový) špekáček se bude více smažit dole — na jihu.

Model sice trochu přehání sklon zemské osy, ale výsledek při menším úhlu bude jen v méně výrazných rozdílech mezi létem a zimou.

Všimněme si trochu podrobněji, jak se mění denní dávky slunečního záření, které dostává severní a jižní polokoule během roku. Na spodní části obr. 2. je Země nakreslena jako plochý terč, vystavený kolmo slunečním paprskům v červnu, v září, v prosinci a březnu.

Energii, kterou přináší sluneční záření za jednu sekundu na 1 m^2 terče se podařilo poměrně přesně změřit pomocí družic, které jsou vně vzdušného kabátu, který zabraňuje přímému měření této veličiny (tzv. solární konstanty) na povrchu Země.

Uvedená veličina má hodnotu přibližně 1350 W . m^{-2}. Na zemský terč tedy denně směřuje 1350 (π 6 378 000^2) (24 3600) J $\doteq$ 15 . 10^{21} J zářivé energie. Jestliže znázorníme každý exajoule (1 EJ = 10^{18} J = = 1 000 000 000 000 000 000 J) energie jedním paprskem a zanedbáme zatím eliptičnost zemské dráhy, zasahuje Zemi průměrně 15 000 takových paprsků. Ve dnech jarní a podzimní rovnodennosti (začátek a sřted grafu) jsou energie, které dostává severní i jižní zemská polokoule, stejné.

termínů pak „přesahující obvyklý jev nebo hodnotu běžných veličin"; slouží proto k významovému rozlišování a třídění fyzikálních jevů podle určitých příznaků

ULTRAAKUSTIKA (v. akustika) — část akustiky zabývající se ultrazvukem, tj. zvukem, který už není vnímatelný lidským sluchem

ULTRACENTRIFUGA (v. centrifuga) — odstředivka s mimořádně velkým počtem otáček (srov. centrifuga 600—1200 ot/min, supercentrifuga 12 000 ot/ min, ultracentrifuga 120 000—240 000 ot/min.)

ULTRAFIALOVÝ — ve fyzice: ultrafialové světlo, záření je neviditelné, protože jeho spektrum leží dále, než je ještě viditelné spektrum fialové

ULTRAKRÁTKÝ — ve fyzice: ultrakrátké vlny — kmitočtové radiokomunikační pásmo v rozsahu od 300 do 3000 MHz; zkratka UKV označuje tzv. decimetrové vlny. Pozn.: Něco jiného je VKV — velmi krátké vlny; zkratka určuje tzv. metrové vlny.

ULTRASONICKÝ (v. sonický) — ultrazvukový; jsoucí nad kmitočtem zvuku lidským sluchem vnímatelného; srov. supersonický

ULTRAZVUK — zvuk, jehož frekvence je vyšší než 20 kHz; ULTRAZVUKOVÝ — nadzvukový; s frekvencí zvukového vlnění větší než 20 000 kmitů, takže je nevnímatelný lidským sluchem

UMBRA (z lat. *umbra* = stín, tma) — tmavé jádro středních a velkých skvrn na Slunci; v. t. penumbra. Pozn.: S lat. umbra souvisí přes španělštinu SOMBRERO — klobouk se širokou střechou, takže je stinný

UNDULAČNÍ (od lat. *unda* = voda, vodstvo, vlna; srov. přes franštinu ONDULACE — vlasy uměle zvlněné) — vlnový, vlnivý; undulační proud — kolísající v drobných vlnkách kolem střední hodnoty; undulační teorie — vlnová teorie, která pokládá světlo za podélné vlnění velmi řídkého prostředí; v. t. redundance

UNIFIKACE (slož. z lat. *unus* = jeden; srov. UNIKÁT — předmět jedinečný, ojedinělý + *facio*, *-ere* = dělat; v. -fikace) — „zavedení jediného, tj. jednotného druhu"; sjednocení, sjednocování; v. t. univariantní, univerzální

UNIVARIANTNÍ (slož. z lat. *unus* = jeden; v. unifikace + *varius* = rozmanitý, různý, proměnlivý; v. variace) — jednovariantní, bez možnosti obměny. Pozn.: Stejný význam má termín „monovariantní", ve kterém je užito místo lat. *unus* řeckého *monos* (= jediný, samotný).

UNIVERZÁLNÍ (z lat. *universalis*; od *universus* = „k jednomu obrácený; v jedno spojený s jinými"; veškeren, celý; slož. z *unus* = jeden; v. unifikace + *verto*, *-ere*, ptc. pf. *versus* = točit, obracet; v. inverze) — „povšechný, obecný"; obecný, všestranný; mnoha způsoby upotřebitelný

 URAN (z řec. *uranos* = nebe, nebesa) — prvek nazvaný podle planety Uranu, a ta nazvána podle řec. boha nebe Urana; v. t. transurany

V (psáno malým písmenem) (z lat. *velocitas*, od *velox* = pohyblivý, hbitý; srov. VELOCIPÉD — přes franštinu: „rychlá noha") — dřívější označení pro rychlost proměnnou, dnes pro rychlost vůbec; srov. „c"

VAKANCE (od lat. *vaco*, *-are*, ptc. préz. *vacans*, *-antis* = být prázdný, uprázdněný; v. vakuum) — (zastaralé) uprázdnění místa, funkce; ve fyzice: neobsazený uzel mřížky; bodová porucha strukturní mřížky, kdy jeden uzel mřížky zůstává prázdný, neobsazen; VAKANTNÍ uzlová místa — neobsazená

VAKUOMETR (slož. z lat. *vacuus* = prázdný; v. vakuum + řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — přístroj na měření „prázdného prostoru", tj. vysokého zředění plynu

VAKUUM (z lat. *vacuum*; od *vacuus* = prázdný) — „prázdnota, prázdné místo"; dokonale prázdný prostor; prostor se silně zředěným vzduchem; prostor, v kterém nejsou plyny ani páry; VAKUOVÝ — vysoce vyčerpaný; vakuová destilace — destilace prováděná za sníženého tlaku; v. t. vakance, vakuometr, evakuovaný

VALENCE (od lat. *valeo*, *-ere*, ptc. préz. *valens*, *-entis* = být silný, být zdráv, platit) — dnes už nepoužívaný termín pro „mocenství"; dnes „vazebná schopnost, vaznost". V. t. ekvivalence, gramekvivalence, kovalence. Pozn.: S lat. *valeo*, *-ere* souvisí lat. *validus* = být silný, být zdráv; od toho pak je INVALIDA — „ten, kdo není silný, kdo není „zdráv"

VARIABILNÍ (slož. z lat. *vario*, *-are* = obměňovat, různit se; v. variace + *-bilis* — přípona vyjadřující „schopnost, možnost, způsobilost, činnost) — proměnlivý; schopný proměny nebo odchylky; kolísavý (opak: konstantní); VARIABILITA — proměnlivost, kolísavost

VARIACE (z lat. *variatio*; od *vario*, *-are*, ptc. préz. *varians*, *-antis*, ptc. pf. *variatus* = činit pestrým, rozmanitým; obměňovat, střídat; a to od *varius* = pestrý, rozmanitý, proměnlivý) — pestrost, rozmanitost, různost; obměna, střídání; ve fyzice: variace geomagnetického pole — denní a roční kolísání („změny") magnetického pole Země

VARIANTA — pozměněná podoba určitého tématu, obměna; jedno z více možných řešení; v. t. invarianta; kovariance, invariance

VARIANTNÍ — mající možnost obměny; jako záporu se používá termínu INVARIANTNÍ (v. t.), ojediněle též NONVARIANTNÍ (v. t.); v. t. bivariantní, divariantní, monovariantní, univariantní; variabilní, variometr

VARIOMETR (slož. z lat. *varius* = pestrý, rozmanitý, proměnlivý; v. variace + řec. metron = měřidlo, míra; v. metr[1]) — přístroj měřící nějaké změny; např. přístroj, který zapisuje časové změny geomagnetického pole; palubní přístroj určující změny výškové polohy letadla;

odlaďovací zařízení s proměnlivou induktivitou ve vysokofrekvenčních přístrojích

VEKTOR (od lat. *veho, -ere*, ptc. pf. *vectus* = vézti, vozit, táhnout; srov. „VEHIKL" — chatrné vozidlo; v. t. -or) — „pohybovač, průvodič"; původně pojem veličiny charakterizované kromě velikosti i směrem a smyslem (spojené tedy s představou pohybu, posunování sil) a znázorňované šipkami, později mnohem abstraktnější pojem charakterizovaný axiómy vektorového prostoru; VEKTORIÁLNÍ — směrově orientovaný; v. t. konvekce

VENTIL (od lat. *ventilo, -are*, ptc. pf. *ventilatus* = větrat; od *ventus* = vítr) — 1. technické zařízení, kterým se uzavírá nebo řídí průtok kapalin nebo plynů; 2. polovodičový prvek s účinkem ventilu; VENTILACE — větrací zařízení, větrání, řízená výměna vzduchu; VENTILÁTOR (v. -or) — větrací zařízení, větrák

VERIFIKACE (slož. z lat. *verus* = pravý, pravdivý + *-ficatio*, od *facio, -ere* = dělat; v. -fikace) — potvrzení pravosti, správnosti, pravdivosti; ověření; VERIFIKOVAT, VERIFIKAČNÍ

VERTIKÁLA (od lat. *vertex, -icis* — zde v přeneseném významu „vrchol, vrch, hora) — „přímka s nějakým vztahem k vrcholu"; svislice; VERTIKÁLNÍ — svislý. Pozn.: Základní význam lat. slova vertex je „vír", od *verto, -ere* = obracet, otáčet (v. inverze); v přeneseném významu pak místo na hlavě, kde jsou vlasy „zvířeny"; témě, temeno, vrch

VIBRACE (z lat. vibratio; od *vibro, -are*, ptc. pf. *vibratus* = kmitat, chvět) — kmitání, chvění; VIBRAČNÍ energie — kmitavá; VIBROVAT; VIBRÁTOR (v. *-or*) — mnohovýznamový termín pro zařízení, které něčím chvěje; např. přístroj s kmitající částí k masážním účelům; součást vibračního měniče, tj. zařízení k přeměně malého stejnosměrného napětí vyšší hodnoty; ve stavebnictví stroj na střásání a zhutňování různých materiálů (betonu apod.)

VIDEO- (od lat. *video, -ere*, ptc. préz. *videns, -entis*, ptc. pf. *visus* = vidět) — počáteční část odborných výrazů, především sdělovací techniky; vyjadřuje nějaký vztah k „vidění, pozorování"

VIDEOSIGNÁL (v. signál) — obrazový signál; „signál, který lze vidět"

VIDEOTELEFON (v. telefon) — telekomunikační zařízení umožňující současný přenos zvuku a obrazu hovořících osob při telefonním spojení

Pozn.: Z ptc. pf. *visus* slovesa *video, -ere* vzniká koncová složka termínů -VIZE (v. t.); z ptc. préz. *videns, -entis* vzniká koncová složka -VIDENTNÍ; např. EVIDENTNÍ — zřejmý, zcela jasný

VIRTUÁLNÍ (od lat. *virtus* = mužnost; každá vlastnost hodná muže; zde zvláště schopnost; a to od *vir* = muž; srov. TRIUMVIRÁT —

mocenský svazek tří mužů) — schopný, účinný, možný; zdánlivý, myšlený; daný podle možnosti; v optice: virtuální obraz bodu — neskutečný, zdánlivý (paprsky vycházejí z určitého myšleného bodu jen zdánlivě, ve skutečnosti tím bodem neprocházejí; protnuly se totiž v opačném směru; např. při pohledu do zrcadla vidíme svůj obraz

VISKOZITA (od lat. *viscosus* = lepkavý; a to od *viscum* = jmelí; lep ze jmelí připravený) — „lepkavost"; vazkost; míra vnitřního tření v tekutinách; VISKOZNÍ — vazký, tj. vlhký a lnoucí přitom k sobě

VIZE (z lat. *visio*; od *video*, *-ere*, ptc. pf. *visus* = vidět; v. video-) — „vidění"; vidění do budoucnosti, schopnost předvídat, představivost, představa; vidina, přelud; v. t. vizuální

-VIZE koncová složka termínů mající základní význam „vidění"; např. TELEVIZE (řec. *téle* = daleko) — „obraz viděný na dálku"; REVIZE (*re-* = zpět, opět, znova) — „opětné podívání"; překontrolování

VIZUÁLNÍ (od lat. *visus* = vidění, pohled, zrak; věc viděná, zjev; od *video*, *-ere*, ptc. pf. *visus* = vidět; v. video-) — týkající se zrakového vnímání; vizuální pozorování — pozorování pouhým okem; vizuální paměť — založená na zrakovém vnímání; vizuální dvojhvězda — její dvě složky lze rozlišit dalekohledem (na rozdíl od dvojhvězdy spektroskopické, v. t.)

VULKÁN (z lat. *Vulcanus* — římský bůh ohně a kovářství) — sopka (Římský Vulkán měl prý svou kovářskou dílnu pod horou chrlící oheň; nejčastěji se uváděla sopka Etna.);

VULKANIZACE (v. -izace) — „dodávání ohně"; děj, při kterém se mění fyzikální vlastnosti původního plastického kaučuku působením zvýšené teploty a síry

ZENIT (z it. *zenit*, a to ze špatného franc. čtení ľ azimut arabského as-simut = cesta slunce; v. azimut) — nadhlavník, nadtemeník; bod, ve kterém protíná zdánlivou nebeskou polokouli přímka vedená kolmo na horizontální rovinu přímo nad hlavou pozorovatele

ZODIAK (z řec. *dzódiakos kyklos* = zvířecí kruh, kruh zvířat; dzón = živočich; srov. zoologie; kyklos = kolo, kruh; v. cyklus) — zvěrokruh; ZODIAKÁLNÍ souhvězdí — zvířetníková souhvězdí, souhvězdí zvěrokruhu; zodiakální světlo — zvířetníkové; zvýšený jas noční oblohy, který se váže na souhvězdí zvěrokruhu

ZÓNA (z řec. *dzóné* = pás; od *dzónnymi* = opásat) — pás, pásmo, oblast; ZONÁLNÍ — rozdělený v zóny, v pásma; odpovídající určitému pásmu; pásmový

Největší rozdíly jsou na začátku léta a zimy. Na severní polokouli směřuje tehdy 70 % dopadající zářivé energie, tj. 10 500 našich paprsků, oproti 4500 paprskům zacíleným na jižní polokouli. Průběh rozdělení energie mezi obě polokoule znázorňuje zjednodušeně graf na horní části obr. 2.

Různé oblasti severní a jižní polokoule samozřejmě neobdrží z tohoto přídělu stejná množství a navíc dochází k rozmývání této energie vzdušnými i mořskými proudy nejen mezi různými oblastmi jedné polokoule, ale i mezi oběma polokoulemi navzájem. Značná část energie se také vrací zpět do Vesmíru, ať po odražení nebo opětným vyzářením. To však nic nemění na skutečnosti, že *rozhodujícím činitelem pro střídání ročních období je odklonění osy rotace Země od roviny její oběžné dráhy kolem Slunce.*

Nakonec si ještě všimneme, jak se projeví vliv změn vzdálenosti Země od Slunce na velikosti přijímané energie. Protože dráha Země kolem Slunce není kruhová, ale eliptická, vzdálenost Země—Slunce se během roku poněkud mění. Když je Země nejblíže Slunci (začátek ledna), mluvíme o tzv. *přísluní*, když je nejdále, jedná se o tzv. *odsluní* (začátek července). I když není rozdíl obou vzdáleností příliš velký, mají tyto změny vliv na intenzitu slunečního záření dopadajícího na Zemi. Intenzita záření se mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti. Platí tedy:

$$\frac{\text{energie přijatá během dne, (jedné otočky) v přísluní (odsluní)}}{\text{energie přijatá během jedné otočky při střední vzdálenosti Země—Slunce}} = \frac{\left[\text{střední vzdálenost Země—Slunce}\right]^2}{\left[\text{vzdálenost Země—Slunce v přísluní (odsluní)}\right]^2}$$

Hodnota energie přijaté v přísluní je proto o několik procent větší než v odsluní.

I když na rozdíly podnebí na severní a jižní polokouli má nezanedbatelný vliv i řada dalších faktorů, např. rozloha pevnin a moří, charakter povrchu, převládající proudění vzduchu a mořských proudů aj., můžeme říci, že na severní polokouli jsou vlivem eliptičnosti zemské dráhy mírnější zimy (Země v přísluní) a méně teplá léta (Země v odsluní) v porovnání s jižní polokoulí. *Změna vzdálenosti Země od Slunce* není tedy příčinou střídání ročních období, ale *je jen jedním z důvodů rozdílnosti podnebí na jižní a severní polokouli.*

Úkol pro vás:

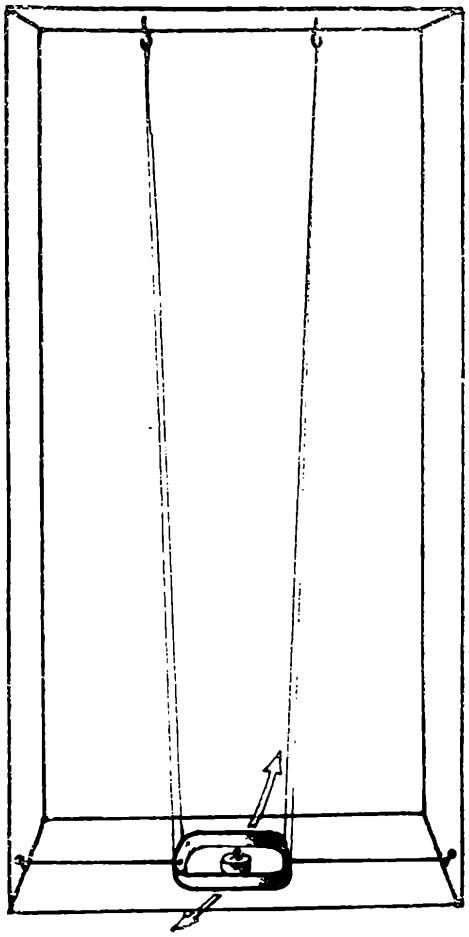
Odhadněte pomocí uvedeného vztahu, o kolik procent se liší denní dávka sluneční energie, kterou Země obdrží za den v přísluní a odsluní. Potřebné údaje vyhledejte v tabulkách.

Milan Rojko

Laboratoř doma

Váhy pro kosmonauty

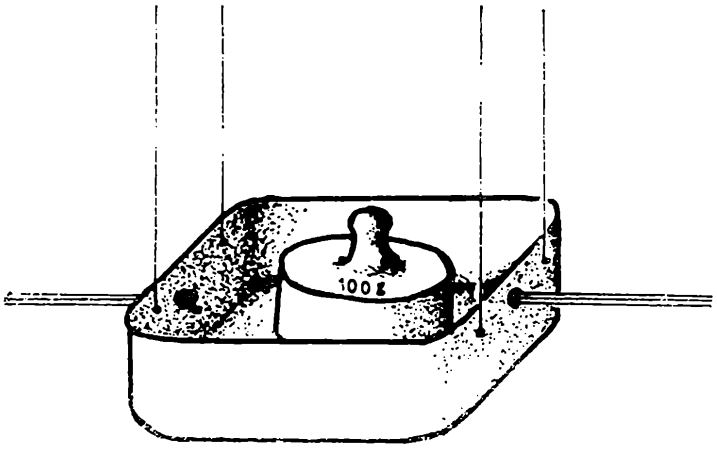
Jistě je každému zřejmé, že vážení, tak jak je známe z domova, není vzhledem k beztížnému stavu v družicové laboratoři možné. I kosmonauti potřebují vážit např. při dávkování stravy, kontrole své hmotnosti i při vědeckých pokusech. Váhy, které však používají, musí pracovat na zcela jiném principu než kuchyňské váhy nebo pérové osobní váhy.



Obr. 1

Jedinou možností, jak měřit hmotnost i v beztížném stavu, je využití skutečnosti, že se předměty s větší hmotností rozbíhají i brzdí obtížněji než předměty o menší hmotnosti.

Obr. 2



Kosmonaut by sice nedokázal rozlišit prázdnou a plnou konzervu potěžkáním v ruce, ale kdyby s takovou konzervou např. zamával sem tam, bude se mu s prázdnou konzervou kmitat snadněji než s plnou. Obr. 1 ukazuje „váhy" založené na tomto principu. Miskou bude kmitat dvojice tenkých gumiček, které jsou náhradou za kovová pera, používaná ve skutečných družicových vahách. Za misku na vážení nejlépe poslouží např. stará krabička na mýdlo, do které uděláme otvory k upevnění gumičky i závěsů z režných nití. Otvory můžete snadno udělat hřebíčkem, který uchopíte do kleští a zahřejete v plameni svíčky nebo plynového vařiče. K zavěšení nití jsme u našich vah použili kroužky po dětské houpačce; dokážete jistě najít řadu jiných způsobů. Podmínkou

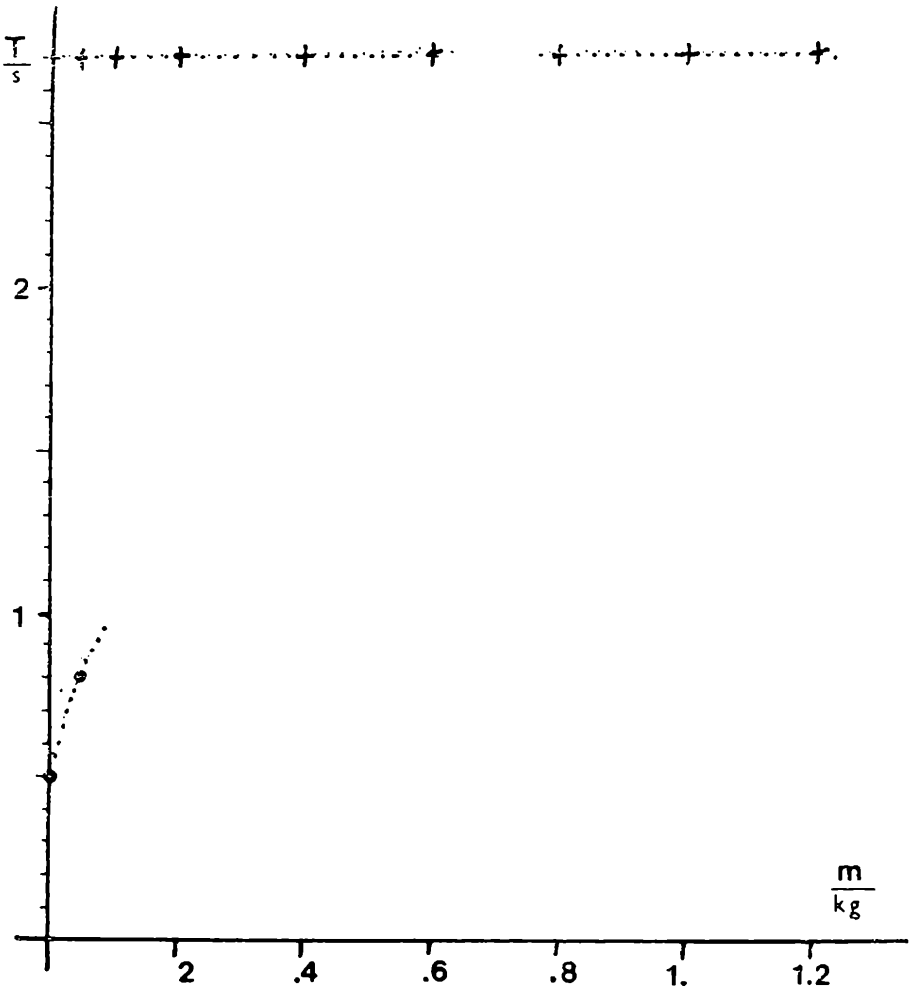
je, aby nitky závěsů měly stejné, pokud možno co největší délky. Tenké gumičky uvážeme ke středním otvorům misky (obr. 2) a druhé konce upevníme k malým hřebíčkům, jak ukazuje obr. 1. Gumičky by měly být jen mírně napnuté. Zavěšení misky na nitě je v naší pozemské domácí laboratoři nezbytné; v družici bychom se bez této části vah obešli.

Před vážením je ještě třeba připravit stupnici, která nám umožní čtení hmotnosti. Přidávejte na misku postupně závaží a zaznamenávejte dobu kmitu misky. Přesnějšího výsledku dosáhnete změřením doby většího počtu kmitů (např. 20) a dělením. Počáteční malý rozkmit volte stále stejný, např. 5 cm.

Příklad výsledků:

$\frac{\text{hmotnost závaží}}{\text{kg}}$	0	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{\text{doba 1 kmitu}}{\text{s}}$	0,50	0,81	1,01	1,31	1,61	1,81	1,96	2,06

Zjištěné dvojice (hmotnost, doba kmitu) zapište do tabulky a zakreslete na milimetrový papír podobně jako na obr. 3. Takto získanými body proložte plynulou křivku.



Obr. 3

Při vážení potom místo závaží umístíte do misky předmět a jeho hmotnost zjistíte z grafu po změření doby kmitu.

Skutečné váhy v družicích jsou ovšem sestrojeny tak, že provádějí měření kmitů a převod na jednotky hmotnosti automaticky. Pracují však v podstatě na stejném principu.

Úkol pro vás:

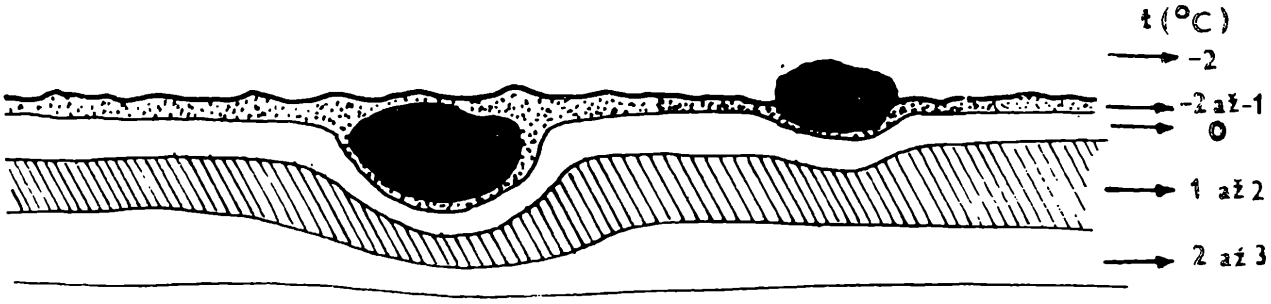
Zašlete nám popis svých vah a graf pro určování hmotnosti na vašich vahách. Do téhož grafu zakreslete také doby kmitů pro různé hmotnosti závaží na misce *bez gumiček*. Uvítáme i fotografie vašich vah.

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Proč vyrůstají na polích kameny?

Zemědělci pravidelně na svých polích sbírají kameny, které jsou nebezpečné pro jejich zemědělské stroje. Přesto po určité době na polích kameny znovu vyrostou ze země. Zdá se to být nepochopitelné a odporující zákonům fyziky. Vzhledem k větší hustotě kamenů ve srovnání s ornicí bychom očekávali, že se kameny budou v zemině potápět a nikoli vynořovat. Abychom vaše zamyšlení o tomto problému správně nasmě-



rovali, připravili jsme vám obrázek, který schematicky znázorňuje promrzání půdy s kameny. Že se kameny zahřívají i ochlazují mnohem snadněji než ornice, bychom vám asi nemuseli připomínat. Podobný obrázek pro tání půdy si jistě dokážete nakreslit sami.

Úkol pro vás:

Popište, jak dochází ke zvedání kamenů v ornici, a posuďte, při jakém počasí je stoupání kamenů nejintenzivnější.

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu: RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK Praha, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2. Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

K násobení celých čísel metodou „zdvojování a půlení"

V minulém čísle Rozhledů jsme vám v článku „Jak dříve lidé také počítali" ukázali, jak staří Egypťané násobili dvě přirozená čísla metodou „zdvojování a půlení" Zopakujme si to na příkladu 67 . 53.

	67	53
.2	~~134~~	~~26~~ :2
.2	268	13 :2
.2	~~536~~	~~6~~ :2
.2	1 072	3 :2
.2	2144	1 :2
	3551	

53 : 2 = 26 , zb. 1
26 : 2 = 13 , zb. 0
13 : 2 = 6 , zb. 1
6 : 2 = 3 , zb. 0
3 : 2 = 1 , zb. 1
1 : 2 = 0 , zb. 1

První číslo jsme postupně násobili a druhé číslo postupně dělili číslem 2. Do tabulky jsme zapsali získané dvojnásobky a neúplné podíly. Pak jsme škrtli řádky, ve kterých bylo v pravém sloupci sudé číslo. (To jsou řádky, ve kterých dělení vycházelo se zbytkem 0). Nakonec jsme sečetli zbylá čísla v levém sloupci. Získaný součet se rovná hledanému součinu čísel 67 . 53. Vyzkoušejte si sami, že dostanete stejný výsledek, když vyměníte pořadí čísel 67 a 53, tj. když budete „zdvojovat" 53 a „půlit" 67.

Výsledek můžete samozřejmě ověřit vynásobením daných čísel. My však chceme ukázat, že tento postup vede ke *správnému výsledku pro každá dvě přirozená čísla.*

Předem si však ukážeme ještě jiné uplatnění metody „půlení". Početní operace s dělením dvěma přepíšeme takto:

$$53 = 2 \cdot 26 + 1$$
$$26 = 2 \cdot 13 + 0$$
$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$
$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

Nyní postupně dosadíme za čísla v kroužcích výrazy z následujících řádků.

$53 = 2 \,.\, 26 + 1$	za 26 dosadíme výraz $2 \,.\, 13 + 0$
$= 2^2 \,.\, 13 + 1$	za 13 dosadíme výraz $2 \,.\, 6 + 1$
$= 2^3 \,.\, 6 + 2^2 + 1$	za 6 dosadíme výraz $2 \,.\, 3 + 0$
$= 2^4 \,.\, 3 + 2^2 + 1$	za 3 dosadíme výraz $2 \,.\, 1 + 1$
$= 2^5 + 2^4 + 2^2 + 1$	

Tím jsme vyjádřili číslo 53 jako součet mocnin čísla 2, tj. pomocí čísel $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5.

Poznámka. Ti z vás, kdo znají dvojkovou soustavu, jistě poznali, že jsme číslo 53 vyjádřili ve dvojkové soustavě. Výsledek tedy můžeme zapsat

$$53 = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)_{\text{dvě}}$$

Metoda „půlení" proto umožňuje převádět čísla do dvojkové soustavy. Zbytky, které při dělení dvěma vycházejí, jsou číslice daného čísla zapsaného ve dvojkové soustavě čtené od konce.

Vraťme se nyní k našemu postupu násobení. Čísla v levém sloupci tabulky můžeme přepsat jako součiny čísla 67 a mocnin čísla 2. Čísla v pravém sloupci nahradíme zbytky při dělení dvěma (tj. číslicemi čísla 53 zapsaného ve dvojkové soustavě).

67	1
~~$2 \,.\, 67$~~	~~0~~
$2^2 \,.\, 67$	1
~~$2^3 \,.\, 67$~~	~~0~~
$2^4 \,.\, 67$	1
$2^5 \,.\, 67$	1

Škrtneme řádky, ve kterých je vpravo nula, a pak sečteme zbylá čísla v levém sloupci. Dostaneme

$$67 + 2^2 . 67 + 2^4 . 67 + 2^5 . 67 = (1 + 2^2 + 2^4 + 2^5)\ 67$$

Ale součet čísel v závorce je roven 53. Tedy součet je skutečně roven 53 67.

Postup jsem sice ověřili na konkrétním případě, ale je vidět, *že odůvodnění má obecnou platnost.*

Na závěr vám dáme ještě jednu *úlohu*:

Pokuste se zobecnit egyptskou metodu násobení dvou čísel na čísla desetinná. (Návod: Postup je obdobný jako při převádění desetinných čísel do dvojkové soustavy.)

Milan Koman

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Mějme cifry A, B, přičemž $A \neq B$, $A \neq 0$, a zkoumejme čísla sestavená z těchto cifer.

a) dokažte, že vztah $AB . AAA = ABA . AA$ neplatí pro žádnou dvojici hodnot A, B;

b) dokažte, že vztah $AB . AAA = ABA . AA + 1$ platí pro právě jednu dvojici hodnot A, B;

c) dokažte, že vztah $AB . AAAA = ABAB . AA$ platí vždy.

2. Rozhodněte, zda je možno čísla 1, 2, . . . , 28 rozdělit do čtyř skupin tak, aby součty čísel v jednotlivých skupinách byly rovny čtyřem po sobě jdoucím prvočíslům.

3. Řešte číselný rébus.

SLOV,O + SLOV,O = PESŇA.

Symbolem „, " je míněna desetinná čárka. Stejným písmenům odpovídají stejná čísla a písmenům navzájem různým odpovídají čísla navzájem různá.

4. Nalezněte všechna čísla, která jsou 13krát větší než jejich ciferný součet.

5. (obtížnější). Mějme trojúhelník ABC a nechť K, M jsou průsečíky os úhlů při vrcholech A, B s protějšími stranami. Jestliže jsou úsečky OK, OM shodné, potom jsou úhly při vrcholech A, B shodné nebo úhel při vrcholu C má velikost 60 stupňů. Dokažte! (Symbolem O je označen průsečík AK a BM.)

6. (obtížnější). Posloupnost všech přirozených čísel 1, 2, 3, . . . rozložíme do několika aritmetických posloupností. Dokažte, že alespoň pro jednu z těchto posloupností platí, že její první člen je dělitelný její diferencí.

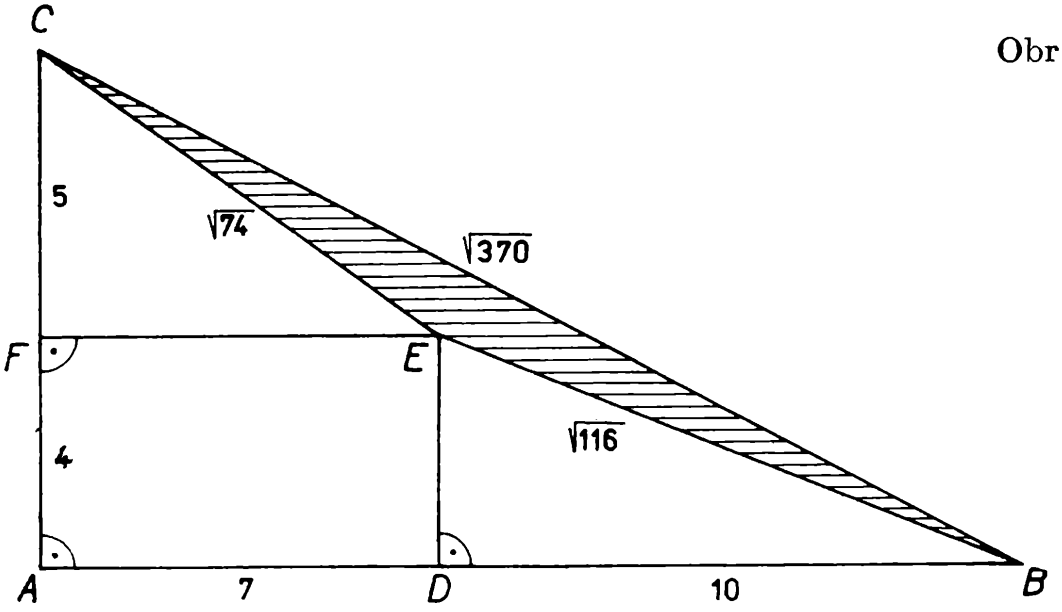
7. (obtížnější). Dokažte, že aritmetický průměr délek stran pravidelného n-úhelníka je menší než aritmetický průměr délek jeho úhlopříček.

Tomáš Schütz

Jednoduché řešení úlohy Lewise Carolla

V sedmém čísle loňského ročníku Rozhledů jsme otiskli jedno řešení této *Carollovy* úlohy: Mezi třemi čtvercovými pozemky, které mají obsahy 74 m², 116 m², 370 m², zůstává pozemek tvaru trojúhelníku. Jaký je jeho obsah?

Uvedený trojúhelník má strany o těchto délkách (v metrech): $\sqrt{74}$,



Obr. 1

$\sqrt{116}$, $\sqrt{370}$. Z obr. 1 a z Pythagorovy věty plyne, že uvedené strany jsou po řadě přeponami těchto pravoúhlých trojúhelníků: *CFE*, *EDB*, *CAB*. Obsah *P* daného trojúhelníku *BCE* dostaneme, odečteme-li od obsahu trojúhelníku *CAB* obsahy trojúhelníků *CEF*, *EDB* a obdélníku *ADEF*. Je tedy (v m²):

$$P = \frac{17 \cdot 9}{2} - \frac{7 \cdot 5}{2} - \frac{10 \cdot 4}{2} - 7 \cdot 4 = 11.$$

Emil Kraemer

Exponenciální zeměpisné algebrogramy

Stejná písmena nahraďte stejnými číslicemi.

a) B^A = HAMY
b) FRAN = $(CI)^E$ [2 řešení]
c) NOR = $(SK)^O$
d) ANGO = L^A
e) MARO = K^O
f) $(HO)^L$ = EŠOV
g) TEPL = $(IC)^E$ [2 řešení]
h) $(TE)^P$ = LICE [3 řešení]
i) BROU = $(MO)^V$
j) $(GA)^L$ = ANTA

(Řešení naleznete na str. 318.)

Jindřich Pěnčík

NAŠE SOUTĚŽ

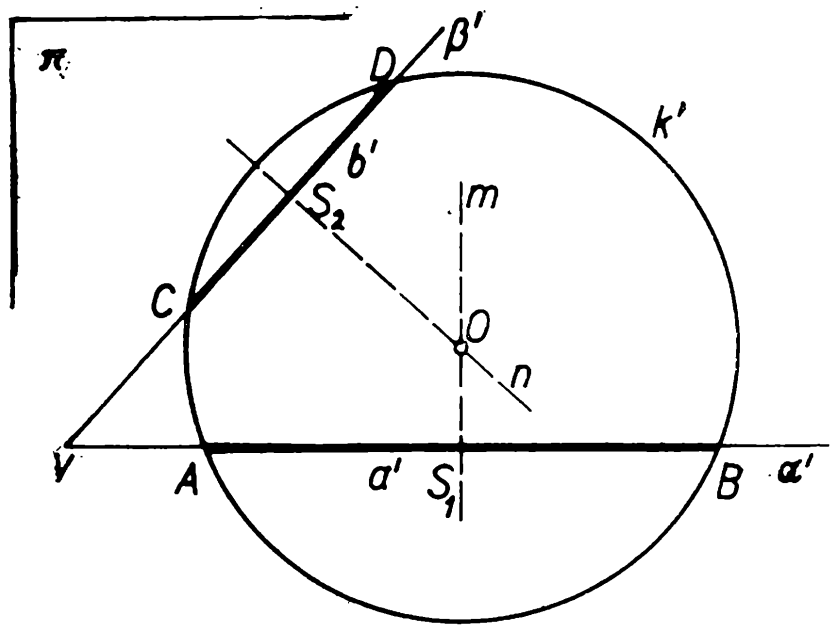
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány poloroviny α, β, které nejsou vzájemně kolmé a mají společnou hraniční přímku h. Uvnitř poloroviny α je dána kružnice $a(S_1, r_1)$; zároveň je dáno kladné číslo r_2. Sestrojte kulovou plochu K, která obsahuje kružnici a a zároveň protíná polorovinu β v kružnici b mající poloměr r_2.
(Došla 3 řešení.)

Stanislav Horák

Autorovo řešení: Je-li plocha K sestrojena, leží její střed O na přímce $m \perp \alpha$ vedené středem S_1 kružnice a; zároveň bod O leží na přímce $n \perp \beta$ vedené středem S_2 kružnice b (obr. 1). Různoběžky m, n určí



Obr. 1

rovinu π, pro kterou platí: $\pi \perp \alpha$, $\pi \perp \beta$. Z toho plyne, že průsečnice h polorovin α, β je kolmá k rovině π; průsečík přímky h s rovinou π označme V Rovina π protíná poloroviny α, β po řadě v polopřímkách α', β' se společným počátečním bodem V. Zároveň rovina π protíná plochu **K** v její hlavní kružnici k'; její střed je tedy ve středu O plochy **K**. Kružnice k' protíná polopřímku α' v bodech A, B a polopřímku β' v bodech C, D. Úsečky AB, CD jsou po řadě průměry kružnic a, b. Podle předpokladu

leží kružnice a uvnitř poloroviny α; proto bod V hraniční přímky h poloroviny α je vně úsečky AB, takže náleží vnější oblasti kružnice k'; proto leží také vně úsečky CD. Proto bodem V procházejí dvě tečny kružnice k' Nechť jedna z těchto tečen se dotýká kružnice k' v bodu T. Podle věty o mocnosti bodu V ke kružnici k' platí:

$$|VA| \; |VB = |VT|^2 = t^2 , \tag{1}$$

$$|VC| \, . \, |VD| = |VT|^2 \tag{2}$$

Je-li $|VD| > |VC|$ a je-li $|VC| = x$, je $|VD| = x + 2r_2$, takže podle rovností (1) a (2) je

$$x(x + 2r_2) = t^2 ,$$

$$x^2 + 2r_2x - t^2 = 0 \tag{3}$$

Číslo $x = |VC|$ je tedy kořenem kvadratické rovnice (3); protože je x kladné číslo, jde o kořen

$$x = - r_2 + \sqrt{r_2^2 + t^2} . \tag{4}$$

Z provedeného rozboru plyne tato *konstrukce:*

1. Bodem S_1 vedeme přímku $m \perp \alpha$. 2. V polorovině α sestrojíme bodem S_1 přímku $\alpha' \perp h$; její patu označíme V 3. Sestrojíme rovinu $\pi = m\alpha'$; částí přímky α' je průměr AB kružnice a. 4. Sestrojíme průsečnici β' poloroviny β s rovinou π. 5. Podle rovnosti (1) sestrojíme úsečku o délce t (pomocí Eukleidovy věty). 6. Sestrojíme úsečku o délce $\sqrt{r_2^2 + t^2}$ (podle Pythagorovy věty). 7. Sestrojíme úsečku, která má délku x určenou rovností (4). 8. Na polopřímce β' sestrojíme bod C tak, aby $|VC| = x$. 9. Na polopřímce VC sestrojíme bod D tak, aby $|VD| = x + 2r_2$. 10. Sestrojíme kružnici k', která leží v rovině π a prochází body A, B, C. 11. Sestrojíme kulovou plochu **K**, jejíž hlavní kružnicí je kružnice k'

Snadno se dokáže, že kružnice k' prochází také bodem D. Úloha má právě jedno řešení.

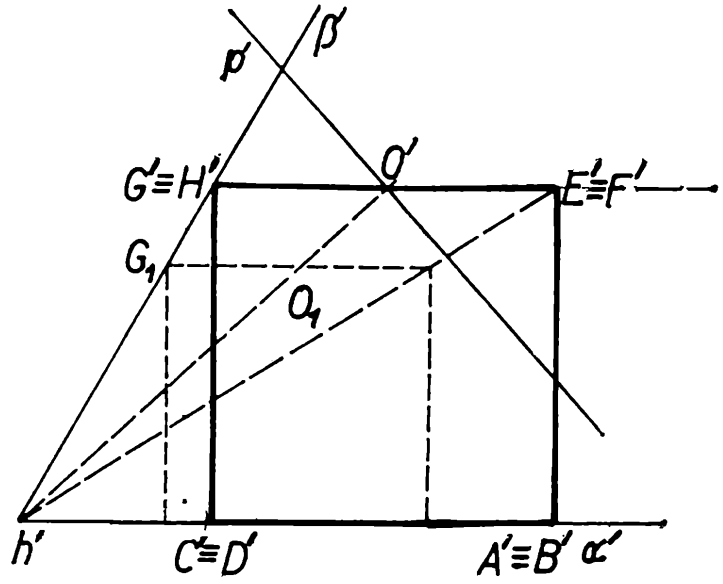
2. Dvě dané poloroviny α, β se společnou hraniční přímkou h mají odchylku ω, pro kterou platí $0^0 < \omega < 90°$. Zároveň je dána přímka p, která protíná poloroviny α, β v jejich vnitřních bodech. Krychle $ABCDEFGH$ má tyto vlastnosti: a) Stěna $ABCD$ leží v polorovině α; b) vrchol G leží v polorovině β; c) střed O stěny $EFGH$ leží na přímce p. Určete množinu bodů O všech krychlí vyhovujících podmínkám a) až c). (Došla 3 řešení.)

Stanislav Horák

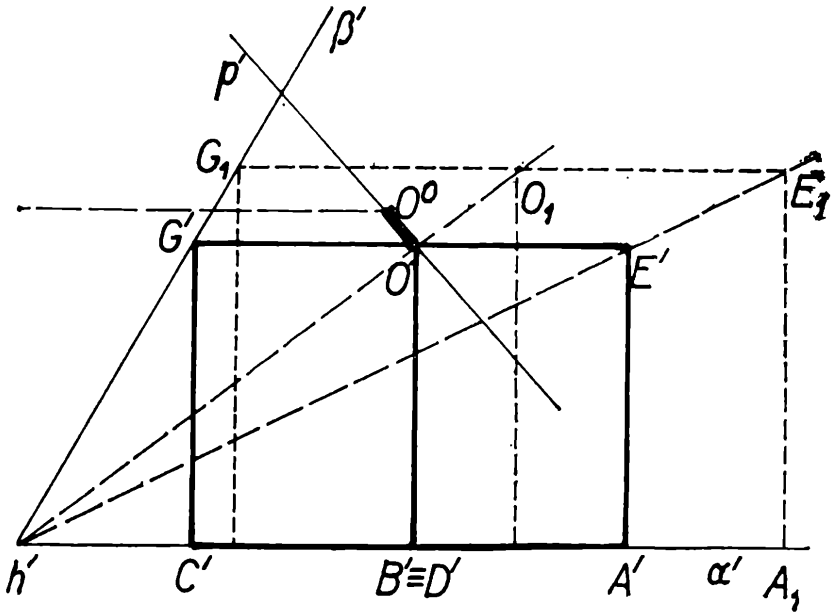
Upravené řešení Sebestiana Cremeze, 4B G s vyučovacím jazykem maďarským, Galanta:

V hledané množině krychlí jsou dvě krychle, které mají extrémní polohu vzhledem k polorovině β. Jedna z nich má v této polorovině hranu GH, druhá má s polorovinou β společný jedině vrchol G a její stěnová úhlopříčka EG je kolmá k přímce h. Sestrojíme body O příslušné k těmto krychlím.

