

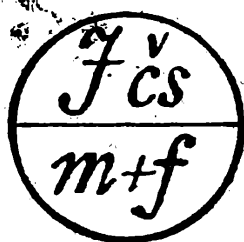
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(1)

**ROČNÍK 65, 1986/87
ZÁŘÍ**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko

- fyzikální

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, Praha, pplk. doc. dr. Ján Chra-
pan, CSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mi-
kuláš, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT
Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc.,
ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., VŠZ Praha, doc. dr.
Karol Križalkovič, CSc., PF Nitra,
doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Pra-
ha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Pra-
ha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc.
UK Praha, ing. dr. Václav Šindelář,
CSc., Praha, dr. Martin Šolc, CSc.,
UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-No-
vé Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

Emil Kraemer: Dva významní autoři redaktoři Rozhledů	1
Stanislav Horák: Nerovnosti pro troj- úhelník	2
Ivan Fischer: Základy programování mikropočítačů 1	7
Emil Calda: Buridanův osel a axióm výběru	13
Václav Medek: O zobrazování priestoru	15
Josef Jirů: Slapové jery	19
Jozef Zámečník, Ivan Baník: Laser a jeho použitie pri meraní rýchlosti I	22
Rudolf Kolomý: Prokop Diviš – velký český přírodovědec 18. století	26
Eva Bittnerová, Elena Čončolová, Ľubica Lisá: Fyzik z Liptova	28
Jaroslav Chudý: Neodbytný rozdíl	35
Jiří Mann: Obdoby Pascalova trojúhel- níku	36
Jarmila Pěničková: Slovní algebrogramy	36
Emil Kašpar: Úloha	38
Z nových knih	40
dJ: Kalendár M–F	41
Korespondenční seminář MFF UK Praha	43
Stanislav Komenda: Zlomky pravé i ne- pravé	44
Jiří Mída: Benátské okno . . 3. str. obálky	
Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (37–40)	příloha

Dva významní autoři a redaktori Rozhledů

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Rozhledy matematicko-fyzikální vstupují do šedesátého pátého ročníku své existence. Přispívalo do nich mnoho různých autorů, z nichž někteří patřili k našim vynikajícím matematikům a fyzikům. Málo je však těch, kteří do Rozhledů psali soustavně několik desítek let a zároveň řadu roků vykonávali funkci redaktorů tohoto časopisu. Takovými pracovníky jsou docent Ota Setzer a Stanislav Horák; oba letos dovršili 80 let svého plodného života.

Ota Setzer se narodil 23. srpna 1906 v Praze. Po středoškolských studiích studoval matematiku, deskriptivní geometrii a pojistnou techniku jednak na Českém vysokém učení technickém (ČVUT), jednak na přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy (UK) v Praze. Po skončení vysokoškolského studia působil řadu let na různých středních školách; od roku 1951 přednášel na stavební fakultě ČVUT v Praze, kde pracoval externě i po odchodu do důchodu. Je autorem několika učebnic a mnoha článků z různých oborů elementární matematiky, zejména z konstrukční geometrie. V Rozhledech se objevuje jako autor jedné ze soutěžních úloh již v jejich sedmém ročníku (z let 1927/28). V příštím ročníku Rozhledů (1928/29) už nalézáme jeho článek „Z geometrie podobných trojúhelníků“ a s jeho jménem se setkáváme i v dalších ročnících Rozhledů, zejména jako s autorem celé řady nejrůznějších úloh. V letech 1957 až 1983 pracoval v čele redakční rady Rozhledů jako výkonný nebo vedoucí redaktor. Tato činnost je jen částí jeho celoživotní práce v Jednotě československých matematiků a fyziků, jejímž členem je od roku 1923. K řadě vyznamenání a uznání významné práce docenta Setzera pro naši společnost připojuje redakční rada Rozhledů poděkování za vše, co pro tento časopis vykonal, a zároveň mu přeje do dalších let pevné zdraví a dobrou životní pohodu.

Stanislav Horák se narodil 22. března 1906 v Turnově. Po středoškolských studiích absolvoval na přírodovědecké fakultě UK v Praze studium matematiky a deskriptivní geometrie. Potom působil na různých středních školách a od roku 1953 na strojní fakultě ČVUT v Praze. Na této vysoké škole pracoval externě i po odchodu do důchodu. Je autorem několika učebnic a dalších knižních publikací z různých oborů elementární matematiky. Již v roce 1942 začal otiskovat v Rozhledech úlohy k ře-

Sen, nejprve z matematiky, potom i z deskriptivní geometrie. Rozhledům zůstal věren i při svém působení na vysoké škole; publikoval v nich řadu článků, drobných sdělení a mnoho úloh, z nichž značná část je určena nejmladším čtenářům. Od roku 1957 je členem redakční rady Rozhledů a v letech 1968 až 1972 vykonával také funkci jejich výkonného redaktora. Obdobně jako docent Setzer pracoval vždy v Jednotě československých matematiků a fyziků, jejímž členem je od roku 1925. K mnoha vyznamenáním a uznáním celoživotní činnosti Stanislava Horáka připojuje redakční rada Rozhledů poděkování za jeho dlouholetou práci pro tento časopis a zároveň mu přeje do dalších let života pevné zdraví a pěknou životní pohodu.

MATEMATIKA

Nerovnosti pro trojúhelník

STANISLAV HORÁK, Praha

V článku je odvozeno několik jednoduchých vět o nerovnostech platících o obsahích trojúhelníků. K jejich důkazu je potřebná znalost několika vět, které se nevyskytují v učivu matematiky na středních školách, a ty jsou uvedeny na začátku článku. Jejich důkaz není těžký a zvědavý čtenář se může sám o něj pokusit. Označení prvků v trojúhelníku je obvyklé.

1. O úhlech každého trojúhelníka platí

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

2. O úhlech každého trojúhelníka platí

$$\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} = \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}.$$

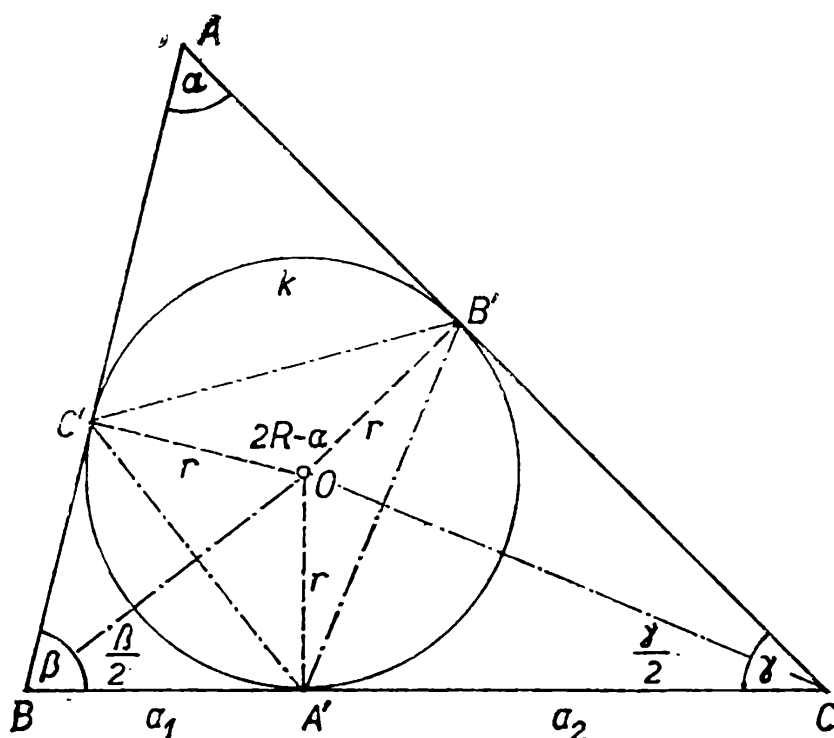
3. O úhlech každého trojúhelníka platí

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

4. O úhlech každého trojúhelníka platí

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$



Obr. 1

Důkaz této nerovnosti najde čtenář v knížce *Nerovnosti v trojúhelníku*, která vyšla v knižnici ŠMM.

Po tomto úvodu můžeme přistoupit k vlastnímu článku.

I. Je dán trojúhelník ABC a jemu vepsaná kružnice $k = (O; r)$. Kružnice k se strany BC (CA ; AB) dotýká v bodě A' (B' ; C'). Potom o obsahu S trojúhelníka ABC a obsahu S' trojúhelníka $A'B'C'$ platí

$$S \geq 4 S',$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

Řešení (obr. 1). Obsah daného trojúhelníka je

$$S = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = \frac{1}{2} (a + b + c) r \quad (1)$$

Označme

$$a_1 = |BA'|, a_2 = |A'C|,$$

potom

$$a = a_1 + a_2 = r \cotg \frac{\beta}{2} + r \cotg \frac{\gamma}{2} = r \left(\cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} \right).$$

Cyklickou záměnou dostaneme obdobné vyjádření pro b a c :

$$b = r \left(\cotg \frac{\gamma}{2} + \cotg \frac{\alpha}{2} \right), c = r \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \right)$$

Dosadíme do (1):

$$S = \frac{1}{2} r^2 \left(2 \cotg \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\beta}{2} + 2 \cotg \frac{\gamma}{2} \right) =$$

$$= r^2 \left(\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} \right),$$

přičemž jsme použili větu 2. Ještě musíme vyjádřit obsah S' . Především si všimněme, že ve čtyřúhelníku $AC'OB'$ je

$$|\sphericalangle C'OB'| = 2R - \alpha.$$

Podobně platí

$$|\sphericalangle B'OA'| = 2R - \gamma, |\sphericalangle C'OA'| = 2R - \beta.$$

Potom

$$\begin{aligned} S' &= S(OB'C') + S(OC'A') + S(OA'B') = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \sin(2R - \alpha) + \frac{1}{2} r^2 \sin(2R - \beta) + \frac{1}{2} r^2 \sin(2R - \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} r^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \\ &= 2r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Při posledním kroku jsme použili větu 1. Dále můžeme již počítat

$$\begin{aligned} S' : S &= \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Čtenáři si asi všimli, že při přechodu od rovností k nerovnosti jsme použili větu 4. Tím jsme dospěli k výsledku

$$S \geq 4 S',$$

kde rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

II. Je dán trojúhelník ABC a jemu vepsaná kružnice $k = (O; r)$. Polopřímka OX (OY ; OZ), která je souhlasně rovnoběžná s polopřímkou BC (CA ; AB), protne kružnici k v bodě A' (B' ; C'). O obsahu S trojúhelníku ABC a o obsahu S' trojúhelníku $A'B'C'$ platí

$$S \geq 4 S',$$

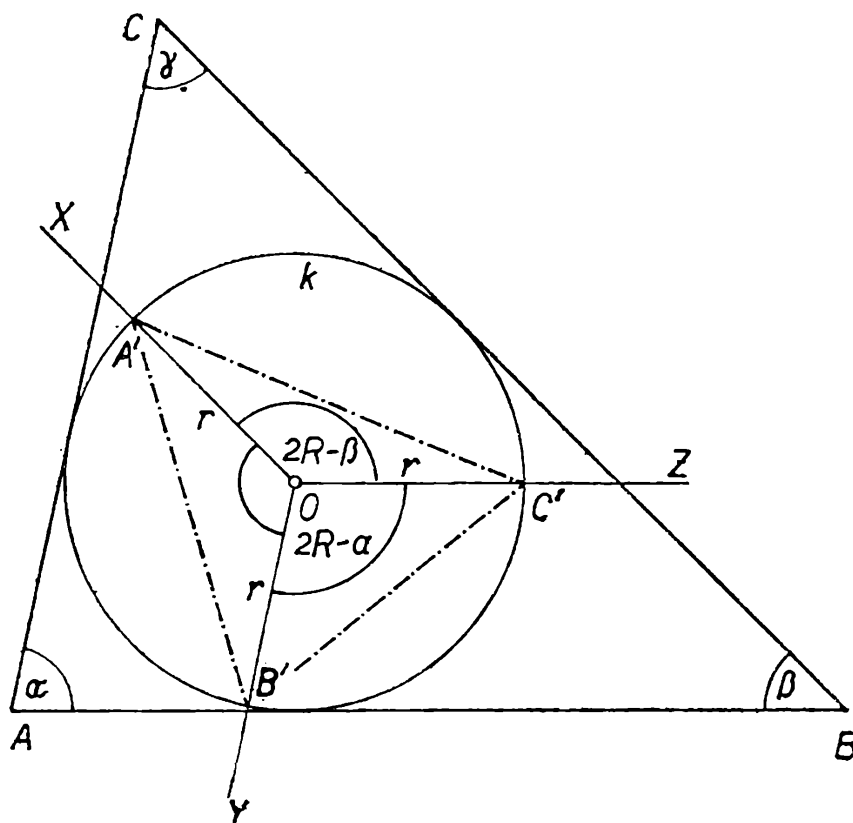
kde rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník ABC je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz (obr. 2). Všimněme si, že

$$|\sphericalangle B'OC'| = 2R - \alpha, |\sphericalangle C'OA'| = 2R - \beta, |\sphericalangle A'OB'| = 2R - \gamma$$

Podle toho

$$S' = S(OB'C') + S(OC'A') + S(OA'B') =$$



Obr. 2

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} r^2 \sin(2R - \alpha) + \frac{1}{2} r^2 \sin(2R - \beta) + \frac{1}{2} r^2 \sin(2R - \gamma) = \\
 &= \frac{1}{2} r^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \\
 &= 2 r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}
 \end{aligned}$$

Pro obsah S máme vzorec z příkladu I:

$$S = r^2 \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}.$$

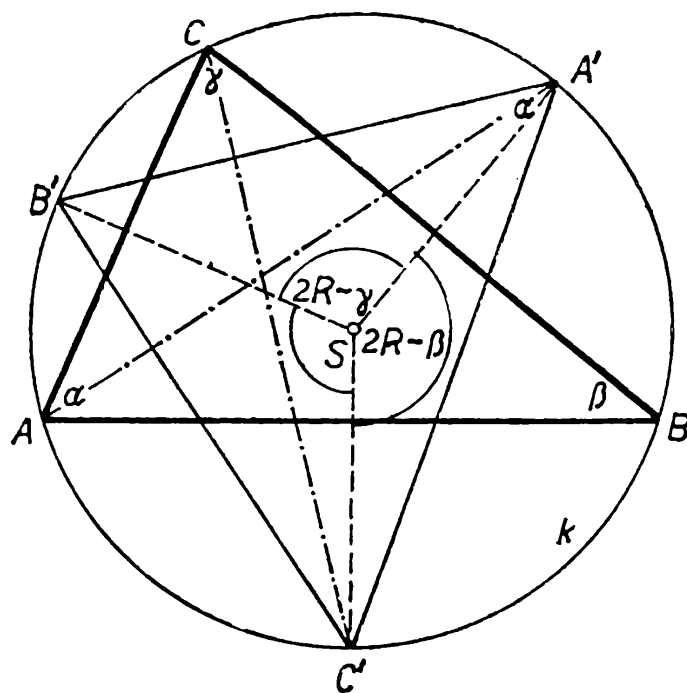
Další postup je úplně shodný a postupem v příkl. I a důkaz můžeme považovat za provedený.

III. Je dán trojúhelník ABC a jemu opsaná kružnice $k = (S; R)$. Osa úhlu CAB ($ABC; BCA$) protne kružnici k ještě v bodě A' ($B'; C'$). Jestliže S je obsah daného trojúhelníku ABC a S' obsah trojúhelníku $A'B'C'$, pak platí

$$S \leq S',$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník ABC je rovnostranný. Dokažte.

Řešení (obr. 3). Bod A' ($B'; C'$) můžeme dostat též tak, že z bodu S spustíme kolmici na stranu BC ($CA; AB$). Potom



Obr. 3

$|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle CSA| = 2\beta$, $|\sphericalangle ASB| = 2\gamma$,
což vyplývá ze vztahu mezi úhlem středovým a obvodovým nad toutéž
tětivou kružnice. Obsah S je

$$\begin{aligned} S &= S(BCS) + S(CAS) + S(ABS) = \\ &= \frac{1}{2} [R^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = \\ &= 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{aligned}$$

za použití věty 3. Ještě si všimněme, že

$|\sphericalangle B'SC'| = 2R - \alpha$, $|\sphericalangle C'SA'| = 2R - \beta$, $|\sphericalangle A'SB'| = 2R - \gamma$
Potom

$$\begin{aligned} S' &= S(B'C'S) + S(A'B'S) + S(C'A'S) = \\ &= \frac{1}{2} R^2 [\sin (2R - \alpha) + \sin (2R - \beta) + \sin (2R - \gamma)] = \\ &= \frac{1}{2} R^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

To jsme použili větu 1. Posléze

$$S : S' = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \\
&= 8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq 8 \cdot \frac{1}{8} = 1,
\end{aligned}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník ABC je rovnostranný. Je vhodné ještě podotknout, že v závěru jsme použili větu 4.

Cvičení

Je dán trojúhelník ABC a jemu opsaná kružnice $k = (S; R)$. Středem S vedeme polopřímku SX (SY ; SZ) souhlasně rovnoběžnou s polopřímkou BC (CA ; AB); ta protne kružnici k v bodě A' (B' ; C'). Jestliže obsah trojúhelníku ABC označíme S a obsah trojúhelníku $A'B'C'$ označíme S' , pak platí

$$S' \geq S,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník ABC je rovnostranný. Dokažte.

Základy programování mikropočítačů

1 — Mikropočítač jako kalkulačka

Doc. IVAN FISCHER, CSc., katedra matematiky PeF UK v Praze

S rozvojem automatizace, robotizace, s využíváním počítačů pro vědeckotechnické výpočty i pro potřeby byrokracie a administrativy začala být i ve školním vyučování věnována pozornost počítačům a jejich programování. Tato činnost velice úzce souvisí se zaměřením našeho časopisu, s matematikou a fyzikou. Než však začnou být otiskovány články navazující na vyučování matematice a fyzice (i na vyučování letos nového předmětu „informatika a výpočetní technika“ na gymnáziích), poskytne tento seriál alespoň ve stručnosti možnost seznámit se se základy programování u nás nejrozšířenějších mikropočítačů (IQ-150, IQ-151, PMD-85, ZX Spectrum). Tyto mikropočítače lze programovat buď přímo ve strojovém kódu mikroprocesoru — což je velice nepřehledné a pracné — nebo ve zjednodušené podobě jazyka BASIC. Možnosti

programovat tyto mikropočítače v jazycích PASCAL, FORTH, PROLOG, v dokonalejších verzích jazyka BASIC sice také existují, jsou však zatím ještě málo dostupné.

Seriál začne seznámením se základy jazyka BASIC, později se zaměří na realizaci zásad moderního programování (strukturovaně, modulárně, shora dolů atd.) i v situaci, že je k dispozici pouze jazyk BASIC v některé své jednoduché, levné podobě. Problém rozdílností jednotlivých verzí jazyka BASIC u zmíněných mikropočítačů se budeme snažit překlenout takovými programy, jichž se rozdílnosti nedotknou — i když tím programy budou trochu těžkopádnější a delší. Později se seriál zaměří speciálně na školní mikropočítač IQ 151, zmíníme se o možnostech stavby doplňků k němu a o využití mikropočítače pro řízení technických činností. Zmíníme se i o programování mikroprocesoru Tesla MHB 8080A a jednočipového mikropočítače (Tesla MHB 8035) a o možnostech jejich aplikací.

V seriálu se předpokládá, že čtenář má přístup k některému z mikropočítačů. Po zapnutí mikropočítače se na obrazovce připojeného televizoru objeví něco jako „BASIC READY“ (Pouze u PMD-85 budeme muset napřed napsat BASIC G a stisknout tlačítko zvané EOL).

Seznámíme se s klávesnicí mikropočítačů. Podobá se klávesnici psacího stroje. Také má tlačítko SHIFT (zdvih), jehož držením se přechází k psaní malých a velkých písmen, číslic, značek. Nás budou zajímat jen velká písmena. Na ZX Spectrum a na IQ 151 jsou i další tlačítka typu SHIFT, kterými přepneme činnost klávesnice — místo písmen se na jedno stisknutí klávesy vypíší celá slova. Dále máme k dispozici klávesy, kterými měníme místo, na které píšeme (takzvaný kurzor — značený na obrazovce čárkou, blikajícím čtverečkem a podobně). Důležité je tlačítko označující konec řádku (na PMD-85 je to EOL, na IQ 151 je CR a na ZX Spectrum se jmenuje ENTER), bývá vždy na klávesnici vpravo od kláves s písmeny. Konečně jsou na klávesnici i tlačítka, která vymažou chybný text, roztáhnou chybný text a umožní vložit opravu, pozastaví průběh programu a podobně. Obvykle na klávesnici nalezneme i tlačítka, na která počítač nijak nereaguje — jejich použití můžeme zajistit až daným programem. Než podrobně popisovat rozdílné funkce klávesnice zmíněných počítačů, bude nejlepší si experimentálně klávesnici vyzkoušet — rozbít ji totiž můžeme jen hrubým násilím, nikdy ne chybným povelům či nevhodným stiskem klávesy. Nemusíte se tedy bát! Nanejvýš vás počítač může přestat poslouchat, pak ho stačí vypnout a znovu zapnout ...

Když jsme si klávesnici řádně osahali, začneme s několika příkazy (pro psaní programu) a povely (k řízení bezprostřední činnosti počítače) z jazyka BASIC:

LET nechť. LET A = 1. (Kromě ZX Spectrum se nemusí LET psát a stačí napsat přímo A = 1).

INPUT vstup. INPUT R znamená čekání, až z klávesnice zadáme hodnotu proměnné R.

PRINT tisk. Počítač píše na obrazovku. PRINT A vypíše hodnotu, jakou má A. PRINT „VYSLEDEK =“ vypíše text uvedený v úvozovkách.

RUN běh. Spustí běh programu počínaje prvním řádkem.

LIST seznam, soupis. Vypsání celého programu na obrazovce.

Programové řádky píšeme číslované. Na pořadí, jak je píšeme, nezáleží. Počítač si je seřadí a vykonává podle jejich čísel. Začne řádkem s nejnižším číslem. Pro pozdější doplňky a změny programu proto necháváme v číslování mezery.

Uvedeme ukázkou jednoho programu. Při psaní musíme každý řádek ukončit příslušným tlačítkem (EOL, CR, ENTER).

```
100 PRINT „VYPOCET OBJEMU SUDU“
110 PRINT „ZADEJ PRUMER DNA“
120 INPUT D
130 PRINT „ZADEJ NEJVETSI PRUMER SUDU“
140 INPUT O
150 PRINT „ZADEJ VYSKU SUDU“
160 INPUT V
170 LET P = 3.14
180 LET S = (1/12)*P*V*(2*O*O + D*D)
190 PRINT „OBJEM SUDU JE PRIBLIZNE“
200 PRINT S
210 PRINT „—————“
```

Uvedený sud, jehož poledníky mají kruhový či eliptický tvar, má objem daný vztahem

$$V = \frac{1}{12} \pi v (2D^2 + d^2)$$

Pro značení proměnných však BASIC používá velká písmena¹⁾. Malá písmena k těmto účelům nepoužívá. Rovněž rozlišuje O a nulu, značenou 0. Proto jsme museli názvy proměnných změnit. Pro sčítání se používá znak +, pro odčítání (a záporná čísla) znak —, násobení se značí hvězdičkou * a nelze tuto značku vynechat. Dělení a zlomky lze zapsat pouze pomocí šikmé zlomkové čárky/. Pořadí prováděných operací je podle dohod z matematiky (násobení má přednost před sčítáním atd.). Toto pořadí lze měnit pomocí závorek. Nejsme-li si jisti, uděláme raději i zbytečné závorky navíc. BASIC však zná pouze kulaté závorky, ovšem i vnořené do sebe. Místo [(.). .] tedy píšeme ((. .). .). Pro

¹⁾ nebo dvojici písmen, dvojici písmeno a číslo, případně takováto písmena či dvojice s indexy v závorkách, například A, AC, D1, D1(5), RA(1, 3, 1). Na ZX Spectrum proměnné zapisujeme i malými písmeny a slova povelů a příkazů píšeme jediným stiskem příslušné klávesy.

mocninu používáme značku obloučku vpravo nahoře vedle písmena a A^5 tak píšeme jako $A^{\wedge}5$. Pro psaní D^2 je možná přehlednější $D*D$. Pro přehlednost můžeme psát mezery. Ty však slouží pouze pro naši orientaci — mikropočítač mezery mezi slovy či znaky nevnímá.

Jestliže jsme program napsali, spustíme ho. Napíšeme RUN a stiskneme tlačítko pro konec řádku. Před RUN není žádné číslo — počítač tento řádek nevloží do programu, ale ihned ho vykoná — v daném případě spustí. Vypíše se text v úvozovkách, uvedený v prvních dvou programových řádcích s čísly 100 a 110. Na dalším řádku se objeví dvojtečka a nic dalšího se neděje. Dvojtečka nás informuje, že počítač čeká na vložení čísla z klávesnice. Napíšeme tedy například 30 a stiskneme tlačítko značící konec řádku. Vypíše se další text a opět dvojtečka s čekáním na zadání hodnoty 0, například zadáme 42. Potom se ještě v programovém řádku 160 zadává výška, kupříkladu 100. V řádku 170 ukládáme konstantu, zde hodnotu čísla P. Nevkládáme ji pokaždé znovu z klávesnice, ale je zapsána přímo v programu pomocí LET.²⁾ Všimněme si důležitého detailu — BASIC nezná desetinnou čárku a používá desetinnou tečku! Čárku používá k jiným účelům! V následujícím řádku 180 si počítač spočítá výsledek, který si uloží do paměti pod označením proměnné s názvem S. Vidíme, že konstantu 12 jsme si zapsali až přímo do výpočtu vzorečku. Stejně jsme mohli zadat i to číslo P. Chceme-li však později hodnotu P měnit a výsledek počítat přesněji, bude asi snazší měnit řádek 170 než složitější řádek 180. Nakonec počítač vypíše text podle řádku 190, napíše číslo odpovídající hodnotě S a nakonec ještě výsledek podtrhne, jak mu přikazuje řádek 210. Na obrazovce se nám potom objevuje (s drobnými rozdíly u typů mikropočítačů):

```
RUN
VYPOCET OBJEMU SUDU
ZADEJ PRUMER DNA
  30
ZADEJ NEJVETSI PRUMER SUDU
: 42
ZADEJ VYSKU SUDU
: 100
OBJEM SUDU JE PRIBLIZNE
115865.9
-----
READY
```

Slůvko READY znamená připraven, připraven přijmout povel či

²⁾ V řádcích 170 a 180 jsme — s výjimkou mikropočítače ZX Spectrum — mohli slovo LET vynechat a psát přímo
170 P = 3.14

nový programový řádek. Zapišeme-li znovu RUN, můžeme počítat objem dalšího sudu.

V programu, jak jsme ho psali, může být chyba. Například v řádku 140 jsme místo INPUT mohli napsat IMPUT. Potom nás počítač upozorní na chybu. Místo dvojtečky pro zadání 0 se anglicky například vypíše

Ø1 ERROR AT LINE 140

což znamená chybu Ø1 na řádku 140. V příručce k počítači si najdeme, že Ø1 značí syntaktickou chybu — počítač to neumí přecíst (některé počítače jsou chytřejší a slovy anglicky vypíší, o jakou chybu jde). Počítač umí hlásit i jiné než syntaktické chyby — například dělení nulou, překročení rozsahu čísel zpracovávaných počítačem, překročení rozsahu paměti počítače a podobně. Jak v našem případě postupovat? Asi začneme tím, že budeme chtít řádek 140 vidět, abychom poznali, čemu počítač nerozumí. Napíšeme LIST a stiskneme tlačítko konce řádku. Vypíše se celý program a chybu v řádku 140 lehko objevíme. Jak však tuto chybu opravit? K tomu má každý mikropočítač jinak zařízené pohodlné možnosti — každý typ počítače však trochu jiné možnosti. Naštěstí u každého mikropočítače stačí napsat celý řádek znovu. Počítač si jím původní řádek se stejným číslem přepíše³⁾ 4). Proto tedy znovu napíšeme

140 INPUT 0

Povelem LIST se raději přesvědčíme, že tentokrát při vypsání programu bude již řádek 140 opraven. Nyní si povelem RUN program spustíme. Nenajde-li počítač další chybu, proběhne program až do konce k řádku 210. Počítač však odhalí jen některé chyby. Například $P = 3.57$ bude také poslušně pokládat za novou hodnotu Ludolfova čísla. Rovněž nám bez uzardění bude psát VISKA SUDA bez ohledu na pravopis a gramatiku. Takovéto věcné a obsahové (neformální) chyby musí hlídat programátor. Právě tak nám sebedokonalejší počítač nezaručí, že jsme mu zadali správný vzoreček pro výpočet objemu sudu (konečně, i kdo ze čtenářů si tím je jist?).

V programu však nemusíme opravovat pouze chyby. Program si můžeme i postupně vylepšovat a zdokonalovat. Pokud jsou údaje zadány v centimetrech, je objem spočten v cm^3 . To je ale pro sud málo přehledný výsledek. Chceme-li znát při stejných údajích objem tentokráte spočítaný v litrech (což je 1000 cm^3), doplníme programové řádky

³⁾ Není to tak úplně pravda; u ZX Spectrum by nám počítač řádek se slovem IMPUT vůbec nepřijal a museli bychom chybu opravit ještě před ukončením řádku — tím však ostatní čtenáře nebudeme zdržovat.

⁴⁾ Takto lze i vynechat řádek z programu — napíšeme jeho číslo a ukončíme řádek — prázdný řádek počítač v paměti neudrží a tak nám prostě z programu zmizí.

```
195 LET S = S/1000
205 PRINT „LITRU“
```

Překvapí nás asi řádek 195. Neznamená, jak by si někdo mohl myslet, že je-li $S = S/1000$, potom je $1000 \cdot S = S$ a tedy také $999 \cdot S = 0$ a konečně i $S = 0$. Daný zápis má v jazyku BASIC jiný význam, a to: spočítí pravou stranu za rovnítkem a výsledek uloží do paměti jako novou hodnotu S. Často se pak používá zápis $C = C + 1$ pro příkaz zvětšit C o jednu, zápis $D = 2 \cdot D$ pro zdvojnásobení hodnoty D a podobně. Některé programovací jazyky proto raději používají místo $=$ značku $:=$ v daném významu, tedy $S := S/1000$. U nové značky by omyl nevznikl. BASIC však zde používá jednoduše rovnítko.

Mnoho jsme se zatím nenaučili. Alespoň však už umíme zapsat program, opravit chybný řádek, spouštět program a také si nechat znovu program nechat napsat na obrazovku připojeného televizoru. Známe jen tři příkazy a značky pro aritmetické operace. I to nám však už stačí k tomu, abychom použili počítač lépe než jednoduchou kalkulačku. Jednak je programovatelný a tak pro různé výpočty podle téhož vzorce stačí zadávat jen různá data, a jednak nám i píše, co máme dělat a co nám spočítal.

Příště se už více soustředíme na programování. Ukážeme si, jak měnit úpravu výpisů na obrazovce, seznámíme se s matematickými funkcemi v jazyku BASIC, naučíme se program větvit i uzavřít do cyklu.

Úlohy:

1. Napište program pro výpočet délky kružnice a obsah kruhu.
2. Napište program, který vám čas uvedený v hodinách, minutách, sekundách se setinami sekund převede na jediný číselný údaj času vyjádřeného v sekundách a setinách sekund.
3. Sestavte program, který se ptá na známky z matematiky, češtiny, ruštiny, z volitelného předmětu a napíše pak průměrný prospěch (například u maturity).
4. V tabulkách či sbírkách vzorců si vyhledejte fyzikální vzorečky a napište si programy pro výpočty podle těchto vzorečků. Volte však jen takové vzorečky, kde vystačíme s $+$, $-$, $*$, $/$, $^$ ($^$).

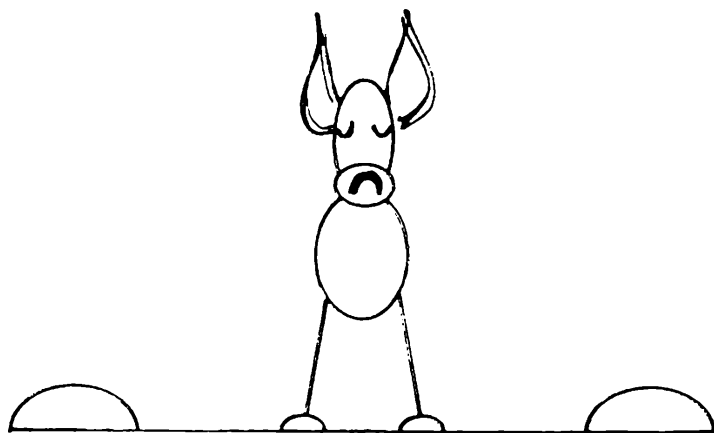
Řešení algebrogramů: ze str. 36:

- a) $698 + 450 + 6950 + 16\,750 + 16\,357 = 41\,205$
- b) $792 + 3202 + 6202 + 4202 + 2002 + 28\,702 = 45\,102$
- c) $6898 + 8998 + 8 + 82\,098 + 4563 + 10 = 102\,575$

Buridanův osel a axióm výběru

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

Známa scholastická hříčka z první poloviny 14. století, jejímž autorem je francouzský filozof *J. Buridan*, profesor a rektor pařížské univerzity, se zabývá problémem volby a tvrdí: Osel stojící uprostřed mezi dvěma naprosto stejnými otýpkami sena (viz. obr.) zajde hlady, neboť se nemůže do žádné z nich zakousnout jako do první. K tomu, aby si totiž mohl jednu z těchto dvou otýpek vybrat, musely by se v něčem lišit! Jestliže však se vůbec v ničem neodlišují, nemá osel možnost volby, nemůže dát jedné z nich přednost a čeká ho tragický konec.



Otázka výběru, i když poněkud v jiné rovině, se vyskytuje i v matematice. Ukážeme si tuto problematiku na následujícím příkladu. Utvořme pro každé reálné číslo x množinu A_x všech čísel $x + a$, kde a probíhá všechna racionální čísla: $A_x = \{x + a; a \in \mathbb{Q}\}$. Ukážeme, že pro každé takovéto množiny A_x, A_y platí: je-li číslo $x - y$ racionální, jsou si obě množiny rovny; je-li $x - y$ iracionální, nemají množiny A_x, A_y společný prvek. ■

Předpokládejme nejprve, že o daných množinách

$$A_x = \{x + a; a \in \mathbb{Q}\}, A_y = \{y + b; b \in \mathbb{Q}\}$$

platí, že číslo $x - y$ je racionální, tj. že $x - y \in \mathbb{Q}$. Ukážeme, že je $A_x = A_y$. Zvolme libovolné číslo $x + a \in A_x$; vzhledem k tomu, že $x + a = y + (x - y + a)$, kde číslo $x - y + a$ je racionální, je též $x + a \in A_y$, což znamená, že je $A_x \subset A_y$. Stejným způsobem lze ukázat, že platí rovněž $A_y \subset A_x$. Dokázali jsme tak první část výše uvedeného tvrzení: $x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow A_x = A_y$. Ukážeme nyní, že platí i druhá část, tj. $x - y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow A_x \cap A_y = \emptyset$. Důkaz provedeme sporem. Nechť $x - y$ je iracionální číslo a nechť existuje reálné číslo z tak, že $z \in A_x \cap A_y$.

Je tedy $z \in A_x$, což znamená, že existuje $a \in Q$ tak, že je $z = x + a$; je rovněž $z \in A_y$, odkud plyne, že existuje $b \in Q$ tak, že je $z = y + b$. Z těchto dvou rovností dostáváme

$$x - y = (z - a) - (z - b) = b - a,$$

což není možné: číslo $b - a$ je racionální a číslo $x - y$ iracionální. Tím je důkaz proveden.

Podle toho, co jsme dokázali, tvoří všechny takto sestrojené množiny A_x systém $\{A_x\}$, jehož každé dva různé prvky jsou množiny disjunktní. Položme si nyní otázku, zda je možno z každé množiny tohoto systému vybrat právě jeden prvek, tj. zda existuje množina, která má s každou množinou daného systému jediný prvek společný. Ačkoli intuitivně cítíme, že taková množina by měla existovat, nepodaří se nám ji sestavit, ať se o to snažíme jakkoliv. Nelze totiž říci, jakým způsobem se má konstrukce této množiny provést, neboť jednotlivé množiny A_x nejsou definovány způsobem, který by umožnil stanovit nějaké explicitní pravidlo pro výběr prvků této „výběrové množiny“. Přitom množiny tohoto typu jsou velmi důležité, neboť na jejich existenci jsou založeny některé matematické důkazy, a to nejen v teorii množin.

V prvním období po vzniku teorie množin se tato výběrová množina v jednotlivých případech mlčky předpokládala; její existence byla považována za samozřejmou, neboť byla za samozřejmou považována i možnost, že z každé z daných množin daného systému lze vždycky vybrat po jednom prvku. Toto přesvědčení vyplývalo z nekritického přístupu k nekonečným množinám, o nichž se podvědomě předpokládalo, že s nimi lze provádět tytéž operace, které se dají provádět s množinami konečnými: je-li možno vybrat po jednom prvku z konečného systému konečných množin, proč by nebylo možno provést totéž s nekonečným systémem nekonečných množin? Když toto intuitivní období pominulo, objevily se pokusy existenci výběrové množiny v obecném případě nekonečného systému nekonečných množin dokázat, ty však neuspěly: kdykoli byl takovýto „důkaz“ proveden, ukázalo se, že bylo použito předpokladu, který v sobě existenci této množiny obsahoval. Východisko bylo nalezeno počátkem 20. století v axiómu, který existenci výběrové množiny postuluje a pro nějž se ujal název *axióm výběru*.

Ke každému neprázdnému systému navzájem disjunktních neprázdných množin existuje množina, která má právě jeden společný prvek s každou z daných množin.

Tento axióm je na prvý pohled téměř triviální: umožňuje pouze sestavit množinu tak, že z každé množiny disjunktního systému vybereme jeden prvek. Přesto však byl již v době svého vzniku předmětem mnoha diskusí a sporů, neboť se ukázalo, že vede k velmi paradoxním důsledkům. Jedním z nejznámějších a přitom nejpodivuhodnějších je proslulý *paradox Banachův-Tarského*. Tito polští matematikové užitím

axiómu výběru dokázali, že je možno rozložit kouli na čtyři stejné části tak, že ze dvou těchto částí lze znovu sestavit původní kouli! Sestavíme-li i ze zbylých dvou částí původní kouli, dostaneme tak z původní koule dvě nové, shodné s původní! Je však nutno ještě říci, že i když vede k takovýmto paradoxním výsledkům, ještě nikdy nevedl tento axióm ke sporu.

První soubornější pojednání o Divišovi podal jeho současník a rodák z Rychnova nad Kněžnou *F. M. Pelcl*, profesor historie a české literatury na pražské univerzitě, v německy psaných životopisech českých a moravských učenců z r. 1777. Tím se podstatnou měrou zasloužil o to, že Divišovy objevy neupadly vůbec v zapomenutí. Pelcova oslavná stať se stala později nejčastějším a nejvyhledávanějším pramenem téměř veškeré literatury o Divišovi.

O zobrazovaní priestoru

Prof. dr. VÁCLAV MEDEK, Bratislava

Súčasná veda a technika nahromadila už také množství poznatkov, že aj špičkový odborník zaoberajúci sa úzkou oblasťou vedy len ťažko môže sledovať všetky dôležité informácie. Preto rozvoj vedy a techniky je do značnej miery podmienený tímovou prácou. S tým ale vystupuje do popredia aj spôsob dorozumievania sa ľudí navzájom.

Existujú v podstate tri spôsoby dorozumievania sa: slovom, písmom a obrazom (pod obrazom budeme rozumieť aj priestorový model.) Reč je najstarší dorozumievací prostriedok medzi ľuďmi a má veľkú výhodu v tom, že umožňuje spätnú väzbu, t.j. je možné klásť doplňujúce otázky. Na druhej strane zas má nevýhody v tom, že nepostačuje na detailný opis najmä prírodovedných a technických objektov a jej trvalý záznam vo vedomí človeka je náročný na kvalitu a kapacitu jeho pamäti.

Nedostatky reči ako sprostredkovateľa informácie do istej miery odstraňuje prenos informácie písmom. Naráža sa tu však na nedostatočnú možnosť spätnej väzby. Získavanie dodatočných informácií súvisí s kvalitou informačných systémov, najmä knižníc.

Prenos informácií grafickým spôsobom (do čoho treba započítať aj film, televíziu, rôzne grafické výstupy z počítača, holografu atď.) je najmä v technických a prírodovedných disciplínach a v medicíne veľmi efektívny. Stačí si napr. uvedomiť ako sa dá najrýchlejšie oboznámiť napr. dieťa s nejakým zvieraťom, alebo rastlinou. Realizácia veľkých

stavieb, výroba zložitých strojov, príprava zložitej operácie atď. nie je mysliteľná bez príslušnej grafickej dokumentácie. Samozrejme, aj grafický spôsob prenosu informácie má svoje nedostatky (napr. v nepresnosti kresby, v jednostrannosti pohľadu na objekt), a preto sa dopĺňa písomnou dokumentáciou a prípadne aj ústne. Prenos informácie pomocou modelu (napr. modelu sídliska) je veľmi názorný, ale spravidla náročný na vyhotovenie.

Kvalita a množstvo informácií, ktoré sa prenášajú obrazom, podstatne závisí od toho ako ona odpovedá spôsobu vnímania priestoru človekom.

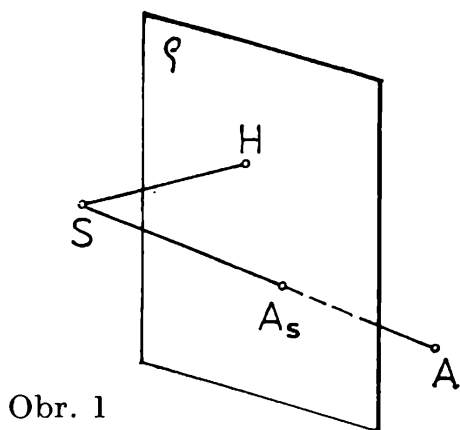
V tomto príspevku si povieme niečo o vývoji deskriptívnej geometrie, ktorá sa zaoberá zobrazovaním priestoru na rovinu. V ďalších príspevkoch by sme sa potom zaoberali niektorými takými konkrétnymi metódami deskriptívnej geometrie, ktoré vedú na konštrukciu názorných obrázkov najmä z hľadiska tvorby takých obrázkov pomocou počítača.

Ludia sa usilovali zobrazovať objekty v priestore od nepamäti a preto aj rozvoj deskriptívnej geometrie išiel ruku v ruke s rozvojom maliarstva. Najstaršie obrázky zvierat pochádzajú z paleolitu a boli objavené v jaskyniach v južnom Francúzsku. Zobrazovanie priestoru ako umenie začali rozvíjať v Babylónii a v Egypte; tu získané poznatky potom prevzali Gréci. Zatiaľ čo v najstarších kultúrach sa „maliarom“ nepodarilo vytvoriť dojem hĺbky priestoru, grécki výtvarníci (ako to možno pozorovať na zachovaných nástenných maľbách v Pompejách a v Herkulaneu, ktoré boli helénskymi kolóniami) sa už pokúšali pomocou súmernosti a zbiehajúcich sa priamok vytvoriť dojem priestoru. Dovtedajšie poznatky o zobrazovaní priestoru zhrnul staviteľ cisára Augusta *Vitruvius Pollio* (31 pred n. l. — 14 n. l.) v knihe *De architectura*.

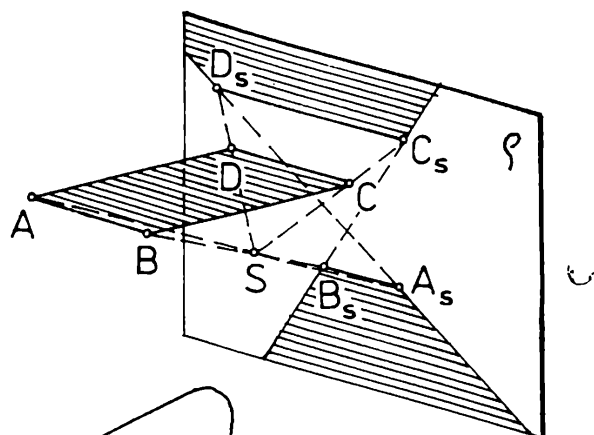
Veľký pokrok v zobrazovaní priestoru predstavujú diela renesančných maliarov. Je to predovšetkým *Filippo Brunelleschi* (1377—1446), tvorca kupoly dómu vo Florencii, ktorý už poznal pojem úbežníka a horizontu. Byl známy tým, že o svojich prácach konal verejné prednášky na trhoch a vysvetľoval ako sa pokúša znázorniť okolitý priestor. Myšlienky Brunelleschiho sa dostali cez Franciu do Nizozemska, kde ich využíval najmä *Jan van Eyck* (1390—1440). Vrchol renesančného umenia v tomto zmysle predstavujú *Michelangelo* (1475—1564) fresky na stropě Sixtínskej kaplnky vo Vatikáne.

Na práce renesančných talianskych maliarov nadviazal nemecký maliar *Albrecht Dürer* (1471—1528), ktorý využil aj svoje matematické a najmä geometrické vzdelanie a napísal prvú učebnicu perspektívy (Norimberg, 1525). Od Dürera pochádza aj známa pomôcka na rysovanie perspektív¹): Maliar pozoruje objekt cez sklenenú dosku s vyznačenou štvorcovou sieťou cez pevný priezor a pozorované body prenáša na takú istú štvorcovú sieť.

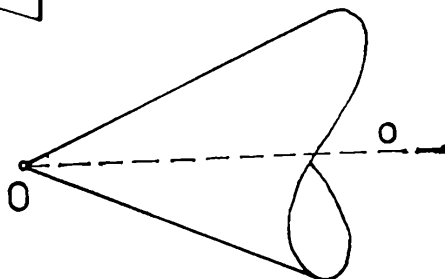
¹) viz str. 308 v Rozhľedoch m.-f. č. 7 roč. 58 (pozn. redakce)



Obr. 1



Obr. 2



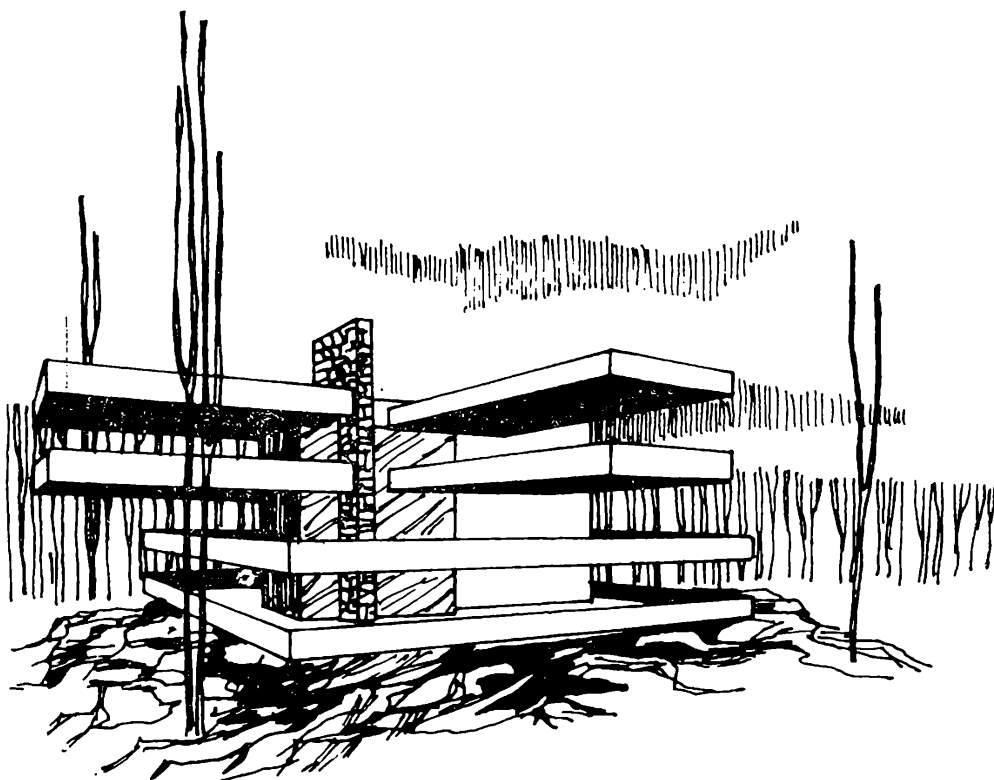
Obr. 3

V prácach týchto klasikov vidieť (samozrejme, okrem iných aspektov) úsilie o názornosť ich obrazov, čiže aby odpovedali tomu, ako človek vníma priestor. Tento proces umožnila pochopiť lekárska veda. Ľudské oko prepúšťa cez zrenicu svetelné lúče odrážajúce sa od jednotlivých predmetov a zachytáva ich na sietnici. Podráždením bodov sietnice vznikajú elektrické impulzy, ktoré sa prostredníctvom nervovej sústavy prenášajú do mozgu, kde vzniká uvedomenie si priestoru.

Ak by sme teda chceli získať čo najvernejšie obrazy, mali by sme zobrazovať na plochu tvarom podobnú sietnici, ktorá je približne časťou guľovej plochy. A tu narážame na ťažkosti, pretože guľová plocha je „nerozvinuteľná“; nie je možné vyhotoviť taký kus roviny z neelastického materiálu, ktorým by sa dala pokryť čo i len časť guľovej plochy.

Z tohoto hľadiska bude teda najvhodnejšie zobrazovať priestor tak, ako sa to deje pri fotografovaní: Svetelné lúče odrazené od fotografovaného objektu prechádzajú cez optický stred objektívu kamery a dopadajú na citlivú vrstvu filmu, ktorý je v príslušnej polohe „rovinný“. Tomuto pochodu odpovedá v deskriptívnej geometrii tzv. *stredové premietanie* (obr. 1). Daná je rovina ρ (priemetňa) a bod $S \notin \rho$ (stred premietania). Polohu bodu S vzhľadom na priemetňu ρ určíme tak, že z bodu S spustíme kolmicu na rovinu ρ a jej päťu označíme H (hlavný bod). Dĺžke úsečky SH hovoríme dištancia a značíme ju d . Hlavným bodom a (orientovanou) dištanciou je potom určená poloha bodu S vzhľadom na priemetňu. Obraz (stredový priemet) ľubovoľného bodu $A \neq S$ dostaneme ako priesečník A_s spojnice AS s priemetňou.

Mohlo by sa zdať, že podobne ako fotografia, aj stredový priemet by mal byť dostatočne názorný. No, žiaľ, nie je tomu vždy tak. Na obr. 2



Obr. 4

je znázornená priemetňa ρ , stred premietania S a obdĺžnik $ABCD$ ležiaci v rovine kolmej na priemetňu. Stredovým priemetom obdĺžnika $ABCD$ bude neohraničený útvar, ktorého časť je vyznačená na obr. 2. To iste nie je názorný obraz obdĺžnika.

Dôvod, prečo to tak je, spočíva v tom, že ľudské oko a podobne ani fotografický aparát nezobrazuje celý priestor. Ľudské oko (ak ním nehýbeme) je schopné zachytiť iba tú časť priestoru, ktorá sa nachádza vo vnútri tzv. zornej kužeľovej plochy. Táto kužeľová plocha má vrchol v oku O , môžeme ju (kvôli zjednodušeniu) považovať za rotačnú kužeľovú plochu s osou v optickej osi oka a jej vrcholový uhol je zhruba $40^\circ - 60^\circ$ (obr. 3). Ľudské oko nie je schopné presne zachytiť ani všetky útvary, ktoré ležia vo vnútri tejto zornej kužeľovej plochy. Predovšetkým nerozoznávame predmety, ktoré sú veľmi vzdialené, ale ani predmety, ktoré sú k oku bližšie ako 20 cm.

Stredové premietanie, ktoré zohľadňuje tieto vlastnosti ľudského oka, sa nazýva *lineárna perspektíva* a obrázky získané touto metódou sú dostatočne názorné (obr. 4).

Konštrukcie v lineárnej perspektíve sú dosť zložité a majú jeden nedostatok v tom, že sa z nej ťažko rekonštruujú zobrazované objekty (existuje celý vedný odbor — *fotogrametria* — ktorý sa zaoberá práve rekonštrukciou objektov z ich fotografií). Preto sa v technickej praxi používajú aj iné zobrazovacie metódy, o ktorých si povieme niečo v ďalšom.

Slapové jevy

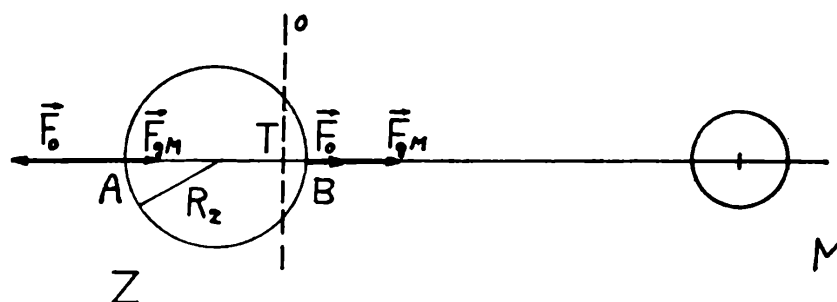
JOSEF JÍRŮ, gymnázium Pelhřimov

Periodické stoupání a klesání mořské hladiny, příliv a odliv, zná lidstvo od nepaměti. Také po mnohá staletí člověk tuší, že tyto tzv. slapové jevy souvisí se vzájemným postavením Měsíce, Slunce a Země. Vědecky však tuto souvislost objasnil teprve *I. Newton*.

Podívejme se na tento problém z hlediska znalostí mechaniky středoškolského studenta. Pro začátek nebudeme uvažovat vliv Slunce. Země se otočí kolem osy jednou za 24 hodin. Měsíc obíhá Zemi s periodou 27 dnů 7 hodin 43 minut vzhledem k hvězdám (tzv. siderická doba oběhu), a to ve směru rotace Země. Složíme-li oba pohyby, opíše Měsíc

při jednom otočení Země kolem osy necelou $\frac{1}{27}$ svého kruhového oblouku. Musí se tedy Země ještě „o něco“ otočit, aby pozorovatel pevně spojený se zemským povrchem viděl Měsíc ve stejné poloze jako minulý den. Tato doba mezi dvěma kulminacemi Měsíce je 24 hodin 50 minut. Při denním sledování poloh Měsíce se o tom můžete přesvědčit. Příliv však nastává za dobu poloviční, a to současně na přivrácené i odvrácené straně. V čem tkví tento zdánlivý paradox?

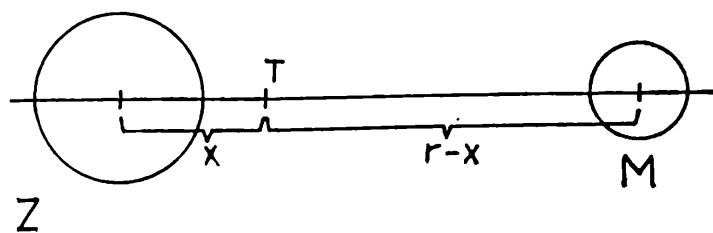
Soustavu Země—Měsíc můžeme považovat za systém dvou těles, jehož hmotný střed T obíhá kolem Slunce přibližně po kruhové dráze odpovídající kruhovou rychlostí. Země a Měsíc obíhají kolem tohoto hmotného středu s periodou rovnou siderické době oběhu. Nyní najdeme polohu bodu T (obr. 1).



Obr. 1

Označíme-li x vzdálenost hmotného středu soustavy od středu Země, r vzájemnou vzdálenost středů Země a Měsíce a M_Z , M_M po řadě hmotnosti Země a Měsíce, můžeme na základě dostředivých sil psát

$$M_Z x \omega^2 = M_M (r - x) \omega^2, \quad (1)$$



Obr. 2

kde ω je úhlová rychlost jejich vzájemného oběhu.

Z rovnice (1) plyne

$$x = \frac{M_M}{M_Z + M_M} r$$

Dosazením hodnot $M_M \doteq 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, $M_Z \doteq 5,98 \cdot 10^{24}$ kg a $r \doteq 384\,000$ km máme $x \doteq 4\,660$ km. Uvážíme-li, že poloměr Země $R_Z \doteq 6380$ km, je střed soustavy Země–Měsíc 1720 km pod zemským povrchem.

Tuto situaci ukazuje obr. 2. Na vodní masy dané hmotnosti v místě A působí kromě gravitační síly Země gravitační síla Měsíce F_{gM} , v opačném směru působí vodní masy na Zemi odstředivou silou F_o . V bodě B je naopak směr těchto sil souhlasný.

Porovnejme velikosti výslednic $F(A)$, $F(B)$ uvedených sil v jednotlivých bodech:

$$F(A) = F_o(A) - F_{gM}(A) = m(R_Z + x) \frac{4\pi^2}{T^2} - \kappa \frac{mM_M}{(r + R_Z)^2},$$

$$F(B) = F_o(B) + F_{gM}(B) = m(R_Z - x) \frac{4\pi^2}{T^2} + \kappa \frac{mM_M}{(r - R_Z)^2},$$

kde κ je gravitační konstanta ($\kappa \doteq 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²).

Vztáhneme-li tyto síly k hmotnosti vody $m = 1$ kg a dosadíme-li číselné hodnoty v článku již uvedené (T – siderická doba oběhu), dostáváme

$$\begin{aligned} F(A) &\doteq 4,60 \cdot 10^{-5} \text{ N}, \\ F(B) &\doteq 4,65 \cdot 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

Z výsledku vidíme, že se přílivové vlny svými parametry v daném místě prakticky neliší, ať je dané místo na přivrácené nebo odvrácené straně Země vzhledem k Měsíci.

Na Zemi však kromě gravitačních sil Měsíce působí i gravitační síly ostatních těles sluneční soustavy. Z nich se daleko nejvýrazněji projevuje vliv Slunce. Dá se vypočítat, že působení Slunce na příliv a odliv je asi 2,2 krát menší než vliv Měsíce. Podle vzájemné polohy Země, Měsíce a Slunce se slapový účinek buď sčítá nebo odčítá a dochází k tzv. skočnému nebo hluchému přílivu. Členitost dna a pobřeží navíc způsobuje interferenci přílivových vln, takže v různých místech na Zemi je výška

přílivu různá. Jeden z největších je ve Fundy Bay v Kanadě, kde dosahuje až 21 m. Rozmanitý tvar dna a pobřeží způsobuje též opoždění přílivu oproti horní či dolní kulminaci Měsíce, které bývá až několik hodin. Energie přílivu se využívá v tzv. slapových elektrárnách.

Slapové jevy působí také v atmosféře. Jednoduchý výpočet ukáže, do jaké míry se projeví změnou atmosférického tlaku vzduchu. Ve výšce 50 km je tlak vzduchu řádově 10^5 krát menší než při hladině moře, považujeme proto tuto tloušťku vzdušného obalu, obsahujícího převážnou část vzduchu atmosféry, za zanedbatelnou vzhledem ke vzdálenosti 1720 km. Úvahu tak můžeme provést pro oblast zemského povrchu. V bodech A , B je změna tlaku způsobená slapovými jevy

$$\Delta p = \frac{m \Delta a}{S}, \quad (1)$$

kde m je hmotnost vzduchu „nad plochou“ velikosti S zemského povrchu a Δa zrychlení způsobené silou $F(A)$, resp. $F(B)$. Protože tyto síly jsou vztaženy k hmotnosti 1 kg, je $\Delta a \doteq 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (číselná hodnota síly $F(A)$, resp. $F(B)$). Označíme-li p_{at} běžný atmosférický tlak ($p_{\text{at}} \doteq 10^5 \text{ Pa}$), je

$$m = \frac{p_{\text{at}} S}{g}, \quad (2)$$

kde g je gravitační zrychlení ($g \doteq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Dosazením (2) do (1) tak dostáváme

$$\Delta p = p_{\text{at}} \frac{\Delta a}{g}.$$

Číselně vychází $\Delta p \doteq 0,5 \text{ Pa}$, což je tlaková změna zanedbatelná vůči změnám způsobeným meteorologickými vlivy, neboť atmosférický tlak se běžně pohybuje v rozmezí $980 \cdot 10^2 \text{ Pa}$ až $1030 \cdot 10^2 \text{ Pa}$, výjimečně i v rozmezí větším.

Nejde však jen o pohyby vodních a částečně vzdušných mas, nýbrž k posunům hmoty dochází i v zemské kůře. Působení slapových sil je vzájemné. Účinek slapů na Měsíci je vzhledem k větší hmotnosti Země mnohem intenzivnější. Seizmografy umístěné na Měsíci zachytily v měsíčním tělese pohyby způsobené zemskými slapy. Vědci se domnívají, že tyto slapové síly zastavily rotaci Měsíce natolik, že dnes je přivracen k Zemi stále stejnou stranou. Energie rotujícího tělesa se tak vlivem tření při přesunu hmoty vyvolaném slapy postupně zmenšuje. Stejný jev nastává i na Zemi, zmenšení periody rotace Země kolem osy tvoří však jen 0,002 s za století. Přesto za necelých 5 miliard let bude den trvat 48 hodin.

Literatura :

- [1] Hacar, B.: Základy mechaniky nebeských těles. Praha. SPN 1966.
- [2] Vanýsek, V.: Základy astronomie a astrofyziky. Praha. Academia 1980.

Laser a jeho použitie pri meraní rýchlosti I

JOZEF ZÁMEČNÍK — IVAN BANÍK, Stavebná fakulta SVŠT, Bratislava

Laser je svetelný zdroj, ktorý má medzi všetkými známymi svetelnými zdrojmi osobité postavenie. Jeho objav ovplyvnil rad vedných odvetví a mal za následok vznik niektorých nových vedných odborov. Medzi také odbory patrí aj tzv. laserová anemometria, zaoberajúca sa meraním rýchlostí telies pomocou laserového žiarenia.

Prv než prikróčime k výkladu princípov laserovej anemometrie, objasníme si stručne podstatu lasera a tiež tzv. Doplerov jav, ktorý sa v laserovej anemometrii využíva.

1. Laser

Kvantový optický generátor (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* — skratka *LASER*) je zariadenie, v ktorom sa generujú monochromatické elektromagnetické vlny z optického intervalu, t.j. monochromatické svetlo. Aby sme pochopili činnosť lasera, pripomenieme si najprv základné poznatky o kvantovom energetickom spektre atómu.

1.1. Energetické spektrum atómu

Atóm ako základná stavebná jednotka látky je objekt, ktorého vlastnosti sa úplne nedajú opísať pomocou tzv. klasickej fyziky. Klasická fyzika, ktorá sa na elektrón pozerá ako na mikroskopicky malú guľôčku, pre pohyb ktorej platia Newtonove pohybové zákony, na popis vlastností elektrónu a atómu nestačí.

Atóm je sústava, v správaní ktorej sa prejavujú jej kvantovomechanické vlastnosti. Jednou z najtypickejších kvantovomechanických vlastností atómu je, že môže nadobúdať len niektoré dovolené hodnoty energie. Tak je tomu už aj pri tom najjednoduchšom atóme — atóme vodíka.

Elektrón v atóme môže prechádzať z jedného dovoleného energetického stavu do druhého len za predpokladu, že ak prechádza do stavu s vyššou energiou, musí prijať na to potrebnú energiu. Pri prechode na nižšiu energetickú hladinu elektrón energiu zase uvoľňuje.

Úplné vysvetlenie vlastností atómu je schopná podať len kvantová fyzika, ktorá vznikla na prelome 19. a 20. storočia. Kvantovomechanická teória poskytuje informácie nielen o dovolených energetických stavoch atómu, ale aj o priestorovom rozložení hustoty pravdepodobnosti výskytu elektrónu v jednotlivých kvantových stavoch.

Kvantovomechanický opis vlastností atómu presahuje rámec tejto publikácie. Pripomeňme, že diskrétnosť energetického spektra atómu

EXO- (z řec. *exó* = ven, venku) — předpona s významem „venku, pryč, vně“; opakem je předpona ENDO-, v.t.

EXOERGICKÁ reakce (v. -ergický pod „energie“) — reakce, při které se energie uvolňuje ven; srov. endoergický

EXOSFÉRA (v. sféra) — vrstva atmosféry „ležící už vně“; nejvyšší vrstva ovzduší, která je už vrstvou rozptýlu do vesmíru

EXOTERMICKÝ proces (v. termický) — proces, při němž se teplo uvolňuje ven, např. hoření

EXPANZE (z lat. *expansio*; od *expando*, -ere, ptc. pf. *expansus*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, ven, od sebe“, v. *ex-* + *pando*, -ere = prostírat, rozvírat) — rozpínání, rozpínavost, výbojnost; ve fyzice: zvětšování objemu;

EXPANZNÍ — založený na expanzi; EXPANDUJÍCÍ hvězda — proměnná hvězda, jejíž jasnost náhle mnohonásobně vzroste

EXPERIMENT (z lat. *experimentum*; od *experior*, -iri = zkoušet; *ex-* — zde s významem „ukončení, dovršení děje“, v. *ex-*) — zkouška, pokus; EXPERIMENTÁLNÍ — zakládající se na pokusech; EXPERIMENTOVAT — dělat pokusy

EXPLICITNÍ (z lat. *explicitus*, ptc. pf. slovesa *explico*, -are; slož. z *ex-* — zde s významem „z, od sebe, ven“, v. *ex-* + *plico*, -are = vinout, v. duplikát) — „rozvinutý“; něco zmateného slovem nebo písmem rozvinuté, vyložené, vysvětlené; podrobný, výslovný; EXPLICITNĚ — jasně, zřetelně přímo

EXPLIKACE (z lat. *explicatio*) — „rozvinutí, rozpletení, rozmotání“; výklad, vysvětlení; EXPLIKATIVNÍ — vysvětlovací, vysvětlující
Pozn.: Lat. *plico*, -are mohlo mít ptc. pf. ve složeninách *plicatus* i *plicitus*, takže vznikl jak termín „explikace“ tak „explicitní“; právě tak IMPLIKACE (v. t.) i IMPLICITNÍ, DUPLIKÁT (v. t.), ale i DUPLICITNÍ apod.

EXPLOZE (z lat. *explosio*; od *explodo*, -ere, ptc. pf. *explosus*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, zevnitř, z nitra ven“, v. *ex-* + *plodo*, -ere, s variantou *plaudo*, -ere = tleskat, tlouci) — „vytleskání, vypískání, vytlučení“; výbuch, EXPLOZÍVNÍ — výbušný; srov. APLAUDOVAT (v. a.²) — tleskat k něčemu

EXPOZICE (z lat. *expositio*; od *expono*, -ere, ptc. pf. *expositus*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, ven, vy-“, v. *ex-* + *pono*, -ere = klást, pokládat) — „vykládání, vystavování“; vystavování věcí na odív — výstava; ve fyzice: vystavení citlivé vrstvy fotografického materiálu po určitou dobu na působení světla; osvit, EXPOZIČNÍ doba; EXPONOVAT; srov. POZICE — „položení“; poloha, postoj, postavení; v. t. expozimetr, kompaudní, komponent, kompozice, opozice, superponovat, superpozice, transponovat

EXPOZIMETR (slož. z lat. *expono*, -ere, ptc. pf. *expositus* = vykládat, vystavovat; v. expozice + řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metr¹) —

přístroj na měření expoziční doby, tj. doby, po kterou je vystaven citlivý fotografický materiál působení světla

EXTERNÍ (z lat. *externus* = vnější) — vnější, zevní; opak: interní, v. t.

EXTRAHOVAT (z lat. *extraho*, -ere, ptc. pf. *extractus*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, zevnitř, ven, od sebe“; v. *ex-* + *traho*. -ere = táhnout; v. trakce) — vytahovat; vyluhovat, tj. oddělovat („vytahovat“) určité látky ze směsi jiných látek rozpouštědlem; EXTRAHOVANÝ
EXTRAKCE (z lat. *extractio*) — vytahování, vytažení; vyluhování
EXTRAKČNÍ — přídavné jméno k „extrakce“

EXTRAKT (z lat. *extractum*) — „vytažené“; výtažek

EXTRAKTIVNÍ — 1. schopný něco extrahovat; 2. takový, že ho lze získat extrahováním

EXTRAPOLACE (z latiniz. *extrapolatio*; slož. z *extra* = na vnější straně, vně + *polo*, -are, ptc. pf. *polatus*, od *polio*, -ire = hladit, uhlazovat; v. interpolace) — přibližný výpočet („uhlazení výpočtu“) hodnot funkce pro body ležící vně uvažovaného oboru; odhad průběhu funkce vně daného intervalu (graf funkce v daném intervalu „z vnější strany přihladíme“ na přímku nebo na známou křivku); opak: interpolace, v. t.

EXTRÉM (z lat. *extremus* = nejzazší, krajní) — krajnost, krajní mez;
EXTRÉMNÍ

F — psáno malý písmenem (od lat. *fortis* = pevný, silný) — fyzikální značka pro sílu; srov. v hudbě FORTE — silně

FÁZE (z řec. *fasis*; od *fainomai* = objevovat se; v. fenomén) — určitý časový úsek, určité vývojové období. Pozn.: Pojem „časový úsek“ pro termín „fáze“ vznikl pravděpodobně z toho, jak se pozorovateli ze Země objevovaly postupně osvětlené čtvrti Měsíce. Ve fyzikální terminologii jde však spíše o stupeň průběhu, např.: stav pohybu v daném čase, okamžitý stav směru a velikosti střídavého proudu, stav osvětlení Měsíce ze Země apod. — Základ složeného slova EMFÁZE — důraz v řeči, vzrušení, citové pohnutí — nesouvisí s řec. *fainomai* (= objevovat se), nýbrž s řec. *fémi* = pravit, říci. Přídavné jméno k němu je EMFATICKÝ, kdežto k „fáze“ FÁZOVÝ. V t. fázotron. synchrofázotron.

FÁZOTRON (slož. z řec. *fasis*; v. fáze + analogicky použitá přípona -tron podle „elektron“; v. -tron) — urychlovač nabitých částí, v němž je použito principu samočinného fázování, „načasování jednotlivých úkonů“; v. t. synchrofázotron

FENOMÉN (z řec. *fainomenon* = zjevující se; od *fainomai* = objevovat se) — neobyčejný zjev, úkaz; člověk v něčem neobyčejně vynikající; ve fyzice: pozorovatelný jev; FENOMENOLOGICKÁ teorie — zakládající se jen na pozorovaných jevech (podává pouze jejich popis a netvoří hypotézy); v. t. fáze, fázotron

FERIMAGNETICKÝ (uměle slož. z „ferit“, v. t. + magnetický, v. t.) — podobných vlastností jako feromagnetický, ale jiné struktury

FERIT, FERRIT (zkrácený výraz místo „ferimagnetická látka“; slož. z lat. *ferrum* = železo + analogicky použitá přípona *-it*; v. t.) — „hmota železa“, „těleso z látky podobné železu“; látka, která má podobné vlastnosti jako feromagnety, ale jinou vnitřní strukturu; ve fyzice: nikoliv látka, ale těleso z látky, která má . . .; -FERIT v chemii: železo jako složka slitin s uhlíkem. V. t. ferimagnetický, feroelektrický, feroferit, feromagnetický

FERO- (z lat. *ferrum* = železo; v. *ferit*) — počáteční složka složených slov, která buď má význam „železo“ nebo je zkráceným tvarem místo „feromagnetický“ Pozn.: Existuje však (zvláště v biologii) počáteční složka *fero-*, která je od řec. *feró* = nésti; např. FEROMON (-mon analogicky podle „hormon“) — „nositel hormonů“

FEROELEKTRICKÝ (v. elektrický) — chovající se v elektrickém poli podobně jako feromagnetický v poli magnetickém

FEROFERIT (slož. z *ferrum* = železo + *ferit*, v. t.) — ferit chovající se v magnetickém poli jako železo

FEROMAGNETICKÝ (v. magnetický) — chovající se v magnetickém poli podobně jako železo; **FEROMAGNETISMUS** — vlastnost látek, především železa, umožňující silné zmagnetizování

FERRI-, FERRO- v. FERI-, FERO-

-FIKACE (z latiniz. *-ficatio*; od *facio*, *-ere* = dělat; v. perfektní) — koncová složka složených slov, která nabyla charakteru přípony s významem „vytvoření nebo zavedení“ toho, co označuje první část složeného slova; zpravidla jde o akci rozsáhlejší (srov. *-izace*); např. ELEKTRIFIKACE — soubor opatření k zajištění výstavby zdrojů elektrické energie a jejího zavedení k průmyslovým a drobným spotřebitelům. Zpravidla existuje souvztažné sloveso na **-FIKOVAT**; např. ELEKTRIFIKOVAT; v. t. identifikace, kvantifikace, modifikace, unifikace, verifikace.

FIKTIVNÍ (z lat. *fictus*, ptc. pf. slovesa *finco*, *-ere* = dávat hmotě tvar, tvořit, vymýšlet, předstírat) — vymyšlený, smyšlený, zdánlivý, neskutečný. Srov. FIKCE — výmysl, smyšlenka; FINGOVAT — dělat jen na oko, padělat, falšovat. Pozn.: Termín „fiktivní“ nezaměňovat s termínem FIXNÍ (lat. *figo*, *-ere*, ptc. pf. *fixus* = připevňovat) — „připevněný“, utkvělý, pevný, stálý.

FLOGISTON (z řec. *flogistos* = plamenem strávený, spálený; souvisí s *flox*, *flogos* = plamen, plápol — od *flegó* = pálit, planout) — zastaralý název pro nevažitelnou tepelnou substanci (v. t. kalorikum); Pozn.: S řec. *flegó* souvisí FLEGMATIK — člověk chladnokrevný; staří Řekové totiž věřili, že chladnokrevnost je způsobena málo ohnivými šťavami.

FLUIDITA (z latiniz. *fluiditas*, od *fluidus* = plynoucí, tekutý; a to od *fluo*, *-ere*, ptc. pf. *fluctus* nebo *fluxus* = plynout, téci) — tekutost **FLUIDUM** — „tekutina“; domnělá jemná neviditelná a nepostiži-

telná látka vyzařující nějakou energii a způsobující svým přebytkem nebo nedostatkem některou vlastnost látek

Pozn.: Halový prvek FLUOR dostal svůj název pro svou velkou „tekutost“, těkavost. V t. fluktuace, fluxmetr,

FLUKTUACE (z lat. *fluctuatio* = vlnění; souvisí s *fluo*, -ere = plynout, téci; v. fluidita) — vlnění, kolísání, stálý pohyb, změna; nežádoucí střídání zaměstnání; ve fyzice: místní kolísání veličin kolem rovnovážného stavu

FLUOR (z lat. *fluor* = tok; od *fluo*, -ere = plynout, téci; v. fluidita) — halový prvek, který je velmi těkavý

FLUORESCENCE (-ence analogicky podle „luminiscence“) — záření, světélkování za denního světla (název dán proto, že tento jev byl často pozorován při rozpouštění křivce; ve fyzice: přeměna části zářivé energie pohlcené látkou při záření v nové záření o jiné vlnové délce

FLUXMETR (slož. z lat. *fluxus* = tok, proud; od *fluo*, -ere = plynout, téci, v. fluidita + řec. *metron* = měřidlo, míra, v. -metr¹) — přístroj, který zjišťuje magnetický indukční tok

FOKUS (z lat. *focus* = ohniště) — ohnisko; srov. „f“ — označení pro ohniskovou vzdálenost; F — označení pro ohnisko; FOKÁLNÍ — ohniskový; v. t. afokální, bifokální, konfokální; FOKUZACE — soustředění elektronů do ohniska

FÓLIE (z lat. *folium* = list, lupen) — jemný volný list z kovu nebo plastické hmoty; FÓLIOVÝ — svitkový;

FÓN, PHON (z řec. *fóné* = hlas, zvuk) — jednotka hladiny hlasitosti
-FON — koncová složka složených slov označujících buď elektroakustický přístroj, tj. přístroj, který pomocí elektrického proudu „vydává zvuk“ (v. gramofon, magnetofon, megafon, mikrofon, telefon, termofon) nebo označujících hudební nástroje (v. aerofon, chordofon, idiofon); v obou případech počáteční složka složených slov naznačuje, jakým způsobem nebo jaký zvuk přístroj, případně nástroj vydává

FÓNICKÝ — zvukový

-FONICKÝ — koncová složka složených slov mající význam „vydávající zvuk“; předcházející složka zpravidla vyjadřuje, „jakým způsobem se onen zvuk vydává nebo tvoří“; např. ELEKTROFONICKÝ — vydávající zvuky pomocí elektronek. Souvztažnou složkou je -FONIE (v. t.)

-FONIE — koncová složka složených slov mající význam „vydávání zvuku“, „nauka o vydávání zvuku“; souvztažnou složkou je -FONICKÝ, v. t. (nikoliv -fonní!).

-FONNÍ — koncová složka přídavných jmen, která 1. vyjadřuje vztah k elektroakustickým přístrojům (např. telefonní přístroj); 2. vyjadřuje vlastnost elektroakustických přístrojů; 3. má význam

súvisí s tým, že elektrón má podľa kvantovej mechaniky jednak vlastnosti časticové, jednak vlnové. Diskrétnosť vln je známa. Struna, na ktorej vzniká stojaté vlnenie, nemôže vydávať hocikaký tón, ale len tóny s niektorými frekvenciami. Najnižšia frekvencia sa volá základná, ďalšie frekvencie sa volajú vyššie harmonické. Diskrétnosť energie elektrónu v atóme je teda spojená s jeho vlnovými vlastnosťami.

Pripomeňme tu ešte — síce nepresný — ale názornejší Bohrov poloklasický — polokvantový model atómu, podľa ktorého elektrón môže v atóme vodíka obiehať okolo jadra len po niektorých dovolených kruhových dráhach. Každá dovolená dráha prislúcha pritom určitá konkrétna hodnota energie. Zmeny energie elektrónu sa môžu diať len po skokoch, pri ktorých prejde elektrón z jednej dovolenej dráhy na druhú. Nesmieme však zabúdať na to, že Bohrov model vystihuje len niektoré vlastnosti atómu.

1.2. Emisia a absorpcia žiarenia

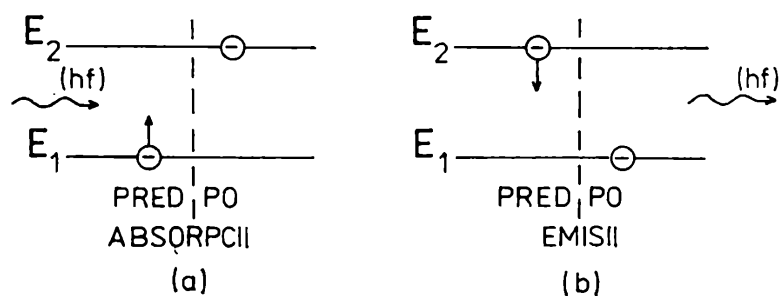
Prechod atómu do vyšších energetických stavov, čiže jeho vzbudenie — excitácia, môže byť vyvolaný prijatím (absorpciou) určitej energie. Tejto hodnote energie hovoríme kvantum energie. Je to energia rovná rozdielu energií energetických hladín, medzi ktorými prechod nastáva. Prijatá energia môže mať formu tepelnej, svetelnej, alebo inej energie. Prechod do stavu s nižšou energiou môže byť pritom žiarivý, alebo nežiarivý, podľa toho, či pri ňom dôjde k uvoľneniu žiarivej (svetelnej) energie, alebo sa energia neuvolní. Pri žiarivom prechode atóm emituje — vysiela svetelné kvantum — fotón. Frekvencia f vysielaného žiarenia je určená vzťahom

$$hf = E_2 - E_1, \quad (1)$$

kde hf je energia svetelného kvanta a $E_2 - E_1$ je rozdiel energií príslušných stavov (a teda aj energia uvoľnená pri prechode). Konštanta h je tzv. Planckova konštanta ($h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$).

Absorpcia žiarenia je jav, pri ktorom elektrón pohlcuje svetelné kvantá, pričom nastáva prechod atómu do vyšších energetických stavov. Atóm môže absorbovať len také svetelné kvantá, ktorých energia zodpovedá rozdielu energií príslušných hladín, medzi ktorými prechod nastáva. Frekvencia absorbovaného žiarenia je určená vzťahom (1).

Procesy absorpcie a emisie žiarenia sú schématicky znázornené na obr. 1.

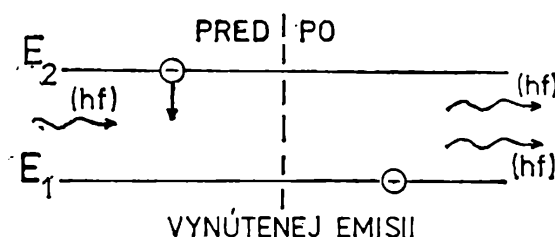


Obr. 1

1.3. Spontánna a vynútená emisia žiarenia

Vzbudené atómy, t.j. atómy nachádzajúce sa vo vyšších energetických stavoch, majú prirodzenú snahu prechádzať do stavov s najmenšou energiou, t.j. do tzv. základných stavov. Tento prechod býva obvykle spontánny. Emisia žiarenia spojená s takými prechodmi sa volá spontánna (samovoľná) emisia.

Okrem spontánnej emisie jestvuje však aj tzv. vynútená (indukovaná, či stimulovaná) emisia žiarenia. To je emisia, ktorá sa uskutočňuje na vonkajší podnet. Tým podnetom býva najčastejšie na atóm dopadajúce svetelné žiarenie. Podstatu vynútenej emisie si vysvetlíme na dvojhladinovej kvantovej sústave znázornenej na obr. 2.

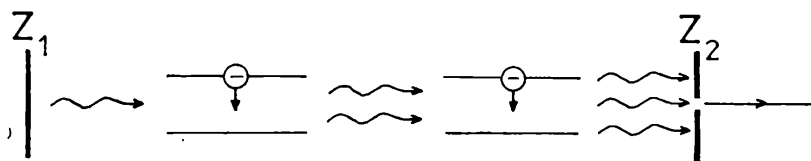


Obr. 2

Kvantum žiarenia s energiou zodpovedajúcou energii prechodu medzi znázornenými hladinami dopadá na atóm, ktorý je na začiatku vo vzbudenom stave E_2 . Kvantum s energiou $hf = E_2 - E_1$ spôsobuje vynútený prechod elektrónu z vyššej hladiny na nižšiu. Pri takom prechode sa emituje ďalšie kvantum s energiou rovnou energii prechodu, t.j. energii dopadajúceho kvanta. Nastalo pritom zosilnenie žiarenia. Vyžiarené kvantum má pritom s pôvodným — dopadajúcim kvantom — zhodnú nielen energiu, ale aj smer a fázu. Práve to je pri vynútenej emisii veľmi dôležité. Tento jav tvorí základ kvantových zosilňovačov a generátorov žiarenia.

1.4. Princíp činnosti lasera

Na vysvetlenie podstaty lasera vyjdeme zo situácie znázornenej na obr. 3. Medzi dvoma paralelnými zrkadlami, ktoré predstavujú tzv.



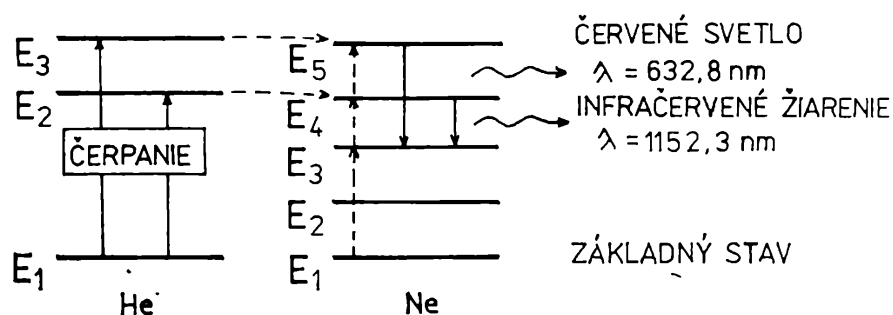
Obr. 3

optický rezonátor, je opticky aktívne prostredie so vzbudenými atómami. Náhodne emitované svetelné kvantum, vyžiarené spontánne niektorým vzbudeným atómom, dopadá na iný vzbudený atóm, kde vyvoláva vynútenú emisiu ďalšieho fotónu, čo má za následok zosilnenie žiarenia. Tento proces postupného zosilňovania sa opakuje, pričom pokračuje aj po odraze na zrkadlách. V priestore medzi zrkadlami sa tak vytvára svetelné vlnenie, ktorého intenzita by v ideálnom prípade mohla neob-

medzene narastať. V skutočnosti v dôsledku strát energie je rast intenzity obmedzený. V laseroch sa časť svetla prepúšťa z rezonátora cez polopriepustné zrkadlo von. Vystupujúce svetlo je monochromatické, koherentné a má charakter málo sa rozbiehajúceho a veľmi intenzívneho svetelného zväzku. Takéto vlastnosti nemá žiaden iný doposiaľ známy svetelný zdroj. Tieto vlastnosti lasera umožňujú jeho mnohostranné využitie.

1.5. Héliovo-neónový laser

V héliovo-neónovom lasere sú pracovnými časticami, v ktorých dochádza ku kvantovým prechodom, elektricky neutrálne atómy Ne. V elektrickom výboji prechádza časť atómov Ne pôsobením zrýchlených elektrónov zo základného stavu s energiou E_1 do vzbudených stavov s energiami E_4 a E_5 (obr. 4) s dlhou dobou života. V čistom



Obr. 4

neóne však uvedeným prechodom bráni existencia nestabilnej hladiny s energiou E_2 . Príčina je v tom, že elektrón, ktorý v elektrickom poli postupne zvyšuje svoju rýchlosť po získaní energie postačujúcej na prechod z hladiny E_1 na hladinu E_2 vyvoláva pri zrážke s atómom Ne jeho prechod do stavu s energiou E_1 , čím zrýchlený voľný elektrón stratí svoju energiu a zrýchľovanie začína odznova. Elektrón má tak malú možnosť dosiahnuť väčšiu energiu potrebnú na spôsobenie prechodu atómu Ne do stavov s energiami E_4 a E_5 .

Uvedená ťažkosť sa odstráni tak, že sa do neónu pridá hélium. Energie dvoch vzbudených hladín E_2 a E_3 atómov He s veľkou dobou života zodpovedajú energiám hladín E_4 a E_5 atómov Ne. Pri zrážkach vzbudených atómov He s nevzbudenými atómami Ne dochádza k rezonančnému vzbudzovaniu atómov Ne. Pritom sa atómy He dostávajú do základného stavu a ich energiu prijmu atómy Ne, ktoré prejdú do vzbudeného stavu (s energiami E_4 , E_5). Tým dochádza k dodatočnému intenzívnemu obsadzovaniu hladín s energiami E_4 a E_5 atómov Ne. Tak sa vytvára opticky aktívne prostredie vhodné pre vznik monochromatického a koherentného žiarenia. K vynútenej emisii pritom dochádza medzi hladinami E_5 a E_3 , resp. E_4 a E_3 .

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Prokop Diviš — velký český přírodovědec

18. století

Uplynulo 220 let od jeho úmrtí

RUDOLF KOLOMÝ Moravská Třebová

Jedeme-li po hlavní silnici ze Žamberka směrem na Hradec Králové, upoutá naši pozornost hned za Žamberkem v obci Helvíkovice rodný domek Prokopa Divíše se známou konstrukcí jeho bleskosvodu. Rodný domek je dnes upraven jako památník na tohoto našeho nejvýznamnějšího přírodovědce 18. stol., jehož význam se teprve v poslední době ve světě náležitě oceňuje, zejména když v r. 1958 byly objeveny jeho trakáty o atmosférické elektřině z let 1755—56 v archivu bývalé petrohradské akademie věd.

Prokop Diviš (vlastním jménem *Václav Divíšek*) se narodil 26. března 1698 v Žamberku-Helvíkovicích jako syn chudých rodičů. Mimořádným nadáním, které projevoval již v mládí, upozornil na sebe Jindřicha Dušíka, rektora jezuitského gymnázia ve Znojmě, který často do rodného Žamberka zajížděl. Ten jej také v r. 1716 vybídl ke studiu na znojemském gymnáziu. V r. 1719 byl Diviš přijat do tehdy proslulého premonstrátského kláštera v Louce u Znojma, kde studoval filozofii a teologii; r. 1726 se stal knězem, v r. 1733 získal v Salcburku doktorát teologie a pravděpodobně v r. 1745 v Olomouci doktorát filozofie. V Louce působil od r. 1729 jako profesor filozofie a teologie, přičemž vyučoval i přírodním vědám. A zde právě proslul jako vynikající pedagog, který při vyučování konal pokusy, což bylo na tehdejší dobu naprosto něco neobvyklého; mnozí jeho kolegové se s tím nemohli smířit. Proto, aby měl více klidu ke své vědecké práci, přijímá na radu louckého opata v r. 1736 místo farního administrátora v Příměticích u Znojma, kde — kromě let 1741—45, kdy byl za první pruské války pověřen správou louckého kláštera — působil až do své smrti 21. prosince 1765.

Pro své pokusy si Diviš zřídil na faře malou laboratoř, kde prováděl experimenty s „elektrickým ohněm“. Vlastnoručně sestrojil třecí elektriku, kterou nazval elektrum. Sestávala ze skleněné koule, kterou otáčel a přitom třel koženým natěradlem, elektrické náboje odváděl do leyden-
ských lahví, při přiblížení hrotů obdržel elektrický výboj délky až 20 cm. Takto postupně dospěl k myšlence, že také blesk je vlastně mohutná

elektrická jiskra. Na základě znalosti sání hrotů dospěl k názoru, že bouřkovým mrakům by bylo možno pomocí velkého počtu kovových hrotů odsávat elektrický náboj a odvádět jej přímo do země, aniž by došlo k vyrovnání elektrických potenciálů bleskem. Záhada blesku zaměstnávala v té době i jiné badatele: např. *B. Franklina* v Americe, *G. V. Richmanna* v Petrohradě aj. Právě na Richmannově tragedii z 26. července 1753 si Diviš plně uvědomil důležitost uzemnění a před pokusy s neuzemněnými tyčemi důtklivě varoval.

V následujícím roce 15. června 1754 Diviš postavil za vydatné pomoci místního kováře na farské zahradě v Příměticích „povětrnostní mašinu“¹⁾. Sestrojil tak první uzemněný bleskosvod na světě. B. Franklin vztyčil teprve v r. 1760 uzemněný tyčový bleskosvod v americké Filadelfii.

Rok 1759 byl na jižní Moravě značně suchý a neúrodný. Občané Přímětic a z okolí se domnívali, že vinu na tom nese Divišova „povětrnostní mašina“, a proto jej žádali, aby ji odstranil, poněvadž prý brání spadu deště. Diviš nevyhověl a poukázal na skutečnost, že sucho a neúroda postihují všechny kraje v zemi a nikoliv jen kraj kolem Přímětic. Krize vypukla v předjaří r. 1760, kdy se po kruté zimě bez sněhu opět projevilo značné sucho. Nespokojeným vesničanům se podařilo vytrhat zemníci a současně upínací řetězy a náhlá noční vichřice 10. března 1760 dokončila dílo zkázy. Mohutná konstrukce byla odvezena do klášterní zahrady v Louce a později pohozena do starého haraburdí. Naštěstí Diviš zanechal ve svých spisech přesný popis celého uspořádání, takže bylo možno v našem století provést věrnou rekonstrukci celého zařízení. Diviš ve svých rukopisech uvádí, že ještě téhož roku 1760 přišli vesničané prosit, aby „povětrnostní mašinu“ znovu postavil, aby chránila jejich obydlí a úrodu před neobvykle běsnícími živly onoho léta. Podle donedávna tradované literatury nesměl Diviš vyhovět z příkazu představeného opata, který se obával dalších sporů a těžkostí. Někteří badatelé, kteří se v poslední době kriticky zabývali celým dílem Prokopa Divíše, se domnívají, že po zničení bleskosvodu se Divišovi podařilo nově instalovat bleskosvod, tentokrát však na věži přímětického kostela.

Diviš vynikl i jako mnohostranný konstruktér, zručný experimentátor a badatel. Postavil např. výkonné čerpadlo pro rozvod vody po farských budovách v Příměticích, pro loucký klášter navrhl vodovod, zkonstruoval scabellum — elektroterapeutické zařízení, jímž léčil např. epilepsii, revmatismus i jiné choroby. Příznivé výsledky v léčení revmatismu pocítil i sám na sobě. Jeho přítel znojemský lékař *dr. Pichler* mu posílal tolik pacientů, že Diviš byl nucen pro ně zavést ordinální hodiny přímo na přímětické faře.

¹⁾ Pozn.: Podrobný popis Divišovy „povětrnostní mašiny“ včetně vyobrazení čtenář nalezne v příspěvku dr. Vladimíra Malíška, ČSc., „Machina meteorologica“, Rozhledy matematicko-fyzikální č. 5, roč. 64, 1985/86.

Diviš byl rovněž výborným varhaníkem a ředitelem louckého klášterního kůru. Hudební svět jeho doby byl nadšen jeho Denisdorem (česky „zlatý Diviš“). Byl to hudební nástroj, jehož přesnou konstrukci neznáme, poněvadž Diviš jej nikdy nepopsal. Podle sdělení současníků obsahoval 790 kovových strun zavěšených do speciálních rámců upevněných pružně ve vlastní kostře nástroje. Nástroj měl napodobovat nejen zvuky klavíru, ale i klarinetu, harfy, lesního rohu, fagotu, loutny, zvonkové hry a dokonce lidského hlasu. Za Denisdor prý pruský princ Jindřich nabízel Divišovi značný obnos, avšak než mohla být koupě uzavřena, vynálezce zemřel. Po Divišově smrti byl nástroj přestěhován z Přímětic do louckého kláštera. Po zrušení kláštera v r. 1784 byl Denisdor, oceněný na sto dukátů, převezen do císařského paláce ve Vídni a uložen ve dvorním muzeu. Později jej dostal darem od Josefa II. bývalý loucký varhaník *Norbert Wieser*, který na něm pořádal v různých městech koncerty. Wieser zemřel v Bratislavě a tam mizí i stopa po slavném Denisdoru.

První soubornější pojednání o Divišovi podal jeho současník a rodák z Rychnova nad Kněžnou *F. M. Pelcl*, profesor historie a český literatury na pražské univerzitě, v německy psaných životopisech českých a moravských uěnců z r. 1777. Tím se podstatnou měrou zasloužil o to, že Divišovy objevy neupadly vůbec v zapomenutí. Pelcova oslavná stať se stala později nejčastějším a nejvyhledávanějším pramenem téměř veškeré literatury o Divišovi.

Fyzik z Liptova

EVA BITTNEROVÁ, Senec, ELENA ČONČOLOVÁ
a ĽUBICA LISÁ, Liptovský Mikuláš

Liptov vytvára takmer pravidelnú elipsu, lemovanú z juhu reťazou Nízkyh Tatier, z ktorých presahujú dvetisíc metrov Ďumbier, Chopok a Dereše. Zo západu lemuje kotlinu Veľká Fatra, ktorá ju ohraničuje oproti susednému Turcu a z časti aj Orave. Ohraničenie Liptova pokračuje na severe Chočskými vrchmi. Netvorí ich súvislé horské pásma. Skladajú sa zo samostatných vápencových masívov. Východným smerom nadväzujú Západné Tatry, známe ako Liptovské Hole. Ich západná časť — Roháče dosahuje Barancom nadmorskú výšku 2184 m. Východne je najvyšší končiar Bystrá (2248 m n. m.). Vysoké Tatry masívom Kriváňa (2494 m n. m.) dopĺňajú veniec hôr okolo Liptova. Elipsa sa uzatvára v miestach obce Štrba, ktorej železničná stanica je v nadmorskej výške 895 m. Pozdĺž hlavnej osi elipsy tečie najdlhšia a najvodnatejšia

slovenská rieka Váh. Na nej postavili v rokoch 1973 až 1975 sypanú hrádzu vysokú 44 m a dlhú 1225 m. Za ňou vznikla vodná nádrž s rozlohou 21,60 km² s obsahom vody 350 · 10⁶ m³. Pri hrádzi je hydroelektrárň s výkonom 198 MW. K tomuto vodnému dielu, známemu ako Liptovská Mara, prináleží aj nižšie položená vodná nádrž s maximálnym obsahom vody 9,78 · 10⁶ m³ s hydroelektrárnou s výkonom 4,8 MW. Vo východnom cípe Liptova uviedli v r. 1983 do prevádzky originálne vodné dielo — prečerpávaciu hydroelektrárň Čierny Váh. Jej horná nádrž na vrchu Neznáma v nadmorskej výške 1150 m má obsah vody 3,7 · 10⁶ m³. K turbínam s celkovým výkonom 670 MW padá voda podzemnými potrubiami priemeru 3,8 m. Za sekundu nimi pretečie 180 m³ vody. Elektrárň je unikátna svojou pohotovosťou, je vhodná na vyrovňovanie energetických špičiek. Z kľudu do turbínovej prevádzky nabehne za 180 s.

Osídlenie Liptova siaha do neolitu, 4000 rokov pred n. l.

Stopy po prvých Slovanoch sa kladú v Liptove do 9. až 10. storočia n. l., do obdobia rozkvetu Svätoplukovej Veľkomoravskej ríše, keď západnou časťou Liptova prechádza obchodná cesta z Nitry do južného Poľska. Chladný, no na zver a ryby bohatý Liptov, sa začína sústavnejšie osídľovať až v 12. storočí, keď sa už stal súčasťou Uhorska. Vtedy vznikajú aj mestá Ružomberok, Liptovský Mikuláš a Liptovský Hrádok. V 13. storočí sa tu ťažia drahé kovy a železo. Za vlády *Mateja Korvína* (1440—1490) sa rozvíjajú v Liptove remeslá, obchod a neskorogotické umenie. Vážnu úlohu zohrala valašská pastierska kolonizácia. V 16. storočí sa v Liptove rozšírila reformácia a nastal určitý rozvoj školstva. Po celé 17. storočie Liptov hynul na následky drancovania za povstanie Tökölyho a Františka II. Rákocziho. Pokles štátnej moci, dezorganizácia a feudálny útlak sa prejavil v zbojníckych družinách hôrných chlapcov. Legendárnou sa stala postava *Jura Jánošíka* (1688—1713), ktorý sa ako cisársky žoldnier pri strážnej službe na Bytčianskom zámku, dostáva do vplyvu uväzneného zbojníckeho kapitána *Michala Uhorčíka*. Od septembra 1711 sa stáva členom jeho zbojníckej skupiny a čoskoro jej kapitánom. Vo februári 1713 ho chytili v Klenovci, väznili v Liptovskom Mikuláši a tu ho 17. 3. 1713 aj popravili zavesením na hák.

Priemysel v podobe manufaktúr prenikol do Liptova až v 19. storočí, a to rozvojom železiarstva a drevárstva v Liptovskom Hrádku a kožiarsť v Liptovskom Mikuláši. Postavenie železnice z Bohumína do Košíc (1869—1872) malo rozhodujúci význam pre rozvoj Liptova. V Ružomberku vznikli celulózky a papierne a bavlnársky kombinát. Po druhej svetovej vojne socialistická spoločnosť modernizuje a rozširuje tieto priemyselné odvetvia a v Liptovskom Hrádku sa buduje závod Tesla.

V rokoch 1848 sa sústreďoval v Liptovskom Mikuláši politický život, keď tu slovenskí národovci *Štúr*, *Hurban* a *Hodža* vyhlásili prvý slovenský politický program. Triedne uvedomovanie proletariátu sa prejavilo

1. mája 1918, keď sa zhromaždenie v Liptovskom Mikuláši dožadovalo nielen občianskych práv, ale aj spojenia Slovákov s Čechmi v spoločnom štáte. V januári 1921 sa konal v Lubochni zjazd marxistickej ľavice Slovenska a Zakarpatskej Ukrajiny, ktorý bol impulzom k založeniu Komunistickej strany Československa. Prvá ČSR nedokázala vyriešiť sociálne problémy Liptova. Vystahovalectvo pokračovalo. Spoločenské rozpory sa vyostrovali: na jednej strane proletariát, vedený komunistickou stranou, útočil na podstatu kapitalistického systému, na druhej strane slovenská reakcia, vedená klerikálnou Hlinkovou stranou, chcela ovládnuť Slovensko. Protifašistický odboj v medzinárodných súvislostiach dospel k vysadeniu prvej partizánskej skupiny sovietskeho veliteľa *P. A. Veličku* (25. 7. 1944). Po ťažkých bojoch oslobodili Liptov začiatkom apríla 1945 vojaci ČA a 1. čs. armádneho zboru. Obete týchto bojov pripomína monument na vyvýšenine Háj nad Liptovským Mikulášom.

Liptov je rodiskom a pôsobiskom viacerých kultúrnych dejateľov. V Liptovskom Mikuláši pôsobil od roku 1631 *Juraj Tranovský*, *Gašpar Belopotocký*, knihtlačiar, vydavateľ šlabikárov a kalendárov, zakladateľ slovenského divadla. Tu sa narodil básnik *Janko Král*, skladateľ *Ján Levoslav Bella*, spisovateľ a básnik *Martin Rázus*, maliar *Janko Alexy*. V Ružomberku tvoril národný umelec *Eudovít Fulla*. V roku 1796 založil *František Wisner* v Liptovskom Hrádku prvú lesnícku školu v Uhorsku. Od začiatku 20. storočia sú v Liptovskom Mikuláši a Ružomberku gymnáziá. Prírodovedecký a technický výskum nemal v Liptove živnú pôdu. Socialistická spoločnosť dala Liptovu predpoklady aj v tomto smere. V Liptovskom Mikuláši má sídlo Slovenská speleologická spoločnosť a Jednota slovenských matematikov a fyzikov. Vedecký potenciál sa sústreďuje v múzeách a na Vysokej vojenskej technickej škole.

V Liptove sa narodilo aj niekoľko osobností fyzikálneho a technického sveta. Podmienky Liptova im však nedávali možnosť uplatnenia. Známy je *Aurel Stodola*, narodený 10. 5. 1859 v Liptovskom Mikuláši, zakladateľ teórie parných a plynových turbín. Stodola položil základy pre spájanie teórie a experimentu v technických disciplínach. Techniku uplatňoval aj v zdravotníctve. Jeho myšlienky sa využili pri konštrukcii dômyselných protéz. Vyštudoval v Budapešti a v Zürichu. Zaujímal sa o neho univerzity vo Viedni i v Petrohrade.. V Anglii dostal Wattovu medailu. Ostal však pôsobiť ako profesor na Spolkovej technickej vysokej škole v Zürichu. Tu zomrel 25. 12. 1942.

S rozvojom fyziky u nás sa viaže meno ďalšieho rodáka z Liptova, docenta *Júliusa Krmešského*, o ktorom si teraz povieme.

Július Krmešský sa narodil 10. 4. 1900 ako najmladšie dieťa učiteľa miestnej školy v obci Ploštín, asi tri kilometre juhozápadne od Liptovského Mikuláša. Jeho starší brat Ján zomrel v útlom veku, Julovi ostala sestra Mária, ktorá sa vydala za školského inšpektora Miloša Janošku, spoluzakladateľa slovenskej turistiky, autora prvých slovenských tu-

ristických sprievodcov. Janoškovci žili v Liptovskom Mikuláši. Malého Jula formovali pomery v učiteľskej rodine, bezprostredný styk s malebnou prírodou, blízkosť archeologicky zaujímavej lokality „Rohačka“, ktorá sa dvíha priamo nad jeho rodnou obcou. Detská knižnica Krmeškého obsahovala aj prvú slovensky napísanú Zachovu učebnicu fyziky z roku 1869. Prvé dotyky so vzdelaním urobil Krmešký pod otcovým vedením v rodnej obci. Neskôr absolvoval meštiansku školu v Liptovskom Mikuláši a na tamojšom gymnáziu aj zmaturoval. Bolo to maďarské kráľovské štátne hlavné gymnázium, ktoré v roku 1916 presťahovali do novopostavenej budovy. Tu je aj dnes Gymnázium Michala Miloslava Hodžu. Stredoškólak Krmešký mal literárne sklony, prispieval do časopisu *Dennica* pod značkou „Švagrik“. Gymnázium ukončil maturitou, ešte v maďarskom jazyku, v r. 1918 a zapísal sa na lekársku fakultu v Budapešti v presvedčení, že povolanie lekára mu v Uhorsku zaručí väčšiu voľnosť národného povedomia. Keď sa 14. 11. 1918 utvorilo v Prahe Revolučné národné zhromaždenie a vznikla samostatná Československá republika, Krmeškého pobyt v Budapešti prestal byť aktuálnym. Hospodárska situácia rodiny ho primäla stráviť zvyšok školského roku v štátnych službách, ako redaktora Úradného časopisu župy spišskej a osobného županovho tajomníka v Levoči. Od školského roku 1919–20 študoval strojárstvo a elektrotechniku na Českom vysokom učení technickom v Prahe. K fyzike a k technickým vedám ho toťahlo už od malička a voľnosť povedomia mal danú ústavou, preto nepokračoval v štúdiu napr. na Lekárskej fakulte v Bratislave. V Prahe bol Krmešký odkázaný na štipendium. Okrem toho získaval finančné prostriedky prekladmi z maďarčiny, ktoré robil pre Pozemkový úrad v Prahe. Od roku 1921 bol členom Jednoty českých matematikov a fyzikov. Jednota v tom čase zabezpečovala študijnú literatúru a stredoškolské učebnice. Príčinlivejší študenti sa za menšiu finančnú odmenu podieľali na príprave rukopisov, kreslení obrázkov i ako prekladatelia do slovenčiny. V roku 1922 Krmešký preložil do slovenšiny *Fyziku* pre nižšie školy stredné od profesora Petíru. Známy je jeho, pre slovenské školy upravený, preklad „Fyziky pre vyššie triedy stredných škôl“ od Herolta a Rysavého, ktorý vyšiel v roku 1938 v Prešove.

V piatom semestri technických štúdií Krmeškého sa vážne zhoršil zdravotný stav jeho rodičov. Aby čelil možným finančným ťažkostiam, zapísal si Krmešký v roku 1921 aj fyziku a matematiku na Prírodovedeckej fakulte Karlovej univerzity. V šiestom semestri prestúpil na učiteľské štúdium definitívne. V prázdninách sa mladý Krmešký zúčastňoval archeologických prác na Liptove a sprístupňovania Demänovských jaskýň. Pražská prekladateľská Krmeškého práca v rámci Jednoty prispela k tvorbe a ušľachťovaniu slovenskej fyzikálnej terminológie. V roku 1923 nastúpil Krmešký ako suplujúci profesor na Kolegiálnom gymnáziu v Prešove. Tu sa prejavila jeho organizátorská schopnosť.

Založil samovzdelávací krúžok Andreja Sládkoviča, ktorý pracoval vyše dvoch desaťročí. Krmešský sa tu podieľal na vzniku Nakladateľstva slovenských profesorov v Prešove. Do jeho edície prispel „Čítankou pre prvú triedu stredných škôl“ a „Malým pravopisným slovníkom“. Pre nedostatok profesorov, ovládajúcich slovenčinu, bol v tom čase Krmešský nútený vyučovať aj tento predmet. V Prešove pôsobil do roku 1929. V čase svojho prešovského pôsobenia ukončil štátnymi skúškami štúdium matematiky a fyziky a nastúpil ako dočasný profesor na I. československé reálne gymnázium v Bratislave. Od roku 1932 bol definitívnym profesorom na československej reálke v Bratislave a od roku 1936 na II. reálnom gymnázium. Od roku 1940 bol na tomto gymnáziu, pretvorenom na Cvičné gymnázium, ustanovený lektorom metodických cvičení pre fyziku na Filozofickej fakulte bratislavskej univerzity.

V roku 1942, pri zachovaní povinností lektora metodických cvičení fyziky na Cvičnom gymnáziu, bol Krmešský poverený vybudovaním Ústavu pre školský a osvetový film a menovaný jeho riaditeľom. Za necelých osem rokov, napriek ťažkostiam vo vojnovom období a neskôr pri obnove národného hospodárstva, sa podarilo Krmeškému vybudovať životaschopný filmový výrobný podnik a položiť solídne základy pre ďalší rozvoj školského filmu na Slovensku. Súčasne z poverenia dekana Prírodovedeckej fakulty bratislavskej univerzity, neskoršieho akademika *Ilkoviča*, prednášal na tejto fakulte v rokoch 1943–1945 experimentálnu fyziku v rozsahu 3 hodiny týždenne. Po zrušení Ústavu pre školský a osvetový film bol dňom 1. 1. 1950 pridelený ako vedúci kabinetu prírodných vied a referent pre matematiku a fyziku na Štátny pedagogický ústav v Bratislave. Od 1. 11. 1953 nastúpil ako odborný asistent s úlohami docenta na Katedru fyziky Fakulty prírodných vied Vysokej školy pedagogickej, ktorú viedol profesor *Vanovič*. Po vytvorení Vyššej školy pedagogickej sa stal na nej vedúcim Katedry fyziky. Po zrušení tejto školy prešiel v roku 1960 ako vedúci Katedry fyziky na Pedagogický inštitút do Trnavy, kde bol menovaný docentom elementárnej fyziky a metodiky fyziky. Sem dochádzal z Bratislavy do roku 1963, kedy opustil činnú službu a uchýlil sa do dôchodku, pričom naďalej vypomáhal prednáškami z metodiky fyziky.

V Bratislave sa v roku 1930 Krmešský oženil s Irmou, rodenou Graselovou, rodáčkou z Modry, ktorá ako učiteľka bola tiež niekoľkonásobnou autorkou jazykových učebníc. Obaja vytvárali celých 40 rokov síce bezdetné, no harmonické manželstvo.

Docent Krmešský na sklonku svojej pedagogickej a organizátorskej kariéry venoval svoje sily vedeckému výskumu fyzikálnych polí a žiarenia organizmov. Dopracoval sa tu k výsledkom, citovaným a uznávaným aj v zahraničí. Stimulom k tejto práci mu bolo pozorovanie záhradníka v arboréte v Mlyňanoch pri Zlatých Moravciach. Záhradník si všimol, že v priestoroch mlyňanského zámčeka na pavučine, chránený

pred prievanom, nehybne visí suchý javorový list. Neobvyklá poloha listu záhradníka zaujala. Ešte viac ho prekvapilo zistenie, že keď sa na list zadíva, tento sa začne trepotiť. Prievan, pomyslel si záhradník. Pavučinu s listom však nestrhol. Aké bolo jeho začudovanie, keď sa nehybný list roztrepotal aj inokedy. Trepotal sa vždy, keď naň vrhol svoj pátravý pohľad. Tento úkaz nedal záhradníkovi pokoj. Svoje návštevy pri liste opakoval aj v sprievode náhodných návštevníkov arboreta. Takto sa o veci dozvedel aj Július Krmešský. Bolo to v roku 1959. Od tej doby začal systematicky skúmať žiarenie živých organizmov, začal pracovať v oblasti telekinézy.

Na dôchodku, v kontakte s fyzikálnymi a psychologickými pracovníkmi, sa docent Krmešský venoval kvantitatívnemu vyhodnocovaniu a experimentálnemu preverovaniu možností psychokinézy. Vo svojom byte v Bratislave na Vajnorskej ulici si vybudoval zbierku dômyselných zariadení, ktorými vykonával svoje pokusy. Pôsobenie bioprúdov na nevelké vzdialenosti skúmal z otáčania ľahkej ružice, upevnenej na vlákne so známym torzným momentom v uzavretom objeme. Možný vplyv prúdenia prostredia eliminoval odsávaním vzduchu a využívaním Dewarových nádob. Elektrické a magnetické vplyvy vylučoval uzemnenými Faradayovými kliebkami a umele vytváranými magnetickými poliami. Silové pôsobenie upreného pohľadu očí experimentálne vyhodnocoval tak, že na vodnú hladinu v dlhom žlabe položil ľahký plavák, na ktorý zvisle pripevnil fóliu známych rozmerov. Takéto „plavidlo“ sa dalo pod upreným pohľadom pozorovateľa do pohybu jedným, alebo druhým smerom. Krmešský určoval „tlak pohľadu“ zo zrýchlenia, ktoré nadobudla jeho „plachetnica“. Sledoval jeho závislosť od farby „plachty“, od osvetlenia, od mentality „hladiaceho“ a od jeho psychického stavu, vzdialenosti jeho očí od plavidla a pod. Krmešský sa pri svojej práci obmedzoval na fyzikálne hodnotenie experimentov. Svoje výsledky vždy mohol udávať pomocou známych fyzikálnych veličín, takpovediac „v SI sústave“. Nevyjadroval sa k hypotetickým „príčinám“ diaľkového pôsobenia živých organizmov. Vždy sa s jemu vlastným humorom hlásil k Newtonovmu výroku „Hypotheses non fingo — domnienky si nevymýšľam“. Preto mal docent Krmešský vždy úspech pri svojich prednáškach na pôde bratislavskej pobočky Jednoty. Exaktné výsledky Krmeškého meraní viackrát využili aj v zahraničí. Občas sa stali aj podkladom pre nepodložené úvahy a kombinácie ľudí, zaoberajúcich sa parapsychológiou. V týchto súvislostiach stoja niektorí Krmeškého životopisci a kritici jeho vedeckého diela v rozpakoch. On sám sa však nikdy neuchýlil k nevedecky vykonštruovaným záverom. Ako 80-ročný si dal patentovať objav. V patentovom materiáli sám píše: „... nenápadný a pre svoju subtilnosť dosiaľ nepovšimnutý jav, obdobný magnetizmu, označujem názvom kvázimagnetizmus a z neho odvodzujem všetky ostatné názvy analogicky k fyzikálnej terminológii

používané v magnetizme. Experimentálne prostriedky pre pozorovanie príťažlivých a odpudivých síl, teda pre kvalitatívne poznávanie tohto poľa sú jednoduché, avšak výskum kvantitatívnych zákonitostí pre svoju náročnosť sa javí ako problém budúcnosti“

Docent Krmešský dožíval svoj život sám, bez manželky, ktorá mu umrela v roku 1973. Prestahoval sa na Kutuzovovu ulicu v Bratislave, kde ho často navštevovali jeho žiaci a bývalí kolegovia. Osobných priateľov-kolégov vrstovníkov, s ktorými stál pri kolíske fyziky na Slovensku, však stále ubúdalo. V roku 1969 mu umrel priateľ a prakticky sused z bratislavského „Tehelného poľa“, profesor *Chrapan*, ktorý bol prísny oponentom jeho habilitačnej práce a partnerom v odborných diskusiách. Profesor Vanovič, ktorý viedol Katedru fyziky v čase, keď na Vysokej škole pedagogickej pôsobil odborný asistent Krmešský, umrel v roku 1972. Akademik Ilkovič, ktorý si vždy cenil schopnosti docenta Krmešského, umrel v roku 1979 a profesor *Fischer*, riaditeľ Cvičného gymnázia v Bratislave, v roku 1980. Docent *Baláž*, Krmešského nástupca vo funkcii vedúceho Katedry fyziky v Trnave, odišiel z činnej služby. Docent Krmešský z obavy, aby sa nestal príťažou svojmu okoliu, odišiel v roku 1980 do Domova dôchodcov na Hanulovej ulici v Bratislave. Jenota československých matematikov a fyzikov ocenila jeho celoživotné dielo a najmä jeho pomoc pri rozvoji vzdelanosti na Slovensku v prvej ČSR. Sám o tom hovorí: „Funkcie v Jednote som nevykonával. Zame-ral som sa viac na publikačnú činnosť, pričom mojím záujmom nebol hmotný zisk, ale záľuba v tvorivej práci. Keď sa pozriem dozadu na niekoľko tých desaťročí, zisťujem, že takmer každá učebnica fyziky niesla moje meno buď ako prekladateľa, spoluautora alebo recenzenta. Túto skutočnosť ocenila JČSMF a JSMF, keď na svojom zjazde v októbri 1981 v Karlových Varoch mi bol udelený titul zaslúžilý člen. Moja snaha prospieť slovenskému školstvu dostala dôstojné ocenenie, na aké som pri svojej skromnej práci nikdy nepočítal. Tento záverečný akt mojej spolupráce s Jednotou je najkrajšou odmenou pre voľakedajšieho študenta, ktorý pred šesťdesiatimi rokmi hľadal pomoc v Jednote . . .“

Docent Krmešský ostal postupne najstarším známym žijúcim fyzikom na Slovensku. Pobočka JSMF bratislavských fyzikov vedená svojím predsedom *Hlaváčom*, pripravovala účasť docenta Krmešského na zjazde JČSMF a JSMF v Gottwaldove na jeseň roku 1984. S nástupom jesene však docent Krmešský umiera. Pochovaný je v urnovom háji bratislavského krematória. Zjazd v Gottwaldove mu in memoriam udelil najvyššie uznanie Jednoty: titul Čestný člen.

Milý mladý čitateľ, ak sa niekedy budeš rozhodovať, kam sa vybrať za krásami prírody, pripomeň si tento článok a pri oddychu a rekreácii na Liptove premýšľaj o osude ľudstva, zloženom z osudov miliárd jednotlivcov. Azda ti náš článok pomôže pochopiť zmysel života, života možného len v mieri.

LITERATÚRA

- Hlaváč, A.: Osemdesiatnik — Docent RNDr. Július Krmešský. Pokroky mat. fyz. a astronómie, XXV, 5 (1980), 287—288.
Janovič, J.: Doc. Július Krmešský sedemdesiatnikom. Pokroky MFA, XV, 3—4 (1970), 203—204.
Chrapan, J.: K 75. výročiu významných postáv fyziky na Slovensku. Pokroky MFA, XXVIII, 2 (1973), 111—114.
Čončolová E., Lisá, L.: Fyzici Liptova (SOČ — odbor fyzika), Gymnázium M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš 1984/85, 24

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Neodbytný rozdíl

Nedávno se mi dostal do ruky český překlad knihy „Korděmskij: Matematické prostocviky“ vydaný Mladou frontou v r. 1957, v níž mne zaujala úloha č. 353-II na str. 270 zařazená do „nerozlousknutých oříšků“. Uvádím její plný text:

Napište libovolné čtyřmístné číslo, které nemá všechny číslice stejné. Z číslic tohoto čísla sestavte dvě další čísla: největší možné číslo M a nejmenší možné číslo m . Vypočtěte rozdíl $R = M - m$ a s tímto rozdílem proveďte totéž, co s původním číslem. Budete-li to několikrát opakovat, vždy dojdete k rozdílu 6174; a budete-li pokračovat dále, bude vám stále znovu a znovu vycházet tento rozdíl. Jak vysvětlit tento jev?

Tak např. začneme s číslem 5928; dostáváme postupně

$M_1 = 9852$,	$m_1 = 2589$,	$R_1 = 7263$;
$M_2 = 7632$,	$m_2 = 2367$,	$R_2 = 5265$;
$M_3 = 6552$,	$m_3 = 2556$,	$R_3 = 3996$;
$M_4 = 9963$,	$m_4 = 3699$,	$R_4 = 6264$;
$M_5 = 6642$,	$m_5 = 2466$,	$R_5 = 4176$;
$M_6 = 7641$,	$m_6 = 1467$,	$R_6 = 6174$;
$M_7 = 7641$,	$m_7 = 1467$	$R_7 = 6174$

Pokuste se vysvětlit tento jev důkazem, že vždy po konečném počtu kroků provedených na libovolné čtyřciferné číslo dojdeme k témuž číslu 6174. (Řešení je na str. 37.)

J. Chudý

Obdoby Pascalova trojúhelníku

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & 1 & 1 & \\
 1 & 2 & 1 & \\
 1 & 3 & 3 & 1
 \end{array}$$

Pascalův trojúhelník jistě znáte, takže snadno provedete výpočet $(a - b)^5$ nebo 11^6 . Následující schémata jsou vytvořena obdobným způsobem; napište slespoň dva řádky jejich pokračování. $1331 = 11^3$, zapíše obdobně i zde jednotlivé řádky. Najděte obecné tvary čísel n -tých řádků, obdobné výrazu 11^{n-1} , zápisu n -tého řádku Pascalova trojúhelníku. Sestavte schémata pro výrazy, jež si sami zvolíte.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 3 & & \\
 & 1 & & 4 & & 3 & \\
 1 & & 5 & & 7 & & 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & -1 & & \\
 & 1 & & 0 & & -1 & \\
 1 & & 1 & & -1 & & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 2 & & 3 & & \\
 & 2 & & 5 & & 3 & \\
 2 & & 7 & & 8 & & 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 2 & & -1 & & \\
 & 2 & & 1 & & -1 & \\
 2 & & 3 & & 0 & & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & -2 \\
 & 1 & & 2 & & -1 & & -2 \\
 1 & & 3 & & 1 & & -3 & & -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 \\
 1 & & 3 & & 4 & & 4 & & 3 & & 1
 \end{array}$$

Jiří Mann

Slovní algebrogramy

Co jsou to vlastně algebrogramy? Jsou to znakové (obrázkové), hláskové nebo slovní algebraické útvary, ve kterých je třeba zaměnit stejné znaky (obrázky, písmena) stejnými číslicemi tak, aby výsledek (součet, rozdíl, součin, podíl) byl správný. Zatím nejsou známa přesná pravidla, jak postupovat při řešení. Nejvýhodnější je nalézt především písmena, která představují číslice 0, 1, 9 a teprve potom kombinovat a hledat další číslice.

Před sebou máte jeden ze jmenovaných typů algebrogramů — algebrogram slovní. Pokuste se nalézt alespoň jedno řešení každého algebrogramu.

$$\begin{array}{cccc} \text{a)} & \text{I} & \text{V} & \text{O} \\ & \text{J} & \text{A} & \text{N} \\ & \text{I} & \text{V} & \text{A} & \text{N} \\ \text{M} & \text{I} & \text{L} & \text{A} & \text{N} \\ \text{M} & \text{I} & \text{CH} & \text{A} & \text{L} \\ \hline \text{J} & \text{M} & \text{É} & \text{N} & \text{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{b)} & \text{E} & \text{V} & \text{A} \\ & \text{D} & \text{A} & \text{N} & \text{A} \\ & \text{H} & \text{A} & \text{N} & \text{A} \\ & \text{J} & \text{A} & \text{N} & \text{A} \\ & \text{A} & \text{N} & \text{N} & \text{A} \\ & \text{A} & \text{L} & \text{E} & \text{N} & \text{A} \\ \hline & \text{J} & \text{M} & \text{É} & \text{N} & \text{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{c)} & \text{J} & \text{A} & \text{N} & \text{A} \\ & \text{A} & \text{N} & \text{N} & \text{A} \\ & & & & \text{A} \\ & \text{A} & \text{L} & \text{E} & \text{N} & \text{A} \\ & \text{Ž} & \text{I} & \text{J} & \text{Í} \\ & & & & \text{V} & \text{E} \\ \hline \text{V} & \text{E} & \text{L} & \text{I} & \text{M} & \text{I} \end{array}$$

(Řešení je na str. 12.)

Jarmila Pěnčíková

Neodbytný rozdíl — řešení

1. Označme číslice daného čtyřciferného čísla a, b, c, d tak, že je $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$, kde v prostředních nerovnostech je aspoň jedna nerovnost ostrá. Pak

$$\begin{aligned} M &= 1000d + 100c + 10b + a \\ m &= 1000a + 100b + 10c + d \\ R &= 999(d - a) + 90(c - b) \end{aligned}$$

Napišme tento rozdíl R ve tvaru čtyřciferného čísla

$$R = 1000x + 100y + 10z + u$$

a vyšetřme podrobněji vlastnosti číslic tohoto rozdílu. Označme

$$d - a = A, c - b = B, \text{ kde } 0 \leq B \leq A \leq 9, 1 \leq A$$

a položme

$$A = B + n, \text{ kde } 0 \leq n \leq 9$$

Uvažujme nyní dva možné případy:

$$\alpha) B = 0$$

Pak $A = n \geq 1$ a rozdíl R má tvar

$$R = 999n = 1000(n - 1) + 100 \cdot 9 + 10 \cdot 9 + (10 - n)$$

V tomto případě musí $x = n - 1, y = 9, z = 9, u = 10 - n$, tj.

$$x + u = 9, y = z = 9$$

$$\beta) B \geq 1$$

Nyní je

$$\begin{aligned} R &= 999(B + n) + 90B = \\ &= 1000(B + n) + 100(B - 1) + 10(9 - B) + (10 - B - n) \end{aligned}$$

V tomto případě musí být

$x = B + n$, $y = B - 1$, $z = 9 - B$, $u = 10 - B - n$
 tj. $x + u = 10$, $y + z = 8$

2. Protože po prvním kroku dostaneme pro každé čtyřciferné číslo (nemající všechny cifry stejné) vždy číslo typu α) nebo β), stačí se v dalším soustředit jen na tato čísla, tj. na čísla tvaru

$$1000x + 100y + 10z + u,$$

kde buď

α) $x + u = 9$, $y = z = 9$ nebo β) $x + u = 10$, $y + z = 8$

Ačkoliv bychom mohli vyšetřovat tato čísla obecně ještě dále, ukazuje se kratší vyšetřit konkrétně všechna možná čísla těchto dvou případů. Abychom nedostali zbytečně některá čísla vícekrát, můžeme bez omezení obecnosti předpokládat (vzhledem k dalšímu kroku seřazování podle velikosti cifer), že v případě α) bude $0 \leq x < u \leq 9$ a v případě β) $x \leq u$, $y \leq z$, tj. $1 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 4$. Čísel v případě α) bude pět, v případě β) 25. Dostaneme tak celkem 30 čísel, pro něž stačí vlastnost ověřit konkrétním výpočtem. Jsou to tato čísla:

α) 0999; 1998; 2997; 3996; 4995.
 β) 1089; 1179; 1269; 1359; 1449;
 2088; 2178; 2268; 2358; 2448;
 3087; 3177; 3267; 3357; 3447;
 4086; 4176; 4266; 4356; 4446;
 5085; 5175; 5265; 5355; 5445.

Ověřením vlastnosti u těchto čísel je důkaz dokončen.

Úloha

Síla dostředivá a odstředivá jako akce a reakce

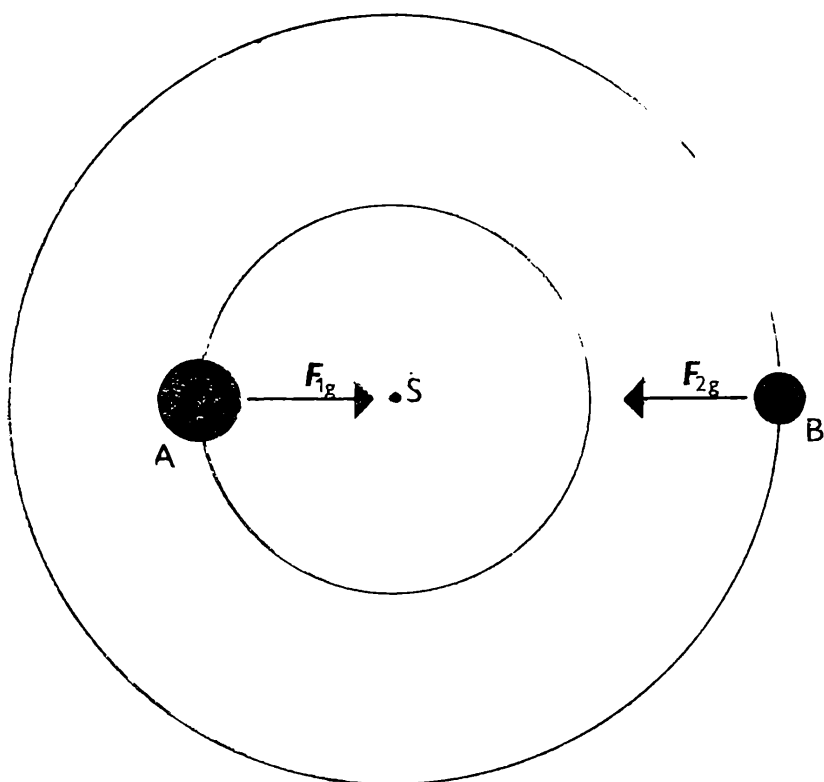
Učitel při výkladu o dostředivé a odstředivé síle improvizoval pokus s kuličkou připevněnou na niti, jejíž druhý konec držel v ruce. Přitom uvedl kuličku přibližně ve vodorovné rovině do kruhového pohybu. Potom na nákresu podle obr. 1. vysvětlil názvy a pojmy: dostředivá síla



Obr. 1

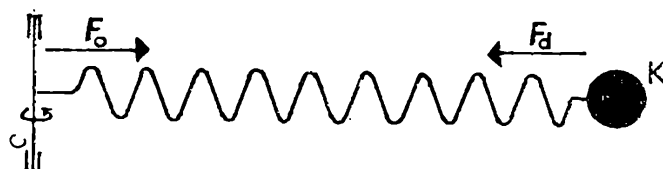
F_d jako síla, která způsobuje pohyb tělesa po kružnici, a odstředivá síla F_o , která působí tahem na pevnou osu o, jako reakce k síle F_d (obr. 1).

Na to se přihlásil Šimon s námitkou, při které uváděl pohyb dvojhvězdy, jejíž složky se pohybují po kružnicích o středu S, kterým prochází společná osa jejich otáčivého pohybu (obr. 2). Tyto složky na sebe



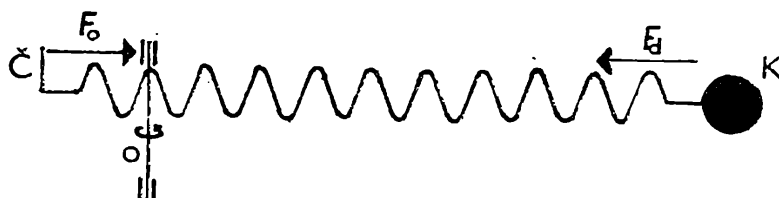
Obr.

působí navzájem silami F_{1g} a F_{2g} , které jsou ve vztahu akce a reakce. Např. síla F_{2g} je reakcí na sílu F_{1g} , která je pro hvězdu A silou dostředivou. Není prý správné nazývat sílu F_{2g} silou odstředivou, když směřuje také do středu kruhové dráhy pohybu.



Obr. 3

K němu se připojil Ivo dalším příkladem. Nejprve nakreslil obr. 3, podle něhož se kulička K pohybuje po kružnici silou nataženého péra tak, že pohyb kuličky působí dostředivá síla F_d směřující do středu na ose o. Kulička naproti tomu působí na osu o odstředivou silou F_o jako reakcí k síle F_d . Potom Ivo naznačil jiný pokus podle obr. 4. Pružina



Obr. 4

je spojena nyní s čepem Č, který je umístěn za osou o vzhledem ke kuličce K. Ivo ukázal, že na čep nyní působí síla F_o , která je reakcí k dostře-

divé síle F_d , ale směřuje k ose, a tedy do středu otáčivého pohybu. A proto prý není správné tuto sílu nazývat odstředivá.

Otázka. V čem chlapci neporozuměli výkladu o dostředivé a odstředivé síle? (Řešení je na str. 42.)

E. Kašpar

Z NOVÝCH KNIH

Ivan Bušek: ŘEŠENÉ MATURITNÍ ÚLOHY Z MATEMATIKY

Vydalo SPN v Praze 1985, 1. vydání
530 str., Kčs 35,—

Autor, se při výběru tématu úloh řídil osnovami a učebnicemi pro gymnázia, ale kniha bude užitečnou příručkou pro studenty všech typů středních škol, kteří se poradí se svými vyučujícími o výběru vhodných úloh k předmaturitnímu opakování. Publikace upoutá také pozornost vysokoškolských učitelů, kteří vybírají úlohy k přijímacím zkouškám. Proto ji lze doporučit všem uchazečům o další studium oborů vyžadujících složení přijímací zkoušky z matematiky.

Poměrně rozsáhlá látka středoškolské matematiky je účelně rozdělena do šedesáti tematických okruhů. Každý z nich obsahuje několik vyřešených úloh a v závěru sadu dalších úloh vhodných k procvičování; výsledky těchto úloh, resp. návody k jejich řešení, jsou samozřejmě v knize též uvedeny. Autor položil důraz na různé postupy řešení úloh a na účelný

a výstižný zápis řešení. Studenti posledních ročníků středních škol se mohou zamyslet nad řešeními úloh z nižších tříd s určitým nadhledem, porovnat různé možné přístupy, uvědomit si řadu souvislostí apod.; proto dr. Bušek věnoval pozornost i této systemační roli předmaturitního opakování.

Čtenáři jistě ocení, že v každém tématu jsou zařazovány nejprve úlohy jednodušší, na nichž se lze „uchytit“ a samostatně je zvládnout i při některých mezerách ve vědomostech. Na druhé straně jsou však v textu i úlohy obtížnější, zejména úlohy, kterým se říká komplexní, protože při svém řešení vyžadují znalosti z různých partií matematiky a jejich účelné spojení. Proto nemusí mít obavu z nudných jednoduchých úloh ani ti čtenáři, kteří jsou řešiteli náročných úloh.

Doporučujeme všem čtenářům Rozhledů, aby si knihu dr. Buška včas opatřili. Zejména studenti třetích ročníků by neměli spoléhat, že ji najdou na pultech knihkupectví za několik měsíců, kdy ji budou akutně potřebovat.

Jaroslav Šedivý

Kalendár M-F: september 1986

5. IX. 1906 zomrel v Duino pri Görzi *Ludwig Eduard Boltzmann*, rakúsky teoretický fyzik. Patrí k zakladateľom klasickej štatistickej fyziky. Pracoval v oblasti kinetickej teórie plynov, teórie elmg. poľa, optiky, hydrodynamiky. Štatisticky vysvetlil druhý zákon termodynamiky, objasnil pojem entrópie. Odvodil zákon rozdelenia molekúl plynu podľa rýchlosti a základné kinetické rovnice plynov.
6. IX. 1766 sa v Eaglesfelde narodil *John Dalton*, anglický chemik a fyzik. Objavil zákon o vzťahu parciálnych tlakov plynu k celkovému tlaku. Patrí k zakladateľom vedeckej atómovej teórie.
6. IX. 1892 sa v Bradforde narodil *Edward Victor Appleton*, anglický fyzik. Zaoberal sa výskumom ionosféry, teóriou odrazu elmg. vln, vývojom radaru. V roku 1947 získal Nobelovu cenu za výskum vyšších vrstiev atmosféry a objav ionizovanej vrstvy.
7. IX. 1956 zomrel *Otto Julievič Šmidt*, sovietsky astronóm, matematik a geofyzik. Vedecky pracoval v teórii grúp a založil sovietskú školu modernej algebry. Podal teóriu vzniku planetárnej sústavy.
10. IX. 1931 zomrel *Dmitrij Fiodorovič Jegorov*, sovietsky matematik. Zaoberal sa otázkami diferenciálnej geometrie, variačným počtom, teóriou integrálnych rovníc.
14. IX. 1891 sa v Miloljube narodil *Ivan Matvejevič Vinogradov*, sovietsky matematik. Člen mnohých AV. Zaviedol nové metódy do analytickej teórie čísel, v roku 1937 vyriešil Goldbachov-Eulerov problém pre nepárne čísla. Vytvoril viac ako 140 originálnych vedeckých prác. Je nositeľom Leninovej ceny (1972) a piatich Leninových rádov.
16. IX. 1736 zomrel *Gabriel Daniel Fahrenheit*, nemecký fyzik. Konštruoval fyzikálne prístroje, zaviedol novú teplotnú stupnicu — ľad sa topí pri 32 °F, voda sa varí pri 212 °F.
16. IX. 1946 zomrel v Surrey *James Hopwood Jeans*, anglický fyzik a astronóm. Zaoberal sa problémami nebeskej mechaniky, kineticou teóriou plynov, teóriou žiarenia, kozmogóniou. Vytvoril slapovú teóriu vzniku slnečnej sústavy, bol stúpencom tepelnej smrti vesmíru.
16. IX. 1971 zomrel *John Desmond Bernal*, anglický fyzik a biochemik. Študoval metódou röntgenovej analýzy štruktúru pevných látok. V r. 1959—65 predseda Svetovej rady mieru.
17. IX. 1891 zomrel vo Viedni *Jozef Maximilián Petzval*, slovenský fyzik a matematik. Navrhol konštrukciu portrétového a krajinárskeho objektívu pre fotografovanie.
17. IX. 1826 sa v Breslenzi narodil *Georg Friedrich Bernhard Riemann*, nemecký matematik. Významne ovplyvnil teóriu komplexnej premennej, riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc. Do matematickej

- analýzy zaviedol topologické metódy, rozvinul matematické predstavy o priestore a geometrii.
18. IX. 1896 zomrel *Armand Fizeau*, francúzsky fyzik. Zaoberal sa optikou, ako prvý zmeral rýchlosť svetla v podmienkach na Zemi (1849).
21. IX. 1926 sa v Clevelande narodil *Donald Arthur Glaser*, americký fyzik. Skúma elementárne častice. V roku 1960 získal Nobelovu cenu za vynález bublinovej komory.
22. IX. 1791 sa v Newingtone narodil *Michel Faraday*, anglický fyzik a chemik. Objavil elmg. indukciu, jav vlastnej indukcie, zákony elektrolýzy. Zaviedol pojem elektrického a magnetického poľa a pojem siločiar.
24. IX. 1501 sa v Pavii narodil *Geronimo Cardano*, taliansky matematik, lekár a filozof. V knihe *Ars magna* uvádza vzorec na riešenie rovnice tretieho stupňa a metódu riešenia všeobecnej bikvadratickej rovnice.
24. IX. 1801 sa v dedinke Pašennaja narodil *Michail Vasilievič Ostrogradskij*, ruský matematik. Zaoberal sa úspešne matematickou analýzou, teoretickou mechanikou, teóriou magnetizmu, šírením tepla, nebeskou mechanikou. Bol dobrým pedagógom a organizátorom.
27. IX. 1791 sa v Charlestowne narodil *Samuel F. B. Morse*, americký vynálezca. Navrhol špeciálnu telegrafnú abecedu, stal sa priekopníkom elmg. telegrafu.
29. IX. 1901 sa v Ríme narodil *Enrico Fermi*, taliansky fyzik. Pracoval v oblasti neutrónovej fyziky, vypracoval štatistiku elementárnych častíc, sformuloval kvantitatívnu teóriu beta rozpadu. Zúčastnil sa na projekte prvej atómovej bomby v Los Alamos, uskutočnil prvú kontrolovateľnú reťazovú reakciu v Chicagu roku 1942. Nobelovu cenu za fyziku získal v roku 1938.
30. IX. 1891 sa v Mogileve narodil *Otto Julievič Šmidt*, sovietsky astronóm, polárny bádateľ. Bol viceprezidentom AV ZSSR, riaditeľom Geofyzikálneho ústavu AV, hlavným redaktorom Veľkej sovietskej encyklopédie.

dj

Řešení úlohy ze str. 38

Chlapci si neuvědomili, že jde o výklad pohybu jednoho hmotného bodu, který je poután závěsem o prakticky nulové hmotnosti k pevné ose o , která je středem kruhové dráhy bodu a působíštěm odstředivé síly F_o . Hmotný bod se pohybuje dostředivou silou F_d , kterou na hmotný bod působí osa o . Při skutečném pokuse je hmotný bod realizován kuličkou K , přičemž osa o , střed její kruhové dráhy je v místě, ve kterém

ruka (druhé těleso) drží závěs. Kulička se uvede do kruhového pohybu téměř ve vodorovné rovině a osa je potom udržována v klidu vzhledem k povrchu Země jako inerciální vztažné soustavě.

Tyto předpoklady nejsou splněny u pohybů, které uvádějí žáci.

U Šimonovy dvojhvězdy nejde o pohyb jednoho tělesa, působený dostředivou silou druhého pevného tělesa, ale o pohyb dvou volných těles, který se řídí zákony pohybu soustavy volných hmotných bodů. Žádná ze složek dvojhvězdy není v klidu, ba dokonce konají kruhový pohyb, takže každá vztažná soustava s nimi pevně spojená by byla neinerciální. Úlohu není možné řešit ani vzhledem k soustavě, jejíž počátek by byl v hmotném středu S dvojhvězdy, kolem kterého obě hvězdy obíhají (obr. 2). Mezi hmotným středem S a hvězdami není žádné reálné silové působení, neboť akce a reakce jsou síly, kterými na sebe působí pouze reálná fyzikální tělesa.

Kruhový pohyb, jak jej naznačil Ivo v obr. 4, by byl uskutečnitelný pouze za předpokladu, že kromě dvou těles (kuličky K a pevné osy o) existuje další, třetí těleso (čep Č), které by však muselo být uměle udržováno v synchronních otáčkách s kuličkou K. Zdrojem silového dostředivého působení by zde také nebyla osa o, nýbrž toto třetí těleso Č, které nadto by bylo pevně spojeno s neinerciální vztažnou soustavou.

E. Kašpar

INFORMACE

Korespondenční seminář MFF UK Praha

RNDr. JAN MALÝ, RNDr. JIŘÍ KOTTAS

Fakultní výbor SSM na matematickofyzikální fakultě Karlovy univerzity pořádal již po několik let korespondenční seminář pro studenty pražských středních škol. Od školního roku 1986/87 bude přijímat zájemce ze všech středních škol České socialistické republiky. Zájemci o soutěžní úlohy se mohou přihlásit dopisem, ve kterém uvedou tyto údaje:

Jméno, příjmení, datum narození, bydliště, rodné číslo, číslo občanského průkazu soutěžícího, adresu školy, třídu a především adresu pro korespondenci. V případě, že se přihlásí více žáků z jedné školy, uvítáme jednu společnou adresu, případně k rukám některého vyučujícího. Celoroční náplní semináře je soutěž v řešení matematických úloh,

které budou zájemcům zasílány v pěti až šesti sériích ročně. Po každé sérii bude stanoveno pořadí soutěžících; závěrečné pořadí na konci školního roku bude sestaveno na základě hodnocení soutěžícího v jeho třech *nejúspěšnějších* sériích. Nejlepší řešitelé semináře budou pozváni na pětidenní soustředění, které se koná na podzim v dalším školním roce. Program soustředění zahrnuje přednášky o atraktivních partiích matematiky, besedy, soutěže i sportovní činnost.

Na základě dosavadních zkušeností, kdy při organizaci soustředění vznikaly potíže se získáváním osobních dat účastníků, požadujeme jejich uvedení už na přihlášce. *Úlohy budou zasílány jen přihlášeným účastníkům*, v případě příliš velkého zájmu si vyhrazujeme právo omezit počet soutěžících v první sérii a později došlé přihlášky zařadit až do dalších sérií. Podrobnější pravidla soutěže budou přiložena k zadáním úloh první série.

Přihlášky zasílejte kdykoliv, ale pro zařazení do první série je nutné, aby přihláška došla do 30. září 1986 na adresu:

Korespondenční seminář, KMA MFF UK, Sokolovská 83, 186 02 Praha 8.

Zlomky pravé i nepravé

Cokoliv
měřeno dostatečně malým
může se jevit libovolně velké

Proto
velikost jež je nám připisována
neznamená vůbec nic
dokud nebude přiznán jmenovatel
jehož existence umožňuje být tím
čím jsme

Neboť
i jmenovatel je nedílnou součástí zlomku
našeho bytí

Zdánlivě velké
může být jen velkým násobkem
velice malého

S. Komenda

Benátecké okno

Jeli jste někdy z Prahy po silnici do Mladé Boleslavi? Během cesty uvidíte vlevo město *Benátky nad Jizerou* se zámkem na návrší. V zámku je pamětní síň připomínající zdejší pobyt slavného hvězdáře Tychona Brahe. Nejdříve bychom měli říci, co ho sem přivedlo.

Tycho Brahe byl příslušníkem významné dánské šlechtické rodiny. Narodil se dne 14. prosince 1546. Po roztržkách a nedorozuměních s královským dvorem odešel roku 1597 natrvalo ze své vlasti. Stal se exulantem nejen bez domova, ale i bez své proslulé observatoře Uraniborg na ostrově Hven. V červnu roku 1599 přichází Tycho Brahe do Prahy ke dvoru císaře Rudolfa II. Stalo se tak zásluhou *Tadeáše Hájka z Hájku* (1525—1600), jenž byl nejen přírodovědcem, matematikem a astronomem, ale také osobním lékařem Rudolfa II.

Pro vybudování nové hvězdárny, která by byla aspoň tak významná jako Uraniborg, nabídl císař Tychonovi, aby si vybral z jeho tří zámků v blízkosti Prahy.

Šlo o zámky v Benátkách n. J., v Brandýse n. L. a Lysé n. L. Císař si nepřál, aby byl Tycho od něho příliš vzdálen, neboť potřeboval jeho astrologické rady. Tycho si vybral Benátky nejen pro nejlepší podmínky pro pozorování, ale též se mu líbil jejich název související s italskými Benátkami.

Při pohledu na benátecký zámek se nedejte mýlit věží s ochozem, ta k zámku nepatří, jde o kostelní věž. Tychonova pozorovatelná byla v dnešním pravém křídle zámecké budovy, kde v nejvyšším patře je okno, které začíná od podlahy bez parapetu. O něm se traduje, že právě z něho pozoroval Brahe celý jižní a východní obzor.

V Benátkách se také poprvé setkali Tycho Brahe a *Johannes Kepler* (1571—1630). Stalo se tak 3. února roku 1600.

Tychonův pobyt v Benátkách n. J. netrval ani celý rok. Již v červnu roku 1600 opouští benátecký zámek a vrací se do Prahy. Zde 24. října 1601 umírá.

Jiří Mída

Čo je matematika?

Matematika je veda pre súvislosť veličín.

H. G. Grassmann

Matematika je veda pre formy i vzťahy v abstrakcii od ich obsahu.

A. D. Alexandrov

Matematika je klasifikáciou i štúdiom všetkých možných zákonitostí.

W. Sawyer

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednotky čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1986.

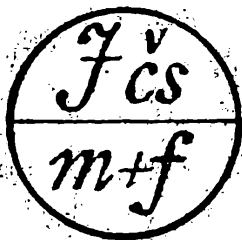
ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(2)

ROČNÍK 65, 1986/87
ŘÍJEN

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY

**matematicko
- fyzikální**

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejny
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, Praha, pplk. doc. dr. Ján Chra-
pan, CSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mi-
kuláš, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT
Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc.,
ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., VŠZ Praha, doc. dr.
Karol Križáňkovič, CSc., PF Nitra,
prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc.,
PF Nitra, doc. dr. Josef Novák, CSc.,
UK Praha, dr. Oldřich Petránek
SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc.,
ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý,
CSc., UK Praha, ing. dr. Václav Šin-
delář, CSc., Praha, dr. Martin Šolc,
CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

Václav Medek: O rovnoběžnom premi- tani	45
Dušan Jedinák: Údiv Alberta Einstei	49
Milan Koman: Několik řešení jedné úlohy o čtyřúhelníku	51
Ivan Fischer: Základy programování mikropočítačů 2	57
Jozef Zámečník, Ivan Baník: Laser a jeho použitie pri meraní rýchlosti II	62
Josef Kotyk: Z dějin letectví .	70
Emil Kašpar: Historická duha	72
Jiří Mída: Kolik druhů závorek potře- bujeme?	76
Výsledky loňské soutěže Rozhledů	77
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	79
Naše soutěž; ročník 1986-87 .	81
Leo Boček: Celostátní kolo kategorie A 35. ročníku MO	83
dj: Kalendár M-F	86
Z nových knih	87
Anna Loubalová: Čínský předchůdce Pascalova trojúhelníku 3. str. obálky	
Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (41-44)	příloha

O rovnobežnom premietaní

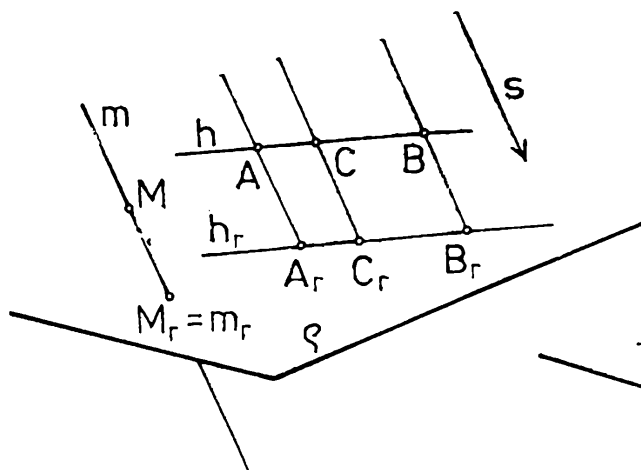
Prof. dr. VÁCLAV MEDEK, SVŠT Bratislava

V článku o zobrazovaní priestoru (RMF č. 1, roč. 65) sme si povedali niečo o stredovom premietaní a o lineárnej perspektíve. Lineárnou perspektívou dostávame názorné obrázky objektov, no tieto obrázky nemožno dobre použiť na odčítavanie údajov dôležitých pre realizáciu toho objektu (napr. podľa lineárnej perspektívy domu môžeme iba odhadnúť jeho rozmery). Preto sa ľudia od najstarších čias usilovali okrem kreslenia názorných obrázkov rysovať aj výkresy, podľa ktorých bolo možné realizovať príslušný objekt. Tak sa rysovali pôdorysy domov, kostolov, hradov, opevnení atď. Samozrejme, pri zložitých stavbách ako napr. pri gotických chrámoch bolo potrebné rysovať aj mnohé pohľady na príslušné časti stavby.

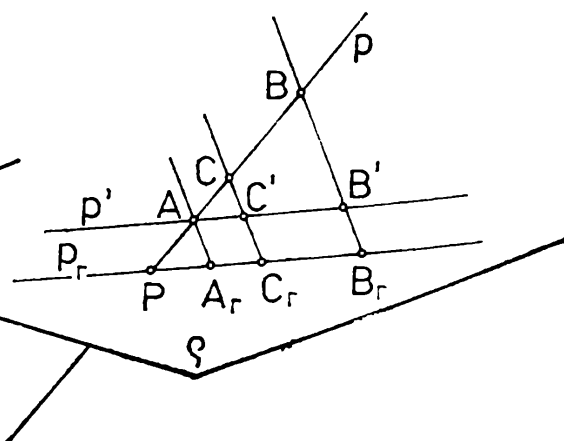
Jednou z dôležitých náuk, ktorá si vyžadovala detailne nákresy, bola *stereotómia*. Je to náuka o stavbách z kameňa a hovorilo sa v nej o tom, ako z jednotlivých kameňov zložiť celú stavbu. Pokiaľ ide o jednoduché zvislé múry, tam nie je problém; treba dbať iba na to, aby jednotlivé kamene sa dobre navzájom viazali, t.j. ak by sme vybrali jeden kameň, aby nepadol celý múr. Zložitejšie to už je, ak treba vystavať tzv. oporný múr, ktorý nemusí byť zvislý a nemusí s prilahlým zvislým múrom zvierat pravý uhol. Takisto zložité kamene sa používali pri stavbe rôznych klenieb, tunelov, mostných oblúkov a pod. Všimnite si niektoré stavby z kameňa (napr. niektoré kamenné mosty cez Vltavu v Prahe), aké zložité kamene sa tam vyskytujú.

Práve stereotómia, stavby rôznych opevnení a rôzne zložité praktiky ktoré sa používali na zhotovovanie „technických výkresov“ na takéto stavby, priviedla vynikajúceho francúzskeho matematika *Gasparda Mongea* (1746—1818) na myšlienku takého zobrazenia, ktoré bolo jednoduché a dobre slúžilo práve na vyhotovovanie vyhovujúcich „technických výkresov“. Toto zobrazenie dostalo aj po svojom objaviteľovi názov: *Mongeova projekcia*. O jeho dôležitosti svedčí aj tá skutočnosť, že princíp tohoto zobrazenia musel zostať utajený a Monge ho mohol publikovať až 30 rokov po jeho objavení.

Monge bol nielen vynikajúci vedec, ale aj známy verejný činiteľ. Bol súčasník Napoleonov a jeden z jeho blízkych spolupracovníkov. Zúčastnil sa aj na jeho výprave do Egypta, bol zakladateľom svetoznámej *École*



Obr. 1



Obr. 2

normale, bol členom Akadémie, rytierom Čestnej légie atď. Jeho spis o deskriptívnej geometrii vyšiel v r. 1799.

Skôr ako si objasníme podstatu Mongeovej projekcie, povieme si niečo o tzv. *rovnobežnom premietaní* (obr. 1). Daná je rovina ρ — priemetňa a smer s , ktorého priamky nie sú rovnobežné s priemetňou. Rovnobežný priemet ľubovoľného bodu M je priesečník M_r rovnobežky m zo smeru s prechádzajúcej bodom M . Zrejme všetky body priamky m sa premietajú do toho istého bodu M_r , a preto môžeme povedať, že celá priamka m sa premieta do bodu $M_r = m_r$. Priamkam smeru s hovoríme premietacie priamky, a majú teda tú vlastnosť, že každá z nich sa premieta do bodu.

Zaoberajme sa teraz priamkou h rovnobežnou s priemetňou ρ . Ak zostrojíme všetkými bodmi priamky h premietacie priamky, budú ležať v jednej rovine (premietacej rovine priamky h) a jej priesečnica h_r s priemetňou bude (rovnobežným) priemetom priamky h . Ľahko nahliadneme, že priamka h_r je rovnobežná s priamkou h . Zvolme si teraz na priamke h tri rôzne body A, B, C a nech napr. platí $|AC| : |BC| = 1 : 2$. Z toho, že štvoruholníky $ABB_rA_r, ACC_rA_r, BCC_rB_r$ sú rovnobežníky, platí $|AB| = |A_rB_r|, |AC| = |A_rC_r|, |BC| = |B_rC_r|$, a teda $|A_rC_r| : |B_rC_r| = 1 : 2$. Ak túto myšlienku trochu zovšeobecníme, môžeme povedať, že pre priamky rovnobežné s priemetňou sa delenie úsečky v danom pomere zachováva.

Túto vlastnosť majú aj všetky ostatné priamky (rôzne od premietacích). Podobne ako o priamkach rovnobežných s priemetňou sa ľahko presvedčíme, že rovnobežným priemetom ľubovoľnej priamky p (ktorá nie je premietacou priamkou) je priamka, ktorú označíme p_r (obr. 2). Priesečník P priamky p s priemetňou nazývame jej *stopníkom*. Majme teraz opäť na priamke p tri rôzne body A, B, C a nech opäť napr. $|AC| : |BC| = 1 : 2$. Zostrojme bodom A rovnobežku p' s priamkou p_r a označme priesečníky premietacích priamok bodov B, C s priamkou p' ako B', C' . Potom z vety o úmernosti úsečiek vyplýva $|AC| : |BC| = |A_rC_r| : |B_rC_r|$. Priamka p' je rovnobežná s priemetňou, premieta sa

tiež do priamky p_r , a teda platí $|AC'| \quad |B'C'| = |A_rC_r| \quad |B_rC_r|$. Dohromady potom platí

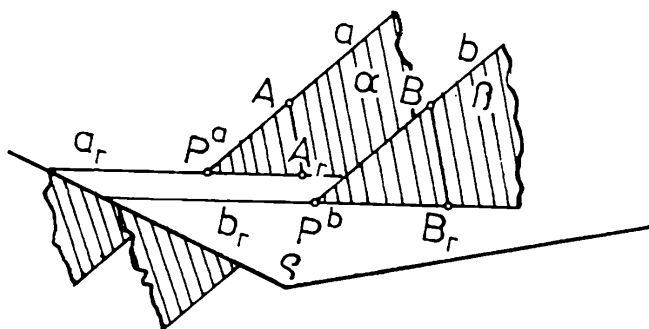
$$|AC| \quad |BC| = |A_rC_r| \quad |B_rC_r| \quad (1)$$

Rovnosť (1) sme síce dokázali pre pomer úsečiek 1:2, ale zrejme platí pre ľubovoľný pomer. Môžeme teda vysloviť jednu zo základných viet o rovnobežnom premietaní:

Veta 1. Delenie úsečky (neležiacej na premietacej primke) v danom pomere sa v rovnobežnom premietaní zachováva.

V ďalšom budeme potrebovať ešte jednu vetu:

Veta 2. Dve priamky a, b (nepatriace do smeru premietania) navzájom rovnobežné sa premietajú do dvoch priamok a_r, b_r navzájom rovnobežných.



Obr. 3

Dôkaz tejto vety vyplýva bezprostredne z obr. 3. Premietacie roviny α, β priamok a, b sú navzájom rovnobežné (lebo napr. rovina β obsahuje dve rôznobežky — priamku b a premietáciu priamku bodu B , ktoré sú rovnobežné s rovinou α) a potom aj ich priesečnice a_r, b_r s priemetňou sú navzájom rovnobežné.

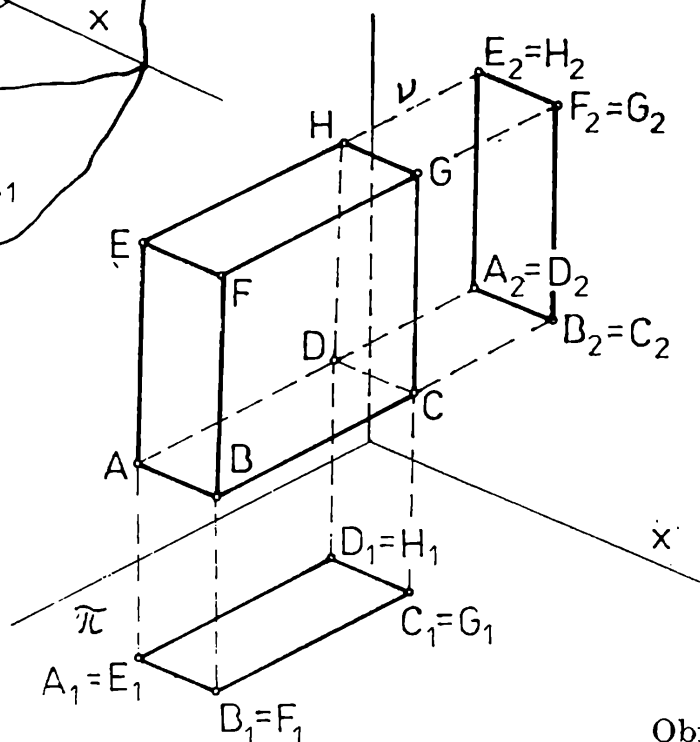
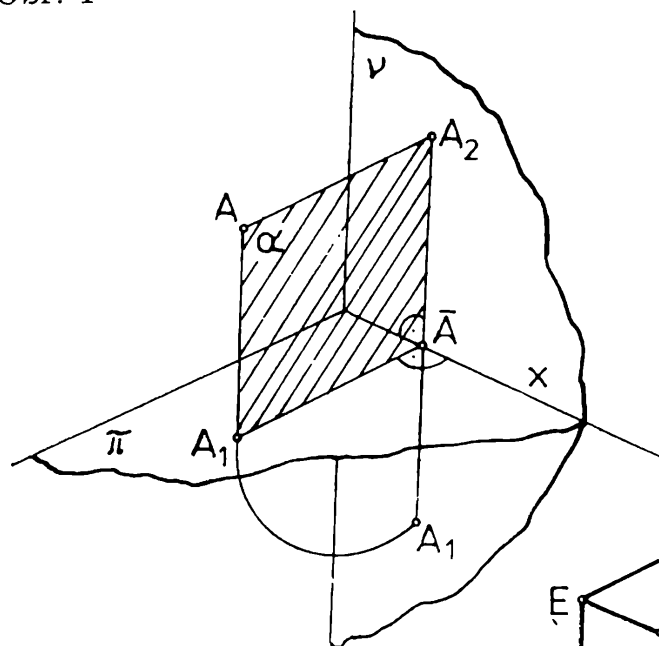
Vety 1 a 2 sú charakteristické pre rovnobežné premietanie.

Zo všetkých možných rovnobežných premietaní je jedno význačné, a to je kolmé premietanie. Je to také rovnobežné premietanie, ktorého smer je kolmý na priemetňu.

Rovnobežné premietanie (podobne ako stredové premietanie) má jeden nedostatok: Priemet M_r neurčuje bod M jednoznačne; do bodu M sa premietajú všetky body priamky m (obr. 1). Tento nedostatok pre kolmé premietanie odstranil práve Monge jeho Mongeovou projekciou. Mongeova základná myšlienka spočíva v tom, že namiesto jednej priemetne používa dve navzájom kolmé priemetne π a ν (obr. 4). Priemetňa π sa nazýva pôdorysnou a priemetňa ν nárysňou; ich priesečnica sa označuje x a hovorí sa jej os x -ová.

Ak A je ľubovoľný bod priestoru, jeho kolmý priemet do pôdorysne sa označuje A_1 (pôdorys bodu A) a kolmý priemet do nárysne sa označuje A_2 (nárys bodu A). Spojnice AA_1 a AA_2 určujú rovinu α kolmú na os x a jej priesečník s osou x označujeme $\bar{A}$. Štvoruholník $AA_1\bar{A}A_2$ je obdĺžnik, a preto platí $|AA_1| = |A_2\bar{A}|$ a $|AA_2| = |A_1\bar{A}|$. Svojím pôdorysom A_1

Obr. 4



Obr. 5

a nárysom A_2 je bod A v priestore jednoznačne určený. Je to priesečník kolmice vztyčenej v bode A_1 na pôdorysňu a kolmice vztyčenej v bode A_2 na nárysňu.

Mongeova projekcia v tomto usporiadaní má tú nevýhodu, že pôdorysy a nárysy útvaru ležia vo dvoch rôznych rovinách. Tento nedostatok odstranil Monge tak, že otočil pôdorysňu π okolo osi x do náryсны. Bod A_1 sa pritom otočí do bodu, ktorý sa taktiež označuje A_1 . Z celej konštrukcie vyplýva, že po otočení bodu A_1 do náryсны ležia body A_1, A_2 na jednej kolmici na os x .

Došli sme teda k takémuto záveru: Každému bodu A priraduje Mongeova projekcia usporiadanú dvojicu bodov A_1, A_2 v náryсны, ktoré ležia na kolmici na os x a naopak každá taká usporiadaná dvojica bodov reprezentuje práve jeden bod priestoru. Usporiadaná dvojica bodov A_1, A_2 sa nazýva Mongeovou projekciou bodu A .

Mongeova projekcia je všeobecne veľmi nenázorné zobrazenie, pretože napr. kváder $ABCDEFGH$ (obr. 5) sa zobrazí do dvoch obdĺžnikov. Ale

na druhej strane zas z jeho pôdorysu a nárysu môžeme priamo odčítať jeho rozmery.

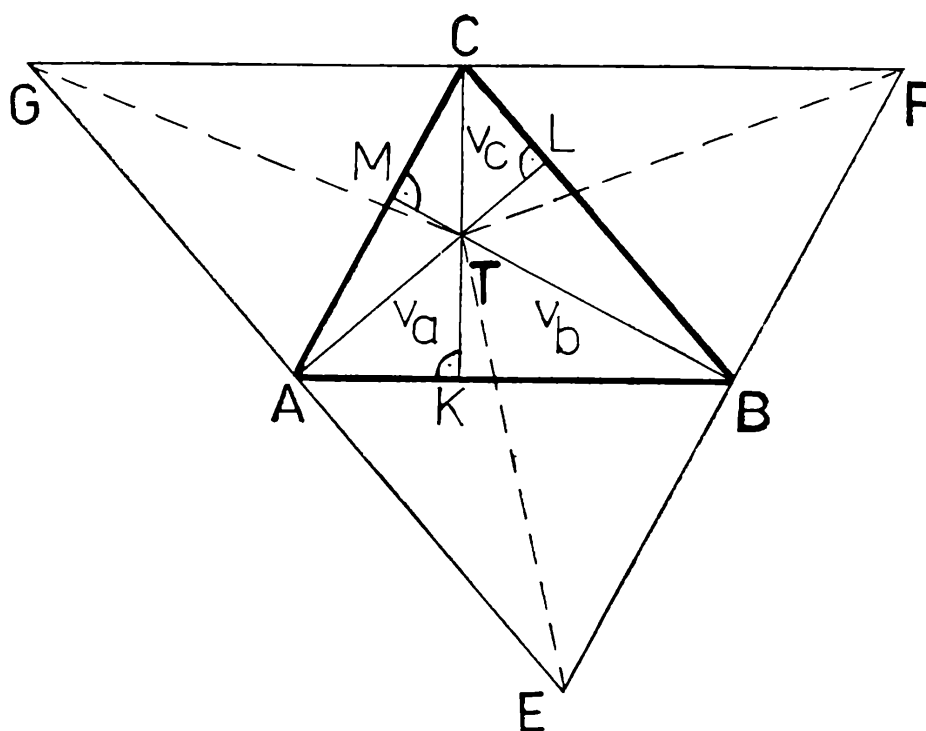
Pôdorysy a nárysy objektov sú vhodné ako technická dokumentácia pre realizáciu objektu. Ak chceme získať názorný obrázok tohoto objektu, použijeme alebo lineárnu perspektívu, alebo ďalšiu jednoduchú metódu, o ktorej si povieme niečo v ďalšom článku.

Údiv Alberta Einsteina

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topoľčany

Jednou zo zaujímavých spomienok, ktorú uvádza vo svojom životopise významný fyzik Albert Einstein, je zážitok z Luitpoldského gymnázia: „Keď som mal dvanásť rokov, zažil som zázrak iného druhu vďaka knižočke o Euklidovej geometrii roviny, ktorá sa mi dostala na začiatku školského roku do rúk. Boli to poučky, ako napríklad, že tri výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode — hoci to nie je v nijakom prípade evidentné, predsa sa to dalo dokázať s takou istotou, že pochybnosť sa zdala byť vylúčená. Táto jasnosť a istota spravili na mňa neopísateľný dojem.“

Nad čím sa čudoval mladý Albert? Aká forma dôkazu očarovala myseľ budúceho vedca?



Obr. 1

Nech je daný ľubovoľný trojuholník ABC . Výšky trojuholníka sú priamky prechádzajúce vrcholmi trojuholníka kolmé na protiľahlé strany. Je zrejmé, že dve výšky sa pretnú, napr. v_a a v_b , v bode T . Dokážme, že bod T leží aj na v_c .

Vedme vrcholom A rovnobežku so stranou BC , vrcholom B rovnobežku s CA a vrcholom C rovnobežku s AB . Priesečníky týchto rovnobežiek, tie určite existujú, označme postupne E , F , G (obr. 1). Z vlastností rovnobežníka $ABCG$ vyplýva, že $|BC| = |AG|$ a $|AB| = |CG|$. Podobne pre rovnobežník $AEBG$ platí $|AE| = |BC|$ a $|AC| = |BE|$; pre rovnobežník $ABFC$ platí $|AB| = |CF|$ a $|BF| = |AC|$. Z uvedených vzťahov vyplýva, že platí $|AG| = |AE|$, $|EB| = |BF|$ a $|FC| = |CG|$. Pretože v_a je kolmá na $GE//CB$ a $|AG| = |AE|$, tak $v_a = AL$ je os strany GE . Podobne sa dá ukázať, že v_b je osou EF a v_c je osou strany FG .

Ak sa priamky v_a , v_b (osi strán GE a EF) pretínajú v bode T , tak $|TE| = |TG|$ a $|TE| = |TF|$, teda pre T platí $|TG| = |TF|$. Z toho plynie, že T musí ležať aj na osi strany GF , t.j. leží na v_c . Záver: Výšky každého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Čudujete sa údivu mladého A. Einsteina? Vnímate úzky súvis medzi slovným vyjadrením dôkazu a znázornením na obrázku? Cítite jednoznačnosť dôkazu pre všetky trojuholníky?

Geometria sa stala pre Einsteina vzorom usporiadanej stavby sveta a možnosti skúmať ho abstraktným myslením. „Staroveké Grécko ctíme ako kolísku západnej vedy. Tam bol najskôr uskutočnený div myslenia — logická sústava, ktorej teoremy vyplývali jeden z druhého s takou presnosťou, že každé tvrdenie, ktoré dokázala, bolo absolútne nepochybné: hovorím o Euklidovej geometrii. Tento skvelý triumf rozumu dodal ľudskému duchu vieru v seba, ktorá je nutná pre ďalšiu činnosť. Ak Euklidova práca nedokázala zapáliť vaše mladické nadšenie, tak nie ste rodenými teoretikmi.“

Prečo sa Albert Einstein nestal matematikom? Možno odpoveďou sú aj tieto jeho slová: „Videl som, že sa matematika delí na množstvo špeciálnych oblastí a každá z nich môže zaplniť celý nám daný krátky život. Uvidel som sa v situácii Buridanovho somára, ktorý sa nemôže rozhodnúť, ktorý snop sena si má zobrať. Moja intuícia v oblasti matematiky nebola dostatočne silná, aby s istotou rozlíšila základné a dôležité od ostatnej učenosti, bez ktorej sa možno obísť. Okrem toho aj záujem o skúmanie prírody bol nepochybne silnejší; ako študentovi mi nebolo ešte jasné, že prístup k principiálnym problémom fyziky vyžaduje najjemnejšie matematické metódy. To sa začalo vyjasňovať len postupne po mnohých rokoch samostatnej vedeckej práce. Aj fyzika bola rozdelená na špeciálne oblasti a každá z nich mohla pohltiť krátky život naplnený prácou a pritom neuspokojiť túžbu po hlbšom poznaní. Ohromné množstvo empirických faktov, ktoré neboli dostatočne zladené, pôsobilo aj tu brzdiacim spôsobom. Ale tu som sa rýchlo naučil vyhľadávať to, čo

môže viesť do hĺbky, a odsúvať všetko ostatné, všetko, čo zaťažuje rozum a odpútava od podstatného.“

Albert Einstein zosúladiť empiriu s rozumom, skĺbil predstavy o fyzikálnom svete do zložitej sústavy logicky dokonalých záverov, ktoré možno experimentálne interpretovať. Potvrdil úlohu tvorivého myslenia, zdôraznil význam experimentu: „Skúsenosť zostane jediným kritériom možnosti použitia matematických konštrukcií vo fyzike, ale práve v matematike je obsiahnutý skutočne tvorivý princíp. Z podobného hľadiska považujem za správne presvedčenie minulých generácií: čistý rozum je schopný vystihnúť reálne.“

Krása matematickej teórie je odrazom zázraku skutočného sveta.

Několik řešení jedné úlohy o čtyřúhelníku

RNDr. MILAN KOMAN, CSc., Matematický ústav ČSAV, Praha

V minulém ročníku matematické soutěže Rozhledů byla zadána pod číslem 3 tato úloha:

Vypočtete obsah konvexního čtyřúhelníku, jestliže znáte délky u , v jeho středních příček a velikost φ jejich úhlu.

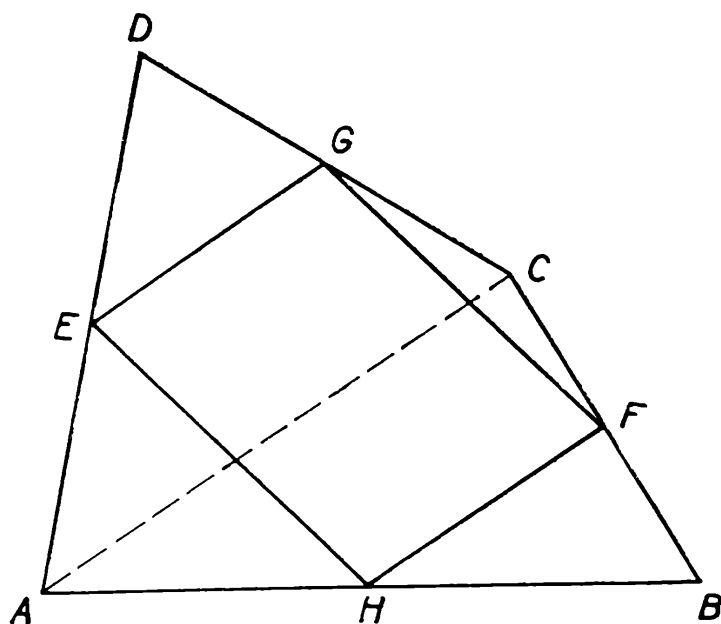
Protože soutěžící řešili úlohu několika zajímavými způsoby, rozhodli jsme se věnovat této úloze samostatný článek.

Došlo celkem 52 řešení, z toho 41 od jednotlivců a 11 od kolektivů. Z nich 49 řešení bylo správných, 2 řešení uvažovala jen zvláštní případ $u = v$ a jen jedno řešení bylo chybné. Zajímavé je, odkud řešitelé pocházejí. Z ČSR je 17 řešitelů, ze SSR 25 řešitelů, ale z nich 17 ze škol s maďarským vyučovacím jazykem; konečně 10 řešitelů je z bratrské MLR. Přehled zastoupení podle škol uvádí tabulka:

Škola Učiliště	ZŠ	G	SOŠ	SOU	Neuvedeno	Celkem
ČSR	—	17	—	—	—	17
SSR	1	8	13	2	1	25
MLR	—	8	2	0	—	10
Celkem	1	33	15	2	1	52

Po této malé statistice se věnujeme řešení úlohy.

Nejvíce řešitelů — celkem 40 — využilo při výpočtu obsahu rovnoběžníku, jehož vrcholy jsou ve středech stran daného konvexního čtyř-



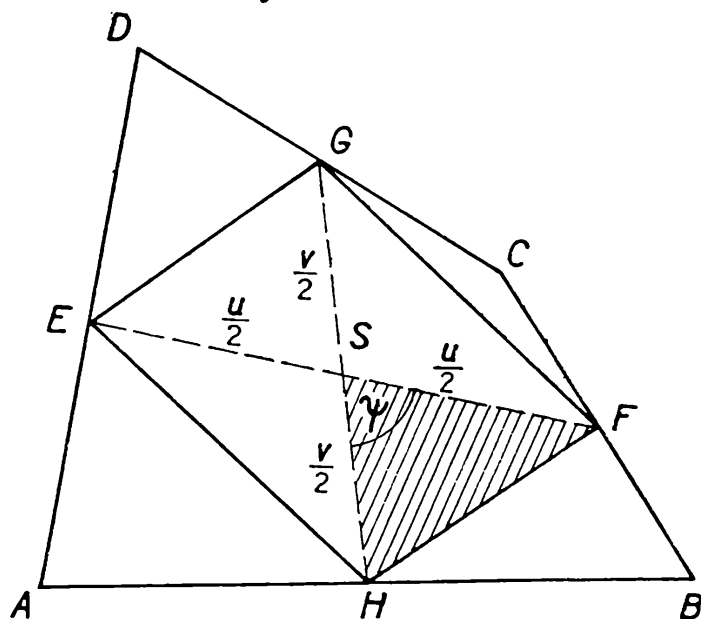
Obr. 1

úhelníku. Uvedeme řešení nejmladšího soutěžícího *Juraje Oláha*, 8. roč. ZŠ s maďarským vyučovacím jazykem, Komárno. Stejně řešení zaslaly i *Z. Chlebanová* a *P. Némethová*, 1. G, střední odborné učiliště (obor číšníků) z Nových Zámků.

Řešení 1. Snadno se dokáže, že obsah rovnoběžníku $EGFH$, jehož vrcholy jsou středy stran daného čtyřúhelníku $ABCD$, se rovná polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Viz obrázek 1. Plyne to z toho, že úsečka EG je střední příčkou trojúhelníku ACD a podobně úsečka HF je střední příčkou trojúhelníku ACB . Můžeme proto psát

$$S_{ABCD} = 2 S_{EGFH} \quad (1)$$

Obsah rovnoběžníku $EGFH$ vypočítáme pomocí jeho úhlopříček EF a GH a pomocí úhlu jimi sevřeného. Ale tyto úhlopříčky jsou současně středními příčkami daného čtyřúhelníku $ABCD$. Z obrázku 2 plyne



Obr. 2

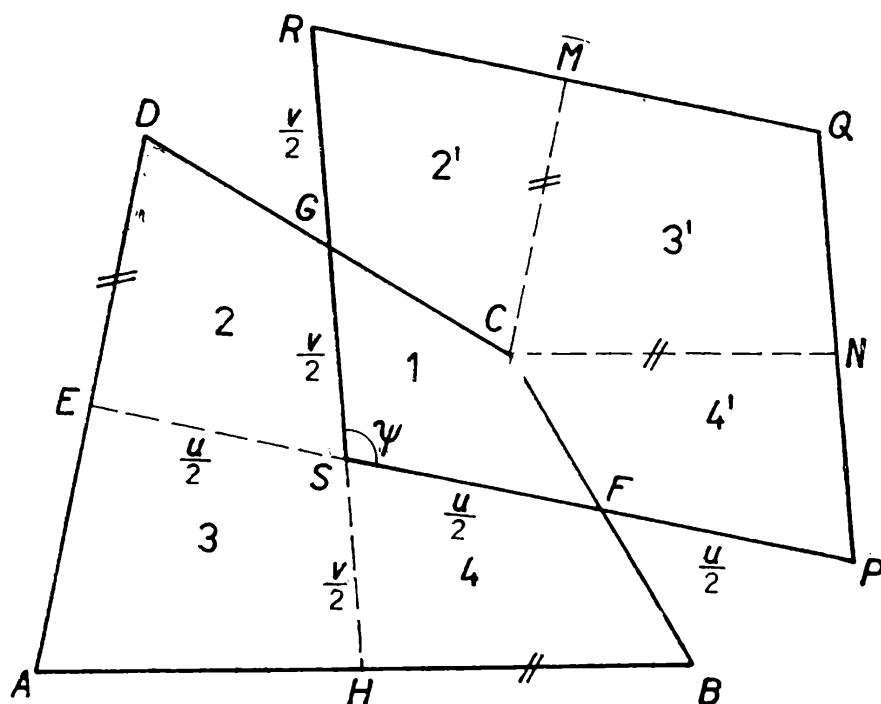
$$S_{EGFH} = 4 \cdot S_{SHF} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{2} \cdot \frac{v}{2} \sin \psi$$

Odkud po úpravě spolu s rovností (1) dostaneme výsledek

$$S_{ABCD} = u \cdot v \cdot \sin \psi \quad \blacksquare \quad (2)$$

Nejzajímavější řešení používají tzv. *shodné rozložitelnosti*. Tímto způsobem řešilo úlohu 7 soutěžících. Nejdříve uvedeme zkráceně nejjednodušší z nich od *Romany Anýžové*, 2. D, gymnázium M. Koperníka, Bílovec.

