ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

ROČNÍK 64, 1985/86
ZÁŘÍ

(1)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

JČS m+f

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:
Prof. Emil Kraemer, UK Praha, nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:
Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Štyridsať slobodných rokov rozvoja matematiky na Univerzite Komenského

Doc. dr. JÁN ČIŽMÁR, CSc., UK Bratislava

Štyridsať rokov od oslobodenia našej vlasti slávnou Sovietskou armádou zahrňuje temer celú históriu rozvoja matematiky na Univerzite Komenského v Bratislave. Možnosť štúdia matematiky na univerzite sa utvorila len nedávno predtým, na jeseň r. 1940, otvorením prírodovedeckej fakulty. Do oslobodenia, ba až do r. 1950 absolvovalo štúdium matematiky len niekoľko desiatok poslucháčov, ktorí študovali matematiku spravidla s ďalším prírodovedným predmetom (fyzika, deskriptívna geometria, chémia) ako prípravu na povolanie stredoškolského profesora. Pre nerozvinutosť vysokého školstva aj hospodárskeho a spoločenského života len ojedinelí absolventi mohli pomýšľať na svoje uplatnenie na miestach vysokoškolských učiteľov alebo praktických matematikov. Zabezpečenie výučby matematiky na univerzite učiteľmi, priestormi, literatúrou a zariadením bolo až do oslobodenia i v prvých rokoch po ňom veľmi skromné. Ústav matematiky mal spočiatku len jedného interného pracovníka. Výučba matematiky prebiehala spoločne pre poslucháčov univerzity a techniky pod vedením učiteľov Slovenskej vysokej školy technickej a niekoľkých externých pracovníkov z radov stredoškolských profesorov. Vedúcim ústavov matematiky na technike i na univerzite bol *prof. dr. Jur Hronec*, popredná osobnosť slovenského vedeckého a spoločenského života, činiteľ, ktorý sa ako profesor brnenskej techniky v predmníchovskej republike významne zaslúžil o zriadenie vysokej technickej školy a prírodovedeckej fakulty na Slovensku.

Po oslobodení sa začalo s výchovou učiteľov matematiky pre vyššie triedy základnej školy aj na novozriadenej pedagogickej fakulte, na ktorej od r. 1947 pôsobil ústav matematiky na čele s *prof RNDr. Viktorom Svitekom.*

Kvalitatívny zlom vo výchove matematikov na prírodovedeckej fakulte nastáva po prijatí vysokoškolského zákona r. 1950. Interným vedúcim novoutvorenej katedry matematiky sa stáva prof. Hronec, ktorý v nasledujúcich deviatich rokoch venuje všetky svoje sily a bohaté pedagogické a životné skúsenosti organizácii pedagogického a vedeckého života na fakulte, materiálnemu a kádrovému budovaniu katedry so smelými plánmi a predstavami o budúcom veľkolepom rozvoji matematiky na univerzite a na Slovensku vôbec. Popri mladých nádejných pracovníkoch sa podarilo na katedru získať natrvalo skúsených českých vysokoškolských učiteľov (*doc. RNDr. Jan Srb, doc. RNDr. Milič Sypták*), ktorých práca na fakulte spolu s predchádzajúcim pôsobením *prof. RNDr. Josefa Kauckého, prof. RNDr. Karla Dusla* a najmä s dlhoročnou nezištnou a obetavou externou činnosťou *prof. RNDr. Otakara Borůvku* je krásnym, neokázalým príkladom bratskej pomoci českého národa, jeho vedy a školstva rozvíjajúcej sa matematike na bratislavskej univerzite v jej neľahkých začiatkoch.

V päťdesiatych rokoch sa každoročně zvyšovali počty poslucháčov prijímaných na štúdium matematiky a medzi absolventmi sa objavili okrem učiteľov matematiky aj prví odborníci v matematickej analýze, numerickej matematike a matematickej štatistike. Podľa zámerov, ktoré sa začali uskutočňovať r. 1953, sa mala príprava stredoškolských profesorov matematiky celkem presunúť na fakulty prírodných vied vysokých škôl pedagogických a výchova učiteľov pre základné školy na vyššie pedagogické školy, z ktorých sa po r. 1959 utvorili pedagogické inštitúty a neskôr pedagogické fakulty. Výchova stredoškolských učiteľov sa na prírodovedeckej fakulte univerzity obnovila čiastočne už r. 1955, v úplnom rozsahu r. 1959.

V prvých rokoch Matematickej olympiády bola katedra matematiky centrom organizovania tejto súťaže a *akademik Jur Hronec* a *doc. RNDr. Milan Kolibiar* patrili k popredným funkcionárom jej výborov v Bratislave a na Slovensku. Taktiež v rozvíjajúcej sa činnosti Jednoty československých matematikov a fyzikov (na Slovensku neskôr Jednoty slovenských matematikov a fyzikov) zaujímala katedra vedúce postavenie: prvými předsedami celoslovenskej organizácie boli postupně pracovníci katedry *akademik Jur Hronec, prof. RNDr. Jan Srb* a *doc. RNDr. Michal Harant.*

Koncom päťdesiatych rokov prvými nesmelými krokmi vstupovala do života študentská vedecká a odborná činnosť, ktorej zápalistým propagátorom bol doc. Kolibiar. Okrem neho úspěšných účastníkov každoročných súťaží viedli *doc. RNDr. Tibor Šalát, CSc., doc. RNDr. Michal Greguš, CSc., doc RNDr. Anton Huťa, CSc.*, a ďalší pedagógovia — všetko budúce významné osobnosti slovenskej matematiky. V slávnych šľapajách svojich predchodcov kráčajú aj dnešní súčasníci vynikajúcimi výsledkami v každoročných celoštátnych súťažiach.

Po roku 1959, keď bola k univerzite pripojená vysoká škola pedagogická a vedenie katedry matematiky po akademikovi Hroncovi prevzal doc. Greguš, rozrástla sa katedra natoľko, že se ukázalo účelným a potrebným jej rozdělenie. R. 1960 sa z katedry matematiky oddeľuje katedra geometrie na čele s prof. Srbom. K zriadeniu ďalších katedier dochádza r. 1964 vznikom katedry algebry a teórie čísel (vedúci *prof. RNDr. Milan Kolibiar, DrSc.*) a katedry numerickej matematiky a matematickej štatistiky (vedúci *prof. RNDr. Anton Kotzig, DrSc.)*; z pôvodnej katedry matematiky sa utvorila katedra matematickej analýzy (vedúci *prof. RNDr. Michal Greguš, DrSc.*).

V päťdesiatych rokoch sa zaznamenal aj prvý veľký rozmach tvorivej vedeckej práce v matematike a prvé úspechy vo výchove nových vedeckých kádrov. Vznikol fakultný zborník *Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae*, v ktorom — v časti *Mathematica* — uverejňovali výsledky svojej vedeckej práce učitelia a vedeckí pracovníci, neskôr aj vynikajúci študenti fakulty (V súčastnosti vychádza tento zborník pod názvom Acta mathematica.) Mladí nádejní absolventi boli prijatí za ašpirantov; v druhej polovici päťdesiatych rokov prebehli prvé obhajoby kandidátskych dizertačných prác, na základe ktorých boli udelené vedecké hodnosti kandidátov vied. Skutočnými vyhňami vedeckej práce a výchovy mladých vedcov sa stali početné vedecké semináre, ktorých význam v mnohých prípadoch prerástol ďaleko za rámec fakulty, ba aj Bratislavy.

Rýchly vývoj v oblasti výpočtovej techniky a potreby praxe si vyžiadali zriadenie laboratória výpočtovej techniky na fakulte r. 1967 (vedúci *doc. RNDr. Valter Šeda, CSc.)*. Progresívny rozvoj laboratória a spoločenský význam jeho činnosti viedli r. 1973 k jeho pretvoreniu na ústav aplikovanej matematiky a výpočtovej techniky (vedúci *prof. ing. Jozef Brilla, DrSc.*), ktorý je dnes celouniverzitným ústavom s významným vedeckým a aplikačním poslaním.

Zvyšujúce sa požiadavky na výchovu špecializovaných odborníkov viedli k ďalším organizačným zmenám v štruktúre pracovísk: r. 1973 vznikla katedra teoretickej kybernetiky (vedúci *prof. RNDr. Ladislav Kosmák, CSc.*, od r. 1982 *doc. RNDr. Eduard Toman, CSc.*) a r. 1978 sa katedra numerickej matematiky a matematickej štatistiky rozdelila na katedru teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky (vedúci *prof. RNDr. Tibor Neubrunn, DrSc.*) a katedru numerických a optimalizačních metód (terajší vedúci *doc. RNDr. Milan Hamala, CSc.*). Kabinet teórie vyučovania matematiky a deskriptívnej geometrie, zriadený r. 1977 (vedúci *RNDr. Štefan Malina*), bol r. 1980 začleněný ako oddelenie do katedry geometrie (vedúci katedry od r. 1970 *doc. RNDr. Vladimír Piják)*.

V druhej polovici šesťdesiatych rokov sa zaviedlo oddělené štúdium učiteľstva a odboru už od prvého ročníka. Zároveň sa prudko zvýšili počty prijímaných študentov a postupne sa rozrastal aj počet odborných špecializácií, ktorý v polovici sedemdesiatych rokov zahrňoval matematickú analýzu, numerickú matematiku, matematickú štatistiku, ekonometriu, aplikovanú matematiku, teoretickú kybernetiku, teóriu systémov a operačnú analýzu. Od r. 1977 je celoštátne jednotne stanovených päť študijných odborov vysokoškolského štúdia matematiky. V učiteľskom štúdiu sa matematika kombinuje s predmetmi fyzika, deskriptívna geometria, branná výchova, zemepis, chémia, biológia.

Súčasne s platnosťou nového vysokoškolského zákona vykročila do života 1. septembra 1980 aj Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského. Oddelením sa od prírodovedeckej fakulty sa otvorili nové organizačné možnosti ďalšieho vývoja matematiky na univerzitě. Na fakulte vznikla 1. IX. 1984 katedra aplikovanej matematiky.

Dnešná matematicko-fyzikálna fakulta univerzity predstavuje mohutné centrum výchovy mladej generácie matematických odborníkov pre rozličné oblasti národného hospodárstva, správnych organizácií, teoretického výskumu a učiteľov pre základné a stredné školy. Odbor matematiky vo svojich 85 učiteľoch a vedeckých pracovníkoch, z ktorých je 10 profesorov, 28 docentov, 9 doktorov vied a 65 kandidátov vied, má ohromný tvorivý vedecký potenciál, ktery sa prejavuje v úspěšnom riešení úloh základného teoretického i aplikovaného výskumu, v riešení úloh z oblasti priemyselnej výroby, techniky, zdravotníctva a iných odvetví nášho hospodárskeho a spoločenského života. Pracovníci fakulty zastávajú významné miesta v rozličných odborných a poradných orgánoch ministerstva školstva, významným podielom sú zastúpení pri tvorbe učebníc pre vysoké, stredné i základné školy, prispievajú výskumom i prakticky ku skvalitňovaniu vyučovania na stredných a základných školách, organizujú vedecké semináre a iné vedecké podujatia s účasťou popredných zahraničných matematikov, majú rozsiahle a živé styky s významnými matematickými pracoviskami v zahraničí, najmä v krajinách našich priateľov. Mnohé výsledky vedeckej aktivity matematikov fakulty sa stretli so živou odozvou a dostalo sa im zaslúženého uznania v našej vlasti aj v zahraničí.

V terajších poslucháčoch fakulty vyrastá mladá, priebojná generácia matematikov, ktorá sa dychtivo zmocňuje najnovších poznatkov vedy, usiluje sa ovládnuť matematiku ako nástroj poznávania a pretvárania sveta a napriek istým ťažkostiam pri zabezpečovaní a používaní modernej techniky, ktorá je dnes neoddeliteľnou súčasťou matematiky a jej vyučovania, opúšťa fakultu dobre pripravená plniť úlohy, ktoré pred ňu stavia program rozvoja našej spoločnosti. Vstupuje s elánom a odhodlaním na cestu, o ktorej sa jej predchodcocia pred čtyridsiatimi rokmi neodvažovali ani snívať, ale ktorej základy v prvých rokoch mieru vykúpeného krvou a obeťami našich osloboditeľov predsa len pomáhali tvoriť s rovnakým historickým optimizmom, s akým sa do práce za dosiahnutie ušľachtilých cieľov priberá dnes ona.

Když uslyšíte o kvaternionech...

William Rowan Hamilton — ke 180. výročí narození (4. 8. 1805)

RNDr. ALENA ŠOLCOVÁ, PedF UK, Praha

Předpokládejme, že čtenář má představu o tom, která čísla se označují jako komplexní. Jsou to čísla tvaru $z = a + bi$, kde a, b jsou čísla reálná a symbol i má vlastnost $i^2 = -1$.

Pokus o sestrojení systému komplexních čísel jako dvojic reálných čísel vedl k myšlence vyšetřovat také trojice tvaru $z = a + bi + cj$, kde a, b, c jsou reálná čísla a i, j nějaké symboly. Taková „trojitá" čísla je rozumné sčítat podobně jako se sčítají čísla komplexní:

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j \; .$$

A jaké vlastnosti má mít násobení? Označme si nejdříve tuto operaci hvězdičkou $*$. Můžeme požadovat, aby operace $*$ splňovala co nejvíce vlastností běžného násobení reálných čísel, např.

(1) součin reálného čísla $r = r + 0i + 0j$ s nějakým číslem tvaru $z = a + bi + cj$ se má rovnat $ra + rbi + rcj = rz$,

(2) má platit $(az_1) * (bz_2) = ab\,(z_1 * z_2)$, kde a, b jsou reálná čísla,

(3) má platit distributivní zákon v obou následujících tvarech

$$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3 \,,$$
$$(z_1 + z_2) * z_3 = z_1 * z_3 + z_2 * z_3$$

Nyní bys měl, čtenáři, na chvíli přestat číst. Zkus najít takové pravidlo násobení nových čísel, který splňuje uvedené tři požadavky.

Asi to nedalo moc práce. Srovnej, zda se pravidlo, které jsi nalezl, nějak liší od tohoto

$$(a + bi + cj) * (a' + b'i + c'j) = aa' + (ab' + b'a)i + (ac' + c'a)j$$

Pokud ses náhodou strefil a dospěl jsi právě k tomuto výsledku, zkus to ještě jinak, protože možností zavedení násobení je víc. Způsob násobení uvedený jako příklad splňuje ovšem kromě vlastností (1), (2), (3) ještě

(4) komutativní zákon $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$ a

(5) asociativní zákon $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_2)$

Teď nastal opět čas na přestávku k ověření, že je to zkutečně pravda.

Jestliže ses přesvědčil, že předcházející tvrzení platí, zasloužíš odměnu. Prozraďme, co našim novým číslům chybí — je to možnost *dělení*. Nepodaří se například najít podíl 1 : i, to znamená, že rovnici $(0 + 1i + 0j) * z = 1 + 0i + 0j$ nevyhovuje žádné naše nové číslo z. Není to ovšem náhoda. Lze ukázat, že pro každé pravidlo násobení, které splňuje podmínky (1), (2), (3), můžeme najít aspoň jednu dvojici čísel z_1, z_2 ($z_2 \neq 0$) takových, že z_1 nelze dělit číslem z_2.

Čísla se dvěma symboly i, j neuspokojovala matematiky právě kvůli nemožnosti dělit. Irský astronom, fyzik a matematik *William Rowan Hamilton* (1805—1865) si troufl pokročit dále. Přidal třetí symbol a pojmenoval ho nikoli nečekaně k. Vyšetřoval pak vlastnosti čísel tvaru $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$. Vytvořil systém, v němž je možné najen taková čísla sčítat a zavést pro ně operaci násobení splňující podmínky (1), (2), (3), ale navíc lze v tomto systému i dělit.

„Čtverná čísla" tvaru $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ s operací sčítání
$(a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}) + (a' + b'\mathrm{i} + c'j + d'\mathrm{k}) = (a + a') + (b + b')\mathrm{i} + {}$ $+ (c + c')\mathrm{j} + (d + d')\mathrm{k}$ a svéráznou operací násobení (uvedenou dále) nazval Hamilton *kvaterniony*.

Pro násobení symbolů i, j, k definoval tyto rovnosti:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \qquad \begin{array}{ll} \mathrm{ij} = \mathrm{k} & \mathrm{ji} = -\mathrm{k} \\ \mathrm{jk} = \mathrm{i} & \mathrm{kj} = -\mathrm{i} \\ \mathrm{ki} = \mathrm{j} & \mathrm{ik} = -\mathrm{j} \end{array}$$

Jestli již vidíš elegantní symetrii definice, můžeš lehce znásobit kvaterniony p, q:

$$p = 1 + 8\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + 5\mathrm{k}\,, \qquad q = 1 + 8\mathrm{i} + 6\mathrm{j} + 5\mathrm{k}\,.$$

Je pozoruhodné, že výsledek závisí na pořadí násobení:

$$p * q = -88 - 14\mathrm{i} + 6\mathrm{j} + 58\mathrm{k}\,,$$
$$q * p = -88 + 46\mathrm{i} + 6\mathrm{j} - 38\mathrm{k}$$

Operace násobení tedy není komutativní, ale asociativnost (5) zůstává zachována, jak se můžeš sám přesvědčit.

Ačkoliv se Hamiltonovo jméno vyskytuje hlavně v teoretické mechanice, on sám považoval za svůj nejznamenitější výkon objev kvaternionů. Kvaternionům se věnoval 22 let od roku 1843 až do konce života. Zveřejnil o nich několik rozsáhlých prací. Je ironií osudu, že jeho objev, který byl přivítán jako univerzální lék na problémy fyziky 19. století, byl na přelomu století odložen jako naprosto neužitečný. Znovu kvaterniony ožily ve 30. letech v kvantové mechanice (spinové matice) a v 80. letech se s nimi setkáváme v teorii kvarkových polí.

Za zmínku stojí několik příhod z dětství a mládí, které Hamiltona přivedly ke tvořivé práci v matematice a fyzice. Ve třech letech prý uměl číst, ve třinácti už znal 13 jazyků a jako dvanáctiletý studoval Newtonovu práci „Arithmetica universalis". V témže roce 1817 se utkal v souboji v rychlosti počítání se *Zerahem Colburnem*, zázračným americkým dítětem. Hamilton sice prohrál, ale pochopil prý početní metody, které Colburn užíval, aniž o tom věděl. Možná, že právě toto setkání získalo Hamiltona trvale pro exaktní vědy. Jinak se věnoval totiž studiu latiny, řečtiny a orientálních jazyků, v čemž pak pokračoval i v dospělém věku. Skládal prý rovněž úspěšné básně. Kdo ví, zda to nezpůsobila právě matematika, že se nestal také slavným básníkem.

O konvexním čtyřúhelníku

STANISLAV HORÁK, Praha

V článku jsou odvozeny dvě věty o konvexním čtyřúhelníku. Jsou to známé věty, jsou však v tomto článku odvozeny užitím vektorů. Článek není nikterak náročný; nejvyšší požadavek je skalární součin dvou vektorů.

Věta 1. Součet druhých mocnin délek stran čtyřúhelníku $ABCD$ je roven součtu čtverců délek úhlopříček zvětšenému o čtyřnásobný čtverec vzdálenosti středů úhlopříček.

Máme tedy dokázat rovnost

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4 \,.\, |EF|^2,$$

kde E, F jsou středy úhlopříček.

Řešení (obr. 1). Vektory strany daného čtyřúhelníku $ABCD$ označme

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{BC},\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{CD},\ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{DA}$$

a dále vektory úhlopříček

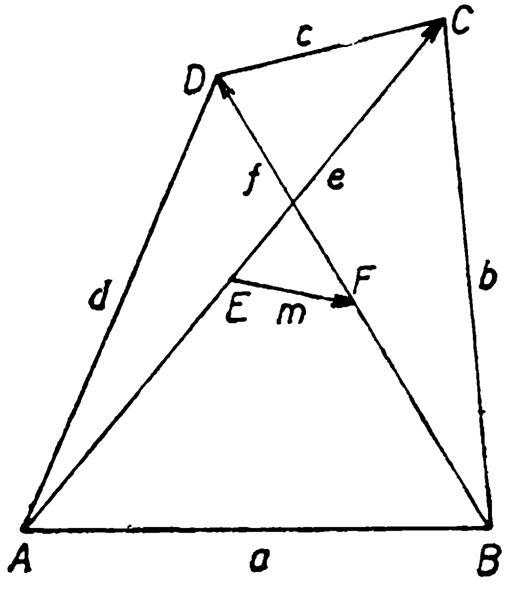
$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{AC},\ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{BD}.$$

Je přirozené, že platí

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{o} \tag{1}$$

Dále platí

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d},\quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}.$$



Obr. 1

Jsou-li E, F středy úhlopříček po řadě AC, BD, označme

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{EF}\,.$$

Dále platí

$$\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{f} - \boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{o}\,.$$

Po dosazení za $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ a po kratší úpravě je

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(-\mathbf{b} - \mathbf{d}) .$$

Po této přípravě můžeme již počítat:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 = \\ &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 + 2\mathbf{b}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 + \mathbf{d}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{bd} = \\ &= \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 + (-\mathbf{b} - \mathbf{d})^2 = \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 + 4\mathbf{m}^2 . \end{aligned}$$

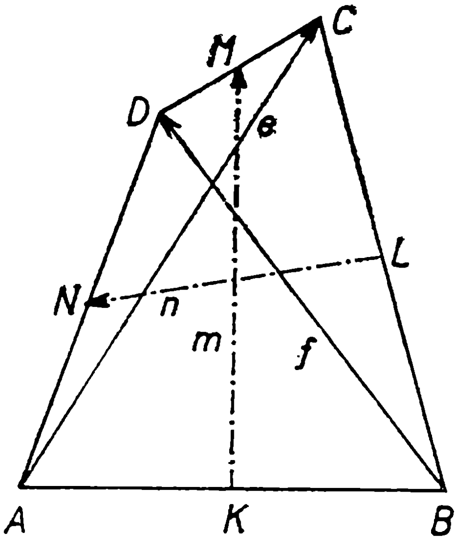
Tím jsme s důkazem vyslovené věty hotovi. Během úprav jsme využili vztahu (1).

Věta 2. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí: součet dvojmocí délek úhlopříček je roven dvojnásobnému součtu dvojmocí délek středních příček.

Podle toho máme dokázat, že

$$e^2 + f^2 = 2(|KM|^2 + |LN|^2) ,$$

kde K, M jsou středy stran AB, CD a L, N jsou středy stran BC, DA.



Obr. 2

Řešení. V obr. 2 je znázorněn daný čtyřúhelník $ABCD$. Středy jeho stran jsou K (střed AB), L (střed BC), M (střed CD), N (střed DA). Pro stručnost označme

$$\mathbf{e} = \mathbf{AC},\ \mathbf{f} = \mathbf{BD},\ \mathbf{m} = \mathbf{KM},\ \mathbf{n} = \mathbf{LN} .$$

Z obr. 2 také vyplývá

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} , \\ \mathbf{e} &= -\mathbf{c} - \mathbf{d} \end{aligned}$$

a odtud

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}) .$$

Podobně se dá vypočítat

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}) .$$

Ze čtyřúhelníku $KBCM$ dostaneme

$$\boldsymbol{KB} + \boldsymbol{BC} + \boldsymbol{CM} + \boldsymbol{MK} = \boldsymbol{o} .$$

Jinak psáno

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{m} = \boldsymbol{d} .$$

Z toho

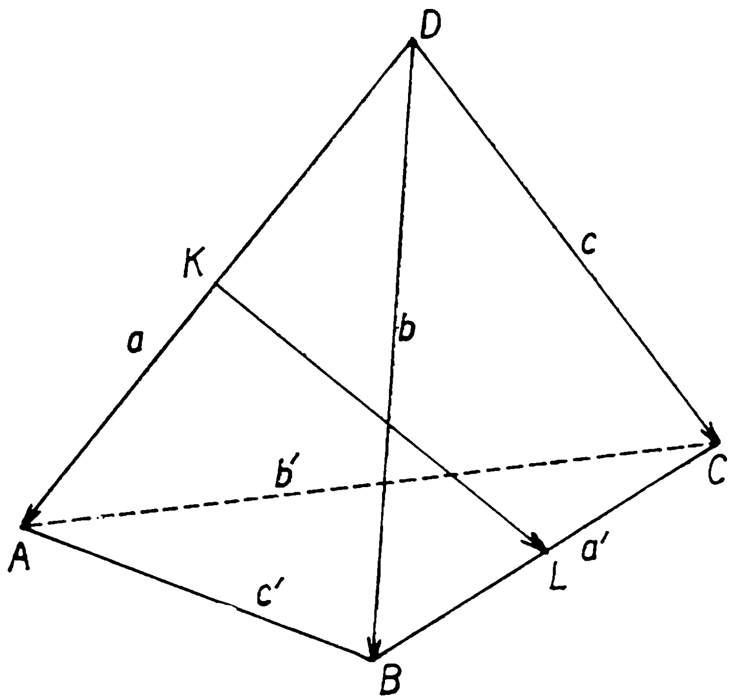
$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} . \tag{2}$$

Ze čtyřúhelníku $KMDA$ dostaneme obdobně

$$\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c} . \tag{2'}$$

Sečtením rovnic (2) a (2′) dostaneme jednodušší vyjádření

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}) .$$



Obr. 3

Stejným postupem dostaneme vyjádření pro $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$$

Nyní již máme vše připraveno pro výpočet:

$$\boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{f}^2 = \frac{1}{4}(2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{c}^2 + 2\boldsymbol{d}^2 + 2\boldsymbol{ab} - 2\boldsymbol{ac} - 2\boldsymbol{ad} -$$

$$
\begin{aligned}
&- 2bc - 2bd + 2cd + 2\,bc + 2ad - 2bd - 2ac - \\
&- 2cd - 2ab) = \\
&= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd) = \\
&= \frac{1}{2}\left[(a - c)^2 + (b - d)^2\right] = \frac{1}{2}\left[4n^2 + 4m^2\right]
\end{aligned}
$$

a důkaz věty 2 je proveden.

Cvičení:

1. Jak by se věty změnily, kdyby šlo o čtverec, obdélník, kosodélník, lichoběžník?
2. Dokažte tuto větu: Ve čtyřstěnu součet dvojmocí délek dvou mimoběžných hran zvětšený o dvojnásobek dvojmoce délky úsečky spojující středy těchto dvou hran je pro všechny dvojice mimoběžných hran stejný. (Obr. 3)

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

RNDr. ing. JAROSLAV BARTÁK, CSc., UK Praha

Ve druhém loňském čísle Rozhledů v článku [1] jsme se seznámili s pojmem diferenciální rovnice a ukázali jsme několik jejich příkladů. Nezabývali jsme se však otázkami jejich řešení. V tomto článku se zmíníme o problémech spjatých s řešením a vyšetříme jeden speciální typ rovnic, pro který dovedeme řešení vyjádřit analyticky (vzorcem).

Rovnice z článku [1] byly velmi speciální a nebylo obtížné najít (nebo dokonce uhádnout) analytické vyjádření jejich řešení. Převážná většina prakticky důležitých rovnic však zdaleka tak jednoduchá není a jejich řešení bývá zpravidla velmi obtížné. Velmi často nejenom, že řešení neumíme najít, ale dokonce mnohdy ani nevíme, zda vůbec nějaké existuje. V mnoha případech nám obecná teorie umožní o existenci rozhodnout nebo nám poskytne metodu hledání určité aproximace řešení, popřípadě (aniž bychom řešení znali) nám ukáže některé jeho vlastnosti. Kromě toho dnes máme řadu možností jak hledat řešení diferenciálních rovnic numerickými metodami na počítačích. Stále však zůstává mnoho otázek souvisejících s diferenciálními rovnicemi otevřených. Proto vzhledem ke značné důležitosti této problematiky v praktických oborech je na tyto otázky soustředěno velké úsilí mnoho matematiků i pracovníků v jiných oborech.

Důležitou třídou diferenciálních rovnic, u nichž prakticky známe charakter systému všech jejich řešení, a někdy dokonce dovedeme jejich řešení analyticky vyjádřit, jsou tzv. *lineární diferenciální rovnice.* Je sice pravda, že v praktických úlohách většinou potřebujeme řešit složitější (nelineární) rovnice, avšak mnohdy je můžeme nahradit sice méně přesnými (méně přesnými v tom smyslu, že méně přesně popisují skutečný proces), zato ale snáze řešitelnými lineárními rovnicemi, a tak si učinit alespoň přibližnou představu o popisovaném procesu.

Zhruba řečeno, lineární diferenciální rovnicí rozumíme diferenciální rovnici, v níž se neznámá funkce a její derivace vyskytují pouze lineárně (tj. nejsou v ní obsaženy třeba součiny neznámé funkce a jejích derivací, nebo jejich mocniny jiné než první atd.). V tomto článku ukážeme, jak řešit počáteční úlohu pro tzv. *lineární diferenciální rovnici prvního řádu* (což je jeden z případů, kdy umíme řešení analyticky vyjádřit). Je to rovnice tvaru

$$y' + p(t)y = q(t)\,, \tag{1}$$

kde $y = y(t)$ je neznámá funkce a p, q jsou dané funkce. O funkcích p a q budeme v dalším předpokládat, že jsou definované a spojité na jistém nedegerovaném intervalu $\mathbf{I} \subset R$. Počáteční úloha bude zadána rovnicí (1) a počáteční podmínkou

$$y(t_0) = y_0\,, \tag{2}$$

kde $t_0 \in \mathbf{I}$ a y_0 jsou daná čísla určující počáteční (výchozí) stav.

V dalším ukážeme, že počáteční úloha (1), (2) má právě jedno řešení a najdeme jeho vyjádření. Provedeme to ve dvou krocích. Nejprve dokážeme, že úloha nemá více než jedno řešení, a potom najdeme funkci, která danou počáteční úlohu řeší.

1. Věta o jednoznačnosti (unicitě): Počáteční úloha (1), (2) má nejvýše jedno řešení definované na intervalu I.

Důkaz: Mějme libovolná dvě řešení y_1, y_2 úlohy (1), (2) na intervalu I. Položme $y = y_1 - y_2$. Protože každá z funkcí y_1, y_2 splňuje (1) i (2), vyhovuje funkce y vztahům

$$y' + p(t)y = 0\,, \tag{3}$$

$$y(t_0) = 0\,. \tag{4}$$

Vynásobme rovnici (3) nenulovým výrazem

$$e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}$$

Dostaneme

$$y'(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau} + p(t)\,y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau} = 0\,.$$

Všimněte si, že na levé straně je vlastně derivace funkce

$$y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau}$$

tj. platí

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau} \right] \qquad 0\,,$$

a tedy výraz zapsaný v poslední rovnosti v hranatých závorkách je konstantní. Proto je

$$y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau} \qquad y(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t_0} p(\tau)\, d\tau} \qquad 0$$

neboť podle (4) je $y(t_0) = 0$. Odtud vzhledem k nenulovosti exponenciální funkce ihned plyne $y(t) = 0$ pro libovolný bod $t \in \mathbf{I}$. Podle definice funkce y to ale znamená, že

$$y_1(t) = y_2(t) \text{ pro všechna } t \in \mathrm{I}.$$

Tím je tvrzení věty dokázáno.

Poznamenejme ještě, že máme-li řešení y úlohy (1), (2) a interval $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$, pro který $t_0 \in \mathbf{J}$, potom je zúžení (restrikce) funkce y na interval $\mathbf{J}$ rovněž řešením úlohy (1), (2). Tímto způsobem můžeme dostat nekonečně mnoho dalších řešení (která samozřejmě nejsou definována na celém intervalu $\mathbf{I}$ a můžeme z nich vhodným prodloužením získat řešení s větším definičním oborem). Proto zavádíme pojem maximální řešení, což je takové řešení, které nelze dále prodlužovat. V našem případě je to právě řešení definované na celém intervalu $\mathbf{I}$. Věta 1 tedy říká, že úloha (1), (2) má nejvýše jedno maximální řešení.

Naším dalším cílem bude ukázat, že počáteční úloha (1), (2) má řešení. Ukážeme více; nejenom že dokážeme existenci řešení, ale navíc najdeme jeho analytické vyjádření (vzorec).

Vynásobme podobně jako v předchozím rovnici (1) výrazem

$$e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau}$$

Po snadné úpravě (známé již z důkazu věty 1) dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau} \right] \qquad q(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau}$$

Integrováním této rovnice přes t v mezích od t_0 do t obdržíme

$$y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau} \qquad y(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t_0} p(\tau)\, d\tau} \qquad \int_{t_0}^{t} q(\sigma)\, e^{\int_{t_0}^{\sigma} p(\tau)\, d\tau}\, d\sigma$$

Protože podle (2) má být $y(t_0) = y_0$, plyne odtud vzhledem ke

zřejmému vztahu $\quad e^{\int_{t_0}^{t_0} p(\tau)\, d\tau} \qquad e^{0} = 1 \quad$ po snadné úpravě

vzorec pro řešení úlohy (1), (2)

$$(5) \qquad y(t) = y_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau} \qquad \int_{t_0}^{t} q(\sigma)\, e^{-\int_{\sigma}^{t} p(\tau)\, d\tau}\, d\sigma \qquad t \in I$$

(zde jsme kromě jiného užili vztahu

$$\int_{t_0}^{\sigma} p(\tau)\, d\tau \qquad \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_{\sigma}^{t} p(\tau)\, d\tau$$

a známých vlastností exponenciální funkce).

Provedené úvahy nás vedou k následující větě.

2. Věta o existenci: Funkce y definovaná vzorcem (5) je maximálním řešením počáteční úlohy (1), (2).

O správnosti věty se můžeme přesvědčit přímým výpočtem, tj. dosazením do rovnice (1) a počáteční podmínky (2). Musíme ovšem umět derivovat integrál podle parametru obsaženého jak v mezích, tak i v integrandu. V tom odkazujeme čtenáře na knihu [2], kde je možno najít potřebný vzorec (Kapitola VII, § 12):

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)}^{B(t)} f(\tau,t)\, d\tau \qquad B'(t)\, f(B(t),t) - A'(t)\, f(A(t),t) + \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\tau,t)\, d\tau$$

Pomocí tohoto vzorce vypočítáme derivaci funkce y dané vztahem (5)

$$y'(t) = -y_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau}\, p(t) + q(t)\, e^{-\int_{t}^{t} p(\tau)\, d\tau} - \int_{t_0}^{t} q(\sigma)\, p(t)\, e^{-\int_{\sigma}^{t} p(\tau)\, d\tau}\, d\sigma$$

$$= -p(t)\left[y_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau} \int_{t_0}^{t} q(\sigma)\, e^{-\int_{\sigma}^{t} p(\tau)\, d\tau}\, d\sigma \right] + q(t) = -p(t)\, y(t) + q(t)$$

Tedy po dosazení do rovnice máme

$$y' + p(t)y = -p(t)y + q(t) + p(t)y = q(t)\,.$$

Splnění počáteční podmínky (2) je zřejmé. Tím je věta dokázána.

Shrneme-li obsah vět 1, 2, dostaneme ihned další větu.

3. Věta o existenci a jednoznačnosti: Počáteční úloha (1), (2) má právě jedno maximální řešení, a to je dáno vztahem (5).

Vzorec (5) je zvláště jednoduchý, v případě rovnice

$$y' + p(t)y = 0$$

(této rovnici říkáme homogenní rovnice, nebo také rovnice bez pravé strany). Vzorec (5) se potom redukuje na tvar

$$y(t) = y_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau} \tag{6}$$

Ukažme na závěr několik konkrétních příkladů. Při řešení můžeme použít již hotových vzorců (5) nebo (6) nebo můžeme provést příslušný výpočet s konkrétními funkcemi p, q a hodnotou y_0.

Příklad 1: Řešme počáteční úlohu

$$y' - 3y = t\,, \quad y(0) = 2\,.$$

Řešení: V našem případě je $p(t) = -3$, $q(t) = t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 2$. Funkce p, q jsou definované a spojité na celém intervalu $(-\infty, +\infty)$, a proto i řešení budeme hledat pro všechna $t \in (-\infty, +\infty)$. Dosazením do vzorce (5) dostaneme

$$y(t) = 2\, e^{-\int_0^t -3\, d\tau} \int_0^t \sigma\, e^{-\int_\sigma^t -3\, d\tau}\, d\sigma = 2\, e^{3t} + \int_0^t \sigma\, e^{3(t-\sigma)}\, d\sigma$$

Nakonec po vyčíslení integrálu obdržíme řešení ve tvaru

$$y(t) = 2e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{e^{3t}}{9}, \text{ pro } t \ (-\infty, +\infty).$$

Přesvědčte se o správnosti výsledku dosazením.

Příklad 2: Řešme počáteční úlohu

$$y' - \frac{y}{t} = t, \quad y(1) = y_0$$

Řešení: Vzhledem k tomu, že funkce $p(t) = -\frac{1}{t}$ není spojitá pro $t = 0$, budeme hledat maximální řešení na intervalu $(0, +\infty)$.
Podle vzorce (5) ihned dostáváme

$$y(t) = y_0 e^{-\int_1^t -\frac{1}{\tau} d\tau} \int_1^t \sigma e^{-\int_\sigma^t -\frac{1}{\tau} d\tau} d\sigma$$

Odtud snadnými úpravami plyne

$$y(t) = y_0 t + t(t-1)\,.$$

O správnosti výsledku se přesvědčte zkouškou.

Mnohdy nehledáme řešení počáteční úlohy, nýbrž řešení samotné rovnice. Není obtížné si uvědomit, že každé maximální řešení diferenciální rovnice (1) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$(7) \qquad y(t) = C e^{-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau} \int_{t_0}^t q(\sigma) e^{-\int_\sigma^t p(\tau) d\tau} d\sigma \qquad t \in I$$

kde C je libovolná reálná konstanta (pro různé konstanty dostaneme různá řešení) a t_0 je jakékoliv, pevně zvolené číslo z intervalu **I**. Toto, tzv. obecné řešení diferenciální rovnice (1) formálně získáme, dosadíme-li do vzorce (5) za počáteční podmínky y_0 parametr C. Naopak, známe-li obecné řešení rovnice (1), dostaneme řešení počáteční úlohy (1), (2) vhodnou volbou parametru C (zřejmě musíme volit $C = y_0$).

Příklad 3: Najděme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + 2ty = t\,e^{-t^2}$$

Řešení: V našem případě, kdy je $p(t) = 2t$, $q(t) = t\,e^{-t^2}$, vzorec (7) dává

$$y(t) = C e^{-\int_{t_0}^t 2\tau\, d\tau} \int_{t_0}^t \sigma e^{-\sigma^2} e^{-\int_\sigma^t 2\tau\, d\tau} d\sigma$$

Výsledek ještě upravíme vyčíslením integrálů.

$$\int_{t_0}^t 2\tau\, d\tau = [\tau^2]_{t_0}^t = t^2 - t_0^2,$$

$$\int_\sigma^t 2\tau\, d\tau = [\tau^2]_\sigma^t = t^2 - \sigma^2 \quad \text{Proto dále}$$

$$\int_{t_0}^{t} \sigma e^{-\sigma^2} e^{-\int_\sigma^t 2\tau\, d\tau} d\sigma \quad \int_{t_0}^{t} \sigma e^{-\sigma^2} e^{-(t^2-\sigma^2)} d\sigma \quad e^{-t^2} \int_{t_0}^{t} \sigma\, d\sigma =$$

$$e^{-t^2} \left[\frac{\sigma^2}{2} \right]_{t_0}^{t} = \frac{e^{-t^2}}{2} (t^2 - t_0^2)$$

Vidíme, že když zvolíme $t_0 = 0$, řada členů v integrálech bude nulových. Položme proto $t_0 = 0$. Pro řešení potom dostáváme

$y(t) = Ce^{-t^2} + \frac{e^{-t^2}}{2} t^2 = \left(C + \frac{t^2}{2}\right) e^{-t^2}$, kde C je libovolná reálná konstanta.

Literatura:

[1] Barták J.: Co jsou to diferenciální rovnice?, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 63, 1984/85, str. 52—56.

[2] Jarník V.: Integrální počet II, Nakladatelství ČSAV, Praha 1955.

FYZIKA

Platí zákon zachování hybnosti pro matematické kyvadlo?

RNDr. ALEŠ TROJÁNEK, gymnázium Velké Meziříčí

1. *Úvod*

Významnými základními fyzikálními zákony, s nimiž se žáci na střední škole setkávají v prvním období studia, jsou zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie. Jejich možné formulace jsou: „Součet hybností těles v izolované soustavě se jejich vzájemným působením nemění. Energie izolované soustavy těles zůstává při všech dějích v ní probíhajících konstantní.“ Vyjádřeno vztahy pro n-částicovou izolovanou soustavu platí:

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \quad + \boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' + \ldots + \boldsymbol{p}_n'$$

$$E_{1\mathrm{k}} + E_{2\mathrm{k}} + \quad + E_{n\mathrm{k}} + E_{\mathrm{pot.\,s.}} = E'_{1\mathrm{k}} + E'_{2\mathrm{k}} + \quad + E'_{n\mathrm{k}} + + E'_{\mathrm{pot.\,s.}},$$

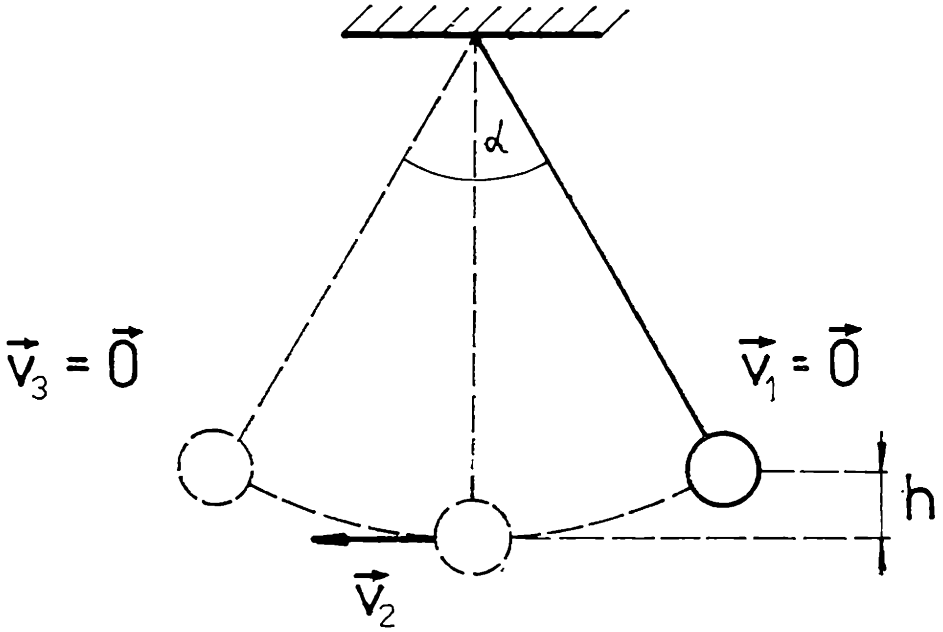
kde $\boldsymbol{p}_i$. $E_{i\mathrm{k}}$ jsou hybnost a kinetická energie i-té částice ve stavu 1, $\boldsymbol{p}_i'$, $E'_{i\mathrm{k}}$ jsou hybnost a kinetická energie ve stavu 2. $E_{\mathrm{pot.\,s.}}$ je potenciální energie systému ve stavu 1, $E'_{\mathrm{pot.\,s.}}$ je potenciální energie systému ve stavu 2.

Oba zákony platí jak v makrosvětě, tak i v mikrosvětě. Všechny fyzikální děje mohou probíhat, jen pokud nejsou v rozporu s těmito zákony.

Je samozřejmé, že správné pochopení a vhodné užívání těchto zákonů je nutné pro úspěšné studium fyziky.

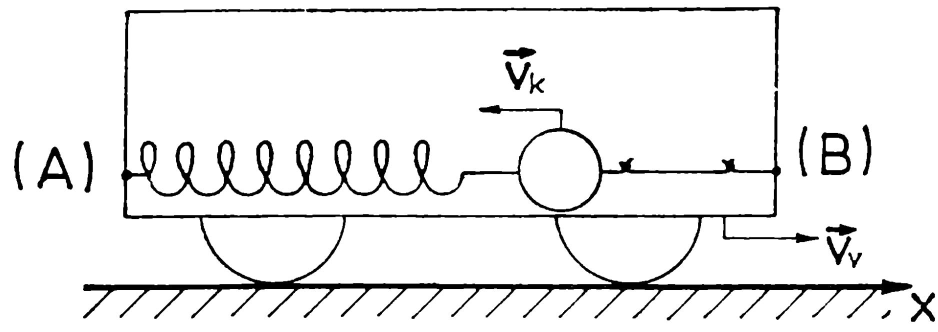
2. *V čem je problém*

Běžným příkladem na ilustraci zákona zachování energie je matematické kyvadlo. Při tom se postupuje přibližně takto: (obr. 1) Zvedneme



Obr. 1. Matematické kyvadlo

kyvadlo (kuličku na vlákně) při napjatém vlákně o výšku h nad rovnovážnou polohu. Potom kyvadlo uvolníme. Pozorujeme, že se kyvadlo vrací zpět do rovonovážné polohy se vzrůstající rychlostí, pohybuje se dále na druhou stranu, přičemž se jeho rychlost zmenšuje, a kulička vystoupí do stejné výše jako v předchozím případě. (Tření a odpor vzduchu zanedbáváme.) Potom se proces opakuje. Vysvětlení: Při zvednutí kuličky kyvadla (při napjatém vlákně) do výše h vykonáme práci, polohová energie kuličky se vzhledem k rovnovážné poloze zvětší. Pustíme-li



Obr. 2. Vozíček a kulička na pružině

kuličku, zmenšuje se její polohová energie tíhová. V rovnovážné poloze má kulička (uvažujeme ji jako hmotný bod) jen kinetickou energii. Tedy během pohybu se mění polohová energie kuličky kyvadla v energii kinetickou a naopak. Energie v krajních polohách kyvadla jsou stejně velké.

Jestliže se tedy matematické kyvadlo uvádí jako příklad na zákon zachování energie, jistě mnohého z vás napadne, jak je to se zákonem zachování hybnosti pro matematické kyvadlo. Vždyť zákon zachování energie i zákon zachování hybnosti platí pro týž systém (izolovaný). Ale v krajních polohách je rychlost kuličky rovna nulovému vektoru, v rovnovážné poloze má kulička rychlost $\mathbf{v}_2$, která je nenulová.

Tato otázka navozuje problém, který se pokusíme objasnit v tomto článku. Jde o to, že v mnoha fyzikálních úvahách se nevěnuje dostatečná pozornost vymezení studovaného systému. Konkrétně zde, v našem případě, není matematické kyvadlo izolovaný systém. Běžně užívaný vztah při energetických úvahách

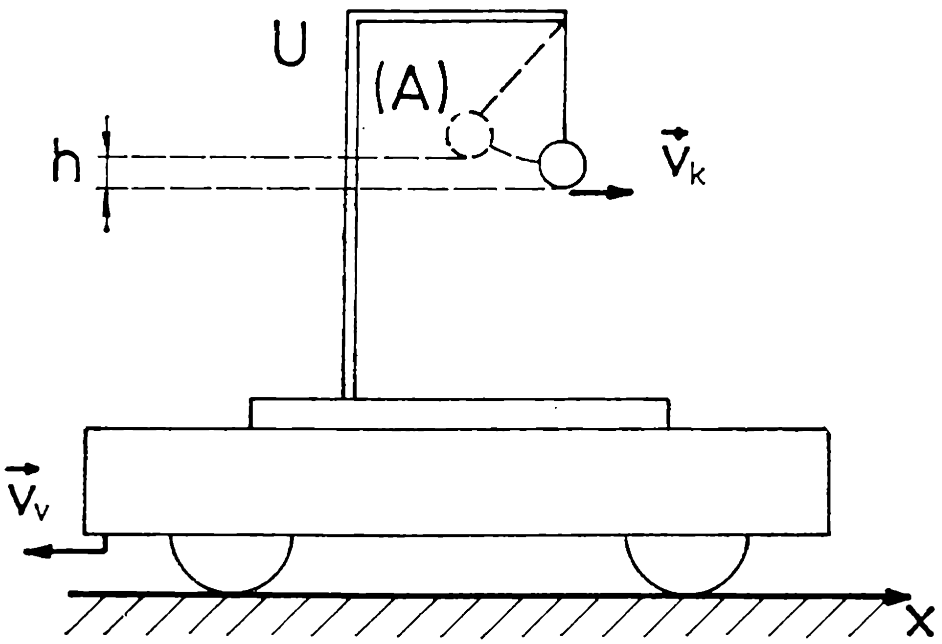
$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, h \;= \text{konst.}$$

je nepřesný. Nepřesnost je způsobena tím, že se neuvažuje potenciální energie systému kulička — Země a kinetická energie Země.

V dalších odstavcích je uveden jeden z možných postupů, jak odpovědět na otázku z názvu tohoto článku a jak ilustrovat zákon zachování hybnosti.

3. *Vozíček a kulička na pružině*

Uvažujme následující situaci (obr. 2). Vozíček má na své korbě upevněnou pružinu s kuličkou, a to tak, že jeden konec napnuté pružiny je upevněn ke korbě v místě (A) a kulička je vláknem upevněna ke korbě v místě (B). Po přepálení vlákna můžeme pozorovat, že kulička se bude pohybovat rychlostí $\mathbf{v}_K$ a vozíček rychlostí $\mathbf{v}_V$. Nyní můžeme napsat zákon zachování hybnosti pro izolovaný systém kulička-vozíček (Zanedbáváme hmotnost pružiny, hmotnost vlákna, neuvažujeme tření, interakce se Zemí je kompenzována.):



Obr. 3. Vozíček a matematické kyvadlo

$$m_k \mathbf{v}_k + m_v \mathbf{v}_v = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Celková hybnost je rovna stále nulovému vektoru. Protože jde o pohyb po přímce, můžeme přejít ke skalárnímu vyjádření:

$$-m_k v_k + m_v v_v = 0. \qquad (2)$$

O správnosti vztahu (2) se můžeme přesvědčit měřením.

4. *Vozíček a matematické kyvadlo* (obr. 3)

Postavme matematické kyvadlo na vozíček o hmotnosti m_v, která je srovnatelná s hmotností kuličky m_k. (Hmotnost vlákna zanedbáváme, upevnění U je součástí vozíčku, tření zanedbáváme.) Nyní musíme interakci kulička - Země uvažovat. Vždyť právě ona způsobí posunutí kuličky o výšku h níže. Jestliže byla celková hybnost soustavy ve směru osy x nulová na začátku pohybu, pak taková zůstane i po spuštění kuličky z polohy (A). Můžeme napsat zákon zachování hybnosti pro směr osy x:

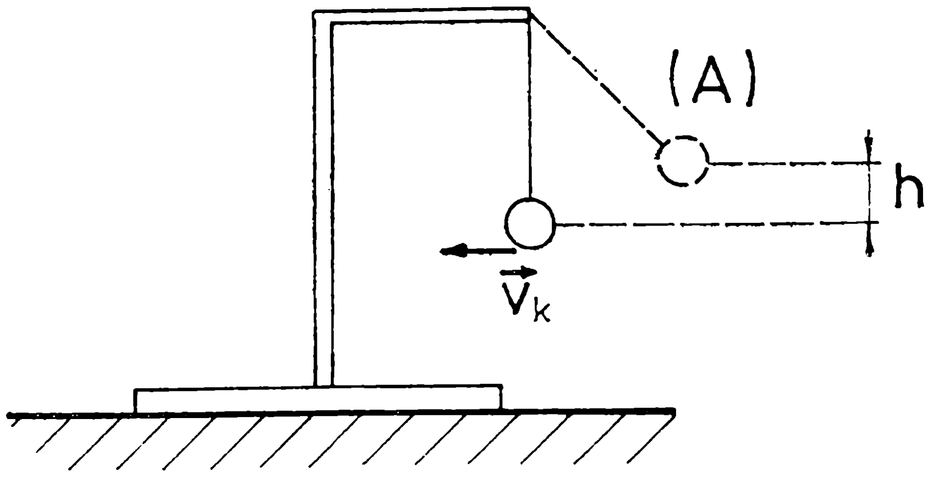
$$-m_v v_v + m_k v_k = 0. \qquad (3)$$

O správnosti vztahu (3) bychom se mohli přesvědčit měřením.

V prvním případě šlo prakticky jen o ilustraci zákona zachování hybnosti. Druhý případ byl složitější; zde jsme si však vybrali jen určitý směr a zajímali se o vyjádření zákona zachování hybnosti pro daný směr. Nyní přejdeme k nejobecnějšímu případu — matematické kyvadlo na Zemi.

5. *Matematické kyvadlo na Zemi* (obr. 4)

Uvolní-li se kulička z polohy (A), bude se pohybovat určitou nenulovou rychlostí $\mathbf{v}_k$ vzhledem ke zvolené vztažné soustavě. Když se v předchá-



Obr. 4. Matematické kyvadlo na Zemi

zejících příkladech měnila hybnost kuličky, měnila se i hybnost nějakého tělesa, které patřilo do soustavy. To nás vede k úvaze, že i zde, dochází-li ke změně hybnosti kuličky, musí se měnit hybnost ještě nějakého tělesa patřícího do soustavy. Tím tělesem je Země, a tedy *mění-li se hybnost kuličky, musí se měnit hybnost Země, a to tak, aby celková hybnost izolované soustavy kulička—Země byla konstantní.* Změnu hybnosti Země však nemůžeme zpozorovat ani změřit. Uvažujeme-li Zemi a kuličku v nějaké vztažné soustavě a má-li např. kulička hmotnost $6 \cdot 10^{-1}$ kg a v jistém bodě (B) (na obr. 4 není vyznačen) velikost rychlosti $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pak pro velikost rychlosti Země v_Z vzhledem k této zvolené vztažné soustavě platí:

$$v_Z = \frac{v_k\, m_k}{m_Z} \doteq \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^{-1}}{6 \cdot 10^{24}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 10^{-25} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

což je hodnota prakticky nezjistitelná.

6. *Závěr*

Zákon zachování hybnosti pro systém „matematické kyvadlo—Země.“ tedy platí. Chyba byla v tom, že jsme místo izolovaného systému „matematické kyvadlo—Země“ uvažovali jen systém tvořený matematickým kyvadlem. Tedy otázka, zda platí zákon zachování hybnosti pro matematické kyvadlo není správná. Správná otázka je: „platí zákon zachování hybnosti pro systém „matematické kyvadlo—Země?“ Z téhož důvodu je nesprávné říkat: „součet potenciální a kinetické energie matematického kyvadla se nemění“ místo správného „součet kinetické a potenciální energie systému „matematické kyvadlo—Země“ se nemění.“

Nesprávná formulace a nepřesné vymezení systému (případně neupozornění na některá zjednodušení) pak vede často k nesprávnému chápání obou zákonů. Naopak naznačením problému se tento stává vhodným tématem např. pro práci v rámci středoškolské odborné činnosti (SOČ).

Pracovná schopnosť ako stavová vlastnosť systémov

Prof. dr. JOZEF SKOTNICKÝ, Košice

Pojem energie bol vytvorený až asi v polovici minulého storočia, ale pojmy práce a pracovnej schopnosti sa v prirodzenom jazyku vyskytujú od nepamäti, lebo veď „práce poludštila opicu". Napriek tomu, že pojem fyzikálnej energie ovláda naše vedecké a aj hospodársko-ekonomické myslenie, je pracovná schopnosť napriek tomu, že tento pojem sa dá fyzikálne precizovať, prakticky škrtnutá z vedeckého slovníka, lebo tento pojem zdánlivo nie je jako energia stavovou vlastnosťou telies, látok a ich sústav-systemov (telesami sa zaoberá fyzika, látkami chemia). V ďalšom možno ukázať, že takéto názory nie sú nijako odôvodnené a že naopak pojmy tzv. „celkovej, volnej a viazanej energie" možno o mnoho jednoduchšie, názornejšie a účelnejšie vystihnúť pomocou pojmu pracovnej schopnosti.

Pod *pracovnou schopnosťou systemu* rozumieme maximálnu prácu (prevedenú reverzibilne), ktorú tento môže vykonať medzi svojimi dvoma stavmi. Pod *prácou* zase rozumieme z energetického hladiska presuny energie medzi systemami, ktoré môžu, ale aj nemusia byť sprevádzané jej transformáciami. Za *užitočnú prácu* považujeme však len taký presun energie, ktorý sa deje na system nami (luďmi) vopred určený a ktorý preto môžeme nazvať „ľubovolný". Tak napr. voda padajúca vo vodopáde koná prácu, lebo premiestňuje svoji potenciálnu gravitačnú energiu do dna vodopádu a zároveň ju aj transformuje na teplo — spodnú vodu zohrieva. Takáto práca však nie je pre nás užitočná — takou sa stane až keď potenciálnou a z nej plynúcou kinetickou energiou vody roztočíme turbínu a s ňou spojené dynamo, a takto získaným elektrickým prúdom dostaneme uvedené teplo napr. do variča v našom byte, alebo elektrickým prúdom roztočíme elektromotor a týmto poháňame sústruh alebo dviháme zdviž v poschoďovom dome. Vo všetkých týchto prípadoch pripisujeme padajúcej vode pracovnú schopnosť, lebo premiestňuje svoju vlastnú potenciálnu energiu, ktorú nazývame aj „vnútornou", na iné systemy: keď užijeme stroje — turbínu, dynamo, elektromotor, môžu tieto systemy byť lubovolné.

Miesto vody vodopádu môžeme však k získaniu elektrického prúdu užiť aj galvanické články, v ktorých prebiehajú endotermické chemické reakcie, tj. také, pri ktorých chemické látky spotrebovávajú časť tepla svojho okolia a z tohoto vyrábajú aj elektrický prúd. Aj v tomto prípade sa pracujúce chemické látky pracovne znehodnocujú, lež po vykonanej práci ztrácajú len svoju pracovnú schopnosť, ale nie energiu — túto totiž premiestnili do variča nie zo seba, ale zo svojho okolia, kde jej sú vo forme tepla neprehladné zásoby. Takúto pracovnú schopnosť pracujúcich látok a systemov, ktorá nemá energetický podklad v ich vnútornej energii, ale v teple okolia, nazývame vonkajšou alebo entropickou pracovnou schopnosťou.

Turbína, dynamo a elektromotor v uvedených príkladoch sú len stroje, ktoré prácu len zprostredkujú, ale nekonajú — vlastnými robotníkmi sú padajúca voda a chemické látky, ktoré sa oboje pracovne znehodnocujú, kdežto stroje zostávajú prakticky intaktné a opotrebovávajú sa len velmi pomaly. Tento „strojový princip" možno a nutno generalizovať pre všetky stroje bez výnimky, počnúc od najjednoduchších, páky a kladky až po najsložitejšie. Zaiste by znelo komicky, keby niekto chcel tvrdiť, že napr. páka a kladka konajú prácu, alebo že vo výbušnom stroji koná prácu stroj sám a nie vybuchujúca smes benzinových pár so vzduchom. A predsa súčasná termodynamika tento strojový princip nezachováva pre jeden z teoreticky najdôležitejších strojov, pre *Carnotov tepelný stroj* (Wärmekraftmaschine), známy už temer dvesto rokov, lebo všetky učebnice termodynamiky, fyziky aj fyzikálnej chemie tvrdia unisono, že v tepelnom stroji koná prácu stroj sám, resp. neuvádzajú system, ktorý by túto prácu konal na základe svojej pracovnej schopnosti a túto pri tom ztrácal.

Plyn konajúci Carnotov kruhový cyklus je totiž súčiastkou tepelného stroja, lebo zostáva trvale nezmenený. Toto opomenutie strojového principu je ale hrubou logickou a prírodovedeckou chybou, ktorú nemožno trvale obchádzať, ignorovať a zatajovať, lebo je evidentná nie len odborníkom, ale aj laikom. A bez korekcie tejto chyby nemožno tiež brať vážne výsledky termodynamiky a užívať ich pre filozofické účely a závery, alebo dokonca budovať na nich vedecký svetonázor, lebo by bol falošný. A práve k vôli správnosti nášho svetonázoru neslobodno túto problematiku podceňovať a zanedbávať, ale nutno ju velmi starostlivo riešiť. — Opomenutie strojového principu zo strany prírodovedy viedlo tiež mnohých „vynálezcov" k zostrojovaniu rôznych druhov „perpetua mobile", stroja ktorý by sám stále konal prácu. Keby v učebniciach fyziky sa nachádzalo aspoň malé upozornenie, že prácu nekonajú stroje, ale systemy nadané pracovnou schopnosťou, ktorú tieto pri práci strácajú, bolo by sa ušetrilo mnoho zbytočnej ludskej špekulácie a námahy. Jako vedeckí pracovníci sa obyčajne smejeme z týchto vynálezcov, ale mali by sme skôr plakať nad sebou samými, lebo už dávno bolo našou vlastnou povinnosťou zaviesť uvedené upozornenie do učebníc.

Na obraze 1 je pomocou súradníc pV znázornený Carnotov kruhový cyklus s ideálnym plynom (ktorý tvorí základnú súčasť „tepelného stroja") medzi stavmi $ABCDA$. Energiu danú touto plochou možno pomocou tepelného stroja premiestiť na lubovolný system a túto pra-

SLOVNÍK
fyzikálních termínů s přihlédnutím k jejich latinskému či řeckému slovnímu základu

Podobně jako tomu bylo u slovníku matematických termínů v minulých ročnících Rozhledů, tak ani tentokrát nejsou podávány definice fyzikálních pojmů. Cílem tohoto slovníku je především ukázat na řecké a latinské základy termínů a tím umožnit nahlédnout k jejich zrodu, často velmi překvapivému. Téměř u každého slovního základu se uvádějí jako příklady termíny z nejrůznějších oborů, čímž se má jednak čtenáři slovo více přiblížit, jednak ho upozornit na souvislosti nejen jazykové, ale i věcné. Pro větší přehlednost jsme až na výjimečné případy neuváděli zprostředkující vlivy dalších cizích jazyků, třebaže pro vznik a vývoj slova jsou po stránce jazykové velmi důležité. Termíny byly vyexcerpovány z učebnic fyziky všech čtyř ročníků gymnázia, takže by měly pokrýt celé středoškolské učivo.

Protože jsem filolog, chci na tomto místě vděčně poděkovat za všechnu pomoc, kterou mi spokytla předmětová komise fyziky na našem gymnáziu, především profesorce Evě Benhartové. Rovněž můj dík patří členům redakce Rozhledů za podnět k sepsání tohoto slovníku a za jejich trpělivost při úpravách rukopisu pro tisk.

Jiří Pech,
gymnázium Praha 3,
Sladkovského nám.

angl. = anglicky, angličtina
it. = italsky, italský
lat. = latinsky, latinský
latiniz. = latinizovaný, tj. dodatečně latinsky utvořený
např. = například
od lat. = od latinského, tj. při převzetí slova působil ještě další mezičlánek
od řec. = od řeckého, tj. při převzetí slova působil ještě další mezičlánek
Pozn. = poznámka
ptc. pf. = participium perfekta
ptc. préz. = participium prézentu
řec. = řecky, řecký
srov. = srovnej, porovnej
střlat. = ve středověké latině
tj. = to jest; jinými slovy
v. = viz; odkaz na heslo, kde se o daném jevu mluví podrobněji
v.t. = viz též; odkaz na heslo, který je v souvislosti s uváděným jevem
z lat. = z latiny, z latinského
z řeč. = z řečtiny, z řeckého
[ ] = výslovnost

A — psáno minuskulí (z lat. *acceleratio* = zrychlení; v. akcelerace) — fyzikální značka pro zrychlení

A — [1] (z lat. *a-*, varianty předložky *ab* = od) — předpona s významem „od, pryč, vzdalování"; např. AVERZE (lat. *verto, -ere,* ptc. pf. *versus* = točit, obracet) — „odvracení se", odpor, nechuť

A — [2] (z lat. *ad* = k, u) — předpona s významem „k, směrem k, u, při, v blízkosti"; např. AKUMULACE (lat. *cumulus* = hromada, kupa — nakupení. V. t. adiční, aditivní, agregát, akomodace, akumulátor, aparát, aparatura, aplanát, asociace, aspirační, atrakce

A — [3] (z řec. tzv. *alfa privativum* = alfa zbavující) — předpona s významem „zápor, opak, bez", volněji též „ztráta, nedostatek, nemožnost, neschopnost, zrůda, vada"; např. AMORÁLNÍ (lat. *mos, moris* = mrav, zvyk) — nemorální, nemravný. V. t. acentrický, adiabatický, afokální, agona, achromatický, aklina, amorfní, aneroid, asférický, astigmatismus, asymptota, asynchronní, atom

AB — (z lat. *ab* = od) — předpona s významem „od, vzdalování"; např. ABNORMÁLNÍ (lat. norma = měřítko, míra, pravidlo) — ten, kdo je „vzdálen běžné normě, míře"; kdo je mimo normu, mimořádný, neobvyklý. V. t. aberace, absolutní, absorbovat

ABERACE (z lat. *aberratio*; slož. z *ab* = od + *erro, -are* = těkat, bloudit, mýlit se) — „zabloudění, odbočení“; odchylka, úchylka; srov. ERRATA — soupis tiskových chyb, které si má čtenář opravit sám. Pozn.: V jednotlivých vědních oborech má „aberace“ význam odchylky speciálního druhu

ABNORMÁLNÍ (slož. z lat. *ab* = od + norma = měřítko = měřítko, míra, pravidlo; v. norma) — vzdálený běžné normě, míře; jsoucí mimo normu, mimořádný, neobvyklý. Pozn.: Je jemný významový rozdíl mezi „abnormální“ — vybočující z pravidla, z řádu, mimořádný (zpravidla „ve větší míře než je obvyklé“) a mezi „nenormální“ — jsoucí bez pravidla, bez řádu, postrádající jakýkoliv řád.

ABS — (z lat. *abs-*, varianty předpony a předložky *ab-* = od) — předpona s významem „od, pryč, vzdalování“; např. ABSTINENT (lat. *teneo, -ere* = držet) — „držící se dál od požitků“, zvl. od pití alkoholu; v.t. abstrakce

ABSOLUTNÍ (z lat. *absolutus*, a to z *absolvo, -ere*, ptc. pf. *absolutus*, slož. z ab = od + solvo, -ere = rozvázat, uvolnit; srov. ABSOLVENT gymnázia — kdo „se zprostil povinnosti docházet“ do gymnázia) — „odvázaný, uvolněný, oproštěný od něčeho“; neomezený, nepodmíněný, naprostý, úplný; na ničem nezávislý; bez vztahu k něčemu, s ničím nesrovnávaný; dokonalý (opak: relativní). Absolutní nula — (ve fyzice) teoreticky nejnižší teplota, které nelze experimentálně dosáhnout. Absolutní sluch — sluch, který pozná výšku tónu, aniž by potřeboval slyšet jiný tón nebo jiný hudební nástroj ke srovnání.

ABSORBOVAT (z lat. *absorbeo, -ere*, ptc. pf. *absorptus;* slož. z *ab* = od + *sorbeo, -ere* = srkat, vstřebat) — „odsrkávat“; pohlcovat, vstřebávat. ABSORPCE — pohlcení jedné látky povrchem látky druhé; ve fyzice: pohlcování světla nebo tepla celým tělesem. ABSORPCE slunečních paprsků — pohlcení energie paprsků plyny v atmosféře (plyny zářivou energii částečně nebo zcela pohltí, naproti tomu při difúzní reflexi se sluneční paprsky odrazem rozptýlí na všechny strany, ale záření zářením zůstává.) Srov. adsorpce

ABSTRAHOVAT (z lat. *abstraho, -ere*, ptc. pf. *abstractus*, slož. z *abs* = od + *traho, -ere* = táhnout; v. trakce) — „odtahovat, odvláčet, oddalovat“; nepřihlížet k něčemu, odhlížet; ABSTRAKCE — „odtažité od skutečnosti“; odtažitost, pomyslnost (opak: konkrétnost); srov. ATRAKCE (lat. *ad* = k) — „přitahování“, lákadlo; DISTRAKCE (lat. *dis-* = roz-) — roztahování, roztažení

ACENTRICKÝ (slož. z řec. a-^{3} s významem záporu; v. a-^{3} + latiniz. centrum = bod ve středu kruhu, střed; v. *centrum*) — středově nesouměrný

AD- (z lat. *ad* = k, u) — předpona s významem „k, směrem k . ., u; např. ADOPTOVAT (lat. *opto, -ere* = přát si) — přijmout za vlastní, osvojit si; v.t. adheze, adjunkce

ADHEZE (z lat. *adhaesio*, a to slož. z *ad* = k, u + *haereo*, *-ere*, ptc. pf. *haesus* = vězet, váznout, lpět) — přilnavost; ADHEZNÍ — přilnavostní; v.t. koheze, koherence, inkoherentní. Pozn. Lat. haesio od haereo souvisí s řec. *hairesis* od *haireó*, z čehož je pak HEREZE, HERETIK — kacířství, kacíř; vlastně lpění na něčem odchylném od učení, tj. od učení církve katolické.

ADIABATICKÝ (slož. z řec. a-[3] s významem záporu + *dia* = skrz + *bainó* = kráčet) — „nekráčející skrz, neschopný skrz něco projít"; neprostupující, nepřekračující určitou hranici; ADIABATICKÝ děj — děj, kdy plyn je oddělen od prostředí tak, že teplo nemůže z něho přijmout ani mu je předat (teplo „nemůže přejít"). Srov. AKROBATICKÝ (řec. *akron* = vrch, vrchol) — „kráčející po vrcholcích"

ADICE (z lat. *additio*, od *addo*, *addere*, ptc. pf. *additus*, slož. z *ad* = do, k + *do*, *dare* = dávat) — „přidávání", slučování, sčítání. ADIČNÍ — „přidávající", sčítací (např. adiční metoda). Srov. EDICE, EDIČNÍ (lat. *e* = z) — „vydávání, vydávající". ADITIVNÍ — „týkající se přidávání", součtový, vyjádřitelný součtem, sčítatelný. Srov. ADITIVITA — vlastnost soustav, spočívající v tom, že lze nalézt hodnotu určité proměnné sečtením hodnot této proměnné jednotlivých složek.

ADJUNKCE (z lat. *adiunctio*, od *adiungo*, *-ere*, ptc. pf. *adiunctus*, slož. z *ad* = k, do + *iungo*, *-ere* = spojovat; v. konjunkce) — připojení

ADSORBOVAT (slož. z lat. *ad* = k, u + *sorbeo*, *ere* = srkat, vstřebat) — „přisrkávat"; pohlcovat, vstřebávat. ADSORPCE — „přisrkávání" (pevné těleso přidržuje plyn na svém povrchu). Pozn. Zatímco u termínu ADSORPCE se z jazykového hlediska hledí spíše na „přisrkávání", u termínu ABSORPCE na „odsrkávání.

AERO — [1] (z řec. *aer* = vzduch) — počáteční část složených slov vyjadřující nějaký vztah ke vzduchu

AERO — [2] (zkráceno z čes. aeroplán) — počáteční část složených slov vyjadřující nějaký vztah k letadlu, k aeroplánu; např. aerolinka — letecká trať; podnik ji obstarávající

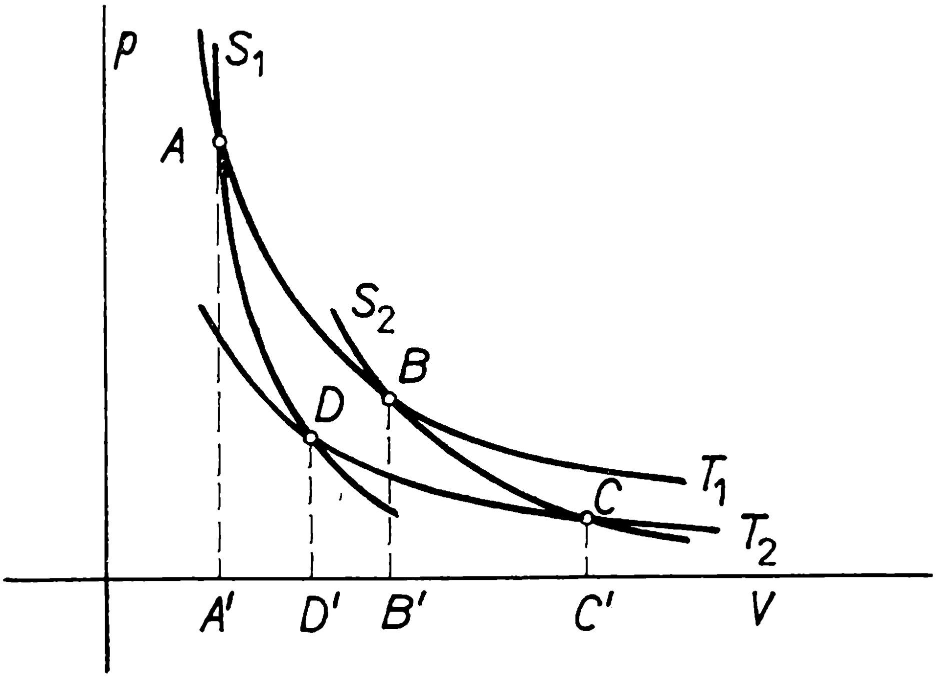
AERODYNAMIKA (v. dynamika) — obor zabývající se „silou vzduchu"; část dynamiky zabývající se pohybem plynů a silami, které působí na tělesa, jež jsou v pohybu vzhledem k plynnému prostředí

AEROFON (v. *-fon*) — „zvuk vzniklý vzduchem"; nástroj, ve kterém se zvuk tvoří rozechvívaným vzduchem

AEROLOGIE (v. *-logie*) — část meteorologie zabývající se výzkumem vysokých vrstev ovzduší

AEROMECHANIKA (v. mechanika) — mechanika plynů; nauka o pohybu a rovnováze plynů

AEROPLÁN (řec. *planos* = bloudění; od *planaomai* = sem tam chodit, bloudit) — „bloudící vzduchem"; letadlo. Pozn. Srov. „planeta" (řec. *planés*, *-étoe* = sem tam chodící, bloudící) od „stálice" V. t. aplanát, gyroplán



Obr. 1

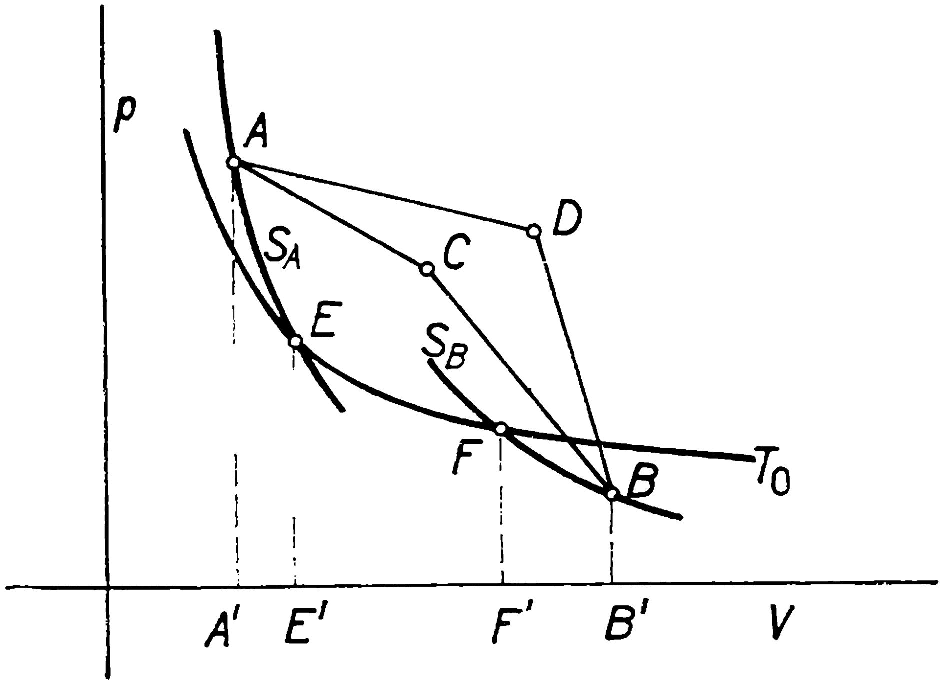
covnú schopnosť A_t pripisuje termodynamika tepelnému stroju samotnému, lebo vo všetkých učebniciach sa hovorí výlučne o práci tepelného stroja, a nie o práci pomocou tepelného stroja, lebo v tomto případe by bolo nutné pomenovať system, ktorý túto prácu koná a prisúdiť mu príslušnú pracovnú schopnosť

$$A_t = Q_1 - Q_2 = (T_1 - T_2)\, Q_1/T_1 = (T_1 - T_2)\, Q_2/T_2\,, \qquad (1)$$

kde Q_1 je teplo nabrané plynom v teplej lázni o absolutnej teplote T_1 a Q_2 teplo odovzdané plynom studenej lázni o teplote T_2.

Sadi Carnot uvádza vo svojej známej práci z roku 1824: „Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance", že prácu túto koná teplo, ktoré klesá z počiatočnej vyššej teploty T_1 na nižšiu T_2 a prisudzuje tomuto teplu aj príslušnú pracovnú schopnosť, jako to vyplýva z názvu jeho práce: puissance motrice du feu = pracovná schopnosť tepla. Tento jeho názor však nebol prijatý, hádam aj preto, že neskôr sa ukázalo, že nie všetko teplo Q_1, ktoré opúšťa teplejšiu lázeň, prechádza do studenšej, ako si to Carnot pôvodne predstavoval tým, že analogizoval teplo s vodou. A tak Carnotova pracovná schopnosť tepla zostala v termodynamike neznámym pojmom a vykonaná práca sa stala „anonymnou", resp. bola prisúdená tepelnému stroju samotnému, čím bol hrubo porušený strojový princip. Pozoruhodné je, že Carnot strojový princip rešpektoval, jako to vyplýva z názvu jeho práce.

Pracovnú schopnosť tepla A_t, resp. prácu vykonanú teplom prechádzajúcim z vyšších teplôt na nižšie, vždy lahko poznáme, lebo v pV diagrame je daná plochou vnútri uzavrenej krivky, takže ju potom možno spolahlivo odlíšiť od práce iného druhu. Termín „pracovná schopnosť



Obr. 2

tepla" budeme užívať aj naďalej, z piety k neuznanému Carnotovi a tiež pre jeho stručnosť, lebo plný presný názov znie „pracovná schopnost systemu složeného z teplej a studenej lázne (látky, telesa)". Pre ďalšie úvahy je tiež účelné v smysle Carnotových úvah zaviesť standardnú konstantnú teplotu T_0, na ktorej absorbciu aj uvolňovanie tepla budeme považovať za pracovne indiferentné. Táto konvenčná teplota 273 K alebo 298 K je nutná, keď chceme spolu porovnávať viaceré procesy, ktoré neprebiahajú pri rovnakej teplote.

Na obraze 2 sú znázornené dva stavy A a B ideálneho plynu spolu s prácou získanou medzi týmito stavmi po ceste ADB a ACB. Je zjavné že prvá práca $ADBB'A'A$ je väčšia než druhá $ACBB'A'A$, a táto skutočnosť bola pre termodynamikov dostatočným dôvodom, aby hlásali, že práca a pracovná schopnosť systemov nemôže byť ich stavovou vlastnosťou, lebo jej velkosť závisí nie len od počiatočného a konečného stavu systemu, ale aj od tvaru cesty medzi týmito dvoma stavmi. Aj keď toto tvrdenie tvorí doteraz základnú poučku termodynamiky, pri bližšej analýze nijako neobstojí, lebo prácu medzi stavmi A a B plynu nekoná len tento sám, ale výdatne mu pri nej pomáha aj teplo: prácu danú plochou vnútri uzavrenej krivky $AC(D)BFEA$ koná totiž len teplo, ktoré z vyšších teplôt pozdlž krivky $AC(D)B$ prechádza na nižšie teploty pozdlž krivky $BFEA$, a táto práca je pochopitelne závislá na ceste plynu z A do B. Ostatnú prácu $AEFBB'A'A$ koná už ale len samotný plyn, a táto je pokaždé rovnaká a nezávislá na ceste plynu $AC(D)B$: skladá sa z plôch $AEE'A'A$ a $FBB'F'F$, ktoré udávajú prácu vykonanú plynom na úkor jeho vnútornej energie $\triangle U = U_A - U_B$, lebo expanzie AE a FB sa dejú pozdlž adiabát S_A a S_B. Mimo to sa expanzia plynu deje aj pozdlž standardnej izotermy T_0 a plocha $EFF'E'E$ udáva prácu, ktorú plyn vykonal na úkor tepla Q_0 nabraného zo svojho okolia $Q_0 = T_0 (S_B - S_A) = -T_0 (S_A - S_B) = -T_0 \triangle S$, takže celková práca a tým aj pracovná schopnosť plynu medzi jeho stavmi A a B obnáša

$$\triangle A_S = \triangle U - T_0 \triangle S = U_A - U_B - T_0 (S_A - S_B) \qquad (2)$$

a skladá sa z „vnútornej pracovnej schopnosti“ $\triangle U$ a z „entropickej pracovnej schopnosti“ $-T_0 \triangle S$. Táto formula má všeobecnú platnosť pre všetky systemy a nie len pre ideálny plyn, lebo vnútorná energie U a entropia S sú všeobecné vlastnosti systemov a nie len ideálneho plynu. Mimo to rovnica (2) ukazuje, že práca a pracovná schopnosť systemu $\triangle A_S$ musí byť stavovou vlastnosťou systemu, lebo je additívnou funkciou vnútornej energie U a entropie S, ktoré sú jeho stavovými vlastnosťami — standardná teplota T_0 je konstantou: $A_S = U - T_0 S$. Aj diferenciál A_S je totálny a jednoznačný: $dA_S = dU - T_0 dS$ a rovnica (2) predstavuje jeho integrál medzi stavmi A a B.

Z uvedených úvah vidno, že termodynamika doteraz nedocenila význam Carnotovej práce a nerešpektuje tiež všeobecne strojový princíp, lebo práve u tepelného stroja ho neuznáva, čím sa dopúšťa osudovej logickej a prírodovedeckej chyby. Nie je preto čudné, že pracovná schopnosť systemov bola termodynamikou zavrhnutá a táto nabehla na falošné cesty.

Vývody uvedené v tejto práci doplňujú pôvodné myšlienky Carnotove a znamenajú pre termodynamiku podstatný pokrok, lebo umožňujú objasniť viaceré základné oblasti termodynamiky: detailný energetický mechanismus chemických reakcií, význam a definíciu entropie ako aj jednoznačnú formuláciu druhého hlavného zákona termodynamiky a s ním spojeného principu monokauzality, o ktorých už bolo pojednané v iných prácach (1—10).

Literatura :

1. Energie nataženého péra;
   Rozhledy matematicko-přírodovědecké 29 (1950), č. 5, s. 141
2. The dependence of the melting point on the pressure.
   Czechoslovak Journal of Physics 3 (1953) 3. p. 225—231
3. Význam Carnotovho cyklu pre termodynamiku;
   Rozhledy mat.-fyz. 43 (1964/65), č. 8, s. 358—367
4. Význam kauzality a jej termodynamická formulácia; Sborník prác Lekárskej fakulty UPJŠ Košice XI (1968), č. 1—2, s. 105—112
5. O volnej a viazanej energii.
   Rozhledy mat. fyz. 51 (1972/73); č. 2, s. 81—82 a č. 3 s. 129—131
6. Energia a pracovná schopnosť;
   Rozhledy mat. fyz. 51 (1972/73), č. 9, s. 410—415
7. Energetischer Mechanismus chemischer Reaktionen und allgemeine Gleichung der chemischen Thermodynamik; Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 27 (1974) H. 2, S. 70—75
8. O príčinnosti; Rozhledy mat.-fyz. 52 (1973/74), č. 8, s. 376—380
9. Nové názory o termodynamike;
   Rozhledy mat. fyz. 54 (1975/76), č. 9, s. 414—417
10. O entropii; Rozhledy mat.-fyz. 55 (1976/77), č. 9, s. 407—415

Halleyova kometa na dohled?

MILOŠ ČERMÁK, Gymnázium Nad štolou v Praze

Když se roku 1910 objevila nad Prahou výborně pozorovatelná Halleyova kometa, vyvolala její jasnost a poměrná velikost bouřlivou reakci. Novináři se předcházeli v zaručených zprávách o konci světa, druzí horlivě pořizovali výčty komet, které přinesly války a neštěstí. Nikdo z nich ale asi netušil, že na další návrat této krátkoperiodické komety s oběžnou dobou 76 let roku 1986 se bude celá vědecká veřejnost připravovat již mnoho let před jejím znovuobjevením, tentokrát spíše na jižní obloze, a že kromě pozemských přístrojů bude kometu zkoumat několik meziplanetárních sond vyvinutých ve spolupráci mnoha států mimo jiných i Československa.

1. *Historie výzkumu komet*

Snad pro svoji výjimečnost — alespoň lidskému oku (celkový počet komet se sice odhaduje v naší sluneční soustavě na 10^{12}, ale v současné době jich známe asi pouze 600—700) — a neobyčejnou poutavost tohoto přírodního úkazu přitahovaly vlasatice již odedávna pozornost člověka. Zmínku o nich nacházíme v mnoha nejen vědeckých, ale i uměleckých dílech (např. v kronikách), počínaje starověkem a konče dneškem.

Jeden z prvních názorů na komety a jejich původ pochází ze starověku, kdy je zhruba ve 4. století př. n. l. považoval *Aristoteles* za úkaz, vznikající ve vysokých vrstvách ovzduší. Tento názor se s několika nepatrnými změnami udržel po celou dobu uznávání geocentrického systému a v prvních letech vzniku heliocentrického systému. Většina astronomů té doby včetně známého *Mikuláše Koperníka* však bezpodmínečně zařazovala komety do sublunární oblasti. Tuto domněnku s definitivní platností po několika nepodařených pokusech Regiomontana vyvrátil *Tycho Brahe*, když r. 1577 dokázal, že kometa z téhož roku nemá paralaxu větší než měsíc a není proto nutně pozemského původu. Další názor se pak díky Keplerovým zákonům Newtonově gravitační teorii vyvíjel až do podoby, jak ho známe dnes. Velký význam pro výzkum komet měl anglický astronom *Edmund Halley*, který na základě spisů *Jana Hevelia* určil shodnost komet pozorovaných v letech 1531, 1607 a 1682 a předpověděl její další návrat na rok 1758. Jeho práce má však obecnější charakter a nevztahuje se pouze na Halleyovu kometu. Zkráceně lze říci, že pod vlivem Newtonovy gravitační teorie a jí potvrzenými Keplerovými zákony určil, že komety se mohou pohybovat podobně jako planety po eliptických drahách, třebaže poněkud protáhlejších. Edmund Halley pracoval jako ředitel Greenwichské observatoře. Zemřel 14. 1. 1742, tedy 17 let před návratem Halleyovy komety, kterou s poměrně velkou přesností předpověděl.

2. *Stavba komet*

Co to vlastně jsou komety, jaký mají původ a z čeho se skládají? Odpověď na tuto otázku není jednoduchá a ani jednoznačná. Máme právo se domnívat, že komety jsou malá, dokonce i na pozemské poměry až velmi malá tělesa s průměrem jen velmi málokdy přesahujícím 100 km, která se pohybují na značně protáhlých eliptikách okolo Slunce; jak ostatně předpokládali vědci již v 18. století. Základní dělení komet je rozlišuje podle periody na dlouho- a krátkoperiodické. Mnohé prameny se však právě v mezní hodnotě liší — zhruba však můžeme považovat komety s periodou menší než 100 let za krátkoperiodické a s periodou větší za dlouhoperiodické.

Prakticky veškerá hmota komety, tj. 10^{12} až 10^{18} kg, je soustředěna v jádru, které je tvořeno ledem a metanovými plyny. Ty pak při přiblížení ke Slunci přibližně na více než 1 AU sublimují a vytvářejí komu o průměru 10^6 km. Resonančním tlakem vzniká ohon o délce až 10^8 km. Chemické složení jednotlivých částí není příliš objasněno, protože zatím nebyla možnost přímých podrobnějších výzkumů; doufejme tedy, že Halleyova kometa přinese do této oblasti více světla a objasní mnohé otazníky. Proč je však jevu jakými jsou komety věnována taková pozornost? Komety jsou sice malá, nikoliv však bezvýznamná tělesa. Lze předpokládat, že obsahují v zásadě nezměněný materiál z období vzniku sluneční soustavy, takže znalost jeho chemického složení nám může vyjasnit mnohé aspekty jejího vzniku. Není bez zajímavosti, že se také objevila domněnka o možnostech přenosu živé hmoty kometami. Nezodpovězených otázek a problémů je jistě mnoho a závisí pouze na lidech, jak využijí příležitosti, kterou nám Halleyova kometa nabídne již za necelý rok.

3. *Družicový výzkum Halleyovy komety.*

Její výzkum bude veden základními dvěma směry — jednak ze Země v rámci mezinárodního projektu schváleného Mezinárodní astronomickou unií r. 1982 a jednak kosmickými sondami Vega, Giotto a Planet.

Sovětský projekt *Vega* (*Veněra—Galilej*) vzniklý ve spolupráci mnoha socialistických zemí a Francie předpokládá vypuštění dvou sond řady Veněra (Veněra 14 a Veněra 15), které po odhození přistávacího modulu u Venuše provedou průlet okolo komety ve vzdálenosti 10 tisíc km od jádra. Při vzájemné rychlosti asi 80 km . s^{-1} bude provedeno velké množství pokusů, orientovaných především na studium chemického složení jádra a jeho fyzikálních vlastností, na studium atmosféry a částic komy a konečně na její interakci s prostředím.

K západoevropskému projektu *Giotto* byl dán impuls zamítnutím velmi perspektivního amerického projektu, který předpokládal vyslání pouzdra do vzdálenosti pouhých 800 km od jádra při vzájemné rychlosti asi 60 km s^{-1}. Poté měla mateřská sonda pokračovat ke krátkoperiodické kometě Tempel 2 a po dobu asi 1 roku letět několik tisíc km podél jádra. Tento projekt byl však zamítnut a západoevrospká ESA proto schválila program Giotto. Počítá s vynesením na oběžnou dráhu Země raketou Ariane 3, odkud bude navedena na meziplanetární dráhu. V březnu r. 1986 bude sonda přiblížena ke kometě a po 1,5 hod. cestě chvostem proletí asi 600 km od jádra. Projektu se zúčastní NSR, Francie, Velká Británie, Švýcarsko, Itálie, Belgie a Holandsko.

Velkým překvapením je japonský projekt *Planet A*, realizovaný prostřednictvím japonské rakety M-3 S II. Planet A má proletět asi 100 tisíc km od jádra a provádět měření vědeckou aparaturou o hmotnosti asi 15 kg.

4. *Kdy pozorovat Halleyovu kometu u nás?*

Na závěr se ještě zmíním o podmínkách pro pozorování Halleyovy komety v našich zeměpisných šířkách. Oproti roku 1910, kdy byla velmi efektním jevem, což bylo způsobeno pro naši polohu velmi příznivou konfigurací Slunce a Země, přinese veřejnosti její registrovaný 29. návrat určité zklamání. Budeme ji moci sledovat středními a menšími dalekohledy do konce roku 1985 a koncem března bude viditelný velmi nevýrazný ohon nad jižnými obzorem. Nyní nezbývá již jen doufat, že se všechny experimenty podaří podle očekávání a přinesou požadované výsledky.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Astronom RNDr. Antonín Bečvář

JOSEF PAVELKA, Praha

V lednovém čísle roč. 1983/84 Rozhledů matematicko-fyzikálních vzpomněl doc. RNDr. Ján Chrapan, CSc., 40. výročí vysokohorské observatoře na Skalnatém plese. Zmínil se také o prvním řediteli této hvězdárny dr. Bečvářovi. K blížícímu se 85. výročí jeho narození mu věnuji jako dlouholetý brandýský usedlík svou vzpomínku. Vždyť jsme byli v klukovských letech dobrými kamarády.

RNDr. Antonín Bečvář se narodil 10. června 1901 v Brandýse nad Labem; zemřel 10. ledna 1965 také v Brandýse n. L. V Brandýse nad

Labem také maturoval a byl zde jedním z průkopníků astronomie. Žijí ještě pamětníci, kteří pamatují jím vybudovanou hvězdárnu, postavenou na zahradě jeho rodičů v Brandýse n. L., Na Nižším hrádku čp. 167.

Tato hvězdárna byla hojně navštěvována nejen odborníky a pedagogy místních škol se žáky, ale i brandýskými občany, kteří měli velký zájem o hvězdné nebe. Že jsem tam často chodil i já, nemusím snad zdůrazňovat.

Jako státní klimatolog odešel dr. Bečvář roku 1937 na Štrbské pleso. Tam si přestěhoval i svůj dalekohled, jím vybroušený zrcadlový reflektor. Před hotelem Kriváň, kde tehdy Bečvář bydlel, zbudoval pro něj dřevěnou kopuli. Nadchla ho čistá krásná vysokohorská obloha, tak rozdílná od nížinné oblohy brandýské; v noci pozoroval a fotografoval hvězdy.

V těch letech se stavěla lanovka z Tatranské Lomnice na Lomnický štít, kde měla být zřízena meteorologická stanice, dr. Bečvářovi podléhající. Podařilo se mu však prosadit, aby pro 600 mm teleskop, evakuovaný z Hurbanova, byla postavena moderní dvoukopulová astronomická observatoř. Tak v letech 1940 až 1943 byla na Skalnatém plese postavena hvězdárna a v malé kupoli byl umístěn i brandýský dalekohled k pozorování slunce. Hvězdárna byla třetím nejvýše položeným a stále obsazeným astronomickým pracovištěm v Evropě.

Prvním ředitelem této hvězdárny byl dr. Bečvář, a to až do roku 1951, kdy se vrátil do rodného města.

Po roce 1945 byla uskutečněna série objevů komet na dnešní observatoři Slovenské akademie věd na Skalnatém plese, kde právě dr. Bečvář s několika dalšími hvězdáři významně přispěli k rozvoji kometární astronomie. Sám objevil dvě nové hvězdy; podle tradičního zvyku dostaly jména po svém objeviteli.

Po návratu domů nezahálel. Svým literárním dílem významně přispěl do světové astronomické literatury. Svůj první díl *Atlas Coeli* připravil na Skalnatém plese, další díly *Atlas Borealis* a *Atlas Australis* napsal až v Brandýse. Čtvrtý díl *Atlas Eclipticalis* zůstal bohužel nedokončen. Vydané tři díly hvězdného atlasu se staly pracovní pomůckou všech světových hvězdáren a stále se znovu vydávají.

Nově postavená hvězdárna v Mostě nese jméno dr. Bečváře a jeden z kráterů na odvrácené straně Měsíce byl také pojmenován jeho jménem.

Před dvaceti lety odešel z našich řad velký vědecký pracovník, brandýský rodák. Zemřel předčasně. Nebylo mu dopřáno dožít se ani vybavení hvězdárny na Skalnatém plese dokonalejšími moderními přístroji, ani postavení největšího dalekohledu v ČSSR na Ondřejově, ani nových dokonalých meteorologických map pořizovaných z družic. Patří však nesporně k těm, co přispěli za obtížných podmínek k pokroku vědy. Šel tedy — jak říkali staří Římané — per aspera ad astra (obtížnou cestou ke hvězdám).

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Profesor Ypsilon, Zénón, Achilleus a želva

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

„Aporií se rozumí obtížný nebo neřešitelný problém, který obvykle vzniká tím, že v jeho předmětu je obsažen spor," pravil profesor Ypsilon a k navození vhodné atmosféry pro další výklad se pustil do deklamace ukázky z 22. zpěvu Homérovy Iliady, v němž nesmrtelný básník líčí boj řeckého hrdiny Achillea s Hektorem pod hradbami Tróje:

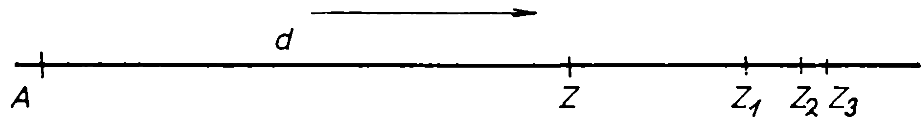
Tak jak na horách jestřáb se lehounce rozletí v útok,
nadevše rychlý pták, když plachého holuba stíhá —
holub tu ulétá stranou, ten s ostrým vzápětí skřekem

útočí zase a zas, vždyť touha jej nutí ho chytit —
tak hnal se Achilleus za ním, pln chtivosti — Hektór pak prchal
dolů pod trójské hradby a ohýbal kolena hbitá.

„Pro jeho příslovečnou rychlost,“ pokračoval profesor Ypsilon nikoli již řečí vázanou, „zvolil řecký filozof *Zénón z Eleje* (asi 490—430 př. n. l.) ve své slavné aporii Achilleus a želva za soupeře želvy právě rychlonohého Achillea, aby co nejvíce vynikl paradoxní obsah jeho tvrzení, že rychlejší nedohoní pomalejšího. Jistě se nespokojíte s tím“, uzavřel profesor Ypsilon svůj úvodní proslov, „aby Achilleus, vítěz nad Hektorem, prohrál se želvou, a pokusíte se objevit Achilleovu patu filozofova „důkazu“ o nedostižitelnosti želvy!“

Nechť se tedy v určitém okamžiku, od něhož budeme měřit čas, Achilleus nachází v bodě A a želva v bodě Z ve vzdálenosti d od bodu A (viz

Obr. 1



obr. 1); nechť se oba pohybují rovnoměrně po přímce AZ ve směru šipky, Achilleus rychlostí u a želva rychlostí $v < u$.

Když Achilleus dorazí za dobu $t_0 = \dfrac{d}{u}$ do bodu Z, želva už v něm nebude; za dobu t_0 urazí totiž vzdálenost vt_0 a bude v době Z_1, pro nějž platí

$$|ZZ_1| = vt_0 = \frac{vd}{u}\,.$$

Než Achilleus doběhne za dobu

$$t_1 = \frac{|ZZ_1|}{u} = \frac{1}{u}\frac{vd}{u} = \frac{vd}{u^2}$$

do bodu Z_1, želva už v něm nebude; za dobu t_1 urazí totiž vzdálenost vt_1 a bude v bodě Z_2, pro nějž platí

$$|Z_1Z_2| = vt_1 = \frac{v^2d}{u^2}\,.$$

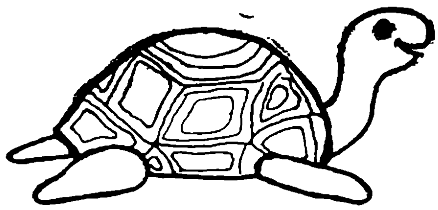
Jakmile Achilleus přiběhne za dobu

$$t_2 = \frac{|Z_1Z_2|}{u} = \frac{1}{u}\frac{v^2d}{u^2} = \frac{v^2d}{u^3}$$

do bodu Z_2, želva už v něm nebude; za dobu t_2 urazí totiž vzdálenost vt_2 a bude v bodě Z_3, pro nějž platí

$$|Z_2Z_3| = vt_2 = \frac{v^3d}{u^3}\,.$$

Tímto způsobem můžeme pokračovat neomezeně dále. Vidíme přitom, že Achilleus běžící za želvou potřebuje vždy určitou dobu k tomu, aby doběhl do bodu, v němž se želva právě nachází; když se však do tohoto bodu dostane, želva už v něm není, neboť se za uvedenou dobu přemístí do bodu jiného. Nemůže tedy podle Zénóna nikdy nastat případ, že by se Achilleus a želva nacházeli v témž bodě; želva bude vždy „o něco“



před Achilleem, takže ji Achilleus — i když se jí neustále přibližuje — nikdy nedohoní.

Po matematické stránce je tvrzení, že Achilleus nedostihne želvu, ekvivalentní s tím, že celková doba Achilleova přibližování se k želvě, tj. doba

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \quad = \frac{d}{u} + \frac{vd}{u^2} + \frac{v^2d}{u^3} + \frac{v^3d}{u^4} +$$

je nekonečně velká. Snadno však lze ověřit, že součet této nekonečné řady je konečný; jde totiž o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{v}{u}$, pro nějž je $|q| < 1$, takže pro součet T této řady platí:

$$T = \frac{d}{u} + \frac{vd}{u^2} + \frac{v^2d}{u^3} + \frac{v^3d}{u^4} + \quad = \frac{d}{u} \frac{1}{1 - \frac{v}{u}} = \frac{d}{u - v}$$

Achilleus tedy želvu dohoní, a to za dobu

$$T = \frac{d}{u - v};$$

dojde k tomu v bodě, který označíme Z_∞ a pro jěhož vzdálenost od bodu A platí

$$|AZ_\infty| = uT = \frac{ud}{u - v}.$$

Tento výpočet ukazuje souvislost Zénónovy aporie s nekonečnými řadami, zejména s poznatkem, že součet nekonečně mnoha kladných čísel nemusí být nekonečně velký. Nicméně však pouze potvrzuje skutečnost, že Achilleus želvu dohoní, ale neříká nic o tom, kde je chyba v Zénónově argumentaci. Stejně dobře bychom mohli provést experiment, v němž by Achillea nahradil vybraný sprinter — ani na základě tohoto pokusu by se nám nepodařilo tuto chybu najít. Zdá se být opravdu zcela jasné, že Achilleus nemůže želvu dohonit, neboť vždy, když se dostane do bodu, v němž želva před chvílí byla, už v něm není. Jak to tedy, že ji ve skutečnosti dohoní?

Podrobný rozbor tohoto problému ukazuje, že původ veškerých těžkostí spočívá v nesprávnosti vžité a běžně užívané představy o tom, že pohybující se těleso se v určitém okamžiku nachází v určitém bodě. Jakže, — říkáte — to tedy nemáme v hodinách fyziky užívat formulací typu „těleso pohybující se rychlostí v_0 je v čase t_0 v bodě A“? Nikoli, těchto obratů můžete používat i nadále, uvědomte si však, že vystihují reálnou skutečnost pouze v jistém přiblížení. Neodrážejí totiž zcela přesně dialektické vlastnosti pohybu, které jsou obvykle charakterizovány slovy: pohybující se těleso v daném okamžiku v určitém místě je a zároveň už není. I když se vám toto tvrzení zdá asi poněkud neobvyklé, je nutno je přijmout, stejně jako přijímáme např. poznatek, že elektromagnetické záření má nejen vlastnosti vlnové, ale zároveň i zcela protikladné vlastnosti korpuskulární. Ještě při studiu na střední škole poznáte, že takováto jednota protikladných vlastností, která odporuje veškeré běžné zkušenosti, je zcela obvyklá v mikrosvětě, jehož zákonitosti zkoumá kvantová fyzika.

Můžeme tedy říci, že Achilleova pata Zénónových vývodů tkví v jeho chápání podstaty pohybu, jehož dialektrický charakter mu uniká. Je přitom tak trochu ironií, že právě Zénónovy argumenty, odporující dialektickému chápání přírody, přispěly značnou měrou k rozvoji dialektického způsobu myšlení.

Ukažme si ještě závěrem originální vysvětlení, proč Achilleus nedostihne želvu, které podal enfant terrible Ypsilonovy třídy, žák Pěnkava: „Tvrzení, že Achilleus nedohoní želvu je zcela evidentně pravdivé. Potíž všech filozofů, kteří se po tisíciletí tímto problémem zabývali, spočívá v tom, že se domnívali, že utkání Achillea a želvy bylo zamýšleno jako běžecký závod na souši. Nikdo z nich si neuvědomil, že rychlonohý Achilleus by se nabídce soupeřit v běhu se želvou vysmál, ale že by jistě přistoupil na plavecký závod v moři, kde by vyhlídky obou borců byly vyrovnanější. Je téměř jisté, že utkání Achillea a želvy proběhlo z těchto důvodů jako závod v plavání a nikoli v běhu! Dotazem v zoologické zahradě lze zjistit, že mořská želva může ve vodě vyvinout rychlost až osmi kilometrů za hodinu; snadno vypočteme, že Achilleus by želvě nestačil, i kdyby každých sto metrů plaval za padesát sekund. Navíc by tohoto výkonu, který je na hranici současného světového rekordu, zcela jistě nedosáhl, neboť byl jednak uvyklý spíše běhu než plavání, jednak neměl v tehdejší době ani tušení o vědeckých metodách sportovního tréninku, jimiž by se mohl tohoto času dobrat. Docházím tak k závěru, že tvrzení o tom, že Achilleus nedohoní želvu, je zcela samozřejmé a že na něm není paradoxního vůbec nic!!“

Věta paní Pythagorové

Zjistil jsem —
řekl Pythagoras
že délka přepony pravoúhlého
trojúhelníka
vynásobená sama sebou
rovná se
součtu délek odvěsen
předtím sebou vynásobených

Nevím —
řekla paní Pythagorová
jak hluboká je tvoje jistota
ve věci pravoúhlých trojúhelníků
Zato vím zcela spolehlivě
žes' ráno po sobě neuklidil
Jako obvykle .

Od doby Pythagorovy
po naše časy
nejednou
stůl zůstal neuklizen
a lože neustláno

Zato však
panuje pořádek
ve světě pravoúhlých trojúhelníků

S. Komenda

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

NAŠE SOUTĚŽ

V únoru letošního roku dostala redakce Rozhledů dopis čtenáře Jiřího Boučka z Dobrušky. Otiskujeme jej v nezkráceném znění.

Vážená redakce
zasílám Vám řešení několika úloh Vaší soutěže, ročník 1984—85. Píši „několika", protože jsem si teprve před týdnem uvědomil, že bych se do Vaší soutěže mohl také zapojit (alespoň částečně).

Nyní mi dovolte krátké zhodnocení zadaných úloh. Úlohy z fyziky (pokud jsem je vypočítal správně) se mi zdály příliš jednoduché. Každá z prvních čtyři úloh mohla být bez velké námahy vyřešena během několika minut. Pátou úlohu posuzovat nemohu, neboť jsem ve třetím ročníku a potřebné učivo nelze zvládnout za týden.

Matematika je po fyzice mým druhým oblíbeným předmětem, a tak jsem se ve zbylém čase pokusil o řešení několika úloh. Nesmírně se mi zalíbila první úloha, neboť existence více číselných soustav je obecně známá, ale úlohy s těmito soustavami se hned tak nevidí. Zajímavá byla také úloha č. 6 na použití více matematických vět.

Konstrukční geometrii jsem neřešil, ale úlohy se mi při čtení zdály poměrně obtížné (zejména úloha č. 1).

Závěrem bych Vám chtěl poděkovat nejen za Vaši soutěž, ale i za pěkné provedení Vašeho časopisu, který obsahuje mnoho zajímavých informací.

S pozdravem

Jiří Bouček
Dobruška

OLYMPIÁDY A SOČ

Celostátní kolo 26. ročníku fyzikální olympiády

Ve dnech 28.—31. března 1985 proběhlo v České Lípě celostátní kolo 27. ročníku fyzikální olympiády v kategorii A. Pořadatelem této vrcholové soutěže žáků středních škol byl KVFO Severočeského kraje, organizační výbor pracoval pod vedením *prof. Bohumila Daniela,* ředitele gymnázia v České Lípě a předsedy KVFO. Celostátního kola se zúčastnilo

81 soutěžících, z toho 7 dívek. Ze čtvrtých ročníků bylo 73 soutěžících, 7 bylo žáky III. ročníků a jeden soutěžící navštěvoval II. ročník gymnázia. Souběžně se III. kolem proběhlo jarní zasedání ÚVFO.

Soutěžícím byly předloženy 4 teoretické úlohy — první se zabývala dobou torzních kmitů kotouče, druhá vysvětlovala princip Bunsenova fotometru. Ve třetí úloze se soutěžící zabývali změnami náboje na kondenzátoru, čtvrtá úloha již tradičně kontrolovala úroveň pochopení studijního textu. Úlohy byly poměrně náročné; za jejich řešení mohli soutěžící obdržet bodové hodnocení: 11 b. + 9 b. + 9 b. + 11 b. = 40 b. Za experimentální úlohu, při níž zjišťovali soutěžící velikost momentu setrvačnosti kotouče, mohli získat 20 b. Z celkového počtu dosažitelných 60 b. obdržel nejlepší řešitel *M. Gašparín* celkem 49,75 b. Na svém zasedání rozhodl pak ÚVFO, že úspěšným řešitelem celostátního kola 27. ročníku FO bude každý řešitel, který získal minimálně 24 b. Na slavnostním závěrečném zasedání soutěžících, členů ÚVFO a hostů bylo potom vyhlášeno 20 vítězů, kteří dostali diplomy a ceny, 45 soutěžících bylo úspěšných a obdrželi čestná uznání. Dalších 16 řešitelů nesplnilo podmínku úspěšnosti.

Organizační výbor zajistil kromě soutěže pro účastníky kulturní a vzdělávací program — besedu s ředitelem uranového dolu, návštěvu sklářských závodů, musea aj.

Na závěr bylo vybráno 12 účastníků přípravného soustředění pro 16. mezinárodní fyzikální olympiádu. Soustředění proběhlo ve vzdělávacím středisku ÚVFO v Nitře (předcházející dvě soustředění ve školním roce 1984/85 proběhla v Hradci Králové). Pět nejlepších soutěžících, tak jak se projevilo v soustředění, reprezentovalo Československo na 16. MFO v Portoroži (Jugoslávie).

Vítězové celostátního kola:

1. *Michal Gašparín*, 4. r. gymnázia v Novém Městě n. Váhom, vyučující fyziky prof. Steckbauer, 49,75 b.

2.—4. *Ivo Myslivec*, 4. r. gymnázia Praha, Budějovická ul., prof. Kopečná, 49,0 b.
Stanislav Meduna, 3. r. gymnázia J. Hronca Bratislava, dr. Šoltés, 49 b.
Tomáš Kopf, 4. r. SPŠ chemická Pardubice, ing. Kaplan, 49,0 b.

5. *Ján Lúžny*, 4. r. SPŠ elektro Prešov, prof. Vrškový, 48,5 b.

6. *Petr Adámek*, 4. r. gymnázia Bílovec, dr. Horáková, 47,25 b.

7. *Pavel Krtouš*, 4. r. gymnázia Liberec, prof. Slezáková, 46,5 b.

8.—9. *Dušan Spurný*, 3. r. gymnázia J. Hronca Bratislava, dr. Šoltés, 42,75 b.
Svatoš Coufal, 4. r. gymnázia Blansko, prof. Stříbrská, 42,74 b.

10. *Ivan Picek*, 4. r. gymnázia Hradec Králové, Šimkova ul., dr. Ungermann, 42,25 b.
11. *Petr Loucký*, 4. r. gymnázia W. Piecka Praha, prof. Balatková, 41,75 b.
12.—13. *Pavol Kolník*, 2. r. gymnázia Nové Mesto n. Váhom, prof. Steckbauer, 41,25 b.
Miroslav Menšík, 4. r. gymnázia Banská Bystrica, prof. Holíková, 41,25 b.
14.—15. *Roman Siegl*, 4. r. gymnázium Brno, Slovanské nám., prof. Houšková, 40,75 b.
Patrik Španěl, 4. r. gymnázia W. Piecka Praha, prof. Balatková, 40,75 b.
16. *Peter Vestenický*, 4. r. gymnázia Vrútky, prof. Hencelová, 40,5 b.
17. *Zdeněk Kvítek*, 4. r. gymnázia Praha, Parléřova ul., prof. Pločková, 40,25 b.
18.—19. *Martin Foltin*, 4. r. gymnázia A. Markuša Bratislava, prof. Štekláčová, 39,5 b.
Milan Šustek, 4. r. gymnázia Uherský Brod, prof. Macháčková, 39,5 b.
20. *Peter Volek*, 4. r. gymnázia Bratislava, Metodova ul., prof. Kočišova, 39,25 b.

Dobrých výsledků dále dosáhli: Richard Nemec 39,0 b (StS), Ladislav Sládeček 39,0 b. (SM), Přemysl Dědic 38,25 b. (SM), Pavel Gromus 38,0 b. (JM), Jiří Hubeňák 37,5 b. (VČ), Marek Skotnica 37,0 b (SM).

Z přítomných dívek dosáhla nejlepšího výsledku *Petra Sekyrová* ze 4. r. gymnázia v Hradci Králové, Šimkova ul., která dosáhla 33,0 b. a umístila se na 44.—45. místě. Úspěšné byly dále: Štěpánka Šindelářová (JČ), Šárka Nová (ZČ), Miroslava Jarešová (VČ), Kateřina Denksteinová (SvČ).

Ústřední výbor fyzikální olympiády touto cestou děkuje organizačnímu výboru za dobře připravenou soutěž, úspěšným řešitelům a jejich vyučujícím fyziky blahopřeje k dosaženému výsledku. Celostátní kolo 27. ročníku FO proběhne začátkem dubna 1986 v Jihočeském kraji.

RNDr. Ivo Volf, ÚV FO

INFORMACE

Ahoj, Jana,

ďakujem Ti za prázdninový pozdrav. Ak to na Donovaloch vyzeralo i v skutočnosti ako na tej pohľadnici, začínam Ti jarnú lyžovačku závidieť. U nás bolo toho roku snehu málo a na lyže som sa vôbec nedostal, ale dúfam, že budúca sezóna bude lepšia.

Príjemne si ma prekvapila tým, že si sa predsa len rozhodla študovať na Matematicko-fyzikálne fakulte UK. Mám z toho radosť nielen ako učiteľ (že fakulta získa šikovnú študentku), ale hlavne preto, že si překonala pochybnosti o svojich matematických schopnostiach i obavy zo štúdia matematiky. Uvidíš, že si si dobre vybrala a že nebudeš mať dôvod ľutovať svoje rozhodnutie.

Nepíšeš, na aký odbor si sa prihlásila. To zatiaľ nie je také podstatné. Keď som sa pred ôsmi rokmi hlásil na Prírodovedeckú fakultu (vtedy sa ešte matematika študovala na prírodných vedách), vybral som si jediný matematický odbor, ktorého názov mi niečo hovoril — teoretickú kybernetiku. Názvy ako matematická analýza, pravděpodobnosť a matematická štatistika, približné a numerické metódy, či matematická informatika a teória systémov sa mi videli veľmi abstraktné a nevedel som si vtedy vôbec predstaviť, čo sa za nimi skrýva. Až neskôr som zistil, že všetky tieto odbory majú veľa spoločného. Nielen obsahovo (v prvých dvoch ročníkoch majú študenti väčšinu prednášok spoločných), ale aj celkovým zameraním, úlohami, na riešenie ktorých tieto odbory študentov pripravujú. Na „matfyze" sa totiž matematika neberie ako l'art pour l'art, veda, ktrorá by sa zaoberala jedine riešením svojich vnútorných problémov, ale predovšetkým ako nástroj na riešenie praktických úloh. Matematika je svojím spôsobom jazyk, v ktorom možno popisovať javy okolitého sveta. Ak chceme svet prispôsobovať svojim potrebám, predovšetkým musíme dobre poznať jeho zákonitosti. Preto je potrebné rozvíjať matematický jazyk, ktorým sa niektoré zákonitosti dajú (pomocou rovníc, funkcionálnych závislostí, pravděpodobnostných vzťahov) vyjadriť presnejšie a výstižnejšie než v iných jazykoch. Matematika však je veľmi rozsiahla veda, ktorú sotva možno zvládnuť v plnom rozsahu. Preto spoločný základ matematiky-jazyka získaný v prvých dvoch rokoch štúdia potom jednotlivé študijné odbory rozvíjajú v súlade s potrebami oblastí, v ktorých budú ich študenti pôsobiť. Analýza učí študentov metódam presného popisu (pomocou funkcií, rovníc) napr. fyzikálnych, biologických a ekologických vzťahov. Nie všetky riešenia sa však dajú získať v takej podobe, že stačí vstupné hodnoty dosadiť do nejakého vzorca a vypočítať výsledok. Niekedy na výsledok pokusu vplýva toľko faktorov, že ich nie sme schopní všetky zachytiť. Ak sa tieto neznáme vplyvy správajú približne rovnako počas celého procesu, môžeme ich popísať pomocou *pravdepodobnostných a štatistických metód*. Iné vzťahy sa síce dajú vyjadriť pomocou nejakých funkcií, ale potrebné riešenie je veľmi zložité alebo, vôbec neexistuje. Tu sa často uplatňujú *približné a numerické metódy*, ktorými získame pre naše potreby dostatočne presné (ale v skutočnosti len približné) riešenie (napríklad optimálneho výrobného programu, regulácie dopravy apod.). Najprv len na riešenie numerických úloh, ale neskôr na riešenie čoraz širšieho okruhu problémov (matematických, technických, ekonomických . .) sa používajú počítače. Všetci študenti MFF sa učia programovať (tj. zostavovať postup na riešenie konkrétnych úloh v jazyku, ktorému počítač „rozumie"). Okrem toho na fakulte existuje zameranie *matematická informatika*, pripravujúce odborníkov na prácu s počítačmi, ktorí budú rozširovať „schopnosti" počítača v závislosti na konkrétnych požiadavkách jeho užívateľov. *Matematická analýza* používa na opis systémov spojité prostriedky (funkcie, diferenciálne rovnice apod.). *Teória systémov a teoretická kybernetika* využíva na opis systému (tj. na vytvorenie matematického modelu systému) nespojitý (diskrétny) matematický aparát (napr. teóriu grafov, teóriu automatov atď.). Kybernetici si okrem iného osvojujú teoretické základy robotiky a umelej inteligencie.

Okrem „vedcov" na fakulte študujú aj „*učitelia*"; t.j. budúci stredoškolskí profesori matematiky a fyziky. Matematiku u nás možno študovať v kombinácii s fyzikou, deskriptívnou geometriou, brannou výchovou či matematickou informatikou. (Kombinácie matematiky s chémiou alebo zemepisom sa študují vedľa, na Prírodovedeckej fakulte.) Z vlastnej zkúsenosti si iste vieš dobre predstaviť prácu stredoškolského pedagóga; ak máš záujem pracovať s ľuďmi, pomáhať im spoznávať svet, sprostredkovávať im vedecké poznatky, potom Ti odporúčam učiteľské štúdium do zvláštnej pozornosti. Pripomínam ešte, že okrem gymnázií a priemysloviek sa naši absolventi môžu uplatniť aj na základných školách a odborných učilištiach. Kým s fyzikou, deskriptívou a brannou výchovou si sa strednej škole stretla, názov matematická informatika Ti asi veľa nehovorí. Nuž na mnohých pracoviskách majú už dnes počítače a nie je ďaleko doba, keď sa ovládanie počítača stane takou nevyhnutnosťou, ako povedzme ovládanie domácich elektrospotrebičov, riadenie auta, alebo písanie na stroji. A ak má človek využívať počítač (na čo počítač je), nestačí, keď sa k nemu dostane až na vysokej škole. Musí sa s ním naučiť robiť už na strednej škole ba možno i skôr. Preto popri odbornom zameraní matematická informatika existuje už druhý rok na fakulte učiteľská kombinácia matematika — matematická informatika, ktorá pripravuje budúcich učiteľov programovania pre stredné školy.

Veru, keď si takto rozoberám jednotlivé odbory, dnes by sa mi vyberalo ťažšie ako v minulosti, pretože každý z odborov na „matfyze" ponúka človeku množstvo zaujímavých problémov i možnosti pekných aplikácií.

Matematicko-fyzikálna fakulta nepatrí k veľkým fakultám (má asi 1100 študentov), a preto výuka prebieha (okrem spoločných prednášok) v pomerne malých kolektívoch. Tu je možnosť poznať schopnosti každého študenta a podľa toho voliť i metódy práce s ním. Diferencovaný prístup ku študentom sa na fakulte široko uplatňuje a vedie k veľmi dobrým výsledkom.

Nedávno sme mali pedagogickú konferenciu (to je stretnutie učiteľov a študentov, na ktorom sa rozoberajú výsledky i problémy štúdia a spoločne hľadajú cesty na ich riešenie). Niektoré údaje, ktoré som sa tam dozvedel, ma prekvapili. Nevedel som príklad, že fakultný priemer je 1,5 a že asi okolo 400 študentov poberá najvyššie prospechové štipendium (to znamená 2, najviac 3 dvojky za rok . . .). Ako úspešnú olympioničku a SOČ-kárku by Ťa iste zaujímalo to, čo sa hovorilo o ŠVOČ (študentskej vedeckej a odbornej činnosti). Čo to je? Nuž fakulta má určitý plán vedeckého výskumu. V náväznosti na vedecko-výskumné úlohy fakulty sa každoročne vypíšu témy (problémy), ktoré študenti, čo o to majú záujem, môžu pod vedením učiteľa riešiť. Riešenie má podobu malej vedeckej práce, ktorú jej autor potom obhajuje na Súťaži o najlepšiu študentskú vedeckú a odbornú prácu. Najlepšie práce sú odmenené a postupujú do celoštátneho kola. Takto sa každý študent môže ešte na škole zapojiť do vedeckej práce, pripraviť si v predstihu materiál na diplomovú prácu a naučiť sa samostatne odborne pracovať. ŠVOČ-ka sa na MFF stala organickou (a pritom dobrovoľnou!) časťou prípravy študentov a formou získavania nových poznatkov. Nie je to záležitosť len niektorých výnimočných jedincov, ale viac než 35 % študentov.

Mnohí ŠVOČ-kári (ale nielen oni) pracujú už počas štúdia na fakulte i v rôznych ústavoch a inštitúciách ako vedecké a pedagogické pomocné sily. Na fakulte pomáhajú pri príprave výuky a „vonku" najčastejšie robia programátorov. Ale nemysli si, že sa tu ich úloha obmedzuje len na pripravovanie vstupných údajov pre počítač, na tlmočenie hotového riešenia z jazyka počítača, alebo na nejaké kalkulačkové výpočty. Väčšinou riešie technické alebo ekonomické úlohy, z ktorých treba najskôr „vytiahnuť" ich matematickú podstatu a len potom ich možno spracovať na počítači. Sám som viedol skupinu študentov, ktorí pracovali na dvoch častiach (moduloch) diagnostického systému v nemocnici na Kramároch (tu by si iste uplatnila svoj záujem o medicínu), ďalší študenti robia na lekárskej fakulte, na technike, v rôznych ústavoch SAV, vo výpočtových strediskách, pre Výskumný ústav výpočtovej techniky v Žiline, ale aj na letisku, v Hydroconsulte a inde.

Fakulta podporuje odborný činnosť študentov, ak táto, pravda, nejde na úkor plnenia študijných povinností. Neraz sa stáva, že sa študent dostane k problému, alebo sa zaujíma o problematiku, ktorá nie je v náplni jeho študijného plánu. Ak ide o výborného študenta, situácia sa rieši udelením individuálneho študijného plánu, do ktorého sa študentovi doplnia prednášky z odborov, ktoré ho zaujímajú (alebo ktoré potrebuje). A to nie sú len prednášky, ktoré bežia na fakulte — máme študentov, ktorí popri matematike chodia na lekársku fakultu, na filozofiu, prírodné vedy, alebo na odborné semináre na akadémiu, Ústav technickej kybernetiky SAV, či Ústav lekárskej bioniky a inde. Svojim najlepším študentom umožňuje fakulta študijné pobyty na Karlovej univerzite a odborné praxe v zahraničí. Dnes študuje na fakulte podľa individuálnych študijných plánov asi 50 ľudí (nerátam do toho matky, športovcov a umelcov); v budúcnosti sa ráta s podstatným rozšírením medziodborového štúdia (v spolupráci s SVŠT a SAV) a so zvýšením počtu individuálnych študijných plánov pre talentovaných študentov na viac než dvojnásobok. Biomatematika, bio-, geografická a meteorologická kybernetika, počítačová grafika a iné hraničné oblasti matematiky nie sú len náplňou individuálnych študijných plánov. Na fakulte bežia výberové prednášky a semináre venované tejto problematike, na ktorých je vítaný každý, koho to zaujíma (a nemusí to byť len poslucháč MFF).

Dúfam, Jana, že si nenadobudla dojem, že MFF je nejaká výnimočná fakulta, kde študenti nerobia nič iné, len od rána do večera sedia nad knihami alebo pri počítači. Naši študenti sú celkom obyčajní (normálni) mladí ľudia, ktorí sa od svojich kolegov na iných školách ničím nelíšia. Nemáme tu len samých olympionikov, absolventov špeciálnych tried, riešiteľov matematických súťaží, ale predovšetkým ľudí, ktorých zaujíma to, čo robia (matematika alebo fyzika), ktorí sem neprišli študovať len preto, aby získali nejaký vysokoškolský diplom. (Zasa až také ľahké štúdium na MFF nie je.) Mnozí z našich študentov neboli na strednej škole žiadne „hviezdy", ale matematika ich „chytila", vlastnou húževnatosťou vyrovnali prípadný handicap zo strednej školy a dotiahli sa na úroveň najlepších.

Matematici nie sú, ako si ich predstavujú humoristi, roztržití a jednostranne orientovaní ľudia. Máme na škole vynikajúcich šachistov, horolezcov, bežcov, lyžiarov, turistov, fotografov, tanečníkov, znalcov umenia, prvé a tretie divadielko z Akademického Prešova atď. Darí sa u nás aj masovej telovýchove, dvakrát za sebou sme vyhrali Beh jari, stali sa najzdatnejšou fakultou v SSR, cez semester naustále prebiehajú rôzne turnaje, majstrovstvá fakulty, medziročníkové súťaže, a to už ani nehovorím o menších športových a spoločenských „akciách". (Videla si už bežať do školy tri stonožky, počítač, Snehulienku s trpaslíkmi a iné rozprávkové bytosti? Ak nie, tak sa príď pozrieť na maškarný beh do školy, ktorý v rámci *Dňa matematikov a fyzikov* poriada fakultný výbor SZM).

A vôbec, máme tu veľmi agilný organizáciu SZM, zdatný „fakulťák“ (fakultný výbor SZM) a veľa ľudí, ktorí nečakajú, kým sa pre nich niečo zorganizuje, ale sami organizujú bohatý študentský život na fakulte (i v internáte). Verím, že si medzi nimi nájdeš miesto zodpovedajúce svojim záujmom a schopnostiam.

Jana, dúfam, že sa mi aspoň trochu podarilo priblížiť Ti matematiku, štúdium a život na Matematicko-fyzikálnej fakulte. Je toho však příliš veľa na to, aby sa to všetko dalo povedať v jednom liste. Ale o rok už budeš mať svoje skúsenosti. Ak by si niekedy mala čas a náladu, a chcela by si si o veciach podebatovať, zavolaj mi, dovovoríme sa na nejakom termíne a môžeme si o tom, čo by Ťa zaujímalo, pohovoriť detailnejšie. Alebo sa príď pozrieť na fakultu, v máji máme Deň otvorených dverí. To tu budeme všetci, môžeš si zájsť za ľubovoľným človekom a porozprávať sa s ním, pozrieť sa na našu terminálovú (mini) učebňu, fyzikálne laboratóriá, podebatovať si s učiteľmi a študentami. Stojí to zato.

Želám Ti úspech na maturite a na prijímacích pohovoroch.

Zdraví Ťa

Daniel Olejár

Z NOVÝCH KNIH

Stanislav Kowal:
MATEMATIKA PRO VOLNÉ CHVÍLE (zábavou k vědě)

Vydalo SNTL — Nakladatelství technické literatury, n. p., Praha 1985, z polštiny přeložil Jiří Jarník, upravené 2. vydání, 324 str., 342 obr., 23 tabulek, váz. 29 Kčs.

V úvodní části si můžeme přečíst pět citátů o matematice z pera významných osobností. Nechybí mezi nimi ani známý Euklidův výrok: „V matematice neexistuje zvláštní cesta pro krále.“ Euklid v něm zdůraznil demokratičnost matematiky, nikdo nemá na cestě k jejím tajům přednost, neexistují pro nikoho žádná privilégia. Cest k matematice je však mnoho. Právě knížka Stanislawa Kowala nás může vést po jedné z nich. Je to cesta netradiční, neškolská. Matematické znalosti se na ní získávají řešením přitažlivě formulovaných úloh, jejichž řešení jsou často velmi nečekaná.

Čtenář se v knížce seznámí s mnoha význačnými objevy z historie matematiky. V úlohách poznává nejen zajímavosti z elementární matematiky, nýbrž nahlédne i do moderních náročných oborů, jako je např. topologie, teorie informace, kybernetika, variační počet a počet pravděpodobnosti.

Autor i překladatel do češtiny se postarali, aby čtenář po přečtení knížky nezůstal bezradný a mohl pokračovat v bystření rozumu a případně i ve studiu matematiky. Na konci knížky jsou dva seznamy literatury, v níž se píše o matematice zajímavým a přístupným způsobem. První z nich sestavil autor; překladatel v něm podle možnosti nahradil díla v polštině českými nebo slovenskými překlady, případně u nás dostupnější ruskou verzí. Druhý seznam připravil pro české čtenáře překladatel.

Jiří Mída

Kalendár M-F: september 1985

2\. IX. 1865 zomrel v Dunsinku *William Rowan Hamilton,* írsky matematik a fyzik, člen Královskej spoločnosti. Zaoberal sa algebrou, teóriou diferenciálnych rovníc, vytvoril presnú algebru komplexných čísel, v roku 1843 objavil kvaternióny. Zaviedol pojmy vektor, asociatívny zákon. Vytvoril fyzikálne práce z optiky a dynamiky. Známy je Hamiltonov princíp najmenšieho účinku.

10\. IX. 1975 zomrel *George Paget Thomson,* anglický fyzik. Hlavne sa zaoberal atómovou a jadrovou fyzikou, kvantovou mechanikou a aerodynamikou. V roku 1927 objavil difrakciu elektrónov. Nobelovu cenu za experimentálne objavy ohybu elektrónov na kryštáloch dostal v roku 1937.

11\. IX. 1890 zomrel *F. Casorati,* taliansky matematik. Zaujímal sa o teóriu funkcií. Známe sú jeho práce o obyčajných diferenciálnych rovniciach a o histórii matematiky.

16\. IX. 1925 zomrel *Alexander Alexandrovič Fridman,* sovietsky matematik a fyzik. Pracoval aj v teoretickej mechanike a meteorológii. V prácach z kozmológie v rokoch 1922 až 24 vytvoril model rozpínajúceho sa vesmíru.

19\. IX. 1935 zomrel *Konstantin Eduardovič Ciolkovskij,* jeden zo zakladateľov kozmonautiky. Urobil objavy v aerodynamike a raketovej technike. Navrhol niekoľkostupňové rakety, zdôvodnil použitie reaktívnych motorov v medziplanetárnych letoch.

22. IX. 1970 zomrel v Prahe *Vojtěch Jarník*, profesor na Karlovej univerzite, od roku 1952 člen ČSAV. Pracoval v analytickej teórii čísel a v oblasti reálnych funkcií.

24. IX. 1945 zomrel v Postdame *Johann Wilhelm Geiger,* nemecký fyzik. Úspešne pracoval v oblasti jadrovej fyziky. V roku 1908 určil náboj elektrónu. Zostrojil prístroj na registráciu ionizovaných častíc. Venoval sa aj výskumu kozmického žiarenia.

29. IX. 1930 zomrel *Moritz Pasch,* nemecký matematik. Patrí k prvým bádateľom v matematike na základe axiomatickej metódy. Ovplyvnil názory D. Hilberta o základoch geometrie.

30. IX. 1840 zomrel *Joseph Johann Litrow,* rakúsky astronóm a matematik. Bol profesorom na univerzite v Krakove, Kazani a riaditeľom observatória vo Viedni. Zaoberal sa refrakciou svetla, podal aritmetickú teóriu rôznych systémov kalendárov.

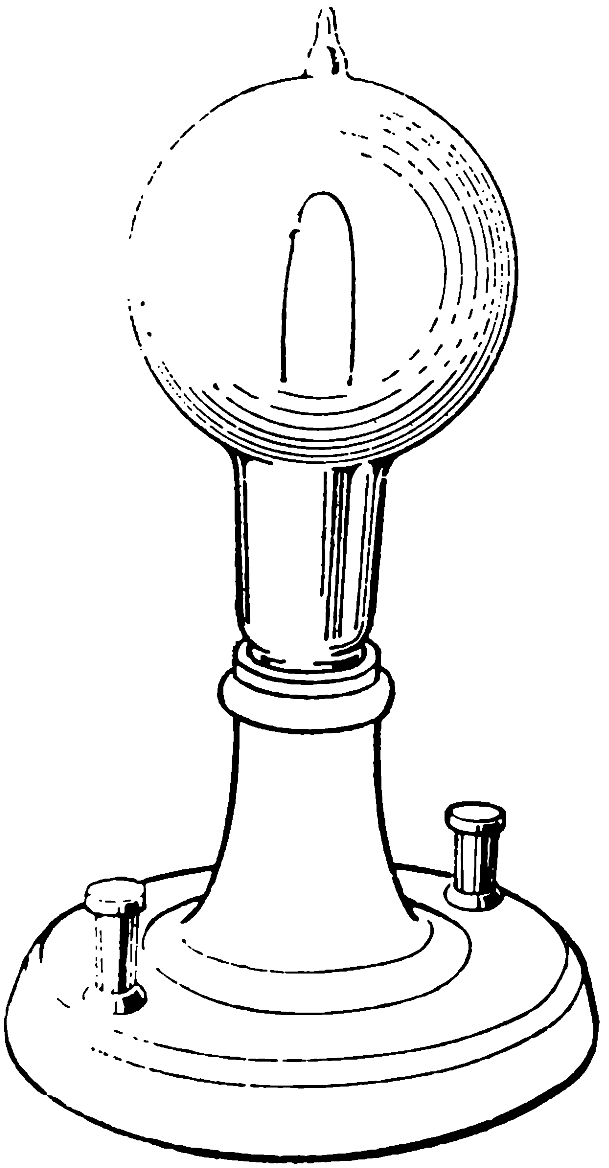
30. IX. 1870 sa narodil v Lille *Jean Baptiste Perrin,* francúzsky fyzik a chemik. Člen AV v Paríži. V roku 1938 odišiel do USA. Skúmal röntgenove a katódove žiarenie, procesy radioaktívneho rozpadu. V roku 1926 dostal Nobelovu cenu za fyziku za práce o diskontinuitnej štruktúre látok.

dj

Edisonova žárovka

Jako první levné a spolehlivé elektrické svítidlo použitelné i v domácnosti se stala Edisonova žárovka požehnáním lidstva a nechybělo ani básníků, kteří mu za ni vzdali hold.

Již v roce 1836 se pokusil Belgičan *Jobard* o konstrukci vzduchoprázdné lampy, v níž by svítila rozžhavená uhlíková tyčinka, ale neuspěl. Použití platinového drátku podle Angličana *Grove* (1840) zase bylo velmi drahé a *Lodyginova* žárovka tvořená tyčinkou tuhy v dusíkové atmosféře byla vytlačena Edisonovou žárovkou tvořenou zuhelnatělým bambusovým vláknem (1879). Je zajímavé, že s týmž návrhem vystoupil téhož roku jiný americký vynálezce, *J. Swan*.



Později se ovšem žárovky dále zdokonalily, např. vlákno je tvořeno slitinou wolframu a osmia, nicméně starobylé kouzlo a neobyčejnou životnost má žárovka Edisonova. Pokud se nalézá ve fyzikálních sbírkách vaší školy, je možno pomocí ní snadno a velmi pěkně demonstrovat střídavý charakter našeho proudu. Stačí totiž vložit ji mezi póly permanentního magnetu — a vlákno se ve shodě s pravidlem Ampèrovým rozkmitá s frekvencí 50 Hz, takže téměř celý objem žárovky se zaplní ohněm. Je obdivuhodné, že ještě po stu letech vydrží toto archaické zařízení nejen namáhání elektrické, ale i mechanické.

Vladimír Malíšek

Vydává ministerstvo školství ČSR ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednotky čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 §, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

ROČNÍK 64, 1985/86
ŘÍJEN

(2)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

MATEMATIKA

O řešení jednodušších diferenčních rovnic

Doc. dr. LADISLAV BICAN, CSc., dr. MILAN TRCH, CSc., UK Praha

V ekonomii, statistice, ale i v kvantové fyzice se někdy používají funkce, které jsou definovány pouze v jednotlivých izolovaných bodech. Při zkoumání takové funkce $f(x)$ se vychází z pojmu „*diference*", který udává rozdíl hodnot funkce ve dvou po sobě následujících bodech

$$\triangle f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Diference tak vlastně dává přírůstek funkční hodnoty funkce $f(x)$ při provedení jednoho „kroku" v definičním oboru funkce $f(x)$. S tímto přístupem se setkáváme často při měření některých veličin a setkali jste se s ním i vy například při zavádění pojmu „rychlost". I tam se provádějí úvahy o přírůstku dráhy při určitém časovém kroku. V matematice se také setkáváme s funkcemi, které nejsou definovány v celém „spojitém" intervalu. Jsou-li definičním oborem všechna přirozená čísla, nazýváme funkci posloupností a „diferenční krok" je vlastně přechod od čísla n k následujícímu číslu $n + 1$. Proto diferencí $\triangle_n$ u posloupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme rozdíl $p_{n+1} - p_n$. Pomocí diferencí můžeme zkoumat také některé typy posloupností. Nejjednodušší úloha tohoto typu vlastně může znít třeba takto:

„Najděte všechny posloupnosti, které splňují podmínku $\triangle_{n+1} = \triangle_n$ pro každé přirozené číslo n."

Označíme-li d hodnotu všech diferencí, které jsou díky dané podmínce stejné, dostaneme pro hledané posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ihned podmínku jinou:

$x_{n+1} = x_n + d$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, resp. $x_{n+1} = x_1 + n \cdot d$.

Úloha tedy vede k odhalení celé skupiny tzv. aritmetických posloupností s danou diferencí d.

Podívejme se nyní na jinou poměrně jednoduchou úlohu:

„Najděte všechny posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, které splňují podmínku $\triangle_{n+1} = \triangle_n + a$, pro každé $n \in \mathbf{N}$ a dané reálné číslo a." Při hledání takových posloupností vyjdeme z definice diference. Jestliže totiž

$\triangle_n = y_{n+1} - y_n$, potom pro každou posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, která podmínce vyhovuje, vlastně musí platit:

$$(y_{n+2} - y_{n+1}) = (y_{n+1} - y_n) + a; \text{ pro každé } n \in \mathbf{N}.$$

Upravíme-li tuto podmínku do tvaru:

$$y_{n+2} - 2 \,.\, y_{n+1} + y_n - a = 0; \text{ pro každé } n \in \mathbf{N},$$

dostáváme vlastně rekurentní předpis pro hledané posloupnosti. Přitom si musíme uvědomit, že hodnoty y_1, y_2, které potřebujeme k jednoznačnému určení dalších členů posloupnosti, lze libovolně volit. Spokojíme-li se s rekurentním zadáním hledaných posloupností, můžeme být v zásadě hotovi. Je snad již z těchto příkladů zřejmé, že každou „diferenční" rovnici můžeme dosazením převést na rekurentní předpis pro hledané posloupnosti.

Všimněme si ještě jedné velice jednoduché úvahy:

„Jaké diferenční rovnici vyhovují geometrické posloupnosti?"

Uvážíme-li, že geometrická posloupnost může být dána rekurentním předpisem: $a_{n+1} = a_n \,.\, q$, kde kvocient q je dané reálné číslo, n libovolné přirozené číslo, pak $\triangle_n = a_{n+1} - a_n = a_n \,.\, (q - 1)$ rovněž pro každé přirozené číslo n. Speciálně tedy musí platit $\triangle_{n+1} = a_{n+1} \,.\, (q - 1) = a_n \,.\, q \,.\, (q - 1) = \triangle_n \,.\, q$. Proto všechny geometrické posloupnosti s kvocientem q musí vyhovovat diferenční rovnici $\triangle_{n+1} - q \,.\, \triangle_n = 0$. Je však otázka, zda lze touto diferenční rovnicí charakterizovat právě geometrické posloupnosti, anebo zda takové diferenční rovnici vyhovují ještě jiné než geometrické posloupnosti. Odpověď na tuto otázku může dát pouze řešení úlohy, která úzce souvisí s rekurentním zadáním posloupnosti:

„Které posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovují rekurentní podmínce: Pro každé $n \in \mathbf{N}$ je $z_{n+2} - (q + 1) \,.\, z_{n+1} + q \,.\, z_n = 0$?" Odpověď na tuto otázku vyžaduje několik podrobnějších, ale rozhodně ne těžkých úvah. A proto na ni odpovíme v článku, který se bude zabývat podrobněji úplným řešením obecné rekurentní podmínky typu: „Pro každé $n \in \mathbf{N}$ v posloupnosti $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$w_{n+2} + a \,.\, w_{n+1} + b \,.\, w_n = 0$, kde a, b jsou daná reálná čísla".

Cvičení:

1) Najděte rekurentní předpis pro posloupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, které vyhovují diferenční rovnici:
   a) $\triangle_{n+2} = \triangle_n$
   b) $\triangle_{n+2} = \triangle_{n+1} - \triangle_n$
   c) $\triangle_{n+1} = a \,.\, \triangle_n + b$
   d) $\triangle_{n+2} = \triangle_{n+1} \cdot \triangle_n$

Zvolte počáteční členy a najděte několik prvých členů posloupnosti, která vyhovuje podmínkám úlohy!

2) Pokuste se najít diferenční rovnici, které vyhovuje následující posloupnost:

a) $\{1, 3, 1, 3, 1, 3, \dots\}$
b) $\{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \dots\}$
c) $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$
d) $\{1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \quad\}$

[Výsledky nejsou uspořádány jako cvičení, správný výsledek najděte samostatně z uvedených možností:

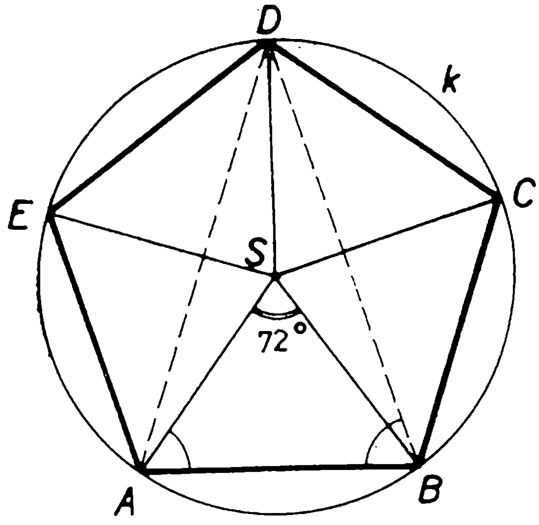
$\triangle_{n+2} = (-2) \cdot \triangle_n$; $\triangle_n = 3$; $\triangle_{n+1} = -\triangle_n$; $\triangle_{n+1} = \triangle_n$; $\triangle_{2n} = 1$ a $\triangle_{2n+1} = 0$; $\triangle_{n+2} = \triangle_{n+1} + \triangle_n$; $\triangle_n = 0$]

Konstrukce pravidelného pětiúhelníku

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Konvexní n-úhelník se nazývá pravidelný, jestliže všechny jeho strany jsou shodné a všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné. Všechny jeho vrcholy leží na kružnici, o níž říkáme, že je mu opsána; o n-úhelníku říkáme, že je této kružnici vepsán. Střed uvedené kružnice náleží vnitřku n-úhelníku. Dá se dokázat, že eukleidovskou konstrukcí lze sestrojit jen málokteré pravidelné n-úhelníky; patří k nim také pravidelný pětiúhelník. V Přehledu středoškolské matematiky, jehož autorem je *dr. Polák* (SPN, Praha, 1. vydání 1972), najde čtenář konstrukci pravidelného pětiúhelníku, který je a) vepsán do dané kružnice (str. 387); b) určen délkou své strany (str. 388). Jsou to dvě různé konstrukce, jejichž odůvodnění (hlavně první z nich) je dost složité. První z těchto konstrukcí se také uváděla v našich učebnicích geometrie pro střední školy. Uvedeme nyní jednoduchou eukleidovskou konstrukci pravidelného pětiúhelníku, která vede k cíli v obou výše uvedených případech a), b); její odůvodnění není obtížné.

Budiž S střed kružnice k, do níž je pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ vepsán (obr. 1). Potom ze shodnosti rovnoramenných trojúhelníků SAB, SBC, SCD, SDE, SEA plyne, že středové úhly příslušící v kružnici k ke stranám pětiúhelníku $ABCDE$ jsou shodné. Jejich grafický součet má velikost 360°; proto každý z nich má velikost 72°. Úhly BAD, ABD

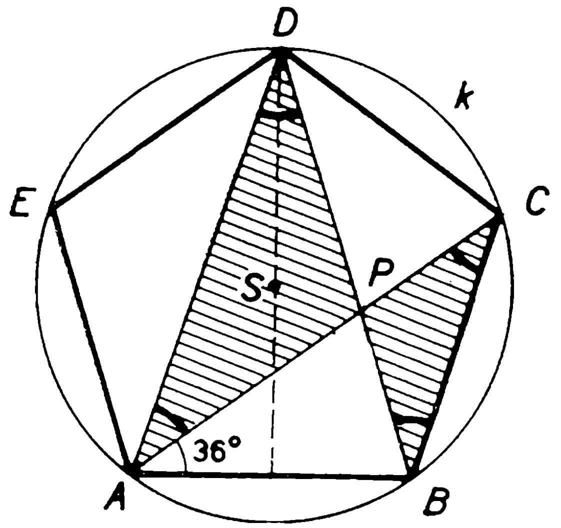


Obr. 1

jsou v kružnici k obvodové a patří po řadě ke středovým úhlům BSD, ASD, z nichž každý má velikost 144°. Proto je

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABD| = 72°,$$

takže trojúhelník ABD je rovnoramenný se základnou AB; jeho ramena jsou úhlopříčky pětiúhelníku $ABCDE$. Budeme-li umět sestrojit eukleidovskou konstrukcí tento trojúhelník ABD, budeme také umět sestrojit pravidelný pětiúhelník, který je vepsán do dané kružnice nebo má danou stranu.