Zvolíme rovinu $\pi \perp h$ a do této roviny pravoúhle promítneme polo-



Obr. 2



Obr. 3

roviny α, β i obě výše uvedené krychle. Průměty polorovin α, β jsou polopřímky α', β', průmětem přímky h je bod h' a průmětem přímky p je přímka p' protínající polopřímky α', β' v jejich vnitřních bodech (obr. 2, 3). Průmětem první krychle je čtverec $C'A'E'G'$, jehož strana $C'B'$ leží na polopřímce α' a je shodná s hranou této krychle (obr. 2). Průmětem hrany GH je bod $G' = H'$ polopřímky β', průmětem bodu O je bod $O°$ přímky p'. Čtverec $C'A'E'G'$ sestrojíme užitím stejnolehkosti se středem v bodu h' (obr. 2). Průmětem druhé krychle je obdélník $C'A'E'G'$, jehož strany mají délky v pomětu 1 $\sqrt{2}$. Delší strana $A'C'$ leží na polopřímce α', bod G' leží na polopřímce β' (obr. 3). K sestrojení tohoto obdélníka užijeme opět stejnolehlost se středem v bodu h'. Průmětem bodu O je bod $O' \neq O°$. Dá se dokázat, že hledanou množinou je úsečka, jejíž průmět je úsečka $O°O'$ ležící na přímce p'

3. V prostoru jsou dány přímky x, y, z, které procházejí týmž bodem O tak, že každé dvě jsou vzájemně kolmé. Na přímkách x, y, z jsou dány

po řadě body $A \neq O$, $B \neq O$, $C \neq O$ tak, že je $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$. Nechť α, β, γ jsou po řadě velikosti úhlů BAC, CBA, ACB. Řešte tyto úlohy:

a) Dokažte, že pravoúhlé průměty přímek x, y, z do roviny $\varrho = ABC$ jsou výškami trojúhelníku ABC.

b) Zobrazte přímky x, y, z, trojúhelník ABC a pravoúhlé průměty přímek x, y, z do roviny $\varrho = ABC$ ve volném rovnoběžném promítání.

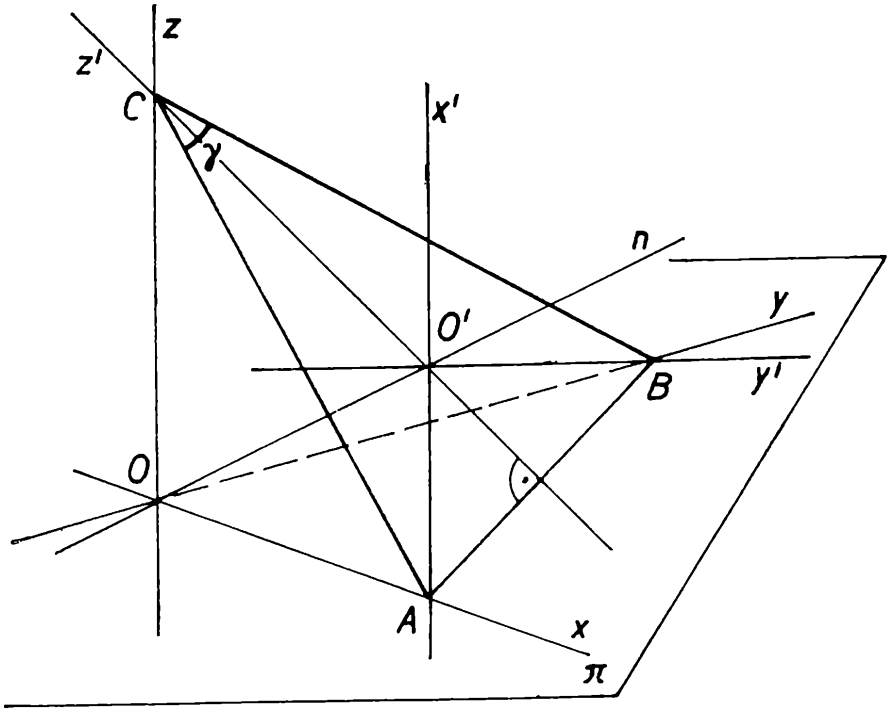
c) Dokažte, že trojúhelník ABC je ostroúhlý.

d) Dokažte, že platí: $\operatorname{cotg} \alpha : \operatorname{cotg} \beta \quad \operatorname{cotg} \gamma = a^2 : b^2 \quad c^2$.

(Došla 3 řešení.)

Emil Kraemer

Autorovo řešení: Úloha b) je rozřešena na obr. 4. Přímka $n = OO'$ je obrazem přímky $n \perp \varrho$ vedené bodem O. Bod $O°$ je obrazem pravo-



Obr. 4

úhlého průmětu bodu O do roviny $\varrho = ABC$. Přímky $x' = O'A$, $y' = O'B$, $z' = O'C$ jsou tedy obrazy pravoúhlých průmětů přímek $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$ do roviny ϱ. Protože podle odstavce a) jsou (ve skutečnosti) přímky x', y', z' výškami ostroúhlého trojúhelníku ABC, je jejich společný bod O' vnitřním bodem trojúhelníku ABC.

a) Podle předpokladu je $z \perp x$, $z \perp y$; proto přímka z je kolmá k rovině $\pi = xy$. Přímka AB je stopou roviny π na rovině $\varrho = ABC$ a přímka z není k rovině ϱ kolmá. Podle známé věty je pravoúhlým průmětem přímky z do roviny ϱ přímka $z' \perp AB$. Obdobně dokážeme, že je $x' \perp BC$, $y' \perp CA$. Přímky x', y', z' jsou tedy výškami trojúhelníku ABC.

c) Protože každé dvě z přímek x, y, z jsou vzájemně kolmé, jsou trojúhelníky AOB, BOC, COA pravoúhlé a mají po řadě přepony AB, BC, CA. Podle Pythagorovy věty platí:

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 = a^2 + b^2\,, \tag{1}$$
$$|BC|^2 = |OB|^2 + |OC|^2 = b^2 + c^2\,, \tag{2}$$
$$|CA|^2 = |OC|^2 + |OA|^2 = c^2 + a^2 \tag{3}$$

Podle kosinové věty užité na trojúhelník ABC platí:

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 - 2|BC| \quad |CA| \,.\, \cos\gamma\,.$$

Z toho a z předešlých tří rovností plyne tato rovnost:

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 + c^2 + a^2 - 2|BC| \quad |CA| \quad \cos\gamma$$
$$|BC| \quad |CA| \cos\gamma = c^2 \tag{4}$$

Číslo γ je velikost vnitřního úhlu ACB trojúhelníku ABC; proto je $0 < \gamma < 180°$. Protože je $|BC| > 0$, $|CA| > 0$, $c^2 > 0$, je podle rovnosti (4) také $\cos\gamma > 0$; proto je $0 < \gamma < 90°$. Obdobně dokážeme, že také čísla α, β leží v intervalu $(0, 90°)$. Trojúhelník ABC je tedy ostroúhlý.

d) Pro zjednodušení zápisů položme

$$|BC| = n\,, \quad |CA| = p\,, \quad |AB| = q \tag{5}$$

Potom z rovnosti (4) plyne, že je

$$\cos^2\gamma = \frac{c^4}{n^2p^2}\,,$$

a tedy

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = \frac{n^2p^2 - c^4}{n^2p^2}\,,$$

Proto je

$$\operatorname{cotg}^2\gamma = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma} = \frac{c^4}{n^2p^2} \quad \frac{n^2p^2}{n^2p^2 - c^4} = \frac{c^4}{n^2p^2 - c^4}\,; \tag{6}$$

zcela obdobně platí:

$$\operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{a^4}{p^2q^2 - a^4}\,, \qquad \operatorname{cotg}^2\beta = \frac{b^4}{q^2n^2 - b^4}\,. \tag{7}$$

Z rovností (5), (2) a (3) plyne, že je

$$n^2p^2 = (b^2 + c^2) \quad (a^2 + c^2) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + c^4\,.$$

Obdobně platí

$$p^2q^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^4\,,$$
$$q^2n^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + b^4$$

Z posledních tří rovností plyne, že zlomky ve vzorcích (6) a (7) mají stejné jmenovatele. Proto je

$$\operatorname{cotg}^2\alpha \quad \operatorname{cotg}^2\beta \quad \operatorname{cotg}^2\gamma = a^4 : b^4 \quad c^4\,;$$

Z toho plyne tvrzení uvedené v odstavci d) textu úlohy.

Kalendár M-F: apríl 1989

1. 4. 1939 v Mníchove zomrel *Ferdinand Lindemann*, nemecký matematik. Zaoberal sa teóriou čísel; dokázal, že π je transcendentné. Rozpracoval algebraickú geometriu.
2. 4. 1934 sa v Longbranch (New Jersey, USA) narodil *Paul Cohen*, americký matematik. Vyriešil hypotézu kontinua, v roku 1966 získal Fieldsovu cenu.
4. 4. 1809 sa narodil *Benjamin Peirce*, americký astronóm a matematik. Vypočítal dráhy mnohých komét, študoval hyperkomplexné čísla, prispel ku klasifikácii algebier.
4. 4. 1919 v Londýne zomrel *William Crookes*, anglický chemik a fyzik. Využíval fyzikálne metódy v chemických výskumoch. Dokázal korpuskulárnu povahu katódových lúčov. Skúmal elektrické výboje v zriedených plynoch.
6. 4. 1829 vo Frolande zomrel *Niels Henrik Abel*, nórsky matematik. Prispel k základom teórie eliptických a hypereliptických funkcií. Odhalil ídeu teórie grúp pri dôkaze neriešiteľnosti algebraických rovníc piateho stupňa a vyšších stupňov pomocou odmocnín.
8. 4. 1984 v Moskve zomrel *Piotr Leonidovič Kapica*, sovietsky fyzik. Experimentoval vo fyzike magnetických polí vysokých intenzít. Za zásadné objavy v oblasti fyziky nízkych teplôt získal roku 1978 Nobelovu cenu.
8. 4. 1919 zomrel *Lóránd Eötvös*, maďarský fyzik. Študoval molekulárne javy, kapilaritu, gravitáciu.
9. 4. 1869 sa narodil *Elie Joseph Cartan*, francúzsky matematik. Rozvinul diferenciálnu geometriu viacrozmerných priestorov a teóriu Lieho grúp.
12. 4. 1794 sa v Bourget pri Paríži narodil *Pierre Dandelin*, belgický matematik a fyzik. Prispel k rozvoju analytickej geometrie, vypracoval metódu približného riešenia rovníc.
13. 4. 1909 sa vo Lvove narodil *Stanislaw Ulam*, americký matematik. Základné práce urobil z topológie a funkcionálnej analýzy.
14. 4. 1629 sa v Haagu narodil *Christian Huygens*, holandský matematik a fyzik. Ovládal symbolickú algebru i archimedovské infinitesimálne metódy. Položil základy teórie pravdepodobnosti. Stanovil princíp o šírení vĺn, rozvinul teóriu kyvadla.
15. 4. 1754 zomrel *Jacoppo Francesco Riccati*, taliansky matematik. Pracoval v oblasti integrálneho počtu a diferenciálnych rovníc.

15. 4. 1809 sa v Štetíne narodil *Hermann Günther Grassmann*, nemecký matematik, fyzik a filológ. Systematicky študoval viacrozmerný euklidovský priestor, položil základy vektorového a tenzorového počtu.

15. 4. 1874 sa v Schieckenhofe narodil *Johannes Stark*, nemecký fyzik. Študoval spektrálne čiary vodíka a objavil ich štiepenie v elektrickom poli.

18. 4. 1899 sa v Prahe narodil *Vladimír Kořínek*, český matematik. Zaoberal sa teóriou grúp a zväzov. Bol profesorom Karlovej univerzity a členom ČSAV.

19. 4. 1914 v Milforde (Pennsylvania, USA) zomrel *Charles Sanders Peirce*, americký matematik a logik, syn B. Peirce. Vedecky pracoval v matematike, fyzike, geodézii, meteorológii, astronómii. Prispel k rozvoju matematickej logiky.

19. 4. 1934 sa v Moskve narodil *Andrej Petrovič Jeršov*, sovietsky matematik. Dosiahol významné výsledky v teórii programovania počítačov a v oblasti numerickej matematiky.

21. 4. 1954 zomrel *Emil Leon Post*, americký matematik. Rozpracoval základy matematiky, rozvinul viachodnotovú logiku, ovplyvnil matematickú logiku.

22. 4. 1904 sa v New Yorku narodil *Jacob Robert Oppenheimer*, americký fyzik. Zaoberal sa teóriou stavby atómového jadra, kozmickým žiarením, výpočtom stavby neutrónových hviezd. Riadil výskumy v Los Alamos, roku 1963 získal Fermiho cenu.

22. 4. 1929 sa narodil *Michael Atiyah*, anglický matematik. Vedecké práce má v algebraickej geometrii, topológii, teórii diferenciálnych rovníc, funkcionálnej analýze a matematickej fyzike. Roku 1966 získal Fieldsovu medailu.

25. 4. 1744 zomrel *Anders Celsius*, švédsky astronóm, geodet, fyzik. Študoval zákonitosti magnetickej deklinácie, navrhol teplotnú stupnicu.

25. 4. 1849 sa v Düsseldorfe narodil *Felix Klein*, nemecký matematik. Pochopil zásadný význam pojmu grupa pre geometriu, rozvinul teóriu automorfných funkcií, teóriu transformácií a algebraických rovníc. Venoval sa aj otázkam vyučovania matematiky.

26. 4. 1879 sa v Dewsbury narodil *Owen Williams Richardson*, anglický fyzik. Za práce o fenoménoch termických iontov získal roku 1928 Nobelovu cenu za fyziku.

29. 4. 1854 sa v Nancy narodil *Jules Henri Poincaré*, francúzsky matematik a fyzik. Objavil nové postupy v mnohých matematických disciplínach aj ich využitie vo fyzike. Napísal viac ako 1000 vedeckých prác. *dj*

INFORMACE

Písemná přijímací zkouška z fyziky na přírodovědeckou fakultu UP v Olomouci

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK, CSc. — RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, CSc.,
Přírodovědecká fakulta UP v Olomouci

Chtěli byste studovat některý z matematických nebo fyzikálních oborů na přírodovědecké fakultě Univezity Palackého v Olomouci? Jestliže ano, pak by vás mohlo zajímat, co vás bude očekávat při přijímací zkoušce z fyziky.

Přijímací zkouška z fyziky předpokládá jednak znalost nejdůležitějších poznatků z učiva fyziky střední školy, jednak (a to především) schopnost aplikovat tyto poznatky při řešení konkrétních úloh a fyzikálních problémů. Základem pro posouzení znalostí a aplikačních schopností každého uchazeče o studium je písemná zkouška.

Písemnou přijímací zkoušku z fyziky konají jednak uchazeči o odborné studium (matematické analýzy, přibližných a numerických metod, teoretické kybernetiky, biofyziky a chemické fyziky, optiky a optoelektroniky, anorganické chemie a analytické chemie), jednak uchazeči o učitelské studium (aprobačních předmětů matematika—fyzika a fyzika—výpočetní technika).

Abyste mohli sami posoudit, jaký je rozsah takové zkoušky a jaké typy úloh může obsahovat, uvádíme zadání jedné varianty písemné zkoušky, které se podrobili studenti v rámci přijímacích zkoušek v jednom z minulých let.

Uvedená varianta písemné zkoušky měla formu testu s výběrovou odpovědí. Obsahovala celkem 40 úloh (otázek), z nichž v úlohách 1 až 20 stačilo vybranou odpověď pouze podtrhnout, zatímco v úlohách 21 až 40 museli studenti kromě toho uvést i písemné řešení nebo zdůvodnění odpovědi. Maximální doba pro vypracování testu byla 90 minut. A nyní si již můžete sami zkusit, jak dalece byste byli při vypracování testu úspěšní. Své výsledky pak můžete zkontrolovat se správnými odpověďmi na str. 349.

Zadání testu:

Uvažujme tyto případy pohybového stavu tělesa vzhledem k povrchu Země:

A) těleso je v klidu,
B) těleso koná rovnoměrný přímočarý pohyb,
C) těleso koná rovnoměrný pohyb po kružnici,
D) těleso koná rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb.

1. Na která tělesa působí síly tak, že jejich výslednice je nulová?
   a) jen A b) A a B c) A, B a C d) A, B a D
2. Na která tělesa působí síly tak, že jejich výslednice má stálou (nenulovou) velikost i stálý směr?
   a) B a D b) jen B c) C a D d) jen D

3. Na která tělesa působí síly tak, že jejich výslednice má stálou (nenulovou) velikost a její směr je v každém bodě trajektorie kolmý ke směru rychlosti tělesa?
a) na žádné b) jen B c) jen C d) jen D

Dva hmotné body, z nichž každý má hmotnost m, jsou ve vzájemné vzdálenosti r a přitahují se gravitačními silami o velikosti F.

4. Jak velkými silami se přitahují ze vzdálenosti $2r$?
a) $F/4$ b) $F/2$ c) $2\,F$ d) $4\,F$
5. Jak velkými silami se přitahují dva hmotné body ze vzdálenosti r, má-li každý bod hmotnost $2\,m$?
a) $F/4$ b) $F/2$ c) $2\,F$ d) $4\,F$
6. Jak velkými silami se přitahují dva hmotné body ze vzdálenosti r, je-li hmotnost jednoho bodu m, druhého $2\,m$?
a) $F/3$ b) $F/2$ c) $2\,F$ d) $3\,F$

Na podlaze vagónu, který jede rovnoměrně po přímé vodorovné trati, leží kulička. Tření mezi podlahou a kuličkou je zanedbatelně malé. V určitém okamžiku se pohyb vagónu změní na rovnoměrně zrychlený.

7. Jak se od tohoto okamžiku bude kulička pohybovat vzhledem k vagónu?
a) rovnoměrně směrem k přední stěně vagónu;
b) rovnoměrně zrychleně směrem k přední stěně vagónu;
c) rovnoměrně směrem k zadní stěně vagónu;
d) rovnoměrně zrychleně směrem k zadní stěně vagónu.
8. Jak se bude kulička pohybovat vzhledem k povrchu Země?
a) rovnoměrně ve směru jízdy vagónu;
b) rovnoměrně zrychleně ve směru jízdy vagónu;
c) rovnoměrně proti směru jízdy vagónu;
d) rovnoměrně zrychleně proti směru jízdy vagónu.

Kulička zavěšená na tenké niti se zanedbatelně malou hmotností kývá s dobou kmitu T, přičemž úhlová výchylka je menší než 5°.

9. Jaká bude doba kmitu kuličky, zvětšíme-li čtyřikrát délku niti?
a) $4\,T$ b) $2\,T$ c) T d) $T/2$
10. Jaká bude doba kmitu kuličky o čtyřikrát větší hmotnosti při původní délce niti?
a) $4\,T$ b) $2\,T$ c) T d) $T/2$
11. Jaká bude doba kmitu kuličky s původní hmotností při nezměněné délce niti, zvětší-li se čtyřikrát tíhové zrychlení?
a) $4\,T$ b) $2\,T$ c) T d) $T/2$

Těleso o hmotnosti m kmitá na pružině o tuhosti K s dobou kmitu T

12. Jaká bude doba kmitu téhož tělesa, zavěsíme-li je na pružinu s tuhostí $4\,K$?
a) $T/4$ b) $T/2$ c) T d) $2\,T$
13. Jaká bude doba kmitu tělesa o hmotnosti $4\,m$, zavěsíme-li je na pružinu o tuhosti K?
a) $T/4$ b) $T/2$ c) T d) $2\,T$
14. Jaká bude doba kmitu tělesa o hmotnosti m na pružině o tuhosti K, zvětší-li se čtyřikrát tíhové zrychlení?
a) $T/4$ b) $T/2$ c) T d) $2\,T$

Elektrické pole bodového náboje Q má ve vzdálenosti r od náboje intenzitu o velikosti E.

15. Jak velká je intenzita elektrického pole ve vzdálenosti $r/2$ od náboje Q?
a) $4\,E$ b) $2\,E$ c) $E/2$ d) $E/4$
16. Jak velká je intenzita elektrického pole ve vzdálenosti r od náboje $4\,Q$?
a) $4\,E$ b) $2\,E$ c) $E/2$ d) $E/4$
17. Jak velká je intenzita elektrického pole ve vzdálenosti $2\,r$ od náboje $2\,Q$?
a) $4\,E$ b) $2\,E$ c) E d) $E/2$

Deskový kondenzátor o kapacitě C se nabije elektrickým nábojem Q na napětí U. Mezi deskami je vzduch.

18. Na jaké napětí se nabije kondenzátor o kapacitě C nábojem $2\,Q$?
a) $4\,U$ b) $2\,U$ c) $U/2$ d) $U/4$
19. Na jaké napětí se nabije kondenzátor o kapacitě $2\,C$ nábojem Q?
a) $4\,U$ b) $2\,U$ c) $U/2$ d) $U/4$
20. Jaká bude kapacita kondenzátoru, zmenšíme-li vzájemnou vzdálenost desek na polovinu?
a) $4\,C$ b) $2\,C$ c) C d) $C/2$

Těleso je vrženo svisle vzhůru rychlostí o velikosti $40\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$. Odpor vzduchu zanedbejte, za tíhové zrychlení dosazujte $10\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$.

21. Jak velká je okamžitá rychlost tělesa v čase 3 s od začátku pohybu?
a) $4\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ b) $10\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ c) $30\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ d) $40\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$
22. V jaké výšce nad místem vrhu je těleso v čase 3 s od začátku pohybu?
a) 45 m b) 75 m c) 80 m d) 120 m

Koule A o hmotnosti 2 kg se pohybuje rychlostí o velikosti $6\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ a narazí na kouli B, jejíž hmotnost je 4 kg. Obě koule jsou plastické, ráz je nepružný. Rychlost koule A má směr spojnice středů obou koulí (přímý centrální ráz).

23. Jak velká je společná rychlost koulí po rázu, je-li koule B před rázem v klidu?
a) $6\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ b) $3\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ c) $2\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ d) $0\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$
24. Jak velká je společná rychlost koulí po rázu, pohybuje-li se koule B před rázem rychlostí o velikosti $3\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ stejným směrem jako koule A?
a) $9\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ b) $6\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ c) $4\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ d) $3\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$
25. Jak velká je společná rychlost koulí po rázu, pohybuje-li se koule B před rázem rychlostí o velikosti $3\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ proti kouli A?
a) $4\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ b) $3\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ c) $2\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ d) $0\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$

Voda protéká potrubím, jehož průřez má obsah $0{,}2\ \mathrm{m^2}$, rychlostí o velikosti $8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$. Vodu pokládejte za ideální kapalinu s hustotou $1000\ \mathrm{kg\,.\,m^{-3}}$.

26. Jaký objem vody proteče potrubím za 2 sekundy?
a) $8\ \mathrm{m^3}$ b) $3{,}2\ \mathrm{m^3}$ c) $1{,}6\ \mathrm{m^3}$ d) $0{,}8\ \mathrm{m^3}$
27. Jakou kinetickou energii má jeden krychlový metr proudící vody?
a) 32 000 J b) 8 000 J c) 4 000 J d) 64 J
28. Jak velká je rychlost vody v rozšířené části potrubí, je-li obsah průřezu $0{,}4\ \mathrm{m^2}$?
a) $32\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ b) $16\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ c) $4\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ d) 2 m .

Plyn o hmotnosti 0,2 kg má při teplotě 27 °C objem $0{,}4\ \mathrm{m^3}$ a tlak $2\ \ 10^5$ Pa

29. Jaký je objem plynu, zvětší-li se při stálé teplotě jeho tlak na $4\,.\,10^5$ Pa?
a) $0{,}1\ \mathrm{m^3}$ b) $0{,}2\ \mathrm{m^3}$ c) $0{,}8\ \mathrm{m^3}$ d) $0{,}16\ \mathrm{m^3}$
30. Jaký je tlak plynu při objemu $0{,}4\ \mathrm{m^3}$ a teplotě 327 °C?
a) $24\,.\,10^5$ Pa b) $12\,.\,10^5$ Pa c) $4\,.\,10^5$ Pa d) $1\ \ 10^5$ Pa

31. Jaké teplo plynu dodáme, zvětší-li se jeho teplota z 27 °C na 327 °C při stálém tlaku? Měrná tepelná kapacita $c_p = 1 \cdot 10^3\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.
a) 65,4 kJ b) 60 kJ c) 6 kJ d) 0,06 kJ

Tři kondenzátory mají kapacity $C_1 = 6$ nF, $C_2 = 6$ nF, $C_3 = 3$ nF.

32. Jakou kapacitu dostaneme při jejich sériovém spojení?
a) $\frac{1}{15}$ nF b) $\frac{2}{3}$ nF c) 1,5 nF d) 15 nF

33. Jakou kapacitu dostaneme při jejich paralelním spojení?
a) $\frac{1}{15}$ nF b) $\frac{2}{3}$ nF c) 1,5 nF d) 15 nF

34. Jakou kapacitu dostaneme, spojíme-li první dva sériově a k tomuto sériovému spojení připojíme paralelně třetí kondenzátor? Načrtněte schéma zapojení.
a) 1,5 nF b) 4 nF c) 6 nF d) 15 nF

Elektromotorické napětí baterie je 36 V. Připojením spotřebiče poklesne napětí na hodnotu 20 V, přičemž spotřebičem prochází proud 4A.

35. Jaký odpor má spotřebič?
a) 80 ohmů b) 9 ohmů c) 5 ohmů d) 4 ohmy

36. Jaký je příkon spotřebiče?
a) 144 W b) 80 W c) 9 W d) 5 W

37. Jaký je vnitřní odpor baterie?
a) 80 ohmů b) 9 ohmů c) 5 ohmů d) 4 ohmy

Spojka má ohniskovou vzdálenost 0,2 m. Předmět o výšce 2 cm je ve vzdálenosti 0,6 m od spojky.

38. V jaké vzdálenosti od spojky se vytvoří obraz?
a) 0,3 m b) 0,6 m c) 1,5 m d) 3,3 m

39. Jaká je výška obrazu?
a) 0,5 cm b) 1,0 cm c) 4,0 cm d) 6,0 cm

40. Načrtněte chod paprsků čočkou a určete, jaké vlastnosti má obraz.
a) je přímý a skutečný b) je přímý a neskutečný
c) je převrácený a skutečný d) je převrácený a neskutečný

Jak jste uspěli? Pokud jste odpověděli správně na více než 35 otázek a nepřekročili přitom stanovenou dobu, jste výborní. Pokud jste však dosáhli méně než 20 správných odpovědí, bude třeba ještě mnohé dostudovat.

Rozhodně byste měli správně vyřešit úlohy 3, 5, 7, 11, 16, 18, 21, 22, 28, 29 a 33, které byly pro uchazeče o studium nejméně obtížné (vyřešilo je tehdy správně přes 80 % studentů). Jako obtížné se ukázaly být úlohy 1, 2, 8, 14, 23, 24, 30 a 37 (ty vyřešilo správně méně než 60 % studentů).

Správná řešení:

1b, 2d, 3c, 4a, 5d, 6c, 7d, 8a, 9b, 10c, 11d, 12b, 13d, 14c, 15a, 16a, 17d, 18b, 19c, 20b, 21b, 22b, 23c, 24c, 25d, 26b, 27a,28c, 29b, 30c, 31b, 32c, 33d, 34c, 35c, 36b, 37d, 38a, 39b, 40c.

Z NOVÝCH KNIH

František Zítek a kol.:

TŘICÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Vydalo SPN, Praha 1988, edice Pomocné knihy pro žáky, 208 str., 44 obr., 2700 výt., brož., Kčs 10,—

V knížce je zpráva o kategoriích A, B, C a P ve 35. ročníku MO, jenž proběhl ve školním roce 1985/86, a dále o 27. mezinárodní matematické olympiádě ve Varšavě. V publikaci se lze seznámit též s úlohami korespondenčního semináře ÚV MO v příslušném školním roce.

Poprvé dochází k tomu, že ročenky MO pro týž ročník jsou dvě. Jedna z nich je věnována kategoriím na středních školách a druhá kategoriím na základních školách. Totiž původní jediná kategorie Z pro žáky nejvyšších ročníků základních škol se ve školním roce 1985/86 celostátně rozšířila na kategorie Z 8 a Z 7; nižší kategorie Z 6, Z 5 a Z 4 probíhaly pokusně jen v SSR.

Další novinkou 35. roč. MO se stala kategorie P programování. Svou příležitost v matematické olympiádě tak nalezli středoškoláci s hlubším zájmem o moderní výpočetní techniku a její racionální využívání. Jak se v předmluvě ročenky zdůrazňuje, nejde o soutěž v sestavování programů v určitém programovacím jazyku, ale především o problematiku skutečně matematickou. Můžete se o tom přesvědčit na úlohách první soutěže kategorie P, které v ročence naleznete s podrobnými řešeními.

Jiří Mída

J. Švrček, J. Vanžura:

GEOMETRIE TROJÚHELNÍKA

Vydalo SNTL — Nakladatelství technické literatury, Praha 1988, edice Polytechnická knižnice, 248 str., 143 obr., 2500 výt., Kčs 29,—

Při řešení téměř každé geometrické úlohy, a to jak konstrukční, tak početní, se setkáváme s trojúhelníky. Nahlédneme-li do recenzované knížky, zjistíme, že jde o publikaci, která v české matematické literatuře chyběla a kterou jistě uvítají studenti středních i vysokých škol a mezi nimi zvláště řešitelé úloh matematické olympiády.

Knížka se dělí na pět kapitol. Kapitola I. slouží vlastně jako „odrazový můstek". Zde si čtenář utřídí a doplní pojmy, označení a své geometrické znalosti.

Kapitola II. seznamuje s vlastnostmi trojúhelníka, kterým nebyla na střední škole věnována pozornost. Jde o Menelaovu větu, Cévovu větu, Feuerbachovu kružnici devíti bodů, Eulerovu přímku apod.

V kapitole III. se řeší známé problémy ze středoškolské mate-

matiky. Čtenář zde nalezne výpočty základních veličin v trojúhelníku (délek stran, velikostí vnitřních úhlů, délek výšek, délek těžnic, délek os vnitřních úhlů, poloměrů kružnice opsané a vepsané) v případě, že jsou dány: 1. délky všech tří stran, 2. délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného, 3. délka jedné strany a velikosti úhlů k ní přilehlých, 4. délky dvou stran a velikost úhlu proti jedné z nich. V této kapitole se dále mimo jiné hovoří o vztazích mezi velikostmi úhlů v trojúhelníku a o některých nerovnostech mezi prvky v trojúhelníku.

Kapitola IV. se zabývá euklidovskými konstrukcemi trojúhelníků, tj. konstrukcemi prováděnými pouze pomocí kružítka a pravítka. Nejsou zde však řešeny úlohy polohové (tj. úlohy, v nichž je dána poloha některého vrcholu, strany, výšky apod. hledaného trojúhelníku), dále úlohy, v nichž se vyskytují např. kružnice připsané, a též úlohy, ve kterých je znám např. součet nebo rozdíl dvou stran apod. V knížce je vyšetřováno celkem 150 úloh, v nichž se konstruuje trojúhelník, jehož některé tři základní veličiny jsou dány.

Závěrečná kapitola V. je věnována aplikacím geometrie trojúhelníka v geodézii.

Jiří Mída

Pokyny pro autory článků do Rozhledů

Rozhledy matematicko-fyzikální mohou otisknout jenom ty články, které byly zaslány redakci ve dvou exemplářích s úplným autorovým jménem, jeho akademickými a vědeckými tituly, s udáním pracoviště, bytové adresy a rodného čísla autora.

O otištění rozhoduje redakční rada nebo vedoucí redaktor po vyjádření recenzenta. *Nevyžádané rukopisy se nevracejí.*

V rukopise článku je třeba uvést nejprve titul příspěvku, potom jméno a působiště autora. Text se píše na stroji (nikoliv však perličkou) černou páskou ob řádek, a to po jedné straně bílého papíru formátu A4. *Na každé stránce má být nejvýše 30 řádek, z nichž každý obsahuje 60 úhozů.* Nadpisy nebo zdůrazněná slova textu podtrhujte jenom obyčejnou (ne propisovací) tužkou.

Obrázky se rýsují tuší na pauzovací papír nebo na bílou čtvrtku a popisují se normalizovaným písmem šablonou 5 mm; čáry musí být ostré a nerozpité. Očíslované texty k obrázkům se přikládají na konec rukopisu. Je třeba pamatovat na to, že se obrázky pro tisk zmenšují v poměru 1:2.

Docent RNDr. Jaroslav Šedivý, CSc., nás opustil

Redakce časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální hluboce želí odchodu svého dlouholetého spolupracovníka doc. dr. J. Šedivého, CSc., učitele katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze, který věnoval našemu časopisu tolik času a obětavého úsilí.

Doc. RNDr. Jaroslav Šedivý, CSc., člen redakční rady Rozhledů, vzorný učitel a zasloužilý člen Jednoty československých matematiků a fyziků, zemřel dne 21. prosince 1988 ve věku 54 let.

Během uplynulých pětadvaceti let otiskl v Rozhledech desítky článků s nejrozmanitější tematikou, které seznamovaly čtenáře s novými matematickými poznatky, s metodami řešení matematických úloh, s moderními přístupy ke školské matematice a k jejím problémům, v neposlední řadě i s historií matematiky a s jejími aspekty světonázorovými. Usiloval vždy o to, aby Rozhledy byly pro studenty středních škol aktuálním a čtivým časopisem, jehož prostřednictvím by se mohli blíže seznámit s matematikou, s jejími aplikacemi a se způsoby práce, který by vytvářel předpoklady pro jejich samostatnou činnost a rozvíjel jejich nadání. Tyto požadavky kladl i na středoškolské učebnice matematiky, na jejichž tvorbě se dlouhou řadu let významně podílel. Stejnými zásadami se řídil i ve své vědecké a pedagogické práci na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, kde působil po dobu téměř třiceti let. Jako pedagog i jako vedoucí oddělení didaktiky matematiky a deskriptivní geometrie na katedře didaktiky matematiky vykonal rovněž obrovskou práci v oblasti výchovy a vzdělávání studentů učitelství matematiky. V jeho osobě ztrácíme vynikajícího pedagoga a didaktika matematiky, jehož přínos pro matematické vzdělání mládeže nebude nikdy zapomenut.

RNDr. Emil Calda, CSc.

REDAKČNÍ KRUH

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava, dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha,; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Úloha o namazaném krajíci vyřešena?

Z běžné denní praxe je známo, že krajíc chleba s máslem padá na koberec vždy namazanou stranou dolů, zejména jde-li o koberec vyšší kvality. Tento jev je důsledkem obecnější fyzikální zákonitosti vyjádřené *Murphyho zákonem*:„Může-li něco špatně dopadnout, pak to špatně dopadne" Ve fyzice je zmíněná vlastnost namazaného krajíce známa již dlouho, ale teprve v poslední době byl podniknut její hlubší teoretický i experimentální výzkum (*Československý časopis pro fyziku* č. 2, 1988, str. 174).

Při teoretickém zkoumání byl z důvodu jednodušší geometrie uvažován model krajíce obdélníkového tvaru (toastový chléb) a při výpočtu jeho momentu setrvačnosti bylo postupováno jako u tenké desky týchž rozměrů. Velká pozornost byla věnována parametrům másla, případně džemu. Hustota másla se měnila od $\varrho_b = 270$ kg m^{-3} do $\varrho_b = 800$ kg m^{-3}, pro hustotu džemu byla zvolena střední hodnota $\varrho_j = 1347$ kg . m^{-3}. V počátečním stavu leží krajíc na stole (většinou namazanou stranou vzhůru) a je smeten loktem nebo předloktím se stolu na zem. V závislosti na počáteční rychlosti a vzdálenosti od hrany stolu byl pak vypočítán úhel překlopení krajíce po dopadu hranou na koberec. Určitá nepřesnost byla způsobena tím, že dosud není přesně znám koeficient tření chleba o koberec, a proto byly vzaty jako orientační hodnoty tohoto koeficientu pro čistý karbid wolframu při 1600 K.

Zajímavé výsledky poskytl i rozsáhlý experimentální výzkum. Především se podařilo vysvětlit dosud nepochopenou anomálii — v několika málo procentech případů padal totiž chléb na koberec nenamazanou stranou! Ukázalo se však, že příčina je jednoduchá — nesvědomitý laborant namazal omylem chléb na nesprávné straně. Byly též prováděny pokusy s vyhazováním krajíců do vzduchu. Bylo pozorováno, že v několika případech se chléb přilepil namazanou stranou ke stropu.

Největší překvapení však vyvolal objev kvantových vlastností krajíce. Byl prováděn svého druhu difrakční experiment, při němž byly krajíce pouštěny střídavě na levný a drahý koberec. Přitom se stávalo, že krajíc někdy dopadl na levný koberec nenamazanou stranou (protože věděl, že je k dispozici koberec dražší). Jakmile však byly oba koberce odděleny závěsem tak, aby se vlnové funkce dvou krajíců nemohly překrývat, dopadaly krajíce na levný i dražší koberec vždy namazanou stranou dolů.

-ll

47 233

Řekli, napsali...

Ve vědách není žádné jistoty tam, kde nelze užít některé matematické vědy, ani v tom, co nemá sepětí s matematikou.

Leonardo da Vinci (1452—1519)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.
Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(9)

ROČNÍK 67, 1988/89
KVĚTEN
CENA 2 Kčs

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; † doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Ladislav Bican, Jaroslav Hora: Hra na „patnáctku" a znaménko permutace 353

Anton Belan, Vladimír Burjan: O jednom NIMe 357

Jaromír Vaňura: Sledování binokulárního zorného pole 362

Jaroslav Pospíšil: Mechanické vlny vznikající při pohybu tělesa v látkovém prostředí 363

Zdeněk Janout: Papež fyziky . 366

František Jáchim: Pierra Curie (1859 až 1906) 368

Z matematiky a fyziky ZŠ 371

Přemýšlíme, řešíme 380

Olympiády a SOČ 382

Úlohy I. kola 39. roč. MO 382

Zdeněk Kluiber: 5. Letní škola mladých vědců 391

Ivo Volf: Škola mladých fyziků . 396

dj: Kalendár M–F 397

Z nových knih . 399

Humory matematicko-fyzikální 3. str. obálky

MATEMATIKA

Hra na „patnáctku" a znaménko permutace

Prof. dr. L. BICAN, DrSc., MFF UK Praha, dr. J. HORA, CSc., PF Plzeň

Hru „na patnáctku" patrně všichni znáte. Pro úplnost a pro ty, kteří se s ní snad ještě nesetkali, popíšeme ve stručnosti pravidla hry.

V ploché čtvercové krabičce je rozmístěno 15 čtvercových destiček, které jsou očíslovány čísly od 1 do 15, jedno pole zůstává volné. Představme si, že destičky vysypeme z krabičky a rozmístíme je v krabičce zcela libovolně. Každému takovému rozmístění budeme říkat *pozice hry*. Je jasné, že z každé pozice snadno posunutím destiček dostaneme pozici mající volné místo v pravém dolním rohu, takové pozice budeme nazývat *výchozí pozice*.

Jedna výchozí pozice je zachycena na obr. 1, budeme ji nazývat *základní pozicí hry*. Jiná výchozí pozice je zachycena na obr. 2. Pravidla hry jsou jednoduchá. Jednotlivé destičky můžeme posunovat pouze na sousední volné místo, cílem hry je dostat se z výchozí pozice do pozice základní.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Obr. 1

9	15	13	6
12	11	2	8
4	14	1	3
10	5	7	

Obr. 2

Možná jste se již pokusili — a neúspěšně — přejít od výchozí pozice z obr. 2 do základní pozice. Proto otázka, kterou si nyní položíme, zní: Pro které výchozí pozice je hra řešitelná a pro které není, jakým způsobem můžeme rozhodnout o tom, zda daná výchozí pozice je řešitelná či nikoliv.

K tomu, abychom mohli s (výchozími) pozicemi lépe pracovat, popíšeme je dvojím způsobem. Začneme s popisem pomocí permutací. Prázdné pole na obr. 1 (v základní pozici) označíme číslem 16 (fiktivní

destička s číslem 16.) Každé pozici nyní přiřadíme permutaci na šestnáctiprvkové množině $\mathbf{M} = \{1, 2, \ldots, 16\}$ tak, že v prvním řádku jsou čísla základní pozice a v druhém řádku čísla destiček v dané pozici, přičemž prázdnému místu odpovídá číslo 16. Tak základní pozici je přiřazena identická permutace na $\mathbf{M}$, zatímco výchozí pozici z obr. 2 je přiřazena permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16 \\ 9, & 15, & 13, & 6, & 12, & 11, & 2, & 8, & 4, & 14, & 1, & 3, & 10, & 5, & 7, & 16 \end{pmatrix}$$

Přejdeme nyní k druhému popisu, k popisu pomocí matice. Jednotlivé řádky a sloupce krabičky označíme číslicemi 1—4 a číslo pozice pole v průsečíku i-tého řádku a j-tého sloupce označíme symbolem $a(i, j)$. Tak například v obrázku 1 je $a(4, 4) = 16$, v obrázku 2 je $a(4, 2) = 5$ a podobně.

Nyní již můžeme přistoupit k řešení našeho problému. Nechť je dána pozice, která je popsána permutací

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & & i, & & j, & & 16 \\ a_1, & \ldots, & a_i, & \ldots, & 16, & \ldots, & a_{16} \end{pmatrix},$$

kde j-té místo je prázdné. Provedeme-li nyní tah, při kterém destička s číslem a_i stojící na i-tém místě přejde na volné j-té místo, dostaneme pozici popsanou permutací

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1, \ldots, & i, \ldots, & j, \ldots, & 16 \\ a_1, \ldots, & 16, \ldots, & a_i, \ldots, & a_{16} \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že $\sigma = \pi \,.\, \delta$, kde $\delta = (i, j)$, je transpozice. Mějme nyní výchozí pozici popsanou permutací φ, ze které je možno provedením k tahů se dostat do základní pozice. Podle předchozího tedy platí, že $\varphi \,.\, \delta_1 . \ldots . \delta_k = I$, kde δ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, jsou transpozice. Protože $\delta_i \,.\, \delta_i = I$, je $\varphi = \delta_k \ldots . \delta_1$, takže permutaci φ lze zapsat ve tvaru součinu k transpozic, z nichž každá odpovídá nějakému tahu.

Podívejme se nyní na situaci z jiného pohledu. Nechť prázdné pole je na místě $a(i, j)$, tj. $a(i, j) = 16$. Po provedení tahu se prázdné místo objeví na některém ze sousedních polí. Pro rohová pole máme tedy vždy pouze dvě možnosti:

$a(1, 1)$ přejde buď v $a(1, 2)$, nebo v $a(2, 1)$,
$a(1, 4)$ přejde buď v $a(1, 3)$, nebo v $a(2, 4)$,
$a(4, 1)$ přejde buď v $a(3, 1)$, nebo v $a(4, 2)$,
$a(4, 4)$ přejde buď v $a(4, 3)$, nebo v $a(3, 4)$.

Pro pole ležící při okraji krabičky, s výjimkou polí rohových, máme vždy tři možnosti:

$a(1, j)$ může přejít v $a(1, j - 1)$, $a(1, j + 1)$, $a(2, j)$ pro $j = 2, 3$,
$a(4, j)$ může přejít v $a(4, j - 1)$, $a(4, j + 1)$, $a(3, j)$ pro $j = 2, 3$,
$a(i, 1)$ může přejít v $a(i - 1, 1)$, $a(i + 1, 1)$, $a(i, 2)$ pro $i = 2, 3$,
$a(i, 4)$ může přejít v $a(i - 1, 4)$, $a(i + 1, 4)$, $a(i, 3)$ pro $i = 2, 3$.

Nakonec pro každé pole uvnitř krabičky, tj. pro $i, j = 2, 3$, mohou nastat čtyři možnosti:

$a(i-1, j)$, $a(i+1, j)$, $a(i, j-1)$, $a(i, j+1)$.

V každém případě však vidíme, že provedeme-li tah z pozice $a(i, j)$ na pozici $a(k, l)$, liší se součty $i + j$ a $k + l$ o jedničku, sudý součet přejde v lichý a naopak.

Shrneme-li tedy výsledky posledních dvou odstavců, dostaneme tento výsledek: Máme-li výchozí pozici popsanou permutací φ, ze které se můžeme provedením k tahů dostat do pozice základní, je φ součinem k transpozic. Protože na začátku i na konci hry je $a(4, 4) = 16$, a při každém tahu se mění parita součtu $i + j$, je nutně počet tahů (čili číslo k) sudý a φ je tedy sudá permutace. Jinými slovy: Je-li možné se z výchozí pozice popsané permutací φ dostat do pozice základní, pak permutace φ je sudá. Dokázali jsme tedy jednu část (nutnost podmínky) následující věty.

Věta. Z výchozí pozice hry „na patnáctku" popsané permutací φ se lze dostat do pozice základní, právě když permutace φ je sudá.

Zbývá nám tedy dokázat, že uvedená podmínka je také postačující, tedy, je-li výchozí pozice hry popsána sudou permutací, pak se z této pozice lze dostat do pozice základní.

V předcházející části jsme ukázali, že provedení tahu v nějaké pozici hry neznamená vlastně nic jiného, než provedení vhodné transpozice na permutaci popisující tuto pozici. Provedeme-li znovu tutéž transpozici, dostaneme se zřejmě do původní pozice. Protože každá transpozice je sama k sobě inverzní, dostáváme odtud bezprostředně toto tvrzení: Je-li možno přejít z výchozí pozice popsané permutací φ do základní pozice, pak je také možno přejít ze základní pozice do pozice popsané permutací φ a naopak.

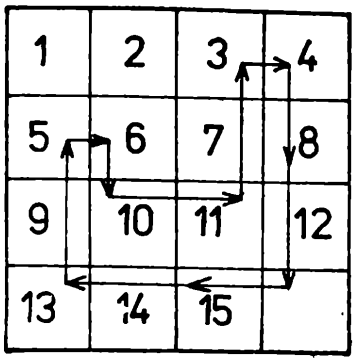
Ukažme nyní, že z libovolné výchozí pozice popsané permutací φ se konečným počtem tahů můžeme dostat do výchozí pozice popsané permutací $\varphi \,.\, (1, 2, k)$, $k = 3, \ldots, 15$. Jestliže $\varphi(i) = a_i$, pak je

$$\varphi \,.\, (1, 2, k) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & k-1, & k, & k+1, & & 16 \\ a_2, & a_k, & a_3, & & a_{k-1}, & a_1, & a_{k+1}, & & , a_{16} \end{pmatrix}$$

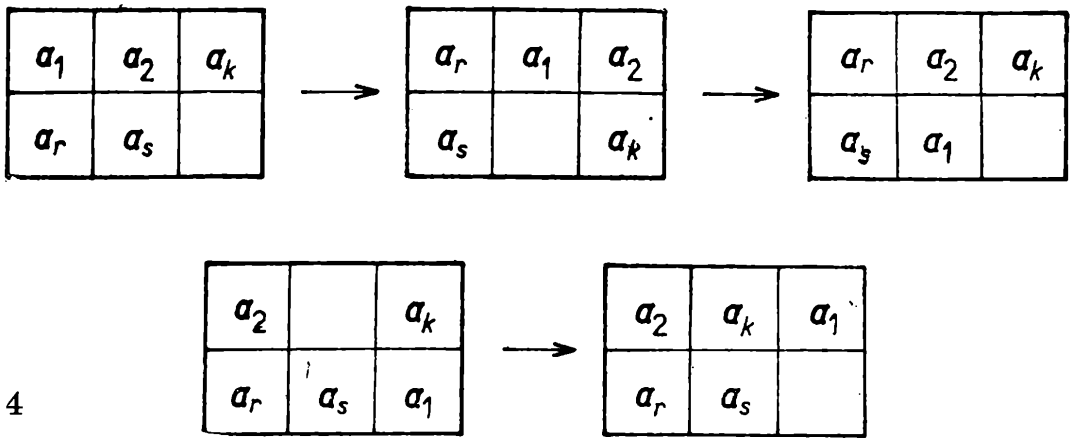
Ve výchozí pozici ponechme místa $a(1, 1)$ a $a(1, 2)$ pevná a zbývající destičky uspořádejme do řetězce například takto (viz obr. 3):

(*) $a(1, 3)$, $a(1, 4)$, $a(2, 4)$ $a(3, 4)$, $a(4, 4)$, $a(4, 3)$, $a(4, 2)$,
$a(4, 1)$, $a(3, 1)$, $a(2, 1)$, $a(2, 2)$, $a(3, 2)$, $a(3, 3)$, $a(2, 3)$.