Řešení 2. Snadno se ukáže, že v daném čtyřúhelníku se střední příčky EF , GH navzájem půlí; obr. 3. (Jsou to vlastně úhlopříčky rovnoběžníku



Obr. 3

s vrcholy $EGFH$ — viz obr. 1.) Daný čtyřúhelník $ABCD$ rozdělíme těmito středními příčkami na čtyři čtyřúhelníky 1, 2, 3, 4 (obr. 3). Přemístěním tří z nich

$$\begin{aligned} 2 &\longrightarrow 2' && (\text{souměrnost podle středu } G) \\ 3 &\longrightarrow 3' && (\text{posunutí } A \longrightarrow C) \\ 4 &\longrightarrow 4' && (\text{souměrnost podle středu } F) \end{aligned}$$

sestavíme rovnoběžník $SPQR$, jehož strany jsou shodné se středními příčkami EF , GH čtyřúhelníku $ABCD$. (Toto tvrzení dokážete jistě sami.) Proto je

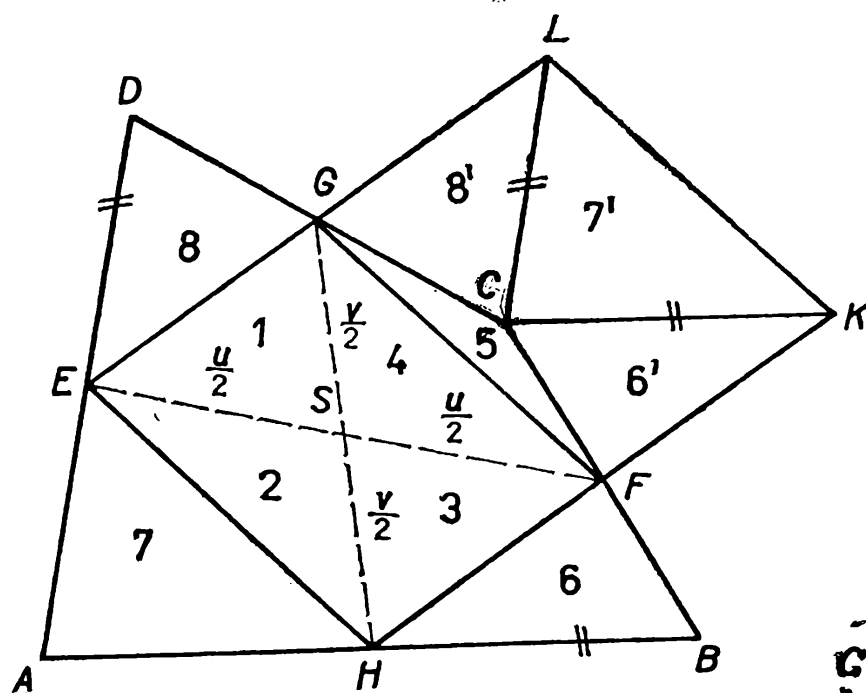
$$S_{ABCD} = S_{SPRQ}.$$

Ale obsah rovnoběžníku $SPQR$ je zřejmě roven

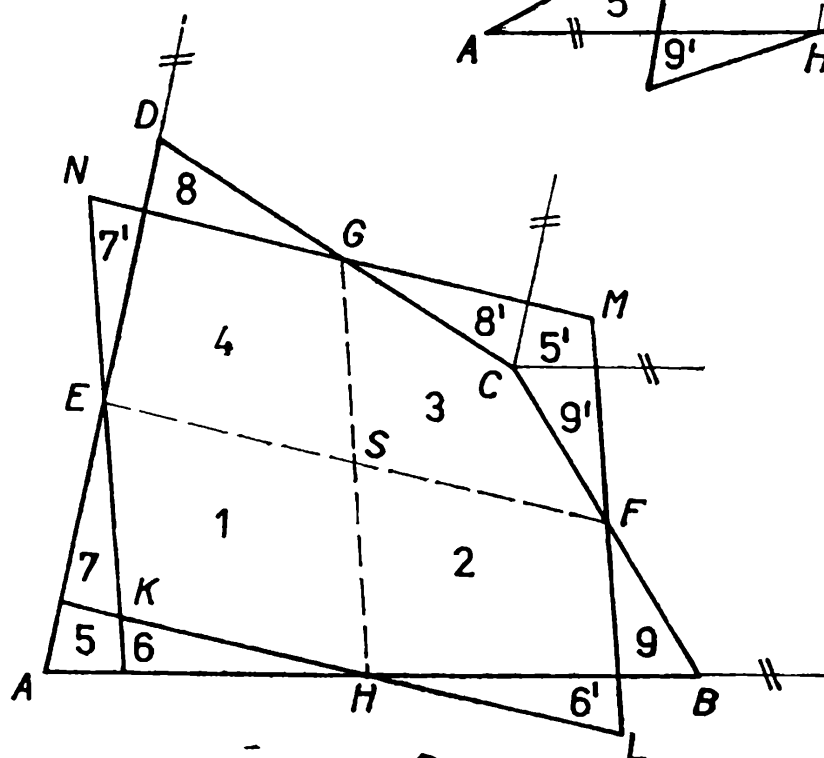
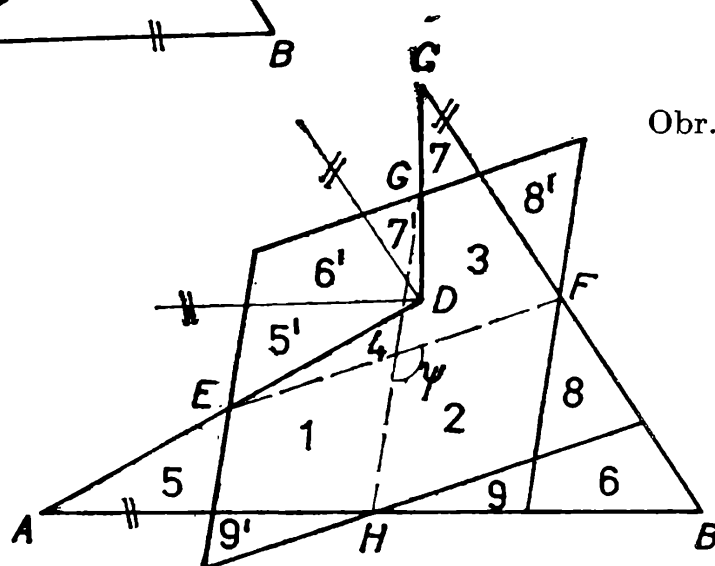
$$u \cdot v \cdot \sin \psi$$

Tím je znovu dokázán vzorec (2). $\blacksquare$

Obr. 4



Obr. 6

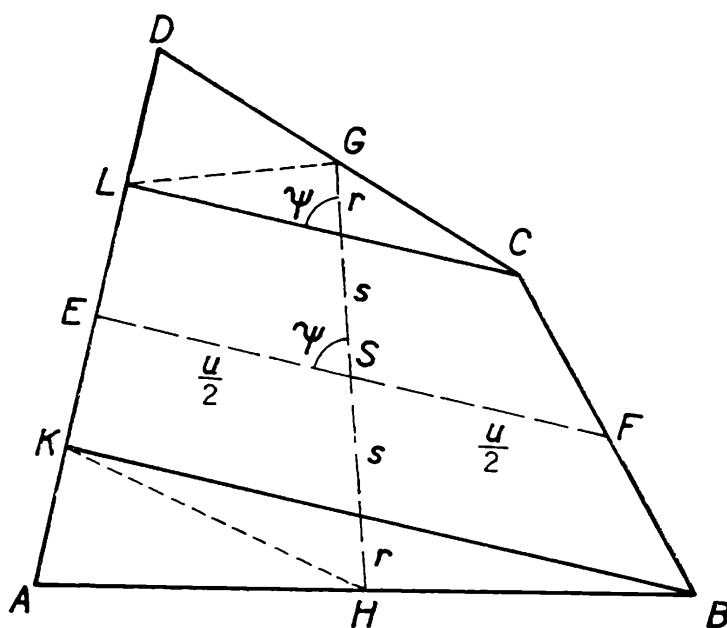


Obr. 5

Jiná dvě řešení využívající také shodné rozložitelnosti uvedeme bez komentáře. V obou případech se daný čtyřúhelník přemění na rovnoběžník, který má s ním stejný obsah. Ten se pak určí pomocí daných veličin u , v a ψ ; opět vyjde výsledek (2).

Na obr. 4 je řešení autorské dvojice *V. Šlěžky* a *M. Paveleka* z 3. G gymnázia M. Koperníka v Bílovci. Na obr. 5 je pak řešení *S. Marasty*, 3. D gymnázia v městě Tata v MLR. Předností tohoto řešení oproti všem ostatním zaslaným řešením je, že je lze použít i na případ nekonvexního čtyřúhelníku (obr. 6).

Poslední dvě správná řešení používají výpočtu a rozkladu daného čtyřúhelníku na lichoběžník a dva trojúhelníky. Zaslali je *M. Mochová* a *K. Vopička* z 2. A gymnázia z Prahy 3.



Obr.

Řešení 3. Čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 7) rozdělíme na lichoběžník $BKLC$ a dva trojúhelníky BKA a CLD . Lichoběžník $BKLC$ má střední příčku $EF = u$ a výšku $v = 2s \cdot \sin \varphi$. Jeho obsah je

$$S_{BKLC} = u \cdot 2s \cdot \sin \psi. \quad (3)$$

Vypočítáme obsahy trojúhelníků BKA a CLD . Protože G , H jsou středy stran DC a AB , má trojúhelník CLD obsah rovný dvojnásobku obsahu trojúhelníku CLG . Podobně je obsah trojúhelníku BKA roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku BKH . Proto platí

$$S_{CLD} = 2 S_{CLG} = 2 \cdot \frac{1}{2} |CL| r \sin \varphi, \quad (4)$$

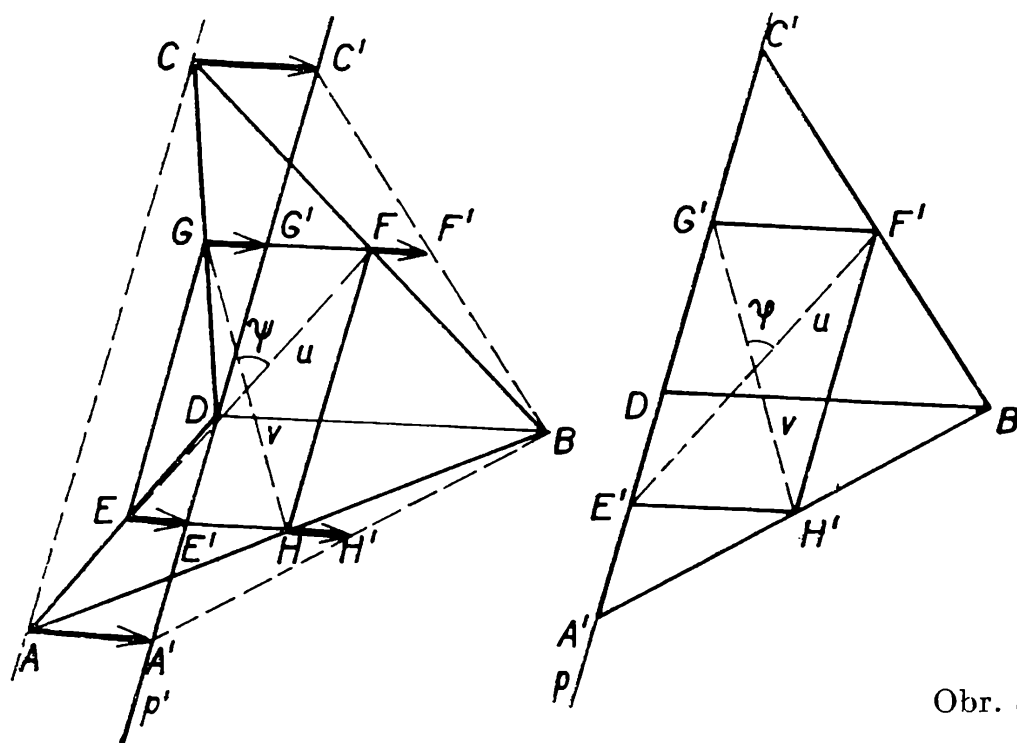
$$S_{BKA} = 2 S_{BKH} = 2 \cdot \frac{1}{2} |BK| r \sin \varphi. \quad (5)$$

Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ získáme sečtením obsahů (3) až (5).

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= 2 \sin \psi \left(u \cdot s + \frac{|CL| + |BK|}{2} \cdot r \right) = \\ &= 2 \sin \psi (u \cdot s + u \cdot r) = \\ &= u \sin \psi (2s + 2r) \end{aligned}$$

Protože $v = 2s + 2r$, dostáváme pro obsah čtyřúhelníku $ABCD$ opět vzorec (2). ■

A na konec jednu zajímavost. Když zadával autor úlohu do Rozhledů, netušil, že ji lze zobecnit i na nekonvexní čtyřúhelníky. K tomu mu dopomohla až zasláná řešení znázorněná na obr. 5, která pak sám autor aplikoval i na případ nekonvexního čtyřúhelníku (obr. 6). Toto řešení je však trochu komplikované, a tak autor dodatečně objevil ještě jednodušší řešení, které stručně naznačíme.



Obr. 8a, b

Řešení 4. (Pro nekonvexní čtyřúhelníky) V situaci na obr. 8a posuneme vrcholy A, C ve směru úhlopříčky DB na rovnoběžku p' s přímkou AC jdoucí bodem D . Tím přeměníme čtyřúhelník $ABCD$ na trojúhelník $A'BC'$, který s ním má zřejmě stejný obsah. Výsledná situace je pro lepší názornost překreslena na obr. 8 b. Přitom se rovnoběžník $EHFG$ (vrcholy jsou středy stran čtyřúhelníku $ABCD$) jen posune do rovnoběžníku $E'H'F'G'$. Proto mají oba rovnoběžníky stejné obsahy i stejně dlouhé úhlopříčky. Podle obrázků 8ab pak již snadno zjistíme, že

$$S_{ABCD} = S_{A'BC'} = 2 S_{E'H'F'G'} = u \cdot v \cdot \sin \psi$$

Tím je výpočet ukončen. ■

Základy programování mikropočítačů

2 - matematické funkce, úpravy tisku na obrazovce, větvení a cyklus v programu

doc. IVAN FISCHER, CSc., katedra matematiky PeF UK v Praze

V minulém čísle Rozhledů jsme se naučili používat příkazy **LET** (necht), **INPUT** (vstup, zadání čísla z klávesnice) a **PRINT** (tisk, vypsání čísla a textu na obrazovce). Seznámili jsme se se značením sčítání $+$, odčítání $-$, násobení hvězdičkou $*$, dělení lomítkem $/$ a mocnin obloučkem $\wedge$. S tím však dlouho při výpočtech nevystačíme. Proto si ukážeme matematické funkce, které mikropočítač s jazykem BASIC umí spočítat:

SQR(X)	$\sqrt{X}$, odmocnina	SIN(X)	$\sin(X)$, sinus
EXP(X)	e^X , exponenciála	COS(X)	$\cos(X)$, kosinus
LOG(X)	$\ln X$, logaritmus	TAN(X)	$\operatorname{tg}(X)$, tangens
ABS(X)	$ X $, absolutní hodnota	ANT(X)	$\operatorname{arctg}(X)$, arkus-tangens
INT(X)	celá část čísla X		

Možnosti pro jejich využití při výpočtech si jistě snadno představíte. Ke goniometrickým funkcím si však podotkněme, že X je udáváno v radiánech. Než se však pustíme do ukázek programů, řekněme si několik poznámek o možnostech, jak upravovat výpis na obrazovku. Zatím víme, že písmeno za **PRINT** způsobí vypsání číselné hodnoty proměnné značené tímto písmenem, a že text v uvozovkách za **PRINT** se vypisuje na obrazovku beze změny. Za jeden příkaz **PRINT** však můžeme zapsat více proměnných či textů (v uvozovkách), oddělených středníky (počítač píše bezprostředně za předchozí výpis do téhož řádku) nebo čárkami (pak píše v tomtéž řádku, ovšem do dalšího z pevně nastavených sloupců). Mezi proměnné i texty za příkazem **PRINT** si můžeme psát údaje **TAB(X)**, značící výpis počítaje X -tou pozicí v řádce — jako u tabelátoru na psacím stroji, a **SPC(X)**, značící vynechání X mezer před dalším psaním. Jestliže řádek s **PRINT** končí středníkem, potom další řádek **PRINT** píše bezprostředně dál to původního řádku, kde se (středníkem) přestalo. Napíšeme-li pouze **PRINT**, potom se vypíše, vlastně vynechá prázdný řádek.

Později si ještě ukážeme, jak u různých mikropočítačů lze psát na libovolné místo obrazovky i jak srovnávat výpis desetinnými tečkami do sloupečků pod sebe.

Ukažme si užití matematických funkcí i úpravy textu na příkladu. V terénu máme dva body A a B a zjišťujeme vzdálenosti bodů X od bodu A . Můžeme měřit velikosti úhlů ABX a BAX . Známe-li vzdálenost pevně zvolených bodů A a B značenou $d(A, B)$, potom podle sinové věty je

$$\frac{d(X, A)}{\sin(ABX)} = \frac{d(A, B)}{\sin(AXB)},$$

kde $AXB = 180^\circ - ABX - BAX$. Pokud chceme výpočet svěřit programu v jazyku BASIC, potom velikosti úhlů musíme ze stupňů převést do radiánů podle vztahu

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \pi}$$

a tedy pro a v radiánech platí vztah, kde α je velikost úhlu ve stupních a a velikost téhož úhlu v radiánech

$$a = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha$$

K označení proměnných použijeme velká písmena:

- Z** velikost základny, vzdálenost bodů A, B v metrech
- X** hledaná vzdálenost $d(X, A)$ v metrech
- A** velikost úhlu BAX v úhlech
- B** velikost úhlu ABX v úhlech a E v radiánech
- C** velikost úhlu AXB v úhlech a F v radiánech

Pak program výpočtu může být následující:

```

100 PRINT „ZADEJ VZDALENOST A, B, V METRECH“
110 INPUT Z
120 PRINT „ZADEJ VELIKOST 1. UHLU BAX VE STUPNICH“
130 INPUT A
140 PRINT „ZADEJ VELIKOST 2. UHLU ABX VE STUPNICH“
150 INPUT B
160 LET C = 180 - A - B
170 LET E = 6.28 * B/360
180 LET F = 6.28 * C/360
190 LET X = Z * SIN(E)/SIN(F)
200 PRINT
210 PRINT „VZDALENOST X OD A JE“; X; „METRU“
220 PRINT „-----“
240 PRINT

```

Pravděpodobně bychom takto měřili a počítali více bodů X a bude nás pak unavovat, pokud budeme pokaždé spouštět program (příka-

zem **RUN**) a znovu zadávat stále stejnou vzdálenost Z . Proto se seznámíme s příkazem **GOTO** číslo řádku. Program pak pokračuje řádkem s tímto číslem. Doplňme proto řádek
240 GOTO 120

Nyní se po spuštění programu počítač ptá na Z , na A a B , vynechá prázdný řádek, napíše text s vypočteným výsledkem X , výsledné sdělení podtrhne, vynechá další řádek a pokračuje program řádkem 120, ptá se na A a B atd. stále znovu a znovu. Tím jsme vytvořili „nekonečný“ cyklus běhu programu.

Jak však takovýto program přerušit? Na některých mikropočítačích (například IQ 151) stačí při **INPUT** nezadat žádné číslo a stisknout tlačítko **CR**, program se ukončí výpisem **READY**. Na jiných počítačích je tlačítko **STOP** či podobné. My však použijeme univerzálně na všech mikropočítačích nový příkaz **IF...THEN** (jestliže . potom), který má dvě podoby. **IF THEN** číslo řádku, kdy při splnění podmínky . pokračuje program řádkem s daným číslem, a jinak by pokračoval následujícím řádkem programu. Při **IF...THEN** příkaz se daný příkaz provede jen při splnění podmínky, pokaždé se však pokračuje následujícím řádkem. Ještě je však potřeba si říci, jaké můžeme používat podmínky:

=	rovnost dvou hodnot či výrazů
>	je větší
<	je menší
< >	je různý
> =	je větší nebo roven
< =	je menší nebo roven

Tyto podmínky můžeme spojovat logickými spojkami **OR** (nebo), **AND** (a), **NOT** (ne), případně uzavřenými do závorek — opět v jazyku BASIC používáme jen kulaté závorky a nadbytečné závorky navíc nemohou vadit.

Program ve smyčce ukončíme kupříkladu tak, že při **INPUT A** vložíme nesmyslně velikou hodnotu úhlu. Doplňme řádky

```
135 IF A > 1000 THEN 250
250 PRINT „KONEC MERENI“
```

Místo řádku 135 jsme obdobně mohli vložit řádek

```
155 IF (A > 1000 OR B > 1000) THEN 250
```

i když v tomto případě by se mikropočítač vyznal v programovém řádku i bez těch závorek.

V obou případech (řádky 135 a 250 či 155 a 250) se činnost programu nezmění tak dlouho, dokud nezadáme úmyslně velkou hodnotu úhlu větší než 1000. Do té doby není podmínka v **IF...THEN** splněna a tak se pokračuje dalším následujícím řádkem programu. Zadáme-li

však úhel větší než 1000 stupňů, je podmínka v **IF ... THEN** splněna, a tak se pokračuje řádkem uvedeným za **THEN**, tedy řádkem 250, který je v programu poslední a kterým tím program končí — vypíše se **READY**

Daný program můžeme použít při orientačním měření délky hodu v lehké atletice bez použití zdlouhavého měření ocelovým pásmem. Program nám může vždy sdělit, zda daným hodem závodník splnil kvalifikační limit 52 metrů pro účast v závodě. Doplníme řádek

225 IF X >= 52 THEN PRINT „LIMIT SPLNEN“

Je-li X menší než 52, nic se o limitu nevypíše, je-li však X větší nebo rovno 52, pak se ještě navíc k ostatním textům napíše **LIMIT SPLNEN** a program dále znovu pokračuje řádkem 230.

V další ukázce programu se můžeme zamýšlet nad přesností výpočtů podle měření různě velkých úhlů s různou přesností, jak se měření o jeden stupeň odlišné projeví na spočtené vzdálenosti. Až do řádku 190 ponecháme předchozí program beze změny. Další řádky smažeme (zapíšeme jejich číslo a stiskneme tlačítko konce řádku — program přepíšeme novými prázdnými řádky). Nyní můžeme dopisovat další řádky

```
90 LET P = 1
210 PRINT B, X
220 LET B = B + 1
230 LET P = P + S
240 IF P < 15 THEN 160
250 PRINT „-----“
```

Po spuštění programu se nastaví počítač cyklů P na hodnotu $P = 1$. Po zadání hodnot Z , A a B se vypíše 15 řádků, kde do levého sloupečku se píší hodnoty B postupně zvětšované po jednom stupni a do pravého sloupečku se píší hodnoty spočtené vzdálenosti, vždy při konstantním Z i A .

Tisk do dvou sloupečků (a ne hned vedle sebe) způsobuje čárka mezi B a Z v řádku 210. V řádcích 220 a 230 se vždy B i P zvětší o jedničku. Pokud je P menší než 15, pokračuje se po řádku 240 řádkem 160, když bude $P = 15$, program skončí řádkem 250. Pochopitelně však můžeme přidat i řádek

260 GOTO 90

a celý program uzavřít do dalšího cyklu. Cyklus mezi řádky 160 a 240 je tak vnořen do dalšího cyklu mezi řádky 90 a 260.

Pomocí **GOTO** a **IF ... THEN** si můžeme v programech konstruovat nejrůznější druhy cyklů s podmínkou na začátku, na konci či uprostřed cyklu.

Protože se s cykly v programech setkáváme velice často, existují spe-

ciální příkazy pro jejich pohodlné tvoření. Ve všech verzích jazyka BASIC je alespoň jeden z nich, vytvářený ve dvojici řádků

FOR... = TO .. STEP
NEXT

V prvním řádku se za **FOR** píše název proměnné — počítáče cyklu. Za **=** píšeme první, počáteční hodnotu této proměnné. Za **TO** se píše největší hodnota této proměnné, po jejímž překročení se cyklus ukončí. Za **STEP** se píše, o kolik se má tato hodnota vždy zvětšovat. Slovo **STEP** a údaj za ním se psát nemusí, potom je vždy **STEP** roven jedné. Další řádek **NEXT** s názvem této proměnné značí v programu konec tohoto cyklu. V takovémto cyklu se pak vykonávají řádky mezi **FOR...TO** a **NEXT**. **FOR** znamená pro, **TO** značí do, **STEP** je krok a **NEXT** je další, následující.

Příkazy si vyzkoušíme na příkladu. Napřed však smažeme předchozí program (kupříkladu tím, že vypneme a znovu zapneme mikropočítač).

```
100 INPUT F
110 PRINT „UHEL“; TAB(8); „SINUS“; TAB(20); „KOSINUS“
120 PRINT „-----“
130 FOR U = F TO F + 45 STEP 5
140 LET X = 6.28 * U/360
150 PRINT U; TAB(8); SIN(X); TAB(20); COS(X)
160 NEXT U
170 PRINT „-----“
180 GOTO 100
```

Počítač se zeptá na úhel F zadaný ve stupních. V řádku 110 nadepíše tabulku. Tabelátory zajistí, že číselné hodnoty budou vždy pod nadpisem sloupku tabulky. Řádkem 120 vytiskneme přerušovanou čáru. V řádku 130 zadáme parametry cyklu. Vidíme, že to nemusí být čísla, ale i proměnné a výrazy. Od zadané hodnoty F stupňů se bude tisknout 9 až 10 řádků s hodnotami úhlů rostoucími po pěti stupních. V řádku 140 si hodnoty ze stupňů počítač převede do radiánů. Řádek 150 vypisuje úhel ve stupních a příslušné hodnoty $\sin(X)$ a $\cos(X)$. Přitom místo proměnné pro **PRINT** píšeme přímo výrazy (funkce), které si zde napřed musí počítač vždy vypočítat. Tabelátory jsou v tomto řádku stejné, jaké byly v záhlaví tabulky. Řádek 160 je jakousi uzavírací závorkou cyklu. Dokud je U menší než $F + 45$, vrací se program k řádku 130, jinak pokračuje dalším řádkem programu 170.

Poznámka 1.: Význam prvého z dnes uvedených programů by jistě vzrostl, kdybychom mohli měřiče úhlů přímo spojit se vstupem počítače. Místo čtení údaje z měřidla a psaní na klávesnici počítače by se přímo bez našeho zásahu po zaměření měřidel vypsala změřená a spočtená vzdálenost. K tomu však nestačí programové řešení (SOFTWARE),

ale je potřeba i technické propojení (HARDWARE) takového zautomatizovaného měřiče. Většina mikropočítačů vskutku má konektory s možností připojit vnější elektronická zařízení a získané údaje převzít ke zpracování programem — to však poněkud v seriálu předbíháme. Poznámka 2.: Příkazy **GOTO** a **IF ... THEN** číslo řádku, ale i **FOR ... TO NEXT** umožňují program pořádně zamotat a učinit nepřehledným, nekonstrolovatelným, co kdy vlastně udělá. Proto dnes místo úloh jsou tyto dvě poznámky. Úlohy si zadáme až příště, kdy se budeme věnovat otázce struktury programu a jejímu grafickému znázorňování.

FYZIKA

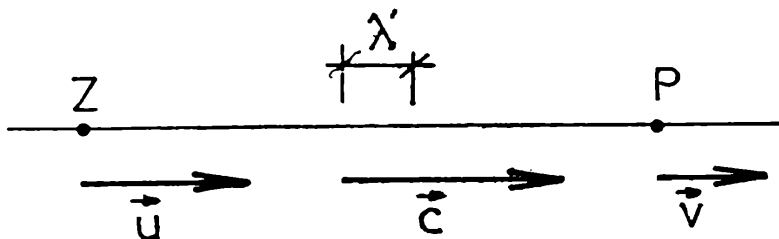
Laser a jeho použitie pri meraní rýchlostí II

Doc. dr. JOZEF ZÁMEČNÍK, CSc., dr. IVAN BANÍK, CSc., Stavebná fakulta
SVŠT, Bratislava

2. Dopplerov jav

Christian *Johann Doppler*, v tom čase profesor pražskej techniky, odvodil r. 1842 zákonitosť medzi relatívnou rýchlosťou zdroja a prijímača vlnenia (vzhľadom na okolie) a prijímanou a vysielanou frekvenciou vlnenia. Všeobecne možno povedať: Ak sa zdroj vlnenia a prijímač pohybujú, potom pri ich vzájomnom približovaní je frekvencia prijímaného vlnenia vyššia a pri ich vzájomnom vzdalovaní nižšia.

V ďalšom vyšetříme tento problém podrobnejšie. Budeme predpokladať, že prostredie, v ktorom sa vlnenie šíri, je vzhľadom na súradný systém spojený so Zemou v pokoji a že rýchlosti zdroja a pozorovateľa sú v porovnaní s rýchlosťou vlnenia malé.



Obr. 5

a) Nech zdroj *Z* a prijímač *P* sa pohybujú pozdĺž jednej priamky rýchlosťami *u* a *v*, počítanými kladne v smere od zdroja k prijímaču, a že prijímač je pred zdrojom (obr. 5). Veľkosť rýchlosti vlnenia budeme označovať *c*. Ak zdroj vlnenia vyslal po sebe v časovom intervale *T* dva veľmi krátke signály, príslušné vlnoplochy, ktoré sa približujú

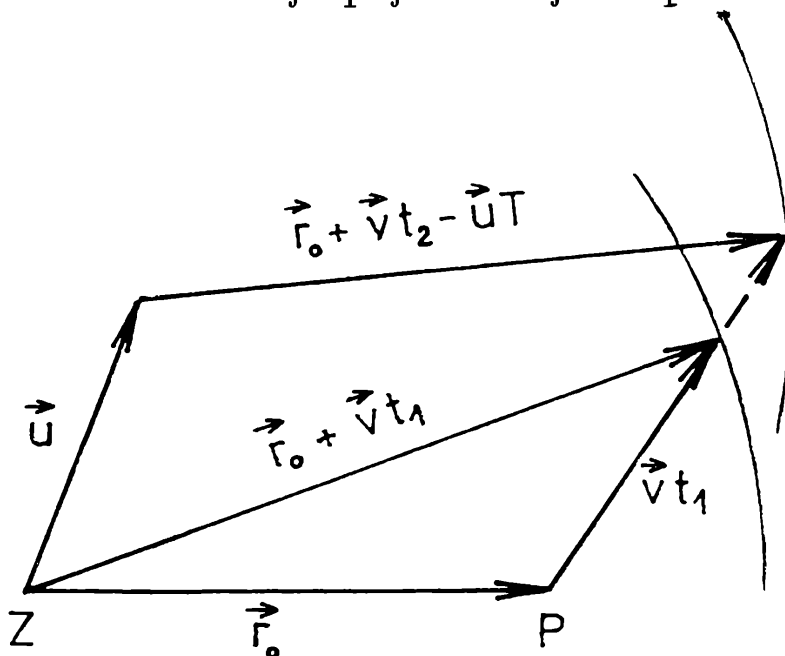
k prijímaču, pretínajú spojnicu zdroj — prijímač v bodoch, ktorých vzájomná vzdialenosť je $\lambda' = (c - u) T$. Predpokladajme, že prvá z týchto vlnoplôch zastihne prijímač v čase t . Pretože v tomto okamihu druhá vlnoplocha doháňa ešte prijímač rýchlosťou $c - v$, dobehne ho v čase $t + T'$, pričom $\lambda' = (c - v) T'$. Z uvedeného plynie

$$T' = \frac{c - u}{c - v} T \quad (1)$$

Ak zdroj vysiela stále signály v rovnakých časových intervaloch T , takže ich frekvencia je $f = 1/T$, frekvencia, ktorú zachytáva prijímač, je $f' = 1/T'$, potom

$$f' = \frac{c - v}{c - u} f \quad (2)$$

Podmienkou, aby bolo napr. $f' > f$ pri $c > v$, $c > u$ je $v < u$. T.j. zvýšenie frekvencie nastane ak sa zdroj a prijímač vzájomne približujú.



Obr. 6

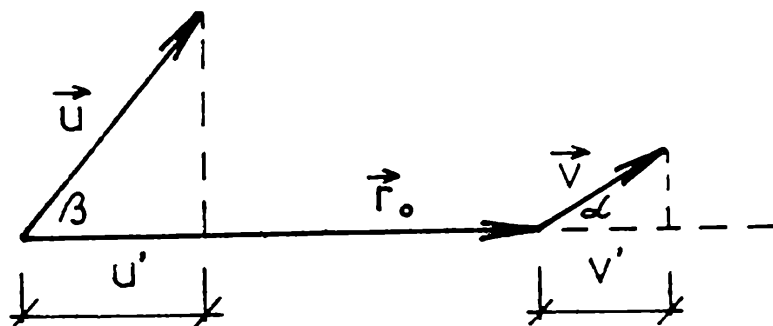
b) Vyšetříme teraz celý prípad všeobecnejšie. Predpokladajme, že v čase $t = 0$ sú zdroj Z a prijímač P v náhodnej vzájomnej polohe určenej polohovým vektorom $\mathbf{r}_0$ (obr. 6) a ich rýchlosti $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ majú ľubovoľné smery, a že zdroj Z v čase $t = 0$ a v čase $t = T$ vyslal dva veľmi krátke signály. V okamihu t_1 prijatia prvého signálu polohový vektor pozorovateľa vzhľadom na miesto vyslania tohoto signálu je $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t_1$, takže $|\mathbf{r} + \mathbf{v}t_1| = ct_1$. V okamihu prijatia druhého signálu, teda v čase t_2 , polohový vektor pozorovateľa vzhľadom na miesto vyslania tohoto druhého signálu je $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t_2 - \mathbf{u}T$, takže $|\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t_2 - \mathbf{u}T| = c(t_2 - T)$. Za predpokladu, že rýchlosti $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ sú pomerne malé vzhľadom na c , z predchádzajúcich dvoch rovníc dostávame postupne vzťahy

$$\begin{aligned}
ct_1 &\doteq \sqrt{r_0^2 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}t_1} = \sqrt{r_0^2 + 2r_0v't_1} = r_0 \sqrt{1 + \frac{2v't_1}{r_0}} \doteq \\
&\doteq r_0 \left(1 + \frac{v't_1}{r_0}\right) = r_0 + v't_1 \\
c(t_2 - T) &\doteq \sqrt{r_0^2 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}t_2 - 2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u}T} = \\
&= \sqrt{r_0^2 + 2r_0v't_2 - 2r_0u'T} = \\
&= r_0 \sqrt{1 + \frac{2v't_2}{r_0} - \frac{2u'T}{r_0}} \doteq r_0 \left(1 + \frac{v't_2}{r_0} - \frac{u'T}{r_0}\right) = \\
&= r_0 + v't_2 - u'T
\end{aligned}$$

kde u' a v' sú veľkosti priemetov rýchlostí $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ do smetu vektora $\mathbf{r}_0$ (obr. 7). Z uvedených dvoch rovníc vyplýva:

Poznámka: Pri úpravách sme využili skalárny súčin vektorov:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t_1)^2 &= (\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t_1) \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t_1) = r_0^2 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}t_1 + v^2t_1^2 \doteq \\
&\doteq r_0^2 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}t_1 \text{ (za predpokladu, že } v \text{ je malé)} \\
&= r_0^2 + 2r_0v't_1 \cos \alpha = r_0^2 + 2\mathbf{r}_0v't_1
\end{aligned}$$



Obr. 7

kde $v' = v \cos \alpha$ (obr. 7) a podobne $u' = u \cos \beta$. Podľa binomickej

$$\begin{aligned}
\text{vety } (a + b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \\
&+ \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n,
\end{aligned}$$

teda

$$\left(1 + \frac{2v't_1}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{v't_1}{r_0},$$

keď ďalšie členy zanedbáme. Podobne

$$\left(1 + \frac{2v't_2}{r_0} - \frac{2u'T}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{v't_2}{r_0} - \frac{u'T}{r_0}$$

$$t_1 = \frac{r_0}{c - v'}, \quad t_2 = \frac{r_0 + cT - u'T}{c - v'}$$

teda

$$T' = t_2 - t_1 = \frac{c - u'}{c - v'} T$$

alebo

$$f' = \frac{c - v'}{c - u'} f \quad (3)$$

Ak porovnáme vzťahy (2) a (3), vidíme, že sa líšia jedine v tom, že vo vzťahu (3) namiesto veľkosti rýchlostí vystupujú len veľkosti priemetov rýchlostí do smeru spojnice zdroja a pozorovateľa. O tom, či frekvencia f' je väčšia alebo menšia ako frekvencia f , rozhoduje skutočnosť, či sa vzdialenosť medzi zdrojom a pozorovateľom znižuje alebo zväčšuje.

Príklad:

Rovinná zvuková vlna s frekvenciou 1000 Hz sa šíri vzduchom rýchlosťou 340 m s^{-1} tak, že v pravouhlom súradnom systéme spojenom so Zemou sú jej vlnoplochy kolmé na rovinu xy a s osou x zvierajú uhol $\pi/4$. Vzduch je vzhľadom k Zemi v pokoji. Akú frekvenciu registruje pozorovateľ, ak

1. je v pokoji?
2. pohybuje sa v kladnom smere osi x rýchlosťou 15 m s^{-1} ?
3. pohybuje sa v zápornom smere osi x rýchlosťou 15 m s^{-1} ?
4. pohybuje sa v kladnom smere osi z rýchlosťou 15 m s^{-1} ?
5. pohybuje sa v zápornom smere osi z rýchlosťou 15 m s^{-1} ?

Riešenie:

Nech c je veľkosť rýchlosti šírenia sa rozruchu (zvuku), v — rýchlosť pozorovateľa, u — rýchlosť zdroja.

Vychádzajúc z Dopplerovho javu $f' = \frac{c - v'}{c - u'} f$. Vo všetkých prípadoch je $u = 0$, $u' = 0$, takže v jednotlivých prípadoch platí

1. $v = 0 \Rightarrow v' = 0$ a potom $f' = f$

Pozorovateľ bude registrovať zvuk s frekvenciou 1000 Hz.

2. $v' = v \cos \frac{\pi}{4} = 10,6 \text{ m s}^{-1}$

$$f' = \frac{c - v'}{c} f = \frac{340 - 10,6}{340} 10^3 \text{ s}^{-1} \doteq 969 \text{ s}^{-1}$$

Pozorovateľ bude registrovať zvuk s frekvenciou 969 Hz.

3. $v' = v \cos \frac{3\pi}{4} = -10,6 \text{ m s}^{-1}$

$$f' = \frac{c - v'}{c} f = \frac{340 + 10,6}{340} 10^3 \text{ s}^{-1} = 1031 \text{ s}^{-1}$$

Pozorovateľ bude registrovať zvuk s frekvenciou 1031 Hz.

4. a 5. Rýchlosť pozorovateľa je kolmá na smer šírenia vlny, a preto $v' = 0$ a $f' = f$.

Pozorovateľ bude registrovať zvuk s frekvenciou 1000 Hz.

Zo vzťahu (2), resp. (3) je vidieť, že Dopplerov jav možno využiť pri meraní rýchlosti pohybu telies. Objekt, ktorého rýchlosť meriame, musí byť však vysielačom, resp. prijímačom vlnenia. V súčasnosti je využitie Dopplerovho javu pri meraní rýchlostí už pomerne rozšírené. Uplatňuje sa napr. pri meraní rýchlosti lietadiel, lodí, rakiet, umelých družíc, ale i automobilov a pod. pomocou radarov. Dopplerov jav sa však dá využiť na meranie rýchlosti aj v prípade laserového žiarenia. To poskytuje zaujímavé možnosti pri meraní malých rýchlostí prúdenia kvapalín či plynov. Určuje sa pritom rýchlosť jednotlivých častíc tekutiny, ktorých rozmer musí byť rádovo 1 μm . Ak tekutina také častice nemá, vnášajú sa do nej zámerne.

3. Laserový dopplerovský anemometer (LDA)

3.1. Princíp činnosti LDA

Model najjednoduchšieho laserového dopplerovského anemometra: Laserový lúč sa namieri na príslušné miesto v prúdiacej tekutine obsahujúcej častice rozptyľujúce svetlo. Svetlo rozptýlené na pohybujúcich sa čiastočkách zachytáva vhodne umiestnený fotodetektor. Rozptýlené svetlo má v dôsledku Dopplerovho javu inú frekvenciu ako svetlo pôvodné. Zmena frekvencie je pritom priamo úmerná rýchlosti častíc nachádzajúcich sa v prúdiacej tekutine.

Ak svetlo s frekvenciou f dopadá na pohybujúcu sa časticu, potom táto častica zachytáva, v dôsledku Dopplerovho javu, inú frekvenciu f_1 . Keďže na častici dochádza pritom k odrazu svetla, možno túto považovať súčasne za zdroj svetla vysielaajúci svetlo o frekvencii f_1 . Ak umiestnime fotodetektor tak, aby spojnice fotodetektora s vysielaajúcou časticou bola kolmá na smer pohybu častice, potom fotodetektor bude registrovať frekvenciu f_1 .

Podľa vzťahu (3) možno písať

$$f_1 = \frac{c - v'}{c} f$$

Z uvedeného je vidieť, že meraním frekvencií f a f_1 možno určiť rýchlosť častice. Pre prax je však takýto spôsob merania nevhodný. Ak zvážime, že $c \gg v'$, potom frekvencia f_1 je veľmi blízka frekvencii f . Rozlíšiť frekvencie f a f_1 pri tak vysokých frekvenciách ako sú frekvencie svetelných vln ($\approx 10^{14}$ Hz) nie je z experimentálneho hľadiska jednoduché. Preto sa pri meraní rýchlostí používa iné usporiadanie, pri ktorom na

„mluvící“; např. **ANGLOFONNÍ** země — země, kde se mluví anglicky

FONO- (z řec. *fóné* = hlas, zvuk; v. *fón*) — počáteční část složených slov spojující část druhou s významem „hlas, zvuk“

FONOGRAF (řec. *grafó* = rýt, psát; v. -graf) — přístroj zapisující do válečků nebo desek „vyryté zvuky“

FONOGRAM (řec. *gramma* = „vyryté, napsané“; písmo; v. -gram¹) — Edisonův záznam zvuku na válečku z měkkého materiálu

FONOMETR (řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metr¹) — zvukoměr

-FOR (z řec. *foros*; od *feró* = nést) — koncová část složených slov mající význam „nesoucí“; předcházející část složeného slova vyjadřuje „předmět nesení“; např. **SEMAFOR** (řec. *séma* = znamení, znak) — technické zařízení, které „nese znamení“ Pozn.: *-for* — je nejčastější střída řec. slovesa *feró*; proto většina odborných výrazů je tvořena z kmene *for-* (v. t. elektrofor, fosfor, luminofor, termofofor, iontofoforéza); z kmene *fer-* se vyskytují jen ojediněle; např. **PERIFERIE** (řec. *peri-* — zde s významem „okolo, kolem“) — obvod, okrajová část města
FORMANT (z lat. *formans*, -ntis; ptc. přez. slovesa *formo*, -are = dávat tvar, podobu; utvářet; v. deformace) — „dávající tvar“; ve fyzice: činitel, který spoluutváří např. barvu zvuku

FOSFOR (slož. z řec. *fós* = světlo; v. *fot* + *foros*, od *feró* = nést; v. -for) — „nesoucí světlo, světloňoš“; prvku dán takový název, protože na vzduchu vypouští bílý dým, jenž ve tmě svítí, a protože se již zapaluje a hoří bílým plamenem při 50 °

FOSFORESCENCE (-cence analogicky podle „luminiscence“) — druh světélkování; záření, které trvá na rozdíl od fluorescence nějakou dobu i po zániku budícího záření

FOT, PHOT (z řec. *fós*, *fótos* = světlo) — zastaralá jednotka osvětlení; v. t. foto-, fotonka

FOTO-¹ (z řec. *fós*, *fótos* = světlo; v. *fot*) — počáteční část složených slov spojující část následující s významem „světlo“

FOTODEZINTEGRACE (v. dezintegrace) — „rozklad pomocí světla“

FOTOELASTICIMETRIE (v. elasticimetrie) — měření pružnosti a namáhání „pomocí světla“

FOTOELEKTRET (v. elektret) — elektret získaný působením světla

FOTOELEKTRICKÝ (v. elektrický) — související s vlivem světla na elektrické vlastnosti

FOTOELEKTRON (v. elektron) — elektron uvolněný z hmoty pomocí světla

FOTOEMISE (v. emise) — nikoliv „vysílání světla“, ale „vysílání pomocí světla“; vysílání elektronů působením světla

FOTOGRAF (v. -graf) člověk „píšící (malující obrázky) pomocí světla“

FOTOGRAMMETRIE (slož. z *fós*, *fótos* = světlo + *gramma* = „napsané“, písmo; v. -gram¹ + *metron* = měřidlo, míra; v. -metrie) —

nauka zjišťující tvar, rozměr a polohu objektu v prostoru „ze zápisů zapsaných světlem“

FOTOCHEMIE (v. chemie) — nauka o chemických reakcích vyvolaných působením světla

FOTOLUMINISCENCE (v. luminiscence) — světlem podmíněné světélkování nějaké látky; souhrnný název pro fluorescenci a fosforescenci

FOTOMETR (v. -metr¹) přístroj na měření svítivosti; světloměr

FOTOMETRICKÝ (v. metrický) — světloměrný (např. světloměrná jednotka)

FOTOMETRIE (v. -metrie) — obor zabývající se měřením svítivosti

FOTONÁSOBIČ — násobič světla

FOTOPTICKÉ vidění (kmen *opt-* slovesa *horaó* = vidět; v. optika) — „vidění za světla“; čípkové vidění; srov. skótopické vidění

FOTOSFÉRA (v. sféra — „oblast světla“; svítící povrchová vrstva; vnější vrstva, ze které přichází viditelné záření; přímo pozorovatelný sluneční povrch

FOTOSYNTÉZA (v. syntéza) — slučování kyslíčnicku uhličitého s vodou za účasti slunečního světla

FOTO-² (zkráceno z „fotoelektrický“) — počáteční část složených slov spojující část následující s významem „fotoelektrický“

FOTOČLÁNEK — fotoelektrický článek; nikoliv „světelný článek“ ve srovnání s „termočlánkem“ (řec. *thermos* = teplo) — tepelným článkem

FOTOEFEKT (v efekt) — fotoelektrický efekt; jev, při němž dochází k vysílání elektronů světla

FOTO-³ (zkráceno z „fotografie, fotografický“) — počáteční část složených slov spojující část následující s významem „fotografie, fotografický“

FOTOAPARÁT — fotografický aparát

FOTOATELIÉR — ateliér pro fotografování; fotografický ateliér

FOTOSNÍMEK — fotografický snímek; atd.

FOTON (slož. z řec. *fós, fótos* = světlo; v. *phot* + *-on* — přípona použitá analogicky podle „elektron“ pro označení částic) — kvantum zářivé energie; pojem, který je základem dnešních představ o podstatě světla

FOTONKA (přípona -onka použita analogicky podle „elektronka“) — elektronka citlivá na světlo; elektronický přístroj založený na fotoelektrickém jevu

FOTOPTICKÝ, FOTOSFÉRA, FOTOSYNTÉZA v. FOTO-

FRAGMENT (z lat. *fragmentum*, od *frango*, -ere = lámat; v. difrakce) — úlomek, úštěpek; ve fyzice: fragmenty — úlomky vznikající při štěpení rozpadem jádra

FRAKCE (z lat. *fractio*; od *frango*, -ere, ptc. pf. *fractus* = lámat; srov.

FRAKTURA — zlomenina) — „zlomení“ skupina uvnitř politické

strany, která se svými názory odštěpí od ústřední linie; ve fyzice: -frakce — koncová část termínu, jemuž dává upřesnění teprve předpona, např. DIFRAKCE světla — „rozlomení“, ohyb světla (lat. *dis-* — zde s významem „rozluka, roz-“); srov. REFRAKCE (lat. *re-* = zpět) — zlom, lom směrem zpátečním; změna směru (světelných paprsků, zvukových vln); v. t. fragment

FREKVENCE (z lat. *frequens*, *-entis* = plný, naplněný, lidnatý, hustý, četný) — počet opakujících se dějů nebo jevů v určitém časovém nebo místním úseku; ve fyzice: hodnota udávající počet kmitů za sekundu; kmitočet; srov. v dopravě: dopravní ruch, provoz, tj. množství osob a vozidel pohybujících se určitým místem za určitou dobu; VYSOKOFREKVENČNÍ — s vysokým počtem kmitů; v. t. frekvencemetr

FREKVENTOMETR (slož. z lat. *frequens*, *-entis* = plný, naplněný, hustý, četný, v. frekvence + řec. *metron* = měřidlo míra, v. *-metr*¹⁾) — kmitočtoměr, kmitoměr

FRONTA (od lat. *frons*, *-ntis* = čelo, přední strana) — průčelí, přední strana seskupených lidí nebo věcí; ve fyzice: rozhraní dvou vzduchových vrstev různých vlastností

FRONTÁLNÍ — čelný; ve fyzice: FRONTÁLNÍ plocha — styčná plocha

v. t. konfrontace

FUNDAMENTÁLNÍ (z lat. *fundamentalis*, od *fundamentum* = základ, podklad; a to od *fundus* = dno, spodek) — „to, co je u dna, u základu“ — základní, hlavní, podstatný

FUNKCE (z lat. *functio*, od *fungor*, *-i*, ptc. pf. *functus* = být činný, vykonávat; srov. fungovat — „být schopen dobrého chodu“) — vykonávání, činnost, úkon, účinnost; ve fyzice: obor působnosti, činnost k nějakému účelu zaměřená

FÚZE (z lat. *fusio*; od *fundo*, *-ere*, ptc. pf. *fusus* = lít) — „lití“, vylití, rozlití, splynutí (např. dvou podniků, když „se jeden vyleje do druhého“); často s předponami, např. DIFÚZE (lat. *dis-* = roz-) — „rozlití“; TRANSFÚZE (lat. *trans* = přes) — „přelití, přelévání“

FYZIKA (z řec. *fysiké techné* = dovednost přírody; od *fysis* = příroda a *techné* = tvoření, obratnost; v. *-ika*¹⁾) — antický termín „fyzika“ znamenal „soubor znalostí o přírodních jevech“, „věda o přírodě vůbec“; fyzika byla spolu s etikou a logikou jednou ze tří základních složek filosofie. Teprve průběhem staletí se od fyziky chápáné v širším smyslu oddělily obory, které se staly vědami samostatnými (např. chemie aj.). Dnes „fyzika“ je věda zkoumající a vysvětlující zákonitosti, jimiž se řídí děje a stavy v neživé přírodě, při nichž se složení látek zpravidla nemění; v. t. astrofyzika, geofyzika

FYZICKÝ — tělesný, hmotný (opak k „duševní, duchovní“); ale FYZIKÁLNÍ zeměpis — nauka o přírodních vlastnostech zemského po-

vrchu (Nejde tu o část zeměpisu, která by nějak souvisela s fyzikou, nýbrž je to zeměpis, který se zabývá hmotou a povrchem Země.)

Srov. fyzikální chemie

FYZIKÁLNÍ — adjektivum k „fyzika“; FYZIKÁLNÍ chemie — odvětví chemie (srov. fyzický zeměpis), které zjišťuje v chemických pochodech fyzikální zákonitosti; FYZIKÁLNÍ léčba — využívá fyzikálních jevů (tepla, světla, záření, elektrického proudu apod.)

FYZIO- (od řec. *fysis* = příroda; v. fyzika) — počáteční část složených slov spojující část následující s významem slova „příroda“

FYZIOGRAFIE (v. -grafie) — vědecký popis přírodních jevů

FYZIOLOGIE (v. -logie) — věda zabývající se životními pochody uvnitř těl organismů

GALAKTOMETR (slož. z řec. *gala*, -aktos = mléko; v. galaxie) + *metron* = měřidlo, míra; v. -metr¹) — mlékoměr; přístroj k měření hustoty mléka

GALAXIE (z řec. *galaxias*, od *gala*, -aktos = mléko) — Galaxie — Mléčná dráha; galaxie — soustava hvězd obdobná Mléčné dráze. Pozn.: S řec. *gala*, *aktos* souvisí lat. *lac*, *lactos* = mléko; srov. laktóza — mléčný cukr; v. t. supergalaxie, metagalaxie; galaktometr

GALVANICKÝ (podle it. fyzika L. Galvaniho, který objevil živočišnou elektřinu) — GALVANICKÝ článek — zařízení přeměňující chemickou energii v elektrickou; GALVANISMUS, GALVANIZACE, GALVANIZOVAT; v. t. galvano-

GALVANO- (analogicky od „galvanický“) — počáteční část složených slov spojující část druhou s významem slova „galvanismus, galvanický“

GALVANOMETR (v. -metr¹) — měřič galvanického proudu

GALVANOPLASTIKA (v. plastika) — způsob zhotovování reliéfních obtisků kovových předmětů elektrolytickou metodou

GALVANOSKOP (v. -skop) — přístroj k zjišťování slabých elektrických proudů

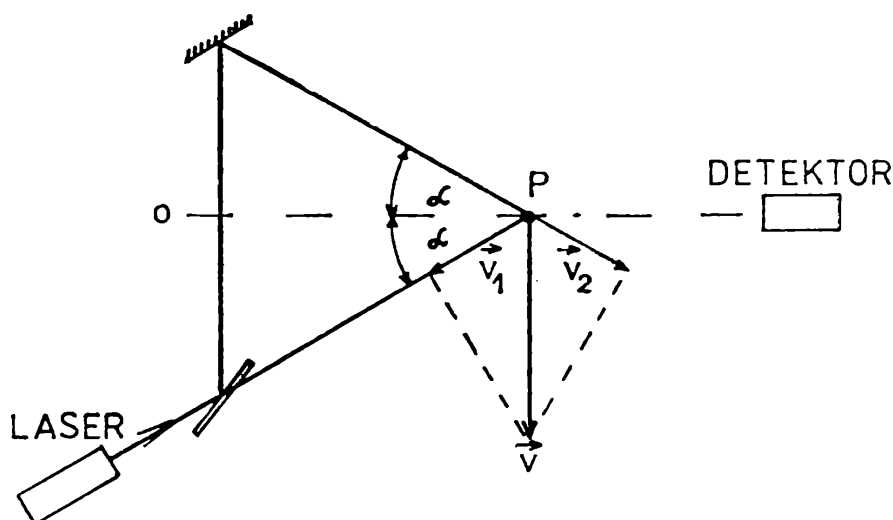
GALVANOSTEGIE (řec. *stegó* = krýt, chránit, ukrývat) — elektrolytické pokovování předmětů, aby byly uchráněny před oxidací

GENERACE (z lat. *generatio*; od *genero*, -are, ptc. pf. *generatus* = rodit, plodit; v. generátor) — plození, pokolení, vznik, vytvoření

GENERÁTOR (z lat. *generator*; od *genero*, -are, ptc. pf. *generatus* = rodit, plodit; souvisí s *genus*, *generis* = rod, původ, kmen, národ; druh, plémě — „ploditel“; přístroj vyrábějící páru, plyn nebo elektrický proud (v. -or); v. t. termogenerátor, turbogenerátor; generace

-GENNÍ (z řec. -*genés*; od *gignomai* = rodit se, vznikat) — koncová část složených slov s významem „vznikající, vzniklý, pocházející, působící, způsobený, tvořící, vytvořený“; např. ENDOGENNÍ (řec. *endon* = uvnitř) — vzniklý uvnitř organismu; v. t. homogenní

pohybujúce sa častice dopadajú dva koherentné svetelné laserové zväzky.



Obr. 8

Schéma v praxi často používaného tzv. heterogénneho systému na meranie rýchlostí tekutín je na obr. 8. Laserový svetelný zväzok sa na polopriepustnom zrkadle (sklenej platničke) rozštiepi a získané dva zväzky sa nasmerujú do skúmaného miesta v tekutine (zväzky sú na obr. 8 reprezentované zjednodušene iba lúčmi a skúmané miesto bodom P). Oba zväzky — lúče a rýchlosť častice ležia pritom v jednej rovine, pritom rýchlosť $\mathbf{v}$ je na os o uhla 2α kolmá. Aby signál zachytený fotodetektorom bol čo najlepšie rozlíšiteľný, je nutné, aby intenzity oboch zväzkov boli podľa možnosti rovnaké. Preto sa na reguláciu intenzity zväzkov používajú clony.

V uvedenom usporiadaní (obr. 8) dopadajú na rozptyľujúcu časticu dve svetelné vlny o frekvencii f . Keďže zväzky dopadajú na časticu z rôznych strán, bude častica zachytávať v dôsledku Dopplerovho efektu dve rôzne frekvencie f_1 a f_2 , pre ktoré v súlade so vzťahom (3) platí

$$f_1 = \frac{c + v_1}{c} f = \frac{c + v'}{c} f,$$

$$f_2 = \frac{c - v_2}{c} f = \frac{c - v'}{c} f,$$

kde $v_1 = v_2 = v' = v \sin \alpha$. Frekvencie f_1 a f_2 sú pritom blízke. Odrážajúca častica je súčasne aj zdrojom dvoch svetelných žiarení s blízkymi frekvenciami f_1 a f_2 . Ak je fotodetektor umiestnený tak, aby rýchlosť častíc bola kolmá na spojnicu častica — detektor, bude fotodetektor zachytávať nezmenené dve frekvencie f_1 a f_2 , a teda vlastne superpozíciu uvedených dvoch svetelných signálov — rázy. Frekvencia týchto rázov (t.j. periodických zosilnení a zoslabení intenzity svetla dopadajúceho na detektor) bude

$$f_r = f_1 - f_2 = \frac{2v'}{c} f = \frac{2v \sin \alpha}{\lambda}, \quad (4)$$

kde λ je vlnová dĺžka použitého svetla. Frekvencia f_r je pritom v porovnaní s frekvenciou f malá a patrí obvykle do oblasti rádiových frekvencií. Takéto frekvencie možno už merať s veľkou presnosťou.

Ak poznáme uhol α , potom zo vzťahu (4) možno určiť rýchlosť v častice. V prípade, že rýchlosť častice nie je na os uhla 2α kolmá (avšak stále je v uvažovanej rovine) popísaným spôsobom určíme iba jej zložku kolmú na os uhla 2α .

Z uvedeného plynie, že prostredníctvom LDA možno merať iba jednu zložku rýchlosti, čo v praxi často postačuje (napr. pri laminárnom prúdení v trubici, kedy je smer rýchlosti známy). Vo všeobecnom prípade k úplnej informácii o rýchlosti v treba poznať jej tri navzájom kolmé zložky. To možno docieľiť napr. tým, že pôvodný svetelný zväzok vhodne rozštepíme tak, aby sme získali tri zväzky. Ak roviny určené každou dvojicou zväzkov (lúčov) sú na seba kolmé, potom trojicou detektorov získame tri navzájom kolmé zložky vektora rýchlosti $\mathbf{v}$ častice v priestore. Takéto usporiadanie sa používa napr. pri sledovaní turbulentného prúdenia.

Keďže svetelné zväzky z lasera sa prekrývajú iba v malom priestore tekutiny, dostávame informáciu iba o rýchlosti tých častíc, ktoré prejdú týmto priestorom. Pri prúdení tekutiny prejde daným miestom v určitom čase veľké množstvo častíc, a preto vyhodnotenie má štatistický charakter. Meraním dostávame informáciu o strednej hodnote rýchlosti častíc v danom mieste a nie diskretnú hodnotu rýchlosti každej častice.

Treba pripomenúť, že popísané usporiadanie LDA je iba jedno z dnes už používaných usporiadaní. Všetky sú však založené na využití Dopplerovho javu.

Príklad:

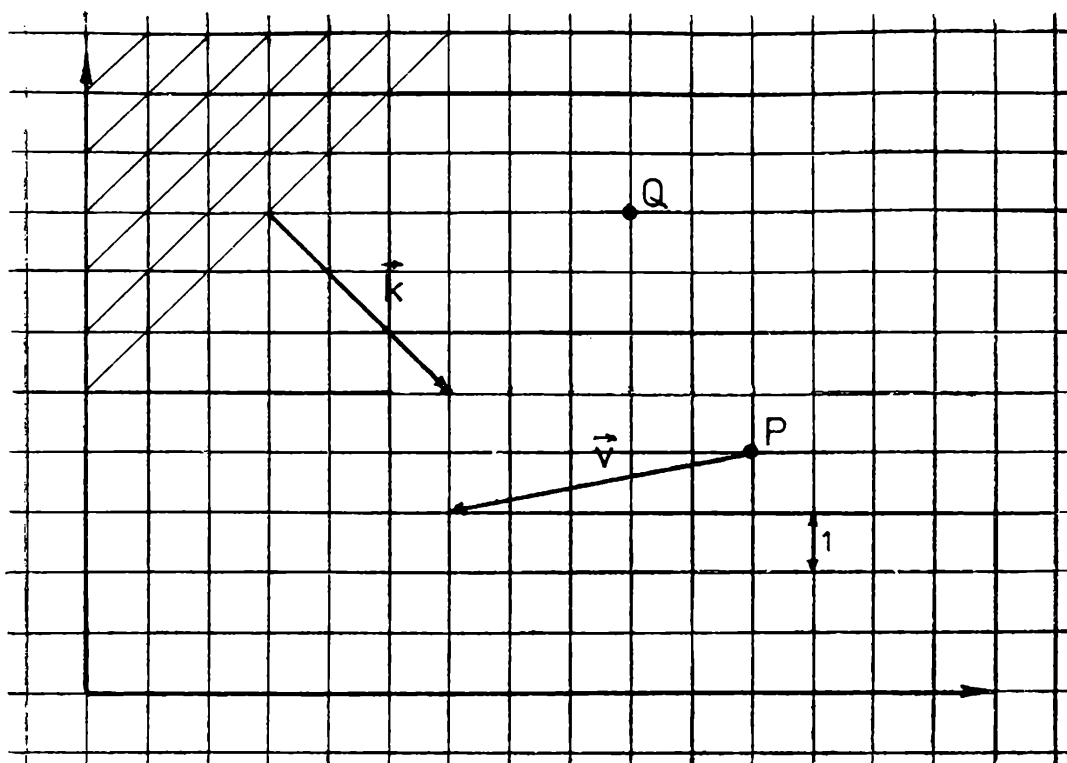
Na obr. 9 je znázornená rovinná vlna a dvaja pozorovatelia P a Q. Pozorovateľ Q je v klude (vzhľadom k danému súradnicovému systému) a registruje vlnenie s frekvenciou 10,0 Hz. Určte rýchlosť šírenia vln v danom prostredí a frekvenciu vlnenia, ktoré registruje pozorovateľ P pohybujúci sa rýchlosťou $\mathbf{v}$!

Poznámka: Znázornený vektor $\mathbf{k}$ je tzv. vlnový vektor a udáva smer šírenia vln a pre jeho veľkosť platí $k = 2\pi/\lambda$, kde λ je vlnová dĺžka šíriaceho sa vlnenia.

Riešenie:

1. spôsob. Z obr. 9 vidieť, že $\mathbf{k} = (3, -3, 0) \text{ m}^{-1}$, z čoho $k = \sqrt{18} \text{ m}^{-1}$, a $\mathbf{v} = (-5, -1, 0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Priemet v' rýchlosti $\mathbf{v}$ do smeru vektora $\mathbf{k}$ určíme napr. pomocou skalárneho súčinu $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Teda $v' = v \cos \alpha = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k} = \frac{-12}{\sqrt{18}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -2,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Platí $k = 2\pi/\lambda = 2\pi f/c$, z čoho pre rýchlosť c šírenia vln vychádza $c = 14,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. 9

Pre frekvenciu f' , ktorú registruje pozorovateľ P platí $f' = \frac{c - v'}{c} f =$
 $= \frac{14,8 + 2,8}{14,8} 10 \text{ s}^{-1} = 11,9 \text{ Hz}.$

2. spôsob. Vychádzame z rovnice rovinnej vlny

$$u = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varphi),$$

v ktorej $\mathbf{r}$ predstavuje polohový vektor bodu v ktorom určujeme veľkosť výchylky u . Ak ide o nepohybujúceho sa pozorovateľa je $\mathbf{r} = \text{konst.}$ Ak je pozorovateľ v pohybe, potom $\mathbf{r}(t)$. V krátkom časovom intervale možno každý pohyb považovať za rovnomerný, takže možno $\mathbf{r}$ vyjadriť vzťahom $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$. Prípad pohybujúceho sa pozorovateľa vedie na zdanlivú zmenu frekvencie, ktorú možno určiť úpravou fázy rovinnej vlny nasledovne:

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varphi = \omega t - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t) - \varphi = \omega' t + \varphi',$$

kde $\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ je vlastne zdanlivá kruhová frekvencia vlnenia zachyteného pozorovateľom P a $\varphi' = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \varphi$. Pre dané hodnoty $\mathbf{k}$ a $\mathbf{v}$ (obr. 9) a berúc do úvahy vzťahy $\omega = 2\pi f$, $\omega' = 2\pi f'$ vychádza $f' = 11,9 \text{ s}^{-1}$. Rýchlosť vlnenia počítame tak ako v 1. spôsobe.

Úlohy:

1. Dva vlaky idú proti sebe. Rýchlosť prvého je 72 km h^{-1} a druhého 54 km h^{-1} . Prvý vlak vyšle zvukový signál, ktorého frekvencia je 600 Hz . Určte frekvenciu zvuku, ktorý počuje cestujúci v druhom vlaku:

a) pred stretnutím vlakov, b) po stretnutí vlakov. Rýchlosť zvuku vo vzduchu je $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. [a) $f' = 666 \text{ Hz}$; b) $f' = 524 \text{ Hz}$]

2. Ak prechádza vlak vedľa nepohybujúceho sa pozorovateľa, výška tónu sirény vlaku sa zmení skokom. Vyjadrite v percentách skok frekvencie vzhľadom na základnú frekvenciu tónu, ak rýchlosť vlaku je $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

[10 %]

3. Z lasera sa šíri monochromatické svetlo s vlnovou dĺžkou $632,8 \text{ nm}$. Pozorovateľ stojaci vedľa lasera sleduje prachové zrníčko, ktoré sa pohybuje proti svetelnému lúču. Frekvencia svetla odrazeného od zrníčka, ktorú registruje pozorovateľ, je o $3,2 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ vyššia ako frekvencia svetla vysielaného laserom. Aká je rýchlosť prachového zrníčka, ak rýchlosť svetla berieme $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$?

[$v = 10,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$]

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Z dějin letectví

JOSEF KOTYK, Pardubice

Vedle balonů a vzducholodí¹⁾ rozšířila se ve 20. století letadla „těžší než vzduch“, založená na odporu prostředí.

Podle *Nikolaje Jegoroviče Žukovského* (naroz. r. 1847, zemř. r. 1921) je odpor tekutého prostředí výslednicí hydrodynamických tlaků na povrch tělesa, jež se jím pohybuje. Vzniká nejen odstraňováním částic prostředí před tělesem (z tohoto jednostranného předpokladu lze odvodit známý přibližný vzorec Newtonův), závisí však podstatně i na pohybu tekutiny v okolí tělesa a na jeho celkovém tvaru. Je důležité, že za tělesem dochází k víření částic; vzniká za ním totiž prostor, do něhož se hrnou sousední částice nasávané z okolí.

Studiemi tohoto druhu, zejména vyřešením vhodného tvaru křídla, se *Nikolaj Jegorovič Žukovskij* podrobně zabýval ve svém hlavním spise „*Teoretické základy létání*“. Působil jako profesor university a techniky v Moskvě a dal podnět k založení Aerodynamického ústavu a Vo-

¹⁾ Jejich historií se zabýval na stránkách našeho časopisu (v roč. 54, čísl. 5) autorův článek „*Dvě kapitoly z počátků vzduchoplavby*“.

jenské letecké inženýrské akademie; stal se tak zakladatelem nejen teoretické, nýbrž i experimentální aerodynamiky.

Návrh prvního letadla „těžšího než vzduch“ s pevnými křídly a vrtulí si dal roku 1881 — právě před 105 lety — patentovat ruský vynálezce *Alexander Fjodorovič Možajskij* (1825—1890). Vrtule jeho letadla byla poháněna parním strojem. Již v roce 1882 uskutečnil Možajskij, námořní důstojník, první pokusy²⁾ s letadlem, jehož princip se v podstatě nelišil od letadel dnešních. Historického významu nabyly zejména pokusy, jež Možajskij se svým letadlem konal u *Krásného Sela* v blízkosti Petrohradu roku 1884.

Počátkem našeho století sestrojili letadlo opatřené vrtulí a kormidly a poháněné motorem bratři *Wilburg* a *Orville Wrightové*, výrobci jízdních kol z *Daytonu* ve státu *Ohio* (USA). Jeho nedostatků si byli patrně vědomi, neměli však prostředků, aby (jak řekl Orville) „mohli uživit ženu a ještě letadlo“. První řízený — i když jen velmi krátký — let dvojplášníkem s dvěma tlačnými vrtulemi a čtyřválcovým motorem o výkonu 8,8 kW uskutečnil dne 17. prosince 1903 Orville Wright (naroz. r. 1871, zemř. r. 1948) v americkém státu *Severní Karolína*. Se svým strojem se udržel 12 s ve výšce 2,5 až 3,5 m nad zemí a uletěl 37 m. Dokázal tak, že letadlo „těžší než vzduch“ je skutečně způsobilé letu.

Svého splnění došla tehdy prorocká slova „obra renesance“ vynálezce *Leonarda da Vinci* z roku 1505: „Svůj let provede veliký pták na svahu pahorku a naplní veškeré lidstvo úžasem a svět slávou. Věčná sláva bude souzena tomu místu, kde se tento pták zrodí“

Při dalších pokusech zvyšovali bratři Wrightové postupně délku letu; uletěli např. vzdálenost 260 m za 59 s³⁾ apod. V roce 1908 uskutečnili již první let s cestujícími. V témže roce předvedli své letadlo také v Evropě. O další vývoj aeroplánů se pak zasloužili nejvíce Francouzi. Dne 13. ledna 1908 proletěl *Henri Farman* (1874—1958) u Paříže vzdálenost přes 1 km po kruhové dráze (ve smyčce). První přelet průlivu La Manche se podařil dne 25. července 1909 *Louisi Blériotovi* (1872—1936) na jednoplošníku „Blériot XI“, poháněném motorem „Anzani“ o výkonu 17 kW let trval 37 minut.

Do těchto let spadají také počátky českého letectví. Prvním jeho reprezentantem byl inženýr *Jan Kašpar* (1883—1927). V roce 1910 uletěl na letadle „Blériot XI“ vzdálenost 2 km; památného dne 13. května 1911 úspěšně absolvoval první dálkový meziměstský let, epochální let z rodných Pardubic do Prahy.⁴⁾ Následovala pak řada jeho místních

²⁾ Cit. Malý encyklopedický slovník A—Ž, Academia Praha 1972, str. 744.

³⁾ Cit. Malou encyklopédii bádatelův a vynálezce (Obzor, Bratislava 1973), str. 690 a 691.

⁴⁾ V podrobnostech viz autorův článek „Z počátků českého letectví“ v Rozhledech, roč. 56, čísl. 5, str. 235 až 237.

i dálkových letů a další úspěšné produkce v různých městech. K nejrychlejšímu vývoji letectví došlo však až v první světové válce, jež uspíšila také to, k čemu i za jiných okolností muselo jednou dojít: Letectví nemohlo zůstat v rukou amatérů.

Dne 20. května 1927 přeletěl americký letec *Charles Lindbergh* (1902 až 1974) Atlantický oceán z Ameriky do Evropy na trati *New York—Paříž* dlouhé asi 6000 km za 33,5 hodiny průměrnou rychlostí 180 km/hod. V tomto roce, dne 2. března 1927, zemřel také inženýr Jan Kašpar; první Čech, který létal u nás v aeroplánu, skončil svůj život dobrovolnou smrtí

Gigantických rozměrů nabyly letecké síly nasazené spojenci za druhé světové války. Např. bitvy u *Kurska* ve dnech 5. až 22. července 1943 se účastnila Sovětská armáda nejen s 3600 tanky a 20 000 děly, ale také s 3130 letadly. Anglo-americký vzdušný úder dne 17. září 1944 u *Arnheimu* v Holandsku představuje největší leteckou invazi, k níž kdy došlo; byl proveden 2800 letadly a 1600 kluzáky. Největší invaze v historii vojenství v červnu 1944 na pobřeží *Normandie* ve Francii byla kombinovanou akcí námořní, leteckou a pozemní; leteckou podporu jí poskytlo 13 175 letadel.

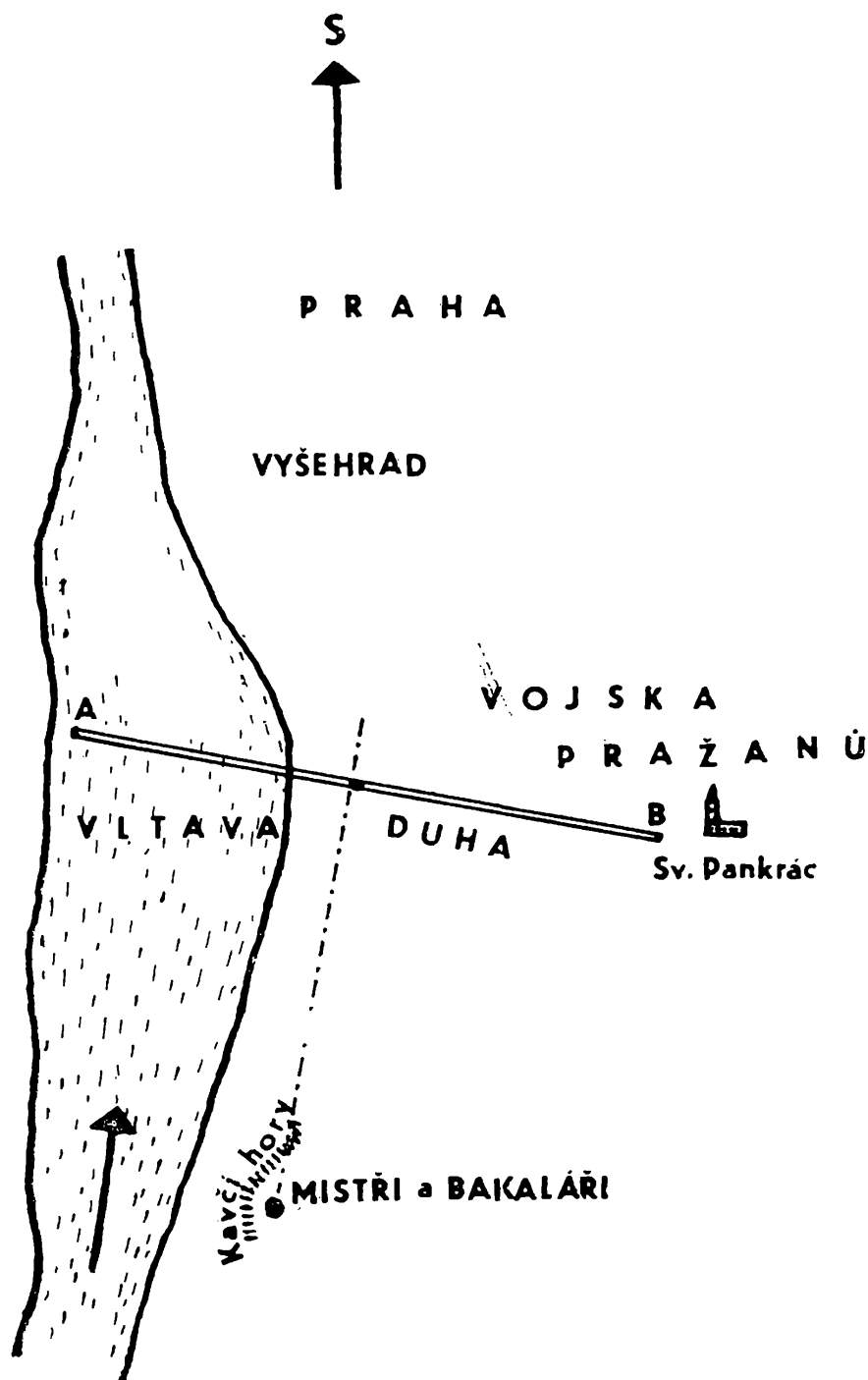
PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Historická duha

V „*Husitské kronice*“ Vavřince z Březové se líčí ([1], 156), jak r. 1420 „na den svatého Šimona a Judy“ (28. října, p. EK) při vyjednávání vyhladovělé Zikmundovy posádky na Vyšehradě s obléhajícím vojskem Pražanů o podmínkách příměří a kapitulace „... objevil se jeden podivuhodný úkaz duhy. Seděli totiž někteří mistři svobodných umění a bakaláři na vrcholu hory, řečené Kavčí hory (na Kavčích horách je nyní též budova Čs. televize, p. EK) nad Vltavou očekávající dobrý konec šťastného vyjednávání. Když tak vzájemně mluvili o různých otázkách, ukázala se ve vzduchu duha předtím u nás nevidaná; její jeden konec nebo začátek byl takřka pod našima nohama v řece Vltavě a její oblouk, rozpjatý přes Pražské město, dosahoval druhým koncem až k vojsku okolo kostelíka svatého Pankráce, jež očekávalo konec jednání; tak jen prostor, který se táhne od kostela k řečené hoře, neuzavíral kruh, protože to byla sotva čtvrtina kruhu z kruhovitého úkazu duhy.“

Učení mistři a bakaláři z toho „žertem“ usoudili na šťastný konec vyjednávání, což se také stalo. Nás však zajímají dvě fyzikální otázky:

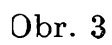
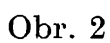
Otázky. 1. V kterou denní dobu bylo jednáno o příměří, byla-li duha v takové poloze, jak schematicky ukazuje mapka (obr. 1)?

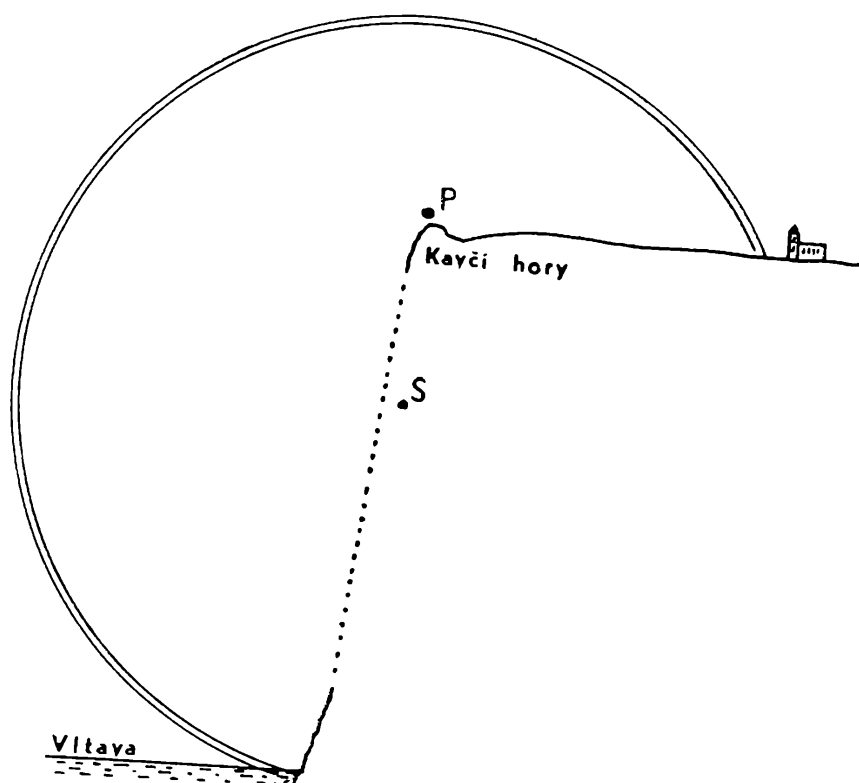


Obr. 1

2. Proč vznikla duha ve tvaru oblouku, který měl rozpětí asi $3/4$ celého obvodu kruhu, ačkoliv běžně se duha jeví ve tvaru oblouku, který je menší než $1/2$ obvodu kruhu?

[1] Vavřínek z Březové: *Husitská kronika*. Svoboda Praha 1979





Obr. 4

Nákres je pouze schematickým znázorněním situace. Je-li stanoviště pozorovatelů vyznačeno bodem P v rovině nákresu, byl by střed oblouku duhy S v mnohonásobně větší vzdálenosti za nákresnou, než je délka úsečky PS, která je ve skutečnosti kolmá k rovině duhy. Z toho důvodu je nárys oblouku duhy téměř kruhový.

Řešení. 1. Svislá osa duhy byla na sever od pozorovatelů, mírně k východu. Slunce bylo na jih mírně k západu. Proto jednání bylo krátce po průchodu Slunce poledníkem. Vzhledem k tomu, že Slunce může procházet poledníkem až zhruba 15 minut před středním polednem, mohla být duha pozorována i v poledne.

2. Běžně pozorujeme duhu nad přibližně vodorovným terénem. Sluneční paprsky dopadající na vodní kapky svírají s paprsky, které vycházejí po lomu z kapek ve směru k pozorovateli, přibližně úhel 42° (obr. 2). Proto pozorovatel P vidí z duhy jen oblouk nad terénem (AB), který je menší než $1/2$ celého kruhu. Kdyby pozorovatel stál na dostatečně vysoké věži (na rozhledně ap.), viděl by duhu téměř jako celý kruhový útvar (obr. 3). Vzhledem k tomu, že mistři a bakaláři stáli na okraji táhlé výšiny, pozorovali z duhy jen asi $3/4$. (Obr. 4).

Kruhovou duhu v malém můžeme pozorovat při rozprašování vody, proudící z hadice.

E. Kašpar

Kolik druhů závorek potřebujeme?

Ze školy všichni známe tři druhy závorek: závorky okrouhlé (), lomené [] a složené { }, případně ještě úhlové závorky < >, jež se užívají nejčastěji při označování intervalů. Závorky mají svou historii; píše se o ní v článku *dr. Aleny Šolcové* „O závorkách“, který byl otištěn v *Rozhledech mat.-fyz.* v čísle 4 roč. 64, 1985/86.

Při psaní rukou problémy se závorkami nemáme. Na mnohých psacích strojích závorky vůbec nejsou. Často se pak užívá místo nich lomítka „/“. Zde však může snadno dojít k nedorozuměním, a to nejen záměnou s dělením, nýbrž i také proto, že není jasné, zda lomítko zastupuje levou nebo pravou závorku. Například zápis

$$/a + b/c + d/e - f/g$$

lze číst dvojím způsobem:

$$(a + b) c + d (e - f) g , \\ [a + b (c + d) e - f] g$$

Užívání lomítka ve významu závorky je ve složitějších výrazech zcela nevhodné. Zvláště by takto lomítka neměli užívat v rukopisech autoři článků, neboť sazeče v tiskárně zdržuje luštění, zda lomítko představuje levou nebo pravou závorku.

Některé psací stroje jsou vybaveny lépe. Mají totiž okrouhlé závorky. U telegrafních a dálnopisných kódů a programovacích jazyků se také setkáváme se situací, že v příslušných abecedách jsou jen okrouhlé závorky. Vystačí se však s nimi nebo ne? Jediný druh závorek umožňuje jednoznačný zápis výrazů, ovšem nepřehledný. Například výraz

$$((a + b (c + d) e - f) g - h) k + l$$

lze chápat jediné

$$\{[a + b (c + d) e - f] g - h\} k + l$$

Ve správně zapsaném výrazu musí být počet všech levých závorek roven počtu všech pravých závorek. Pro správnost zápisu je to však jen podmínka nutná a nikoli postačující, a to i v případě, že užíváme jen jednoho druhu závorek (např. okrouhlých). Uvedme příklad:

$$((a + b) + d) + e) + (f + g$$

Pokuste se poslední zápis opravit přemístěním jedné závorky.

Jiří Mída

UPOZORNĚNÍ

Zajímají vás starší ročníky Rozhledů? Chybí ve vaší knihovně? Máte-li zájem o kompletní ročníky Rozhledů z let 1936/37, 1937/38, 1944/45, 1946/47, 1947/48 (vesměs vázané) a o další ročníky vydávané od roku 1957 (nevázané), napište do redakce RMF. Redakce vám zprostředkuje jejich získání.

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve školním roce 1985/86 se účastnilo soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních celkem 59 jednotlivců a 29 kolektivů, většinou trojčlenných; všech řešitelů bylo 133, tedy o něco méně než loni (145). Úlohy z matematiky řešilo celkem 126 řešitelů, tedy více než loni (91). Úlohy z fyziky řešilo celkem 11 studujících, tedy podstatně méně než loni (66). Úlohy z konstrukční geometrie řešilo celkem 7 studujících (loni 6). Tři studenti řešili úlohy z matematiky, fyziky i z konstrukční geometrie, dva úlohy z matematiky i fyziky a čtyři úlohy z matematiky i z konstrukční geometrie.

Nejúspěšnějším řešitelem byla *Hana Peňázová*, 3 B G třída kapitána Jaroše v Brně, která řešila správně 9 úloh z matematiky a všechny tři úlohy z konstrukční geometrie. Nejúspěšnější řešitelé úloh z jednotlivých předmětů byli tito studující:

Matematika:

1. Robert Babilon, 3 D, G M. Koperníka, Bílovec
2. Hana Peňázová, 3 B, G třída kapitána Jaroše, Brno
3. Pavel Calábek, 3 C, G M. Koperníka, Bílovec.

Fyzika:

Pavol Kolník, 3 C, G Nové Mesto nad Váhom

Konstrukční geometrie:

1. Hana Peňázová, 3 B, G třída kapitána Jaroše, Brno
2. Imrich Lozsi, 3 B, G s maďarským vyučovacím jazykem, Galanta

Nakonec připojujeme abecední seznam všech řešitelů. Za jménem každého řešitele uvádíme školu, na níž studoval; nejprve uvádíme vždy jednotlivce a potom řešitelské kolektivy. Otiskujeme jen příjmení; jen u řešitelů téhož jména uvádíme celé jméno.

Řešitelé úloh z matematiky:

Almári, SPŠ maď. Komárno; Anýžová, G. Bílovec; Babilon, G Bílovec; Bacher, G Mosonmagyaróvár (MLR); Berky, SPŠ maď. Komárno; Bočková, G Praha 3, Sladkovského; Bóna, G Székesfehérvár (MLR); Caha, G Brno, tř. kpt. Jaroše; Calábek, G Bílovec; Csalová, G maď. Košice; Čížek, G Praha 3, Sladkovského; Deák, G Tata (MLR); Dobaiová, G maď. Komárno; Dudášová, SOU Nové Zámky, Écsi, SPŠ maď. Komárno; Gyetven, SPŠ maď. Komárno; Habala, G Bílovec; Harasta, G Tata (MLR); Hervay, SPŠ maď. Komárno; Hrabovská, G Praha 3, Sladkovského; Hric, G Banská Bystrica, ul. Tajovského;

Chlebonová, SOU Nové Zámky; Illés, G Tata (MLR); Jancsó, G maď. Komárno; Kalmán, G Tata (MLR); Kardosová, G maď. Galanta; Kárná, G W. Piecka, Praha; Kašpárek, G Bílovec; Kincses, G Mosonmagyaróvár (MLR); Kiss András, SPŠ maď. Komárno; Kiss Zoltán, G Győr (MLR); Kovács, SPŠ maď. Komárno; Ling, G Bílovec; Lozsi, G maď. Galanta; Mocková, G Praha 3, Sladkovského; Müller, G maď. Komárno; Nagy, G Csaba (MLR); Némethová, SOU Nové Zámky; Oláh, 8 B ZŠ maď. Komárno; Olláry, SPŠ maď. Komárno; Pacholík, G Bílovec; Papp, G maď. Komárno; Peňázová, G Brno, tř. kpt. Jaroše; Polách, G J. Hronca Bratislava; Rakučák, G Žilina, Velká Okružná; Szabó, G maď. Galanta; Tok, G maď. Galanta; Tóth, SPŠ maď. Komárno; Tücsöková, G maď. Komárno; Uhlár, G Topolčany; Vingrálek, G Jiřího z Poděbrad Olomouc; Vodáček, G Bílovec; Vopička, G Praha 3, Sladkovského; Werner, G Mosonmagyaróvár (MLR); Weszelowsky, G Tata (MLR); Zenkner, G Michalovce; Zítek, G Milevsko.

Bakos, Pupkaiová, Szalaiová, SPŠ maď. Komárno; Bartalos, Bréda, SPŠ maď. Komárno; Beka, Kósa, SPŠ maď. Komárno; Bédi, Nagy, Zalaba, SPŠ maď. Komárno; Biczó, Hild, G Győr (MLR); Bognár, Molnár, Takács, SPŠ maď. Komárno; Cseri, Tóth, Nové Zámky; Csernázansky, Gacsál, Lisz, SPŠ maď. Komárno; Duducz, Gultás, Pócs, SPŠ maď. Komárno; Eder, Nemeth, Tóth, SPŠ maď. Komárno; Farkas, József Leboz, Ledeczky, SPŠ maď. Komárno; Farkas György, Reichel, Varga, SPŠ maď. Komárno; Földes, Kovács, SPŠ maď. Komárno; Gödöneová, Kunčárová, Vargaová, SPŠ maď. Komárno; Gyuricsek, Krascenits, SPŠ maď. Komárno; Horváth, Lörincz, Mészáros, SPŠ maď. Komárno; Koczka, Berecki, Viola, SPŠ maď. Komárno; Košulič, Scholaster, G Bílovec; Lancz, Szacay, Varga, SPŠ maď. Komárno; Lengyel, Darnay, Szeit, SPŠ maď. Komárno; Lukács Attila, Lukács Zsolt, Taresi, SPŠ maď. Komárno; Marczel, Sármány, Zsapka, SPŠ maď. Komárno; Ruppert, Másilko, Truhlář, G Tábor; Szabó, Almási, Polgór, SPŠ maď. Komárno; Šlészka, Pavelek, G Bílovec; Konkolyi, Kukolyi, Melisek, SPŠ maď. Komárno.

Řešitelé úloh z fyziky:

Anýžová, G Bílovec; Habala, G Bílovec; Kolník, G Nové Mesto nad Váhom; Mazánek, G Bílovec; Šlészka, G Bílovec; Vodáček, G Bílovec.

Leščenko, Polách, G J. Hronca, Bratislava; Hric, Pohranc, G Banská Bystrica, ul. Tajovského; Šlészka, Pavelek, G Bílovec.

Řešitelé úloh z konstrukční geometrie:

Lozsi, G maď. Galanta; Peňázová, G Brno, tř. kpt. Jaroše; Vodáček, G Bílovec.

Csondal, Csaba, G maď. Galanta; Šlészka, Pavelek, G Bílovec.

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních děkuje všem řešitelům za řešení úloh, vítězům blahopřeje a zašle jim z prostředků Státního pedagogického nakladatelství věcné odměny.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Najděte všechna prvočísla p z intervalu $(300, 400)$, tj. $300 < p < 400$, která mají tyto dvě vlastnosti: a) číslo $p + 1$ je dělitelné šesti, b) číslo $p - 1$ je dělitelné čtyřmi.

Stanislav Horák

(Došlo 72 řešení.)

Řešila Hana Peňazová, 3. B G kapt. Jaroše v Brně:

Podle textu úlohy má platit

$$\begin{aligned} p + 1 &= 6m, \\ p - 1 &= 4n, \end{aligned} \quad (1)$$

kde m, n jsou přirozená čísla. O nich platí

$$300 < 6m - 1 < 400$$

a z toho po kratší úpravě

$$50 < m < 67 \quad (2)$$

Podobně pro číslo n odvodíme

$$74 < n < 100$$

Odečtením rovnic (1) máme

$$\begin{aligned} 6m - 4n &= 2, \\ 3m - 2n &= 1 \end{aligned}$$

Z toho

$$n = \frac{3m - 1}{2} = m + \frac{m - 1}{2}$$

Poněvadž n je přirozené číslo, musí být

$$m = 2u + 1 \text{ a potom } n = 3u + 1$$

Pro prvočísla p pak z (1) dostáváme

$$p = 12u + 5, \quad u \in \mathbb{N}$$

Z (2) vyplývá

$$50 < 2u + 1 < 67$$

a po úpravě

$$24 < u < 33$$

Zakončíme tabulkou

u	25	26	27	28	29	30	31	32	33
p	305	317	329	341	353	365	377	389	401

Jediná prvočísla v této tabulce jsou 317, 353, 389 a ta jsou řešením naší úlohy.

Jiné řešení zaslal Pavel Vodáček, 3. D G M. Koperníka v Bílovci.

V intervalu 300; 400 existují tato prvočísla (viz tabulky MFCH)

$$307, 311, 313, \quad , 389, 397.$$

Množina čísel o 1 větších je

$$\{308, 312, 314, \quad , 390, 398\}$$

Z nich jsou šesti dělitelná čísla

312, 318, 348, 354, 360, 384, 390.

Těmto číslům odpovídají čísla, která odpovídají číslům $p - 1$. Jsou to tato

310, 316, 346, 352, 358, 382, 388.

Mezi nimi jsou čtyřmi dělitelná následující

316, 352, 388.

Jim odpovídají prvočísla

317, 351, 387,

což je řešení předložené úlohy.

2. Najděte všechny konvexní tečnové čtyřúhelníky, jejichž úhlopříčky jsou navzájem kolmé. — Tečnový čtyřúhelník je ten, jehož strany leží na tečnách téže kružnice.

Stanislav Horák

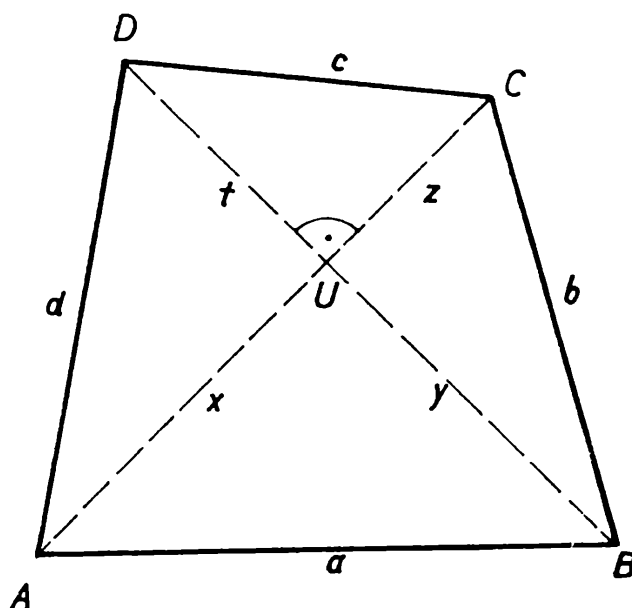
(Došlo 36 řešení.)

Řešil Robert Babilon, 3D G v Bínovci.

Čtyřúhelník je tečnový právě tehdy, když o délkách jeho stran platí (obr. 1)

$$a + c = b + d \quad (1)$$

To budeme považovat za známé.



Obr. 1

Nechť úhlopříčky jsou vzájemně kolmé (jejich průsečík je U); označme

$$|AU| = x, \quad |BU| = y, \quad |CU| = z, \quad |DU| = t$$

Potom platí

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2, & b^2 &= y^2 + z^2, \\ c^2 &= z^2 + t^2, & d^2 &= t^2 + x^2 \end{aligned}$$

Z této soustavy rovnic vyplývá

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \quad (2)$$

Rovnici (1) umocníme na druhou:

$$a^2 + c^2 + 2ac = b^2 + d^2 + 2bd \quad (3)$$

Operace s rovnicemi budeme na levé straně zapisovat symbolicky.

$$(3) - (2) \quad .2ac = 2bd \quad (4)$$

$$(2) - (4) \quad (a - c)^2 = (b - d)^2$$

$$|a - c| = |b - d|$$

K tomu připíšeme rovnici (1)

$$a + c = b + d$$

Řešením obou posledních dvou rovnic dostaneme

$$a = b, c = d \text{ (popř. } a = d, b = c \text{)}.$$

Obě rovnice platí současně. Je nutné rozlišit dva případy.

1. $a = b, a \neq c$. deltoid.

2. $a = b, a = c$. kosočtverec, čtverec.

Výsledek: Deltoid, kosočtverec, čtverec jsou jediné tečnové čtyřúhelníky vyhovující úloze.

Poznámka. Ve třetí úloze viz článek dr. Komana na str. 51.

NAŠE SOUTĚŽ; ročník 1986-87

Redakce Rozhledů spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze opět vypisuje soutěž o ceny v řešení úloh z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Nyní otiskujeme první část úloh z matematiky a první část úloh z fyziky; další úlohy otiskneme ve třetím a ve čtvrtém čísle Rozhledů. Soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, avšak maximálně trojčlenné. Při případném dobrém umístění má však kolektiv nárok na jedinou cenu.

Obecné pokyny řešitelům

Řešení každé úlohy pište česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Na každém listu nahoře vlevo *uveďte čitelně své celé jméno, třídu i školu, kde studujete* a připojte také svou bytovou adresu i se směrovacím číslem. Každý kolektiv uveďte tyto údaje pro svého každého člena. Příjmení pište velmi čitelně, nejlépe hůlkovým písmem.

Nejdříve napište číslo a text úlohy, potom její řešení. Pište stručně, ale srozumitelně a čitelně; obrázky, pokud je k řešení připojujete, narýsujte pečlivě a čitelně je popište.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Nechť v trojúhelníku ABC je $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$,

$\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle CBA|$, $\gamma = |\sphericalangle ACB|$, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Ve vrcholu A (resp. B , C) je ke straně AB (resp. BC , CA) sestrojena kolmice, která protíná kružnici k ještě v bodu A' (resp. B' , C'); budiž $a' = |AA'|$, $b' = |BB'|$, $c' = |CC'|$. Dokažte, že platí:

a) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = \frac{abc}{a'b'c'}$;

b) $a'b'c' = 4rs^2$

Stanislav Horák

2. V libovolném ostroúhlém trojúhelníku ABC platí při obvyklém označení jeho prvků tato nerovnost:

$$\frac{v_a}{a} + \frac{v_b}{b} + \frac{v_c}{c} \leq \frac{1}{2} \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} \right)$$

Rovnost nastane, právě když je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte.

Stanislav Horák

3. Zjistěte, pro která přirozená čísla n je každé n -ciferné číslo zapsané (v desítkové soustavě) pouze pomocí číslic 1 a 8 dělitelné číslem 7. Najděte všechna taková n .

Milan Koman

Fyzika

1. Rychlost střely se může změřit balistickým kyvadlem (kyvadlem s dlouhou dobou kyvu). Metoda spočívá v tom, že střelu, jejíž rychlost chceme změřit, vstřelíme do tělesa kyvadla (bedna s pískem, dřevěný blok). Těleso kyvadla volíme takové, aby v něm střela uvízla a délku závěsu takovou, aby doba kyvu kyvadla byla podstatně delší než doba pohybu střely v tělese kyvadla. — Vypočítejte rychlost střely, pokládáte-li kyvadlo za matematické kyvadlo délky 1 a znáte-li hmotnost M kyvadla, hmotnost m střely a maximální úhel α_0 vychýlení kyvadla po vniknutí střely do tělesa kyvadla. Před vniknutím střely do tělesa kyvadla bylo toto kyvadlo v rovnovážné poloze a v klidu.

Eva Havránková

2. Hmotný bod o hmotnosti $m = 2,4$ kg se může bez tření pohybovat podél osy x . V bodě $x = 0$ byl hmotný bod v klidu. Působením síly $F = (2 + 6x)$ N (x je v metrech) byl uveden do pohybu. Vypočítejte rychlost v_6 a zrychlení a_6 hmotného bodu v místě $x = 6$ m.

Eva Havránková

Řešení všech uvedených úloh zašlete nejpozději *do 15. ledna 1987* na adresu redakce Rozhledů, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla Rozhledů.

Celostátní kolo kategorie A 35. ročníku matematické olympiády

RNDr. LEO BOČEK, CSc., MFF UK Praha

Již v 10. čísle minulého ročníku jsme přinesli seznam vítězů 35. ročníku matematické olympiády. Dnes vás chceme informovat podrobněji. Byl to první ročník MO, v němž se konala dvě celostátní kola MO, v květnu se ještě konalo celostátní kolo kategorie P = programování. Celostátní kolo kat. A se konalo ve dnech 24.—27. dubna 1986 v Pelhřimově. Soutěžili v něm 82 žáci, nejúspěšnější řešitelé krajského kola. Ve dvou soutěžních dnech se potýkali s touto šesticí náročných úloh:

1. Nechť n je přirozené číslo a S množina podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ s touto vlastností: Pro každé dvě množiny $M_1 \in S$, $M_2 \in S$ má množina $(M_1 \cup M_2) - (M_1 \cap M_2)$ sudý počet prvků. Určete největší možný počet prvků množiny S .
2. Nechť $m \geq n \geq 3$ jsou přirozená čísla. Je dán mnohočlen p stupně m s celočíselnými koeficienty takový, že $p(a_1) = p(a_2) = \dots = p(a_n) = 1$ pro n různých celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dokažte, že p nemá žádný celočíselný kořen.
3. Předpokládejme, že máme nekonečně mnoho stejných stavebnicových dílů složených ze sedmi krychlí. Každý díl dostaneme tak, že ke každé stěně krychle přilepíme krychli stejně velkou. Dokažte, že je možno těmito díly vyplnit beze zbytku celý prostor.
4. V rovině je dána omezená konvexní množina A a tři navzájem disjunktní polopřímky s počátky v A . Doplnkem sjednocení těchto čtyř útvarů jsou tři navzájem disjunktní oblasti. Nechť množiny B a C jsou konvexní a disjunktní se všemi třemi polopřímkami, přičemž každá z množin B, C má neprázdný průnik s každou z uvedených tří oblastí. Dokažte, že množiny B a C mají neprázdný průnik.
5. Nechť funkce f zobrazuje množinu N všech přirozených čísel do množiny N tak, že je $f(1) = 1$ a pro každé $n \in N$ platí
$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) + 2$$
Dokažte, že pro každé $n \in N$ existuje $m \in N$ takové, že
$$f(n) \cdot f(n+1) = f(m)$$

6. Nechť A je taková množina celých kladných čísel, že pro každé dva její různé prvky x, y platí nerovnost

$$|x - y| \geq \frac{xy}{25}.$$

Dokažte, že množina A obsahuje nejvýše 9 prvků. Rozhodněte rovněž, zda taková devítiprvková množina existuje.

Celkem pět žáků dosáhlo plný počet bodů, byli to:

David Bednárek, 4. roč. gymnázia W. Piecka, Praha
Petr Hájek, 4. roč. gymnázia W. Piecka, Praha
Vladimír Kordula, 4. roč. gymnázia M. Koperníka, Bílovec
Adam Obdržálek, 4. roč. gymnázia W. Piecka, Praha
Petr Šleich, 4. roč. gymnázia Děčín.

Ještě dalších 14 žáků se stalo podle organizačního řádu MO vítězi 35. ročníku MO:

- 6.—7. Martin Heisler, 4. roč. G W. Piecka, Praha
Vladan Majerech, 3. roč. G Pardubice
8.—9. Anton Belan, 3. roč. G A. Markuša, Bratislava
Roman Soták, 3. roč. G Košice, Šmeralova
10.—11. Radek Adamec, 4. roč. G Kroměříž
Robert Babilon, 3. roč. G M. Koperníka, Bílovec
12. Petr Fencl, 3. roč. G Pardubice
13. Petr Čížek, 1. roč. G W. Piecka, Praha
14.—16. Jana Ježková, 3. roč. G Hradec Králové, Šimkova
Ivan Polách, 4. roč. G J. Hronca, Bratislava
Marcel Polakovič, 3. roč. G A. Markuša, Bratislava
17.—19. Tibor Bartoš, 2. roč. G A. Markuša, Bratislava
Petr Habala, 3. roč. G M. Koperníka, Bílovec
Peter Klein, 3. roč., G A. Markuša, Bratislava

Na dalších místech se mezi úspěšnými řešiteli celostátního kola umístili:

- 20.—24. Andrej Doboš, 1. roč. G A. Markuša, Bratislava
Marián Lukáč, 3. roč. G Bánovce n. B.
Dominik Munzar, 4. roč., G Brno, tř. kpt. Jaroše
Alexander Szabari, 4. roč. G Košice, Šmeralova
Tomáš Trégl, 3. roč. G W. Piecka, Praha
25.—26. Jozef Čierný, 3. roč., G Žilina, V. Okružná
Libor Skříčka, 4. roč. G Brno, tř. kpt. Jaroše
27.—29. Miroslav Bedlek, 4. roč. G A. Markuša, Bratislava
Pavol Gvozďjak, 2. roč. G A. Markuša, Bratislava
Vladimír Potisk, 4. roč. G J. Hronca, Bratislava
30.—32. Igor Bilák, 4. roč. G Prešov, Konštantínova

- František Klein, 3. roč. G Brno, Koněvova
 Milan Kubala, 4. roč. G Žilina, V Okružná
 33.—37. Martin Blatný, 4. roč. G M. Koperníka, Bílovec
 Ján Budinský, 3. roč. G A. Markuša, Bratislava
 Petr Fuchs, 4. roč. G Brno, tř. kpt. Jaroše
 Michal Hrabák, 4. roč. G M. Koperníka, Bílovec
 Ilja Martišovitš, 1. roč. G J. Hronca, Bratislava
 38. Dušan Hanes, 3. roč. G Prievdza
 39. Petr Krákora, 2. roč. G Trutnov
 40.—42. Jaroslav Hora, 3. roč. G Brno, tř. kpt. Jaroše
 Pavol Kolník, 3. roč. G. Nové Mesto n. V
 Miroslav Laššák, 3. roč. G Žilina, V Okružná
 43.—46. Karol Hrivnák, 2. roč. G A. Markuša, Bratislava
 Stanislav Januschke, 1. roč. G. J. Hronca, Bratislava
 Igor Melicherčík, 4. roč. G Banská Bystrica, Tajovského
 Vladimír Veselý, 3. roč. G J. Hronca, Bratislava
 47.—48. Rudolf Burcl, 3. roč. G Trnava
 Stanislav Meduna, 4. roč. G J. Hronca Bratislava

Žáci, kteří nejsou z tříd se zaměřením na matematiku, se umístili v pořadí:

1. Petr Šleich, Děčín
2. Vladan Majerech, Pardubice
3. Radek Adamec, Kroměříž
4. Petr Fencl, Pardubice
- 5.— 6. Jana Ježková, Hradec Králové, Šimkova
 Ivan Polách, G J. Hronca, Bratislava
- 7.— 8. Marián Lukáč, Bánovce n. B.
 Dominik Munzar, Brno, tř. kpt. Jaroše
9. Libor Skříčka, Brno, tř. kpt. Jaroše.
10. Vladimír Potisk, G J. Hronca, Bratislava
- 11.—12. Igor Bilák, Prešov, Konštantínova
 František Klein, Brno, Koněvova
- 13.—14. Petr Fuchs, Brno, tř. kpt. Jaroše
 Ilja Martišovitš, G J. Hronca, Bratislava
15. Dušan Hanes, Prievdza
16. Petr Krákora, Trutnov
- 17.—18. Jaroslav Hora, Brno, tř. kpt. Jaroše
 Pavol Kolník, Nové Mesto n. V
- 19.—21. Stanislav Januschke, G J. Hronca, Bratislava
 Igor Melicherčík, Banská Bystrica, Tajovského
 Vladimír Veselý, G J. Hronca, Bratislava
- 22.—23. Rudolf Burcl, Trnava
 Stanislava Meduna, G J. Hronca, Bratislava

Příprava celostátního kola MO, jeho kulturněspolečenského programu si vyžádalo mnoho práce celé řady obětavých organizátorů, z nichž bychom chtěli jmenovat aspoň několik. Byli to především tajemník OV KSČ v Pelhřimově s. *František Ježek*, ředitel pelhřimovského gymnázia s. *Stanislav Makovec*, profesor téže školy *Ladislav Zrzavý*, pracovník KPÚ v Českých Budějovicích s. *Kamil Flachs* a mnoho dalších. Dík patří i předsedkyni KV MO doc. dr. ing. *Ladě Vaňatové* a dalším pracovníkům Pedagogické fakulty v Českých Budějovicích.

Kalendár M-F: október 1986

2. X. 1791 sa v Besoule narodil *Alexis Thérèse Petit*, francúzsky fyzik. Určoval metódy tepelnej rozťažnosti a merného tepla tuhých telies.
5. X. 1781 sa v Prahe narodil *Bernard Bolzano*, český matematik, logik a filozof. Formuloval niektoré základné pojmy matematickej analýzy, logiky. Zaoberal sa vlastnosťami nekonečných množín.
6. X. 1831 sa v Brunswicku narodil *Richard Dedekind*, nemecký matematik. Študoval problematiku iracionálnych čísel, položil základy modernej algebry.
10. X. 1731 sa v Nice narodil *Henry Cavendish*, anglický fyzik a chemik. Skúmal hlavne plyny, v roku 1798 určil hodnotu gravitačnej konštanty.
16. X. 1966 zomrel *Kiril Dmitrievič Sinelnikov*, sovietsky experimentálny fyzik. Pracoval v oblasti jadrovej fyziky, urýchlovačov, fyziky plazmy a problémoch termojadrovej syntézy.
18. X. 1931 vo West Orange zomrel *Thomas Alva Edison*, americký vynálezca. So spolupracovníkmi získal okolo 1300 patentov. Napr. fonograf, žiarovka, písací stroj, mikrofón, elektrické dynamo, poistka, kinematograf.
18. X. 1871 zomrel *Charles Babbage*, anglický matematik. V roku 1833 vypracoval projekt analytického stroja — prototyp samočinného počítača.
20. X. 1891 sa v Manchestri narodil *James Chadwick*, anglický fyzik. Skúmal prírodnú radioaktivitu, pracoval v oblasti atomového jadra. Za objav neutrónu získal v roku 1935 Nobelovu cenu.
21. X. 1881 zomrel *Heinrich Eduard Heine*, nemecký matematik. Zaoberal sa matematickou fyzikou, diferenciálnymi rovnicami a teóriou funkcií.
22. X. 1881 sa v Bloomingtone narodil *Clinton Joseph Davisson*, americký fyzik. Skúmal rozptyl elektrónov, študoval tepelné žiarenie, elektrónovú optiku. Za objav ohybu elektrónov na kryštáloch získal spolu s *G. F. Thomsonom* v roku 1937 Nobelovu cenu za fyziku.

24. X. 1601 zomrel v Prahe *Tycho Brahe*, dánsky astronóm. Spresnil pozorovacie metódy, vytvoril model slnečnej sústavy — Slnko i s planétami, okrem Zeme, obiehajú okolo Zeme.
24. X. 1906 sa v Petrohrade narodil *Alexander Osipovič Gelfond*, sovietsky matematik. Zaoberal sa teóriou čísel, teóriou funkcií komplexnej premennej.
25. X. 1811 sa v Bourg-la-Reine narodil *Evariste Galois*, francúzsky matematik. Vytvoril celkovú koncepciu teórie grúp, položil základy súčasnej algebry. Zahynul v súboji.
30. X. 1626 zomrel *Willebrod van Royen Snell*, holandský fyzik, astronóm, geodet a matematik. Rozpracoval metódu triangulácie, objavil zákon lomu svetla.
30. X. 1906 sa v Gžatsku narodil *Andrej Nikolajevič Tichonov*, sovietsky matematik a geofyzik. Zaoberal sa matematickou fyzikou, prispel k rozvoju topológie.
31. X. 1911 sa v Čerikove narodil *Alexander Iljič Achiezer*, sovietsky teoretický fyzik. Pracoval v oblasti jadrovej fyziky, kvantovej elektrodynamiky, fyziky plazmy, magnetohydrodynamiky.

dj

Z NOVÝCH KNIH

J. Borotský, A. Kuneš:

VYNÁLEZCI DAMOKLOVA MEČE

Vydalo nakladatelství Naše vojsko, 1. vydání, Praha 1985, 368 stran, 16 stran příloh, náklad 15 000 výtisků, cena brož. výt. 25,— Kčs, edice Fakta a svědectví.

Autorům se velice čtivou a zasvěcenou formou podařilo přiblížit čtenáři problematiku výzkumu atomového jádra ve 30. a 40. letech našeho století, i když se v důsledku historických souvislostí museli několikrát vracet až do druhého desetiletí. Ukázali na složitost celého výzkumu i na jeho postupně se rodící výsledky a možnosti jejich využití, ba dokonce zneužití v podobě atomové bomby. Ukázali na zvrácené smýšlení a jednání těch, kdo byli za výbuchy atomových

bomb nad japonskými městy Hirošimou a Nagasaki zodpovědní. Jedna z postav, americký generál *Groves*, na námitku, že zahynulo mnoho Japonců, říká: „Eh, tyhle oběti mě rmoutí méně než osudy amerických vojáků! A důležitější než tohle všechno je, že jsme naši pumu vymysleli, zkonstruovali a přes všechny potíže i vyrobili a pomocí ní mohla Amerika ukázat, kdo jsou Američané a co dovedou.“

Kniha je rozdělena do sedmi částí, má 16 stran fotografických příloh s portréty významných fyziků a dalších postav, které v ději vystupují, jakož i snímek trosek Hirošimy a atomového hříbu nad Nagasaki. V závěru jsou připojeny profily 65 významných fyziků

a doplňky a vysvětlivky všeho druhu.

První část, nazvaná „Osudné útěky“, pojednává o osudech *Enrica Fermiho*, který musel uprchnout z fašistické Itálie pro židovský původ své manželky, o jeho zánícení pro výzkum atomového jádra, o všech souvislostech, které vedly nejprve k první řízené štěpné řetězové reakci, ale také k vytvoření předpokladů pro výrobu atomové bomby. V této části vystupují mnozí další fyzikové, především *Niels Bohr*, a také zástupci vojenské moci i špionáže západního světa, kromě Německa.

Druhá část „Joffe a ti druzí“ popisuje na osudech *Joffeho*, *Kapicy*, *Kurčatova*, *Landaua* a dalších problematiku výzkumu atomového jádra v SSSR, který byl přerušen Velkou vlasteneckou válkou.

Třetí část „Politika kontra fyzika“ ukazuje na výsledky německých fyziků, kteří v Německu zůstali, a zároveň na snahu výsledky bádání v tomto stavu uta-

jovat tak, aby Německo nebylo schopno je využít pro své cíle.

Čtvrtá část „Voda nejen pro Joliotu“ předkládá čtenáři hrdinské akce odboje, které znemožnily využití těžké vody, která se vyráběla v Norsku, pro německý jaderný výzkum.

Pátá část „Jornada del Muerto“ popisuje zjišťování kritického množství štěpného materiálu a sestavení a vyzkoušení první atomové bomby na světě ve Spojených státech amerických.

Šestá část „Reklama s hektabombou“ popisuje okolnosti, které vedly k nesmyslnému atomovému útoku na japonská města Hirošimu a Nagasaki.

Poslední sedmá část „Výbuch na Sibiři“ ukazuje nesnadnou cestu sovětské vědy ke zlikvidování jaderného monopolu USA.

Celé dílo je prochnuto varováním před „Damoklovým mečem“ — před zneužitím jaderné energie.

Jaromír Janda

Oznámení

Dne 3. listopadu 1986 uspořádá matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy Den otevřených dveří. Pro zájemce o vysokoškolské studium matematiky, fyziky či učitelských kombinací bude připraven celodenní program.

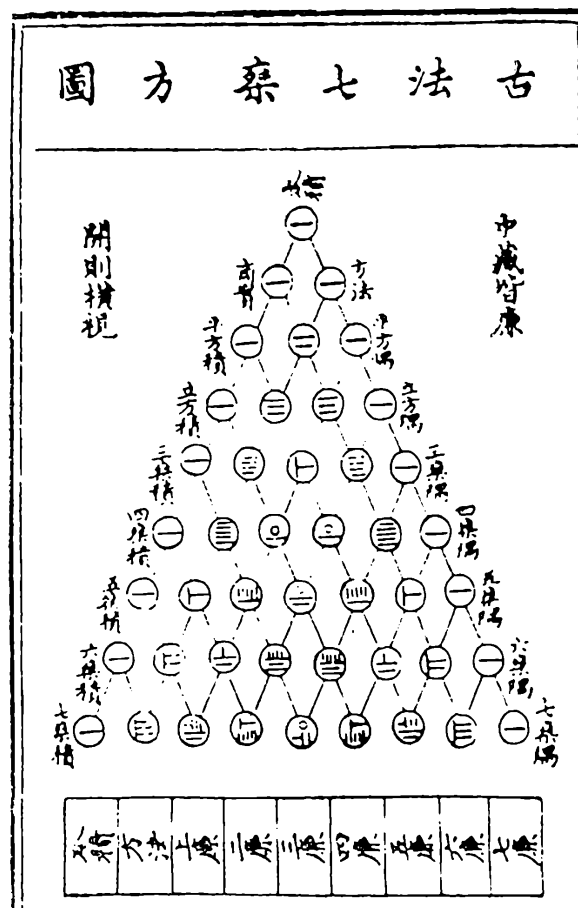
Dopolední část programu se uskuteční ve Společenském sále Paláce kultury od 9,00 hod. Zde se zájemci o studium setkají s vedením fakulty a získají základní informace o studiu na MFF UK. Odpolední program nabídne zájemcům odborné přednášky, exkurze do fyzikálních laboratoří, k velkému počítači a do mikropočítačové učebny. Program by měl uspokojit i ty nejzvědavější. V odpoledním programu bude uskutečněna i beseda vedení fakulty se středoškolskými profesory matematiky a fyziky.

Čínský předchůdce Pascalova trojúhelníku

Obrázek otištěný na této stránce vyvolává představu schématu, do kterého zapisujeme kombinační čísla. Nejde však o přepis tzv. Pascalova trojúhelníku (publikovaného v 17. století) do čínského textu, ale o stránku z čínského spisu napsaného už v r. 1303.

Protože známe čísla, která patří do kroužků v jednotlivých řádcích, můžeme se z obrázku poučit o čínském způsobu zapisování přirozených čísel. Šlo o desítkovou soustavu; znaky pro číslice 1, 2, 3, 4, 5 byly složené z vodorovných čárek, číslice 6, 7, 8, 9 pak z jedné svislé čárky (nahrazující pět vodorovných) a 1, 2, 3 či 4 k ní připojených vodorovných čárek. Čísla 10, 40, 70 jsou zapsána znakem složeným z kroužku (symbolu pro nulový počet jednotek) a z 1, 4, 7 vodorovných čárek vyjadřujících nyní počty desítek. Rovněž v dalších znacích pro dvojciferná čísla je vespod zapsán počet desítek a nad ním počet jednotek. Toto uspořádání „číslic“ nebylo však stálé, častěji byly uspořádány v řádku, v některých dobách se zapisovaly jednotky svislými čárkami, desítky vodorovnými apod. Na počítacích deskách se pracovalo s tyčkami, které byly asi 15 cm dlouhé, ze dřeva, kovu nebo slonové kosti.

Indičtí matematici znali troj-



úhelník kombinačních čísel už v 2. století před n. l., ale patrně nevěděli o jejich významu pro umocňování dvojčlenů. Islámští matematici tuto jejich roli znali a kolem r. 1000 n. l. zapsali několik různě rozsáhlých tabulek binomických koeficientů. V Evropě se tyto „trojúhelníky“ publikovaly až v 16. století; Pascalovo jméno dostaly na základě jeho teoretického „Pojednání o aritmetickém trojúhelníku“ z r. 1665.

Anna Loubalová

Čo je matematika?

Matematika je veda najprísnejšej pravdy, neochvejných zákonov v tvaroch a prírode. Jej kroky šli vždy iste a pevne vpred, nikdy naspäť.

H. Suter

Matematika je úplne slobodná vo svojom rozvoji a jej pojmy musia byť iba nerozporné a musia byť spojené s prv zavedenými pojmami prostredníctvom presných definícií.

G. Cantor

Vydáva ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednotky čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1986.

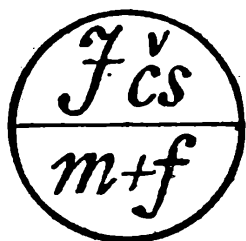
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(3)

**ROČNÍK 65, 1986/87
LISTOPAD**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný,
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, Praha, pplk. doc. dr. Ján Chra-
pan, CSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mi-
kuláš, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT
Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc.,
ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., VŠZ Praha, doc. dr.
Karol Križalkovič, CSc., PF Nitra,
prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc.,
PF Nitra, doc. dr. Josef Novák, CSc.,
UK Praha, dr. Oldřich Petránek
SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc.,
ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý,
CSc., UK Praha, ing. dr. Václav Šin-
delář, CSc., Praha, doc. dr. Martin
Šolc, CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-No-
vé Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

Jiří Mída: O vzdálenosti kódových slov	89
Ivan Fischer: Základy programování mi- kropočítačů 3	92
Václav Medek: O axonometrii	100
Jaroslav Sedlák: Neutri	104
Josef Kotyk: Ze vzpomínek	109
Jarmila Pěnčíková: Dělení obrazců	110
Vlastimil Mráz: Ovál a elipsa .	111
Emil Kašpar: Včelí roj v zimě	113
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	114
Naše soutěž – úlohy k řešení	121
Pavel Töpfer: Olympiáda pro progra- mátory	124
Ivo Volf: Celostátní kolo 26. ročníku FO	126
Emil Calda: Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v ro- ce 1986	127
Z nových knih	129
dj: Kalendár M-F	129
Vlastimil Mistrík: Reportáže z mikrosвета	131
Anna Loubalová: Čínský tabulkový zá- znam mnohočlenů . 3. str. obálky	
Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (45–48)	příloha

0 vzdálenosti kódových slov

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

V minulém ročníku Rozhledů se několikrát psalo o binárních kódech desítkových číslic. Nyní volně navážeme na články [1], [2] a [3].

Tabulky 1, 2 a 3 popisují tři binární kódy desítkových číslic. Přívlastek *binární* (tj. dvojkový) znamená, že konečné posloupnosti, na něž jsou zobrazeny desítkové číslice, jsou vytvořeny ze dvou binárních znaků 0 a 1. Tyto posloupnosti se nazývají *kódová slova*. V uvedených tabulkách má každý z kódů kódová slova s tímž počtem znaků, tedy stejné *délky*. Takové kódy se nazývají *rovnoměrné*. Příkladem nerovnoměrného kódu je *Morseův kód*.

V tabulce 1 je kód BCD, v tabulce 2 je jeden kód z třídy kódů „dva z pěti“ a v tabulce 3 je samoopravný kód, který náleží do třídy tzv. Hammingových kódů.

Uvedené kódy se na první pohled mezi sebou odlišují délkou kódových slov. To však není podstatný rozdíl, hlavně se liší možnostmi opravy chyb, které mohou vzniknout při přenosu.

U kódu BCD není možno vždy detekovat, že došlo i k pouze jedné chybě, tj. buď ke změně jednoho znaku 1 ve znak 0, anebo ke změně

Tabulka 1

č	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Tabulka 2

č	kód „dva z pěti“
0	11000
1	00011
2	00101
3	00110
4	01001
5	01010
6	01100
7	10001
8	10010
9	10100

Tabulka 3

č	samoopravný kód
0	1101000
1	0000001
2	1000010
3	0101011
4	0100100
5	1001101
6	0001110
7	1100111
8	0011000
9	1110001

jednoho znaku 0 ve znak 1. Tak tomu je, když chybou vzniklá čtveřice je opět kódovým slovem (samozřejmě pro jinou desítkovou číslici). Např. z kódového slova pro šestku, tj. ze slova 0110, mohou vzniknout jednou chybou čtveřice 1110, 0010, 0100, 0111, z nichž pouze 1110 není kódovým slovem kódu BCD.

Z každého kódového slova libovolného kódu „dva z pěti“ jednou chybou vznikne vždy pětice, která není kódovým slovem. Např. číslice tři má v tabulce 2 uvedeno kódové slovo 00110. Jednou chybou se z něho vytvoří některá z petic 10110, 01110, 00010, 00100, 00111. Ani jedna z nich není kódovým slovem v tabulce 3. O žádné z nich však nelze jednoznačně rozhodnout z jakého kódového slova vznikla. Např. pětice 10110 mohla vzniknout nejen z kódového slova číslice 3, ale i z kódových slov číslic 8 nebo 9. Jednu chybu u kódu z tabulky 2 lze tedy detekovat, nelze ji však opravit.

Samoopravné kódy, jak říká jejich název, nejen umožňují detekci chyb, ale i jejich opravu neboli korekci. Například u kódu z tabulky 3 lze opravit jednu chybu. Ukažme si to na kódovém slově číslice pět. Z tohoto slova 1001101 mohou jednou chybou vzniknout sedmice 0001101, 1101101, 1011101, 1000101, 1001001, 1001111, 1001100. Žádná z nich se však v tabulce 3 neuvádí jako kódové slovo. Dokonce každá z těchto sedmic může vzniknout jednou chybou jedině z kódového slova číslice pět. Je to způsobeno tím, že každá dvě kódová slova se liší aspoň na třech místech (tj. ve třech bitech).

V předešlých úvahách jsme zjistili, že pro detekci a korekci chyb je důležitý počet bitů, v nichž se kódová slova navzájem liší. Mějme n -bitový kód K , jehož každá dvě kódová slova se liší aspoň v d bitech, kde $d \geq 1$ je přirozené číslo. Přitom však existují dvě kódová slova, která mají odlišných právě d bitů. Potom jedna až $d - 1$ chyb vytváří z každého kódového slova n -tici, jež není kódovým slovem. Ovšem pro d chyb nemusí už toto platit. V kódu K lze tedy detekovat vždy až $d - 1$ chyb.

S opravou chyb je to trochu složitější. Jednoznačně lze vždy opravit jen počty chyb, které jsou menší než číslo $d/2$. Toto se stane názornější zavedením pojmu vzdálenosti kódových slov.

Uvažujme rovnoměrný binární kód K . *Vzdáleností* jeho kódových slov V_1 a V_2 se rozumí celkový počet bitů, v nichž se tato slova liší. Pro rozlišení od vzdálenosti známé např. z geometrie se tato vzdálenost nazývá *Hammingova*. (Stručně budeme psát H. vzdálenost.) Na příklad pro kódová slova 0110 a 1000 kódu BCD je H. vzdálenost rovna číslu tři; pro kódová slova 0100100 a 1110001 samoopravného kódu z tabulky 3 je H. vzdálenost rovna čtyřem.

Název „vzdálenost“ byl přejat z geometrie. Vzniká tedy otázka, zda pro H. vzdálenost platí vlastnosti analogické základním vlastnostem geometrické vzdálenosti.

Označme $\varrho(V_1, V_2)$ H. vzdálenost kódových slov V_1, V_2 . Pro každá dvě kódová slova V_1, V_2 rovnoměrného kódu K zřejmě platí:

$$\varrho(V_1, V_2) = \varrho(V_2, V_1) \geq 0,$$

přičemž v nerovnosti nastává rovnost, právě když $V_1 = V_2$.

Zcela samozřejmé však není tvrzení odpovídající trojúhelníkové nerovnosti. Zní:

Pro každá tři kódová slova V_1, V_2, V_3 rovnoměrného kódu K platí:

$$\varrho(V_1, V_2) + \varrho(V_2, V_3) \geq \varrho(V_1, V_3). \quad (1)$$

Tuto vlastnost dokážeme.

Nechť $V_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $V_2 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $V_3 = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ jsou libovolná kódová slova rovnoměrného kódu K . Chápeme-li znaky 0 a 1 jako čísla 0 a 1, potom postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} \varrho(V_1, V_3) &= |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + \dots + |a_n - c_n| = \\ &= |(a_1 - b_1) + (b_1 - c_1)| + |(a_2 - b_2) + (b_2 - c_2)| + \dots + \\ &+ |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq (|a_1 - b_1| + |b_1 - c_1|) + (|a_2 - b_2| + \\ &+ |b_2 - c_2|) + \dots + (|a_n - b_n| + |b_n - c_n|) = (|a_1 - b_1| + \\ &+ |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|) + (|b_1 - c_1| + |b_2 - c_2| + \dots + \\ &+ |b_n - c_n|) = \varrho(V_1, V_2) + \varrho(V_2, V_3). \end{aligned}$$

Tím je nerovnost (1) dokázána.

V teorii kódů se dále pro rovnoměrné kódy ještě definuje *minimální vzdálenost kódu*. Je-li K rovnoměrný kód, pak jeho minimální H. vzdáleností se rozumí minimum z H. vzdáleností všech dvojic kódových slov kódu K . Pro kód BCD je tato minimální H. vzdálenost rovna jedné, pro každý z kódů „dva z pěti“ je dvě a pro samoopravný kód z tabulky 3 je tři.

V našich úvahách před zavedením H. vzdálenosti kódových slov jsme hovořili o kódu K a o jistém počtu bitů d . Toto číslo d však není

Tabulka 4

č	Mezinárodní telegrafní kód		
	č. 1	č. 2	č. 3
0	0000 I	0 I I O I	I 0 0 I O I O
1	0 I I I I	I I I O I	0 0 0 I I O I
2	I 0 I I I	I I 0 0 I	0 I 0 0 I O I
3	I I O I I	I 0 0 0 0	0 I I I 0 0 0
4	0 I O I I	0 I O I O	I I 0 0 I 0 0
5	0 0 0 I I	0 0 0 0 I	I 0 0 0 I O I
6	0 I I O I	I O I O I	0 0 I O I O I
7	I O I O I	I I I 0 0	0 I I 0 0 I O
8	I I 0 0 I	0 I I 0 0	I O I 0 0 I O
9	0 I 0 0 I	0 0 0 I I	I I I 0 0 0 0

Tabulka 5

č	Kód BCD s opakováním
0	00000000000000
1	0000000000 I I I
2	000000 I I I 0 0 0
3	000000 I I I I I I
4	0 0 0 I I I 0 0 0 0 0 0
5	0 0 0 I I I 0 0 0 I I I
6	0 0 0 I I I I I I 0 0 0
7	0 0 0 I I I I I I I I I
8	I I I 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
9	I I I 0 0 0 0 0 0 I I I

nic jiného, než minimální H. vzdálenost kódu K . Pomocí této vzdálenosti lze tedy vyjádřit největší počet chyb, které lze vždy detekovat, případně které lze vždy korigovat.

Cvičení

1. V tabulce 4 jsou po řadě uvedena kódová slova pro desítkové číslice v mezinárodních telegrafních kódech číslo 1, 2 a 3. Kód č. 1 bývá nazýván *Baudotova abeceda*, kód č. 3 je druhem kódu „tři ze sedmi“. Určete minimální H. vzdálenost pro kódová slova desítkových číslic každého z těchto kódů a rozhodněte, kolik chyb by bylo možno vždy detekovat.
2. V tabulce 5 je dvanáctibitový kód desítkových číslic. Vznikl z kódu BCD tak, že v každém kódovém slovu kódu BCD byl každý kódový znak třikrát zopakován. Určete minimální H. vzdálenost pro kód z tab. 5 a rozhodněte, kolik chyb lze vždy detekovat a kolik jich lze vždy opravit.

Literatura

- [1] Mída J.: Čtyřbitové kódy desítkových číslic, *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 64, 1985/86, č. 2, s. 51—54
- [2] Mída J.: Kódy „dva z pěti“, *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 64, 1985/86, č. 5, s. 177—178
- [3] Mída J.: O jednom druhu samoopravných kódů, *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 64, 1985/86, č. 9, s. 353—356

Základy programování mikropočítačů

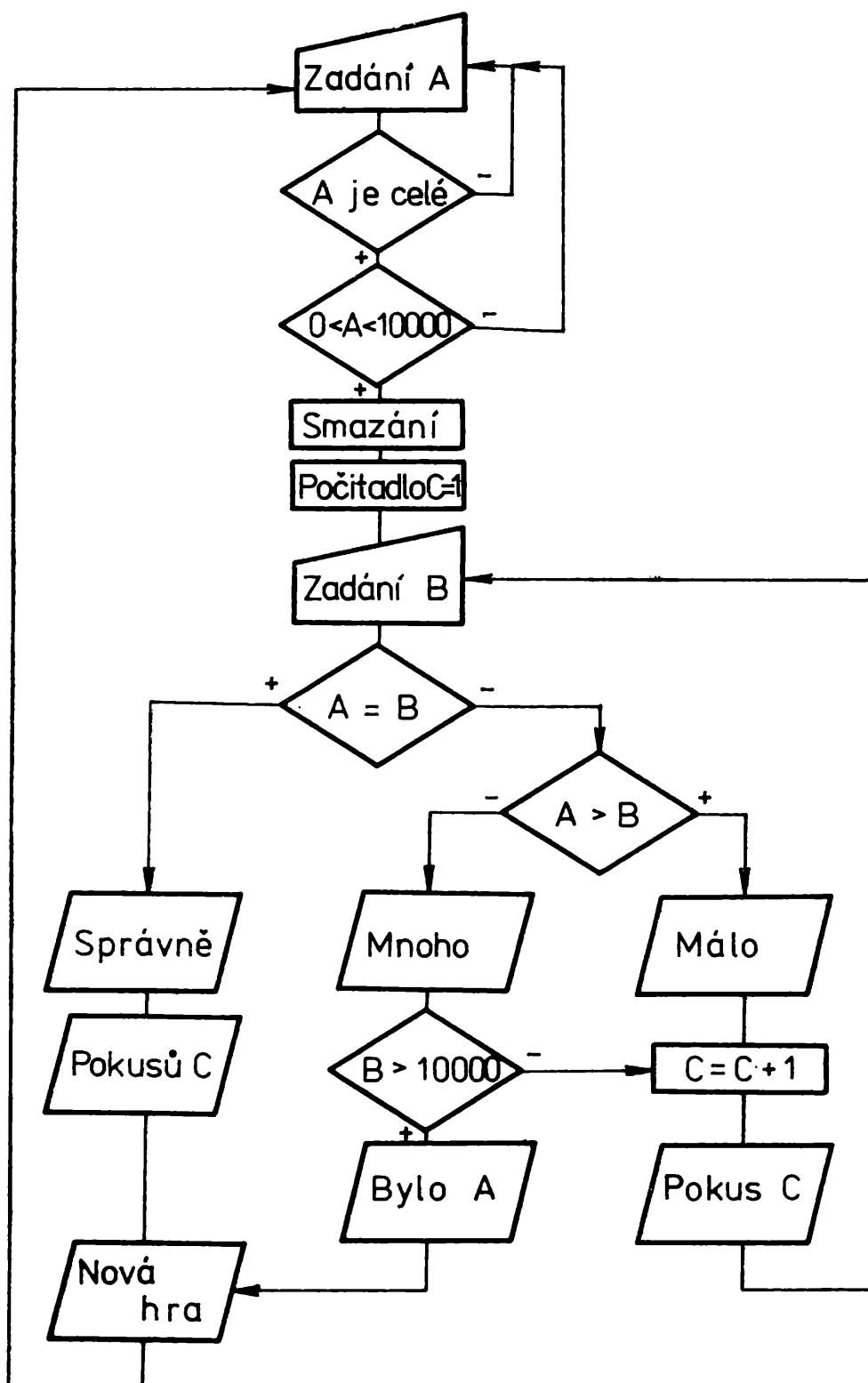
3 — struktura programů

doc. IVAN FISCHER, CSc., katedra matematiky PedF UK v Praze

V minulých dvou dílech seriálu jsme se seznámili s několika málo příkazy a matematickými funkcemi v jazyku BASIC. Proto i uváděné programy byly velice jednoduché a tím i přehledné. Po zvládnutí dalších příkazů a po prvních zkušenostech z programování přijdou na řadu i značně rozsáhlé, náročné a komplikované programy. Je tedy na čase zamyslet se i nad tvořením a nad strukturou takovýchto programů.

I tentokrát se soustředíme na jednu ukázkou. Sestavíme program hry na hádání čísel. Jeden hráč zadá číslo, druhý hádá. Počítač určuje, zda bylo uhodnuto správně, nebo se volilo číslo menší nebo větší, než bylo zadáno. Cílem je nalézt postup, který by co nejrychleji na nejmenší počet pokusů vedl k odhalení zadaného čísla.

Po prvních pokusech s programem (který byste asi již dovedli sesta-



Obr. 1

vit?), budeme mít doplňující přání na služby počítače. Měl by hlídat, jestli jsme zvolili přípustné číslo, například přirozené číslo mezi nulou a deseti tisíci. Po zkontrolování správnosti zadání by měl počítač smazat obrazovku. Pokud chceme soutěžit, pak by nám počítač měl počítat pokusy. A konečně bychom měli mít možnost se nechat poddat, napří-

klad při odhadu větším než deset tisíc by počítač napsal původně zvolené číslo a hru ukončil.

U takového programu bude už pro začátečníka potřebné si promyslet celou činnost, algoritmus, který bude program v počítači provádět. Ke znázornění struktury algoritmu se nejčastěji používají vývojové diagramy. Vstupy píšeme do lichoběžníku, výstupy do kosodélníku, výkonné příkazy do obdélníku a rozhodovací činnosti do kosočtverců, kde u vrcholů píšeme $+$ a $-$ podle dělení větví algoritmu, kdy podmínka psaná uvnitř kosočtverce je $(+)$ a kdy není $(-)$ splněna. Postup ve schématu je shora dolů a zleva doprava, jinak jsou vždy do obrázku zakreslovány šipky. Pro naši hru by schéma algoritmu vypadalo kupříkladu podle obrázku 1. Jsou v něm čtyři cykly — dva při špatném zadání, jeden při špatném odhadu a jeden uzavírající hru do trvalého cyklu. Dále ve schématu vidíme troje větvení (mimo cykly), a to podle $A = B$, $A > B$ a $B > 10\,000$. Vstupy a výstupy v jazyku BASIC známe, obrát $C = C + 1$ pro zvětšení C o jednu už také ovládáme, a tak chybí jen příkaz pro smazání obrazovky. U PMD 85 je to **GCLEAR**, u IQ 151 a u ZX Spectrum je to **CLS** a na IQ 150 bychom museli napsat **PRINT CHR\$(27)**. Nyní si podle schématu algoritmu zapíšeme program:

```
100 PRINT „ZADANI CELEHO CISLA“
110 PRINT „0 < A < 10 000“
120 INPUT A
130 IF A <> INT(A) THEN 100
140 IF A < 0 OR A > 10 000 THEN 100
150 CLS
160 LET C = 1
170 PRINT „ZADEJ ODHAD“
180 INPUT B
190 IF A = B THEN 290
200 IF A < B THEN 250
210 PRINT „MALO“
220 LET C = C + 1
230 PRINT C;“. POKUS
240 GOTO 170
250 PRINT „MNOHO“
260 IF B < 10 000 THEN 220
270 PRINT „BYLO ZADANO A = “; A
280 GOTO 310
290 PRINT „SPRAVNE“
300 PRINT „NA “; C;“. POKUS“
310 PRINT
320 PRINT „NOVA HRA“
330 PRINT „— — — — —“
340 GOTO 100
```

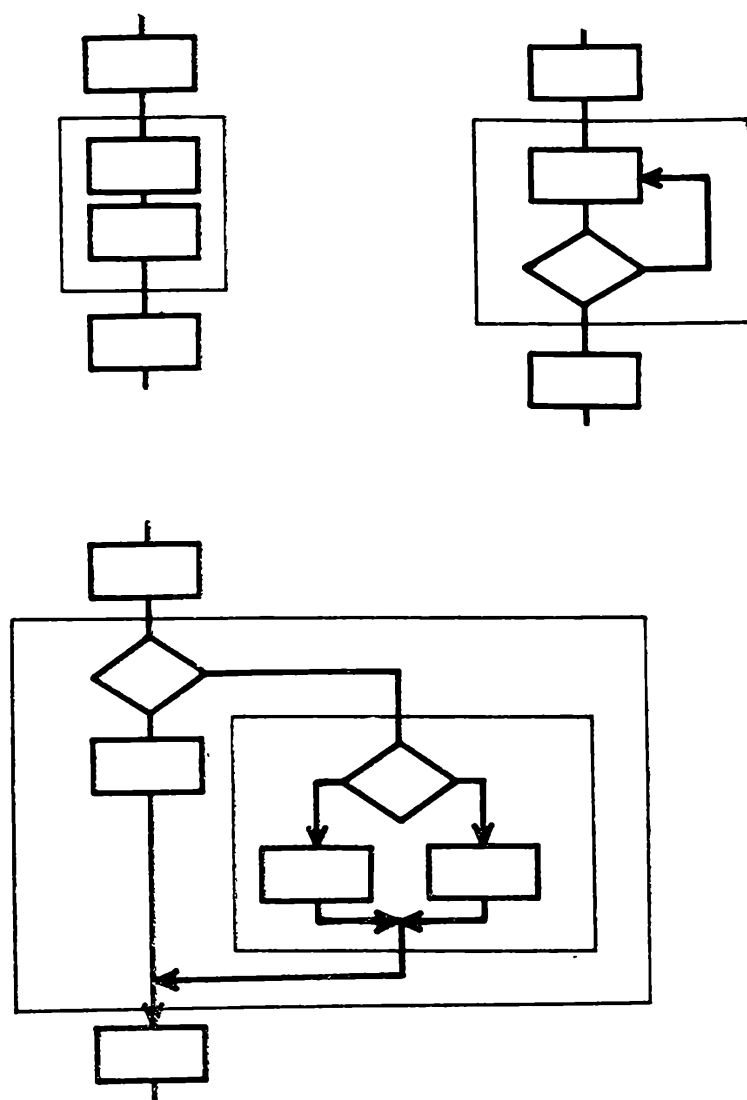
Jistě uznáte, že z vývojového diagramu algoritmu lépe pochopíme celou činnost programu, než z jeho zápisu v jazyku BASIC. Snáze se také přesvědčíme, zda daný program pracuje tak, jak jsme chtěli. Kupříkladu zjišťujeme, zda skutečně máme možnost poddat se, zda k tomu vede některá větev algoritmu (při zařazení podmínky $B > 10000$ pod **MÁLO** by takováto možnost nenastávala). Správně bychom měli prověřit postupně všechny větve algoritmu pro všechny varianty hodnot proměnných, které mohou nastat.

Tak, jako v jazyku BASIC můžeme s užitím **GOTO, IF... THEN** číslo řádku, **FOR... TO... NEXT** programy nepřehledně (a chybně), takřka nekontrolovatelně zamotat, dávají nám i vývojové diagramy stejnou možnost vytvořit naprosto nepřehledné schéma.

Na algoritmy a programy můžeme mít různé požadavky. Může nám jít o jejich rychlost (abychom mohli včas reagovat), o rozsah paměti počítače, kterou musí mít k dispozici. V každém případě však musí každý program jednou skončit (a nezamotat se tak, že nikdy nedojde k výsledku) a musí postihnout všechny případy, které by mohly nastat. Konečně musí provádět takovou činnost (či výpočty), kterou od něho požadujeme. Dnes počítače pracují stále rychleji a mají k dispozici čím dál tím větší paměť. Přitom práce programátora se při ověřování správnosti algoritmu a programu příliš nezjednodušuje. Navíc vyvstává požadavek, aby i jiný programátor mohl po čase program pochopit a upravit, doplnit podle nových požadavků. Proto před rafinovanými programovými triky se dává stále více přednost srozumitelnosti, přehlednosti a tím lepší kontrolovatelnosti. Zdůrazňují se následující zásady: Strukturovanost programu. Každý program má samozřejmě nějakou strukturu, zde však jde o požadavek přehledné, snadno pochopitelné struktury. Proti programu typu špagety, u které v programu ani na talíři nepoznáme, jakými kličkami se vlastně vine, se za vzor dává program typu náhrdelníku, kde jsou uspořádány příkazy jeden za druhým, nebo po vytvoření jednoduchých ozdob se zase seřazují postupně, jako korálky.

Modularita programu. Výhodné je si program rozdělit na jednotlivé bloky, které realizují konkrétní činnost a dají se více méně samostatně zkontrolovat a lehce vyzkoušet. Potom rozsáhlý program je složen z již ověřených modulů a navíc též modul lze jako ve stavebnici používat i později v jiných programech. Utvářejí se tak „knihovny“ vhodných programových modulů, které má programátor k dispozici.

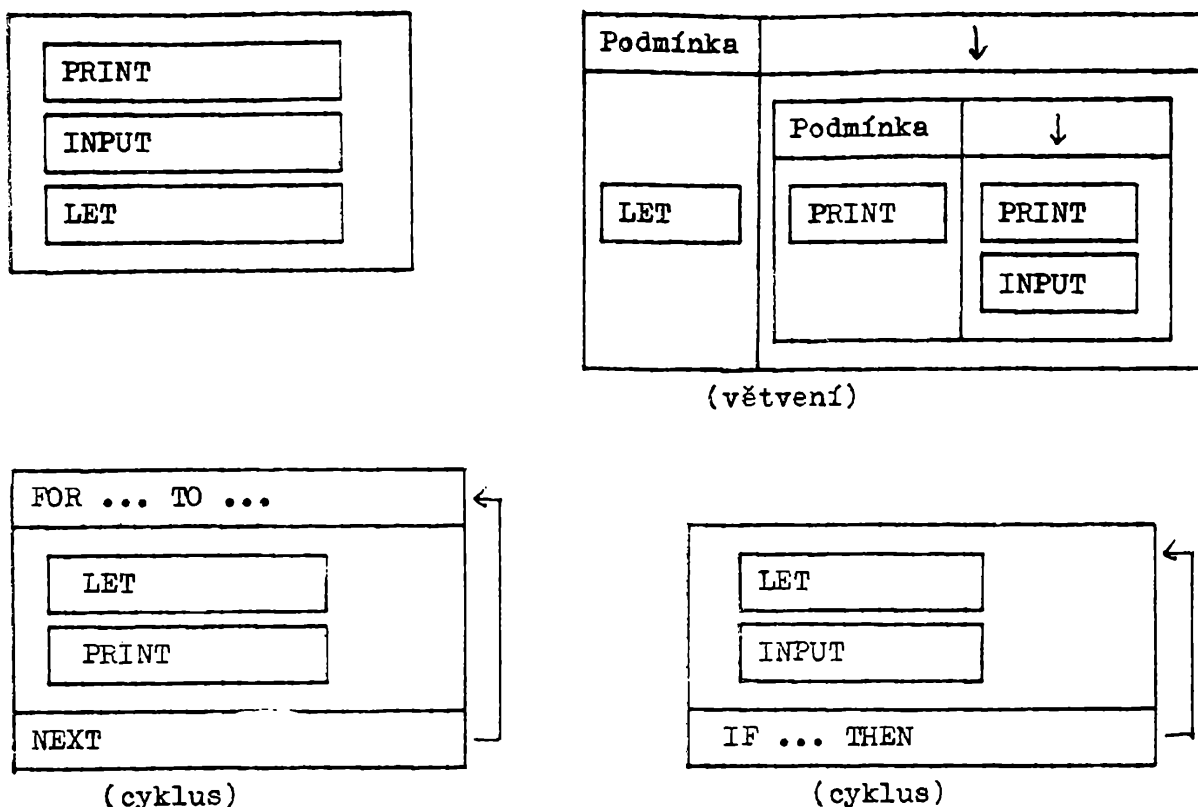
Metoda shora dolů. Můžeme sice program stavět odzcela postupně se všemi parádami a ozdobami, zlehka a elegantně, a pak zjistit, že konstrukce neunes špičku, jako věže katedrály Notre Dame. Metoda shora dolů naopak začíná železobetonovým skeletem, na který pak přivěšujeme schodiště, panely i různé ozdoby. V programování to vyžaduje začít hlavní strukturou celého programu, místo mnohých progra-



Obr. 2

mových modulů dát jen **PRINT...**, že tedy program prošel, a pak teprve doplňovat všechny programové moduly, popisy při **INPUT**, srozumitelné komentáře a grafickou úpravu při **PRINT**, doplnění různých čítačů atd. Parády tedy máme přidávat až k fungujícímu programu!

Zásada malých programů je obdobná předchozí. Požaduje na konkrétní činnosti jednoduchý a věcný program bez nadbytečných vymožeností. Proti dokonalým, univerzálním a komfortním programům, kde již programátor ztrácí přehled a možnost kontroly, je mnohdy vhodnější zvolit menší, přehlednější, jednodušší program, u kterého víme, co jak dělá, a můžeme toho vhodně využít a program případně upravit. Před parametry u univerzálního programu je někdy snazší měnit vždy programový řádek. Některá ošetření vstupů (viz řádky 130, 140 i třeba 260 až 280) jsou vlastně zbytečná a stačí je kontrolovat „ručně“ při vkládání dat do počítače. U mikropočítačů je navíc vložení krátkého programu rychlejší a přináší méně technických poruch než dokonalý rozsáhlý dlouhý program.

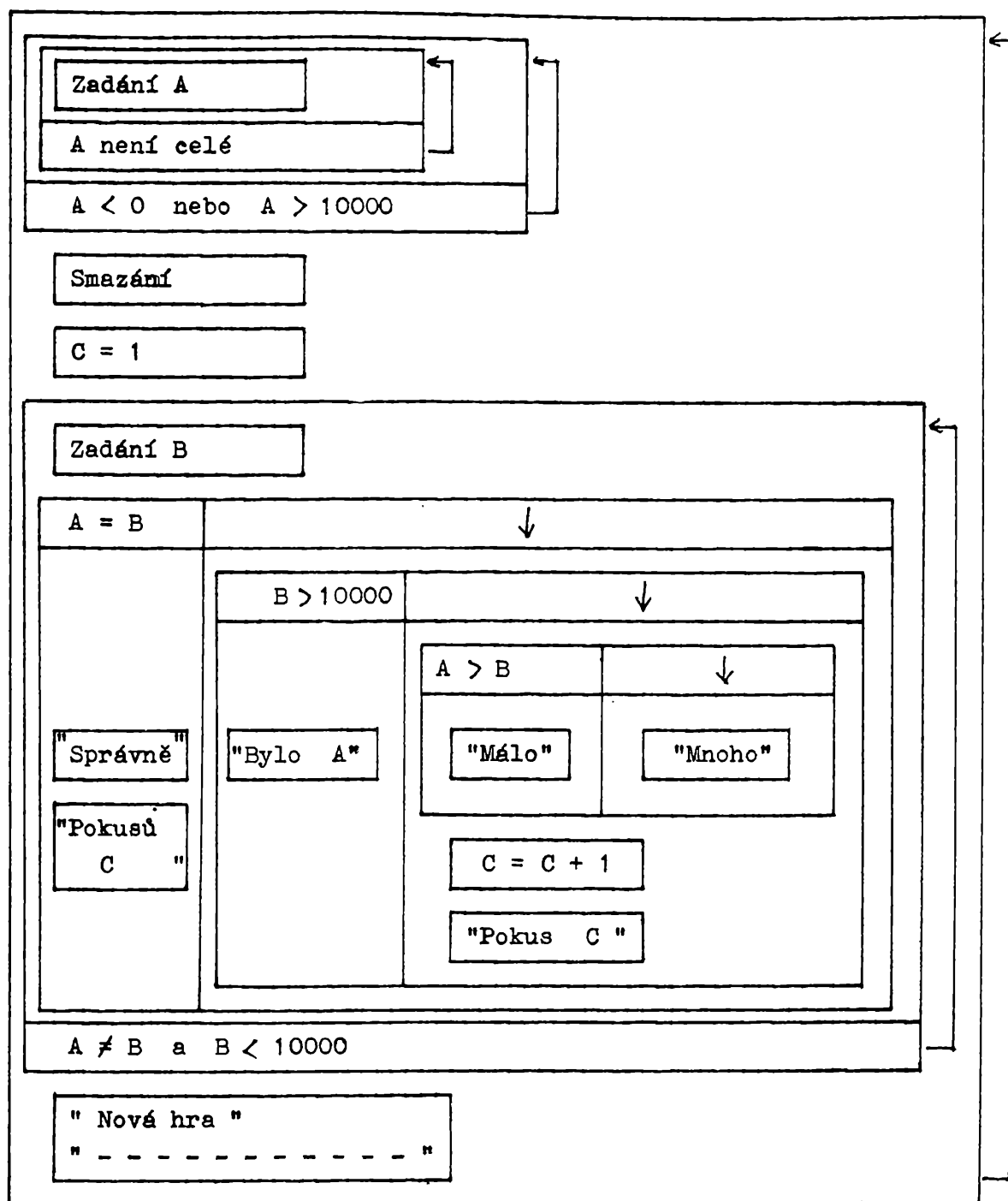


Obr. 3

Největší pozornost se věnuje strukturovanému programování. Vyžaduje totiž sebekázeň; kvůli pozdější kontrole a pochopitelnosti pro další programátory (a učitele programování!) se musíme vzdát řady lákavých a zdánlivě vtipných a možných řešení programu. Ve strukturovaném programování se připouští jen moduly jeden za druhým nebo jedny uvnitř druhých. Pokud je v programu cyklus, pak má být uvnitř jednoho modulu. Je-li v programu větvení, potom má rovněž být jen uvnitř modulu. Každý modul programu tak má jen jeden vstup a jeden výstup. Tím se nám program nerozbihá zbytečně do šíře a vždy se nám opět sbíhá do společné cesty. Tyto přípustné varianty nám s využitím vývojových diagramů ukazuje obrázek 2.

Pro výuku programátorů vznikl jazyk PASCAL, který mimo jiné výhody neumožňuje (takřka) napsat program jinak, než strukturovaně. (Každá rozumná zásada má své meze uplatňování — proto i v PASCALu se připouští příkaz **GOTO** — neumí-li si programátor poradit jinak, nechť ho použije.) V jazyku BASIC rovněž můžeme programovat podle strukturovaně vytvořených algoritmů a **IF...THEN** číslo řádku a **GOTO** užívat jen k uzavíráním a přechodům mezi moduly programu.

Tak jako PASCAL umožňuje programovat jen strukturovaně, tak i při grafickém znázorňování algoritmů se hledají prostředky, dávající možnost zakreslit jen algoritmy vyhovující zásadám strukturovaného



Obr. 4

programování. Vedle různých strukturogramů se nejvíce osvědčují kopenogramy — pro děti navíc kreslené barevně*). Jednotlivé příkazy a moduly se kreslí do obdélníků pod sebe, do sebe, vedle sebe. Jestliže šipky vývojového diagramu lze až neuvěřitelně proplést a pomotat,

*) Kopenogramy u nás nejvíce propaguje ing. R. Pecinovský, CSc., na stránkách Vědy a techniky mládeži. I na jiných místech je čerpáno v tomto článku z jeho námětů.

pak s takovýmito obdélníky to udělat nelze, což nás rozumně „omezuje“ a nutí programovat strukturovaně.

Na obrázku 3 jsou ukázky kopenogramů. Výkonné příkazy se kreslí-
vají červeně, větvení modře, cykly zeleně (podklad bývá žlutý, volané
podprogramy bílé, deklarace a bloky dat hnědé — to však v našem
seriálu poněkud předbíháme). Šipku u cyklů a později i u skoků při
větvení programů si přidáváme až zde, pro překlenutí možnosti jen
černobílého tisku. Psaní programů do obdélníků využijeme v dalších
dílech seriálu i pro znázornění struktury a modularity v jazyku BASIC.

Pochopitelně očekáváte překreslení struktury našeho programu do
kopenogramů. Je zde potíž. Program sice dobře funguje, ale není struk-
turovaný — vadí umístění podmínky $B > 10000$ a následující přeskoky
mezi větvemi programu. Po přemístění a přidání podmínek na vhodnější
místa můžeme příslušný kopenogram nakreslit podle obrázku 4.

Úlohy:

1. Upravte začáteční řádky programu tak, abychom hádali jen při-
rozená čísla od nuly do sta.

2. Upravte vývojový diagram a program v jazyku BASIC podle
kopenogramu na obrázku 4.

3. Doplněte vhodnou podmínku a tisk textu „PŘIHOŘÍVÁ“, je-li
odhad „blízko“ zadané hodnoty A .

4. Zakreslete vývojové diagramy a pokud možno i kopenogramy k pro-
gramům a úlohám z minulých dílů.

6. Metodu ze hry zkuste užít pro hledání přibližných řešení rovnic,
například rovnic vyšších řádů, jako je $3x^5 + 2x^2 + 5 = 4$. Je-li hodnota
výrazu v jednom bodě kladná a ve druhém záporná, potom takováto
rovnice vyššího řádu má mezi takovýmito body alespoň jeden kořen.
Výsledek získáme jen přibližně. Místo málo, hodně, přehořívá by nám
počítač vždy vytiskl hodnotu výrazu z levé strany této rovnice pro
právě zvolené x . Rovnici zadávejte vždy změnou příslušného progra-
mového řádku.

Řešení úloh ze str. 110

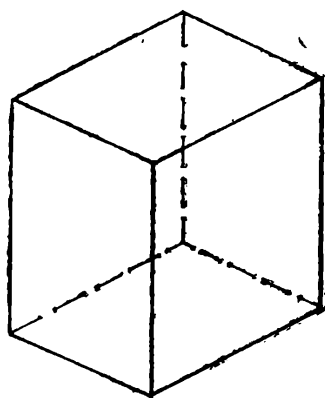
1		7	8				
		9		2			
	10				3		
		6					
					11		
		12				5	4

			6				
	12		1		7		
		3	10				
			9	4			
	5		2		11		
			8				

0 axonometrii

Prof. dr. VÁCLAV MEDEK, SVŠT Bratislava

V článku (pozri číslo 2) sme si povedali niečo o rovnobežnom premietaní a špeciálne o Mongeovej projekcii. Ukázali sme si, že Mongeova projekcia je nenázorné zobrazenie priestoru na rovinu. Je to spôsobené najmä tým, že v Mongeovej projekcii zobrazujeme objekty v najjednoduchších polohách vzhľadom na priemetne. V takejto polohe napr. pôdorysom i nárysom kvádra sú obdĺžniky. Ak ale uvedieme kváder do všeobecnej polohy vzhľadom na priemetňu, tak jeho priemet bude názornejší (obr. 1).

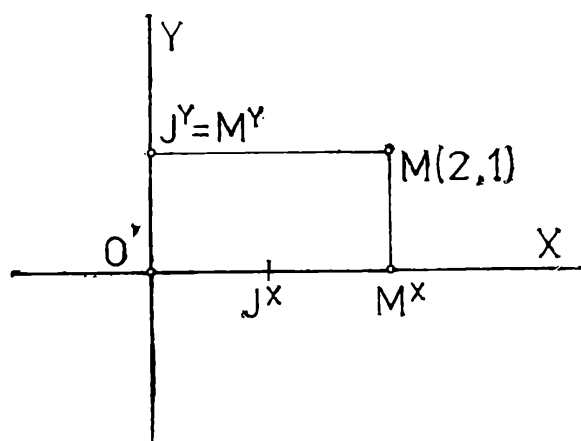
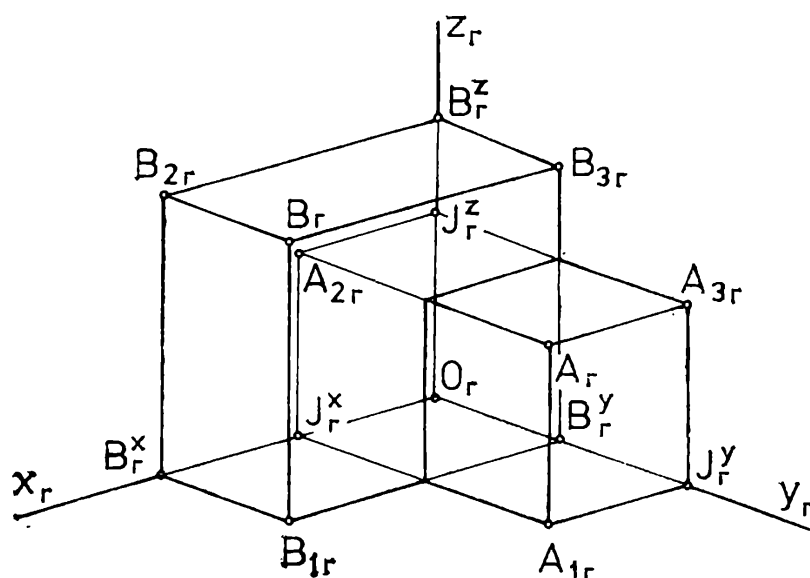


Obr. 1.

Táto cesta (uvedenie objektu do všeobecnej polohy vzhľadom na priemetňu) na zvýšenie názornosti priemetu je dosť obťažná. Preto sa využíva iná myšlienka. Veľká väčšina objektov, ktoré znázorňujeme, má tri význačné navzájom kolmé smery; spravidla jeden zo smerov je zvislý a dva zvyšné sú vodorovné (obvyčajne aj udávame pre objekty ich výšku, šírku a hĺbku). Keďže rovnobežné premietanie zachováva rovnobežnosť priamok (pozri číslo 2), stačí zobraziť zvolené tri navzájom kolmé priamky (hovoríme, že tvoria pravouhlý trojhran). Rovnobežné premietanie, pri ktorom spájame premietaný útvar s vhodným pravouhlým trojhranom, nazývame (rovnobežnou) axonometriou.

¶ Pri rovnobežnom premietaní pravouhlého trojhranu $Oxyz$ (bod O — začiatok — je spoločný bod troch navzájom kolmých priamok x, y, z — osí, alebo hrán trojhrana) nám pomáha *Pohlkeho veta* (1853): K trom rôznym priamkam x_r, y_r, z_r ležiacim v priemetni a prechádzajúcim jedným bodom O_r , môžeme v priestore vždy nájsť taký pravouhlý trojhran $Oxyz$, že bod O_r a priamky x_r, y_r, z_r sú rovnobežné priemetu začiatku O a osí x, y, z (obr. 2). Navyše ešte Pohlkeho veta hovorí, že si môžeme na priamkach x_r, y_r, z_r zvoliť ľubovoľné body J_r^x, J_r^y, J_r^z rôzne od bodu O_r

Obr. 2



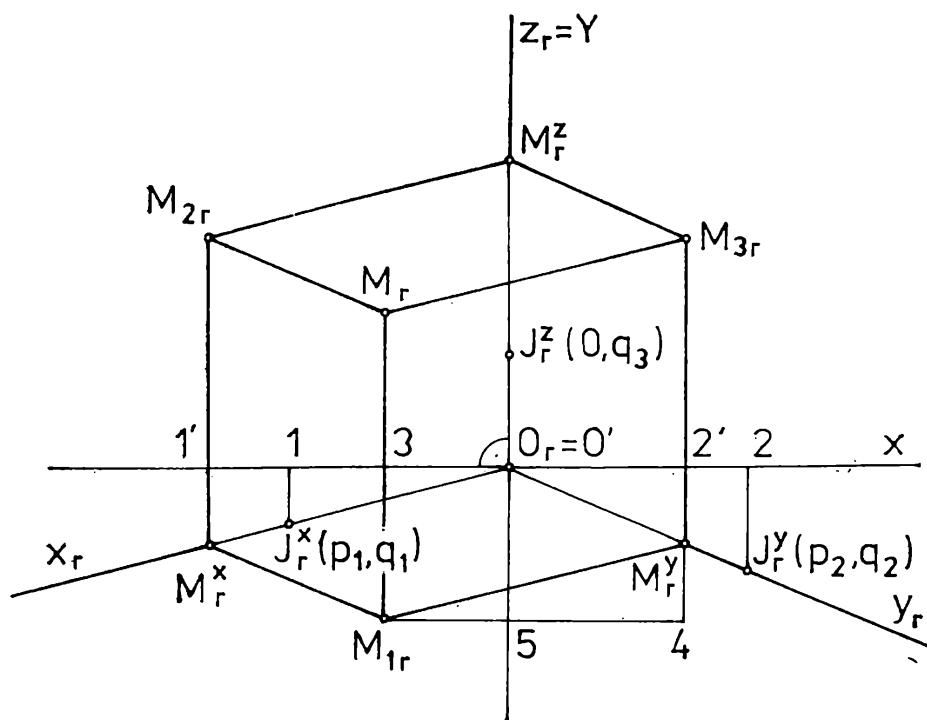
Obr. 3

a tieto body budú priemetmi jednotkových bodov J^x , J^y , J^z na osiach x , y , z .

Z Pohlkeho vety vyplýva, že napr. útvar $O_r J_r^x A_{1r} J_r^y J_r^z A_{2r} A_r A_{3r}$ je rovnobežný priemet kocky. Keďže sa jedná o rovnobežnom premietaní a takéto premietanie zachováva delenie úsečky v danom pomere (pozri č. 2), ľahko usúdime ako zobrazíme kváder, ktorého rozmery sú 2; 0,5; 1,5; je to útvar $O_r B_r^x B_{1r} B_r^y B_r^z B_{2r} B_r B_{3r}$.

Všimnite si, že polohu bodu B vzhľadom na trojhran $Oxyz$ (s jednotkovými bodmi J^x , J^y , J^z na osiach) vieme určiť pomocou usporiadanej trojice čísiel 2; 0,5; 1,5. Týmto číslam hovoríme súradnice bodu B vzhľadom na súradnicovú sústavu $OxyzJ^xJ^yJ^z$. Opísanú situáciu si môžeme priblížiť tak, že trojhran $Oxyz$ si vymodelujeme ako kút v izbe a jednotky na osiach si zvolíme vo vzdialenosti 1m od začiatku; potom ak postavíme do toho kúta skriňu, tak jej protiľahlý vrchol k vrcholu O bude mať súradnice rovnajúce sa šírke, hĺbke a výške skrine merané v metroch.

Samozrejme, ak bod neleží „vo vnútri“ trojhranu $Oxyz$ (v našom predchádzajúcom modeli — ak neleží vo vnútri izby), nemusí mať



Obr. 4

kladné súradnice. Premyslite si, kde ležia v priestore také body, ktoré majú vzhľadom na súradnicovú sústavu $Oxyz$ niektoré súradnice záporné, alebo nulové.

Podobne ako v priestore, vieme aj v rovine popísať polohu jej bodu pomocou čísiel vzhľadom na súradnicovú sústavu, ktorú označíme $O'XY$ (obr. 3). Tak napr. bod M má súradnice 2,1. Zadanie bodu pomocou jeho súradníc budeme potrebovať napr. vtedy, ak budeme chcieť umiestniť bod na obrazovke spojenej s počítačom. Počítače totiž (zatiaľ) reagujú iba na číselné údaje.

V ďalšom nám pôjde o riešenie tejto úlohy: V priestore je daná súradnicová sústava $Oxyz$ a nech bod M má v tejto súradnicovej sústave súradnice x^M, y^M, z^M (túto skutočnosť zapisujeme takto $M(x^M, y^M, z^M)$). Bod M premietneme rovnobežne do priemetne ρ do bodu M_r ; ak je v rovine ρ súradnicová sústava $O'XY$, tak chceme nájsť súradnice X^M, Y^M bodu M_r . Súradnicovú sústavu v rovine ρ zvolíme takto (obr. 4): $O' = O_r, Y = z_r$ a os X nech je kolmá na os Y .

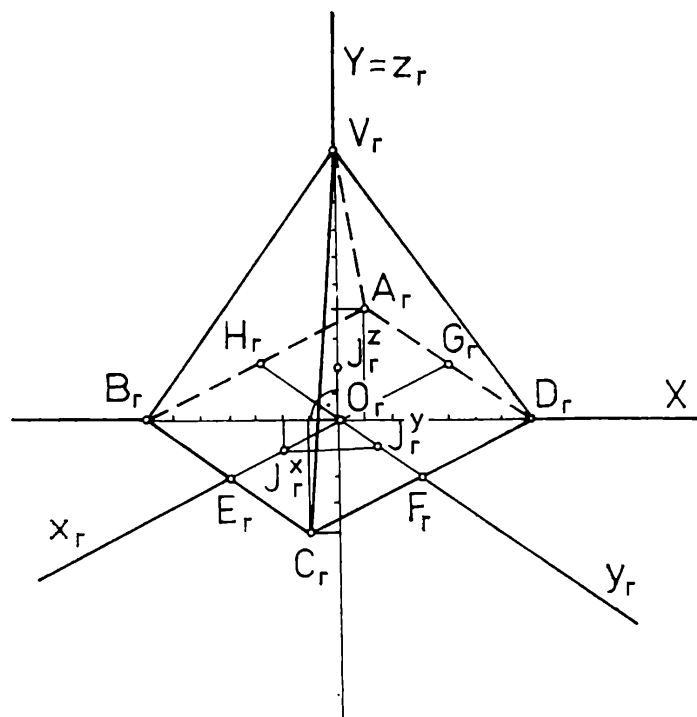
Nech v takto zvolenej súradnicovej sústave má bod J_r^x súradnice p_1, q_1 , bod J_r^y nech má súradnice p_2, q_2 a bod J_r^z nech má súradnice $0, q_3$. Podľa vety o zachovaní delenia úsečky v danom pomere platí

$$|O_r J_r^x| \quad |O_r M_r^x| = 1 \quad |x^M| \quad (1)$$

(pretože dĺžka úsečky OJ^x je 1 a dĺžka úsečky OM^x je $|x^M|$). Z podobnosti trojuholníkov $O_r J_r^x 1$ a $O_r M_r^x 1'$ vyplýva

$$|O_r J_r^x| \quad |O_r M_r^x| = |O_r 1| \quad |O_r 1'| \quad (2)$$

Z rovníc (1) a (2) môžeme vypočítať $1 \quad |x^M| = |p_1| \quad |O_r 1'|$, čiže $|O_r 1'| = |p_1 x^M|$. Podobne výpočtom zistíme, že $|O_r 2'| = |p_2 y^M|$. Označme



Obr. 5

3 priesečník spojnice $M_r M_{1r}$ s osou X : potom bod 3 má tú istú X -ovú súradnicu ako bod M_r . Keďže úsečky $O_r M_r^y$ a $M_r^x M_{1r}$ sú rovnako dlhé a číslo p_1 je záporné (body s kladnými X -ovými súradnicami sú „napravo“ od osi Y), tak

$$X^M = p_1 x^M + p_2 y^M \quad (3)$$

Z podobnosti trojuholníkov $O_r J_r^x$ a $O_r M_r^x$ vyplýva

$$|O_r J_r^x| : |O_r M_r^x| = |1 J_r^x| : |1' M_r^x| \quad (4)$$

Z rovností (1) a (4) potom dostávame $|x^M| = |q_1| |1' M_r^x|$, čiže $|1' M_r^x| = |q_1 x^M|$. Podobne vypočítame $|2' M_r^y| = |q_2 y^M|$. Zostrojme teraz bodom M_{1r} rovnobežku s osou X a označme 4 a 5 jej priesečníky so spojnicou $2' M_r^y$ a s osou Y . Potom všetky tri body 4, 5, M_{1r} majú rovnakú Y -ovú súradnicu. Zo zhodnosti trojuholníkov $O_r 1' M_r^x$ a $M_{1r} 4 M_r^y$ vyplýva $|1' M_r^x| = |M_r^y 4|$. Z toho dostávame, že Y -ová súradnica bodu M_{1r} je $q_1 x^M + q_2 y^M$. Vzhľadom na to, že úsečky $M_{1r} M_r$ a $O_r M_r^z$ sú rovnako dlhé, dostaneme Y -ovú súradnicu bodu M_r tak, že k Y -ovej súradnici bodu M_{1r} pripočítame Y -ovú súradnicu bodu M_r^z . Ale opäť z vety o zachovaní delenia úsečky v danom pomere platí $|O_r J_r^z| : |O_r M_r^z| = 1 : |z^M|$, čiže $|q_3| |O_r M_r^z| = 1 : |z^M|$, odkiaľ $|O_r M_r^z| = 1 : |q_3 z^M|$. Pretože $q_3 > 0$ (všetky body ležiace „nad“ osou X majú kladné Y -ové súradnice), môžeme písať

$$Y^M = q_1 x^M + q_2 y^M + q_3 z^M \quad (5)$$

Rovnice (3) a (5) sú tzv. *zobrazovacie rovnice* a vyjadrujú vzťahy medzi súradnicami bodu M v súradnicovej sústave $Oxyz$ a súradnicami bodu M_r v súradnicovej sústave $O_r X Y$.

Keďže priamky x_r, y_r, z_r a body J_r^x, J_r^y, J_r^z možno voliť celkom

ľubovoľne, treba zdôrazniť, že najnázornejšie obrázky dostaneme, ak uhly priamok x_r, y_r s osou X sú v rozmedzí $20^\circ - 40^\circ$ a dĺžky úsečiek $O_r J_r^x, O_r J_r^y, O_r J_r^z$ sa od seba príliš nelíšia.

Príklad. Narysujte axonometriu pravidelného štvorbokého ihlana.

Riešenie (obr. 5). Označme vrchol ihlana V a vrcholy podstavy A, B, C, D . Súradnicovú sústavu $Oxyz$ zvolíme tak, že bod O bude stredom štvorca $ABCD$, os z -ová pôjde vrcholom V a osi x a y budú obsahovať stredné priečky štvorca $ABCD$. Nech $|OV| = 5$ a $|AB| = 4$; potom $V(0, 0, 5)$, $A(-2, -2, 0)$, $B(2, -2, 0)$, $C(2, 2, 0)$ a $D(-2, 2, 0)$. Priamky x_r, y_r, z_r si zvolíme tak, že si zvolíme súradnice bodov J_r^x, J_r^y, J_r^z . Nech napr. $p_1 = -2$, $q_1 = -1$, $p_2 = 1,5$, $q_2 = -1$, $q_3 = 2$. Ak všetky tieto čísla dosadíme do rovníc (3) a (5), dostávame: $V_r(0, 10)$, $A_r(1, 4)$, $B_r(-7, 0)$, $C_r(-1, -4)$ a $D_r(7, 0)$. Samozrejme, v tomto jednoduchom príklade by sme ľahko vedeli narysovať axonometriu ihlana aj bez počítania pomocou stredov E, F, G, H strán podstavy ihlana. Napr. bod E_r má od bodu O_r dvakrát takú vzdialenosť ako bod J_r^x atď.

Pre špeciálnu voľbu bodov J_r^x, J_r^y, J_r^z dostávame rôzne špeciálne druhy axonometrií. Ak $|O_r J_r^x| = |O_r J_r^y| = |O_r J_r^z|$ a $x_r \perp y_r$, dostávame tzv. *vojenskú perspektívu* (v tomto zobrazení zvyknú napr. architekti zobrazovať sídliská); ak $|O_r J_r^y| = |O_r J_r^z|$, $y_r \perp z_r$, dostávame tzv. *šikmé premietanie*. Pre $|O_r J_r^x| = |O_r J_r^z|$, $|O_r J_r^y| = 0$, $x_r \perp z_r$ dostávame nárys a pre $|O_r J_r^x| = |O_r J_r^y|$, $|O_r J_r^z| = 0$, $x_r \perp y_r$ dostávame pôdorys v Mongeovej projekcii. Ovšem Mongeova projekcia nie je axonometriou, lebo jedna z osí (x , alebo z) sa premieta do bodu; rovnice (3) a (5) ale platia aj pre Mongeovu projekciu.

FYZIKA

Neutrino

Ing. JAROSLAV SEDLÁK, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Objev této elementární částice patří bezesporu k jedné z nejsvětlejších a současně také nejsložitějších stránek fyziky 20. století. Než se neutrino stalo plnoprávným a uznávaným členem rodiny elementárních částic, zůstávalo dlouhou dobu jakýmsi ošklivým káčetem mezi nimi.

Na svět ho přivedl v roce 1930 rakouský teoretik *Wolfgang Pauli*, aby s jeho pomocí vysvětlil experimentálně zjištěný fakt, že energetické

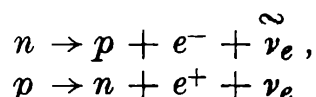
spektrum elektronů, emitovaných při rozpadu atomových jader, je spojitě. To bylo v rozporu s kvantovou teorií, která požadovala diskrétní charakter spektra při kvantových přechodech mezi stacionárními stavy jader (Bohrův postulát). Jelikož při alfa a gama rozpadech se požadavek kvantové teorie bez výjimky splňoval, vznikla domněnka, že v beta rozpadech jader se nespĺňuje zákon zachování energie.

Aby tedy „zachránil“ zákon zachování energie, *W. Pauli* postuloval, že při beta rozpadu je kromě elektronu emitována ještě další částice, elektricky neutrální, nesoucí spin $1/2$, která má velice malou hmotnost (menší než $0,01$ hmotnosti protonu) a interagující s hmotou pouze prostřednictvím slabé interakce. Proto může neutrino o nízké energii procházet bez interakce velkým množstvím hmoty, např. Zemí.