Obr. 2

Tětiva AC kružnice k protíná její tětivu BD v bodu P, který leží uvnitř obou těchto tětiv (obr. 2). Proto je

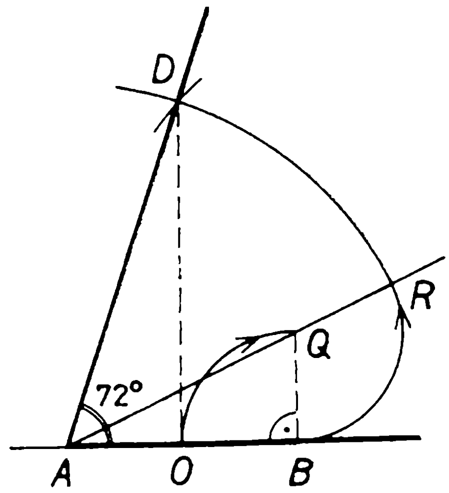
$$|BP| = |BD| - |DP| = b - |DP|, \tag{1}$$

kde

$$b = |AD| = |BD|. \tag{2}$$

Zároveň úhly ADP, DAP splývají po řadě s obvodovými úhly ADB, DAC, které v kružnici k patří ke shodným středovým úhlům ASB, DSC o velikosti 72°. Proto je

$$|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle DAP| = 36°, \tag{3}$$



Obr. 3

takže je

$$| DP | = | AP |. \tag{4}$$

Obdobně zjistíme, že je

$$| \sphericalangle BCP | = | \sphericalangle CBP | = 36°. \tag{5}$$

Z rovností (3) a (5) plyne, že je $\triangle PAD \sim \triangle PBC$ (uu). Proto platí

$$\frac{| BP |}{| BC |} = \frac{| AP |}{| AD |}. \tag{6}$$

Čtenář snadno zjistí, že $| \sphericalangle APB | = | \sphericalangle ABP | = 72°$, takže trojúhelník ABP je rovnoramenný se základnou BP; proto je $| AP | = | AB |$, a tedy podle rovnosti (4) je $| DP | = | AP | = | AB |$. Je-li $2a$ délka strany pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$, je tedy

$$| DP | = | AP | = | AB | = | BC | = 2a;$$

podle rovnosti (1) je potom $| BP | = b - 2a$. Z toho, z předešlého řádku a z rovnosti (6) a (2) plyne, že platí:

$$\frac{b - 2a}{2a} = \frac{2a}{b}.$$

$$b^2 - 2ab - 4a^2 = 0\,,$$

$$b = a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}.$$

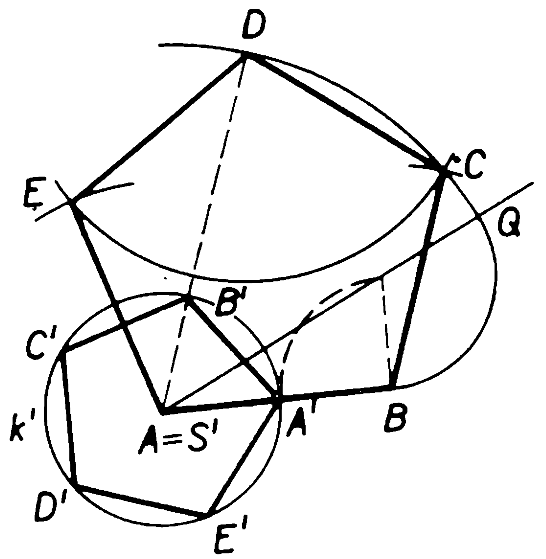
Protože je $b > 0$, je $b = a + a\sqrt{5}$. Dospěli jsme tedy k tomuto výsledku:

Je-li $ABCDE$ pravidelný pětiúhelník, jehož strana má délku $2a$, je trojúhelník ABD rovnoramenný; jeho rameno má délku $b = a + a\sqrt{5}$, jeho úhel při základně AB má velikost 72°. Zároveň je patrno, že je

$$\cos 72° = \frac{a}{a + a\sqrt{5}} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}}. \tag{7}$$

Z toho plyne tato konstrukce úhlu majícího velikost 72° (obr. 3):

1. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABQ s přeponou AQ, v němž je $| AB | = 2 | BQ |$. 2. Na prodloužení přepony AQ za vrchol Q sestrojíme úsečku QR shodnou s odvěsnou QB. 3. Sestrojíme rovnoramenný troj-



Obr. 4

úhelník ABD se základnou AB, jehož rameno je shodné s úsečkou AR. Úhel BAD má velikost 72°.

Odůvodnění této konstrukce je snadné. Budiž $|AB| = 2a$; potom je $|BQ| = a$. Podle Pythagorovy věty je

$$|AQ|^2 = |AB|^2 + |BQ|^2 = 4a^2 + a^2;$$

je tedy $|AQ| = a\sqrt{5}$, takže $|AR| = |AQ| + |QR| = a\sqrt{5} + a$. Je-li α velikost úhlu BAD a je-li O střed úsečky AB, je

$$\cos\alpha = \frac{|AO|}{|AD|} = \frac{a}{a + a\sqrt{5}} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}}.$$

Z toho podle rovnosti (7) plyne, že je $\alpha = 72°$.

Na obr. 4 je sestrojen pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, který má danou stranu AB. Body C, D leží na kružnici, která má střed v bodu A a prochází bodem Q; body E, D leží na kružnici mající střed v bodu B a poloměr $r = |AQ|$. Body C, E patří kružnici o středu v bodu D a poloměru $r' = |AB|$.

Má-li se pravidelný pětiúhelník vepsat do dané kružnice, pak stačí sestrojit její středový úhel mající velikost 72°; to se provede výše popsanou konstrukcí. Na obr. 4 je tak sestrojen pravidelný pětiúhelník $A'B'C'D'E'$ vepsaný do kružnice k', jejíž střed S' splývá s vrcholem A úhlu BAD, který má velikost 72°.

Čtyřbitové kódy desítkových číslic

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

Při zápise čísel užíváme obvykle desítkové soustavy. Potřebujeme k tomu deset symbolů, a to 0, 1, 2 až 9. V mechanických počítacích strojích se k jejich vyjádření užívalo konstrukčních prvků, které mohly být aspoň v deseti stabilních stavech. Byla to například ozubená kolečka.

Nejsnáze se však realizují prvky, které nabývají jen dvou různých stavů. Jako příklady uveďme elektrický vodič pod napětím a bez napětí, stlačené a nestlačené tlačítko, svítící a nesvítící žárovku apod.

Při použití dvojpolohových prvků by zdánlivě bylo nejvýhodnější vyjadřovat čísla ve dvojkové soustavě. Ovšem při zpracování informací je pak nutný nejprve převod ze soustavy desítkové do dvojkové a na závěr převod z dvojkové do desítkové. Mnohem přirozenější se jeví — a také skutečně je — užívat desítkové soustavy a její číslice vyjadřovat užitím dvojpolohových elementů. Konečně takto byl konstruován i první velký elektromechanický počítač MARC-1, který uvedli do provozu v roce 1943 na Harvardské univerzitě v USA a jehož autorem byl *dr. Howard Hathaway Aiken* (1900 — 1973).

Stavy dvojpolohového elementu budeme v dalším označovat 0 a I. Dále označme M_k množinu všech uspořádaných k-tic prvků 0 a I. Potom každé prosté zobrazení množiny $\{0, 1, 2, \quad, 9\}$ do množiny M_k budeme nazývat *binárním kódem desítkových číslic.*

Snadno zjistíme, že nejmenší možné přirozené číslo k, které přichází v úvahu , je $k = 4$. Desítkové číslice budou v tomto případě vyjadřovány (kódovány) uspořádanými čtveřicemi znaků 0 a I. Tyto čtveřice budeme nazývat *kódovými slovy* a budeme říkat, že mají délku čtyři *bity*, neboli že jsou *čtyřbitová.*

Nyní vypočteme, kolik existuje čtyřbitových (binárních) kódů desítkových číslic. (V dalším budeme vynechávat slovo binární, neboť je zbytečné. Čtyřbitové kódy jsou vždy binární, neboť jejich kódová slova jsou tvořena pouze znaky 0 a I.) Každý takový kód je prostým zobrazením množiny $\{0, 1, 2, ,\dots , 9\}$ do množiny M_4 všech uspořádaných čtveřic (x, y, z, u), kde $x, y, z, u \in \{0, \mathrm{I}\}$. Množina M_4 má 16 prvků, takže všech takových zobrazení je

$$16.\ 15.\ 14. \qquad .7 = \frac{16!}{6!} \doteq 2{,}9\ .\ 10^{10}.$$

Čtyřbitových kódů je tedy nepřeberné množství. Rozlišují se však mezi nimi dva druhy, a to kódy váhové a neváhové.

Tabulka 1

d	BCD 8 4 2 1	Aikenův kód 2 4 2 1	8 4 −2 −1	7 5 3 −6
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 0 0 I	0 0 0 I	0 I I I	I 0 0 I
2	0 0 I 0	0 0 I 0	0 I I 0	0 I I I
3	0 0 I I	0 0 I I	0 I 0 I	0 0 I 0
4	0 I 0 0	0 I 0 0	0 I 0 0	I 0 I I
5	0 I 0 I	I 0 I I	I 0 I I	0 I 0 0
6	0 I I 0	I I 0 0	I 0 I 0	I I 0 I
7	0 I I I	I I 0 I	I 0 0 I	I 0 0 0
8	I 0 0 0	I I I 0	I 0 0 0	0 I I 0
9	I 0 0 I	I I I I	I I I I	I I I I

Váhové kódy

Mějme čtyřbitový kód desítkových číslic, který má tuto vlastnost: Existují taková čísla R, S, T, U, že číslice d je kódována slovem $xyzv$, právě když

$$d = R \,.\, x + S \,.\, y + T \,.\, z + U \,.\, v. \tag{1}$$

Takový kód nazýváme *váhovým* a čísla R, S, T, U *váhami*. O rovnosti (1) jsme ovšem hovořili značně nepřesně. Totiž d nemůže být číslicí, nýbrž jde o jednociferné číslo, jež je v desítkové soustavě zapsáno číslicí d. Dále do rovnosti (1) nemůžeme za x, y, z, v dosazovat symboly 0 a I, nýbrž čísla 0 a 1.

Nejznámější ze čtyřbitových váhových kódů je *kód BCD* (zkratka z anglického Binary Coded Decimal), jehož váhy jsou 8, 4, 2, 1 (viz tab. 1). Tento kód se také někdy označuje jako kód 8421.

Váhy však nemusí být navzájem různé; příkladem takového kódu je *kód Aikenův* (zvaný též 2421, viz tab. 1), jehož váhy jsou 2, 4, 2, 1. Rovnost (1) má v tomto případě tvar:

$$d = 2x + 4y + 2z + u. \tag{2}$$

Jí však nejsou k některým číslicím kódová slova určena jednoznačně. Rovnosti (2) lze tedy využívat jen k výpočtu číslice ze známého kódového slova.

U váhových kódů mohou být váhy i záporná čísla; takovými kódy jsou např. v tabulce 1 kódy 84—2—1 a 753—6.

Neváhové kódy

Ukažme si jeden takový kód. Vezměme kód 84—2—1 a invertujme ve všech jeho kódových slovech znaky na 3. a 4. místě (počítáno zleva), tj. nahraďme na těchto místech znak 0 znakem I a znak I znakem 0. Tak dostaneme zobrazení číslic uvedené v tabulce 2. Snadno se přesvěd-

Tabulka 2

d	BCD + 3			
0	0	0	I	I
1	0	I	0	0
2	0	I	0	I
3	0	I	I	0
4	0	I	I	I
5	I	0	0	0
6	I	0	0	I
7	I	0	I	0
8	I	0	I	I
9	I	I	0	0

Tabulka 3

d'	8	4	2	1
3	0	0	I	I
4	0	I	0	0
5	0	I	0	I
6	0	I	I	0
7	0	I	I	I
8	I	0	0	0
9	I	0	0	I
10	I	0	I	0
11	I	0	I	I
12	I	I	0	0

číme, že jde o čtyřbitový kód desítkových číslic, neboť v žádných dvou řádcích nejsou stejná kódová slova.

Dokážeme, že kód z tabulky 2 není váhový. Kdyby měl tento kód po řadě váhy X, Y, Z, V, pak by muselo platit:

$$0 = 1 \,.\, Z + 1 \,.\, V, \tag{3}$$
$$1 = 1 \,.\, Y, \tag{4}$$
$$2 = 1 \,.\, Y + 1 \,.\, V, \tag{5}$$
$$3 = 1 \,.\, Y + 1 \,.\, Z. \tag{6}$$

Z rovnosti (4) plyne $Y = 1$, z rovnosti (5) pak dostáváme $V = 1$. Tedy z rovnosti (3) vyplývá $Z = -1$ a z rovnosti (6) plyne $3 = 0$, což je spor.

Kód z tabulky 2 má také svůj název, jmenuje se ***BCD plus tři***. Název přestane být záhadný, porovnáme-li kód BCD a kód z tabulky 2. Podívejte se na tabulku 3, která vznikla pomocí kódu BCD. Jistě jste označení „plus tři" pochopili.

V článku jsme si ukázali pět čtyřbitových kódů. S dalšími se ještě setkáte ve cvičeních.

Tabulka 4

d	Grayův kód			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	I
2	0	0	I	I
3	0	0	I	0
4	0	I	I	0
5	0	I	I	I
6	0	I	0	I
7	0	I	0	0
8	I	I	0	0
9	I	I	0	I

Cvičení

1. Zjistěte, které číslice nemají rovností (2) jednoznačně určena kódová slova. Z toho vypočtěte, kolik kódů celkem splňuje rovnost (2).
2. Pokuste se vytvořit další čtyřbitové kódy, a to tak, jako jsme z kódu 84—2—1 získali kód BCD + 3.
3. Další kódy můžeme tvořit také tak, že si vybereme z tabulky 1 některý váhový kód a měníme pořadí jeho vah. Napište tabulky kódů, které takto můžete získat z kódu 753—6.
4. Váhový čtyřbitový kód má váhy — 1, 2, 3. Nalezněte čtvrtou váhu.
5. Rozhodněte, zda tzv. *Grayův kód*, který je dán tabulkou 4, je váhový.
6. V tabulce Grayova kódu si všimněte, že kódové slovo každé číslice (samozřejmě s výjimkou nuly) vzniká z kódového slova bezprostředně předcházející číslice invertováním právě jednoho znaku. Prodlužme Grayův kód a kódová slova IIII, III0, I0I0 a přiřaďme je po řadě číslům 10, 11 a 12. Na základě toho sestavte tabulku pro *Grayův kód plus tři.*

Literatura:

[1] Valach M.: Stroje pomáhají myslet, NČSAV, Praha 1962
[2] Krištoufek K.: Matematické stroje, Práce—SNTL, Praha 1970
[3] Bernard J. — M., Hugon J., Le Corvec R.: Od logických obvodů k mikroprocesorům, 1. díl, SNTL, Praha 1982

Systémy pro počítačové zpracování algebraických výrazů

Ing. RICHARD LISKA, FJFI ČVUT Praha

V posledním čtvrtstoletí způsobily samočinné elektronické počítače revoluci ve vědeckotechnických výpočtech. Posunuly současnou vědu o velký krok dopředu a nyní si již bez nich nedokážeme v podstatě žádné odvětví vědy a techniky ani představit. Kromě využití počítačů pro číselné vědeckotechnické výpočty je známo i jejich použití pro hromadné zpracování dat, které nachází uplatnění téměř ve všech oborech lidské činnosti.

Kromě těchto standardních oblastí užití počítačů se v poslední době rozvíjejí nové, moderní způsoby využití počítačů ve vědě, mezi které patří např. zpracování algebraických výrazů, zpracování obrazových a grafických informací aj. V tomto článku se budeme zabývat právě počítačovým zpracováním algebraických výrazů, jindy též nazývaným počítačové algebraické symbolické manipulace nebo manipulace počítače se symboly apod.

Nejdříve si budeme muset objasnit, co pod pojmem počítačové zpracování algebraických výrazů rozumíme. Běžně známá je práce počítače s čísly, kdy základním objektem, se kterým počítač pracuje, je číslo, uložené speciálním způsobem v paměti počítače. Počítač potom umí čísla sčítat, odčítat, násobit, dělit, umocňovat a počítat číselné hodnoty elementárních funkcí (např. funkce sinus, kosinus, logaritmus). Můžeme ovšem také chtít, aby základním objektem práce počítače nebyla čísla, ale algebraické výrazy, ve kterých se mohou vyskytovat neznámé, algebraické operace a elementární funkce, a aby počítač uměl s těmito objekty provádět algebraické operace (sčítání, násobení, derivování, integrování atd.), přitom výsledkem těchto operací nebude číslo, ale opět algebraický výraz. Uvedeme několik příkladů algebraických výrazů:

$$x + 3,\ x + 1,\ x^2 + y^2,\ x \sin\left(\frac{y^3}{t}\right) - \cos(2a),\ \log(\sin x + b \operatorname{tg}^3 y).$$

Jestliže nemáme žádné speciální požadavky na výsledný tvar algebraických výrazů, lze s nimi provádět algebraické operace jednoduchým způsobem, a to tak, že jednotlivé algebraické výrazy uzavřeme do závorek a mezi ně napíšeme znak příslušné algebraické operace. Takto zapsaný algebraický výraz lze takřka vždy ještě nějak zjednodušit. Obecný algoritmus zjednodušování algebraických výrazů představuje vlastně hlavní problém počítačového zpracování algebraických výrazů.

Blíže si celý tento postup objasníme na příkladě: chceme-li sečíst první dva z výše uvedených algebraických výrazů, napíšeme $(x + 3) + (x + 1)$, závorky v tomto zápisu můžeme vynechat a psát $x + 3 + x + 1$, zde můžeme provést sečtení a napsat výsledný výraz $2x + 4$. Obdobně budeme-li chtít tyto dva algebraické výrazy vynásobit, můžeme postupně psát: $(x + 3)(x + 1) = x^2 + x + 3x + 3 = x^2 + 4x + 3$. Uvedeme ještě několik příkladů úprav algebraických výrazů, jaké bychom na počítači vyžadovali:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a + b}{a - b},$$
$$\frac{x + 3}{x} + \frac{y + 2}{y + 1} = \frac{2xy + 3x + 3y + 3}{xy + x}.$$

Jak je vidět, operace s algebraickými výrazy představují vlastně vždy určitou formu zjednodušení. Při práci počítače s algebraickými výrazy se tedy rýsují dva hlavní problémy: 1. určit reprezentaci algebraických výrazů v paměti počítače a 2. sestavit soubor programů zjednodušujících algebraické výrazy a provádějících algebraické operace s nimi. Oba tyto problémy spolu úzce souvisí, jsou již poměrně hodně složité a zasahují do mnoha oblastí moderní matematiky, kterým dávají četné impulsy k rozvíjení nových teorií.

Proč však chceme, aby počítač prováděl operace zde naznačené, když tyto operace můžeme provádět ručně na papíře? Důvod je v podstatě jediný. V některých oblastech současné vědy vzniká potřeba zpracování velice rozsáhlých algebraických výpočtů, jejichž pouhé zapsání by si vyžádalo několik desítek i více stran papíru. Lidská práce s takovýmito výpočty je nepředstavitelná z hlediska časového (výpočty by člověku zabraly příliš mnoho času) a též pravděpodobnost toho, že člověk udělá ve výpočtech chybu, by asi byla hodně vysoká. Jako vždy, i v tomto problému má počítač dvě výhody, rychlost a bezchybnost, člověk vlastně jedinou, a to chytrost. Takže pokud chceme počítat s tak rozsáhlými algebraickými výrazy, nezbývá nám než naučit počítač s nimi zacházet.

Z takovýchto podnětů vznikly asi před 20 lety první systémy programů pro zpracování algebraických výrazů. Tyto systémy lze budovat na několika úrovních, uvedeme si základní z nich:

1. Systémy naprogramované v *assembleru* (strojovém jazyce). Mají svůj vlastní speciální programovací jazyk, ve kterém se sestavují algebraické programy. Jsou rychlé, ale v podstatě je nelze rozšiřovat, musí se používat pouze operace v nich obsažené.
2. Systém je vlastně souborem programů provádějících standardní operace s algebraickými výrazy. Programy jsou napsány v nějakém jazyku vyšší úrovně (např. FORTRAN). Algebraické výrazy, které lze zpracovávat, jsou nějakým způsobem (např. velikostí, tvarem) omezeny. Vlastní program pro algebraické manipulace se píše též v jazyku vyšší úrovně.
3. Systém je naprogramován v jazyku vyšší úrovně (např. LISP), může zpracovávat libovolné algebraické výrazy (dáno způsobem uložení alg. výrazů v paměti počítače). Vlastní program se píše opět v jazyku vyšší úrovně.
4. Základem systému je soubor programů ve vyšším jazyku, většinou LISP, které provádějí operace s algebraickými výrazy a definují speciální jazyk pro algebraické programování, výhodný pro uživatele systému. Takovéto systémy lze poměrně jednoduše rozšiřovat o další operace.

Nejvýhodnějšími se jeví systémy posledního typu, které však mají dvě nevýhody; jednak jsou pomalejší než systémy předchozích typů, jednak mají poměrně velké nároky na paměť počítače. Jejich největší výhodou je universálnost a jednoduchost použití. Jedním z nejznámějších a nejrozšířenějších systémů tohoto typu je systém REDUCE 2, který zde v hrubých rysech popíšeme jako příklad typického systému pro algebraické programování.

REDUCE 2 je poměrně rozsáhlý universální systém pro počítačové algebraické manipulace. Systém v sobě zahrnuje:

1. Výpočty s polynomy, racionálními a některými elementárními funkcemi.
2. Derivování výrazů.
3. Široké možnosti substituce.
4. Výpočet největšího společného dělitele dvou polynomů.
5. Automatické i kontrolované zjednodušování výrazů.
6. Maticovou algebru.
7. Úplný jazyk pro algebraické programování.
8. Výpočty z fyziky vysokých energií.
9. Operace s tenzory.
10. Výstup výrazů ve formě jazyka FORTRAN nebo REDUCE.

Mimo to lze systém takřka libovolně rozšiřovat. Systém je naprogramován v jazyku LISP, který je obzvláště vhodný pro práci se symbolickými objekty a se strukturami, kterými můžeme reprezentovat algebraické výrazy.

Uvedeme jednoduchý příklad programu v jazyce REDUCE. Ke zjednodušení výpočtu podílu dvou polynomů využijeme počítání největšího společného dělitele dvou polynomů. Tuto úlohu bychom stěží ručně zvládli; počítač na ni spotřeboval jednu sekundu strojového času.

```
PRIKLAD

ON GCD;
Y: = (21*X**2 — 8*Y**2 — 15*Z**2 + 22*X*Y — 26*X*Z +
     + 22*Y*Z)/(14*X**2 — 14*Y** 2 — 24*Z** 2 + 45*X*Y —
     — 50*X*Z + 37*Y*Z);
Y: = (3*X + 4*Y — 5*Z)/(2*X + 7*Y — 8*Z)
END;
```

Počítačové algebraické manipulace je možno využít ve všech oblastech vědy, kde je potřeba zpracovávat rozsáhlé vzorce, rovnice a podobné algebraické struktury. Používají se hlavně v různých oblastech teoretické fyziky, jako je fyzika vysokých energií, fyzika plazmatu, elektrodynamika apod. Další použití je také při výpočtech drah družic a raket, výpočtech tvaru tělesa Země, planet a měsíců sluneční soustavy a obecně v každém poruchovém počtu, kde se užívá rozvojů do řad (např. v kvantové mechanice).

Lze předpokládat, že v budoucnu se s rozvojem počítačů rozšíří i jejich použití. Jako příklad toho, jaké prostředky se vynakládají na rozvoj takovýchto systémů ve světě, můžeme uvést jeden v současné době z největších a nejobsáhlejších systémů, systém MACSYMA, který vznikl ve Spojených státech. Na jeho sestavení se po dobu asi pěti let podílel tým přibližně 300 lidí — specialistů z různých oborů moderní matematiky a softwarového inženýrství (věda zabývající se sestavováním programů).

FYZIKA

Rastrovací elektronová mikroskopie

RNDr. ROMAN KUBÍNEK, přírodovědecká fakulta UP Olomouc

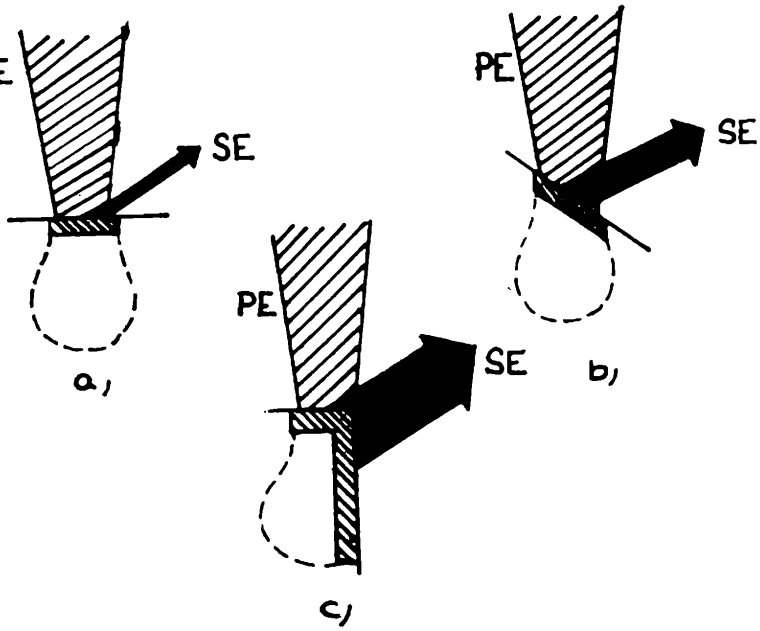
ÚVOD

Naše doba je charakterizovaná bouřlivým rozvojem vědy a techniky. Mezi výsledky a v současnosti i tvůrce prohlubující se vědeckotechnické revoluce patří i *rastrovací elektronový mikroskop*, který je jedním z nejuniverzálnějších přístrojů pro sledování a analýzu struktury pevných látek. Hlavním důvodem širokého využití rastrovací elektronové mikroskopie je vysoká rozlišovací schopnost přístrojů a značná hloubka ostrosti zobrazovaných předmětů, která podává úplnou informaci o jejich tvaru a objemu. Po připojení vhodných detektorů je možno získat informace o chemickém složení zkoumaného vzorku.

V následujících statích se seznámíme se základním popisem činnosti přístroje a s některými přednostmi, které rastrovací elektronová mikroskopie přináší.

1. Princip rastrovacího elektronového mikroskopu

Rastrovací elektronový mikroskop (*REM*) se zásadně liší od klasického prozařovacího neboli *transmisního mikroskopu (TEM)*. Zatímco u prozařovacího elektronového mikroskopu se obraz vytváří na stínítku celý najednou, u rastrovacího mikroskopu se obraz vytváří bod po bodu.

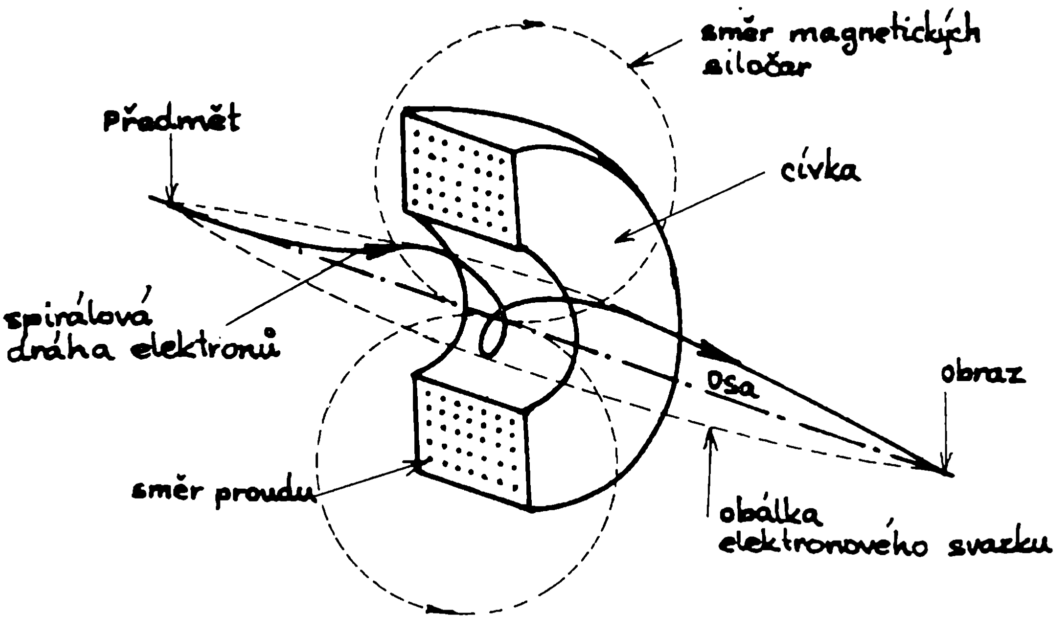


Obr. 1. Vliv náklonu povrchu na emisi sekundárních elektronů

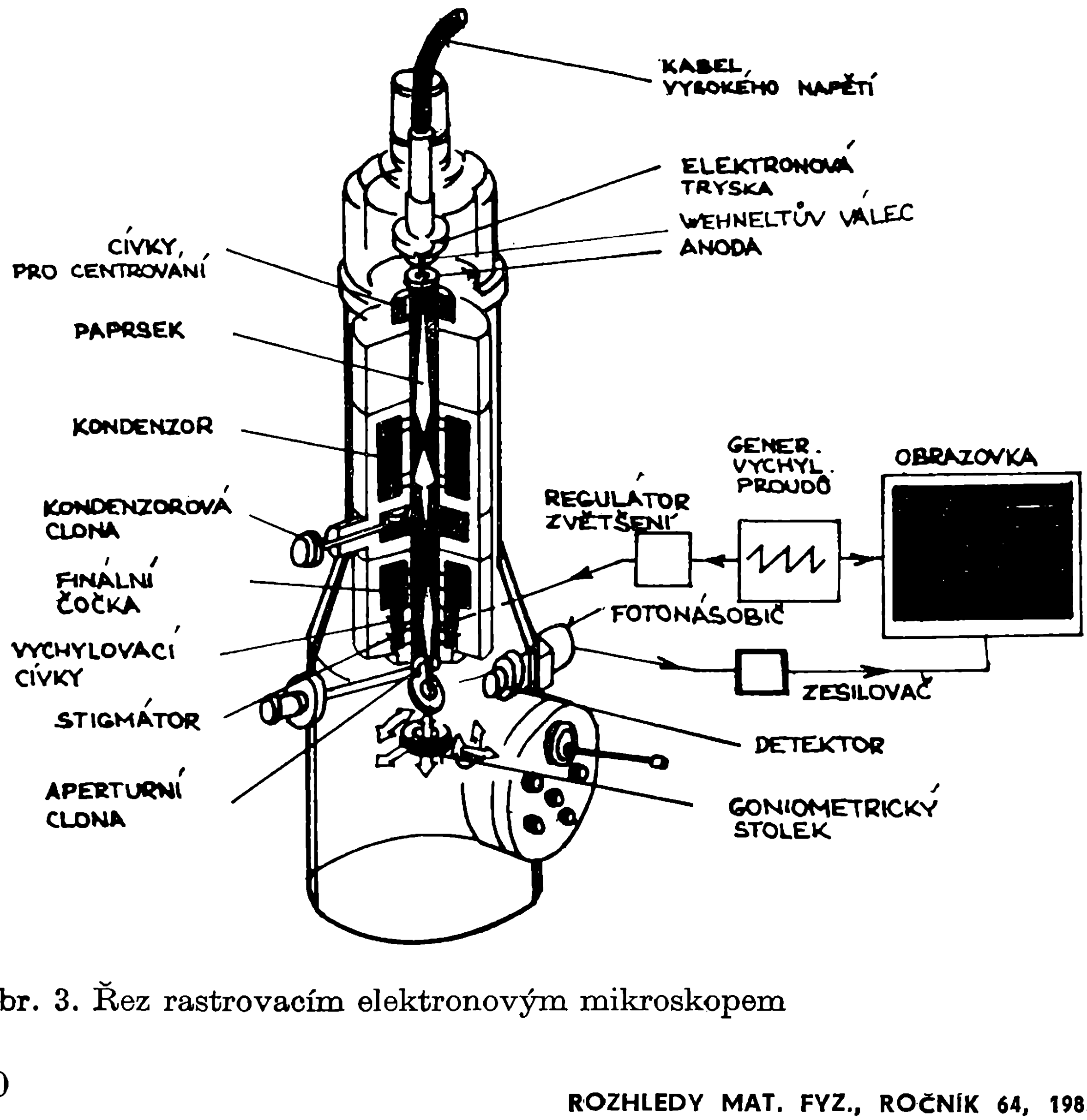
Elektrony emitované tryskou a urychlené vysokým napětím jsou elektronovou optikou soustřeďovány do úzkého svazku, který vytváří na povrchu vzorku stopu o průměru asi 10 nm. Zaostřený elektronový paprsek je vychylován vychylovacími cívkami tak, že probíhá po povrchu řádek po řádku a vytváří tzv. rastr.

V místě dopadu primárního elektronového svazku paprsků, kde dochází k interakci elektronů s látkou, vzniká celá řada užitečných jevů. Mezi nejdůležitější patří uvolňování sekundárních elektronů z povrchové vrstvy vzorku. Tyto elektrony mají energii jednotek až desítek eV a vznikají při pronikání primárních elektronů látkou. Protože mají poměrně nízkou energii, mohou uniknout z povrchové vrstvy o tloušťce od 5 nm do 50 nm. Sekundární elektrony jsou nejdůležitějším zdrojem informací v rastrovacím elektronovém mikroskopu. Protože vystupují z poměrně malé hloubky vzorku, jsou zdrojem informace s velkým rozlišením. Dosažitelná rozlišovací schopnost při zobrazení povrchu pomocí sekundárních elektronů se pohybuje okolo 10 nm. Rozlišovací schopností dané zobrazovací soustavy rozumíme nejmenší vzdálenost dvou bodů v obraze vhodného objektu, které můžeme rozeznat jako oddělené.

Velikost signálu v režimu sekundárních elektronů je dána energií primárního elektronového svazku, atomovým číslem materiálu vzorku a jeho povrchem. V tomto případě hovoříme o tzv. reliéfovém nebo topografickém kontrastu, protože množství uvolněných sekundárních elektronů závisí na úhlu dopadu primárního svazku na element povrchu. Z obr. 1 je patrno, že sekundární emise je nejmenší při kolmém dopadu (obr. 1a) a největší na hraně rovnoběžné s dopadajícím elektronovým svazkem (obr. 1c).



Obr. 2. Funkce elektromagnetické čočky



Obr. 3. Řez rastrovacím elektronovým mikroskopem

Dalším užitečným jevem, který je možno v elektronovém mikroskopu zpracovat, jsou odražené elektrony. Odražené elektrony mají energii odpovídající energii dopadajících elektronů. Protože vycházejí z větší hloubky vzorku, jsou zdrojem informace o materiálovém složení, a hovoříme potom o tzv. materiálovém kontrastu. Obraz v režimu odražených elektronů má rozlišovací schopnost přibližně 100 nm, což je dáno větší hloubkou, z které jsou uvolňovány.

Z dalších užitečných jevů stojí za zmínku možnost detekce rentgenového záření, které dává informaci o chemickém složení zkoumaného vzorku.

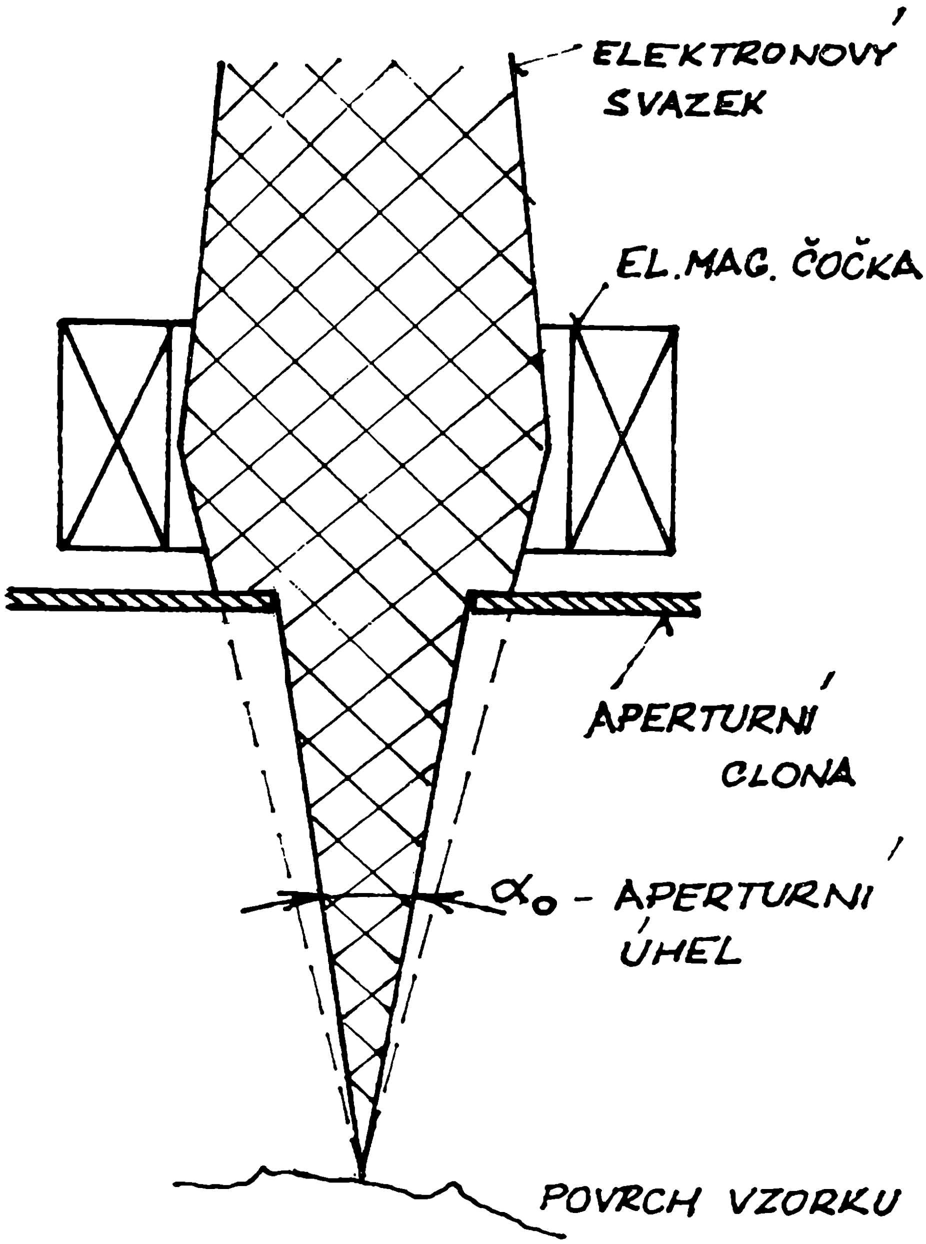
Užitečné signály v podobě uvolněných elektronů různého druhu (sekundární, odražené), vzniklé interakcí primárního elektronového svazku s látkou vzorku, je nutno dále zpracovat. Signály je nutno především zesílit a upravit a teprve potom je můžeme použít pro tvorbu obrazu v pozorovací obrazovce. Elektronový paprsek této obrazovky se pohybuje synchronně s primárním elektronovým svazkem elektronoptické soustavy mikroskopu. Protože množství uvolněných elektronů je v každém bodě vzorku, kam dopadá primární elektronový svazek, různé, vznikají na pozorovací obrazovce místa s různým jasem. Tímto způsobem vzniká jasově modulovaný obraz, který je možno zaznamenat na světlocitlivou vrstvu filmu.

2. Konstrukční uspořádání rastrovacího elektronového mikroskopu

Elektronoptický systém rastrovacího elektronového mikroskopu může být dvou nebo tříčočkový. Na rozdíl od skleněných čoček ve světelném mikroskopu, které soustřeďují přímkové paprsky světla, působí elektromagnetické čočky elektronového mikroskopu na elektrony svým magnetickým polem, takže jeho dráha vytváří prostorovou spirálu, viz obr. 2.

Chod elektronového svazku paprsků mikroskopem si ozřejmíme pomocí obr. 3. Elektrony jsou emitované *tryskou*, která může být různé konstrukce (přímo žhavená katoda, nepřímo žhavená katoda nebo autoemisní zdroj). Tyto elektrony jsou soustřeďovány *Wehneltovým válcem* v prostoru katody a urychlovány potenciálem mezi ním a anodou. Anoda bývá řešena jako zvedací, čímž se ovlivňuje směrová proudová hustota svazku elektronů. Dvoustupňové vychylovací cívky slouží k elektrickému centrování svazku.

Průměr elektronového svazku je zmenšován *kondenzorem*. V prostoru finální čočky, což je poslední elektromagnetická čočka v elektronoptické soustavě mikroskopu, jsou dvoustupňové *vychylovací cívky* a *stigmátor*. Ten slouží ke korekci astigmatismu neboli vady zobrazení, která se projevuje u všech zobrazovacích soustav. Vychylovací cívky mají za úkol



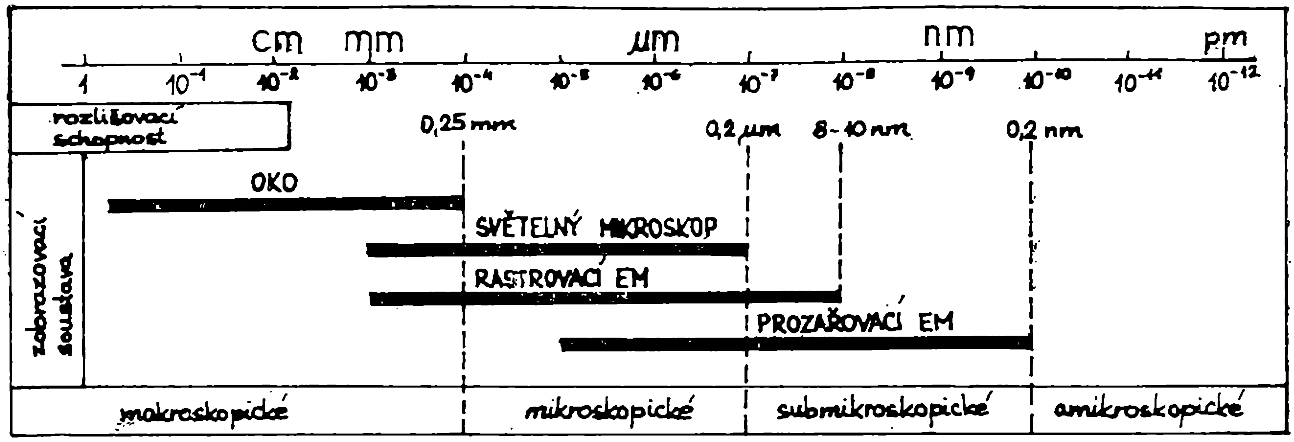
Obr. 4. Obrázek k vysvětlení pojmu aperturní úhel, aperturní clona

posouvat soustřeďovaný elektronový svazek po povrchu vzorku ve formě rastru.

Přibližně v hlavní rovině finální čočky je umístěná aperturní clona, jejímž úkolem je vymezit aperturní úhel α_0 (viz. obr. 4.) elektronového svazku. Zařazením jednoho ze tří průměrů aperturní clony je možno nastavit aperturní úhel tak, abychom získali požadovanou kvalitu obrazu při různých zvětšeních a požadovaném rozlišení.

V komoře pod elektronoptickým systémem je umístěn goniometrický stolek, jehož úkolem je umožnit výměnu a upevnění vzorku a jeho prostorovou orientaci.

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, po dopadu primárního elektronového svazku na vzorek dojde k uvolnění sekundárních a odražených elektronů, které je nutno zachytit vhodným *detektorem*. K tomuto účelu



Tab. 1. Rozlišovací schopnosti některých zobrazovacích soustav

slouží speciální konstrukce detektoru, který převádí dopadající elektrony s různou energií na světelné záblesky s různou intenzitou v zařízení, které má název *scintilátor.* Tyto záblesky se zachycují fotonásobičem, jehož úkolem je vytvořit zesílený elektrický signál, který je možno dále zpracovat. Po dalších úpravách tento signál jasově moduluje pozorovací obrazovku.

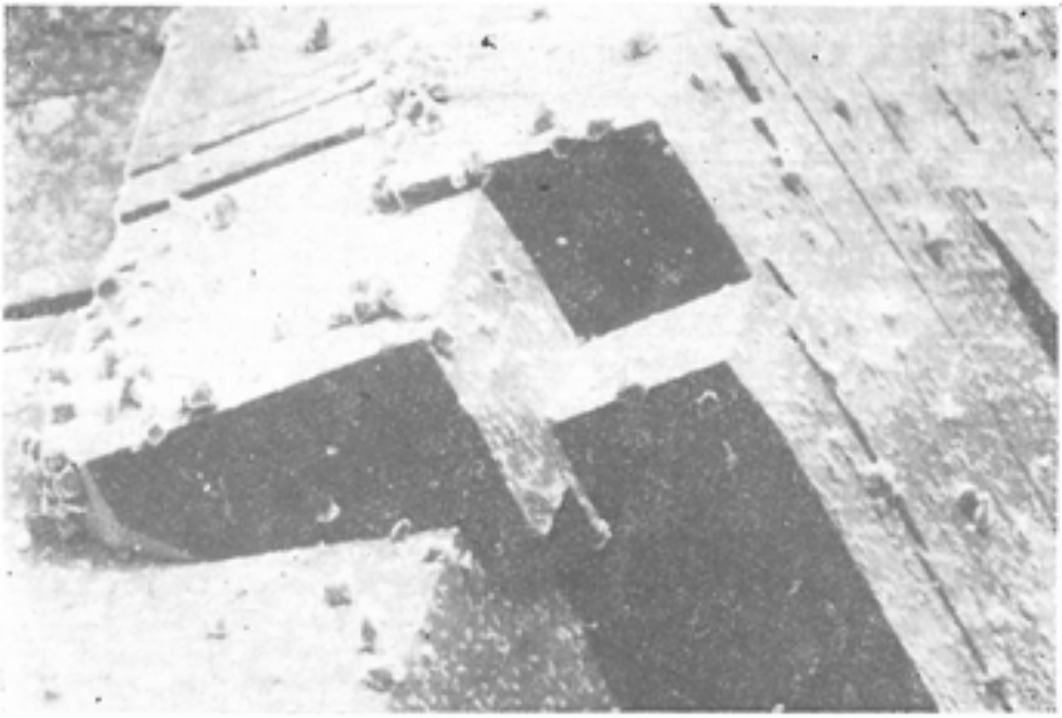
Pro provoz rastrovacího elektronového mikroskopu je nutno, aby celý systém byl dokonale světlotěsný s ohledem na vznikající světelné záblesky ve scintilátoru. Protože elektron je hmotná částice, musí být celý vnitřní prostor mikroskopu evakuován na vakuum přibližně 10^{-7} Pa, aby nedocházelo k nežádoucím interakcím elektronového svazku s molekulami vzduchu.

3. Přednosti rastrovací elektronové mikroskopie

Jednou z hlavních předností rastrovacích elektronových mikroskopů je vysoká rozlišovací schopnost, která se pohybuje u seriově vyráběných přístrojů od 8 nm do 15 nm. Pro srovnání jsou v tab. 1 uvedeny rozlišovací schopnosti některých zobrazovacích soustav.

Vlnová délka urychlených elektronů v rastrovacím mikroskopu, která se pohybuje řádově v desítkách pikometrů (10^{-12} m), umožňuje asi 100 000 krát lepší rozlišení než u klasických světelných mikroskopů. Tím je zajištěno dosažení vysokých zvětšení, která mohou jít až do milionu. Takováto zvětšení však už nedávají téměř žádné informace o povrchu preparátu, protože kvalita obrazu je omezena vadami zobrazení elektronové optiky a mechanickými vibracemi.

Druhou hlavní předností je značná hloubka ostrosti zobrazení povrchu



Obr. 5. Snímek štěpné plochy minerálu, původní zvětšení 100 ×

zkoumaného vzorku, která přispívá k tomu, že obraz vnímáme prostorově. Pro hloubku ostrosti můžeme odvodit vztah

$$L = \frac{d_0}{Z\,\alpha_0},$$

kde d_0 je rozlišovací schopnost fotografické obrazovky, ze které zaznamenáváme obraz, Z je zvětšení mikroskopu a α_0 je aperturní úhel primárního elektronového svazku. L je hloubka ostrosti neboli interval, ve kterém jsou ostře zobrazeny všechny elementy nerovného povrchu.

Pro hodnoty $d_0 = 0{,}1$ mm, $Z = 1000$ a $\alpha_0 = 1 \quad 10^{-2}$ rad dostaneme po dosazení do vztahu pro L hloubku ostrosti 10 mikrometrů, což je vzhledem k zvětšení poměrně značná hodnota a ve srovnání se světelnou mikroskopií více než 100krát větší. Hloubka ostrosti je dobře patrná z obr. 5, kde na fotografii je štěpná plocha krystalu z oboru mineralogie.

Cílem článku bylo seznámit čtenáře se základy rastrovací elektronové mikroskopie. Zájemci si mohou rozšířit znalosti v tomto oboru přečtením knihy autorů *Hulínský V. — K. Jurek*: Zkoumání látek elektronovým paprskem, SNTL, Praha 1982. S historií a některými možnostmi rastrovací elektronové mikroskopie bude čtenář seznámen v některém z dalších čísel „Rozhledů".

O jedné významné publikaci

Doc. dr. EMANUEL SVOBODA, CSc., MFF UK Praha

Nevelká rozměry a rozsahem, zato však bohatá obsahem je knížka s názvem „*Molekuly*" Obsahuje kapitoly z knihy L. D. Landaua a A. I. Kitajgorodského „*Fyzika pro všechny*". Je určena širokému okruhu čtenářů, u kterých se nepředpokládá hlubší fyzikální vzdělání. Vhodná je především pro žáky základních a středních škol.

V článku jsou uvedeny základní informace o obsahu knížky a současně je upozorněno na některé nepřesnosti, které se v publikaci objevily. Obsah knížky je vhodně rozdělen do 9 kapitol:

1. Stavební částice světa; 2. Stavba látek; 3. Teplota; 4. Stavy látek; 5. Roztoky; 6. Molekulová mechanika; 7. Přeměny molekul; 8. Zákony termodynamiky; 9. Velké molekuly.

V *první kapitole* je nejprve z historického pohledu rozebrána odpověď na otázku: Z čeho se skládá svět, který nás obklopuje? Vývoj představ o složení látek je završen současným vědecky podloženým výzkumem o složení látek z atomů a molekul, které jsou v neustálém a neuspořádaném pohybu. Na tento výklad navazuje diskuse o platnosti zákona zachování energie, přičemž se bere v úvahu nejen mechanická energie tělesa, ale také jeho vnitřní energie a energie okolí. Kapitola je zakončena historickou poznámkou k zákonu zachování energie.

V kapitole jsou některé nepřesnosti. Za základ pro definování relativní hmotnosti atomů bereme $\frac{1}{12}$ klidové hmotnosti nuklidu ${}^{12}_{6}$C, nikoliv izotopu (str. 14). V naší terminologii uvedená veličina se nazývá atomová hmotnostní konstanta a značí se m_u (symbolem m_a značíme klidovou hmotnost atomu). Není to pouhé číslo, jak je uvedeno v překladu na straně 14_5, respektive 15_5. Od veličiny m_u je nutno odlišovat pojem atomová hmotnostní jednotka jakožto vedlejší povolená jednotka pro veličinu hmotnost (v knize neodlišeno). Vztah pro výpočet hustoty na straně 15 není správný vzhledem k významu veličiny m_A zavedenému v knize. Správně má být

$$\varrho = \frac{12\, Z m_A}{V}\,.$$

Správná také není formulace, že převrácená hodnota m_A je *Avogadrova konstanta* (str. 16) — tvrzení platí pouze pro číselné hodnoty. Analogicky matoucí je vztah $N_A = \frac{M}{Mm_A}$ uvedený na téže straně. Chceme-li interpretovat fyzikální význam Avogadrovy konstanty, můžeme postupovat například takto: Vezmeme-li vzorek nuklidu $^{12}_{6}C$ o látkovém množství 1 kmol, tj. tento vzorek má hmotnost 12 kg (vyplývá z definice jednotky mol, respektive kmol), pak počet atomů $^{12}_{6}C$ v tomto vzorku je

$$x = \frac{12\ \text{kg}}{m_C} = \frac{12\ \text{kg}}{12 m_u} = \frac{1\ \text{kg}}{m_u} \doteq 6{,}022 \,.\, 10^{26},$$

kde m_C je klidová hmotnost atomu $^{12}_{6}C$ a m_u atomová hmotnostní konstanta $\left(m_u = \frac{1}{12} m_C\right)$.

Tedy číselná hodnota Avogadrovy konstanty udává počet příslušných částic v tělese o jednotkovém látkovém množství.

Druhá kapitola se podrobně zabývá vzájemným působením atomů a vzájemným působením molekul. Na příkladech jsou vysvětleny shodné a rozdílné vlastnosti mezi těmito vzájemnými interakcemi. Na to pak navazuje stručný popis modelu plynu, kapaliny a pevné látky. V článku o stlačitelnosti látek je vysvětleno, s čím souvisí tlak plynu, je uveden Boylův-Mariottův zákon jako jeden z prvních kvantitativních zákonů v historii fyziky a je porovnána stlačitelnost plynů, kapalin a pevných těles.

K vzájemnému působení molekul se autoři znovu vracejí při výkladu povrchových sil. Na několika vhodně vybraných příkladech je ukázáno jejich působení i využití.

Téměř na 11 stránkách je pojednáno o monokrystalech — jejich tvaru symetrii, vnitřní pravidelnosti, krystalové mřížce a jejích typech, a o polykrystalických látkách. Výklad je doplněn velkým počtem velmi názorných obrázků. Vtipně je využito analogie s různým uspořádáním zvoleného vzoru na tapetě.

Třetí kapitola seznamuje čtenáře s teplotou jako veličinou, která určuje, pro která tělesa je zkoumaná soustava dárcem a pro která příjemcem tepla. Probrána je volba teplotoměrné látky a konstrukce teplotní stupnice. Následuje teorie ideálního plynu s odvozením základní rovnice pro tlak ideálního plynu, Avogadrův zákon a pojednání o rychlosti molekul.

AFÉLIUM (slož. z řec. *apo* = od + *hélios* = slunce; v. heliocentrický) — odslunί; bod, v němž je kosmické těleso nejdále od Slunce; srov. apogeum, epihelium

AFOKÁLNÍ (slož. z řec. a-[3] s významem záporu + lat. *focus* = ohniště; v. fokus) — bezohniskový. Pozn.: Afokální soustava — ohnisko je v soustavě tak nekonečně vzdálené, že prakticky neexistuje

AGONA (slož. z řec. a-[3] s významem záporu + *gónia* = úhel, kout; v. goniometr) — čára nulové deklinace; spojnice míst na mapě o nulové deklinaci, tj. míst, kde „není žádný úhel" odklonu poledníku magnetického od zeměpisného. Pozn.: „Agona" nijak nesouvisí se slovem „agonie" („zápas se smrtí"), které je od řec. agón (= závod, zápas) a v němž počáteční a- není předponou, ale součástí slovního kmene.

AGREGACE (z latiniz. *agregatio*; slož. z *ad* = k, u + *grex*, *gregis* = = stádo, dav) — „sehnání do stáda, do houfu"; seskupování, shlukování, spojování, seskupení; AGREGÁT — „to, co je sehnáno do stáda"; soustava více strojů nebo přístrojů; v. t. segregace

ACHROMATICKÝ slož. z řec. *a*-[3] s významem záporu + *chróma, atos* = = barva pleti, barva; v. chromatický) — bezbarvý, nebarevný, bez barevné vady; ACHROMATICKÁ čočka — procházející bílé světlo sice ve směru láme, ale barevně nerozkládá

AK- (z lat. *ad* = k, u) — asimilací vzniklá předpona s významem „k, u, směrem k, přiblížení dodání"; v. t. akcelerace, akceptor

AKCE (z lat. *actio*; od *ago*, *-ere*, ptc. pf. *actus* = hnát, dělat) — jednání, činnost, činné zasahování do něčeho, záměrná činnost, postup. Pozn.: Zatímco v termínu „reakce" (čin jako odezva na nějaký popud) převládá u lat. *ago*, *-ere* původní význam „dělat", u termínu „transakce" (převod) převládá význam „hnát, vést". V. t. interakce, aktivní

AKCELEROVAT (z lat. *accelero*, *-are*, ptc. pf. *acceleratus*; slož. z *ad* — zde s významem „přidávání" + *celero*, *-are* = rychle provádět, od *celer* = rychlý) — zrychlovat; v. t. a, c
AKCELERACE (z lat. acceleratio) — „přidávání rychlosti", zrychlení AKCELERÁTOR (v. -or) — přístroj nebo zařízení způsobující, vyvolávající nebo umožňující zrychlení AKCELEROMETR (v. -metr[1]) — přístroj na měření zrychlení

AKCEPTOR (z lat. *acceptor*; slož. z *ad* — zde s významem „přibližování, dodání" + *capio*, *-ere*, ptc. pf. *captus*, ve složeninách *-ceptus* = brátí chytat; v. - or) — „zachycovač", přijímač, příjemce; zařízení, ústroj, nebo člověk, který něco přijímá; AKCEPTOVAT — přijímat, souhlasit, uznat; v. t. receptor, kapacita, princip

AKLINA (slož. z řec. *a*-[3] s významem záporu + *klinó* = klonit; v. inklinace) — spojnice míst o nulové inklinaci, „bez naklonění". Srov.

 INKLINOVAT (lat. in = na, do) — „naklánět se"; mít sklon; náklonnost k něčemu

AKOMODOVAT (z lat. *accomodo, -are*, ptc. pf. *accomodatus*; slož. z *ad* — zde s významem „přiblížení" + *con* — = s, spolu + *modus* = = míra, způsob) — přizpůsobovat, vhodně připojovat, upravovat; srov. MODIFIKACE — „dodání příslušného způsobu, míry, rozměru"; přizpůsobení, pozměnění

AKOMODACE (lat. *accomodatio*) — přizpůsobení, přizpůsobivost, AKOMODAČNÍ — přizpůsobovací

AKTINIDY (slož. z řec. *aktis, -inos* = paprsek; v. *aktinium* + umělá přípona *-id*) — prvky, které mají podobné chemické vlastnosti jako aktinium

AKTINIUM (od řec. *aktis, -inos* = paprsek) — prvek „plný paprsků", „vyzařující paprsky" (aktinium je totiž radioaktivní); srov. protaktinium; v. t. aktinidy, aktinometr

AKTINOMETR (slož. z řec. *aktis, -inos* = paprsek; v. *aktinium* + *metron* = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — „paprskoměr"; přístroj na měření intenzity záření, nejčastěji slunečního nebo radioaktivního

AKTINOMETRIE (v. *-metrie*) — „měření paprsků"; vědní obor zabývající se měřením intenzity slunečního nebo radioaktivního záření

AKTIVNÍ (z lat. *activus* = pracovitý; od *ago, -ere*, ptc. pf. *actus* = hnát, dělat; v. akce) — činný, činorodý, čilý

AKTIVACE — povzbuzení k činnosti, uvedení v činnost

AKTIVAČNÍ — povzbuzující k činnosti, schopný povzbudit k činnosti

AKTIVÁTOR (v. -or) — látka schopná aktivovat — uvádět v činnost látku jinou

AKTIVITA — činnost, horlivá činnost, horlivost; v. t. radioaktivita, reaktivita

AKTIVOVAT — uvádět v činnost; AKTIVOVANÝ — uvedený v činnost, a tedy aktivní — činný

AKUMULOVAT (z lat. *accumulo, -are*, ptc. pf. *accumulatus*; slož. z *a-*[2] — zde s významem „přiblížení, dodání" + *cumulo, -are*, od *cumulus* = hromada, kupa; v. kumulace) — nahromadit, nakupit; AKUMULÁTOR (v. -or) — „hromaditel"; přístroj sloužící k hromadění energie, zvláště tepelné nebo elektrické

AKUSTIKA (z řec. *akustiké techné*; v. -ika; od *akuó* = slyšet) — 1/nauka o zvuku, tj. o jeho vzniku a šíření; nauka o slyšitelnosti; 2/ samo šíření zvuku, slyšitelnost; 3/ zvuková vlastnost nějakého prostoru, totéž co AKUSTIČNOST. Právě tak AKUSTICKÝ — 1/ týkající se nauky o zvuku (např. akustický přístroj, tj. zařízení na výzkum akustiky);

2/ týkající se zvuku, zvukový, slyšitelný (např. akustický signál); 3/ napomáhající nebo usnadňující šíření zvuku (např. akustická místnost). V. t. parakuzie. Pozn.: Při tvoření odborné terminologie se častěji než řec. akuó používá lat. *audio* (např. AUDITORIUM — posluchačstvo, posluchárna, AUDIOVIZUÁLNÍ, v. t.)

ALBEDO (z lat. *albedo* = bělost, bílá barva; souvisí s *albus* = bílý, srov. ALBÍN) — poměr množství odraženého záření k celkovému množství záření kolmo dopadajícího. Pozn.: Lambertem zavedený termín do fotometrie se původně vztahoval jen na paprsky světelné; tj. on zkoumal, kolik procent všeho světla odráží např. bílý papír.

ALIKVOTNÍ (od lat. *aliquot* = několik) — poměrný; úměrný velikosti části vzhledem k celku; ALIKVOTNÍ číslo — číslo, které dostaneme z jiného čísla dělením beze zbytku („několik takových čísel tvoří beze zbytku celek"); ve fyzice: ALIKVOTNÍ tóny — samočinně znívající s tónem hlavním (zní jich několik najednou); jejich relativní výška k tónu základnímu je vyjádřena celým číslem

ALKOHOL (z latiniz. *alcool*, což je středověký přepis arabského *al kuhl* = prášek) — význam se vyvíjel: nejprve „prášek jakýkoliv", potom „prášek omamný", zvláště antimonový, pak „opojná tekutina", od 16. stol. „vinný extrakt" vyráběný alchymisty, posléze „líh, lihový nápoj"; v. t. alkoholometr

ALKOHOLOMETR (slož. z *alkohol* + řec. *metron* = míra, měřidlo; v. -metr[1]) — lihoměr; přístroj měřící procenta alkoholu ve směsi s vodou

ALTERACE (od lat. *alter* = jeden ze dvou, druhý) — „jiný stav"; střídání, změna (konečný stav) — zpravidla k horšímu; ALTEROVAT — měnit, poškozovat; ve fyzice: ALTEROVANÉ TÓNY — tóny v diatonické stupnici zvýšené nebo snížené o půltón; srov. ALTRUISTA — ten, kdo vždy jedná ve prospěch ne vlastní, ale toho druhého. V. t. alternace

ALTERNACE (od lat. *alternus* = jeden po druhém, střídavý; od *alter* = jeden ze dvou, druhý) — střídání, nahrazování, zastupování; v. t. subalternace; ALTERNATIVA — možnost volby mezi dvěma nebo více způsoby řešení; ALTERNÁTOR — stroj vyrábějící střídavý proud; v. t. turboalternátor; ALTERNOVAT — střídat se (např. jeden herec s druhým v téže roli); v. t. alterace

AMORFNÍ (slož. z řec. *a-*[3] s významem záporu + *morfé* = postava, podoba, podstata; v. -morfní) — beztvarý; AMORFNÍ látky — nemající pravidelné uspořádání částic; bez pravidelné, typické „podoby" (bez typického rozložení) molekul

AMPLITUDA (od lat. *amplus* = prostorný, rozsáhlý, rozlehlý, velký) — „vyjádření rozsáhlosti"; vzdálenost, rozkmit, rozkyv (termíny z dřívější fyzikální terminologie, které jsou dnes vyhraženy pro vzdálenost mezi krajními polohami; např. v meteorologii: rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší teplotou během dne, roku atd.); v dnešní terminologii: výkmit, výkyv, tj. veličina, která udává největší výchylku bodu z rovnovážné polohy. Srov. AMPLIÓN — zesilovač zvuku (umožňuje šířit zvuk na rozsáhlejší prostranství) (přes angl. *amply* = silně).

AN-[1] (z varianty *an-* řec. *a-*[3] s významem záporu) — předpona s významem „zápor, opak, bez"; např. ANORGANICKÝ — neorganický; v. t. anharmonický, anizotropní, anomálie

AN-[2], ANA- (z řec. *ana-* — mnohovýznamová předpona) — předpona s významem: 1/ „podle, dle (o způsobu)"; „opět, znova, zpět, proti"; např. ANALOGIE (řec. logos = slovo, řeč) — obdoba; 2/ „směr od sebe, roz—"; např. ANALÝZA (řec. lyó = rozpojovat, uvolňovat) — „rozbírání", rozbor; 3/ „směr nahoru, vzhůru"; např. ANABAZE (řec. *bainó* = kráčet) — „chůze vzhůru", dlouhý a namáhavý pochod; v. t. aniont, anténa

ANALOGIE (slož. z řec. *ana-* — zde s významem „podle, dle, znova" + + *logos* = slovo, řeč; v. — logie) — „slovo znova, tj. obdobně pronesené"; obdoba, podobnost, podoba, shoda; ANALOGICKÝ — obdobný, podobný; ANALOGOVÝ počítač — počítač, ve kterém jsou zpracované informace vyjádřeny analogickými fyzikálními veličinami; ANALOGOVÝ signál (od analogie = podobnost) — elektrický signál, který přesně odpovídá zvukovým kmitům, které jej produkují.

ANALÝZA (slož. z řec. *ana-* — zde s významem „směr od sebe, roz-" + *lyó* = rozpojovat, uvolňovat; srov. LYZOL — mýdlový roztok jako dezinfekční prostředek) — „vyproštění, rozebrání"; rozbor; rozložení složitějšího jevu na složky jednodušší; ANALYZOVAT, ANALYTICKÝ; ve fyzice: spektrální ANALÝZA — určování složení zářící látky rozkladem jejího světla na jednoduché barevné složky; ANALYTICKÉ váhy — umožňující přesným vážením přesný rozbor; ANALYZÁTOR (v. -or) — člověk provádějící rozbor — analýzu; přístroj nebo látka, s jejíž pomocí se provádí rozbor; v. t. elektrolýza, hydrolýza, katalýza; elektrolyt; lyotropní

ANASTIGMAT (slož. z řec. *an-*[1] s významem záporu + *a-*[3] s významem záporu + *stigma, -atos* = vbodnutí, vpálené znamení, bod; v. stigmatický) — objektiv bez astigmatismu, tj. bez vady, při které paprsek není vnímán jako bod; srov. astigmatismus

ANEMOGRAF (slož. z řec. *anemos* = vítr + *grafó* = rýt, psát; v. -graf) —přístroj automaticky zapisující rychlost větru. Pozn.: Květina sasanka dostala prý jméno „anemónka", protože se její květy otvírají větrem. Srov. ANEMOFILNÍ (řec. fileó = milovat, mít rád) — „větromilný"; opylující se větrem, větrosnubný

Druhá část kapitoly se zabývá teplotní roztažností (nadpis článku na straně 75 je nesprávný, neboť je uvedeno heslo tepelná roztažnost), tepelnou kapacitou těles a tepelnou vodivostí. Kladem této části je uvedení velkého počtu příkladů z přírodních a technických jevů.

V článku nazvaném Tepelná kapacita (strana 77, 78) jsou některé terminologické nepřesnosti. Především se používá termínů „tepelná energie“ a „množství tepla“. Tyto názvy v současné naší školské terminologii již nejsou používány. Používá se pouze termínu teplo. Dále nejsou důsledně rozlišovány termíny tepelná kapacita (uvažovaného tělesa) s jednotkou $J . K^{-1}$ a měrná tepelná kapacita látky (ze které je uvažované těleso) s jednotkou $J . kg^{-1} . K^{-1}$. Ve většině konkrétních údajů se v článku jedná o měrnou tepelnou kapacitu. Podobně je tomu i například na straně 193. V kapitole (a též v některých dalších) se užívá termínů absolutní teplota a absolutní nula. V současné školské terminologii užíváme termínů termodynamická teplota a teplota 0 K.

Čtvrtá kapitola pojednává o změnách skupenství látek, především z hlediska závislosti teploty příslušné změny skupenství na okolním tlaku. Tím byl vytvořen prostor seznámit čtenáře s podmínkami, za kterých se vytvoří rovnovážné stavy soustavy typu kapalina — sytá pára, krystal — kapalina, krystal — sytá pára. Výklad je doprovázen obrázky, grafy i popisem vhodně vybraných jednoduchých experimentů. Pozornost je rovněž věnována problému, jak vypěstovat krystal. Kapitola je zakončena článkem „Podivuhodná kapalina“, který seznamuje s odlišným chováním kapalného hélia při ochlazování pod jeho kritickou teplotu.

V uvedené kapitole jsou rovněž některé terminologické nepřesnosti. Místo termínu vypařovací teplo (strana 86) je správnější termín skupenské teplo vypařování. Podobně na straně 99 místo latentní teplo tání má být skupenské teplo tání. Nevhodně je použit i termín grammolekula (strana 86), správně má být užito v prvním případě termínu molární skupenské teplo varu, v druhém molární vazebná energie vodní páry. Místo termínu bod varu (strana 89) užíváme termínu teplota varu. Nesprávný je zápis typu 2257 18 $=$ 40630 J (strana 86). Místo formulace tlak, který působí na povrch“ (strana 86) je nutno užít věty tlaková síla, která působí na povrch“ Podobně na straně 110 „... tlaková síla působící na led, vyvolává tlak.“ Změnu objemu kapaliny teplotou nazýváme roztažnost, nikoliv rozpínavost (strana 92).

Na straně 93 není důsledně používáno termínu sytá pára (v slovenském překladu nasýtená), hustota syté páry apod. Na straně 100 se jedná o měrné skupenské teplo tání ledu, nikoliv o skupenské teplo.

Pátá kapitola objasňuje pojmy roztok, roztoky kapalin a plynů, pevný roztok, var roztoků a uvádí některé možnosti čištění kapalin a pevných látek od příměsí. Jsou rovněž popsány jevy adsorpce a osmózy

Šestá kapitola je nejprve věnována studiu smykového a valivého tření a vnitřního tření v tekutinách. Do této části je zařazena také supratekutost hélia. Následuje popis plastické deformace krystalů a její vysvětlení pohybem dislokací. Závěrečnou část tvoří poznatky o šíření zvuku v tělesech různého skupenství.

Přes určitou „pestrost" námětů je šestá kapitola napsána velmi poutavě a aplikuje poznatky molekulové fyziky na mechanické jevy. Je jen škoda, že při překladu nebylo použito značení veličin podle ČSN (například pro tlakovou sílu, koeficient tření, frekvenci, amplitudu výchylky). Na straně 156 má správně být „... na drát s velikostí průřezu 1 mm^2...".

Sedmá kapitola je zaměřena na chemické reakce. Na konkrétních příkladech je přehledně proveden jejich rozbor i využití. Volně navazuje článek o tepelných motorech.

Osmá kapitola se zabývá zákony termodynamiky. Po stručném rozboru dějů konání mechanické práce a tepelná výměna je slovně formulován 1. termodynamický zákon. Je jen škoda, že i v překladu je na straně 191 uvedena nevhodná formulace „Teplo a práce jsou dvě formy, kterými může energie přecházet z jednoho tělesa na druhé." Teplo a práce jsou podle naší terminologie fyzikální veličiny, příslušné děje mají název konání práce a tepelná výměna. Pro stručnější vyjadřování pak používáme formulace „chladné těleso přijalo teplo od tělesa teplejšího", „přechod tepla" apod. Nesprávná je však formulace „... přeměna tepla na mechanickou energii" (strana 193).

Na rozbor nereálnosti sestavení perpetua mobile prvního druhu navazuje výklad o nemožnosti konstrukce perpetua mobile druhého druhu (druhý zákon termodynamiky). Velmi srozumitelně je zpracováno pojednání o entropii a fluktuaci. Kapitola je zakončena historickou poznámkou k objevu 2. termodynamického zákona.

Závěrečná *devátá kapitola* seznamuje čtenáře s vlastnostmi makromolekul. Tento „rozhovor" o velkých molekulách je zakončen příkladem, který ukazuje, jak pracují makromolekuly v živém organismu. Celá kapitola je skutečně důstojným zakončením knihy, neboť dovršuje přesvědčení, že základem všech přírodních věd jsou jedny a tytéž zákony fyziky.

Závěrem lze jen konstatovat, že pro nový a svěží výklad je kniha velmi vhodná pro nejširší okruh čtenářů, zvláště pak pro žáky základních a středních škol.

Publikaci „Molekuly" vydalo ve slovenském překladu vydavatelství Alfa Bratislava ve spolupráci se sovětským vydavatelstvím Mir Moskva, 220 stran, 69 obrázků, náklad 4 000 výtisků, cena 16,50 Kčs.

Fyzika před 10, 100 a 1000 roky

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., Univerzita Palackého, Olomouc

Rok 1975 byl ve znamení objevů v oblasti fyziky elementárních částic: byla dokázána existence nového leptonu, tzv. těžkého leptonu tau, a to při reakci ve vstřícných svazcích elektronů a pozitronů; bylo rovněž objeveno třetí, leptonové neutrino a baryon Λ_c^+ Byla vypracována teorie hadronů jako souboru kvarků držených pohromadě chromodynamickými silami. Byly rovněž poprvé nalezeny hadrony po anihilaci pozitronů a elektronů svědčící o existenci dosud hypotetických kvarků. Byl rovněž zjištěn kskádní rozpad nedávno objevených částic psí; dá se tedy odhadnout, za co budou udíleny Nobelovy ceny.

V roce 1965 byl sestrojen chemický laser a proslulý CO_2 — laser i parametrické generátory světla. Byl pozorován třífotonový rozptyl na molekulách a formulován Gabovem princip syntézy optického zobrazení. Byly položeny základy holografické spektroskopie a objeven obrácený Faradayův jev spočívající v objevení se magnetismu u skel prozařovaných kruhově polarizovaným světlem. Byl tedy tento rok jakýmsi svátečním rokem optiky.

V roce 1935 zavedl *Yukawa* k popisu jaderných sil potenciálovou funkci nesoucí jeho jméno; byla objasněna nestabilita volného neutronu a objevena schopnost kadmia lapat neutrony a tím regulovat jaderné reakce v reaktorech. Německý fyzik *Weizsäcker* formuloval vzorec pro vazebnou energii připadající na jeden nukleon v atomových jádrech. Právě z tohoto muže dostali kdysi Einsteinovi přátelé strach, když se v Americe dověděli, že vzal do rukou německý jaderný výzkum. Zjistilo se rovněž , že pravděpodobnost záchytu neutronů v jádrech a tím i pravděpodobnost řetězových reakcí se zvyšuje retardací neutronů. Byla formulována výběrová pravidla pro beta-rozpad jader a uskutečněna řada dalších objevů v jaderné fyzice.

V idylických dobách před 100 lety (1885) přišel *Balmer* s prvním vzorcem z atomové fyziky: vyjádřil ve svém vzorci zákonitost pro frekvence spektrálních čar vodíku. Byl objeven skin-efekt a *Röntgen* zjistil vznik magnetického pole v okolí dielektrika pohybujícího se v magnetickém poli. *Raileigh* matematicky popsal povrchové vlnky u kapalin a *Curie* zavedl pojem povrchové energie krystalů.

V roce 1785 dokázal *Coulomb* platnost zákona elektrostatiky po něm nazvaného a sestrojil magnetometr. K roku 1665 se pojí *Leibnizův* objev živé síly, tj. dvojnásobku kinetické energie tělesa, jako míry pohybu tělesa — vedle staršího pojmu mrtvé síly totožné s *Descartesovou* hybností. V roce 1685 vyšel *Benedettiho* traktát *Rozličné matematické a fyzikální úvahy,* v němž je formulován princip setrvačnosti (byl však znám již dříve), zaveden pojem odstředivé síly a věnována pozornost hydrostatickému paradoxu. Pro novost jeho ideí a drsnost ve vystupování byl tento *Galileiův* předchůdce záhy umlčen — nespravedlnost se vlastně na něm páchá ještě dnes, kdy zmíněné zákony a pojmy jsou i ve školách spojovány s jinými badateli. Těžko bychom v dějinách fyzikálních věd již hledali další „jubilejní roky" končící dvojčíslím 85. Avšak i z těchto mála poznámek je patrný závratně urychlený vývoj naší vědy.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Hry s číslicemi

Zápis s číslicemi, který vidíte vlevo, představuje správně zapsané sčítání tří přirozených čísel. Nahradíme-li každou číslici písmenem, a to tak, že různé číslice jsou zastoupeny různými písmeny, dostaneme schéma otištěné vpravo. Můžeme si položit otázku, zda $A = 4$, $B = 7$, $C = 5$ je jediným řešením algebrogramu s písmeny A, B, C. Protože pracujeme jen s číslicemi 1, 2, ..., 9, 0, můžeme odpověď hledat tak, že probereme všechny možnosti volby uspořádané trojice hodnot (A, B, C). Při troše matematického důvtipu můžeme tento proces podstatně zkrátit; pokuste se o to.

$$\begin{array}{r} 475 \\ 75 \\ 5 \\ \hline 555 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} A\,B\,C \\ B\,C \\ C \\ \hline C\,C\,C \end{array}$$

Najděte všechna řešení obdobných algebrogramů:

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} ABC \\ BC \\ C \\ \hline AAA \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} ABC \\ BC \\ C \\ \hline DDD \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{r} ABCD \\ BCD \\ CD \\ D \\ \hline AAAA \end{array} \qquad \text{d)}\ \begin{array}{r} ABCD \\ BCD \\ CD \\ D \\ \hline EEEE \end{array}$$

Jarmila Pěnčíková

Řešení algebrogramů:

a) $A = 4$, $B = 1$, $C = 8$ nebo $A = 6$, $B = 3$, $C = 2$;
b) $A = 3$, $B = 6$, $C = 8$, $D = 4$ nebo $A = 5$, $B = 8$, $C = 2$, $D = 6$;
c) $(A, B, C, D) = (8, 4, 2, 7)$;
d) (A, B, C, D, E) se rovná (1, 5, 7, 3, 2) nebo (3, 6, 8, 1, 4) nebo (5, 8, 1, 9, 6).

NAŠE SOUTĚŽ

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve školním roce 1984/85 se účastnilo soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních celkem 91 jednotlivců a 24 kolektivů, většinou trojčlenných; všech řešitelů bylo 145, tj. v podstatě tolik jako loni (149). Úlohy z matematiky řešilo celkem 91 studujících, úlohy fyzikální celkem 66 a úlohy z konstrukční geometrie 6 účastníků soutěže. Z toho 2 řešili úlohy z matematiky, fyziky i z konstrukční geometrie a 15 úlohy z matematiky i z fyziky. Nejúspěšnějšími řešiteli byl dvoučlenný kolektiv *Jiří Fišer* a *Vladimír Kordula,* 3 C, G Mikuláše Koperníka v Bílovci; oba řešili správně 9 úloh z matematiky, všech 5 úloh z fyziky a všechny tři úlohy z konstrukční geometrie.

Nejúspěšnější řešitelé úloh z jednotlivých předmětů byli tito studující:

Matematika:

1. Milan Ling, 2 C, G M. Koperníka, Bílovec
2. Jarmila Ranošová, 4 C, G M. Koperníka, Bílovec
3. Jiří Fišer a Vladimír Kordula, 3 C, G Bílovec.

Fyzika:

1. Ladislav Zejda, 3 E, G Jihlava
2. Kolektiv Aleš Pořízka, Zbyněk Raida a Tomáš Tkadlec, 3 C, G M. Koperníka, Bílovec.
3. Jiří Fišer a Vladimír Kordula, 3 C, G Bílovec.

Konstrukční geometrie:

Jiří Fišer a Vladimír Kordula, 3 C, G M. Koperníka, Bílovec.

Nakonec připojujeme abecední seznam všech řešitelů. Za jménem každého řešitele uvádíme školu, na níž studoval; nejprve uvádíme vždy jednotlivce a potom řešitelské kolektivy. Uvádíme jen příjmení; jen u řešitelů téhož příjmení uvádíme celé jméno.

Řešitelé úloh z matematiky:

Babilon, G Bílovec; Barsi, G Tata (Maďarsko); Bilek G Bratislava, Dunajská; Bočková G Praha 3, Sládkovského; Bognár , G maď. Komárno; Bonczek, G maď. Komárno; Bouček, G Dobruška; Calábek, G Bílovec; Cyriusek, SPŠ maď. Komárno; Czéfai, G Bratislava, Dunajská; Demcsáková, G Bratislava, Dunajská; Dúcs, G Bratislava, Dunajská; Gažo, G maď. Galanta; Gombos, G Bratislava, Dunajská; Jandura, G Bratislava, Dunajská; Janig, MT Komárno; Kardosová, G maď. Galanta; Kárpaty, G maď. Komárno; Kenderessy, G Bratislava, Dunajská; Kiáts, G Bratislava, Dunajská; Kiss, SPŠ maď. Komárno; Kissová, G maď. Komárno; Kolářová, G Ostrava 1; Kollár, G Bratislava, Dunajská; Kövári, G maď. Senec; Krascsenits, SPŠ maď. Komárno; Lancz, G maď. Galanta; Ling G Bílovec; Litomericzká, G maď. Komárno; Lozsi, G maď. Galanta; Lukaová, G maď. Komárno; Mihályová, G Bratislava, Dunajská; Minczingerová, G maď. Senec; Molnárová, G Bratislava, Dunajská; Mrázek, G Gottwaldov; Németh Petr, SPŠ Piešťany; Németh Tibor, G maď. Komárno; Oláh, ZŠ maď. Komárno; Olláry, G maď. Komárno; Ollé, G maď. Komárno; Paulovics, G Bratislava, Dunajská; Polgár, SPŠ maď. Komárno; Ranošová, G Bílovec; Spátay, G maď. Komárno; Stadtmacherová, G Bratislava, Dunajská; Szegi, G maď. Komárno; Šléžka, G Bílovec; Takács, G Bratislava, Dunajská; Tamás, G maď. Komárno; Vargová, G Topoľčany; Vinczeová, G maď. Komárno, Vodáček, G Bílovec.

Almási, Duducs, Várik, SPŠ maď. Komárno; Blahovics, Bédi, Szoboslai, SPŠ Komárno, Herö, Olláry, Varga, SPŠ maď. Komárno; Jünger, Seleši, G Bílovec; Koczkaová, Beseckiová, Kovácsová, SPŠ maď. Komárno; Kordula, Fišer, G Bílovec; Lebocz, Ledeczky, SPŠ maď. Komárno; Molnár, Andris, SPŠ maď. Komárno; Nagy, Farkas, Mészáros, SPŠ maď. Komárno; Orbán, Vörös, Holop, SPŠ maď. Komárno; Rigó, Pásztor, SPŠ maď. Komárno; Takács, Molnár, Andris, SPŠ maď.

Komárno; Varga Imre, Farkas, Horváth, SPŠ maď. Komárno; Varga Jozef, Holop, SPŠ maď. Komárno; Zalaba, Vincze, Ruzsik, SPŠ maď. Komárno.

Řešitelé úloh z fyziky:

Barák, G Šumperk; Bencz, G Bratislava, Dunajská; Bouček, G Dobruška; Csermák, G maď. Galanta; Červinka, G Gottwaldov; Dědic, G Bílovec; Dočekal, G Jihlava; Dukonyová, G Bratislava, Dunajská; Fekete, G Bratislava, Dunajská; Feketeová, G maď. Komárno; Gazsiková, G Bratislava, Dunajská; Goálová, G maď. Komárno; Habal, G Bílovec; Halász, G maď. Šamorín; Huszárová, G maď. Bratislava; Kenderessy, G Bratislava, Dunajská; Kiáts, G Bratislava, Dunajská; Kiss, G maď. Komárno; Komanec, G Bílovec; Kovácsová, G Bratislava, Dunajská; Kukel, G maď. Komárno; Mede, G Bratislava, Dunajská; Mészáros, G maď. Komárno; Mihle, G maď. Komárno; Mikony, G Bratislava, Dunajská; Molnár, G Bratislava, Dunajská; Mrázek, G Gottwaldov; Müller, G maď. Komárno; Nagy, G Bratislava, Dunajská; Némethová, G maď. Komárno; Novák G maď. Komárno; Olláry, G maď. Komárno; Paksy, G maď. Šamorín; Ráczová, G Bratislava, Dunajská; Sándor, G Bratislava, Dunajská; Solymos, G Bratislava, Dunajská; Spátay, G maď. Komárno; Staníčková, G Brno, Koněvova; Sütö, G Bratislava, Dunajská; Szegi, G maď. Komárno; Šléžka, G Bílovec; Tamás, G maď. Komárno; Varga, G maď. Komárno; Vargová Jana, G Topoľčany; Vargová Katarína, G maď. Komárno; Vass, G maď. Šamorín; Vinczeová, G. maď. Komárno; Vodáček, G Bílovec; Vrezgóová, G Bratislava, Dunajská; Záhorszky, G maď. Komárno; Zejda, G Jihlava.

Heczko, Pavlačík, G Bílovec; Kordula, Fišer, G Bílovec; Madea, Šléžka, G Bílovec; Pořízka, Raida, Tkadles, G Bílovec; Seleši, Jünger, G Bílovec; Stöhr, Červinka, G Gottwaldov.

Řešitelé úloh z konstrukční geometrie:

Benkovicsová, Bodriová, G maď. Galanta; Gáspár, Zsidó, G maď. Galanta; Kordula, Fišer, G Bílovec.

Redakce rozhledů matematicko-fyzikálních děkuje všem řešitelům za řešení úloh, vítězům blahopřeje a zašle jim z prostředků Státního pedagogického nakladatelství v Praze věcné odměny.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Do desítkové soustavy převeďte čísla, o nichž platí

$$(xy2)_{\alpha+1} = (4yx)_\alpha.$$

Stanislav Horák

(Došlo 33 řešení)

Řešení Roberta Babilona, 2. D G M. Koperníka, Bílovec:

Především je patrno, že o přirozených číslech x, y platí

$$0 < x < \alpha,\ 0 < y < \alpha,\ 4 < a. \tag{1}$$

Druhou z těchto nerovností můžeme nahradit nerovností

$$0 < y \leqq \alpha - 1.$$

Daná čísla můžeme rozepsat jako mnohočleny

$$x(a + 1)^2 + y(\alpha + 1) + 2 = 4\alpha^2 + y\alpha + x.$$

Po kratší úpravě máme

$$\alpha^2(x - 4) + (2a\,x + y + 2) = 0 \tag{2}$$

Vzhledem k (1) je trojčlen

$$2\,\alpha\,x + y + 2 > 0$$

a to znamená, že

$$\alpha^2(x - 4) < 0\,,$$

jinak

$$x < 4.$$

To znamená, že x je rovno některému z čísel 0, 1, 2, 3. Postupně probereme všechny případy.

a) $x = 0$. Rovnice (2) má po úpravě tvar

$$y = 4\alpha^2 - 2.$$

Jestliže $\alpha = 1$, je $y = 2$, což není možné s ohledem na (1). Pro každé $y > 2$ je $y > \alpha$, a to je opět v rozporu s (1). Pro $x = 0$ řešení neexistuje.

b) $x = 1$. Rovnice (2) nabude tvar

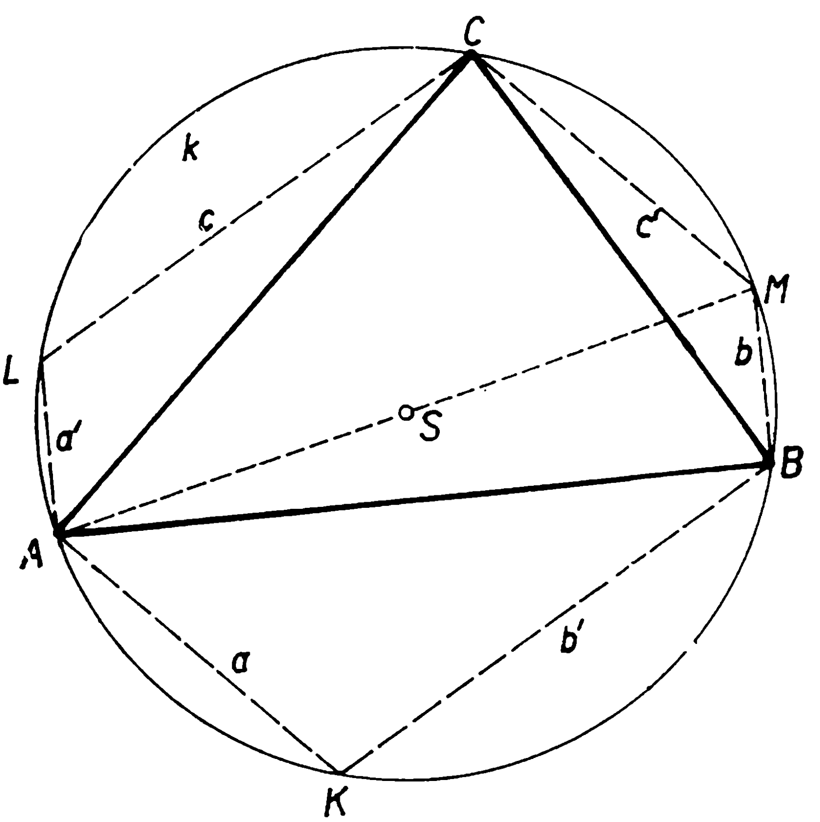
$$y = 3\alpha^2 - 2\alpha - 2.$$

Je okamžitě vidět, že pro všechna $\alpha > 1$ je $y > \alpha$, což je v rozporu s (1). Ani v tomto případě neexistuje žádné řešení.

c) $x = 2$. Rovnice (2) má tvar

$$y = 2a^2 - 4a - 2 = 2\,a(a - 2) - 2.$$

Aby bylo $y > 0$, musí být $\alpha \geqq 3$. Avšak pro všechny tyto hodnoty $\boldsymbol{a}$ je $y > \alpha$, což nesouhlasí s (1). V tomto případě tedy opět neexistuje řešení.



Obr. 1

d) $x = 3$. Rovnice (2) je (po úpravě)

$$y = \alpha^2 - 6\alpha - 2.$$

Poněvadž je $y > 0$, musí být

$$\alpha^2 - 6\alpha - 2 > 0,$$

což jinak psáno je

$$\alpha^2 > 6\alpha + 2. \tag{3}$$

Tato nerovnost je splněna pro všechna $\alpha > 6$. Vezměme $\alpha = 7$. Potom $y = 5$. Dospěli jsme tak k řešení $x = 3$, $y = 5$, $\alpha = 7$. Hledané číslo je

$$(352)_8 = (453)_7 = 234, \tag{4}$$

jak se snadno můžeme přesvědčit.

Dosadíme-li do (3) $\alpha \geqq 8$, dostaneme vždy $y > \alpha$ a to je v rozporu s (1). Jediné řešení je to, které je uvedeno v (4).

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, jemuž je opsána kružnice k o poloměru r. Přímka vedená vrcholem A kolmo k přímce AC (resp. AB) protne kružnici k ještě v bodě K (resp. L); budiž $|AK| = a$, $|AL| = a'$. Obdobně sestrojíme dvě úsečky mající krajní bod B a dvě úsečky mající krajní bod C; velikosti těchto úseček buďtež po řadě b, b', c, c'. (obr. 1) Dokažte, že je

$$a + b + c + a' + b' + c' \leqq 4r\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right);$$

rovnost nastane právě tehdy, je-li trojúhelník ABC rovnostranný.

Stanislav Horák

(Došlo 33 řešení)

Řešil Milan Ling, II. C G M. Koperníka, Bílovec:

Přímka vedená vrcholem A kolmo k přímce AC protne kružnici k ještě v bodě K. Podobně přímka vedená vrcholem B kolmo k přímce CB protne kružnici k v bodě K, neboť vrcholy A, B leží na Thaletově kružnici nad průměrem CK, a tudíž

$$|\sphericalangle CAK| = 90°,\ |\sphericalangle CBK| = 90°.$$

Obdobně to platí i pro průsečíky přímky AL a přímky CL a pro přímky CM a BM.

Označme nyní

$$|\sphericalangle MAB| = \alpha_1,\ |\sphericalangle CAM| = \alpha_2.$$

Zřejmě platí (z trojúhelníků ABM, ACM)

$$b = 2r \sin \alpha_1,\ c' = 2r \sin \alpha_2.$$

Odtud

$$b + c' = 2r(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) =$$

$$= 4r \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leqq$$

$$\leqq 4r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha_1 = \alpha_2$, tj. v případě, že trojúhelník BCA je rovnoramenný ($|BA| = |CA|$).

Analogicky dostaneme

$$a' + c \leqq 4r \sin \frac{\beta}{2},$$

kde rovnost nastane, právě když $|BA| = |BC|$, a

$$b' + a \leqq 4r \sin \frac{\gamma}{2},$$

kde rovnost nastane, právě když $|CB| = |CA|$. Sečtením všech tří nerovností dojdeme k výsledku:

$$a + b + c + a' + b' + c' \leqq 4r \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}\right),$$

kde rovnost nastane právě tehdy, je-li daný trojúhelník rovnostranný.

Poznámka. Poněvadž

$$a = c',\ b = a',\ c = b',$$

dá se podle toho levá strana nerovnosti psát jednodušeji.

NAŠE SOUTĚŽ; ročník 1985-86

Redakce Rozhledů spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze vypisuje opět soutěž o ceny v řešení úloh z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Nejprve otiskujeme první tři úlohy z matematiky; další úlohy otiskneme v příštím čísle. Soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, avšak maximálně trojčlenné. Při případném dobrém umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Obecné pokyny řešitelům

Řešení každé úlohy pište česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy), a to čitelně (pokud možno na stroji) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte čitelně své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec také svou bytovou adresu i se směrovacím číslem. Každý kolektiv uvede tyto údaje pro svého každého člena. Příjmení pište hůlkovým písmem.

Nejdříve napište číslo a text úlohy, potom její řešení. Pište stručně, avšak výstižně a jasně; neužívejte zbytečně různé symboly. Dbejte na platnou terminologii a symboliku. Obrázky, pokud je k textu připojujete, narýsujte pečlivě a čitelně je popište.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Najděte všechna prvočísla p z intervalu $\langle 300, 400 \rangle$, tj. $300 < p < 400$, která mají tyto dvě vlastnosti: a) číslo $p + 1$ je dělitelné šesti; b) číslo $p - 1$ je dělitelné čtyřmi.

Stanislav Horák

2. Najděte všechny konvexní tečnové čtyřúhelníky, jejichž úhlopříčky jsou navzájem kolmé. — Tečnový čtyřúhelník je ten, jehož strany leží na tečnách téže kružnice.

Stanislav Horák

3. Vypočtěte obsah konvexního čtyřúhelníku, jestliže znáte délky u, v jeho středních příček a velikost ψ jejich úhlu. — Střední příčkou čtyřúhelníku rozumíme úsečku, jejíž krajní body jsou středy protějších stran čtyřúhelníku.

Milan Koman

Řešení těchto tří úloh zašlete nejpozději do 15. ledna 1986 na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních, která je otištěna na druhé straně obálky každého čísla tohoto časopisu.

OLYMPIÁDY A SOČ

Celostátní kolo 34. ročníku matematické olympiády

RNDr. LEO BOČEK, CSc, MFF UK Praha

Celostátní kolo matematické olympiády se konalo ve dnech 25.—28. dubna 1985 v *Banské Bystrici*. Ti soutěžící kategorie A, kteří nejlépe prošli I. a II. kolem, řešili v III. kole těchto šest náročných úloh:

1. V rovině je dán pravidelný 1985-úhelník. Každou jeho stranou proložme přímku. Určete počet částí, na které tyto přímky rozdělí rovinu.
2. Nechť A_1, A_2, A_3 jsou neprázdné množiny celých čísel takové, že pro $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ platí
$$(x \in A_i,\ y \in A_j) \Rightarrow (x + y \in A_k,\ x - y \in A_k).$$
Dokažte, že aspoň dvě z množin A_1, A_2, A_3 se sobě rovnají. Mohou být některé z těchto množin disjunktní?
3. Jsou-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektory v rovině takové, že součet jejich délek je aspoň 1, pak mezi nimi najdeme vektory, jejichž součet je vektor délky alespoň $\sqrt{2}/8$. Dokažte.
4. V rovině jsou dány dvě přímky p, q a na přímce q bod F, $F \notin p$. Určete množinu všech bodů X, které lze dostat touto konstrukcí:

V rovině zvolíme bod S, který neleží ani na p, ani na q, a sestrojíme kružnici k se středem S, která se dotýká přímky p. Na kružnici k zvolíme bod T tak, aby $ST \parallel q$. Protne-li přímka FT přímku p v bodě U, je X průsečík přímek SU a q.

5. Je dána trojúhelníková tabulka s n řádky a n sloupci, i-tý řádek končí políčkem v i-tém sloupci. V každém políčku tabulky je napsáno některé z čísel $1, 2, \quad, n$ tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \quad, n\}$ se v sjednocení k-tého řádku a k-tého sloupce vyskytují všechna čísla $1, 2, \quad, n$. Dokažte, že v případě lichého n je každé z čísel $1, 2, \quad, n$ napsáno v posledním políčku některého řádku.
6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ existuje pořadí $a_1, a_2, \dots, a_n$ čísel $1, 2, \quad, n$ tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \quad, n - 1\}$ dělí číslo a_{k+1} součet $a_1 + a_2 + \dots + a_k$.

Nejlehčí byla asi 1. úloha, v řešeních se vyskytlo asi 15 různých výsledků, správný výsledek je 1971106. V druhé úloze mohou být dvě z daných množin množinou všech celých lichých čísel, třetí množinou všech celých sudých čísel. Třetí úloha se řešila Dirichletovým principem, bylo třeba rozlišit „součet délek vektorů" a „délka součtu vektorů". Výsledkem 4. úlohy byly průsečíky přímky q a paraboly s ohniskem F a řídicí přímkou p. Řešením 6. úlohy je v případě sudého n, $n = 2k$, pořadí $k + 1, 1, k + 2, 2, \quad, 2k, k$, je-li n liché, $n = 2k + 1$, stačí vzít totéž pořadí a přidat nakonec číslo $2k + 1$.

Prvních 18 nejlepších řešitelů uvedené šestice úloh se stalo vítězi 34. ročníku matematické olympiády, umístili se v tomto pořadí:

1. *Adam Obdržálek*, G W. Piecka, Praha
2. *Radek Adamec*, G Kroměříž
3. *Vladan Majerech*, G Pardubice
4. *Pavol Gvozdjak*, G A. Markuša, Bratislava
5. *Milan Horák*, G W Piecka, Praha
6. *Marcel Polakovič*, G A. Markuša, Bratislava
7. *Vladimír Kordula*, G M. Koperníka, Bílovec
8. — 9. *Petr Hájek*, G W Piecka, Praha
Marian Šumšala, G A. Markuša, Bratislava
10. *Martin Heisler*, G W. Piecka, Praha
11. — 15. *Petr Adámek*, G M. Koperníka, Bílovec
Martin Knor, G A. Markuša, Bratislava
Jarmila Ranošová, G M. Koperníka, Bílovec
Jan Spousta, SPŠE Ječná ul., Praha
Petr Šleich, G Děčín
16. *Patrik Španěl*, G W. Piecka, Praha
17. — 18. *David Bednárek*, G W. Piecka, Praha
Robert Babilon, G M. Koperníka, Bílovec

Dalších 23 účastníků se stalo úspěšnými řešiteli.

Žáci z tříd, které nejsou zaměřeny na matematiku, se umístili mezi úspěšnými řešiteli v tomto pořadí:

1. *Radek Adamec*, Kroměříž
2. *Vladan Majerech*, Pardubice

3. — 4. *Jan Spousta*, Praha
Petr Šleich, Děčín

5. — 6. *Pavel Krtouš*, Liberec
Richard Seďa, Blansko

7. *Róbert Trávnik*, Bratislava, Novohradská

8. — 9. *Igor Bilák*, Prešov, Konštantinova
Ján Lúžny, SPŠE Prešov

10. — 13. *Peter Matta*, Michalovce
Ladislav Hanyk, Karlovy Vary
Mário Drosc, Michalovce
Eva Kopecká, Bratislava, Novohradská

14. *Michal Wittner*, Karlovy Vary

INFORMACE

O jednom z pracovísk Univerzity Komenského

RNDr. ANNA POLÁŠKOVÁ, CSc., Ústav fyziky a biofyziky UK, Bratislava

Ústav fyziky a biofyziky Univerzity Komenského (ÚFaB UK) vznikol ako pracovisko s celouniverzitnou pôsobnosťou v roku 1978. Jeho riaditeľom je skúsený vysokoškolský vedecký pracovník a pedagóg *Prof. RNDr. Sergej Usačev, DrSc.*

Celkové zameranie ústavu vychádzalo z požiadaviek kladených na rozvoj vedeckovýskumných pracovísk vysokých škôl. Poslaním ústavu je preto integrovanie vedeckovýskumnej činnosti vo fyzike, najmä v prudko sa rozvíjajúcej, perspektívnej a komplexnej biofyzikálnej problematike, centralizácia špičkového a nákladného prístrojového vybavenia, čím sa zefektívni výskum. Plnením týchto úloh sa zabezpečuje realizácia uznesení XV. a XVI. zjazdu KSČ a záverov rokovaní straníckych a štátnych orgánov.

Dôraz v oblasti jadrovej fyziky je kladený na základný výskum vo fyzike vysokých energií a na aplikovaný výskum orientovaný na vývoj zariadení a metód na stanovenie nízkych aktivít a využitie týchto metód pri ochrane životného prostredia. Osobitné miesto v tejto činnosti zaujíma spolupráca so Spojeným ústavom jadrového výskumu v Dubne v ZSSR. Je to úloha celoštátneho charakteru. Spolupráca s SÚJV sa týka predovšetkým experimentálneho programu *Hyperón* a zabezpečuje sa dlhodobými pobytmi našich pracovníkov v SÚJV, kde majú možnosť využívať unikátne zariadenia, a jednak prácami na príslušnej problematike na ústave, pričom ich koordinácia je zabezpečovaná najmä formou krátkodobých stáží. Pracovníci sa podieľajú na navrhovaní experimentálneho programu a niektorých častí detekčných systémov, resp. vyhodnocujú získané výsledky.

Úlohy riešené vo fyzike tuhých látok sa zameriavajú predovšetkým na vyšetrovanie prímesných centier implantovaných prímesí v polovodičoch. V oblasti biofyziky sa kladie hlavný dôraz na koordináciu výskumu biofyzikálnych pracovísk v rámci UK. Ťažiskom výskumných úloh je komplexný výskum biologických membrán.

V uplynulom období bol hlavný dôraz vo vedeckovýskumnej činnosti kladený na úlohy napojené na štátne cieľové programy a preferované úlohy MŠ SSR. Ústav zabezpečuje ako jediné pracovisko na Slovensku základný výskum vo fyzike plazmy, je koordinačným pracoviskom hlavnej úlohy „Elementárne a chemické reakcie v niektorých formách výbojovej plazmy a v prúdiacom prostredí", ktorá je preferovanou úlohou MŠ SSR a je napojená na dva štátne cieľové programy.

ÚFaB UK venuje zvýšenú pozornosť otázkam zabezpečenia realizácie výsledkov riešení vedeckovýskumných úloh v praxi v zmysle 8. zasadania ÚV KSČ o urýchlenom uplatňování výsledkov vedy a techniky v praxi. Preto sa prijali konkrétne ciele a navrhli opatrenia, aby sa výsledky výskumu vo vytypovaných oblastiach doriešili až do úrovne realizačného výstupu. Je zrejmé, že nie pri všetkých riešených úkoloch vedeckovýskumných úloh je možné a účelné očakávať výstup hmotného charakteru. Treba preto preferovať a sústrediť kapacity na tie úlohy, ktoré rozvíjajú niektorý z jej základných smerov zvýšenia vedeckotechnickej úrovne národného hospodárstva formulovaných na 8. zasadnutí ÚV KSČ. Dôležitou sa javí otázka vývoja a konštrukcie nových polovodičových prvkov, technológia výroby integrovaných obvodov.

Veľmi efektívnou formou spolupráce je utváranie vedecko-výskumno-výrobných združení. Jednotlivé pracoviská sa vhodnou formou podieľajú na vybraných vedeckovýskumných programoch tak, aby sa čo v najväčšej miere uplatnila integrácia experimentálnych metodík a prístrojového vybavenia. Preto v budúcnosti vznik týchto združení bude orientovaný na priemyslové podniky.

Aj na UK sa v súčasnosti pripravuje vytvorenie učebno-vedeckého výrobného združenia, čím sa vytvoria podmienky na kooperáciu jadrového výskumu na Slovensku (SAV, SVTŠ, VÚJE, UK) a na urýchlené odovzdávanie výsledkov do praxi. Bázovými experimentálnymi zariadeniami by mali byť školský reaktor (SVŠT) a tandemový urýchľovač iónov (UK).

Takúto pomerne rozsiahlu činnosť ústavu umožňuje tesná a systematická spolupráca s jednotlivými zložkami UK, predovšetkým však s Matematicko-fyzikálnou fakultou.

Milá nádejná kolegyňa,

moje meno Vám síce nepovie nič, ale dúfam, že tomu tak nebude aj s obsahom môjho listu. Som pracovníkom Katedry experimentálnej fyziky MFF UK a k napísaniu tohto listu ma „uhovoril" *Dano Olejár* — náš spoločný známy. Nedávno ma stretol, s hlavou v smútku, a vyžaloval sa mi — vraj sa od neho chce „napísať fundované slovo aj o fyzike na MFF UK". Priznám sa, že do písania sa mi nikdy veľmi nechcelo a nie som ani taký „spisovateľ" ako Dano, ale snáď mi to prepáčite... Ešte šťastie, že Dano je taký poctivec a vyhrabal kdesi kópiu listu, ktorý Vám posielal; dal mi ju prečítať, aby ma „rozhýbal"

Snáď na úvod, ako dobrý „hostiteľ", by som Vám mal ponúknuť „menu": v našom „podniku" si zákazník (= uchádzač o štúdium) môže vybrať (na štúdium) niektorý z nasledovných odborov: fyzika tuhých látok, jadrová fyzika, biofyzika a chemická fyzika, fyzika hraničných odborov, fyzikálna elektronika a optika.

To, že na *fyzike tuhých látok* sa zaoberajú tuhými látkami, je jasné. Lenže to nie sú len polovodiče (ako si často študenti myslia); veľa problémov je aj vo fyzike kovov, kryštalických a amorfných tuhých látok, takže vlastnosti všetkých týchto tuhých látok, metódy skúmania ich štruktúry, ovplyvňovania a využívania ich vlastností sú predmetom štúdia na spomínanom študijnom odbore. Absolventi tohto odboru sú teda potrební nielen v elektrotechnickom priemysle, ale aj v iných odvetviach, ako hutníctvo, zlievárenstvo, zváračstvo, strojárenstvo, sklárstvo — všade tam treba poznať vlastnosti materiálov (mechanické, elektrické a iné) a vedieť, ako ich nejakým fyzikálnym spôsobom zmeniť, zlepšiť. Napr. na iónovom implantátore sa na katedre fyziky tuhých látok pridávaním rôznych prímesí do rôznych materiálov (napr. do kremíka) získavajú polovodiče s rôznymi vlastnosťami; výsledky týchto prác sa potom využívajú v k. p. Tesla.

Ďalší odbor, ktorý sa u nás študuje, je „*jadrová fyzika*". Jadrová energetika je dnes považovaná za perspektívny smer v súvislosti s potrebou zabezpečiť zdroje energie pre stále rastúce požiadavky spoločnosti. Ale energetická stránka, fyzika jadrového reaktora, nie je jedinou oblasťou aktivity „jadrovákov"; nemenej dôležitá začína byť aj ochrana životného prostredia — kontrola úrovne rádioaktívnych prvkov v zemskej atmosfére, vodách atď., ako aj metódy diagnostiky (detekcie) nízkych koncentrácií rádioaktívnych prvkov v našom okolí. Absolventi tohto smeru sa ale uplatnia — okrem jadrových elektrární a inštitúcií „strážiacich" naše životné prostredie — aj inde: od priemyslu (netradičné metódy diagnostiky skrytých kazov a závad kovových a iných výrobkov), až po medicínu (liečenie nádorov či výskum účinkov žiarenia na živé organizmy).

Posledná z uvedených možných aplikácií jadrovej fyziky však už viac patrí (či zasahuje) do toho, čo sa študuje v rámci študijného odboru „*biofyzika a chemická fyzika*" Tento odbor je na našej fakulte najmladší a aj v praxi ho „jeho éra" ešte len čaká. Je zrejmé, že pochopiť taký zložitý systém, ako je človek, nemožno bez hlbokých a dôkladných znalostí fungovania jednotlivých jeho podsystémov, tedy „súčiastok", z ktorých je živý organizmus zložený — buniek (s celou ich komplikovanou štruktúrou a organizáciou práce), ich systémov atď. Preto sa napr. na katedre biofyziky zaoberajú štúdiom membránových javov v bunkách, ale aj počítačovým modelovaním neurónových sietí a činnosti hypofýzy. Fyzikálne myslenie a znalosť exaktných, fyzikálnych experimentálnych metód by mala byť pre absolventov tohto odboru vítanou vlastnosťou a dobrým „vstupným preukazom" pre prácu vo výskumných kolektívoch, ktoré sa zaoberajú skúmaním fyzikálnych aspektov živých organizmov (pričom „objektom" nemusí byť len človek; viem si predstaviť takýchto ľudí aj vo veterinárstve či biológii...).

Asi najzáhadnejším je pre Vás názov ďalšieho študijného odboru: „*fyzika hraničných odborov*". Je v ňom „zamaskovaných" niekoľko relatívne samostatných špecializácií: astronómia, meteorológia, geofyzika, matematická fyzika. O tom, že v astronómii sa študujú javy prebiehajúce vo vesmíre a meteorológia sa zaoberá dejmi v atmosfére, netreba vari písať; preto k týmto dvom špecializáciám dodám už len toľko, že ich absolventov možno nájsť na astronomických observatóriách SAV, v ľudových hvezdárňach, meteorologických ústavoch a v letištnej meteorologickej službe. Objektom štúdia na špecializácii „geofyzika" je Zem, jej štruktúra a vlastnosti, čo sú veci dôležité nielen z hľadiska prevencie zemetrasení (mechanické vlastnosti zemskej kôry), ale aj pre poznanie magnetického poľa Zeme, čo je zase dôležité napr. pri navigácii. V rámci špecializácie nazvanej „matematická fyzika" sa vychovávajú špičkoví teoretickí fyzici s najrozmanitejším zameraním:

fyzika elementárnych častíc, teória poľa, teória relativity a kozmológia, teória tuhých látok, hydrodynamika. Absolventi tohto zamerania sa zväčša uplatnia v ústavoch SAV, resp. iných výskumných ústavoch.

V rámci odboru „*fyzikálna elektronika a optika*" sa študenti dozvedia nielen fyzikálnu podstatu, ale aj konkrétnu realizáciu rôznych elektronických zariadení, naučia sa navrhnúť, skonštruovať a otestovať elektronickú aparatúru, nadobudnú znalosti z moderných partií optiky (nelineárna optika, lasery, holografia) a z fyziky plazmy. O použití laserov v súčasnej technike sa veľa píše aj v dennej tlači (riadenie automatických obrábacích strojov, operácia oka, navigácia, použitie laserov v meteorológii a — žiaľ — aj vo vojenstve) a veľké perspektívy sa otvárajú v použití laserov pri prenose informácií a vo výpočtovej technike. Z uvedeného teda vidieť, že absolventi tejto špecializácie nájdu v budúcnosti dobré uplatnenie. Špecializácia „fyzika plazmy" má veľké uplatnenie už v súčasnosti a do budúcnosti sú perspektívy ešte lepšie: cesty plazmatického leptania, plazmochemických reakcií a využitie plazmy pri úprave povrchov, nanášaní materiálov, rezaní, zváraní atď. sa ukazujú veľmi perspektívne a sľubujú prácu ešte na dlhé roky. Absolventi tejto špecializácie sa uplatnia v elektrotechnickom priemysle — vo výrobe a vývoji mikroelektronických súčiastok (Tesly), v chemickom priemysle (Slovnaft a i.), strojárenskom priemysle (ZVL a i.), ako aj vo výskumných ústavoch (Výskumný ústav zváračský, SAV atď.). V rámci programu Interkozmos sa v spolupráci so sovietskym centrom kozmického výskumu podieľajú pracovníci katedry experimentálnej fyziky MFF UK a Ústavu fyziky a biofyziky UK aj na výskume medziplanetárnej plazmy.

Tak to by bolo asi všetko o „čisto fyzikálnych" odboroch. Ešte snáď toľko, že prvé dva ročníky všetkých spomínaných odborov sa učivom nelíšia a k samotnej diferenciácii podľa odborov dochádza až v treťom ročníku, k špecializácii vo 4. ročníku. Pravda, toto nebráni tomu, aby sa študenti už aj v nižších ročníkoch zaujímali o svoju budúcu špecializáciu a napr. v rámci ŠVOČ sa pripravovali na ňu riešením niektorých problémov.

A ešte pár slov o kombinácii fyziky s inými predmetmi, t. j. o *učitelskom štúdiu na našej fakulte*. Ako som zistil, priamo na našej fakulte sa študuje iba „*matematika-fyzika*" (oba predmety sú pokryté pedagógmi našej fakulty), ale fyzikálnu časť zabezpečujú ľudia z našej fakulty aj pre výuku kombinácie „*chémia-fyzika*", ktorá sa študuje na Prírodovedeckej fakulte UK. Absolventi týchto kombinácií sú najčastejšie učiteľmi základných a stredných škôl (5.—12. ročník), ale uplatnia sa aj v neučiteľských zamestnaniach, v odbornej a vedeckej práci.

Teraz ma napadlo, že ešte by asi bolo treba *niekoľko informácií všeobecného charakteru*. Štúdium na MFF UK je 5-ročné (mimoriadne nadaní ho môžu zvládnuť aj rýchlejšie), končí obhajobou diplomovej práce a štátnicou (u učiteľského štúdia dvoma). Najlepší absolventi obdržia súčasne s vysokoškolským diplomom aj titul RNDr. A tí naozaj „naj..." zostávajú zväčša na fakulte a pokračujú v zdokonaľovaní formou internej ašpirantúry.

No, myslím, že som Vás už svojím listom dosť vyčerpal — a keďže som vymíňal zároveň aj svoju „spisovateľskú slinu", končím. Dúfam, že moje informácie Vám budú osožné a prispejú k tomu, že sa rozhodnete študovať na MFF UK. Prajem Vám pri prijímačkách veľa úspechov a pevnú vôľu pri štúdiu.

Ivan Košinár

P. S. V prípade, že by ste potrebovali o niečom vedieť podrobnejšie, zavolajte mi na katedru experimentálnej fyziky MFF UK.

I. K.

Z NOVÝCH KNIH

Jozef Zámečník:
PREHĽAD STREDOŠKOLSKEJ FYZIKY

Vydala ALFA — Vydavatelství technické a ekonomické literatury; 1. vydání, Bratislava 1984, SNTL — Nakladatelství technické literatury, Praha 1984, 416 stran, 303 obrázků, 28,— Kčs, edice matematicko-fyzikální literatury.

Autor, vysokoškolský učitel s dlouholetou pedagogickou praxí na vysoké škole technického směru, s bohatými zkušenostmi ve výchově mladých talentů v rámci krajského a ústředního výboru fyzikální olympiády přístupnou formou podává v knize přehled fyziky v rozsahu, ve kterém se vyučuje na středních školách.

V úvodní kapitole se zabývá základními pojmy, fyzikálními veličinami a mezinárodní soustavou fyzikálních jednotek (soustava SI). Jednotky soustavy SI používá velmi důsledně ve všech kapitolách.

Kniha je celkově rozdělena do 8 kapitol s podrobným členěním. Vedle úvodní kapitoly je tu ještě velmi důležitá kapitola základy vektorové algebry. V této kapitole je zaveden pojem vektoru a důležité operace s vektory, které zvláště využije čtenář, pokud se bude dále zabývat vysokoškolskou fyzikou, kde znalost operací s vektory je samozřejmostí. V knize jsou velmi podrobně probrána témata mechanika a termika nejen teoreticky, ale i množstvím obrázků a výpočtů. Důsledně dodržovaná soustava SI v popisu teploty (K) bude možná pro studenty nezvyklá, neboť ještě stále používají častěji Celsiovu stupnici.

Další kapitoly jsou věnovány kmitání, vlnění, akustice, elektřině a magnetismu v rozsahu fyziky střední školy. Kapitoly týkající se optiky (24 stránek) a stavby atomu (20 stránek) se zdají trochu ošizeny vzhledem k ostatním. Autor zřejmě předpokládá, že studenti probírají tuto látku v posledním ročníku a tedy mají poznatky ještě čerstvé a širší. V přehledu není zahrnuta část zabývající se speciální teorií relativity.

Kniha je doplněna tabulkou některých fyzikálních konstant, řeckou abecedou, podrobným registrem a zároveň i poznámkami o význačných osobnostech, jejichž jména jsou pevně svázána s objevy a popisem základních fyzikálních principů.

Kniha přišla na pulty knihkupectví v době, kdy mnoho studentů středních škol se připravuje na maturitní zkoušky a úspěšné zvládnutí přijímacích pohovorů na vysoké školy. Je možné jim knihu doporučit, i když se na první pohled zdá, že je velmi obsáhlá. Přístupnou formou dává přehled středoškolské látky a tak poslouží nejen studentům, ale i všem, kteří si chtějí doplnit mezery ve fyzikálních vědomostech, nebo chtějí dále zvládnout hlubší studium fyzikálních problémů. Celková grafická úprava s množstvím názorných obrázků nakreslených s profesionální zručností příznivý dojem jen umocňuje.

Ilona Jandová

Kalendár M-F: október 1985

6. X. 1880 zomrel *Benjamin Peirce*, americký matematik, astronóm a filozof. Uverejnil systematickú štúdiu o hyperkomplexných číslach, rozvinul algebru logiky.

7. X. 1885 sa v Kodani narodil *Niels Bohr*, dánsky fyzik. Patrí k zakladateľom kvantovej teórie, prispel k teórii atomového jadra. V roku 1922 dostal Nobelovu cenu za zásluhy o výskum štruktúry atómu a jeho žiarenia.

14. X. 1840 sa narodil *Friedrich Kohlrausch*, nemecký fyzik. Pracoval v oblasti elektromagnetizmu a elektrochémie.

14. X. 1960 zomrel *Abram Fiodorovič Ioffe*, sovietsky fyzik. Študoval mechanické vlastnosti kryštálov, elektrické vlastnosti

dielektrík a polovodičov. Prispel k vytvoreniu sovietskej fyzikálnej školy.

19. X. 1910 sa v Láhauru narodil *Subrahmanyan Chandrasekhar*, indický astrofyzik žijúci v USA. Vypracoval teóriu štádií vývoja hviezd, riešil problémy stability, prúdenia a rotácie plazmatu veľkých rozmerov. V roku 1983 získal Nobelovu cenu za fyziku.

23. X. 1905 sa v Zürichu narodil *Felix Bloch*, americký fyzik. Zaoberá sa teóriou magnetizmu, kvantovou teóriou kryštálov. V roku 1952 dostal Nobelovu cenu za vypracovanie jemných a precíznych metód merania magnetického poľa v atómovom jadre.

24. X. 1940 zomrel *Pierre-Ernst Weiss*, francúzsky fyzik. Venoval sa teórii magnetizmu, predpokladal existenciu magnetónu.

24. X. 1895 sa narodil v Kišineve *Alexander Naumovič Frumkin*, sovietsky fyzik, chemik. Zaoberal sa elektrochemickou kinetikou a elektrokapilaritou.

26. X. 1945 zomrel *Alexej Nikolajevič Krylov*, sovietsky matematik a mechanik. Bol členom AV ZSSR, trikrát dostal Leninov rád. Matematickou analýzou prispel v oblasti konštrukcie lodí.

27. X. 1675 zomrel *Gides P. Roberval*, francúzsky matematik a fyzik. Bol členom Parížskej akadémie vied, profesor na Collège de France. Prispel k analýze nekonečne malých veličín, objavil pravidlo skladania síl.

29. X. 1888 sa narodil *Abram Fjodorovič Ioffe*, sovietsky fyzik, organizátor fyzikálneho výskumu v ZSSR.

30. X. 1920 sa v Moskve narodil *Naum Jakovlevič Vilenkin*, sovietsky matematik. Pracuje v oblasti všeobecnej algebry, topológie, funkcionálnej analýzy. Zaujíma sa o rozvoj matematického vzdelávania.

31. X. 1815 sa narodil v Ostenfelde *Karl T. W. Weierstrass*, nemecký matematik. Prispel k aritmetizácii matematiky, podal aritmetické definície iracionálnych čísel. Pracoval v oblasti matematickej analýzy, v teórii analytických funkcií, vo variačnom počte, v diferenciálnej geometrii a lineárnej algebre. Weierstrassove práce mali veľký význam pre rozvoj matematiky.

dj

Drobné poznatky veľkých

Leibniz: Kdykoľvek sa naučím niečo nové, hneď uvažujem či sa z toho nedalo niečo vytažiť pre život.

Poincaré: Logika je nástrojom dôkazu, len ona dáva istotu. Intuícia je nástrojom objavu.

Thom: Pravdivé nie je obmedzované nepravdivým, ale tým čo nič neznamená.

Bolzano: Byť šťastným a iných obšťastňovať, to je pravé poslanie človeka.

Bolyai: Blaho pre jednotlivcov možno priniesť a udržať len vtedy, ak sa dostane pre všetkých, a nikto nemôže byť dokonale šťastný, ak neuvidí zaistené blaho pre všetkých ostatných.

Lobačevskij: Žiť — to znamená pociťovať, tešiť sa zo života, mať stále zmysel pre nové, ktoré pripomína, že žijeme.

Whitehead: Protirečenie medzi všeobecným dobrom a individuálnym záujmom možno odstrániť iba vtedy, keď záujmom indivídua je všeobecné dobro.

Russel: Smutné je, že hlupáci sú tak sebaistí a ľudia múdri, tak plní pochybností.

Wiener: Samočinný počítač má práve takú hodnotu, akú kvalitu má človek, ktorý ho používa.

Kapica: Iba veľmi hlúpi ľudia nerozumejú žartom.

Einstein: Najviac nepochopiteľné na prírode je to, že ju môžeme chápať.

Landau: Ťažko sa niekto môže stať dobrým odborníkom vo vede alebo dobrým umelcom, ak to nie je vec jeho srdca.

Hamilton: Na svete nie je nic väčšieho než človek. V človeku nie je nič väčšieho než duch.

Feynman: Nikdy nemáme definitívne pravdu. Môžeme si byť istí iba tým, že sa mýlime.

Pytagoras: Mlč, alebo povedz niečo, čo je lepšie ako mlčať.

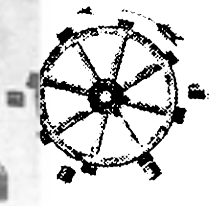
Dušan Jedinák

První elektromotory

Na základě Faradayem objevené elektromagnetické indukce byly konstruovány zdroje stejnosměrného a později i střídavého proudu, ale konstrukce elektromotorů se dlouho nedařila. Jeden z nejstarších provizorních motorů představuje elektromagnetický stroj na našem obrázku.

Předpověď, že z dynama by se mohl stát motor, vyslovil *Lenz*, sice už v r. 1838 a *Jacobi* v r. 1850 ale na realizaci myšlenky se muselo čekat až do r. 1873, kdy pomohla náhoda. *Gramme* a *Pacinotti* chtěli na vídeňské výstavě předvést dynamo, ale nemohli z exponátu dostat proud. Aby se přesvědčili, zda není porušeno vinutí, použili druhé dynamo, které právě běželo; spojili kartáčky obou dynam — a domněle vadné dynamo se rozeběhlo! Protože se to odehrálo na výstavě, způsobili senzaci a svým „vynálezem" vstoupili do dějin techniky.

Autorem dnes běžného jednofázového komutátorového elektromotoru se v r. 1884 stal německý elektrotechnik *Werner von Siemens* (čte se Zímens). Získal nejen slávu a velký majetek, ale i poctu — jeho jménem byla nazvána jednotka elektrické vodivosti siemens.



Významným objevem, který umožnil konstrukce nového typu motorů, byl objev točivého magnetického pole, jehož otáčky musí sledovat každý vodič otočně umístěný. Šlo o jednoduchý fyzikálně technický princip, který nezávisle objevili *Nicolo Tesla* a *Galileo Ferraris* v letech 1883—1888.

Vladimír Mališek

47 233

Čo je matematika?

Matematika je široká nádherná krajina, otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť.

W. Fuchs

Matematika je mapou skutočného sveta. Zaoberať sa matematikou vlastne znamená v zrkadle nášho myslenia pozorovať a študovať svet, v ktorom žijeme.

A. Rényi

Matematika je veľkým dobrodružstvom v myslení. V jej dejinách sa odzrkadľujú mnohé z najhlbších myšlienok nespočetných generácií ľudstva.

D. Struik

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 §, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 64, 1985/86
LISTOPAD

(3)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

MATEMATIKA

O odčítání v počítačích

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

V počítačích se odčítání převádí na sčítání. Na tom není nic pozoruhodného. Ze školy si přece pamatujeme: „Odečíst číslo znamená přičíst číslo, jež je k němu opačné." To však přináší další problém: „Vytvořit k číslu, které je menšitelem, číslo opačné." V počítačích se postupuje většinou zcela netradičně; roli čísel opačných zde přejímají tzv. doplňky. O jednom z nich se v Rozhledech psalo v článku [1]. Připomeňme si jeho definici.

Nechť přirozené číslo c je v desítkové soustavě k-ciferné ($k \geqq 1$) a dále nechť m je přirozené číslo, pro které platí $m \geqq k$. Potom číslo

$$d = \underbrace{99\ldots9}_{m \text{ devítek}} - c$$

nazýváme *m-místným devítkovým doplňkem čísla c.*

Ukažme si na příkladě užití devítkového doplňku při odčítání. Chceme vypočítat rozdíl 8457—3498. Předpokládejme, že největší číslo, které lze v počítači zobrazit, je 999 999. K menšiteli 3498 se vytvoří nejprve šestimístný devítkový doplněk:

$$\begin{array}{r} 999\,999 \\ -3\,498 \\ \hline 996\,501 \end{array} \qquad (1)$$

Tento doplněk se přičte k menšenci 8457, tj.

$$\begin{array}{r} 8\,457 \\ +996\,501 \\ \hline 1\,004\,958 \end{array}$$

V tomto výsledku však jednička „přetekla" do řádu miliónů, který v uvažovaném počítači není k dispozici. Zde dojde k tzv. *kruhovému přenosu:*

$$\begin{array}{r} 1\,004\,958 \\ \longrightarrow 1 \\ \hline 4\,959 \end{array}$$

Tabulka 1

d	BCD + 3				Aikenův kód 2	4	2	1	8	4	−2	−1
0	0	0	I	I	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	I	0	0	0	0	0	I	0	I	I	I
2	0	I	0	I	0	0	I	0	0	I	I	0
3	0	I	I	0	0	0	I	I	0	I	0	I
4	0	I	I	I	0	I	0	0	0	I	0	0
5	I	0	0	0	I	0	I	I	I	0	I	I
6	I	0	0	I	I	I	0	0	I	0	I	0
7	I	0	I	0	I	I	0	I	I	0	0	I
8	I	0	I	I	I	I	I	0	I	0	0	0
9	I	I	0	0	I	I	I	I	I	I	I	I

Při kruhovém přenosu se odečetlo číslo 1 000 000 a přičetlo číslo 1. Snadno se přesvědčíme, že

$$8457 - 3498 = 4959$$

Nejde však o náhodu. Předvedený postup vždy vede k určení rozdílu; důkaz není obtížný, lze jej také nalézt v článku [1].

Popišme si nyní, jak lze zcela mechanicky získat devítkový doplněk k danému přirozenému číslu zapsanému v desítkové soustavě. Prohlédněme si výpočet (1). Chceme určit šestimístný devítkový doplněk k číslu 3498. Nejprve je upravíme zcela formálně na šesticiferné, a to tak, že před ně napíšeme dvě nuly; dostaneme

003 498

V této uspořádané šestici cifer pak nahradíme každou číslici jejím doplňkem do devíti a obdržíme hledaný devítkový doplněk

996 501

V počítačích jsou čísla různým způsobem zakódována. Psalo se o tom v článku [2]. Prohlédněme si tabulku 1. Jsou v ní tři čtyřbitové kódy, u nichž je určení kódového slova devítkového doplňku číslice velmi snadné. Stačí kódové slovo příslušné číslice invertovat (tj. znaky I a O po řadě nahradit znaky O a I). Např. v Aikenově kódu má číslice 6 kódové slovo IIOO a číslice 3 kódové slovo OOII. Pro zajímavost uveďme, že kód BCD + 3 (stručně nazývaný + 3) je neváhový a další dva kódy v tab. 1 jsou váhové.

U váhového kódu, v němž se devítkové doplňky získávají invertováním, je zřejmě součet vah roven devíti. Tato podmínka je jen nutná, není však postačující (viz cv. 6).

Nabízí se otázka, kolik existuje čtyřbitových kódů, u nichž lze devítkové doplňky získávat invertováním kódových slov zobrazujících desítkové číslice.

Sestavujeme-li čtyřbitový kód, máme k dispozici celkem $2^4 = 16$ kódových slov složených ze znaků O a I. Prohlédneme-li si v tabulce 1 libovolný z kódů, snadno zjistíme, že je plně určen kódovými slovy pro číslice 0, 1, 2, 3, 4. Z nich pak po řadě vznikají invertováním kódová slova pro číslice 9, 8, 7, 6, 5. Žádná dvě z kódových slov pro číslice 0, 1, 2, 3, 4 nesmí tedy navzájem vzniknout invertováním.

Při konstrukci čtyřbitového kódu, v němž lze invertováním získávat devítkové doplňky číslic, se kódové slovo pro číslo 0 vybírá ze 16 možných slov, kódové slovo pro jedničku ze 14 zbývajících slov, kódové slovo pro dvojku ze 12 kódových slov, kódové slovo pro trojku z 10 kódových slov a pro čtyřku z 8 kódových slov. Tedy čtyřbitových kódů, u nichž lze devítkový doplněk určit invertováním, je celkem

$$16 \,.\, 14 \,.\, 12 \,.\, 10 \,.\, 8 = 2^5 \; \frac{8!}{3!} = 215\,040$$

Užívá-li se v počítači k zobrazení čísel dvojkové soustavy, pak roli devítkového doplňku hraje tzv. *jedničkový doplněk*. Ze zápisu přirozeného čísla ve dvojkové soustavě se jeho jedničkový doplněk získá také invertováním, tj. znaky I a O se po řadě nahrazují znaky O a I. Blíže o tom např. v knize [3] na str. 98.

Ukažme si odčítání s jedničkovým doplňkem na příkladě. Chceme vypočítat rozdíl

$$100\,110\,010 - 11\,010\,100$$

(čísla jsou zapsána ve dvojkové soustavě).

Předpokládejme, že největší číslo, které lze v počítači zobrazit, je 111 111 111. Vypočteme tedy devítimístný jedničkový doplněk čísla 11 010 100, tj. číslo 111 111 111 — 11 010 100, což snadno nalezneme invertováním kódového slova (zápisu) 011 010 100. Dostáváme tak

$$100\,101\,011$$

Hledaný rozdíl potom je

$$\begin{array}{r} 100\,110\,010 \\ +\; 100\,101\,011 \\ \hline 1\,001\,011\,101 \\ 1 \longrightarrow 1 \\ \hline 1\,011\,110 \end{array}$$

Tedy

$$100\,110\,010 - 11\,010\,100 = 1\,011\,110$$

Jako cvičení proveďte zkoušku; např. tak, že výpočet uvedený v předešlém řádku zapíšete v desítkové soustavě.

Cvičení

1. V článku [2] nalezněte tabulky kódu BCD a Grayova kódu a ověřte, že u nich nelze invertováním vytvářet devítkové doplňky.

2. a) Číslicím 0, 1, 2, 3, 4 přiřaďte po řadě kódová slova OOO, OOOI, OOIO, OIOO, IOOO. Dalším číslicím 5 až 9 přiřaďte kódová slova tak, aby vznikl kód, v němž lze devítkové doplňky získávat invertováním.

   b) Dokažte, že kód získaný řešením části a) není váhový.
3. Číslice 0, 1, 2, 3 zobrazte po řadě na kódová slova OOOO, OOOI, OOIO, OIOO. Dalším číslicím 5 až 9 přiřaďte kódová slova tak, aby vznikl váhový kód, v němž lze devítkové doplňky tvořit invertováním.
4. Zjistěte, kolik existuje čtyřbitových váhových kódů, jejichž váhy jsou přirozená čísla, přičemž devítkové doplňky lze tvořit invertováním.
5. Ve čtyřbitovém váhovém kódu, u něhož lze invertováním získávat devítkové doplňky, má číslice 5 kódové slovo IOOI. Nalezněte kódová slova pro ostatní číslice. (Řešení není jediné. Váhy mohou být i záporná celá čísla.)
6. Z Aikenova kódu vytvoříme jiný kód tak, že kódové slovo pro číslici 5 nahradíme čtveřicí OIOI. Vyšetřete, zda tak vznikne váhový kód a zda devítkové doplňky lze vytvářet invertováním.

Literatura:

[1] Mída J.: Devítkový doplněk, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 57, 1978/79, č. 3, s. 81—82

[2] Mída J.: Čtyřbitové kódy desítkových číslic, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 2, s. 51—54

[3] Bernard J.—M., Hugon J., Le Corvec R.: Od logických obvodů k mikroprocesorům, 1. díl. SNTL, Praha 1982

FYZIKA

Historie a současnost vývoje rastrovacích elektronových mikroskopů

RNDr. ROMAN KUBÍNEK, přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

1. ÚVOD

Rastrovací elektronová mikroskopie je moderní metoda, která má řadu předností. Vysoká rozlišovací schopnost, poměrně značná hloubka ostrosti a možnosti strukturní mikroanalýzy využitím spektroskopie charakteristického rentgenového záření řadí elektronový mikroskop mezi nejuniverzálnější přístroje používané v řadě oblastí vědeckého výzkumu.

Hlavními částmi rastrovacího elektronového mikroskopu je systém elektrostatických nebo elektromagnetických čoček, elektronová tryska jako zdroj elektronů, detektor elektronů, obrazovky pro pozorování a mikrofotografování vzorku a se vším spojená elektronická část přístroje. První úspěšné průmyslové zařízení, které obsahovalo všechny tyto konstrukční prvky, se objevilo v roce 1965 a byl to přístroj označený STEREOSCAN firmy Cambridge Scientific Instruments. Od prvních opublikovaných základů rastrovací elektronové mikroskopie uplynulo téměř půl století a za tu dobu vývoj v této oblasti zaznamenal rychlý vzestup.

Cílem tohoto článku je seznámit čtenáře s historickým vývojem přístroje a s vědci, kteří pro rozvoj rastrovací elektronové mikroskopie udělali nejvíce. Na závěr se seznámíme se současným stavem vývoje rastrovacích elektronových mikroskopů v ČSSR.

2. HISTORIE VÝVOJE RASTROVACÍCH ELEKTRONOVÝCH MIKROSKOPŮ

Vynález rastrovacího principu se připisuje německému fyzikovi *M. von Ardenne*, který jej publikoval v roce 1938. Rastrovací princip však byl použit pouze v prozařovací (transmisní) mikroskopii tenkých preparátů. Prakticky to znamenalo, že ke klasickému prozařovacímu elektronové-vému mikroskopu byly připojeny vychylovací cívky a tímto způsobem byl položen základ kombinace prozařovacího a rastrovacího elektronového mikroskopu *(STEM — Scanning Transmission Electron Microscope)*.

V následujících pracích byly detailně posouzeny jak teoretické základy, tak i praktické aspekty STEM. První mikrofotografií získanou v STEM byla fotografie krystalu ZnO. Pracovní urychlovací napětí bylo 25 kV, zvětšení 8000 × a rozlišovací schopnost se pohybovala v rozmezí od 50 do 100 nm. Přístroj měl dvě elektrostatické kondenzorové čočky, mezi nimiž byly umístěny vychylovací cívky. Součástí přístroje byla obrazovka, ještě však dostatečně nepřizpůsobená pro fotografování.

3. VÝVOJ RASTROVACÍCH ELEKTRONOVÝCH MIKROSKOPŮ V USA

První rastrovací elektronový mikroskop použitý pro pozorování tlustých vzorků popsal v roce 1942 *Zworykin* se svými spolupracovníky. Přístroj zkonstruovali na základě zjištění, že sekundární emise elektronů nese informaci o topografii předmětu. Dosažené rozlišení však bylo pouze 1 mikrometr. Tento výsledek byl zjevně nevyhovující, protože se předpokládalo získání lepšího rozlišení než u optických světelných mikroskopů (200 nm).

Zworykin se tedy rozhodl sestrojit dokonalejší přístroj s menším rozměrem stopy primárního elektronového svazku na předmětu a s lepším poměrem signálu k šumu. Kolektiv pracovníků v čele se Zworykinem vzal v úvahu všechny příspěvky získané ze vztahů mezi aberacemi elektromagnetických čoček, intenzitou emitovaného elektronového svazku a rozměrem jeho stopy na vzorku a získal správný vztah mezi stopou primárního elektronového svazku a intenzitou proudu svazku.

Následujícím krokem bylo použití fotonásobiče pro zesílení proudu sekundárních elektronů ze vzorku. Podle varianty Zworykina sekundární elektrony bombardovaly fluorescenční stínítko z vnější strany fotonásobiče. Výsledný fotoproud se odpovídajícím způsobem zesiloval a využíval pro formování obrazu. Konečná varianta přístroje měla tři elektrostatické čočky a vychylovací cívky umístěné mezi druhou a třetí čočkou. Na tomto prvním moderním rastrovacím elektronovém mikroskopu bylo předvedeno rozlišení na hranici 50 nm.

Druhá světová válka však pozastavila výzkumy v této oblasti, a proto Zworykin a jeho kolektiv nemohl definitivně dokončit svůj přístroj. Prakticky se skupina rozpadla a práce na této problematice byly v USA přerušeny až do roku 1960.

4. VÝVOJ RASTROVACÍCH ELEKTRONOVÝCH MIKROSKOPŮ PO DRUHÉ SVĚTOVÉ VÁLCE.

V roce 1948 se v Cambridge na univerzitě začal zabývat kontrukcí rastrovacích elektronových mikroskopů *Oatley*. Společně s *McMullanem* vytvořil v Cambridge první rastrovací elektronový mikroskop. Rozlišovací schopnost tohoto přístroje dosáhla v roce 1952 50 nm. Za nimi následoval *Smith*, který přišel na to, že kvalita obrazu může být zlepšena zpracováním signálu. Přínosem jeho práce je, že zavedl nelineární zpracování signálu, tzv. GAMA korekci, elektrostatické čočky zaměnil za elektromagnetické a zdokonalil systém řádkování zavedením dvojitého vychylování. Smith také zavedl jako první do rastrovacího mikroskopu stigmátor.

Dalším krokem bylo zdokonalení detektoru sekundárních elektronů popsaného Zworykinem. *Everhart* a *Thornley* spojili bezprostředně světlovodem scintilátor s čelem fotonásobiče. Toto zdokonalení vedlo ke zlepšení poměru signálu k šumu, což v tomto případě znamenalo možnost lepšího pozorování slabého kontrastu. Oatley a Everhart začali poprvé zkoumat tzv. napěťový kontrast.

Přístroj pro průmyslové využití byl zkonstruován *Stewartem* a jeho spolupracovníky z Cambridge Scientific Instruments Co. V následujícím desetiletí byl prodáván současně s rastrovacími elektronovými mikroskopy firem z USA, Francie, Holandska, Japonska a NSR, které se aktivně zabývaly rozpracováním nových, modernizovaných přístrojů.

Avšak ani v té době se přístroje ve své podstatě nelišily od přístroje popsaného v roce 1942.

Počátkem roku 1965 se v konstrukci rastrovacích elektronových mikroskopů zavedlo mnoho novinek. Jednou z nich byl *Broersem* vyvinutý zdroj elektronů tvořený katodou z hexaboridu lanthanu (LaB_6). Tento materiál má vyšší emisi elektronů při nižší teplotě než klasické wolframové vlákno. Maximální směrová proudová hustota nepřímo žhavené LaB_6-trysky se po čase snižuje, ale tryska může pracovat dál několik set hodin.

Zdroj elektronů s autoemisní tryskou, který byl poprvé použit v roce 1942, byl dokončen *Crewem*. Tryska tohoto typu představuje zdroj elektronů o vysoké směrové proudové hustotě, neboť všechny elektrony opouštějí katodu téměř stejnou rychlostí. Hlavním problémem při použití autoemisní trysky je požadavek vysokého vakua (10 nPa) a časová nestálost emise. Autoemisní trysky mají své uplatnění především v prozařovací rastrovací mikroskopii a rastrovací elektronové mikroskopii vysokých rozlišení.

Další zdokonalení bylo spjato se zlepšením kontrastu, což se nesnadně realizovalo v přístrojích ostatních typů. Například krystalografický kontrast, formující se na základě orientace krystalu a vzájemného působení jeho mřížky s primárním elektronovým svazkem, byl objeven *Coatesem* a rozpracován pracovníky Oxfordské univerzity. Magnetický kontrast v některých materiálech byl objeven *Bandurym, Joyem, Tixierem* a *Philibertem.*

5. NOVÉ METODY V RASTROVACÍ ELEKTRONOVÉ MIKROSKOPII

Zpracování signálu je možno provádět buď v číslicové nebo analogové formě. Byly zpracovány systémy pro uložení obrazu do paměti počítače. Tím je možné obraz zkoumat a zpracovávat aniž je na obrazovce mikroskopu. Podobná zařízení jsou užitečná a mohou zajistit takové zpracování obrazu pomocí malého samočinného počítače. Prakticky jsou minipočítače v součinnosti s rastrovacími elektronovými mikroskopy a upravují jejich práci.

Velká hloubka ostrosti zobrazení v rastrovacím elektronovém mikroskopu umožňuje získat mnoho charakteristik o topografii povrchu objemových předmětů. Jsou popsána zařízení pro přímá stereoskopická pozorování.

V posledních letech je většina rastrovacích elektronových mikroskopů doplněna detektorem rentgenova záření s disperzí podle energií nebo vlnových délek rtg. záření. Potom hovoříme o tzv. rentgenovém mikroanalyzátoru. Tímto způsobem je možno rychle a efektivně získat informace o topografii, krystalografii a chemickém složení zkoumaného vzorku.

6. SOUČASNÝ STAV VÝVOJE A VÝROBY RASTROVACÍCH ELEKTRONOVÝCH MIKROSKOPŮ V ČSSR

Vývojem rastrovacích elektronových mikroskopů v ČSSR se zabývá ÚPT ČSAV ve spolupráci s n. p. Tesla Brno, který také rastrovací mikroskopy vyrábí. V současné době vyrábí n. p. Tesla Brno tři typy rastrovacích elektronových mikroskopů. První BS 300 je určen pro široký okruh uživatelů, jde o mikroskop s klasickým vakuem, žhavenou katodou a velmi jednoduchou obsluhou. Druhý mikroskop BS 301 je v podstatě předchozí přístroj doplněný o některá zlepšení. Třetí mikroskop BS 350 je určen pro speciální použití na vysoce kvalifikovaných pracovištích. Mikroskop je ultravakuový a jako zdroje elektronů používá studenou autoemisní trysku. Všechny mikroskopy jsou dvoukanálové. Tím však podobnost přístrojů končí, protože mají celou řadu odlišností, danou různými principy emise elektronů a oborem použití.

Rastrovací elektronové mikroskopy BS 300 a BS 301 používají tříčočkový elektronoptický systém a posuvnou anodu pro zvýšení proudové hustoty při nízkých urychlovacích napětích. Urychlovací napětí je měnitelné od 1 do 50 kV po 1 kV. V mikroskopech je použit speciální scintilátor s velkým ziskem, který ve spojení se čtyřprokladovým snímkovým rozkladem umožňuje pozorování obrazu v reálném čase s poměrně dobrým rozlišením. V optimálních podmínkách bylo dosaženo rozlišení 7 mm. Mikroskopy pracují v režimu sekundárních, odražených a absorbovaných elektronů. Oba jsou také vybaveny vstupem pro připojení energiově disperzivního rentgenového mikroanalyzátoru.

Technickým zlepšením mikroskopu BS 301 proti BS 300 je to, že je vybaven zařízením pro přesné měření rozměrů objektů s přímým číslicovým displejem v mezích od 0,1 μm do 5 mm.