Nyní můžeme destičkami posunovat ve směru tohoto řetězce tak, aby destička s číslem a_k se dostala na místo $a(1, 3)$ (ostatní destičky zůstanou v řetězci ve spojném pořadí) a aby na místě $a(2, 3)$ bylo volné pole (je zřejmé, že fiktivní destička s číslem 16 může v řetězci zaujímat kterékoliv místo). Dále můžeme na části krabičky (pole $a(i, j)$, $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$) provést postupně posuny podle obrázku 4. Vidíme, že vzájemná poloha



Obr. 3



Obr. 4

prvků v řetězci (*) se nezměnila, pouze destička s číslem a_k se vyměnila s destičkou a_1. Posuňme nyní řetězcem (*) v obráceném smyslu než na začátku tak, aby destička s číslem a_1 přišla na místo, kde původně byla destička s číslem a_k a prázdné bylo opět na místě $a(4, 4)$.

Udělali jsme tedy vlastně toto: Cykl (*) jsme pootočili tak, že prvek a_k přišel na místo $a(1, 3)$, pak jsme v tomto řetězci vyměnili prvek a_k za prvek a_1 a řetězec (*) jsme pootočili zpět do původní polohy, takže v cyklu (*) došlo k jediné změně, totiž destička s číslem a_k byla nahrazena destičkou s číslem a_1. Druhá změna, která nastala, je v polích $a(1, 1)$ a $a(1, 2)$, kde prvky a_1, a_2 byly postupně nahrazeny prvky a_2, a_k, čímž byl na výchozí pozici proveden cykl $(1, 2, k)$.

Nyní se již důkaz snadno dokončí. Z věty 7 z [1] víme, že každou sudou permutaci na n-prvkové množině můžeme zapsat jako součin tříčlenných cyklů tvaru $(1, 2, k)$, $k = 3, \ldots, n$. Napíšeme-li tedy sudou permutaci φ popisující danou výchozí pozici jako součin tříčlenných cyklů uvedeného tvaru, dostaneme se postupným prováděním výše popsaných tahů ze základní pozice do dané výchozí pozice. Jak jsme si však uvědomili dříve, lze se potom dostat z výchozí pozice do pozice základní.

Příklad. Rozhodněte, zda je možno přejít do základní pozice z pozic popsaných následujícími permutacemi:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 4, 6, 1, 8, 9, 5, 3, 7, 2, 15, 14, 13, 11, 12, 10, 16 \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 2, 1, 9, 7, 6, 5, 3, 4, 8, 10, 12, 11, 13, 15, 14, 16 \end{pmatrix}$$

Literatura

[1] L. Bican, J. Hora: Permutace, cykly, znaménko permutace, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 67, 1988/89, č. 6, s. 224–227.

[2] L. A. Kalužnin, V. I. Suščanskij: Preobrazovanija i perestanovki, nauka, Moskva 1985.

O jednom NIMe

ANTON BELAN, RNDr. VLADIMÍR BURJAN, Bratislava

Predpokladáme, že väčšina z vás sa už stretla s niektorým členom početnej rodiny hier NIM. (Niekoľkým bol venovaný aj seriál článkov [4] v tomto časopise). Je to rod nielen veľký, ale aj starý. Už roku 1902 vychádza článok, v ktorom je popísaná matematická teória „základnej" verzie tejto hry (viď [2]). Všetky NIMy majú spoločný princíp: na jednej, alebo častejšie niekoľkých kopách sú uložené nejaké vhodné predmety (kamienky, zápalky, gombíky, . . .). Dvaja hráči ich striedavo z týchto kôp odstraňujú, pričom povolený spôsob odoberania je presne vymedzený. Vyhráva hráč, ktorý zoberie posledný predmet (sú aj iné možné zakončenia partie). V „základnej" verzii môže hráč odobrať ľubovoľný (nenulový) počet predmetov z niektorej kopy (podľa vlastného výberu). Optimálna stratégia (popísaná v mnohých prácach, napr. v [3]) je prekvapivá: zakládá sa na vhodnom kódovaní pozícií v dvojkovej sústave.

Nie je ťažké vymyslieť si vlastný NIM — stačí zvoliť nejaké nové, doteraz nepoužité pravidlo odoberania z kôp. Fantázii sa pritom medze nekladú. My sme si tiež vymysleli vlastnú verziu a podrobili sme ju skúmaniu. Snažili sme sa pomocou matematickej „teórie" odhaliť *optimálnu stratégiu*, t. j. spôsob hry, ktorý zaručuje víťazstvo bez ohľadu na ťahy protihráča. V ďalšom naznačíme, v čom sme boli úspešní a ktoré otázky ostali zatiaľ nezodpovedané. Hľadanie odpovedí by bolo vhodnou témou práce SOČ.

Takto vyzerá náš NIM:

Pravidlá hry NIM (n, k):

Na n kopách je po rade $a_1, a_2, \ldots, a_n$ predmetov $(a_i \in N)$. Dvaja hráči z nich striedavo odoberajú, a to takto: kto je na ťahu, smie z ľubo-

voľných k kôp odobrať po jednom predmete. (Číslo k je vopred stanovené a počas partie sa nemení.) Prehráva ten z hráčov, ktorý ako prvý nemôže vykonať predpísaný ťah, nakoľko nenulových kôp už je menej ako k.

Teda napr. NIM (3, 2) vyzerá takto: na začiatku sú tri kopy (napr. 8, 7, 5) a hráč na ťahu musí z dvoch z nich odobrať po jednom predmete.

Naše hľadanie vyhrávajúcej stratégie začnime niekoľkými „triviálnymi" poznatkami:

Veta 1. Každú hru NIM (n, 1) vyhráva začínajúci hráč práve vtedy, ak $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ je nepárne číslo. Inak vyhráva druhý.

Dôkaz: V tejto hre klesá celkový počet predmetov každým ťahom o 1. Partia teda trvá toľko ťahov, koľko je spolu všetkých predmetov. To, kto vezme posledný predmet, závisí teda iba od parity súčtu kôp[1]).

Všimnite si, že NIM (n, 1) je vlastne pseudohrou — ani jeden z hráčov nemôže ovplyvniť výsledok — ten už je dopredu určený súčtom kôp.

Veta 2. Hru typu NIM (n, n) vyhráva začínajúci hráč práve vtedy, keď najmenšie z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je nepárne. Inak vyhrá druhý hráč.

Dôkaz: V tejto hre sa každým ťahom znížia počty predmetov na všetkých kopách o 1. Partia trvá dovtedy, kým niektorá kopa „nezanikne" — potom už nie je možný ďalší ťah. Je zrejmé, že ako prvá zanikne kopa s najmenším počiatočným počtom predmetov (takých kôp môže byť aj viac). O výsledku partie teda rozhoduje iba parita tejto kopy.

To je, žiaľ, všetko, čo sa dá o našej verzii NIMu povedať „na prvý pohľad". Ostatné hry NIM (n, k), kde $n \geqq 3$ a $1 < k < n$, sú už menej triviálne. Ukážeme to na príklade hry NIM (3, 2). Jej vyhrávajúcu stratégiu objavil a popísal (v rámci práce SOČ) prvý z autorov tohto článku — vtedy študent II. ročníka Gymnázia A. Markuša v Bratislave. Cesta k tomuto objavu bola zaujímavá a poučná, preto ju opíšeme trochu podrobnejšie.

Po zohratí niekoľkých partií sme našli jednoduchý recept na výhru, ktorý sa dá použiť vtedy (a žiaľ *len* vtedy), keď súčet kôp na začiatku je *párny*. Môžu vtedy nastať takéto dva prípady:

1. všetky tri počiatočné kopy sú párne;
2. dve z počiatočných kôp sú nepárne, tretia je párna.

Veta 3. V 1. prípade (3 párne kopy) si môže druhý hráč zabezpečiť výhru tým, že bude „kopírovať" ťahy súpera, t.j. vždy bude brať z tých istých dvoch kôp ako súper v predchádzajúcom ťahu.

---

[1]) V celom článku budeme používať výrazy „veľkosť kopy", „súčet kôp" a pod. namiesto presnejších, ale dlhších: „počet predmetov na kope", „súčet počtov predmetov na jednotlivých kopách", . . .

Dôkaz: Začínajúci hráč zanechá po každom svojom ťahu nutne dve nepárne kopy. Z nepárnych kôp je vždy možné ďalej odoberať, teda druhý hráč má vždy zaručenú možnosť ďalšieho ťahu, a teda nemôže prehrať.

Veta 4. V 2. prípade (2 kopy nepárne, 1 párna) existuje vyhrávajúca stratégia pre 1. hráča a vyzerá takto: v prvom ťahu vziať po jenom predmete z nepárnych kôp a v ďalšom sa správať ako druhý hráč v 1. prípade, t.j. kopírovať ťahy súpera.

Dôkaz: Začínajúci hráč vytvorí svojim prvým ťahom tri párne kopy, a teda môže v ďalšom používať stratégiu z vety 3. pre druhého hráča.

Táto myšlienka, založená na sledovaní parity kôp a kopírovaní ťahov je použitelná aj v iných hrách:

Veta 5. Uvažujme hru NIM (n, k), $n \geqq 3$, $1 < k < n$. Ak počiatočná pozícia pozostáva zo samých párnych kôp, existuje vyhrávajúca stratégia pre 2. hráča. Ak je na začiatku práve k kôp nepárnych, existuje vyhrávajúca stratégia pre 1. hráča.

Dôkaz: Obdobný ako u viet 3 a 4.

Veta 6. Ak počiatočná pozícia hry NIM $(2k, k)$, $k \in N - \{1\}$ pozostáva zo samých nepárnych kôp, existuje vyhrávajúca stratégia pre druhého hráča.

Dôkaz: Začínajúci hráč musí po svojom prvom ťahu zanechať pozíciu pozostávajúcu z k nepárnych a k párnych kôp. Druhý hráč zoberie po 1 predmete z k nepárnych kôp, čím vytvorí pozíciu pozostávajúcu zo samých párnych kôp a od tejto chvíle môže hrať podľa stratégie pre 2. hráča z vety 5.

Vráťme sa však ku hre NIM (3, 2). Tento počiatočný úspech nás povzbudil a očakávali sme, že podobne jednoduchá myšlienka pomôže aj v ostávajúcich prípadoch, keď súčet kôp na začiatku je *nepárny*. Žiaľ, nič podobné v tomto prípade „nefunguje", a tak sme boli hodnú chvíľu bezradní. Nakoniec sme sa rozhodli pomôcť si počítačom. Zostavili sme program, ktorý nám vypisoval všetky *vyhrané pozície* tejto hry. Pritom vyhranou pozíciou rozumieme takú pozíciu, ktorú keď zanecháme súperovi, tento nemôže vyhrať (pokiaľ sa my nedopustíme v ďalšom chyby).

Takto vyzeral začiatok tohoto zoznamu:

(1, 0, 0)	(9, 0, 0)	(11, 0, 0)	(9, 4, 0)	(5, 5, 3)
(3, 0, 0)	(7, 2, 0)	(9, 2, 0)	(7, 4, 2)	(15, 0, 0)
(5, 0, 0)	(5, 2, 2)	(7, 2, 2)	(7, 6, 0)	(13, 2, 0)
(3, 2, 0)	(5, 4, 0)	(7, 4, 0)	(6, 4, 3)	(11, 2, 2)
(2, 2, 1)	(4, 3, 2)	(13, 0, 0)	(6, 5, 2)	(11, 4, 0)
(7, 0, 0)	(4, 4, 1)	(11, 2, 0)	(6, 6, 1)	(9, 4, 2)
(5, 2, 0)	(3, 3, 3)	(9, 2, 2)	(5, 4, 4)	(9, 6, 0)

(Odteraz až do konca budeme pozície zapisovať ako vektory s n zložkami, pričom kopy budú zoradené podľa veľkosti.) Uvedený „úryvok" tabuľky obsahuje všetky vyhrané pozície s nepárnym súčtom kôp menším ako 17.

Náš cieľ bol jasný: odhaliť nejakú zákonitosť v tomto zozname, nájsť jednoduchý spôsob, ako určiť, či daná pozícia patrí do tohoto zoznamu, t.j. či je vyhraná. Niektoré jednoduché zákonitosti vidno na prvý pohľad a nie je ťažké ich dokázať.

Veta 7. Každá pozícia tvaru $(2a + 1, 0, 0)$, $a \in N$
$(2b, 2b, 1)$, $b \in N$
$(2c + 1, 2d, 0)$ pre $c \geqq d$
$(2a + 1, 2, 2)$ pre $a > 1$
je v hre NIM (3, 2) vyhraná.

Dôkaz prenechávame čitateľovi.

Podobných čiastočných výsledkov možno z tabuľky vyčítať veľa. Nakoniec sa nám podarilo podať aj úplnú charakterizáciu vyhraných pozícií v hre NIM (3, 2). Aby sme ju mohli stručne sformulovať, musíme zaviesť nasledovné pojmy:

Nech (a, b, c), $a \geqq b \geqq c \geqq 0$, $a + b + c$ je nepárne č., je niektorá pozícia v hre NIM (3, 2). Prirodzené číslo $\frac{a + b + c - 1}{2}$ nazveme *kritickou hodnotou* tejto pozície, číslo a (t.j. veľkosť najväčšej kopy) nazveme *pivotom*, kopy b, c budeme nazývať *malými kopami*. Ukázalo sa, že o tom, či je daná pozícia vyhraná, rozhodujú tri faktory:

1. zvyšok pri delení čísla $a + b + c$ štyrmi (môže byť 1, 3);
2. vzťah medzi veľkosťou pivota a kritickou hodnotou;
3. parita malých kôp.

Teraz už môžeme sformulovať hlavný výsledok:

Veta 8. Pozícia (a, b, c) v hre NIM (3, 2) je vyhraná práve vtedy, ak nastáva niektorý z nasledovných prípadov:

I. všetky tri kopy a, b, c sú párne (veta 3);
II. pivot je väčší ako kritická hodnota a obe malé kopy sú párne;
III. pivot je menší alebo rovný kritickej hodnote a súčet kôp je tvaru $4m + 1$;

(prípady II., III. sa týkajú pozícií s nepárnym súčtom kôp).

Dôkaz vety 8. by bol trochu dlhý, preto ho vynecháme a poskytneme tak čitateľovi možnosť pokúsiť sa oň samostatne. Treba si však ujasniť, čo vlastne máme dokázať. Ako sa dokazuje, že istá množina pozícií je množinou vyhraných pozícií nejakej hry? Dôkaz takéhoto tvrdenia musí pozostávať z overenia dvoch faktov:

1. Každý ťah z vyhranej pozície vedie do pozície, ktorá nie je vyhraná.
2. Z ľubovoľnej pozície, ktorá nie je vyhraná, existuje ťah do vyhranej pozície.

Konkrétne v našom prípade treba teda dokázať:

1. Ak pozícia (a, b, c) má niektorú z vlastností I., II., III., potom každý ťah z tejto pozície vedie do pozície, ktorá nemá žiadnu z vlastností I.—III.
2. Ak pozícia (a, b, c) nemá žiadnu z vlastností I.—III., existuje z nej ťah do pozície, ktorá má niektorú z týchto troch vlastností.

Podrobný dôkaz tejto vety je v spomenutej práci SOČ. Časť 2. je tam dokázaná konštruktívne a obsahuje teda priamy návod na víťazný postup.

Spočiatku sme sa domnievali, že získané výsledky bude možné preniesť aj na iné hry typu NIM (n, k). Zatiaľ sme však neuspeli. Chceme preto na záver sformulovať niekoľko otvorených problémov, o riešenie ktorých by sa mohli pokúsiť čitatelia (napr. v rámci práce SOČ).

Problém 1. Ktoré pozície sú vyhrané v hre NIM $(n, 2)$, $n > 3$?

Problém 2. Ktoré pozície sú vyhrané v hre NIM (n, k), $n > 3$, $1 < k < n$?

Problém 3. Nech symbol NIM $(n, k, 1)$ označuje hru, ktorú sme doteraz označovali NIM (n, k). Pridaná jednotka symbolizuje, že z kôp sa odoberalo po jednom predmete. Ako vyzerajú stratégie hier NIM $(n, k, 2)$, NIM $(n, k, 3)$, . . . , v ktorých sa z kôp odoberá po 2 (3, . . .) predmetoch?

Problém 4. Existuje nejaký jednoduchší spôsob popisu vyhraných pozícií v hre NIM (3, 2)?

Autori by sa potešili akýmkoľvek novým výsledkom, ku ktorému sa čitatelia dopracujú.

Literatúra:

[1] Belan A.: Optimálna stratégia istej verzie hry NIM — práca SOČ (odb. konzultant RNDr. V. Burjan). Práca obsadila v šk. roku 1984/85 1. misto v celoštátnom kole SOČ.

[2] Bouton C. L.: NIM, a game with a complete mathematical theory, Ann. Math. Princeton 3 (2) 1902, str. 35—39.

[3] Gatiaľ, J.—Hecht, T.—Hejný, M.: Hry takmer matematické, Mladá fronta, Praha 1982 (53. zv. edície ŠMM)

[4] Hejný M.: O matematických hrách I.—VI., Rozhledy M-F, šk. r. 1980/81, č. 1—7.

Řešení „hrátek" ze str. 381.

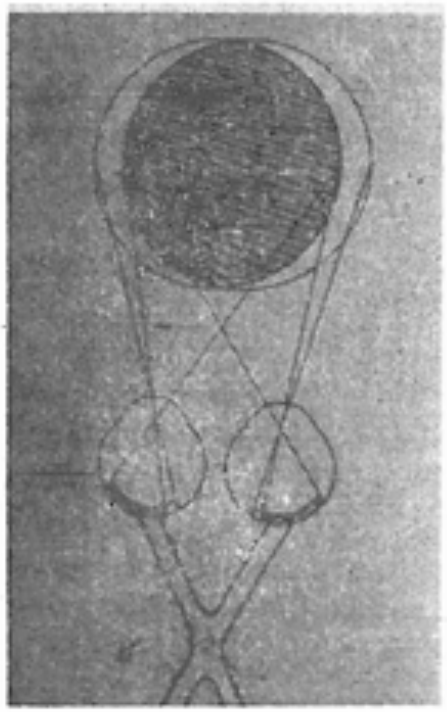
a) $2\,750 \times 8 = 22\,000$
b) $6\,174 \times 9 = 55\,566$
c) $9\,250 \times 6 = 55\,500$
d) $4\,236 \times 8 = 33\,888$
e) $8\,637 \times 9 = 77\,733$
f) $2\,861 \times 4 = 11\,444$
g) $2\,786 \times 4 = 11\,144$
h) $7\,498 \times 6 = 44\,988$
i) $6\,975 \times 8 = 55\,800$
j) $2\,501 \times 8 = 20\,008$
k) $9\,257 \times 3 = 27\,771$
l) $2\,698 \times 7 = 18\,886$

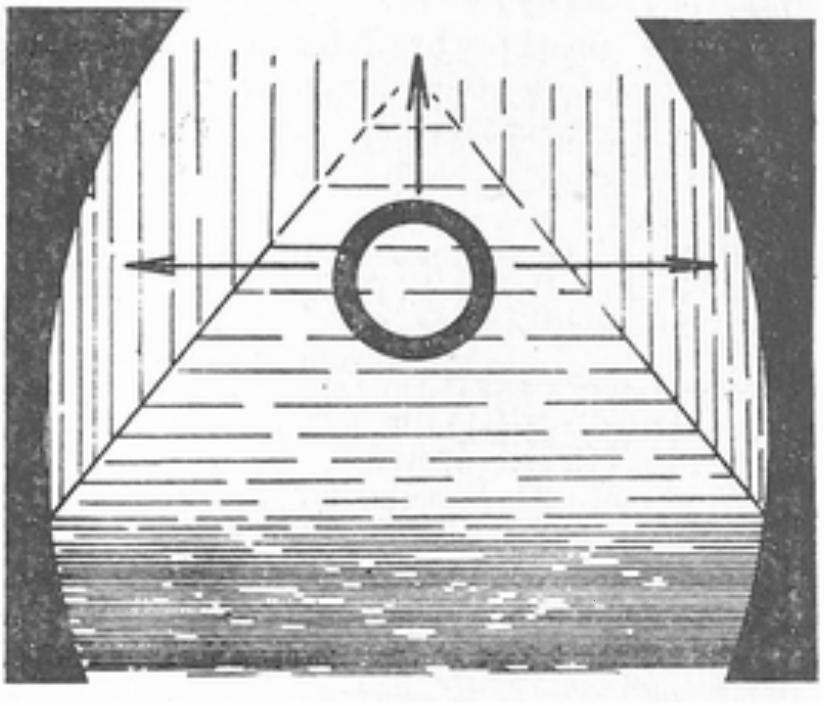
FYZIKA

Sledování binokulárního zorného pole

JAROMÍR VAŇURA, prom. biolog, Brno

Zorné pole je definováno jako část prostoru viděná jedním okem nehybně upřeným. Vyšetřuje se tzv. perimetrem. Binokulární zorné pole vzniká přeložením, spojením zorných polí monokulárních (obr. 1, šrafovaná plocha, a bílý kruh, lemovaný černým mezikružím obr. 2). Během denního vidění máme dojem, že naše binokulární zorné pole není nijak prostorově omezeno. Tato iluze je podmíněna neustálými těkavými jemnými pohyby obou očních bulbů do stran a chyběním kontrastu v důsledku rovnoměrného osvětlení prostoru. O existenci omezeného zorného pole při binokulárním vidění se však můžeme snadno přesvědčiti v noci za pochodu po rovné cestě temným lesem, svítíme-li stále před sebe baterkou. Ta před námi vymezuje světelný kužel, lemovaný bilate-





Obr. 1. Binokulární zorné pole člověka. Podle: Gottschick: Die Leistungen des Nervensystems. S. 344, obr. 149. 1955, Jena

Obr. 2. Binokulární zorné pole člověka za nočního pochodu při světle kapesní svítilny při pohledu ve směru střední vertikální šipky. Při pohledu do stran (horizontální šipky), vidíme černé oblouky vymezené kuželem světla svítilny (schéma, orig. autora)

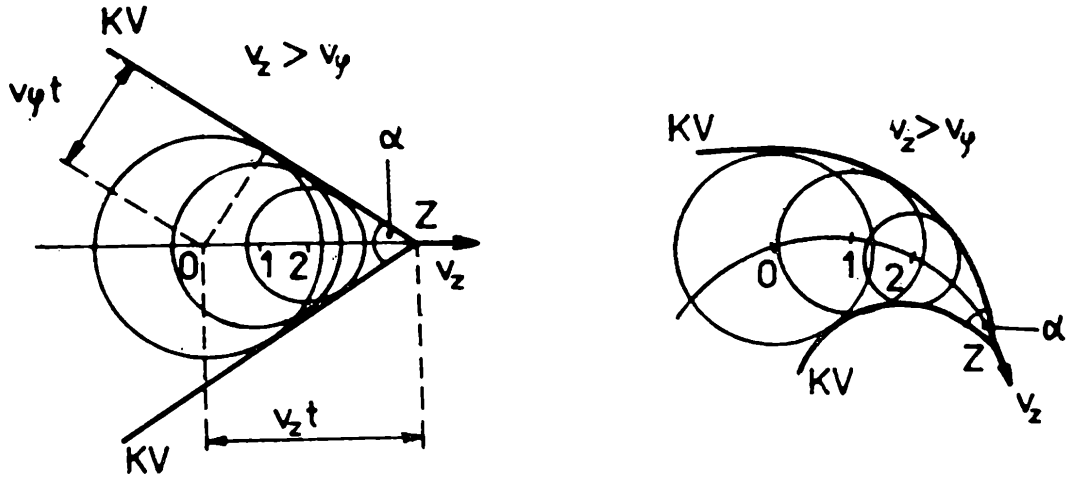
rálně cesty temnými oblouky. Již po chvíli pochodu jsme provázeni neodbytným vjemem černé obruče okolo obličeje s průměrem vnější spojnice obou očí. Spíše nízký černý válec, či jako bychom se dívali z krátké černé roury. Tento vjem je spojitý po celý pochod. Jakmile se však podíváme do stran, vjem černé obruče zmizí a vidíme velké černé oblouky vlevo, vpravo cesty vyťaté světelným kuželem baterky. Když se opět díváme stále před sebe, oba černé oblouky se za zmenšování a zakřivování dají do pohybu směrem k mediáně, ose pochodu, až opět splynou ve zmíněný černý kruh, jak znázorňuje obr. 2, schéma tohoto jevu. Nejde jen o kruhové omezení binokulárního zorného pole, ale o bilaterální deformaci jeho předmětného obsahu až na onen kruh v černém mezikruží.

Mechanické vlny vznikající při pohybu tělesa v látkovém prostředí

Doc. RNDr. ing. JAROSLAV POSPÍŠIL, CSc., UP Olomouc

Při pohybu tělesa v tekutém (kapalném nebo plynném) prostředí vznikají speciální mechanické postupné vlny, jejichž vlastnosti závisí na velikosti postupné rychlosti tohoto tělesa, popřípadě i na vlastnostech prostředí. Tyto vlny jsou produkovány nejen v případech, kdy pohybující se těleso obsahuje zdroj vlnění (např. zdroj zvuku), ale i v případech, kdy těleso zdroj vlnění neobsahuje a vlnění je vytvářeno samotným pohybem tělesa v prostředí (těleso při svém pohybu vibruje, a je tudíž zdrojem mechanického vlnění vlivem svého pohybu).

Všimněme si nyní častého případu, kdy těleso (zdroj vlnění) Z se pohybuje rovnoměrně přímočaře větší postupnou rychlostí v_z, než je fázová rychlost v_φ tělesem Z produkovaného mechanického postupného vlnění ($v_z > v_\varphi$). Pro jednoduchost uvažujme trojrozměrné neabsorbující izotropní a homogenní tekuté prostředí. Výsledkem je mechanické postupné vlnění (kýlová vlna), jehož vlnoplocha KV má v každém okamžiku t kuželový (kónický) tvar s vrcholem kužele v místě pohybujícího se zdroje vlnění (popřípadě v předním bodě pohybujícího se tělesa bez zdroje vlnění) Z. Tato vlnoplocha je v souladu s Huygensovým principem, známým z teorie postupného vlnění, vnější geometrickou obálkou kulových elementárních vlnoploch vycházejících z jednotlivých okamžitých poloh 0, 1, 2, ... pohybujícího se zdroje (tělesa) Z. Poloměry kulových elementárních vlnoploch rostou přímo úměrně s časem, a tedy i se vzdáleností od rovnoměrně přímočaře se pohybujícího tělesa



Obr. 1 a) b)

(obr. 1a). V dvojrozměrném případě se výsledná kuželová vlnoplocha redukuje na pár protínajících se přímek, tvořících brázdy. To lze například přímo pozorovat za lodí plující rovnoměrně přímočaře na vodní hladině větší rychlostí, než je fázová rychlost produkovaných mechanických postupných vln.

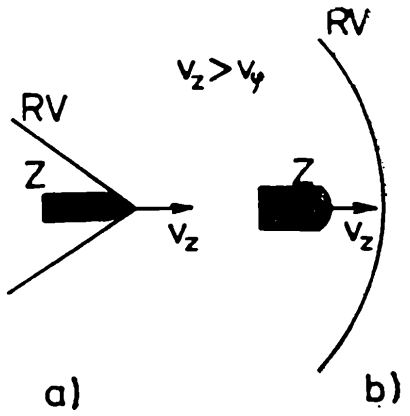
Úhel α, který charakterizuje uvedenou kuželovou vlnoplochu, je v souladu s obr. 1a určen relací ($v_z > v_\varphi$):

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v_\varphi t}{v_z t} = \frac{v_\varphi}{v_z}.$$

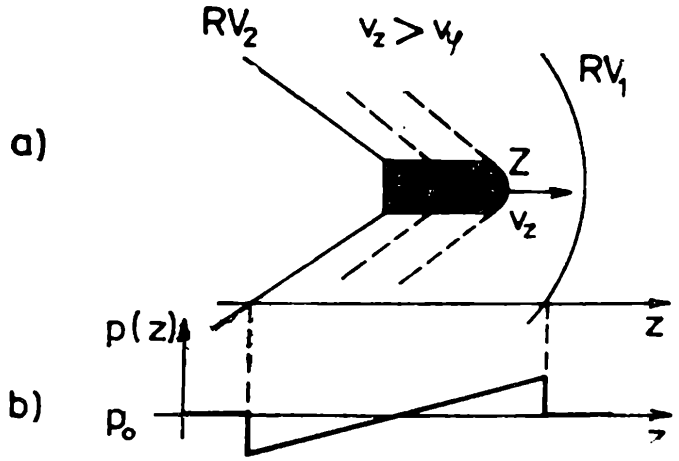
Tato vlnoplocha (brázdy) se posouvá ve směru pohybu tělesa postupnou rychlostí v_z a její vrchol je vždy v okamžité poloze předního bodu tělesa (zdroje). Na obr. 1b je znázorněn obdobný případ, kdy těleso Z koná zakřivený pohyb v izotropním a homogenním prostředí. Platí-li $v_z = v_\varphi$, pak vychází $\alpha = \pi$, a tudíž kýlová vlnoplocha má rovinný tvar a pohybuje se s tělesem rychlostí v_z. Při $v_z < v_\varphi$ ke vzniku kýlové vlny nedojde (vlnoplochy předbíhají pohybující se těleso Z).

Uvedené kýlové vlny nemají periodické průběhy a vyskytují se též ve zvukové formě (například při pohybu střely ve vzduchu nadzvukovou rychlostí) jako balistické vlny nebo doprovázejí nadzvukový pohyb letadla ve vzduchu, kdy zmíněné brázdy se nazývají *Machovy čáry* a α je *Machův úhel*.

Při pohybu tělesa Z nadzvukovou rychlostí ($v_z > v_\varphi$) vzniklá zvuková (mechanická) vlna může být i *rázovou vlnou*, před kterou je nevzbuzené prostředí. Tvar fronty rázové vlny závisí na tvaru pohybujícího se tělesa a rázová vlna je tím intenzívnější, čím se těleso pohybuje rychleji. Je-li přední část tělesa zaostřená, pak čelo vzniklé rázové vlny RV má tvar kužele (obr. 2a), přičemž zaostřený hrot tělesa je společný s vrcholem kužele. Rázová vlna se nešíří před tělesem (jak tomu je u rovinné rázové vlny), ale ostré pohybující se těleso jakoby rozráželo prostředí. Má-li těleso tupý předek, pak vzniklá rázová vlna RV je odtržená od



Obr. 2



Obr. 3

tělesa a šíří se před ním (obr. 2b). Tento případ rázové vlny lze pokládat za přechodný stav mezi rovinnou rázovou vlnou a rázovou vlnou, která vzniká při pohybu zaostřeného tělesa.

Při nadzvukovém pohybu tělesa v tekutině se velká část jeho kinetické energie spotřebuje k vytvoření zvukových a rázových vln, které provázejí jeho pohyb. Tekuté prostředí klade tomuto pohybu určitý vlnový odpor, který má mnohem větší vliv na pohyb tělesa než viskozita prostředí. Naproti tomu při podzvukovém pohybu tělesa odpor tekutiny je určen především její viskozitou.

U rozlehlého tělesa Z se projevuje kromě přední (čelní) rázové vlny zhuštění RV_1 také ještě zadní (chvostová) rázová vlna zředění RV_2, a to tím více, čím je těleso větší (delší) a čím se pohybuje rychleji, jak to je pro těleso s tupým předkem, pohybující se ve směru souřadné osy z, znázorněno na obr. 3a. Odpovídající přibližné rozložení tlaku $p = p(z)$ vzhledem k původnímu tlaku p_0 nevzbuzeného tekutého prostředí je na obr. 3b. Mezi uvedenými rázovými vlnami mohou vzniknout ještě dílčí kýlové vlny (znázorněné na obr. 3a čárkovaně).

V rázové vlně zhuštění se prostředí zahřívá, a to nejvíce v místech kontaktu prostředí s přední částí pohybujícího se tělesa, která se může rozžhavit nebo dokonce i vypařit. Takto vzniklé svícení zviditelňuje dráhu tělesa (např. meteoritu v zemské atmosféře). Svítící rázová vlna provází i let rakety (nebo raketoplánu) v atmosféře a přispívá k brzdění jejího sestupného modulu při přistávání na Zemi. Je tedy potřebné, aby přední části přistávacího modulu rakety byly z látky, která vydrží poměrně vysoké teploty a současně izoluje jeho vnitřek od vlivu vysoké teploty.

Je třeba si též uvědomit, že mechanická rázová vlna může vzniknout i při pohybu tělesa prostředím rychlostí menší, než je zvuková rychlost. To nastává tehdy, když mechanická vlna zhuštění má dostatečně velkou amplitudu (vzniklá rázová vlna se i v tomto případě pohybuje nadzvukovou rychlostí).

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Papež fyziky

Doc. ing. ZDENĚK JANOUT, CSc., FJFI ČVUT Praha

„Jednu věc jsem během svého dlouhého života pochopil, že ve srovnání s realitou je veškerá naše věda primitivní a dětinská — a přesto je nejcennější věcí, kterou máme."

Albert Einstein

Dne 14. 3. 1989 vzpomenul celý vědecký svět nedožitých stodesátých narozenin Alberta Einsteina. A. Einstein je tvůrce teorie relativity a řady dalších fyzikálních teorií, jež umožnily moderní pojetí prostoru, času, pohybu, látky, světla a přitažlivosti. *V. I. Lenin* jej nazval *„velkým přetvořitelem přírodních věd"*. V roce 1905 zformuloval teorii Brownova pohybu. V témže roce vysvětlil užitím Planckovy kvantové teorie experimentální výsledky týkající se fotoelektrického jevu. V roce 1905 vyšla i jeho první práce o speciální teorii relativity. V roce 1916 zformuloval obecnou teorii relativity. V roce 1921 mu byla udělena za zásluhy v teoretické fyzice a zejména za objev zákona fotoelektrického jevu Nobelova cena za fyziku.

Fašistický teror ho donutil v roce 1933 opustit Německo; usídlil se v *Princetonu* v USA, kde pracoval v *Institute for Advanced Study*. Francouzský fyzik *Paul Langevin* pronesl tehdy napůl žertem, napůl vážně prorocká slova: „To je velká událost — asi tak veliká, jako kdyby se do Nového světa přestěhoval Vatikán. Odjíždí „papež fyziky". Centrem přírodních věd se stanou Spojené státy."

V 30. až 40. letech usiloval o vybudování jednotné teorie pole odhalující podstatu nejen gravitačních, ale i jiných polí. Východiskem jeho světového názoru bylo rozhodné odmítání existence boha, jakékoli nehmotné substance, uznávání objektivnosti a poznatelnosti světa a příčinné závislosti všech procesů v přírodě. V otázkách společenských a politických byl odpůrcem sociálního a národnostního útlaku, militarismu a reakce, energicky se stavěl proti využívání atomové energie pro vojenské účely.

V posledních letech svého života byl znechucen zneužíváním vědeckých objevů a říkal: „Kdybych byl znovu mladým člověkem a měl bych si vybrat povolání, nechtěl bych být vědeckým pracovníkem, vědcem ani pedagogem, dal bych přednost klempířství nebo kamelotství v naději,

že získám tu nevelkou nezávislost, která je ještě v současných poměrech možná . . .". To bylo v době, kdy řada amerických vědců byla povolána na lavici obžalovaných, včetně „otce atomové pumy" *Roberta Oppenheimera*", za tzv. protiamerickou činnost. A. Einstein se dožil pouze prvních záblesků skončení studené války a zmírnění mezinárodního napětí.

Zemřel v Princetonu 18. dubna 1955.

Albert Einstein a Praha

„Einstein se kdysi o nespojitosti, diskrétnosti reality vyjádřil příměrem, k němuž byl možná inspirován dvouletým působením v Praze: skutečnost, že se pivo prodává po půllitrech, ještě neznamená, že se pivo vyskytuje v půllitrech i v sudu. Ač to pro Čecha zní snad neuvěřitelně, pivo se chová zcela odlišně od energie. Energie se totiž „i v sudech" vyskytuje skutečně v jakýchsi dále nedělitelných „půllitrech"". Citace z knihy „Newton by se divil" od F. Běhounka, I. Boháčka a Z. Pince.

A. Einstein působil v Praze od dubna 1911 do konce července 1912. Přijel se svou ženou, Srbkou Milevou, matematičkou, a s dvěma syny, sedmiletým Hansem Albertem a jednoročním Edvardem. Bydleli v tehdejší Třebízského ulici č. 125 na Smíchově; dnes je to Lesnická ulice, dům č. 7; spojka od Domu kultury kovoprůmyslu k vltavskému nábřeží. Na domě byla 13. 3. 1979 k 100. výročí narození A. Einsteina odhalena busta a pamětní deska s nápisem „Zde žil a pracoval v letech 1911—1912 Albert Einstein".

A. Einstein měl přednášky pro studenty nejprve v Klementinu, později v Ústavu pro teoretickou fyziku ve Viničné čp. 1594; seminář se konal už od počátku jen tam. Dnes je v domě pamětní deska: „V létech 1911—1912 působil v této budově řádný univerzitní profesor Albert Einstein".

Podruhé přijel A. Einstein do Prahy na krátkou návštěvu v roce 1921, kdy přijal pozvání pražské německé společnosti Urania, aby v ní proslovil přednášku o teorii relativity. Jak uvádí ve své knize o Einsteinovi jeho nástupce v Praze prof. Ph. Frank, využil tehdy slavný Einstein jeho nabídky, jak se zpočátku skrýt před zvědavci v hotelu a ochotně strávil první noc na pohovce v místnosti, která byla kdysi jeho a později Frankovou pracovnou a v důsledku poválečné bytové tísně sloužila Frankovi a jeho manželce i jako apartmá. Ráno, potom co se přihlásil na policii, navštívil Einstein v doprovodu Franka Fyzikální ústav české univerzity, čímž — jak uvádí prof. Frank — „chtěl vyjádřit sympatie k nové Československé republice . . .".

V Praze v osadě *Petrovice*, kde řada ulic nese jméno význačných fyziků a techniků (Ampérova, Galileova, Ohmova, Galvaniho, Gaussova, Hertzova, Voltova, Edisonova, Euklidova, Bellova, Dieselova, Morseova, Grammova), je i ulice Einsteinova.

Pierre Curie (1859—1906)

PaedDr. FRANTIŠEK JÁCHIM, ZŠ Volyně

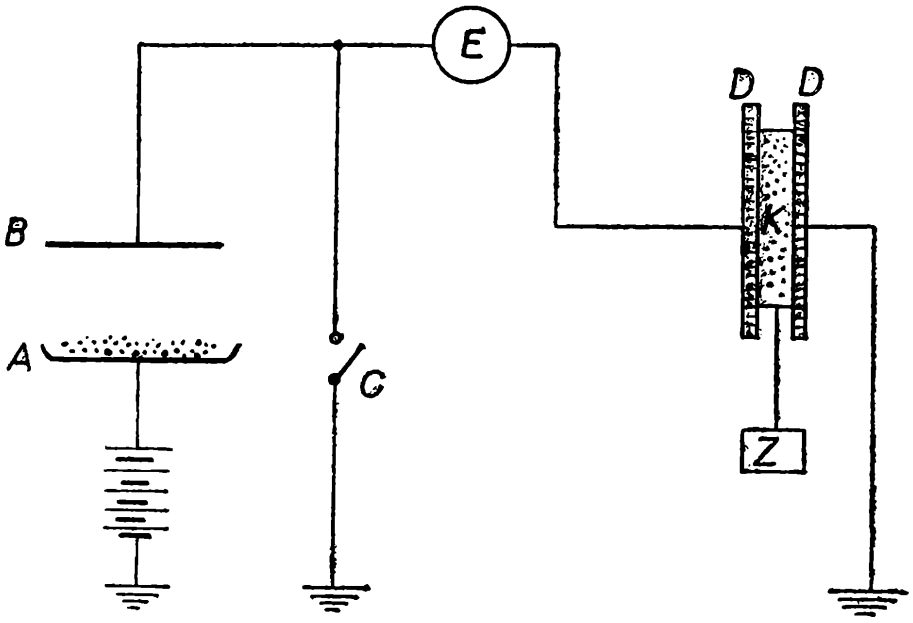
Koncem minulého století v roce 1898 objevili po velmi pečlivé a namáhavé práci manželé Curieovi dva velmi silně radioaktivní prvky polonium a radium. S dílem Marie Curieové-Skłodowské jsme se na stránkách našeho časopisu již setkali [4]. Přestože manželé Curieovi pracovali na mnoha problémech společně, připomeňme dnes také podíl Pierra Curieho na významných objevech.

Domácí učitel Pierra Curieho (15. 5. 1859—19. 4. 1906) mu vštípil základy matematiky a latiny. Se svým bratrem Jacquesem konal Pierre přírodovědecké pokusy. Fyzikální experimenty jej natolik zaujaly, že jim zůstal věrný celý život. Po středoškolských studiích byl demonstrátorem u profesora Desainse, s nímž roku 1880 uveřejňuje první práci o pokusném stanovení vlnových délek tepelných paprsků při nízkých teplotách. S bratrem Jacquesem objevil stejného roku *piezoelektřinu* a o rok později i jev opačný, tj. deformaci krystalu v elektrickém poli. Objevu piezoelektrického jevu využil později k sestavení aparatury pro měření velmi malých elektrických proudů (10^{-12} A), čehož bylo využito při objevech, jež následovaly. V roce 1883 se cesty bratrů rozcházejí. Jacques odchází do mineralogického ústavu univerzity v Montpellier a Pierre do laboratoří École Municipale de Physique et de Chemie industrielles.

První jeho prací, kterou je pověřen na novém působišti, je zkoumání vlastností magnetismu látek. Zaměřil se na hledání závislostí magnetických vlastností látek na jejich struktuře a teplotě. Pokusy s látkami o teplotách 0 °C—1400 °C nebyly nijak jednoduché, avšak v tuto dobu byl již Curie velmi zručný a nápaditý experimentátor. Nalezl pozoruhodné závislosti mezi magnetickou susceptibilitou ($\varkappa$) a teplotou látek (T). Prokázal tím podstatné změny vlastností látek. Klasifikace látek na *diamagnetické, paramagnetické* a *feromagnetické* není neměnná, nýbrž dost významně závisí na teplotě látky. Magnetická susceptibilita paramagnetických látek je nepřímo úměrná teplotě látky, dá se vyjádřit vztahem $\varkappa = C/T$, kde C je jistá konstanta vyjadřující materiálové vlastnosti látek. Pro magnetickou susceptibilitu látek feromagnetických platí vztah (dnes nazývaný jako *Curieův—Weissův zákon)*

$$\varkappa = \frac{C}{T - \Theta},$$

kde Θ je tzv. *Curieova* teplota, při níž látka feromagnetická přechází v paramagnetickou. Například železo přestává být feromagnetikem při 770 °C, nikl při 356 °C, kobalt při 1075 °C. V roce 1895 svou práci v oblasti



Obr. 1

magnetismu završuje Pierre Curie předložením disertační práce. To ještě netuší, že k vrcholům své vědecké práce dospěje na poli zcela odlišném — výzkumem radioaktivity. Prologem k této cestě je sňatek s Polkou *Marií Skłodowskou*.

Práce manželů Curieových na zkoumání radioaktivity je zpočátku dílem Marie. Pierre není příliš nadšen tím, čím se zabývá jeho žena. Jako nadšený a zručný experimentátor však brzy pozná, že dosud záhadné paprsky poskytují skvělé možnosti k badatelské činnosti. A nezodpovězených otázek bylo tolik! Proto se vědecké dráhy obou plně ztotožňují.

Především bylo jasné, že pouze kvalitativní výsledky pokusů nebudou průkazné a postačující. Bylo třeba kvantitativně postihnout rozdílnost záření různých látek. Jelikož radioaktivní záření je s to vyvolat elektrický proud, ukázalo se, že právě měření ionizačních proudů odhalí dosud neznámé zákonitosti. Opravdu? Vždyť předpokládané proudy budou tak malé, že nebude čím je měřit. Je dílem Pierra Curieho, že tento problém byl úspěšně vyřešen. Využívaje poznatků o jím nedávno objevené piezoelektřině sestavuje aparaturu, jejíž schéma je na obr. 1. Radioaktivní látka na misce *A* svým zářením ionizuje vzduch mezi deskami *A* a *B*. Protože miska je spojena s kladným pólem baterie akumulátorů, je mezi oběma deskami elektrické pole, které „dodává" náboje do kvadrantního elektroskopu E. Tok nábojů je tak malý, že vytváří proud řadově 10^{-12} A. Mezi deskami *D-D* je piezokrystal *K*, který je závažím *Z* deformován a vytváří na deskách *D-D* elektrický náboj. Krystal je umístěn tak, aby náboj dodaný z něj elektroskopu byl opačný než náboj z desky *B*. Může se tudíž stát, že oba druhy nábojů jsou v elektroskopu v rovnováze; můžeme také docílit toho úmyslně (a to dělal Curie), a to tak, že budeme měnit tíhu závaží. Víme, že našel závislost mezi deformující silou a velikostí napětí na piezokrystalu.

Mohl tedy ionizační proud kompenzovat proudem piezoelektrickým, který dovedl vypočítat. Dodejme jen, že vypínač C se spíná jen při odstavení elektroskopu. Jde o přístroj tak citlivý, že je nutno jej uzemněním chránit před nahodilou ionizací vzduchu.

Jak již bylo řečeno v úvodu, objevují manželé Curieovi v roce 1898 dva nové, silně radioaktivní, prvky *radium* a *polonium*. Byl to výsledek i fyzicky velmi namáhavé práce. Na separaci několika setin gramu radia bylo zapotřebí několik tun smolince. Tato ruda dodávaná pařížské laboratoři manželů Curieových z *Jáchymova* obsahuje kromě oxidu uranu řadu dalších látek (5 % PbS, 5 % CaO, 3 % SiO_2, 3 % FeO, 2 % MgO aj.), jež bylo nutno chemickou cestou z rudy postupně odstranit. Dne 10. prosince 1903 se 300 000 franků Nobelovy ceny dostává za objevy v oblasti radioaktivity do rukou manželů Curieových a H. Becquerela. Nikdo však nebohatne. Curieovi tuto částku plně využívají pro svoji vědeckou práci. Jejich zásluhou je rovněž to, že od roku 1899 známe chemické účinky záření. Vyvolává světélkování plynů, fialové a hnědé zbarvení skla; objevitele však nejvíce zaujal vliv magnetického pole na záření. Pierre Curie jako velký znalec magnetismu nemohl tento poznatek nechat bez povšimnutí a pouští se znovu do úmorné práce. Záření nechává procházet štěrbinou mezi póly magnetu a deskami kondenzátoru. Pokus ukázal, že radioaktivní záření je vlastně dvojí: jedno nelze (slabým) magnetickým polem odchýlit (alfa), druhé se v magnetickém poli zakřivuje poměrně snadno (beta). Řeckými písmeny označil záření *E. Rutherford*, jemuž se podařilo odchýlit i alfa záření v silném magnetickém poli. Roku 1900 vychází sdělení manželů Curieových o náboji záření beta, toto je jejich poslední společná experimentální práce. Pierre Curie prováděl též první průkopnické práce s vlivem záření na lidský organismus. Na svém těle vyvolával popáleniny radioaktivitou chloridu radnato-barnatým.