Pauliho postulát znamenal, že diskrétní porce energie, odpovídající přechodu jádra z jednoho energetického stavu do druhého, se zcela libovolně rozdělí mezi elektron a neutrino a výsledné spektrum elektronů z beta rozpadu je proto spojitě.

Jak se později ukázalo, Pauliho hypotéza zachránila nejenom zákon zachování energie, ale také zákon zachování hybnosti i momentu hybnosti a základní principy statistiky částic v kvantové mechanice.

Enrico Fermi zahrnul v r. 1934 Paulim postulovanou částici do své teorie beta rozpadu a nazval ji *neutrinem* (byla elektricky neutrální a lehoučká, na rozdíl od neutronu, který je těžký a v té době už byl znám; byl objeven v r. 1932). V souladu s touto teorií beta rozpad představuje přeměnu neutronu (nebo protonu) v jádře atomu v proton (neutron) při současném vzniku elektronu e^- , (pozitronu e^+) a neutrina ν_e (antineutrina $\bar{\nu}_e$). Jedná se o procesy



Fermiho teorie vysvětlila všechny základní rysy beta rozpadu a umožnila zavést dvě částice: neutrino a antineutrino.

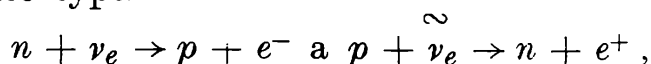
Spolu s elektronem tvoří neutrino samostatnou třídu elementárních částic, tzv. *leptony*, které se nezúčastňují silné interakce, ale podílejí se pouze na elektromagnetické, slabé a gravitační interakci. Všechny leptony, tj. *elektron*, *mion* a *neutrino*, mají spin $J = 1/2$ a podřizují se statistice Fermi. Jsou to tedy *fermiony*. Název lepton je historicky spojen s tím, že prvé známé leptony byly lehké, značně lehčí, než ostatní částice ($m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$, $m_\mu c^2 = 106,0 \text{ MeV}$, $m_\nu c^2 = 0$).

Otázka hmotnosti neutrina není dosud vyřešena. Některé současné teorie připouštějí, že neutrino má nenulovou klidovou hmotnost. Příslušné experimenty zatím nedávají jednoznačnou odpověď, dovolují stanovit pouze horní hranici hmotnosti neutrina ($m_\nu c^2 \leq 40 \text{ keV}$). V každém případě je hmotnost neutrina velice malá.

Dlouhou dobu zůstávalo neutrino zcela hypotetickou částicí. Aby ho

bylo možno považovať za reálnou časticu, bolo nutno jeho existenciu dokázať experimentálne. Jak ale docíliť toho, aby túto neuloviteľnú časticu bolo možno študovať? Jedinou nádejou bolo, že podarí-li sa soustrediť mnoho neutrín do jediného paprsku a postaviť jim do cesty rozsiahly detektor, môže sa uskutočniť tá pranežateľná pravdepodobnosť, že niektoré z neutrín bude interagovať. A je zásluhou vynaliezavosti fyziků, že túto nádej nejenom realizovali v takovom rozsahu, že reakciu neutrína sa podarilo detegovať, ale urobili z neutrína zcela bežný experimentálny nástroj.

Prímý experimentálny dôkaz existencie voľného neutrína podali v r. 1953 *F. Reines* a *C. L. Cowan*, ktorí pozorovali tzv. opačný beta rozpad, tj. reakcie typu



předpovídané Fermiho teorií. Využili skutečnosti, že v jaderném reaktoru vzniká obrovské množství antineutrín s energií do 10 MeV jako důsledek beta rozpadu produktů štěpení jader uranu. Hledali tedy reakci $p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$. Postupovali tak, že kolem reaktoru v *Savannah River*, který dával proud 10^{13} antineutrín na cm^2 za sekundu, instalovali nádrž s tekutým scintilátorem s příměsí kadmiových solí (kadmium silně pohlcuje neutrony). Jejich úvaha byla následující: antineutrína, vycházející z reaktoru, budou interagovat s protony, obsaženými v nádrži se scintilátorem a vznikne neutron a pozitron. Pozitron bude anihilovat s elektronem a vzniknou dvě kvanta gama, která vyvolají scintilační záblesk ve scintilátoru. Neutron bude zachycen jádrem kadmia, které přejde do vzbuzeného stavu a vyzáří gama kvantum. To vyvolá druhý scintilační záblesk, opožděný za prvním o (5 až 10) μs . Je tedy nutno změřit uvedenou časovou korelaci dvou scintilačních záblesků. Tyto experimenty, opakované v období 1955–1956, definitivně potvrdily existenci volných neutrín (antineutrín) a umožnily stanovit veličinu účinného průřezu pro interakci neutrína ($\sigma_{\nu e} \sim 1,4 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^2$).

Beta rozpad jader však není jediný proces, v němž neutrína vznikají. Ta se objevují také v rozpadech pionů a kaonů, kde vznikají společně s mionem. Přitom mion sám se rozpadá na elektron, neutrino a anti-neutrino ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$; $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$; $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e + \bar{\nu}_e$).

Koncem padesátých let byla vyslovena domněnka (*A. A. Markov*, *J. Schwinger*, *K. Nishijima*), že neutrína, vznikající spolu s miony v rozpadech pionů a kaonů, se liší od neutrín, vznikajících spolu s elektronem v rozpadech mionů a v beta rozpadech jader. Tato domněnka byla potvrzena experimenty na urychlovačích počátkem šedesátých let. V nich bylo ukázáno, že neutrína, vznikající v rozpadech pionů a kaonů, vedou pouze k reakci $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$; reakce $\nu_\mu + n \rightarrow p + e^-$ nebyla nalezena. Jinými slovy, neutrína z rozpadů pionů a kaonů nevedou ke vzniku elektronů. Z toho tedy vyplývá, že existují dva druhy neutrín,

neutrino elektronové ν_e a mionové ν_μ . Ale nejen to, analogické experimenty ukázaly, že při interakci mionového neutrina ν_μ s jádrem vznikají záporně nabitě miony μ^- , ale nevznikají kladně nabitě miony μ^+ . To svědčí o tom, že mionová neutrina ν_μ se liší od mionových antineutrín $\bar{\nu}_\mu$, tj. $\nu_\mu \neq \bar{\nu}_\mu$ (a také $\nu_e \neq \bar{\nu}_e$).

V těchto reakcích se projevuje jeden ze zákonů zachování, tzv. *zákon zachování leptonového čísla* (leptonového náboje), které je zvláštní charakteristikou každého leptonu. Zákon zachování leptonového čísla odráží experimentálně zjištěný fakt, že rozdíl počtu leptonů a antileptonů před reakcí a po reakci je stejný, nebo, jinými slovy, rozdíl počtu leptonů a antileptonů, vstupujících do reakce, se rovná rozdílu počtu leptonů a antileptonů po reakci. Obvykle se bere hodnota leptonového čísla $L = 1$ pro elektron e^- , mion μ^- , elektronové neutrino ν_e a mionové neutrino ν_μ . Pro jim odpovídající antičástice, tj. pozitron e^+ , mion μ^+ , elektronové $\bar{\nu}_e$ a mionové $\bar{\nu}_\mu$ antineutrino je $L = -1$. Pro všechny ostatní částice (nukleony, mesony) je $L = 0$. To, že ν_e a $\bar{\nu}_e$ a také ν_μ a $\bar{\nu}_\mu$ jsou různé částice, lze interpretovat tak, že se zachovávají různé leptonové náboje, elektronový L_e (pro $e^\pm, \nu_e, \bar{\nu}_e$) a mionový L_μ (pro $\mu^\pm, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$). Pro všechny ostatní částice je $L_e = L_\mu = 0$. Zatím nebylo zjištěno žádné narušení tohoto zákona.

V roce 1975 byla ve *Stanfordu* (USA) v experimentech se vstřícnými svazky $e^+ e^-$ objevena nová částice, těžký lepton τ o hmotnosti $m_\tau c^2 = 1830$ MeV, při jehož rozpadu (např. $\tau \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau; \tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau; \tau^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\tau; \tau^+ \rightarrow \pi^+ + \bar{\nu}_\tau$), vznikají neutrina nového typu, ν_τ (a antineutrino $\bar{\nu}_\tau$). Je pravděpodobné, že těmto částicím odpovídá leptonový náboj L_τ . Je-li tomu tak, pak tedy platí, že $L = L_e + L_\mu + L_\tau$. Údaje o leptonových nábojích jsou uvedeny v tab. 1.

Pokrok ve studiu vzájemného působení neutrin s jinými částicemi je spojen hlavně s experimenty na urychlovačích částic. Experimenty, realizované počátkem 60-tých let na urychlovačích v *Brookhavenu* a v *CERNu*, potvrdily charakteristické rysy universální teorie slabé interakce, jako je lineární růst celkových účinných průřezů interakce neutrin s nukleony s růstem energie neutrina potvrdily, že účinný průřez neutrina se liší od účinného průřezu antineutrina; byly zaregistrovány interakce neutrin, při nichž vznikají mesony.

V interakcích neutrin s nukleony při energii $E \leq 1,0$ GeV se pozoruje, v souladu s universální teorií, quasielastický rozptyl, při němž dochází ke změně elektrického náboje leptonu (tj. dochází k výletu mionu, např. $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p; \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$). Dochází také k pružnému roz-

Tabulka 1.

Leptonový náboj									
Lepton	L	L_e	L_μ	L_τ	anti-lepton	L	L_e	L_μ	L_τ
e^-	1	1	0	0	e^+	-1	-1	0	0
μ^-	1	0	1	0	μ^+	-1	0	-1	0
τ^-	1	0	0	1	τ^+	-1	0	0	-1
ν_e	1	1	0	0	$\bar{\nu}_e$	-1	-1	0	0
ν_μ	1	0	1	0	$\bar{\nu}_\mu$	-1	0	-1	0
ν_τ	1	0	0	1	$\bar{\nu}_\tau$	-1	0	0	-1

ptylu neutrin (antineutrin) na nukleonech, nebo elektronech, např. $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + p \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + p$; $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + e^- \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + e^-$.

V roce 1973 byly v CERNu objeveny procesy typu $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + N \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + X$ (N je nukleon, X znamená silně interagující částici hadron), které nevyplývají z universální teorie slabé interakce a představují zcela nový typ interakce neutrin. Jsou charakterizovány tím, že při nich nedochází ke změně elektrického náboje neutrina (tj. nedochází při nich ke vzniku mionu). V teorii se popisují pomocí tzv. neutrálních proudů: neutrinového, který odpovídá přechodu původního neutrina v konečné neutrino ($\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$), a hadronového proudu, který odpovídá přechodu původního nukleonu v jinou silně interagující částici, hadron ($N \rightarrow X$).

Při energiích neutrin vyšších než 1,0 GeV začínají převažovat nepružné procesy, nejdříve vznik jednotlivých mesonů, a při dalším zvýšení energie dochází ke vzniku mnoha mesonů (hadronů).

Zvláštnímu zájmu se těší tzv. hluboce nepružné procesy při velmi vysokých energiích, např. $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + N \rightarrow \mu^-(\mu^+) + X$, kde X představuje všechny hadrony, vzniklé v dané reakci. Tyto procesy poskytují údaje o vnitřní, kvarkové struktuře hadronů.

Všechny procesy, v nichž se vyskytuje neutrino, patří ke slabé interakci. Proto studium procesů s účastí neutrin přináší údaje o samotné slabé interakci a také o struktuře a vlastnostech elementárních částic. V interakcích neutrin vznikají nové krátkožijící částice, charakterizované novými kvantovými čísly, jako je např. „půvab“ (charm) apod.

Interakce neutrin otevírají před fyzikou elementárních částic nové možnosti, nové horizonty. Není proto divu, že experimenty s neutrinou přitahují stále větší pozornost experimentátorů.

Ze vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

Viděli jsme kometu! Kometu nejpopulárnější ze všech, jež lidstvo zná, pojmenovanou po anglickém astronomu, řediteli observatoře v Greenwiche, *Edmondovi Halleyovi*¹⁾, jenž ji pozoroval v roce 1682, studiem⁵ drah komet z let 1531, 1607 a 1682 potvrdil, že běží o touž kometu, a ve spise „*Synopsis Astronomiae Cometicae*“ (1705) předpověděl také její další návrat na rok 1758; charakterizoval ji tedy jako kometu periodickou, která obíhá kolem Slunce po elipse velmi protáhlé a vystavuje pravidelně po uplynutí 76 let v poloze svého největšího přiblížení k Slunci svou nebeskou krásu na odiv také obyvatelům planety Země. Vzhlíželi jsme proto v tomto století již dvakrát k hvězdné obloze s nedočkavostí hodnou této vzácné události, abychom kometu také spatřili. Její první návrat v roce 1910 jí udělal značnou reklamu; pro její jasnost a poměrnou velikost bylo možno kometu dobře pozorovat i prostým okem. Její druhý návrat v roce 1986 probíhal za podmínek u nás podstatně horších; podívat se na kometu „zblízka“ umožnila nám toliko moderní technika kosmických sond, vyslaných daleko od Země do hlubin světového prostoru. O jejich vzorné mezinárodní spolupráci a výsledcích získaných pozorování i o příčinách, proč celkový dojem nebyl tentokrát tak příznivý jako jako před 76 lety, bylo již hojně psáno; omezíme proto své vzpomínky s jinými dlouhověkými šťastlivci, kterým bylo dopřáno spatřit tuto nejznámější kometu v životě dvakrát, na situaci v roce 1910.

Předpovídaný a dlouho — většinou však s obavami — očekávaný návrat věhlasné a „zlověstné“ Halleyovy komety se konečně dostavil. Dne 20. dubna prošla kometa periheliem (Slunci nejbližším bodem) své dráhy; její aktivita prudce vzrůstala, hlava se zvětšovala, ohon se prodlužoval. Jev byl mohutný, impozantní, velmi efektní — nádherné kosmické divadlo! Ve dnech 6. až 13. května bylo vidět svítící ohon komety v zorném úhlu 45°, vytvářel tedy zářivý oblouk přes velikou část oblohy. Bázlivci v něm ve své hrůzné fantazii spatřovali hořící pochodeň, jiní lesklý meč; kometa jim byla předzvěstí války. Dne 19. května nastala zvýšená panika z obavy před otravou plyny, když

¹⁾ Narodil se před 330 lety roku 1656; zemřel roku 1742.

Země prošla ohonem komety. Jestliže dojde snad k přímé srážce obou těles, bude tato katastrofa prý znamenat konec našeho pozemského „světa“

Nic takového se ovšem nestalo. Pan učitel nám pak ještě dlouho připomínal památný den 19. května 1910, kdy nám slovutná Halleyova kometa podle jeho slov „laskavě dovolila si na ni sáhnout, pohladit ji, sličnou Vlasatici, po jejích dlouhých vlasech, nadechnout se jejích vonných plynů. Povožila nás tehdy dokonce (jako liška hodného Budulínka) na ocásku“. Pochválil nás, že jsme byli stateční — ani hlava se nám na velkolepém nebeském kolotoči nezatočila!

Milý pan učitel dovedl nás opravdu mistrovsky zbavit pověrčivosti a strachu. Litoval jen, že nás nemůže seznámit se základy nebeské mechaniky, jejíchž zákonů, psaných jazykem matematickým, je kometa po věky poslušná, a proto pravidelně a tak věrně se k nám vrací. Ujišťoval nás, že se brzy dožijeme převratných objevů, letů člověka do vesmíru, jeho přistání na Měsíci a průzkumu celé sluneční soustavy kosmickými sondami; ty nám podle jeho prorockých slov poskytnou už při dalším návratu Halleyovy komety v roce 1986 o ní podrobné zprávy, úplné a vědecky spolehlivé. Povzbuzoval nás proto, abychom si svědomitě osvojili hluboké vzdělání zvláště ve vědách matematických a takto výborně připraveni nastoupili do kosmického věku, tím více se zároveň těšili také na příští shledání s kometou. Je nám nyní líto, že na smluvené dostavěníčko s nebeskou krasavicí v roce 1986 jsme se již nesešli všichni.

Poznámka:

Svým článkem vzpomínám s vděčností světlé a nehynoucí památky svého svědomitého učitele *Josefa Slánského*, tehdy správce jednotřídní obecné (tj. základní) školy v Radkyni na Novopacku.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Dělení obrazců

Věnujme se tentokrát hlavolamům, které se kromě čísel týkají také geometrických obrazců:

- a) Obdélník rozdělte na dvě shodné části tak, aby v každé z nich byl stejný součet čísel vepsaných do některých políček.

GEO- (z řec. *gé* = země) — počáteční část složených slov vyjadřující nějaký vztah k zemi

GEOCENTRICKÝ (v. centrický) — „zeměstředný“; se Zemí ve středu; v astronomii: **GEOCENTRICKÁ** souřadnice — souřadnice udávající pozici tělesa vzhledem k myšlenému pozorovacímu místu ve středu Země; srov. topocentrická

GEODÉZIE (řec. *daioimai* = dělit, rozdělovat) — „rozdělování zemského povrchu“; zeměměřičství; **GEODETICKÝ** — 1. týkající se zeměměřičství, např. zeměměřické práce; 2. příslušný zeměměřiči — geodetovi; např. zeměměřičský přístroj

GEOFYZIKA (v. fyzika) — věda o fyzikálních jevech na povrchu i uvnitř Země

GEOGRAFIE (v. *-grafie*) — zeměpis; věda zabývající se „popisem Země“; **GEOGRAFICKÁ** šířka — zeměpisná šířka

GEOCHEMIE (v. chemie) — nauka o chemickém složení Země

GEOID (v. *-oid*) — „podoba, obraz Země“; těleso tvaru Země bez vertikálních nerovností

GEOLOGIE (v. *-logie*) — věda o vzniku a složení zemské kůry

GEOMECHANIKA (v. *mechanika*) — mechanika tuhých těles; nauka o silovém působení v zeminách, skalních horninách, sněhu a ledu

GEOMETRIE (v. *-metrie*) — obor matematiky, který se vyvinul ve Starém Egyptě z nutnosti vyměřovat zemi, pozemky a stavby

GEOTROPICKÝ (v. tropický) — **GEOTROPICKÁ** rostlina — otáčející se kladně nebo záporně vzhledem k zemské tíži (geotropicky kladně se obrací kořenem ve směru zemské tíže, tj. ke středu zemskému, geotropicky záporně se obrací lodyhou od středu zemského vzhůru)

GIGA- (z řec. *gigas* = obr; srov. gigant) — počáteční část názvů násobných jednotek v hodnotě 10^9

GLOBÁLNÍ (od. lat. *globus* — koule; srov. **GLÓBUS** — koule znázorňující ve zmenšeném měřítku zemský povrch) — „patřící celé kouli“; souhrnný, celkový; v. t. globule

GLOBULE (z lat. *globulus*, zdrob. od *globus* = koule; v. globální) — v astronomii: skupina temných mlhovin kulového obrysu; „kuličky“

GONIOMETR (slož. z řec. *gónia* = úhel, kout + *metron* = měřidlo, míra; v. *-metr¹*) — úhloměr; **GONIOMETRIE** — „měření úhlů“; nauka o funkcích úhlů; v. t. radiogoniometrie; agona, izogona, polygon

GRÁD (z lat. *gradus* = krok, stupeň, schod; srov. **GRADACE** - stupňování; souvisí s lat. *gradior*, *-i* = kráčet; v. gradient) — jeden stupeň původní úhlové jednotky v desítkové soustavě, tj. jedna setina pravého úhlu; ve fyzice: jednotka teplotního rozdílu; stupeň; v. t. graduace, degradace

GRADIENT (z lat. *gradiens*, *-entis*, ptc. prez. od *gradior*, *-i*, ptc. pf. *gressus* = kráčet; srov. **PROGRESÍVNÍ** — „postupující vpřed“;

lat. *pro* = zde: dopředu) — „kráčeající“; změna určité veličiny na jednotku vzdálenosti; „změna po krocích“; změna zjištěná „odkrokováním“; v. t. grád, retrográdní

GRADUACE (z latiniz. *graduatio*; od *gradus* = krok, stupeň, schod; v. grád) — opatřování měřicích přístrojů stupnicí; ve fyzice: GRADUACE teploměru — kontrola teploměru teploměrem, jehož odchylky od stupnice vodíkové jsou proměřené

GRADUOVAT — 1. opatřit měřicí přístroj stupnicí; 2. udělit někomu akademickou hodnost; „uznat někomu vyšší vědecký stupeň“

GRADUOVANÝ — 1. opatřený stupnicí; rozdělený na stupně; 2. s akademickou hodností

GRAF (od řec. *grafó* = rýt, psát) — „píšící“; písemné znázornění vzájemných vztahů matematických nebo statistických údajů a funkčních závislostí; v. t. -graf, grafický, -grafie, grafit, gram, gramekvivalent, gramo-

GRAF (od řec. *grafó* = rýt, psát; v. graf) — koncová část složených slov vyjadřující, že někdo nebo něco píše to nebo tak, jak uvádí předcházející část složeného slova; např. FOTOGRAF (řec. *fós*, *fótos* = světlo) — „člověk píšící (malující obrázky) pomocí světla“; KARDIOGRAF (řec. *kardia* = srdce) — přístroj zaznamenávající činnost srdce. Ve fyzice: přístroj zaznamenávající nějaký jev; např. CHRONOGRAF (řec. *chronos* = čas) — přístroj přesně zaznamenávající určité časové úseky. Pozn. Termín MULTIGRAF (lat. *multum* = mnoho) však nevyjadřuje, že „graf zaznamenává mnoho údajů“, ale že „je mnoho grafů“; je to několikanásobný graf. V. t. anemograf, astrograf, barograf, fonograf, heliograf, hygrogaf, korónograf, oscilogaf, pantograf, seizmograf, spektrogaf, termograf

GRAFICKÝ (od řec. *grafó* = rýt, psát; v. graf) — 1. týkající se písma nebo tisku; psaný, písemný; např. GRAFICKÁ stránka, tj. úprava textu; 2. vyjádřený nákresem, grafem; kresebný; např. GRAFICKÝ záznam, GRAFICKÉ řešení rovnic; 3. týkající se umělecké kresby; např. GRAFICKÝ list

GRAFICKÝ — souvztažné přídavné jméno ke -graf nebo -grafie

GRAFIE (od řec. *grafó* = rýt, psát; v. graf) — koncová část složených slov mající význam 1. psaní, kreslení, rýsování, tisk, zapisování, popis, znázornění, záznam; předcházející část složeného slova pak upřesňuje, „jak, čím nebo co se píše“; např. MIKROGRAFIE (řec. *mikros* = malý) — způsob psaní mimořádně malým písmem; v. t. fotografie, polarografie, radiografie, rentgenografie, stereografie, topografie. Pozn. Zpravidla existují souvztažná zakončení „-graf“ a „-gram“; „-graf“ pro osobu nebo přístroj, „který píše“, „-gram“ pro „napsané“

2. obor vědy nebo praxe, využívající písemných záznamů určitého

druhu, přičemž předcházející část složeného slova význam upřesňuje; v. t. fyziografie, geografie, topografie. Pozn.: Existuje pouze souvztažné zakončení „-graf“ pro označení osoby z onoho oboru; např. geograf, topograf.

GRAM (z řec. *gramma*, od *grafó* = rýt, psát; v. graf) — „napsané“; od Velké francouzské revoluce v přeneseném významu „základní hmotnostní jednotka“ (jak bylo „stanoveno a zapsáno“); v. t. -gram², gramekvivalent

GRAM¹ — koncová část složených slov vyjadřující, že něco je napsáno o tom nebo tak, jak uvádí předcházející část složeného slova; např. TELEGRAM (řec. *téle-* = daleko) — zpráva „napsaná na dálku“ Pozn.: Často existuje souvztažná koncová složka -graf, která vyjadřuje, že „někdo nebo nějaký přístroj něco píše“; např. TELEGRAM — záznam napsaný telegrafem; TELEGRAF — přístroj, kterým se napíše telegram. V t. diagram, fonogram, histogram, kardiogram, nomogram, oscilogram, program, spektrogram

-GRAM² — koncová část složených slov vyjadřující, že jde o základní hmotnostní jednotku v počtu, jak uvádí předcházející část složeného slova; např. KILOGRAM (řec. *chilioi* = tisíc) — tisíc gramů; v. t. dekagram

GRAMO-¹ (z řec. *gramma* = napsané; od *grafó* = rýt, psát; v. graf) — počáteční část složených slov mající význam „záznam, zápis“ toho, co vyjadřuje následující část složeného slova

GRAMOFON (řec. *fóné* = hlas, zvuk; v. -fon) — „záznam zvuku“; přístroj, který reprodukuje zvuk zachycený na desky

GRAMO-² (zkráceno ze slova gramofon) — počáteční část složených slov spojující část druhou s významem slova „gramofon“; např. GRAMODESKA — gramofonová deska

GRANULACE (od lat. *granulum*, zdrobnělina od *granum* = zrno, jádro) — tvoření zrn, zrníček; GRANULE, GRANULA — zrno;

GRANULOVAT — dávat něčemu zrnitou podobu; dělat zrnitým

GRAVIMETR (slož. z lat. *gravis* = těžký; v. gravitace + řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metr¹) — přístroj na měření změn zemské tíže; GRAVIMETRIE — měření zemské tíže; nauka o zemském tíhovém poli

GRAVITACE (z lat. *gravitas*, od *gravis* = těžký) — „tíže, váha“; přitažlivost (tíže) zemská; GRAVITAČNÍ hmotnost — hmotnost tíhová; GRAVITAČNÍ síla — přitažlivost; síla, která způsobuje pohyb tělesa směrem k Zemi

GYROPLÁN (slož. z řec. *gyros* = zakřivení, kruh + *planaó* = sem tam chodit, bloudit; zde však analogicky podle „aeroplán“) — vrtulník, letadlo, jehož nosné plochy se otáčejí v kruhu; v. t. gyroskop

GYROSKOP (slož. z řec. *gyros* = zakřivení, kruh; v. gyroplán + *skopeó* = hledět, pozorovat; v. -skop) — „pozorovatel pomocí otáčení“;

rychle se otáčející setrvačnick v Cardanově závěsu; jeho osa setrvačnosti totiž zachovává stále stejný směr, a proto se ho používá jako součást navigačních pozorovacích přístrojů; **GYROSKOPICKÝ HADRON** (slož. z řec. *hadros* = hustý, pevný, zralý + *-on* — umělá přípona použitá analogicky podle „elektron“ pro označení částic; v. *-on*) — společný název pro baryony a mezony, tedy pro částice, které mezi sebou působí prostřednictvím silných interakcí na rozdíl od leptonů

HALO (z řec. *halós* = mlat, humno; a protože bylo kruhové, všeobecně: zaoblení, zakulacení) — veliký světelný kruh kolem Slunce, Měsíce nebo jiného svítícího tělesa; „kolo“; **HALOVÝ** jev; Pozn.: **HALA** — velký krytý prostor — s tímto výrazem nijak nesouvisí, protože je z angl. *hall*.

HALOGENY (slož. z řec. *hals*, *halos* = sůl + *genos* = rod, potomstvo, druh, narození, původ; souvisí s *gignomai* = rodit se; v. *-genní*) — „rod, druh soli“; prvky, kterým se dříve říkalo **HALOVÉ** (fluor, chlór .); mají totiž schopnost tvořit s kovy sloučeniny podobné kyslíkatým solím; např. kuchyňská sůl je chlorid sodný. **HALOGENIDY** — sloučeniny halogenu s jinými prvky

HARMONIE (z řec. *harmonia*, *harmottó* = seřadovat, řídit, činit srovnáním) — „seřazení, srovnání“; soulad, vyrovnanost, souzvuk; rovnoměrnost; **HARMONICKÝ**; v. t. anharmonický

HEKTO- (od řec. *hekaton* = sto) — počáteční část názvů násobných jednotek mající význam stonásobek měrné jednotky; např. **HEKTOLITR** — sto litrů, **HEKTOMETROVÝ** — stometrový

HELIKOPTÉRA (slož. z řec. *helix*, *-ikos* = vinutý, kroucený, točený, točící se + *pteron* = péro, křídlo) — vrtulník; „točící se křídlo“ Pozn.: S řec. *helix*, *-ikos* souvisí **HELIKÓN** — druh žestového nástroje, jehož trubky „jsou hustě stočené“ S řec. *pteron* pak srovnej v biologii **PTERODAKTYLOS** (řec. *dyktylos* = prst u ruky nebo u nohy) — „s okřídlenými drápy“

HELIOCENTRICKÝ (slož. z řec. *hélíos* = slunce; v. *helium* + latiniz. centrum, od řec. *kentron* = ostrý konec, bodec, bod ve středu kruhu; v. centrum) — sluncestředný; se Sluncem ve středu; v astronomii: **HELIOCENTRICKÁ** soustava souřadnic — její počátek je ve středu Slunce

HELIOGRAF (slož. z řec. *hélíos* = slunce; v. *helium* + *grafó* = rýt, psát; v. *-graf*) — přístroj měřící („zapisující“) sluneční svit; slunoměr

HELION (slož. z řec. *hélíos* = slunce; v. *helium* + *-on* — umělá přípona používaná analogicky podle „elektron“ pro označení částic, případně jádra; v. *-on*) — atomové jádro hélia

HÉLIUM (z řec. *hélíos* = slunce) — prvek zjištěný nejprve na Slunci (tj. v r. 1868; na Zemi až v r. 1895); v. t. heliocentrický, heliograf, helion; afélium, perihélium; pyrheliometr

1		7	8			
		9		2		
	10				3	
		6				
					11	
		12				5 4

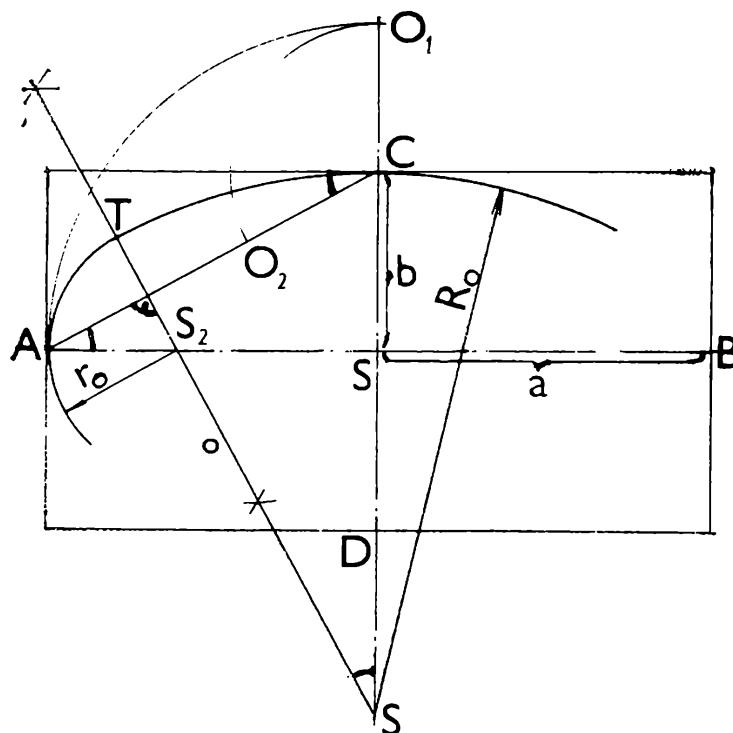
		6		
12		1		7
		3	10	
			9	4
5		2		11
		8		

- b) Druhý obrazec rozdělte na šest shodných částí tak, aby v každé z nich byl opět stejný součet čísel vepsaných do některých políček.

Jarmila Pěničková

Ovál a elipsa

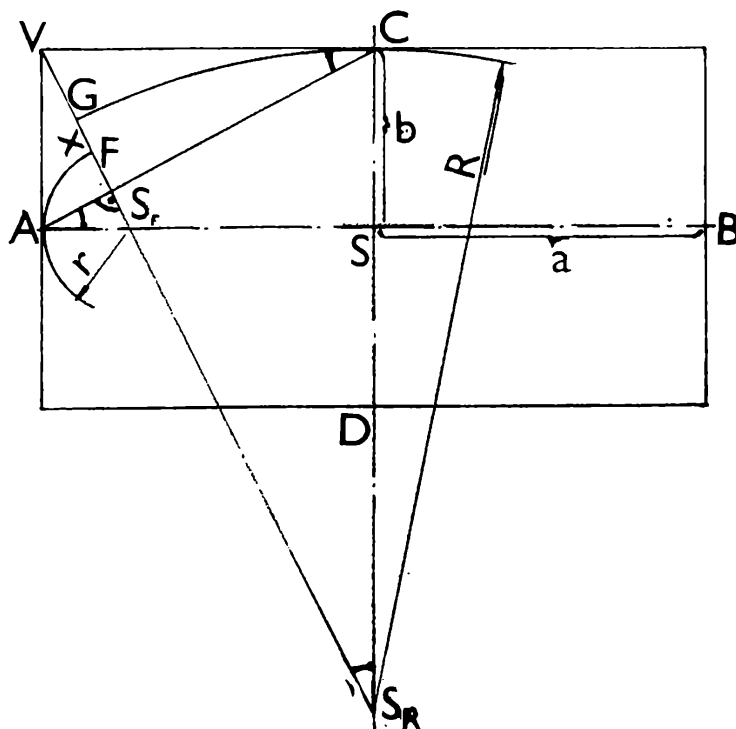
Přesné narýsování elipsy je dost pracné. Proto se v technické praxi často nahrazuje elipsa vhodným *oválem*, tj. křivkou složenou jen z oblouků kružnic. Tuto křivku volíme vždy tak, aby měla dvě vzájemně kolmé osy souměrnosti (*osy oválu*); jejich průsečík *S* se nazývá *střed oválu*. Průsečíky os oválu s oválem se nazývají *vrcholy oválu*. Ze souměrnosti oválu podle jeho os plyne, že je složen z oblouků $4n$ ($n = 1, 2, \dots$) kružnic; obvykle se volí $n = 1$ nebo $n = 2$. Na obr. 1 je sestrojena čtvrti-



Obr. 1

na jednoho oválu, který je složen ze čtyř kružnic; A, B, C, D jsou jeho vrcholy. Úsečky SA, SB, SC, SD se nazývají *poloosy oválu*; je-li $SA > SC$, pak klademe $a = |SA|$, $b = |SC|$. Je tedy $a > b$. Na obr. 1 je zároveň provedena konstrukce zvoleného oválu; stručně ji (podle obr. 1) můžeme popsat takto:

1. $|SO_1| = |SA| = a$. 2. $|CO_2| = |SC| = b$. 3. Přímka o je osa úsečky AO_2 . 4. Průsečíky S, S_2 osy o s osami CD, AB oválu jsou středy dvou kružnic, z jejichž oblouků je složena čtvrtina oválu. Poloměry těchto kružnic jsou po řadě označeny R_0, r_0 tak, že je $R_0 > r_0$. V bodu T přímky SS_2 mají obě kružnice společnou tečnu.



Obr. 2

Při přesném rýsování elipsy sestavujeme v jejích vrcholech A, B, C, D kružnice, které se v blízkosti těchto vrcholů k elipse co nejtěsněji přimykají; nazývají se *oskulační kružnice* ve vrcholech elipsy. Jejich konstrukce je provedena na obr. 2, kde je elipsa se středem S určena hlavní osou AB a vedlejší osou CD ; zároveň je $|AB| = 2a$, $|CD| = 2b$. Čísla a, b se nazývají *poloosy elipsy* ($a > b$). *Konstrukce*:

1. Sestrojíme vrchol V obdélníka $ASCV$. 2. Bodem V vedeme kolmici k přímce AC . 3. Sestrojíme průsečíky S_r, S_R této kolmice s přímkami AB, CD .

Oskulační kružnice elipsy ve vrcholu A má střed S_r a poloměr $r = |AS_r|$; oskulační kružnice ve vrcholu C má střed S_R a poloměr $R = |S_R C|$. Body S_r, S_R se nazývají *středů křivosti* ve vrcholech A, C ; poloměr R (resp. r) se nazývá *poloměr křivosti* ve vrcholu C (resp. A).

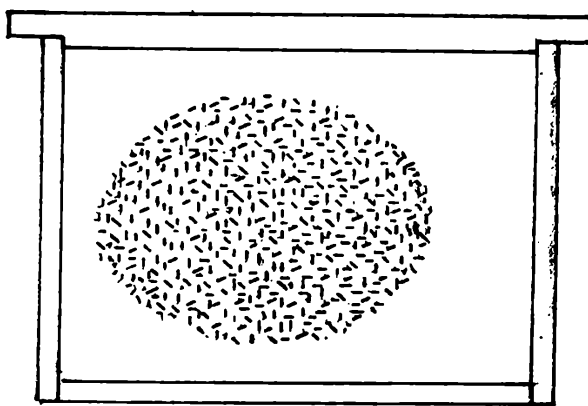
Číslo $\frac{1}{R}$ (resp. $\frac{1}{r}$) se nazývá *křivost elipsy* ve vrcholu vedlejší osy (resp. ve vrcholu hlavní osy).

K oběma provedeným konstrukcím náleží sedmá úloha z matematiky, která je v tomto čísle Rozhledů zařazena do letošní Naší soutěže.

Vlastimil Mráz

Včelí roj v zimě

Včelstvo v zimě vytváří v úlu chomáč přibližně kulovitěho tvaru (obr. 1). Zmenšením povrchu chomáče se sníží na minimum únik tepla z roje. Tak se lépe udrží teplota, která je nutná pro přežití včel. V jedné včelařské publikaci o tom čteme: „*Zvyšování tepla provádějí včely v buňkách trávením potravy z nich.*“ (Další text se týká včel, které nejsou v buňkách, ale v prostoru mezi plásty a také mezi plásty a stěnami úlu.)



Obr. 1

„*Teplo v mezerách se šíří ze středu chomáče od včely ke včele až k povrchu. Teplo, které přijme jedna včela, předává v témže množství včele sousední. To znamená, že povrchové včely budou mít stejnou teplotu jako včely ve středu. To není možné, neboť stejným způsobem postupuje ke středu chomáče od povrchu chlad. Na tom nic nemění, že každá včela udržuje svou teplotu trávením potravy .. Na povrchu chomáče se střetává proud tepla, postupující ze středu k povrchu s proudem chladu, který vyzařují stěny úlu.*“

Otázka. Opravte text po fyzikální stránce! (Nezabývejte se rozporem, kde se na počátku mluví o tom, že v čely v buňkách trávením potravy z nich zvyšují teplo, a v dalším textu, že každá včela udržuje svou teplotu trávením potravy.)

Řešení. Neexistuje žádné „záření chladu“ Skutečnost je taková, že mezi povrchem chomáče včel a stěnami úlu je vzduchová vrstva, která se od stěn ochlazuje. Chladný vzduch pak proniká do mezer mezi včelami v chomáči, kde se ohřívá na účet tepelné energie včel. Tím, a ovšem

i tepelným zářením povrchových včel vzniká pokles teploty včel směrem k povrchu chomáče. Jestliže teplota povrchové včely poklesne pod určitou mez, což se může stát nedostatečným uteplením stěn úlu, nedostatkem potravy, a tedy nedostatečným přívodem tepla od včel, které jsou blíže středu chomáče, včela hyne a od chomáče odpadá. Ve vážnějších případech uhyne i celé včelstvo.

Emil Kašpar

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

4. V trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CBA| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ACB| = 4\alpha$; potom pro délky a , b , c jeho stran BC , CA , AB platí:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \quad (\text{R})$$

Dokažte a zjistěte, zda platí věta obrácená.
(Došlo 22 řešení)

Emil Kraemer

Téměř všichni řešitelé použili při řešení této úlohy goniometrie. Z těchto řešení otiskujeme řešení Roberta Babilona, 3D G Mikuláše Koperníka v Bílovci:

Podle vzorce pro $\sin \alpha + \sin \beta$ je

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = 2 \sin 3\alpha \cos \alpha; \quad (1)$$

podle sinové věty užitě na daný trojúhelník ABC je

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha}. \quad (2)$$

Podle věty o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je v našem případě $7\alpha = 180^\circ$. Je tedy

$$\sin 3\alpha = \sin (7\alpha - 4\alpha) = \sin (180^\circ - 4\alpha) = \sin 4\alpha.$$

Z toho plyne, že platí také rovnost

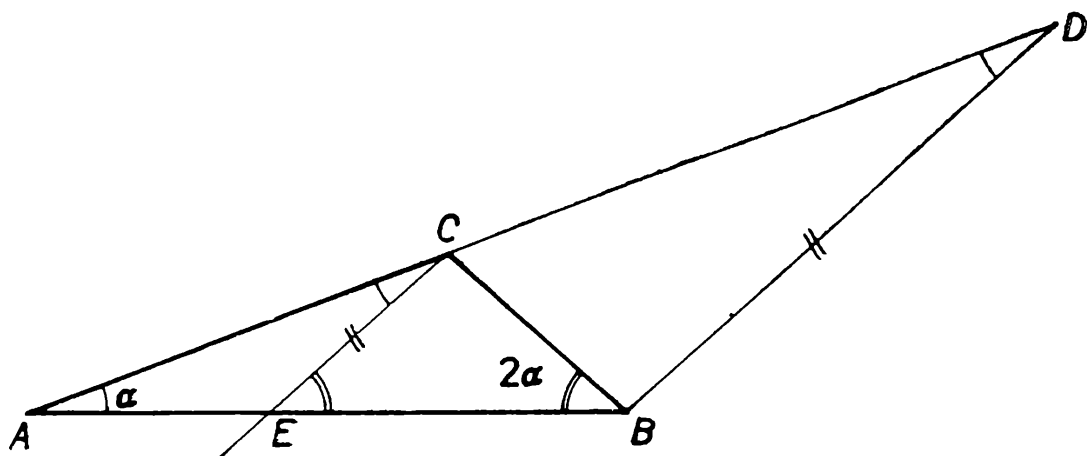
$$\sin 2\alpha \sin 3\alpha = \sin 2\alpha \sin 4\alpha$$

Užijeme-li vzorec pro $\sin 2\alpha$, dostaneme rovnost

$$\sin \alpha \cdot 2 \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha \sin 4\alpha,$$

z níž podle rovnosti (1) plyne rovnost

$$\sin \alpha (\sin 4\alpha + \sin 2\alpha) = \sin 2\alpha \sin 4\alpha$$



Obr. 1

Protože je $\sin 2\alpha \sin 4\alpha \neq 0$, platí také rovnost

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha} = 1$$

Z toho podle rovností (2) plyne rovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1;$$

po dělení této rovnosti číslem a dostaneme rovnost (R). Obrácená věta neplatí, neboť např. pro $b = c = 2a$ je splněna rovnost (R), avšak $|\sphericalangle CBA| \neq |\sphericalangle ACB|$

Úlohu můžeme však řešit také bez užití goniometrie; tak úlohu řešila *Zuzana Chlebanová, 1 G SOU v Nových Zámcích*. Její řešení je však velmi zdlouhavé; proto uvádíme řešení autora úlohy:

Jako v předešlém případě zjistíme, že je

$$7\alpha = 180^\circ; \quad (3)$$

je tedy $\alpha < 30^\circ$. Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ACE se základnou AC tak, aby jeho vnitřní úhel CAE splýval s úhlem CAB . Protože je $|\sphericalangle ACB| = 4\alpha$, leží bod E uvnitř úhlu ACB , a tedy mezi body A , B (obr. 1); zároveň je

$$|EC| = |AE|, |\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle CAE| = \alpha \quad (4)$$

Z věty o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníka a z rovnosti (3) plyne, že je

$$|\sphericalangle AEC| = 5\alpha \quad (5)$$

Proto je $|\sphericalangle BEC| = 7\alpha - 5\alpha = 2\alpha$; zároveň je $|\sphericalangle CBA| = 2\alpha$. Z toho plyne, že je

$$|EC| = |BC| = a \quad (6)$$

Stejnolehlost se středem A , která převádí bod E do bodu B , převádí bod C do bodu D ležícího na prodloužení úsečky AC za bod C . Zároveň tato stejnoolehlost převádí rovnoramenný trojúhelník ACE se základnou AC do rovnoramenného trojúhelníku ADB se základnou AD . Z toho a z rovností (4) a (5) plyne, že je

$$|BD| = |AB| = c, \quad (7)$$

$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACE| = \alpha$, $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle AEC| = 5\alpha$. Je tedy $|\sphericalangle CBD| = 5\alpha - 2\alpha = 3\alpha$; podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku užití na trojúhelník ABC je také $|\sphericalangle BCD| = 3\alpha$. Z toho a z rovnosti (7) plyne, že je

$$\begin{aligned} |CD| &= |BD| = c; \\ |AD| &= |AC| + |CD| = b + c \end{aligned} \quad (8)$$

Protože je $\triangle ADB \sim \triangle ACE$, je

$$\frac{|AC|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|BD|};$$

podle rovností (6), (8) a (7) je tedy

$$\frac{b}{a} = \frac{b+c}{c}.$$

Z toho plyne rovnost (R).

5. Je dán trojúhelník $S_v S_o O$. Sestrojte trojúhelník ABC , v němž bod O je středem strany AB , bod S_v je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC a bod S_o je středem kružnice, která je témuž trojúhelníku opsána. (Došlo 15 řešení.)

Jiří Mída

Upravené řešení Pavla Calábka, 3. C G M. Koperníka, Bílovec:

Rozbor. Vyjděme ze známého vztahu ¹⁾

$$d = \sqrt{r^2 - 2\rho r} \quad (1)$$

pro vzdálenost $d = |S_v S_o|$ středů kružnic vepsané a opsané témuž trojúhelníku, kde r je poloměr kružnice opsané a ρ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Odtud plyne

$$r^2 - 2\rho r - d^2 = 0,$$

a protože platí $r > 0$ a $\rho \leq \sqrt{\rho^2 + d^2}$, je

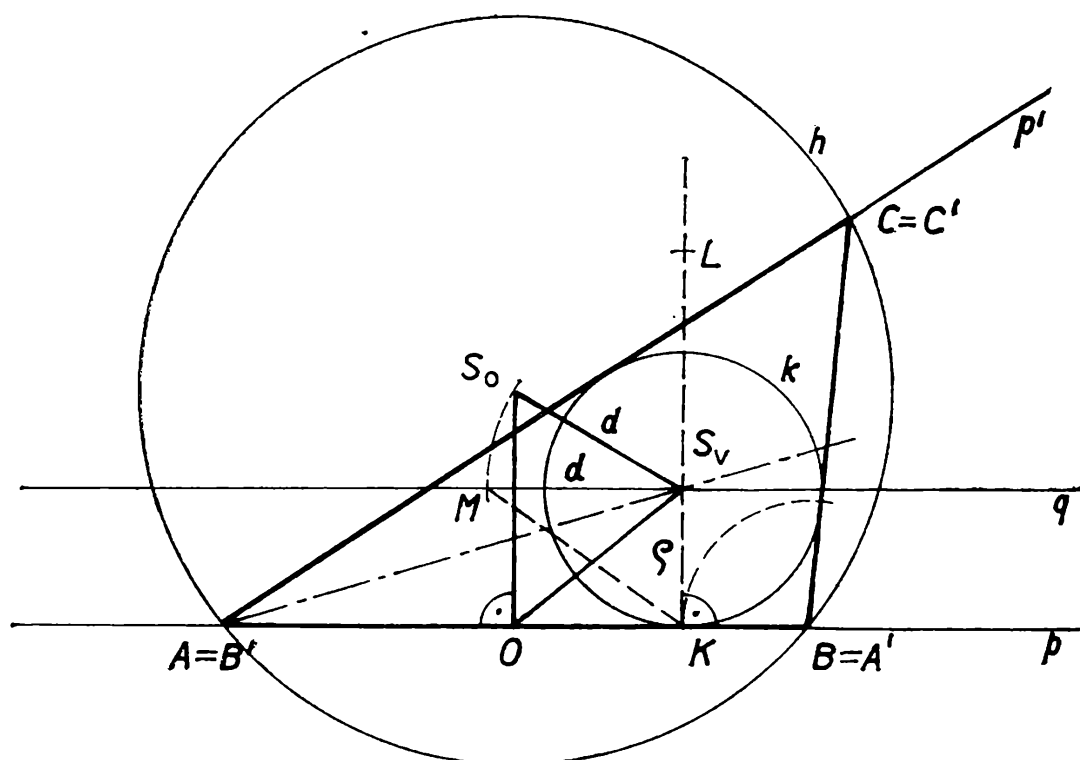
$$r = \rho + \sqrt{\rho^2 + d^2} \quad (2)$$

Střed S_o je průsečíkem os stran (obr. 2) trojúhelníku ABC , takže přímka AB je kolmá na přímku $S_o O$. Dále platí, že vzdálenost středu S_v od strany AB je rovna ρ .

Z těchto úvah plyne *konstrukce*:

1. Bodem O vedeme přímku p kolmou na $S_o O$.
2. Označíme K patu kolmice spuštěné z bodu S_v na přímku p ; $|S_v K| = \rho$.
3. Opíšeme kružnici $k(S_v; \rho)$.

¹⁾ viz např. článek L. Bočka: Eulerův vzorec pro vzdálenost středů kružnic trojúhelníku opsané a vepsané, RMF, roč. 62, 1983/84, č. 7, s. 280–281



Obr. 2

4. Bodem S_v vedeme přímkou $q \parallel p$. Označme M bod, který leží na q a platí pro něj $|S_v M| = d = |S_v S_o|$.

5. Na přímce KS_v sestrojíme bod L tak, aby bod S_v byl vnitřním bodem úsečky KL a platilo $|LS_v| = |MK| = \sqrt{\rho^2 + d^2}$.

6. Opíšeme kružnici $h(S_o; |KL|)$. Zřejmě $|KL| = |KS_v| + |S_v L| = \rho + \sqrt{\rho^2 + d^2}$. Průsečíky kružnice h a přímky p označíme A, B .

7. V osové souměrnosti podle přímky AS_v sestrojíme obraz p' přímky p ; p' je zřejmě tečnou kružnice k . Průsečík přímky p' s kružnicí h označíme C .

8. Body A, B, C jsou vrcholy hledaného trojúhelníku.

Dále je třeba provést *zkoušku*, tj. přesvědčit se, že sestrojený trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti. Bod S_o je středem jemu opsané kružnice h . Bod O je skutečně středem strany AB . Dále je třeba dokázat, že kružnice k je kružnicí vepsanou sestrojenému trojúhelníku ABC . Z konstrukce plyne, že kružnice k se dotýká stran AB a AC a že její střed S_v leží na ose úhlu BAC . Má-li se k dotýkat i strany BC , pak musí vzdálenost $|S_v S_o|$ odpovídat Eulerovu vzorci (1). To je splněno, neboť poloměr r kružnice h opsané trojúhelníku ABC byl zkonstruován podle vzorce (2).

Diskuse. Úloha je řešitelná, právě když

$$|\sphericalangle S_v O S_o| \neq \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Tato podmínka je nutná, neboť v případě, že by neplatila, musel by střed S_γ vepsané kružnice ležet na straně AB , což neplatí v žádném trojúhelníku ABC . Popsaná konstrukce slouží jako důkaz, že podmínka (3) je postačující.

V šestém bodu konstrukce lze vrcholy A, B označit právě dvěma způsoby; takže při splnění podmínky (3) má úloha právě dvě řešení. Na obr. 2 jsou to trojúhelníky ABC a $A'B'C'$

6. Dokažte, že existuje nekonečná posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \dots$, která splňují tuto podmínku: Pro libovolná kladná celá čísla i, j existuje taková uspořádaná čtveřice reálných čísel (b_1, b_2, b_3, b_4) , že platí:

$$a) \quad a_{4i-3} \cdot b_1 + a_{4i-2} \cdot b_2 + a_{4i-1} \cdot b_3 + a_{4i} \cdot b_4 = \\ = a_{4j-3} \cdot b_1 + a_{4j-2} \cdot b_2 + a_{4j-1} \cdot b_3 + a_{4j} \cdot b_4 = 1$$

$$b) \quad a_{4k-3} \cdot b_1 + a_{4k-2} \cdot b_2 + a_{4k-1} \cdot b_3 + a_{4k} \cdot b_4 < 1 \\ \text{pro všechna kladná celá čísla } k, i \neq k \neq j.$$

(Došla 2 řešení)

Jaroslav Morávek

Oba řešitelé, tj. *Robert Babilon z 3D G M. Koperníka v Bílovci* a *Hana Peňázová z 3B G Brno, tř. kpt. Jaroše*, řešili úlohu v podstatě zcela stejně, a to takto:

Budiž $a_1, a_2, \dots$ nějaká posloupnost reálných čísel a (b_1, b_2, b_3, b_4) budiž uspořádaná čtveřice reálných čísel. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme

$$F_b(k) = a_{4k-3} \cdot b_1 + a_{4k-2} \cdot b_2 + a_{4k-1} \cdot b_3 + a_{4k} \cdot b_4 \quad (1)$$

Funkce $F_b(k)$ má splňovat tyto podmínky:

$$F_b(i) = F_b(j) = 1, \quad F_b(k) < 1 \quad \text{pro} \quad i \neq k \neq j$$

Tyto podmínky splňuje např. funkce

$$F_b(k) = 1 - r(k-i)^2(k-j)^2,$$

kde r je libovolné kladné číslo. Po provedeném výpočtu zjistíme, že je $F_b(k) = -rk^4 + 2r(i+j)k^3 - r(i^2+j^2+4ij)k^2 + 2rij(i+j)k + 1 - ri^2j^2$

Zvolme r tak, aby bylo $1 - ri^2j^2 = 0$; potom je

$$r = \frac{1}{i^2j^2}.$$

Položíme-li tedy v řádku (1)

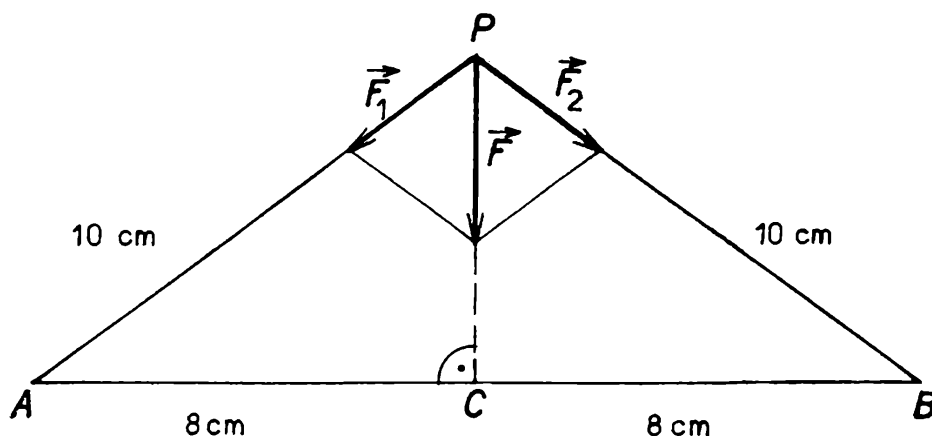
$$a_{4k-3} = k^4, \quad a_{4k-2} = k^3, \quad a_{4k-1} = k^2, \quad a_{4k} = k, \\ b_1 = -\frac{1}{i^2j^2}, \quad b_2 = 2\frac{i+j}{i^2j^2}, \quad b_3 = -\frac{i^2+j^2+4ij}{i^2j^2}, \quad b_4 = 2\frac{i+j}{ij},$$

pak funkce $F_b(k)$ splňuje požadované podmínky.

Fyzika

1. Dva hmotné body, každý o hmotnosti 5 kg, jsou umístěny v bodech A, B (obr. 1). Řešte tyto úlohy:

a) Nalezněte velikost a směr počátečního zrychlení desetigramového



hmotného bodu, ktorý je vypuštěn z klidu z bodu P . Působí na něj jen gravitační síly pocházející od hmotných bodů umístěných v bodech A, B .

b) Nalezněte rychlost desetigramového hmotného bodu v bodu C . (Došlo 8 řešení) *Eva Havráňková*

Řešení Pavla Kolníka, 3C G Nové Město nad Váhom:

a) V bodech A, B sa nachádzajú hmotné body, každý s hmotnosťou $M = 5 \text{ kg}$. V bode P je hmotný bod s hmotnosťou $m = 0,01 \text{ kg}$. Na tento hmotný bod pôsobia hmotné body, umiestnené v bodech A, B , gravitačnou silou.

Hmotný bod, umiestnený v bode A , pôsobí na desaťgramový hmotný bod v bode P silou $\mathbf{F}_1$, ktorá má veľkosť $|\mathbf{F}_1| = \kappa M m / |PA|^2$ (κ je gravitačná konštanta) a smer orientovanej úsečky $\mathbf{PA}$.

Hmotný bod, umiestnený v bode B , pôsobí na desaťgramový hmotný bod v bode P silou $\mathbf{F}_2$, ktorá má veľkosť $|\mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}_1|$ a smer orientovanej úsečky $\mathbf{PB}$.

Zložky oboch síl, ktoré sú rovnobežné s priamkou AB , sa navzájom vyrušia. Preto na desaťgramový hmotný bod pôsobí výsledná sila $\mathbf{F}$ o veľkosti $|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}_1| \sin(\angle PAC) + |\mathbf{F}_1| \sin(\angle PBC) = 2\kappa M m |PC| / |PA|^3$, ktorá má smer orientovanej úsečky $\mathbf{PC}$. Sila $\mathbf{F}$ udeľuje desaťgramovému hmotnému bodu zrychlenie $\mathbf{a}$ o veľkosti $|\mathbf{a}| = 2\kappa M |PC| / |PA|^3$, ktoré má smer orientovanej úsečky $\mathbf{PC}$. Číselne:

$$\kappa = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

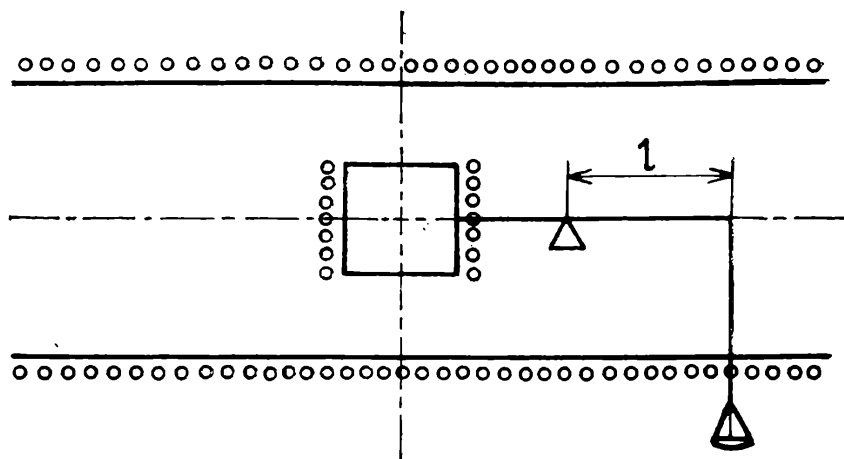
$$M = 5 \text{ kg}$$

$$|PC| = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$$

$$|PA| = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$$

$$|\mathbf{a}| = (2 \cdot 6,672 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 0,06 / 0,1^3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) V bode P mal desaťgramový hmotný bod v gravitačnom poli hmotných bodov M , umiestnených v bodech A, B , potenciálnu energiu $E_p = -2\kappa M m / |PA|$ a kinetickú energiu nulovú. V bode C bude mať desaťgramový hmotný bod potenciálnu energiu $E'_p = -2\kappa M m / |CA|$ kinetickú energiu $E'_k = m v_c^2 / 2$, kde v_c je jeho rýchlosť v bode C . Podľa zákona zachovania energie platí



Obr. 2

$$E_p = E'_p + E'_k, \text{ t.j. } -2\kappa \frac{m M}{|PA|} = -2\kappa \frac{m M}{|CA|} + \frac{1}{2} m v_c^2,$$

odkiaľ

$$v_c = \sqrt{4\kappa M \left(\frac{1}{|CA|} - \frac{1}{|PA|} \right)}$$

Číselne: $v_c = 5,78 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Uprostřed dlouhé cívky (obr. 2), jejíž vinutí má n závitů na délkovou jednotku, je umístěna krátká cívka průřezu S , která má N závitů. Osa krátké cívky je kolmá k ose dlouhé cívky a je svislá. Krátká cívka je připevněna na jednom konci vahadla, které je vyváženo, neprochází-li cívkami proud. Prochází-li oběma cívkami proud I , musíme přidat na delší rameno závaží o tíze P , abychom obnovili rovnováhu. Rameno vahadla, které nese závaží, má délku l . Vypočítejte proud I . Můžeme tento přístroj použít jako wattmetr?

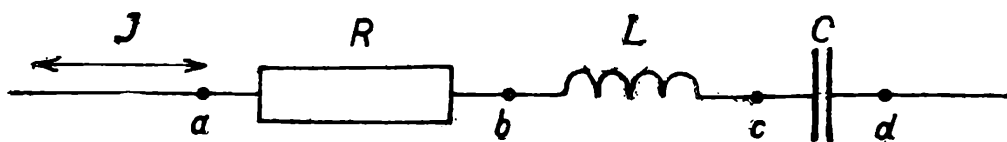
(Došlo 6 řešení)

Eva Havránková

Řešení Pavla Kolníka, 3C G Nové Město nad Váhom:

Uprostřed dlhej cievky sa vytvorí magnetické pole s indukciou $\vec{B}$, ktorá má smer osi cievky a veľkosť $B = \mu_0 n I$, kde μ_0 je permeabilita vákua. Krátka cievka má N závitov s plochou S , pričom os tejto cievky je kolmá na smer indukcie $\vec{B}$. Ak krátkou cievkou tečie prúd I , pôsobí na ňu magnetické pole dlhej cievky momentom síl $\vec{M}$, ktorý má veľkosť $M = I S B N = \mu_0 n N S I^2$ a ktorý je kolmý na rovinu danú osiami cievok. Tento moment je treba eliminovať závažím o tiaži P , pôsobiacím na konci ramena dĺžky l , teda momentom $M' = P l$. Z rovnosti $M = M'$ plynie

$$I = \sqrt{\frac{P l}{\mu_0 n N S}}$$



Obr. 3

Takýto priestroj môže byť použitý ako wattmeter, pretože moment síl M je úmerný súčinu prúdov oboch cievok. Dlhú cievku s veľkým počtom závitov zapojíme paralelne ku spotrebiču, krátku cievku s malým počtom závitov sériovo.

3. Odpor o hodnotě R , indukční cívka o indukčnosti L a kondenzátor o kapacitě C jsou zapojeny v sérii (obr. 3). Protéká jimi střídavý proud I . Nechť hodnota odporu $R = 8 \Omega$, induktance indukční cívky $X_L = 6 \Omega$, kapacitance kondenzátoru $X_C = 12 \Omega$ a efektivní hodnota proudu I je 5 A. Nalezněte efektivní napětí U_{ab} , U_{bc} , U_{cd} na jednotlivých prvcích obvodu, efektivní napětí U_{ad} a fázový rozdíl φ mezi proudem protékajícím obvodem a napětím mezi body a , d .

(Došlo 7 řešení)

Eva Havráňková

Řešení Pavla Kolníka, 3C G Nové Město nad Váhom:

Impedancia obvodu je $Z = R + j(X_L - X_C)$, kde j je imaginárna jednotka, a jej veľkosť je $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$. Efektívna hodnota prúdu, pretekajúceho obvodom, je $I = 5$ A. Preto sú na jednotlivých prvkoch nasledovné efektívne napätia:

$$\begin{aligned} \text{na rezistore:} & \quad U_{ab} = R I = 40 \text{ V}, \\ \text{na cievke:} & \quad U_{bc} = X_L I = 30 \text{ V}, \\ \text{na kondenzátore:} & \quad U_{cd} = X_C I = 60 \text{ V}, \\ \text{medzi bodmi } a, d: & \quad U_{ad} = Z I = 60 \text{ V} \end{aligned}$$

Medzi prúdom, pretekajúcim obvodom, a napätím medzi bodmi a , d je fázový rozdiel φ , pričom $\tan \varphi = -(X_L - X_C) / R$, odkiaľ $\varphi = 36^\circ 52' 12''$.

Úlohy k řešení

V tomto čísle otiskujeme ďalší štyri úlohy z matematiky, dve úlohy z fyziky a jednu úlohu z konštrukčnej geometrie. Poslední soutěžní úlohy otiskneme v příštím čísle. Řešení nyní otištěných úloh zašlete do 10. března 1987 na adresu redakce *Rozhledů*, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla tohoto časopisu.

Řešení každé úlohy pište čitelně česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Na každém listu uveďte nahore vlevo své jméno, třídu i školu,

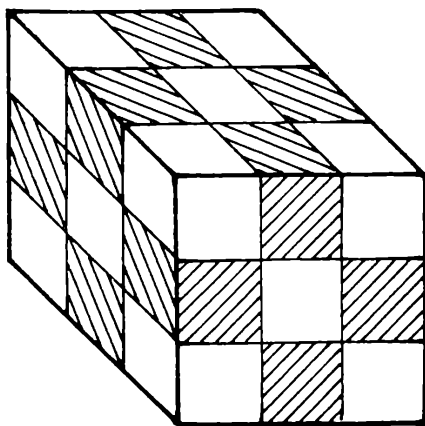
kde studujete, a připojte svou bytovou adresu se směrovacím číslem.

Matematika

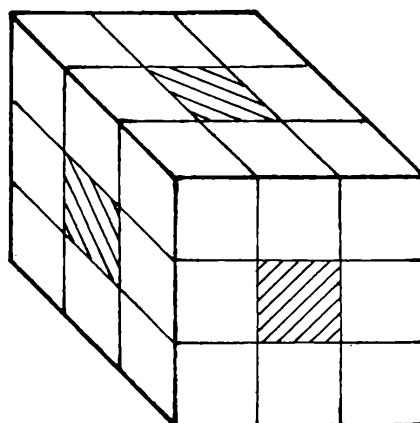
4. Ze shodných černých a bílých jednotkových krychlí byly sestaveny tři větší krychle, z nichž každá má hranu o délce $a = 3$. Jsou to tyto krychle:

a) „Šachovnicová“, složená ze 14 bílých a 13 černých malých krychlí (obr. 1).

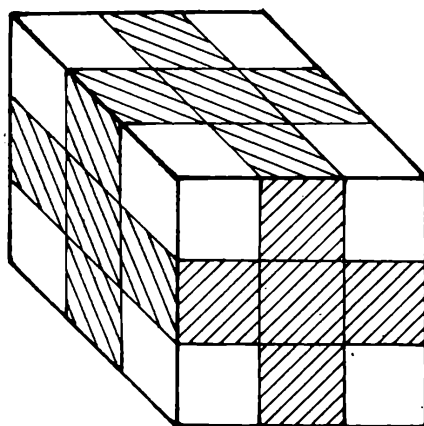
b) „Komínová“, složená ze 7 černých a 20 bílých malých krychlí; černé krychle tvoří tři hranolovité „komíny“ s podstavami ve středních polích sestavené krychle (obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

c) „Vrstevnicová“, složená z 19 černých a 8 bílých malých krychlí; černé krychle tvoří tři střední vrstvy sestavené krychle (obr. 3).

Sestrojte řez každé ze tří sestavených krychlí rovinou, která prochází středem této krychle kolmo k některé její tělesové úhlopříčce. Řezy provedené černými malými krychličkami vyšrafujte; řezy bílými krychličkami budou bílé.

Milan Koman

5. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC , který není rovnoramenný; délky jeho odvěsen jsou $a = |BC|$, $b = |AC|$. Přímka p vedená vrcho-

lem C protíná přeponu AB v jejím vnitřním bodu P . Sestrojte (eukleidovskou konstrukcí) přímku p tak, aby kružnice vepsaná trojúhelníku APC byla shodná s kružnicí vepsanou trojúhelníku BPC .

Emil Kraemer

6. Dokažte, že pro velikosti α, β, γ vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku platí:

$$\begin{aligned} & \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} \cdot \cotg \frac{\alpha}{2} \leq \\ & \leq \frac{8}{27} \left(\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} \right)^2 + 1 \end{aligned}$$

Přitom rovnost nastává, právě když je trojúhelník rovnostranný.

Dmitrij P. Mavlo, Moskva

7. V článku *Ovál a elipsa*, který je otištěn v tomto čísle *Rozhledů*, je vyložena konstrukce jednoho oválu a konstrukce oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy určené poloosami a, b ($a > b$). Řešte tyto úlohy:

- Vypočtěte (pomocí čísel a, b) poloměry R_0, r_0 kružnic, z jejichž oblouků je složen ovál popsáný v uvedeném článku.
- Vypočtěte (pomocí poloos a, b) poloměry r, R oskulačních kružnic sestavených ve vrcholech elipsy.
- Dokažte, že všechny body oskulační kružnice sestavené v hlavním vrcholu elipsy patří vnitřní oblasti určené oskulační kružnicí, která je sestavena ve vedlejším vrcholu elipsy.
- Vypočtěte (pomocí poloos a, b) délku x úsečky FG , která je na přímce $S_r S_R$ omezena průsečíky této přímky s oskulačními kružnicemi sestavenými ve vrcholech A, C (viz obr. 2 uvedeného článku).

Vlastimil Mráz

Fyzika

3. Určete hmotnost jedné molekuly vody, jedné molekuly vodíku a jednoho atomu vodíku. Kolik molekul obsahuje 1 g vody?

Eva Havránková

4. Vypočítejte měrné teplo při stálém tlaku a měrné teplo při stálém objemu pro dusík a kyslík, víte-li, že Poissonova konstanta pro dvouatomové plyny je 1,4 a že rozdíl molárního tepla při stálém tlaku a molárního tepla při stálém objemu je roven univerzální plynové konstantě (Mayerův vztah).

Eva Havránková

Konstrukční geometrie

1. Je dána kulová plocha $\kappa = (S; r)$ a na ní dva různé body A, B . Na ploše κ najděte bod C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnostranný. Určete podmínky řešitelnosti.

Stanislav Horák

Poznámka k úloze č. 6 z matematiky. Při řešení této úlohy se dá výhodně užít tato Cauchyova nerovnost platná pro libovolná kladná čísla a, b, c :

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} ;$$

rovnost nastane, právě když je $a = b = c$.

OLYMPIÁDY A SOČ

Olympiáda pro programátory

RNDr. PAVEL TÖPFER, MFF UK Praha

V uplynulém školním roce 1985/86 zaznamenala matematická olympiáda jednu významnou změnu. Byla zřízena nová kategorie P , jejíž náplní jsou úlohy týkající se programování. V poslední době vzniklo více programátorských soutěží nejrůznějšího typu a úrovně. Kategorie P matematické olympiády si klade za cíl být vrcholnou soutěží pro matematicky a algoritmicky talentované studenty středních škol.

Pro ty, kdo o této nové kategorii ještě neslyšeli, uvedeme nejprve několik informací o organizaci soutěže. Kategorie P je určena všem žákům středních škol bez rozdílu věku, její hodnocení je na úrovni kategorie A . Od řešitelů se vyžaduje znalost programování, ale nepožaduje se ovládání žádného konkrétního počítače ani detailní zvládnutí nějakého programovacího jazyka. Pro pochopení zadání některých úloh je však třeba, aby řešitel rozuměl základním konstrukcím jazyka Pascal nebo Basic. K řešení úloh je třeba především matematické a algoritmické myšlení, úlohy jsou zaměřené na tvorbu a analýzu algoritmů. Soutěž je organizována obdobně jako kategorie A matematické olympiády ve třech kolech — domácím, krajském a celostátním. Od ostatních kategorií MO se nová kategorie P liší způsobem opravování úloh. Řešení úloh všech kol opravují a hodnotí centrálně pracovníci ve třech centrech, a to na MFF UK Praha, PřF UJEP Brno a MFF UK Bratislava. K tomuto způsobu hodnocení nás vedla snaha nezatěžovat učitele středních škol a pracovníky KV MO další prací, snaha vytvořit stejné podmínky pro všechny soutěžící a v neposlední řadě i potřeba získat celkový přehled o náročnosti úloh v tomto novém typu soutěže.

A jak vlastně vypadal první ročník? I když šlo vlastně o experiment založený více na nadšení než na zkušenostech organizátorů, dopadl

velmi úspěšně. Na podzim loňského roku byly zaslány čtyři úlohy domácího kola na všechna gymnázia a na další vybrané střední školy. Do soutěže se zapojilo více než 250 řešitelů, z nichž asi polovina vyřešila úlohy úspěšně. Úspěšní řešitelé obdrželi pozvánky do krajského kola. Krajská kola proběhla ve všech krajích v sobotu 12. 4. 1986, za jejich zajištění patří poděkování pracovníkům všech krajských výborů MO. Z úspěšných řešitelů krajských kol bylo vybráno 50 nejlepších (20 z Čech, 10 z Moravy a 20 ze Slovenska) k účasti v celostátním kole matematické olympiády kategorie *P*. Celostátní kolo se uskutečnilo ve dnech 12.—15. května 1986 ve Štúrově, všichni účastníci byli ubytováni v rekreačním středisku SÚV SZM v nedalekém Kováčově. Celou akci po všech stránkách výborně zabezpečili pracovníci bratislavské matematicko-fyzikální fakulty. Vlastní soutěž probíhala ve dvou dnech, každý den měli soutěžící čtyři hodiny na práci nad dvěma úlohami. Volná odpoledne trávili studenti vycházkami do krásného okolí, organizátoři pak celá odpoledne věnovali posuzování a opravování odevzdaných řešení. Poslední den večer proběhlo slavnostní vyhlášení výsledků. Vítězové a úspěšní řešitelé obdrželi diplomy a tři nejlepší soutěžící navíc věcné ceny.

Výsledky celostátního kola MO kategorie P

Vítězové:

1. Zohdy Hamid, 3. r., gymnázium A. Markuša, Bratislava
2. Alexander Szabari, 4. r., gymnázium Košice, Šmeralova ul.
3. Roman Dudek, 4. r., gymnázium Nitra
4. Peter Klein, 3. r., gymnázium A. Markuša, Bratislava
- 5.—6. Marcel Polakovič, 3. r., gymnázium A. Markuša, Bratislava
Vladan Majerech, 3. r. gymnázium Pardubice
7. Petr Šleich, 4. r., gymnázium Děčín
- 8.—9. Filip Zavoral, 4. r., gymnázium Praha 10, Voděradská ul.
Vladimír Veselý, 3. r., gymnázium J. Hronca, Bratislava
- 10.—11. Richard Krajcoviech, 3. r., gymnázium Pov. Bystrica
Tomáš Trégl, 3. r., gymnázium W. Piecka, Praha 2

Další úspěšní řešitelé:

12. Pavel Kozlovský, 2. r., gymnázium Jindřichův Hradec
- 13.—15. Robert Germic, 4. r., gymnázium Žilina
Mario Drosc, 3. r., gymnázium Michalovce
Michal Dostál, 3. r., gymnázium W. Piecka, Praha 2
16. Ivan Polach, 4. r., gymnázium J. Hronca, Bratislava
17. Petr Veselý, 4. r., gymnázium Jihlava
18. Jiří Martínek, 2. r., gymnázium Ústí nad Labem
- 19.—20. Peter Muška, 3. r., gymnázium Poprad
Ladislav Zejda, 4. r., gymnázium Jihlava

- 21.—22. Pavol Kolník, 3. r., gymnázium Nové Mesto nad Váhom
 Marian Szabo, 3. r., gymnázium J. Hronca, Bratislava
 23.—25. Petr Steinmetz, 3. r., gymnázium Brno, Koněvova ul.
 Stanislav Parnický, 3. r., gymnázium A. Markuša, Bratislava
 Martin Zítek, 3. r., gymnázium Milevsko

Také v tomto školním roce 1986/87 se matematická olympiáda kategorie *P* úspěšně rozběhla. Všichni organizátoři věří, že soutěž bude mít letos ještě větší ohlas a vyšší úroveň než loni. Pro zajištění dalších ročníků MO kat. *P* přivítáme každou pomoc a spolupráci. Připomínáme proto, že existuje stále otevřený konkurs ústředního výboru matematické olympiády na návrhy úloh MO. Do tohoto konkursu můžete od nynějška zasílat i úlohy pro kategorii *P*, přijaté návrhy budou honorovány.

Všechny studenty středních škol zveme k účasti v této zajímavé soutěži a při řešení úloh jim přejeme hodně úspěchů.

Celostátní kolo 27. ročníku fyzikální olympiády

RNDr. IVO VOLF, ÚVFO Hradec Králové

Ve dnech 3.—6. dubna 1986 proběhlo v Českých Budějovicích celostátní kolo fyzikální olympiády v kategorii A, kterého se zúčastnilo 83 soutěžících ze všech krajů. K řešení byly soutěžícím předloženy čtyři teoretické úlohy, na jejichž vyřešení měli 5 hodin času. První úloha vyžadovala znalosti z povinného studijního tématu o relativistických jevech, ve druhé úloze se určovaly velikosti sil a zrychlení při pohybu soustavy těles spojených vláknem. Třetí úloha byla nejobtížnější — problémová úloha o nabíjení kondenzátoru, čtvrtá úloha řešila problém z fotometrie. Pátá, experimentální úloha byla zvolena z hydrodynamiky — řešitelé měli určit součinitel dynamické viskozity. Letošní úlohy byly poměrně obtížné — z celkového počtu dosažitelných 60 bodů získal nejlepší řešitel 47,5 bodu, ale průměrný výsledek všech 83 řešitelů byl 18,3 bodu, tedy jen 30,5 %. Čtyřicet řešitelů bylo v soutěži úspěšných, zbývajících 43 získalo méně než 18,0 bodu a byli v soutěži neúspěšní. *Prvních dvacet soutěžících bylo vyhlášeno vítězi 27. ročníku FO.*

- | | |
|---|---------|
| 1. Jan Novák, 4. roč. gymnázia v Praze 10, Voděradská | 47,5 b. |
| 2. Radek Adamec, 4. roč. gymnázia v Kroměříži | 45,0 b. |
| 3. Tomáš Ledvinka, 4. roč. SPČ v Praze 1, Na příkopě | 44,5 b. |
| 4. Pavol Kolník, 3. roč. gymnázia v Novém Městě nad Váhom | 43,0 b. |
| 5. Martin Zápotocký, 4. roč. gymnázia v Praze 3, Sladkovského | 37,5 b. |
| 6. Dušan Spurný, 4. roč. gymnázia J. Hronca v Bratislavě | 36,5 b. |

7. Vladimír Hašík, 4. roč. SPŠ elektro v Košicích	35,5 b.
8. Vladimír Kordula, 4. roč. gymnázia v Bílovci	34,0 b.
9. Stanislav Meduna, 4. roč. gymnázia J. Hronca v Bratislavě	31,5 b.
10.—11. Jaroslav Hora, 3. roč. gymnázia v Brně, kpt. Jaroše	31,0 b.
Peter Müller, 4. roč. gymnázia maď. v Komárně	31,0 b.
12.—13. Petr Šleich, 4. roč. gymnázia v Děčíně	29,5 b.
Pavel Dvořák, 4. roč. gymnázia v Č. Budějovicích	29,5 b.
14.—16. Nataša Formanová, 4. roč. gymnázia v Rychnově nad Kněžnou	29,0 b.
Daniel Ryppl, 4. roč. gymnázia v Plzni, ul. Pionýrů	29,0 b.
Peter Matta, 4. roč. gymnázia v Michalovicích	29,0 b.
17. Petr Jaroš, 4. roč. gymnázia v Pelhřimově	28,0 b.
18. Waldemar Ježík, 4. roč. gymnázia v Karviné	27,0 b.
19.—20. Peter Mužila, 4. roč. gymnázia v Nitře-Párovce	26,0 b.
Pavel Brož, 4. roč. gymnázia v Karviné.	26,0 b.

Pořadatelé celostátního kola — krajský výbor fyzikální olympiády Jihočeského kraje — věnovali hodně pozornosti přípravám samotné soutěže, ale také kulturnímu a poznávacímu obsahu volného času soutěžících.

Prvních 11 soutěžících bylo vybráno na zasedání ÚVFO do širšího výběru pro nominaci československého družstva na 17. mezinárodní fyzikální olympiádu do Velké Británie.

INFORMACE

Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v roce 1986

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

Zájemci o studium na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy jistě uvítají texty úloh k přijímacím zkouškám z matematiky, které proběhly ve dnech 17.—19. 6. 1986. Každý uchazeč řešil jeden ze tří souborů pěti úloh v závislosti na oboru studia, k němuž se přihlásil. Čistý čas na vypracování každé pětice příkladů činil 90 minut; čtenář se jistě dovtípí, že výsledky úloh uvedené v následujícím přehledu nebyly řešitelům k dispozici.

Soubor pro uchazeče o matematické obory:

1. V trojúhelníku ABC známe délku a strany BC a vnitřní úhel α při vrcholu A . Navíc víme, že $|AB| = 2|AC|$.

a) Vyjádřete délky $b = |AC|$, $c = |AB|$ pomocí a , α .

b) Rozhodněte výpočtem (pomocí a)), kdy takový trojúhelník existuje.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Výsledek: a) } b = \frac{a}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}, c = \frac{2a}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} \\ \text{b) Existuje vždycky.} \end{array} \right]$$

2. Dutá koule (vzniklá z plné koule odstraněním soustředné koule) o vnějším poloměru 2 cm váží stejně jako plná koule (ze stejného materiálu) o poloměru 1 cm. Je tlustší nebo tenčí než 1 mm?

[Výsledek: Je tenčí.]

3. a) Určete všechna reálná čísla x , pro která je

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$

b) Existuje nějaké reálné číslo u takové, že

$$\sin^4 u + \cos^4 u = \frac{3}{8}?$$

$$\left[\text{Výsledek: a) } x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; \text{ b) Neexistuje.} \right]$$

4. Pro libovolné reálné číslo x položme

$$p = p(x) = \log_{10} (|x - 4| + |x - 9| + 6).$$

Zjistěte, pro která x geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}$ konverguje.

[Výsledek: Řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.]

5. Dva hráči hrají následující hru: Před začátkem partie je na stole dvacet sirek, hráči se střídají na tahu a v každém tahu odeberou podle svého uvážení 1, 2 nebo 3 sirky. Hráč, který táhne poslední, vyhrává. Dejte druhému hráči předpis, podle kterého vyhraje proti libovolné taktice protivníka. (Návod: 20 je dělitelno čtyřmi.)

Další dva soubory budou otištěny v č. 4.

Z NOVÝCH KNIH

Josef Kubát:

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY PRO PŘÍPRAVU K PŘIJÍMACÍM ZKOUŠKÁM NA VYSOKÉ ŠKOLY

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze, 1. vydání, 366 stran, cena 19,— Kčs, Praha 1986

Autorem sbírky je středoškolský profesor RNDr. Josef Kubát, který v ní shromáždil velké množství příkladů ze středoškolské matematiky včetně ukázek příkladů, které byly v minulých letech zadány u přijímacích zkoušek z matematiky na vysokých školách různého typu v ČSR. Tyto příklady jsou většinou jen průměrně obtížné, ale jsou cenné tím, že mají komplexní charakter, neboť jejich úkolem je prověřit připravenost uchazeče o vysokoškolské studium oboru, který vyžaduje dobrou znalost

středoškolské matematiky. Takových příkladů je ve sbírce uvedeno více než 600 a jsou seřazeny ve 112 sériích tak, jak byly v minulých letech u přijímacích zkoušek zadány. Kromě těchto příkladů může student řešit samostatně další úlohy, které pokrývají obsahově nejdůležitější učivo matematiky střední školy; jsou uspořádány do 9 okruhů. Z těchto úloh je 77 vzorově řešených, ostatních 575 autor uvádí pouze s výsledky řešení.

Vydávaná publikace by neměla ujít pozornosti středoškolských studentů, kteří se chtějí dobře připravit k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Může však být užitečná i těm, kteří si potřebují upevnit základní znalosti středoškolské matematiky.

Jarmila Sedláčková

Kalendár M-F: november 1986

2. XI. 1966 zomrel v Ithace (USA) *Peter Josepf Wilhelm Debye*, holandský teoretický fyzik a chemik. Pôsobil v Nemecku a neskôr v USA. Skúmal difrakciu svetla, vypracoval teóriu molárnych tepiel pevných látok, zaviedol pojem dipóloveho momentu, vytvoril metódu pre röntgenovú analýzu kryštálov. V roku 1936 získal Nobelovu cenu za chémiu.
8. XI. 1656 sa v Haggerstone narodil *Edmund Halley*, anglický astronóm a matematik. Bol riaditeľom hvezdárne v Greenwichi, vypočítal

- elementy dráh 30 komét, správne predpovedal návrat jednej z nich. Skúmal zemský magnetizmus, vydal prvú veľkú mapu magnetických deklinácií.
13. XI. 1956 zomrel *Jan Lukaszewicz*, poľský matematik a logik. Vytvoril prvý systém viachodnotovej logiky a rozpracoval originálny jazyk pre formalizáciu výrokovej logiky.
 14. XI. 1716 zomrel v Hannoveri *Gottfried Wilhelm Leibniz*, nemecký matematik, fyzik a filozof. Zaoberal sa aj právom, históriou, teológiou, jazykovedou, biológiou, diplomaciou. Právom sa označuje za polyhistora. Zostavil počítač stroj na základné početné úkony, vytvoril veľa dodnes používaných matematických symbolov. V rokoch 1673—1676 vypracoval základy diferenciálneho počtu. Rozvíjal ideu logického kalkulu, naznačil výhodnosť dvojkovej sústavy.
 18. XI. 1891 sa v Jaroslavi narodil *Nikolaj Fedorovič Četveruchin*, sovietsky matematik, profesor Moskovskej univerzity. Pracoval v oblasti projektívnej geometrie.
 18. XI. 1941 zomrel v Bad Muskau *Walter Herman Nernst*, nemecký fyzik a fyzikálny chemik. Prispel k teórii elektrolytov a galvanických článkov, formuloval tretiu hlavnú vetu termodynamiky. V roku 1920 získal Nobelovu cenu za chémiu.
 19. XI. 1711 sa v Denisovke (Archangelská gubernia) narodil *Michail Vasilievič Lomonosov*, ruský prírodovedec, filozof. Vedecky pracoval vo fyzike, chémii, astronómii, metalurgii, geológii. Odhalil zákon zachovania hmotnosti. Patrí k zakladateľom prírodovedy v Rusku.
 23. XI. 1616 sa v Ashforde narodil *John Wallis*, anglický matematik. Zaoberal sa analýzou nekonečne malých veličín, zaviedol nekonečné rady a nekonečné súčiny. Geometrické dôkazy robil pomocou algebry. Zaviedol znak ∞ pre nekonečno.
 25. XI. 1926 sa v Šanghaji narodil *Tsung-Dao Lee*, čínsky fyzik. Zaoberal sa otázkami mezonovej fyziky a fyziky jadra. V roku 1957 získal spolu s *Ch. N. Yangom* Nobelovu cenu za fyziku za výskum zákona zachovania parity.
 25. XI. 1936 zomrel *Edouard Goursat*, francúzsky matematik. Pracoval v oblasti matematickej analýzy a teórii analytických funkcií.
 27. XI. 1701 sa v Uppsale narodil *Anders Celsius*, švédsky astronóm a fyzik. Navrhol teplotnú stupnicu, skúmal zákonitosti magnetickej deklinácie.
 30. XI. 1756 sa vo Wittenbergu narodil *Ernst Chladni*, nemecký fyzik. Študoval rýchlosť šírenia zvuku v rôznych plynch, zaoberal sa akustikou kmitajúcich dosák a membrán.
 30. XI. 1921 zomrel *Hermann Amandus Schwarz*, nemecký matematik. Pracoval úspešne v teórii konformného zobrazenia a v oblasti variačného počtu.

dj

REPORTAŽE Z MIKROSVETA



SOM ELEKTRONIK...
...JEDEN Z MNOHÝCH A
SOM RÁD, ŽE PRAVE
S MOJOU POMOCOU
SA VAM BUDÚ
DOSTAVAŤ
REPORTAŽE Z
MIKROSVETA.



MIKROSVET JE
NAŠ SVET. MUSÍM
POVEDAŤ NAŠ, LEBO MY
SME SI VŠETCI ROVNÍ.
DOKONČA TAK
ROVNÍ, ŽE ANI MENA
NEMÁME.



AJ V TOM
NAJMEŇŠOM
PRÁŠKU, KTORÝ
OKOLO VÁS SADA
SÚ NAŠ
MILIARDY.

SOM ELEKTRONIK,
ALE LEN PRE VÁS. MOJI BRATIA
MA ROZLIŠUJÚ LEN PODĽA MÔJHO
STAVU A TO ENERGETICKEHO.
V NAŠOM SVETE,
TOTIŽ NEHLADÍME
VEĽMI NA TO, ČO KTO
O SEBE HOVORÍ,
ALEBO AKO SA
OBLIEKA.



VY, ĽUDIA NAŠ ROZLIŠUJETE
PODĽA NAŠICH FUNKCIÍ, PODĽA
MIEST, KTORÉ V MIKROSVETE
ZAJÍMAME A
KTORÉ V NŇOM
PLNÍME.



MY SA HODNOTÍME LEN PODĽA
TOHO, AKÚ MÁME SCHOPNOSŤ PRÁ-
COVAŤ, POHYBOVAŤ SA, AKO DÁVAME
PRIRODE, MOŽNOSŤ VYVIJAŤ SA,
HOVORÍ SA TOMU, ŽE NAŠ MOŽNO
DELIŤ LEN PODĽA NAŠEJ
ENERGIE.



NEZÁVIDÍME SI.
VEĎ RAZ JEDEN,
RAZ ZASA, DRUHÝ Z
NAŠ ZASTÁVAME RÔZNE
ÚLOHY A MIESTA V
STAVBE SVETA.

VEĎ NAŠ MIKROSVET
JE VŠADE VO VAŠOM
SVETE, KTORÝ SI VY
VOLÁTE AJ
MAKROSVET



ABY SME SA LEPŠIE
POZNALI TAK VAM DOVIEM NIEČO
O SVOJOM VZNIKU. NA ROZDIEL
OD VAS ĽUDÍ, SA NERODIME
AKO MALE DETI RODICOM
-DOSPELÝM ELEKTRONOM
VZNIKAME PREMENOU
NAŠICH KAMARA-
TOV A KAMARA-
TIEK.



KAMARAT, KTORÝ SA
ROZHODNE PREMENIŤ, DÁ
MIKROSVETU VŽDY NIEKOĽKO
NOVÝCH OBYVATEĽOV.



LEN MY ELEKTRONY
A NAŠI 1835-KRÁT ŤAŽŠÍ
SPOLUOBYVATELIA - PROTONY
NEMAME TÚTO SCHOPNOSŤ, MY
SA NEVIEME ZMENIŤ, A TÝM
DAŤ ŽIVOT INÝM ČASTICIAM.
NIČ TO, MÁ TO SVOJE VÝHODY.
SME HRDÍ, LEBO NAS POVAŽUJÚ
ZA NAJSTABILNEJŠIE STAVEBNÉ
SÚČASTI VAŠHO
MAKROSVETA.



AAA, TOTO
JE MEZON HI.
JEHO PREMENOU
SOM VZNIKOL AJ
JA! ALE TO
BOLO UŽ VEĽMI
DÁVNO.



ALE MÔJ PRIATEĽ
JE EŠTE VEĽMI MLADÝ.
VZNIKOL LEN NEDÁVNO PRE-
HENOLI PRAVE TOHOTO
MEZONU.



SÚČASNE
S NIM VZNIKOL NEU-
TRONIK, KTORÝ VY ĽUDIA
VOLATE NEUTRINO.
VZNIKLI, ROZDELILI
SA O VŠETKU
ENERGIU.



KTORÚ IH
MEZON HI ZA-
NECHAL A ROZ-
LETELI SA NA
OPÁČNE STRANY.
MOŽNO SA S NIHI
EŠTE STRET-
NEME.

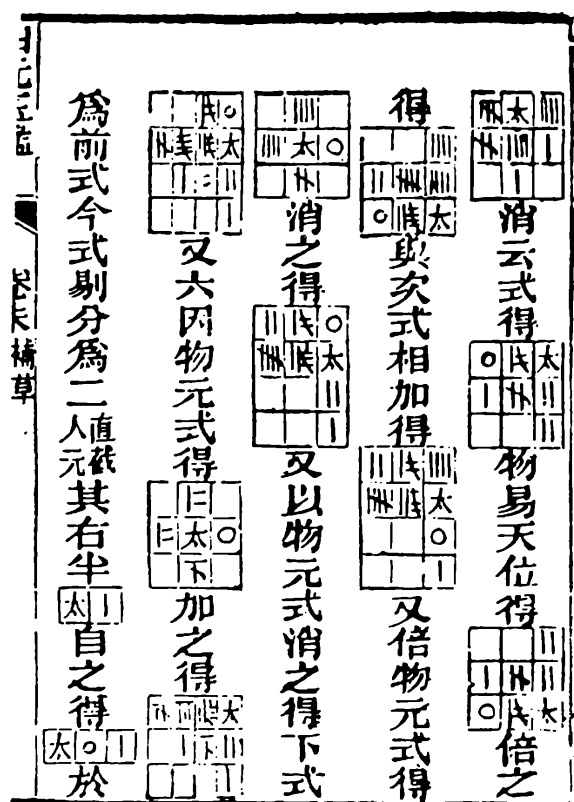
Čínský tabulkový záznam mnohočlenů

Obrázek, který vidíme na této stránce, je zmenšeninou stránky z čínského traktátu vydaného v r. 1303. Vidíme na něm řadu tabulek 3×3 nebo 3×4 , ale vlevo dole i 3×1 a nad ní dokonce 2×1 . V každé z těchto tabulek je zakreslen znak, který připomíná stan nebo jakousi hvězdu; četl se *tchaj* a znamenal absolutní člen rovný nule. Jeho poloha v tabulce určovala význam číslic v ostatních polích.

Podívejme se na prostřední tabulku v pravém sloupci obrázku; tam je *tchaj* vpravo nahoře a vy- značuje tak pole znázorňující člen x^0y^0 . Pole v sloupci pod ním znázorňují mocniny x^1, x^2 , pole vlevo znázorňují mocniny y^1, y^2 , ostatní pole pak znázorňují smíšené sou- činy x^1y^1 apod., a to podle principu „čím dále od *tchaj*, tím vyšší moc- nina“. Celkově tedy udává zmí- něná tabulka koeficienty členů mnohočlenu ve dvou proměnných x, y při tomto uspořádání:

x^0y^2	x^0y^1	x^0y^0
x^1y^2	x^1y^1	x^1y^0
x^2y^2	x^2y^1	x^2y^0

Kroužek znamená nulu stejně jako prázdné pole, dále poznáváme číslice 1 a 2 v druhém řádku. Škrť přes číslici 2 v prostředním poli znamená totéž, co naše minus, tedy (-2) ; nad ním je takto škrtnut znak pro číslo 120, je tedy



zapsán koeficient (-120) . Zkou- maná tabulka vyjadřuje $xy^2 - 2xy - 120y + 2x^2 + 2x + 0$. Zpravidla se takový zápis používal při řešení rovnic, představoval tedy levou stranu anulované rovni- ce. Tento „plošný zápis“ mnoho- členů umožňoval na počítací desce operovat s mnohočleny ve dvou proměnných, ale i třech či čtyřech (ve volných směrech vpravo či vzhůru od *tchaj*). V praxi se po- mocné operace prováděly na dal- ších početních deskách, na něž se kladly hůlky tak, aby vznikl „vý- řez“ z výchozí tabulky.

Anna Loubalová

Čo je matematika?

Matematika je akýsi stroj na zmocňovanie sa významných faktov a na generovanie významných dôsledkov.

I. Stewart

Matematika je napíenavým a krásnym dobrodružstvom ľudského umu. Dovoľuje nazrieť do svojich tajov len tým, ktorí sa k nej približujú nadšením jej krásou a naplnením čistou túžbou po poznaní.

A. Rényi

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitká 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednotky čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kaškova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1986.

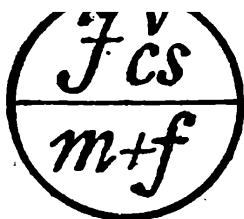
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(4)

**ROČNÍK 65, 1986/87
PROSINEC**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný,
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, Praha, pplk. doc. dr. Ján Chra-
pan, CSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mi-
kuláš, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT
Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc.,
ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., VŠZ Praha, doc. dr.
Karol Križanekovič, CSc., PF Nitra,
prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc.,
PF Nitra, doc. dr. Josef Novák, CSc.,
UK Praha, dr. Oldřich Petránek
SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc.,
ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý,
CSc., UK Praha, ing. dr. Václav Šin-
delář, CSc., Praha, doc. dr. Martin
Šolc, CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-No-
vé Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

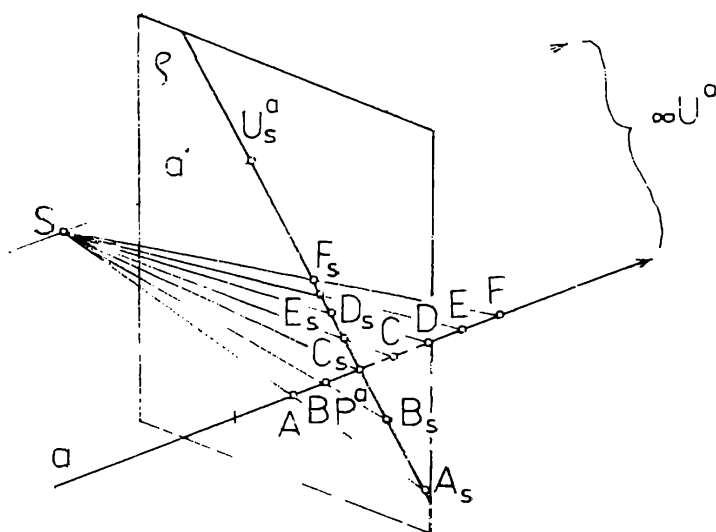
OBSAH

Václav Medek: O lineární perspektivě	133
Emil Kraemer: Užití rovnoběžného pro- mitání v geometrii I	137
Ivan Fischer: Základy programování mi- kro počítačů 4	142
Josef Kotyk: Listovní váhy	148
Jaroslav Sedlák: Neutrina pro experi- menty	150
Alena Šolcová: Číslo π a jeho přátelé	153
Emil Kašpar: Zrcadlové obrazy ve dvoji- tém okně	161
Stanislav Horák: Několik úloh	162
Emil Calda: Noční rozhovor .	163
Jarmila Pěničková: Magické obrazce	164
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	165
Úlohy k řešení	170
Emil Calda: Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v roce 1986 .	172
dj: Kalendár M-F	174
Z nových knih	176
Vladimír Malíšek: Siréna Cagniard de la Tourova . 3. str. obálky	
Jiří Pech: Slovník fyzikálních terminů (49-52)	příloha

O lineárnej perspektíve

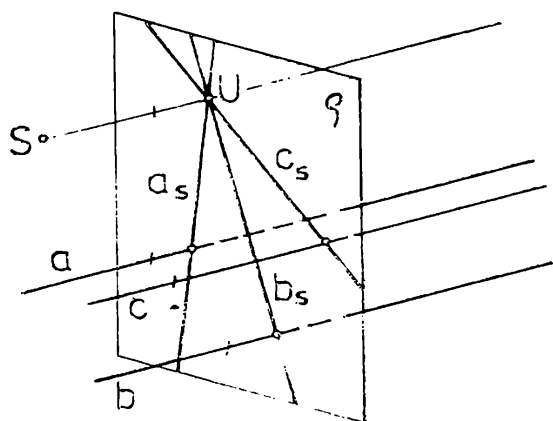
Prof. dr. VÁCLAV MEDEK, SVTŠ Bratislava

V predchádzajúcom článku sme sa zaoberali axonometriou ako zobrazením, ktoré nám umožňuje zostrojiť názorné obrázky objektov. No, charakteristické vlastnosti axonometrie (t.j., že zachováva rovnobežnosť a delenie úsečky v danom pomere) nezodpovedá spôsobu ako vníma priestor človek. Ak sa napr. postavíme medzi koľajnice dlhej priamej železničnej trate, budeme vnímať koľajnice ako dve priamky, ktoré sa zbiehajú a vzdialenosti susedných pražcov sa nám budú zdať, so zväčšujúcou sa vzdialenosťou od nás, stále kratšie. Tieto dve uvedené vlastnosti má aj lineárna perspektíva, o ktorej sme hovorili v prvom článku (pozri č. 1).

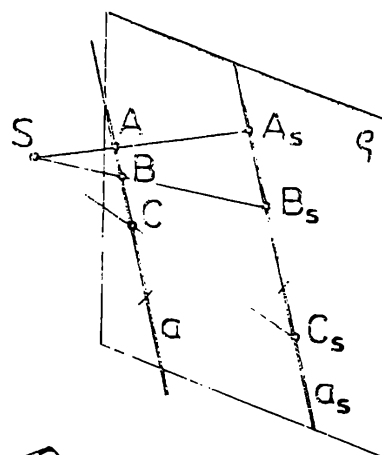


Obr. 1

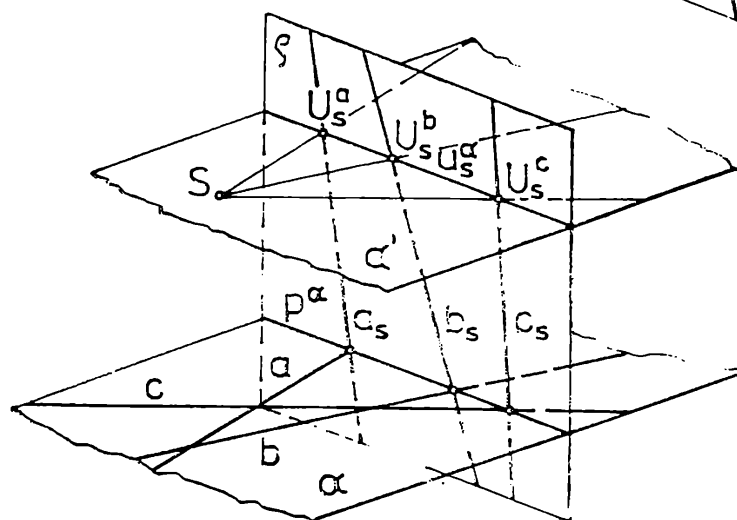
Skutočne, zaoberajme sa lineárnou perspektívou priamky a (so stopníkom P^a) na priemetňu ϱ (zo stredy S (obr. 1)). Zostrojme si na priamke a rovnomernú škálu bodov A, B, P^a, C, D, E, F , a nájdime priemety $A_s, B_s, P_s^a, C_s, D_s, E_s, F_s$ deliacich bodov tej škály. Je bezprostredne vidieť, že ak budeme postupovať po priamke a od bodu A smerom k bodu B , tak priemety po sebe nasledujúcich dielkov škály sa budú skracovať. Premietacie priamky jednotlivých deliacich bodov vznikajú otáčaním premietacej priamky bodu A okolo bodu S , až keď premietneme „bod v nekonečne“ ∞U^a priamky a , dostaneme jeho premietáciu priamku a'



Obr. 2



Obr. 3

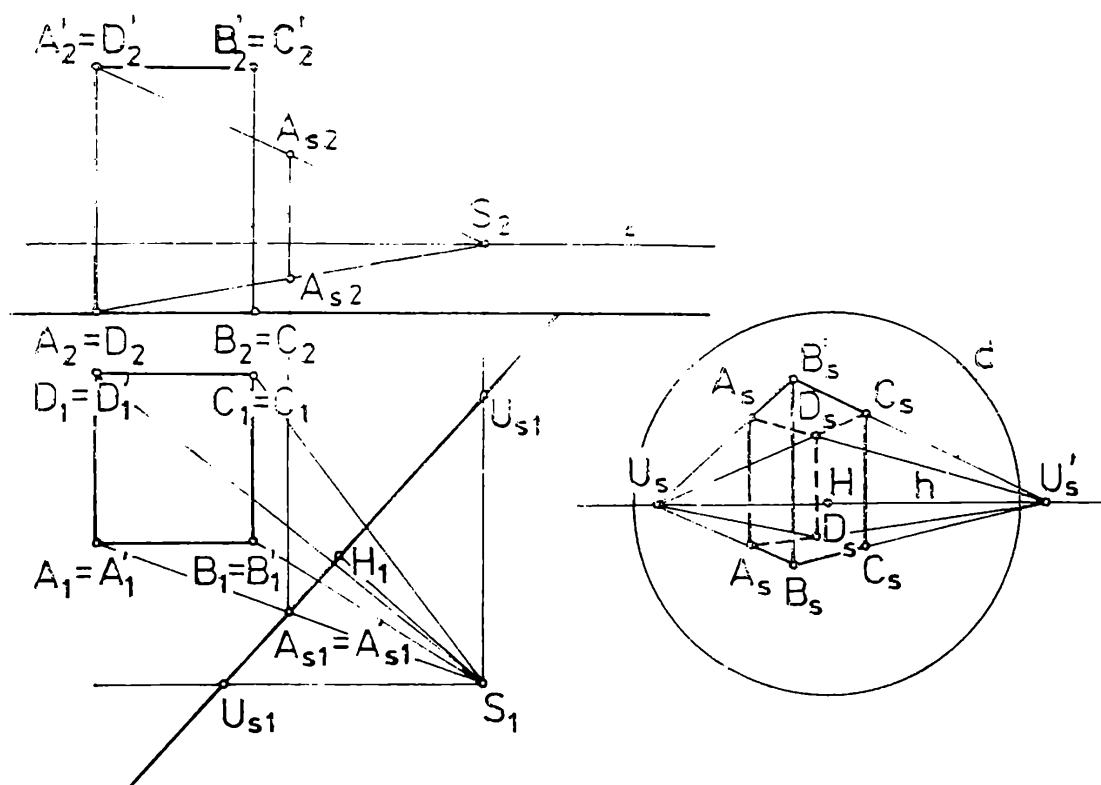


Obr. 4

rovnobežnú s priamkou a a jej priesečník U_s^a s priemetňou je priemetom bodu v nekonečne; hovoríme mu *úbežník priamky a* .

Z konštrukcie úbežníka priamky vyplýva, že všetky navzájom rovnobežné priamky majú spoločný úbežník U (obr. 2), a teda stredové priemety navzájom rovnobežných priamok prechádzajú týmto bodom U . Výnimku tvoria iba priamky rovnobežné s priemetňou. Stredovým priemetom priamky $a \parallel \rho$ je priamka $a_s \parallel a$ (obr. 3) a z toho vyplýva, že všetky priamky rovnobežné s priamkou a sa budú stredovo premietiť do roviny ρ do rovnobežiek s priamkou a_s . Z vety o úmernosti úsečiek vyplýva pre tri rôzne body A, B, C priamky a a ich priemety A_s, B_s, C_s , že $|AB| : |BC| = |A_s B_s| : |B_s C_s|$, teda, že delenie úsečky v danom pomere sa pre priamky rovnobežné s priemetňou zachováva.

Zaoberajme sa teraz rovinou α , ktorá nie je rovnobežná s priemetňou ρ (obr. 4). Nech p^α je priesečnica roviny α s priemetňou ρ ; priamke p^α hovoríme stopa roviny α . Zvoľme si v rovine α rôzne priamky a, b, c , úbežníky U_s^a, U_s^b, U_s^c , týchto priamok budú ležať na rovnobežkách a', b', c' , s priamkami a, b, c , prechádzajúcimi bodom S . Všetky tieto rovnobežky ležia zrejme v rovine α' prechádzajúcej bodom S



Obr. 5

a rovnobežnej s rovinou α . Priesečnica u_s^α roviny α' s priemetňou je rovnobežná so stopou p^α a nazývame ju *úbežnicou roviny α* . Na úbežnici roviny α ležia úbežníky všetkých priamok roviny α (a samozrejme aj všetkých priamok rovnobežných s rovinou α). Lahko nahliadneme, že všetky roviny rovnobežné s rovinou α majú spoločnú úbežnicu u_s^α .

V lineárnej perspektíve majú osobitnú dôležitosť vodorovné roviny. Úbežnicu vodorovných rovín značíme h a nazývame ju *horizontom*. Keďže najprirodzenejšou polohou človeka pri vnímaní svojho okolia je zvislá poloha s vodorovnou optickou osou očí (pokiaľ nepozorujeme napr. veľmi vysoké budovy, kedy zakláňame hlavu), budeme sa v ďalšom zaoberať iba tzv. *zvislou perspektívou*, tj. takou, keď priemetňa je zvislá. V tomto prípade horizont h prechádza *hlavným bodom H* .

Uvedieme si dva spôsoby na konštrukciu lineárnej perspektívy objektu. Prvý spôsob sa nazýva *priesečná metóda* a jej podstata je takáto (obr. 5): Majme danú Mongeovu projekciu napr. kvádra $ABCD A' B' C' D'$. Zvolme si najprv pôdorys stredu premietania S_1 tak, aby sme z toho miesta uvideli celý objekt (t.j., aby ležal vo vnútri zornej kužeľovej plochy). Neskôr si povieme, ako sa dá usúdiť, či sme zvolili vhodnú polohu. Zvyčajne zvolíme bod S tak, aby sme sa nedívali na objekt „zpredu“, pretože takýto pohľad umožňuje vidieť iba jednu stenu kvádra. Nárys S_2 bodu S zvolíme tak, aby výška bodu S_2 nad osou x odpovedala (v danej mierke, v ktorej kreslíme Mongeovu projekciu objektu) výške ľudských očí nad zemou. Ďalej si zvolíme pôdorys q_1 priemetne q . Priemetňu q volíme zvislú, a teda kolmú na vodorovnú pôdorysňu π .

Ospravedlňujem sa čitateľovi, že výklad priesečnej metódy bol veľmi stručný. No, verím, že pozorný čitateľ si iste poradí s odôvodneniami uvedených konštrukcií a precvičí si pritom svoju priestorovú predstavivosť.

Druhý spôsob (obr. 6) umožňuje vypočítať súradnice perspektívy bodu v priemetni ϱ , ak poznáme súradnice toho bodu v priestore. Daná je súradnicová sústava $Oxyz$ a nech bod A má súradnice x^A, y^A, z^A . Zvoľme začiatok O za stred premietania a priemetňu ϱ zvoľme rovnobežnú s rovinou xz vo vzdialenosti d od bodu S . V rovine ϱ si zvolíme súradnicovú sústavu $O'XY$, kde O' je priesečník osi y s rovinou ϱ , os X je rovnobežná s osou x a os Y je rovnobežná s osou z . Nech A_1 je kolmý priemet bodu A do roviny xy a bod $\bar{A}$ je kolmý priemet bodu A na os y . Stredový priemet A_s bodu A je priesečník spojnice SA s rovinou ϱ a nájdeme ho pomocou bodu A_{s1} , ktorý je priesečníkom spojnice SA_1 s osou X . Potom z vety o úmernosti úsečiek ľahko nájdeme vzťahy pre súradnice X^A, Y^A bodu A_s v súradnicovej sústave $O'XY$. Platí $X^A : x^A = d : y^A$ a $Y^A : z^A = d : y^A$. Ak vynecháme indexy A , dostávame z týchto úmer zobrazovacie rovnice lineárnej perspektívy vo tvare

$$X = \frac{dx}{y}, \quad Y = \frac{dz}{y}$$

Pomocou týchto rovníc môžeme vytvárať lineárne perspektívy objektov aj na displeji pomocou počítača.

Užití rovnoběžného promítání v geometrii I

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V článku O rovnoběžnom premietaní (Rozhledy, roč. 65, č. 2) vyložil profesor *Medek* základní vlastnosti rovnoběžného promítání a zároveň uvedl, že se toto promítání užívá v praxi k zobrazování technických objektů. Základní vlastnosti rovnoběžného promítání lze však dále užít také k řešení některých geometrických úloh; ukážeme to na řadě příkladů. Nejprve však připomeneme nejzákladnější větu platnou pro rovnoběžné promítání, kterou v textu svého článku uvedl profesor *Medek*; označíme ji jako větu 1.

Věta 1. Rovnoběžný průmět přímky, která nenáleží směru promítání, je přímka. Rovnoběžný průmět přímky náležející směru promítání je bod.

Je třeba si dobře uvědomit, že věta 1 o průmětu přímky, která nena-leží směru promítání, obsahuje tato dvě tvrzení: a) Každý bod přímky p má průmět na přímce p' která je průmětem přímky p . b) Každý bod přímky p' je průmětem jediného bodu přímky p . Rovina, která obsahuje promítací přímky všech bodů přímky p (a tedy obsahuje i přímku p'), se nazývá *promítací rovina přímky p* .

Uvedeme nyní dvě úlohy o mimoběžkách. Jsou-li a, b dané mimoběžky, pak každá přímka p , která protíná přímku a i přímku b , se nazývá *příčka mimoběžek a, b* .

Úloha 1. Jsou dány mimoběžky a, b a přímka s , která není rovnoběžná s žádnou z přímek a, b . Sestrojte tu příčku mimoběžek a, b , která je rovnoběžná s přímkou s .

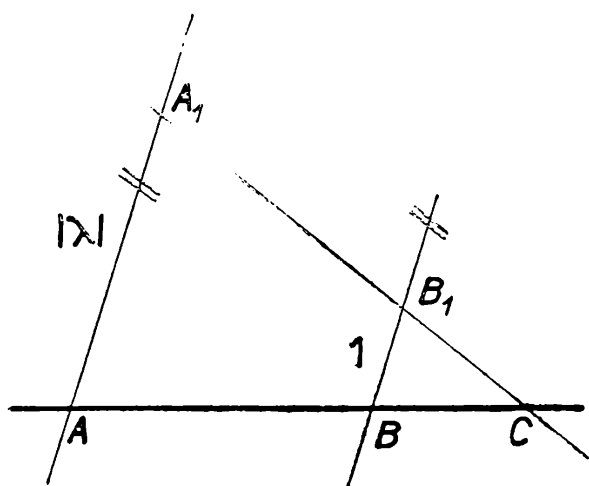
Řešení. Předpokládejme, že hledaná příčka p existuje; její průsečíky s přímkami a, b budtež po řadě body A, B . Budiž π libovolná rovina různoběžná s danou přímkou s . Rovinu π zvolíme za průmětnu rovnoběžného promítání, jehož směr je určen přímkou s . Podle věty 1 jsou průměty přímek a, b do roviny π po řadě různé (proč?) přímky a', b' ; podle téže věty je průmětem přímky p do roviny π bod $P' = A' = B'$. To znamená, že přímka $p \parallel s$ prochází společným bodem $A' = B'$ přímek a', b' . Z toho plyne tato *konstrukce*:

Zvolíme rovinu π různoběžnou s danou přímkou s . Do roviny π rovnoběžně promítneme přímky a, b směrem, který je určen přímkou s ; tak dostaneme v rovině π různé přímky a', b' .

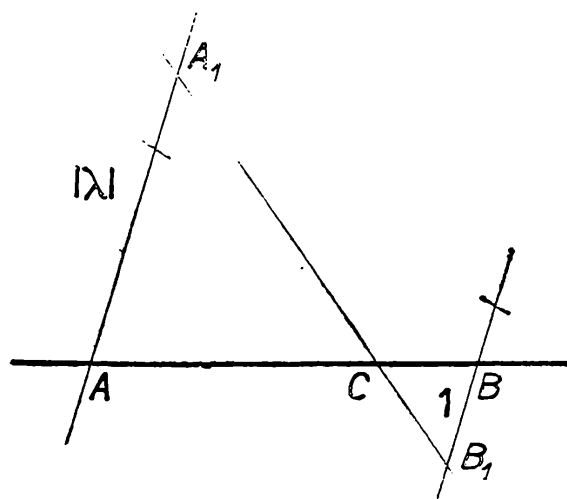
Jsou-li přímky a', b' různoběžné s průsečíkem $A' = B'$ prochází hledaná přímka $p \parallel s$ bodem $A' = B'$; úloha má v tomto případě právě jedno řešení. Jsou-li přímky a', b' vzájemně rovnoběžné, nemá úloha řešení. První případ nastává, právě když promítací roviny přímek a, b jsou různoběžné; druhý případ nastává, právě když tyto roviny jsou vzájemně rovnoběžné.

Úloha 2. Jsou dány mimoběžky a, b a bod P který neleží na žádné z přímek a, b . Máme sestrojit tu příčku p mimoběžek a, b , která prochází bodem P .

Řešení jen naznačíme; podrobné provedení ponecháváme čtenáři. Zvolíme rovinu π různoběžnou s přímkou b a do této roviny promítneme přímky a, b i bod P směrem, který je určen přímkou b . Průmětem přímky b je bod $b' = B'$, průmětem přímky a je přímka a' , která neprochází bodem $b' = B'$. Průmětem bodu P je bod $P' \neq B'$ a průmětem přímky p , která protíná přímky a, b po řadě v bodech A, B je přímka $p' = P'B'$. Z toho odvodí čtenář konstrukci. Připomeňme jen, že mohou při této konstrukci nastat právě tyto tři případy: 1. Bod P' neleží na přímce a' a přímka $p' = P'B'$ protíná přímku a' v bodu A' . 2. Bod P' neleží na přímce a' , ale přímka $p' = P'B'$ je rovnoběžná s přímkou a' . 3. Bod P' leží na přímce a' . V prvním případě má úloha právě jedno řešení, ve zbývajících případech nemá úloha řešení.



Obr. 1



Obr. 2

Další základní vlastností rovnoběžného promítání je zobecnění věty (označené v článku profesora Medka jako věta 1) o průmětu úsečky rozdělené v daném poměru. V této zobecněné větě se hovoří o dělicím poměru, jehož definice se opírá o tuto větu: *Poměr délek dvou nenulových úseček nezáleží na volbě jednotkové úsečky.*

Nechť A, B, C jsou tři vesměs různé body téže přímky. Potom dělicí poměr (ABC) bodu C je reálné číslo, které je určeno takto: a) Jeho absolutní hodnota je rovna podílu $|AC|/|BC|$; b) leží-li bod C na prodloužení úsečky AB , je $(ABC) > 0$, leží-li bod C mezi body A, B , je $(ABC) < 0$.

Z této definice plyne, že je vždy $(ABC) \neq 0$. Je však také $(ABC) \neq 1$, neboť podíl $|AC|/|BC| = 1$, právě když je $|AC| = |BC|$, tj. jen tehdy, je-li bod C středem úsečky AB ; pak však je (podle definice) dělicí poměr $(ABC) = -1$. Dále z definice dělicího poměru plyne, že pro body ležící na prodloužení úsečky AB za bod A je $0 < (ABC) < 1$, kdežto pro body ležící na prodloužení úsečky AB za bod B je $(ABC) > 1$. Pro dělicí poměr platí základní věta, kterou nyní uvedeme.

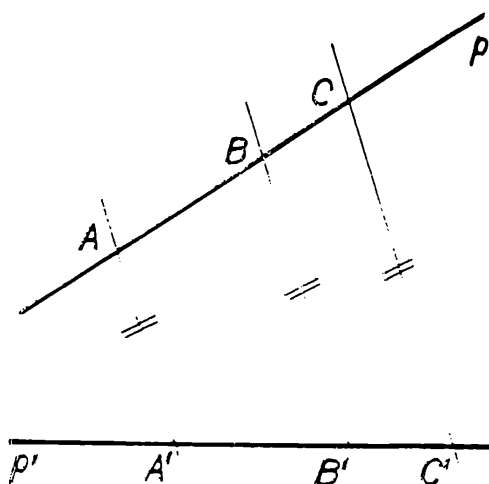
Věta 2. Nechť A, B jsou různé body a $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ je libovolné reálné číslo. Potom na přímce AB existuje právě jeden bod $C \neq A, C \neq B$, pro který platí: $(ABC) = \lambda$.

Místo důkazu uvedme jen konstrukci bodu C pro dané číslo λ (obr. 1, 2). Na obr. 1 jde o případ, kdy je $\lambda > 0$, na obr. 2 o případ, kdy je $\lambda < 0$. Různé rovnoběžky AA_1, BB_1 jsou zvoleny libovolně; můžeme volit

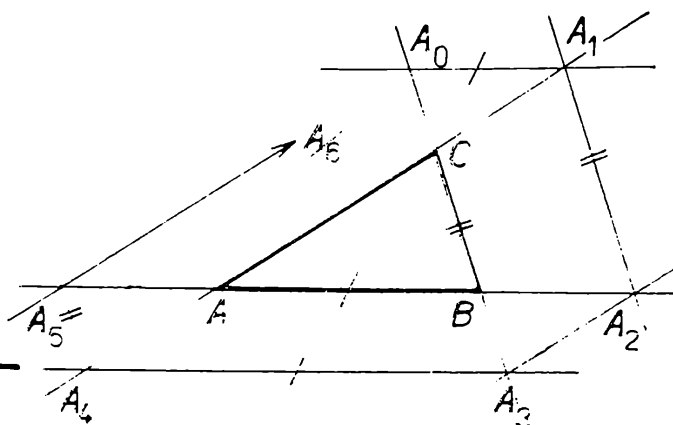
$$|BB_1| = k, |AA_1| = k|\lambda| \quad \text{kde } k \text{ je libovolné kladné číslo (pro } \lambda = \frac{2}{3}$$

volíme třeba $k = 3$). Odůvodnění konstrukce plyne z podobnosti trojúhelníků AA_1C, BB_1C

Důsledek věty 2. Nechť A, B jsou různé body a C, D jsou body přímky AB , pro něž platí $(ABD) = (ABC)$. Potom je $D = C$.



Obr. 3



Obr. 4

Nyní můžeme už vyslovit větu, která je slíbeným zobecněním věty o průmětu úsečky rozdělené v daném poměru.

Věta 3. Necht A, B, C jsou tři vesměs různé body přímky, která nenáleží směru daného rovnoběžného promítání; průměty bodů A, B, C do roviny π budtež po řadě body A', B', C' . Potom body A', B', C' leží v přímce tak, že je $(A'B'C') = (ABC)$.

Věta 3 říká toto: 1. Pořadí bodů A', B', C' na přímce $A'B'$ je stejné jako pořadí bodů A, B, C na přímce AB (obr. 3). 2. $|A'C'| \cdot |B'C'| = |AC| \cdot |BC|$. Je-li např. $(ABC) = -1$, je také $(A'B'C') = -1$; to znamená, že průmětem středu úsečky AB je střed úsečky $A'B'$. O dělícím poměru říkáme, že je *invariantem* rovnoběžného promítání, tj. že se tímto promítáním nemění.

Ukážeme užití uvedených vět k řešení několika geometrických úloh.

Úloha 3. Budiž dán libovolný trojúhelník ABC ; na přímce BC zvolme bod $A_0 \neq B, A_0 \neq C$, který není středem strany BC (obr. 4). Bod A_0 promítněme rovnoběžně na přímku AC směrem určeným přímkou AB ; tak dostaneme bod A_1 . Tento bod promítněme na přímku AB směrem určeným přímkou BC ; tak dostaneme bod A_2 . Dále pokračujme podle obr. 4; naposledy promítněme bod A_5 přímky AB na přímku BC směrem určeným přímkou AC ; tak dostaneme bod A_6 . Dokažte, že je $A_6 = A_0$.

Důkaz. Body A, C, A_1 přímky AC jsou po řadě rovnoběžnými průměty bodů B, C, A_0 přímky BC . Obdobně body A, B, A_2 jsou po řadě rovnoběžnými průměty bodů A, C, A_1 přímky AC na přímku AB atd. Proto podle věty 3 platí: $(BCA_0) = (ACA_1) = (ABA_2) = (CBA_3) = (CAA_4) = (BAA_5) = (BCA_6)$. Podle důsledku věty 2 plyne z rovnosti $(BCA_0) = (BCA_6)$ totožnost bodů A_0, A_6 .

Úloha 4. Necht ABC je libovolný trojúhelník, jehož strana AB je

Úloha 5. Necht ABC je libovolný trojúhelník. Potom osa jeho vnitřního úhlu BAC protíná stranu BC v bodu E tak, že platí:

$$(BCE) = -\frac{|AB|}{|AC|}$$

Řešení přenecháváme čtenáři.

Další užití věty 3 v geometrii najde čtenář např. v autorově článku *Věta Menelaova a věta Ceva*, který vyšel v *Rozhledech matematicko-fyzikálních*, roč. 55 (1976/77) na str. 211 až 220 (č. 5). Tím se už nebudeme zabývat; v příštím článku však uvedeme další základní věty rovnoběžného promítání a ukážeme jejich užití k řešení některých geometrických úloh.

Základy programování mikropočítačů

4 - podprogramy

doc. IVAN FISCHER, CSc., katedra matematiky PeF UK v Praze

Vedle větvení programů a cyklů v programech jsou podprogramy třetí ze základních konstrukcí při programování. Používají se hlavně tam, kde se v programu vícekrát opakuje stejný programový modul. Dále umožňují napsat srozumitelnější a přehlednější základní (hlavní) program, ze kterého voláme příslušné podprogramy provádějící jednotlivé dílčí činnosti. Konečně můžeme mít v zásobě odzkoušené osvědčené podprogramy, které používáme v různých programech jako prvky stavebnice (knihovny podprogramů, modulární programování).

Sestavíme si program a podprogramy pro počítání s časem zadaným v hodinách, minutách a sekundách. V tomto případě budeme počítat čas závodníka v časovce jako rozdíl času při startu a času v cíli. Výpočty budeme provádět napřed jen v sekundách.

```
100 PRINT „ZADEJ CAS STARTU“  
110 INPUT A  
120 PRINT „ZADEJ CAS V CILI“  
130 INPUT B  
140 IF B < A THEN PRINT „CHYBA ...“  
150 LET C = ABS (B - A)  
160 PRINT „VYSLEDNY CAS JE“  
170 PRINT C  
180 PRINT „— — — — — “
```

Pokud bude program správně pracovat, o čemž se přesvědčíme zadáváním různých hodnot A a B , pokusíme se ho dále zdokonalovat. Začneme tím, že čas C vypíšeme v hodinách, minutách a sekundách, i když ještě stále zůstaneme u zadávání času jen v sekundách. Protože takovýto přepočítání času v sekundách (a jejich desetinných, setinách atd.) na hodiny, minuty a sekundy budeme pravděpodobně potřebovat i v jiných programech, zpracujeme takovýto přepočítání a tisk výsledků jako samostatný podprogram (modul, podprogram do knihovny podprogramů). Napřed však musíme označit konec původního programu příkazem **END** (konec, počítač napíše **READY** a čeká na další povely) nebo **STOP** (zde navíc počítač napíše, na kterém řádku byl konec programu — což se používá především při „ladění“ — ověřování správnosti či hledání příčin chyb v programu).

Podprogram se „volá“ příkazem **GOSUB** číslo řádku. Počítač si do paměti ukládá číslo řádku s **GOSUB** (takzvaná „návrátová adresa“) a přejde na řádek uvedený v příkazu **GOSUB**, postupně vykonává následující řádky v podprogramu, dokud nenalezne příkaz **RETURN** (návrát). Po nalezení příkazu **RETURN** počítač vyzvedne návratovou adresu a pokračuje v programu tím řádkem, který následuje za příslušným **GOSUB**. Proto z různých míst programu můžeme příkazem **GOSUB** volat stejný podprogram, a počítač si musí pamatovat, za které **GOSUB** se má vrátit.

Pro lepší orientaci si programátor může do programu vložit komentáře, které jsou určeny pro člověka a ne pro počítač. Po příkazu **REM** počítač nečte zbytek programového řádku a přejde hned na další programový řádek. Za příkaz **REM** si proto můžeme v daném řádku napsat cokoliv.

Původní program na řádcích 100 až 180 si proto upravíme (řádek 170) a doplníme (řádek 190). Napíšeme příslušný podprogram, vzhledem k určení do knihovny podprogramů mu přidělíme čísla řádků, která si pro knihovnu vymežíme kupříkladu od 10000 do 19999.

```

170 GOSUB 11100
190 END
11100 REM VYPIS CASU
11102 LET H = INT (C/3600)
11104 LET S = C - H * 3600
11106 LET M = INT (S/60)
11108 LET S = S - M * 60
11110 PRINT H; „HOD“ ;M; „MIN“ ;S; „SEC“
11112 RETURN

```

Bude-li program s podprogramem 11100 správně pracovat, doplníme další podprogram, který umožní čas také zadávat v hodinách, minutách a sekundách (včetně desetinných zlomků sekund). Tentokrát budeme též podprogram volat ze dvou různých míst, místo původních příkazů

INPUT sekund. Při návratu z podprogramu bude *S* čas vložený v podprogramu a vyjádřený v sekundách. Původní program upravíme a doplníme a pak napíšeme příslušný podprogram.

```

110 GOSUB 11120
115 LET A = S
130 GOSUB 11120
135 LET B = S
11120 REM ZADANI CASU
11122 PRINT „HODIN“;
11124 INPUT H
11126 PRINT „MINUT“;
11128 INPUT M
11130 PRINT „SEKUND“;
11132 INPUT S
11134 LET S = (H * 60 + M) * 60 + S
11136 PRINT „— — — — —“
11138 RETURN

```

V jazyku BASIC můžeme do programového řádku napsat více příkazů oddělených dvojtečkou. (Avšak dvojtečku v textu v uvozovkách a dvojtečku v textu za **REM** počítač pokládá za součást textu a ne za oddělení příkazů.) Mohli jsme vynechat řádky 115 a 135 a psát zkráceně

```

110 GOSUB 11120 : LET A = S
110 GOSUB 11130 : LET B = S

```

Pokud bychom změnili řádek

```

140 IF B < A THEN PRINT „CHYBA...“ : GOTO 100

```

potom počítač provede skok na řádek 100 jenom v tom případě, pokud bude *B* menší než *A*. Příkaz **IF... THEN** má tedy platnost pro celý zbytek programového řádku, pro všechny příkazy v něm oddělené dvojtečkou.

Všimli jste si, že v obou dvou podprogramech používáme proměnné *H*, *M*, *S*. K chybě zde dojít nemůže, protože mají význam (a jsou „nastaveny“ na příslušné hodnoty) jen uvnitř podprogramů. Kdybychom používali tyto již „odladěné“ (ověřené, vyzkoušené) podprogramy později i v jiných programech, mohlo by se stát, že dané programy používají proměnné *H* či *M* v jiném významu a námi použité podprogramy by změnilly hodnoty těchto proměnných *H* či *M*, což by způsobilo chyby. Proto dokonalejší programovací jazyky (včetně úplnějších verzí jazyka BASIC, než jaké používají levné mikropočítače ZX Spectrum, IQ 150, IQ 151, PMD 85 atd.) rozlišují lokální proměnné (mající význam jen uvnitř podprogramu) a globální proměnné, mající význam v podprogramu i mimo něj. Někdy se mluví o vnitřních a vnějších proměnných podprogramu. Potom je zajištěno, že počítač rozliší vnitřní proměnnou *H*


```

100 PRINT „ZADEJ POCET VNORENI“
110 INPUT C : LET P = 1
120 GOSUB 500
130 PRINT „VRATIL JSEM SE V PORADKU“
140 END
500 PRINT „VNORENI“; P
510 LET P = P + 1
520 IF P <= C THEN GOSUB 500
530 LET P = P - 1
540 PRINT „NAVRAT Z VNORENI“; P
550 RETURN

```

Nyní si pro různá C můžeme zkoušet počet vnoření v této rekurzi.

Jistou obdobou podprogramů jsou v programu definované takzvané „uživatelské funkce“. Značí se **FN** a písmenem, tedy **FNA**, **FNB** až **FNZ**. Dříve, než je v programu funkce používána, musí být napřed definována. K tomu slouží příkaz **DEF**, který vidíme v definici funkce **FNS** na řádce 100 následující ukázky. K definici funkce můžeme použít aritmetické operace, funkce definované již přímo v jazyku BASIC i dříve definované (v daném programu) funkce uživatelské. Následující program ukazuje využití funkce **FNS(X)**, která X zaokrouhluje na setiny, kupříkladu na haléře.

```

100 DEF FNS(X) = (INT(100 * X + 0.5))/100
110 PRINT „ZADEJ MNOZSTVI“; : INPUT M
120 IF M = 0 THEN 160
130 PRINT „CENA ZA JEDNOTKU“; : INPUT C
140 LET P = P + FNS (M * C)
150 PRINT : GOTO 110
160 PRINT „= = = = =“
170 PRINT „PLATIT“;P; „KCS“
180 PRINT: LET P = 0: GOTO 110

```

Funkce tedy nemusíme volat číslem řádku, ale jejich názvem. Obdobně můžeme ve vyšších programovacích jazycích včetně úplnějších verzí jazyka BASIC, než máme k dispozici, jménem volat podprogramy a do závorek za jméno jim uvádět parametry.

Některé verze jazyka BASIC, například u IQ 151, umožňují definovat i funkce více proměnných.

Funkci pro výpočet délky úhlopříčky obdélníka bychom definovali **DEF FNU(A,B) = SQR(A * A + B * B)**. Jiné počítače, například PMD 85 tuto možnost nemají, a musíme použít podprogram

```

6000 LET U = SQR(A * A + B * B) : RETURN

```

Proti definici funkce je jednořádkový podprogram srovnatelně dlouhý. Volání podprogramu či funkce jménem je jistě pohodlnější než volání

nic neříkajícím číslem řádku, ale ani to příliš nevadí. Pokud však v nějakém programu počítáme úhlopříčku obdélníku o stranách $\bar{s}$ a R , pak použití funkce **Y = FNU(5,R)** je jistě jednodušší, omezující možnost nejasností a vzniku chyb, než použití podprogramu **LET A = 5 : LET B = R : GOSUB 6000 : LET Y = U**. Kromě možnosti zamotat program příkazy **GOTO** a **IF... THEN** číslo řádku je nešikovná práce s podprogramy a především způsob předávání parametrů důvodem četných kritik jazyka BASIC v jeho jednoduché, levné podobě.

Vrátíme-li se ještě k terminologii předávání parametrů, potom X , A , B v příkazech **DEF FN...** jsou takzvané „formální parametry“, hodnoty $\bar{s}$ a R jsou „skutečné parametry“ dané funkce, respektive podprogramu. A konečně, místo o podprogramu se někdy mluví o „procedure“. Výsledkem volání funkce je nějaká číselná hodnota, výsledkem volání procedury je obvykle nějaká činnost nebo více číselných hodnot.

Úloha 1 Sestavte program na sčítání časových údajů v hodinách, minutách a sekundách s využitím podprogramů 11100 a 11120, tedy podprogramu VYPIS CASU a podprogramu ZADANI CASU.

Úloha 2: Při dlouhém běhu na atletické dráze (400 m) jsou liché kilometry nikoliv kolo po startu, ale v půlce, na dvoustovce. Sestavte program, který orientačně dopočítává mezičasy na kilometrech z mezičasu předchozího a následujícího konce kola.

Úloha 3: Sestavte program analogicky k úloze 2 pro dopočítání mezičasu na jednu míli (1609 m).

Úloha 4: Sestavte potřebné programy a experimentem ověřte, jestli na vám přístupném mikropočítači

- je nutno končit řádek s **PRINT** textu uvozovkami,
- je možno vynechávat středník v příkazu **PRINT** tam, kde oddělení textů a proměnných již zajišťují uvozovky,
- je možno definovat funkce dvou a tří proměnných.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

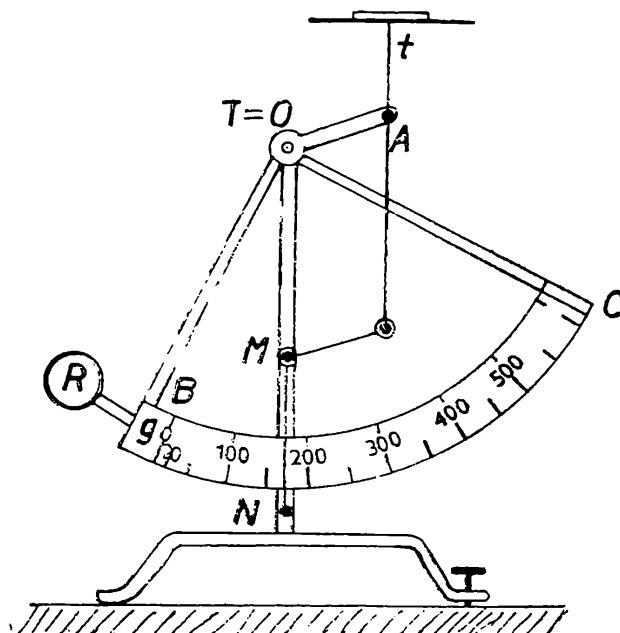
Redakce

Listovní váhy

JOSEF KOTYK, Pardubice

Pro rychlé vážení, jež nevyžaduje značné přesnosti, užíváme v praxi obvykle vah s nestejně dlouhými rameny vahadla. Známými příklady vah nerovnoramenných jsou váhy můstkové¹⁾ (decimální — desetinné, centesimální = setinné), přezmen a méně známé váhy listovní.

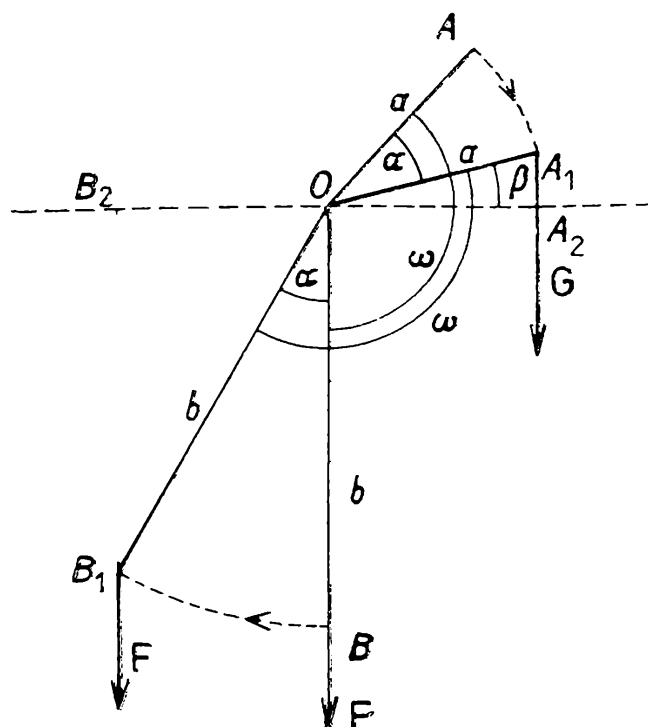
Vahadlem listovních vah je dvojzvratná lomená páka AOB (viz obr. 1), otáčivá kolem pevné osy O ; je vyvážena tak, že její hmotný



Obr.

střed (těžiště) T je v ose. Délky jejích ramen označme $|OA| = a$, $|OB| = b$; předpokládejme, že splňují např. nerovnost $a < b$ jako na obrázku. Kratší rameno nese na svislé tyčince t misku, na kterou klademe vážený předmět, dopis, listovní zásilku apod. Tyčinka se udržuje trvale ve svislé poloze tím, že je jednou stranou pohyblivého rovnoběžníka, jehož protilehlá strana je stále svislá. Delší rameno vahadla je zatíženo závažím (zpravidla mosaznou čočkou) R a spojeno se stupnicí BC zhotovenou zkusmo.

¹⁾ O nich přinesly Rozhledy podrobné poučení již autorově článku „Můstkové váhy“ v roč. 51, čís. 1, str. 23 až 26.



Obr. 2

Klademe-li na misku vah postupně různé předměty, dospějeme nejprve k této základní zkušenosti: Jestliže předmět je těžší, čočka se stupnicí se vychýlí více. Tíhu předmětu stanoví zároveň ten dílec stupnice, který je právě pod kovovým proužkem MN . Určením úhlu, o který se vychýlí delší rameno vahadla z původní svislé polohy, budeme se však nyní zabývat podrobněji.

V bodě B nechť působí tíhová síla F . Spočine-li na misce vah předmět, jehož tíha je G , vychýlí se ramena vahadla o úhel α tak, aby v rovnovážné poloze, v níž se páka ustálí, se momenty obou na ni působících sil rovnaly. Potom podle obr. 2, platí $F \cdot OB_2 = G \cdot OA_2$ neboli $F \cdot b \cos(90^\circ - \alpha) = G \cdot a \cos \beta$. Jestliže ramena vahadla svírají úhel ω , je $\beta = \omega - (90^\circ + \alpha) = (\omega - \alpha) - 90^\circ$, vzhledem k tomu pak, že kosinus je funkce sudá²⁾, je $\cos \beta = \cos(-\beta) = \cos[90^\circ - (\omega - \alpha)] = \sin(\omega - \alpha)$ a podmínka rovnováhy nabývá tím tvaru $F \cdot b \sin \alpha = G \cdot a \sin(\omega - \alpha)$, stává se tedy goniometrickou rovnicí, z níž lze žádanou výchylku α stanovit.

K numerickému výpočtu úhlu α se odvozená rovnice ovšem bezprostředně nehodí, upravíme ji proto na tvar $F \cdot b \sin \alpha = G \cdot a (\sin \omega \cos \alpha - \sin \alpha \cos \omega)$; dělíme-li pak všechny její členy

hodnotou $\cos \alpha$ ³⁾ a užijeme zároveň vztahu $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, dostaneme

²⁾ Funkce zv. sudá je taková, pro níž $f(-x) = f(x)$.

³⁾ Předpokládáme, že $\cos \alpha \neq 0$, neboť $\alpha \neq 90^\circ$.

$F \cdot b \cdot \operatorname{tg} \alpha = G \cdot a \cdot (\sin \omega - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \omega)$. Z této rovnice vyjádříme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{G \cdot a \cdot \sin \omega}{F \cdot b + G \cdot a \cdot \cos \omega} \text{ a určíme úhel } \alpha.$$

Jestliže $b = n \cdot a$, jak zpravidla bývá, jeví se účelným uvést odvozený

$$\text{výsledek na jednodušší tvar } \operatorname{tg} \alpha = \frac{G \cdot \sin \omega}{F \cdot n + G \cdot \cos \omega}$$

Cvičení

Při laboratorní práci užívali žáci listovních vah, na nichž odměřili délky ramen vahadla $a = 5$ cm, $b = 10$ cm a úhel jimi sevřený $\omega = 135^\circ$; delší rameno vahadla bylo trvale zatíženo závažím o hmotnosti 100 g. Když na misku vah položili předmět o hmotnosti 125 g, odhadovali velikost výchylky delšího ramene vahadla na stupnici úhlem $\alpha = 40^\circ$. Přezkoumejte jejich úsudky výpočtem!

Neutrina pro experimenty

Ing. JAROSLAV SEDLÁK, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Interakce neutrin s nukleony a jádry při vysokých energiích jsou neustále v popředí zájmu experimentátorů i teoretiků. To proto, že umožňují studovat zcela nové vlastnosti elementárních částic, objevovat částice, studovat jejich vnitřní strukturu a odhalovat nové zákonitosti jejich vzájemných přeměn. V současné době není jediného urychlovače protonů v oblasti vysokých energií ($E \gtrsim 100$ GeV), na němž by nebyl realizován svazek neutrin pro experimenty. Chtěli bychom ukázat, jak jsou takové svazky organizovány.

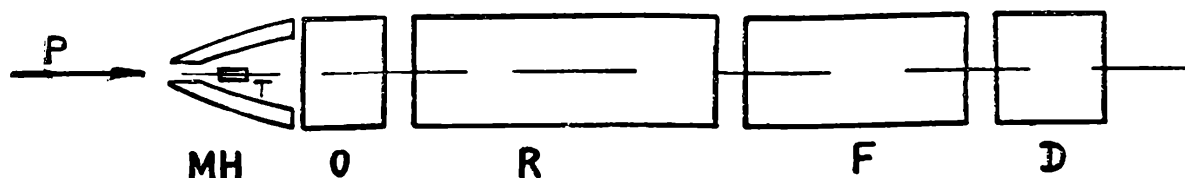
Neutrina vysokých energií vznikají především ve dvoučásticových rozpadech elektricky nabitých pionů (mesonů π) a kaonů (mesonů K):

$$\left. \begin{array}{ll} \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu; & \pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu; \\ K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu; & K^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu. \end{array} \right\} (1)$$

Podstatný příspěvek, který je nutno uvažovat, dávají také tříčásticové rozpady nabitých a neutrálních (dlouhožijících) kaonů:

$$\left. \begin{array}{ll} K^+ \rightarrow \mu^+ + \pi^0 + \nu_\mu; & K_L^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \tilde{\nu}_\mu; \\ K^- \rightarrow \mu^- + \pi^0 + \tilde{\nu}_\mu; & \quad \rightarrow \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu; \end{array} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{array}{ll} K^+ \rightarrow e^+ + \pi^0 + \nu_e; & K_L^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \tilde{\nu}_e; \\ K^- \rightarrow e^- + \pi^0 + \tilde{\nu}_e; & \quad \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e. \end{array} \right\} (3)$$



Obr. 1

Příspěvek ze tříčasticových rozpadů je na úrovni jednoho procenta a je závislý na konkrétním způsobu formování svazku neutrin. Energetické spektrum neutrinových svazků je spojitě.

Jak je patrné ze vztahů (1) až (3), na urychlovačích dostáváme převážně svazky mionových neutrin. Zdrojem elektronových neutrin je reakce (3). Svazek elektronových neutrin, získaných z této reakce, obsahuje neutrina ν_e a antineutrina $\bar{\nu}_e$ přibližně ve stejném poměru a kromě toho obsahuje také značný (do 50 %) podíl mionových neutrin. Získat čisté svazky elektronových neutrin je velice obtížné. Tím se vysvětluje, proč jsou elektronová neutrina a jejich interakce dosud málo prozkoumány.

Experimentální uspořádání pro formování svazku neutrin je schematicky znázorněno na obr. 1. Svazek protonů, vyvedených u urychlovače, dopadá na terč T (jím bývá nejčastěji deska z Be, ale jsou používány také terče z Al, Cu, Fe apod.), ve kterém dochází k jejich interakcím s nukleony, při nichž vznikají sekundární částice, elektricky nabitě i neutrální mesony π a K. Terč T je umístěn ve speciální magnetické čočce, tzv. *magnetickém hrdle MH*, jehož magnetické pole soustřeďuje mesony do kanálu transportu sekundárních částic s fokusujícím zařízením O. V něm se mesony požadovaného elektrického náboje a v širokém oboru hybností formují do rovnoběžného svazku (mesony opačného elektrického náboje se naopak defokusují) a postupují do *rozpadového tunelu R*, v němž se jich převážná většina za letu rozpadne. Délka rozpadového tunelu je závislá na energii mesonů (primárních protonů). Např. v Serpuchově ($E_p = 76$ GeV) je délka rozpadového tunelu 100 m; v CERNu ($E_p = 400$ GeV) je rozpadový tunel dlouhý 300 m.

Rozpadový tunel je ukončen masivním, nejčastěji železným absorbatorem, tzv. mionovým filtrem F (v Serpuchově 30 m Fe, v CERNu 400 m Fe). V něm se nerozpadlé piony a kaony, a také miony, vzniklé v reakci (2), zcela absorbují a zbude čistý svazek neutrin. Za mionovým filtrem jsou umístěny detektory.

Takové uspořádání poskytuje svazek neutrin se „širokým“ energetickým spektrem (v Serpuchově jsou to neutrina o energii v rozmezí $(2,0 \div 30,0)$ GeV). Jeho předností je to, že zajišťuje nejvyšší intenzity neutrin. Je obvyklé na všech urychlovačích, na nichž se experimenty s neutrinou realizují.

Požadavek snadnější a přesnější analýzy studovaných procesů při-

vedl k potřebě přesnější znalosti energie interagujícího neutrína. Toho se docíluje pomocí tzv. „monochromatizovaných“ svazků neutrin, které byly poprvé zformovány ve Fermiho národní laboratoři v Batavii (USA). Základní princip formování svazků tohoto typu spočívá v tom, že za terčem se zformuje úzký svazek mesonů potřebného elektrického náboje s malou úhlovou divergencí a malým rozptylem v hybnostech. Je nasnadě, že takové svazky jsou mnohem méně intenzivní, než svazky se širokým energetickým spektrem.

V současných experimentech s neutrinami se setkáváme se dvěma základními potížemi: a) neznáme spolehlivě typ interagujícího neutrína a b) neznáme přesně ani jeho energii, ani směr jeho letu. Proto je úroveň kvantitativních výzkumů v neutrinové fyzice poměrně nízká. Údaje z různých laboratoří se liší až o 30 %, systematické chyby jsou značné a neumožňují získat experimentální údaje s přesností lepší než 10 % spíše však (15 ÷ 20) %.

To připomíná situaci, v níž byla fyzika elementárních částic v době, kdy jako zdroj částic vysokých energií sloužilo kosmické záření. Tehdy jsme také neznali dostatečně spolehlivě ani druh částic, ani jejich energii.

Je tedy nutno změnit charakter neutrinových experimentů, tj. je zapotřebí najít nějaký nový experimentální postup, který by umožnil určit dostatečně přesně jak druh neutrína, tak jeho energii.

Jeden ze způsobů řešení tohoto problému se realizuje v Ústavu fyziky vysokých energií v Serpuchově. Jedná se o využití zcela nového metodického prvku ve formování svazků neutrin, tzv. „značených neutrin“. Idea „značených“ neutrin spočívá v tom, že současně s interakcí, způsobenou neutrinem, se ve speciálním zařízení, tzv. „značkovací stanici“, umístěné za rozpadovým tunelem (před detektorem), určí charakteristiky všech částic, vzniklých při rozpadu mateřského mesonu, tj. určí se místo jeho rozpadu, směr letu vzniklých částic a také jejich hybnost a energie. Na základě těchto údajů a také ze známé hodnoty energie a hybnosti rozpadajícího se mesonu lze s vysokou přesností stanovit energii, směr letu i místo vzniku (a tedy i druh) neutrína.

Hlavním problémem přitom je jednoznačné přiřazení interakce, vyvolané neutrinem a odpovídajícího rozpadu mateřského mesonu. K řešení této úlohy je zapotřebí mít svazek mesonů s vyhovující časovou strukturou, tj. mesony nesmí vzniknout a pohybovat se současně, v jednom shluku, ale musí vznikat postupně, během určitého časového intervalu (svazek musí být „roztažený“ v čase). Toho se docíluje pomalým vyvedením svazku urychlených protonů na terč. Při takové časové struktuře svazku mesonů lze využít rychlé koincidence mezi signály z neutrinového detektoru a detektorů značkovací stanice. Jako spouštěcí signál (trigger) slouží zaregistrování interakce v neutrinovém detektoru.

Časová koincidence sama o sobě však není postačující, protože při intenzitě svazku mesonů řádu 10^{10} částic/s, které jsou při formování

neutrinových svazků běžné, může dokonce při časovém rozlišení ~ 1 ns koincidovat s jednou interakcí neutrina několik rozpadů mesonů. Proto se k jednoznačnému přiřazení využije také údaje o místě rozpadu mateřského mesonu a o směru letu neutrina, předpověděného pomocí „značkovací“ stanice, a o místě interakce neutrina v detektoru. Jinými slovy, kromě časové korelace bude využito také prostorové korelace mezi jevy, zaregistrovanými v neutrinovém detektoru a v detektorech značkovací stanice. To umožní provést úplnou kinematickou rekonstrukci jevů a jejich jednoznačné přiřazení.

Předpokládá se, že při vhodné časové struktuře svazku mesonů bude dosaženo časového rozlišení ~ 5 ns a kinematická rekonstrukce umožní určit energii neutrina s přesností ~ 4 %. Úhel výletu neutrina lze ve značkovací stanici předpovědět a změřit s přesností $\sim 0,1$ mrad, a tedy velice přesně určit místo, kde došlo k rozpadu mateřského mesonu. To vše vede ke snížení pozadí o dva až tři řády v porovnání s dosavadními širokými i monochromatizovanými svazky neutrin. Experimentátoři tedy budou mít k dispozici neutrinový svazek s charakteristikami, jaké až dosud měly pouze svazky silně interagujících částic (např. svazky protonů nebo pionů). To se nepochybně odrazí na zvýšení přesnosti experimentálních výsledků z neutrinových experimentů.

Svazek značených neutrin v Serpuchově bude dobudován v r. 1987.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Číslo π a jeho přátelé

RNDr. ALENA ŠOLCOVÁ, PeF UK Praha

Řecké písmeno π je první písmeno řeckého slova *perimetron*, jež vyjadřuje v češtině „měření kolem“. Jako znak pro poměr obvodu kruhu k jeho průměru se rozšířilo π po roce 1737, kdy matematik *Leonard Euler* je použil v tomto smyslu poprvé. Takže má letos „Klub přátel π “ příležitost oslavit 250. výročí.

Dnes nazýváme π také *Ludolfovo číslo*. Je definováno jako poměr obvodu kruhu o k jeho průměru d

$$\pi = \frac{o}{d}$$

Už v dávné době výpočtáři věděli, že tento poměr nezávisí na velikosti

kruhu, že jde o konstantu. Nejčastěji si pamatujeme přibližnou hodnotu 3,14. Kalkulátor ukáže po stisknutí klávesy π hodnotu 3.141592654, což pro většinu praktických výpočtů úplně stačí.

Během tisíciletí, při řešení úloh z praxe, dospívali výpočtáři ke stále přesnější hodnotě této konstanty. Možná budete překvapeni, že nejstarší, i když velmi hrubý odhad hodnoty π , lze najít na prvních stránkách Starého zákona

$$\pi = \frac{30}{10}.$$

Některé současné literární výzkumy ukazují, že hebrejská písmena v určitých opisech lze číst i jako jiné číslice a π by pak mělo hodnotu

$$\pi = \frac{30}{10} \cdot \frac{111}{106} = 3,1416$$

Obojí jistě svědčí o matematickém umění našich předků.

Vyjádřit π ve tvaru zlomku se pokoušeli již antičtí myslitelé. Kolem roku 240 př. n. l. *Archimédés ze Syrakús* (287—212 př. n. l.) našel metodu, jak přibližnou hodnotu π získat. Počítal postupně obvody kružnic vepsaných a opsaných mnohoúhelníků (pravidelných) se 12, 24, 48 a 96 stranami. Dospěl k nerovnosti

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Máte-li po ruce kalkulátor nebo nějaký počítač a máte-li chuť si započítat, řešte s námi úlohy v rámečcích.

Určete prvních pět platných cifer v desetinném rozvoji těchto zlomků!

Na jakém místě desetinného rozvoje těchto zlomků najdete odchylku od známé hodnoty π ?

Všeobecně se uvádí Archimedovo vyjádření π jako $\frac{22}{7}$. Někdy byla

užívána jako aproximace π také $\sqrt[3]{31}$. Ve starém Egyptě se používala hodnota $\sqrt{10}$, jak je psáno v Rhindově papýru (1700 př. n. l.).

Vyzkoušejte si, jaký je rozdíl mezi čísly π , $\sqrt[3]{31}$ a $\sqrt{10}$

V 5. století n. l. objevil čínský astronom *Tsu Ch'ung-Chih* zajímavou aproximaci čísla π . Postupoval takto:

HEMISFÉRA (slož. z řec. *hemi-* = polo-, půl, napolo + *sfaira* = koule; v. sféra) — polokoule

HETERO — (z řec. *heteros* = druhý, jiný) — počáteční část složených slov mající význam „jiný, jiného druhu“, přičemž následující část složeného slova upřesňuje, co se různí, co je jiné; opak vyjadřuje zpravidla složka HOMO-

HETERODYN (v. dyn) — starší název pro přístroj u primitivních přijímačů; umožňuje slyšitelnost kmitů v radiotelegrafii, tedy v podobě teček a čárek

HETEROCHROMATICKÝ (v. chromatický) — různobarevný (opak: homochromatický)

HETERONÁBOJ — náboj na plochách elektretového válečku; je opačného („druhého“) znaménka než příslušné polarizační elektrody; srov. homonáboj

HEXAEDR (slož. z řec. *hexa* = šest + *hedra* = plocha, na které se sedí; v. -edr) — šestistěn

HISTOGRAM (slož. z řec. *histos* = stěžeň, stožár; tkalcovský stav vztyčený vzhůru; osnova, tkanina; od *histémi* — stavět, postavit; v. statika + *grafó* = rýt, psát; v. -gram¹) — „zápis pomocí vztyčené osnovy“; sloupkový diagram

HOMEOMORFNÍ (slož. z řec. *homoios* = rovnému, stejnému příslušný; rovný, stejný; od *homos* = stejný; v. *homo-* + *morfé* = postava, podoba, podstata; v. amorfní — mající stejnou podobu

HOMO- (z řec. *homos* = stejný) — počáteční část složených slov vyjadřující „stejnost, rovnost“; opakem bývá *hetero-*, v. t. Od řec. *homos* je řec. *homalos* = stejný mírou, stavem (v. anomálie). Pozn. Složku *homo-* nelze spojovat s lat. *homo* = člověk, protože kmen tohoto lat. slova je *homīn-*.

HOMOCENTRICKÝ (v. centrum) — „mající stejný střed“; vycházející z téhož středu, z téhož bodu

HOMOGENNÍ (v. -genní) — stejnorodý; vzniklý ze stejného materiálu, stejným způsobem, ve stejnou dobu, za stejných podmínek

HOMOCHROMATICKÝ (v. chromatický) — stejnobarevný

HOMOKINETICKÝ (v. kinetický) — stejně se pohybující; umožňující stejný pohyb

HOMOLOGIE (v. -logie) — nauka o zevní podobnosti věcí nebo jevů

HOMOMORFNÍ (v. -morfní) — mající stejný tvar; HOMOMORFISMUS; v. t. homeomorfní

HOMONÁBOJ — náboj na plochách elektretového válečku; má shodné znaménko s příslušnými polarizačními elektrodami; srov. heteronáboj

HORIZONT (z řec. *horidzón*, -*ontos* = ohraničující; ptc. préz. od *horidzō* = ohraničovat; k *horos* = hranice, mez) — „myšlená čára ohraničující obzor“; obzorník

HORIZONTÁLNÍ souřadnice, rovina — zdánlivě protíná oblohu na

obzoru, na horizontu; protože pozorovatel má dojem, že okolní krajina, pokud není kopcovitá, je rovina, nabyl termín „horizontální“ význam „vodorovný“; odtud HORIZONTÁLA — vodorovná čára

HYDRAULIKA (z řec. *hydrauliké techné*; v. -ika; od *hydraulos* = vodní píšťala; slož. z *hydór* = voda; v. *hydro-* + *aulos* = píšťala, vl. průdech) — 1. nauka o pohybu tekutých těles; nauka o síle kapalin a o jejich technickém využití; 2. technické zařízení využívající tlakovou energii kapalin. HYDRAULICKÝ — založený na zákonech hydrauliky; týkající se vody, vodní síly a vodních zařízení

HYDRO- (z řec. *hydór* = voda; srov. HYDRANT — zařízení pro odběr vody z potrubí) — počáteční část složených slov mající význam „voda, vodní, tekutina, kapalina“;

HYDROCENTRÁLA — (v. centrála) totéž co hydroelektrárna

HYDRODYNAMIKA (v. dynamika) — nauka o pohybu tekutin

HYDROELEKTRÁRNA (v. elektrárna) — elektrárna s vodním pohonem

HYDROLÝZA (v. analýza) — proces, při němž voda rozkládá látku; „rozklad vodou“; srov. elektrolýza

HYDROMECHANIKA (v. mechanika) — mechanika kapalin; zabývá se pohybem kapalin

HYDROMETEOR (v. meteor) — souhrnný název pro kondenzátory vodních par v ovzduší

HYDROSTATIKA (v. statika) — nauka o rovnováze kapalin; HYDROSTATICKE váhy — pro vážení pevných látek v kapalinách

HYGRO- (z řec. *hygros* = tekutý, mokrý, vlhký; srov. HYGROFILNÍ rostliny — vlhkomilné; *fileó* = mít rád) — počáteční část složených slov mající význam „vlhko, vlhkost, vlhký“

HYGROGRAF (v. -graf) — přístroj zapisující samočinně změny vlhkosti vzduchu

HYGROLOGIE (v. -logie) — nauka o vlhkosti, zejména vzduchu

HYGROMETR (v. -metr¹) — přístroj k měření vlhkosti vzduchu; vlhkoměr

HYGROSKOP (v. -skop) — přístroj „pozorující“, ukazující změny vlhkosti vzduchu

HYGROSKOPICKÝ (v. -skopický) — schopný pohlcovat a zadržovat vodu (např. dřevo); vyvolaný změnou vlhkosti (např. hygroskopické pohyby rostlin)

HYPER- (z řec. *hyper* = nad, přes) — počáteční část složených slov mající význam: 1. poloha nad, přes, nahoře, shora; např. HYPEROSKULAČNÍ kružnice — „seshora líbající“ (lat. *osculum* = ústa, rty, polibek); ta, která se ze všech možných kružnic „co nejvíce přimyká“ shora k dané křivce v daném bodě; 2. zvětšení, vzrůst, zvýšená vlastnost, zvýšená činnost; např. HYPERTONIE (řec.

tonos = natažení, napětí) — zvýšený tlak; 3. nadbytek, nadměrnost, příliš, velmi, nadmíru, nad-, pře-; např. HYPERMODERNÍ — ve fyzice: HYPERZVUK — mající nesmírné množství kmitů za sekundu. Pozn.: pro termíny s opačným významem se zpravidla užívá předpony hypo-. V t. hyperon

HYPERON (slož. z řec. *hyper* = nad, přes; *hyper-* + *-on* — umělá přípona použitá analogicky podle „elektron“ pro označení částic; v *-on*) — elementární částice s klidovou hmotností větší než neutron

HYPO- (z řec. *hypo* = pod) — předpona mající v cizích slovech význam: 1. poloha dole, pod, vespod, zdola, dolní; např. HYPOFÝZA (řec. *fysis* — zde: výrostek) — žláza s vnitřní sekrecí uložená na spodině mozku; podvěsek mozkový. 2. nižší míra, podřadnost, zmenšení, snížení, omezení, oslabení; např. HYPOTONIE (řec. *tonos* = natažení, napětí) — „snížené napětí“; 3. nedostatek, neúplnost, nedokonalost, porucha vývoje, nevyvinutí, zakrnělost; např. HYPOTROFIE (řec. *trefó* = živit — „podvýživa“; nedostatečný vzrůst některého orgánu. Pozn.: Pro termíny s opačným významem se zpravidla užívá předpony hyper-

HYPOCÉTRUM (v *centrum*) — „místo pod středem zemětřesení“; ohnisko zemětřesení

HYPOTÉZA (v. *teze*) — „co je podloženo“; předpoklad, domněnka

HYPSOMETR (slož. z řec. *hypsos* = výše, výška + *metron* = měřidlo, míra; v. *-metr*¹) — přístroj k měření výškových rozdílů. Pozn.: S řec. *hypsos* souvisí IZOHYPSA — vrstevnice, tj. čára spojující body stejné výše.

HYPSOTERMOMETR (slož. z řec. *hypsos* = výše, výška; v *hypsometr* + *thermos* = horký, teplý; v. *termo-* + *metron* = měřidlo, míra; v. *-metr*¹) — přístroj k měření nadmořské výšky „pomocí tepla“; nejprve se totiž zjistí teplota varu čisté vody a potom převedením na barometrický tlak se zjistí nadmořská výška

HYSTEREZE (z řec. *hysterésis*; od *hystereó* = být pozdější, pozdě přicházet, opožďovat se) — ve fyzice: jev, kdy se účinek opožďuje za příčinou; např. HYSTEREZE elastická — dopružování; pružná deformace při odlehčení látek zmizí nejprve jen částečně, potom teprve pozvolna se zmenšuje, až látka posléze dostane původní tvar; HYSTEREZE magnetická — opožďování magnetizace za magnetickou indukci. Pozn.: Řec. *hystereó* souvisí s řec. *hysteros* = zadní, dolní; a s tím zase HYSTERIE — předrážděnost, popudlivost nervového původu

CHAOTICKÝ (od řec. *chaos* = směs, spousta, beztvářá hmota) — „pomíchaný“; zmatený; ve fyzice: CHAOTICKÝ pohyb — zcela neuspořádaný

CHEMIE (z řec. *chémeia*) — snad souvisí s řec. *cheó* = líti, protože už ve starověku odlévali kovy, nebo souvisí s egyptským *chemi*, *cham*, kterýmžto slovem Egypťané označovali svou zem pro její černé půdní

bohatství. K počtělému *chémeia* a k polatinizovanému *chimia* přidali Arabové člen *al*; tím vznikl z arab. *al-kimia* výraz ALCHYMIE. V t. elektrochemie, geochemie, termochemie

CHORDOFON (slož. z řec. *chordé* = struna; v. monochord + *fóné* = hlas, zvuk; v. -fon), — název pro nástroj, kde zvuk je vyvolán rozechvěním struny

CHROMATICKÝ (od řec. *chróma*, -atos = barva pleti, barva; srov. POLYCHROMIE — „používání mnoha barev“; řec. *polys* = mnohý, četný) — týkající se barev; barevný; ve fyzice: CHROMATICKÁ vada čočky — jevíci se barevným okrajem obrazu; termíny CHROMATICKÁ stupnice (rozdělující oktávu na dvanáct půltónů) a CHROMATICKÉ tóny (zvýšené nebo snižené tóny základní stupnice) vznikly podle termínu CHROMA pro půltónový interval. Pozn.: S řec. *chróma* souvisí i název CHRÓM, protože tento prvek je sytě barevný.

CHROMATIKA (od řec. *chróma*, -atos = barva pleti, barva; v. chromatický) 1. nauka o barvách v přírodě a o vnímání barev člověkem; v. -ika¹); 2. důsledně půltónová soustava, na níž je založena melodika i harmonie; srov. CHROMATICKÁ stupnice

CHROMOSFÉRA (slož. z řec. *chróma*, atos = barva pleti, barva; v. chromatický + *sfaira* = koule; v. sféra) — „oblast barev“; při úplném zatmění Slunce viditelná barevná (načervenalá) vrstva plynů nad fotosférou kolem Slunce

CHRONO- (z řec. *chronos* = čas; srov. CHRONICKÝ — trvající delší dobu, stálý) — počáteční část složených slov mající význam „čas, časový“; v. t. asynchronní, izochrona, synchrofázotron, synchronizace, tautochrona

CHRONOGRAF (v. -graf) — přístroj přesně zaznamenávající („píšící“) určité časové úseky

CHRONOMETR (v. -metr¹) — časoměr; přístroj na přesné měření času; v hudbě: taktoměr; přístroj k zvukovému odměřování hudebního rytmu — totéž co metronom. Pozn.: Zatímco „chronometr“ je „měřič času“, tj. přístroj, který měří délku časového intervalu, „metronom“ (řec. *nomos* — zde: řád, zákon) je „řád míry“ „měrný zákon“, tj. přístroj, který určuje, stanovuje délku časového intervalu.

CHRONOSKOP (v. -skop) — přístroj, kterým se dá zjistit, „vypočítat“ přesný čas

IDEA (z řec. *idea* = podoba, jak se jeví zraku) — základní, vůdčí myšlenka; pojem, představa, nápad

IDEÁL (z latiniz. *idealis* řec. *idea*) — vysněná představa, pojem dokonalosti, vzor nejvyšších dosažitelných hodnot, nedostižný cíl, příklad

IDEÁLNÍ — „mající podobu dokonalosti“, dokonalý, mající nejvyšší hodnoty ve fyzice: vyhovující všem požadavkům

Zapsal číselné vyjádření jednoho sta třinácti tisíc třista padesáti pěti a totéž udělejte i vy na linku vedle: _____

(V desítkové soustavě, kterou ovšem čínský astronom neužíval vždy, to jsou dvojice prvních tří lichých čísel za sebou.) Pak vytvořil zlomek tak, že do jmenovatele zapsal první tři cifry tohoto čísla a zbývající tři do čitatele (pište opět na linku vedle): _____

Tento zlomek astronoma Ch'ung-Chiha byl chápán jako konečná hodnota čísla π , tak potřebná v řadě aplikací. Matematici však spokojeni nebyli. Stále měli podezření, že poměr obvodu kruhu k průměru, vyjádřený zlomkem, není docela v pořádku.

Najděte, kolik desetinných míst čínského zlomku je správných!

Tisíc osm set let po Archimedově práci o π , v roce 1592, vyjádřil francouzský právník *Francois Viète* π jako nekonečnou posloupnost algebraických operací takto

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

Viètova formule je významná v tom, že poprvé byla hodnota π vyjádřena matematickým vzorcem. Jmenovatelem je nekonečný součin druhých odmocnin algebraických výrazů, odvození ovšem pochází opět z geometrie. (Tab. 1).

Tab. 1 *Viètova formule
použita k aproximaci π*

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} &= \cos \frac{90}{2} \cos \frac{90}{4} \cos \frac{90}{8} = \\ &= \text{sqr}(1/2) * \\ &\quad \text{sqr}(1/2 + 1/2 * \text{sqr}(1/2)) * \\ &\quad \text{sqr}(1/2 + 1/2 * \text{sqr}(1/2 + \\ &\quad + 1/2 * \text{sqr}(1/2))) * \end{aligned}$$

Počet kroků	Aproximace π
1	2.8284271
2	3.0614675
10	3.1415914
11	3.1415923
12	3.1415926
13	3.1415926

Proč někdy o π mluvíme jako o Ludolfově čísle? Holandský matematik *Ludolf van Ceulen* (čti *Kajlen*) počítal aproximace π pomocí posloupnosti vepsaných pravidelných mnohoúhelníků podobně jako Archimedes. Posledním členem této posloupnosti byl 10 473 741 248-úhelník. Číslo π Ceulen vypočetl na 35 desetinných míst. Podařilo se mu to v roce 1610.

Zvolte vhodnou posloupnost pravidelných mnohoúhelníků a vyjádřete aproximaci π vzorcem.

Úloha pro náročnější — uvědomte si geometrický význam členů ve Viètově vzorci a pokuste se jej odvodit.

V roce 1761 německý astronom a matematik *Johann Heinrich Lambert* ukázal, že π je iracionální číslo, že nemá periodický desetinný rozvoj. Nelze tedy najít žádný zlomek s celým číslem v čitateli a jmenovateli, aby se rovnal přesně hodnotě π .

Ještě předtím však našel německý matematik (a vlastně polyhistor, též tvůrce jednoho z prvních počítačích strojů) *Gottfried Wilhelm Leibniz* velmi jednoduché vyjádření čísla π nekonečnou řadou se střídavými znaménky

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

To bylo v roce 1674. Řada byla jen vedlejším výsledkem rozvoje nových metod, které jsou dnes základem matematické analýzy. I když matematická analýza samozřejmě s geometrií souvisí, toto vyjádření π již nevycházelo přímo z geometrické představy. (Tab. 2).

Tab. 2

Leibnizova řada

použita k aproximaci π

$$\pi \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Počet kroků	Aproximace π
1	4
10	3.0418396
100	3.1315929
1000	3.1405927
10000	3.1414927

Jaký je součet šesti, 11, 100 a 1000 členů řady?

Tab. 3a

```

10 PRINT „LEIBNIZOVA RADA“
12 PRINT „POUZITA K APROXIMACI PI“
13 PRINT „-----“: PRINT: PRINT
14 PRINT „PI * 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 ...“
15 PRINT: PRINT
18 PRINT „POCET KROKU“, „APROXIMACE PI“: PRINT
20 INPUT „POCET KROKU =“; N
30 LET PI = 1
40 LET A = 3
50 LET B = - 1
60 FOR C = 2 TO N
70 LET PI = PI + B/A
80 LET B = - B
90 LET A = A + 2
100 NEXT C
110 LET PI = 4*PI
120 PRINT N, PI
130 GOTO 20

```

Tab. 3b

```

200 PRINT „EULEROVA RADA“
210 PRINT „POUZITA K APROXIMACI PI“
220 PRINT „-----“: PRINT: PRINT
230 PRINT „PI = 4*[(1/2 + 1/3) - (1/2 ↑ 3 + 1/3 ↑ 3)/3 +
      + (1/2 ↑ 5 + 1/3 ↑ 5)/5 - ...]“: PRINT: PRINT
240 PRINT „POCET KROKU“, „APROXIMACE PI“: PRINT
250 INPUT „POCET KROKU =“; K
260 LET PI = 0
265 LET A = 1/2: LET B = 1/3: LET D = 1
268 FOR C = 1 TO K STEP 2
270 LET PI = PI + (A ↑ C + B ↑ C)/C*D
280 LET D = - D
285 NEXT C
287 LET PI = 4 * PI
290 PRINT K, PI
295 GOTO 250

```

Tab. 3c

```

300 PRINT „WALLISOVA FORMULE“
305 PRINT „POUZITA K APROXIMACI PI“
310 PRINT „-----“: PRINT: PRINT
315 PRINT „      2*2*4*4*6*6*...“
320 PRINT „PI = -----“
325 PRINT „      1*3*3*5*5*7*...“
330 PRINT: PRINT
335 PRINT „POCET KROKU“, „APROXIMACE PI“: PRINT
340 INPUT „POCET KROKU = “; K
345 LET PI = 1
350 FOR C = 2 TO K STEP
355 LET PI = PI*C*C/(C - 1)/(C + 1)
360 NEXT C
365 LET PI = 2*PI
370 PRINT K, PI
375 GOTO 340

```

Tab. 3d

```

400 PRINT „VIETOVA FORMULE“
405 PRINT „POUZITA K APROXIMACI PI“
410 PRINT „-----“: PRINT
415 PRINT „2      90      90      90“
420 PRINT „-- = COS-- COS-- COS-- ... =“
425 PRINT „PI      2      4      8 “: PRINT
430 PRINT „      = SQR (1/2)*“
435 PRINT „      SQR (1/2 + 1/2*SQR (1/2))*“
440 PRINT „      SQR (1/2 + 1/2*SQR (1/2 + 1/2*SQR (1/2)))*
      *...“
445 PRINT: PRINT
450 PRINT „POCET KROKU“, „APROXIMACE PI“: PRINT
455 INPUT „POCET KROKU = “; K
460 LET A = SQR (1/2)
465 LET S = 1
470 FOR I = 1 TO K
475 LET S = S*A
480 LET A = SQR (.5 + .5*A)
485 NEXT I
490 LET PI = 2/S
495 PRINT K, PI
497 GOTO 455

```


Právě Leibniz již ve své době propagoval, aby se otravné výpočtářské práce svěřily strojům. Počítač skutečně dává řadu možností, jak se o aproximacích π dozvědět mnohem více, než stojí v učebnicích. Proto jsou pro uživatele osobních počítačů přiloženy programy. Použijte je a porovnejte například rychlost konvergence řad, tedy kolik členů řady je třeba sečíst, než dostanete hodnotu π na žádaný počet desetinných míst! Například u Eulerovy řady postačí 19 kroků (Tab. 4) u Viètovy

Tab. 4 Eulerova řada
použita k aproximaci π

$$pi = 4 * [(1/2 + 1/3) - (1/2 \uparrow 3 + 1/3 \uparrow 3)/3 + (1/2 \uparrow 5 + 1/3 \uparrow 5)/5 - \dots]$$

Počet kroků	Aproximace π
1	3.3333333
10	3.1417412
18	3.141593
19	3.1415926
20	3.1415926
21	3.1415927
22	3.1415927
23	3.1415927

formule stačí jen 11 kroků k přesnosti na 6 míst. Na druhé straně uvidíte, že s Leibnizovou řadou byste se správného výsledku asi dlouho nedopočetali, třebaže řada je jednoduše vyjádřená a sama o sobě není chybná.

Programy jsou připraveny pro počítač Sinclair Spectrum, ale obsahují jen základní příkazy jazyka BASIC. Užití různých formulí zvolíte příkazem RUN, RUN 200, RUN 300 nebo RUN 400. Uvědomte si však, že tyto výpočty lze provádět i s kapesním kalkulátorem a že naši předkové to zvládli i bez této výbavy. (Tab. 3, 5)

Tab. 5 Wallisova formule
použita k aproximaci π

$$pi = \frac{2*2*4*4*6*6*}{1*3*3*5*5*7*}$$

Počet kroků	Aproximace π
1	2
10	3.002176
100	3.1260789
1000	3.1400235
10000	3.141433

Zajímavé určení π představuje tzv. *Buffonova úloha*, kterou lze stručně popsat takto: Nalezneme místnost s podlahou z prken stejné šířky (např. 20 cm). Vezmeme do ruky jehlici (hřebík, drát apod.) o délce rovné polovině šířky prkna (např. 10 cm). Úloha nyní zní, jaká je pravděpodobnost, že jehlice padne přes spáru mezi prkny. (Buffonova úloha je příkladem užití metody Monte Carlo. Dnes má tato technika hledání řešení pomocí pokusů široké pole aplikací a dávno už se nepoužívá jen k výpočtu π . Autor myšlenky, *Georges Louis Leclerc, hrabě Buffon*, byl ředitelem pařížské botanické zahrady a propagátorem přírodních věd).

Pokud nechcete experimentovat s podlahou, připravte si linkovaný papír (asi po 2 cm) a několik kousků párátko o vhodné délce (1 cm). Kousky pouštějte opakovaně z výšky asi 30 cm nad papírem a zaznamenávejte počet případů, kdy párátko padlo přes linku. Jaký je podíl? (Hypotéza: $\pi = 2 \cdot \text{počet pokusů} / \text{počet úspěchů}$.)

Patříte-li mezi opravdové přátele čísla π , jistě oceníte mnemotechnickou pomůcku našich předků:

Lín a kapr u hráze
prohlédli si rybáře.
Udici měl novou,
jikrnáči neuplovou.

Už víte, jak je π zakódováno v této říkance?