Rastrovací elektronový ultravakuový mikroskop BS 350 je určen pro špičková kvalifikovaná pracoviště. Umožňuje vysoké rozlišení na hranici 5 nm a mikroanalýzu pomocí Augerových elektronů a energiově disperzivního rentgenového mikroanalyzátoru. Minimální zvětšení mikroskopu BS 350 je 20$\times$ a maximální zvětšení není, podobně jako u předchozích typů, omezeno. Kromě režimu zobrazení v sekundárních, odražených a absorbovaných elektronech má ještě zobrazení v prošlých elektronech, případně mapování ve zvoleném prvku v režimu Augerových elektronů nebo rentgenového záření.

Rastrovací elektronové mikroskopy vyráběné v n. p. Tesla Brno jsou kvalitní a spolehlivé a mohou se srovnávat s mikroskopy vyráběnými zahraničními firmami.

7. ZÁVĚR

Cílem článku bylo podat přehled o vzniku a vývoji rastrovacích elektronových mikroskopů ve světě, doplněný o současný stav vývoje v ČSSR.

Rastrovacích elektronových mikroskopů se běžně využívá v metalografii, mineralogii, paleolontologii, polovodičové technice, makromolekulární chemii, biologických oborech a v řadě průmyslových oborů. Stále nové vědní i průmyslové obory objevují použitelnost rastrovací elektronové mikroskopie.

Kosmonautika dnes: od umělých družic po mimozemské civilizace

RNDr. RENÉ HUDEC, CSc., AÚ ČSAV Ondřejov

Mezi referáty přednesenými na 35. mezinárodním astronautickém kongresu — který uspořádala Mezinárodní astronautiská federace (IAF) v *Lausanne* ve Švýcarsku — byla i řada zajímavostí a novinek, přibližujících dnešní kosmonautiku i její plány do budoucna. Setkání odborníků z celého světa se zúčastnili i naši zástupci — připomeňme, že Československo je v IAF zastoupeno astronautickou komisí ČSAV. Tématem kongresu bylo heslo „Užitek z vesmíru pro celé lidstvo", které názorně dokumentuje dnešní trend kosmonautiky zaměřený na praktické cíle.

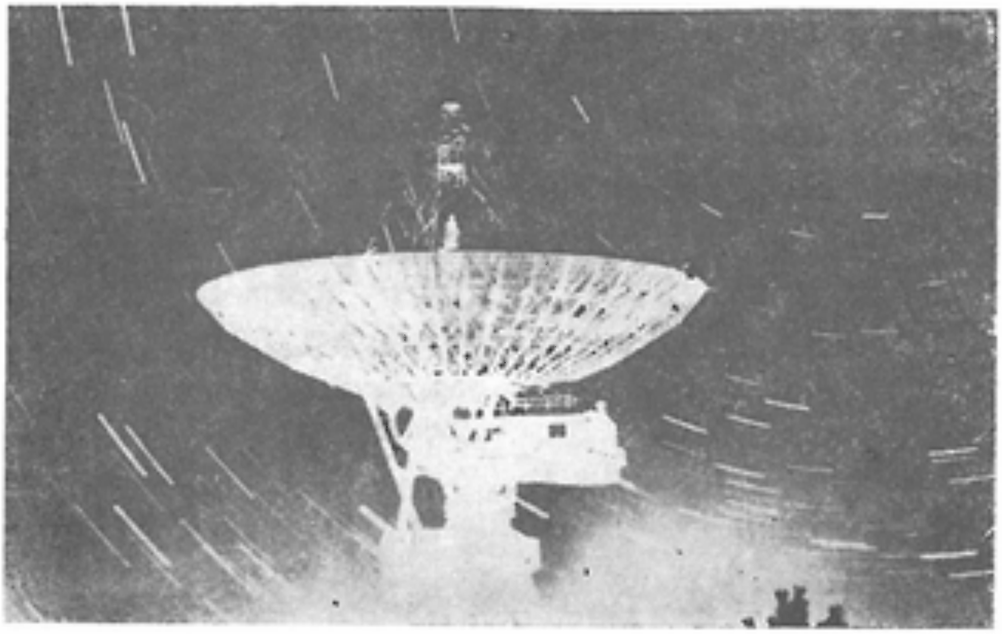
Velká pozornost byla například věnována kosmickým družicovým záchranným a navigačním systémům. Patří sem v prvé řadě sovětský KOSPAS, zajišťující rychlé záchranné akce pro posádky ztroskotaných lodí a letadel. Jak na kongresu uvedli sovětští specialisté z Ústředního námořního výzkumného ústavu v Leningradě a z všesvazové společnosti „Morsviazsputnik" v Moskvě, dosahuje aparatura soustavy KOSPAS, umístěná na palubách družic Kosmos 1383 a Kosmos 1447, při lokalizaci záchranné vysílací bóje přesnosti až 10 km při použití frekvence 121,5 MHz a až 3 km na frekvenci 406 MHz. Soustava je součástí mezinárodního záchranného kosmického systému KOSPAS-SARSAT: na jednání například hovořili Norové o jejich pozemní stanici tohoto systému, která od roku 1983 pracuje v *Tromsö*.

Sovětští vědci referovali i o dalších kosmických experimentech zaměřených na využití družic ve službách lidstvu. Příkladem je sovětská družice Kosmos 1500, která na rádiové vlně 3,2 cm sleduje polární oblasti naší planety. Toto radarové mapování umožňuje nejen rozlišit například pokryvy starého a nového ledu, zlomy a posuvy v ledovcové kůře, ale lze ho — jak ukázal pokus sovětských vědců v roce 1983 — velmi výhodně využít i k navigaci lodí plujících po arktických mořích.

Značný zájem již tradičně patřil výzkumu naší planetární soustavy. Francouzští vědci předložili zajímavý návrh sondy pro výzkum těsného okolí Slunce. Pro velký žár je tento prostor pozemským sondám nepřístupný a ani pozorování „zdálky“ ze zemského povrchu nepřinese nic zvláštního — je přezářen slunečním jasem. Jádrem unikátního návrhu je myšlenka umístit pozorovací sondu vybavenou potřebnými přístroji do stínu některého velkého tělesa. Vhodný by byl například Měsíc, který nemá atmosféru, a tudíž nerozptyluje sluneční záření. Zdá se, že by tímto způsobem mohla být v okolí Slunce detektována všechna tělesa s průměrem větším než asi 100 km. Připomeňme v této souvislosti již pozapomenutou hypotézu o planetě blízké Slunci, hypotetickém Vulkánu — podobné objekty, byť zřejmě menší, než se kdysi myslelo, by mohly být tímto způsobem nalezeny.

Na kongresu zazněl i zajímavý návrh na vyslání sondy k Marsu, která by odebrala vzorky prachu a dopravila by je k podrobnému rozboru zpět k Zemi. Pozoruhodné přitom je, že by sonda nepřistála přímo na povrchu planety, ale vyčkala by na oběžné dráze kolem Marsu, až dojde k vyvržení prachu do ovzduší. Víme totiž, že k takovýmto jevům může na Marsu — je tomu především v případě globálních prachových bouří — docházet. Při těchto bouřích je prach z povrchu vyzdvihován až do výšek 60 km! Sonda by měla odebrat vzorky z výšky asi 40 km. Celý let by byl dlouhodobý a trval by asi 3 roky, protože by si sonda u Marsu musela počkat na nejvhodnější okamžik, až bude v ovzduší dostatečné množství prachu.

A když už jsme u Marsu, nemůžeme nepřipomenout příspěvek známého odborníka na kosmonautiku *prof. H. Ruppeho z Mnichova*, který se zabýval možnostmi realizace pilotovaného letu k této planetě. Podobné rozbory sice proběhly již před více než 20 lety v USA, ale nevedly prakticky k ničemu. Prof. Ruppe proto navrhuje velmi ekonomickou variantu, jejíž cena by neměla přesáhnout asi 15 miliard dolarů roku 1984 (je to méně než polovina výdajů na známý projekt Apollo). Nízkou cenu by umožnilo maximální využití již vyvinutých kosmických systémů: tak například čtyřčlenná posádka by cestu strávila ve dvou modulech převzatých z již hotové orbitální laboratoře Spacelab a návrat na zemský povrch by proběhl v kabině analogické návratové sekci již nepoužívané kosmické lodi Apollo. Podobně by bylo využito i ostatních dnes dostupných technologií. Let by trval asi 1000 dní, z toho by kosmonauté strávili asi 550 dní u Marsu a zbytek pak na cestě tam a zpět. Na povrch Marsu by se vydali jen dva kosmonauté, zato však vybaveni pohyblivou laboratoří. Expedice by mohla být zahájena například v listopadu 1996 s návratem zpět v srpnu 1999. A rozhodně by nebyla žádnou snadnou procházkou — vždyť například startovní hmotnost kosmické lodi by činila 2000 tun!



Ani nejnovější výsledky hledání umělých signálů v rádiové oblasti nepřinesly žádné pozitivní závěry. *Foto autor.*

Hovořilo se opět i o našem Měsíci, tentokrát s výhledy do vzdálené budoucnosti — o obydlených základnách na jeho povrchu. Dnes se zdá, že k jejich realizaci jednou jistě dojde, i když zatím není jasné kdy. Kromě vědeckého výzkumu by tyto základny mohly sloužit i pro využití měsíčních zdrojů pro veškeré kosmické akce v prostoru Země—Měsíc: například k výrobě pohonných hmot, materiálů a energie. Naši *M. a L. Pospíšilovi* předložili zase návrh na využití kosmické sluneční elektrárny pro zásobování měsíční základny elektrickou energií.

Zvláštní sympozium bylo na kongresu věnováno problematice spojení s mimozemskými civilizacemi. I v této oblasti zazněla řada pozoruhodných příspěvků. Maďarští vědci se například pokusili o optimalizaci strategie ve hledání mimozemských civilizací v naší Galaxii. Podle nich je největší pravděpodobnost života v naší galaxii v tzv. „korotačním pásu", v němž je i naše Slunce. Právě do něho by mělo být hledání soustředěno. Jinak však ani letošní setkání nepřineslo žádný příznivý obrat, pokud se týče hledání umělých signálů v rádiové oblasti. I další pokusy totiž skončily negativně. Nicméně byli účastníci seznámeni s dalšími navrhovanými experimenty: je totiž zřejmé, že jde o oblast, v níž teprve desítky — a možná i stovky — let vytrvalé, doslova mravenčí práce mohou přinést úspěch. I když ani to není zaručeno. Ačkoliv se většina vědců dnes kloní k názoru, že ve vesmíru sami nejsme (vždyť pozorovatelný vesmír obsahuje více než 40 triliónů hvězd), zdá se na druhé straně, že naše vlastní galaxie Mléčná draha příliš „hustě" obydlena není. A je nepochybné, že s velmi vzdálenými civilizacemi by jakákoli komunikace byla velice obtížná.

Slávna, obdivovaná, odsuzovaná...

(S. V. Kovalevská 1850—1891)

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topoľčany

Koľko je žien, ktoré vynikajú v dejinách matematiky? K tým, ktoré presvedčili svet významných matematikov svojimi schopnosťami aj vedeckými výsledkami, patrí *Sofia Vasiljevna Kovalevská,* rodným menom *Korvin-Krjukovská.*

Vzťah a schopnosti pre matematiku vznikajú a kryštalizujú za rôznych okolností. Mladučkú Sofiu ovplivnili „matematické" besedy so strýkom: „Pôsobili na moju fantáziu a vyvolávali vo mne zbožnú úctu k matematike ako vede najvyššej a tajomnej, ktorá odhaľuje pred tými, kto sú v nej zasvätení, svet nový a divuplný . . ." Obľúbený strýko vedel rozprávať nielen rozprávky, ale ukázal záhady šachovej hry, načrtol nové hospodárske i sociálne projekty spoločnosti a vzácne hodnoty ľudskosti. Dokázal pútavo hovoriť o kvadratúre kruhu a pozorne vysvetliť podstatu asymptoty. Na rozhovory s ním Sofia nikdy nezabudla.

Sofia Vasiljevna Kovalevská pochádza z rodiny cárskeho generála delostrelectva *Vasila Vasiljeviča Korvin-Krjukovského.* Narodila sa 15. januára 1850 v Moskve (podľa starého ruského kalendára to bolo 3. 1.). Skoro po jej narodení bol otec prevelený do služby v Kaluge. Od roku 1858 žila rodina na otcovom panstve Polibino vo Vitebskej gubernii. Vzdelaná a hudobne založená matka ponechala výchovu detí, Sofia mala ešte staršiu sestru a mladšieho brata, vychovávateľke a domácim učiteľom. Od nich dostala Sofia na svou dobu veľmi dobré vzdelanie.

Prvý domáci učiteľ vo svojich spomienkach, takto charakterizoval stretnutie so „Sofou“: „. . . milé, osemročné dievčatko, silnejšej postavičky, pôvabné na pohľad, v jej hnedých očkách žiaril vnímavý rozum a duchovná dobrota“. Raz sa spýtal otec Sofii, či má rada aritmetiku. „Nie, otec,“ dostal odpoveď. Za štyri mesiace jej odpoveď na tú istú otázku už bola iná: „Áno, otecko, rada sa zaoberám aritmetikou, pôsobí mi potešenie.“ Po troch-štyroch rokoch štúdia elementárnej aritmetiky a geometrie Sofia veľmi zaujímavo a netradične odvodila vzťah medzi obvodom kruhu a jeho priemerom. Pochvala od otca bola vtedy, aj vždy potom, pre Sofiu veľkou odmenou a novým podnetom pre štúdium matematiky.

Rodinu Krjukovských navštevovali významní a vzdelaní ľudia. Medzi nimi aj prof. matematiky *P. L. Lavrov* a učiteľ fyziky *N. N. Tyrtov*. Štrnásťročná Sofia začala samostatne čítať učebnicu „Elementárne základy fyziky“, ktorú venoval jej otcovi Tyrtov. V knižke sa stretla s neznámym pojmom sinus. Úvahou a premýšľaním pochopila jeho význam a zmysel ostatných goniometrických funkcií. Odhalila samostatne jednoduché základné vzťahy v trigonometrii. Získala tým nielen prezývku „nový Pascal“, ale aj prvé doporučenie pre ďalšie štúdium vyššej matematiky.

Na jeseň roku 1867 přišla Sofia s matkou do Petrohradu. Chcela tu uplatnit svoje nadanie pre jazyky a matematiku. Študovala súkromne matematiku a fyziku u A. N. Strannoljubského, človeka s čestným, pevným a hlbokým presvedčením, ktorý nepoznal kompromis so svojim svedomím. Rozumové schopnosti, široke vzdelanie, neobvyklá humánnosť a pôvab, ktoré vyžarovali z jeho osobnosti, podnecovali sympatie i úctu jeho žiakov, kolegov, známych. Sofia bola ním nadšená, on bol s ňou spokojný. Už prvá hodina základov diferenciálneho počtu bola zaujímavá. Sofia príliš rýchlo chápala základné pojmy — limitu a deriváciu. Keď to mala vysvetliť, spomenula si na litografované Ostrogradského prednášky o diferenciálnom a integrálnom počte, ktorými bola istý čas polepená stena v jej izbe v Polibine. Často sledovala tajomné formule a príslušný text. Vtlačil sa jej do pamäti tak silno, že pri novom stretnutí si okamžite naň spomenula ako na známu vec.

Mladá Sofia Vasiljevna túžila po všestrannom vzdelani a dokonalejšom poznaní mnohých vedných disciplín. Zaujímala ju fyziológia, anatómia, fyzika, chémia i praktická medicína. Keď sa má rozhodnúť pre užšiu špecializáciu, víťazí matematika. Na ceste k systematickému univerzitnému vzdelaniu stojí neprekonateľná prekážka. Vo vtedajšom Rusku ženy na univerzite nesmeli študovať. Odstrániť prílišnú rodinnú starostlivosť a získať volnosť pre cestu na štúdia do zahraničia bolo možné dosiahnuť fiktívnym sobášom s mužom, ktorý chápal vedecké ambície mladej ženy. Túto cestu, v tej dobe uplatňovanú, si zvolila aj Sofia.

Osemnásťročná Sofia spoznala v Petrohrade o sedem rokov staršieho *V O. Kovalevského* mladého muža so záujmom o prírodovedu; v tej dobe nakladateľa, neskôr paleontológa. Vladimír Kovalevský písal svojmu bratovi o „vrabčekovi", tak vtedy prezývali Sofiu: „Pracuje ako mravček od rána do noci, matematika — sférická trogonometria, integrály, a pritom všetkom je živá, milá a vôbec veľmi pekná." Vzájomné pochopenie túžby po vzdelaní ich spojilo. Po fiktívnom sobáši 15. IX. 1868 v Polibine, od roku 1873 v skutočnom spoločnom živote.

Na jar roku 1869 odchádza S. V Kovalevská do Heidelbergu. Tu počúva tri semestre prednášky z matematiky, fyziky, fyziológie. Spoznáva *Königsbergera*, *Dubois-Reymonta*, *Kirchhoffa*, *Helmholtza*. Kvôli slávnemu *K. Weierstrassovi* odchádza do Berlína. Ani tu však nebol povolený prístup žien na univerzitu. Weierstrass oceňuje talent Kovalevskej aj tým, že tentoraz zabudol na svoje predsudky voči vysokoškolskému štúdiu žien a ponúkol jej súkromné štúdium. Štyri roky matematického a fyzikálneho vzdelávenia boli zavŕšené Weierstrassovým návrhom na doktorát na univerzite v Göttingen za tri významné práce S. V. Kovalevskej. V jednej je nový dôkaz Cauchy-Kovalevskej vety, druhá sa zaoberá otázkou formy Saturnových prstencov a tretia patrí do oblasti integrálneho počtu. V roku 1874 získala Sofia Kovalevská titul doktora filozofie „s najvyššou pochvalou"

Vtedy už Kovalevská vie, že „mnohí, ktorí nikdy nemali možnosť poznať hlbšie matematiku, si ju predstavujú ako suchú vedu. V skutočnosti je to veda, ktorá vyžaduje najviac fantázie a má úplnú pravdu jeden z najväčších matematikov nášho storočia, že nemožno byť matematikom a nebyť súčasne básnikom.". Návrat do Petrohradu jej neumožnil rozvíjať nadobudnuté vedomosti. Sofia nezískala vhodné „matematické" miesto, a tak musela ukázať svoje schopnosti literárne a publicistické. Spolupracuje v novinách, vydává vedecké črty i divadelné referáty. V literárnych a vedeckých kruhoch spoznáva *Mendelejeva*, *Sečenova*, *Butlerova*, *Čebyševa*, *Stoletova*, *Turgeneva*, *Dostojevského*. Šesť rokov ustupuje jej obľúbená matematika do pozadia.

V roku 1878 sa Kovalevským narodila dcéra, v roku 1880 sa sťahujú do Moskvy. Ani tu nezíska Kovalevská miesto na univerzite. Na dva roky odchádza do Berlína a Paríža. Zoznamuje sa s *Hermitom*, *Poincaré*, *Picardom*. V apríli roku 1883 jej tragicky zomiera manžel, začínajú aj finančné ťažkosti. Na pozvanie švédskeho matematika *G. Mittag-Lefflera* odchádza Sofia Kovalevská v novembri 1883 na štockholmskú univerzitu. Vtedajšie noviny uvádzajú: „. princezna vedy, pani Kovalevská, poctila naše mesto svojou návštevou a bude prvou ženskou súkromnou docentkou v celom Švédsku." Od roku 1884 získava na päť rokov miesto riadnej vysokoškolskej profesorky. Pracuje vedecky i pedagogicky. Dokazuje, že žena sa môže stať vedeckou pracovníčkou. Zlé jazyky nežičlivcov ohovárajú aj tu. Napr. švédsky spisovateľ a dramatik *A. Strindberg* sa na adresu S. Kovalevskej vyjadril: „Žena, profesorka matematiky, je jav škodlivý, neužitočný a nevhodný." Sofia Vasiljevna Kovalevská vyvráti nepodložené úsudky svojimi vedeckými i pedagogickými úspechmi. V roku 1888 získala Bordinovu cenu za prácu „O otáčaní tuhého telesa okolo pevného bodu." Anonymnú súťaž parížskej Akadémie vied vyhrala pod heslom „Hovor, čo vieš, rob, čo je tvoja povinnosť, staň sa, čo sa má stať". O rok na to dostáva za ďalšiu prácu cenu Švédskej akadémie.

Na stockholmskej univerzite prednáša prvá profesorka matematiky v Európe teóriu funkcií komplexnej premennej, teóriu diferenciálnych rovníc, rovnice matematickej fyziky, analytickú mechaniku. Vedeckými prácami potvrzuje S. Kovalevská svoje slová: „Medzi všetkými vedami, ktoré odkrývajú ľudstvu cestu k poznaniu zákonov prírody, najmohutnejšia a najvznešenejšia je matematika" Životom a pedagogickými schopnosťami dokazuje: „Cítim, že som predurčená k tomu, aby som slúžila pravde — vede a aby som prerážala nové cesty pre ženy, lebo to znamená slúžiť spravodlivosti . funkcia profesorky má už sama v sebe niečo ušľachtilé, čo ma vždy lákalo."

Sofia Kovalevská milovala matematickú prácu, žila vyučovaním matematiky: „Hlavným mojim cieľom je služba veci, ktorá mi je veľmi drahá, a zaistenie možnosti venovať sa práci v prostrediu ľudí, ktorí robia rovnakú prácu ako ja." Jej energický pohľad odzrkadľoval silu mysle. Nemala rada neúspechy, vedela cieľavedome ísť za vytýčenou métou. Nepokojná povaha Sofie túžila vždy po činorodosti a príliš dlhý čas ticha a nečinnosti ju znervózňoval. Sústredenosť na prácu ju vedela odtrhnúť od všedného života. Za písacím stolom pri premýšľaní a riešení úloh vedela presedieť veľa hodín. Keď dospela k novým výsledkom, často hovorievala: „Moja hlava je teraz taká preplnená matematikou, že nemôžem ani myslieť, ani hovoriť o niečom inom . . ." Rozumové dôvody mali v jej argumentácii vždy prednosť. Sofia Kovalevská mala hlbokú vedeckú predstavivosť a schopnosť rýchlo sa zorientovať aj v novej neznámej oblasti a hneď rozlíšiť podstatné od vedľajšieho. Svojou skromnosťou vzbudzovať oduševnenie až nadšenie jej osobnosť skoro každého priťahovala. Túžila po úprimnej ľudskej láske a chcela byť v jej strede. Úctu a priateľstvo hodnotila v liste Mittag-Leffletovi slovami: „. . . som dosť ľahostajná k poctám a vonkajším prejavom úcty, ktoré dostávam. Ale tým citlivejšia som voči dôkazom pozornosti od svojich priateľov."

Profesorka Kovalevská prednáša pôsobivo, s citom pre individualitu poslucháčov. Podnecuje schopnosti i záujem o matematiku a jej aplikácie. Päťročné účinkovanie na univerzite malo skončiť v roku 1889. Populárna „Soňa“ túži po domove. V cárskom Rusku sa opäť nenašlo „vhodné miesto“. Kovalevská zostáva naďalej vo Švédsku. Koncom roku 1890 cez zimné prázdniny cestuje Sofia Vasiljevna na juh Francúzska. Pri návrate do Švédska po ceste prechladla. Zápal pľúc už neprežila. Zomrela 10. II. 1891 (podľa starého ruského kalendára 29. I.) v Štockholme. Napriek nepriazni osudu, s ktorou vždy bojovala s neobvyklou statočnosťou, jej posledné slová boli: „Príliš veľa šťastia.“

Najväčšie ocenenie, ktoré sa za života S. V. Kovalevskej v Rusku dostalo, je jej zvolenie za dopisujúceho člena Akadémie vied v Petrohrade. V roku 1889 podali návrh *P. L. Čebyšev* a *V. Ja. Buňakovský*. Sofia Kovalevská mohla povedať: „Predsa sa len ruská žena dostala do Akademie vied.“ Svojím nadaním, vedomosťami i chrakterom navždy zostane S. V. Kovalevská ozdobou ruskej zeme.

Vo Švédsku napísala Sofia Kovalevská okrem svojich vedeckých prác aj diela literárne. Napr. poviedku „Nihilistka“, drámu „Boj za šťastie“ i rodinnú kroniku „Spomienky na detstvo“. Zaujímala sa o spoločenské vedy i dejiny. Vedela plynule rozprávať piatimi jazykmi. Nežila životom odtrhnutým od spoločenského diania. Komunikovala s významnými osobnosťami i prostými ľuďmi. „So širokým vzdelaním v rôznych odboroch ľudského poznania spájala presnú, živú inteligenciu, ktorá sa sympaticky prikláňala k tomu osobnému, čo má každý z nás . pod vplyvom záujmu, ktorý vzbudzovala, delili sa s ňou o svoje nádeje i pochybnosti v odbore vedeckom i v praktickej činnosti, zdôverovali jej svoje túžby po šťastí i svoje mútky, spôsobene sklamaním srdca.“ (Mittag-Leffler o S. V. Kovalevskej.)

Sofia Vasiljevna Kovalevská vynikala krásou ,matematickou erudíciou i literárnym nadaním. Vytvorila znamenité štúdie v teórii diferenciálnych rovníc a analytickej mechanike (9 vedeckých prác). Prekonávala najrôznejšie prekážky a predsudky svojej doby. Láskou k matematike a k ľuďom utvorila novú „verejnú mienku“ o ženách krásnych a múdrych, matkach i matematičkách. Viera v pokrokové vedecké i spoločenské ideály, usilovnosť a túžba po vedeckom poznaní jej pomohla získať právo sebauplatnenia v oblastiach dovtedy pre ženy nedostupných. A tak do neveľkej postupnosti významných ženských matematických osobností, napr. *Hypatia* alexandrijská, *Mária Agnesi* (1718—1799), *S. Germainová* (1776—1831) pribudlo navždy meno S. V. Kovalevskej.

„Len čo sa myseľ unaví čisto abstraktnými špekuláciami, ihneď ma vlečie k pozorovaniu života a k rozprávaniu; a naopak, inokedy zasa všetko v živote sa zdá byť bezvýznamné, nezaujímavé — a iba večné nezlomné zákony ma pútajú k sebe.“ Myšlienka S. V. Kovalevskej patrí nielen k jej charakteristike, ale je aj zaujímavým vyjadrením spoločného pôsobenia vedy a života, zjednotením ľudskej túžby po poznaní, tvorivosti, zmysluplnosti.

Literatúra:
Borodin, A. I.—Bugaj, S. S.: Biografičeskij slovar dejatelej v oblasti matematiki. Kiev, Radjanska škola 1979.
Dušek, F.: Významné matematičky. MFvŠ roč. 8/77—78, č. 4.
Kovalevská, S. V.: Vzpomínky na dětství. SNKL, Praha 1963.
Kovalevská, S. V.: Vospominanija i pisma. Moskva, Izdateľstvo akademii nauk ZSSR 1951.
Masopust. F.: Sofia Vasiljevna Kovalevská. PMFA, roč. XX/1975.
Polubarinová—Kočinová, P. J.: Život a působení S. V. Kovalevské. Praha, Osvěta 1951.
Polubarinova—Kočina, P. J.: Sofja Vasiljevna Kovalevskaja, jejo žizň i dejatelnosť. Moskva, Gotechizdat 1955.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Slovní algebrogramy

V minulém čísle Rozhledů jste mohli řešit jednoduché algebrogramy, jejichž řádky obsahovaly skupiny písmen, ale tyto skupiny netvořily slova žádného přirozeného jazyka. V následující sadě algebrogramů je tento typ zastoupen prvním z nich, další algebrogramy obsahují slova, ba celé věty s matematickým obsahem. Pokuste se nalézt aspoň jedno řešení každého algebrogramu.

a)
$$\begin{array}{r} \text{ABCDE} \\ \text{BCDE} \\ \text{CDE} \\ \text{DE} \\ \text{E} \\ \hline \text{AAAAA} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \text{DVĚ} \\ \text{DVĚ} \\ \text{DVĚ} \\ \text{ČTYŘI} \\ \hline \text{DESET} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \text{DESET} \\ \text{KRÁT} \\ \text{DESET} \\ \text{KRÁT} \\ \text{DESET} \\ \hline \text{TISÍC} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} \text{JEDNA} \\ \text{A} \\ \text{DVĚ} \\ \text{A} \\ \text{SEDM} \\ \text{JE} \\ \hline \text{DESET} \end{array}$$

Jarmila Pěnčíková

Řešení algebrogramů

a) (A, B, C, D, E) = (5, 2, 4, 8, 7),
b) Čísla 365, 29714, 30809.
c) Čísla 13934, 2584, 46970.
d) Čísla 63782, 2, 710, 9375, 63, 73934.

Deset geometrických úloh pro nejmladší čtenáře

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Zahraniční časopisy, které mají obdobné poslání jako naše Rozhledy, přinášejí v každém ročníku řadu úloh. Vedle obtížnějších soutěžních úloh v nich najdeme také mnoho úloh, které jsou podstatně jednodušší. Otiskujeme deset takových úloh vybraných z různých čísel jugoslávského časopisu *Matematičko-fizički list* (z let 1982 až 1984). K jejich rozřešení stačí znalosti učiva geometrie, které se probírá na naší základní škole. V první části uvádíme texty úloh, ve druhé jejich stručné řešení, které by si měl čtenář přečíst, až sám úlohy rozřeší.

I

1. Délky stran rovnoramenného trojúhelníku jsou 4 a 9; jaká je délka třetí strany?

2. Bez jakýchkoli výpočtů zjistěte, který z pravoúhelníků vepsaných do kružnice má největší obsah.

3. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník; středy jeho stran AB, BC, CD, DA jsou po řadě body S_1, S_2, S_3, S_4. Potom úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ jsou vzájemně kolmé, právě když úsečky S_1S_3, S_2S_4 jsou shodné. Dokažte.

4. Délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku jsou a, b. Poloměr kružnice, která je trojúhelníku opsána, je r; poloměr kružnice trojúhelníku vepsané je ϱ. Dokažte, že je $r + \varrho = \frac{1}{2}(a + b)$

5. Nechť v trojúhelníku ABC je $BC > AC$; střed strany AB označme S. Kružnice vepsaná trojúhelníku ASC se dotýká úsečky CS v bodu D, kružnice vepsaná trojúhelníku BSC se dotýká úsečky CS v bodu E. Dokažte, že je $CD < CE$ a vypočtěte vzdálenost bodů D, E.

6. Podstava jehlanu $VABCD$ je obdélník $ABCD$; pata P výšky jehlanu leží uvnitř tohoto obdélníku. Dokažte, že platí:
$$|VA|^2 + |VC|^2 = |VB|^2 + |VD|^2.$$

7. Uvnitř čtverce $ABCD$ leží bod M, jehož vzdálenosti od vrcholů A, B, C jsou po řadě 7, 13, 17. Vypočtěte obsah tohoto čtverce.

8. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB má úhel při základně AB velikosti 50°; uvnitř trojúhelníku ABC leží bod P tak, že úhel PBA má velikost 30° a úhel PAB má velikost 10°. Vypočtěte velikost úhlu APC.

9. Odvěsna AB pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou AC leží v rovině ϱ; vrchol C v rovině neleží. Pravoúhlý

průmět vrcholu C do roviny ϱ je bod C_1 a úhel CBC_1 má velikost 45 °. Jakou velikost má úhel CAC_1?

10. Je dána přímka p a dva různé body A, B ležící uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou p. Sestrojte na přímce p bod X tak, aby úhel AXM byl dvakrát větší než úhel BXN; přitom bod X leží mezi body M, N.

II

1. Součet kterýchkoli dvou stran libovolného trojúhelníku je větší než strana třetí. Proto třetí strana daného trojúhelníku nemůže mít délku čtyři ($4 + 4 < 9$); má tedy délku 9.

2. Úhlopříčky pravoúhelníku (tj. obdélníku nebo čtverce) $ABCD$, který je vepsán do kružnice, procházejí jejím středem S (obrázek si čtenář nakreslí sám). Trojúhelníky ABC, CDA jsou shodné (podle věty *sss*) a pravoúhlé (věta Thaletova). Proto obsah pravoúhelníku $ABCD$ je největší, právě když je největší obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AC. To nastane, právě když výška k přeponě AC je nejdelší, tj. právě když tato výška prochází středem S přepony AC. To je právě tehdy, je-li pravoúhlý trojúhelník ABC rovnoramenný, čili je-li pravoúhelník $ABCD$ čtverec.

3. Úsečka S_1S_2 je střední příčka trojúhelníku ABC a úsečka S_3S_4 je střední příčka trojúhelníku ACD (obrázek si čtenář nakreslí sám). Z toho plyne, že je

$$S_1S_2 \parallel AC \parallel S_3S_4 \;; \tag{1}$$

obdobně zjistíme, že je

$$S_2S_3 \parallel BD \parallel S_4S_1 \tag{2}$$

Z řádků (1) a (2) plyne, že body S_1, S_2, S_3, S_4 jsou vrcholy rovnoběžníku $S_1S_2S_3S_4$.

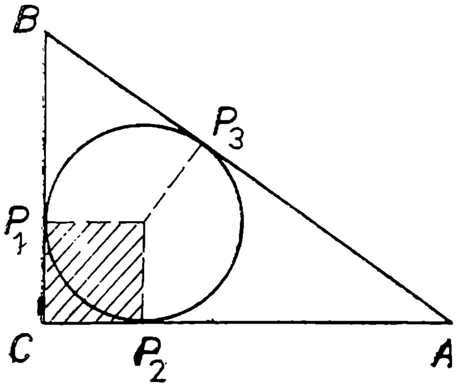
Je-li $AC \perp BD$, pak z řádků (1) a (2) plyne, že je $S_1S_2 \perp S_2S_3$. Rovnoběžník $S_1S_2S_3S_4$ je tedy pravoúhelník s úhlopříčkami S_1S_3, S_2S_4; proto jsou úsečky S_1S_2, S_2S_4 shodné. Obráceně, jsou-li tyto úsečky shodné, je rovnoběžník $S_1S_2S_3S_4$ pravoúhelník, takže je $S_1S_2 \perp S_2S_3$; z řádků (1) a (2) potom plyne, že je $AC \perp BD$.

4. Kružnice, která je trojúhelníku ABC vepsána, se dotýká jeho stran BC, CA, AB po řadě v bodech P_1, P_2, P_3, které leží uvnitř těchto stran (obr. 1). Z toho a ze známé věty o tečnách vedených z bodu ke kružnici plyne, že platí:

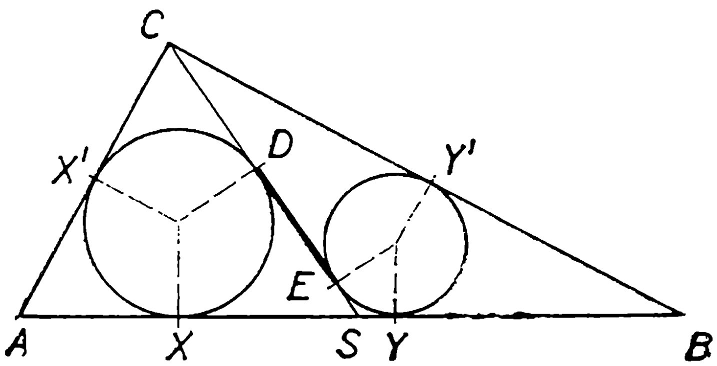
$$|AP_3| = |AP_2| = |AC| - |CP_2| = b - \varrho\,,$$
$$|BP_3| = |BP_1| = |BC| - |CP_1| = a - \varrho\,.$$

Je tedy $|AP_3| + |BP_3| = a + b - 2\varrho$; avšak zároveň je $|AP_3| + |BP_3| = |AB| = 2r$. Proto je $a + b = 2(\varrho + r)$.

5. Kružnice, která je vepsána trojúhelníku ASC, se dotýká jeho stran AS, SC, CA po řadě v bodech X, D, X' ležících uvnitř těchto stran (obr.



Obr. 1



Obr. 2

2). Podle věty o tečnách vedených z bodu ke kružnici je $AX = AX'$, $SX = SD$, $CD = CX'$; z toho plyne, že je

$$2|AX| + 2|SX| + 2|CD| = |AX| + |AX'| + |SX| + |SD| + |CD| + |CX'| \qquad (1)$$

Protože je $|AX| + |SX| = |AS| = \frac{c}{2}$, $|AX'| + |CX'| = |AC| = b$, $|SD| + |CD| = |CS| = t$, je podle rovnosti (1)

$$2(|AX| + |SX|) + 2|CD| = b + t + \frac{c}{2},$$

$$2|CD| = b + t - \frac{c}{2} \qquad (2)$$

Obdobně zjistíme, že je

$$2|CE| = a + t - \frac{c}{2}, \qquad (3)$$

kde $a = |BC|$. Podle předpokladu je $a > b$; z rovností (2) a (3) plyne, že je $|CE| > |CD|$. Zároveň je patrno, že je

$$|CE| - |CD| = \frac{1}{2}(a - b)$$

6. Je-li $v = |VP|$, je podle Pythagorovy věty

$$|VA|^2 = |AP|^2 + v^2, \quad |VB|^2 = |BP|^2 + v^2, \quad |VC|^2 = |CP|^2 + v^2, \quad |VD|^2 = |DP|^2 + v^2$$

Z toho plyne, že je

$$|VA|^2 + |VC|^2 = |AP|^2 + |CP|^2 + 2v^2, \qquad (1)$$

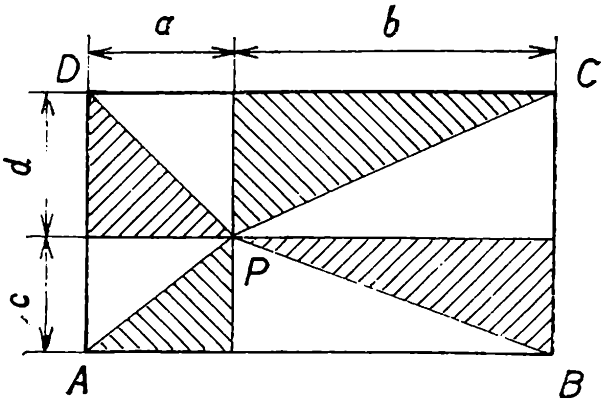
$$|VB|^2 + |VD|^2 = |BP|^2 + |DP|^2 + 2v^2 \qquad (2)$$

Veďme bodem P rovnoběžky s přímkami AB, BC (obr. 3). Potom z vyčárkovaných pravoúhlých trojúhelníků na obr. 3 plyne, že platí:

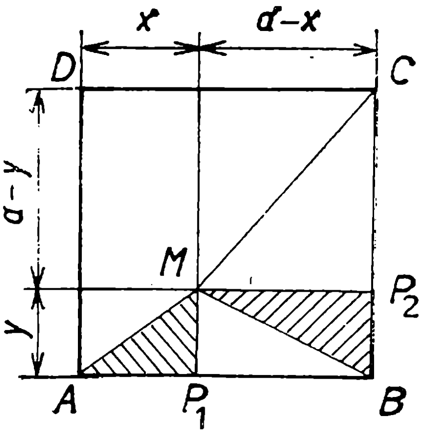
$$|AP|^2 + |CP|^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2,$$

$$|BP|^2 + |DP|^2 = b^2 + c^2 + a^2 + d^2$$

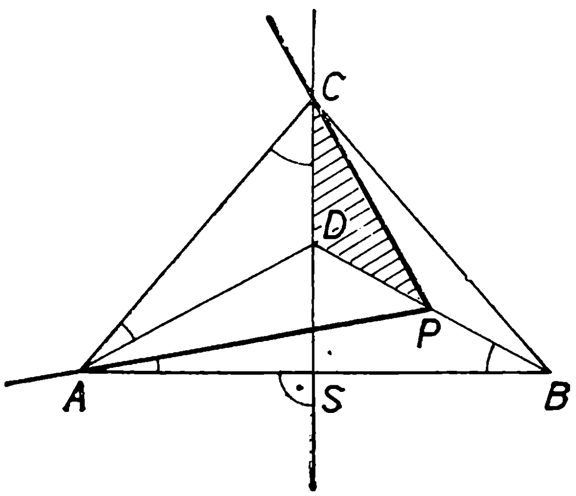
Z toho podle rovností (1) a (2) plyne tvrzení uvedené v textu úlohy č. 6.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

7. Přímky vedené bodem M rovnoběžně k přímkám AB, BC rozdělí čtverec $ABCD$ na čtyři pravoúhelníky. Nechť a je délka strany AB a x, y jsou délky sousedních stran toho pravoúhelníku, který má vrcholy A, M (obr. 4). Potom podle Pythagorovy věty užité na tři pravoúhlé trojúhelníky mající po řadě přepony AM, BM, CM platí

$$x^2 + y^2 = 49\,,$$
$$(a - x)^2 + y^2 = 169\,,$$
$$(a - x)^2 + (a - y)^2 = 289$$

Odečteme-li první rovnici od druhé a druhou od třetí, dostaneme rovnice

$$(a - x)^2 - x^2 = 120\,,$$
$$(a - y)^2 - y^2 = 120\,,$$

z nichž plyne, že je

$$a(a - 2x) = a(a - 2y)$$

Protože je $a \neq 0$, je $a - 2x = a - 2y$ a tedy $x = y$. To však znamená, že velikost úhlu MAB je 45°, takže bod M leží na úhlopříčce AC daného čtverce. Proto je

$$|AC| = |AM| + |CM| = 7 + 17 = 24\,;$$

je tedy $a\sqrt{2} = 24$. Z toho plyne, že je $a^2 = 288$.

8. Z předpokladu o trojúhelníku ABC plyne, že osa úhlu ACB je zároveň osou strany AB; prochází tedy jejím středem S (obr. 5). V trojúhelníku ABP je úhel při vrcholu B větší než úhel při vrcholu A; proto je $AP > BP$. Bod P leží tedy uvnitř poloroviny CSB s hraniční přímkou

CS. Z toho plyne, že polopřímka BP protíná úsečku CS v jejím vnitřním bodu D, který leží na prodloužení úsečky BP za bod P. Proto úhel APC je grafickým součtem úhlů APD, CPD, takže je

$$|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle APD| + |\sphericalangle CPD| \tag{1}$$

Úhel APD je vnější úhel trojúhelníku ABP, jehož vnitřní úhly při vrcholech A, B mají velikosti $10°$ a $30°$; proto je

$$|\sphericalangle APD| = 40° \tag{2}$$

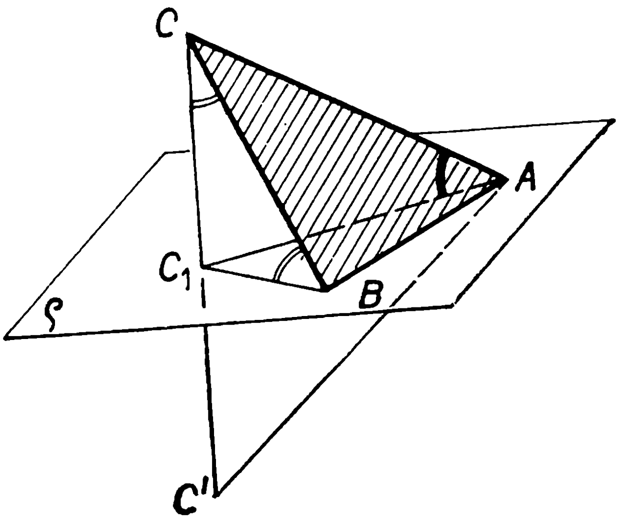
Snadno zjistíme, že dále platí:

$$|\sphericalangle ACD| = 40°, \ |\sphericalangle DAP| = 20°, \ |\sphericalangle DAC| = 20°$$

Z toho plyne, že je $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle ADC| = 120°$; proto je $\triangle ADP \cong \triangle ADC$ (usu). Z toho plyne, že je $|DP| = |DC|$, takže trojúhelník CDP je rovnoramenný se základnou CP; protože $|\sphericalangle CDP| = 120°$, je

$$|\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle DCP| = 30°\,. \tag{3}$$

Podle (1), (2) a (3) je $|\sphericalangle APC| = 40° + 30° = 70°$.



Obr. 6

9. V pravoúhlém trojúhelníku CC_1B s přeponou BC je podle předpokladu $|\sphericalangle CBC_1| = 45°$; proto je také $|\sphericalangle BCC_1| = 45°$. Z toho plyne, že je $|CC_1| = |C_1B| = x$; podle Pythagorovy věty užité na trojúhelník CC_1B s přeponou o délce a je (obr. 6)

$$2x^2 = a^2\,,$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,.$$

Sestrojme bod C' souměrně sdružený k bodu C podle roviny ϱ; potom je $|CC'| = 2x = a\sqrt{2}$. Avšak také $|AC'| = |AC| = a\sqrt{2}$. Trojúhelník ACC' je tedy rovnostranný a bod C_1 je středem strany CC' Proto je $|\sphericalangle CAC'| = 60°$ a $|\sphericalangle CAC_1| = 30°$

10. Předpokládejme, že jsme úlohu rozřešili; na obr. 7 je tedy $|\sphericalangle AXM| = 2\,|\sphericalangle BXN| = 2\beta$. Zvolme na ose úhlu AXM bod $O \neq X$. Potom bod O' souměrně sdružený k bodu O podle středu X leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině pB; zároveň je $|\sphericalangle O'XN| = |\sphericalangle OXM| =$

ANEMOMETR (slož. z řec. *anemos* = vítr; v. anemograf + *metron* = měřidlo, míra; v. -metr[1]) — větroměr; přístroj měřící, ale nezapisující rychlost a směr větru

ANEROID (slož. z řec. *a-*[3] s významem záporu + *neros* = vlhký + latiniz. *oideus*, pocházející od řec. *eidos* = podoba; v. -oid) — tlakoměr „bez vlhkosti, bez kapaliny", tj. bez rtuti; kovový barometr (tlak se tu měří tlakem ne na sloupec kapaliny — rtuti, ale použitím krabice se zředěným vzduchem)

ANHARMONICKÝ (slož. z řec. *an-*[1] s významem záporu + *harmonia*, k *harmottó* = seřaďovat, řídit, činit srovnaným; v. harmonický) — „nesrovnaný"; neharmonický; ANHARMONICKÉ kmity — takové, u nichž se doba kmitu i amplituda zmenšují

ANIHILACE (slož. z lat. *a-*[2] — předpona zde s významem „přiblížení" + *nihil* = nic) — „přivedení k ničemu", „zmizení hmoty"; jestliže se totiž setká elementární částice s jinou částicí, při reakci se obě změní („zmizí") ve velké množství energie. Srov. NIHILISMUS — popírání všech mravních a společenských hodnot; „nic nemá cenu".

ANION, ANIONT (slož. ze složky *an-* utvořené analogicky podle „anoda", takže tu nejde o význam záporu + řec. *ión*, *iontos* = jdoucí, od *eimi* = jít; v. ión) — „iont jdoucí při elektrolýze k anodě; iont se záporným elektrickým nábojem; srov. KATIONT — „iont přicházející ke katodě". V poznámku u „anoda".

ANIZOTROPNÍ slož. z řec. *an-*[1] s významem záporu + *isos* = rovný, stejný; v. *izo-* *tropos*, k *trepó* = obracet; v. tropy) — „nestejně se obracející"; takový, u kterého nedochází k fyzikálním změnám všemi směry stejně; ANIZOTROPIE; ANIZOTROPNÍ prostředí — vlnění se v něm šíří v různých směrech různou rychlostí; ANIZOTROPNĚ se deformovat — v různých směrech nestejně

ANODA (slož. z řec. *ana-* — předpona s významem „směr nahoru, vzhůru" + *hodos* = chod, chůze, cesta) — „cesta vzhůru"; elektroda, kterou proud do elektrolytu vstupuje; kladná elektroda. Opakem je KATODA (řec. *kata-* — předpona zde s významem „směr dolů") — elektroda, kterou proud odchází z míst vyššího potencionálu anody k místům nižšího potencionálu katody. Srov. PERIODA (řec. *peri* = okolo) — „cesta kolem dokola". Pozn.: Vlastnost kladného nebo záporného nabití názvem „anoda" ani „katoda" vyjádřena není. Zde došlo k mezinárodní dohodě. Proto ve výrazech „an-oda, an-iont" nejde o předponu *a-*[3] s významem záporu. V.t. binoda, dioda, elektroda, katoda, metoda.

ANOMÁLIE (slož. z řec. *an-*[1] — s významem záporu + *homalos* = rovný měrou, stavem) — „nestejnost", nepravidelnost, odchylka od normálního stavu, výjimečnost. Pozn. Řec. *homalos* souvisí s řec. *homos* = stejný, v homo-.

ANOMÁLNÍ — nepravidelný, výjimečný

 ANOMALISTICKÝ rok — je nepatrně delší než běžně používaný rok siderický; „odchyluje se od roku siderického"

ANORGANICKÝ (slož. z řec. *an-*[1] s významem záporu + řec. *organon* = nástroj, nářadí, dílo; latiniz. *organum* = též smyslový ústroj, čidlo; v. orgán) — neorganický, neústrojný, neobsažený v živých tvorech. V. poznámku u „organický".

ANTÉNA (slož. z řec. *an-*[2] — předpona zde s významem „směr vzhůru" + *teinó* = napínat, táhnout, natahovat; v. tón) — zařízení sloužící k vysílání nebo přijímání rádiových vln (zpravidla v podobě vztyčeného a napjatého vodiče)

ANTI- (z řec. *anti* = zpředu, proti, naproti, za, na oplátku) — předpona v podstatě s trojím významem: 1) „odpor, nepřátelství, boj proti něčemu"; např. antifašismus, antialkoholický; 2) „opak, protiklad" (chápáno vzhledem k výsledku, účinku, směru nebo poloze); např. ANTARKTIDA — „ležící na opačném pólu než Arktida"; v. t. antikatoda, antireflexivní, antisymetrický; 3) ve fyzice: „to, co je vyjádřeno druhou částí složeného slova, má některou veličinu opačnou, než má slovo nesložené"; např. ANTINEUTRINO — neutrino s opačně orientovaným magnetomechanickým momentem; v.t. anticyklóna, antičástice, antikomutativní, antineutron, antinukleon, antiproton. Pozn.: Proto ANTIPÓL — 1) pól ležící proti jinému pólu, protipól; 2) pól s opačnou polaritou.

ANTICYKLÓNA (v. cyklóna) — cyklóna mající opačné povětrnostní znaky, „opačná cyklóna"; uzavřená oblast tlakové výše, ve které vzduch proudí spirálovitě-kruhovitě ze středu tlakové výše ven (opačným směrem než u cyklóny)

ANTIČÁSTICE — elementární částice, která má stejnou hmotnost jako jiné jí odpovídající částice, ale opačný elektrický náboj

ANTIKATODA (v. katoda) — „protikatoda"; třetí elektroda v rentgenové lampě umístěná proti katodě

ANTIKOMUTATIVNÍ (v. komutativní) — nezaměnitelný pro žádnou dvojici prvků; není komutativní pro žádnou dvojici prvků, kdežto „nekomutativní" — není komutativní pro alespoň jednu dvojici prvků

ANTINEUTRINO (v. neutrino) — neutrino s opačně orientovaným magnetomechanickým momentem

ANTINEUTRON (v. neutron) — neutron s opačným znaménkem magnetického momentu

ANTINUKLEON (v. nukleon) — antičástice nukleonu; částice s opačným magnetickým momentem

ANTIPROTON (v. proton) — proton se záporným elementárním nábojem a s opačným magnetickým momentem

ANTIREFLEXIVNÍ (v. reflexivní) — neodrazový; související s antireflexí

ANTISYMETRICKÝ (v. symetrický) — nesouměrný (v protikladu k souměrnosti v matematice); není symetrický pro žádnou dvojici prvků, kdežto ASYMETRICKÝ (*a*-³ s významem záporu) — není symetrický aspoň pro jednu dvojici prvků

APARÁT (z lat. *apparatus*; slož. z *ad* = k, u + *paro, -are*, ptc. pf. *paratus* = připravovat, strojit, chystat) — příprava (chápáno abstraktně); přípravy (chápáno konkrétně), stroje, nástroje; přístroj, zařízení, soustava pomůcek. Srov. REPARÁT (lat. *re-* = opět, zpět) — opravná zkouška, na kterou se musí zkoušený „znovu připravit" V.t. komparátor, preparát, separace.

APARATURA — složitější soustava přístrojů

APERTURA (od lat. *aperio, -ire*, ptc. pf. *apertus* = otvírat, odkrývat) — otvor; velikost otvoru optických přístrojů; zařízení umožňující měnit tento otvor; APERTURNÍ — otvorový (např. clona). Srov. APERITIV — alkoholický nápoj vyvolávající („otvírající") chuť

APLANÁT (slož. z řec. *a*-³ s významem záporu + *planaomai* = sem tam chodit, bloudit; v. aeroplán) — optická soustava bez „sem tam se pohybujících paprsků"; soustava čoček, ve které zobrazovací zařízení způsobuje, že paprsky vycházející z předmětového bodu míří k jedinému bodu; objektiv odstraňující vady způsobené „bludnými paprsky"

APOGEUM (slož. z řec. *apo* = od + *gé* = země; v. geo-) — odzemí; bod, v němž je kosmické těleso nejdále od Země; srov. perigeum, afélium.

APROXIMACE (slož. z lat. *a*-² = k, u, do + *proximus* = nejbližší; v. proxima) — „přibližování se"; postup směřující k získání hodnoty, „která je ke skutečné hodnotě nejblíže"; APROXIMATIVNÍ — přibližný

AREOMETR (slož. z řec. *araios* = tenký, řídký + *metron* = míra, měřidlo; v. -metr¹) — hustoměr; přístroj, kterým se měří, jak je kapalina „řídká". (Areometrem na rozdíl od denzimetru — v.t. — se měří především kapaliny řidší než voda.) Pozn. Nezaměňovat s podobně znějící první částí složených slov AERO- (od řec. *aér* = vzduch), zvlášť když i význam by byl blízký — „měřič vzduchu"

ARETACE (od lat. *resto, -are* = zůstávat, setrvávat; slož. z *re-* = zpět, znova + *sto, -are* = stát, zastavit; v. stator) — zastavení; zajištění; způsobit, aby něco ustalo v pohybu; zařízení měřících přístrojů, které zastavuje a zachycuje jejich pohyblivé součásti a zajišťuje jejich nepohnutelnost. ARETOVAT — zastavit pohyblivé součásti přístroje; ARETOVANÝ — zastavený; ARETAČNÍ — samočinně zastavující. Pozn.: Počáteční a- vzniklo převzetím slova přes italštinu a franštinu, takže nemá nic společného s lat. *ad* = k, u nebo dokonce s řec. *a*-³ s významem záporu.

ASFÉRICKÝ (slož. z řec. *a*-³ s významem záporu + *sfaira* = koule; v. sféra) — nekulový; srov. SFÉRICKÝ

ASOCIACE (z lat. *associatio*; od *associo*, *-are*, ptc. pf. *associatus*; slož. z *ad* = k, do, u + *socio*, *-are* = spojovat, sdružovat; v. disociace) — sdružování, shlukování; ASOCIACE myšlenek — k jedné myšlence se vzápětí „přidruží" jiná, ať už na základě podobnosti nebo protikladu; ASOCIACE hvězdná — nepříliš výrazné seskupení hvězd, které mají společný vývoj a vznik ve stejném okamžiku, ale již se rozptýlily z místa vzniku do okolního prostoru mezi ostatní hvězdy

ASPIRACE (z lat. *aspiratio*; slož. z *ad* = k, u + *spiro*, *-are*, ptc. pf. *spiratus* = dýchat) — „přivívání"; v jazykovědě: přídech (např. něm. Kind — vyslov Kchind); v lékařství: vdechnutí cizorodých hmot do průdušek; ASPIRAČNÍ — „vdechovací"; ve fyzice: Assmanův aspirační psychrometr — vlhkoměr, který má ventilátorek nasávající stálou rychlostí vzduch do společné svislé trubice. Srov. INSPIRACE — „vdechnutí dobrého nápadu".

ASTIGMATISMUS (slož. z řec. *a-*[3] s významem záporu + *stigma* = vbodnutí, vpálené znamení, bod; od *stidzó* = bodat; v. stigmatický + -ismus, v.t.) vada objektivu, kdy body ležící mimo jeho optickou osu se nezobrazí jako body, nýbrž jako vzájemně kolmé krátké úsečky; v lékařství: porucha zraku, kdy se paprsky v oku nespojují v jednom bodě; ASTIGMATICKÝ — nebodový

ASTRO- (z lat. *astrum* = hvězda) — počáteční část složených slov vyjadřující nějaký vztah k hvězdám

ASTROFYZIKA (v. fyzika) — „fyzika hvězd"; věda o fyzikálních a chemických vlastnostech nebeských těles a mezivězdné hmoty

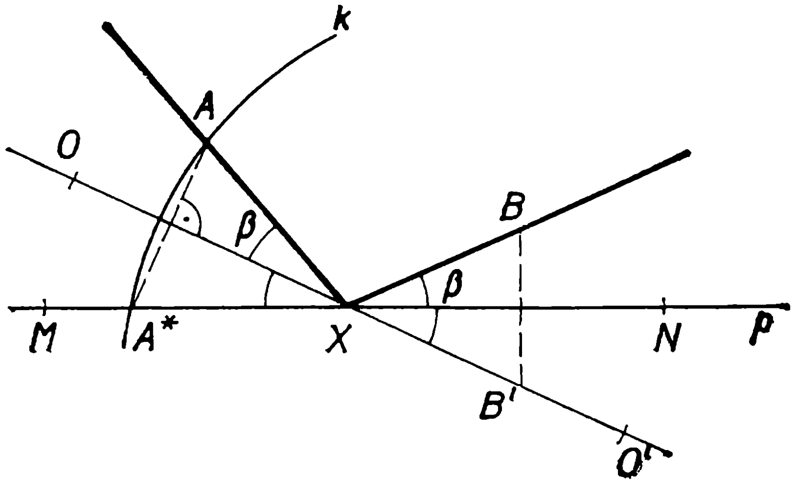
ASTROGRAF (v. -graf) — „přístroj zapisující hvězdy"; hvězdářský dalekohled upravený na fotografování hvězd

ASTROLOG (v. -log) — hvězdopravec; ASTROLOGIE (v. -logie) — hvězdopravectví; nevědecké zkoumání vlivu hvězd na člověka a předpovídání budoucnosti z jejich postavení

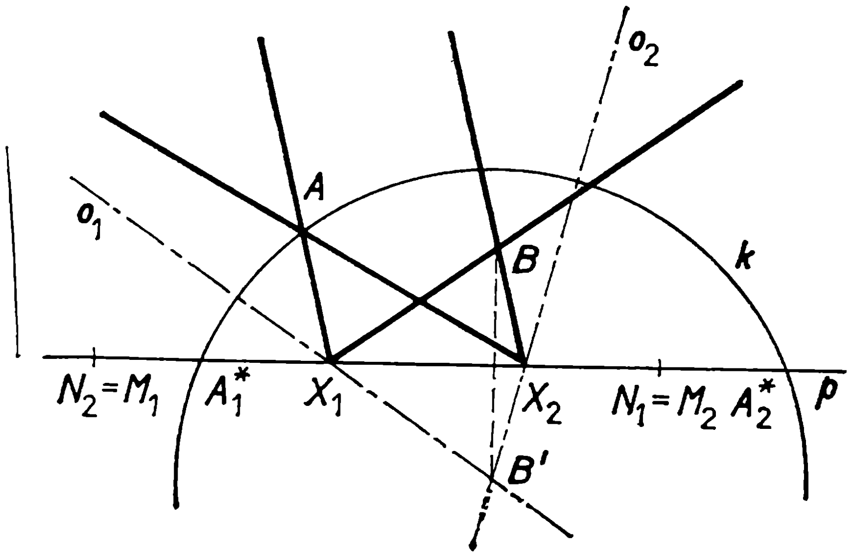
ASTRONAUT (řec. *nautés* = plavec; v. kosmonaut) — „plavec mezi hvězdami, plující mezi hvězdami"

ASTRONOM (v. -nom) — vědec zabývající se mezihvězdnými řády; hvězdář; ASTRONOMIE (v. -nomie) — hvězdářství; věda o uspořádání hvězd; v.t. radioastronomie

ASYMETRICKÝ (slož. z řec. *a-*[3] s významem záporu + *syn* = s, spolu + *metron* = měřidlo, míra; v. symetrický) — nesymetrický; ve fyzice a matematice: není symetrický alespoň pro jednu dvojici prvků; srov. ANTISYMETRICKÝ (řec. *anti-* = zde s významem „opak, protiklad") — není symetrický pro žádnou dvojici prvků



Obr. 7



Obr. 8

$= \beta = |\sphericalangle\, BXN|$. Polopřímka XO' je tedy souměrně sdružena k polopřímce XB podle přímky p. Bod A^{x}, který je souměrně sdružen k bodu A podle přímky XB', leží na polopřímce XM; zároveň je $B'A^{\mathrm{x}} = B'A$. To znamená, že body A, A^{x} leží na kružnici k, která má střed v bodu B'; přímka XB' je osou úsečky AA^{x}. Z toho plyne tato konstrukce bodu X (obr. 8).

1. Sestrojíme bod B' souměrně sdružený k bodu B podle přímky p. 2. Sestrojíme kružnici k, která má střed v bodu B' a prochází bodem A. 3. Sestrojíme průsečík A^{x} přímky p s kružnicí k. 4. Sestrojíme osu o úsečky AA^{x}. 5. Průsečík přímek p, o je hledaný bod X.

Bod X splňuje zřejmě danou podmínku: Body A, B' leží v navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou p; proto přímka p protíná kružnici k ve dvou různých bodech A^{x}_1 A^{x}_2. Úloha má tedy dvě řešení. Na obr. 8 je $|\sphericalangle\, AX_1M_1| = 2|\sphericalangle\, BX_1N_1|$ a zároveň $|\sphericalangle\, AX_2M_2| = 2|\sphericalangle\, BX_2N_2|$.

NAŠE SOUTĚŽ

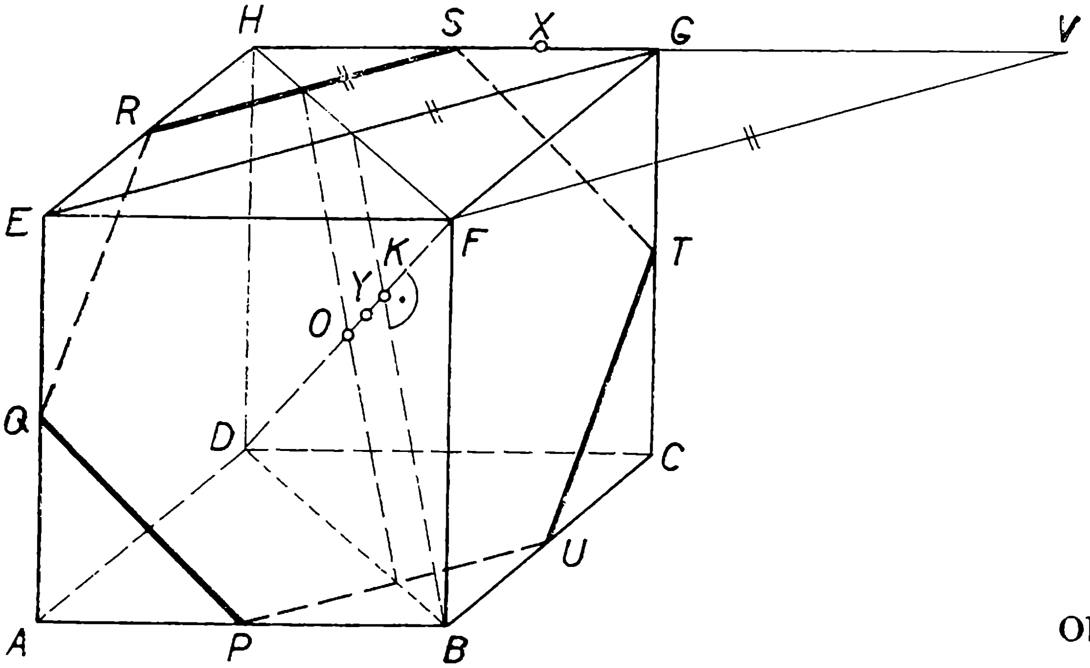
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

3. Je dána krychle $ABCDEFGH$, jejíž hrana má délku a; rovina ϱ kolmá k tělesové úhlopříčce DF krychle protíná krychli v šestiúhelníku R. Vypočtěte obsah řezu R v závislosti na vzdálenosti v roviny ϱ od středu krychle.

(Došlo 13 řešení) *Milan Koman*

Autorovo řešení: Můžeme se omezit na roviny ϱ, které leží mezi rovnoběžnými rovinami $\sigma = RSTUPQ$ a $\tau = EGB$, a případ, kdy rovina ϱ splyne s rovinou σ; viz obr. 1. Rovina σ prochází středem krychle kolmo

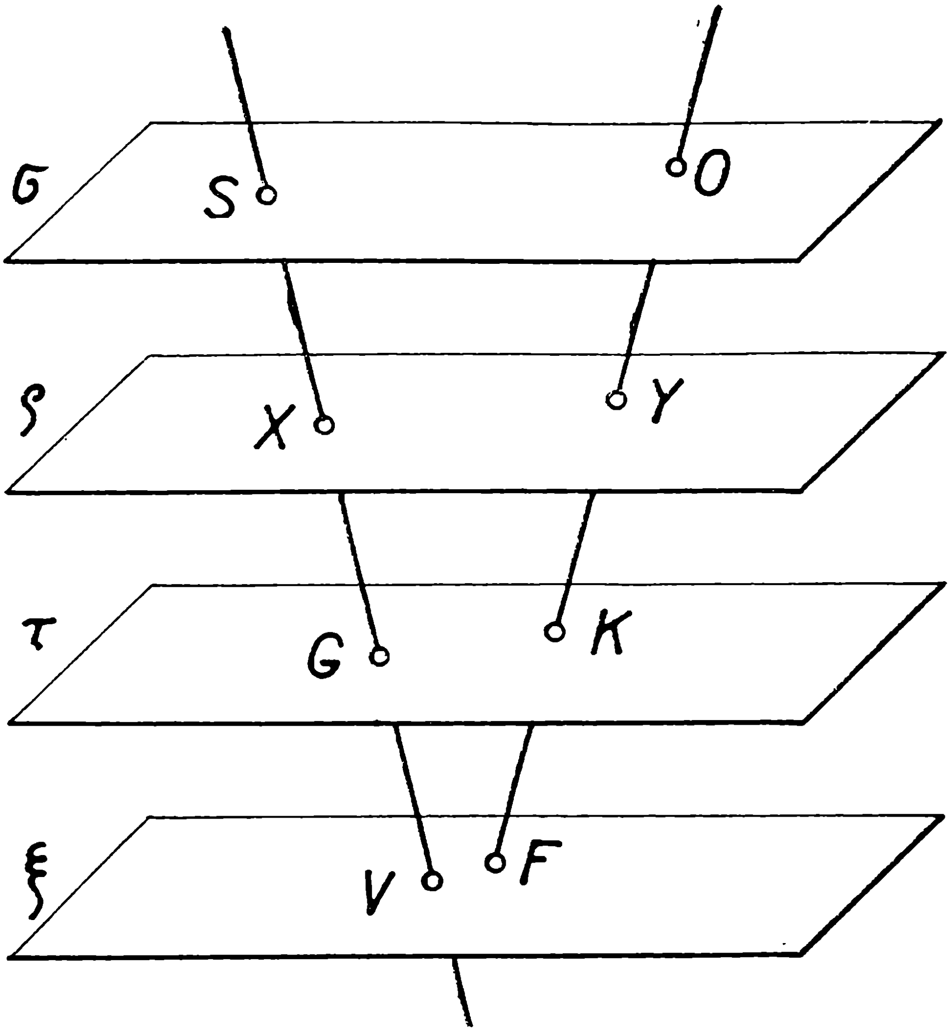


Obr. 1

k tělesové úhlopříčce DF krychle. Veďme ještě pomocnou rovinu ξ, která prochází vrcholem F a je rovnoběžná s rovinou ϱ. Průsečíky roviny σ, ϱ, τ, ξ s přímkou HG jsou po řadě body S, X, G, V a jejich průsečíky s přímkou DF jsou body O, Y, K, F. Při řešení použijeme tuto *pomocnou větu:*

Rovnoběžné roviny σ, ϱ, τ, ξ vytínají na libovolných dvou přímkách, které jsou s nimi různoběžné, úseky, jejichž délky jsou přímo úměrné; viz obr. 2, kde je

$$\frac{|SX|}{|OY|} = \frac{|SG|}{|OK|} = \frac{|SV|}{|OF|} . \tag{1}$$



Obr. 2

Snadno zjistíme, že je

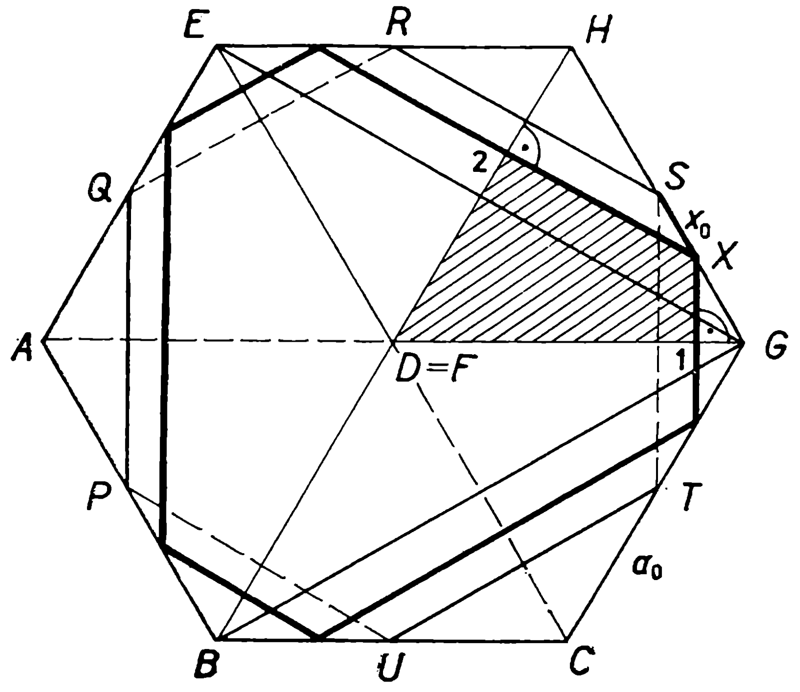
$$|SG| = \frac{a}{2}, \ |SV| = \frac{3a}{2}, \ |OF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Z toho a ze vztahů (1) vypočteme

$$v = |OY| \leqq |OK| = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad x = |SX| = v\sqrt{3} \tag{2}$$

Nyní sestrojíme pravoúhlý průmět krychle a jejích řezů rovinami σ, ϱ, τ do roviny σ; průměty bodů označíme stejně jako tyto body (obr. 3). Obrys krychle je potom pravidelný šestiúhelník $RSTUPQ$ a řezy krychle rovinami σ, ϱ, τ se zobrazí ve skutečné velikosti; proto je $|EG| = a\sqrt{2}$. Obrazec $DGHE$ je kosočtverec, jehož úhlopříčka DH je shodná s jeho stranou. Rovnostranný trojúhelník DGH má výšku rovnou polovině úhlopříčky EG kosočtverce $DGHE$; z toho plyne, že jeho strana má délku

$$|GH| = \frac{a\sqrt{6}}{3} = a_0 . \tag{3}$$



Obr. 3

Délka průmětu hrany krychle je tedy a_0, takže je

$$\frac{a_0}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Je-li x_0 délka průmětu úsečky SX mající délku x, je také

$$\frac{x_0}{x} = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

z toho podle rovnosti (2) plyne, že je

$$x_0 = \frac{v\sqrt{18}}{3} = v\sqrt{2}, \tag{4}$$

kde podle rovnosti (2) je $v \leqq \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Obsah šestiúhelníkového řezu krychle s rovinou ϱ (který je na obr. 3 ve skutečné velikosti) je zřejmě roven šestinásobku vyšrafovaného čtyřúhelníku $D1X2$. Jeho obsah dostaneme odečtením obsahů pravoúhlých trojúhelníků $1XG$ a $2XH$ (jejichž ostré úhly mají velikosti 30° a 60°) od obsahu rovnostranného trojúhelníku DGH. Označíme-li obsahy trojúhelníků DGH, $1XH$ po řadě S_1, S_2, S_3, je podle rovnosti (3)

$$S_1 = \frac{1}{4} a_0^2 \sqrt{3} = \frac{1}{6} a^2 \sqrt{3},$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{2} - x_0\right)^2 \sin 30° \cos 30° = \frac{1}{8}\left(\frac{a_0}{2} - x_0\right)^2 \sqrt{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{2} + x_0\right)^2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{8}\left(\frac{a_0}{a} + x_0\right)^2 \sqrt{3}$$

Z toho dostaneme obsah S_4 čtyřúhelníku $D1X2$:

$$S_4 = \frac{1}{6} a^2 \sqrt{3} - \frac{1}{4}\left(\frac{a_0^2}{4} + x_0^2\right)\sqrt{3}\,.$$

Podle rovností (3) a (4) je tedy

$$S_4 = \frac{3\sqrt{3}}{24}\left(a^2 - 4v^2\right)$$

Obsah S šestiúhelníkového řezu roviny ϱ s krychlí je tedy

$$S = 6 \quad S_4 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(a^2 - 4v^2\right),$$

kde je

$$v \leqq \frac{a\sqrt{3}}{6}\,.$$

Poznámka. Většina řešitelů doplnila šestiúhelníkové řezy na rovnostranné trojúhelníky. Od jejich obsahů potom odečetla obsahy tří doplněných shodných rovnostranných trojúhelníků.

4. Zjistěte, kolika způsoby lze na obyčejné šachovnici rozmístit 16 pěšáků tak, aby v každé řadě i v každém sloupci byl jeden bílý a jeden černý pěšák. *Návod:* Zjistěte nejdříve počet všech možných „cyklických" rozmístění, tj. rozmístění, kde spojnice každých dvou pěšáků v téže řadě nebo v témže sloupci vytvoří jednu uzavřenou lomenou čáru. Přitom se připouštějí lomené čáry, které samy sebe protínají.

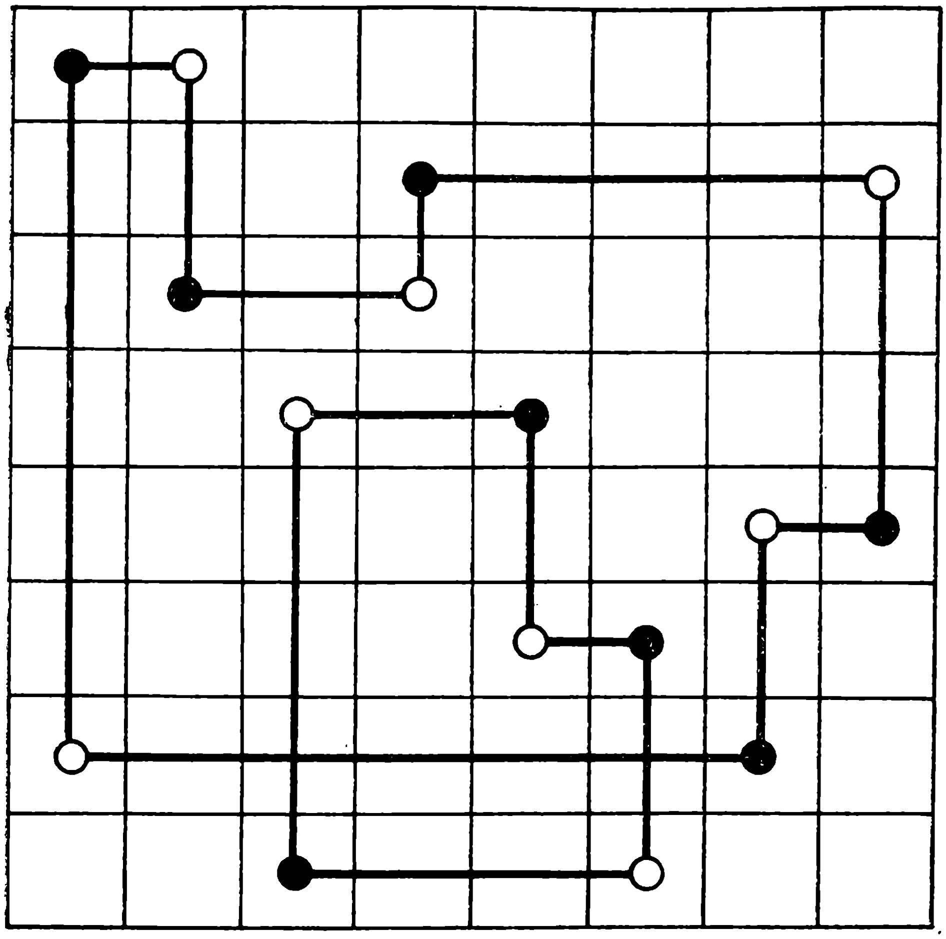
(Došlo 8 řešení) *Milan Koman*

Řešení V Korduly a J. Fišera, 3 C *G. M. Koperníka, Bílovec:*

Spojíme-li úsečkou každé dva sousední pěšce, tj. pěšce ležící v téže řadě nebo v témže sloupci, dostaneme jednu nebo několik uzavřených lomených čar (např. na obr. 4 vznikly 2 lomené čáry). Na každé leží sudý počet pěšců (polovina bílých a polovina černých) tvořících vrcholy těchto čar. Polovina vrcholů na každé lomené čáře je řád k této lomené čáry.

Nejdříve dokážeme *pomocnou větu:* Počet všech možných rozmístění pěšců na šachovnici $n \times n$ ($n \geqq 2$) určujících jen jednu uzavřenou lomenou čáru je roven $(n!)^2/n$.

Důkaz. Zvolíme první vrchol uzavřené lomené čáry (má řád $k = n$) na některém z n^2 polí šachovnice. Máme tedy n^2 možností. Nyní zvolíme sousední vrchol ležící v téže řadě. Máme $n - 1$ možností. Další vrchol zvolíme v témže sloupci s druhým vrcholem. Pro tuto volbu máme opět



Obr. 4

$n - 1$ možností. Čtvrtý vrchol zvolíme v téže řadě s třetím vrcholem. Je-li $n > 2$, máme pro volbu $n - 2$ možností, protože dva sloupce jsou už obsazeny a lomenou čáru smíme uzavřít až posledním pěšcem. Je-li $n = 2$, máme pro čtvrtý vrchol jedinou možnost, celkem $(2!)^2$ možností.

Je-li $n > 2$, můžeme podobně počítat počty možností volby dalších pěšců. Pro volbu všech pěšáků dostaneme celkem $(n!)^2$ možností. Ale každou lomenou čáru můžeme tímto postupem získat $2n$ různými způsoby, neboť prvně zvolený pěšec může být kterýkoliv z pěšáků této uzavřené lomené čáry. U prvního pěšáka můžeme zvolit barvu dvěma způsoby. Tím je barva ostatních pěšáků již jednoznačně určena. Počet možných rozmístění pěšáků (polovina bílých a polovina černých) je tedy $2 \quad (n!^2/2n = (n!)^2/n$. Tím je pomocná věta dokázána.

Nyní přejdeme k řešení dané úlohy. Na šachovnici 8×8 mohou vzniknout lomené čáry s těmito řády:

(8), (6,2), (5,3), (4,4), (4,2,2), (3,3,2), (2,2,2,2). (Případy (7,1), (5,2,1) atd. zřejmě nemohou nastat, protože na každé lomené čáře musí být aspoň 4 pěšáci, tedy řád každé lomené čáry je $k \geqq 2$.)

Určíme počty možností v jednotlivých případech.

a) Případ (8). Podle pomocné věty je počet možností
$(8!)^2/8 = 203\,212\,800$.

b) Případ (6,2). Ponecháme-li na šachovnici pouze sloupce a řady, ve kterých leží lomená čára řádu $k = 6$, dostaneme podšachovnici s 6×6 poli. Takovou podšachovnici můžeme vybrat celkem $\binom{8}{6}^2 = \binom{8}{2}^2$ způsoby. Počet rozmístění pěšáků, kteří tvoří na podšachovnici 6×6 lomenou čáru řádu 6 lze vybrat $(6!)^2/6$ způsoby. Podobně zbylé rozmístění pěšáků na podšachovnici 2×2 lze vybrat $(2!)^2/2$ způsoby. Celkový počet možností je tedy v tomto případě

$$\binom{8}{2}^2 \cdot \frac{(6!)^2}{6} \cdot \frac{(2!)^2}{2} = 135\,475\,200.$$

Ostatní případy se počítají stejně. Uvedeme jen výsledky.

c) Případ (5,3):

$$\binom{8}{3}^2 \frac{(5!)^2}{5} \cdot \frac{(3!)^2}{3} = 108\,380\,160.$$

d) Případ (4,4):

$$\frac{1}{2}\binom{8}{4}^2 \frac{(4!)^2}{4} \cdot \frac{(4!)^2}{4} = 50\,803\,200.$$

Ve výpočtu se objevila $\frac{1}{2}$, neboť nerozlišujeme pořadí dvou lomených čar řádů $k = 4$. Podobně i v dalších dvou případech.

e) Případ (4,2,2,):

$$\frac{1}{2}\binom{8}{4}^2 \binom{4}{2}^2 \frac{(4!)^2}{4} \frac{(2!)^2}{2} \cdot \frac{(2!)^2}{2} = 50\,803\,200.$$

f) Případ (3,3,2):

$$\frac{1}{2}\binom{8}{2}^2 \binom{6}{3}^2 \frac{(3!)^2}{3} \frac{(3!)^2}{3} \cdot \frac{(2!)^2}{2} = 45\,158\,400.$$

g) Případ (2,2,2,2):

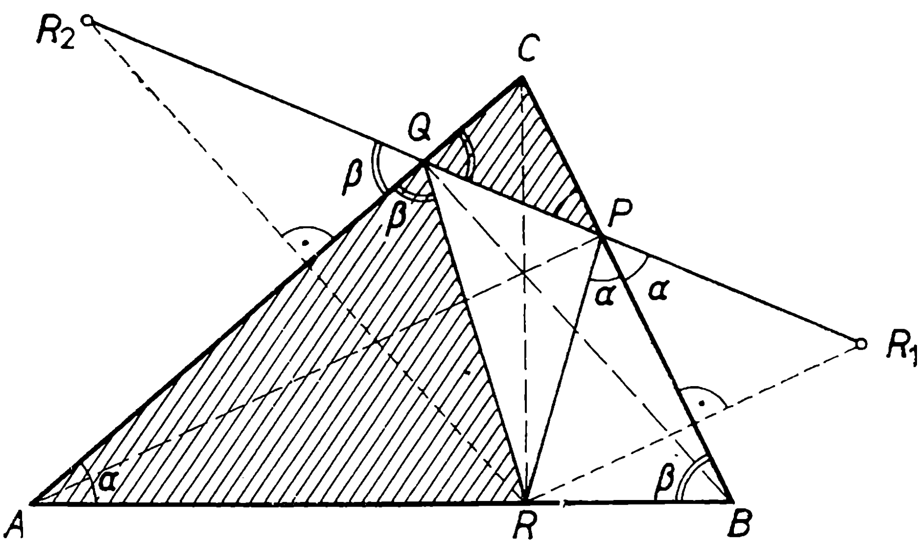
$$\frac{1}{4!}\binom{8}{2}^2 \binom{6}{2}^2 \binom{4}{2}^2 \cdot \frac{(2!)^2}{2} \cdot \frac{(2!)^2}{2} \cdot \frac{(2!)^2}{2} \cdot \frac{(2!)^2}{2} = 4\,233\,600.$$

V tomto posledním případě nesmíme zapomenout na zlomek $\frac{1}{4!}$, neboť nerozlišujeme pořadí čtyř lomených čar s týmž řádem $k = 2$.

Sečtením dílčích výsledků a) až g) dostaneme celkový počet rozmístění

$$S = 598\,066\,560.$$

5. Patu výšky ke straně AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme R. Sestrojme bod R_1 souměrně sdružený k bodu R podle přímky BC a bod R_2 souměrně sdružený k bodu R podle přímky CA. Dokažte, že přímka



Obr. 5

R_1R_2 protíná strany BC, CA po řadě v bodech P, Q, které jsou patami zbývajících dvou výšek trojúhelníku ABC.

(Došlo 25 řešení) *Emil Kraemer*

Řešení Jarmily Ranošové, 4C *G. M. Koperníka, Bílovec:*

Trojúhelník ABC je ostroúhlý; proto paty P, Q, R jeho výšek leží po řadě uvnitř jeho stran BC, CA, AB; trojúhelník PQR je tedy částí trojúhelníku ABC (obr. 5). Dokážeme, že body R_1, R_2 sestrojené podle textu úlohy leží na přímce PQ; tím bude důkaz proveden.

Trojúhelníky ARC, AQB jsou pravoúhlé a mají společný úhel RAC splývající s úhlem BAQ; proto je $\triangle RAC \sim \triangle QAB$, takže je

$$\frac{|AR|}{|AC|} = \frac{|AQ|}{|AB|}.$$

Z toho plyne, že je $|AR|\ \ |AQ| = |AC|\ \ |AB|$; kromě toho je $|\sphericalangle RAQ| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$. Proto je $\triangle RAQ \sim \triangle CAB$; z toho plyne, že je

$$|\sphericalangle AQR| = |\sphericalangle ABC| = \beta \tag{1}$$

Trojúhelníky APC, BQC jsou pravoúhlé a mají společný úhel PCA splývající s úhlem QCB; proto je $\triangle PCA \sim \triangle QCB$, takže je

$$\frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|CQ|}{|CB|}.$$

Z toho plyne, že je $|CP|\ \ |CQ| = |CA|\ \ |CB|$; kromě toho je $|\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle BCA| = \gamma$. Proto je $\triangle PCQ \sim \triangle ACB$; z toho plyne, že je

$$|\sphericalangle CQP| = |\sphericalangle CBA| = \beta\,. \tag{2}$$

Grafický součet úhlů AQR, RQP, CQP je přímý úhel AQC; z toho a z rovností (1) a (2) plyne, že je

$$|\sphericalangle RQP| = 180° - |\sphericalangle AQR| - |\sphericalangle CQP| = 180° - 2\beta \tag{3}$$

Bod R_2 je souměrně sdružen k bodu R podle přímky AC; z toho a z rovnosti (1) plyne, že je

$$|\sphericalangle AQR_2| = |\sphericalangle AQR| = \beta \tag{4}$$

Úhel s rameny QP, QR_2 je grafickým součtem úhlů AQR_2, AQR, RQP; z toho a z rovností (4), (1) a (3) plyne, že je

$$|\sphericalangle R_2QP| = \beta + \beta + 180° - 2\beta = 180° .$$

To znamená, že bod R_2 leží na přímce PQ. Docela obdobně dokážeme, že také bod R_1 leží na přímce PQ.

Fyzika

1. Rybář jel na loďce proti proudu řeky. Projížděl pod mostem, kde mu spadlo bidlo do vody; zpozoroval to za půl hodiny. Vesloval zpět a dostihl bidlo 5 km od mostu. Jakou rychlostí teče voda v řece, jestliže se rybář pohybuje po proudu i proti proudu stejnou rychlostí vzhledem k vodě?

(Došlo 52 řešení) *Eva Havránková*

Řešení autorky: Při prvním způsobu řešení použijeme soustavy souřadnic spojené s břehem řeky; počátek je pod mostem.

Označme $v_Ř$ rychlost řeky vzhledem ke břehu, v_R rychlost rybáře vzhledem k vodě, s_1 vzdálenost, do které se rybář dostal za $^1/_2$ hodiny proti proudu řeky a t čas, za který dostihl bidlo, počítaný od okamžiku, kdy zpozoroval jeho ztrátu. Předpokládáme, že bidlo se pohybuje vzhledem ke břehu rychlostí vody. Sestavíme rovnice

$$s_1 = (v_R - v_Ř)\,^1/_2 \tag{1}$$

$$s_1 + 5 = (v_R + v_Ř)\,t \tag{2}$$

$$5 = v_Ř(t + {}^1/_2) \tag{3}$$

Do rovnice (2) dosadíme za s_1 z rovnice (1).
Dostaneme

$$(v_R - v_Ř)\frac{1}{2} + 5 = (v_R + v_Ř)\,t$$

a po úpravě

$$v_R\left(\frac{1}{2} - t\right) + 5 = v_Ř\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

Protože podle rovnice (3) je $v_Ř\left(t + \frac{1}{2}\right) = 5$,

zjistíme, že

$$v_R\left(\frac{1}{2} - t\right) = 0$$

Platí však, že

$$v_R \neq 0, \text{ musí tedy být } t = \frac{1}{2}$$

a z rovnice (3) plyne pro rychlost řeky $v_Ř = 5$ km . h^{-1}.

Poznámka. Rychlost v_R může být i záporná nebo menší než $v_Ř$. Jediná podmínka, kterou na ni klademe, je, že není rovna nule.

Při druhém způsobu (vtipem) užijeme soustavu souřadnic spojenou s bidlem, které se pohybuje rychlostí vody. Rybář se od bidla vzdaluje rychlostí v_R a stejnou rychlostí se k němu přibližuje. Vzdaluje se $^1/_2$ hodiny, přibližuje se také $^1/_2$ hodiny. Za tu dobu urazí bidlo vzhledem ke břehu 5 km. Rychlost řeky $v_Ř$ vzhledem ke břehu je tedy 5 km/h.

Úlohy k řešení

V tomto čísle otiskujeme další čtyři úlohy z matematiky, tři úlohy z fyziky a jednu úlohu z konstrukční geometrie. Zbývající tři úlohy z matematiky, dvě z fyziky a dvě z konstrukční geometrie uveřejníme v čísle 4. *Řešení nyní otištěných úloh zašlete do konce února 1986* na adresu redakce Rozhledů, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla tohoto časopisu.

Řešení každý úlohy pište čitelně česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své celé jméno (*příjmení podtrhněte*), třídu i školu, kde studujete, a připojte svou bytovou adresu se směrovacím číslem.

Matematika

4. V trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CBA| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ACB| = 4\alpha$; potom pro délky a, b, c jeho stran BC, CA, AB platí

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} .$$

Dokažte a zjistěte, zda platí věta obrácená.

Emil Kraemer

5. Je dán trojúhelník $S_V S_O O$. Sestrojte trojúhelník ABC, v němž bod O je středem strany AB, bod S_V je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC a bod S_O je středem kružnice, která je témuž trojúhelníku opsána.

Jiří Mída

6. Dokažte, že existuje nekonečná posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \ldots$ splňujících tuto podmínku: Pro libovolná kladná celá čísla i, j existuje taková uspořádaná čtveřice reálných čísel (b_1, b_2, b_3, b_4), že platí:

a) $a_{4i-3} \cdot b_1 + a_{4i-2} \cdot b_2 + a_{4i-1} \cdot b_3 + a_{4i} \cdot b_4 =$
$= a_{4j-3} \cdot b_1 + a_{4j-2} \cdot b_2 + a_{4j-1} \cdot b_3 + a_{4j} \cdot b_4 = 1$,

b) $a_{4k-3} \cdot b_1 + a_{4k-2} \cdot b_2 + a_{4k-1} \cdot b_3 + a_{4k} \cdot b_4 < 1$
pro všechna kladná celá čísla k, $i \neq k \neq j$.

Jaroslav Morávek

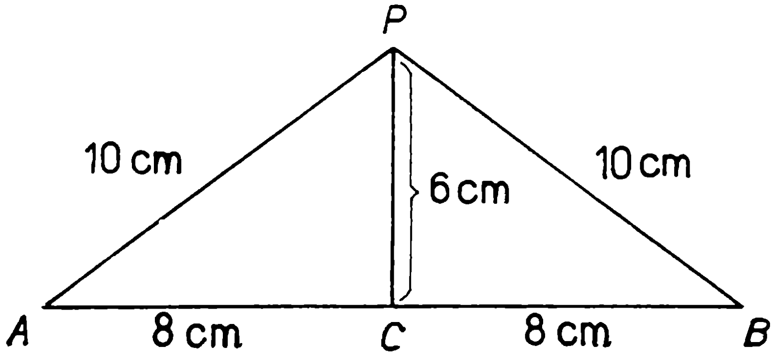
7. Nechť a, b, c jsou délky stran a α, β, γ velikosti k nim protějších úhlů libovolného trojúhelníku ABC. Dokažte, že platí:

$$\sqrt{a \sin \alpha} + \sqrt{b \sin \beta} + \sqrt{c \sin \gamma} = \sqrt{(a + b + c)(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)}\,.$$

Jaroslav Šedivý

Fyzika

1. Dva hmotné body, každý o hmotnosti 5 kg, jsou umístěny v bodech A, B (obr. 1). Řešte tyto úlohy:



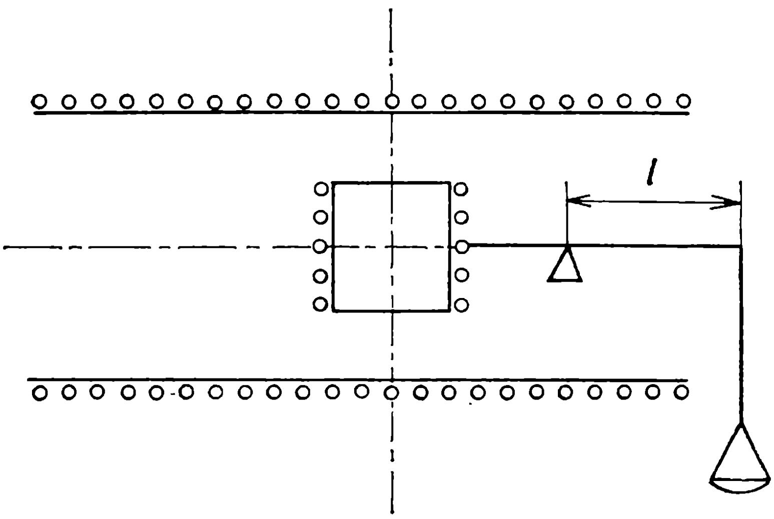
Obr. 1

a) Nalezněte velikost a směr počátečního zrychlení desetigramového hmotného bodu, který je vypuštěn z klidu z bodu P. Působí na něj jen gravitační síly pocházející od hmotných bodů umístěných v bodech A, B.

b) Nalezněte rychlost desetigramového hmotného bodu v bodu C.

Eva Havránková

2. Uprostřed dlouhé cívky (obr. 2), jejíž vinutí má n závitů na délkovou jednotku, je umístěna krátká cívka průřezu S, která má N závitů. Osa krátké cívky je kolmá k ose dlouhé cívky a je svislá. Krátká cívka je

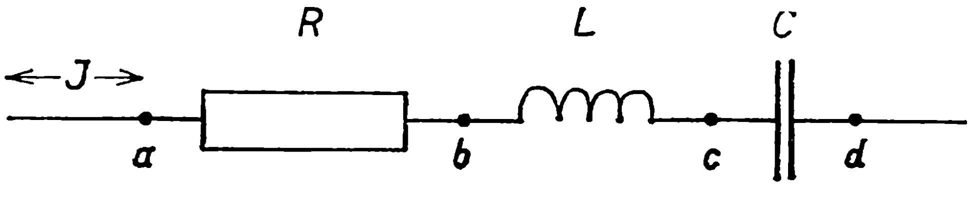


Obr. 2

připevněna na jednom konci vahadla, které je vyváženo, neprochází-li cívkami proud. Prochází-li oběma cívkami proud I, musíme přidat na delší rameno závaží o tíze P, abychom obnovili rovnováhu. Rameno vahadla, které nese závaží, má délku l. Vypočítejte proud I. Můžeme tento přístroj použít jako wattmetr?

Eva Havránková

3. Odpor o hodnotě R, indukční cívka o indukčnosti L a kondenzáto o kapacitě C jsou zapojeny v sérii (obr. 3). Protéká jimi střídavý proud I



Obr. 3

Nechť hodnota odporu $R = 8\Omega$, induktance indukční cívky $X_L = 6\,\Omega$ kapacitance kondenzátoru $X_C = 12\,\Omega$ a efektivní hodnota proudu I je 5 A. Nalezněte efektivní napětí U_{ab}, U_{bc}, U_{cd} na jednotlivých prvcích obvodu, efektivní napětí U_{ad} a fázový rozdíl φ mezi proudem protékajícím obvodem a napětím mezi body a, d.

Eva Havránková

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány různoběžné roviny ϱ, δ. V rovině ϱ je dán trojúhelník ABC; žádný jeho vrchol neleží v rovině δ. Tímto trojúhelníkem proložte hranolovou plochu tak, aby ji rovina δ proťala v rovnostranném trojúhelníku.

Stanislav Horák

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Relativistická kinematika a dynamika

(Studijní text pro FO, kat. A)

Doc. ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., PF Hradec Králové

1. Úvod

Speciální teorie relativity, jejímž některým poznatkům je věnován tento článek, zaujala za 80 let své existence nezastupitelné místo nejen ve vědecké fyzice a jejích technických aplikacích, ale našla své postavení i ve školské fyzice, a to nyní i na středních školách. I když *Albert Einstein* předložením své teorie v r. 1905 v jediném dvacetišestistránkovém článku náhle vyřešil čtvrt století trvající krizi fyziky 19. století, nenašel u řady fyziků dlouho pochopení pro své myšlenky. Snad to bylo proto, že problém řešil radikálním způsobem: vyslovil dva postuláty, tzv. *principy relativity*, a to tak, aby důsledky, které z nich budou vyplývat, byly v souladu s experimentálními poznatky *Michelsonova pokusu* (1881)*) a *Maxwellovy teorie elektromagnetického pole* (1862—1873), zbavené však přebytečného „éteru". Podle prvního postulátu, tzv. *speciálního principu relativity*, probíhají všechny fyzikální jevy ve všech inerciálních vztažných soustavách za stejných podmínek stejně a fyzikální zákony, které tyto jevy popisují, mají v těchto soustavách stejný tvar (stejný matematický popis). Podle druhého postulátu, tzv. *principu konstantní rychlosti světla*, je rychlost světla ve vakuu ve všech inerciálních vztažných soustavách stejná, nezávislá na rychlosti zdroje ani pozorovatele.

2. *Vztažné soustavy a Lorentzova transformace*

Popis pohybu materiálních objektů vyžaduje volbu *vztažné soustavy*, která musí být vhodně definována vzhledem k jiným materiálním objektům a musí být v ní jednoznačně definován čas (pomocí vzájemně synchronovaných hodin). Přiřadíme-li ke vztažným bodům soustavy vzájemně jednoznačně trojici délkových souřadnic a hodinám časovou sou-

*) Zajímavé však je, že Einstein ve své první práci z tohoto pokusu ani z jeho zpřesněného provedení, které realizoval Michelson s Morleyem r. 1887, přímo nevychází. Prostě zde zavedl rychlost světla ve vakuu jako univerzální konstantu (stejnou ve všech vztažných soustavách). Tyto pokusy se staly východiskem pro výklad teorie relativity o něco později.

řadnici, dostáváme *soustavu prostoročasových souřadnic* ve vyšetřované oblasti. K popisu jevů se ve speciální teorii relativity volí *inerciální* vztažné soustavy. Těchto vztažných soustav může být vybráno nekonečně mnoho, přičemž jejich vzájemná poloha se obecně mění tak, že počátek jedné se vůči počátku druhé soustavy pohybuje rovnoměrně přímočaře a zachovává se přitom rovnoběžnost os.

Prostoročasové souřadnice nemají absolutní význam. Bude-li pohyb v inerciální vztažné soustavě S popsán kartézskými souřadnicemi x, y, z v čase t, bude v jiné obecně volené inerciální soustavě S′ pohyb téhož objektu popsán prostoročasovými souřadnicemi x', y', z', t'. Na rozdíl od klasického přístupu je i čas relativní; neplatí tedy obecně $t' = t$.

Jedním z úkolů teorie relativity je najít transformace prostoročasových souřadnic při přechodu z jedné vztažné soustavy do druhé. Pro přechod mezi inerciálními vztažnými soustavami S, S′ při současném splnění obou uvedených principů relativity tento problém řeší *Lorentzova transformace*, jejíž zjednodušené odvození bude nyní uvedeno.

Uvažujme, že v okamžiku $t = t' = 0$ splývají počátky obou vztažných soustav S, S′ a že v tomto okamžiku je z tohoto počátku vyslán světelný signál. Světelný rozruch se pro pozorovatele v S rozšíří za čas t do bodů prostoru o souřadnicích x, y, z, které leží na kulové ploše poloměru $r = ct$. Rovnice této kulové plochy tedy je

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \,. \tag{1}$$

Pozorovatel v soustavě S' přiřadí této události vzhledem k prvnímu principu relativity prostoročasové souřadnice x', y', z', t', které budou rovněž vázány rovnicí kulové plochy. Současně se však podle druhého principu relativity bude signál i v S' šířit stejnou rychlostí c jako v S (uvažujeme šíření ve vakuu). Proto mezi souřadnicemi v S′ platí vztah

$$x'^2 + x'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \,. \tag{2}$$

Předpokládejme pro jednoduchost, že inerciální vztažné soustavy S, S′ se pohybují tak, že osy x, x' splývají a počátek O' se pohybuje po ose x rychlostí v (viz obr. 1). Za tohoto předpokladu pro ypsilonové a zetové souřadnice platí $y' = y$, $z' = z$. Z rovnic (1), (2) pak vyplývá jednoduchý vztah

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \tag{3}$$

Hledejme, jaké transformační rovnice plynou z tohoto vztahu. Z tvaru (3) lze očekávat, že tyto transformační rovnice budou lineární ve tvaru

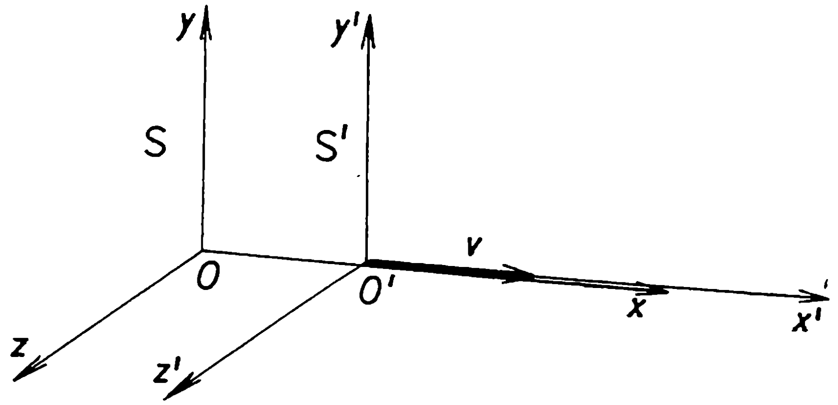
$$x' = a_x x + b_x t \,, \tag{4}$$

$$t' = a_t x + b_t t \,. \tag{5}$$

Uvažme nyní, že při rychlosti $v \to 0$ musí x' přejít na x a t' na t. Z toho lze usoudit, že konstanty a_x, b_t budou stejné; označíme je společným symbolem γ ($a_x = b_t \equiv \gamma$). Dále zavedeme nové konstanty a, b podle vztahů $b_x = \gamma b$, $a_t = \gamma a$. Pak přejdou rovnice do jednoduššího tvaru

$$x' = \gamma(x + bt) \,, \tag{6}$$

$$t' = \gamma(ax + t) \,. \tag{7}$$



Obr. 1

Bude-li událost probíhat v počátku O' soustavy $S'(x' = 0)$, musí být $x = vt$. Pak z (6) $(\gamma \neq 0)$ vyplývá $b = -v$. Dosadíme-li pak rovnice (6), (7) do vztahu (3), dostaneme podmínku

$(1 - \gamma^2 + \gamma^2 c^2 a^2)x^2 + 2\gamma^2 (v + ac^2)xt + (\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 - c^2)t^2 = 0,$

která musí být identicky splněna pro každé x, t. Tzn., že musí být nezávisle rovny nule koeficienty u x^2, xt, t^2. Položíme-li koeficient u t^2 roven nule, dostaneme

$$\gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$$

a odtud

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} . \tag{8}$$

Položíme-li roven nule koeficient u xt, dostaneme

$$a = -\frac{v}{c^2} .$$

Pak rovnice (6), (7) nabudou tvaru

$$x' = \gamma(x - vt) , \tag{9}$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) . \tag{10}$$

Nazývají se Lorentzovy transformační vztahy a platí pro přechod ze soustavy S do S'. Pro inverzní přechod od S' do S dostaneme transformační vztahy tak, že zaměníme čárkované veličiny za nečárkované a naopak a uvážíme, že $v' = -v$, přičemž $\gamma' = \gamma$. Pak

$$x = \gamma(x' + vt') , \quad y = y' \quad z = z' \tag{11}$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) . \tag{12}$$

3. *Relativistické skládání rychlostí*

Uvažujeme částici, která se pohybuje v rovině (x, y) soustavy S; její pohyb nechť je popsán obecnými funkcemi $x = x(t)$; $y = y(t)$, $z = 0$.

Pak složky rychlosti budou

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \; u_y = \frac{dy}{dt}, \; u_z = 0 \tag{13}$$

Pohyb téže částice v soustavě S′ bude popsán funkcemi $x' = x'(t')$, $y' = y'(t')$, $z' = 0$ a složky její rychlosti zde budou

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \; u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \; u'_z = 0\,. \tag{14}$$

Naším úkolem je najít vztah mezi rychlostmi (13), (14). Diferencováním transformačních vztahů (11) a (12) dostáváme

$$dx = y(dx' + v dt'), \; dy = dy', \; dt = \gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right).$$

Pak po dosazení do (13), dělením čitatele a jmenovatele dt' s přihlédnutím k (14) a po vyjádření činitele γ dostaneme hledané transformační vztahy:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \; u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \tag{15}$$

Pro inverzní přechod od S do S′ opět vzájemně zaměníme čárkované a nečárkované rychlosti a místo v píšeme $-v$. Z výsledku (15) vyplývá, že součet dvou rychlostí nikdy nemůže překročit rychlost c, která tak má charakter mezní rychlosti. Demonstruje to i následující příklad s limitně volenými hodnotami rychlostí.

Příklad 1

Z fotonové rakety, jejíž rychlost v soustavě pozorovatele se blíží rychlosti c, byl ve směru a orientaci jejího pohybu vyslán rádiový signál (rychlostí c). Určete rychlost signálu v soustavě pozorovatele.

Řešení:

Zvolíme-li za soustavu pozorovatele soustavu S, za soustavu pevně spojenou s raketou soustavu S′ a za směr pohybu rakety osu $x \equiv x'$, můžeme použít vzorců (15). Pak $v \to c$, $u'_x = c$ a

$$u_x = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = c\,.$$

Tedy c plus c nedá $2c$, jak by vyšlo podle klasické fyziky, ale jenom c — rychlost c nemůže být překročena.

Příklad 2

Částice se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{u}'$ v rovině (x', y') soustavy $\boldsymbol{S}'$ tak, že rychlost svírá s osou x' úhel φ'. Určete úhel φ, který svírá rychlost $\boldsymbol{u}$ této částice v soustavě $\boldsymbol{S}$ s osou x.

Řešení:

Rychlost $\boldsymbol{u}'$ rozložíme do složek: $u'_x = u' \cos \varphi'$, $u'_y = u' \sin \varphi'$, které transformujeme podle vzorců (15):

$$u_x = \frac{u' \cos \varphi' + v}{1 + \dfrac{vu' \cos \varphi'}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u' \sin \varphi'}{1 + \dfrac{vu' \cos \varphi'}{c^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Pak pro úhel φ platí

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{u_y}{u_x} = \operatorname{arctg} \frac{u' \sin \varphi'}{u' \cos \varphi' + v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

4. *Relativistická hmotnost*

Druhý Newtonův pohybový zákon ve tvaru běžně užívaném v klasické mechanice $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ v relativistické mechanice neplatí. Při přechodu z jedné inerciální vztažné soustavy do druhé by se jeho tvar měnil, což odporuje prvnímu principu teorie relativity. V opačném případě by totiž bylo možno mechanickými pokusy prokázat absolutní pohyb inerciálních vztažných soustav. Ukázalo se však, že původní Newtonova formulace tohoto zákona

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{u}) \tag{16}$$

je invariantní vzhledem Lorentzově transformaci, tzn., že v soustavě $\boldsymbol{S}'$ bude mít tvar

$$\boldsymbol{F}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(m'\boldsymbol{u}') \,. \tag{17}$$

Zde jsme předpokládali (na rozdíl od klasické mechaniky), že hmotnost uvažované částice není invariantem. To si ukážeme, přetransformujeme-li výrazy (16) pro přechod od $\boldsymbol{S}$ do $\boldsymbol{S}'$. Uvažujeme pro jednoduchost, že částice bude mít v soustavě $\boldsymbol{S}'$ rychlost $\boldsymbol{u}'$ o složkách $u'_x \equiv u'$, $u'_y = 0$, $u'_z = 0$. V soustavě $\boldsymbol{S}$ bude mít rychlost vzhledem k výsledkům (15) složky

$$u_x \equiv u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{v\,u'}{c^2}}, \; u_y = 0, \; u_z = 0. \tag{18}$$

Pro x-ovou složku síly (16) můžeme psát

$$F_x \equiv F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}(m\,u) \,. \tag{19}$$

Pro úpravu tohoto výrazu diferencujeme vztah (12):

$$\mathrm{d}t = \gamma\left(\mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\,\mathrm{d}x'\right).$$

Po dělení $\mathrm{d}t'$ při uvážení $\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t' = u'$ vypočteme

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{v}{c^2}\,u'\right)^{-1} \tag{20}$$

Pak dosazením (18) a (20) do (19) dostaneme

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left[\frac{m}{\gamma}\,\frac{u' + v}{\left(1 + \frac{vu'}{c^2}\right)^2}\right]. \tag{21}$$

Uvažujme zvláštní případ pohybu částice, při němž $u' \to 0$ (na rychlost v se zatím žádné podmínky nekladou). Pak je i $vu'/c^2 \to 0$. Protože $v = \text{konst.}$, přejde výraz (21) do tvaru

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{m}{\gamma}\,u'\right) = \mathrm{F}' \tag{22}$$

Zde jsme bez důkazu přijali, že síla působící na částice ve směru vzájemné rychlosti **v** vztažných soustav S, S' (mající směr os x, x') se při přechodu ze soustavy S do S′ zachovává. Ze srovnání výrazů (17) a (22) vidíme, že tvar pohybového zákona (16) se při přechodu z S do S′ za použití Lorentzovy transformace a jejich důsledků zachoval. Protože $u' \to 0$, je zřejmé, že člen m/γ ve vztahu (22) má význam klidové hmotnosti částice m_0 v soustavě S′. Tedy

$$\frac{m}{\gamma} \equiv m\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = m_0, \tag{23}$$

neboli

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{24}$$

To je hledaný výraz pro *relativistickou hmotnost*, udávající závislost hmotnosti částice na její rychlosti v pozorovací soustavě. Je zřejmé, že pro $v \neq 0$ je $m > m_0$. Klidová hmotnost $m_0 = \text{konst.}$ je základní charakteristikou částice. Je to nejmenší hmotnost částice; je pozorována v klidové (laboratorní) soustavě částice. Aby m bylo konečné a reálné, je nutno, aby $v < c$. Tedy rychlost světla ve vakuu má význam *mezní rychlosti* materiálních objektů.

V uvažovaném případě, kdy v S' byla rychlost částice zanedbatelně malá, dostává vztah (22) vzhledem k (23) jednoduchý tvar

$F' = m_0 \dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t'} \equiv m_0 a'$, používaný v klasické mechanice.

Příklad 3

Jaká musí být rychlost elektronu, aby se jeho relativistická hmotnost rovnala klidové hmotnosti protonu ($m_{\mathrm{q}} = 183_{\mathrm{q}},1\ m_e$)?

Řešení:

Z výrazu (24) vyplývá ($m_0 = m_e$, $m = m_{\mathrm{p}}$)

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2}$$

Protože však druhá mocnina podílu hmotností je velmi malá vzhledem k jedničce, rozvineme odmocninu v řadu, u níž s dostatečnou přesností vezmeme první dva členy:

$$v \approx c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2\right].$$

Číselně

$$v \approx c - \frac{1}{2} \cdot 2{,}998 \,.\, 10^8 \,.\left(\frac{1}{1836{,}1}\right)^2 \mathrm{m\,.\,s^{-1}} = c - 44{,}5\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}\,.$$

5. *Vzájemná vazba hmotnosti a energie*

Bude-li v pozorovací vztažné soustavě S působit na částici ve směru osy x síla velikosti F, vykoná elementární práci, která se projeví přírůstkem kinetické energie částice. Postupně platí

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = F\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mu)\mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,u + m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u$, přechází tento vztah do tvaru

$$dE_{\mathrm{k}} = u^2\mathrm{d}m + m\,u\,\mathrm{d}u\,. \qquad (25)$$

Z výrazu (24) pro hmotnost, v němž v uvažovaném případě nahradíme rychlost v rychlostí u, vyplývá vztah

$$m^2(c^2 - u^2) = m_0^2c^2\,.$$

Zde na levé straně vystupuje součin obsahující dvě proměnné m, u a na pravé straně je konstanta. Diferencováním tohoto vztahu dostaneme

$$2m\,\mathrm{d}m\,(c^2 - u^2) + m^2\,(-2u\,\mathrm{d}u) = 0\,,$$

neboli

$$u^2\,\mathrm{d}m + mu\,\mathrm{d}u = c^2\mathrm{d}m\,.$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme upravit pravou stranu výrazu (25):

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = c^2\mathrm{d}m\,.$$

Tento vztah lze snadno integrovat. Uvažujme, že částice se urychluje z klidového stavu v S, v němž má nulovou kinetickou energii a klidovou hmotnost m_0, do obecného pohybového stavu, v němž má kinetickou energii E_{k} a hmotnost m. Pak

$$\int_0^{E_{\mathrm{k}}} \mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = c^2\int_{m_0}^{m} \mathrm{d}m\,,$$

neboli

$$E_k = c^2 (m - m_0)\,. \tag{26}$$

Tento vztah můžeme zapsat ve tvaru

$$E_k = E - E_0\,, \tag{27}$$

kde

$$E = mc^2 \tag{28}$$

má význam (celkové) *vlastní energie částice* v uvažované vztažné soustavě S a

$$E_0 = m_0c^2 \tag{29}$$

klidové vlastní energie) částice* v téže soustavě.

Vztahy (28), (29) jsou nejzávažnějšími výsledky Einsteinovy teorie relativity a vyjadřují *zákon vzájemné vazby (souvislosti) hmotnosti a energie* jako dvou nejzákladnějších charakteristik hmoty. Je-li nabitá částice o náboji q urychlena z klidu elektrostatickým polem o potenciálním rozdílu U, bude mít kinetickou energii, která se určí ze zákona zachování energie $E_k + E_p =$ konst., neboli v našem případě $E_k = qU$. O tuto hodnotu qU vzroste podle (27) vlastní energie částice (28). Celková energie částice jako součet její kinetické a potenciální energie se zachovává, kdežto vlastní energie částice se mění. Roste-li hmotnost částic v uvažované soustavě, roste i její vlastní energie. V tomto smyslu je vlastní energie ekvivalentní hmotnosti částice.

Ve zvláštním případě $v \ll c$ můžeme ve vztahu (26) po dosazení z (25) rozvinout výraz s odmocninou v řadu a omezit se jen na první dva členy rozvoje. Tak pro kinetickou energii dostaneme výraz

$$E_k = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) \approx \frac{1}{2} m_0v^2\,,$$

který užívá klasická mechanika.

Příklad 4

Elektron ($m_e = 9{,}11\,.\,10^{-31}$ kg) má počáteční rychlost $1{,}40\,.\,10^8$ m . s^{-1}. Kolik energie je nutno dodat, aby se jeho rychlost v uvažované soustavě zdvojnásobila?

Řešení:

Původní vlastní energie elektronu v uvažované soustavě:

$$E_1 = m_1c^2 = \frac{m_ec^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}\,,$$

požadovaná vlastní energie elektronu:

*) Často se E nazývá prostě *celková energie* a E_0 *klidová energie*, avšak přidáním označení „vlastní" je zdůrazněna těsná vazba těchto veličin na hmotnost částice.

$$E_2 = m_2c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2v_1}{c^2}\right)^2}}.$$

Nutno dodat energii:

$$\triangle E = E_2 - E_1 = m_e c^2 \left(\left[1 - \left(\frac{2v_1}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= 9{,}11 \quad 10^{-31} \,.\, 3{,}00^2 \,.\, 10^{16} \left(\left[1 - \left(\frac{2{,}80}{3{,}00} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. - \left[1 - \left(\frac{1{,}40}{3{,}00} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right) \mathrm{J} = 1{,}36 \,.\, 10^{-13}\, \mathrm{J} = 0{,}847\ \mathrm{MeV}.$$

6. *Úlohy k řešení*

1. V soustavě S′, pohybující se rychlostí $v = 0{,}900\ c$ vzhledem k soustavě S tak, že osy x', x splývají, byly v orientaci kladné a záporné osy y' vypuštěny dva světelné paprsky (v této soustavě tedy svírají úhel 180°). Vypočtěte, jaký úhel svírají v soustavě S. [$\alpha = 51°41'$].

2. Jak vzroste hmotnost protonu ($m_p = 1{,}67 \,.\, 10^{-27}$ kg), když získá kinetickou energii 500 MeV?

[$m = 2{,}56 \quad 10^{-27}$ kg $= 1{,}53\ m_p$]

3. Jakou rychlost má mion ($m_\mu = 207\ m_e$ s energií 1,00 GeV? [$v = 0{,}995\ c$].

4. Rychlost elektronu je 0,900 c. Určete relativní chybu, která vznikne při výpočtu jeho kinetické energie podle klasické teorie. [68,7 %].

5. Jaká je rychlost částice, je-li její kinetická energie rovna energii klidové? $\left[v = \frac{c}{2} \sqrt{3} \right]$

6. Elektron ($m_e = 9{,}11 \,.\, 10^{-31}$ kg, $e = 1{,}60 \quad 10^{-19}$ C) je urychlen v rentgence v poli o potenciálním rozdílu $U = 50{,}0$ kV. Určete rychlost elektronu:

a) podle relativistické teorie,

b) podle klasické teorie a určete příslušnou relativní chybu výsledku. [ad a) $v = 1{,}24 \,.\, 10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$,
ad b) $v_k = 1{,}33 \,.\, 10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$, $\delta = 7{,}3$ %].

Literatura k dalšímu studiu:

[1] Bartuška, K.: Deset kapitol ze speciální teorie relativity. Praha, SNP 1980

[2] Fuka, J.: Základní poznatky teorie relativity. Praha, SNP 1973

[3] Krempaský, J.: Fyzika. Bratislava, Alfa 1982.

Kalendár M-F: november 1985

2. XI. 1815 sa narodil *George Boole*, írsky matematik. Pôsobil na Queens College v Dubline. Vytvoril modernú formálnu logiku a prispel k zjednocovaniu logiky a matematiky. V roku 1854 vydal svoju základnú prácu „Skúmanie zákonov myslenia".

3. XI. 1635 sa narodil *Johann Ch. Sturm*, nemecký matematik, astronóm a fyzik. Vydal v nemčine všetky práce Archimedove. Prispel k popularizácii matematiky.

9. XI. 1885 sa narodil v Elmshorne neďaleko Hamburku *Hermann Weyl*, americký matematik nemeckého pôvodu. Pôsobil v Zürichu, Göttingen a Princetone. Člen Americkej akadémie umení a vied a iných AV. Zaoberal sa hlavne teóriou funkcií komplexnej premennej, diferenciálnymi a integrálnymi rovnicami, teóriou spojitých grúp i teóriou relativity. Zaslúžil sa o modernú interpretáciu časopriestoru. V roku 1927 získal Medzinárodnú Lobačevského cenu.

15.XI. 1630 zomrel v Rezne *Johannes Kepler*, nemecký astronóm, fyzik a matematik. Objavil tri základné pohybové zákony planét, prispel k podpore Kopernikovej heliocentrickej sústavy. Pôsobil v Štajerskom Hradci, v Prahe a Linci. Rozvíjal metódy, ktoré neskôr viedli k objavu infinitezimálneho počtu.

17. XI. 1790 sa narodil *August Ferdinand Möbius*, nemecký astronóm a matematik. Bol profesorom na univerzite v Lipsku a riaditeľom observatória. Známe sú jeho práce v oblasti projektívnej geometrie. Podal novú klasifikáciu kriviek a plôch. Patrí k zakladateľom viacrozmernej geometrie a topológie.

19. XI 1900 sa narodil v Kazani *Michail Alexejevič Lavrentev*, sovietsky matematik a mechanik. Pracoval v oblasti variačného počtu, teórii komplexnej premennej. Rozriešil veľa problémov konformného a kvazikonformného zobrazenia. Prispel k vyriešeniu mnohých praktických otázok mechaniky a aerodynamiky.

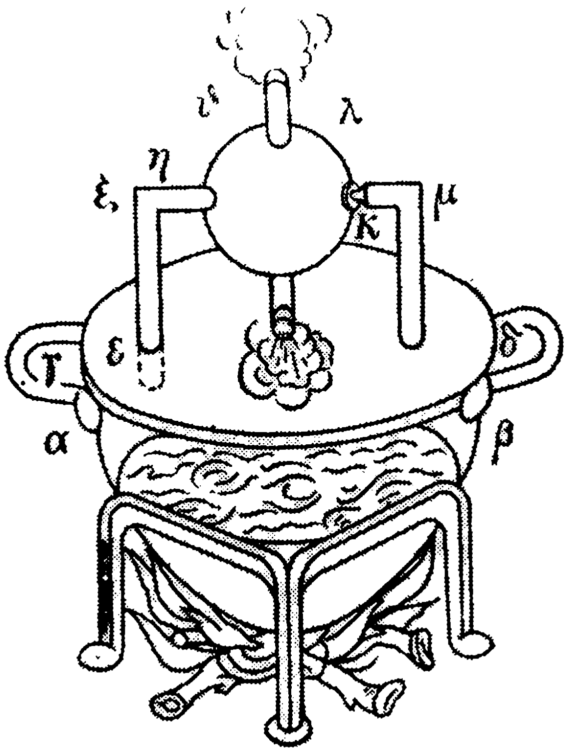
20. XI. 1945 zomrel v Cambridgi *Francis William Aston*, anglický fyzik. Bol profesorom na Trinity College, členom Kráľovskej spoločnosti, AV ZSSR. Rozvíjal hmotnostnú spektroskopiu. V roku 1922 získal Nobelovu cenu za chémiu za objav veľkého počtu izotópov viacerých nerádioaktívnych prvkov.

21. XI. 1915 sa narodil v Charkove *Jevgenij Michailovič Lifšic*, sovietsky teoretický fyzik. Zaujímal sa o teóriu magnetizmu, jadrovú fyziku, teóriu fázových prechodov, teóriu gravitácie, kozmológiu. Spolupracoval s L. S. Landauom.

21. XI. 1970 zomrel *Chandrasekhara Venkata Raman*, indický fyzik. Zaujímal sa o optiku, akustiku, molekulovú fyziku. Objavil nový jav v spektre pri ožiarení látky monochromatickým svetlom. V roku 1930 dostal Nobelovu cenu za výskumné práce v difúzii svetla. dj

Hérónova aeolipila

Na obrázku vidíme patrně nejstarší tepelný motor světa, reakční turbinku, kterou popsal a vyobrazil ve svém díle *Hérón Alexandrijský*. Z kotlíku je pára přiváděna do koule jedním dutým čepem; při proudění páry zahnutými rameny se dostane celý rotor do prudkého otáčivého pohybu. Je zajímavé, že se vynálezci v dalších staletích nezabývali využitím tohoto principu, ale dali si práci s vyvíjením parních strojů, takže až *Laval* zkonstruoval v 19. století užitečnou parní turbinu (1883).



Hérón, zvaný též Méchanikos, žil nejspíše v 1. století n. l. a patřil k největším antickým matematikům, fyzikům a technikům. Jeho spis *Mechanika* žije dodnes v učebnicích celého světa, které obsahují vzorce pro rovnováhu na jednoduchých strojích. Hérón však v ní popsal i složité mechanismy a stroje, vytvořil encyklopedii antické techniky. Dvoudílnou *Pneumatiku* věnoval mechanice plynů, z ní je i náš obrázek. V díle *Peri dioptras* popsal nivelizační zařízení pro měření úhlů, v *Katopritce* (tj. nauce o odrazu světla) odvodil zákon odrazu z předpokladu, že cesta světelného paprsku mezi dvěma body při odrazu je vždy nejkratší ze všech myslitelných cest. Tuto ideu obnovil po 1500 letech francouzský právník *Pierre de Fermat*, který se proslavil i řadou matematických prací.

Vladimír Malíšek

47 233

Čo je matematika?

Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu.

G. Polya

Matematika je akoby sila ľudského ducha povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života.

J. Fourier

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 §, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

ROČNÍK 64, 1985/86
PROSINEC

(4)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

MATEMATIKA

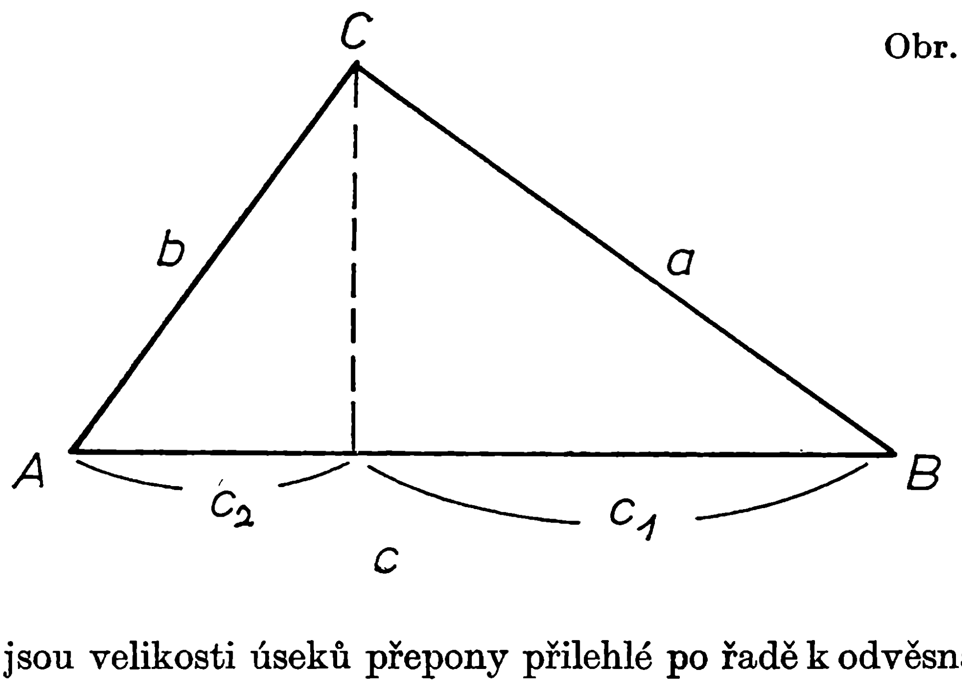
Pythagorova věta a její zobecnění

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

Pythagorova věta patří k nejstarším a v široké veřejnosti patrně i k nejznámějším matematickým poznatkům. Kdybyste byli požádáni o její důkaz, asi byste postupovali způsobem uvedeným ve většině současných středoškolských učebnic, které ukazují, že Pythagorova věta je důsledkem vět Euklidových:

Protože v libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami o velikostech a, b a s přeponou o velikosti c (viz obr. 1) je

$$a^2 = c \cdot c_1, \qquad b^2 = c \cdot c_2,$$



Obr. 1

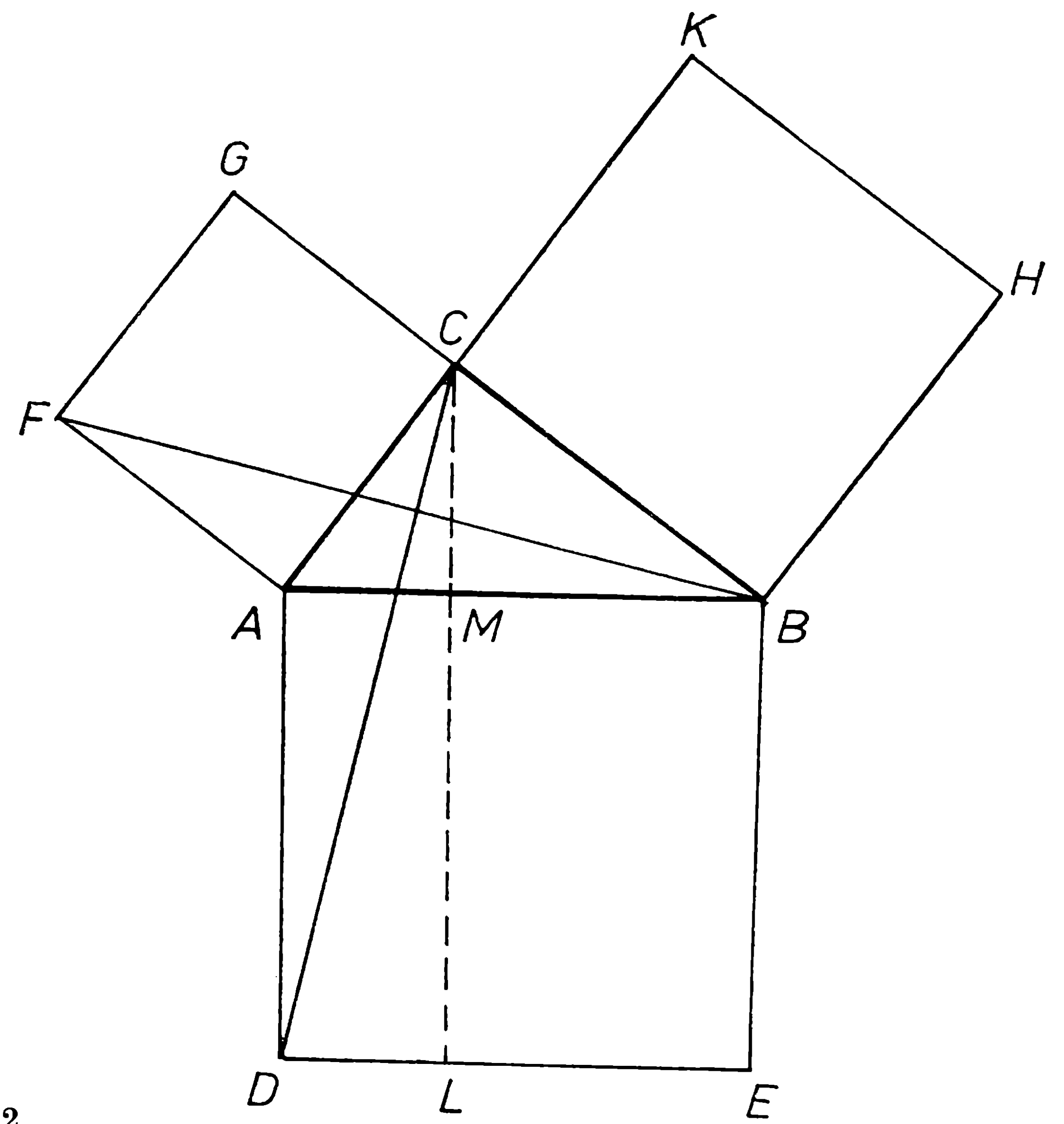
kde c_1, c_2 jsou velikosti úseků přepony přilehlé po řadě k odvěsnám BC, AC, platí též

$$a^2 + b^2 = c \cdot c_1 + c \cdot c_2 = c(c_1 + c_2) = c^2,$$

neboť

$$c_1 + c_2 = c.$$

Vzhledem k tomu, že toto odvození je v učebnicích chápáno většinou jen jako doplňující poznámka a že na základní škole Pythagorova věta dokazována není, nebude na škodu, seznámíme-li se s jiným jejím důkazem. Nahlédneme do historie a ukážeme si, jakým způsobem dokázal Pythagorovu větu ve 3. století před naším letopočtem řecký matematik Euklides ve svých slavných Základech.



Obr. 2

Vyjdeme z obr. 2, na němž je sestrojen pravoúhlý trojúhelník ABC, čtverec $ABED$ nad jeho přeponou a čtverce $AFGC$, $BCKH$ nad jeho odvěsnami; jejich obsahy označíme po řadě S, S_1, S_2. V obdélnících $ADLM$ a $BELM$, jejichž obsahy jsou po řadě S'_1 a S'_2, je vrchol M patou výšky trojúhelníku ABC příslušné k jeho přeponě a bod L průsečík přímek CM a DE; pro součet obsahů těchto obdélníků platí

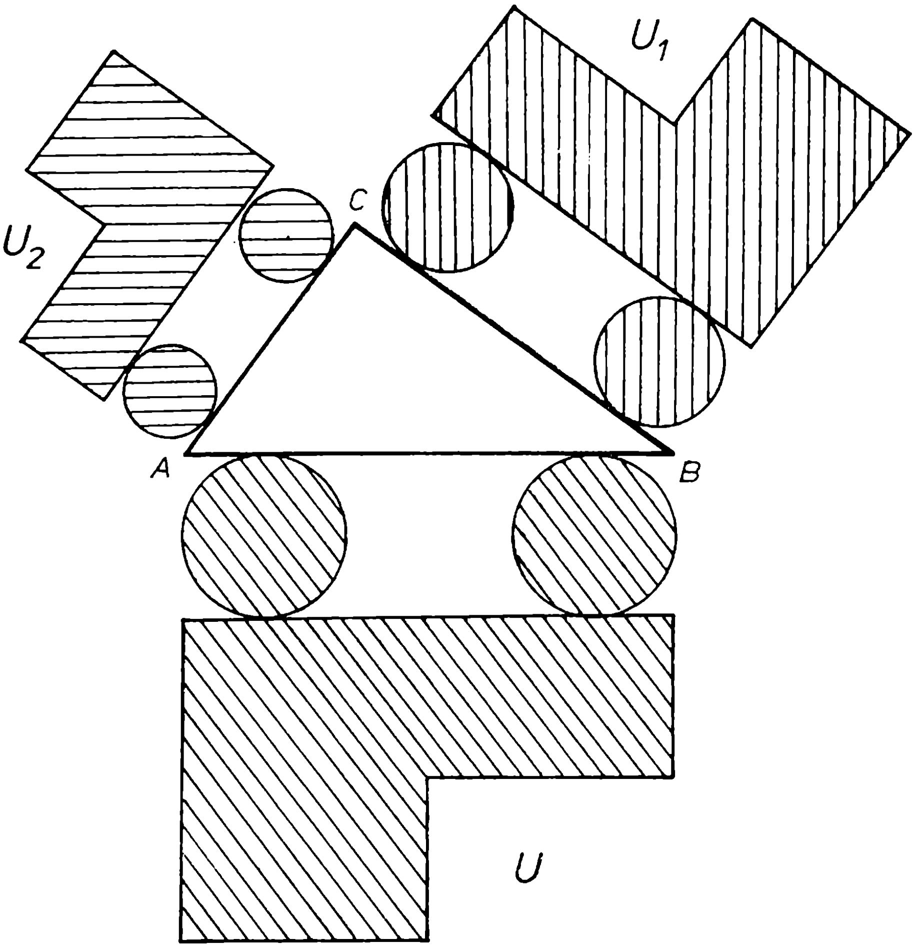
$$S'_1 + S'_2 = S$$

Dokážeme nejprve, že je $S_1 = S'_1$.

Protože přímky AD a CM jsou rovnoběžné, má výška trojúhelníku CAD příslušná k jeho straně AD velikost $|AM|$, takže pro obsah S_{CAD} trojúhelníku CAD platí

$$S_{CAD} = \frac{|AD| \, . \, |AM|}{2} = \frac{1}{2} S'_1 \, .$$

Protože také přímky AF a BC jsou rovnoběžné, má výška trojúhelníku FAB příslušná k jeho straně AF velikost $|FG|$, takže pro obsah S_{FAB} trojúhelníku FAB platí



Obr. 3

$$S_{FAB} = \frac{|AF| \, . \, |FG|}{2} = \frac{1}{2} S_1 \, .$$

Vzhledem k tomu, že v trojúhelnících CAD, FAB je

$$|AD| = |AB| \, , \quad |AC| = |AF|$$

a že i jejich vnitřní úhly DAC a BAF jsou shodné (neboť velikost každého z nich je rovna součtu velikosti pravého úhlu a velikosti úhlu CAB), platí podle věty (sus), že oba tyto trojúhelníky jsou shodné:

$$\triangle \, CAD \cong \triangle \, FAB \, .$$

Je tedy rovněž

$$S_{CAD} = S_{FAB}$$

a užijeme-li výše odvozených rovností pro tyto obsahy, dostaneme, že je

$$S_1 = S'_1 \, .$$

Využijete-li podobným způsobem vlastností trojúhelníků CBE a HBA, dostanete, že je též $S_2 = S'_2$. Dosazením za S'_1 a S'_2 do rovnosti $S'_1 + S'_2 = S$ dostáváme konečný výsledek:

$$S = S_1 + S_2 \, ;$$

tím je Pythagorova věta dokázána.

Ukažme si ještě její zobecnění, které je podáno v knize VI. Základů.

Euklides zde dokazuje, že Pythagorova věta neplatí jen pro čtverce, ale i pro některé další podobné útvary.

Vezměme libovolné útvary U, U_1, U_2 sestrojené nad přeponou a odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku ABC na obr. 3 tak, že útvar U_1 je zmenšeným obrazem útvaru U v podobnosti s koeficientem $\frac{a}{c}$ a útvar U_2 je zmenšeným obrazem útvaru U v podobnosti s koeficientem $\frac{b}{c}$; a, b, c jsou přitom jako obvykle velikosti odvěsen a přepony trojúhelníku ABC. Označíme-li obsahy útvarů U, U_1, U_2 po řadě S, S_1, S_2, platí

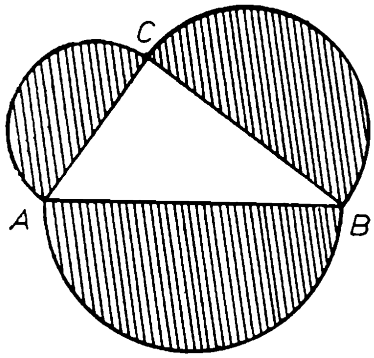
$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{a}{c}\right)^2, \quad \frac{S_2}{S} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

sečtením těchto rovností dostáváme

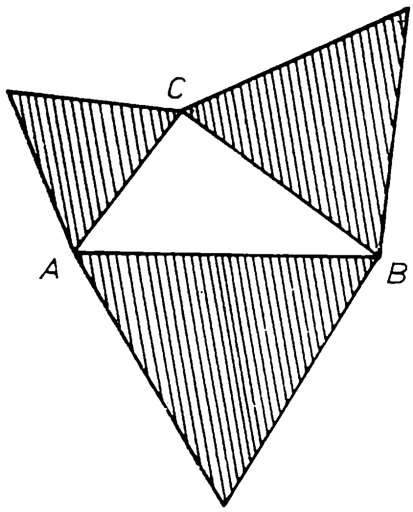
$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1\,,$$

odkud plyne, že obsah útvaru U sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů útvarů U_1, U_2 sestrojených nad jeho odvěsnami: $S = S_1 + S_2$.

Je tedy např. obsah půlkruhu (resp. rovnostranného trojúhelníku) sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku roven součtu



Obr. 4



Obr. 5

obsahů půlkruhů (resp. rovnostranných trojúhelníků) sestrojených nad jeho odvěsnami — viz obr. 4 (resp. obr. 5); v obou těchto případech jsou totiž útvary nad odvěsnami zmenšenými obrazy útvaru nad přeponou v podobnosti s koeficientem $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$.

Připomeňme si závěrem antickou tradici o Euklidově výroku „K matematice nevede královská cesta“, kterým prý odpověděl na žádost

Ptolemaia I. — krále Egypta po smrti Alexandra Velikého —, aby ho seznámil a geometrií rychlejší cestou než pomocí Základů. Euklidovo tvrzení o tom, že královská cesta k matematice nevede, prověřil nedávno profesor Ypsilon tak, že nechal své žáky projít trasu Prašná brána—Celetná ulice —Staroměstské náměstí—Malé náměstí—Karlova ulice—Karlův most—Mostecká ulice—Nerudova ulice—Pražský hrad. (Touto cestou, jak je vám jistě známo, procházel korunovační průvod českých králů, takže se pro ni vžil název Královská cesta.) Když žáci profesora Ypsilona touto cestou prošli, byli jím vyzkoušeni z matematiky, aby tak bylo ověřeno, zda je tato cesta dovedla aspoň k nějakým matematickým poznatkům. Výsledek tohoto zkoumání plně potvrdil hypotézu Euklidovu: Královská cesta k matematice nevede!

Logické obvody s členy NAND

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

S logickými obvody různého typu se setkáváme v nejrůznějších souvislostech např. v elektronice, automatizaci, řídicí technice, kybernetice, robotice, počítačích i v domácnosti, stručně řekněme v aplikované kybernetice. Blíže si všimneme jednoho výrobku elektrotechnického průmyslu, a to *logického členu* NAND, který je moderně realizován jako integrovaný obvod. V souvislosti s ním se seznámíme s trochou teorie, abychom mohli i tvořivě a s porozuměním sestavovat logické obvody podle vlastního námětu.

Logický člen NAND je tovární výrobek; s ním související teorie je výtvor lidského ducha — náleží do logiky nebo matematiky a nazývá se *Shefferova*[1]) *funkce* nebo také logická *spojka neslučitelnosti*. Název NAND je zkratkou anglického NOT AND, česky NE A. To dobře vystihuje, že jde o negaci konjunkce čili o negaci logického součinu $a \wedge b$ (znak $\wedge$ čteme latinsky ET), tedy $\overline{a \wedge b}$. Velmi často se místo znaku $\wedge$ píše & nebo . nebo se výrokové proměnné píší prostě vedle sebe, tedy ab. Místo zápisů $\overline{a \wedge b}$, $\overline{a \,\&\, b}$, $\overline{a \,.\, b}$, $\overline{ab}$ píšeme také $a|b$, což čteme a šefr b.

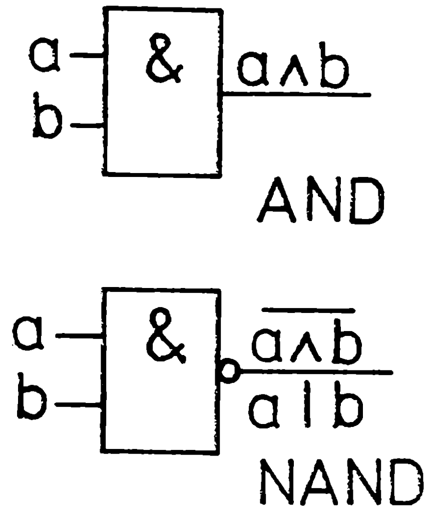
[1]) Logik Henry M. Sheffer (čti šefr), narozen 1883

Platí důležitý vztah

$$a|b \equiv \overline{a \wedge b}\,.$$[2])

Je to zřejmé z tabulky 1, v níž jsou uvedeny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných a, b, dále logická konjunkce (logický součin) $a \wedge b$ a její negace $\overline{a \wedge b}$, která se nazývá Shefferovou funkcí $a|b$. Technický element, jenž ji realizuje, je logický člen NAND, jehož schematické označení je na obr. 1. Na tomto obrázku je i člen AND, realizující logický součin $a \wedge b$. Malý kroužek u výstupu logického členu NAND značí negaci.