Je vlastně ironií, že řádným členem francouzské akademie věd byl P. Curie zvolen až rok před smrtí. Také Sorbonna si s profesurou příliš nepospíšila. Dočkal se jí roku 1904. A tak přesto, že manželé Curieovi byli nositeli Nobelovy ceny i Osirisovy ceny (100 000 franků), jejich pracovní podmínky byly po dlouhou dobu více než skromné. Život Pierra Curieho se uzavřel 19. dubna 1906, kdy jda ze schůze profesorů Sorbonny byl sražen koňským potahem na ulici, jíž tolikrát zamyšlený prošel.

Literatura:

[1] Malíšek, V.: Co víte o dějinách fyziky, Praha 1986
[2] Běhounek, F.: Pierre Curie, Praha 1957
[3] Laue M.: Dějiny fyziky, Praha 1963
[4] Jáchim, F.: Před 50 lety zemřela Marie Curieová — Skłodowská, Rozhledy MF 62 (1983/84), 447—449

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Zajímavá úloha Isaaca Newtona

Tráva na celé louce roste stejně hustě a stejně rychle. Je známo, že 60 krav by spáslo trávu za 24 dní a 30 krav za 60 dní.

a) Kolik krav by spáslo trávu za 100 dní?

b) Kolik krav by se mohlo pást na louce, aby trávy neubývalo?

Řešení:

Nazvěme porcí množství trávy, které spase 1 kráva za 1 den.

Platí:

1 kráva spase za 1 den 1 porci trávy.
60 krav spase za 1 den 60 porcí trávy.
60 krav spase za 24 dní 1440 (= 60 24) porcí trávy.

Obdobně spase 30 krav za 60 dní 1800 (= 30 60) porcí trávy. Za 36 (= 60 — 24) dní vyroste na louce 360 (= 1800 — 1440) porcí trávy. Za 1 den vyroste 36krát méně, tj. 10 (= 360 : 36) porcí trávy. Potom za 24 dní vyroste 240 (= 24 . 10) porcí trávy a za 60 dní vyroste 600 (= 60 10) porcí trávy. Ověřme si, zda vstupní údaje byly správně zadány. V prvním případě bylo na začátku pasení 1200 (= 1440 — 240) porcí trávy. Ve druhém případě bylo od počátku pasení rovněž 1200 (= 1800 — 600) porcí trávy. Proto na konci stého dne pasení musí být spasena celá louka, která představuje původních 1200 porcí trávy a 1000 (= 100 10) porcí, které přirostou v průběhu pasení. Celkem to představuje 2200 porcí trávy.

Označíme-li x neznámý počet krav při stodenním pasení, pak lze psát:

$$100x = 2200 \qquad /:100$$
$$x = 22$$

a) Za 100 dní by vypáslo louku 22 krav.

b) Denně by se mohlo pást 10 krav, aniž by tráva z louky ubývala.

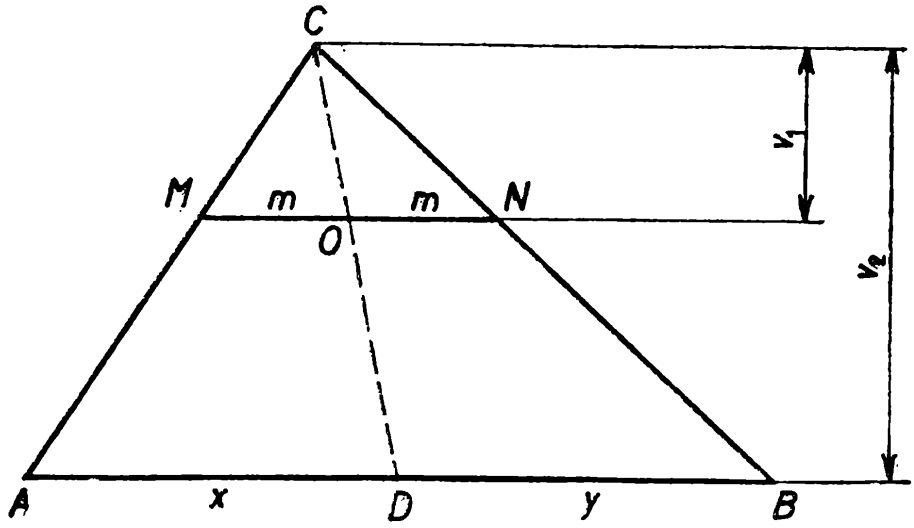
Josef Trejbal

OPRAVA

V posledním čísle Rozhledů bylo uvedeno chybné řešení úlohy o Rozhledech z č. 7. Ročník 71 totiž bude ve školním roce 1992/93 a nikoliv 1993/94. Čtyři prvočísla na titulní straně obálky, nedojde-li ke změně ceny čísla apod., budou až u říjnového čísla v roce 2004.

O těžnici trojúhelníku

Načrtněte si libovolný trojúhelník ABC s několika příčkami rovnoběžnými se stranou AB. Na těchto příčkách vyznačte jejich středy. Jestliže je spojíte, dojdete k domněnce, že leží na těžnici t_c trojúhelníku ABC. Důkaz oprávněnosti této domněnky snadno dokážou ti, kteří znají podobnost trojúhelníků. Ukážeme si však důkaz, v němž se užívá obsahů trojúhelníků a lichoběžníků.



Obr. 1

Na obr. 1 je ABC libovolný trojúhelník, příčka MN je rovnoběžná se stranou AB a má střed O. Malá písmena připsaná k úsečkám označují jejich délky; v_1 a v_2 jsou výšky v trojúhelnících MNC a ABC na strany proti vrcholu C. Bod D je průsečík CO a AB.

Trojúhelníky MOC a ONC mají týž obsah $\frac{1}{2} mv_1$, tedy

$$S_{MOC} = S_{ONC} \,. \tag{1}$$

Obsah $\triangle MOC$ lze však také vyjádřit jako rozdíl obsahů $\triangle ADC$ a lichoběžníku $ADOM$:

$$S_{MOC} = S_{ADC} - S_{ADOM} = \frac{1}{2} xv_2 - \frac{1}{2}(x + m)(v_2 - v_1) = \frac{1}{2} xv_1 - \frac{1}{2} m(v_2 - v_1) \tag{2}$$

Obdobně vypočteme obsah $\triangle ONC$:

$$S_{ONC} = S_{DBC} - S_{DBNO} = \frac{1}{2} yv_2 - \frac{1}{2}(y + m)(v_2 - v_1) = \frac{1}{2} yv_1 - \frac{1}{2} m(v_2 - v_1) \,. \tag{3}$$

Z rovností (2) a (3) pak podle rovnosti (1) vyplývá

$$\frac{1}{2}xv_1 = \frac{1}{2}yv_1 .$$

Výška $v_1 \neq 0$, a proto $x = y$. Bod D je tedy středem strany AB, úsečka CD je těžnice t_c a střed O příčky MN skutečně leží na t_c.

Dokázali jsme tedy, že středy všech příček trojúhelníku ABC, jež jsou rovnoběžné se stranou AB, leží na těžnici t_c. Chtějme však dokázat více, a to, že množina všech vnitřních bodů těžnice t_c v trojúhelníku ABC je množinou středů všech příček tohoto trojúhelníka, které jsou rovnoběžné se stranou AB. Zde je třeba ještě dokázat, že libovolný vnitřní bod O těžnice t_c je středem některé příčky trojúhelníku ABC, jež je rovnoběžná se stranou AB.

Překreslete si obr. 1 a malá písmena k úsečkám zatím nepřipisujte. Předpokládejme, že bod D je středem strany AB a napišme k úsečkám AD a DB jako jejich délky totéž písmeno, např. p. Úsečka CD je tedy těžnicí t_c. V překresleném obr. 1 považujme bod O za libovolný vnitřní bod těžnice t_c, kterým byla vedena příčka $MN \| AB$. Délky úseček MO a ON označme po řadě třeba r a s; tato písmena napište do svého obrázku. Výšky trojúhelníků MNC a ABC z vrcholu C nechť jsou opět v_1 a v_2.

Postupem, jaký jsme použili výše, dokážeme, že $r = s$ a že O je středem příčky MN. V tomto případě víme, že trojúhelníky ADC a DBC mají týž obsah $\frac{1}{2}pv_2$. Obsahy těchto dvou trojúhelníků lze vyjádřit také takto:

$$S_{ADC} = S_{ADOM} + S_{MOC} , \quad S_{DBC} = S_{DBNO} + S_{ONC} .$$

Z rovnosti obsahů trojúhelníků ADC a DBC již snadno dokážete, že $r = s$.

Na závěr tohoto článku uvedeme tři úlohy ze starých ročníků matematické olympiády kategorie Z.

1. Je dán čtverec, jehož strana má délku 6 cm. Bod M má od dvou sousedních stran čtverce vzdálenosti 15 mm a 20 mm.

Sestrojte lomenou čáru procházející bodem M, která tvoří množinu středů všech úseček XY navzájem rovnoběžných, jejichž krajní body leží na stranách daného čtverce. Vypočtěte její délku.

2. Do ostroúhlého trojúhelníka ABC je vepsán obdélník $MNPO$ tak, že vrcholy M, N leží na straně AB, vrchol P na straně BC a vrchol O na straně CA.

Vyšetřte množinu středů všech obdélníků $MNPO$.

3. Je dán trojúhelník ABC se stranami délek $d(AB) = 9$ cm, $d(BC) = 5$ cm, $d(CA) = 8$ cm. Sestrojte kružnici k vepsanou tomuto trojúhelníku a na ní najděte všechny body X této vlastnosti: přímka p rovnoběžná s AC a procházející bodem X protíná strany AB, BC v takových bodech Y a Z, že X je střed úsečky YZ.

Stručná řešení naleznete v 10. čísle tohoto ročníku Rozhledů.

Jiří Mída

Řešení dvou úloh z čísla 8

Vyletělo zrána několik včel

Po rozboru textu lze sestavit rovnici

$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3 \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) + 1 = x$, kde x je hledaný počet včel. Tato rovnice má řešení $x = 15$.

Indický matematik použil při jejím řešení nepochybně jiný postup. Alespoň pro malou ilustraci nahlédněme do indické aritmetiko-algebraické symboliky.

Pro druhou mocninu používali zkratku *va* (varga—čtverec), pro třetí mocninu zkratku *gha* (ghana—těleso, krychle). Čtvrtou mocninu vyjadřovali zkratkou *va-va*, pátá se značila *va-gha-gháta*, šestá mocnina měla algebraický ekvivalent *va-gha* atd. Neznámou (proměnnou) označoval *Árjabhatta I.* (nar. v roce 476 n. l.) zkratkou *gu* (gulika—kulička), známou *rú* (rúpaka—mince). *Bráhmagupta* (nar. v roce 598 n. l.) označoval první použitou neznámou *já* (jávat-távat, kolik-tolik). Pro další neznámé pak použil zkratky *ká* (kálaka—černý), *ní* (nílaka—modrý), *pí* (pítaka — žlutý) atd. Pro násobení používal operační symbol *bhá* (bhávita—součin). Tak například rovnice $10x - 8 = x^2 + 1$ vzhledem k tomu, že nebyl používán znak rovnosti, byla napsána do dvou řádků:

já 10 *rú* $\dot{8}$
já va rú 1

Tečka nad číslicí označovala záporné číslo (v našem případě — 8). To bylo chápáno ve smyslu dluhu.

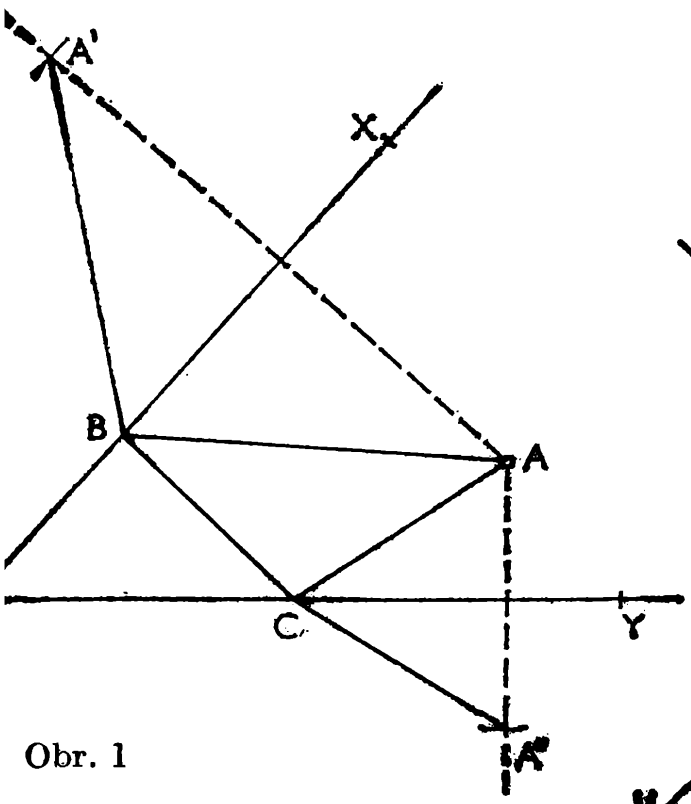
Konstrukce trojúhelníku nejmenšího obvodu

Rozbor této konstrukční úlohy provedeme pomocí základní situace, kterou vyjadřuje obr. 1.

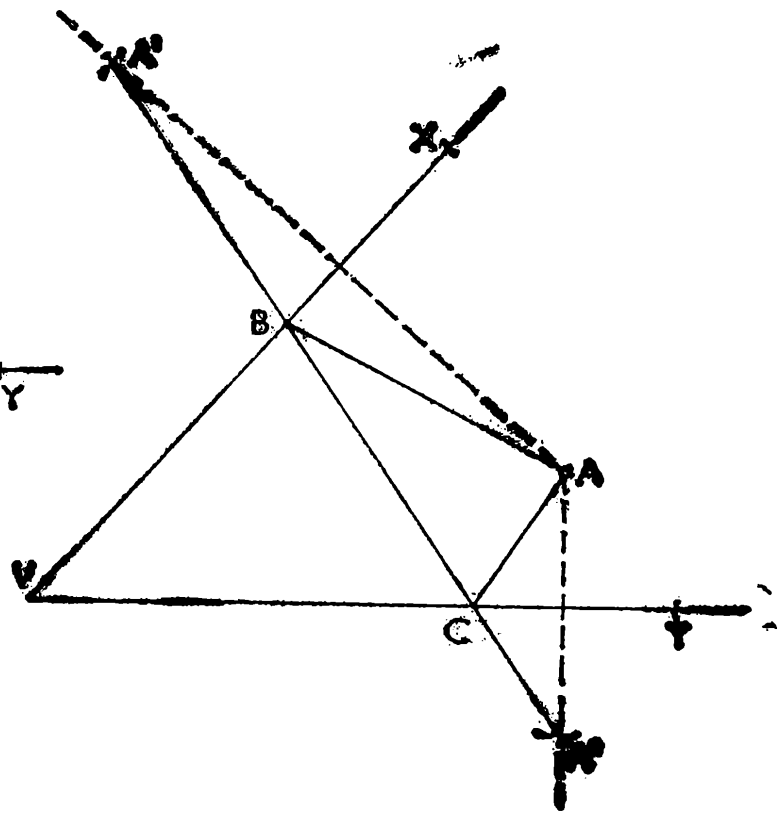
Sestrojme bod A' souměrně sdružený s bodem A podle přímky VX jako osy souměrnosti a bod A'' souměrně sdružený s bodem A podle přímky VY jako osy souměrnosti. Z vlastností těchto dvou osových souměrností, které lze označit O_1 a O_2, plyne:

$$AB \cong A'B\,,$$
$$AC \cong A''C$$

Obvod trojúhelníku ABC se rovná $|AB| + |BC| + |AC|$ a ten je dále roven $|A'B| + |BC| + |A''C|$, čili obvod trojúhelníka ABC se rovná délce lomené čáry $A'BCA''$ Tato čára bude mít nejkratší délku, budou-li body B, C ležet na úsečce $A'A''$ Odtud plyne konstrukce požadovaného trojúhelníku.



Obr. 1



Obr. 2

Narýsované body A' a A'' uvedených vlastností spojíme proto v úsečku $A'A''$. Její průsečíky s rameny VX a VY jsou vrcholy hledaného trojúhelníku. Popsaná konstrukce je provedena na obr. 2. Její postup lze zapsat:

1. $\sphericalangle XVY$; libovolný ostrý úhel
2. A; $A \in \sphericalangle XVY$ a zároveň platí: $A \notin \rightarrow VX$, $A \notin \rightarrow VY$
3. A'; $A \rightarrow A'$ v O_1 ($\leftrightarrow VX$)
4. A''; $A \rightarrow A''$ v O_2 ($\leftrightarrow VY$)
5. $A'A''$; úsečka
6. B; $B \in A'A'' \cap \longmapsto VX$
7. C; $C \in A'A'' \cap \longmapsto VY$
8. $\triangle ABC$; trojúhelník požadovaných vlastností

Josef Trejbal

Omyly, které ovládly svět

Je klidová třecí síla větší než smyková třecí síla?

V řadě školních učebnic je věta v nadpisu bez otazníku. Je však vždy pravdivá? A lze opravdu obecně tvrdit, že je třecí síla v klidu rovna součinu tlakové síly (mezi podložkou a předmětem) a součinitele klidového tření, jak se např. můžete dočíst ve fyzikálních tabulkách pro základní školy?

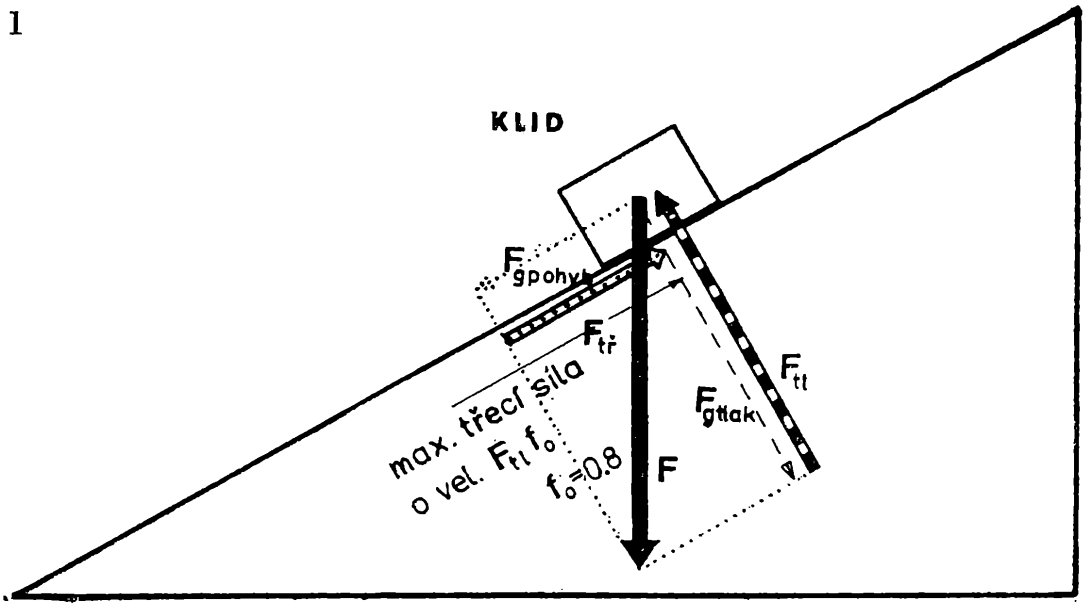
Ukážeme na jednoduchém případě, že to s klidovou třecí silou není tak jednoduché, jak se zdá a někdy i píše.

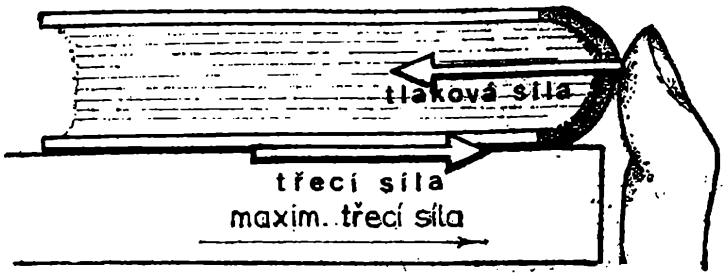
Připravíme si dvě nakloněné roviny, jednu s dřevěným povrchem, druhou pokrytou ocelovým plechem. Obě nakloněné roviny odkloníme od vodorovné roviny o úhel 5° a položíme na ně zcela stejné hladké ocelové destičky o hmotnosti 200 g. Při tak malém úhlu zůstanou obě destičky v klidu. Jsou tedy v obou případech síly, které působí na destičku, v rovnováze a vzájemně se ruší. Které to jsou síly? Jestliže zanedbáme „malé síly", jako např. působení magnetického pole Země, vztlakovou sílu, kterou působí okolní vzduch, a zdánlivé síly vyvolané rotací Země, zbývají:

1. Síla $\boldsymbol{F}$, kterou na ocelovou destičku působí gravitační pole Země.
2. Tlaková síla $\boldsymbol{F}_{tl}$, kterou tlačí zespodu na destičku nepatrně prohnutá nakloněná rovina.
3. Třecí síla $\boldsymbol{F}_{tř}$, kterou působí povrch nakloněné roviny na styčnou spodní plochu ležící destičky.

Gravitační sílu $\boldsymbol{F}$, mířící svisle dolů, můžeme nahradit dvěma složkami, jak ukazuje obr. 1. Síla $\boldsymbol{F}_{gtlak}$ je tlaková složka gravitační síly

Obr. 1





br. 2

směřující kolmo k nakloněné rovině, F_{gpohyb} je pohybová složka gravitační síly, která míří podél nakloněné roviny dolů.

To, že se ani jedna z destiček nehýbe, svědčí o tom, že tlakovou složku F_{gtlak} vyrovnává tlaková síla F_{tl} nakloněné roviny a pohybovou složku F_{gpohyb} vyrovnává síla klidového tření $F_{tř}$, jak naznačuje první obrázek, který je pro větší názornost nakreslen pro větší úhel a větší součinitel klidového tření.

Kdybychom podobně nakreslili obrázky znázorňující síly, které působí na nehybné destičky na našich nakloněných rovinách (např. při úhlu 5°), byly by od sebe k nerozeznání, i když je součinitel klidového tření f'_0 pro ocel na dřevu víc než třikrát větší než pro ocel na oceli (f_0).

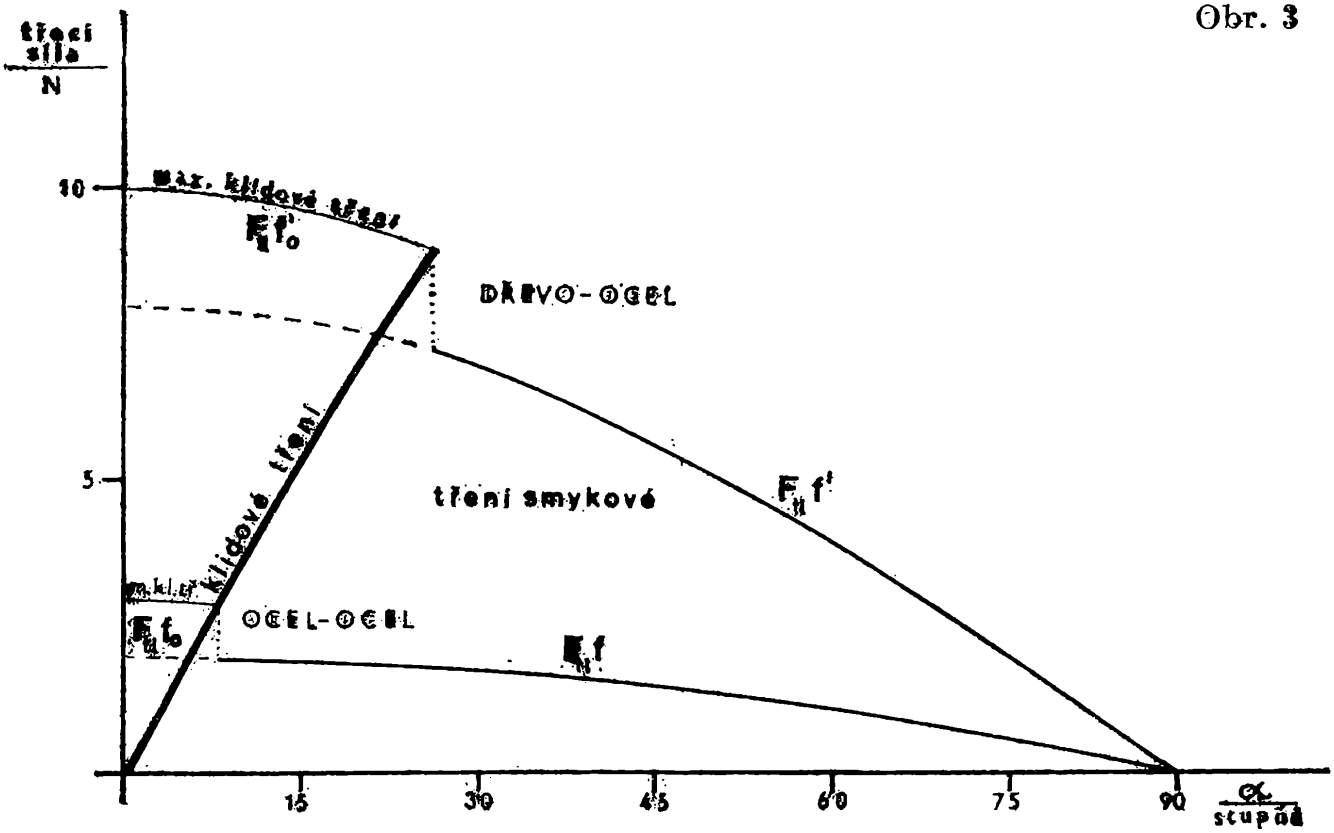
Předpokládejme nyní, že obě nakloněné roviny postupně víc a víc zvedáme. Rozdíl mezi kvalitou povrchu obou rovin se projeví teprve v okamžiku, když úhel a s ním i velikost třecí síly u oplechované nakloněné roviny překročí určitou kritickou velikost ($F_{tl} \cdot f_0 = F_{gpohyb}$). Dosažení takového sklonu nakloněné roviny bude mít za následek zrychlené klouzání destičky, při kterém velikost třecí síly poklesne na poněkud menší hodnotu $F_{tř} = F_{tl} \cdot f$, kde f je součinitel smykového tření pro styk ocel — ocel a F_{tl} opět velikost kolmé tlakové síly mezi destičkou a podložkou. Pro dřevěnou nakloněnou rovinu nastane stejná situace až při větším úhlu.

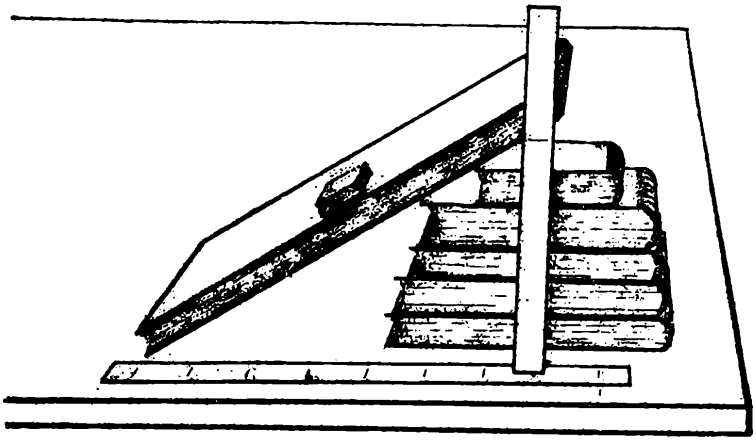
Součin kolmé tlakové síly a součinitele klidového tření $F_{tl} \cdot f_0$ je velikostí klidového tření jen ve zcela výjimečném případě, kdy je těleso právě na hranici sklouznutí. Skutečné dosažení této maximální hodnoty například při chůzi znamená, že bychom měli již mít vybrané místo pro co nejměkčí dopad. I při jízdě autem nebo na kole je bezpečná jízda podmíněna tím, že třecí síla mezi vozovkou a pneumatikami je dostatečně nízko pod touto maximální hodnotou $F_{tl} \cdot f_0$, f_0 je zde součinitel klidového tření pro gumu po asfaltu.

O klidové třecí síle, která skutečně působí, bychom mohli obrazně říci, že je ozvěnou na nějakou další vnější sílu. Budeme-li na vodorovné desce prstem tlačit různou silou na nehybnou knihu, síla tření bude pružně měnit svou velikost a dorovnávat výslednici na nulovou velikost (obr. 2).

Teprve tehdy, překročí-li tlaková síla prstu jistou maximální „pevnost" třecí síly $F_{tl} \cdot f_0$ pro dané styčné povrchy, začne se kniha zrychleně

Obr. 3





Obr. 4

pohybovat. Síla klidového tření je zde ozvěnou na tlačení prstem. Při pokusu s ocelovou destičkou byla třecí síla ozvěnou na pohybovou složku gravitační síly, mířící podél nakloněné roviny. Třecí síla (nezbytně menší než maximální hodnota) mezi podvozkem a startovací dráhou ruší tahovou sílu motorů při předstartovní zkoušce motorů letadla.

Vraťme se k otázce, kterou jsme zvolili za nadpis v tomto článku. Graf na obr. 3. je názornou odpovědí. Potvrzuje, že síla klidového tření může být za stejných podmínek menší, rovná nebo větší než síla smykového tření. Současně je vidět, že síla tření, která se např. při našem pokusu s nakloněnou rovinou realizuje, je až na kritický úhel podstatně odlišná od maximální hodnoty.

Úkol pro vás:

Položte na knihu gumu a pomalu postupně zvyšujte sklon knihy (obr. 4). Určete, pro jaký nejmenší sklon se dá guma do pohybu. Gumu zvažte a graficky (obr. 1) určete pohybovou a tlakovou složku síly **F** v tomto případě. Určete, jaký je součinitel klidového tření mezi knihou a gumou. Jaká síla klidového tření působí na gumu, když je kniha ve vodorovné poloze?

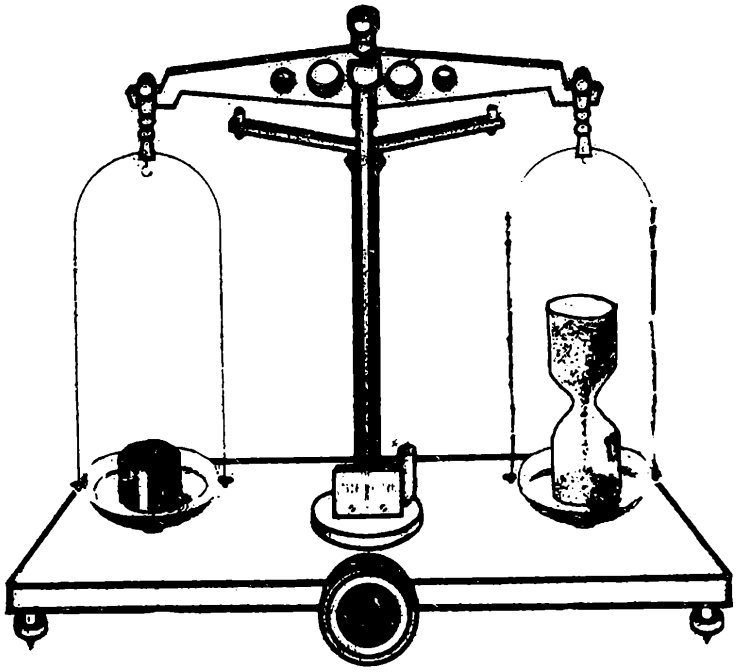
Milan Rojko

Laboratoř doma

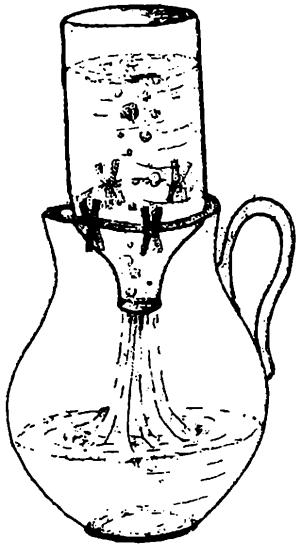
Vážení času

Na obr. 1 je pokus, který si můžete vyzkoušet i tehdy, když nemáte ani přesýpací hodiny ani laboratorní váhy. Místo písku (obr. 2) poslouží stejně dobře voda v igelitové láhvi od octa a spodní část nahradí džbán

Obr. 1



Obr. 2



nebo podobná nádoba. Na džbán připneme čtyři kolíčky na prádlo, abychom zlepšili unikání vzduchu ze spodní nádoby a zajistili horní láhev proti překlopení. Poté láhev naplníme vodou a společně se džbánem ji vyvážíme na kuchyňských vahách do rovnováhy. Naplněnou láhev rychle překlopíme do džbánu a budeme sledovat, zda se porušila rovnováha. Váhy budou přitom samozřejmě kývat, ale i při kývání lze posoudit, zda je vychylování jazýčku na obě strany z rovnovážné polohy stejné či odlišné.

Úkol pro vás:

1. Napište svou domněnku o tom, jak se v průběhu vytékání změní rovnováha na vahách.
2. Proveďte pokus a popište jeho průběh.

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Přetížený náklaďák

Možná, že jste následující vtip už slyšeli, ale i tak se nad jeho obsahem můžete znova zamyslet z hlediska fyziky.

Do strmého kopce vyjíždí dýchavičně staré nákladní auto se skříňovou karoserií a za ním motocyklista. Uprostřed kopce auto zastaví, z kabiny vyskočí závozník a zběsile začne bušit od karoserie. Náklaďák se trochu rozjede, ale za okamžik se znova zastaví a celá situace se opakuje. Chování posádky nákladního auta sleduje s údivem motocyklista, který už neudrží svou zvědavost. „Proč prosím vás bubnujete do toho auta?", zeptá se závozníka. „Ále," odpoví mu zpocený závozník, „tohle auto je dvoutunka, ale oni nám do ní dnes naložili tři tuny kanárů. No a když zabuším, kanáři začnou létat a my s tím krámem můžeme aspoň kousek popojet."

Úkol pro vás:

Napište nám odpověď na otázky:

1. Změnilo se zatížení auta v okamžiku, kdy kanáři vzlétli ze svých bidýlek?
2. Jaké bylo zatížení auta při následujícím chaotickém poletování kanárů v porovnání se situací, kdy ukázněně seděli na bidýlkách?

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu: RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK v Praze, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2. Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Princ se vydal do boje proti drakovi, který měl 3 hlavy a 3 ocasy. Než mu pohádková stařenka věnovala kouzelný meč, řekla: „Jednou ranou můžeš utnout drakovi 1 hlavu nebo 2 hlavy nebo 1 ocas nebo

2 ocasy. Utneš-li hlavu, naroste nová; utneš-li ocas, narostou 2 nové; utneš-li 2 ocasy, naroste nová hlava; utneš-li 2 hlavy, nenaroste nic." Kolika ranami může princ utnout drakovi všechny hlavy i ocasy?

2. Petr vzal pěticiferné číslo, takové, v němž některá z jeho cifer byla větší nebo rovna než 5. Potom vzal druhé číslo, které získal z prvého čísla nějakou permutací jeho cifer, a obě čísla sečetl. Výsledek byl 146 245. Dokažte, že se při sčítání dopustil chyby.

3. Mějme číselný hlavolam

$$\begin{array}{c} X \\ \\ X \\ = \\ X + X = X \,.\, X = X \\ = \\ X \\ - \\ X \end{array}$$

Za písmeno X dosazujte cifry 1, 2, . . . , 9 tak, aby platily naznačené rovnosti. Každá cifra bude užita právě jednou. Rovnosti se čtou zleva doprava a shora dolů.

4. (obtížnější) V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ se úhlopříčky protínají v bodě O. Dokažte, že rovnost

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

platí právě tehdy, když jsou úhlopříčky AC, BD navzájem kolmé nebo když bod O půlí alespoň jednu z nich.

Tomáš Schütz

Hrátky s násobením

Za stejná písmena doplňte stejné číslice.

a) ABCD × E = AADDD
b) ABCD × E = FFFAA
c) ABCD × E = CCCDD
d) ABCD × E = CCEEE
e) ABCD × E = DDDCC
f) ABCD × E = DDEEE
g) ABCD × E = FFFEE
h) ABCD × E = BBCDD
i) ABCD × E = DDEFF
j) ABCD × E = ACCCE
k) ABCD × E = BDDDF
l) ABCD × E = FDDDB

Každá úloha má jen jedno řešení — ověřeno počítačem.
(Řešení naleznete na str. 361.)

Jindřich Pěněík

OLYMPIÁDY A SOČ

Úlohy I. kola 39. ročníku matematické olympiády

Kategorie A

1. Určete nejmenší přirozené číslo n, pro které v prostoru existuje konvexní mnohostěn K s následujícími vlastnostmi:
   a) K má alespoň 10 vrcholů,
   b) každé jeho dva různé vrcholy lze po hranách spojit alespoň čtyřmi různými cestami, z nichž žádné dvě už nemají další společný vrchol,
   c) K má n hran.
2. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n s touto vlastností: Čísla 0, 0, 1, 1, , n, n lze seřadit do posloupnosti tak, že mezi dvěma výskyty čísla k je právě k jejích členů ($0 \leqq k \leqq n$).
3. Je dán čtyřstěn $ABCD$, středy dvou jeho protilehlých hran označme K a L. Dokažte, že každá rovina procházející body K, L dělí daný čtyřstěn na dvě části stejného objemu.
4. Předpokládejme, že velikosti a, b, c stran trojúhelníku a velikosti jeho těžnic jsou celá čísla. Dokažte, že pak a, b, c jsou sudá a pro velikosti těžnic platí: buď jsou všechny dělitelné třemi, anebo žádná z nich není dělitelná třemi.
5. Je-li G graf takový, že z každého jeho vrcholu vychází nejméně $2m - 1$ hran, lze vrcholy grafu rozdělit do dvou disjunktních množin A a B tak, že z každého vrcholu v A vychází nejméně m hran do vrcholů v B a z každého vrcholu v B vychází nejméně m hran do vrcholů v A. Dokažte.
6. Najděte všechna reálná čísla α s vlastností: Jsou-li x, y, z velikosti stran trojúhelníku, pak
$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq \alpha(xy + yz + zx)$$
Tématické okruhy: kombinatorika, posloupnosti, stereometrie

Kategorie B

1. Je dáno liché přirozené číslo n. Najděte aspoň jednu dvojici přirozených čísel x, y tak, aby největším společným dělitelem čísel x, y bylo číslo n a aby největším společným dělitelem čísel $xy + x$, $xy + y$ bylo číslo $2n$.
2. Reálná nezáporná čísla x, y splňují nerovnosti $x + y \leqq 1$, $x \geqq n/(n + 1)$, kde n je přirozené číslo. Dokažte, že
$$x^n(1 - x) \geqq y(1 - y)^n$$

3. Trojuholník ABC s obsahom 10 je ťažnicou CD a úsečkou AE rozdelený na štyri časti (bod E leží vnútri strany BC, D je stred strany AB). Obsah trojuholníka AFC je 4, F je priesečník CD a AE. Určte obsahy trojuholníkov ADF, CEF a štvoruholníka $BDFE$.
4. Určete největší přirozené číslo N, které se nedá vyjádřit jako součet dvou přirozených čísel, z nichž má každé ciferný součet aspoň 10.
5. Pro reálná čísla $x_1, x_2, \quad , x_n$ $(n \geqq 3)$ platí $x_1 \geqq x_2 \geqq \quad . \geqq x_n$, $x_1 \geqq x_3 + n$, $x_1 + x_2 + \quad + x_n = n^2$. Dokažte, že $x_1 + x_2 \geqq \geqq 3n - 2$. Kdy platí rovnost $x_1 + x_2 = 3n - 2$?
6. V rovine je daná úsečka AB. Nájdite množinu všetkých vrcholov Z pravouhlých trojuholníkov XYZ, ktorých prepona XY je časťou úsečky AB a $|AX| = |XZ|$, $|BY| = |YZ|$.
Tématické okruhy: teorie čísel, nerovnosti, planimetrie

Kategorie C

1. Čtverec 100 x 100 je rozdělen na 10 000 jednotkových čtverců. Do nich jsou libovolným způsobem vepsána čísla 1 až 10 000 (do různých čtverců různá čísla). Dokažte, že pak existují dva sousední čtverce, v nichž stojí čísla lišící se aspoň o 51. Čtverce považujeme za sousední, mají-li společnou stranu.
2. Nechť n je přirozené číslo a $a_n = 88 \quad . 888$ je n-místné přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě n osmičkami. Dokažte, že pro počty $d(n)$, $d(a_n)$ dělitelů čísel n, a_n platí $d(a_n) \geqq 8d(n) - 8$.
3. Na kružnici je napsáno 108 přirozených čísel, přičemž součet libovolných dvaceti vedle sebe stojících čísel se rovná 1990. Dále víme, že na 37. místě stojí číslo 158, na 66. místě číslo 1 a na 83. místě číslo 200. Jaké číslo stojí na 40. místě?
4. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky a. Na straně AC je dán bod L tak, že $|AL| < a/2$. Na stranách AB, BC, CA sestrojíme po řadě body M, N, P tak, aby $LM \parallel BC$, $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Vypočtěte obvod a obsah čtyřúhelníku $LMNP$. Při které volbě bodu L je jeho obsah největší?
5. V rovině jsou dány shodné kružnice $k_1(P, r)$, $k_2(Q, r)$ a délka d, přičemž kružnice k_1, k_2 nemají společný bod. Najděte všechny dvojice bodů X, Y takové, že $|XY| = d$, bod X leží na kružnici k_1, bod Y na kružnici k_2 a přímka XY prochází středem úsečky PQ.
6. Nechť n je přirozené číslo s lichým počtem číslic. Dokažte, že jednu z číslic lze škrtnout tak, aby vzniklé číslo mělo na sudých i na lichých místech stejný počet sedmiček.
Tématické okruhy: dělitelnost, planimetrie

Kategorie P

1. Napište co nejlepší algoritmus, který vytiskne všechny různé rozklady zadaného přirozeného čísla N na součty přirozených čísel. Rozklady

nepovažujeme na různé, jestliže se liší pouze pořadím sčítanců. Zdůvodněte správnost algoritmu.

Např. pro $N = 5$ algoritmus vytiskne tyto rozklady (v libovolném pořadí a s libovolným pořadím sčítanců v jednotlivých rozkladech):

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$5 = 2 + 1 + 1 + 1$$
$$5 = 2 + 2 + 1$$
$$5 = 3 + 1 + 1$$
$$5 = 3 + 2$$
$$5 = 4 + 1$$
$$5 = 5$$

2. V rovině je pevně rozmístěno n bodů označených čísly $1, 2, \ldots, n$. V zadaném poli $D[1 \ldots n, 1 \ldots n]$ jsou uloženy jejich vzájemné vzdálenosti. Hodnota $D[i, j]$ udává vzdálenost bodu i od bodu j. Dále je dáno číslo t. Zapište algoritmus, který zjišťuje, zda lze uvažovaných n bodů rozdělit do dvou skupin tak, aby vzájemné vzdálenosti všech bodů patřících do stejné skupiny byly menší než t. Pokud takové rozdělení bodů je možné, algoritmus vypíše jedno libovolné přípustné rozdělení. Zdůvodněte správnost algoritmu.

3. Je dán následující program:

PASCAL	BASIC
var *A, B, C, D, E, F : integer ;*	
I, N : integer ;	
begin	
read(N) ;	10 INPUT N
A : = − 1;	20 LET A = − 1
B : = 0;	30 LET B = 0
D : = 0;	40 LET D = 0
E : = 0;	50 LET E = 0
for *I* : = 1 **to** *N* **do**	60 FOR I = 1 TO N
begin	
A : = *A* + 2;	70 LET A = A + 2
B : = *B* + A;	80 LET B = B + A
C : = *B* * *I*;	90 LET C = B * I
D : = *D* + *C*;	100 LET D = D + C
E : = *E* + *I*;	110 LET E = E + I
F : = *E* * *E*;	120 LET F = E * E
end;	130 NEXT I
writeln(D);	140 PRINT D
writeln(F);	150 PRINT F
end.	

Vstupem programu je jedno celé číslo (hodnota proměnné *N*).

a) Odvoďte a dokažte vztah mezi hodnotami proměnných D a F po ukončení výpočtu.
b) Napište program, který bude počítat výsledné hodnoty proměnných D a F v závislosti na vstupní hodnotě proměnné N co nejrychleji. Rychlost výpočtu oběma způsoby (tj. zde uvedeným způsobem a vaším vlastním programem) porovnejte z hlediska počtu provedených aritmetických operací.

Pozn.: Proměnné A, B, C, E a I jsou pomocné, na jejich hodnotách po ukončení výpočtu nezáleží.

4. ZÁSOBNÍ POČÍTAČ

Nejprve se seznámíme se zásobníkovým počítačem a s jeho programovacím jazykem. Zásobníkový počítač pracuje výhradně s celými čísly. Oproti běžným počítačům má značná omezení v možnostech práce s paměťovými buňkami. Má sice paměť dostatečné velikosti, ale celá jeho paměť je organizována zásobníkovým způsobem. Zásobník má neomezenou hloubku, ukládají se do něj celá čísla. Čísla se v zásobníku uchovávají v tom pořadí, v jakém do něj byla vložena. To číslo, které bylo do zásobníku vloženo jako poslední, je vždy na vrcholu zásobníku. Pouze číslo nacházející se na vrcholu zásobníku je v danou chvíli dostupné pro čtení nebo smazání. Po smazání čísla z vrcholu zásobníku se novým vrcholem zásobníku stává číslo uložené pod ním. Na začátku práce je zásobník prázdný. Kromě zásobníkové paměti má počítač k dispozici ještě jeden pracovní registr, do něhož je možno uložit jedno celé číslo. V registru lze provádět základní celočíselné aritmetické operace, prostřednictvím registru může počítač číst čísla ze vstupu a zapisovat čísla na výstup.