Také jiné národy si pomáhají říkankami:

“Yes, I know a digit“
“May I have a large container of coffee?“
“See, I have a rhyme assisting
My feeble brain, its tasks oftentimes resisting“
(Hle a mámť i verše nápomocné
už mdlému mozku, což úkolu takčasto vzdoroval.)
„Gib, o Gott, o Guter, Fähigkeit zu lernen
Einem ach armen, gejagten, verzagten,
Examina Ochsenden; gib Du ihm Verstand,
Auch Talent“
(Dej, ó bože, ó dobrý, schopnost se naučit
žáčku, ach, bídne honěnému, skleslému,
zkoušky šrotícímu, dej ty mu s chápáním
také talent.)

Nyní si možná pamatujete prvních 21 číslic. Jistý *Rajan Mahadevan* dokázal recitovat z paměti 31 811 platných cifer čísla π , jak tvrdí Guinnessova kniha rekordů z roku 1983. Pro ty, kteří nemají chuť ho překonávat, prozradíme, že na milióntém místě desetinného rozvoje je jednička a na dvoumilióntém devítka.

Numerické výpočty kolem π již inspirovaly mnoho zájemců k vytvoření vtipných a hlubokých metod vhodných nejen pro určení π . Zkuste si sami vytvořit program nebo algoritmus pro výpočet π na předem stanovený počet desetinných míst (ovšem větší, než počet platných cifer, s nimiž počítá váš počítač nebo kalkulač). Zašlete-li výsledek do redakce a bude-li správný, stanete se i vy členem historického π -klubu.

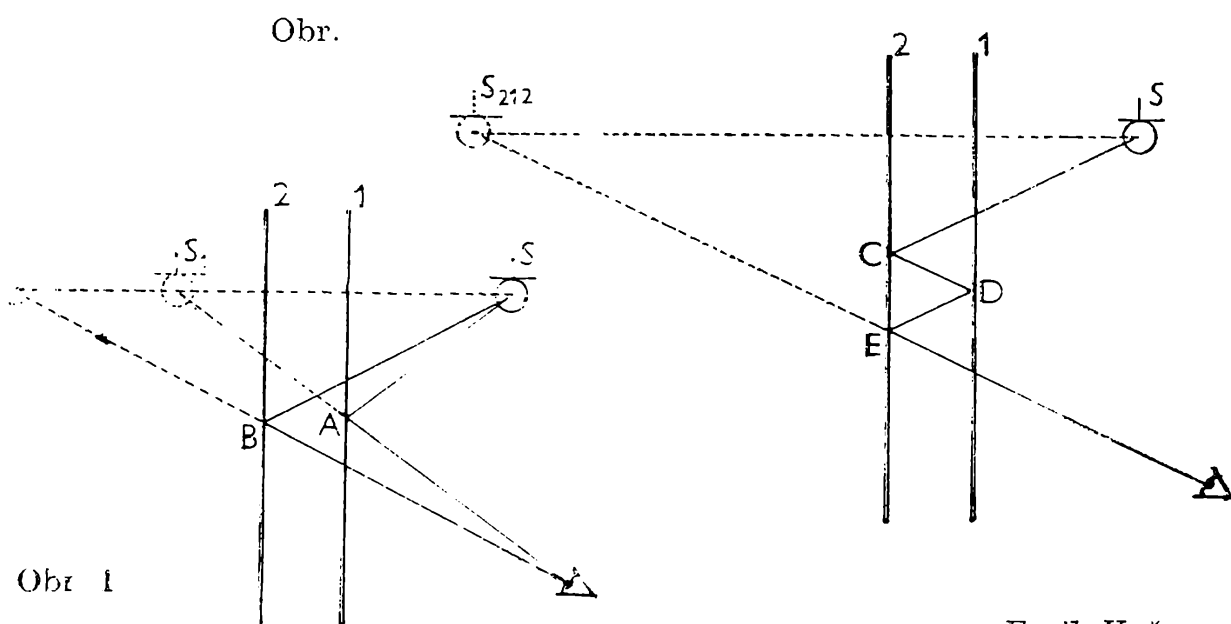
PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Zrcadlové obrazy na dvojitém okně

Díváme-li se do dvojitého okna, za kterým je tma a před nímž svítí žárovka, vidíme dva přibližně stejně světlé obrazy žárovky, které vznikají na povrchu skel jako na rovných zrcadlech (obr. 1). Pátráme-li po třetím obrazu, který vznikne po třech odrazech (obr. 2), zjistíme, že je nesrovnatelně méně světlý než první dva obrazy, popř. je stěží pozorovatelný.

Otázka Co je toho příčinou?

(Řešení je na str. 164)



Emil Kašpar

Několik úloh

1. Kolik existuje skupin sta po sobě bezprostředně následujících přirozených čísel, jejichž součet je v intervalu $(10^5; 10^6)$? [9000]

2. Všimněte si zvláštního součinu

$$23 \ 96 = 69 \ 32 ,$$

kde souvislost mezi činiteli na levé straně rovnosti a součiniteli na pravé straně je zřejmá. Najděte jinou dvojici dvojčiferných čísel této vlastnosti.

[Označme po řadě $x, y; u, v$ cifry prvního a druhého čísla. Vyhovují všechna čísla, o jejichž cifrách platí $x \ y = v \ u$.]

3. Pro která přirozená čísla x, y , platí

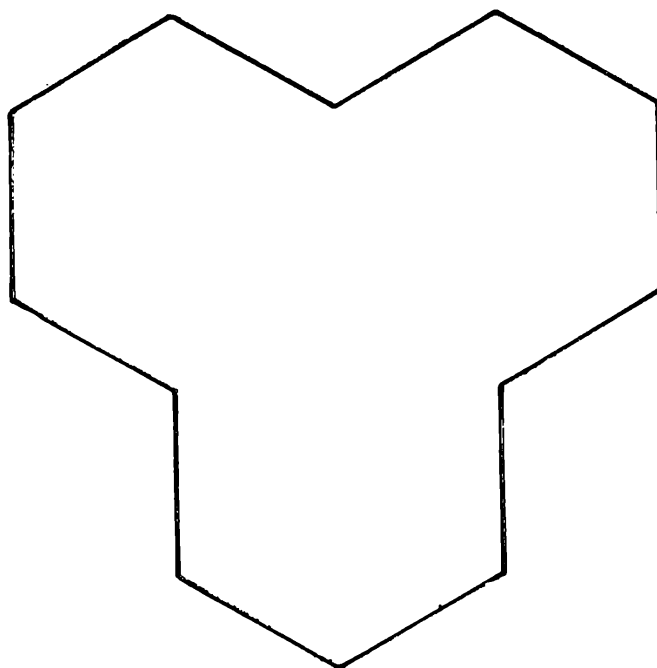
$$\frac{x}{y} = \frac{x^2 + 10}{y^2 + 10} ?$$

[(1; 10), (2; 5), (5; 2), (10; 1). Vždy, když $xy = 10$.]

4. V obr. 1 je narysován dvanáctiúhelník, který

a) má všechny strany shodné,

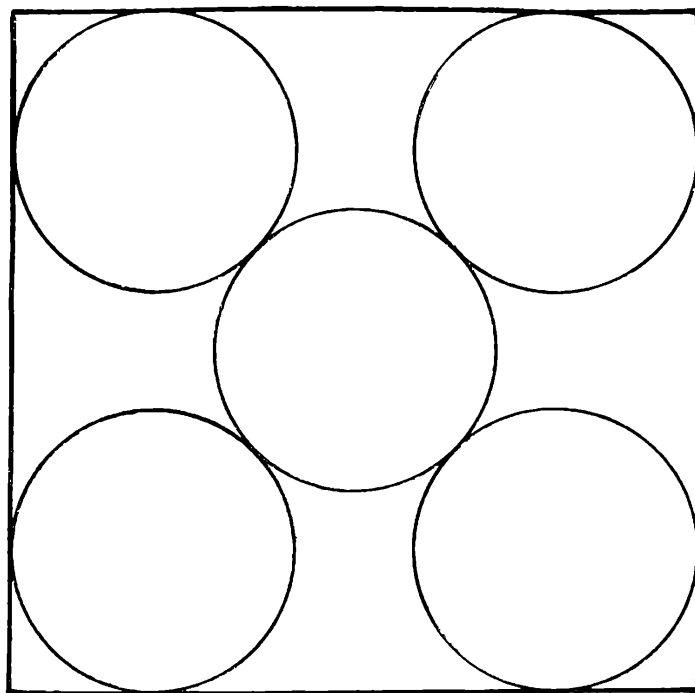
b) má vnitřní úhly velikosti 120° nebo 240°



Obr. 1

Vypočítejte jeho obsah, jestliže strany dvanáctiúhelníka mají délku a .

$$\left[\frac{21}{4} a^2 \sqrt{3} \right]$$



Obr. 2

5. V obr. 2 je narysován čtverec, jehož strana má délku a . V něm je narysováno pět shodných kružnic. Vnitřní kružnice se dotýká zbývajících čtyř a každá z těchto čtyř se dotýká dvou stran čtverce. Vypočítejte délku jejich poloměrů užitím délky a . $\left[r = \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1) \right]$

6. Do rovnostranného trojúhelníka ABC je vepsán rovnostranný trojúhelník $A'B'C'$ a to tak, že $A'C' \perp AB$, $B'A' \perp BC$, $C'B' \perp CA$. ($A' \in BC$ atd.) Určete obsah trojúhelník $A'B'C'$ $\left[\frac{a^2}{12} \sqrt{3} \right]$

Stanislav Horák

Noční rozhovor

Půlnoční když udeřila hodina,
na lože mi usedla prázdná množina.
Bledá, křehká, prázdná byla,
takto ke mně hovořila:

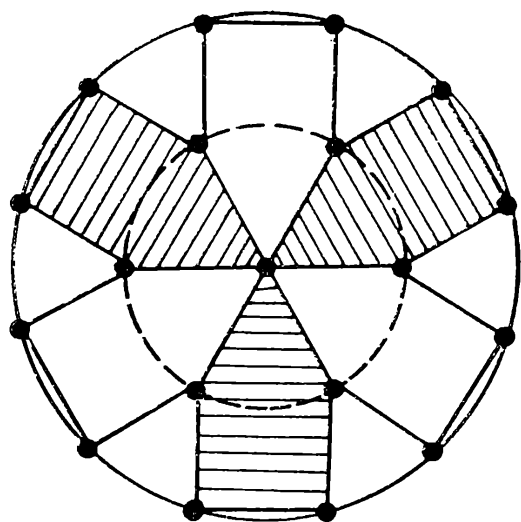
$$\begin{aligned} & \emptyset \\ & \emptyset \neq \{\emptyset\}. \\ & \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \\ & \emptyset = \emptyset \cap \emptyset \\ & \emptyset \in \emptyset \\ & \emptyset \end{aligned}$$



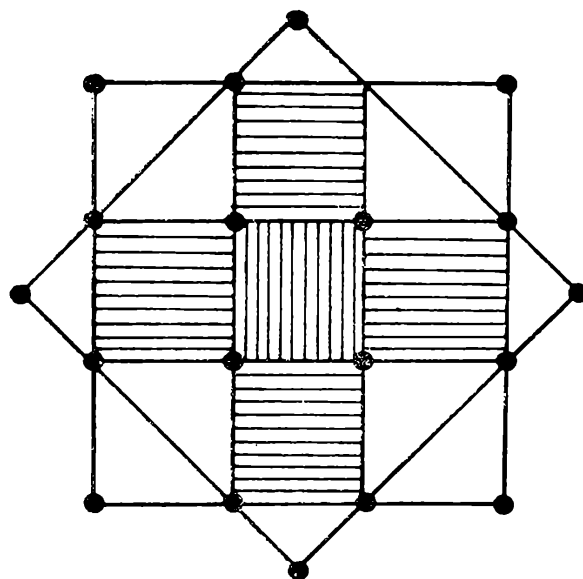
Co mi její výklad dal?
Za chvíli jsem pevně spal!
dr. Emili Calda, CSc.

Magické obrazce

Magické obrazce mohou mít rozmanitý tvar. Jejich magická síla tkví v tom, že při správném rozmístění čísel vznikne několik stejných, na sobě závislých součtů. Zkuste tedy i vy vyřešit následující dva obrazce (obr. 1, 2);



Obr. 1



Obr. 2

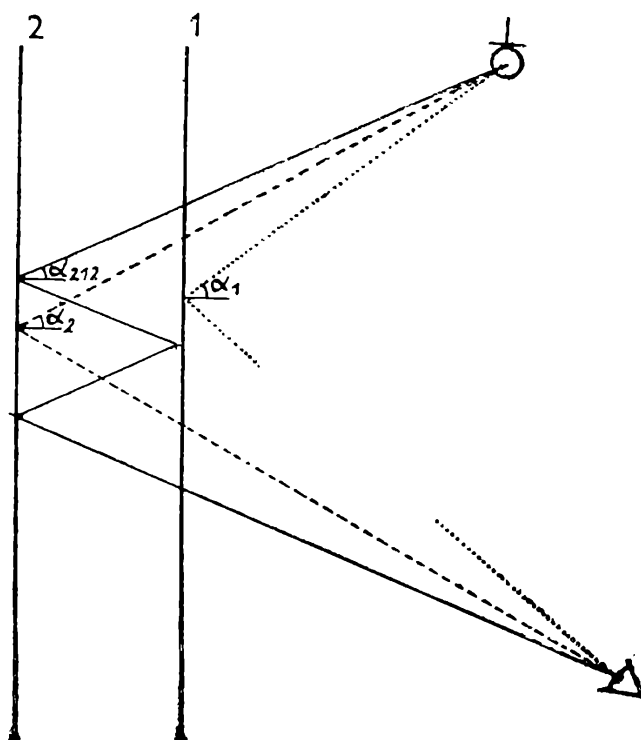
- Doplňte čísla 1—20 tak, aby vzniklo 21 stejných součtů po čtyřech číslech: 4 vodorovné a 4 svislé úsečky, 5 vnitřních čtverečků, vrcholy dvou velkých čtverců, vrcholy šesti obdélníků 1×3 (3 vodorovné a 3 svislé).
- Doplňte čísla 1—19 tak, aby součet čísel na vrcholech pětiúhelníků i na vnitřní kružnici byl 57 a součet čísel na vnější kružnici byl dvojnásobný

(Řešení je na str. 176)

Jarmila Pěničková

Úloha ze str. 161

Řešení. Je-li úhel dopadu tak malý jako v našem případě, pak při dopadu na sklo většina světelné energie sklem prostupuje a menší díl se odráží. Proto obraz S_2 , vzniklý odrazem na druhé tabuli, je jen nepříliš méně intenzivní než obraz S_1 , vzniklý odrazem na tabuli první. Únik



Obr. 3

světelné energie průchodem se v obou případech děje jen jednou v místech odrazu A a B).

Při trojnásobném odrazu vzniká ztráta průchodem světla na třech místech C, D, E (obr. 2). Kromě toho úbytek světla průchodem skleněnou tabulí je tím větší, čím je úhel dopadu menší, neboť při menším úhlu dopadu se méně světla odráží. U trojnásobného odrazu je úhel dopadu menší než v předešlých dvou případech (obr. 3).

E. Kašpar

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

7. Nechtě a, b, c jsou délky stran a α, β , velikosti k nim protějších úhlů libovolného trojúhelníku ABC . Dokažte, že platí:

$$\sqrt{a \sin \alpha} + \sqrt{b \sin \beta} + \sqrt{c \sin \gamma} = \sqrt{(a + b + c)(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)}$$

(Došlo 44 řešení.)

Jaroslav Šedivý

Pouze šest řešitelů mylně prohlásilo za důkaz dané rovnosti nějakou rovnost typu $K = K$, kterou získali úpravami dané rovnice, tj. obou jejích stran najednou. Ostatní řešitelé podali správná řešení, použili však velmi rozmanité postupy; zkušeni například poznali, že jde o jeden případ Cauchyho nerovnosti. Většina řešitelů pracovala s rovnostmi výrazů, které obsahuje sinová věta. Ukážeme dvě nejstručnější řešení tohoto typu s nepodstatnými úpravami originálního textu; prvním způsobem postupovalo 9 řešitelů, druhý byl ojedinělým přímým důkazem dané rovnosti, který vyšel z rovnosti $0 = 0$.

I. Řešení Hany Peňázové, 3. B G, tř. kpt. Jaroše 14, Brno:

Pro poloměr r kružnice opsané trojúhelníku ABC platí

$$\sin \alpha = \frac{a}{2r}, \quad \sin \beta = \frac{b}{2r}, \quad \sin \gamma = \frac{c}{2r}.$$

Upravím levou stranu rovnosti:

$$\begin{aligned} \sqrt{a \sin \alpha} + \sqrt{b \sin \beta} + \sqrt{c \sin \gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2r}} (a + b + c) = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2r} (a + b + c)^2} = \sqrt{(a + b + c) \left(\frac{a}{2r} + \frac{b}{2r} + \frac{c}{2r} \right)} = \\ &= \sqrt{(a + b + c) (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)} \end{aligned}$$

Úpravou levé strany rovnosti jsem získala její pravou stranu. Tím je dokázáno, že rovnost platí.

II. Řešení Lenky Bočkové, 3A G Sladkovského nám. 8, Praha 3:

Ze sinové věty plyne, že $0 = \sqrt{a \sin \beta} - \sqrt{b \sin \alpha}$; platí i dva obdobné vztahy, proto můžeme napsat

$$\begin{aligned} 0 &= (\sqrt{a \sin \beta} - \sqrt{b \sin \alpha})^2 + (\sqrt{b \sin \gamma} - \sqrt{c \sin \beta})^2 + (\sqrt{a \sin \gamma} - \\ &\quad - \sqrt{c \sin \alpha})^2 \end{aligned}$$

Postupnými úpravami této platné rovnosti dostaneme dokazovaný vztah.

[Čtyři řádky úprav zde už neuvádíme.]

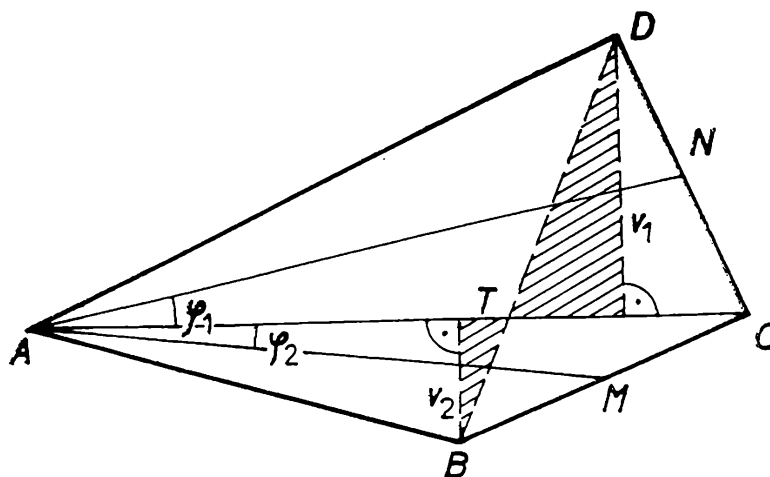
8. Nechť M , N jsou po řadě středy stran BC , CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, jehož strany BC , CD jsou shodné. Dokažte tuto větu. Čtyřúhelník $AMCN$ je tětiový nebo deltoid, právě když je $|AM| \cdot |DT| = |AN| \cdot |BT|$, kde T je průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$.

(Došlo 8 řešení.)

Jaroslav Švrček

Autorovo řešení, jemuž se nejvíce blíží řešení Roberta Babilona, 3D G, M. Koperníka v Bílovci:

Nechť v_1 je výška ke straně AC trojúhelníku ACD a v_2 je výška ke straně AC trojúhelníku ACB . Je-li $BD \perp AC$, je $v_1 = |DT|$, $v_2 = |BT|$



Obr. 1

Není-li $BD \perp AC$ (obr. 1), jsou vyšrafované trojúhelníky na obr. 1 podobné (věta uu); proto je

$$v_1 : v_2 = |DT| : |BT| \quad (1)$$

Tato rovnost platí ovšem i v předešlém případě. Nechť P'_1, P'_2 jsou po řadě obsahy trojúhelníků ACD, ACB ; potom je $P'_1 : P'_2 = v_1 : v_2$, a tedy podle rovnosti (1) je $P'_1 : P'_2 = |DT| : |BT|$. Nechť P_1, P_2 jsou po řadě

obsahy trojúhelníků ACN, ACM ; protože je $P_1 = \frac{1}{2} P'_1, P_2 = \frac{1}{2} P'_2$, je podle předešlé rovnosti

$$P_1 : P_2 = |DT| : |BT| \quad (2)$$

Budiž $\varphi_1 = \angle CAN, \varphi_2 = \angle CAM$; potom je $\varphi_1 + \varphi_2 < \angle BAD$, takže je

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 180^\circ \quad (3)$$

Zároveň je

$$P_1 = \frac{1}{2} |AC| |AN| \sin \varphi_1, P_2 = \frac{1}{2} |AC| |AM| \sin \varphi_2;$$

z toho podle rovnosti (2) plyne, že je

$$|AN| \sin \varphi_1 = |AM| \sin \varphi_2 = |DT| : |BT| \quad (4)$$

Budiž $\alpha = \angle ANC, \beta = \angle AMC$; potom podle sinové věty je

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi_1} = \frac{|AC|}{|CN|}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \varphi_2} = \frac{|AC|}{|CM|}$$

Protože je $|CN| = |CM|$, je

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi_2} \quad (5)$$

a) Je-li čtyřúhelník $AMCN$ deltoid se shodnými stranami CM, CN , jsou body M, N souměrně sdruženy podle přímky AC a totéž platí pro body B, D . Proto je $|AM| = |AN|, |BT| = |DT|$, takže je

$$|AM| : |DT| = |AN| : |BT| \quad (6)$$

Je-li čtyřúhelník $AMCN$ tětivový, pak v kružnici jemu opsané patří obvodové úhly CAN , CAM o velikostech φ_1 , φ_2 ke shodným tětivám CN , CM této kružnice; proto je $\varphi_2 = \varphi_1$. Podle rovnosti (4) je potom

$$|AN| \cdot |AM| = |DN| \cdot |BT| \quad (7)$$

z toho plyne, že platí rovnost (6).

b) Obráceně, nechť platí rovnost (6); pak platí také rovnost (7). Z této rovnosti a z rovnosti (4) plyne, že je

$$|AN| \sin \varphi_1 = |AM| \sin \varphi_2 = |AN| \cdot |AM|;$$

z toho však plyne, že je $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2$. Je tedy buď $\varphi_1 = \varphi_2$ nebo $\varphi_2 = 180^\circ - \varphi_1$ čili $\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$; to však podle rovnosti (3) není možné. Je tedy

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (8)$$

Podle rovnosti (5) je potom $\sin \alpha = \sin \beta$, takže je buď $\alpha = \beta$ nebo $\alpha + \beta = 180^\circ$. Protože platí rovnost (8), je v prvním případě $\triangle ACN \cong \triangle ACM$, takže obrazec $AMCN$ je deltoid. V druhém případě je obrazec $AMCN$ tětivový čtyřúhelník.

Fyzika

4. Vzdálenost mezi zdrojem a stínítkem je $L = 50$ cm. Spojná čočka, která zobrazuje zdroj na stínítko, se může pohybovat po kolmici vedené ze zdroje na rovinu stínítka. Ve dvou různých polohách čočky, jež jsou od sebe vzdáleny o $e = 10$ cm, vzniká obraz. Určete ohniskovou vzdálenost f čočky. Jaký musí být vztah mezi vzdáleností L zdroje od stínítka a ohniskovou vzdáleností f čočky, má-li se uvedený experiment dát realizovat?

(Došla 3 řešení.)

Eva Havránková

Řešení Pavla Kolníka, 3 C G Nové Město nad Váhom:

Prvý obraz vzniká, keď je šošovka vo vzdialenosti x od zdroja. Vzdialenosť šošovky od tienidla je vtedy $L - x$ a platí zobrazovacia rovnica v tvare

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L - x} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

Druhý obraz vzniká, keď je šošovka vo vzdialenosti $x + e$ od zdroja. Vzdialenosť šošovky od tienidla je vtedy $L - x - e$ a platí zobrazovacia rovnica v tvare

$$\frac{1}{x + e} + \frac{1}{L - x - e} = \frac{1}{f} \quad (2)$$

Dostali sme dve rovnice (1), (2) o dvoch neznámych x , f . Riešením tejto sústavy rovníc dostaneme

$$f = \frac{L^2 - e^2}{4L}$$

číselne

$$f = \frac{50^2 - 10^2}{4 \cdot 50} \text{ cm} = 12 \text{ cm}.$$

Aby sa dal takýto experiment realizovať, musí byť e kladné reálne číslo. Preto musí byť $L > 4f$.

5. Po pohybujúcim sa eskalátoru (tj. pohyblivém schodišti) pražského metra beží dolú dva študenti. Jeden rýchlosťou v_1 , druhý rýchlosťou v_2 ; prvý napočítal n_1 schodů, druhý n_2 schodů. Najdšte počet N schodů eskalátoru a rýchlosť v eskalátoru.
(Došla 3 riešení.)

Zdeněk Janout

Řešení Pavla Kolníka, 3 C G, Nové Město nad Váhom:

Označme dĺžku celého schodišta s a dĺžku jedného schodu v smere pohybu schodišta ako D .

Prvý študent sa pohyboval voči zemi rýchlosťou $(v + v_1)$, a to po čas t_1 prešiel teda dráhu $s = (v + v_1)t_1$. (1)

Druhý študent sa pohyboval voči zemi rýchlosťou $(v + v_2)$, a to po čas t_2 , prešiel teda dráhu

$$s = (v + v_2)t_2 \quad (2)$$

Voči eskalátoru sa pohyboval prvý študent rýchlosťou v_1 a prešiel dráhu $v_1 t_1 = n_1 D$, odtiaľ

$$t_1 = \frac{n_1 D}{v_1}$$

Druhý študent podobne prešiel voči eskalátoru dráhu $v_2 t_2 = n_2 D$, preto

$$t_2 = \frac{n_2 D}{v_2}$$

Dĺžka schodišta je $s = N D$, kde N je počet schodov eskalátora. Ak do rovníc (1) a (2) dosadíme za časy t_1 , t_2 a za dráhu s , dostaneme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych (D možno vylúčiť):

$$N D = (v + v_1) \frac{n_1 D}{v_1},$$

$$N D = (v + v_2) \frac{n_2 D}{v_2}$$

Jej riešením dostaneme:

$$v = \frac{(n_1 - n_2) v_1 v_2}{v_1 n_2 - v_2 n_1},$$

$$N = \frac{(v_1 - v_2) n_1 n_2}{v_1 n_2 - v_2 n_1}$$

Úlohy k řešení

V tomto čísle otiskujeme poslední úlohy z matematiky, fyziky i konstrukční geometrie. Řešení těchto úloh zašlete do 30. dubna 1987 na adresu redakce *Rozhledů*, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla tohoto časopisu.

Řešení každé úlohy pište čitelně česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Na každém listu uveďte nahoře vlevo velmi čitelně celé své jméno, třídu i školu, kde studujete; zároveň připojte svou bytovou adresu se směrovacím číslem.

Matematika

8. V krychli $ABCDEFGH$ je vyznačen střed K hrany GH a libovolný bod přímky DB je označen X . Zkoumejte množinu všech trojúhelníků EKX :

- Sestrojte trojúhelník EKX , který má nejmenší obsah.
- Určete všechny pravoúhlé trojúhelníky EKX .

V obou případech popište polohu bodů X na přímce DB poměrem $|DX| : |BX|$ a údajem, zda leží či neleží na úsečce DB .

Jaroslav Šedivý

9. Pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ má pravé úhly ADB , ADC , BDC . Na jeho hranách AD , BD , CD jsou sestrojeny po řadě body X , Y , Z tak, že platí:

$$\frac{|AX|}{|XD|} + \frac{|BY|}{|YD|} + \frac{|CZ|}{|ZD|} = 1$$

Dokažte, že těžiště T tohoto čtyřstěnu leží v rovině XYZ .

Jaroslav Švrček

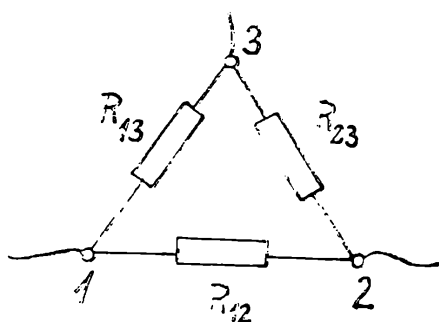
10. Nechť U je vnitřním bodem rovnostranného trojúhelníku ABC , který má obvod o_1 . Paty kolmic vedených bodem U ke stranám AB , BC , CA jsou po řadě vrcholy U_C , U_A , U_B trojúhelníku, který má obvod o_2 . Dokažte, že platí:

$$\frac{1}{2} o_1 \leq o_2 < o_1$$

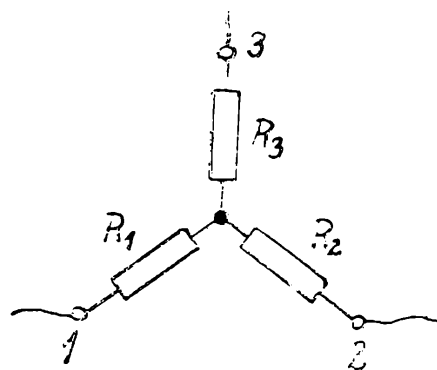
Jaroslav Švrček

Fyzika

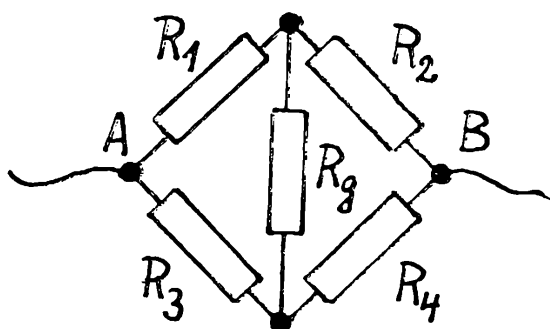
5. V elektrickém obvodu (obr. 1, *zapojení do trojúhelníku*) jsou dány odpory R_{12} , R_{13} , R_{23} mezi body 1, 2, 3. Určete odpory R_1 , R_2 , R_3 v obvodu nakresleném na obr. 2 (*zapojení do hvězdy*) tak, aby oba dva obvody byly



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

ekvivalentní. (Ekvivalence znamená, že při záměně obou obvodů se v okolní síti nic nezmění.) *Poznámka:* Záměna trojúhelníku na hvězdu umožní vypočítat např. odpor mezi body A, B sítě znázorněné na obr. 3 (nevyvážený Wheastonův most).

Eva Havránková

6. Jedním z radionuklidů používaných v nukleární biologii je radiofosfor ^{32}P , který má poločas rozpadu 14,3 dne. Vypočítejte, jaká část z počátečního počtu radioaktivních jader ^{32}P zůstane v preparátu po 10 a 100 dnech. Potom vypočítejte, kolik částic beta emituje za den jeden mikrogram radionuklidu ^{32}P

Zdeněk Janout

Konstrukční geometrie

2. Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan VABCD s podstavou ABCD a výškou SV shodnou se stranou čtverce ABCD. Potom řešte tyto úlohy:

- V obrázku jehlanu sestrojte obraz paty P výšky AP ke straně VB trojúhelníku VBC.
- Zjistěte (eukleidovskou konstrukcí) odchylku α rovin dvou protějších bočních stěn jehlanu.
- Zjistěte (eukleidovskou konstrukcí) odchylku β rovin dvou sousedních bočních stěn jehlanu.
- Potom odchylky α , β vypočítejte.

Emil Kraemer

3. Necht v prostoru je dán libovolný trojúhelník ABC . Jeho ortocentrum (průsečík výšek) budiž bod V ; střed kružnice, která je trojúhelníku ABC opsána (resp. vepsána), budiž bod S (resp. O). Necht rovnoběžný průmět daného trojúhelníku ABC do dané roviny π je trojúhelník $A'B'C'$ (který si libovolně zvolte). Necht jsou zároveň průměty bodů V, S, O do roviny π po řadě body V', S', O' . Řešte tyto úlohy:
- a) V rovině π určete množinu všech bodů, k níž náleží bod V' , a množinu všech bodů, k níž bod V' nepatří.
 - b) V rovině π určete množinu všech bodů, k níž náleží bod S' , a množinu všech bodů, k níž bod S' nepatří.
 - c) V rovině π určete množinu všech bodů, k níž náleží bod O' , a množinu všech bodů, k níž bod O' nepatří.

Emil Kraemer

INFORMACE

Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v roce 1986

(dokončení)

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

Soubor pro uchazeče o fyzikální obory

1. Dokažte, že pro libovolné celé $n \geq 0$ je číslo

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n-1}$$
 dělitelné číslem 133.
2. V rovině označme O počátek, A bod $[0, 1]$, B bod $[1, 0]$ a C bod
 $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$. Konstrukcí nalezněte všechny body z nichž je úsečku OA vidět pod úhlem 60° a úsečku BC pod pravým úhlem.
3. Najděte všechna reálná čísla x , pro která

$$\log_{10} 2 + \log_{10}(4^{x-2} + 9) = 1 + \log_{10}(2^{x-2} + 1)$$
 [Výsledek: $x_1 = 2, x_2 = 4$.]
4. Parabola je definována jako množina bodů o stejné vzdálenosti od daného bodu (tzv. ohniska) a dané přímky. Dokažte, že graf funkce

$y = ax^2$ ($a \neq 0$) je skutečně parabola v tomto smyslu a určete umístění ohniska. (Návod: Vzhledem k symetrii grafu je ohnisko na ose y a příslušná přímka rovnoběžná s osou x .)

5. Vážíme na rovnoramenných vahách. Smíme-li klást závaží jen na jednu misku, není možno pomocí sady tří závaží navážit víc než 7 různých kladných hodnot; tolik hodnot se však dosáhnout dá. Dokažte. Na druhé straně: navrhnete sadu tří závaží takových, že smíme-li klást závaží na obě misky, můžeme navážit kterýkoli (celý) počet váhových jednotek od 1 do 13.

Soubor pro uchazeče o učitelské studium

1. V množině všech reálných čísel řešte nerovnici

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} > |x| - 1$$

$$\left[\text{Výsledek: Právě všechna } x \in \left(-\infty, \frac{3}{2} \right) \right]$$

2. Najděte na přímce o parametrickém vyjádření ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x &= 7 + 2t \\ y &= -1 - t \\ z &= -2t \end{aligned}$$

všechny body, které mají od bodu $[7; -1; 0]$ vzdálenost 12.

[Výsledek: $[15; 3; -8]$ $[-1; 5; 8]$.]

3. Určete $\operatorname{tg} \alpha$, víte-li, že je $\cos \alpha = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ a $\alpha \in \left(29\pi, \frac{59}{2}\pi \right)$.

$$\left[\text{Výsledek: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2\sqrt{6} - 4}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right]$$

4. Vypočtete poloměr kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku, jehož základna má délku $2a$ a délka ramene je b .

$$\left[\text{Výsledek: } r = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \right]$$

5. Je dáno libovolné celé nezáporné číslo k . Určete součet všech přirozených čísel n , pro něž platí

$$k^2 \leq n \leq (k+1)^2$$

[Výsledek: $(k+1)(2k^2 + 2k + 1)$.]

A na závěr této informace už jen přání úspěšného vykonání příštích přijímacích zkoušek všem zájemcům o studium na MFF UK v Praze a jedna dobře míněná rada:

*Situace začíná být překérní
a nevíte, jak se máte chovat?
Použijte rychle způsob moderní:
začněte ji matematizovat!*

Kalendár M-F: december 1986

2. XII. 1966 zomrel *Luitzen Egbertus Brouwer*, holandský matematik, logik. Vedecké práce z teórie grúp a topológie. Odmietal zákon vylúčenia tretieho, konštruovateľnosť považoval za základ matematickej existencie. Vytvoril tzv. intuicionizmus.
3. XII. 1886 sa v Örebro narodil *Karl Manne Georg Siegbahn*, švédsky fyzik. Skúmal röntgenove žiarenie, spektrálne čiary. Jeho presné exaktné meracie metódy prispeli k lepšiemu poznaniu štruktúry atómu. V roku 1924 získal Nobelovu cenu za fyziku za objavy v oblasti röntgenovej spektroskopie.
5. XII. 1901 sa v Würzburgu narodil *Werner Heisenberg*, nemecký fyzik. Formuloval maticovú mechaniku, vyjadril princíp neurčitosti, podľa ktorého nemožno presne určiť rýchlosť a zároveň i polohu elektrónu. Zaujímal sa o filozofické problémy prírodných vied. V roku 1932 získal Nobelovu cenu za fyziku.
8. XII. 1961 zomrel *Arancesco Severi*, taliansky matematik. Vedecké výsledky dosiahol v oblasti projektívnej a algebraickej geometrie, topológii, teórii analytických funkcií. Zaujímal sa o problémy vyučovania matematiky.
10. XII. 1831 zomrel *Thomas Johann Seebeck*, nemecký fyzik. Pracoval v oblasti elektromagnetizmu a optiky. Objavil termoelektrinu, skonštruoval polariskop.
11. XII. 1781 sa narodil *David Brewster*, škótsky fyzik. Študoval refrakciu, absorpciu, interferenciu a polarizáciu svetla. Vynašiel kaleidoskop, zaujímal sa o históriu vedy.
11. XII. 1941 zomrel *Charles Emile Picard*, francúzsky matematik. Významné práce v teórii diferenciálnych rovníc, v teórii analytických funkcií. Zaujímal sa o filozofiu vedy.
14. XII. 1546 sa v Knudstrupe narodil *Tycho Brahe*, dánsky astronóm. Najlepší astronóm svojej doby, vytvoril vlastný model slnečnej sústavy. Pôsoobil aj na dvore cisára Rudolfa II. v Prahe. Je pochovaný v Týnskom chráme v Prahe.
14. XII. 1966 zomrel *Isaak Jakovlevič Pomerančuk*, sovietsky teoretický fyzik. Pracoval v oblasti jadrovej fyziky, fyziky elementárnych častíc, teórii jadrových reaktorov. Dvojnásobný laureát Štátnej ceny ZSSR.
18. XII. 1856 sa v Cheetham Hill narodil *Joseph John Thomson*, anglický fyzik. Venoval sa teoretickej mechanike, elektrodynamike, hmotnostnej spektroskopii i elektrónovej teórii kovov. Zmeral pomer

elektrického náboja a hmotnosti častíc katódových lúčov a tým prispel k odhaleniu hmotnosti elektrónov. V roku 1906 dostal Nobelovu cenu za fyziku za výsledky výskumov elektrickej vodivosti plynov.

19. XII. 1946 zomrel v Paríži *Paul Langevin*, francúzsky fyzik. Pracoval v oblasti magnetizmu, ionizácie plynov, teórie relativity a v ultraakustike.
20. XII. 1631 zomrel *Michael Mastlin*, nemecký matematik a astronóm. Bol učiteľom G. Galileiho i J. Keplera.
20. XII. 1901 sa narodil *Robert Jemison Van de Graaf*, americký fyzik. Zostrojil vysokonapäťový elektrostatický generátor na urýchľovanie častíc.
27. XII. 1571 sa v Weil der Stadt narodil *Johannes Kepler*, nemecký astronóm, fyzik a matematik. Matematicky formuloval zákony pohybu planét v slnečnej sústave.
29. XII. 1731 zomrel v Londýne *Brook Taylor*, anglický matematik. V roku 1712 našiel a v 1715 publikoval rozvoj funkcie na nekonečný rad. Písal štúdie o magnetizme, lome svetla, kapilarite. Patril do okruhu vedcov okolo Newtona.
29. XII. 1856 sa narodil *Thomas Jean Stieltjes*, francúzsky matematik holandského pôvodu. Zaujímal sa o teóriu funkcionálnych reťazových zlomkov, teóriu ortogonálnych mnohočlenov. Zaviedol nové poňatie integrálu.
29. XII. 1891 zomrel v Berlíne *Leopold Kronecker*, nemecký matematik. Dosiahol zaujímavé výsledky v teórii čísel, v teórii ideálov. Zaoberal sa eliptickými funkciami, aritmetikou kvadratických foriem. Bol zástancom aritmetizácie matematiky, odmietal uznať aktuálne nekonečno.
29. XII. 1941 zomrel *Tullio Levi-Civita*, taliansky matematik a mechanik. Zaoberal sa teóriou diferenciálnych rovníc, nebeskou mechanikou, hydromechanikou, tenzorovou analýzou. Má veľké zásluhy o rozvoj diferenciálnej geometrie viacrozmerných priestorov.
30. XII. 1691 zomrel v Londýne *Robert Boyle*, anglický fyzik a chemik. Odhalil vzťah medzi tlakom a objemom ideálneho plynu pri konštantnej teplote. Vymedzil predmet chémie, vytvoril korpuskulárnu teóriu hmoty. Od roku 1680 do svojho úmrtia bol prezidentom Londýnskej kráľovskej spoločnosti.
30. XII. 1926 sa v Obšarovke (Kujbyševská oblasť) narodil *Anatolij Alexejevič Logunov*, sovietsky teoretický fyzik, akademik. Vedecky pracuje v oblasti kvantovej teórie poľa a fyzike elementárnych častíc. Zúčastňuje sa na práci urýchľovača častíc v Serpuchove.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Savin, A. P.:

ENCYKLOPEDIČESKIJ SLOVAR JUNOGO MATEMATIKA

Vyšlo v nakladateľstve Pedagogika, Moskva 1985, 352 strán, farebné ilustrácie, viazané, cena 3 ruble 50 kopejok, u nás 45 Kčs.

Stretáte sa s matematikou vo farebnej úprave? Chcete poznať napríklad, kto a kedy zaviedol niektorý matematický symbol? Zaujímajú vás osudy niektorých základných matematických pojmov? Poznáte tváre niektorých významných matematikov? Potrebujete mať doma peknú knižku o matematike?

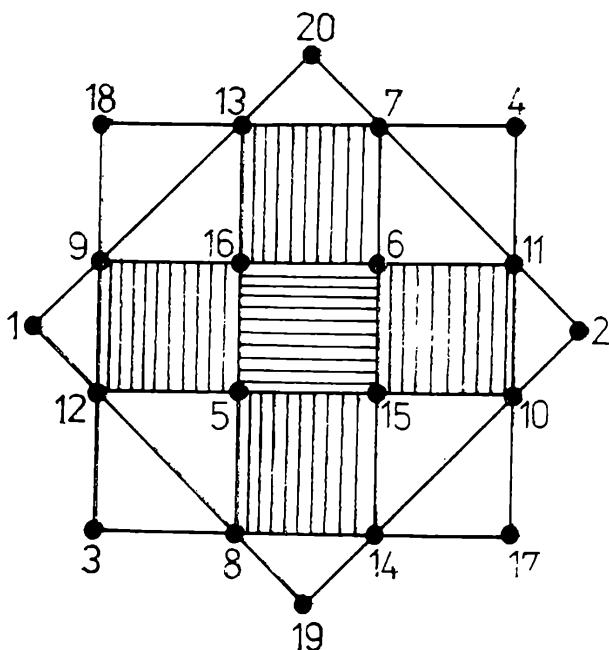
Encyklopedický slovník mladého matematika je výbornou knižkou pre každého študenta základ-

nej i strednej školy. S trochou opakovania ruštiny sa dozviete veľa podnetných zaujímavostí skoro o všetkých základných matematických pojmoch i o niektorých novších matematických disciplínach. V publikácii naplnenej pôsobivými farebnými grafmi a obrázkami sa zoznámite aj s Rubikovou kockou, magickými a latinskými štvorcami, kružnicou deviatich bodov atď. Dozviete sa o živote a práci 26 významných matematikov. Každé heslo je spracované pútavo s cieľom dobre informovať mladého čitateľa. Stačí, aby ste si knižku len prelistovali. Ak máte trochu citu k matematike, tak neodoláte.

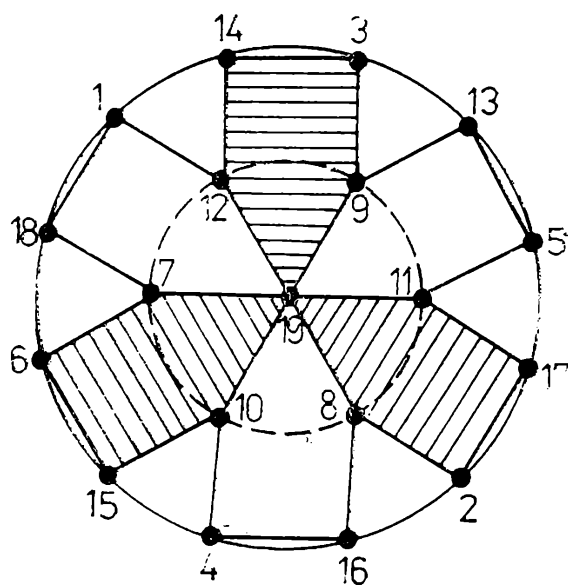
Dušan Jedinák

Řešení magických obrazců (obr. 3 a obr. 4).

Obr. 3



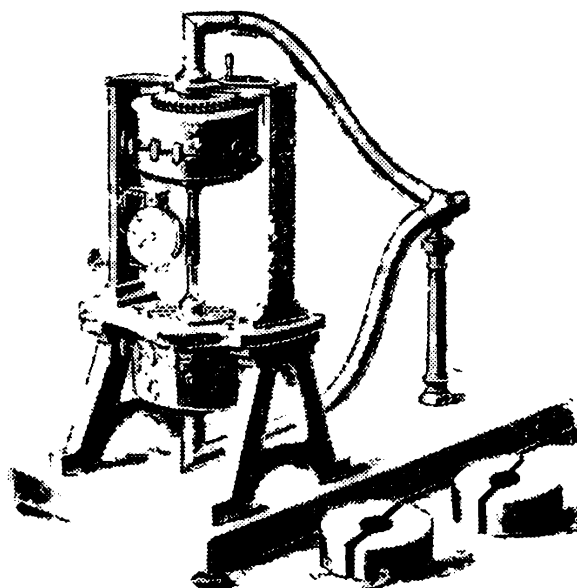
Obr. 4



Siréna Gagniard de la Tourova

Geografický inženýr *Gagniard de Latour* (i tak se někdy psal), žil v letech 1777—1859 a do dějin fyziky vstoupil jako objevitel kritického bodu kapalin (1822), navrhl také princip kalorimetru (1809). Z akustické problematiky se zabýval zdrojem zvuku ve vodním prostředí. Protože podstatou zvuku je periodické zhušťování a zředování prostředí, pokusil se toho dosáhnout nárazy rotující desky na vodní prostředí. Proud vody rozdělil otvory v jedné desce a takto vytvořené sloupce tryskající vody nechal dopadat na otočnou desku s přesně stejným uspořádáním otvorů v soustředných kruzích. Celé zařízení ponořil do vody.

Pokud voda jen volně proudila, nebylo nic slyšet, jakmile však deska začala rotovat a přerušovat vodní proud, objevily se očekávané vodní nárazy a ve vodě vznikl silný, krásně čistý zvuk (tón) vycházející jakoby z hlubin. Protože připomínal neodolatelně krásný hlas mýtických Sirén (vzpomeňte



na *Odyssea*), nazvali vynálezcevi současníci tento zdroj zvuku sirénou.

Záhy se však přišlo na to, že táž siréna je stejně dobrým generátorem zvuku a měřidlem jeho frekvence i ve vzduchu. Obdobné generátory relativně čistých hudebních tónů sestrojili později také Savart (rotující kotouče s různými počty zubů na obvodu), Seebeck (rotující kotouč s otvory) a jiní.

Vladimír Malíšek

Čo je matematika?

Matematika je kráľovnou všetkých vied. Jej milencom je pravda, prostota a priehľadnosť sú jej odevom.

J. Sniadecki

Matematika je symbolický univerzálny jazyk, umožňujúci popis rôzneho obsahu, vyjadrujúci presné a jasné myslenie, smerujúce k riešeniu najrôznejších problémov.

Z. Krygowská

Vydáva ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednotky čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1986.

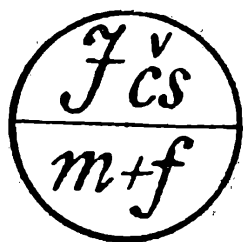
ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 65, 1986/87
LEDEN

(5)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný,
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr.
Ján Chrapan, CSc., VVTŠ-ČSSP Lip-
tovský Mikuláš, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Ja-
nout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr.
Hana Kořínková, CSc., VŠZ Pra-
ha, doc. dr. Karol Križalkovič, CSc.,
PF Nitra, prof. dr. Vladimír Majer-
ník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Josef
Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich
Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jarošlav
Šedivý, CSc., UK Praha, inq. dr. Vác-
lav Šindelář, CSc., Praha, doc. dr.
Martin Šolc, CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigová 4, 116 39 Praha 1-No-
vé Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

Milan Koman: O diofantovské rovnici $82x^2 - y^2 = 1986$	177
Emil Kraemer: Užití rovnoběžného pro- mitání v geometrii II	180
Jiří Mída: O jednom druhu speciálních samoopravných kódů	185
Ivan Fischer: Základy programování mi- kropočítačů 5	187
Ivo Čáp: Fyzikální pohled na některé problémy energetiky I	194
František Jáchim: Isaac Newton a jeho Principia	203
Emil Kašpar: Relativní pohyb	209
Jarmila Pěnčíková: Aritmetické rébusy	210
Karel Horák: 27. MMO .	210
Pavel Töpfer: Typy úloh matematické olympiády kategorie P .	212
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	215
Z nových knih .	216
dj: Kalendár M-F	217
Vlastimil Mistrik: Reportáže z mikrosveta ..	219
Anna Loubalová: Čínské počítadlo suan- pchan . 3. str. obálky	
Jiří Pech: Slovník fyzikálních terminů (53-56)	příloha

0 diofantovské rovnici $82x^2 - y^2 = 1986$

(Opožděná úloha k loňskému letopočtu)

RNDr. MILAN KOMAN, CSc., MÚ ČSAV Praha

Polský matematik *Jósef Hawlicki* v roce 1986 uveřejnil pro čtenáře časopisu *Matematyka* tuto zajímavou úlohu o loňském letopočtu.

Rovnice letošního roku: Pan Rovnička napsal rovnici

$$(1) \quad 82x^2 - y^2 = 1986$$

a zeptal se svého přítele pana Komputerka, zda existují přirozená čísla x, y , která vyhovují této rovnici. Fenomenální mistr numerik mu po chvíli odpověděl: Takových dvojic existuje nekonečně mnoho a mezi nimi je dvojice (x^*, y^*) , pro kterou platí: Škrtnu-li v čísle y^* tři poslední číslice, dostanu rok narození svého syna Olega, škrtnu-li však tři prostřední číslice, dostanu rok narození své dcerky Vasji. Ale nejenom to. Škrtnu-li v čísle y^* tři číslice, vznikne rok 1987, a škrtnu-li v něm jiné tři číslice, dostanu 1988.

Zjistěte, zda měl pan Komputerek pravdu. Kdo je starší, Oleg nebo Vasja a o kolik kalendářních let?

Sama úloha i její řešení jsou natolik zajímavé, že je předkládáme i našim čtenářům.

Řešení rovnice (1).

Snadno najdeme dvojici nejmenších celočíselných kladných kořenů

$$(2) \quad x_1 = 5 \quad y_1 = 8$$

V dalším budeme používat ještě kořeny pomocné rovnice

$$(3) \quad 82x^2 - y^2 = -1$$

Čtenáři, kteří se někdy zabývali řešením diofantovských rovnic v ní poznají tzv. *Pelovu* rovnici. Bez potíží najdeme i dvojici kladných celočíselných kořenů rovnice (3):

$$(4) \quad x_0 = 18 \quad y_0 = 163$$

Nyní ukážeme, že rovnice (1) má skutečně nekonečně mnoho řešení.

Věta 1. Jsou-li (x_n, y_n) ; $n = 1, 2, 3, \dots$ kladné celočíselné kořeny rovnice (1) a (x_0, y_0) kladné celočíselné kořeny rovnice (3), pak také čísla

$$(5) \quad x_{n+1} = y_0 x_n + x_0 y_n, \quad y_{n+1} = 82x_0 x_n + y_0 y_n$$

jsou kladné celočíselné kořeny rovnice (1).

Důkaz. O tom, že čísla (5) jsou kořeny rovnice (1) se přesvědčíme dosazením do její levé strany. Po úpravě snadno dostaneme:

$$82x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = - \underbrace{(82x_n^2 - y_n^2)}_{1986} \underbrace{(82x_0^2 - y_0^2)}_{-1} = 1986$$

Je zřejmé, že kořeny (5) jsou vesměs kladné.

Dosadíme do rekurentních vzorců (5) za x_0, y_0 kořeny (4):

$$(6) \quad x_{n+1} = 163x_n + 18y_n; \quad y_{n+1} = 1476x_n + 163y_n.$$

Odtud můžeme pro $n = 1$ s užitím kořenů (2) vypočítat

$$x_2 = 163 \cdot 5 + 18 \cdot 8 = 959;$$

$$y_2 = 1476 \cdot 5 + 163 \cdot 8 = 8684.$$

Podobně vypočítáme ze vzorců (5) další dvojice kořenů rovnic (1).

$$x_3 = 312\,629; \quad y_3 = 2\,830\,979,$$

$$x_4 = 101\,916\,095; \quad y_4 = 922\,889\,492,$$

atd.

Snadno nahlédneme, že posloupnosti kořenů

$$(x_1, x_2, x_3, \dots); \quad (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

jsou rostoucí. Rovnice (1) má tedy opravdu nekonečně mnoho řešení. Mezi nimi však není řešení, o kterém mluví pan Komputerek, neboť zmíněný kořen y^* musí začínat dvojčíslím 19. To ovšem ještě neznamená, že pan Komputerek nemá pravdu. Zřejmě nám některá řešení chybí.

Nejdříve dokážeme větu 2.

Věta 2. Za stejných předpokladů jako ve větě 1 jsou i čísla

$$(5) \quad x_{n+1} = y_0 x_n - x_0 y_n; \quad y_{n+1} = 82x_0 x_n - y_0 y_n$$

kořeny rovnice (1).

Důkaz je úplně stejný jako důkaz věty 1.

Z počátečních podmínek (2) a (4) dostaneme podle věty 2 novou dvojici kořenů:

$$(7) \quad x'_2 = 163 \cdot 5 - 18 \cdot 5 = 671;$$

$$y'_2 = 1476 \cdot 5 - 163 \cdot 8 = 6076.$$

Asi vás trochu zklame výsledek, vypočítáme-li podobně x'_3, y'_3

$$x'_3 = 163 \cdot 671 - 18 \cdot 6076 = 5;$$

$$y'_3 = 1476 \cdot 671 - 163 \cdot 6076 = 8.$$

Dostali jsme výchozí kořeny x_1, y_1 .

Pokusíme se ještě použít na kořeny (7) místo rekurentních vzorců (5) vzorce (5).

Dostaneme

$$x'_3 = 163 \cdot 671 + 18 \cdot 6076 = 218\,741;$$

$$y'_3 = 1476 \cdot 671 + 163 \cdot 6076 = 1\,980\,784.$$

Zopakováním tohoto postupu dostaneme

$$x'_4 = 71\,308\,895; \quad y'_4 = 645\,729\,508.$$

Kořen y'_3 zřejmě vyhovuje podmínkám pana Komputerka, tzn. $y^* = y'_3$. Škrtneme-li poslední tři číslice, dostaneme 1980, škrtneme-li prostřední tři číslice, vyjde 1984. Také letopočty 1987 a 1988 dostaneme po škrtnutí vhodných tří číslic.

Můžeme však odpovědět na otázku autora úlohy? Můžeme odpovědět, kolik je let dětem pana Komputerka? Zatím nemůžeme, a to ani za předpokladu, že výroky pana Komputerka ohledně letopočtů narození

jeho dětí, jsou pravdivé. Zatím nevíme, zda podmínce pana Komputerka nevyhovuje ještě jiné sedmiciferné číslo začínající dvojčíslím 19.

Odpověď nám dá hlavní věta tohoto článku.

Věta 3. Každé kladné celočíselné řešení rovnice (1) lze získat ze dvou počátečních řešení

$$(8) \quad x_1 = 5, y_1 = 8 \quad \text{a} \quad x'_1 = 671, y'_1 = 6076$$

postupným uplatněním rekurentních vzorců (5).

Důkaz. Předně se dá experimentálně ověřit, že dvojice kořenů (8) jsou dvě nejmenší dvojice kladných celočíselných kořenů (x, y) . Pro všechna ostatní kladná celočíselná řešení platí dokonce $x > 803$. (Máte-li možnost, ověřte si toto tvrzení sami pomocí mikropočítače).

Nyní větu 3 dokážeme sporem. Budeme předpokládat, že existuje kladné celočíselné řešení $(\bar{x}, \bar{y})$, které nelze najít pomocí věty 3. Mezi všemi takovými řešeními vybereme to, pro které je $\bar{x}$ nejmenší, zřejmě je $\bar{x} > 803$. Nyní najdeme řešení soustavy rovnic:

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= 163x + 18y \\ \bar{y} &= 1476x + 163y \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= 163\bar{x} - 18\bar{y} \\ y &= -1476\bar{x} + 163\bar{y} \end{aligned}$$

Podobně jako ve větě 1 dokážeme, že vzorce (10) dávají další celočíselné řešení rovnice (1). Dokážeme, že oba kořeny jsou kladné. To nastane, právě když je

$$163\bar{x} > 18\bar{y} \quad \text{a} \quad 1476\bar{x} < 163\bar{y}$$

Dokážeme to sporem. Budeme předpokládat, že

$$163\bar{x} \leq 18\bar{y} \quad \text{a} \quad 1476\bar{x} \geq 163\bar{y}$$

neboli

$$(11) \quad \bar{x} \leq \frac{18}{163} \bar{y} \quad \text{a} \quad \bar{y} \leq \frac{1476}{163} \bar{x}.$$

Kořeny $\bar{x}, \bar{y}$ dosadíme do levé strany rovnice (1), kterou upravíme podle první z nerovností (11).

$$82\bar{x}^2 - \bar{y}^2 \leq 82 \left(\frac{18}{163} \bar{y} \right)^2 - \bar{y}^2 = \frac{\bar{y}^2}{163^2} \underbrace{(82 \cdot 18^2 - 163^2)}_{-1} = -\frac{\bar{y}^2}{163^2} < 0.$$

Dostáváme spor. Podobně s použitím druhé nerovnosti (11) a předpokladu $\bar{x} > 803$ dostaneme

$$\begin{aligned} 82\bar{x}^2 - \bar{y}^2 &\geq 82\bar{x}^2 - \left(\frac{1476}{163} \bar{x} \right)^2 = \frac{\bar{x}^2}{163^2} (82 \cdot 163^2 - 1476^2) = \\ &= \frac{82}{163^2} \cdot \bar{x}^2 > \frac{82}{163^2} \cdot 803^2 > 1990, \end{aligned}$$

tedy opět spor.

Z rovností (10) tedy dostaneme kladné celočíselné řešení rovnice (1). Ze vzorců (9) plyne, že $x < \bar{x}$ a $y < \bar{y}$. Proto musí být řešení (x, y) dané rovnicemi (10) obsaženo mezi řešeními, které dostaneme pomocí věty 3. Ale to znamená, že i řešení $(\bar{x}, \bar{y})$ dostaneme vzhledem k rovnostem (9) pomocí věty 3. A to (spolu s větou 1) dokazuje větu 3.

Můžeme tedy dokončit řešení naší úlohy. Řešení

$$x_3 = 218\,741, \quad y_3 = 1\,980\,784$$

je jediné, kde kořen y je sedmiciferný a začíná dvojčíslím 19. To znamená — v souhlase s vyjádřením pana Komputerka — že jeho syn se narodil v roce 1980 a jeho dcera v roce 1984. Oleg je tedy o čtyři roky starší než jeho sestra. Tím je úloha vyřešena.

Užití rovnoběžného promítání v geometrii II

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V článku profesora Medka, na který jsme navázali v předešlém čísle Rozhledů, je dokázána ještě další základní věta platící pro rovnoběžné promítání; v našem článku je to věta, kterou nyní uvedeme.

Věta 4. Necht různé rovnoběžky a, b nepatří směru daného rovnoběžného promítání; potom jejich rovnoběžné průměty a', b' jsou opět rovnoběžky.

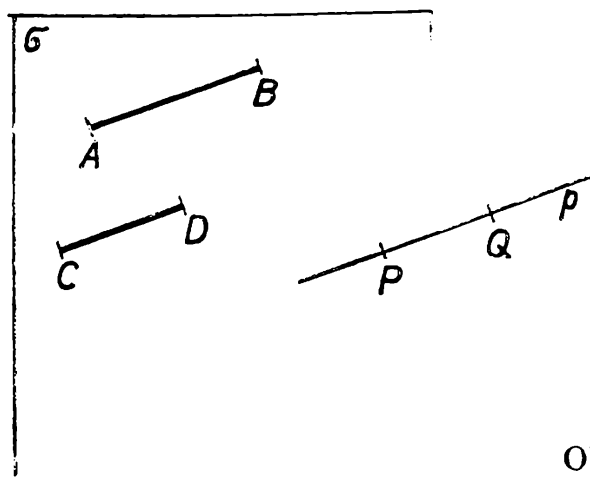
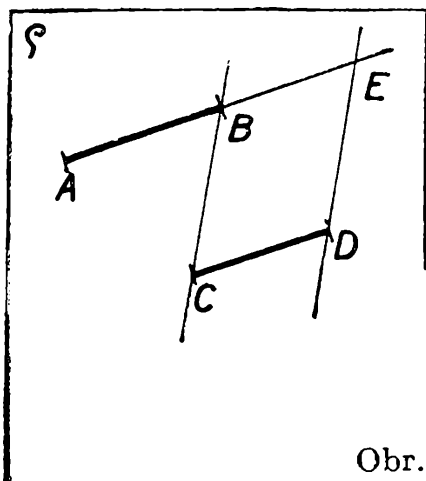
Mají-li dané rovnoběžky a, b společnou promítací rovinu, je $a' = b'$; jinak je $a' \neq b'$.

Leží-li libovolný konvexní n -úhelník ($n \geq 3$, celé) v rovině ρ , která není rovnoběžná se směrem daného rovnoběžného promítání, pak z názoru je zřejmé (a lze to i dokázat), že průmětem tohoto n -úhelníku je opět konvexní n -úhelník. Je-li daný n -úhelník speciálně rovnoběžníkem, pak (vzhledem k větě 4) je jeho rovnoběžný průmět opět rovnoběžník. To užijeme v důkazu další důležité věty, která platí pro rovnoběžné promítání.

Věta 5. Necht AB, CD jsou nenulové úsečky ležící na vzájemně rovnoběžných přímkách (různých nebo splývajících), které nepatří směru daného rovnoběžného promítání. Potom pro délky úseček AB, CD a jejich rovnoběžných průmětů $A'B', C'D'$ platí:

$$\frac{|A'B'|}{|C'D'|} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Důkaz. a) Předpokládejme nejprve, že rovnoběžky AB, CD jsou různé a leží v rovině ρ , která není rovnoběžná se směrem daného promí-



tání. Označení krajních bodů úsečky CD zvolme tak, aby bod D ležel uvnitř poloroviny opačné k polorovině BCA a sestrojme v rovině g rovnoběžník $BCDE$ (obr. 1). Potom jeho vrchol E leží na prodloužení úsečky AB za bod B , takže je $E \neq A$, $E \neq B$ a

$$|CD| = |EB| \quad (1)$$

Rovnoběžným průmětem rovnoběžníku $BCDE$ je rovnoběžník $B'C'D'E'$; proto je

$$|E'B'| = |C'D'| \quad (2)$$

Body A, B, E jsou vesměs různé body přímky, která nepatří směru daného promítání; podle věty 3 je proto $(AEB) = (A'E'B')$, takže je

$$\frac{|AB|}{|EB|} = \frac{|A'B'|}{|E'B'|} \quad (3)$$

Podle rovností (1), (3) a (2) je tedy

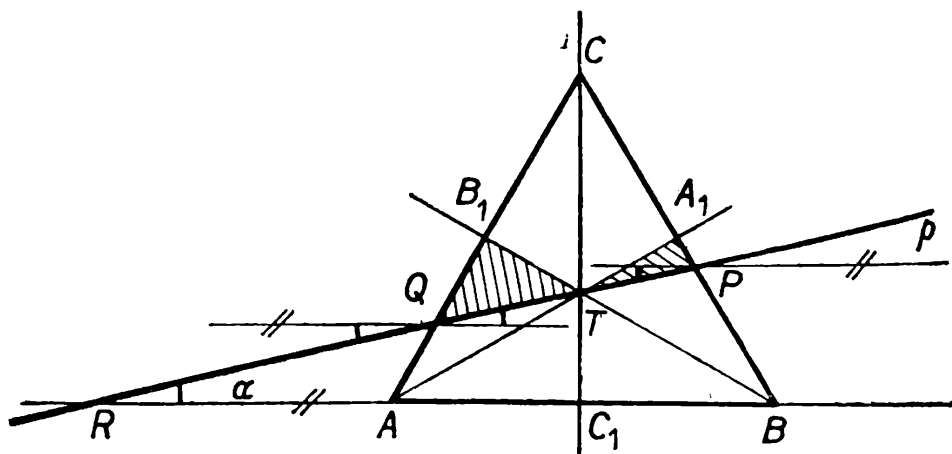
$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|EB|} = \frac{|A'B'|}{|E'B'|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$

b) Necht přímky AB , CD (různé nebo splývající) mají společnou promítací rovinu σ ; na obr. 2 je znázorněn případ, kdy přímky AB , CD jsou různé. Zvolme libovolnou přímku $p \parallel AB$ tak, aby neležela v rovině σ , a na této přímce zvolme libovolnou nenulovou úsečku PQ . Protože je $p \parallel AB$, $AB \parallel CD$, je $p \parallel CD$. Úsečky AB , PQ leží na rovnoběžkách v rovině, která není rovnoběžná se směrem daného promítání; totéž platí pro úsečky CD , PQ . Podle odstavce a) je proto

$$\frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{|A'B'|}{|P'Q'|}, \quad \frac{|PQ|}{|CD|} = \frac{|P'Q'|}{|C'D'|};$$

přitom body A', B', C', D', P', Q' jsou po řadě průměty bodů A, B, C, D, P, Q . Z toho plyne, že platí:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|PQ|} \cdot \frac{|PQ|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|P'Q'|} \cdot \frac{|P'Q'|}{|C'D'|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$



Obr.

Důsledky věty 5. a) Jsou-li úsečky AB , CD rovnoběžné a shodné, dostáváme tento zvláštní případ věty 5, který je pro praxi důležitý:

Nechť AB , CD jsou nenulové a shodné úsečky ležící na vzájemně rovnoběžných přímkách (různých nebo splývajících), které nepatří směru daného rovnoběžného promítání. Potom rovnoběžné průměty těchto úseček jsou opět úsečky shodné a vzájemně rovnoběžné.

b) Z věty 5 plyne, že je $|A'B'| \cdot |CD| = |AB| \cdot |C'D'|$, takže je

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|CD|} = k > 0.$$

To znamená toto: Nechť je dáno rovnoběžné promítání (tj. průmětna a směr promítání). Potom ke každému směru Σ , který je různý od směru promítání, existuje právě jedno číslo $k > 0$ takové, že pro průmět $A'B'$ každé nenulové úsečky AB ležící na přímce směru Σ platí: $|A'B'| = k|AB|$. — Je-li tedy např. úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB , je také průmět $C'D'$ každé jiné úsečky CD ležící na rovnoběžce s přímkou AB shodný s úsečkou CD .

Úloha 6. Těžištěm T libovolného trojúhelníku ABC je vedena přímka p tak, že protíná přímky, na nichž leží strany trojúhelníku, ve třech různých bodech P , Q , R . Označení těchto bodů volme tak, aby polopřímka TQ splývala s polopřímkou TR . Dokažte, že platí:

$$\frac{1}{|TP|} - \frac{1}{|TQ|} = \frac{1}{|TR|}. \quad (1)$$

Důkaz provedeme snadno v případě, kdy trojúhelník ABC je rovnostranný; středy jeho stran BC , CA , AB označme po řadě A_1 , B_1 , C_1 (obr. 3). Potom těžnice AA_1 , BB_1 , CC_1 jsou zároveň po řadě osami úseček BC , CA , AB ; je tedy $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp CA$, $CC_1 \perp AB$. Na obr. 3 je přímka p sestrojena tak, že protíná přímku AB v bodu R , který leží na prodloužení strany AB za bod A . Ze souměrnosti trojúhelníku ABC podle přímek AA_1 , BB_1 , CC_1 plyne, že stačí provést důkaz pro tuto přímku p .

Velikost ostrého úhlu TRC_1 budiž α . Sestrojíme-li body P, Q rovnoběžky s přímkou AB , pak ze shodnosti střídavých a vrcholových úhlů vyznačených na obr. 3 obloučky plyne, že je

$$|\sphericalangle TQB_1| = 60^\circ - \alpha, \quad |\sphericalangle TPA_1| = 60^\circ + \alpha.$$

Úsečky TA_1, TB_1, TC_1 jsou shodné; délka každé z nich budiž d . Potom z pravoúhlých trojúhelníků TRC_1, TQB_1, TPA_1 po řadě plynou tyto rovnosti:

$$\sin \alpha = \frac{d}{|TR|}, \quad \sin (60^\circ - \alpha) = \frac{d}{|TQ|}, \quad \sin (60^\circ + \alpha) = \frac{d}{|TP|} \quad (2)$$

Podle známého vzorce je

$$\sin (60^\circ + \alpha) - \sin (60^\circ - \alpha) = 2 \cos 60^\circ \sin \alpha = \sin \alpha.$$

Z toho a z rovností (2) plyne tato rovnost:

$$\frac{d}{|TP|} - \frac{d}{|TQ|} = \frac{d}{|TR|}.$$

Po dělení této rovnosti číslem d dostaneme rovnost (1).

Budiž nyní ABC' libovolný trojúhelník ležící v rovině π . Zvolme rovinu $\varrho \neq \pi$ tak, aby procházela přímkou AB , v rovině ϱ sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABC a rovinu ϱ promítneme do roviny π směrem, který je určen přímkou CC' . Potom daný trojúhelník ABC' je průmětem trojúhelníku ABC a středy stran trojúhelníku ABC' jsou průměty středů stran trojúhelníku ABC (plyne z věty 3). Těžnice trojúhelníku ABC' jsou tedy průměty těžnic trojúhelníku ABC a těžiště T' trojúhelníka ABC' je průmětem těžiště T rovnostranného trojúhelníku ABC . Přímka p' procházející těžištěm T' a protínající přímky $BC', C'A, AB$ po řadě v bodech P', Q', R je průmětem přímky p , která prochází bodem T a protíná přímky BC, CA, AB po řadě v bodech P, Q, R majících průměty P', Q', R . Úsečky $T'P', T'Q', T'R$ jsou po řadě průměty úseček TP, TQ, TR . Podle důsledku b) věty 5 existuje právě jedno číslo $k > 0$, pro něž platí

$$|T'P'| = k|TP|, \quad |T'Q'| = k|TQ|, \quad |T'R'| = k|TR| \quad (3)$$

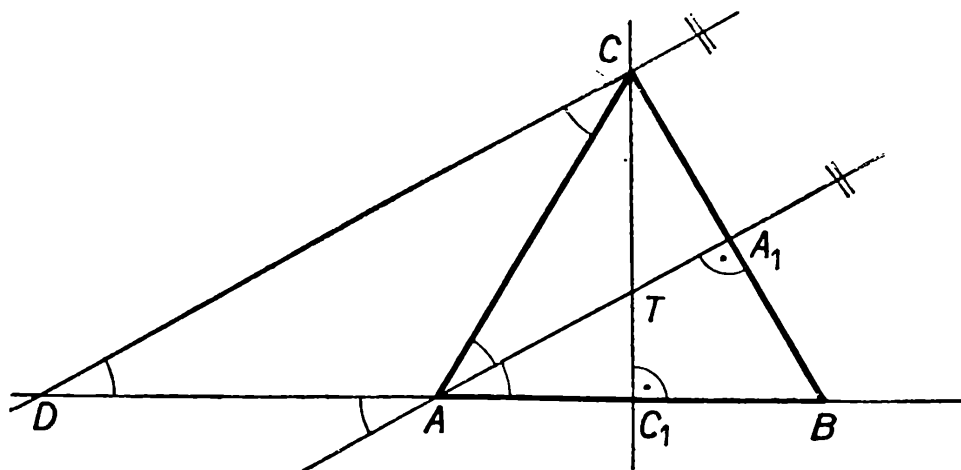
Protože pro rovnostranný trojúhelník ABC platí rovnost (1), platí i rovnost, kterou dostaneme, znásobíme-li rovnost (1) číslem $\frac{1}{k}$. To však podle rovnosti (3) znamená, že platí rovnost

$$\frac{1}{|T'P'|} - \frac{1}{|T'Q'|} = \frac{1}{|T'R'|}.$$

Tím je proveden důkaz rovnosti (1) pro libovolný trojúhelník.

Poznámka. Víme-li, že osy stran libovolného trojúhelníku procházejí týmž bodem, pak to platí také o těžnicích rovnostranného trojúhelníku, neboť ty jsou zároveň osami jeho stran. Postupem provedeným v předcházejícím odstavci jsme dokázali, že také těžnice libovolného trojúhelníku

Obr. 4



procházejí týmž bodem. Nechť písmena A, B, C, T, C_1, C', T' mají též význam jako v předešlém odstavci; dokážeme, že potom je $|C_1T'| : |C'T'| = 1 : 2$. Body C_1, C, T jsou po řadě rovnoběžnými průměty bodů C_1, C, T náležejících rovnostrannému trojúhelníku ABC ; podle věty 3 je $(C_1C'T') = (C_1CT)$, takže platí

$$\frac{|C_1T'|}{|C'T'|} = \frac{|C_1T|}{|CT|}. \quad (4)$$

Rovnoběžka vedená vrcholem C rovnostranného trojúhelníku ABC k jeho těžnici AA_1 protíná přímku AB v bodu D (obr. 4). Ze souměrnosti trojúhelníku ABC podle přímky AA_1 plyne, že polopřímka AA_1 je osou úhlu BAC ; úhly BAA_1, CAA_1 jsou tedy shodné. Z toho a ze shodnosti střídavých a vrcholových úhlů vyznačených v obr. 4 obloučky plyne, že je $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle DCA|$. Proto je také $|DA| = |CA|$. Podle věty 3 je $(C_1CT) = (C_1DA)$, takže je

$$\frac{|C_1T|}{|CT|} = \frac{|C_1A|}{|DA|} = \frac{1}{2},$$

neboť $|C_1A| = \frac{1}{2}|DA|$. Z toho a z rovnosti (4) plyne také, že je

$$|C_1T'| : |C'T'| = 1 : 2.$$

Řešení rébusů ze str. 210:

a) 744×33

b) $17 \times 4 = 68 + 25 = 93$

c) 51×123456789 nebo 61×123456789 nebo 71×123456789 nebo 81×123456789

O jednom druhu speciálních samoopravných kódů

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PeF UK v Praze

V článku [1] jsme se zabývali možnostmi detekce a korekce chyb, které mohou vzniknout při přenosu kódových slov binárních kódů. Přitom *binárními kódy* rozumíme kódy, v nichž se užívá jako kódových slov konečných posloupností vytvořených ze dvou binárních znaků, které budeme v tomto článku označovat O a I.

Pro praktickou aplikaci však samoopravný kód nemusí být uzpůsoben pro opravu všech možných chyb. Vznik některých chyb totiž může být zcela nepravděpodobný. Vždyť i v článku [1] jsme neuvažovali možnost, že by v přenosovém kanálu došlo ke změně počtu bitů kódového slova, což by nastalo vypadnutím některého binárního znaku, nebo naopak jeho vsunutím. V tomto článku budeme uvažovat jen chyby, jež při přenosu vznikají v kódových slovech invertováním některého binárního znaku, tj. zkreslením znaku O ve znak I, anebo znaku I ve znak O. Použité přenosové zařízení však může svým charakterem jeden ze dvou druhů tohoto nechtěného invertování zcela vylučovat. Např. znak I se vždy přenese jako znak I, zatímco znak O se případně může změnit ve znak I.

Sovětští matematici *R. R. Varšamov* a *G. M. Tenengolc* vytvořili pro tyto případy speciální samoopravné kódy. Píše se o tom v knížce [2]. Zdánlivě to bylo zbytečné, neboť i zde lze užít samoopravné kódy, které mohou opravit každou chybu. Ovšem není tomu tak. V článcích [1] a [3] jsme poznali samoopravný *Hammingův kód* pro desítkové číslice, jenž byl *sedmibitový*. V dalším si ukážeme kód desítkových číslic, jenž bude pouze *šestibitový* a bude umožňovat opravu jedné chyby za předpokladu, že mohlo dojít jen k jednomu druhu nechtěného invertování.

V záhlaví tab. 1 označují čísla 1, 2, ..., 6 pořadová čísla prvků uspořádaných šestic z prvků O a I. V posledním sloupci je v příslušné řádce pro každou šestici (x, y, z, u, v, w) uveden součet

$$s = 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z + 4 \cdot u + 5 \cdot v + 6 \cdot w. \quad (1)$$

K tomu poznamenejme, že znaky O a I chápeme po řadě jako čísla nula a jedna. Všimněme si, že v tab. 1 jsou v posledním sloupci jen čísla 0, 7, 14, 21. To, že jde pouze o násobky sedmi, má velkou výhodu.

Představme si, že máme šestibitový kód, jehož všechna kódová slova jsou z tab. 1. Zjištění, že pro šestici (x, y, z, u, v, w) není součet (1) dělitelný sedmi, znamená, že tato šestice není kódovým slovem, a je tak vždy detekována jedna chyba, a to vzniklá jak invertováním znaku O, tak i znaku I.

Pro tento kód lze opravit i jednu chybu v kódovém slově, ovšem za předpokladu, že jeden ze znaků I a O se přenáší bezchybně.

Tabulka 1

1	2	3	4	5	6	s
O	O	O	O	O	O	0
I	O	O	O	O	I	7
O	I	O	O	I	O	7
O	O	I	I	O	O	7
I	I	O	I	O	O	7
O	O	I	O	I	I	14
I	O	I	I	O	I	14
I	I	O	O	I	I	14
O	I	I	I	I	O	14
I	I	I	I	I	I	21

Tabulka 2

d	Kódové slovo					
0	O	O	O	O	O	O
1	I	O	O	O	O	I
2	O	I	O	O	I	O
3	O	O	I	I	O	O
4	I	I	O	I	O	O
5	O	O	I	O	I	I
6	I	O	I	I	O	I
7	I	I	O	O	I	I
8	O	I	I	I	I	O
9	I	I	I	I	I	I

a) Necht při přenosu není nikdy zkreslen znak I. Pak jednu chybu vzniklou změnou znaku O ve znak I můžeme velmi snadno opravit. Uvedme příklad. Předpokládejme, že kódové slovo

O O I O I I

1 3 4 6

bylo přeneseno jako šestice

O O I I I I

1 3 4 6

Pro tuto šestici vzniklou zkreslením je číslo $s = 18$. Toto číslo při dělení sedmi dává zbytek 4. Číslo s se tedy zvětšilo jednou chybou o čtyři, takže byl chybně přenesen čtvrtý bit. Nemá být I, nýbrž O.

b) Předpokládejme nyní, že přenosem není nikdy změněn znak O a že zkreslen může být jen znak I, a to ve znak O. Způsob opravy jedné chyby ukážeme na příkladě. Necht kódové slovo

I I O I O O

1 2 3 4 6

je zkresleno na šestici

I O O I O O

1 2 3 4 5 6

Pro tuto šestici je číslo $s = 5$. Změnou jednoho znaku I ve znak O se tedy číslo s zmenšilo o $7 - 5 = 2$, takže je chybný druhý bit. Vyhledání chybného bitu lze provést bez odčítání, a to tak, že zbytek považujeme za pořadové číslo chybného bitu, avšak zprava.

Užitím šestic z tab. 1 lze sestavovat kódy desítkových číslic. Jeden takový kód je v tab. 2. Počet všech kódů tohoto druhu je roven počtu všech možných zobrazení desetiprvkové množiny $\{0, 1, \dots, 9\}$ na množinu všech šestic v tab. 1. Tento počet je

$$10! = 3\,628\,800$$

Cvičení

1. Zjistěte, zda v tab. 1 jsou všechny uspořádané šestice vytvořené ze znaků O a I, pro něž je $s \in \{0, 7, 14, 21\}$.
2. Vypočtěte, kolik lze vytvořit různých kódů desítkových číslic z kódových slov uvedených v tab. 1, jestliže
 - a) obrazem číslice 0 je slovo OOOOOO;
 - b) obrazem číslice 0 je slovo OOOOOO a zároveň obrazem číslice 9 je slovo IIIIII.
3. Určete minimální Hammingovu vzdálenost kódů (viz [1]) desítkových číslic, jejichž kódová slova jsou v tab. 1.

Literatura

- [1] Mída J.: O vzdálenosti kódových slov, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 65, 1986/87, č. 3, s. 89–91
- [2] Aršinov M. N.-Sadovskij L. E.: Kody i matematika, biblioteka „Kvant“, svazek 30, Nauka, Moskva 1983
- [3] Mída J.: O jednom druhu samoopravných kódů, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 9, s. 353–356

Základy programování mikropočítačů

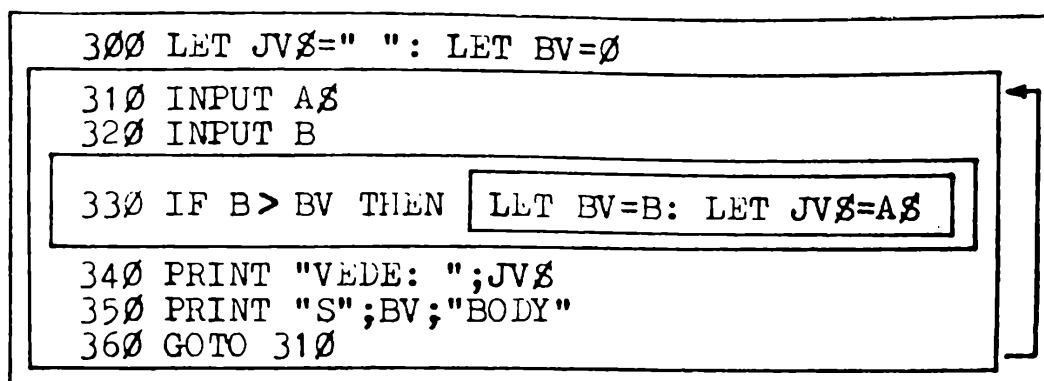
5 - Řetězce, pole a data

Doc. IVAN FIŠCHER, CSc., katedra matematiky PeF UK v Praze

Proměnné v programech pro nás zatím byla pouze čísla. Jazyk BASIC však zná ještě jiný druh proměnných, zvaný řetězce, neboli textové proměnné, neboli stringy. Nejsou to čísla, ale posloupnosti písmen, mezer, značek (kromě uvozovek). Abychom poznali začátek a konec takovéto posloupnosti, používáme uvozovek, například „PRAHA 5“, jak to už známe z příkazu PRINT.

Ke značení textových proměnných používáme stejné možnosti, jaké dává BASIC ke značení číselných proměnných, tedy písmena, dvojice písmen či dvojice písmeno a cifra. Za nimi pak vždy následuje označení, že jde o řetězec. Používá se jednou škrtnuté S (od string), kolečko v křížku (jako se někdy rýsuje bod), či značka \$. Řetězec tedy můžeme označit například B\$, AN\$, P8\$ atd.

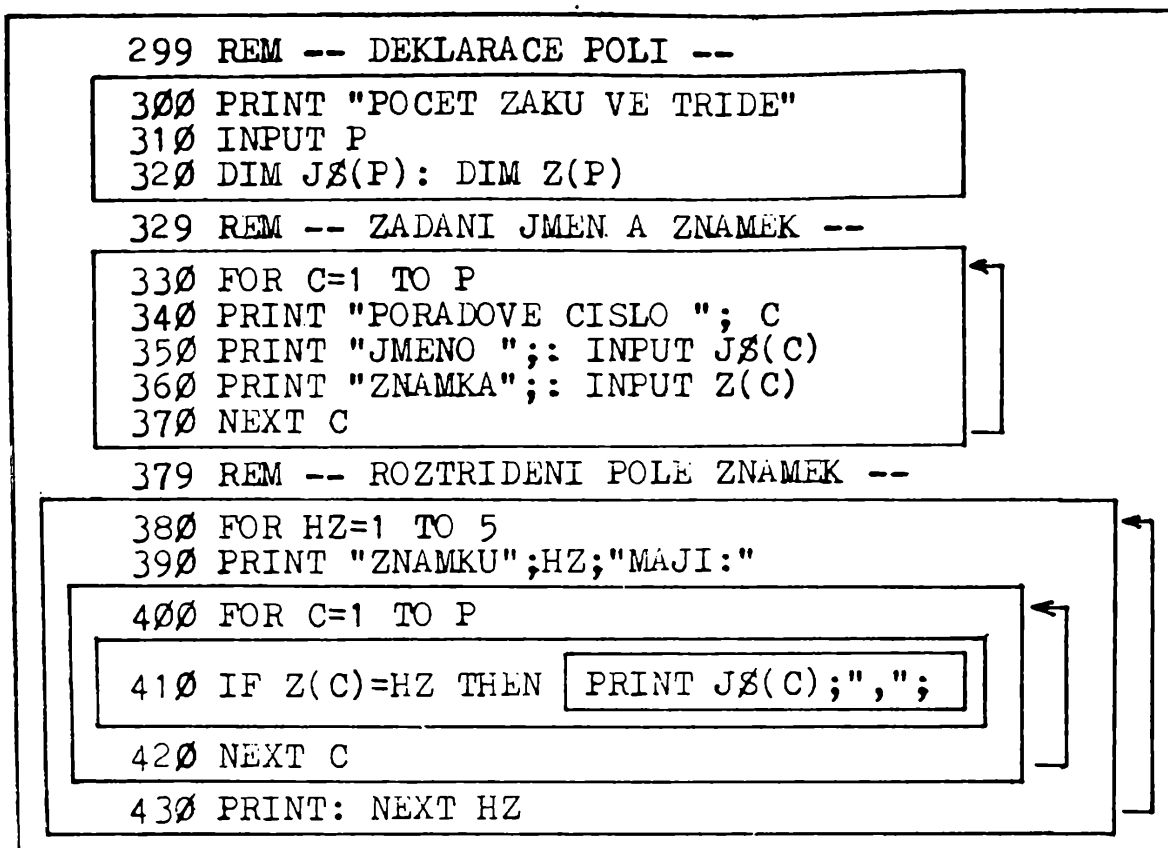
Jednoduchou ukázkou použití bude program podle tabulky 1. Postupně zadáváme jméno závodníka A\$ a počet bodů B, které v závodě získal. Počítač vždy vytiskne jméno závodníka, který vede (má nejvíce bodů, nebo jako první takovýto počet bodů získal) a počet jím získaných bodů, značené JV\$ (jméno vítěze) a BV (body vítěze).



tabulka 1

Řádek 300 nastavuje jméno vítěze JV\$ před začátkem závodu jako posloupnost mezer a počet bodů vítěze BV jako nulu. (Je to však zbytečné, protože po povelu RUN se všechny číselné proměnné nastavují na nulu a všechny textové proměnné na prázdný řetězec. Řádek 300 by měl skutečný smysl jen uvnitř jiného programu, kde se mohou JV\$ a BV již vyskytnout před tímto řádkem. Nadbytečnost takového řádku však nijak nevádí.) Význam řádků 310 a 320 je jistě zřejmý. V řádku 330 je porovnáván počet právě zadaných bodů s počtem bodů vítěze. Je-li větší, přepíše se počet bodů za počet bodů vítěze a jméno A\$ za nové jméno JV\$ vítěze. Řádky 340 až 360 jsou jistě opět snadno pochopitelné.

V další ukázce programu budeme vkládat jméno a známky žáků, počítač pak vypíše pohromadě jména žáků s jedničkou, dvojkou atd. V paměti počítače proto musí být po celou dobu zpracování programu uchována všechna jména žáků (a patrně i jejich známky). Názvy proměnných si proto budeme indexovat. Zápis tvaru z_1, z_2 , atd. však musíme pozměnit. V jazyku BASIC se indexy píší do závorky. X_1 tak píšeme jako $X(1)$, $m_{1,j}$ píšeme jako $M(I, J)$ atd. J(1)$ bude jméno prvního žáka a $Z(1)$ jeho známka, J(2)$ bude jméno druhého žáka a $Z(2)$ jeho známka atd. Aby však počítač mohl úsporně uložit toto množství čísel a řetězců do paměti, je potřeba mu předem sdělit jeho rozsah, tedy maximální hodnotu přípustných indexů. (Souhrn takto indexovaných čísel či řetězců se nazývá pole. Při sdělení, jak bude pole veliké, používáme termín deklarace pole.) Tuto maximální přípustnou hodnotu indexu zadáváme příkazem DIM, například DIM Z(35) znamená, že indexy Z mohou být v rozmezí od 1 do 35 (nebo u jiných interpretací jazyka BASIC od 0 do 35). Analogicky DIM A(5, 15) znamená, že první index u A může nabývat hodnotu do 5 a druhý do 15. Po spuštění programu повеlem RUN se však nesmí dvakrát deklarovat rozměr téhož pole — jinak počítač hlásí chybu*). Nyní si můžeme napsat příslušný program podle tabulky 2.



tabulka 2

V řádcích 300 až 320 jsou určeny rozměry pole jmen žáků i pole známek. Zpravidla by šlo řádek 320 zkrátit jediným příkazem DIM J\$(P), Z(P). V řádcích 330 až 370 naplníme tato pole jmen a známek. Mezi řádky 380 až 430 proběhne pětkrát cyklus, kdy hledáme jména žáků, kteří mají hledanou známku HZ. V každém z těchto pěti cyklů proběhne další cyklus, kdy si prohlédneme všechny známky — narazí-li se na známku shodnou s hledanou známkou, je vytištěno jméno příslušného žáka (potom se vytiskne čárka a nechá se možnost tisknout dále na totéž řádku). Na konci každého cyklu pro známky 1 až 5 je před NEXT HZ ještě příkaz PRINT, který způsobí, že další tisk začne na novém řádku. Za řádkem 430 může program pokračovat například statistickým zpracováním výsledků příslušné písemné práce atd., protože takto by program příliš užitečný nebyl. To je však již přenecháno iniciativě čtenářů.

Při plnění pole známek nás jistě zdržuje, že musíme psát i jména žáků. Bylo by jistě pohodlnější, kdyby počítač tato jména žáků znal předem a stačilo by jen zapsat známky. Navíc by počítač mohl předem znát

*) V některých verzích jazyka BASIC se pole s indexy do 10 nemusejí deklarovat, někdy lze zrušit deklaraci příkazem FREE, případně je někdy připouštěno předeklarování pole. To se však typ od typu mikropočítače liší. Totéž platí o počtu indexů proměnné.

```
299 REM -- DIMENZE POLI --
```

```
300 READ P  
310 PRINT "ZAKU VE TRIDE JE";P  
320 DIM Z(P): LET S=0
```

```
329 REM -- ZADANI ZNAMEK --
```

```
330 FOR C=1 TO P  
340 PRINT C;" ";  
350 READ J$: PRINT J$: READ ZV  
360 INPUT Z(C): LET S=S+Z(C)  
370 NEXT C
```

```
379 REM -- ROZTRIDENI PODLE ZNAMEK --
```

```
380 FOR HZ=1 TO 5  
390 PRINT "ZNAMKU";HZ;"MAJI:"  
400 RESTORE: READ P
```

```
410 FOR C=1 TO P  
420 READ J$: READ ZV
```

```
430 IF Z(C)=HZ AND ABS(HZ-ZV) > 1 THEN PRINT J$;" ";
```

```
440 NEXT C
```

```
450 PRINT: NEXT HZ
```

```
459 REM -- PRUMER VE TRIDE --
```

```
460 PRINT "PRUMERNA ZNAMKA =";S/P
```

```
470 END
```

```
499 REM -- BLOK DAT --
```

```
500 DATA 12, ABRAHAM, 3, ADAMEC, 4  
510 DATA BOUCHAL, 1, CABALIKOVA, 2, ERBEN  
520 DATA 5, ERBENOVA, 2, HUJER, 2, JOKLOVA  
530 DATA 2, MAZANEK, 5, NOVAK, 5, PALIVEC, 1  
540 DATA VASATKO, 3
```

tabulka 3

i známky z předchozího vysvědčení a tisknout jen ta jména žáků, kde byla známka překvapivější, například tím, že se od známky na vysvědčení lišila o více než o jeden stupeň.

Pro uložení takovýchto údajů do počítače předem, a to zpravidla současně s vložením programu, slouží trojice příkazů READ, DATA, RESTORE. Řádek s daty začíná příkazem DATA, jednotlivé údaje jsou oddělovány čárkami. Řádky s příkazy DATA (hovoříme o datovém poli) mohou být v programu umístěny kdekoliv (na začátku, na konci — což je nejběžnější, či uprostřed programu). Pro čtení dat slouží příkaz READ (čti). Počítač si přečte příslušné číslo či řetězec z řádku s příkazem DATA. Při dalším příkazu READ čte další data z téhož řádku, nebo

z následujícího řádku, začínajícího opět příkazem DATA. Počítač čte data v tom pořadí, jak jsou postupně v programu zapsána. Chceme-li, aby se data začala číst od začátku, užijeme příkaz RESTORE. (Zpravidla bývá k dispozici i příkaz RESTORE číslo řádku, kdy určíme, odkud se má pokračovat při čtení dat.) Pokud chceme, aby se četla jen některá data, potom musíme zajistit, aby počítač načetl i ta nepotřebná data, jinak by došlo k omylu. Užití si ukážeme na programu tab. 3.

Všimneme si napřed bloku dat v řádcích 500 až 540. Vidíme, že řetězce nemusíme (ale můžeme) psát v uvozovkách, obdobně, jako jsme je nemuseli psát v uvozovkách ani při příkazu INPUT. První údaj v bloku dat v tomto případě znamená, kolik jmen je v bloku uvedeno. Zde jsme pro úsporu počet žáků ve třídě snížili na 12, sami si blok dat upravíte podle konkrétních podmínek. Za počtem jmen následují jednotlivá jména a známky z vysvědčení, oddělovaná čárkami. Jak vidíte, na rozdělení bloku dat do jednotlivých řádků nijak nezáleží (i když je výhodnější zachovávat určitou grafickou přehlednost).

Při spuštění programu počítač přečte počet P jmen, se kterými bude pracovat, a podle něho v řádku 300 nastaví velikost pole $Z()$. Proměnná S bude představovat součet známek za celou třídu. V modulu programu mezi řádky 330 až 370 se plní pole známek. Počítač z bloku dat čte a tiskne na obrazovku jména žáků $J\$$. Přitom si však musí načíst i nepotřebné údaje o známce na vysvědčení ZV .

Modul programu mezi řádky 380 až 450 se rovněž podobá obdobnému modulu v předchozím programu podle tabulky 2. V řádku 400 je nastaveno čtení dat od začátku a načte se prvé číslo P , které by jinak bylo nadbytečné. Pak se čte jméno $J\$$ a známka na vysvědčení ZV . (Zpravidla by v řádku 420 šlo psát READ $J\$$, ZV). V řádku 430 se píše jméno žáka jen tehdy, má-li danou známku, a je-li rozdíl od známky na vysvědčení větší než jedna. V řádku 460 se vytiskne průměrná známka z dané písemné práce ve třídě.

Nyní si povšimneme grafické úpravy tisku řetězců jmen a jejich rozdělování na konci řádků na televizní obrazovce. Aby nám počítač netrhal jména uprostřed (bez ohledu na pravidla pravopisu a bez dělicí čárky), ale psal jméno vždy celé na některý řádek, k tomu potřebujeme operace, realace a funkce s řetězci, které v jazyku BASIC máme k dispozici.

Řetězce můžeme spojovat pomocí operace $+$. Jestliže je $A\$ = „SAMO“$, $B\$ = „OBSLUHA“$, $C\$ = „LEPKA“$, $Z\$ = A\$ + B\$$, $W\$ = A\$ + C\$$, potom $Z\$ = „SAMOOBSLUHA“$ a $W\$ = „SAMOLEPKA“$. Dále máme k dispozici funkce, jejímiž závisle a nezávisle proměnnými jsou jak čísla, tak i řetězce:

LEFT\$(Z\$, X) Řetězec vytvořený X znaky zleva z řetězce $Z\$$.
Když je $Z\$ = „SAMOOBSLUHA“$ a $R\$ =$
 $= \text{LEFT}\$(Z\$, 3)$, potom $R\$ = „SAM“$

RIGHT\$ (Z\$, X)	Viz LEFT\$, ovšem tvořeno X znaky zprava z řetězce Z\$. RIGHT\$ (Z\$, 3) = „UHA“
MID\$ (Z\$, X)	Řetěz vytvořený z řetězce Z\$ tak, že vytrhneme znaky od X-tého až do konce řetězce Z\$. MID\$ (Z\$, 7) = „SLUHA“
MID\$ (Z\$, X, Y)	Viz MID\$ (Z\$, X), ovšem řetězec je tvořen jen Y znaky. MID\$ (Z\$, 7, 3) = „SLU“
LEN (Z\$)	Délka řetězce. LEN(Z\$) = 11
POS (X)	Patří k příkazu PRINT a ne k řetězcům, udává počet znaků, který je v daném řádku, kam se píše, již vytisknut. Na číslu X mezi 0 až 255 nezáleží**).
STR\$ (X) .	Převádí číslo X na řetězec. Na danou posloupnost cifer lze použít funkce LEFT\$, MID\$, LEN atd.
VAL (Z\$)	Převádí řetězec vyjadřující číslo na číselnou proměnnou. Přitom se bere jen ten úsek začátku řetězce, který představuje číslo. VAL (— 3 . 1 KM) = — 3 . 1.

Znaky jsou v paměti počítače uloženy jako čísla (od 0 do 255). Například A je 65, B je 66 až Z je 90. Obdobně i cifry, kde 0 je 48, 1 je 49 až 9 je 57 (tomuto kódu vyjádření písmen, číslic a značek se říká buď ASCII z American Standard Code for Information Interchange, standardní kód pro výměnu informací, nebo ISO 7, podle označení tohoto kódu jako normy RVHP). Proto počítač může i na řetězce používat relace větší, menší nebo roven, různý atd., jako na čísla, proto lze také hovořit o řetězcové funkci (a ne zobrazení, pokud by nešlo o čísla). Pro číslicový počítač jsou všechna čísla. Počítá informace, které má poskytnout, a také podle numerických výpočtů (v příslušných kódech) počítá i povely pro řízení automatizačních procesů. Odtud má slovo počítač smysl i při zpracování informací, i u řídicích počítačů. Proto také počítač může srovnávat řetězce „podle abecedy“. Ovšem pro PMD-85 je „AS“ menší než „ALBRECHTICE“, protože počítá s řetězcem jako s číslem — a delší číslo je tak nutně větší, zatímco pro IQ-151 je „AS“ větší než „ALBRECHTICE“, protože porovnává u řetězců postupně číselné kódy jednotlivých písmen — což odpovídá srovnání podle abecedy. Čtenář se může zamyslet, jak pomocí řetězce P\$ = „ „ a řetězových funkcí upravit řetězce „AS“ a

„ALBRECHTICE“, aby je počítač vždy srovnal podle abecedy, alespoň podle několika prvních písmen. (V kódu ASCII odpovídá mezeře číslo 32.

Vrátíme se k programu podle tabulky 3. Aby počítač netrhal jména

**) Číslo X je zde jen proto, aby se s POS dalo počítat jako s funkcí. Je to takzvaná systémová funkce — závisí na stavu počítače a ne na X.

```
99 REM -- ZADANI ZLOMKU --
```

```
100 PRINT "CITATEL ";: INPUT C
110 PRINT "JMENOVA TEL";: INPUT J
120 LET C$=STR$(C): LET DC=LEN(C$)
130 LET J$=STR$(J): LET DJ=LEN(J$)
```

```
140 IF DJ > DC THEN LET DC=DJ
```

```
150 Z$="": LET DC=DC+2
```

```
159 REM -- ZLOMKOVA CARA --
```

```
160 FOR P=1 TO DC
170 LET Z$=Z$+"_"
180 NEXT P
```

```
189 REM -- UPRAVA C,J --
```

```
190 LET C$=" "+C$+" "
200 LET J$=" "+J$+" "
210 LET C$=RIGHT$(C$,DC)
220 LET J$=RIGHT$(J$,DC)
```

```
229 REM -- TISK ZLOMKU --
```

```
230 PRINT C$
240 PRINT Z$
250 PRINT J$
```

tabulka 4

.....	1 4 2
.....	2 0 3 5
	DC

tabulka 5

na konci řádku, upravíme řádek 430 a doplníme podprogram 600 až 630:

```
430 IF Z(C) = HZ THEN GOSUB 600
600 IF ABS(HZ - ZV) < 2 THEN RETURN
610 IF POS(0) + LEN(J$) > 31 THEN PRINT
620 PRINT J$; ", ";
630 RETURN
```

Pokud by se řetězec J\$ na řádek s 32 znaky již nevešel, ukončí se tisk v tomto řádku příkazem PRINT.

Poslední ukázka programu (tabulka 4) ukazuje možnost grafické úpravy tisku zlomků. Řádky 160 až 180 složí zlomkovou čáru z počtu *DC* čárek podtržení. *DC* je délka většího z čísel čitatele — jmenovatele. Dále je ještě *DC* zvětšeno o 2, aby na obou koncích zlomková čára přesahovala čitatele i jmenovatele. Princip úprav řetězců čitatele a jmenovatele ukazuje tabulka 5 jistě názorněji než slovní výklad.

FYZIKA

Fyzikální pohled na některé problémy energetiky I

Ing. IVO ČÁP, CSc., VŠDS v Žilině

S rozvojem vědy, techniky a zejména průmyslu nabývají stále větší význam otázky spojené s energetikou. Je to hlavně problém transportu energetických surovin a jeho efektivity, problém ovlivňování životního prostředí apod. Cílem tohoto článku je ukázat, jak lze na základě fyzikálních úvah vytvářet zjednodušené modely různých situací z uvedené oblasti a na jejich základě získávat rozumné představy o kvalitativní i kvantitativní stránce jevů.

Výchozím článkem energetiky jsou energetické zdroje, kterými budeme rozumět ty formy hmoty (látky nebo pole), které lze prakticky využít na konání užitečné práce. Primární zdroje jsou takové, které přímo poskytuje příroda — zdroje chemické (uhlí, ropa, zemní plyn), jaderné (uran U 235, těžký vodík D 2), termální (vnitřní energie zemského nitra), gravitační (vodní toky, přílivové vlny), zářivé (záření Slunce) apod. Sekundární zdroje vytváří člověk přetvářením zdrojů primárních na ušlechtlejší formy — elektromagnetické pole (průmyslový elektrický rozvod, záření antén, LASER, . . .), uměle získané štěpné materiály (U 233, Pu 239), zušlechtěná přírodní nebo syntetická chemická paliva, teplá voda nebo pára pro teplovody, ale i nežádoucí odpadní teplo průmyslových zařízení, civilizační odpad atd.

Jedním ze základních problémů energetiky je doprava energetických zdrojů ke spotřebiteli v požadované formě při respektování technických, ekonomických, ekologických a jiných kritérií. V tomto článku budeme věnovat pozornost dvěma významným způsobům dopravy energetických zdrojů:

- A) přenosu elektromagnetického pole po vedení,
 B) přepravě látkových energetických surovin.

Na základě fyzikálního rozboru se budeme zabývat efektivností uvedených způsobů dopravy. V úvodu zavedeme některé veličiny, které budeme používat.

Střední přepravní výkon definujeme vztahem

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (1)$$

kde ΔE je energie energetického zdroje dodaná spotřebiteli za dostatečně dlouhý časový interval Δt využitelná na konání užitečné práce.

Účinnost (efektivnost) přepravy definujeme vztahem

$$\eta = \frac{\Delta E}{\Delta E + W} = \frac{P}{P + P_z}, \quad (2)$$

kde W je práce vynaložená na provoz přepravní trasy (pohon dopravních prostředků, čerpadel apod.) a ztrátové teplo na trase (ohřev elektrických vodičů, vyzařování teplovodů, vnitřní tření v proudící tekutině apod.), P_z je ztrátový výkon odpovídající práci W . Pro ekonomické posouzení efektivnosti přepravy se do hodnoty veličiny W započítávají i náklady vynaložené na vybudování přepravní trasy, ale to přesahuje rámec našich fyzikálních úvah.

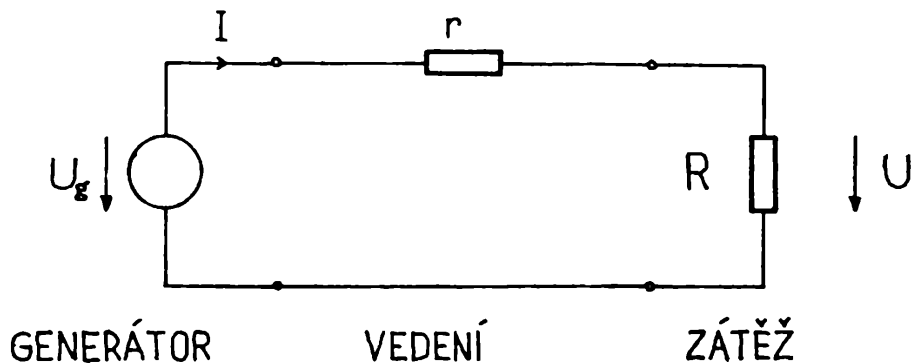
- A) Přenos elektromagnetického pole po vedení

Elektromagnetické pole je považované za nejušlechtlejší energetický zdroj a vyplývá to z jeho přímé využitelnosti, „čistého“ transportu, možností transformace, automatizace provozu atd. Nejužívanější formou transportu elektromagnetického pole je průmyslová rozvodná síť. Zjednodušený model vedení mezi elektrárnou a spotřebitelem je na obr. 1. Jde o jednoduché dvojvodičové vedení a pro jednoduchost uvažujeme jen ztráty ohřevem vodičů elektrickým proudem (indukčnost, elektrickou kapacitu a svodový odpor v této zjednodušené úvaze zanedbáme).

Střední přepravní výkon vyjádříme pomocí hodnot elektrických veličin na spotřebiči, který považujeme za rezistivní s odporem R . Platí

$$P = U I = R I^2, \quad (3)$$

kde U , I jsou efektivní hodnoty napětí a proudu spotřebiče. Střední



Obr. 1

ztrátový výkon představují v našem modelu tepelné ztráty ve vedení, vyjádřené Jouleovým vztahem

$$P_z = r I^2, \quad (4)$$

kde r je celkový odpor vedení.

Účinnost přepravy potom vyjadřuje podle (2) vztah

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{r}{R}}. \quad (5)$$

S ohledem na přepravní výkon a elektrické napětí na vedení upravíme vztah pro účinnost na tvar

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{rP}{U^2}} \quad (6)$$

Odtud vidíme, že zvyšování účinnosti se dosahuje zvyšováním elektrického napětí na vedení (energetická magistrála zemí RVHP MÍR má 400 kV). Snižování odporu vedení lze dosáhnout jen zvětšením průřezu, což je v protikladu k požadavku co nejmenší hmotnosti vedení a investiční náročnosti. Na daném vedení klesá účinnost přepravy s narůstáním přepravního výkonu. Situaci na elektrickém vedení přiblížíme na příkladě.

Příklad 1.

Posuďte účinnost elektrické energetické trasy délky $d = 200$ km, určené pro střední výkon $P = 100$ MW při hodnotě elektrického napětí $U = 200$ kV. Vedení je realizované hliníkovými vodiči s dovolenou proudovou hustotou $i = 2,0$ A . mm⁻² a měrným elektrickým odporem $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8}$ Ω . m. Z kolika drátů průměru $D = 5,0$ mm musí být spleteno lano elektrického vedení?

Řešení: Nejdříve navrhujeme lano vedení. Z výkonu P a elektrického napětí U určíme elektrický proud $I = P/U$. Z elektrického proudu a dovolené proudové hustoty stanovíme průřez lana $S = I/i$. Z celkového průřezu lana a průřezu jednoho drátu $S_d = \pi D^2/4$ určíme požadovaný počet drátů

$$n = \frac{S}{S_d} = \frac{P}{i U} \frac{4}{\pi D^2}; \quad \text{po dosazení } n = 12,7$$

Lano bude tedy spleteno z $n = 13$ drátů daného průměru. Známe-li skutečný průřez lana vedení, určíme odpor trasy $r = 2 \rho d/n S_d$. Dosaďme-li toto vyjádření do vztahu (6), dostane výraz pro účinnost tvar

$$\eta = \left(1 + \frac{2 \rho d P}{n S_d U^2}\right)^{-1} \quad \text{po dosazení } \eta = 0,90.$$

Závěr: Za okolností uvedených v zadání je účinnost uvedené energetické trasy 90 %. Lano elektrického vedení musí být spleteno ze 13 hliníkových drátů průměru 5 mm.

Z výsledku uvedeného příkladu, který dobře vystihuje reálnou situaci, je zřejmé, že při elektrickém přenosu dochází k poměrně značným energetickým ztrátám ve vedení. Existuje proto snaha zkracovat trasy elektrického přenosu rozmísťováním elektráren blíže k centrům energetické spotřeby a využívat podstatně účinnějšího přepravování energetických surovin pro elektrárny.

B) Přeprava látkových energetických surovin

K přepravě látkových energetických surovin se využívá dopravní síť (železnice, silnice, vodní cesty) a potrubní doprava (kapaliny a plyny). V souvislosti s přepravou látek zavádíme pro přepravní trasu veličinu *střední hmotnostní tok* vztahem

$$Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}, \quad (7)$$

kde Δm je hmotnost látky přepravené k spotřebiteli v časovém intervalu Δt .

U látkových energetických surovin se využívá nejčastěji teplo, které se uvolňuje při jejich spalování, tzn. při odpovídající chemické nebo jaderné reakci. Pro posuzování různých látek zavádíme veličinu *výhřevnost* (měrnou využitelnou energii), označ. H , která udává množství tepla, které se uvolní z jednotky hmotnosti látky při odpovídající energetické reakci, tab. 1. Vyjádříme-li využitelnou energii $\Delta E = H \Delta m$, je střední přepravní výkon dán vztahem (viz (1))

$$P = H Q_m. \quad (8)$$

Účinnost přepravy podle vztahu (2) vyjádříme ve tvaru

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{P_z}{H Q_m}} \quad (9)$$

Problematiku dopravy tuhých paliv si přiblížíme na příkladě.

Příklad 2.

Tepelná elektrárna má dva energobloky, každý s elektrickým výkonem $P_{el} = 50$ MW při celkové účinnosti $\eta_e = 30$ %. Uhlí s výhřevností $H = 10$ MJ $\cdot$ kg⁻¹ je dopravováno po železnici ze vzdálenosti $d = 200$ km. Vlaky s uhlím jsou sestaveny z $n = 30$ vagónů, z nichž každý má hmotnostní kapacitu $M = 50$ t uhlí, jsou tahány lokomotivou s výkonem $P_L = 2$ MW a pohybují se rychlostí $v = 60$ km $\cdot$ h⁻¹. Určete, kolik vlaků přiváží denně do elektrárny uhlí a jaká je účinnost dopravní trasy.

Tab. 1. Výchřevnosti některých paliv

Látka	$\frac{H}{\text{MJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$
Antracit (AP)	30,0
Měrné palivo (srov. norma)	29,3
Černé uhlí (D)	20,0
Hnědé uhlí	10,0
Benzin	44,5
Zemní plyn	35,7
Vodík H_2	10,8
Štěpný materiál U^{235}	$80 \cdot 10^6$
Obohacený přírodní uran (3,5 % U^{235})	$2,5 \cdot 10^6$
Těžká voda D_2O pro termojadernou syntézu	$72 \cdot 10^6$
Těžký vodík D_2 pro termojadernou syntézu	$52 \cdot 10^6$

Řešení : Pro udržení stálého provozu elektrárny musí střední přepravní výkon P odpovídat výkonu elektrárny $P_e = 2 P_{el}$. S ohledem na účinnost energetické soustavy je vztah výkonů $P_e = \eta_e P$. Střední přepravní výkon souvisí se středním hmotnostním tokem $P = Q_m \bar{H} = H \cdot N \cdot n \cdot M / \Delta t$, kde N představuje počet vlaků za dobu Δt . Počet vlaků za dobu Δt (za jeden den) vyjádříme

$$N = \frac{P}{H n M} \Delta t \quad \text{po dosazení } N = 1,92.$$

Při určování účinnosti přepravy stanovíme ztrátový výkon. Stanovíme ho z práce vykonané při dopravě jednoho vlaku. Za předpokladu plného využití výkonu lokomotivy je práce při přepravě plného vlaku $W_{z1} = P_L t_d = P_L d/v$. Práce vynaložená na zpětnou přepravu prázdného vlaku je podstatně menší, a proto ji v celkovém výčtu ztrát zanedbáme. Při středním času na přepravu jednoho vlaku $\Delta t/N$ je střední ztrátový výkon $P_z = P_L(d/v) (P/H n M)$. Účinnost přepravy potom vyjadřuje podle (2) vztah

$$\eta = \left(1 + \frac{P_L d}{v H n M} \right)^{-1} \quad \text{po dosazení } \eta = 0,998.$$

Závěr : Z příkladu, který vystihuje reálné podmínky, vidíme, že na plynulý provoz elektrárny o výkonu 100 MW jsou potřebné denně dva těžkotonážní vlaky uhlí uvedených parametrů. Účinnost přepravy

- Pozn.: S řeckým *idea* souvisí řec. *eidos* = podoba, z čehož pak vznikl výraz IDOL — předmět zbožnění, dokonalosti; modla
- IDENTICKÝ (od lat. *idem* = tentýž) — totožný, stejný; v. t. identifikace, identita
- IDENTIFIKACE (slož. z lat. *idem* = tentýž; v. identický + *-fatic*, od *facio*, *-ere* = dělat; v. *-fikace*) — „udělat týmž“; zjišťování totožnosti, určení totožnosti, IDENTIFIKOVAT
- IDENTITA (z latiniz. *identitus* od *idem* = tentýž; v. identický) — úplná stejnost, totožnost
- IDIOFON (slož. z řec. *idios* = svůj, vlastní, soukromý + *fóné* = hlas, zvuk; v. *-fon*) — nástroj, který má „vlastní zvuk“; nástroj samozvukný, např. chvějící se tyče, desky;
- IKA¹ (z řec. přípony *-ikos* dodávající celému slovu význam „všeobecný vztah + latinizováním řec. spojení *-iké techné*; *techné* = dovednost, schopnost, umění) — koncová část podstatných jmen ženského rodu v jednotném čísle, kterým dodává význam „vědní obor, nauka“, přičemž počáteční část slova vědní obor upřesňuje. Např. AKUSTIKA (řec. *akuó* = slyšet) — nauka o vzniku a šíření zvuku, o slyšitelnosti; slyšitelnost. FYZIKA (řec. *fysis* = příroda) — nauka o přírodě, o přirozených řádech. V. t. atomistika, balistika, dynamika, elektronika atd.
- IKA² (z analogicky připojené počestěné řec. přípony *-ikos* nebo latiniz. *-icus* dodávající celému slovu význam „všeobecný vztah“) — koncová část podstatných jmen ženského rodu v jedn. čísle, která dodává předcházející složce slova význam „všeobecného vztahu“. Např. ELEKTRIKA — přístroj na buzení statické elektřiny; EKLIPTIKA (řec. *ekleipó* = opouštět, zanechávat) — křivka „týkající se mizení“; čára omezující mizení Slunce při zatmění; zdánlivá dráha Slunce po obloze
- IKONOSKOP (slož. z řec. *eikón* = podobizna, obraz; srov. *IKONA* + *skopeó* = hledět, pozorovat; v. *-skop*) — „pozorovatel obrazů“; obrazový snímač; obrazovka speciálně konstruovaná pro televizní vysílače; v. t. superikonoskop
- IKUM (z řec. přípony *-ikos* dodávající celému slovu význam „všeobecný vztah“) — uměle utvořená latinizovaná přípona podst. jmen pro označení různých druhů fyzikálních substancí; v. t. dielektrikum, eutektikum, kalorikum, magnetikum
- IM- v. IN-
- IMAGINÁRNÍ (od lat. *imago*, *-inis* = obraz, vidina, představa) — obrazný, vymyšlený, zdánlivý, neskutečný
- IMERZE (z lat. *immersio*; slož. z *in* = v, do; v. *in*⁻¹ + *mergo*, *-ere*, ptc.
- IMISE (slož. z lat. *in* = v, do, na; v. *in*⁻¹ + *mitto*, *ere*, ptc. pf. *missus* = posílat; utvořeno analogicky podle „emise“, v. t.) — 1. vysílání, vpouštění, vhánění něčeho odněkud dovnitř; 2. „to, co je vysíláno,

vpouštěno, vháněno odněkud dovnitř“ V poznámku u „emise“ pf. *mersus* = nořit, potápět) — „vnoření“, ponoření; např. v astro-nomii: vstup vesmírného tělesa do stínu planety; začátek zatmění nebo zákrytu vesmírným tělesem; opak EMERZE — v. t.

IMPEDANCE (od lat. *impedio*, -ire = poutat, zaplétat, dělat nepřístup-ným, překážet; vl. „plést se mezi nohy“; slož. z *in* = v, do; v. *in*⁻¹ + *pes*, *pedis* = noha; srov. PEDÁL — nožní páka, šlapačka) — ve fyzice: zdánlivý odpor vodiče při průtoku elektr. proudu; odpor; v. kapacitance

IMPLICITNÍ (slož. z lat. *in* = v, na, do; v. *in*⁻¹ + *plico*, -are = vinout; v. duplikát) — „zavinutý do něčeho“; v něčem obsažený, ale výslovně nevyjádřený; opak: EXPLICITNÍ (v. t.). Pozn.: V příd. jménu „implicitní“ však můžeme chápat první složku *in*- i v druhém významu, tj. jako zápor (v. *in*⁻²), takže „implicitní“ potom též zna-mená, zvláště v biologii, „nevyvinutý, nerozvinutý“.

IMPLIKACE — „vpletení, zavinutí“; logický vztah mezi výroky, z nichž jeden je důsledkem druhého; jsou „do sebe vpleteny, za-pleteny“, v. poznámku u „explicitní“.

IMPULS (z lat. *impulsus*, slož. z *in* = v, na, do; v. *in*⁻¹ + *pello*, -ere, pte. pf. *pulsus* = nárazem uvádět v pohyb, pohánět, vyhánět, hýbat; tlouci, bít; v. puls) — popud, pobídka, podnět; ve fyzice též: hybnost

IMPULSÍVNÍ — 1. podléhající náhlým popudům; vznětlivý; 2. vyvo-laný podnětem, impulsem; např. impulsivní pohyb; ve fyzice též: IMPULSNÍ (např. radiolokátor), IMPULSOVÝ (např. záření).

Pozn.: Ve srovnání s termínem „stimulus“ vyjadřuje „impuls“ zpra-vidla pobídku jednorázovou, kdežto „stimulus“ pobídku déle trvající nebo opakovanou.

IN⁻¹, IM⁻¹, I⁻¹ (z lat. *in* = v, na, do, dovnitř) — předpona s významem místa, směru, způsobu „do, na, v“; opak: EX-; např. import — ex-port. V t. incidence, index, indikátor, indukce, inflexe, informovat, injekce, inklinace, intenzita, inverze, involuce; imerze; implicitní, impuls

IN⁻², IM⁻², I⁻² (z lat. záporové předpony *in*-) — předpona s významem „zápor, opak, ne-“; např. ilegální — nelegální; v. t. indifference, inercie, inkohERENCE, invariant, ireverzibilní

INCIDENCE (od lat. *incido*, -ere; slož. z *in* = do, v, na; v. *in*⁻¹ + *cado*, -ere = padat; srov. DEKADENCE — „upadávání“, úpadek) — „padání do něčeho, na něco“; ve fyzice: případ, kdy např. „bod dopadl na přímku“ nebo „přímka dopadla do roviny“, tj. leží na přímce, v rovině

INCIDENTNÍ (příd. jméno pouze k „incidence“) — např. bod; „dopadající na přímku“, ležící na přímce; v. t. koincidence, kaskáda

INDEX (z lat. *index*; slož. z *in* = do, na, v; v. *in*¹ + *dico*, -ere = řečí ukazovat, stanovit, říkat; srov. DIKCE — osobitý způsob vyjadřo-

- vání, mluva) — oznamovatel, ukazatel, něco prozrazující udavač; seznam, přehled; ve fyzice např.: INDEX světelného lomu — „ukazatel“ míry lomu světla; poměr sinu úhlu dopadu k sinu úhlu lomu.
- INDIFERENCE (z lat. *indifferentia*; slož. z *in* = — zde ve významu záporu; v. *in*-² + *differentia*, od *differe*, -*ferre* = lišit se; v. *diference*) — „neexistence rozdílu, rozdílnosti“; lhostejnost, netečnost, nevšímavost; ve fyzice: vztah dvou soustav, při němž jedna druhou neovlivňuje
- INDIFERENTNÍ — lhostejný, netečný, vlažný (zejména v politických, národnostních a mravních otázkách); ve fyzice: INDIFERENTNÍ poloha tělesa, INDIFERENTNÍ rovnováha — „neliší se, není rozdílná“, tj. výška těžiště se při vychýlení tělesa nemění; „poloha těžiště se neruší, neliší se“
- INDIKÁTOR (od lat. *indico*, -*are*, ptc. pf. *indicatus* = udat, prozradit, ukázat; slož. z *in* = v, do, na; v. *in*-¹ + *dico*, -*are* = slavnostně ohlásit + -*or*, v. t.) — ukazatel; ve fyzice: přístroj udávající okamžitou hodnotu měřené veličiny (někdy totéž co „detektor“, v.t.); v.t. predikát.
- INDUKCE (z lat. *inductio*; slož. z *in* = v, do, na; v. *in*-¹ + *duco*, -*ere*, ptc. pf. *ductus* = táhnout, vést; srov. DEDUKCE — odvození, odvozování; PRODUKCE — předvedení, předvádění) — přivádění; úvod, uvedení, „uváděcí“ metoda, navození; ve fyzice: vlivem („zavedením“) elektrického, případně magnetického pole vzniká ve vodiči pohyb nábojů; v. t. kondukce, produkce, redukce, reprodukce; INDUKČNÍ, INDUKČNOST, INDUKOVAT — vyvolat („zavádět“) proud v uzavřeném obvodu změnou magnetického toku; INDUKTANCE, INDUKTIVNÍ; INDUKTOR (v. -*or*) — přístroj, kterým se indukuje střídavé napětí
- INERCE (z lat. *inertia* = neobratnost, nemotornost, nechť k práci, nečinnost, lenost; slož. z *in* — zde s významem záporu; v. *in*-² + *ars* = umění; srov. ARTISTA — „umělec“) — nečinnost, netečnost; ve fyzice: setrvačnost („neprojevuje se snaha změnit směr nebo rychlost“)
- INERCIÁLNÍ — klidný; INERCIÁLNÍ soustava — ta, která je vzhledem k stálým v klidu nebo se vzhledem k nim pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem (tj. nemění se její rychlost)
- INERTNÍ — nečinný, netečný; ve fyzice: nezúčastňující se probíhající reakce ani je neovlivňující; INERTNÍ plyny — chemicky nereagují s jinými prvky, neslučují se s ostatními prvky a netvoří sloučeniny; jsou netečné
- INFLEXE (z lat. *inflexio*; slož. z *in* = do, na, v; *in*-¹ + *flecto*, -*ere*, ptc. pf. *flexus* = ohýbat, obracet; v. *reflex*) — „ohýbání“ ohyb, ohnutí
- INFLEXNÍ bod — ohybový; bod křivky, ve kterém se křivka „začne ohýbat, stáčet na druhou stranu“ své tečny

- 56** **INFORMACE** (z lat. *informatio* = představa, obrys; od *informo*, -are, ptc. pf. *informatus*; slož. z *in* = v, do, na; v. *in*⁻¹ + *formo*, -are = dávat tvar, podobu; utvářet; v. deformace) — „představa“, „dodávání podoby“, „utváření mínění“, dodání zprávy; **INFORMOVAT**
- INFRA-** (z lat. *infra* = dole, vespod, nízko; pod — místně; po — časově; za — kvantitativně a kvalitativně) — počáteční část složených slov mající význam „dole, vespod, nízko, pod“; ve fyzice: slouží k význa-
movému rozlišování a třídění fyzikálních jevů podle určitých příznaků
- INFRAČERVENÝ** — ležící za („pod“) viditelnou červenou částí spektra záření; **INFRAČERVENÉ** světlo — jeho frekvence leží níže než frekvence světla červeného
- INFRAZVUK** — zvuk, jehož vlnová frekvence je pod hranicí vníma-
telnosti lidským sluchem; zvuk s kmitočtem nižším než má zvuk slyšitelný
- INJEKCE** (od lat. *inicio*, -ere, ptc. pf. *iniectus*; slož. z *in* = do, na v; v. *in*⁻¹ + *iacio*, -ere = házet, vrhat; v. projekce) — „vhození“; vstřík-
nutí látky do organismu; vehnání roztoku do nějaké hmoty, zdiva nebo půdy; **INJEKČNÍ**, **INJEKTIVNÍ**, **INJEKTOVAT**
- INKLINACE** (z lat. *inclinatio*; slož. z *in* = do, v, na; v. *in*⁻¹ + *clino*, -are = klonit; srov. **INKLINOVAT** — „naklánět se“; mít sklon, náklonnost k něčemu) — „naklonění“; sklon, náklonnost; ve fyzice: úhel sklonu
- INKOHERENCE** (slož. z lat. *in-* s významem náporu; v. *in*² + *con-* = s, spolu, dohromady; v. *ko-* + *haereo*, -ere = vězet, váznout, lpět; v. adheze) — nesouvislost, nedostatek souvislosti nebo soudržnosti, rozpad; **INKOHERENTNÍ** — nesouvislý; opak: **KOHERENCE**, **KOHERENTNÍ**
- INTENZITA** (slož. z lat. *in* = do, na, v, v. *in*⁻¹ + *tendo*, -ere, ptc. pf. *tensus* = pnout, napínat, natahovat; kvapně táhnout, směřovat, spěchat; srov. **TENDENCE** — „napínání určitým směrem“, směřo-
vání — „napětí, napnutí síly“; síla, mohutnost; stupeň síly, mohut-
nosti; ve fyzice: stavová veličina; síla na něco působící, k něčemu směřující; tenze, tenzor
- INTENZITNÍ** — např. elektrický intenzitní tok — tok elektrické
intenzity (příčemž tento tok může být jakýkoliv, tedy i slabý)
- INTENZIVNÍ** — mající velkou intenzitu; silný, mohutný, účinný;
v. t. protenzivní
- INTER-** (z lat. *inter* = mezi) — předpona s významem „mezi, poloha
mezi, mezi-; vzájemnost“; srov. **INTERNACIONÁLNÍ** — mezi-
národní; (lat. *natio*, -onis = národ)
- INTERAKCE** (v. akce) — vzájemné působení několika činitelů na
sebe
- INTERFERENCE** (lat. *fero*, *ferre* = nosit, nést; v. difference) —
„vnášení mezi“; vzájemné ovlivnění, křížení; ve fyzice např. **IN-**

99,8 % je však podstatně lepší než u elektrického vedení na stejné vzdálenosti a při stejném přepravním výkonu (viz příklad 1).

Z hlediska účinnosti dopravy energetických surovin je podle vztahu (9) nejvýhodnější dopravovat látky s co největší výhřevností. Těmi jsou jednoznačně štěpné materiály pro jaderné elektrárny.

Příklad 3.

Jaderná elektrárna V-1 v Jaslovských Bohunicích má elektrický výkon $P_e = 830$ MW. Účinnost energetické soustavy je $\eta_e = 30$ %. Jako palivo se používají palivové články z obohaceného uranu s plánovanou výhřevností $H = 2,47$ TJ $\cdot$ kg⁻¹. Určete, na jakou dobu provozu elektrárny postačí jedna náplň reaktorů s celkovou hmotností palivových článků $M = 42$ t.

Řešení: Vsázka paliva představuje využitelnou energii $\Delta E = HM$, což při účinnosti energetické soustavy a výkonu elektrárny představuje dobu provozu

$$\Delta t = \frac{HM}{P_e} \eta_e ; \quad \text{po dosazení } \Delta t = 3,75 \cdot 10^7 \text{ s.}$$

Závěr: Jedna náplň reaktoru vydrží 1 rok a 69 dní. Na její přepravu přitom postačí několik železničních vagonů. Účinnost přepravy je prakticky 100 % a doprava je navíc velmi čistá.

Při transportu tekutých látek potrubím je tok hmotnosti

$$Q_m = \rho S v , \quad (10)$$

kde ρ je hustota látky, S průřez potrubí, v rychlost proudění (uvažujeme stejnou v celém průřezu). Práci vynaloženou na provoz trasy představuje činnost kompresorových stanic, které vyrovnávají pokles tlaku v potrubí, vznikající v důsledku viskozity látky a turbulence proudící tekutiny. Pro vytvoření určité představy uvedeme bez širších souvislostí vztahy pro pokles tlaku v proudící kapalině.

Pro laminární proudění platí vztah

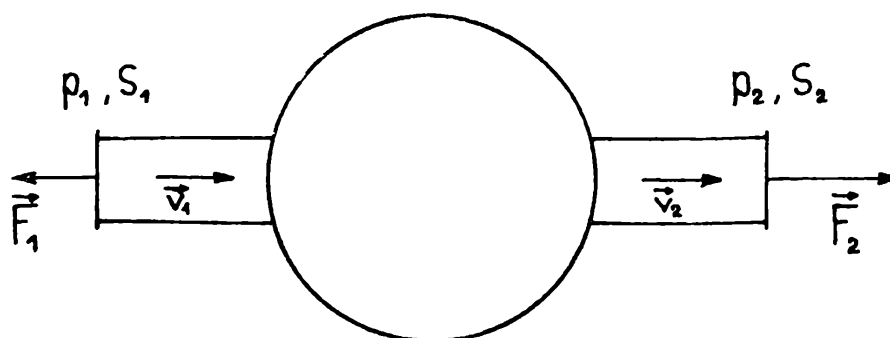
$$\Delta p = 31 \frac{\eta_d v}{d^2} L , \quad (11)$$

pro turbulentní proudění platí vztah

$$\Delta p = C \frac{\rho v^2}{d} L , \quad (12)$$

kde η_d je dynamická viskozita tekutiny, d průměr potrubí, L délka potrubí, C konstanta odporu (nabývá hodnot řádově 10^{-2}). Pro posouzení typu proudění je zavedeno tzv. Reynoldsovo číslo.

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta_d} \quad (13)$$



Obr. 2

ČERPADLO

Z empirické zkušenosti vyplývá, že hranici obou typů určuje hodnota $Re = 2000$. Pro hodnoty menší je proudění laminární, pro hodnoty větší turbulentní.

Pokles tlaku v potrubí vyrovnávají kompresorové stanice (čerpadla). Pro posouzení výkonových poměrů v čerpadle vytvoříme fyzikální model podle obr. 2. Užitečná práce čerpadla souvisí se zvýšením tlaku v potrubí. Na výstupu působí v průřezu potrubí celková síla $F_2 = p_2 S_2$, což při rychlosti proudění v_2 představuje výstupní mechanický výkon $P_{m2} = F_2 v_2$. Na vstupní straně je z hlediska čerpadla výkon záporný (opačná orientace rychlosti proudění) $P_{m1} = -F_1 v_1$. Výsledný mechanický výkon čerpadla je tedy

$$P_m = p_2 S_2 v_2 - p_1 S_1 v_1 \quad (14)$$

Při provozu čerpadla dochází i k zvyšování vnitřní energie soustavy ΔU v důsledku vnitřního tření v tekutině, turbulence a komprese látky. Označíme-li odpovídající výkon (ztrátový výkon) P_z , platí pro příkon čerpadla vztah

$$P_k = P_m + P_z. \quad (15)$$

A) Při proudění kapalin se předpokládá jejich nestlačitelnost, což umožňuje využít rovnici spojitosti objemového toku ve tvaru $Sv = \text{konst.}$ S použitím vztahu pro hmotnostní tok $Q_m = \rho Sv$ vyjádříme mechanický výkon čerpadla (14) ve tvaru

$$P_m = \frac{Q_m}{\rho} (p_2 - p_1). \quad (16)$$

Ztráty se v tomto případě obvykle vyjadřují pro dané provozní podmínky účinností čerpadla η_k , takže příkon čerpadla je

$$P_k = \eta_k \frac{Q_m}{\rho} (p_2 - p_1) \quad (17)$$

B) Při proudění plynů je situace složitější vzhledem k jejich stlačitelnosti. V potrubí platí podmínka spojitosti hmotnostního toku,

ale dochází ke změně hustoty plynu při změnách teploty a tlaku. Mechanický výkon čerpadla vyjádříme ve tvaru

$$P_m = Q_m \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \quad (18)$$

Pro určení poměru tlaku a hustoty použijeme idealizovaný model ideálního plynu (v reálné situaci platí přibližně, ale umožňuje rozumný odhad), pro který platí stavová rovnice $p = \rho R_m T / M_m$, kde R_m je molární plynová konstanta, M_m molární hmotnost plynu a T termodynamická teplota. Mechanický výkon je potom

$$P_m = Q_m \frac{R_m}{M_m} (T_2 - T_1) \quad (19)$$

Kromě vykonané práce mechanické dojde i ke zvýšení vnitřní energie plynu

$$\Delta U = \Delta m \frac{C_v}{M_m} (T_2 - T_1), \quad (20)$$

kde molární tepelnou kapacitu plynu vyjádříme pro ideální plyn vztahem $C_v = R_m s/2$, kde s je počet stupňů volnosti molekuly plynu (1-atomová $s = 3$, 2-atomová $s = 5$, 3- a víceatomová $s = 6$). Zanedbáme-li odvod tepla do okolí povrchem čerpadla (děj uvnitř čerpadla považujeme za adiabatický), vyjádříme ztrátový výkon

$$P_z = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{s}{2} Q_m \frac{R_m}{M_m} (T_2 - T_1). \quad (21)$$

Rovnici pro adiabatický děj $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$ upravíme s použitím stavové rovnice $pV = nR_m T$ na tvar

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p'_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (22)$$

kde κ je Poissonova konstanta, p_1 tlak na vstupu a p'_2 tlak na výstupu čerpadla. Na krátkém úseku potrubí za čerpadlem se však plyn ochladí odvodem tepla do okolí na původní teplotu. Považujeme-li tento děj za izochorický, poklesne tlak v potrubí v důsledku ochlazení na $p_2 = p'_2 T_1/T_2$ a vztah pro příkon čerpadla (15) dostane konečný tvar

$$P_k = Q_m \left(1 + \frac{s}{2} \right) \frac{R_m}{M_m} T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\kappa-1} - 1 \right]. \quad (23)$$

Čerpadlo tedy v konečném důsledku vyrovnává v potrubí tlakový pokles $p_2 - p_1$, vznikající na trase vnitřním třením a turbulencí plynu. Reálné poměry v plynovodu si přiblížíme na příkladě.

Příklad 4:

Plynovod délky $L = 2000$ km má průměr potrubí $d = 80$ cm. Hmotnostní tok dopravovaného plynu $Q_m = 100$ kg . s⁻¹. Kompresorové stanice jsou vybudované na trase ve vzájemné vzdálenosti $D = 160$ km a vytváří v potrubí tlak $p_2 = 3$ MPa. V důsledku ztrát poklesne tlak mezi stanicemi na hodnotu $p_1 = 1$ MPa.

Ověřte, zda tento pokles odpovídá našim úvahám o ztrátách v potrubí. Určete střední přepravní výkon, výkon kompresorových stanic a účinnost přepravní trasy.

Pro přepravovaný plyn uvažujeme parametry: teplota v potrubí $t_1 = 20$ °C, hustota plynu při této teplotě a tlaku 100 kPa je $\rho_0 = 2$ kg . m⁻³, viskozita je řádově $\eta_d \doteq 10^{-5}$ Pa . s⁻¹, konstanta odporu $C \doteq 10^{-2}$, výhřevnost plynu $H = 35$ MJ . kg⁻¹, Poissonova konstanta $\kappa = 1,33$, molová hmotnost $M_m = 30 \cdot 10^{-3}$ kg . mol⁻¹, molová plynová konstanta $R_m = 8,31$ J . K⁻¹ . mol⁻¹.

Řešení : Nejdříve zjistíme charakter ztrát v potrubí. V důsledku změny tlaku podél trasy a tím i hustoty plynu se mění rychlost proudění. Podle stavové rovnice roste hustota úměrně tlaku. Při středním tlaku 2 MPa je tedy hustota plynu $\rho \doteq 40$ kg . m⁻³. Při daném hmotnostním toku a průměru potrubí je průměrná rychlost proudění $v = Q_m 4/\pi d^2 \rho$, číselně $v = 5,0$ m . s⁻¹. Podle vztahu (13) je Reynoldsovo číslo $Re \sim 1,6 \cdot 10^7$, a to znamená, že jde o převládající ztráty turbulentní. Pro průměrné hodnoty hustoty a rychlosti proudění dostaneme dosazením do vztahu (12) pro turbulentní proudění pokles tlaku mezi dvěma kompresorovými stanicemi $\Delta p \doteq 2 \cdot 10^6$ Pa. To odpovídá podmínkám zadání.

Střední přepravní výkon určíme ze vztahu (8) $P = H Q_m$; číselně $P = 3,5 \cdot 10^9$ W.

K určení příkonu kompresorové stanice použijeme vztah (23). Po dosazení zadaných hodnot (teplota $T_1 = 293$ K) je číselný výsledek $P_k = 14,4 \cdot 10^6$ W.

Na danou trasu připadá počet kompresorových stanic $L/D = 12,5$ tedy $N = 13$ stanic. Náklady na provoz plynovodu jsou dané ztrátovým výkonem $P_z = N P_k$. Dosazením do vztahu pro účinnost (2) dostaneme číselný výsledek $\eta = 0,95$.

Závěr : Z rozboru reálných poměrů vidíme, že plynovodem je přepravovaný obrovský výkon 3,5 GW při účinnosti přepravy 95 %, což je při délce trasy 2000 km velmi vysoká hodnota (např. při porovnání s elektrickým vedením). Dále si můžeme povšimnout hodnot tlaku v potrubí v průměru 2 MPa, rychlosti proudění plynu v průměru 5 m . s⁻¹ a výkonu kompresorů okolo 15 MW.

Isaac Newton a jeho Principia

Dr. FRANTIŠEK JÁCHIM, základní škola Volyně

Motto: „Tisíc jablek spadlo na nos zeměkoule,
a jen Newton dovedl těžit ze své boule.“
(V. Nezval: Edison)

1. Úvod

V letošním roce uplyne 300 let od vydání vrcholného díla klasické mechaniky *Philosophiae naturalis principia mathematica*, ve fyzikálním žargonu nazývaného prostě Principia. Historie ukázala, že jen nemnoho fyzikálních prací má charakter zásadních mezníků v rozvoji fyziky. Poznatky, které Newton shrnul v Principiích, byly však vrcholné nejen v 17. století, ale zůstaly jimi až do konce století devatenáctého. Cílem příspěvku je poskytnout mladému čtenáři pohled do obsahu Principií, připomenout východiska Newtonovy práce a některým faktům nastavit zrcadlo dneška. Nejprve v několika řádcích představme autora spisu, jehož obsahem se chceme dále zabývat.

2. Isaac Newton

Život sira *Isaaca Newtona* je vymezen daty 4. 1. 1643 a 20. 3. 1727. Pocházel ze samoty *Woolsthorpe* nedaleko východoanglického pobřeží. Jako nejstarší syn dvakrát ovdovělý matky byl předurčen ke správě rodinného statku. Jenže to byl objekt, který mladého Newtona zajímal ze všeho nejméně. Zato prokazoval pozoruhodnou schopnost co nejvíce soustředit se na jeden problém, který jej právě zaujal. Vynikal originalitami, vynalézavostí a zručností. Roku 1654 jej matka posílá do King's Schoole v *Granthamu*, o 7 let později vstupuje na univerzitu v *Cambridge*, jíž zůstává věrný až do konce svého života. Přestože součástí univerzitního studia byla latina, řečtina, hebrejšтина, filozofie i teologie, hlavní vliv na Newtona má studium hlavních přírodovědeckých prací té doby. Studuje *Keplera* (Optika), *Eukleidovy Základy*, *Descartovu Geometrii* a *Řeč o metodě* aj. Na formování jeho vědeckého růstu má nemalý podíl jeho učitel prof. *Barrow*, který mu byl navíc také přítelem. Za konstrukci zrcadlového dalekohledu (1671) čeká Newtona zvolení členem učené společnosti *Royal Society* a v roce 1703 se stává jejím předsedou. Vedle mechaniky rozvinul zejména optiku, a to výhradně na korpuskulární teorii.

3. „Obři“¹⁾

Při své práci v mechanice a astronomii se Newton opíral o skvělá díla *Koperníkova*, *Galileova*, *Keplerova* i *Descartova*. Každý z nich šel svou cestou věcně i metodicky, avšak jimi získané poznatky jsou v syntetickém díle Newtonově spojeny v logický celek.

Galileo Galilei (1564—1642) zavedl do fyziky linii: pokus — vytváření závěrů — zobecnění — ověření pokusem. Rozpracoval poznatky o zemské gravitaci, zavedl pojmy setrvačnost a síla.

Astronomickou kinematiku poznává Newton z díla *Johanna Keplera* (1571—1630). Kepler vychází z mnoha relativně přesných astronomických měření poloh planet, zvláště Marsu²⁾, a na základě těchto dat objevuje tři zákony empirického typu. Jeden z nich říká, že dráhy planet jsou eliptické. Kepler k tomu dospívá proto, že elipsa nejlépe „padne“ do posloupnosti poloh objektu. Proč však jsou dráhy takové a proč je Slunce v jejich společném ohnisku, to už je otázka dynamická a v Keplerově době nezodpovězená, přestože se sám Kepler pokouší i o studium dynamiky soustavy. Je přesvědčen, že pohyb planet je výsledkem silového působení. Předpokládá existenci síly působící na planety ve směru jejich pohybu. Tuto sílu dával do souvislosti se Sluncem a o její velikosti soudil, že lineárně klesá se vzdáleností od Slunce. Za linearitu poklesu je kritizován francouzským astronomem *Bullialdem*; ten vyslovuje domněnku o ubývání síly se čtvercem vzdálenosti. Po stránce pojmové je důležitý Keplerem zavedený pojem plošné rychlosti, první stupeň na zavedení momentu hybnosti.

René Descartes (1596—1650) zavádí ve svých úvahách pojem hybnost. Ta je základní dynamickou veličinou a umožňuje od pouhého popisu přejít k příčinným vztahům. Objasnil zákon zachování hybnosti, a to ve speciální podobě při rázu pružných koulí. Za příčinu všech pohybových změn pokládal sílu. Descartes byl přesvědčen, že celý vesmír je vyplněn částicemi pohybujícími se ve vírech.

Přes překonání aristotelismu je však Descartův přístup ke světu povahy spekulativní. Prvotní byly pro něj pojmy, reálné vlastnosti těles byly až druhotnými kvalitami. Newton považoval vyvrácení vírové teorie za jednu z hlavních otázek a také jí v *Principiích* věnuje dost místa.

Žádná z uvedených osobností však nepřerostla svůj stín. Doposud tu byla hranice mezi jevy astronomickými a přitažlivostí Země, řada dílčích poznatků nenacházela zobecnění.

4. *Philosophiae naturalis principia mathematica*³⁾

Celé hlavní Newtonovo dílo je rozděleno do tří částí (knih). První

Text poznámek

¹⁾ Známy je Newtonův výrok: Jestliže jsem viděl dál, bylo to jen proto, že jsem stál na ramenou obrů.

²⁾ Získaných Tycho Brahem

³⁾ Matematické základy přírodní filozofie

a druhou knihu bychom mohli nazvat teoretickou mechanikou, třetí obsahuje aplikaci výsledků na vesmír. V úvodu Newton začíná osmi definicemi. Jako příklad uveďme dvě:

Definice 1 Množství hmoty je její míra, daná společně její hustotou a velikostí (tělesa — F. J.).

Definice 2.: Množství pohybu je jeho míra, daná společně jeho rychlostí a množstvím hmoty.

Dnes bychom mohli uvedené Newtonovy definice interpretovat vztahy $m = \rho V$ a $\vec{p} = m \vec{v}$. Povšimněme si, že hmotu nedefinuje jako takovou⁴⁾, nýbrž jako množství látky v určitém tělese. Po definicích následují Axiomy neboli zákony pohybu.

- I. Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo stejnoměrného pohybu přímočarého, pokud není vtištěnými (rozuměj vnějšími — F. J.) silami nuceno tento stav změnit.
- II. Změna pohybu jest úměrná vnější hybné síle a děje se ve směru přímky, ve které síla ona působí.
- III. Proti působení jeví se vždy ve směru opačném stejně velká reakce; aneb vzájemné působení dvou těles jest vždy stejné, avšak směřující v opačné strany.

První axiom je v podstatě Galileiho zákon setrvačnosti. Pokud jsme v něm napsali „těleso“, pak musíme dodat, že tak vzniklo při překladu, neboť Newton uvádí „quantity“ (= veličina). Čtenář nechť si uvědomí, že Newtonovu „veličinu“ bychom měli tlumočit spíše jako „hmotný bod“ než „těleso“. A skutečně zákon platí přesně pro hmotný bod, v jistém přiblížení i pro nerotující těleso.

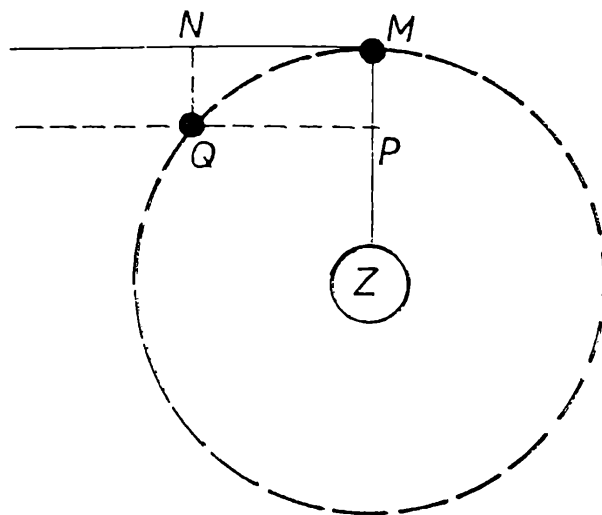
Druhý zákon — zákon síly — platí opět pro hmotný bod, resp. částici a pro tuhé těleso při působení centrální síly při jeho posuvném pohybu.

Pohybový zákon, který můžeme matematicky zapsat $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$, je

první fyzikální zákon, v jehož zápisu je zachycena kauzalita. Stav předchozí určuje stav budoucí. Tento zákon platí i ve speciální teorii relativity. Z hlediska logické struktury je první zákon jen zvláštním případem druhého, obecnějšího. Jestliže je totiž vnější síla působící na těleso nulová, pak se rovná nule i časová změna hybnosti a těleso s konstantní hybností je buď v klidu nebo setrvává v pohybu rovnoměrném přímočarém (uvažujeme konstantní hmotnost).

Třetí zákon je zobecněním studia rázu těles. I když tato problematika byla zkoumána např. *Huygensem* i *Descartem* a dalšími, v plné obecnosti nebyl před Newtonem axiom vysloven. V klasické mechanice platí pro síly působící ve spojnici mezi hmotnými body nebo pro centrální síly

⁴⁾ Vývoj názorů na hmotu nalezne čtenář např. v knize Úlehla, I.: *Fyzika a teorie poznání*, Praha 1982



Obr. 1. Odchýlení Měsíce z přímočaré dráhy NQ je rovno úseku MP , který by Měsíc urazil volným pádem za stejný čas.

mezi tuhými tělesy, ve speciální teorii relativity platí jen pro síly vyvolané dotykem těles. Všechny tři zákony si zachovávají platnost v inerciálních soustavách.

První kniha *Principií* má 14 oddílů. Ve své matematické části obsahuje teorii pohybu po kuželosečkách. Je tu uveden zákon zachování plošné rychlosti při pohybu v soustavě s centrální silou. Newton dokazuje orientaci centrální síly do ohniska (Slunce) a její ubývání se čtvercem vzdálenosti. Výsledek je předpokladem pro důkaz III. Keplerova zákona ze zákona gravitačního. Objevuje se zde gravitační síla jako první z elementárních sil. Odvážně zavádí Newton okamžité působení těles na dálku. Jako důsledek vzájemného silového působení planet je zde uvedeno stáčení přímky apsid (objevené Koperníkem).

Ve druhé knize je řešen pohyb tělesa v prostředí, jehož odpor není zanedbatelný. Newton rozlišuje dva případy: pohyb tělesa v kapalině takovou rychlostí, že brzdná síla je úměrná rychlosti, a pohyb tělesa v plynu, přičemž odpor je úměrný čtverci rychlosti. Nalézá vztah, v němž je člen s v i s v^2 , a ukazuje, že při malé rychlosti převládá hodnota členu lineárního, teprve při větších rychlostech nabývá převahy člen kvadratický. Značnou část II. knihy věnuje kritice Descartovy vírové teorie o pohybu planet.

Nepochybně vyvrcholením celého díla je kniha třetí: *O soustavě světa*. Již pouhý výčet názvů kapitol poskytuje přehled o otázkách, jež Newton řešil: *O příčinách světové soustavy*, *O velikosti nerovnoměrností Měsíce*, *O velikosti přílivu*, *O precesi*, *O kometách*. V úvodu třetí knihy formuluje pravidla, která považuje ve vědě za základní:

1. Není třeba připouštět více příčin přírodních jevů, než které jsou pravdivé a stačí k vysvětlení oněch jevů.
2. Příčiny přírodních jevů téhož druhu jsou tytéž.

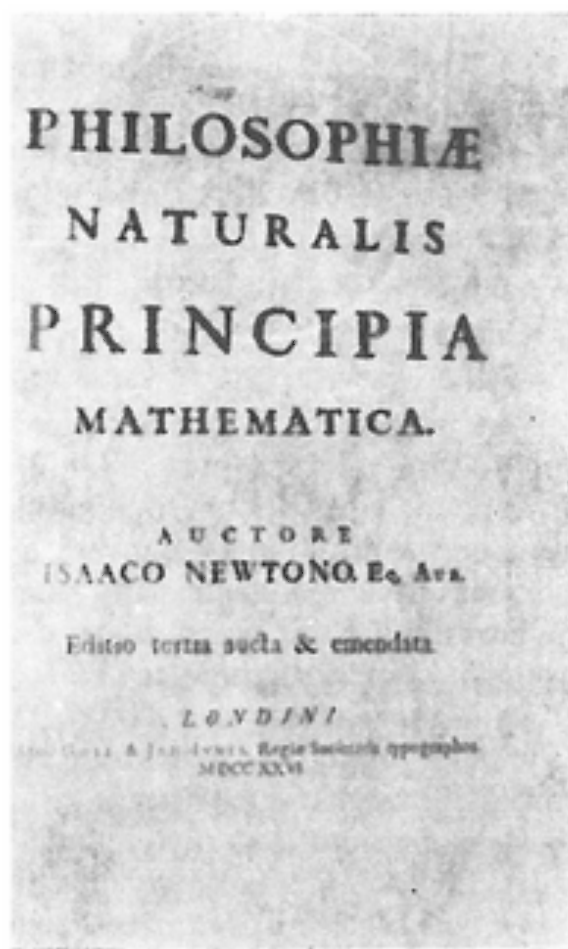
3. Vlastnosti těles, které nemohou být ani zesíleny ani zeslabeny a které jsou vlastní všem tělesům, na nichž je možno provést pokusy, je třeba považovat za vlastnosti všech těles.
4. V experimentální fyzice je třeba indukci získané zákony považovat za přesné nebo velmi blízké pravdě, pokud pomocí nových jevů nedosáhneme větší přesnosti.

O tom, že Newton nepovažoval text *Principií* za definitivní, svědčí změny ve druhém a třetím vydání. Vydání první (1687) obsahuje pouze prvá dvě pravidla, třetí přibývá ve vydání druhém z roku 1713.

Ve vlastním výkladu je nejprve dokázána identita síly působící na Měsíc s tíží na povrchu Země. Výpočty dovedou Newtona k závěru, že Měsíc je z hypotetické přímočaré trajektorie odchýlen o tak velký úsek, jako kdyby padal k Zemi volným pádem (obr. 1). Tento výsledek je mostem spojujícím gravitaci ve vesmíru s pády těles na povrchu Země. Myšlenku všeobecné gravitace pojal Newton již v roce 1665. Postupně se opíral o stále přesnější údaje o rozměrech Země (získané např. *Picardem* r. 1670) a jeho výpočty o velikosti úseku NQ se blížily údajům z pozorování. Rozhodující výpočty provedl patrně roku 1684. V Newtonových úvahách se poprvé objevuje zemská gravitace jako zvláštní případ gravitace všeobecné (nebo alespoň gravitace v rámci Sluneční soustavy). Ze vzájemného přitahování planet a jejich satelitů zobecňuje Newton přitažlivost na vlastnost kterékoli částice a kvantitativně tuto vyjadřuje známým zákonem pro velikost přitažlivé síly

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Velikost konstanty k je později určena také laboratorně. Měření provedl pomocí torzních vah *H. Cavendish*. Zákon byl znám mnohem dříve, než jej Newton publikoval v *Principiích*. Nechtěl jej však publikovat, dokud si nebyl jist jeho obecností. Proto ta dlouholetá pozorování pohybu Měsíce, Jupiterových satelitů a řada dalších pokusů. Zmiňme se alespoň o jednom, jímž Newton chtěl prokázat identitu hmotnosti setrvačné a gravitační. Provedl pokusy s fyzickými kyvadly se stejnou redukovanou délkou, přičemž těleso jednoho kyvadla bylo tvořeno zavěšenou baňkou s vodou, druhé kyvadlo mělo vodu nahrazenou stejnou gravitační hmotností jinou látkou. Zjistil, že doby kmitu obou kyvadel jsou stejné, tedy že poměr setrvačné a gravitační hmotnosti je roven jedné. Poznamenejme však, že šlo o prokázání s přesností řádové 10^{-3} . Podobné pokusy prováděl později *Bessel* (1827) a *Potter* (1923), poslední jmenovaný dokonce s přesností $3 \cdot 10^{-6}$, Newton nalézá také astronomický argument pro rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti. Byť sebemenší rozdíl obou hmotností částic by se musel projevit v dobách, kdy planety obíhaly kolem Slunce v nepevném stavu. Molekuly s různou gravitační a setrvač-



Obr. 2. Titulní strana Newtonova díla, 3. vydání 1726

nou hmotností by se od sebe oddělily a nemohla by soustavy planet vzniknout.

Principie vznikly v letech 1684—1687. Již v roce 1684 má Newton napsán spis *De motu corporum* (O pohybu těles), který je základem první knihy Principií. Myšlenka o ubývání přitažlivosti se čtvercem vzdálenosti je ještě o 20 let starší. Užívali ji *Wren* i *Hooke*, ovšem spekulativně, jako hypotézu. Teprve u Newtona se jí dostává exaktního podložení, i když o podstatě gravitace nehovoří ani on. Z předpokladu poklesu gravitační síly se čtvercem vzdálenosti a z její orientace k centrálnímu tělesu plyne, že planeta se musí pohybovat po elipse. Dokázal však i větu obrácenou: Pohybuje-li se planeta po elipse, musí být pod vlivem centrální síly, která klesá úměrně s r^2 . Newton nejen že použil Keplerových zákonů jako východiska, ale také zpřesnil třetí z nich. V Keplerově formulaci zní: Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin jejich hlavních poloos

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (1)$$

Fyzikální zdůvodnění vyžadovalo zastoupení hmotnosti centrálního tělesa. Až po nalezení zákona gravitačního objevuje přesné znění zákona Keplerova

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{M + m_1}{M + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (2)$$

kde M je hmotnost Slunce, m_1 a m_2 jsou hmotnosti planet. Vztah (2) přechází ve vztah (1) přesně, právě když $m_1 = m_2$. Protože však $M \gg m$ pro všechny planety Sluneční soustavy⁵⁾, lze v řadě úvah zlomek s hmotnostmi považovat za rovný jedné.

O první vydání Principií se zasloužil zejména astronom *E. Halley*. V dubnu 1686 přinesl *dr. Vincent* do Royal Society rukopis první knihy a bylo ihned rozhodnuto o jejím vydání. Malé finanční prostředky, nepřilíš velké nadšení některých současníků (např. *Hooka*), a tak jen díky Halleyovi se daří roku 1687 (již celé) dílo vydat. Náklad je malý — asi 350 výtisků. Vědecká fronta je na dílo upozorněna jednak Halleyovou recenzí, dále recenzí v *Acta Euditorum* 1688 a Lockovým pojednáním v *Bibliothèque Universal*. Newton s velkým zájmem sledoval, jak se dílo rozšiřuje a s jakým ohlasem. Sám vypracoval seznam 70 míst, kam měly být výtisky zaslány. Mezi nimi je i Praha. Druhé vydání vychází v roce 1713 s předmluvou *Cotesovou*, třetí roku 1727. V těchto vydáních je dílo na několika místech autorsky upraveno. O pronikání Newtonovy fyziky do českých zemí se zasloužil zejména *J. Stepling* a *J. Tesánek*.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Relativní pohyb

Petr jel s Martou vlakem. Seděli na jedné lavici obráceni ve směru jízdy. Slunce svítilo do vozu pravým oknem, takže se na podlaze vytvořil jeho světelný obraz. Pojednou pozorovali, že se světelný obraz, který byl dosud v klidu, počal pohybovat dopředu. Petr řekl: „Podívej se, vlak jede přímo a zmenšuje rychlost.“ Marta ho opravila: „Podle pohybu slunečního obrazu nemůžeme zjistit, zda mění rychlost, ale určitě zatáčí doprava.“ Otázka: Kdo měl pravdu?

Emil Kašpar

Řešení je na str. 218.

Aritmetické rébusy

Řešení těchto rébusů spočívá ve správném doplnění číslic na místa teček tak, aby platily dané matematické operace. Jistě pro vás nebude problémem vyřešit následující tři rébusy.

a) Doplněte číslice 2, 3, 4, 5, 7.

b) Doplněte číslice 1 až 9.

c) Doplněte chybějící číslice.

a)

$$\begin{array}{r} \times \\ \hline . \quad . \quad . \quad . \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \times \\ + \\ \hline \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} \times \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 9 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 8 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 7 \\ \quad \quad \quad \quad 6 \\ \quad \quad \quad 5 \\ \quad \quad 4 \\ \quad 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Řešení je na str. 184.

Jarmila Pěňčíková

OLYMPIÁDY A SOČ

27. mezinárodní matematická olympiáda

se konala od 4. do 15. července letošního roku v polském hlavním městě Varšavě. Zúčastnilo se jí 210 středoškoláků z 37 zemí všech pěti (trvale obydlených) světadílů. Z tradičních účastníků své reprezentanty tentokrát neposlalo Nizozemí; zato se mezi světovou špičku překvapivě vyšvihl nováček — ČLR, která vloni přijela na MMO poprvé a jen se třemi studenty.

Z celkového počtu 79 navržených úloh bylo nakonec vybráno následujících šest úloh:

1. Nechť d je kladné celé číslo různé od 2, 5, 13. Dokažte, že v množině

$\{2, 5, 13, d\}$ lze nalézt dva různé prvky a, b takové, že $\sqrt[3]{ab-1}$ není celé číslo. (NSR)

2. V rovině je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ a libovolný bod P_0 . Položme $A_{k+3} = A_k$ pro $k \in \{1, 2, \dots\}$ a sestrojme posloupnost bodů $P_0, P_1, P_2, \dots$ tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots\}$ bude bod P_k obrazem bodu P_{k-1} při otočení o úhel 120° (v záporném smyslu) okolo středu A_k . Jestliže $P_{1986} = P_0$, pak trojúhelník $A_1A_2A_3$ je rovnostranný; dokažte. (ČLR)

3. Vrcholům pravidelného pětiúhelníka jsou přiřazena celá čísla, jejichž součet je kladný. Jestliže třem po sobě jdoucím vrcholům jsou přiřazena čísla x, y, z , přičemž $y < 0$, je dovoleno provést tuto operaci: čísla x, y, z nahradíme po řadě čísly $x + y, -y, z + y$. Takovéto operace provádíme tak dlouho, dokud je aspoň jednomu z vrcholů přiřazeno záporné číslo. Rozhodněte, zda tento proces vždy nutně skončí po konečném počtu kroků. (NDR)

4. Je dán pravidelný n -úhelník, $n \geq 5$. Označme A a B dva jeho sousední vrcholy, O jeho střed. V rovině n -úhelníka se pohybuje trojúhelník XYZ shodný s trojúhelníkem OAB tak, že nejprve $X = O, Y = A, Z = B$, a potom Y a Z probíhají oba celý obvod n -úhelníka, přičemž X leží stále uvnitř n -úhelníka. Určete množinu všech možných poloh bodu X . (Island)

5. Najděte všechny funkce f , které zobrazují množinu R_+ všech nezáporných reálných čísel do R_+ a splňují podmínky

a) $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x + y)$ pro $x, y \in R_+$,

b) $f(2) = 0$,

c) $f(x) \neq 0$ pro $0 \leq x < 2$

(Velká Británie)

6. V rovině se souřadnou soustavou je dána konečná množina M bodů s celočíselnými souřadnicemi. Rozhodněte, zda je vždy možno obarvit některé body z M červenou a ostatní pak bílou barvou tak, aby se na libovolné přímce rovnoběžné s některou ze souřadných os počet červených bodů lišil od počtu bílých bodů nejvýše o 1. (NDR)

Vlastní soutěž proběhla ve dnech 9. a 10. července. Na řešení trojice soutěžních úloh byly jako obvykle vymezeny čtyři a půl hodiny a každá z úloh byla ohodnocena 7 body, takže každý soutěžící mohl získat nejvýše 42 body (tohoto počtu dosáhli jen tři studenti: dva ze SSSR a jeden z MLR — naproti tomu jeden z brazilských účastníků nezískal ani bod). Porota udělila celkem 18 prvních cen (za 34—42 body), 41 druhých cen (za 26—33 bodů) a 48 třetích cen (za 17—25 bodů). Kromě toho Joseph Keane z USA získal zvláštní cenu za originální řešení 3. úlohy.

Vedoucím naší delegace byl *dr. František Zítek, CSc.*, z Matematického ústavu ČSAV, zástupcem vedoucího byl *prof. dr. Beloslav Riečan, DrSc.*, z VVTŠ ČSSP v Liptovském Mikuláši. Všechny zúčastněné země byly vedoucím kubánské delegace pozvány na 28. MMO, která se bude konat 5.—16. července 1987 v Havaně.

Výsledky našich žáků ukazuje připojená tabulka:

	1	2	3	4	5	6	body celkem	cena
Petr Hájek, 4. roč. GWP Praha	0	7	0	7	7	7	28	II.
Vladimír Kordula, 4. roč. GMK Bílovec	2	7	0	7	7	7	30	II.
Marcel Polakovič, 3. roč. GAM Bratislava	7	7	0	7	6	0	27	II.
Roman Soták, 3. roč. GŠ Košice	3	7	0	0	6	5	21	III.
Petr Šleich, 4. roč. G Děčín	2	0	0	3	6	7	18	III.
Adam Zach, 4. roč. GWP Praha	0	7	1	7	3	7	25	III.

Ziskem 149 bodů se naše družstvo umístilo v neoficiálním pořadí zúčastněných zemí na pěkném 9. místě:

1.—2. SSSR	2	4	—	203
USA	3	3	—	203
3. NSR	2	4	—	196
4. ČLR	3	1	1	177
5. NDR	1	3	2	172
6. RSR	2	2	1	171
7. BLR	1	3	2	161
8. MLR	1	2	2	151
9. ČSSR	—	3	3	149

Z tabulky navíc vidíte, že žádný z našich žáků nezůstal bez ceny, což se podařilo jen šesti zúčastněným státům.

A vy si zkuste olympijské úlohy také vyřešit, ať víte, zač je toho loket. Svá řešení nám můžete posílat až do konce února, já se pokusím opravit je a vrátím vám je pak s případným komentářem.

Karel Horák

Typy úloh matematické olympiády kategorie P

Na stránkách časopisu *Rozhledy* jsme vás již informovali o vzniku nové kategorie P matematické olympiády, zaměřené na návrh algoritmů a na programování. Aby mohl každý získat konkrétní představu, jaké typy úloh se v kategorii P řeší, vybíráme nyní jako ukázkou zadání několika úloh z loňského ročníku. Přivítáme všechny vaše připomínky k výběru úloh i návrhy pro další ročníky soutěže.

Domácí kolo, úloha č. 1:

Máme n lístků papíru. Na každý lístek z každé strany napíšeme jedno přirozené číslo od 1 do n (čísla na opačných stranách jednoho lístku mohou být různá) tak, že každé číslo je napsané právě dvakrát.

- a) Dokažte, že pro libovolný způsob rozepsání čísel na lístky je možné poskládat lístky na stůl tak, že na jejich vrchní straně vidíme právě čísla 1 až n .
- b) Nalezněte algoritmus (předpis pro člověka), podle kterého je možné poskládat lístky tak, aby splňovaly podmínku z a). Algoritmus zapíšte přirozenou řečí pomocí matematických symbolů a označení tak, jako byste ho vysvětlovali zasvěcenému kamarádovi. Dávejte však pozor na to, aby byl přesný, jednoznačný a logický. Dokažte, že algoritmus pracuje pro libovolné rozepsání čísel.

Uvedená úloha patřila k nejsnadnějším, jaké se v olympiádě vyskytly. Úlohy takového typu — nalezněte a dokažte algoritmus řešení nějakého problému — byly v loňském ročníku soutěže nejvíce zastoupeny a budou i nadále převažovat. V této souvislosti musíme zvlášť upozornit všechny řešitele, že úkolem není algoritmus pouze popsat, ale že součástí správného řešení musí být i jeho zdůvodnění. Mnozí soutěžící ztratili cenné body právě tím, že sice vytvořili správný algoritmus řešení, někteří ho dokonce zapsali i ve tvaru programu v některém programovacím jazyce (což se ani nevyžaduje, stačí slovní popis), ale zcela jim chyběl třeba jen náznak důkazu správnosti algoritmu, vysvětlení, na základě čeho algoritmus pracuje a proč vede ke správným výsledkům.

Krajské kolo, úloha č. 3A :

Napište program v libovolném vyšším programovacím jazyce, který přečte posloupnost složenou z nul a jedniček ukončenou číslicí 2. Program vypíše „ANO“, jestliže posloupnost obsahuje sudý počet nul a současně lichý počet jedniček. V opačném případě program vypíše „NE“. Na program se klade jedno podstatné omezení. Smí se v něm použít pouze jediná proměnná Z , v níž je vždy uložena hodnota jediného načítaného čísla (0, 1 nebo 2). Obsah proměnné Z se může měnit pouze tím způsobem, že se do ní ze vstupu přečte další číslo. Čísla se mohou číst pouze v tom pořadí, v jakém jsou zapsána v posloupnosti, tj. není povoleno vracet se k číslům už jednou přečteným. Předpokládejte, že čísla vstupují napsána vždy jedno na každém řádku. Přitom vstupní posloupnost neobsahuje jiná čísla než 0, 1 a 2. Program tudíž může ukončit svou činnost, když načte znak různý od nuly nebo od jedničky.

Příklady: Pro zadanou posloupnost 0011011012 (pro úsporu místa jsme čísla zapsali do řádku) program vypíše „ANO“. Pro zadanou posloupnost 0011002 program vypíše „NE“. Pro zadanou posloupnost 1112 program vypíše „ANO“ (nula je také sudé číslo).

Tato úloha, kterou jsme vybrali z krajského kola, je asi tak průměrné obtížnosti, s jakými se soutěžící setkali. Představuje další typ úloh, kterým je v kategorii P matematické olympiády věnována pozornost. U těchto úloh mají soutěžící prokázat, že se při řešení problémů dokáží vyrovnat s různými omezeními, což je při programování v praxi často

nutné. Pokud odevzdané řešení takovéto úlohy nerespektuje stanovená omezení, je samozřejmě hodnoceno jako nevyhovující.

Celostátní kolo, úloha č. 2:

Je dán algoritmus, jehož vstupem jsou přirozená čísla A a B .

V Pascalu:

```
begin
  K := 0; SOUCIN := 0; POCET := 1; PRIR := A;
  while K <> B do
    if K + POCET <= B then
      begin
        K := K + POCET; POCET := POCET + POCET;
        SOUCIN := SOUCIN + PRIR; PRIR := PRIR + PRIR
      end
    else
      begin
        POCET := 1; PRIR := A
      end
    end
  end
```

V Basicu:

```
100 K = 0 : SOUCIN = 0 : POCET = 1 : PRIR = A
110 if K = B then 180
120   if K + POCET > B then 160
130     K = K + POCET : POCET = POCET + POCET
140     SOUCIN = SOUCIN + PRIR : PRIR = PRIR + PRIR
150   goto 170
160   POCET = 1 : PRIR = A
170 goto 110 : rem opakování cyklu
180 rem
```

Nejhorším případem nazveme výpočet pro takovou hodnotu B_0 proměnné B , při níž se větev `else` podmíněného příkazu v cyklu (v Basicu řádek 160) provede vícekrát než pro libovolné $B < B_0$.

1. Vyjádřete explicitně (tj. nějakým vzorcem) všechny takové hodnoty B_0 , pro něž bude výpočet algoritmu nejhorším případem.
2. Vyjádřete explicitně skutečný počet průchodů
 - a) větví `then` (řádky 130 a 140)
 - b) větví `else` (řádek 160)podmíněného příkazu v nejhorším případě.

Poznamenáváme, že počet průchodů cyklem nezávisí na hodnotě A .

Úloha vybraná z celostátního kola ilustruje, jak asi vypadají nejobtížnější příklady. Zároveň je ukázkou dalšího typu úloh, jaké se v olympiádě řeší, úloh týkajících se výpočtové složitosti algoritmů.

Pavel Töpfer

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

9. Dokažte, že pro každou n -tici nenulových reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí:

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n^2} + \frac{x_n^2}{x_1^2} \geq \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}.$$

Kdy nastává rovnost?

(Došlo 10 řešení)

Jaroslav Švrček

Upravené řešení Roberta Babilona, 3 D G Bílovec:

Označme $y_i = |x_i| \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro nezáporná reálná čísla plyne, že je

$$\frac{1}{n} \left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \dots + \frac{y_n}{y_1} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{y_2}{y_3} \cdot \dots \cdot \frac{y_n}{y_1}} = 1$$

Tudíž

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \dots + \frac{y_n}{y_1} \geq n, \quad (1)$$

kde rovnost nastává, právě když

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \dots = \frac{y_n}{y_1}, \text{ tj. } y_1 = y_2 = \dots = y_n. \quad (2)$$

Užijeme-li Cauchyovu nerovnost ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2$$

pro speciální případ $u_i = \frac{y_i}{y_{i+1}}$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ a $u_n = \frac{y_n}{y_1}$,

$v_i = 1$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, dostaneme

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} + \frac{y_2^2}{y_3^2} + \dots + \frac{y_n^2}{y_1^2} \geq \frac{1}{n} \left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \dots + \frac{y_n}{y_1} \right)^2 \quad (3)$$

kde rovnost nastává pro $y_1 = y_2 = \dots = y_n$. (4)

Dále zřejmě platí

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \dots + \frac{y_n}{y_1} \geq \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1}, \quad (5)$$

přičemž rovnost nastává, právě když reálná čísla

$x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou buď všechna zároveň kladná, anebo záporná. (6)

Z nerovnosti (3) plyne užitím rovností $x_i^2 = y_i^2$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a nerovnosti (1) nerovnost

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2} + \dots + \frac{x_n^2}{x_1^2} \geq \frac{1}{n} \left[\left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \dots + \frac{y_n}{y_1} \right) n \right],$$

z níž podle nerovnosti (5) dostáváme nerovnost ze zadání úlohy. Rovnost v ní nastává, právě když zároveň platí podmínky (2), (4), (6), tj. platí-li

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Z NOVÝCH KNIH

Stanislav Horák:

NEROVNOSTI

V TROJÚHELNÍKU

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta jako 57. svazek edice Škola mladých matematiků; 128 stran, 6000 výtisků, 1. vydání, 6,— Kčs.

První svazek knižnice Škola mladých matematiků vyšel před dvaceti pěti lety. *Nerovnosti v trojúhelníku* jsou už třetí knížkou Stanislava Horáka, kterou napsal pro ŠMM. Předchozí jeho dva svazky měly také geometrická témata. V roce 1966 to byla knížka *Kružnice* a v roce 1970 knížka *Mnohostěny*.

Ze školské matematiky známe tzv. trojúhelníkovou nerovnost a dále větu, že proti větší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel. V Horákově knížce si tyto školské poznatky může čtenář značně rozšířit. Uvádí se zde např.

nerovnosti pojmenované po matematicích Ainslerovi a Hadwigerovi, Eulerovi, Schreiberovi. Samozřejmě vedle nerovností se dokazuje i řada rovností.

Čtenář se v knížce seznámí nejen s význačnými nerovnostmi a rovnostmi pro prvky v trojúhelníku, ale zároveň i pozná metody důkazů nerovností a rovností. Svazek uzavírá dvacet čtyři úloh pro čtenáře, jež jsou doplněny návody k jejich řešení.

Studium tohoto svazku ŠMM doporučujeme soutěžícím v matematické olympiádě, řešitelům úloh soutěže Rozhledů a všem zájemcům, kteří chtějí hlouběji poznat vztahy mezi prvky v trojúhelníku. Závěrem poznamenejme, že na Horákovy „Nerovnosti v trojúhelníku“ se už upozorňovalo v 1. čísle letošního ročníku Rozhledů v článku „Nerovnosti pro trojúhelník“.

Jiří Mída

Kalendár M- F: január 1987

1. I. 1862 zomrel v Poltave *Michail Vasilievič Ostrogradskij*, ruský matematik. Zakladateľ petrohradskej matematickej školy, člen mnohých AV. Pracoval v teórii čísel, algebre, matematickej analýze, teórii pravdepodobnosti. Rozpracoval teoretickú mechaniku a matematickú fyziku.
2. I. 1822 sa v Köslíne narodil *Rudolf Julius Clausius*, nemecký fyzik. Patrí k zakladateľom termodynamiky, kinetickej teórie plynov. V roku 1865 zaviedol do fyziky pojem entropie. Formuloval druhú termodynamickú vetu.
2. I. 1897 sa v Kyjeve narodil *Valerij Ivanovič Glivenko*, ruský matematik. Pracoval v oblasti matematickej logiky, teórii funkcií, matematickej štatistiky.
3. I. 1927 zomrel v Göttingen *Karl David Runge*, nemecký matematik. Prispel k rozvoju teórie funkcií a aproximácií.
4. I. 1752 zomrel v Bagnols pri Nismes *Gabriel Cramer*, švajčiarsky matematik. Prispel k rozvoju vyššej algebry, analytickej geometrie a základov teórie determinantov.
6. I. 1807 sa v Spišskej Belej narodil *Jozef Maximilián Petzval*, slovenský fyzik a matematik. Bol členom Viedeňskej AV. Venoval sa fotografickej technike a optike.
8. I. 1642 zomrel v Arcetri pri Florencii *Galileo Galilei*, taliansky fyzik, matematik, astronóm a mechanik. Položil základy modernej prírodovedy. Sformuloval zákony mechaniky, objavil štyri Jupiterove mesiace, bol zástancom heliocentrickej sústavy.
16. I. 1967 zomrel *Robert Jemison Van de Graaff*, americký fyzik. Zkonštruoval generátor vysokého napätia.
17. I. 1847 sa v Orechove (Vladimírska oblasť) narodil *Nikolaj Jegorovič Žukovskij*, ruský fyzik a matematik. Zakladateľ ruského letectva. Uplatnil metódy teórie komplexnej premennej v aerodynamike. Rozvinul teoretickú i experimentálnu aerodynamiku a hydrodynamiku.
19. I. 1912 sa v Leningrade narodil *Leonid Vitaljevič Kantorovič*, sovietsky matematik. Zaoberal sa funkcionálnou analýzou, numerickými metódami, variačným počtom. Aplikoval matematické metódy na ekonomické úlohy. Získal v roku 1975 Nobelovu cenu za ekonómiu.
21. I. 1922 zomrel v Mailande *Camille Jordan*, francúzsky matematik. Prispel k rozvoju teórie grúp, topológie a teórie funkcií. Jeho Cours d'analyse patrila k najslávnejším učebniciam 2. pol. devätnásteho storočia.
23. I. 1862 sa v Kráľovej narodil *David Hilbert*, nemecký matematik. Jeho práce mali veľký vplyv na mnohé odvetvia matematiky. Podal

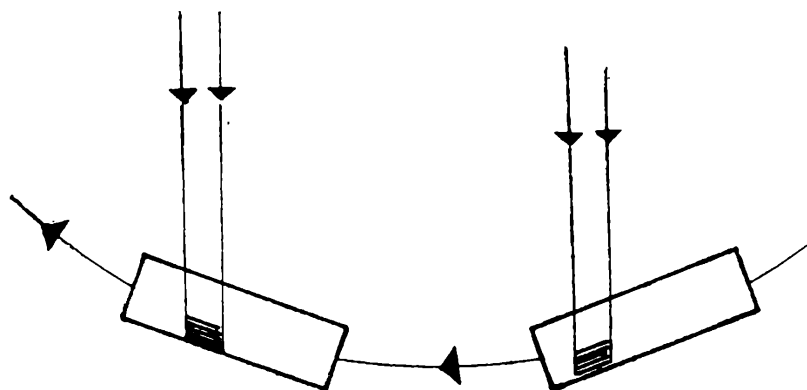
úplnú axiomatickú sústavu geometrie, rozvinul teóriu invariantov, teóriu algebraických čísel, teóriu integrálnych rovníc. Rozpracoval logické základy matematiky. V Paríži roku 1900 formuloval 23 podstatných matematických problémov.