Obr. 1 Logické členy



Tabulka 1

		AND	NAND	
a	b	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$ $\equiv$	$a \mid b$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Je pozoruhodné, že každou Booleovu (pravdivostní nebo výrokovou) funkci umíme zapsat právě jen Shefferovou spojkou | , a tedy každý logický obvod můžeme sestavit jen z logických členů NAND. S tím ovšem souvisí transformace ostatních logických spojek, přesněji řečeno všech ostatních Booleových funkcí, na Shefferovu funkci. Platí:

---

[2]) Symbol $\equiv$ označuje, že výsledné pravdivostní hodnoty formulí po obou stranách tohoto symbolu si jsou na každém řádku tabulky rovny.

a) negace: $\neg\, a \equiv a \mid a$

$$\begin{array}{|c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$ podle 1. řádku tab. 1, podle 4. řádku tab. 1.

b) konjunkce: $a \wedge b \equiv (a \mid b) \mid (a \mid b) \equiv (a \mid b) \mid 1$

c) disjunkce: $a \vee b \equiv (a \mid a) \mid (b \mid b) \equiv \bar{a} \mid \bar{b} \equiv (a \mid 1) \mid (b \mid 1)$

d) implikace: $a \Rightarrow b \equiv a \mid (b \mid b) \equiv a \mid \bar{b} \equiv (a \mid b) \mid a$

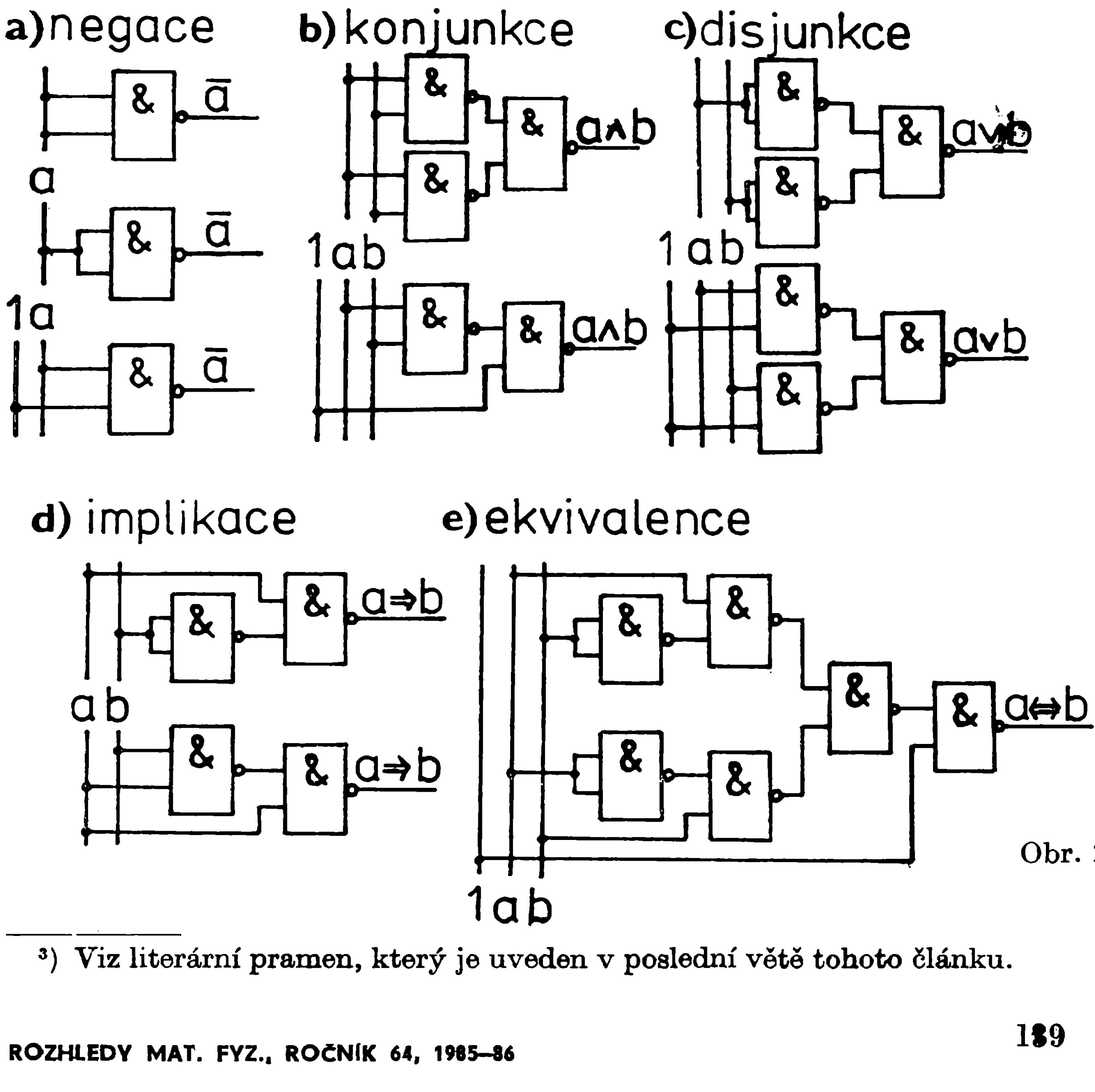
e) ekvivalence: $a \Leftrightarrow b \equiv \{[a \mid (b \mid b)] \mid [(a \mid a) \mid b]\} \mid \{[a \mid (b \mid b)] \mid [(a \mid a) \mid b]\} \equiv$

$\equiv [(a \mid \bar{b}) \mid (\bar{a} \mid b)] \mid 1$ nebo ovšem

$\equiv \{[(a \mid b) \mid a] \mid [(a \mid b) \mid b]\} \mid 1\,.$ [3])

Čtenář se může tabulkovou metodou přesvědčit, že všechny tyto zápisy platí.

Ke všem uvedeným Booleovým funkcím připojujeme schéma logického obvodu se členy NAND, které příslušnou funkci realizují — viz obr. 2.



Obr. 2

---

[3]) Viz literární pramen, který je uveden v poslední větě tohoto článku.

Někdy se setkáváme s tím, že v Booleově funkci jsou nejen Shefferovy spojky $|$, ale také tu jsou negace, jak jsme shora uvedli.

Připojíme několik důležitých poznámek k obr. 2.

1. Každý logický člen NAND má alespoň dva vstupy a jediný výstup. Prochází-li oběma vstupy (v případě, že jsou právě dva) signál (zpravidla elektrický proud jisté úrovně napětí) z jediného vodiče, generuje tak negaci a značíme to ve schématu logického obvodu podle obr. 2 a).
2. Při odvozování formule e) pro ekvivalenci snadno zjistíme, že první výraz ve složené závorce je negací ekvivalence, tedy $\overline{a \Leftrightarrow b}$ (označované někdy $\oplus$). K získání ekvivalence $a \Leftrightarrow b$ je třeba negovanou ekvivalenci ještě jednou negovat, takže platí $\overline{\overline{a \Leftrightarrow b}} \equiv a \Leftrightarrow b$. To lze provést připojením dalšího stejného výrazu ve složené závorce spojkou $|$. Toto řešení lze obejít prostě tak, že připojíme spojkou $|$ výraz 1, což v logickém obvodu značí, že vodičem neustále prochází signál. Plyne to z toho, že

F	$\|$	1	$\equiv$	$\overline{F}$
1	0	1		0
0	1	1		1

Pod zápisem $F \mid 1 \equiv \overline{F}$ jsme jeho platnost dokázali tabulkovou metodou.[4])

Každou formuli výrokového počtu čili každou Booleovu funkci umíme transformovat na jinou Booleovu funkci, která je ekvivalentní s původní funkcí. Můžeme také říci, že v podstatě jde o nahrazení některých výrokových spojek (funktorů) jinými spojkami, popř. jde o jiná uspořádání užitých logických spojek. Mějme např. transformovat funkci

$$G = \{(a \Rightarrow b) \wedge [(\overline{a} \vee b) \wedge \overline{a}]\} \vee \overline{b}$$

na tvar, v němž budou jen spojky $\overline{}$, $\wedge$. Při požadované úpravě užijeme pravidel Booleovy algebry (1) až (4) o nahrazování logických spojek:

Nahrazení implikace negací a disjunkcí $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$, (1)

pravidlo absorpce $(A \vee B) \wedge A \equiv A$, (2)

pravidlo dvojí negace $\overline{\overline{A}} \equiv A$, (3)

de Morganovo pravidlo $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$. (4)

Nyní přistupme k požadované úpravě dané formule G:

$G = \{(a \Rightarrow b) \wedge [(\overline{a} \vee b) \wedge \overline{a}]\} \vee \overline{b}$

$\{(\overline{a} \vee b) \wedge [(\overline{a} \vee b) \wedge \overline{a}]\} \vee \overline{b}$ užito pravidlo (1),

$\{(\overline{a} \vee b) \wedge \overline{a}\} \vee \overline{b}$ užito pravidlo (2),

$\overline{a} \vee \overline{b}$ opět užito pravidlo (2),

[4]) Stejného obratu jsme použili u funkcí konjunkce, disjunkce, ekvivalence a nic nestojí proti tomu, abychom i negaci realizovali na základě zápisu $a|1 \equiv \overline{a}$.

$\overline{\overline{\bar{a} \vee \bar{b}}}$ užito pravidlo (3),

$\overline{a \wedge b}$ užito pravidlo (4) a (3).

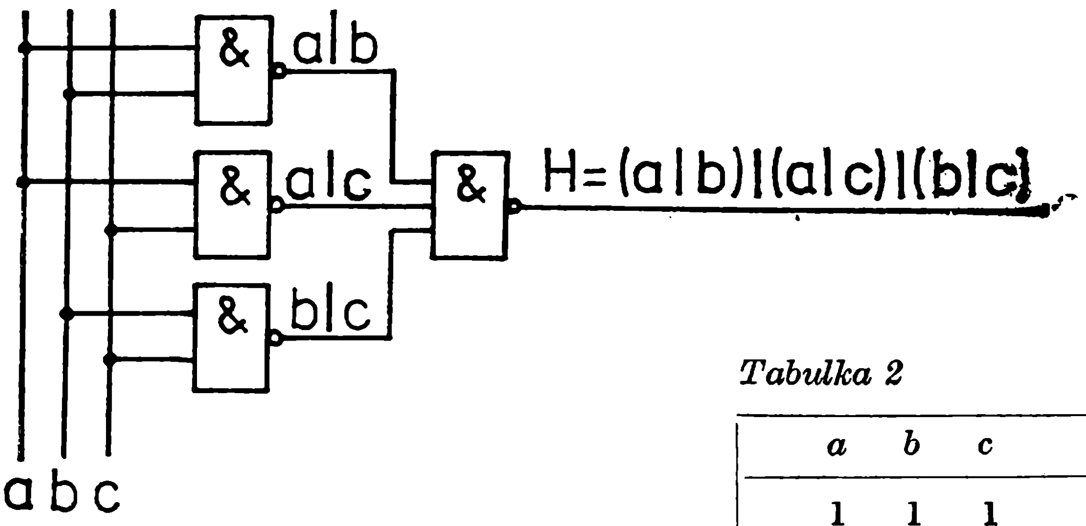
Naposledy uvedený tvar funkce G již má požadované vlastnosti, protože obsahuje jen spojku konjunkce a negace.

Čtenář, který je zběhlejší v upravách Booleových výrazů, by uměl původně zadané funkci G dát třeba tvar $a \Rightarrow \bar{b}$ nebo i tvar jiný. Některé z takových tvarů jsme uvedli na jednotlivých řádcích při úpravě formule G. Tabulkovou metodou se ovšem snadno přesvědčíme o tom, že jde jen o různé tvary téže pravdivostní funkce. Lze také psát $G = a \mid b$.

S užitím tabulky 1 a po přečtení připomínky pod tabulkou 2 o neplatnosti asociativnosti pro Shefferovu funkci čtenář jistě dokáže stanovit pravdivostní hodnoty Booleovy funkce $H(a, b, c)$:

$$H = (a \mid b) \mid (a \mid c) \mid (b \mid c)\,. \tag{5}$$

Protože ve funkci H jsou tři výrokové proměnné, bude mít tabulka pravdivostních hodnot $2^3 = 8$ řádků (viz tab. 2) Na obr. 3 je nakresleno schéma logického obvodu, který Booleovu funkci H realizuje logickými členy NAND. Tomuto logickému obvodu se dále budeme věnovat podrobněji. Zatím si všimneme, že poslední logický člen NAND tohoto obvodu má 3 vstupy a ovšem jediný výstup.



Obr. 3

Tabulka 2

a	b	c	H
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

K správnému porozumění schématům tzv. logických kombinačních obvodů, jimiž se v tomto článku zabýváme, je třeba vědět, že Shefferova funkce, ač je komutativní (jak plyne z 2. a 3. řádku její definiční tabulky 1), není asociativní, tedy neplatí pravidlo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (a & \mid & b) & \mid & c & \equiv & a & \mid & (b & \mid & c)\,, \\ \hline 1 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & & 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

jak jsme dokázali pod uvedenými formulemi pro $a = 1$, $b = c = 0$. Levá formule má hodnotu 1, pravá formule má hodnotu 0. Přesto se v technické literatuře běžně setkáváme se zápisy $a \mid b \mid c$ nebo $a \mid b \mid c \mid d$ apod. Jak je chápat?

Jako symboly pro $\overline{a \wedge b \wedge c}$, $\overline{a \wedge b \wedge c \wedge d}$ apod., což můžeme zapsat takto:

$$a \mid b \mid c \underset{\text{df}}{=} \overline{a \wedge b \wedge c}\,,$$

$$a \mid b \mid c \mid d \underset{\text{df}}{=} \overline{a \wedge b \wedge c \wedge d}\,.$$

Tabulkou 2, která definuje pravdivostní funkci H, vlastně řešíme úlohu vedoucí k sestavení logického obvodu pro tajné hlasování 3 osob (a, b, c) výboru. V případě, že hlasují „pro" alespoň 2 členové výboru, pak logický obvod umožní průchod signálu žárovkou, která se rozsvítí na znamení, že většina hlasujících členů je „pro" ($H = 1$). V případě, že hlasuje „pro" pouze 1 člen výboru nebo nehlasuje „pro" žádný člen, pak se žárovka nerozsvítí (dále užijeme místo žárovky svítivou diodu).

Nyní uvedeme úplný postup řešení úlohy o hlasovacím zařízení. Svítivá dioda se rozsvítí, právě když hlasuje „pro" trojice členů (a, b, c) nebo dvojice členů (a, b) nebo (a, c) nebo (b, c). Zapišme to booleovskou funkcí H:

$$H = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c)\,^{5)}, \tag{6}$$

resp. zapsáno v technické symbolice stručněji

$$H = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}bc\,. \tag{6'}$$

Čtenář nechť si důkladně promyslí, že funkce H vskutku splňuje všechny požadavky kladené na hlasovací přístroj (viz tab. 2).

Nyní přistoupíme k úpravě tvaru (6'). Méně zkušenému čtenáři připomeneme pravidla Booleovy algebry, kterých při úpravě užijeme. Jde o tato pravidla:

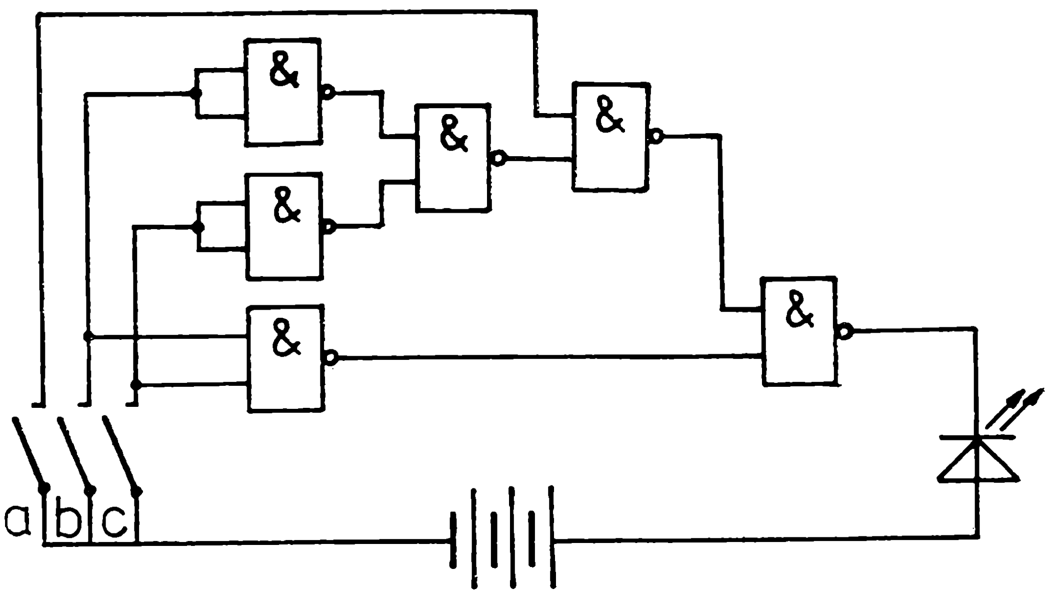
Pravidlo idempotence $A + A \equiv A$, (7)

pravidlo distributivní $AB + AC \equiv A(B + C)$, (8)

pravidlo vyloučení třetího $A + \bar{A} \equiv 1$, (9)

---

[5]) Uvedená formule je ve tvaru úplné normální formy — viz článek *Normální formy* I, II, III a IV v Rozhledech č. 3, 4, 6, 7, ročník 1976/77.



Obr.4

pravidlo komutativní $A + B \equiv B + A$, (10)
a pravidlo $A \,.\, 1 \equiv A$. (11)

Podle nich postupně dostáváme:

$$
\begin{array}{ll}
H = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + abc + \bar{a}bc + abc & \text{pravidlo (7),} \\
\quad ab(c + \bar{c}) + ac(\bar{b} + b) + bc(\bar{a} + a) & \text{pravidlo (8),} \\
\quad ab \,.\, 1 + ac \,.\, 1 + bc \,.\, 1 & \text{pravidlo (9), (10),} \\
\quad ab + ac + bc & \text{pravidlo (11).}
\end{array}
$$

S posledním tvarem H jsme se již seznámili (viz (5)). Úprava funkce (6) na poslední tvar se nazývá *minimalizace*, resp. *minimalizace booleovské funkce*. Je řada minimalizačních metod, my jsme použili k minimalizaci jen pravidla Booleovy algebry.

Tvar funkce $H = ab + ac + bc$ ještě můžeme upravit užitím distributivnosti na některý z těchto tvarů:

$$H = a(b + c) + bc\,, \qquad (5')$$
$$H = ab + c(a + b)\,, \qquad (5'')$$
$$H = b(a + c) + ac\,. \qquad (5''')$$

Schéma logického obvodu, jenž realizuje funkci (5′), je uvedeno na obr. 4. Dříve než si podrobně prohlédnete schéma na tomto obrázku, budeme transformovat tvar funkce (5′) na tvar dosahující jen spojku | ; pak již můžeme sestrojit žádaný logický obvod se členy NAND. Sledujte:

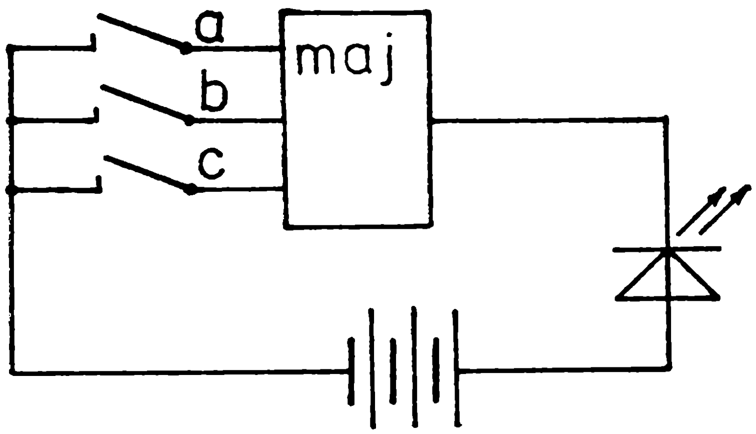
$$
\begin{aligned}
H = \; & a(b + c) + bc\,, \\
& \overline{\overline{a(b + c) + bc}}\,, \\
& \overline{\overline{a(b + c)} \;\; \overline{bc}}\,, \\
& \overline{a(b + c)} \mid \overline{bc}\,, \\
& [a|(b + c)] \mid \overline{bc},
\end{aligned}
$$

$$(a|\overline{\bar{b} \, . \, \bar{c}}) \mid \overline{bc}\,,$$

$$[a|(\bar{b}|\bar{c})] \mid (b|c)\,,$$

resp. $$\{a|[(b|b) \mid (c|c)]\} \mid (b|c)\,.$$

Čtenář snad ví, že se vyrábějí i jiné logické členy než členy NAND. Jsou to např. členy s více než jen s dvěma vstupy — jeden člen NAND se třemi vstupy jsme poznali na obr. 3. Jiné logické členy mají rovněž lichý počet vstupů á přímo realizují funkci H. Jedním z nich je tzv. *majoritní člen,* který propustí signál jen v případě, že nadpoloviční počet vstupů má hodnotu 1. Také se vyrábí *minoritní člen,* jenž propustí signál jen v případě, že menší než poloviční počet vstupů tohoto logického členu má hodnotu 1. V obr. 5 je nakresleno schéma logického obvodu s majoritním členem o třech vstupech a, b, c, který ovšem nahradí logický obvod z obr. 3 nebo obr. 4. Na dvou těchto obrázcích je do obvodu zapojena svítivá dioda, jež je schematicky nakreslena znakem se dvěma šipkami.



Obr. 5

Ponecháváme čtenáři, aby za cvičení upravil schéma pro funkci (5″) a pro (5‴) a zejména pro funkci (5), jejíž obvod z členů NAND je nakreslen na obr. 3. Pokusí-li se sám upravit funkci (6) nebo (6′) bez uvedeného návodu, jistě si uvědomí složitost a i záludnost minimalizace zvláště složitějších Booleových funkcí.

Přistoupí-li čtenář k sestrojení schémat vlastních logických obvodů, ví již, že vystačí s logickými členy NAND. Za cvičení se může pokusit o sestrojení obvodu pro tajné hlasování čtyřčlenného výboru. Hlas předsedy výboru bude rozhodující v případě rovnosti počtu hlasů „pro“. Návod: a) Sestavte tabulku pravdivostních hodnot pro 4 výrokové proměnné a, b, c, d, která bude mít $2^4 = 16$ řádků. b) K stanovení hodnoty hlasovací funkce H_1 v tabulce je třeba přiřadit jednu z proměnných předsedovi výboru (zvolme třeba proměnnou a). c) Pořídíme algebraický zápis funkce H_1 s užitím jen spojek $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$. d) Pokusíme se funkci H_1 minimalizovat. e) Převedeme funkci H_1 na tvar obsahující jen logické členy NAND. f) Nakreslíme schéma logického obvodu. Jedno z možných řešení je

$$H_1 = ab + ac + ad + bcd \equiv (a|b) \mid (a|c) \mid (a|d) \mid (b|c|d)\,.$$

Jinou úlohou, o kterou se čtenář může pokusit, je sestavení logického obvodu pro funkci V, jenž bude hlídat třeba v domácnosti, aby elektrické vedení v domácnosti nebylo přetíženo na více než 1400 W (1500 W). V domácnosti se používají elektrické spotřebiče s výkonem 1000 W, 600 W, 500 W, 400 W, 100 W; po řadě je označme proměnnými a, b, c, d, e. Čtenář nechť si uvědomí, že v tomto případě nelze užít majoritního logického členu. Místo návodu připojujeme bez komentáře výňatek z tabulky:

1000 W a	600 W b	500 W c	400 W d	100 W e	V	
1	0	0	0	1	1	$a \,.\, \bar{b} \,.\, \bar{c} \,.\, \bar{d} \,.\, e$
0	1	1	1	1	0	
0	1	1	0	1	1	$\bar{a} \,.\, b \,.\, c \,.\, \bar{d} \,.\, e$

V tomto článku jsme si všímali Schefferovy funkce, protože naše výroba dodává na trh zpravidla logické členy NAND. Existuje i *Peirceova*[7] (čti pírsova) *funkce* $a \downarrow b \equiv \overline{a \vee b}$, jež souvisí s logickým členem NOR (z anglického NE NEBO). Stejně jako Shefferova i Peirceova funkce tvoří funkčně úplný systém, což znamená, že jen pomocí této jediné funkce můžeme zapsat každou pravdivostní Booleovu funkci. Zájemce o tuto problematiku odkazujeme na článek *Dvě neklasické spojky*, uveřejněný v našem časopise č. 10, ročník 1983/84, str. 428 až 434.

FYZIKA

Krivé zrkadlo alebo hologram?

RNDr. IVAN TUREK, Katedra technickej fyziky, VŠDS, Žilina

Pri dopade vlny na teleso so zakriveným povrchom vzniká nová, odrazená vlna, ktorej vlnoplochy majú tvar odlišný od tvaru vlnoplôch dopadajúcej vlny. Ich tvar je natoľko ovplyvnený tvarom reflektujúcej plochy, že odraz na telese možno považovať za akúsi transformáciu, pri ktorej dopadajúca vlna sa mení na novú (odrazenú) vlnu.

[7]) Logik Charles Saunders Peirce žil v letech 1839 až 1914.

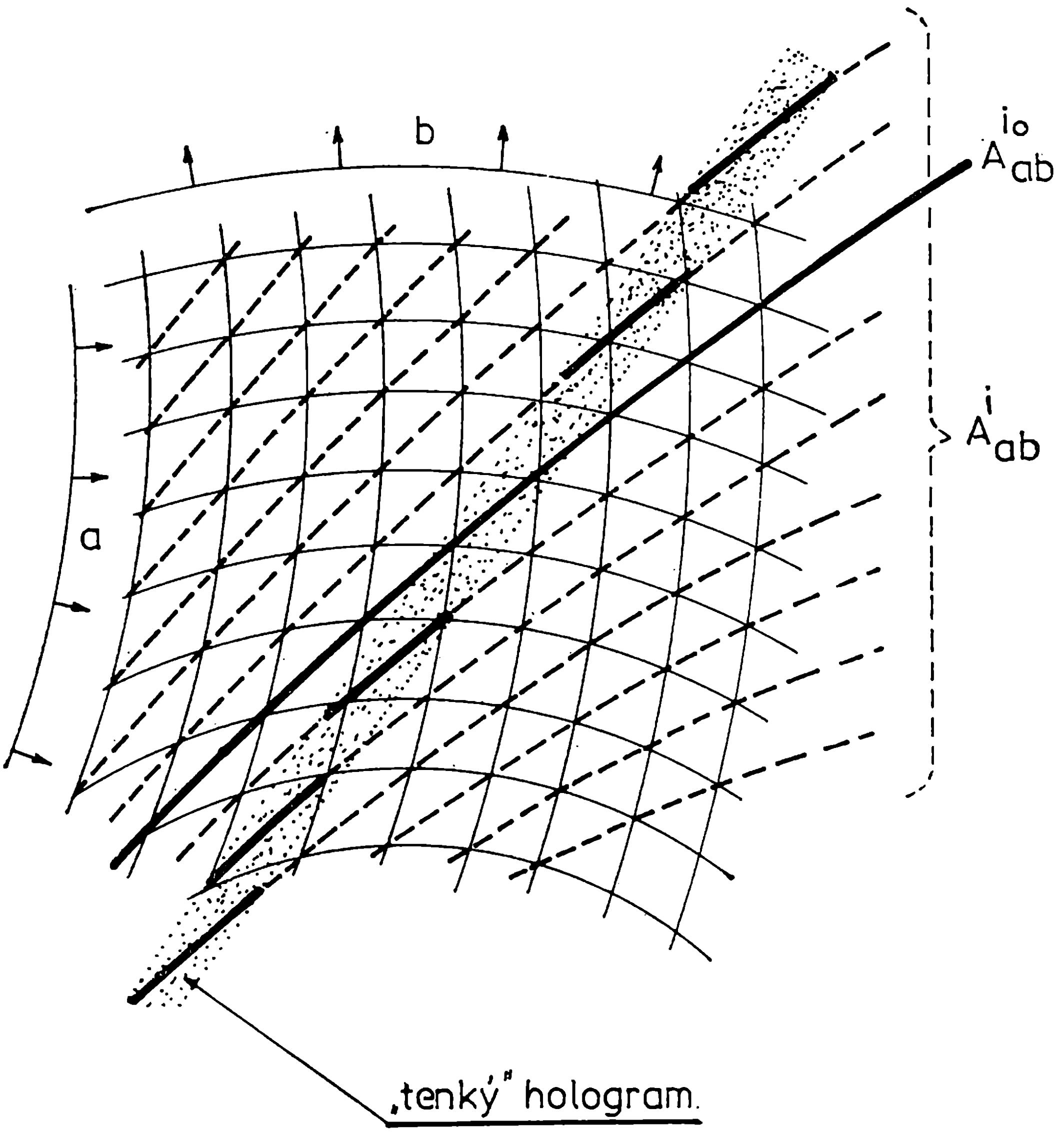
Vystáva otázka, či je možné pritom voliť tvar odrážajúcej plochy tak, aby odrazom vznikla vlna s vopred požadovaným tvarom vlnoplôch. Na túto, na prvý pohľad ťažko zodpovedateľnú otázku, môžeme dať kladnú odpoveď, ba pre širokú škálu vĺn ukážeme, aký tvar má mať reflektujúca plocha, aby sa požadovaná transformácia uskutočnila.

Za tým účelom si predstavme, že sa vyšetrovaným prostredím šíria dvě koherentné, napríklad mechanické vlny. Prvá z nich nech je zhodná s dopadajúcou vlnou (označme ju a) a druhá s vlnou odrazenou (vlna b). Plochy, na ktorých sú fázy týchto vĺn rovnaké alebo sa líšia o celistvý násobok 2π, označme $A^i{}_{ab}$, kde i je pomer rozdielu ich fáz ku 2π (rád interferencie). Keby sme vytvorili teleso, ktorého povrch je zhodný s niektorou z plôch $A^i{}_{ab}$ (napríklad plocha A^{io}_{ab} na obr. 1), odrazom vlny a na tomto telese by sa vytvorila vlna s vlnoplochami, ktorých tvar je zhodný s tvarom vlnoplôch vlny b. Je tomu tak preto, že zmenu vlnového stavu vyvolanú odrážajúcim objektom je možné považovať za dôsledok prítomnosti ,,dodatočnej vlny" vznikajúcej na rozhraní $A^i{}_{ab}$. Na vlne prešlej cez plochu $A^i{}_{ab}$ sa vplyv tejto dodatočnej vlny prejaví zmenou (zmenšením) amplitúdy vlny. To znamená, že jej vplyv je vo všetkých miestach rovnaký, a teda jej fáza je vo všetkých miestach (až na konštantnú hodnotu rovnú π) zhodná s fázou pôvodnej vlny. Pri úplnom odraze je amplitúda dodatočnej vlny zhodná s amplitúdou pôvodnej vlny, takže sa obe vlny rušia — vlna rozhraním neprechádza. Pretože fáza dodatočnej vlny je zhodná s fázou vlny a a na ploche $A^i{}_{ab}$ sú fázy vlny a a b rovnaké, je na ploche $A^i{}_{ab}$ fáza dodatočnej vlny zhodná i s fázou vlny b.

Vlna v prostredí sa šíri tak, že sa rozruch, t.j. pohyb jedného elementu prostredia, odovzdáva okolitým elementom prostredia. V dôsledku toho platí veta, podľa ktorej, ak majú dve vlny výchylky zhodné na ploche rozdeľujúcej prostredie na dve časti, majú potom výchylky zhodné v celom prostredí (veta o jednoznačnosti riešenia vlnovej rovnice). Podľa toho zo zhodnosti fáz dodatočnej vlny a vlny a na ploche $A^i{}_{ab}$ plynie, že fázy vlny vytvorenej odrazom a fázy vlny b sú zhodné v celom priestore. Ak by hodnota koeficientu odrazu na ploche $A^i{}_{ab}$ závisela od miesta takým spôsobom, že sa splnia i amplitúdové podmienky, tak potom vlna vytvorená odrazom vlny a na ploche $A^i{}_{ab}$ bude zhodná s vlnou b.

Dosiahnuť to, aby koeficient odrazu na ploche $A^i{}_{ab}$ závisel od súradnice tak, že sa splní požiadavka zhodnosti amplitúdy odrazenej vlny s amplitúdou pôvodnej vlny b, je síce ťažké, ale pre pomerne širokú triedu vĺn možné. Je tomu tak vtedy, keď amplitúda týchto vĺn sa so súradnicou nemení príliš rýchlo. Naviac musí byť ešte splnená požiadavka, aby amplitúda dopadajúcej vlny bola na celej reflektujúcej ploche $A^i{}_{ab}$ väčšia ako amplitúda vlny, ktorá sa má odrazom vytvoriť.

Pravdivosť tvrdenia o transformácii vlny a na vlnu b pri odraze na



Obr. 1

ploche $A^i{}_{ab}$ je vidieť i z geometrického pohľadu: Plochy $A^i{}_{ab}$ majú tvar symetrál vlnoplôch vĺn a a b. Zo zákona odrazu preto plynie, že pri odraze vlny a na elementárnej časti plochy $A^i{}_{ab}$ sa vytvára vlna šíriaca sa v smere vlny b.

Je zrejmé, že keď sú plochy $A^i{}_{ab}$ také, že sa na nich pri odraze z vlny a vytvára vlna b, bude sa na nich pri dopade vlny b vytvárať vlna a. Odrážajúce rozhranie tvaru $A^i{}_{ab}$ možno preto považovať za akýsi transformátor, prevádzajúci vlnu a na b a naopak.

Keby sme realizovali sústavu rozhraní $A^i{}_{ab}$ ako polopriepustné reflektujúce vrstvy, pri dopade vlny a na túto sústavu by došlo ku vzniku vlny b na každej z plôch $A^i{}_{ab}$. Súčet takto vytvorených vĺn však dáva vlnu amplitúdy výraznejšie odlišnej od nuly iba vtedy, keď príspevky generované na jednotlivých plochách $A^i{}_{ab}$ sú vo fáze, t.j. vtedy, keď vlna použitá na rekonštrukciu vlny b má vhodnú vlnovú dĺžku (zodpovedajúcu vzdialenosti plôch $A^i{}_{ab}$). Takáto transformácia vlny a na vlnu b na uvedenej sústave plôch $A^i{}_{ab}$ je analogická rekonštrukcii vlny b na objemovom holograme. Rozdiel medzi popísanou transformáciou a rekonštrukciou objemového hologramu je v tom, že v popisovanom prípade dochádza ku vzniku vlny b na plochách $A^i{}_{ab}$, zatiaľ čo pri rekonštrukcii objemového hologramu dochádza ku vzniku rekonštruovanej vlny na zázname interferenčných prúžkov, ktorých hrúbka je na rozdiel od uvažovaných plôch konečná. Dôležité je však, že maximá týchto interferenčných prúžkov ležia na plochách $A^i{}_{ab}$.

Keby sme vlnu a nechali dopadať na teleso, ktorého povrch nie je zhodný s niektorou z plôch $A^i{}_{ab}$, ale je taký, že v rôznych jeho častiach sa zhoduje s rôznymi úsekmi plôch $A^i{}_{ab}$, tiež dôjde k rekonštrukcii vlny b. Musí byť ale splnená podmienka, aby vlnová dĺžka vlny a, použitej na rekonštrukciu, mala tú istú hodnotu ako vlnová dĺžka pôvodnej vlny a. Rekonštrukcia je v takomto prípade analogická k rekonštrukcii pomocou „tenkého" hologramu (obr. 1).

Je zaujímavé, že pri rekonštrukcii pri odraze na telese, ktorého povrch je zhodný s jednou z plôch $A^i{}_{ab}$, dôjde ku vzniku vlny, ktorej tvar vlnoplôch je zhodný s tvarom vlnoplôch vlny bez ohľadu na to, či frekvencia pôvodnej vlny bola zachovaná, alebo nie. Vlna použitá na rekonštrukciu dokonca ani nemusí byť periodická.

Domnievame sa, že väčšinu čitateľov nie je potrebné upozorňovať, že uvedený jednoduchý popis procesu generácie rekonštruovanej vlny je použiteľný nie len pre mechanické vlny, ktoré boli vzaté ako príklad. Možno preto tento popis použiť pri vytváraní predstavy o vzniku rekonštruovanej vlny pri holografickom zobrazovaní, a to bez ohľadu na to, či sa jedná o optickú alebo akustickú holografiu.

Využitie rekonštrukcie vlny odrazom na telese s hladkým povrchom naráža na to, že vytvorenie telesa, ktorého povrch má tvar jedinej plochy $A^i{}_{ab}$, transformujúcej vlnu a na vlnu b, je v oblasti svetelných vĺn veľmi obtiažne, pokiaľ sa nejedná o jednoduché guľové alebo rovinné vlny[1]).

Využitie popisovaných zrkadlových „transformátorov" pre generáciu zložitejších optických vĺn, vytvárajúcich obrazy reálnych telies konečných rozmerov, zostane pravdepodobne iba v rozprávkach[2]), i keď výroba hologramov lisovaných podobne ako gramofónové platne by mohla byť komerčne atraktívna. Vytvorenie popísaných transformátorov pre oblasť akustických, resp. ultrazvukových vĺn, je technicky do-

[1]) Napríklad pre transformáciu rovinnej vlny na guľovú alebo naopak dostávame, že potrebné plochy $A^i{}_{ab}$ sú paraboloidy. Ako je známe, takéto plochy sa už dlhé roky používajú, a to v astronomických ďalekohľadoch na transformáciu rovinnej vlny od vzdialených hviezd na vlnu guľovú, alebo naopak v reflektoroch na vytvorenie rovinného zväzku z guľovej vlny bodového zdroja.

[2]) „Zrkadielko, zrkadielko povedz mi, ktorá zo žien najkrajšia je na Zemi" z rozprávky o Snehulienke.

stupné, a teda je možné ich využitie, napríklad pri spracovaní informácie nesenej akustickými vlnami v kvapalnom alebo plynnom prostredí.

Záverom by sme chceli upozorniť na to, že v článku sa jednalo o pojmový, a teda o kvalitatívny popis. Nemôžu preto z neho vyplývať tie vlastnosti holografie, ktoré sú závislé od kvantitatívnych súvislostí vyšetrovaných procesov.

No a ešte aká je odpoveď na otázku v nadpise? Keby sme pre rekonštrukciu nejakej vlny naozaj použili teleso s povrchom tvaru plochy $A^i{}_{ab}$, asi by sme hovorili o vzniku obrazu v „zázračnom" zrkadle. Na druhej strane, keby sme mali nekonečne tenký hologram, úseky plôch $A^i{}_{ab}$ by na ňom boli predstavované iba oddelenými bodmi, avšak k rekonštrukcii vlny by tiež došlo. Sotva by však niekto hovoril o odraze na zrkadle. Väčšina reálnych prípadov leží medzi uvedenými krajnosťami a možno ich preto popisovať jedným i druhým spôsobom. Či sa teda budeme na hologram dívať ako na krivé zrkadlo alebo nie, je viac — menej otázka zvyku. Napokon — keby sme mali stolík rozmerov 50×50 cm², výšky 60 cm, bol by to stôl, alebo stolička?

Možnosti využití rastrovacího elektronového mikroskopu

RNDr. ROMAN KUBÍNEK, Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

ÚVOD

Rastrovací elektronový mikroskop je přístroj předurčený pro vědecké práce v laboratořích, kde nachází uplatnění téměř ve všech oblastech vědeckého výzkumu. Vysoká rozlišovací schopnost a poměrně značná hloubka ostrosti zobrazení přináší často nové pohledy na zkoumané objekty. Rozsah použití rastrovacího elektronového mikroskopu se zvyšuje použitím rentgenového mikroanalyzátoru, který umožňuje strukturní analýzu zkoumaného vzorku využitím spektroskopie charakteristického rentgenového záření.

V tomto přehledu se zaměříme na některé možnosti rastrovacího elektronového mikroskopu při studiu morfologie povrchu a jeho zobrazení v režimu sekundárních elektronů a o ostatních metodách se pouze zmíníme.

1. VYUŽITÍ RASTROVACÍHO ELEKTRONOVÉHO MIKROSKOPU V BIOLOGICKÝCH OBORECH

Zkoumání a mikrofotografování biologických preparátů v rastrovacím elektronovém mikroskopu se značně odlišuje od zkoumání vodivých

Obr. 1. Řasinkový epitel, původní zvětšení 5200×

Obr. 2. Shluky červených krvinek, původní zvětšení 4500×

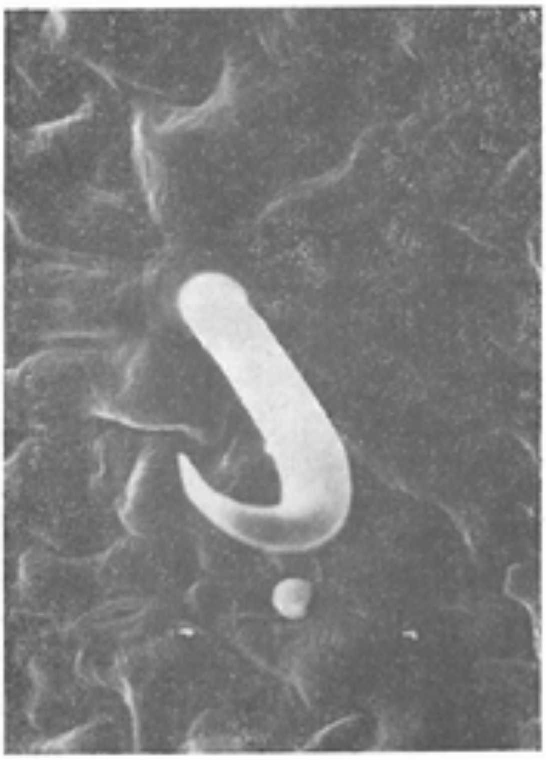
vzorků, které nepotřebují speciální úpravu. Při studiu dielektrik, kterými biologické preparáty jsou, vzniká celá řada nežádoucích jevů. Jestliže na takový vzorek dopadá primární elektronový svazek, shromažďují se na jeho povrchu pohlcené elektrony. Vlivem shlukování elektronů vznikají na povrchu vzorku nabité oblasti, které snižují kvalitu zobrazení. Kromě toho přítomnost povrchového náboje silně ovlivňuje sekundární emisi elektronů.

Existují tři metody, kterými můžeme u dielektrických vzorků potlačit efekt nabíjení:

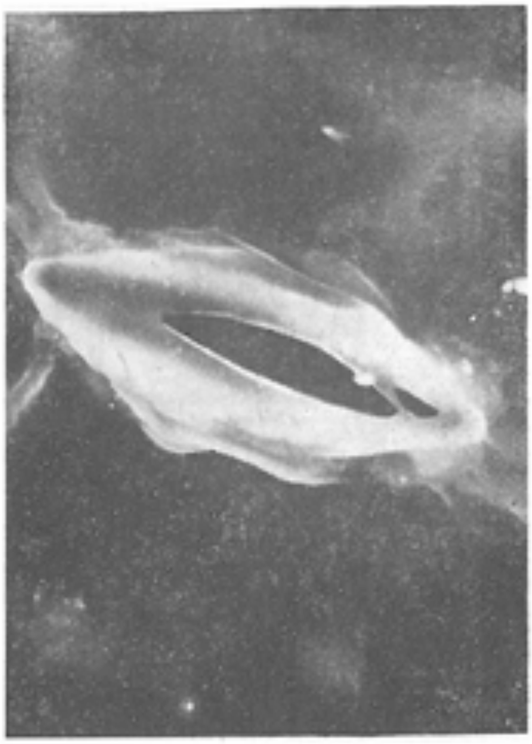
1. Nanesení vodivé vrstvy.
2. Práce při malém urychlovacím napětí.
3. Použití metody jednosnímkové expozice.

I když u většiny rastrovacích elektronových mikroskopů je možné měnit urychlovací napětí v širokých mezích, používá se nejčastěji první možnost. Nejvýhodnějšími a nejpoužívanějšími kovy jsou zlato nebo kombinace zlata a paladia. Celková vrstva naprášeného kovu má tloušťku od 1 do 100 nm, aby při větších zvětšeních nedocházelo ke zkreslení hyperjemné struktury.

Před nanesením vodivé vrstvy však musíme provést ještě tři operace: fixaci, odvodnění a vysoušení vzorku, které jsou přibližně stejné jak pro přípravu rostlinných, tak i živočišných tkání. Fixací rozumíme rychlé usmrcení buněk nebo tkání při optimálním zachování jejich tvaru.



Obr. 3. Detail trichomu, původní zvětšení 1600×



Obr. 4. Detail průduchu, původní zvětšení 4100×

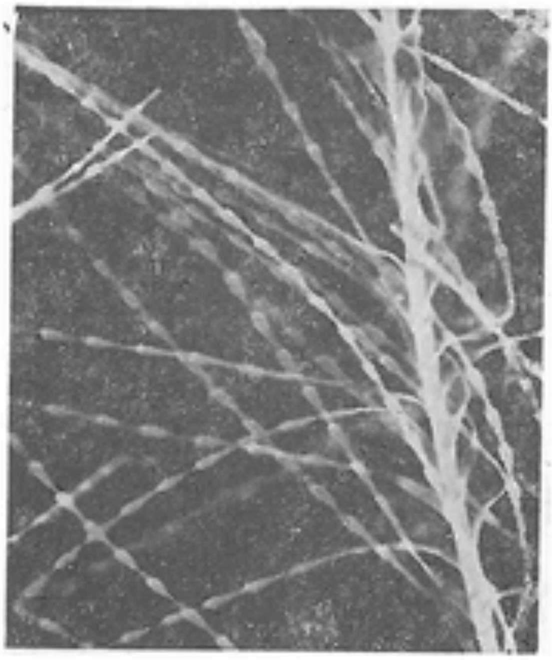
Následujícím odvodněním v acetonové nebo etanolové řadě odstraníme ze vzorku vodu a nahradíme ji acetonem nebo etanolem. Ten potom odstraníme vhodnou metodou, aby nedošlo ke zhroucení buněčné stavby.

V rastrovacím elektronovém mikroskopu můžeme pozorovat po předchozích úpravách prakticky všechny tkáně a buňky lidského těla. Na obr. 1. je snímek řasinkového epitelu, který se nachází v průdušnici. Pohyb řasinek zajišťuje pohyb hlenu nebo prachových částic směrem k příklopce hrtanu. Rastrovací elektronový mikroskop může být použit také v hematologii. Studium krevních buněk má význam při analýze krevních chorob. Na snímku na obr. 2. je shluk červených krvinek kolem neznámého tělíska z krve člověka postiženého leukémií. Kromě těchto příkladů může být mikroskop využit ve stomatologii při pozorování struktury zubů, při studiu kostí, vlasů, nehtů, kůže apod.

S rozvojem rastrovací elektronové mikroskopie se objevila možnost použít mikroskopu pro sledování povrchové a vnitřní stavby rostlin. Na obr. 3 a 4 jsou na fotografiích patrny útvary nacházející se na pokožce listu, trichomy a průduchy. Studium vlivu stresových situací na otevření průduchů například přispívá k ozřejmění procesů probíhajících v listech rostlin.

Stejně jako v medicíně najdeme i v zoologii řadu oborů, kde nám elektronový mikroskop odhalí ultrastrukturu buněk nebo tkání. Z entomologie (nauka o hmyzu) nás může zaujmout snímek složených očí

Obr. 5. Složené oči mouchy domácí (musca domestica), původní zvětšení 760×



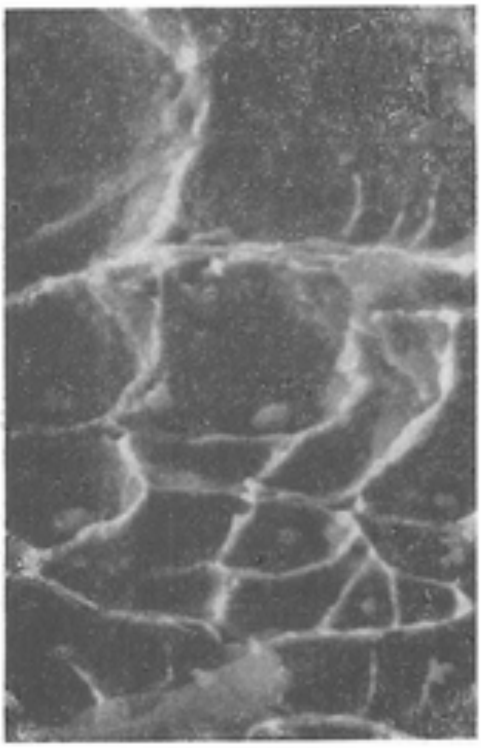
Obr. 6. Stavba prachového ptačího pera, původní zvětšení 630×

mouchy domácí na obr. 5 a z ornitologie (nauka o ptactvu) stavba prachového ptačího pera, která je zřejmá z obr. 6.

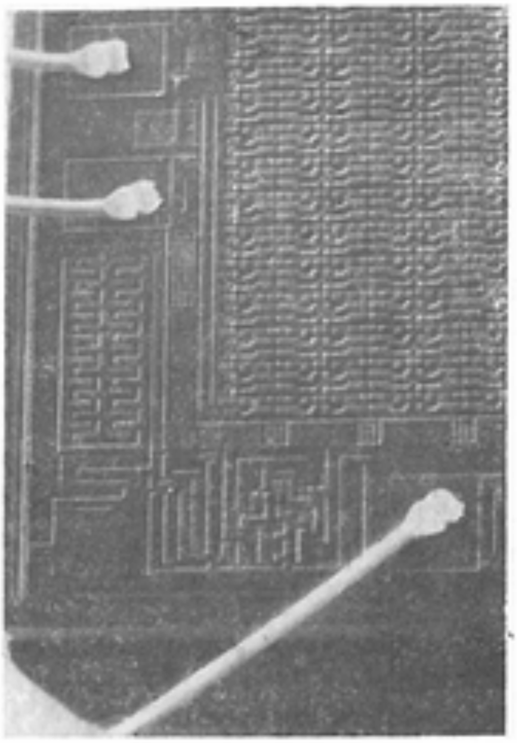
2. APLIKACE RASTROVACÍHO ELEKTRONOVÉHO MIKROSKOPU V METALOGRAFII

Použití rastrovacího elektronového mikroskopu v metalografii se stává běžnou záležitostí. Kromě strukturní rentgenové mikroanalýzy můžeme mikroskop využít při analýze lomových ploch, fraktografii. Zde se uplatní především značná hloubka ostrosti, která umožňuje ostré zobrazení členitého povrchu lomové plochy.

Jako příklad můžeme uvést snímek tvárného lomu litiny. Z obr. 7 je patrna jamková morfologie charakteristická pro tento druh lomů. Ve tvárných důlcích jsou uloženy submikronové vměstky. Na těchto strukturách se v poli napětí začínají vytvářet první necelistvosti, v tvárné matrici vznikají ve slitině mikrodutiny, které postupně rostou, propojují se, až se v konečné fázi lomu můstky porušují dlátovitým lomem. Porušené můstky vytvářejí ostré hřebeny kolem tvárných důlků a tím vzniká charakteristický mikroreliéf tvárného lomu.



Obr. 7. Jamková morfologie tvárného lomu, původní zvětšení 3100×



Obr. 8. Mikroreliéf IO s přívody, původní zvětšení 160×

3. POUŽITÍ REM V MIKROELEKTRONICE.

Mikroelektronika je obor, jehož vývoj vede k neustálé miniaturizaci a mikroelektronické součástky se tak stávají menšími a složitějšími. Jednou z metod při analýzách polovodičových součástek je pozorování povrchu v režimu sekundárních elektronů. U rozpouzdřených kontaktovaných vzorků umožňuje obraz v tomto režimu hodnotit členité útvary, jako jsou například soubory přívodů s kontakty u integrovaného obvodu, viz obr. 8.

Zavedením vnějšího napětí prostřednictvím kontaktů dochází v polovodičových součástkách ke vzniku oblastí s různým elektrickým potenciálem. S využitím tzv. napěťového kontrastu můžeme identifikovat například přerušení vodivých vnitřních spojů integrovaných obvodů.

ZÁVĚR

Uvedený přehled představuje pouze část z velkého množství aplikačních možností rastrovacího elektronového mikroskopu. Kromě výše uvedených aplikací je možno mikroskop využít v geologických oborech, průmyslových oborech, jako je textilní průmysl, strojírenství, papírenství, sklářství, gumárenský průmysl, průmysl umělých hmot, keramický, kožedělný a v řadě dalších.

Komety, komety, komety

RNDr. MARTIN ŠOLC, CSc., MFF UK Praha

Dne 9. 2. 1986 v 11 h 52,1 min (SEČ) projde přísluním slavná *Halleyova kometa*. Vzhledem k její popularitě můžeme čekat, že se objeví v televizi, tisku, rozhlase a možná i jinde, ale právě tam, kde bychom ji viděli nejraději, totiž na obloze, bude sotva patrná. Přesněji řešeno pro nás, pozorovatele na severní polokouli ve vyšších zeměpisných šířkách. Avšak ani pro pozorovatele z jižní polokoule neozdobí oblohu tak, jak tomu bylo při jejím posledním přeletu v roce 1910. Tehdy byl ve dnech 6. až 13. května vidět ohon komety pod zorným úhlem přes 45 °, takže vytvářel zářivý oblouk přes velkou část oblohy. V prostoru tomu odpovídala délka asi jedné astronomické jednotky (astronomická jednotka je střední vzdálenost Země od Slunce, 1 AU = 149,6 10^6 km).

Přesto bude nynější návrat ve středu pozornosti kometárního výzkumu a máme se tedy na co těšit. Věhlas Halleyovy komety byl popudem, že se organizuje mezinárodní spolupráce prakticky všech zemí světa při pozorování komety z pozemských observatoří. Tato kampaň, která nemá v historii obdoby, nese jméno *International Halley Watch (IHW)* a českoslovenští odborníci v oboru studia meziplanetární látky zaujímají v jejích řídících a odborných skupinách významné postavení. Pozemské pozorování je koordinováno s kosmickým výzkumem, poněvadž Halleyova kometa bude také terčem meziplanetárních sond. Sovětský svaz, socialistické státy podílející se na programu INTERKOSMOS, Francie, NSR a Rakousko vybavily snímacími a měřícími aparaturami dvě sondy VEGA (Veněra—Galej). Tyto sondy splnily v červnu 1985 část svého programu u Venuše a nyní pokračují k setkání s Halleyovou kometou, kterou minou ve vzdálenosti asi 10^4 km začátkem března 1986. Západoevropské země sdružené v ESA připravily sondu Giotto určenou pro co nejtěsnější přiblížení k jádru a Japonsko vysílá sondu Planet A.

Prvním terčem kosmické sondy je však kometa Giacobini-Zinner. Složitým manévrem mezi Zemí a Měsícem k ní byla navedena umělá družice ISEE-3 (*International Sun-Earth Explorer*), vypuštěná již dříve (v r. 1978) a určená původně k výzkumu interakce slunečního větru se zemskou magnetosférou. Setkání s kometou bylo plánováno na 11. září 1985, sonda měla při rychlosti 21 km/s proletět ohonem komety ve vzdálenosti asi 10 000 km od jádra. Spojené státy americké tak alespoň částečně nahrazují zrušenou misi NASA k Halleyově kometě; sonda ICE (jak byla přejmenována — *International-Cometary Explorer*) však nemá na palubě žádnou kameru ani spektrograf.

V nejbližší době tedy můžeme očekávat výsledky všestranného výzkumu komet. Cílem připravované série článku o fyzice komet je, aby čtenáři

ASYMPTOTA (z řec. *asymptótos* = nespadající, nestýkající se; slož. z řec. *a-*³ s významem záporu + *syn* = s, spolu dohromady + *piptó* = padat) — přímka, která „nespadne, nezapadne" ke křivce, ač se k ní přibližuje; např. ASYMPTOTA hyperboly se k hyperbole blíží, ale nikdy se jí nedotkne. Srov. SYMPTOM — příznak, náznak (např. nemocí); několik ukazatelů „zapadá dohromady", takže se z nich dá něco vyvozovat

ASYNCHRONNÍ (slož. z řec. *a-*³ s významem záporu + *syn* = s, spolu, dohromady + *chronos* = čas, doba; v. chrono-) — nestejnodobý; neprobíhající současně, ve stejnou dobu; časově nesladěný; např. ASYNCHRONNÍ motor — elektrický stroj, ve kterém se rotor pohybuje s magnetickým polem statoru časově nesladěn, tj. pomaleji nebo rychleji

ATMOSFÉRA (slož. z řec. *atmis* = dým, pára + *sfaira* = koule; v. sféra) — „kulový obal par"; plynný obal Země; zemské ovzduší; ve fyzice: dřívější jednotka tlaku ovzduší na 1 cm² za určitých podmínek

ATOM (slož z řec. *a-*³ s významem záporu + *temnó* = řezat) — „neřezatelné"; tak malá částečka hmoty, že už „ji nelze dále fyzikálně rozřezat, rozdělit, rozbít". Srov. ANATOMIE (řec. *ana-* — předpona zde s významem „roz") — „rozřezávání", pitva; nauka o stavbě organismů; v. t. trichotomie

ATOMISTIKA — materialistický názor, že se hmota skládá z velmi malých částí (v. -ika¹)

ATRAKCE (z lat. *attractio*; slož. z *ad* = k, do + *traho, -ere,* ptc. pf. *tractus* = táhnout; v. trakce) — „přitahování, přibírání"; lákadlo; ve fyzice: přitažlivost; srov. distrakce, extrakce, kontrakce

ATTO- (ze švédského *aderton* [*aten*] = 18; není zde nic společného ani s latinou ani s řečtinou) — předpona pro dílčí jednotky; 10^{-18}

AUDIO- (z lat. *audio, -ire* = slyšet) — počáteční část složených slov vyjadřující nějaký vztah k sluchu; srov. AUDITORIUM — posluchačstvo, posluchárna; v. t. audion

AUDIOMETR (v. -metr¹) — přístroj na měření ostrosti sluchu

AUDIOVIZUÁLNÍ (lat. *video, -ere,* ptc. pf. *visus* = vidět) — sluchový a zrakový; AUDIOVIZUÁLNÍ pomůcka — pomůcka, kterou můžeme současně sledovat sluchem i zrakem, např. zvukový film, televize

AUDION (od lat. *audio, -ire* = slyšet; v. audio-; uměle zvukově analogicky utvořeno podle „telefon") — nejjednodušší elektronkový rozhlasový přijímač

AUTO-¹ (z řec. *autos* — sám, sám osobně, sám od sebe) — počáteční část složených slov mající význam „samo-, sebe-, svůj"; např. *AUTOKRITIKA* = sebekritika; *AUTOBIOGRAFIE* (řec. *bios* = život, *grafó* = rýt, psát) — svůj vlastní životopis

AUTOMAT (řec. *manthanó* = učit se, poznávat) — „sám poznávající, sám chápající"; přístroj nebo zařízení samočinně pracující pomocí vnitřního mechanismu; srov. MATEMATIKA (v. -ika[1]) — „věda, jak poznávat"

AUTOMATICKÝ — samočinný, mimovolný

AUTOMATIZACE (v. -izace) — proces směřující k tomu, aby činnost probíhala samovolně; zavádění samočinných, elektronicky řízených strojů

AUTOMOBIL (lat. *mobilis* = pohyblivý) — „samohyb"; v. mobilní

AUTO-[2] (zkrácením slova „automobil") — počáteční část složených slov vyjadřující nějaký vztah k automobilu; např. AUTOOPRAVNA, AUTODRÁHA

AVOMET (zkratkové slovo složené z počátečních písmen A-mpér, V-olt, O-hm + ze zkráceného řec. *MET-ron* = měřidlo, míra) —mnohoúčelový přístroj, kterým se měří elektrický proud, napětí — odpor

AXIÁLNÍ (od lat. *axis* = osa; souvisí s řec. *axón, axonos* = osa) — osový; srov. AXONOMETRIE (v. -metrie) — „měření pomocí os"; v. t. paraxiální

AXIÓM (z řec. *axióma*; od *axioó* = uznávat za platné, schvalovat, mít za to) — „uznání za hodna, úsudek"; nedokazatelné pravidlo, jehož oprávněnost se uznává jedině na podkladě zkušeností (nežádá se zdůvodnění); AXIOMATICKÝ

AZIMUT (od latinizovaného arabského *as-simút* = cesta slunce) — azimut hvězdy je úhel, který svírá místní poledník s rovinou výškové kružnice; v. t. zenit

BALISTIKA (slož. z latiniz. *ballista* = kamenomet, válečný přístroj na metání balvanů + analogicky použitá přípona -ika; v.t.) — nauka o pohybu vržených těles v atmosféře; BALISTICKÁ křivka — křivka skutečné dráhy tělesa vrženého šikmo vzhůru v zemské atmosféře; BALISTICKÁ raketa — pohybující se po balistické křivce. Pozn.: Lat. *ballista* je od řec. *ballidzó* = pohazovat nohama, tančit; to pak je od *balló* = házet, vrhat. Většina termínů vzniklých z řec. slovesa *balló* byla vytvořena ze střídy tohoto slovesa bol- (např. DISKOBOLOS — vrhač disku; v. t. bolid, symbol) nebo ze střídy bl- (v. problém).

BAR (z řec. *baros* = tíže; od *barys* = těžký, hluboký) — jednotka tlaku vzduchu; srov. BARYTONISTA — zpěvák „hlubokého tónu"; v. t. baro-, baryon, baryum, izobara, milibar. Pozn.: S fyzikálním termínem nijak nesouvisí „bar" ve významu nočního podniku nebo vyvýšeného výčepního pultu. Toto slovo přešlo z angličtiny a tam z franc. *barre* = tyč, přepážka, s čímž souvisí „barikáda" a „bariéra".

BARO- (z řec. *baros* = tíže; od *barys* = těžký, hluboký; v. bar)— počáteční část složených slov značící nějaký vztah k tlaku nebo k tíži

BAROGRAF (v. -graf) — přístroj zaznamenávající („zapisující") změny tlaku vzduchu

BAROMETR (v. -metr[1]) — přístroj měřící, ale nezaznamenávající tlak vzduchu; tlakoměr

BARYON (slož. z řec. *barys* = těžký, hluboký; v. bar + umělá přípona *-on* používaná pro označení částic analogicky podle „elektron"); v. -on) — společný název pro nejtěžší elementární částice

BARYUM (od řec. *barys* = těžký, hluboký; v. bar) — prvek chem. značky Ba; název vytvořil r. 1808 angl. chemik *Davy*, protože prvek byl objeven v barytu, v nerostu, který je těžký a který má český název „těživec".

BÁZE (z řec. *basis* = krok, chůze; místo, kde se došlápne; podstavec) — základ, základní část, základna; „místo nebo bod, z něhož se vyjde"; východisko, podklad; ve fyzice: základní destička tranzistoru; srov. ANABAZE (řec. *ana-* — předpona zde s významem „směr vzhůru") — „pochod vzhůru"; význam „dlouhá a namáhavá cesta" je už přenesený. BAZÁLNÍ — k základně patřící, základní; srov. BAZÁLNÍ metabolismus — základní látková výměna v těle. Pozn.: Titul Anabasis dal totiž řec. spisovatel *Xenofon* svému popisu strastiplného pochodu řec. vojáků, kteří museli stoupat od mořského pobřeží do vnitrozemí.

BETA, BETA- (z řec. *béta* — druhé písmeno v řecké alfabetě) — samostatné slovo nebo počáteční část složeného slova užívaná na označení druhého místa v nějaké řadě při rozlišováni věcí a jevů stejných hodnot, stejného řádu; např. částice beta, beta-částice; úhel beta; paprsek beta

BETASYNCHROTRON (v. synchrotron) — synchrotron, který na počátku každého urychlovacího cyklu pracuje jako betatron

BETATRON (v. -tron) — přístroj na urychlování beta-částic

BI- (z lat. *bis* = dvakrát) — počáteční část složených slov mající význam „dvojitost, dvou-, dvoj-"; např. BICYKL (řec. *kyklos* = kolo, kruh) — (zast.) jízdní kolo, „dvojkolo"

BIFILÁRNÍ (lat. *filum* = nit, vlákno, struna) — o dvou nitích, vláknech; dvouvláknový; srov. DEFILOVAT — při přehlídce se řady „odvíjejí jako nitě"; v. t. profil

BIFOKÁLNÍ (lat. *focus* = ohnisko; v. fokus) — mající dvě ohniska, dvouohniskový

BIKONKÁVNÍ (v. konkávní) — dvojdutý; dutý z obou stran

BIKONVEXNÍ (v. konvexní) — dvojvypuklý; vypuklý z obou stran

BILATERÁLNÍ (lat. *latus, lateris* = bok, strana) — dvoustranný, oboustranný; srov. MULTILATERÁLNÍ dohoda (lat. *multus* = mnohý) — mnohostranná dohoda

BIMETALICKÝ (v. metalický) — ze dvou kovů; BIMETALICKÝ teploměr — při jeho konstrukci je použito dvou svářených kovových proužků různé tepelné roztažnosti; srov. monometalický

BIPOLÁRNÍ (v. polární) — dvojpólový

BIVARIANTNÍ (v. variantní) — dvouvariantní, o dvou obměnách; BIVARIANTNÍ soustava — o dvou stupních volnosti; srov. divariantní

 -BILITA, -BILNÍ (z lat. *-bilitas*, *-bilis* — přípona podstatných a přídavných jmen vyjadřující „schopnost, možnost, způsobilost“ vyplývající ze základu slova) — v češtině význam obdobný; u podst. jmen odpovídá přípona -ost; např. VARIABILITA — VARIABILNOST, VARIABILNÍ (lat. *vario, -are* = obměňovat, různit se) — schopnost obměny, schopný obměňovat se; v. t. labilní, mobilní, permeabilita, reverzibilní

BIMETALICKÝ — v. BI-

BIN- (z lat. *bini* = po dvou, dva a dva) — počáteční část složených slov vyjadřující, že to, co je vyjádřeno v druhé části složeného slova, je dvakrát, po dvou, pro dva; v. t. binární, kombinace

BINAURÁLNÍ (lat. *auris* = ucho) — slyšení oběma ušima; srov. monoaurální

BINODA (řec. *hodos* = chod, chůze, cesta; zde však uměle zkráceno z „elektroda“ — elektronka s diodou a triodou v jedné baňce; „dvojí elektroda“

BINOKL (lat. *oculus* = oko; v. okulár) — (zast.) brýle nebo kukátko pro obě oči

BINOKULÁRNÍ (lat. *ocularis*, od oculus = oko; v. okulár) — s dvěma okuláry; určený pro obě oči; BINOKULÁRNÍ mikroskop — mikroskop s dvojím okulárem, takže se v něm pozoruje oběma očima; srov. monokulární

BIO- (z řec. *bios* = život) — počáteční část složených slov mající význam „život“; např. BIOLOGIE (řec. logos = slovo, řeč; v. -logie) — „nauka o životě“; BIOGRAF (v. -graf) — „popis života“; v. t. symbiotický

BIOLUMINISCENCE (v. luminiscence) — světélkování živých organismů

BIPOLÁRNÍ, BIVARIANTNÍ — v. BI-

BOLID (slož. z řec. balló = házet, vrhat; v. balistika + umělá přípona *-id*) — „těleso vržené vesmírem“; velmi jasný meteor

BOMBARDOVÁNÍ (od řec. *bombos* = hukot) — „ostřelování střelami vydávajícími velký hukot“; srov. BOMBARDÓN — největší dechový nástroj mohutného basového ladění

C — psáno minuskulí (z lat. *celeritas* = rychlost; od *celer* = rychlý; v. akcelerace) — dřívější fyzikální značka pro rychlost stálou, dnes jen pro rychlost světla ve vakuu; v. t. „v“

CAL — psáno minuskulí (z lat. *calor* = teplo; v. kalorie) — fyzikální označení pro kalorii, dřívější jednotku tepla

Rozhledů získali rozhled o tomto oboru dříve, než záplava informací vypukne. První díl je věnován stavbě a původu komet.

Současné teoretické představy, podpořené pozorováním, vycházejí z původní myšlenky vyslovené *F. Whipplem* v padesátých letech. Podle ní je hlavní částí jevu zvaného kometa tzv. *jádro komety*. Jde o „špinavou sněhovou kouli" o průměru asi 6 km. Údaj o velikosti potvrzují radarová pozorování jádra Enckeovy komety v r. 1984 i fotometrie některých kometárních jader ve větších heliocentrických vzdálenostech (např. komety Neujmin 1). Většinu doby tráví tato koule ve vnějších částech sluneční soustavy. Je velmi chladná — pod 100 K — a prakticky neviditelná, neboť předmět o průměru 6 kilometrů je zde zcela mimo dosah pozemských teleskopů. Pro úplnost — nejlépe vybavená současná pozemská observatoř by byla schopna odhalit těleso o průměru 300 m (ne však příliš tmavé), jestliže by bylo vzdáleno od Země do 0,3 AU. Jestliže trajektorie „sněhové koule" vede do blízkosti Slunce, začne se už ve vzdálenosti přes 3 AU její povrch ohřívat a podle okolností i vypařovat, resp. sublimovat. Kometa vstupuje do aktivní fáze a kolem jádra se začne vytvářet plynná atmosféra, pozorovatelná díky záření uvolněných molekul a atomů a prachových částic. Průměr této atmosféry zvané *koma* dosáhne postupně 10^5 km. Halleyova kometa byla aktivní již v 8 AU; to však nemusí být zvláštností právě této komety — je to spíš výsledkem soustavného pozorování.

Sublimující plyn z jádra obsahuje neutrální atomy a molekuly, patrně hlavně H_2O, HCN, CH_3CN, které jsou v komě vystaveny ultrafialovému záření Slunce. Probíhá disociace a ionizace, takže ve vnější komě (10^6 km) se vyskytnou ještě neutrální CO, CN, C_2, C_3, CH, NH, NH_2, OH, O, C, CS, zatímco do ohonu vypudí tlak slunečního záření molekuly a radikály vesměs již ionizované — H_2O^+, CO^+, N_2^+, CH^+, CO_2^+, OH^+. Jádro komety má na kosmické poměry nepatrnou hmotnost — 10^{14} kg při předpokládané hustotě „sněhu" pod 1000 kg . m^{-3}. Gravitační působení jádra na plyn je proto zanedbatelné a plyn z atmosféry uniká do meziplanetárního prostoru. Kolem komy se vytváří obrovská vodíková korona, patrná hlavně v ultrafialových čarách spektra atomu vodíku (v čáře Lyman α, 121,6 nm). Průměr vodíkové korony přesahuje 10^7 km.

Při sublimaci plynu jsou do atmosféry uvolňována také nepatrná prachová zrnka. Z největší části jsou to snad silikáty s příměsí dalších prvků četných v kosmu, část může být také uhlík. Pokud mají zrna průměr pod 1 μm, působí na ně silně tlak slunečního záření a odvane je do ohonu. Zatímco iontový ohon je prakticky přímkový a směřuje od Slunce, ohon prachový je zakřivený. Větší prachové částice ovlivňuje tlak záření jen málo, a proto mohou samostatně kroužit kolem Slunce po delší dobu. Sluneční světlo se na nich rozptyluje a jev lze pozorovat jako zvířetníkové světlo.

Plyn z komy reaguje intenzívně se slunečním větrem, proudem nabitých částic vycházejících ze sluneční korony. U typické komety je již ve vzdálenosti 2 AU od Slunce podstatná část molekul na okraji komy ionizována, a tudíž citlivá na magnetické pole, které s sebou nese sluneční vítr. V podstatě se ionizované kometární molekuly zachytí v meziplanetárním magnetickém poli a svým pohybem způsobí, že se toto pole kolem komy „zvlní" tak, jako vodní vlny kolem přídě lodi. Siločáry pak vlastně formují ohon komety. Celý proces lze dobře pozorovat, neboť průběh siločar vyznačují některé zachycené ionty jako např. CO^+, jejichž spektrální čáry jsou dosti výrazné.

Po průchodu komety přísluním tempo sublimace klesá, ohon se zkracuje a koma zmenšuje. Tempo sublimace je různé u různých komet, s neurčitostí asi 2 řádů dosahuje 10^{29} molekul za sekundu. Jádro komety při přiblížení ke Slunci tedy ztratí podle hrubého řádového odhadu 10^{29} molekul/s . doba strávená blízko Slunce . hmotnost typické molekuly $= 10^{29}$ mol/s . 100 dnů . 10^5 s/den . 10 nukleonů . 10^{-27} kg $=$ $= 10^{10}$ kg $= 1$ % hmotnosti typické komety. Většina čísel v odhadu je nadsazených, takže je zřejmé, že kometa může projít přísluním asi 100 ×, než se rozpadne. Určitou roli hraje také skutečnost, že při sublimaci se na povrchu jádra soustřeďuje patrně stále více pevných částeček a při opakovaných průchodech přísluním není produkce molekul již tak vysoká. Skutečně, nejvyšší produkcí molekul se vyznačují komety nové, které dosud nebyly pozorovány a které pak na obloze vytvářejí nejkrásnější úkazy (z poslední doby kometa Bennett 1969 i kometa West 1975 n). Na druhé straně — některé planetky mohou mít složení podobné jako kometární jádra. Podle oběžné doby dělíme komety na krátkoperiodické (s periodou mezi 3 a asi 30 roky), které obíhají vesměs v rovině ekliptiky, a komety dlouhoperiodické. Ty mají trajektorie blízké k parabole, roviny jejich oběhu jsou orientovány náhodně a v odsluní, v nejzazším bodu své trajektorie, jsou od Slunce vzdáleny až za drahami velkých planet. Komety s ještě vyšší afelovou vzdáleností mohou být pozorovány ve velkých odstupech, že jsou prakticky „nové". Příkladem krátkoperiodické komety jsou P/Encke nebo P/Schwassmann-Wachmann, zatímco např. kometa Bennett z r. 1969 nebo West z r. 1976 byly pozorovány pouze při jednom průchodu perihelem. Vzniká tedy otázka, kde je zásobárna kometárních jader, odkud a jak se jádra dostávají do vnitřní sluneční soustavy, kde je pak pozorujeme jako komety a kde opakovanými průchody blízkostí Slunce zanikají.

Nejvíce rozšířená teorie původu komet soudí, že jádra byla vytvořena již při vzniku sluneční soustavy a dnes jsou rozptýlena v prostoru kolem sluneční soustavy. Tento oblak kometárních jader se nazývá *Oortův oblak* podle holandského astronoma, který na jeho pravděpodobnou existenci prvně poukázal. Oortův oblak se podle představ z r. 1985 dělí na část vnější, kde je asi 10^{12} kometárních jader o celkové hmotnosti 7 až 15 hmotností Země a která se prostírá mezi 20 a 70 tisíci astronomických jednotek. Dráhy jader jsou zde orientovány náhodně. Vnitřní část obsahuje ve vzdálenostech 30 AU až 20 . 10^3 AU asi 10^{13} až 10^{14} kometárních jader. Jejich úhrnná hmotnost je 100 až 500 hmotností Země. Roviny drah jsou blízké ekliptice a jádra tedy vyplňují jakýsi disk ztenčující se směrem ke Slunci.

Dřívejší teorie o původu komet přikládaly význam epizodickým dějům. Jsou-li kometární jádra v oblacích mezihvězdné látky, mohou se gravitačně zachytit u blízké hvězdy. Průchody hvězd oblaky mezihvězdné látky (o průměru asi 10 pc) jsou celkem běžnou záležitostí, pro Slunce se odhaduje střední doba mezi takovými setkáními na 10^8 let. Další hypotézy zase předpokládaly tvorbu komet uvnitř planetární oblasti. Jako kurioziru lze uvést myšlenku sovětského astronoma *Vsechsvjatského*, který uvažoval o kometách jako produktech sopečné činnosti na planetách. Dnes již víme, že to není možné, ale ve své době byla tato myšlenka impulsem ke studiu vulkanismu na planetách a jejich měsících, který je dnes pozorován na více tělesech sluneční soustavy (Venuše, sirné sopky na Jupiterově měsíčku Io atd.) Jako nejpravděpodobnější hypotéza se dnes ovšem ukazuje Oortův oblak.

Pak ovšem je na místě otázka, *kde* se komety při vzniku sluneční soustavy vytvořily a *jak* se do Oortova oblaku dostaly. Jako pravděpodobné místo tvorby kometárních jader přicházejí v úvahu zóna mezi dnešními oběžnými drahami Urana a Neptuna, vnější okraj rotujícího zárodečného prachoplynného disku, z něhož se utvořilo Slunce a planety, případné oddělené fragmenty této předsluneční mlhoviny anebo fragmenty mlhovin, z nichž se formovaly hvězdy vznikající současně se Sluncem ze společného mezihvězdného oblaku. Současné znalosti o rozložení kometárních trajektorií v prostoru (je známo asi 700 komet) zatím nedovolují rozhodnout mezi těmito možnostmi.

Všem předpokládaným místům vzniku je společná relativně nízká teplota. Očekává se proto, že v materiálu kometárních jader je uchována cenná chemická informace o podmínkách, za kterých sluneční soustava vznikala, a o stavu a složení látky, z níž je vytvořena. Získat tuto informaci mají za úkol právě kosmické sondy, z nichž zejména Giotto má proniknout co nejblíže k jádru, aby zde analyzovala složení plynu a prachu ještě neovlivněného zářením Slunce.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

O závorkách

Při úpravách mnohočlenů je bez váhání používáme a už si ani nedovedeme představit, jak bychom se bez nich obešli. Nebylo tomu tak vždy. Před pěti sty lety *Nicolas Chucquet* (1445?—1500?), francouzský matematik, v „Nauce o číslech ve třech částech" podtrhával vodorovnou čarou ty mnohočleny, které bychom dnes dali do závorky. Stejně postupoval ještě v roce 1550 italský matematik *Rafael Bombelli*, dokud nezačal zaznamenávat začátek podtržení písmenem L a konec převráceným ⅂. Kulaté závorky se objevují také v 16. století, psali je chebský rodák *Michael Stifel* (1486?—1567) ve své „Úplné aritmetice" z r. 1544 a italský matematik *Niccolò Tartaglia* (1499?—1557) v díle „Obecný traktát o číslech a měření" z let 1556—1560. Na konci tohoto století užíval *Francois Viète* (1540—1603) už i složené závorky. Na druhé straně vodorovná čára vedená nad výrazem, který náleží do závorky, byla běžná ještě po celé 17. století. Při práci s mnohočleny tak postupovali i *René Descartes* (1596—1650), Angličan *Thomas Harriot* (1560—1621) a mnozí další. *Isaac Newton* (1643—1747) řadil nad sebe několik čar, aby naznačil několikanásobné do sebe vložené závorky:

$$\overline{\overline{\overline{y - 4} \times y + 5} \times y - 12} \times y + 17 = 0\,,$$

$$\text{tj. } \{[(y - 4)\, y + 5]\, y - 12\}\, y + 17 = 0\,.$$

Za všeobecné rozšíření závorek vděčíme až *Gottfriedovi Wilhelmovi Leibnizovi* (1646—1716) a ještě více *Leonardu Eulerovi* (1707—1783).

V anglicky mluvících zemích se pro závorky užívá několik termínů. „Parentheses" — závorky (množné číslo) — pochází z řeckého základu „$\pi\alpha\varrho\varepsilon\nu\vartheta\eta\varkappa\eta$", který má význam něčeho připojeného, vloženého nebo vsuvky. „Parenthesis" (jednotné číslo) tedy znamená vloženou větu v jazykovém syntaktickém (skladebném) slova smyslu. Pro závorky v matematických výrazech se užívá také termínů „brackets" — lomené závorky $<>$, a „braces" — složené závorky $\{\}$. Hranaté závorky [] se označují „square brackets", kulaté závorky někdy „round brackets". Všechna tato slova mají původní význam podkladu, podložky či konzoly, na kterou je možno něco položit. Možná, že to souvisí právě s vedením čar pod nebo nad výrazy, které mají stát v závorkách.

Původní význam řeckého termínu cítíme také v polském slově „nawias“. Francouzi používají také kromě „parenthese“ slovo „crochet“, které lze přeložit jinak také jako náhlý záhyb, háček anebo paklíč.

Euler nazýval závorky německým „die Klammer“ (plurál „die Klammern“), snad podle tvaru znaků $\llcorner\ \urcorner$. Překládá se totiž jako „skoba“ — viz ruské „skobki“. Význam skoby, nejspíše té, kterou my nazýváme „kramle“, má i další pojmenování závorky „crampo“, „krampo“ ve španělštině a příbuzných jazycích. Můžeme být rádi, že naši obrozenci zvolili při překladu slova „die Klammer“ celkem libozvučnou „závorku“. „Die Klammer“ lze totiž přeložit také jako sponka nebo kolíček na prádlo.

Alena Šolcová

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Algebrogramy se jmény herců

Podstatu algebrogramů i úspornou metodu jejich řešení už znáte, snadno jistě najdete aspoň jedno řešení každého z těchto „hereckých“ algebrogramů:

a)	b)	c)	d)
B E K	B E K	V A L A	E F F A
K E M R	S E J K	Š V A R C	F I L I P
N Ě M E C	F R E J	Š V O R C	P I V E C
H E R C I	H E R C I	H E R C I	H E R C I

Jarmila Pěnčíková

Řešení algebrogramů

a)	b)	c)	d)
803	632	3070	3229
3019	5342	13058	20104
57102	7934	13458	40537
60924	13908	29586	63870

Vánoce u matematických kutilů

JIŘÍ MANN, Dvůr Králové n. L.

Na rozdíl od loňského vánočního balíčku úloh můžete při řešení letošních používat vše od vrubovky po IBM 3081 a nesmíte se smířit se skutečností, že to leckdy nebude stačit. Obtížnost příkladů i vhodné metody jejich řešení jsou různé. Letošní vánoční příděl obsahuje také úlohy spojující roky $2^4 + 3^6 + 4^5 + 6^3$ a $2^{10} + 3^4 + 4^4 + 5^4$ — což jistě nejsou veškerá data, jež lze takto zapsat.

Nejprve se rozloučíme s rokem

$$31^2 + 32^2 = \sqrt{31^4 + \frac{1984^2}{2} + 32^4} =$$
$$= 7^2 + 44^2 = \sqrt{7^4 + \frac{616^2}{2} + 44^4}.$$

Všimněme si, jak se tento rok připravoval, pozorujme, jak cifry jeho data nabývaly vrchu:
1048^2, 438^2, 979^2, 228^2, 903^2, 2847^2, 449^3, 2428^2, $10\,467^2$.
Najděte další příklady. A mohou to být i jiné mocniny, kombinační čísla, faktoriály, jejich součty apod.

Číslo 1985 je členem číselných hříček, je výsledkem operací se známými i neznámými čísly či ciframi.

$$\frac{280^2 + 2210^2}{50^2} = \frac{350^2 + 2200^2}{50^2} = \frac{952^2 + 2014^2}{50^2} =$$
$$= \frac{1040^2 + 1970^2}{50^2} = \frac{1102^2 + 1936^2}{50^2} = \frac{1550^2 + 1600^2}{50^2} =$$
$$= \frac{627^2 + 2184^2}{51^2} = \frac{696^2 + 2163^2}{51^2} = \frac{741^2 + 2148^2}{51^2} =$$
$$= \frac{1371^2 + 1812^2}{51^2} = \frac{544^2 + 2252^2}{52^2} = \frac{848^2 + 2156^2}{52^2} =$$
$$= \frac{916^2 + 2128^2}{52^2} = \frac{1216^2 + 1972^2}{52^2} = \frac{499^2 + 2308^2}{53^2} =$$
$$= \frac{572^2 + 2291^2}{53^2} = \frac{917^2 + 2176^2}{53^2} = \frac{1547^2 + 1784^2}{53^2}$$

$$\left(\frac{221}{5}\right)^2 + \left(\frac{28}{5}\right)^2 = \left(\frac{220}{5}\right)^2 + \left(\frac{35}{5}\right)^2 = \left(\frac{160}{5}\right)^2 + \left(\frac{155}{5}\right)^2 = \left(\frac{104}{5}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{197}{5}\right)^2=\left(\frac{728}{17}\right)^2+\left(\frac{209}{17}\right)^2=\left(\frac{721}{17}\right)^2+\left(\frac{232}{17}\right)^2=\left(\frac{457}{17}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{604}{17}\right)^2=\left(\frac{716}{17}\right)^2+\left(\frac{247}{17}\right)^2=\left(\frac{1027}{29}\right)^2+\left(\frac{784}{29}\right)^2=\left(\frac{733}{29}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{1064}{29}\right)^2=\left(\frac{1292}{29}\right)^2+\left(\frac{11}{29}\right)^2=\left(\frac{1291}{29}\right)^2+\left(\frac{52}{29}\right)^2$$

$$\frac{113^2}{12}+\frac{16^2}{6}+\frac{59^2}{4}+\frac{4^2}{2}=\frac{19^2}{12}+\frac{49^2}{6}+\frac{59^2}{4}+$$

$$+\frac{37^2}{2}=\frac{35^2}{12}+\frac{53^2}{6}+\frac{59^2}{4}+\frac{33^2}{2}=\frac{105^2}{12}+\frac{21^2}{6}+$$

$$+\frac{63^2}{4}+\frac{1^2}{2}=\frac{19^2}{12}+\frac{52^2}{6}+\frac{63^2}{4}+\frac{32^2}{2}=$$

$$=\frac{23^2}{12}+\frac{53^2}{6}+\frac{63^2}{4}+\frac{31^2}{2}$$

Po kontrole správnosti jednotlivých rovností sestavte další, vlastní. Předpokládá to ovšem nalézt jejich obecný tvar.

V identitě $(k^2 + l^2 + m^2)^2 = (k^2 + l^2 - m^2)^2 + (2km)^2 + (2lm)^2$ zvolte k, l, m tak, aby některý ze základů mocnin byl 1985.

Řešte diofantickou rovnici $x + xy + y = 1985$.

Řešte soustavu $JJKL + LMN = 1985 \wedge JJKL - NLM = 365$.

Soustavu $g^2 - h^2 = 1985 \wedge g - h = 5$ řešte bez užití poučky o rozdílu čtverců.

Najděte všechny dvojice přirozených čísel p, q vázaných vztahy $\sqrt{p} + q = 1985$ a $p + \sqrt{q} = 1985305$.

Určete trojici přirozených čísel, jejichž součet je 67, součet jejich čtverců 1985 a součet 3. mocnin 67 831.

$(94 + 2\sqrt{1985})^2 + (95 + 2\sqrt{1985})^2 = (126 + 3\sqrt{1985})^2$. Sestavte obdobnou rovnost.

Pro která n je správná rovnost $1969^n + 1986^n + 2000^n = 1970^n + 1984^n + 2001^n$?

Máte rádi úlohy o dělitelích a násobcích? Jestliže ano, zde jsou pro vás tři úlohy:

$1985 \mid 1^{1985} + 2^{1985} + \ldots + 1985^{1985}$. Dokažte.

Pro každé $a \in N$ je $1985 \mid 24^{3a} + 3^{9a} - 22^{3a} - 2^{10a}$. Dokažte.

Pro jaká $b \in N$ je $1985 \mid (19^{2b} + 6^{2b})(b^4 - 1)$?

Víte, co jsou panmagické čtverce?

49	19	85	7
37	55	1	67
–5	73	31	61
79	13	43	25

49	19	85	31
91	25	55	13
7	61	43	73
37	79	1	67

19	261	151	305
173	283	41	239
217	63	349	170
327	129	195	85

19	–575	–377	–707
–311	–773	85	–641
–443	–113	–839	–245
–905	–179	–509	–47

Vytvořte další panmagické čtverce, v nichž čísla 19 a 85 jsou umístěna v políčkách, jež si sami předem zvolíte.

Blíží se rok $31^2 + 8^2 + 31^2$. (Mimochodem: odkud znáte číslo 0,31831?) Ony dva dny, jejichž společná hranice je datová, jsou 31. 12. 1985 a 1. 1. 1986 a tvoří podklad následující úlohy:

Každé z čísel 31121985 a 111986 napište jako součin trojciferných činitelů.

Pro jaká c platí $7 \mid 1985^c + 1986^c$?

Pro jaká d platí současně $7 \mid 19^d + 85^d$ i $7 \mid 19^d + 86^d$?

V nerovnostech $\sqrt{1985} < \frac{a}{b} < \sqrt{1986}$ a $\sqrt[3]{1985} < \frac{c}{d} < \sqrt[3]{1986}$

dosaďte za a, b, c, d taková přirozená čísla, aby součiny ab a cd byly co nejmenší.

Tři královské dynastie k nám každoročně posílají své členy, Písemné stopy po těchto koledujících samozvaných monarš ch upravíme na úlohy.

Kdy platí: a) $792 \mid K19M85B$,

b) $K \, . \, M + B = 19 \wedge K + \mathrm{MB} = 85$,

c) $\sqrt{\overline{1985KMB}} \in N$,

d) $\sqrt{\overline{1K9M8B5}} \in N$?

Na shledanou v roce

$$5^2 + 44^2 + 5^2 .$$

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

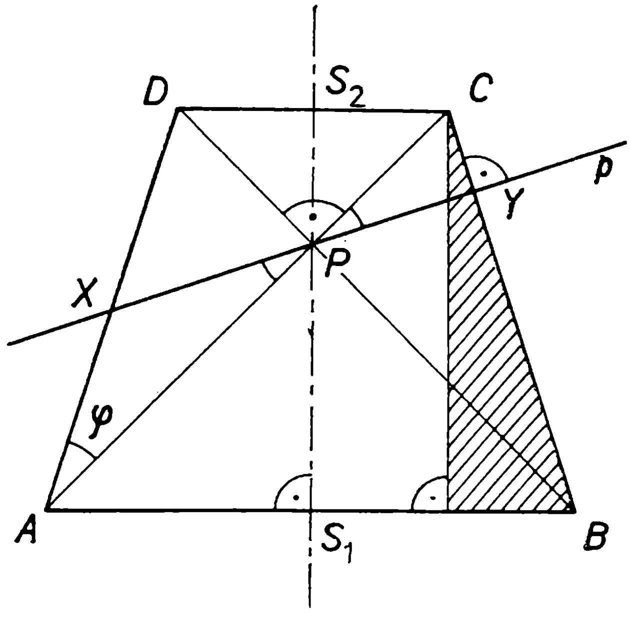
6. Základny AB, CD rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ mají délky $|AB| = a$, $|CD| = c$; jeho úhlopříčky jsou vzájemně kolmé a protínají se v bodu P. Tímto bodem je vedena přímka p kolmo k ramenu lichoběžníku $ABCD$; její průsečíky s rameny jsou body X, Y. Vypočtěte délku úsečky XY.

(Došlo 36 řešení.) *Emil Kraemer*

Upravené řešení Petera Boncseka, 4 B G s maďarským vyučovacím jazykem v Komárně:

Z obr. 1 je patrno, že je

$$|XY| = |PX| + |PY| . \tag{1}$$



Obr. 1

Jde tedy o výpočet délek úseček PX, PY. Ze souměrnosti lichoběžníku $ABCD$ podle společné osy S_1S_2 úseček AB, CD plyne, že je

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle DBC| = \varphi, \quad |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle BCP| .$$

Z pravoúhlého trojúhelníku APD s přeponou AD plyne, že je

$$|\sphericalangle ADP| = 90^\circ - \varphi = |\sphericalangle BCP| . \tag{2}$$

Trojúhelník CPY je pravoúhlý s přeponou CP. Jeho úhel YCP splývající s úhlem BCP má velikost $90° - \varphi$; proto je $|\sphericalangle CPY| = \varphi$. Podle věty o vrcholových úhlech je

$$|\sphericalangle APX| = |\sphericalangle CPY| = \varphi\,;$$

zároveň je $|\sphericalangle DPX| = 90° - \varphi$. Protože podle rovnosti (2) je také $|\sphericalangle XDP| = |\sphericalangle ADP| = 90° - \varphi$, je trojúhelník DPX rovnoramenný se základnou DP; proto je $|PX| = |DX|$. Avšak také trojúhelník APX je rovnoramenný se základnou AP; proto je $|AX| = |PX| = |DX|$ Je tedy

$$|AX| = |PX| = |DX| = \frac{1}{2}|AD| \tag{3}$$

Protože úhly BAP, DCP mají velikost 45°, je

$$|S_1P| = |S_1A| = \frac{a}{2}, \ |S_2P| = |S_2C| = \frac{c}{2},$$

takže výška lichoběžníku $ABCD$ je

$$v = \frac{a + c}{2}.$$

Z vyčárkovaného pravoúhlého trojúhelníku s přeponou BC plyne, že je

$$|BC|^2 = \left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}. \tag{4}$$

Z toho podle rovnosti (3) plyne, že je

$$|PX| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Ze vzorců pro obsah pravoúhlého trojúhelníku BCP s přeponou BC plyne, že je

$$|BC|\ |PY| = |BP|\ |CP|,$$

$$|PY| = \frac{|BP|\,.\,|CP|}{|BC|} \tag{6}$$

Avšak BP je stranou čtverce, jehož úhlopříčka je AB a CP je strana čtverce s úhlopříčkou CD; proto je

$$|BP|\ \sqrt{2} = a\,, \quad |CP|\ \sqrt{2} = c\,.$$

Z toho a z rovností (6) a (4) plyne, že je

$$|PY| = \frac{ac}{2}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}\,;$$

proto a podle rovností (1) a (5) je

$$|XY| = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2\sqrt{2}} + \frac{ac\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{2\sqrt{2}\,\sqrt{a^2 + c^2}}\,,$$

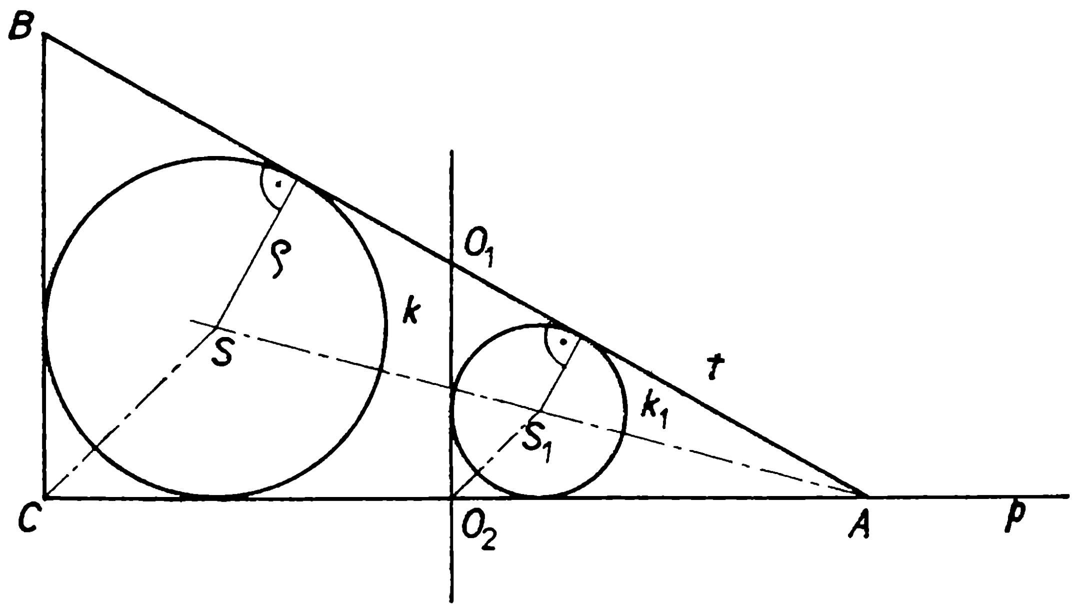
$$|XY| = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{(a + c)^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

7. Jsou dány dva různé body O_1, O_2 a kladné číslo ϱ. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby bod O_1 byl středem jeho přepony AB, bod O_2 byl středem odvěsny AC a kružnice vepsaná trojúhelníku ABC měla poloměr ϱ.

(Došlo 31 řešení.) *Jiří Mída*

Upravené řešení Pavla Vodáčka, 2 D G Bílovec:

Rozbor (obr. 2). Délka každé strany trojúhelníku AO_2O_1 je polovinou délky příslušné strany trojúhelníku ACB; je tedy $\triangle AO_2O_1 \sim \triangle ACB$.



Obr. 2

Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku AO_2O_1 je $\frac{\varrho}{2}$.

Konstrukce: Sestrojíme úsečku O_1O_2 a k ní vedeme bodem O_2 kolmici p. Sestrojíme kružnici k_1, která se dotýká přímky p, polopřímky O_2O_1 a má poloměr $\frac{\varrho}{2}$. Bodem O_1 vedeme ke kružnici k_1 tečnu $t \neq O_1O_2$; průsečík přímek p, t (pokud existuje) označíme A. Bod $C \neq A$ na přímce p sestrojíme tak, aby platilo $|CO_2| = |O_2A|$. Na přímce t sestrojíme bod B tak, aby bylo $BC \perp p$. Trojúhelník ABC je hledaný trojúhelník.

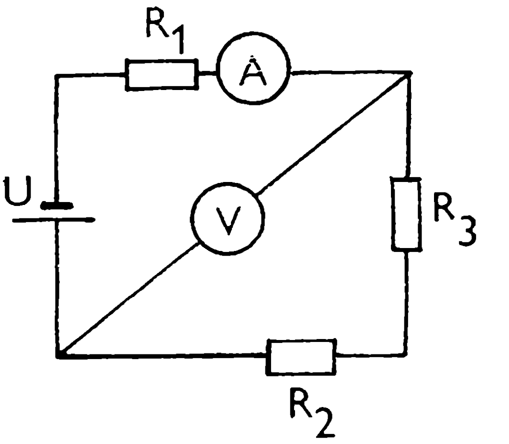
Zkouška: Z konstrukce plyne, že je $\triangle ABC \sim \triangle AO_1O_2$; přitom je $|AB| : |AO_1| = 2 : 1$. Proto poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC je rovný $2\frac{\varrho}{2} = \varrho$. Zároveň je zřejmé, že body O_1, O_2 jsou po řadě středy odvěsny AC a přepony AB.

Diskuse: Kružnice k_1 lze sestrojit právě dvě; leží v navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou O_1O_2. Tečna t protne přímku p v bodu

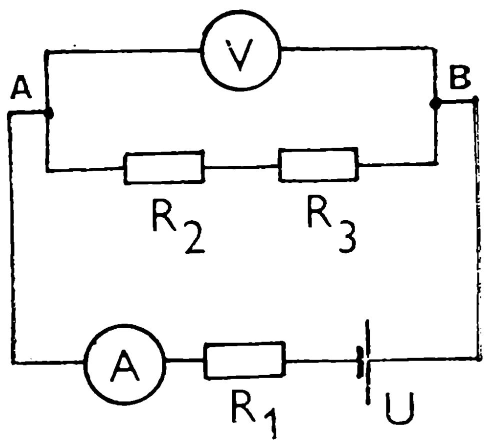
A, právě když je $|O_1O_2| \neq \varrho$; kružnice k_1 je vepsána trojúhelníku AO_1O_2, právě když je $|O_1O_2| > \varrho$. Pro $|O_1O_2| > \varrho$ má úloha dvě řešení, která jsou souměrně sdružená podle přímky O_1O_2. Pro $|O_1O_2| \leqq \varrho$ řešení neexistuje.

Fyzika

2. Na obr. 1 je ukázán elektrický obvod sestavený z odporů $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$, z voltmetru a ampérmetru. Obvod je připojen k baterii o napětí $U = 100$ V. Vypočítejte, jaký proud ukáže ampérmetr a jaké napětí voltmetr, je-li vnitřní odpor ampérmetru $R_A = 40\ \Omega$



Obr. 1



Obr. 2

a vnitřní odpor voltmetru $R_V = 2000\ \Omega$. Úlohu řešte nejprve obecně a potom číselně.
(Došlo 55 řešení) *Zdeněk Janout*

Řešil Jiří Bouček, III. B, gymnázium ZN Dobruška:

Daný obvod jsem si nejdříve překreslil do názornější podoby (viz obr. 2). Pro proud procházející celým obvodem a tím i ampérmetrem platí podle Ohmova zákona:

$$I = \frac{U}{R_A + R_1 + R_{AB}},$$

kde

$$R_{AB} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_V} + \dfrac{1}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_2 + R_3)\,R_V}{R_2 + R_3 + R_V},$$

takže po úpravě

$$I = \frac{U(R_2 + R_3 + R_V)}{(R_2 + R_3)\,(R_1 + R_A + R_V) + R_V(R_1 + R_A)}.$$

Proud procházející voltmetrem jsem si označil I_V, proud procházející oběma odpory s ním paralelními I_R. Potom platí:

$$I = I_V + I_R \tag{1}$$

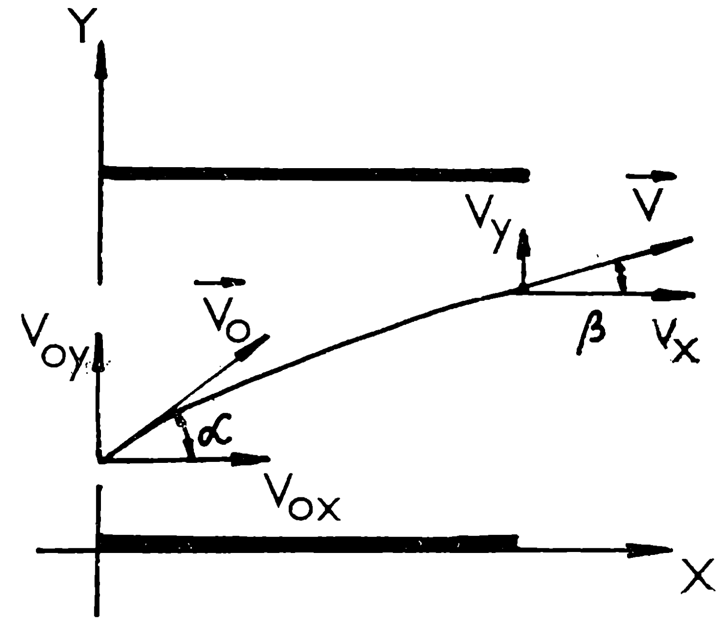
$$U_V = R_V I_V = I_R(R_2 + R_3)\,. \tag{2}$$

Po vyjádření I_R ze vztahu (1) jsem I_R dosadil do vztahu (2), ještě dosadil za proud I a upravil:

$$U_V = \frac{UR_V\,(R_2 + R_3)}{(R_2 + R_3)\,(R_1 + R_A + R_V) + R_V(R_1 + R_A)}\,.$$

Dosadíme-li číselné hodnoty, dostaneme $I = 0{,}2$ A a $U_V = 80$ V.

3. Elektron vletěl mezi elektrody deskového kondenzátoru pod úhlem α vzhledem k rovině deskových elektrod a vyletěl pod úhlem β, přičemž



Obr. 3

$\beta < \alpha$ (viz obr. 3). Délku kondenzátoru označme l, rozdíl potenciálů mezi deskovými elektrodami U a vzdálenost mezi nimi d. Určete počáteční rychlost elektronu a jeho energii při výletu z kondenzátoru. Gravitační pole Země zanedbejte.

(Došlo 51 řešení) *Zdeněk Janout*

Řešil Richard Barák, II. B. gymnázium Šumperk:

Rychlost elektronu lze rozložit na vzájemně kolmé složky tak, že

$$\frac{v_{oy}}{v_{ox}} = \operatorname{tg}\alpha\,, \tag{1}$$

$$\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\beta\,, \tag{2}$$

kde složka v_x se během pohybu nemění. Ze vztahů (1) a (2) vyjádříme rychlost v_{oy} a v_y:

$$v_{oy} = v_x \operatorname{tg} \alpha\,, \tag{3}$$

$$v_y = v_x \operatorname{tg} \beta\,. \tag{4}$$

Složka rychlosti v_y se zmenšuje vlivem síly F působící na elektron. Úbytek rychlosti si označíme $\triangle v_y$.

Dostaneme

$$\triangle v_y = a \,.\, \triangle t = \frac{F}{m} \,.\, \triangle t\,,$$

kde m je hmotnost elektronu. Síla F se rovná součinu náboje elektronu a intenzity elektrického pole E:

$$\triangle v_y = \frac{eE}{m} \,.\, \triangle t\,. \tag{5}$$

Intenzita elektrického pole je rovna

$$E = \frac{U}{d}\,. \tag{6}$$

Čas $\triangle t$ je roven

$$\triangle t = \frac{l}{v_x}\,. \tag{7}$$

Dosadíme-li vztahy (6), (7) do vztahu (5), dostaneme

$$\triangle v_y = \frac{eU}{md} \,.\, \frac{l}{v_x}\,.$$

Složku v_y pak můžeme vypočítat jako rozdíl v_{oy} a $\triangle v_y$

$$v_y = v_{oy} - \triangle v_y = v_x \,.\, \operatorname{tg} \alpha - \frac{eU}{md} \,.\, \frac{l}{v_x}\,.$$

Jestliže za v_y dosadíme vztah (4), dostaneme rovnici

$$v_x \,.\, \operatorname{tg} \beta = v_x \,.\, \operatorname{tg} \alpha - \frac{eU}{md} \,.\, \frac{l}{v_x}\,,$$

odkud vyjádříme rychlost v_x:

$$v_x = \sqrt{\frac{e\,U\,l}{md\,(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}}\,. \tag{8}$$

Vztah (8) dosadíme do vztahu (3) a vypočteme složku v_{oy}:

$$v_{oy} = \sqrt{\frac{e\,U\,l \operatorname{tg}^2 \alpha}{md\,(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}}\,. \tag{9}$$

Užitím vztahů (8) a (9) vypočteme rychlost v_o:

$$v_o = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_{oy}} = \sqrt{\frac{e\,U\,l\,(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{md\,(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}}\,. \tag{10}$$

Složku v_y vypočteme ze vztahu (4), jestliže za v_x dosadíme vztah (8)

$$v_y = \sqrt{\frac{e\,U\,l\,.\,\mathrm{tg}^2\,\beta}{md\,(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)}}\,. \tag{11}$$

Konečnou rychlost elektronu vypočteme užitím vztahů (8) a (11):

$$v = \sqrt{v^2_x + v^2_y} = \sqrt{\frac{e\,U\,l\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\beta)}{md\,(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)}}\,. \tag{12}$$

Energie elektronu při výletu z kondenzátoru bude rovna kinetické energii. Za rychlost dosadíme vztah (12). Platí:

$$W = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{e\,U\,(1 + \mathrm{tg}^2\beta)}{2d\,(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)}\,. \tag{13}$$

Odpověď: Počáteční rychlost elektronu je určena vztahem (10) a jeho energie při výletu z kondenzátoru vztahem (13).

Úlohy k řešení

V tomto čísle otiskujeme poslední úlohy z letošní Naší soutěže. Jejich *řešení zašlete do* 15. *dubna* 1986 na adresu redakce Rozhledů, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla tohoto časopisu.

Řešení každé úlohy pište čitelně česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své celé jméno *(příjmení podtrhněte)*, třídu i školu, kde studujete, a připojte svou bytovou adresu se směrovacím číslem.

Matematika

8. Nechť M, N jsou po řadě středy stran BC, CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, jehož strany BC, CD jsou shodné. Dokažte tuto větu: Čtyřúhelník $AMCN$ je tětivový nebo deltoid, právě když je $|AM|\,.\,|DT| = |AN|\,.\,|BT|$, kde T je průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$.

Jaroslav Švrček

9. Dokažte, že pro každou n-tici nenulových reálných čísel x_1, x_2 x_n platí:

$$\frac{x^2_1}{x^2_2} + \frac{x^2_2}{x^2_3} + \ldots + \frac{x^2_{n-1}}{x^2_n} + \frac{x^2_n}{x^2_1} \geqq \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \quad + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}$$

Kdy nastává rovnost? Čtenáři připomínáme článek dr. Mídy o trojúhelníkové a Cauchyově nerovnosti otištěný ve třetím čísle 63. ročníku Rozhledů.

Jaroslav Švrček

10. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y, které mají tu vlastnost, že je $x \geqq y$ a že součet $x + y$ i rozdíl $x - y$ jsou přirozená dvojciferná čísla, v jejichž zápisu v desítkové soustavě se vyskytují tytéž číslice. Dokažte, že číslo y je vždy dělitelné devíti. Popište, jak se situace v řešení úlohy změní, jestliže budeme pouze vědět, že čísla x, y, jejich součet a rozdíl jsou dvojciferná čísla.

Milan Trch

Fyzika

4. Vzdálenost mezi zdrojem a stínítkem je $L = 50$ cm. Spojná čočka, která zobrazuje zdroj na stínítko, se může pohybovat po kolmici vedené ze zdroje na rovinu stínítka. Ve dvou různých polohách čočky, jež jsou od sebe vzdáleny o $e = 10$ cm, vzniká obraz. Určete ohniskovou vzdálenost f čočky. Jaký musí být vztah mezi vzdáleností L zdroje od stínítka a ohniskovou vzdáleností f čočky, má-li se uvedený experiment dát realizovat?

Eva Havránková

5. Po pohybujícím se eskalátoru (tj. pohyblivém schodišti) pražského metra běží dolů dva studenti. Jeden rychlostí v_1, druhý rychlostí v_2; první napočítal n_1 schodů, druhý n_2 schodů. Najděte počet N schodů eskalátoru a rychlost v eskalátoru.

Zdeněk Janout

Konstrukční geometrie

2. Je dána přímka p a bod T, který není bodem přímky p. Sestrojte pravidelný osmistěn, který má tato dvě vlastnosti: Jedna jeho tělesová úhlopříčka leží v přímce p a střed jedné jeho stěny je bod T.

Emil Kraemer

3. Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan $VABCD$, jehož výška je shodná s hranou podstavy $ABCD$. Body M, N jsou po řadě středy hran AD, AB, bod Q leží uvnitř hrany VC tak, že je $|VQ|$ $|CQ| = 5 : 7$ Zobrazte řez roviny $\varrho = MNQ$ s jehlanem a potom sestrojte skutečnou velikost tohoto řezu (tj. obrazec, který je s tímto řezem shodný).

Emil Kraemer

16. mezinárodní fyzikální olympiáda

Doc. dr. ing. DANIEL KLUVANEC, CSc. — dr. IVO VOLF — ÚVFO

Ve dnech 29. 6.—30. 6. 1985 proběhla v přímořském lázeňském středisku *Portorož* v Jugoslávii v pořadí již 16. mezinárodní fyzikální olympiáda. Sešlo se na ní 99 soutěžících ze 20 zemí. Kromě toho bylo na 16. MFO pět pozorovatelů. Soutěžící i jejich vedoucí byli ubytováni v mezinárodních hotelech, kde se i stravovali. Pořadateli 16. MFO bylo ministerstvo vědy a technologie Slovinské republiky, Svaz matematických a fyzikálních společností Jugoslávie, Společnost matematiků, fyziků a astronomů ve Slovinské republice. Hostitelé vytvořili příjemné a důstojné prostředí a na zorganizování vynaložili značné finanční prostředky.

Soutěžícím byly předloženy v úterý 25. 6. 1985 tři teoretické úlohy, k jejichž řešení měli k dispozici 5 hodin času. První úloha se týkala interference elektromagnetického vlnění, ve druhé úloze měli soutěžící popsat Hallův jev a jeho využití. Třetí úloha byla tematicky z oblasti kosmonautiky. Úlohy byly dosti obtížné — z možných 30 bodů za řešení teoretických úloh byl průměrný výsledek 13,28 bodů. Ve čtvrtek 27. 6. dopoledne řešili soutěžící po dobu 5 hodin dvě experimentální úlohy — první se týkala studia procesu roztáčení a zastavování kotouče připevněného k elektromotoru, a to s využitím stolního počítače k měření času, v další úloze měli soutěžící najít magnety uschované v polystyrénové desce. Z možných 20 bodů za experimentální úlohu byl dosažen průměr 8,52 bodu.

Nejlepšího úspěchu dosáhl *Patrik Španěl* (ČSSR), který získal 42,5 bodu a stanovil tak hranici úspěšnosti i meze pro rozdělení cen. Druhým v pořadí byl *Roy Badami* z Velké Británie, který dosáhl 40,5 bodu. Nejlepší výkon při řešení teoretických úloh byl 29 bodů (P. Španěl), při řešení experimentálních úloh 15,5 bodu (David Mackay z Velké Británie, Hakan Svenssen ze Švédska). V neoficiální soutěži družstev bylo nejlepší družstvo SSSR, které dosáhlo 176,5 bodu, dále družstvo NSR (157,5 bodu), Velké Británie (155,5 bodu), Rumunska (141, 5 bodu). Na pátém místě ze 20 družstev se umístili naši soutěžící s celkovým počtem 130,5 bodu.

Československo reprezentovalo na 16. MFO pět soutěžících pod vedením autorů tohoto článku.

Naši soutěžící se na 16. MFO připravovali v podstatě po celý rok. Absolvovali soutěž v kategorii A, někteří z nich všechna tři soustředění (v prosinci a v březnu v Hradci Králové, v červnu v Nitře). Do závěrečného výběru byli zařazeni ti vítězové celostátního kola, kteří projevili tvořivý přístup k řešení problémů. Na výběru družstva se podíleli i psychologové, takže předsednictvo ÚVFO mělo různé pohledy na dvanáct nejlepších. Byli vybráni:

Patrik Španěl z gymnázia W. Piecka v Praze, *Ján Lúžny* ze SPŠ elektro v Prešově (oba se úspěšně zúčastnili 15. MFO ve Švédsku v minulém roce), *Ivo Myslivec* z gymnázia v Praze, Budějovická ul., *Michal Gašparín* z gymnázia v Novém Městě n. Váhom, *Pavel Krtouš* z gymnázia v Liberci. Tabulka ukazuje, jak dopadli na 16. MFO. Patrik Španěl získal první cenu (digitální voltmetr) a speciální cenu (rubínový laser), Ján Lúžny třetí cenu, Ivo Myslivec byl úspěšný. M. Gašparín a P. Krtouš dosáhli nižšího počtu bodů, než byla hranice úspěšnosti.

	úloha			teor. úlohy	úloha		exp. úlohy	Celkem
	1	2	3		4	5		
P. Španěl	10	9	10	29	6,5	7	13,5	42,5
J. Lúžny	7	8	7	22	3	5	8	30
I. Myslivec	1	7,5	5	13,5	4,5	7	11,5	25
M. Gašparín	2	7,5	1	10,5	1,5	4,5	6	16,5
P. Krtouš	2	3	3,5	8,5	4	4	8	16,5
Součet družstva	22	35	26,5	83,5	19,5	27,5	47	130,5
Prům. výsledek družstva na 16. MFO	21,3	28,7	16,4	66,4	23,1	19,5	42,6	109

Naši vcelku dobře reprezentovali československou středoškolskou fyziku. Volný čas trávili na kulturních programech, na mořské pláži, ale nejčastěji u stolních počítačů, instalovaných po dobu 16. MFO a volně přístupných zájemcům.

Z NOVÝCH KNIH

Hlad O., Pavlousek J.

PŘEHLED ASTRONOMIE

Vydalo SNTL v Polytechnické knižnici jako 125. svazek řady Věda a technika populárně, Praha 1984, 1. vydání, 400 str., 65 obr., 68 schémat, 33 map, 68 tabulek, váz. 45,– Kčs.

Po necelých šesti letech se dostává nejširší čtenářské veřejnosti do rukou další kniha dvou známých popularizátorů astronomie dr. O. Hlada a ing. J. Pavlouska. Oba autoři nesepsali úplný přehled současných astronomických poznatků, jak by snad sám název knihy napovídal, ale vybrali pouze ty partie, které v přehledu astronomie nelze vynechat, a ty, které v naší literatuře dosud chybějí, nebo jimž bylo věnováno málo pozornosti.

Kniha je tematicky členěna do čtyř částí. První rozsáhlá kapitola „O blízkém a vzdáleném vesmíru" podává přehled názorů na stavbu vesmíru, uvádí potřebné základy astrofyziky a uceleně popisuje všechna tělesa sluneční soustavy. Obrovský pokrok kosmologie a planetologie, podmíněný zejména řadou družicových pozorování, způsobil, že od doby odevzdání rukopisu do tisku přibyly některé další nové poznatky a zajímavá fakta. Vyrovnat tuto časovou ztrátu a dovést populární výklad na hranici současnosti znamená vlastně předvídat další možné směry vývoje poznání, které nelze určit vždy beze zbytku. Druhá část knihy, „Poznávejte vesmír sami" vysvětluje názorně základy sférické astronomie a otázky definice časů spojené s vývojem kalendáře do dnešní podoby. Autoři se zde dále zabývají pohyby planet, jejich vzájemnými aspekty a výpočtem efemeridy planety, který doplňují výpočetním programem pro kapesní kalkulátory řady TI. Třetí krátká kapitola „Pozorujeme hvězdnou oblohu" je výborným námětem pro jednoduchá amatérská pozorování malými a středními dalekohledy. Výčet zajímavých dvojhvězd, proměnných hvězd, jasných hvězdokup, mlhovin a galaxií je doplněn malým atlasem oblohy. Celkem 32 mapek tohoto atlasu pokrývá celou oblohu včetně jižní části a společně se seznamem souhvězdí je vlastně malým encyklopedickým souborem. Poslední část knihy tvoří necelých sto stran tabulek různých objektů, z nichž největší ocenění zaslouží kompletní katalog hvězd 4,5 magnitudy, který je tolik potřebný pro práci amatérů.

Lze-li recenzované knize něco vytknout, pak je to právě velký podíl tabulek v celkovém objemu, z nichž některé možná nejsou vhodné pro publikaci tohoto druhu. Např. o užitečnosti tabulky převodů míry úhlové a časové může pochybovat každý majitel jednoduchého kalkulátoru. Uvedení galaktických souřadnic starého a nového typu je jistě zajímavé z historického hlediska, ale tabulky jejich vzájemných převodů nejsou v dnešní době tolik potřebné. Většího rozpracování z kosmologického hlediska si zřejmě zasloužila úvodní kapitola o stavbě vesmíru a Galaxie. Pečlivý čtenář postřehne i nepřesnost tvrzení, že bílé trpasličí hvězdy jsou složené z jader atomů (str. 59), a ví, že celkový počet Jupiterových satelitů převýšil uváděných 15 (str. 149). V atlasové i tabulkové části by bylo vhodnější použití ekvinokcia 2000, v atlasu samotném místy ruší grafické přecenění jasnosti hvězdokup a mlhovin, které zastiňují charakteristické tvary souhvězdí. Ty čtenáře, kteří budou používat již zmíněný výpočetní program pro efemeridy planet (str. 231), je třeba upozornit na několik tiskových chyb v seznamu instrukcí.

Závěrem lze říci, že se vydaná kniha jistě zařadí mezi přední díla naší popularizační literatury a bude hodnotným přírůstkem do knihovny každého zájemce o astronomii. Kniha výborné úrovně najde uplatnění i jako vhodná pomůcka pro práci astronomických kroužků na lidových hvězdárnách.

Marek Wolf

Lichtenberg, G. CH.:

MYŠLENKY, POSTŘEHY, NÁPADY

Vydal Odeon, Praha 1984, Kčs 14,—

Nebýva zvykom upozorňovať mladých čitateľov nášho časopisu na publikácie s nematematicko-fyzikálnou problematikou. Výnimkou zdôrazníme pravidlo.

Nakladateľstvo Odeon vydalo zaujímavú publikáciu, výber myšlienok, postrehov a drobných nápadov jedného z najlepších nemeckých aforistov. *Georg Christoph Lichtenberg* (1. VI. 1742—24. II. 1799) bol však aj profesorom experimentálnej fyziky, matematiky a astronómie na univerzite v Göttingen. Človek so zmyslom pre presnosť vedy, s darom pozorovania i sebapozorovania. S oduševnením dokázal pracovať v elektrotechnickom a fyzikálnom kabinete, v astronomickom observatóriu i nad písacím stolom. Tvorivo napĺňal univerzitné povolanie, svojím životom spája vedu i literatúru. Premýšľal, pozoroval, hodnotil. Pokúšal sa odhaliť závoj tajomstva prírody i človeka. Hovoril aj pre vás? Čítajte:

Určite je lepšie nejakú vec neštudovať vôbec, než ju študovať povrchne. Ak totiž posudzuje určitú vec iba zdravý rozum, trafí sa skôr než polovičatá učenosť.

Je to, čo človek môže poznať, práve to, čo má vedieť?

Nenechaj sa nakaziť, nevydávaj žiadny cudzí názor za svoj, pokiaľ sa nepresvedčíš, že ti vyhovuje: vytváraj si radšej názor sám.

Spýtaj sa sám seba, či dokážeš vysvetliť tie najnepatrnejšie veci. To je jediný spôsob, ako si vytvoriť správny systém, preskúmať svoje sily a dosiahnuť to, aby štúdium bolo užitočné.

Maj sa na pozore, aby si náhodou nedostal miesto, na ktoré nestačíš, aby si sa nemusel vydávať za niečo, čo nie si. Nič nie je nebezpečnejšie a nič viac neruší úplný vnútorný kľud a nič viac neškodí poctivosti ako práve toto. A obyčajne to končí naprostou stratou dôvery.

Ak vás zaujímajú aforizmy, glosy, satirické poznámky, humoristické záznamy a podobné krátke literárne útvary z pera matematika a fyzika, pozrite sa do spomínanej knižky. Možno spoznáte príchuť matematickej reči v poézii metafór a jemných prirovnaní.

Dušan Jedinák

Kalendár M-F: december 1985

5. XII. 1770 zomrel *James Stirling*, škótsky matematik. Prispel v teórii nekonečných radov a teórii kriviek 3. stupňa. Známe sú jeho vzorce na odhad faktoriálov a asymptotický rozvoj gama-funkcie.

7. XII. 1830 sa v Pavii narodil *António Luigi Cremona*, taliansky matematik. Patrí k zakladateľom talianskej geometrickej školy.

8. XII. 1865 sa narodil *Jacques Salomon Hadamard*, francúzsky matematik. Pracoval v oblasti teórie čísel, analytických funkcií, diferenciálnych rovníc. Súbor jeho prác obsahuje 325 titulov. Jeho názory podstatne ovplyvnili funkcionálnu analýzu i matematickú fyziku.

8. XII. 1955 zomrel v Zürichu *Hermann Weyl*, nemecký matematik. Rozvinul idey symetrie v matematike i fyzike. Riešil filozofické otázky matematiky, patrí k predstaviteľom intuicionizmu.

13. XII. 1895 zomrel v Rábe *Štefan Anián Jedlík*, slovenský fyzik a vynálezca. Priekopník v elektrotechnike, profesor na univerzite v Budapešti.

17. XII. 1835 sa v Pavii narodil *F. Casorati*, taliansky matematik. Pracoval v teórii funkcií, v teórii obyčajných diferenciálnych rovníc a histórii matematiky.

18. XII. 1855 zomrel *Jacques Sturm*, francúzsky matematik a fyzik švajčiarského pôvodu. Určil metódu pre určenie počtu koreňov algebraickej rovnice v danom intervale. Pracoval v oblasti riešenia okrajových úloh rovníc matematickej fyziky.

18. XII. 1880 zomrel *Michel Chasles*, francúzsky matematik. Bol profesorom na Sorbonne, členom mnohých akadémií vied. Pracoval v oblasti numerickej geometrie a syntetickej projektívnej geometrie. Zaujímal sa o históriu matematiky.

21. XII. 1765 zomrel *Prokop Diviš*, český vynálezca. Skúmal vlastnosti elektriny, postavil v roku 1754 prvý bleskozvod.

31. XII. 1610 zomrel *Ludolf van Ceulen*, holandský matematik. Vypočítal číslo π na 22 desatinných miest.

31. XII. 1905 zomrel v Petrohrade *Alexander Stepanovič Popov*, ruský fyzik a elektrotechnik. V roku 1895 vysielal prvý rádiogram. Jeho práce v oblasti rádiotechnicky mali priekopnícky význam.

31. XII. 1940 zomrel *Jacques Arsène d'Arsonval*, francúzsky fyzik a fyziológ. Spojil fyziologické experimenty s presnou fyzikálnou analýzou. Skonštruoval špeciálny galvanomer, kalorimeter. Patrí k zakladateľom biofyziky. *dj.*

V roce 1870 vyšla tiskem *První zpráva Jednoty českých matematiků.* Téhož roku byla vydána ještě *Druhá zpráva.* Byla tak založena tradice časopisů Jednoty. Obě zprávy obsahovaly také úlohy pro čtenáře.

jm

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

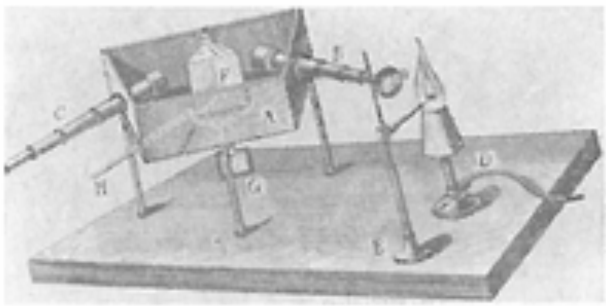
Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Kirchhoffův spektroskop

Německý filozof *Georg W. F. Hegel* (1770—1831) tvrdil, že ve světě existují věci nepoznatelné; jako příklad uváděl, že člověk nikdy nepozná chemické složení hvězd. Zanedlouho však *Joseph von Fraunhofer* (1787—1826) objevil spektrální čáry. *Gustav R. Kirchhoff* (1824—1887) vyslovil zákon o vztahu mezi emisí a absorpcí světla vyzařovaného danou látkou. Pomocí svého přístroje, který sestavil v r. 1859, pak dokázal, že celý vesmír má stejné chemické složení. Tím pádně vyvrátil Hegelovu tézi o nepoznatelnosti chemického složení hvězd. Snad žádný jiný přístroj kromě dalekohledu, drobnohledu a urychlovače částic nepřispěl k rozšíření lidského poznání více než spektroskop. Na obrázku vidíme nákres Kirchhoffovy aparatury.

Lze se ptát, proč k spektroskopu nedospěl již *I. Newton* (1643 až 1727), který se velmi podrobně zabýval rozkladem světla pomocí hranolu. Říkává se, že sklo jeho hranolů nebylo dost homogenní a že na vstupu svého spektroskopu nepoužíval štěrbinu, ale kruhový otvor, kterým nelez zjistit přítomnost tmavých spektrálních čar. Jeho závěr zněl, že všechny látky mají stejné, spojité spektrum.



Newtonovu poučku se neodvážili vyvracet ani takoví badatelé jako *Wollaston* a *Young*, kteří tmavé spektrální čáry viděli vlastníma očima. Tuto evidentní pravdu sdělil světu až Fraunhofer, který nebyl „zatížen" newtonovskou učeností; od něho vedla pak již přímá cesta k principu spektrální analýzy, který vypracoval Kirchhoff.

Vladimír Mališek

Čo je matematika?

Matematika je symfónia, v ktorej písané noty predstavujú aspekt algoritmický, a hudba citlivo podľa nôt zahraná aspekt ontologický.

J. de Siebenthal

Matematika je vedou mladých. Ani nemôže byť inak, lebo práca v oblasti matematiky je gymnastika mozgu, vyžadujúca naprostú pružnosť a odolnosť mladosti.

N. Wiener

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednotky čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 64, 1985/86
LEDEN

(5)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZAJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

MATEMATIKA

Kódy „dva z pěti"

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

V článku [1] jsme se zabývali čtyřbitovými kódy desítkových číslic. V každém z těchto kódů jsou kódovými slovy uspořádané čtveřice dvou různých prvků, které jsme označovali O a I. Pro kontrolu, zda číslice byla správně zakódována a zda při přenosu či zpracování nedošlo k chybě, by bylo výhodné, kdyby v každém kódovém slově byl týž počet znaků I. Takových kódových slov bychom samozřejmě potřebovali aspoň deset. U čtyřbitových kódů toto nelze realizovat. Největší počet uspořádaných čtveřic s týmž počtem znaků I je šest. Je tomu tak, když ve čtveřicích jsou právě dva znaky I. Jde o čtveřice:

IIOO, IOIO, IOOI, OIIO, OIOI, OOII.

Uvažujeme-li uspořádané pětice z prvků O a I, pak zjistíme, že pětic, v nichž jsou právě dva znaky I, je celkem deset a obdobně těch, v nichž jsou právě tři znaky I, je také celkem deset. Omezme se na případ dvou znaků I; množina všech příslušných pětic je

M = {IIOOO, IOIOO, IOOIO, IOOOI, OIIOO, OIOIO, OIOOI, OOIIO, OOIOI, OOOII}.

Pětibitové kódy desítkových číslic, v nichž jsou číslice zakódovány pěticemi z množiny M, se nazývají *kódy dva z pěti*. V tabulce 1 je jeden z takových kódů.

Tabulka 1

d	7	4	2	1	0
0	I	I	O	O	O
1	O	O	O	I	I
2	O	O	I	O	I
3	O	O	I	I	O
4	O	I	O	O	I
5	O	I	O	I	O
6	O	I	I	O	O
7	I	O	O	O	I
8	I	O	O	I	O
9	I	O	I	O	O

Vzniká otázka, kolik existuje kódů „dva z pěti". Jejich počet je roven počtu prostých zobrazení množiny $\{0, 1, 2, \quad , 9\}$ na množinu M, která obsahuje také deset prvků. Kódů „dva z pěti" je tedy celkem

$$10! = 3\,628\,800$$

V záhlaví tabulky 1 jsou uvedena čísla 7, 4, 2, 1, 0. Tato čísla jsou váhami (viz [1]) tohoto kódu pro nenulové číslice; přesvědčte se o tom. Pro žádný z kódů „dva z pěti" nelze však nalézt takovou pětici čísel, jimiž jakožto váhami by bylo možno vyjádřit každou desítkovou číslici. Toto tvrzení dokážeme, a to nepřímo.

Nechť některý z kódů „dva z pěti" je váhový a nechť jeho váhy jsou x, y, z, u, v. Z toho, že kódové slovo číslice 0 obsahuje právě dva znaky I, plyne, že dvě z vah jsou čísla opačná. Nechť např. $u = -v$. Potom čísla 1, 2, . , 9, jsou v jistém pořadí rovna číslům:

$$\begin{array}{ll} x + v\,, & z + v\,, \\ x - v\,, & z - v\,, \\ y + v\,, & x + y\,, \\ y - v\,, & x + z\,, \\ & y + z \end{array}$$

Součet všech těchto čísel je

$$4\,.\,(x + y + z) = 1 + 2 + \quad + 9 = 45 \tag{1}$$

Každé z čísel $x + y$, $x + z$ a $y + z$ je přirozené, a proto i součet

$$(x + y) + (x + z) + (y + z) = 2\ (x + y + z)$$

je přirozené číslo. Označme je k. Z rovnosti (1) pak plyne

$$2k = 45\,,$$

což je spor, neboť číslo 45 není sudé.

Dojde-li při přenosu libovolného slova kódu „dva z pěti" k jedné chybě, tj. k nechtěnému invertování jednoho bitu, pak vždy vznikne pětice, která není kódovým slovem. Např. z kódového slova OIIOO vznikne jednou chybou některá z pětic:

IIIOO, OOIOO, OIOOO, OIIIO, OIIOI

Tato okolnost umožňuje objevit, že došlo k chybě.

Kódů „dva z pěti" (resp. „tři z pěti") se užívá při přenosu číslicových informací v telefonních ústřednách a v pamětech některých počítačů.

Cvičení

1. V jakém vztahu je kód „tři z pěti" ke kódu „dva z pěti"?
2. V některých telefonních ústřednách se užívá kódu „tři ze šesti". Kolik je možných kódů tohoto druhu pro desítkové číslice?
3. Nalezněte všechny kódy „dva z pěti", jejichž kódová slova pro číslice 1 až 8 lze získat užitím vah 6, 4, 2, 1, 0.

Literatura

[1] Mída J.: Čtyřbitové kódy desítkových číslic, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 2, s. 51—54

Terč a těžiště

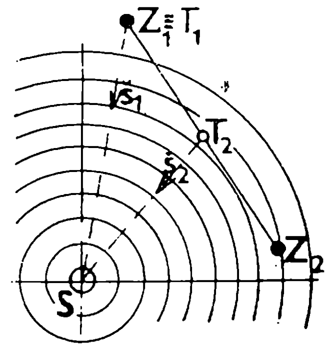
Ing. IVANKA KOSKOVÁ, VŠZ Praha,

doc. dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

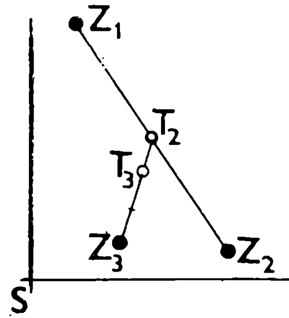
Zdálo by se, že *střelecký terč* a *těžiště* nemají mnoho společného, avšak jen na první pohled. Ukážeme, že pojem fyzikálního nebo geometrického těžiště se střelbou souvisí docela úzce. Dokonce se jedná o aplikování fyzikálního nebo matematického aparátu při správném nastavování mířidel, tedy mušky a zářezu hledí, které jsou upevněny na hlavni pušky. Přesným mířením puškou musí střela zasáhnout cíl. My budeme za cíl pokládat střed terče a jednotlivé zásahy budeme označovat jako body např. Z_1, Z_2, Z_3, , Z_n, popř. jen 1, 2, , n apod.

Místo dokonale mířícího střelce pevně upneme třeba nově vyrobenou pušku a přesně ji zamíříme na střed S terče. Po prvním výstřelu označíme zásah Z_1. Kdyby puška neměla při střelbě žádný rozptyl, což je ideální, avšak nereálný případ, pak bychom vystačili s jediným zásahem Z_1. Podle něj bychom přestavěli mířidla pušky tak, aby důsledek jejich přestavení způsobil přenesení Z_1 do S, tedy $Z_1 \equiv S$, jak ukazuje šipka $š_1$ na obr. 1. Rozptyl střelby, který je vlastní každé pušce, však způsobuje, že i při nejpřesnějším míření s velmi dobrou puškou zásahy nesplývají, ale vytvoří na terči jistý bodový geometrický obrazec. Při dvou různých zásazích Z_1, Z_2 bychom zcela přirozeně usilovali o takové nastavení mířidel, jež by způsobilo přenesení středu T_2 úsečky Z_1Z_2 do středu S terče — viz šipka $š_2$ na obr. 1. Ve shodě s fyzikou budeme bodu T_2 říkat *těžiště* — v tomto případě těžiště úsečky $Z_1 Z_2$.

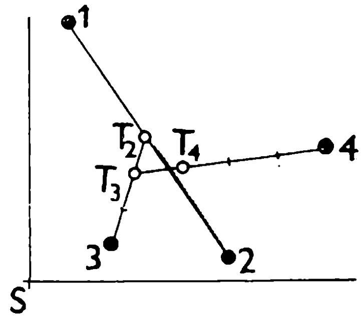
Zpravidla však nestačí ani dva zásahy k tomu, abychom dost přesně postihli rozptyl pušky, z níž střílíme. Situace tří zásahů Z_1, Z_2, Z_3 je na obr. 2. Bod T_3 je těžištěm rozptylu a současně těžištěm trojúhelníka $Z_1Z_2Z_3$. Toto těžiště leží na úsečce T_2Z_3, a to ve vzdálenosti jedné její třetiny od T_2. Jde o těžiště trojúhelníka $Z_1Z_2Z_3$, jak je známe z geo-



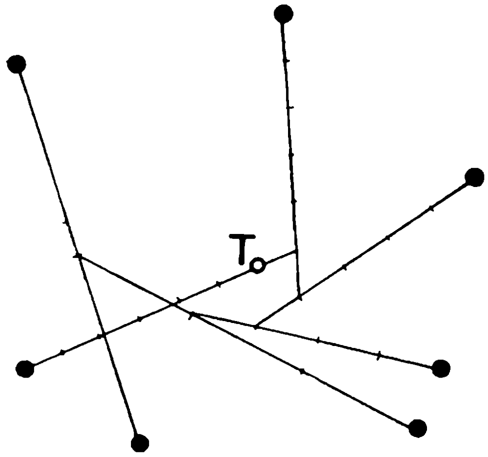
Obr. 1



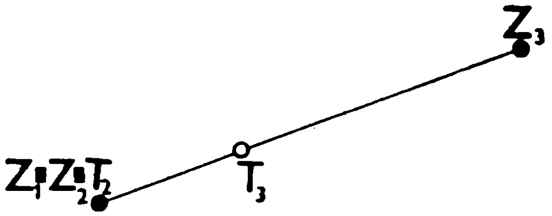
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

metrie. Zaměníme-li pořadí zásahů např. Z_2, Z_3, Z_1 nebo Z_3, Z_1, Z_2 umístění těžiště T_3 se ovšem nezmění, jak rovněž víme z geometrie.

Připojme k třem zásahům ještě čtvrtý zásah Z_4. Těžiště T_4 těchto čtyř zásahů (které budeme pokládat za hmotné body) je na úsečce T_3Z_4 ve vzdálenosti jedné čtvrtiny od T_3. Čtenář se snadno grafickou cestou přesvědčí, že při vyšetřování těžiště nezáleží na uvažovaném pořadí bodů Z_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Na obr. 3 jsou zásahy při stejné konfiguraci označeny jen jako body 1, 2, 3, 4. Těžiště T_4 je ovšem na stejném místě. Čtenář si za cvičení může uvedené čtyři body překreslit na průsvitku a volit různá pořadí při stanovování těžiště.

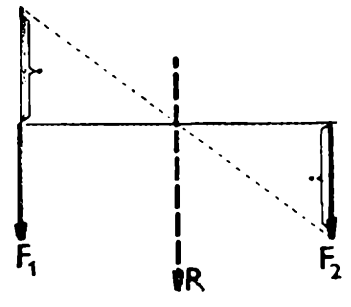
Obdobně zjistíme, že při n zásazích bude těžiště T_n na úsečce $T_{n-1} T_n$ ve vzdálenosti jedné n-tiny od T_{n-1}. Při sérii sedmi zásahů je těžiště T_7, reprezentující rozptyl těchto zásahů, nakresleno na obr. 4. Na tomto obrázku nejsou body blíže označeny. Čtenář snadno určí jejich posloupnost při konstrukci.

Zatím jsme předpokládali, že všechny body rozptylu jsou navzájem různé. Co když jsou některé totožné, např. $Z_1 \equiv Z_2 \not\equiv Z_3$ — viz. obr. 5. Zřejmě $T_2 \equiv Z_2$ a T_3 bude v jedné třetině úsečky Z_2Z_3 blíže T_2. Ponecháváme čtenáři, aby při vyšetřování T_3 zvolil jiné pořadí, např. Z_3, Z_1, Z_2.

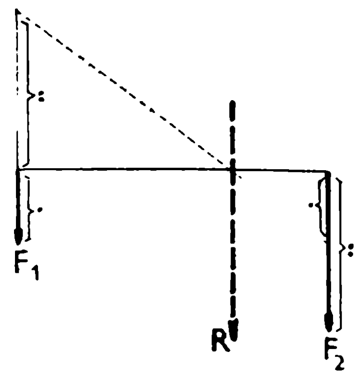
K stanovení těžiště n bodů — pro nás to mohou být neustále zásahy na terči — můžeme užít znalostí z analytické geometrie. Nebudeme tento postup popisovat, jen připomeneme, že body je nutno zadat jejich souřadnicemi, kde počátek systému souřadnic je $S = (0; 0)$.

Úloha: Mějme tyto čtyři body: $A = (-3; 3{,}5)$, $B = (0{,}5; 2)$, $C = (2; 6)$ a $D = (5; 5{,}5)$. Stanovte a) souřadnice těžiště T, b) vzdálenost těžiště od středu terče, c) úhel, který svírá úsečka ST s kladným směrem osy x. (Výsledky: $T = (1{,}125; 4{,}25)$; $|ST| = \sqrt{19{,}328125} \doteq 4{,}396$; $\alpha \doteq 75{,}178°$).

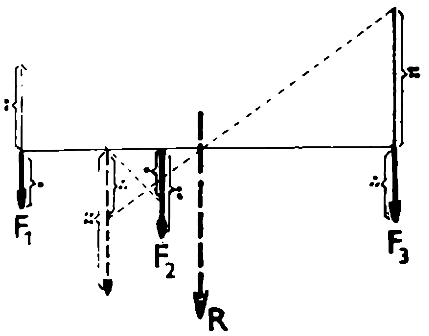
Pro čtenáře, který umí stanovit výslednici několika sil v rovině, připojujeme návod k určení těžiště n bodů roviny: Stanovme výslednici rovnoběžných sil stejné velikosti a stejného smyslu, které působí v jed-



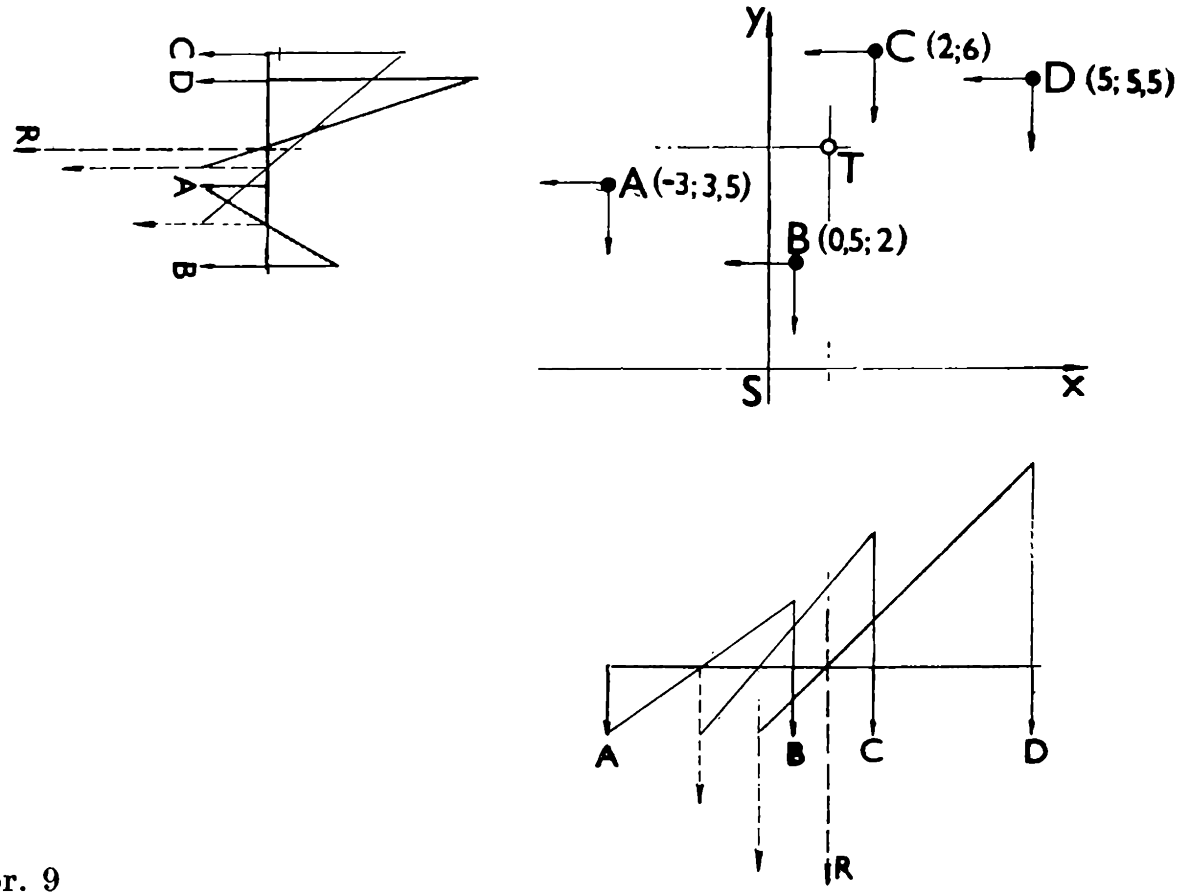
Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

notlivých bodech roviny, jejichž těžiště máme určit. Totéž opakujeme ještě jednou s tím rozdílem, že směr týchž sil zvolíme kolmo na směr původní. V průsečíku obou výslednic je hledané těžiště uvažované soustavy bodů.

Jen stručně naznačíme grafickou metodu a) k stanovení výslednice dvou rovnoběžných sil stejné velikosti a stejného smyslu (viz obr. 6), b) k stanovení výslednice dvou rovnoběžných sil různé velikosti a stejného smyslu (viz obr. 7). Metodu nebudeme podrobně popisovat, je zřejmá z obrázků. V případě a) je $F_1 = F_2$, výslednice $R = F_1 + F_2$ je rovnoběžná s oběma složkami a je uprostřed mezi nimi. V případě b) je $F_1 < F_2$ a výslednice $R = F_1 + F_2$ je rovněž mezi oběma složkami, avšak blíže síly F_2 (tj. blíže síly větší). Při skládání tří rovnoběžných sil stanovíme výslednici tak, že nejdříve stanovíme výslednici dvou sil a tu opět složíme se zbývající silou. Při skládání většího počtu sil postupujeme obdobně (viz. obr. 8).

Závěrem článku stanovíme graficky těžiště čtyř shora uvedených bodů A, B, C, D, které mohou představovat sérii střeleckých zásahů do terče. Pilný čtenář již tuto úlohu vyřešil početně.

Z geometrie trojúhelníku

STANISLAV HORÁK, Praha

V článku je řešena zajímavá úloha o trojúhelníku. Není nová, je známa již několik desítek let a ve speciálním případě již byla řešena před časem zemřelým prof. Fr. Hradeckým. Zde je uvedeno zcela obecné řešení.

Úvodem je nutné předeslat, že vektorový vzorec pro obsah trojúhelníka ABC, v němž vektory stran jsou $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, je

$$S = \frac{1}{2} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

($\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$). Cyklickou záměnou dostaneme další dva vzorce

$$S = \frac{1}{2} |\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = \frac{1}{2} |\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}|.$$

Z toho je vidět, že o vektorech stran trojúhelníka platí

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}| \tag{1}$$

Nyní k vlastní úloze. Každou stranu trojúhelníka ABC rozdělíme na n stejných dílů, kde n je přirozené číslo. V obr. 1 je $n = 7$. Bod A', který je p-tým dělícím bodem na straně BC počítaje od vrcholu B, spojme s vrcholem A. Podobně p-tý dělící bod B' (C') na straně CA (BA) počítaje od vrcholu C (A) spojme s vrcholem B (C). Přímky AA', BB', CC' omezují trojúhelník HKL, který leží uvnitř trojúhelníka ABC.

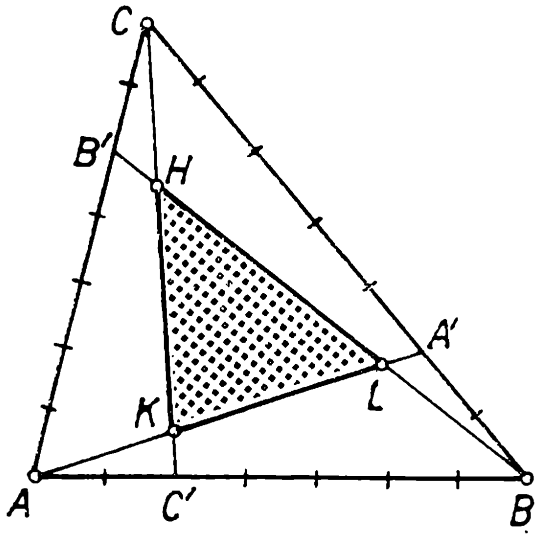
Úloha: Vypočítejte obsah trojúhelníka HKL pomocí obsahu S daného trojúhelníka.