JEDNODUCHÉ PŘÍKAZY

Základním operacím zásobníkového počítače odpovídají jednoduché příkazy jeho programovacího jazyka:

IN — ze vstupu je přečteno jedno celé číslo a je uloženo do pracovního registru (pokud při provedení příkazu IN již na vstupu žádné číslo není, dojde k běhové chybě)

OUT — číslo z pracovního registru je zapsáno na výstup, obsah registru zůstane nezměněn

CONST n — do pracovního registru se uloží číslo n, které je v instrukci CONST uvedeno jako přímý operand (jedná se o jediný příkaz s přímým operandem)

PUSH — číslo z pracovního registru je uloženo na zásobník (stane se novým vrcholem zásobníku), obsah registru zůstane nezměněn

POP — odstraní se jedno číslo ze zásobníku (číslo z vrcholu zásobníku); je-li při provedení příkazu POP zásobník prázdný, dojde k běhové chybě

TOP — číslo, které je na vrcholu zásobníku, je vloženo do pracovního registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn (je-li při provedení příkazu TOP zásobník prázdný, dojde k běhové chybě)

EXCH — provede se vzájemná výměna čísel uložených v pracovním registru a na vrcholu zásobníku (je-li při provedení příkazu EXCH zásobník prázdný, dojde k běhové chybě)

ADD — aritmetická operace sčítání: k číslu uloženému v pracovním registru se přičte číslo z vrcholu zásobníku, výsledný součet se uloží do registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn

SUB — aritmetická operace odčítání: od čísla uloženého v pracovním registru se odečte číslo z vrcholu zásobníku, výsledný rozdíl se uloží do registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn

MUL — aritmetická operace násobení: číslo uložené v pracovním registru se vynásobí číslem z vrcholu zásobníku, výsledný součin se uloží do registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn

DIV — aritmetická operace celočíselné dělení: číslo uložené v pracovním registru se celočíselně vydělí číslem z vrcholu zásobníku, výsledný celočíselný podíl (tj. celá část z podílu obou čísel) se uloží do registru, obsah zásobníku zůstane nezměněn

PODMÍNKY

Zásobníkový počítač dále může provádět testy, kterým odpovídají jednoduché podmínky jeho programovacího jazyka a jejich negace. Tyto podmínky lze použít pouze na místě podmínky v některém složeném příkazu. Existují následující jednoduché podmínky:

ZERO — číslo uložené v pracovním registru je rovno nule
POS — číslo uložené v pracovním registru je kladné
NEG — číslo uložené v pracovním registru je záporné
EMPTY — zásobník je prázdný
EOF — na vstupu již není žádné číslo

Negaci jednoduché podmínky zapisujem klíčovým slovem **not** před jménem jednoduché podmínky. Tedy např. **not** ZERO znamená, že číslo v registru je nenulové.

SLOŽENÉ PŘÍKAZY

Program v programovacím jazyce zásobníkového počítače je tvořen posloupností příkazů oddělených mezerami. Každý příkaz je buď jednoduchý (jedenáct výše uvedených základních operací) nebo složený. Složené příkazy se vytvářejí pomocí těchto řídících konstrukcí:

```
if ⟨podmínka⟩ then ⟨příkaz⟩          neúplný podmíněný příkaz
if ⟨podmínka⟩ then ⟨příkaz 1⟩
                   else ⟨příkaz 2⟩   úplný podmíněný příkaz
while ⟨podmínka⟩ do ⟨příkaz⟩         while cyklus
begin
  ⟨příkaz 1⟩
  ⟨příkaz 2⟩
  . . .
end                                  příkaz složený z posloupnosti
                                       příkazů
```

Význam podmíněného příkazu, cyklu i příkazu složeného z posloupnosti příkazů je obdobný jako význam stejnojmenných příkazů v Pascalu. Na místě příkazu může být uveden jednoduchý příkaz nebo opět některý složený příkaz.

Poznámka: Řešitelé, kteří neznají řídící konstrukce programovacího jazyka Pascal a nemají možnost se s nimi seznámit, mohou místo uvedených složených příkazů použít číslování řádků programu a příkazů

GOTO ⟨ číslo řádku ⟩

a IF ⟨ podmínka ⟩ THEN ⟨ příkaz ⟩

kde na místě příkazu může stát jednoduchý příkaz nebo příkaz GOTO ⟨ číslo řádku ⟩ (obdobně jako v jazyce Basic).

PŘÍKLAD

Způsob programování zásobníkového počítače ukážeme na následujícím příkladu. Naším úkolem bude napsat program, který ze vstupu přečte posloupnost čísel a určí, zda tato posloupnost obsahuje sudý počet kladných čísel menších než 10. Pokud ano, program vytiskne číslo 1, jinak vytiskne 0. Uvedeme zde program, který není nejrychlejším možným programem řešícím zadanou úlohu, ale který dobře ukazuje, jak se zásobníkový počítač programuje. Do závorek budeme zapisovat komentáře vysvětlující způsob práce programu.

```
while not EOF do
  begin
  IN                                 (načtení dalšího čísla)
  if POS then
    begin                            (číslo je kladné)
    PUSH                             (číslo se uloží na zásobník)
    CONST 10
    SUB                              (rozdíl „10 — číslo ze vstupu“)
    if not POS then POP              (není-li číslo < 10, smaže se)
    end
  end
```

(nyní jsou ze vstupu přečtena všechna čísla a na zásobníku jsou uložena ta z nich, která jsou kladná a zároveň menší než 10)

```
CONST 1
while not EMPTY do                (čísla jsou vždy po dvou vybírána
                                   ze zásobníku)
  begin
  POP
  if EMPTY then CONST 0           (lichý počet čísel na zásobníku)
            else POP
  end
```

(zásobník je vyprázdněn, v pracovním registru je připravena správná výsledná hodnota)

```
OUT                               tisk výsledku
```

Soutěžní úloha:

A. Je zadána posloupnost navzájem různých celých čísel tvořená alespoň třemi čísly. Rozhodněte, zda je možno pomocí zásobníkového počítače nalézt a vytisknout

a) největší ze zadaných čísel
b) dvě největší ze zadaných čísel
c) tři největší ze zadaných čísel.

Pro každou z úloh a), b), c): Je-li to možno, napište program v programovacím jazyce zásobníkového počítače, který tuto úlohu řeší a který pracuje co možno nejrychleji. Domníváte-li se, že to není možno, své stanovisko vysvětlete a zdůvodněte.

B. Je zadána posloupnost obsahující $2n + 1$ celých čísel pro nějaké n celé, nezáporné. Jediným nulovým prvkem této posloupnosti je číslo s pořadím $n + 1$ (tzn. prostřední prvek posloupnosti). Zjistěte pomocí zásobníkového počítače, zda je zadaná posloupnost symetrická, tzn. stejná při čtení zepředu i odzadu. Například posloupnost 2 8 -1 0 -1 8 2 je symetrická, zatímco posloupnost 3 0 5 symetrická není. Odpověď vytiskněte ve tvaru: 1 — je symetrická
0 — není symetrická.

Kategorie Z8 (pro žáky 8. ročníků základních škol)

1. Najděte nejmenší přirozená čísla, kterými musíte postupně násobit čísla

   3, 33, 333, 3 333, 333 333 333 333,

   abyste dostali součin zapsaný samými jedničkami.
2. Na zahradě jsou 4 stromy. Ze šesti vzdáleností určených dvojicemi těchto stromů jsou dvě rovny 10 m, ostatní čtyři jsou rovny v. Nakreslete plánky všech možných rozmístění a vypočtěte příslušné vzdálenosti v.

3. Pro která n ($n = 12, 19, 198, 1989$) je možno sestrojit n-úhelník, jehož každé dvě sousední strany jsou k sobě kolmé? Odpověď pro každé n odůvodněte. (Hranicí hledaného n- úhelníku má být uzavřená neprotínající se lomená čára v rovině.)
4. Řešte soustavu rovnic pro neznámé a, b, c, d, e, f, g:

$$\begin{aligned} 2 + a + b &= (1 + a)(b + 1) \\ 3 + b + c &= (1 + b)(c + 1) \\ 4 + c + d &= (1 + c)(d + 1) \\ 5 + d + e &= (1 + d)(e + 1) \\ 9 + e + f &= (1 + e)(f + 1) \\ 10 + f + g &= (1 + f)(g + 1) \\ 13 + g + a &= (1 + g)(a + 1) \end{aligned}$$

5. Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A, s úhlem $\beta = 45°$ při vrcholu B a shodnými stranami AD, DC. Do trojúhelníků ABC a ACD jsou vepsány kružnice. Vypočítejte obsahy kruhů určených těmito kružnicemi.
6. Najděte všechna kladná celá čísla a, b, pro něž platí

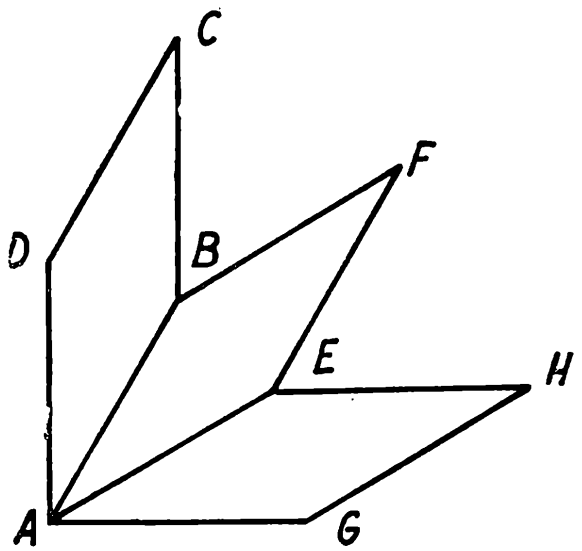
$$ab + a + b = 1989$$

Kategorie Z7 (pro žáky 7. ročníků základních škol)

1. Nahraďte hvězdičky takovými čísly, aby se součty libovolných tří po sobě jdoucích čísel postupně zvětšovaly o 8.

*, *, 835, *, *, *, 829, *, *, *, *, *, *, 843.

2. Najděte všechna čísla menší než 344, která mají právě čtyři dělitele.
3. Určete velikost úhlu, který svírají přímky DC a GH (obr. 1), jestliže



Obr. 1

úhel DAG je pravý a čtyřúhelníky $ABCD$, $AEFB$, $AGHE$ jsou shodné kosočtverce (avšak ne čtverce).
4. V šesticiferném čísle 523 *** jsou zatajeny poslední tři číslice. Zjistěte

tyto číslice, jestliže víte, že dané číslo je dělitelné čísly 7, 8 i 9. Najděte všechna řešení.

5. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ ($AB||CD$) s vnitřním úhlem $\alpha = 60°$. Úhlopříčka AC je osou úhlu α. Obsah lichoběžníku je roven 78 cm². Vypočítejte obsah trojúhelníku ACD.

6. Čísla v řádcích tabulky udávají délky úseček a, b, c vyjádřené v milimetrech.

a	b	c
60	17	9
61	19	14
62	21	19
63	23	24

Zjistěte, ve kterých řádcích tabulky udávají čísla délky stran některého trojúhelníku. Najděte všechny možnosti.

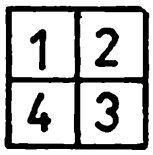
Kategorie Z6 (pro žáky 6. ročníků základních škol)

1. Na krejčovském metru jsou zapsána celá čísla od 1 do 150. Najděte takovou nejkratší část krejčovského metru, aby součin čísel zapsaných na této části končil právě třemi nulami. Najděte aspoň dvě řešení. (Součin čísel na části krejčovského metru, která je znázorněna na obrázku 2, končí právě jednou nulou.)

Obr. 2

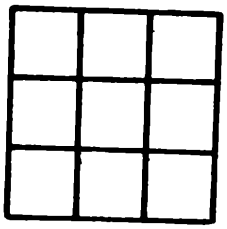
2. Do tabulky na obr. 3 jsme vepsali čísla 1, 2, 3, 4 tak, že součet čísel ze sousedních políček je prvočíslo, tedy

$$1 + 2 = 3\,, \quad 1 + 4 = 5\,, \quad 2 + 3 = 5\,, \quad 4 + 3 = 7$$

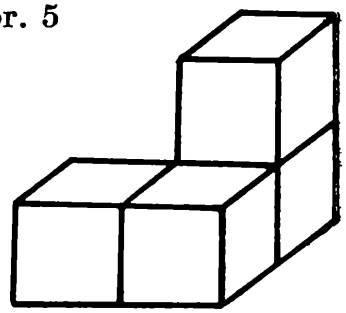


Obr. 3

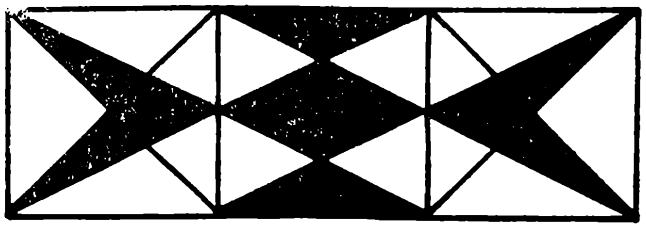
Obr. 4



Obr. 5



Petr se pokoušel vepsat čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 do tabulky na obr. 4 tak, aby součet čísel z každých dvou sousedních políček byl opět prvočíslem. Ukažte, že to nejde.



Obr. 6

3. Sestrojte z jediného kusu papíru síť tělesa na obrázku 5, které je složeno ze čtyř shodných krychlí.
4. Janko říká: My máme zajímavé telefonní číslo: 113 113. Míša mu odpověděl: Také naše telefonní číslo dostaneme, když napíšeme dvě stejná trojciferná čísla za sebou . . . Janko ho přerušil: Nemusíš mi ani říkat, jaké máte číslo a přesto vím, že naše telefonní čísla mají společného dělitele, který je větší než 1000. Najděte tohoto dělitele a vysvětlete, proč má Janko pravdu.
5. Za písmena S dosaďte sudé číslice (nemusí být všude stejné), za písmena L liché číslice (nemusí být stejné) tak, aby vznikl pravdivý zápis násobení. Najděte aspoň jedno řešení.

$$\begin{array}{cccc} & & S & L \\ & . & L & S \\ \hline & L & L & S \\ S & L & L & \\ \hline S & S & S & S \end{array}$$

6. Chodba je pokryta tmavými a světlými dlaždicemi obr. 6. Je třikrát tak dlouhá jako široká. Kterými dlaždicemi pokryli větší plochu? Kolikrát větší?

Pátá Letní škola mladých vědců

V r. 1988 se uskutečnil 10. ročník středoškolské odborné činnosti. Získané zkušenosti z uplynulých let se staly podkladem pro vypracování nové koncepce středoškolské odborné činnosti, která vstupuje v platnost ve školním roce 1988—89.

Důležitou formou rozvoje tvořivých schopností a dovedností žáků — úspěšných účastníků středoškolské odborné činnosti — by měly nadále být Letní školy mladých vědců, které jsou organizovány *Centrem pro mládež, vědu a techniku ÚV SSM* ve spolupráci s *Komisí mladých odborníků ČSAV*. Svým pojetím výrazně zapadají do realizace Programu rozvíjení účasti dětí a mládeže ve vědecko-technickém rozvoji schváleném předsednictvem vlády ČSSR dne 6. 12. 1984 — č. 233.

Letní školy by měly být nadstavbou nad vlastní účastí žáků ve středoškolské odborné činnosti. Měly by poskytnout jejím účastníkům hlubší

Obr. 1. Účastníci 5. LŠMV v Harrachově při přednášce

seznámení s vědeckými poznatky, s teoretickými základy jednotlivých oborů, které si žáci vybrali pro své další studium a své budoucí povolání. Letní školy jsou chápány jako aktivní odměna pro žáky; jako lektoři na nich působí pracovníci ČSAV, dále i odborníci z dalších pracovišť.

Odbornou realizací 5. Letní školy mladých vědců oboru fyzika, která se uskutečnila ve dnech 24. 7.—30. 7. 88 v Harrachově, byla opět pověřena Komise mladých odborníků Fyzikálního ústavu ČSAV. Funkcí garanta letní školy byl pověřen *RNDr. Z. Kluiber, CSc.*

Program letní školy vycházel z těchto požadavků:

1. seznámit její účastníky především s poznatky z těch oblastí fyziky, ve kterých žáci získali nejlepší umístění v celostátních přehlídkách středoškolské odborné činnosti v oboru fyzika v posledních ročnících;
2. poukázat na moderní oblasti fyziky, na perspektivy fyzikálního výzkumu, konkretizovat žákům pojetí práce fyzika;
3. podchytit schopnosti žáků pro zpracování samostatných prací ve fyzice jednak v příštím ročníku středoškolské odborné činnosti, jednak je připravit i pro účast ve studentské vědecké, umělecké a odborné činnosti při studiu na vysoké škole;
4. umožnit pracovníkům FzÚ ČSAV získat přehled i o některých možnostech dalšího zkvalitnění výuky fyziky na gymnáziu, ověřit dílčí texty předpokládaného učiva moderní fyziky.

Po dohodě s ÚV FO se letní školy zúčastnili i někteří vítězové XIX. ročníku fyzikální olympiády. Tato spolupráce odpovídá uplatňování záměrů Programu rozvíjení účasti dětí a mládeže ve vědecko-technickém rozvoji.

Odborný program letní školy obsahoval tyto přednášky a besedy: základy metody Monte Carlo, fyzikální obraz světa, optika tenkých vrstev, experimenty řízené počítačem, pásová teorie pevných látek, historie a současnost fyziky pevných látek, příprava monokrystalů,

iontová implantace, rozbor prací účastníků letní školy, informace o 1. *mezinárodním turnaji mladých fyziků* v Moskvě, lasery, kapalné krystaly, kosmonautika, fyzika a ekologie, astronomie a astrofyzika, laserové technologie, fyzika nízkých teplot, fyzikální paradoxa. Vedle pracovníků Fyzikálního ústavu ČSAV přednášeli: *ing. M. Grünn*, ředitel Planetária v Praze, *RNDr. M. Keprt, CSc.*, odborný asistent PF UJEP v Brně. Na všechny přednášky (2—3 hodinové) bezprostředně navazovaly diskuse.

Důležitou součástí odborného programu byly rozbory dosud zpracovaných prací účastníků letní školy, a to zvláště ve vztahu k zařazeným přednáškám. Diskutovány byly i vztahy mezi účastí žáků na fyzikální olympiádě a ve středoškolské odborné činnosti v oboru fyzika.

Aby bylo možno podrobněji charakterizovat 1. mezinárodní turnaj mladých fyziků v Moskvě, který proběhl v posledním březnovém týdnu 1988, pozvalo Centrum pro mládež, vědu a techniku ÚV SSM na letní školu také dva členy československého družstva: *D. Maxeru*, gymnázium Praha — nyní student MFF UK Praha, *J. Radlera* — gymnázium Zvolen — nyní EF SVŠT Bratislava, kteří společně s *M. Rusnákem*, gymnázium Trebišov, zhodnotili své zkušenosti z turnaje. (Dalšími členy československého družstva byli: *K. Kis Petiková*, gymnázium Komárno, *R. Měch*, gymnázium Bílovec.) Vedoucími československé delegace v Moskvě byli *RNDr. Z. Kluiber, CSc.*, předseda Ústřední hodnotící komise 10. celostátní přehlídky SOČ, *Doc. RNDr. ing. D. Kluvanec, CSc.*, předseda Ústředního výboru FO. K organizačnímu zajištění a úlohám turnaje mladých fyziků lze uvést: tato nová, velmi zajímavá a efektivní forma podchycení a rozvoje zájmu žáků o fyziku vznikla před deseti léty na Moskevské státní univerzitě. Původně šlo o soutěž moskevských škol, v letošním roce byl turnaj organizován jako všesvazový a zároveň na něj byla pozvána i družstva socialistických zemí. Na založení turnaje mladých fyziků a odborném vedení se podílejí přední sovětští vědci, pedagogové, např. vicepresident AV SSSR *akademik E. P. Velichov*, akademik *G. T. Zacepin, prof. S. M. Čudinov, prof. V. B. Braginskij* a další. Významnou podporu vedle Moskevské státní univerzity daly 1. mezinárodnímu turnaji ÚV VLKSM, Státní výbor SSSR pro národní vzdělání a Všesvazová společnost „Vědění".

Na turnaji nakonec spolu soupeřila družstva: z Moskvy — 8, ze svazových republik — 21, ČSSR, BLR, Československé družstvo se probojovalo do finálového turnaje spolu s družstvy Rigy, Moskvy a BLR. Všechna čtyři družstva byla odměněna jako vítězná.

Úkoly pro jednotlivé ročníky jsou publikovány v časopise *Kvant*. Na školách nejprve žáci připravují řešení těchto úloh (v základním kole je třeba samostatně uskutečnit i experimenty). Výsledky své práce zasílají organizačnímu výboru turnaje, který vybere družstva do 2. kola. Ve druhém kole turnaje se setkávají pětičlenná družstva zastupující

školy. Soutěž probíhá vyřazovacím způsobem: vystupují současně tři družstva. První družstvo referuje o řešení vybrané úlohy, druhé družstvo působí ve funkci oponenta, třetí ve funkci recenzenta (resp. družstvo stanoví pro každou úlohu svého zástupce do uvedené funkce). Postupně se všechna družstva v uvedených funkcích vystřídají. Komise hodnotí vystoupení zástupců družstev klasifikačními stupni 3—5 s přepočtem na body.

Úlohy řešené v turnaji jsou netradiční, problémové, vyžadující zvolit optimální model odpovídající studované problematice.

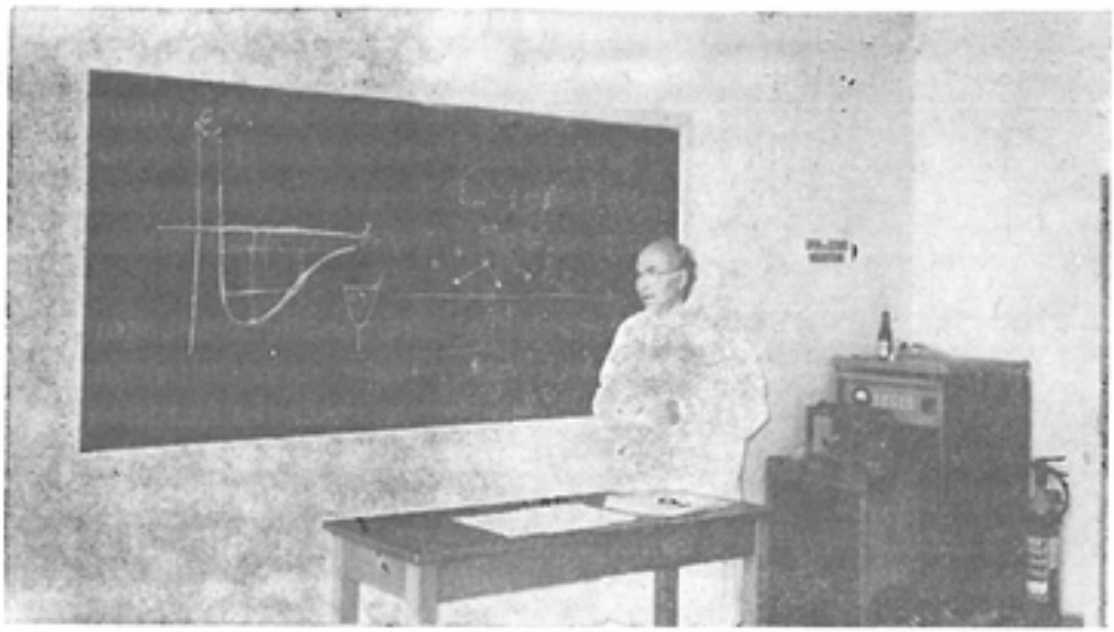
Jako nejpodstatnější se jeví vlastní odborná diskuse nad řešeným problémem, věcná argumentace. Kromě toho je významné, že všichni žáci vystupovali se svým řešením úloh v ruském jazyce.

Turnaj mladých fyziků může získat svoji popularitu i v ČSSR. Pro tuto činnost je vhodná právě práce odborných fyzikálních kroužků na školách. Jsou vytvářeny předpoklady pro možnost spolupráce ČSAV, vysokých škol a ÚV SSM v rozvoji této přitažlivé a progresivní formy rozvoje schopností a talentu žáků ve fyzice. Úkoly pro 11. ročník turnaje mladých fyziků jsou zařazeny v podzimním čísle časopisu Kvant, 1988.

Významnou součástí programu letní školy byla i exkurze do závodu NISA — Jablonec nad Nisou, kde žáci měli možnost seznámit se s konstrukcí a použitím paměti s pružným diskem $5^1/_4''$ — Consul 7121.

V r. 1987 navázaly spolupráci *Jeunesses Scientifiques de Belgique* (společnost zabývající se rozvojem odborné práce žáků základní a střední školy ve volném čase v Belgii zejména v oborech fyzika, chemie, biologie, matematika, ochrana a tvorba životního prostředí, výpočetní technika a elektronika) a Centrum pro mládež, vědu a techniku ÚV SSM. V červnu 88 došlo k návštěvě belgické skupiny mládeže v ČSSR — byl předpoklad, že se zúčastní právě 5. Letní školy mladých vědců oborů fyzika, ochrana a tvorba životního prostředí, výpočetní technika a elektronika, které probíhaly paralelně. Vzhledem k tomu, že skupina přijela o 10 dní dříve, byl pro ni připraven samostatný program. Oblast fyziky zahrnovala: přednášky s problémovými úlohami a ukázkami vzorků z oborů optické vlastnosti polovodičů a kapalné krystaly; seznámení s hlavními úkoly československé fyziky, exkurze na katedru fyzikální elektroniky FJFI ČVUT, exkurzi do Astronomického ústavu ČSAV v Ondřejově.

Pozn.: ve dnech 31. 7.—11. 8. 88 byl realizován studijně poznávací pobyt československé mládeže v Belgii na *Svobodné univerzitě v Bruselu* a na *Univerzitě v Liège*. Odborný program byl zaměřen na fyziku, chemii a ochranu a tvorbu životního prostředí, přehled belgického školství, základní poznatky mechaniky a kosmologie, návštěva belgického rozhlasu a televize, prohlídka chemické továrny Solvay, návštěva Atomia, problematika fyzikální chemie tekutin, lasery, holografie, prohlídka přístavu Zeebruges, větrné elektrárny, prohlídka přírodní rezervace Zwin, návštěva ekologické stanice Hautes Fagnes du Mont Rigi, návštěva



Obr. 2. Přednáška dr. G. Petreho na fakultě aplikovaných věd Svobodné univerzity v Bruselu

vesmírných laboratoří fyzikální fakulty Univerzity v Liège, prohlídka a práce v laboratořích fyzikální fakulty Univerzity v Liège, prohlídka Domu vědy v Liège.

Předpokládá se, že spolupráce mezi belgickou společností Jeunesses Scientifiques de Belgique a Centrem pro mládež, vědu a techniku ÚV SSM bude pokračovat. V příštím roce budou výměnné studijně poznávací pobyty zaměřeny společně na fyziku, ochranu a tvorbu životního prostředí, výpočetní techniku a elektroniku, tzn. šestých letních škol těchto tří oborů by se měli účastnit i belgičtí žáci, zároveň i vítězové sovětského družstva z turnaje mladých fyziků v r. 1989, a opět československá skupina by měla v průběhu srpna 89 navštívit Belgii (studijní pobyt by měl proběhnout za účasti i středoškoláků z Maroka).

5. Letní škola splnila svůj záměr: její účastníci získali další nové poznatky pro svoji budoucí odbornou práci. Svým organizačním uspořádáním, obsahem a pojetím dává předpoklady pro kvalitní přípravu a rozvoj talentů ve fyzice.

Zdeněk Kluiber

Škola mladých fyziků

Dr. IVO VOLF, ÚVFO Hradec Králové

Uplynulo již více než dvacet let, co byla ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze vydána první knížka s červenou iniciálou FO na obálce — první publikace Školy mladých fyziků. Tyto brožurky jsou vydávány jako pomocný materiál pro řešitele fyzikální olympiády, ale rád se do nich podívá každý mladý čtenář, který se chce poučit o některém oboru fyziky, zpracovaném jinak, než tomu bývá v učebnici fyziky. Mnoho vyřešených úloh i úlohy dané čtenářům k řešení, doprovázené výsledky — to je další charakteristický rys knížek ŠMF. Ty starší byste měli nalézt ve školních nebo veřejných knihovnách. V prodejnách najdete jen několik posledních. V této poznámce vám chceme připomenout názvy všech vydaných brožurek — třeba mezi nimi najdete tu, která vás zaujme nebo vám pomůže při řešení fyzikálních problémů.

1. HOFMAN, K.: Kirchhoffovy zákony. Praha, SPN 1968. 74 s.
2. HOFMAN, K.: Vektorové znázornění střídavých proudů. Symbolická metoda. Praha, SPN 1968. 57 s.
3. UNGERMANN, Z.: Mechanika v úlohách I. Praha, SPN 1971. 83 s.
4. UNGERMANN, Z.: Mechanika v úlohách II. Praha, SPN 1971. 127 s.
5. ČERNICKÝ, F.: Úlohy z elektřiny. Praha, SPN 1971. 123 s.
6. KOŠŤÁL, R.: Hodnoty a chyby veličin měřených a vypočtených. Praha, SPN 1972. 66 s.
7. VOLF, I.: Pohyb umělých družic. Praha, SPN 1974. 97 s.
8. GOLAB, F.—KAMENČÁK, F.: Termoelektrické jevy a jejich užití. Praha, SPN 1975. 83 s.
9. VITAMVÁS, Z.: Teorémy při řešení elektrických obvodů. Praha, SPN 1975. 62 s.
10. VAŠEK, L.—SUCHÁNEK, V.: Fyzikální olympiáda na ZDŠ I. Praha, SPN 1976. 166 s.
11. VAŠEK, L.—SUCHÁNEK, V.: Fyzikální olympiáda na ZDŠ II. Praha, SPN 1977. 152 s.
12. LEPIL, O.: Elektrické kmity a střídavý proud. Praha, SPN 1978. 159 s.
13. BARTUŠKA, K.—SVOBODA, E.: Molekulová fyzika a termika. Praha, SPN 1978. 279 s.
14. KOŠŤÁL, R.: Optické soustavy. Praha, SPN 1979. 135 s.
15. BARTUŠKA, K.: Deset kapitol ze speciální teorie relativity. Praha, SPN 1980. 237 s.

16. UNGERMANN, Z.—VOLF, I.: Hmotný střed tělesa, Praha, SPN 1983. 157 s.
17. UNGERMANN, Z.—VOLF I.: Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli. Praha, SPN 1985. 205 s.
18. CHYTILOVÁ, M.: Znáte Archimédův zákon? Praha, SPN 1986. 46 s.
19. BANÍK, I.—BANÍK, R.: Polovodiče v obrazových úlohách. 1. díl. Praha, SPN 1986. 223 s.
20. BANÍK, I.—BANÍK, R.: Polovodiče v obrazových úlohách. 2.díl. Praha, SPN 1987. 166 s.
21. CHYTILOVÁ, M.: Mechanika — studijní texty. Praha, SPN 1988. 159 s.

Kalendár M-F: máj 1989

2. 5. 1519 v Châteaux Cloux pri Amboise zomrel *Leonardo da Vinci*, taliansky učenec. Pochopil vedu i umenie ako prostriedok poznania sveta. Zasiahol do mnohých vedných odvetví, bol autorom smelých hypotéz. Spoznal, že „ani jedno ľudské bádanie nemožno nazvať pravou vedou, ak neprejde matematickými dôkazmi."
4. 5. 1859 zomrel *Joseph Diaz Gergonne*, francúzsky matematik. Odhalil význam duality v geometrii, pracoval v oblasti analytickej a projektívnej geometrie, zaviedol pojem poláry.
4. 5. 1879 sa v Odese narodil *Leonid Isaakovič Mandeľštam*, sovietsky fyzik. Zaoberal sa optikou, rádiofyzikou, kvantovou mechanikou. Objavil kombinovaný rozptyl svetla.
4. 5. 1919 zahynul pri leteckej katastrófe vo Vajnoroch *Milan Rastislav Štefánik*, slovenský astronóm a diplomat. Zaoberal sa výskumom Slnka, publikoval 12 odborných prác, navrhol zlepšenie niektorých astronomických prístrojov.
5. 5. 1859 v Göttingene zomrel *Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, nemecký matematik. Rozvinul teóriu analytických funkcií, variačný počet, teóriu čísel. Dokázal konvergenciu Fourierových radov.
6. 5. 1969 v Jindřichovom Hradci zomrel *Bohumil Bydžovský*, český matematik. Zaoberal sa algebraickou geometriou, aplikáciou eliptických funkcií.
7. 5. 1819 sa narodil *Otto Wilhelm Struve*, ruský astronóm. Skúmal dvojhviezdy, určil precesnú konštantu.
8. 5. 1794 bol v Paríži popravený *Antoine Laurent Lavoisier*, francúzsky chemik a fyzik. Položil základy termochémie, kalorimetrie, chemickej terminológie a presne formuloval zákon o zachovaní hmotnosti.

10. 5. 1829 v Londýne zomrel *Thomas Young*, anglický prírodovedec. Objavom interferencie svetla podal dôkaz jeho vlnového charakteru, položil základy teórie pružnosti, bol výborným znalcom orientálnych jazykov.

10. 5. 1859 sa v Liptovskom Mikuláši narodil *Aurel Stodola*, slovenský vedec, technik. Ovplyvnil technický pokrok v oblasti automatickej regulácie strojov, projekcie a stavby parných turbín.

10. 5. 1899 sa v Ostrohu na Morave narodil *Otakar Borůvka*, český matematik. Študoval abstraktnú algebru, diferenciálnu geometriu, matematickú analýzu. V roku 1960 získal Eulerovu medailu AV ZSSR.

11. 5. 1929 vo Wilkes Barre (USA) zomrel *Jozef Murgaš*, slovenský vynálezca. Prispel k rozvoju bezdrôtovej telegrafie.

11. 5. 1934 zomrel *Orest Danilovič Chvolson*, sovietsky fyzik. Pracoval v oblasti elektrofyziky, optiky, meteorológie.

12. 5. 1684 zomrel *Edme Mariotte*, francúzsky fyzik. Experimentoval v termodynamike, mechanike plynov a kvapalín, optike. Zostrojil manometer, objavil slepú škvrnu na sietnici oka.

15. 5. 1859 v Paríži zomrel *Pierre Curie*, francúzsky fyzik a chemik. Zaoberal sa kryštalografiou, vplyvom tepla na magnetické vlastnosti látok, rádioaktivitou.

18. 5. 1914 sa v Novom Meste nad Váhom narodil *Štefan Schwarz*, slovenský matematik. Člen SAV od roku 1953, ČSAV od 1960. Zaoberal sa algebrou a teóriou čísel, prispel k rozvoju teórie pologrúp.

21. 5. 1894 zomrel *August Adolf Kundt*, nemecký fyzik. Vypracoval novú metódu merania rýchlosti zvuku, objavil anomálnu disperziu.

24. 5. 1544 sa narodil *William Gilbert*, anglický fyzik a lekár. Zaoberal sa vlastnosťami elektriny a magnetizmu. Rozdelil látky na elektrické a neelektrické, dokázal, že Zem má magnetické pole.

29. 5. 1829 v Ženeve zomrel *Humphrey Davy*, anglický chemik a fyzik. Zaoberal sa otázkami elektrickej vodivosti, stal sa zakladateľom elektrochémie.

30. 5. 1964 zomrel *Leo Szilárd*, americký fyzik maďarského pôvodu. Zaoberal sa jadrovou fyzikou, termodynamikou, teóriou urýchlovačov, molekulárnou biológiou. Objavil zmenu chemickej väzby rádioaktívnych atómov.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Novikov, I. D.:
VÝVOJ VESMÍRU

Vydala Pravda, Bratislava 1987, edícia Človek a svet, preklad z ruštiny, 197 strán, brož. Kčs 13,—

K vzrušujúcim zážitkom modernej vedy nesporne patria otázky a odpovede súčasnej kozmológie — vedy, ktorá skúma vesmír ako celok. „Veľkolepý je obraz vývoja okolitého sveta, expanzie vesmíru zo superhustého a veľmi horúceho stavu s búrlivými reakciami medzi elementárnymi časticami do súčasného stavu, keď sa látka rozpadla na gigantické sústavy nebeských telies, keď vznikli hviezdy, planéty a život.“ (Novikov) „Ľudský rozum, sám výtvor evolúcie hmoty, tu zatiaľ najďalej presahuje naše fyzické a historicke dimenzie a do neuveriteľných podrobností rozpoznáva udalosti, ktoré sa odohrali dávno pred vznikom človeka, života i našej slnečnej sústavy Úsilie pochopiť vesmír je jednou z veľmi mála vecí, ktorá pozdvihuje ľudský život trochu nad úroveň frašky a dáva mu niečo z krásy tragédie.“ (S. Weinberg)

Aby sme bližšie a vernejšie poznali osudy stále sa rozpínajúceho vesmíru, treba sa pozrieť aj do knižky sovietského teoretického fyzika Igora Dmitrijeviča Novikova. Jeho „Vývoj vesmíru“ je odborným sprístupnením vedeckých problémov fyzikálnej kozmológie. Autor nám približuje s minimálnym matematickým aparátom fyzikálne procesy prebiehajúce v expandujúcom vesmíre. Osvetlí pre čitateľa niektoré matematicko-fyzikálne modely megasveta. Môžeme lepšie spoznať pojmy veľkoškálová homogenita a izotropia, Hubblova konštanta, kritická hustota, červený posun, gravitačný paradox, zatvorený a otvorený vesmír, horizont viditeľnosti vo vesmíre, reliktové žiarenie, gravitačná nestabilita, teória „blinov“, kozmologická singularita, topológia vesmíru a veľa ďalších.

Knižka je rozdelená na päť kapitol: Rozpínajúci sa vesmír, Relativistická kozmológia, Horúci vesmír, Vznik štruktúry vesmíru, Hranice. Každá je prehľadom základných predstáv o naznačenej problematike, objasňuje dosiahnutý stav poznania, načrtáva nové možné smery výskumu. Knižka vyžaduje však pozorné čítanie, premyslenie niektorých úsudkov a záverov, snahu vytvoriť si dynamický obraz vývoja vesmíru v celku a aj z toho vyplývajúce filozofické závery. Publikácia patrí do rúk každému mladému čitateľovi, ktorý chce vážne poznať závažné aspekty a problémy súčasnej kozmológie. Tým, ktorí chcú začať, doporučujem prezrieť si publikácie:

Grygar, J.: *Sejdeme se v nekonečnu.* Praha, Albatros 1979.

Weinberg, S.: *První tři minuty.* Praha. Mladá fronta 1983.

Šolc, M. a kol.: *Fyzika hvězd a vesmíru.* Praha, SPN 1983.

Možno aj na stránkach Rozhledov by sme sa mohli viac zaoberať niektorými zaujímavosťami z kozmológie, pretože ich svetonázorový význam nie je zanedbateľný. Skúste pátrať v priestoroch vesmírnych.

Dušan Jedinák

Tůma, J.:

MATEMATICKÉ HLAVOLAMY A ZÁKLADY TEORIE GRUP

Vydal ÚV MO v Mladé frontě, Praha 1988, 248 str., 11 500 výt., 14 Kčs

Publikace vydaná jako 60. svazek knižnice Škola mladých matematiků jistě čtenáře příjemně překvapí. Autor zvolil a metodicky dobře zpracoval poměrně úzkou problematiku vycházející z dosud populární Rubikovy krychle. Ovšem nejde zdaleka jen o původní krychli, ale o řadu dalších rubikovských těles, ale také starších matematických her. Všechny problémy mají jedno společné: Je požadován přesun určitých prvků tak, aby se podařilo vyhovět předem stanoveným podmínkám.

Z problémů, které jsou matematickým kutilům dobře známé, je uvedena „hra 15" (také zvaná taken). Na ní je čtenář veden k důsledné matematizaci situace, rozpoznání neřešitelných pozic i k celkové strategii řešení. Spojovacím mostem mezi prostorovou skutečností a matematickou abstrakcí je teorie grafů. Aby mladý čtenář dobře rozuměl výkladu, autor velmi názorně, ale přesně, zařadil některé poznatky o grupách, operacích a jejich vlastnostech.

Výsledkem matematikovy práce jsou tvrzení. V knize jich je odvozena a dokázána celá řada. Jsou přehledně uvedena a pro praktické řešení úloh je čtenář velmi snadno najde.

Kniha je čtivá. Je to jistě i tím, že podle rukopisu přednášel autor účastníkům MO a po těchto zkušenostech vytvořil konečnou verzi publikace.

Knihu doporučuji všem zájemcům o rekreační matematiku.

František Jáchim

REDAKČNÍ KRUH

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava, dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., ÚK Prah; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řcbíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Murphyho zákon a jeho důsledky

Na naší stránce Humorů jsme již informovali o úspěších ve výzkumu zákonitostí pádu namazaného krajíce na koberec a zmínili se o tom, že se zde uplatňuje obecný fyzikální takzvaný Murphyho zákon. Tento zákon bývá nejčastěji formulován v podobě „Může-li něco špatně dopadnout, pak to špatně dopadne", ale má i řadu dalších tvarů a důsledků. O'Tool jej komentoval slovy „Murphy byl optimista"

Všechny důsledky a praktické aplikace Murphyho zákona nebyly ještě ani zdaleka objeveny a experimentálně prozkoumány. Některé z nich známe z běžné denní praxe, jako například:

„Každý předmět spadne tak, aby způsobil co největší škodu" (zákon selektivní gravitace, který představuje zobecnění zákona namazaného krajíce).

„Jestliže se o něčem zmíníte, pak je-li to dobré, zmizí to, a je-li to špatné, stane se to" (zákon nevyslovitelného).

„Prvních 90 % úkolu potřebuje 90 % času a posledních 10 % úkolu potřebuje dalších 90% času" (pravidlo 90—90).

„Druhá fronta postupuje vždy rychleji"

„Když otevřete plechovku červů, jediný způsob, jak je dostat zpátky, je použít větší plechovku" (tzv. Zymurgyho první zákon vývoje dynamiky systémů).

V matematice platí:

„Každá chyba, která se může vloudit, se vloudí, a to tak, aby výsledná chyba byla co největší."

„Všechny konstanty jsou vlastně proměnné."

V experimentální fyzice:

„Všechny předem nastříhané kousky drátů jsou příliš krátké."

„Vyžaduje-li experiment n součástek, máme jich k dispozici $n - 1$."

„Přišroubujeme-li těžké mosazné víko šestnácti silnými šrouby, zjistíme, že jsme tam zapomněli dát těsnění."

„Nejchoulostivější součástka se pozná podle toho, že první spadne na zem."

-ll-

47 233

Řekli, napsali...

Nejkrásnější pocity vyplývají ze záhad. Jsou to pocity, které stojí u kolébky skutečného umění a skutečné vědy.

Albert Einstein (1879—1955)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.
Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 67, 1988/89
ČERVEN
CENA 2 Kčs

(10)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:
Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT

ODBORNÝ REDAKTOR:
Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:
Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; †doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Vlastimil Mráz: Diagramy pro více množin 401

Oldřich Srb: Trojúhelníková čísla 407

Jaroslav Pospíšil: Povrchové mechanické vlny 409

Ivo Kraus: Dějiny vědecké krystalografie začaly v Praze . 414

Jaroslav Sedláček: Dodatek k řešení Pellovy rovnice 420

Z matematiky a fyziky ZŠ 422

Přemýšlíme, řešíme 429

Úlohy I. kola 31. ročníku FO (kategorie A, B, C) 431

Kalendár M–F 442

Informace 444

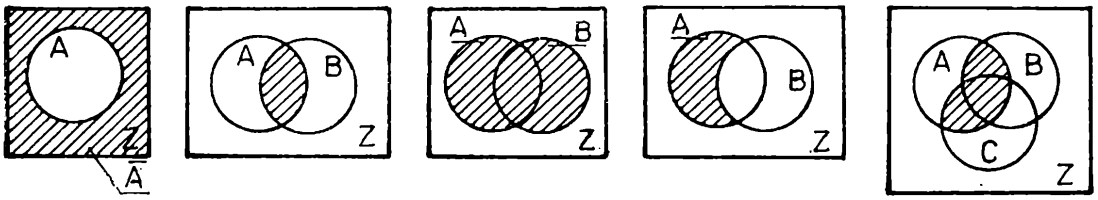
Humory matematicko-fyzikální . 3. str. obálky

MATEMATIKA

Diagramy pro více množin

Doc. dr. Vlastimil MRÁZ, CSc., UK Praha

Za školních učebnic matematiky jsou dobře známy množinové diagramy, také nazývané Vennovy diagramy,[1]) které slouží ke grafickému záznamu údajů o příslušnosti prvků množinám, znázorňují se jimi vztahy mezi množinami a také dobře postihují operace s množinami. Především to je unární operace *tvoření doplňku (komplementu)* množiny A vzhledem k *základní množině* Z; tento doplněk označujeme $\bar{A}$; v obr. 1a) je množina $\bar{A}$ vyšrafována. Další operace jsou binární — operace *průnik (součin)* množin A, B, který zapisujeme $A \cap B$ anebo



Obr. 1a) b) c) d) e)

$A \,.\, B$ nebo jen AB (viz obr. 1b), operace *sjednocení* (*součet*) množin A, B, jenž zapisujeme $A \cup B$ nebo $A + B$; (v obr. 1c) je rovněž vyšrafováno; *rozdíl* množin A, B zapisujeme $A \setminus B$ ($= A \cap \bar{B}$, resp. $A\bar{B}$) a je vyšrafován (v obr. 1d).

Zatím jsme vystačili s jednou nebo dvěma množinami. Avšak k znázornění třeba distributivních zákonů je třeba tří množin, což ukazuje obr. 1e) pro distributivní zákon

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,, \qquad (\mathrm{D}_1)$$

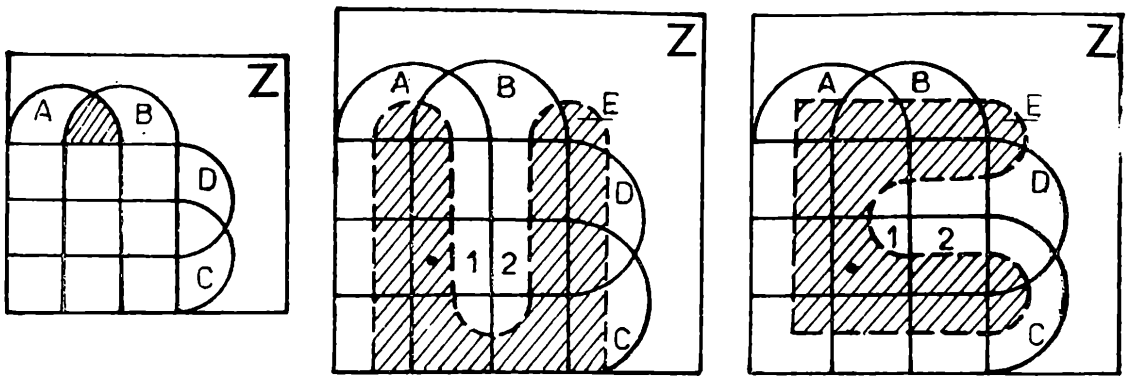
resp.

$$A(B + C) = AB + AC \qquad (\mathrm{D}_1')$$

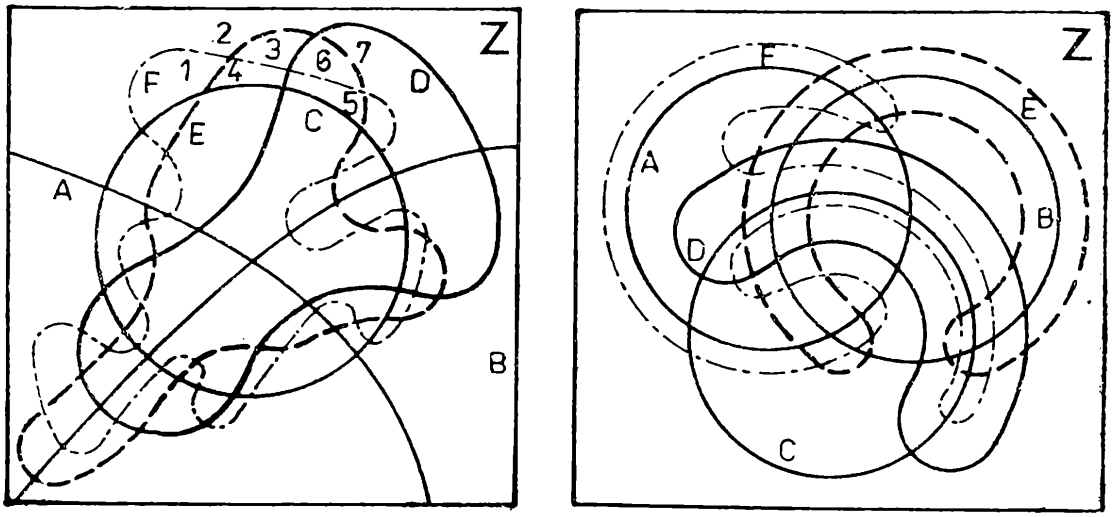
Duální zákon k (D_1') je distributivní zákon (D_2'), který zapíšeme úspornější symbolikou, které se i nadále v článku přidržíme:

$$A + B \,.\, C = (A + B) \,.\, (A + C) \qquad (\mathrm{D}_2')$$

1) *Joseph Venn* (1834 až 1923) byl anglický logik; v roce 1884 byla vydána jeho kniha Symbolic Logic.