23. I. 1872 sa v Paríži narodil *Paul Langevin*, francúzsky fyzik. Najdôležitejšie práce urobil v oblasti štatistickej teórie paramagnetizmu. Rozpracoval teóriu kvánt a teóriu relativity. Bol výborným popularizátorom nových ideí.
23. I. 1907 sa v Tokiu narodil *Hideki Yukawa*, japonský fyzik. Zaujímal sa o jadrovú fyziku. Za predpoveď existencie mezónov, vyplývajúcu z teoretického objasnenia jadrových síl, získal v roku 1949 Nobelovu cenu.
25. I. 1627 sa v Lismore (Írsko) narodil *Robert Boyle*, anglický chemik a fyzik. Patrí k tvorcom atomistickej teórie hmoty. Zaoberal sa atmosferickým tlakom, hydrostatikou, akustikou, chémiou.
26. I. 1942 zomrel v Bonne *Felix Hausdorff*, nemecký matematik. Rozvinul teóriu množín, položil axiomatické základy topológie a teórie miery.
27. I. 1832 sa v Davesbury v Lancashire (Anglicko) narodil *Charles Ludwidge Dodgson*, anglický profesor matematiky. Známy je pod pseudonymom Lewis Carrol ako autor knížiek pre deti. Vedecky pracoval v oblasti matematickej logiky.
27. I. 1972 zomrel *Richard Courant*, americký matematik nemeckého pôvodu. Úspešne riešil problémy v teórii konformného zobrazovania a okrajové úlohy matematickej fyziky pre eliptické rovnice.

dj

Úloha ze str. 209.

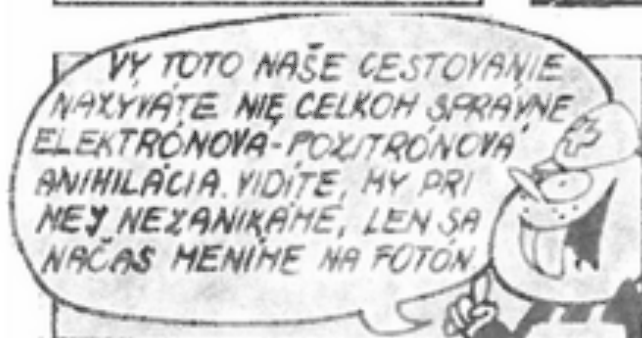
Řešení. Petr neměl pravdu, protože jede-li vlak přímo, sluneční světlo dopadá na okna pod stejným úhlem nezávisle na rychlosti vlaku. Marta měla pravdu jen v tom, že nelze rozhodnout o tom, zda vlak mění rychlost, jede-li přímo, a že vlak vjel do zatáčky. Vlak však zatáčel doleva, neboť kdyby zatáčel doprava, světelný obraz okna by se posouval dozadu. (Obr. 1). V zatáčce závisí rychlost posunu slunečního obrazu přímo na rychlosti vlaku a nepřímo na poloměru zatáčky.



Obr. 1

REPORTÁŽE Z MIKROSVETA



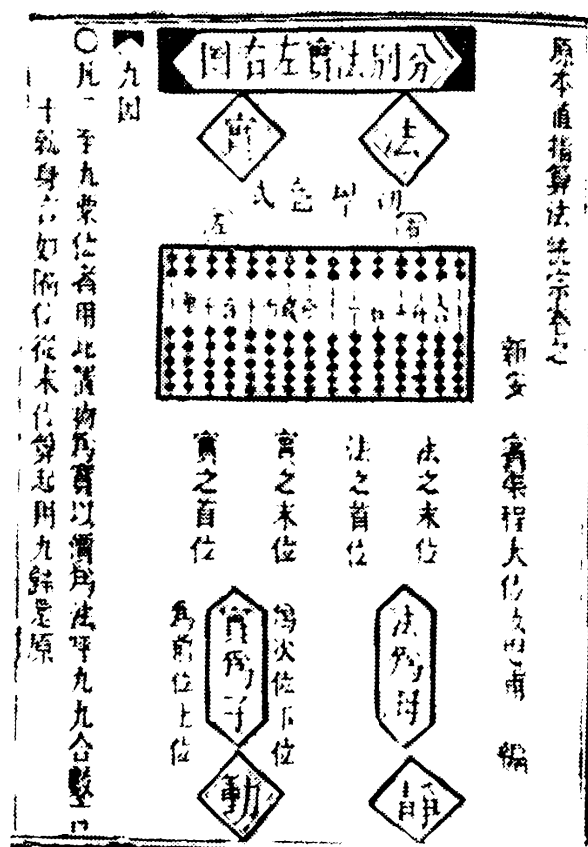


Čínské počítadlo suan - pchan

Na obrázku vidíme stránku tištěného čínského spisu, kde se popisuje počítání na přístroji vyobrazeném nad středem stránky. Čínský *suan-pchan* mechanizoval počítání obdobně jako abakus užívaný v římské říši; do Japonska se přenesla jeho zjednodušená verze nazývaná *soroban*. Obdobně jako ruské sčoty se tato počítadla užívají dodnes, vytlačují je až moderní kapesní a stolní počítačky.

Zobrazený suan-pchan byl tvořen rámečkem s napjatými nitěmi či dráty, na nichž byly navlečeny kuličky v rozestavení $5 + 2$.

V místě, kde je na obrázku nápis, byla v rámečku určitá přepážka; teprve přisunutím k této přepážce nabývala kulička význam (každá z pěti dolních kuliček znamenala jednotku, každá z horních kuliček pětku). Čísla 1, 2, 3, 4, 5 se tedy znázorňovala dolními kuličkami, čísla 6, 7, 8, 9, 10 pomocí jedné horní kuličky a potřebného počtu dolních kuliček. Jednotlivé dráty vyznačují desítkové řády, takže znázornění čísel s patnácti číslicemi desítkové soustavy bylo vcelku přehledné. Přenos mezivýsledku do vyššího řádu se projevoval tím, že „plný sloupec znázorňující číslo 10 se „vynuloval“ odsunutím kuli-



ček od přepážky a na dalším drátě se vyznačil přírůstek jedné jednotky vyššího řádu.

Zkušení počtáři dovedou na tomto počítadle velmi rychle provádět čtyři základní početní úkony; při odčítání a dělení se pochopitelně využívá i přechod od jednotek vyšších řádů k nižším (tehdy se uplatňuje i znázornění čísla 10 dvěma kuličkami nad přepážkou).

Anna Loubalová

Čo je matematika?

Matematika je súhrn formálnych teórií, tj. systémov formálnych dedukcií, rozvíjaných podľa dostatočne presne určených pravidiel.

A. D. Alexandrov

Matematika je abstraktnou vedou a jej predmetom nie sú samostatné veci a javy reálneho sveta, ale iba z nich abstrahované kvantitatívne vzťahy a priestorové formy.

A. J. Chinčín

Vydáva ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče: Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20, — Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2, — Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kašková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1987.

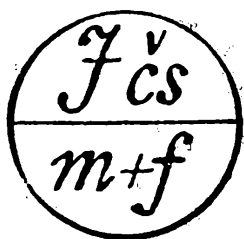
ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(6)

ROČNÍK 65, 1986/87
ÚNOR

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný,
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr.
Ján Chrapan, CSc., VVTŠ-ČSSP Lip-
tovský Mikuláš, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Ja-
nout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr.
Hana Kořínková, CSc., VŠZ Pra-
ha, doc. dr. Karol Križalkovič, CSc.,
PF Nitra, prof. dr. Vladimír Majer-
ník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Josef
Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich
Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav
Šedivý, CSc., UK Praha, ing. dr. Vác-
lav Šindelář, CSc., Praha, doc. dr.
Martin Šolc, CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 11639 Praha 1-No-
vé Město.
Telefon 298750 (meziměsto), 298751
až 9.

OBSAH

Petr Karlovský: Úlohy o lhářích a logi- ká intuice I.	221
Emil Calda: Volný pád a posloupnost lichých přirozených čísel	223
Emil Kraemer: Užití rovnoběžného pro- mitání v geometrii III	226
Ivan Fischer: Základy programování mikropočítačů 6	232
Ján Chrapan: Fyzika v přírodě – teplo z útrob Zeme	237
Ivo Čáp: Fyzikální pohled na některé problémy energetiky II	242
Imrich Stariček: Newtonove zásluhy	246
Dušan Jedinák: Lewis Carrol	248
Emil Kašpar: Magnetické pole výbojky	250
Jarmila Pěničková: Početní hrátky s do- minem	250
Jaroslav Švrček: Akvaball a kombinato- rika	251
Naše soutěž	254
Zdeněk Kluiber: 8. ročník SOČ ve fyzice	256
dj: Kalendár M–F	260
Z nových knih	261
Ján Chrapan, Vlastimil Mistrík: Repor- táže z mikrosвета	263
Vladimír Malíšek: Babylonsko-biblický obraz světa 3. str. obálky	
Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (57–60) příloha	

Úlohy o lhářích a logická intuice

(1. část)

RNDr. PETR KARLOVSKÝ, BFÚ ČSAV, Brno

Existuje skupina logických úloh specifických tím, že se v nich vyskytují osoby, které jsou autory výhradně pravdivých výroků („pravdomluvní“), a jiné osoby, které produkují výhradně nepravdivé výroky („lháři“). Jádrem úloh spočívá v tom, že je třeba rozhodovat na základě tvrzení, o kterých není zřejmé, zda jejich autorem je „pravdomluvný“ nebo „lhář“. Úlohy je možno řešit aplikací postupů formální logiky, a tak jsou také většinou zamýšleny. Některá řešení přitom však uniknou. Tato „netriviální“ řešení jsou přitažlivá neočekávaností svého obsahu. Lze k nim dospět logickou intuicí, tedy invenční schopností, která ze znalosti formální logiky přímo nevyplývá. Na příkladu jedné klasické úlohy ukážeme oba typy řešení.

Jedna z možných formulací úlohy zní takto:

„Na ostrově žijí dva zneprátené kmeny: Pravdomluvní, kteří za všech okolností mluví pravdu, a Lháři, kteří vždy lžou. Cestovatel, který zde zabloudil, stojí na rozcestí dvou cest, z nichž pouze jedna vede k moři. Jakou otázku položil domorodci, kterého zde potkal, aby z jeho (jednoslovné) odpovědi získal potřebnou informaci?“

Nejprve úlohu vyřešíme prostředky formální logiky. Cesty označíme A a B . V úloze jsou dvě neznámé skutečnosti: Která z cest vede k moři a ke kterému kmeni patří tázaný domorodec. Proto formulujeme dva výroky:

a : „Cesta A vede k moři.“

b : „Tázaný domorodec patří ke kmeni Pravdomluvných.“

Cestovatel pronese výrok c (zatím neznámý) a zeptá se domorodce na jeho pravdivost. Z odpovědi musí jednoznačně vyplývat, která z cest vede k moři, tj. musí být kladná (resp. záporná) ve všech případech, kdy je výrok a pravdivý, a záporná (resp. kladná), když je a nepravdivý. Vzhledem k možnosti použití negace ve výroku c se omezíme pouze na první případ.

Sestavíme tabulku pravdivostních hodnot výroků a a b . Podle hodnoty a přiřadíme každé kombinaci odpověď domorodce, kterou vyjádříme jako pravdivostní hodnotu výroku o .

o : „Odpověď domorodce na otázku po pravdivosti výroku c je kladná.“
Nyní doplníme pravdivostní hodnoty výroku c tak, aby odpovídaly hodnotám b a o , tj. aby pravdomluvný domorodec odpovídal na otázku po pravdivosti c správně a lhoutí domorodec nesprávně.

a	b	o	c
p	p	p	p
p	n	p	n
n	p	n	n
n	n	n	p

Výrok c nyní sestavíme pomocí výroků a a b tak, aby jeho pravdivostní hodnota odpovídala tabulce. Žádná základní logická funkce po aplikaci na a a b tento požadavek nesplňuje, musíme tedy použít kombinaci dvou složených výroků. První část může být logický součin a a b , který vyhovuje pro první tři řádky tabulky, a k němu logicky přičteme součin negací obou výroků, čímž zabezpečíme platnost i pro poslední řádek tabulky:

$$c \equiv (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

Slovní formulace může vypadat např. takto:

ŘEŠENÍ 1: „Je pravda, že cesta A vede k moři a ty jsi z kmene Pravdomluvných nebo že cesta B vede k moři a ty patříš ke kmeni Lhářů?“

Je možné sestavit mnoho jiných výroků, jejichž pravdivostní hodnoty odpovídají požadavkům. Úpravou c můžeme např. dospět k výrazu

$(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})$, příslušnou slovní formulaci (ŘEŠENÍ 2) si jistě sestaví čtenář sám. Pokud se nebudeme omezovat na základní logické spojky, můžeme c převést na ekvivalenci $(a \equiv b)$, z níž vyplývá

ŘEŠENÍ 3: „Je pravda, že cesta A vede k moři právě tehdy, když ty jsi pravdomluvný?“

Negací ekvivalence získáme méně známou logickou funkci zvanou alternativa: $(a \oplus b)$. Ve slovním vyjádření nahradíme negaci a pozitivním tvrzením o cestě B :

ŘEŠENÍ 4: „Je pravda, že buďto cesta B vede k moři, anebo ty nepatříš k Pravdomluvným?“

Řešení typu 1 a 2 jsou nepřitažlivá, protože výsledný výrok je složený. Skládá se ze čtyř jednoduchých výroků; formálně to odpovídá tomu, že řešení má pokrýt čtyři různé situace (k moři vede cesta A anebo B , domorodec je Pravdomluvný nebo Lhář). To není příliš uspokojivé. Řešení 3 a 4 jsou o něco lepší, ale i z nich je kombinace základních výroků příliš zřejmá. Navíc interpretace použitých logických spojek v obecné češtině se zcela nekryje s jejich definicemi a bylo by tedy třeba nejprve zabezpečit, aby jim domorodec správně rozuměl.

Existují další, úspornější řešení, která postihují skryté souvislosti mezi

jednotlivými situacemi a mají jednodušší formu. Nelze k nim ovšem dospět mechanicky. Pokuste se některá najít. Pokud se vám to podaří do jedné hodiny, máte mimořádně vyvinutou schopnost logické intuice. Průměrnému řešiteli trvá hledání netriviálního řešení několik dní a mnozí, jejichž myšlení vězí v kolejkách logického stereotypu příliš pevně, je neobjeví nikdy.

Volný pád a posloupnost lichých přirozených čísel

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

„Tajně si na zahradě létat zkouším, zatím jsem zvládnul jenom volný pád — zpívá v jednom ze svých dřívějších hitů Václav Neckář. Přesto však pochybuji,“ pokračoval profesor Ypsilon, „že náš zpěvák zvládnul volný pád natolik, aby si povšiml jeho souvislosti s posloupností 1, 3, 5, 7, 9 lichých přirozených čísel, natož pak aby pouze pomocí zákonů volného pádu zjistil, že pro ni platí

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} =$$

Pokusíme se to tedy ověřit sami,“ ukončil profesor Ypsilon úvodní seznámení s problémem a pustil se do práce.

Označme symbolem s_k vzdálenost, kterou volně padající těleso proběhne za prvních k sekund svého pohybu, a symbolem S_k vzdálenost, kterou urazí během k -té sekundy. Je zřejmé, že pro $k = 1$ je $S_1 = s_1$ a že pro libovolné přirozené $k \geq 2$ je $S_k = s_k - s_{k-1}$. Protože je dále $s_k = \frac{1}{2} g k^2$, platí pro každé celé kladné číslo k :

$$\begin{aligned} s_k &= S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \\ &+ \dots + (s_k - s_{k-1}) = \frac{1}{2} g \cdot 1^2 + \frac{1}{2} g (2^2 - 1^2) + \frac{1}{2} g (3^2 - \\ &- 2^2) + \dots + \frac{1}{2} g [k^2 - (k-1)^2] = \frac{1}{2} g (1 + 3 + 5 + \dots + \\ &+ (2k-1)) \end{aligned}$$

Zkoumejme dále rozdíl $s_{2k} - s_k$, tj. vzdálenost, kterou volně padající těleso urazí během těch k sekund, které bezprostředně navazují na prvních k sekund jeho pohybu:

$$s_{2k} - s_k = S_{k+1} + S_{k+2} + S_{k+3} + \dots + S_{2k} =$$

$$\begin{aligned}
&= (s_{k+1} - s_k) + (s_{k+2} - s_{k+1}) + (s_{k+3} - s_{k+2}) + \dots + \\
&+ (s_{2k} - s_{2k-1}) = \\
&= \frac{1}{2} g [((k+1)^2 - k^2) + ((k+2)^2 - (k+1)^2) + \\
&+ ((k+3)^2 - (k+2)^2) + \dots + ((2k)^2 - (2k-1)^2)] = \\
&= \frac{1}{2} g [(2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + \dots + \\
&+ (2k + (2k-1))] .
\end{aligned}$$

Pro poměr vzdáleností proběhnutých volně padajícím tělesem za prvních k sekund a za k sekund bezprostředně následujících tak máme

$$\frac{s_k}{s_{2k} - s_k} = \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)}{(2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + \dots + (4k-1)}$$

Vzhledem k tomu, že však platí

$$\frac{s_k}{s_{2k} - s_k} = \frac{\frac{1}{2} g k^2}{\frac{1}{2} g (2k)^2 - \frac{1}{2} g k^2} = \frac{k^2}{4k^2 - k^2} = \frac{1}{3} ,$$

je poměr $\frac{s_k}{s_{2k} - s_k}$ konstantní, nezávislý na číslu k . Je tedy konstantní i poměr

$$\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)}{(2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + \dots + (4k-1)} ,$$

což znamená, že pro posloupnost 1, 3, 5, 7, ... lichých přirozených čísel platí

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots ;$$

k odvození tohoto vztahu jsme přitom použili pouze kinematických zákonů rovnoměrně zrychleného pohybu. V posloupnosti 1, 3, 5, 7, 9, ... lichých přirozených čísel je tedy podíl součtu prvních k jejích členů a součtu k členů následujících konstantní, nezávislý na číslu k .

Položme si nyní otázku, zda tato posloupnost lichých přirozených čísel je jedinou aritmetickou posloupností, která má tuto vlastnost. Předpokládejme proto, že existuje aritmetická posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$, pro niž je

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_{2k}} = c ,$$

kde c je konstanta.

Je zřejmé, že každá aritmetická posloupnost s diferencí $d = 0$ a nenulovým prvním členem a_1 tuto podmínku splňuje:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k}} = \frac{ka_1}{ka_1} = 1$$

Předpokládejme tedy, že je $d \neq 0$. Z výše uvedené podmínky, kterou tato posloupnost musí splňovat, dostáváme

$$\frac{k}{2}(a_1 + a_1 + (k-1)d) = c \cdot \frac{k}{2}(a_1 + kd + a_1 + (2k-1)d)$$

a po úpravě

$$(2a_1 - 2a_1c - d + cd) + k(d - 3cd) = 0$$

Vzhledem k tomu, že tento vztah je splněn pro každé celé kladné číslo k , musí platit

$$\begin{aligned} 2a_1 - 2a_1c - d + cd &= 0, \\ d - 3cd &= 0 \end{aligned}$$

Z předpokladu $d \neq 0$ vyplývá, že je $c = \frac{1}{3}$, a dosazením do první rovnice soustavy dostaneme

$$d = 2a_1$$

Existuje-li tedy aritmetická posloupnost s nenulovou diferencí, která splňuje uvedenou podmínku, je to aritmetická posloupnost

$$a_1, 3a_1, 5a_1, 7a_1, 9a_1,$$

jejíž první člen a_1 je libovolné nenulové číslo a jejíž difference je rovna jeho dvojnásobku. Zkouškou se přesvědčíme, že každá takováto posloupnost tuto podmínku vskutku splňuje:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k}} &= \frac{\frac{k}{2}(a_1 + a_k)}{\frac{k}{2}(a_{k+1} + a_{2k})} = \\ \frac{a_1 + (2k-1)a_1}{(2k+1)a_1 + (4k-1)a_1} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy řešený problém uzavřít: aritmetických posloupností $a_1, a_2, a_3, \dots$, pro něž platí

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_4 + a_5 + a_6} =$$

tj. takových, pro něž je poměr $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k}}$ nezávislý na

číslu k , je nekonečně mnoho; je to každá aritmetická posloupnost s libovolným nenulovým prvním členem, jejíž difference je rovna jeho dvojnásobku anebo rovna nule.

Užití rovnoběžného promítání v geometrii III

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

K pěti základním větám, které jsme uvedli v předešlých dvou článcích, připojíme ještě další dvě věty. Druhé z nich se dá užít k řešení některých úloh o obsazích rovinných obrazců.

Věta 6. Rovnoběžným průmětem roviny, která je různoběžná se směrem promítání, je průmětna. Rovnoběžným průmětem roviny, která je rovnoběžná se směrem promítání, je přímka.

Důkaz. Je-li rovina ρ různoběžná se směrem promítání, je protata každou přímkou náležející tomuto směru v jediném bodu A . Každý bod A' průmětny je proto průmětem jednoho bodu roviny ρ ; průmětem této roviny je tedy průmětna.

Je-li rovina ρ rovnoběžná se směrem promítání, pak promítací přímka každého jejího bodu A je přímkou roviny ρ . Proto protíná průmětnu v bodu A' , který leží na průsečnici ρ' roviny ρ s průmětnou. Zároveň každý bod přímky ρ' je průmětem některého bodu (dokonce nekonečně mnoha bodů) roviny ρ . Průmětem roviny ρ je tedy přímka ρ' .

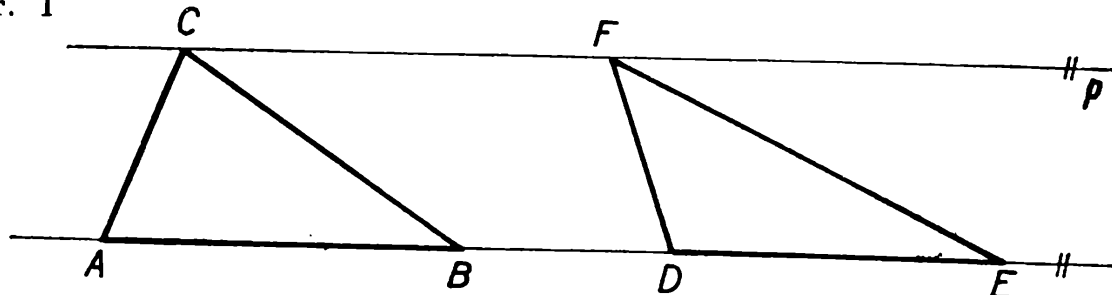
Věta 7. Nechť v rovině ρ , která není rovnoběžná se směrem promítání, jsou dány dva libovolné konvexní mnohoúhelníky mající obsahy P , Q ; obsahy jejich rovnoběžných průmětů budtež P' , Q' . Potom je $P' : Q' = P : Q$.

Důkaz: Z předpokladu o rovině ρ plyne, že žádná přímka této roviny nepatří směru promítání. Podle věty 1 je proto průmětem každé přímky, která leží v rovině ρ , opět přímka. Z toho a z vět 4, 6 plyne, že průměty každých dvou různých rovnoběžek ležících v rovině ρ jsou opět různé rovnoběžky.

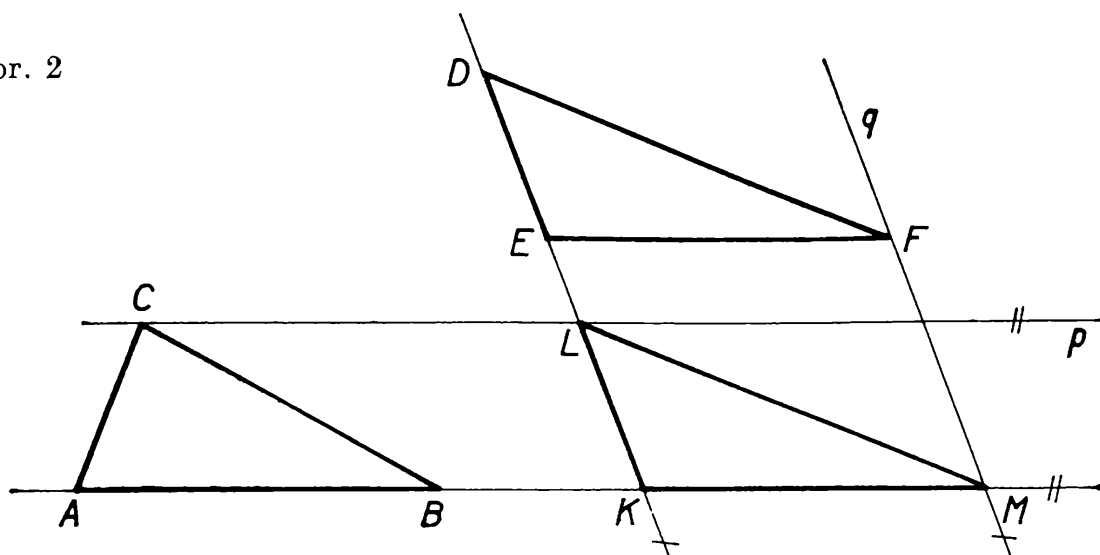
a) Nechť v rovině ρ jsou dány trojúhelníky ABC , DEF tak, že přímky AB , DE splývají a vrcholy C , F leží na přímce $p \parallel AB$ (obr. 1). Potom tyto trojúhelníky mají stejné výšky ke stranám AB , DE ; proto pro jejich obsahy P , Q platí:

$$\frac{P}{Q} = \frac{|AB|}{|DE|}. \quad (1)$$

Obr. 1



Obr. 2



Průměty trojúhelníků ABC , DEF jsou trojúhelníky $A'B'C'$, $D'E'F'$. Přitom vrcholy A' , B' , D' , E' leží v téže přímce; podle věty 4 leží vrcholy C' , F' na přímce $p' \parallel A'B'$, která je průmětem přímky $p = CF$. Trojúhelníky $A'B'C'$, $D'E'F'$ mají opět stejné výšky ke stranám $A'B'$, $D'E'$; proto pro jejich obsahy P' , Q' platí:

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{|A'B'|}{|D'E'|}. \quad (2)$$

Podle věty 5 (uvedené v předešlém článku) plyne z rovností (2) a (1) rovnost

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{P}{Q}. \quad (3)$$

Nechť nyní trojúhelník DEF nemá vzhledem k trojúhelníku ABC polohu uvedenou v předešlém odstavci. Vedme vrcholem C přímku $p \parallel AB$. Přímky DE , EF jsou různoběžky; proto aspoň jedna z nich protíná rovnoběžky AB , p . Nechť např. přímka DE protíná přímky AB , p po řadě v bodech K , L (obr. 2). Potom přímka $q \parallel DE$ vedená bodem F protíná přímku AB v bodu M . Trojúhelník KLM má vzhledem k trojúhelníkům ABC , DEF polohu popsanou v předešlém odstavci. Nechť P , Q , R jsou po řadě obsahy trojúhelníků ABC , DEF , KLM a P' , Q' , R' jsou obsahy průmětů těchto trojúhelníků. Potom podle předešlého odstavce platí:

$$P : R = P' : R' \quad R : Q = R' : Q'$$

Proto je

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{R} \cdot \frac{R}{Q} = \frac{P'}{R'} \cdot \frac{R'}{Q'} = \frac{P'}{Q'}. \quad (4)$$

Položíme-li $P' = kP$ (z čehož plyne, že je $k > 0$), je podle rovnosti (4) také $Q' = kQ$. To znamená, že číslo k nezávisí na volbě trojúhelníku v rovině ϱ .

b) Budiž v rovině ρ dán libovolný konvexní n -úhelník ($n \geq 4$) mající obsah P ; obsah jeho průmětu budiž P' . Daný n -úhelník je sjednocením $n-2$ nepřekrývajících se trojúhelníků, které mají po řadě obsahy $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}$. Průmět daného n -úhelníku je opět konvexní n -úhelník, který je sjednocením $n-2$ nepřekrývajících se trojúhelníků s obsahy $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-2}$. Tyto trojúhelníky jsou průměty trojúhelníků, z nichž se skládá daný n -úhelník. Podle konce předešlého odstavce je

$$P'_1 = kP_1, \quad P'_2 = kP_2, \quad \dots, \quad P'_{n-2} = kP_{n-2},$$

takže průmět daného n -úhelníku má obsah

$$P' = k(P_1 + P_2 + \dots + P_{n-2}) = kP$$

Je-li v rovině ρ dán ještě m -úhelník s obsahem Q a má-li jeho průmět obsah Q' , je obdobně $Q' = kQ$. Z toho plyne, že je

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{kP}{kQ} = \frac{P}{Q}.$$

Poznámka. Dá se dokázat, že věta 7 platí pro libovolné dva útvary, které leží v rovině ρ a mají obsahy P, Q .

Důsledek věty 7. Nechtě dva útvary (např. konvexní n -úhelníky) ležící v rovině různoběžné se směrem promítání mají obsahy P, Q , pro něž je $P \leq Q$. Potom průměty těchto útvarů mají obsahy P', Q' , pro něž platí: $P' \leq Q'$

Je-li totiž $P \leq Q$, je $\frac{P}{Q} \leq 1$; podle věty 7 je také $\frac{P'}{Q'} \leq 1$ čili $P' \leq Q'$

Úloha 7. Rozdělme každou stranu libovolného daného trojúhelníku ABC na n shodných úsečků ($n \geq 3$, celé). Uvnitř stran BC, CA, AB zvolme po řadě body A_1, B_1, C_1 tak, aby platily tyto rovnosti:

$$\frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = \frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{p}{n-p}, \quad (1)$$

kde $p < n$, $p \neq \frac{n}{2}$ je celé kladné číslo. Potom přímky AA_1, BB_1, CC_1

omezuji trojúhelník HKL náležející vnitřku daného trojúhelníku ABC ,

a) Dokažte, že trojúhelníky ABH, BCK, CAL mají stejné obsahy;

b) pomocí obsahu trojúhelníku ABC vypočítejte obsah trojúhelníku HKL .

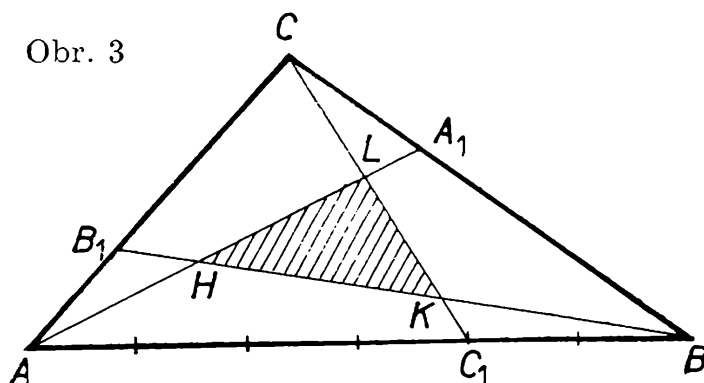
Řešení. Je-li n sudé, pak pro $2p = n$ procházejí přímky AA_1, BB_1, CC_1 těžištěm trojúhelníku ABC , takže trojúhelník HKL neexistuje. Je

tedy $p \neq \frac{n}{2}$; na obr. 3 je $n = 6, p = 4$.

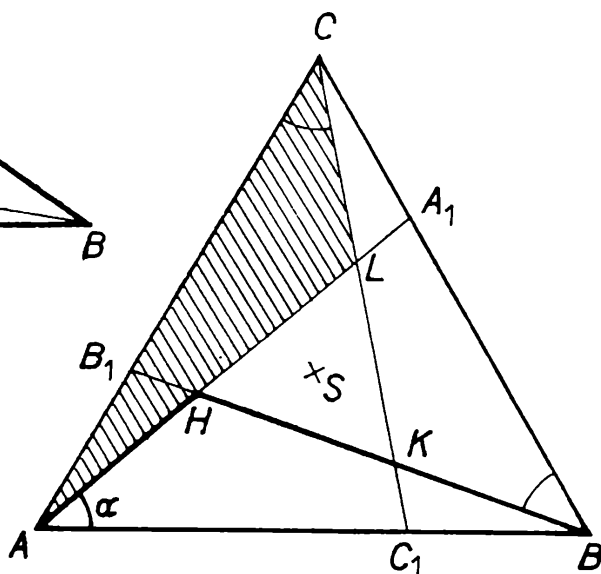
Protože body A_1, B_1, C_1 leží po řadě uvnitř úsečků BC, CA, AB a protože platí rovnosti uvedené v řádku (1), je

$$(BCA_1) = (CAB_1) = (ABC_1) = \delta \quad (2)$$

Obr. 3



Obr. 4



Rovinu, v níž leží daný trojúhelník ABC , označme π . Zvolme rovinu $\varrho \neq \pi$ tak, aby procházela přímkou AB a v rovině ϱ sestrojme rovnostanný trojúhelník ABC' . Uvnitř jeho stran BC' , $C'A$ zvolme po řadě body A'_1 , B'_1 tak, aby

$$\frac{|BA'_1|}{|C'A'_1|} = \frac{|C'B'_1|}{|AB'_1|} = \frac{|AC_1|}{|BC_1|};$$

z toho podle rovností v řádku (2) plyne, že je

$$(BC'A'_1) = (C'AB'_1) = (ABC_1) = \delta$$

Přímky AA'_1 , BB'_1 , $C'C_1$ omezují trojúhelník $H'K'L'$ ležící uvnitř trojúhelníku ABC' . Necht přímka $C'C$ určuje směr rovnoběžného promítání roviny ϱ do roviny π . Potom průmětem trojúhelníku ABC' je daný trojúhelník ABC . Z věty 3 plyne, že průměty bodů A'_1 , B'_1 jsou po řadě body A_1 , B_1 , takže průměty přímek AA'_1 , BB'_1 , $C'C_1$ jsou přímky AA_1 , BB_1 , CC_1 . Trojúhelník HKL je tedy průmětem trojúhelníku $H'K'L'$.

Podle věty 7 je poměr obsahů libovolných dvou trojúhelníků ležících v rovině ϱ též jako poměr obsahů jejich průmětů do roviny π . Z toho plyne, že stačí předloženou úlohu řešit jen pro případ, kdy trojúhelník ABC je rovnostanný. V tomto případě je

$$\begin{aligned} |BA_1| &= |CB_1| = |AC_1| = p \\ |CA_1| &= |AB_1| = |BC_1| = n - p \end{aligned}$$

na obr. 4 je $n = 6$, $p = 4$.

a) Střed S rovnostanného trojúhelníku ABC je průsečíkem jeho výšek, které jsou zároveň jeho osami souměrnosti. Z toho plyne, že každý z úhlů ASB , BSC , CSA má velikost 120° . Otočíme-li celý obr. 4 kolem bodu S tak, aby bod A přešel do bodu B , otočí se bod B do bodu C

a bod C do bodu A . Přímky AB , BC , CA se otočí po řadě do přímk BC , CA , AB a body C_1 , A_1 , B_1 přejdou po řadě do bodů A_1 , B_1 , C_1 . Z toho plyne, že přímky AA_1 , BB_1 , CC_1 se otočí po řadě do přímk BB_1 , CC_1 , AA_1 , takže body H , K , L přejdou po řadě do bodů K , L , H . Z toho plyne shodnost trojúhelníků ABH , BCK , CAL ; obsahy P_1 , P_2 , P_3 těchto trojúhelníků jsou tedy stejné.

Promítneme-li tyto trojúhelníky do roviny π , dostaneme trojúhelníky, které nemusí být shodné. Pro jejich obsahy P'_1 , P'_2 , P'_3 platí podle věty 7 tyto rovnosti:

$$\frac{P'_1}{P'_2} = \frac{P_1}{P_2} = 1, \quad \frac{P'_1}{P'_3} = \frac{P_1}{P_3} = 1$$

Je tedy $P'_1 = P'_2 = P'_3$.

b) Nechť $S(ABC)$ je obsah trojúhelníku ABC ; obdobný význam mají symboly $S(HKL)$ apod. Z výsledku, k němuž jsme právě došli, plyne, že platí:

$$S(HKL) = S(ABC) - 3S(ABH) \quad (3)$$

Z obr. 4 plyne, že je

$$S(ABH) = S(ABA_1) - S(BHA_1) \quad (4)$$

Ze shodnosti trojúhelníků ABH , BCK , CAL , plyne, že je

$|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CBK| = |\sphericalangle ACL| = \alpha$. Trojúhelníky BHA_1 , ABA_1 mají tedy shodné úhly (o velikosti α) při vrcholech B , A ; kromě toho mají společný úhel při vrcholu A_1 . Podle věty uu je $\triangle BHA_1 \sim \triangle ABA_1$; z toho plyne, že je

$$S(BHA_1) = k^2 S(ABA_1), \quad (5)$$

kde k je poměr podobnosti, tj.

$$k = \frac{|BA_1|}{|AA_1|} = \frac{p}{n}. \quad (6)$$

Podle kosinové věty užitá na trojúhelník ABA_1 platí:

$$|AA_1|^2 = |AB|^2 + |BA_1|^2 - 2|AB| \cdot |BA_1| \cos 60^\circ = n^2 + p^2 - np$$

Z toho podle rovností (5) a (6) plyne, že je

$$S(BHA_1) = \frac{p^2}{n^2 - np + p^2} S(ABA_1)$$

Proto podle rovnosti (4) platí:

$$S(ABH) = S(ABA_1) \left(1 - \frac{p^2}{n^2 - np + p^2} \right) = \frac{n(n-p)}{n^2 - np + p^2} S(ABA_1).$$

Ale

$$S(ABA_1) = \frac{1}{2} |AB| |BA_1| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} np \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} np;$$

podle předešlého vzorce a podle rovnosti (3) je

$$S(HKL) = S(ABC) - 3 \frac{n(n-p)}{n^2 - np + p^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} np.$$

Protože je

$$S(ABC) = \frac{n^2}{4} \sqrt{3}, \text{ je}$$

$$S(HKL) = S(ABC) \left(1 - 3 \frac{np - p^2}{n^2 - np + p^2} \right) = S(ABC) \frac{n^2 - 4np + 4p^2}{n^2 - np + p^2}$$

$$\frac{S(HKL)}{S(ABC)} = \frac{(n-2p)^2}{n^2 - np + p^2}. \quad (7)$$

Promítneme-li obr. 4 do roviny π , pak podle věty 7 bude podíl obsahů průmětů trojúhelníků HKL , ABC též jako podíl obsahů $S(HKL)$, $S(ABC)$ ve vzorci (7). Tento vzorec tedy platí, i když trojúhelník ABC není rovnostranný.

Úloha 8. Rozdělme každou stranu libovolného daného rovnoběžníku $ABCD$ na n shodných úsečků ($n \geq 2$, celé). Uvnitř stran BC , CD , DA , AB zvolme po řadě body A_1 , B_1 , C_1 , D_1 tak, aby platily tyto rovnosti:

$$\frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|CB_1|}{|DB_1|} = \frac{|DC_1|}{|AC_1|} = \frac{|AD_1|}{|BD_1|} = \frac{p}{n-p},$$

kde $p < n$ je celé kladné číslo. Potom přímky AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 omezují rovnoběžník $HKLM$ ležící uvnitř rovnoběžníku $ABCD$. Přitom je $H = AA_1 \cap BB_1$, $K = BB_1 \cap CC_1$, $L = CC_1 \cap DD_1$, $M = DD_1 \cap AA_1$.

a) Dokažte, že trojúhelníky ABH , BCK , CDL , DAM mají stejný obsah;
b) vypočtete obsah rovnoběžníku $HKLM$ pomocí obsahu rovnoběžníku $ABCD$.

Nechť π je rovina daného rovnoběžníku $ABCD$. Přímkou AB proložíme rovinu $\rho \neq \pi$ a v ní sestrojíme čtverec $ABC'D'$. Na jeho stranách sestrojíme body A'_1 , B'_1 , C'_1 obdobně jako v řešení úlohy 7. Směr rovnoběžného promítání roviny ρ do roviny π určíme přímkou $C'C$. Úlohu pak rozřešíme pro čtverec $ABC'D'$.

$$\text{Výsledek: } S(HKLM) = \frac{(n-p)^2}{n^2 + p^2} S(ABCD)$$

Základy programování mikropočítačů

6 - grafika na PMD - 85

Doc. IVAN FISCHER, CSc., katedra matematiky PedF UK v Praze

Dosud jsme se seznamovali s příkazy a programy v jazyku BASIC v takové podobě, aby je bylo možno vyzkoušet na většině u nás dostupných mikropočítačů. Nyní již tuto zásadu opustíme a v otiskovaných ukázkách se zaměříme speciálně na jednotlivé verze jazyka BASIC toho kterého mikropočítače. I tak zůstanou jednotlivé lekce seriálu inspirací čtenářům, majícím přístup k jinému typu počítače. Tentokrát se zaměříme na grafické příkazy jazyka BASIC-G, který je k dispozici na mikropočítačích Tesla PMD-85-1 a PMD-85-2:

GCLEAR smazání obrazovky.

SCALE a, b, c, d . rozměry obrázku, a, b, c, d jsou parametry určující soustavu souřadnou na obrazovce; a je nejmenší x , b je největší x , c je nejmenší y , d je největší y . Tím jsou určeny i souřadnice počátku. Obrázek na televizní obrazovce lze složit z 256 grafických bodů v řádku a z 243 takovýchto řádků. Příkaz **SCALE** zavádí novou soustavu souřadnic, abychom se při programování nemuseli zabývat přepočítáváním souřadnic oněch 256×243 grafických bodů.

AXES x, y vykreslení svislé a vodorovné přímky bodem o souřadnicích x, y v soustavě souřadnic určené příkazem **SCALE**. Nejčastěji se používá pro nakreslení souřadnicových os příkazem **AXES** $\emptyset, \emptyset$.

MOVE x, y přemístění grafického kurzoru (či pomyslného kreslicího pera) do bodu o souřadnicích x, y . Nezpůsobí sám o sobě žádné kreslení.

PLOT $x, y, 1$ nakreslí jeden bod o souřadnicích x, y .

PLOT $x, y \dots$ nakreslí úsečku od poslední polohy grafického kurzoru (po příkazu **MOVE**, **PLOT**, **AXES** atd.) k bodu o souřadnicích x, y . Lze psát i **PLOT** $x, y, \emptyset$ ve stejném významu.

LABEL $m, n; t$. rozkreslí číselnou hodnotu t , nebo text t (který je uveden v uvozovkách) písmem, které je m -krát širší a n -krát vyšší než písmo z příkazu **PRINT**. Píše se od polohy, kde po předchozích příkazech zůstal grafický kurzor.

DISP ... obdoba příkazu **PRINT**, ale píše do nejnižšího řádku obrazovky (do dialogového řádku), nezpůsobí rolování jako **PRINT**, tedy posun textu na obrazovce o řádek nahoru, a tedy nijak nenarušuje zbytek obrázku na obrazovce.

Kreslení (v základním stavu počítače) znamená negaci, tedy černý grafický bod se změní na bílý a bílý se změní na černý. Dvojití provedení

téže konstrukce znamená napřed nakreslení a pak opět smazání. Pro pomocné konstrukce je to značná výhoda. Můžeme však změnit tento stav příkazy POKE (blíže o tomto příkazu budeme mluvit přes příště) u mikropočítače PMD-85-1 a navíc i příkazy PEN u mikropočítače PMD-85.2.

POKE — 15878,176 nebo PEN 0 způsobí, že kreslení znamená bílý grafický bod.

POKE — 15878,175 nebo PEN 16 způsobí, že kreslení znamená černý grafický bod.

POKE — 15878,168 nebo PEN 8 způsobí přepnutí systému do původního stavu, kdy kreslení je negací.

V jazyku BASIC-G máme k dispozici ještě příkazy FILL, BMOVE a BPLOT, které užíváme ke kreslení figurek u počítačových her, ale i pro psaní řeckých písmen a podobně. Svojí náročností však přesahují rozsah tohoto základního kursu.

Než se pustíme do ukázek programů, ještě si řekněme, že program můžeme psát i pro kreslení mimo obrazovku (vymezenou v příkazu SCALE). Počítač přitom nehlásí chybu, pouze tyto body nenakreslí, ani je potom nespojí úsečkou v příkazu PLOT x, y. Toho také budeme využívat, abychom se vyhnuli nežádoucím čarám na obrazovce.

Jako první ukázkou si předvedeme program, který nakreslí graf funkce $y = 5 \sin x + \cos 2x - 1$ pro x od -15 do $+15$. Krok, jak hustě máme počítat body grafu, zvolíme 0.1.

```
100 GCLEAR
```

```
110 SCALE — 15, 15, — 12, 12
```

```
120 AXES 0, 0
```

```
130 DISP,, Y = 5 SIN X + COS 2X — 1
```

```
140 MOVE 20, 20
```

```
150 FOR X = — 15 TO 15 STEP 0.1
```

```
160 Y = 5 * SIN(X) + COS(2 * X) — 1
```

```
170 PLOT X, Y
```

```
180 NEXT X
```

Řádek 140 vysune grafický kurzor mimo obrazovku, a tak se nespojí poslední bod kreslený při AXES s prvním bodem kresleného grafu.

Řádky 160 a 170 lze sloučit a psát

```
PLOT X, 5*SIN(X) + COS(2*X) — 1
```

Řádek 130 nám do spodního řádku píše, jaké funkce se graf kreslí. Po ukončení programu se tento text smaže a v dialogovém řádku se napíše OK, počítač čeká na další příkazy.

Pokud se chceme v grafu lépe orientovat, můžeme si popsat souřadnicové osy, nebo dokreslit graf nějaké nám známé funkce pro srovnání, například funkce $y = \sin x$. Pro odlišení od grafu původní funkce si graf $\sin x$ nakreslíme tečkovaně z jednotlivých bodů. Připojíme další řádky programu:

```

190 MOVE — 14 . 5, 3 . 2
200 LABEL 2,2; „Y = SIN X“
210 FOR X = — 15 TO 15 STEP 0 . 3
220 PLOT X, SIN(X), 1
230 NEXT X

```

Nyní se již v obrázku lépe orientujeme. Musíme si však uvědomit, že na ose x a na ose y máme různě veliké jednotky. Ty jsou dány příkazem SCALE, rozměrem 256×243 grafických bodů, tvarem obrazovky, i nastavením vychylovacích cívek v televizoru. Jediné, co můžeme pohodlně měnit, jsou parametry v příkazu SCALE, a to raději parametry pro svislý rozměr, tedy y . Parametry — 15 a 15 se totiž v programu užívají vícekrát*).

Abychom posoudili vhodnost volby parametrů ve SCALE, necháme počítač nakreslit kružnici se středem v počátku souřadnic a poloměrem 10. Program kreslení kružnice vychází z parametrického tvaru rovnice kružnice, kde parametrem je středový úhel v kružnici. Doplníme programové řádky

```

240 MOVE 20, 20
250 FOR FI = 0 TO 6 . 4 STEP 0 . 2
260 X = 10 * COS(FI)
270 Y = 10 * SIN(FI)
280 PLOT X, Y
290 NEXT FI

```

Asi vás překvapí hodnota $6 . 4$ pro 2π (plný úhel v radiánech), ale vzhledem ke zvolenému kroku $0 . 2$ by jinak kružnice zůstala nedokreslená. To jsou jen drobné záludnosti finitní matematiky ve srovnání s matematikou reálných čísel. Nyní již můžeme měnit parametry v řádku 110 tak dlouho, dokud se obrázek nebude podobat kružnici více než elipse.

Připomeňme si při této příležitosti, že kružnice se středem v bodě o souřadnicích M , N a poloměru R má v programovém modulu řádků 240 až 290 změněny řádky

```

260 Y = R * COS(FI) + M
270 Y = R * SIN(FI) + N

```

a elipsa s osami velikostí A , B rovnoběžnými s osami souřadnic má tyto řádky upraveny do tvaru

```

260 X = A * COS(FI) + M
270 X = B * SIN(FI) + N

```

Parametrické vyjádření rovnic dalších rovinných křivek si čtenář jistě vyhledá snadno ve sbírkách vzorců, nejspíše v H. J. Bartsch: Matematické vzorce.

*) Vlastně to jsou parametry jen z našeho pohledu zvenčí, kdy si je takto měníme. Pro program to jsou konstanty. Mohli bychom ovšem napsat $A = 15$ a v příkazech SCALE a FOR .. TO .. NEXT psát — A a A.

Pokud bychom nechtěli kreslit jen grafy funkcí či parametricky vyjádřené křivky (či jejich oblouky pro FI v jiných mezích v řádku 250), ale například různé obrazce složené z úseček, potom nám může být vodítkem další program. V prvním jeho bloku dat jsou údaje určeny následovně: počet všech kreslených bodů, souřadnice x_1 , souřadnice y_1 , údaj zda se má kreslit úsečka či bod, souřadnice x_2 atd. vždy tři údaje pro každý kreslený bod. Ve druhém bloku dat pro popis obrázku je opět první údaj o počtu popisů či textů, následují souřadnice k umístění popisů a text popisu, tedy opět trojice údajů pro každý popis.

```

100 REM — KRESLENÍ                250 NEXT C
    OBRAZCE —                      260 POKE — 15878, 168
110 GCLEAR                        270 END
120 POKE — 15878, 176            280 REM — DATA PRO
130 SCALE 0, 15, 1, 11          KRESLENÍ —
140 READ P                        290 DATA 9, 2, 3  1, 1, 12, 6, 0
150 FOR C = 1 TO P              300 DATA 13, 9  1, 0, 3, 6  2, 0
160 READ X, Y, U                310 DATA 2, 3  1, 0, 8, 7  65, 0
170 PLOT, X, Y, U              320 DATA 12, 6, 0, 8, 7  65, 1
180 NEXT C                      330 DATA 7, 4 . 55, 0
190 REM — POPIS OBRAZCE —      340 REM — DATA PRO POPIS —
200 READ P                      350 DATA 7, 1, 2, A, 6 . 5, 3  5, F
210 FOR C = 1 TO P              360 DATA 12, 5, B, 3, 6 . 5,
220 READ X, Y, T$              370 DATA 7  5, 8, E, 13 . 5, 9, C
230 MOVE X, Y                   380 DATA 4, 1, KONSTRUKCE
240 LABEL 2, 2; T$

```

Pokud jsou však v obrázcích určité symetrie a matematicky vyjádřitelné souvislosti, lze jich v programech využít a zmenšit tím rozsáhlé bloky dat. To nám ukazuje další program, který zobrazí trojúhelník, jeho obraz v osově souměrnosti podle osy v podélném směru obrazovky, a obraz trojúhelníku ještě posunutý o vektor velikosti 7 ve směru osy souměrnosti. Tím vznikne obraz původního trojúhelníku v posunutém zrcadlení.

```

100 REM — ZADANI ULOHY —
110 GCLEAR
120 POKE — 15878, 176
130 SCALE 0, 15, 0, 10
140 MOVE 0, 5
150 PLOT 15, 5
160 I$ = „, “: GOSUB 300
170 I$ = „1“: GOSUB 300
180 I$ = „2“: GOSUB 300
190 POKE — 15878, 168
200 END

```

```

299 REM — TROJUHELNÍK —
300 MOVE 20, 20
310 RESTORE
320 FOR C = 1 TO 3
330 READ X, Y, B$: GOSUB 500
340 U = M: V = N
350 PLOT M, N
360 READ X, Y: GOSUB 500
370 MOVE M, N
380 LABEL 2, 2; B$ + I$
390 MOVE U, V
400 NEXT C
410 RESTORE
420 READ X, Y, B$: GOSUB 500
430 PLOT M, N
440 RETURN
499 REM — PREPOCET SOURADNIC —
500 IF I$ = „ “ THEN M = X: N = Y
510 IF I$ = „1“ THEN M = X: N = 10 - Y
520 IF I$ = „2“ THEN M = 7 + X: N = 10 - Y
530 RETURN
599 REM — SOURADNICE —
600 DATA 2, 2, A, 1, 1 5
610 DATA 3, 4, B, 1.5, 4 2
620 DATA 6, 3, C, 6, 3

```

Příště naši pozornost zaměříme na zobrazovací metody deskriptivní geometrie aplikované na mikropočítači.

Úloha 1: Upravte první příklad pro kreslení grafů jiných funkcí.

Úloha 2: Změňte oblast, která je na obrazovce zakreslena v 1. příkladu.

Úloha 3: V okolí počátku zobrazte graf funkce $y = 1/x$.

Návod: Kreslení grafu rozdělte na dvě samostatné části pro záporná a pro kladná x .

Úloha 4: Zobrazte trojúhelník a kružnici jemu opsanou. Využijte k tomu vzorečky z analytické geometrie a analogii k ukázkám programů.

Úloha 5: Poslední program upravte tak, aby indexy 1, 2 byly psány menším písmem a vpravo dolů k popisu bodů písmenem.

Úloha 6: Nakreslete vývojové diagramy a kopenogramy k předchozím programům. Bloky dat zakreslete do samostatného obdélníku za ostatní znázornění algoritmu programu. Volané podprogramy kreslete jako samostatný vývojový diagram či samostatný kopenogram.

Fyzika v prírode - teplo z útrov Zeme

Doc. dr. JÁN CHRAPAN, CSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš

Fyzika je náuka o prírode, to všetci dobre vieme zo školských lavíc. To, že sa ju učíme v školských laviciach, nám ju však vzdaluje od prírody. Zákony v grafickej podobe — vzorce, ovládame nakoniec iba na hodinách fyziky. Vonku vo voľnej prírode na vzorce a poučky s radosťou zabúdame. Na výletoch vychutnávame vodu, vzduch a slnko, kocháme sa krásami zelene a terénnych tvarov, dívame sa, vnímame, tešíme sa krásam života. Načo nám je k tomu fyzika. A to je práve to, na čo pomaly zabúda moderný, technicky vyspelý človek. Fyzika — základ technických vied? To áno, ale fyzika v prírode?

Dnes si vyjdeme, milý čitateľ, na výlet do Západočeského kraja, asi 120 km západne od Prahy, do povodia rieky Ohře medzi Krušné a Doupovské hory a Slavkovský les. Tam, kde sa sprava vlieva do Ohře rieka Teplá, tam sa rozkladá asi 60 tisícové okresné mesto, známe výrobou porcelánu, so svetoznámych kúpeľami — *Karlovy Vary*. Z rýchliky vystúpime na hornom nádraží, spustíme sa z návršia, mostom prejdeme cez rieku a sme pred starou tržnicou, od ktorej máme už len niekoľko minút chôdze ku exkluzívnemu kúpeľnému objektu, dokončenému v roku 1977, na ktorom čítame nápis Thermal. Veľké piktogramy nám oznamujú, že vstupujeme do kúpeľného areálu, situovaného v úzkom údolí rieky Teplá, kde na promenádnom úseku nesmieme fajčiť, vodiť psov, tlačiť detské kočíky a šantiť s loptou alebo na bicykloch. Vojsť sem autom, je prísne zakázané. V pozadí, asi dva kilometre proti prúdu Teplej vidíme dominovať údoliu komplex sanatória Imperiál. Mnohé liečebné domy, ktoré sú neraz odvážne vtesané do skalnatých svahov úzkeho údolia, pochádzajú z 19. storočia, kedy zaznamenala kúpeľná časť Karlových Varov najväčší stavebný rozmach. V ich moderne rekonštruovaných interiéroch je rozmiestnených do 8000 lôžok pre pacientov a rehabilitantov, ktorých sa tu v neďalekej budúcnosti vystrieda ročne 100 000. Súčasne sa počíta s dvojnásobným počtom turistov.

Začiatky Karlových Varov sa kladú do roku 1358, keď podľa povesti *Karol IV* pri poľovačke na jeleňa objavil horúce žriedlo — Vřídlo a na vyvýšenine nad ním založil poľovnícky hrádok. Dnes na tomto mieste nájdeme masívnu štvorhrannú Zámockú vežu. Samozrejme, že miestni obyvatelia poznali teplé pramene v údolí už dávno pred Karlom IV.

Miesto však ležalo bokom od obchodných ciest, skalnaté, divým lesom porastené svahy neboli vhodné pre poľnohospodárstvo ba ani pre pastierstvo. Bol to raj odvážnych lovcov, lebo aj v zime sa tu zďaleka schádzala zver k nezamrzajúcim prameňom teplej vody a v rieke, do ktorej teplé pramene stekali, bola hojnosť rýb. Lovci sú však obvykle otužilí, zdraví chlapi, a títo skôr ocenili iné výhody horúcich prameňov, ich liečivé účinky nemali pre nich veľkú cenu. Až *Karol IV.*, vzdelaný a rozhladený panovník, ocenil liečivé účinky prameňov a osadu, ktorá bola v týchto miestach, povýšil na mesto, ktorému roku 1370 priznal privilégiá kráľovského mesta. Už od svojho vzniku malo mesto kúpeľnú funkciu. Karlove Vary sa stali otvoreným mestom bez mestských hradieb. Pokoj a bezpečnosť im zaručovali privilégiá. Rozhodujúci význam pre Karlove Vary mal pobyt ruského cára *Petra I.*, ktorý ich navštívil v roku 1711, v čase tzv. Severnej vojny Ruska proti Švédom, v ktorej Peter Veľký získal východné pobrežie Baltického mora, na ktorom založil v roku 1703 Petrohrad, dnešný Leningrad. Pamätná doska Petra Veľkého a členov jeho rodiny je na vyvýšenine nad ľavým brehom Teplej, známej ako Jelení skok. Pobyt Petra Veľkého a jeho sprievodu urobil z Karlových Varov medzinárodne vyhľadávané kúpeľné miesto. Vodu prameňov analyzoval karlovarský rodák *dr. David Becher* začiatkom druhej polovice 18. storočia. Vody sú zvlášť vhodné na liečenie chorôb zažívacieho traktu, žľáz, cukrovky. Karlovarská voda je povrchová voda, ktorá postupne prenikla puklinami v litosfére do niekoľko kilometrových hĺbok. Tam sa ohriala a takáto opätovne vystupuje na povrch. Rozpúšťa pri tom soli. Na povrch vynáša chlorid draselný (Glauberovu soľ), soli vápnika, horčíka, lítia, železa, mangánu. Jeden liter obsahuje až 3 gramy solí a až 1 gram oxidu uhličitého (CO_2). Vo vode sa nachádzajú stopy zinku, medi, hliníka, rubídia, cézia, striebra, berýlia, bária, antimónu, molybdénu, selénu a radónu. Za šesťstoročnej histórie bolo známych 136 horúcich prameňov, rozložených asi kilometer po toku riečky Teplá. Pramene postupne zanikali, aby neskôr na iných miestach opäť vyrazili, niekedy v sprievode výbuchu, vyvolaného tlakom v podzemných škárách nahromadeného oxidu uhličitého. Dnes pri návšteve Karlových Varov nájdeme dvanásť prameňov, z ktorých desať vyviera na ľavom brehu Teplej. Teplota ich vôd je medzi 42,6 °C až 63,5 °C. Najteplejšie, *Vřídlo* a *Hygia*, sú na pravom brehu a teplota ich vody je 72,3 °C. Pramene vychrlia asi 2000 litrov vody za minútu. Táto sa sčasti odparuje, čím sa získava zriedlová soľ, exportný artikel, vyvážený do celého sveta. Časť sa plní do fliaš a predáva sa ako minerálka. Zvyšok vteká do Teplej a zvyšuje jej priemerný prietok na $2 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Ešte skôr, ako si všimneme, že vody Teplej na jej dolnom toku ani v tuhej zime nezamrzajú, pristavme sa pri súčasnej kultúre Karlových Varov. Nájdeme tu strednú ekonomickú školu s odborom ekonomiky cestovného ruchu a kúpeľníctva, strednú zdravotnícku školu, balneolo-

gický výskumný ústav v budove, ktorého sa liečil aj známy fyziológ *I. P. Pavlov*, strednú školu keramickú. Výskumný ústav jemnej keramiky, Ústav technológie hrubej keramiky a úpravníctva keramických surovín. Je tu divadlo. V. Nezvala. Od roku 1959 sa koná v Karlových Varoch každoročne „Dvořákova karlovarská jeseň“. Prezrieť si možno galériu obrazov, vlastivedné múzeum, múzeum Karla Marxa. Svetoznámy filmový festival sa striedavo koná v Moskve a v Karlových Varoch. Karlove Vary sú miestom dôležitých konferencií. Na jar roku 1967 sa tu konala konferencia komunistických a robotníckych strán Európskych štátov, z ktorej vzišiel spoločný program na zabezpečenie európskej bezpečnosti. Konajú sa tu medzinárodné vedecké konferencie. V roku 1981 tu boli zjazdy Jednoty československých matematikov a fyzikov a Jednoty slovenských matematikov a fyzikov.

Karlove Vary však robia svetoznámy nielen liečivé pramene. Po celom svete sú známe aj výrobou porcelánu a skla. Na okolí sú výborné surovinové zdroje: kaolín, živec a kremeň na výrobu porcelánu, uhlie na jeho vypaľovanie a íly na výrobu páliacich pomôcok. Výroba porcelánu a skla sa začal v 18. storočí. Dnes závody Karlovský porcelán n. p. a Karlovarské sklo — Moser, vyrábajú za takmer miliardu korún ročne.

Kúpeľná časť Karlových Varov zaujme svojou architektúrou. Napríklad pôsobivú kolonádu Československo-sovietskeho priateľstva vybudovali v rokoch 1871 až 1881 podľa projektu *Josefa Zítka*, ktorý projektoval aj Národné divadlo v Prahe. V tomto roku kolonádu reštaurujú. Pýchou Karlových Varov je nová kolonáda Jurija Gagarina nad prameňom Vřídlo a Hygie, postavená nákladom 80 miliónov korún. Prichádzame k nej od východu, po prúde riečky Teplá od hotelu Moskva. Je zima, večne zelené listy rododendrónov vykukujú spod snehových čiapočiek, po pruhoch odhrnutých cestičiek sa pomaly hýbu kúpeľní hostia, pri ústach sosáčky džbánkov s pariacou sa minerálkou. Obe strany riečky pod snehom, vody Teplej skuté ľadom. Veď niet divu, teplomer ukazuje dvanásť stupňov pod nulou. Prejdeme okolo Gagarinovej sochy. Za skleníkom kolonády sa dvíhajú oblaky pary. Tu dokazuje riečka oprávnenosť svojho mena — Teplá. Skutočne, na jej hladko plynúcej hladine, zregulovanej kamennou hrádzou, sa bezstarostne plavia húfy divých kačíc. Že sa voda Teplej prehriala horúcimi prameňmi, to je nám hneď jasné. Na to stačia naše skúsenosti. Veď od malička si pripravujeme vhodne teplý kúpeľ zmiešavaním rôzne teplej vody, do nápojov si dávame kúsky ľadu. Primeranú teplotu sme však vždy dosahovali skusmo. Kúpeľ je studený? Prilejme ešte teplej vody. Nápoj nie je ešte dosť studený? Nože ešte kúsok ľadu! Čo však povedať o teplote vody, na ktorej práve vidíme krásne sfarbených káčerov? Voda sa jemne parí, zdá sa, že je horúca, azda kačice nepáli? Prostredie a hrádza nám bráni bezprostredne rukou preveriť teplotu vody. Teraz sa nám osvedčia vedomosti z hodín termiky.

Príroda nám predkladá problém.

Aká je teplota vody v rieke Teplá potom, ako do nej vtečú vody horúcich minerálnych prameňov? Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty, dostupné z literárnych prameňov o Karlových Varoch, z nápisov, pamätných tabúl, prospektov. Jednoducho: načrte do svojich všeobecných znalostí získaných na hodinách zemepisu, dejepisu alebo pri potulkách, pri ktorých ste mali oči a uši otvorené.

Náš problém budeme riešiť pomocou kalorimetrickej rovnice:

$$m \cdot c(T - T_v) = m_o \cdot c_o(T_v - T_o),$$

kde m je hmotnosť predmetu s teplotou T , ktorého špecifická tepelná kapacita je c a m_o je hmotnosť druhého predmetu, ktorý je s prvým v tepelnom kontakte. Jeho teplota pred kontaktom je T_o a špecifická tepelná kapacita c_o . Pritom špecifická tepelná kapacita je teplo, potrebné na zohriatie látky s jednotkovou hmotnosťou o jeden kelvin.

Hlavný smer riešenia máme. Ďalej závisí od nás, aké priblíženia urobíme a čo všetko pri získavaní odpovede na našu otázku zanedbáme. Pri prvom odhade sa môžeme uspokojiť napríklad so situáciou, že všetka teplá voda, o ktorej si pomyslíme, že má priemernú teplotu T , vtečie bez straty tepla do riečky, ktorej voda má v celom objeme teplotu 0°C . Vieme, že sme v tomto prípade situáciu silne zidealizovali. Uvážme, či táto idealizácia situácie výsledok prehodnotí, ale podhodnotí. Všetky straty, a je ich dosť, sme zanedbali, teda výsledok bude vyšší ako skutočnosť. Nech je stredná teplota vody všetkých prameňov 50°C . Jej

hmotnosť v pomere s hmotnosťou studenej vody v rieke je $\frac{m}{m_o} =$

$= \frac{2000}{2000 \cdot 60} = \frac{1}{60}$. Špecifická tepelná kapacita riečnej vody je približne $c_o = 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Minerálna voda ju má trochu menšiu. Neberme to však do úvahy a myslíme si, že $c = c_o$. Po úprave kalorimetrickej rovnice pre vyrovnanú teplotu T_v riečnej vody máme:

$$T_v = \frac{m}{m_o + m} T + \frac{m_o}{m_o + m} T_o.$$

Po dosadení číselných hodnôt nemôžu byť zložité, veď počítame z hlavy na výlete, teda $m = 2000/60$, $m_o = 2000$, $T = 50^\circ\text{C}$, $T_o = 0^\circ\text{C}$ zistíme, že voda v rieke sa ohriala maximálne o $0,82 \text{ K}$.

Náš výsledok závisí od štyroch parametrov: od hmotnosti vody v rieke m_o , od hmotnosti vôd teplých prameňov m , od priemernej teploty týchto vôd T a od teploty vody v rieke pred jej zmiešaním s vodami prameňov T_o . Aby sme vedeli, kde sme sa mohli najviac pomýliť, musíme odhadnúť vplyv jednotlivých parametrov na celkový výsledok a hranice, v ktorých sa jednotlivé parametre môžu pohybovať.

Hmotnosť vody v rieke je charakterizovaná jej prietokom. Tento sa zrejme mení v jednotlivých ročných obdobiach. V druhej polovici zimy

a začiatkom jesene býva najnižší, na jar najvyšší. Okamžitý prietok by sme museli zmerať, odhadnúť zo šírky, hĺbky a rýchlosti toku, alebo na základe dobrej znalosti miestnych pomerov. Zo vzťahu pre T_v usúdime, že zmena m_o , vyjadrená v percentách, vyvolá približne tú istú percentuálnu zmenu T_v . Uvážte sami, či sa môžeme pri odhade prietoku v malej, pokojne plynúcej, dobre zregulovanej rieke, pomýliť viac ako 50 %?

Hmotnosť teplých minerálnych vôd, vychádzajúcich zo všetkých prameňov sme vyčítali z prospektov. Nikde sa nehovorí, že by sa výdatnosť prameňov v ročných obdobiach menila. Prijmeme tento názor a posúdme len, aká časť vyvierajúcej vody vtečie do riečky a aká sa jej spotrebuje na komerčné účely a pitné kúry. Počítajme so 100 tisíc pacientami a 200 tisíc turistami ročne. Pacienti pijú pravidelne, každý asi 0,5 litra denne. Turisti vodu len ochutnávajú, počítajme 0,25 litra denne na jedného. Ročne sa teda vypije asi 100 tisíc litrov liečivej vody. Predpokladajme, že táto spotreba je rozložená rovnomerne na všetky pramene. Ako vidíme, (keď si uvedomíme, že rok má $525,6 \cdot 10^3$ minút), táto spotreba predstavuje len jednu stotinu percenta z celkového množstva minerálky, ktorú dajú pramene do roka. Rádove rovnaké množstvo minerálky odíde ročne do obchodov a nie oveľa viac jej odparia pri získavaní liečivých solí. Vidíme, že neurčitost odhadu množstva minerálnej vody zanedbateľne ovplyvní výpočet teploty riečnej vody T_v .

Priemernú teplotu minerálnych vôd T sme zrejme určili s najväčšou nepresnosťou. Do úvahy prichádza, ako vieme, jej dvanásť prameňov. Chýbajú nám však informácie o ich výdatnosti a o tom, ako z nich voda odteká do riečišťa. Pri našich potulkách kúpeľnou štvrťou Karlových Varov sme sa vôbec nič nedozvedeli o výmene tepla medzi vodou z jednotlivých prameňov a stenami potrubí, ktorými odtekajú. Nepresnosť odhadu T , vyjadrená v percentách, spôsobí približne rovnakú chybu T_v , vyjadrenú v percentách.

Teplotu vody v rieke T_o dokážeme odhadnúť s presnosťou na kelvíny. Keď je jej povrch skutý ľadom, bude sa jej teplota s hĺbkou meniť od 0°C na povrchu, k 4°C v miestach, kde bude voda najhustejšia, teda pri dne. Vtedy sa ohreje riečna voda len o málo menej ako v prípade $T_o = 0^\circ\text{C}$, v ktorom je $T_v - T_o$ maximálne. Azda netreba upozorniť na skutočnosť, že $T_v - T_o$ bude v lete, pri zvýšenej teplote vody v rieke, klesať. Rozdiel $T_v - T_o$ by bol minimálny, a to nulový, v prípade, že by sa vody Teplej v sparnom lete vyhriali už pred zmiešaním s teplou vodou minerálnych prameňov na teplotu, rovnú priemernej teplote vtekajúcej minerálky, teda ak by sa dosiahol stav $T = T_o$.

Náš výlet, milý čitateľ, pomaly končí. Azda sa nám na ňom podarilo nielen vidieť časť prírody tak, ako sa nám na vonok javí, ale si aj odpovedať na otázku, prečo ju vidíme práve takú. Azda sme pochopili, že fyzikálne zákony sú tými pravidlami, ktorými sa príroda riadi, podľa ktorých sa vyvíja.

Fyzikální pohled na některé problémy energetiky II

Ing. IVO ČÁP, CSc., VŠDS v Žili

V první části článku (RMF č. 5, roč. 65) jsme pozornost věnovali rozboru podmínek dopravy energetických zdrojů

- A. přenosem elektromagnetického pole po vedení,
- B. přepravou látkových energetických surovin.

V této druhé části rozšíříme rozbor o další dva způsoby dopravy energetických zdrojů, a to:

- C. dálkovými teplovody,
- D. prouděním tekutých látek s využitím jejich mechanických účinků.

C. Dálkové teplovody

Další formou přepravy energetických zdrojů je potrubní přenos tepla prostřednictvím vhodné tekuté látky. Tímto způsobem se realizuje dodávka tepla z tepláren, odvod tepla při chlazení pecí, odběr tepla z kotlů nebo jaderných reaktorů elektráren, získávání tepla z hlubin Země apod.

Při zvýšení teploty transportní látky se zvýší její vnitřní energie a naopak u spotřebitele vede ochlazení k poklesu vnitřní energie, odpovídajícímu množství odebraného tepla

$$Q = \Delta m c (T_2 - T_1), \quad (24)$$

kde je Δm hmotnost látky, c měrná tepelná kapacita látky, T_2 , T_1 počáteční a konečná teplota.

Při proudění tekuté látky představuje toto odevzdané teplo střední přepravní výkon

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = Q_m c (T_2 - T_1). \quad (25)$$

Energetické ztráty teplovodu mají dvě složky, jednak je to mechanická ztráta způsobená prouděním (turbulence, vnitřní tření), která je kompenzovaná činností čerpadel (viz část B.), jednak je to ztráta odvodem tepla pláštěm teplovodu do okolí. Pro omezení tepelných ztrát je potrubí obaleno vrstvou tepelné izolace. Tepelný tok mezi potrubím a okolím můžeme přibližně popsat vztahem pro jednorozměrné vedení tepla

$$Q_z = \lambda \frac{S}{x} (T - T_0) \Delta t, \quad (26)$$

kde λ je součinitel měrné tepelné vodivosti izolace, x je tloušťka izolační vrstvy, $S = \pi d_s L$ střední obsah průřezu izolace, d_s střední průměr

TERFERENCE vlnění — skládání vlnění; výsledné vlnění (výsledek vzájemného setkání, překřížení několikerého vlnění); INTERFERENČNÍ; INTERFEROMETR (řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metr¹) — měřicí přístroj založený na interferenci

INTERPOLACE (od lat. *polio*, -ire = hladit, uhlazovat; srov. POLITURA — lesklý nátěr do hladka uhlazený) — ve fyzice a matematice: „přihlazení výpočtu“; jednoduchý výpočet přibližné hodnoty funkce pro body ležící uvnitř uvažovaného oboru (graf funkce v daném intervalu „z vnitřní strany přihladíme“ na přímku nebo na známou křivku); opak: EXTRAPOLACE (v. t).

INTERPRETACE (z lat. *interpretatio*; od *interpretos*, -ari, ptc. pf. *interpretatus* = zprostředkovávat, vykládat, vysvětlovat, předkládat; a to od *interpres*, -etis = původně dokazovač, zprostředkovatel, potom prostředník, vyjednavatel, tlumočník; srov. INTERPRET — výkonný umělec, který umělecké dílo zprostředkovává, tlumočí svým vystoupením posluchačům nebo divákům)

INTERSTELÁRNÍ (v. stelární) — mezihvězdný

INTERSTICIÁLNÍ (od lat. *intersticium* = prostor mezi něčím, mezera; od *sisto*, -ere = stavět, postavit; v. rezistence) — jsoucí v mezeře, vmezeřený, mezerní, uložený v meziprostoru; ve fyzice a zvláště v biologii: mezimřížkový, tj. ležící v mezeře mezi pravidelnými body molekulární mřížky

INTERVAL (lat. *vallus* = kůl, ohrada z kůlů; srov. čes. VAL) — „prostor mezi dvěma kůly v opevnění“; mezera, vzdálenost, úsek mezi dvěma mezerami; časový nebo místní úsek; v hudbě: vzdájemný vztah dvou tónů vzhledem k jejich výšce („jak jsou daleko od sebe“)

INTERNÍ (z lat. *internus* = vnitřní; souvisí s inter = mezi; v. inter-) — vnitřní; opak: EXTERNÍ

INTERPOLACE, INTERPRETACE, INTERSTELÁRNÍ, INTERSTICIÁLNÍ, INTERVAL — v. INTER-

INVARIANCE (slož. z lat. *in-* s významem záporu; v. *in*⁻² + *varius* = =rozmanitý, různý, proměnlivý; v. variace) — neměnnost, stálost hodnot výrazů, zachovávání vztahů při nějakých změnách

INVARIANT(A) — neproměnná hodnota výrazu, neměnný vztah;

INVARIANTNÍ — neměnný, „neměnicí se“; INVARIANTNÍ čára — její rovnice se nemění; srov. nonvariantní

INVERTOVAT (z lat. *inverto*, -ere; slož. z *in* = do, na, v; v. *in*⁻¹ + *verto*, -ere, ptc. pf. *versus* = točit, obracet; srov. AVERZE — „otáčení se od něčeho“, odvracení se, odpor, nechut) — obracet, převracet; INVERTNÍ, INVERTOVANÝ — obracející se, obrácený, vzniklý inverzí; v. t. konvertor

INVERZE (z lat. *inversio*) — obrácení, převrácení, změna běžného stavu v opačný; INVERZNÍ — týkající se obrácení; obracející se,

- obrácený, natočený zpět, v opačném směru; v t. konverzní, reverzibilní
- INVOLUCE (z lat. *involutio*; slož. z *in* = do, na, v; v. *in*⁻¹ + *volvo*, -ere, ptc. pf. *volutus* = valit, válet, koulet, vinout; v. evoluce) — „zavíjení“; zavnutí, omezování, zpětný vývoj, zanikání
- ION, IONT (z řec. *ión*, *iontos* = jdoucí; od *eimi* = jít) — „jdoucí, pohybující se elektrický náboj“; elektricky nabitá částice; v. t. *anion*, *kation*. Ve složených slovech bývá podoba počáteční — složky IONO- (např. ionosféra, v. t.) nebo IONTO- (např. iontoforéza, v. t.)
- IONIZACE (v -izace) — „dodávání iontů“; přeměna neutrálních částic atomů nebo molekul v ionty
- IONIZÁTOR (v. -or) — zařízení nebo činitel, který způsobuje ionizaci
- IONOSFÉRA (slož. z výrazu *ion*, v. t. + řec. *sfaira* = koule; v. sféra) — „oblast iontů“; ionizovaná vrstva zemského ovzduší
- IONTOFORÉZA (slož. z výrazu *ion*, v. t. + řec. *forézis*; souvisí s *feró* = = nosit; v. -for) — „nošení iontů“; léčba zaváděním ionizovaných látek do těla
- IREVERZIBILNÍ (slož. z lat. *in*- s významem záporu; v. *in*⁻² + *re*- = = zpět, znova; v. *re*- + *verto*, -ere, ptc. pf. *versus* = obracet, otáčet; v. inverze) — nevratný; IREVERZIBILNÍ děj — fyzikální děj, kdy se těleso nevrací do původního fyzikálního stavu
- IRIDIUM (od řec. *iris*, *iridos* = duha) — druh platinového prvku, který dostal název pro své měnlivé barvy; IRISOVÝ — duhovkový; IRIZOVAT — dávat něčemu duhové zabarvení; IRIZUJÍCÍ — duhově se blýskající. Pozn.: Řecká bohyně *iris* stala se poselkyní bohů, protože duha spojuje nebe se zemí.
- IT — přípona utvořená analogií podle počestěného zakončení -lit (z řec. *lithos* = kámen; srov. MONOLIT — sloup z jediného kusu kamene; řec. *monos* = jediný) pro jména hornin a nerostů; např. antracit, lignit, ale i dynamit apod.; v. t. ferit, feroferit, grafit, krystalit, meteorit.
- IZACE (z lat. *isatio*) — koncová složka složených slov, která nabyla charakteru přípony s významem „provedení, provádění“ toho, co vyjadřuje předcházející složka složeného slova, nebo „dodávání, nabytí vlastností“ vyplývajících z významů předcházející složky; jde tedy jak o průběh činnosti, tak o konečný stav; např. SOCIALIZACE, IONIZACE — „dodávání iontů“; METALIZACE — „dodávání vlastností kovových předmětů“, pokovování. V t. automatizace, dekadizace, elektrizace, krystalizace, magnetizace, materializace, maximalizace, miniaturizace, minimalizace, neutralizace, normalizace, polarizace, racionalizace, signalizace, stabilizace, synchronizace, typizace, vulkanizace. Zpravidla existují souvztažná slovesa na -IZOVAT, např. ionizovat, neutralizovat apod.

- IZO- (z řec. *isos* = rovný, stejný) — počáteční část složených slov, mající význam „stejný, téže hodnoty“
- IZOBARA (řec. *barys* = hluboký, těžký; v. *bar*) — spojnice míst stejného tlaku vzduchu v tutéž dobu; IZOBARICKÝ děj — děj při stálém, stále stejném tlaku
- IZODYNY (v. *dyn*) — zastaralý název pro spojnice míst stejně velké horizontální složky síly magnetického pole Země
- IZOFOTA (řec. *fós, fótos* = světlo; v. *phot*) — spojnice míst o stejném osvětlení
- IZOGONA (řec. *gonia* = úhel; v. goniometr) — spojnice míst na mapě o stejné deklinaci, tj. míst, která mají stejný úhel odklonu magnetického poledníku od zeměpisného
- IZOCHORA (řec. *chóra*, příp. *chóros* = prostor, místo, krajina; srov. CHORONYMA — názvy zemí, krajů; řec. *onoma* = jméno) — grafické znázornění izochorického děje, tj. děje, při kterém plyn má stále stejný objem, „zaujímá stejně veliký prostor“. Pozn.: Třeba rozlišovat řec. *chóros* = prostor, krajina a řec. *choros* = kolo, tanec v kole, od čehož je např. CHÓR — sbor zpěváků (původně stojících a tančících v kruhu); CHOREOGRAFIE — „písemné vyjádření tanečních prvků“
- IZOCHRONA (řec. *chronos* = čas, doba; v. *chrono-*) — křivka, po níž padá těleso rovnoměrnou rychlostí, „stále za stejnou dobu“; IZOCHRONNÍ — současný, trvající stejnou dobu, probíhající ve stejné době, stejnodobý
- IZOKLINA (řec. *klinó* = klonit; v. *inklinace*) — spojnice míst o stejné inklinaci, „o stejném naklonění“
- IZOMORFNÍ (řec. *morfé* = postava, podoba, podstata; v. *-morfní*) — mající stejný tvar
- IZOTERMA (řec. *thermos* = horký, teplý; v. *thermo-*) — spojnice míst o stejné teplotě; IZOTERMICKÝ — se stále stejnou teplotou, probíhající při stále stejné teplotě
- IZOTOP (řec. *topos* = místo; v. *topo-*) — atom téhož prvku, lišící se sice atomovým číslem, ale mající stejné protonové číslo, stejné chemické vlastnosti a zaujímá proto stejné místo v Mendělejevě periodické tabulce; v. t. radioizotop
- IZOTROPIE (řec. *trepó* = obracet; v. *tropy*) — jev, kdy u určité látky dochází k fyzikálním změnám všemi směry stejně; kdy se látka na všechny strany „stejně obrací“; IZOTROPNÍ — vykazující ve všech směrech stejné vlastnosti
- IZOLACE (prapův. v lat. *insula* — ostrov; „je oddělen vodou od pevniny“) — odloučení, oddělení, osamocení; ve fyzice: oddělení vodičů u přístroje k zamezení vodivého spojení; IZOLOVAT; IZOLOVANÝ — oddělený, osamocen
- IZOLANT (analogií z ptc. prez. hypotetického *isolo*, *-are*) — „oddělu-

jící“; látka elektricky nevodivá, málo vodivá, nevodič; „oddělující jeden vodič od druhého“

IZOLÁTOR (analogií z ptc. pf. hypotetického *isolo*, -are, ptc. pf. *isolatus*; v. -or) — těleso sloužící k dosažení elektrické nevodivosti; „těleso zajišťující izolaci“; součástka vyrobená z izolantu

IZOMORFNÍ, IZOTERMA, IZOTOP, IZOTROPIE — v. IZO-

JUSTACE (od lat. *iustus* = spravedlivý, odůvodněný, správný; srov. JUSTICE — soudnictví, „výkonná spravedlnost“) — správné seřízení; seřizování měřících přístrojů; JUSTOVAT — přesně nastavit

KALORESCENCE (od lat. *calor* = teplo, horko) — světelná energie vzniklá z energie tepelné; KALORESCENČNÍ záření — vyvolané zahřátím na dostatečně vysokou teplotu

KALORIE — dřívější jednotka tepla

KALORIKUM (v. -ikum¹) — (zastaralé) nevařitelná tepelná substance v. t. kalorimetr

KALORIMETR (slož. z lat. *calor* = teplo, horko; v. kalorescence + řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metr¹) — přístroj k měření měrného tepla („měřící teplo“); KALORIMETRICKÝ (např. kalorimetrická rovnice)

KANDELA (z lat. *candela* = svíčka; srov. KANDELÁBR) — základní jednotka svítivosti; zkratka cd; starší jednotkou svítivosti byla „mezinárodní svíčka SI“

KAON (slož. z fonetického přepisu výslovnosti hlásky „k“ + -on; umělá přípona použitá analogicky podle „elektron“ pro označení částic; zde však ji nutno chápat jako zkrácení slova „mezon“) — zkratkové slovo pro „mezon K“; v. t. mion, pion

KAPACITA (od lat. *capax*, -acis = schopný mnoho pojmout, prostorný, objemný; od *capio*, -ere = brát, chytat; v. akceptor) — 1. schopnost něco pojmout; 2. vynikající znalec („je schopen pojmout mnoho znalostí“)

KAPACITANCE — kapacitní odpor; odpor závislý na kapacitě vodiče. Pozn.: Přípona -ANCE (z lat. -antia) slouží ve fyzikální terminologii k označování různých druhů odporu v nauce o elektřině, akustice a mechanice; např. impedance, indukance (v. t.)

KAPILÁRA (z lat. *capillaris*; od *capillus* = vlas; souvisí s *caput* = hlava) — vlasečnice; ve fyzice: trubice s velmi malým vnitřním průměrem; KAPILÁRNÍ — 1. vláskový (např. trubička); 2. projevující se v kapiláře (např. deprese — snížení hladiny kapaliny v kapiláře); KAPILARITA — vzlínavost kapalin v kapiláře

KARBURACE (slož. z lat. *carbo* = uhlí + *uro*, -ere = pálit; srov. KARBON = kamenouhelný útvar; KARBONÁT — uhličitán) — „spalování uhlí“; spalování pohonných látek v motoru; KARBURÁTOR (v. -or) — „spalovač uhlí“; splynovač; technické zařízení, ve

izolační vrstvy, L délka potrubí, T , T_0 teploty na vnitřní a na vnější straně izolace.

Ztrátový tepelný výkon je

$$P_z = \frac{Q_z}{\Delta t} = \lambda \frac{\pi(d+x)}{x} (T - T_0) L \quad (27)$$

Příklad 5.

Teplovodním potrubím o průměru $d = 50$ cm proudí voda teploty $T_2 = 120^\circ\text{C}$ průměrnou rychlostí $v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ve výměníku se při odevzdání tepla ochlazuje na teplotu $T_1 = 80^\circ\text{C}$ a vrací se zpět. Potrubí je obaleno izolační vrstvou tloušťky $x = 10$ cm s měrnou tepelnou vodivostí $\lambda = 0,08 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Jaký tepelný výkon se odebírá z teplovodu ve výměníku? Za jakou dobu by teplota v potrubí poklesla o $\delta T = 1^\circ\text{C}$ při teplotě vnějšího pláště $T_0 = -10^\circ\text{C}$ a jaké délce potrubí to odpovídá při dané rychlosti proudění vody?

Hustota vody $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, měrná tepelná kapacita vody $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Řešení

Přenášený tepelný výkon při hmotnostním toku $Q_m = \rho S v$ je podle

$$(25) P = \rho S v c (T_2 - T_1) = \frac{\pi d^2}{4} \rho v c (T_2 - T_1), \quad \text{číselně } P = 165 \text{ MW}.$$

Ze sloupce vody v potrubí délky L se pláštěm odvede za dobu Δt teplo

$$Q_z = \lambda \frac{\pi(d+x)}{x} (T_2 - T_0) L \Delta t,$$

které souvisí s poklesem teploty vody vztahem

$$Q_z = \rho S L c \delta T$$

Porovnáním obou vztahů dostaneme pro pokles teploty δT dobu

$$\Delta t = \frac{\rho c d^2 x}{4 \lambda (d+x)} \frac{\delta T}{T_2 - T_0}, \quad \text{číselně } \Delta t = 4,21 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Při dané rychlosti proudění vody tomu odpovídá délka potrubí

$$L = v \Delta t, \quad \text{číselně } L = 21,0 \text{ km}.$$

Závěr:

Z výsledků příkladu je vidět, že i při nevelkém průměru potrubí je možno teplovodem transportovat značný tepelný výkon, zde 165 MW. Vidíme zároveň, že i při mrazivém počasí je pokles teploty v potrubí nepatrný, zde 1°C na 21 km trasy. Vzhledem k vysoké teplotě vody musí být v potrubí zvýšený tlak. Dalším výpočtem bychom se mohli přesvědčit, že přeprava tepla tímto způsobem má poměrně vysokou účinnost, okolo 95 % na trase 10 km.

D. Proudění tekutých látek s využitím jejich mechanických účinků

Poslední diskutovanou formou energetického přenosu je proudění tekutých látek s využitím jejich mechanických účinků. Tato forma je známá např. u pohonu vodních nebo parních turbín elektráren. V případě vodního toku se mechanický výkon získává z gravitačního pole, u tlakové páry je to spalováním vhodných paliv.

Proudí-li v potrubí tekutá látka rychlostí v , představuje to při hmotnostním toku Q_m střední přepravní výkon

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \left(\frac{1}{2} \Delta m v^2 \right) \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{2} Q_m v^2. \quad (28)$$

Proudící tekutina je schopna konat mechanickou práci a maximální využití umožňují turbíny. V současné době existují vodní turbíny s účinností nad 90 %, u parních turbín se účinnost pohybuje málo nad 30 %.

Z hlediska hydroenergetiky je významné využívání gravitace. Proudí-li voda v potrubí s výškovým rozdílem Δh , potom je při atmosférickém tlaku na obou koncích podle Bernoulliho rovnice pro proudění kapalin při zanedbání turbulentních ztrát rychlost proudění vyjádřena Torricelliho vztahem

$$v = \sqrt{2g \Delta h}, \quad (29)$$

což podle vztahu (28) představuje výkon vodního toku

$$P = \frac{1}{2} \rho S (2g \Delta h)^{3/2} \quad (30)$$

Příklad 6

Z nádrže ve výšce $h = 20$ m je potrubím o průměru $d = 20$ cm vedena voda na turbinu s účinností $\eta = 90$ %, která pohání elektrický generátor. Kolik vody proteče potrubím za sekundu a jaký je elektrický výkon generátoru?

Řešení:

Průtok potrubím při daném výškovém rozdílu je

$$q = Sv = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} \quad \text{číselně } q = 0,62 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

a výkon generátoru je

$$P_e = \eta P = \frac{\pi d^2}{8} \eta \rho (2gh)^{3/2} \quad \text{číselně } P_e = 110 \text{ kW.}$$

Závěr:

Vidíme, že při poměrech, kterých můžeme dosáhnout na malé horské říčce s průtokem okolo $1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ lze získat poměrně velký elektrický výkon okolo 150 kW pro místní účely. Této možnosti se v současnosti v horských oblastech stále více využívá.

Gravitační pole jako pole konzervativní lze využít i jako energetický zásobník, což má z hlediska národního hospodářství velký význam. Tento princip se využívá u přečerpávacích vodních elektráren. Speciálně konstruované agregáty slouží v době energetické špičky (nedostatku energie) jako turbíny s generátorem k výrobě elektrického proudu. V době energetického nadbytku pracuje agregát jako čerpadlo napájené z energetické sítě a přečerpává vodu z dolní nádrže do horní, aby mohla být znovu využita v době energetické špičky.

Příklad 7:

Čerpadlo s účinností $\eta_k = 90 \%$, které je umístěno na úrovni hladiny dolní nádrže, čerpá vodu do horní nádrže ve výšce $h = 200$ m. Jaká je maximální možná rychlost vody na vstupu čerpadla a jaká je při této rychlosti účinnost využití elektrického výkonu, kterým je napájeno čerpadlo.

Proudění vody považujeme za laminární, vnitřní tření zanedbáme.
Řešení:

Tlak na vstupu čerpadla p_1 určíme z Bernoulliho rovnice pro bod na hladině a bod na vstupu čerpadla $p_a = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_1$, ($p_a = 100$ kPa je atmosférický tlak). Podmínka, že tlak vody na vstupu musí být nezáporný, určuje mezní rychlost nasávání

$$v \leq v_m = \sqrt{\frac{2p_a}{\rho}}, \quad \text{číselně } v_m = 14,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Výkon čerpadla je podle vztahu (16) $P_k = (p_2 - p_1) Q_m / \rho$

Elektrický příkon čerpadla je $P_e = P_k / \eta_k$.

Tlak na výstupu čerpadla p_2 určíme z Bernoulliho rovnice pro bod na výstupu a bod na horním konci potrubí, která zní:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p_a.$$

Výkon čerpadla potom vyjadřuje vztah $P_k = \left(\rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) Q_m / \rho$

Považujeme-li za užitečné zvýšení potenciální energie vody, je užitečný výkon $P = \Delta E_p / \Delta t = Q_m gh$. Účinnost energetické akumulace vyjádříme poměrem $\eta = P / P_e$, po dosazení a úpravě pro maximální čerpací rychlost, dostáváme:

$$\eta = \eta_k \left(1 + \frac{p_a}{\rho gh} \right)^{-1} \quad \text{číselně } \eta = 0,86.$$

Závěr:

Pro přenos co největšího výkonu v potrubí daného průměru je žádoucí co největší rychlost proudění vody. Ta je však omezená, zde hodnotou

$14,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Účinnost přečerpávání je dána nejen účinností čerpadel, ale i energetickou ztrátou související s přeměnou energie proudící vody na teplo při vtoku do horní nádrže. Při hodnocení celkové účinnosti využití elektrického výkonu musíme uvážit ještě účinnost turbíny při zpětné výrobě elektrického proudu. Při účinnosti turbín 90 % je celková účinnost přečerpávací vodní elektrárny okolo 77 %. Pomocí přečerpávání se podstatně zvyšuje výkon elektrárny Liptovská Mara na Váhu, která má instalovaný výkon 200 MW. Nejvýkonnějším vodním dílem v ČSSR je přečerpávací elektrárna Černý Váh v Nízkých Tatrách, která má instalovaný výkon 665 MW a je tedy schopná krátkodobě (po několik hodin) krýt výpadek celé tepelné elektrárny. Předpokládá se, že v době energetických špiček dodá v období jednoho roku elektrický proud o celkové energii 1281 GWh. Na přečerpávání vody spotřebuje celkově 1674 GWh, a to odpovídá účinnosti 76,5 %.

Uvedený článek samozřejmě nevyčerpává celou problematiku daného tématu, ale na několika příkladech ukazuje, že i běžnými prostředky středoškolské fyziky dokážeme hodnotit řadu jevů z oblasti energetiky, které jsou v současnosti v popředí zájmu celé naší společnosti.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Newtonove zásluhy

RNDr. IMRICH STARÍČEK, CSc., Bratislava

Zachovali sa nám niektoré Newtonove študijné poznámky z rokov veľkého moru, kedy boli na dva roky uzavreté všetky školy v Anglicku a Newton musel byť na nedobrovoľných prázdninách vo svojom rodisku. Vtedy, podľa legendy, zažil príhodu s jablkom. V Newtonových poznámkach z toho obdobia však nenachádzame žiadnu zmienku o gravitačnom zákone. Newton sa i neskôršie zaoberal problémom gravitácie, ale o gravitačnom zákone sa nenašiel žiadny náznak. Ako to vysvetliť? Kedy možno s istotou povedať, že Newton sa začal vážne zaoberať dôkazom gravitačného zákona?

Na to máme jednoznačnú odpoveď: bolo to po r. 1679, teda asi tridsať rokov po spadnutí legendárneho jablka. Vtedy ho generálny sekretár Kráľovskej spoločnosti *Robert Hooke* písomne požiadal, aby vypočítal dráhu planéty, ak na ňu pôsobí dostredivá sila od Slnka nepriamo úmerná štvorcovej vzdialenosti. Tieto údaje získal Hooke z prác iných fyzikov

a astronómov, ktorí sa pokúšali o vysvetlenie Keplerových eliptických dráh planét.

Newton nemienil tento problém svojmu rivalovi Hookovi vypočítať, pretože vedel, že Hooke by si potom nárokoval prvenstvo v jeho vyriešení. Vyriešil tento problém sám pre seba a nikomu to nepovedal. Až na naliehanie astronóma *Halleyho*, po ktorom má dnes aktuálna Halleyova kométa svoje meno, sa nevraživosť medzi Newtonom a Hookom utíšila natoľko, že Newton sa rozhodol uverejniť nielen dôkaz hľadaného gravitačného zákona ale aj svoju vlastnú mechaniku, ktorá mu ten dôkaz umožnila.

Správnosť Newtonovej mechaniky dokazujú aj výpočty, ktoré boli v súlade nielen s pozorovaním pohybov nebeských telies, Slnka, Mesiaca, planét i komét, ale aj s pozorovaniami a meraniami pozemských pohybov, či už šlo o jednoduché stroje, kyvadlový pohyb alebo šikmý vrh s prihliadnutím k odporu vzduchu, problémy prúdenia kvapalín a problémy odporu telies v prúdiacej kvapaline. Jednou z prvých aplikácií Newtonovej mechaniky v astronómii bol Halleyov výpočet dráhy a návratnosti kométy, ktorú sme v nedávnej dobe aj my mohli vidieť na večernej oblohe.

Newtonovu slávu zvýšilo aj to, že do mechaniky zaviedol nové matematické metódy a postupy, ktoré dnes zahrňujeme pod názov infinitezimálny počet, teda použitie derivácií a integrálov. Sám ho vynašiel a prvý raz ho prakticky použil práve vo svojich Princípiach.

To, čo Issac Newton spracoval vo svojich Princípiach, by v podmienkach normálneho vedeckého vývoja vyžadovalo prácu niekoľkých generácií. Preto právom označujeme toto dielo za dielo génia, ktorý prišiel s novými, na tú dobu revolučnými, myšlienkami a tieto vedel rozpracovať do najmenších podrobností. Dobré ovládal nielen matematiku a geometriu svojej doby, ale aj fyzikálne myšlienky svojich predchodcov, *Galileiho*, *Huyghensa*, *Descartesa* a *Keplera*. Ale nadovšetko — usilovne, vytrvalo a húževnate pracoval. Zabúdala pri práci na riadnu životosprávu, nevšimol si okolitý svet. Táto práca ho veľmi vyčerpala. Po dokončení Princípií necháva profesúru v Cambridge a odchádza do Londýna, kde sa stáva správcom kráľovskej mincovne. Získal si také spoločenské postavenie, v ktorom si nik netrúfal kritizovať ho, alebo mu niečo vytýkať. Preto ho nanajvýš rozčuľovalo, keď po vydaní Princípií si Hooke začal nárokovať isté zásluhy o gravitačný zákon. Vtedy, už v pokročilom veku, začal Newton svojim príbuzným a známym rozprávať, že gravitačným zákonom sa zaoberal už v morových rokoch 1666/7, teda prv ako Hooke. Avšak vysvetlenia, prečo sa po „objavení“ gravitačného zákona odmlčal a čo bolo príčinou toho, že sa po rokoch k nemu vrátil bez Hookovho podnetu, nie sú vedecky podložené a nie sú ani presvedčivé. Omnoho pravdepodobnejšie je, že Newton si historku s jablkom sám vymyslel jedine preto, aby nik nepochyboval o jeho

prvenstve. Historka s jablkom zrejme nie je pravdivá, ale napriek tomu nestratila svoj symbolický význam a ten hovorí, že k veľkým vedeckým objavom dochádzame predovšetkým tým, že si všímame aj nepatrné maličkosti a tieto domýšľame do všetkých dôsledkov.

Lewis Carroll

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topoľčany

Skúste sa zamyslieť nad hádankou: Ktoré hodinky sú užitočnejšie, lepšie? Hodinky, ktoré ukazujú správny čas iba raz za dva roky, alebo hodinky, ktoré ukazujú správny čas iba dvakrát za deň? Rozhodli ste sa? Prvé hodinky predbiehajú denne o jednu minútu, druhé stoja.

Podobné hlavolamy vymýšľal v bezsenných nociach *Lewis Carroll*, v celom svete známy autor knižky pre malých čitateľov „*Alica v krajine zázrakov*“. Za týmto menom sa skrýval profesor matematiky v Oxfordskej univerzite *Charles Lutwidge Dodgson*, ktorý obmenou svojich mien do latinčiny — *Ludovicus Carolus* a potom späť do angličtiny — *Lewis Carroll*, si vytvoril svoj literárny pseudonym.

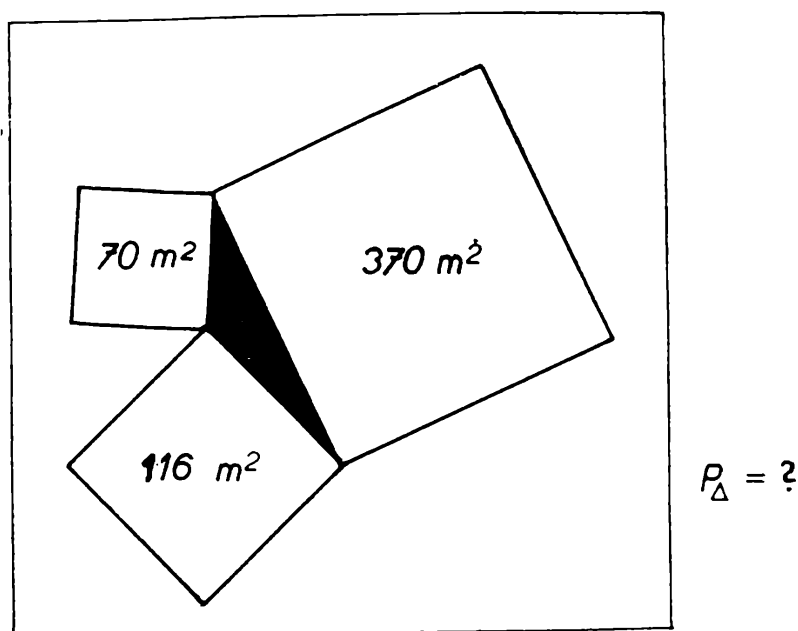
Charles Lutwidge Dodgson sa narodil 27. 1. 1832 v Davesbury v anglickom Lancashire. Pre svojich dvoch bratov a osem sestier už v mladosti vymýšľal bábkové hry s vlastnoručne vyrezávanými figurkami, zostrojoval hračky, spisoval a ilustroval domáci časopis. Vyštudoval na najstaršej anglickej univerzite v Oxforde. Tu zostal pôsobiť najprv ako knihovník. Neskôr sa stal profesorom matematiky a viac ako 30 rokov prednášal. Profesor *Dodgson*, po celý život slobodný mládenec, bol plachý a uzavretý. Trpel rečovou vadou — zajakával sa. Výborne sa vedel baviť medzi deťmi. Pre ne vymýšľal hádanky, vtipné riekanky a hlavolamy. Veľmi rád deti fotografoval a rozprával im svoje podivuhodné príbehy. Fantázia mu nikdy nechýbala.

Poznáte originálne Alicine dobrodružstvá? Tí mladší nech sa pozrú do knižiek:

Alenka v kraji divů a za zrcadlem (Praha, Albatros 1970) alebo *Alica v krajine zázrakov* (Bratislava, Mladé letá 1981).

Lewis Carroll čiže *Ch. L. Dodgson* sa vedel ponoriť do sveta detských snov a fantázie. Paralelami so životnou i odbornou realitou prenikol do zázračnej krajiny detskej duše. „Človek musí bežať, čo vládze, aby zostal tam, kde je, a ešte rýchlejšie, ak chce sa niekam dostať.“ Jeho život skončil 14. 11. 1898 v Guildforde.

Odborná práca *Ch. L. Dodgsona* sa týkala oblasti matematickej logiky.



„Spoločnosť by omnoho menej podliehala panikám a iným bludom a zvlášť politický život by bol úplne iný, keby väčšina argumentov široko rozosiaty po svete bola správna. Ale obávam sa, že je to práve naopak.“ Ak chcete čosi urobiť pre rozvinutie svojich schopností správne usudzovať, pozrite sa do knižky Lewisa Carrolla „Logika hry“, ktorá vyšla v Prahe v nakladateľstve Pressfoto roku 1972. Môžete sa z nej naučiť hru, ktorá vám pomôže pri skúmaní správnosti určitého druhu úsudkov.

Pre tých, ktorí radi riešia úlohy — dva hlavolamy od L. Carrolla:

1. Adam vraví, že Božena klame. Božena hovorí, že klame Cyril. Cyril tvrdí, že klamú Adam a Božena. Výrok Adama sa vzťahuje na daný výrok Boženy, výrok Boženy sa vzťahuje na vyjadrenie Cyrilovo a Cyrilov výrok sa týka výrokov Adama a Boženy. Kto klame a kto vraví pravdu?
2. Medzi tromi štvorcovými pozemkami, o plochách 74 m^2 , 370 m^2 a 116 m^2 (pozri na náčrt), zostáva kúsok pozemku tvaru trojuholníka. Aká je jeho plocha? Skúste to aj bez goniometrických vzťahov či kalkulačky, len pomocou Pytagorovej vety a vhodného náčrtu; výsledok je celočíselný.

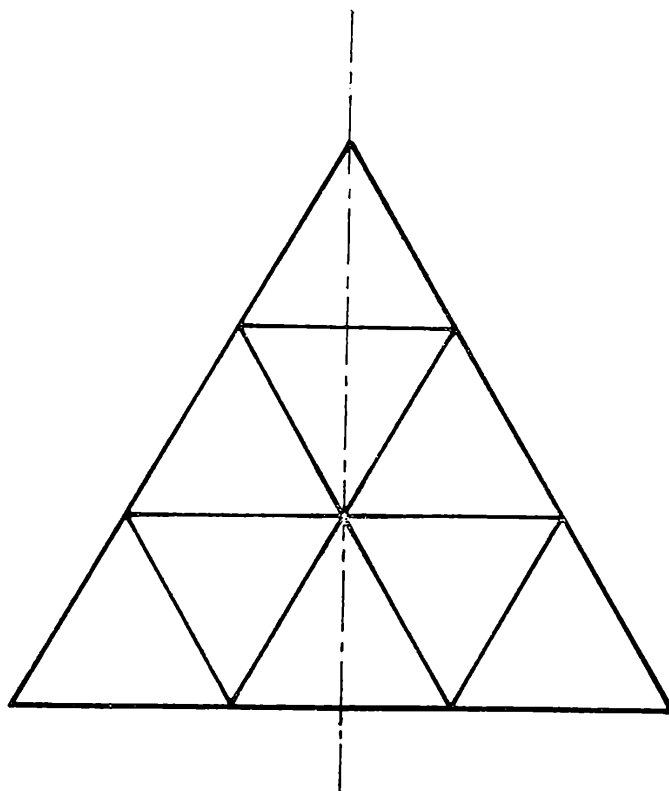
Podivínsky anglický profesor Dodgson prenikol do sveta literatúry i matematiky. Zanechal deťom veľa zaujímavých dobre vymyslených príhod a pripravil podnetné matematické hlavolamy. Skrývajú sa za podpisom Lewis Carroll.

Riešenie hlavolamov: 1. Božena vraví pravdu, Cyril i Adam klamú. 2. 11 m^2 .

Akvaball a kombinatorika

RNDr. JAROSLAV ŠVRČEK, PřF UP Olomouc

Možná, že se již někteří z čtenářů setkali s dětskou hračkou „Akva-ball“, která se v našich obchodech prodává v několika provedeních. V jedné z variant této hry má hráč za úkol složit ze tří bílých a šesti červených rovnostranných trojúhelníků jediný rovnostranný trojúhelník (viz obrázek).



Menší rovnostranné trojúhelníky se přitom vznášejí ve zvláštní, úzké nádržce z plexiskla, která je po okraj naplněná vodou. Pohyb menších trojúhelníků ve vodě může hráč ovlivnit mechanicky vyvolaným prouděním tekutiny pomocí speciálně konstruovaného pístu, který je zabudován v podstavci nádržky s vodou. Poloha sestavovaného rovnostranného trojúhelníka je uvnitř nádržky pevně vymezena tak, že jedna z jeho stran je rovnoběžná s podstavou nádržky. Výšku na tuto stranu nazveme kvůli jednoduššímu vyjadřování hlavní výškou.

Hráč musí při sestavování rovnostranného trojúhelníka dbát na jeho barevnou souměrnost podle hlavní výšky. Výrobce nabízí čtyři řešení této úlohy, která jsou vylisována na průhledném plexisklovém obalu hračky.

Pozorný hráč brzy zjistí, že počet možných sestavení rovnostranného

trojúhelníka za uvedených podmínek je větší než čtyři. Pokusme se tedy stanovit celkový přesný počet možných sestavení výsledného rovnostranného trojúhelníka pomocí tří bílých a šesti červených menších rovnostranných trojúhelníků, přitom budeme požadovat, aby sestavený rovnostranný trojúhelník byl barevně symetrický podle své hlavní výšky.

Označme tento počet $T(3; 6)$. V souvislosti s tím budeme řešit úlohu obecnější. Pokud je poměr délky strany sestavovaného rovnostranného trojúhelníka ku délce strany menšího rovnostranného trojúhelníka roven přirozenému číslu n ($n \geq 2$), je počet menších rovnostranných trojúhelníků, pomocí nichž je možno sestavit výsledný rovnostranný trojúhelník, roven součtu

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \frac{n}{2} [1 + (2n - 1)] = n^2.$$

Označme dále $T(n) = T(n; n^2 - n)$ počet všech možných sestavení rovnostranného trojúhelníka pomocí n menších trojúhelníků jedné barvy (bílá) a $n^2 - n$ menších rovnostranných trojúhelníků barvy druhé (červená), přitom požadujeme, aby sestavený rovnostranný trojúhelník byl barevně symetrický podle jedné, pevně vyznačené z jeho výšek (hlavní výška).

Předně si všimněme, že platí $T(n) = T(n; n^2 - n) = T(n^2 - n; n)$, přitom číslo $n^2 - n = n(n - 1)$ je sudé. Na hlavní výšce leží n menších rovnostranných trojúhelníků z celkového počtu n^2 menších rovnostranných trojúhelníků. Mezi rovnostrannými trojúhelníky ležícími na hlavní výšce mohou ležet trojúhelníky obou barev. Počet menších trojúhelníků, které na hlavní výšce neleží, je $n^2 - n$. Stačí však uvažovat vzhledem

k barevné symetrii polovinu tohoto počtu, tj. $\frac{n^2 - n}{2} = \binom{n}{2}$

menších rovnostranných trojúhelníků.

Rozlišíme dále 2 případy:

a) n je liché

Vzhledem k barevné symetrii sestavovaného rovnostranného trojúhelníku podle jeho hlavní výšky musí na hlavní výšce ležet vždy lichý počet j rovnostranných trojúhelníků z celkového počtu n menších rovnostranných trojúhelníků jedné barvy (bílá); $j = 1, 3, \dots, n$. Zbývajících $n - j$ rovnostranných trojúhelníků této barvy je symetricky rozloženo podle hlavní výšky sestavovaného rovnostranného trojúhelníka. Stačí se zabývat rozmístěním poloviny počtu zbylých menších trojúhelníků $\left(\frac{n - j}{2} \text{ trojúhelníků}\right)$ v jedné ze symetrických polovin sestavovaného trojúhelníka. Počet rozmístění j menších rovnostranných trojúhelníků

na hlavní výšce ($j = 1, 3, \dots, n$) je $\binom{n}{j}$, přitom počet rozmístění zbývajících $n - j$ trojúhelníků téže barvy mimo hlavní výšku je $\binom{\binom{n}{2}}{\frac{n-j}{2}}$

Celkově tedy pro $T(n)$ platí:

$$T(n) = \binom{n}{1} \binom{\binom{n}{2}}{\frac{n-1}{2}} + \binom{n}{3} \binom{\binom{n}{2}}{\frac{n-3}{2}} + \dots + \binom{n}{n-2} \binom{\binom{n}{2}}{1} + \binom{n}{n} \binom{\binom{n}{2}}{0}$$

b) n je sudé

Analogickou úvahou dostaneme:

$$T(n) = \binom{n}{0} \binom{\binom{n}{2}}{\frac{n}{2}} + \binom{n}{2} \binom{\binom{n}{2}}{\frac{n-2}{2}} + \dots + \binom{n}{n-2} \binom{\binom{n}{2}}{1} + \binom{n}{n} \binom{\binom{n}{2}}{0}$$

Vraťme se nyní ke hře „AkvaBall“, tj. případu, kdy $n = 3$. Podle úvahy a výsledku části a) máme tudíž $T(3) = T(3; 6) = \binom{3}{1} \binom{3}{1} + \binom{3}{3} \binom{3}{0} = 10$. Existuje tedy 10 možností, jak sestavit barevně symetrický rovnostranný trojúhelník v dětské hračce „AkvaBall“. Pokuste se všechny možnosti nakreslit.

Situace by byla ještě zajímavější v případě, kdyby výrobce použil menších rovnostranných trojúhelníků ve třech barvách (bílá, červená, modrá), a to po třech z každé barvy. Počet všech možných sestavení rovnostranného trojúhelníka za stejných podmínek jako v předešlém případě označme $T(3; 3; 3)$. Pokuste se jako cvičení dokázat, že $T(3; 3; 3) = (3!)^2 = 36$.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úlohy ze 64. ročníku

10. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y , které mají tu vlastnost, že je $x \geq y$ a že součet $x + y$ i rozdíl $x - y$ jsou přirozená dvojciferná čísla, v jejichž zápisu v desítkové soustavě se vyskytují tytéž číslice. Dokažte, že číslo y je vždy dělitelné devíti. Popište, jak se situace v řešení úlohy změní, jestliže budeme pouze vědět, že čísla x, y , jejich součet a rozdíl jsou dvojciferná čísla.
(Došlo 13 řešení)

Milan Trch

Autorovo řešení:

Řešení první části úlohy závisí na tom, zda pokládáme nulu za přirozené číslo či nikoliv. V kladném případě je zřejmě řešením každá dvojice $[x, 0]$, kde x je dvojciferné přirozené číslo. V tomto případě je $y = 0$ a tvrzení, že 9 dělí y , je splněno. Úlohu tedy lze beze změny řešit i v případě, že nulu pokládáme za číslo přirozené. Dále se již omezíme jen na příklady, kdy $y \neq 0$. Předpokládejme, že x, y splňují podmínky úlohy a $y \neq 0$. Potom existují cifry $a, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$ tak, že:

$$x + y = 10 \cdot a + b \qquad x - y = 10 \cdot b + a$$

Odtud ihned dostáváme vztahy:

$$2 \cdot x = 11(a + b) \qquad 2 \cdot y = 9(a - b)$$

Nutně tedy 9 dělí číslo y . A to bylo třeba ukázat. Zároveň však 11 dělí číslo x , ale také čísla a, b jsou nutně téže parity. Přitom $a > b$, neboť $x - y < x + y$. Tím dostáváme celkem 16 možností pro cifry a, b , které dávají i šestnáct hledaných dvojic $[x, y]$. Řešení lze popsat následující tabulkou:

a	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
b	1	2	1	3	2	4	1	3	5	2	4	6	1	3	5	7
x	22	33	33	44	44	55	44	55	66	55	66	77	55	66	77	88
y	9	9	18	9	18	9	27	18	9	27	18	9	36	27	18	9

Pokud se budeme chtít omezit navíc na dvojciferná čísla x, y , je třeba vynechat ty dvojice, ve kterých je $y = 9$.

Připustíme-li obecnější podmínku, že x, y , jejich součet i rozdíl jsou dvojciferná celá čísla vyhovující podmínkám úlohy $x > y$, je třeba postupovat opatrněji. Předně můžeme uvažovat dva možné rozdíly $x - y$ a $y - x$. Oba se liší pouze znaménkem, proto v zápise těchto rozdílů jsou použity stejné cifry jako v zápise součtu. Jediné změny tedy mohou souviset s různými znaménky v zápisech čísel $x, y, x + y, x - y$. Ve všech případech však lze řešení převést na první část úlohy. Čísla

$|x|$, $|y|$, $|x| + |y|$, buď $|x| - |y|$ nebo $|y| - |x|$ jsou přirozená a dvojciferná. Potřebná řešení lze tedy nalézt v tabulce z první části úlohy. Zřejmě je $|x| \neq |y|$, neboť jinak by některé z čísel $x - y$ či $x + y$ nemohlo být dvojciferné. Je-li navíc $x > y$, potom mohou nastat následující případy.

1. $0 < y < x$ tento případ byl řešen v první části úlohy.

2. $y < 0 < x$, ale zároveň $|x| > |y|$, Potom zřejmě $|y| = -y$.

Čísla $|x|$, $|y|$, kde $|x| > |y|$, lze nalézt v tabulce z první části úlohy, pokud bude

$$10 \quad a + b = |x| + |y| = x - y,$$

$$10 \quad b + a = |x| - |y| = x + y$$

Hodnoty pro x proto budou stejné jako v tabulce, hodnoty pro y se liší znaménkem od hodnot uvedených v tabulce. Vždy tedy 9 dělí y .

3. $y < 0 < x$, ale zároveň $|y| > |x|$. I v tomto případě je $|y| = -y$.

Pro čísla $|y|$, $|x|$, kde $|y| > |x|$, však musí platit

$$10 \cdot a + b = |y| + |x| = x - y,$$

$$10 \cdot b + a = |y| - |x| = -(x + y)$$

V tabulce tedy najdeme jako řešení dvojici $[|y|, |x|]$ a pro hledanou dvojici $[x, y]$ platí $[x, y] = [x, -|y|]$. V praxi to znamená vyměnit pořadí složek a druhou složku opatřit znaménkem „minus“. Potom je ovšem na rozdíl od předchozích případů první složka dělitelná devíti a druhá jedenácti.

4. $y < x < 0$. V tomto případě je také $|y| > |x|$, přitom $|x| = -x$ a $|y| = -y$. Označíme-li

$$10 \cdot a + b = |y| + |x| = -(x + y),$$

$$10 \cdot b + a = |y| - |x| = x - y$$

Pro dané a, b tedy v tabulce najdeme dvojici $[|y|, |x|]$ a hledaná dvojice $[x, y] = [-|x|, -|y|]$. V praxi to znamená vyměnit pořadí obou složek a opatřit je znaménky „minus“.

Řešení fyzikální úlohy ze str. 250

Každým příčným řezem výbojky projde za stejnou dobu stejný počet elektronů, takže veličina elektrický proud I je ve všech příčných řezech po celé délce výbojky stejná. Z toho důvodu intenzita magnetického pole nezávisí na vzdálenosti od katody, pokud ji měříme rovnoběžným směrem k podélné ose souměrnosti výbojky. Zmenšuje se ovšem se vzdáleností od podélné osy výbojky, stejně jako u normálního stejnosměrného proudu v přímém vodiči.

Řešení hrátek s dominem ze str. 250

a) $302642112 : 5 = 1513210560$

b) např.: $131440 : 2120 = 62$

$$306561 : 6011 = 51$$

8. ročník středoškolské odborné činnosti ve fyzice

RNDr. ZDENĚK KLUIBER, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Osmá celostátní přehlídka prací středoškolské odborné činnosti se uskutečnila v Žilině ve dnech 25.—27. 6. 1986. Jejím výrazným rysem bylo využití počítačů při řešení dílčích úkolů prací téměř ve třetině oborů SOČ.

V oboru fyzika bylo obhajováno 23 prací, které lze rozdělit do následujících skupin: experimentální fyzika — 5, teoretická fyzika — 1, aplikovaná fyzika — 10, astronomie — 5, učební pomůcky pro výuku fyziky — 2; celkem ve 12 pracích žáci použili počítače.

Odborná hodnotící komise oboru fyzika vyhodnotila jako nejlepší následující práce:

1. *Pavel Brož*, gymnázium Karviná: Kvantové vypařování černých děr. (Práce se zabývá rozбором kvantově mechanických aspektů chování částic v gravitačním poli černé díry; využívá se aparátu obecné teorie relativity a kvantové mechaniky). Práce byla dále oceněna Čestným uznáním ÚV SSM.
2. *Michal Janouch*, gymnázium Hradec Králové: Změny atmosférické cirkulace ve střední Evropě a jejich vliv na dobu trvání slunečního svitu. (Práce se zabývá rozбором změn slunečního svitu, změnami atmosférické cirkulace, příčinami poklesu slunečního svitu). Práce byla oceněna Diplomem časopisu Věda a technika mládeži.
3. *Miroslav Stíhr*, gymnázium Gottwaldov: Problém tří těles. (Práce se zabývá numerickým řešením pohybu tří těles, podrobněji variantami pravděpodobného vzniku soustav více těles).
4. Další ocenění získaly práce: *Igor Maliževský—Jan Pechar—Pavel Plachý*, gymnázium Praha: Fyzikálně podložený vztah pro závislost druhého viriálního koeficientu na teplotě. (Byl navržen nový vztah pro závislost druhého viriálního koeficientu na teplotě, pro 30 látek byla vypočítána Boylova teplota, pro další látky byly zjištěny konstanty závislosti druhého viriálního koeficientu na teplotě). Práce získala Diplom ÚV SSM.
5. *Vladimír Škotnár*, gymnázium Šurany: Amatérsky zrkadlový ďalekohľad, jeho konštrukcia a využitie v astronomii. (Práce poukázala na hlavní fyzikální principy uplatněné při konstruk-

ci dalekohledu, byla provedena originální azimutová montáž). Práce získala diplom časopisu Věda a technika mládeži.

6. *Marcel Sekerák*, SPŠS Snina: Meranie rýchlosti piestu lisu pomocou mikropočítačov. (Při měření rychlosti pohybu pístu je využita Hallova sonda, pro registraci impulsů, výpočet a grafické znázornění časového průběhu rychlosti je použit mikroprocesor.) Práce získala Diplom Ústřední rady československé vědecko-technické společnosti.

(Pozn.: Výsledky práce byly podány jako zlepšovací návrh v n. p. Vihorlat Snina).

Témata prací obhajovaných v celostátní přehlídce žáci získali jednak z patronátních podniků škol, z tematických úkolů vypsanych výzkumnými ústavy, ze studia odborné literatury, jednak od svého vyučujícího fyziky, vyplynuly z výuky fyziky ve škole, z konzultací pořádaných krajskou komisí SOČ atd. Důvodem zapojit se do SOČ v oboru fyzika byla jednoznačně snaha pokusit se řešit odborný problém, pracovat na řešení úkolu vyplývajícího z dlouhodobého hlubokého zájmu o specializovaný obor. Pouze 7 prací bylo zpracováno v kolektivu. Konzultanty prací žáků byli u více než poloviny prací vědečtí a odborní pracovníci z výzkumných ústavů, dále vyučující fyziky, odborní asistenti z vysokých škol. Pomoc konzultantů spočívala především v poskytnutí nezbytných rad a usměrnění v postupu řešení úkolu, v zajištění potřebné odborné literatury, v umožnění práce na jinak těžko dostupných přístrojích a aparaturách, v návrhu vhodných metod matematického zpracování experimentálních výsledků i s ohledem na využití počítačů. Žáci věnovali průměrně více než 80 hodin studiu literatury, kterou získali zejména v knihovnách pracovišť, na nichž byla práce zpracovávána (firemní literatura, katalogy, aktuální články atd.), ale i v knihovnách místních a školních. Pravidelně sledují následující časopisy: Rozhledy matematickofyzikální (polovina účastníků celostátní přehlídky), Věda a technika mládeži, Amatérské radio, Elektron, Říše hvězd, Technický magazín. Kozmos a další, zároveň i některé časopisy zahraniční. Měření, resp. vlastní tvůrčí práci, žáci věnovali průměrně 210 hodin. Komplexní vyhotovení práce (zahrnuje studium literatury, tvůrčí práci, zpracování práce, splnění formálních požadavků na práci spolu s organizačními) představují pak průměrně 370 hodin. Žáci odhadují jednotlivé díly práce: 20 % kompilace, 58 % vlastní tvůrčí práce, 22 % aplikace. V 7 případech vyučující fyziky pomohli při vypracování práce: poskytli rady, zajistili potřebnou literaturu, umožnili přístup k počítači, poradili při sestavování programu atd. V 5 případech žáci měli možnost využít, resp. předvést, výsledky své práce dosažené v rámci SOČ, bezprostředně ve výuce fyziky. Pomoc rodičů (ve dvou případech byl otec žáka konzultantem práce) spočívala především v zajištění konečných úprav práce: přepsání textu, zpracování fotodokumentů, kopií, svázání prací; důležitá byla však i morální podpora žáků, pochopení rodičů pro jejich práci

atd. Vždyť právě sehnání nezbytné literatury, důležitých součástí, splnění formálních požadavků kladených na práci v SOČ (obecně však jednoznačně nedostatek času) se staly největšími těžkostmi při vypracování práce. Průměrně bylo obhajováno na jednotlivých krajských (městských) přehlídkách SOČ v oboru fyzika 12 prací. Nejvíce byli žáci při řešení úkolů práce zaujati získáváním nových výsledků, prací na počítači, vlastní konstrukční prací atd. Výsledky prací, resp. některé jejich části, naleznou uplatnění v činnosti astronomických kroužků, ve výuce fyziky, v práci vysokoškolských laboratoří, v laboratořích podniků, ústavů atd. Vedle již uvedených se jedná o práce: Výpočet vlastností nestabilních subnukleárních částic (*M. Bejdová, T. Krátký, G. Říčaný*); Vliv podhuštění pneumatik na spotřebu osboňho automobilu (*P. Biskup, G. Plzeň*); Řešení dvourozměrného sdílení tepla ve vyzdívce tunelové pece síťovou metodou pomocí počítače PMD-85 (*L. Koudelka, G. Jablonec*); Výpočet externého gama žiarenia potrubia metódou MONTE CARLO (*P. Markovič, SPŠS Bratislava*); Algoritmizácia a spracovanie výškového vetra z meraní rádiolokátorom Meteorit 2 (*R. Mráz, G. Poprad*); Hodnocení detekčních parametrů scintigrafu 8100 MB (*T. Ölveczký, R. Chmelický, G. Uherské Hradiště*); Výpočet umělého osvětlení (*P. Rydlo, J. Waldek, SPŠS Náchod*); Soubor programů z vlnové optiky (*M. Svatoš, G. Český Brod*); Automatický ovládač pece (*J. Vladyka, I. Šimek, G. Pardubice*). Ve dvou případech se staly získané výsledky součástí výzkumných zpráv, o dalších dvou pracích bude publikováno v odborných časopisech. Žáci charakterizují svoji práci v SOČ jako možnost prohloubit svoje znalosti, získat příležitost systematicky pracovat v oboru svého zájmu, seznámit se s postupy odborné práce; kladně hodnotí dobrou organizaci SOČ.

11 účastníků celostátní přehlídky SOČ bylo úspěšnými řešiteli krajských kol fyzikální olympiády, dva celostátního kola. Navzájem využili získané znalosti z řešení úkolu v SOČ a z účasti ve FO. Dochází tak k prolínání a spojování teoretických a praktických znalostí žáků. Současná účast v SOČ v oboru fyzika a ve FO prohlubuje vědomosti žáků z fyziky a vytváří předpoklady pro jejich odpovědnou volbu budoucího povolání ve vazbě na fyziku, technické obory. Samozřejmě i nadále je třeba dávat přednost v SOČ pracem, které budou vycházet především z experimentálních výsledků, v nichž si žáci budou ověřovat a prohlubovat teoretické znalosti získané ze školní výuky fyziky a ze studia odborné literatury, pracem, které budou orientovány k praktickým výsledkům a budou dokladem prohlubování znalostí ve specializovaných oborech odborných zájmů žáků.

Žáci, kteří ve svých pracích využili počítačové zpracování problému, se ve většině případů naučili programovat právě až při řešení úkolu v rámci SOČ, resp. v zájmovém kroužku. Pouze 6 z účastníků celostátní přehlídky SOČ v oboru fyzika mělo možnost využívat počítač ve škole.

Zájem o obor, vztah k fyzice a k výpočetní technice, práce v odborném kolektivu, práce v SOČ a ve FO, učitelé fyziky — to vše zásadně ovlivnilo volbu budoucího povolání účastníků celostátní přehlídky. Vyplyvá z ní následující rozdělení studijních směrů: 13 — vysoké školy s technickým zaměřením, 7 — fakulty matematicko-fyzikální a přírodovědné, 3 — dosud neurčeny.

Při vlastní přehlídce žáci prokázali poměrně dobré znalosti v jimi zvolených specializovaných oborech, přednesy připravených referátů i odpověďmi při vlastní obhajobě prací potvrdili dobrou úroveň vědomostí získaných při vypracování svých samostatných prací. Je potěšitelné, že žáci si poradili vedle řešení fyzikálních problémů i s řadou konkrétních úkolů technických (strojírenství, elektronika, elektrotechnika, dynamika pružných těles a stavebních konstrukcí atd.), s některými vazbami fyziky na další přírodovědné obory; v řadě případů prokázali velmi dobrou úroveň znalostí programování v jazycích BASIC a FORTRAN.

Již třetím rokem byla uspořádána Centrem pro mládež, vědu a techniku ÚV SSM ve spolupráci s Komisí mladých odborníků Fyzikálního ústavu ČSAV Letní škola mladých vědců oboru fyzika, určená zejména pro nejlepší účastníky celostátní přehlídky SOČ. Její program byl zaměřen na prohloubení znalostí žáků především z oblasti moderní fyziky. Lektori — pracovníci Fyzikálního ústavu ČSAV — přednesli přednášky a besedovali s účastníky letní školy o problematice speciální teorie relativity, historii a současnosti fyziky pevných látek, úloze počítače ve fyzikálním výzkumu, o pulsním plynovém laseru, typech a aplikacích laserů, fyzice polovodičů, astrofyzice, základech elektrostatiky, o vztahu fyziky a ekologie, o fyzice nízkých teplot, kosmonautice, o problémech kapalných krystalů, o fyzice vysokých energií. Účastníci letní školy (celkem 24) tak získali další nové poznatky pro svoji budoucí odbornou práci a to jak ve středoškolské odborné činnosti, tak i případně ve studentské vědecké a odborné činnosti při studiu na vysoké škole.

Obsahové zaměření prací SOČ v oboru fyzika v následujícím období by mělo nadále zahrnovat: řešení fyzikálních problémů a úloh z astronomie a kosmonautiky, problémy z oblasti fyziky pevných látek — mechanické, tepelné, elektrické, magnetické a elektromagnetické působení na pevné látky, fyzikální základy mikroelektroniky, užití polovodičových prvků, optické problémy, problémy fotografie, měření spekter typických zdrojů světla, aplikace laserů, modelování fyzikálních dějů na počítači, studium aerodynamiky a hydrodynamiky, studium problémů biofyziky, využití počítače ve fyzikálním výzkumu, studium vztahů fyziky a ekologie, problémy jaderné fyziky, netradiční pomůcky pro výuku fyziky, vzájemné vztahy fyziky s ostatními přírodními vědami, fyzikální základy technických zařízení, studium současných problémů fyziky atd.

Další rozvoj středoškolské odborné činnosti by měl zahrnout zejména

i posílení její výchovně-vzdělávací složky — umožnit žákům systematické konzultace při vypracování prací, rozšířit jejich možnosti při seznamování se s aktuálními úkoly fyziky, motivovat je pro studium fyziky a technických oborů. Je proto nutno zvýšit nároky především na nižší stupně přehlídek prací, žáků, objektivně posuzovat jejich samostatnou práci. Je nezbytné zkvalitňovat středoškolskou odbornou činnost, jako významnou formu rozšiřování znalostí žáků, podporovat jejich zájem o vlastní odbornou práci.

Kalendár M-F: február 1987

3. II. 1862 zomrel *Jean Baptiste Biot*, francúzsky matematik, fyzik a astronóm. Rozvinul analytickú geometriu kuželosečiek a kvadrík. Odhalil zákon udávajúci intenzitu magnetického poľa okolo vodiča s elektrickým prúdom.
5. II. 1797 sa v St. Malo narodil *Jean Marie Constant Duhamel*, francúzsky matematik. Rozvinul matematickú fyziku. Prispel k vysvetleniu analýzy nekonečne malých veličín.
7. II. 1877 sa narodil *Godfrey Harold Hardy*, anglický matematik. Pracoval v oblasti teórie čísel a teórie funkcií. Zaoberal sa trigonometrickými radmi, divergentnými radmi a nerovnosťami.
8. II. 1957 zomrel v Heidelbergu *Walther Wilhelm Georg Bothe*, nemecký fyzik. Študoval röntgenove žiarenie, žiarenie radioaktívnych prvkov a problémy jadrovej fyziky. Spolu s M. Bornom získal Nobelovu cenu za fyziku pre rok 1954.
8. II. 1957 zomrel v Princetone *John von Neumann*, americký matematik maďarského pôvodu. Ovplyvnil rozvoj funkcionálnej analýzy, teórie množín, topológie, teórie grúp i teórie hier. Rozvinul teóriu automatov, matematickú logiku a teóriu počítačích strojov. Prispel k rozvoju matematických metód kvantovej mechaniky.
11. II. 1847 sa v Milane (USA, štát Ohio) narodil *Thomas Alva Edison*, americký vynálezca. Stal sa priekopníkom všestranného využitia elektrickej energie. Prvý pozoroval jav termoelektronovej emisie v roku 1884.
13. II. 1787 zomrel *Rudžer Josip Boškovič*, chorvátsky fyzik, matematik a filozof. Rozvíjal systém dynamickej atomistiky. Mal vplyv na rozvoj fyziky v prvej polovici 19. storočia. Prednášal v Pávii, v Miláne i Paríži.
19. II. 1897 zomrel v Berlíne *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass*, nemecký matematik. Zdôvodnil teóriu komplexných funkcií metódou mocni-

nových radov. Prispel k objasneniu logických základov matematickej analýzy.

20. II. 1967 zomrel v Princetone *Jacob Robert Oppenheimer*, americký fyzik. Jeho vedecké práce sa viažú ku kvantovej mechanike, teórii kozmického žiarenia, fyzike elementárnych častíc a teórii relativity. Riadil výskum v Los Alamos, kde zkonštruovali prvú atómovú bombu. Študoval aj všeobecné problémy súčasnej vedy.
21. II. 1912 zomrel *Osborne Reynolds*, anglický fyzik a inžinier. Zaoberal sa teóriou prúdenia viskózných kvapalín, teóriou turbulencie.
22. II. 1857 sa v Hamburgu narodil *Heinrich Rudolf Hertz*, nemecký fyzik. Experimentálne dokázal existenciu elektromagnetických vln, vytvoril teóriu oscilátoru.
23. II. 1917 v Paríži zomrel *Jean Gaston Darboux*, francúzsky matematik. Bol profesorom na Sorbonne. Pracoval v oblasti diferenciálnej geometrie, teórie diferenciálnych rovníc a teórie analytických funkcií.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Fischer, J.:

PRŮHLEDY DO MIKROKOSMU

Vydala Mladá fronta v edici Kolumbus, svazek 108, Praha 1986, 1. vydání, 244 stran, 24 obrázků, 13 tabulek, 34 fotografií, z toho 12 barevných, cena vázaného výtisku 22 Kčs.

Víte, co je předmětem zkoumání fyziky elementárních částic? Víte, jaké jsou zákonitosti mikrosvěta? Jaké jsou nejmenší částice hmoty? Znáte silová působení mezi elementárními částicemi? Jsou elementární částice skutečně elementární? Znáte přírodopis subnukleárních částic? Víte, co jsou to hadrony, leptony, baryony, podivné částice, kvarky, gluony? Jsou kvarky bezstrukturální částice anebo mají další strukturu?

Víte, z kolika kvarků jsou sestaveny mezony a baryony? Víte, že existují kvarky s barvou, vůní a krásou? Víte, jak bylo „uloveno“ elektronové antineutrino? Je proton stabilní částicí? Znáte princip urychlovačů se vstřícnými svazky? Odpovědi na tyto, ale i na další otázky z fyziky elementárních částic (neboli také z subnukleární fyziky) najdete v zajímavě napsané knize „Průhledy do mikrokosmu“ od RNDr. Jana Fischera, CSc. Autor knihy, teoretický fyzik dr. Jan Fischer, je vedoucím vědeckým pracovníkem Fyzikálního ústavu ČSAV v Praze. [Předmětem jeho zájmu je studium interakcí mezi hadrony při velmi vysokých energiích. Dlouhodobě pracoval v různých mezinárodních jaderných

ústavech (Spojený ústav jaderných výzkumů v Dubně u Moskvy, CERN — Evropské centrum pro jaderný výzkum u Ženevy, Mezinárodní centrum pro teoretickou fyziku v Terstu), a je tedy povoláným k napsání takovéto knihy.

Knihy je napsána poutavě, srozumitelně a bez použití matematiky. Tato kniha je jedinou knihou v ČSSR, která pojednává na populární úrovni o posledních výsledcích dosažených v bádání ve fyzice elementárních částic. Je určena širokému okruhu čtenářů. Svým podáním je přístupná i všem středoškolákům, kteří chtějí nahlédnout do světa nejmenších částic.

Knihy je rozdělena do sedmnácti kapitol. Pod názvem většiny kapitol je uveden přiléhavý citát významného přírodovědce, který má vztah k obsahu kapitoly. Jako příklad uvedme citát k páté kapitole nazvané „Kácení model“ od *Nielsa Bohra*: „Pronikání do světa atomů je možno srovnat s velkými plavbami kolem světa, plnými objevů, či smělymi výzkumy astronomů, pronikajících do hlubin světového prostoru“. Dvanáctou kapitolu („Pátrání po stopách částic“) a třináctou („Zdroje částic mimo Zem i na Zemi“), které jsou věnovány experimentálním meto-

dám (detektorům částic a urychlovačům částic) fyziky elementárních částic, vhodně doplňuje 34 černobílých a barevných fotografií, které zobrazují soudobé urychlovače nabitých částic, různé složité detekční systémy a ukazují záběry z experimentálních hal významných jaderných středisek (SÚJV Dubna, CERN u Ženevy, DESY Hamburk, IFVE Serpuchov). Prostřednictvím nich čtenář získává představu o velikosti, rozsáhlosti experimentálních zařízení a špičkové technice a technologii, nezbytné k provádění náročných experimentů v subnukleární fyzice. Škoda jen, že vydání knihy trvalo příliš dlouho (čtyři roky, rukopis byl dopsán v srpnu 1982, kniha vyšla v říjnu 1986). Za tu dobu postoupil výzkum ve fyzice elementárních částic dopředu. V roce 1983 byly v CERN objeveny teoreticky předpověděné intermediaální bozony W^+ , W^- a Z^0 . Tomuto důležitému objevu měl autor možnost věnovat již jen poznámku v „Dodatku“, zřejmě při korektuře knihy.

Knihu „Průhledy do mikrokosmu“ od RNDr. Jana Fischera, CSc., doporučuji všem čtenářům časopisu *Rozhledy* matematicko-fyzikální.

Zdeněk Janout

REPORTÁŽ Z MIKROSVETA



AAA, AKO TAK POZERÁM, DOSTAL SOM SA AŽ DO BLÍŽKOSTI JADRA. TAK TO VÁH TEDA EŠTE MOŽEM UKÁZAŤ INÝ SPÔSOB NAŠHO CESTOVANIA A TO V BLÍŽKOSTI ŤAŽKEJ ČASTICE.



MOŽEME TEDA CESTOVAT RÔZNYMI SPÔSOBAMI, TAK AKO AJ VY, ĽUDIA, NECESTUJETE IBA VLAKOM, ALEBO IBA AUTOM, ALE VOLITE SPÔSOB CESTOVANIA PODĽA SVOJICH MOŽNOSTÍ.



ALE ČO TO?



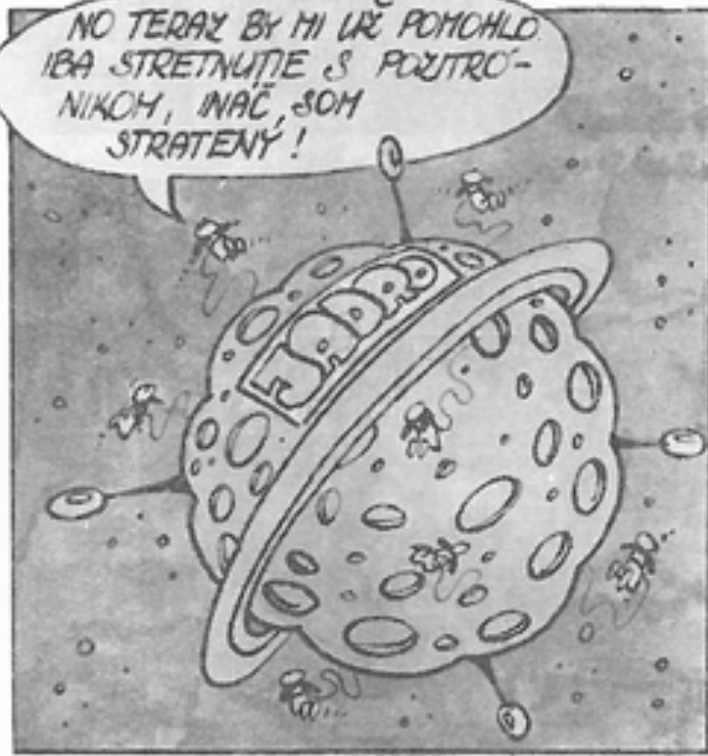
ČO CHCE UROBIŤ TEN PROTÓN? VEĎ JA NECHCEM BYŤ VIAZANÝ NA JADRO!

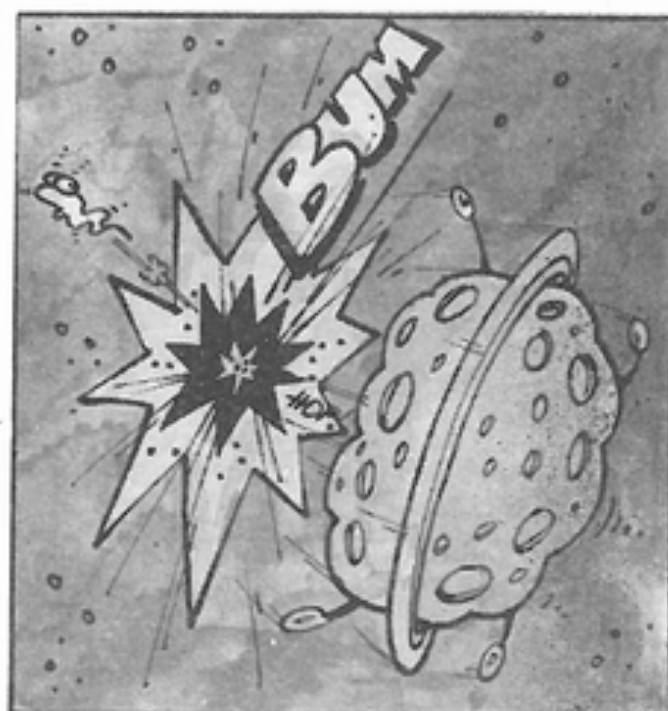


JEJDA!!



NO TERAZ BY MI UŽ POMOHLO IBA STRETNUTIE S POZITRONOM, INAC SOM STRATENÝ!





PÍŠE: J. CHRAPAN KRESÍ: V. HÍSTRIK

POHLEDY DO DĚJIN

Babylonsko-biblický obraz světa

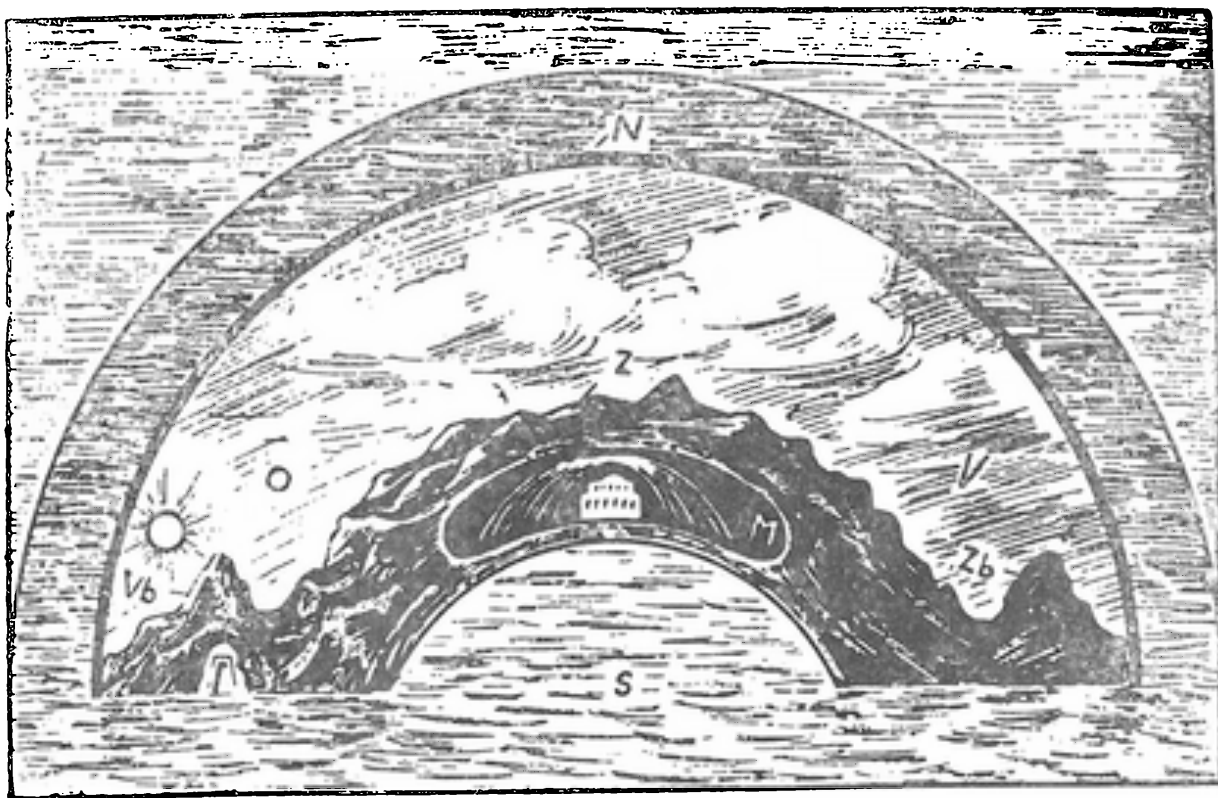
Nejvýznamnější věcí, kterou může přírodověda dát každému člověku, je správný fyzikální obraz světa. Současný fyzikální obraz světa je už pátý ucelený názor na kosmos a dění v něm: jako první lze uvést ten, který je babylonského původu a má svůj odraz i v bibli.

Podle tohoto názoru je Země jakousi kulovou klenbou, na jejímž povrchu se odehrává veškeré životní dění, uvnitř je podsvětí, pod ním je podzemní oceán (S), ze kterého pramení řeky. Ve výšinách je nebeská klenba držící nebeský oceán (N) a nad ním je druhé nebe, kde sídlí bohové. Astronomické a meteorologické jevy se odehrávají v prvním nebi. Slunce a hvěz-

dy zapadají za západní horstvo (končiny Země), na východě se znovu rodí. Obejít Zemi ovšem není možné; otvory v nebeské klenbě někdy padá déšť z nebeského oceánu, který chrání Zemi před účinky ohně z druhého nebe, týmiž otvory (hvězdami) nebeský oheň vidíme.

Je zřejmé, že babylonsko-biblický obraz světa je v podstatě materialistický a je odvozen z bezprostředního smyslového pozorování přírodních jevů. Nelze ho považovat jen za historickou kuriozitu, protože odpovídal po celá tisíciletí stupni poznání přírody v počátcích lidské civilizace.

Vladimír Malíšek



Čo je matematika?

Matematika je oblasťou ľudskej činnosti, v ktorej každá nová etapa vývoja prináša so sebou najprevratnejšie, no pritom najmenej deštruktívne zmeny.

J. V. Grabinerová

Matematika je jediná dokonalá metóda, ako vodiť sám seba za nos.

A. Einstein

Vydáva ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1987.

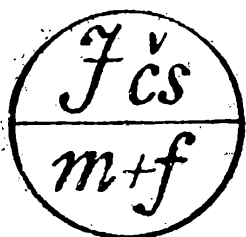
ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(7)

ROČNÍK 65, 1986/87
BŘEZEN

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný,
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr.
Ján Chrapan, CSc., VVŠ-ČSSR Lip-
tovský Mikuláš, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Ja-
nout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr.
Hana Kořínková, CSc., VŠZ Pra-
ha, doc. dr. Karol Križalkovič, CSc.,
PF Nitra, prof. dr. Vladimír Majer-
ník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Josef
Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich
Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav
Šedivý, CSc., UK Praha, ing. dr. Vác-
lav Šindelář, CSc., Praha, doc. dr.
Martin Šolc, CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 11639 Praha 1-No-
vé Město.
Telefon 298750 (meziměsto), 298751
až 9.

OBSAH

Petr Karlovský: Úlohy o lhářích a logi- ká induice (2. část)	265
Vlastimil Mráz: Gaussova eliminační me- toda i v počítačovém užití	267
Jiří Mída: O jedné nečekané aplikaci	272
Ladislav Drs: Padesát let „zářezové“ metody	276
Ivan Fischer: Základy programování mi- kropočítačů 7	279
Cyril Höschl: O mechanické rovnováze těles I	285
Ivo Kraus: O krystalech a určování je- jich struktury	289
Dušan Jedinák: Ruský Gauss	294
Jarmila Pěničková: Algebrogramy s ta- jenkou	297
Emil Kašpar: Zrychlení pohybu na ko- lečkových bruslích	298
Stanislav Horák: Ze starých matematic- kých časopisů	298
Tomáš Schütz: Úlohy ze zahraničních ča- sopisů	299
Jana Vršková: Sú študenti gymnázií vo výhode?	300
Tomáš Schütz: K jubileu časopisu Kvant	302
dj: Kalendár M-F	304
Z nových knih	306
Ján Chrapan, Vlastimil Mistrik: Reportá- že z mikrosвета	307
Vladimír Malíšek: První česká učebnice dějin matematiky 3. str. obálky	
Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (61–64)	příloha

Úlohy o lhářích a logická intuice (2. část)

RNDr. PETR KARLOVSKÝ, CSc., BFÚ ČSAV Brno

V první části jsme se seznámili se standardním řešením klasické logické úlohy, která zní takto:

„Na ostrově žijí dva znepřátelné kmeny: Pravdomluvní, kteří za všech okolností mluví pravdu, a Lháři, kteří vždy lžou. Cestovatel, který zde zabloudil, stojí na rozcestí dvou cest, z nichž pouze jedna vede k moři. Jakou otázku položí domorodec, kterého zde potkal, aby z jeho (jednoslovné) odpovědi získal potřebnou informaci?“

Čtenáři byli vyzváni ke hledání netriviálních řešení, která mají být (na rozdíl od řešení uvedených v článku) jednoduchá a elegantní. Ti, kteří některá řešení našli, i ti méně úspěšní jsou jistě zvědaví, jaká řešení měl na mysli autor. Začneme tedy přímo jedním z nich:

ŘEŠENÍ 5: „Byl zde nějaký domorodec a tvrdil, že tato cesta“ (cestovatel ukazuje na cestu A) „vede k moři. Patřil ke tvému kmeni?“

Sestavením tabulky pravdivostních hodnot si čtenář snadno ověří, že řešení je skutečně správné. Jeho půvab spočívá v tom, že v odpovědi na položenou otázku je skryta informace, která zdánlivě není předmětem otázky.

Tážeme se vlastně na pravdivostní hodnotu výroku d , který zní: „Smyšlený domorodec S a tázaný domorodec T patří ke stejnému kmeni.“ Lze jej chápat jako složený výrok

$$d \equiv (e \wedge b) \vee (\bar{e} \wedge \bar{b}),$$

kde e je výrok „ S patří k Pravdomluvným“ a b je výrok „ T patří k Pravdomluvným“. Protože pravdivostní hodnota e je vždy totožná s hodnotou výroku „cesta A vede k moři“, označeného v první části článku jako a , můžeme v uvedené formuli zaměnit e za a . Získáme tak výrok

$$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \equiv c,$$

který byl odvozen dříve a použit k formulaci řešení 1. Jak se dalo očekávat, řešení 1 a 5 jsou z hlediska logického obsahu totožná, ačkoliv ze slovní formulace to není zřejmé.

Další řešení využívá toho, že skutečnost je nejprve interpretována

příslušníkem jednoho kmene a tuto interpretaci pak dále transformuje příslušník druhého kmene:

ŘEŠENÍ 6: „Kterou cestou by mne poslal k moři příslušník tobě nepřátelského kmene?“ (Nebo pro zachování formy takto: „Poslal by mne příslušník tobě nepřátelského kmene k moři cestou A ?“)

Cestovatel ví, že právě jedna ze dvou následujících interpretací, jejichž výsledkem je získaná odpověď, je lživá. Proto se pustí cestou A tehdy, když dostane zápornou odpověď.

Lze převést i toto řešení na původní složený výrok c ? Označme f výrok „ S by poslal — kdyby byl tázán — cestovatele k moři cestou A “ a g výrok „ S patří k Pravdomluvným“ Pak platí

$$f \equiv (g \wedge a) \vee (\bar{g} \wedge \bar{a}),$$

a protože $g \equiv \bar{b}$, je dále

$$f \equiv (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \equiv \overline{(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})} \equiv \bar{c}.$$

Logický obsah je tedy opět stejný, jenom místo výroku c se v řešení 6 používá jeho negace.

Analogicky nás napadá další varianta:

ŘEŠENÍ 7: „Kterou cestou by mne poslal k moři příslušník tvého kmene?“ (Resp. v našem formalismu: „Poslal by mne příslušník tvého kmene — kdyby byl tázán — k moři cestou A ?“)

Je-li T pravdomluvný, je odpověď pravdivá. Pro T z kmene Lhářů dostaneme negaci negace a odpověď je opět správná (tj. kladná v případě, že cesta A vede k moři). Důkaz, že i v této formulaci je zašifrován složený výrok c , si již jistě udělá čtenář sám.

Nabízí se další zjednodušení:

ŘEŠENÍ 8: „Kterou cestou bys mne poslal k moři (kdybys se tě zeptal) ?“ (Nebo pro odpověď ano — ne: „Kdyby se tě někdo ptal na cestu k moři, poslal bys ho tudy?“ A cestovatel ukazuje na cestu A .)

Rozdíl oproti formulaci „Která cesta vede k moři?“, která není řešením, je na první pohled nepatrný. Přitom v řešení 8 se ptáme na pravdivostní hodnotu složeného výroku $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$, zatímco uvedená nesprávná formulace je pouze otázkou po pravdivosti výroku a . Řešení 8 je už zjednodušeno do té míry, že se zde může projevit nejednoznačnost běžného jazyka. Nebýt dodatku v závorce, domorodec by mohl otázku chápat pouze jako zdvořilou formu dotazu na cestu k moři, a pokud by patřil ke Lhářům, musel by tazatele poslat do vnitrozemí.

Směrem k opačnému extrému můžeme naopak otázku komplikovat tak, že i pro domorodce bude problém zjistit, jak má odpovědět, aby to bylo v souladu s jeho kmenovou příslušností:

ŘEŠENÍ 9: „Byli zde tři domorodci, A , B a C . C tvrdil, že většina z nich jsou Lháři. B tvrdil, že A není jeho nepřítel, a A tvrdil, že C je Lhář. Řekni mi, zda je pravdivá právě jedna z následujících dvou vět:

1. B patří ke tvým nepřátelům.

2. Cesta A vede k moři.“

Čtenář by teď měl zjistit, kterou cestou se cestovatel vydá, když na otázku dostane kladnou odpověď. Úloha není jednoduchá, ale s logickou intuicí již nemá nic společného. Vystačíme s obvyklými prostředky formální logiky, jak byly demonstrovány na rozbořech předchozích řešení.

Gaussova eliminační metoda i v počítačovém užití

Doc. dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

K významným a zajímavým úlohám, které od pradávna řešili nejen matematikové, patří nejrůznější rovnice a jejich soustavy. V našem článku se budeme zabývat známou *Gaussovou eliminační metodou*, která se používá především k numerickému řešení větších soustav lineárních rovnic. Počet neznámých a počet na sobě nezávislých rovnic zpravidla bývá stejný. Algoritmická povaha metody umožňuje její použití i na počítačích, zvláště při rozsáhlých a náročných výpočtech.

Nejdříve vyřešíme Gaussovou eliminační metodou jednoduchou soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých tak, jak se řeší při výpočtu tužkou na papíře. Protože se ve školách, na závodech a ve společnosti vůbec počítače rychle rozmáhají, ukážeme i *počítačovou modifikaci eliminační Gaussovy metody*. Naše tematika souvisí s maticemi, o nichž v našem časopise psal dr. Jiří Mída, CSc.¹⁾, proto poukážeme i na *maticový zápis* řešení soustavy lineárních rovnic.

Napsali jsme, že soustavu tvoří zpravidla na sobě nezávislé rovnice. Nezávislostí rovnic v soustavě rozumíme, že žádnou z rovnic nelze získat jako součet násobků rovnic ostatních. Např. rovnice

$$3x - 4y = 5$$

$$12x - 16y = 20$$

nejsou nezávislé, protože druhá rovnice je čtyřnásobkem první; v soustavě je zbytečná. Podobně v soustavě

$$3x - 2y + z = 4$$

$$x + 11y + 2z = 0$$

$$5x - 15y = 8$$

je třetí rovnice zbytečná, je ji možno získat odečtením druhé rovnice od dvojnásobku první — rovněž tato rovnice není nezávislá.

¹⁾ *O maticích*, RMF roč. 58, 1979/80 č. 4, str. 154—161

Se jménem věhlasného německého matematika, fyzika a astronoma *Carla Fridricha Gausse* (1777 až 1855) jste se nejednou ve škole setkali, např. při znázorňování komplexních čísel v Gaussově rovině.

Začneme příkladem soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) dále uvedené po levé straně; po pravé straně je tato soustava převedena ekvivalentními úpravami do tzv. *trojúhelníkového tvaru soustavy*, který je charakteristický pro Gaussovu eliminační metodu. Zatímco první rovnice trojúhelníkového tvaru obsahuje všechny čtyři neznámé, v následujících rovnicích vždy je jedna další neznámá eliminována; až v poslední rovnici je jen jediná neznámá.

$$\begin{array}{rcll} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = & -3 & x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 2 & x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 3 & 20x_3 + 16x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & 6x_4 = 24 \end{array}$$

Z poslední rovnice soustavy trojúhelníkového tvaru je $x_4 = 4$. Po dosazení této hodnoty do předešlé rovnice vypočteme $x_3 = -3$. Dosazení již vypočtených hodnot neznámých do druhé rovnice dává $x_2 = 2$ a obdobně z první rovnice určíme $x_1 = 1$. Čtenář se snadno přesvědčí, že vypočtené hodnoty neznámých z trojúhelníkového tvaru soustavy vyhovují i dané soustavě. Je tedy užitečné seznámit se s postupem, vedoucím k získání trojúhelníkového tvaru soustavy. Ukážeme to na našem příkladu.

Předně beze změny opíšeme první rovnici soustavy a ze zbývajících rovnic soustavy budeme eliminovat neznámou x_1 . Ve druhé rovnici nového zápisu soustavy vyloučíme x_1 tím, že sečteme první a druhou rovnici; třetí rovnice je součtem původní třetí rovnice s první rovnicí znásobené číslem -2 ; poslední rovnice je součtem čtvrté rovnice a první rovnice znásobené číslem -3 (vedle rovnic jsou dále za svislými čarami uvedena čísla, jimiž násobíme jednotlivé rovnice, abychom eliminovali neznámou). Tak dostáváme soustavu, v níž je v posledních třech řádcích eliminováno x_1 . K maticovému zápisu se vrátíme později.

$$\begin{array}{rcll} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = & -3 & \left| \begin{array}{c} 1 \\ (-2) \\ (-3) \end{array} \right| \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 2 & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 3 & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \end{array}$$

a příslušný maticový zápis je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = & -3 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 9 \\ 0 & -11 & -5 & 4 & 9 \end{array} \right) \\ x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & -1 & \left| \begin{array}{c} 5 \\ 11 \end{array} \right| \\ -5x_2 - 5x_3 + x_4 & = & 9 & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \\ -11x_2 - 5x_3 + 4x_4 & = & 9 & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \end{array}$$

Po opsání první a druhé rovnice soustavy přistoupíme k eliminaci neznámé x_2 z třetí a z čtvrté rovnice. Pětinásobek druhé rovnice sečteme s třetí rovnicí a pak jedenáctinásobek druhé rovnice sečteme s poslední rovnicí. Výsledný zápis je

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ [20x_3 + 16x_4 = 4] \quad 5 \\ 50x_3 + 37x_4 = -2 \quad (-2) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 20 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 50 & 37 & -2 \end{array} \right)$$

Zbývá eliminovat z poslední rovnice neznámou x_3 . K tomu vede sečtení posledních dvou rovnic, které jsme před tím znásobili čísly 5 (třetí rovnici) a -2 (čtvrtou rovnicí). Výsledkem je už trojúhelníkový tvar soustavy

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 & 6 \\ x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -1 & (-2) \\ 20x_3 + 16x_4 = 4 & 3 \\ 6x_4 = 24 & 1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 20 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \end{array} \right)$$

Popsaný způsob postupné eliminace neznámých vedoucí k trojúhelníkovému tvaru soustavy se nazývá *přímý chod*. Následuje shora uvedený výpočet neznámých v pořadí $x_4 = 4$, $x_3 = -3$, $x_2 = 2$ a $x_1 = 1$, který se nazývá *zpětný chod*. Při zpětném chodu můžeme také postupovat i tak, že z trojúhelníkového tvaru eliminujeme x_4 v prvních třech rovnicích, pak eliminujeme x_3 v prvních dvou rovnicích a konečně x_2 v první rovnici. Tak dostaneme pro každou neznámou rovnici, která tuto neznámou určuje. Čtenář si jistě povšiml, že v předposlední úpravě soustavy jsme třetí rovnici mohli dělit čtyřmi, neboť poslední úprava třetí rovnice umožňovala vydělit ji čtyřmi a čtvrtou šesti.

Vedle úprav soustavy vedoucích na trojúhelníkový tvar jsme uvedli jejich maticové zápisy. Matice je schéma sestavené z koeficientů neznámých a v posledním sloupci z pravých stran rovnic soustavy. Je zřejmé, že místo s úplným zápisem soustavy lze pracovat jen s maticovým zápisem. Eliminujeme maticovým zápisem neznámé z trojúhelníkového tvaru soustavy. Úpravy již nebudeme komentovat, jen poznamenejme, že v následující druhé matici je třetí řádek matice vydělen čtyřmi a čtvrtý řádek šesti; ve čtvrté matici je třetí řádek předchozí matice vydělen pěti.

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 20 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \end{array}$$

Protože jsme při zapisování matic zachovávali pořadí koeficientů jako v soustavě, udává poslední matice kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ a $x_4 = 4$.

Kdyby se při řešení soustavy rovnic o n neznámých stalo, že vyjde $\dots 0 = c$ (to je $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = c$), kde $c \neq 0$, pak soustava nemá řešení; dostaneme-li rovnost $0 = 0$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

Přístupme k modifikaci Gaussovy eliminační metody pro numerické řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých aplikované při použití počítače; bývá označována jako *modifikace s hlavními prvky*. Využívá se jí zejména pro větší n a racionální koeficienty (resp. se iracionální čísla zaokrouhlí). Protože máme omezený rozsah článku a pochopení principu není složité, zvolili jsme soustavu jen tří rovnic o třech neznámých. Čtenář s námi může sledovat demonstrováný postup na kapesní kalkulačce. Jistě mu neunikne numerická pracnost řady prováděných výpočtů.

Při eliminačním postupu není nutno eliminovat neznámé v pořadí $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, ani není nutno dodržovat pořadí rovnic v soustavě. Pořadí neznámých a rovnic volíme tak, abychom nedělili čísla o malé absolutní hodnotě a aby zaokrouhlovací chyby byly co nejmenší. Proto v soustavě najdeme koeficient u neznámé s největší absolutní hodnotou, který se nazývá *hlavní prvek*. Mějme řešit soustavu

$$\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 &= 50 \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 &= 30 \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 31. \end{aligned}$$

Za hlavní prvek zvolíme koeficient 10 u neznámé x_3 ve druhé rovnici. Soustavu přepíšeme tak, aby měla hlavní prvek $10x_3$ na prvním místě v první rovnici. V ostatních rovnicích budeme neznámou x_3 eliminovat.

$$\begin{aligned} 10x_3 + 3x_1 + x_2 &= 30 \\ 5x_3 - x_1 - 4x_2 &= 31 \\ 3x_3 + 4x_1 - 7x_2 &= 50 \end{aligned}$$

První rovnici vydělíme koeficientem 10 a získanou rovnici znásobíme číslem -5 a sečteme s druhou rovnicí. Obdobně vyloučíme x_3 ze třetí rovnice. První rovnici, kterou jsme vydělili číslem 10, znásobíme číslem -3 (záporně vzatý koeficient u neznámé x_3 ve třetí rovnici) a sečteme s třetí rovnicí. Uvedený postup zapišme:

$$\begin{array}{rcl} 10x_3 + 3x_1 + x_2 & = & 30 \\ x_3 + 0,3x_1 + 0,1x_2 & = & 3 \\ -5x_3 - 1,5x_1 - 0,5x_2 & = & -15 \\ 5x_3 - x_1 - 4x_2 & = & 31 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ (-5) \\ \\ \end{array} \right\} +$$

$$-2,5x_1 - 4,5x_2 = 16$$

$$\left. \begin{array}{r} x_3 + 0,3x_1 + 0,1x_2 = 3 \quad |(-3) \\ -3x_3 - 0,9x_1 - 0,3x_2 = -9 \\ 3x_3 + 4x_1 - 7x_2 = 50 \end{array} \right\} +$$

$$3,1x_1 - 7,3x_2 = 41,$$

takže po eliminaci neznámé x_3 je

$$\begin{array}{r} x_3 + 0,3x_1 + 0,1x_2 = 3 \\ - 2,5x_1 - 4,5x_2 = 16 \\ 3,1x_1 - 7,3x_2 = 41 \end{array}$$

V podsoustavě posledních dvou rovnic ze čtyř koeficientů určíme za hlavní prvek ten, který má největší absolutní hodnotu, tedy $-7,3$ ze druhé rovnice. Dostáváme

$$\begin{array}{r} x_3 + 0,1x_2 + 0,3x_1 = 3 \\ - 7,3x_2 + 3,1x_1 = 41 \\ - 4,5x_2 - 2,5x_1 = 16. \end{array}$$

Koeficientem $-7,3$ vydělíme druhou rovnici:

$$\begin{array}{r} x_3 + 0,1x_2 + 0,3x_1 = 3 \\ x_2 - 0,4246575x_1 = -5,6164384 \\ - 4,5x_2 - 2,5x_1 = 16 \end{array}$$

Druhou rovnici znásobíme číslem $4,5$ a sečteme ji s třetí rovnicí

$$\left. \begin{array}{r} 4,5x_2 - 1,9109588x_1 = -25,273973 \\ - 4,5x_2 - 2,5x_1 = 16 \end{array} \right\} +$$

$$- 4,4109588x_1 = -9,273973,$$

takže soustava má tvar

$$\begin{array}{r} x_3 + 0,1x_2 + 0,3x_1 = 3 \\ x_2 - 0,4246575x_1 = -5,6164384 \\ - 4,4109588x_1 = -9,273973 \end{array}$$

Konečně poslední rovnici vydělíme číslem $-4,4109588$, takže trojúhelníkový tvar dané soustavy je

$$\begin{array}{r} x_3 + 0,1x_2 + 0,3x_1 = 3 \\ x_2 - 0,4246575x_1 = -5,6164384 \\ x_1 = 2,1024864. \end{array}$$

Zpětný chod dává další kořeny

$$\begin{aligned} x_2 &= -5,6164384 + 0,4246575 \cdot 2,1024864 = -4,7236026, \\ x_3 &= 3 - 0,3 \cdot 2,1024864 - 0,1(-4,7236026) = 2,8416148. \end{aligned}$$

Za cvičení čtenář může vyřešit poslední soustavu postupem uvedeným v první části článku, popř. může provést zkoušku správnosti. Jistě si položí otázku, proč nevyužít první modifikace i pro výpočet na počítači. Ona první modifikace vede totiž k rychlému zvětšování resp. k zmenšování koeficientů, a tak snadno brzy dochází k přeplnění počítače. Proto se pro počítač užívá jen modifikace Gaussovy eliminační metody s hlavními prvky.

Pro porovnání vypočtených hodnot neznámých v poslední soustavě, které jsou ovšem zaokrouhlená čísla, uvádíme přesné hodnoty neznámých:

$$x_1 = \frac{677}{322} = 2,10248 \underline{4472049}$$

$$x_2 = -\frac{1521}{322} = -4,723602 \underline{484472} \dots$$

$$x_3 = \frac{915}{322} = 2,841614 \underline{906832} \dots$$

Zřejmě na prvních šesti nebo sedmi místech se vypočtené hodnoty neznámých Gaussovou eliminační metodou s hlavními prvky neliší od hodnot přesných.

0 jedné nečekané aplikaci

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PeF UK v Praze

V algebře a kombinatorice se můžeme setkat s úlohou:

Sestavte čtvercovou matici stupně $n \geq 2$, jejíž prvky jsou pouze čísla -1 a 1 a skalární součin každých dvou jejích řádků (jež mají různá pořadová čísla) je roven nule.

K úloze uveďme dvě vysvětlení. Nejprve, co je čtvercová matice stupně $n \geq 1$. Jde o schéma (tabulku), kterou tvoří n^2 čísel (obecně prvků) uspořádaných do n řádků a n sloupců. Schéma

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

je příkladem matice třetího stupně.

Dále je třeba ještě vysvětlit pojem skalárního součinu dvou řádků matice. Pro řádky $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ jím rozumíme číslo

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Např. skalární součin prvního a třetího řádku matice (1) je roven číslu -6 .

Matice, které jsou řešením výše uvedené úlohy, jsou známé už od konce 19. století a nazývají se *hadamardovské*¹⁾ (čti adamarovské).

¹⁾ Jacques Hadamard (1865–1963), francouzský matematik, který významných původních objevů dosáhl v teorii čísel, v algebře a v matematické analýze.

Pro $n = 8$ je jí např. matice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

přesvědčte se o tom. Skalární součiny není třeba počítat, stačí překontrolovat, že každé dva řádky se v matici H liší právě na čtyřech místech. Totiž skalární součiny řádků matice H jsou vždy součtem osmi součinů odpovídajících si prvků. Přitom každý tento dílčí součin je roven buď číslu 1 nebo číslu -1 .

Poslední úvahu lze zobecnit. Vyplývá z ní, že hadamardovské matice mohou být jen sudých stupňů a že každé dva řádky se liší právě na polovině míst. Podmínka o sudosti stupně však není postačující; např. neexistují hadamardovské matice stupně deset.

Nečekaná aplikace hadamardovských matic vyplývá z pohledu, který je zúžen jen na to, že jde o tabulky obsahující pouze dva druhy prvků. Z hadamardovských matic se tedy může vycházet při konstrukci binárních kódů.

V binárních kódech se binární znaky často označují 0 a 1, a proto v matici H prvky 1 a -1 přeznačíme. Lze to provést např. takto:

$$1 \rightarrow 1 \text{ a } -1 \rightarrow 0. \quad (2)$$

Dostaneme tak matici

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vynecháme-li v ní první sloupec, pak z ní získáme tabulku 1 pro kód číslic osmičkové číselné soustavy; kódová slova jsou sedmibitová. Každá dvě slova se liší právě ve čtyřech bitech, takže Hammingova vzdálenost každých dvou slov tohoto kódu je čtyři.²⁾ Lze tedy detekovat až tři chyby v kódovém slově a jednu opravit.

²⁾ viz článek „O vzdálenosti kódových slov“ ve 3. čísle Rozhledů m. f. roč. 65, 1986/87, s. 89–92.

Tabulka 1

č	kódové slovo
0	I I I I I I I
1	O I O I O I O
2	I O O I I O O
3	O O I I O O I
4	I I I O O O O
5	O I O O I O I
6	I O O O O I I
7	O O I O I I O

Tabulka 2

č	kódové slovo
0	O O O O O O O
1	I O I O I O I
2	O I I O O I I
3	I I O O I I O
4	O O O I I I I
5	I O I I O I O
6	O I I I I O O
7	I I O I O O I

Kód z tabulky 1 je příkladem kódu, jehož každá dvě kódová slova jsou mezi sebou stejně „vzdálená“. Takové kódy se nazývají *ekvidistantní*.

Pro kódování číslic osmičkové číselné soustavy bychom kromě tabulky 1 mohli získat ještě dalších

$$8! - 1 = 40\,319$$

tabulek, jestliže bychom sedmice uvedené v pravé části tab. 1 přiřadili jiným způsobem číslicím 0, 1, 2, ..., 7.

V seriálu článků o binárním kódování jsme se dosud výhradně věnovali jen kódům pro desítkové číslice. Hadamardovské matice stupňů deset a jedenáct neexistují. Hadamardovské matice stupně dvanáct lze zkonstruovat, avšak užitím výše uvedeného postupu bychom našli pro desítkové číslice jedenáctibitové kódy. Ukážeme si, že kódy pro desítkové číslice lze získat i z matice H , jež je osmého stupně.

Výměnu prvků 1 a -1 za binární znaky 0 a 1 lze v matici H provést nejen podle (2). Je ještě jedna možnost, a to

$$1 \rightarrow 0 \text{ a } -1 \rightarrow 1. \quad (3)$$

Získáme tak matici

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Vynecháme-li v ní první sloupec a přiřadíme-li jednotlivé řádky po řadě číslicím 0, 1, 2, ..., 7, pak dostáváme tabulku 2. I v tomto případě bychom mohli získat celkem $8! = 40\,320$ různých kódů pro číslice osmičkové číselné soustavy. Každá dvě kódová slova mají H . vzdálenost rovnou čtyřem.

V tabulkách 1 a 2 je celkem 16 navzájem různých uspořádaných sed-

mic složených ze znaků 0 a I. Z nich lze pro desítkové číslice sestavit celkem

$$16 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 7 = \frac{16!}{6!} \doteq 2,9 \cdot 10^{10}$$

kódů. Jde o počet prostých zobrazení desetiprvkové množiny $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ do šestnáctiprvkové množiny.

V dalším určíme pro kódová slova těchto kódů desítkových číslic minimální H. vzdálenost. K tomu si musíme podrobněji prohlédnout matice H_1 a H_2 . V každé z těchto matic se každé dva řádky liší právě na čtyřech místech. Dále si zároveň prohlédneme obě matice H_1 a H_2 . Každou z těchto matic lze vzhledem ke vztahům (2), (3) získat ze druhé invertováním, tj. nahrazením každého znaku 0 znakem I a každého znaku I znakem 0. Řádky, které mají v maticích H_1 a H_2 totéž pořadové číslo, se tedy liší na všech osmi místech. Řádky, jež nemají v maticích H_1 a H_2 stejné pořadové číslo, se liší na čtyřech místech. Důvod si ukážeme na příkladě.

Z matice H_1 vyberme např. třetí řádek

$$I \ I \ 0 \ 0 \ I \ I \ 0 \ 0 \quad (4)$$

a z matice H_2 např. pátý řádek

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I \ I \ I \ I \quad (5)$$

Pátý řádek v matici H_1 je

$$I \ I \ I \ I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \quad (6)$$

od třetího řádku v matici H_1 se nutně musí lišit na čtyřech místech. Od osmice (6) lze k osmici (5) přejít invertováním. Z toho plyne, že osmice (5) se neliší od osmice (4) na těch místech, v nichž se od osmice (4) liší osmice (6), a zároveň že se liší na těch místech, v nichž se osmice (6) od osmice (4) neliší. Osmice (4) a (6) se liší na čtyřech místech, a proto osmice (4) a (5) se také odlišují na čtyřech místech.

Sedmice v tabulkách 1 a 2 vznikly z řádků matic H_1 a H_2 vynecháním prvních prvků. V matici H_1 to byly prvky I a v matici H_2 prvky 0. Odtud plyne, že minimální H. vzdálenost dvou kódových slov v kódech desítkových číslic, o nichž jsme výše hovořili, nebude čtyři, nýbrž pouze tři. V kódových slovech tedy bude možno zjistit až dvě chyby a jednu opravit.

Cvičení

1. Vysvětlete, proč v matici H jsou v každém řádku mimo prvního vždy čtyři čísla 1 a čtyři čísla -1 .
2. Nechť H je libovolná hadamardovská matice stupně n . Kterému číslu je roven skalární součin libovolného řádku se sebou samým?
3. Kdybychom nevynechali v maticích H_1 a H_2 první sloupce, pak pro sestavení kódu desítkových číslic bychom měli možnost vybírat kódová slova ze 16 osmic znaků I a 0. Jaká by byla v těchto kódech minimální H. vzdálenost dvou kódových slov?