Řešení. Předem si řekněme, že obsah trojúhelníka HKL vypočítáme takto:

$$S(HKL) = S - S(ABL) - S(BCH) - S(CAK) \tag{2}$$

Vektory stran trojúhelníka ABC označíme

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{b}$$



Obr. 1

O těchto vektorech platí

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} \,. \tag{3}$$

Abychom mohli vypočítat obsah $S(ABL)$, vyjádříme nejdřív vektory $\boldsymbol{AA'}$, $\boldsymbol{BB'}$ a z nich vektory $\boldsymbol{AL}$, $\boldsymbol{BL}$. Z vektorů stran trojúhelníka ABA' plyne

$$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA'} + \boldsymbol{A'A} = \boldsymbol{o} \,.$$

Odtud

$$\boldsymbol{AA'} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA'} = \boldsymbol{c} + \frac{p}{n}\boldsymbol{a} \,.$$

Podobně z vektorů stran trojúhelníku BCB' dostaneme

$$\boldsymbol{BB'} = \boldsymbol{a} + \frac{p}{n}\boldsymbol{b} \,.$$

Potom

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AL} &= \alpha \,.\, \boldsymbol{AA'} = \alpha\left(\boldsymbol{c} + \frac{p}{n}\boldsymbol{a}\right), \text{ kde } 0 < \alpha < 1 \,, \\ \boldsymbol{BL} &= \beta \ \ \boldsymbol{BB'} = \beta\left(\boldsymbol{a} + \frac{p}{n}\boldsymbol{b}\right), \text{ kde } 0 < \beta < 1 \end{aligned} \tag{4}$$

Dále o vektorech $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BL}$, $\boldsymbol{LA}$ platí

$$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BL} + \boldsymbol{LA} = \boldsymbol{o} \,,$$

což jinak psáno

$$\boldsymbol{c} + \beta\left(\boldsymbol{a} + \frac{p}{n}\boldsymbol{b}\right) - \alpha\left(\boldsymbol{c} + \frac{p}{n}\boldsymbol{a}\right) = \boldsymbol{o} \,.$$

Ještě se zbavíme zlomků a upravíme:

$$(n\beta - \beta p - p\,\alpha)\,\boldsymbol{a} + (n - p\,\beta - n\,\alpha)\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} \,.$$

Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ jsou nenulové a lineárně nezávislé a v napsané rovnici je jejich lineární kombinace rovna nulovému vektoru. To je možné jedině tak, že oba koeficienty se rovnají nule, tj.

$$\begin{aligned} \beta(n - p) - \alpha\,p &= 0 \,, \\ n - \beta\,p - \alpha\,n &= 0 \,; \end{aligned}$$

řešení této soustavy je (α, β jsou neznámé):

$$\alpha = \frac{n(n-p)}{n^2 - np + p^2}, \qquad \beta = \frac{pn}{n^2 - np + p^2}.$$

Za α a β dosadíme do (4) a po kratší úpravě máme

$$S(ABL) = \frac{1}{2} |\boldsymbol{AL} \times \boldsymbol{BL}| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{np - p^2}{(n^2 - np + p^2)^2} |(p\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{c}) \times (n\boldsymbol{a} + p\boldsymbol{b})| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{np - p^2}{(n^2 - np + p^2)^2} |pn\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + n^2 \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + p^2\boldsymbol{a} \times$$

$$\times \boldsymbol{b} + np\, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}| =$$

$$= \frac{1}{2} \; \frac{np - p^2}{(n^2 - np + p^2)^2} |n^2 \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + p^2 \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + np\, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}|.$$

Nyní použijeme vztahu (1) k další úpravě:

$$S(ABL) = \frac{np - p^2}{2(n^2 - np - p^2)^2} |n^2 \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + p^2 \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - np\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| =$$

$$= \frac{np - p^2}{2(n^2 - np + p^2)^2} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \, (n^2 - np + p^2) =$$

$$= \frac{np - p^2}{n^2 - np + p^2} S$$

Obsahy trojúhelníků BCH, CAK nemusíme již počítat, stačí použít cyklické záměny, ale to nás vede k tomu, že

$$S(ABL) = S(BCH) = S(CAK)$$

(Mimochodem, také zajímavý výsledek.) Potom

$$S(HKL) = S - 3 \,.\, S(ABL) =$$

$$= S\left(1 - \frac{3np - 3p^2}{n^2 - np + p^2}\right) =$$

$$= S \,.\, \frac{(n - 2p)^2}{n^2 - np + p^2}$$

Tím je úloha rozřešena.

Cvičení

1. Prof. Hradecký řešil případ $n = 3$, $p = 1$. Jaký výsledek dostal?
2. Dosaďte $n = 7$, $p = 2$ (3, 4, 5, 6).

Jak proložit přímku několika body

Doc. RNDr. JIŘÍ ANDĚL, DrSc., MFF UK Praha

1. Úvod

Proložit přímku dvěma různými body patří mezi nejjednodušší geometrické úkony. K určitým problémům může dojít snad jen tehdy, jsou-li tyto body příliš blízko nebo naopak příliš daleko od sebe. Takové komplikace samozřejmě odpadnou, budeme-li pod proložením přímky chápat určení její rovnice v rámci běžného souřadného systému. Jak známo, přímka procházející různými body $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$ má rovnici

$$(y - a_2)(b_1 - a_1) = (x - a_1)(b_2 - a_2).$$

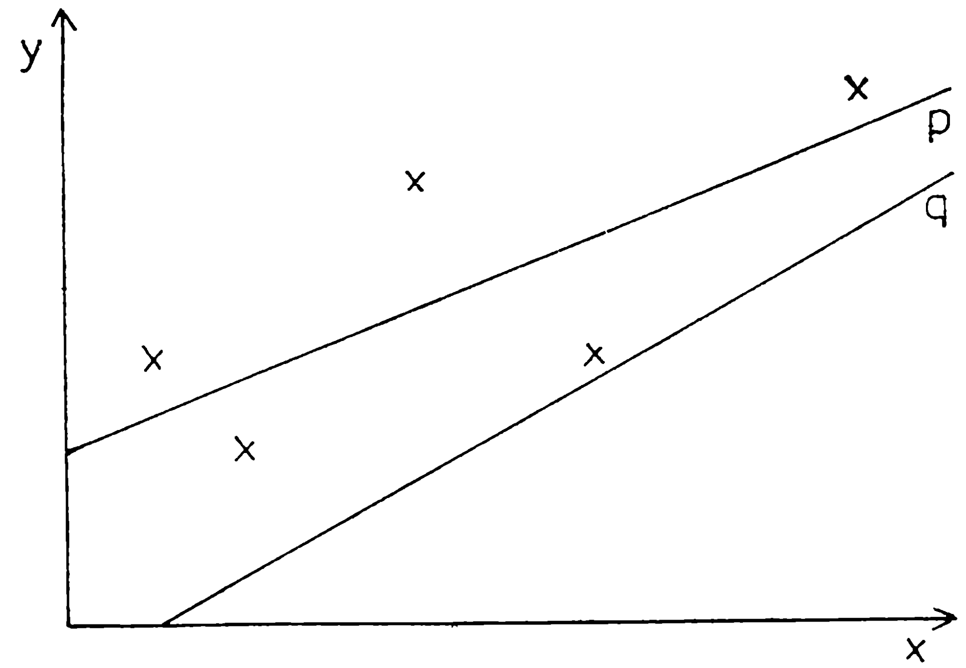
Jindy bývá známo, že přímka má procházet třemi či více různými body. Analytické řešení této úlohy je zřejmé. Jde-li však o grafické proložení přímky a jsou-li dané body výsledkem složitějších konstrukcí, těžko lze předpokládat absolutní přesnost při rýsování. Můžeme se pak ocitnout v situaci, že máme proložit přímku několika body, které na jedné přímce sice mají ležet, ale neleží. Tento aspekt bývá zpravidla ignorován a doporučí se jen větší přesnost při provádění geometrických konstrukcí.

Při jiných příležitostech, zejména při zpracovávání výsledků fyzikálních a chemických experimentů, bývá také úkolem proložit přímku několika různými body, které by na jedné přímce ležely jen v ideálním, prakticky však neuskutečnitelném případě. Uvedeme příklad. Máme-li tyč délky l s příčným průřezem S a napínáme-li ji silou F, pak při malých deformacích podle Hookova zákona pro prodloužení tyče $\triangle$ platí

$$\triangle = klF/S \tag{1}$$

Konstanta k se nazývá *součinitel prodloužení*. Kdybychom ho chtěli experimentálně určit, mohli bychom realizovat několik pokusů, při nichž bychom volili sílu F postupně rovnu $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Označme $\triangle_i$ prodloužení, které změříme při působení síly F_i. Předpokládejme, že l a S jsou známé hodnoty. Pak výsledkem našich pokusů bude n dvojic hodnot $(F_1, \triangle_1), \ldots, (F_n, \triangle_n)$. Tyto dvojice lze v rovině znázornit pomocí n bodů, které by vzhledem k uplatnosti zákona (1) měly ležet na jedné přímce (dokonce na takové, která prochází počátkem). Ve skutečnosti se musíme smířit s tím, že měření nejsou absolutně přesná, takže zjištěné body na jedné přímce ležet nebudou. Stojíme tak před problémem, jak určit tu přímku, která by daným bodům alespoň co nejlépe odpovídala.

Na první pohled se zdá, že slovům „co nejlépe" lze jednoznačně přiřadit odpovídající matematické kritérium. Podíváme-li se na obr. 1,



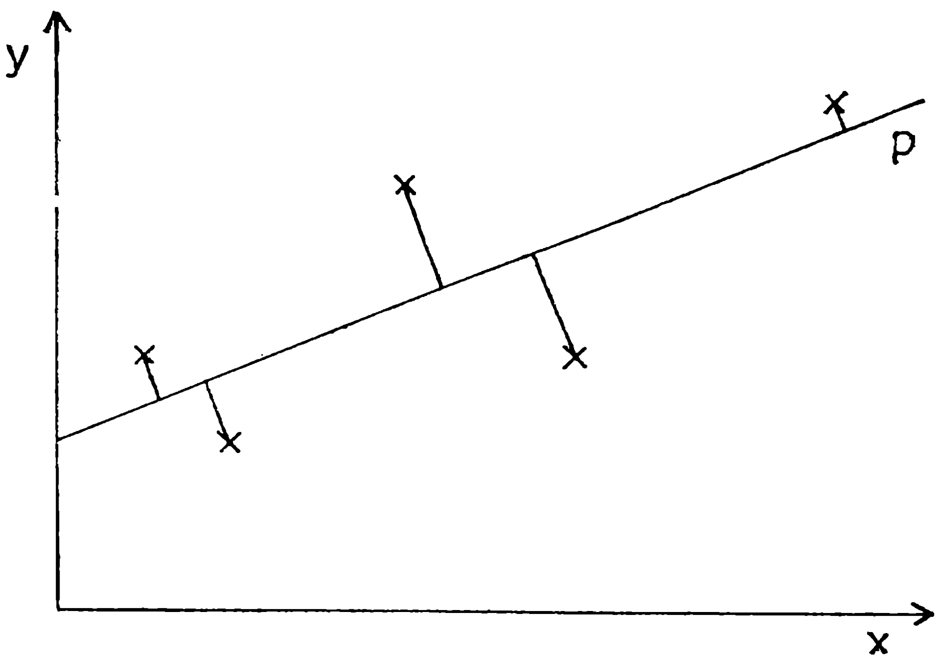
Obr. 1

okamžitě řekneme, že znázorněným bodům lépe odpovídá přímka p než přímka q. Ve skutečnosti však existuje několik kritérií, pomocí nichž je možné určovat shodu přímky s danými body. Přitom nelze předem rozhodnout, které je nejlepší nebo nejsprávnější. K tomu je zapotřebí mít další informaci o tom, k jakým nepřesnostem při měření může docházet. Je však zřejmé, že každé rozumné kritérium by mělo mít následující vlastnost: Leží-li všechny body na jedné přímce, měla by právě tato přímka vyjít jako optimální.

Kdyby se nyní čtenář, který dosud není s touto problematikou seznámen, sám pokusil navrhnout nějakou míru shody mezi přímkou a danou skupinou bodů, patrně by uvažoval takto. Mějme danou skupinu bodů a nějakou přímku p. Určíme vzdálenost každého bodu od přímky p (jde o délky úseček znázorněných na obr. 2) a každé přímce přiřadíme součet těchto vzdáleností. Za optimální prohlásíme tu přímku, které odpovídá nejmenší součet vzdáleností.

Ačkoli o tomto kritériu můžeme plným právem říci, že je rozumné, přece není v praxi téměř vůbec používáno. Za prvé neexistuje žádný explicitní vzorec pro stanovení parametrů takto definované přímky. Teprve v poslední době byly vyvinuty algoritmy pro počítač pro řešení této úlohy, ale stejně celý problém je po numerické stránce poměrně obtížný a pracný. A za druhé (což je asi rozhodující) dané kritérium neodpovídá žádnému běžnému předpokladu o vzniku chyb při pozorování výsledků experimentu.

V tomto článku uvedeme dvě nejběžnější metody pro určení přímky, která co nejlépe odpovídá daným bodům v rovině. Každá z nich je založena na jiném kritériu optimality, takže získáme dva různé výsledné vzorce. Nejprve si však připomeneme jedno pomocné tvrzení, které pak dále několikrát využijeme.



Obr. 2

Věta 1. Součet odchylek od aritmetického průměru je roven nule.

Důkaz. Mějme dána nějaká čísla x_1, . . , x_n. Jejich aritmetický průměr je $\bar{x} = (x_1 + \quad + x_n)/n$. Součet odchylek od průměru je

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0.$$

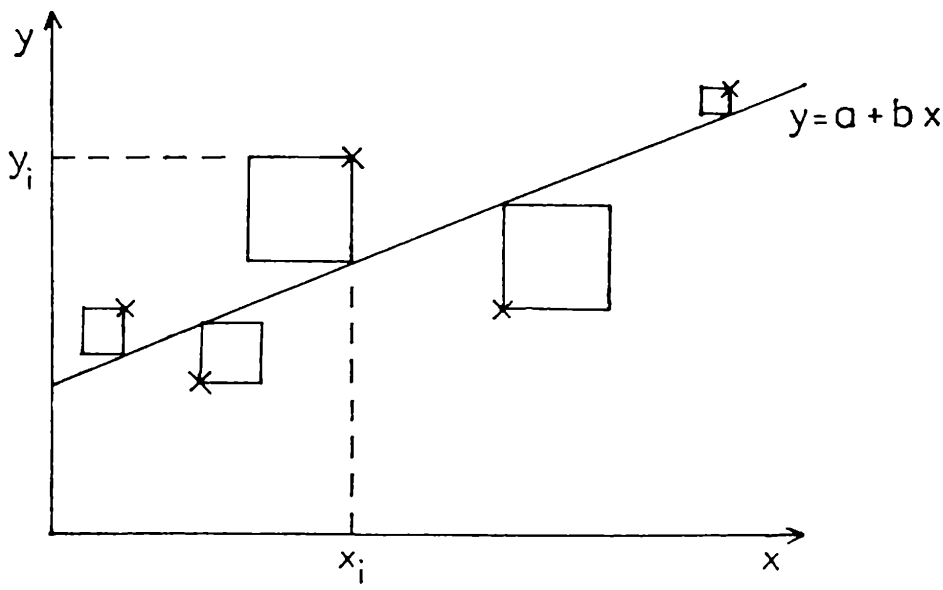
Poznamenejme, že v celém tomto článku budeme proužkem nad písmenem označovat aritmetický průměr odpovídajících čísel obdobně jako v případě $\bar{x}$.

2. Metoda nejmenších čtverců

Mějme body (x_1, y_1), . , (x_n, y_n) a přímku $y = a + bx$. Předpokládejme, že $n \geqq 2$ a že mezi čísly x_1, , x_n jsou nejméně dvě různá. Jak je patrno z rovnice přímky, vylučujeme z další úvahy přímky rovnoběžné s osou y. Od každého bodu (x_i, y_i) vedeme nyní k přímce $y = a + bx$ úsečku ve směru osy y (viz obr. 3). Tuto úsečku pokládáme za stranu čtverce. Přímce pak přiřadíme číslo, které je součtem obsahů takto získaných čtverců. Za optimální přímku budeme pokládat tu, které odpovídá nejmenší součet čtverců. Za autora tohoto postupu bývá pokládán *Gauss*. Dodnes však není známo, zda priorita náleží jemu, nebo *Legendreovi*.

Věta 2. Přímka proložená body (x_1, y_1), . . , (x_n, y_n) metodou nejmenších čtverců má rovnici $y = a + bx$, kde

$$b = \frac{n \Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$$



Obr. 3

Důkaz. Úsečka s koncovým bodem (x_i, y_i) vedená k přímce $y = a + bx$ ve směru rovnoběžném s osou y má délku

$$|y_i - a - bx_i| ,$$

což je vidět na obr. 3. Součet čtverců těchto čísel označíme $S(a, b)$, takže

$$S(a, b) = \Sigma (y_i - a - bx_i)^2 \tag{2}$$

Tento výraz upravíme na tvar

$$S(a, b) = \Sigma [y_i - \bar{y} + \bar{y} - a - b\bar{x} - b(x_i - \bar{x})]^2 .$$

Označme

$$\eta_i = y_i - \bar{y}, \qquad \xi_i = x_i - \bar{x}, \qquad A = \bar{y} - a - b\bar{x}$$

Čísla η_i a ξ_i jsou odchylky od odpovídajících aritmetických průměrů. Proto podle věty 1 pro ně platí

$$\Sigma \eta_i = 0, \qquad \Sigma \xi_i = 0$$

Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \Sigma (\eta_i + A - b\xi_i)^2 = \\ &= \Sigma (\eta_i^2 + A^2 + b^2 \xi_i^2 + 2A \eta_i - 2b \xi_i \eta_i - 2Ab \xi_i) = \\ &= \Sigma \eta_i^2 + nA^2 + b^2 \Sigma \xi_i^2 + 2A \Sigma \eta_i - 2b \Sigma \xi_i \eta_i - 2Ab \Sigma \xi_i = \\ &= nA^2 + b^2 \Sigma \xi_i^2 - 2b \Sigma \xi_i \eta_i + \Sigma \eta_i^2 . \end{aligned} \tag{3}$$

Protože všechna x_i si nejsou rovna, platí $\Sigma \xi_i^2 \neq 0$. Můžeme proto provést další úpravu, po níž získáme

$$\begin{aligned} S(a, b) &= nA^2 + [b (\Sigma \xi_i^2)^{\frac{1}{2}} - (\Sigma \xi_i \eta_i) / (\Sigma \xi_i^2)^{\frac{1}{2}}]^2 + \\ &+ [\Sigma \eta_i^2 - (\Sigma \xi_i \eta_i)^2 / (\Sigma \xi_i^2)] . \end{aligned}$$

Vidíme, že $S(a, b)$ je součtem tří výrazů, z nichž první dva jsou nezáporné a třetí nezávisí na parametrech a a b. Proto $S(a, b)$ dosáhne své nejmenší hodnoty, budou-li první dva výrazy rovny nule. Z podmínky $nA^2 = 0$ plyne $A = 0$, tj.

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Druhý výraz bude roven nule, když

$$b = \frac{\Sigma \xi_i \eta_i}{\Sigma \xi_i^2} .$$

Protože však

$$\Sigma\, \xi_i \eta_i = \Sigma\, (x_i - \bar{x})\, (y_i - \bar{y}) = \Sigma\, (x_i - \bar{x}) y_i - \bar{y}\, \Sigma\, (x_i - \bar{x}) =$$
$$= \Sigma\, (x_i - \bar{x}) y_i = \Sigma\, x_i y_i - \bar{x}\, \Sigma\, y_i = \Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\, (\Sigma\, x_i)\, (\Sigma\, y_i)$$

a obdobně

$$\Sigma\, \xi_i^2 = \Sigma\, x_i^2 - \frac{1}{n}\, (\Sigma\, x_i)^2\,,$$

dostáváme odtud celé tvrzení věty 2.

3. Ortogonální metoda nejmenších čtverců

Tato metoda spočívá v tom, že stanovíme vzdálenost každého bodu (x_i, y_i) od přímky $y = a + bx$ stejně jako na obr. 2. Přímce však přiřadíme součet čtverců vzdáleností bodů a za nejlepší přímku budeme pokládat tu, které odpovídá nejmenší součet čtverců.

ěVta 3. Nechť jsou dány body $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, kde $n \geqq 2$. Označme

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\, \Sigma\, x_i^2 - \bar{x}^2, \qquad s_y^2 = \frac{1}{n}\, \Sigma\, y_i^2 - \bar{y}^2, \qquad s_{xy} = \frac{1}{n}\, \Sigma\, x_i y_i - \bar{x}\, \bar{y}\,.$$

Je-li $s_{xy} \neq 0$, pak přímka $y = a + bx$ proložená danými body ortogonální metodou nejmenších čtverců má parametry

$$b = \frac{1}{2s_{xy}}\, \{s_y^2 - s_x^2 + [(s_y^2 - s_x^2)^2 + 4s_{xy}^2]\}\,, \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}\,.$$

Důkaz. Vzdálenost bodu (x_i, y_i) od přímky $y = a + bx$ je

$$(1 + b^2)^{-\frac{1}{2}}\; |y_i - a - bx_i|$$

Součet čtverců těchto vzdáleností $H\,(a, b)$ činí

$$H\,(a, b) = (1 + b^2)^{-1}\, \Sigma\, (y_i - a - bx_i)^2\,.$$

Zaveďme znovu označení

$$\eta_i = y_i - \bar{y}\,, \qquad \xi_i = x_i - \bar{x}\,, \qquad A = \bar{y} - a - b\bar{x}$$

stejně jako v důkazu věty 2. Snadnou úpravou se dá dokázat, že platí

$$\Sigma\, \xi_i^2 = ns_x^2, \qquad \Sigma\, \eta_i^2 = ns_y^2\,, \qquad \Sigma\, \xi_i \eta_i = ns_{xy}\,. \tag{4}$$

Až na koeficient $(1 + b^2)^{-1}$ je vzorec pro $H\,(a, b)$ stejný jako vzorec (2) pro $S\,(a, b)$ v důkazu věty 2. Proto vzhledem k (3) a (4) platí

$$H\,(a, b) = \frac{1}{1 + b^2}\, (nA^2 + nb^2 s_x^2 - 2nbs_{xy} + ns_y^2)\,.$$

Jelikož $nA^2 / (1 + b^2) \geqq 0$, bude $H\,(a, b)$ při jakémkoli b nejmenší v tom případě, kdy $A = 0$, tj. při

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \tag{5}$$

Označme

$$f(b) = \frac{b^2 s_x^2 - 2bs_{xy} + s_y^2}{1 + b^2}\,.$$

Protože $H(a, b) \geqq nf(b)$ a rovnost nastává právě tehdy, platí-li (5), redukuje se nám celý problém na určení bodu, v němž $f(b)$ nabývá minima. Proto vypočteme derivaci funkce $f(b)$. Po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{2}f'(b) = \frac{s_{xy}b^2 - (s_y^2 - s_x^2)\, b - s_{xy}}{(1 + b^2)^2}$$

Tato derivace má dva nulové body, a to

$$b_{12} = \frac{1}{2s_{xy}} \{s_y^2 - s_x^2 \pm [(s_y^2 - s_x^2)^2 + 4s_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}\}$$

Je zřejmé, že

$$\lim_{b \to \pm\infty} f(b) = s_x^2 .$$

Dále rozlišíme dva případy. Nechť nejprve $s_{xy} > 0$. Pak $b_2 < b_1$ a $f'(b) > 0$ pro $b \in (-\infty, b_2) \cup (b_1, \infty)$, $f'(b) < 0$ pro $b \in (b_2, b_1)$. Funkce $f(b)$ tudíž nabývá minima v bodě $b = b_1$. Nyní nechť $s_{xy} < 0$. Pak $b_1 < b_2$ a $f'(b) > 0$ pro $b \in (b_1, b_2)$, $f'(b) < 0$ pro $b \in (-\infty, b_1) \cup (b_2, \infty)$. Funkce $f(b)$ opět nabývá minima v bodě b_1. V bou případech jde o globální minimum. Tím je věta 3 dokázána.

4. Závěr

Dá se ukázat, že metoda nejmenších čtverců je nejvhodnější v tom případě, kdy hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ jsou známy přesně a k chybám dochází jen při určování hodnot $y_1, \ldots, y_n$. Z matematického hlediska je přitom ještě nutno doplnit podmínky, že tyto chyby jsou na sobě nezávislé a mají stejné Gaussovo rozdělení.

Jestliže však dochází k chybám jak při určování hodnot $y_1, \ldots, y_n$, tak při zjišťování $x_1, \ldots, x_n$ a je-li nepřesnost měření v obou případech stejná, pak je nejvhodnější ortogonální metoda nejmenších čtverců. Znovu je přitom nutno doplnit předpoklad o nezávislosti chyb a o tom, že mají stejné Gaussovo rozdělení.

Pomocí metody nejmenších čtverců se odvozují i vzorce pro prokládání polynomů a dalších funkcí. Podobně se určují (přesněji řečeno odhadují) i parametry funkcí více proměnných. Jsou odvozovány také postupy, které dávají optimální výsledky při jiných předpokladech o charakteru chyb měření. Teorie, která se těmito metodami zabývá, se nazývá regresní analýza.

O reálných číslech, která nelze pojmenovat

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

Každé reálné číslo, které znáte, můžete nějakým způsobem pojmenovat, tj. vyjádřit konečným počtem slov. Reálné číslo, které konečným počtem slov vyjádřit nelze, nikdo nezná a ani znát nemůže. Kdyby totiž takové číslo bylo známo, musel by existovat i způsob, jak vůbec vyjádřit, o jaké číslo se jedná; to však je možné provést pouze konečným počtem slov. Z tohoto faktu ovšem nevyplývá, že reálná čísla, která mají tuto pozoruhodnou vlastnost, neexistují! Množina **R** všech reálných čísel může kromě čísel typu $\sqrt{7}$, $\sin 11$, $-\log 23$, $\pi^{\sqrt{2}}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, k jejichž definici vystačíme s konečně mnoha slovy, obsahovat i čísla, která konečným počtem slov definovat nelze. Ukážeme, že množina **R** takové prvky vskutku obsahuje.

Připomeňme si nejprve potřebné pojmy týkající se nekonečných množin. Nekonečná množina **M** se nazývá spočetná, jestliže existuje prosté zobrazení této množiny na množinu **N** všech celých kladných čísel. Jak víte, existence prostého zobrazení **M** na **N** znamená, že existuje předpis, který každému prvku množiny **M** přiřazuje jako jeho obraz právě jedno celé kladné číslo, a to tak, že každé dva různé prvky z **M** mají v **N** různé obrazy a že množina těchto obrazů je rovna množině **N**. Je zřejmé, že prosté zobrazení **M** na **N** umožňuje sestavit ze všech prvků množiny **M** posloupnost, jejímž prvním členem je ten prvek z **M**, jemuž je v tomto zobrazení přiřazeno číslo 1, druhým členem prvek, kterému je přiřazeno číslo 2 atd. Uvědomte si, že tato posloupnost je prostá, neboť každé dva její členy s různými indexy jsou různé. Snadno zdůvodníte, že také obráceně z toho, že existuje prostá posloupnost sestavená ze všech prvků množiny **M**, vyplývá existence prostého zobrazení **M** na **N**. Dostáváme tak, že platí:

Nekonečná množina je spočetná právě tehdy, když ze všech jejích prvků je možno sestavit prostou posloupnost.

Příkladem spočetné množiny (kromě množiny **N** všech celých kladných čísel) je množina **Z** všech čísel celých; příslušná prostá posloupnost sestavená ze všech jejích prvků, je např. tato:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, n, -n, \ldots$$

Je možno dokázat, že i množina všech racionálních čísel je spočetná; se způsobem sestrojení odpovídající posloupnosti se můžete seznámit např. v knížce *P. Vít* Reálná čísla (SPN, Praha 1980). Pro spočetné množiny platí jednoduchá věta, o jejíž důkaz se můžete pokusit:

Každá podmnožina spočetné množiny je množina spočetná nebo konečná.

Podle této věty jsou tedy spočetné např. množina všech sudých čísel, množina všech lichých čísel, množina všech druhých mocnin přirozených čísel a vůbec všechny nekonečné podmnožiny množiny Z všech čísel celých.

Kromě spočetných množin existují i nekonečné množiny, které spočetné nejsou; nazývají se *nespočetné*. Příkladem nespočetné množiny je množina **R** všech reálných čísel, o níž je možno dokázat, že všechny její prvky nelze seřadit do prosté posloupnosti. Tento důkaz není nijak složitý; také s ním se můžete seznámit v uvedené knížce. Pro nespočetné množiny platí věta, která je pro účely tohoto článku podstatná:

Je-li spočetná množina **A** *podmnožinou nespočetné množiny* **B**, *pak množina všech prvků z* **B**, *které nepatří do* **A**, *je nespočetná.*

Z této věty např. vyplývá, že množina všech iracionálních čísel je nespočetná, neboť jde o množinu všech těch reálných čísel, která nepatří do spočetné množiny všech čísel racionálních.

Vraťme se nyní k problematice týkající se existence reálných čísel, jež nelze vyjádřit konečným počtem slov; pro určitost můžeme předpokládat, že se jedná o slova českého jazyka, není to však, jak uvidíme, podstatné. Protože slovní zásoba žádného jazyka není nevyčerpatelná, obsahuje i český jazyk pouze konečný počet slov, dejme tomu n. Očíslujme tedy všechna jeho slova čísly $1, 2, 3, \ldots, n$ a utvořme z nich všechny možné jednočlenné, dvojčlenné, trojčlenné, ... skupiny, v nichž se jednotlivá slova mohou opakovat a v nichž záleží na pořadí. Jedná se vlastně o variace k-té třídy s opakováním z n prvků, kde k probíhá všechna celá kladná čísla; dvě takovéto skupiny považujeme za různé, když se liší počtem svých členů nebo jejich pořadím. Všechny tyto skupiny seřaďme podle následujícího pravidla: Jestliže pro libovolné skupiny $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ — kde a_i, b_j jsou přirozená čísla od jedné do n — platí $k < m$, zařadíme skupinu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ před skupinu $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$; jestliže pro tyto skupiny platí $k = m$, zařadíme skupinu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ před skupinu $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, když platí $a_1 < b_1$, nebo $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, nebo $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 < b_3$, ..., nebo $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k < b_k$. Tímto způsobem dostaneme prostou posloupnost:

$$(1), (2), \ldots, (n), (1, 1), (1, 2), \ldots, (1, n), (2, 1), \ldots, (2, n), (3, 1), \ldots, (n, 1), \ldots, (n, n), (1, 1, 1), (1, 1, 2), \ldots, (1, 1, n), (1, 2, 1), (1, 2, n), (1, 3, 1), \ldots, (1, n, n), (2, 1, 1), \ldots, (2, 1, n), (2, 2, 1), (2, n, n), (3, 1, 1), \ldots, (n, n, n), (1, 1, 1, 1), \ldots$$

Jak víme, vyplývá z existence této posloupnosti, že množina všech jejích členů, tj. skupin sestavených uvedeným způsobem z konečného počtu slov, je spočetná. Spočetná je tedy i její podmnožina, kterou dostaneme tak, že v uvedené posloupnosti vynecháme všechny skupiny, které neurčují žádné reálné číslo, a dále ještě ze všech skupin, které určují totéž reálné číslo, ponecháme právě jednu. Tímto způsobem dostáváme takovou množinu všech konečných skupin slov, v níž každý její prvek (tj. skupina slov) určuje právě jedno reálné číslo, přičemž každé dva různé její prvky určují různá reálná čísla. Nahradíme-li nyní v této spočetné množině každý její prvek (tj. každou skupinu slov) reálným číslem, které tato skupina určuje, vznikne množina všech reálných čísel, která je možno vyjádřit konečným počtem slov; tato množina — označíme ji $\mathbf{R}_k$ — je přitom spočetná. Použijeme-li ještě na závěr větu, kterou jsme výše označili jako podstatnou pro účely tohoto článku, dostaneme:

Protože množina $\mathbf{R}_k$ *všech reálných čísel, jež lze vyjádřit konečným počtem slov, je spočetná podmnožina nespočetné množiny* $\mathbf{R}$ *všech čísel reálných, je množina všech těch reálných čísel, která nepatří do* $\mathbf{R}_k$*, nespočetná.*

Reálná čísla, která nelze vyjádřit konečným počtem slov, tedy existují; tvoří dokonce nespočetnou množinu, což v jistém smyslu znamená, že je jich „více" než těch reálných čísel, která konečným počtem slov vyjádřit lze. Způsob, kterým jsme získali tento podivuhodný výsledek, jenž svého času překvapil mnoho matematiků, je pro teorii množin typický: existence matematického objektu není dokázána tak, že se tento objekt sestrojí, ale tak, že se ukáže, že množina, jejímž je prvkem, je neprázdná.

FYZIKA

Ako pochopíme Ohmov zákon pomocou mechaniky?

RNDr. EVA TOKÁRIKOVÁ

Študent sa musí učiť! Učenie je proces, ktorý síce má určité všeobecne platiace pravidlá, ale veľmi dôležitú úlohu v tomto procese hrá učiaci sa subjekt. Každému z nás vyhovuje iný spôsob učenia sa predpísanej látky. Niektorí kladieme dôraz na pamäť, iní predovšetkým na pochopenie toho, čo sa učia, na logické zvládnutie problému. Zapamätať si látku bez jej pochopenia obyčajne přináša menší efekt. Skúšajúci pri troche námahy zistí, že takéto vedomosti sú plytké a podľa toho ich aj hodnotí. Študent sa podiví známke „dobrý", keď predsa povedal všetko, čo bolo v knihe. Podobne ho prekvapí hodnotenie stupňom „výborný" u spolužiaka, ktorý povedal len pár viet. Po čase si však sám uvedomí, že učenie sa „všetkého, čo bolo v knihe“ je málo a hľadá metódy, ako zvládnuť látku hlbšie. Zistí tiež, že keď mu pamäť vynechá, z látky už nevie nič. Študent začína hľadať spôsoby prenikania do podstaty látky, hľadá spôsoby jej tvorivého zvládnutia. Ako jednu z účinných metód iste nájde metódu „modelovania“ problému. Ak má napríklad pochopiť javy, prebiehajúce v mikrosvete, ktoré sa nedajú obsiahnuť zmyslami, nútený je urobiť si model týchto javov pomocou bežných predstáv z makrosveta. V predstavách, alebo aj prakticky si vytvorí model, ktorý odráža daný jav názornou formou v tej oblasti, ktorá je dostupnejšia jeho zmyslovému vnímaniu a ktorú má už sám lepšie preskúmanú.

Elektrické javy sú práve také javy, pre ktoré sa dá vytvoriť vhodný mechanický model. Takýto model spodobí dynamiku prebiehajúceho elektrického procesu a pomôže pochopiť funkčnú závislosť jednotlivých parametrov tohto procesu.

Na pochopenie vzťahu medzi základnými veličinami z elektriny uveďme jeden z takýchto modelov. Nájdeme analógiu elektrických veličín v mechanike a tým si priblížime ich význam v elektrine.

Rozmýšľali ste už niekedy o tom, že to, čo sa učíte v elektrine, ste sa vlastne už raz učili v mechanike? Rozmýšľajme trochu a porovnávajme. V mechanike sme sa učili o energii ako o skrytej práci. Údolnou priehradou vytvorená vodná nádrž je zdrojom energie. Koľko škody alebo užitočnej práce dokáže urobiť, keď sa jej vody uvoľnia a padajú do doliny! Voda, padajúca z hornej na dolnú hladinu, koná prácu (napríklad otáča turbínu alebo koleso vodného mlyna). Voda na hornej hladine mala určitú potenciálnu energiu a každý jej kilogram mal určitý potenciál (mal svoju potenciálnu energiu). Keď si predstavíme kilogramové množstvá vody pri hornej hladine, vidíme, že všetky majú rovnaký potenciál, daný súčinom gravitačného zrýchlenia a relatívnej výšky $\varphi = g\ h\ 1$. Aj kilogramové množstvá vody na úrovni výtoku napríklad z turbíny, majú všetky rovnaký potenciál. Tento je však menší, lebo relatívna výška hladiny je menšia. Môžeme teda hovoriť o dvoch potenciálových hladinách s rôznymi potenciálmi φ_h a φ_d, potenciálmi, prislúchajúcimi hornej a dolnej hladine. Rozdiel potenciálov týchto hladín je $\varphi_h - \varphi_d$. Tento rozdiel potenciálov voláme napätím a značíme ho U. Miesta, medzi ktorými je takéto napätie, sú teda zdrojom energie. Z takýchto zdrojov sa energia získavá tak, že časti napríklad vody, prechádzajú z miest s vyšším potenciálom na miesta s potenciálom nižším. Takto vzniká vodný prúd.

Podobná situácia je aj v elektrine. Namiesto hornej a dolnej hladiny vody máme v elektrine miesta s väčším a menším množstvom náboja. Sú to miesta s vyšším a nižším potenciálom. Medzi nimi je napätie U a viažeme s nimi zdroj napätia — zdroj energie, ktorá sa dá čerpať prechodom elektricky nabitých častíc medzi nimi. Teraz nebudú pretekať jednotlivé časti vody, ale nositelia náboja — elektróny, alebo ióny. Prúd nebude vodný, ale elektrický.

V prípade vody hovoríme o prietoku v kilogramoch za sekundu (v praxi v litroch za sekundu), v prípade elektrických nábojov hovoríme o prúde I v coulomboch za sekundu.

Voda obyčejne tečie vo vodnom koryte, alebo padá vzduchom. Elektrický náboj tečie vo vodičoch. Aj vodu môžeme nechať tiecť v potrubí. Aké má byť takéto potrubie, aby ním voda ľahko tiekla? Odpoveď — voda bude ľahko tiecť v potrubí krátkom a prázdnom s veľkou svetlosťou. Takéto potrubie prepustí veľa vody a bude jej klásť malý odpor (R). Odpor bude tým väčší, čím bude potrubie dlhšie, užšie a prípadne zapchaté. Takýmto potrubím pretečie, pri nezmenenom výškovom rozdieli, menej vody. Na túto situáciu sa môžeme dívať aj tak, že takéto potrubie kladie vodnému prúdu väčší odpor R.

Podobná situácia je pri pretekaní elektrického prúdu vo vodičoch. Tento bude ťažšie tiecť dlhým a úzkym (tenkým) vodičom. Prekážať mu bude aj nevhodná vnútorná stavba vodiča. (Niečo ako štrkom vyplnené vodné koryto alebo znečistené potrubie.) Dlhý tenký vodič z nevhodného materiálu bude mať veľký odpor R. Odpor vodiča teda závisí priamo úmerne od dĺžky vodiča l, nepriamo úmerne od prierezu vodiča S a konštanta úmernosti odráža vnútornú stavbu materiálu vodiča, je to materiálová konštanta, tzv. elektrický merný odpor ϱ. Môžeme teda napísať

$$R = \varrho \frac{l}{S}.$$

Ak potrebujeme do vzťahu pre R elektrický merný odpor ϱ, nájdeme si ho v tabuľkách, kde je obvykle uvedený pre materiál, ktorého teplota je 20 °C. So zvyšovaním teploty látky sa častice, ktoré ju tvoria, prudšie rozkmitajú. Takéto kmitajúce častice kladú pohybu náboja väčší odpor. Elektrický merný odpor závisí od teploty lineárne

$$\varrho_t = \varrho_0 + \varrho_0 \alpha \, \Delta t \qquad (1)$$
$$(y = b + ax)$$

V tomto vzťahu je α tzv. teplotný koeficient odporu. Tento závisí od druhu látky. Preto, ak má náš vodič inú teplotu ako 20 °C, musíme si jeho elektrický merný odpor vypočítať podľa vzťahu (1).

Ak si nebudeme s niektorou zo spomínaných základných elektrických veličín istí, spomeňme si na vodu:
Zdroj napätia U — dve vodné hladiny s rôznymi potenciálmi φ.
Elektrický prúd I — prietok vody.
Elektrický odpor R — odpor potrubia, kladený tečúcej vode.
Elektrická vodivosť $\frac{1}{R}$ — schopnosť potrubia viesť vodu.

Elektrický merný odpor ϱ — miera prekážok v jednotkovej dĺžke potrubia.

Nech náš zdroj napätia tvoria dve zdierky s rôznymi potenciálmi. Aký prúd bude tiecť prúdovodičom, ktorý ich spája, to závisí od odporu tohoto prúdovodiča. Ak bude odpor spotrebiča pripojeného na zdierky malý, prúd potečie veľký; pri veľkom odpore spotrebiča bude zasa prúd malý. Túto experimentálne potvrdenú skutočnosť, ktorá sa tak dobre zhoduje s tečením vody v potrubí, vyjadruje Ohmov zákon

$$I = \frac{U}{R}.$$

Prúd je priamo úmerný napätiu, na ktoré je spotrebič pripojený, a nepriamo úmerný odporu spotrebiča.

Ak si budete vedieť vytvoriť na každý fyzikálny jav, s ktorým sa budete oboznamovať, svoj model, budete tieto javy lepšie chápať, skôr si ich zapamätáte a čo je najdôležitějšie, naučíte sa hľadať podstatu problému. Takýto prístup k problémom vám nebude výhodný len vo fyzike, ale vám prospeje aj v iných učebných predmetoch. Využijete ho aj pri riešení problémov v praktickom živote. Zistíte, že fyzika neslúži len fyzikom, ale že jej metódy majú všeobecné použitie.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Stručně o vývoji astronomie na Slovensku

Doc. dr. ZÁVIŠ BOCHNÍČEK, CSc., MFF UK, Bratislava

Historie astronomie na Slovensku je mnohem chudší, než byla v Čechách. Prvou zmínku o astronomii nacházíme v polovině 15. století, kdy na pozvání Matyáše Korvína přednášel astronomii na Akademia Istropolitana známý hvězdář *J. Müller*, zvaný *Regiomontanus*. Na sklonku 18. století vybudoval hvězdárnu v Trnavě *P. Maximilian Hell* (1720 až 1792) bansko-štiavnický rodák, který později pracoval na císařské hvězdárně ve Vídni. Je známý tím, že v r. 1769 se zúčastnil výpravy do Norska, kde ve Vardo pozoroval přechod Venuše přes sluneční kotouč, úkaz, který měl upřesnit hodnotu sluneční paralaxy a tím poskytnout zpřesněnou hodnotu vzdálenosti Země od Slunce.

Na sklonku 18. století bylo v Uhersku v činnosti 6 observatoří: Trnava, Budín, Jager, Cluj a Alba Julia. Tyto hvězdárny v prvé polovině 19. století postupně zanikaly, protože jejich přístrojové vybavení zestárlo natolik, že bylo neefektivní nebo dokonce neschopné provozu. Hlavní příčina úpadku byla v tom, že Uhersko samo neposkytovalo žádné finanční prostředky ani na provoz, ani na údržbu a Rakousko nemělo zájem na udržování observační sítě v Uhersku. Z uvedených observatoří nejlepší byla universitní hvězdárna na Gelerthegy v Budíně. Ta však byla úplně zpustošena v dubnu 1849 v době bojů mezi maďarskými revolucionáři a habsburskými vojáky. Taktéž v boji o svobodu byla zničena i soukromá hvězdárna Karolya Nagya v Bieske. A tak se stalo, že Uhersko zůstalo více než 20 roků bez jakékoliv astronomické observatoře.

Po tomto období první observatoří se stává a rychle evropského významu nabývá soukromá observatoř grófa *Mikuláše Konkoly Thegeho* ze Staré Ďaly, obce na jižním Slovensku, která písemně je zaznamenaná už v r. 1329 a jejíž maďarský název byl O'Gyala. M. Konkoly-Thege (1842—1916) se narodil v Budapešti. Vysokoškolské vzdělání získal v Budapešti a v Berlíně, kde přišel do styku s věhlasnými učenci té doby, jakými byli *Dove* (meteorolog), *Kirchhoff* (fyzik) a *Encke* (astronom). Po skončení studií (1862) navštívil téměř všechny význačnější hvězdárny západní Evropy. V r. 1870 postavil na svém pozemku ve Staré Ďale soukromou hvězdárnu, kterou postupně vybavil přístroji tak, že byla nejlepší ve střední Evropě (tři refraktory s objektivy o průměru 25, 20 a 13,5 cm, dva hledače komet, pasážník, teodolit a další; z pomocných přístrojů jmenujme na tu dobu unikátní stereokomparátor s blinkmikroskopem, vizuální fotometr, hvězdné spektrografy a spektroskopy, dva protuberační spektroskopy, osm astronomických hodin, chronograf, fotokomory atď.). Konkoly byl též zručný konstruktér astronomických přístrojů (protuberanční spektroskop patentovaný firmou Zeiss pochází od něho) a nadšený propagátor rozvíjející se astrofyziky (spektroskopie, fotometrie, astronomická fotografie). Publikoval 26 svazků pozorování, napsal 17 prací vědeckého charakteru a 349 článků. Z mnoha vyznamenání, jakých se mu dostalo, vzpomeňme čestný doktorát university ve Filadelfii. Stálé rozšiřování a obnovování přístrojového zařízení hvězdárny však začalo přesahovat finanční možnosti jednotlivce, a proto se Konkoly rozhodl věnovat hvězdárnu Bratislavské universitě, o jejímž zřízení se už od r. 1876 uvažovalo, protože však založení university se stále oddalovalo, změnil Konkoly svoji nabídku a nabídl hvězdárnu maďarskému státu. Ale i zde bylo jednání zdlouhavé a darovací listina byla podepsána až v r. 1898. Po smrti Konkolyho se práce na hvězdárně přerušila a za následujících politických změn ku konci prvé světové války přístrojové vybavení hvězdárny zčásti bylo přeneseno do Budapešti, zčásti se poztrácelo.

Na tomto místě vzpomeňme *M. R. Štefánika* (1880—1919), slovenského hvězdáře, který nenacházeje uplatnění doma, odešel do ciziny a pracoval pod vedením významného astronoma *Jenssena* na pařížské hvězdárně v Meudon a na vysokohorské observatoři na Mont Blanku. Zúčastnil se také několika výprav za zatměním Slunce a na Tahiti vybudoval observatoř, z které v r. 1910 pozoroval Halleyovu kometu. Byl velmi oblíbený v předních kruzích tehdejší pařížské společnosti a svými známostmi usnadnil cestu T. G. Masarykovi a E. Benešovi, s kterými pak politicky spolupracoval. Zahynul při návratu do osvobozené vlasti.

Po vzniku ČSR stát převzal opuštěnou staroďalskou hvězdárnu Konkolyho a svěřil ji ministerstvu školství a osvěty. Přičiněním prvého přednosty hvězdárny *J. Kavana*, autora rozsáhlých matematických tabulek, byl v r. 1922 objednán u firmy Zeiss 60-cm dalekohled typu Newton-Cassegrain, dodaný v r. 1927. Mezitím měla hvězdárna k dispozici jen menší přístroje. Od roku 1927 ředitelem observatoře byl prof. *A. Dittrich*, velký propagátor Einsteinovy teorie relativity ještě v dobách, kdy mnozí učenci o ní pochybovali. Stal se známý i za hranicemi naší vlasti svými pracemi o prehistorii hvězdářství. V r. 1934 ředitelem observatoře byl jmenován *B. Šternberk*, který už sedm roků předtím přišel na staroďalskou kvězdárnu, když byl po ukončení university nějaký čas na berlínské hvězdárně, kde u jejího ředitele *P. Guthnicka* se seznámil s tehdy novou metodou fotoelektrické fotometrie, kterou se pak pokoušel realizovat ve Staré Ďale. Známý je jeho pokus o zhudebnění světla Vegy: světlo sebrané 60-cm reflektorem bylo před soustředěním na fotokatodě přerušováno několiksetkrát za sekundu rotujícím sektorem. Pulsy v anodovém obvodu přetransformované a zesílené dávaly přes reproduktor slyšitelný tón. Experiment vysílal rozhlas. Pomocí 60-cm dalekohledu se Šternberkovi podařilo jako prvnímu v Evropě získat fotografie tehdy objevené deváté planety Plutona (1930). Vedle Šternberka působila na této hvězdárně první československá hvězdářka *B. Nováková*, která po studiích u *Abettiho* v Arcetri (Itálie) se specializovala na fyzikální výzkum Slunce a spolu se Šternberkem vyhotovili a sestavili první československý spektrohelioskop umožňující sledování Slunce v spektrální čáře H alfa. Celý přístroj byl domácí výroby, jen difrakční mřížka (63 $\times$ 73 mm o 600 vrypech na mm) se zakoupila z observatoře Mount Wilson v USA.

Po vídeňské arbitráži 1938, kdy Maďarsku byly přiděleny jižní části Slovenska, kde byla staroďalská hvězdárna, byl hlavní přístroj hvězdárny 60-cm dalekohled narychlo demontován a převezen do Prešova, kde zůstal uložen v bednách. *Dr. A. Bečvář*, který ještě v r. 1937 dostal místo klimatologa na Štrbském Plese ve Vysokých Tatrách (a zde si postavil soukromou hvězdárnu vybavenou přístroji z brandýské hvězdárny), dostal v r. 1942 souhlas k vybudování státní hvězdárny v Tatrách a k použití staroďalského dalekohledu jako hlavního přístroje nové hvězdárny.

CENTEZIMÁLNÍ (od lat. *centesimus* = stý; od centum = sto; v. centi-) — založený na dělení na sto dílů; setinný; ve fyzice: CENTEZIMÁLNÍ váhy — rameno pro vážené těleso a rameno pro závaží je v poměru 1:100, takže počítaná závaží jsou stým dílem, setinou skutečné hmotnosti váženého

CENTI- (z lat. *centum* = sto) — počáteční část složených slov pro názvy dílčích jednotek mající význam „setina měrné jednotky" vyjádřené v následující části složeného slova; např. CENTILITR — setina litru; CENTIMETR — setina metru; srov. CENT — 100 kg; v. t. centezimální, procento

CENTRÁLA — v. CENTRUM

CENTRI- (z latiniz. *centrum* — střed; v. centrum) — počáteční část složených slov vyjadřující nějaký vztah ke středu

CENTRIFUGA (lat. *fuga* = útěk, rychlý odchod) — odstředivka; přístroj k realizaci síly (odstředění), jejímž následkem je „útěk od středu"; v. t. supercentrifuga, ultrafuga; CENTRIFUGÁLNÍ — odstředivý; srov. *FUGA* (v hudbě) — druh kontrapunktu; hudební téma probíhá postupně v různých hlasech nebo v různých nástrojích

CENTRIPETÁLNÍ (lat. *peto, -ere* = směřovat, žádat) — směřující do středu, dostředivý; srov. REPETOVAT (lat. *re-* = opět, znova, zpět) — opakovat, „znovu žádat"

CENTRUM (z latinizovaného *centrum* řeckého *kentron* = ostrý konec, bodec, bod ve středu kruhu) — střed, středisko, ústředí; v. t. centri-, excentricita, metacentrum

CENTRÁLA (lat. *centralis* = jsoucí ve středu) — ústředna, ústředí; místo, kde jsou soustředěna nejdůležitější zařízení; v. t. hydrocentrála

CENTRÁLNÍ (lat. *centralis* = jsoucí ve středu) — umístěný ve středu, střední, vztahující se ke středu, ze středu vycházející, ústřední; ve fyzice: CENTRÁLNÍ pohyb — středový, dostředivý nebo odstředivý; v jaderné fyzice: CENTRÁLNÍ atom — ústřední atom komplexního iontu nebo molekuly

CENTRICKÝ — středem probíhající, středový, středově souměrný, soustředný; opak: excentrický, (v. t.); v. t. acentrický, excentrický, geocentrický, heliocentrický, homocentrický, topocentrický

CENTROVAT — umisťovat do středu; upravovat do středové polohy; ve fyzice: uspořádat součást tak, aby byla při rotačním pohybu přesně ve středu; v. t. koncentrovat

CIRKULACE (od lat. *circulus*, zdrob. od *circus* = kruh, ovál, okrouhlá závodní dráha) — oběh, koloběh; CIRKULOVAT = pohybovat se v kruhu, kolovat; CIRKULÁRNÍ — kruhový; CIRKULÁRNĚ — kruhově; v. t. cirkumpolární

CIRKUMPOLÁRNÍ (slož. z lat. *circum* = kolem, dokola; souvisí s lat.

circus = kruh, v. cirkulace + řec. *polos* = obrat; v. pól) — pohybující se, vyskytující se okolo pólu; obtočnový

CYKLICKÝ — v. CYKLUS

CYKLÓN (z řec. *kyklos* = kolo, kruh; v. cyklus) — vírová bouře (cyklóna menšího rozsahu) vznikající vždy nad tropickým oceánem

CYKLÓNA (od řec. *kyklos* = kolo, kruh; v. cyklus) — uzavřená oblast tlakové níže, ve které vzduch proudí spirálovitě — kruhovitě do středu tlakové níže; srov. anticyklóna

CYKLOTRON (slož. z řec. *kyklos* = kolo, kruh; v. cyklus + -tron — umělá přípona utvořená analogicky podle „elek-tron" v tomto případě pro termíny urychlovačů iontů; v. -tron) — kruhový urychlovač nabitých částic (urychlení částic se v něm provádí na dráze kruhové)

CYKLUS (z řec. *kyklos* = kolo, kruh, kružnice) — okruh; sled dějů opakujících se pravidelně jakoby v uzavřeném kruhu; soubor výtvorů tvořící určitý celek; CYKLICKÝ — kruhový, uspořádaný v kruh, pravidelně se opakující; srov. CYKLISTA — jezdec na kole; v. t. cyklón, cyklóna, cyklotron; anticyklóna, motocykl

DANAIDA (od řec. *Danais, -idos* = Danaovna, dcera Danaova) — přístroj k měření průtočného objemu; v podstatě měrná nádoba, v jejímž dně je jeden nebo více výtokových otvorů. Pozn.: Danaovny zavraždily o svatební noci své vnucené manžely a byly za to potrestány tím, že se musely v podsvětí věčně snažit naplnit vodou sudy, které však byly děravé.

DAZYMETR (slož. z řec. *dasys* = hustý + *metron* = měřidlo, míra; v. -metr¹) — přístroj k měření hustoty plynu. Pozn.: S řec. *dasys* souvisí lat. *densus*, takže existuje také termín „denzimetr"; v.t.

DE- (z lat. několikavýznamové předložky a předpony *de-*) — předpona s významem: 1. „směr shora dolů"; srov. „defenestrace" (lat. *fenestra* = okno); v. defekt, degradace, deprese, destilace, desublimace, detonace. 2. „od, vzdalování"; v. deklinace, destilace, detekce, deviace; 3. „od, zbavení"; v deformace, dehydratace, dekódovat, demagnetizace, demodulace, depolarizace; 4. „o" (o někom, o něčem); v. definice

DECI- (od lat. *decem* = deset) — počáteční část názvů dílčích jednotek mající význam „desetina měrné jednotky" vyjádřené v následující části složeného slova

DECIBEL (*bel* — podle amer. fyziologa *A. G. Bella*) — desetina belu, jednotky hladiny intenzity zvuku

DECIMETR (v. -metr²) — desetina metru;
v. t. decimální

DECIMÁLNÍ (od lat. *decimus* = desátý, a to od *decem* = deset; v. deci-) — založený na dělení na deset dílů; desetinný; ve fyzice: DECIMÁLNÍ váhy — váhy desetinné; jejich rameno pro vážené těleso a rameno pro závaží je v poměru 1:10, takže počítaná závaží jsou jen desátým dílem, desetinou skutečné hmotnosti váženého

DECIMETR v. DECI-

DEFEKT (z lat. *defectus* = odpadnutí, ubývání; od *deficio, -ere*, ptc. pf. *defectus*; slož. z *de* — zde ve významu „směr shora dolů", v. de- + *facio, -ere* = dělat, v. perfektní) — nedostatek, schodek, poškození, vada; v. t. defektoskopie

DEFEKTOSKOPIE (slož z lat. *defectus* = odpadnutí, ubývání; v. defekt + řec. *skopeó* = hledět, pozorovat, v. -skopie) — vyhledávání skrytých vad materiálu

DEFINICE (slož. z lat. *de-* — zde ve významu „o"; v. *de-* + *finio, -ire* = ohraničovat, končit; srov. FINIŠOVAT) — „vymezení, ohraničení"; vymezení pojmu; DEFINIČNÍ, DEFINOVAT

DEFORMACE (z lat. *deformatio*; slož. z *de-* — zde ve významu „od, zbavení", v. de- + *formo, -are*, ptc. pf. *formatus* = dávat tvar, podobu, utvářet; srov. „FORMA") — zbavení působní podoby, znetvoření, zohavení; změna tvaru, přetvoření; DEFORMOVAT; v. t. informace, transformace, formant

DEGRADACE (slož. z lat. *de* — zde ve významu „shora dolů"; v. de- + *gradior, -i* = kráčet; souvisí s *gradus* = stupeň, krok vzhůru; v. grád) — „kráčení dolů, sestup"; ve fyzice: znehodnocení

DEHYDRATACE (slož. z lat. *de* — zde ve významu „od, zbavení"; v. de- + řec. *hydór* = voda; v. hydro-) — odstranění vody ze sloučenin nebo různých materiálů zahříváním, vymražením apod.

DEKA- — (z řec. *deka* = deset) — počáteční část názvů násobných jednotek mající význam „desetinásobek měrné jednotky" vyjádřené v následující části složeného slova

DEKAGRAM (v. -gram²) — deset gramů

DEKALUMEN (v. lumen) — jednotka světelného toku; deset lumenů

DEKAMETR (v. -metr²) — starší název pro jednotku „10 metrů"

DEKÁDA (z řec. *dekas, -ados*; od *deka* = deset; v. deka-) — deset jakýchkoli údobí, zpravidla však dní; DEKADICKÝ — desítkový; mající za základ číslici 10; založený na čísle deset; DEKADIZACE (v. -izace) — zavádění dekadické soustavy do praxe

DEKLINACE (z lat. *declinatio*; slož. z *de* — zde ve významu „od, vzdálení"; v. de- + *clino, -are*, ptc. pf. *clinatus* = klonit; v. inklinace) — odklon, odchylka; ve fyzice: odklon magnetického poledníku od poledníku zemského; DEKLINATORIUM — přístroj k sledování časových změn deklinace, ke zjišťování odklonu

DEKÓDOVAT (slož. z lat. *de* — zde ve významu, „od, zbavení"; v. de- + *codex* = zápisné desky, kniha, seznam; v. kód) — odkódovat, tj. uvést zprávu do tvaru, který měla před kódováním

DEMAGNETIZACE (slož. z lat. *de* — zde ve významu „od, zbavení"; v. de- + *magnetizace*, v. t.) — odmagnetizování, zeslabování magnetizace; DEMAGNETIZAČNÍ faktor

DEMODULACE (slož. z lat. *de* — zde ve významu „od, zbavení";

v. de- + *modulace*, v. t.) — odmodulování, tj. převedení do tvaru, jaký byl před modulací; DEMODULÁTOR (v. -or) — zařízení, které „odmodulovává", tj. které odděluje, získává nízkofrekvenční akustický signál, který byl namodulován na vysokofrekvenční složce

DENZIMETR (slož. z lat. *densus* = hustý; v. kondenzace + řec. *metron* = měřidlo, míra; v. -metr¹) — hustoměr. Pozn.: Lat. *densus* souvisí s řec. *dasys*, takže také existuje termín dazymetr (v. t.).

DEPOLARIZACE (slož. z lat. *de* — zde s významem „od, zbavení" + *polarizace*, v. t.) — odstranění polarizace

DEPRESE (slož. z lat. *de* — zde s významem „směr shora dolů" + *premo, -ere*, ptc. pf. *pressus* = tlačit; v. kompresse) — „stlačení shora dolů"; kapilární DEPRESE — jev, kdy kapalina nemající schopnost smáčet stěny nádoby vystoupí ve vložené kapilární trubici níže než je její povrch vnější; je v kapiláře „stlačená"

DESTILOVAT (slož. z lat. *de* — zde s významem „směr shora dolů; od, vzdalování" + *stillo, -are*, ptc. pf. *stillatus* = kapat) — odkapávat, překapávat (zachycují se kapky vzniklé kondenzací par); DESTILACE (z lat. destillatio), DESTILÁTOR (v. -or)

DESUBLIMACE (slož. z lat. *de* — zde s významem „směr shora dolů" + *sublimis* = zvedající se šikmo vzhůru; ve výši, do výše se vznášející; v. sublimace) — přeměna „shora dolů", tj. přeměna látky ze skupenství plynného do skupenství pevného (běžnější je termín RESUBLIMACE, v. t.); opak SUBLIMACE (v. t.)

DETEKCE (slož. z lat. *de* — zde s významem „od, vzdalování" + *tego, -ere*, ptc. pf. *tectus* = krýt) — odkrývání, odhalování; objevování něčeho skrytého nebo neznámého; v jaderné fyzice: zjišťování částic nebo záření pomocí fyzikálních pochodů. Srov. DETEKTIV

DETEKTOR (v. -or) — „odkrývač"; přístroj nebo zařízení na odkrytí, odhalení, zjištění, získání předmětů, látek nebo hodnot v nějakém prostředí; např. detektor plynů, zvuku, jaderných částic, napětí, akustického signálu apod.; často totéž co INDIKÁTOR

DETONACE (slož. z lat. *de* — zde s významem „směr shora dolů" + *tono, -are* = hřmít, hřímat) — výbuch; hluk vzniklý při výbuchu

DEUTERIUM (od řec. *deuteros* = druhý místem nebo časem) — „ten druhý druh atomu vodíku" (ne ten lehký); těžký vodík; izotop vodíku s hmotným číslem 2; DEUTERON = atomové jádro deuteria

DEVIACE (slož. z lat. *de* — zde s významem „od, vzdalování" + *via* = cesta, dráha, silnice) — „sejití s cesty"; odbočení, odklonění, odklon, odchylka, úchylka; ve fyzice: vychýlení, např. DEVIACE magnetická, optická, kompasu; DEVIOVAT — vychýlit. Srov. VIADUKT (lat. *duco, -ere*, ptc. *ductus* = vésti) — „cesta vedená" (přes údolí, řeku apod.), v. t. triviální

Stalo se tak na základě jediného rozhovoru Bečváře s tehdejším ministrem školství A. Sivákem, při kterém Bečvář ministrovi řekl, že v Evropě jsou jen dva nekulturní státy, Albánie a Slovensko, protože ani v jednom, ani v druhém není hvězdárna. Po čtvrt hodině, jež byla vyhrazena vyžádané audienci Bečváře u ministra, odcházel Bečvář s příslibem, že v nejkratší době dostane povolení a finance na stavbu hvězdárny. Původně se plánovalo, že hvězdárna bude na Štrbském Plese. Přesun na novou lokalitu při Skalnatém Plese byl nečekaný a náhlý stejně jako i čistě osobní a emocionální motiv, který k tomuto rozhodnutí vedl. Dnes víme — a upozorňovali na to i někteří hvězdáři v Čechách, na které se Bečvář obrátil — že východní svah tatranských štítů není právě vhodným místem pro hvězdárnu (prudký padající vítr, silná turbulence a v důsledku toho i neklidný obraz v dalekohledu), ale hvězdárna stojí a je hlavní slovenskou observatoří vybavenou napřed 60-cm reflektorem ze staroďalské hvězdárny a dvojitým zrcadlovým dalekohledem z hvězdárny v Brandýse nad Labem a dnes novým 60-cm Zeissovým reflektorem a dalším Zeissovým astrografem vedle řady pomocných přístrojů a zařízení. K hvězdárně na Skalnatém Plese patří koronální stanice na Lomnickém Štítě, dobudovaná až začátkem šedesátých let.

Personální mini-obsazení nové hvězdárny (ředitel, mechanik, údržbář) se brzy rozšířilo o *A. Mrkose* a *L. Pajdušákovou*. Oba nebyli astronomové a na hvězdárnu přišli téměř náhodou. A. Mrkos se rychle vypracoval na vynikajícího pozorovatele a L. Pajdušáková náhodným objevem komety se stala rázem velmi populární.

Nucený společný pobyt této malé skupiny lidí v osamělém prostředí a jejich narůstající ambice ukončily v r. 1952 éru Bečváře na této hvězdárně, ačkoliv jeho zásluhy o slovenskou astronomii jsou nepopiratelné. Bečvář proslavil Skalnaté Pleso vynikajícím hvězdným atlasem „Atlas coeli", který po čtvrt století byl nejlepším atlasem své doby na celém světě a i dnes je ještě používán jako referenční atlas. Bečvář zhotovil ještě další dva atlasy „Atlas eclipticalis" a „Atlas borealis". Také jeho myšlenka zhotovit fotografický atlas nebe poměrně krátkofokálními komorami, které by zaznamenaly hvězdy do velikosti 16, předešla nejméně o dvacet roků pozdější fotografický atlas Vehrenbergův. Škoda, že k vydání tohoto atlasu už nedošlo, i když téměř všechny fotografie velmi dobré kvality byly Mrkosem pořízené, ale nedostatečnou archivací v dalších letech se poztrácely. Bečvář je také autorem originálního atlasu horských mraků.

Po prvém objevu komety nastala na Skalnatém Plese éra lovců komet (*Bečvář, Kresák, Mrkos, Pajdušáková*), která také získala dobrou pověst této slovenské hvězdárně. K úspěchům přispívalo jak nadšení pozorovatelů, tak i použití velmi dobrých dvojitých dalekohledů Somet-Binar (průměr objektivů 10 cm, zvětšení 25, limitní hvězdná velikost 12).

Po Bečvářovi se ředitelem stal *V. Guth* a obsazení hvězdárny se zvětšilo o první slovenské astronomy (*Kresák, Kresáková, Podstanická* aj.), kteří pokračovali v slavné tradici kometární astronomie a astronomie meteorické a vytvořili základ dnešní skupiny pro studium meziplanetární hmoty MPH. Osobní nesnáze vedly v r. 1954 k odchodu této skupiny do Bratislavy. Mezitím byla ustavena Slovenská akademie věd (SAV) a ze Skalnatého Plesa spolu se stanicí na Lomnickém štítě a oddělením MPH v Bratislavě se stal Astronomický ústav SAV.

Dalším ředitelem ústavu se stal autor tohoto pojednání. V této éře Skalnaté pleso získalo jméno a vysoké ocenění AN SSSR sledováním a určováním poloh prvých umělých družic. S příchodem dalšího mladého slovenského astronoma *J. Tremku* se začaly práce na fotoelektrické fotometrii proměnných hvězd, které pak pokračovaly vedle pozorování Slunce i za ředitelování *L. Pajdušákové* (do r. 1978) a dnes, kdy ředitelem ústavu je *J. Sýkora*, tvoří vedle solární fyziky hlavní náplň stelární astronomie. Počet pracovníků se několikanásobně zvýšil v Tatrách i v Bratislavě. Také se zlepšilo vybavení novými přístroji a moderní elektronikou, takže ústav může klidně kráčet vstříc novým úspěchům.

Astronomický ústav podnikl tři výpravy za zatměním Slunce.

Druhým profesionálním astronomickým pracovištěm na Slovensku byl Astronomický ústav Komenského univerzity, zřízený z podnětu *A. Bečváře* v r. 1944. Jeho úkolem byla výuka a pěstování astronomie v rámci univerzity. V r. 1952, kdy po smrti asistenta *Malovce* zde nastoupil autor tohoto pojednání, byl ústav začleněn do Katedry astronomie, geofyziky a meteorologie (AGM), jejímž vedoucím byl známý meteorolog univ. profesor *M. Konček*. Po dlouhou dobu personální obsazení pozůstávalo jen ze dvou astronomů (*Bochníček, Hajduková*) a od r. 1968 příchodem *P. Paluše* se zvýšilo na tři. V současné době je astronomie jedním ze tří oddělení spojené katedry astronomie, geofyziky a meteorologie AGM (vedoucí *G. Siráň*, geofyzik) matematicko-fyzikální fakulty University Komenského v Bratislavě. Nemá zatím vlastní hvězdárnu, ale je plánována stavba observatoře s 60cm dalekohledem (původní Zeissův staroďalský reflektor z r. 1927 umístěný od r. 1944 na Skalnatém Plese a v r. 1978 převedený do majetku univerzity). Oddělení má dále pomocné přístroje, jako je stroj na měření souřadnic z fotografických záznamů KOOMES, počítač COMPUCORP, přenosné dalekohledy atd. a bohatou knihovnu. Pracovníci oddělení kromě výuky spolupracují na úkolech státního výzkumného plánu a řada jejich pojednání (heliofyzika, astronomická fotometrie, meteory, pohyb umělých družic) uveřejněná v domácích a zahraničních časopisech dává předpoklady dalšího zdárného vývoje.

Dalším vysokoškolským pracovištěm je katedra astronomie a vyšší geodézie Vysoké školy technické v Bratislavě (vedoucími zde byli postupně *Krajčí, Suchánek a Melicher*). Astronomie je zde specializovaná na problémy sférické astronomie, družicové geodézie, určování rotačního času a kolísání výšky pólu.

Na rozdíl od českých zemí amatérská astronomie na Slovensku se začala rozvíjet ve větším měřítku teprve po roce 1945. Opuštěná hvězdárna ve Staré Ďale — která mezitím byla přejmenována na Hurbanovo — se stala v r. 1961 lidovou hvězdárnou (spravovanou od r. 1961 *J. Očenášem*, od r. 1964 *Š. Knoskou*, od r. 1969 *L. Valachem* a od r. 1972 *N. Bélikem*). Mezitím na Slovensku vznikly nebo ožily další lidové hvězdárny (Humenné, Prešov, Rožňava, B. Bystrica, Žilina a další) a astronomické kabinety při Domech osvěty spadající pod Ministerstvo kultury. Zvláštní postavení měla hvězdárna v Hlohovci (*E. Czere*) při Závodním klubu ROH Slovakofarmy. Vydáním statutu a zřízením Slovenské astronomické společnosti a Svazu slovenských astronomů-amatérů nastala jednak koordinace zájmů a odborné činnosti, jednak se zajistily finanční prostředky z rozpočtu. Hurbanovská kvězdárna se stala Slovenskou ústřední hvězdárnou astronomů-amatérů. Pořádá odborné a školící semináře a letní srazy. V Hurbanově už patnáct roků probíhá dvouroční pomaturitní studium astronomie, jehož absolvování má ministerstvem uznaný charakter odborného vzdělání. Pojítkem mezi astronomy i ostatní veřejností je populárně odborný časopis KOZMOS, obdoba české Říše hvězd. Astronomie se též těší velkému zájmu mezi mládeží (astronomické kroužky na školách).

K rozšíření astronomie přispěly četné populární knihy a přednášky, z kterých především knihy a přednášky *J. Grygara* se těší velké pozornosti nejširší veřejnosti.

Z uvedeného přehledu — který ani si zdaleka nečiní nárok na úplnost — vidíme, jakého rozšíření dosáhla astronomie u nás v posledních tří desetiletích. Stalo se tak jednak na základě poctivé práce mnoha našich předchůdců, kteří často za skromných nebo dokonce i málo příznivých podmínek udrželi kontinuitu astronomického bádání, jednak k tomu přispěla morální i hmotná podpora a péče, jaké se dostalo profesionální i amatérské astronomii v novém socialistickém Československu. Je nyní jen na našich hvězdářích, aby důvěru, kterou jim stát věnuje, využili pro rozvoj vědy oc nejlépe.

Vánoce 1985 u matematických kutilů - řešení

JIŘÍ MANN, Dvůr Králové n. L.

$1985 = \dfrac{280^2 + 2210^2}{50^2} = $ .. Podkladem je Eulerova identita: Součin 2 čísel tvaru součtu 2 čtverců má týž tvar. Zde v úpravě $a^2 + b^2 = \dfrac{(ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2}{c^2 + d^2}$ $(a, b) \in \{(31, 32), (7, 44)\}$, $(c, d) \in \{ 30, 40), (14, 48), (24, 45), (20, 48), (28, 45)\}$.

$1985 = \left(\dfrac{221}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{28}{5}\right)^2 = \ldots$ Jiná úprava Eulerovy identity:

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{ac + bd}{e}\right)^2 + \left(\frac{ad - bc}{e}\right)^2 = \left(\frac{ac - bd}{e}\right)^2 + \left(\frac{ad + bc}{e}\right)^2$$

$e^2 = c^2 + d^2$. $(a, b) \in \{(7, 44), (31, 32)\}$, $(c, d) \in \{(3,4), (8, 15), (20, 21)\}$.

$1985 = \dfrac{113^2}{12} + \dfrac{16^2}{6} + \dfrac{52^2}{4} + \dfrac{4^2}{2} = \ldots$ Jde o identitu

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{(3a - b - c)^2}{12} + \frac{(b + c)^2}{6} + \frac{(a + b + c)^2}{4} + \frac{(b - c)^2}{2},$$ $(a, b, c) \in \{(43, 10, 6), (42, 11, 10)\}$.

Zvolíme-li v uvedené identitě za k, l, m například čísla 6, 10, 43, dostaneme rovnosti
$1985^2 = 1913^2 + 516^2 + 120^2 = 1785^2 + 120^2 + 860^2 = 1713^2 + 860^2 + 516^2$.

Diofantickou rovnici $x + xy + y = 1985$ upravíme na tvar $(x + 1)\ (y + 1) = 1986 = 2 \,.\, 993 = 3 \,.\, 662 = 6 \,.\, 331$. Řešení: $(x, y) \in \{(1, 992), (2, 661), (5, 330), (330, 5), (661, 2), (992, 1)\}$.

Soustava s ciframi J, K, L, M, N. 1. řešení. Rozdíl oboı e $LMN + NLM = 1620$, tj. $110 \,.\, L + 11 \,.\, M + 101 \,.\, N = 1620$. Z počtu stovek a tisíců vyplývá, že musí být $L > 5$ a $N > 5$. Proto

$M + N = 10, L + M = 11, L + N = 15$ a $M + N + L = 18$. Snadno najdeme $L = 8, N = 7, M = 3, K = 4; J = 1$ je zřejmé. ($1148 + 837 = 1985$, $1148 - 783 = 365$.) — 2. řešení: Ihned vidíme, že $J = 1$. Z 1. rovnice plyne $L \in \{7, 8\}$, z 2. obdobně $N \in \{6, 7\}$. Z 1. dále $L + N = 15$, proto $L = 8$, $N = 7$. 2. rovnici lze nyní zapsat ve tvaru $78M + 365 = 11K8$. Zřejmě $M = 3$, $K = 4$. Známe tedy všechny cifry.

Soustava s neznámými g a h. 1. řešení. Z druhé rovnice vyjádříme $g = h + 5$ a dosadíme do první. Po úpravě je $10h + 25 = 1985$, $h = 196$, $g = 201$. — 2. řešení. $g^2 - h^2 - (g - h)^2 = 1985 - 5^2$, $2h(g - h) = 1960$, $10h = 1960$, $h = 196$, $g = 201$.

Soustava s neznámými p a q. Řešení. $q < 1985$, $\sqrt{q} < 45$.
$\sqrt{1985305 - 45} < \sqrt{p} < \sqrt{1985305}$, tj. $1408,99 \ldots < \sqrt{p} < 1409,08 \ldots$ Pro $\sqrt{p} = 1409$ je $q = 1985 - 1409 = 576$, $\sqrt{q} = 24$. Tedy $p = 1985281$, $q = 576$.

Řešíme soustavu $u + v + t = 67 \wedge u^2 + v^2 + t^2 = 1985 \wedge u^3 + v^3 + t^3 = 67831$.

$$uvt = \frac{(u + v + t)^3 + 2(u^3 + v^3 + t^3) - 3(u + v + t)(u^2 + v^2 + t^2)}{6}$$

Dosadíme za jednotlivé trojčleny a najdeme $uvt = 6240 = 2^5 . 3 . 5 \quad 13$ (1) $\sqrt[3]{67831} \doteq 40,8$, proto můžeme položit $u \leqq v \leqq t \leqq 40$. $\sqrt[3]{67831:3} \doteq 28,3$, je tedy dále $t \geqq 29$. S ohledem na (1) pak $t \in \{30, 32, 39, 40\}$ a vzhledem k činiteli 2^5 je právě jedno z čísel u, v, t liché. $6240 = 30 \quad 16 . 13 = 39 . 16 . 10 = 39 . 20 . 8 = 40 . 13 \quad 12 = 40 . 39 . 4$. Jen $8 + 20 + 39 = 67$. Souhlasí i součty druhých a třetích mocnin. Řešením je trojice čísel 8, 20, 39.

Součty trojic n-tých mocnin v dalším příkladě se sobě rovnají při $n \in \{1, 2\}$.

Dokážeme vztah $1985 \mid s$, v němž

$$s = 1^{1985} + \ldots + 992^{1985} + 993^{1985} + \ldots + 1984^{1985} + 1985^{1985} =$$
$$= (1^{1985} + 1984^{1985}) + \ldots + (992^{1975} + 993^{1985}) + 1985^{1985} =$$
$$= 1985a + \qquad + 1985z + 1985 . 1985^{1984},$$ tj. $1985 \mid s$.

Dokážeme vztah $1985 \mid r$, v němž $r = 24^{3a} + 3^{9a} - 22^{3a} - 2^{10a} = 13824^a + 19683^a - 10648^a - 1024^a$. $1985 = 5 . 397$, musíme proto dokázat současnou platnost vztahů $5 \mid r$ a $397 \mid r$.

$r = (13824 - 10648)a + (19683 - 1024)b = 397 . 8a + 397 . 47b$, tj. $397 \mid r$.

$r = (13824 - 1024)c + (19683 - 10648)d = 5 . 2560c + 5 . 1807d$, $5 \mid r$.

Najdeme $b \in N$, pro něž $1985 \mid (19^{2b} + 6^{2b})(b^4 - 1)$.

$(19^{2b} + 6^{2b})(b^4 - 1) = (361^b + 36^b)(b^4 - 1)$. $1985 = 5 . 397$, $397 =$

$= 361 + 36$. Pro liché b platí $397 \mid 361^b + 36^b$. $5 \nmid 361^b + 36^b$, hledáme-li, kdy je $5 \mid b^4 - 1$, pak (například) podle cifer na místech jednotek čtvrtých mocnin určíme vztah $5 \nmid b$. Vztah je správný pro b tvaru $10n \pm 1$ nebo $10n \pm 3$, $n \in N_0$.

$31121985 = 3 . 5 . 17 . 31^2 . 127 = 127 . 255 . 961 = 127 . 465 . 527 = 155 . 381 . 527$. $111986 = 2 . 7 . 19 . 421 = 133 . 842 = 266 . 421$.

Najdeme číslo c, pro něž $7 \mid 1985^c + 1986^c$.
$1985 = 283 . 7 + 4$, $1986 = 283 . 7 + 5$. Při dělení sedmi mají mocniny čísel 4 a 5 stejné zbytky jako tytéž mocniny čísel 1985 a 1986. Vlastnosti těchto zbytků jsou známé. Sestavíme tabulku zbytků pro $c \in \{1, \ldots, 6\}$.

c	1	2	3	4	5	6
4^c	4	2	1	4	2	1
5^c	5	4	6	2	3	1
$4^c + 5^c$	2		0	6	5	2

Pro $c = 6n - 3$ je $7 \mid 1985^c + 1986^c$.
Obdobně se dokáže, že při $d = 6m - 3$ je $7 \mid 19^d + 85^d$ i $7 \mid 19^d + 86^d$.
V dalším příkladu s nerovnostmi s odmocninami z dat najdeme $a = 401$, $b = 9$, $c = 553$, $d = 44$, $ab = 3609$, $cd = 24332$.

Tříkrálovské úlohy.

a) $792 = 8 . 9 . 11$, proto musí $8 \mid t \wedge 9 \quad \wedge 11 \mid t$, $t = K19M95B$. $8 \mid t$ platí při $B = 6$, pak $t = K19M856$. Z $9 \mid t$ plyne $K + M \in \{7, 16\}$, z $11 \mid$ dále $K - M \in \{-6, 5\}$. Proto $K = 6$, $M = 1$ a $t = 6191856$.

b) Zřejmě $M \in \{7, 8\}$. Je-li $M = 7$, pak $7 . K + B = 19$ a $K + B = 15$, $6 . K = 4$, spor. Pro $M = 8$ je $8 . K + B = 19$ a $K + B = 5$. $7 . K = 14$. $K = 2$, $B = 3$. $2 . 8 + 3 = 19$, $2 + 83 = 85$. — Lze též vyjít z rozdílu obou rovnic soustavy.

c) Snadno najdeme $K = 2$, $M = 8$, $B = 1$, $\sqrt{1985KMB} = \sqrt{1985281} = 1409$.

d) Zřejmě $B = 2$, pak lze položit $1K9M825 = 5^2n^2$ a dále $CDEF3 = n^2$, spor. Neexistují cifry K, M, B takové, aby $\sqrt{1K9M8B5}$ bylo přirozené číslo.

Slovní algebrogramy

Řešit slovní algebrogramy jste se už naučili v Rozhledech č. 3 a 4 proto máte před sebou na procvičení další algebrogramy, které jsou tentokrát z oblasti zeměpisu. Pokuste se opět nalézt alespoň jedno řešení každého algebrogramu.

a)

		A	Š
	CH	E	B
CH	L	U	M
Č	E	CH	Y

b)

O	H	Ř	E
O	D	R	A
H	R	O	N
Č	S	S	R

c)

		B	R	N	O
	O	P	A	V	A
	K	R	N	O	V
V	R	A	N	O	V
A	D	A	M	O	V
M	O	R	A	V	A

d)

	K	R	N	O	V
	K	Y	J	O	V
Z	N	O	J	M	O
M	O	R	A	V	A

Jarmila Pěnčíková

Řešení algebrogramů:

a)

49
105
1863
2017

b)

1290
1836
2317
5443

c)

3687
70212
46871
162871
292571
576212

d)

31524
36724
852792
921040

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

8. Nechť $k \geqq 4$ je dané přirozené číslo a $A_1, A_2, \ldots, A_k$ je k-tice libovolných dvouprvkových a navzájem různých množin. Mají-li každé dvě z těchto množin neprázdný průnik, pak platí:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \neq \emptyset$$

Dokažte a zjistěte, zda platí analogické tvrzení i v případě $k = 3$. (Došlo 9 řešení). *Jaroslav Morávek*

Autorovo řešení:

I. Nejprve dokážeme tuto pomocnou větu (lemma):

Nechť A, B, C jsou tři dvouprvkové a navzájem různé množiny. Jestliže $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ a $C \cap A \neq \emptyset$, pak platí

buď (i) $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, nebo (ii) existuje tříprvková množina $Q = \{p, q, r\}$ tak, že platí

$$A = \{p, q\}, B = \{q, r\}, C = \{r, p\}$$

Důkaz: V případě, že platí (i), je tvrzení dokázáno. V opačném případě platí card $(A \cap B \cap C) = 0$ a pro počet prvků sjednocení $A \cup B \cup C$ dostáváme: card $(A \cup B \cup C) =$

$$= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) -$$
$$- \text{card}(C \cap A) + \text{card}(A \cap B \cap C) =$$
$$= 6 - (\text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \cap C) + \text{card}(C \cap A)) \leqq 6 - 3 = 3$$

Protože jsou množiny A, B, C navzájem různé, musí platit

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = 3 .$$

Položíme-li $A \cup B \cup C = \{p, q, r\}$ a uvědomíme-li si, že tříprvková množina obsahuje právě tři různé dvouprvkové podmnožiny, dostáváme s přesností až na označení prvků (ii).

II. Důkaz tvrzení věty podáme matematickou indukcí podle k. (A) Báze indukce, $k = 4$. Mějme čtyři množiny $A_1, \ldots, A_4$, vyhovující podmínkám úlohy. Pro trojici A_1, A_2, A_3 jsou pak splněny podmínky lemmatu. Ukážeme, že nemůže nastat případ (ii) lemmatu. Skutečně v tomto případě by existovala tříprvková množina $\{p, q, r\}$ tak, že by platilo

$$A_1 = \{p, q\}, A_2 = \{q, r\}, A_3 = \{r, p\}$$

Množina A_4 by musela mít s množinou A_1 společný právě jeden prvek; bez újmy na obecnosti lze předpokládat $A_1 \cap A_4 = \{p\}$. Kromě toho by množina A_4 musela obsahovat i jeden z prvků q nebo r. V prvním případě bychom dostali

$$A_4 = \{p, q\} = A_1 \quad \text{— spor;}$$

ve druhém

$$A_4 = \{p, r\} = A_3 \quad \text{— spor;}$$

Musí tedy nastat případ (ii) z lemmatu, tj. existuje čtyřprvková množina $\{c, a_1, a_2, a_3\}$ tak, že platí

$$A_j = \{c, a_j\} \ (j = 1, 2, 3) .$$

Množina A_4 musí nyní rovněž obsahovat prvek c, protože v opačném případě by platilo $A_4 \geqq \{a_1, a_2, a_3\}$ — spor.

Tím je tvrzení v případě $k = 4$ dokázáno.

(B) Indukční krok $k \to k + 1$ $(k \geqq 4)$: Mějme množiny $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ vyhovující podmínce úlohy. Protože k-tice $A_1, \ldots, A_k$ rovněž vyhovuje podmínkám úlohy, dostáváme na základě indukčního předpokladu

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \neq \emptyset ,$$

a tedy $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \{s\}$ je jednoprvková množina. Podobně jako při důkazu tvrzení z báze indukce ukážeme snadno, že platí

$$s \in A_{k+1} ,$$

čímž je indukční důkaz dokončen.

III. Pro $k = 3$ analogické tvrzení neplatí, jak ukazuje následující „protipříklad“:

$$A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{3, 1\} .$$

9. Pro každé přirozené číslo $n > 30$ platí: Je-li n prvočíslo, pak zbytek při dělení čísla n třiceti je číslo 1 nebo prvočíslo menší než 30. Dokažte obměnu věty a rozhodněte, zda platí věta obrácená.

(Došlo 15 řešení) *Jaroslav Šedivý*

Upravené řešení R. Babilona, 2D, G Bílovec:

Obměna věty: Pro každé přirozené číslo $n > 30$ platí: Je-li zbytek při dělení čísla n třiceti číslo 0 nebo složené číslo menší než 30, je n složené číslo.

Důkaz: Při zápisu $n = 30\,k + z$, kde $k \in \mathrm{N}$, $0 \leqq z < 30$, jsou předpoklady věty splněny pro $z = 0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28$. Pro $z = 0$ dostáváme $n = 30\,k$, kde $k \in \mathrm{N}$, $k > 1$; taková n jsou složená čísla.

Každá další hodnota z je přirozené číslo dělitelné dvěma, třemi nebo pěti, tj. $z = 2\,r$ nebo $z = 3\,s$ nebo $z = 5\,t$, kde $r, s, t \in \mathrm{N}$. takže

$$n = 30k + 2r = 2\,(15k + r),$$

nebo $$n = 30k + 3s = 3\,(10k + s),$$

nebo $$n = 30k + 5t = 5\,(10k + t).$$

Ve všech případech jsme zjistili, že n je složené číslo.

Obrácení věty: Pro každé přirozené číslo $n > 30$ platí: Je-li zbytek při dělení čísla n třiceti číslo 1 nebo prvočíslo menší než 30, je n prvočíslo.

Protipříklad: $32 = 1 \,.\, 30 + 2$. Existuje tedy aspoň jedno přirozené číslo $n > 30$, které dává při dělení třiceti zbytek 2, tj. prvočíslo, a přitom $n = 32$ není prvočíslo.

Poznámka. Většina řešitelů zapomněla na příklad $z = 0$. Část řešitelů nesplnila požadavek úlohy týkající se obměny věty. Některé důkazy byly podány nepřiměřeně složitým způsobem.

10. Nechť t_a, t_b, t_c jsou délky těžnic a v_a, v_b, v_c délky výšek trojúhelníku ABC, jehož obsah je roven jedné. Jaký je největší obvod tohoto trojúhelníku, jestliže platí tato nerovnost:

$$(t^2_a + t^2_b + t^2_c)\,(v^2_a + v^2_b + v^2_c) \leqq 27\,?$$

(Došlo 9 řešení) *Jaroslav Švrček*

Upravené řešení R. Babilona, 2D G Bílovec:

Vyjádříme nejprve součty $(t^2_a + t^2_b + t^2_c)$ resp. $(v^2_a + v^2_b + v^2_c)$ pomocí délek a, b, c stran trojúhelníka ABC, a to při jednotkovém plošném obsahu. Označíme-li T_a střed strany BC trojúhelníka ABC a užijeme-li kosinovou větu na trojúhelníky ABT_a a AT_aC, dostáváme

$$c^2 = t^2{}_a + \frac{a^2}{4} - at_a \cos\varphi\,,$$

$$b^2 = t^2{}_a + \frac{a^2}{4} + at_a \cos\varphi, \text{ kde } \varphi = |\sphericalangle BT_aA|$$

Sečtením obou rovnic pak získáme vztah:

$$t^2{}_a = \frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4} \text{ a cyklickou záměnou pak i vztahy}$$

$$t^2{}_b = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$t^2{}_c = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}\,.$$

Sečtením posledních tří vztahů máme:

$$t^2{}_a + t^2{}_b + t^2{}_c = \frac{3}{4}\,.\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

Podobným způsobem snadno zjistíme, že

$v^2{}_a + v^2{}_b + v^2{}_c = 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$, neboť trojúhelník ABC má podle textu úlohy jednotkový plošný obsah. Podle Cauchyho nerovnosti pak platí:

$$(t^2{}_a + t^2{}_b + t^2{}_c)\,(v^2{}_a + v^2{}_b + v^2{}_c) =$$

$$3\,(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geqq 3\,.\,9 = 27.$$

Podle textu úlohy však platí nerovnost opačná. Je tedy $(t^2{}_a + t^2{}_b + t^2{}_c)\,(v^2{}_a + v^2{}_b + v^2{}_c) = 27$, přičemž rovnost v použité Cauchyho nerovnosti nastává, právě když $a = b = c$, uvažovaný trojúhelník o jednotkovém plošném obsahu musí být tudíž rovnostranný. Odtud již snadno vypočteme délku strany, a tedy i jediný možný obvod trojúhelníka ABC, který má číselnou hodnotu $2\sqrt[4]{27}$

Fyzika

4. Co se může stát, jestliže plave led v olovu? Kus ledu o hmotnosti $m_1 = 0{,}4$ kg a teplotě $\vartheta_1 = -20$ °C se vhodí do roztaveného olova o hmotnosti $m_2 = 1$ kg a teplotě $\vartheta_2 = 400$ °C. Rozhodněte, zda zůstala část ledu po vyrovnání teplot ve skupenství pevném. Zanedbejte ztráty a vypařování do okolí.

(Došlo 50 řešení) *Zlatko Maršák*

Žádné z došlých řešení nebylo bez chyby. Nejvíce se správnému řešení blíží práce studentů, které uvádíme (bez pořadí správnosti řešení): A. Pařízek, T. Tkadlec, Z. Raida (společná práce), P. Vodáček, P. Habala, všichni z G v Bílovci;

P. Gaálová, Z. Mészáros, V. Olláry, K. Vargová, L. Varga, J. Tamás, všichni z G s vyuč. jazykem maďarským v Komárně;

A. Halás, P. Erzsébet z G s vyučovacím jazykem maďarským v Šamoríně a A. Huszárová z G. s vyučovacím jazykem maďarským v Bratislavě, Dunajská ul.

Autorovo řešení: Uvažujte: teplota tání olova $\vartheta_3 = 328\ °C$, měrná tepelná kapacita ledu $c_1 = 2090\ J\ .\ kg^{-1}\ .\ K^{-1}$,
vody $c_2 = 4180\ J\ .\ kg^{-1}\ .\ K^{-1}$, tekutého olova $c_2 = 167\ J\ .\ kg^{-1}\ .\ K^{-1}$,
olova ve skupenství pevném $c_4 = 125\ J\ .\ kg^{-1}\ .\ K^{-1}$,
skupenské teplo tání ledu $l_1 = 33{,}5\ .\ 10^4\ J\ .\ kg^{-1}$,
olova $l_2 = 2{,}2\ .\ 10^4\ J\ .\ kg^{-1}$.

Myšlenkový postup: Budeme hledat podmínku, aby zůstala část ledu po vyrovnání teplot ve skupenství pevném. Aby se daný kus ledu začal tavit, musíme ho ohřát na teplotu tání ledu. Z druhé strany však, aby se led úplně neroztavil, nesmí rovnovážná teplota směsi led + olovo být vyšší než teplota tání ledu. Musíme tedy najít podmínku pro množství tepla, které získá led při ochlazování roztaveného olova, aby množství ledem odebraného tepla roztavením olova bylo alespoň rovno tomu množství tepla, jaké je potřeba k ohřátí ledu na teplotu tání ledu, ale současně nesmí být toto množství tepla vyšší, než kolik ho je zapotřebí k úplnému roztavení daného kusu ledu. Přitom budeme předpokládat, že teplota tání ledu je rovna bodu mrazu, tj. 0 °C.

Vložením ledu do roztaveného olova klesne teplota tekutého olova. Bude-li množství tepla, odebraného roztavenému olovu, dostatečně velké (to závisí jak na množství ledu i olova, tak na jejich původních teplotách), klesne teplota roztaveného olova až k bodu tuhnutí olova. Při dalším ochlazování olova začne probíhat skupenská přeměna olova z kapalného do pevného skupenství; teplota směsi zůstane však po celou dobu přeměny skupenství konstantní. Nebude-li ani pak celá soustava olova + ledu v rovnováze, bude se teplota olova (nyní už jako pevné látky) stále snižovat.

Teplo odebrané olovu bude přijímat led, jehož teplota se bude pochopitelně, zvyšovat. O kolik se zvýší teplota ledu, to závisí na množství tepla odebraného olovu a na hmotnosti ledu a jeho teplotě. Bude-li množství tepla odebraného olovu dostatečně veliké, dosáhne teplota ledu nejprve teploty tání ledu, ale led zůstane stále ještě v pevném skupenství, popřípadě dojde už ke přeměně skupenství ledu ve vodu. Směs ledu, vody a olova bude mít až do úplného roztavení veškerého množství ledu stálou teplotu, rovnou teplotě tání ledu.

Je pravda, že dalším odběrem tepla z olova by se začal led po rozuštění ve vodu dále ohřívat nad teplotu tání ledu. My však hledáme odmínku, aby zůstala část ledu ve skupenství pevném, a proto tento stav musíme vyloučit.

Výpočet: Ochlazováním tekutého olova o hmotnosti m_2 z teploty ϑ_2 na teplotu tuhnutí Pb získá led množství tepla

$$Q_1 = c_3 m_2 (\vartheta_2 - \vartheta_3) = 12{,}02\ \mathrm{kJ}\ . \tag{1}$$

Tuhnutí olova probíhá sice při konstantní teplotě ϑ_3, ale tuhnoucí Pb vydává při této skupenské přeměně skupenské teplo. Ztuhnutím veškerého tekutého olova se získá množství tepla

$$Q_2 = m_2 l_2 = 22\ \mathrm{kJ}\ , \tag{2}$$

kde l_2 je skupenské teplo tuhnutí olova. Dalším ochlazováním olova (nyní už v pevném skupenství), které bude probíhat až do ustavení tepelné rovnováhy (a my hledáme podmínku, že výsledná teplota bude $\vartheta_0 = 0°\mathrm{C}$), se uvolní teplo

$$Q_3 = c_4 m_2 (\vartheta_3 - \vartheta_0) = 41\ \mathrm{kJ} \tag{3}$$

Veškeré uvolněné teplo z olova získá led (nejsou žádné ztráty tepla do okolí). Na ohřátí daného kusu ledu z původní teploty ϑ_1 na teplotu tání ledu $\vartheta_0 = 0\ °\mathrm{C}$, musíme odebrat olovu množství tepla

$$Q'_1 = c_1 m_1 (\vartheta_1 - \vartheta_0) = 16{,}72\ \mathrm{kJ}\ . \tag{4}$$

Aby led při teplotě ϑ_0 tál, musíme mu dodávat teplo potřebné ke skupenské přeměně. Na roztavení veškerého ledu o dané hmotnosti m_1 musíme ledu dodat energii

$$Q'_2 = m_1 l_1 = 134\ \mathrm{kJ} \tag{5}$$

Jestliže

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1'\ ,$$

znamená to, že veškeré teplo odebrané olovu způsobí ohřátí daného množství ledu právě na teplotu tání, aniž dojde ke skupenské přeměně. Bude-li však

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 > Q_1'\ , \tag{6}$$

dojde alespoň k částečnému roztavení daného kusu ledu. Při splnění rovnosti

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1' + Q_2' \tag{7}$$

by se právě veškerý led přeměnil ve vodu o teplotě $\vartheta_0 = 0\ °\mathrm{C}$. Aby nedošlo k úplnému roztavení daného kusu ledu, musí platit

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 < Q_1' + Q_2'\ , \tag{8}$$

avšak současně musí být splněna podmínka (6). Uvedené dvě rovnosti (6) a (8) určují podmínku pro to, aby část ledu zůstala neroztavená.

Podíváme se, zda pro náš případ hodnot uvedených v textu jsou nerovnosti (6) a (8) splněny.

Dosazením dostáváme:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 75{,}02\ \mathrm{kJ} > Q'_1 = 16{,}72\ \mathrm{kJ}$$
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 75{,}02\ \mathrm{kJ} < Q_1' + Q_2' = 150{,}72\ \mathrm{kJ}$$

takže vidíme, že část ledu zůstane v našem případě neroztavená.

Diskuse: Kdyby po dosazení hodnot vyšla nerovnost

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 \leqq Q_1' \tag{9}$$

co by to znamenalo?

A kdyby naopak vyšla podmínka

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 > Q_1' + Q_2' \tag{10}$$

co by platilo o množství rozpuštěného ledu?

Je možný ještě další případ?

Odpovědi: Podmínka (9) znamená, že teplota ledu po vyrovnání teplot bude nižší nebo právě rovna teplotě tání ledu, ale ke skupenské změně ledu ve vodu nedojde. Nerovnost (10) naopak by zachycovala stav, že se veškeré množství ledu roztaví a navíc pak výsledná teplota směsi bude vyšší než bod tání ledu.

Další možnosti by byly, že odebrání množství energie olovu by stačilo na skupenskou přeměnu vody v páru, případně na další ohřívání vzniklé páry).

5. Atomové jádro ^{69} Zn je ve vzbuzeném stavu. Do základního stavu přejde tak, že vyšle foton záření gama o energii $E_\gamma = 436$ keV. Vzbuzené jádro zinku bylo před vysláním fotonu v klidu. Jakou kinetickou energii bude mít jádro ^{69} Zn po vyslání fotonu?

(Došlo 46 řešení) *Stanislav Pospíšil*

Upravené řešení Přemysla Dědice, 4 C G Bílovec:

Při řešení použijeme zákon zachování hybnosti (ZZH)

$$\vec{O} = \vec{p}_\gamma + \vec{p}_j\,.$$

($\vec{p}_\gamma$ označuje hybnost vyslaného fotonu, $\vec{p}_j$ označuje hybnost jádra zinku po vyslání fotonu.)

Pro velikosti hybností p_γ a p_j odtud plyne

$$p^2{}_\gamma = p^2{}_j$$

Užitím relativistických vztahů pro hybnosti p_γ a p_j, $p_\gamma = E_\gamma/c$ a $p^2{}_j\, c^2 = T^2{}_j + 2m\, c^2\, T_j$ (m je klidová hmotnost jádra zinku v základním stavu, T_j označuje kinetickou energii tohoto jádra po vyslání fotonu), dostáváme kvadratickou rovnici pro hledanou energii T_j,

$$T^2{}_j + 2mc^2\, T_j - E^2{}_\gamma = 0\,.$$

Její fyzikální řešení ($T_j \geqq 0$) je ve tvaru

$$T_j = mc^2\left(-\,1 + \sqrt{1 + \frac{E^2{}_\gamma}{m^2\, c^4}}\right)$$

Protože veličina mc^2 je přibližně rovna 69 . 931 MeV, je tedy $E_\gamma \ll mc^2$ a pro výpočet odmocniny v závorce můžeme s dostatečnou přesností užít přibližného vztahu

$$\sqrt{1 + \frac{E^2{}_\gamma}{m^2\, c^4}} \doteq 1 + \frac{E^2{}_\gamma}{2\, m^2\, c^4}$$

Pro hledanou energii T_j odraženého jádra pak dostáváme

$$T_j \doteq \frac{E^2_\gamma}{2\,m\,c^2} \doteq \frac{0{,}436^2}{2\quad 69\,.\,931}\,\mathrm{MeV} \doteq 1{,}5\ \mathrm{eV}$$

Poznámka:

Protože nerovnost $E_\gamma \ll m\,c^2$ vede k nerelativistickému přiblížení, stejný výsledek dostaneme, hledáme-li T_j od počátku v klasickém nerelativistickém tvaru (pro hybnost fotonu však musíme používat vztahu $p_\gamma = E_\gamma/c$), $T_j = p^2{}_j/2m$.
Ze ZZH

$$p^2{}_\gamma = p^2{}_j$$

dostáváme

$$\frac{E^2{}_\gamma}{c^2} = 2\,m\,T_j$$

a odtud

$$T_j = \frac{E^2{}_\gamma}{2\,m\,c^2}\,.$$

OLYMPIÁDY A SOČ

Souboj Na planině

Dr. VLADIMÍR DŘÍZAL, PedF UK v Praze

Na počest 40. výročí osvobození Československa Sovětskou armádou uspořádalo koncem loňského školního roku Pedagogické oddělení pražské pobočky JČSMF ve spolupráci se Školskou správou v Praze 4 matematickou soutěž žáků 5. tříd s rozšířenou výukou matematiky. Soutěž byla určena pro žáky z Prahy a ze Středočeského kraje. Z jedenácti pozvaných škol se jich dostavilo osm. Akce byla netypická tím, že se jednalo o soutěž družstev, do které každá ze zúčastněných škol nominovala jeden čtyřčlenný tým. Snahou pořadatelů bylo umožnit soutěžícím, aby si v praxi ověřili přednosti dobře organizované kolektivní práce, bez které je současný vědecký výzkum nemyslitelný. Vzhledem ke skutečnosti, že se děti podobné soutěže zúčastnily poprvé, a s ohledem na jejich věk je pochopitelné, že soutěžící zároveň i na vlastní kůži poznávali, jako brzdou se může stát špatná organizace práce.

V samotné soutěži družstva v průběhu dvou hodin řešila dvanáct úloh, které byly podle obtížnosti hodnoceny třemi až deseti body. O taktických záležitostech, jako například v jakém pořadí úlohy řešit, kdo kterou úlohu bude řešit, popřípadě kolik členů se má úlohou zabývat, si jednotlivá družstva rozhodovala sama podle vlastního uvážení. Zde bylo velmi zajímavé sledovat různé přístupy jednotlivých družstev, které byly do značné míry podmíněny tím, jak schopný organizátor se v družstvu nacházel.

Během opravování soutěžních prací si děti měly možnost pod odborným vedením a po krátké instruktáži samy vyzkoušet některé programy na mikropočítačích IQ 150 a IQ 151. Nikoho již ani nepřekvapilo, že děti mají o tyto věci obrovský zájem a že základní prvky programování v praxi velmi rychle zvládají. Je proto asi velká škoda, že většina dětí nemá možnost se s podobnými přístroji zatím setkat.

Výsledky soutěže ukázaly, že všechna družstva si počínala více než zdatně a vyřešila většinu úloh, ač některé z nich byly poměrně náročné. Na prvních třech místech se umístila tato družstva:

1. ZŠ Na planině, Praha 4
2. ZŠ Českolipská, Praha 9
3. ZŠ z Příbrami

Pro zajímavost uvádím několik soutěžních úloh, u nichž sami můžete posoudit jejich obtížnost. Znovu si uvědomte, že se jednalo o žáky pátých tříd a že úloh bylo dvanáct na dvě hodiny.

Úloha č. 1. Jirka se učil počítat s kapesní kalkulačkou. „Teď už nemusím umět počítat. Kalkulačka za mne všechno vypočítá,“ oznamoval radostně svému tatínkovi. „Jen se neukvapuj,“ varoval ho s úsměvem otec. „Já ti dám úlohu. Ukaž, že číslo

$$1\underbrace{000\ldots\ldots001}_{101\text{ nul}}$$

můžeš dělit číslem 101 beze zbytku.“

Poraďte Jirkovi chytrý postup.

Úloha č. 2. Přes křižovatku S jsou vedeny dvě linky náhradní autobusové dopravy. Jedna z linek jezdí mezi stanicemi A a B, druhá linka mezi stanicemi C a D. Jednotlivé úseky projíždějí linky v těchto časových intervalech:

SAS	8 minut
SBS	8 minut
SCS	10 minut
SDS	7 minut

Přesně v 8,00 se na křižovatce S obě linky setkaly, přičemž prvá linka pokračovala do stanice A a druhá linka do stanice C. Řidič Novák na svého kolegu z okénka zavolal: „Vsadím se, že než uplyne hodina, tak se opět potkáme.“ Měl pravdu?

V kolik hodin se obě linky na křižovatce S opět setkají a do které stanice každá z nich pojede?

Úloha č. 3. Kolika způsoby můžete přečíst naše největší přání

SVĚTU — MÍR,

které je vepsáno do obrázku?

Při čtení můžete postupovat libovolným směrem dolů (šikmo vlevo nebo šikmo vpravo).

```
            S
        V       V
    Ě       Ě       Ě
T       T       T       T
U   U       U       U       U
    —       —       —       —
    M       M       M
        Í       Í
            R
```

Úloha č. 4. Nahraďte písmena číslicemi tak, aby platilo:

$$\begin{array}{r} \mathrm{T\ Ř\ I} \\ \times\quad \mathrm{T\ Ř\ I} \\ \hline \mathrm{D\ E\ V\ Ě\ T} \end{array}$$

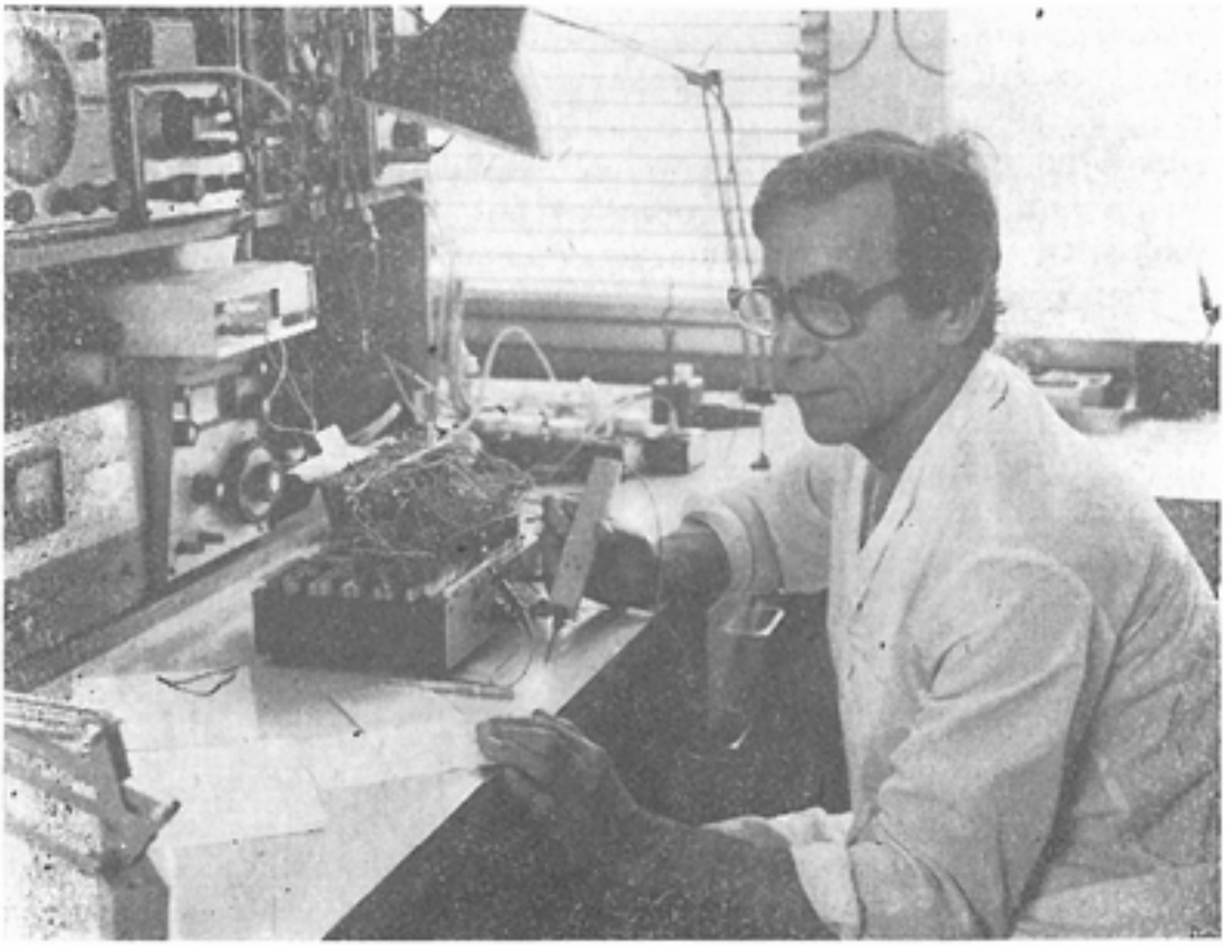
(Různá písmena nahraďte různými číslicemi, E $\neq$ Ě).

INFORMACE

Speciální technický studijní obor „fyzikální inženýrství"

Doc. RNDr. IVO KRAUS, CSc., FJFI ČVUT Praha

K desítkám studijních oborů na Českém vysokém učení technickém v Praze patří i takový, v jehož učebních plánech naleznete kvantovou mechaniku, teorii pevných látek, krystalografii, fyziku magnetických látek i jiné předměty, které se až dosud přednášely jen na školách univerzitního charakteru. Tento netradiční obor k získání vysokoškolské kvalifikace má název *fyzikální inženýrství.* Na ČVUT je výchova fyzikálních inženýrů zajišťována učiteli fakulty jaderné a fyzikálně inže-



Obr. 1. Bez elektroniky se fyzikální inženýr neobejde. Při studiu na FJFI se posluchači naučí pod vedením zkušených odborníků samostatně konstruovat elektronické přístroje a zařízení.

nýrské. Její absolventi mají vzdělání technické i univerzitní. Jsou všestranně připraveni k tomu, aby mohli plnit jeden z nejdůležitějších současných úkolů našeho národního hospodářství — uvádět co nejrychleji výsledky vědy do průmyslové praxe.

Studium oboru fyzikální inženýrství vychází z jednotného teoreticko-experimentálního a inženýrského základu. V oblasti matematiky jej tvoří znalost metod matematické aualýzy a algebry, numerické matematiky a statistiky, programování a praktické využívání výpočetní techniky. Z fyziky musejí posluchači zvládnout základní teoretické a experimentální poznatky klasické fyziky, hlavní metody a principy teoretické fyziky včetně kvantové, základy jaderné fyziky, fyziky pevných látek a elektroniky.

Obecně lze říci, že obor fyzikální inženýrství, který má zaměření na fyzikální elektroniku, stavbu a vlastnosti materiálů a inženýrství pevných látek, dává posluchačům takové znalosti, aby byli schopni tvůrčím způsobem přenášet nejnovější výsledky základního fyzikálního výzkumu do sféry technických aplikací.

V oblasti kvantové elektroniky, laserové techniky, fyziky plazmatu, mikroelektroniky a techniky mikrovlnných obvodů je tento cíl zajišťován na zaměření „*fyzikální elektronika*". Výuka, založená na syntéze fyziky kovů, nauky o materiálu a aplikované mechaniky, jejímž úkolem je příprava k vědecké práci v oblasti studia mezních stavů, životnosti a spolehlivosti těles a konstrukcí, je zabezpečována zaměřením „*stavba a vlastnosti materiálů*".

Na zaměření „*inženýrství pevných látek*" jsou vychováváni fyzikální inženýři pro výzkum elektrických, magnetických a optických vlastností pevných látek. Posluchači získávají jak obecné matematicko-fyzikální znalosti z teoretické a experimentální fyziky kondenzovaných látek, tak speciální inženýrské vzdělání především z technologie i aplikace polovodivých a dielektrických krystalů. Absolventi, kteří mají rovněž odbornou kvalifikaci v rentgenové a neutronové strukturní analýze, nacházejí uplatnění všude tam, kde se provádějí výzkumné nebo vývojové práce v oblasti využití pevných látek, zejména v elektrotechnickém průmyslu, ve výzkumných ústavech a na vysokých školách.

Charakter fakulty a způsob její pedagogické práce nezbytně vyžadují intenzívní vědeckovýzkumnou činnost širokého kolektivu učitelů i dalších pracovníků podílejících se na výchově posluchačů. Výuka studentů je do značné míry individuální a ve druhé polovině studia zasahuje do učebních plánů cílevědomá příprava k vlastní tvořivé práci ve výzkumných kolektivech na katedrách fakulty, ústavech ČSAV, resortních výzkumných ústavech a zkušebních laboratořích podniků strojírenského a elektrotechnického průmyslu.

Jak se dají fyzikální poznatky teoretické povahy uplatnit ve výrobě, můžeme ilustrovat na dvou výzkumných úkolech katedry inženýrství pevných látek, jejichž řešení se již během svého studia budoucí inženýři aktivně účastní.

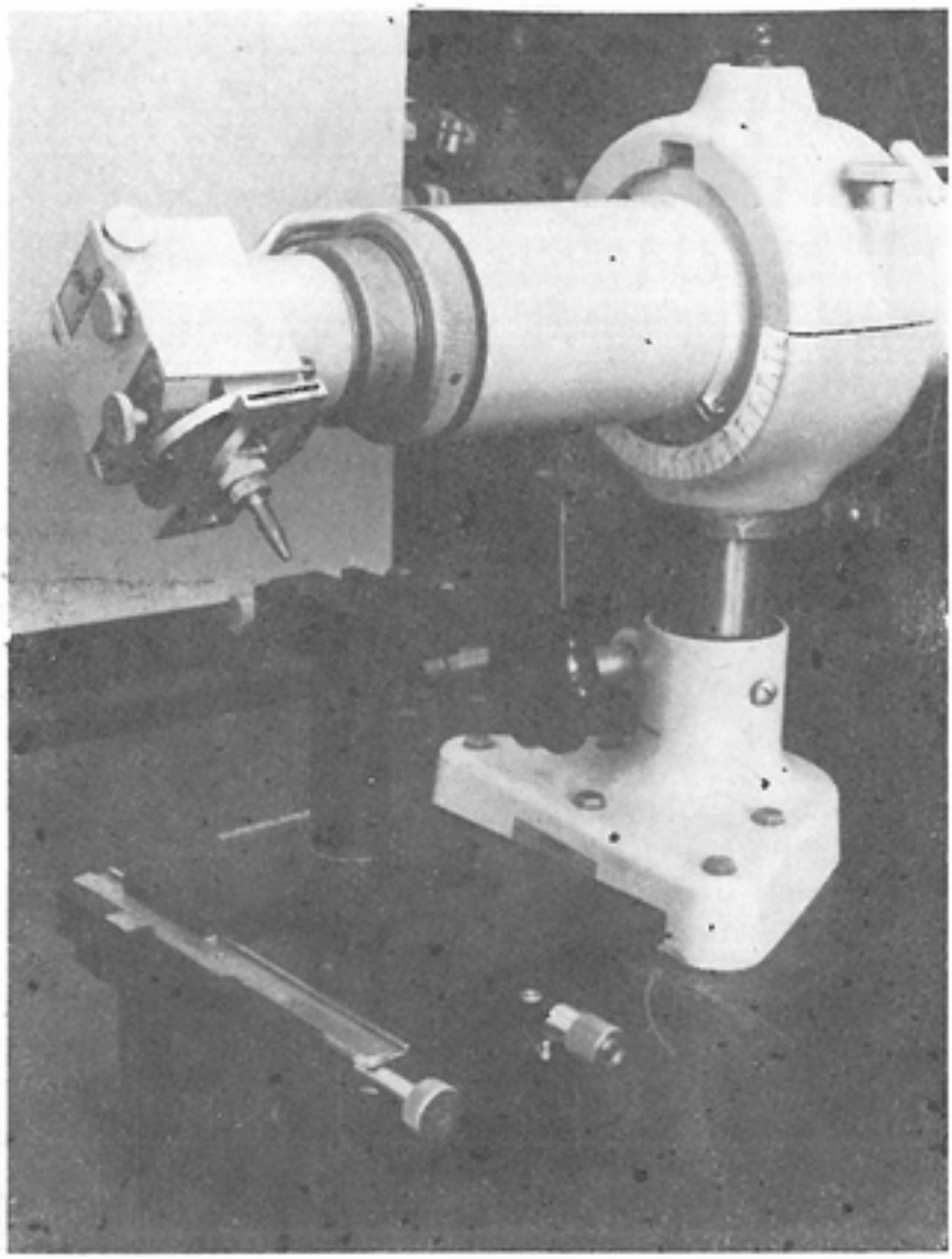
1. Kontrola technologie strojírenské výroby rentgenovou difrakční technikou

V posledním desetiletí se každý z nás stále častěji setkává s důsledky celosvětových úsporných tendencí v oblasti surovinových zdrojů. Výrobci zařízení těžkého i spotřebního průmyslu stojí před dvěma úkoly:

promyšleně začít snižovat měrnou spotřebu řady kovů, a to nejen těch, které označujeme jako „drahé",

zmenšit hmotnost výrobků, přitom však zachovat jejich dosavadní kvalitu.

Ke splnění tohoto cíle se hledají nejrůznější cesty. Vedle náhrady kovů plastickými hmotami je to zejména vývoj nových způsobů zpracování známých kovů. Příkladem jsou technologie vyvolávající na povrchu kovů užitečná zbytková napěti, kterými se zvýší mez únavy materiálu, odolnost povrchových vrstev součástek proti opotřebení, příznivě se ovlivní intenzita korozních procesů apod.



Obr. 2. Přenosná mikrostrukturní rentgenová aparatura na katedře inženýrství pevných látek FJFI umožňuje difrakční tenzometrickou analýzu povrchových oblastí objektů libovolného rozměru i členitosti tvaru.

Abychom mohli jednotlivé technologie opracování výrobků posoudit z hlediska vyvolané zbytkové napjatosti, musíme umět vzniklá napětí přesně měřit. Mezi četnými tenzometrickými metodami má prioritní postavení technika měření pomocí difrakce rentgenového a neutronového záření.[1])

---

[1]) S principem metody rentgenové tenzometrie byli čtenáři Rozhledů seznámeni v 6. čísle ročníku 1984/85.

Jedním z československých pracovišť, která využívají rentgenovou tenzometrii při plnění státního plánu základního fyzikálního výzkumu, je rentgenostrukturní laboratoř katedry inženýrství pevných látek na fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT. Konkrétní úkoly vědecké práce jsou zde v posledních letech dány požadavky našich strojírenských podniků na vyjádření vztahu mezi technologií výroby takových speciálních materiálů jako vysokolegované chromniklové oceli nebo zirkoniové slitiny a zbytkovým napětím. Základní koncepce dlouholeté spolupráce katedry s průmyslem v oblasti difrakční analýzy se dá vyjádřit těmito slovy:

Přizpůsobovat laboratorní fyzikální měřicí metody pro aplikaci v provozních podmínkách průmyslové praxe, využíváním výsledků základního fyzikálního výzkumu přispět k racionalizaci strojírenské výroby, k zavádění progresivních technologií opracování výrobků, podílet se na vývoji nových materiálů s požadovanými vlastnostmi.

2. Homogenní legování křemíku tepelnými neutrony

Většina současných technických aplikací polovodičů využívá závislost jejich fyzikálních charakteristik na čistotě. Např. elektrická vodivost se dá reprodukovatelně ovlivňovat ve velmi širokých mezích již neobyčejně malým množstvím příměsí.[2])

Způsob znečištění krystalové mřížky polovodičů není rozhodující. Může to být jak dotace příměsí při pěstování monokrystalů, dodatečná legovací či difúzní technika, iontová implantace nebo ozáření tepelnými neutrony.

Při pěstování monokrystalů křemíku z taveniny, kdy se potřebné koncentrace nečistot dosahuje jejich přimícháváním, je dosažení rovnoměrného rozdělení příměsových atomů v celém objemu polovodiče velmi obtížné. Každá nehomogenita koncentrace příměsí se projeví přirozeně místní odchylkou měrného odporu, takže součástky, např. tranzistory vyrobené z různých částí objemu takového krystalu budou mít různé vlastnosti.

U křemíku odstraňuje tento problém metoda homogenního legování tepelnými neutrony, při němž dochází ke transmutaci izotopu křemíku ^{30}Si na fosfor. Křemík obsahuje izotopy ^{28}Si (92,27 %), ^{29}Si (4,68 %) a ^{30}Si (3,05 %). Poslední z nich se při ozařování tepelnými neutrony v jaderném reaktoru mění na radioaktivní izotopy ^{31}Si a dále rozpadem beta s poločasem 2,62 hodiny přecházejí na stabilní izotopy fosforu ^{31}P, které působí jako donory. Vzhledem ke krátkému poločasu rozpadu lze ozářené

---

[2]) Nejrozšířenější polovodič — křemík — je považován za čistý, nepřipadá-li na 10^{10} jeho atomů více než jeden cizí atom. Takový materiál je však pro polovodičové aplikace nevhodný. Proto se záměrně znečišťuje přidáním malé koncentrace atomů, které vytvoří vodivost elektronů (typ N) nebo děr (typ P).

monokrystaly zpracovávat již po několika dnech jako neradioaktivní. Pokud máme neutronové pole homogenní, dostaneme rozdělení ^{31}P v celém objemu naprosto stejnoměrné; koncentraci donorů lze řídit hustotou toku tepelných neutronů a dobou ozařování.

Pro potřeby československého polovodičového průmyslu byla metoda homogenního legování rozvinuta na katedře inženýrství pevných látek. Spolupracoval přitom také výrobce monokrystalů Si koncernový podnik TESLA-Rožnov, oborový podnik ČKD-polovodiče a samozřejmě i Ústav jaderného výzkumu Československé komise pro atomovou energii v Řeži u Prahy, kde je v činnosti náš lehkovodní jaderný reaktor. Od roku 1980 je ozařováním neutrony v ČSSR legováno ročně 50—100 kg křemíku, který pak slouží k výrobě vysoce kvalitních polovodičových součástek. Omezením dovozu homogenně legovaného Si ze zahraničí se uspoří československému národnímu hospodářství značné devizové prostředky.

Oba příklady výzkumné práce, při nichž na katedře inženýrství pevných látek aktivně spolupracují i posluchači vyšších ročníků, ukazují, jaký je smysl výchovy fyzikálních inženýrů: dokonalé pochopení teorie fyzikálních procesů, příprava a zvládnutí experimentu prověřujícího pravdivost teoretických závěrů, spolupráce při zavedení výsledků laboratorního výzkumu do výrobní praxe.

Fyzikální inženýr není tedy ani klasický fyzik-badatel, jehož myšlenky zůstanou živé, jen pokud najdou svého praktického „vykladače", ani inženýr-konstruktér, třeba nejfantastičnějších automatů. Je to spíše verneovský hrdina, který ví, že technické zázraky odkryje fyzika jen tomu, kdo ji dobře zná. Takové absolventy vychovává na ČVUT v Praze fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská — aby mohli hrát velké role nových příběhů o fyzice sloužící lidstvu na počátku třetího tisíciletí.

Kalendár M-F: január 1986

4. I. 1961 zomrel vo Viedni *Erwin Schrödinger*, rakúsky teoretický fyzik. Patrí k zakladateľom kvantovej mechaniky. Formuloval základnú rovnicu kvantovej mechaniky. V roku 1933 získal spolu s *P. Diracom* Nobelovu cenu za objav nových produktívnych foriem atómovej energie.

7. I. 1871 sa narodil *Emile Borel*, francúzsky matematik, člen parížskej Akadémie vied. Zaoberal sa teóriou pravdepodobnosti, teóriou miery, teóriou funkcií i matematickou fyzikou. Publikoval viac ako 300 vedeckých prác.

14. I. 1901 zomrel *Charles Hermite*, francúzsky matematik. Dosiahol významné výsledky v teórii eliptických funkcií, teórii funkcií, teórii invariantov, teórii čísel. Dokázal transcendentnosť čísla e. V klasickej analýze, teórii funkcií komplexnej premennej, teórii diferenciálnych a integrálnych rovníc nesie veľa pojmov jeho meno.

17. I. 1706 sa v Bostone narodil *Benjamin Franklin*, americký fyzik, vynálezca a politik. Patrí k zakladateľom náuky o elektrine, zaviedol pojem kladného a záporného elektrického náboja, zhotovil prvý doskový kondenzátor, experimentálne dokázal elektrickú podstatu blesku atď.

19. I. 1736 sa v Greenocku narodil *James Watt*, škótsky fyzik a vynálezca. Navrhol dvojčinný parný stroj s kondenzátorom, založil prvú továreň na výrobu parných strojov.

22. I. 1941 zomrel *František Křižík*, český elektrotechnik a vynálezca. V roku 1888 postavil prvú elektráreň u nás.

25. I. 1736 sa v Turíne narodil *Joseph Louis Lagrange*, francúzsky matematik a fyzik. Pracoval v oblasti čistej i aplikovanej matematiky, formuloval zásady klasickej mechaniky. Vytvoril metódy na separáciu reálnych koreňov algebrickej rovnice a na ich aproximáciu reťazovými zlomkami. Päťkrát získal cenu parížskej Akadémie vied.

25. I. 1951 zomrel v Moskve *Sergej Ivanovič Vavilov*, sovietsky fyzik, akademik. Pracoval v oblasti fyzikálnej optiky. Odvodil základný všeobecný zákon teórie luminiscencie. Štátnu cenu ZSSR získal trikrát.

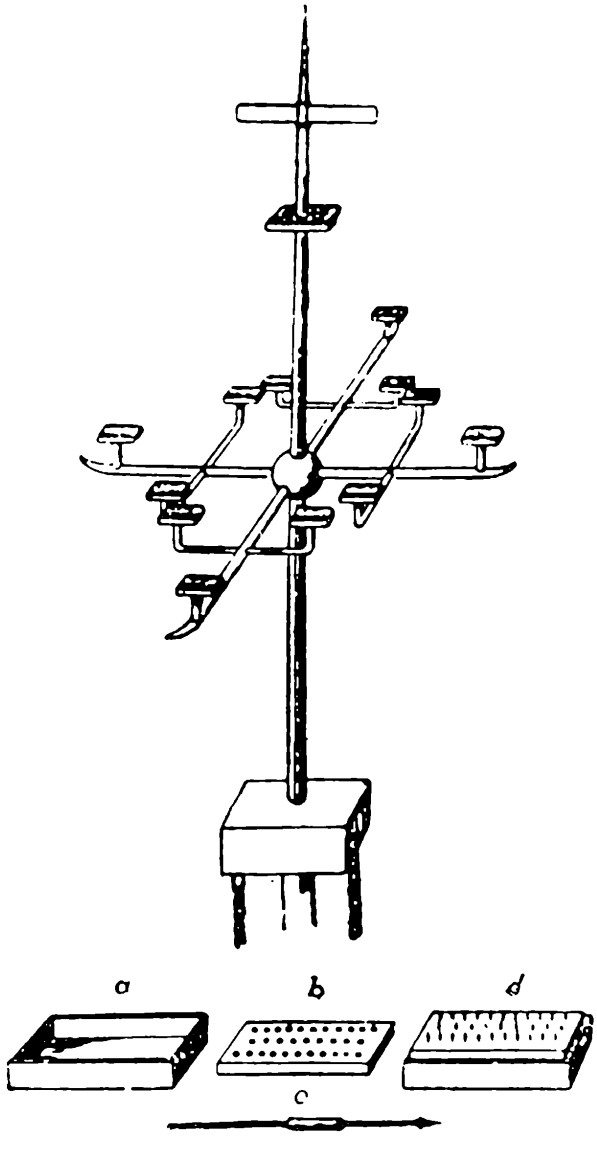
28. I. 1701 sa v Paríži narodil *Charles Marie de la Condamine*, francúzsky matematik. Pri cestách po Južnej Amerike meral na rovníku dĺžku a oblúk poludníka. Priviezol ako prvý do Európy kaučuk a platinu.

31. I. 1881 sa v New Yorku narodil *Irving Langmuir*, americký fyzik a chemik. Zaoberal sa elektrickými výbojmi v plynoch a emisiou elektrónov rozžeravenými látkami. Za výzkumy a objavy v novej oblasti fyzikálnej chémie — chémie povrchu, získal v roku 1932 Nobelovu cenu za chémiu.

dj

Machina meteorologica

Na obrázku vidíme konstrukci, kterou navrhl a v r. 1754 dal postavit *Prokop Diviš*, farář v Příměticích u Znojma. Byla to stavba ze svislých a vodorovných tyčí s nástavci pro umístění krabic. Tyče i krabice byly železné, opatřené hroty, z krabic byly vysunuté hroty ve třech řadách. Železné piliny byly jak v krabicích, tak v zemi, kam vedly tři železné řetězy přichycené oky na spodní straně zobrazené plošiny.



„Povětrnostní stroj“ (= machina meteorologica) měl odsávat elektřinu z ovzduší a tím působit ve svém okolí pěkné počasí, zejména zabraňovat vzniku bouřek s ničivými lijáky a krupobitími. Přístroj tedy neměl přisouzenu roli bleskosvodu, i když ji mohl plnit. Diviš jej však postavil na zahradě své fary, takže byl v ochranném prostoru kostelní věže a blesk do něj nikdy neudeřil. Dlouhodobé sucho v r. 1758 přisuzovali však obyvatelé okolních vesnic této „mašině proti povětří“ a vyvrátili ji. Po mokrém roce 1760 se prý opět dožadovali vztyčení konstrukce; skutečně byla postavena, i když s jinými rozměry a dílčími úpravami.

Dnes lze vidět rekonstrukce „stroje“ v Žamberku — Helvíkovicích poblíž Divišova rodného domku, v Příměticích, Znojmě a v Brně. Poznamenejme, že Prokop Diviš se před vstupem do kláštera v Louce u Znojma jmenoval *Václav Divíšek*; narodil se patrně 26. 3. 1698, zemřel 25. 12. 1765 v Příměticích. Rozhodně nebyl badatelem izolovaným od vědeckého dění své doby, naopak vedl čilou korespondenci s učenci v Praze, Vídni, ale i v Berlíně a Petrohradě.

Vladimír Mališek

Čo je matematika?

Matematika je gymnastika rozumu a príprava pre filozofiu.
Isokrates

Matematika je ideál a norma každého usilovného myslenia.
G. S. Hall

Matematika je kľúčom k všetkým ľudským vedomostiam.
L. Euler

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 64, 1985/86
ÚNOR

(6)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

Třicet let Spojeného ústavu jaderných výzkumů v Dubně

Doc. ing. ZDENĚK JANOUT, CSc., FJFI ČVUT Praha

V letošním roce oslaví třicáté výročí svého založení mezinárodní jaderné středisko socialistických států — *Spojený ústav jaderných výzkumů* (dále jen SÚJV) v Dubně u Moskvy. Ústav byl založen 26. 3. 1956 z iniciativy sovětské vlády a na jeho činnosti se dnes podílí jedenáct socialistických států (BLR, MLR, NDR, KLDR, MoLR, PLR, RSR, VSR, SSSR, ČSSR a Kuba). ČSSR patří mezi zakládající členy. Organizační struktura SÚVJ je popsána v dříve publikovaných článcích [1, 2]. SÚJV se nachází ve městě *Dubně*, které leží asi 130 km severně od Moskvy na pravém břehu řeky Volhy, a to v místě, kde se řeka Volha nejvíce přibližuje k Moskvě. Město i ústav se vlastně rozprostírají na ostrově tvořeném řekami Volhou, Sestrou a Dubnou a kanálem Volha—Moskva. Ústav je územně rozdělen na dvě části, jež jsou umístěny v borovém lese. Mezi nimi se rozprostírá město (asi se 16 000 obyvateli) s obytnými domy, obchody, hotely, školami, sportovním areálem, domem kultury, s vytápěným plaveckým bazénem „Archimed", administrativními budovami ústavu atd. Ve městě je i pobočka Moskevské státní univerzity, na níž studují studenti vyšších ročníků teoretickou nebo experimentální jadernou fyziku či fyziku elementárních částic. Město svým stylem, zejména parkovou úpravou, připomíná spíše lázeňské město. Jistě nepřekvapí, že v tomto vědeckém městě nesou některé ulice jména významných fyziků. Je zde ulice Joliota-Curie, Kurčatova[1]), Vavilovova[2]), Blochincevova[3]), Vekslerova[4]). Ve městě jsou vytvořeny dobré podmínky jak pro vědeckou práci, tak i pro odpočinek pracovníků ústavu.

---

[1]) Akademik *Igor Vasilevič Kurčatov* (1903—1960). Sovětský jaderný fyzik. Od roku 1943 stál v čele sovětského jaderného programu. Pod jeho vedením se rozvíjel výzkum v různých oblastech jaderné fyziky, byla vytvořena atomová (1949) i vodíková (1953) bomba, byla uvedena do provozu první atomová elektrárna (1954) na světě, byl vybudován Ústav jaderných problémů v Dubně, který po založení SÚJV se stal jednou z laboratoří SÚJV.

[2]) Akademik *Sergej Ivanovič Vavilov* (1891—1951). Sovětský fyzik pracující v oblasti fyzikální optiky. Od roku 1945 byl prezidentem AV SSSR.

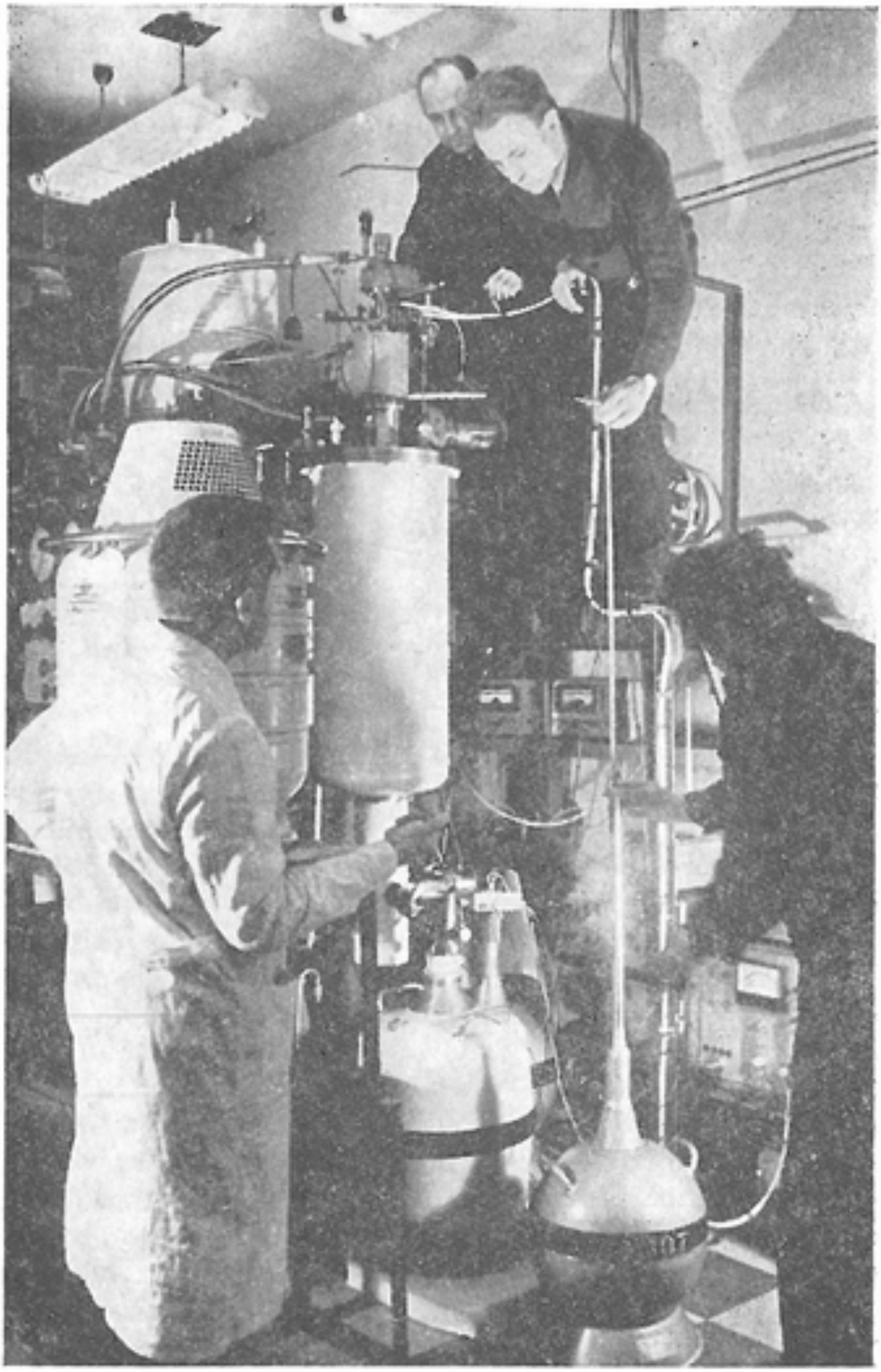
[3]) Prof. *Dmitrij Ivanovič Blochincev* (1908—1979), člen kor. AV SSSR.

Podle charakteru výzkumu je ústav rozdělen do šesti laboratoří [1]. Každá laboratoř má své unikátní experimentální zařízení (urychlovač, reaktor), na kterém se provádí základní výzkum. Cílem výzkumu je studium struktury elementárních částic a jejich vlastností, studium interakcí mezi elementárními částicemi, hledání nových částic, studium struktury atomových jader, získávání nových transuranových prvků, studium reakcí s neutrony, nabitými částicemi a mnohonásobně nabitými ionty, studium struktury pevných látek a kapalin, výzkum nových metod urychlování nabitých částic atd. Kromě základního výzkumu je věnována pozornost i výzkumu aplikačního charakteru. Například byla rozpracována technologie výroby tzv. jaderných filtrů chemickým leptáním plastických fólií proražených svazkem těžkých iontů (otvory od několika setin mikrometru výše), bylo vybudováno experimentální pracoviště pro studium vlivu protonů a záporně nabitých pionů na buňky zhoubných národů, rozvíjí se lékařskobiologický výzkum využívající pomalých i rychlých neutronů atd. Dubněnští fyzikové se podíleli i na předpovědění a experimentálním potvrzení „mionové katalýzy" — syntézy jader izotopů vodíku (deuteria a tritia) pomocí mionů. Výpočty ukázaly, že během doby svého života ($2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s) je mion schopen katalyzovat více než sto reakcí syntézy jader deuteria a tritia na jádro helia a přispět k uvolnění přibližně energie 2 GeV Tato „mionová katalýza" by mohla vést k principiálně novému způsobu výroby energie v průmyslovém měřítku. Výzkumné práce v tomto směru pokračují.

Českoslovenští fyzikové se aktivně podílejí na činnosti SÚJV od jeho založení. Během třiceti let existence SÚJV byli třikrát zvoleni do funkce zástupce ředitele ústavu přední českoslovenští fyzikové. V období 1956 až 1959 vykonával tuto funkci *akad. V Votruba*, v období 1964 až 1967 *člen kor. ČSAV I. Úlehla* a v letech 1973 až 1976 *prof. Č. Šimáně.* Zplnomocněným představitelem vlády ČSSR v nejvyšším orgánu ústavu, Sboru zplnomocněných představitelů vlád členských států, byl od roku 1981 *akad. J. Kožešník*, po něm byl jmenován *akad. B. Kvasil*, předseda ČSAV Jeden z prvních československých kolektivů, který se již v roce 1958 zapojil do experimentů věnovaných studiu nepružných interakcí záporných pionů s nukleony v jaderných emulzích, vedl *prof. V. Petržílka* (MFF UK). Prvním československým vědeckým aspirantem v SÚJV

Sovětský teoretický fyzik. V roce 1950 se stal ředitelem první atomové elektrárny a v roce 1956 byl jmenován prvním ředitelem SÚJV. Pod jeho vedením se stal ústav významným vědeckým centrem. Od roku 1965 až do své smrti byl ředitelem Laboratoře teoretické fyziky SÚJV.

[4]) Akademik *Vladimír Josifovič Veksler* (1907—1966). Sovětský odborník z oblasti urychlovačů částic. V roce 1944 objevil nezávisle na americkém fyzikovi E. McMillanovi princip fázové stability, který umožnil konstrukci nových typů urychlovačů. Od roku 1956 až do své smrti byl ředitelem Laboratoře vysokých energií SÚJV.



*Obr. 1. Pohled na kryogenní část zařízení SPIN. Zleva doprava: M. **Finger** (MFF UK), Z. Janout (FJFI ČVUT), V. N. Pavlov (SÚJV) a J. **Dupák** (ÚPT ČSAV Brno). Foto J. Tumanov*

Obr. 2. Přední fyzikové SÚJV. Zleva doprava: prof. D. I. Blochincev (první ředitel SÚJV), prof. V. P. Dželepov (ředitel Laboratoře jaderných problémů SÚJV), akad. N. N. Bogoljubov (současný ředitel SÚJV), akad. V. Votruba (jeden z prvních zástupců ředitelů SÚJV) a akad. M. A. Markov. Foto Jurije Tumanova

byl *doc. J. Tuček,* v současné době ředitel Ústavu jaderné fyziky ČSAV v Řeži. V rámci dlouhodobého pobytu (2 až 3 roky) pracuje v SÚJV okolo sedmdesáti československých pracovníků. Na krátkodobé pobyty přijíždí do Dubny více než sto odborníků ročně. Spolupráce je oboustranná. A proto naopak na československá pracoviště přijíždějí pracovníci ze SÚJV. S pomocí SÚJV byl postaven a uveden do provozu nový izochronní cyklotron U-120 M v ÚJF ČSAV nebo byl zkonstruován první československý mikrotron (urychlovač elektronů) na fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské (dále FJFI) ČVUT v Praze. ČSSR se podílí na vědeckovýzkumných programech jak v jaderné fyzice, tak i ve fyzice elementárních částic [2, 3]. Jelikož není možno v tomto krátkém článku uvést všechny spolupráce, uvedeme jako konkrétní příklad dlouhodobé spolupráce mezi SÚJV a ČSSR vědeckovýzkumný program s pracovním názvem SPIN [4, 5].

Projekt programu SPIN byl vypracován v roce 1973 pracovníky Univerzity Karlovy (UK) a Českého vysokého učení technického (ČVUT) v Praze a byl předložen k projednání SÚJV. Zde byl přijat a byl zařazen do plánu mezinárodní vědeckotechnické spolupráce. Jeho realizace začala v roce 1974 v Laboratoři jaderných problémů SÚJV, kde existovala potřebná experimentální základna pro jeho realizaci (urychlovač částic, rychlá hmotnostní a chemická separace izotopů, rychlé dosahování velmi nízkých teplot apod). Program SPIN představuje nový směr výzkumu. Jedná se o studium vlastností krátce žijících radioaktivních

Obr. 3. Na snímku je československá delegace na zasedání Sboru zplnomocněných představitelů vlád členských států. Zleva doprava : prof. Č. Šimáně (FJFI ČVUT), akad. B. Kvasil (zplnomocněný představitel vlády ČSSR, předseda ČSAV), doc. J. Tuček (ÚJF ČSAV), prof. J. Dubinský (ÚEF SAV Košice). Vzadu jsou prof. V. P. Sarancev a prof. I. Zvára. Foto J. Tumanov

atomových jader metodou jaderné orientace při velmi nízkých teplotách [4]. Orientovaná radioaktivní jádra se rozpadají a emitují prostorově anizotropní záření gama. Ze změřené anizotropie lze určit různé charakteristiky jader a emitovaného záření gama. Studium orientovaných jader poskytuje nové informace, jiným způsobem těžko dosažitelné. Společným úsilím československých a dubněnských fyziků a inženýrů se podařilo vybudovat experimentální kryogenní zařízení, v kterém je dlouhodobě dosahována potřebná velmi nízká teplota kolem 10 mK (téměř minus 273 °C); viz obr. 1. Dosud byla provedena úspěšná měření s orientovanými jádry izotopů vzácných zemin. Dosažené fyzikální výsledky představují významný přínos k rozvoji poznatků o struktuře atomových jader přechodové oblasti (tj. oblast mezi silně deformovanými a sférickými jádry) s hmotnostními čísly kolem 150, dále charakteru emitovaného záření gama orientovanými jádry. Společné výzkumy stimulují i vytvoření experimentální základny v ČSSR. Během osmé pětiletky bude přenesena část programu SPIN, která ke svému řešení bezprostředně nepotřebuje práci urychlovače částic, do ČSSR. Za tím účelem je v novém areálu MFF UK a FJFI ČVUT v Praze na Pelc Tyrolce budováno experimentální pracoviště, na jehož přístrojovém vybavení se podílí i SÚJV. Dobrou školou se stal program SPIN i pro studenty, aspiranty a stážisty, kteří se podílejí na řešení některých dílčích úkolů.

Obr. 4. Přední českoslovenští fyzikové: prof. V. Petržílka, člen kor. ČSAV (vlevo) a prof. I. Úlehla, člen kor. ČSAV, současný předseda Jednoty československých matematiků a fyziků. Foto J. Tumanov

V období deseti let vypracovalo diplomovou práci během jednoročního pobytu v SÚJV deset studentů z FJFI ČVUT a šest studentů z MFF UK. Čtyři pracovníci obhájili kandidátskou disertační práci, jeden pracovník doktorskou disertační práci. V rámci programu SPIN tak byli vychováni vysoce kvalifikovaní pracovníci pro obory, které v ČSSR zatím neměly odpovídající experimentální základny. Úspěšné výsledky, dosažené při realizaci programu SPIN, ocenila vědecká rada SÚJV udělením druhé ceny za metodickou práci v roce 1979. V roce 1984 byla autorům programu SPIN *ing. M. Fingerovi, DrSc., doc. Z. Janoutovi* a *RNDr. S. Šafratovi* udělena Státní cena Klementa Gottwalda.