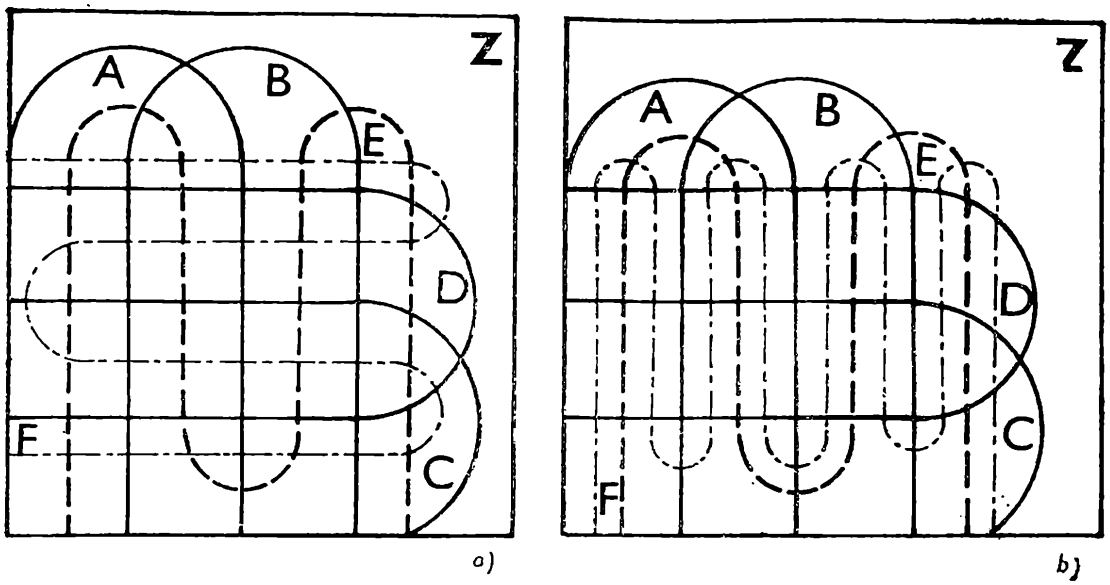
Obr. 2a) b) c)



Obr. 3a) b)

Setkáváme se i s diagramem pro čtyři množiny, který již nedokážeme znázornit kruhy (viz obr. 2a). U diagramů s ještě větším počtem množin, např. s 6, 7, 8 i více množinami nevystačíme ani s konvexními útvary, postihujícími množinově zobrazovanou situaci. Na obr. 2b), 2c) jsou množinové diagramy pro pět množin, které vznikly rozšířením diagramu z obr. 2a) o množinu E, jež je vyšrafována.

Hranice obrazu množiny, kterou v diagramu zpravidla označujeme velkým písmenem, rozděluje část roviny (základní množinu Z) na *vnitřní oblast* a *vnější oblast*. Do vnitřní oblasti umisťujeme prvky množiny, vnější oblast je určena pro prvky komplementární množiny. Množinový diagram jako celek bývá znázorněn obdélníkem, jenž představuje základní (univerzální) množinu Z. Ostatní množiny jsou podmnožinami Z, a zakreslují se proto do vnitřní oblasti Z. Platí, že n uzavřených křivek, jež představují n množin, vytváří 2^n políček (podmnožin) tak, že každé políčko představuje jeden z průniků $\dot{A}\dot{B}\dot{C} \quad .\dot{N}$, přičemž tečka nad označením množiny značí buď to, že nad písmenem není pruh, anebo nad písmenem pruh je (označení komplementární



Obr. 4

množiny). Např. $AB\bar{C}\bar{D}$ je zápis množiny, kterou představuje vyšrafované políčko v obr. 2a). V obr. 2b) a 2c) jsou čísly 1; 2 označena políčka, představující podmnožinu $BCD\bar{E}$. Zapíšeme-li obě políčka jako sjednocení obou očíslovaných podmnožin, dostaneme:

$$ABCD\bar{E} + \bar{A}BCD\bar{E} = BCD\bar{E}(A + \bar{A}) = BCD\bar{E} \,.\, Z = BCDE \,.$$

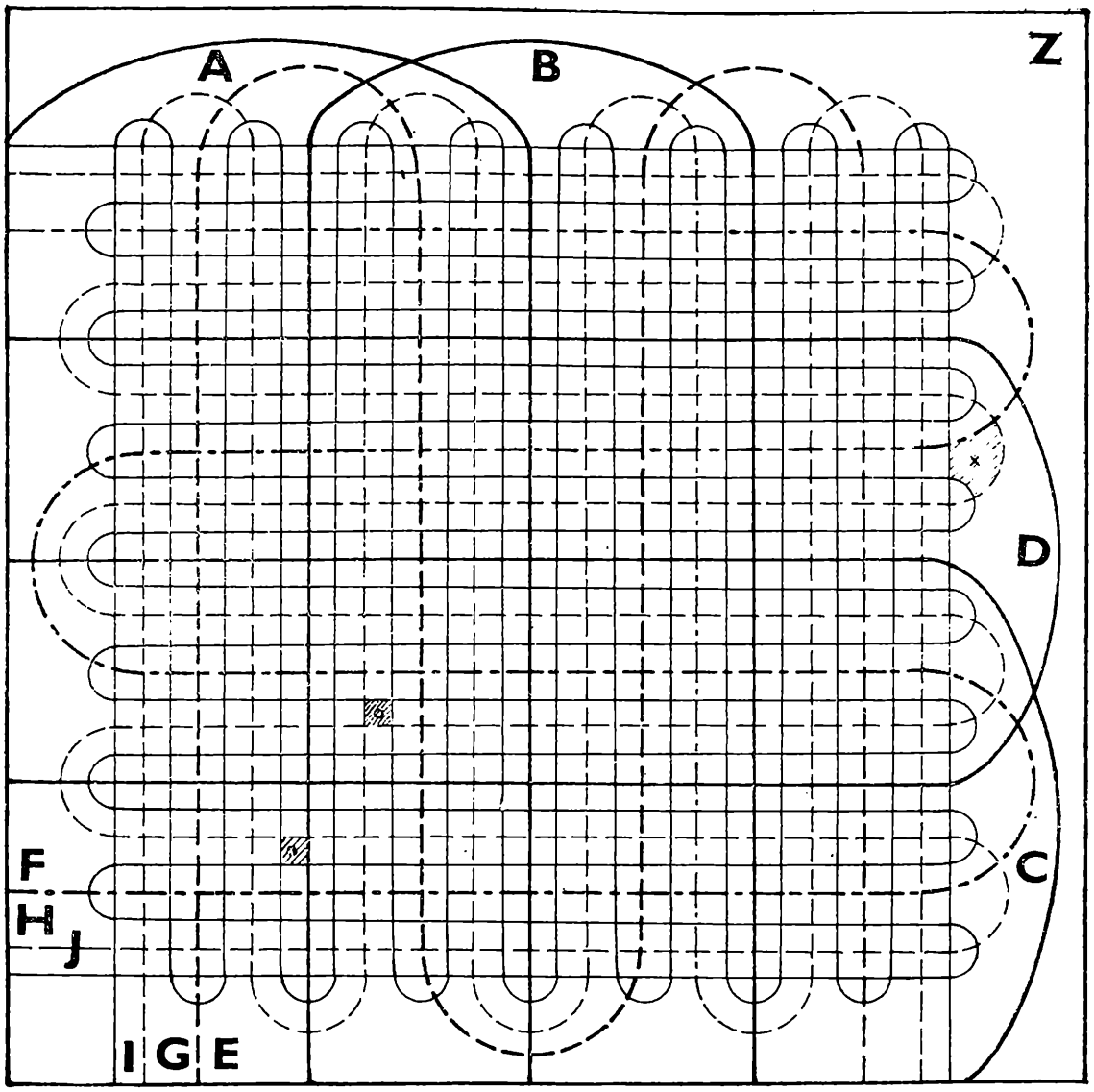
Všimneme si, že výrazná tečka v obr. 2b), 2c) je na políčku $ABCDE$.

Čtenář se snadno přesvědčí, že počty políček v diagramech na obr. 1 a 2 jsou $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ a $2^5 = 32$. Při kreslení množinového diagramu pro $(n + 1)$ množin postupujeme takto:

1. Pořídíme si diagram pro n množin; můžeme začít diagramem pro $n = 1$ z obr. 1a).
2. Vedeme hranici $(n + 1)$ množiny tak, aby rozdělila každé pole diagramu pro n množin na dvě políčka — počet polí se zdvojnásobí; přitom dbáme, aby
3. hranice $(n + 1)$ množiny byla uzavřena.

Všechny diagramy tohoto článku byly takto vytvořeny. V obr. 3a), 3b) jsou množinové diagramy pro šest množin A, B, C, D, E, F s $2^6 = 64$ políčky. V obou případech se vycházelo ze známých diagramů pro $n = 3$ množiny A, B, C a hranice 4., 5., a 6. množiny byla v obr. 3a) a 3b) vedena dost libovolně, avšak tak, aby byly splněny všechny tři již uvedené požadavky. Doporučujeme čtenáři, aby obtáhl různými barvičkami hranice a označení množin v diagramech, neboť se tím podstatně zvýší přehlednost diagramů. Pak se snadno vyřeší tato úloha, která se váže k diagramu z obr. 3a). Zní takto:

a) Zapište sjednocení prvních sedmi očíslovaných políček a zápis upravte na jednodušší tvar.

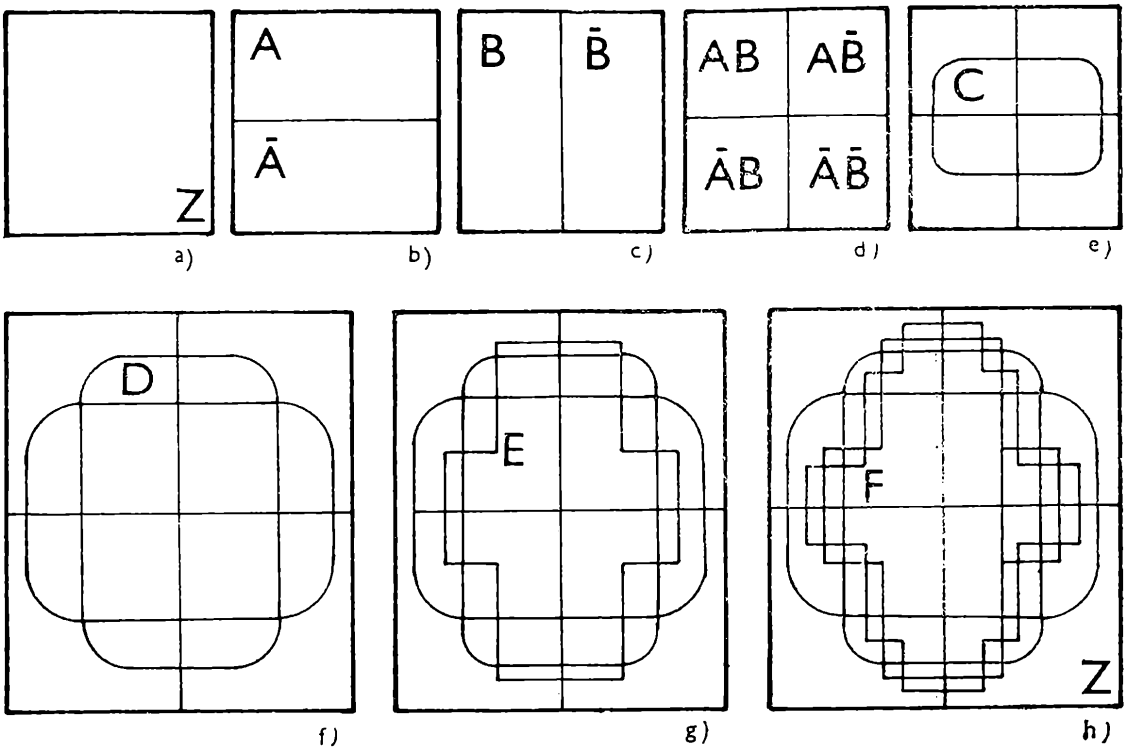


Obr. 5

b) Sledujte hranici (poslední) množiny F podle očíslovaných políček a současně obdobně číslujte dalšími přirozenými čísly jednotlivá políčka, která vznikají vedením hranice.

c) Obdobně proveďte úlohu na základě obr. 3b). Návod: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}F + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E\bar{F} + \ldots + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E}\bar{F} = \ldots = \bar{A}\bar{B}\bar{C}(\bar{D} + E + F)$; úprava popř. vede k jinému, avšak ekvivalentnímu výsledku, o čemž se čtenář snadno přesvědčí.

Při vytváření diagramů pro větší počty množin lze využít fantazie. Brzy se však zjistí, že je účelnější postupovat systematicky, jak je zřejmé z diagramů na obr. 4a) a 4b), jejichž základem byl diagram z obr. 2b). Podle vzoru z obr. 4 je sestaven množinový diagram pro $n = 10$ množin s $2^{10} = 1024$ políčky na obr. 5. Připomínáme, že velká písmena, jimiž jsou množiny v diagramech označeny, jsou vždy vepsána do vnitřní



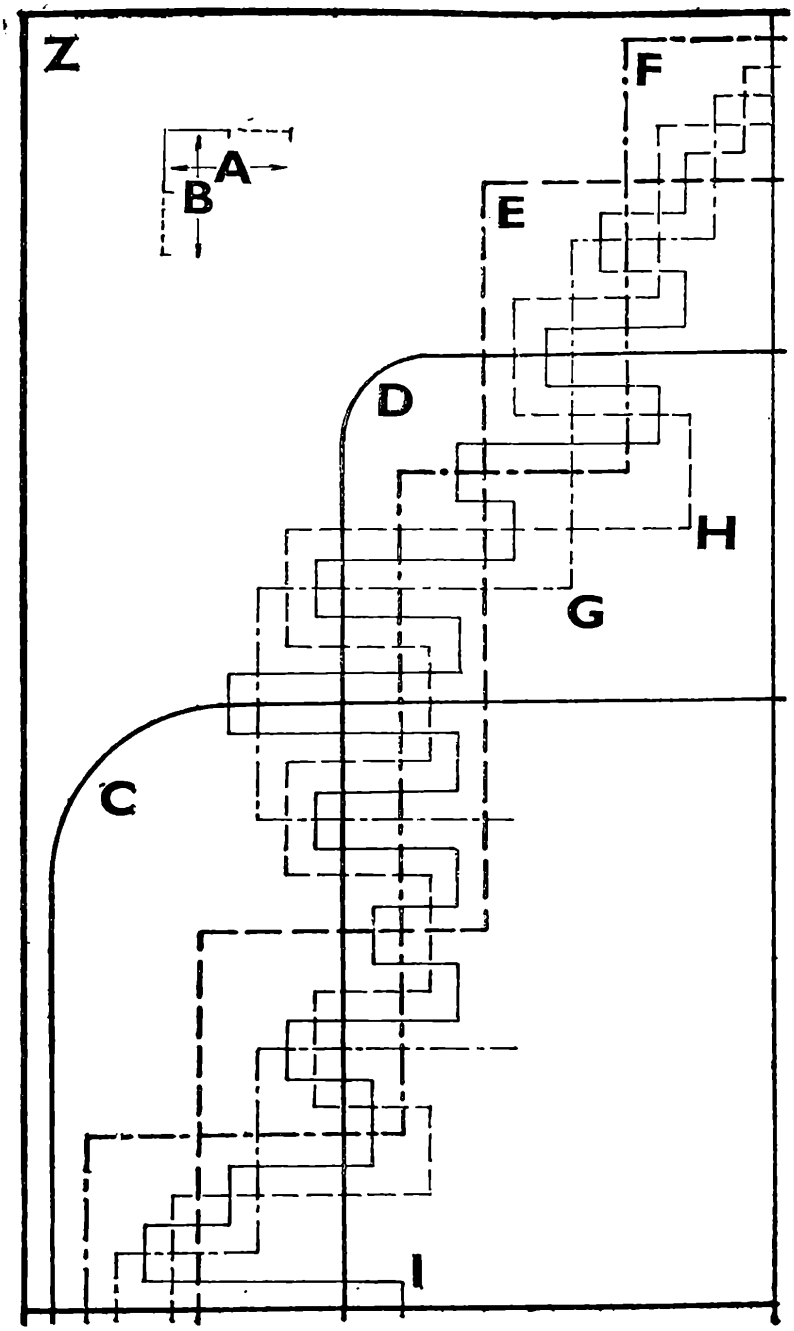
Obr. 6

oblasti označované množiny. Ještě jednou naléhavě připomínáme účelnost využití barviček k obtažení hranic množin i označení množin.

Další způsob kreslení množinových diagramů, při němž je systematicky postupováno, ukazuje obr. 6. Základní množinou Z je opět obdélník. Horizontálním rozpůlením tohoto obdélníku vznikly množina A a k ní komplementární množina $\bar{A}$ (viz obr. 6b). Vertikálním rozpůlením Z získáme množiny B a $\bar{B}$ (viz obr. 6 c). V obr. 6d) jsou všechny čtyři vzniklé podmnožiny AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$ označeny. Dále připojíme hraniční čáru množiny C (obr. 6e)) a množiny D (obr. 6f)). Neustálou aplikací shora uvedených zásad 1. až 3. rozšiřujeme diagram o další a další množiny. Tento typ množinového diagramu spotřebuje dost místa na papíře. Je však středově souměrný, čehož je využito k tomu, že na obr. 7 je nakreslena jen horní levá čtvrtina diagramu pro 9 množin s $2^9 = 512$ políčky. Čtenář si popř. za cvičení snadno barevně nakreslí celý diagram, popř. i pro $n > 9$ množin.

Cvičení

1. V diagramech z obr. 2b), 2c) určete pole, znázorňující množinu ABE. Zapište sjednocení všech čtyř podmnožin $AB\bar{C}\bar{D}E + AB\bar{C}DE + ABCDE + ABC\bar{D}E$ a ukažte, že po úpravě vyjde ABE.
2. V obr. 4a) tužkou vyšrafujte podmnožinu $AB\bar{D}$ a všimněte si, že



Obr. 7

prvky této podmnožiny mohou být na dvou (nesouvislých) polích.

3. V obr. 1d) je šrafováním vyznačen rozdíl $A \setminus B$. Vyšrafujte také rozdíl $B \setminus A$ a zapište sjednocení $(A \setminus B) + (B \setminus A)$, které se nazývá *symetrický rozdíl* a zapisuje se $A \triangle B$. a) Přesvědčte se, že zatímco rozdíl není komutativní, symetrický rozdíl ano. b) Platí, že $A \triangle B = (A + B) \setminus AB$. c) V obr. 3a) je číslem 7 označena podmnožina $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E}\bar{F}$; zapište rozdíl $Z \setminus (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E}\bar{F})$ a upravený výsledek porovnejte s diagramem.
4. V obr. 5 jsou vyšrafována tři políčka podmnožin označená tečkou, kroužkem a ležatým křížkem. Zapište jejich průnik a upravte.

Trojúhelníková čísla

† JUDr. Oldřich SRB, Letohrad

I. *Definice. Trojúhelníková čísla* jsou čísla tvořená podle vzorce

$$T_n = \binom{n+1}{2} = (n+1)n \,/\, 1 \,.\, 2 \tag{1}$$

Dosazujeme-li postupně za n přirozená čísla, obdržíme nekonečnou aritmetickou posloupnost $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, $T_5 = 15$,

Vzorec (1) můžeme však také interpretovat jako součet konečného počtu členů posloupnosti přirozených čísel, to je

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = (1 + n)n : 2 = T_n \,.$$

Znázorníme-li bod písmenem X, pak aritmetickou posloupnost můžeme znázorňovat množinou bodových trojúhelníků, jejichž základna se pravidelně zvětšuje o jednotku.

$T_1 = S_1$	$T_2 = S_2$	$T_3 = S_3$
X	X	X
	X X	X X
		X X X
1	$1 + 2 = 3$	$1 + 2 + 3 = 6$

$T_4 = S_4$	$T_5 = S_5$
X	X
X X	X X
X X X	X X X
X X X X	X X X X
	X X X X X
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

Proto čísla utvořená podle vzorce (1) byla nazvána trojúhelníková neboli trigonální.

II. *Vlastnosti čísel T_n*

Věta 1. Druhou mocninu libovolného přirozeného čísla n lze vždy znázornit součtem dvou sousedních trojúhelníkových čísel. Platí:

$$n^2 = T_n + T_{n-1}$$

Důkaz. $(n + 1)n \,/\, 2 + n(n - 1) \,/\, 2 = n^2$ (2)

Čtenář si sám ověří správnost identity (2).

Příklady: $T_3 + T_2 = 6 + 3 = 9 = 3^2$,
$T_4 + T_3 = 10 + 6 = 16 = 4^2$.

Větu 1. lze ověřit i graficky, budeme-li například body trojúhelníka T_n znázorňovat písmenem X a body trojúhelníka T_{n-1} písmenem Y.

Příklad: $T_5 + T_4 = 15 + 10 = 25 = 5^2$.

X –	Y	Y	Y	Y
X	X –	Y	Y	Y
X	X	X –	Y	Y
X	X	X	X –	Y
X	X	X	X	X

15 bodů X + 10 bodů Y = 25 bodů = 5^2

Věta 2. Třetí mocninu libovolného přirozeného čísla n lze vždy znázornit rozdílem kvadrátů dvou sousedních trojúhelníkových čísel. Platí:

$$n^3 = (T_n)^2 - (T_{n-1})^2$$

Důkaz: $[n(n + 1) / 2]^2 - [(n - 1)n / 2]^2 = n^3$

Potvrzení správnosti identity ponechávám čtenáři.

Příklad: $6^3 = T_6^2 - T_5^2 = 21^2 - 15^2 = 441 - 225 = 216$

Pozoruhodné na této identitě je, že dovoluje znázornit třetí mocninu čísla n pomocí druhých mocnin, to je vyšší mocninu znázorňuje rozdílem dvou nižších mocnin.

Důsledek. Protože platí

$$\text{podle první věty } n^2 = T_n + T_{n-1} \text{ a}$$
$$\text{podle druhé věty } n^3 = (T_n)^2 - (T_{n-1})^2,$$

lze druhou a třetí mocninu téhož přirozeného čísla n znázornit týmiž dvěma sousedními trojúhelníkovými čísly T_n a T_{n-1}, a to druhou mocninu n^2 jako součet dvou trojúhelníkových čísel, kdežto třetí mocninu n^3 jako rozdíl druhých mocnin týchž trojúhelníkových čísel. Příklad:

$$7^2 = 49 = T_7 + T_6 = 28 + 21,$$
$$7^3 = 343 = T_7^2 - T_6^2 = 28^2 - 21^2 = 784 - 441.$$

III. *Historická poznámka.* Trojúhelníková čísla byla známa již ve starověku *Pythagorovi* a jeho škole. Pythagoras se snažil vystihnout pomocí harmonie čísel harmonii vesmíru, a proto přičítal číslům zvláštní mystický význam. Vlastnost trojúhelníkových čísel vyslovenou ve větě 1. uvádí již starověký matematik *Nikomachos z Gerasy*, žijící asi na rozhraní 1. a 2. století n. l. ve svém díle „Úvod do aritmetiky". Po něm se dostává tato poučka do aritmetik vydávaných v dalších stoletích až do doby nejnovější. Věta 2. se neuvádí v aritmetikách a učebnicích teorie čísel výslovně, avšak vzorec, ze kterého lze lehko odvodit, tj. vzorec pro součet třetích mocnin přirozených čísel se v různých matematických příručkách uvádí. Ovšem na vztah třetí mocniny n^3 k trojúhelníkovým číslům nebylo dosud upozorněno.

Cvičení:

1. Vyjádřete druhou a třetí mocninu čísla 10 pomocí trojúhelníkových čísel.
2. Pokuste se graficky znázornit $4^3 = 64$. Využijte přitom věty 2.

Literatura :
[1] Dr. F. J. Studnička: Základové nauky o číslech, Jednota českých matematiků, Praha 1875
[2] Dirk J. Struik: Dějiny matematiky, Orbis, Praha 1963
[3] Heinrich Suter: Geschichte der mathematischen Wisenschaften I., Zürich 1875
[4] M. Hejný: Figulárne čísla na štvorčekovom papieri, in: RMF, roč. 66, č. 9, s. 356—361

FYZIKA

Povrchové mechanické vlny

Doc. RNDr. ing. Jaroslav POSPÍŠIL, CSc., UP Olomouc

Povrchové mechanické vlny patří k speciálním druhům (případům) mechanických vln, jejichž vlastnosti jsou odlišné od vlastností běžných elastických mechanických (např. zvukových) vln uvnitř látek. Mohou být postupné nebo stojaté, obdobně jako elastické mechanické vlny.

1. *Postupné povrchové vlny*

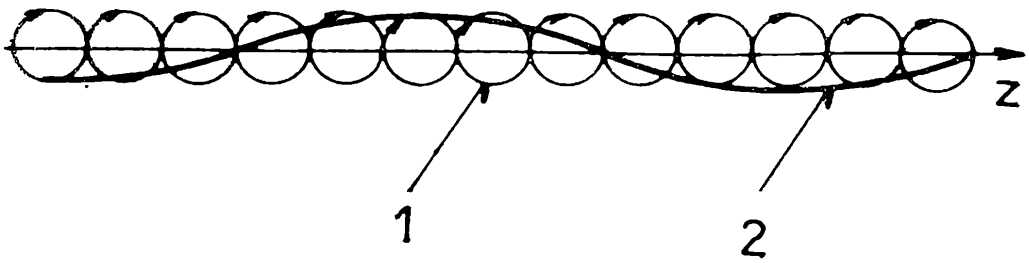
Postupné povrchové mechanické vlny se šíří jen v blízkosti povrchu látek. Pronikají do malé hloubky a velikosti jejich kmitů exponenciálně klesají s rostoucí hloubkou. Rychlost šíření těchto vln je menší než u elastických mechanických vln. Též se zeslabují v menší míře než elastické mechanické postupné vlny uvnitř látek. I v izotropních a homogenních prostředích vykazují disperzi fázové a grupové rychlosti (tj. závislost těchto rychlostí na frekvenci vlnění) podle tloušťky povrchové vrstvy, kterou se šíří. Tohoto jevu se například využívá k zjišťování této tloušťky. Pod pojmem *fázová rychlost* rozumíme rychlost šíření fáze harmonického postupného vlnění (v případě grupy harmonických postupných vln, tj. vlnového klubka, je fázová rychlost vztažena k její dominantní harmonické složce). *Grupová rychlost*, vyskytující se jen u vlnových klubek, je rychlost šíření maximální amplitudy (energie) vlnového klubka. Obě rychlosti jsou stejné jen v případech nedisperzních prostředí, kde nezávisí na frekvenci harmonických složek.

Povrchové mechanické vlny doprovázejí například elastické seizmické vlny a šíří se v povrchové vrstvě Země. Typickým případem povrchových mechanických postupných vln jsou též mechanické vlny na povrchu kapaliny (např. vody). Svou podstatou a vlastnostmi nejsou podobné elastickým mechanickým postupným vlnám. Patří z hlediska šíření kmitového rozruchu k nejsložitějším a nejzajímavějším mechanickým jevům v přírodě, které nejsou ještě zcela v detailech přesně

Obr. 1

teoreticky vysvětleny. Zde se proto omezíme jen na základní vlastnosti těchto vln na povrchu kapaliny v ideálním přiblížení, kdy jde o nestlačitelnou, homogenní a izotropní neviskózní kapalinu bez vírů, kdy též tření kapaliny o stěny nádoby (břehů) je zanedbatelné a kdy amplitudy výchylek kmitů jsou malé.

Povrchové mechanické postupné vlnění v kapalině vznikne například tehdy, když se její původně klidné rozsáhlé hladiny periodicky nebo neperiodicky dotýká hrot. Tím jí při každém dotyku předává kinetickou energii a na hladině vzniknou kruhové vlny. Takové vlny, vztažené k periodickým dotykům hrotu hladiny, jsou znázorněny na obr. 1. Povrchové vlny na hladině kapaliny jsou též důsledkem dopadu tělesa na hladinu, pohybu tělesa (např. loďky) po hladině apod. Od takových zdrojů se šíří povrchové mechanické vlnění ve všech směrech na povrchu kapaliny. Přitom nemění kapalina svou polohu (nedochází k jejímu toku) a pohybují se jen vlny. Povrchové vlny nejsou ani příčné (jak by se dalo usuzovat z průběhu vln na povrchu kapaliny), ale ani podélné. Protože je uvažovaná kapalina prakticky nestlačitelná, mohou se prohlubeniny na jejím povrchu vlivem působícího zdroje vytvářet jen přemísťováním (přeléváním) kapaliny na strany a zpět. Rovnovážný stav povrchu kapaliny se obnovuje jejím povrchovým napětím (hovoříme o kapilárních povrchových vlnách) a gravitační (tíhovou) silou (jde o gravitační povrchové vlny). Přitom částice kapaliny v její povrchové vrstvě vykonávají složený pohyb, který je kombinací pohybu nahoru a dolů a pohybu vpřed a vzad. Výsledkem těchto pohybů je prakticky kruhový pohyb (1) každé částice, jak to je znázorněno na obr. 2. Poloměr



Obr. 2

tohoto kruhového pohybu se s rostoucí hloubkou zmenšuje, až v určité hloubce kruhový pohyb vymizí (půjde-li o reálnou viskózní homogenní kapalinu, pak s rostoucí hloubkou se kruhové pohyby částic mění ve stále užší eliptické pohyby až do jejich zaniknutí v určité hloubce kapaliny). Takže povrchové vlny kapaliny (2) lze zjednodušeně chápat jako jakousi směs podélných a příčných mechanických postupných vln. Přitom ve vrchu povrchové vlny probíhá pohyb každé částice povrchu kapaliny vpřed, kdežto v důlu vlny směřuje její pohyb vzad ve srovnání se smyslem z šíření povrchového mechanického postupného vlnění.

Rychlost šíření harmonických povrchových mechanických postupných vln v dokonalé kapalině závisí na její rovnovážné objemové hustotě ϱ_0, hloubce h, na tíhovém zrychlení g a na vlnové délce λ vlnění. Z podrobného rozboru dynamiky povrchových mechanických postupných vln v dokonalé kapalině vychází pro fázovou rychlost gravitačních (dlouhých) povrchových vln vzorec

$$v_{\varphi_g} = \sqrt{\frac{g}{k}\,\frac{1 - e^{-2kh}}{1 + e^{-2kh}}} \tag{1}$$

kdežto pro kapilární (krátké) povrchové vlny platí vztah

$$v_{\varphi_k} = \sqrt{\frac{\sigma_0 k}{\varrho_0}\,\frac{1 - e^{-2kh}}{1 + e^{-2kh}}}\,; \tag{2}$$

σ_0 je rovnovážné povrchové napětí kapaliny a $k = 2\pi/\lambda$ je úhlový vlnočet uvažovaného povrchového vlnění.

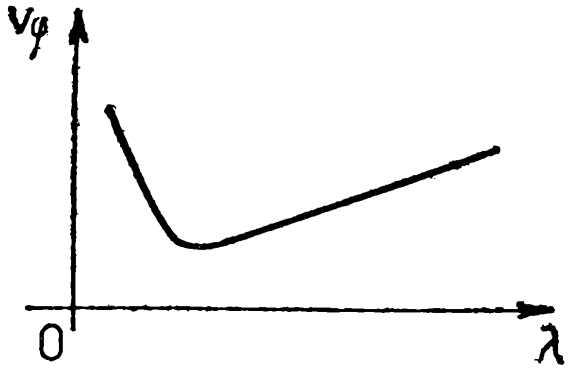
Působí-li tíhová (gravitační) síla a povrchové napětí současně, platí pro fázovou rychlost povrchových vln výraz

$$v_\varphi = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma_0 k}{\varrho_0}\right)\frac{1 - e^{-2kh}}{1 + e^{-2kh}}}\,. \tag{3}$$

Z uvedených vzorců vyplývá, že fázová rychlost povrchových vln v kapalině je složitá veličina. Je-li kapalina dostatečně hluboká, kdy můžeme položit $h \to \infty$, a tedy $e^{-2kh} \approx 0$, lze vliv její hloubky na fázovou rychlost povrchových vln zanedbat a přímo využívat vztahů

$$v_{\varphi_g} = \sqrt{\frac{g}{k}}\,, \quad v_{\varphi_k} = \sqrt{\frac{\sigma_0 k}{\varrho_0}} \quad v_\varphi = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma_0 k}{\varrho_0}}\,. \tag{4}$$

Na obr. 3 je uvedena rámcová závislost fázové rychlosti v_φ na dominantní vlnové délce λ povrchové vlny (povrchového vlnového klubka)



Obr. 3

v dostatečně hluboké vodě, kdy platí vzorce (4). Je vidět, že v oblasti větších vlnových délek (kdy se především uplatňují gravitační vlny) fázová rychlost v souladu s prvním vzorcem (4) mírně roste s rostoucí vlnovou délkou λ (je zjištěno, že odpovídající grupová rychlost je $v_{gr} = v_\varphi / 2$) a v oblasti krátkých vlnových délek (kdy v podstatě jde o kapilární vlny) vykazuje fázová rychlost s rostoucí vlnovou délkou λ v souladu s druhým vzorcem (4) klesající strmější průběh. Přitom při velmi malých hodnotách λ je fázová rychlost velká (a odpovídající grupová rychlost je $v_{gr} = 3\ v_\varphi / 2$). Mezi těmito oblastmi je interval vlnových délek pro minimální hodnoty fázové rychlosti povrchového postupného vlnění.

V případě, kdy kapalina není dostatečně hluboká a platí relace (1) až (3), ovlivňuje fázovou (a tedy i grupovou) rychlost povrchových vln i její hloubka h. Fázová rychlost gravitačních (dlouhých) vln (1) se zmenšuje v mělkých místech a zvětšuje se v hlubokých místech. Proto se například vodní vlna blížící se ke břehu zpomaluje, neboť se zmenšuje hloubka vody.

I povrchové mechanické vlny mohou při větších amplitudách nabývat vlastností rázové mechanické vlny, popsané v předcházejícím článku autora, avšak se složitější strukturou (neboť povrchové vlny jsou složité). To se projevuje například větším narušením odpovídající fronty vodní rázové vlny u břehu a přelitím vln přes sebe jako u mořských vln při přílivu.

V reálných případech, kdy se projevuje tření kapaliny o dno, se vrchy povrchového vlnění pohybují snadněji vpřed, než je pohyb vzad dolů vlnění. Výsledkem je pak přenos kapaliny a případně i lom vlnění. To například nastává v okolí břehu velké vodní plochy (jezera), kde lze pozorovat vytváření vln, které se přelévají dopředu ve smyslu šíření povrchového vlnění. Proto je při intenzívních (velkých) vlnách potřebné, aby plavec v jezeře (nebo v moři) byl dále od břehu. V opačném případě může vodní vlna s velkou rychlostí plavce vyvrhnout na břeh a tím ho poranit.

Složitější jsou mechanické povrchové vlny vyvolané pohybujícím se tělesem, zvláště v případech, kdy fronta vlnového rozruchu je kolmá

ke směru pohybu tělesa. V těchto případech je struktura povrchových vln tvořena jednak základními povrchovými vlnami a dalšími přidruženými povrchovými vlnami, které se pohybují pod jinými úhly po boku základních vln.

2. *Stojaté povrchové vlny*

Povrchové mechanické vlny mohou být i stojaté. K tomu je třeba, aby vlnící se látkové prostředí bylo ohraničené (kdežto u postupných vln se předpokládá neohraničené prostředí). Vlastnosti postupných i stojatých mechanických vln jsou uvedeny v běžných učebnicích fyziky. Pro stojaté mechanické vlnění je typické, že všechny body nosného látkového prostředí kmitají současně se stejnou frekvencí a se stejnou fází ve všech místech vzdálených o vlnovou délku λ a s opačnou fází v místech vzdálených o půl vlnové délky. Amplitudy kmitů jednotlivých bodů prostředí jsou závislé na poloze bodu. Jde-li o netlumené kmity, pak energie kmitů každého bodu zůstává v ohraničeném prostředí konstantní. Místa prostředí, v nichž jsou amplitudy kmitů minimální, se nazývají *uzly* a místa kmitů s maximálními amplitudami jsou *kmitny* (vzdálenost sousedních uzlů nebo kmiten je u harmonického stojatého vlnění vždy rovna polovině jeho vlnové délky). U dvojrozměrných prostředí uzly tvoří uzlové čáry (v případě trojrozměrných prostředí jde o uzlové plochy). Stojaté vlny lze též chápat jako výsledek superpozice (složení) dvou postupných vln šířících se proti sobě (z nichž jedna vznikla např. odrazem na hranici ohraničeného prostředí). Jsou-li tyto vlny izochronní (mají-li stejnou frekvenci) a harmonické, pak výsledkem zmíněné superpozice je harmonické stojaté vlnění o frekvenci superponovaných harmonických složek.

Uvažujeme-li stojaté povrchové mechanické vlnění v kapalném prostředí, pak je třeba si uvědomit, že na hranicích tohoto prostředí (tvořených např. stěnami nádoby, ve které je kapalina) se mohou částice kapaliny smíchávat jen směrem vertikálním (nahoru a dolů) a u dna neexistuje jejich vertikální pohyb. Tvar stojatého povrchového vlnění v kapalině je ovlivněn jejím druhem a závisí jak na tvaru nádoby, tak i na hloubce kapaliny.

Má-li kapalina velkou hloubku ve srovnání s vlnovou délkou stojatého povrchového vlnění, pak se amplitudy vertikální a horizontální složky tohoto vlnění exponenciálně zmenšují s rostoucí hloubkou a v hloubce rovné vlnové délce jsou již prakticky nulové (povrchové mechanické vlnění v této hloubce již prakticky zaniká). Jde-li o mechanické povrchové vlny v mělké kapalině, jejíž hloubka je malá ve srovnání s vlnovou délkou vlnění, pak horizontální složka takového vlnění nezávisí na hloubce, kdežto jeho vertikální složka se lineárně zmenšuje s hloubkou a dosahuje nulové hodnoty na dně nádoby a maximální hodnoty na povrchu kapaliny. Na povrchu kapaliny je maximální vertikální složka

menší než je maximální hodnota horizontální složky. V reálném případě, kdy se projevuje tření kapaliny o povrch dna nádoby, je zanedbání tohoto tření u hluboké kapaliny nepodstatné, kdežto v mělké kapalině hraje toto tření roli a ovlivňuje tvar povrchové mechanické vlny.

Experimenty ukazují, že hluboké kapaliny se chovají vzhledem ke gravitačním i kapilárním povrchovým mechanickým vlnám jako disperzní prostředí, kdežto mělké kapaliny jsou prakticky nedisperzní.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

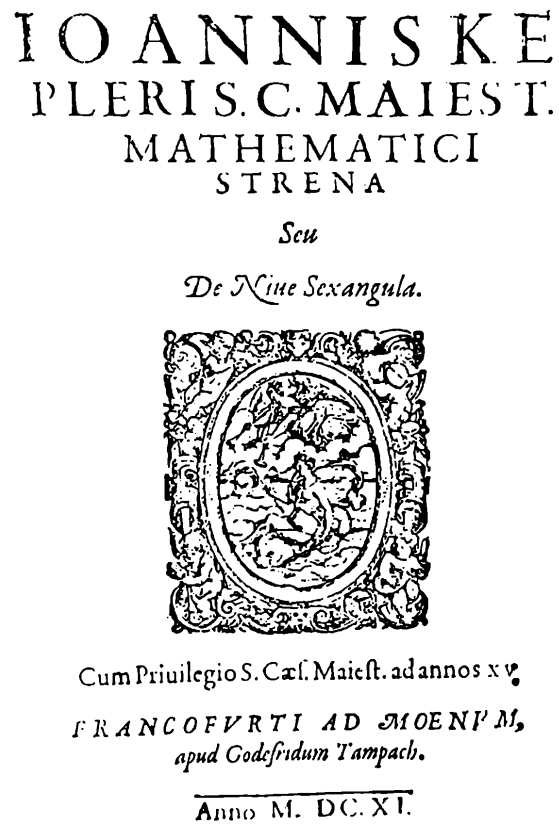
Dějiny vědecké krystalografie začaly v Praze

Doc. RNDr. Ivo KRAUS, CSc., FJFI ČVUT v Praze

1. *Litera scripta manet — Co je napsáno, trvá*

Díky nedávným objevům fyziky pevných látek se dají informace ze všech oblastí lidského vědění ukládat do pamětí počítačů, aby mohly kdykoliv sloužit společenskému pokroku. Se záznamy nových údajů nevznikají problémy, i když množství registrovaných poznatků každým dnem nepředstavitelně vzrůstá. Dovedeme si však uvědomit, jaké bohatství myšlenek, odkázaných nám předcházejícími generacemi, zůstává zatím bez užitku nastřádáno v zámeckých a klášterních knihovnách? Na mnohé z tisíců knih a foliantů padá prach už od epochy renesance.

Jazykem vzdělaných bývala latina. Jak užitečné nám mohou být staré latinské texty, jsou dnes schopni posoudit jen filologové spolu se specialisty určitých oborů. Před zapomenutím byly uchráněny pouze myšlenky velikánů. K nim se lidstvo čas od času vrací, aby s úžasem zjišťovalo, že je objevováno již dávno objevené. Poučit se z historie není však snadné — stejně jako předávání jakékoliv těžce nabyté zkušenosti. Pravda a pokrok musejí být kromě toho často hledány v jinotajích, je třeba umět odlišit plané utopie od užitečných předpovědí. Správně pochopit obsah myšlenek, které odolaly zkoušce času, znamená však nepromarnit příležitost nabídnutou dávnými předky a posunout naše poznání světa o kousek dál. Takový osud mohlo mít rozsahem nevelké pojednání *Strena seu de nive sexangula* (Novoroční dárek čili o hexagonálním sněhu) slavného matematika a astronoma *Johanna Keplera* (1571—1630) — kdyby se včas dostalo do povolaných rukou. Pro vznik díla byly rozhodující Keplerovy otevřené diskuse s *Janem Matoušem Wackerem z Wackenfelsu*, císařským diplomatem a všestranně vzdělaným


IOANNIS KE
PLERI S. C. MAIEST.
MATHEMATICI
STRENA
Seu
De Niue Sexangula.

Cum Priuilegio S. Cæs. Maiest. ad annos xv.
FRANCOFVRTI AD MOENVM,
apud Godefridum Tampach.
Anno M. DC. XI.

Obr. 1. Titulní list prvního vydání Kaplerova pojednání „Novoroční dárek čili o hexagonálním sněhu"

obdivovatelem názorů *Giordana Bruna*. Svůj traktát Kepler věnoval Wackerovi jako novoroční dárek v lednu 1611. Téhož roku latinsky psaný spis o sněhu vyšel ve Frankfurtu nad Mohanem (obr. 1).

2. *Kepler a rufolfinská Praha*

Keplerovo příležitostné pojednání je nejstarším dochovaným písemným materiálem z novodobé krystalografie. Vzniklo v Praze koncem doby nazývané rudolfinská, doby velkých astronomických objevů i střetů církevních dogmat s racionálním myšlením, založeným na poznání přírody.

Zatímco kolem roku 1500 je vzorem vzdělance v Čechách latinsky či česky píšící humanista s hlubokou znalostí antiky a schopností jejího literárního napodobení, už o půl století později dochází k výrazné změně. Zájem se stále více soustřeďuje na teoretické aspekty i praktické využití přírodních věd. Hlavní podněty k vědeckému bádání vycházely z podnikání a výroby. Příkladem může být jáchymovská stříbrná horečka první poloviny 16. století. V Čechách vznikla teoretická přírodovědná díla, jejichž význam daleko překročil hranice tehdejší střední Evropy. Autorem jednoho z nich byl jáchymovský lékař *Georgius Agricola*. Jeho latinský spis „O hornictví", který vyšel roku 1556, je věnován hutnictví,

Obr. 2. Pamětní deska v průjezdu domu č. 4 v Karlově ulici v Praze

důlní technice a základům mineralogie. S velkým ohlasem se o dvacet let později setkalo i dílo kutnohorského mincmistra *Lazara Erckera*, nazvané „Kniha o prubéřství".

Na rozvoji věd se v druhé polovině 16. a na počátku 17. století podíleli zejména osobnosti sloužící panovníkovi a šlechtickým dvorům, jako byli v Čechách např. Rožmberkové nebo na Moravě Žerotínové. Teprve na dalších místech byl význam vědy podporované městy a univerzitou. Praha představovala nejen společenské a vědecké centrum českého království, ale žila v pravidelných stycích i se svým širokým kulturním zázemím — Lipskem, Norimberkem, Wittenberkem, Vídní, Vratislaví, Krakovem aj. V této atmosféře přijíždí koncem ledna 1600 do Prahy Johann Kepler. Na pozvání *Tychona Brahe* zde má jako jeho asistent pracovat ve službách císaře Rudolfa II. Společná práce obou geniů byla však už za rok (1601) přerušena předčasnou Tychonovou smrtí.

Z míst Keplerova pražského pobytu se dodnes zachoval dům na staroměstském předmostí Karlova mostu, v němž slavný matematik a astronom bydlel od roku 1607 až do svého odchodu z Prahy v dubnu 1612 (obr. 2). Právě odtud pravděpodobně vedly ty z Keplerových cest zimní Prahou, při nichž ho upoutal geometricky jedinečný tvar sněhových vloček.