Padesát let „zářezové“ metody

Doc. dr. Ladislav DRS, CSc., ČVUT Praha

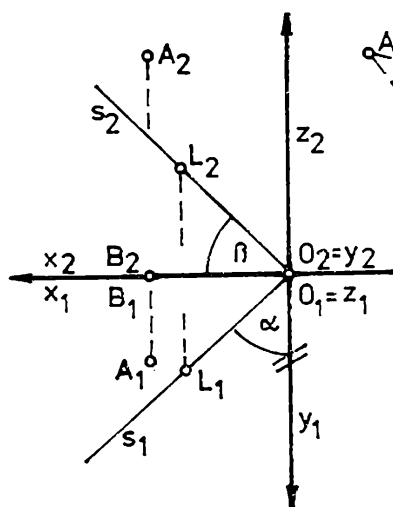
I

V březnu 1937 přednesl L. ECKHART (1890—1938), profesor vídeňské techniky, na zasedání Akademie věd ve Vídni přednášku „Affinne Abbildung und Axonometrie“ (Afinní zobrazení a axonometrie), jejíž součástí byl popis jednoduché konstrukce axonometrie útvaru z jeho půdorysu a nárysu. Je s podivem, že tato metoda, jedna z nejelegantnějších, které deskriptivní geometrie zná, musela na své objevení čekat až do roku 1937, tedy padesát až sto let od doby, kdy se konstrukcím axonometrie věnovala intenzivní pozornost geometrů. U nás to byl např. prof. K. Pelc (1845—1908), jehož práce o axonometrii jsou z let na přelomu století a prof. J. Sobotka (1862—1931), jehož publikace věnované této tématice pocházejí ze začátku století.

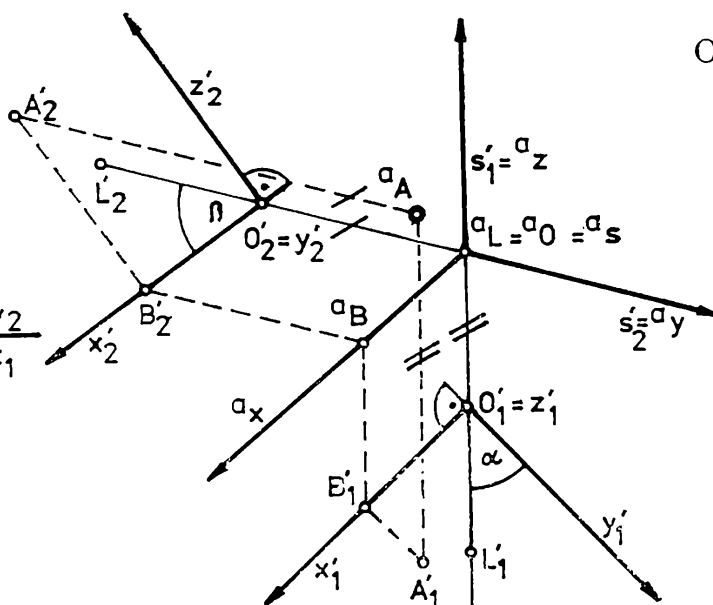
Stručně tuto metodu popíšeme:

Mějme dán prostorový útvar U půdorysem a nárysem U_1, U_2 . Průměty U_1 a U_2 od sebe oddělíme, např. odstrižením podél základnice a libovolně je v nákrese umístíme do poloh U'_1 a U'_2 . Na obr. 1 je útvar U tvořen body A, B , osami x, y, z souřadnicové soustavy s počátkem O , přímkou s jdoucí bodem O a bodem L na přímce s . Na obr. 2 je umístění U'_1 dáno zvoleným bodem O'_1 a přímkou s'_1 rovnoběžnou s přímkou y_1 . Přímký x'_1 a y'_1 jsou určeny úhlem $\alpha = |\angle y_1 s_1| = |\angle y'_1 s'_1|$. Umístění U'_2 je dáno zvoleným bodem O'_2 a zvolenou přímkou s'_2 . Přímký x'_2 a z'_2 jsou pak určeny úhlem $\beta = |\angle x_2 s_2| = |\angle x'_2 s'_2|$.

Obr. 1



Obr. 2



Po této přípravě je konstrukce axonometrie aA bodu A už zcela jednoduchá:

Vedeme-li bodem A'_1 rovnoběžku s přímkou s'_1 a bodem A'_2 rovnoběžku s přímkou s'_2 , protnou se v bodě aA axonometrie aU útvaru U .

Pro konstrukci zavedl *L. Eckhart* název „zářezová metoda“ (das Einschneideverfahren).

Speciálně je axonometrie aL bodu L na s průsečíkem přímek s'_1 a s'_2 . Protože i jakýkoli další bod přímky s (např. bod O) má axonometrii v bodě aL (tj. ${}^aO = {}^aL$), je přímka s promítací, jinak řečeno:

Přímka s je směrem promítání, určeného touto axonometrií.

Dále je zřejmé, že ${}^az = s'_1$. Zvolíme-li totiž na přímce z jakýkoli bod Z , je jeho půdorysem bod O_1 . Proto bod aZ leží na přímce s'_1 . Podobně je ${}^ay = s'_2$.

Lze dokázat, že nejen přímky y a z , ale všechny přímky, pokud nejsou rovnoběžné s přímkou s , se zobrazí do přímek. Proto je axonometrie ax osy x spojnici axonometrií aO a aB bodů O a $B \in x$. Přímky ax , ay , az jsou osovým křížem této axonometrie.

II

Určitou nevýhodou zářezové metody je nutnost oddělit půdorys od nárysu. To je obtížné tehdy, když se půdorys s nárysem překrývají, když tedy zobrazovaný útvar neleží celý v prvním kvadrantu.

Ukážeme si konstrukci axonometrie přímo z půdorysu a nárysu. Uvažujme útvar U , který je složen ze souřadnicové soustavy $Oxyz$ a z pravidelného čtyřbokého jehlanu, který má podstavu $ABCD$ v rovině $\rho \perp xz$ a vrchol V . Na obr. 3 je dán jeho půdorys a nárys ($|A_2O_2| = |A_1D_1|$, proč?). Zvolme přímku s (na obr. 3 prochází bodem O_1) a s ní různoběžnou přímku p . Konstrukci axonometrie popíšeme pro bod V :

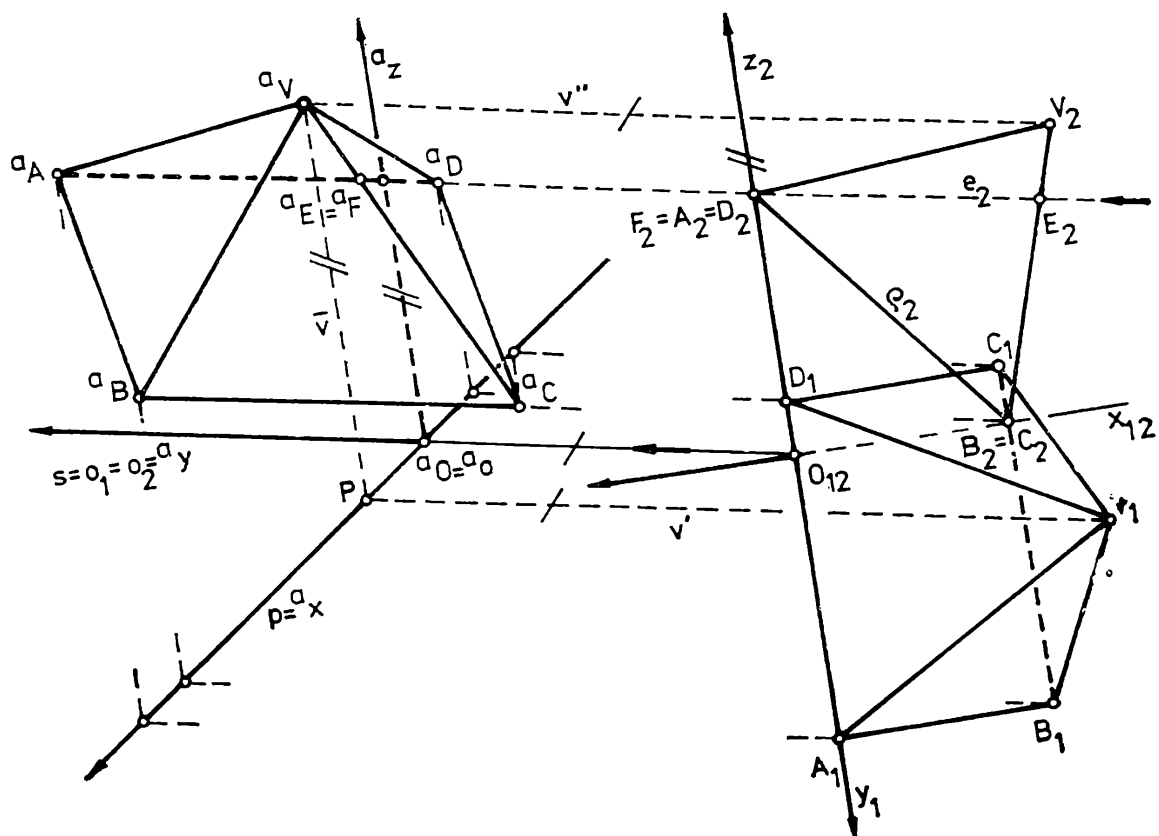
Dvojici bodů V_1 a V_2 vedeme rovnoběžky v' a v'' s přímkou s . Průsečíkem $P = v' \cap p$ vedeme rovnoběžku $\bar{v}$ s přímkou z_2 . Přímky v'' a $\bar{v}$ se protnou v bodě aV axonometrie bodu V .

Abychom se mohli dále jednoduše vyjadřovat, označme tuto konstrukci K a pišme $K(V) = {}^aV$. Označme $o_1 = o_2 = s$. Přímka o leží v rovině totožnosti. Uvažujme bod L na přímce o . Pak vyjde podle konstrukce K , aplikujeme-li ji na bod L : $K(L) = {}^aL = s \cap p$. To platí pro všechny body na přímce o . To znamená:

Směr promítání, určený konstrukcí K , je přímka o s průměty $o_1 = o_2 = s$, ležící v rovině totožnosti.

Dále je $K(x) = {}^ax = p$, $K(y) = {}^ay = s$, ${}^aO = {}^ax \cap {}^ay = {}^aL = {}^aO$ a $K(z) = {}^az$ (${}^aO \in {}^az$, ${}^az \parallel z_2$). Přímky ax , ay , az tvoří osový kříž axonometrie, vzniklé konstrukcí K .

Konstrukci K aplikujme na body A , B , C , D , $K(A) = {}^aA$, atd.



Obr. 3

Úsečky $aVaA$, $aVaB$, $aVaC$ a $aVaD$ jsou axonometrie bočních hran jehlanu, rovnoběžník $aAaBaCaD$ je axonometrií podstavného čtverce.

Viditelnost určíme touto úvahou: Orientace promítacích paprsků je určena směrem pohledu. Protože kladná poloosa ax (ay) směřuje vlevo dolů (vlevo vzhůru) jde o podhled zprava. Tato orientace je na přímce o vyznačena šipkou. Předpokládejme, že souřadnicové roviny jsou průhledné a že těleso je neprůhledné. Ze dvou bodů $E \in VC$ a $F \in AD$, promítajících se do průsečíku přímek $aVaC$ a $aVaD$ je viditelný bod E , neboť na nárysu e_2 příslušného promítacího paprsku je bod E_2 před bodem F_2 . Z toho už vyplývá viditelnost všech hran tělesa. Podstavná hrana AD je neviditelná, její axonometrie je vyznačena čárkovaně. Ostatní hrany jsou viditelné a jejich axonometrie jsou rýsovány plnou čarou. Podobně určíme viditelnost osy z .

Ve srovnání s Eckhartovou metodou je konstrukce **K** složitější. Axonometrii bodu podle zářezové metody určují dvě přímky, pro axonometrii podle konstrukce **K** je nutno rýsovat tři přímky. Při Eckhartově metodě je směr promítání libovolně volitelný, konstrukcí **K** vznikne axonometrie, jejíž směr promítání leží pouze v rovině totožnosti. Konstrukci **K** proto použijeme jako doplněk zářezové metody v těch případech, kdy nelze jednoduše od sebe oddělit půdorys a nárys.

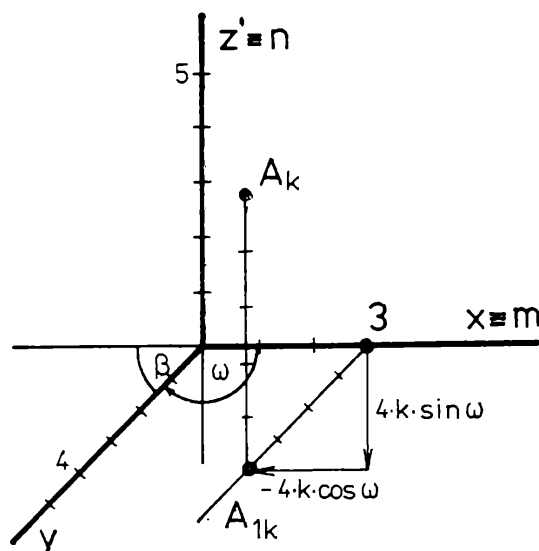
Základy programování mikropočítačů

7 - Deskriptivní geometrie na PMD-85

doc. IVAN FISCHER, CSc., katedra matematiky PedF UK v Praze

Když jsme se posledně seznámili s grafickými příkazy jazyka BASIC na mikropočítači Tesla PMD-85, slíbili jsme si, že se dnes podíváme na možnosti graficky znázornit prostorové situace. Na televizní obrazovce — displeji mikropočítače — tak učiníme s využitím zobrazovacích metod deskriptivní geometrie. Abychom však tyto metody mohli dát do souladu s grafickými příkazy pro mikropočítač, potřebujeme si napřed odvodit jejich analytické vyjádření.

Začneme nejjednodušším případem kosoúhlého promítání. Na obrázku 1 máme kosoúhlé průměty souřadnicových os v prostoru i zobrazení



Obr. 1

průmětu měřítek kartézské soustavy souřadné s osami x , y , z . Z deskriptivní geometrie víme, že při kosoúhlém promítání do nárysny leží osy x a z v této průmětně a jsou tak totožné se svými průměty. Průměty os x , z jsou na sebe kolmé a měřítka na nich jsou shodná s měřítky na osách v prostoru. Osa y a měřítko na ní se šikmo promítne do nárysny, průmět osy y svírá s osou x orientovaný úhel ω (ve výpočtech budeme užívat i jeho vedlejší úhel β) a průmět měřítka na ose y se prodlouží či zkrátí proti skutečným rozměrům v závislosti na směru promítání. JY bude značit velikost jednotky na průmětu osy y a k bude „poměr zkrácení“, tedy poměr JY ke skutečné jednotce souřadnic v prostoru. V deskriptivní geometrii zpravidla kosoúhlé promítání popisujeme pomocí k a ω a tak se nejprve ve výpočtech opřeme o tyto údaje.

Na obrázku 1 máme dále zobrazeny konstrukce k sestrojení koso-

úhlého průmětu bodu $A(3; 4; 5)$. Bod A_{1k} je kosoúhlý průmět půdorysu bodu A a bod A_k je kosoúhlý průmět bodu A . Abychom si mohli polohu bodů A_{1k} a A_k na televizní obrazovce popsat analyticky, musíme si na obrazovce (v průmětně, nárysně) zavést soustavu souřadnou. Svislou osu nazveme n a vodorovnou m . Umístíme si je tak, že je $n \equiv z$ a $m \equiv x$. Měřítka na m i n jsou shodná s měřítky na osách x, y, z v prostoru a tedy i na průmětech os z, x . Nejprve si při konstrukci bodu A_k nalezneme bod 3 na měřítku osy x . Z tohoto bodu vedeme rovnoběžku s průmětem osy y a na ni naneseeme čtyři jednotky z měřítka průmětu osy y . Tak se dostáváme k bodu A_{1k} . Proti bodu 3 leží o něco víc vlevo (to „něco“ je $4 \cdot JY \cdot \cos \beta$, nebo-li $-4 \cdot k \cdot \cos \omega$) a o něco níž ($4 \cdot JY \cdot \sin \beta$ neboli $4 \cdot k \cdot \sin \omega$). Z bodu A_{1k} pak vedeme rovnoběžku s osou z , naneseeme na ni pět jednotek měřítka osy z (neboli jednotek ve skutečné velikosti) a dostáváme se k bodu A_k .

Souřadnice bodu A_{1k} jsou proto $m = x + y \cdot k \cdot \cos \omega$ a $n = z - y \cdot k \cdot \sin \omega$. Rovnice si však můžeme přepsat též pomocí JY a úhlu beta tak, jak je v jazyku BASIC na PMD-85 využijeme:

- (1) $M = X - Y * JY * \cos (BE)$
- (2) $N = Z - Y * JY * \sin (BE)$

Užití rovnic (1) a (2), popisujících kosoúhlé promítání do náryсны, si ukážeme na programu, který na obrazovce nakreslí kosoúhlý průmět krychle o hraně 5 jednotek, stojící na půdorysně. V programu uijeme bloku dat s organizací x, y, z, t , kde x, y, z , jsou souřadnice zobrazovaného bodu a t je údaj pro kreslení: pro $t = 1$ se kreslí pouze tento bod, pro $t = 0$ se kreslí úsečka od předchozího bodu k tomuto bodu. Podprogram 30000 (respektive procedura 30000) přepočítává ze souřadnic x, y, z souřadnice m, n průmětu bodu. V tabulce 1 máme programový modul zadání parametrů kosoúhlého promítání a proceduru výpočtu souřadnic. V tabulce 2 máme modul programu, který doplněním k programu v tabulce 1 vytváří program kreslení kosoúhlého průmětu krychle.

Nemusíme chtít zobrazovat pouze hranatá tělesa, to umíme poměrně snadno i bez počítače. V kosoúhlém promítání si můžeme zobrazit i graf funkce dvou proměnných. Rovnici funkce $z = F(x, y)$ si budeme zadávat změnou programového řádku 360 (pro PMD-85/2 si ukážeme i pohodlnější možnost). Grafem funkce dvou proměnných je plocha. Tu si zobrazíme tak, že sestrojíme na této ploše křivky spojující body o stejné souřadnici y , kterou budeme měnit s krokem 1 od -8 do 8. Křivky jsou vlastně řezy plochy grafu rovinami rovnoběžnými s nárysnou. Můžeme si také na ploše doplnit i druhou soustavu křivek — řezů rovinami rovnoběžnými s bokorysnou — a vytvořit na ploše síť takovýchto křivek. To by si však jistě každý dovedl sám doplnit k programu kreslicímu pouze jednu soustavu křivek na ploše. Program složíme z modulu popsaného v tabulce 1 a modulu popsaného v tabulce 3.

Tabulka 1

```

100 REM - PARAMETRY PROMITANI -
110 PRINT "UHEL PRUMETU OS X,Y"
120 INPUT OM
130 BE = 3.14 - 6.28 * OM / 360
140 PRINT "POMER ZKRACENI"
150 INPUT JY

```

```

160 REM - ZOBRAZENI OS SOURADNIC -
170 GCLEAR
180 SCALE -10, 15, -10, 10
190 POKE -15878, 176
200 X=10: Y=0: Z=0: GOSUB 3000
210 MOVE M,N
220 X=0: GOSUB 3000
230 PLOT M,N
240 Y=10: GOSUB 3000
250 PLOT M,N
260 Y=0: GOSUB 3000
270 MOVE M,N
280 Z=9: GOSUB 3000
290 PLOT M,N

```

2990 END

```

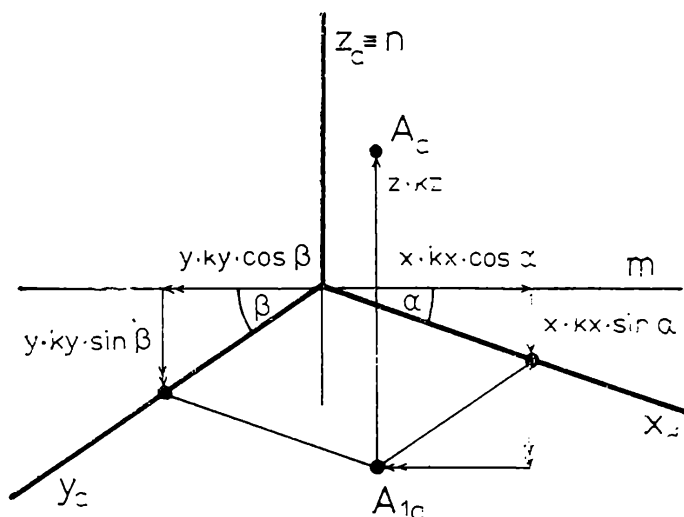
3000 REM - SOURADNICE PRUMETU -
3010 REM (X,Y,Z) -> (M,N)
3020 M = X - Y * JY * COS(BE)
3030 N = Z - Y * JY * SIN(BE)
3040 RETURN

```

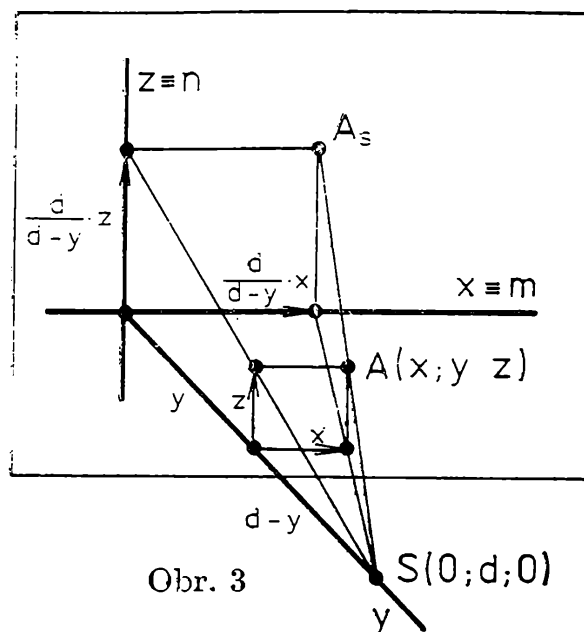
Jestliže se nespokojíme s kosoúhlým promítáním do nárysny, můžeme si z obrázku 2 odvodit analytické vyjádření kosoúhlé (či pravouhlé) axonometrie. Získáme soustavu dvou rovnic popisující axonometrické zobrazení (výpočtem souřadnic axonometrického průmětu bodu).

$$(3) M = X * JX * \cos(AL) - Y * JY * \cos(BE)$$

$$(4) N = -X * JX * \sin(AL) - Y * JY * \sin(BE) + Z * JZ$$



Obr. 2



Obr. 3

Z obrázku 3 si můžeme pomocí stejnoolehlostí trojúhelníků odvodit analytické vyjádření středového promítání do nárysny (roviny os x, z) z bodu na ose y , středu promítání $S(0; d; 0)$.

$$(5) M = X \cdot D / (D - Y)$$

$$(6) N = Z \cdot D / (D - Y)$$

Pro Mongeovo promítání bychom potřebovali dvě takovéto soustavy rovnic, jednu pro půdorys bodu

$$(7) M = X$$

$$(8) N = -Y$$

a druhou pro nárys bodu

$$(9) M = X$$

$$(10) N = Z$$

Budeme-li si nyní chtít nakreslit graf funkce v axonometrii, potom neustálé goniometrické výpočty v rovnicích (3) a (4) program výrazně zpomalují. Uvědomíme si, že výrazy $JX \cdot \cos(\alpha)$ atd. jsou konstanty, a že rovnice (3) a (4) jsou tedy vlastně lineární rovnice s takovými koeficienty, potom program urychlíme velmi výrazně tím, že si do rovnic dosadíme číselné koeficienty. Další úsporu času přinese i to, budeme-li volat podprogram výpočtu souřadnic průmětů bodů až od jeho výkonné části, tedy až za řádkem REM.

V tabulce 4 máme ukázkou takového programu, který bude pracovat pouze na novějších verzích mikropočítače PMD-85, značených PMD-85/2. Místo POKE —15878, xxx můžeme používat příkaz PEN, který určuje, jakým způsobem se bude kreslit (PEN 0 nastaví kreslení bod na svítící — bílý bod; PEN 8 nastaví kreslení na negaci — svítící bod zhasne a tmavý rozsvítí). V dalších řádcích vidíme, že PMD-85/2 píše i malá písmena. V řádku 57 0 je příkaz pracující na každém PMD-

Tabulka 2

```

300 REM - ZOBRAZENI TELESY -
310 FOR C = 1 TO 16
320 READ X, Y, Z, T
330 GOSUB 3000
340 PLOT M, N, T
350 NEXT C

360 REM - DATA PRO KRESLENI -
370 REM X, Y, Z, T
380 DATA 1,6,0,1, 6,6,0,0
390 DATA 6,1,0,0, 1,1,0,0
400 DATA 1,6,0,0, 1,6,5,0
410 DATA 6,6,5,0, 6,1,5,0
420 DATA 1,1,5,0, 1,6,5,0
430 DATA 6,6,0,1, 6,6,5,0
440 DATA 6,1,0,1, 6,1,5,0
450 DATA 1,1,0,1, 1,1,5,0
    
```

Tabulka 3

```

300 REM - GRAF FUNKCE -
310 FOR Y = -8 TO 8
320 X = -8
330 GOSUB 3000
340 MOVE M, N
350 FOR X = -8 TO 8 STEP 0.2
360 Z = 3 * SIN(X) + COS(Y/2)
370 GOSUB 3000
380 PLOT M, N
390 NEXT X
400 NEXT Y
410 END
    
```

Tabulka 4

```

500 REM = ZADANI GRAFU =
510 SCALE -25, 25, -20, 20
520 PEN 0
530 PRINT" Pro rovnici  $z=F(x,y)$ "
540 PRINT" zadej  $F(x,y)$ "
550 INPUT Z$
560 GCLEAR
570 DISP"  z = ";Z$

```

```

580 REM = PRUMETY OS =
590 X=20: Y=0: Z=0: GOSUB 4000: MOVE M,N
600 X=0: GOSUB 4000: PLOT M,N
610 Y=20: GOSUB 4000: PLOT M,N
620 Y=0: GOSUB 4000: MOVE M,N
630 Z=13: GOSUB 4000: PLOT M,N

```

```

640 REM = KRESLENI GRAFU =

```

```

650 FOR X= -10 TO 10 STEP 1
660 MOVE 300, 300
670 FOR Y= -10 TO 10 STEP 0.2
680 Z = VAL(Z$)
690 GOSUB 4000
700 PLOT M,N
710 NEXT Y
720 NEXT X: END

```

```

3990 REM = SOURADNICE PRUMETU =
4000 M= -X*0.707 + Y*0.965
4010 N= -X*0.706 - Y*0.259 + Z
4020 RETURN

```

-85, a sice DISP. Znamená totéž co PRINT, ovšem pouze do dolního řádku obrazovky. Hlavní výhodou pro náš program však je zobecnění významu řetězcové funkce VAL. Pokud řetězec znamená matematický

výraz, potom VAL vypočítává jeho číselnou hodnotu. Funkční rovnici (přesněji pravou stranu funkční rovnice) zadáváme pomocí INPUT Z\$. Při zobrazování křivek na ploše grafu funkce se pro daná X a Y použije vztah $Z = \text{VAL}(Z\$)$, který vypočítá funkční hodnotu Z danou výrazem Z\$ pro daná X a Y. Po prohlédnutí soustavy rovnic pro výpočet průmětů bodu zjistíte, že tentokrát máme prohozeny osy y a x tak, jak to bývá v některých učebnicích analytické geometrie či deskriptivní geometrie.

Úlohy:

1. Upravte předposlední dva programové řádky v programu podle tabulky 1 tak, aby program kreslil axonometrické průměty.
2. Upravte předchozí program tak, aby kreslil středové průměty.
3. Analytické vyjádření středového promítání upravte i pro případ obecné polohy středu promítání $S(e, d, f)$. Použijte k tomu vhodnou transformaci soustavy souřadné v prostoru a již odvozené vyjádření středového promítání pro speciální případ $S(\emptyset, d, \emptyset)$.
4. Upravte program (nestačí změna soustavy rovnic) pro kreslení průmětů v Mongeově promítání.

FYZIKA

0 mechanické rovnováze těles

(1. část - Newtonovy zákony)

Prof. Ing. Cyril HÖSCHL, ÚT-ČSAV Praha

Základem mechaniky jsou tři proslulé Newtonovy zákony, totiž zákon o setrvačnosti, pohybový zákon a zákon o akci a reakci. V hodinách fyziky se probírají často do omrzení. Přesto se stává, že jim ani ti, kteří dovedou jejich znění kdykoli na požádání odříkat, správně nerozumí. V tomto příspěvku se omezíme na jejich interpretaci ve vztahu k mechanické rovnováze těles.

Newtonovy zákony bychom mohli formulovat např. takto:

- 1) *Těleso, na které nepůsobí žádné síly, setrvává v inerciálním prostoru buď v klidu nebo ve stavu přímočarého rovnoměrného pohybu.*
- 2a) *Rychlost změny hybnosti hmotného bodu se rovná působící síle.*
- 3) *Každá akce vzbuzuje reakci, stejně velkou, ale opačného smyslu.*

Uvedené znění prvního zákona vzbuzuje v pozorném čtenáři dvě otázky: co je to inerciální prostor a existuje-li vůbec těleso, na něž by nepůsobily žádné síly. Zejména první otázka je velmi důležitá. Říká se, že inerciální prostor je takový, v kterém první Newtonův zákon skutečně platí. To jistě není uspokojivá odpověď, z praktického hlediska však postačuje. Nalezneme-li pokusně takový souřadnicový systém, že v něm bude zákon o setrvačnosti *dostatečně přesně* platit, prohlásíme tento systém a s ním spjatý prostor za inerciální. Všechny prostory, které se k tomuto experimentálně stanovenému inerciálnímu prostoru pohybují přímočaře a rovnoměrně, jsou rovněž inerciální. Mechanické děje by v každém takovém prostoru probíhaly stejně (Galileiho princip). Jde tedy o to, nalézt alespoň jeden inerciální prostor a s ním spjatou inerciální souřadnicovou soustavu. Budeme-li zkoumat pohyb míče v tělocvičně, bude to soustava spjatá s budovou, tj. se Zemí. Budeme-li však sledovat pohyb planet, bude to soustava spojená s hmotným středem sluneční soustavy. Protože tyto dvě soustavy nekonají vzájemný přímočarý rovnoměrný pohyb, nemohou být obě zároveň inerciální. Která z nich to tedy „doopravdy“ je? Odpověď je překvapující: žádná. Skutečná, absolutně přesná inerciální soustava souřadnic neexistuje; to, co za ni považujeme, vzniká idealizací naší zkušenosti. Proto je tato idealizovaná inerciální soustava závislá na zkušenostech, tj. na té části fyzikální reality, kterou právě zkoumáme.

K tomu připojme ještě doplňující poznámku. Představme si v inerciálním prostoru dvě hmoty o hmotnosti m_1 , resp. m_2 , které se od sebe vzdalují konstantní rychlostí $\mathbf{v}$. Spojíme-li soustavu souřadnic s první hmotou, bude její rychlost $\mathbf{v}_1 = 0$ a rychlost druhé hmoty $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$. Celková kinetická energie obou hmot bude $E_{k12} = \frac{1}{2} m_2 v^2$. Spojíme-li soustavu souřadnic s druhou hmotou, bude $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = 0$ a celková kinetická energie obou těles vyjde $E_{k21} = \frac{1}{2} m_1 v^2$. Nebude-li $m_1 = m_2$, nebude ani $E_{k12} = E_{k21}$; přitom jsou obě souřadnicové soustavy inerciální. Je zřejmé, že pojem „kinetická energie“ nemá smysl, pokud jej nevztáhneme ke zcela určité souřadnicové soustavě.

Druhá otevřená otázka se týká působení síly. Na každé těleso prakticky vždy působí nějaká síla. I těleso na nějaké družici v tzv. beztížném stavu je vystaveno působení gravitační síly; avšak tato síla uděluje tělesu v beztížném stavu stejné zrychlení jako družici, takže předmět, který byl vzhledem k družici v klidu, se nedá relativně k družici do pohybu (nepadá). Požadavek, aby na těleso nepůsobila žádná síla, musíme proto z praktických důvodů zmírnit: stačí, když síly, které na těleso působí, nedávají žádnou výslednici ani výslednou silovou dvojici. Výsledná síla (výslednice) a výsledná silová dvojice jsou dvě vektorové veličiny, které by měly na pohybový stav daného tělesa stejný účinek jako skutečně působící síly. Takové dvě silové soustavy jsou ekvivalent-

kterém se provádí karburace. Pozn.: S lat. *uro*, *-ere* = pálit nespojovat výrazy typu UROLOGIE (lékařský obor zabývající se poruchami močového ústrojí); zde je původem řec. *uron* = moč.

KARDIOGRAF (slož. z řec. *kardia* = srdce + *grafó* = rýt, psát; v. -graf) — přístroj zaznamenávající činnost srdce; KARDIOGRAM (v. -gram¹) — zápis srdeční činnosti. Pozn.: S řec. *kardia* = srdce srovnej v matematice KARDIIDA — křivka srdčitého tvaru, srdcovka.

KAROTÁŽ (od řec. *karóton* = mrkev; srov. KAROTKA) — měření v hlubinných vrtech, ve vrtných sondách. Termín vznikl z podoby sondy.

KASKÁDA (od lat. *casus* = pád; od *cado*, *-ere*, ptc. pf. *casus* = padat; v. incidence) — stupňovitý vodopád; soustava vodních přehrad; ve fyzice: zapojení dvou nebo více zesilovačů. KASKÁDNÍ zapojení kondenzátoru — „na doskok“

KAT-, KATA- (z řec. mnohovýznamové předložky a předpony *kata-*) — předpona s významem „shora dolů, po, s, směr dolů; skrz něco, dále kupředu nebo zpět; zcela, pře-, veskrz, až do konce; proti, podle, roz-“

KATALÝZA (z řec. *katalysis*; slož. z *kata* — zde ve významu „roz-“ + *lyó* = rozpojovat, uvolňovat; v. analýza) — zrušení, rozpuštění; urychlení chemického rozkladu; KATALYZÁTOR (v. -or) — „rozkladač“; látka urychlující chemický rozklad

KATEGORIE (z řec. *katégoria* = nařčení, obvinění, výpověď o něčem; slož. z *kata* — zde ve významu „shora dolů“ + *agoreuó* = veřejně mluvit, řečnit na náměstí; srov. AGORA — starořecké náměstí) — „jasná a přesná výpověď o něčem“; pojmová skupina, třída, druh; základní pojem

KATETOMETR (slož. z *kata* — zde ve významu „shora dolů“ + *hiémi* = posílat + *metron* = měřidlo, míra; v. metr¹) — „míra vedená dolů“; přístroj pro přesné měření výškových rozdílů dvou bodů (dalekohled pohybující se na svislém sloupku se stupnicí). Pozn.: KATÉTR je v lékařství trubička, která „se spustí do těla“ a odvádí se jí tekutina z těla.

KATION, KATIONT (slož. z *kata* — zde použito analogicky podle „katoda“ + řec. *ión*, *iontos* = jdoucí; od *eimi* = jít; v. ion) — „ion katody, tj. ion jdoucí při elektrolýze ke katodě“; ion s kladným nábojem; v. anion a Poznámku u anoda

KATODA (slož. z *kata* — zde ve významu „směr dolů“ + *hodos* = chod, chůze, cesta; v. anoda) — „cesta dolů“, tj. od kladného pólu k zápornému; elektroda, kterou proud odchází z míst vyššího potenciálu anody k místům nižšího potenciálu katody; záporná elektroda

KATODOLUMINISCENCE (slož. ze slova *katoda*, v. t. + latiniz.

luminiscentia; od *lumen* = světlo, zář; v. *lumen*) — katodovým zářením podmíněné světélkování nějaké látky

KATOPTRIKA (slož. z *kata* — zde ve významu „skrz, zpět“ + *optér* = pozorovatel; od slovesného kmene *-opt-* řec. slovesa *horaó* = vidět; v. optika + *-ika*¹; v. t.) — nauka o odrazu světla, o zrcadlech a o přístrojích na zrcadlech se zakládajících. KATOPTRICKÝ úkaz, přístroj — zakládající se na odrazu světla

KAUSTIKA (z řec. *kaustikos* = žhnoucí; od *kaió* = pálit, žhnout, zapalovat; v. *-ika*³) — 1. leptání, moření; 2. ve fyzice: celek ohnisek nekorigovaných dutých zrcadel nebo čoček; 3. v geometrii: optická plocha procházející středy všech koulí, jejichž povrch ve zvolených bodech dané plochy co nejpřesněji napodobuje její tvar; je to množina všech středů křivosti dané plochy (název vznikl zřejmě analogickou představou z fyziky); KAUSTIKUM (v. *-ikum*²) — leptající prostředek, leptadlo; KAUSTICKÝ — 1. leptavý, žíravý; 2. týkající se kaustiky; např. kaustická plocha = kaustika

KAVITACE (od lat. *cavus* = dutý; srov. KAVERNA — dutina po rozpadu tkáně) — vznikání dutin v kapalině (vlivem značných změn tlakových sil); KAVITAČNÍ jev; v. t. konkávní, bikonkávní, plankonkávní

KILO- (od řec. *chilioi* = tisíc) — počáteční část názvů násobných jednotek mající význam „tisícinásobek měrné jednotky“ vyjádřené v následující části složeného slova; např. kilogram, kilokalorie, kilometr, kilomol, kiloparsek, kilopond. Pozn.: KILOGRAM je hlavní jednotka hmotnosti a základní jednotka SI. Termín má však jako první složku násobnou jednotku, což je vlastně nesprávné (srov. *metr* — kilometr); původně totiž hlavní jednotkou hmotnosti byl gram.

KINEMATIKA (z řec. *kinématiké techné*; v. *-ika*¹; od *kinéma*, *atos* = pohyb; a to od *kineó* = hýbat; v. kinetika) — „nauka o pohybu“; část mechaniky, která se zabývá studiem pohybu těles bez zřetele k jeho příčinám, ale vzhledem k času; KINEMATICKÝ. Pozn.: Slovo „kinematika, kinematický“ nesmíme dělit „kine-matika“, „kine-matický“. Není tu totiž žádná souvislost se slovem „matematika“ (slangem „matická úloha“). Musí se vyjít z kmene řec. slova *kinemat-os* a české přípony *-ický*.

KINEMATOGRAF (slož. z řec. *kinéma*, *-atos* = pohyb; v. *kinetika* + *grafó* = rýt, psát; v. - graf) — „přístroj zobrazující pohyb“; přístroj na pořizování a promítání „oživlých — pohybujících se“ fotografií; podnik, kde se takové filmy předváděly

KINETIKA (z řec. *kinétiké techné*; v. *-ika*¹; od *kinésis* = pohyb; a to od *kineó* = hýbat; srov. KINO — zkráceno z „kinematograf“, kde se díváme na „pohybující se obrázky“) — nauka o pohybujících se tělesech; KINETICKÝ — pohybový; např. KINETICKÁ energie — energie pohybujícího se tělesa v přímém směru; KINETICKÉ tření —

vznikající při pohybu tělesa; v. t. kinematika, kinematograf, homokinetický

KLÍMA (z řec. *klima*, -atos = sklon; od *klinó* = klonit; v. inklinace) — „sklon“, tj. různý sklon sluneční dráhy nad obzorem v průběhu roku; podnebí; **KLIMATICKÝ**. Pozn.: S řec. *klinó* souvisí lat. *clino*, -are; v. inklinace.

KLINOMETR (slož. z řec. *klinó* = klonit; v. klíma a inklinace + *metron* = měřidlo, míra; v. -metr¹) — sklonoměr, svahoměr

KO- v. **KON-**

KÓD (od lat. *codex* = zápisní desky, kniha, seznam; srov. **KODEX** — soubor právních předpisů, starobylá kniha rukopisů — předpis (seznam předpisů) pro převod jedné soustavy znaků pro sdělování zpráv do jiné takové soustavy; soustava smluvených znaků a pravidel na vyjádření informací; v. t. dekódovat

KOEFICIENT, **KOEXISTENCE**, **KOHERENCE**, **KOHEZE**, **KOINCIDENCE**, **KOLAPS**, **KOLEKTIVNÍ**, **KOLEKTOR**, **KOLIMACE**, **KOLINEACE** v. **KON-**

KOLORIMETRIE (slož. z lat. *color* = barva, barvitost; srov. **TRIKOLÓRA** — tříbarevná stuha + řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metrie) — „měření barev“; nauka o barvách; nauka zabývající se určením barvy průhledného nebo neprůhledného předmětu; srovnávání a měření intenzity zabarvení látek

KOM—, **KOMBINACE** v. **KON—**

KOMETA (z řec. *kométés*; od *komé* = vlas) — „vlasatá, dlouhovlasá“; vlasatice

KOMPARÁTOR, **KOMPAS**, **KOMPAUDNÍ**, **KOMPENZACE**, **KOMPLANACE**, **KOMPLEMENTÁRNÍ**, **KOMPLEXNÍ**, **KOMPONENT**, **KOMPOZICE**, **KOMPRESE**, **KOMUNIKACE**, **KOMUTACE** v. **KON—**

KON—, **KOM—**, **KO—** (z lat. předložky *cum* nebo lat. předpony *con-* = s, spolu; podoba *kom-* se vyskytuje před „b“ a „p“; zkrácená podoba *ko-* se jednak vyskytuje před samohláskou, jednak vznikla připodobením hlásky „n“, případně hlásky „m“ následující souhlásky „l“, „m“ nebo „r“, načež následovalo zjednodušení zdvojené souhlásky; např.: *concletor* > *collector* > *kolektor*) — předpona s významem „s, spolu, dohromady, spojení“

KOEFICIENT (slož. z *con-* + *efficio*, -ere = způsobit, vykonat; a to slož. z *ex* = z, vy- + *facio*, -ere = dělat; v. perfektní) — „spolupůsobící“; součinitel

KOEXISTENCE (slož. z *con-* + *existentia* = jsoucnost; od *exsisto*, -ere = vystoupit, objevit se, vzniknout, být; srov. **EXISTOVAT**) — spolužití, současné bytí nebo trvání

KOHERENCE (z lat. *cohaerentia*; slož. z *con-* + *haereo*, -ere = vězet, váznout, lpět; v. adheze) — souvislost, soudržnost, spojitost; opak:

inkohERENCE; KOHERENTNÍ — souvislý, spojitý; např. KOHERENTNÍ paprsky — vycházejí z téhož místa světelného zdroje; KOHERENTNÍ vlnění — fyzikálně spolu souvisejí prostřednictvím jediného společného reálného zdroje

KOHEZE (od lat. *cohaereo*, -ere, ptc. pf. *cohaesus*; slož. z *con-* + *haereo*, -ere = vězet, váznout, lpět; v. adheze) — soudržnost; ve fyzice: soudržnost pevných látek nebo kapalin způsobená přitažlivými silami téže látky (dříve: souborný název pro přitažlivé síly mezi molekulami téhož tělesa); KOHÉZNÍ — soudržný, přilnavý

KOINCIDENCE (v. incidence) — „společné, současné zapadání do sebe“; časový nebo prostorový souběh událostí; současné působení; ve fyzice: prostorový nebo časový souhlas dvou značek signálu

KOLAPS (od *collabor*, -i, ptc. pf. *collapsus*; slož. z *con-* + *labor*, -i = sunout se, kácet se, padat; v. labilní) — zhroucení, sesutí, v lékařství: náhlé ochabnutí, mdloba; v astronomii: „zhroucení hvězdy“, tj. smrštění hvězdy až na jediný bod, přičemž její hustota nabyla nekonečně velké hodnoty; KOLAPSAR m (-ar — umělá, analogicky použitá přípona) — „zřícená hvězda“; černá jáma

KOLEKTIV (z lat. *collectivus* = nahromaděný, společný; od *colligo*, -ere, ptc. *collectus*; slož. z *con-* + *lego*, -ere — zde: sbírat; srov. KOLEKCE — soubor, sbírka) — společenství, soubor; skupina lidí spjatých společným zájmem, cílem; ve fyzice: sběrná čočka u okuláru, která „sbírá“ rozbíhavé paprsky; v. t. kolektor, selekce, selektivita

KOLEKTOR (z lat. *colligo*, -ere, ptc. pf. *collectus*; slož. z *con-* + *lego*, -ere — zde: sbírat; v. kolektiv + -or, v. t.) — „sběrač“; ve fyzice: sběrač elektrického proudu; sběrná elektroda

KOLIMACE (zkomolením ze střed. lat. *collineatio*, v. kolineace) — soustředění; soustředění světelných paprsků do vzájemně rovnoběžného směru; KOLIMÁTOR (v. -or) — přístroj k vytvoření svazku rovnoběžných paprsků

KOLINEACE (ze střed. lat. *collineatio*; slož. z *con-* + *lineo*, -are, ptc. pf. *lineatus* = podle šňůry řídit, rovnat, stavět; od *linea* = lněná nit, šňůra, čára; v. lineární) — „společná poloha na téže čáře“, „společné seřazení podél čáry“; rovnoběžnost dvou přímek v rovině nebo dvou rovin v prostoru;

KOLINEÁRNÍ body — náležející téže přímce; ležící na téže přímce;

KOMBINACE (z lat. *combinatio*; od *combino*, -are, ptc. pf. *combinitus* = spojovat do dvojice; slož. z *con-* + *bin* = po dvou, dva a dva; v. *bin-*) — „různé spojování do dvojice, po dvou“; tvoření dvojic všemi možnými způsoby. Pozn.: Časem došlo k rozšíření významu pojmu ze „dvou“ na „libovolný počet“ V t. rekombinace

ní, oba systémy sil by bylo možno zaměnit. *) To však platí jenom o absolutně tuhých tělesech. Představme si třeba pryžové vlákno. Kdybychom je natahovali dvěma silami připojenými na jeho koncích, nezůstalo by vlákno v klidu. Prodlužovalo by se totiž, a to přesto, že by obě síly měly nulovou výslednici (byly by stejně velké, opačného smyslu, a působily by na téže přímce). Vlákno by se bez působení sil neprodužovalo. Uvedený rozdíl vymizí jen tehdy, bude-li vlákno absolutně tuhé.

Máme-li tedy k dispozici dostatečně tuhé těleso, můžeme obrácením smyslu jedné ze dvou nenulových ekvivalentních silových soustav a jejich superpozicí dosáhnout toho, že výsledné silové působení na dané tuhé těleso bude nulové. Pokusy s takovým tělesem se můžeme přesvědčit o tom, zda zvolená souřadnicová soustava je inerciální (ne-li zcela přesně, tedy alespoň dostatečně z hlediska účelu, který sledujeme).

Každé těleso, které setrvává v inerciálním prostoru v klidu nebo v něm koná rovnoměrný přímočarý pohyb, je v rovnováze. Rovnováha tělesa je tedy definována jako jeho ustálený pohybový stav: *těleso je v rovnováze, pohybuje-li se v inerciálním prostoru každý jeho bod konstantní rychlostí, která může být ve zvláštním případě nulová (těleso v klidu)*. Rozdělíme-li takové těleso myšleným řezem na dvě části (nebo několika řezy na několik částí), aniž se změní jeho pohybový stav, bude každá část tělesa také v rovnováze.

Jak jsme již uvedli, je výsledné silové působení na těleso v rovnováze nulové. Platí toto tvrzení také obráceně? Vyjdeme-li z přijaté definice, dojdeme k závěru, že nikoliv. Otáčí-li se setrvačnick rovnoměrně kolem své osy pevné v inerciálním prostoru, pak — zanedbáme-li pasívní odpory — není třeba k udržení jeho pohybu působit žádnou silou ani silovou dvojicí, a přece nejde o přímočarý rovnoměrný pohyb. Každý bod setrvačnicku (neleží-li právě na jeho ose) koná kruhový, a tedy zrychlený pohyb. Nejde proto o rovnováhu.

Mohli bychom ovšem zvolit i poněkud obecnější definici mechanické rovnováhy tělesa a připustit, že také těleso, které rovnoměrně rotuje kolem své hlavní centrální osy, pevné v inerciálním prostoru, je v rovnováze. Pak by sice platila i obrácená věta, podle níž by bylo v rovnováze každé těleso, na něž by působila pouze rovnovážná soustava sil, ale neplatila by věta, podle které nemůže být těleso v rovnováze, aniž je v rovnováze zároveň každá jeho část. Právě této věty se využívá k vyšetřování rovnováhy poddajných těles. Kromě toho se rovnoměrná rotace kolem jiné než hlavní centrální osy neobejde bez silového působení. Proto není takové zobecnění pojmu mechanické rovnováhy vhodné. V některých učebnicích se první zákon uvádí ve znění platném jen pro

*) Silovou dvojici tvoří dvě rovnoběžné síly, stejně velké, avšak různého smyslu. Silový účinek soustavy sil posuzujeme buď podle změny pohybového stavu nebo podle reakcí v podporách, je-li těleso v klidu.

hmotný bod. Pak je třeba zvlášť definovat rovnováhu tělesa jako stav, při němž jsou všechny jeho hmotné body v rovnováze.

Má-li soustava sil působících na nějaké těleso dávat nulovou výslednici, musí být vektorový součet sil nulový. Má-li být nulová i výsledná silová dvojice, musí být nulový také vektorový součet momentů těchto sil k danému bodu (např. k počátku souřadnic). Silovou soustavu, která splňuje tyto podmínky rovnováhy, nazýváme rovnovážnou. Rovnovážná soustava sil nemění pohybový stav tuhého tělesa, na které působí. Říkat, že tyto síly jsou v rovnováze, není přesné; v rovnováze může být jen *těleso*, na které rovnovážná soustava sil působí.*)

Zatímco první Newtonův zákon se týká tělesa, hovoří druhý zákon o hmotném bodu. Kdy lze např. homogenní kouli považovat za hmotný bod? Z mechaniky víme, že homogenní koule o hmotnosti m má k ose jdoucí středem koule (k centrální ose) moment setrvačnosti $\frac{2}{5}mr^2$. Zmenšuje-li se koule tak, že se její hmotnost zachovává, mizí tento moment setrvačnosti s kvadrátem poloměru. V limitě $r \rightarrow 0$ tak vzniká ideální představa hmotného bodu, jehož moment setrvačnosti k centrální ose je nulový. Při vyšetřování pohybu Měsíce nebo planet můžeme Měsíc, Zemi i Slunce považovat za hmotné body, aniž se dopustíme větší chyby. Budeme-li však sledovat pohyb míče po nakloněné rovině, povede jeho náhrada hmotným bodem k velké chybě.***) Vytváření ideálního fyzikálního popř. matematického modelu se zřejmě nemůže řídit jednoduchým předpisem; je vždy závislé na intuici a na zkušenostech řešitele.

Chceme-li druhý Newtonův zákon aplikovat na těleso, musíme si je nejprve představit jako soustavu hmotných bodů. K tomu je ovšem třeba vědět, jakému silovému působení jsou tyto hmotné body, tj. malé části tělesa uvolněné z něho myšlenými řezy, vystaveny. K odpovědi na tuto otázku vede třetí Newtonův zákon, o němž pojednáme později.

Nemění-li se hmotnost bodu za jeho pohybu, je možné vyjádřit druhý Newtonův zákon také tak, že

2b) *síla působící na hmotný bod je dána součinem hmotnosti bodu a jeho zrychlení.*

Tato věta vyjadřuje závislost velikosti síly na velikosti zrychlení; směr obou těchto vektorových veličin se přitom shoduje. Je-li za klidu nebo za rovnoměrného přímočarého pohybu zrychlení nulové, je působící síla rovněž nulová (ve shodě s prvním zákonem).

Obsahem třetího Newtonova zákona je vzájemnost silového působení: působí-li první těleso na druhé, působí vždy zároveň druhé těleso na první.

*) Připomeňme, že moment síly $\mathbf{F}$ k bodu P je dán vektorovým součinem $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kde $\mathbf{r}$ je vektor spojující bod P s působištěm síly $\mathbf{F}$ a $\mathbf{M}$ je vektor momentu síly.

**) Tíhové zrychlení vyvolá při valení dutého míče po nakloněné rovině pohyb se zrychlením asi o 40 % menším, než by měl hmotný bod, který by bez tření klouzal po dokonale hladkém povrchu téže nakloněné roviny.

Izolované silové působení na jediné těleso neexistuje. Nazveme-li působení prvního tělesa na druhé *akce*, je opačné působení z druhého tělesa na první *reakce*. Oba tyto názvy lze zaměnit, neboť nezáleží na tom, které z obou uvažovaných těles označíme jako první. Akce a reakce jsou stejně velké, opačných smyslů. *Netvoří však rovnovážnou soustavu, neboť nepůsobí na stejné těleso.* Kdyby tomu tak nebylo, tj. kdyby se silové účinky akce a reakce navzájem rušily, nebyl by možný žádný zrychlený pohyb. Tělesa, mezi nimiž se akce a reakce přenášejí, mohou, ale nemusí být v rovnováze.

Třetí zákon platí nezávisle na tom, zda akce, popř. reakce, je síla objemová nebo povrchová. V dotykové ploše mezi tělesy se přenášejí povrchové síly. Nakopne-li např. fotbalista míč, působí z jeho boty na míč akce a z míče na botu reakce. V dotykové ploše mezi botou a míčem vzniká tlak, tedy plošně rozdělená povrchová síla. Příkladem objemové síly je síla gravitační. Při pohybu Měsíce kolem Země působí na Měsíc akce, což je gravitační síla vyvolaná přitažlivostí obou těles. Ta uděluje Měsíci zrychlení, které jej udržuje na zakřivené oběžné dráze. Zároveň působí na Zemi reakce, která zdvíhá vody oceánů a způsobuje příliv a odliv (slapové účinky).

O krystalech a určování jejich struktury

Doc. RNDr. IVO KRAUS, CSc., FJFI ČVUT

Třebaže krystaly zajímaly člověka od dávné minulosti, je věda o nich výhradně vědou novověku. Jako samostatné odvětví se začala vytvářet teprve v 17.—18. století, kdy byly zjištěny zákonitosti vzájemné polohy ploch omezujících krystaly a objeven dvojlom světla v islandském vápenci.

Zpočátku probíhal vývoj krystalografie souběžně s mineralogií, neboť po dlouhou dobu byly jedinými objekty krystalografických výzkumů přírodní tvary. V souvislosti s rostoucím počtem nově pozorovaných elektrických, optických i mechanických jevů v krystalech se začala krystalografie postupně sbližovat s fyzikou. Když byla prokázána bezprostřední závislost vnějšího tvaru krystalů na jejich složení, stala se nauka o krystalech nezbytnou i pro chemii.

Ke kvantitativnímu vzrůstu zájmu o výzkum nejrůznějších vlastností krystalů došlo počátkem našeho století po objevu difrakce rentgenových paprsků na krystalové mřížce. (Od slavného *Laueova pokusu*, který ukázal cesty k určování krystalových struktur, uplyne v březnu 1987 už 75

let.) Později se důležitými metodami studia krystalů staly i difrakce elektronů a neutronů. Nové experimentální možnosti analýzy struktur přispěly k řadě technických aplikací krystalů. Příkladem může být výroba polovodivých materiálů, feritů, umělých diamantů, krystalů pro kvantové generátory, zušlechťování kovů a slitin apod. Krystalografie stále více proniká i do biologie a medicíny, umožňuje stanovit strukturu bílkovin, virů, antibiotik, vitamínů nebo složitých farmaceutických přípravků.

Nauka o krystalech bývá často považována za abecedu fyziky pevných látek. Jeden z nejdůležitějších pojmů tohoto vědního oboru je označován termínem „krystalová struktura“. Ukážeme, jaký je jeho význam a seznámíme se i s principy metod, kterými se struktura krystalů určuje. Dokladem aktuálnosti této problematiky je rozhodnutí Švédské akademie věd udělit právě za pokrok v této oblasti jednu z Nobelových cen za rok 1985.

Připomeňme nejdříve, že krystalická látka může být charakterizována buď z hlediska mikroskopické vnitřní stavby nebo podle geometrie vnějšího tvaru či fyzikálních vlastností. Zatímco u amorfních látek mají fyzikální vlastnosti skalární charakter, u krystalů rozlišujeme nejen vlastnosti skalární (např. hustota), ale také vektorové (index lomu světla) a tenzorové (elastické charakteristiky).¹⁾

Krystalická látka je vzhledem k řadě svých vlastností anizotropní.²⁾ Nejnapadnějším projevem této anizotropie je tvar krystalů, který ukazuje, že rychlost růstu se mění v závislosti na směru. Anizotropní vlastnosti krystalů mohou být členěny do dvou skupin podle toho, zda se na vnějším tvaru dají nebo nedají makroskopicky (vizuálně) pozorovat:

a) vnější vlastnosti (tvoření rovinných stěn během růstu, vnější souměrnost),

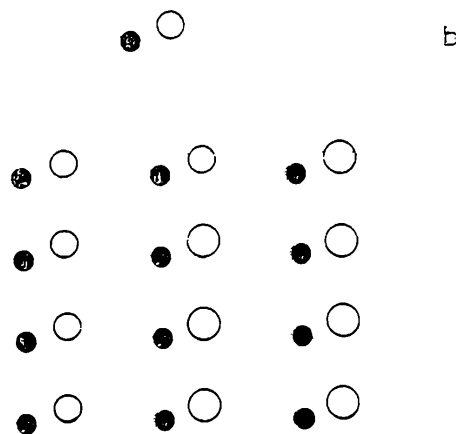
b) vnitřní vlastnosti (mechanické, elektrické, magnetické, optické aj.).

Ty charakteristiky, které se značně změní i při malé změně mikroskopické vnitřní stavby (elektrická vodivost, plasticita apod.), nazýváme *strukturně senzitivní*. Příkladem strukturně nesenzitivních charakteristik je bod tání nebo tepelná roztažnost.

Z hlediska vnitřní stavby můžeme tuhé krystalické těleso v rovnovážném stavu definovat jako množinu uspořádaně rozložených atomů (iontů) kmitajících kolem poloh (mřížkových — uzlových bodů) tvořících prostorovou mřížku. Mřížku lze vybudovat ze stejných rovnoběž-

¹⁾ Skalární vlastnosti jsou i v n -rozměrném prostoru určeny jediným číslem, svou hodnotou. Vektory, které mají velikost a směr, potřebují v n -rozměrném prostoru n určujících prvků (složek, souřadnic). Veličiny, k jejichž popisu je třeba více prvků, se nazývají tenzory.

²⁾ Anizotropií rozumíme závislost fyzikálně mechanických vlastností prostředí na směru, ve kterém se tyto vlastnosti měří. Opačný jev — nezávislost vlastností na směru měření — se nazývá izotropie.



Vztah mezi prostorovou mřížkou (a), bází tvořenou dvěma různými strukturními jednotkami (b) a krystalovou strukturou (c).

nostěná (elementárních — základních buněk), stejných co do velikosti i orientace, dokonale vyplňujících celý prostor. Abychom zdůraznili rozdíl mezi abstraktní představou o bodech tvořících prostorovou mřížku a krystalem, který je takovou mřížkou charakterizován, používá se pojmu *krystalová struktura*.

Krystalovou strukturu tvoří množiny (báze, základní motivy struktury) strukturních jednotek (atomů, iontů nebo molekul) sdružené s každým uzlovým bodem mřížky. Báze jsou identické složením, vnitřním uspořádáním i orientací (obr.). V krystalech mnoha kovů se báze skládá pouze z jednoho atomu. Jsou však známy organické i anorganické struktury, jejichž základní motiv tvoří desítky i stovky základních jednotek.

Nejuniverzálnějším prostředkem k určení tvaru a rozměrů elementární buňky i rozmístění strukturních jednotek uvnitř jejího objemu je rentgenová strukturní analýza. Touto metodou se dají stanovit struktury sloučenin anorganických, organických i biologických, pokud jsou k dispozici ve formě monokrystalického vzorku o lineárních rozměrech alespoň 0,1 mm.

Každá látka, na niž dopadají rentgenové paprsky, je zdrojem elektromagnetického záření s délkou vlny stejnou nebo téměř stejnou jako mají paprsky dopadající. Při tomto typu interakce záření s hmotou (tzv. pružném rozptylu) mají vlny rozptýlené (vyzařované) jednotlivými atomy neměnný fázový rozdíl; atomy (rozptylová centra) tvoří množinu

koherentních zdrojů. V kondenzovaných látkách, kde jsou meziatomové vzdálenosti srovnatelné s délkou vlny rtg paprsků, může tedy mezi rozptýlenými vlnami nastat pozorovatelný (ustálený) interferenční jev projevující se v určitých směrech koncentrací rozptýlené energie.³⁾ Můžeme ji registrovat buď fotografickou emulzí nebo počítači. Při detekci na filmu vznikne v místě, kam na něj dopadne „zesílená rozptýlená intenzita“, difrakční stopa (skvrna, „reflexe“) o zvýšené hustotě zčernání emulze. Paprsky, které dají vznik určité stopě, byly rozptýleny na atomech mřížkových rovin o orientaci charakterizované tzv. Millerovými indexy (celými čísly) hkl . Stejným symbolem označujeme i odpovídající difrakční skvrnu.

Protože rtg záření se rozptyluje především na elektronech atomů (iontů) tvořících krystalovou mřížku, bude pro další úvahy užitečné zavést funkci elektronové hustoty

$$(1) \quad \varrho(x, y, z) = \sum_h \sum_k \sum_l F_{hkl} \cdot \exp[-2\pi i (hx + ky + lz)],$$

kde x, y, z jsou souřadnice v elementární buňce.

Pomocí koeficientů F_{hkl} (strukturních amplitud) se nechá sestavit mapa elektronové hustoty a nalézt tak rozložení atomů v buňce, neboť lokální maxima funkce $\varrho(x, y, z)$ příslušejí polohám jednotlivých rozptylujících atomů.

Známe-li umístění atomů (iontů) v buňce, můžeme odhadnout relativní intenzitu paprsků rozptýlených do určitého směru, tj. intenzitu „reflexe“ hkl . Metody založené na obráceném postupu — stanovující vnitřní stavbu krystalu z intenzity „reflexí“, jsou označovány jako *strukturní analýza krystalů*.

Souvislost intenzity „reflexí“ s rozložením hmoty v elementární buňce je komplikovanou funkcí s řadou faktorů. Zjednodušeně lze pro intenzitu I_{hkl} „reflexe“ hkl psát

$$(2) \quad I_{hkl} \sim |F_{hkl}|^2.$$

Strukturní amplituda F_{hkl} (amplituda vlny rozptýlené atomy elementární buňky) je obecně komplexní číslo

$$(3) \quad F_{hkl} = A_{hkl} + iB_{hkl} = \sum_{j=1}^N f_j A_j + i \sum_{j=1}^N f_j B_j = \\ = \sum_{j=1}^N f_j \cdot \exp[2\pi i (hx_j + ky_j + lz_j)];$$

N je počet všech atomů v buňce, tj. ke každé strukturní amplitudě přispívají různou měrou všechny atomy elementární buňky. Veličina f_j se na-

³⁾ Intenzita rozptýlená jednotlivými strukturními elementy (atomy, ionty, resp. jejich elektrony) je nepatrná. Krystal je však tvořen periodickým uspořádáním velmi mnoha rozptylových center. Rozptýlené vlny se v určitých směrech skládají a tím získávají na intenzitě. Krystal tedy působí jako velmi účinný zesilovač.

zývá *atomová amplituda rozptylu* — amplituda vlny rozptýlené atomem, resp. jeho elektrony; x_j, y_j, z_j jsou souřadnice j -tého atomu, vyjádřené v jednotkách délek hran a, b, c elementární buňky (rovnoběžnostěnu).

Jako každé komplexní číslo se dá i F_{hkl} napsat podle Eulerova vzorce ($e^{\pm i x} = \cos x \pm i \sin x$) v goniometrickém tvaru

$$(4) \quad F_{hkl} = \sum_{j=1}^N f_j \cos 2\pi (hx_j + ky_j + lz_j) + i \sum_{j=1}^N f_j \sin 2\pi (hx_j + ky_j + lz_j).$$

Pro modul $|F_{hkl}|$ a fázi φ strukturní amplitudy $F_{hkl} = |F_{hkl}| \exp(i\varphi)$ platí

$$\begin{aligned} A &= |F_{hkl}| \cos \varphi, \\ B &= |F_{hkl}| \sin \varphi, \\ |F_{hkl}| &= \sqrt{A^2 + B^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= B/A. \end{aligned}$$

Detektujeme-li rozptýlené záření např. fotografickou emulzí nebo některým počítačem (Geigerovým-Müllerovým apod.), bude registrovaná střední časová hodnota intenzity rozptylu I_{hkl} úměrná čtverci modulu amplitudy $|F_{hkl}|^2$, nazývanému *strukturní faktor*.

Je zřejmé, že zatímco velikost strukturních amplitud $|F_{hkl}|$ se dá vypočítat bezprostředně z naměřených intenzit „reflexe“ hkl , fáze φ těchto amplitud určit přímo z experimentu nelze.

Matematické stanovení fází, umožňující konstrukci průběhu funkce elektronové hustoty $\rho(x, y, z)$ v elementární buňce, je hlavním úkolem tzv. přímých ⁴⁾ metod určování krystalových struktur.

Rozhodující podíl na jejich vývoji mají nositelé Nobelovy ceny za chemii pro rok 1985 Američané *Jerome Karle* a *Herbert Hauptman*. První z nich je fyzik-krystalograf, druhý matematik.

Základem velmi komplikovaného postupu, který Karle s Hauptmanem navrhli, je měření intenzity velkého počtu „reflexí“ a aplikace statistických metod. Pomocí náročného matematického aparátu (souřadnice atomů měly význam náhodně proměnných veličin) se jim podařilo už v první polovině padesátých let fázový problém (problém stanovení

⁴⁾ Přímé metody vycházejí přímo z hodnot naměřených intenzit rozptýleného záření. Nepřímým způsobem lze polohy atomů obsažených v elementární buňce nalézt např. tak, že z krystalochemických údajů a informací o souměrnosti vytvoříme určitý model krystalu, tj. předpovíme pravděpodobné hodnoty souřadnic atomů. Jestliže byl model správný, pak se vypočtený a experimentálně pozorovaný difrakční obraz (např. rozložení a intenzita „reflexí“ na filmu) navzájem ztotožní. Nesouhlas vyžaduje návrh nové varianty rozmístění atomů. Touto metodou „zkoušek a chyb“ byly brzy po Laueově objevu řešeny jednoduché struktury neobsahující velký počet atomů v buňce.

struktury) formulovat jako řešení mnohonásobně přeuročené soustavy lineárních rovnic.

Počáteční nedůvěra v realizaci byla překonána teprve díky rychlému rozvoji výpočetní techniky, která umožňuje efektivní zpracování rozsáhlých souborů experimentálních dat. Přímé metody určování struktur lze dnes aplikovat i bez detailní znalosti jejich teorie. Struktura molekul o několika desítkách atomů se dá pomocí plně automatizovaných vyhodnocovacích systémů určit i neodborníky za pouhých několik dnů nebo týdnů.

Největší uplatnění našla metoda Hauptmana a Karleho zatím při popisu struktur organických sloučenin. Tím se vysvětluje paradox, že Nobelovu cenu za chemii pro rok 1985 dostali fyzik s matematikem.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Ruský Gauss

(P. L. Čebyšev 1821 — 1894)

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topolčany

Petrohrad v letech 1847 až 1882. Sobota popolední. K bytu P. L. Čebyševa kráčí mladí lidé. Budoucí matematici, mechanici, přátelé exaktních věd. Člověk, kterého idu navštívit, je ochotný pomôct radou, dobrým slovem, příkladem. Vždy v sobotu medzi druhou a štvrtou popolední môžu prísť debatovať o odbornej problematike. Prostredníctvom jasného, jednoduchého a krátkeho vysvetlenia si prehľadujú základy matematickej vedy. Vždy mimoriadne zdržanlivý a zdvorilý *Pafnutij Lvovič Čebyšev* precízne usmernil svojich návštevníkov v odbornej problematike i v otázkach bežných záležitostí študentského života.

Na panstve Okatovo v Kalužskej gubernii sa málo známemu ruskému šľachticovi L. P. Čebyševovi narodil 16. mája 1821 syn Pafnutij. Vzdelaný otec zabezpečil základnú výchovu a vzdelanie doma. Matka učila syna čítať a písať. Sesternica A. K. *Sucharevová* — vzdelaná dievča, ktorej portrét si Čebyšev chránil s veľkou láskou až do konca svojho života, zodpovedala za vyučovanie aritmetiky a francúzskeho jazyka. Už v detstve prejavil Čebyšev zručnosť pri vyrezávaní dreva. Vedel z neho veľmi šikovne zostavovať jednoduché hračky a mechanizmy.

V roku 1832 sa celá rodina Čebyševových presťahovala, kvôli príprave detí na univerzitu, do Moskvy. Tu sa mladý Pafnutij zoznámil s *P. N. Pogorelským*, veľmi obľúbeným učiteľom súkromného gymnázia, ktorý vedel zaujať žiakov pre matematiku. Spoločná príprava a pôsobenie talentovaného pedagóga malo silný a podstatný vplyv na budúceho študenta Moskovskej univerzity. Šestnásťročný Čebyšev vstupuje v roku 1837 na matematicko-fyzikálne oddelenie filozofickej fakulty.

Štúdium u prof. *N. E. Zernova*, *N. D. Brašmana*, plné jasného a dostupného matematického vzdelávania, rozvinulo zárodoky lásky k matematike. Snaživý Čebyšev získal už počas štúdia striebornú medailu univerzity za prácu „Výpočet koreňov rovníc“. V roku 1841 ukončil univerzitné štúdium. V roku 1843 odovzdáva P. L. Čebyšev magisterskú prácu a v roku 1845 dizertáciu. Od roku 1847 začína vedecky a pedagogicky pracovať v oblasti čistej a aplikovanej matematiky na univerzite v Petrohrade. V roku 1849 tu získava hodnosť doktora matematiky za prácu z teórie čísel.

V roku 1850 dokázal P. L. Čebyšev, že pre $n > 3$ leží medzi prirodzenými číslami n a $2n-2$ aspoň jedno prvočíslo. Túto úlohu formuloval francúzsky matematik *J. Bertrand* (1822—1900) v roku 1845. Prvý dokázal tento tzv. Bertrandov postulát Čebyšev.

Pafnutij Lvovič mal vždy veľký sklon k práci s mechanizmami. Rád konštruoval technické modely, užitočné prístroje a rôzne mechanické hračky. Pravidelne premýšľal o praktickom uplatnení matematických poznatkov v mechanike. „Zblíženie teórie s praxou prináša tie najpriaznivejšie výsledky a nielen prax na tom získava, ale aj veda se rozvíja: objavujú sa v nej ďalšie objekty pre výskum. Prax stavia pred vedu celkom nové otázky a vyvoláva potrebu nových metód.“ Prvú cestu za hranice Ruska v roku 1852 vykonal Čebyšev s cieľmi riešiť otázky praktickej mechaniky. Za celý život vytvoril asi 40 nových mechanizmov a zdokonalil ich viac ako 80. Napríklad v roku 1878 skonštruoval Čebyšev aj sčítací stroj s plynulým prenosom desiatok z nižšieho rádu na vyšší. Niektoré mechanizmy vystavoval na výstavách v Paríži (1878) a Chicagu (1893). Napísal niekoľko pojednaní o praktickej mechanike, napr. o ozubených kolesách, koncentrických regulátoroch, o prístroji pre konštruovanie geografických máp a pod. Vypracoval teóriu prevodových mechanizmov parných strojov. Čebyšev vytvoril matematickú teóriu mechanizmov a odhalil v nej celý rad veľmi zaujímavých problémov. „Každý vzájomný vzťah medzi matematickými symbolmi zodpovedá vzťahu medzi reálnymi vecami — matematická úvaha je rovnocenná experimentu bezvadnej presnosti veľa ráz zopakovanému, a tak ho je potrebné doviesť k logicky i materiálne bezchybným záverom.“

P. L. Čebyšev bol v roku 1852 menovaný mimoriadnym a v roku 1860 riadnym profesorom matematiky na petrohradskej univerzite. Prednášal teóriu pravdepodobnosti, diferenciálny a integrálny počet, teóriu čísel.

Od roku 1853 pracoval v Akadémii vied v oddelení aplikovanej matematiky. Riadnym akademikom petrohradskej akadémie sa stal v roku 1859.

V pedagogickej práci vedel P. L. Čebyšev zjednotiť náročné požiadavky s láskavým prístupom ke študentom. Hovoril rýchlo, vysvetľoval presne a zrozumiteľne. Pedantne dodržiaval čas na prednášky. Pri nich bola v popredí myšlienka: „Ako disponovať so svojimi prostriedkami pre dosiahnutie čo najväčšej užitočnosti? Vyriešením tejto úlohy môžeme uspokojiť požiadavky praxe, ktorá vždy žiada najlepšie a najvýhodnejšie.“ Čebyšev sa snažil vytvoriť u študentov návyk pre samostatné premýšľanie a matematickú tvorivosť. Kládol vysoké požiadavky na vedomostnú úroveň svojich žiakov. Pri skúškach nebol príliš zhovievavý, ale ani príliš prísny. Poslucháči sa veľmi snažili látku jeho prednášok zvládnuť, lebo považovali neurobenie skúšky u Čebyševa za veľkú ostudu.

Od roku 1882 sa Čebyšev venoval iba vedeckej práci v Akadémii vied. Spolupracoval tu predovšetkým s *V. Ja. Buňakovským* (1804—1889), ktorý ho do akadémie priviedol. Čebyšev bol za výsledky svojich matematických prác zvolený za člena akadémii vied v Berlíne (1871), Bologni (1873), Paríži (1874), v Londýne (1877), v Štokholme (1893). Ďalšie počty získal od mnohých ruských i cudzích vedeckých a kultúrnych inštitúcií.

Úspešná matematická práca Čebyševa v oblasti matematickej analýzy, teórie čísel a teórie pravdepodobnosti na Petrohradskej univerzite a Akadémii sa stala zrodom pre Petrohradskú matematickú školu. Za jej zakladateľov sa považujú *V. Ja. Buňakovskij*, *P. L. Čebyšev* a *M. V. Ostrogradskij*. Medzi významných predstaviteľov tejto školy patria: *A. A. Markov* (1856—1922), *A. M. Ljapunov* (1858—1918), *J. I. Zolotarev* (1847—1878), *V. A. Steklov* (1864—1926), *A. N. Korkin* (1837—1908), *A. N. Krylov* (1863—1945). Základné smery rozvoja matematiky v Rusku na dlhé obdobie určil a vzájomné vzťahy medzi rôznymi časťami matematiky prehĺbil práve *P. L. Čebyšev*.

Pafnutij Lvovič Čebyšev je autorom viac ako 70 vedeckých prác z teórie čísel, teórie pravdepodobnosti, teórie aproximácií funkcií, teórie mechanizmov. Dá sa povedať, že Čebyšev je po Euklidovi prvým, kto dosiahol vážne výsledky v problematike rozloženia prvočísel. Stanovil asymptotický zákon rozloženia prvočísel. Publikoval „O počte prvočísel neprevyšujúcich dané číslo“ v roku 1849 a „O prvočíslach“ v roku 1858. Čebyševova učebnica z teórie čísel sa používala v Rusku celé polstoročie. V teórii pravdepodobnosti Čebyšev študoval náhodné veličiny, dokázal niektoré zovšeobecnené formy zákona veľkých čísel, zistil nové spôsoby dôkazov limitných viet. Dôrazne sa vyslovil pre potrebu matematickej precíznosti pri dokazovaní viet v teórii pravdepodobnosti. Čebyšev patrí k zakladateľom teórie optimálnej aproximácie funkcií pomocou polynómov. Výsledky jeho prác z teórie aproximácií našli uplatnenie

v teórii pravdepodobnosti a kvantovej mechanike. V oblasti matematickej analýzy riešil problémy integrácie niektorých iracionálnych výrazov z algebraických funkcií a logaritmov. Čebyšev často elementárnymi metódami dosiahol významné výsledky. Formuloval a riešil problémy, ktoré ovplyvnili rozvoj spomínaných matematických disciplín.

V osobnom živote P. L. Čebyšev uprednostňoval osamelý spôsob života, oddaný tvorivej matematickej činnosti. Bez ohľadu na svoje krívanie, chodil rýchlo a reagoval energicky. Petrohrad sa stal jeho trvalým domovom. Osmého decembra 1894 (podľa starého ruského kalendára 26. XI.) ráno si sadol Čebyšev za písací stôl a požiadal o pohár s čajom. Slúžka ho našla skloneného nad stolom v bezvedomí. Smrť nastala ochrnutím srdečnej činnosti.

Nezabudnuteľným odkazom života a diela P. L. Čebyševa zostane neutuchajúca túžba, aby sa praktické potreby odrážali v matematickej teórii a prispeli k novým vedeckým objavom, ktoré zase napomôžu k rozvoju praktickej činnosti. Čebyšev to raz vtipne vyjadril slovami: „Za starých časov zadávali matematike úlohy bohovia, napr. zdvojenie kocky z dôvodov vymerania rozmeru Delfského obetného kameňa. Potom nastalo druhé obdobie, keď úlohy zadávali polobohovia: *Newton*, *Euler*, *Lagrange*. Teraz je tretia etapa, úlohy zadáva praktická činnosť“.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Algebrogramy s tajenkou

Pro ty, kteří odebírali loňský ročník Rozhledů, není hláskový algebrogram s tajenkou nic nového. Pro ostatní malé vysvětlení. Hláskový algebrogram se od slovního liší pouze tím, že je zde kromě sčítání zastoupeno i odčítání, násobení a dělení. K algebrogramu je připojena tajenka, která obsahuje ty číslice, pomocí nichž se řeší daný algebrogram. Pokuste se tedy nalézt řešení obou algebrogramů a vyluštit obě tajenky.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{a) } A E N B & L B = & T A \\
 \quad \quad \quad - & \quad \times & \quad + \\
 \quad \quad \quad L S I & - & B E = L T B \\
 \hline
 A A N T & - & I R L = B L E
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \text{b) } O A I & - & R I = S L \\
 \quad \quad \quad \times & \quad \times & \quad \times \\
 \quad \quad \quad O U & + & T = G R \\
 \hline
 G R A L & - & G M L = G O T L
 \end{array}$$

Tajenka: 123486 47096470

Tajenka: 0123456789

Jarmila Pěničková

Zrychlení pohybu na kolečkových bruslích

Při závodech ve sjezdu na kolečkových bruslích se předpokládá, že na zrychlení pohybu nemá vliv hmotnost závodníka. Problém spočívá v tom, zda změna zrychlení vlivem odporu vzduchu závisí nebo nezávisí na hmotnosti závodníka.

Otázky. 1. Dojedou dva závodníci, kteří jedou na stejných kolečkových bruslích po stejné závodní dráze se sklonem α , do cíle za stejný čas, je-li např. jednoho hmotnost $m_1 = 86$ kg a druhého $m_2 = 82$ kg, je-li u obou stejná síla odporu vzduchu F_a ?

2. Proč není možno úlohu řešit vektorově, nýbrž jen ve skalárních hodnotách vektorů, považuje-li se součinitel valivého odporu f za skalární veličinu?

Emil Kašpar

Ze starých matematických časopisů

STANISLAV HORÁK, Praha

Pro ty čtenáře Rozhledů, kteří dovedou determinant aspoň rozvést, jsou určeny následující příklady. První dva jsou ze staršího českého časopisu, třetí je ze staršího zahraničního časopisu.

V R řešte rovnice:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg} x & \operatorname{cotg} x \\ \operatorname{cotg} x & 1 & \operatorname{tg} x \\ \operatorname{tg} x & \operatorname{cotg} x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnici lze upravit tak, že bude druhého stupně vzhledem k $\operatorname{tg}^3 x$. Jediný kořen $\operatorname{tg} x = 1$.

$$b) \begin{vmatrix} \sin(2R - x) & \sin x & \sin(R - x) \\ \sin x & \sin(R - x) & \sin(2R - x) \\ \sin(R - x) & \sin(2R - x) & \sin x \end{vmatrix} = 0.$$

Vzhledem k $\operatorname{tg} x$ vyjde rovnice třetího stupně, jejíž jeden kořen je 1.

Kvadratická rovnice má kořeny $1, -\frac{1}{2}$.

$$c) \begin{vmatrix} \cos x & 1 & \sin x \\ \sin x & \cos x & 1 \\ 1 & \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvedením determinantu dostaneme rovnici

$$\sin^3 x + \cos^3 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0.$$

Zavedeme substituci $\sin x + \cos x = y$. Potom $\sin x \cos x = \frac{1}{2} (y^2 - 1)$. Dostanete rovnici třetího stupně, jejíž jeden kořen je -1 . Zbývající kvadratická rovnice má kořeny $-1 \pm \sqrt{6}$

Úlohy ze zahraničních časopisů

RNDr. TOMÁŠ SCHÜTZ, katedra matematiky PeF UK v Praze

Počínaje tímto číslem budeme pravidelně předkládat vybrané úlohy z časopisecké matematické literatury ze Sovětského svazu, Německé demokratické republiky, Polska, Bulharska a Spojených států amerických.

Úloha 1. Nalezněte všechna přirozená čísla n , pro která rovnice

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

má řešení v oboru všech přirozených čísel.

Úloha 2. Nalezněte všechna reálná čísla a taková, pro která je konvergentní posloupnost $\{\sin(an)\}_{n=0}^{\infty}$

Úloha 3. Je dáno n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, různých od $+1$ a -1 , takových, že je splněna rovnost

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1 = 0$$

Dokažte, že n je dělitelné 4.

Úloha 4. Vzdálenost dvou bodů X, Y v prostoru označme symbolem $|XY|$. Buďtež dány v prostoru čtyři navzájem různé body O, A, B, C , které nemusí ležet v jedné rovině. Dokažte, že je splněna nerovnost

$$\frac{|AB|}{|OA| + |OB|} < \frac{|AC|}{|OA| + |OC|} + \frac{|BC|}{|OB| + |OC|}$$

Úloha 5 (obtížnější). Nalezněte všechny funkce f , které jsou definované pro všechna x , mají vlastní derivaci v bodě $x = 0$ a pro všechna x splňují rovnost $af(bx) = bf(ax)$, kde a, b jsou daná navzájem různá kladná čísla.

Řešení algebrogramů ze str. 297

- a) ALBERT EINSTEIN
- b) LOGARITMUS

Sú študenti gymnázií vo výhode?

Ekonomický a sociálny rozvoj našej spoločnosti, jej rozvoj v podmienkach vedeckotechnickej revolúcie zákonite vyvoláva nutnosť rastu vzdelanostnej a kultúrnej úrovne mládeže a dospelých.

Veda sa preniesla do techniky, technika do vedy a obe do spoločenskej praxe. Všeobecné vedomosti v oblasti techniky sú podmienené ovládnutím matematiky a fyziky. Veď tieto dve vedné disciplíny sú teoretickým základom disciplín technických. Pre riešenie úloh techniky je dôležité zapáliť v mládeži záujem o ňu a ďalej ho rozvíjať. Osvojovanie si návykov získavania vedomostí, rozširovania vedomostí, tvorivosť, to sú úlohy, ktoré musí pestovať v mládeži učiteľ. Jednu z možností mu poskytuje práca so žiakmi pri riešení matematickej či fyzikálnej olympiády. O tom, že takáto činnosť prinesie žiadany výsledok, svedčí rozhovor s jedným členom „olympijskej rodiny“.

Meno a priezvisko: MILOŠ DRUTAROVSKÝ

Škola: SPŠE PREŠOV

Kategória: D, C, B, A

Všetci tí, čo pracujú v oblasti fyzikálnej olympiády, poznajú označenie listu súťažiaceho. No nie každý súťažiaci sa mohol „prepracovať“ až do družstva reprezentujúceho našu socialistický republiku.

- Miloš, mohli by ste mi prezradiť, ako sa to podarilo Vám? Ktoré faktory považujete za ovplyvňujúce Vašu cestu?
- Bola to predovšetkým práca v kolektíve, ktorý tvorili riešitelia rôznych kategórií. Len v kolektíve je možná spolupráca na problémy, môžu vznikať dobré nápady, vzájomné konzultácie a zdravá konverzácia. Nemenej bolo dôležité dobré vedenie profesorom fyziky, ktorý mal na starosti fyzikálnu olympiádu. Tradícia v riešení fyzikálnej olympiády na našej škole úspechy, starších žiakov školy a snaha vyrovnáť sa im zohrali veľkú úlohu. Veľmi ma motivovali aj sústreďenia pre riešiteľov poriadané KPÚ, KVFO, ÚVFO.
- Boli ste študentom priemyslovky. Hovorí sa, že študenti stredných priemyselných škôl sú v určitej nevýhode vo fyzike a matematike oproti študentom gymnázií. Nemali ste takýto pocit na sústreďeniach?
- Hneď v I. ročníku na seminároch sa ukázalo, že moje teoretické vedomosti v oblasti fyziky a matematiky majú medzery v porovnaní s vedomosťami žiakov gymnázií. Študenti gymnázií sa zaoberajú štúdiom fyziky hlbšie a celkove majú menšie kvantum učiva. V II. ročníku fyzika na SPŠ nie je, a úlohy, ktoré je potrebné riešiť v kate-

górii C, sa nepremietajú ani do jedného predmetu. Teda potrebné poznatky z týchto oblastí som musel doštudovať samostatne. To všetko som prekonal možno aj preto, lebo som vedel, že v III. a IV. ročníku budem riešiť úlohy, ktoré sú blízke môjmu odboru.

Riešiť fyzikálnu olympiádu v kategórii B mi veľmi pomohla účasť na sústreďení poriadanom KVFO. Podľa môjho názoru je nevýhodou pre mnohých priemyslovákov, že sa na základe výsledkov krajského kola kategórie C nedostanú v III. ročníku na toto sústreďenie, hoci v ďalších ročníkoch by fyzikálnu olympiádu úspešne mohli riešiť. Ďalšie samostatné štúdium problematiky z optiky bolo nutné v III. a IV. ročníku.

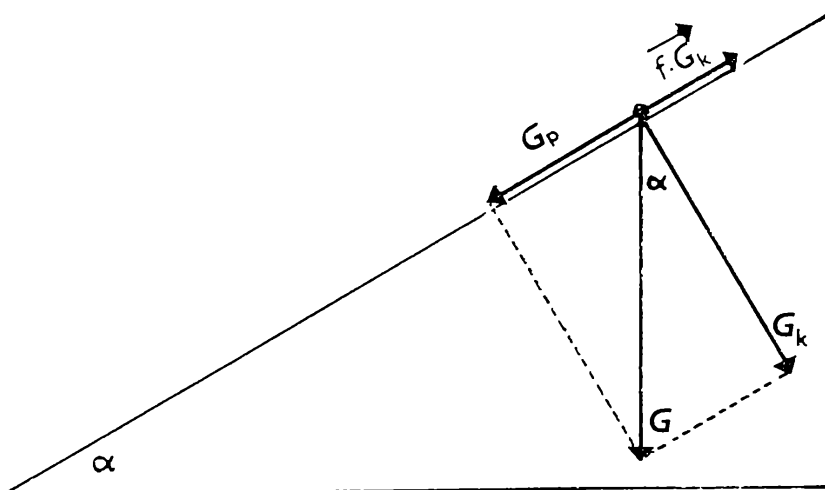
- Má študent priemyslovky aj nejaké výhody oproti študentom gymnázií pri riešení úloh?
- Podľa môjho názoru žiadne nemá.
- Prinieslo vám riešenie úloh FO pozitíva do štúdia technických predmetov?
- Áno, je to predovšetkým doštudovanie niektorých partií vyššej matematiky (diferenciálny a integrálny počet, diferenciálne rovnice, vektorový počet) a ich aplikácie. Riešenie úloh fyzikálnej olympiády mi často umožnilo hlbší pohľad, postrehnutie súvislostí v technických predmetoch. Ako príklad môžem uviesť princíp vychyľovania elektrónového lúča v obrazovke. Na vyučovaní sa preberá tento jav bez početného zdôvodnenia, no pri riešení úloh fyzikálnej olympiády sa takéto problémy bežne riešia.
- V školskom roku 1981/82 ste získali I. miesto v krajskej súťaži kategórie B, II. miesto v kategórii A a III.—IV. miesto v celoštátnom kole. Potom nasledovalo obsadenie I. miesta v krajskom kole kategórie A a V.—VII. miesto v celoštátnom kole (1982/83). Napokon to bola účasť na Mezinárodnej fyzikálnej olympiáde. Aké úspechy dosiahlo československé družstvo a vy?
- Družstvo ČSSR bolo IV. a ja som získal jednu z tretích cien.
- Aká je Vaša perspektíva do budúcnosti?
- Venovať sa štúdiu na EFVŠT v Košiciach.

Zhovárala sa Jana Vršková

Řešení fyzikální úlohy ze str. 298

1. Tíha $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ závodníka se rozloží na pohybovou složku $\mathbf{G}_p$ ve směru spádu dráhy a na složku $\mathbf{G}_k$ k předešlé kolmou (obr. 1), přičemž skalární hodnoty složek jsou $G_p = G \sin \alpha$, $G_k = G \cos \alpha$.

Velikost síly F , uvádějící závodníka v pohyb, je rovna velikosti síly G_p , zmenšené o velikosti síly valivého odporu $F_t = f G_k$ a odporu vzduchu F_a :



Obr. 1

$$F = G_p - f \quad G_k - F_a = G \cdot \sin \alpha - f \quad G \cos \alpha - F_a = \\ = m g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - F_a. \quad (1a)$$

Odtud

$$a = \frac{F}{m} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{F_a}{m}. \quad (1b)$$

Odtud je zřejmé, že zrychlení závodníka o větší hmotnosti se odporem vzduchu zmenšuje o menší hodnotu, a proto závodník s větší tělesnou hmotností dojde do cíle za kratší čas.

2. Vektorově není možno úlohu řešit, neboť $\mathbf{G}_k \nparallel \mathbf{F}$ atd. a $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{g}$. Rovnice 1ab napsané vektorově by nebyly správné.

INFORMACE

K jubileu časopisu Kvant

RNDr. TOMÁŠ SCHÜTZ, katedra matematiky PeF UK v Praze

Nevím, zda je mezi našimi mladými zájemci o matematiku a fyziku znám sovětský časopis *Kvant*. Mohu se samozřejmě mýlit, ale obávám se, že tomu tak není, a cílem tohoto článku je v mezích možností přispět k nápravě. Jak již sám název napovídá, časopis bude mít jistě cosi společného s fyzikou. A skutečně, *Kvant* je vědecko-populární matematicko-fyzikální časopis Akademie věd SSSR a Akademie pedagogických věd SSSR. Vydává jej nakladatelství Nauka, hlavní redakce matematicko-fyzikální literatury, a šéfredaktorem je akademik J. A. Osipjan. Časopis

byl založen v roce 1970, vychází jednou měsíčně, a to v nákladu přibližně 200 000 výtisků. Každé číslo obsahuje 66 stran textu a obrázků. Časopis pojednává o nejrozličnějších faktech, problémech, otázkách a zajímavostech týkajících se matematiky a fyziky, případně příbuzných oborů. Články jsou psány na vysoké odborné úrovni, ale to neznamená, že by nemělo význam, aby je četli studenti středních škol. Naopak, četba řady článků nevyžaduje zvláštní průpravu, stačí běžná školská znalost základních věcí z matematiky a fyziky. Z pravidelných rubrik Kvantu bych se chtěl zmínit alespoň o úlohách.

Občas, to znamená ne v každém čísle, časopis uveřejňuje rubriku „Vybrané školní úlohy.“ Často nás seznamuje s obsahem přijímacích zkoušek z matematiky a fyziky pro vysoké školy různých typů. V každém čísle je potom rubrika „Kvant mladším žákům,“ která obsahuje 5 úloh, které pro svou elementárnost mohou být řešeny i těmi nejmenšími školáky, ale které nejsou bez zajímavosti ani pro ty starší. Jako příklad uveďme úlohu číslo 2 z 5. čísla loňského ročníku. Máme číselný rébus

$$\text{USA} + \text{USSR} = \text{PEACE},$$

přičemž za písmena máme dosadit čísla tak, aby platila rovnost, za stejná písmena stejná čísla a za navzájem různá písmena čísla navzájem různá. Dále v každém čísle je uveřejněna rubrika „Úlohy Kvantu,“ která obsahuje 5 matematických a 5 fyzikálních úloh. Tyto úlohy jsou již poměrně obtížné, i když k porozumění jejich zadání stačí zpravidla znalosti středoškolské matematiky a fyziky, a řešení je možno posílat do soutěže redakci časopisu. Jestliže však někdo na řešení nepřijde, jeho zvědavost není napínána do nekonečna; je možno je nalézt opět na stránkách Kvantu, ovšem samozřejmě až několik čísel po zveřejnění příslušné úlohy.

Časopis Kvant vychází v ruském jazyce, ale obsah, znění soutěžních úloh a podmínky pro účast v soutěži jsou uvedeny též v angličtině.

V loňském roce oslavil Kvant jakési jubileum; jeho osmé číslo bylo 200. číslem v historii časopisu. Na stránkách časopisu byly přetištěny nejlepší články z prvních čísel Kvantu.

Pro informaci čtenáře uvádím dvě matematické a jednu fyzikální úlohu ze soutěžních úloh jubilejního Kvantu.

Úloha číslo M 997. Dokažte, že součet všech čísel tvaru $\frac{1}{m \cdot n}$, kde m, n jsou přirozená čísla, $1 \leq m < n < 1986$, není celým číslem.

Úloha číslo M 999. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí nerovnost

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} <$$

$$< 4 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Dokažte, že konstantu 4 v pravej časti nerovnosti

a) lze zaměnit číslem 2;

b) nelze zaměnit číslem menším než 2.

Úloha číslo F 1010. Dvě dielektricky nabitě nekonečné délky jsou rozloženy v prostoru jako dvě protínající se kolmé přímky. Lineární hustota nábojů na niti je s . Nalezněte sílu vzájemného působení nití. Předpokládejte, že nitě jsou velmi tenké a že k přerozdělení nábojů nedochází.

Co říci závěrem? Doufám že se mi podařilo maličko snížit neinformovanost naší mladé matematické veřejnosti o Kvantu. A jestliže si, milý čtenáři, pohráváš s myšlenkou časopis odebírat nebo alespoň půjčovat si jej v knihovně, neváhej a uskutečni ji, uvidíš, že nebudeš litovat...

Kalendár M-F: marec 1987

2. III. 1862 sa v Petrohrade narodil *Boris Borisovič Golicyn*, ruský fyzik. Zaoberal sa meteorológiou, seizmológiou, optikou, molekulárnou fyzikou a spektroskopiou.
2. III. 1902 sa v Alamagordo narodil *Edward Uhler Condon*, americký fyzik. Pracoval v oblasti kvantovej mechaniky, atómovej a jadrovej fyziky, molekulovej spektroskopii a teórii pevných látok. Zdokonalil získavanie uránového paliva elektromagnetickým odlučovaním.
4. III. 1822 sa narodil *Jules Antonie Lissajous*, francúzsky fyzik. Získal zaujímavé výsledky pri štúdiu kmitavého pohybu.
4. III. 1907 sa v Žitomire narodil *Vladimír Josifovič Veksler*, sovietsky fyzik. Pracoval v oblasti urýchľovania elementárnych častíc, navrhol princíp, na základe ktorého vznikli nové druhy urýchľovačov — fázotrónov.
5. III. 1827 zomrel v Paríži *Pierre Simon Laplace*, francúzsky matematik, fyzik a astronóm. Bol predstaviteľom analytickej mechaniky, aplikoval teóriu gravitácie na pohyb v slnečnej sústave. Zaviedol vytvorené funkcie, riešil diferenciálne rovnice, formuloval teóriu pravdepodobnosti.
5. III. 1827 zomrel v Como *Alessandro Volta*, taliansky fyzik. Zaoberal sa náukou o elektrickom prúde. Zostrojil prvý zdroj dlhotrvajúceho elektrického prúdu t. zv. Voltov stĺp. Zkonštruoval elektroskop, elektrofor.

5. III. 1842 sa v Heidelbergu narodil *Heinrich Weber*, nemecký matematik. Zaoberal sa teóriou algebrických čísel, algebrickou geometriou a matematickou fyzikou.
6. III. 1787 sa v Straubingu narodil *Joseph von Fraunhofer*, nemecký fyzik a astronóm. Objavil a vysvetlil tmavé spektrálne čiary v slnečnom spektre, objavil ohyb svetla na difrakčnej mriežke, zdokonalil ďalekohľad.
12. III. 1942 zomrel v Londýne *William Henry Bragg*, anglický fyzik, matematik a kryštalograf. Položil základy fyziky pevných látok, zaviedol nové metódy röntgenovej difrakcie a spektroskopie. V roku 1915 získal Nobelovu cenu za fyziku. Cez vojnu pracoval na výskume akustickej detekcie ponoriek.
13. III. 1937 zomrel *Elihu Thomson*, americký fyzik a vynálezca. Zaviedol elektrické odporové zváranie oceli.
14. III. 1882 sa vo Varšave narodil *Wacław Sierpiński*, poľský matematik. Rozvinul teóriu čísel a teóriu množín. Cenné sú jeho výsledky v topológii a teórii funkcií reálnej premennej. Patrí k zakladateľom poľskej matematickej školy.
14. III. 1912 zomrel v Moskve *Piotr Nikolajevič Lebedev*, ruský experimentálny fyzik. Objavil tlak svetla na plyny, dokázal mechanické impulzy vo svetelných vlnách. Urobil originálne pokusy s otáčavým magnetickým polom.
15. III. 1897 zomrel v Oxforde *James Joseph Sylvester*, anglický matematik. Ovplyvnil algebru, teóriu čísel, teóriu pravdepodobnosti, mechaniku a matematickú fyziku. Založil algebrickú teóriu invariantov. Vytvoril veľa užitočných matematických termínov a symbolov.
15. III. 1962 v Berkeley zomrel *Arthur Holly Compton*, americký fyzik. Zaoberal sa atómovou a jadrovou fyzikou i fyzikou kozmického žiarenia. V roku 1927 získal spolu s Ch. Wilsonom Nobelovu cenu za fyziku. Zúčastnil sa na konštrukcii prvého jadrového reaktoru i na projekte prvej atómovej bomby.
16. III. 1787 sa v Erlangene narodil *Georg Simon Ohm*, nemecký fyzik. Odhalil závislosť elektrického prúdu od napätia. Skúmal akustické a optické javy.
17. III. 1782 zomrel v Bazileji *Daniel Bernoulli*, švajčiarsky matematik a fyzik. Svoje poznatky uplatnil pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc, v oblasti hydrodynamiky. Teplo vysvetlil ako pohyb molekúl.
23. III. 1882 sa narodila v Erlangene *Emmy Noetherová*, nemecká matematická. Zaoberala sa algebrickou geometriou, teóriou ideálnych čísel a abstraktnou algebrou.
25. III. 1962 zomrel *Auguste Piccard*, švajčiarsky fyzik. Skúmal stratosféru aorské hlbiny.
27. III. 1967 v Prahe zomrel *Jaroslav Heyrovský*, český fyzikálny che-

mik. Za objav a rozpracovanie analytickej polarografickej metódy získal v roku 1959 Nobelovu cenu za chémiu.

30. III. 1892 sa v Krakove narodil *Stefan Banach*, poľský matematik. Patrí k zakladateľom súčasnej funkcionálnej analýzy. Zaoberal sa aj teóriou diferenciálnych rovníc, teóriou funkcií komplexnej premennej a algebrou.
31. III. 1727 zomrel v Kensingtone *Isaac Newton*, anglický matematik, fyzik a astronóm. Patrí k najvýznamnejším prírodovedcom všetkých čias. Vytvoril základy infinitezimálneho počtu, študoval nekonečné rady, položil základy teórie symetrických funkcií. Vytvoril gravitačnú teóriu, odviedol základné zákony dynamiky. Objavil rozklad svetla hranolom, zkonštruoval zrkadlový ďalekohľad.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Beran, L. — Ondráčková I. :

ŽÁDNÉ OBAVY Z MATEMATIKY

Vydalo SPN, Praha 1986, edícia Pomocná kniha pre žiakov, ilustrácie J. Wintera-Nepřaktu, 216 strán, viaz. Kčs 16,50

Povzbudzujúci názov a účelný podtitul „Pomoc středoškolákům“ určuje ciele i osud knižky. Žiaci stredných škôl môžu získať publikáciu s návodmi pre zlepšenie štúdia matematiky.

Knižka je rozdelená na päť kapitol, štyri intermezzy a jeden doslov. Úvod naznačuje spôsob štúdia a vysvetľuje použité orientačné znaky. Každá časť je venovaná určitej skupine žiakov, podľa známk z matematiky. Zo spoločného zamyslenia a poznania ťažkostí vychádza diagnóza, návod pre nápravné postupy a slovo do svedomia, aby si žiak sústreďným nácvikom na vyriešených príkladoch a potom na úlohách

pre samostatnú prácu mohol precvičiť základné matematické obraty a návyky.

Didaktickými radami sú naplnené medzihry:

Ako sa učiť matematiku; Umenie presných formulácií a protipríkladov; Ako riešiť matematické úlohy; Ako si ľahko pamätať vzorce. Doslov je stratégiou a taktikou pri písomných prácach a pri príprave na prijímacie skúšky na vysoké školy.

Knižka obsahuje ukážky základných matematických úloh a najčastejšie žiacke chyby, niektoré zaujímavé tradičné príklady, niekoľko historických poznámok, trochu matematickej logiky a zo pár pekných úloh, napr. z teórie čísel. Na konci knižky sú uvedené výsledky a riešenia úloh. Štýl a jazyk knižky je pre študentov zrozumiteľný a dobre prístupný, hovorí priamo k nim s veľkou snahou o faktickú pomoc a spoluprácu.

Dušan Jedinák

REPORTÁŽE Z MIKROSVETA





PIŠE: J. CHRAPAN KRESÍ: V. HISTRÍK

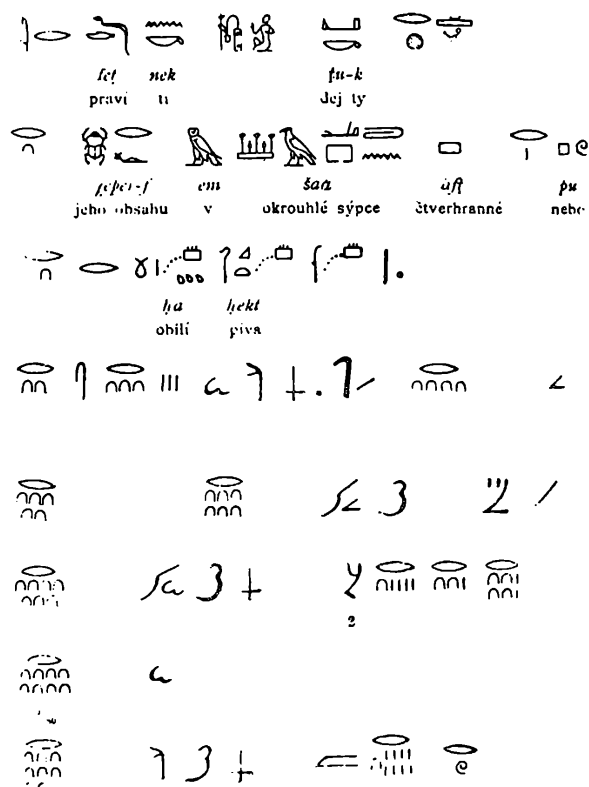
První česká učebnice dějin matematiky

Obrázek převzatý z knihy Josefa Úlehly „*Dějiny matematiky*“ je sám o sobě plný drobných hieroglyfických obrázků; věnujeme mu proto větší plochu stránky než obvykle.

Můžeme se z něho poučit o staroegyptském zápisu čísel přirozených a jejich převrácených hodnot; originál těchto zápisů vznikl před více než 3500 lety.

Josef Úlehla venkovský učitel, který vydal výběr z německých třísvazkových *Přednášek o dějinách matematiky* Moritze Cantora; Úlehlův spis vyšel ve dvou dílech v r. 1901 a 1913, nákladem Dědictví Komenského.

Vladimír Malíšek



Čo je matematika?

Najvyššie poslanie matematiky spočíva práve v tom, aby nachádzala skrytý poriadok v chaose, ktorý nás obklopuje.

N. Wiener

Matematika v neukončiteľnom procese vytvárania svojich abstrakcií a budovaní svojich aparátov umožňuje obsiahnuť prírodu poznaním stále hlbšie, správnejšie a úplnejšie.

A. D. Alexandrov

Vydáva ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$. cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1987.

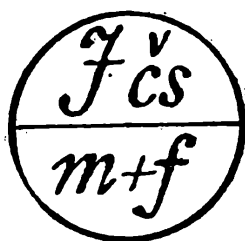
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(8)

**ROČNÍK 65, 1986/87
DUBEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný,
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr.
Ján Chrapan, CSc., VVTŠ-ČSSP Lip-
tovský Mikuláš, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Ja-
nout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr.
Hana Kořínková, CSc., VŠZ Pra-
ha, doc. dr. Karol Križalkovič, CSc.,
PF Nitra, prof. dr. Vladimír Majer-
ník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Josef
Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich
Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav
Šedivý, CSc., UK Praha, ing. dr. Vác-
lav Šindelář, CSc., Praha, doc. dr.
Martin Šolc, CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 11639 Praha 1-No-
vé Město.

Telefon 298750 (meziměsto), 298751
až 9.

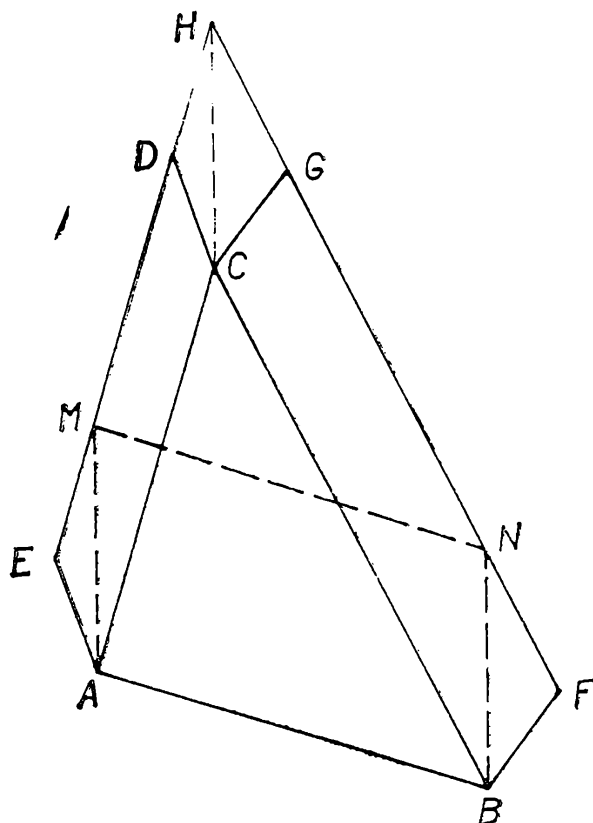
OBSAH

Karel Horák: Antické zobecnění Pytha- gorovy věty	309
Jaroslav Švrček: Úpatnicové trojúhelníky	312
Jiří Mída: Ještě o kódech – písmenové a číslkové změny	315
Ivan Fischer: Základy programování mi- kropočítačů 8	316
Miroslav Krajňák: Vektory nám pomáhají	323
Josef Jirů: Pohyb rovnoměrně zrychlený?	327
Cyril Höschl: O mechanické rovnováze těles 2	330
Eva Tókáříková, Ján Chrapan: Fyzika a dějiny ľudstva I .	336
Emil Kašpar: Pokus o „teleki	341
Jarmila Pěničková: Algebrogram s ta- jenkou	342
Tomáš Schütz: Úlohy ze zahraničních časopisů	343
Naše soutěž	343
Eva Bittnerová: Letná škola mladých fy- ziků	346
Z nových knih .	348
dj: Kalendár M-F	349
Ján Chrapan, Vlastimil Mistrík: Reportá- že z mikrosveta	351
Vladimír Malíšek: Strouhalova Experi- mentální fyzika	3. str. obálky
Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (65-68)	příloha

Antické zobecnění Pythagorovy věty

RNDr. KAREL HORÁK, CSc., MÚ ČSAV Praha

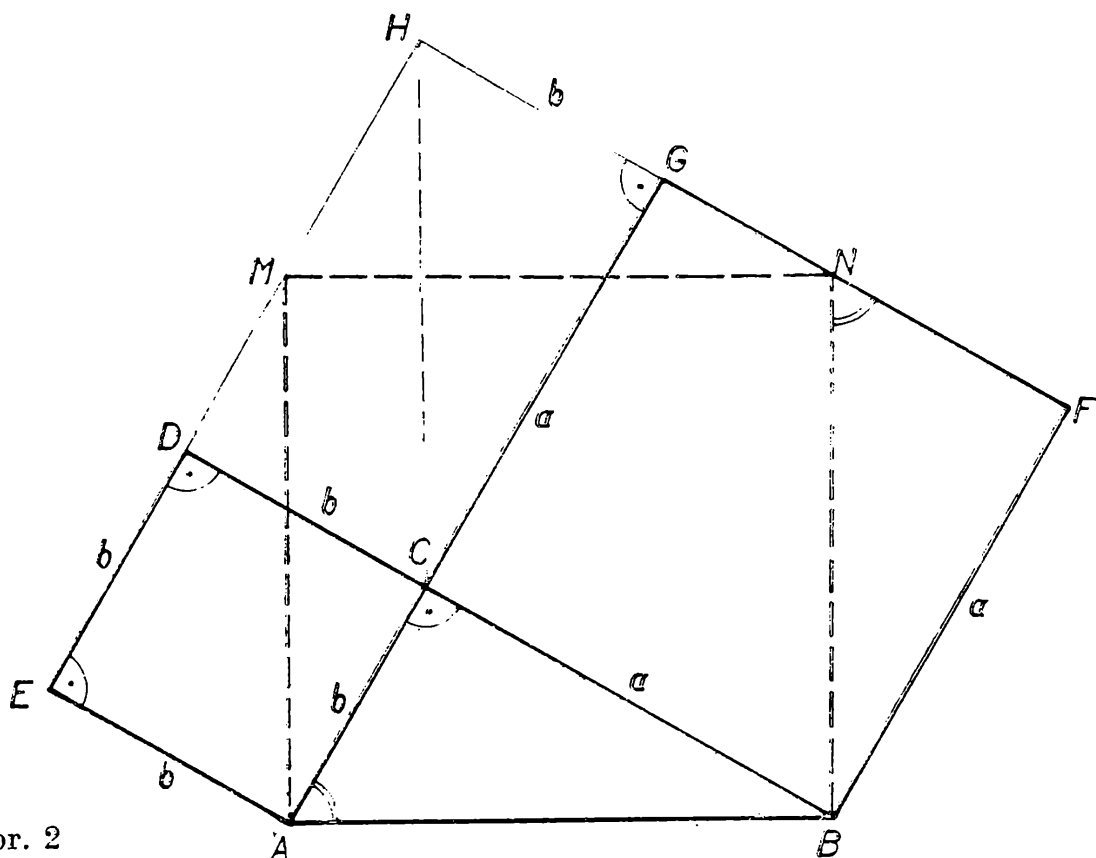
V článku [1] jsme se nedávno poučili o možném zobecnění Pythagorovy věty. Toto zobecnění má ovšem jednu drobnou nevýhodu: zatímco „čtverce nad oběma odvěsnami a nad přeponou“ lze jednoduše konstruovat, v případě jiných, složitějších obrazců musíme je nejprve sestavit v podobnosti dané velikostmi jednotlivých stran pravoúhlého trojúhelníka. A pro toho, kdo ví, že v podobnosti s poměrem $\frac{a}{b}$ se obsah obrazce změní v poměru příslušných čtverců $\frac{a^2}{b^2}$, už není výsledek příliš překvapující.



Obr. 1

Jiné a patrně zajímavější zobecnění Pythagorovy věty nalezneme však již v antické literatuře. V první části 4. knihy sbírky „*Mathématikai synagogai*“ *Pappa Alexandrijského* je uvedeno následující tvrzení:

Věta. Je-li ABC libovolný trojúhelník, sestrojme nad stranami BC a AC libovolné rovnoběžníky $ACDE$ a $CBFG$ (obr. 1). Označme H



Obr. 2

průsečík přímek ED a FG a sestrojíme body M , N na stranách ED , resp. FG tak, aby $MA \parallel NB \parallel CH$. Pak je $ABNM$ rovnoběžník a jeho obsah je roven součtu obsahů rovnoběžníků $ACDE$ a $CBFG$.

Nejprve bychom snad mohli ověřit, že v případě pravoúhlého trojúhelníka s pravým úhlem při vrcholu C skutečně dostaneme konstrukci čtverců $ACDE$ a $CBFG$ Pythagorovu větu. Provedeme-li popsanou konstrukci (obr. 2), měl by být čtyřúhelník $ABNM$ nejen rovnoběžník (což jsme zatím ještě nedokázali), ale dokonce čtverec. Z uvedené konstrukce však přímo plyne, že trojúhelníky ABC , HCG , CHD , NBF a AME jsou shodné (jsou všechny pravoúhlé a shodují se v obou odvěsnách). Je tedy

$$|AB| = |BN| = |MN| = |AM|$$

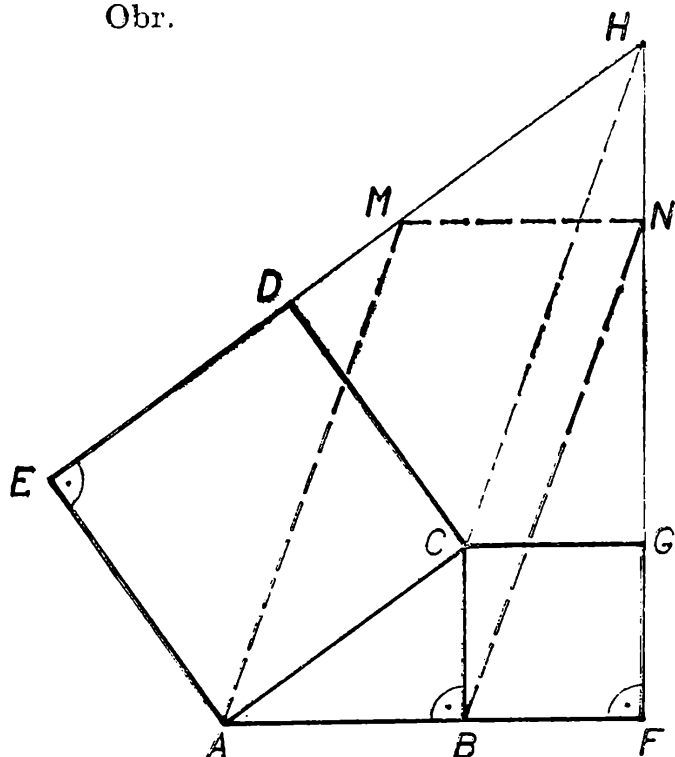
a

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BNM| &= 180^\circ - (|\sphericalangle BNF| + |\sphericalangle MNH|) = \\ &= 180^\circ - (|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle ABC|) = 90^\circ. \end{aligned}$$

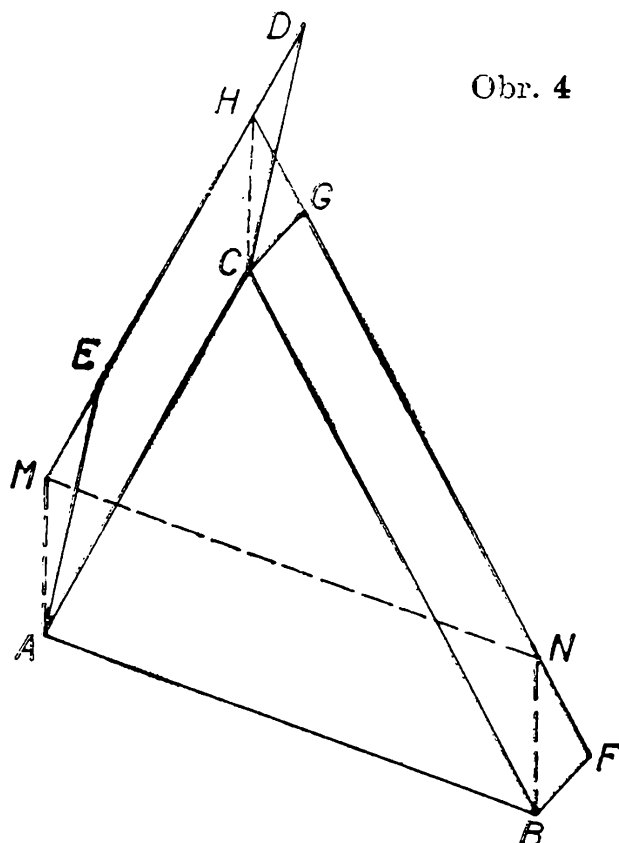
A tak je uvedená věta skutečně zobecněním věty Pythagorovy. Nesmíme se ovšem splést — kdybychom sestrojili čtverce nejprve nad přeponou a jednou z odvěsen, nikdy nedostaneme čtverec, ale jen rovnoběžník, jehož obsah ovšem bude součtem obsahů obou čtverců (obr. 3).

Důkaz věty (obr. 1). To, že $ABNM$ je rovnoběžník, plyne z toho, že $EH \parallel AC$, $FH \parallel BC$, $MA \parallel NB \parallel CH$, takže $|BN| = |CH| = |AM|$.

Obr.



Obr. 4



Zároveň je vidět, že

$$P(ACDE) = P(ACHM), P(CBFG) = P(CBNH).$$

Všimněme si dále, že pětiúhelník $ABNHM$ se jednak dá rozložit na rovnoběžník $ABNM$ a trojúhelník MNH , jednak na rovnoběžníky $ACHM$ a $CBNH$ a trojúhelník ABC . Protože trojúhelníky ABC a MNH jsou zřejmě shodné, plyne odtud rovnost obsahů

$$\begin{aligned} P(ABNM) &= P(ABNHM) - P(MNH) = \\ &= P(ABNHM) - P(ABC) = \\ &= P(ACHM) + P(CBNH) = \\ &= P(ACDE) + P(CBFG). \end{aligned}$$

Ještě si uvědomme, že obr. 1, z kterého jsme při důkazu vycházeli, je dostatečně obecný. Nastane-li totiž situace na obr. 4, nic se nezmění, protože body M , N jsou určeny průsečíkem H a obsahy rovnoběžníků zůstanou stejné. Uvedený důkaz dává zároveň jiný důkaz staré známé Pythagorovy věty.

A na závěr ještě několik slov k historii. *Pappos Alexandrijský* žil někdy v 2. polovině 3. století n. l. Ve své práci *Mathématikai synagogai* (Matematická sbírka), která má osm knih a je věnována geometrii, shrnuje dosavadní poznatky mnoha antických matematiků a uvádí řadu historických údajů. Mnohé z výsledků starověkých matematiků jsou dnes známy už jen v podobě, v jaké je tlumočil právě Pappos. Málokomu z nás asi přijde do ruky originál či překlad původní práce Pappovy, přesto máte přinejmenším možnost zalistovat v poučných knihách [2], [3], ze kterých čerpal i autor tohoto článku (kterému kdysi v 1. ročníku

gymnázia referát o antické matematice přispěl k jedničce z dějepisu — hle, jak široké jsou aplikace matematiky). Zatímco obvykle neustálým přejímáním informace ze starších zdrojů se historická pravda postupně ztrácí, v matematice máme to štěstí, že i v takovémto případě si ty nejdůležitější skutečnosti můžeme ověřit sami.

Nakonec snad ještě doplňující otázku: Uměli byste zformulovat (a případně i dokázat) obdobu Pythagorovy věty v prostoru? Rozluštění najdete ve svazečku ŠMM č. 27, *Stanislav Horák: Mnohostěny*, Mladá fronta, Praha 1970.

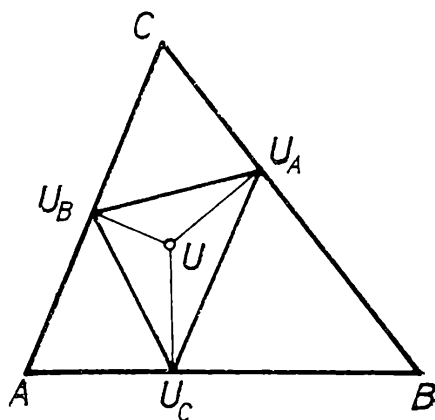
Literatura

- [1] E. Calda: Pythagorova věta a její zobecnění, RMF 64, č. 4, 133—137
- [2] A. Kolman: Dějiny matematiky ve starověku, Academia, Praha 1969
- [3] D. J. Struik: Dějiny matematiky, Orbis, Praha 1963

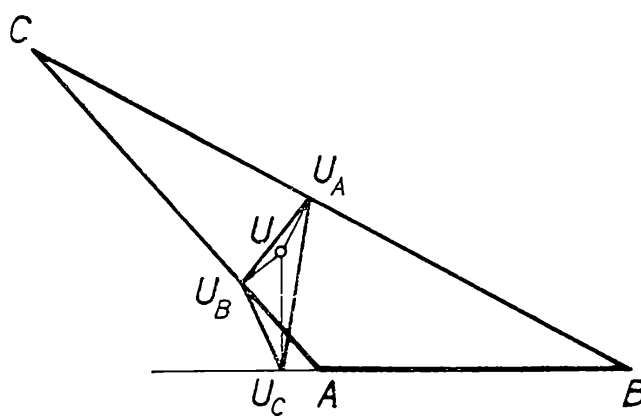
Úpatnicové trojúhelníky

RNDr. JAROSLAV ŠVRČEK, PŘF UP Olomouc

Nechť U je libovolný bod ležící v rovině daného trojúhelníka ABC . Body U_A , U_B , U_C nechť značí po řadě paty kolmic vedených bodem U na přímky BC , CA , AB (obr. 1a,b). Poloha bodů U_A , U_B , U_C závisí na tvaru daného trojúhelníka a na poloze bodu U .



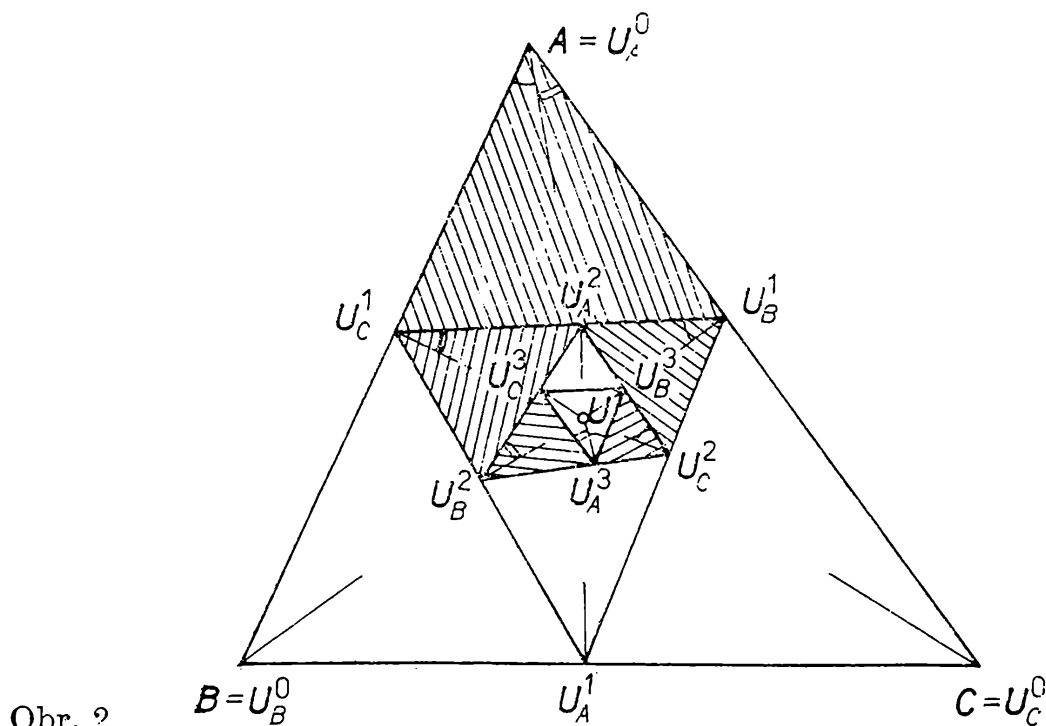
Obr. 1a



Obr. 1b

V případě, kdy bod U leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC , leží body U_A , U_B , U_C na tzv. *Simsonově přímce*. Zájemce o tuto problematiku lze odkázat např. na [1].

Jestliže bod U neleží na kružnici opsané danému trojúhelníku, tvoří



Obr. 2

body U_A, U_B, U_C vrcholy úpatnicového trojúhelníka příslušného trojúhelníku ABC s úpatnicovým bodem U .

V případě, kdy bod U splývá s ortocentrem (průsečíkem výšek) trojúhelníka ABC , je úpatnicový trojúhelník $U_A U_B U_C$ totožný s ortickým trojúhelníkem daného trojúhelníka ABC .

Pokud bod U splývá se středem kružnice opsané danému trojúhelníku ABC , je příslušný úpatnicový trojúhelník $U_A U_B U_C$ příčkovým trojúhelníkem trojúhelníka ABC .

Speciálními úpatnicovými trojúhelníky jsou tedy např. ortický a příčkový trojúhelník daného trojúhelníka.

Cílem tohoto článku je ukázat čtenáři jednu zajímavou vlastnost posloupnosti úpatnicových trojúhelníků s týmž úpatnicovým bodem.

Uvažujme libovolný úpatnicový bod U daného trojúhelníka ABC , který neleží na kružnici opsané trojúhelníku ABC , a jemu příslušný úpatnicový trojúhelník $U_A^1 U_B^1 U_C^1$ (první úpatnicový trojúhelník příslušný bodu U — viz obr. 2).

Pokud bod U neleží na kružnici opsané trojúhelníku $U_A^1 U_B^1 U_C^1$, můžeme jej považovat za úpatnicový bod tohoto trojúhelníka a použijeme ho ke konstrukci úpatnicového trojúhelníka $U_A^2 U_B^2 U_C^2$ v trojúhelníku $U_A^1 U_B^1 U_C^1$ (druhý úpatnicový trojúhelník příslušný bodu U — viz obr. 2). Třetím opakováním tohoto postupu získáme třetí úpatnicový trojúhelník $U_A^3 U_B^3 U_C^3$ příslušný bodu U atd. Položme dále $A = U_A^0, B = U_B^0, C = U_C^0$.

Věta. Trojúhelník $U_A^p U_B^p U_C^p$ je podobný trojúhelníku $U_A^q U_B^q U_C^q$, kde p, q jsou celá nezáporná čísla taková, že $p \equiv q \pmod{3}$.

Důkaz: provedeme nejprve pro případ, kdy $p = 3, q = 0$ (viz obr. 2). Uvažujme kružnice opsané trojúhelníkům $AU_B^1U_C^1$, $U_A^2U_B^1U_C^2$, $U_A^3U_B^2U_C^3$, $U_A^2U_B^2U_C^1$ a $U_A^3U_B^2U_C^3$. Všechny tyto kružnice procházejí bodem U , neboť čtyřúhelníky $AU_B^1UU_C^1$, $U_A^2UU_C^2U_B^1$, $U_A^2UU_B^2U_C^2$, $U_A^3UU_B^2U_C^3$ a $U_A^3UU_C^3U_B^2$ jsou tětivové. Na základě vlastností obvodových úhlů platí:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle U_C^1AU| &= |\sphericalangle U_C^1U_B^1U| = |\sphericalangle U_A^2U_B^1U| = |\sphericalangle U_A^2U_C^2U| = \\ &= |\sphericalangle U_B^2U_C^2U| = |\sphericalangle U_B^2U_A^3U| \text{ a také } |\sphericalangle UAU_B^1| = \\ &= |\sphericalangle UU_C^1U_B^1| = |\sphericalangle UU_C^1U_A^2| = |\sphericalangle UU_B^2U_A^2| = |\sphericalangle UU_B^2U_C^3| = \\ &= |\sphericalangle UU_A^3U_C^3|. \end{aligned}$$

Jinými slovy — dvě části, na něž dělí přímka AU úhel $\sphericalangle BAC$ (na obr. 2 jsou znázorněny jednoduchým a dvojitým obloukem), se objevují také při vrcholu U_A^3 třetího úpatnicového trojúhelníka $U_A^3U_B^3U_C^3$. Tedy trojúhelníky ABC a $U_A^3U_B^3U_C^3$ mají shodné úhly $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle U_B^3U_A^3U_C^3$. Analogicky i v případě zbývajících dvou úhlů obou trojúhelníků. Tím je dokázána podobnost trojúhelníků $ABC = U_A^0U_B^0U_C^0$ a $U_A^3U_B^3U_C^3$. Snadno je vidět, že užitím principu matematické indukce lze dokázat podobnost trojúhelníků $U_A^pU_B^pU_C^p$ a $U_A^qU_B^qU_C^q$, kde p, q jsou nezáporná celá čísla, obě současně dělitelná třemi. Položíme-li dále $p = 4, q = 1$, resp. $p = 5, q = 2$, dospějeme užitím stejného postupu k celkovému výsledku, že trojúhelníky $U_A^pU_B^pU_C^p$ a $U_A^qU_B^qU_C^q$ jsou podobné, jestliže p, q jsou celá nezáporná čísla taková, že dávají týž zbytek při dělení třemi, tj. $p \equiv q \pmod{3}$, což jsme chtěli dokázat.

Na závěr jsou uvedena dvě cvičení udávající jisté metrické vlastnosti úpatnicových bodů daného trojúhelníka. Pokuste se samostatně vyřešit obě úlohy, jinak můžete použít literaturu [2], [3], [4].

Cvičení: 1. Pro úpatnicový bod U daného trojúhelníka ABC platí tzv. *Erdős-Mordellova nerovnost*

$|AU| + |BU| + |CU| \geq 2(|UU_A| + |UU_B| + |UU_C|)$, přičemž rovnost nastává v případě, když U je těžištěm rovnostranného trojúhelníka ABC . Dokažte!

2. Nechť U je úpatnicový bod daného trojúhelníka ABC . Výraz $\frac{|BC|}{|UU_A|} + \frac{|CA|}{|UU_B|} + \frac{|AB|}{|UU_C|}$ nabývá své nejmenší hodnoty, právě když U je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Dokažte!

Literatura

- [1] Brejcha, J.: Poznámka k vlastnostem pat výšek rovinného trojúhelníka, *Rozhledy M-F*, roč. 55, 1976/77, č. 8, str. 343—346
- [2] Matoušek, Z.: Erdős-Mordellova nerovnost, *Matematika a fyzika ve škole*, roč. 4, 1973/74, č. 1, str. 27—33

- [3] Škljarkij, D. O., Čencov, N. N., Jaglom, I. M.: Geometričeskije neravěnstva i zadači na maksimum i minimum, Nauka, Moskva 1970, str. 51, úloha 111b
 [4] XXX. ročník MO, ŠPN, Praha 1983, str. 150

Ještě o kódech — písmenové a číslicové změny

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PeF UK v Praze

V sérii článků o kódování jsme se dosud zabývali jen binárními kódy desítkových číslic. Již před více než sto lety vytvořil francouzský telegrafní inženýr *Emile Baudot* (1845—1903) pětibitový kód pro přenos nejen číslic, nýbrž také písmen. Tento kód sestavil pro své telegrafní zařízení, které sestrojil v roce 1884. Nepřipomínalo ani v nejmenším o půl století starší Morseův telegraf, jenž vznikl v letech 1832 až 1837.

Telegrafní klíč nahradil E. Baudot pěti klávesami ovládanými prsty obou rukou; levá ruka obsluhovala dvě klávesy a pravá tři. Po současném stisknutí některých kláves se vyslala do vedení pětice stejně dlouhých za sebou následujících proudových impulsů. Tyto impulsy byly dvou kvalit podle toho, zda příslušná klávesa byla zmáčknuta nebo nikoli. V Baudotově telegrafu se tedy užívalo binárního kódu, jehož kódová slova měla délku pět bitů. V přijímacím zařízení se tyto pětice impulsů dekodovaly a tiskla se rovnou písmena, číslice, interpunkce apod. Telegrafista u tohoto přístroje měl velmi obtížnou práci, neboť si musel pamatovat, jak má klávesy mačkat. Nepočítáme-li případ, kdy žádnou klávesu nestiskl, bylo možností $2^5 - 1 = 31$. Teprve dalším vývojem vznikly dálkopisy, jejichž klávesnice odpovídají psacím strojům.

Prohlédneme-li si klávesnici libovolného psacího stroje nebo mikropočítače, pak zjistíme, že je na ní celkem 26 písmen. Přitom ovšem nerozlišujeme velká a malá písmena a neuvažujeme speciální národní písmena, jako např. české Ř, slovenské Ô, německé Ä apod. Přidáme-li k tomu desítkové číslice, jichž je deset, a případně ještě některá interpunkční znaménka, zjišťujeme, že potřebných znaků pro přenos zpráv je kolem čtyřiceti. Zde se vnucuje otázka: Jakým způsobem mohl ing. Baudot přenášet zprávy pětibitovým kódem, v němž se mohlo užívat nejvýše $2^5 = 32$ kódových slov? Odpověď je překvapivě jednoduchá: Některá kódová slova měla dva významy.

Ing. Baudot rozdělil všechny znaky, které měly být přenášeny, do dvou skupin. Do tzv. „písmenové skupiny“ zařadil všech 26 písmen

a do tzv. „číslicové skupiny“ všechny číslice, interpunkční znaménka, závorky, rovnítko, plus apod. Potom šestadvaceti kódovým slovům dal dva významy: právě jednoho písmene z písmenové skupiny a právě jednoho prvku z číslicové skupiny. Ze zbývajících šesti kódových slov označil jedno jako „písmenovou změnu“ a jedno jako „číslicovou změnu“. Pro případné další účely zůstala ještě čtyři kódová slova.

Dále si vysvětlíme postup telegrafování. Jestliže bylo třeba po kódovém slově znamenajícím písmeno vyslat slovo ve významu číslice, popř. jiného znaku z číslicové skupiny, pak se nejdříve oznámila k tomu určeným kódovým slovem číslicová změna. Obdobně mělo-li po kódovém slově zobrazujícím prvek z číslicové skupiny následovat kódové slovo ve významu písmena, pak bylo třeba nejdříve odeslat kódové slovo znamenající písmenovou změnu.

Písmenové a číslicové změny se užívaly nejen v původním Baudotově kódu. I dnes se s tímto zdvojeným využitím kódových slov můžeme setkat u běžně užívaného *mezinárodního dálkopisného kódu číslo 2*. Užívání písmenové a číslicové změny přináší úspory, neboť tento kód je jen pětibitový. (Přesněji: Počet jeho informačních bitů je pět.) Avšak znamená i nebezpečí, že operátor opomene provést změnu a zpráva bude zkreslena nebo zcela nesrozumitelná.

Poznámka: Čtenářům, kteří se zajímají o dějiny přenášení zpráv, doporučujeme knížku *Vyprávění o telegrafech*, kterou napsal *Otakar Klika* a v roce 1978 ji vydalo pražské Nakladatelství dopravy a spojů.

Základy programování mikropočítačů

8 - PEEK a POKE

doc. IVAN FISCHER, CSc., katedra matematiky PeF UK v Praze

PEEK A POKE je dvojice příkazů jazyka BASIC, která nám umožňuje hlubší programátorské zásahy do činnosti mikropočítače. PEEK je funkce, která přečte obsah paměťové buňky a POKE je naopak příkaz, který dává možnost zapsat na paměťové místo dané adresy požadovanou hodnotu. Protože osmibitové mikroprocesory, které řídí činnost námi v sériu sledovaných mikropočítačů (PMD-85, IQ-150, IQ-151, SAPI-1, ONDRA, PP-01, ZX Spectrum atd.), pracují s osmimístnými čísly dvojkové soustavy, mohou být hodnoty paměťových buněk v rozmezí $(00000000)_2 = 0$ až $(11111111)_2 = 255$. Tyto mikroprocesory mohou pracovat s pamětí, kde adresa paměťové buňky je dána šestnáctimístným číslem ve dvojkové soustavě, tedy 0 až 65535.

Nejmenší jednotkou informace, která může být počítačem zapamatována, je 0 nebo 1, tedy jednociferné číslo dvojkové soustavy. Nazývá se bit. Osmimístné číslo, respektive uspořádaná osmice bitů se nazývá byte (cizí, nesklonné slovo; psává se však i česky podle výslovnosti bajt — a pak se skloňuje). O dvojici byte mluvíme jako o adrese*). Osmibitové mikroprocesory počítají s čísly v rozsahu jednoho či dvou byte. Výpočty s většími čísly se realizují algoritmem. V jazyku BASIC je hodnota byte i adresy přepočítávána pro naše pohodlí do desítkové soustavy. Výpočty se však provádějí ve dvojkové soustavě obvykle s čísly uloženými ve čtyřech byte — jeden bit znaménko, tři byte (bez jednoho bitu) uchovávají mantisu — volněji řečeno cifry daného čísla, čtvrtý byte značí exponent — řád čísla (opět s jedním bitem znaménka exponentu). Zjišťovat a měnit hodnoty proměnných v jazyku BASIC by pomocí PEEK a POKE nebylo vůbec jednoduché. Pracovat tedy budeme pouze s jednotlivými byte. Ani potom není situace jednoduchá. Některé mikropočítače (PMD-85) chápou opět jeden bit adresy jako znaménko (a záporné číslo jako druhý doplněk čísla). Potom jsou v jazyku BASIC i adresy, jako —15878. Používat PEEK a POKE má smysl jen pro tu oblast adres, kde je v daném mikropočítači skutečně připojen nějaký integrovaný obvod s pamětí. Může to být paměť ROM (Read Only Memory), ze které lze číst pomocí PEEK, ovšem příkaz POKE obsah byte na dané adrese nezmění, nebo paměť typu RWM (Read Write Memory), ze které lze číst pomocí PEEK i ve které lze měnit hodnoty byte pomocí POKE. PEEK lze ze zvědavosti či omylem použít na libovolné adrese, nevhodný příkaz POKE však může změnit zápis programu, nebo změnit obsah byte, kde si překladač jazyku BASIC uložil důležité údaje — potom se celý program zhroutí. Počítač se tím nepoškodí, ale program musíme zapsat (či jinak vložit) celý znovu.

Skutečně obsazen mají počítače paměťový prostor různě. IQ-150 má 6kB (kilobyte — 2^{10} byte — 1024 byte) paměti ROM s překladačem jazyka BASIC, 16kB paměti RWM. IQ-151 má již 32 kB. PMD-85 má 48kB RWM, ovšem 9kB zabírá překladač jazyka BASIC, který se z paměti ROM či z magnetofonu přečte do paměti RWM. Dále necelých 16kB zabírá část paměti RWM, ze které jsou údaje zobrazeny jako grafika na televizní obrazovce. SAPI-1 s jazykem MIKROBASIC pracuje se 4kB ROM, 1 až 2kB RWM a 1kB VIDEORAM (část paměti, která je zobrazována na televizní obrazovce). Paměť RWM lze na SAPI-1 zvětšit na 48kB. Počítač ZX Spectrum má verze s 16kB a 48kB. Konečně mikropočítač ONDRA určený pro děti má obsazen celý paměťový

*) Pro původní čtyřbitové mikroprocesory roku 1971 i pro moderní šestnáctibitové a dvaatřicetibitové mikroprocesory, které jedním příkazem provádějí výpočty až se 64místnými čísly dvojkové soustavy, dané pojmy a číselné údaje pochopitelně neplatí.

prostor 64kB (tedy 65535 byte) paměti RWM, ze které 10kB zabírá VIDEORAM a do 11kB se z magnetofonové pásky nahraje strukturovaný grafický jazyk BASIC (o něm se zmíníme příště v závěru seriálu).

Příkazy PEEK a POKE se dají s úspěchem využít pro spolupráci programů v jazyku BASIC s programy ve strojovém kódu mikroprocesoru (to však až příští ročník v novém seriálu k matematickým modelům a algoritmům k řízení reálných technických procesů), zatím se však omezíme na jejich užití pro změny funkce systému mikropočítače a pro zásahy do oblasti VIDEORAM.

V předminulém dílu seriálu jsme se zmínili o POKE —15878, 176 měnícím činnost kreslení tak, že kreslení znamená rozsvícení bodu na obrazovce. Pokud místo 176 píšeme hodnotu 175, potom naopak kreslení znamená zhasnutí bodu a POKE —15878,168 vrátí původní stav činnosti, kdy kreslení je změna (bílé na černé a černé na bílé). Příkazy POKE —16326, 0 či 64 nebo 128 a 192 se mění barva, nebo u černobílé verze se mění jas v šed, navíc s možností kombinovat jas i šed s blikáním obrázku či textu. Takovýchto významných adres na PMD-85 je mnohem více, většinou jsou uvedeny v příručce k počítači.

Obdobné významné adresy mají i ostatní mikropočítače. Na adrese 20 mikropočítače IQ-151 je byte s údajem pro tisk a výpis programu. Po zapnutí počítače je zde byte s hodnotou 2, neboli $(00000010)_2$. Přesvědčíme se o tom spuštěním programu

10 A = PEEK (20)

20 PRINT A

Počítač vytiskne 2. Změníme-li příkazem POKE 20, 1 tento byte na hodnotu 1, budou se psát řádky hustě, při hodnotě 5 naopak s vynecháním mezer po čtyřech řádcích atd.

Na adrese 19 na IQ-151 je délka stránky, tedy počet vypsanych řádků, než dojde k rolování — posouvání předchozího textu nahoru pro uvolnění místa k novému tisku. Po POKE 17,1 se píší černé znaky do bílého pole, POKE 17,0 zajistí původní tisk bíle na černý podklad. Ovšem po každém příkazu PRINT počítač automaticky přepíše byte na adrese 17 na hodnotu 0 sám.

Zajímavé jsou byte na adresách 8, 9 a 10 na IQ-151. Na adrese 8 je počet 0 až 255, který se (modulo 256) zvětší o jednu každých 20ms. (To je odvozeno ze síťového kmitočtu 50Hz — počítač vždy přeruší prováděný program, zvětší časový údaj a vrátí se k provádění původního programu). Na adrese 8 je tedy časový údaj počtu 20ms, na adrese 9 počtu 256×20 ms a na adrese 10 počtu $256 \times 256 \times 20$ ms.

Podprogram „start času“ nám vynuluje hodnoty byte na adresách 8 a 9. Pro měření kratších časových hodnot nás byte na adrese 10 nezajímá. Čas začínáme měřit od nuly. Podprogram „tisk času“ pak přepočte čas z milisekund na minuty a sekundy zaokrouhlené na setiny

```

11379 REM ***** start casu *****
11380 POKE 8,0: POKE 9,0: RETURN
11389 REM ***** tisk casu *****
11390 LT=0.02*(PEEK(9)*256+PEEK(8))
11400 LM=INT(LT/60)
11410 LS=0.01*INT((LT-60*LM)*100+0.5)
11420 PRINT&0,0;LM;"minut";SP;"sekund"
11430 RETURN
11440 REM *****

```

sekundy. Zaokrouhlení údaje vzniklého z padesátin sekundy na setiny sekundy patrně překvapí většinu čtenářů. Nejde o omyl, ale o pohodlnou opravu důsledků přepočtů z dvojkové do desítkové a šedesátkové číselné soustavy, prováděných ne v racionálních číslech, ale jen v podmnožině racionálních čísel. Čtenář jistě navrhne výpočet přímo v milisekundách bez nutnosti zaokrouhlovat. Potom však vyvstane problém s tiskem desetinné tečky mezi sekundy a jejich desetiny. Při tisku čísla i řetězce vynechává IQ-151 prázdnou pozici... Řešení vede i přes práci s číslem převedeným na řetězec a přes řetězcové funkce, je však složitější. Je to dosti typická situace při programování, kdy vlastní početní zpracování je snadné a velká pozornost a mnoho úsilí se musí věnovat grafickým úpravám tisku na obrazovce a pohodlí budoucího uživatele programu. V podprogramu „tisk času“ je příkaz PRINT& 0, 0; LM... Znamená tisk ne na další volný řádek, ale tisk na udaný řádek (0 až 31 shora) a od udané pozice (0 až 31 zleva).

```

11448 REM tisk ASCII(A) na pozici X,Y
11449 REM *****
11450 LY=INT(Y)
11460 IF X<0 OR X>32 THEN RETURN
11470 IF LY<0 OR LY>32 THEN RETURN
11480 POKE 60416+X+(31-LY)*32, A
11490 RETURN
11491 REM *****

```

Jestliže IQ-151 před tiskem vynechává mezeru, může to vadit při proměnlivých diagramech, dopisováních do těsné tabulky na obrazovce. Můžeme použít příkaz POKE a místo nevhodné vlastnosti příkazu PRINT zobrazovat písmena a značky podle rozšířeného kódu ASCII přímo do VIDEORAM. Do levého horního rohu obrazovky se u IQ-151 zobrazuje byte s adresou 60416. Na pravém konci řádku má byte adresu o 31 větší než na levém začátku. Tisk v pozici o řádek níže je určen

hodnotou byte s adresou o 32 větší než na horním řádku. Podprogram „tisk ASCII(A) na pozici X, Y“ vytiskne písmeno či znak odpovídající číselné hodnotě A (v rozsahu 0 až 255). Počátek je tentokrát již vlevo dole, jak jste z analytické geometrie zvyklí. X a Y mohou být racionální čísla. Při výpočtu adresy počítač ignoruje desetinnou část čísla. U souřadnice Y to však není jednoduché tolik jako u X, neboť předtím ještě Y násobíme 32 a desetinná část by ovlivnila adresu tisku. Proto napřed z Y vezmeme celou část LY.

```

2199 REM ***** Inverzni kriz *****
2200 M=60522+X
2210 FOR C=1 TO 19
2220 U=PEEK(M)
2230 IF U>=128 THEN U=U-128: GOTO 2250
2240 U=U+128
2250 POKE M,U
2260 NEXT C
2270 M=60417+(12-Y)*32
2280 FOR C=1 TO 19
2290 U=PEEK(M)
2300 IF U>=128 THEN U=U-128: GOTO 2320
2310 U=U+128
2320 POKE M,U: M=M+1
2330 NEXT C
2340 RETURN
2350 REM *****

```

Zmínka byla již o upraveném kódu ASCII na IQ-151. Doplněny byly, patrně pro školní účely, různé karetní symboly a další značky. Navíc kódy mezi 128 a 255 způsobí tisk téhož znaku, ale inverzně proti znaku s kódem o 128 nižším. Toho využívá podprogram „inverzní kříž“ z výukové hry „kartézská střelnice“ pro základní školu. Na obrazovce je mimo textů vymezena plocha se středem na řádku 12 a pozici 10 s devíti poli vlevo, vpravo, dolů i nahoru. V této ploše jsou zobrazeny osy x a y s vyznačenými díly jednotek a dále značka bodu (velká tečka). Zadávají se předpokládané souřadnice bodu v dané soustavě souřadnic. Pro zadané souřadnice podprogram provede inverzi řádku a inverzi sloupce. Průsečík je takto inverzně překreslen dvakrát, a tak je opět v původním tvaru. Žák si nyní porovná jím zadané souřadnice a skutečnou polohu bodu. Druhé vyvolání téhož podprogramu převede obrázek zpět do původního stavu a znovu se určují souřadnice bodu, byly-li předtím chybně zadány. Tento podprogram lze jistě upravit pro grafické zvýraznění informací v jiných programech.

```

11199 REM ***** vstup cisel *****
11200 LR$="      ": LZ=0: LV=0
11210 POKE 17,1: PRINT& LR,LF;LR$
11220 LI$=INKEY$
11230 IF LI$="" THEN 11220
11240 IF LI$="O" THEN 11200
11250 IF LI$="=" THEN 11330
11260 IF LI$="-" THEN LZ=1: GOTO 11290
11270 IF LI$("<"0" OR LI$(">"9" THEN 11220
11280 LC=VAL(LI$): LV=10*LV+LC
11290 LR$=LR$+LI$: LR$=RIGHT$(LR$,5)
11300 POKE 17,1: PRINT& LR,LF;LR$
11310 PRINT& 6,28;CHR$(7)
11320 GOTO 11220
11330 IF LZ=1 THEN LV=-LV
11340 PRINT& LR,LF;LR$
11350 PRINT& 6,28;CHR$(7)
11360 RETURN
11370 REM *****

```

Dále si uvedeme podprogram „vstup čísel“ ze školního programu pro 7. třídu ZŠ k procvičování operací se zlomky. Pokud na IQ-151 při příkazu INPUT nic nenapíšeme a stiskneme CR, program se přeruší. U výukových, procvičovacích či přezkušovacích programů, navíc pro užití žáky neznajícími programování mikropočítače to je velmi vážná závada a znehodnocení programu. Místo INPUT se pro vkládání užije daný podprogram (zde zjednodušený). Vstupní proměnná LR značí řádek a LP pozici (shora a zleva), od které se vytiskne bílé pole. V něm se černě objevují zadané cifry čísla. Po stisknutí O se provede oprava, pole se vybělí a číslo vkládáme znova. Platnost čísla zadáme stisknutím značky rovnítko. Značka mínus změní zadané číslo na záporné. Při tomto zjednodušení však zůstane mínus ne vlevo, ale mezi číslicemi. Také jsou zobrazeny jen poslední vložené číslice (5 zprava). Čtenář tak dostává námět k doplnění podprogramu dalšími příkazy. Po stisku = se vytiskne zadané číslo bíle na černý podklad již v úpravě, jak BASIC píše čísla (znaménko před číslem atd.) a zadanou hodnotu máme ve výstupní proměnné LV. POKE 17,1 způsobí tisk inverzně. INKEY\$ je řetězec s hodnotou právě stisknuté klávesy. Není-li stisknuta žádná, je INKEY\$ ="" (prázdný řetězec) a na řádcích 11220 a 11230 je vytvořena smyčka čekání na stisk klávesy. Další řádky zajistí, že na klávesy mimo číslic a O, —, = program nereaguje. PRINT CHR\$(7)

způsobí na IQ-151 pípnutí. Vedlejším efektem provedení příkazu je tisk mezery (černého čtverečku) na místo, kde je nastaven kurzor. Proto je vhodné si raději místo pro tento nežádoucí tisk předepsat tam, kde to v daném programu nic nesmaže.

```

11499 REM ***** programovy kurzor *****
11500 LI$=INKEY$
11510 IF LI$="" THEN 11500
11520 LI=ASC(LI$)
11530 IF LI=12 THEN RETURN
11540 IF LI=8 THEN LC=LA-1
11550 IF LI=32 THEN LC=LA+1
11560 IF LI=28 THEN LC=LA+1
11570 IF LC<1 OR LC>29 THEN LC=LA
11580 IF LI=25 THEN LD=LB-1
11590 IF LI=26 THEN LD=LB+1
11600 IF LD<1 OR LD>27 THEN LD=LB
11610 POKE 60416+32*LB+LA, LU
11620 LM=60416+32*LD+LC
11630 LU=PEEK(LM)
11640 IF LU>128 THEN LT=LU-128: GOTO 11660
11650 LT=LU+128
11660 POKE LM, LT
11670 LA=LC: LB=LD
11680 GOTO 11500
11690 REM *****

```

Poslední uváděný podprogram „programový kurzor“ umožňuje opět na IQ-151 ukazovat na obrazovce. Šlo by použít i původní kurzor a pomocí funkce PEEK číst na adrese 11 číslo přiřazené v ASCII znaku, na který ukazuje kurzor, na adrese 14 pozici kursoru v řádku a na adrese 15 číslo řádku, na kterém je kurzor. Daný podprogram umožňuje omezit plochu, po které se kurzor na obrazovce smí pohybovat. Zobecnit se dá pro kreslení více kursory najednou atd. Tlačítkům šipek odpovídají kódy 26, 25, 8, 32 a 28. Kódy 32 a 28 porůznu kupodivu oba šipce vpravo! Prostřední šikmé šipce odpovídá kód 12. Při stisknutí této šikmé šipky dochází k návratu z podprogramu. Ve výstupních proměnných LA, LB máme údaje o poloze kursoru a v LU je uložen kód ukazovaného znaku.

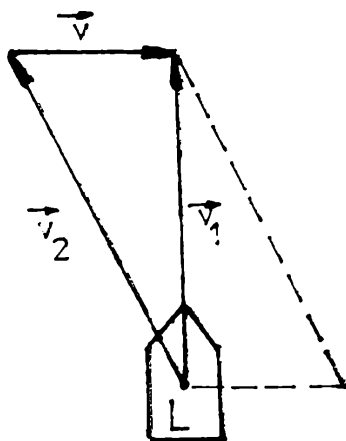
Vektory nám pomáhajú

RNDr. MIROSLAV KRAJŇÁK, Gymnázium Prešov

Veľmi známe sú úlohy nasledujúceho typu:

Loď sa plaví po rieke kolmým smerom na tok vody rýchlosťou $16,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Akú rýchlosť má vodný prúd, ak je rýchlosť lode v stojatej vode $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Jeden žiak o tejto úlohe prehlásil, že je zle zadaná. Všetky pochybnosti pominú po grafickom znázornení situácie — obr. 1 (uvedomte si, že v sto-



Obr. 1

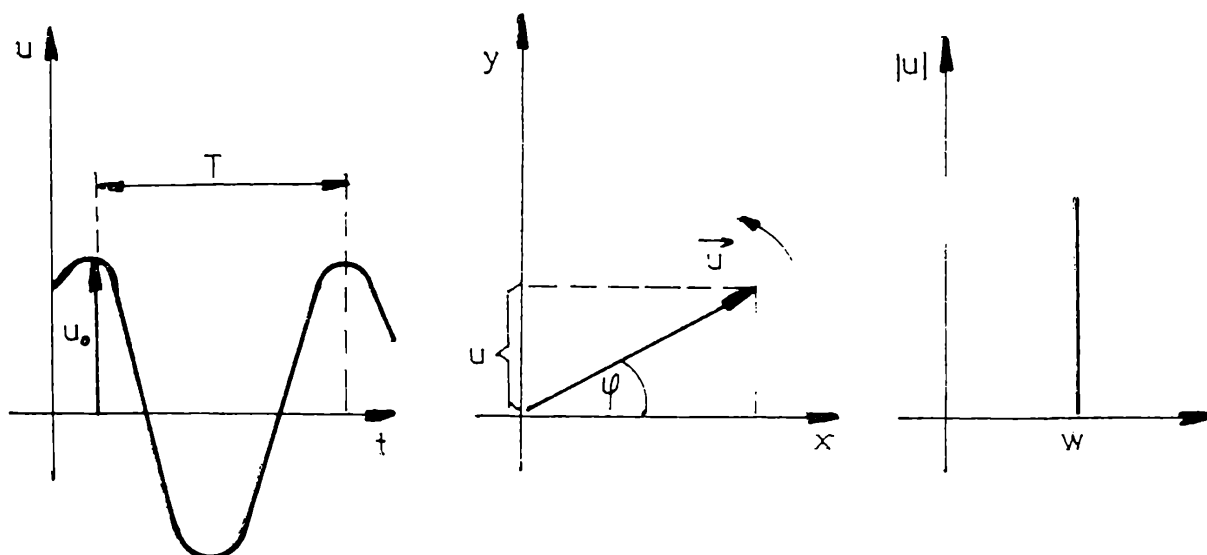
jatej vode sa loď v ľubovoľnom smere pohybuje rýchlosťou $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$). Z obrázka je zrejmé, že $v^2 = v_2^2 - v_1^2$, t. j. $v \doteq 7,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Úlohu sme veľmi ľahko zvládli pomocou vektorov a Pytagorovej vety.

Vektorová metóda je jedna z efektívnych metód riešenia niektorých úloh z matematiky a fyziky. Jednako ale je u študentov jednou z najmenej používaných metód. Čím to je?

Myslím si, že to bude v nedostatočných spôsobilostiach vedieť použiť pri riešení túto metódu. Prijmite *niekoľko rad* k tomu, aby sa vektorová metóda stala pre Vás prostriedkom k efektívnejšiemu riešeniu úloh z matematiky a fyziky:

1. *Ovládať základné operácie s vektormi* — vedieť „narábať“ s vektormi,
2. *vedieť upravovať výrazy s vektormi a riešiť vektorové rovnice,*
3. *aktívne ovládať lineárnu kombináciu vektorov a s ňou súvisiaci rozklad vektora na zložky a súradnice vektora,*



Obr. 2abc

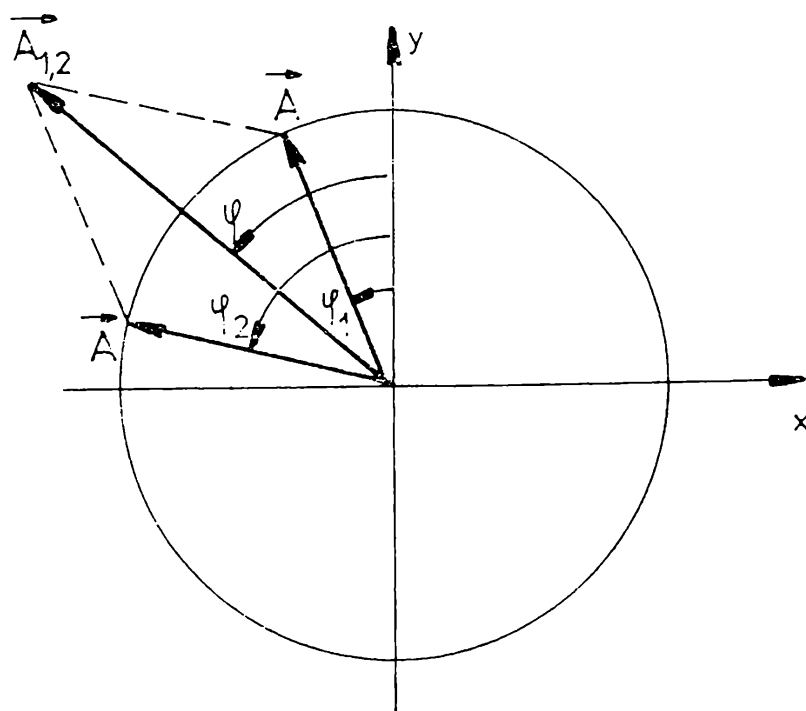
4. vždy, ak je to možné, *nakresliť k úlohe obrázok a formulovať podmienky úlohy rečou vektorov.*

Podnetom k napísaniu tohto článku bola už uvedená úloha s loďou a tvrdenie o jej neriešiteľnosti, ale hlavne príhoda z jednej hodiny fyziky. Obráťme k nej svoju pozornosť.

Kmitavé deje pri riešení rozličných úloh je výhodne znázorňovať graficky. Táto výhoda vynikne najmä pri zložitejších kmitavých dejoch. Kmitavé deje znázorňujeme väčšinou

- a) časovým (obr. 2a),
- b) fázorovým (obr. 2b),
- c) spektrálnym diagramom (obr. 2c).

Časový diagram graficky vyjadruje veličinu harmonického deja ako funkciu času. *Spektrálny diagram* je znázornenie harmonického kmitania ako funkcie frekvencie a amplitúdy kmitania. Používa sa zväčša na znázornenie zložiek zložitejších kmitavých dejov. Venujme sa viacej *fázorovému diagramu*, v ktorom sa využíva súvislosť harmonického kmitania s rovnomerným pohybom po kružnici. Veličina harmonického deja je znázornená ako vektor $\mathbf{U}$, ktorého veľkosť zodpovedá amplitúde veličiny U . Vektor je umiestnený v sústave súradníc x, y tak, že začiatok vektora leží v začiatku sústavy súradníc a vektor zvierá s kladným smerom osi x uhol, ktorý sa rovná začiatočnej fáze φ . Predstavujeme si, že vektor rotuje v kladnom zmysle (proti pohybu hodinových ručičiek) uhlovou rýchlosťou ω a jeho pravouhlý priemet v každom okamihu určuje okamžitú hodnotu u veličiny harmonického deja. Tieto veličiny nemajú vektorový charakter, ide iba o ich symbolické znázornenie. Preto tieto myslené rotujúce vektory majú osobitný názov *fázory*. Fázorový diagram je teda zobrazenie fázorov v sústave súradníc. Používame ho najmä na vyjadrenie fázových rozdielov dvoch a viacerých veličín harmonického deja.



Obr. 3

Napríklad: Superpozíciou harmonického kmitania opísaného rovnicami $y_1 = A \sin(\omega t + \varphi_1)$, $y_2 = A \sin(\omega t + \varphi_2)$ vzniká zložené kmitanie.

Pomocou fázorového diagramu napíšte rovnicu výsledného kmitania.

Fázor zloženého kmitania nájdeme ako vektorový súčet fázorov jednotlivých zložiek (obr. 3). Z fázorového diagramu pre veľkosť amplitúdy $A_{1,2}$ zloženého kmitania vyplýva

$$A_{1,2} = 2A \cdot \cos[(\varphi_2 - \varphi_1)/2],$$

začiatočná fáza $\varphi = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)/2 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$.

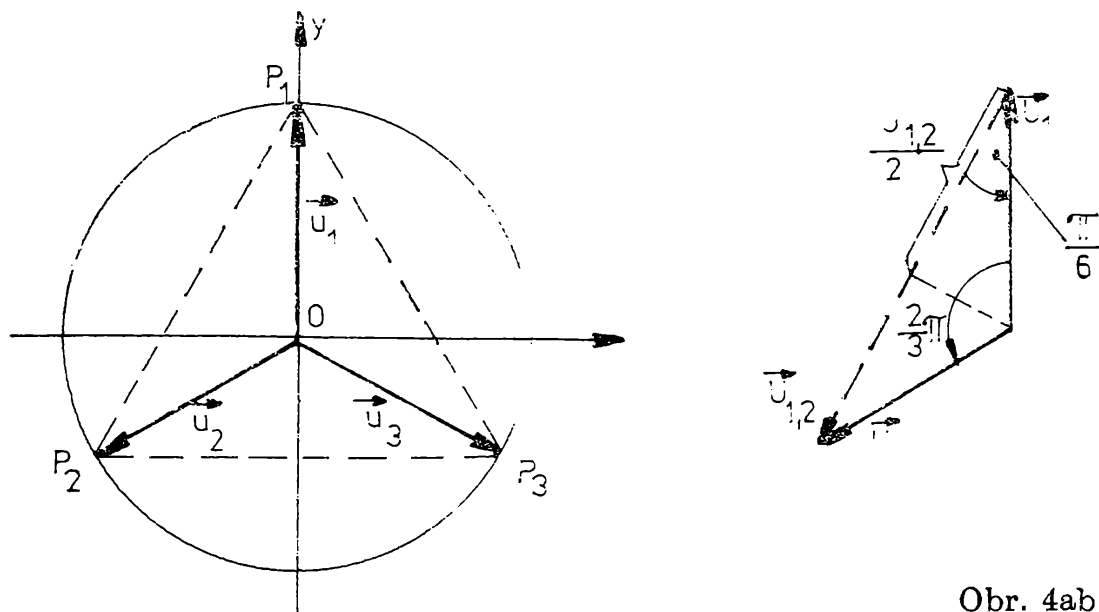
Keďže obidve zložky sú izochronné ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$), zložené kmitanie má rovnakú uhlovú frekvenciu ako jednotlivé zložky a platí rovnica $y = 2A \cos[(\varphi_2 - \varphi_1)/2] \sin[\omega t + (\varphi_1 + \varphi_2)/2]$

Ako je vidieť z obr. 3, pri praktickom používaní fázorového diagramu postačí, keď znázorníme ako vektory len amplitúdy jednotlivých veličín a ich vzájomné fázové posuny. V takomto diagrame operujeme podľa pravidiel počítania s vektormi, pričom za kladný zmysel otáčania vektorov považujeme rotáciu proti pohybu hodinových ručičiek.

Popísanou vektorovou metódou je možné veľmi pohodlne a rýchlo riešiť RLC obvody. Nebudeme ich v tomto článku rozoberať, pretože veľmi vhodne je to pre Vás spracované v brožúrkach Edície mladých fyzikov: O. Lepil: *Elektrické kmity, striedavý prúd* a K. Hofman: *Vektorové znázornenie striedavých prúdov*.

V súvislosti s fázorovým diagramom zaoberajme sa touto skutočnou príhodou:

V jednom gymnázialnom ročníku existovali v triede niekoľkí zanietenci fyziky. Obzvlášť vynikali dvaja, ktorých v triede oslovovali „Elektrón“



Obr. 4ab

(bol impulzívnejšej povahy), resp. „Profesor“ (ten bol zase rozvážnejší, skôr teoretik ako praktik).

Na vyučovacej hodine fyziky, keď sa preberal trojfázový prúd, okrem iného bolo konštatované, že naša spotrebitelská sieť má označenie $3 \times 380/220$ V. Nato sa hlási „Elektrón“: „Všimol som si, že na elektrických strojčkoch sovietskej výroby (Charkiv) je na zástrčke prepínač na 220 V a 127 V striedavého napätia“ V závere hodiny žiaci dostali za úlohu dokázať, že veľkosť združeného napätia je $\sqrt{3} \cdot 220$ V.

Hneď v úvode nasledujúcej hodiny sa hlásil o slovo „Profesor“: „Pri dôkaze veľkosti združeného napätia som zistil, že $380 \text{ V} : 220 \text{ V} \doteq \sqrt{3}$, čo je jasné. Ale tiež (naťahoval čas, aby spolužiakov poriadne nažhaval) $220 \text{ V} : 127 \text{ V} \doteq \sqrt{3}$.“

Nasledovala otázka pre vyučujúceho: Je to len náhodne?

Čo si vy o tom myslíte mladí priatelia? Nie je ťažké dokázať, že v trojfázovej sústave striedavého prúdu zapojenej do hviezdy, je združené napätie väčšie ako fázové napätie. Veľmi rýchlo to ukážeme pomocou fázorového diagramu, z ktorého je zrejmé, že (obr. 4a, b)

$$U_{12}/2 = U_{10} \cdot \cos(\pi/6) = \sqrt{3} \cdot U_{10}/2$$

a pre veľkosť združeného napätia dostávame $U_{12} = U_{10} \sqrt{3}$, kde $U_{10} = 220$ V.

Uvedomte si, že napätie medzi dvoma fázovými vodičmi (napr. prvým a druhým) je tiež harmonické kmitanie. Je rovné rozdielu harmonických kmitaní, odpovedajúcich týmto fázam. Preto vo fázorovom diagrame obr. 4a určujeme rozdiel vektorov $\mathbf{U}_1$ a $\mathbf{U}_2$. Amplitúda tohto napätia je rovná dĺžke strany rovnostranného trojuholníka $P_1 P_2 P_3$. Amplitúda U_{10} napätia medzi fázovým (napr. prvým) a nulovým vodičom sa rovná dĺžke vektora $\mathbf{U}_1$, t. j. $2/3$ výšky trojuholníka $P_1 P_2 P_3$.

Na základe toho pomer amplitúd $U_{12} : U_{10}$ je rovný pomeru dĺžky strany trojuholníka $P_1 P_2 P_3$ k $2/3$ jeho výšky. Ale posledný pomer je rovný presne $\sqrt{3}$.

Naša spotrebitelská sieť má označenie $3 \times 380/220$ V, čo znamená, že pri tomto spojení (do hviezdy) možno použiť fázové napätie 220 V (na toto napätie sa zapájajú žiarovky a spotrebiče v domácnosti) a tri združené napätia 380 V (na toto napätie zapájame elektromotory na výkon väčší ako 1 kW).

V ZSSR (ale ešte v Kanade a Austrálii) je používaná aj spotrebitelská sieť s fázovým napätím 127 V. Na základe úvah okolo pomeru $380 \text{ V} : 220 \text{ V}$ môžeme odpovedať na otázku okolo pomeru $220 \text{ V} : 127 \text{ V}$. Dokázali sme, že $380 \text{ V} : 220 \text{ V} = \sqrt{3}$. Z toho plynie, že ak prvé napätie v elektrickej sieti je 220 V, potom druhé je 127 V, presne $220/\sqrt{3}$ V.

Niekoľko úloh k samostatnej činnosti:

1. Akú rýchlosť má mať motorový čln, aby sa pohyboval kolmo na smer toku rieky rýchlosťou $3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, keď rýchlosť toku rieky je $1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Situáciu znázorníte graficky.
2. Predtým bola užívaná spotrebitelská sieť s fázovým napätím 120 V. Akú efektívnu hodnotu malo v tejto sieti združené napätie?
3. Ako treba zapojiť cievky asynchronného elektromotora určeného na napätie 220 V v sieti trojfázového prúdu s napätiami a) 220/127 V b) 220/380 V.
4. Dokážte výpočtom a graficky, že u trojfázového napätia platí $\vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 = \vec{0}$ (pozri obr. 4a).

Pohyb rovnomerne zrychlený?

JOSEF JÍŘŮ, gymnázium Pelhřimov

Nezriedka majú žáci utkvélou predstavu, že pohyb tela, jež se děje se stálým výkonem, je pohyb rovnomerne zrychlený. Tento článek by měl v myslech čtenářů tuto případnou domněnku popřít, z různých pohledů ukázat odlišnosti obou pohybů a upozornit na některé jejich zajímavé vlastnosti.

Předpokládejme, že nějaké těleso, např. tramvaj, o hmotnosti m se začíná rozjíždět se stálým výkonem P po vodorovných kolejkách, přičemž zanedbáme tření. Za jistý čas t od počátku pohybu dosáhne rychlosti v , čímž získá kinetickou energii

$$\frac{1}{2} m v^2 = P t .$$

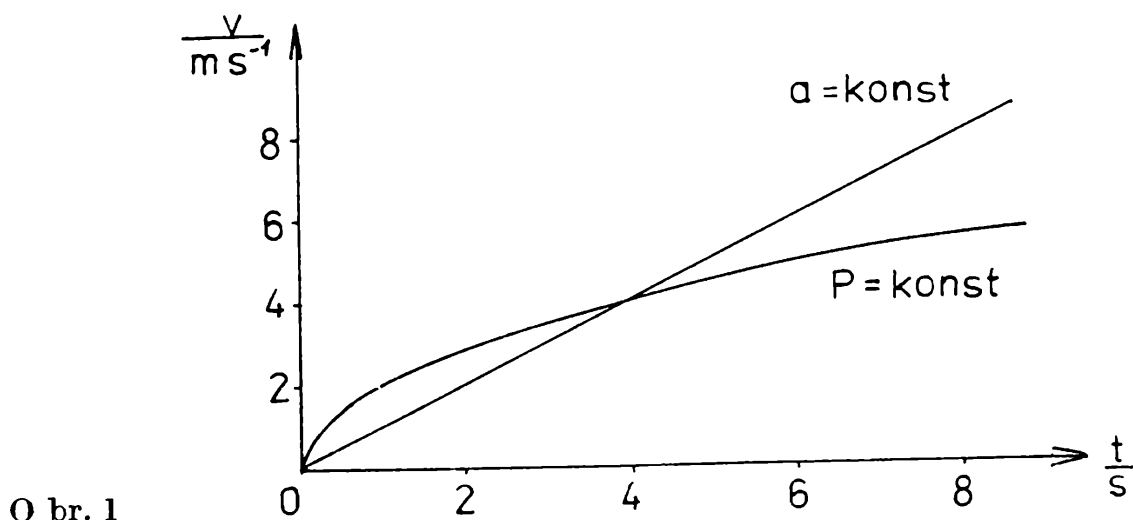
Z toho plyne, že je

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} .$$

Rychlost je tak přímo úměrná druhé odmocnině času.

Pro rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a však platí $v = at$, tudíž rychlost roste lineárně s časem.

Obě závislosti jsou znázorněny na obr. 1. Úsečka představuje závislost rychlosti na čase rovnoměrně zrychleného pohybu, část paraboly závislost rychlosti na čase pohybu s konstantním výkonem.



Neméně zajímavé jsou funkční závislosti zrychlení na čase obou pohybů. U rovnoměrně zrychleného pohybu je to zřejmě konstantní funkce. U pohybu se stálým výkonem určíme hledanou závislost pomocí diferenciálního počtu.

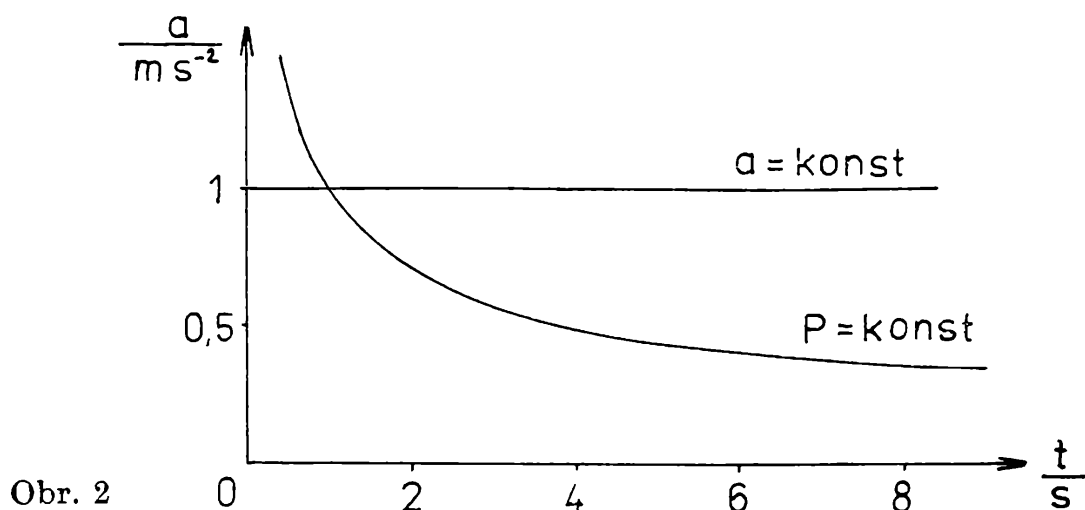
Čtenář, který se dosud nesetkal s derivacemi, může tento odstavec vynechat. Ostatní, kteří znáte základní aplikace diferenciálního počtu, asi víte, že zrychlení dostaneme jako časovou derivaci rychlosti. Stačí derivovat rovnici (1) podle času, v níž na pravé straně vystupují P , m jako konstanty a t jako proměnná. Je tedy hledané zrychlení:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = \sqrt{\frac{2P}{m}} \frac{d}{dt} \sqrt{t} = \sqrt{\frac{P}{2mt}} .$$

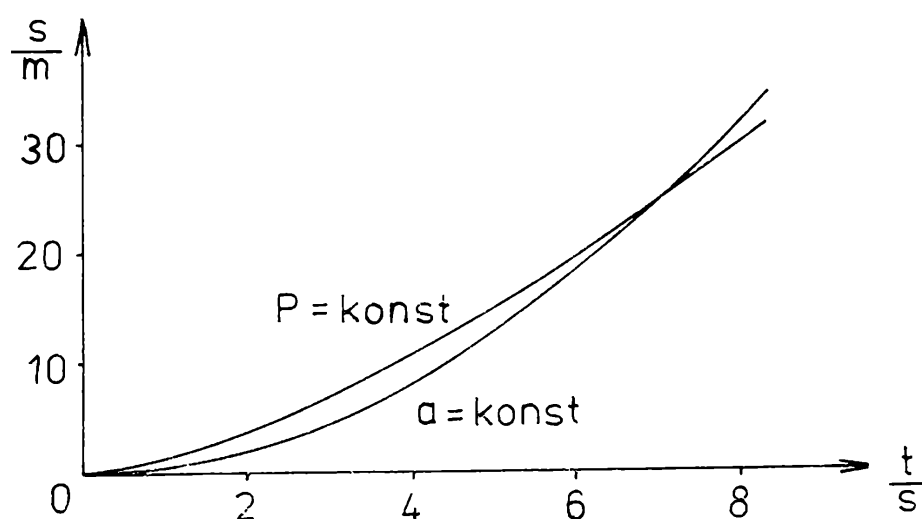
Graf zmíněné závislosti

$$a = \sqrt{\frac{P}{2mt}}$$

je na obr. 2. Zrychlení je klesající funkcí času a pro velmi velké hodnoty času se blíží nule. Jde proto o pohyb zrychlený s neustále se zmenšujícím zrychlením, neboli o pohyb, při němž rychlost sice narůstá, avšak



Obr. 2



Obr. 3

zvětšuje se o stále menší a menší hodnoty. Naopak pro začátek rozjíždění dosahuje zrychlení velkých hodnot, což je možné registrovat ve vlaku či tramvaji jako „trhnutí“ proti směru pohybu. Stejně „trhnutí“, avšak ve směru jízdy, pocítujeme při brzdění vozidla v okamžiku uvedení do klidu. Oba závěry platí, jestliže rozjíždění nebo brzdění se děje přibližně se stálým výkonem, což nemusí být vždy splněno. Osobně se domnívám, že při brzdění je popisovaný efekt větší, protože při rozjíždění výkon motoru nenaběhne na konstantní hodnotu okamžitě.

Pro úplnost porovnejme ještě grafické závislosti dráhy na čase. U rovnoměrně zrychleného pohybu je tímto grafem část paraboly, neboť jde o známou kvadratickou závislost

$$s = \frac{1}{2} at^2$$

Pro dráhu pohybu se stálým výkonem metodou integrálního počtu vychází

$$s = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2P}{m}} t^3$$

Je tedy uražená dráha přímo úměrná $t^{\frac{3}{2}}$.

Z grafu 3 vidíme, že dráha pro rovnoměrně zrychlený pohyb narůstá v prvních okamžicích rychleji než u pohybu se stálým výkonem. Při větších časech je tomu naopak.

Všechny grafy jsou sestaveny pro hodnoty $m = 2 \cdot 10^4$ kg, $P = 40$ kW, $a = 1$ m $\cdot$ s $^{-2}$, což odpovídá běžným typům tramvají.