SÚJV oslavuje v tomto roce třicet let svého trvání. Dosažené výsledky potvrdily správnost rozhodnutí členských států, které vedlo k založení ústavu. Do budoucna se počítá s vybudováním nových experimentálních zařízení, která umožní novou etapu základního výzkumu v oblasti struktury atomového jádra, fyziky elementárních částic a kondenzovaných látek. Mezi tato zařízení patří pulsní reaktor IBR-2, izochronní cyklotron U-400, silnoproudý synchrocyklotron. Dále se počítá s vybudováním urychlovacího komplexu těžkých iontů. Tato zařízení by měla určit směr rozvoje fyzikálního výzkumu na několik dalších desetiletí. Významný bude i podíl SÚJV na výstavbě urychlovacího a akumulačního komplexu v Ústavu fyziky vysokých energií v Serpuchově, na kterém mají být urychlovány protony na velmi vysokou energii 3 TeV.

K plnění těchto náročních úkolů budou přispívat i českoslovenští vědečtí a techničtí pracovníci.

Literatura:
[1] Janout Z.: „Spojený ústav jaderných výzkumů v Dubně". Rozhledy MF, ročník 1974/75, č. 6, str. 320—322 a č. 7, str. 351—363
[2] Janout Z.: „25 let atomového střediska v Dubně". Rozhledy MF, ročník 1980/81, č. 7, str. 289—294
[3] Československý časopis pro fyziku A26 (1976), č. 6, (věnováno dvacetiletí SÚJV)
[4] Brada P., Finger M.: „Orientace jader". Rozhledy MF, ročník 1980/81, č. 6, str. 265—269
[5] Janout Z.: „Program SPIN — příklad mezinárodní spolupráce". Technická práce, ročník 36 (1984), č. 11, str. 26—28.

MATEMATIKA

O lineárních diferenčních rovnicích

RNDr. MILAN TRCH, CSc., UK Praha

Nemusíte se vůbec lekat názvu na prvý pohled možná dosti složitého. Vždyť znáte vše potřebné pro to, abyste si o tomto pojmu sami udělali dobrou představu. Víte jistě, že rovnice typu:

$$3 \, . \, x + 7 = 0 \quad \text{nebo obecněji} \quad a \, . \, x + b = 0 \, ,$$
$$2 \; x - 5 \; y + 9 = 0 \quad \text{nebo obecněji} \quad a \; x + b \; y + c = 0 \, ,$$

nazýváme lineární rovnice o jedné nebo o dvou neznámých. Kromě toho jsme v článku [1] poznali i důležitý pojem diference posloupnosti $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ definovaný pro dané číslo n vztahem:

$$\triangle_n = x_{n+1} - x_n$$

Je jistě zřejmé, že tím jsme k dané posloupnosti $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ vlastně sestrojili novou posloupnost $\left\{ \triangle_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ diferencí dané posloupnosti. Protože však můžeme nyní znovu hledat diference k této nové posloupnosti, vyplatí se zavedený pojem poněkud upřesnit. Původně zavedenou diferenci posloupnosti $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ budeme značit symbolem $\triangle_n^1$ a nazývat

„první diference" posloupnosti $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ v bodě n, případně budeme hovořit o „diferenci 1. řádu" Druhou diferencí anebo též diferencí druhého řádu posloupnosti $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ budeme rozumět první diferenci z prvních diferencí pro dané číslo n. Označíme-li tuto diferenci 2. řádu symbolem $\triangle_n^2$, bude platit:

$$\triangle_n^2 = \triangle_{n+1}^1 - \triangle_n^1 = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n)$$

Účelné je zavést ještě tzv. „nultou" diferenci dané posloupnosti $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, která pro dané přirozené n představuje právě n-tý člen x_n dané posloupnosti.

Shrneme-li dosavadní úvahy, můžeme zapsat následující vztahy: (a) $\triangle_n^0 = x_n$; (b) $\triangle_n^1 = x_{n+1} - x_n$; (c) $\triangle_n^2 = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$. Podobně bychom mohli zavést i diference vyšších řádů a vyvodit pro ně obdobné vztahy. Nám však postačí uvedené a nyní již můžeme přistoupit k vysvětlení pojmu diferenční rovnice. Mnohý z vás si asi brzy všimne úzké souvislosti tohoto pojmu s lineárními diferenciálními rovnicemi, o kterých jste se již mohli dočíst na stránkách tohoto časopisu.

1. *Lineární diferenční rovnicí nultého řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$a \,.\, \triangle_n + b = 0\,,$$

kde a, b jsou reálná čísla, $a \neq 0$. Řešením takové rovnice rozumíme každou posloupnost $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje danou rovnici.

Využijeme-li vztahu (a), dostáváme ihned podmínku: $a \,.\, x_n = -b$

Proto takováto rovnice má jediné řešení, a to konstantní posloupnost

$$\left\{-\frac{b}{a}, -\frac{b}{a}, -\frac{b}{a}, \qquad \right\}$$

2. *Lineární diferenční rovnice prvního řádu* je rovnice tvaru:

$$a \quad \triangle_n^1 + b \quad \triangle_n^0 + c = 0\,,$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$. Řešením takové rovnice opět rozumíme každou posloupnost $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, která vyhovovuje dané rovnici.

Využijeme-li vztahů (a), (b), dostáváme ihned rekurentní podmínku pro posloupnosti, které jsou řešením dané rovnice. Dosazením zjistíme, že pro každé přirozené n musí platit:

$$x_{n+1} + \frac{b-a}{a} \,.\, x_n = -\frac{c}{a}\,.$$

Zvolíme-li nějak hodnotu x_1, pak jsou touto podmínkou jednoznačně určeny další členy posloupnosti. Rovnice má proto určitě nekonečně mnoho řešení. Zvláštní situace ovšem nastane v případě, že $c = 0$. Označíme-li pro jednoduchost výraz $\frac{b-a}{a}$ písmenem q, potom pro každé přirozené n musí platit:

$$x_{n+1} = (-q)\ x_n$$

Pro případ $c = 0$ tedy dostáváme jako řešení právě všechny geometrické posloupnosti s koeficientem $(-q)$. Tyto posloupnosti mají jednu zajímavou vlastnost — libovolnou z nich lze vyjádřit jako násobek vhodného reálného čísla a jedné vybrané posloupnosti. Platí totiž: Jsou-li $\left\{ r_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{ s_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti s týmž kvocientem $(-q)$, potom v případě, že $r_1 \neq 0$, je:

$$s_n = s_1\ (-q)^{n-1} = \frac{s_1}{r_1}\ r_1\ (-q)^{n-1} = \frac{s_1}{r_1} \cdot r_n$$

pro libovolné n přirozené. Přesto, že řešení i v tomto případě je nekonečně mnoho, podaří se je zapsat jako násobek libovolného reálného čísla t a jediné posloupnosti; například pomocí posloupnosti $\left\{(-q)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Libovolné řešení bude tedy v případě, kdy $c = 0$, tvaru:

$\left\{t\ (-q)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, kde $t \in \mathbf{R}$.

Tato skutečnost však zároveň umožňuje popsat všechna řešení i pro případ, kdy $c \neq 0$. Jsou-li totiž $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{ y_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ dvě různá řešení lineární diferenční rovnice 1. řádu, potom posloupnost $\left\{ x_n - y_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ vzniklá rozdílem obou, je řešení obdobné rovnice, kde však je pravá strana rovna nule. Odtud již vyplývá, že libovolné řešení původní rovnice musí mít tvar

$$y_n = x_n + t\ (-q)^{n-1}, \qquad t \in \mathbf{R} \text{ libovolné},$$

kde n je libovolné přirozené číslo a posloupnost $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaké „dílčí" řešení dané rovnice. Je však snadné ihned ověřit, že to není jen podmínka nutná, ale je i postačující. Proto libovolné řešení lze získat sečtením jednoho dílčího řešení a násobku libovolným reálným číslem vybrané jediné geometrické posloupnosti.

3. *Lineární diferenční rovnice druhého řádu* nazýváme rovnici tvaru

$$a \cdot \triangle_n^2 + b\ \triangle_n^1 + c \cdot \triangle_n^0 + d = 0,$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla, $a \neq 0$. Řešením takové rovnice opět rozumíme každou posloupnost, která danou rovnici splňuje.

Použijeme-li opět vztahy (a), (b), (c), zjistíme brzy, že každé řešení musí splňovat rekurentní podmínku:

Pro každé n přirozené

$$a \,.\, (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) + b \,.\, (x_{n+1} - x_n) + c \,.\, x_n + d = 0 \,.$$

Tuto podmínku lze upravit do tvaru

$$x_{n+2} + \frac{b - 2a}{a} \,.\, x_{n+1} + \frac{c - b + a}{a} \,.\, x_n = -\frac{d}{a} \,.$$

Opět můžeme ihned vidět, že pro libovolnou volbu čísel x_1, x_2 rekurentní podmínka jednoznačně určuje další členy posloupnosti. Proto existuje nekonečně mnoho řešení této rovnice. Zvláštní postavení má opět případ, kdy $d = 0$. Jsou-li totiž opět dány dvě posloupnosti, které jsou řešením dané rovnice, potom posloupnost $\left\{ x_n - y_n \right\}_{n=1}^{\infty}$, která vznikne jejich rozdílem, musí být řešením právě té rovnice, která má na pravé straně nulu. Kdyby se nám podařilo popsat řešení rovnice pro případ $d = 0$, uměli bychom opět popsat všechna řešení původní rovnice. Označíme-li totiž $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{ y_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ dvě libovolné posloupnosti, které jsou řešením rovnice s pravou stranou d, $\left\{ z_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost, která je řešením obdobné rovnice pro $d = 0$, potom platí:

$$x_n = y_n + z_n, \quad \text{pro každé } n \text{ přirozené.}$$

Opět lze ukázat, že tato podmínka je nutná a zároveň postačující. Proto by bylo užitečné umět popsat všechna řešení v tomto speciálním případě. Aby však byl zápis jednodušší, dohodněme se na tom, že

$$r = \frac{b - 2a}{a} \qquad s = \frac{c - b + a}{a} \,.$$

Potom nás totiž vlastně zajímají jen řešení, která vyhovují podmínce:

$$x_{n+2} + r \,.\, x_{n+1} + s \,.\, x_n = 0$$

Této rekurentní podmínce samozřejmě také vyhovuje nekonečně mnoho posloupností. Lze však ukázat, že k popisu všech řešení stačí v tomto případě nalézt pouze dvě vhodné posloupnosti a ostatní řešení již lze z těchto „základních“ řešení sestavit. Podrobněji se k této otázce vrátíme v jiném článku.

Na závěr snad můžeme konstatovat, že obdobně lze postupovat i u diferenčních rovnic vyšších řádů. Vždy je řešení nekonečně mnoho, avšak lze je popsat pomocí konečného počtu posloupností. Při tomto popisu má vždy zvláštní úlohu případ, kdy absolutní člen v rovnici je roven nule. Pomocí vztahů pro diference lze potom každou takovou „zvláštní“ rovnici převést do tvaru:

$$x_{n+k} + a_1 \,.\, x_{n+k-1} + \ldots + a_{k-1} \,.\, x_{n+1} + a_k \,.\, x_n = 0 \,.$$

A to je ostatně i důvod, proč otázka řešení lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty je bezprostředně spojována s úlohou najít všechny posloupnosti, které vyhovují výše uvedené rekurentní podmínce.

To, co je na tomto problému zajímavé, spočívá v tom, že jeho řešení souvisí se řešením algebraických rovnic, se zobecněním pojmu vektor i vlastnostmi komplexních čísel. Řada těchto úvah bude dobře patrná právě při popisu řešení lineární diferenční rovnice 2. řádu a přitom bude možno výsledky zobecnit i na další diferenční rovnice vyšších řádů.

Literatura:

[1] „O řešení jednodušších diferenčních rovnic“, Bican, L., Trch, M. RMF ročník 64, č. 2, str. 45—47.

[2] „O posloupnostech definovaných rekurentně“, Trch, M. RMF, ročník 63, č. 9, str. 389—391

FYZIKA

Malé zamyšlení nad velkými náboji

Ing. EVA VESELÁ, CSc., katedra fyziky strojní fakulty, ČVUT, Praha

Co je to náboj?

Mezi otázky, na které nemůžeme dát naprosto seriózní odpověď, patří i tato. Je jistě zvláštní, že právě ty veličiny, které patří k těm nejzákladnějším, jako například hmota, energie, pole, elektrický náboj, je možno jen velice obtížně definovat. Charakterizujeme tedy pouze jejich chování nebo popisujeme jejich působení.

O elektrických nábojích toho již víme dost. Platí pro ně jeden z důležitých zákonů zachování — *zákon zachování náboje*, podle kterého je náboj nevytvořitelný a nezničitelný. Bylo též prokázáno, že náboj je při všech transformacích invariantní (neměnný). Náboj není možno žádným způsobem z jakékoli látky nebo částice osamostatnit, a tak není možno vyšetřovat vlastnosti samotného izolovaného náboje. Rigorózní fyzikální terminologie by tedy neměla užívat výraz elektrický náboj, ale elektricky nabité těleso nebo elektricky nabitá částice. Lidská lenost však dává přednost kratšímu, i když ne zcela přesnému názvu s tím, že jsme si ovšem vědomi všech těchto náležitostí.

To, že se některé látky chovají jako elektricky nenabité (neutrální) a jindy zase jako elektricky nabité, tedy nesoucí určitý elektrický náboj, věděli lidé už velice dávno, i když nebyli schopni svá pozorování takto fyzikálně formulovat. Vždyť již samotný název — *elektřina* — pochází už ze starého Řecka, kde byly velice oblíbené hřebínky z jantaru, které při česání vlasů způsobovaly jejich praskání a ve tmě světélkování (jantar se řecky řekne elektron).

První pokusy s elektrickými náboji v dnešním slova smyslu byly prováděny již v 17. století. Tehdy bylo také zjištěno, že neexistuje pouze jediný druh elektrického náboje, ale že musíme rozlišovat druhy dva s odlišnými vlastnostmi. Pokusy tohoto druhu jistě znáte z hodin fyziky, kdy před vašimi zraky třel učitel ebonitovou tyč liščím ohonem a skleněnou tyč kůží. Náboj, na který se nabila ebonitová tyč. byl označen jako *záporný*, a náboj, který měla tyč skleněná, byl nazván *kladným*. Že náboje na sebe vzájemně silově působí, si pamatujete jistě též — tělesa mající souhlasné náboje (ať už kladné nebo záporné) se odpuzovala, zatímco opačně nabitá tělesa se přitahovala.

Kvantitativní popis silového působení dvou bodových nábojů, které jsou vůči sobě v klidu, podal v roce 1878 francouzský fyzik *Charles Augustus Coulomb*. Jeho elektrostatický zákon vyjadřuje matematicky stejnou závislost jako slavný Newtonův gravitační zákon (přitom ten byl formulován o celých sto let dříve!). Elektrostatická síla F_{es} působící mezi dvěma bodovými náboji Q, Q' ve vakuu klesá s druhou mocninou jejich vzdálenosti r, leží v jejich spojnici a je ve tvaru

$$F_{es} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q\,Q'}{r^2} \qquad (1)$$

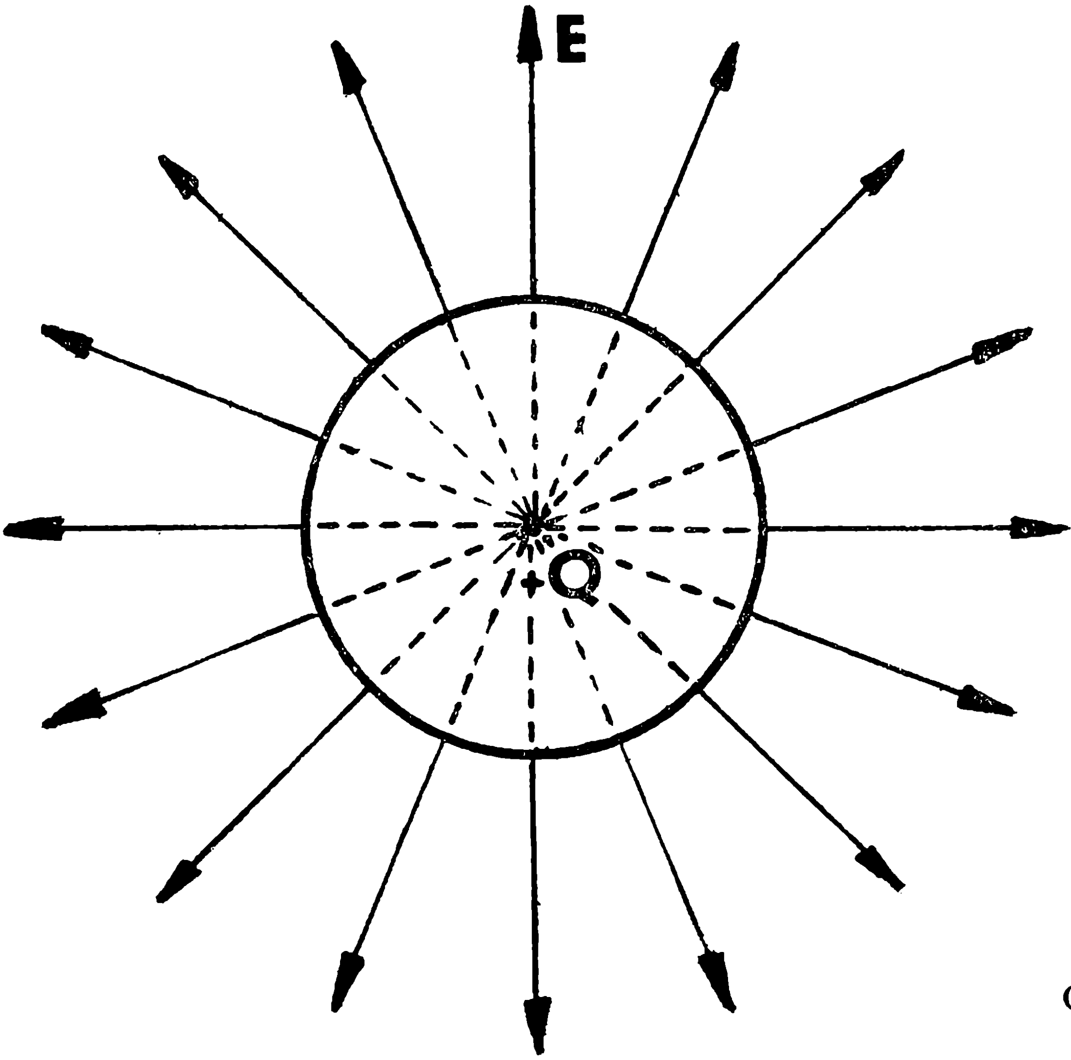
Zde je $\varepsilon_0 = 8{,}854 \,.\, 10^{-12}\ \mathrm{F}\,.\,\mathrm{m}^{-1}$ konstanta nazvaná *permitivita vakua*.
Zatímco při gravitačním působení dvou hmotností je silový účinek vždy přitažlivý, smysl působení dvou bodových nábojů závisí na jejich druhu.

Jednotkou elektrického náboje v soustavě SI je jeden *coulomb*. Tato jednotka je odvozena ze základních jednotek proudu a času, coulomb = ampér krát sekunda.

Zamysleme se však nyní trochu hlouběji nad fyzikální abstrakcí užívanou v Coulombově zákoně, a to nad bodovým nábojem. Velice často bývá uváděna v souvislosti s tímto zákonem poznámka, týkající se velikosti Coulombovy síly a jednotky elektrického náboje, například v této podobě:

„*Dva bodové náboje o velikosti 1 coulombu by se ve vzdálenosti 1 kilometru ve vakuu přitahovaly silou* 8987 *newtonů.*“
A my teď uvážíme, co znamená to slůvko „by“, tedy jakým způsobem a jestli vůbec by se nám podařilo realizovat bodový náboj o velikosti 1 coulombu.

Na první pohled nám zřejmě připadá vzdálenost 1 kilometru natolik značná, abychom mohli intuitivně předpokládat, že vzhledem k ní bude možno zanedbat rozměry těles, která jsou nabita nábojem 1 coulombu.



Obr. 1

A ty bychom pak mohli s dostatečnou přesností považovat za bodové náboje.

Jakým způsobem je vlastně možno bodový náboj realizovat? Naše „náhražka" musí mít stejné vlastnosti, které má bodový náboj. A každý takový náboj vyvolává ve svém okolí elektrostatické pole. To charakterizujeme intenzitou E, kterou definujeme jako sílu F_{es}, kterou toto pole působí na další bodový náboj Q' umístěný ve vzdálenosti r dělenou nábojem Q', tedy

$$E = \frac{F_{es}}{Q'}$$

a po dosazení výrazu (1) dostáváme

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \tag{2}$$

Geometrickou interpretací silového pole, kterou zavedl anglický fyzik *Michael Faraday*, jsou siločáry. To jsou čáry, které mají ve všech bodech směr intenzity pole.

Pokusy ukázaly, že uvnitř nabitého tělesa je intenzita elektrického pole vždy nulová, sídlem elektrického náboje je tedy povrch vodiče.

Na obr. 1 jsou vyznačeny siločáry charakterizující silové pole koule o poloměru r nabité nábojem $+Q$. Čárkovaně jsou zde vyznačeny i siločáry popisující pole bodového náboje Q umístěného ve středu koule. Pro náboje opačného znaménka bychom dostali stejný obrázek až na to, že by se změnil smysl siločar — směřovaly by do středu kulové plochy.

Z uvedeného obrázku je zřejmé, že siločáry popisující elektrické pole bodového náboje Q jsou naprosto shodné se siločárami koule (ať už plné nebo duté) nabité týmž nábojem. Koule může mít zcela libovolný poloměr, siločáry však pochopitelně vycházejí až od povrchu kulové plochy, a tak i naše náhrada bodového náboje platí až za povrchem koule.

Realizovat bodový náboj je tedy docela snadné. Stačí vzít plnou nebo dutou kouli a nabít ji.

Jak to ale bude s velikostí náboje?

Naprosto průkazně dokázal nespojitost elektrického náboje *Robert Andrews Millikan*. Velikost náboje je kvantována a je dána celočíselným násobkem tzv. elementárního náboje o velikosti $e = 1{,}602 \,.\, 10^{-19}$ coulombů. Částice, zvané *protony*, mají kladný náboj $+e$ a hmotnost $1{,}7 \,.\, 10^{-27}$ kg. *Elektrony* mají náboj $-e$ a hmotnost $9{,}1 \,.\, 10^{-31}$ kg.

Vše, co nás obklopuje, je složeno z atomů, které jsou za normálních podmínek elektricky neutrální, i když obsahují jak kladně tak i záporně nabité částice. Množství kladného i záporného náboje jsou však vždy přesně stejná, a tak se jejich působení navenek neprojeví. Přibližná velikost těchto nábojů je u všech látek stejná a můžeme ji stanovit na základě této úvahy:

V jádrech atomů mnoha stabilních izotopů je přibližně stejný počet protonů a neutronů. Hmotnost elektronu je asi 2000krát menší než hmotnost protonu nebo neutronu, a tak ji nemusíme zde uvažovat. Za těchto zjednodušujících předpokladů bude hmotnost protonů v atomu rovna polovině jeho atomové hmotnosti. Pak tedy připadá na 2 atomové jednotky hmotnosti[1]) v průměru jeden elementární náboj.

Podíl základní jednotky hmotnosti soustavy SI a atomové hmotnostní jednotky se nazývá Avogadrovo číslo N a jeho velikost je $N = {}^1/u \doteq$ $\doteq 6{,}02 \,.\, 10^{26}$.

V jednom jediném kilogramu jakékoli nenabité látky bude tedy obsaženo zhruba $N/2$ kladných nábojů a $N/2$ nábojů záporných. A to je právě

$$\frac{1}{2} \,.\, 6{,}02 \,.\, 10^{26} \,.\, 1{,}602 \quad 10^{-19} = 4{,}82 \,.\, 10^{7} \text{ coulombu.}$$

Tak obsahuje každý kilogram látky více než 48 miliónů coulombů kladného i záporného náboje! Pohled na toto číslo nás buď ohromí svou veli-

---

[1]) Atomová jednotka hmotnosti u je definována jako $^1/_{12}$ hmotnosti atomu izotopu uhlíku $^{12}_{6}C$ a její velikost v soustavě SI je $u \doteq 1{,}66 \,.\, 10^{-27}$ kg.

kostí nebo v nás naopak vyvolá dojem, že jednotka elektrického náboje coulomb je nevhodně malá.

Vraťme se však zpět k realizaci bodového náboje nabitou kulovou plochou. Pro zajímavost nejprve uvažme, jak veliký náboj by se „vešel" na ocelovou kuličku o poloměru $r = 1$ cm. Povrch takové kuličky určíme snadno jako $S_k = 4\pi r^2 = 1{,}26 \cdot 10^{-3}$ m^2. Průměr atomů je řádově 10^{-10} metru, a tak ploška, kterou atom zaujímá v průřezu, je asi $S_a = \pi r_a^2 = = \pi(5 \cdot 10^{-11})^2 \doteq 7 \cdot 8 \cdot 10^{-21}$ m^2. Na povrch naší kuličky by se tak podle našich značně zjednodušených úvah „vešlo" asi

$$n_k \doteq \frac{1{,}26 \cdot 10^{-3}}{7{,}8 \cdot 10^{-21}} \doteq 1{,}6 \quad 10^{17}$$

atomů. A v jádře každého takového atomu železa je 26 protonů. Pouhým násobením dostáváme velikost kladného náboje obsaženého v atomech na povrchu kuličky jako

$$26 \cdot n_k \cdot e = 26 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{17} \quad 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 0{,}67 \text{ coulombu.}$$

Tak i za těchto předpokladů nemůže být naše kulička úspěšnou náhradou bodového náboje o velikosti 1 coulombu, a musili bychom ji ještě zvětšit. A to jsme ještě neuvažovali další důležitý jev, který zde nastává.

Představme si, že nabíjíme izolovanou kuličku záporným nábojem. Na jejím povrchu se začne hromadit čím dál tím víc elektronů a ty se budou snažit přecházet do prostředí, které je obklopuje, například do vzduchu. Ten má však jistou velikost tzv. elektrické pevnosti, která je dána velikostí intenzity pole, při které nastává elektrický průraz. Tento úkaz znáte — například při zvýšené vlhkosti vzduchu je vidět jiskření nebo modrofialové světlo kolem drátů vysokého napětí.

Průrazná velikost intenzity elektrického pole má pro suchý vzduch hodnotu $E_{max} = 5000$ V . cm^{-1} a se vzrůstající vlhkostí vzduchu se tato hodnota ještě zmenšuje.

Jak by to bylo s naším bodovým nábojem?

Dříve uvažovaná kulička s centimetrovým poloměrem byla příliš malá. Zkusíme si teď zjistit, jestli by nám jako bodový náboj „stačila" koule o poloměru 1 metru. Její objem je již 4,2 tisíc litrů. Na povrchu takové koule by podle našich předchozích úvah mohl být náboj asi 6700 coulombů, takže z tohoto hlediska by bohatě vyhovovala. Vypočítáme si velikost intenzity elektrického pole na povrchu této koule, jestliže by byla nabitá nábojem 1 coulombu. Z rovnice (2) dostáváme

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8{,}87 \cdot 10^{-12}} \quad \frac{1}{1^2} \doteq 9 \quad 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1},$$

tedy asi $9 . 10^7$ V cm^{-1}.

Intenzita elektrického pole na povrchu koule by byla více než stomilionkrát větší, než je maximální přípustná hodnota.

Z předcházející rovnice si můžeme vypočítat nejmenší poloměr koule, kterou bychom mohli teoreticky v suchém vzduchu nabít nábojem 1 coulombu:

$$r_{\min} \doteq \sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \; E_{\max}}} \doteq \sqrt{\frac{1}{4\pi \; 8{,}87 \; 10^{-12} \; 5 \; 10^{5}}} \doteq 134 \text{ metrů}.$$

Jenže tak velikou kouli bychom asi vůbec nedokázali vyrobit, natož unést, a už vůbec bychom ji nemohli co do rozměrů považovat za „bodový" objekt.

Musíme se tedy smířit s tím, že realizace bodového náboje o velikosti 1 coulombu není proveditelná. Tento náboj je přesto přesevšechno, co jsme si řekli o obrovitých množstvích náboje obsaženého v každé látce, příliš veliký.

Pro zajímavost si uvedeme ještě jeden případ. Americký fyzik *Robert Andrews Millikan* prokázal existenci elementárního náboje elektronu metodou založenou na sledování kapiček oleje v elektrostatickém poli. Průměr olejových kapiček je řádu 10^{-7} metru. Z hlediska elektrické pevnosti si nyní vypočteme, kolik elementárních nábojů mohl Millikan na svých kapičkách maximálně zjistit.

Největší možný náboj, který mohou kapičky mít, určíme opět z rovnice (2):

$$Q_{\max} = 4 \; \pi\varepsilon_0 \; E_{\max} \; r^2$$

Kapička, jejíž poloměr je právě 10^{-7} metru, může být nabita nanejvýše na náboj

$$Q_{\max} = 4 \, . \, \pi \; 8{,}87 \; 10^{-12} \; 5 \; 10^{5} \; 10^{-7} = 5{,}6 \; 10^{-19} \text{ coulombů}.$$

S přihlédnutím k tomu, že velikost náboje musí být vždy celočíselným násobkem elementárního náboje, vidíme, že taková kulička může nést nanejvýše náboj rovný trojnásobku elementárního náboje. Pro poněkud větší kuličku, například o poloměru 3 10^{7} metru, by se náboj zvětšil 3^2 krát, tedy jeho maximální velikost by mohla být 27 *e*.

Přitom například kulička o poloměru 10^{-7} metru z terpentýnového oleje o hustotě 870 kg . m^{-3} má hmotnost 3,64 . 10^{-18} kg a obsahuje asi 1,75 10^{-19} coulombů kladného i záporného náboje, tedy asi 300 milionkrát větší náboj než ten, na který může být maximálně nabita.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Termodynamické věty a možnosti usnadnění lidské práce

RNDr. DANUŠE KUNOVJÁNKOVÁ, CSc., pedagogická fakulta UK, Praha

Člověk se od jiných živočichů liší tím, že cílevědomě vyrábí užitné hodnoty. Tato činnost se nazývá práce a je stále doprovázena snahou o její usnadnění.

Lidé už velmi dávno využívali mechanické energie vodních toků i vzdušných proudů a poznali zákon zachování mechanické energie. V minulém století zjistili, že tento zákon platí i pro přeměny mechanické energie na tepelnou. Anglický fyzik *J. P. Joule* (1818—1889) vykonal roku 1840 řadu pokusů, při nichž k vytvoření určitého množství tepla potřeboval vždy stejné množství mechanické práce. O dva roky později vypočítal německý fyzik a lékař *R. J. Mayer* (1814—1878) mechanický ekvivalent tepla, který udává množství mechanické energie odpovídající tehdejší jednotce tepla — kalorii. Jeho údaj 4189 J/kcal je dnešními přesnějšími měřeními opraven na 4186,8 J/kcal. Další německý fyzik *H. Helmholtz* (1821—1894) pak vyslovil zákon zachování energie pro izolovanou soustavu, který vztahoval i na děje tepelné. Později se poznalo, že v uzavřeném systému je součet všech druhů energie konstantní. Energie se tedy nemůže ani vytvořit ani zmizet, může se jen přeměňovat z jedné formy v jinou. Tento závěr byl nazván první větou termodynamickou a dal definitivní odpověď na otázku, zda existuje stroj, který by konal práci bez přívodu energie — perpetuum mobile prvního druhu. Podle první termodynamické věty může každý stroj, který je izolovanou soustavou, konat práci jen na účet energie v něm obsažené; po vyčerpání této energie se stroj zastaví. U tepelných strojů je to energie tepelná.

Tepelná energie je dána energií neuspořádaného pohybu molekul, jak zjistil objevitel molekulárně kinetické teorie tepla *M. V Lomonosov* (1711—1765). Tepelné stroje jsou konstruovány tak, aby mohly přeměnit pohybovou energii molekul tzv. pracovní látky v mechanický pohyb nějakého tělesa. Pracovní látkou je obvykle plyn o vysoké teplotě, tedy s velkou tepelnou energií, spočívající ve velké rychlosti molekul a projevující se vysokým tlakem plynu. Plyn působí tlakovou silou na píst či rotor stroje (parní stroj, parní turbína, spalovací motory), případně svým pohybem vyvolá reaktivní sílu, pohybující celým strojem (reaktivní motory).

Francouzský fyzik *N. L. S. Carnot* (1796—1832) se zabýval možností sestavit stroj, v němž by probíhal kruhový děj takto: plyn vysoké teploty se izotermicky a pak adiabaticky rozpíná, přičemž se jeho teplota sníží;

do původního stavu je vrácen izotermickým a adiabatickým stlačením. Carnot vypočítal, že tepelná účinnost udávající, kolik tepla se změní v mechanickou práci, je přímo úměrná rozdílu největší a nejmenší teploty plynu, a to za předpokladu, že jde o ideální plyn s vratnými ději (mohou probíhat v obou směrech). Nevratný stroj má účinnost menší než vratný, poněvadž každým nevratným dějem se ztrácí možnost získat z tepla rovnocennou práci.

Děje ve skutečných plynech jsou vždy nevratné a ve známých tepelných motorech neprobíhají podle Carnotova cyklu; Carnotovy závěry však platí i pro ně, což využíváme:

— tepelná účinnost výbušných motorů, pracujících s vyššími teplotami, je větší než účinnost parních strojů;
— parní stroje užívají co nejvyšší teploty páry tak, že ji po průchodu strojem nevypouštějí do vzduchu, nýbrž do kondenzátoru, aby co největší množství tepla obsaženého v páře přeměnily v mechanickou práci.

V Carnotově kruhovém ději se v mechanickou práci změní pouze část získaného tepla; část tepla je odevzdávána při izotermickém stlačení. Výhodnější by jistě byl stroj, který by veškeré nabrané teplo měnil v mechanickou práci. Mechanická energie by se získávala odebíráním tepla nějaké látce. Takový tepelný stroj by neporušoval zákon zachování energie a současně by sloužil jako stroj chladicí. Kdyby existoval, bylo by možno například z tepelné energie vody v mořích získávat mechanickou práci a zároveň jejím ochlazováním dostávat led. Takový stroj se nazývá perpetuum mobile druhého druhu a četné pokusy ukázaly nemožnost jeho sestrojení. Tento poznatek je jádrem druhé věty termodynamické, kterou *Planck* (1858—1947) vyslovil takto: Není možno sestrojit periodický stroj, jenž by nic jiného nezpůsoboval, než ochlazoval tepelnou lázeň a konal rovnocennou práci. *Clausiova* (1822—1888) formulace zní: Teplo nemůže samo přejít z tělesa studenějšího na teplejší. *Thomson* (lord *Kelvin*, 1824—1907) říká: Je nemožné získat ze soustavy neživých hmot kruhovým dějem práci jen tím způsobem, že by se jedna z hmot ochlazovala pod teplotu nižší, než je teplota nejstudenějšího místa v okolí.

Podle druhé termodynamické věty platí, že pouze část tepla, které vznikne z jiné energie, se může změnit zpět v tuto formu energie. Při opakování vzájemných přeměn by se tedy zvětšovala tepelná energie na úkor jiného druhu energie. Proto byla druhá věta termodynamická chybně vykládána tak, že přeměny různých druhů energie v teplo postupně povedou k jediné formě energie — tepelné, což bylo nazváno tepelnou smrtí vesmíru. Avšak část tepla, která se může změnit v jiný druh energie, je vždy nenulová; proto závěr o tepelné smrti vesmíru je nesprávný.

První a druhá termodynamická věta vyilučují sestrojení perpetua mobile prvního i druhého druhu, avšak možnost usnadnění lidské práce. zaručují. Dosud nejužívanějším pomocníkem člověka jsou tepelné stroje. Prvním z nich byl parní stroj; vzhledem ke ztrátám při výměně tepla mezi párou a částmi stroje je jeho účinnost maximálně asi 20 %. Ani účinnost parní turbíny není o mnoho větší. Ve spalovacích motorech bylo dosaženo vyšší účinnosti i díky tomu, že palivo je přímo pracovní látkou, což odstranilo ztráty, způsobené vedením plynu do pracovního válce u parního stroje. Ještě vyšší účinnost mají reaktivní motory. Odhad světových zásob tradičních paliv (uhlí, ropa, přírodní plyn) alarmuje lidstvo ke zvyšování účinnosti tepelných strojů. Perspektivy usnadnění lidské práce jsou však spojeny především s hledáním nových druhů paliv a se zjišťováním možností přeměnit na mechanickou energii jinou energii než tepelnou.

Jako nové palivo je dnes propagována sluneční energie, jejíž zásoba je přibližně stokrát větší než zásoba uhlí a asi tisíckrát větší než u ropy. Nejperspektivnější je druhá cesta, na níž jsme zatím v počátku. Dovedeme sice využít například jadernou energii, ale zatím nejde o přeměnu této energie přímo na energii mechanickou; jaderná energie se mění na tepelnou, která je dále využívána jako v případě, že by byla získána pomocí tradičních paliv. Jde tedy zatím jen o variantu využití nových druhů paliv pro tepelné stroje. Je však třeba zaměřit se na hledání jiného způsobu využití jaderné energie, eventuálně dalších druhů energie, a to je v současné době jedním z globálních problémů lidstva.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Prabulharský kalendář

MILOSLAV ZIMA, Praha

„Kalendáře, které jsou původním dílem příslušného národa, nemají datován svůj počátek — ten se ztrácí v dávnověku. Není například známo, kdy se začal počítat čas podle kalendáře staroegyptského nebo babylónského. Podobně je tomu i s kalendářem bulharským; čínské prameny se o něm zmiňují roku 2824 před naším letopočtem, když už byl bulharský kalendář dokonalý. Z toho vyplývá, že k uvedené dokonalosti se musil dopracovávat po několik tisíciletí před tímto datem."

„Počáteční datum je známo jen u kalendářů ‚dovezených, importovaných‘, tzn. převzatých.“ (*J. Vlčev*, s. 121)

Tak např. *Julius Caesar* dal v Egyptě pořídit kopii kasitského kalendáře, ustavil komisi pro jeho úpravu pro římské potřeby a roku 46 před n. l. jej v Římě zavedl. „Dovezeným“ je i kalendář Číňanů, kteří jej převzali od Bolgarů (= Prabulharů) v březnu roku 2637 před n. l. Rovněž Japonci převzali tento kalendář, zřejmě čínským prostřednictvím, r. 660 před n. l.

Prabulharský kalendář patří k tzv. slunečním a ze známých je nejdokonalejší: Babylonský měl 360 dní, staroegyptský 365 dní, juliánský 365,25 d., gregoriánský (byl zaveden r. 1582 n. l.) 365, 2425 d., kdežto prabulharský měl 365,2424 dne, takže je stejně dlouhý jako dnešní vědecký rok tropický.

Prabulharský kalendář je dodnes znám bulharskému lidu. „Edinažden“ (zimní slunovrat — 22. prosince našeho kalendáře) je bulharský Nový rok, a o Měsíci lid říká, že „Luna slouží měsícům, ale neřídí je“. Kalendářní rok je líčen tímto obrazem: „Bulharský ořešák má 12 větví, na každé větvi jsou 4 hnízda, všech zelených listů je 364 a jeden list bůh neobarvil.“ To je nulový den obyčejného roku a klade se před první kalendářní den, tj. před neděli 1. 1. bulharského roku. Edinažden se v prabulharštině jmenoval ENI a v dnešních bulharských nářečích má i jiné podoby, např. Ednažden, Edinak, Eninak apod. Přestupný rok má druhý nulový den, a proto se jmenuje podobně, totiž Eňovden, a klade se v den letního slunovratu mezi 6. a 7. měsíc, tzn. 22. června našeho letopočtu. Nulové dny nenarušují sled dnů v týdnu, neboť se k měsícům přidávají, ale neprodlužují je jako náš únor.

Schéma prabulharského kalendáře je jednoduché: nulový den, a pak následují měsíce s tímto počtem dní — 31, 30, 30, 31, 30, 30 (v přestupný rok druhý nulový den) a znova 31, 30, 30, 31, 30, 30. Protože se délka jednoho oběhu Země kolem Slunce nedá vyjádřit počtem celých dní, řešili to již i Prabulhaři přestupnými roky, které objevili porovnáváním oběhu Jupitera (asi 12 let zemských) s délkou oběhu Země (1 rok). Přitom zjistili nepřesnosti. Z jitra za zimního slunovratu (nultý den = 22. XII. našeho kalendáře) se krylo postavení Jupitera s poledníkovou hvězdou pozorovatele, ale za 6 měsíců se na její místo dostala jiná hvězda a ta se stala mezníkem druhého pololetí. Jupiter končí svůj oběh kol Slunce o 50 dní dříve, než Země oběhne 12× Slunce. Při přepočtu to dává 12krát 365 + 3 dny. Rovnoměrnost kalendáře vyžadovala, aby se třídenní přebytek rozložil v 12-ročním cyklu, a tak vznikly přestupné roky.

Pateronásobek 12-ročního cyklu dal 60 let, čili tzv. „hvězdný den“ (kdy se přestupný den vynechával), který se stal měrnou jednotkou při dalších násobcích: v „hvězdném týdnu“ se vynechávaly 3 přestupné dny, v „hvězdném měsíci“ 13 dní, v „hvězdném roce“ se vypouštělo 157 přestupných dní. Tak se dospělo k průměrné délce prabulharského roku, která činí 365,2422 dnů.

Roky v 12-letém cyklu měly svá jména, a protože byla totožná s jmény měsíců, přešlo se z úsporných důvodů k označování měsíců pořadovými čísly (my si je označíme čísly 01 až 12). V „Knížecí knize prabulharských panovníků" (Imennik na prvoblgarskite chanove) se užívá několika variant jmen roků, jež v českém znění mají tuto řadu pro označování roků, po případě měsíců: 01 Prase, 02 Myš, 03 Vůl, (rok 1985 byl rokem Vola), 04 Pardál, 05 Zajíc, 06 Drak, 07 Had, 08 Kůň, 09 Opice, 10 Beran, 11 Kohout, 12 Pes. Pro nás je zajímavé označení 1. měsíce — Prase — které se shoduje ještě dnes devíti (a připočteme-li nultý den, tak desíti) dny s naším prosincem, který se do 19. století — jak dokazují starší kalendáře — nazýval prasinec; v tu dobu bývaly zabíjačky, jak je krásně vypodobnil též *J. Horejc* v kalendáriu na mříži Zlaté brány u bočního vchodu do Svatovítského chrámu.

Knížecí kniha měla své osudy a nebyla napsána naráz. Začíná dnem „dilom tvirem", tj. 31. VIII. 129 v roce Hada, její prvá část byla dopsána za chána Ispericha, jenž nastoupil vládu v roce Draka, tj. 22. XII. 643, převedl Prabulhary ze Zadunají na Balkán a je znám u nás pod jménem Asparuch, — a končí nástupem chána Kardama 5. V. 777, tj. opět v roce Hada (777 — 129 = 648, což je 54 dvanáctiročních cyklů — MZ). Její staroslověnský překlad, pořizovaný kdysi za cara Symeona (804—927), byl r. 1866 objeven ruským učencem Andrejem Popovem v biblích v moskevské synodální knihovně.

Nový rovnoměrný kalendář by měl začínat astronomicky pevným opěrným bodem, jímž je den zimního slunovratu. Tím se uvedou v soulad počátky měsíců i začátky znamení zvěrokruhu. Pokud by se opět vyskytly námitky proti reformování dosavadního kalendáře ze strany církví, lze je řešit tak, že náboženské kalendáře mohou koexistovat vedle civilních kalendářů, a budou-li místně společensky důležité, jistě si zajistí výjimky pro své svátky; nový rovnoměrný kalendář i jim usnadní všechny přepočty a všechny dosavadní kalendáře se pak stanou světově srozumitelnější.

Zavést je možno nový kalendář kdykoliv, jakmile bude spolehlivě vypracován. Není třeba čekat na vhodný den v týdnu, ani na „kulatý" rok, vždyť papež Řehoř XIII. na to také nedbal, když 4. X. 1582 postrčil zreformovaný kalendář o jedenáct dní kupředu.

Literatura:

Jordan Vlčev: Kalendar, narod, država, in Trakija, č. 1, Plovdiv 1980, s. 121—137

Magické čtverce

Magické čtverce vzbuzovaly kdysi velký obdiv. První magický čtverec, o němž máme záznam, byl sestaven v Číně. Jeho popis je v Knize záměn — I-Ching, sepsané asi 200 let před n. l. Je to magický čtverec 3 × 3 pole. K jeho sestrojení bylo použito čísel 1 až 9.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 1

Vidíme, že při správném rozmístění číslic je součet v každé řadě, sloupci i úhlopříčce vždy stejný.

Zkuste tedy i vy sestrojit magický čtverec, jehož součty budou tvořit letopočet 1985 nebo 1986.

a) Utvořte posloupnost 25 za sebou jdoucích čísel a sestavte z nich magický čtverec 5 × 5, v němž budou součty všemi směry (vodorovně, svisle i na obou úhlopříčkách) tvořit letopočet 1985.

b) Řešte stejnou úlohu s tím, že bude magický i vnitřní čtverec 3 × 3.

c) Utvořte magický čtverec 6 × 6 z 36 za sebou jdoucích sudých čísel tak, aby součet všemi směry tvořil letopočet 1986 a zároveň byl magický i vnitřní čtverec 4 × 4.

Jarmila Pěnčíková

(Řešení naleznete na str. 246.)

Poštovní zásilky a dopisy je třeba redakci Rozhledů zasílat výhradně na adresu:

Redakce časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha I-Nové Město

DEZINTEGRACE (slož. z lat. *dis-* — zde s významem „opak, negace“ + *integrace*, v. t.) — rozpad, rozklad; DEZINTEGRAČNÍ — týkající se dezintegrace, rozpadu, rozkladu; DEZINTEGRAČNÍ teorie — názor, že atomy radioaktivních látek se postupně rozpadají a mění v mnoho dalších atomů s menší nebo stejnou atomovou hmotností V. t. fotodezintegrace

DI-[1] (z řec. *di-* = dvoj-, dvou-) — počáteční část složených slov mající význam „dvojice, dvojitý, dvoj-“; následující část složeného slova označuje věc, která je zdvojena. V t. dichroismus, dioda, dipól, divariantní

DI-[2] — v. DIA-

DI-[3] — v. DIS-

DIA-, DI-[2] (z řec. několikavýznamové předložky a předpony *dia-*; tvar *di-* před samohláskou) — předpona s významem: 1. „skrz, na druhou stranu“; v. t. diaprojekce, diaskopický, dioptrie, epidiaskop; 2. „skrz, prostřednictvím“; v. t. diagram, diatermie, diatonický; 3. „důkladně, zcela, roz-“; např. DIAGNÓZA (řec. *gnósis* = poznání) — „rozpoznání“; 4. „mezi, při, na druhou stranu, z druhé strany“; např. DIALOG (řec. *logos* = slovo, řeč) — rozhovor „mezi dvěma osobami“; v. t. diamagnetický; 5. „od sebe, roz- pro-“; opakem je *syn-*; např. DIACHRONNÍ — SYNCHRONNÍ; v. t. diagnostika (často splývá s významem ad 2.)

DIAGNOSTIKA (slož. z řec. *dia-* — zde s významem „od sebe, roz-“ + *gnósis* = poznání, znalost) — nauka o rozpoznávání; rozpoznávační metoda; DIAGNOSTICKÝ; srov. DIAGNÓZA — rozpoznání, rozbor

DIAGRAM (slož. z řec. *dia-* — zde s významem „skrz, prostřednictvím“ + *grafó* = rýt, psát; v. -gram[1]) — vyjádření pomocí narýsovaného“; nákres; výrazné grafické znázornění

DIAMAGNETICKÝ (slož. z řec. *dia-* — zde s významem „přes, na druhou stranu, z druhé strany“ + magnetický; v. t.) — ve fyzice: DIAMAGNETICKÉ atomy, látky — ty, které se mezi póly elektromagnetu staví svou osou nikoli ve směru siločar, ale kolmo k tomuto směru; podél osy se staví atomy paramagnetické; v. t.

DIAPROJEKCE (slož. z řec. *dia-* — zde s významem „skrz“ + *projekce*; v. t.) — promítání pomocí světla, které prochází promítaným předmětem („skrz průsvitný film“); DIAPROJEKTOR (v. -or) — přístroj na promítání diapozi

DIASKOPICKÝ (slož. z řec. *dia-* — zde s významem „skrz“ + *skopeó* = = hledět, pozorovat; v. -skop) — DIASKOPICKÉ promítání — promítání, je-li promítaný předmět průhledný („světlo prochází skrz“); srov. diaprojekce

DIATERMIE (slož. z řec. *dia-* — zde s významem „skrz, prostřednictvím“ + *thermos* = horký, teplý) — léčení „pomocí tepla, teplem“;

srov. TERMÁLNÍ prameny — horké prameny (zpravidla jsou léčivé); Pozn.: Rozlišuj DIATERMICKÝ (např. přístroj sloužící k diatermii) a DIATERMNÍ (např. těleso) — průteplivé

DIATONICKÝ (slož. z řec. *dia-* — zde s významem „skrz, prostřednictvím" + *tonický*; v. -tonický) — DIATONICKÁ stupnice — složená z celých tónů a půltónů („pomocí tónů")

DIELEKTRIKUM (slož. z lat. předpony *dis-* — zde s významem záporu; v. *dis-* + *elektron* = jantar; v. elektřina + umělá přípona *-ikum*; v. t.) — elektricky nevodivá látka; „neelektrická látka"; název zaveden Faradayem pro izolátor v elektrickém poli; látka, u níž nelze dosáhnout značnějšího pohybu nábojů; DIELEKTRICKÝ — neelektrický

DIFERENCE (z lat. *differentia*; slož. z *dis-* — zde s významem „prostorové rozšíření, roz-" + *fero, ferre* = nosit, nést; — „roznesení daleko od sebe, na opačné strany"; rozdíl, různost, neshoda; srovn. REFEROVAT (lat. *re-* = znovu, zpět) — „znovu přinášet zprávy". DIFERENCIACE — rozlišování, vytváření rozdílů. V t. indiference, interference, referenční. Pozn.: Protože lat. *fero* má ptc. pf. *latus*, je mnoho složených slov zakončených na -lace (v. t.).

DIFRAKCE (slož. z lat. *dis-* — zde s významem „rozluka, roz-" + *frakce*, v. t.) — „rozlomení"; ve fyzice: DIFRAKCE světla — ohyb světla, vlnění

DIFUNDOVAT (z lat. *diffundo, -ere*, ptc. pf. *diffusus-* slož. z *dis-* — zde s významem „prostorové rozšíření, roz-" + *fundo, -ere* = lít, sypat, rozšiřovat; v. fúze) — rozlévat, rozlévat se, rozptylovat se; DIFÚZE (z lat. *diffusio*) — „rozlití, rozlévání"; rozšíření, přemisťování; ve fyzice: rozptyl; samovolné pronikání molekul jednoho tělesa mezi molekuly tělesa druhého; v. t. termodifúze; DIFÚZNÍ — 1. vztahující se k difúzi, 2. rozptýlený, neusměrněný; ve fyzice: DIFÚZNÍ světlo — rozptýlené světlo nevytvářející stíny; DIFÚZNÍ reflex slunečních paprsků — rozptýlení paprsků odrazem na všechny strany, přičemž záření zářením zůstává. (Naproti tomu při absorpci (v. t.) je energie paprsků pohlcována plyny v atmosféře a zářivá energie je zcela nebo částečně pohlcena.)

DICHROISMUS (slož. z řec. *di-* = dvoj-, dvou- + *chróma* = pleť, barva pleti, barva; v. chromatický) — dvoubarevnost, tj. vlastnost některých nerostů, že mají jinou barvu ve směru optické osy a jinou ve směru na ni kolmou; DICHROICKÝ, DICHROITICKÝ — projevující se dichroismem; DICHROMATICKÝ = dvoubarevný

DILATACE (slož. z lat. *dis-* — zde s významem „prostorové rozšíření, roz-" + *latus* = široký) — rozšíření, rozšiřování, roztažení; zvětšování délky nebo objemu předmětu; ve fyzice: DILATACE času — prodlužování doby; DILATAČNÍ spára — spáry v konstrukci umožňující roztažení materiálu vlivem teploty nebo vnějších sil; DILATAČNÍ teploměr — založený na roztažnosti kapalných nebo pevných látek. Srov. LATIFUNDIE (lat. *fundus* = půda, pozemek, statek) — rozlehlé pozemky, velkostatek; v. t. dilatometr

DILATOMETR (slož. z lat. *dis-* — zde s významem „prostorové rozšíření, roz-" + *latus* = široký, v. dilatace + řec. *metron* = měřidlo, míra, v. -metr[1]) — přístroj k měření dilatace, tj. roztažnosti těles nebo kapalin; přístroj k měření změn objemu („šíře") kapaliny

DIMENZE (slož. z lat. *dis-* — zde s významem „rozdělení, roz-" + *metior*, *-iri*, ptc. pf. *mensus* = měřit; srovn. METR) — rozměr; DIMENZIONÁLNÍ zkouška, analýza — rozměrová; zabývající se vztahy mezi rozměry. Pozn.: Nespojovat se slovem MENZA — vysokoškolská stravovna, což je z lat. *mensa* = stůl, jídlo.

DIODA (slož. z řec. *di-* = dvoj, dvou-; v. *di-*[1] + *hodos* = chod, chůze, cesta, v. anoda; zde však uměle zkráceno z „elektroda", v. t.) — dvouelektrodová elektronka

DIOPTRIE (slož. z řec. *dia-* — zde s významem „skrz, na druhou stranu", v. *dia-* + *optér* = pozorovatel; od slovesného kmene *opt-* řec. *horaó* = vidět; v. optika) — technická jednotka pro optickou mohutnost čočky; tato jednotka určuje, kde se paprsky protnou po průchodu čočkou

DIPÓL (slož. z řec. *di-* = dvoj-, dvou-, v. *di-*[1] + *polos* = obrat; v. pól) — „dvojpól"; 1. dvojice elektrických nábojů s opačnými znaménky, 2. anténa ze dvou stejně dlouhých vodičů o opačné polaritě

DIREKČNÍ (z lat. *directus*, ptc. pf. slovesa *dirigo*, *-ere* = řídit něco jistým směrem) — řídící; ve fyzice: DIREKČNÍ moment, — síla, konstanta („řídí pohyb"); srov. DIRIGENT — „ten, kdo řídí sbor, orchestr"; v. t. direktní. Pozn.: Již v rukopisech a vydáních klasiků byla u slovesa *dirigo*, *-ere* zaměňována původní předpona *de-* s předponou *di-*, *dis-*.

DIREKTNÍ (z lat. *directus* = přímý, rovný; ptc. pf. slovesa *dirigo*, *-ere*; v. direkční) — „přímo řízený"; rovný, přímo účinkující; v astronomii: DIREKTNÍ směr — přímý směr, který se děje v témže smyslu, v jakém obíhají planety kolem Slunce, tj. od západu na východ; opak: retrográdní, v. t.

DIS-, DI-[3] (z lat. několikavýznamové předpony *dis-*; podoba *di-* v případech, kdy koncové „s" se připodobnilo následující souhlásce a zdvojená souhláska se pak v počeštělém slově psala ve shodě s výslovností jednoduše; např. lat. *dis-fundo* dalo lat. *diffundo*, to pak české difundovat) — předpona s významem: 1. „prostorové rozšíření, rozdělení, rozluka, roz-"; v. t. diference, difrakce, difundovat, dilatace, dilatometr, dimenze, dislokace, disociace, disonance, disperze, distance, distrakce, distributiva, divergence; 2. „opak, zápor, ne-"; v. t. dielektrikum, disparita

DISLOKACE (slož. z lat. *dis-* — zde s významem „prostorové rozšíření, rozdělení, rozluka, roz-, v. *dis-* + *locatio* = umístění, od *locus* = místo; v. lokální) — rozmístění, přemístění, posunutí; v geomechanice a mineralogii: rozdělení nebo náchylnost k rozdělení horninového masívu na strukturní jednotky různého tvaru, velikosti a vlastností; v. t. radiolokace.

DISOCIACE (z lat. *dissociatio*; od *dissocio, -are*, ptc. pf. *dissociatus*; slož z *dis-* — zde s významem „rozdělení, rozluka, roz-"; v. *dis-* + *socio, -are* = spojovat, sdružovat) — rozpojení, oddělení, rozklad, rozpad, rozštěpení; opakem: asociace, v. t. Pozn: Lat. *socio, -are* souvisí s lat. *socius* = druh, přítel, společník, z čehož vznikly termíny „sociální, socialistický" apod.

DISONANCE (z lat. *dissonantia*; od *dissono, -are*, ptc. préz. *dissonans, -ntis*; slož. z *dis-* — zde s významem „rozdělení, rozluka, roz-"; v. *dis-* + *sono, -are* = znít) — nesouzvuk („tóny se rozcházejí"), nelibozvuk; DISONANTNÍ — nelibozvučný; opak: konzonance, konzonantní, v. t. Srov. UNISONO (lat. *unus* = jeden) — jednohlasně; „jedním, tj. stejným zvukem"; v.t. rezonance, son, sonar, sonický. Pozn.: Protože v lat. *dissonantia* se vyskytují zdvojená -ss-, dodržujeme i nadále výslovnost „disonance"; naproti tomu čteme i píšeme „konzonance" a „rezonance", protože v lat. *consonantia* a *resonantia* je pouze jedno-s-.

DISPARITA (od lat. *dispar*; slož. z *dis-* — zde s významem „opak, zápor, ne-"; v. *dis-* + *par, paris* = stejný kvalitou, rovný kvantitou; v. parita) — nerovnost, různost, rozdílnost, nestejnost

DISPERZE (od lat. *dispergo, -ere*, ptc. pf. *dispersus*; slož. z *dis-* — zde s významem „prostorové rozšíření, roz-"; v. *dis-* + *spargo, -ere* = trousit, sypat, rozptylovat) — „rozsypávání"; rozptýlení, rozptyl, rozklad, rozpad; DISPERZITA — rozptylovací schopnost; DISPERZNÍ křivka — křivka popisující rozptyl paprsků

DISTANCE (z lat. *distantia*; od *disto, -are*, ptc. préz. *distans, -antis*; slož. z *dis-* — zde s významem „prostorové rozšíření, rozdělení, roz-"; v. *dis-* + *sto, stare* = státi, zastavit, zastavit se; v. stator) — odlehlost, vzdálenost, rozestup, odstup věcí vespolek; metaforicky: rozdílnost, různost; DISTANČNÍ kolík, šroub — rozpěrací, tj. udržující vzdálenost dvou součástí; v. t. ekvidistance; srov. DISTANCOVAT SE — zachovávat odstup od něčeho, zříkat se; v. t. ekvidistance

DISTRAKCE (z lat. *distractio*; od *distraho, -ere*, ptc. pf. *distractus*; slož. z *dis-* — zde s významem „prostorové rozšíření, rozluka, roz-"; v. *dis-* + *traho, -ere* = táhnout; v. trakce) — roztahování, roztažení

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány tři úsečky HK, LM, NP, jejichž délky jsou vesměs různé; každé dvě z nich jsou vzájemně mimoběžné. Najděte přímku p, která prochází daným bodem R a má tu vlastnost, že pravoúhlé průměty všech tří úseček do této přímky mají touž délku.

Stanislav Horák

(Došlo 1 řešení)

Upravené řešení Vladimíra Korduly a Jiřího Fišera, 3. c G v Bílovci:

Předpokládejme, že je úloha rozřešena, tj. že známe přímku p. Promítnutí úsečky HK do přímky p se může stát dvojím způsobem.
a) Z krajních bodů H, K spustíme na přímku p kolmice. Paty označíme H', K'. Úsečka $H'K'$ je průmět úsečky HK do přímky p.
b) Body H, K proložíme roviny α, β kolmé na přímku p. Jejich průsečíky s přímkou p jsou body H', K'. Úsečka $H'K'$představuje průmět úsečky HK do přímky p. Je přirozené, že oba způsoby vedou k témuž výsledku. Za pozornost stojí, že $|H'K'|$ je vzdálenost rovnoběžných rovin α, β.

Kdyby se úsečka HK jakkoli v prostoru posunula, pak velikost úsečky $H'K'$ se nebude měnit. — To, co platí o úsečce HK a jejím průmětu $H'K'$, platí i o úsečkách LM, NP a jejich průmětech $L'M'$, $N'P'$

Řešení úlohy je pak toto: Daným bodem R proložíme přímky $a||HK$, $b||LM$ a $c||NP$. Na přímce a určíme bod A tak, aby $|RA| = |HK|$, na přímce b určíme bod B tak, aby $|RB| = |LM|$ a na přímce c určíme bod C tak, aby $|RC| = |NP|$. Body A, B, C určují rovinu α, rovina $\beta||\alpha$ prochází bodem R. Přímka p prochází bodem R kolmo na rovinu α.

Úloha má čtyři různá řešení, neboť na přímce a existují dva různé body A, A', které splňují požadavek $|RA| = |HK|$. Podobně na přímce b dostaneme dva body B, B' a na přímce c dva body C, C'. Rovina α je pak určena a) body A, B, C, b) body A', B, C, c) body A, B', C, d) body A, B, C'. K tomu je nutno připomenout, že další roviny nevedou k jinému řešení, neboť $(ABC) || (A'B'C')$, $(A'BC) || (AB'C')$, $(AB'C) || (A'BC')$, $(ABC') || (A'B'C)$.

Může se však stát, že body A, B, C — a tudíž i body A', B', C' — leží v přímce. V tomto případě k řešení úlohy vede každá rovina α obsahující body A, B, C. Hledaná přímka p je pak kolmá k rovině α. Úloha má v tomto případě nekonečně mnoho řešení.

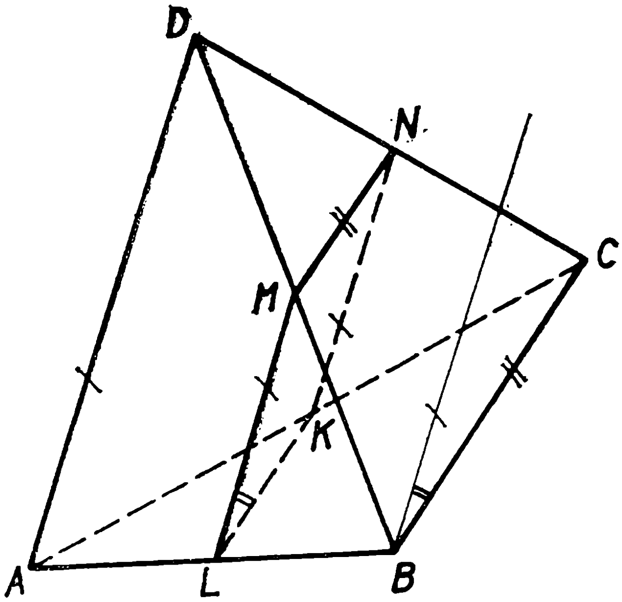
2. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Jak musíme zvolit rovinu ϱ, má-li být její řez se čtyřstěnem $ABCD$ rovnoběžník? Jakou vlastnost musí mít čtyřstěn $ABCD$, má-li být uvedený řez pravoúhelník? Může být v tomto případu řezem roviny ϱ se čtyřstěnem $ABCD$ čtverec?

Emil Kraemer

(Došla 3 řešení)

Upravené řešení Vladimíra Korduly a Jiřího Fišera, 3C G Bílovec:

Provedeme nejprve *rozbor*. Předpokládejme, že rovina ϱ protíná hrany AC, AB, BD, CD po řadě v jejich vnitřních bodech K, L, M, N (obr. 1). Potom přímky $p = KL$, $p' = MN$ jsou po řadě průsečnice roviny ϱ



Obr. 1

s rovinami $\alpha = ABC$, $\beta = BCD$. Je-li $KL \parallel MN$, pak podle věty o vzájemné poloze tří rovin α, β, ϱ je $BC \parallel KL \parallel MN$. Je-li $LM \parallel KN$, pak obdobně zjistíme, že rovina ϱ je rovnoběžná s průsečnicí AD rovin ABC, ACD. Hledaná rovina ϱ je tedy rovnoběžná s mimoběžkami BC, AD.

Z toho plyne tato *konstrukce*: Uvnitř hrany AB zvolíme bod L a jím vedeme přímky $p \parallel BC$, $q \parallel AD$. Rovina $\varrho = pq$ je jedna z hledaných rovin.

Zkouška: Přímka p protne hranu AC v jejím vnitřním bodu K a přímka q potom hranu BD v jejím vnitřním bodu M. Průsečík roviny ϱ s přímkou CD označme N. Průsečnice p rovin $\varrho = pq$, $\alpha = ABC$ je rovnoběžná s průsečnicí BC rovin $\alpha = ABC$, $\beta = BCD$. Podle věty o vzájemné poloze tří rovin ϱ, α, β je také průsečnice MN roviny ϱ s rovinou $\beta = BCD$ rovnoběžná s přímkou BC. Protože je $MN \parallel BC$, $BC \parallel KL$, je také $MN \parallel KL$. Obdobně dokážeme, že je $LM \parallel KN$.

Dalšími řešeními jsou roviny ϱ', ϱ'', které mají tyto vlastnosti: $\varrho' \parallel CA$, $\varrho' \parallel BD$ a $\varrho'' \parallel AB$, $\varrho'' \parallel CD$.

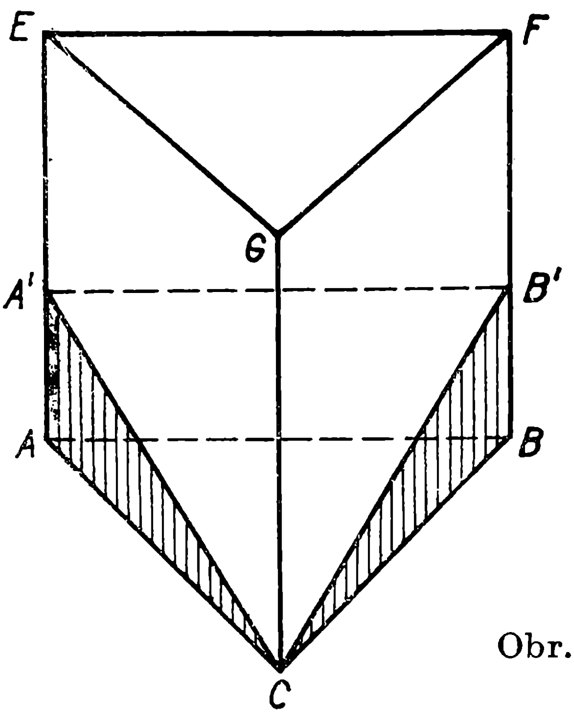
Protože je $KL \parallel BC$, $LM \parallel AD$, je úhel KLM pravý, právě když jsou mimoběžky BC, AD vzájemně kolmé. Rovnoběžník $KLMN$ je tedy pravoúhelník, právě když mimoběžky BC, AD jsou vzájemně kolmé. Je-li čtyřstěn $ABCD$ pravidelný, pak lze snadno dokázat, že každé dvě jeho mimoběžné hrany jsou vzájemně kolmé; zároveň jsou všechny jeho hrany shodné. Zvolíme-li tedy vrchol L sestrojeného rovnoběžníku $KLMN$ ve středu hrany AB, bude tento obrazec čtverec.

3. Podstava kolmého trojbokého hranolu je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB. Veďte bodem C rovinu ϱ tak, aby její řez s daným hranolem byl rovnostranný trojúhelník $A'B'C$.
(Došla tři řešení)

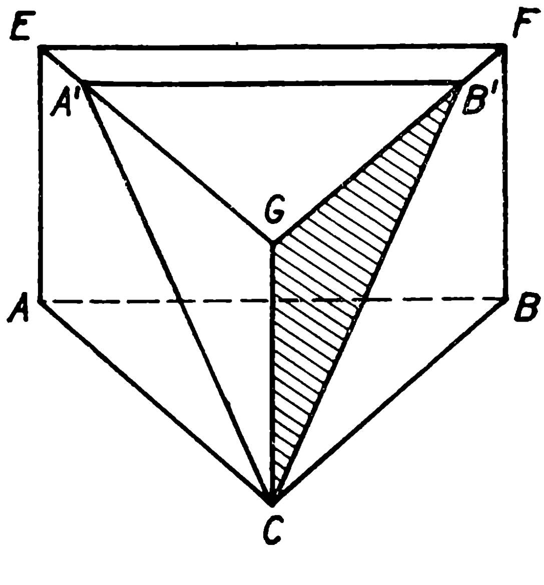
Emil Kraemer

Upravené řešení Vladimíra Korduly a Jiřího Fišera:

Je-li hranol dostatečně vysoký, leží body A', B' po řadě na hranách AE, BF (obr. 2). Je-li hranol nízký, leží body A', B' po řadě na hranách EG, FG (obr. 3).



Obr. 2



Obr. 3

a) V prvním případu (obr. 2) mají pravoúhlé trojúhelníky CAA', CBB' shodné odvěsny CA, CB a shodné přepony CA', CB'. Jsou tedy shodné, takže je $AA' = BB'$. Z toho plyne, že obrazec $ABB'A'$ je pravoúhelník; strana rovnostranného trojúhelníku $A'B'C'$ je tedy shodná s přeponou AB trojúhelníku ABC. Z toho plyne tato *konstrukce*:

Ve stěně $CAEG$ sestrojíme pravoúhlý trojúhelník CAA', jehož přepona CA' je shodná s hranou AB; potom ve stěně $ABB'A'$ sestrojíme pravoúhelník $A'ABB'$.

Má-li bod A' ležet na hraně AE, musí být $|AE| \leqq |AA'|$. Avšak $|AA'|^2 = |A'C|^2 - |AC|^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$; přitom $a = |AC| = |BC|$. Je-li $|AE| = v$, pak má úloha řešení, a to jedno, právě když je

$$v \geqq a\,. \tag{1}$$

b) Ve druhém případu (obr. 3) mají pravoúhlé trojúhelníky $A'GB'$, CGB' společnou odvěsnu GB' a shodné přepony $A'B'$, CB'. Jsou tedy shodné, takže je $|GA'| = |GC|$. Avšak také pravoúhlé trojúhelníky $A'GC$, $B'GC$ mají společnou odvěsnu GC a shodné přepony CA', CB'. Jsou tedy shodné, takže je $|GA'| = |GB'|$. Z toho plyne tato *konstrukce*:

Na hranách GE, GF sestrojíme po řadě body A', B' tak, aby bylo $|GA'| = |GB'| = |GC|$.

Má-li bod A' ležet na hraně GE, musí být $|GA'| \leqq |GE|$ čili musí být

$$v \leqq a\,;$$

úloha má potom právě jedno řešení.

V obou případech má úloha právě jedno řešení. Je-li $v = a$, je $A' = E$, $B' = F$, takže výsledek prvního řešení je týž jako výsledek druhého řešení.

Řešení magických čtverců (ze str. 242)

a)

395	408	391	404	387
388	396	409	392	400
401	389	397	405	393
394	402	385	398	406
407	390	403	386	399

b)

392	409	407	391	386
406	396	401	394	388
389	395	397	399	405
390	400	393	398	404
408	385	387	403	402

c) Čísla čtená po řádcích: 296, 362, 360, 358, 312, 298, 352, 316, 330, 334, 344, 310, 354, 338, 340, 320, 326, 308, 306, 328, 318, 346, 332, 356, 314, 342, 336, 324, 322, 348, 364, 300, 302, 304, 350, 366.

Úlohy 25. mezinárodní matematické olympiády v Praze v roce 1984

Dr. KAREL HORÁK, CSc., dr. ANTONÍN VRBA, CSc., MÚ ČSAV, Praha

1. Jsou dána nezáporná reálná čísla x, y, z taková, že $x + y + z = 1$. Dokažte, že

$$0 \leqq xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}.$$

Řešení. K důkazu nezápornosti uvedeného výrazu si stačí uvědomit, že $0 \leqq x, y, z \leqq 1$, takže

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx \geqq 0 .$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a harmonickým průměrem můžeme ovšem dokázat ještě silnější nerovnost

$$\frac{xy + yz + zx}{3} \geqq \frac{3}{\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx}} = \frac{3\,xyz}{x + y + z} = 3xyz ,$$

tj.

$$xy + yz + zx \geqq 9xyz .$$

Nyní dokážeme druhou nerovnost. Předpokládejme nejdříve, že je např. $x \geqq \frac{1}{2}$, pak je

$$xy + yz + zx - 2xyz = x(y + z) + yz(1 - 2x) =$$

$$= x(1 - x) + yz(1 - 2x) \leqq x(1 - x) \leqq \frac{1}{4} < \frac{7}{27}.$$

Vzhledem k symetrii zbývá vyšetřit už jen případ, kdy je $0 \leqq x,\ y,\ z < \frac{1}{2}$. Položme $x' = 1 - 2x$, $y' = 1 - 2y$, $z' = 1 - 2z$, pak je

$$x' + y' + z' = 1 , \quad x', y', z' > 0$$

a

$$xy + yz + zx - 2xyz = \frac{1}{4}(1 + x'y'z') .$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tak dostaneme

$$x'y'z' \leqq \left(\frac{x' + y' + z'}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

takže

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}.$$

Jiné řešení. Budeme dokazovat jen druhou nerovnost. Označme $k = xy + yz + zx - 2xyz = x(1 - x) + yz(1 - 2x)$. Díky symetrii můžeme předpokládat, že $x \leqq \frac{1}{3}$. Protože

$$y + z = 1 - x$$

$$yz = \frac{k + x(x - 1)}{1 - 2x},$$

jsou čísla y, z reálné kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 + (x - 1)\,t + \frac{k + x(x - 1)}{1 - 2x} = 0,$$

pro jejíž diskriminant platí

$$(x - 1)^2\,(1 - 2x) - 4k - 4x(x - 1) \geqq 0,$$

neboli

$$k \leqq -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}.$$

Funkce $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ má v intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{3}\right\rangle$ nezápornou derivaci

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x\,(1 - 3x) \geqq 0,$$

takže funkce f je v uvedeném intervalu neklesající a je

$$k \leqq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

2. Najděte dvě přirozená čísla a, b tak, aby žádné z čísel a, b, $a + b$ nebylo dělitelné sedmi a aby číslo $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ bylo dělitelné 7^7.

Řešení. Podle binomické věty je

$$\begin{aligned}(a + b)^7 - a^7 - b^7 &= 7ab[(a^5 + b^5) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2b^2\,(a + b)] = \\ &= 7ab(a + b)\,(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) = \\ &= 7ab(a + b)\,(a^2 + ab + b^2)^2.\end{aligned}$$

Řešením úlohy jsou právě ty dvojice (a, b), pro něž je
$$a \not\equiv 0,\ b \not\equiv 0\ ,\ a + b \not\equiv 0 \pmod 7$$
a
$$a^2 + b^2 + ab \equiv 0 \pmod{7^3} \tag{1}$$
Vyhovuje-li dvojice (a, b) kongruenci (1), vyhovuje jí zřejmě i dvojice (ka, kb) pro libovolné přirozené číslo k. Podle Eulerovy věty platí pro nesoudělná čísla r, s, že $r^{\varphi(s)} - 1$ je dělitelné číslem s, kde $\varphi(s)$ označuje počet přirozených čísel menších než s a nesoudělných s s. Protože $\varphi(7^3) = 6 \cdot 7^2 = 294$, je $a^{294} \equiv 1 \pmod{7^3}$, a rovnici (1) tudíž vyhovuje s dvojicí (a, b) také dvojice $(1, a^{293}b)$. Chceme-li tedy najít všechny dvojice (a, b) vyhovující úloze, stačí najít všechna řešení tvaru $(1, t)$, ostatní pak budou tvaru $(k. kt)$, kde $k \not\equiv 0 \pmod 7$.

Řešme tedy rovnici
$$t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod{7^3} \tag{2}$$
Vyhovuje-li t rovnici (2), vyhovuje jí i (mod 7) a snadno zjistíme, že $t \equiv 2 \pmod 7$ nebo $t \equiv 4 \pmod 7$.

Nechť $t \equiv 2 \pmod 7$, tj. $t = 7m + 2$. Pak má rovnice
$$(7m + 2)^2 + (7m + 2) + 1 \equiv 0 \pmod{7^2}$$
neboli
$$35m + 7 \equiv 0 \pmod{7^2}$$
neboli
$$5m + 1 \equiv 0 \pmod 7$$
řešení $m \equiv 4 \pmod 7$. Proto vyhovuje-li $t \equiv 2 \pmod 7$ rovnici (2), je $t \equiv 30 \pmod{7^2}$, tj. $t = 7^2n + 30$. Platí tedy
$$(7^2n + 30)^2 + (7^2n + 30) + 1 \equiv 0 \pmod{7^3}$$
neboli
$$61n + 19 \equiv 0 \pmod 7$$
a odtud $n \equiv 6 \pmod 7$. V případě $t \equiv 2 \pmod 7$ jsme našli jediné řešení rovnice (2) $t \equiv 324 \pmod{7^3}$.

V případě $t \equiv 4 \pmod 7$ najdeme analogicky druhé řešení rovnice (2) $t \equiv 18 \pmod{7^3}$.

Řešením úlohy jsou všechny dvojice přirozených čísel
$$(a, b) \equiv (k, 18k) \text{ nebo } (k, 324k) \pmod{7^3}\ ,$$
kde $k \not\equiv 0 \pmod 7$.

3. V rovině jsou dány dva body $O \neq A$. Pro každý bod $X \neq O$ v rovině označme $\alpha(X)$ velikost orientovaného úhlu AOX měřeného v radiánech proti směru hodinových ručiček $(0 \leqq \alpha(X) < 2\pi)$ a $\mathrm{C}(X)$ kružnici se středem O a poloměrem $OX + \dfrac{\alpha(X)}{OX}$. Předpokládejme, že každý bod roviny je obarven některou z konečného počtu barev. Dokažte, že existuje bod X, pro který je $\alpha(X) > 0$, a přitom jeho barva se vyskytuje na kružnici $\mathrm{C}(X)$.

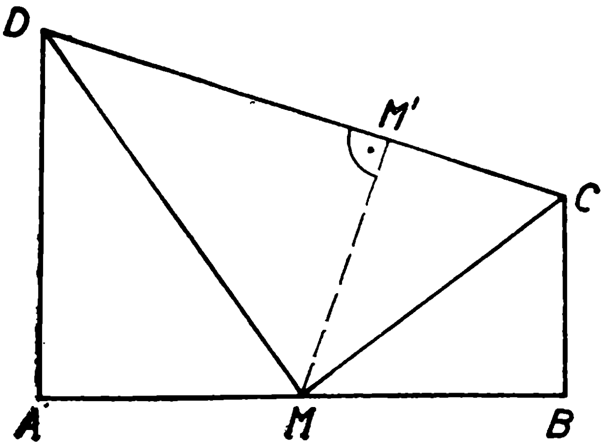
Řešení. Uvažujme dvě kružnice $\mathrm{R} = (O, r)$ a $\mathrm{S} = (O, s)$, kde

$0 < r < s < 1$. Na kružnici R existuje bod X takový, že $S = C(X)$. Je to bod X, pro nějž $\alpha(X) = r(s - r)$ (zřejmě $0 < \alpha(X) < 1$). Nevyskytuje-li se barva bodu X na kružnici S, znamená to, že množina všech barev na kružnici R se liší od množiny všech barev na kružnici S.

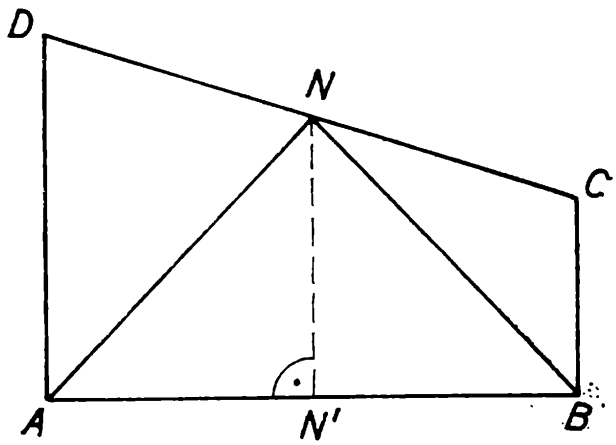
Kdyby dokazované tvrzení neplatilo, znamenalo by to, že na každých dvou různých kružnicích se středem O a poloměrem menším než 1 jsou různé množiny barev. Množina všech barev, jimiž jsou obarveny body roviny, by tedy měla nekonečně mnoho podmnožin a nebyla by konečná.

4. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník takový, že kružnice s průměrem AB se dotýká přímky CD. Dokažte, že kružnice s průměrem CD se dotýká přímky AB, právě když strany BC a AD jsou rovnoběžné.

Řešení. Označme M střed strany AB a M' pravoúhlý průmět bodu M



Obr. 1



Obr. 2

na přímku CD (obr. 1). Podle předpokladu je $MM' = AB/2$, obsah čtyřúhelníka $ABCD$ můžeme tedy vyjádřit jako

$$S(ABCD) = S(AMD) + S(MBC) + S(CDM) =$$

$$= \frac{1}{2} S(ABD) + \frac{1}{2} S(ABC) + \frac{1}{4} CD \cdot AB .$$

Zároveň však je (obr. 2)

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} S(CDA) + \frac{1}{2} S(CDB) + \frac{1}{2} AB \cdot NN'$$

kde N je střed strany CD a N' jeho pravoúhlý průmět na přímku AB. Odtud odečtením plyne, označíme-li O průsečík úhlopříček čtyřúhelníka $ABCD$,

$$AB\left(\frac{1}{2} CD - NN'\right) = S(CDA) + S(CDB) - S(ABD) - S(ABC) =$$
$$= S(ABCD) + S(CDO) - S(ABO) - S(ABCD) - S(ABO) +$$
$$+ S(CDO) = 2(S(CDO) - S(ABO)) = 2(S(ADC) - S(ADB))$$

Kružnice nad průměrem CD se dotýká přímky AB, právě když

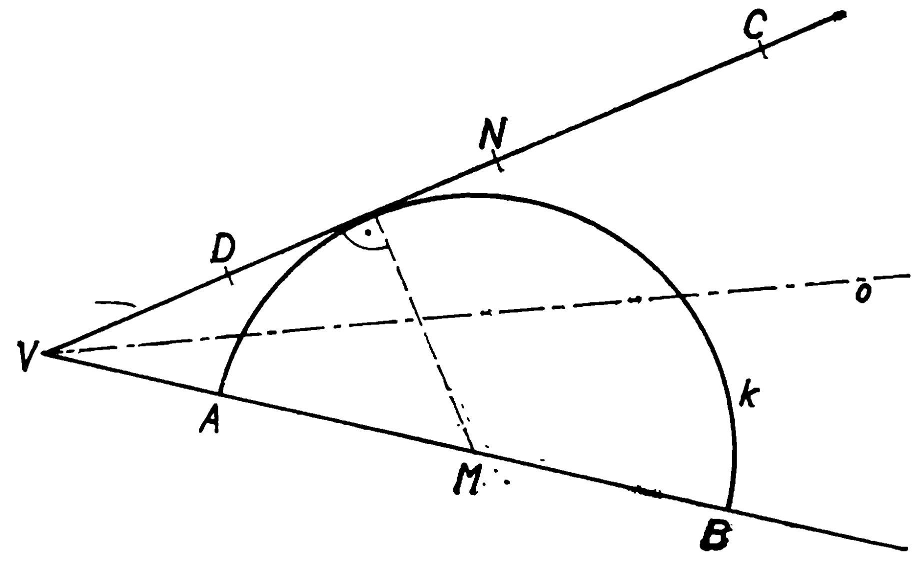
$NN' = \frac{1}{2} CD$, což je podle poslední rovnosti, právě když

$$\mathrm{S}(ADC) = \mathrm{S}(ADB)\,.$$

To je však ekvivalentní s rovnoběžností přímek AD a BC.

Jiné řešení. Pokud $AB \| CD$, dotýká se zřejmě kružnice nad průměrem CD přímky AB, právě když $CD = AB$, tj. právě když $ABCD$ je rovnoběžník.

Jsou-li přímky AB, CD různoběžné, označme V jejich průsečík, o osu úhlu BVC, M a N středy stran AB a CD (obr. 3). Uvažujme zobrazení $\mathbf{Z}$,



Obr. 3

které dostaneme složením osové souměrnosti podle osy o a stejnolehlosti se středem V a koeficientem VN/VM. V tomto zobrazení bude $\mathbf{Z}(M) = N$. Protože kružnice k sestrojená nad průměrem AB má střed v bodě M a dotýká se přímky CD, bude se kružnice nad průměrem CD se středem $\mathbf{Z}(M)$ dotýkat přímky AB, právě když bude obrazem kružnice k v zobrazení $\mathbf{Z}$, tj. právě když bude $\mathbf{Z}(A) = D$ a $\mathbf{Z}(B) = C$. Zřejmě však je $A\,\mathbf{Z}(A) \| B\,\mathbf{Z}(B)$.

5. Pro $n > 3$ označme d součet délek všech úhlopříček konvexního n-úhelníka a p jeho obvod. Dokažte, že

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\,.$$

Řešení. Uvažujme konvexní n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$. S indexy budeme počítat modulo n.

Je-li A_iA_j úhlopříčka, je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1} > A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1}\,.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro všech $n(n - 3)/2$ úhlopříček A_iA_j, dostaneme vlevo každou úhlopříčku dvakrát a vpravo každou stranu $(n - 3)$-krát, tedy

$$2d > (n - 3)p\,.$$

Pro délku úhlopříčky A_iA_j dále platí

$$A_iA_j < A_iA_{i+1} + \ldots + A_{j-1}A_j\,,$$
$$A_iA_j < A_jA_{j+1} + \ldots + A_{i-1}A_i \tag{3}$$

Je-li $n = 2k + 1$, vezměme pro každou úhlopříčku A_iA_j tu z nerovností (3), která má na pravé straně menší počet sčítanců, a těchto $n(n - 3)/2$ nerovností sečtěme. Dostaneme nerovnost, na jejíž levé straně je d a na pravé straně je součet délek stran, v němž se každá strana vyskytuje tolikrát, pro kolik úhlopříček leží v „menší" ze dvou částí, na které je obvod n-úhelníka úhlopříčkou rozdělen. Např. pro stranu A_1A_n vychází z vrcholu A_k jediná taková úhlopříčka, z vrcholu A_{k-1} dvě, . . . , z vrcholu A_2 jich vychází $k - 1$ a z vrcholu A_1 také $k - 1$. Na pravé straně je tedy každá strana započtena tolikrát, kolik je

$$1 + 2 + \ldots + (k - 1) + (k - 1)\,,$$

takže

$$d < \frac{(k-1)\,(k+2)}{2}\,p = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right).$$

Je-li $n = 2k$, vezměme pro každý „průměr" A_iA_{i+k} nerovnost

$$A_iA_{i+k} < \frac{p}{2}$$

a pro ostatní úhlopříčky opět tu z nerovností (3), která má na pravé straně menší počet sčítanců. Sečteme-li těchto $n(n - 3)/2$ nerovností, dostaneme

$$d < k\frac{p}{2} + \frac{(k-2)\,(k+1)}{2}\,p = \frac{k^2 - 2}{2}\,p = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right)$$

Jiné řešení (bylo odměněno zvláštní cenou). Zvolme přímku q a pravoúhlé průměty vrcholů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uvažovaného mnohoúhelníka na přímku q označme $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.

Uvažujme nejprve body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ležící v přímce v tomto pořadí a odhadněme součet délek s všech úseček B_iB_j pomocí délky úsečky B_1B_n a čísla n. Zřejmě

$$s \geqq (B_1B_2 + B_2B_n) + (B_1B_3 + B_3B_n) + \ldots + (B_1B_{n-1} + B_{n-1}B_n) + {} + B_1B_n = (n-1)\,B_1B_n$$

Dále si všimněme, že každá úsečka B_iB_j se skládá z úseček B_kB_{k+1}, přičemž každá úsečka B_kB_{k+1} je částí právě $k(n - k)$ úseček B_iB_j. Je tedy

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k\,(n-k)\,B_kB_{k+1}$$

Přitom

$$4k(n-k) = n^2 - (n-2k)^2$$

a součin $k(n - k)$ nabývá tudíž největší hodnoty pro $k = [n/2]$, takže

$$s \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] B_k B_{k+1} = \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] B_1 B_n .$$

Odvodili jsme nerovnosti

$$(n-1)\ B_1B_n \leqq s \leqq \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] B_1B_n . \tag{4}$$

Jsou-li mezi body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ aspoň čtyři různé, jsou přitom na obou stranách ostré nerovnosti.

Průměty $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ nemusejí sice ležet na přímce q v tomto pořadí; vzhledem ke konvexitě mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$ je však součet

$$A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + \ldots + A'_{n-1}A'_n + A'_nA'_1$$

roven dvojnásobku nejdelší z úseček $A'_iA'_j$. Je tedy podle (4)

$$(n-1)\ (A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + \ldots + A'_nA'_1) \leqq 2 \sum_{i<j} A'_iA'_j \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] (A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + \ldots + A_n'A'_1) ,$$

přičemž $A'_iA'_j = A_iA_j \cos \alpha_{ij}$, označíme-li α_{ij} úhel sevřený přímkami A_iA_j, q $(0 \leqq \alpha_{ij} \leqq \pi/2)$.

Otáčejme nyní zvolenou přímku q kolem nějakého bodu O. Pro $0 \leqq x < \pi$ tak dostaneme přímku $q(x)$, která bude s přímkou A_iA_j svírat úhel $\alpha_{ij}(x)$ $(0 \leqq \alpha_{ij}(x) \leqq \pi/2)$, bude tedy pro každé $x \in \langle 0, \pi)$ platit

$$(n-1)\ (A_1A_2 \cos \alpha_{12}(x) + A_2A_3 \cos \alpha_{23}(x) + \ldots + A_nA_1 \cos \alpha_{n1}(x)) \leqq$$

$$\leqq 2 \sum_{i<j} A_iA_j \cos \alpha_{ij}(x) \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] (A_1A_2 \cos \alpha_{12}(x) + A_2A_3 \cos \alpha_{23}(x) + \ldots + A_nA_1 \cos \alpha_{n1}(x))$$

Přitom je pro $1 \leqq i < j \leqq n$

$$\int_0^\pi \cos \alpha_{ij}(x)\, dx = \int_0^\pi |\cos x|\, dx = 2 .$$

Zintegrujeme-li tedy poslední nerovnost na intervalu $\langle 0, \pi)$, dostaneme

$$2(n-1)\ (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) \leqq 4 \sum_{i<j} A_iA_j \leqq$$

$$\leqq 2 \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1)$$

neboli

$$(n-1)p \leqq 2(d+p) \leqq \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] p$$

Protože $n > 3$ a jen pro konečně mnoho $x \in \langle 0, \pi)$ se stane, že některé průměty splynou, budou na obou stranách dokonce ostré nerovnosti, tj.

$$(n-1)p < 2(d+p) < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]p$$

čili

$$(n-3)p < 2d < \left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right)p\,.$$

Poznámka. Nerovnosti, které jsme dokázali, nelze zlepšit. Pro mnohoúhelník, jehož dvě sousední strany mají délku 1 a ostatní strany jsou velmi malé, bude

$$p \doteq 2\,,\quad d \doteq n-3 \quad \text{a} \quad 2d/p \doteq n-3\,.$$

Pro mnohoúhelník, jehož „protilehlé" strany A_kA_{k+1}, A_nA_1, kde $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, mají délku 1 a ostatní strany jsou velmi malé, bude

$$p \doteq 2\,,\quad d \doteq k(n-k) - 2$$

a

$$\frac{2d}{p} \doteq k(n-k) - 2 = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\,.$$

6. Nechť $a < b < c < d$ jsou lichá přirozená čísla taková, že $ad = bc$ a $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ pro nějaká přirozená čísla k, m. Dokažte, že $a = 1$.

Řešení. Nejprve dokážeme, že $k > m$, což plyne z nerovnosti

$$a((a+d) - (b+c)) = a(a-c) + a(d-b) = a(a-c) + bc - ab = \\ = (a-b)(a-c) > 0\,.$$

Z rovnosti

$$a(2^k - a) = b(2^m - b)$$

dostaneme

$$2^m | b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)\,. \tag{5}$$

Čísla $b + a$, $b - a$ nejsou obě dělitelná čtyřmi, protože jejich součet $2b$ není čtyřmi dělitelný. Jedno z čísel $b + a$, $b - a$ je tedy podle (5) dělitelné číslem 2^{m-1} — označme je x. Je však

$$0 < x \leqq b + a < b + c = 2^m\,,$$

a tedy

$$x = 2^{m-1}\,. \tag{6}$$

Číslo

$$b + c - x = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1} \tag{7}$$

je jedno z čísel $c + a$, $c - a$. Protože a, b, c jsou lichá čísla, plyne z (6), že a, b jsou nesoudělná čísla, a ze (7), že a, c jsou nesoudělná čísla. Z podmínky $ad = bc$ vidíme, že $a|bc$. Musí tedy být $a = 1$.

Navíc x, tj. jedno z čísel $b + 1$, $b - 1$, je rovno 2^{m-1} a jedno z čísel $c + 1$, $c - 1$ je rovno 2^{m-1}. Protože $b < c$, je $b = 2^{m-1} - 1$, $c = 2^{m-1} + 1$ a odtud $d = 2^{2(m-1)} - 1$, kde $m > 2$ je přirozené číslo.

Tretí ročník letnej školy mladých fyzikov

Hodiny oddychu využívame na svoju záujmovú činnosť. Že pre niekoho je záujmovou činnosťou aj vedomé využívanie poznaných fyzikálnych zákonov, ukázali štyridsiati účastníci tretieho ročníka Letnej školy mladých fyzikov. Tretí ročník LŠMF sa uskutečnil v dňoch 21. 7. až 4. 8. 1985 v centre Liptova v priestoroch Strednej priemyselnej školy poľnohospodárskej v *Liptovskom Mikuláši.* Pekné počasie v strede leta účastníkom prialo. Kúpanie v Liptovskej Mare a na termálnom kúpalisku v Liptovskom Jáne im poskytlo dostatok praktických problémov, pri ktorých si utvrdili poznatky z hydromechaniky. Náhodné, ale aj vedome pedagógmi pripravené situácie umožnili aj tým najmladším účastníkom, absolventom piatej triedy ZŠ, zvládnuť fyzikálny zmysel Archimédovho zákona. Známy odborník na konštrukcie nízkovýkonových vodných turbín, *ing. Janů* z Vysokej vojenskej technickej školy v Liptovskom Mikuláši pripravil účastníkom LŠMF hodnotný naučno-branný pobyt v malebnej Jánskej doline. Účastníkov nadchli prírodné krásy, s pohnutím počúvali o útrapách partizánskych a oslobodzovacích bojov zo zimy 1944 a jara 1945, postáli pri zostatkoch havarovaného lietadla, v ktorého troskách zahynulo dvanásť sovietskych výsadkárov. S nevšedným záujmom sa mladí účastníci školy oboznámili s konštrukciou malej

Obr. 1. Nejmladší účastníci LŠMF'85 sa oboznamujú so zákonitosťami elektrostatických polí *Foto Ivan Synek*

Obr. 2. Pokusy z aeromechaniky *Foto Ivan Synek*

turboelektrárne pri poľovníckej chate na Holovskej a s plánom elektrifikácie horských salašov. Keďže jeden takýto salaš sami navštívili, mali účastníci letnej školy možnosť oboznámiť sa s prácou baču a jeho valachov, ba mali možnosť výsledky tejto práce v podobe syra a žinčice aj ochutnať. Samozrejmým dôsledkom týchto zážitkov bol záujem, s ktorým mladí účastníci letnej školy v nasledujúcich zamestnaniach analyzovali fyzikálne problémy premeny potenciálnej energie vysokohorskej vody cez elektrickú energiu, získanú v bezprostrednej blízkosti salašov, po prácu strojčekov na strihanie a dojenie oviec. Návrh meničov na žiarivkové osvetlenie salaša bol výsledok cvičenia z elektronických obvodov.

Inokedy, tráviac popoludnie na brehu Váhu, študovali účastníci optické javy na rozhraní vzduch—voda. Štúdium interferencie v nasledujúcich zamestnaniach bolo prirodzeným následkom pozorovania interferenčných obrazcov, vytvorených v piesku pri brehu vodného toku. Skutočnosť, že fyzika sa rozvíja pre blaho celého ľudstva, pochopili účastníci, oboznámiac sa s osudmi *Aurela Stodolu*, rodáka z Liptovského Mikuláša. Zaujalo ich, ako tento svojou prácou v oblasti plynových a parných turbín a mechanických pohybov ruky, ktoré ho viedli ku konštrukcii protézy, položil základy pre spájanie teórie a experimentu v technických disciplínach. Súčasťou LŠMF je aj astronómia a meteorológia. Preto sú už tradičné pozorovania oblohy a exkurzia do Hydrometeorologického ústavu SAV v Gánovciach pri Poprade s účasťou na vypúšťaní meteorologickej sondy — balóna.

Účastníci absolvovali LŠMF s „otvorenými očami", aby dokázali vypozorovať fyzikálnu podstatu javov v ich okolí. Výbor letnej školy a pedagógovia, ktorí ju vedú, menovite *RNDr. Ivan Baník, CSc.*, z katedry stavebnej fyziky SVŠT v Bratislave, *RNDr. Rastislav Baník, CSc.*, z katedry fyziky Pedagogickej fakulty v Banskej Bystrici a *Lubomír Baník*, zástupca riaditeľa ZŠ v Strečne, *RNDr. Štefan Bažík*, zástupca riaditeľa gymnázia na ul. Ladislava Sáru v Bratislave a *doc. RNDr. Ján Chrapan, CSc.*, pracovník katedry fyziky VVTŠ ČSSP v Liptovskom Mikuláši, si predsavzali rozpracovať metodiku optimálneho skĺbenia zdravého pohybu v prírode so získaním nových fyzikálnych poznatkov, s rozvíjaním vzťahu k prírode a budovaním fyzikálnej tvorivosti mládeže.

Letnú školu mladých fyzikov už tradične organizuje pobočka Jednoty slovenských matematikov a fyzikov Bratislava 2 v úzkej spolupráci s Ústredným domom pionierov a mládeže Klementa Gottwalda v Bratislave.

Eva Bittnerová

Sedmá celostátní přehlídka SOČ v oboru fyzika

RNDr. ZDENĚK KLUIBER, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Vyvrcholením 7. ročníku Středoškolské odborné činnosti se stala celostátní přehlídka v Olomouci ve dnech 3. 7.—7.7. 85. Přehlídka probíhala na vybraných středních školách, které pro ni vytvořily optimální pracovní podmínky.

Na celostátní přehlídku SOČ v oboru fyzika bylo doporučeno 24 prací, obhajováno bylo 22 prací. Autory těchto prací bylo 20 žáků gymnázií. jeden žák ze střední průmyslové školy, jeden žák ze středního odborného učiliště. Obhajované práce lze rozdělit do čtyř skupin: astronomie (6 prací), experimentální fyzika (7 prací), aplikovaná fyzika (7 prací), pomůcky pro výuku fyziky (2 práce).

Přednesy referátů autory prací, resp. vedoucími pracovních kolektivů, vlastní obhajoby prací (dotazy k jednotlivým pracím vedle členů odborné hodnotící komise vznesli ve značné míře i sami účastníci přehlídky) svědčí o velmi dobré úrovni znalostí žáků, které získali při vypracování svých samostatných prací. Tento aspekt je pak možno zdůraznit zvláště u těch žáků, kteří v oblasti SOČ pracují skutečně cílevědomě a postoupili na celostátní přehlídku již podruhé atd. Ve svých referátech řada žáků významně dále doplnila svoje práce i dalšími experimentálními výsledky, což svědčí o spontánním zaujetí žáků pro odbornou práci, o snaze zkvalitňovat svoje poznatky. Kromě ústního projevu čtyři účastníci přehlídky vhodně uplatnili při obhajobách i samostatně vytvořená experimentální zařízení a pomůcky — všichni proto byli navrženi k účasti na celostátní výstavě ZENIT. Přehlídka v oboru fyzika zahrnula i významnou výměnu zkušeností žáků nejen z dosažených pracovních výsledků, ale i z metod odborné práce a její organizace.

Jako nejlepší práce v oboru fyzika byly odbornou hodnotící komisí vyhodnoceny:

1. *Karel Kloc*, gymnázium Praha: Experimentální sledování lokální plastické deformace měřením mikrotvrdosti;
2. *Peter Čajka, Janka Vendráková*, gymnázium Košice: Meranie hemolýzy erythrocytov metodou integrálneho rozptylu svetla; práce získala i cenu ČSVTS;
3. *Jiří Kopecký*, gymnázium Kolín: Analýza numerických experimentů struktury galaxií.

Další ocenění získaly práce:

Šimon Pavlas, gymnázium Holešov: Určení radiální rychlosti hvězdy gama Dra — čestné uznání ÚV SSM;

Vladimír Ragan, gymnázium Ružomberok: Aerodynamika v železničnej doprave — cena VTM.

Zřetelně mezi pracemi převažovalo zpracování výsledků, které byly získány ve vědeckých ústavech nebo ve výzkumných laboratořích (9 prací). S tím souvisí i odborné vedení prací konzultanty z těchto pracovišť. Témata prací byla v tomto případě velmi aktuální, resp. umožnila účastníkům SOČ seznámit se s moderní experimentální technikou a s odbornými metodami zpracování naměřených hodnot, s rozborem a diskusí zpracovaných výsledků atd. Práce aplikačního charakteru byly zaměřeny především na problémy dlouhodobějšího zájmu žáků. Práce z astronomie lze rozdělit do dvou skupin: jako výsledek poměrně kvalitní amatérské práce a jako výsledek odborného vedení konzultantem na špičkovém pracovišti. Souhrnně je možno hodnotit práce z astronomie jako tradičně velmi dobré.

Práce účastníků 7. celostátní přehlídky SOČ v oboru fyzika se tak vesměs opírají o experimentální činnost žáků, o poznatky získané ze studia odborné literatury, o zvládnutí techniky zpracování naměřených hodnot. Potěšitelné je, že žáci sami uvádějí, že jim vypracování jejich samostatných prací napomohlo k dalšímu rozšíření odborných znalostí (zejména v případě, kdy měli možnost pracovat v laboratořích výzkumných ústavů a v laboratořích vysokých škol, na kterých chtějí v budoucnu studovat), že samostatně úspěšně uplatnili při zpracovávání práce programovatelné kalkulačky a mikropočítače.

Lze konstatovat, že práce opět získaly poměrně široké uplatnění ve výuce fyziky, v činnosti hvězdáren, v práci odborných kroužků, částečně i ve výzkumných laboratořích.

Snaha o další rozšiřování vzájemných vazeb mezi fyzikální olympiádou a středoškolskou odbornou činností v oboru fyzika [1] napomáhá ke spojování teoretických a praktických znalostí žáků v řadě studovaných problémů, ke vzájemné informovanosti o vhodných tematických úlohách ve středoškolské odborné činnosti, k volbě dostupných laboratorních úloh atd. V SOČ je třeba nadále dávat přednost praclm, při nichž žáci budou uplatňovat samostatnou práci v laboratořích, ověřovat a prohlubovat si teoretické poznatky ze školní výuky fyziky a ze studia odborné literatury. Žáci tak mají možnost rozšiřovat si svoje znalosti především v oborech svých odborných zájmů.

Předpokládá se, že anotace vítězných prací 7. celostátní přehlídky SOČ — a to nejen z oboru fyzika — budou publikovány v časopise Věda a technika mládeži.

Především pro nejlepší účastníky celostátní přehlídky SOČ v oboru fyzika, ale i pro další úspěšné účastníky krajských přehlídek byla připravena II. Letní škola mladých vědců oboru fyzika, organizovaná Centrem pro mládež, vědu a techniku ÚV SSM. Odborný program Letní školy zajistila Komise mladých odborníků Fyzikálního ústavu ČSAV (jde především o oblast moderní fyziky — kapalné krystaly, fyzika nízkých teplot, fyzika vysokých energií, lasery atd.).

Odborná hodnotící komise doporučila jako vhodná zaměření prací v oboru fyzika v SOČ pro další období: řešení fyzikálních problémů a úloh z astronomie a kosmonautiky, problémy z oblasti fyziky pevných látek — mechanické, tepelné, elektrické, magnetické a elektromagnetické působení na pevné látky, užití polovodičových prvků, problémy fotografie, optické problémy, měření spekter typických zdrojů světla, aplikace laserů, fyzikální základy mikroelektroniky, modelování mechanických dějů, studium aerodynamiky a hydrodynamiky, netradiční pomůcky pro výuku fyziky, modelování fyzikálních jevů na počítači atd.

Středoškolská odborná činnost v oboru fyzika tak přispívá k realizaci Programu rozvíjení účasti dětí a mládeže ve vědeckotechnickém rozvoji [2], schváleném vládou ČSSR v r. 1984. Všechny formy odborné přípravy žáků středních škol musí přispívat k větší orientaci na hlavní obory vědeckotechnického rozvoje a napomáhat k vytváření hlubšího vztahu žáků ke zvolenému studijnímu oboru a odborné specializaci.

Literatura:

[1] Kluiber, Z.: Fyzika v 6. ročníku SOČ. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 63, 1984/85, č. 5, str. 238—240.

[2] Program rozvíjení účasti dětí a mládeže ve vědeckotechnickém rozvoji. Federální úřad pro tisk a informace, Praha 1985, 36 str.

INFORMACE

Písemná přijímací zkouška z matematiky na MFF UK v Praze v r. 1985

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

Pokud se zajímáte o studium na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, je pravděpodobné, že uvítáte texty úloh, které v rámci přijímacích zkoušek řešili ve dnech 18.—20. června 1985 vaši předchůdci. Pro každého uchazeče byl připraven jeden ze tří souborů pěti příkladů v závislosti na tom, na který z oborů, jež lze na fakultě studovat, se hlásil. K vypracování každé pětice bylo přitom k dispozici 90 minut čistého času.

a) *Soubor pro uchazeče o matematické obory*:

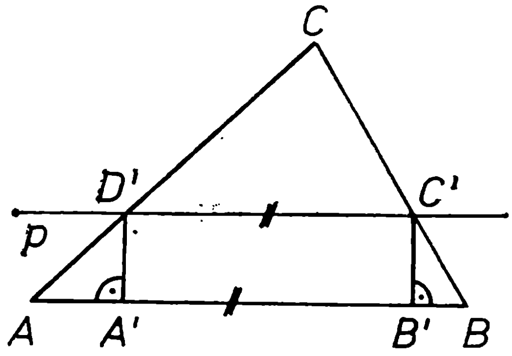
1. Určete všechna reálná čísla x, pro něž

$$\frac{1}{|x-1|} \geqq \frac{2}{|x-2|}.$$

$$\left[\text{Všechna } x \in \langle 0, 1) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right\rangle\right]$$

2. Zjistěte, jak je třeba v trojúhelníku ABC vést přímku p rovnoběžnou se základnou AB, aby obsah obdélníku $A'B'C'D'$ byl maximální (obr. 1).

3. a) Dokažte matematickou indukcí rovnost



Obr. 1

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

pro všechna n, k přirozená, $k \leqq n$.

$$\left(\text{Návod: } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\right).$$

b) Z této rovnosti pro $k = 1$ a $k = 2$ odvoďte vzorce

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Stanovte obsah trojúhelníku ABC, jehož vrcholy leží na jednotkové kružnici se středem v počátku P tak, že úsečky PA, PB, PC svírají s kladnou x-ovou poloosou po řadě úhly 0, α, 2α;

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ [Obsah je $(1 - \cos \alpha) \sin \alpha$.]

5. Určete všechna reálná čísla x, pro něž

$$5^{2x-1} + 5^{x-1} = 250$$

[Jediné řešení, $x = 2$].

b) *Soubor pro uchazeče o fyzikální obory:*

1. Určete všechna reálná čísla x, pro něž

$$\frac{|x^2 + x - 2|}{|x + 2|} \geqq \frac{|x^2 - 4|}{|x - 2|}$$

$\left[\text{Všechna } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{1}{2}>.\right]$

2. Pro která $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ je

$$1 - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha + \qquad = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha}\ ?$$

$\left[\text{Pouze pro } \alpha = \frac{\pi}{6}\right]$.

3. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \geqq 0$ celé, existuje celé $k_n \geqq 0$ tak, že
$$10^n = k_n \; 11 + (-1)^n$$
4. Zkonstruujte všechny body v rovině, z nichž je vidět úsečky AB a CD (A [0, 0], B [0, 1], C [1, 0], D [3, 0]) obě pod úhlem 45°. [Jediný bod].
5. Najděte všechny neuspořádané dvojice celých čísel takových, že součin obou čísel v dvojici je dvakrát větší než jejich součet. [Vyhovují právě tyto dvojice: $\{-2, 1\}$, $\{0, 0\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$.]

c) *Soubor pro uchazeče o učitelské studium:*

1. Pro kterou hodnotu a se parabola $y = ax^2$ dotýká přímky $y = x - 1$? Určete bod dotyku.
$\left[\text{Pro } a = \frac{1}{4}, \text{ bod dotyku je bod } [2, 1].\right]$
2. V množině všech reálných čísel řešte nerovnici
$$\frac{1}{|x+1|} \geqq 3\,.$$
$\left[\text{Všechna } x \in \left<-\frac{4}{3}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right>.\right]$
3. V množině všech reálných čísel řešte rovnici
$$\frac{\log 2x}{\log\,(4x-15)} = 2\,.$$
$\left[\text{Jediné řešení, } x = \frac{9}{2}\right]$.
4. Je dána nekonečná geometrická řada $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \quad$, pro niž platí: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_3 = \dfrac{2}{4 + 3\sqrt{2}}$. Určete její součet, existuje-li.
Poznámka: $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 = (1 - \sqrt{2})^2$.
[Právě dvě možnosti: $s_1 = 1 + \sqrt{2}$, $s_2 = 1$.]
5. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, K je střed hrany $A'B'$ Vypočtěte obsah průniku krychle a roviny CKD', je-li $|AB| = 10$ cm. [Obsah je 112,5 cm^2.]

Snad vás bude rovněž zajímat i rozložení přihlášených studentů do studijních oborů a porovnání počtu přihlášených se směrným číslem. Toto srovnání je v následujícím textu provedeno pro jednotlivé obory formou uspořádané dvojice [s, p], kde s značí směrné číslo a p počet přihlášených:

Uchazeči o matematické obory:

matematická analýza [25, 27], přibližné a numerické metody [20, 41], pravděpodobnost a matematická statistika [25, 21], teoretická kybernetika, matematická informatika a teorie systémů [40, 73].

Uchazeči o fyzikální obory:

fyzika mezních oborů [20, 33], fyzika pevných látek [15, 5], fyzikální elektronika a optika [25, 25], biofyzika a chemická fyzika [20, 23], jaderná fyzika [10, 21].

Uchazeči o studium učitelství:

kombinace matematika—fyzika [45, 50], kombinace fyzika — základy techniky [20, 7], kombinace matematika — matematická informatika [10, 26]. (Ve školním roce 1985—86 nebylo otevřeno studium kombinace matematika—deskriptivní geometrie, začalo však studium kombinace matematika—matematická informatika.)

Úlohu určit z těchto údajů směrné číslo a celkový počet přihlášených na každý ze tří uvedených typů studia, jakož i úlohu odvodit tyto údaje pro fakultu jako celek, přenechávám čtenáři za cvičení.

Kalendár M-F: február 1986

1. II. 1976 zomrel *Werner Karl Heisenberg*, nemecký teoretický fyzik. Patrí k zakladateľom kvantovej mechaniky, formuloval princíp neurčitosti. Významné sú jeho práce z jadernej fyziky a feromagnetizmu. V roku 1932 získal Nobelovu cenu za významné základné práce v oblasti kvantovej mechaniky.

3. II. 1956 zomrel *Emile Borel*, francúzsky matematik. Aktívne rozvíjal mnohé oblasti súčasnej matematickej analýzy.

7. II. 1816 sa narodil *Jasques Frederic Frenet*, francúzsky matematik. Pracoval v oblasti diferenciálnej geometrie kriviek a plôch.

10. II. 1891 zomrela v Štokholme *Sofia Vasiljevna Kovalevská*, ruská matematička. Zaoberala sa diferenciálnymi rovnicami, integrálnym počtom a problémami teoretickej fyziky. Získala cenu francúzskej i švédskej Akadémie vied.

10. II. 1911 sa v Rige narodil *Mstislav Vsevolodovič Keldyš*, sovietsky matematik a mechanik. Od roku 1961 prezident AV ZSSR. Pracoval

v oblasti teórie funkcií kompexnej premennej a teórie diferenciálnych rovníc. Aplikoval matematické metódy v aerodynamike, hydromechanike, teórii kmitania. Bol členom mnohých AV, nositeľom cien a vyznamenaní.

12. II. 1916 zomrel v Brunswicku *Richard Dedekind*, nemecký matematik. Položil základy súčasnej algebry, sformuloval úplný systém axióm aritmetiky. Vytvoril presnú teóriu iracionálnych čísel.

15. II. 1861 sa narodil *Alfred North Whitehead*, anglický matematik, logik a filozof. Prácou „Principia Mathematica" napísanou spolu s B. Russelom prispel k rozvoju matematickej logiky.

18. II. 1851 zomrel *Karl Gustav Jacob Jacobi*, nemecký matematik a fyzik. Vybudoval teóriu eliptických funkcií, zaslúžil sa o rozvoj mechaniky.

21. II. 1926 zomrel v Leydene *Heike Kamerlingh-Onnes*, holandský fyzik. Pracoval v oblasti nízkych teplôt. V roku 1913 získal Nobelovu cenu za fyziku. Objavil výrobu tekutého hélia. Rozvinul modernú teóriu látok.

24. II. 1856 zomrel v Kazani *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij*, ruský matematik, zakladateľ neeuklidovskej geometrie. Dosiahol vážne výsledky v teórii trigonometrických radov a teórii gama-funkcií.

24. II. 1866 sa v Moskve narodil *Peter Nikolajevič Lebedev*, ruský fyzik. Dokázal existenciu tlaku svetelného žiarenia, experimentoval s veľmi krátkymi vlnami.

26. II. 1786 sa narodil *Dominique Francois Arago*, francúzsky fyzik a astronóm. Autor mnohých objavov v optike, elektromagnetizme, meteorológii.

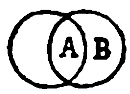
27. II. 1881 sa narodil *Luitzen Egbertus Brouwer*, holandský matematik, logik. Zakladateľ modernej topológie. Kritizoval logické základy matematiky, vytvoril filozoficko-matematický smer — intuicionizmus.

dj

Eulerovy kruhy

Jméno *Leonharda Eulera* (1707 až 1783) se stalo součástí názvů řady matematických pojmů (Eulerova konstanta, Eulerova přímka, Eulerova kružnice v trojúhelníku apod.). Eulerovy kruhy však patří mezi výkladové prostředky *logiky*; každý kruh schematicky znázorňuje rozsah jednoho pojmu, tj. souhrn všech objektů, které mají všechny charakteristické vlastnosti tohoto pojmu. Vzájemná poloha dvou kruhů může potom znázornit vztah rozsahů dvou pojmů, zejména případy, kdy jeden je částí druhého, kdy mají společné objekty, ale žádný není částí druhého, kdy jsou disjunktní, tj. nemají žádný společný objekt.

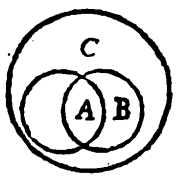
Soit donc la premiere proposition affirmative particuliere renfermée dans cette forme générale



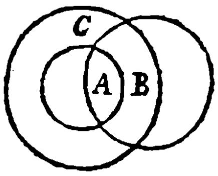
Quelque A est B

où une partie de la notion *A* est contenue dans la notion *B*.

Mais si la notion *C* renferme en soi la notion *A*, il est certain qu'elle aura aussi une portion contenue dans la notion *B*: comme



ou



d'où résulte cette forme de syllogisme:

Quelque *A* est *B*:
Or Tout *A* est *C*:
Donc Quelque *C* est *B*.

Na obrázku vidíme jednu stránku z Eulerova popularizačního spisu *Dopisy jedné německé princezně o různých tématech z fyziky a filozofie*, který napsal francouzsky v době svého působení v Berlíně (1741—1766). Dopisy byly samozřejmě určeny laické veřejnosti, proto také vyšly tiskem a byly přeloženy do řady jazyků během velmi krátké doby. Horní schéma znázorňuje výrok *Některé A je B*, dolní dvě schémata se třemi kruhy znázorňují dvě možnosti, které mohou nastat, když dále platí výrok *Každé A je C*. Protože v obou případech mají kruhy *C*, *B* neprázdný průnik, považoval Euler za prokázané, že platí závěr „*Tedy některé C je B*" napsaný na posledním řádku.

Poznamenejme ještě, že v *Dopisech* pojednával Euler i o hudbě, etice a o fyzikálních jevech. V 94. dopise se zmínil i o své korespondenci s „jedním knězem z Moravy, který se jmenuje *Prokop Diviš*", psal mu samozřejmě o atmosférické elektřině a ochraně před blesky. (V minulém čísle Rozhledů jsme na tomto místě viděli Divišův povětrnostní stroj.)

Jaroslav Šedivý

Čo je matematika?

Matematika je najkrajším a najmohutnejším výtvorom ľudského ducha.

S. Banach

Matematika je jazykom, ktorým hovoria všetky presné vedy.

N. I. Lobačevskij

Matematika je mikrosvet sám pre seba; má však tiež schopnosť odrážať a modelovať procesy myslenia a možno aj celú vedu.

M. Kac a S. M. Ulam

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

ROČNÍK 64, 1985/86
BŘEZEN

(7)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

O kódech zabezpečených paritou

RNDr. JIŘI MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

V článku [3] jsme si ukázali, že chyby vzniklé v kódových slovech lze objevit, omezíme-li se na kódová slova splňující nějakou vhodnou snadno kontrolovatelnou podmínku. Takovou podmínkou je kód *zabezpečen*. U kódů „dva z pěti" bylo každé kódové slovo vytvořeno ze dvou znaků I a tří znaků O. Obecnější by bylo užívat kódová slova, v nichž je znaků I sudý počet. O takových slovech říkáme, že mají *sudou paritu*. Kdyby znaků I byl lichý počet, pak by šlo o slova s *lichou paritou*. Obdobně budeme o sudé a liché paritě hovořit i u uspořádaných n-tic z prvků I a O, aniž budou slovy v nějakém kódu.

Řešme úlohu: Dáno je přirozené číslo $n \geqq 1$. Kolik existuje navzájem různých n-tic liché parity?

Při řešení této úlohy je vhodné si uvědomit, že jestliže z libovolné n-tice ($n \geqq 2$) liché parity odebereme poslední prvek, kterým může být buď O nebo I, dostaneme (n — 1)-tici liché anebo sudé parity. Dále je třeba uvážit, že odebráním posledního prvku u dvou navzájem různých n-tic ($n \geqq 2$) liché parity nikdy nedostaneme tutéž (n — 1)-tici. Totiž každé dvě navzájem různé n-tice liché parity se musí lišit aspoň na dvou různých místech. Konečně je ještě třeba si uvědomit, že z libovolné (n-1)-tice ($n \geqq 2$) dostaneme n-tici liché parity takto: Je-li daná (n — 1)-tice liché parity, přidáme jako další prvek O; je-li daná (n — 1)-tice sudé parity, pak přidáme prvek I. Z těchto všech úvah plyne, že v případě $n \geqq 2$ je n-tic liché parity celkem právě tolik, jako (n — 1)-tic libovolné parity, tj. 2^{n-1}. Pro $n = 1$ tento počet také souhlasí; „jednice" liché parity je jediná, a to (I).

Obdobnými úvahami jako výše dojdeme k závěru, že n-tic ($n \geqq 1$) sudé parity je také 2^{n-1}. Za n-tici sudé parity považujeme samozřejmě i n-tici, která neobsahuje žádný prvek I, neboť nula je sudé číslo.

Naše určení počtu n-tic liché (sudé) parity odpovídá také tomu, že n-tic libovolné parity je celkem

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} .$$

Pro kód desítkových číslic musíme mít deset kódových slov, a proto kódy desítkových číslic se slovy téže parity musí být aspoň pětibitové. V případě pětibitového kódu máme pro kódová slova celkem $2^4 = 16$

uspořádaných pětic. Kódů se slovy liché (resp. sudé) parity (tj. zobrazení množiny deseti číslic do množiny šestnácti uspořádaných pětic) je pak

$$16 \,.\, 15 \,.\qquad 7 = \frac{16!}{6!} \doteq 2{,}9 \,.\, 10^{10}$$

Pětibitových kódů desítkových číslic se slovy téže parity je tedy celkem

$$2 \,.\, \frac{16!}{6!} \doteq 5{,}9 \,.\, 10^{10}$$

Příklady dvou pětibitových kódů s kódovými slovy téže parity jsou v tabulce 1. Oba vznikly z kódu BCD (viz [1]) přidáním tzv. *paritního bitu* P_L, resp P_S. Ve sloupci P_L jsme doplnili původní kódová slova kódu BCD znaky O nebo I tak, aby vznikly pětice liché parity. Jak se postupovalo v případě druhého kódu v tab. 1 si jistě vysvětlíte sami. Pro kód BCD je výhodnější doplnění na lichou paritu, protože pak kódové slovo pro nulu obsahuje jeden znak I, což při přenosu nebo zpracování potvrzuje, že nedošlo k celkovému selhání zařízení a ztrátě všech signálů.

Dojde-li při přenosu libovolného kódového slova k právě jedné chybě, pak se vždy změní jeho parita. U kódů zabezpečených paritou se toho využívá k odhalení, zda nedošlo k jedné chybě. U kódů s paritním bitem samozřejmě může nastat chyba i v paritním bitu. Paritní bit má charakter *kontrolního bitu;* bity, které nesou informaci, se nazývají *informačními bity*. Tyto bity jsou v tabulce 1 ve sloupcích označených vahami 8, 4, 2, 1.

Tabulka 1

d	BCD					BCD				
	8	4	2	1	P_L	8	4	2	1	P_S
0	O	O	O	O	I	O	O	O	O	O
1	O	O	O	I	O	O	O	O	I	I
2	O	O	I	O	O	O	O	I	O	I
3	O	O	I	I	I	O	O	I	I	O
4	O	I	O	O	O	O	I	O	O	I
5	O	I	O	I	I	O	I	O	I	O
6	O	I	I	O	I	O	I	I	O	O
7	O	I	I	I	O	O	I	I	I	I
8	I	O	O	O	O	I	O	O	O	I
9	I	O	O	I	I	I	O	O	I	O

Paritních bitů se užívá nejen u číslicových kódů, ale také v telegrafních kódech; píše se o tom např. v knize [4].

Cvičení

1. V článku [1] nebo [2] vyhledejte další čtyřbitové kódy desítkových číslic a doplňte je paritními bity.
2. Invertovat kódové slovo složené ze znaků 0 a I znamená nahradit každý znak I znakem O a každý znak O nahradit znakem I. Dokažte, že invertováním čtyřbitového kódového slova se nemění jeho parita. Platí totéž i pro pětibitová kódová slova?
3. V článku [2] se píše o užívání devítkových doplňků při odčítání. Tyto doplňky lze získat u některých kódů invertováním. Přesvědčte se u vhodného kódu získaného ve cv. 1, že při vytváření devítkového doplňku nelze invertovat paritní bit.

Literatura

[1] Mída J.: Čtyřbitové kódy desítkových číslic, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 2, s. 51—54
[2] Mída J.: O odčítání v počítačích, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 3, s. 89—92
[3] Mída J.: Kódy „dva z pěti", Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 5, s. 177—178
[4] Klika O.: Vyprávění o telegrafech, Nadas, Praha 1978

Netradiční odvození známých vzorců

RNDr. EMIL CALDA, CSc., MFF UK Praha

I když podle výzkumů profesora Ypsilona v popularitě u středoškolské mládeže následuje Pascalův trojúhelník ihned za trojúhelníkem bermudským, budeme se v tomto článku zabývat trojúhelníkovými schematy, která Pascalův trojúhelník připomínají jen v některých ohledech.

První z nich je sestaveno z posloupnosti všech lichých přirozených čísel tak, že pro každé $k \in \mathrm{N}$ je v k-tém řádku právě k čísel:

$$\begin{array}{ll}
k = 1 & 1 \\
k = 2 & 3\quad 5 \\
k = 3 & 7\quad 9\quad 11 \\
k = 4 & 13\quad 15\quad 17\quad 19 \\
k = 5 & 21\quad 23\quad 25\quad 27\quad 29
\end{array}$$

Přiřaďme každému číslu tohoto schématu jeho pořadové číslo v posloupnosti

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,$$

jejíž n-tý člen je pro každé $n \in \mathrm{N}$ roven číslu $2n - 1$, a nechť

$$a_k, a_k + 2, a_k + 4, a_k + 6, \ldots, b_k$$

je k-tý řádek daného schématu. Vzhledem k tomu, že číslo b_k je posledním číslem k-tého řádku, a je tedy na $(1 + 2 + 3 + \ldots + k)$-tém místě uvedené posloupnosti, platí

$$b_k = 2 \, . \, (1 + 2 + 3 + \ldots + k) - 1 = 2 \, . \, \frac{k}{2} (k + 1) - 1 = k^2 + k - 1.$$

První číslo a_k k-tého řádku určíme z podmínky, že tento řádek představuje k-člennou aritmetickou posloupnost s diferencí rovnou dvěma, takže je $b_k = a_k + (k - 1) \, . \, 2$, odkud po dosazení za b_k dostáváme $a_k = k^2 - k + 1$. Součet všech k čísel

$$a_k + (a_k + 2) + (a_k + 4) + \ldots + b_k$$

k-tého řádku je tedy pro všechna $k \in \mathrm{N}$ roven číslu

$$\frac{k}{2} (a_k + b_k) = \frac{k}{2} [(k^2 - k + 1) + (k^2 + k - 1)] = k^3.$$

Určeme nyní součet S_n všech čísel v prvních n řádcích našeho schématu. Jak jsme právě ukázali, je součet všech čísel každého řádku roven třetí mocnině pořadového čísla tohoto řádku, takže je

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad + n^3$$

Součet S_n však můžeme určit i jako součet

$$1 + 3 + 5 + 7 \quad + a_n + (a_n + 2) + \quad + b_n \, ,$$

který má $\frac{n}{2} (n + 1)$ sčítanců a v němž je b_n poslední číslo n-tého řádku, tj. $b_n = n^2 + n - 1$; tímto způsobem dostaneme:

$$S_n = \frac{1}{2} \frac{n}{2} (n + 1) \; [1 + (n^2 + n - 1)] = \frac{n^2(n + 1)^2}{4} \, .$$

Porovnáním obou výsledků dostáváme, že pro všechna $n \in \mathrm{N}$ platí

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad + n^3 = \frac{n^2}{4} (n + 1)^2 \, .$$

Vzhledem k tomu, že je $\frac{n}{2} (n + 1) = 1 + 2 + 3 + \quad + n,$

vyplývá odtud, že pro všechna $n \in \mathrm{N}$ platí také

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \; . . + n)^2 \, .$$

Podobným způsobem odvodíme vzorec pro součet druhých mocnin prvních n celých kladných čísel. Vyjdeme ze schématu na str. 269 a určíme součet S'_n všech čísel v jeho prvních n řádcích. Je zřejmé, že je

$$S'_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \, ,$$

neboť součet všech čísel v k-tém řádku je pro každé $k \in \mathrm{N}$ roven k^2. Součet S'_n však můžeme určit i pomocí „šikmých sloupců“ schématu takto:

$k = 1$	1
$k = 2$	2 2
$k = 3$	3 3 3
$k = 4$	4 4 4 4
$k = 5$	5 5 5 5 5

$$S'_n = (1 + 2 + 3 + 4 + \quad + n) + (2 + 3 + 4 + \quad + n) + \\ + (3 + 4 + \quad + n) + ([n - 1] + n) + n\,.$$

Dostáváme tak

$$S'_n = \frac{n}{2}(n + 1) + \frac{n-1}{2}(n + 2) + \frac{n-2}{2}(n + 3) + \quad + \\ + \frac{2}{2}[(n - 1) + n] + \frac{1}{2}(n + n)\,,$$

což užitím symbolu sumace lze zapsat jako

$$S'_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n + k)(n - k + 1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n^2 + n - k^2 + k)$$

Vzhledem k tomu, že je $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ a že je dále $\sum\limits_{k=1}^{n} n^2 = n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} 1 =$

$$= n^3, \sum_{k=1}^{n} n = n\sum_{k=1}^{n} 1 = n^2, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}\left(n + 1\right), \text{ máme } \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(n^3 + n^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{n}{2}\left(n + 1\right)\right),$$

odkud po snadné úpravě dostaneme hledaný vzorec:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \quad + n^2 = \frac{n}{6}\left(n + 1\right)\left(2n + 1\right).$$

Tyto způsoby odvození vzorců pro součty druhých resp. třetích mocnin prvních n celých kladných čísel jsou nepochybně zajímavé, avšak obvyklým postupem založeným na binomické větě lze k nim dospět snadněji. Navíc lze tak získat vzorce pro součet k-tých mocnin nejen pro $k = 2$ a $k = 3$, ale pro libovolné přirozené číslo k. Ukažme si pro úplnost i tento způsob odvození.

Chceme-li získat vzorce pro součet druhých mocnin prvních n celých kladných čísel, vyjdeme ze známé rovnosti platné pro všechna reálná čísla a

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1\,,$$

dosadíme do ní postupně $a = 1, 2, 3, \ldots, n$ a takto vzniklých n rovností sečteme:

$$\begin{aligned}
2^3 &= 1^3 + 3\,.\,1^2 + 3\,.\,1 + 1\,,\\
3^3 &= 2^3 + 3\,.\,2^2 + 3\,.\,2 + 1\,,\\
4^3 &= 3^3 + 3\,.\,3^2 + 3\,.\,3 + 1\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^3 &= n^3 + 3\,.\,n^2 + 3\,.\,n + 1
\end{aligned}$$

Provádíme-li sčítání po sloupcích a přihlédneme-li k tomu, že součet sčítanců v posledním sloupci je roven n a že sčítanci $2^3, 3^3, \ldots, n^3$ ve sloupci na levé straně se vyruší s týmiž sčítanci v prvním sloupci na straně pravé, dostáváme

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\,.\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + $$
$$+ 3\,.\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n\,.$$

Užitím vzorce $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}\left(n+1\right)$, který považujeme za známý, dostaneme

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - n - 1\right] - \frac{n}{2}\left(n+1\right),$$

odkud po jednoduché úpravě máme hledaný výsledek:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}\left(n+1\right)\left(2n+1\right).$$

K určení vzorce pro součet třetích mocnin vyjdeme z rovnosti

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1\,,$$

dosadíme do ní postupně $a = 1, 2, 3, \ldots, n$ a vzniklých n rovností opět sečteme. Podobným způsobem jako v předešlém případě odvodíme

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4\,.\,(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + 6\,.\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) +$$
$$+ 4\,.\,(1 + 2 + \ldots + n) + n,$$

odkud — vzhledem k tomu, že součet $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ již známe — dostaneme

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2}{4}\left(n+1\right)^2$$

Je zřejmé, že tímto způsobem je možno odvodit vzorec pro součet $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ s libovolným přirozeným exponentem k, pokud ovšem jsme před tím odvodili tento vzorec pro k-1, k-2, ..., 3, 2.

Na závěr se můžete vyzkoušet a přesvědčit se na základě tohoto postupu, že platí

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n}{30}\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(3n^2 + 3n - 1\right).$$

Nalezením trojúhelníkového schematu, z něhož by bylo ı vzorec odvodit jako u schemat výše uvedených, byste tu nevyřešili.

O inverzní viditelnosti a inverzní persp

Doc. dr. LADISLAV DRS, CSc, ČVUT Praha

Promítáme-li neprůhledné mnohostěny, je účelné zobrazi dem na viditelnost. Průměty viditelných hran rýsujeme pln neviditelných slaběji a čárkovaně. Zvýšíme tak názorné p jekce.

Pojem „viditelnost" přebíráme do promítání z našich zl vidění. Bod B povrchu P tělesa je *viditelný*, jestliže *„zpět prsek"* bodu B, tj. úsečka mezi bodem B a okem neprotíná dalším bodě. V opačném případě je bod B *neviditelný*.

Toto kritérium platí beze změn pro perspektivu, jestliže ok středem perspektivy. Pojem „viditelnost" rozšíříme i na promítání, kde ovšem skutečné vidění z nekonečna nepřich Orientujme libovolně přímku s, určující směr promítání. B telný, jestliže promítací polopřímka z něho vycházející a op vaná nežli přímka s v žádném dalším bodě neprotíná povrc ném případě je bod B neviditelný.

Hrana mnohostěnu je viditelná, obsahuje-li viditelné bo hrany dělíme na vnitřní a obrysové.

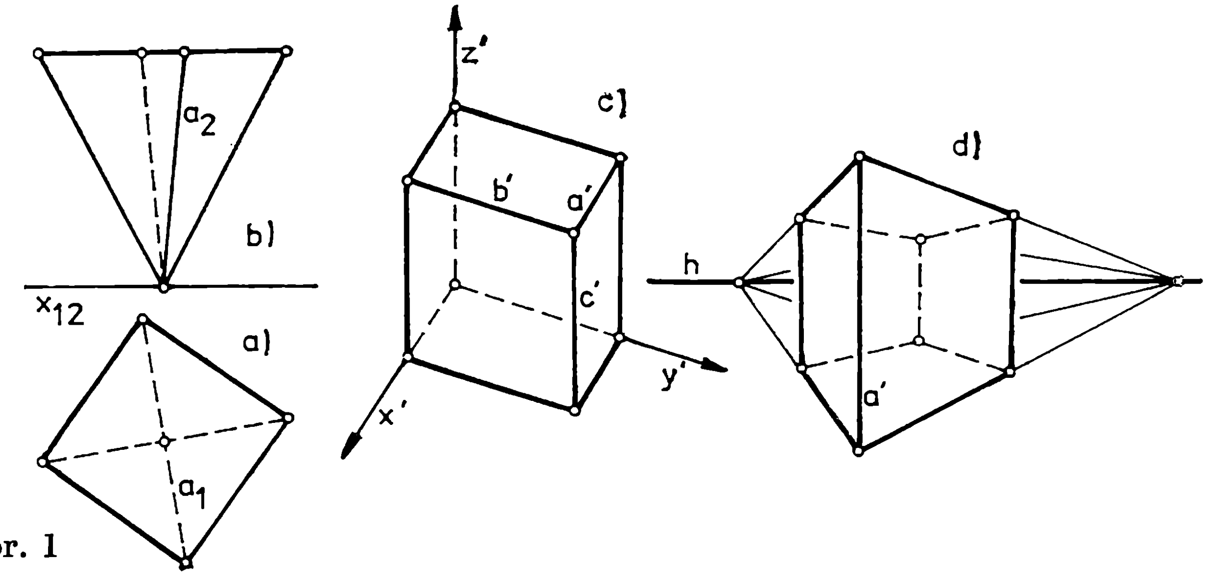
To, co bylo řečeno obecně, aplikujme nyní na běžné promí

V Mongeově promítání orientujeme obvykle promítací aby půdorys byl *pohledem shora* a nárys *pohledem zpředu* rovnoběžném promítání a v axonometrii je orientace přípa věcí úmluvy. V perspektivě je střed perspektivy počátečnín mítacích polopřímek.

Těmito zásadami jsme se řídili na obr. 1 .

Obr. 1a, b — půdorys a nárys jehlanu, přímka x_{12} je základn promítání. Pohled shora nemá vnitřní viditelné hrany, ob zpředu má jedinou vnitřní viditelnou hranu a, obr. 1b.

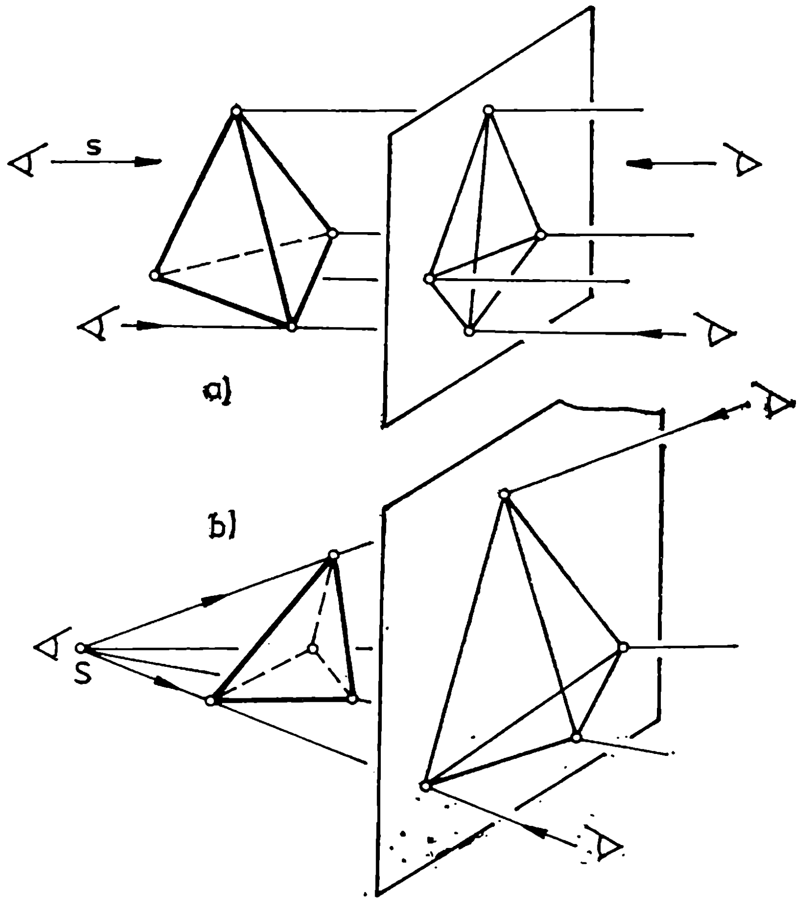
Obr. 1c — axonometrie hranolu, přímky x', y', z' jsou osy kého kříže, tj. průměty os x, y, z souřadnicové soustavy. O zvolili tak, že vznikl nadhled. Hranol má tři vnitřní vid a, b, c.



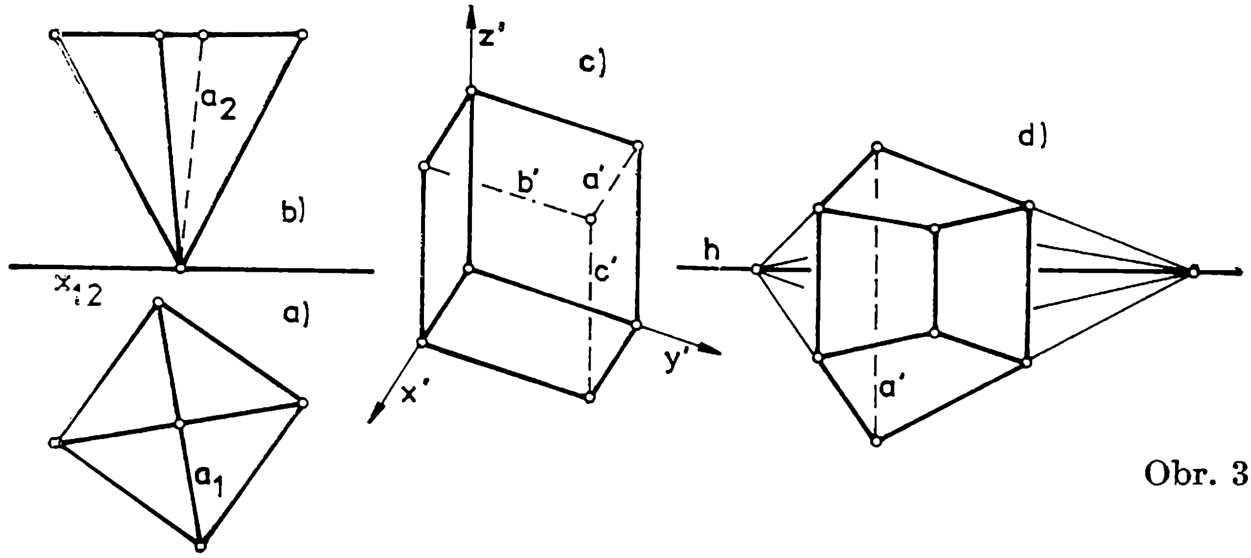
Obr. 1

Obr. 1d — perspektiva hranolu, přímka h je horizont perspektivy, tj. průmět nevlastní přímky vodorovných rovin. Hranol má jedinou vnitřní viditelnou hranu a.

Inverzní viditelnost vznikne změnou orientace na promítacích přímkách (v rovnoběžném promítání) a polopřímkách (v perspektivě). Na obr. 2 je vlevo naznačena poloha pozorovatele při původní orientaci (v rovnoběžném promítání obr. 2a, ve středovém promítání obr. 2b) a vpravo při opačné orientaci promítacích přímek.



Obr. 2



Obr. 3

O vztahu mezi původní a inverzní viditelností platí:

Vnitřní viditelné hrany při původní viditelnosti se stanou neviditelnými při inverzní viditelnosti, všechny ostatní hrany jsou viditelné (tj. obrysové a vnitřní neviditelné při původní viditelnosti).

Na obr. 3 jsou tělesa z obr. 1 zobrazena s inverzní viditelností.

Obr. 3a — pohled shora se inverzní viditelností změní v pohled zdola. Jehlan nemá vnitřní neviditelné hrany.

Obr. 3 b — pohled zpředu se inverzní viditelností změní v pohled zezadu. Jehlan má vnitřní neviditelnou hranu *a*.

Obr. 3c — nadhled se inverzní viditelností změní v podhled. Hranol má vnitřní neviditelné hrany *a*, *b*, *c*.

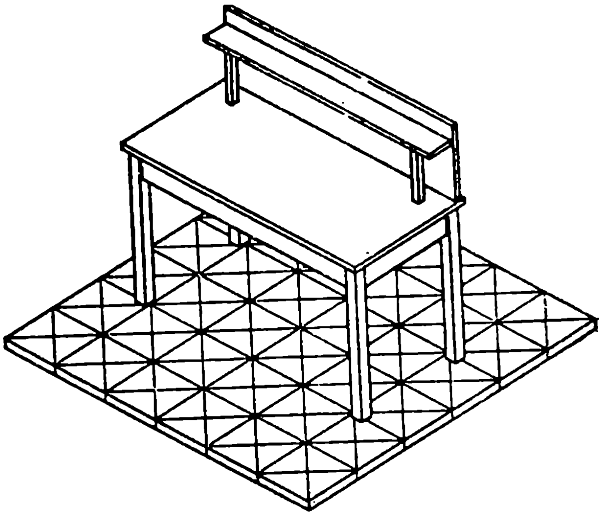
Nejzajímavější je obr. 3 d. Zdá se, že toto zobrazení je buď zcela nemožné, nebo alespoň velmi nepřirozené. Má jedinou neviditelnou hranu *a* (hranu s nejdelším průmětem!).

Na obr. 2b si můžeme tuto neobvyklost vysvětlit. Zatímco orientace promítacích polopřímek od středu promítání (oka) *S* k promítaným bodům je obvyklá a odpovídá procesu vidění, při opačné orientaci je nutno oko přemísťovat postupně na všechny promítací paprsky. Tento předpoklad není však tak nemožný, jak by se na prvý pohled zdálo. Ani při rovnoběžném promítání nelze oko umístit do nekonečna, tj. do společného nevlastního bodu rovnoběžných promítacích přímek. I zde musíme předpokládat jeho postupné přesouvání na všechny promítací přímky, obr. 2a.

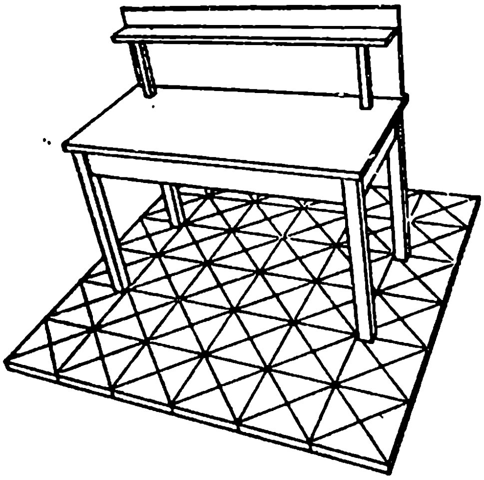
Obr. 3d je proto sice nezvyklý, ale z geometrického hlediska je správný.

Obr. 4 dokládá zobrazení tohoto druhu v umění. Na reprodukci miniatury z moskevského evangeliáře z první třetiny patnáctého století (z knihy *L. F. Shegin* „Die Sprache des Bildes", vydané v r. 1982) vidíme různá hranolová tělesa. Průměty rovnoběžných úseček v rovinách vodorovných (sedátko, stolek), svislých (stěny věží) i šikmých (podnožka, psací deska, střechy věží) se rozbíhají do hloubky obrazu, zcela v souhlase s obr. 3d.