Citujme podle Novoročního dárku: „Ponořen do úvah, přecházím

most ... na oděv se mi snášejí sněhové vločky, všechny šestiúhelníkové, s huňatými paprsky — pokud ovšem nezmění svůj tvar srážkami nebo se neslepí ve sněhové chomáče. Žádné dvě hvězdičky nejsou stejné ... ze středu některých trčí jako kořen sedmý paprsek, kolmý k rovině vločky. Skutečnost, že pokaždé, když začíná sněžit, mají první vločky tvar šesticípé hvězdy, musí mít určitou příčinu."

3. *O sněhových vločkách*

Vraťme se z rudolfinské doby znovu do dvacátého století. Jaké jsou naše současné znalosti o sněhových vločkách?

Uvažujme ovzduší se stoupající vodní párou. Její teplota klesá na každých 100 metrů výšky přibližně o 1 °C. Pokud bude při takovém vzestupu dosaženo rosného bodu za teploty nad 0 °C, vzniknou kapky vody, je-li rosný bod nižší než 0 °C, změní se vodní pára přímo na tuhou fázi — sníh. Výchozí vločky (krystalky) mají rozměry $5 \cdot 10^{-3}$ až 10^{-2} mm. V klidných vzestupných proudech narůstají přímou kondenzací par až na průměry několika mm. Budou-li vločky unášeny vířivým vzestupným proudem vzduchu, stočí se do kompaktních ledových kuliček — krup.

Tvar vloček závisí na charakteristikách atmosférické vrstvy, v níž vznikají, tj. na její výšce, teplotě a stupni přesycení vodními parami. Běžně pozorované padající chomáčky sněhu se skládají z velkého množství drobných vloček, které se při letu k zemi navzájem slepily.

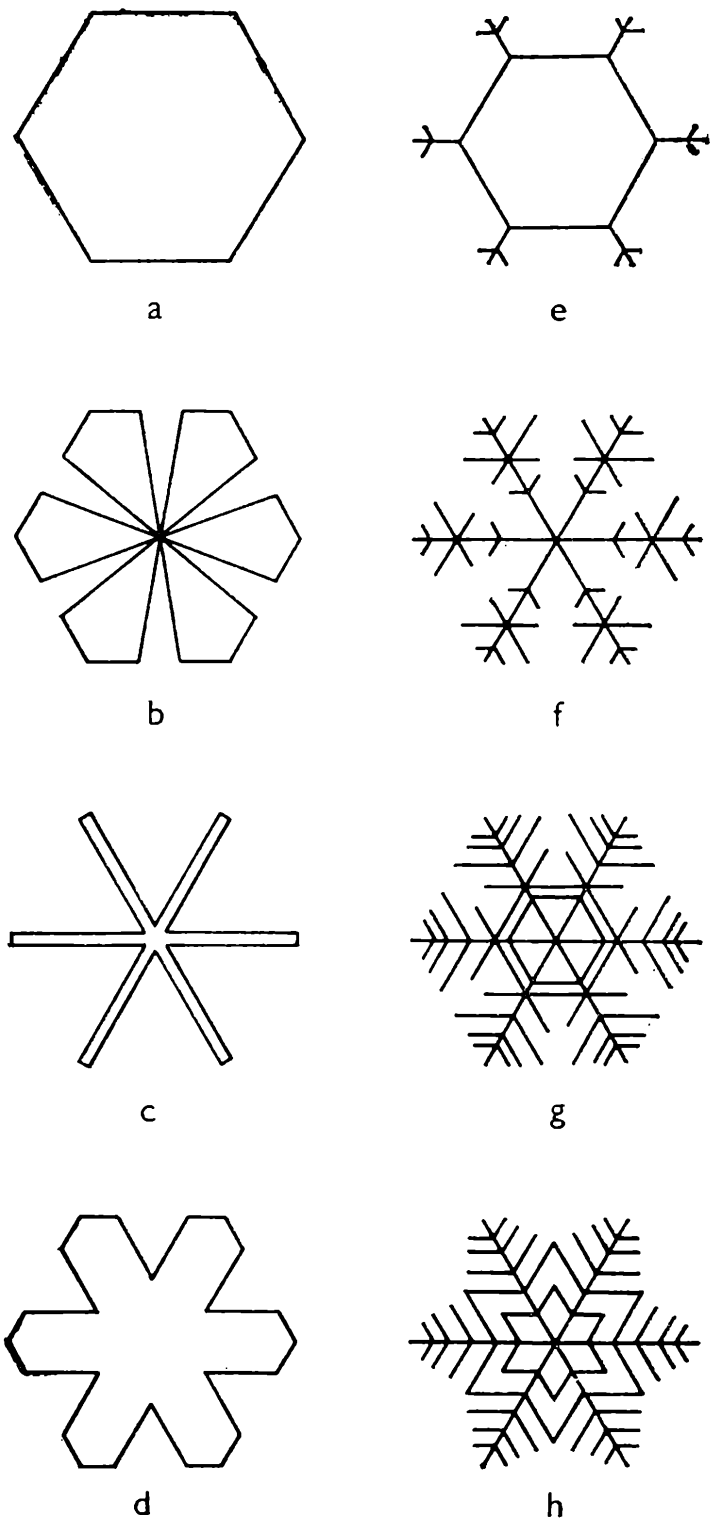
Výzkumem sněhu se v tomto století zabývala především fyzikální laboratoř tokijské univerzity na pracovišti v horách nedaleko Sappora. Z výsledků dlouhodobých pozorování byly zde získány např. vztahy mezi základními tvary sněhových vloček a jejich průměrnými rozměry (obr. 3). Není bez zajímavosti, že o první kresby vloček se pokusil (s nepříliš velkým zdarem) už roku 1555 arcibiskup *Claus Magnus* ve švédské Uppsalle.

Jemnou strukturu vloček charakterizuje hexagonální souměrnost. Stejnou souměrnost má i jejich krystalová mřížka, a to nezávisle na vnějších podmínkách růstu. Hexagonální osa sněhových krystalků je osou polární, tj. horní a dolní plochy vloček nejsou identické.

Porovnáme-li naše dnešní znalosti o sněhu se závěry, k nimž dospěl Kepler, pak ve prospěch experimentální techniky dvacátého století nesvědčí o mnoho víc než jen určité kvantitativní zpřesnění vizuálních pozorování.

4. *Význam Keplerova pojednání „Strena seu de nive sexangula" pro nauku o krystalech*

Johann Kepler vstoupil do našeho podvědomí svými astronomickými objevy, zejména formulací zákonů pohybu planet sluneční soustavy.



Obr. 3. Základní tvary sněhových vloček a jejich velikosti v mm:
a) jednoduché destičkovité (0,25 až 0,75)
b) sektorově rozvětvené (1,1)
c) jednoduché hvězdicovité, (1,0 až 2,5)
d) destičkovité s výběžky (1,5)
e) široce rozvětvené (2,0)
f) jednoduché dendritické krystaly (2,5)
g) destičkovité s dendritickým rozvětvením (3,0)
h) kapraďovité (4,0)

Méně ho známe jako matematika. Rovněž jeho traktát o sněhových vločkách zůstal dodnes prakticky bez odezvy, i když je ve skutečnosti dokladem Keplerova prvenství v oblasti teoretické nauky o krystalech. O malou popularitu těchto krystalografických úvah se nejvíce „zasloužil" zřejmě sám jejich autor, resp. žertovný tón, kterým byl traktát napsán. Přitom je v něm obsažena řada geniálních hypotéz, velmi blízkých současným představám o geometrii a podstatě krystalových struktur.

Text je koncipován jako sled myšlenek, které Keplera provázejí cestou po Karlově mostě na Hrad, kam jde za císařským radou Janem Matoušem Wackerem z Wackenfelsu. „Protože dobře vím, jak miluješ nic, dohaduji se, že novoroční dárek Ti bude tím dražší a příjemnější, čím více bude blízký ničemu." Jako dárek věnoval slavný astronom svému pražskému příteli rozpravu o sněhových vločkách, seslaných z nebe a majících podobu hvězd, které na oděvu tají teplem těla v nic. Slůvko „nic" je v Keplerově spisu jinotajem, označujícím významného renesančního myslitele Giordana Bruna, upáleného za své „kacířské" názory v Římě na počátku roku 1600.

Připomeňme si ty závěry díla, které neztratily svou platnost ani po čtyřech stoletích.

Empirický poznatek pečlivého pozorovatele, že žádná hvězdicovitá vločka nemá pět ani sedm paprsků, byl o dvě a půl století později prokázán jako přísná zákonitost vyplývající z charakteru mřížkové stavby krystalových struktur. Pouhým pozorováním sněhových vloček pochopil Kepler podobnost vnějšího tvaru jako zákon symetrie.

V souvislosti s úvahami o příčině hexagonální souměrnosti sněhu dochází Kepler k významným poznatkům o geometrii nejtěsnějšího uspořádání tuhých koulí: „Stejně velké koule, dotýkající se navzájem stejným způsobem, mohou být na vodorovné ploše rozmístěny tak, že každá má buď 4 nebo 6 sousedů". V pojednání jsou diskutována i zobecněná prostorová uspořádání, a to nejen nejtěsnější, ale i ostatní — principiálně možná. Keplerovi tak náleží priorita v zavedení tzv. koordinačních čísel vyjadřujících počet koulí dotýkajících se libovolné koule výchozí. V terminologii strukturní analýzy se koordinačním číslem rozumí počet atomů (iontů) tvořících nejbližší okolí daného atomu (iontu). Pokus objasnit tvar vloček pomocí jejich stavby z koulí pravidelně rozložených v prostoru lze chápat jako počátek teorie krystalové mřížky.

Velmi zajímavé jsou rovněž Keplerovy závěry, vyplývající z pozorování přírody, že existence pětičetné souměrnosti je znakem živých organizmů, např. květů hrušní, jabloní nebo některých mořských živočichů.

Co nutí hmotu dodržovat přesné geometrické formy? Odpověď Kepler hledá opět na sněhových vločkách. Protože se jejich jednotlivé paprsky

sbíhají (kříží) vždy v jednom bodě, musí právě v něm působit jakási tvořivá síla. Tato hypotéza je velmi blízká současným představám o růstu krystalů a fyzikálně-chemických silách, spojujících atomy nebo ionty ve struktuře.

Sněhové vločky patří ke krystalům vyvinutým přednostně podél směrů ležících v jedné rovině. Pro vysvětlení této skutečnosti využívá Kepler představu, že k dotyku chladu a tepla dochází vždy jen v rozmezí určité roviny. Proto i vločky, vznikající ochlazováním „teplé" vodní páry, budou převážně rovinné. Kepler dále vyslovuje domněnku o možném ovlivnění tvaru vloček chemickými příměsemi obsaženými ve vodní páře. (Poznamenejme, že příčina rovinného růstu sněhových vloček není uspokojivě objasněna dodnes.)

I když spisek o šestiúhelníkovém sněhu nepřinesl vyčerpávající odpovědi na všecky otázky, které si jejich autor položil, přesto je význam této práce pro rozvoj novodobé krystalografie zcela mimořádný. Kepler v ní poprvé formuloval princip nejtěsnějšího uspořádání tuhých koulí, představující základ současné strukturní krystalografie, i zákon stálosti úhlů mezi stěnami krystalů určité látky.

Šestiúhelníkový sníh je důležitou součástí Keplerova hledání harmonie světa. Nejenom krystaly minerálů, ale i tak běžné látky jako je voda, potvrzují životní hesla velkého učence přelomu 16. a 17. století:

Kdekoliv je hmota, provází ji geometrie.
Geometrie propůjčuje kráse řád a řádu zase krásu.
Příroda má ráda jednotnost a jednoduchost.

Dodatek k řešení Pellovy rovnice

Jaroslav SEDLÁČEK, Hradec Králové

Bude řeč o všech možných celočíselných řešeních rovnice

$$3x^2 + 1 = y^2 , \tag{5}$$

uvedené v článku zabývajícím se touto tematikou na str. 199 tohoto ročníku Rozhledů.

Uvádí se tam, že řešení pomocí výrazů

$$x = 2x_1y_1 \quad \text{a} \quad y = y_1^2 + ax_1^2 \tag{4}$$

umožňuje nalézt celou posloupnost všech možných řešení. Toto tvrzení je nutno opravit, neboť takto vypočtená posloupnost je velice řídká. Jsou v ní pouze členy v pořadí 1, 2, 4, 8, . . . , 2^n, . . . z úplné posloupnosti netriviálních řešení. Jako příklad byla otištěna tabulka:

x	0	1	4	56	9 864
y	1	2	7	97	18 817

Chceme-li však vyčíslit všechna řešení (i triviální) rovnice (5), musíme použít vztahů

$$x = 2x_1 \pm y_1 \quad \text{a} \quad y = 2y_1 \pm 3x_1 \,. \tag{6}$$

Členy od počátku posloupnosti jsou tyto:

Pořadové číslo	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0	1	4	15	56	209	780	2911	10 864
y	1	2	7	26	97	362	1351	5042	18 817

Odvození vztahů (6) vychází z Brahmaguptova tvrzení podle věty: Jsou-li kořeny x_1, y_1 a též i x_2, y_2 řešeními téže rovnice $ax^2 + b = y^2$, potom platí

$$a(x_1y_2 \pm x_2y_1)^2 + b^2 = (y_1y_2 \pm ax_1x_2)^2 \tag{7}$$

Rovnice (3) v uvedeném článku je pouze zvláštním případem rovnice (7), z níž jsou odvozeny tvary

$$x = x_1y_2 \pm x_2y_1 \quad \text{a} \quad y = y_1y_2 \pm ax_1x_2 \,. \tag{8}$$

Dovolují ze dvou známých netriviálních řešení určit další dvě řešení. Zpočátku stačí i jen jedno. (Zjednodušením tvarů (8) vznikly vztahy (4). Přitom se však „ztratila" některá řešení.)

Pokud se nepoužije nejmenší netriviální řešení nebo dvě sousední řešení v posloupnosti, nemohou se určit všechna v celé posloupnosti. Je to způsobeno tím, že pořadové číslo výsledného řešení je součtem (případně rozdílem) obou pořadových čísel vstupních čísel. Proto u tvarů (4) se pořadové číslo vždy zdvojnásobuje.

Uvažujme opět, že $b = 1$ a do formulí (8) dosazujme za x_2 a y_2 vždy menší ze dvou netriviálních řešení. V případě rovnice (5) získáme výhodné prostší výrazy, např.:

$$\begin{aligned} &\text{pro } x_2 = 1\,,\ y_2 = 2 \qquad x = 2x_1 \pm y_1\,,\ y = 2y_1 \pm 3x_1\,, \\ &\text{pro } x_2 = 4\,,\ y_2 = 7 \qquad x = 7x_1 \pm 4y_1,\ y = 7y_1 \pm 12x_1\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Přesvědčte se, že výrazy v prvním řádku dávají všechna možná řešení, kdežto ve druhém pouze ta se sudým pořadovým číslem (pokud nevložíte do výpočtu řešení s lichým pořadovým číslem).

Ještě poznámku: Tvary (4) mohou mít také podobu

$$x = 2x_1y_1 \quad \text{a} \quad y = 2y_1^2 - 1\,.$$

Z MATEMATIKY A FYZIKY ZŠ

Osmáci, zkuste to také!

Každý, kdo se zajímá o matematiku, ví, že je to nejen věda krásná, ale také věda s dlouhou a bohatou historií.

Již ve 3. tisíciletí před naším letopočtem byla matematika v některých zemích uznávanou vědeckou disciplínou. A já vyzývám nyní vás, žáky osmých tříd, abyste podrobili své znalosti malé prověrce. Zkuste si započítat s matematiky z dávných věků. K tomu vám poslouží následující test.

Úloha 1.

Ve staré čínské aritmetice *Kiu Čangově* (2600 let př. n. l.) je úloha: V kleci je několik králíků a bažantů. Dohromady mají 35 hlav a 94 nohy. Kolik je kterých?

Úloha 2.

Ve staré egyptské početnici *Ahmesově* (1700 let př. n. l.) se našla tato úloha: Počtář spočítal, že stádo, které zrovna vedl pastýř na pastvu, čítalo sedmdesát kusů. Ptal se pastýře, jak velkou část dobytka žene ze svého početného stáda. Pastýř odpověděl: „Vedu na pastvu dvě třetiny z třetiny stáda, které mi bylo svěřeno." Vypočtěte, kolik kusů čítalo stádo!

Úloha 3.

V učebnici Algebry *Leonharda Eulera*, slavného německého matematika (1707—1782), jsou uvedeny úlohy:

a) Skupina pánů a dam utratila 6 tolarů (1 tolar měl 24 groše); přitom každý pán utratil 8 a každá dáma 7 grošů. Kolik bylo pánů a kolik dam? (Úloha má dvě řešení.)

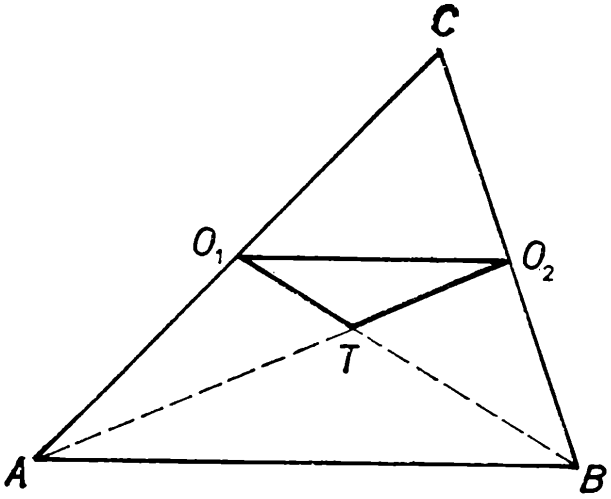
b) Dvě osoby byly dlužny $\frac{2}{9}$ rublu, každá z nich měla sice peníze, avšak ne tolik, aby mohla tento společný dluh zaplatit. První pravila proto druhé: „Dej mi $\frac{2}{3}$ svých peněz a já ihned zaplatím náš dluh." Druhá odvětila: „Dáš-li mi $\frac{3}{4}$ svých peněz, budu moci také celý dluh zaplatit." Kolik peněz měla každá osoba?

(Dokončení na str. 430)

Doplněk k jedné soutěžní úloze Rozhledů

S obr. 1 jste se mohli setkat v otištěném řešení matematické úlohy č. 8 z loňské soutěže Rozhledů (viz č. 5 tohoto ročníku, str. 210). Použijeme jej k formulaci doplňující úlohy.

Nechť $\triangle ABC$ na obr. 1 má obsah S. Body O_1, O_2 jsou po řadě středy stran AC a BC. Pomocí čísla S vyjádřete obsahy trojúhelníků O_1O_2C,



Obr. 1

ATO_1, BO_2T a ABT. Z řešení uvedené soutěžní úlohy víme, že $S_{TO_2O_1} = \frac{1}{12} S$.

Při obvyklém značení stran a výšek $\triangle ABC$ platí:

$$S_{O_1O_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{v_c}{2} = \frac{1}{4} S,$$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot c \quad \frac{v_c}{3} = \frac{1}{3} S,$$

$$S_{ATO_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{v_b}{3} = \frac{1}{6} S$$

$$S_{BO_2T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{v_a}{3} = \frac{1}{6} S$$

Všechny výpočty zkontrolujte, zvláště určení délek výšek ve všech trojúhelnících.

Pro kontrolu ještě vypočtěte jiným způsobem obsah $\triangle S_{TO_2O_1}$. Platí:

$$S_{TO_2O_1} = S - \left(\frac{1}{4} S + \frac{1}{3} S + \frac{1}{6} S + \frac{1}{6} S\right).$$

Jiří Mída

Výsledky tří geometrických úloh z čísla 9

1. Lomená čára $AEFC$, kde AE prochází bodem M, $FC || AE$ a úsečka EF leží na střední příčce čtverce, která je rovnoběžná s AB. Délka lomené čáry je 9 cm.

2. Množinou středů všech pravoúhelníků je vnitřek úsečky EF, kde E je střed strany AB a F je střed výšky v_c z bodu C na stranu AB. Tento závěr platí i v případě, že $AC \cong BC$.

3. Úloha má dvě řešení. Jsou jimi průsečíky kružnice vepsané trojúhelníku ABC a těžnice t_b.

-jm-

Omyly, které ovládly svět

Davisův-Barnesův jev

Omyl, o kterém dnes budete číst, trochu vybočuje v řady předcházejících. Jeho zařazením vás chci přesvědčit, že nezbytnou vlastností dobrého fyzika musí být i oprávněná nedůvěra k nedostatečně experimentálně ověřeným jevům, ať již fyzikálním nebo za hranicemi fyziky. Současně uvidíte, jak se dokáže skutečný vědec postavit k omylu, kterého se dopustil.

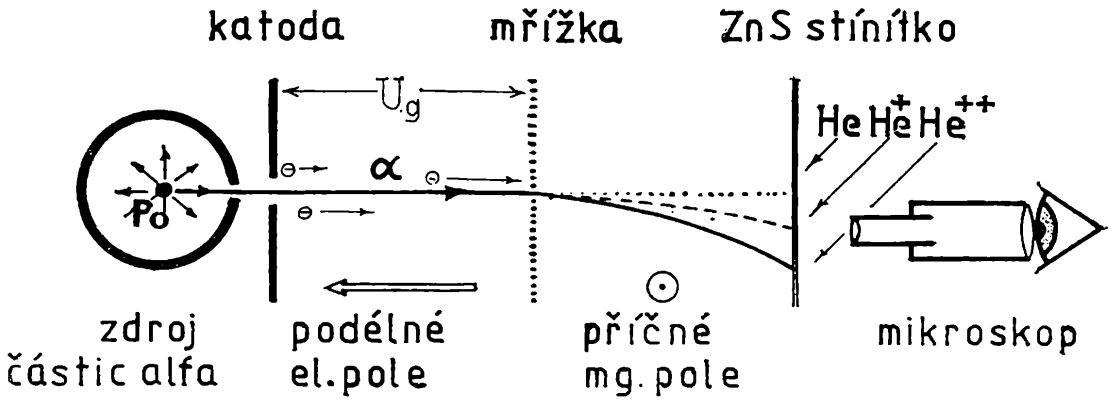
V roce 1929 vyšel v odborném časopisu *The Physical Review* článek dvou amerických fyziků z Kolumbijské univerzity. Profesoři *Davis* a *Barnes* v něm popisovali výsledky své práce, která se zabývala zachytáváním elektronů rychle letícími kladně nabitými částicemi alfa.

Myšlenka experimentu byla prostá. Jádra některých radioaktivních prvků vyzařují při svých přeměnách částice alfa, což jsou jádra helia bez elektronového obalu. Záměrem Davisa s Barnesem bylo sledování, jak se budou heliová jádra odívat elektronovým obalem. Chtěli vyzkoumat, jak bude úspěšnost zachycování elektronů záviset na jejich rychlosti.

Smysl experimentu může přiblížit hrubé přirovnání částic alfa k cyklistům, kterým jejich trenéři předávají osvěžení a přitom běží souběžně s nimi různou rychlostí.

Schéma použité aparatury vidíte na obrázku. Zdrojem částic alfa byl vzorek radioaktivního polonia. Malým otvorem v katodě vstupoval úzký svazek částic do elektrického pole mezi katodou a mřížkou. Po průletu otvorem v mřížce se dostával do oblasti, kde bylo magnetické pole zakřivující trajektorie částic. Elektrony nabízené částicím alfa k osvojení byly získávány, tak jak je to běžné, ze žhavé katody. Pomocí napětí U_g mezi katodou a mřížkou se elektrony urychlovaly podél svazku částic. Magnetické pole za mřížkou vytřídilo ze svazku lehké elektrony a tři druhy těžkých částic:

— ionty He^{++}, které nezachytily žádný elektron,



— ionty He^+ s jedním lapeným elektronem,
— elektricky neutrální atomy He s úplným dvojčlenným elektronovým obalem.

Z těžkých částic byly nejvíce odchýleny ionty He^{++}, menší odchylky od původního směru měly ionty He^+. Na elektricky neutrální atomy He magnetické pole nepůsobí.

Ke zviditelnění dopadu částic alfa posloužila metoda tehdy běžná. V cestě svazku bylo vloženo stínítko pokryté vrstvou sirníku zinečnatého. Experimentující po určitou pevně zvolenou dobu mikroskopem pozoroval a počítal záblesky, tzv. *scintilace*, vyvolané dopady jednotlivých částic na citlivou vrstvu.

Uveřejněné výsledky pokusů byly velmi zajímavé. Davis a Barnes našli asi deset napětí, při kterých zachycování elektronů prudce vzrůstalo. Přitom záchyt byl nejúčinnější přesně při těch napětích, které odpovídaly hodnotám vypočítaným z teorie, která vycházela z Bohrova planetárního modelu iontu helia. Tato shoda byla dokonalá až příliš. Neprojevoval se přitom vůbec vliv značných přitažlivých sil mezi částicemi alfa a elektrony, ani různé počáteční energie emitovaných elektronů či nedokonalá homogenita elektrického pole. O vysvětlení se snažilo mnoho význačných teoretiků té doby, avšak bez úspěchu.

Záhadu vyřešil americký fyzikální chemik *Irving Langimur*, nositel Nobelovy ceny za chemii pro rok 1932. Na uveřejněných výsledcích ho zaujaly zejména dvě skutečnosti.

První byla ostrost maxim. Barnes a Davis udávali, že jev lze pozorovat při nastavení napětí s přesností setiny voltu či ještě větší. Stačilo tedy změnit napětí o setinu voltu a efekt zmizel.

Druhým překvapujícím tvrzením autorů bylo, že jev není závislý na počtu elektronů vyzařovaných katodou a může být pozorován i při studené katodě, která neemituje prakticky žádné elektrony.

Nedůvěřivý Langimur se proto rozhodl ověřit si všechno, co publikovaný článek uváděl, na vlastní oči přímo v Barnesově laboratoři.

Pokusy vzhledem k velmi slabým zábleskům se zde prováděly téměř v úplné tmě a pozorovatel musel až půl hodiny předtím přizpůsobit oči

na tmu. Napětí nastavoval asistent pomocí děliče napětí u jiného stolu se slabým osvětlením.

Bylo dohodnuto, že napětí bude nastavováno podle Langimura, Barnes u mikroskopu počítal záblesky. Měření probíhalo jako obvykle a bylo v pořádku dokonce i tehdy, když asistent prokládal podle Langimurova návrhu řadu napětí nulami (napětí vypínal). Tehdy si Langimur povšimnul, že Barnes i v temné místnosti může postřehnout, jak asistent při vypnutém napětí nečinně sedí, zatímco při zapnutém napětí je zaměstnán jeho udržováním na zvolené hodnotě. Požádal proto asistenta, aby nastavoval řadu náhodně volených napětí stále s nejvyšší pečlivostí, jako by šlo o napětí, při kterém se očekávalo maximum. Od tohoto okamžiku neměly naměřené hodnoty s přiloženým napětím nic společného.

Barnes i Davis nemohli uvěřit Langimurovi, který je poté přesvědčoval, že odečítali halucinace, které se zcela přirozeně objevují při dlouhém upřeném pozorování ve tmě (Barnes v té době pracoval v temnu až 6 hodin denně). Proto se rozhodli, že pokus ověří objektivní registrací částic pomocí Geiger-Müllerových počítačů. O dva roky později uveřejnili ve stejném časopise sdělení, ve kterém své dřívější výsledky odvolali. Napsali v něm mimo jiné:

„Výsledky ohlášené v dřívější práci se opíraly o vizuální počítání záblesků. Záblesky vytvářené částicemi alfa na stínítku ze síranu zinečnatého jsou na prahu viditelnosti. Je možné, že řadu odečítaných dat ovlivnila sugesce nebo autosugesce pozorovatele. Zkoumali jsme proto tento problém s použitím Geigerových počítačů. Výsledky získané na základě optických pozorování nebyly potvrzeny."

Všechny události kolem Barnesova-Davisova jevu jsou dnes již jen zapomenutou historickou episodou. Stále však dávají příklad charakteru skutečného vědce, který dokáže přiznat svou chybu bez pocitu uražené ješitnosti. Současně nás učí zdravě kritickému přístupu ke zprávám o experimentech, které nejsou objektivně doloženy, anebo v jiných případech byly dokonce již nevědecky navrženy.

Úkol pro vás: Napište nám, které ze zpráv o nejrůznějších objevech či jevech, které jste v poslední době četli, pokládáte za nedůvěryhodné a proč.

Volně zpracováno podle knihy A. K. Wroblevského: „Prawda i mity w fizyce" ISKRA, Warszawa 1987, jejíž český překlad připravuje nakladatelství Mladá fronta.

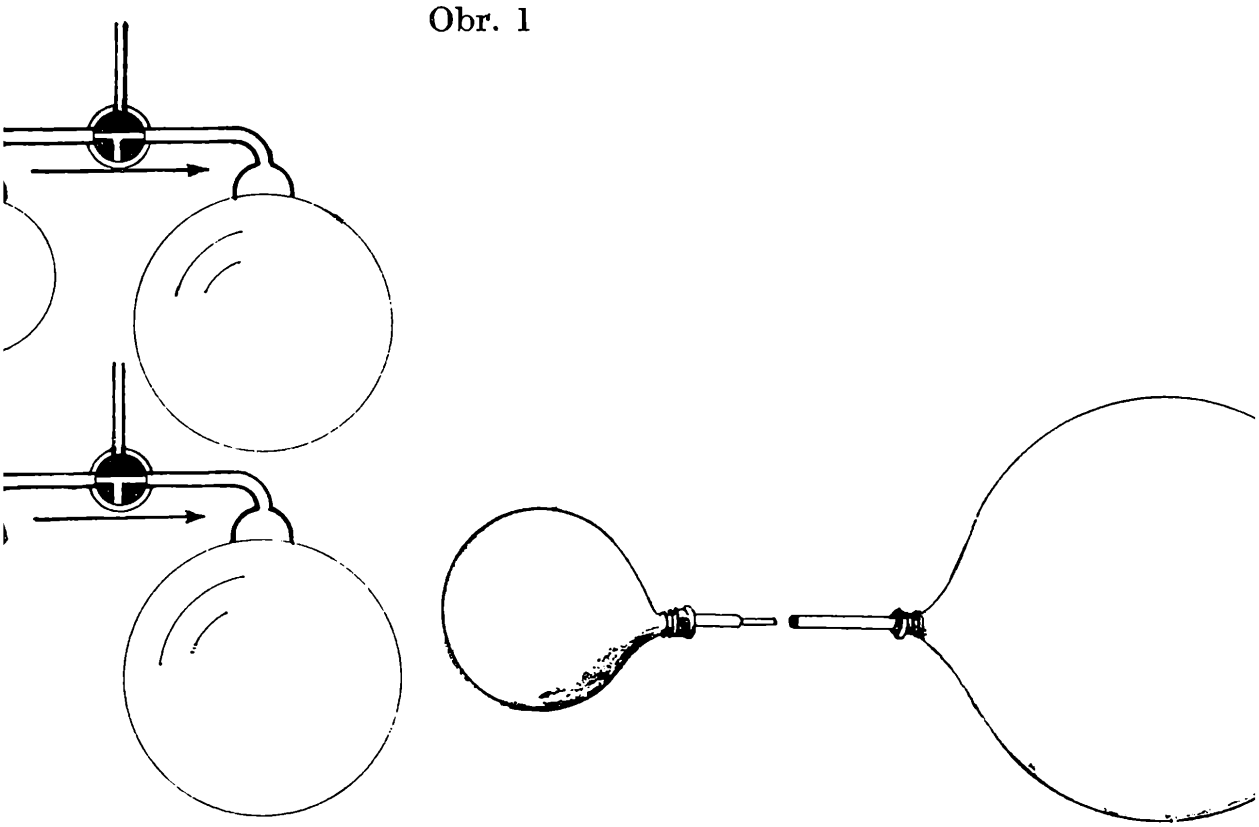
Milan Rojko

Laboratoř doma

Dva balónky stejně jako dvě bubliny?

Na obr. 1. vidíte, jak probíhá pokus, při kterém propojíme dvojici různě nafouknutých mýdlových bublin. Obrázek znázorňuje překvapující průběh pokusu, který potvrzuje, že ve větší bublině je menší tlak vzduchu, přestože obsahuje větší množství vzduchu. Vzduch proudí z menší bubliny do větší tak dlouho, až malá bublina zcela zanikne.

Obr. 1



Platí ale podobně, že do pouťového balónku nafouknutého např. na obvod 70 cm bude proudit vzduch ze stejného balónku nafouknutého na obvod 40 cm? Vyslovte a zapište nejprve svou domněnku a potom proveďte pokus s dvojicí stejných nových balónků.

Balónky nejdříve navažte na asi 5 cm dlouhá brčka a do jednoho brčka nastrčte ústřižek trubičky z konce vypsané náplně do propisky. Pomocí této trubičky můžete obě brčka vzduchotěsně propojit tak, jak naznačuje obr. 2. Brčka můžete ovšem spojit i jinak, např. pomocí tenké bužírky, gumovou trubičkou o vhodném průměru nebo gumovou zátkou s malým otvorem apod.

Úkol pro vás:

1. Napište svou domněnku o tom, jaký průběh proudění očekáváte

u pouťových balónků. Nepodvádějte! Zapište svou hypotézu skutečně před provedením pokusu.

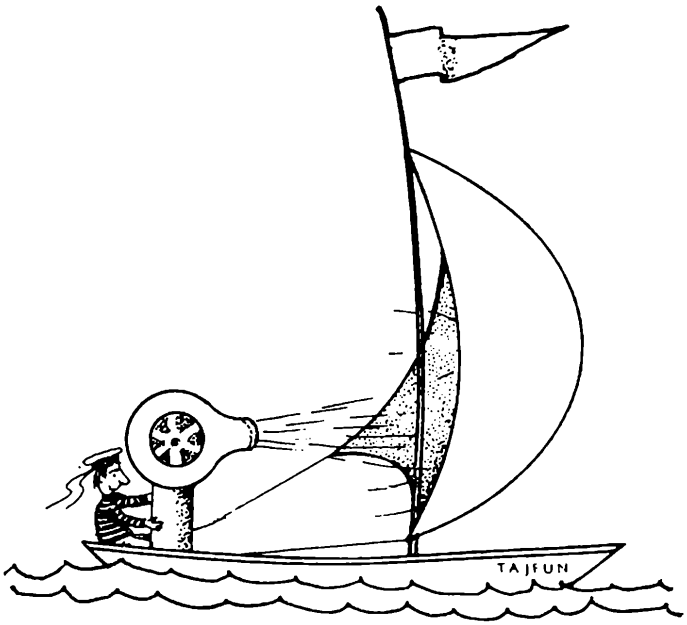
2. Popište, jak jste pokus připravili i to, co jste při něm pozorovali.
3. Pokuste se i o vysvětlení průběhu pokusu.

Milan Rojko

Fyzikální úloha

Plachtění na vlastní pohon

Podivínský majitel plachetnice se rozhodl, že opatří svou loď pro případ bezvětří náhradním pohonem. Nezvolil však ani vesla, ani lodní šroub, ale dal si zhotovit obří vysoušeč vlasů, který připojil na baterie



umístěné v lodi. Proud vzduchu z fénu pak namířil na plachtu své nehybné lodi a člun se Jaký byl však jeho údiv, když otočil fén dozadu a člun

Úkol pro vás:

Doplňte obě věty a napište i zdůvodnění svých odpovědí.

Milan Rojko

Řešení úkolů z posledních tří článků zašlete na adresu:

RNDr. Milan Rojko, CSc., MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2. Jako odměnu můžete získat zajímavou knihu.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Číselné doplňovačky

V násobení a dělení doplňte vynechané číslice.

a)

```
      2 3     8 5
    ×     . . . 5
    ---------------
        . .   2
      3 4 7 .
      9 5 7 0
  . 0 4 . . .
  ---------------
  7
```

b)

```
        .
    ×   . 3 .
    -----------
        3
        3
  3   . 3
  -----------
```

c)

```
    . .   .
  - 8 7 . 2
  -----------
            .
  - . . . . 2
  -----------
        .
    - 2 . . .
    -----------
            .
    - . . . 2 .
    -----------
        0
```

2 7 8 =

Jindřich Pěnčík

Řešení naleznete na str. 430.

Úlohy ze zahraničních časopisů

1. Mějme šachovnici 8 × 8, jejíž všechna políčka jsou pokryta kostkami domina, přičemž každá kostka pokrývá právě dvě políčka. Některé kostky jsou umístěny vertikálně a některé horizontálně. Celkový počet kostek domina je 32, počet vertikálních kostek je sudý, a tedy i počet horizontálních kostek je sudý. Je pravda, že při libovolném pokrytí šachovnice 8 × 8 kostkami domina v počtu 32 musejí být počty vertikálních i horizontálních kostek sudé?

2. Mějme tři kružnice tak, že každá z nich se dotýká zbývajících dvou. Je možné, aby obsah „křivočarého" trojúhelníka ohraničeného kružnicemi byl menší než obsah některé z kružnic?

3. Prvňáček Petr dostal za domácí úkol vyjádřit daný celočíselný počet hodin v sekundách. Doma krasopisně napsal odpověď a sešit zavřel. Když měl ve škole přečíst odpověď, otevřel sešit a tam stálo 2 34y 2x 0 (místo písmenek x, y si myslete kaňky). Navíc zapomněl, jaký počet hodin měl vyjádřit v sekundách. Avšak neztratil hlavu a po chvíli samostatné práce chybějící cifry nalezl. Dokážete to také?

4. Řešte číselné rébusy:

a) ruský

$$\begin{array}{r} \mathrm{K\ A\ Z\ A\ K} \\ +\ \mathrm{K\ A\ Z\ A\ K} \\ +\ \mathrm{K\ A\ Z\ A\ K} \\ +\ \mathrm{K\ A\ Z\ A\ K} \\ +\ \mathrm{K\ A\ Z\ A\ K} \\ +\ \mathrm{K\ A\ Z\ A\ K} \\ \hline \mathrm{B\ O\ J\ C\ Y} \end{array}$$

b) anglický $(\mathrm{H\ E})^2 = \mathrm{S\ H\ E}$

Přitom stejným písmenům odpovídají stejná čísla a navzájem různým písmenům čísla navzájem různá.

Tomáš Schütz

Řešení číselných doplňovaček ze str. 429

a) 234 785 × 3 215 = 754 833 775
b) 377 × 931 = 350 987
c) 10 711 404 : 2178 = 4918

Osmáci, zkuste to také! (Dokončení ze str. 422)

Tak co, jak se vám počítalo? Předpokládám, že jste se pousmáli nad jednoduchostí úloh. Proto pouze pro kontrolu uvádím výsledky zadaných úloh.

Úloha 1. V kleci je 23 bažantů a 12 králíků.

Úloha 2. Stádo čítá 315 kusů.

Úloha 3. a) 4 páni a 16 dam nebo 11 pánů a 8 dam.

b) První osoba měla $\frac{4}{27}$ rublu, druhá $\frac{1}{9}$ rublu.

Za správné řešení první a druhé úlohy si udělte 5 bodů, za 3. úlohu za každou část 5 bodů. Maximální zisk je tedy 20 bodů.

Pokud jste získali 20 bodů, jste pašáci a v době, ve které žili Kiu Čang nebo Ahmes, byste jistě byli předními matematiky na dvoře panovníka.

Pokud součet bodů činil 15 nebo 10, nejsou vaše matematické znalosti špatné a i vy byste zaujali tehdejší vládce svým umem.

Pokud jste dosáhli 5 nebo 0 bodů, je třeba, abyste se ještě trochu v matematice zdokonalili, neboť zatím byste se svým matematickým uměním u tehdejších panovníků asi neuspěli. Věřte však, že to nebude marná námaha a že se vynaložené úsilí odrazí v pěkných výsledcích ve škole nebo učilišti, kde budete pokračovat po prázdninách.

Doufám, že se vám náš malý výlet do historie matematiky zalíbil. Přeji vám mnoho úspěchů při řešení dalších zajímavých úloh.

Eva Pešková
4. D, gymnázium Ml. Boleslav

OLYMPIÁDY A SOČ

Úlohy I. kola 31. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

1. Na obr. A-1 je znázorněn model setrvačných vah, jimiž lze určovat hmotnost těles např. v kosmických lodích v beztížném stavu. Ke dvěma stejným plochým pružinám 1, 2 (listová pera) je připevněn můstek 3, který je možno rozkmitat ve vyznačeném směru tak, že jeho pohyb je takřka přímočarý. Prázdný můstek má hmotnost m_0 a volně kmitá s periodou T_0. Jestliže připevníme k můstku těleso o hmotnosti m, můstek kmitá s periodou $T_1 > T_0$. Jestliže k můstku připevníme těleso o neznámé hmotnosti M, můstek koná kmity s periodou T.

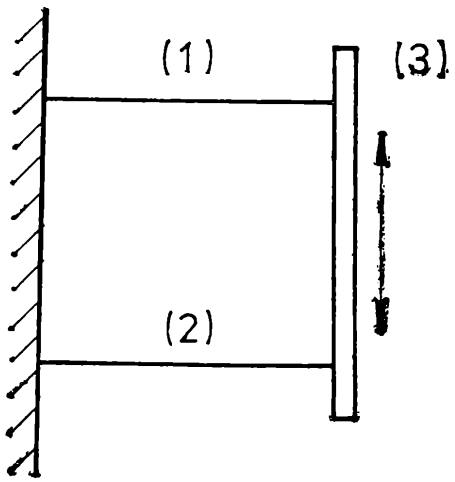
a) Určete hmotnost M tělesa, jestliže znáte veličiny m, T_1, T_0, T.

b) Popište, jak je možno použít setrvačných vah k určení hmotnosti těles.

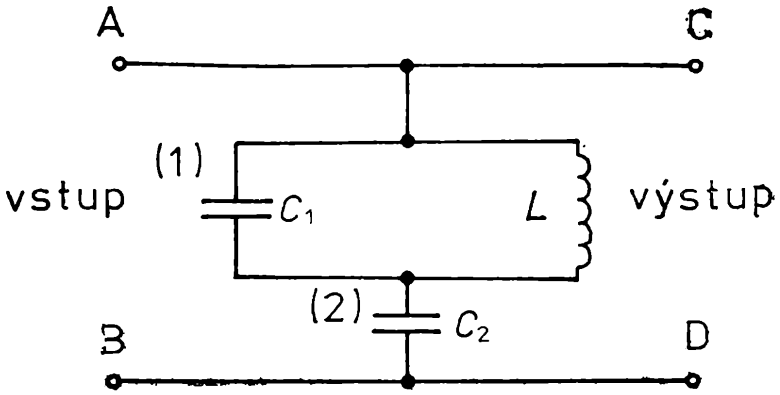
c) Pro hodnoty $m = 10$ kg, $T_0 = 1{,}0$ s, $T_1 = 1{,}5$ s nakreslete graf funkce $M = f(T)$ v intervalu $T \in \langle 1{,}0\ \text{s};\ 4{,}0\ \text{s}\rangle$.

Předpokládáme, že hmotnost pružin je malá vzhledem ke hmotnosti můstku, že při měření nebyla překročena mez pružnosti pružin a že výchylka můstku z rovnovážné polohy byla malá.

2. Zářivý tok, dopadající na plochu o obsahu právě 1 m^2, postavenou kolmo ke směru slunečních paprsků ve vzdálenosti $r_0 = 1$ AU (přesně) od středu Slunce, určuje solární konstantu $I_0 = 1360\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. Družice tvaru koule je zhotovena z materiálu s velmi dobrou tepelnou vodivostí.



Obr. A – 1



Obr. A – 2

Určete:

a) teplotu t_0, kterou bude mít družice s černým povrchem, je-li ve vzdálenosti 1,00 AU od středu Slunce;

b) teplotu t_1 družice s černým povrchem, je-li její vzdálenost od středu Slunce $r_1 = 0{,}723$ AU (r_1 je právě střední vzdálenost Venuše od Slunce);

c) vzdálenost r_2 družice s černým povrchem od středu Slunce, aby teplota družice byla $t_2 = 0$ °C;

d) teplotu t_3, kterou má družice ve vzdálenosti 1,00 AU od středu Slunce, je-li polovina povrchu družice obrácená ke Slunci černá a druhá polovina je lesklá;

e) teplotu t_4, kterou má družice ve vzdálenosti 1,00 AU od středu Slunce, je-li obrácená tak, že sluneční paprsky jsou rovnoběžné s rovinou hlavní kružnice, oddělující černou část povrchu družice od části lesklé.

Předpokládejte, že černý povrch družice dokonale pohlcuje záření a lesklý povrch nevyzařuje ani nepohlcuje záření.

3. V televíznych prijímačoch na oddelenie modulovaného zvukového signálu s frekvenciou f_z od modulovaného obrazového signálu s frekvenciou f_0 sa používa filter, ktorého schéma je na obr. A-2. Filter má zabezpečiť, aby zo vstupných svoriek AB na výstupné vzorky CD filtra sa dostával bez zmeny modulovaný obrazový signál a čo najviac tlmený modulovaný zvukový signál. Kapacita kondenzátora 2 je C_2.

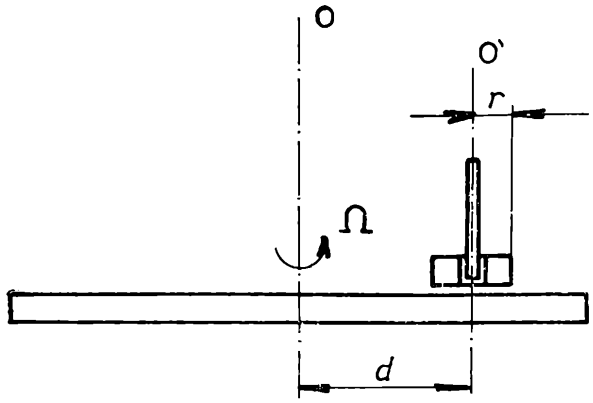
a) Vysvetlite princíp činnosti filtra.

b) Určte kapacitu C_1 kondenzátora 1.

c) Určte indukčnosť L cievky.

Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty: $f_z = 31{,}5$ MHz, $f_0 = 38{,}0$ MHz, $C_2 = 15{,}0$ pF.

4. Na povrchu Mesiaca privrátenom k Zemi pristála kozmická sonda s tvarom kruhového disku s polomerom r. Povrch sondy je natretý čiernou farbou. Miesto pristátia sondy vyfotografujeme zo Zeme tele-



Obr. A—3

skopom s priemerom D objektívu. Film umiestime do ohniskovej roviny objektivu teleskopu.

a) Objavíme na fotografii kozmickú sondu, ak je známe, že k odlíšeniu bodu na fotografii od jeho okolia je potrebný najmenej $k = 5$ % rozdiel osvetlenia? Vysvetlite.

b) Odhadnite najmenšie rozmery písmen na povrchu Mesiaca, ktoré bysme mohli pomocou uvedeného teleskopu prečítať.

Predpokladajte, že povrch Mesiaca v mieste pristátia sondy úplne odráža dopadajúce svetlo. Emulsia filmu je dostatočne jemná. Vzdialenosť Mesiaca od Zeme $d \doteq 4 \,.\, 10^8$ m, $r = 4$ m, $D = 6$ m, fotografovanie sa uskutočnilo so svetlom s vlnovou dĺžkou $\lambda = 600$ nm.