Literatura

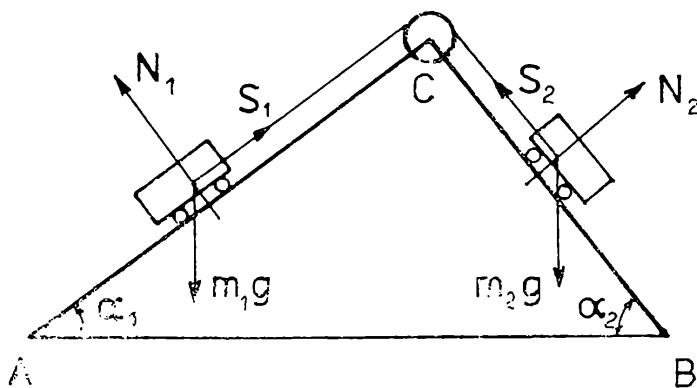
- [1] Vachek, J. a kol.: Fyzika pro 1. ročník gymnázia. Praha. SPN 1984.
- [2] Losos, L. a kol.: Atlas tramvají. Praha. NADAS 1981.

0 mechanické rovnováze těles

(2. část — podmínky rovnováhy)

Prof. Ing. CYRIL HÖSCHL, ÚT-ČSAV Praha

V této části příspěvku ukážeme na dvou příkladech, jakými metodami lze vyšetřovat rovnováhu tělesa, popř. soustavy těles. Uvažujme nejprve o dvou nakloněných rovinách se dvěma vozíky spojenými dokonale ohebným, avšak neroztažitelným lanem (obr. 1). Působí na ně síly tíže



Obr. 1

m_1g , popř. m_2g . Ptáme se, za jakých podmínek bude soustava vozíků v rovnováze. Pomineme-li pasívní odpory, bude se na vozík přenášet z nakloněné roviny reakce N_1 , popř. N_2 , a reakce z lana S_1 , popř. S_2 . Protože lano je dokonale ohebné a kladka v bodě C se může otáčet bez tření, je $S_1 = S_2$. Každý z vozíků budeme považovat za hmotný bod. K tomu, aby byl vektorový součet sil N_i , S_i , $m_i g$ nulový ($i = 1, 2$), stačí, aby platily tyto složkové rovnice (podmínky rovnováhy):

$$N_i - m_i g \cos \alpha_i = 0, \quad (1)$$

$$S_i - m_i g \sin \alpha_i = 0. \quad (2)$$

KOMPARÁTOR (od lat. *comparo*, -are, ptc. pf. *comparatus* = srovnávat, přirovnávat + -or, v. t.; slož. z *con-* = s, spolu, dohromady + *paro*, -are = připravovat, strojit, chystat; v. aparát) — přístroj, který něco srovnává, porovnává; např. přístroj k přesnému srovnávání rozměrů; přístroj na srovnávání a pozorování kmitu struny; přístroj umožňující srovnávání a měření intenzity zabarvení některých látek apod.

KOMPAS (slož. z lat. *cum* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *passus* = = krok; srov. PASUS — odstavec, souvislý výňatek v textu) — „ukazatel kroků“, tj. směru chůze, jízdy, letu

KOMPAUDNÍ (od lat. *compono*, -ere = skládat; slož. z *con-* + *pono*, -ere = klást, pokládat; v. expozice; jazykovým mezičlánkem je tu angl. *compound* = složenina) — složený, smíšený, sdružený; **KOMPAUDNÍ** parní stroj — o několika nestejně velkých válcích, jimiž postupně prochází pára; **KOMPAUDNÍ** elektrický stroj — s dvojím vinutím, seriovým a derivačním

KOMPENZACE (z lat. *compensatio*; slož. z *con-* + *penso*, -are, ptc. pf. *pensatus* = vážit, odvažovat, srov. PENZUM — „odvážený, odměřený, předem stanovený úkol“) — „zvážení jednoho s druhým“ vzájemné vyvážení, vyrovnání; ve fyzice: vyrovnání jednoho účinku druhým; **KOMPENZAČNÍ** — vyrovnávací (např. metoda); **KOMPENZOVAT**; **KOMPENZÁTOR** (v. -or) — vyrovnávací zařízení; ve fyzice např.: zařízení vyrovnávající napětí v rozvodné síti; zařízení v optice, kterým se vyrovnává rozdíl dvou koherentních paprskových svazků

KOMPLANACE (z lat. *complanatio*; slož. z *con-* + *planus* = rovný, plochý; srov. PLÁN — „prostor překreslený do roviny“) — „vytváření plochy“; zarovnávání; ve fyzice: vypočtení zakřivené plochy rozložením („zploštěním“) do roviny; **KOMPLANÁRNÍ** — ležící v téže rovině, náležející téže rovině; **KOMPLANÁRNOST** přímek — stav, kdy přímky leží v téže rovině; v. t. plan-². Pozn.: Lat. *planus* = rovný, plochý nezaměňovat s řec. *planos* = bloudění; v. plan-¹ a aeroplán („bloudící vzduchem“).

KOMPLEMENTÁRNÍ (od lat. *complemen um* = prostředek, jímž se něco doplňuje; doplněk; slož. z *con-* + *pleo*, -ere = plnit; srov. **KOMPLETNÍ** — úplný; „naplněný, nic v něm neschází“) — doplňkový; ve fyzice: **KOMPLEMENTÁRNÍ** barvy — dvě spektrální barvy mísící se spolu v barvu třetí („doplňující se na třetí“)

KOMPLEXNÍ (od lat. *complexor*, -i, ptc. pf. *complexus* = objímat, obklopovat, sbírat, pojmout; slož. z *con-* + *plecto*, -ere = plést) — „vše dohromady objímající, zahrnující“; souhrnný, souborný; v. t. *duplex*, *triplex*. Pozn.: Rozlišuj „komplexní“ (lat. *plecto*, -ere = plést) a „kompletní“ (lat. *pleo*, -ere = naplňovat); „**KOMPLEXNÍ** brigáda“ zahrnuje („vzájemně splekla dohromady“)

pracovníky nejrozličnějších oborů

KOMPONENT, KOMPONENTA (z lat. ptc. *componens*, -*entis* slovesa *compono*, -*ere*; slož. z *con-* + *pono*, -*ere* = klást, pokládat; v. expozice) — „skládající, skládající se“; „jedna z částí, které se skládají v celek“; součást celku, složka

KOMPOZICE (z lat. *compositio*; slož. z *con-* + *pono*, -*ere*, ptc. pf. *positus* = klást, pokládat; v. expozice) — skládání, složení, sestavení; ve fyzice: slitiny na vylévání ložiskových pánví

KOMPRESSE (z lat. *compressio*; slož. z *con-* + *premo*, -*ere*, ptc. pf. *pressus* = tlačit; srov. „PRESOVAT“ — tlačit dohromady) — „stlačení dohromady“; ve fyzice: 1. stlačování látek (plynů, par); 2. jedna z fází činnosti výbušného motoru, při níž se stlačují plyny ve válci; stlak; v. t. deprese; **KOMPRESNÍ** — založený na kompresi; **KOMPRESOR** (v. -or) — stroj k stlačování plynů; v. t. turbokompresor; **KOMPRIMOVANÁ** směs — stlačená směs (utvořeno od předpokládaného slovesa (komprimovat — stlačovat)

KOMUNIKACE (z lat. *communicatio*; od *communico*, -*are*, ptc. pf. *communicatus* = sdílet se s někým, stýkat se; od *communis* = společný, pospolitý, obecný; srov. **KOMUNISMUS**) — „vespolné účastenství“; sdílení, sdělení, dorozumívání, styk, spojení; spojení dopravními prostředky, veřejná doprava; v. t. radiokomunikace, telekomunikace

KOMUTACE (z lat. *commutatio*; slož. z *con-* + *mutatio* = změna, záměna, proměna; od *muto*, -*are*, ptc. pf. *mutatus* = měnit; v. *mutace*) — „změna, proměna, obrát“; ve fyzice: 1. změna směru elektrického proudu; 2. přeměna střídavého proudu na stejnosměrný; **KOMUTAČNÍ**; **KOMUTATIVITA** — vzájemné zaměňování, vzájemné měnění pořadí; **KOMUTATIVNÍ** — vzájemně záměnný, zaměnitelný, týkající se záměnnosti; v. t. antikomunitativní; **KOMUNITATIVNOST** — vzájemná zaměnitelnost, záměnnost; **KOMUTÁTOR** (v. -or) — „zaměňovatel, vyměňovatel“; zařízení v obvodu elektrod, kterým se může měnit polarita elektrod

KONCENTRACE (z lat. *concentratio*; slož. z *con-* + řec. *kentron*; v. *centrum*) = „soustředění“; shromáždění okolo středu, silné zhuštění, zhuštěnost; **KONCENTRAČNÍ** — soustředovací, soustřeďující; **KONCENTRICKÝ** — mající společný střed, soustředný; **KONCENTROVANÝ** — soustředěný, zhuštěný; **KONCENTROVAT** — soustřeďovat, soustředit

KONDENZACE (z lat. *condensatio*; slož. z *con-* + *denso*, -*are*, ptc. pf. *densatus* = zhušťovat; od *densus* = hustý) — zhuštění; ve fyzice: **KONDENZACE** par — srážení, zkapalnění; **KONDENZÁT** — soubor částic, které se v supratekuté kapalině nahromadily do jednoho pohybového stavu a mají stejnou hybnost; **KONDENZÁTOR** (v. -or) — „hustič, zhušťovač“; ve fyzice: 1. přístroj k hro-

madění elektřiny; 2. zařízení na srážení par; **KONDENZOR** — soustava čoček v mikroskopu, která široký svazek od zrcátka se odrážejících paprsků soustřeďuje („zhušťuje“) na pozorovaný předmět; **KONDENZOvat** — zhušťovat; **KONDENZOVANÝ** — zhuštěný; **KONDENZOVANÉ** mléko — pasterované mléko zahuštěné odnětím vody; v. t. denzimetr

KONDUKCE (z lat. *conductio*; slož. z *con-* + *duco*, -ere, ptc. pf. *ductus* = táhnout, vést; v. indukce) — „společné vedení“; ve fyzice: vedení tepla, elektřiny apod. **KONDUKTANCE** (v. Pozn. u „kapacitance“) — činná vodivost; **KONDUKTIVITA** — vodivost (jako činnost i vlastnost); **KONDUKTOR** (v. -or) — vodič

KONFIGURACE (z lat. *configuratio*; slož. z *con-* + *figuratio*; od *figuro*, -are, ptc. pf. *figuratus* = dávat tvar, podobu, utvářet; od *figura* = = utváření, podoba, postava) — seskupení, utváření, útvar; vzájemné postavení několika osob nebo předmětů; v. t. transfigurace

KONFOKÁLNÍ (slož. z lat. *con-* + *focus* = ohniště; v. fokus) — mající společná ohniska

KONFRONTACE (slož. z lat. *con-* + *frons*, -ntis = čelo, přední strana; v. fronta) — 1. postavení dvou nebo více osob tváří v tvář za účelem přesného ověření jejich výpovědí; 2. vzájemné porovnání textů; 3. postavení vedle sebe; srovnání vůbec; 4. názorové střetnutí; **KONFRONTOvat**

KONJUNKCE (z lat. *coniunctio*; slož. z *con-* + *iungo*, -ere, ptc. pf. *iunctus* = spojovat; srov. **KONJUNKTIV** = spojovací způsob; **KONJUNKTURA** — příznivé spojení okolností, příznivý souběh podmínek majících vliv na další průběh) — spojení; ve fyzice: zdánlivé setkání („spojení“) dvou nebeských těles, protože se obě dostanou do přímky Země-Slunce (tj. nebeské těleso je na stejné straně od Země jako Slunce, ať už je za Sluncem nebo před ním); opakem: opozice (v. t.); v. t. adjunkce

KONKÁVNÍ (z lat. *concavus* = okrouhle vydutý, slož. z *con-* + *cavus* = dutý; v. kavitace) — vydutý, vyhloubený, zakřivený dovnitř; opak: konvexní (v. t.); ve fyzice: **KONKÁVNÍ** tvar — zakřivení plochy dovnitř; těleso (např. čočka, zrcadlo) je na okrajích tlustší než uprostřed; v. t. bikonkávní, plankonkávní

KONSTANTA (z lat. ptc. prez. *constans*, -ntis; od *consto*, -are; slož. z *con-* + *sto*, *stare* = státi, zastavit se; v. stator) — „pohromadě stojící“, „pevně stojící“; stálá, neproměnná hodnota; **KONSTANTNÍ** — „stojící spolu s někým, s něčím“, „pohromadě, pevně stojící“; pevný, stálý, trvalý, neměnný; **KONSTANTAN** — druh slitiny mědi a niklu, která má stálý elektrický odpor; **KONSTANTANOVÝ** drát

KONSTELACE (z lat. *constellatio*; slož. z *con-* + *stella* = hvězda;

v. stelární) — „sestavení hvězd“; postavení hvězd; vzájemné polohy hvězd vzhledem k Slunci a Zemi

KONTAKT (z lat. *contactus*; slož. z *con-* + *tango*, -ere, ptc. pf. *tactus* = dotýkat se; srov. TANGENS — dotýkající se, tečný) — dotknutí, dotyk, styk; KONTAKTNÍ napětí — stykové; KONTAKTNÍ čočka — která přilne přímo na rohovku (je s ní v těsném styku); KONTAKTOVÉ pero — jeho pomocí se uskuteční další spojení

KONTINUITA (z lat. *continuitas*; od *contineo*, -ere; slož. z *con-* + *teneo*, -ere = držet; srov. KONTINENT — „spoludržící, souvislá pevnina“) — „držení pohromadě“; spojitost, souvislost, nepřetržitost, nepřetržité trvání, vzájemné navazování; ve fyzice: KONTINUITA fyzikálních veličin — dané veličiny se mohou měnit po libovolně malých částkách, protože klasická fyzika předpokládala, že všechny fyzikální veličiny (např. i hmota) se mohou měnit spojitě. V. t. kontinuum

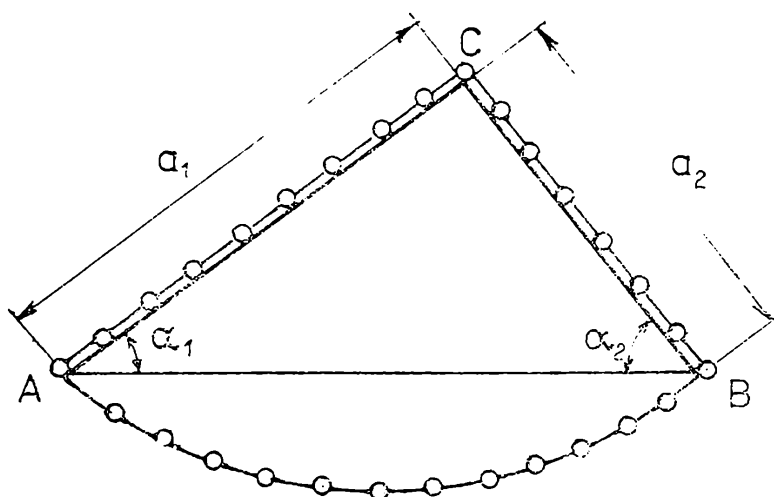
KONTINUUM (z lat. *continuus*; slož. z *con-* + *teneo*, -ere = držet; v. kontinuita) — „věc soudržná, (v prostoru) spojitá, (o čase) jdoucí přímo za sebou“; uzavřené souvislé množství obsahující více než jeden bod; ve fyzice: těleso, o němž se uvažuje jako o celku a nepřihlíží se k jednotlivým atomům a molekulám

KONTRAKCE (z lat. *contractio*; slož. z *con-* + *tractio*; od *traho*, -ere, ptc. pf. *tractus* = táhnout, vléci; v. trakce) — stažení, stahování, zmenšování objemu nebo veličiny, zúžení, zkrácení; ve fyzice: KONTRAKCE délky — zkrácení délky; KONTRAKCE paprsku nebo proudu — zúžení paprsku nebo proudu. Pozn.: Termín KONTRAKT je stejného původu; jde o smlouvu, dohodu, ujednání, které bylo smluvními stranami „pevně staženo“, dohodnuto

KONTRAOKTÁVA (slož. z lat. *contra* = proti + *octavus* = osmý; v. oktáva) — „protioktáva“; v hudbě: jedna z oktáv, která vzhledem k základní oktávě leží v opačném směru, tj. dolů; spodní oktáva; v. t. subkontraoktáva

KONVEKCE (z lat. *convectio*; od *conveho*, -ere, ptc. pf. *convectus*; slož. z *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *veho*, -ere = vézt, vozit, táhnout; v. vektor) — „svážení, navážení“; ve fyzice: proudění („doprava, dovoz“) tepla, tj. šíření tepelné energie, kdy přenos („dovoz“) energie zprostředkovává látka; KONVEKČNÍ; KONVEKTOR (v. -or) — druh vytápěcího tělesa ústředního topení. Pozn.: Příd. jméno KONVEKČNÍ je od KONVEKCE, kdežto KONVEKNÍ (v. t.) je od KONVEXE

KONVENCE (z lat. *conventio*; od *convenio*, -ire, ptc. pf. *conventus* = scházet se, shodovat se; slož. z *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *venio*, -ire = přicházet; srov. PREVENCE — předcházení, opatření učiněné předem; lat. *prae* = před) — úmluva, zvyklost; „to, na čem se zúčastněné strany shodnou; to, v čem se názory sejdou“;



Obr.

Odtud vypočteme reakce $N_i = m_i g \cos \alpha_i$ a síly $S_i = m_i g \sin \alpha_i$. Protože tahová síla přenášená lanem je v celém laně stejná ($S_1 = S_2$), musí být $m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g \sin \alpha_2$. Odtud dostaneme hledanou podmínku pro rovnováhu dvou těles na nakloněných rovinách podle obr. 1

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = m_2 : m_1 \quad (3)$$

Siny úhlů nakloněných rovin musí být v obráceném poměru hmotností obou těles.

K tomuto závěru jsme došli pomocí metody *uvolňování těles*. Vozík jsme si představili jako hmotný bod volně umístěný v prostoru. Odstranili jsme nakloněnou rovinu, na kterou vozík působí kolmou tlakovou silou (akcí) a připojili stejně velkou, ale opačnou sílu přenášenou z nakloněné roviny na vozík (reakci). Působení nakloněné roviny na i -tý vozík jsme tedy nahradili reakcí N_i . Podobně jsme přerušili lano a připojili místo něho reakci S_i přenášenou z lana na vozík. Tři síly, totiž $m_i g$, N_i , S_i mají nulovou výslednici právě tehdy, platí-li (1) a (2), a to pro každý z obou vozíků ($i = 1, 2$). Protože tyto tři síly procházejí jedním bodem (společným průsečíkem nositelek těchto sil), mají k tomuto bodu nulové momenty, a nedávají tedy ani výslednou silovou dvojici. Za podmínek (1) a (2) tvoří tedy rovnovážnou soustavu. Podmínka (3) je pak důsledkem třetího Newtonova zákona aplikovaného na vzájemné působení obou vozíků (prostřednictvím lana).

Simon Stevin (Stevinus), holandský badatel žijící v letech 1548 až 1620, dospěl k rovnici (3) zcela jinou, velmi jednoduchou úvahou. Představil si hranol ABC z obr. 1 s dokonale hladkým povrchem, obepjatý řetězem podle obr. 2. Bude-li na takový řetěz působit pouze síla tíže, nebude se pohybovat, tj. bude v rovnováze. Poněvadž síly přenášené z oblouku AB jsou v obou jeho koncových bodech stejné, nenaruší se rovnováha, když oblouk AB odpojíme. Zbude část řetězu BCA , která bude sama o sobě v rovnováze. Protože hmotnost řetězu je úměrná jeho

délce, bude hmotnost m_1 části AC v poměru k hmotnosti m_2 části BC jako úsečka $a_1 = AC$ k úsečce $a_2 = BC$; tedy

$$m_1 : m_2 = a_1 : a_2. \quad (4)$$

S použitím sinové věty odtud dostaneme

$$m_1 : m_2 = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1, \quad (5)$$

což je rovnice (3). „Zázrak, a přece to není žádný zázrak“, napsal Stevin na titulní list své knihy *Hypomnemata mathematica*, vydané v Leidenu roku 1605. Zároveň na něm vyobrazil hranol s řetězem.

V čem se liší obě popsaná řešení? V prvním případě jsme považovali případ za statický a uvažovali jsme o tělese *v klidu*. V druhém případě jsme zvažovali *možnost pohybu*. Je-li řetěz v rovnováze, nedá se samovolně do pohybu, byl-li předtím v klidu. Při takovém pohybu by působící síly konaly práci; ta by se měnila v kinetickou energii. Za rovnováhy se však pohybový stav, a tedy ani kinetická energie nemění. Práce působících sil musí být proto nulová. Skutečně, posunou-li se vozíky na obr. 1 vpravo o dráhu s , vykonají působící síly práci A . Vypočteme ji ze vztahu

$$A = (-m_1 g \sin \alpha_1 + S_1) s + (m_2 g \sin \alpha_2 - S_2) s. \quad (6)$$

Protože $S_1 = S_2$, zbývá

$$A = (m_2 \sin \alpha_2 - m_1 \sin \alpha_1) g s. \quad (7)$$

Vzhledem k (3), popř. (5), je $A = 0$.

Zvláštní na této úvaze je, že jsme nepočítali se zrychlením, a tedy ani s přeměnou práce A v kinetickou energii, a že jsme nepředpokládali žádné změny působících sil, které by mohly (v jiném případě) na dráze záviset. Mlčky jsme předpokládali, že dráha s je velmi malá, takže se síly (ani geometrie soustavy) nemění a že se pohyb děje tak pomalu, abychom mohli rychlost i zrychlení zanedbat. Předpoklad velmi pomalého pohybu můžeme nahradit jiným, totiž vědomým vynecháním zrychlení. Dospějeme tak k *principu virtuálních prací*: pohneme-li tělesem nebo soustavou těles v rovnováze (nepatrně, ale jakýmkoli možným způsobem), pak práce působících sil je celkem nulová; působící síly považujeme přitom za konstantní a zrychlení neuvažujeme. V tom se princip virtuálních prací liší od zákona zachování energie; do energetické bilance by kromě vykonané práce vstoupila i vytvořená kinetická energie a práce by se počítala i se zřetelem k případné závislosti sil na dráze pohybu.

Malý pohyb tělesa nebo soustavy těles, který je fyzikálně realizovatelný (kterému nebrání podepření a různé vazby mezi tělesy), se nazývá *virtuální*. Práce, kterou při virtuálním pohybu vykonají působící síly, je *virtuální práce*. „Virtuální“ pohyb zde znamená totéž co „kinematicky možný, realizovatelný“. Protože se klidné těleso nemůže ve skutečnosti pohnout, aniž vznikne zrychlení, představuje princip virtuálních prací jen myšlenkový, dynamicky nerealizovatelný pokus. Virtuální pohyb tělesa se může díť okamžitě, v zastaveném čase, a přece je jeho zrychlení

podle definice nulové. To by ovšem nebylo možné, kdyby šlo o skutečný, nikoli jen myšlený pohyb.

Práce (7) obsahuje jen práci sil tíže m_1g , m_2g . Ostatní síly, tj. reakce N_1 , N_2 a tahová síla v laně S ($S = S_1 = S_2$) práci nekonají. Ty síly, které při virtuálním pohybu konají práci, jsou *akční*; ostatní síly jsou *neakční*. Podmínky rovnováhy, které dává princip virtuálních prací, obsahují jen akční síly.

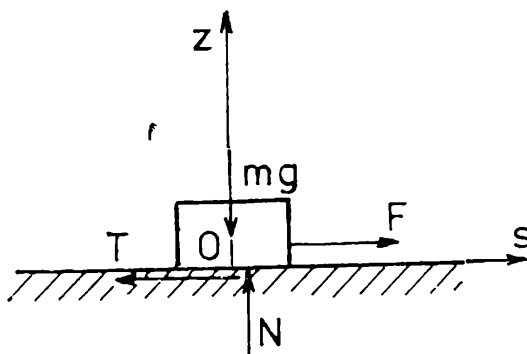
Protože se z praktických důvodů nejčastěji omezujeme na nekonečně malé pohyby, bývá zvykem užívat symbol δ ; konečnou dráhu s nahradíme nekonečně malou virtuální dráhou δs a virtuální práci označíme δA . Podle principu virtuálních prací je za rovnováhy $\delta A = 0$. Pro soustavu dvou vozíků podle obr. 1 bude platit, že

$$\delta A = (m_2 \sin \alpha_2 - m_1 \sin \alpha_1) g \delta s = 0. \quad (8)$$

U jednotlivých těles se může virtuální pohyb skládat z posuvu i z otočení tělesa. Za nekonečně malého virtuálního pohybu se geometrie soustavy těles mění jen zanedbatelně.

Dvěma ekvivalentním silovým soustavám přísluší stejná virtuální práce a naopak, přísluší-li dvěma silovým soustavám stejná virtuální práce, jsou tyto soustavy ekvivalentní.

Až dosud jsme předpokládali, že těleso je buď volné, nebo že souvisí s jinými tělesy zcela určitými vazbami (např. kloubem nebo ložiskem bez vůle a bez tření, úplným podepřením, vetknutím apod.). Někdy jsou však tyto vazby nedokonalé, např. podepření na drsné ploše, jednostranné podepření. Princip virtuálních prací můžeme upravit tak, abychom i v tomto případě vystihli všechny možné případy vzájemného působení dotýkajících se těles. Ukážeme to na příkladu tělesa spočívajícího na drsné podložce (obr. 3). Těleso má hmotnost m . Spočívá-li na podložce, je



Obr. 3

svislá reakce $\mathbf{N} = -m\mathbf{g}$ a vodorovná reakce $\mathbf{T}$, přičemž $|T| \leq \mu N$, μ je součinitel tření. Při virtuálním pohybu se těleso může posunout po podložce o dráhu δs nebo se může zvednout o $\delta z \geq 0$. Při vodorovném posuvu nekoná síla $\mathbf{N}$ ani $m\mathbf{g}$ žádnou práci, protože je kolmá k dráze. Při zvednutí tělesa je $\mathbf{N} = 0$. Virtuální práce δA bude proto obsahovat pouze tři členy: práci síly tíže (při zvedání), práci tažné síly a práci síly smykového tření (při vodorovném posuvu). Bude tedy

$$\delta A = -mg \delta z + F \delta s - \mu mg \frac{\Delta s}{|\Delta s|} \delta s. \quad (9)$$

První a třetí člen na pravé straně mají záporná znaménka, neboť síla tíže působí při zvedání tělesa proti směru pohybu; totéž platí při smyku za vodorovného pohybu o síle tření.

O tom, zda je třetí člen na pravé straně (9) kladný nebo záporný, rozhoduje smysl posuvu Δs tělesa. Zřejmě

$$\frac{\Delta s}{|\Delta s|} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \Delta s > 0, \\ -1 & \text{pro } \Delta s < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Je-li $\Delta s = 0$, je tento výraz neurčitý (tento případ vyšetříme později.) Symbol Δs značí přírůstek dráhy skutečného pohybu. Za rovnováhy musí být tento pohyb rovnoměrný. Smysl tohoto pohybu rozhoduje o smyslu smykového tření. Symbol δs značí dráhu myšleného virtuálního pohybu; lhostejno, zda jej uskutečníme (v tom případě $\delta s = \Delta s$) nebo zda zůstaneme jen při myšlenkovém pokusu (δs je pak libovolné).

Virtuální práce δA podle (9) nebude tentokrát nulová, ale bude splňovat nerovnost $\delta A \leq 0$. Bude tedy

$$-mg \delta z + F \delta s - \mu mg \frac{\Delta s}{|\Delta s|} \delta s \leq 0. \quad (11)$$

Rozebereme nyní tuto nerovnost a ukážeme, že vskutku za rovnováhy platí. Zvolme nejprve $\delta s = 0$. Pak musí podle (11) za rovnováhy platit, že

$$-mg \delta z \leq 0. \quad (12)$$

Kdyby bylo $z > 0$, mohlo by být δz kladné i záporné a nerovnost (12) by proto neplatila. Těleso by nebylo v rovnováze (padalo by zrychleně volným pádem). Má-li (12) platit, musí být $\delta z \geq 0$. Toto omezení zdola platí jen pro $z = 0$ (těleso nemůže vniknout do podložky). To znamená, že těleso, které spočívá na podložce, je v rovnováze.

Zvolme nyní $\delta z = 0$. Ze vztahu (11) dostaneme

$$\left(F - \mu mg \frac{\Delta s}{|\Delta s|} \right) \delta s \leq 0. \quad (13)$$

Protože δs nezávisí na Δs a může být kladné i záporné, musí být výraz v závorce ve vztahu (13) nulový. Takže tažná síla při rovnoměrném pohybu vyjde

$$F = \mu mg \frac{\Delta s}{|\Delta s|} = \mu mg \operatorname{sign}(\Delta s). \quad (14)$$

Abychom vyšetřili případ $\Delta s = 0$, předepíšeme $\delta s = \Delta s = \varepsilon F$, $\varepsilon > 0$. Nakonec položíme $\lim \varepsilon \rightarrow 0$. Vycházíme tedy z představy, že skutečný posuv je na počátku zatěžování úměrný působící síle (podobně jako u pružných těles) a že jiný pohyb není možný (proto $\delta s = \Delta s$). Z nerovnosti (13) dostaneme

$$\varepsilon F^2 - \mu mg \varepsilon \frac{F^2}{|F|} \leq 0. \quad (15)$$

Tuto nerovnost zkrátíme výrazem $\varepsilon F^2 > 0$ a vypočteme $|F| - \mu mg \leq 0$. Odtud

$$-\mu mg \leq F \leq \mu mg. \quad (16)$$

Coulombův zákon smykového tření je tedy za rovnoměrného pohybu tělesa na drsné podložce popsán rovnicí (14) a za klidu (případ adheze) nerovností (16).

Rovnováhu tělesa můžeme tedy posuzovat nejen tak, že vyšetříme, zda soustava působících sil je rovnovážná (s použitím vektorové algebry), ale také tak, že vyšetříme práci těchto sil při virtuálním pohybu. Výhodou principu virtuálních prací je, že platí i pro soustavy těles a že nepotřebujeme z takové soustavy uvolňovat jednotlivá tělesa. Princip virtuálních prací formuloval švýcarský badatel Jan Bernoulli již roku 1717 (žil v letech 1667 až 1748). Náznak tohoto principu však najdeme již u Aristotela (384 až 322 př. n. l.). Ten odvozoval zákon o silách na páce z principu, podle kterého „se síly navzájem vyvažují, jsou-li nepřímo úměrné rychlostem“. Od Aristotelových rychlostí je k posuvům jen nepatrný krok. Ostatně ani Jan Bernoulli nepsal o virtuálním posuvu, ale o virtuální rychlosti. Násobíme-li tuto rychlost libovolným, ale nekonečně malým přírůstkem času δt , dostaneme virtuální posuv. Jde-li o úhlovou rychlost, dostaneme virtuální otočení. Posuv i otočení se často zahrnuje pod společný název *zobecněný posuv*.

Rozdíl mezi Aristotelem a Bernoullim je v tom, že Aristoteles měl na mysli pouze dvě rovnoběžné síly na páce, totiž „pohybující sílu“ a „břemeno“. Jan Bernoulli však rozpoznal, že princip virtuálních prací je obecný fyzikální princip, který platí pro jakékoli těleso i pro soustavy těles.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů a fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Řešení algebrogramu ze str. 342

ABRAHAM DE MOIVRE

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Fyzika a dejiny ľudstva I

Slnko nastoľuje v Egypte XXI. dynastiu

RNDr. EVA TOKÁRIKOVÁ, doc. RNDr. JÁN CHRAPAN, CSc.,

VVTŠ-ČSSP, Liptovský Mikuláš

Fyzikálne objavy nie sú výsledkom náhleho zjavenia, ale súčasťou dlhodobého historického procesu. Vznikajú na určitom stupni vývoja spoločnosti, stávajú sa postupne aktívnym faktorom výroby, ktorá riadi vývoj spoločenských procesov.

Predpoklady pre vznik vedy sa objavujú v krajinách starého Východu: v Číne, Indii, Babylone, Egypte. Tu sa zhromažďujú empirické poznatky o prírode a spoločnosti, vznikajú začiatky astronómie, matematiky, etiky a logiky. Výdobytky východnej civilizácie boli prepracované v starom Grécku. Veda zhromažďovala poznatky a rozširovala obzor videnia sveta a prírody. Prvoradým sa stalo poznávanie, ktorého cieľom bolo využiť a pretvoriť prírodu, teda fyzikálne poznávanie. Pretváranie prírody sa realizovalo procesom výroby. Nové poznatky ovplyvňovali výrobu a táto ovplyvňovala svetové dejiny.

Zákony vývoja spoločnosti formulovali Marx a Engels v historickom materializme.

Všetci predmarxistickí filozofi sa v chápaní spoločenského života obmedzovali na koštatovanie, že v spoločnosti, na rozdiel od prírody, kde pôsobia slepé sily, pôsobia ľudia, bytosti obdarené vedomím, a títo sa vo svojej činnosti riadia ideálnymi pohnútkami. Historický materializmus ukázal, že motivom ľudskej činnosti nie sú ideálne pohnútky, ale materiálne príčiny. Ukázal, že svet treba chápať dôsledne materialisticky, že aj spoločenský život a zákony jeho vývoja, aj všetky jeho ostatné stránky sú určované materiálnym základom.

Základným faktom ľudskej spoločnosti je získavanie životných prostriedkov. Toto získavanie životných prostriedkov vytvára vzťahy medzi ľuďmi — výrobné vzťahy — tvoriace jadro každej konkrétnej spoločnosti. Výrobné vzťahy sú vzťahmi základnými a určujú všetky ostatné vzťahy v spoločnosti. Dejiny spoločnosti sú samozrejme závislé od týchto vzťahov. Výrobné vzťahy nevytvárajú jednotlivci, ale ľudové masy, a preto práve tieto masy sú tvorcami dejín.

V daných výrobných podmienkach a pri daných výrobných vzťahoch pracujú vedci a vynálezci. Vychádzajú z pracovnej skúsenosti, zodpove-

dajúcej danému stupňu vývoja. Získavajú nové poznatky o prírode, spoločnosti a myslení, vytvárajú vedu. Získané poznatky vracajú späť do praxe, kde tieto svojím spôsobom ovplyvnia výrobné vzťahy. Výrobné vzťahy sa dostanú na vyššiu úroveň a ovplyvnia vývoj spoločnosti. U každého fyzikálneho objavu je možné nájsť jeho odraz v dejinách ľudstva. Na niekoľkých príkladoch ukážeme, ako fyzikálne poznatky zasiahli do života spoločnosti a ovplyvnili dejiny ľudstva.

Slnko nastoľuje XXI. dynastiu

Uviedli sme, že jedna z najstarších známych civilizácií bola v Egypte. Zjednotený Egypt, ako vyspelá civilizácia, vystupuje už v 3. tisícročí pred našim letopočtom. Jeho dejiny sa zvyknú deliť, okrem iného, aj podľa období vzostupu a úpadku egyptského štátu na dobu najstaršiu — Starú ríšu, Strednú ríšu, Novú ríšu, a na neskoré obdobie egyptských dejín, po ktorom už nasleduje obdobie perskej nadvlády, obdobie hellenistické a rímske. V dobe Novej ríše sa rozvíjali prírodné vedy a práve ich rozvoj urýchlil pád Egypta.

Na začiatku 11. storočia pred našim letopočtom zanikla v Egypte XX. dynastia egyptských faraónov. Posledný panovník XX. dynastie sa dostal do područia chrámového kňazstva a jeho smrťou prechádza vláda Egypta do rúk veľkňaza Hrihora, zakladateľa XXI. dynastie, dynastie slabej, ktorá ovládala už len Horný Egypt. Postupne sa celý Egypt dostal do cudzej nadvlády.

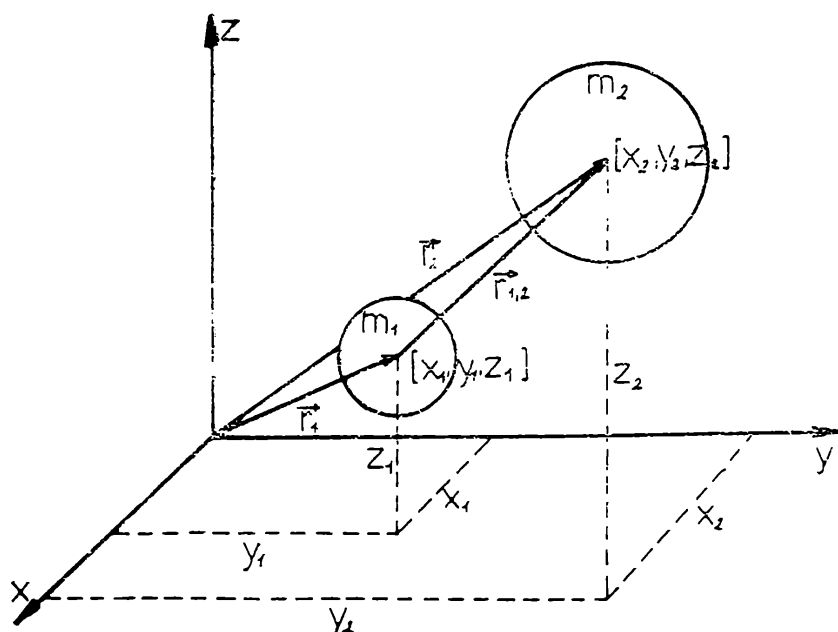
Posledný Ramzes XX. dynastie videl biedne postavenie ľudu v Egypte, videl, kto je skutočným vládcom v zemi a bol presvedčený, že pozná spôsob, ako situáciu vyriešiť v prospech pokroku, pre rozkvet krajiny. Hospodársku moc v krajine mali svätyne, sústredená bola v rukách kňazov. Rozkvet Egypta závisel od toho, či sa podarí vyrvať ju z rúk veľkňaza. Ramzes si bol vedomý tejto úlohy, oprel sa o vojsko, získal ľud a mnohých kňazov a pripravoval ovládnutie svätýň, skrývajúcich bohatstvo Egypta. Všetko bolo pripravené a úspech bol nepochybný. Rozhodlo však poznanie prírodných zákonov. O výsledku ozbrojených zrážok rozhodla fyzika, vlastne Keplerove zákony.

Po celom Dolnom Egypte v každom meste a mestečku, všade tam, kde stáli svätyne egyptských bohov, začali sa zhromažďovať skupiny prostých ľudí, nespokojných s ťažkým údelom. Všetci v presvedčení, že kňazi pod vedením veľkňaza Hrihora (podľa Prusa Herkov) usilujú o získanie moci, o zapredanie Egypta Asýrii. Bol krásny slnečný deň. Na poliach sa kláňali dozreté klasy obilia. Naliate strapce hrozna vo viniciach čakali na chvíľu, keď ich odtrhne pracovitá ruka vinohradníka. Čakali márne. Ženci, vinohradníci, chudobní nádeníci spolu s remeselníkmi, tovarišmi, žobrákmi a povalačmi zo širokého okolia Memfisu na dolnom toku Nilu sa poschádzali pod múry svätýň. Jednotky faraónovho vojska zaujali vyčkávacie stanoviská. Mali prísne rozkazy zabrániť plieneniu,

pomôcť však rozvášnenému ľudu zosadiť spupných kňazov. Miestami, kde bol dav pokojnejší, vystupovali tajní provokatéri, najatí kňazmi. Jediným ich cieľom bolo, pred očami nemo sa prizeraúcich, vo vyrovnaných radoch čakajúcich vojakov, vystupňovať davovú psychózu k neuvážaným násilným činom. Vášne dostupovali vrchol. Na brány chrámov pršalo skálie a otriasali nimi údery ťažkých baranidiel. Dôstojníci sa už už chystali vydať rozkazy na ochranu osobnej bezpečnosti kňazov a chrámového majetku, keď si postupne všimli zvláštneho úkazu: bezmračná obloha, na ktorej dosiaľ páľilo slnko, akoby potemnela. Vtáci hľadali úkryt, zdalo sa, že sa ukladajú na nočný spánok. Zvieratá znepokojili, tisli sa do hŕb. Z voľnej krajiny zavial prívál dusivého vzduchu. Aj tak mútné vody Nílu akoby stemneli, ťaživým tichom sa niesol ich hukot. Ľudia strpli. Ten, kto by bol mohol okom obsiahnuť celý Dolný Egypt, bol by s prekvapením zistil, že v tomto okamihu, akoby na povel, zjavili sa hlavní kňazi na múroch svojich svätýň a nad nimi sa rozliehal tajomný, ťaby z hlbín chrámov, či otvorenej krajiny, alebo azda z výšok nebies prichádzajúci hlas — „odvraciam sa od prekliateho ľudu, nech je na Zemi tma.“ Kým doznela storaká ozvena týchto slov, na bezmračnej oblohe zavisol desivý čierny kruh, ovinutý ohnivým prstencom a po celej oblohe sa zamihali stovky hviezd. Na okamih zavládlo strašné ticho, podfarbené temným hukotom nilských vôd, akoby vychádzajúcim zo samotnej zeme. Zhromaždené zástupy zachvátila neopísateľná panika. Jedni, strnulí hrôzou, neboli schopní zdvihnúť svoju tvár z prachu. Iní, zdivení strachom, bezhlavo odhadzovali nástroje a odev a slepo narážali jeden do druhého. Ranení padali pod nohy rútiaceho sa davu, aby tam našli svoju smrť ušliapaním. A veľkňazi, sledujúc dielo skazy z múrov svojich svätýň vzývali Ozirisa, boha slnka, aby sa zmiloval nad nešťastným ľudom a na znak svojej milosti premenil tône noci na slnkom zaliate záhrady. „Som milosrdný, ešte raz vyplním žiadosti svojich kňazov...“ rozlahlo sa nad svätýňami Dolného Egypta a bol opäť žiarivý slnečný deň. V plnom slnečnom svetle bolo jasne vidieť veľkosť prehry faraóna. Ako po veľkej ničivej bitke, všade okolo chrámov sa vršili poodhadzované zbrane, sekery, mlaty a kyjaky udusené a ušliapané mŕtvoly. Pri stenách domov v úzkych uličkách dokonávali ranení. Nevýslovná radosť sa zmocnila všetkých, čo túto hrôzu prežili. Opäť sa schádzali k chrámom, avšak s úplne inými úmyslami. Namiesto baranidiel a kameňov skladali k branám chrámov obeť. Všade osvedčovali bezhraničnú oddanosť kňazom a všestrannú podporu ich politike. Bolo už len dielom niekoľkých dní, aby dobre organizovaná kňážská strana uchopila moc do svojich rúk.

Čo nevedel faraón

Na to, aby sme pochopili, čo sa v Egypte stalo, teda jav zatmenia Slnka, potrebujeme vedieť, ako sa pohybuje telesá Slnečnej sústavy.



Obr. 1

Po fyzikálnej stránke ide o riešenie problému n telies, pôsobiacich na seba gravitačnými silami. Zostaviť pohybové rovnice pre takýchto n telies nie je problematické, problémom je však ich riešenie. Pohybová rovnica je vlastne druhý Newtonov zákon

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}.$$

Zamyslime sa nad touto rovnicou. V našom prípade je pôsobiacou silou sila gravitačná

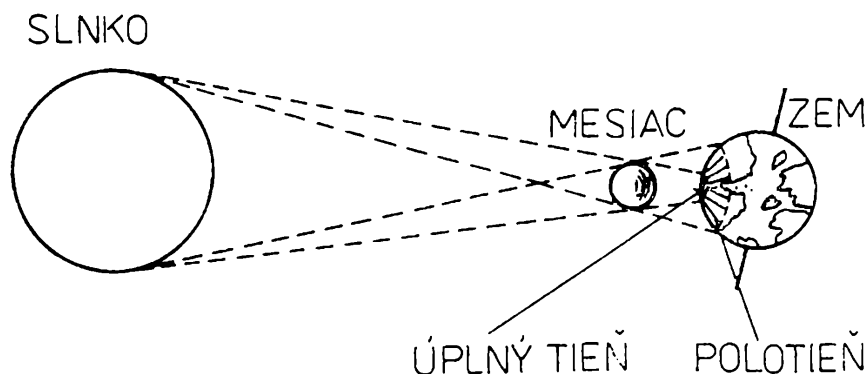
$$\mathbf{F} = -\kappa \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^3} \mathbf{r}_{1,2}$$

medzi dvojicami telies s hmotnosťou m_1 a m_2 , ktorých vzájomná vzdialenosť je $r_{1,2}$. Sila pôsobí vo smere $\mathbf{r}_{1,2}$ a κ je všeobecná gravitačná konštanta. (Znamienko minus je z vektorového hľadiska.) (Obr. 1) Každé z telies má určitú polohu $[x, y, z]$, polohový vektor $\mathbf{r}$ a pôsobením sily $\mathbf{F}$

získava zrýchlenie $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$. Keďže na každé teleso

bude pôsobiť viacero telies, bude takýchto pohybových rovníc viac. Na i -té teleso z uvažovaných n telies, ktoré je pod vplyvom $(n-1)$ telies, pôsobí výsledná sila $\mathbf{F}$, pre ktorej zložky môžeme písať

$$\begin{aligned} F_x &= m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n-1} m_i m_k \frac{x_i - x_k}{r_{i,k}^3} \\ F_y &= m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n-1} m_i m_k \frac{y_i - y_k}{r_{i,k}^3} \\ F_z &= m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n-1} m_i m_k \frac{z_i - z_k}{r_{i,k}^3} \end{aligned}$$



Obr. 2

kde m_k je hmotnosť telesa k , pôsobiaceho na teleso i s hmotnosťou m_i ,

$[x_i, y_i, z_i]$ sú súradnice i -tého telesa a $\left[\frac{d^2x_i}{dt^2}, \frac{d^2y_i}{dt^2}, \frac{d^2z_i}{dt^2} \right]$ je zrýchlenie

i -tého telesa, vyvolané telesom k , $[x_k, y_k, z_k]$ sú súradnice k -tého telesa a $r_{i,k}$ je vzdialenosť stredov telies i a k . Hodnota i v našom prípade sa bude meniť od 1 po n , teda takýchto pohybových rovníc pre n telies bude $3n$. Pre problém troch telies to bude 9 rovníc. Sú to diferenciálne rovnice druhého rádu a pri ich riešení treba použiť 18-krát integrovanie. Doposiaľ vieme z týchto 18-tich integrálov riešiť len 10. Teda už ani problém troch telies nie je všeobecne riešiteľný. Dá sa riešiť len v špeciálnych prípadoch. Potom hovoríme o tzv. restringovaných problémoch troch telies. Pri matematickom riešení problému troch telies vyplynú z nutných úvah niektoré fyzikálne fakty, ako: a) veta o ťažisku, ktorá hovorí, že ťažisko celej sústavy je buď v pokoji alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiari, b) zákon zachovania momentu hybnosti — celkový moment hybnosti sústavy n telies ostáva konštantný, c) zákon zachovania mechanickej energie, podľa ktorého súčet kinetických energií všetkých telies v danej sústave a potenciálnej energie sústavy je konštantný.

Pri riešení uvedených rovníc len pre dve telesá uvidíme, že okrem a), b), c) platí aj d) že telesá sa pohybujú v rovine, e) že dráhy týchto telies sú kuželosečky a že f) parametre týchto kuželosečiek súvisia s obežnými dobami telies okolo ich spoločného ťažiska.

Bez toho, aby zostavil rovnice a aby ich riešil, dospel k faktu a) až f) Kepler rozborom pozorovaní, ktoré vykonal Tycho Brahe v 16. storočí. Takto empirickou cestou Kepler odvodil svoje tri zákony:

- 1) Planéty sa pohybujú po elipsách, málo sa líšiacich od kružníc a v ich spoločnom ohnisku je Slnko (vývody a), d), e)).
- 2) Plochy opísané sprievodičmi planéty sú za jednotku času rovnaké (vývody b), c)).
- 3) Druhé mocniny obežných dôb dvoch planét sú v takom istom pomere, ako tretie mocniny ich veľkých poloosí (vývod f)).

Keď už vieme, ako sa telesá v našej slnečnej sústave pohybujú, mô-

žeme si vysvetliť jav, ktorý pozorovali v osudný deň v Egypte — zatmenie Slnka.

Mesiace sa pohybuje okolo Zeme, rotujúc okolo ich spoločného ťažiska. (Zem je oveľa hmotnejšia, preto je toto spoločné ťažisko blízko stredu Zeme.) K zatmeniu Slnka na danom mieste Zeme dochádza vtedy, keď na toto miesto dopadne tieň Mesiaca, nachádzajúceho sa medzi Slnkom a Zemou (obr. 2). Miesto pozorovania zatmenia nemusí byť blízko stredu tieňa, potom takéto zatmenie nie je úplné. Úplné zatmenie Slnka možno pozorovať len na miestach, na ktorých prejde stopa úplného tieňa po povrchu Zeme, a netrvá preto dlho, maximálne 7 minút a pre dané miesto je vzácnosťou. Napríklad v Čechách bude v tomto storočí len jedno úplné zatmenie Slnka, a to v roku 1999. Čiastočné zatmenia Slnka možno z daného miesta pozorovať častejšie.

Predpovedanie zatmení bolo jednou z úloh, ktoré sa podarilo vyriešiť už (ako sme v článku videli) v starovekej astronómii.

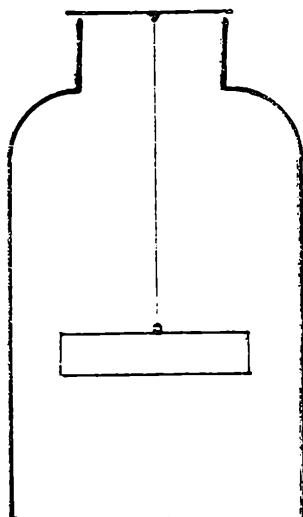
Literatúra :

- [1] BRYCHNÁČ, B.: Základy marxisticko-leninské filosofie 1. vydanie, Svoboda Praha 1984.
- [2] Kolektív: Filozofický slovník 3. vydanie, Pravda Bratislava 1982.
- [3] Kolektív: abc světových dějin, 1. vydanie, Orbis Praha 1967.
- [4] PRUS, B.: Faraón, 4. vydanie, Tatran Bratislava 1971.
- [5] VANÝSEK, V.: Základy astronomie a astrofyziky, 1. vydanie, Academia Praha 1980.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Pokus o „telekinezi“

Slovem „telekineze“ se označuje uvádění do pohybu těles pouhou vůlí, popř. jinými zvláštními duševními schopnostmi některých lidí, vyzařováním částic duševní energie z lidského mozku atd., aniž na těleso působí jiná tělesa podle zákonů, jak jsou známé z fyziky. Na důkaz existence jevu telekineze se předvádí pokus, který si můžete snadno zopakovat. Při něm je v uzavřené láhvi (např. od okurek) zavěšeno lehké papírové křídélko na velmi tenkém vlákně. Hodí se k tomu obdélníkový lístek z průklepového papíru o rozměrech zhruba 7 cm × 2 cm, zavěšený asi v 1/3 výšky ode dna nádoby na nejtenčím vlákně, které se získá rozpletením silonové niti (obr. 1). Když se křídélko v nádobě uklidní, upřeme z nevelké vzdálenosti (řádově 40 cm) kolmo na plochu křídélka oči.



Obr. 1

Po několika málo minutách (kolem 4 minut) se lístek zvolna otočí o 90° . (Pokus probíhá rychleji v chladné, nevytopené místnosti.)

Otázka. Pokuste se vysvětlit pohyb lístku na základě poznatků z elementární fyziky a navrhnete pokus, kterým dokážete správnost své domněnky.

Emil Kašpar

Algebrogram s tajenkou

V minulém čísle jste se naučili řešit jednoduché hláskové algebrogramy. Nyní máte před sebou složitější algebrogram, složený ze tří jednoduchých. Podaří se vám vyluštit tajenku?

$$\begin{array}{rcl} \text{IOR} - & \text{RBB} & = \text{VAD} \\ + & : & - \\ \text{VOH} - & \text{AE} & = \text{BE} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{MOOM} - & \text{RRER} & = \text{DVV} \\ + & : & - \\ \text{IAO} + & \text{RE} & = \text{IIE} \\ \hline \text{MIAM} : & \text{HB} & = \text{IA} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{VR} & = & \text{MB} \times \text{RD} = \text{VDEA} \\ + & & \times & - \\ \text{AB} + & \text{MR} & = & \text{BO} \\ \hline \text{BM} + & \text{VIMH} & = & \text{VDAA} \end{array}$$

Tajenka: 2732824 69 405139

Jarmila Pěnčíková

Úlohy ze zahraničních časopisů

Úloha 1. Nalezněte všechna přirozená čísla n , taková, aby výraz $2^8 + 2^{11} + 2^n$ byl roven druhé mocnině nějakého celého čísla.

Úloha 2. Nalezněte nejmenší možnou hodnotu z výrazu $|\cos x| + |\cos 2x|$

Úloha 3. Je dán trojúhelník ABC s vrcholy A, B, C a s úhly a, b, c , přičemž a je úhel u vrcholu A atd. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. Na straně AB existuje bod D tak, že $|CD|$ je geometrickým průměrem $|AD|$ a $|BD|$.

2. Platí nerovnost

$$\sin a \cdot \sin b \leq \sin^2 \left(\frac{c}{2} \right)$$

Úloha 4. Dokažte, že

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \dots + |\cos 2^n x| \geq \frac{n}{2},$$

kde n je libovolné přirozené číslo.

Úloha 5. Nechť funkce $f(x)$ má tuto vlastnost: jsou-li k, j přirozená čísla větší než 1 a m jejich největší společný dělitel, potom $f(kj) = f(m) \cdot f(k/m) + f(j/m)$. Nalezněte hodnoty $f(1984)$ a $f(1985)$.

Úloha 6 (obtížnější). Předpokládejme, že máme k dispozici miskové váhy, ale nikoli závaží. Máme $2n + 2$ kamenů. Dokažte, že pomocí $3n + 1$ vážení můžeme určit nejlehčí a nejtěžší z těchto kamenů

1. pro $n = 3$;

2. pro libovolné přirozené n .

Tomáš Schütz

NAŠE SOUTĚŽ

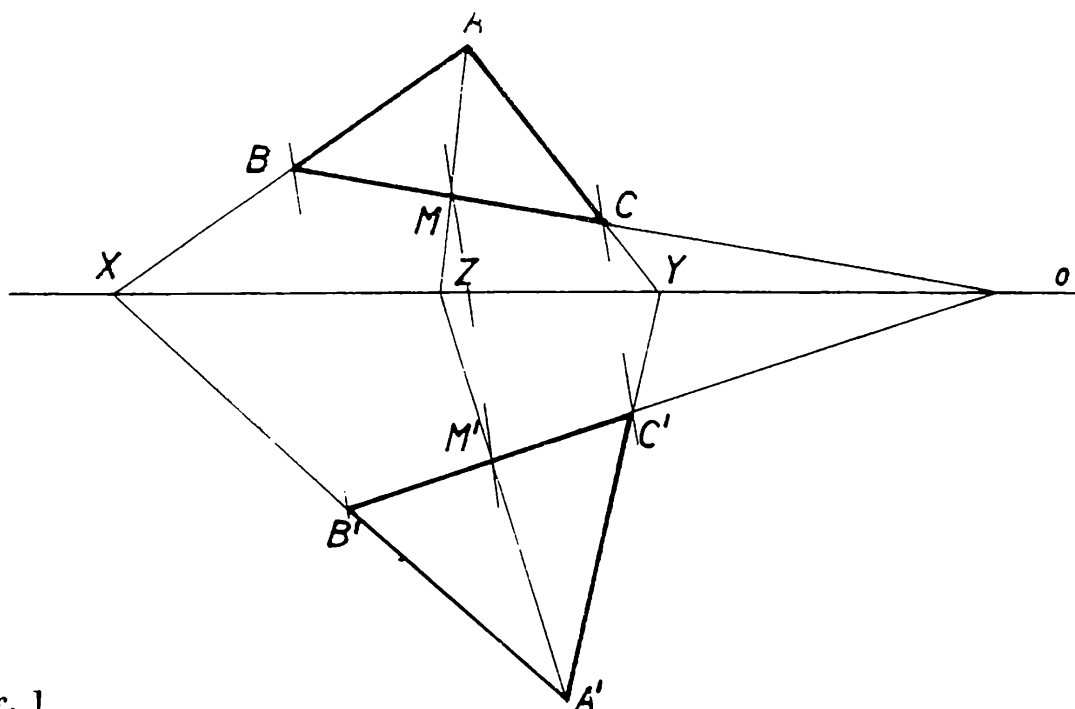
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány různoběžné roviny ϱ, δ . V rovině ϱ je dán trojúhelník ABC tak, že žádný jeho vrchol neleží v rovině δ . Tímto trojúhelníkem proložte hranolovou plochu, kterou rovina δ protíná v rovnostranném trojúhelníku.

(Došla 4 řešení)

Stanislav Horák



Obr. 1

Upravené řešení Hany Peňázové, 3 B G tř. kpt. Jaroše, Brno :

Hledanou hranolovou plochu určíme, sestrojíme-li v rovině δ rovnostranný trojúhelník $A'B'C'$ tak, aby přímky AA' , BB' , CC' byly vzájemně rovnoběžné. Potom trojúhelník $A'B'C'$ je rovnoběžným průmětem trojúhelníku ABC ; průmětem středu M strany BC je střed M' strany $B'C'$.

Podle předpokladu o trojúhelníku ABC neleží žádný jeho vrchol na průsečnici o rovin ϱ , δ . Z přímek AB , BC , CA může být nejvýše jedna rovnoběžná s přímkou o . Zvolme označení vrcholů daného trojúhelníku ABC tak, aby přímky AB , AC protínaly osu o ; budiž $X = o \cap AB$, $Y = o \cap AC$ (obr. 1). Potom přímka AM protíná přímkou o v bodu Z , který leží mezi body X , Y . Přímky $A'B'$, $A'C'$, $A'M'$ procházejí po řadě body X , Y , Z , které jsou stopníky přímek AB , AC , AM na rovině δ . Z vlastností rovnostranného trojúhelníku plyne, že platí:

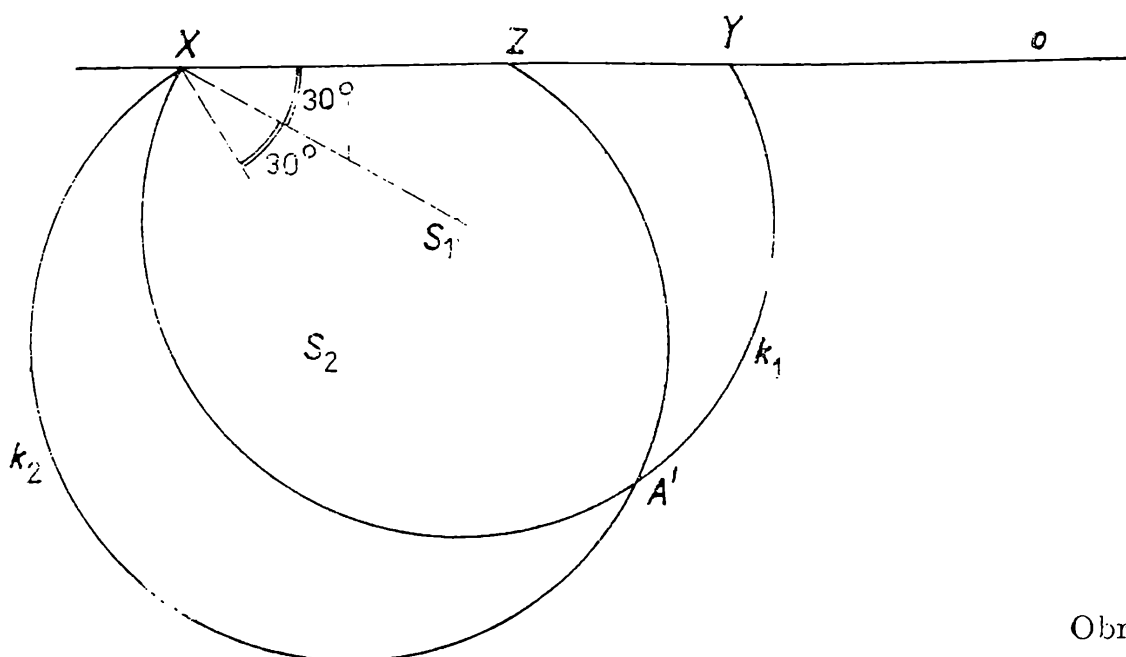
$$|\sphericalangle XA'Y| = 60^\circ, |\sphericalangle XA'Z| = 30^\circ.$$

Z toho plyne tato konstrukce trojúhelníku $A'B'C'$ (obr. 2):

1. Sestrojíme po řadě průsečíky X , Y , Z přímky $o = \varrho \cap \delta$ s přímkami AB , AC , AM .

2. V rovině δ sestrojíme množinu všech bodů P , pro něž je $|\sphericalangle XPY| = 60^\circ$. Tato množina je sjednocením dvou oblouků shodných kružnic k_1 , k'_1 , které procházejí body X , Y ; jejich středové úhly příslušné k těživě XY mají velikost 120° . Na obr. 2 je sestrojen jen oblouk kružnice k_1 .

3. V rovině δ sestrojíme množinu všech bodů Q , pro něž je $|\sphericalangle XQZ| = 30^\circ$. Tato množina je sjednocením dvou oblouků shodných kružnic k_2 , k'_2 , které procházejí body X , Z ; jejich středové úhly příslušné k tě-



Obr. 2

tivě XZ mají velikost 60° Na obr. 2 je sestrojen jen oblouk kružnice k_2 .

4. Sestrojíme body $A' = k_1 \cap k_2$, $A' \neq X$, $A'' = k'_1 \cap k'_2$, $A'' \neq X$.

5. Sestrojíme přímku AA' (resp. AA'') a body B, C vedeme po řadě přímky $b \parallel AA'$, $c \parallel AA'$ (resp. $b' \parallel AA''$, $c' \parallel AA''$). Tak dostaneme hledanou hranolovou plochu.

Úloha má právě dvě řešení. Musíme se ovšem ještě přesvědčit, že řez roviny δ s každou ze sestrojených hranolových ploch je skutečně rovnostranný trojúhelník. Při důkazu, který provedeme, užijeme tuto větu:

Nechť ABC je libovolný trojúhelník. Potom osa jeho vnitřního úhlu BAC protíná stranu BC v bodu M tak, že platí:

$$\frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Tuto větu najde čtenář v článku profesora Kraemera otištěném ve čtvrtém čísle letošního ročníku Rozhledů (str. 142).

Budiž $B' = b \cap \delta$, $c' = c \cap \delta$. Potom trojúhelník $A'B'C'$ je rovnoběžným průmětem trojúhelníku ABC . Průměty přímek AX , AY , AZ jsou po řadě přímky $A'X$, $A'Y$, $A'Z$; průmětem přímky BC je přímka $B'C'$. Průmětem bodu $M = AZ \cap BC$ je bod $M' = A'Z \cap B'C'$. Protože bod M je středem úsečky BC , je bod M' středem úsečky $B'C'$. Z konstrukce plyne, že je $|\angle XA'Y| = 60^\circ$, $|\angle XA'Z| = 30^\circ$; proto je také $|\angle YA'Z| = 30^\circ$, takže na přímce $A'M'$ leží osa úhlu $XA'Y$ i úhlu $B'A'C'$. Podle výše připomenuté věty tedy platí:

$$\frac{|B'M'|}{|C'M'|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}$$

Protože je $|B'M'| = |C'M'|$, je také $|A'B'| = |A'C'|$. Trojúhelník

$A'B'C'$ je tedy rovnostranný se základnou $B'C'$ a s úhlem $B'A'C'$ o velikosti 60° . Z toho plyne, že je také $|\sphericalangle A'B'C'| = |\sphericalangle A'C'B'| = 60^\circ$, takže trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný. Zcela stejně se dokáže, že také trojúhelník $A''B''C''$ je rovnostranný.

OLYMPIÁDY A SOČ

Letná škola mladých fyzikov

K letným prázdninám neodmysliteľne patrí slnko, voda a pohyb. No pohyb, či už v lesoch, alebo vo vode, to je LŠMF JSMF (čítaj: letná škola mladých fyzikov. Jednoty slovenských matematikov a fyzikov) Tí, ktorí čítali (Rozhledy 64 č. 6/1985/1986 str. 255—257 a Rozhledy 63 č. 7, 1984/85, str. 334—335) správy o predchádzajúcich ročníkoch iste hľadajú k spomínaným trom atribútom leta aj fyziku. Samozrejme, táto nechýbala ani na štvrtom ročníku LŠMF v *Orešanoch*, ktorý opäť úspešne zorganizovala druhá pobočka Jednoty slovenských matematikov a fyzikov v Bratislave a Ústredný dom pionierov a mládeže Klementa Gottwalda v Bratislave.

Na slnečné južné svahy Malých Karpát do rekreačného zariadenia Orešanka, neďaleko Dolných Orešan vyviezol 15. 8. 1986 autobus ÚDPM KG 29 žiakov bratislavských gymnázií a základných škôl. Títo potom so siedmimi vedúcimi strávili v lone prírody pri zaujímavých hrách, exkurziách, kvízových večeroch ale aj pri osobnom počítači, štrnásť dní, plných telesnej i duševnej rekreácie. Rekreácia mladých fyzikov, to nie len oddych. Výlet do Čachtíc a na Čachtický hrad bol plný poučenia z histórie. Pobyt na dopravnom ihrisku v Trnave preveril najmä tých mladších. Jadrová elektráreň v Jaslovských Bohuniciach tiež neušla ich pozornosti.

Účastníci LŠMF'86 sa rozišli v poznaní, že fyzika nie je hromada vzorcov, poučiek a naučení o činnosti jednotlivých prístrojov. Poznali, že je to veda, ktorá odpovedá na otázky, s ktorými sa myslíaci človek všade stretá. Prečo šumí les, prečo dozrieva hrozno, aká bude dráha loptičky pri stolnom tenise, aký telesný výkon je jednotlivec schopný krátkodobo vyvinúť. Zistili, že obyčajné posedenie pri táborovom ohni môže byť plné fyzikálneho poznania (ZENIT, 1, 7, /1986/str. 9—10).

Keď sme hovorili s účastníkmi orešanskej letnej školy o tom, s ktorým poznatkom by sa chceli podeliť na stránkach Rozhľadov, azda najviac sa ich priklonilo k tomu pre leto najvlastnejšiemu — k Archimedovmu zákonu. História s kráľovskou korunou, v ktorej hlavnú úlohu zohral Archimedes, iste dobre poznáte. Zaiste poznáte aj vyjadrenie pre

Archimedovu silu, ako niekedy nazývame hydrostatickú vztlakovú silu, ktorá pôsobí v kvapaline hustoty ρ na mieste s gravitačným zrýchlením g na teleso objemu V :

$$F = \rho g V$$

Nebudeme sa zdržiavať úvahami o výslednej sile, pôsobiacej na neupevnené teleso v kvapaline ani úvahami o rovnovážnej plohe plávajúceho telesa. Vyslovme hneď otázku účastníka letnej školy (ktorý nechce byť menovaný), ktorý azda unavený aplikovaním Archimedovho zákona na plavárni, navrhol ostatným, aby čo najrýchlejšie rozhodli o platnosti Archimedovho zákona v podmienkach bezgravitačného stavu. Keď budete odpovedať na túto otázku, uvedomte si, že účastníci letnej školy ju riešili pri bazéne (ba niektorí v ňom), že preto nevideli pred sebou napísaný výraz pre Archimedovu silu. A tak správne odpovedali tí, ktorí si uvedomili, že v bezgravitačnom stave neexistuje hydrostatický tlak:

$$p_h = \rho g h$$

a nulová je aj hydrostatická vztlaková sila F , keďže v takomto stave je $g = 0$.

Poznámka: Skôr ako vyšiel tento článok, v októbri 1986, vydalo SPN Praha 18. zväzok edície Škola mladých fyzikov od dr. M. Chytilovej: Znáte Archimedův zákon? Tu autorka uvádza aj chovanie kvapaliny v bezgravitačnom stave.

Eva Bittnerová

Řešení fyzikální úlohy ze str. 341

Domněnka: Tepelným zářením, které vychází z obličeje v blízkosti přístroje, se vzduch v nádobě ohřívá nestejně, před křídélkem více než za ním. Tak vznikne tepelné proudění vzduchu a následkem toho tlakové síly na povrch lístku. Tyto síly nejsou rovnoměrně rozloženy po celé ploše, což má za následek vznik dvojice sil, jejíž osa splývá s vláknem. Moment této dvojice je sice nepatrný, ale dostačí k tomu, aby způsobil otáčení lístku. V nevytopené místnosti, kde je chladný vzduch, je větší pokles teploty ve směru od obličeje, a tedy větší rozdíl teplot vzduchu před a za lístkem v lahvi.

Experimentální důkaz: Místo hlavy umístíme do stejného místa asi třilitrovou nádobu s vodou ohřátou cca na 40 °C (voda se rychle ochlazuje). Lístek se vychýlí stejným způsobem.

Ještě přesvědčivější je pokus, když jej provedeme s nádobou nejdříve naplněnou vzduchem, a poté ji evakuujeme. To lze dobře improvizovat i pomocí vyšší zavařovací láhve, do které vpravíme nepatrné množství vody, provedeme pokus s otáčením křídélka, a poté ji „zavaříme“. Po vychladnutí se křídélko nevychýlí. Pro kontrolu se pak provede pokus, když do lahve vpustíme vzduch.

Z NOVÝCH KNIH

Štefan Znám a kol. : **POHLED DO DEJÍN MATEMATIKY**

Vydalo vydavatelství Alfa v Bratislavě a nakladatelství SNTL v Praze v roce 1986, 1. vydání, 240 str., 84 obr., 3000 výtisků, cena 23,— Kčs.

Ve svém názvu kniha slibuje vlastně jen jeden pohled do dějin matematiky. Ve skutečnosti jich je šest; každý z nich je obsahem jedné z kapitol knížky.

Při psaní příručky o historii matematiky se sešlo pět slovenských matematiků, kteří se věnují různým oblastem matematiky. Rozhodli se podívat na své disciplíny z hlediska jejich dějin. Není to samoučelné, neboť v historii matematiky jsou i klíče k jejímu dalšímu rozvoji.

První kapitolu napsal *doc. dr. Milan Hejný, CSc.* Nazval ji *Prolog*. Zachycuje totiž vývoj matematického myšlení od okamžiku, na který je první doklad, jímž je vrubovka, kterou zhotovil ze stehenní kosti mladého vlka lovec mamutů před 10 až 20 tisíci lety. Kapitola končí Euklidem.

Autorem druhé kapitoly nazvané *Od Archimeda po Newtona* je *prof. dr. Lev Bukovský, DrSc.* Ukazuje se zde rozvoj hlavních matematických idejí starověku přes středověk k začátku novověku, kdy dochází k původnímu objevům v evropských zemích.

Třetí kapitolu zpracoval *prof. dr. Beloslav Riečan, DrSc.* Její

název zní *De analysi indivisibilium* (tj. o analýze nekonečně malých veličin) a byl zvolen podle latinského názvu první učebnice diferenciálního počtu, kterou napsal G. F. A. l'Hospital. Kapitola začíná od prvních krůčků vykonaných řeckými matematiky.

Čtvrtá kapitola se jmenuje *Dve krízy v matematike* a jejím autorem je *prof. dr. Lev Bukovský, DrSc.* První krize vznikla kolem pojmu nekonečně malé veličiny a druhou krizi způsobily paradoxy vzniklé v Cantorově teorii množin.

Pátá kapitola je přitažlivá svým názvem *Počty, počítadlá, počítače*. Napsal ji *doc. dr. Jozef Hvorecký, CSc.*

Šestá kapitola se nazývá *Z dejín slovenskej matematiky*. Zpracovali ji *prof. dr. Beloslav Riečan, DrSc.*, a *prof. dr. Štefan Znám, DrSc.* Zaujme nejen slovenské čtenáře, ale i české. Zvláštní pozornost je věnována významnému slovenskému matematikovi Jurovi Hroncovi. Setkáváme se zde také se jmény českých matematiků, kteří působili na Slovensku. Autoři nezapomněli ani na matematickou olympiádu.

Kniha „Pohľad do dejín matematiky“ je určena studentům matematiky na vysokých školách univerzitního směru. Není však zpracována jako učebnice, nýbrž jako populárně vědecká knížka. Se zájmem si ji jistě přečtou čte-

nári Rozhledů, kteří nikdy nevynechávají rubriky Z dějin exaktních věd a Pohledy do dějin.

Jiří Mída

Makoveckij, P., V

VEZMI ROZUM DO HRSTI!

Vydalo nakladatelstvo Mir, Moskva 1985, preklad do češtiny, vytlačené v ZSSR, 184 strán, 86 obr., brož. 15,50 Kčs.

Názov je určite povzbudzujúci. O čo sa vlastne jedná? Je to zbierka vyriešených fyzikálnych problémov pre študentov základných a stredných škôl. Aká je problematika? Astronomické poznatky, vedomosti z kozmonautiky, úlohy o pohyboch, kmity a vlny. Koľko je všetkých úloh? Sú očíslované, je ich 67. Každá má okrem textu najprv návod na odhalenie podstaty — nápad pre vyriešenie a potom dosť podrobné riešenie celého problému. Aký je cieľ publikácie? Učiť žiakov ísť k podstate vecí, premýšľať, byť pozornými, všímať si pozoruhodné a zaujímavé veci okolo seba. Vznešene povedané — viesť k objaviteľskej činnosti. Ale po malých

krôčikoch, postupne. S rozumom v hrsti.

Niekoľko zaujímavých nadpisov jednotlivých úloh: Ráno na póle, Mesiac v zenite, Pod vrchlíkom jazera, Činka v kozmickom priestore, Svetlá v zrkadle, Železničný rytmus. No dosť už. Radšej niekoľko jednoduchších úloh a otázok:

Na póle je Slnko polovicu roka nad obzorom, pol roka pod obzorom. Ako je to s Mesiacom?

Je možné sa dostať na Mesiac v rakete, ktorá sa vzdaluje od Zeme rýchlosťou osobného automobilu?

Z komínov vychádza dym, je strhávaný vetrom a tiahne sa ako dlhý závoj od každého komínu. Môžu sa dva závoje dymu pretať?

Vo veľkej kruhovej miske je voda. Hádzeme do vody drobný predmet. Ako bez prístrojov zistíme, že sme trafili presne do stredu?

Pozrite sa do tejto knižky s pestrofarebným obalom a podnetným názvom. Aspoň jedna úloha s riešením vám radosť určite urobí.

Dušan Jedinák

Kalendár M-F: apríl 1987

2. IV 1872 zomrel v Neuporku *Samuel Finley Morse*, americký vynálezca. Vytvoril špeciálnu telegrafnú abecedu a elektromagnetický telegraf.
3. IV. 1827 vo Vratislavi zomrel *Ernst Florens Friedrich Chladni*, nemecký fyzik. Určil rýchlosť šírenia zvuku v rôznych plynch, zviditeľnil uzlové body kmitajúcich dosák.

4. IV. 1617 v Edinburgu zomrel *John Napier*, škótsky matematik. Prispel k objavu logaritmov a použitiu logaritmických tabuliek. Vypracoval vzorce na výpočet sférických trojuholníkov.
4. IV. 1932 v Lipsku zomrel *Wilhelm Ostwald*, nemecký fyzikálny chemik a filozof. Pracoval v teórii elektrolytickej disociácie, chemickej kinetiky a katalýzy. V roku 1909 dostal Nobelovu cenu za chémiu.
5. IV. 1622 sa vo Florencii narodil *Vincenzo Viviani*, taliansky fyzik. Skonstruoval prvý barometer, určil rýchlosť zvuku vo vzduchu. Bol žiakom G. Galileia.
12. IV. 1852 sa v Hannoveri narodil *Ferdinand Lindemann*, nemecký matematik. Dokázal, že číslo π je transcendentné. Vypracoval matematickú teóriu spektrálnych čiar.
15. IV. 1707 sa v Bazileji narodil *Leonhard Euler*, švajčiarsky matematik a fyzik. Ovplynvil všetky oblasti matematiky. Zanechal 886 vedeckých prác. Zaviedol mnoho matematických symbolov. Aplikoval matematickú analýzu vo fyzike.
17. IV. 1942 v New Yorku zomrel *Jean Baptiste Perrin*, francúzsky fyzik a chemik. Dokázal, že katódové žiarenie je prúdom elektrónov. Študoval Brownov pohyb, potvrdil molekulovo-štatistickú teóriu. V roku 1926 dostal Nobelovu cenu za fyziku.
19. IV. 1912 sa v Ishpemingue narodil *Glenn Theodore Seaborg*, americký fyzik a chemik. Riešil problémy chémie jadrových premien. Za objavy v oblasti chémie transuranov získal Nobelovu cenu v roku 1951.
20. IV. 1932 v Turíne zomrel *Giuseppe Peano*, taliansky matematik. Zaoberal sa teóriou prirodzených čísel, vypracoval systém axiém pre matematickú logiku.
21. IV. 1652 sa v Auvergne narodil *Michel Rolle*, francúzsky matematik. Prispel k riešeniu algebrických rovníc.
21. IV. 1882 sa v Olive Wave narodil *Percy Williams Bridgman*, americký fyzik. Skúmal fyzikálne vlastnosti kovov a kryštálov. Za objavy v oblasti fyziky vysokých tlakov získal Nobelovu cenu v roku 1946.
24. IV. 1942 zomrel *Piotr Petrovič Lazarev*, sovietsky fyzik. Pracoval v oblasti fyzikálnej chémie, molekulovej fyziky, fotochémie a biofyziky. Žiak a spolupracovník P. N. Lebedeva. Průkopník sovietskej biofyziky.
26. IV. 1902 zomrel *Immanuel Lazarus Fuchs*, nemecký matematik. Zaviedol pojem fundamentálneho systému, riešil diferenciálne rovnice.
29. IV. 1872 zomrel v Paríži *Jean Marie Duhamel*, francúzsky matematik. Prispel k rozšíreniu a popularizácii matematickej analýzy.
30. IV. 1777 sa v Braunschweigu narodil *Karl Friedrich Gauss*, nemecký matematik, fyzik a astronóm. Dosiahol pozoruhodné úspechy v teórii čísel, algebre, teórii funkcií komplexnej premennej, diferenciálnej geometrii, matematickej analýze, mechanike, elektromagnetizme a astronómii.

REPORTAŽE Z MIKROSVETA



DNES SA VYBERIEM Z KATÓ-
DY RÖNTGENOVEJ TRUBICE, ABY
SOM IBAH MOHOL POROZPRÁVAŤ O
TOMTO, U VÁS HOJNE
VYUŽÍVANOM ZARIADENÍ.



TYRDIAM, ŽE POLETÍM
POTENCIÁLNÝM, ROZDIELOM
NIEKOĽKÝCH TISÍC
VOLTŮ. TO JE, AKO
KEĎ VY LYŽUJETE
NA CELKOM
SLABOM TERÉNE.



MAJ LETIEŤ
VZDUCHOPRÁZDNOCH.
VO VAKU MI TOTIŽ
NEHROZÍ NEBEZ-
PEČIE ZRAZKY
S ATÓMOM.



ALE VEĎ TO SÚ
ATÓMY AKEXI KOVO-
VEJ LÁTKY!!



SLALOM NEBOLA
NIKDY MOJA SILNÁ
STRÁNKA.



SLALOM MEDZI ATÓMAMI
MOŽE BYŤ AJ
NEBEZPEČNÝ!
URČITE V NIEKO-
ROM SKONČÍM!





PISE: J. CHRAPAN KRESIL: V. HISTRÍK

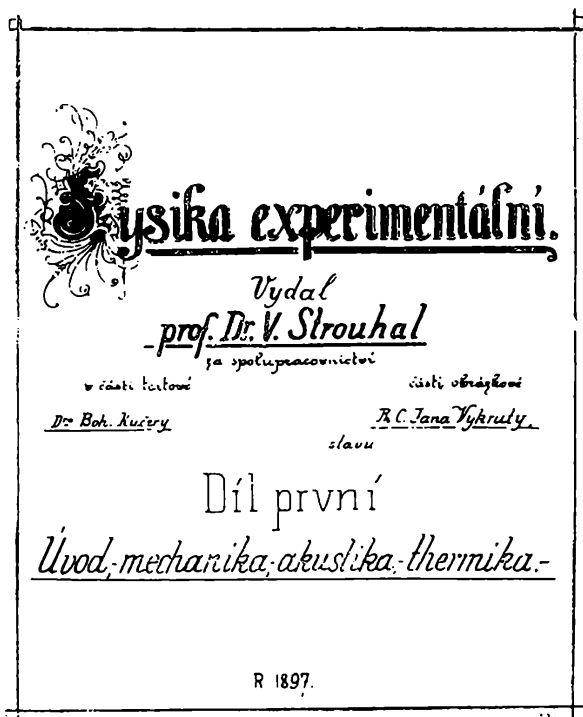
Strouhalova Experimentální fyzika

Prvním profesorem experimentální fyziky na české Křlově univerzitě byl *Vincenc Strouhal* (1850–1922), a to hned po jejím osamostatnění v r. 1882. Pro své posluchače napsal učebnici tohoto oboru ve dvou svazcích psaných kaligrafickým písmem. Na připojeném obrázku vidíme titulní list publikace, která jako první v české literatuře pokryla celou oblast klasické experimentální fyziky na vysokoškolské úrovni a dodnes patří k nejlepším v této oblasti.

V rozšířené knižní podobě vyšla později *Mechanika* (1. vydání v r. 1901, 2. vydání s prof. Kučerou v r. 1910, 3. přepracované vydání v r. 1933), dále *Akustika* (1902), *Thermika* (1908) a s prof. Novákem *Optika* (1919). Knižní vydání zůstalo však torzem, protože nástupce prof. Strouhala, prof. Kučera, který měl dílo dokončit, zemřel dříve než Strouhal. Knižního vydání se nedočkal druhý svazek *Optiky* a dva svazky *Elektriny* a *magnetizmu*. Úplnou klasickou experimentální fyziku z pera klasika české fyziky tvoří tedy jen zmíněné dvousvazková skripta.

Profesor Strouhal byl nejen nedostižným mistrem experimentu,

ale i slova, proto i jeho dílo z konce minulého století je dodnes čtivé, fyzikálně správné a vzorné z hlediska didaktiky fyziky. Téměř



nic není třeba na jeho díle měnit, ale mnoho je nutno k němu doplnit. (Prof. Strouhal se někdy podepisoval křestním jménem Čeněk, proto Č. Strouhal je totožný s V. Strouhalem, jde-li o univerzitního profesora fyziky.)

Vladimír Malíšek

Čo je matematika?

Matematika dáva najčistejší a bezprostredný zážitok pravdy; v tom je jej hodnota pre všeobecné vzdelanie.

M. Laue

Ak chce niekto krátkym a výrazným slovom naznačiť podstatu matematiky, je nútený povedať, že je to veda pre nekonečno.

H. Poincaré

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1987.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

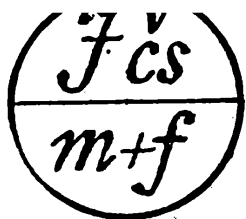
III/
41

4. června 1987

(9)

ROČNÍK 65, 1986/87
KVĚTEN

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný,
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr.
Ján Chrapan, CSc., VVTŠ-ČSSP Lip-
tovský Mikuláš, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Ja-
nout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr.
Hana Kořínková, CSc., VŠZ Pra-
ha, doc. dr. Karol Križalkovič, CSc.,
PF Nitra, prof. dr. Vladimír Majer-
ník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Josef
Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich
Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav
Šedivý, CSc., UK Praha, ing. dr. Vác-
lav Šindelář, CSc., Praha, doc. dr.
Martin Šolc, CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 11639 Praha 1-No-
vé Město.
Telefon 298750 (meziměsto), 298751
až 9.

OBSAH

Ivan Fischer: Základy programování mi- kropočítačů 9	353
Eva Bittnerová: Fyzika v přírodě – člo- vek pod vodou	359
Jozef Skotnický: Galvanické články z hla- diska pracovnej schopnosti .	366
Ján Chrapan: Profesor Vanovič – člo- vek, fyzik	370
Emil Kašpar: Dvě fyzikální úlohy	372
Jarmila Pěničková: Hrátky s čísly	374
Tomáš Schütz: Úlohy ze zahraničních časopisů	375
Naše soutěž	376
Úlohy I. kola 37. ročníku MO	379
Olga Pokorná, Květa Lejčková: Přijíma- cí zkoušky z matematiky na VŠZ v Praze	387
Jarmila Novotná: Současnost a budouc- nost využití audiovizuální techniky v pedagogickém procesu v ČSR	389
dj: Kalendár M-F	393
Ján Chrapan, Vlastimil Mistrik: Repor- táže z mikrosвета	395
Vladimír Malíšek: Galileiho-Filonův ter- moskop . 3. str. obálky	
Jiří Pech: Slovník fyzikálních termínů (69-72)	příloha

Základy programování mikropočítačů

9 - Není BASIC jako BASIC

Doc. IVAN FISCHER, CSc., katedra matematiky PeF UK v Praze

S rozdíly mezi různými verzemi jazyka BASIC jsme se setkali již u grafických příkazů a u příkazu POKE, pokud jsme jím měnili činnost počítače. Různé dialekty jazyka BASIC lze rozdělit zhruba do čtyř kategorií. Prvou tvoří jazyky BASIC, jejichž překladače (interpretery — programy, které přeloží vaše povely, příkazy, funkce atd. na pokyny pro procesor počítače) zaberou 3 až 4 tisíce byte paměti (byte . . . osmi-místné číslo ve dvojkové soustavě, respektive uspořádaná osmice logických hodnot). Takovéto jazyky BASIC pracují jen s celými čísly (ku příkladu od -32767 do $+32767$), nemají k dispozici matematické ani logické funkce a jen omezeně mohou pracovat s textovými řetězci, opravy jsou možné jen novým napsáním celého řádku atd. Příkladem může být MikroBASIC československého mikropočítače pro průmyslové použití SAPI 1.

Druhá kategorie je nejznámější a nejrozšířenější. Je to obvyklý BASIC většiny nám známých mikropočítačů (IQ 151, PMD 85, ZX Spectrum atd.). Jejich překladače zaberou 6 až 9 tisíc byte (kB, kilobyte) paměti.

Třetí kategorii tvoří jazyky BASIC s překladači v rozsahu 12kB až 16kB paměti. Mají již více funkcí, grafických příkazů, programových struktur, pohodlné prostředky na úpravy, prohlížení a ověřování správnosti programů. Z dostupných mikropočítačů československé výroby má tyto vlastnosti počítač ONDRA, výrobcem označovaný za hračku pro děti k ovládnutí základů programování. Jemu se dnes budeme věnovat. Jeho překladač jazyka BASIC zabírá 12kB.

Konečně existují jazyky BASIC pro minipočítače (tedy větší než mikropočítače), pro šestnáctibitové mikropočítače, pro počítače s diskovými pamětmi atd., které se svými možnostmi značně přibližují dalším, vyšším programovacím jazykům, jako jsou FORTRAN, ALGOL, PASCAL atd.

BASIC vznikl v roce 1963 a byl vytvořen pro ty uživatele tehdejších počítačů, kteří se nechtěli (a nepotřebovali) učit programovat na profesionální úrovni, ovšem chtěli jako nástroj pro svoji práci používat počítač. BASIC se proto hodí pro jednoduché až středně složité programy

zpracovávající vědeckotechnické výpočty, pro zpracování malých souborů dat, přináší možnost snadno a rychle napsat program a snadno takovýto program měnit a opravovat. Je vhodný tam, kde jsme schopni bez velkého rozmýšlení psát program přímo na klávesnici mikropočítače bez předchozí důkladné přípravy, kde si stačíme pamatovat názvy proměnných. Má však řadu nevýhod. Nejvýznamnější nevýhoda je metodologického rázu, protože bez většího rozmýšlení můžeme program napsat, zkoušet, opravovat a upravovat tak dlouho, až se v něm sami nevyznáme a jen věříme, že snad už jsme v něm všechny chyby odstranili a že asi již pracuje správně. Je pak nesnadné se v takovémto programu orientovat, chtít ho po delší době upravit, nebo chtít, aby nám někdo jiný (například učitel) jeho správnost zkontroloval.

Další nevýhody jsou již snáze překonatelné. Musíme si pamatovat nic neříkající čísla řádků (a snadno se tak splést). Programové struktury si sice můžeme vytvářet libovolně, s užitím IF-THEN číslo řádku a s pomocí GOTO, ovšem původní zřetelná struktura algoritmu se mění na nepřehlednou směsici skoků. Proměnné rozlišuje BASIC jen podle prvních dvou písmen, takže si opět musíme pamatovat často nic neříkající názvy (a splést si UA . . . uložené A a ZA . . . zadané A¹), či jaké mnemotechnické pomůcky při volbě názvů použijeme, nebo použít CH omylem jako stejný název dvou různých proměnných). Velké nesnáze, jak jsme si ukázali, přináší předávání parametrů mezi programem a podprogramy.

Mnohé z těchto nevýhod lze odstranit dokonalejším překladačem. Pokud však 1kB programu v paměti EPROM představuje v průměru 300 Kčs, a navíc jsou paměti nejsložitější, nejporuchovější, nejdražší součástíou používanou v konstrukci počítače, jejíž nedostatek omezuje možnosti, kolik počítačů může podnik sestavit, pak se pochopitelně volívá kompromis mezi komfortem a cenou, respektive mezi komfortem a počtem vyrobených mikropočítačů.

Nový československý mikropočítač ONDRA má výkonnější mikroprocesor (U880 z NDR — čímž se zjednoduší a zkrátí překladač) a paměť RWM plných 64kB (z pouhých osmi součástek dovážených ze SSSR). To dává možnost do této paměti si z magnetofonu přehrát překladač jazyku BASIC potřebné délky při výrazně nižší ceně celého mikropočítače.

Na mikropočítači ONDRA nám budou fungovat všechny programy připravené pro IQ-151, PMD-85 atd., pokud nepoužívají příkazy POKE (zde by POKE měly jinou adresu) či některé speciální příkazy. Pouze u grafiky by nevyhověla v tomto seriálu užívaná finta s vysunutím kresleného bodu mimo obrazovku — na počítači ONDRA se počítá i s takovýmto bodem a část úsečky od něho k bodu na obrazovce by se

¹⁾ Sám jsem hledáním této chyby kdysi ztratil dva dny a nemohl pochopit, proč program nefunguje.

nakreslila (nezbývá než spočítat a užít MOVE). Navíc však zdokonalená verze jazyka BASIC na tomto počítači nabízí příkazy IF-THEN-ELSE (když-potom-jinak), rozděluje program na dvě rovnocenné cesty. Například

```
20 IF A=INT(A) THEN PRINT"A je celé" ELSE PRINT"
  A není celé číslo"
```

Počítač ONDRA může psát i háčky a čárky (na PMD 85 je to složitější, na IQ 151 to nelze vůbec — nepíšeme-li „v“ v řádku nad písmenem). Na jednom programovém řádku lze v IF-THEN-ELSE psát více příkazů, oddělených dvojtečkami; například

```
100 IF A>=2^N THEN PRINT"1";:A=A-2^N ELSE PRINT"
  0";
```

Pokud je však příkazů v jednotlivých větvích programu tolik, že se na jeden programový řádek nevejdou, můžeme užít BEG a BEND jako jakési programové závorky (BEG, begin, začátek a END konec) a příkaz IF-THEN-ELSE rozepsat do více řádků (kde mohou být vloženy další příkazy IF-THEN-ELSE atd.) Jednoduchou ukázkou části programu přináší obrázek 1.

```
100 IF A>=2^N THEN
110   BEG
120   PRINT"1";
130   A=A-2^N
140   BEND
150 ELSE
160   BEG
170   PRINT"0";
180   BEND
```

```
100 IF A>=2^N THEN 120
110 GOTO 150
120 PRINT"1";
130 A=A-A^N
140 GOTO 160
150 PRINT"0";
160 REM dalsi program
```

Obr. 1

Obr. 2

Toto roztržení do více řádků zde nebylo potřebné a slouží jen jako příklad možností. Navíc vidíme, že ONDRA dodržuje grafickou úpravu zápisu, pokud se při psaní programu necháme inspirovat jazykem PASCAL. Program v jazyku BASIC se tak opět stává přehlednějším. Za povšimnutí zde stojí skutečnost, že v dané ukázce, zásluhou BEG a BEND, jsme si vůbec nemuseli všimnout číslování řádků. Pro srovnání si ještě též algoritmus přepíšeme v jazyku BASIC mikropočítače IQ 151. (Při výpisu na tiskárně jsme museli uvozovky psát jako dva apostrofy — při psaní programu opět užíjte uvozovky!) Ukázka je na obrázku 2. Ušetření tří řádků (a čtvrtého, dáme-li PRINT„0“ již na řádek 110)

<pre> 300 WHILE 2^N<=A DO 310 N=N+1 320 WEND 300 REPEAT 310 N=N+1 320 UNTIL 2^N>A 300 IF 2^N>A THEN 330 310 N=N+1 320 GOTO 300 330 REM 300 N=N+1 310 IF 2^N<=A THEN 300 </pre>	<pre> 30 REM převod do dvojkové soustavy 40 REPEAT 50 INPUT A 60 UNTIL A>=0 AND A=INT(A) 70 N=0 80 WHILE 2^N<=A DO N=N+1: WEND 90 REPEAT 100 N=N+1 110 IF A>=2^N THEN 120 BEG 130 PRINT''1''; 140 A=A-2^N 150 BEND 160 ELSE PRINT''0''; 170 UNTIL N=0 </pre>
---	--

Obr. 4

Obr. 3

je vyváženo nutností dopředu si počítat čísla řádků v GOTO, a očividně i menší přehledností programu.

V jazyku BASIC jsme dosud mohli tvořit cykly s podmínkou na začátku a na konci cyklu s užitím IF-THEN a GOTO, nebo používat FOR-TO-NEXT tam, kde jsme počet průchodů cyklem předem znali. BASIC na mikropočítači ONDRA nám poskytuje příkazy pro tvorbu cyklů WHILE-DO-WEND (cyklus probíhá tak dlouho, dokud je podmínka za WHILE splněna) a REPEAT-UNTIL (cyklus probíhá tak dlouho, dokud není splněna podmínka za UNTIL).

Pro porovnání si jednoduchý cyklus napíšeme pomocí WHILE, REPEAT i IF-THEN ve čtyřech ukázkách na obrázku 3.

Pro srovnání praktického užití si prepíšeme algoritmus převodu čísla z desítkové do dvojkové soustavy s použitím BASIC 6 na IQ 151²⁾ a s použitím BASIC EXP V5.0/G na mikropočítači ONDRA, viz obrázky 4 a 5.

Druhá ukázka vyšla opět delší, ovšem bez nutnosti ohlížet se na kterékoliv číslo řádků.

BASIC na mikropočítači ONDRA dovoluje definovat si vlastní funkce a podprogramy (procedury), které se volají jejich jménem (rozlišují se všechna písmena celého jména !), za kterým se v závorce

²⁾ Použit je algoritmus z práce SVOČ A. Zavřelové

```

30 REM prevod do dvojkove soustavy
40 INPUT A
50 IF A<0 OR A<>INT(A) THEN 40
60 N=0
70 IF 2^N>A THEN 90
80 N=N+1: GOTO 70
90 N=N-1
100 IF A<2^N THEN 140
110 PRINT''1'';
120 A=A-2^N
130 GOTO 150
140 PRINT''0'';
150 IF N>0 THEN 90

```

Obr. 5

píší parametry. Definice funkcí a procedur se zpravidla píše na začátku programu.

Definice funkce začíná řádkem FUNC jméno (parametry) a končí řádkem ENDF. Tyto funkce mohou být použity jak pro číselné, tak pro textové (řetězcové) proměnné. Funkce se potom volá jménem, před kterým je znak & a za kterým jsou v závorce hodnoty parametrů.

Definice podprogramů začínají řádkem PROC jméno (parametry) a končí řádkem ENDP. Podprogramy se potom volají GOSUB jméno (hodnoty parametrů). Nevýhodou zůstává, že podprogramy nemohou mít lokální proměnné. Proměnná C v podprogramu tak změni hodnotu C proměnné v hlavním programu. V dokumentaci, kterou si vedeme při psaní programu, si proto zvláště pečlivě poznamenáváme jména proměnných, která jsme již někde použili.

Než si uvedeme závěrečnou ukázkou programu, zmíníme se o příkazu PRINT USING, za který si do uvozovek pomocí zdvojených křížků # a případně i desetinné tečky předepíšeme, v jaké grafické úpravě a na kolik platných cifer má být vytištěna číselná proměnná. Na obrázku 6 je ukáзка programu a na obrázku 7 znázorněn text, který se v průběhu programu vypisuje na obrazovce.

Definování podprogramu a funkce zde má smysl větší přehlednosti programu, častěji se však používá tehdy, pokud se podprogram či funkce volají vícekrát z různých míst programu.

Mikropočítač ONDRA dává možnosti pohodlného upravování programu. Umožňuje automaticky opravovat ten řádek, ve kterém byla hlášena chyba. Lze vymazat kus programu od řádku... do jiného řádku... Vyhledává řádky s daným příkazem či funkcí, například postupně všechny řádky, kde je funkce SIN(X). Mezi zadanými programovými řádky můžeme program krokovat s vypisováním čísel prováděných řádků. Počítač sám ovládá pohyb magnetofonové pásky a na magne-

```

100 REM p o k l a d n a
110 PROC VYPIS(N,TC)
120 PRINT TAB(12) USING "###";N;" "
130 PRINT USING "#####.##";TC;" Kčs";C=0
140 REPEAT PRINT " " ;C=C+1:UNTIL C=32
150 PRINT
160 ENDF
170 FUNC CENA(L,D$)
180 IF D$="S" THEN C=9 ELSE C=8.5
190 IF D$="K" THEN C=0
200 CENA=L*C
210 ENDF
220 N=0: S=0
230 REPEAT
240 INPUT "druh N-S, K..konec";B$
250 INPUT "počet litrů " ;A
260 KC=&CENA(A,B$)
270 S=S+KC: N=N+1
280 GOSUB VYPIS(N,KC)
290 UNTIL B$<>"K"
300 PRINT: PRINT
310 PRINT "celková tržba";S;" Kčs"

```

Obr. 6

```

druh N-S, K..konec?N
počet litrů      ?2.7
                1          22.95 Kčs
-----
druh N-S, K..konec?S
počet litrů      ?33
                2          297.00 Kčs
-----
druh N-S, K..konec?K
počet litrů      ?7
                3           0.00 Kčs
-----

celková tržba 319.95 Kčs
READY
:

```

Obr. 7

fonu můžeme mít uloženy soubory dat obdobně, jako bývají na diskové paměti (ručně je zpravidla potřebné převínout pásek zpět na začátek).

Závěr seriálu nemá být reklamou nového československého počítače pro děti. Měl čtenáři ukázat, že pod slovem BASIC si nelze představovat

jeden programovací jazyk. Dnešní díl seriálu kupříkladu ukázal, že se v jazyku BASIC nemusíme vždy opírat ani o číslování řádků. Jazyky typu BASIC se s vývojem mikropočítačů vyvíjejí a v některých směrech se budou blížit možnostem programovacího jazyka PASCAL, neboť nic nebrání tomu zavést i struktury dat, lokální proměnné, deklarace proměnných a jejich typů.

Takovýto BASIC bude moci posloužit i pro psaní velmi dlouhých a složitých programů na profesionální úrovni.

FYZIKA

Fyzika v přírodě - člověk pod vodou

EVA BITTNEROVÁ, ÚDPM KG Bratislava

Ani nie 25 km severovýchodne od Bratislavy sa rozprestiera niekoľko desiatok hektárov vodnej plochy, ktorá je k dispozícii na rozmanité vodné športy. Táto rekreačná plocha v nadmorskej výške 137 m sa pri-
myká k mestu Senec s asi 12 tisíc obyvateľmi. Senec sa prvýkrát spo-
mína v roku 1252. Okolo roku 1480 získal trhové privilégium. Od roku
1714, kedy dostal jarmočné práva, sa stal na širokom okolí známy do-
bytčiami trhmi. Rozvoj kapitalizmu sa od 18. storočia v Senci odrazil
vznikom tehelne, manufaktúry na výrobu súkna, na konopné vlákna,
na konopnú priadzu, podnikom na spracovanie srsti, výrobu kief, metiel
a liehovarom. Bol jedným z centier revolučného hnutia poľnohospodár-
skych robotníkov.

Zo 17. storočia sa zachovala bývalá kúria s pozoruhodnou, na západ-
nom Slovensku už ojedinelou renesančnou oblúkovou atikou, pôvodne
gotický kostol, spomínaný od roku 1561, sirotinec zo začiatku 18. sto-
ročia a niekoľko renesančných a barokových domov zo 17. a 18. sto-
ročia.

V súčasnosti prebieha v meste čulá výstavba. V neďalekej Bratislave
nachádza precovné príležitosti mnoho obyvateľov Senca. V samotnom
Senci je rozvinutá výroba stavebných materiálov, potravinársky prie-
mysel a výroba nábytku. Je tu slovenské a maďarské gymnázium a od ro-
ku 1960 jazykové študijné zariadenie pre zahraničných študentov.

Nedaleko železničnej stanice prichádzame do rozsiahlej rekreačnej
oblasti seneckých Slnečných jazier, ktoré vznikli po druhej svetovej
vojne na miestach vyťažených štrkopieskov. Kvalitné štrkopiesky sa tu
ťažia aj naďalej, takže vodných plôch stále pribúda. Priehľadne čistá

voda dáva možnosť prehliadnuť niekoľko metrov pod hladinu. Na dno však nevidíme. Miestami je až 22 metrov hlboko. Pobrežie lemujú upravené pláže prístupné verejnosti, aj vyhradené priestory podnikových a súkromných chát. Preto od skorej jari do neskorej jesene tu stretávame rybárov, rekreantov pri hladinových vodných športoch, plavcov i neplavcov. Našu pozornosť upútajú muži v skafandroch s dýchacími zariadeniami na chrbtoch, príslušníci potápačského klubu Zväzarmu. Sú to muži a mládenci, ktorí prejavili skutočný záujem o potápanie, splňujú zdravotné predpoklady, vedia dobre plávať a chcú pracovať v kolektíve dobrých kamarátov.

Potápanie u nás

Potápanie je u nás zaradené do Jednotného systému brannej výchovy obyvateľstva a napriek tomu, že sa masovejšie rozvinulo až v osemdesiatych rokoch, má aj u nás tradície. Už zo 16. storočia pochádzajú prvé zmienky o účelovom potápaní v Čechách. Neskôr potápanie u nás úzko súviselo s jakyniarstvom. Športové potápanie sa rozvíja v päťdesiatych rokoch. Začiatkom roku 1956 vzniká potápačská skupina pri vodáckej sekcii Zväzarmu. V roku 1969 je Zväzarm prijatý ako 46. riadny člen medzinárodnej potápačskej únie a aj u nás sa začínajú vyrábať súčasti potápačského výstroja.

Zväzarm riadi dnes potápačský výcvik v troch stupňoch. Základná škola potápania oprávňuje potápačov klesať pod dozorom inštruktorov do hĺbok 4 m. Absolventi Školy prístrojového potápania sa môžu samostatne potápať do hĺbky 13 m. Do väčších hĺbok, maximálne však do 25 m, sa smú potápať pod dozorom inštruktorov. Ďalšími skúškami získavajú skúsení potápači kvalifikačné stupne bronzového, strieborného a zlatého odznaku. Tieto ich oprávňujú k samostatnému potápaniu a k prácam pod vodou. Záujemci sa môžu, po absolvovaní školy prístrojového potápania, podrobiť inštruktorským skúškam a postupne dosiahnuť tretiu, druhú až prvú inštruktorskú triedu.

Potápanie sa aj u nás rýchlo udomácňuje. Činnosť našich potápačov siaha od rekreačného potápania, výcviku a práce pod vodou, až k expedíciám do vzdialených morí.

Boj a práca pod vodou

Už v starých gréckych dejinách sú dôkazy o bojovej činnosti potápačov. Alexander Veľký mal na svojich vojnových výpravách potápačov, ktorí sa pred podchladením chránili tak, že si telo natierali smolou. Keď v roku 414 pr. n. l. Aténčania obliehali Syrakúzy, ich potápači odstránili husté zátarasy, ktoré chránili vstup do prístavu. Takúto ťažkú prácu zrejme nemohli vykonať bez špeciálneho vybavenia, o ktorom nám



nič nie je známe. Zachoval sa asýrsky relief z roku 885 pr. n. l., ktorý znázorňuje bojovníka, dýchajúceho z koženého vaku, pripevneného na hrudi. Slovanskí bojovníci v 11. storočí používali k dýchaniu trubic z rákosu. Ich pomocou sa pod vodnou hladinou nepozorovane dostávali do blízkosti nepriateľa. Keď založili prvú námornú školu v Rusku, vyučovali na nej aj potápanie. Ruský inžinier Lodygin navrhol dýchací prístroj pre potápačov, nezávislý od spojenia s hladinou. Kyslík sa v ňom získaval elektrolýzou vody. Ruské námorné flotily boli už od konca 19. storočia vybavené kvalitnou potápačskou technikou a dobre vycvičenými potápačmi.

Počas druhej svetovej vojny sa zachránilo veľa posádok poškodených ponoriek vďaka potápačskému výcviku. Tento je aj dnes súčasťou výcviku niektorých zložiek Československej ľudovej armády a Ministerstva vnútra. V druhej svetovej vojne sa uplatnili všetky formy potápania. Najväčší počet bojových plavcov malo pravdepodobne Japonsko. Niektoré pramene udávajú počet 6000 mužov. Títo sa orientovali najmä na obranu pred prípadnou inváziou. V pobrežných vodách mali vybudované dobre vybavené základne, na ktorých sa pri poplachoch sústreďovali. Bojovní plavci s kyslíkovými prístrojmi aj sebevražedne obsluhovali útočné prostriedky — riadené torpedá, ktoré boli aj vo výzbroji talianskej armády. Kvalifikovaní vojenský potápači u nás sa uplatňujú pri rýchlom prieskume dna, potrebnom pre presun bojovej techniky pri násilnom prechode vodných tokov mechanizovanými jednotkami. S výhodou sa nasadzujú pri opravách mostných pilierov odminovávaní vodných tokov, na diverzné akcie v tyle nepriateľa a pod.

Pracovné potápanie bolo vždy spojené s problémom dlhodobého

pobytu pod vodnou hladinou. Astronóm Halley, ktorého meno nesie známa kométa, skonštruoval v roku 1690 zvon, v ktorom strávil v spoločnosti piatich ľudí 90 minút pod hladinou Temže. Vzduchom sa zásobovali zo sudov, ktoré im spúšťali z hladiny pod úroveň dna zvona. S dlhotrvajúcim pobytom pod hladinou súvisel problém reakcie ľudského organizmu na pôsobenie vzduchu pod zvýšeným tlakom. V tomto smere malo pre rozvoj poznania rozhodujúci význam používanie kesonov (z francúzskeho caisson = veľká krabica). Kesony sú uzavreté priestory pod vodnou hladinou, z ktorých sa voda vytlačí zvýšeným tlakom vzduchu. Tieto priestory potom slúžia ako pracoviská pri zakladaní mostných pilierov, hrádzí a pod. Zistilo sa, že robotníci, ktorí po skončení práce vystúpili z kesonu, kde pracovali pod zvýšeným tlakom, trpeli bolesťami kĺbov a závratmi. Niekedy tieto príznaky končili smrťou. Postupne sa objavili príčiny tejto nebezpečnej nevoľnosti. Dnes ich poznáme pod názvom nemoc z dekompresie. Táto môže postihnúť aj potápačov, ak sa z väčších hĺbok rýchlo vynoria.

Ponáranie do veľkých hĺbok má svoje špecifické problémy. Začalo sa s ním po prvej svetovej vojne. Rekord z roku 1936 predstavoval 923 m pod morskou hladinou. Pochopiteľne nešlo o ponorenie samostatných potápačov, ale o zostup v zariadení guľového tvaru, zavesenom na pevnom lane. Koncom januára 1960 prenikol Pickardov batiskaf TRIESTE do hĺbky 10 916 m. Je to dosiaľ najväčšia, človekom dosiahnutá hĺbka pod morskou hladinou.

Potápači a tlak

Potápač, ktorý má čo dýchať, narazí na ďalší problém. Je ním hydrostatický tlak vodného stĺpca nad ním. Vieme, že 10 m vodného stĺpca sa vyrovná tlaku zemskej atmosféry. Aby hydrostatický tlak potápača nerozdrtil, napúšťa tento, svoj oblek, dýchacím médiom, najjednoduchšie vzduchom. Za normálnych okolností sa potom vyrovnajú tlaky v dutinách tela potápača s okolitým tlakom a potápač nepocituje žiadne mechanické účinky tlaku.

Ľudský organizmus má približne rovnakú hustotu ako voda, preto je vo vode prakticky vyvážený. Položme si otázku, ako sa zmení relatívny výtlak potápača v dôsledku jeho výstroja a ako sa bude meniť počas činnosti potápača. Zavedme m_v hmotnosť vytlačenej vody a m_p hmotnosť potápača. Potom relatívny výtlak môžeme vyjadriť ako ich rozdiel

$$m_r = m_v - m_p.$$

Neurobili sme nič iné, ako že sme prakticky formulovali Archimédov zákon. Sledujme teraz činnosť potápača.

1. Potápač sa obliekol do izolačného obleku. Tento má kladný relatívny výtlak na hladine až 10 kg. Na jeho vyváženie si potápač berie záťažový opasok. Záporný relatívny výtlak má dýchací prístroj, a to

obvykle — 1 až — 8 kg. Ostatné súčasti výstroja ovplyvnia relatívny výtlak potápača len nepatrne.

2. So vzrastajúcou hĺbkou ponorenia hydrostatický tlak stláča porézny izolačný oblek potápača. Objem obleku sa tým zmenší a jeho relatívny výtlak klesne o 2 až 8 kg. Potápač musí potom vynaložiť na pohyb viac síl. Túto nepríjemnosť odstraňuje nafukovací oblek. Pokles relatívneho výtlaku, zavinený stenčením obleku sa vyrovná pripúšťaním potrebného množstva vzduchu do obleku. Pri zostupe ubúda potápačovi dýchaním zásoba vzduchu, ktorého si nesie so sebou 1,2 až 5 kg (1 m³ vzduchu má pri normálnom tlaku hmotnosť 1,3 kg).

3. Pri vynáraní musí potápač obozretne sledovať rýchlosť vzostupu. Poklesom hydrostatického tlaku v okolí rastie objem ochranného obleku. Potápač preto musí sledovať unikanie vzduchu z obleku. Toto môže byť automatické, alebo si ho môže potápač riadiť sám. Pre zjednodušenie situácie a lepšie priblíženie sa k nulovému relatívnemu výtlaku počas celej akcie pod vodou (čo potápačovi šetrí sily), sa používa kompenzátor vztlaku — vak z pogumovaného plátna, ktorého objem možno meniť pripúšťaním, resp. vypúšťaním vzduchu.

Pohyb potápačov

Pohyb potápačov obmedzuje hydrodynamický odpor. Pre hydrodynamickú odporovú silu F platí:

$$F = \frac{1}{2} c \cdot \rho \cdot S \cdot v^2, \quad (1)$$

kde c je koeficient odporu prostredia, ρ — hustota kvapaliny, S — plošný obsah čelného profilu, v — rýchlosť vzájomného pohybu objekt — kvapalina.

Odhadnime, aká odporová sila pôsobí na potápača, ak tento pláva vodorovne, rýchlosťou 0,5 m · s⁻¹, pod hladinou. Z odbornej literatúry vieme, že koeficient odporu moderných neoprénových potápačských oblekov vo vode má hodnotu $c = 3$ až 3,5. Po dosadení do vzťahu (1) zistíme, že potápač, ktorý má obsah čelného profilu povedzme 0,1 m², musí v našom prípade prekonávať odporovú silu 75 až 87,5 N. Aby mohol potápač účelne vynaložiť svoje sily, je potrebné, aby mala minimálny obsah plocha jeho čelného profilu, teda aby plával vystretý vo smere pohybu. To dosiahne samočinne, bez vynaloženia ďalšej námahy, ak bude, ako sme už povedalil, správne vyvážený.

Čo by sme nemali prehliadnuť pri obliekaní

Na povrchu nášho tela je teplota asi 32 °C. Fyziológia nás učí, že normálna produkcia tepelnej energie v ľudskom organizme, ktorý je v klude, je asi 90 J. Ľudské telo má povrch obvykle asi 1,5 m². Koeficient žiarenia

belocha je o niečo menší, ako koeficient žiarenia absolutne čierneho telesa

$$k_{\text{človeka}} = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

Na základe Stefanovho — Boltzmannovho zákona môžeme určiť, koľko tepla vyžiari takýto „ideálny“ človek bez odevu. Pre vyžiarený tepelný tok Φ z telesa teploty T_1 do okolia teploty T_2 platí

$$\Phi = k(T_1^4 - T_2^4)S. \quad (2)$$

Potápači, ktorých sledujeme, majú na sebe priliehavé, tesne upäté neoprénové odevy, normovanej hrúbky 4,7 mm, 6,4 mm alebo až 9,5 mm. Ich odev je porézny, povrchy má však hladké, celistvé, takže vodu nenasáva. Keď sa v týchto oblekoch potápači ponárajú, steny oblekov sa pod účinkom tlaku vody stláčajú. Napriek tomu sa však ich tepelnoizolačné vlastnosti výrazne nemenia. Z príslušnej literatúry sa dozvedáme, že v hĺbke 20 m sú koeficienty prestupu tepla pre jednotlivé typy odevov, nasledovné:

odev hrúbky 9,5 mm	$k = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
odev hrúbky 6,4 mm	$k = 23 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
odev hrúbky 4,7 mm	$k = 32 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Poznajúc tieto hodnoty môžeme odpovedať napríklad na otázku, koľko energie stratí potápač, ktorý má povrch $1,5 \text{ m}^2$, púhym pobytom v trvaní napríklad 100 s v hĺbke 20 m, ak je tam voda teplá 10°C . V prípade, že je potápač oblečený do najhrubšieho odevu, je to asi 53 kJ. V stredne hrubom obleku asi 76 kJ a v najtenšom obleku stratí takmer 106 kJ energie. Zisťujeme, že len nehybný pobyt v tomto prostredí kladie 60 až 120-násobné vyššie energetické nároky na človeka, ako napríklad spánok, pri ktorom, uvoľňuje zdravý človek 90 J za sekundu.

Pri bližšej oblihadke našich potápačov zistíme, že nie sú pod oblekom suchí, ale že medzi telom a oblekom si udržiujú tenkú vrstvu vody, nie hrubšiu ako 1 až 2 mm. Napadne nás, či táto vrstvička tepelne izoluje a ak áno, tak ako. Tepelný tok vrstvičkou je daný výrazom

$$\Phi = \lambda \frac{S}{l} \Delta T, \quad (3)$$

kde λ je tepelná vodivosť vody, S plocha izolujúcej vrstvičky, l hrúbka tejto vrstvy a ΔT rozdiel teplôt na protiľahlých povrchoch vrstvy vody. V literatúre sa dočítame, že pre vodu je $\lambda = 0,598 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Ak by sme si chceli tepelnú vodivosť vody porovnať s tepelnou vodivosťou neoprenových odevov, tak si musíme uvedomiť, že uvedené koeficienty prestupu tepla sú viazané pomerom

$$k = \frac{\lambda}{l}.$$

Vráťme sa k našej pôvodnej otázke. Milimetrová vrstvička vody bude mať na strane tela teplotu 32°C a na strane obleku nech je o jeden stupeň celzia chladnejšia. Pre tepelný tok strednou plochou $S = 1,5 \text{ m}^2$ dosta-

neme: $\Phi = 897 \text{ W}$. Vidíme, že táto tenká vrstvička tepelne veľmi izoluje. Výhodná je ale z fyziologického hľadiska.

Pozastavme sa ešte nad tým, prečo potápači tak dbajú na tesnosť manžiet a zdrhovadla na svojich odevoch, keď malé prúdenie vody odevom by im azda neuškodilo. Určíme teda Φ_p straty tepla prúdením prostredia okolo predmetu. Platí

$$\Phi_p = \frac{m_p}{t} c_{\text{H}_2\text{O}} \Delta T, \quad (4)$$

kde m_p je hmotnosť oblekom prúdiacej vody za čas t . Symbolom ΔT sme označili rozdiel teplôt okolitej vody a povrchu tela, merné teplo vody je $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Uvážme hoci len malú netesnosť obleku, následkom ktorej prúdi oblekom nášho potápača, povedzme 10 cm^3 vody za jednu sekundu. Nech sa tento pohybuje po dobu 100 s vo vode 10°C teplej. Po dosadení do výrazu (4) zisťujeme, že $\Phi_p = 92,4 \text{ kJ}$, čo sa takmer vyrovná stratám cez neoprenový oblek hrubý $4,7 \text{ mm}$.

Dovidenia inokedy

Svoj pobyt pri Slnečných jazerách, spojený s pozorovaním výcviku potápačov, na dnes končíme. Naše úvahy, ktoré sme mohli robiť, poznajúce Archimedov zákon, výraz pre hydrodynamickú odporovú silu, Stefanov–Boltzmannov zákon, výraz pre tepelný tok vrstvou látky a pre straty tepla prúdením prostredia okolo predmetu, nám ukázali, s akými problémami sa stretáva človek pri prenikaní do vodného živlu. Naučili sme sa aj niekoľko praktických údajov.

Deň sa schýľuje k večeru, vzduch pomaly chladne. Úvahy o tepelnej bilancii potápačov platia aj pre nás, pohybujúcich sa na dne vzdušného oceánu. Obliekame sa, aby sme znížili vyžarovanie nášho tela a vystavujeme sa sviežemu vánku, aby nás obtekajúci vzduch príjemne chladil.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

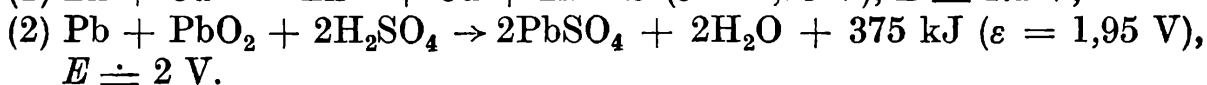
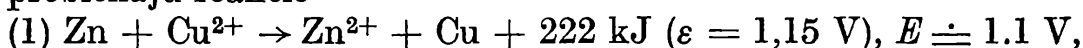
Redakce

Galvanické články z hľadiska pracovnej schopnosti

Prof. dr. JOZEF SKOTNICKÝ, Košice

Výroba galvanických článkov a akumulátorov stále vzrastá, lebo tieto tvoria energetické zdroje do prenosných elektronických a elektrotechnických prístrojov, ktorých stále pribúda. Články a akumulátory sa vyrábajú miniaturné pre kremenné hodinky až veľké výkonové pre elektromobily. Líšia sa však nie len veľkosťou, ale aj rôznymi typmi elektrôd a chemickými reakciami v nich prebiehajúcimi. Vzhľadom na ich dôležitosť je účelné detailne osvetlovať energetické procesy v nich prebiehajúce a v ďalšom je k tomuto cieľu použitá nová prírodovedecká kategória *pracovnej schopnosti*, o ktorej bolo ukázané (1), že je stavovou vlastnosťou systémov, a preto vhodnou k objasňovaniu prírodných javov.

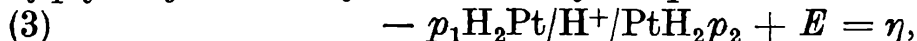
Galvanický článok je zariadením vhodným k skúmaniu a tiež meraniu pracovnej schopnosti, lebo jeho potenciál E násobený príslušným počtom n Faradaových nábojov ($F = 96\,500$ coulombov) priamo udáva túto molárnu pracovnú schopnosť $A = nFE$, t.j. maximálnu energiu, ktorú sú látky schopné premiestniť na ľubovoľný iný systém. Berthelot v minulom storočí sa nazdával, že zdrojom tohoto potenciálu je len vnútorná energia reakčných látok, a preto potenciál z tejto energie plynúci možno vhodne nazvať Berthelotovým $\varepsilon = \Delta U/nF$. Tak je tomu veľmi približne u Danielovho článku i oloveného akumulátoru, v ktorých prebiehajú reakcie



Mimo galvanických článkov jestvujú však aj iné elektrické články jako zdroje energie a tieto nutno práve tak podrobne analyzovať, lebo sa kombinujú s Berthelotovými.

Mimo vnútornej disponujú totiž látky aj vonkajšou, resp. entropickou pracovnou schopnosťou, ktorá má energetický podklad v teple okolia, takže látky toto teplo pohlcujú a prenášajú v inej forme energie na ľubovoľné iné systémy. Túto pracovnú schopnosť možno účelne demonštrovať pomocou nulotermických procesov, kde vnútorná energia počiatočného i konečného stavu látok je rovnaká. Sem patrí napr. izotermická expanzia ideálneho plynu, lebo vnútorná energia ideálneho plynu sa nemení s jeho tlakom, takže nemôže byť podkladom jeho pracovnej schopnosti. Teplo, ktoré mol plynu je schopný za reverzibilnej expanzie z tlaku

p_1 na p_2 resorbovať z okolia a zmeniť na užitočnú prácu, udáva jeho entropickú pracovnú schopnosť $A = Q = -T\Delta S = RT\ln p_1/p_2$ a túto možno pracovne využiť pomocou vhodného stroja pozostávajúceho z válc s pohyblivým piestom. K tomu istému účelu možno však užiť aj plynový elektrický článok, ktorý má pre vodík schému



a je teda složený z dvoch plynových vodíkových elektrôd ponorených do tohože roztoku vodíkových ionov. Keď $p_1 > p_2$, budú sa na ľavej elektrode vodíkové molekuly meniť na ióny a na pravej naopak $\text{H}_2 \leftrightarrow 2\text{H}^+$, takže vodíkové molekuly budú takto prechádzať z vyššieho tlaku na menší a produkovať entropický potenciál

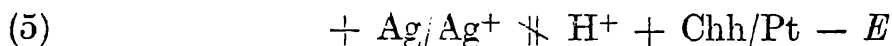
(4) $\eta = A/nF = (RT\ln p_1/p_2)/nF = (59,15 \text{ mV}/2) (T/298) \log p_1/p_2$, ktorý bude určovať potenciál E článku. Potenciál tento sa dá veľmi presne merať, lebo plynová vodíková elektroda je veľmi dobre reprodukovateľná, až na 0,1 mV.

Podobne ako plyny aj rozpustené látky disponujú tlakom, ktorý nazývame osmotickým, a aj keď je tento tlak latentný, predsa sa uplatňuje za pracovných podmienok. Pre tieto látky zostrojil *van't Hoff* „osmotický stroj“, složený z válc s pohyblivým „poloprepustným“ piestom, prepúšťajúcim len rozpúšťadlo (vodu), ale nie rozpustenú látku: rozpustená látka obsažená v roztoku pod piestom sa rozpína do vody nasávanej zponad piestu cez piest do roztoku, dvíha zatažený piest, a koná teda prácu tak ako plyn.

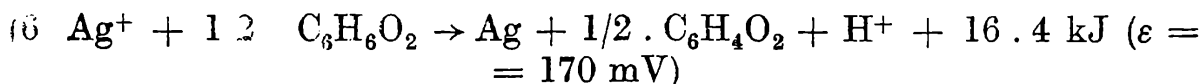
Analogiou plynového článku je u rozpustených látok koncentračný článok, ktorý pre vodíkové ióny sa skladá z dvoch rovnakých vodíkových plynových elektrôd, ponorených do dvoch roztokov vodíkových ionov o rôznych osmotických latentných tlakoch P_1 a P_2 : ióny v roztoku o vyššom tlaku P_1 sa menia na molekuly a v druhom roztoku naopak $2\text{H}^+ \leftrightarrow \text{H}_2$, takže takto sa ióny spontánne dostávajú z vyššieho osmotického tlaku na nižší a produkujú entropický potenciál η tiež daný rovnicou (4), pri čom ovšem $n = 1$, takže 59,15 mV sa často nazýva aj Nernstov dekadický potenciál (pri 25 °C), lebo rovnicu (4) poprvé formuloval *W. Nernst* r. 1889. Na nej sa zakladá aj meranie kyslosti roztokov pomocou vodíkových elektrôd a určovanie ich $\text{pH} = -\log \text{H}^+$.

V oboch uvedených prípadoch je príčinou tvorby entropického potenciálu η snaha látok po znížení ich tlaku (latentného), takže entropická pracovná schopnosť je namierená vždy tým smerom, ktorým sa tlaky látok znižujú, a v obecnom prípade môže byť tento smer exotermický aj endotermický. Vnútna pracovná schopnosť látok, prejavujúca sa Berthelotovým potenciálom ε , má však vždy smer exotermický, lebo v tomto smere vnútorná energia látok klesá. Z interferencie smerov a veľkostí oboch týchto pracovných schopností vyplýva 5 základných prípadov (A až E), ktoré si v ďalšom znázorníme (viď tabuľku) a ktoré všetky možno veľmi presne realizovať pomocou jediného galvanického

článku, v ktorom meníme len koncentrácie elektrodoých roztokov:



V článku prebieha reakcia známa aj z vyvolávania fotografického materiálu, t.j. redukcia strieborných ionov hydrochinonom, ktorý sa tým oxiduje na chinon:



Strieborná elektroda je reprodukovateľná až na 0,1 mV, keď sa zhotoví vypálením pasty z vody a kysličníka strieborného Ag_2O pri 400 °C na platinovej spirále, a rovnakú dobrú reprodukovateľnosť má aj chinhydronová elektroda (Chh/Pt) v kyslých roztokoch (chinhydron sa skladá z rovnakého počtu molov chinonu a hydrochinonu). Difúzny potenciál medzi oboma elektrodoými roztokmi AgNO_3 a HNO_3 sa potlačí pod 1 mV spojením oboch roztokov solným mostíkom z nasýteného 65%-ného roztoku amoniumnitrátu NH_4NO_3 v 2%-nom roztoku agaru, takže merania potenciálov tohoto článku sú veľmi presné.

V prípade A má entropická pracovná schopnosť smer exotermický, lebo potenciál článku obnáša $E = 335 \text{ mV} = \varepsilon + \eta = (170 + 165) \text{ mV}$, takže entropický potenciál obnáša $\eta = 165 \text{ mV}$. Vonkajšia celková pracovná schopnosť článku $A = EF$ sa teda skladá z vnútornej εF (16,4 kJ) a entropickej ηF (15.9 kJ) — z okolia sa teda pre prácu článku naberá teplo 15,9 kJ. Symbol reakcie $\rightarrow$. Horná šípka znamená vnútornú, dolná entropickú pracovnú schopnosť. Obe pôsobia rovnakým smerom, takže sa zosilujú.

V prípade B je entropický potenciál η nulový, lebo entropie látok sú po oboch stranách reakcie rovnaké. Článok pracuje podľa Berthelotových predstáv $E = \varepsilon = 170 \text{ mV}$. Symbol $\rightarrow$.

V ďalších prípadoch C až E bude už všade entropická pracovná schopnosť namierená endotermickým smerom, takže bude záporná:

V prípade C je η malé, len 130 mV, takže reakcia prebieha ešte exotermickým smerom, aj keď za zníženého potenciálu $E = \varepsilon - \eta = (170 - 130) \text{ mV} = 40 \text{ mV}$. Z vnútornej pracovnej schopnosti teda len jej čiastka $F \cdot 40 \text{ mV}$ sa spotrebuje k vykonaniu vonkajšej práce, lebo časť $F \cdot 130 \text{ mV}$ sa spotrebuje k vykonaniu vnútornej práce, ku kompresii reakčných látok z nízkych tlakov na strane endotermickej na vyššie tlaky na strane exotermickej, a ekvivalentné teplo vznikajúce pri tejto kompresii sa rozptyluje do okolia článku. Symbol $\leftarrow$.

V prípade D je entropická pracovná schopnosť rovnako veľká ako vnútorná $\eta = \varepsilon$ a pretože je namierená proti nej, je reakcia v rovnováhe, t.j. $E = 0$. Symbol $\rightleftharpoons$. Rovnováhy v chemických systémoch sú teda ako aj všade inde v prírode výsledkom rovnako veľkých pracovných schopností namierených proti sebe.

V prípade E je už entropická pracovná schopnosť väčšia než vnútorná,

a pretože je namierená proti tejto, pudí reakciu endotermickým smerom, čo poznať aj podľa toho, že v článku (5) je teraz záporná strieborná elektroda a chinhydronová je kladná $E = \eta - \varepsilon = (208 - 170) \text{ mV} = 38 \text{ mV}$. Látky teda na základe svojej entropickej pracovnej schopnosti naberajú z okolia článku teplo $Q = F \cdot 208 \text{ mV}$, jeho čiastkou $F \cdot 170 \text{ mV}$ obohacujú svoju vnútornú energiu, a len zbytok $F \cdot 38 \text{ mV}$ využívajú k vonkajšej práci. Symbol $\overleftarrow{\text{Z}}$.

Z uvedeného vidno, že systémy spontánne nesmerujú vždy k stavom s nižšou vnútornou energiou, ale s nižšou pracovnou schopnosťou, ktorá môže byť doprevádzaná aj vyššou vnútornou energiou, ako je tomu u všetkých spontánných endotermických reakcií. K týmto patrí aj reakcia

(7) $\text{Hg} + \text{AgCl} \leftarrow 1/2 \cdot \text{Hg}_2\text{Cl}_2 + \text{Ag} + 5,3 \text{ kJ}_4 (\varepsilon = 55 \text{ mV})$,
prebiehajúca endotermicky v bežnom galvanickom veľmi dobre reprodukovateľnom článku složenom z kalomelovej a chlorodstriebornej elektrody (ktorá sa získa zo striebornej anodickou polarizáciou v kyseline solnej HCl):

(8) $-\text{Ag} / \text{AgCl} / \text{Cl}^- / \text{Hg}_2\text{Cl}_2 / \text{Hg} + E = 45 \text{ mV}$

Reakčné látky teda resorbujú z okolia teplo $Q = F \cdot (55 + 45) \text{ mV} = F \cdot 100 \text{ mV}$, jeho čiastku $F \cdot 55 \text{ mV}$ ukladajú do svojho vnútra, a len zbytok $F \cdot 45 \text{ mV}$ využívajú ku konaniu vonkajšej práce pomocou potenciálu 45 mV.

Názov „viazaná energia“ pre výraz $T\Delta S$, udržiavajúci sa už od Helmholtzových čias, je teda už anachronický, lebo podľa uvedeného aj tento výraz ($-T\Delta S$), práve tak ako aj ΔU , predstavuje pracovnú schopnosť, ovšemže entropickú, ktorá môže byť aj väčšia než vnútorná, a keď je namierená proti tejto, pudí reakciu endotermickým smerom. S pádom viazanej energie ztráca svoj zmysel, ovšem aj pojem voľnej energie, ktorá je vlastne súčtom pracovnej schopnosti vnútornej a entropickej.

Pojmy vnútornej, entropickej a celkovej pracovnej schopnosti osvetľujú veľmi jednoducho a názorne zložité procesy v galvanických článkoch, takže sú pochopiteľné aj pre študujúcich stredných škôl.

Tabulka

	cAg ⁺	mol/l	cH ⁺	η	mV	E
A	0.01		10 ⁻⁶	165		335
B	0.01		6,2 · 10 ⁻⁴	0		170
C	0.01		0,1	-130		40
D	0.0022		0,1	-170		0
E	0.001		0,2	-208		- 38
E'	0.0005		0,32	-238		- 68

Literatúra

- [1] Skotnický J.: Pracovná schopnosť ako stavová vlastnosť systémov, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 1, s. 21 – 25

Profesor Vanovič — člověk, fyzik

Doc. dr. JÁN CHRAPAN, CSc., VVTŠ Liptovský Mikuláš

„Člověk musí v něco verit, alebo aspoň chcieť verit, inak by bol jeho život pustý a prázdny.“ Tento citát od A. P. Čechova nám poslouží ako motto ku spomienke na RNDr. Jána Vanoviča, univerzitného profesora, jedného z prvých organizátorov fyzikálneho života na území oslobodeného Slovenska v povojnovom období. Životné osudy, postoje a vysoké ľudské hodnoty prof. Vanoviča môžu slúžiť ako vzor aj najmladšej generácii fyzikov, ktorá ho nemala možnosť osobne spoznať. Poznanie príspevku prof. Vanoviča k rozvoju fyziky na Slovensku by malo tvoriť súčasť vzdelania fyzikálneho dorastu, teda generácie, ktorá sa dnes pripravuje vykročiť na neľahkú cestu fyzika vedca, pedagóga.

Prof Ján Vanovič sa narodil 17. 1. 1907 v Martine. Tu skončil gymnázium a odtiaľ odišiel na svoje vysokoškolské štúdiá fyziky a matematiky do Brna, kde v roku 1931 zložil štátnu skúšku učiteľskej spôsobilosti. Po vojenskej službe nastúpil v roku 1933 ako dočasný profesor na I. štátne gymnázium v Bratislave. O tri roky bol ustanovený za definitívneho profesora. Povstanie ho zastihlo na prázdninách v rodnom Martine a on mu bez váhania dal k službám svoje schopnosti, lebo chcel veriť a veril, že sa blíži čas rozmachu vzdelanosti Slovákov. Toto jeho presvedčenie ešte zosilnelo počas troch mesiacov väzenia na prelome frontových rokov 1944 a 1945. V oslobodenej ČSR naplňal svoje plány ako prednosta II. odboru na Povereníctve školstva a kultúry. Vanoviča, ako dobre erudovaného fyzika a matematika, neuspokojovala práca za zeleným stolom. Neprestal v prednáškach na Vysokej škole obchodnej, ktoré tam mal externe už od roku 1942. V roku 1948, po ustanovení za profesora, sa s veľkým úsilím pustil do organizovania Katedry fyziky na Pedagogickej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave, ktorá prešla v roku 1953 na práve vytvorenú Vysokú školu pedagogickú. Na tejto škole, takmer do jej zrušenia v r. 1959, bol prof. Vanovič dekanom Fakulty prírodných vied. Generácia stredoškolských profesorov fyziky a matematiky na Slovensku, narodených pred rokom 1940, celá čerpala svoj entuziazmus z veľmi dobrej pracovno-študijnej atmosféry, ktorú vytváral prof. Vanovič s kolektívom svojich spolupracovníkov. Ich prvoradým cieľom bolo vytvoriť pokojné prostredie, dobré študijné podmienky. Vanovič sám preto napísal 21 učebníc a vysokoškolských



Profesor Ján Vanovič v roce 1961

skript a jeho katedra bola veľmi dobre vybavená fyzikálnymi demonštračnými pomôckami, ktorých navrhovateľom a často aj realizátorom bol sám prof. Vanovič. Škoda, že tieto, neraz originálne pomôcky pohltila doba nasledujúcich reorganizácií a následných sťahovaní. Katedra fyziky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského, dedička laboratórneho vybavenia Vanovičovej katedry, zaznamenala prudký rast. Vznikali nové katedry, získavali sa vyhovujúcejšie priestory. V tejto atmosfére rastu nebolo vždy dosť času na uvážlivý výber a zachranu prenášaného materiálu. Po zániku Vysokej školy pedagogickej pokračoval profesor Vanovič, ako člen Katedry jadrovej fyziky, v prednáškach z atómovej fyziky, ale ťažisko jeho vedeckej práce tvorila oblasť didaktiky fyziky. Súčasne bol dobrým popularizátorom fyzikálnych poznatkov. Známe sú jeho knihy: Kilogram — kilopond, Astronautika a Vidíme dobre?

Profesor Vanovič bol predchnutý aj stavovskou hrdosťou fyzika. Od r. 1928 bol aktívnym členom Jednoty československých matematikov a fyzikov a až do svojej náhlej smrti, ktorá ho zastihla nadržanom 25. 2. 1973 uprostred plnej práce. Zastával v Jednote významné funkcie.

Prof. Vanovič vždy jednal rozvážne, našiel si čas na rozhovory so svojimi spolupracovníkmi a žiakmi, poradil, pomohol. Často hovorieval: „Robím tak, aby som druhých urobil šťastnými.“

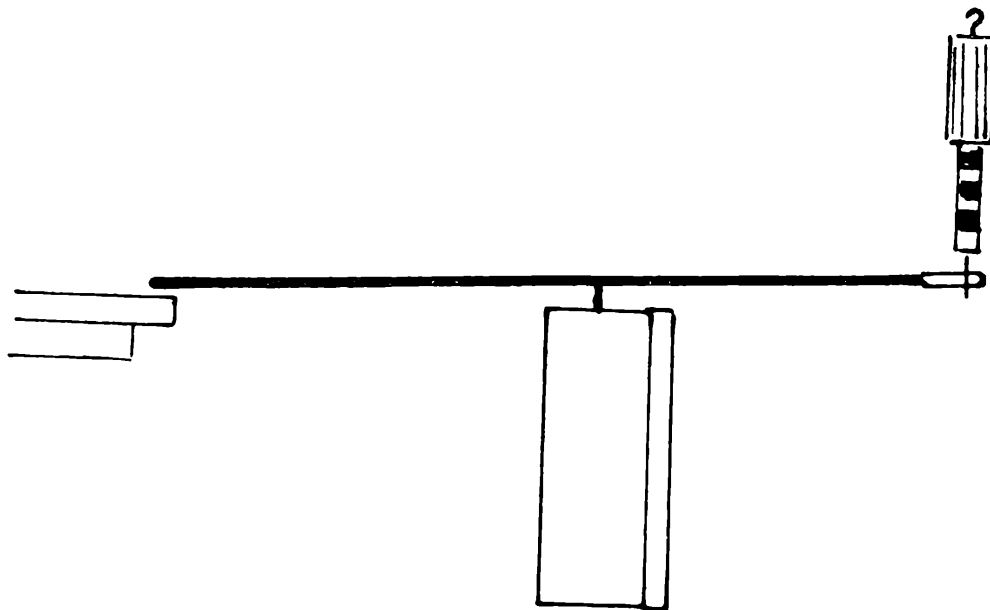
Poznámka: Profesor Vanovič byl řadu let členem redakční rady našich Rozhledů matematicko-fyzikálních.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Dvě fyzikální úlohy

Úloha 1. *Skládání a rozklad sil*

Otázka I. Student Luboš chtěl poslat poštou kufr s knihami a potřeboval zjistit jeho hmotnost, neboť pošta nepřijímá zásilky o větší hmotnosti než 15 kg. K dispozici měl siloměr do 100 N, ale kufr byl těžší. Měření provedl takto: Kufr pověsil za ucho na pohrabáč, jehož jeden konec opřel o stůl a druhý konec mírně nadzvedl pomocí siloměru (obr. 1).



Obr. 1

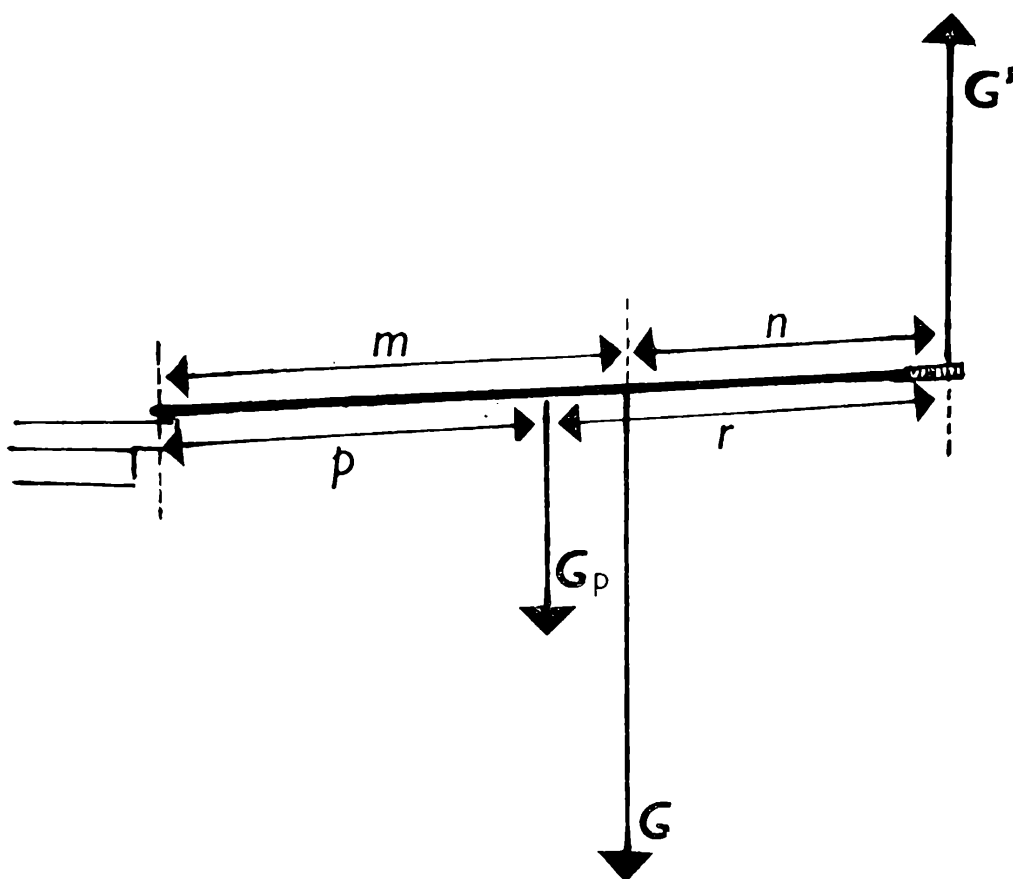
Na siloměru zjistil tíhu velikosti $G' = 86 \text{ N}$. Pak opřel o stůl druhý konec pohrabáče, na totéž místo jako předtím zavěsil kufr a stejným způsobem zjistil tíhu $G'' = 78 \text{ N}$. Tíhu pohrabáče zjistil přímo: $G_p = 16 \text{ N}$. Tíhu kufru vypočetl:

$$G = G' + G'' - G_p = 86 \text{ N} + 78 \text{ N} - 16 \text{ N} = 148 \text{ N}.$$

A protože 1 kg má přibližně tíhu 10 N, usoudil, že pošta kufr přijme, neboť podle jeho zjištění má hmotnost 14,8 kg.

Jeho kolega David však tvrdil, že zjištění tíhy kufru není správné a své mínění zdůvodňoval tím, že kufr nebyl zavěšen uprostřed pohrabáče jako páky a že sám pohrabáč nemá těžiště uprostřed.

Byly jeho námitky správné?



Obr. 2

Řešení. Zjištění tíhy kufru bylo správné, neboť byla-li vzdálenost místa konců páky od místa zavěšení m , resp. n a od těžiště pohrabáče p , resp. r (obr. 2) pak siloměr na jednom konci ukázal tíhu o velikosti

$$G' = \frac{m}{m+n} G + \frac{p}{p+r} G_p$$

a na druhém konci

$$G'' = \frac{n}{m+n} G + \frac{r}{p+r} G_p,$$

takže součet

$$G' + G'' = G + G_p \text{ a odtud } G = G' + G'' - G_p.$$

Otázka II. Přijala pošta Lubošův kufr?

Řešení. Nepřijala, neboť přesnější vypočítaná hmotnost je

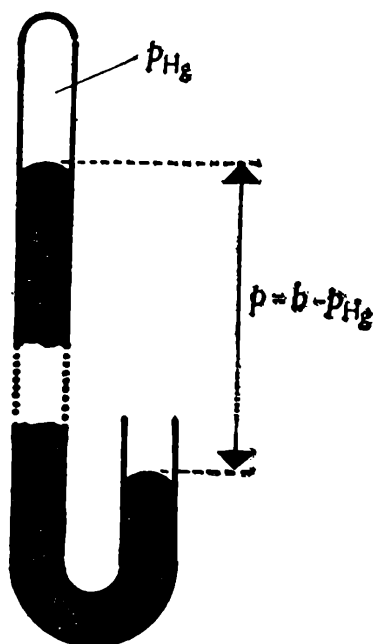
$$m = \frac{148 \text{ N}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 15,1 \text{ kg},$$

což je větší než dovolená hodnota balíkových zásilek.

Úloha 2. Tlak sytých par

Otázka. Ve rtuťovém a) barometru, b) teploměru se rtuť vypařuje do prostoru nad rtuťovým sloupcem. Tyto páry mají nenulový tlak, závislý na teplotě. Proč se k tlaku rtuťových par nemusí přihlížet při měření tlaku vzduchu nebo teploty těmito přístroji?

Řešení. a) Naměřená hodnota tlaku vzduchu je o tlak sytých par rtuti nižší než tlak skutečný (obr. 3). V tabulkách zjistíme, že při běžných teplotách, např. 20 °C, je tlak sytých par rtuti $p_{20} = 0,146$ hPa.



Obr. 3

O tuto hodnotu naměříme rtuťovým barometrem nižší hodnotu tlaku vzduchu p , takže platí pro skutečný tlak

$$b = p + p_{20}.$$

Při naměřeném tlaku $p = 1000$ hPa je tedy skutečný tlak

$$b = 1000 \text{ hPa} + 0,15 \text{ hPa},$$

tj. o 0,15 ‰ větší.

b) Závislost teplotní roztažnosti rtuti na tlaku je při běžných teplotách i při běžných změnách atmosférického tlaku tak nepatrná, že vliv tlaku sytých par na délku rtuťového sloupce uvnitř teploměru není pozorovatelný ani při velmi přesných laboratorních měřeních.

Emil Kašpar

Hrátky s čísly

Při hrátkách s čísly smíte používat matematické operace — sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování. Smíte použít též faktoriálu. Z jednotlivých číslic můžete skládat čísla. Vyzkoušejte si to!

- Vyjádřete číslo 100 pomocí číslic 0—9.
- Najděte dvě různá čísla, jejichž součet i součin je stejný.
- Použitím pěti trojek napište čísla od 1 do 20.

Jarmila Pěnčíková

KONVENČNÍ — založený na konvenci, dohodnutý, smluvený, smluvní

KONVERGENCE (slož. z lat. *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *vergo*, *-ere*, ptc. prez. *vergens*, *-entis* = nachylovat se, chýlit se) — „nachylování se k sobě“; sbíhání; vlastnost přibližovat se určité hodnotě; opak: *divergence* (v. t.); **KONVERGENTNÍ** — sbíhající se; **KONVERGOVAT**, **KONVERGUJÍCÍ**, **KONVERGENČNÍ**

KONVERTOVAT (z lat. *convertio*, *-ere*; slož. z *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *verto*, *-ere*, ptc. pf. *versus* = točit, obracet; v. *invertovat*) — „vzájemně obracet“; ve fyzice: přeměňovat („obracet“) stejnosměrný proud na střídavý a naopak; **KONVERTOR** (v. *-or*) — stroj, který mění střídavý proud na stejnosměrný a naopak; **KONVERZE** — obrat, změna, přeměna; **KONVERZNÍ** — obrácený. Pozn.: Termíny **KONVERZOVAT**, **KONVERZACE** jsou od lat. *conversor*, *-ari* = stále se někde otáčet, což ovšem souvisí s lat. *convertio*, *-ere*.

KONVEXNÍ (z lat. *convexus* = dohromady skloněný, klenutý, klenoucí se; slož. z *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *vexo*, *-are* = lomcovat, trápit, svírat) — „klenutý“; vypouklý, vypuklý; opak: *konkávní* (v. t.) — dutý; ve fyzice: **KONVEXNÍ** tvar — zakřivení plochy ven; těleso (např. čočka, zrcadlo) je uprostřed tlustší než na okrajích; **KONVEXNOST**, **KONVEXITA** — vlastnost být konvexní; v. t. *bikonvexní*, *plankonvexní*. Pozn.: Nutno rozlišovat **KONVEXE**, **KONVEXNÍ** a **KONVEKCE** (v. t.), **KONVEKČNÍ**

KONZERVovat z lat. *conservo*, *-are*; slož. z *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *servo*, *-are* = zachovávat, chránit; srov. **KONZERVA**) — uchovávat v dosavadním, v neporušeném stavu; zachovávat, udržovat; **KONZERVACE** energie — zachování energie

KONZONANCE (slož. z lat. *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *sono*, *-are* = znít; v. *disonance*) — „souznění“; libozvuk; opak: *disonance* (v. t.); **KONZONANTNÍ** — souzvučný, libozvučný

KOREKCE (z lat. *correctio*; od *corrigo*, *-ere*, ptc. pf. *correctus* = opravit; slož. z *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *rego*, *-ere* = řídit; srov. **REGENT** — „řídící“; správce země; v. t. *direktní*) — „napravení, polepšení“; oprava, úprava, náprava; **KOREKČNÍ** — opravný, nápravný; **KORIGOVAT**; v. t. *regulace*

KORELACE (slož. z lat. *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *relatio* = nesení zpět, opětne nesení, podávání zprávy, vztah; v. *relace*) — vzájemný vztah, vzájemná souvislost, souvztažnost; **KORELAČNÍ**

KORIGOVAT v. **KOREKCE**

KORÓNA (z lat. *corona* = věnec, kruh, koruna-čelenka) — 1/ prstenec kolem Slunce; vnější vrstva sluneční atmosféry; 2/ druh elektrického výboje na silně zakřivených elektrodách při překročení počátečního napětí; v. t. *korónograf*

KORÓNOGRAF (slož. z lat. *corona* = věnec, kruh, koruna-čelenka;

- v. *koróna* + řec. *grafó* = rýt, psát; v. -graf) — přístroj na získání filmových záběrů aktivity Slunce a ke studiu sluneční koróny
- KOROZE (od lat. *corrodo*, -ere, ptc. pf. *corrosus*; slož. z *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *rodo*, -ere = hlodat; srov. EROZE — vyhloďování; lat. *ex* = z, ven) — „rozhlodávání“; rozežírání
- KORPUSKULE (z lat. *corpusculum*, zdrob. ke *corpus* = tělo, těleso; srov. KORPULENTNÍ — tělnatý) — tělísko; velmi malá hmotná částice; fyzikální částice; KORPUSKULÁRNÍ — příslušející částicím; tvořený malými tělísky; částicový, tělískový
- KOSMOS (z řec. *kosmos* = řád, vesmír) — vesmír; KOSMICKÝ — vesmírný; přicházející z vesmíru (např. kosmické záření, kosmický prach): odcházející do vesmíru (např. kosmická raketa — určená pro let do vesmíru); jsoucí jako ve vesmíru (např. kosmická rychlost — rychlost umělého tělesa srovnatelná s rychlostí přirozených vesmírných těles); v. t. makrokosmos, megakosmos, mikrokosmos
- KOSMOGONIE (řec. *gignomai* = rodit se) — „zrození světa“; nauka o vzniku a vývoji nebeských těles
- KOSMOLOGIE (v. -logie) — odvětví astronomie studující vesmír jako celek
- KOSMONAUT (řec. *nautés* = plavec) — „plavec vesmírem“; účastník letu do vesmíru; v. t. astronaut, nautický KOSMOTRON (v. -tron) — urychlovač, který dává protonům energii srovnatelnou s energií kosmického záření
- KOVALENCE (slož. z lat. *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *va-leo*, -ere = mít sílu, platnost, význam; být zdrav; v. valence) — „společná valence, společné mocenství“; KOVALENTNÍ vazba — vazba, při níž jsou dva atomy spojeny společnou dvojicí elektronů
- KOVARIANCE (slož. z lat. *con-* = s, spolu, dohromady; v. *kon-* + *varius* = rozmanitý, různý, proměnlivý; v. variace) — „spolu vázaná proměnlivost“ souřadnic, parametrů apod.
- KRITICKÝ¹ (z řec. *kritikos* = k rozhodnutí postavený, k posuzování, přináležící; od *krinó* = tříbit, vybírat, volit, oddělovat, uznávat rozhodovat, soudit; a to prostřednictvím výrazu *kritiké techné* = umění posuzovat; v. -ika¹) — rozhodný, soudný, přísně posuzující; KRITIKA — odborné posouzení
- KRITICKÝ² (z řec. *kritikos*, od *krinó*; v. kritický¹; a to prostřednictvím výrazu *krisis* = rozhodnutí volbou z několika, rozsouzení) — rozhodující, rozhodný, velmi vážný (protože se bude rozhodovat o tom, co dále); jsoucí ve stavu, který je na samé hranici dvou možností, takže se rozhodne: buď — anebo; ve fyzice: KRITICKÁ teplota — nejvyšší (krajní) teplota, při níž látka může ještě existovat ve stavu kapalném; KRITICKÝ tlak — tlak příslušný určité kritické teplotě; KRIZE — rozhodný okamžik; chvíle, která rozhoduje o dalším; chvíle, kdy vrcholí rozpory

KRYOTRON (slož. z řec. *kryos* = mráz; v. krystal + umělá přípona -tron utvořená analogicky podle „elektron“; v. -tron) — elektro-nická součástka, jejíž jádro je zmrazeno na teplotu blízkou absolutní nule, takže se stává supravodivým

KRYSTAL (z řec. *krystallos* = zmrzlá voda, led; souvisí s *kryos* = mráz) — krystal; fyzikálně i chemicky stejnorodé těleso s pravidelnou vnitřní strukturou; v. t. monokrystal, polykrystal; kryotron

KRYSTALIZACE (v. -izace) — „tvoření krystalů“

KRYSTALIT (v. -it) — látka skládající se z neuspořádaných drobných krystalků

KRYSTALKA — nejjednodušší krystalový rozhlasový přijímač

KULMINACE (od lat. *culmen*, -inis = nejvyšší bod čnějícího předmětu, vrchol) — vrcholení; dosažení nejvyššího bodu; v astronomii: nejvyšší a nejnižší postavení nebeského tělesa vzhledem k horizontu; průchod tělesa rovníkem; **KULMINOVAT** — vrcholit, být na nejvyšším bodu, mít nejvyšší stav

KUMULACE (od lat. *cumulus* = hromada, kupa) — hromadění, nahromadění, nakupení; **KUMULATIVNÍ** — hromadný, nahromaděný; **KUMULOVAT** — hromadit; **KUMULOVANÝ** — hromaděný; **KUMULUS** — bíle svítící oblak kupovitěho tvaru; v. t. akumulátor

KVALITA (z lat. *qualitas*; od *qualis* = jaký) — jakost; **KVALITATIVNÍ** — týkající se jakosti; **KVALITATIVNÍ** analýza látky — rozbor určující povahu, vlastnosti součástí, z nichž je látka složena; **KVALITNÍ** — mající dobrou jakost, jakostní, hodnotný; **KVALITNÍ** rozbor — dokonalý, hodnotný rozbor

KVANTIFIKACE v. **KVANTUM**

KVANTUM (od lat. *quantus* = jak mnohý, jak veliký) — množství, počet; ve fyzice: teorie **KVANT** = kvantová teorie, založená na předpokladu, že fyzikální procesy probíhají nespojitě v malých dávkách — kvantech; **KVANTITA** (z lat. *quantitas* ke *quantus*) — množství, početnost vyjádřená číselně; **KVANTITATIVNÍ** — týkající se kvantity, tj. velikosti, počtu, množství; číselný, početní; vyjádřený v číslech nebo v množství; zjišťující nebo určující velikost, množství; **KVANTOR** — zkrácený tvar termínu kvantifikátor (v. t.); **KVANTOVAT** — používat předpokladů kvantové teorie

KVANTIFIKACE (slož. z *quantus* + *facio*, -ere = dělat; v. -fikace) — „zavádění počtu, četnosti“; udání počtu; odhad počtu hodnot proměnné, pro které něco platí; **KVANTIFIKÁTOR** (v. -or) — slovní obrat nebo znak vyjadřující, „o jak velký počet, o jaké množství hodnot proměnné se jedná“ (vymezuje množství — kvantum); **KVANTIFIKOVAT** — udávat přesný počet, přesné množství hodnot; **KVANTIFIKOVANÝ** — udávající přesný počet hodnot

KVARTA (z lat. *quartus* = čtvrtý; od *quattuor* = čtyři) — „čtvrtá v pořadí“; 1. dřívější název čtvrté třídy gymnazií; 2. čtvrtý stupeň

diatonické stupnice; výškový rozdíl dvou tónů, při němž vyšší tón tvoří čtvrtý stupeň diatonické stupnice vzhledem k tónu nižšímu; v. t. kvartérní

KVARTÉRNÍ (od lat. *quaterni* = po čtyřech; od *quattuor* = čtyři; v. kvarta) — tvořený ze čtyř složek (např. slitina kvartérní). Pozn.: V geologii je KVARTÉR, KVARTÉRNÍ termín pro „čtvrtohory, čtvrtohorní“.

KVASARY (zkrácením angl. *quasi-stellar* objects, a to z lat. *quasi stellae* = jakoby hvězdy; v. kvazi- a stelární) — předměty většinou hvězdného vzhledu, z nichž některé jsou zdrojem rádiového záření

KVAZI-, QUASI- (z lat. *quasi* = jako by, jakoby; z předpokládaného *quam si* = jako kdyby) — počáteční část složených slov mající význam „přibližný, jen zdánlivě podobný, připomínající“ to, co je vyjádřeno v následující části složeného slova

KVAZIOPTICKÝ (v. optický) — ve fyzice: KVAZIOPTICKÉ vlny — velmi krátké, jen několikametrové, které se šíří vlastně již přímočaře

KVAZISTACIONÁRNÍ (v. stacionární) — jakoby stojící, zdánlivě nehybný, jako ustálený (např. děj, dráha); v. t. kvasar

KVINTA (z lat. *quintus* = pátý; od *quinque* = pět) — „pátá v pořadí“; 1. dřívější název pro páté třídy gymnázií; 2. pátý stupeň diatonické stupnice vzhledem k tónu nižšímu

KVOCIENT (z lat. *quotiens* = kolikrát) — poměr, podíl (poměr totiž udává, kolikrát je dělenec větší než dělitel); číslo udávající poměr dvou hodnot

KYBERNETIKA (z řec. *kybernetiké techné* = kormidelnická dovednost, zběhlost v kormidlování; v. -ika; od *kybernaó* = kormidlem řídit loď) — vědní obor o zákonitostech řízení, o řídicích zařízeních. Pozn.: S termínem „kybernetika“ souvisí termín GVERNÉR (přes lat. gubernator, od *guberno, -are* = kormidlovat, řídit, spravovat).

L (od lat. *longitudo* = délka; od *longus* = dlouhý; v. elongace) — značka ve fyzice pro délku

LABILNÍ (z lat. *labilis* = snadno padající; od *labor, -i*, ptc. pf. *lapsus* = sunout se, kácet se, padat; srov. LAPSUS — „uklouznutí“, tj. přerěknutí, společenské nedopatření, menší omyl) — vratký; opak: stabilní; v. t. kolaps, kolapsar

LABORATOŘ (od lat. *labor* = namáhavá práce) — „pracovna“; **LABORATORNÍ** — v laboratoři prováděný

-LACE (z lat. *-latio*; od *fero, ferre*, ptc. pf. *latus* = nést, nosit; v. difference) — koncová část složených slov samostatně se nevyskytující a mající význam „nesení, nošení“; např.

ELACE (lat. *ex* = z, ven) — „vynesení, vynášení z původní polohy“; v. elace

Řešení hrátek s čísly:

a) např. $0 + 1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9$
 $13 + 87 + (0 : 24569)$

b) Čísel je velmi mnoho. Obecně $n, \frac{n}{n-1}$, kde n je větší než 2.

c) $1 = 3 - (3 : 3) - (3 : 3)$	$11 = (33 : 3) + 3 - 3$
$2 = (33 : 3) - (3 \cdot 3)$	$12 = (33 : 3) + (3 : 3)$
$3 = (3 : 3) - (3 : 3) + 3$	$13 = (33 - 3) : 3 + 3$
$4 = (3 + 3 + 3 + 3) : 3$	$14 = 3! + 3! + 3 - (3 : 3)$
$5 = (33 : 3) - 3 - 3$	$15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
$6 = (3! + 3! + 3 + 3) : 3$	$16 = 3! + 3! + 3 + (3 : 3)$
$7 = (33 - 3) : 3 - 3$	$17 = (33 : 3) + 3 + 3$
$8 = (3! + 3! + 3! + 3!) : 3$	$18 = 3! + 3! + 3! + 3 - 3$
$9 = 3 + 3 + 3 + 3 - 3$	$19 = 3! + 3! + 3! + (3 : 3)$
$10 = (33 : 3) - (3 : 3)$	$20 = (33 : 3) + (3 \cdot 3)$

Jsou možná i jiná řešení.

Úlohy ze zahraničních časopisů

RNDr. TOMÁŠ SCHÜTZ, katedra matematiky PeF UK v Praze

Úloha 1. Jsou dány funkce:

$f(x) = |1 - x| + |1 + x|$ a $g(x) = a - |x|$, kde a je parametr.

a) Nalezněte takovou hodnotu parametru a , aby graf funkce $g(x)$ procházel bodem $C = [1, 2]$.

b) Při takto spočtené hodnotě parametru a načrtněte graf funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a spočítejte obsah obrazce, který tyto grafy ohraničují.

c) Zjistěte, při jaké hodnotě parametru a má rovnice $f(x) = g(x)$ právě jedno řešení.

Úloha 2. Tři směsi obsahují látky A , B , a C . První směs obsahuje látky A a B v poměru 3 : 5, druhá směs obsahuje látky B a C v poměru 1 : 2 a třetí směs obsahuje látky A a C v poměru 2 : 3. Kolik gramů je třeba vzít od každé směsi, abychom získali směs, kde budou látky A , B a C zastoupeny v poměru 3 : 5 : 2?

Úloha 3. V čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhly BAD a BCD pravé. Z vrcholů B a D spusťte kolmice BE a DF k úhlopříčce AC ($E \in AC$, $F \in AC$). Dokažte, že úsečky CE a FA jsou shodné.

Úloha 4 (obtížnější). Prodlouženou stranou trojúhelníku nazvěme přímkou, na které dotýčná strana leží. Předpokládejme, že trojúhelník

vepsaný do paraboly $y^2 = 2px$ má dvě prodloužené strany takové, že jsou tečnami paraboly $x^2 = 2qy$. Dokažte, že třetí prodloužená strana tohoto trojúhelníku je rovněž tečnou paraboly $x^2 = 2qy$.

Úloha 5 (obtížnější). Vyřešte následující rovnici:

$$6x^6 - 25ix^5 - 6x^4 - 50ix^3 - 6x^2 - 25ix + 6 = 0$$

kde $i^2 = -1$.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstrukční geometrie

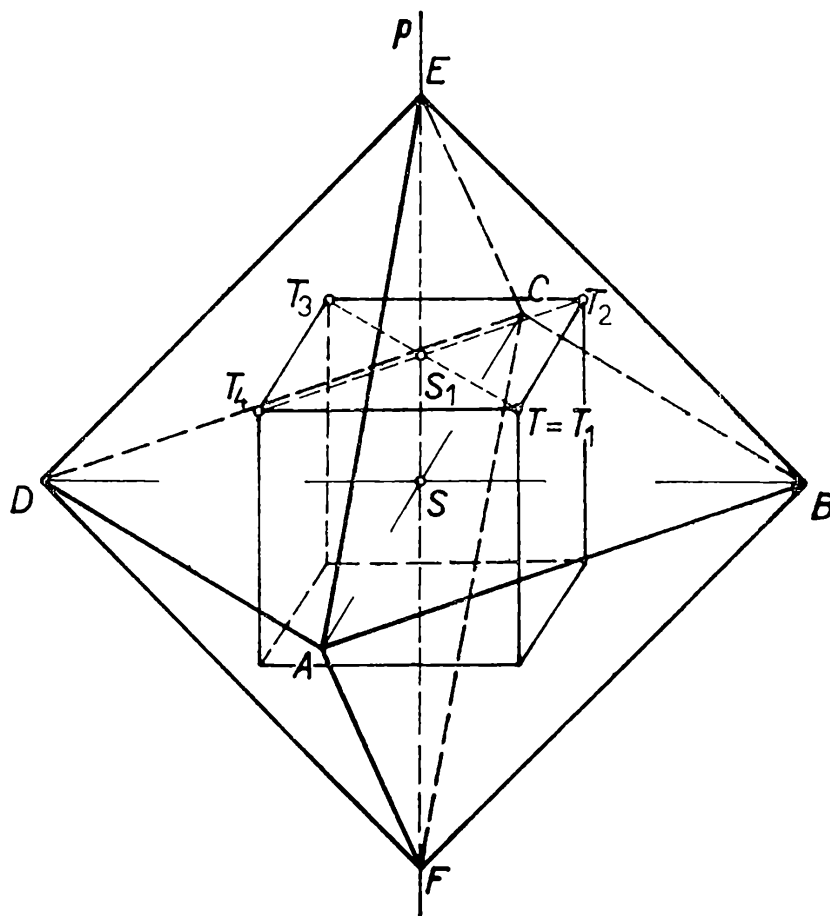
2. Je dána přímka p a bod T , který není bodem přímky p . Sestrojte pravidelný osmistěn, který má tyto dvě vlastnosti: Jedna jeho tělesová úhlopříčka leží v přímce p a střed jedné jeho stěny je bod T .

(Došla 4 řešení)

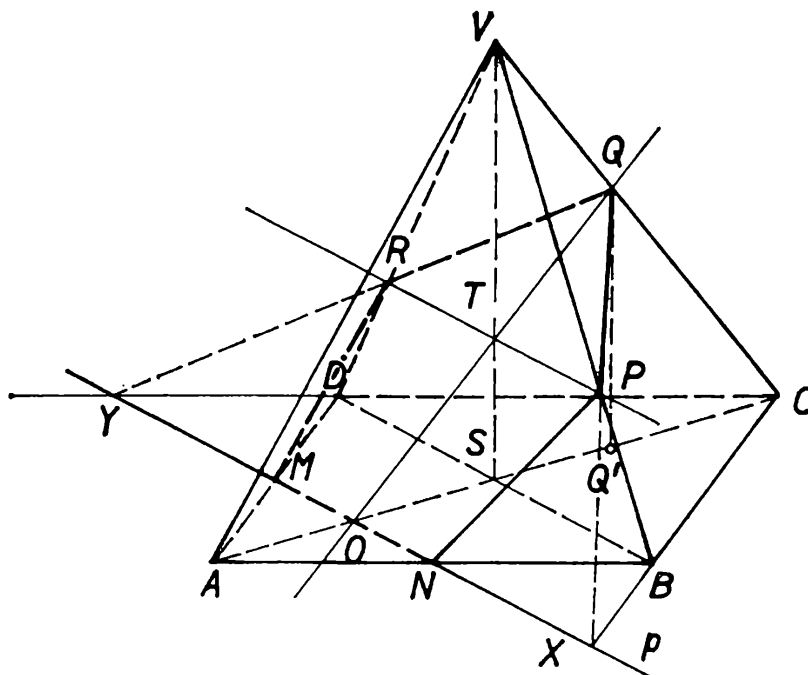
Emil Kraemer

Řešení Hany Peňázové, 3 B G. tř. kpt. Jaroše, Brno :

Pravidelný osmistěn $ABCDEF$ má tři shodné a po dvou vzájemně kolmé úhlopříčky AC , BD , EF se společným středem S (obr. 1). Tento



Obr. 1



Obr. 2

osmistěn je souměrný podle každé roviny, která obsahuje dvě jeho tělesové úhlopříčky. Z těchto vlastností osmistěnu plyne, že těžiště T_1 , T_3 jednotlivých jeho stěn jsou vrcholy krychle, jejíž střed splývá se středem S osmistěnu.

Budiž $T_1 = T$ těžiště stěny ABE osmistěnu:

potom těžnice ET_1 této stěny prochází středem P hrany AB . Necht S_1 je průsečík polopřímky SE s touto stěnou uvedené krychle, která obsahuje vrchol $T = T_1$; tento bod S_1 je středem stěny $T_1T_2T_3T_4$ krychle. Z trojúhelníku ESP a z vlastnosti těžiště trojúhelníku ABE plyne, že je

$$|S_1E| = 2|SS_1| = a,$$

kde a je délka hrany uvedené krychle. Z tohoto rozboru plyne tato konstrukce:

1. Bodem $T = T_1$ vedeme rovinu $\rho \perp p$ a sestrojíme její průsečík S_1 s přímkou p .

2. V rovině ρ sestrojíme čtverec $T_1T_2T_3T_4$, který má střed S_1 a jeden vrchol v bodu $T = T_1$.

3. Sestrojíme krychli, jejíž jednou stěnou je čtverec $T_1T_2T_3T_4$.

4. Sestrojíme střed S této krychle a osy jejích stěn; jednou z nich je daná přímka $p = SS_1$.

5. Na prodloužení úsečky SS_1 za bod S_1 sestrojíme bod E tak, aby $|S_1E| = 2|SS_1|$.

6. Hledaný osmistěn má střed v bodu S , vrchol E a tělesové úhlopříčky v osách stěn sestrojené krychle. Zároveň je zřejmé, že tento osmistěn splňuje dané podmínky.

Z konstrukce plyne, že úloha má právě dvě řešení (neboť existují dvě krychle mající stěnu $T_1T_2T_3T_4$).

3. Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný čtyřboký

Úlohy I. kola 37. ročníku matematické olympiády

Kategorie A

1. Najděte mnohočlen nejmenšího stupně s racionálními koeficienty, který má kořen $\sqrt[1987]{2}$.
2. Dokažte, že střed kulové plochy opsané pravidelnému čtyřstěnu má ze všech bodů prostoru nejmenší součet vzdáleností od jednotlivých vrcholů čtyřstěnu.
3. Předpokládejme, že každý bod roviny je obarven jednou ze dvou barev. Dokažte, že v této rovině existuje rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy jsou obarveny stejnou barvou.
4. Označme P , Q středy stran BC , CA trojúhelníku ABC a T jeho těžiště. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB , právě když je čtyřúhelník $TPCQ$ tečnový.
5. Přiřaďme každé dvojici přirozených čísel (x, y) reálné číslo $f(x, y) \geq 1$. Pak pro libovolné přirozené číslo k existují přirozená čísla m, n taková, že
$$m + n \geq k \text{ a } f(m, n) < f(m + 1, n) + f(m, n + 1).$$
Dokažte.
6. Zjistěte, zda existuje přirozené číslo, jehož dekadický zápis má 23 číslic a které není dělitelné 11, ani když změním libovolnou z jeho číslic.

Kategorie B

1. Jaký největší počet figurek lze na šachovnici $n \times n$ rozmístit tak, aby žádné dvě nesousedily? (Za sousední považujeme ta políčka, která mají společný alespoň jeden vrchol.)
2. Dokážte, že polynóm
$$P_n(x) = x^{(2n)^2} - x^{(2n-1)^2} + x^{(2n-2)^2} - x^{(2n-3)^2} + \dots + x^4 - x + 1$$
nemá reálný koreň pre žiadne n prirodzené.
3. Rozhodněte, zda existuje nenulové zobrazení F množiny mřížových bodů v rovině (tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi) do množiny reálných čísel takové, že pro každý pravoúhlý trojúhelník ABC s vrcholy v mřížových bodech a odvěsnami velikosti 1 platí
$$F(A) + F(B) + F(C) = 0. \quad (1)$$
Existuje takové zobrazení F , požadujeme-li, aby rovnost (1) platila pouze pro takové pravoúhlé trojúhelníky ABC , jejichž osa pravoúhlu je rovnoběžná s osou prvního kvadrantu?

4. Vyjádřete součet čtverců velikostí tělesových úhlopříček rovnoběžnostěnu pomocí velikostí jeho hran.
5. Uvažujme řez krychle $ABCD A'B'C'D'$ o hraně a rovinou, která je kolmá k úhlopříčce AC' a prochází bodem K hrany $A'B'$, přičemž $|A'K| = t$. Spočítejte obvod o a obsah P řezu a zjistěte, pro které hodnoty $t \in (0, a)$ nabývá funkce P maximum a minimum.
6. Postupnost (x_n) je definovaná rekurentně

$$x_{n+2} = \frac{1 - x_n x_{n+1}}{2 - x_n - x_{n+1}}, \quad x_1 = x_2 = 0.$$

Ukážte, že pro každé přirozené $n \geq 3$, je $0 < x_n < 1$.

Kategorie C

1. Označme $A = \{0, 1, 2\}$. Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c ($c \neq 0$), pro které platí

$$x \in A \text{ a } y \in A \Rightarrow ax + by + cxy \in A.$$
2. Pre ktoré prirodzené čísla n je číslo $n^2 + 5n + 8$ deliteľné číslom 49?
3. Jsou-li $p, q, pq, p + q$ velikosti stran čtyřúhelníku, kde $p \geq 3, q \geq 3$ jsou přirozená čísla, pak jedna z jeho úhlopříček má velikost menší než 11. Dokažte.
4. Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$ s podstavnou hranou velikosti a a výškou v . Označme S střed stěny $BCC'B'$ a K, L ty body na hranách BB', CC' , pro něž jsou lomené čáry AKS a ALS nejkratší. Vypočítejte poměr objemů jehlanu $AKLS$ a daného hranolu.
5. Ve volejbalovém turnaji se utkalo $n \geq 3$ družstev. Dokažte, že existuje takové družstvo A , že ke každému jinému družstvu B najdeme třetí družstvo C tak, že ve vzájemných zápasech družstev A, B, C vyhrálo A aspoň jednou a B nejvýše jednou.
6. V pravidelném devětúhelníku $ABCDEFGHI$ označme K, L, M průsečíky dvojic přímek AD a CG, BF a CG, AD a BF . Najděte 18 různých trojúhelníků podobných s trojúhelníkem KLM , kterých všechny tři vrcholy sú vrcholmi daného devětúhelníka.

Kategorie P

1. Je dáno celé číslo T a dvě konečné celočíselné posloupnosti $A_1, A_2, \dots, A_N$ a $B_1, B_2, \dots, B_N$ takové, že $N \geq 1, A_1 < A_2 < \dots < A_N$ a pro všechna $i, 1 \leq i \leq N$, je $B_i > 0$.
 Na poště jsou tři přepážky, poskytující stejné služby. Přepážky otvírají v čase T . Poštu navštíví během dne N zákazníci. Zákazník i přichází v čase A_i a požaduje službu v délce B_i časových jednotek. Zákazníci jsou obsluhováni v pořadí jejich příchodu na poštu. Přepážka je po obslužení jednoho zákazníka ihned k dispozici pro obsluhu dalšího. Přepážky zavírají po obslužení všech zákazníků.
 Navrhněte a dokažte algoritmus, který určí celkovou dobu, po kterou na poště čeká alespoň jeden zákazník.

2. Je dána konečná celočíselná posloupnost $X_1, X_2, \dots, X_N$, taková, že $N \geq 2$ a $X_1 < X_2 < \dots < X_N$. Navrhněte a dokažte (co nejlepší) algoritmus, který určí celkový počet konečných celočíselných posloupností $V_0, V_1, \dots, V_N$, takových, že $V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_N$ a pro všechna i , $1 \leq i \leq N$, platí $V_{i-1} + V_i = 2 \cdot X_i$.
3. Je dán následující program:

Basic

```
1 0 LET Y = 1
2 0 IF X > 1 0 0 THEN 6 0
3 0 LET X = X + 11
4 0 LET Y = Y + 1
5 0 GOTO 2 0
6 0 IF Y = 1 THEN 1 0 0
7 0 LET X = X - 1 0
8 0 LET Y = Y - 1
9 0 GOTO 2 0
1 0 0 STOP
```

Pascal

```
Y := 1;
while (Y < > 1) or (X < =
= 1 0 0) do if X < = 1 0 0
then
begin X := X + 11; {3 0}
      Y = Y + 1
end
else
begin X := X - 1 0; {7 0}
      Y = Y - 1
end.
end.
```

Nechť m je libovolná celočíselná hodnota vstupní proměnné X . Označme $A(m)$, resp. $B(m)$ počet provedení příkazu 3 0, resp. 7 0 při výpočtu pro m . Určete a zdůvodněte vztah mezi hodnotami $A(m)$ a $B(m)$.

4. a) Navrhněte schéma S , které počítá součin dvou přirozených čísel.
 b) Navrhněte schéma S takové, že pro každé vstupní slovo X , tvořené znaky a, b , je výsledek Y výpočtu dán takto:
 — $S(X) = X$, je-li délka slova X sudá a
 — $S(X)$ vznikne z X vynecháním každého třetího znaku b zleva, je-li délka slova X lichá.

Markovovy algoritmy

Konečnou posloupnost znaků nazveme *slovem* (např. *aba*, *01AB*, *1234* jsou slova). Prázdnou posloupnost, značenou ε , nazveme *prázdné slovo*. Počet znaků ve slově nazveme délkou slova (slovo ε je délky 0, slovo *abaa* má délku 4). *Zřetězení* slova $P = a_1 \dots a_n$ se slovem $Q = b_1 \dots b_m$ je slovo $PQ = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ (např. je-li $P = aabb$, $Q = bba$, pak $PQ = aabbbba$; je-li $Q' = \varepsilon$, pak $PQ' = aabb$).

Jsou-li P a Q slova, řekneme, že slovo P se vyskytuje v Q , jestliže existují slova U a T taková, že $Q = UPT$. *Nejlevější výskyt* P v Q je takový, pro který má slovo U nejmenší délku.