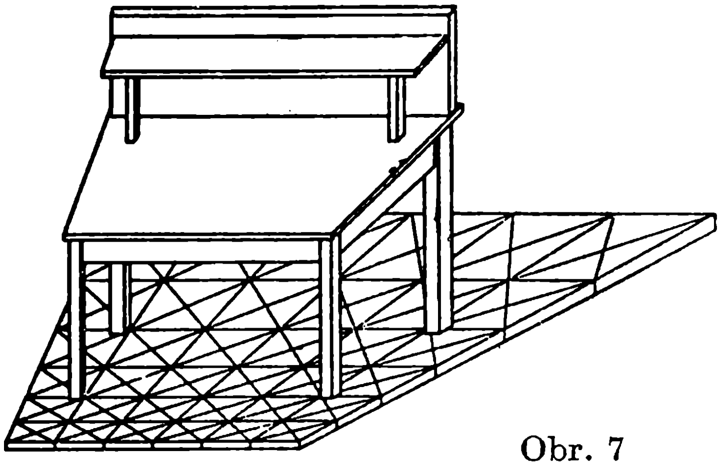
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Podobné zobrazení je na ikonách a ve středověkém malířství obvyklé. Nazývá se „*inverzní perspektivou*" (obratnaja p., la p. inverse, the inverted p., die umgekehrte P.), neboť zdánlivě staví na hlavu základní vlastnost perspektivy, tj. sbíhání perspektiv rovnoběžných přímek směrem do hloubky obrazu. Jejím vysvětlením se zabývají různé vědecké studie. Autor citované knihy odůvodňuje inverzní perspektivu tím, že umělec nepoužil princip promítání z jednoho bodu. Tato zásada není totiž v malířství podstatná. Obraz, který vznikne jako syntéza pohledů z více míst, může být úplnější a působivější. Koneckonců i zobrazení na základě Mongeova promítání, nebo podle zásad technického kreslení, určuje dokonale prostorový útvar také jen díky tomu, že je složeno ze dvou či více pohledů.

Teprve renesance a pozdější směry (zejména baroko) používají přísné zákony perspektivy. Ale začátkem dvacátého století se v malířství znovu objevuje princip zobrazování z několika míst současně, a to v kubistických obrazech, a tato zásada již malířské směry neopustila.

Inverzní perspektiva není pouze záležitost středověku. Obr. 5 až 7 jsou automatickými kresbami pracovního stolu, stojícího na podložce s ornamentem čtverců a jejich diagonál. Obr. 5 je rovnoběžný průmět, obr. 6 perspektiva a v obr. 7 poznáváme naši inverzní perspektivu. K automatickému narýsování obr. 5—7 se použil kreslicí systém Autoprod (North East London Polytechnic), vypracovaný pro rovnoběžná promítání, perspektivy a inverzní perspektivy s respektováním viditelnosti.

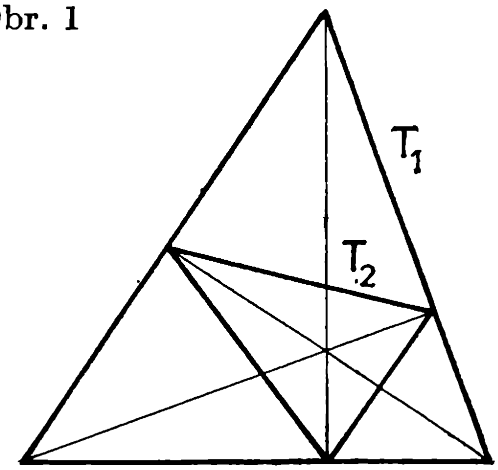
O posloupnosti ortických trojúhelníků

RNDr. JAROSLAV ŠVRČEK, PřF UP Olomouc

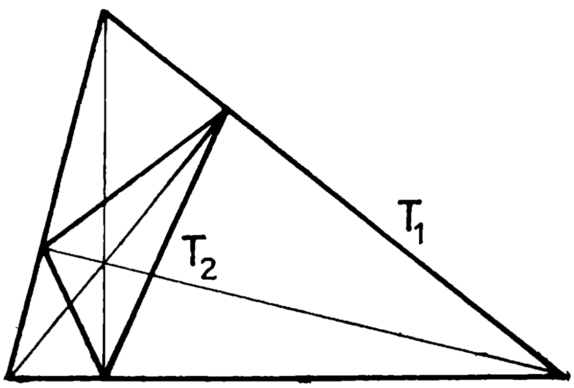
Libovolný ostroúhlý trojúhelník označme T_1. Paty výšek tohoto trojúhelníka jsou vnitřními body jeho stran a můžeme je považovat za vrcholy nového trojúhelníka — označíme jej T_2. V elementární geometrii bývá trojúhelník T_2 nazýván ortickým trojúhelníkem trojúhelníka T_1.

V případě, že pro daný ostroúhlý trojúhelník T_1 je jeho ortický trojúhelník T_2 ostroúhlý (obr. 1), můžeme sestrojit ortický trojúhelník T_3 příslušný ostroúhlému trojúhelníku T_2 atd. Tímto postupem lze získat posloupnost trojúhelníků $\{T_i\}$, v níž T_{i+1} je ortickým trojúhelníkem trojúhelníka T_i. Tuto posloupnost nazveme posloupností ortických trojúhelníků. Všimněme si dále, že v této posloupnosti je trojúhelník T_{i+1} jednoznačně určen trojúhelníkem T_i, jedná se tedy o rekurentní zadání posloupnosti.

Obr. 1



Obr. 2



Ortický trojúhelník daného ostroúhlého trojúhelníka nemusí být vždy ostroúhlým trojúhelníkem (obr. 2). V mnoha případech je pak uvažovaná posloupnost $\{T_i\}$ ortických trojúhelníků konečná.

V této souvislosti si můžeme položit otázku: Jaké jsou nutné a postačující podmínky k tomu, aby k danému ostroúhlému trojúhelníku T_1 existovala nekonečná posloupnost $\{T\}_{i=1}^{\infty}$ ortických trojúhelníků?

Věta 1. Jsou-li velikosti vnitřních úhlů daného ostroúhlého trojúhelníka α, β, γ, pak velikosti vnitřních úhlů jeho ortického trojúhelníka jsou $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, $180° - 2\gamma$.

Důkaz: Budiž ABC libovolný ostroúhlý trojúhelník (obr. 3); písmeno V nechť značí ortocentrum (průsečík výšek) trojúhelníka ABC. Písmena V_a, V_b, V_c nechť značí po řadě paty výšek na strany BC, CA, AB daného trojúhelníka. Ve smyslu našeho značení je trojúhelník $V_aV_bV_c$ ortickým trojúhelníkem daného trojúhelníka ABC. Všimněme si nejprve čtyřúhelníka AV_cVV_b, který je tětivový, neboť body V_b, V_c jsou vrcholy pravých úhlů nad úsečkou AV Leží proto na kružnici o průměru $|AV|$. Platí proto podle vlastnosti obvodových úhlů také

$$|\sphericalangle VV_cV_b| = |\sphericalangle VAV_b| = 90° - \gamma .$$

Podobně z tětivového čtyřúhelníka BV_aVV_c vyplývá

$$|\sphericalangle VV_cV_a| = |\sphericalangle VBV_a| = 90° - \gamma .$$

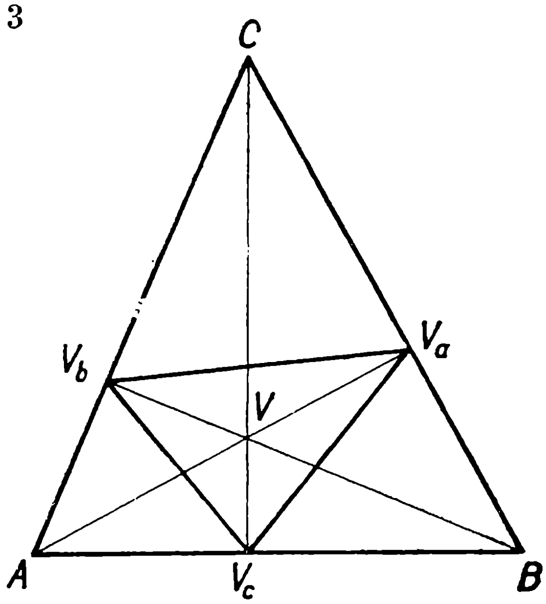
Úhly VV_cV_a, VV_cV_b leží v opačných polorovinách vzhledem k VV_c, proto úhel $V_bV_cV_a$ je součtem obou předešlých tj.

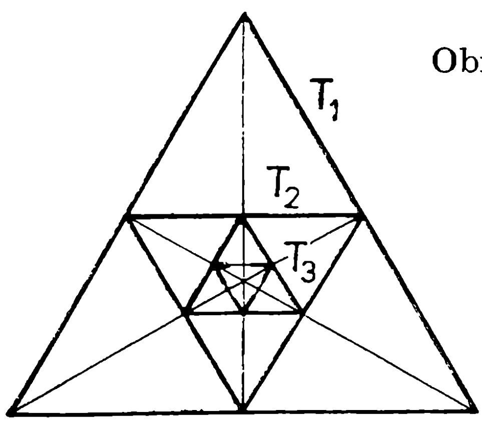
$$|\sphericalangle V_bV_cV_a| = 180° - 2\gamma .$$

Analogickým způsobem lze dokázat, že velikosti zbývajících vnitřních úhlů trojúhelníka $V_aV_bV_c$ jsou $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, čímž je věta dokázána.

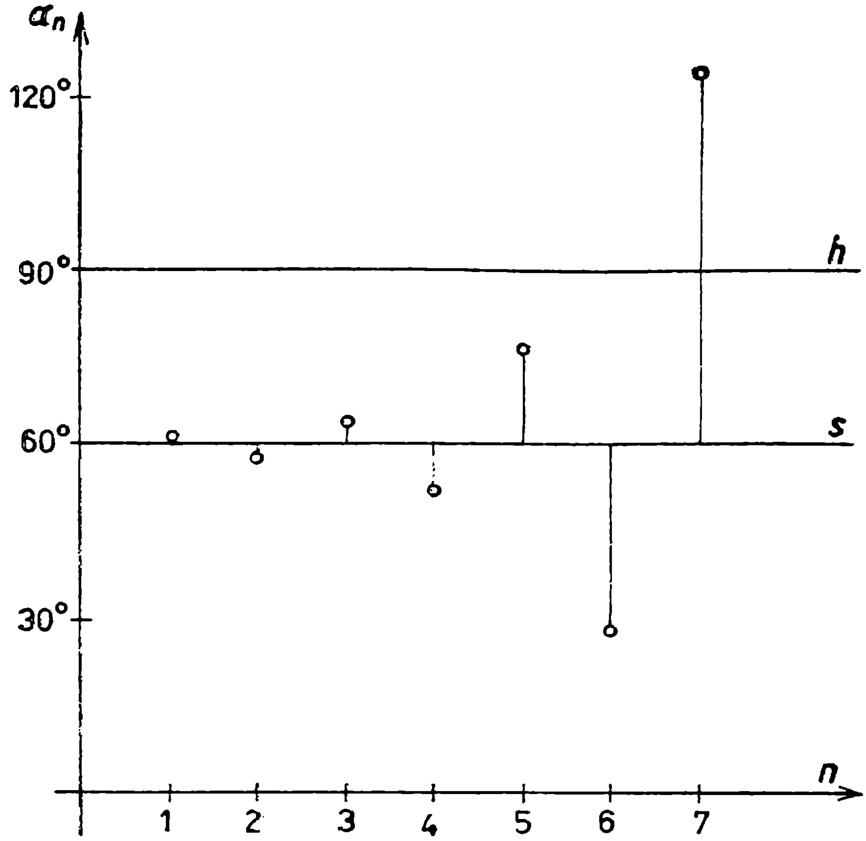
Nyní již můžeme přistoupit k vlastnímu řešení formulovaného problému.

Obr. 3





Obr. 4



Obr. 5

První způsob řešení:

a) Je-li trojúhelník T_1 rovnostranný, pak i T_2 je rovnostranný a všechny členy posloupnosti $\{T_i\}$ jsou rovnostranné trojúhelníky (obr. 4). V tomto případě je posloupnost ortických trojúhelníku nekonečná.

b) Nechť trojúhelník T_1 je ostroúhlý, ale není rovnostranný. Mezi jeho vnitřními úhly pak existuje aspoň jeden, který má velikost větší než 60°; označme jeho velikost α_1 a sledujme posloupnost velikostí $\{\alpha_i\}$ v trojúhelnících T_i. Zvolíme-li např. $\alpha_1 = 70°$, pak $\alpha_2 = 180° - 2 . 70° = 40°$, $\alpha_3 = 180° - 2 . 40° = 100°$. Třetí trojúhelník v takové posloupnosti je již jistě tupoúhlý a posloupnost ortických trojúhelníků je konečná. Podobně při volbě $\alpha_1 = 61°$ dostaneme posloupnost $\{\alpha_i\}$ s hodnotami 61°, 58°, 64°, 52°, 76°, 28°, 124°. Sedmý trojúhelník je tupoúhlý a uvažovaná posloupnost ortických trojúhelníků je opět konečná. Graf této posloupnosti (obr. 5) ukazuje, že vzdálenost bodů grafu od přímky s se zvětšuje s rostoucím i. Pro $i = 7$ je bod grafu nad přímkou h a znázorňuje tupoúhlý trojúhelník. Ukážeme dále, že pro každé $\alpha_1 > 60°$ najdeme liché přirozené číslo n takové, že $\alpha_n \geqq 90°$. Označme dále $\sigma_i = \alpha_i - 60°$ a vyšetřujme posloupnost $\{\sigma_i\}$.

Při daném ostroúhlém trojúhelníku T_1 je dán též první člen σ_1 posloupnosti $\{\sigma_i\}$ udávající odchylky od 60° členů posloupnosti $\{\alpha_i\}$. Pokusme se vyjádřit pro libovolné n přirozené σ_n v závislosti na σ_1. Užitím věty 1 snadno nahlédneme, že pro vnitřní úhel o velikosti $\alpha_2 = 180° - 2\alpha_1$ ortického trojúhelníka T_2 platí při daném σ_1: $\sigma_2 = \alpha_2 - 60° = (180° -$

$- 2\alpha_1) - 60° = 2(60° - \alpha_1) = -2\sigma_1 < 0$. Pro vnitřní úhel α_3 ortického trojúhelníka T_3 platí dále ze stejných důvodů

$$\alpha_3 = 180° - 2\alpha_2 = 180° - 2(180° - 2\alpha_1) = 4\alpha_1 - 180°$$

a pro odpovídající odchylku σ_3 máme pak vyjádření:

$\sigma_3 = (4\alpha_1 - 180°) - 60° = 4(\alpha_1 - 60°) = 4\sigma_1 > 0$. Tedy odchylka velikosti tohoto úhlu od 60° je v tomto případě čtyřikrát větší než odpovídající odchylka σ_1 v případě trojúhelníka T_1.

Užitím principu matematické indukce zjistíme, že pro každé n přirozené platí

$\sigma_n = (-2)^{n-1}\sigma_1$. Přitom není obtížné si povšimnout, že pouze pro lichá přirozená n mají odchylky σ_n kladné velikosti a přitom narůstají (obr. 5). Nutně tedy existuje liché přirozené číslo n takové, že $\sigma_n = (-2)^{n-1}\sigma_1 \geqq 90° - 60° = 30°$. Odpovídající ortický trojúhelník T_n je tupoúhlý a uvažovaná posloupnost tudíž konečná. Závěrem je tedy možno shrnout, že v odstavcích a), b) jsme dokázali následující implikace:

a) Je-li $\alpha_1 = 60°$, pak posloupnost $\{T_i\}$ je nekonečná.

b) Je-li $\alpha_1 \neq 60°$, pak posloupnost $\{T_i\}$ je konečná.

To znamená, že nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby posloupnost $\{T_i\}$ byla nekonečná, je rovnostrannost trojúhelníka T_1.

Druhý způsob řešení:

a) Lze konstatovat totéž, co v odstavci a) prvního způsobu řešení.

b) Podstatou druhého způsobu řešení bude stanovení všech hodnot x_1 takových, aby pro každé přirozené číslo i byla splněna podmínka

$$0° < x_i < 90°. \qquad \ldots\ldots (1)$$

Posloupnost $\{x_i\}$ přitom nahrazuje libovolnou z posloupností $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, $\{\gamma_i\}$, kde α_i, β_i, γ_i jsou vnitřní úhly trojúhelníka T_i. S ohledem na vyjádření odchylky σ_i, pomocí σ_1 pro posloupnost $\{\alpha_i\}$ (analogicky pro posloupnosti $\{\beta_i\}$, $\{\gamma_i\}$) dostáváme

$$x_i = 60° + (x_1 - 60°)(-2)^{i-1}. \qquad \ldots\ldots (2)$$

Dosazením do (1) dostáváme pro x_1 nerovnost

$$0° < 60° + (x_1 - 60°)(-2)^{i-1} < 90°. \qquad \ldots\ldots (3)$$

Z nerovnice (3) je patrné, že obecná úvaha vyžaduje rozlišení, kdy přirozené číslo i je liché nebo sudé, a to proto, abychom znali, zda nerovnici (3) budeme násobit kladným či záporným číslem. Po kratší úpravě, kterou přenechávám čtenáři, dospějeme od (3) ke vztahům:

(i) pro i liché

$$\left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right) . 60° < x_1 < \left(1 + \frac{1}{2^i}\right) . 60°, \qquad \ldots\ldots (4)$$

(ii) pro i sudé

$$\left(1 - \frac{1}{2^i}\right) . 60° < x_i < \left(1 + \frac{1}{2^{i-1}}\right) . 60° \qquad \ldots\ldots (5)$$

Hodnoty výrazů v okrouhlých závorkách ve (4) a (5) se s rostoucím i blíží, jak se snadno vidí, k číslu 1. Posloupnost ortických trojúhelníků má proto tím více členů, čím méně se $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ liší od 60° a nekonečně mnoho členů má posloupnost $\{T_i\}$ pouze v případě, když $x_1 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 60°$, tedy když trojúhelník T_1 je rovnostranný.

Pokročilejší čtenář, který je obeznámen s pojmem limity číselné posloupnosti, vystačí se známou skutečností, že $\lim \frac{1}{2^i} = 0$ pro $i \to \infty$, kterou užije, když ve vztazích (4) a (5) požaduje jejich splnění pro všechna přirozená čísla, tj. pro $i \to \infty$.

V odstavcích a), b) jsme nyní dokázali tyto implikace:

a) Je-li trojúhelník T_1 rovnostranný, pak posloupnost $\{T_i\}$ je nekonečná.

b) Je-li posloupnost $\{T_i\}$ nekonečná, pak T_1 je rovnostranný.

Dospěli jsme tak jiným způsobem k témuž výsledku jako v případě prvního způsobu řešení. Získaný výsledek můžeme proto formulovat jako větu.

Věta 2. K danému ostroúhlému trojúhelníku T_1 existuje nekonečná posloupnost $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ ortických trojúhelníků, právě když trojúhelník T_1 je rovnostranný.

Cvičení: Pokuste se vyjádřit nerovnosti (4), (5) pomocí jediné postupné nerovnosti.

O řešení lineární diferenční rovnice druhého řádu

RNDr. MILAN TRCH, CSc., PedF UK Praha

V článku [1] jsme se podrobně seznámili s pojmem lineární diferenční rovnice, která má reálné koeficienty. V témže článku bylo podrobně popsáno řešení rovnice tohoto typu pro řád $n = 1$ a bylo také ukázáno, že řešení rovnice druhého řádu úzce souvisí s hledáním posloupností, které vyhovují rekurentní podmínce:

(1) Pro každé $n \in \mathrm{N}$ $\quad x_{n+2} + r \cdot x_{n+1} + s \cdot x_n = 0$, kde $r, s \in \mathrm{R}$.

V tomto článku se zaměříme na úplný popis řešení rovnice typu (1) a zobecnění celé metody.

Předně je dobré si všimnout, že podmínce (1) vyhovuje nekonečně mnoho posloupností reálných čísel. Zvolíme-li totiž zcela libovolně reálná čísla x_1, x_2, jsou podmínkou (1) jednoznačně určeny zbývající členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje podmínku (1). Mezi těmito posloupnostmi je také posloupnost $\{0, 0, \ldots, 0, \quad\}$, o které se často hovoří jako o „triviálním" řešení. Tím bychom mohli vlastně úlohu pokládat za vyřešenou. Existuje však ještě výhodnější popis řešení, při kterém stačí znát pouze dvě vhodné posloupnosti vyhovující podmínce (1). K tomu je však třeba poznat další vlastnosti posloupností splňujících danou podmínku.

Buďte v, w dvě libovolná reálná čísla, $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ dvě libovolné posloupnosti splňující rekurentní podmínku (1). Potom také posloupnost $\{v \,.\, a_k + w \,.\, b_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňuje tutéž podmínku. Platí totiž:

$$(v \,.\, a_{n+2} + w \,.\, b_{n+2}) + r \,.\, (v \,.\, a_{n+1} + w \,.\, b_{n+1}) + s \,.\, (v \,.\, a_n + w \,.\, b_n) =$$
$$= v \;(a_{n+2} + r \,.\, a_{n+1} + s \,.\, a_n) + w \,.\, (b_{n+2} + r \,.\, b_{n+1} + s \,.\, b_n) =$$
$$= 0 + 0 = 0\,.$$

Definujeme-li si součet posloupností $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ jako posloupnost $\{a_k + b_k\}_{k=1}^{\infty}$ a násobek posloupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ reálným číslem u jako posloupnost $\{u \,.\, a_i\}_{i=1}^{\infty}$, můžeme dokázaný poznatek snadno popsat následující větou.

Věta: Množina všech posloupností, které vyhovují podmínce (1), je uzavřená na sčítání posloupností i na násobek posloupnosti reálným číslem.

Ukážeme, že tato věta může velmi pomoci při popisu všech posloupností, které splňují podmínku (1). K určení libovolného řešení rovnice (1) totiž stačí znát prvé dva členy x_1, x_2 posloupnosti. Představme si, že již známe nějaká dvě řešení $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ rovnice (1) a uvažujme o soustavě rovnic

$$x_1 = v \,.\, a_1 + w \;\; b_1$$
$$x_2 = v \,.\, a_2 + w \,.\, b_2$$

s neznámými v, w. Pokud bude výraz $a_1 \;\; b_2 - a_2 \,.\, b_1$ různý od nuly, můžeme vyjádřit neznámé v, w ve tvaru:

$$v = \frac{x_1 \,.\, b_2 - x_2 \,.\, b_1}{a_1 \,.\, b_2 - a_2 \,.\, b_1}\,, \qquad w = \frac{x_1 \,.\, a_2 - x_2 \,.\, a_1}{a_2 \,.\, b_1 - a_1 \,.\, b_2}\,,$$

To ovšem znamená, že pomocí reálných čísel v, w umíme určit i další členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Platí totiž podle (1) pro $n = 1$:

$$x_3 = - r \,.\, x_2 - s \,.\, x_1 = - r \;\; (v \,.\, a_2 + w \,.\, b_2) - s \,.\, (v \,.\, a_1 + w \,.\, b_1) =$$
$$= v \;\; (- r \,.\, a_2 - s \,.\, a_1) + w \;\; (- r \,.\, b_2 - s \,.\, b_1) = v \,.\, a_3 + w \,.\, b_3$$

Podobně lze indukcí dokázat, že pak už pro všechna přirozená n je

$$x_n = v \,.\, a_n + w \,.\, b_n\,.$$

Proto můžeme — ovšem pouze za předpokladu, že $a_1 \,.\, b_2 - a_2 \,.\, b_1 \neq 0$ — každou posloupnost vyhovující (1) zapsat ve tvaru $\{v \,.\, a_n + w \,.\, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ kde v, w jsou reálná čísla.

Při hledání posloupností, které vyhovují podmínce (1) tedy stačí nalézt dvě různé posloupnosti splňující podmínku $a_1 \, . \, b_2 - a_2 \, . \, b_1 \neq 0$. Přitom nám mohou velmi pomoci právě geometrické posloupnosti. Předpokládejme totiž dále, že geometrická posloupnost $\{q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje podmínce (1). Potom platí:

$$q^{n+1} + r \, . \, q^n + s \, . \, q^{n-1} = 0 \, ,$$

což lze upravit do tvaru:

$$q^{n-1} \, . \, (q^2 + r \, . \, q + s) = 0 \, .$$

Tuto rovnici se jistě podaří splnit, pokud kvocient q bude kořenem kvadratické rovnice

(2) $$q^2 + r \, . \, q + s = 0 \, .$$

Všimněte si, že koeficienty v této rovnici jsou umístěny analogicky jako u rekurentní podmínky (1). To nám při praktickém výpočtu velmi usnadní řešení rekurentní podmínky. Dále si všimněte, že druhá možnost $q = 0$ není zajímavá, neboť poskytuje pouze triviální řešení rovnice (1). Při řešení kvadratické rovnice (2) mohou nastat tři případy:

1. rovnice má dva různé reálné kořeny, tj. $r^2 - 4s > 0$,
2. rovnice má jeden dvojnásobný kořen, tj. $r^2 - 4s = 0$,
3. rovnice nemá reálné kořeny, ale má za kořeny dvě komplexní čísla, která jsou komplexně sdružená. (Tato situace nastane v případě, že $r^2 - 4s < 0$) .

Podívejme se, co můžeme v jednotlivých případech říci o řešení rovnice (1). Pro jednoduchost označme diskriminant kvadratické rovnice (2) symbolem $D = (r/2)^2 - s$.

1. Je-li $D > 0$, potom rovnice (2) má dvě reálná řešení

$$q_1 = -\frac{r}{2} - \sqrt{D} \qquad\qquad q_2 = -\frac{r}{2} + \sqrt{D}$$

Proto prvé dva členy posloupností $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ jsou

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1$$
$$a_2 = q_1 \qquad b_2 = q_2$$

Tedy výraz $a_1 \, . \, b_2 - a_2 \, . \, b_1$ lze upravit do tvaru:

$$-\frac{r}{2} + \sqrt{D} - \left(-\frac{r}{2} - \sqrt{D}\right) = 2 \, . \, \sqrt{D} > 0$$

Požadovaná podmínka je tedy splněna, posloupnosti $\{q_1{}^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ $\{q_2{}^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ proto umožňují najít libovolné řešení rovnice (1). Toto řešení bude mít v daném případě tvar:

$$\left\{v \, . \, q_1^{n-1} + w \, . \, q_2^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{kde } v, w \in \mathrm{R} \, .$$

2. Je-li $D = 0$, pak rovnice má jediný reálný kořen $q = -\frac{r}{2}$. V tom-

to případě známe tedy pouze jediné řešení rovnice (1), a to geometrickou posloupnost $\{q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$. Lze však ukázat, že řešením je také posloupnost $\{(n-1) \, . \, q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ Platí totiž: $x_{n+2} + r \, . \, x_{n+1} + s \, . \, x_n = (n+1) \, . \, q^{n+1} + r \, . \, n \, . \, q^n + s \, . \, (n-1) \, . \, q^{n-1}$. Ve zkoumaném případě je však $q = -\frac{r}{2}$, $s = \frac{r^2}{4}$, a proto lze výraz upravit do tvaru:

$$q^{n-1} \, . \left[n \, . \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4} \right) + \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right) \right] = 0 \, .$$

Posloupnosti, které jsme uvedli, opět popisují všechna řešení rovnice (1).
Uvážíme-li, že $a_1 = 1$, $b_1 = 0$,
$a_2 = q$, $b_2 = q$,
pak obě posloupnosti zřejmě splňují podmínku $a_1 \, . \, b_2 - a_2 \, . \, b_1 \neq 0$, jakmile $q \neq 0$, tj. $r \neq 0 \neq s$.
Všechna řešení v tomto případě lze tedy opět popsat posloupnostmi

$$\{v \, . \, q^{n-1} + w \, . \, (n-1) \, . \, q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{kde } v, \; w \in \mathrm{R} \, .$$

3. I třetí případ, kdy $D < 0$, lze řešit pomocí geometrických posloupností, ale v oboru komplexních čísel. To je možno bez obtíží udělat, neboť všechny úvahy lze provést i v tomto oboru. Je třeba jen znát vlastnosti těchto čísel. Uvážíme-li, že v tomto případě připadají v úvahu jako kořeny komplexní čísla zapsaná v goniometrickém tvaru

$$q_1 = \varrho \, . \, (\cos \varphi + \mathrm{i} . \sin \varphi)$$
$$q_2 = \varrho \, . \, (\cos \varphi - \mathrm{i} . \sin \varphi) \, ,$$

můžeme s využitím Moivreovy věty nalézt následující posloupnosti:

$$a_n = \frac{q_1^{n-1} + q_2^{n-1}}{2} = \varrho^{n-1} \, . \, \cos(n-1)\varphi$$

$$b_n = \frac{q_1^{n-1} - q_2^{n-1}}{2 \, . \, \mathrm{i}} = \varrho^{n-1} \, . \, \sin(n-1)\varphi$$

O těchto posloupnostech můžeme znovu ukázat, že splňují podmínku $a_1 \, . \, b_2 - a_2 \, . \, b_1 \neq 0$ a umožňují tedy opět nalézt popis všech řešení pomocí dvou základních posloupností.

Ukažme si využití této teorie na konkrétním případě.

Příklad: „Najděte všechny posloupnosti reálných čísel, které vyhovují rekurentní podmínce $x_{n+2} + 2 \, . \, x_{n+1} - 3 \, . \, x_n = 0$."
Řešení: Pro geometrické posloupnosti, které splňují podmínku, musí platit, že kvocient q je kořenem rovnice

$$q^2 + 2 \, . \, q - 3 = 0 = (q+3) \, . \, (q-1) \, .$$

Tím dostáváme dvě různá řešení, která podle předchozích úvah již popisují všechna řešení dané úlohy. Každé řešení je zřejmě tvaru:

$$\{v \cdot (-3)^{n-1} + w \cdot 1^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{kde } v, w \in \mathrm{R}$$

Libovolné řešení je tedy součtem geometrické posloupnosti

$\{v \cdot (-3)^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ a konstantní posloupnosti $\{w, w, \quad\}$

Aritmetická posloupnost s diferencí d je definována rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n + d$. Z této podmínky však můžeme vyvodit i jiné rekurentní rovnice. Platí například

$$a_{n+2} - a_{n+1} = d = a_{n+1} - a_n$$

a odtud můžeme vyvodit rekurentní podmínku s reálnými koeficienty

$$a_{n+2} - 2 \cdot a_{n+1} + a_n = 0, \tag{3}$$

kterou již umíme řešit.

Řešením kvadratické rovnice $q^2 - 2 \cdot q + 1 = 0$ zjistíme, že existuje pouze jeden dvojnásobný kořen $q = 1$. Proto podle vyložené teorie vyhovují rekurentní podmínce (3) právě posloupnosti

$$\{v \cdot (1)^{n-1} + w \cdot (n-1) \cdot (1)^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{v + w \cdot (n-1)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Touto vlastností je však popsána aritmetická posloupnost s prvým členem v a diferencí w. Rekurentní podmínka (3) tedy popisuje právě množinu všech aritmetických posloupností, neboť v, w jsou libovolná reálná čísla.

Obdobné úvahy bychom mohli provést i pro rovnici třetího, čtvrtého a obecně k-tého řádu. V případě rovnice třetího řádu:

$$x_{n+3} + p \cdot x_{n+2} + r \cdot x_{n+1} + s \cdot x_n = 0$$

libovolné řešení lze zřejmě získat volbou tří čísel x_1, x_2, x_3, a je proto celkem přirozené, že všechny posloupnosti splňující danou podmínku lze popsat trojicí vhodných posloupností $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ Pouze podmínka pro to, aby rovnice na sobě „nezávisely", je poněkud složitější. Hledání geometrických posloupností opět vede k řešení kubické rovnice

$$q^3 + p \cdot q^2 + r \cdot q + s = 0.$$

Při diskusi možných řešení může být novinkou pouze případ, kdy rovnice má jediný trojnásobný kořen q. V takovém případě lze ukázat, že řešení budou tři posloupnosti: $\{q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(n-1) \cdot q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ a konečně také posloupnost $\{(n-1)^2 \cdot q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$. Z těchto tří posloupností lze pak i v takovém případě sestavit již všechna řešení zkoumané rovnice třetího řádu. Prakticky vzato, nemusí být výpočet řešení kubické rovnice příliš snadný. Důležité však je, že metoda zaručuje popis všech řešení pomocí trojice „základních řešení". Vlastnost formulovaná v jediné větě tohoto článku vám možná velmi připomíná vlastnosti vektorů. To vůbec není náhoda a ukazuje se, že zobecnění pojmu vektor má své opodstatnění. Daleko lépe se potom formuluje podmínka „nezávislosti" základních řešení.

Na závěr si ještě jednou všimneme aritmetické posloupnosti. Vedle již uvedené podmínky (3) totiž můžeme sestavit i podmínky další.

Protože platí: $$a_{n+3} - a_{n+2} = d = a_{n+1} - a_n\,,$$
musí být splněna i rekurentní podmínka:

Pro každé $n \in \mathrm{N}$ $$a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0\,.$$
Pokuste se najít všechny posloupnosti, které této podmínce vyhovují!

Literatura:

[1] Trch, M.: O lineárních diferenčních rovnicích, RMF, ročník 64, č. 6 str. 227—231

[2] Bican, L., Trch, M.: O řešení jednodušších diferenčních rovnic, RMF, ročník 64, č. 2, str. 45—47

FYZIKA

O hmote a jej vlastnostiach, alebo: čo nemáme v učebniciach

EVA BITTNEROVÁ, Bratislava

V roku 1983 sa objavila na knižnom trhu zaujímavá publikácia autorskej dvojice *Pišút—Zajac* pod názvom „O atómoch a kvantovaní.“ Nájdeme v nej prehľad historického vývoja názorov na atómy, na povahu svetla, na vlastnosti žiarenia a kvantá. Problematika je to veľmi zaujímavá a z hľadiska moderného človeka z obdobia vedeckotechnickej revolúcie živá. Každý, kto si toto dielo prečíta, uzná, že ho možno zaradiť medzi skvosty našej vedecko-populárnej literatúry. Veď nie náhodou získalo cenu Fyzikálnej vedeckej sekcie Jednoty slovenských matematikov a fyzikov, ktorú autorom udelili na valnom zhromaždení tejto našej vrcholnej vedeckej fyzikálnej spoločnosti, ktoré sa zišlo z príležitosti 8. konferencie československých fyzikov v Bratislave dňa 28. 8. 1985. Úlohou tohto článku však nie je chváliť spomínanú knihu, tobôž nie podať jej kritický rozbor. Chcem ju len pripomenúť čitateľom, ktorí mali to šťastie a knihu čítali, lebo dnes, dva roky po jej vydaní, ju už na knižnom trhu nenájdete. Nakladateľstvo Alfa v Bratislave ju vydalo len v náklade 1600 kusov. Zmienkou o tejto knihe začínam svoje rozprávanie preto, lebo moja pedagogická prax ma priviedla do situácie, v ktorej si mladí čitatelia tejto knihy začali klásť otázky: O zložení čoho hovoria autori knihy O atómoch a kvantovaní? Čo rozumie súčasná fyzika pod pojmom „svet“? Prečo zaradili autori do svojej knihy o atómoch aj kapitolu, v ktorej opisujú vývoj sporov o tom, či svetlo sú vlny lebo častice, a končia až pri súčasnom „vlnovo-časticovom" názore na svetlo?

Zalistujúc v súčasných učebniciach fyziky zistíme, že aj tu chýba jasná odpoveď na otázku, ako sa dívať na základné pojmy „sveta", ktorý fyzika skúma. V ďalšom sa preto venujem týmto „základom", ktoré fyzika skúma v ich rozmanitých prejavoch a interakciách. Ony sú tým „svetom", ktorý sa spomína v citovanej knihe. Stretávame ich v pojme hmota. Všetky otázky, ktoré navodilo listovanie v spomínanej knihe, zrejme vyplývajú z toho, že tomuto východiskovému pojmu sa autori nevenovali a náležite vysvetlený ho nestretávame ani v stredoškolských učebniciach, ani v populárnej fyzikálnej literatúre, ba ani vo vysokoškolských učebniciach. K tomuto problému písal v Rozhledoch matematicko-prírodovedeckých ešte v roku 1953 *J. Čeleda* a o dva roky neskôr *Z. Málek*. Ich články boli v tom čase mimoriadne aktuálne. Keď ich dnes, po tridsiatich rokoch čítame vidíme, ako naša osveta pokročila. Pobadáme aj vývoj terminológie v tejto oblasti.

Hmota

V rukách mám vysokoškolský učebný text fyziky od profesora *Rákoša* z košickej techniky, v ktorom sa autor otázkou hmoty predsa len zaoberá. V pamäti sa mi vynárajú úvodné prednášky z fyziky, ktoré sme absolvovali na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave v roku 1972. Tu nám odborný asistent *Chrapan* z Katedry jadrovej fyziky pojem hmoty dôkladne priblížil. Pochopili sme, že prírodné vedy, fyziku nevynímajúc, skúmajú jednotlivé objekty okolo nás a študujú ich vzájomné pôsobenie v jeho dynamike. Skúmajú tedy jednotlivé javy s cieľom predvídať ich vývoj, predvídať chovanie sa jednotlivých objektov v tých najrozmanitejších situáciach, v ktorých sa môže s nimi človek stretnúť. Úlohou jednotlivých prírodovedných disciplín je predovšetkým poskytnúť ľudstvu dostatok informácií, aby mohlo ľahšie kryť svoje potreby, aby, krátko povedané, mohlo radostnejšie žiť. Prírodné vedy preto skúmajú len tie objekty, ktoré majú pre ľudstvo význam. Nutnou podmienkou pre to, aby tento význam objekty mali, je ich objektívna existencia, existencia mimo ľudského vedomia. Jednoducho: aby boli, či sa to niekomu z nás páči, alebo nie. Iba takéto objekty môžu ľudstvu prospieť, alebo ho ohroziť, či inak jeho existenciu ovplyvniť. Vidiny, strašiace len v hlavách jednotlivcov, nemajú všeobecný dosah, nejestvujú objektívne, nedajú sa ani objektívne skúmať, nemajú praktický význam, ľudstvo na ich podrobné štúdium prostriedky nevynakladá. Nie sú preto ani predmetom záujmu jednotlivých prírodovedných disciplín.

Skúsenosti, ktoré ľudstvo, žijúce na konci XX. storočia, s prírodou má, ukazujú, že hmota má medzi inými jednu, veľmi významnú vlastnosť.

Na už spomínaných prednáškach sme si ju označili slovom „priestupnosť" a túto sme definovali ako schopnosť dvoch rôznych hmotných objektov mať všetky štyri súradnice (x, y, z, t) totožné. Táto podmienka teda znamená, že „priestupné hmotné objekty" môžu existovať súčasne na tom istom mieste, na ktorom sú už iné hmotné objekty. „Priestupné hmotné objekty" poznáme pod názvom polia. „Nepriestupné hmotné objekty" naproti tomu nemôžu byť súčasne na tom istom mieste. Znamená to, že takéto objekty nemôžu mať všetky štyri súradnice (x, y, z, t) totožné. Takéto objekty majú, ako hovoríme, „látkovú podstatu". Sú to bežné predmety a iné fyzikálne objekty látkovej povahy. Poznáme ich pod jednotným označením látka.

Ako sme pochopili vlnovo-časticovú podstatu svetla

Vlnovo časticový dualizmus! To bola jedna z tém, ktorá nás ako mladých poslucháčov, budúcich učiteľov, trochu strašila. Kto bol bližšie skutočnosti? *Newton* vo svojej emanačnej teórii s tvrdením, že svetlo sú častice, alebo *Huygens* so svojím vlnovým vysvetlením vlastností svetla? V slovníku cudzích slov sme sa dočítali, že dualizmus je dvojitosť, podvojnosť, ako však chápať „dvojitosť svetla"? Ako pochopiť skutočnosť, že „dvojtváré" svetlo je pri fotoefekte časticou a interferuje ako vlna? Výklad tohoto „dualizmu" tak, ako ho mám vo svojich starých poznámkach z roku 1972, sa v literatúre nevyskytuje, preto sa ho pokúsim tlmočiť.

Vráťme sa k hmote, o ktorej sme už hovorili a ktorá môže, ale nemusí byť „priestupná". A teraz si predstavme sami sebe. Za normálnych okolností nám zrejme nevadí, že sme „prestupovaní" napríklad gravitačným poľom okolitých predmetov a Zeme alebo elektromagnetickým poľom rozhlasových vysielačiek. Situácia však bude iná, ak pôjdeme napríklad na prežiarenie röntgenom. Ak sme na seba menej opatrní, potom v nás interakcia elektromagnetického poľa vlnových dĺžok röntgenového žiarenia s atómami buniek nášho tela nevyvolá obavy. Röntgenové žiarenie budeme chápať ako pole, ktoré sa môže rozprestierať aj na miestach, na ktorých je naše „látkové" telo. Ak sme však na seba citliví, interakcia „tvrdého" elektromagnetického žiarenia, ktorá v nás počas röntgenovania nevyhnutne prebieha, nám bude pripadať ako „prestreľovanie" nášho tela kvantami elektromagnetického poľa, ktoré na svojej ceste ničia bunky nášho tela. To isté elektromagnetické žiarenie, ktoré niekto prijímal vo svojich predstavách ako pole, budú iní prijímať ako korpuskuly — častice. Pochopili sme, že vlnový či korpuskulárny (časticový) charakter mikroobjektov je predovšetkým daný situáciou, v ktorej tieto mikroobjekty vystupujú. Preto sa netreba pýtať, či má daný objekt vlnovú povahu, alebo je časticou. Treba zisťovať, v ktorej situácii ho budeme považovať za vlnu a v ktorej za časticu. Dotyčná

DISTRIBUTIVITA (slož. z lat. *dis-* — zde s významem „prostorové rozšíření, rozdělení, roz-"; v. *dis-* + *tribuo, -ere,* ptc. pf. *tributus* = dělit, udělovat) — vlastnost operací, že součin čísla a součtu lze „rozdělit" na sou četsoučinů: a(b + c) = ab + ac; DISTRIBUTIVNÍ — rozdělovací (např. zákon); DISTRIBUTIVNOST. Srov. DISTRIBUCE — rozdělování (zejména výrobků a zboží v obchodě)

DIVARIANTNÍ (slož. z řec. *di-* = dvoj-, dvou-; v. *di-*[1] + lat. *vario, -are,* ptc. préz. *varians, -antis*; od *varius* = pestrý, rozmanitý, rozličný, proměnlivý; v. variace) — dvouvariantní, o dvou obměnách; DIVARIANTNÍ soustava — o dvou stupních volnosti. Pozn.: Tentýž význam má termín BIVARIANTNÍ (v. t.), kterému by se měla dávat přednost. Obě jeho složky jsou totiž původu latinského, takže nejde o složeninu hybridní, jak je tomu u termínu DIVARIANTNÍ.

DIVERGENCE (od lat. *divergo, -ere,* ptc. préz. *divergens, -entis*; slož. z *dis-* — zde s významem „rozdělení, rozluka, roz-"; v. *dis-* + *vergo, -ere* = chýlit se, nachylovat se) — odchýlení, odklon; vzájemná nepodobnost; DIVERGENTNÍ — odchylující se, rozcházející se, nepřibližující se k určité hodnotě; opak: KONVERGENTNÍ (lat. *cum* = s, spolu, dohromady) — „k sobě se nachylující", sbíhající se

DODEKAEDR (slož. z řec. *dódeka* = dvanáct + *hedra* = plocha, na které se sedí; v. *-edr*) — dvanáctistěn

DOMÉNA (od lat. *dominium* = vlastnictví, držení, vláda; k lat. *domus* = dům) — oblast; místo činnosti, působiště; vyhrazený obor činnosti („obor, v němž jsem doma")

DONOR (od lat. *donum* = dar; k *do, dare* = dávat; v. adice) — „dárce"; ve fyzice: např. atom cizí látky, který může předat („darovat") elektron do vodivostního pásu polovodiče

DUALISMUS (z lat. *dualis,* od *duo* = dva) — dvojitost, podvojnost; ve fyzice: dualismus vlna — částice — vyjádření, kterým přisuzujeme světlu jak povahu vlnovou, tak částicovou — korpuskulární; DUALISTICKÝ; srov. DUO — hudební skladba pro dva nástroje nebo pro dva hlasy; dva umělci tuto skladbu provádějící; v. t. duant, dublet, duodioda, duplex, duplikát

DUANT (od lat. *duo* = dva; v. dualismus) — každá ze dvou částí, na které je rozdělen štěrbinou plochý válec v cyklotronu

DUBLET (přes angl. z lat. *duo* = dva; v. dualismus + *plico, -are* = vinout; v. duplikát) — dvojité čáry v čárovém spektru; srov. MULTIPLET, SINGLET, TRIPLET

DUODIODA (slož. z lat. *duo* = dva; *v. dualismus* + *dioda, v.t.*) — „dvojdioda"; dioda se dvěma anodami

DUPLEX (z lat. *duplex* = dvojmo složený, dvojitý, dvojí, dvojnásobný; slož. z *duo* = dva, v. *dualismus* + *plecto,-ere,* ptc. pf. *plexus* = plést, v. komplexní) — současný přenos dvou zpráv v opačných směrech po téže sdělovací cestě

DUPLIKÁT (z lat. *duplicatus*, ptc. pf. slovesa *duplico, -are* = zdvojovat; slož. z *duo* = dva; v. *dualismus* + *plico, -are* = vinout) — „dvakrát svinutý“ druhé vyhotovení; srov. TUPLOVANÝ; srov. též KOMPLIKOVAT (lat. *cum* = spolu, dohromady) — „svinovat, zamotávat“; v. t. dublet, explicitně, explikace, implicitně, implikace, multiplet, multiplikátor, triplet

DYN (uměle utvořeno z řec. *dynamis* = síla, moc; v. *dynamo*) — dříve používaná jednotka síly; v.t. heterodyn, izodyny, megadyn, superheterodyn

DYNAMIKA (slož. z řec. *dynamis* = síla, moc; v. *dynamo* + analogicky použitá přípona *-ika*[1]; v.t.) — „nauka o síle“; 1. nauka o souvislosti mezi pohybem a silami, které pohyb způsobují (Příčiny změny pohybového stavu tělesa nazýváme silou.) 2. silový ráz, hybnost, živost, síla; 3. v akustice: poměr mezi intenzitou („silou“) nejslabších a nejsilnějších zvuků

DYNAMIKA — koncová část složených slov, která jsou termíny pro nauku o pohybu těch hmotných částic, které uvádí první část složeného slova; v. aerodynamika, elektrodynamika, hydrodynamika, termodynamika

DYNAMICKÝ — obsahující nebo projevující sílu

DYNAMO (od řec. *dynamis* = síla, moc) — „zdroj síly“; přístroj na výrobu stejnosměrného proudu; srov. DYNAMIT — trhavina o mnohem větší účinnosti než tehdejší střelný prach; v.t. *dyn, dynamika, dynamometr*

DYNAMOMETR (slož. z řec. *dynamis* = síla, moc; v. dynamo + *metron* = měřidlo, míra; v. *-metr*[1]) — siloměr

E- v. EX-

-EDR (z řec. *hedra* = „plocha, na které se sedí“; sedadlo, zadnice; od *hedzomai* = sedat si) — koncová část složených slov pro názvy těles, která „si sedají“ na jednu stěnu-základnu; o kolikastěn jde, určuje první část složeného slova; v. dodekaedr, hexaedr, oktaedr, polyedr, triedr; srov. KATEDRA (řec. *kata* — zde s významem „směr dolů“) — „místo, kam si učitel zasedne“

EF- v. EPI-

EFEKT (z lat. *effectus* = vykonání, provedení; slož z *ex-* — zde s významem „dovršení činnosti“; v. *ex-* + *facio, ere*, ptc. pf. *factus, -fectus* = dělat; v. perfektní) — v odborné terminologii v původním významu: výkon, výsledek, účinek; v běžné řeči ve významu zúženém: vnější, líbivý, působivý, ale povrchní účinek či dojem („dělat něco pro efekt“); v. t. fotoefekt

EFEKTIVITA — účinnost, výkonnost (s významovým odstínem konečného stavu)

EFEKTIVNÍ — účinný, skutečný, výsledný (zachován význam původní)

EFEKTIVNOST — účinnost, výkonnost (s významovým odstínem vlastnosti)

EFEKTNÍ — okázalý, vypočítaný na vnější dojem (význam zúžen a je pejorativní)

EFEMÉRA (z řec. *eféméros* = trvající jeden den, krátkou dobu; slož. z *epi-* — zde s významem „na, pro"; v. *epi-* + *héméra* = den, denní světlo) — jepice (žije jen jeden den); ve fyzice: (totéž co EFEMERIDA) předpověď polohy Měsíce, Slunce, planet atd. na určitý den

EFEMERIDY — astronomická ročenka obsahující astronomické údaje pro jednotlivé dny v roce

Srov. EFEMÉRNÍ — pomíjivý, „jen pro jeden den"

ECHO (z řec. *échó* = ozvěna; zvuk stále znějící) — ozvěna

EJEKTOR (od lat. *eicio, -ere,* ptc. pf. *eiectus*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, ven"; v. *ex-* + *iacio, ere* = házet, metat; v. projektor + *-or*; v.t.) — „vyvrhovač, vyhazovač", vývěva

EKLIPTIKA (ze střlat. *ecliptica linea* = čára týkající se mizení; od řec. *ekleipó*, slož z *ek-* — zde s významem „z, pryč" + *leipó* = pouštět, nechávat + *-ikos*; v. -ika³) — čára omezující mizení Slunce při zatmění; zdánlivá dráha Slunce po obloze.

Pozn.: Od řec. *leipó* s předponou *el-* vznikl termín ELIPSA — v jazykovědě: výpustka; v matematice: kuželosečka, která souřadnicemi x, y svých bodů splňuje rovnici $x^2 = py - py^2$; jde o „přirovnání s úbytkem"

EKOSFÉRA (slož. z řec. *oikos* = obydlí, domácnost, hospodářství, dům, domov + *sfaira* = koule, v. sféra) — „oblast domova; oblast možností mít domov, možností života"; v astronomii: EKOSFÉRY hvězd — oblasti kolem hvězd, v nichž je pro příznivou teplotu možná existence živých organismů; srov. EKOLOGIE (v. *-logie*) — nauka o prostředí, nauka o vztahu prostředí k organismu; EKONOMIE (v. *-nom*) — věda o zákonech společenské výroby a hospodaření. Pozn.: Řec. *-oi-* se do latiny přepisovalo *-oe-*, jež se později četlo jako *-é-*, což přešlo do češtiny jako *-e-*.

EKVÁTOR (od lat. *aequo, -are,* ptc. pf. *aequatus* = rovnat, urovnávat, rovnat se; a to od *aequus* = rovný, stejný, v. *ekvi-*; v. t. -or) — rovník; rovina kolmá k ose zemské rotace, tj. myšlená kružnice, jejíž rovina jdoucí středem Země „rozděluje Zemi na dvě stejné části" (i český termín souvisí s adjektivem „rovný");

EKVATOREÁL — dalekohled otáčivý kolem dvou os, z nichž jedna je rovnoběžná se zemskou osou

EKVATOREÁLNÍ — rovníkový

EKVATOREÁLOVÝ — týkající se ekvatoreálu

EKVI- (z lat. *aequus* = rovný, stejný) — počáteční část složeného slova, vystihující, že to, co je vyjádřeno další částí, je stejné, má stejnou vlastnost, hodnotu, platnost apod.; v.t. gramekvivalent, ekvátor

EKVIDISTANCE (v. *distance*) — stejná vzdálenost

EKVIDISTANTNÍ — stejně daleko vzdálen

EKVINOKCIUM (lat. *nox, noctis* = noc, v. *nox*) — rovnodennost, tj. den je stejně dlouhý jako noc (vl. „rovnonočnost"); EKVINOKCIONÁLNÍ — rovnodennostní

EKVIPARTICE (lat. *partitio* = dělení, rozdělení, stanovení podílu z něčeho; od *partoir, -iri*, ptc. pf. *partitus* = dělit; souvisí s *pars, partis* = díl, část, podíl, v. parciální) — rovnoměrné rozložení (např. energie)

EKVIPOLENCE[1] (řec. *poleó* = obracet, otáčet se, v. pól) — „stejné natočení"; vztah náležet do stejného směru, mít stejnou orientaci; EKVIPOLENTNÍ

EKVIPOLENCE[2] (lat. *polleo, ere*, ptc. préz. *pollens, -entis* = být mocný) — „stejná moc"; EKVIPOLENTNÍ — rovnomocný, rovnoplatný

EKVIPOTENCE (lat. *possum, posse*, ptc. préz. *potens, -entis* = být schopen, moci, v. potence — stejná schopnost, stejná mohutnost, stejná mocnost; EKVIPOTENTNÍ — stejně mocný, rovnomocný; EKVIPOTENCIÁLNÍ — stejného potenciálu, v. potenciál

EKVISKALÁRNÍ (v. *skaláry*) — o stejných skalárech

EKVIVALENCE (v. *valence*) — stejná síla, stejná platnost, rovnocennost; EKVIVALENT — rovnocenná hodnota, veličina; protihodnota; v.t. gramekvivalent; EKVIVALENTNÍ — mající stejnou hodnotu, rovnocenný, rovnomocný, se stejným účinkem

ELACE (z lat. *elatio*; slož. z *ex-* — zde s významem „ven, vzhůru", v. *ex-* + *fero, ferre*, ptc. pf. *latus* = nést, v. *-lace*) — „vynášení", „vynesení z původní polohy"; vyjádření vysoké míry vlastnosti; srov. ELATIV — mluvnický tvar přídavného jména, vyjadřující stupňovanou míru vlastnosti

ELASTICIMETRIE (slož. z řec. *elastos* = pružný, v. elastický + *metron* = měřidlo, míra, v. *-metrie*) — měření pružnosti; v. t. fotoelasticimetrie

ELASTICKÝ (ze střlat. *elasticus*, a to od řec. *elastos* = pružný) — pružný; v. t. elasticimetrie, elastomechanika

ELASTOMECHANIKA (slož. z řec. *elastos* = pružný; v. elastický + *mechanika*; v.t.) — mechanika pružných těles

ELEKTRÁRNA, ELEKTRET, ELEKTRICKÝ, ELEKTRIFIKACE, ELEKTRIKA, ELEKTRIZACE v. ELEKTŘINA

ELEKTRO-[1] (z řec. *élektron* = jantar; v. elektřina) — počáteční část složených slov mající význam „elektřina, elektrický proud, elektrická energie, elektron", přičemž vzhledem k následující části složeného slova 1/ je jejím přívlastkem, tj. druhou část blíže vysvětluje, vyjadřuje její vlastnosti; např. ELEKTROLÝZA — jde o rozklad, a to „elektrickým proudem", nikoliv „elektrického proudu" (srov.

situácia zrejme nezávisí len od nášho mikroobjektu, ale je daná širšími okolnosťami. Takto sa nám ujasnilo, prečo nie je správne pripisovať mikroobjektom vlastnosť, označovanú ako „vlnovo-korpuskulárny dualizmus“.

Vlastnosti hmoty

Sme zvedaví, ako sa zachovajú dva interagujúce hmotné objekty, inými slovami, aká situácia sa vyvinie pri vzájomnom pôsobení mimo nášho vedomia existujúcich objektov. Situácie dokážeme predvídať, ak poznáme vlastnosti interagujúcich objektov. Dobre vieme, že hmotné objekty majú veľké množstvo rôznych vlastností. V jednotlivých situáciach sú však jednotlivé vlastnosti dominantné a pre vývoj situácie rozhodujúce. V rovine všeobecných kategórií, v ktorej uvažujeme, preberieme základné vlastnosti hmotných objektov. O „priestupnosti“, z ktorej vyplynuli dve základné formy existencie hmoty — poľná a látková, sme už hovorili. Povedzme si teraz o troch ďalších, ktoré hrajú úlohu v každej situácii, ktorá môže vzniknúť pri interakcii hmotných objektov. Sú to: zotrvačné vlastnosti, krátko zotrvačnosť, gravitačné vlastnosti, čiže gravitácia alebo príťažlivosť a vlastnosť nemožnosti ustrnúť bez akéhokoľvek pohybu, čomu hovoríme pohyb v zmysle — vývoj.

Pre prírodovedca má význam len taká vlastnosť hmotných objektov, ktorá sa dá kvantitatívne vyjadrovať. Inak povedané, ktorú možno merať. Na to ale potrebujeme zaviesť vhodnú „mieru vlastnosti“. Ako miera zotrvačnosti sa zaviedla zotrvačná hmotnosť. Mierou príťažlivosti je tzv. gravitačná hmotnosť. Schopnosť vyvíjať sa, teda pracovať, meniť svoje okolie i svoju vlastnú štruktúru, označme slovom energia. Albert Einstein ukázal, že zotrvačná a gravitačná hmotnosť sú dve stránky jednej mince. Túto „mincu“ voláme jednoducho hmotnosť. Hmotnosť je miera zotrvačných a gravitačných vlastností hmotných objektov. Predstavme si nejaký hmotný objekt. Miera jeho zotrvačných a gravitačných vlastností je jeho hmotnosť (symbol m) a miera jeho vnútorného pohybu (rozumej schopnosti vyvíjať sa a pôsobiť na okolie, pretvárať ho, slovom pracovať) je energia (symbol E). Prirodzene, medzi vlastnosťami jedného a toho istého objektu musí byť nejaký vzťah. A tak nás neprekvapí, že *Einstein* našiel tento vzťah. Nebola to totožnosť, ako pri dvoch spomínaných druhoch hmotnosti, bol to známy vzťah E = konšt. m. Pre konštantu, ktorá tu vystupuje, našiel Einstein hodnotu: konšt. $= c^2$, kde c je rýchlosť šírenia sa svetla vo vákuu.

Priestor a čas

Pod vplyvom po státisíce rokov zbieraných skúseností má ľudstvo veľmi hlboko zakorenené predstavy o priestore a čase tak, ako s nimi pracuje aj klasická fyzika — známy newtonovský prázdny priestor, HMOTA

má vlastnosti

PRIESTUPNOSŤ PREJAVUJE SA AKO	ZOTRVAČNOSŤ	PRÍŤAŽLIVOSŤ	VŠEOBECNÝ POHYB
	miery týchto vlastností		
POLE LÁTKA	ZOTRVAČNÁ HMOTNOSŤ	PRÍŤAŽLIVÁ HMOTNOSŤ	ENERGIA
		ICH SYMBOLY	
	m_z	m_g	E
		ich jednotky	
	kilogram	kilogram	joule
		vzťah medzi mierami vlastností	

$$m_z = m_g = \frac{1}{c^2} . E$$

dôsledky všeobecného pohybu

ODĽAHLOSŤ	NÁSLEDNOSŤ
ich miery	
PRIESTOR	ČAS
ich symboly	
V	T
ich jednotky	
m^3	s
meter kubický	sekunda

v ktorom sa všetko odohráva, a čas, ktorý neúprosne beží, aj keď sa zdanlivo nič nedeje. Moderná fyzika nás vyvádza z týchto idylických predstáv. Priestor a čas chápe ako atribúty (základné vlastnosti) hmoty. Vo fyzikálnych, ale vari ešte viac vo filozofických dielach sa o týchto dvoch pojmoch veľa dočítame. Iné je oboznamovať sa s definíciami, pučkami a s duchaplnými úvahami a iné je problém pochopiť, veci porozumieť, hoci aj za cenu určitého zjednodušenia. Preto ďalej listujem vo svojich poznámkach zo študentských čias. Vychádza sa v nich z presvedčenia, že pre nás má zmysel len hmota, nazvyme ju „hmotným svetom". V tomto hmotnom svete vždy môžeme hovoriť o dvoch rozličných miestach, teda o dvoch bodoch tohto sveta, ktoré nie sú totožné. Vždy teda môžeme hovoriť o „odľahlosti" hmotných objektov, teda o odľahlosti dvoch bodov „hmotného sveta". Nemusím zdôrazňovať, že tento atribút hmoty mimo nej nemá zmysel, proste neexistuje. Čo si však počne fyzik (a po ňom každý užívateľ fyziky: inžinier, lekár, biológ, . .) s týmto pojmom, pokiaľ ho nevie merať, pokiaľ ho „neprerobí“ na fyzikálnu veličinu, teda pokiaľ nenájde preň „mieru“. Ako miera odľahlosti nám slúži dĺžka. Odľahlosť má pre nás priestorový charakter, a preto priestor odvodzujeme od dĺžky. A takto priestror, meraný dĺžkou je mierou odľahlosti hmotných objektov.

Povedali sme už, že hmota sa neustále vyvíja. Pre jednoduchosť si uvedomme, že to znamená neustálu zmenu konfigurácií zložiek hmotných objektov, v krajnom prípade vzájomnú zmenu polôh dvoch hmotných objektov. Sú to vlastne neustále sa meniace situácie. Všetci vieme, že zmena situácie je dej. S touto skutočnosťou stále žijeme. Aj keby sme napríklad v prázdnej miestnosti bez okien nehybne ležali, pobadáme na sebe zmeny: znervóznieme, vyhladneme a podobne. Každý z nás vie, že situácie a deje za sebou nasledujú aj bez nášho vedomia. Hovoríme o následnosti dejov, vyplývajúcej z vlastnosti hmoty vyvíjať sa. Fyzikálny význam má potom jej miera. A miera následnosti dejov je čas.

Na záver si schématicky znázorníme prebrané pojmy a vzťahy medzi nimi (str. 288).

Presné a úplné definície pojmov, o ktorých sme hovorili, sú natoľko zložité, že im ťažko porozumieť. Museli sme všeličo zanedbať a zjednodušiť, aby sme ich podstatu urobili aspoň trochu pochopiteľnou. Ak sa vám však po prečítaní tohto článku aspoň vynorí zmysel pojmu hmota a ucítite súvislosti medzi ďalšími spomínanými pojmami, dôsledkami jej všeobecných vlastností, ospravedlní to všetky zjednodušenia a článok nebol zbytočný.

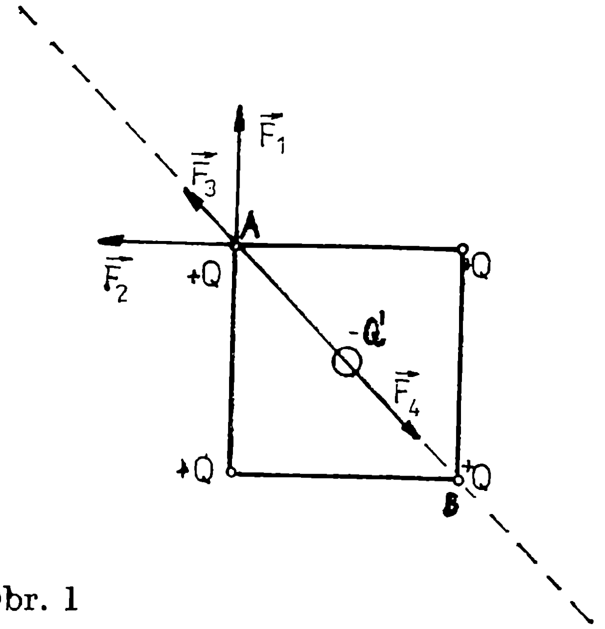
Naučené - žiak - tvorivosť

RNDr. MIROSLAV KRAJŇÁK, Gymnázium Prešov

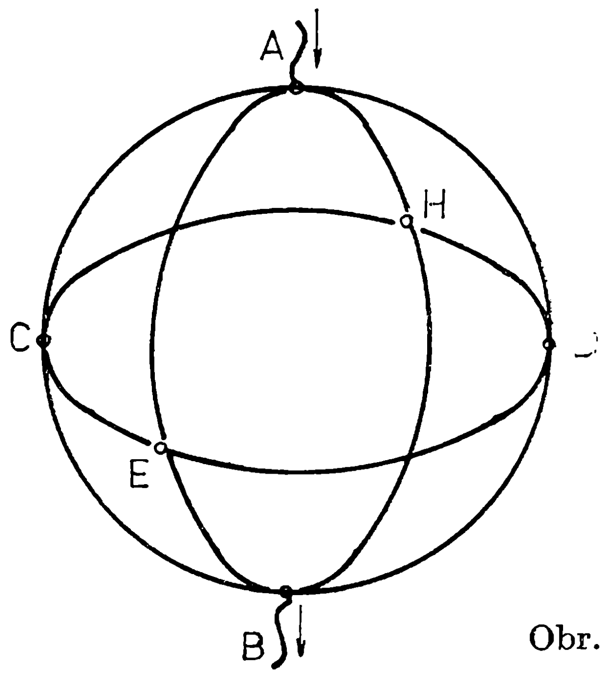
Ak skúmate svoje či svojich spolužiakov písomné a ústne odpovede, zistíte, že pri riešení úloh prevláda snaha o čo najrýchlejšie zostavenie rovnice a jej vyriešenie. Toto všetko podľa naučenej schémy, dokonce sú používané aj rovnaké neznáme a symboly či schémy. Ide o návyk, kedy sa vôbec nezamýšľate, či sa podmienky úlohy zmenili alebo nie. Zrejme to robíte preto, lebo ste presvedčení, že naučená šablona vás určite dovedie k správnemu výsledku. S týmto názorom nemožno súhlasiť. Čím viac sa bude proces vášho riešenia približovať k objavovaniu nových, nenaučených postupov, pričom využijete naučené z hodín, tým viac sa bude rozvíjať vaša schopnosť riešiť situácie, s ktorými sa každodenne stretávate. Pri riešení úloh podľa určitej šablóny zväčšuje sa aj objem a možnosť urobenia chyby. Usúďte to na niekoľkých príkladoch.

S pojmom *symetria* sa veľmi často stretávate na hodinách fyziky a matematiky. Hovoríme o symetrii pri osovej či rovinnej súmernosti, odraze v zrkadle, grafoch párnych a nepárnych funkcií, šesťuholníku atď. Často pri riešení úloh používame zvrat „ *zo symetrie plynie . .*“ alebo *„na základe symetrie môžeme . . .*“. Práve objavenie symetrie v úlohe nám dovoľuje riešiť úlohu netradičným, nenaučeným spôsobom.

Príklad 1. Štyri rovnaké bodové náboje Q sú umiestnené vo vrcholoch štvorca. Aký veľký opačný náboj Q' je potrebné umiestniť do stredu



Obr. 1



Obr. 2

štvorca, aby sústava nábojov bola v rovnováhe? Sústava bude zrejme v rovnováhe, ak výslednica všetkých pôsobiacich síl je rovná nule. *Zo symetrie sústavy,* rovnosti nábojov Q a toho, že veľkosť náboja Q' závisí od nábojov Q, vyplýva možnosť uvažovať len jeden náboj, napr. v bode A (obr. 1). Zobrazme sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, ktorými pôsobia ostatné náboje na „náš“ náboj. Ak je sústava v rovnovážnom stave, pre veľkosti priemetov pôsobiacich síl do priamky AB platí:

$$F_4 - F_1 \,.\, \cos 45° - F_2 \cos 45° - F_3 = 0$$

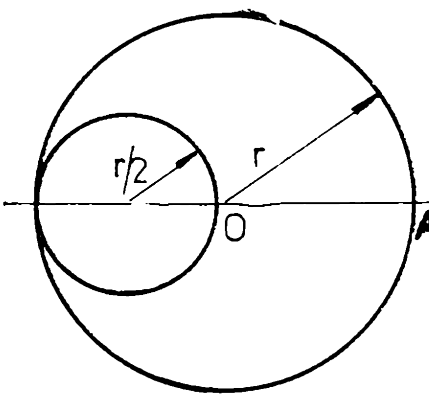
Využitím Coulombovho zákona a krátením $1/4\pi\varepsilon_0$ dostávame

$$2Q' \,.\, Q/a^2 - \sqrt{2}\; Q^2/a^2 - Q^2/2a^2 = 0 \,,$$

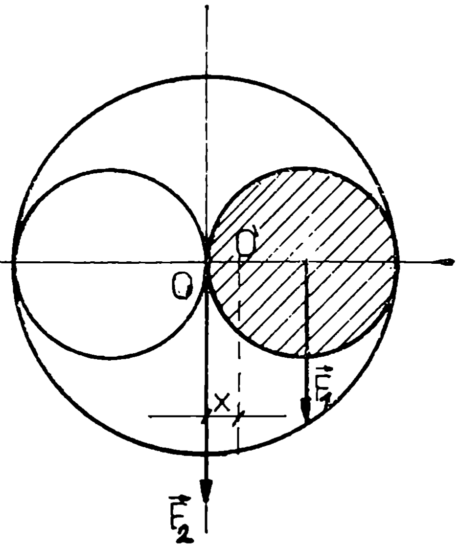
kde a je dĺžka strany štvorca.

Úpravou pre Q' plynie vzťah $Q' = Q\ (2\sqrt{2} + 1)/4$.

Príklad 2. Z troch rovnakých kruhov je zostrojená kostra — pozri obr. 2. Nájdite veľkosť elektrického odporu medzi uzlami A, B, ak odpor štvrtiny dĺžky každého kruhu je R.



Obr. 3a



Obr. 3b

Na základe symetrie plynie, že prúd vchádzajúci do uzla A sa vetví do vodičov AC, AE, AD, AH s rovnakým elektrickým odporom. Teda potenciál v uzloch C, E, D, H bude rovnaký. Zrejme preto v slučke $CEDH$ prúd netečie. Na základe toho môžeme kruh $CEDH$ „vypustiť" z našej schémy. Potom hľadaný odpor R_{AB} bude výsledným odporom štyroch paralelne zapojených vodičov s odporom $2R$, t.j. $R_{AB} = 2R/4 = R/2$.

V prvých dvoch príkladoch symetria bola zjavná. Sú ale úlohy, kde tomu tak nie je. Aby sme mohli symetriu použiť, potrebujeme zvyčajne vizuálne zmeniť situáciu v úlohe, nemeniac pritom zmysel úlohy. Uvediem príklad.

Príklad 3. Nájdite polohu ťažiska telesa na obr. 3a. Iste vás napadne, že ťažisko sa nachádza na úsečke OA. Aby sme ho našli, zameníme na chvíľu nesymetrické teleso dvoma symetrickými, ktoré sú vložené jeden do druhého (obr. 3b). Jedno z nich kruh s polomerom $r/2$, druhé — kruh s polomerom r, majúci dve kruhové diery v polomere $r/2$. Uvážme tiažové sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ týchto telies. *Zo symetrie situácie* môžeme určiť ich pôsobiská. Označme x vzdialenosť ťažiska O' od bodu O. Z podmienky rovnováhy dostávame:

$$F_2\, x - F_1\, (r/2 - x) = 0\,.$$

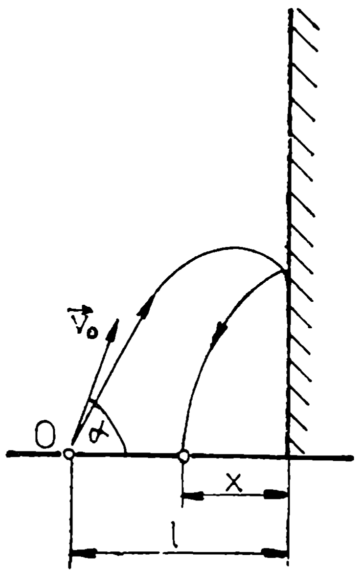
Ak si uvedomíme, že veľkosť tiažovej sily je priamo úmerná ploche uvažovaného telesa, máme:

$$(\pi r^2 - \pi r^2/2)\, x - \pi r^2\, (r/2 - x)/4 = 0\ ,$$

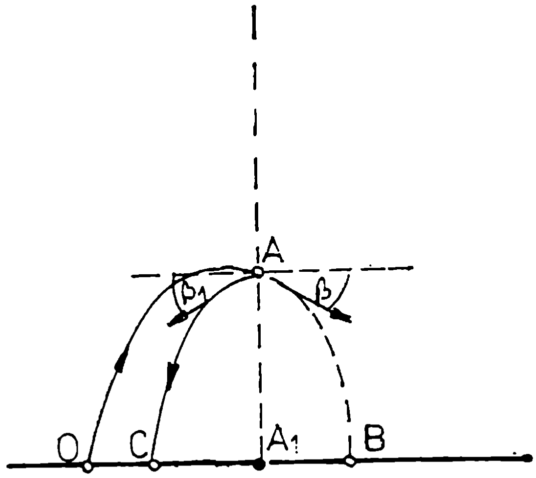
odkiaľ $x = r/6$.

Príklad 4. Zo Zeme s počiatočnou rýchlosťou $\mathbf{v}_0$ je prudko hodená do steny lopta pod uhlom α. Stena je od miesta hodu vo vzdialenosti l. Lopta po odraze od stěny sa vracia späť. V akej vzdialenosti x od steny dopadne? (obr. 4a).

Vypusťme na chvíľu z našej úvahy stenu (obr. 4b). Pri prúdkom dopade lopty na stenu absolútna hodnota rýchlosti lopty sa nezmení, uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu: $\beta = \beta_1$. *Z obr. 4b je zrejmá symetria*



Obr. 4a



Obr. 4b

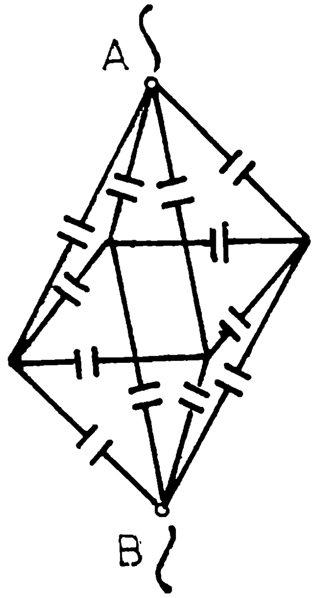
trajektórii AB, AC podľa priamky AA_1. Na základe toho môžeme písať
$$x = OB - l = (v_0^2 \,.\, \sin 2\alpha)\,/g - l\,.$$
Uveďme ešte niekoľko úloh z matematiky, v ktorých „odhodením" šablóny riešenia úlohy a uplatnením vlastnej tvorivosti môžeme nachádzať kratšie a krajšie riešenia.

Príklad 5. Poznáte úlohu — riešte rovnicu $7x^2 - 2x = 0$. Koľkokrát sa stalo, že ju riešite pomocou známeho vzorca — diskriminantu. Ale ak trocha porozmýšľate, nachádzate možnosť $x(7x - 2) = 0$, využijete naučené — kedy súčin dvoch výrazov sa rovná nule — a úloha je vyriešená.

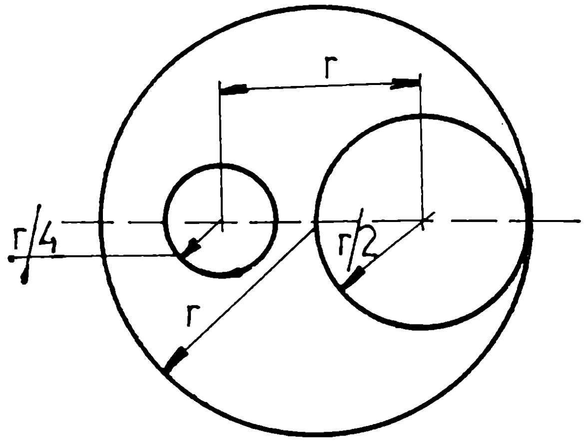
Príklad 6. Rebrík stojaci na ulici môže byť opretý horným koncom buď o stenu budovy na ľavej strane ulice vo výške 9 m, alebo o budovu na pravej strane vo výške 12 m. Určte dĺžku rebríka a šírku ulice, ak viete, že obidve polohy rebríka sú navzájom kolmé.

Načrtnite si situáciu. Ak dĺžku rebríka označíte x, y a z vzdialenosti dolného konca rebríka od steny budovy na ľavej, resp. pravej strane ulice, dospejete k rovnici
$$\sqrt{2x^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 81} + \sqrt{x^2 - 144}\,,$$
alebo k sústave:
$$x^2 - y^2 = 81\,,$$
$$x^2 - z^2 = 144\,,$$
$$2x^2 - (y + z)^2 = 9\,.$$
Keď sa lepšie pozriete na svoj obrázok, zistíte, že sú tam dva zhodné pravoúhlé trojuholníky, ktoré majú odvesny 9 m a 12 m dlhé. Preto šírka ulice je $9\text{m} + 12\text{m} = 21\text{m}$ a dĺžka rebríka $\sqrt{9^2 + 12^2}\ \text{m} = 15\text{m}$.

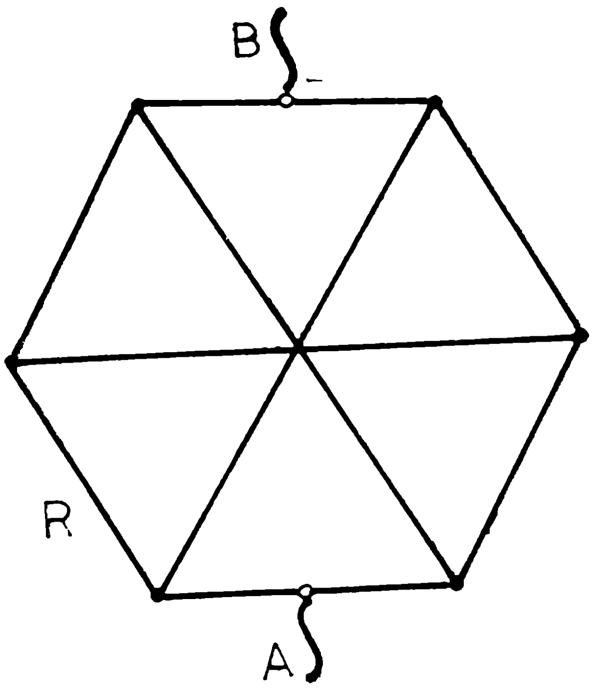
Príklad 7. Nájdite približnú hodnotu koreňov rovnice
$$0{,}000002\, x^2 + 4x - 1 = 0$$



Obr. 6



Obr. 5



Obr. 7

Isteže rovnicu môžete riešiť pomocou diskriminantu. Ale veľmi ľahko môžete zistiť, že jeden z koreňov je veľmi malé číslo. Keďže 0,000002 je veľmi malé číslo, neuvažujme prvého sčítanca v rovnici. Dostávame $4x_1 - 1 = 0$, t.j. $x_1 \doteq 1/4$. Keďže $x_1 \,.\, x_2 = -\,1/0{,}000002 = -\,5 \,.\, 10^5$, potom $x_2 \doteq -\,2 \,.\, 10^6$. Skúste určiť chybu, ktorej ste sa dopustili pri určení koreňa x_1. Budete prekvapení, s akou presnosťou ste tento koreň určili $(1/10^7)$.

Príklad 8. Dokážte, že pre každé m prirodzené je výraz $m^3 + 11m$ deliteľný šiestimi.

Úloha sa dá riešiť niekoľkými spôsobmi. Napr. uvedomením si, že pri delení šiestimi môžete dostať zvyšky 0, 1, 2, 3, 4, 5. Preto daný výraz môže byť v tvare $6a$, $6a \pm 1$, $6a \pm 2$ alebo $6a \pm 3$. Preveríme všetky prípady.

Iný postup sa ponúka, ak poznáte metódu matematickej indukcie.

Ďalšia možnosť je, ak uvážite rozklad čísla 6 na prvočinitele, t.j. $6 = 2 \cdot 3$. Potom otázka deliteľnosti výrazu $m^3 + 11m$ šestkou vedie k preskúmaniu deliteľnosti tohto výrazu dvojkou a trojkou.

Čo ale poviete na tento postup:

$$m^3 + 11m = m^3 - m + 12m = m(m^2 - 1) + 12m =$$
$$= m(m - 1) . (m + 1) + 12m .$$

V tejto sume prvý sčítanec sa skladá z troch po sebe idúcich prirodzených čísel, z ktorých jedno je deliteľné troma a aspoň jedno dvoma. Druhý sčítanec je evidentne deliteľný šiestimi pre každé $m \in$ N. Teda $m^3 + 11m$ je deliteľné šiestimi pre každé $m \in$ N.

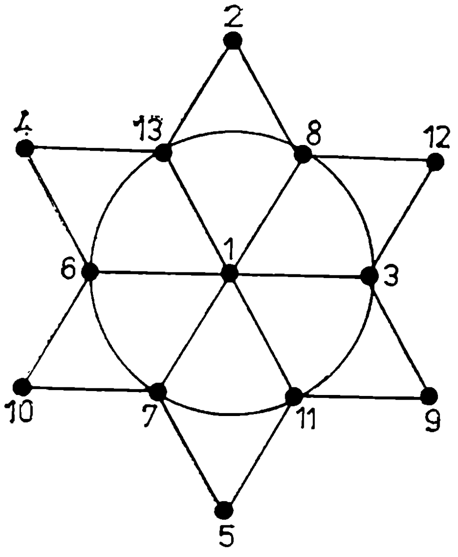
Mnohé úlohy je možné riešiť viacerými spôsobmi. Spravidla každý z vás môže nájsť vyhovujúce riešenie, musí len pozorne preskúmať podmienky a porozmýšlať nad tým, ktorý prístup k úlohe najlepšie zodpovedá zvláštnostiam podmienok úlohy.

Námety k samostatnej práci:

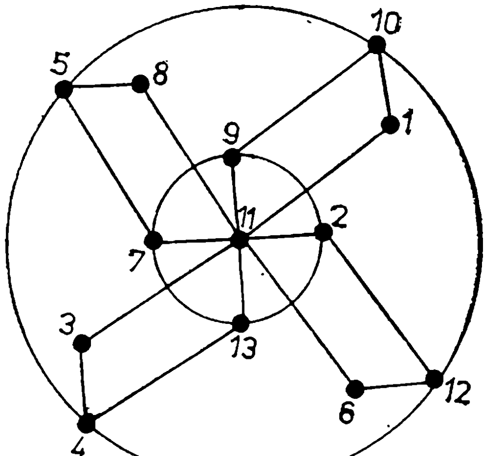
1. V aritmerickej postupnosti platí $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$. Určte súčet prvých dvadsiatich členov tejto postupnosti.
2. Nájdite polohu ťažiska kruhu s dvoma kruhovými dierami na obr. 5.
3. Dvanásť kondenzátorov kapacity C je zapojených podľa obr. 6. Určte kapacitu batérie medzi uzlami A, B.
4. Z rovnakých vodičov s elektrickým odporom R je vytvorená kostra podľa obr. 7. Nájdite odpor medzi uzlami A, B.
5. Nájdite približnú hodnotu koreňov rovnice
$$x^2 + 8\,000\,125x - 2\,000\,105 = 0 .$$
Určte, akej chyby sa dopustíte.
6. Dve chodby široké 2,4 m a 1,6 m sa pretínajú pod pravým uhlom. Aký najdlhší rebrík možno vo vodorovnej polohe preniesť z jednej chodby do druhej?

Řešení magických obrazců (ze str. 298):

a)



b)



Využití Dopplerova jevu v astronomii a fyzice

PaedDr. FRANTIŠEK JÁCHIM, Vimperk

Dopplerův jev, popsaný poprvé roku 1842, umožňuje využít elektromagnetického vlnění vysílaného zdrojem ke stanovení relativní rychlosti zdroje vůči pozorovateli. Poměrně jednoduchým způsobem dovoluje získat hodnotu radiální složky rychlosti objektu, což ve vesmíru nelze učinit jiným způsobem. Objev laseru, generátoru záření s vysokým stupněm koherence, monochromatičnosti i velmi malého úhlového rozptylu dovoluje využít Dopplerova jevu i pro měření vzdáleností a rychlostí objektů, které nevysílají vlastní záření.

Jev byl objeven a popsán profesorem pražské techniky *Johannem Christianem Dopplerem*[1]) v práci O barvě světla dvojhvězd (1842). Ačkoli se zdá přirozené, že jev mohl být objeven nejdříve v akustice, Doppler jej „vyvozuje" z jevů astronomických, resp. světelných. Čtenáře patrně překvapí, že uvozovkami zpochybňujeme možnost poznání jevu cestou, která byla naznačena. Připomeňme však, že Doppler dospěl k objevu posuvu spektrálních čar na základě pozorování, které umožňuje zjistit vliv pohybu hvězdy na barvu jejího světla pozorovaného ze Země. Je pouze shodou okolností, že z pozorování fyzických dvojhvězd soudí Doppler na změnu barvy jejich složek vlivem orientace rychlosti vůči pozorovateli. Jako zastánce éteru se snažil o vysvětlení optických jevů pomocí vlnění.

Ve své výše uvedené práci upozorňuje, že délka vln vnímaných pozorovatelem je ovlivněna pohybem zdroje vůči pozorovateli. Tuto v podstatě správnou myšlenku zdůvodňuje odlišnou barvou složek fyzických dvojhvězd, které rotují kolem společného těžiště. Soudil, že světlo vycházející od vzdalující se složky musí být červenější než světlo složky přibližující se v důsledku deformace vln vlivem orientace rychlosti.

Dopplerův předpoklad, že příčina barevných odlišností světla dvojhvězd je v rozdílném směru jejich pohybu vůči pozemskému pozorovateli, byl mylný zejména z těchto důvodů:

1. Rotace složek dvojhvězdy probíhá takovou rychlostí, že změna vlnové délky světla nezpůsobí pozorovatelnou změnu barvy.

---

[1]) Pamětní deska připomínající jeho pražský pobyt je na domě č. 20 vedle Novoměstské radnice na Karlově náměstí.

2. Složky dvojhvězd, pokud se už jejich světlo barevně odlišuje (a to nelze pozorovat obecně), nevykazují barvy doplňkové, jak by tomu podle Dopplerovy teorie mělo být.

Ve vědeckých kruzích byl přijat Dopplerův jev velmi rozdílně. Teprve roku 1845 je jev spolehlivě prokázán v akustice, a tak byl také přijat. Do diskuse o obecnosti jevu zasahuje *Ernst Mach*, svými závěry:

1. Dopplerův jev je obecně platný pro kterýkoli druh vlnění.
2. Lze jej prokázat bez složitých matematických výpočtů.
3. Platnost jevu by se měla projevit posuvem čar ve spektru (tzv. modrý nebo rudý posuv podle směru pohybu) světla zdroje.
4. Dopplerova teorie je správná, avšak nelze ji využít k vysvětlení barev hvězd.

Jevu bylo poprvé využito v astronomii až roku 1868 *Hugginsem* k důkazu pohybu některých hvězd vůči Slunci. Ve sluneční soustavě byly na základě dopplerovského posuvu odhaleny struktury Saturnových prstenců (*Keeler* 1895). Laboratorně byl jev pozorován *J. Starkem* u kanálových paprsků. Relativistický Dopplerův jev v optice byl prokázán roku 1938 americkými fyziky *Ivesem* a *Stillwelem*. Jeho experimentální ověření spolu s pozorováním příčného Dopplerova jevu bylo jedním ze skvělých testů teorie relativity. Při rychlostech zdroje srovnatelných s rychlostí světla platí pro kmitočet zachycený přijímačem vztah

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\,,$$

který při $v \ll c$ přechází ve vztah $\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$

V soudobé astronomii je Dopplerův jev využíván především ke studiu dalekého vesmíru. U velmi vzdálených objektů (např. galaxií, kvasarů apod.) se zjišťují jejich vlastnosti nejčastěji rozborem spekter. Z posuvu spektrálních čar ve spektru objektu lze stanovit rychlost pohybu vesmírem a z ní i vzdálenost objektu. Označíme-li $\triangle\, \lambda$ velikost posuvu čar ve spektru, potom veličinu $z = \triangle\, \lambda/\lambda$ nazýváme rudý posuv, stejnou veličinu se záporným znaménkem označujeme jako modrý posuv. Pro stanovení radiální rychlosti objektu platí vztah

$$v = c\,.\,z\,, \tag{1}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Právě uvedeného vztahu lze užít pouze pro $z \leqq 0{,}1$, tedy pro výpočet rychlostí do 10 % rychlosti světla. Obecně totiž platí pro rudý posuv relativistický vztah

$$z + 1 = \left(\frac{v + c}{c - v}\right)^{\frac{1}{2}}$$

který po úpravě umožňuje stanovení příslušné rychlosti v souladu s teorií relativity. Pro velikost posuvu dostáváme po jeho úpravě

$$v = \frac{c[(1+z)^2 - 1]}{(1+z)^2 + 1} \tag{2}$$

Vztahem (2) získáme např. pro $z = 0{,}11$ rychlost objektu $v = 3 \,.\, 10^4$ km s^{-1}, pro $z = 1$ je $v = 18 \,.\, 10^4$ km s^{-1} apod.

Relativistický Dopplerův jev byl využit k vysvětlení spekter kvasarů, jejichž rudý posuv byl větší než jedna, což by podle vztahu (1) znamenalo, že se objekt vzdaluje nadsvětelnou rychlostí. U některých velmi vzdálených kvasarů (3,7 . 10^9 až5 10^9 pc) dosahovaly hodnoty rudých posuvů $z = 3{,}40$ i $3{,}53$. Užitím vztahu (2) vychází pro rychlosti vzdalování hodnoty kolem 0,9 . c a nedochází k rozporu se základním postulátem teorie relativity o mezní rychlosti světla. Rudý posuv kvasarů byl objeven roku 1963 *M. Schmidtem* na objektu 3C — 273. Pozorováním celé řady dalších kvasarů byla zjištěna vesměs neobyčejně velká hodnota rudého posuvu, jde tedy o objekty velmi vzdálené a pohybující se rychlostí řádově 10^{-1} c.

Všeobecně je dopplerovský rudý posuv považován za spolehlivý indikátor vzdálenosti. Pro blízké galaxie platí lineární závislost velikosti rudého posuvu na vzdálenosti, pro vzdálenější části vesmíru se zatím používá její extrapolace.

Zatím jsme hovořili o využití Dopplerova jevu při studiu objektů vysílajících záření. Rozvoj současné vědy a techniky umožňuje využít jevu i k určování rychlosti pohybu těles, která nevysílají žádné záření. Vyšleme-li koherentní monochromatický paprsek elektromagnetických vln k pohybujícímu se tělesu a po odražení jej zachytíme, zjistíme změnu kmitočtu $\triangle \nu = 2v\nu/c$, kde v je rychlost tělesa a ν vyslaný kmitočet. Rozdíl kmitočtů je tím větší, čím je vyslaný kmitočet větší. Ukazuje se, že optimální je využití optické části spektra, kde vysílané frekvenci 10^{14} Hz odpovídá její změna řádu asi 10^5 Hz, což činí tuto změnu poměrně dobře měřitelnou. K těmto účelům se velmi dobře hodí paprsek vyzařovaný laserem, mimo jiné i pro svůj velmi malý prostorový rozptyl.

Poněkud obtížnější je zkonstruovat detektor, který zaznamenává změny frekvence. Optická čidla (fotoodpory, fotodiody) reagují na změnu intenzity, avšak jsou necitlivé na změny kmitočtu. Proto se před čidlo klade obvykle interferometr (např. *Fabryův — Perotův*), v němž změna kmitočtu na vstupu vyvolává změnu intenzity na výstupu. Takto zpracovaný signál se přivádí na optoelektronické čidlo a vyhodnocuje se.

Dopplerův jev se nevyskytuje pouze u radiálního pohybu objektu vysílajícího záření. Změna kmitočtu záření je obecně dána vztahem

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \dfrac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{3}$$

kde α je úhel směru šíření světla a směru rychlosti tělesa. Pohybuje-li se těleso kolmo na směr pozorování, vychází pro přijímaný kmitočet

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Podle klasické teorie má být v uvedeném případě posuv kmitočtu nulový, ze vztahu (3) však plyne, že ke změně kmitočtu dochází za jakéhokoli relativního pohybu zdroje a pozorovatele. Pro $\alpha = 90°$ se Dopplerův jev označuje jako příčný. Vzhledem k výrazu v^2/c^2 ve vztahu (3) je obtížně zjistitelný i při značných rychlostech. Experimentální ověření vztahu (3) bylo jedním z testů teorie relativity.

Literatura:

[1] Nový, L. a kol.: Dějiny exaktních věd v českých zemích, Praha, NČSAV 1961

[2] Waterfield, R. L.: Sto let astronomie, Praha 1948

[3] Grygar, J.: Vesmír je náš svět, Praha, Orbis 1973

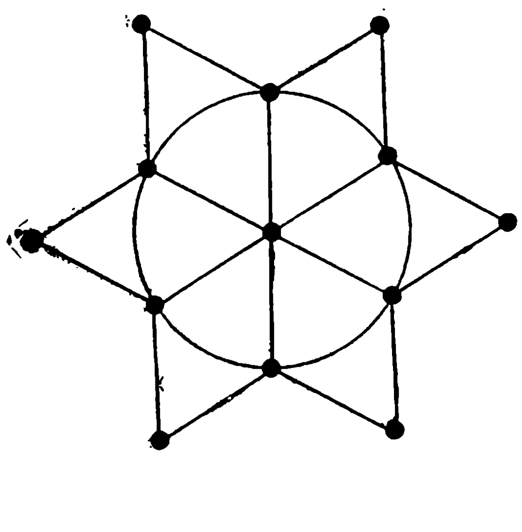
[4] Grygar, J.: Rudý posuv v astronomii, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie XVIII (1973), 18—26

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

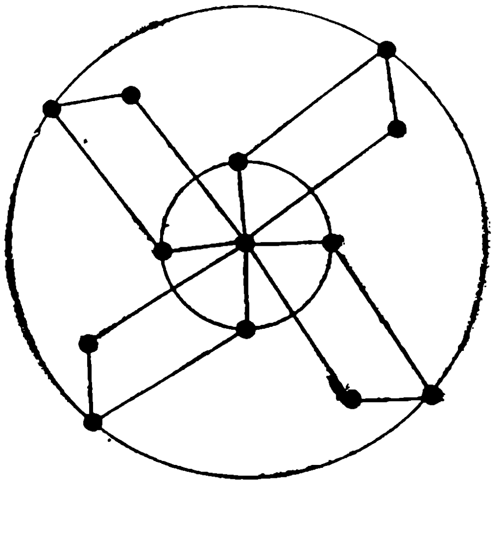
Magické obrazce

Magické mohou být nejen čtverce, které jste poznali v minulém čísle, ale i různé obrazce. Při vhodném rozmístění čísel vznikne několik stejných součtů na sobě závislých. O tom, že nalézt řešení magických obraz-

a)



b)



ců trvá někdy velmi dlouho, se můžete přesvědčit na následujících příkladech.

a) Místo teček doplňte čísla 1—13 tak, aby vzniklo 6 stejných součtů na vrcholech jednotlivých kosočtverců. Součet čísel na kružnici bude dvojnásobný.

b) Místo teček doplňte čísla 1—13 tak, aby vzniklo 6 stejných co největších součtů: 4 kosodélníky a 2 kružnice.

Jarmila Pěnčíková

Čiň čertu dobře...

Poutníkovi přecházejícímu most nabídne čert zdvojnásobit peněžní hotovost, hodí-li se po přechodu do řeky 40 grošů. Poutník přijme nabídku rád, přejde most a splní čertův požadavek. Opakuje to dokonce třikrát a má měšec prázdný. Kolik grošů měl původně?

Řešení. Úlohu řešíme od konce. Počty grošů před jednotlivými přechody mostu označíme a, b, c a sestavíme a vyplníme tabulky:

Přejití	1.	2.	3.	1.	2.	3.
Před přejitím	a	b	c			
Po přejití	$2a$	$2b$	$2c$			
Odhodil	40	40	40	40	40	40
Zbytek	b	c	0			0

Nejprvé uvážíme, že posledních 40 grošů na vyhození našel v měšci po 3. přejití mostu, a na místo $2c$ napíšeme 40 atd. Poslední zápis je 35 na místě a. Poutník tedy začal nepředloženě chytračit s 35 groši. Vyplněná pravá tabulka umožňuje snadné provedení zkoušky správnosti výpočtu.

Není obtížné vytvořit soustavu tří lineárních rovnic s neznámými a, b, c:

$$2c - 40 = 0\,,$$
$$2b - 40 = c\,,$$
$$2a - 40 = b\,.$$

Postupně určíme $c = 20$, $b = 30$ a poutníkovu původní hotovost v groších $a = 35$.

Úlohu je možno řešit i přímým postupem vyplývajícím z této úvahy. Při 40 groších v hotovosti může poutník beze ztráty či zisku plnit čertovy podmínky mnohem déle, než je tato úloha stará. Změna základního kapitálu se každou provedenou operací dvakrát zvětší; po n přejitích je patrně 2^n-krát větší. Na začátku mu chybělo x grošů do 40, a po 3 přechodech už celých 40 grošů. Snadno sestavíme a vyřešíme rovnici

$$x \cdot 2^3 = 40\,,$$
$$x = 40 : 8 = 5\,,$$

tj. $40 - 5 = 35$, týž výsledek. Na most vstoupil s 35 groši.

Můžeme usuzovat také takto: Prvých 40 grošů nedával poutník zplna ze své původní hotovosti. S ohledem na předcházející zdvojnásobení na ně musil mít 20 grošů. Druhých 40 grošů házel až po dvojím zdvojnásobení svého majetku, zde potřeboval mít čtvrtinu, tj. 10 grošů. Potřetí házel třikrát zdvojnásobené peníze, proto mu stačila osmina, pouhých 5 grošů. Nezbytných tedy bylo 35 grošů ($35 = 20 + 10 + 5$) — avšak to také bylo vše, protože nakonec neměl ani jediný groš.

Bezprostředně lze z textu odvodit dále uvedený sled výrazů, v němž h je poutníkova původní hotovost. Zapisujeme poutníkův majetek v groších vždy po odhození čertova podílu.

$$2h - 40\,,$$
$$2(2h - 40) - 40\,,$$
$$2(2(2h - 40) - 40) - 40 = 0\,,$$
$$8h - 4 \cdot 40 - 2 \cdot 40 - 40 = 0\,,$$
$$8h = 7 \cdot 40\,,$$
$$h = 35\,.$$

Známý už výsledek: 35 grošů.

A výzva matematickým kutilům nakonec. Pokuste se nalézt další, vlastní postup. Řešte obměněnou úlohu, v níž poutník přechází most pětkrát a vždy odhazuje 32 groše, a posuďte vhodnost použité metody. Snažte se i jiné úlohy řešit několika způsoby.

Jiří Mann

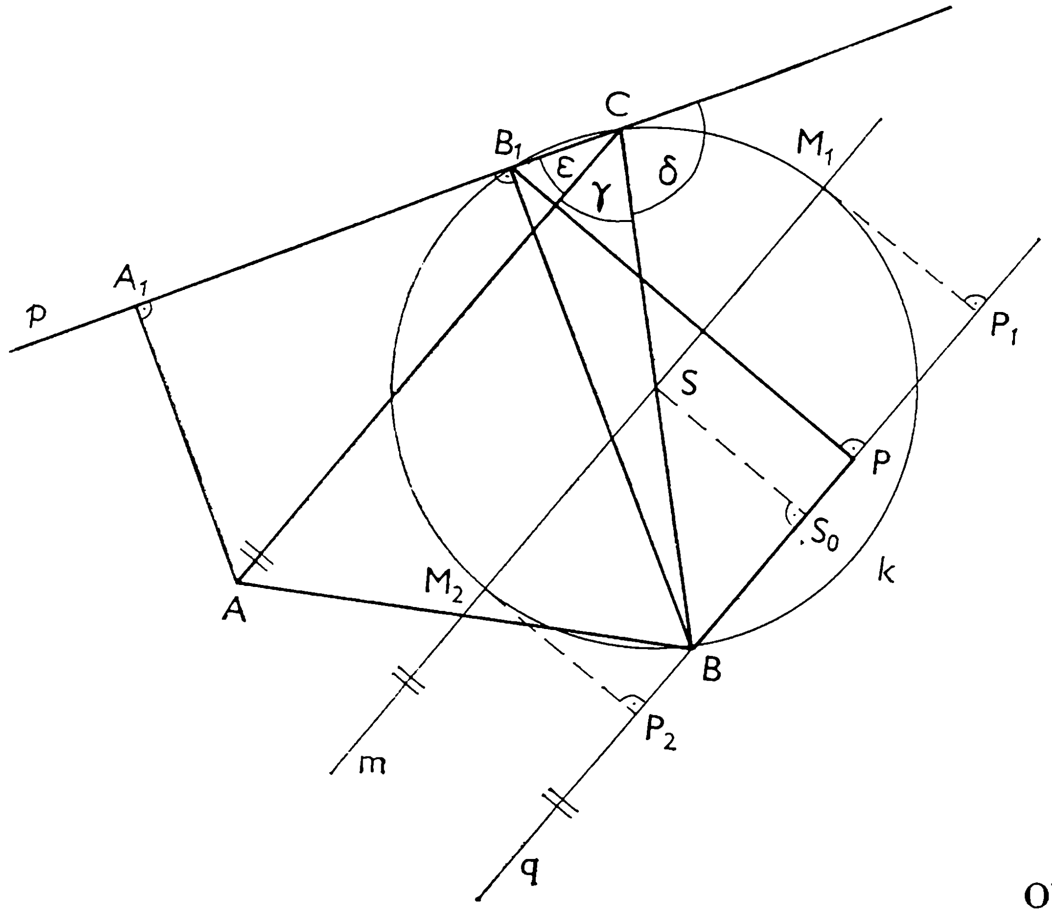
OLYMPIÁDY A SOČ

O troch spôsoboch riešenia jednej úlohy

MARCEL POLAKOVIČ, Gymnázium A. Markuša, Bratislava

Nedávno sa v bratislavskom korešpondenčnom seminári KVMO objavil takýto príklad:

Vrcholom C daného trojuholníka ABC veďte priamku p tak, aby súčin jej vzdialeností od bodov A, B bol maximálny.

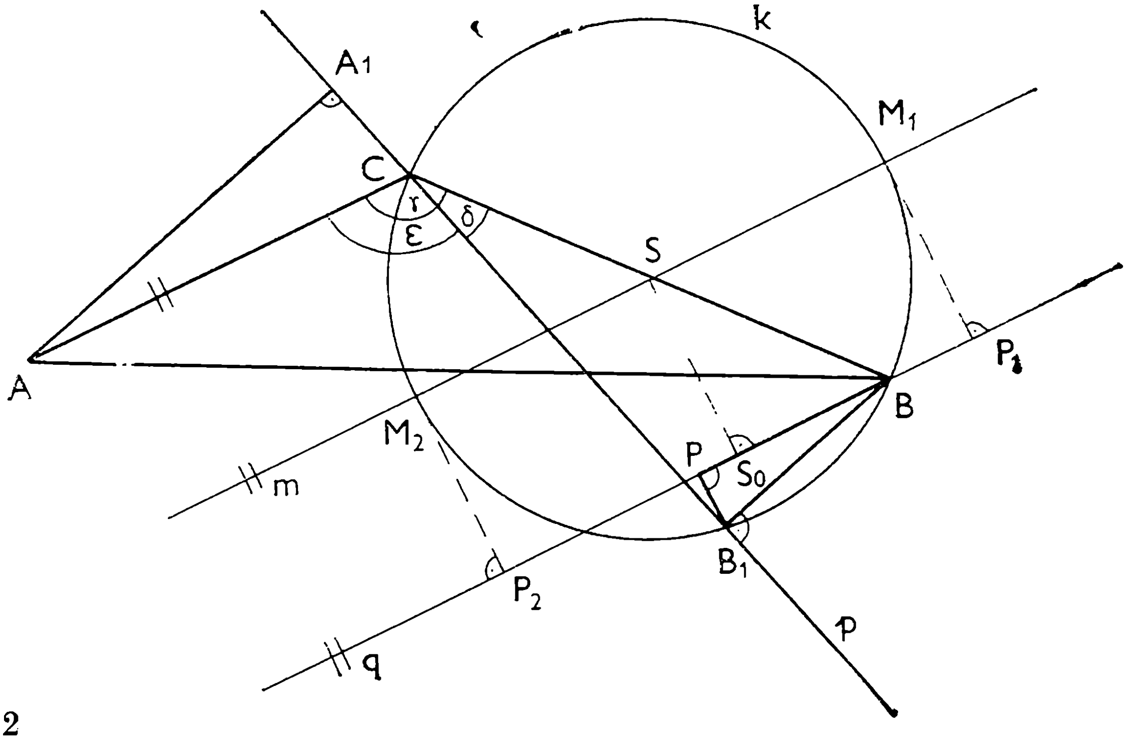


Obr. 1

Je to úloha zaujímavá, na prvý pohľad však neobvyklá. Cieľom tohto článku je ukázať rôzne spôsoby jej riešenia s dôrazom na tie menej zaužívané u nás na školách, porovnať ich výhody i nevýhody.

Prvé riešenie je čiste geometrické. Riešenia tohto typu sú väčšinou elegantné a názorné. Avšak k väčšine z nich je potrebný rozhodujúci nápad, bez ktorého sa nad úlohou môžeme trápiť celé hodiny. Ťažko tu hľadať univerzálnu metódu, každé také riešenie je niečím osobitné, obsahuje pôvodnú myšlienku. Pritom sa zdá, že tento postup je najviac uprednostňovaný na školách.

Oproti predchádzajúcemu môžeme postaviť ďalšie dve riešenia, ktoré majú charakter výpočtu. Daná geometrická situácia sa v nich najprv popíše analytickými vzťahmi, a to za pomoci goniometrie alebo analytickej geometrie. Úloha v tomto tvare býva často riešiteľná zaužívanými postupmi. Zo začiatku sa môžu objaviť zložitejšie algebraické výrazy, netreba sa tým nechať hneď odradiť. Ďalším postupom sa totiž niekedy výrazy zjednodušia, hoci inokedy skutočne spôsobia neprekonateľné ťažkosti. Riešenia tohto typu nemusia vynikať svojou eleganciou, cenné na nich je však to, že v sebe obsahujú istú univerzálnu metódu. Isteže sa i tu nájde miesto pre originálne nápady, aplikáciou osvedčeného aparátu by sa však vždy mali dosiahnuť aspoň čiastkové výsledky. Nemali by sme preto tomuto typu riešení odopierať zaslúženú pozornosť.



Obr. 2

Poznamenajme ešte, že výpočtové riešenia sa navzájom líšia svojím prístupom k popisu danej situácie. Goniometrické riešenie silne využíva výhody vyplývajúce zo zadania. Goniometricky sa totiž výhodne dajú popísať len také situácie, kde priamo alebo nepriamo vystupujú trojuholníky. Naproti tomu analytická geometria má podstatne širší záber, jej podrobne rozpracovanými metódami možno obsiahnuť širokú triedu geometrických úloh.

Ešte pred uvedením samotných riešení zaveďme kvôli stručnosti zápisu nasledujúce označenie: pre každú priamku p nech $F(p)$ znamená číselnú hodnotu súčinu jej vzdialeností od bodov A, B. Zrejme $F(AC) = F(BC) = 0$, preto môžeme v ďalšom rozlíšiť dva prípady:

a) priamka p nepretína úsečku AB (obr. 1),

b) priamka p pretína úsečku AB (obr. 2).

Keďže postupy riešenia sú analogické pre oba prípady, všetky nasledujúce úvahy budú platiť pre obr. 1 i obr. 2 súčasne, pokiaľ nebude povedané ináč.

1. *Geometrické riešenie*

Označme A_1, B_1 priemety bodov A, B na priamku p. Maximalizáciu súčinu dĺžok dvoch premenných úsečiek AA_1, BB_1 bude zrejme výhodné previesť na maximalizáciu dĺžky jedinej úsečky. Veďme preto bodom B rovnobežku q s priamkou AC, priemet bodu B_1 na priamku q označme P (obr. 1, 2). Pravouhlé trojuholníky AA_1C a BPB_1 sú podobné podľa vety uu ($BP \| AC$, $BB_1 \| AA_1$, teda $|\sphericalangle A_1AC| = |\sphericalangle PBB_1|$) a platí

$$\frac{|AA_1|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|BB_1|},$$

čiže

$$|AA_1| \cdot |BB_1| = |AC| \cdot |BP| \tag{1}$$

Zrejme (1) je práve taký vzťah, aký sme potrebovali dostať, lebo stačí maximalizovať dĺžku úsečky BP. Keďže naviac (1) platí i pre $p = AC$, $p = BC$, pre jednoduchosť ďalších úvah tieto prípady v tomto riešení nevylúčime.

Množina priemetov bodu B na všetky priamky prechádzajúce bodom C je Talesova kružnica k s priemerom BC. Jej stred označíme S, jeho priemet na priamku q označíme S_0 (obr. 1, 2).

Hľadáme teda taký bod B_r kružnice k, ktorého priemet P_r na priamku q má maximálnu vzdialenosť od B. Veďme bodom S rovnobežku m s priamkou q, m pretne kružnicu k v bodoch M_1, M_2. Priemety bodov M_1, M_2 na priamku q označme P_1, P_2; potom úsečka P_1P_2 je priemet kružnice k na priamku q (obr. 1, 2).

Hľadaným bodom P_r bude zrejme niektorý z bodov P_1, P_2, a to ten, ktorý leží na polpriamke BS_0, keďže

$|S_0P_1| = |SM_1| = |SM_2| = |S_0P_2| = \frac{1}{2}|BC|$. Poloha bodu S_0 vzhľadom k bodu B je daná veľkosťou uhla zovretého priamkami q, BC. Tento je však rovný γ (lebo $q \| AC$), teda môžeme uzavrieť:

1. Pre $\gamma < 90°$ je $|BP_1| > |BP_2|$ a riešením je priamka CM_1.
2. Pre $\gamma = 90°$ je $|BP_1| = |BP_2|$, obe priamky CM_1, CM_2 sú riešením.
3. Pre $\gamma > 90°$ je $|BP_1| < |BP_2|$, riešením je priamka CM_2.

Ak si uvedomíme, že trojuholníky CSM_1 a CSM_2 sú rovnoramenné s uhlom γ (resp. $\pi - \gamma$) pri hlavnom vrchole S, ľahko zistíme, že priamka CM_1 je osou vonkajšieho, priamka CM_2 osou vnútorného uhla pri vrchole C v trojuholníku ABC.

2. *Goniometrické riešenie*

Označme uhly ε, δ podľa obrázkov. Na obr. 1 je

$$\varepsilon + \delta = \pi - \gamma\,, \tag{2}$$

na obr. 2 je

$$\varepsilon + \delta = \gamma \tag{3}$$

V oboch prípadoch platí

$$|AA_1| = |AC| \sin \varepsilon\,,$$
$$|BB_1| = |BC| \sin \delta\,.$$

Teda máme $F(p) = |AA_1| \cdot |BB_1| = |AC| \cdot |BC| \sin \delta \sin \varepsilon$. Pomocou známeho vzťahu pre súčin dvoch sínusov dostaneme

$$F(p) = \frac{1}{2}|AC|\,|BC|\,[\cos(\varepsilon - \delta) - \cos(\varepsilon + \delta)] \tag{4}$$

Zo vzťahov (2) a (3) vyplýva, že $\cos(\varepsilon + \delta)$ je konštanta nezávislá od voľby priamky p, rovnako ako aj $|AC|$, $|BC|$. Preto $F(p)$ nadobúda maximálnu hodnotu práve vtedy, keď maximálnu hodnotu nadobúda

$\cos(\varepsilon - \delta)$. Avšak $\cos(\varepsilon - \delta) = 1$ práve pre $\varepsilon - \delta = 2k\pi$, kde $k \in Z$. V našom prípade zrejme $k = 0$, teda $\varepsilon = \delta$. Z (2) a (3) potom máme

$$\varepsilon = \delta = \frac{\pi - \gamma}{2}$$

pre situáciu na obr. 1, prípadne

$$\varepsilon = \delta = \frac{\gamma}{2}$$

pre situáciu na obr. 2. Teda riešením môže byť os CM_1 vonkajšieho alebo os CM_2 vnútorného uhla pri vrchole C v trojuholníku ABC (obr. 1, 2). Teraz dosadením (2) a (3) do (4) s prihliadnutím, že $\cos(\varepsilon - \delta) = 1$, máme

$$F(CM_1) = \frac{1}{2}|AC|\,|BC|\,[1 - \cos(\pi - \gamma)] =$$

$$= \frac{1}{2}|AC|\,|BC|\,(1 + \cos\gamma)\,, \qquad (5)$$

$$F(CM_2) = \frac{1}{2}|AC|\,|BC|\,(1 - \cos\gamma)\,. \qquad (6)$$

Ostáva určiť, ktorá z priamok CM_1, CM_2 je riešením úlohy. Z (5) a (6) vyplýva, že pre $\gamma < \frac{\pi}{2}$ je

$\cos\gamma > 0$, $F(CM_1) > F(CM_2)$ a vyhovuje CM_1; pre $\gamma = \frac{\pi}{2}$ je $\cos\gamma = 0$

a $F(CM_1) = F(CM_2)$, vyhovujú obe priamky CM_1, CM_2; pre $\gamma > \frac{\pi}{2}$ je $\cos\gamma < 0$, $F(CM_1) < F(CM_2)$ a vyhovuje CM_2.

3. *Analytické riešenie*

Prvým a veľmi dôležitým krokom pri tomto spôsobe riešenia je vhodné umiestnenie danej situácie do karteziánskej sústavy súradníc. Závisí od neho totiž počet parametrov vystupujúcich v rovniciach, ktoré popisujú skúmané geometrické útvary. Čím menší bude počet týchto parametrov, tým jednoduchšie budú úpravy vedúce k cieľu. Je preto výhodné položiť $C = [0,0]$, potom totiž skúmaná priamka p bude vždy prechádzať počiatkom súradnicovej sústavy a bude mať jednoduché analytické vyjadrenie $y = kx$, kde $k \in R$. Výnimkou je len os y, ktorá síce tiež prechádza bodom C, ale nedá sa vyjadriť v tvare $y = kx$. Avšak vieme, že $F(BC) = F(AC) = 0$, preto položíme bod B na os y, čím priamka BC splynie s osou y. Tým spomenutú ťažkosť pri osi y vylúčime, nakoľko priamka BC zrejme nemôže byť riešením. Bez ujmy na všeobecnosti zvolíme $B = [0, b]$, $b > 0$. Napokon bod $A = [a_1, a_2]$ môžeme bez ujmy na všeobecnosti zvoliť tak, že $a_1 > 0$.

Teraz môžeme na základe známeho vzťahu pre vzdialenosť bodu od priamky vyjadriť uvažovaný súčin

$$F(p) = \frac{|ka_1 - a_2|}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{|k \cdot 0 - b|}{\sqrt{k^2+1}} =$$
$$= \frac{|a_1|\,|k-m|\,|-b|}{k^2+1} = \frac{a_1 b\,|k-m|}{k^2+1}, \qquad (7)$$

kde $m = \frac{a_2}{a_1}$ (predpokladali sme $a_1 > 0$, $b > 0$). Výraz $F(p)$ nadobúda najväčšiu hodnotu pre priamku p s takou smernicou $k \in R$, že pre toto k nadobúda funkcia

$$f(k) = \frac{a_1 b\,|k-m|}{k^2+1}$$

absolútne maximum na svojom definičnom obore R. Činiteľ $a_1 b$ zrejme nemá vplyv na to, pre ktoré $k \in R$ nadobudne $f(k)$ maximálnu hodnotu. Jediný parameter, ktorý má na to vplyv, je v tomto prípade m, čo je vlastne smernica priamky AC. Keďže priamka BC je pevná (je osou y), bude výsledok závisieť iba od uhla pri vrchole C v trojuholníku ABC, vôbec nie od dĺžok jeho strán, ba ani od pomeru $|AC|$ a $|BC|$. Daný spôsob riešenia umožnil teda už na začiatku získať určité čiastkové poznatky o výsledku.

Známymi metódami diferenciálneho počtu zistíme, že f nadobúda lokálne maximá pre $k_1 = m - \sqrt{m^2+1}$ a $k_2 = m + \sqrt{m^2+1}$, okrem ktorých nemôže mať žiadne absolútne maximum. Priamky prechádzajúce bodom C so smernicami k_1, k_2 označme postupne p_1. p_2. Určíme, ktorá z nich je riešením úlohy. Dosadením za k_1 a k_2 do (7) ľahko vidieť, že pre $m > 0$ je $F(p_1) < F(p_2)$, pre $m = 0$ je $F(p_1) = F(p_2)$, pre $m < 0$ je $F(p_1) > F(p_2)$. Keďže m je smernica priamky AC, vyšetrovaním $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$ sme vlastne rozlíšili postupne prípady ostrého, pravého a tupého uhla γ. Je teda priamka p_1 riešením pre $\gamma \geqq 90°$, priamka p_2 pre $\gamma \leqq 90°$. Avšak z daného tvaru riešenia na prvý pohľad nevidno, že priamky p_1 a p_2 sú osi uhlov.

Kalendár M-F: marec 1986

8. III. 1866 sa v Moskve narodil *Peter Nikolajevič Lebedev*, ruský experimentálny fyzik. Dokázal Maxwellovu hypotézu o existencii svetelného tlaku. Experimentoval s veľmi krátkymi vlnami, študoval otáčivé magnetické pole a zemský magnetizmus.

9. III. 1851 zomrel v Kodani *Hans Christian Oersted*, dánsky fyzik. Objavil magnetické účinky elektrického prúdu. Systematicky pracoval v oblasti elektromagnetizmu, akustiky a molekulárnej fyziky.

16. III. 1846 sa v Štokholme narodil *Magnus Gustav Mittag-Leffler*, švédsky matematik. Riešil otázky teórie analytických funkcií, založil významný matematický časopis.

17. III. 1846 zomrel v Kráľovci *Wilhelm Friedrich Bessel*, nemecký astronóm, fyzik a matematik. Prvý zmeral paralaxu blízkej hviezdy.

17. III. 1956 zomrela v Paríži *Irena Joliot-Curie*, francúzska fyzička a chemička. Spolu s manželom objavili umelú radioaktivitu a v roku 1935 dostali spolu Nobelovu cenu za chémiu za práce na syntéze nových radioaktívnych prvkov.

18. III. 1871 zomrel *August de Morgan*, škótsky matematik a logik. Patrí k zakladateľom formálnej algebry, usiloval sa zjednotiť logiku a matematiku.

18. III. 1796 sa v Utzenstorfe narodil *Jakob Steiner*, švajčiarsky matematik. Systematicky vybudoval projektívnu geometriu, riešil izoperimetrické problémy geometricky.

20. III. 1921 sa v Budapešti narodil *Alfréd Rényi*, maďarský matematik. Pracoval v oblasti teórie čísel, teórie pravdepodobnosti, teórie informácií.

23. III. 1966 zomrel v Naardene *Frederik Zernike*, holandský fyzik. V roku 1953 dostal Nobelovu cenu za fyziku za objav fázove-kontrastného mikroskopu.

24. III. 1891 sa v Moskve narodil *Sergej Ivanovič Vavilov*, sovietsky fyzik. Venoval sa štúdiu fotoluminiscencie, položil základy mikrooptiky.

31. III. 1596 sa v La Haye narodil *René Descartes*, francúzsky matematik, fyzik, fyziológ a filozof. Zaviedol pojem funkcie, premennej veličiny, súradníc. Študoval fyziológiu oka, konštruoval optické prístroje.

31. III. 1811 sa v Göttingen narodil *Robert Wilhelm Bunsen*, nemecký chemik a fyzik. Objavil spôsob získania kovu elektrolýzou a metódu analýzy plynov.

31. III. 1841 zomrel *George Green*, anglický matematik a fyzik. Vybudoval teóriu potenciálu ako samostatné odvetvie matematiky.

31. III. 1906 sa v Tokiu narodil *Šiničiro Tomonaga*, japonský fyzik. Pracoval v oblasti mezónovej teórie a kvantovej elektrodynamiky. V roku 1965 získal spolu s J. Schwingerom a R. Feynmanom Nobelovu cenu za fyziku za práce v oblasti kvantovej elektrodynamiky. Vysvetlili vzájomné pôsobenie elektricky nabitých častíc a elektromagnetického poľa.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Jozef Moravčík a kol.:
XXXII. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze, 1. vydání, 152 stran, náklad 3550 výt., cena 6, — Kčs, Praha 1985

První ročenka matematické olympiády vyšla po ukončení jejího prvního ročníku v roce 1953. Jejími hlavními autory byli *Jan Vyšín* a *Rudolf Zelinka*. Oba aktivně pomáhali MO při jejích prvních krůčcích a obětavě se jí věnovali až do doby, kdy se jejich životy uzavřely. Rudolf Zelinka zemřel v roce 1965 a doc. Jan Vyšín, CSc., nás opustil roku 1983.

V předmluvě třicáté druhé ročenky MO se vzpomíná na doc. Jana Vyšína a píše se o jeho zásluhách nejen o matematickou olympiádu, ale i o rozvoj vyučování matematice u nás.

Ročenka věnovaná 32. ročníku MO, který proběhl ve školním roce 1982/83, má tradiční obsah. Čtenář se v ní dovídá o organizaci soutěže a může si v ní prohlédnout seznamy nejúspěšnějších řešitelů MO v kategoriích A, B, C, v nichž soutěží žáci středních škol. Dále jsou zde souhrnně uveřejněny všechny soutěžní úlohy s řešeními.

Ročenka také seznamuje s texty všech úloh 9. korespondenčního semináře ÚV MO, jehož se účastnili špičkoví řešitelé MO, kteří nebyli z Prahy ani z Bratislavy a neměli možnost pracovat v tamních seminářích pro přípravu na mezinárodní MO. V ročence také nechybí zpráva o 24. MMO, konané v Paříži v roce 1983. Otištěno je všech šest jejích soutěžních úloh s řešeními.

Jiří Mída

Petr Křivský, Robert Kvaček, Aleš Skřivan:
VĚK STARÝ A NOVÝ

Dějiny, kultura, život Evropy v 17. a 18. století
Vydal Albatros Praha 1985, 436 stran, celostránkové barevné tabule, mapy, grafy, schémata, barevné fotografie, 400 černobílých fotografií v textu a 300 v galerii postav, cena 100,— Kčs.

Nebývá zvykem v tomto časopisu upozorňovat čtenáře na publikace historického charakteru. V tomto případě činíme velmi rádi výjimku, neboť se jedná o velmi zajímavou a hodnotnou publikaci určenou čtenářům od 13 let.

Na tuto knihu, která rozhodně není určitou obdobou školní učebnice, upozorňujeme proto, že vedle kapitol z obecných dějin se v ní věnuje v samostatných statích značná pozornost i pokroku přírodních věd v 17. a v 18. století a probíhající průmyslové revoluci, která nejprve zasáhla Anglii, později se přenesla na evropský kontinent a zásadním způsobem ovlivnila hospodářský vývoj mnoha zemí.

Právě v druhé polovině 17. století se formovala moderní věda, postupně se měnila koncepce vědy, její sociální funkce, změnily se metody a techniky vědeckých postupů, vytvořila se nová syntéza světa, která položila základ pro světový názor doby. Nové vědecké postupy byly založeny na matematice, důležité místo se přisuzovalo experimentu. Experimentální věda v dalších fázích svého vývoje shromáždila velké množství poznatků, které vytvořily novou základnu pro filozofii osvícenského věku. Nejpozoruhodnějším výsledkem 17. století bylo jednotné přírodovědné chápání světa, jehož tvůrcem byl *Isaac Newton*. Jeho hlavní dílo „Matematické principy přírodní filozofie" (1687) shrnulo všechny výsledky, které věda do té doby přinesla v bádání o přírodě a vyústilo v mechanické pojetí světa. Věda si získala velkou společenskou prestiž, protože usilovala o aplikaci svých poznatků v praxi. V prvé fázi řešila tematiku odvozenou z praktických hospodářských potřeb. Ve druhé fázi se příroda sama stala předmětem systematického výzkumu. Věda dodávala velké impulsy rozvíjejícím se technickým vědám, což mělo v hospodářské oblasti za následek postupné narušování feudálních vztahů a vznik kapitalistických prvků výroby.

O tom všem se čtenář podrobně dozvf v citované knize ze širších historických souvislostí. Setkává se s řsdou jmen, o kterých mnohdy izolovaně a útržkovitě slyšel např. v hodinách fyziky, popř. dějepisu. Nyní může lépe pochopit určité iyzikální objevy a jejich následné technické aplikace pro společenský pokrok lidstva. Obsah knihy tvoří vybrané kapitoly ze světových dějin v období od anglické do francouzské buržoazní revoluce. V tomto rámci jsou zařazeny i kapitoly týkající se vývoje v českých zemích. Možno říci, že kniha rozšiřuje, prohlubuje a podněcuje zájem nejen o hlubší studium obecné historie, ale i o studium historie přírodních a technických věd v uvedeném období.

Záměr autorů podnítit zájem čtenářů o evropské dějiny v 17. a v 18. století kniha dobře plní jednak tím, že se jim podařilo zpraccvat téma velice poutavým způsobem a jednak tím, že publikaci vybavili velmi bohatým obrazovým materiálem. K orientaci v textu slouží v závěru uvedený „Slovníček a rejstřík osob" se stručnou charakteristikou, portrétem a odkazem na příslušnou stránku.

Knihu pro její nespornou naukovou hodnotu vřele doporučujeme pozornosti všem mladým čtenářům.

Rudolf Kolomý

Eulerova učebnice algebry


Vollständige Anleitung zur Algebra von Hrn. Leonhard Euler.

Erster Theil.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnissen und Proportionen.

St. Petersburg.

gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 1770.

Na obrázku vidíme titulní list německého vydání učebnice „Úplný návod k algebře“, která vyšla v r. 1770 v Petrohradě (její ruská varianta sloužila jako učebnice v gymnáziu zřízeném při Akademii věd). *Leonhard Euler* (1707 až 1783) ji dokončil po svém návratu do Petrohradu v r. 1766. Protože ztrácel zrak, diktoval text knihy svému sluhovi, který ho doprovázel z Berlína a zůstal v jeho službách. Traduje se, že tento sluha, původně krejčovský tovaryš, se přitom naučil základům algebry, ač původně ovládal jen kupecké počty. Euler skutečně podal v prvním dílu učebnice velmi přístupný úvod do algebry.

Výrazným rysem jeho výkladu bylo to, že v úvodu článků předváděl numerické výpočty a od nich přecházel k výrazům s písmeny; úpravy algebraických výrazů motivoval zkušenostmi s numerickými výpočty. Už v prvním dílu učebnice došel k počítání s logaritmy, k rozvojům lomených výrazů a mocnin do nekonečných řad, ke studiu aritmetických a geometrický řad. V náročnějším druhém dílu nejprve vyložil řešení rovnic 1. až 4. stupně pomocí vzorců a řešení rovnic aproximacemi jejich reálných kořenů. Velkou pozornost věnoval pak řešení tzv. neurčitých rovnic v oboru racionálních čísel (u nás častěji hovoříme o diofantovských rovnicích). Pomocí parametrů popsal Euler úplná řešení i velmi složitých úloh, z nichž většinu zformuloval sice Diofantos už ve 3. století n. l., ale řešil je vždy jen pro určité číselné hodnoty parametrů, nikoliv obecně.

Euler označoval analytiku neboli algebru na základ celé matematiky.

Jaroslav Šedivý

Čo je matematika?

Matematika je učiteľkou presného a poctivého myslenia a vedie k triezelivemu, ale pravdivému životu.

B. Bydžovský

Matematika je veda pre kvantitatívne vzájemné vzťahy a priestorové formy skutočného sveta.

B. V. Gnedenko

Matematika je skúmanie najvšeobecnejších možných štruktúr, nech sú už dané priestorovo, časovo alebo dokonca len čisto pojmovo.

C. F. Weizsäcker

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

(8)

ROČNÍK 64, 1985/86
DUBEN

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:
Prof. Emil Kraemer, UK Praha, nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:
Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

MATEMATIKA

O geometrickém významu řešení lineárních diofantických rovnic

EVA JELÍNKOVÁ, RNDr. MILAN TRCH, CSc., PedF UK Praha

Předně je třeba říci, že *lineární diofantickou rovnicí* o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme rovnici tvaru:

(1) $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a\,,$$

kde všechny koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ jsou celá čísla a přitom řešením této diofantické rovnice rozumíme pouze uspořádané n-tice celých čísel $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, pro které platí rovnost:

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n = a.$$

Řešit diofantickou rovnici (1) vlastně znamená popsat množinu všech řešení jiným způsobem, který lépe vyhovuje naší představě.

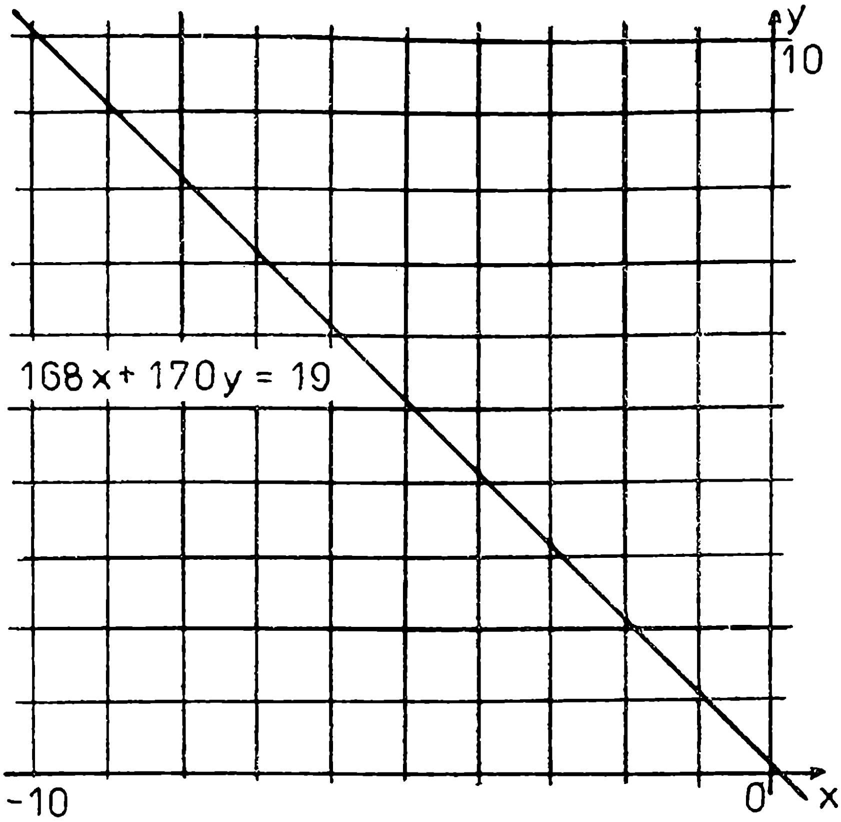
Tutéž rovnici však můžeme řešit i reálnými čísly. Pak však každé řešení diofantické rovnice (1) je jen speciálním případem řešení v oboru reálných čísel. V našem článku se zaměříme na případy $n = 2$ a $n = 3$, kdy umíme řešení graficky znázornit. Mnohé úvahy však mají obecnější platnost, neboť nejsou závislé na počtu neznámých. Proto by bylo možno vyslovit některá tvrzení obecněji, než to v tomto článku učiníme. Formulaci i důkazy těchto tvrzení přenecháme zvídavým čtenářům.

Pro $n = 2$ má diofantická rovnice o dvou neznámých tvar:

(2) $$a_1x_1 + a_2x_2 = a\,.$$

Všechna reálná řešení této rovnice lze v dané soustavě souřadnic znázornit jako body přímky dané rovnicí (2). Systém přímek $x = r$, $y = s$, kde r, s jsou libovolná celá čísla, tvoří jakousi „*mříž*" v kartézské soustavě souřadnic. Proto se také body (r, s), kde r, s jsou celá čísla, nazývají „*mřížové body*". Z tohoto hlediska řešit diofantickou rovnici (2) vlastně znamená popsat všechny mřížové body, které leží na přímce určené rovnicí (2). Je ovšem otázka, zda takové body vůbec existují. Samotné grafické znázornění situace totiž ještě nepřináší jistotu, zda mřížový bod na dané přímce leží, anebo je pouze „velmi blízko" této přímky (viz obr. 1). Uvažujme například rovnici $168 \,.\, x + 170 \,.\, y = 19$.

Jako diofantická rovnice nemůže mít tato rovnice vůbec žádné řešení, protože na levé straně při libovolném dosazení celých čísel za x, y dostaneme vždy sudé číslo. Nechápeme-li tuto rovnici jako diofantickou, pak snadno zjistíme výpočtem, že pro $x = -10$ je příslušná hodnota



Obr. 1: Nepřesnost geometrického řešení

$y = 9{,}9941176$. Proto by se z grafu mohlo „zdát", že mřížový bod $(-10; 10)$ je bodem přímky s uvažovanou rovnicí. Proto prvořadým úkolem je zjistit, zda zkoumaná diofantická rovnice vůbec nějaká řešení má. Pro stručnost říkáme, že diofantická rovnice je „řešitelná", existuje-li alespoň jedno řešení této rovnice. Pokud takové řešení neexistuje, říkáme, že diofantická rovnice „není řešitelná".

Řešitelnost diofantické rovnice (2) úzce souvisí s největším společným dělitelem čísel a_1, a_2. Předpokládejme, že rovnice (2) je řešitelná a nechť (r_1, r_2) je nějaké řešení rovnice (2). Označíme-li d největšího společného dělitele čísel a_1, a_2, pak lze na levé straně rovnosti $a_1r_1 + a_2r_2 = a$ vytknout číslo d. Proto nutno podmínkou řešitelnosti rovnice (2) je podmínka „d dělí a". Lze však ukázat, že tato podmínka je i postačující. K tomu je však potřebné znát ještě jednu vlastnost největšího společného dělitele v oboru celých čísel, kterou vyjadřuje následující věta:

Věta 1: Největší společný dělitel celých nenulových čísel a_1, a_2 je právě nejmenší kladné číslo, které lze vyjádřit ve tvaru $a_1 \, . \, s + a_2 \, . \, t$, kde s, t jsou nějaká celá čísla.

Důkaz: Je-li d' libovolný společný dělitel čísel a_1, a_2, potom z každého čísla tvaru $a_1 \, . \, s + a_2 \, . \, t$ lze vytknout d', ať jsou s, t jakákoliv celá čísla. Proto d' dělí každé číslo požadovaného tvaru a platí také $d' \leqq a_1 \, . \, s + a_2 \, . \, t$ pro každého společného dělitele čísel a_1, a_2; tedy i pro největšího společného dělitele d čísel a_1, a_2.

Na druhé straně však množina M všech kladných čísel, která lze vyjádřit ve tvaru $a_1 . s + a_2 . t$, kde s, t jsou celá čísla, je neprázdná. Obsahuje totiž například číslo $a_1 . a_1 + a_2 . a_2$. Proto v M existuje nejmenší číslo — označme jej m. Protože $m \in M$, existují celá čísla s, t taková, že platí:

(3) $$m = a_1 . s + a_2 . t .$$

V množině celých čísel lze dělit se zbytkem. Speciálně pro čísla a_1, m existují celá čísla p, q tak, že $a_1 = m . p + q$, kde $0 \leqq q < m$. Kdyby však bylo $0 < q$, potom by z předchozí rovnice a za použití (3) bylo možno vyjádřit i číslo q pomocí čísel a_1, a_2. To by ale znamenalo, že také $q \in M$. Pak by mělo platit $q < m$ a zároveň $m \leqq q$. To není možné, tedy nutně $q = 0$ a číslo m dělí a_1. Z podobných důvodů také m dělí a_2, proto m je společný dělitel čísel a_1, a_2. Z prvé úvahy v důkaze však zároveň vyplývá, že m je ze všech společných dělitelů největší.

Důsledkem této věty je ovšem i slíbené tvrzení:

Věta 2: Diofantická rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 = a$ je řešitelná právě tehdy, když největší společný dělitel d čísel a_1, a_2 dělí číslo a.

Důkaz: Bylo již ukázáno, že jde o nutnou podmínku. Zbývá tedy dokázat že podmínka je postačující. Podle předchozí věty existují celá čísla s, t taková, že $d = a_1 . s + a_2 . t$. Zároveň však podle předpokladu existuje číslo k tak, že $a = d . k$. Odtud již vyplývá, že uspořádaná dvojice $(k . s;\ k . t)$ je řešení uvažované diofantické rovnice, tedy rovnice je skutečně řešitelná.

Zajímavé však je, že věta 1 nedává jen existenci řešení diofantické rovnice, ale umožňuje také alespoň jedno řešení nalézt. Vezměme například rovnici $13 . x + 41 . y = 5$. Abychom věděli, zda je tato rovnice řešitelná, určíme podle věty 1 největšího společného dělitele čísel 13 a 41. Zřejmě platí: $1 . 41 + (-3) . 13 = 2$. Proto číslo 2 leží v M. Toto číslo však není největším společným dělitelem čísel 13 a 41. Při dělení číslem 2 dává každé z nich zbytek 1. Platí tedy:

$$1 = 1 . 13 + (-6) . 2 = 1 . 13 - 6 . [1 . 41 + (-3) . 13] =$$
$$= -6 . 41 + 19 . 13$$

Číslo 1 je tedy největší společný dělitel čísel 13 a 41; navíc však uspořádaná dvojice $(5 . 19;\ 5 . (-6))$ je řešením zkoumané rovnice. Metoda tedy dává jedno řešení diofantické rovnice. Zbývá jen zjistit, zda existují ještě jiná řešení a popsat způsob, jak tato řešení najít.

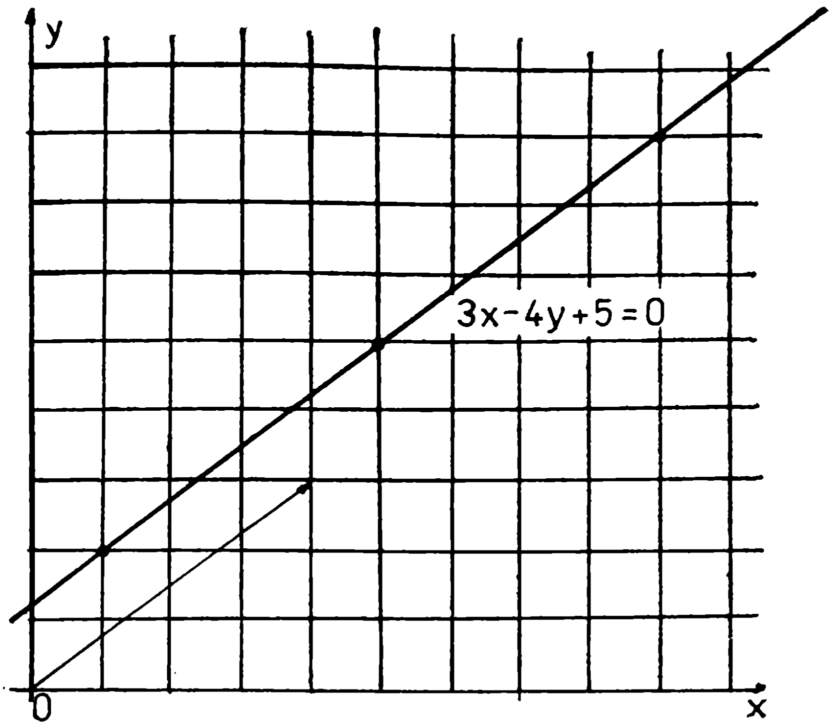
Předpokládejme, že (r_1, r_2) a (y_1, y_2) jsou nějaká dvě řešení rovnice (2) a hledejme mezi nimi nějakou souvislost. Protože zároveň platí rovnosti:

$$a_1r_1 + a_2r_2 = a \quad \text{a} \quad a_1y_1 + a_2y_2 = a ,$$

musí platit také rovnost:

$$a_1 . (y_1 - r_1) + a_2 . (y_2 - r_2) = 0 .$$

To znamená, že řešení (r_1, r_2) se od řešení (y_1, y_2) liší právě o řešení $(y_1 - r_1, y_2 - r_2)$ obdobné rovnice, která má na pravé straně nulu. Je-li



Obr. 2: Geometrické řešení rovnice $3 \, . \, x - 4 \, . \, y + 5 = 0$ a vektor (4,3)

však (u_1, u_2) libovolné řešení přiřazené rovnice

(4) $$a_1 \, . \, x_1 + a_2 \, . \, x_2 = 0 \, ,$$

potom dvojice $(r_1 + u_1; \; r_2 + u_2)$ je zřejmě řešením původní rovnice. Jinak řečeno, každé řešení rovnice (2) lze získat jako součet jednoho dílčího řešení rovnice (2) — a to již umíme nalézt — a všech řešení přiřazené rovnice. Všimněme si blíže těchto řešení přiřazené rovnice. Je-li d největší společný dělitel čísel (a_1, a_2), potom existují nesoudělná celá čísla b_1, b_2 tak, že platí:

$$a_1 = d \, . \, b_1 \quad \text{a} \quad a_2 = d \, . \, b_2 \, .$$

Označíme-li $(u_1; \; u_2)$ libovolné řešení přiřazené rovnice, potom platí: $a_1 \, . \, u_1 + a_2 \, . \, u_2 = 0$. Odtud dostáváme — pokud například $a_2 \neq 0$ — vztah:

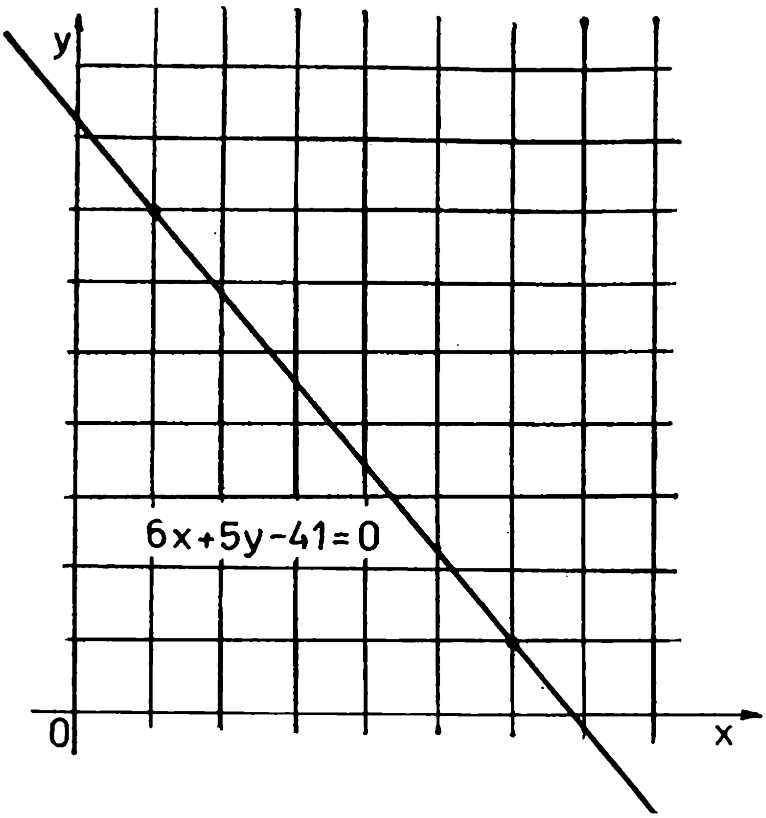
$$u_2 = -\frac{a_1}{a_2} \, . \, u_1 \quad \text{a po zkrácení} \quad u_2 = -\frac{b_1}{b_2} \, . \, u_1 \, .$$

Má-li přitom být u_2 celé číslo, nutně musí b_2 dělit číslo u_1. Proto existuje celé číslo t takové, že $u_1 = b_2 \, . \, t$. Dosazením můžeme určit i hodnotu $u_2 = -b_1 \, . \, t$. Konečně je také ihned vidět, že každá dvojice $(b_2 \, . \, t; \; -b_1 \, . \, t)$ je řešením přiřazené rovnice (4).

Tím máme popsána všechna řešení přiřazené i původní rovnice. Výsledek můžeme shrnout do věty:

Věta 3: Každé řešení diofantické rovnice (2) je tvaru:

(5) $$x_1 = r_1 + b_2 \, . \, t \, , \qquad x_2 = r_2 - b_1 \, . \, t \, ,$$



Obr. 3: Další diofantická rovnice o dvou neznámých

kde t je libovolné celé číslo, $(r_1;\ r_2)$ jedno nějaké řešení rovnice (2) a $b_1 = \frac{a_1}{d}$, $b_2 = \frac{a_2}{d}$, přičemž d je největší společný dělitel čísel a_1, a_2.

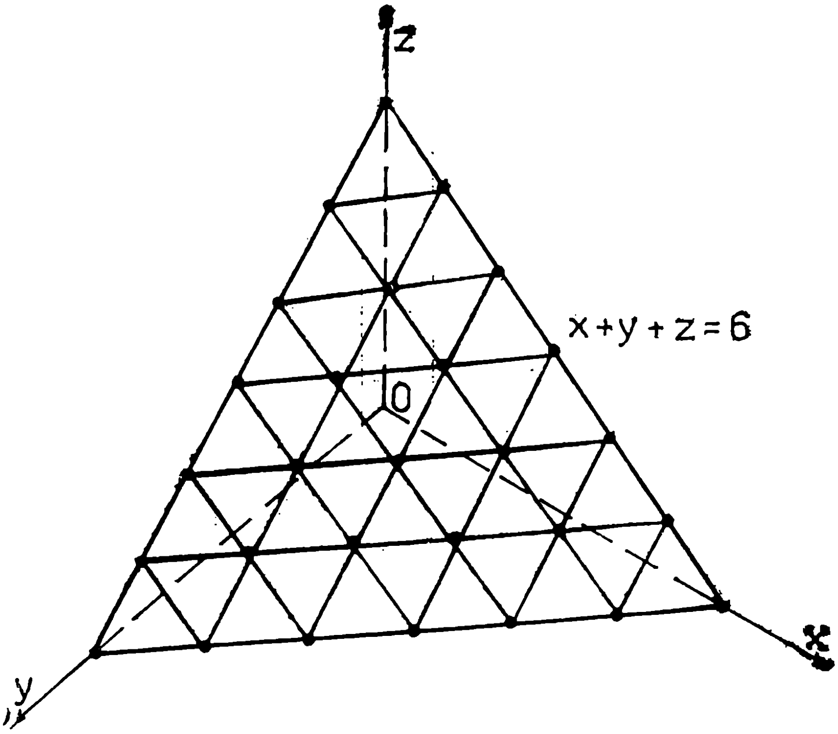
Definujeme-li přirozeným způsobem sčítání dvojic a násobek dvojice celým číslem po složkách, můžeme též psát:

$$(x_1;\ x_2) = (r_1;\ r_2) + t \,.\, (b_2;\ -b_1)\,. \tag{6}$$

Vztah lze interpretovat i geometricky (viz obr. 2). Každé řešení $(x_1;x_2)$ můžeme získat posunutím bodu $(r_1;\ r_2)$ o vhodný násobek vektoru $(b_2;\ -b_1)$. Mřížové body jsou proto — pokud je rovnice řešitelná — na přímce pravidelně rozmístěny. Každé řešení bychom proto také mohli získat postupným několikanásobným posunutím jednoho řešení $(r_1;\ r_2)$ o vektor $(b_2;\ -b_1)$ nebo o vektor k němu opačný. Přitom je zřejmé, že vzdálenost libovolných dvou sousedních řešení je právě $\sqrt{b^2{}_2 + b^2{}_1}$. Proto vektor $(b_2;\ -b_1)$ můžeme nazývat třeba minimálním řešením přiřazené rovnice. Konečně je dobré si uvědomit, že pokud je rovnice (2) řešitelná, pak už má nekonečně mnoho řešení.