5. Veľký disk s horizontálnou rovinnou plochou sa otáča pomocou motorčeka rovnomerne s uhlovou rýchlosťou veľkosti Ω okolo pevnej zvislej osi o. Vo vzdialenosti d od osi o je pevná zvislá hriadeľ s osou o', na ktorej je nasunutý malý disk s polomerom r, $r < d$, a s hmotnosťou m. Osi o, o' sú rovnobežné (obr. A-3). Malý disk uvoľníme. Spodnou plochou sa dotýka veľkého disku a môže sa otáčať okolo hriadeľky.

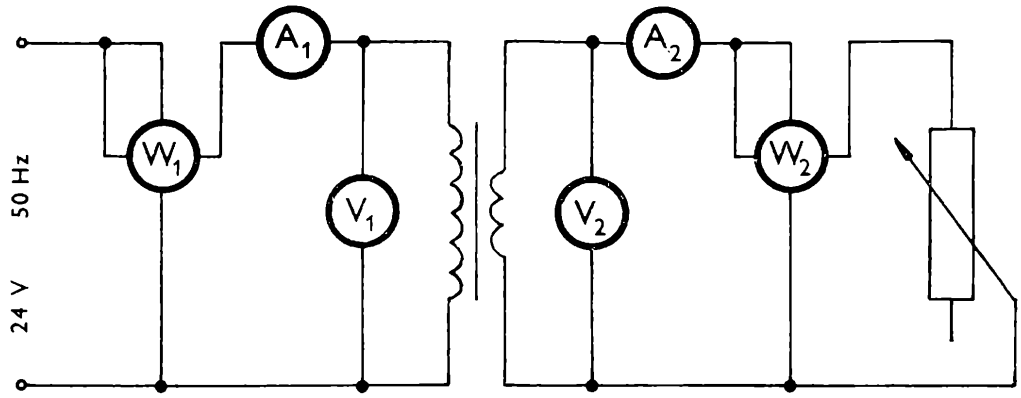
a) Určte ustálenú uhlovú rýchlosť ω malého disku vzhľadom na os o', ak predpokladáme, že veľký disk si trvale zachová uhlovú rýchlosť Ω.

b) Určte moment $\boldsymbol{M}$ síl trenia, ktoré pôsobia v ustálenom stave medzi diskami.

Predpokladajte, že malý disk je homogénny a že pre polomer R veľkého disku platí $R > r + d$.

6. Meranie účinnosti transformátora

Zostavte elektrický obvod podľa schémy na obr. A-4. K meraniu použite školský rozkladný transformátor s cievkami 600 závitov a 300 závitov. Pomocou voltmetrov a ampérmetrov merajte napätia U_1, U_2 na svorkách cievok a prúdy I_1, I_2 prechádzajúce cievkami. Pomocou wattmetrov merajte príkon P_1 primárnej cievky a príkon P_2 reostatu (približne 50 Ω, 1 A) v sekundárnom obvode transformátora. Primárnu cievku pripojte na zdroj harmonického napätia s efektívnou hodnotou 24 V až 30 V a frekvenciou 50 Hz.



Obr. A – 4

a) Merajte veličiny: U_1, I_1, P_1, U_2, I_2, P_2, pre hodnoty prúdov $I_2 =$ $= 0{,}2$ A; 0,3 A; . 0,8 A.

b) Pre každú hodnotu prúdu I_2 ďalej vypočítajte

— fázové posuny φ_1, φ_2 v primárnom a sekundárnom obvode,

— tepelné straty $R_1 I_1^2$, $R_2 I_2^2$ vo vinutiach primárnej a sekundárnej cievky,

— tepelné straty $P_ž$ v jadre transformátora,

— účinnosť $\eta = P_2 : P_1$ transformátora.

Všetky namerané a vypočítané veličiny zaznamenajte do tabuľky.

c) Zostrojte grafy funkcií $\varphi_1 = f_1(P_2)$, $\eta = f_2(I_2)$.

Pre spracovanie výsledkov meraní použite vhodnú výpočtovú techniku.

7. Optické vlákno s dĺžkou d sa skladá z valcového jadra s polomerom r_1 a indexom lomu n_1. Koaxiálny plášť vlákna má index lomu $n_2 < n_1$. Rýchlosť šírenia svetla vo vákuu je c.

a) Určte maximálny uhol α_m, pod ktorým môže dopadať svetelný lúč do stredu kruhovej základne optického vlákna, aby sa svetlo šírilo vláknom bezstratovo.

b) Určte dobu t potrebnú na prechod svetla optickým vláknom pre lúč dopadajúci do stredu kruhovej základne vlákna pod uhlom α.

c) Určte rozdiel $\triangle t$ časov medzi najpomalším a najrýchlejším bezstratovým prechodom svetla týmto vláknom.

d) Pod akým uhlom α_v vystupuje lúč z optického vlákna, ak dopadol do stredu kruhovej základne optického vlákna pod uhlom $\alpha < \alpha_m$?

e) Určte ohniskovú vzdialenosť f spojnej šošovky, ktorá má sústrediť rovnobežné svetelné lúče do stredu kruhovej základne optického vlákna tak, aby sa uskutočnil bezstratový prechod svetla vláknom. Předpokladajte, že priemer šošovky je D_1.

Riešte všeobecne a potom pre hodnoty: $d = 1000$ m, $n_1 = 1{,}615$, $n_2 =$ $= 1{,}600$, $\alpha = 7{,}0°$, $D_1 = 50{,}00$ μm, rýchlosť svetla vo vákuu $c = 3{,}000$. 10^8 m . s^{-1}. Pod bezstratovým prechodom svetla rozumieme stav, pri ktorom svetlo neopustí jadro vlákna.

Kategorie B

1. Železničný plošinový vagón s hmotnosťou M, pohybujúci sa po priamej vodorovnej trati rýchlosťou $\mathbf{v}_0$, narazí na zarážku, umiestnenú na koľajniciach. V dôsledku toho začne naň pôsobiť konštantná brzdiaca sila $\mathbf{F}$, vyvolaná trením zarážky o koľajnice. V strede plošiny vagóna je uložená debna s hmotnosťou m. Súčiniteľ šmykového trenia debny o plošinu vagóna je f. Vzdialenosť náprav vagóna je l.

a) Opíšte pohyb vagóna a debny od okamihu nárazu. Urobte diskusiu riešenia vzhľadom na veličinu f.

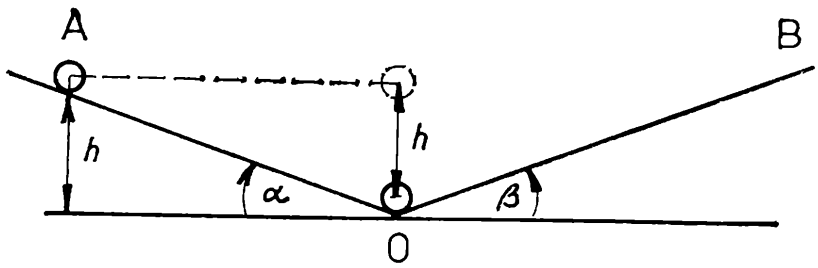
b) Graficky znázornite časovú závislosť veľkosti rýchlosti vagóna a debny vzhľadom na vhodne zvolenú inerciálnu sústavu súradníc.

c) Graficky znázornite časovú závislosť veľkosti rýchlosti debny vzhľadom na vagón.

d) Zostane po nárazu ťažisko nákladu nad spojnicou náprav? Zdôvodnite.

Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty: $M = 1{,}0 \ 10^4$ kg, $v_0 = 10$ m . s^{-1}, $F = 1{,}0 \ 10^5$ N, $m = 4{,}0 \,.\, 10^3$ kg, $f = 0{,}50$, $l = 18$ m, $g = 9{,}8$ m . s^{-2}.

2. Dve naklonené roviny, zvierajúce s vodorovnou rovinou uhly α, β, sú umiestnené oproti sebe (obr. B-1). Guľôčku s hmotnosťou m a s polo-



Obr. B – 1

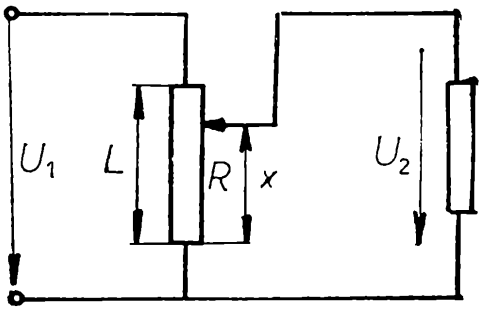
merom r umiestime do bodu A, v ktorom je ťažisko guľôčky vo výške h nad ťažiskom guľôčky v jej nejnižšej polohe, $h \gg r$. Guľôčka sa bude po naklonených rovinách valiť bez prekĺzavania.

a) Určte zrýchlenia, s ktorými sa bude pohybovať ťažisko guľôčky počas jednotlivých fáz pohybu.

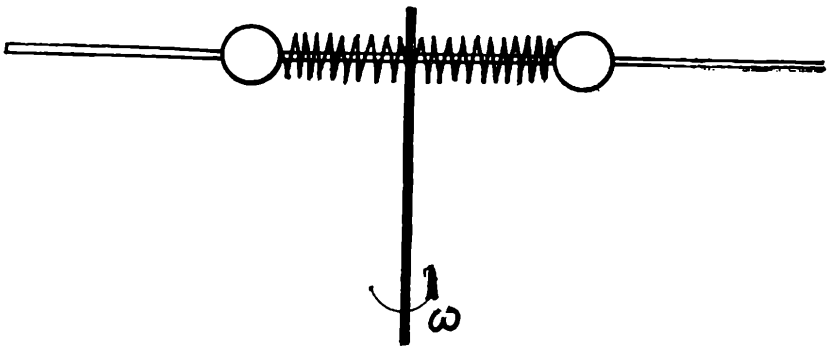
b) Vypočítajte periódu T pohybu guľôčky.

c) Nájdite závislosť zrýchlenia a rýchlosti ťažiska guľôčky od času a znázornite ich graficky pre interval $t \in \langle 0; 2T \rangle$. Moment zotrvačnosti plnej gule je $J = \frac{2}{5} m r^2$. Odpor vzduchu a valivý odpor guľôčky zanedbajte. Predpokladajte, že guľôčka prechádza v najnižšom bode plynule, bez nárazu.

Riešte najprv všeobecne pre malé uhly α, β, potom pre hodnoty: $\alpha = 10°$, $\beta = 15°$, $h = 20$ cm, $g \doteq 9{,}8$ m . s^{-2}.



Obr. B—2



Obr. B—3

3. Lineární válcový potenciometr o celkovém odporu R je připojen ke zdroji stálého napětí U_1. Ke svorkám potenciometru je připojen spotřebič o odporu r. Celková délka odporového válce je L, vzdálenost jezdce od konce potenciometru je x (obr. B—2). Určete, jak závisí napěťový přenos $A = U_2 : U_1$ na poměru $\xi = x : L$. Získanou závislost $(A; \xi)$ zobrazte ve vhodném měřítku na milimetrový papír pro hodnoty

a) $r = 10\,R$, b) $r = R$, c) $10r = R$.

Ve všech případech určete, pro kterou hodnotu ξ je napěťový přenos roven hodnotě 0,5.

Poznámka: Při rýsování volte postupně $\xi = 0{,}1;\ 0{,}2;$ atd.

4. Obal balónu s príslušenstvom má hmotnosť m, maximálny objem balónu je V_0. Teplota t_0 okolitého vzduchu nezávisí od výšky. Tlak vzduchu pri zemi je p_0. Balón naplníme horúcim vzduchom s teplotou t_1, objemom V_1 a potom balón uzavrieme.

a) Určte výslednú silu $\boldsymbol{F}$, ktorá pôsobí na balón. Poletí balón nahor, alebo nie. Zdôvodnite.

b) V akej výške balón zastane?

c) Navrhnite spôsob, ako určiť objem V_{1m} balónu, keď balón dosiahne maximálnu výšku. Určte, aká je tato výška.

Výmenu tepla medzi balónom a okolím zanedbajte. Dej v plyne vo vnútri balóna považujte za adiabatický, pre ktorý platí stavová rovnica plynov a vzťah $pV^{\varkappa} =$ konšt. Atmosférický tlak závisí od výšky podľa vzťahu $p = p_0 \exp\left(\dfrac{-g\,h\,M_m}{R\,T_0}\right)$. Riešte všeobecne, potom pre hodnoty: $R = 8{,}3 \,.\, 10^3\,\mathrm{J}\,.\,\mathrm{K}^{-1}.\,\mathrm{kmol}^{-1}$, $M_m = 29\,\mathrm{kg}\,.\,\mathrm{kmol}^{-1}$, $\varkappa = 1{,}4$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-2}$, $p_0 = 1{,}0 \,.\, 10^5\,\mathrm{Pa}$, $V_0 = 400\,\mathrm{m}^3$, $t_0 = 10\,°\mathrm{C}$, $t_1 = 100\,°\mathrm{C}$, $m = 100\,\mathrm{kg}$, $V_{11} = 390\,\mathrm{m}^3$ a tiež pre hodnotu $V_{12} = 360\,\mathrm{m}^3$.

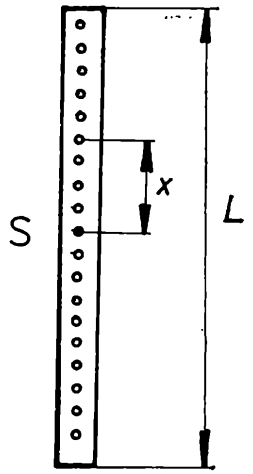
5. Na vodorovnej tyči, ktorá je v strede upevnená na zvislom hriadeli, sú pružinami s rovnakou tuhosťou k pripevnené k stredu tyče dve guľôčky s hmotnosťami m. Guľôčky sa pozdĺž tyče môžu pohybovať bez trenia. Dĺžka nezaťažených pružín je l_0. Zariadenie je uvádzané do rotačného pohybu okolo zvislej osi motorčekom (obr. B-3).

a) Aká bude rovnovážna poloha guľôčiek pri zadanej uhlovej rýchlosti ω sústavy. Znázornite aj graficky.

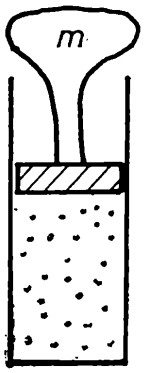
b) Určte kinetickú energiu E_k sústavy pri uhlovej rýchlosti ω.

c) Za akú dobu t_0 po zapnutí motorčeka sa vzdialenosť guľôčiek od stredu tyče zdvojnásobí? Aká bude v tomto okamihu uhlová rýchlosť sústavy? Predpokladajte, že výkon P motorčeka je konštantný počas rozbiehania a že trenie v ložiskách je zanedbateľné.

d) Pri ktorej uhlovej rýchlosti ω_0 sa otáčanie sústavy ustáli pri zadanom výkone P motorčeka, ak uvážime moment M_t trecích síl v ložiskách. Hmotnosť tyče a pružín zanedbajte. Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty: $k = 50\ \mathrm{N\,.\,m^{-1}}$, $P = 0{,}3\ \mathrm{W}$, $m = 0{,}5\ \mathrm{kg}$, $l_0 = 0{,}10\ \mathrm{m}$, $\omega = 5{,}0\ \mathrm{s^{-1}}$.



Obr. B–4



Obr. B–5

6. Ověření vztahu pro výpočet doby kmitu tyčového kyvadla

Teorie: Tenká homogenní tyč má délku L a má konstantní průřez. Provrtáme-li ji ve vzdálenosti x od středu a navlékneme-li ji na vodorovnou osu, vznikne kyvadlo. Doba kmitu kyvadla při malé amplitudě výchylky se vypočte dle vztahu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 + 12x^2}{12gx}}\,. \tag{1}$$

Jestliže $x = x_m = \dfrac{L}{\sqrt{12}}$, (2)

je doba kmitu minimální a má hodnotu

$$T = T_m = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g\sqrt{3}}} \tag{3}$$

Úkol:

a) Odvoďte vztahy (1), (2), (3) pro malé výchylky amplitudy. Zdůvodněte požadavek, že výchylka amplitudy musí být malá.

b) Experimentálně ověřte platnost uvedených vztahů.

Provedení: Dřevěnou tyč obdélníkového průřezu dlouhou 1 m provrtejte nejprve v těžišti a potom v pravidelných vzdálenostech řadou otvorů o průměru 6 mm. Vzdálenost středů sousedních otvorů volte 5 cm (obr. B-4). Osu můžete zhotovit z ocelového drátu o průměru 4 až 5 mm, který na jednom konci zabrousíte do tvaru břitu. Takto zhotovenou osu upevníte vodorovně do masivního stojanu. Tyč navlékejte jednotlivými otvory na osu a měřte dobu kmitu při malé amplitudě výchylek. Využijte všech otvorů. Naměřené hodnoty T_e a hodnoty vypočtené T_v dle vztahu (1) zapište do tabulky:

$\frac{x}{\mathrm{m}}$					
$\frac{T_e}{\mathrm{s}}$					
$\frac{T_v}{\mathrm{s}}$					

Získané výsledky zobrazte graficky a posuďte, zda jsou splněny vztahy (1), (2), (3). Případné odchylky naměřených hodnot od vypočtených hodnot vysvětlete. Při určení T_e z naměřených hodnot můžete vhodně využít výpočetní techniky. Výpis, případně program přiložte k protokolu.

7. U některých dopravních prostředků se používá pneumatické odpružení. Uvažujme jednoduchý model podle obr. B-5. Svislý válec naplněný vzduchem je uzavřen pístem se zátěží, přičemž hmotnost pístu se zátěží je m. Jestliže válec rozkmitáme ve svislém směru (např. spojením s nápravou vozidla, které se pohybuje po zvlněné vozovce), přenášejí se tyto kmity na zátěž.

a) Stanovte periodu kmitů válce, při které bude amplituda výchylky zátěže maximální, je-li L_0 daná rovnovážná délka vzduchového sloupce.

b) Navrhněte průměr a minimální délku válce tak, aby při hmotnosti m pístu se závažím, při požadované rezonanční frekvenci f_r a při předpokládané maximální amplitudě A_m výchylky kmitů pístu kolem rovnovážné polohy nepřekročil tlak plynu ve válci maximální hodnotu p_m.

Úlohu řešte obecně, potom pro hodnoty: $L_0 = 30$ cm, $m = 10$ t, $f_r = 1{,}0$ Hz, $A_m = 10$ cm, $p_m = 20$ MPa. Ostatní hodnoty najděte v tabulkách.

Poznámka: Atmosférický tlak považujte v porovnání s tlakem plynu ve válci za zanedbatelný. Děje v plynech považujte za adiabatické. Dále platí $(1 + x)^n \doteq 1 + nx$, je-li $x \ll 1$; tohoto přibližného vztahu je vhodné použít.

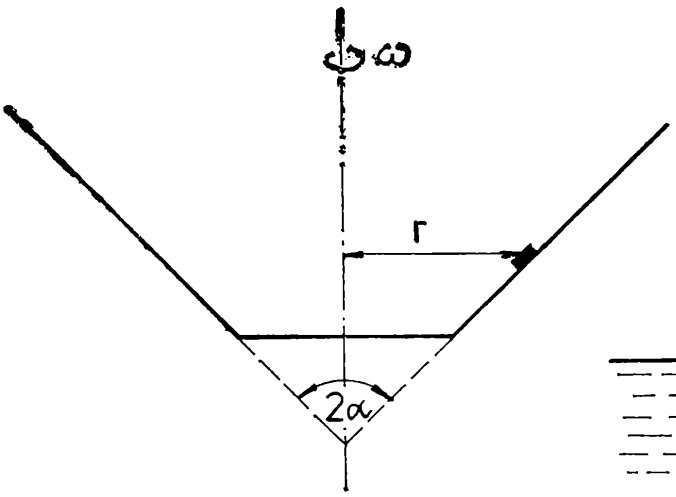
Kategorie C

1. Dvě malé kuličky, každá o hmotnosti m, jsou zavěšeny na hedvábných vláknech délky d a zanedbatelné hmotnosti. Obě vlákna jsou upevněna ve společném bodě. Zelektrizujeme-li každou z kuliček stejným nábojem Q, odchýlí se každé z vláken o úhel φ od svislého směru. Kuličky považujeme za hmotné body.

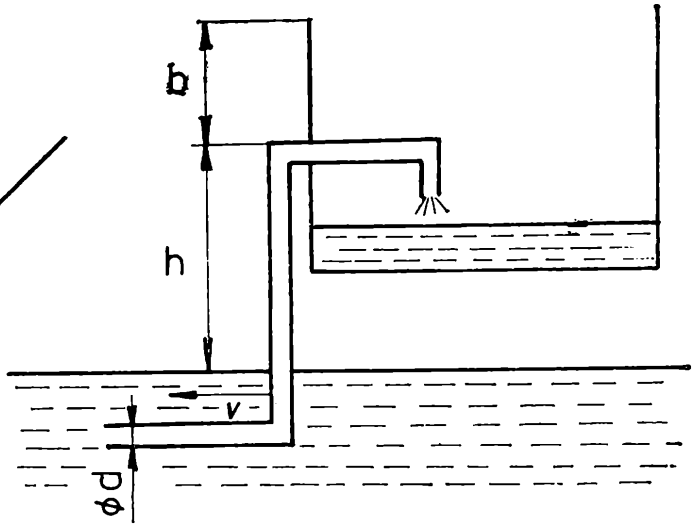
a) Určete náboj Q. Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m = 5{,}0 \,.\, 10^{-6}$ kg, $d = 10$ cm, $\varphi = 30°$.

b) Pro uvedené hodnoty m, d sestrojte graf závislosti náboje Q na úhlu φ z intervalu $\langle 10°; 80° \rangle$.

2. Na vnitřní stěně násypky tvaru komolého kužele s vrcholovým úhlem 2α leží krychle velmi malých rozměrů. Vzdálenost jejího těžiště od osy kužele je r. Kužel se otáčí kolem své osy stálou úhlovou rychlostí



Obr. C—1



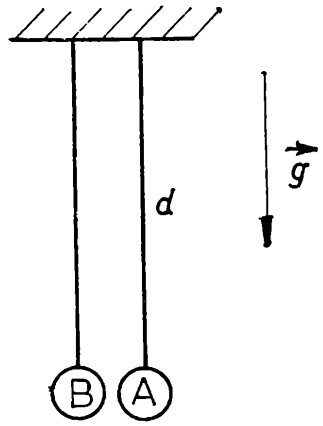
Obr. C—2

ω (obr. C-1). Určete úhlové rychlosti rotace kuželu, při nichž krychle nemění svou polohu vzhledem k násypce. Součinitel statického tření mezi krychlí a stěnou kužele je f. Při řešení považujte krychli za hmotný bod. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $f = 0{,}20$, $\alpha = 45°$, $r = 3{,}0$ cm, $g = 9{,}8$ m s^{-2}.

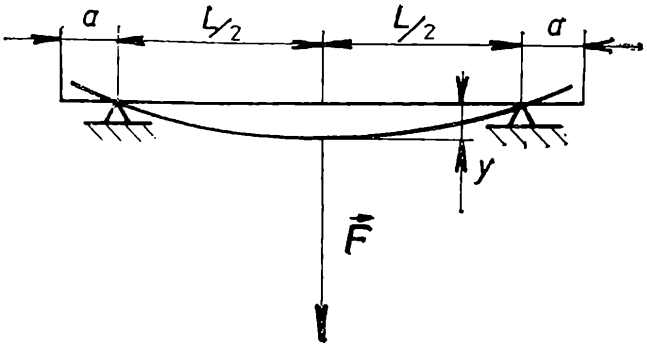
3. Dříve parní lokomotivy někdy doplňovaly vodu do nádrže bez zastavení během jízdy. Mezi kolejnicemi byl pro tyto účely postaven dlouhý kanál, naplněný klidnou vodou. Do něj se za jízdy spustila z lokomotivy trubice, kterou voda za jízdy natekla do cisterny. Schéma zařízení je na obr. C-2.

a) Vysvětlete princip činnosti zobrazeného zařízení.

b) Určete rychlost $\mathbf{v}_1$ lokomotivy, při které se na dráze s do nádrže lokomotivy načerpá voda o objemu V, pohybuje-li se lokomotiva rovnoměrným přímočarým pohybem a vodu považujeme za ideální kapalinu.



Obr. C—3



Obr. C—4

c) Okraj nádrže je ve výšce b nad horní částí potrubí (obr. C-2). Za jaké podmínky může voda přetéci přes okraj nádrže?
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $s = 1{,}0 \,.\, 10^3$ m, $V = 3{,}0$ m^3, $d = 0{,}10$ m, $h = 3{,}5$ m, $b = 0{,}5$ m, $g = 9{,}8$ m . s^{-2}.

4. Na trámu jsou zavěšena dvě kyvadla A, B. Každé z kyvadel tvoří homogenní dokonale pružná koule, zavěšená na vlákně délky d. Vlákno má zanedbatelnou hmotnost. Obě koule mají stejný poloměr. V rovnovážné poloze jsou vlákna obou kyvadel rovnoběžná a koule se navzájem dotýkají. Kyvadlo A vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel α, $\alpha \leq 90°$, a potom pustíme. Při návratu v dolní rovnovážné poloze kyvadlo A narazí do kyvadla B přímým středovým rázem (obr. C—3).

a) Určete okamžité rychlosti $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ obou koulí bezprostředně po nárazu, je-li poměr $m_A : m_B$ hmotností koulí roven p.

b) Určete, při jakém poměru hmotností m_A a m_B vystoupí obě koule po nárazu do stejné výšky.

c) Určete, při jakém poměru m_A m_B se kyvadlo B po nárazu vychýlí o úhel $\beta \leq 90°$.

d) Určete, při jakém nejmenším poměru m_A m_B se napnuté vlákno kyvadla B vychýlí o úhel 180°.

e) Řešte úlohu d) za předpokladu, že vlákna kyvadel nahradíme pevnými tyčemi stejné délky d a zanedbatelné hmotnosti. Tření v závěsech a odpor vzduchu při pohybu kyvadel neuvažujeme. Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro úhly $\alpha = 90°$, $\beta = 45°$, $p = 2{,}0$, $d = 1{,}0$ m, $g = 9{,}8$ m . s^{-2}.

5. Kovové těleso o hmotnosti m_1 a o teplotě t_1 bylo vloženo do tepelně izolované nádoby o objemu V_0. Potom byla nádoba pevně uzavřena. Vzduch měl před vložením tělesa do nádoby teplotu t_0 a tlak p_0. Kovové těleso má hustotu ϱ, měrnou tepelnou kapacitu c a jeho součinitel teplotní délkové roztažnosti je α. Určete tlak plynu po dosažení tepelné rovnováhy v nádobě. Vzduch považujte za dvouatomový ideální plyn, změnu teploty nádoby zanedbejte.
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m_1 = 1{,}00$ kg, $p_0 = 1{,}00 \,.\, 10^5$ Pa, $t_1 = 200$ °C, $t_0 = 0{,}00$ °C, $V_0 = 10{,}0$ dm^3, $c = 383$ J . kg^{-1} . K^{-1},

$\alpha = 17{,}0 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, $\varrho = 8{,}93 \,.\, 10^3\ \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^{-3}$. Pro dané hodnoty ověřte, zda lze zanedbat při řešení úlohy i změny objemu kovového tělesa.

6. Studium deformace tyče ohybem

Působí-li na kovovou homogenní tyč podepřenou v bodech A, B síla $\boldsymbol{F}$ (obr. C-4), potom pro průhyb y způsobený pružnou deformací ohybem tyče platí

$$y = \frac{1}{48\,EJ}\,F\,L^3 + \frac{G}{48\,EJ}\left(\frac{5}{8}\,L^3 - 3\,a^2L\right) \qquad \ldots (1),$$

kde E je modul pružnosti v tahu, G je tíha tyče. Veličina J se nazývá moment setrvačnosti průřezu. Pro kruhový průřez o průměru d platí $J = \frac{1}{64}\,\pi\,d^4$. . (2). Význam ostatních veličin ve vztahu (1) je zřejmý z obr. C-4. Vztahu (1) je možno použít k měření modulu pružnosti E tyče. K měření volte ocelovou tyč kruhového průřezu o průměru přibližně 5 mm a délky přibližně 1 m.

a) Navrhněte a sestavte zařízení vhodné k měření (podle obr. C-4). Veličiny a, L, d, G, y, F měřte s přesností alespoň na dvě platné číslice.

b) Vztah (2) dosaďte do vztahu (1). Známe-li všechny hodnoty veličin popisujících vlastnosti tyče, jakou matematickou funkcí je funkce $y = f(F)$?

c) Svůj závěr z úkolu b) ověřte měřením. Navrhněte vhodný způsob měření a změřte hodnoty y alespoň pro 10 různých hodnot velikosti síly $\boldsymbol{F}$. Při měření tyč postupně zatěžujte (naměřené hodnoty y označte v tabulce symbolem $y\uparrow$) a po dosažení maximální zvolené velikosti síly $\boldsymbol{F}$ opět tyč postupně odlehčujte, tj. snižujte hodnoty velikosti síly $\boldsymbol{F}$ (v tabulce označte odpovídající hodnoty symbolem $y\downarrow$). Vypočtete střední hodnoty $y_s = \frac{y\uparrow + y\downarrow}{2}$. Z naměřených hodnot sestrojte graf $y_s = f(F)$. Porovnejte tento graf s předpokládaným průběhem funkce $y = f(F)$. Případné odchylky zdůvodněte.

d) Vyjádřete ze vztahů (1), (2) modul pružnosti E materiálu tyče. Pomocí tohoto vztahu vypočtěte E z hodnot y_s, F, získaných z lineární části grafu $y_s = f(F)$.

e) Druhý člen na pravé straně vztahu (1) vyjadřuje průhyb tyče způsobený tíhovou silou, působící na tyč. Navrhněte postup měření E tak, abychom tento člen nemuseli při výpočtu uvažovat.

Poznámka: Nemůžete-li použít tyče kruhového průřezu, použijte tyče obdélníkového průřezu, pro kterou $J = \frac{1}{12}\,bh^3$, kde b, h jsou rozměry průřezu tyče; (obr. C-4).

7. Druhý Jupiterův měsíc Europa obíhá kolem Jupitera po kružnici

o poloměru r_1 se siderickou oběžnou dobou T_1. Třetí Jupiterův měsíc Ganymed má siderickou oběžnou dobu T_2.

Střední poloměr Jupitera je R. Za předpokladu, že hmotnosti i střední poloměry obou měsíců jsou vzhledem k hmotnosti a střednímu poloměru Jupitera malé, vypočtěte:

a) velikost rychlosti, kterou obíhá Europa kolem Jupitera,

b) hmotnost Jupitera,

c) poloměr kružnice, po které se pohybuje Ganymed kolem Jupitera,

d) zorný úhel, pod kterým vidí Jupitera pozorovatel z povrchu Europy,

e) nejkratší dobu, za kterou se opakuje taková poloha Jupitera, Europy a Ganymeda, ve které Europa je právě mezi Jupiterem a Ganymedem a středy všech tří těles leží v téže přímce.

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $r_1 = 6{,}71 \quad 10^5$ km, $T_1 = 3{,}55$ d, $T_2 = 7{,}16$ d, $R = 7{,}14 \,.\, 10^4$ km.

K řešení si prostudujte část publikace Volf, I.-Ungermann, Z.: Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli, Škola mladých fyziků, sv. 17, s. 9 až 47.

Kalendár M-F: jún 1989

1. 6. 1849 sa v Žamberku narodil *August Seydler*, český fyzik. Bol profesorom teoretickej fyziky a astronómie na univerzite v Prahe. Vydal prvé české učebnice teoretickej fyziky (1880—1895). Bol učiteľom významných českých fyzikov staršej generácie.
3. 6. 1894 sa v Novosile (Orlovská oblasť) narodil *Ivan Kosmič Andronov*, sovietsky matematik — pedagóg. Publikoval viac ako 100 prác z metodiky matematiky a histórie matematiky. Napísal 13 učebníc.
3. 6. 1899 sa v Budapešti narodil *György Békésy*, americký inžinier maďarského pôvodu. Vyštudoval chémiu, bol profesorom experimentálnej fyziky. Za objav fyzikálneho mechanizmu dráždenia v ušnom slimáku dostal roku 1961 Nobelovu cenu za fyziológiu a medicínu.
4. 6. 1754 sa v Bratislave narodil *Ján František Zach*, slovenský astronóm a matematik. Študoval aberáciu a nutáciu hviezd i pohyb Slnka. Robil gravimetrické výskumy.
5. 6. 1819 sa narodil *John Couch Adams*, anglický astronóm. Na základe porúch v obehu planéty Urán vypočítal polohu neznámej planéty Neptún (nezávisle od Verriera).
5. 6. 1909 sa narodil *Pál Gombás*, maďarský fyzik. Vedecky pracoval v oblasti atómovej a jadrovej fyziky, kvantovej mechaniky. Rozpracoval štatistickú teóriu atómu.

5. 6. 1964 zomrel *Tadasi Nakajama*, japonský matematik. Ovplyvnil súčasnú algebru, teóriu grúp a teóriu ideálov.

6. 6. 1929 sa v Nimmahadde narodil *Malemphati Madhusudana Rao*, indický matematik. Rozpracoval funkcionálnu analýzu, stochastické procesy, funkcionálnu algebru.

7. 6. 1954 zomrel *Alan Mathison Turing*, anglický matematik. Vypracoval koncepciu univerzálnych algoritmických počítačov.

7. 6. 1979 zomrel *Alexej Ivanovič Markuševič*, sovietsky matematik — pedagóg. Pracoval v oblasti funkcionálnej analýzy a teórie analytických funkcií. Ovplyvnil metodiku vyučovania matematiky.

9. 6. 1969 zomrel *Harold Davenport*, anglický matematik. Študoval algebraickú teóriu čísel.

10. 6. 1914 sa narodil *Zdeněk Matyáš*, český fyzik. Vypracoval novú teóriu topenia iontových kryštálov.

10. 6. 1974 zomrel *Jaroslav Hájek*, český matematik. Bol odborníkom v teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistike. Vydal „Teorie pořadových testů", bol laureátom štátnej ceny (1973).

15. 6. 1894 sa v Kamence-Podolnyj narodil *Nikolaj Grigorievič Čebotarev*, sovietsky matematik. Rozvinul modernú algebru, Galoisovu teóriu grúp, teóriu analytických funkcií.

15. 6. 1929 zomrel *Trajan Lalescu*, rumúnsky matematik. Rozvinul teóriu integrálnych rovníc.

18. 6. 1864 sa vo Varšave narodil *Vladislav Natanson*, poľský fyzik. Vedecky pracoval v oblasti kinetickej teórie plynov, termodynamike, elektrónovej teórii i kvantovej mechanike.

19. 6. 1884 sa narodil *Miloš Kössler*, český matematik. Pracoval v teórii analytických funkcií a teórii čísel.

19. 6. 1899 sa narodil *Sergej Eduardovič Friš*, sovietsky fyzik. Úspešne pracoval v spektroskopii a optike.

21. 6. 1874 zomrel *Anders Jöns Angström*, švédsky fyzik. V slnečnom spektre objavil vodík, položil základy spektroskopie.

22. 6. 1864 sa v Aleksotách pri Kaunase (Lotyšsko) narodil *Hermann Minkowski*, nemecký matematik. Zaviedol geometrické metódy do teórie čísel, rozvinul teóriu priestorových mriežok. Rozpracoval matematické základy špeciálnej teórie relativity tým, že priestor a čas zhrnul do štvorrozmerného časopriestorového kontinua.

25. 6. 1864 sa v Briesene narodil *Walther Hermann Nernst*, nemecký fyzik a chemik. Formuloval tretiu hlavnú vetu termodynamiky, rozpracoval problematiku nízkych teplôt.

26. 6. 1824 sa v Belfaste narodil *William Thomson*, lord *Kelvin of Largs*, anglický fyzik škótskeho pôvodu. Zaviedol pojem absolútnej teploty, vypracoval teóriu termoelektrických javov. Významne prispel aj do mechaniky, hydrodynamiky a geofyziky.

27. 6. 1854 sa v Sundborne narodil *Anders Linstedt*, švédsky matematik. Pracoval v oblasti integrálnych rovníc, riešil problémy nebeskej mechaniky i matematickej štatistiky.

30.6. 1919 vo Withame zomrel *John William Strutt*, lord Rayleigh, anglický fyzik. Študoval rozptyl svetla, vysvetlil sčervenenie slnka pri východe a západe. Zaoberal sa aj akustikou, optikou a elektrinou. Dostal Nobelovu cenu za fyziku (1904).

INFORMACE

Všem čtenářům Rozhledů sdělujeme, že pro příští školní rok se zvýší náklad našeho časopisu. Využijte této příležitosti a zajistěte si pravidelné doručování Rozhledů u Poštovní novinové služby.

V příštím ročníku dostane náš časopis novou obálku. Bude pokračovat rubrika určená pro žáky základních škol a opět bude vyhlášena soutěž. Těšíme se na vaše řešení, ohlasy a příspěvky.

Našim čtenářům přejeme příjemné prázdniny a mnoho úspěchů ve školním roce 1989/90.

REDAKČNÍ KRUH

Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topoľčany; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

HUMORY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Tři anekdoty o fyzicích

Z antologie historek o fyzice a fyzicích, kterou sestavili R. L. Weber a E. Mendoza a která vyšla v Londýně pod názvem „A Random Walk in Science", vybíráme tři známé anekdoty o významných fyzicích.

Významný americký fyzik *Henry Rowland* (1848—1901) je znám svými pracemi v oblasti elektrodynamiky, nauky o teple, optiky a spektroskopie. Zdokonalil difrakční mřížky a techniku jejich výroby, sestavil atlas slunečního spektra. Nejznámější je experiment nesoucí jeho jméno, jímž lze dokázat, že rotující nabité těleso vytváří magnetické pole týchž vlastností jako elektrický proud protékající vodivou smyčkou.

O Rowlandovi se vypráví, že byl jednou předvolán jako expert svědčit při nějakém soudním procesu. Státní zástupce mu při této příležitosti položil otázku: „Kdo je nejvýznamnějším americkým fyzikem?", načež Rowland bez uzardění odpověděl: „To jsem já." Když se později sešel s jedním ze svých přátel, ten mu dal jemně najevo, že taková odpověď nesvědčí zrovna o přílišné skromnosti. Rowland to zkroušeně uznal, ale namítl: „Co jsem mohl dělat, vždyť jsem vypovídal pod přísahou!"

Walter Nernst (1864—1941), laureát Nobelovy ceny a jeden ze zakladatelů fyzikální chemie, je znám mnoha objevy v termodynamice a fyzice pevných látek. Jednou byl požádán, aby předvedl pruskému císařskému dvoru použití radiovln. Umístil tedy radiový přijímač v císařském zámku a sám vysílal z fyzikálního ústavu gramofonový záznam koncertu slavného italského zpěváka Enrica Carusa. Po produkci byl pozván do zámku a císařovna mu gratulovala: „Vážený pane profesore, neměli jsme tušení, že jste tak znamenitý zpěvák!"

Při návštěvě laboratoře slavného dánského fyzika *Nielse Bohra* (1885—1962) všiml si host železné podkovy zavěšené nad vchodem. Překvapen takovou pověrčivostí zeptal se návštěvník Bohra: „Cožpak vy jako fyzik věříte pověře o tom, že podkova přináší štěstí?" Nato Bohr odpověděl: „Samozřejmě, že takovému nesmyslu nevěřím. Ale slyšel jsem, že prý podkova přináší štěstí i těm, kdo tomu nevěří."

-ll

Řekli, napsali...

Poklad přírodních tajemství je nevyčerpatelný a jeho bohatství nepopsatelné. Kdo z něj vynese na světlo něco nového, nedokázal nic víc, než že jiným otvírá cestu k dalším výzkumům.

Johannes Kepler (1571—1630)

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, administrace vývozu tisku, Kovpakova 26, 160 00 Praha 6.
Návštěvní dny: středa 7.00—15.00 hod.,
pátek 7.00—13.00 hod.
Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1989

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 67, 1988-89

VEDOUCÍ REDAKTOR: Doc. ing. Ivan ŠTOLL, ČVUT Praha

VÝKONNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA: Doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava; prof. dr. Ján Chrapan, DrSc., VVT — ČSSP Liptovský Mikuláš; doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha; prof. Emil Kraemer, UK Praha; dr. Pavel Krbec, CSc., VZLÚ Praha; dr. Jana Müllerová, CSc., VÚP Praha; Marie Nováková, SPN Praha; Emilie Osobová, SPN Praha; dr. Milan Rojko, CSc., UK Praha; doc. dr. Bedřich Sedlák, CSc., UK Praha; † doc. dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha; doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha; prof. dr. Milan Vlach, DrSc., UK Praha.

REDAKČNÍ KRUH: Dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc; dr. Peter Bero, SVŠT Bratislava; dr. Jiří Herman, G Brno; dr. Karel Horák, CSc., MÚ ČSAV Praha; dr. Dag Hrubý, G Jevíčko; Dušan Jedinák, G Topoľčany; doc. dr. Stanislav Jendroľ, CSc., UPJŠ Košice; dr. Zdeněk Kluiber, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Jan Kratochvíl, CSc., UK Praha; ing. Ladislav Krlín, CSc., ÚFP ČSAV Praha; dr. Svatopluk Krupička, CSc., FzÚ ČSAV Praha; dr. Aleš Lacina, CSc., UJEP Brno; prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra; dr. Eva Pešková, G Mladá Boleslav; dr. Daniela Řebíčková, ZŠ Praha; dr. Karel Sandler, ÚJF ČSAV Řež; doc. dr. Ivan Šantavý, CSc., VUT Brno; ing. Eva Veselá, CSc., ČVUT Praha; dr. Vladimír Vícha, G Pardubice; dr. Ivo Volf, CSc., PF Hradec Králové; dr. Antonín Vrba, CSc., VÚP Praha; dr. Karel Závěta, CSc., FzÚ Praha; dr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec.

Vydává ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČSR ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků

OBSAH

Úvodní články

Milí čtenáři 1
Matematika a fyzika — výzva pro mladou generaci 221
Krbec Pavel, Schwabik Štefan: Cesty a cíle matematiky 45
Kryl Rudolf: Co je informatika a co by o ní měl vědět středoškolák 265
Šolc Martin: Nekonstantní sluneční konstanta 133
Štoll Ivan: Vůně fyziky 1
Objevy dosud neobjevené 89

Matematika

Anděl Jiří: Hrací kostky a tranzitivita . 309
Belan Anton, Burjan Vladimír: O jednom NIMe . 357
Bican Ladislav, Hora Jaroslav: Permutace, cykly, znaménko permutace 224
Hra na „patnáctku" a znaménko permutace 353
Calda Emil: Množiny bodů v rovině a jejich grafické znázornění 5
O Ludolfově číslu převážně vážně 177
Drs Ladislav: Geometrické a malířské zobrazení 15
Flejberk Jaroslav: Diofantická rovnice $x^n + y^n = z^k$ (n, k nesoudělná) 313
Herman Jiří, Šimša Jaromír: Neznámé množiny známých I., II. 93, 134
Hofman Milan: Zákonitosti symetrie obsažené v Escherových periodických kresbách . . . 141
Holienčík Štefan: Dva vzťahy v trojuholníku 183
Kraemer Emil: Zajímavá úloha o krychli 138
Möbiusovy čtyřstěny . 185
Mída Jiří: O jednom pozoruhodném binárním kódu 179
Mráz Vlastimil: Diagramy pro více množin . 401
Novotná Jarmila: O diskrétních analogiích Wirtingerovy nerovnosti 49
Papež Zdeněk: Vzdálenosti lineárních útvarů v prostoru 269
Pech Pavel: O Petrově větě 9
Srb Oldřich: Trojúhelníková čísla . 407
Železný Lubomír: Nová maximální aritmetická posloupnost prvočísel 48

Fyzika

Albrecht Anton, Chrapan Miroslav: Neutróny okolo nás 62
Bittnerová Eva: Fyzika v prírode — čo môže stať turistu kilojoule 20
Fyzika v prírode — dýchanie pod vodou 188
Hudec René: Nový pohled na gravitační čočky 277
Ilkovič Vladimír: Kinematika rovinného pohybu tuhého tělesa (zrýchlenie) 96, 147
Kluvanec Daniel, Kluvanec Daniel ml.: Metóda obrazovej sústavy (MOSDAK) 193, 227
Kotyk Josef: Dálka vrhu šikmo vzhůru 56
Sférometr 275
Pospíšil Jaroslav: Rázové mechanické vlny 315
Mechanické vlny vznikající při pohybu tělesa v látkovém prostředí 363
Povrchové mechanické vlny 409
Rojko Milan: O jedné pověře. 143
Vaňura Jaromír: Sledování binokulárního zorného pole. 362
Veselá Eva: Stačí chtít 18
Ženíšek Ladislav: Problematika neviditelnosti 60

Z dějin exaktních věd

Hlaváč Albert: Dr. Andrej Radlinský a jeho silozpyt čili fyzika . 321
Hora Jaroslav: Dr. E. Lasker — mistr světa v šachu a matematik 319
Janout Zdeněk: Papež fyziky 366
Jáchim František: Před 30 lety zemřel Fréderik Joliot-Curie 24
Matematika středověké Indie a Pellova rovnice 199
Pierre Curie (1859—1906) 368
Jedinák Dušan: Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903—1987) 104
Zvedený matematikou 281
Kraus Ivo: Wilhelm Konrád Röntgen — osobnost známá i neznámá 153
Krystalografie v antice 234
Dějiny vědecké krystalografie začaly v Praze 414
Sedláček Jaroslav: Dodatek k řešení Pellovy rovnice 420
Štoll Ivan: O životě a díle Ernsta Macha 68

Z matematiky a fyziky ZŠ

Rubriku obsahovalo každé číslo. Autorsky do ní přispěli: Milan Hejný,

Emil Kraemer, Jiří Mída, Jana Mídová, Eva Pešková, Jindřich Pěnčík, Milan Rojko, Josef Svoboda, Josef Trejbal

Přemýšlíme, řešíme

Rubriku obsahovalo každé číslo. Autorsky do ní přispěli: Milan Koman, Emil Kraemer. Jiří Mann, Jiří Mída, Jindřich Pěnčík, Tomáš Schütz, Ivan Štoll, Josef Trejbal, Miroslava Trchová

Naše soutěž

Výsledky loňské soutěže Rozhledů 79
Řešení úloh minulého ročníku 117, 167, 209, 250, 293, 339
Úlohy k řešení 80, 125

Olympiády a SOČ

MO 33, 85, 254, 382
FO 32, 36, 85, 127, 172, 257, 298, 396, 431
SOČ 214, 295, 391

Informace

Bednařík Milan, Široká Miroslava: Písemná přijímací zkouška z fyziky na přírodovědeckou fakultu v Olomouci 346
Calda Emil: Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v roce 1988 303
Schütz Tomáš: Matematická literatura ze Sovětského svazu 39
Pokyny pro autory 131

Kalendár M — F (Připravil Dušan Jedinák.)
40, 83, 129, 174, 216, 263, 307, 344, 397, 442

Z nových knih 43, 87, 130, 218, 261, 306, 350, 399

Humory matematicko-fyzikální (-II) 3. str. všech obálek

Příloha

Pech Jiří: Slovník fyzikálních termínů s přihlédnutím k jejich latinskému či řeckému základu č. 1 až 8