Nechť P a Q jsou slova. Výraz tvaru $P \rightarrow Q$ nazýváme *obyčejné pravidlo*, výraz tvaru $P \rightarrow Q$ nazýváme *koncové pravidlo*. Zápis $P \rightarrow (.)Q$ znamená obyčejné nebo koncové pravidlo. Konečnou posloupnost pravidel

$$S: P_1 \rightarrow (.)Q_1$$

$$P_n \rightarrow (.)Q_n$$

nazveme *schéma*. Každé schéma zadává (tzv. *Markovův*) *algoritmus* následujícím způsobem. Výpočet podle schématu S pro dané *vstupní slovo* X probíhá takto: Nalezneme první pravidlo $P_m \rightarrow (.)Q_m$ takové, že P_m se vyskytuje v X . Nejlevější výskyt slova P_m v X nahradíme slovem Q_m . Nechť R_1 je výsledek tohoto nahrazení (stručně budeme psát $X \vdash R_1$). Bylo-li použito koncové pravidlo $P_m \rightarrow .Q_m$, pak výpočet končí a výsledek výpočtu je slovo R_1 . Bylo-li použito obyčejné pravidlo $P_m \rightarrow Q_m$, použijeme na R_1 stejný postup, který byl aplikován na X (schéma prohledáváme opět od začátku), a tak dále. Jestliže někdy nastane situace, kdy se žádné ze slov $P_1, \dots, P_n$ nevyskytuje v právě zpracovávaném slově R_i , pak výpočet končí s *výsledkem* R_i . Přitom je možné, že popsany proces nikdy neskončí. Pak řekneme, že výsledek výpočtu *není* pro slovo X *definován*. Je-li výsledek výpočtu pro X definován, označíme ho $S(X)$.

Příklad 1.

Navrhněte schéma S , které připsá na konec každého slova X , tvořeného ze znaků 1, 0, slovo 10. Řešením je schéma

$$\begin{aligned} S: c1 &\rightarrow 1c \\ c0 &\rightarrow 0c \\ c &\rightarrow .10 \\ \varepsilon &\rightarrow c. \end{aligned}$$

Schéma S používá pomocný znak c . Jako první bude aplikováno pravidlo $\varepsilon \rightarrow c$, neboť předchozí pravidla obsahují na svých levých stranách znak c a ten se nevyskytuje v žádném vstupním slově. Navíc, prázdné slovo se vyskytuje na začátku každého slova. Následuje opakované užití vždy jednoho z prvních dvou pravidel, a to tak dlouho, dokud se c „neposune“ až na konec. Poté je aplikováno třetí pravidlo a výpočet končí, neboť se jedná o koncové pravidlo. Například pro vstupní slovo $X = 1011$ probíhá výpočet takto: $R_1 = c1011$, $R_2 = 1c011$, $R_3 = 10c11$, $R_4 = 101c1$, $R_5 = 1011c$, $R_6 = 101110$. Stručně zapsáno $1011 \vdash c1011 \vdash 1c011 \vdash 10c11 \vdash 101c1 \vdash 1011c \vdash 101110$.

Příklad 2.

Navrhněte schéma S , které „zdvojuje“ vstupní slovo X , tvořené ze znaků a, b , tj. $S(X) = XX$. Řešením je schéma

$$\begin{aligned} S: za &\rightarrow a\alpha z & (1) \\ zb &\rightarrow b\beta z & (2) \\ \alpha a &\rightarrow a\alpha & (3) \\ \alpha b &\rightarrow b\alpha & (4) \\ \beta a &\rightarrow a\beta & (5) \end{aligned}$$

$$\beta b \rightarrow b\beta \quad (6)$$

$$z \rightarrow t \quad (7)$$

$$\alpha t \rightarrow t\alpha \quad (8)$$

$$\beta t \rightarrow t\beta \quad (9)$$

$$t \rightarrow \cdot \varepsilon \quad (10)$$

$$\varepsilon \rightarrow z \quad (11)$$

Schéma S používá pomocné znaky α, β jako dvojníky pro znaky a, b a další pomocné znaky z, t .

První bude aplikováno pravidlo (11), kterým se na začátek slova X připsá znak z . Pak jsou opakovaně aplikována pravidla (1) a (2), připsující za každý znak jeho dvojníka. Přitom se znak z posouvá doprava tak dlouho, dokud se nestane posledním znakem. Dále jsou aplikována pravidla (3)–(6), kterými se přesunou všechny znaky α, β doprava. Při tom zůstává zachováno vzájemné pořadí znaků a, b i vzájemné pořadí znaků α, β . Tím vznikne slovo tvořené vstupním slovem X , následovaným jeho „dvojníkem“. Pravidlem (7) se znak z změní na t . Pravidly (8), (9) jsou pak pomocné znaky α, β nahrazeny svými protějšky a, b . Výpočet končí užitím pravidla (10), které odstraní pomocný znak t ze středu slova. Například pro vstupní slovo $X = abb$ probíhá výpočet takto: $X = abb \vdash zabb \vdash axzbb \vdash axb\beta zb \vdash axb\beta b\beta z \vdash ab\alpha\beta b\beta z \vdash ab\alpha b\beta\beta z \vdash abb\alpha\beta\beta z \vdash abb\alpha\beta\beta t \vdash abbb\alpha\beta tb \vdash abbatbb \vdash abbtabb \vdash abbabbb$.

Markovovy algoritmy můžeme používat i k práci s přirozenými čísly. Pro její usnadnění se často přirozené číslo n reprezentuje slovem $\bar{n}$, které je definováno induktivně takto: $\bar{0} = a$, $\bar{n} + 1 = \bar{n}a$. Každou k -tici přirozených čísel $(n_1, \dots, n_k)$ reprezentujeme slovem $\overline{(n_1, \dots, n_k)} = \bar{n}_1 \bar{b} \bar{n}_2 \bar{b} \dots \bar{b} \bar{n}_k$. Například $(3, 1, 2) = aaaaabaabaaa$. Poznamenejme, že jsou možné i jiné reprezentace.

Příklad 3.

Navrhněte schéma S , které počítá součet tří přirozených čísel. Vstupním slovem bude výše uvedená reprezentace této trojice. Řešením je schéma

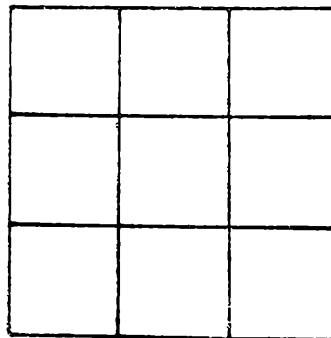
$$S: ba \rightarrow \varepsilon$$

Každý výpočet podle schématu S skončí po dvou aplikacích jediného pravidla schématu. Všimněte si, že na rozdíl od příkladů 1 a 2, kde výpočet končil aplikací koncového pravidla, zde končí výpočet tím, že pravidlo již nelze více aplikovat. Např. pro součet $1 + 1 + 2$ je vstupní slovo $X = aabaabaaa$ a výpočet proběhne takto:

$$aabaabaaa \vdash aaabaaa \vdash aaaaa. \text{ Výsledek reprezentuje číslo 4.}$$

Kategorie Z6
(pro žáky 6. ročníků základních škol)

1. Do každého políčka křížovky (obr. 1) napište některou z číslic 1, 2, 3, ..., 9 tak, aby byly splněny podmínky:
- každou z číslic použijte právě jednou,
 - v prvním sloupci je od shora dolů napsán násobek čísla 312,
 - součet všech číslic v 1. řádku je 14, ve 2. řádku 15.
- Kolik je celkem možností?



Obr. 1

2. V závodě EX vyrábějí několik druhů hry PEXESO. Všechny kartičky jsou čtverce téhož obsahu $S \geq 3 \text{ cm}^2$ (S nemusí být vyjádřen celým číslem). Sběratel Janko vybral kartičky z několika her Pexeso a sestavil z nich obdélník, jehož jedna strana je dvakrát delší než druhá. Kartičky byly rozmístěny jen v jedné vrstvě a každé dvě sousední kartičky se dotýkaly podél stran. Jankův mladší bratr Petr z nich odebral 526 kusů. Zůstal čtverec o straně 49 cm. Kolik kartiček vložil na stůl Janko?
3. Sestrojte pětiúhelník $ABCDE$, pro který platí: $d(AB) = 4 \text{ cm}$, $d(BC) = 5 \text{ cm}$, $d(CD) = 11 \text{ cm}$, $d(DE) = 3 \text{ cm}$, $d(EA) = 2 \text{ cm}$, délky úhlopříček AC , AD jsou vyjádřeny (v cm) celými čísly.
4. Pomocí třílitrové nádoby přelejte 8 litrů vody do tří pětilitrových nádob. Najděte všechny různé možnosti rozlití vody do těchto tří nádob. Přitom nerozlišujeme například možnosti (2, 2, 4), (2, 4, 2), (4, 2, 2). Pro každou z možností popište postup přelévání.
5. Tělocvična naší školy má zajímavou vlastnost. Jen z jednoho místa tělocvičny může tělocvikář přehlédnout činnost všech žáků, bez ohledu na to, kde cvičí. Může se přitom otáčet na místě. Navrhněte sami půdorys některé tělocvičny, která má tuto vlastnost.
6. V zápisech čtyř početních výkonů nahraďte písmena správnými číslicemi. Stejná písmena značí ve všech čtyřech zápisech stejné číslice, různá písmena značí různé číslice.

$$\begin{array}{r}
 \text{S L O V O} \\
 \text{O L O V O} \\
 \hline
 \text{P R A H A}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{S L O V O} \\
 - \text{O L O V O} \\
 \hline
 \text{H R R R R}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{O S A} \\
 . \text{ P} \\
 \hline
 \text{O L E J}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{V O R : O J = O S , A} \\
 \text{O V R} \\
 \text{E R} \\
 \text{E}
 \end{array}$$

Pomůcka: HRRRR je násobek čísla 3.

Kategorie Z7

(pro žáky 7. ročníků základních škol)

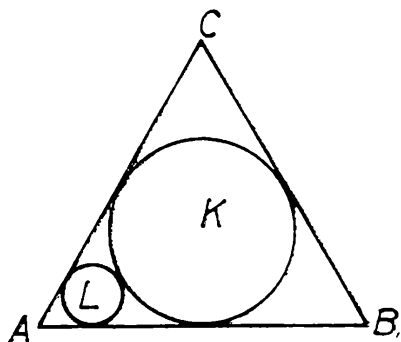
1. Jsou dány dvě soustředné kružnice k (S , 11 cm), l (S , 7 cm). Sestrojte takovou tětivu kružnice k , kterou rozdělí její průsečíky s kružnicí l na tři shodné úsečky.
2. Je dána posloupnost čísel
122333455666788999101111121212...
Která číslice stojí na 1987. místě?
3. Všechna čísla 1, 2, 3, ..., 9 rozdělte do dvou množin A , B (bez společných prvků). Vypočítejte součin a všech čísel z množiny A a součin b všech čísel z množiny B . Vypočítejte podíl $\frac{a}{b}$. Kolik různých celých čísel můžete takto získat?
4. Pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ se základnami AB , CD má kolmé úhlopříčky AC , BD . Vypočítejte obsah lichoběžníku $ABCD$, jestliže je $d(CD) = 4$ cm, $\sphericalangle CAB = 30^\circ$, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.
5. Napište všechny pěticiferné násobky čísla 7, které končí skupinou číslic 893 (tj. čísla tvaru ..893).
6. Určete všechny pravidelné jehlany s méně než 10 vrcholy a s celočíselnými délkami hran, které mají součet délek všech hran roven 36 cm. Sestavte tabulku, ve které uvedete počty vrcholů a délky podstavných a bočních hran. Kolik je takových (neshodných) jehlanů?

Kategorie Z8

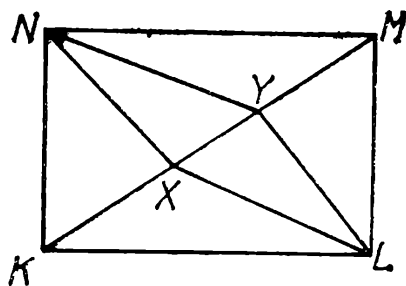
(pro žáky 8. ročníků základních škol)

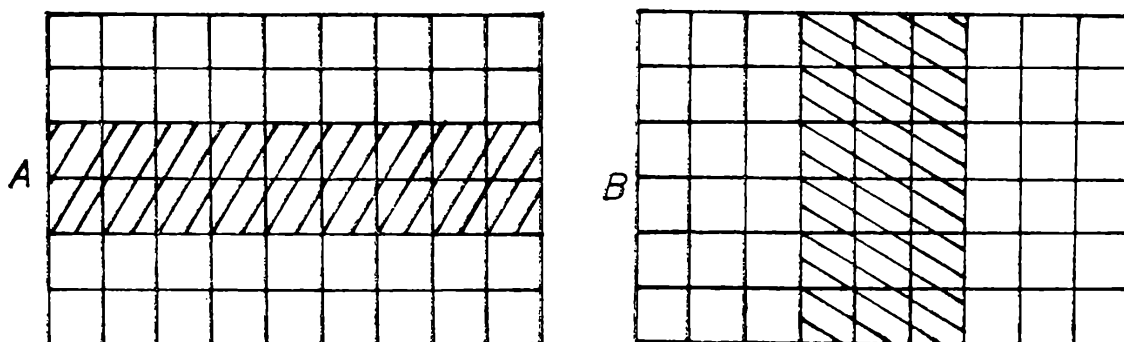
1. Do rovnostranného trojúhelníku je vepsán kruh K (obr. 2). Další kruh L se dotýká stran AB , AC a kruhu K (vně). Obsah kruhu L je 2 cm^2 . Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC .
2. Sestrojte obdélník $KLMN$ o stranách $a = 4$ cm a $b = 6$ cm a na jeho úhlopříčce KM zvolte libovolně dva různé body X , Y ($|KX| < |KY|$) (obr. 3). Porovnejte součet obsahů trojúhelníků KXL a MYN se součtem obsahů trojúhelníků KXN a MYL .

Obr. 2



Obr. 3





Obr. 4a, b

3. Rozdělte vlajku *A* na čtyři díly a sestavte z nich vlajku *B* (obr. 4a, b).
4. Narýsujte obdélník *ABCD* o stranách $a = 10$ cm, $b = 6$ cm.
 - a) Sestrojte kružnici k , která protíná tři strany obdélníku *ABCD* a vytíná na nich tři úsečky, z nichž nejkratší má délku 2 cm, prostřední 3 cm a nejdelší 4 cm.
 - b) Kolik takových kružnic je možno sestrojit?
5. Jestliže v šesticiferném čísle, které je dělitelné číslem 7, přemístíme první číslici na jeho konec, dostaneme opět číslo dělitelné číslem 7. Proč?
6. Na určení zeměpisného názvu potřebujete napsat zlomek $\frac{1}{81}$ ve tvaru desetinného čísla. Pomocí jeho číslic za desetinnou čárkou a klíče najděte všechna písmena neznámého názvu.
 1. písmeno určuje součet 7. a 8. číslice;
 2. písmeno určuje 9. číslice;
 3. písmeno určuje dvojnásobek 18. číslice;
 4. písmeno určuje trojnásobek 33. číslice;
 5. písmeno určuje dvojnásobek 70. číslice zvětšený o 8;
 6. písmeno určuje součet 86. a 87. číslice;
 7. písmeno určuje součet 101. a 102. číslice;
 8. písmeno určuje 150. číslice.

KLÍČ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z

INFORMACE

Přijímací zkoušky z matematiky na Vysoké škole zemědělské v Praze

RNDr. OLGA POKORNÁ,
RNDr. KVĚTA LEJČKOVÁ, CSc., MF VŠZ Praha

Uchazeči, kteří se hlásí ke studiu na Vysoké škole zemědělské v Praze, mají při přijímacích zkouškách potíže s matematikou na těch fakultách a oborech, kde se matematika zkouší písemnou formou. Především jim je určen tento článek.

Při přijímacích zkouškách prověřujeme pouze základní středoškolské znalosti. Uchazeč musí umět upravovat algebraické i goniometrické výrazy, řešit v množině reálných čísel rovnice (s neznámou ve jmenovateli, iracionální, exponenciální, logaritmické, goniometrické), nerovnice o jedné neznámé (lineární, kvadratické, goniometrické, logaritmické); musí znát základní množinové operace, analytickou geometrii přímky a kuželoseček v rovině, základy planimetrie a stereometrie a též základy diferenciálního počtu.

Typové příklady z vybraných témat jsou obsaženy v Repetitoriu, které vydala VŠZ v Praze v roce 1984. V roce 1986 byl vydán ještě doplněk, ve kterém jsou obsaženy vyřešené vzorové příklady. Přípravuje se rozšířené vydání pod názvem Minimum středoškolské matematiky, které bude možno zakoupit v prodejně Kniha VŠZ Praha 6 — Suchbát (pravděpodobně až v roce 1988). Doposud bylo Repetitorium rozesíláno všem zájemcům přihlášeným ke studiu na mechanizační fakultě, provozně ekonomické fakultě a oboru zemědělské meliorace agronomické fakulty společně s pozvánkou na přijímací zkoušky. Bude tomu tak i v roce 1987.

Přijímací písemná zkouška z matematiky obsahuje šest příkladů a čistý čas k jejímu vypracování je 60 minut. U každého příkladu se hodnotí nejen dosažený výsledek, ale i postup řešení a stupeň rozpracování.

Z přehledů o úspěšnosti řešení jednotlivých příkladů shledáváme, že uchazeči mají největší problémy s řešením nerovnic, goniometrických rovnic a úpravou goniometrických výrazů, analytickou geometrií přímky a kuželoseček v rovině, definičními obory funkcí (opět souvislost s řešením nerovnic) a s užitím diferenciálního počtu.

Jako ukázkou uvádíme dvě varianty přijímací písemné zkoušky z matematiky z minulých let.

Varianta A:

- 1) Pro která x je průnik intervalů $I_1 = \left(\frac{2x+5}{3}, +\infty\right)$, $I_2 = (x+2, 2x-4)$ neprázdný?
- 2) V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\frac{2x-1}{2-x} > x$.
- 3) Určete definiční obor funkce $f: y = \sqrt[3]{\sqrt{2}-2} \cdot \sin x$.
- 4) Vypočtěte hodnotu funkce $f: y = \sin x$ pro $x = \frac{\pi}{12}$ (bez použití tabulek).
- 5) Je dán trojúhelník $ABC: A = [4, 3], B = [-3, 2], C = [1, -6]$. Určete vzdálenost těžiště T tohoto trojúhelníku od osy úsečky AB .
- 6) Zjednodušte výraz a uveďte, pro které hodnoty proměnných x, y má výraz smysl

$$\left(\frac{4x^3}{x^3-y^3} : \frac{2x^3}{x^2-2xy+y^2}\right) \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$$

Varianta B:

- 1) Určete všechna reálná x , pro která platí $\sqrt{7x-3} - \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$.
- 2) Pro která reálná x jsou hodnoty výrazu $\log \frac{2x-3}{3x+2}$ v intervalu $\langle 1, 2 \rangle$?
- 3) Určete definiční obor funkce $f: y = \sqrt{\frac{2x^2+9x-5}{x^4-3x^2}} + \frac{2}{x-5}$.
- 4) Upravte výraz $\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} : \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x + \sin x}$.
- 5) Určete vzdálenost dvou rovnoběžek $p: 2x - 3y - 6 = 0$,
 $q: 4x - 6y - 25 = 0$.
- 6) Napište rovnici tečny a normály ke křivce o rovnici $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$

v jejím průsečíku s osou y .

Asi 50 % studentů mechanizační fakulty je ze středních zemědělských škol. Absolventi těchto škol jsou však připravováni především pro praxi; na vysokou školu by se měli hlásit jen ti nejnadanější, kteří jsou schopni si doplnit neprobrané části, či si prohloubit vědomosti získané na střední škole.

Doporučujeme, aby zájemci o studium na VŠ co nejdříve si začali sami opakovat a doplňovat středoškolskou matematiku, případně požádali svého učitele o pomoc, např. ve speciálních kroužcích.

Výzva k samostatnému studiu se týká nejen žáků středních zemědělských škol, ale zejména žáků středních odborných učilišť s maturitou. Ke studiu matematiky lze použít kromě učebnic matematiky pro střední školy též knihu *Ivana Buška* „Řešené maturitní úlohy z matematiky“, kterou vydalo SPN Praha v roce 1985, kde jsou řešeny obtížnější příklady.

Současnost a budoucnost využití audiovizuální techniky v pedagogickém procesu v ČSR

RNDr. JARMILA NOVOTNÁ, CSc., UK Praha

Co je to audiovizuální technika? Je její užití v pedagogickém procesu záležitostí módní nebo moderní? Jak daleko a s jakými výsledky jsme postoupili na tomto poli u nás? To jsou jedny z hlavních otázek, které si lidé v současné době kladou, když se setkají s pojmem audiovizuální technika. Pokusím se v tomto článku stručně odpovědět na tyto otázky a uvést některé zkušenosti z využití audiovizuální techniky ve výuce hlavně na ČVUT v Praze, ale i některé možnosti týkající se ostatních typů škol. Článek samozřejmě nemůže vyčerpat všechny aspekty tak obsáhlého a rychle se rozvíjejícího oboru.

Podívejme se na chvíli o několik století nazpátek. Již velký pedagog *Jan Ámos Komenský* uvádí ve svém díle pozoruhodnou myšlenku, totiž že člověk má vnímat všemi smysly. Zamysleme se nad tím na chvíli. V pedagogickém procesu se už dlouho využívá mluvené slovo, psaný text, modely apod. Málokdy v minulosti se však dařilo kombinovat např. sluchový vjem se zrakovým. A přitom psychologové dokázali, že při jejich kombinaci se mnohokrát zvyšuje nejen pozornost posluchače, ale i množství informací, které mu z výkladu zůstanou v paměti.

Audiovizuální technika rozhodnou měrou přispívá k tomu, že se spojení zrakového a sluchového vjemu stává naprosto přirozeným. Současná mladá generace je ve srovnání s dřívějšími generacemi mnohem lépe od dětství připravována na použití této techniky, je totiž silně ovlivněna tou nejběžnější audiovizuální prezentací, televizí. Starší generace byla zvyklá vnímat hlavně sluchem nebo zrakem a vše si zapisovat. Dnešní mladá generace je zvyklá vnímat zvuk i obraz současně. Objevuje se tu

však nové nebezpečí, nebezpečí, že se televize posluchači stane pouze kulisou, že ji přestává vnímat.

Co je to vlastně audiovizuální technika? Audiovizuální techniku tvoří např. diap projektor, zpětný projektor (to jsou přístroje všeobecně známé), případně diafonový program, tj. spojení mluveného slova z magnetofonu s automatickým promítáním diapositivů na předem určených místech textu. Zvláštní skupiny tvoří videotechnika a počítače. Jejich využití ve výuce je perspektivní.

Používané audiovizuální prostředky se samozřejmě liší podle toho, zda jsou určeny pro přednášky nebo pro individuální výuku. Podívejme se, *jak jsou vybaveny současné moderní učebny na ČVUT*, které využívají základní prostředky audiovizuální techniky. Každá posluchárna je vybavena kromě tabulí promítacími plátny, diap projektem, zpětným projektozem, někde filmovým promítacím přístrojem. Všechny uvedené přístroje (včetně zatemňování oken a regulace osvětlení místnosti) jsou ovládány z panelu, který je u stolu přednášejícího. Osvětlení místnosti může být nastaveno tak, aby nesnižovalo kvalitu promítaných obrázků a textu a přitom umožňovalo posluchačům dělat si poznámky. Nejmodernější posluchárny budou vybaveny zpětnovazebním kontrolním systémem, který dovolí přednášejícímu průběžně zjišťovat okamžité znalosti posluchačů.

Je jasné, že i při využití nejmodernější techniky ve výuce rozhoduje a bude rozhodovat o výsledku vždy osobnost pedagoga. On musí najít správnou míru rozložení výkladu mezi klasické použití křídly s tabulí a audiovizuální prostředky. Musí si uvědomovat všechna úskalí, která před něj moderní technika staví. Na jedné straně její použití usnadňuje práci například tím, že přednášející má možnost připravit si komplikované náčrty a schémata předem, má možnost kombinovat např. obrázky modelů s jejich projekcemi apod., může proto mnohem výrazněji zaujmout posluchače. Na druhé straně však při nevhodném použití, např. při příliš rychlém výkladu, může dojít k tomu, že posluchači nestačí látku pochopit a ještě si ji zapsat, případně jsou brzy unaveni.

Možnost dělat si poznámky při použití audiovizuální techniky je velmi důležitá a nesmí se podceňovat. Na ČVUT se nyní experimentálně zkouší využití speciálních druhů skript, která má každý posluchač k dispozici a kde má již základní text vytištěn. Ve skriptech je ponecháno dost místa pro to, aby si posluchač mohl podle výkladu přednášejícího text doplňovat vlastními poznámkami a nákresy.

Využití diap projektoru je výhodné také pro spojení přednášky se cvičením. Má-li pedagog při cvičení nebo semináři možnost promítnout posluchačům základní údaje z přednášky, odpadá tím někdy zdlouhavé dohadování s posluchači o tom, co se na přednášce probíralo, jak se to značilo apod.

Využití tohoto druhu audiovizuálních prostředků pro výklad se pravděpodobně nebude lišit ani na jiných typech škol. Na vysokých školách není zvykem příliš využívat při přednáškách popularizační filmy a televizní pořady. To je naopak velmi výhodné na základních školách.

Mnohem větší možnosti pro využití audiovizuální techniky se nabízejí při individuálním studiu. Zde se velmi výrazně začínají uplatňovat videomagnetofony a počítače. Podívejme se opět na ČVUT v Praze. Zde byly vybudovány *studovny pro individuální studium vybavené počítači, videomagnetofony a diafonovými jednotkami*. Sem si posluchači jednak přicházejí prohloubit a zopakovat vyloženou látku, jednak řešit zadané problémy. Jeden videomagnetofon je vybaven více sluchátky, aby se posluchači vzájemně nerušili, a pracoviště je upraveno tak, aby každý měl místo na psaní vlastních poznámek. Posluchač přijde do studovny, vypůjčí si příslušnou videokazetu a sám si ji potom přehrává. Má možnost program kdykoliv zastavit, vrátit zpět nebo přetočit dopředu podle své potřeby, program mu na některých místech klade kontrolní otázky apod. Na ČVUT je již vytvořena řada audiovizuálních programů. Jsou to jednak programy určené pro všechny typy fakult na ČVUT hlavně ze základního kurzu fyziky a deskriptivní geometrie, programy pro studium matematiky se nyní tvoří. Kromě nich jsou vytvořeny další programy určené pro studium odborných předmětů na jednotlivých fakultách. Přehled hotových videoprogramů, které jsou k dispozici na ČVUT v Praze, je publikován v edičním středisku ČVUT a je každý rok doplňován.

Jaké jsou zkušenosti s touto formou samostatného studia? Podotkněme nejprve, že účast studentů na této formě studia je naprosto dobrovolná. Přitom například na strojní fakultě ČVUT v Praze bylo v letním semestru 1985/86 zaznamenáno asi 2600 výpůjček a přitom počet posluchačů se pohybuje kolem 1300. To znamená, že v průměru každý posluchač navštívil studovnu dvakrát. Studovna byla využívána i ve zkouškovém období, kdy si posluchači přesně kontrolují využití svého času k přípravě na zkoušky. To vše svědčí o tom, že studenti považují studium s využitím videoprogramů za velmi přínosné. U skupiny asi 400 studentů byl sledován vliv použití studoven s videomagnetofony na výsledky u zkoušek. Ukázalo se, že známky se v průměru zlepšily asi o 0,7 stupně.

Studovny jsou vybaveny, jak už bylo podotknuto, také počítači, kde posluchači řeší individuálně úlohy v rámci studia na vysokých školách technických. Kromě těchto studoven byly vybudovány i *terminálové učebny*. Jejich využití se velmi rychle rozšiřuje, podrobný rozbor této problematiky přesahuje rámec našeho článku. Je třeba mu věnovat značnou pozornost, protože rozvoj počítačů je, a v budoucnosti také bude, velmi rychlý.

Důležitá je otázka zpětné vazby, kontroly, zda posluchač látce po-

rozuměl nebo ne. Videoprogramy jsou proto doplněny kontrolními otázkami většinou ve formě testů. Ideální by bylo, kdyby se podle vybrané odpovědi program buď vrátil na začátek výkladu (jestliže byla odpověď špatná), nebo postoupil na předem určené místo, případně část výkladu úplně vynechal (jestliže posluchač odpověděl částečně nebo úplně správně). Jistě tu hraje úlohu také otázka pravděpodobnosti, že i posluchač, který odpověděl správně, správnou odpověď neznal a náhodou se strefil. Snahou posluchače by však mělo být ne obelstít program, ale něčemu se naučit. Na tomto poli je prozatím situace ve stadiu experimentu, příslušná zařízení jsou na ČVUT pouze v ověřovacím provedení a vzhledem k jejich technické náročnosti si na jejich širší použití budeme muset ještě počkat.

Velmi často diskutovanou otázkou je to, zda je možno stejně dobře jako v oborech s možnostmi názorného výkladu využít videotechniku i při výuce matematiky. Na ČVUT je výukových videoprogramů z matematiky prozatím málo, další se připravují, ale ukazuje se, že ani vysoká teoretičnost některých matematických partií není nepřekonatelnou překážkou.

V oblasti individuální výuky se asi v mnohem větší míře než při výkladu projeví rozdíl mezi vysokými školami, středními školami a základními školami. Na základních školách není prozatím možno nechat žáky individuálně bez pedagogického dozoru masově pracovat s přístroji, jako jsou videomagnetofony a počítače. Kromě toho vzhledem k mnohem většímu počtu žáků na těchto školách ve srovnání se školami vysokými je prozatím vybavení těchto škol dostatečným počtem odpovídajících přístrojů nákladné. Zdá se, že by bylo vhodnější pro individuální výuku s využitím videoprogramů na základních školách využít videomagnetofony v rodinách a půjčování výukových videokazet veřejnými půjčovnami. Na středních a základních školách by se měly v mnohem větší míře využívat videoprogramy při hromadném výkladu, kde by nahrazovaly část výkladu, případně promítání filmů apod. Je zde však zatím mnoho nedořešených otázek, např. masová výroba programů, obsluha a údržba přístrojů apod.

Základní a střední školy jsou většinou vybaveny dostatečným počtem diaprojektorů, promítacích přístrojů, případně i zpětných projektorů. Podívejme se, jak by se dalo poměrně bez velkých investic pomoci pedagogům v jejich využití. *Co musí audiovizuální technika na základních a středních školách splňovat?* Musí být lehce přístupná, snadno ovladatelná, nesmí vyžadovat složité manipulace s přístroji a, co je nejdůležitější, musí existovat bohaté technické zázemí hlavně při přípravě materiálů. Tomuto problému se věnuje např. n. p. Komenium, které postupně připravuje soubory fólií pro výuku v jednotlivých ročnících. Fólie je možno promítat při výkladu látky, případně vrstvit na sebe tak, aby se postupně předvedlo řešení problému. Učitel je může při

výkladu doplňovat také vlastními poznámkami. Žáci mají k dispozici učebnice s velmi názorně (barevně) provedenými obrázky, schémata, mapami apod., ale prozatím je pedagog neměl možnost například promítnout pro celou třídu a využívat je při výkladu učiva. Jestliže každý žák sleduje výklad na obrázku ve své učebnici, nemá učitel jistotu, že všichni žáci pochopí výklad správně.

Využití audiovizuální techniky na všech typech škol je třeba věnovat prvořadou pozornost a hledat řešení otázek, které s ním souvisí, využitím zkušeností od nás i ze zahraničí. Tento program je velmi náročný nejen z hlediska přípravy moderních audiovizuálních pomůcek, ale zejména bude velmi náročný z hlediska vysokých finančních nároků a nezbytnosti vybudování sítě technického servisu pro tuto techniku. Je nutno vzít v úvahu, že životnost videokazet, videomagnetofonů atd. je omezená. Záznam na videokazetě je možno použít asi 400krát a potom je nutno záznam obnovit. Z tohoto hlediska a z hlediska rychlejšího přístupu k jednotlivým částem videozáznamu bude v budoucnu výhodnější použití videodesek. Ty jsou také lépe využitelné v kombinaci s počítačem.

Při zavádění moderní videotechniky je však především nutno mít na paměti, že ať je použitá technika při výuce sebemodernější, základem vždy zůstane pedagog a jeho schopnosti. Proto učitelské povolání by mělo být posláním.

Závěrem chci poděkovat pracovníkům Výzkumného ústavu inženýrského studia ČVUT, strojní fakulty ČVUT a n. p. Komenium za pomoc při shromažďování materiálů k tomuto článku.

Kalendár M-F: máj 1987

2. V. 1802 sa v Berlíne narodil *Heinrich Gustav Magnus*, nemecký fyzik a chemik. Pracoval v oblasti mechaniky, hydrodynamiky, optiky, magnetizmu, elektrolýzy, termoelektriny. Potvrdil, že tepelná rozťažnosť skoro všetkých plynov je rovnaká.
3. V. 1892 sa v Cambridgi narodil *George Paget Thomson*, anglický fyzik. Bol členom Royal Society v Londýne, nositeľom Nobelovej ceny za fyziku. Prispel k rozvoju elektrónografie, overil experimentálne Broglieov vzťah medzi vlnovou dĺžkou a hybnosťou elementárnych častíc.
3. V. 1902 sa v Guebweileri narodil *Alfred Kastler*, francúzsky fyzik. Študoval magnetické a optické usmerňovanie atómov. V roku 1966

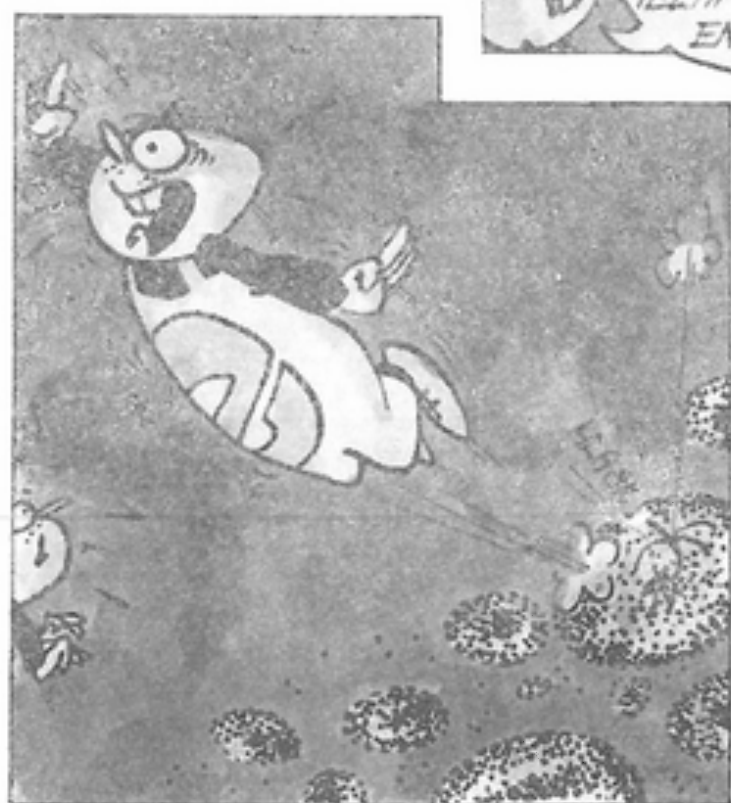
získal Nobelovu cenu za objav a rozvíjanie optických metód Hertzo-
vých rezonancií v atónoch.

4. V. 1677 zomrel *Isaac Barrow*, anglický matematik. Učil I. Newtona. Vysvetlil vzťah medzi integráciou a diferenciáciou. Preložil do latinčiny Euklidove Základy a spisy Archimeda.
10. V. 1822 zomrel v Modene *Paolo Ruffini*, taliansky matematik. Študoval racionálne korene rovníc a pokúsil sa podať dôkaz o nemožnosti riešenia všeobecnej rovnice 5. stupňa pomocou radikálov.
14. V. 1832 sa v Königsbergu (dnes Kaliningrad) narodil *Rudolf Lipschitz*, nemecký matematik. Zaoberal sa teóriou čísel, riešením diferenciálnych rovníc, viacrozmernou geometriou a teóriou funkcií.
18. V. 1872 sa v Trelleku narodil *Bertrand Arthur William Russell*, anglický matematik, logik, filozof. Pokúšal sa odvodiť aritmetické pojmy z logiky, riešil antinómie teórie množín. Za mnohostranné a významné diela, v ktorých zastával humanistické ideály a slobodu myslenia, dostal roku 1950 Nobelovu cenu za literatúru.
20. V. 1947 zomrel v Messelhausene *Philipp Lenard*, nemecký fyzik. Roku 1905 získal Nobelovu cenu za významné práce o katódových lúčoch. Objavil zákonitosti fotoelektrického javu. Zistil, že vzduch sa ultrafialovými lúčmi ionizuje.
21. V. 1792 sa v Paríži narodil *Gustave Gaspard Coriolis*, francúzsky fyzik a matematik. Aplikoval mechaniku na teóriu jednoduchých strojov, objavil zrýchlenie pri pohybe telesa v zrýchlenom systéme.
23. V. 1857 zomrel v Scaux *Augustin Louis Cauchy*, francúzsky matematik a fyzik. Zaoberal sa matematickou analýzou a teoretickou fyzikou. Rozvinul teóriu nekonečných radov, teóriu komplexných funkcií, prispel k aritmetizácii analýzy.
26. V. 1667 sa narodil vo Vitry *Abraham de Moivre*, francúzsky matematik. Pôsobil v Londýne. Prispel k teórii nekonečných radov, trigonometrii, počtu pravdepodobnosti.
27. V. 1897 sa v Todmordene narodil *John Douglas Cockcroft*, anglický fyzik. Postavil prvý anglický jadrový reaktor. Za práce v transmutácii atómových jadier získal roku 1951 Nobelovu cenu za fyziku spolu s E. Waltonom.
28. V. 1872 sa narodil *Marian Smoluchowski*, poľský fyzik. Pracoval v štatistickej fyzike, vysvetlil Brownov pohyb.
31. V. 1832 v Paríži zomrel *Evariste Galois*, francúzsky matematik. Vytvoril koncepciu teórie grúp, prispel k teórii riešenia rovníc.

dj

REPORTAŽE Z MIKROSVETA





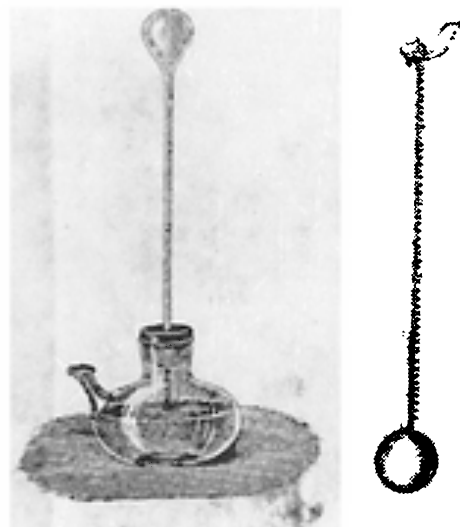
PÍŠE: J. CHRAPAN KRESÍ: V. HISTRÍK

Galileiho - Filonův termoskop

Na připojeném obrázku vidíme vlevo Galileiho termoskop z r. 1597, vpravo teploměr florentinské Akademie pokusu z r. 1654. Vynálezem těchto přístrojů byla založena termometrie, nejstarší odvětví termiky. Termoskop však vynalezl takřka 2000 let před Galileim antický učenec *Filon* z *Byzance* (asi 300—250 před n. l.); oba však netušili, že termoskop (= teplojev) reaguje nejen na změny teploty, ale i atmosférického tlaku.

Zobrazený termoskop je baňka se vzduchem přecházející v kapiláru s obarvenou vodou, konec kapiláry je ponořen v nádobce s vodou. Protože kapilára nebyla zatavena, projevoval se zmíněný vliv tlaku vzduchu. Po objevu atmosférického tlaku Galileiho žáci kapiláru zatavili a vytvořili tak první skutečný termometr (= teploměr), ovšem s jen nahodilou stupnicí.

Vědecká instituce, k níž Galileiho žáci patřili, se nazývala *Accademia del Cimento* (= cementová), protože její členové si slíbili, že budou držet pohromadě jako cement a ne tak volně jako členové *Accademia del crusca* (= otrubové). Přestože se i „cementová“ akademie brzy rozpadla, její význam v dějinách fyziky je nesmírný. Zahájila totiž *výzkum fyzikálních jevů metodou matematickou*



Obr. 312. Galileiho termoskop
a teploměr florentinské akademie

178

a experimentální, postupovali podle hesla „zkoušet a znovu zkoušet“, ptát se přírody. Dosavadní scholastickou metodu pěstovanou na univerzitách — řešit fyzikální problémy filozofickou spekulací — přemohla další generace vědců, která získávala technicky využitelné poznatky díky nové metodě. Tak vznikla novodobá fyzika v dnešním smyslu.

Je trochu podivné, že objev konstantní hodnoty teploty varu a tání vody hned nevyužili k stanovení základních bodů teploměrné stupnice; to čekalo až na vědce 18. století.

Vladimír Malíšek

Čo je matematika?

Matematika je doktrína, ktorej nie je známe, o čom sa hovorí a či je pravdivé, čo sa hovorí.

B. Russell

Matematika je umenie dávať rôznym veciam jedno a to isté meno.

H. Poincaré

Vydáva ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1987.

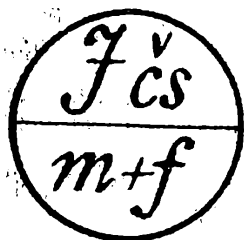
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

**ROČNÍK 65, 1986/87
ČERVEN**

(10)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY matematicko- fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný,
CSc., UK Bratislava, Stanislav Ho-
rák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr.
Ján Chrapan, CSc., VVTŠ-ČSSP Lip-
tovský Mikuláš, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Ja-
nout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr.
Hana Kořínková, CSc., VŠZ Pra-
ha, doc. dr. Karol Križalkovič, CSc.,
PF Nitra, prof. dr. Vladimír Majer-
ník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Josef
Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich
Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jarošlav
Šedivý, CSc., UK Praha, inq. dr. Vác-
lav Šindelář, CSc., Praha, doc. dr.
Martin Šolc, CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-No-
vé Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

Emil Calda: Kuželosečky a grafy někte- rých funkcí	397
Ivan Bušek: Vzdálenost bodu od přím- ky v analytické geometrii .	401
Jaromír Šimša: Dolní odhady rozdílu průměrů	403
Jiří Machalický: Řešení pohybu relativis- tické částice (elektronu) v homogen- ním elektrickém poli	407
Jiří Mída: Sedmdesát pět let tisňového signálu SOS	412
Emil Kašpar: Dvě fyzikální úlohy	414
Tomáš Schütz: Úlohy ze zahraničních časopisů	414
Emil Calda: Cantorův půlnoční sen .	415
Úlohy 29. ročníku fyzikální olympiády	416
dj: Kalendár M-F	434
Z nových knih	439
Vladimír Malíšek: Havelský dalekohled . 3. str. obálky	

Kuželosečky a grafy některých funkcí

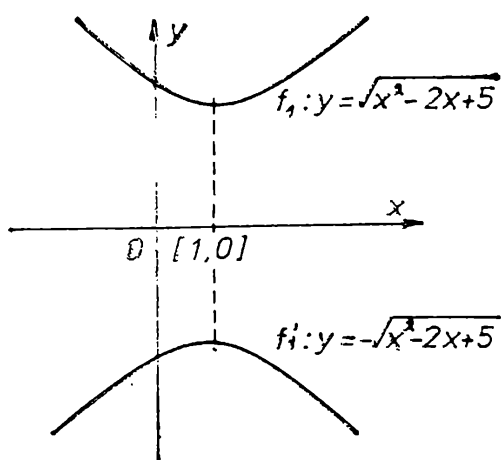
RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

V hodinách matematiky se v tématu věnovaném analytické geometrii seznamujete s rovnicemi kružnice, elipsy, paraboly a hyperboly. Ukážeme si, jakým způsobem lze těchto poznatků využít k vyšetřování průběhu funkcí $f: y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, kde a, b, c jsou libovolná reálná čísla, $a \neq 0$. Nejprve si tento postup vysvětlíme na konkrétní úloze požadující sestavit graf funkce $f_1: y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

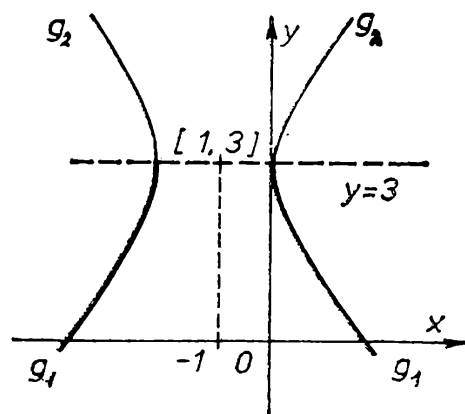
Leží-li bod $[x, y]$ na grafu funkce f_1 , je zřejmé, že leží též na křivce o rovnici $y^2 = x^2 - 2x + 5$. Úpravou této rovnice na tvar

$$\frac{y^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

dostáváme, že každý bod grafu funkce f_1 leží na hyperbole se středem v bodě $[1, 0]$ a s poloosami $a = b = 2$ (viz obr. 1). Grafem funkce f_1 je



Obr. 1



Obr. 2

však pouze část této křivky, neboť hyperbola na obr. 1 nemůže být grafem žádné funkce; každá rovnoběžka s osou y protne totiž tuto hyperbolu ve dvou bodech, což pro graf jakékoliv funkce není možné. Jakou částí uvedené hyperboly graf funkce f_1 je, zjistíme snadno následujícím způsobem: Rovnice

$$\frac{y^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

je ekvivalentní s rovnicí

$$|y| = \sqrt{x^2 - 2x + 5},$$

z níž vyplývá, že zkoumaná hyperbola je sjednocením grafů dvou funkcí: pro $y \geq 0$ je to daná funkce $f_1: y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$, pro $y \leq 0$ je to funkce $f'_1: y = -\sqrt{x^2 - 2x + 5}$. Hledaným grafem funkce f_1 je tedy ta část hyperboly na obr. 1, která leží nad osou x .

Tento postup lze použít i v případě funkce $g: y = d + k\sqrt{ax^2 + bx + c}$, kde a, b, c, d, k jsou reálná čísla, $a \neq 0, k \neq 0$. Snadno tak např. zjistíte, že grafem funkce $g_1: y = 3 - 2\sqrt{x^2 + 2x}$ je ta část hyperboly

$$(x + 1)^2 - \frac{(y - 3)^2}{4} = 1,$$

která leží pod přímkou $y = 3$ (viz obr. 2); část hyperboly ležící nad touto přímkou je grafem funkce $g_2: y = 3 + 2\sqrt{x^2 + 2x}$.

Vraťme se nyní k funkci $f: y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, kde $a \neq 0$, a pokusme se obecně zjistit, jaké křivky přicházejí jako její graf v úvahu. Víme už, že každý bod $[x, y]$ grafu funkce f leží na křivce $y^2 = ax^2 + bx + c$, tj. na křivce

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - y^2 = \frac{D}{4a},$$

kde $D = b^2 - 4ac$. Uvažujme nejprve případ $D = 0$. Pro $a > 0$ představuje rovnice

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - y^2 = 0$$

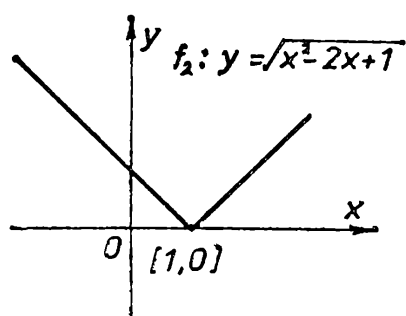
dvě různoběžky, jak se lehce přesvědčíte, vyjádříte-li její levou stranu jako součin. Pro $a < 0$ vyjadřuje tato rovnice jediný bod, a to bod $\left[-\frac{b}{2a}, 0\right]$. Graf funkce f je tedy pro $D = 0, a > 0$ částí dvou různoběžek a pro $D = 0, a < 0$ je grafem funkce f jediný bod. Přesvědčte se o tom na funkcích $f_2: y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, $f_3: y = \sqrt{-x^2 - 2x - 1}$, jejichž grafy jsou zobrazeny pořadě na obr. 3 a obr. 4.

V případě, že je $D \neq 0$, uvedeme rovnici

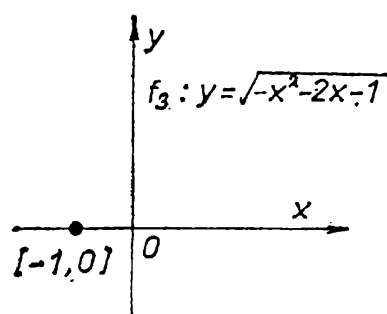
$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - y^2 = \frac{D}{4a}$$

na tvar

$$\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{D}{4a^2}} - \frac{y^2}{\frac{D}{4a}} = 1$$



Obr. 3



Obr. 4

a rozlišíme následující možnosti:

1. Je-li $D > 0$, $a > 0$, jde o hyperbolu

$$\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1, \text{ kde } A^2 = \frac{D}{4a^2}, B^2 = \frac{D}{4a};$$

2. je-li $D > 0$, $a < 0$, jde o elipsu nebo kružnici

$$\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \text{ kde } A^2 = \frac{D}{4a^2}, B^2 = -\frac{D}{4a};$$

3. je-li $D < 0$, $a > 0$, jde o hyperbolu

$$-\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \text{ kde } A^2 = -\frac{D}{4a^2}, B^2 = -\frac{D}{4a};$$

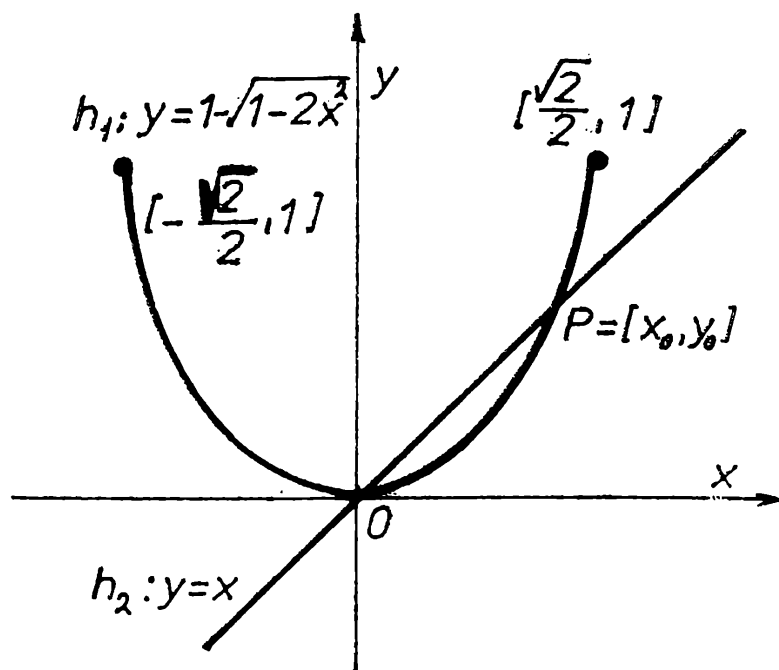
4. je-li $D < 0$, $a < 0$, jde o prázdnou množinu, neboť rovnici

$$-\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1, \text{ kde } A^2 = -\frac{D}{4a^2}, B^2 = \frac{D}{4a},$$

nevyhovuje žádná uspořádaná dvojice $[x, y]$.

Všimněte si ještě, že pro $D > 0$, $a = -1$ dostáváme kružnici a pro $a = 1$, $D > 0$ nebo $a = 1$, $D < 0$ rovnosou hyperbolu. Zjištění, jakou částí výše uvedených množin bodů je graf funkce f , vám jistě nebude činit potíže: v případech 1. až 3. je graf funkce f částí kuželosečky nad osou x nebo na ní, v případě 4. je tímto grafem prázdná množina. Stojí rovněž za povšimnutí, že pro žádná reálná čísla $a \neq 0$, b , c neleží graf funkce $f: y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ na parabole; takovýto případ nastane pouze pro $a = 0$, $b \neq 0$, kdy uvažovaný graf je částí paraboly $y^2 = bx + c$.

Závěrem si ukážeme, jakým způsobem je možno těchto poznatků použít pro řešení příkladu, který byl zadán ve 14. ročníku matematické olympiády v kategorii B:



Obr. 5

Určete všechna reálná čísla x , která splňují nerovnici

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 1$$

Znalost průběhu funkce $h_1 : y = 1 - \sqrt{1 - 2x^2}$ nám umožní vyřešit tuto úlohu graficky. V první řadě je zapotřebí se vyhnout grafu funkce $h : y = \frac{1}{x} \left(1 - \sqrt{1 - 2x^2} \right)$, jehož zkoumání by se neobešlo bez potíží.

Dosáhneme toho tak, že danou nerovnici budeme řešit zvlášť v množině $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel a zvlášť v množině $\mathbb{R}^-$ všech reálných čísel záporných; vynecháváme přitom nulu, která dané nerovnici nevyhovuje.

V $\mathbb{R}^+$, tj. pro $x > 0$, je daná nerovnice ekvivalentní s nerovnicí

$$1 - \sqrt{1 - 2x^2} \leq x$$

a v $\mathbb{R}^-$, tj. pro $x < 0$, s nerovnicí

$$1 - \sqrt{1 - 2x^2} \geq x.$$

Způsobem uvedeným výše snadno zjistíte, že graf funkce $h_1 : y = 1 - \sqrt{1 - 2x^2}$ je ta část elipsy

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{(y - 1)^2}{1^2} = 1,$$

pro jejíž body $[x, y]$ je $y \leq 1$. Z obr. 5, v němž je graf funkce h_1 spolu s grafem funkce $h_2 : y = x$ sestrojen, vyplývá:

V $\mathbb{R}^+$ splňují danou nerovnici právě ta x , která jsou x -ovou souřadnicí bodů eliptického oblouku h_1 ležících pod přímkou h_2 nebo na ní; jsou to

právě všechna $x \in (0, x_0 > ,$ kde x_0 je x -ová souřadnice průsečíku $P \neq 0$ přímky h_2 s eliptickým obloukem h_1 . Číslo x_0 tedy určíme snadno, a to jako kladný kořen rovnice $1 - \sqrt{1 - 2x^2} = x$; přesvědčte se sami, že je $x_0 = \frac{2}{3}$. V $\mathbb{R}^-$ splňují danou nerovnici právě ta x , která jsou x -ovou souřadnicí bodů eliptického oblouku h_1 , které leží nad přímkou h_2 ; jsou to právě všechna $x \in \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\rangle$.

Tím je úloha vyřešena: v množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel vyhovují nerovnici

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 1$$

právě všechna x , pro něž platí: $x \in \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\rangle \cup \left(0, \frac{2}{3} \right)$. Máte-li

k dispozici závěrečný svazek 14. ročníku MO, nebude pro vás neužitečné porovnat řešení této úlohy uvedené v něm s řešením ukázaným výše.

Vzdálenost bodu od přímky v analytické geometrii

Dr. IVAN BUŠEK, Pedagogický ústav hl. m. Prahy

Při řešení úloh není vhodné spokojit se pouze s tím, že úlohu správně vyřešíme. Je důležité zamyslet se, zda by bylo možno danou úlohu vyřešit jiným, efektivnějším způsobem. Přistupujeme-li k řešení úloh z tohoto hlediska, pomůže nám to v mnohých případech i hlouběji pochopit souvislosti mezi jednotlivými partiemi učiva matematiky.

Ukažme si nyní různé způsoby řešení jedné úlohy z analytické geometrie v prostoru, v níž se požaduje určení vzdálenosti bodu od přímky.

Vypočítejte vzdálenost bodu $A[6; -6; 5]$ od přímky p dané parametrickým vyjádřením $x = 6 + 2t$, $y = 2t$, $z = 2 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Řešte různými způsoby.

Řešení. První způsob:

Platí $v(A; p) = v(A; P)$, kde P je pata kolmice vedené bodem A na přímku p . Bod $P \in p$, to znamená, že $P[6 + 2t; 2t; 2 + t]$. Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{PA}$ má souřadnice $(-2t; -6 - 2t; 3 - t)$. Směrový vektor přímky p je $\mathbf{u} = (2; 2; 1)$. Protože vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou navzájem kolmé, platí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, tj.

$$2 \cdot (-2t) + 2 \cdot (-6 - 2t) + 1 \cdot (3 - t) = 0.$$

Odtud po úpravě dostaneme $t = -1$, takže $P[4; -2; 1]$ a $\mathbf{v} = (2; -4; 4)$.

$$v(A; p) = v(A; P) = |\mathbf{v}| = \sqrt{36} = 6.$$

Druhý způsob:

Bodem A vedeme rovinu ρ kolmou k přímce p . Označme K průsečík přímky p a roviny ρ . Zřejmě platí $v(A; p) = v(A; K)$.

Rovina ρ : $ax + by + cz + d = 0$.

Směrový vektor $\mathbf{u} = (2; 2; 1)$ přímky p je normálovým vektorem roviny ρ , proto

$$2x + 2y + z + d = 0$$

Zároveň platí $A \in \rho$, tedy

$$12 - 12 + 5 + d = 0,$$

odkud

$$d = -5.$$

Rovina ρ má rovnici $2x + 2y + z - 5 = 0$. Souřadnice průsečíku K přímky p a roviny ρ získáme řešením rovnice

$$2 \cdot (6 + 2t) + 2 \cdot 2t + 2 + t - 5 = 0,$$

odkud

$$t = -1,$$

takže $K[4; -2; 1]$.

Platí $K = P$, a proto $v(A; p) = v(A; P) = v(A; K) = 6$.

Třetí způsob:

Vzdálenost bodu A od přímky p je minimální velikost úsečky AX , kde $X \in p$. Protože X je bodem přímky p , platí $X[6 + 2t; 2t; 2 + t]$.

$$|AX| = \sqrt{(6 - 6 - 2t)^2 + (-6 - 2t)^2 + (5 - 2 - t)^2}$$

Po úpravě dostaneme $|AX| = 3\sqrt{t^2 + 2t + 5} = 3\sqrt{t^2 + 2t + 1 + 4} = 3\sqrt{(t + 1)^2 + 4}$.

Je patrné, že tato funkce proměnné t nabývá svého minima $3\sqrt{4} = 6$ v bodě $t = -1$. Tedy $X[4; -2; 1]$, tj. $X = P$ a

$$v(A; p) = v(A; X) = 6.$$

Čtvrtý způsob:

Ze systému kulových ploch se středem v bodě A hledáme tu kulovou plochu, která má s přímkou p právě jeden společný bod.

$$\tau: (x - 6)^2 + (y + 6)^2 + (z - 5)^2 = r^2$$

$$p: x = 6 + 2t, y = 2t, z = 2 + t, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li z rovnic parametrického vyjádření přímky p do rovnice kulové plochy τ , dostaneme rovnici

$$(6 + 2t - 6)^2 + (2t + 6)^2 + (2 + t - 5)^2 = r^2$$

Rovnici upravíme na tvar

$$9t^2 + 18t + 45 - r^2 = 0.$$

Určíme hodnotu parametru r tak, aby uvedená kvadratická rovnice

měla právě jedno řešení. Položíme tedy $D = 0$, to znamená, že řešíme rovnici

$$18^2 - 4 \cdot 9 \cdot (45 - r^2) = 0,$$

odkud $r = 6$.

Dolní odhady rozdílu průměrů

RNDr. JAROMÍR ŠIMŠA, CSc., UJEP Brno

Čtenářům Rozhledů jsou pojmy aritmetického a geometrického průměru n čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ patrně dobře známy. Jde o veličiny určené vzorci

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{a} \quad G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

které mají tuto základní vlastnost: Pro libovolná nezáporná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnost $A \geq G$, přitom případ $A = G$ nastane, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Několik pěkných důkazů této vlastnosti, která patří k pilířům teorie nerovností, spolu s ukázkami jejího užití při řešení úloh naleznete v brožurě A. Kufnera „Nerovnosti a odhady“ (Mladá fronta 1975). Na nerovnost

$$A - G \geq 0 \tag{1}$$

můžeme pohlížet jako na *dolní odhad* rozdílu mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Protože termín *odhad* usnadňuje naše vyjadřování v mnoha matematických situacích, podáme nyní jeho upřesnění.

Nechť ve výrazech K, L, M vystupují čísla x_j z některé předem dané množiny X . Řekneme, že výraz L je *dolní odhad* výrazu K na množině X , právě když platí $K \geq L$ pro všechna čísla x_j z X . Jsou-li L a M dva dolní odhady výrazu K na množině X , pak výraz L nazveme *přesnějším odhadem* než M , právě když pro všechna x_j z X platí $L \geq M$, ne však $L = M$ pro všechny hodnoty x_j současně. Nahrazením znamének $\geq$ znaménky $\leq$ se poslední dvě věty změní na definice *horního odhadu* a *přesnějšího horního odhadu*. Poznamenejme ještě, že dolním resp. horním odhadem nazýváme nejen výraz L , ale i samotnou nerovnost $K \geq L$ resp. $K \leq L$.

Nyní můžeme stručně popsat náš cíl: budeme se zabývat dolními odhady výrazu $A - G$, které jsou přesnější než (1). Dříve než objasníme význam této otázky, předešleme následující úvahu. Z nerovnosti (1) okamžitě plyne přesnější odhad

$$A - G \geq \frac{A - G}{2}. \tag{2}$$

Jistě však tušíte, že tento odhad nemá ve srovnání s (1) žádné přednosti.

Nejde jen o to, že nerovnosti (1) a (2) jsou ekvivalentní, podstatné je i to, že výraz v pravé straně (2) je stejně „složitý“ jako výchozí výraz $A - G$; oba totiž obsahují n -tou odmocninu a jsou proto *iracionální*. Přiblížili jsme se tak obecnému významu odhadů v matematice — zkoumané výrazy odhadujeme jinými, jednoduššími, vhodnými pro naše konkrétní účely (např. pro usnadnění numerických výpočtů).

V našem případě požadavek jednoduchosti stanovíme takto: budeme hledat dolní odhady rozdílu $A - G$, které jsou *racionálními* výrazy, tj. výrazy, které získáme z veličin $x_1, x_2, \dots, x_n$ po konečném počtu operací sčítání, násobení, odčítání a dělení. Taková úloha je v případě obecného n velmi obtížná, vždyť i důkaz nejjednoduššího odhadu (1) není snadný.

Začneme proto s případem $n = 2$. Jako první dokážeme odhad

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \quad (3)$$

na množině všech kladných čísel a, b . Využijeme přitom rovnost

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}, \quad (4)$$

ze které plyne i tvrzení o nerovnosti (1) pro $n = 2$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad (5)$$

neboť výraz v pravé části (4) nabývá pouze nezáporných hodnot. Další úpravou tohoto výrazu dostaneme rovnost

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(a-b)^2}{2(a+2\sqrt{ab}+b)}. \quad (6)$$

Kladný jmenovatel posledního zlomku není podle (5) větší než $4(a+b)$. Tím je důkaz odhadu (3) ukončen.

Cvičení 1. Dokažte pomocí (3), že chyba při zaokrouhlení $\sqrt{10\,200} \doteq 101$ je menší než 0,005.

Cvičení 2. V souvislosti s odhadem (3) dokažte následující tvrzení: Nechť U a V jsou kladné konstanty. Odhad

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2}{Ua + Vb} \quad (7)$$

platí na množině všech kladných čísel a, b , právě když zároveň $U > 2$, $V > 2$ a $(U-2)(V-2) \geq 4$. Žádný odhad (7) není přesnější než (3). Je-li jedno z čísel U, V menší než 4, pak ani dolní odhad (3) není přesnější než (7); tehdy jde o tzv. *nesrovnatelné* dolní odhady.

Zamyslíme-li se nad uvedeným důkazem nerovnosti (3), zjistíme, že jeho podstatou byl horní odhad iracionálního jmenovatele zlomku v (6) racionální funkcí s pomocí odhadu (5). Pro tento horní odhad však nyní můžeme využít i dokázanou nerovnost (3); podle ní platí

$$a + 2 \cdot \sqrt{ab} + b \leq a + 2 \left(\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \right) + b = \frac{(a+3b) \cdot (3a+b)}{2(a+b)}.$$

Z této nerovnosti a (6) pak plyne nový dolní odhad

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2 \cdot (a+b)}{(a+3b) \cdot (3a+b)}. \quad (8)$$

Lze předpokládat, že odhad (8) je přesnější než (3), neboť pro horní odhad jmenovatele zlomku v (6) byl použit odhad (3), který je přesnější než (5).

Cvičení 3. Ověřte bezprostředně, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\frac{(a-b)^2 \cdot (a+b)}{(a+3b) \cdot (3a+b)} \geq \frac{(a-b)^2}{4(a+b)};$$

přitom rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $a = b$.

Cvičení 4. Dokažte následující tvrzení: Nechť U a V jsou kladné konstanty. Odhad

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2 \cdot (a+b)}{U(a^2 + b^2) + 2V \cdot ab} \quad (9)$$

platí na množině všech kladných čísel a, b , právě když platí

$$U > 2 \text{ a } V \geq U + \frac{2}{U-2} \quad (2 < U < 3) \text{ resp. } V \geq 8 - U \quad (U \geq 3).$$

Žádný odhad (9) není přesnější než (8). Odhad (8) je přesnější než (9), právě když buď $U > 3$, nebo $U = 3$ a $V > 5$.

Cvičení 5. Ukažte, že dolní odhad (9) je přesnější než (3), právě když $3 \leq U < 4$ a $V = 8 - U$.

Využijeme-li nyní pro horní odhad jmenovatele zlomku v (6) nerovnost (8), dostaneme nový odhad

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2 \cdot (a+3b) \cdot (3a+b)}{8(a+b) \cdot (a^2 + 6ab + b^2)}. \quad (10)$$

Cvičení 6. Ověřte platnost posledního odhadu a ukažte, že je přesnější než (8).

Popsaný postup získání nových odhadů můžeme znovu a znovu opakovat. Získáme tak posloupnost (3), (8), (10), stále přesnějších dolních odhadů. Vzniká otázka, zda mezi všemi racionálními dolními odhady existuje nejpřesnější odhad. Záporná odpověď na tuto otázku plyne z výsledků dvou následujících cvičení.

Cvičení 7. Nechť na množině všech kladných čísel a, b platí odhad

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq L(a, b). \quad (11)$$

Dokažte, že pokud dolní odhad

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2}{4(a+b) - 4L(a,b)}$$

není přesnější než (11), pak v (11) nastává rovnost pro každou dvojici čísel a, b .

Cvičení 8. Dokažte, že neexistuje racionální výraz $L(a, b)$, který splňuje rovnost v (11) pro každá kladná čísla a, b .

(Návod: Předpokládejte, že takový výraz $L(a, b)$ existuje. Rovnost

$$a = \left(\frac{a+1}{2} - L(a, 1) \right)^2 \quad (a > 0)$$

je rovností dvou polynomů proměnné a ; stupeň tohoto polynomu je podle levé strany roven jedné, podle pravé strany je sudé číslo, což je spor.)

Na závěr odvodíme dolní odhad výrazu $A - G$ v případě libovolného $n \geq 2$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{1}{2(n^2 - n)} \sum_{i < j} \frac{(x_i - x_j)^2}{x_i + x_j} \quad (12)$$

na množině všech kladných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$. Abychom (12) dokázali, sestavme $p = (n^2 - n)/2$ čísel tvaru $y_{ij} = \frac{(x_i - x_j)^2}{x_i + x_j}$, kde $1 \leq i < j \leq n$. Pro čísla y_{ij} platí podle (3) odhady

$$y_{ij} \leq \frac{x_i + x_j}{2} - \frac{(x_i - x_j)^2}{4(x_i + x_j)}. \quad (13)$$

Snadno se ověří, že geometrický průměr všech p čísel y_{ij} je shodný s geometrickým průměrem n čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$. Proto lze nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro systém čísel y_{ij} zapsat takto:

$$\frac{2}{n^2 - n} \sum_{i < j} y_{ij} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (14)$$

Odhad (12) nyní snadno dostaneme z (13) a (14), neboť platí

$$\frac{2}{n^2 - n} \sum_{i < j} \frac{x_i + x_j}{2} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Tím je důkaz (12) ukončen.

Cvičení 9. Odhad (12) je přímým zobecněním odhadu (3), neboť (3) získáme, položíme-li v (12) $n = 2$. Najděte dolní odhad výrazu $A - G$, který by byl přímým zobecněním odhadu (8) na libovolné $n \geq 2$.

Cvičení 10. Dokažte dolní odhad

$$\frac{(a-b)^2}{8(a+b)} + \frac{(c-d)^2}{8(c+d)} + \frac{(ab-cd)^2}{4(a+b+c+d) \cdot (ab+cd)}$$

rozdílu mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čtyř kladných čísel a, b, c, d . (Návod: Využijte výraz

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{4} + \frac{(\sqrt{c} - \sqrt{d})^2}{4} + \frac{(\sqrt[4]{ab} - \sqrt[4]{cd})^2}{2}$$

a odhadněte každý jeho sčítanec.)

Cvičení 11. Dolní odhad z předchozího cvičení je *nesymetrický* vzhledem k číslům a, b, c, d ; vypište další dva odhady záměnou pořadí čísel a, b, c, d . Z těchto odhadů pak odvodte symetrický dolní odhad, který je přesnější než (12) pro $n = 4$.

FYZIKA

Řešení pohybu relativistické částice (elektronu) v homogenním elektrickém poli

Ing. JIŘÍ MACHALICKÝ, CSc., ČVUT Praha

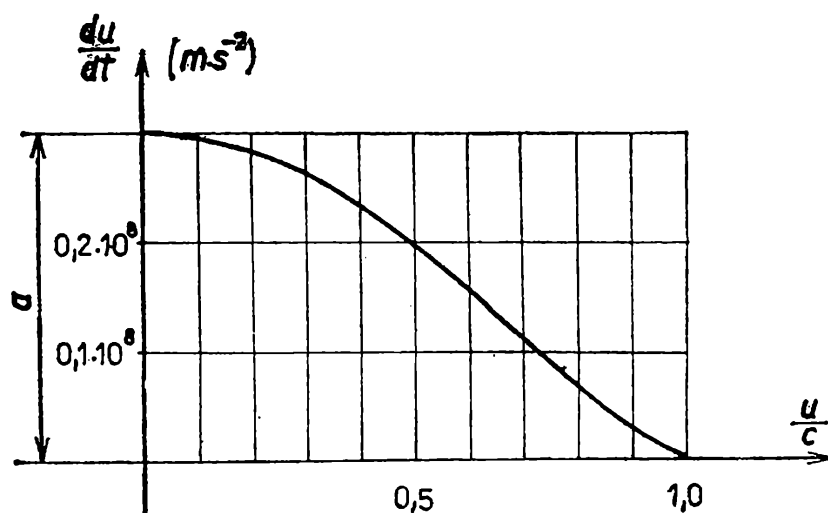
Vyšetřete pohyb elektronu, na který působí elektrostatické pole intenzity $E = \text{konst.}$ Předpokládejte, že v okamžiku $t = 0$, kdy začalo pole působit, byl elektron v klidu (rychlost $v(0) = 0$) a zrychlení elektronu v okamžiku $t = 0$ mělo velikost $a = 0,3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Za rychlost světla ve vakuu dosazujte přibližnou hodnotu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení :

1. Protože jde o pohyb relativistické částice, jejíž hmotnost m vzrůstá s rychlostí u v pozorovací soustavě, bude se zrychlení $\frac{du}{dt}$ se vzrůstající rychlostí zmenšovat. Závislost zrychlení na velikosti rychlosti odvodíme z pohybové rovnice elektronu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = F, \quad (1)$$

v níž m_0 je klidová hmotnost elektronu a $F = -eE$ je síla, jíž elektron podléhá ($e \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ je elementární náboj). Na levé straně rov.



Obr. 1

(1) je třeba provést derivaci podílu dvou funkcí $\left(u \text{ a } \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$. Nebude snad na škodu, rozepíšeme-li tuto operaci podrobně

$$m_0 \frac{\frac{du}{dt} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - u \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{2u}{c^2}\right) \right] \cdot \frac{du}{dt}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = F$$

Odtud po algebraické úpravě vychází už hledaný výraz pro zrychlení elektronu

$$\frac{du}{dt} = \frac{F}{m_0} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

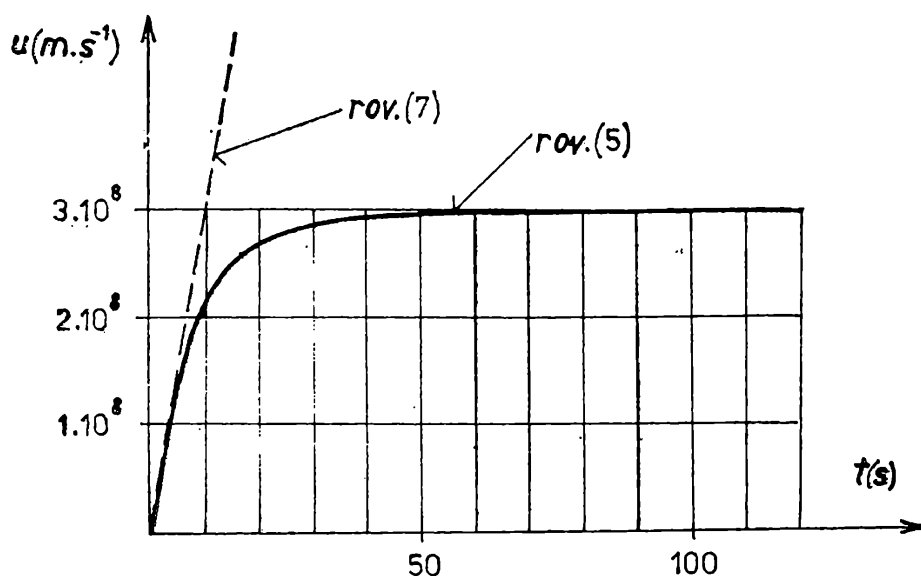
Podíl $\frac{F}{m_0}$ je zrychlení elektronu v okamžiku $t = 0$, kdy také rychlost elektronu je nulová . . . $u(0) = 0$. Lze tedy napsat

$$\frac{F}{m_0} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{u=0} = a. \quad (3)$$

Pro jednoduchost zápisu jsme toto počáteční zrychlení označili písmenem a . V obr. 1 je zobrazena funkce $\frac{du}{dt} = f(u)$ podle rov. (2).

Klesá tedy zrychlení z hodnoty a až k nule v mezním případě $u \rightarrow c$. Pohyb elektronu je zrychlený, ale jeho rychlost vzrůstá stále pomaleji přibližujíc se k mezní hodnotě c .

2. Jak se při vyšetřovaném pohybu bude měnit rychlost u elektronu s časem t , můžeme určit z rovnice (1), kterou přepíšeme následujícím způsobem



Obr. 2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \frac{F}{m_0} = a ,$$

ne,

$$d \left(\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = a dt .$$

Naznačené úpravě říkáme separace proměnných. Integrací dostáváme

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = at + K \quad (4)$$

Integrační konstantu K v tomto řešení vypočítáme ze zadaných počátečních podmínek . pro $t = 0$ je $u(0) = 0$. Snadno se přesvědčíme, že pro tyto počáteční podmínky vychází z rov. (4) $K = 0$. Máme tedy vztah

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = at .$$

Odtud už snadno vyjádříme závislost rychlosti u elektronu na čase t ve tvaru

$$u = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2 t^2} + 1}} \quad (5)$$

Graficky je tato závislost vynesena pro zadané hodnoty a a c v obr. 2.

Z rov. (5) je zřejmé, že pro $t \rightarrow \infty$ vychází

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u = c. \quad (6)$$

Vidíme, že c je mezní rychlost, již v čase konečné velikosti elektron nemůže dosáhnout.

Pro relativně krátké časy (kdy $at \ll c$) můžeme zanedbat $\frac{a^2 t^2}{c^2}$ proti 1, takže dostáváme

$$u \doteq at, \quad (7)$$

což je známý klasický vzorec pro rychlost elektronu při rovnoměrně zrychleném pohybu. Grafickým znázorněním závislosti (7) je přímka, která (viz obr. 2) splývá s křivkou relativistické závislosti (5) jen pro $at \ll c$.

3. K úplnému určení pohybu elektronu zbývá ještě určit závislost délky dráhy na čase, tj. $x = x(t)$.

Vyjdeme z rov. (5), kterou přepíšeme ve tvaru

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}.$$

Délku dráhy, kterou urazí za daných podmínek, určíme integrací:

$$x = \int dx = \int \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2} t^2}} dt. \quad (8)$$

To je integrál typu

$$I = \int \frac{t}{\sqrt{A^2 + B^2 t^2}} dt, \quad (A, B \dots \text{konst.}), \quad (9)$$

jehož řešení lze nalézt v některé učebnici integrálního počtu

$$I = \frac{1}{B^2} \sqrt{A^2 + B^2 t^2} + C \quad (10)$$

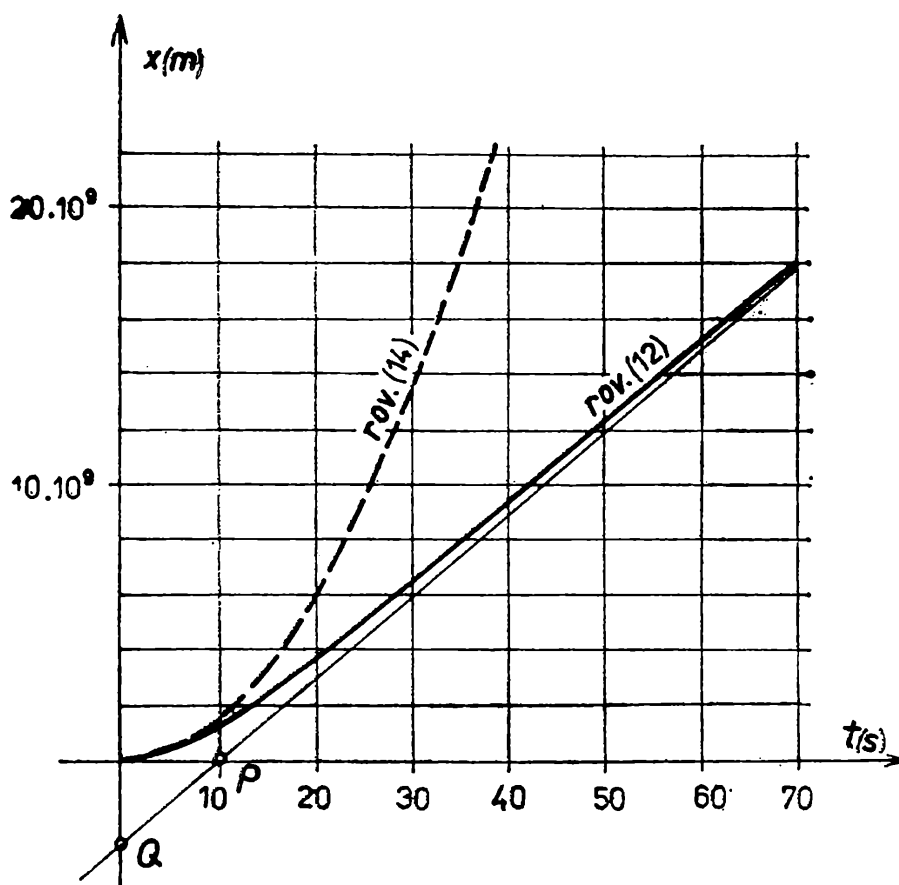
V našem případě jsou konstanty $A = 1$, $B = \frac{a}{c}$, takže vychází

$$x = a \frac{c^2}{a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} + C \quad (11)$$

Integrační konstantu C určíme dosazením počáteční podmínky (viz zadání příkladu) $x(0) = 0$ do obecného řešení (11):

$$0 = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + 0} + C \rightarrow C = -\frac{c^2}{a}.$$

Zpětným dosazením do rov. (11) dostáváme už hledanou závislost



$$x = x(t) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c} \right)^2} - 1 \right). \quad (12)$$

O správnosti výrazu (12) se můžeme snadno přesvědčit. Zderivujeme-li jej podle t , musíme dostat výraz pro rychlost u elektronu (rov. (5)). V grafickém znázornění představuje (12) jednu větev hyperboly, jejíž

asymptota prochází body $P\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ a $Q\left(0, -\frac{c^2}{a}\right)$. Je nakreslena

v obr. 3.

Směrnice asymptoty $\overline{QP}$ má hodnotu shodnou s mezní rychlostí

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{dx}{dt} \right) = c, \quad (13)$$

což si můžeme ověřit dosazením do rov. (5).

Na závěr řešení zadané úlohy se ještě přesvědčíme, že výsledky relativistického řešení přejdou pro malé rychlosti u pohybujících se fyzikálních objektů ve vzorec známé z klasické Newtonovy teorie. V našem případě

jde o vzorec (12). Pro $at \ll c$ můžeme v rozvoji výrazu $\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}$ podle binomické věty zanedbat členy počínaje třetím, takže bude

$$x = \frac{c^2}{a} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2 t^2}{c^2} + \dots \right) - 1 \right],$$

a dostáváme tak známý klasický vzorec

$$x \doteq \frac{1}{2} at^2. \quad (14)$$

To je rovnice paraboly (v souřadnicích x, t), která je čárkovane přikreslena v obr. 3.

Vidíme, že pro rychlosti srovnatelné s rychlostí světla jsou výsledky relativistické a klasické teorie zásadně rozdílné.

Závěrečná poznámka:

K tomu, aby částice dosáhla působením konstantní síly mezní rychlosti, by bylo třeba nekonečně dlouhého času. Částice by přitom vykonala nekonečně dlouhou dráhu a spotřebovalo by se k tomu nekonečně mnoho energie. Z toho lze vyvodit jediný závěr, že je to objektivně nerealné. Veškerá praktická zkušenost to také potvrzuje. Ani v obřích urychlovačích nabitých částic (které však pracují na základě jiných principů) nebylo dosaženo mezní rychlosti, i když se odchylky od ní dají vyjádřit dokonce už v pouhých centimetrech za sekundu.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Sedmdesát pět let tísňového signálu SOS

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PeF UK v Praze

V roce 1912 došlo k velké námořní tragédii — potopil se *Titanic*. Ještě téhož roku konference *Mezinárodní telekomunikační unie* (ITU) v Londýně přijala jednotný signál pro volání v nejvyšší nouzi, známé SOS. Proč zrovna tato tři písmena, to má svou historii. Tvrdívá se, že jde o zkratku anglické věty „Save Our Souls“, česky „Spaste naše duše“. Tato věta byla vymyšlena dodatečně; těžko by ji za základ pro tísňový signál užila uznávaná mezinárodní organizace.

Na vytvoření signálu SOS má vlastně zásluhu, aniž to tušil, *Samuel Morse* (1791—1872). Když před 150 lety v roce 1837 zkonstruoval svůj telegraf, chtěl, aby dosáhl nejrychlejšího možného přenosu. Jak známo vytvořil kód, v němž se pro písmena, číslice a pomocné znaky (interpunkční znaménka, rovnítko, plus, minus apod.) užívá konečných posloupností krátkých a delších impulsů, stručně řečeno „teček“ a „čárek“. Rychlost přenosu se zvýší, jestliže častěji se vyskytující písmena budou kódována kratšími posloupnostmi. Tráduje se, že Morse navštívil tiskár-

ny a prohlédl si zásoby liter v sazárnách. Morseovo určování četností písmen v angličtině se považuje za první práci ve vědeckém oboru, který později dostal název teorie informace.

V knížce [1] se uvádí tabulka četností písmen v angličtině podle Morseova zjištění. Stejnou četnost jako písmena O a S zde mají i písmena I a N. Morse se tedy zřejmě rozhodoval, kterým z písmen I, N, O, S přiřadí ve své abecedě tři tečky a tři čárky. Určil je pro písmena S a O, takže tísňový signál SOS je v Morseově abecedě zakódován takto:

— — —

Tento signál může vysílat a přijímat i nepřiliš zkušený amatér. Tato přednost způsobila jeho přijetí na konferenci ITU v roce 1912 a také jeho rychlé všeobecné rozšíření. Z našeho výkladu je vidět, že Morse se mohl rozhodnout trochu jinak při sestavování své abecedy a tísňové volání mohlo znít třeba NON.

Pro zajímavost uvedme, že při zkáze Titanicu radiotelegrafisté z potápějící se lodi vysílali značky CQ, resp. CQD, jež byly v té době obvyklé pro volání o naléhavou pomoc. Pokud znáte morseovku, přesvědčte se, jak jsou tyto dva signály pro vysílání a příjem v Morseově abecedě složité. Telegrafisté na Titanicu zkusili také volat SOS, jež v té době ještě nebylo mezinárodně přijato; pouze se o něm jednalo na konferenci ITU v roce 1906. Pomoc Titanicu však nepřišla. Osud lodi a trosečníků byl zpečetěn.

Cvičení

1. Pro písmena se užívá v Morseově abecedě jednočlenných až čtyřčlenných posloupností vytvořených z teček a čárek. Kolik je celkový počet všech těchto posloupností? [30]
2. Kolika způsoby lze zobrazit množinu všech 26 písmen užívaných v angličtině do množiny všech posloupností, o nichž se hovoří ve cv. 1? [1,25.29!]
3. Písmena I, N, O, S měla podle Morseova zjištění v anglických textech stejnou četnost. Představme si, že dvěma z těchto písmen máme přiřadit tříčlenné posloupnosti a — — —; kolika způsoby je to možno provést? [12]

Literatura

- [1] Klika O.: Výprávění o telegrafech, NADAS, Praha 1978
[2] Mída J.: O Morseově kódu, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 56, 1977/78, č. 8, s. 340—343

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Dvě fyzikální úlohy

1. úloha *Vliv přehrad na teplotu vody v řece*

Než se na Vltavě nad Prahou postavila kaskáda přehrad, přitékala voda do Prahy o takové teplotě, že bylo v Praze zřízeno několik plováren, které byly v létě hustě navštěvovány. V zimě pak Vltava zamrzala tak, že na ní bylo v Praze několik přírodních kluzišť. Od té doby, kdy byla ve Vraném nad Prahou postavena přehrada, vltavská voda přitéká do Prahy v létě tak studená, že se v ní prakticky koupají jen otužilci. A přesto v zimě nezamrzá.

Otázka: Vysvětlete tento rozpor!

2. úloha *Silová dvojice*

Představte si, že sedíte na jízdním kole, které zbaveno převodního řetězu je upevněno ve svislé poloze k podlaze. Obě boty máte na šlapadlech, která jsou ve stejné výši nad podlahou. Působíte-li pravou nohou dolů na šlapadlo silou $\mathbf{F}$, pak šlapadlo levé působí nahoru stejně velikou silou $|\mathbf{F}'| = |\mathbf{F}|$, takže její vektorová přímka je rovnoběžná s vektorovou přímkou síly $\mathbf{F}$.

Otázka: Je možno tyto dvě síly $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}'$ považovat za silovou dvojici? Mají přece stejnou velikost a opačný směr!

(Řešení naleznete na str. 438)

Emil Kašpar

Úlohy ze zahraničních časopisů

RNDr. TOMÁŠ SCHÜTZ, katedra matematiky PeF UK v Praze

Úloha 1. Jednoho dne jsem se rozhodl, že se svezu sedačkovou lanovou dráhou. V jistém okamžiku jsem si všiml, že křeslo jedoucí v protisměru okolo mne má číslo 95 a že následující má číslo 0. Podíval jsem se na číslo svého křesla. Mělo hodnotu 66. Projel jsem polovinu dráhy? Jaké číslo mělo takové křeslo, že při setkání s ním jsem byl právě v polovině dráhy?

Úloha 2. Mějme rovnici

$$G + O = L - O = V \cdot O = L - O = M - K = A .$$

Nahradte písmena čísly tak, aby byla splněna rovnice; přitom stejným písmenům musí odpovídat stejná čísla a navzájem různým písmenům čísla navzájem různá.

Úloha 3. Jak naleznete střed narýsované kružnice, jestliže máte k dispozici pouze tužku a obyčejné pravítko s kolmými okraji, přičemž šířka pravítka je menší než průměr dané kružnice?

Úloha 4. Dědeček se třemi vnuky šel na procházku do parku. Potkali známého a ten se jich zeptal, kolik je každému z nich let. Váňa řekl: „Jsem mladší než Péťa a je mi více než 5 let.“ Péťa pronesl: „Jsem o 3 roky mladší než Saša.“ A Saša řekl: „Nám třem je dohromady třikrát méně let než dědečkovi a dohromady i s dědečkem je nám 100 let?“ Jak staří jsou jednotliví vnuci?

Úloha 5 (obtížnější). Tři dvojice protějších stran šestiúhelníka jsou rovnoběžné. Dokažte, že úsečky, které spojují jejich středy, se protínají v jednom bodě.

Cantorův půlnoční sen

(Inspirováno Šibeničními písněmi Ch. Morgensterna)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \emptyset & & & & \\
 & & \{ \} & & & & \\
 & & = & \epsilon & = & & \\
 & & U & \cap & \cap & U & \\
 & \supset & X & \cap & X & \subset & \\
 U & - & \cap & \cap & - & U & \\
 \cap & X & U & U & X & \cap & \\
 \subset & - & U & - & \supset & & \\
 & \cap & U & U & \cap & & \\
 & = & \epsilon & = & & & \\
 & & \{ \} & & & & \\
 & & \emptyset & & & &
 \end{array}$$

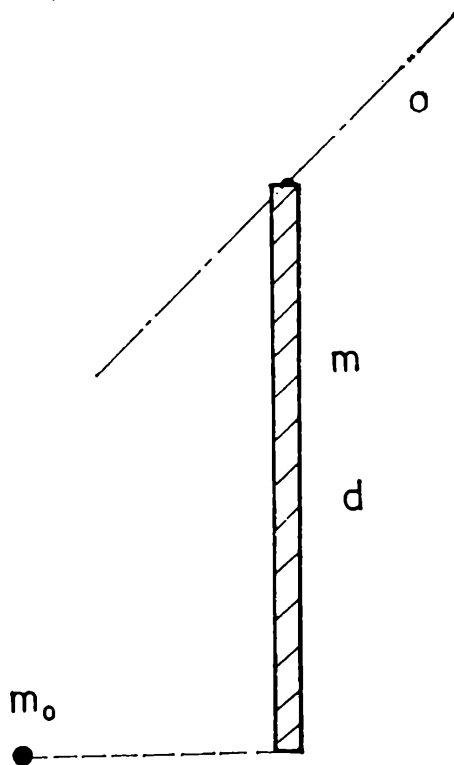
RNDr. Emil Calda, CSc.

Úlohy 29. ročníku fyzikální olympiády

ÚV FO Hradec Králové—Nitra

Kategorie A

1. Rovnorodá drevená tyč všade rovnakého prierezu s hmotnosťou m a s dĺžkou d je otáčavo uchytená v jednom svojom koncovom bode tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi o . Na začiatku je tyč v polohe vo zvislej polohe (obr. A-1).

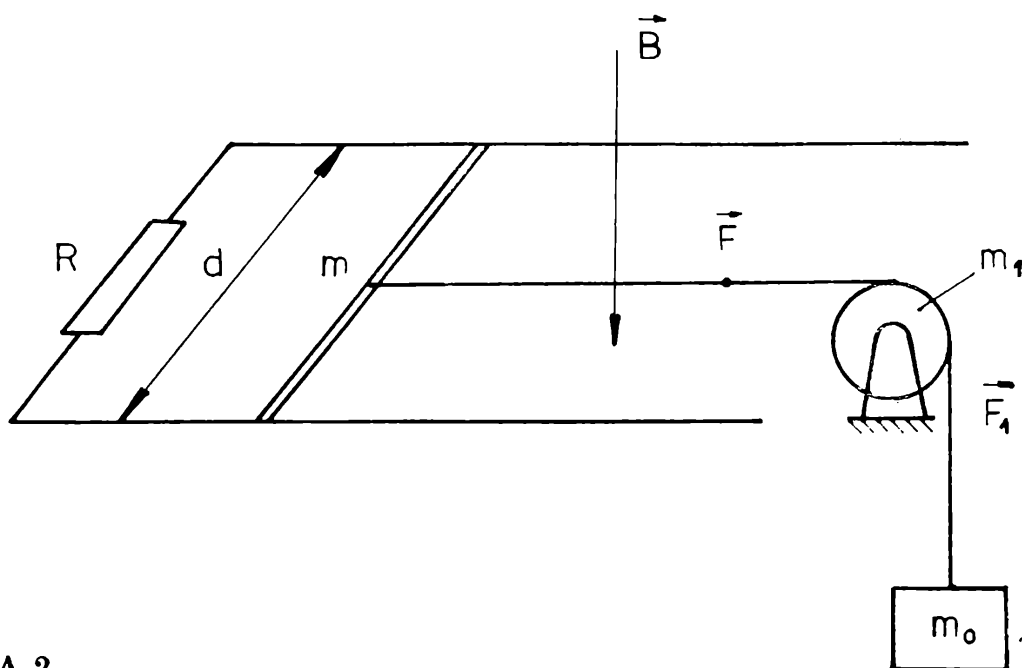


Obr. A-1

Strela s hmotnosťou m_0 letiaca v kolmom smere na tyč a na os o rýchlosťou v_1 zasiahne tyč v blízkosti jej dolného koncového bodu a preletí cez tyč. Po prielete tyčou má strela rýchlosť v_2 , $v_2 < v_1$. Tyč sa v dôsledku zásahu strelou vychýli zo zvislej polohy.

- Určte úhol α vychýlenia tyče po prielete strely.
- Určte podiel k energie E_1 tyče, ktorú má po zásahu strelou, a zmeny ΔE_2 kinetickej energie E_2 strely počas uvedeného deja.

Trenie a odpor prostredia pri otáčaní tyče neuvažujte.



Obr. A-2

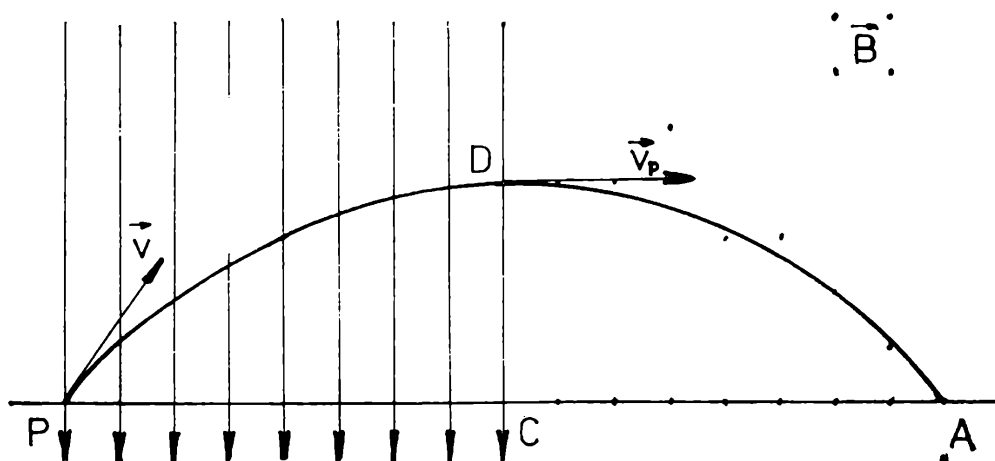
Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty: $m = 2,0 \text{ kg}$, $d = 2,0 \text{ m}$, $m_0 = 0,020 \text{ kg}$, $v_1 = 1200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = 1100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na danú os je $I = \frac{1}{3} m d^2$.

2. Kozmická loď sa vzdaluje od Zeme po priamočarej trajektórii rýchlosťou s veľkosťou v_0 . Vysielač na palube kozmickej lode vysiela hlásenie kozmonautov na frekvencii f_0 . Doba vysiela- nia meraná palub- nými hodinami bola t_0 .

- Určte frekvenciu f a vlnovú dĺžku λ signálu, ktorý prijíma pozoro- vacie centrum na povrchu Zeme.
- Určte počet n_1 vlnových dĺžok, ktoré vyslal vysielač, a počet n_2 vlnových dĺžok, ktoré zachytil prijímač pozorovacieho centra.
- Určte dobu t , počas ktorej bolo vysiela- nie hlásenia nahrávané na magnetofón v pozorovacom centre.
- O akú dĺžku d sa vzdialila kozmická loď od Zeme počas doby vysiela- nia hlásenia vzhľadom na pozorovateľa na povrchu Zeme? Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty: $f_0 = 1,4 \text{ GHz}$, $t_0 = 300 \text{ s}$, $v_0 = 0,40 c$, $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Poznámka: K riešeniu môžete použiť publikáciu Školy mladých fyzikov K. Bartušky Deset kapitol ze speciální teorie relativity.

3. Dva priame a navzájom rovnobežné drôty sú na jednom konci spojené s rezistorom s odporom R . Rovina drôtov je vodorovná, vzájom- ná vzdialenosť drôtov je d . Kolmo na drôty je položená elektricky vodivá tyč s hmotnosťou m , ktorá vo svojom strede má uchytené vlákno, spojené s telesom s hmotnosťou m_0 . Vlákno prechádza cez žliabok pevnej kladky s hmotnosťou m_1 . Indukčné čiary rovnorodého magnetického poľa s indukciou B majú zvislý smer podľa obr. A-2. Tyč je najskôr v pokoji



Obr. A-3

pridržiavaná napr. rukou alebo zarážkou. Potom tyč v istom okamihu uvoľníme.

- Určte veľkosť zrýchlenia a pohybu tyče ako funkciu jej veľkosti okamžitej rýchlosti v .
- Určte veľkosť sily F napínajúcej vlákno medzi tyčou a kladkou, veľkosť sily F_1 napínajúcej lano medzi kladkou a telesom ako funkcie veľkosti okamžitej rýchlosti v pohybu tyče.
- Určte veľkosť maximálnej rýchlosti v_1 , ktorú tyč získa, ak sú drôty dostatočne dlhé.
- Určte elektrický prúd I_1 , ktorý prechádza rezistorom pri maximálnej rýchlosti pohybu tyče.

Časť vlákna medzi tyčou a kladkou je vodorovná, vlákno je dokonale ohybné, neroztiahnuteľné a má veľmi malú hmotnosť. Trenie pri pohybe tyče po drôtoch a trenie v osi kladky sú veľmi malé, vlákno v žliabku kladky nekĺže. Elektrický odpor tyče a elektrický odpor drôtov je veľmi malý.

4. Máme stejnorodé elektrické pole s intezitou E , jehož siločáry majú smer svisle dolú. Na něj navazuje stejnorodé magnetické pole s vodorovnými indukčními čarami podle obr. A-3.

Proton vletí do elektrického pole v bodě P tak, že jeho okamžitá rychlost v tomto bodě svírá s vodorovnou rovinou úhel α . Vletí do magnetického pole v bodě D , kde jeho okamžitá rychlost má vodorovný směr. Jeho trajektorie protíná dále vodorovnou rovinu procházející bodem P v bodě A tak, že $PC = AC = d$. Celá uvedená trajektorie protonu leží ve svislé rovině kolmé k indukčním čarami.

- Určete velikost v rychlosti protonu v bodě P .
- Určete velikost B indukce magnetického pole.
- Určete dobu průletu t protonu elektrickým a magnetickým polem.

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty:
 $E = 1,0 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $\alpha = 30^\circ$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$,
 $d = 0,50 \text{ m}$.

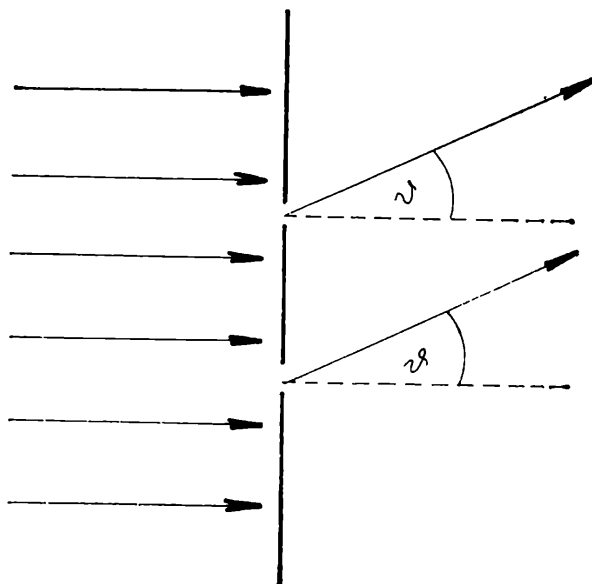
5. Vo vnútri veľkej gule s polomerom R vyhotovenej zo skla s indexom lomu n je umiestnená päťhalierová minca tak, že kolmica k minci zostrojená z jej stredu splýva s priemerom gule. Ak sklenú guľu otáčame oproti svetlu, môžeme pozorovať dva optické obrazy mince kruhového tvaru, a to jeden s minimálnym a druhý s maximálnym priemerom.

a) Určte zväčšenia Z_1 a Z_2 priemeru vytvorených kruhových obrazov a ich pomer $k = Z_2 : Z_1$.

b) Určte miesto uloženia mince (predmetovú vzdialenosť) ako funkciu k .

c) Určte skutočný priemer mince.

Úlohu riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty: $n = 1,50$, $d'_1 = 18,4 \text{ mm}$, $d'_2 = 34,2 \text{ mm}$.



Obr. A-4

6. Máte k dispozícii sklenú akvariijnú nádobu, ktorej jedna stena je opatrená priehľadným tienidlom (napríklad pauzovací papier), kvapalinu so známym indexom lomu n_1 a zdroj svetla, pomocou ktorého možno do nádoby z protiaľhlej strany nasmerovať na stenu opatrenú tienidlom rovnobežný zväzok lúčov.

Navrhnete takú metódu na určenie indexu lomu skla, z ktorého je zhotovená dvojvypuklá šošovka s priemerom D , aby k určeniu indexu lomu bolo potrebné okrem merania priemeru D danej šošovky zmerať len jedinou ďalšiu veličinu dĺžkového charakteru.

Navrhnutú metódu najprv teoreticky zdôvodnite a potom vykonajte meranie. Výsledky zaznamenejte do vhodných tabuliek, určte index lomu a chybu merania.

Poznámka: K meraniu použijte pomôcky zo súpravy pre optiku.

7. Rovinná elektromagnetická vlna dopadá kolmo na dve úzke štrbiny, ktorých vzdialenosť je d (obr. A-4).

a) Elektrickú alebo magnetickú zložku tohto vlnenia možno všeobecne zapísať rovnicou $y = A_0 \sin \omega t$, kde y je okamžitá hodnota zložky, A_0 amplitúda, ω kruhová frekvencia a t čas. Ak sa vlnenie šíri v smere osi x , potom vo vzdialenosti x je dané rovnicou $y =$

$$= A_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right), \text{ kde } c \text{ je rýchlosť šírenia vlny.}$$

Dokážte, že výsledné vlnenie po interferencii dvoch lúčov po ich ohybe na štrbinách o uhol ϑ má výslednú amplitúdu $A = 2 A_0 \cos \beta$, fázu $\beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \vartheta$, kde λ je vlnová dĺžka vlnenia.

b) Vychádzajúc z predchádzajúceho výpočtu ukážte, že interferenciu oboch lúčov možno modelovo znázorniť skladaním dvoch vektorov s veľkosťami A_0 a vzájomným uhlom 2β .

c) Rozšírte model z bodu b) z dvoch na n štrbín. Dokážte, že koncové body vektorov zobrazujúce vlnenie z jednotlivých štrbín ležia na kružnici. Určte polomer R tejto kružnice.

d) Určte amplitúdu A výsledného vlnenia.

e) Určte fázu φ výsledného vlnenia.

f) Vieme, že intenzita I elektromagnetickej vlny je priamo úmerná druhej mocnine amplitúdy A vlnenia. Približne znázornite závislosť intenzity výsledného vlnenia ako funkciu uhla β . Určte ďalej najväčšiu amplitúdu intenzity výsledného vlnenia. Výsledok vysvetlite. Pre ktoré uhly β bude amplitúda intenzity vlnenia najväčšia?

Kategorie B

1. Vlaková souprava délky $l = 120$ m se rozjížděla rovnoměrně zrychleným pohybem. Kolem pozorovatele stojícího u trati přejela první polovina soupravy za dobu $t_1 = 5,1$ s, druhá polovina soupravy za dobu $t_2 = 3,4$ s.

a) S jak velkým zrychlením se souprava pohybovala?

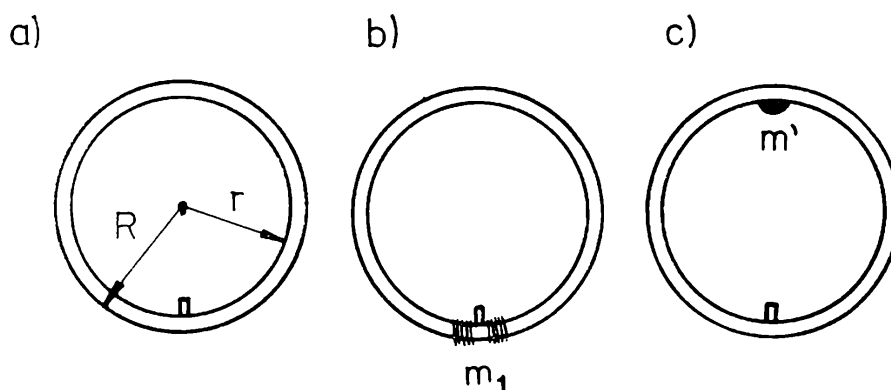
b) V jaké vzdálenosti od pozorovatele byl přední konec soupravy v okamžiku, kdy se souprava dala do pohybu?

c) Za jak dlouho dorazil přední konec soupravy k pozorovateli?

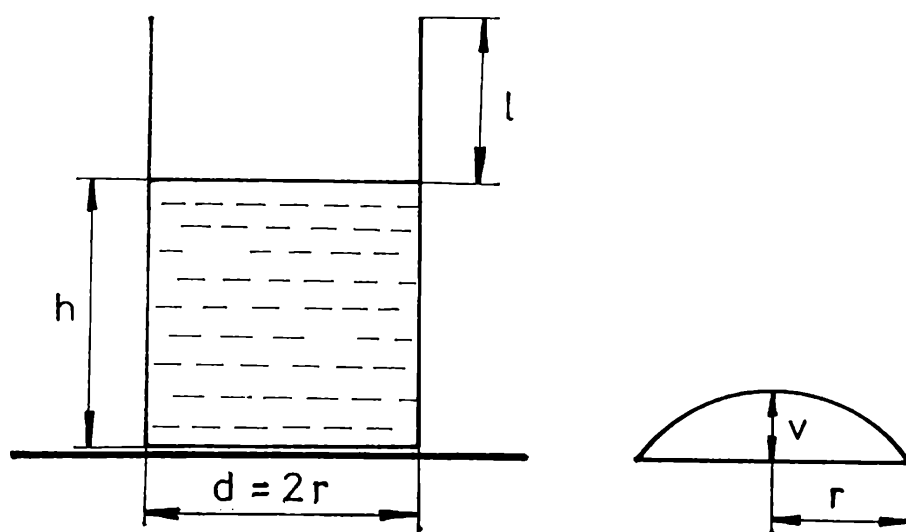
d) Jakou rychlostí se v tomto okamžiku souprava pohybovala?

2. Jirka si koupil jízdní kolo a věnoval se jeho důkladné prohlídce. Zjistil, že přední kolo je sice vycentrováno, ale není přesně vyváženo. Po nadzvednutí řídítek se kolo otočí a ustálí tak, že ventilek je v nejnižším místě kola (obr. B-1a). Po vychýlení z rovnovážné polohy kolo kýve, a když amplituda úhlové výchylky klesne pod 5° , je perioda kmitů $T = 8,0$ s.

Aby Jirka mohl kolo vyvážit, změřil vnější poloměr pláště, $R = 35$ cm, a vnitřní poloměr ráfku, $r = 31$ cm. Pak v blízkosti ventilků namotal



Obr. B-1



Obr. B-2

okolo pláště i ráfku drát o hmotnosti $m_1 = 0,25 \text{ kg}$ (obr. B-1b) a zjistil, že se doba kmitů zkrátila na $T_1 = 3,5 \text{ s}$.

a) Jaký je moment setrvačnosti kola (bez přívažku m_1) vzhledem k ose jeho otáčení?

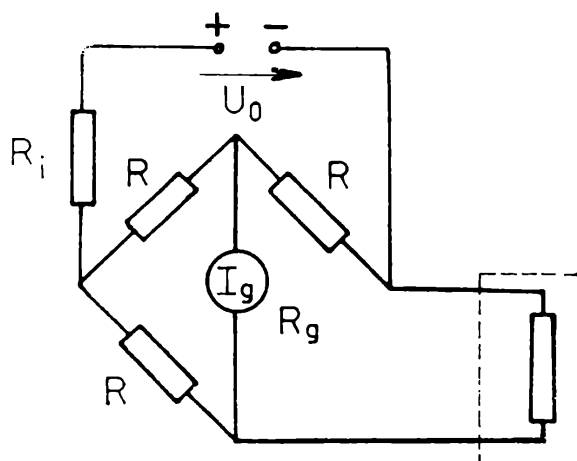
b) Jakou hmotnost m' musí mít přívažek umístěný naproti ventilku ve vzdálenosti r od osy kola (obr. B-1c), aby kolo bylo přesně vyváжено? Jak se tím změní moment setrvačnosti kola?

Poznámka: Perioda kmitů fyzického kyvadla se vypočte ze vztahu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}},$$
 I je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení kyvadla, $D = m g d$ je direkční moment kyvadla, d je vzdálenost těžiště kyvadla od jeho osy, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení, m je hmotnost kyvadla.

3. Do sklenice od kompotu nalijte vodu tak, jak ukazuje obr. B-2. Potom ji přikryjte namočeným tužším papírem, který přesahuje asi 1 cm přes okraj sklenice. Papír přidržte a sklenici obraťte.

Jaký bude tlak p , teplota T a hustota ρ vzduchu ve sklenici po jejím obrácení? Porovnejte uvedené stavové parametry s tlakem p_0 , teplotou



$$R' = R + r(t)$$

$$R' = R \text{ pro } t = t_1$$

Obr. B-3

T_0 a hustotou ρ_0 okolního vzduchu. Všechny děje považujte za adiabatické, pro něž platí $p_0 V_0^* = p_1 V_1^*$ a současně stavová rovnice. Konstanta κ se nazývá Poissonova.

Předpokládejte, že se papír víčka prohne do tvaru kulového vrchlíku. Odhadněte výšku v vrchlíku, vzniklého deformací papíru za předpokladu

$v \ll r$. Objem kulového vrchlíku (obr. B-2) $V^* = \frac{1}{6} \pi v (3r^2 + v^2)$.

Úlohu řešte číselně pro hodnoty: $h = 10 \text{ cm}$, $l = 5 \text{ cm}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\rho' = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota vody, $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $\rho_0 = 1,16 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\kappa = \frac{7}{5}$.

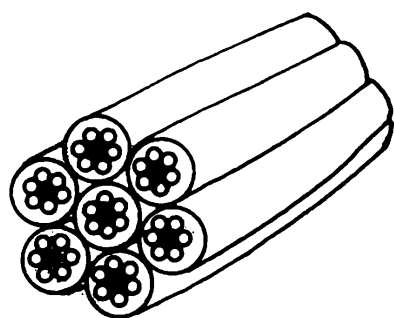
4. Na obr. B-3 je schéma elektrického odporového teploměru v můstkovém zapojení. Všechny části, kromě čidla o odporu R' , jsou udržovány na teplotě t_1 . Má-li také čidlo teplotu t_1 , je můstek vyrovnan a galvanometrem neprochází proud. Zvýší-li se teplota čidla, zvětší se jeho odpor a na galvanometru se objeví výchylka. Při plné výchylce prochází galvanometrem proud I_{gm} . Čidlo je zhotoveno z kovového vodiče, jehož teplotní součinitel odporu, vztažený k teplotě t_1 , je α .

a) Jak se musí zvětšit odpor R' , aby galvanometr ukazoval plnou výchylku? Při které teplotě t_2 to nastane?

b) Můžeme v intervalu teplot $< t_1, t_2 >$ považovat závislost proudu I_g na teplotě za lineární?

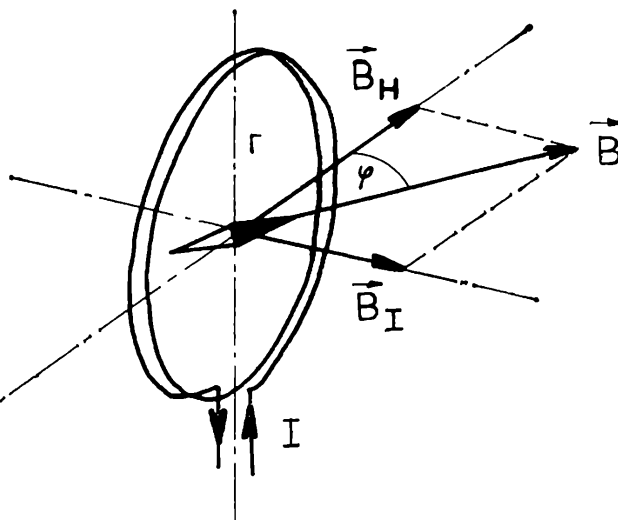
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $U_0 = 10 \text{ V}$, $R_i = 10 \Omega$, $R = 100 \Omega$, $t_1 = 20^\circ\text{C}$, $\alpha = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $R' = 2000 \Omega$, $I_{gm} = 100 \mu\text{A}$.

5. Elektrický vodič diaľkového vedenia je pospletaný z hliníkových a oceľových drôtov o priemere $d = 4,0 \text{ mm}$ tak, ako nám to naznačuje pripojený obrázok (obr. B-4). Vodičom prechádza elektrický prúd $I = 1000 \text{ A}$.



- ocel
- hliník

magnetický
poledník



Obr. B-4

Obr. B-5

- a) Určte odpor uvedeného diaľkového vodiča dĺžky $b = 1,0$ km.
 - b) Aké je napätie medzi koncovými bodmi tohoto vodiča?
 - c) Aký je tepelný výkon prúdu uvedeného vodiča?
 - d) Aké energetické straty sú na tomto vodiči za 1 rok?
 - e) Vysvetlite, prečo obsahuje diaľkový vodič aj ocelové drôty?
 - f) Určte v percentách, aká časť prúdu prechádza ocelovými drôtmi.
 - g) Aké sú tepelné straty na ocelových drôtach (určte v percentách).
- Merný odpor hliníka $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$, oceli $\rho_2 = 2,0 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$.

6. Stanovení horizontální složky magnetické indukce zemského magnetického pole užitím tangentové buzoly.

Základem tangentové buzoly je kruhová cívka poloměru r s jedním nebo N závity, jimiž může protékat velký proud $I \doteq 10$ A. Osa cívky je kolmá k magnetickému poledníku Země. Uprostřed cívky je deklinační magnetka (buzola) otáčivá kolem svislé osy (obr. B-5). Po zapojení proudu se magnetka vychýlí do směru vektoru $\mathbf{B} = \mathbf{B}_H + \mathbf{B}_I$, kde $\mathbf{B}_H$ označuje vektor horizontální složky magnetické indukce magnetického pole Země, $\mathbf{B}_I$ je vektor magnetické indukce pole, vytvořeného proudem I . Platí (μ vzduch $\doteq \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$)

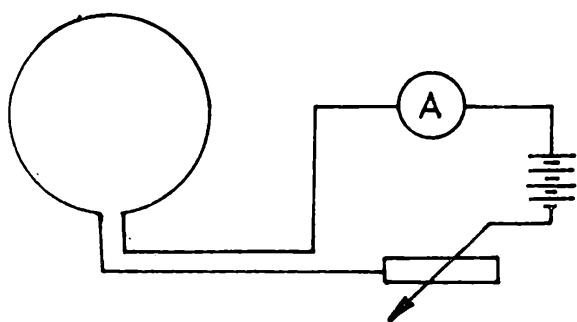
$$B_I = \mu \cdot \frac{NI}{2r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B_I}{B_H}.$$

Odtud

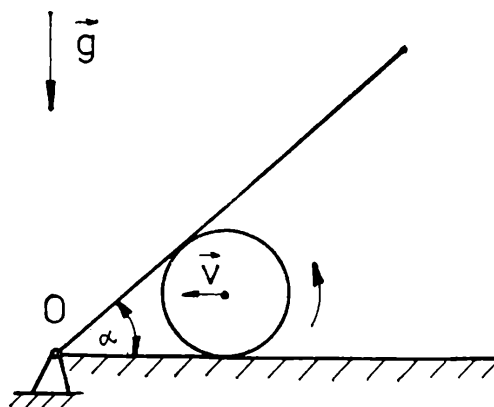
$$B_H = \mu \cdot \frac{N}{2r} \frac{I}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Úkol: Stanovte horizontální složku $\mathbf{B}_H$ magnetické indukce zemského magnetického pole v místě školy.

Pomůcky: Tangentová buzola, ampérmetr, reostat (13Ω , 6 až 7 A),



Obr. B-6



Obr. B-7

baterie akumulátorů NiFe, spojovací vodiče délky alespoň 1 m. Pokud ve sbírkách školy není tangentová buzola, zhotovíme kruhovou cívku navinutím několika závitů tlustšího izolovaného vodiče na vědro z plastické látky, které vhodně podložíme, aby osa cívky byla vodorovná. Můžeme také použít hliníkového ráfku od dětského jízdního kola. Do středu cívky umístíme buzolu. Pro ustavení cívky a buzoly použijeme nemagnetické materiály.

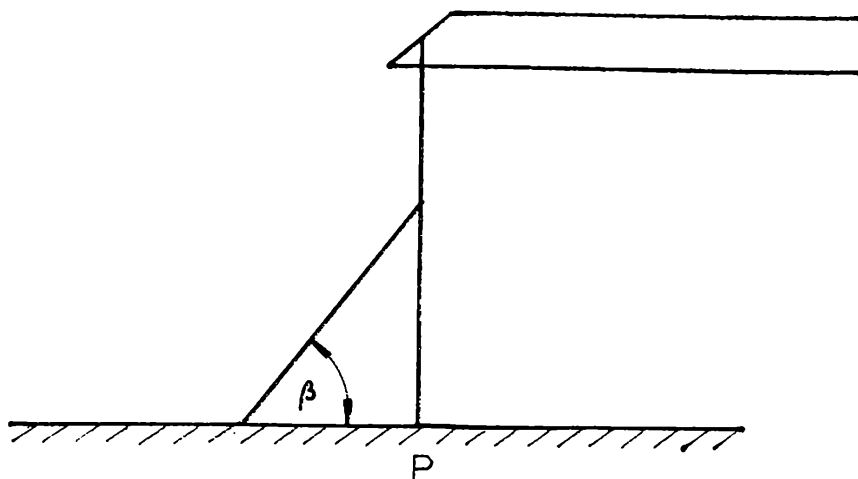
Provedení: Měříme v zapojení podle obr. B-6. Provedeme 5 měření při různých proudech, které volíme tak, aby pro výchylku magnetky platilo $30^\circ < \varphi < 60^\circ$. Pak směr proudu obrátíme a provedeme dalších 5 měření při stejných proudech jako v první části. V blízkosti tangentové buzoly nesmějí být žádné předměty z feromagnetických materiálů. Proto použijeme dlouhé měděné spojovací vodiče; reostat, ampérmetr i akumulátory NiFe umístíme do vzdálenosti nejméně 1 m od cívky s buzolou. Zkuste, jak se změní výsledek, umístíme-li do blízkosti tangentové buzoly ocelové předměty. Všechny získané výsledky zpracujte.

V počátcích studia zákonů elektrického obvodu se tangentové buzoly používalo k měření určité fyzikální veličiny. Zjistěte, která veličina to byla a jak je možno použít tangentové buzoly k jejímu měření.

7. Tuhá tyč je otáčivě upevněna v bodě O a dotýká se povrchu válce, jehož poloměr je R (obr. B-7). Osa válce je stále kolmá k tyči. Válec se bez klouzání valí po podložce a přitom zdvíhá tyč. Při valení povrch válce klouže po tyči bez tření. Velikost rychlosti osy válce vzhledem k podložce je $v = \text{konst.}$ Určete úhlovou rychlost ω tyče. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $R = 0,1 \text{ m}$, $v = 0,025 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 60^\circ$.

Kategorie C

1. Dokonale pružný pryžový míček je puštěn ze střechy budovy. Počáteční rychlost míčku je nulová. Pozorovatel, stojící u okna výšky s , zjistí, že míček proběhl vzdálenost od horního okraje okna k dolnímu okraji za dobu t_s . Míček padá dále, dochází k dokonale pružné srážce



Obr. C-1

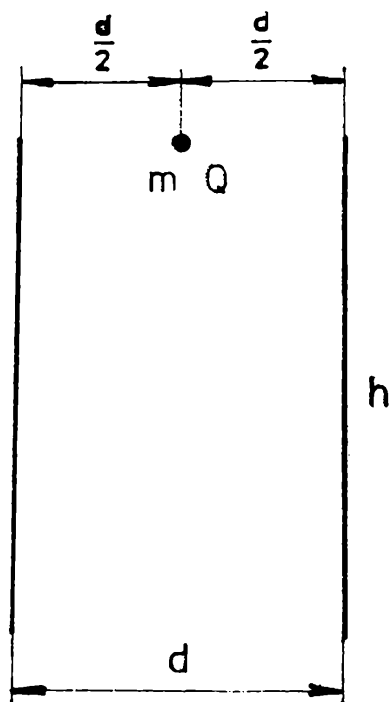
s vodorovným povrchem chodníku a míček se objeví znovu u dolního okraje okna za dobu t poté, co jej minul při pádu. Jak vysoká je budova? Řešte obecně, potom pro hodnoty: $s = 1,5$ m, $t_s = 0,12$ s, $t = 2,0$ s. Odpor vzduchu neuvažujte.

2. Koncový sloup elektrického vedení má výšku h . Vedení je ze dvou hliníkových vodičů, každý o průměru $2r$. Sloup je ukotven ve výšce $\frac{1}{3}h$ od povrchu Země ocelovým drátem, který svírá s vodorovnou rovinou úhel β (viz obr. C-1). Velikost tahové síly drátů při teplotě T_1 je F . Předpokládejte, že dráty elektrického vedení jsou mezi sloupy přímé a rovnoběžné s povrchem Země, sloup zůstává stále ve svislé poloze, jeho deformace neuvažujte.

- Určete velikost síly F_k , kterou je napínán kotvící drát při teplotě T_1 .
- Určete minimální obsah příčného řezu kotvícího drátu, nemá-li normálové napětí v drátu překročit hodnotu dovoleného napětí σ_{dov} .
- Určete přírůstek tahové síly drátů vedení, klesne-li jejich teplota na T_2 a jejich délka se přitom nezmění.
- Vypočítejte přírůstek napětí v kotvícím drátě při poklesu teploty z T_1 na T_2 .

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $h = 6,0$ m, $2r = 3,0$ mm, $\beta = 45^\circ$, $F = 1500$ N, $\sigma_{\text{dov}} = 120$ MPa, $\Delta T = T_1 - T_2 = 20$ K, pro ocel $E_1 = 2,2 \cdot 10^5$ MPa, $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5}$ K $^{-1}$, pro hliník $E_2 = 7,4 \cdot 10^4$ MPa, $\alpha_2 = 2,4 \cdot 10^{-5}$ K $^{-1}$.

3. Mezi dvěma rovnoběžnými, svisle umístěnými kovovými deskami v homogenním tíhovém poli Země ve vakuu se může pohybovat částice s nábojem Q a hmotností m . Desky mají výšku h , jejich vzájemná vzdálenost je d (obr. C-2). Jestliže desky nabijeme na napětí U , volně puštěná částice se při pohybu odchýlí od svislého směru o úhel α směrem k desce s nižším potenciálem. Na počátku je částice u horního okraje desek uprostřed.



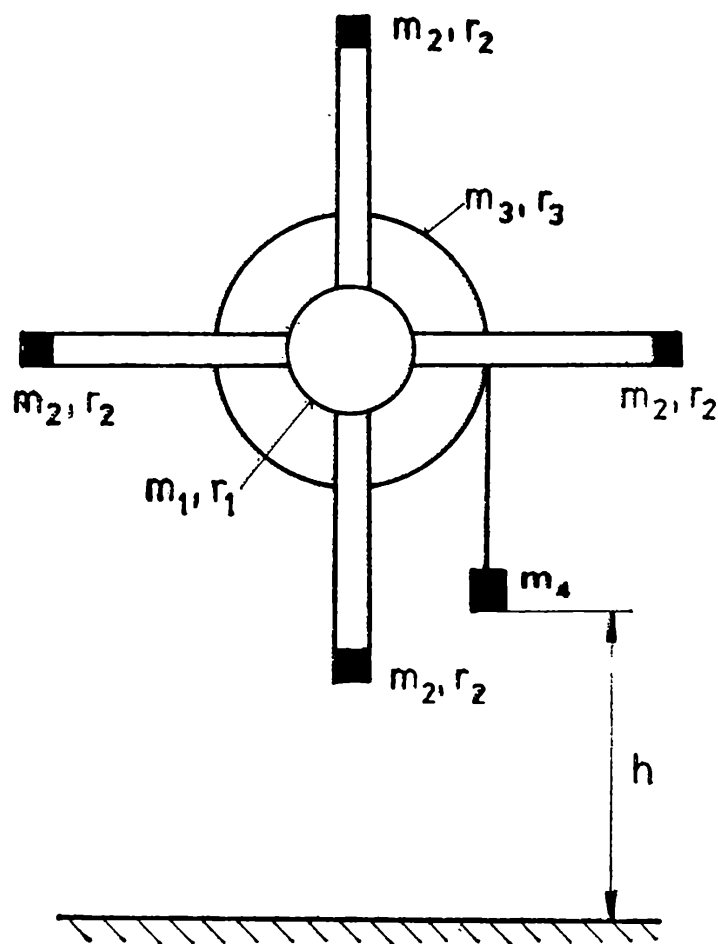
Obr. C-2

- Určete náboj částice.
- Vysvětlete, po jaké trajektorii se částice pohybuje.
- Určete, zda částice opustí elektrické pole, nebo bude zachycena deskou.
- Určete napětí mezi deskami tak, aby při stejném náboji nebyla částice zachycena deskami.

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $d = 0,50 \text{ cm}$, $h = 3,0 \text{ cm}$, $U = 400 \text{ V}$, $m = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$, $\alpha = 7,5^\circ$.

4. Na čtyřech ramenech zanedbatelné hmotnosti, která jsou pevně spojena s kotoučem o hmotnosti m_1 a poloměru r_1 , jsou upevněna čtyři závaží, každé o hmotnosti m_2 . Závaží na ramenech jsou ve vzdálenosti r_2 od osy otáčení. S kotoučem je pevně spojena kladka o hmotnosti m_3 a poloměru r_3 , na které je navinuto vlákno velmi malé hmotnosti. Na vlákne je těleso o hmotnosti m_4 , jehož dolní okraj je ve výšce h nad podložkou (C-3).

- Určete velikost rychlosti, kterou bude mít těleso o hmotnosti m_4 v okamžiku dopadu na podložku.
- Určete, za jakou dobu urazí těleso o hmotnosti m_4 vzdálenost h .
- Odpovězte na otázky a), b) v případě, že závaží na ramenech jsou ve vzdálenosti $r_1/2$ od osy otáčení.
- V okamžiku, kdy těleso o hmotnosti m_4 se nachází ve vzdálenosti $\frac{h}{2}$ nad podložkou, začne na obvod kotouče působit stálá brzdná síla F . Určete velikost této síly tak, aby těleso o hmotnosti m_4 nedopadlo na podložku.



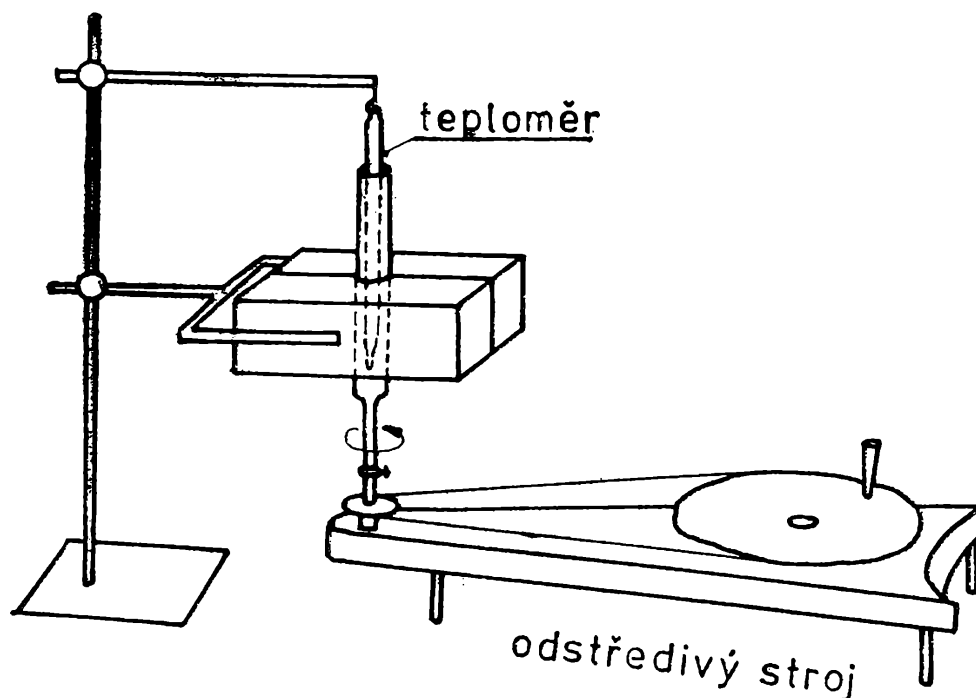
Obr. C-3

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $m_1 = 0,50$ kg, $m_2 = 0,10$ kg, $m_3 = 0,10$ kg, $r_1 = 0,10$ m, $r_2 = 0,30$ m, $r_3 = 0,030$ m, $h = 1,5$ m, $m_4 = 0,50$ kg.

5. V nádobě o objemu V_1 je kyslík O_2 o tlaku p_1 a teplotě T_1 , v nádobě o objemu V_2 je dusík N_2 o tlaku p_2 a teplotě T_2 . Nádoby jsou spojeny trubicí opatřenou kohoutem. Když kohout otevřeme, nastane smísení plynů. Vypočtete výsledný tlak a výslednou teplotu po dosažení rovnovážného stavu. Předpokládejte, že soustava nádob je tepelně izolována od okolí a plyny spolu chemicky nereagují. Plyny považujte za ideální.

6. Do objímky školní pomůcky nazývané „odstředivý stroj“ upevněte hliníkovou trubičku délky asi 10 cm a průměru přibližně 12 mm. Trubičku v dolním konci zaslepte tyčkou z tepelně izolujícího materiálu. Trubičku vložte mezi 2 polystyrénové destičky, svázané gumičkou nebo motouzem, a zajistěte destičky proti otáčení (např. stojanem). Trubičku naplňte vodou a vložte do ní teploměr, nejlépe s dělením $0,1$ °C nebo $0,2$ °C (obr. C-4).

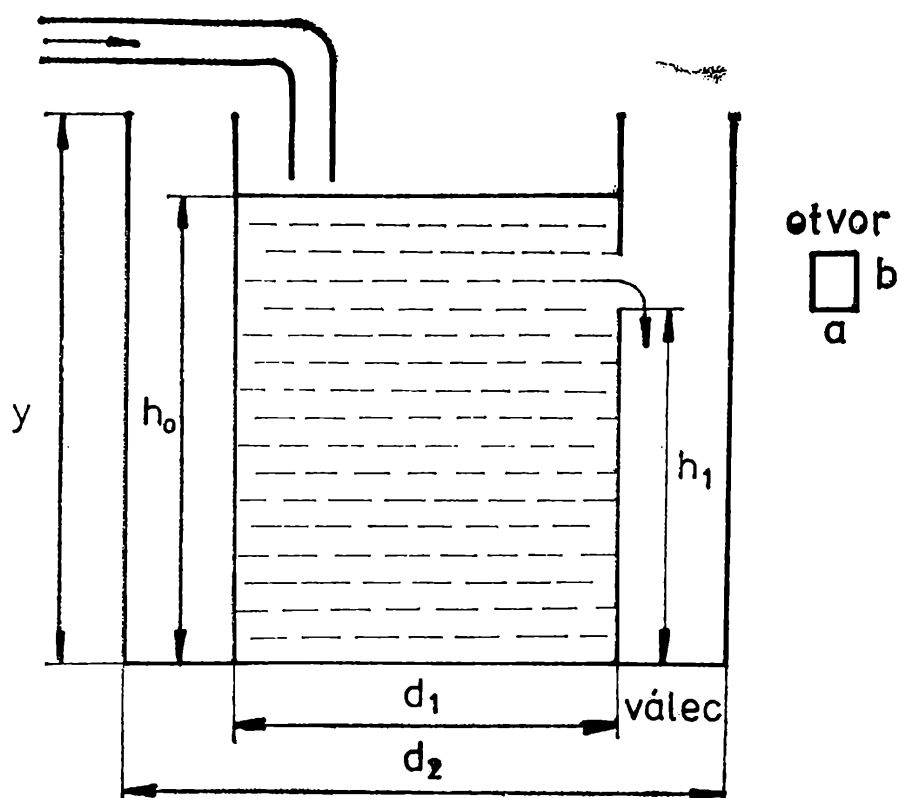
a) Vysvětlíte, proč se při otáčení trubičky mezi polystyrénovými destičkami zvyšuje teplota vody.



- b) Otáčíte-li rovnoměrně hnacím kolem odstředivého stroje přibližně s frekvencí 1 Hz, lze teplotu vody považovat v jistém rozmezí teplot za lineární funkci počtu otáček hnacího kola. Zdůvodněte tuto hypotézu teoreticky a ověřte ji experimentálně.
- c) Z naměřených hodnot sestavte tabulku a sestrojte graf funkce $t = f(n)$. Zdůvodněte naměřené rozdíly oproti předpokládanému průběhu funkce $t = f(n)$.
- d) Uvažte, zda na výsledek měření má vliv frekvence otáčení. Svou hypotézu ověřte měřením a do stejného obrázku znázorněte grafy funkce $t = f(n)$ pro různé frekvence otáčení.

Poznámky: Vhodnou hliníkovou trubičku lze koupit v železářství, izolující tyčkou může být obal z popisovače „Centrofix“. Nemáte-li ve fyzikálním kabinetě odstředivý stroj, můžete použít k otáčení trubičky ruční vrtačky, upevněné ve stojanu nebo ve svěráku. Teplotu vody měřte vždy po 10 otáčkách kliky hnacího kola, teplota se odečítá vždy po jejím ustálení, proto otáčení na chvíli přerušte. Během měření zjišťujte teplotu vždy alespoň desetkrát pro dosažení rozdílu teplot alespoň 6°C . Měření několikrát opakujte, abyste získali hodnověrné výsledky.

7. První nádoba (viz obr. C-5) tvaru kvádru se čtvercovou podstavou o straně d_1 má v boční stěně ve výšce h_1 ode dna svislý obdélníkový otvor o šířce a , výšce b . Obsah řezu otvoru je velmi malý vzhledem k obsahu kolmého řezu nádoby. Tato nádoba je naplněna kapalinou do výšky h_0 ode dna, která je udržována přítokem další kapaliny na stejné hodnotě. První nádoba je postavena na dně druhé nádoby tvaru válce o průměru d_2 .



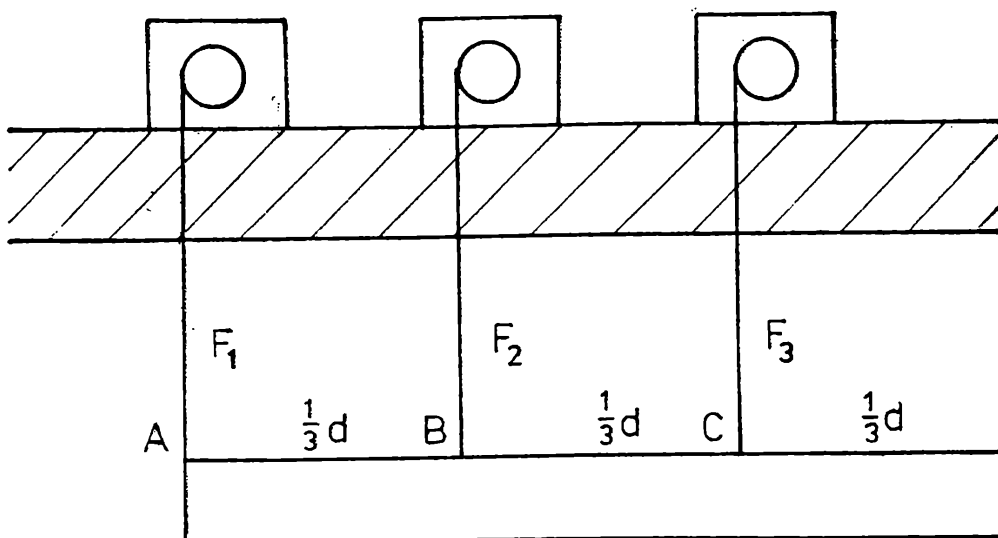
Obr. C-5

- a) Za jakou dobu t se naplní prostor mezi nádobami až po dolní okraj otvoru? Kapalinu v nádobě považujte za ideální. K řešení sestrojte graf závislosti výtokové rychlosti kapaliny na hloubce polohy otvoru v první nádobě. Po odvození obecných vztahů řešte úlohu pro hodnoty: $d_1 = 1,00 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, $d_2 = 3,00 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, $a = 3,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $b = 2,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $h_0 = 4,00 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, $h_1 = 3,00 \cdot 10^{-1} \text{ m}$.
- b) Určete horní a dolní mez hodnoty t , střední hodnotu t a odchylku pro zadané hodnoty, vyplývající z použití grafu.

Kategorie D

1. Tenký ocelový plech je zrolovaný do balíka v podobě valca. Vonkajší priemer je d_1 , vnútorný priemer je d_2 , výška valca je h , plech má hrúbku x .

- Koľko závitov má balík plechu (N)?
- Určte dĺžku plechu v balíku (s).
- Určte hmotnosť balíka (m).
- Koľko uvedených balíkov možno naložiť na jeden železničný vagón s nosnosťou G (n_1)?
- Koľko konzervových krabičiek (n_2) možno zhotoviť z jedného balíka plechu, ak na zhotovenie jednej krabičky potrebujeme plech s obsahom S a pri výrobe sa využije len p % plechu?
- Určte hmotnosť odpadu pri výrobe n_2 krabičiek (m_0).



Obr. D-1

Úlohu riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty: $d_1 = 80$ cm, $d_2 = 20$ cm, $h = 1,2$ m, $x = 0,40$ mm, $S = 500$ cm², $G = 360\,000$ N, $p = 89$, hustota ocele $\rho = 7800$ kg · m⁻³.

2. Peter s hmotnosťou m_1 a Pavol s hmotnosťou m_2 stáli na ľade tesne pri sebe. Potom Peter od seba odstrčil Pavla. Po zastavení oboch chlapcov bola medzi nimi vzdialenosť d . Súčiniteľ šmykového trenia medzi topánkami oboch chlapcov a ľadom je f . Odpor vzduchu zanedbávame.

- Určte dráhy, na ktorých sa pohybovali Peter a Pavol (d_1, d_2).
- Akými najväčšími rýchlosťami sa pohybovali Peter a Pavol (v_1, v_2)?
- Určte zrýchlenia, s ktorými sa chlapci pohybovali po odstrčení (a_1, a_2).
- Určte doby, po ktoré sa chlapci pohybovali (t_1, t_2).

Úlohu riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty: $m_1 = 45,0$ kg, $m_2 = 60,0$ kg, $d = 15,0$ m, $f = 0,100$, $g = 9,81$ m · s⁻².

3. Na obr. D-1 je načrtnuté zariadenie na dvíhanie ťažkého oceľového nosníka pomocou troch navíjacích mechanizmov. Nosník má dĺžku d , hmotnosť m , je rovnorodý, má všade rovnaký prierez a pri dvíhaní má vždy zaujímať vodorovnú polohu. Laná, na ktorých visí, sú zvislé. Umiestnenie navíjacích mechanizmov muselo byť volené tak, aby zodpovedalo zastavaniu príslušných priestorov — laná sú upevnené o nosník v bodoch A, B, C tak, ako to ukazuje obrázok, $AB = BC = \frac{1}{3}d$.

Určte veľkosti síl F_1, F_2, F_3 , ktorými sú napínané jednotlivé laná. Urobte diskusiu existujúcich riešení.

Úlohu riešte pre hodnoty: $d = 12$ m, $m = 1200$ kg, $g = 10$ m · s⁻².

4. Guľa s hmotnosťou m_1 sa pohybuje rýchlosťou v_1 a narazí do inej

gule s hmotnosťou m_2 , ktorá bola pôvodne v klude. Pritom ide o pružný centrálny zraz. Pomer $\frac{m_2}{m_1}$ označme symbolom k .

- O koľko percent sa zmenší pôvodná energia prvej gule pri tomto zraze (q)?
- Urobte tabuľku závislosti veličiny q od veličiny k , pričom za k voľte postupne hodnoty: 0,001; 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; 10; 100; 1000.
- Podľa tabuľky funkcie $q = f(k)$ určte, v ktorom prípade sa energia prvej gule najviac a v ktorom prípade sa najmenej zmení.
- Urobte diskusiu úlohy a) vzhľadom na pomer k .

5. Pri skúmaní tepelných strát teplovodu sa kontroluje teplota v jeho okolí. Teplotu je možno merať termočlánkom, pre činnosť ktorého je potrebné zaistiť prostredie so stálou teplotou 0°C . Táto teplota sa pri konkrétnom meraní realizovala podľa zlepšovacieho návrhu takým spôsobom, že do termosky so studenou vodou sa vkladali dva väčšie kusy ľadu, pričom jeden plával na hladine vody a druhý bol určený na potopenie sa ku dnu nádoby — termosky. V druhom kuse ľadu bola vmrznutá väčšia oceľová skrutka. Na vytvorenie ľadu v chladničke sa použili dve tenkostenné novodurové nádoby z ovocného krému, do ktorých bola nalita voda až po okraj. Do jednej nádoby bola však ešte vložená skrutka, určená na vmrznutie. Objem každej novodurovej nádoby bol rovnaký $V = 100 \text{ cm}^3$.

- Akú hmotnosť musí mať oceľová skrutka, aby príslušný kusok ľadu klesol v termoske na dno (m)?
- Vysvetlite, prečo sa prostredie s teplotou 0°C realizovalo opísaným spôsobom? Nestačilo by len vložiť kusy ľadu do studenej vody, bez kúska ľadu so vmrznutou skrutkou?

Pre výpočet použite tieto hodnoty: hustota vody

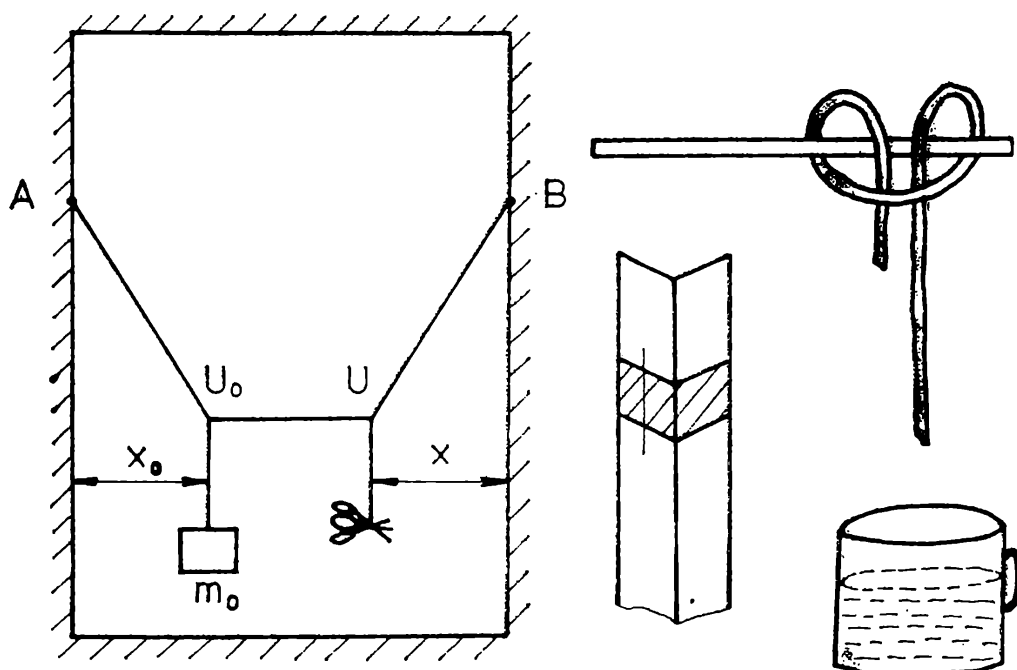
$\rho_1 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota ľadu $\rho_2 = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota ocele $\rho_3 = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

6. Určovanie hustoty hliníka „nitkovými vážkami“.

Pomôcky: závažia s hmotnosťami 50 g, 100 g, 150 g, pevnejšia niť, pravítko, širšia lepiaca páska (spofaplast), nožnice, väčší hrniec s vodou, hliníkové lyžice alebo vidličky — 6 ks, rám dverí.

Postup: 1. Na ráme dverí si vyznačíme dva body A , B tak, aby sa nachádzali v rovnakej výške nad podlahou (viď obr. D-2).

- V týchto bodoch fixujeme pomocou lepiacej pásky konce tzv. hlavnej nite, ktorá je asi o 25 cm dlhšia než šírka dverí.
- Na hlavnú niť upnutú v ráme dverí pripojíme dve tzv. závesné nite s dĺžkami asi po 50 cm (spôsob pripojenia podľa obr.).
- Na závesnú niť vľavo priviažeme závažie s hmotnosťou m_0 .



Obr. D-2

5. Na závesnú niť vpravo zavesíme súbor hliníkových lyžíc. Ich celkovú hmotnosť označíme symbolom m .
6. Uzlíky U_0 a U závesných nití premiestňujeme po hlavnej niti dovtedy, kým sa stredná časť tejto nite nedostane do vodorovnej polohy.
Vodorovnosť tejto nite kontrolujeme tak, že sa pozeráme na ňu a zároveň sledujeme vodorovný smer častí nábytku nachádzajúceho sa pri stene rovnobežnej s danými dverami.
7. Pravítkom odmeriame úseky x_0 a x podľa obr. D-2. Pritom x_0 je vzdialenosť medzi zvislicou prechádzajúcou bodom A a závesnou niťou, na ktorej je priviazané závažie, x je vzdialenosť medzi zvislicou prechádzajúcou bodom B a závesnou niťou, na ktorej visí súbor lyžíc.
8. Hmotnosť súboru lyžíc určíme podľa vzťahu: $m = \frac{x_0}{x} m_0$. (1)
9. Veľký hrniec s vodou umiestníme tak, aby súbor lyžíc bol ponorený vo vode, lyžice sa nesmú dotýkať dna ani stien hrnca.
10. Presúvaním uzlíkov U_0 a U opäť vytvoríme taký stav, pri ktorom stredný úsek hlavnej nite zaujme vodorovnú polohu.
11. Pravítkom odmeriame úseky x'_0 a x' , podobne ako v bode 7.
12. Hustotu hliníka určíme na základe vzťahu

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{x'_0 \cdot x}{x_0 \cdot x'}} \cdot \rho_0 \quad (2)$$

kde ρ_0 je hustota vody, $\rho_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

13. Meranie uskutočňujeme desaťkrát a namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky:

č.	$\frac{m_0}{\text{kg}}$	$\frac{x_0}{\text{m}}$	$\frac{x}{\text{m}}$	$\frac{m}{\text{kg}}$	$\frac{x'_0}{\text{m}}$	$\frac{x'}{\text{m}}$	$\frac{\varrho}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}$	poznámka
1								
2								
10								

14. Určíme priemerné hodnoty zistených veličín m , ϱ .

15. Odvodte vzťahy (1) a (2), ktorých sme pri meraní použili.

7. Krasokorčuliarka mala na začiatku piruety (pohybový stav 1) roztiahnuté ruky a otáčala sa okolo zvislej osi s frekvenciou f_1 . Jej moment zotrvačnosti bol I_1 . Potom pritiahla ruky tesne k telu a frekvencia jej rotácie sa v dôsledku toho zvýšila na f_2 (pohybový stav 2). Odpor vzduchu a trenie korčule o ľad tu neberieme do úvahy.

- Určte moment zotrvačnosti krasokorčuliarky v pohybovom stave 2 (I_2).
- Určte energie E_1 , E_2 rotačného pohybu krasokorčuliarky v oboch pohybových stavoch piruety.
- Možno považovať krasokorčuliarku pri opisovanom pritiahnutí rúk k telu za izolovanú sústavu? Vysvetlite.
- Vysvetlite pôvod zisteného rozdielu energií.

Úlohu riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty: $f_1 = 1,0 \text{ s}^{-1}$, $I_1 = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $f_2 = 10 \text{ s}^{-1}$.

Poznámka: Podobne ako pri posuvnom pohybe používame veličinu hybnosť, pri rotačnom pohybe sa stretávame s veličinou, ktorá je daná súčinom momentu zotrvačnosti I a uhlovej rýchlosti ω a ktorá sa nazýva moment hybnosti telesa; $b = I \omega$. Moment hybnosti rotujúceho telesa vzhľadom na danú os sa v izolovanej sústave zachováva.

Kalendár M-F:

Jún 1987

1. VI. 1867 zomrel v Erlangene *Christian Staudt*, nemecký matematik. Prispel k rozvoju projektívnej geometrie.
6. VI. 1857 sa v Jaroslavi narodil *Alexander Michajlovič Ljapunov*, ruský matematik a mechanik. Pracoval v oblasti teórie diferenciálnych rovníc a teórie pravdepodobnosti.
7. VI. 1862 sa v Bratislave narodil *Philipp Lenard*, nemecký fyzik. Skúmal katódové lúče, fotoelektrický efekt, fosforescenciu a luminescenciu. V roku 1905 získal Nobelovu cenu za fyziku.
7. VI. 1877 sa v Lancashire narodil *Charles Glover Barkla*, anglický fyzik. Objavil charakteristické spektrá prvkov, polarizáciu röntgenového žiarenia a zákony jeho rozptylu. Nobelovu cenu za fyziku dostal roku 1917.
12. VI. 1577 sa v St. Gallen narodil *Paul Guldin*, švajčiarsky matematik. Sformuloval pravidlá pre výpočet objemu rotačných telies a obsahu rotačných plôch.
16. VI. 1902 zomrel v Karlsruhe *Ernst Schröder*, nemecký matematik a logik. Skúmal logické štruktúry matematických úsudkov, vypracoval ucelený systém matematickej logiky.
17. VI. 1832 sa v Londýne narodil *William Crookes*, anglický fyzik a chemik. Študoval elektrické výboje v zriedených plynch. Objavil prvok tálium, zostrojil rádiometer a spintariskop — prístroj na zistenie alfa častíc.
19. VI. 1922 sa v Kopenhagene narodil *Aage Bohr*, dánsky fyzik. Rozpracoval teóriu atómového jadra. Spolu s B. Mottelsonom a J. Rainwaterom získal Nobelovu cenu za fyziku v roku 1975.
21. VI. 1852 sa v Prahe narodil *Eduard Weyr*, český matematik. Zaoberal sa projektívnou teóriou kriviek a plôch. Študoval eliptické funkcie a teóriu matíc.
21. VI. 1957 zomrel v Trausteine *Johannes Stark*, nemecký fyzik. Študoval elektrické výboje v plynch a spektrálnu analýzu. Objavil štiepenie spektrálnych čiar vodíka v elektrickom poli. Nobelovu cenu za fyziku získal roku 1919.
23. VI. 1912 sa narodil *Alan Mathison Turing*, anglický matematik a logik. Stal sa zakladateľom teórie automatov a teórie algoritmov.
25. VI. 1907 sa v Hamburgu narodil *Hans Jensen*, nemecký fyzik.

- Študoval štruktúru atómového jadra. Spolu s Wignerom a Goepert-Mayerovou získal roku 1963 Nobelovu cenu.
28. VI. 1912 sa v Kieli narodil *Carl Friedrich Weizsäcker*, nemecký teoretický fyzik a astrofyzik. Pracoval v oblasti atómovej a jadrovej fyziky, kvantovej teórie, kozmológie.
30. VI. 1972 zomrel *Jurij Vladimírovič Linnik*, sovietsky matematik. Vynikol prácami v teórii čísel, teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistike.
-

Júl 1987

1. VII. 1742 sa v Oberramstadte narodil *Georg Christoph Lichtenberg*, nemecký fyzik a spisovateľ. Zaujímal sa o elektrinu a magnetizmus. Patril k najlepším nemeckým aforistom.
2. VII. 1862 sa vo Wigtone narodil *William Henry Bragg*, anglický fyzik. Pracoval v oblasti výzkumu štruktúry kryštálov pomocou röntgenového žiarenia. Nobelovu cenu za fyziku dostal roku 1915. V rokoch 1935—1940 bol prezidentom Royal Society.
2. VII. 1947 zomrel *Nikolaj Grigorjevič Čebotarev*, sovietsky matematik. Zaujímavé výsledky dosiahol v modernej algebre, teórii čísel, variačnom počte a v geometrii.
7. VII. 1927 zomrel *Magnus Gustav Mittag-Leffler*, švédsky matematik. Zoberal sa teóriou funkcií, bol iniciátorom medzinárodných a matematických kongresov.
11. VII. 1902 sa v Haagu narodil *Samuel Abraham Goudsmit*, americký fyzik holandského pôvodu. Zaoberal sa kvantovou mechanikou, atómovou a jadrovou fyzikou. Spolu s G. E. Uhlenbeckom zaviedli pojem spinu elektrónov.
13. VII. 1762 v Chalforde zomrel *James Bradley*, anglický astronóm. Objavil aberáciu svetla, dokázal nutáciu zemskej osi.
14. VII. 1827 vo Ville d'Avroy zomrel *Augustin Jean Fresnel*, francúzsky fyzik. Skúmal vlastnosti svetla, odvodil zákony polarizácie a dvoj-lomu, určil vzťahy pre intenzitu odrazeného a lomeného svetla. Položil základy optiky kryštálov. Bol špecialistom na stavbu mostov.
17. VII. 1912 v Paríži zomrel *Jules Henri Poincaré*, francúzsky matematik, fyzik, astronóm a filozof. Zaoberal sa teóriou čísel, algebrou, topológiou, diferenciálnymi rovnicami, matematickou fyzikou, optikou, elektromagnetizmom, termodynamikou, nebeskou mechanikou. Vyvodzoval všeobecné filozofické závery, ovplyvnil chápanie postavenia prírodných vied a matematiky.

20. VII. 1922 zomrel *Andrej Andrejevič Markov*, ruský matematik. Úspešne rozvinul teóriu čísel, matematickú analýzu a teóriu pravdepodobnosti.
20. VII. 1937 v Ríme zomrel *Guglielmo Marchese Marconi*, taliansky fyzik a radiotechnik. Za zásluhy o rozvoj bezdrôtovej telegrafie dostal spolu s C. F. Braunom roku 1909 Nobelovu cenu za fyziku.
22. VII. 1887 sa v Hamburku narodil *Gustav Ludwig Hertz*, nemecký fyzik. V roku 1925 získal spolu s J. Franckom Nobelovu cenu za experimentálne práce a objav zákonov pôsobiacich pri interakcii elektrónu s atómom.
25. VII. 1832 v Mladějove pri Jičine zomrel *František Josef Gerstner*, český matematik, mechanik a technik. Pracoval v oblasti aplikovanej mechaniky a stavebnej hydrodynamiky.
27. VII. 1667 sa v Bazileji narodil *Johann Bernoulli*, švajčiarsky matematik a fyzik. Vypracoval základy variačného počtu, rozvinul matematickú analýzu, analytickú mechaniku, položil základy matematickej fyziky.
27. VII. 1927 sa v Soči narodil *Jurij Nikolajevič Denisjuk*, sovietsky fyzik. Pracuje v oblasti fyzikálnej optiky a holografie.

August 1987

2. VIII. 1922 v Baddecku zomrel *Alexander Graham Bell*, americký fyziológ a fyzik. Vynašiel mikrofón, skonštruoval telefón.
3. VIII. 1917 v Berlíne zomrel *Ferdinand Georg Frobenius*, nemecký matematik. Vynikol v algebre, teórii grúp, teórii hyperkomplexných čísel.
3. VIII. 1922 v Sušici zomrel *Matyáš Lerch*, český matematik. Vedecky pracoval v teórii čísel, teórii špeciálnych funkcií a nekonečných radov. Napísal 220 vedeckých pojednaní, polovicu z nich česky.
5. VIII. 1802 sa v Finnöy narodil *Niels Henrik Abel*, nórsky matematik. Dokázal neriešiteľnosť algebraických rovníc piateho stupňa a vyšších stupňov pomocou odmocnín, spresnil teóriu konvergence radov, vypracoval základy teórie eliptických funkcií.
8. VIII. 1902 sa v Bristole narodil *Paul Adrien Dirac*, anglický teoretický fyzik. Položil základy kvantovej mechaniky a elektrodynamiky. Vytvoril relativistickú teóriu pohybu elektrónov, predpovedal existenciu pozitronu, vyslovil domnienku o existencii magnetického monopólu. Nobelovu cenu získal roku 1933.

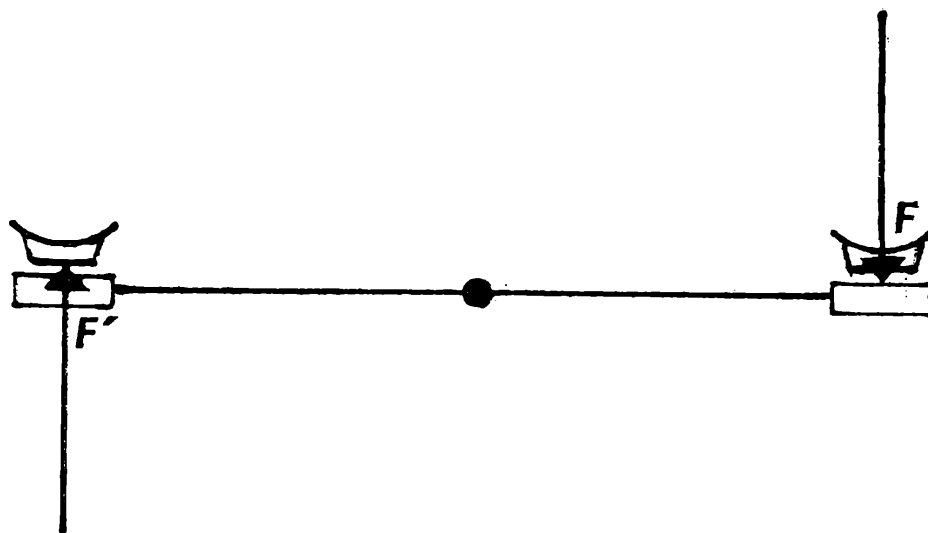
12. VIII. 1887 sa vo Viedni narodil *Erwin Schrödinger*, rakúsky teoretický fyzik. Zostavil základné rovnice vlnovej mechaniky. V roku 1933 dostal s P. Diracom Nobelovu cenu za fyziku.
14. VIII. 1777 sa v Rukjöbingu narodil *Hans Christian Oersted*, dánsky fyzik. Objavil magnetické účinky elektrického prúdu, skúmal stlačiteľnosť kvapalín.
14. VIII. 1842 sa v Nimes narodil *Jean Gaston Darboux*, francúzsky matematik. Vedecké práce z analýzy, diferenciálnej geometrie, analytickej mechaniky. Založil Bulletin des sciences mathématiques.
15. VIII. 1892 sa v Dieppe narodil *Luis Victor de Broglie*, francúzsky fyzik. Objavil vlnovú povahu elektrónov. Filozofickými úvahami prispel k rozvoju prírodných vied. V roku 1929 získal Nobelovu cenu za fyziku.
16. VIII. 1957 vo Falmouth zomrel *Irving Langmuir*, americký fyzik a chemik. Získal Nobelovu cenu za chémiu v roku 1932.
17. VIII. 1927 zomrel *Ivar Fredholm*, švédsky matematik. Prispel k rozvoju matematickej fyziky, teórie potenciálu.
19. VIII. 1662 v Paríži zomrel *Blaise Pascal*, francúzsky matematik, mechanik, fyzik a filozof. Prispel k rozvoju kombinatoriky a pravdepodobnosti, skúmal hydrostatiku, zhotovil mechanický počítačový stroj.
22. VIII. 1647 sa v Blois narodil *Denis Papin*, francúzsky fyzik. Skonstruoval tlakový hrniec, čln s parným pohonom.
23. VIII. 1842 sa v Belfaste narodil *Osborne Reynolds*, anglický fyzik. Pracoval v teórii prúdenia kvapalín.
24. VIII. 1832 v Paríži zomrel *Nicolas Léonard Sadi Carnot*, francúzsky fyzik. Položil základy modernej termodynamiky a teórie tepelných strojov.
25. VIII. 1867 v Hampton-Court zomrel *Michel Faraday*, anglický fyzik a chemik. Objavil zákony elektrolýzy a elektromagnetickú indukciu.
26. VIII. 1882 sa v Hamburgu narodil *James Franck*, nemecký fyzik. Potvrdil experimentálne nespojité stavy atómov. Nobelovu cenu získal s G. Hertzom v roku 1925.

dj

Řešení fyzikálních úloh ze str. 414

1. úloha

Dokud byla Vltava bez přehrad, voda při povrchu se v létě na dlouhém toku prohřívala a takto prohřátá přitékala do Prahy. V zimě se stejně dlouho a intenzivně prochlazovala, takže klidná hladina řeky nad jezy v Praze snadno do značné hloubky promrzala. Nyní voda vytéká pod vranskou přehradní zdí ze dna jezera o takové teplotě, že se na povrchu v úseku svého poměrně krátkého toku od Vraného do Prahy nestačí v létě dostatečně prohřát a v zimě zase ochladit.



Obr. 1

2. úloha

Dvě síly F a $-F$ tvoří silovou dvojici jen v případě, že působí na jedno těleso. V našem případě však každá síla působí na jiné těleso, síla F na šlapadlo a síla F' na botu. (Obr. 1).

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů a fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku ponkázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Z NOVÝCH KNIH

Jozef Hvorecký, Jozef Kelemen

ALGORITMIZÁCIA

Vydala ALFA, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatury, n. p., 2. vydání, 160 stran, 9 obr., 12 tabulek, 1200 výtisků, cena 8,50 Kčs, Bratislava 1987

Ve školním roce 1985/86 vznikla nová kategorie matematické olympiády. Je označena písmenem P a je určena všem žákům středních škol bez rozdílu věku. K řešení se v ní zadávají úlohy, které vyžadují algoritmické myšlení, schopnost tvorby a analýzy programů.

Knížku „Algoritmizácia“ by si měli prostudovat všichni budoucí a také začínající řešitelé nové kategorie P. Jejím studiem se získají nejelementárnější představy o programování a první zkušenosti pro úspěšné sestavování algoritmů. Ovšem knížku nelze doporučovat jen řešitelům jedné z kategorií matematické olympiády. Je třeba si uvědomit, že algoritmické principy se budou uplatňovat stále více, a to v nejrůznějších oborech.

Pro získání schopností algoritmicky myslet je třeba poznat rozličné stránky tohoto myšlení, jeho základní pojmy, základní techniky sestavování postupů řešení i metody zkoumání jejich vlastností.

Autoři nezapomněli ani na cvičení; výsledky některých z nich jsou uvedeny v závěru knížky. Při řešení úloh poznáte, že tvorba

algoritmů není jen umění, neboť se zde uplatňuje i rutina.

Knížka nevychová z nikoho programátora. Pouze se v ní získají základní poznatky z algoritmizování a to není opravdu málo.

Jiří Míša

František Zítek a kol. :

TŘICÁTÝ TŘETÍ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze v roce 1986, 1. vydání, 168 str., 38 obr., 3550 výtisků, cena 8,50 Kčs.

Knížka souhrnně informuje o matematické olympiádě ve školním roce 1983/84, tehdy to byl její 33. ročník. Pro úplnost uvedme, že v současné době končí již 36. ročník. Ročenky matematické olympiády vycházejí vždy v jistém odstupu od ukončení příslušného ročníku. Je to způsobeno mimo jiné nutností uzavřít ročník, připravit příslušné statistické tabulky a zpracovat vzorová řešení. Určitou dobu také trvá výroba v tiskárně.

Všichni účastníci 33. ročníku MO, kteří se umístili na prvních deseti místech v krajských 2. kolech kategorií A, B, C, naleznou v ročence své jméno. Z celostátního 3. kola kategorie A jsou uvedeni všichni úspěšní řešitelé. V tomto seznamu s překvapením zjistíme, že vítězem 33. ročníku MO se stal účastník, který nestudoval ve

třídě se zaměřením na matematiku. Byl jím *Juraj Balázs* z Košic.

V ročence jsou uveřejněny všechny soutěžní úlohy všech kategorií s řešeními. Dále zde nacházíme i texty všech úloh 10. korespondenčního semináře ÚV MO. Knížka je tedy sbírkou matematických úloh, které jsou většinou původní. Každý si může sám na sobě vyzkoušet, jak obtížné úlohy byly v jednotlivých kategoriích a kolech řešeny.

V závěru je zpráva o jubilejní 25. mezinárodní matematické olympiádě, která se konala 3. až 9. července 1984 v Praze. Zúčastnili se jí žáci ze 34 zemí; zastoupeny byly všechny trvale obydlené kontinenty. MMO za čtvrt století své existence získala opravdu světový charakter; zájem o ni projevuje UNESCO i Mezinárodní matematická unie. Českoslovenští žáci se zúčastnili všech dvaceti pěti MMO a v roce 1984 se u nás konala dokonce potřetí. Poprvé se v ČSSR uskutečnila v roce 1962, kdy vlastní soutěž proběhla na zámku Hluboká v jižních Čechách. Podruhé, bylo to v roce 1971, byla soutěžním městem Žilina.

Na str. 18 je kratičká informace o jednom ze zdrojů vhodných úloh pro MO. Je jím konkurs vyhlášený Jednotou československých matematiků a fyziků a Jednotou slovenských matematiků a fyziků. Pokud máte pěkné zajímavé úlohy, zašlete je na adresu: ÚV matematické olympiády, Žitná 25, 115 67 Praha 1. Za přijaté úlohy dostávají autoři odměny.

Jiří Mída

Tibor Šalát, Jaroslav Smítal

TEÓRIA MNOŽÍN

Vydalo vydavatelství ALFA v Bratislavě a nakladatelství SNTL v Praze v roce 1986, 1. vydání, 224 str., 10 obr., 2500 výtisků, cena 20,— Kčs.

Na střední škole se probírá teorie množin způsobem, který odpovídá tzv. *Zermelovu-Fraenkelovu axiomatickému systému*. Ten se používá i v recenzované knížce.

Učebnice začíná intuitivním pojmem množiny a zopakováním základních poznatků o výrocích a výrokových funkcích. Pak se pokračuje výkladem Zermelova-Fraenkelova axiomatického systému teorie množin. Hovoří se zde i o základních požadavcích kladených na axiomatické systémy. Další kapitoly se zabývají operacemi s množinami, boolovskými algebry a relacemi. Potom se čtenář seznámí s kardinálními čísly a s vlastnostmi konečných a nekonečných množin; dále pozná, kdy množinu nazýváme spočetnou a kdy nespočetnou. Pak se přejde k množinám uspořádaným a dobře uspořádaným. Celá jedna kapitola je věnována axiomu výběru a jeho ekvivalentům. Závěrečné dvě kapitoly, a to jedenáctá a dvanáctá, se zabývají topologickými a metrickými prostory.

Knížka „Teória množín“ je určena studentům matematiky na vysokých školách univerzitního směru. První čtyři kapitoly až do probírání kardinálních čísel však mohou bez velkých obtíží prostudovat i žáci středních škol.

Jiří Mída

Heveliov dalekohled

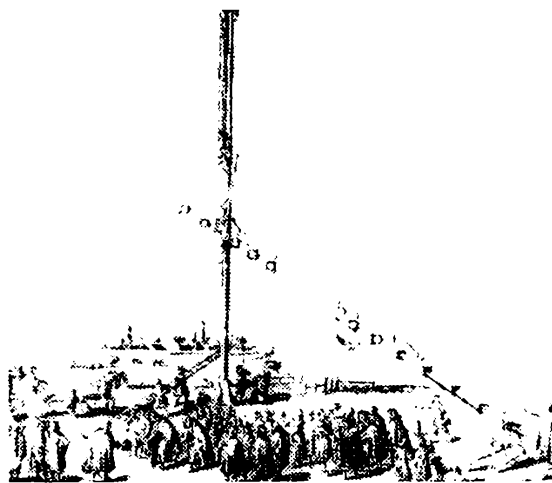
Vynález dalekohledu znásobil lidské vědění o makrokosmu obdobně jako drobnohled v mikrokosmu. Hlavními vadami těchto přístrojů však byly *optické aberace* čili *vady optického zobrazení*, u dalekohledů zejména *barevná vada* (chromatická aberace), projevující se zbarvením obrysu obrazů a jeho neostrotí, dále *otvorová vada* (aperturní aberace) zvaná postaru *sférická vada*.

Snahy potlačit tyto vady se ubíraly trojím směrem:

1. *Johannes Hevelius* (1641) čelil oběma vadám mimořádně velkou ohniskovou vzdáleností objektivu a tím i velkou délkou dalekohledu.
2. *Isaac Newton* (1666) použil duté kulové zrcadlo jako objektiv dalekohledu, čímž odstranil barevnou vadu úplně.
3. *John Dollond* (1757) sestrojil achromatický objektiv tvořený korunovou spojkou a flintovou rozptylkou; svůj nápad použít dva druhy skla realizoval ve své nové optické dílně (původně byl tkadlec).

Náš obrázek představuje nepraktickou Heveliovu cestu k řešení problému aberací. Hledání

ohniska u dalekohledů takové konstrukce se stalo předmětem satir, protože astronom musel pobíhat s okulárem dalekohledu, aby vůbec našel obraz pozorovaného objektu; navíc bylo zcela nemožné pozorovat pohybující se objekty, jakými jsou objekty astronomické.



Heveliova myšlenka omezit se na úzké svazky paraxiálních paprsků vysílaných zdrojem vyžadovala složitou technickou konstrukci samotného dalekohledu i pomocných technických zařízení.

Problematikou odstraňování, resp. minimalizace aberací nových optických soustav se ovšem i dnes zabývá řada průmyslových optiků a techniků.

Vladimír Malíšek

Čo je matematika?

Matematika je pojednanie o operáciách, nezávislé na tom, na ktoré predmety ich možno aplikovať.

G. Boole

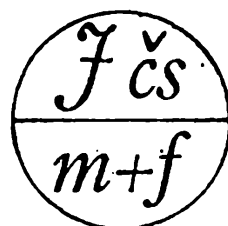
Matematika je učenie o vzťahoch medzi vzorcami zba-venými akéhokoľvek obsahu.

D. Hilbert

Vydáva ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1987.



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 65, 1986-87

VEDOUCÍ REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER, UK PRAHA,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA: Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr. Ján Chrapan, CSc., VVTŠ ČSSP Liptovský Mikuláš, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Kořínková, CSc., VŠZ Praha, doc. dr. Karol Križalkovič, CSc., PF Nitra, prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., Praha, doc. dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha.

Vydává ministerstvo školství ČSR

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

OBSAH

Kraemer Emil: Dva významní autoři a redaktoři Rozhledů	1
--	---

Matematika

Bušek Ivan: Vzdálenost bodu od přímky v analytické geometrii	401
Calda Emil: Buridanův osel a axióm výběru . . .	13
Volný pád a posloupnost lichých přirozených čísel	223
Kuželosečky a grafy některých funkcí .	397
Drs Ladislav: Padesát let „zářezové“ metody	276
Fischer Ivan: Základy programování mikropočítačů	7, 57, 92, 142, 187, 232, 279, 316, 353
Horák Karel: Antické zobecnění Pythagorovy věty	309
Horák Stanislav: Nerovnosti pro trojúhelník	2
Jedinák Dušan: Údiv Alberta Einsteina	49
Karlovský Petr: Úlohy o lhářích a logická intuice .	221, 265
Koman Milan: Několik řešení jedné úlohy o čtyřúhelníku	51
O diofantovské rovnici $82x^2 - y^2 = 1986$. . .	177
Kraemer Emil: Užití rovnoběžného promítání v geometrii	137, 180, 226
Medek Václav: O zobrazování priestoru .	15
O rovnobežnom premietaní	45
O axonometrii .	100
O lineárnej perspektíve	133
Mída Jiří: O vzdálenosti kódových slov	89
O jednom druhu speciálních samoopravných kódů	185
O jedné nečekané aplikaci .	272
Ještě o kódech — písmenové a číslicové změny . . .	315
Mráz Vlastimil: Gaussova eliminační metoda i v počítačovém užití	267
Šimša Jaromír: Dolní odhady rozdílu průměrů	403
Švrček Jaroslav: Úpatnicové trojúhelníky	312

Fyzika

Bittnerová Eva: Fyzika v přírodě — člověk pod vodou .	359
Čáp Ivo: Fyzikální pohled na některé problémy energetiky	194. 242
Höschl Cyril: O mechanické rovnováze těles .	285. 330
Chrapan Ján: Fyzika v přírodě — teplo z útrob Zeme	237
Jířů Josef: Slapové jevy .	19
Pohyb rovnoměrně zrychlený?	327
Kotyk Josef: Listovní váhy .	148
Krajňák Miroslav: Vektory nám pomáhají .	323
Kraus Ivo: O krystalech a určování jejich struktury	289

Machalický Jiří: Řešení pohybu relativistické částice (elektronu) v homogenním elektrickém poli	407
Sedlák Jaroslav: Neutrino	104
Neutrína pro experimenty	150
Skotnický Jozef: Galvanické články z hlediska pracovnej schopnosti	366
Zámečník Jozef, Baník Ivan: Laser a jeho použitie pri meraní rýchlosti	22, 62

Z dějin exaktních věd

Bittnerová E., Čončolová E., Lisá E.: Fyzik z Liptova	23
Chrapan Ján: Profesor Vanovič — človek, fyzik	370
Jáchim František: Isaac Newton a jeho Principia	203
Jedinák Dušan: Lewis Carrol	248
Ruský Gauss	294
Kolomý Rudolf: Prokop Diviš — velký český přírodovědec 18. století	26
Kotyk Josef: Z dějin letectví	70
Ze vzpomínek	109
Mída Jiří: Sedmdesát pět let tísňového signálu SOS	412
Staríček Imrich: Newtonove zásluhy	246
Šolcová Alena: Číslo π a jeho přátelé	153
Tokáriková Eva, Chrapan Ján: Fyzika a dejiny ľudstva I	336

Přemýšlíme, řešíme...

Calda Emil: Noční rozhovor	163
Cantorův půlnoční sen	415
Horák Stanislav: Několik úloh	162
Ze starých matematických časopisů	298
Chudý Jaroslav: Neodbytný rozdíl	35
Kašpar Emil: Fyzikální úlohy	38, 72, 113, 161, 209, 250, 298, 341, 372, 414
Mann Jiří: Obdoby Pascalova trojúhelníku	36
Mída Jiří: Kolik druhů závorek potřebujeme?	76
Mráz Vlastimil: Ovál a elipsa	111
Pěničková Jarmila: Algebrogramy, hlavolamy, rébusy	36, 110, 164, 210, 250, 297, 342, 374
Schütz Tomáš: Úkoly ze zahraničních časopisů	299, 343, 375, 414
Švrček Jaroslav: Akvaball a kombinatorika	251

Naše soutěž

Výsledky loňské soutěže Rozhledů	77
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	79, 114, 165, 215, 254, 343, 376

Úlohy k řešení	81, 121, 170
----------------	--------------

Olympiády a SOČ

MO	83, 124, 210, 212, 379
FO	126, 300, 346, 416
SOČ	256

Informace

Informace o vysokých školách	127, 172, 387
Korespondenční seminář MFF UK Praha	43
Novotná Jarmila: Současnost a budoucnost využití audovizuální tech- niky v pedagogickém procesu v ČSR	389
Schütz Tomáš: K jubileu časopisu Kvant	302

Kalendár M — F (Připravil Dušan Jedinák)	41, 86, 129, 174, 217, 260, 304, 349, 393, 434
---	---

Z nových knih	40, 87, 129, 176, 216, 261, 306, 348, 439
--------------------------------	---

Reportáže z mikrosveta (J. Crhapan, V. Mistrík)	131, 219, 263, 307, 351, 395
--	------------------------------

Pohledy do dějin (A. Loubalová, V. Malíšek, J. Mída)	3. str. všech obálek
---	----------------------

Čo je matematika? (Citáty vybral D. Jedinák)	4. strana všech obálek
---	------------------------

Slovník fyzikálních termínů s přihlédnutím k jejich latinskému či řeckému základu (Připravil Jiří Pech)	příloha v č. 1 až 9
---	---------------------

Komenda Stanislav: Zlomky pravé a nepravé	44
--	----