Příklad: Ukažte, že diofantická rovnice $34 \,.\, x + 100 \,.\, y = 6$ je řešitelná, určete všechna řešení a graficky je znázorněte!

Řešení: Platí $3 \,.\, 34 - 1 \,.\, 100 = 2$; protože číslo 2 dělí již oba koeficienty rovnice 34 a 100, je jejich největším společným dělitelem. Dále je $2 \,.\, 3 = 6$



Obr. 4: Další diofantická rovnice o třech neznámých

a tedy dvojice $(3 . 3; 3 . (-1))$ je jedním z řešení dané diofantické rovnice. Všechna řešení podle věty 3 jsou tvaru:

$$(x, y) = (9, -3) + t . (50; 17) .$$

Na obrázku 3 je grafické znázornění řešení další lineární diofantické rovnice o dvou neznámých. Jedno řešení této rovnice bylo zjištěno obdobným způsobem jako u rovnice předchozí. Vektor posunutí je $(-5; 6)$.

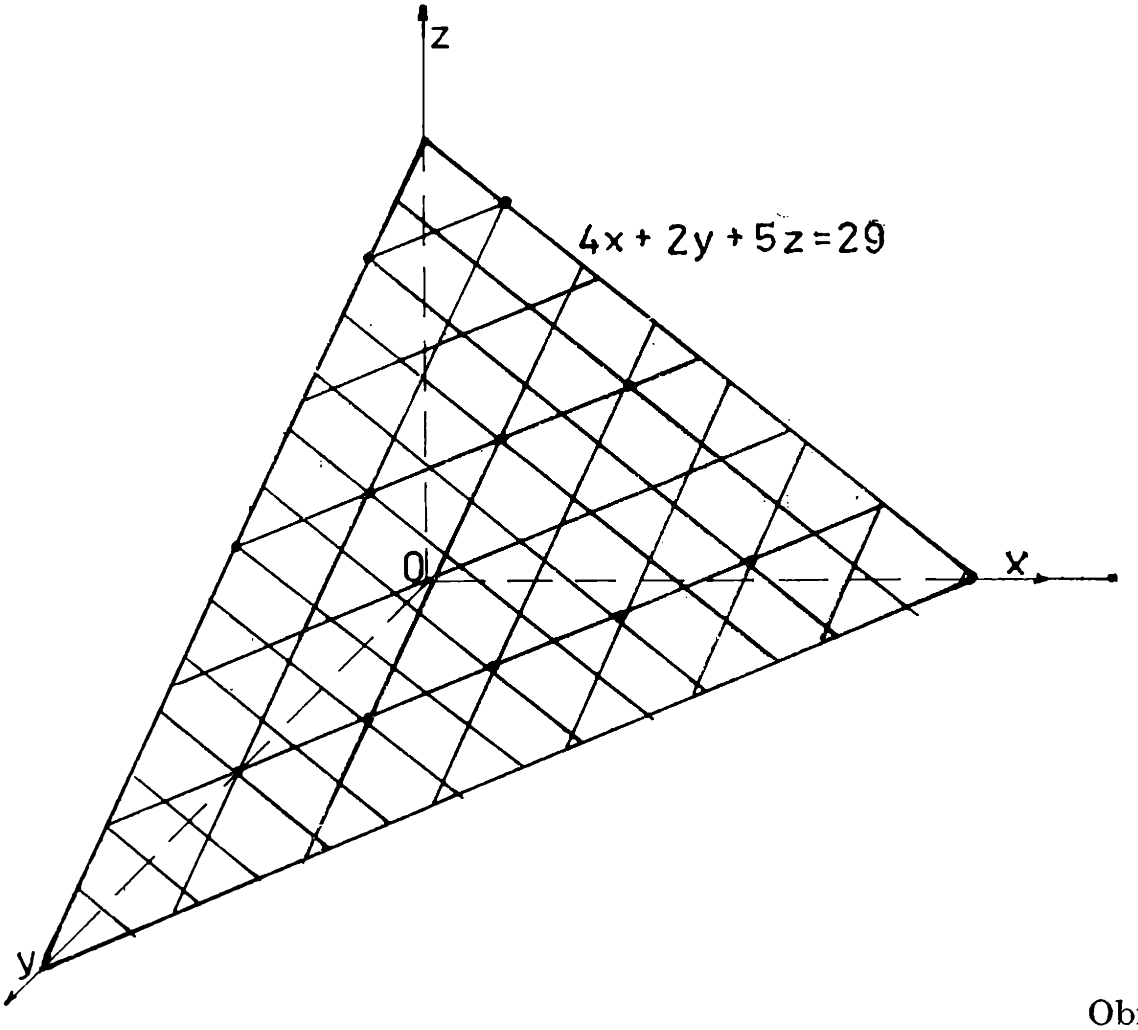
Pro $n = 3$ má diofantická rovnice tvar $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a$. Snadno asi nahlédnete, že věta 1 se dá zobecnit i pro trojici celých čísel a_1, a_2, a_3. To umožňuje zobecnit i větu 2 a nalézt — pokud je diofantická rovnice pro tři neznámé řešitelná — alespoň jedno její řešení. Řešit diofantickou rovnici pro tři neznámé zase znamená najít všechny mřížové body, které patří rovině dané rovnicí $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a$ v dané kartézské soustavě souřadnic. Z analytické geometrie víme, že rovinu je možno také zadat parametricky pomocí počátku a dvou vhodných vektorů ve tvaru:

$$X = P + t . \mathbf{v} + s . \mathbf{w} , \quad \text{kde } t, s \text{ jsou reálná čísla} .$$

Podobným způsobem můžeme popsat i mřížové body roviny. Předpokládejme, že uspořádané trojice $(y_1; y_2; y_3)$ a $(z_1; z_2; z_3)$ jsou nějaká dvě řešení diofantické rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a$. Potom platí také

$$a_1 . (y_1 - z_1) + a_2 . (y_2 - z_2) + a_3 . (y_3 - z_3) = 0 .$$

Tím se opět dostáváme k řešení přiřazené rovnice s pravou stranou 0. Dosazením snadno ověříme, že pro každé řešení $(u_1; u_2; u_3)$ přiřazené



Obr. 5

rovnice je trojice ($z_1 + u_1$; $z_2 + u_2$; $z_3 + u_3$) řešením rovnice původní. Je tedy třeba najít všechna řešení rovnice přiřazené:

(7) $$a_1 . x_1 + a_2 . x_2 + a_3 . x_3 = 0 .$$

V této rovnici lze dvě čísla volit a třetí vypočítat. Je však třeba to udělat tak, aby všechna čísla byla celá. Položíme-li navíc podmínku $x_3 = 0$, můžeme najít jako v případě pro $n = 2$ vztah mezi čísly v_1, v_2 z řešení (v_1; v_2; 0) přiřazené rovnice (7). Podobně bychom ale mohli také volit podmínku $x_2 = 0$ a získat vztah mezi čísly w_1, w_3 jiného řešení (w_1; 0; w_3) rovnice (7). Při zadání diofantické rovnice jsou obvykle všechny koeficienty u neznámých nenulové. Proto můžeme pro čísla v_1, v_2, w_1, w_3 nalézt vztahy:

(8) $$v_2 = -\frac{a_1}{a_2} . v_1 , \qquad w_3 = -\frac{a_1}{a_3} . w_1$$

Označíme-li největšího společného dělitele čísel a_1, a_2 symbolem d_{12}, největšího společného dělitele čísel a_1, a_3 symbolem d_{13}, potom existují nesoudělná celá čísla b_1, b_2, c_1, c_3 tak, že platí:

$$a_1 = d_{12} . b_1 ; \quad a_2 = d_{12} . b_2 ; \quad a_1 = d_{13} . c_1 ; \quad a_3 = d_{13} . c_3 .$$

Dosadíme-li tyto vztahy do (8) a uvážíme-li, že v_2, w_3 mají být celá čísla, nutně musí číslo b_2 dělit v_1 a také číslo c_3 dělit w_1. Proto lze nalézt celá čísla t, s tak, že platí:

$$(v_1;\ v_2;\ 0) = (b_2\,.\,t;\ -b_1\,.\,t;\ 0) \quad \text{a} \quad (w_1;\ 0;\ w_3) = (c_3\,.\,s;\ 0;\ -c_1\,.\,s)$$

Řešením původní diofantické rovnice o třech neznámých proto bude jistě i trojice:

$$(z_1 + b_2\,.\,t + c_3\,.\,s;\ z_2 - b_1\,.\,t;\ z_3 - c_1\,.\,s)\,.$$

To lze ovšem také symbolicky zapsat ve tvaru:

(9) $(x_1;\ x_2;x_3) = (z_1;\ z_2;\ z_3) + t\,.\,(b_2;\ -b_1;\ 0) + s\,.\,(c_3;\ 0;\ -c_1)$

Je-li však $(x_1;\ x_2;\ x_3)$ libovolný mřížový bod roviny určené v kartézské soustavě souřadnic rovnicí $a_1\,.\,x_1 + a_2\,.\,x_2 + a_3\,.\,x_3 = a$, potom lze nalézt jednoznačně reálné parametry t, s, které určují právě uvažovaný bod $(x_1;\ x_2;\ x_3)$. Konkrétním propočtem by bylo možno ukázat, že tyto parametry budou celočíselné, jestliže čísla a_1, a_2, a_3 budou po dvou. nesoudělná. Pak vztahem (9) jsou popsány všechny mřížové body roviny určené příslušnou rovnicí.

Geometricky to znamená, že libovolné řešení lze získat z jediného řešení $(z_1;\ z_2;\ z_3)$ složením dvou posunutí o vhodný násobek vektoru $(b_2;\ -b_1;\ 0)$ a vektoru $(c_3;\ 0;\ -c_1)$. Pokud je diofantická rovnice $a_1\,.\,x_1 + a_2\,.\,x_2 + a_3\,.\,x_3 = a$ řešitelná, pak má nekonečně mnoho řešení; k nalezení všech stačí znát řešení jediné a dva nezávislé vektory, které lze určit z koeficientů dané rovnice.

Příklad: Rozhodněte, zda je řešitelná rovnice $3x + 7y + 10z = 2$.

Řešení: Platí například $(-3)\;\ 3 + 0\;\ 7 + 1\;\ 10 = 1$. Číslo 1 je zřejmě nejmenší takové kladné číslo, které lze vyjádřit ve tvaru:

$$3\,.\,x + 7\,.\,y + 10\,.\,z$$

Číslo 1 je tedy největší ze společných dělitelů čísel 3, 7, 10, ale navíc trojice $(-6;\ 0;\ 2)$ představuje jedno z možných řešení dané rovnice Podobně bychom mohli například vyjít ze vztahu

$(-2)\,.\,3 + 1\;\ 7 + 0\;\ 10 = 1$ a ukázat, že řešením je např. trojice $(-4;\ 2;\ 0)$. Protože v našem případě je $d_{12} = 1 = d_{13}$, je $b_1 = c_1 = 3$, dále je $b_2 = 7$ a $c_3 = 10$. Proto každé řešení je nutně tvaru:

$$(x_1;\ x_2;\ x_3) = (-4;\ 2;\ 0) + t\;\ (7;\ -3;\ 0) + s\,.\,(10;\ 0;\ -3)$$

Na obrázcích 4, 5 je grafické znázornění řešení lineárních diofantických rovnic o třech neznámých. Znázorněna jsou pouze řešení z oboru přirozených čísel.

Cvičení: Najděte všechna řešení diofantických rovnic.

a) $7\,.\,x + 23\,.\,y = 4$ b) $15\,.\,x - 42\;\ y = 9$

c) $5\,.\,x + 8\,.\,y - 13\,.\,z = 6$ d) $6\,.\,x + 10\,.\,y + 15\,.\,z = 7$

Literatura:

[1] Vyšín, J.: Neurčité rovnice, JČSMF, Praha 1949

[2] Gelfond, A, O.,: Neurčité rovnice, SNTL, Praha 1974

[3] Gerža, I.: Neurčité diofantické rovnice, RMF, ročník 60, č. 4

[4] Mída, J.: Lineární diofantovské rovnice, RMF, ročník 62, č. 4

Logické obvody se členy NOR

Doc. dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

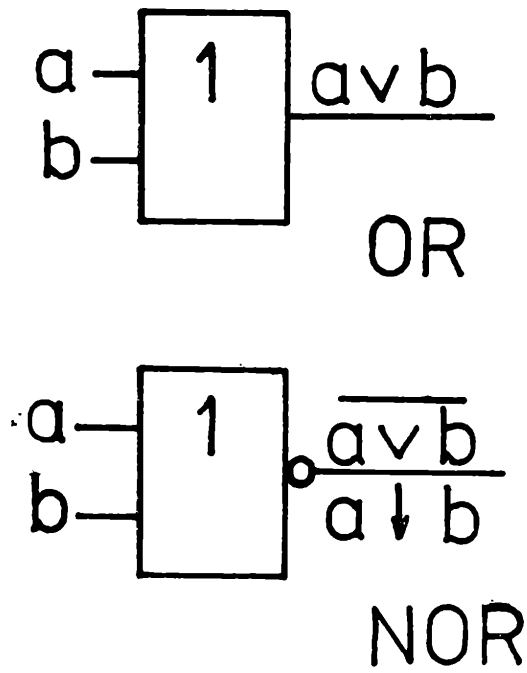
O logických obvodech s členy NAND jsme hovořili v článku [1]. Dnes si blíže povšimneme logických členů NOR (z anglického NOT OR, česky NE NEBO). Logický člen NOR je elektrotechnický výrobek, který realizuje logickou funkci *Peirce* (čti pírs).*) Znak Pierceovy funkce je $\downarrow$ a píše se mezi dvě výrokové proměnné takto: $a \downarrow b$. Tuto binární logickou spojku bychom mohli číst „ani ne . ., ani ne . . .“; často se píše jen o spojce ANI. Příkladem užití Peirceovy spojky může být složený výrok „ani nekouřím, ani nepiji alkohol“. Z tabulky 1 je patrno, že Peirceova funkce je negací disjunkce; zachycuje to důležitý vztah mezi pravdivostními hodnotami:

$$a \downarrow b \equiv \overline{a \vee b}$$

Tabulka 1

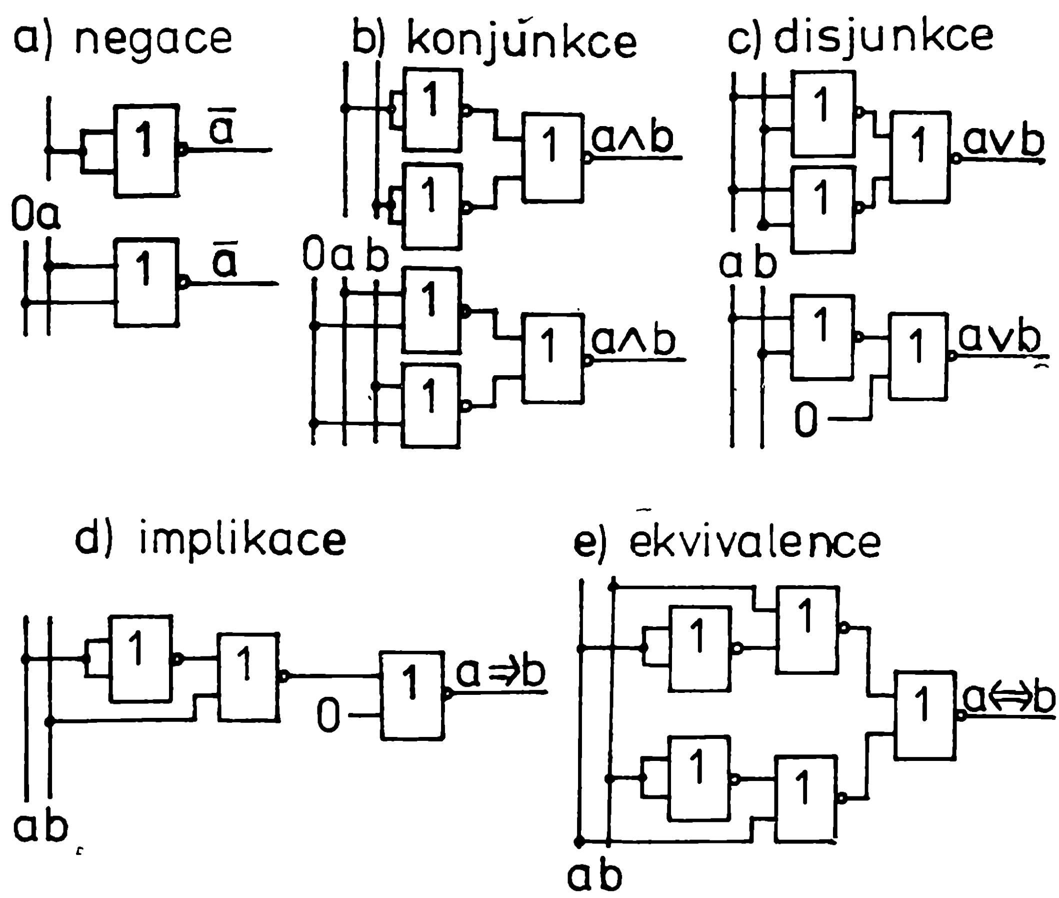
a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$ =	$a \downarrow b$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1

Na obr. 1 je logický člen OR (NEBO) a logický člen NOR (NE NEBO čili Peirce), jenž má ve schématu na výstupu malý kroužek. Člen NOR má nejméně dva vstupy, ale může jich mít i více. Z tabulky pravdivostních hodnot bychom se snadno přesvědčili, že když je signál alespoň na



Obr. 1 Logické členy

*) Někdy se tato pravdivostní funkce nazývá Nicodova-Łukasiewiczova nebo jen Nicodova



Obr. 2

jednom vstupu, pak je signál i na výstupu. Jen v případě, že na žádném vstupu není signál, pak signál není ani na výstupu logického členu NOR.

Stejně jako Shefferova funkce i Peirceova funkce tvoří funkčně úplný systém logických spojek. Znamená to, že Peirceovou funkcí dokážeme zapsat každou Booleovu (pravdivostní) funkci. Pro dvě výrokové proměnné je $2^{(2^2)} = 16$, pro tři výrokové proměnné je $2^{(2^3)} = 256$ těchto funkcí. Pro n proměnných lze vytvořit $2^{(2^n)}$ pravdivostních funkcí.

Místo znaku $\vee$ (latinsky čteme VEL, česky NEBO) se často píše $+$ a čte se PLUS a o zápisu $a + b$ se také říká logický součet. Nutno však vědět, že jde o booleovský součet, takže platí (viz tabulka 1):

$$1 + 1 = 1\,, \quad 1 + 0 = 1\,, \quad 0 + 1 = 1\,, \quad 0 + 0 = 0\,.$$

V ní také vyčteme, že platí:

$$1 \downarrow 1 = 0\,, \quad 1 \downarrow 0 = 0\,, \quad 0 \downarrow 1 = 0\,, \quad 0 \downarrow 0 = 1\,.$$

O tom, že Peirceovou funkcí můžeme vyjádřit tzv. klasické spojky $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, se snadno přesvědčíme tabulkovou metodou; to ponecháme čtenáři. Jen uvedeme tyto vztahy po řadě pro negaci, konjunkci, disjunkci, implikaci a ekvivalenci. Zde jsou:

a) $\bar{a} \equiv a \downarrow a \equiv a \downarrow 0\,,$

b) $a \wedge b \equiv \bar{a} \downarrow \bar{b} \equiv (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b) \equiv (a \downarrow 0) \downarrow (b \downarrow 0)\,,$

c) $a \vee b \equiv (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) \equiv \overline{a \downarrow b} \equiv (a \downarrow b) \downarrow 0\,,$

d) $a \Rightarrow b \equiv [(a \downarrow a) \downarrow b] \downarrow [(a \downarrow a) \downarrow b] \equiv (\bar{a} \downarrow b) \downarrow 0$,

e) $a \Leftrightarrow b \equiv [(a \downarrow a) \downarrow b] \downarrow [a \downarrow (b \downarrow b)] \equiv (\bar{a} \downarrow b) \downarrow (a \downarrow \bar{b})$.

Na obr. 2 jsou nakreslena některá schémata logických obvodů se členy NOR realizující vztahy a) až e).

Ve vztazích a) až e), resp. v logických obvodech se členy NOR na obr. 2, jsme využili důležitého pravidla $F \downarrow 0 = \bar{F}$; k vstupu logického členu jsme připsali 0. Při technické realizaci logického kombinačního obvodu se takový vstup připojuje na kostru.

Přidržíme se postupu, jehož jsme užili v článku [1] o logickýchob vodech se členy NAND, v němž jsme na Schefferovu funkci převedli funkci G. Nyní touž funkci převedeme na Peirceovu funkci realizovanou členem NOR. Použijeme jen spojek $\overline{}$, $\vee$, abychom pak zapsali funkci G jen spojkou $\downarrow$, resp. spojkami $\overline{}$, $\rightarrow$. Nebudeme již uvádět užitá pravidla Booleovy algebry při úpravě, neboť jsme je čtenáři připomenuli již minule. Platí:

$$\begin{aligned} G &= \{(a \Rightarrow b) \wedge [(\bar{a} \vee b) \wedge \bar{a}]\} \vee \bar{b} \\ & [(\bar{a} \vee b) \wedge \bar{a}] \vee \bar{b} \\ & \bar{a} \vee \bar{b} \end{aligned}$$

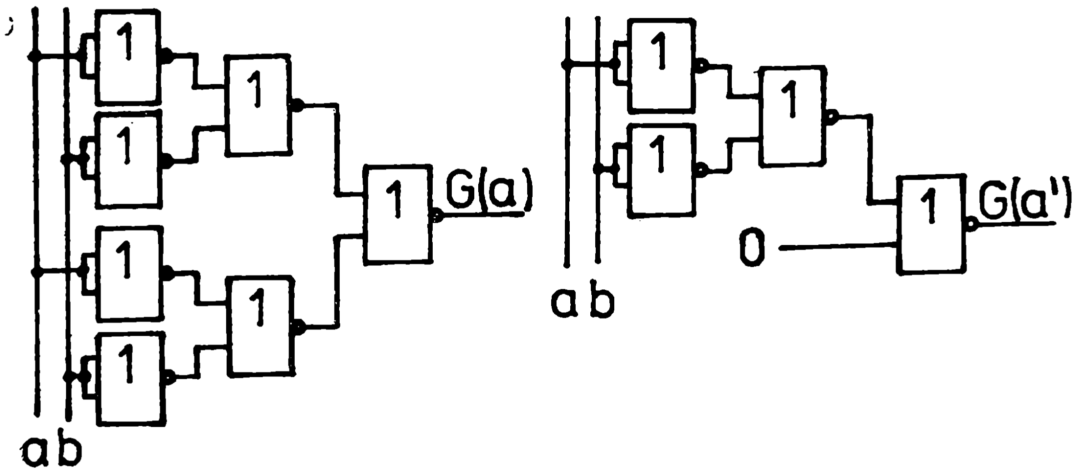
Poslední tvar se spojkami $\overline{}$, $\vee$ budeme transformovat na tvar jen se spojkami $\overline{}$, $\downarrow$, resp. jen se spojkou $\downarrow$. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} G &= \bar{a} \vee \bar{b} \\ & \overline{\overline{\bar{a} \vee \bar{b}}} \\ & \overline{\bar{a} \downarrow \bar{b}} \\ & (\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow (\bar{a} \downarrow \bar{b}) && \text{(a)} \\ & (\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow 0 && \text{(a}')\\ & [(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)] \downarrow [(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)] && \text{(a}'')\\ \text{resp. } & [(a \downarrow 0) \downarrow (b \downarrow 0)] \downarrow 0 && \text{(a}''') \end{aligned}$$

Na obr. 3 je schéma logického obvodu, jenž realizuje funkci G jednak podle (a), jednak podle (a′).

Při technickém provedení logického obvodu bychom se jistě rozhodli pro obvod na obr. 3 (a′), vystačíme jen se čtyřmi členy NOR. V případě (a) bychom k realizaci funkce G potřebovali sedm členů NOR.

V minulém článku jsme shledali, že Shefferova funkce není asociativní. Rovněž Peirceova funkce není asociativní. Zodpovíme si proto otázku, jak chápat např. často užívaný zápis $a \downarrow b \downarrow c \downarrow d$. Pravdivostní hodnota tohoto výrazu je negací disjunkce $a \vee b \vee c \vee d$. Vyjádříme to tímto pravidlem (p):



Obr. 3

$$\begin{array}{ccccccc}
a \downarrow b \downarrow c \downarrow d & \equiv & \multicolumn{5}{c}{\overline{a \vee b \vee c \vee d}} \\ \hline
0 & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \longleftarrow & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \qquad \text{(p)}$$

Pod pravidlem (p) jsme na třech řádcích z $2^4 = 16$ řádků pravdivostních hodnot uvedli výsledné pravdivostní hodnoty. K pravdivostnímu ohodnocení levé formule jsme došli tak, že jsme vyhodnotili pravou stranu formule a získané pravdivostní hodnoty jsme připsali i k levé straně formule se znaky $\downarrow$.

Tabulka 2

a	b	c	H
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

V minulém článku jsme sestavili logický obvod pro „hlasovací“ funkci H podle tabulky 2; tvar funkce H, zapsaný ve tvaru úplné normální disjunktivní formy je*)

*) Pokud čtenář není zvyklý na tento technický zápis, snadno si jej přepíše se znaky $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$.

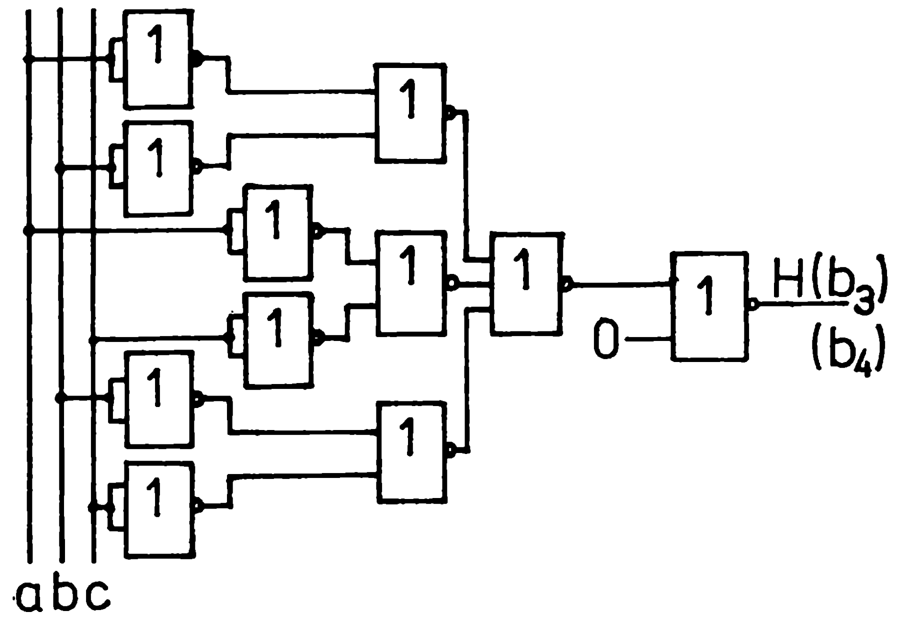
$$H = a \, . \, b \, . \, c + a \, . \, b \, . \, \bar{c} + a \, . \, \bar{b} \, . \, c + \bar{a} \, . \, b \, . \, c \, . \qquad \text{(b)}$$

Minimalizací jsme z tvaru (b) získali tvar (b_1)

$$H = a \, . \, b + a \, . \, c + b \, . \, c \, , \qquad (b_1)$$

který po další úpravě je

$$H = a \, . \, (b + c) + b \, . \, c \, . \qquad (b_2)$$



Obr. 4

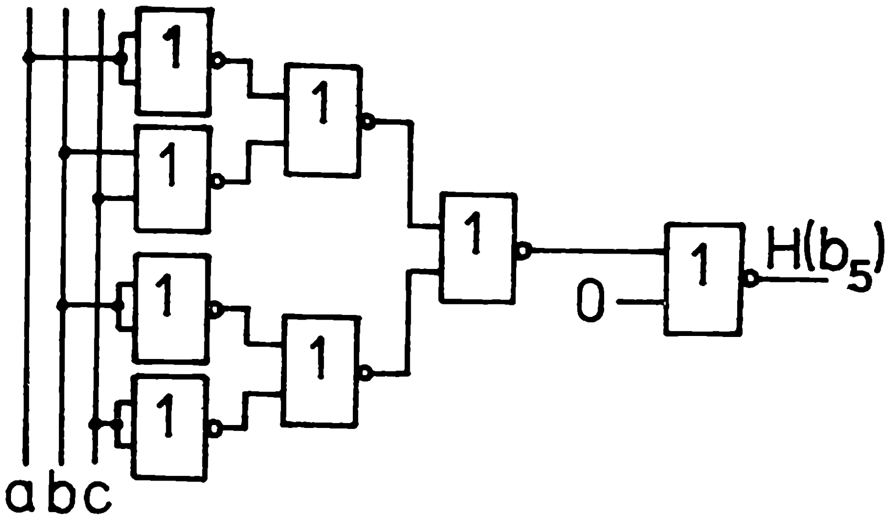
Upravíme (b_1) tak, aby obsahoval jen spojku $\downarrow$, popř. $\overline{}$, $\downarrow$.

$$H = a\,.\,b + a\,.\,c + b\,.\,c$$
$$\overline{\overline{a\,.\,b + a\,.\,c + b\,.\,c}}$$
$$\overline{a\,.\,b \downarrow a\,.\,c \downarrow b\,.\,c}$$
$$\overline{\overline{\overline{a\,.\,b}} \downarrow \overline{\overline{a\,.\,c}} \downarrow \overline{\overline{b\,.\,c}}}$$
$$\overline{\overline{\bar{a} + \bar{b}} \downarrow \overline{\bar{a} + \bar{c}} \downarrow \overline{\bar{b} + \bar{c}}}$$
$$\overline{(\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow (\bar{a} \downarrow \bar{c}) \downarrow (\bar{b} \downarrow \bar{c})}$$
$$[(\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow (\bar{a} \downarrow \bar{c}) \downarrow (\bar{b} \downarrow \bar{c})] \downarrow 0\,, \qquad (b_3)$$

resp. $\{[(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)] \downarrow [(a \downarrow a) \downarrow (c \downarrow c)] \downarrow$
$\downarrow [(b \downarrow b) \downarrow (c \downarrow c)]\} \downarrow 0 \qquad (b_4)$

Logický obvod realizující funkci H, který je sestaven z členů NOR na základě formule (b_3), resp. (b_4) je na obr. 4. Zjišťujeme, že je třeba užít deset dvojvstupových a jeden trojvstupý člen NOR. Obr. 5 znázorňuje rovněž funkci H, avšak na základě upravené formule (b_2) na tvar (b_5). Tento další tvar se získá takto:

$$H = a\,.\,(b + c) + b\,.\,c$$
$$\overline{\overline{a\,.\,(b + c) + b\,.\,c}}$$
$$\overline{a\,.\,(b + c) \downarrow b\,.\,c}$$
$$\overline{\overline{\overline{a\,.\,(b + c)}} \downarrow \overline{\overline{b\,.\,c}}}$$
$$\overline{\bar{a} + \overline{b + c}} \downarrow \overline{\bar{b} + \bar{c}}$$



Obr. 5

$$\overline{[\bar{a} \downarrow (b \downarrow c)] \downarrow (\bar{b} \downarrow \bar{c})}$$

$$\{[\bar{a} \downarrow (b \downarrow c)] \downarrow (\bar{b} \downarrow \bar{c})\} \downarrow 0 \qquad (b_5)$$

V případě, že bychom logický obvod pro funkci H vytvářeli z členů NOR, přikloníme se k schématu na obr. 5, protože spotřebujeme menší počet logických členů NOR.

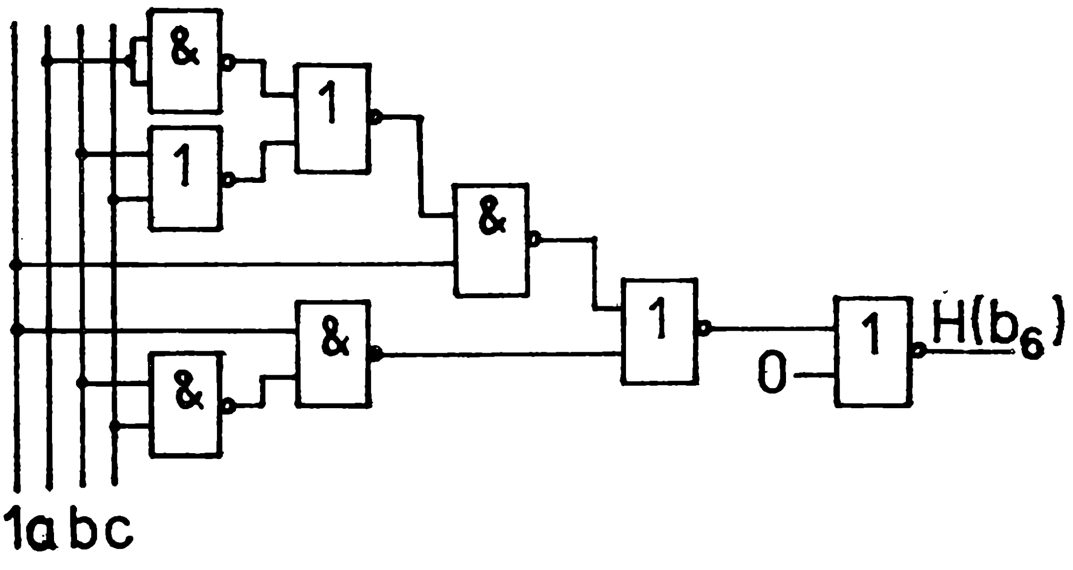
Setkáváme se i s logickými obvody, jež mají členy NAND i NOR. Abychom si takový obvod přiblížili, vyjdeme při úpravě formule H z tvaru (b_2). K upravené formuli (b_6) je příslušné schéma na obr. 6. Prohlédněte si postup úprav:

$$H = a . (b + c) + b . c$$

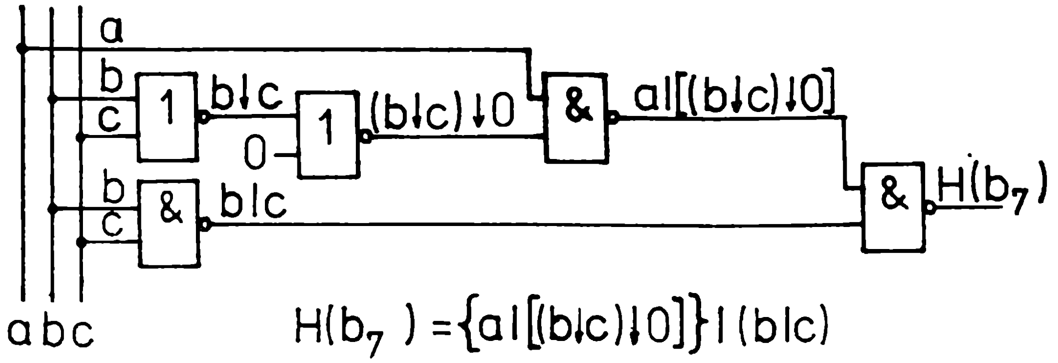
$$\overline{\overline{a . (b + c) + b . c}}$$

$$\overline{[a . (b + c)] \downarrow (b . c)}$$

$$[\overline{\overline{a . (b + c)}} \downarrow \overline{\overline{(b . c)}}] \downarrow 0$$



Obr. 6



Obr. 7

$$\overline{[\bar{a} + \overline{(b + c)}} \downarrow \overline{b \mid c]} \downarrow 0$$

$$(\{[\bar{a} \downarrow (b \downarrow c)] \mid 1\} \downarrow [(b \mid c) \mid 1]) \downarrow 0 \qquad (b_6)$$

Možných úprav dané pravdivostní funkce je zpravidla celá řada. Při návrhu kombinačního logického obvodu se snažíme o použití nejmenšího počtu logických členů, popř. se podřizujeme možnostem, které máme k dispozici. Na obr. 7 je schéma logického obvodu pro naši funkci H, který má jen pět dvojvstupových členů (dva NOR, tři NAND). Příslušná úprava formule (b_2) na tvar (b_7) je tato:

$$H = a \,.\, (b + c) + b \,.\, c$$

$$a \,.\, \overline{\overline{b + c}} + b \,.\, c$$

$$a \,.\, \overline{b \downarrow c} + b \,.\, c$$

$$\overline{\overline{a \,.\, \overline{b \downarrow c} + b \,.\, c}}$$

$$\overline{\overline{a \,.\, \overline{b \downarrow c}} \quad \overline{b \,.\, c}}$$

$$\overline{\overline{a \,.\, \overline{b \downarrow c}}} \mid (b \mid c)$$

$$(a \mid \overline{b \downarrow c}) \mid (b \mid c)$$

$$\{(a \mid [(b \downarrow c) \downarrow 0]\} \mid (b \mid c) \qquad (b_7)$$

Z porovnání schémat logického kombinačního obvodu pro funkci H nebo z porovnání příslušných formulí je patrno, že se jen vzájemně vyměnily spojky $\mid$ a $\downarrow$. Skutečně platí:

$$H = (a \mid b) \mid (a \mid c) \mid (b \mid c)\,,$$

$$H = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow c) \downarrow (b \downarrow c)$$

a rovněž

$$H = [a \mid (\bar{b} \mid \bar{c})] \mid (b \mid c)\,,$$

$$H = a \downarrow (\bar{b} \downarrow \bar{c})] \downarrow (b \downarrow c)$$

Snadno však zjistíme, že takto vždy nemůžeme Shefferovu a Peirceovu spojku zaměňovat. Stačí třeba uvést tento jednoduchý příklad pravdivostních funkcí pro $a = b = c = 1$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (a & \downarrow & b) & \downarrow & c & \not\equiv & (a & | & b) & | & c \\ \hline 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & 1 & & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 \end{array}$$

Pro dané pravdivostní hodnoty má Peirceova funkce hodnotu 0, avšak Shefferova funkce má hodnotu 1.

Doporučujeme čtenáři, aby si tabulkovou metodou vyhodnotil aspoň některé v článku uvedené formule pravdivostních funkcí. Dále nechť se čtenář pokusí k obrázkům schémat logických obvodů zapsat příslušné funkce jen se spojkou | nebo jen se spojkou $\downarrow$ nebo s oběma těmito spojkami. K usnadnění práce si může k vstupům a výstupům logických členů připsat příslušnou formuli, jak jsme to znázornili na obr. 7. Pro cvičení připojujeme dvě funkce:

$$B = (a \wedge \bar{b}) \Rightarrow [(\bar{a} \wedge b) \wedge (a \Leftrightarrow b)],$$

$$K = [p \Rightarrow (\bar{q} \wedge r)] \Rightarrow [s \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{s})].$$

Čtenáři navrhujeme řešit tyto úlohy:

a) Pro každou z těchto funkcí sestavte tabulku pravdivostních hodnot.
b) Funkce B, K transformujte na tvary, v nichž budou užity neklasické spojky | nebo $\downarrow$
c) Nakreslete příslušná schémata logických kombinačních obvodů získaných při řešení úlohy b) a pokuste se o minimalizování tak, aby navržené obvody měly co nejméně logických členů.

(Výsledky: $B = a \mid \bar{b}; B = (\bar{a} \downarrow b) \downarrow 0$. $K = q \mid \bar{s}; K = (\bar{q} \downarrow s) \downarrow 0$).

Literatura:

[1] Mráz V.: Logické obvody se členy NAND, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 4, s. 137—145

Řešení aritmetických rébusů

a) 1453 6987 = 10152111
b) 10711404 : 2178 = 4918

Vrh šikmo vzhůru II

JOSEF KOTYK, Pardubice

V části I., otištěné v roč. 63, čísl. 7, str. 303 až 307, jsme se zabývali některými vlastnostmi vrhu šikmo vzhůru. Zajímali jsme se především o kinematiku, tj. geometrii pohybu, a jako vhodného prostředku užívali analytické geometrie. Připojujeme ještě několik dalších úvah o rychlosti pohybu.

Východiskem učiňme opět známé parametrické vyjádření parabolické dráhy vrhu šikmo vzhůru rovnicemi

$$x = v_0 \,.\, t \,.\, \cos \alpha \,, \qquad y = v_0 \,.\, t \,.\, \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

Derivováním těchto vztahů podle proměnného času t dostaneme, jak známo ze základů infinitezimálního počtu, složky okamžité rychlosti v, vodorovnou v_x a svislou v_y:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = v_0 \,.\, \cos \alpha \,, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y = v_0 \,.\, \sin \alpha - gt \,. \tag{2}$$

Umocněním dvěma a sečtením vychází pak pro výslednou rychlost

$$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 = v_0{}^2 \;\; (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2g \left(v_0 \,.\, t \,.\, \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \right)$$

neboli

$$v^2 = v_0{}^2 - 2g \,.\, y \tag{3}$$

Nalezený výraz nezávisí na elevačním úhlu α; dospíváme tedy k tomuto závěru: Hmotné body, vržené ve vakuu z počátku soustavy souřadnic šikmo vzhůru pod různými elevačními úhly touž počáteční rychlostí v_0, procházejí všechny vodorovnou rovinou (ve výši y) stejnou rychlostí v.

Vrcholu, tj. nejvyššímu bodu parabolické dráhy, přísluší největší pořadnice y. Jím probíhá hmotný bod podle rovnice (3) rychlostí nejmenší, bod vržený svisle vzhůru dokonce nulovou. Pro největší $y = y_\mathrm{V} =$

$= \dfrac{v_0^2 \,.\, \sin^2 \alpha}{2g}$ dostáváme pro rychlost, kterou vržený hmotný bod prochází vrcholem parabolické dráhy, z rovnice (3) toto vyjádření:

$$v^2 = v_0^2 - 2g \,.\, y_V = v_0^2 - v_0^2 \,.\, \sin^2 \alpha = v_0^2 \,.\, (1 - \sin^2 \alpha) = v_0^2 \,.\, \cos^2 \alpha$$

neboli $$v = v_0 \,.\, \cos \alpha = v_x \,.$$

Rychlost, kterou vržený hmotný bod prochází vrcholem parabolické dráhy, je rovna vodorovné složce počáteční rychlosti v_0.

Svislá složka této rychlosti je v tomto okamžiku, tj. po uplynutí doby výstupu $T = \dfrac{v_0 \,.\, \sin \alpha}{g}$, počítané od začátku pohybu, rovna nule. Z rovnice (2) vychází skutečně

$$v_y = v_0 \,.\, \sin \alpha - g \;\; T = v_0 \,.\, \sin \alpha - v_0 \,.\, \sin \alpha = 0 \,.$$

Zbývá pak dokázat ještě tuto zajímavost:

Rychlost hmotného bodu vrženého ve vakuu z počátku soustavy souřadnic šikmo vzhůru je v každém bodě jeho parabolické dráhy rovna rychlosti volného pádu, jež přísluší vzdálenosti uvažovaného místa od řídicí přímky paraboly.

Libovolný bod (x, y) parabolické dráhy nechť leží od její řídicí přímky ve vzdálenosti s. Tuto trasu by hmotný bod, pohybující se ve vakuu volným pádem, absolvoval v době $\tau = \sqrt{\dfrac{2s}{g}}$ a po jejím uplynutí by dosáhl v poloze (x, y) rychlosti

$$v = g \,.\, \tau = g \,.\, \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{g^2 \,.\, \frac{2s}{g}} = \sqrt{2gs} \,.$$

Touto rychlostí doletí však do polohy (x, y) také bod vržený z počátku; součet $y + s$ je totiž roven výšce $\dfrac{v_0^2}{2g}$ řídicí přímky nad zemí a z rovnice (3) vychází skutečně

$$v^2 = v_0^2 - 2g \,.\, y = v_0^2 - 2g \,.\left(\frac{v_0^2}{2g} - s\right) = v_0^2 - v_0^2 + 2gs = 2gs \,,$$

jak jsme očekávali.

Cvičení:

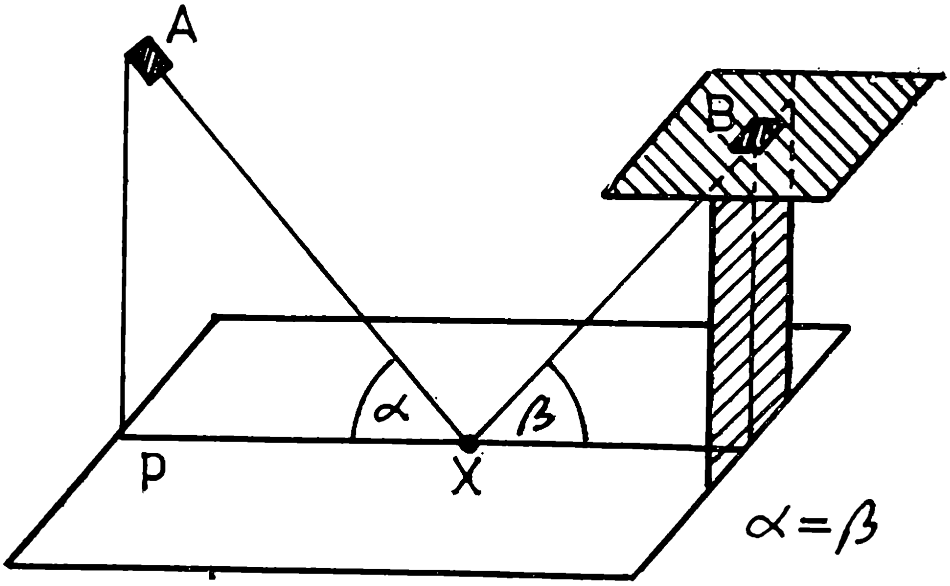
1. Úvahy, které jsme absolvovali, vykonejte pro vrh svisle vzhůru.
2. Důležitou rovnici (3) bylo by možno odvodit také ze zákona o zachování mechanické energie. Učiňte tak!

Princíp minima energie v geometrii

RNDr. MIROSLAV KRAJŇÁK, Gymnázium Prešov

Riešme nasledujúcu úlohu: Dané je pevné zrkadlo, pevná clona s otvorom B a otáčavý svetelný zdroj A, z ktorého vychádza úzky zväzok lúčov. Úlohou je nastaviť svetelný zdroj A tak, aby zväzok lúčov po odraze prechádzal otvorom B (obr. 1).

Predovšetkým využijeme známy zákon z fyziky, tzv. zákon odrazu: „Odrazený lúč zostáva v rovine dopadu a uhol jeho odrazu sa rovná uhlu dopadu.“ Pretože odrazený lúč leží v rovine dopadu, je táto jednoznačne určená bodmi A, B, lebo je kolmá na rovinu zrkadla. Daná úloha



Obr. 1

sa redukuje na planimetrickú úlohu:

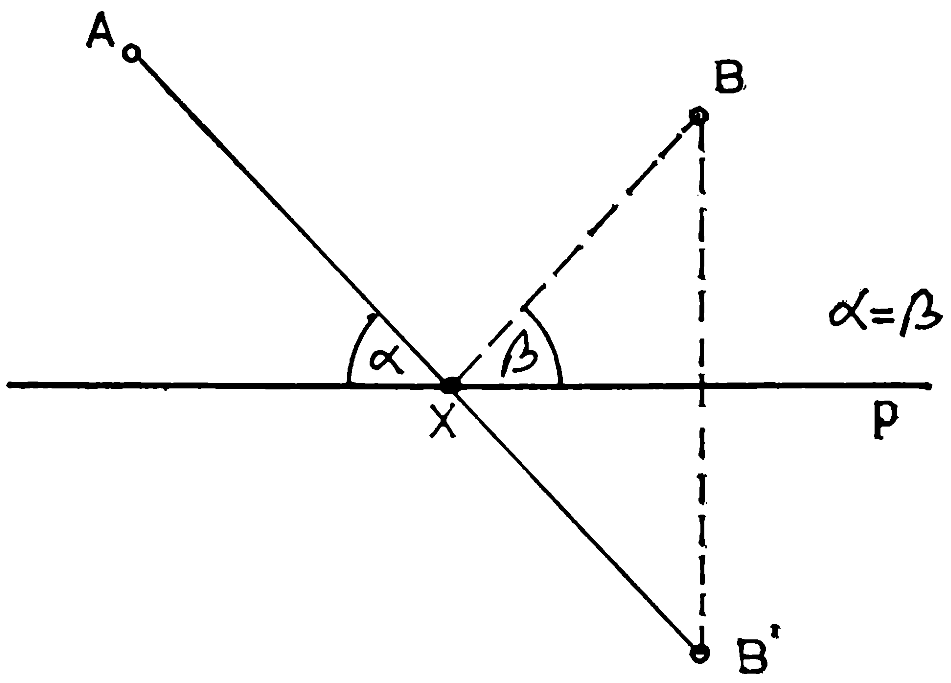
Dané sú dva rôzne body A, B ležiace v tej istej polrovine oddelenej priamkou p. Zostrojte bod X priamky p tak, aby priamky $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{XB}$ zvierali s priamkou p zhodné uhly.

Riešenie tejto úlohy je jednoduché. Stačí k bodu B zostrojiť obraz B' podľa priamky p, potom $\{X\} = p \cap \overleftrightarrow{AB'}$ (obr. 2).

Fyzikálnu úlohu sme redukovali na geometrickú.

Všetci dobre vieme, že matematiku neustále využívame vo fyzike. Menej je známy opak — *využitie fyziky, jej zákonov a modelov v matematike.*

V tomto článku ukážeme možnosť riešenia niektorých geometrických úloh pomocou jednoduchého fyzikálneho *princípu minima potenciálnej*



Obr. 2

energie, v súhlase s ktorým ľubovoľná mechanická sústava v rovnovážnom stave má minimálnu potenciálnu energiu.

Úloha 1 (geometrická):

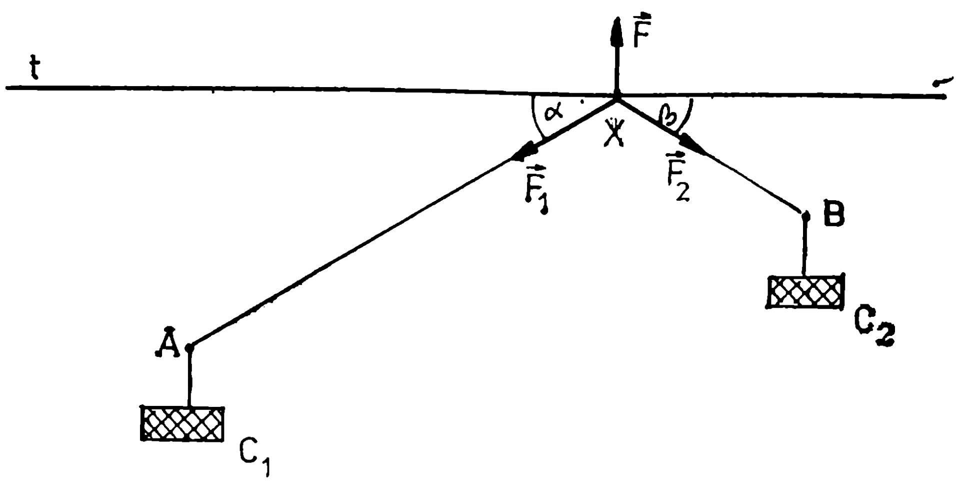
V rovine je daná priamka p a body A, B ležiace v tej istej polrovine. Nájdite taký bod $X \in p$, aby súčet $|AX| + |BX|$ bol najmenší — minimálny. Ukážte rovnosť uhlov α, β (obr. 2).

Túto úlohu vyriešime použitím osovej súmernosti: ak B' je obraz bodu B v osovej súmernosti s osou p, potom $\{X\} = p \cap \overleftrightarrow{AB'}$ (obr. 2). V skúške sa stačí odvolať na trojuholníkovú nerovnosť: $|AX| + |BX| = |AX| + |XB'| = |AB'| < |AY| + |BY|$, pričom Y je ľubovoľný bod priamky p, rôzny od bodu X. Z vlastnosti osovej súmernosti (je $\triangle\ BXB'$ rovnoramenný) vyplýva rovnosť uhlov $\alpha = \beta$.

Úloha 2 (fyzikálna):

Nech koliesko X zanedbateľnej hmotnosti sa môže pohybovať bez trenia po horizontálnej tyčke t (obr. 3). Ku koliesku sú pripevnené dve nite, ktoré vedieme cez kladky otáčajúce sa okolo vertikálnych osí v bodoch A, B. K voľným koncom nití C_1, C_2 sú pripevnené závažia rovnakej hmotnosti. Nájdite polohu kolieska X na tyčke t tak, aby sústava bola v rovnováhe (hmotnosť nití zanedbávame, kladky sa otáčajú bez trenia, rozmery kladiek a kolieska sú také malé, že ich môžeme nahradiť hmotnými bodmi, nite sa nerozťahujú).

Z princípu minima potenciálnej energie, podľa ktorého závažia musia visieť čo možno najnižšie nad úrovňou povrchu Zeme, vyplýva, že súčet dĺžok nití $|AC_1| + |BC_2|$ musí byť maximálny. Z toho, berúc v úvahu nemeniteľnosť dĺžky nite, vyplýva podmienka minimálnosti súčtu $|AX| + |BX|$.



Obr. 3

Zhodnosť výsledkov geometrickej a fyzikálnej úlohy (nájdenie polohy bodu X a koliesku X tak, aby $|AX| + |BX|$ bol minimálny) poukazuje na ekvivalenciu týchto úloh.

Rovnosť uhlov α, β vo fyzikálnej úlohe ukážeme uvážením pôsobiacich síl.

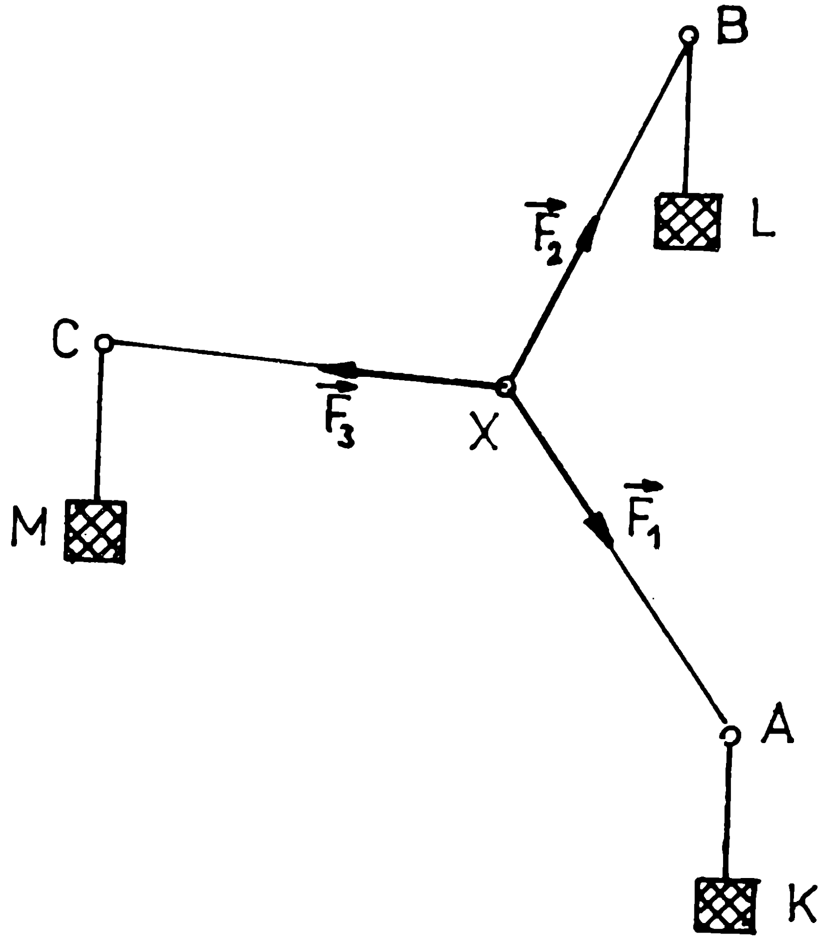
Na koliesko X pôsobia sily $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ (obr. 3) napínajúce nite (zrejme pre veľkosti síl platí $F_1 = F_2$, pretože rovnaké závažia napínajú každé svoju niť a pôsobenie síl $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ sa prenáša kladkami bez strát — trenie sme zanedbali) a sila $\boldsymbol{F}$ reakcia tyčky t. V rovnovážnom stave súčet pôsobiacich síl na sústavu je rovný nule, t.j. $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F} = 0$.
Rozložme pôsobiace sily do smeru tyčky t a na tyčku kolmého smeru. Pohyb koliesku spôsobujú len zložky síl v smere tyčky t (sily pôsobiace v kolmom smere sa rušia pevnosťou tyčky). Z rozkladu síl a podmienky rovnováhy sústavy dostávame
$F_2 \,.\, \cos\beta - F_1 \,.\, \cos\alpha = 0$, odkiaľ $\alpha = \beta$, keďže $F_1 = F_2$.

Dospeli sme k rovnakému výsledku ako pomocou vlastnosti osovej súmernosti v geometrickej úlohe.
Úloha 3:

V rovine sú dané tri body A, B, C (body A, B, C tvoria trojuholník, ktorého všetky vnútorné uhly sú menšie ako 120°). Určte polohu bodu X tak, aby súčet jeho vzdialeností od bodov A, B, C bol minimálny.

K vyriešeniu zoberme si na pomoc nasledujúcu mechanickú sústavu (obr. 4): Tri nite XAK, XBL, XCM spolu spojené v bode X vedieme cez kladky vertikálne upevnené v bodoch A, B, C. Na konce nití v bodoch K, L, M sú pripevnené rovnaké závažia (o kladkách, nitiach platia rovnaké podmienky ako v úlohe 2). Potrebujeme nájsť polohu bodu X tak, aby uvedená mechanická sústava bola v rovnovážnom stave.

Využitím princípu minima potenciálnej energie ľahko ukážeme ekvivalentnosť mechanickej úlohy s našou geometrickou. V rovnovážnom stave potenciálna energia mechanickej sústavy musí byť minimálna; preto súčet vzdialenosti závaží od povrchu Zeme musí byť minimálny, tj. súčet dĺžok nití $|AK| + |BL| + |CM|$ je maximálny, a keďže nite sa nerozťahujú, súčet $|AX| + |BX| + |CX|$ je minimálny.



Obr. 4

Uvážme silovú situáciu v mechanickej sústave. V bode X pôsobia tri rovnako veľké sily napínajúce nite $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ ($F_1 = F_2 = F_3$, pretože rovnaké závažia rovnako naťahujú svoju niť). Zrejme v rovnovážnom stave sústavy platí: $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$; pridaním podmienky rovnosti veľkosti pôsobiacich síl vyplýva, že tieto sily musia navzájom zvierať rovnaké uhly t.j. 120°. Z toho dostávame podmienku pre polohu bodu X: bod X má takú polohu, z ktorej všetky strany $\triangle\ ABC$ vidíme pod uhlom 120° (konštrukciu bodu X môžeme ľahko preniesť pomocou kružidla a trojuholníka využitím zostrojenia množín $G_1 = \{X \in \varrho;\ \sphericalangle\ AXB = 120°\}$, $G_2 = \{X \in \varrho;\ \sphericalangle\ BXC = 120°\}$, $G_3 = \{X \in \varrho;\ \sphericalangle\ CXA = 120°\}$, pričom $\{X\} = G_1 \cap G_2 \cap G_3$ — zostrojenie týchto množín je vám iste známe zo stredoškolskej geometrie).

Riešenie uvedených úloh poukazuje na málo používanú možnosť riešenia niektorých geometrických úloh využitím fyzikálnych poznatkov.

Poznámka:

1. V úlohe č. 3 sme stanovili podmienku pre vnútorné uhly $\triangle\ ABC$. Čo sa stane, ak jeden z uhlov $\triangle\ ABC$ je rovný alebo väčší 120°? Pri hľadaní odpovede si spomeňte na známu úlohu zo statiky: Pod akým uhlom musia pôsobiť dve sily veľkosti 5N na určitý bod, ak sa aj výsledná sila rovná 5N? (pod uhlom 120°). Odpoveď: Ak body A, B, C tvoria trojuholník, v ktorom jeden z vnútorných uhlov je $\geqq$ 120°, bod X je totožný s tým z bodov A, B, C, ktorý je vrcholom najväčšieho uhla.
2. Úloha č. 3 bola prvýkrát sformulovaná začiatkom 19. storočia.

hydrolýza); právě tak ELEKTROLUMINISCENCE není „světélkování elektrického proudu“, ale „světélkování umožněné elektrickým proudem.“ V. t. elektroakustika, elektrodynamika, elektroelektret, elektrofonický, elektroléčba, elektroluminiscence, elektrolyt, elektromagnet, elektromagnetismus, elektrometalurgie, elektromotor, elektrostatika, elektrotechnika. 2/ je jejím předmětem, tj. druhá složka vyjadřuje, co se s významem první složky děje. Např. ELEKTROFOR — „nosič elektronů“; jde tedy o „nošení elektronů“ a nikoli o „nošení pomocí elektronů, pomocí elektrického proudu“. Případy takovýchto spojení jsou méně časté; v. t. elektrochemie, elektrometr, elektroskop

ELEKTROAKUSTIKA (v. *akustika*) — nauka o zvuku elektricky buzeném a o jeho přenášení

ELEKTRODYNAMIKA (v. *dynamika*) — nauka o „elektrické síle, o síle elektřiny“; nauka o pohybových účincích elektrického proudu

ELEKTROELEKTRET (v. *elektret*) — elektret získaný působením elektrického pole

ELEKTROFONICKÝ (v. *-fonický*) — vydávající zvuk pomocí elektronek; elektronické varhany — zvuk je u nich snímán a zesilován použitím elektrického proudu

ELEKTROFOR (v. *-for*) — „nosič elektronů“; zdroj elektronů. Pozn.: U tohoto termínu je počáteční složka předmětem složky druhé (nikoliv jejím přívlastkem, jak je tomu častěji), protože jde o „nesení elektronů“ a nikoli o „nesení umožněné elektrony, elektrickým proudem“.

ELEKTROCHEMIE (v. chemie; počáteční složka je předmětem složky následující) — „chemie zabývající se elektřinou“; část fyzikální chemie zkoumající přeměny energie chemické v elektrickou a naopak

ELEKTROLÉČBA (počáteční složka blíže určuje složku následující) — léčba elektrickým proudem

ELEKTROLUMINISCENCE (v. luminiscence; počáteční složka blíže vysvětluje složku následující) — elektrickou energií podmíněné světélkování nějaké látky

ELEKTROLYT (řec. *lyó* — rozpojovat, uvolňovat, v. analýza; počáteční složka blíže vysvětluje složku následující) — roztok („rozložená tekutina“) vzniklý působením elektrického pole

ELEKTROLÝZA (řec. *lyó* = rozpojovat, uvolňovat, v. analýza; počáteční složka blíže určuje složku následující) — rozklad látky elektrickým proudem. *Pozn.:* Kdyby počáteční složka byla v postavení předmětném a nikoliv přívlastkovém, termín by vyjadřoval, že jde o rozklad nikoliv elektrickým proudem, ale elektrického proudu; srov. hydrolýza.

ELEKTROMAGNET (v. magnet; počáteční složka blíže vysvětluje složku následující) — magnet vzniklý působením elektrického proudu;

ELEKTROMAGNETICKÝ — mající jak složku elektrickou, tak magnetickou.

ELEKTROMAGNETISMUS (v. magnetismus; počáteční složka blíže vysvětluje složku následující) — 1. vytvoření magnetického pole elektrickým proudem; 2. nauka o vzájemném vztahu elektrických a magnetických jevů

ELEKTROMETALURGIE. (v. metalurgie) — získávání kovů pomocí elektrického proudu

ELEKTROMETR (v. -metr[1]) — přístroj na měření elektrostatického náboje nebo přístroj na měření spotřeby elektrického proudu; elektroměr. *Pozn.:* U tohoto termínu je počáteční složka elektro- předmětem složky druhé (nikoli přívlastkem, jak je tomu častěji), protože jde o přístroj, „který měří elektřinu", a ne o přístroj, „který měří pomocí elektrického proudu"

ELEKTROMOTOR (v. motor) — elektrický motor; stroj měnící elektrickou energii v energii mechanickou

ELEKTROSKOP (v. -skop) — „pozorovatel elektrického náboje"; přístroj k zjišťování přítomnosti elektrických nábojů a k zjišťování potenciálních rozdílů. *Pozn:* U tohoto termínu je počáteční složka elektro- předmětem složky druhé (-skop) a nikoli přívlastkem, jak tomu bývá častěji, protože jde o přístroj, „který pozoruje elektřinu", a nikoli o přístroj, „který pozoruje pomocí elektřiny".

ELEKTROSTATIKA (v. statika; počáteční složka blíže vysvětluje složku následující) — „statika elektrických jevů"; nauka o elektrických jevech způsobených náboji, které jsou vzhledem k pozorovateli v klidu; ELEKTROSTATICKÝ — mající elektrické náboje v klidu

ELEKTROTECHNIKA (v. technika; počáteční složka blíže vysvětluje složku následující) — obor techniky, který se zabývá výrobou a využitím elektrické energie

ELEKTRO-[2] (z reč. *élektron* = jantar; v. elektřina) — počáteční část složených slov zastupující ve zkráceném tvaru výraz „elektrický přístroj, elektrické zařízení, elektrotechnický". Následující složka je zpravidla domácího původu.

ELEKTROINŽENÝRSKÝ — přídavné jméno ke spojení „elektrotechnické inženýrství"

ELEKTROPOTŘEBY — elektrotechnické potřeby (nikoliv „potřeby pro elektřinu" ani „potřeby elektrické, tj. zelektrizované")

ELEKTROPRŮMYSL — elektrotechnický průmysl

ELEKTROSTROJÍRNA — strojírna vyrábějící elektrické stroje, nikoli elektřinu

ELEKTROÚDRŽBA — údržba elektrických zařízení, nikoli elektrického proudu

ELEKTROZÁVOD — elektrotechnický závod

ELEKTRODA (slož. z řec. *élektron* = jantar, v. elektřina + *hodos* =

= chod, chůze, cesta, v. anoda) — „cesta pro elektřinu, cesta elektřiny"; elektrický vodič, kterým přechází elektrický proud z jiného nebo do jiného prostředí. Pozn.: Umělým zkrácením výrazu „elektroda" vznikla koncová složka -ODA v termínech binoda, dioda, oktoda, pentoda, tetroda, trioda.

ELEKTROFONICKÝ, ELEKTROFOR, ELEKTROCHEMIE, ELEKTROINŽENÝRSKÝ, ELEKTROLÉČBA, ELEKTROLUMINISCENCE, ELEKTROLYT, ELEKTROLÝZA, ELEKTROMAGNET, ELEKTROMETALURGIE, ELEKTROMETR, ELEKTROMOTOR v. ELEKTRO-

ELEKTRON (z řec. *élektron* = jantar; v. elektřina; koncové -on se stalo umělou koncovou složkou analogicky používanou pro označení částic; v. -on) — elementární částice hmoty se záporným elektrickým nábojem; v. t. fotoelektron, megaelektronvolt

ELEKTRONIKA (v. -ika[1]) — obor zkoumající vlastnosti a pohyby elektronů

ELEKTRONKA — elektronová lampa; vzduchoprázdná baňka s elektrodami, mezi nimiž může procházet proud elektronů

ELEKTROPOTŘEBY, ELEKTROPRŮMYSL. ELEKTROSKOP, ELEKTROSTATIKA, ELEKTROSTROJÍRNA, ELEKTROTECHNIKA, ELEKTROÚDRŽBA, ELEKTROZÁVOD v. ELEKTRO-

ELEKTŘINA (od řec. *élektron* = smíšenina zlata a stříbra; jantar; na jantaru byly poprvé pozorovány elektrické jevy — odtud název) — jevy vyvolané existencí, vzájemným působením a pohybem elektronů; energie tím vznikající

ELEKTRÁRNA (použito české přípony -árna pro označení míst, kde je něco uloženo nebo kde se něco vyrábí) — závod na výrobu elektřiny

ELEKTRET (analogicky podle „magnet", tj. podle látky trvale magnetické) — látka trvale zelektrovaná; v. t. elektroelektret, fotoelektret, pseudoelektret, termoelektret

ELEKTRICKÝ — vznikající z elektřiny; napájený, poháněný elektřinou; v. t. fotoelektrický, piezoelektrický, pyroelektrický, radioelektrický

ELEKTRIFIKACE (analogicky použito lat. přípony *-ficatio*, mající význam „vytvoření" nebo „zavedení"; v. -fikace) — soubor opatření k zajištění výstavby zdrojů elektrické energie a jejího zavedení k průmyslovým a drobným spotřebitelům, zvláště jako pohonné nebo osvětlovací síly

ELEKTRIKA (použito řec. přípony *-ikos* analogicky počeštěné a mající význam „všeobecný vztah"; v. -ika[3]) — přístroj na buzení statické elektřiny

ELEKTRIZACE (použito analogicky počeštěné lat. přípony *-isatio*, mající význam „dodání" nebo „nabytí vlastností"; v. -izace) —

„dodání elektřiny“; vybavení elektrickými spotřebiči; ve fyzice: nabíjení těles elektrickým proudem

ELEMENT (z lat. *elementa* = prvky, živly, základní pojmy, počátky, počátky vědění; lat. slovo „elementa“ vzniklo spojením vyslovovaných hlásek el-em-en) — základní složka, základní částice; ve fyzice speciálně: galvanický článek; ELEMENTÁRNÍ — základní, prvopočáteční, živelný, přirozený; ELEMENTÁRNÍ ČÁSTICE — částice lehčí než deuteron. Název „elementární“ byl tu spojen s představou neproměnnosti a jednoduchosti. Ovšem výzkum posledních let ukázal, že ani elementární částice nejsou neproměnné, nejsou tedy „základní“. V. t. mikroelement.

ELEVACE (z lat. *elevatio;* od *elevo, -are,* ptc. pf. *elevatus;* slož. z *ex-* — zde s významem „pohyb nahoru“; v. *ex-* + *levo, -are* = činit lehkým, nadlehčovat, zdvíhat) — zdvižení, pozdvižení; zdvihání, pozdvihování;
ELEVACE kapilární — „nadzdvižení hladiny kapaliny v kapiláře“; kapilární vzestup; zvýšení sloupce kapaliny v kapiláře
ELEVAČNÍ úhel — výškový úhel (vrhu, střely), o který se směr osy děla, pušky zdvihá nad obzor
ELEVÁTOR (v. -or) — „zařízení, které zdvihá předměty nebo osoby“; zařízení pro nepřetržitou dopravu svislým nebo šikmým směrem vzhůru

ELIMINACE (od lat. *elimino, -are,* ptc. pf. *eliminatus* = z domu přes práh vzdálit; slož. z *ex-* — zde s významem „pohyb z nitra“; v. *ex-* + *limen, -inis* = práh, příbytek) — vyloučení, postupné vylučování
ELIMINAČNÍ — vylučovací (např. metoda)
ELIMINÁTOR (v. -or) — usměrňovač; zařízení, které „vyhošťuje“, potlačuje např. střídavou složku průběhu usměrněného napětí

ELONGACE (od lat. *elongo, -are,* ptc. pf. *elongatus;* slož. z *ex-* — zde s významem „změna původní vlastnosti“; v. *ex-* + *longus* = dlouhý) — prodloužení, vzdálení; ve fyzice: okamžité vychýlení („vzdálenost“) kmitajícího bodu z rovnovážné polohy; výchylka (tj. zvětší se délka, vzdálenost); v astronomii: úhlová vzdálenost planety od Slunce měřená ze Země; srov. PROLONGACE, PROLONGOVAT — prodloužit platnost (např. průkazu); v. t. L, longitudinální

EMANACE (z lat. *emanatio;* od *emano, -are,* ptc. pf. *emanatus;* slož. z *ex-* — zde s významem „pohyb z nitra“; v. *ex-* + *mano, -are* = = kapat, kanout, šířit se) — „vytékání, prýštění, rozšiřování se“; vyzařování ; EMANAČNÍ teorie — výronová teorie; EMAN — zastaralá jednotka radioaktivního záření

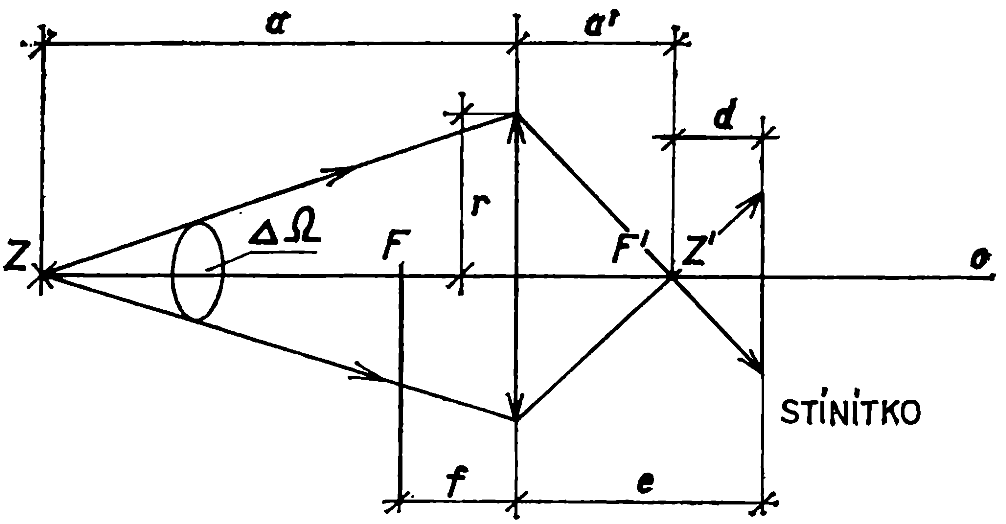
EMERZE (od lat. *emergo, -ere,* ptc. pf. *emersus;* slož. z *ex-* — zde s významem „z, směr vzhůru, ven“; v. *ex-* + *mergo, -ere* = nořit, potápět) — vynoření; v astronomii: opětné objevení se hvězdy, která byla dočasně zakryta jiným nebeským tělesem nebo jeho stínem; vynoření tělesa ze stínu jiného tělesa; opak: imerze, v. t.

Fotometrie při zobrazování čočkou

ROMAN SIEGL, Gymnázium Brno-Královo Pole

Při studiu fyziky na střední škole probíráme geometrickou optiku, při níž často nabýváme dojmu, jako by šlo o pouhou aplikaci geometrických pouček, pracujeme totiž pouze s přímkami, úhly a trojúhelníky. Zdá se, jako by se fyzikální podstata vytrácela. V samotné části se zase seznamujeme se základními pojmy fotometrie. Podívejme se, jak se pojmy fotometrie uplatňují při zobrazování tenkou spojnou čočkou.

Představme si všesměrový bodový zdroj monochromatického světla o určité svítivosti I (v kandelách — cd). Tento zdroj Z umístíme na optickou osu do vzdálenosti a od středu spojné čočky. Do vzdálenosti l za spojnou čočku umístíme stínítko (obr. 1). Položme si nyní otázku, jaká bude intenzita osvětlení stínítka. (Na obr. 1 je l označeno e.)



Obr. 1

Spojka má ohniskovou vzdálenost f a poloměr r. Zdroj Z se čočkou zobrazí na zdroj Z', jehož svítivost však není stejná jako u zdroje Z. Určíme nejprve svítivost I' zdroje Z'.

Podle zobrazovací rovnice bude zdroj Z' ve vzdálenosti a' od středu spojné čočky, kde

$$a' = \frac{a \cdot f}{a - f},$$

Světelný tok $\triangle \Phi$, procházející spojkou je dán rovnicí

$$\triangle \Phi = I \cdot \triangle \Omega ,$$

kde $\triangle \Omega$ je prostorový úhel (obr. 1).

Při dostatečně malém poloměru čočky r vzhledem k vzdálenosti a se dá zapsat

$$\triangle \Omega = \frac{\pi \cdot r^2}{a^2},$$

po dosazení

$$\triangle \Phi = I \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{a^2}.$$

Nechť stejný světelný tok $\triangle\ \Phi$ určuje svítivost zdroje Z'. Při dost velkém f bude platit

$$\triangle \Phi = I' \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{a'^2}$$

Porovnáním obou vztahů dostáváme pro svítivost I' zdroje Z' rovnici

$$I' = \frac{f^2}{(a - f)^2} \cdot I.$$

Nyní vypočteme vzdálenost d stínítka od zdroje Z':

$$d = (l - a') = \frac{a(l - f) - lf}{a - f}$$

Při vhodně velkém d můžeme vyjádřit intenzitu osvětlení stínítka

$$E = \frac{I'}{d^2}.$$

a po dosazení

$$E = \frac{I \cdot f^2}{[a(l - f) - lf]^2}$$

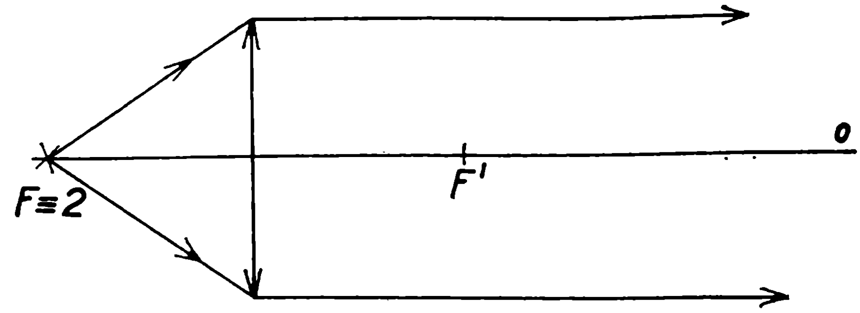
V našem případě ke každé hodnotě osvětlení existují dvě velikosti l. Osvětlení je stejné pro vzdálenost $\pm\ d$ stínítka od zdroje Z'. Z uvedeného vztahu také vyplývá, že pro $a = f$ je osvětlení

$$E = \frac{I}{f^2},$$

což je hodnota intenzity osvětlení dost blízko středu čočky. Paprsky musí z čočky vycházet rovnoběžně s optickou osou (obr. 2), což je experimentálně prokázaná skutečnost. Zdroj Z' se zobrazí v nekonečnu. Fiktivní zdroj Z' není všesměrný. Jde o případ kolektoru, známého z promítacích přístrojů.

Podívejme se na úlohu z energetického hlediska. Světelná energie za časovou jednotku dává světelný výkon P (ve wattech), přenášený viditelným zářením. Světelný výkon procházející prostorovým úhlem 1 sr je roven

$$I_n = \frac{P}{4\pi},$$



Obr. 2

kde 4π je plný prostorový úhel. I_W — sférická svítivost je přímo úměrná svítivosti zdroje v kandelách (cd). Pro intenzitu osvětlení E_n dostaneme postupným dosazováním ve W . m^{-2}:

$$E_n = \frac{P}{4\pi} \frac{f^2}{[a(l-f) - f \cdot l]^2}$$

Ze znalosti světelného výkonu zdroje P můžeme určit i kolik monochromatických fotonů projde spojnou čočkou:

Světelný tok $\triangle \Phi_W$ (výkon přenášený zářením)

$$\triangle \Phi_W = I_W \triangle \Omega$$

$$\triangle \Phi_W = I_W \frac{\pi r^2}{a^2},$$

$$\triangle \Phi_W = \frac{P \cdot r^2}{4a^2}$$

můžeme také zapsat

$$\triangle \Phi_W = n \cdot h \cdot \nu$$

kde n je počet fotonů dopadajících na čočku za sekundu,
h je Planckova konstanta,
ν je frekvence monochromatického světla,
$h \cdot \nu$ je energie jednoho fotonu.

Po dosazení pro počet fotonů prošlých čočkou za sekundu vychází vztah

$$n = \frac{P \cdot r^2}{4a^2 \cdot h \cdot \nu}.$$

Vzpomeňme pokus, který každý určitě zná: zapálení papíru pomocí spojné čočky. Energie slunečního záření je soustředěná čočkou na malou plošku. Zkusíme určit, o jak velkou energii se jedná.

Solární konstanta (energie slunečního původu prošlá 1 m² za sekundu) je $K = 1326$ W . m^{-2}.

Mějme čočku o poloměru 2 cm a ohniskové vzdálenosti 10 cm. Propalovaný papír je ve vzdálenosti 10,1 cm od čočky. Předpokládejme, že Slunce je v nekonečnu. Potom se zobrazí do ohniska spojné čočky. Světelný tok dopadající na čočku (výkon přenášený zářením) je

$$\Phi_n = K \cdot r^2 \qquad \text{ve wattech.}$$

Svítivost zobrazeného Slunce v ohnisku spojné čočky je na základě výše uvedených vztahů

$$I_n = K \cdot f^2$$

potom intenzita osvětlení papíru je

$$E_n = \frac{I_n}{d^2} = \frac{K \cdot f^2}{(l - f)^2} = \frac{K \cdot 0{,}1^2}{(0{,}101 - 0{,}100)^2} = K \cdot 10^2\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

Intenzita osvětlení je 100-krát větší po projití spojnou čočkou než za normálních podmínek a tak není divu, že se papír vznítí.

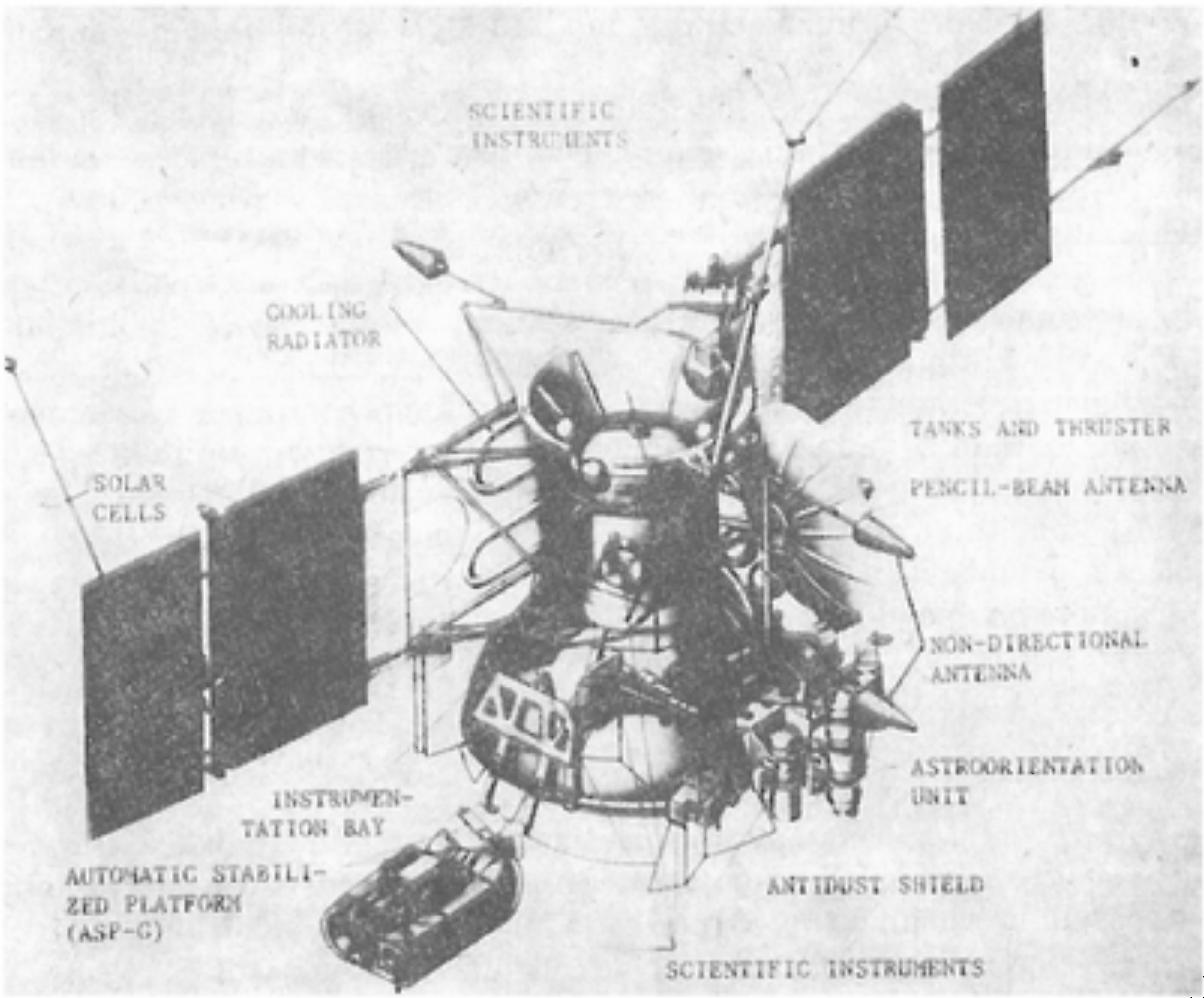
Kosmická laboratoř VEGA

RNDr. MARTIN ŠOLC, CSc., MFF UK Praha

Zatímco v prosinci minulého roku byla veřejnost Halleyovou kometou zklamána, protože jasnost komety byla asi o 1,5 magnitudy nižší než podle předpovědi a jen málo pozorovatelům se objevila na pár hodin mezi mraky, výzkum kosmickými sondami pokračoval podle plánu. Nejrozsáhlejším projektem byly dvě identické sondy VEGA, vypuštěné v prosinci 1984 v Sovětském svazu. Nesly vybavení pro měření základních fyzikálních parametrů komet, jednotlivé experimenty byly vyvinuty v široké mezinárodní spolupráci socialistických zemí a Francie, Rakouska a NSR. Postupně uvedeme stručný popis experimentů a výsledků, které byly získány.

Sondy VEGA nesly pouzdro s balónem a přistávacím modulem pro výzkum atmosféry a povrchu Venuše. Přistání a operace balónu ve Venušině atmosféře proběhly v červnu 1985 a od té doby pokračují v letu meziplanetárním prostorem zbylé a hlavní části sondy — průletové moduly. Setkání průletových modulů s kometou proběhlo 6. a 13. března.

Úspěch projektu závisí samozřejmě nejvíce na tom, aby se průletové moduly dostaly do optimální vzdálenosti od jádra komety, tj. asi na 10 000 km. Tato vzdálenost je kompromisem mezi požadavkem přiblížit se jádru co nejvíce a zachovat přitom co největší odstup od prachu a pevných částic v kometární atmosféře, aby nedošlo k poškození modulů při srážkách. Poprvé v historii se uskutečnil let k tělesu, jehož trajektorie je předem známa jen s omezenou přesností, takže pohyb průletových modulů bylo třeba několikrát upravovat během letu. Polohu průletových modulů sledovaly v radioastronomické souřadnicové soustavě navázané na kvazary dvě sítě radioteleskopů. Sovětská síť je řízena z Moskvy a jsou do ní začleněny radioteleskopy v Jevpatorii,



Simeis (Krym), v Puškinu, na Medvědích jezerech, v Ulan Udé a v Ussurijsku. Mezinárodní síť je řízena z francouzského centra pro kosmický výzkum a zahrnuje tyto radioteleskopy: nepohyblivý s průměrem 300 m v Arecibu na Portoriku; plně pohyblivý 100 metrový v Effelsbergu (NSR); 64 metrové v Goldstone (USA), v Canbeře a v Parkesu (Austrálie) a v Madridu (Španělsko); 43 m v Greenbank (USA), 26 m ve Fort Davis (USA), v Pentictonu (Kanada), v Onsale (Švédsko), v Hartebeesthoek (Jižní Afrika) a 14 m v Atibaya (Brazilie). Obě sítě pracovaly jako radiointerferometry o velké základně (VLBI — Very Long Baseline Interferometry). Polohu a vektor rychlosti zdroje rádiového signálu mohou určit velmi přesně. Původně byly užity k lokalizaci balónové sondy ve Venušině atmosféře, kde polohu určily s chybou menší než 1000 m. Jak balónová sonda, tak i průletové moduly mají vysílače na vlnové délce 18 cm.

Pohyb komety je sledován pozemskými astronomickými observatořemi. Protože však jádro komety o průměru 10 km (přibližně) je zahaleno neprůhlednou komou o velikosti řádově 10 000 km a protože se v pohybu komety obrážejí i negravitační síly, jsou opticky určené polohy jádra ze Země asi o dva až tři řády méně přesné než znalost polohy průletových modulů. Poslední korekce dráhy modulů byla proto naplánována na 2 až 4 týdny před setkáním.

Po této korekci se vyklopili televizní kamery na automatické stabilizované plošině a byly kalibrovány. Dva dny před setkáním (ve vzdálenosti 14 miliónů km), den před setkáním (7 mil. km) a při setkání proběhly tzv. první, druhá a třetí vědecká seance, kdy byly uvedeny všechny přístroje do provozu. Ještě před první seancí se podle údajů z televizního systému namířila automatická plošina na předpokládané místo jádra v komě a pak je trvale sledovala. Ostatní přístroje (detektory plazmatu, detektory a analyzátory kometárního prachu) jsou připevněny na těle modulu a namířeny většinou ve směru pohybu modulu tak, že leží trvale ve stínu slunečních článků. Moduly tedy prolétly mezi Sluncem a kometou ve vzdálenosti asi 10 000 km od jádra, která je tímto směrem považována za „bezpečnou". Ohon komety obsahující prach míří právě na opačnou stranu a moduly proto neohrozí. Přesto bylo třeba počítat s rizikem, že při vzájemné rychlosti modulů a kometárního materiálu 78 km/s dojde k poškození přístrojů.

Na automatické stabilizované plošině ASP-G československé výroby jsou umístěny televizní systém TVS (kamera, kamera s velkým úhlovým rozlišením a elektronika), infračervený spektometr IKS a tříkanálový spektrometr TKS. Na těle modulu jsou hmotnostní spektrometry pro studium chemického složení prachu (PUMA) a neutrálních plynů (ING), magnetometr MISCHA, spektrometr kometárního plazmatu PLAZMAG-1, spektrometr energetických částic TÜNDE-M, analyzátory plazmových vln o vysoké a nízké frekvenci APV-V a APV-N, čítače prachových částic SP-1 a SP-2, optoelektronický experiment FOTON sledující interakci kometárního prachu s povrchem modulu a čítač a analyzátor prachu DUCMA. Uspořádání, funkce a výsledky získané těmito přístroji uvedeme v dalším pokračování seriálu článků o kometách.

U kosmických sond se většinou naměřená data ukládají během měření do paměti palubního počítače a pak se po částečném zpracování odvysílají na Zemi. Sondy VEGA však mají vzhledem k nebezpečí poškození pevnými kometárními částicemi, kdy by uložená data přišla nazmar, také možnost přenosu naměřených údajů po malých dávkách v krátkých časových intervalech, tedy prakticky téměř ihned po naměření. Práci jednotlivých experimentů, ukládání dat do paměti 10 Mbitů a předávání dat vysílači RTM (radiotelemetrie) organizuje řídicí jednotka BUNA, data jsou před vysíláním upravena v jednotce BLISI.

Radiotelemetrie může pracovat dvěma přenosovými rychlostmi 3072 bitů za sekundu a 65 536 bitů za sekundu v sedmi režimech:

1. TRASSA-1 (3072 bit/s)
Tento režim byl zapojen na povel ze Země 15 dnů po startu a pracoval prakticky až do setkání s kometou. Experimenty MISCHA a TÜNDE-M byly zapojeny trvale, PLASMAG-1, ING, DUCMA a BLISI v intervalech asi 20 minut nebo den. Data se ukládaly do paměti a vysílaly na Zem v relacích zhruba 5 Mbitů za 20 minut.

2. TRASSA-1 + IKS (3072 bit/s)
Podle pokynu ze Země lze zapojit navíc i infračervený spektrometr.

3. Režim řízení a kontroly vědeckých přístrojů. Prováděl se každé dva měsíce a zkoušela se činnost přístrojů, jak byla programována pro setkání s kometou. (65 536 bit/s).

4. TRASSA-2 (3072 bit/s)
Zapojuje se 2 dny před setkáním. Nyní trvale pracují SP-1, SP-2, ING, DUCMA, PLASMAG-1, TÜNDE-M, MISCHA, APV-V, APV-N, TVS. Data se přenášela každý den (1. a 2. seance) na Zem v režimu KOMETA.

5. TRASSA-2 + IKS (3072 bit/s)

6. KOMETA (65 536 bit/s)
Plošina ASP-G je v pracovní poloze (již asi 10 dnů před setkáním), její osy alfa a beta odaretovány, TVS, IKS a TKS sledují jádro. Dva dny před setkáním trvala seance 3 hodiny, z toho 2 hodiny probíhala vědecká měření „na ostro“, den před setkáním rovněž a při setkání trvala seance 4 hodiny a měření 3 hodiny. (Můžete si sami spočítat, že rychlostí asi 80 km/s trvá průlet kolem objektu o velikosti 10 000 km jen asi dvě minuty!) Podobně jako před setkáním se měřilo jeden a dva dny po setkání.

7. Řízení v reálném čase (3072 bit/s)
Na povel ze Země se zapojí všechny přístroje, měřené údaje včetně řídicích povelů a údajů od jednotlivých experimentů se střídají v přenosovém kanálu po 0,5 s.

Koncepce projektu VEGA vyžaduje, aby sonda byla v prostoru pevně orientována. Vědecké přístroje nemají být ovlivněny Sluncem, musí tedy ležet na zastíněné straně průletového modulu. Anténa vysílače musí mířit na Zemi, jinak se ztratí spojení a tedy i naměřená data. Některé přístroje jako např. PUMA využívají ke své činnosti toho, že jsou orientovány ve směru letu sondy, jinak by do nich totiž prachová zrna nemohla vlétnout. Modul byl proto vybaven orientačním čidlem mířícím na Slunce, Zemi a hvězdu Canopus; podle jeho pokynů jsou spouštěny motorky orientující sondu do správné polohy s přesností asi 1° Do určité míry by měly být schopny zabrzdit i rotaci, která mohla nastat po srážce s malou pevnou částicí.

Matematika — a česky?

Příspěvek Františka Josefa Studničky (27. 6. 1836 — 21. 2. 1903) k národnímu obrození v matematice a nejen v matematice

RNDr. ALENA ŠOLCOVÁ, Ped FUK Praha

Vraťme se do Prahy poloviny minulého století, do provinciálního města rakouské monarchie. Na ulicích je slyšet směs češtiny s němčinou — „pisl pémiš, pisl tajč" (trochu česky, trochu německy), v úřadech, mezi inteligencí a ve školách téměř výhradně němčinu. Mladík, který chtěl studovat na gymnáziu, musel umět německy, protože by ve škole prostě nerozuměl. Univerzita byla až do roku 1882 pouze německá, i když se ojedinělé přednášky konaly i česky. Také jen některé střední školy byly utrakvistické — část předmětů se v nich směla vyučovat česky, zbytek německy. A jak se mluvilo, tak se také počítalo. Česká učebnice matematiky byla vzácností, nebyla k dostání běžně u knihkupce a často ani v knihovně. V tomto období národního obrození však bylo přáním mnoha českých studentů slyšet rodnou řeč nejen z jeviště divadla, ale i z úst učitelů; a na univerzitě poslouchat české přednášky ze všech oborů.

Význam češtiny při výuce přírodním a exaktním vědám si hluboce uvědomil *František Josef Studnička*, do roku 1882 profesor matematiky s povolením přednášet česky a poté první profesor matematiky na vzniklé české univerzitě a děkan její filozofické fakulty. S českým vyučováním měl již zkušenosti ze svého dřívějšího působení docenta vyšší matematiky a analytické mechaniky na Královském českém polytechnickém ústavu zemském v Praze. Do české odborné literatury přispěl zejména svými učebnicemi „*O počtu differenciálním*" (1869), „*O počtu integrálním*" (1871) a „*O integrování rovnic differenciálních a počtu variačním*" (1867), které byly užívány skoro 40 let. Se Studničkou jsou také spojeny počátky českého spolkového života — Jednoty českých matematiků a počátky Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky. Kromě toho napsal Studnička jedny z prvních českých populárně vědeckých knih.

Studnička lnul k přírodním vědám zvláštní náklonností a zřejmě se vůbec nechtěl stát výhradně matematikem. Po ukončení univerzitních studií asistoval ve fyzikálním ústavu ve Vídni, zajímal ho i fyzikální

zeměpis. Již ve 24 letech byl zvolen členem c. k. geografické společnosti ve Vídni. Později vydal třídílné dílo *„Všeobecný zeměpis čili astronomická, matematická a fyzikální geografie“* (1881—83). Svou literární činnost však začal už v roce 1859 výkladem „O mechanické rovnomocnině tepla“ v Nerudových Obrazech života u vydavatele Augusty v Litomyšli. K matematice byl přiveden přesvědčením o nutnosti prosadit češtinu i v tomto oboru a dále svým zaměstnáním na polytechnickém ústavu a později na univerzitě.

Byl jedním z několika, kteří byli schopni o matematice mluvit česky. Patřil mezi ty, kteří v době, kdy bylo pro Čecha nemožné umístit se po studiích na univerzitě v Praze, přece se pro ni důkladně připravovali.

Když se pak odpůrci národního obrození ptali, kde najít české profesory, Studnička byl jedním z těch, který mohl vyhovět jejich vysokým požadavkům. Patřil ještě k oné generaci učenců, kteří se nespokojili s tím, že celý život věnovali pouze jednomu oboru, ale vyhledávali souvislosti svých speciálních studií s dalšími vědními oblastmi.

Studnička se především snažil opatřit posluchačům a studujícím matematiky vůbec učebnice v jazyce českém. Jeho práce byly určeny především k tomu, aby usnadnily začátečníkům další studium. Usiloval ve svých učebnicích o to, aby obtížné abstraktní partie se staly srozumitelnými. Texty byly stručné, ale plnily svůj účel, i když se nevyhnuly občasným omylům či nepřesnostem. Kromě učebnic infinitezimálního počtu napsal ještě mnoho dalších, např. „*Vyšší matematika v úlohách*" (1866), „*Základové nauky o číslech*" (1875), „*Kapesní logaritmické tabulky*" (10 vydání od 1875 do 1909), „*Algebra pro vyšší třídy škol středních*", „*Kartografie čili nauka o zobrazení povrchu zemského*" (1901).

V dochované korespondenci najdeme doklady, že k posluchačům byl vlídný, přispíval jim podle potřeby radou a pomocí. Řídil se zásadou „napřed naučit chodit a pak lítat". Domníval se, že je třeba pomáhat studentům méně nadaným, nadaní že vniknou sami snadněji i do obtížnějších partií. Byl příznivcem jednotného školství. (Zdalipak by byl dnes spokojen?) O učebnicích soudil, že není na škodu, když obsahují více látky, než je vyučovacím hodinám vyměřeno. „Jest zajisté jen na prospěch horlivějším žákům, mohou-li i mimo vyučování vědomosti prohloubiti."

„Vědecké práce ani přednášky Studničkovy nebyly náročné a nepřevýšily podstatně úroveň matematiky doby Eulerovy. Studničkovu činnost pro rozvoj české matematiky a fyziky i JČM je však nutno kladně hodnotiti z hlediska doby, v níž pracoval", soudí F. Veselý v [1]. Odbornou matematickou činnost soustředil Studnička na teorii determinantů. Byl přesvědčen o její aplikovatelnosti v řadě dalších oblastí. Z celkového počtu asi 400 prací je determinantům věnováno více než 50. Některé z nich jsou citovány i v zahraniční literatuře. K výsledkům však docházel ve stejnou dobu jako jiní badatelé ([3], str. 242).

Se zaujetím pro přírodní vědy napsal „*O soustavě sluneční*" (1868, 1869, v tehdy mimořádně vysokém nákladu 20 000 výtisků), „*O povětrnosti*" (1872). Prakticky se zabýval výzkumem středního množství deště. Převzal v roce 1872 11 dešťoměrných stanic. Jejich počet vzrostl v letech 1885—6 na 700 a byly svěřeny do péče české lesnické jednoty. Studnička každoročně uveřejňoval pojednání o dešťoměrném pozorování v Čechách. Svůj výzkum shrnul v roce 1886 v samostatné práci „*Základové dešťopisu království českého*". Práce je ještě dnes zaslouženě oceňována. V korespondenci najdeme nákresy prof. Schöbla, Studničkova učitele, jenž konal pozorování na třech místech v Jindřichově Hradci. Dokládají pečlivost, s jakou byl výzkum prováděn.

Česky psanou literaturu neúnavně obohacoval o spisky z historie matematiky a fyziky. „*Bohatýrové ducha*“ (1898) obsahují životopisy M. Koperníka, Galilea Galilei, Marka Marci, R. Descartesa, G. W. Leibnize a I. Newtona, Stanislava Vydry, C. F. Gausse a J. E. Purkyně. Studnička byl vůbec velkým ctitelem Stanislava Vydry, který jako první vykládal matematiku česky. Promluvil o něm při své rektorské instalaci v roce 1888. O jeho úctě svědčí i to, že jako redaktor nově založeného Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky do prvního čísla na první místo umístil Vydrův životopis. Již dříve přeložil a vydal Bolzanovu práci „Ryze analytický důkaz . “ a spolupracoval s dcerou F. L. Riegra Marií Červinkovou při přípravě Bolzanova životopisu. Sbíral rukopisné památky po Tychonu Brahovi a vydal spis k 300 letému výročí úmrtí slavného astronoma (1901). Byl členem redakce Ottova slovníku naučného a je autorem řady matematicko-fyzikálních hesel.

A co víme o jeho mládí? Dne 27. června tohoto roku uplyne 150 let od jeho narození v Janově u Soběslavi. (Z téže obce pochází učený mistr pařížské univerzity, kazatel a filosof doby reformační, Matěj z Janova († 1393), jenž si „prostého člověka vážil více než nehodných kněží“.) F. J. Studnička byl pečlivě veden ke studiu svým otcem, učitelem dvojtřídní školy. Ve svém rodišti získal dobré základy. V roce 1849 začal navštěvovat gymnázium v Jindřichově Hradci. Vysvědčení z německé hlavní školy získal jako privatista zkouškou v Táboře. Na gymnáziu vynikal v dobrém slova smyslu. V roce 1857 maturoval a zapsal se na vídeňskou univerzitu, kde v roce 1861 získal titul doktora filozofie. Trpěl astmatem, a proto strávil další rok ve svém rodišti. V letech 1862 až 64 učil na gymnáziu v Českých Budějovicích. Pak odešel za svým posláním šiřitele české matematiky do Prahy. Za svého života byl ve společenských, odborných i obrozeneckých kruzích velmi vážen. S úctou se o něm vyjadřovali jak čeští literáti, tak i prostí lidé, kteří se na něho obraceli s prosbou o pomoc.

Zajímá-li vás, s kým se setkával, pak můžeme vyjmenovat všechny osobnosti pražského kulturního života té doby: Jaroslav Vrchlický, Eliška Krásnohorská, F. L. Rieger, J. Hlávka, F. L. Čelakovský atd. atd. Udržoval přátelství s matematiky bratry Weyry, Augustinem Seydlerem, Vincencem Stouhalem. Dopisoval si s významnými zahraničními vědci M. Cantorem, Helmholtzem, Weierstrassem, Christoffelem, Hermitem.

Dnes bychom řekli, že F. J. Studnička žil spořádaným rodinným životem. Měl čtyři děti, syn se stal docentem histologie a embryologie na univerzitě. Rodina v Praze bydlela v Černé ulici č. 6, v domě, který dnes již nestojí, a prázdniny trávila nejraději v Jindřichově Hradci.

Přímost, s níž Studnička získával sympatie současníků, ilustruje i tento začátek rozhořčené recenze jakési knihy v Časopisu pro pěstování: „Kdo se chce poučiti, jak se školní kniha nemá psáti, nechť si přečte . . .“. Přestože na fotografii má vousy až na prsa, nelze si bez něj představit pokrok české matematiky a jeho slova platí i dnes: „Kdo stojí, zůstává pozadu, zejména v našem věku letem myšlenky se dále ubírajícím.“

Literatura:

[1] Veselý F.: 100 let Jednoty československých matematiků a fyziků, SPN Praha, 1962

[2] Pánek A.: Dr. František Josef Studnička. Nástin jeho života i činnosti. Čas. pro pěst. mat. a fyz., 33, 1904, str. 25

[3] Nový L. a kol.: Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století, Nakladatelství ČSAV Praha 1, 1961

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Matematik a jeho volný čas

dr. FRANTIŠEK JÁCHIM, Vimperk

Nechť si čtenář představí, že právě vyřešil důležitý problém a rozhodl se oddat matematické idyle. Leč matematik ani v dobách odpočinku nepřestává být matematikem a udržuje si kondici řešením problémů, o jejichž povaze by mnohý nematematik prohlásil, že „takové starosti by chtěl někdy mít“.

Co však matematika např. nenapadne: Jestlipak by šlo najít na trojí vážení na rovnoramenných vahách kuličku, která se od ostatních jedenácti liší pouze svou hmotností? Že je těch kuliček nějak moc? Zkusme tedy vypracovat „hledací metodu“ na části již zmíněné množiny.

Formulujme tedy malý problém MP: Máme devět na pohled nerozlišitelných kuliček. S použitím nejvýše trojího vážení na rovnoramenných vahách (bez závaží) máme nalézt tu jedinou kuličku od ostatních se lišící hmotností. Předpokládejme, že na každou misku se i devět kuliček dobře vejde.

V této fázi nechá matematik váhy váhami a kuličky kuličkami a povznese se do abstraktna. Kuličky (samozřejmě imaginární) si označí A, B, C, D, E, F, G, H, I a rozdělí je do trojic. Pro zachycení stavu rovnováhy si vyčlení znaky $<$, $>$, $=$. Relace $A > B$ říká, že kulička A má větší hmotnost než kulička B.

1. vážení: Porovnáme hmotnosti trojic ABC a DEF. Nastane právě jeden z případů:

$$ABC > DEF\,, \ ABC < DEF\,, \ ABC = DEF\,.$$

2. vážení: Porovnáme hmotnosti trojic DEF a GHI.

Nastane právě jeden z případů: $DEF > GHI$, $DEF < GHI$, $DEF = GHI$.

Protože již máme dvě vážení za sebou, udělejme malou rekapitulaci. Vytvořme teoretické kombinace 1. a 2. vážení a posuďme důsledky.

1. Případ $ABC > DEF$ a $DEF > GHI$ nemůže nastat.
2. Je-li $ABC > DEF$ a $DEF < GHI$, pak hledaná je lehčí a je v DEF.
3. Je-li $ABC > DEF$ a $DEF = GHI$, pak hledaná je těžší a je v ABC.
4. Je-li $ABC < DEF$ a $DEF > GHI$, pak kulička je těžší a je v DEF.
5. Případ $ABC < DEF$ a $DEF < GHI$ nemůže nastat.
6. Je-li $ABC < DEF$ a $DEF = GHI$, pak hledaná je lehčí a je v ABC.
7. Je-li $ABC = DEF$ a $DEF > GHI$, pak hledaná je lehčí a je v GHI.
8. Je-li $ABC = DEF$ a $DEF < GHI$, pak hledaná je těžší a je v GHI.
9. Případ $ABC = DEF$ a $DEF = GHI$ nemůže nastat.

Co tedy víme? Zda hledaná kulička je těžší či lehčí a ve které trojici je. Porovnáme dvě kuličky ze zbývající trojice a v případě nerovnováhy ji máme na vahách, v případě opačném je hledaná zbývající.

Elegantním vyřešením problému MP stouply naše ambice natolik, že se vrhneme na vyřešení velkého problému VP. $VP > MP$, protože obsahuje více kuliček a stejně vážení. Takže tentokrát na tři vážení z 12 kuliček (ostatní podmínky jsou stejné). Kdybychom šmahem řešili VP jako MP, zjistíme, že před třetím vážením máme čtveřici kuliček, v níž hledaná je (víme přitom, zda je lehčí nebo těžší), ale na jediné vážení, které nám zbylo, kuličku nenajdeme. Nezbývá tedy, než aby při 1. a 2. vážení některé kuličky vystřídaly obě misky, čímž na sebe mnohé prozradí.

1. vážení: Porovnání čtveřic $ABCD$ a $EFGH$. Nastane právě jedna z možností: $ABCD > EFGH$, $ABCD < EFGH$, $ABCD = EFGH$. Pokud nastane rovnováha, je kulička v dosud nevážené čtveřici, v případě opačném je na vahách.

2. vážení navazující na $ABCD > EFGH$:

Na misky vah dáme $AEFG$ a $HIJK$ (tři kuličky na levé misce ABC nahrazeny třemi kuličkami EFG z pravé misky, pravá miska doplněna třemi zaručeně pravými kuličkami IJK). Při stavu $AEFG > HIJK$ je hledaná kulička ve dvojici AH. Porovnáním kuličky H z této dvojice s kuličkou pravou získáme výsledek. Nastane-li rovnováha při třetím vážení, je hledaná A a je těžší. Nastane-li při druhém vážení stav $AEFG < HIJK$, hledaná kulička je v trojici EFG a je lehčí. Řešení dokončíme podle třetí fáze řešení MP. Nastane-li při druhém vážení rovnováha, je hledaná kulička v trojici BCD, která váhy opustila a je těžší. Dále známým způsobem.

2. vážení navazující na stav $ABCD < EFGH$:

Na misky vah dáme $AEFG$ a $HIJK$ a postupujeme jako u předchozího případu.

2. vážení navazující na $ABCD = EFGH$:

Hledaná kulička je v $IJKL$. Porovnáme IJK a ABC (tato trojice obsahuje samé pravé kuličky). Jestliže nastane $IJK = ABC$, je hledaná L a porovnáním (3. vážení) s A určíme její relativní hmotnost. Je-li $IJK > ABC$, je kulička těžší a je v trojici IJK. Ve zbývajícím případě $IJK < ABC$ je lehčí a je v IJK.

Radost z vyřešení velkého problému VP nám kalí pouze ta skutečnost, že sehnat 12 nerozlišitelných kuliček, přičemž jedna bude mít jinou hmotnost, bude zřejmě problém $(VP)^2$. Zde pokládá autor za nutné sdělit, že existuje nenulová pravděpodobnost vyskytnutí se požadovaných objektů mezi školní mládeží a sbírkou realizovanou v čase $\triangle t$ si vytvoří i materiální předpoklady k praktickému provedení „nalezení" kuličky.

Vzhledem k tomu, že bývá při psaní matematických textů tradicí předložit nějakou lahůdku čtenáři za cvičení, činí autor tak i nyní.[1]) Nuže: Ze sedmi kuliček je jedna lehčí. Na nádražních vahách máme za použití tří 50 hal. mincí (tj. vhodíme-li do váhy minci, můžeme provést jedno vážení) ji nalézt.

O jakou úlohu jde?

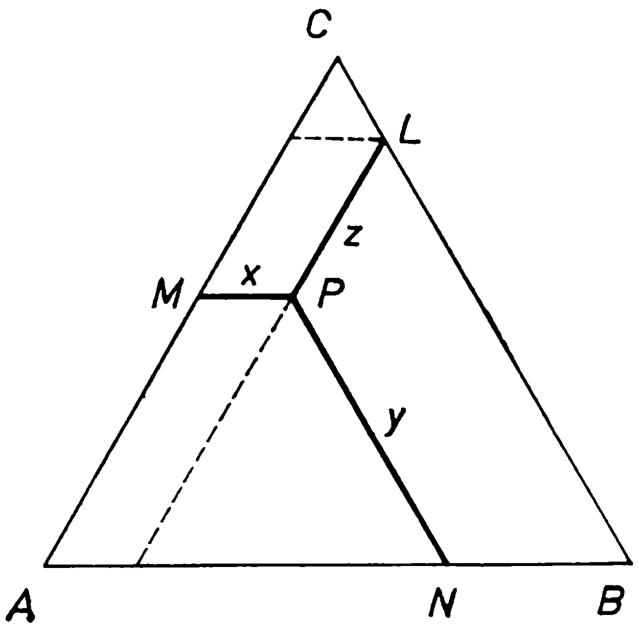
Pod tímto názvem byl v 9. čísle 63. ročníku Rozhledů uveřejněn problém:

Představte si, že se díváte do zahraničního žákovského matematického časopisu, který je v jazyce, jemuž vůbec nerozumíte, a že v něm vidíte obrázek 1.

Pokuste se zformulovat a pak vyřešit úlohu, jejíž řešení by mohl tento obrázek ilustrovat.

---

[1]) Zde matematik opouští iracionálno a myslí na reálného čtenáře RMF.



Obr. 1

Do redakce došly úlohy od tří čtenářů, a to od *Jany Hubálovské* z Prahy 7, *Pavly Kellerové* a *Aleše Kellera* ze Dvora Králové n. L.

Nejzajímavější byl dopis *Jany Hubálovské,* jež byla v době uveřejnění problému žákyní 8. roč. ZŠ. Zde jsou její úlohy:

Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC byl zvolen bod P. Potom byly na stranách AB, BC, CA sestrojeny po řadě body N, L, M tak, aby platilo $NP \| BC$, $LP \| AC$, $MP \| AB$. Označme $|AB| = a$, $|MP| = x$, $|NP| = y$, $|LP| = z$.

Dokažte, že platí:

a) $x + y + z = a$;

b) součet vzdáleností bodu P od stran trojúhelníku ABC je roven výšce $\triangle\ ABC$;

c) součet délek středních příček lichoběžníků $ANPM$, $BLPN$, $CMPL$ je roven 1,5 a.

Využijte výsledků předchozích úloh a řešte tyto dvě další úlohy: Sestrojte bod P tak, aby

d) délky x, y, z byly v daném poměru (např. $x : y : z = 2 : 3 : 4$);

e) lichoběžníky z úlohy c) byly shodné.

Pavla Kellerová, studující gymnázia, sestavila úlohu:

V rovnostranném trojúhelníku ABC je délka strany $a = 6$ cm a $|CL| = 1$ cm (viz obr. 1). Vypočtěte délky úseček x, y, z.

Aleš Keller, v době uveřejnění problému žák 8. roč. ZŠ, zformuloval úlohu:

Na obr. 1 označme K průsečík strany AC a rovnoběžky se stranou AB vedenou bodem L. Vypočtěte délky úseček x, y, z, jestliže $|AB| = 6$ cm a $|KL| = 1$ cm.

Všichni autoři zaslali i řešení. Ta však neuveřejňujeme a přenecháváme je čtenářům.
jm

Čím se baví učitelé „pod lavicí"

1. Nedávno přinesla kolegyně jednoduchý a vtipný matematický problém z jakéhosi zasedání učitelů matematiky, kde prý byla zadána následující úloha pro případ, že budou mít účastníci dlouhou chvíli: Číslo 6 se dá vyjádřit pomocí tří čísel

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ \multicolumn{3}{c}{\text{atd. až}} \\ 9 & 9 & 9. \end{array}$$

Mezi daná tři čísla je třeba vložit vhodné symboly matematických operací, např. symboly $+$, $-$, odmocniny apod., avšak žádnou číslici ani písmeno. Triviální řešení je např. $2 + 2 + 2$, ostatní nejsou o mnoho složitější.

2. Objevitel antihmoty *P. A. M. Dirac* prý byl od dětství tak zvyklý na záporná čísla, že se divil, proč byl „vyhozen" od přijímací zkoušky na vysokou školu, když podal okamžitě a bez psaní matematicky správné řešení následující úlohy: Tři rybáři se domluvili, že budou své úlovky dávat do jednoho sudu a že si pak odnese každý třetinu ryb. V noci, ještě za tmy, se první rozhodl jít domů. Po hmatu spočítal ryby, a protože jedna přebývala, hodil ji zpátky do řeky, takže v sudu zbyl počet ryb dělitelný třemi; vzal si svou třetinu a šel domů. Za chvíli vstal druhý, učinil přesně totéž (tj. jednu rybu vyhodil a vzal si třetinu); nevěděl ovšem, že se kořist již dělila. A třetí učinil opět přesně totéž. Kolik ryb ulovili všichni dohromady? Na tuto otázku prý odpověděl budoucí génius téměř okamžitě: ulovili -2 (minus dvě) ryby. První vzal z tohoto množství jednu rybu a zahodil; zbyly tedy v sudu -3 ryby; vzal si tedy -1 a šel s ní domů. Jeho kolegové totéž zopakovali. Najdete také „rozumnější", tj. kladné řešení této úlohy?

Řešení obou úloh uvádíme na str. 352.

Vladimír Mališek

Aritmetické rébusy

Řešení aritmetických rébusů spočívá ve správném doplnění číslic na místa teček tak, aby platily dané matematické operace. Řešení těchto úloh vyžaduje logické myšlení a kombinační schopnosti. Vyzkoušejte tedy sami sebe na následujícím násobení a dělení.

a)

$$\begin{array}{r}
.\,.\,.\,. \\
\times\,.\,.\,.\,7 \\
\hline
1.1.1 \\
\\
.\,.\,.\,77 \\
.\,7\,.\,. \\
\hline
.\,.\,.\,.\,.\,.\,1\,.
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l}
.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,:2.7\,8 = \\
-87.2 \\
\hline
\quad .\,.\,.\,.\,. \\
\quad -.\,.\,.\,2 \\
\hline
\qquad .\,.\,.\,. \\
\qquad -2\,.\,.\,. \\
\hline
\qquad\; .\,.\,.\,.\,. \\
\qquad\; -.\,.\,.\,2\,. \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Jarmila Pěnčíková

(Řešení je na str. 324)

OLYMPIÁDY A SOČ

Vzpomínka na celostátní kolo I. ročníku MO

Ve dnech 24. až 27. dubna 1986 se uskuteční v Pelhřimově celostátní 3. kolo kategorie A matematické olympiády. Toto vrcholné kolo proběhne už po pětatřicáté. Poprvé se na takovém kole sešli soutěžící v I. ročníku MO, a to ve dnech 14. a 15. června 1952.

První den 14. 6., což byla sobota, se řešitelé, kteří byli pozváni na základě úspěšného absolvování 2. kola, sjeli do Prahy a večer společně navštívili v Komorním divadle hru „Otec" od Aloise Jiráska. Vlastní soutěž se potom konala druhého dne dopoledne ve velké posluchárně matematického ústavu přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy na Karlově. Na slavnostním zahájení vystoupil významný český matematik *Eduard Čech*, z jehož podnětu československá matematická olympiáda vznikla. Dalšími řečníky byli představitelé ministerstva školství a svazu mládeže. Potom nastala chvíle, kterou žáci netrpělivě očekávali. Byli seznámeni se čtyřmi soutěžními úlohami a v posluchárně zavládlo ticho, nikoli však mrtvé, nýbrž naplněné intenzívní prací. Na řešení byla stanovena doba čtyři hodiny. Po odevzdání prací odešli všichni na společný oběd do Národního domu na Královských Vinohradech (dnes Ústřední kulturní dům železničářů). Odpoledne pak věnovali prohlídce Prahy.

Z tohoto stručného popisu průběhu 3. kola kategorie A v roce 1952 je vidět, jak skromné byly začátky matematické olympiády. Se soutěžemi tohoto typu nebyly u nás žádné zkušenosti. Nebylo tomu tak jako dnes, kdy téměř ke každému vyučovacímu předmětu se pořádá předmětová olympiáda, dále existují různé soutěže a soutěžit lze také v rámci SOČ.

Na závěr otiskujeme úlohy, které se v roce 1952 na 3. kole kategorie A řešily.

1. Jsou-li a, b kladná racionální čísla, dokažte, že ze vztahu

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c\,,$$

kde c je racionální číslo, plyne, že $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ jsou rovněž racionání čísla.

2. Tabulka čísel

$$\begin{array}{ccccccc} & & a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & g_3 \end{array}$$

je sestavena takto: První řádek obsahuje tři lichá čísla. Každé číslo dalších řádků je rovno součtu tří sousedních čísel předcházejícího řádku, z nichž prostřední je nad uvažovaným číslem; schází-li v tabulce některé z těchto tří čísel, doplní se nulou. Dokažte, že počínaje druhým řádkem každý řádek obsahuje aspoň jedno sudé číslo.

3. Budiž $ABCD$ vypuklý různoběžník, v němž $|AB| = |CD|$, a buďtež R, S středy stran AD, BC. Sestrojte polopřímky AU, DV souhlasně rovnoběžné s polopřímkou RS. Dokažte, že platí vztah

$$\sphericalangle BAU = \sphericalangle CDV$$

4. Rozměry obdélníka $ABCD$ jsou přirozená čísla p, q; obdélník je rozdělen na pq jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka AC, a to v případě, že čísla p, q jsou a) nesoudělná, b) soudělná.

jm

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Matematické naděje v Ivančicích

RNDr. JIŘÍ HERMAN, G Brno,

RNDr. JAROMÍR ŠIMŠA, CSc., PřF UJEP Brno

Ve školním roce 1984/85 byly v prvních ročnících devíti gymnázií v celé ČSSR (Praha, Liberec, Plzeň, Hradec Králové, Bílovec, Brno, Bratislava, Žilina a Košice) zřízeny třídy se zaměřením na matematiku. Po uplynutí jednoho roku studia vybralo ředitelství každé této školy tři nejlepší žáky pro účast na celostátním soustředění. Akce proběhla ve dnech 14.—25. 10. 1985 v Ivančicích, městě s bohatou historií, které leží 30 km jihozápadně od Brna.

Účastníci soustředění (25 chlapců a 2 dívky) byli ubytováni v Domově mládeže SZeŠ, zaměstnání (celkem 46 vyučovacích hodin) probíhalo v budově místního gymnázia Jana Blahoslava. Pod vedením učitelů brněnských vysokých škol byla probírána tato témata: Bellovy nerovnosti, Historie matematiky, Konstrukční geometrie, Kombinatorická geometrie, Lineární algebra, Matematika v mechanice, Nerovnosti, Programování, Teorie čísel a Teorie množin. Při exkurzi do Brna navštívili žáci Ústav přístrojové techniky a některá výpočetní střediska.

Z bohatého společensko-kulturního programu soustředění uveďme alespoň přijetí na MěNV Ivančice, návštěvu Divadla na provázku v Brně a celodenní výlet do Moravského Krumlova, Dalešic a Dukovan. Většina žáků využívala v době osobního volna možnosti pracovat s třemi počítači IQ 151, které zapůjčilo místní gymnázium.

Na závěr soustředění proběhla *matematická miniolympiáda*. Jejím vítězem se stal žák *Pavol Gvozdjak* z Gymnázia A. Markuša v Bratislavě. Po dobu 120 minut soutěžící řešili čtyři následující úlohy:

1. Které z čísel

$$\frac{1 + 1985^{1982}}{1 + 1985^{1984}} \quad \text{a} \quad \frac{1 + 1985^{1983}}{1 + 1985^{1985}}$$

je větší?

2. Pro reálné parametry a, b_1, b_2, b_3 a b_4 řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + a\,(x_2 + x_3 + x_4) &= b_1\,, \\ x_2 + a\,(x_3 + x_4 + x_1) &= b_2\,, \\ x_3 + a\,(x_4 + x_1 + x_2) &= b_3\,, \\ x_4 + a\,(x_1 + x_2 + x_3) &= b_4\,. \end{aligned}$$

3. Dokažte, že mezi čísly

$$2^{2^n} + 3\,, \qquad n = 0, 1, 2,$$

je nekonečně mnoho složených.

4. Ve dvou různých bodech A, B kružnice k jsou sestrojeny její tečny, které se protínají v bodě C. Kružnice l prochází bodem C, dotýká se přímky AB v bodě B a protíná kružnici k v bodě M různém od B. Dokažte, že přímka AM prochází středem úsečky BC.

Vyzýváme čtenáře, aby si vyzkoušeli své síly a pokusili se tyto úlohy vyřešit. Pokud se vám to u některé úlohy podaří, můžete svá řešení zaslat do 1 měsíce od uveřejnění na adresu: dr. Jiří Herman, G na tř. kpt. Jaroše, 658 70 Brno. Jména nejúspěšnějších řešitelů spolu s řešením úloh otiskneme v některém z příštích čísel RMF.

V anketě před odjezdem z Ivančic domů hodnotili účastníci organizaci i obsahovou náplň soustředění velmi kladně. Ocenili také, že všichni vytvořili dobrý kolektiv. Vyměnili si adresy a přislíbili, že si v budoucnu budou navzájem vyměňovat zkušenosti z řešení matematických úloh.

Kalendár M-F: apríl 1986

1. IV. 1776 sa v Paríži narodila *Sofia Germainová*, francúzska matematička. Zaoberala sa teóriou čísel, patrí k zakladateľom matematickej fyziky.

7. IV. 1761 zomrel *Thomas Bayes*, anglický matematik. Jeho matematické práce sa týkajú teórie pravdepodobnosti.

7. IV. 1866 sa v Štockholme narodil *Erik Ivar Fredholm*, švédsky matematik. Zaoberal sa diferenciálnymi rovnicami a rozpracoval všeobecné metódy riešenia niektorých typov integrálnych rovníc.

7. IV. 1876 sa v Petrohrade narodil *Dmitrij Sergejevič Roždestvenskij*, sovietsky fyzik. Pracoval v oblasti fyzikálnej a experimentálnej optiky a atómovej fyziky. Uverejnil významné práce o mikroskopoch a interferencii.

12. IV. 1951 zomrel *Bohuslav Hostinský*, český matematik a fyzik. Pracoval v matematickej analýze, diferenciálnej geometrii, počte pravdepodobnosti a matematickej fyzike.

12. IV. 1971 zomrel *Igor Jevgenevič Tamm*, sovietsky fyzik. Pracoval v oblasti kvantovej teórie žiarenia, rozvinul kvantitatívnu teóriu jadrových síl. V roku 1958 dostal spolu s *P. A. Čerenkovom* a *I. M. Frankom* Nobelovu cenu za fyziku za spolupodiel pri objave a objasnení Čerenkovovho efektu.

15. IV. 1896 sa v Saratove nyrodil *Nikolaj Nikolajevič Semjonov*, sovietsky chemik a fyzik. Vyslovil teóriu tepelného výbuchu

plynných zmesí. Dostal v roku 1956 Nobelovu cenu za chémiu spolu s *C. N. Hinshelwoodom.*

16. IV. 1901 zomrel v Baltimore *Henry August Rowland,* americký fyzik. Skonštruoval reflexnú mriežku, ktorá významne prispela k rozvoju spektroskopie.

19. IV. 1906 zomrel v Paríži *Pierre Curie,* francúzsky fyzik a chemik. Objavil piezoelektrický jav, skúmal vlastnosti kryštálov. Spolu s *M. Sklodowskou* objavili polónium a rádium. V roku 1903 dostali spolu s *A. Becquerelom* Nobelovu cenu za výskum radioaktívneho žiarenia.

23. IV. 1896 sa v Odese narodil *Dmitrij Dmitrijevič Maksutov,* sovietsky astronóm. Špecializoval sa na konštrukciu astronomických prístrojov a významne priespel k technológii astronomickej optiky.

26. IV. 1951 zomrel v Mníchove *Arnold Johannes Sommerfeld,* nemecký fyzik a matematik. Rozpracoval teóriu atómu, formuloval teóriu brzdiaceho žiarenia elektrónov, vysvetlil mnohé zaujímavé vlastnosti kovov.

28. IV. 1906 sa v Brne narodil *Kurt Gödel,* americký logik a matematik rakúskeho pôvodu. Základné práce sa týkajú teórie množín a matematickej logiky. Dokázal vetu o nemožnosti úplnej formalizácie celej matematiky.

30. IV. 1916 sa narodil *Claude Elwood Shannon* americký matematik. Svojmi prácami položil základy teórie informácií, v značnej miere určil rozvoj všeobecnej teórie diskrétnych automatov.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Perelman J. I.
ZAJÍMAVÁ ALGEBRA

Vydalo SNTL, Praha 1985, 176 str., 29 obr., 7200 výt., 20,— Kčs.

Nová Perelmanova kniha přesvědčí čtenáře o tom, že pomocí algebry je možno řešit velmi mnoho praktických problémů. Není to však učebnice algebry, ba naopak: Čtenář musí základy algebry již znát, aby mohl zdařile číst a přemýšlet.

V devíti kapitolách je obsaženo opravdu mnohé. Čtenář si nejen prohloubí znalosti o operacích s algebraickými symboly, ale získá také přehled o spojení algebry s dalšími matematickými disciplínami, zejména s geometrií a aritmetikou. Velmi mnoho místa je věnováno spojení matematiky s praxí. K tomu autor využívá řady vtipných úloh a na první pohled složitých problémů. Velkým kladem knihy je ukázka aplikací v oblasti elektrotechniky a počítačové techniky.

Přehlédneme-li letmo kapitoly, zjistíme, že obsahují ekonomické počítání s velmi velkými čísly, řešení lineárních (i diofantských) a kvadratických rovnic ve spojení s praktickými problémy, využití logaritmů apod. Jistě čtenář již obdivoval „zázračnou schopnost" některých lidí počítat i obtížné příklady zpaměti. V jedné z kapitol se však dozví, jak lze takové počítání zvládnout s využitím některých algebraických formulí. Neméně pozoruhodná je kapitola Největší a nejmenší hodnoty. Autor přibližuje čtenáři řešení řady úloh na hledání extrémů, avšak bez užití diferenciálního počtu. Na ukázku snad text jedné úlohy: Jak vysoko nad stolem musí být plamen svíčky, aby mince ležící na stole byla osvětlena co nejjasněji? Vzdálenost mince od paty svíčky je a.

Po řadě dřívějších Perelmanových knih přeložených do češtiny [Zajímavá mechanika (1953), Zajímavá geometrie (1954), Zajímavá astronomie (1955), Zajímavá fyzika (1962)] jistě i tato kniha zaujme řadu žáků středních škol.

František Jáchim

Řešení úloh z článku Čím se baví učitelé „pod lavicí"

1. Číslo 6 lze vyjádřit např. takto

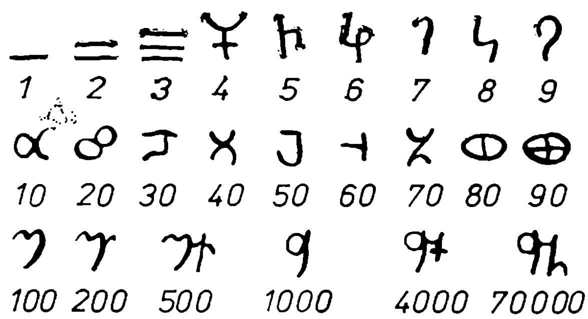
$$(0! + 0! + 0!)!$$
$$(1! + 1! + 1!)!$$
$$2 + 2 + 2$$
$$3 \quad 3 - 3$$
$$\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}$$
$$5 + 5/5$$
$$6 \quad 6/6$$
$$7 - 7/7$$
$$[\sqrt{(8 + 8/8)}\,]!$$
$$\sqrt{9} \quad \sqrt{9} - \sqrt{9}$$

2. Ryb mohlo být $27\,k - 2$, kde k je celé číslo.

Číslice brahmí

Díváme se na číslice, jež se používaly v Indii kolem r. 300 n. l. a představovaly přechodný typ číslic před zavedením desítkové poziční numerace. Číslice brahmí mají znaky pro počty jednotek, desítek a stovek; čísla 1, 2 a 3 jsou vyznačena čárkami, ostatní číslice jsou složitěji tvarované symboly. Číslice vyjadřující násobky stovek, resp. tisíců, jsou „slepené“ ze znaku pro jejich počet a znaku čísla 100, resp. 1000. Zvlášť dobře je to patrno na číslici 500; při čtení zprava doleva (!) přečteme „pět sto“, tj. pět (krát) sto. Obdobně můžeme číst (čtyři (krát) tisíc a sedmdesát (krát) tisíc na posledním řádku vpravo. Číslice brahmí tedy uplatňovaly *multiplikativní princip* při čtení některých složených znaků, ne jen aditivní, který byl běžný v jiných numeracích (např. v římské numeraci se MIV chápe jako M + IV = 1004, proto 4000 se píše MMMM).

Další vývoj přinesl indickým matematikům poznání, že symboly čísel 10, 100 a 1000 je zbytečné zapisovat, navykneme-li si zaznamenat nejprve počet tisíců, pak počet set, počet desítek a nakonec počet jednotek; přitom počet nula vyznačíme kroužkem. Díky tomu stoupl význam znaků na horním řádku naší tabulky, z nichž se vyvinuly číslice nazývané indické nebo indicko-arabské. I když vývoj číslic postupoval mnoha oklikami, můžeme „zárodky“ dnes užívaných číslic vytušit i v těch, které



zde vidíme. Pokud bychom při zakreslování číslic brahmí nezdvíhali tužku s papíru, snadno bychom z dvojky, trojky a osmičky získali tahy typické pro naše číslice. Obdobně najdeme typické zkřížení čar ve čtyřce, náznak „zavinutí“ šestky a devítky, „hák“ sedmičky.

Jaroslav Šedivý

47 233

Představujeť matematické bádání vůbec vědeckou činnost nejpohodlnější, znesnadněnou jenom tím, že vyžaduje naprosto spojitého postupu od nižšího k vyššímu. Kde se hned od počátku nepřihlíží k této spojitosti, tam nedocílí se úspěchů přiměřených, což pak omlouvá se nedostatkem matematických vloh u žáka, ač je tím vytčen vlastně nedostatek zdravého rozumu.

Závisíť výborná chápavost matematická především na výborné průpravě elementární, jakož vynikající úspěchy matematické podmíněny jsou v první řadě příslušnou pilností. Tak zvaná geniálnost nemá ve střízlivé matematice, po logice nejjednodušší to vědě exaktní, specifického významu.

F. J. Studnička

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednotky čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

ROČNÍK 64, 1985/86
KVĚTEN

(9)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

MATEMATIKA

O jednom druhu samoopravných kódů

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

V článcích [2] a [3] jsme se seznámili s kódy desítkových číslic, jejichž kódová slova byla sestavena tak, aby bylo možno zjistit, zda při přenosu či zpracování nedošlo k právě jedné chybě. Ideální kód by však byl takový, u něhož by šlo nejen objevit, že došlo k chybě, ale také chybu nalézt a opravit.

V tomto článku si jeden takový kód ukážeme. Bude sedmibitový. Vytvoříme jej z kódu BCD (viz čl. [1]). Kódová slova kódu BCD doplníme o tři paritní bity (viz čl. [3]). Paritním bitem můžeme kontrolovat nejen všechny bity kódového slova, nýbrž i pouze jen některé jejich skupiny. Pro tři paritní bity tedy potřebujeme vytvořit tři skupiny bitů. Můžeme postupovat např. tak, jak si ukážeme v dalších odstavcích.

Očíslujme bity sedmibitového kódu čísly 1, 2, 3, ..., 7. Označme $M = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Z vlastností dvojkové soustavy plyne, že každé číslo, které je prvkem množiny M, lze vyjádřit ve tvaru

$$4 \,.\, x + 2 \,.\, y + 1 \,.\, z\,,$$

kde $x, y, z \in \{0, 1\}$. Toho jsme využili při sestavování tabulky 1.

Tabulka 1

M_1	1, 3, 5, 7
M_2	2, 3, 6, 7
M_4	4, 5, 6, 7

Množina M_1 je množinou všech těch čísel z množiny M, které lze napsat ve tvaru

$$4 \,.\, x + 2 \,.\, y + 1\,,$$

kde $x, y \in \{0, 1\}$. Podobně do množiny M_2 náleží všechna ta čísla z množiny M, jež lze zapsat ve tvaru

$$4 \,.\, x + 2 + 1 \,.\, z\,,$$

kde $x, z \in \{0, 1\}$. Konečně do množiny M_4 patří všechna čísla z množiny M, která lze psát jako součet

$$4 + 2 \,.\, y + 1 \,.\, z\,,$$

přičemž $y, z \in \{0, 1\}$.

Každé číslo d z množiny M je jednoznačně určeno, víme-li, do kterých množin M_1, M_2, M_4 patří. Číslo d lze určit velmi jednoduše, a to bez tabulky 1. Řekne-li např. někdo, že jde o číslo, které je prvkem jen množin M_1 a M_4, pak je to číslo 5. Totiž z toho, že patří do M_1 a M_4, plyne, že neznámé číslo d je rovno součtu $4 + 2y + 1$. Přitom však $y = 0$, neboť $d \notin M_2$. K výpočtu čísla d tedy stačilo sečíst indexy u M_1 a M_4. Zkuste sami, zda tomu je obdobně i v dalších možných případech.

Množiny M_1, M_2, M_4 určují tři skupiny bitů. Jedenkrát jsou v nich čísla 1, 2, 4, takže bity s pořadovými čísly 1, 2, 4 musí být paritní. Bity s pořadovými čísly 3, 5, 6, 7 pak budou informační; nechť jsou jimi po řadě bity kódu BCD, jimž přísluší váhy 8, 4, 2, 1. Kód tím však ještě není plně určen. U paritních bitů se musíme rozhodnout pro lichou nebo sudou paritu. V tabulce 2 byly sloupce příslušející bitům s pořadovými čísly 1, 2, 4 doplněny tak, aby všechny čtveřice složené z bitů s pořadovými čísly 1, 3, 5, 7, dále 2, 3, 6, 7 a také 4, 5, 6, 7 byly liché parity.

Tabulka 2

Pořadové číslo bitů		1	2	3	4	5	6	7
Označení bitu		P_1	P_2	8	P_4	4	2	1
Desítkové	0	I	I	O	I	O	O	O
číslice	1	O	O	O	O	O	O	I
	2	I	O	O	O	O	I	O
	3	O	I	O	I	O	I	I
	4	O	I	O	O	I	O	O
	5	I	O	O	I	I	O	I
	6	O	O	O	I	I	I	O
	7	I	I	O	O	I	I	I
	8	O	O	I	I	O	O	O
	9	I	I	I	O	O	O	I

Kód z tabulky 2 umožňuje opravu právě jedné chyby, a to zcela samočinně. Takové kódy nazýváme *samoopravné.*

Opravu chyby si ukážeme na příkladě. Představme si, že v kódovém slově číslice 7 došlo k jedné chybě a ze správného kódového slova

I I O O I I I

vznikla sedmice

$$\begin{matrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{I} & \mathrm{O} & \mathrm{I} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \qquad (1)$$

Proveďme kontrolu. V každé ze skupin bitů $M_1 = \{1, 3, 5, 7\}$, $M_2 = \{2, 3, 6, 7\}$, $M_4 = \{4, 5, 6, 7\}$ by měl být v sedmici (1) lichý počet znaků I. U množin M_2 a M_4 to však neplatí, takže k chybě došlo v bitu s pořadovým číslem $2 + 4 = 6$.

Poznámka. „Trik", který jsme použili k objevení chybného bitu, můžeme nalézt v knížkách rekreační matematiky (např. viz [4], „Početní kouzlo" v kapitole Dvojková soustava). Též v Rozhledech se o něm psalo v článku [5].

Snadno lze zjistit, že kódová slova pro dvě různé číslice se v tabulce 2 liší aspoň ve třech bitech. Tedy chyby právě ve dvou bitech kódového slova nepřevádí toto slovo v jiné kódové slovo, takže jsou identifikovatelné. Ovšem nedokonale, protože jsou zjištěny jako celek a není objeveno, že jde o dvě chyby. Opraveny mohou být tedy tak, jako by vznikla jen jedna chyba, což nevede k správnému kódovému slovu. Uveďme si příklad.

Číslice 1 je v tabulce 2 zobrazena kódovým slovem

O O O O O O I .

Dvěma chybami z něho můžeme dostat např. sedmici

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{O} & \mathrm{I} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{I} & \mathrm{O} & \mathrm{I}, \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \tag{2}$$

která není v tabulce 2 uvedena. Kontrolou zjistíme, že pořadové číslo chybného bitu je ve všech třech množinách M_1, M_2, M_4, takže chyba je v bitu s pořadovým číslem $1 + 2 + 4 = 7$. Avšak kódové slovo vzniklé opravou ze sedmice (2) je

O I O O I O O ,

což odpovídá číslici 4. K číslici 1 jsme tedy nedošli.

Opravou dvou chyb jako jedné chyby se však nemusí vůbec dojít k nějakému kódovému slovu. Např. nechť dvě chyby změnily kódové slovo

O O I I O O O ,

které zobrazuje číslici 8, na sedmici

O I I I I O O

Parita je v něm chybná pro všechny tři skupiny bitů M_1, M_2, M_4, takže opravit je třeba sedmý bit. Ovšem dostaneme tak sedmici

O I I I I O I ,

jež není kódovým slovem.

Na závěr shrňme vlastnosti kódu z tabulky 2. Tento kód umožňuje opravu kódového slova, právě když v něm vznikla jediná chyba. Dojde-li k právě dvěma chybám, pak budou identifikovány, avšak oprava nebude úspěšná. Větší počet chyb než dvě nemusí být zjištěn (viz cv. 3).

Cvičení

1. Vytvořte z kódu BCD sedmibitový samoopravný kód obdobným způsobem jako v tabulce 2, avšak užijte sudé parity.
2. Sestavte analogickým způsobem jako v tabulce 2 sedmibitový samoopravný kód z Aikenova kódu (viz čl. [1]).

3. Pro kód z tabulky 2 zjistěte, zda třemi chybami může vzniknout z kódového slova
   a) opět kódové slovo,
   b) sedmice, která není kódovým slovem. Vyšetřete, jak může dopadnout oprava v případě domněnky, že jde o jedinou chybu.

Literatura

[1] Mída J.: Čtyřbitové kódy desítkových číslic, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 2, s. 51—54

[2] Mída J.: Kódy „dva z pěti", Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 5, s. 177—178

[3] Mída J.: O kódech zabezpečených paritou, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 7, s. 265—267

[4] Kowal S.: Matematika pro volné chvíle, SNTL, 2. vydání, Praha 1985

[5] Malíšek V.: Kouzelné karty, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 61, 1982/83, č. 2, s. 81—83

Súčty, sumy a kombinačné čísla

RNDr. MÁRIA DOMÁNYOVÁ, Gymnázium Pavla Horova, Michalovce

V doterajších úvahách o pyramídach (pozri [1], [2], resp. [3]) nás štúdium istých priestorových konfigurácií („pyramíd") priviedlo k vetám o súčte prvých n členov tých postupností prirodzených čísel, ktoré týmto konfiguráciám „odpovedajú". V nasledujúcom článku chceme v rámci tejto problematiky poukázať na niektoré ďalšie zaujímavé vzťahy a súvislosti.

Už vieme, že platí

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \,.\, (n+1)}{2}, \qquad (1)$$

$$1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 4 + \ldots + n \,.\, (n+1) = \frac{n \,.\, (n+1) \,.\, (n+2)}{3}, \qquad (2)$$

a poznáme tiež vzťahy pre súčet druhých a tretích mocnín prirodzených čísel. Pokúsme sa nájsť vzorec pre výpočet hodnoty súčtu

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 + \qquad + n \,.\, (n+1) \,.\, (n+2) \,.$$

V článku [1] sme okrem iného odvodili vzťah medzi počtom gúľ v trojuholníkovej a štvorcovej pyramíde, ktorý môžeme zapísať aj takto:

$$1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + \ldots + n \,.\, (n + 1) = (1^2 \,. + 2^2 + \ldots + n^2) +$$
$$+ (1 + 2 + \ldots + n)\,.$$

Odvodenie bolo jednoduché; zakladalo sa na vetách o asociatívnosti, komutatívnosti a distributívnosti operácií v obore reálnych čísel. Skrátene (pomocou symboliky súm) ho môžeme zapísať nasledovne:

$$\sum_{k=1}^{n} k \,.\, (k + 1) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\,.$$

Obdobne možno ukázať, že platí:

$$\sum_{k=1}^{n} k \,.\, (k + 1) \,.\, (k + 2) = \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 2k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3 \,.\, \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2 \,.\, \sum_{k=1}^{n} k\,.$$

Hľadaný súčet (na ľavej strane posledného vzťahu) je tu vyjadrený pomocou súčtov, ktoré už poznáme z predchádzajúcich článkov (pozri [1], [2]), takže dostávame:

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 + \ldots + n \,.\, (n + 1) \;\; (n + 2) = \frac{n^2 \,.\, (n + 1)^2}{4} +$$
$$+ 3 \,.\, \frac{n \,.\, (n + 1) \,.\, (2n + 1)}{6} + 2 \,.\, \frac{n \,.\, (n + 1)}{2} =$$
$$= n \,.\, (n + 1) \,.\left[\frac{n \,.\, (n + 1)}{4} + \frac{2n+1}{2} + 1\right] =$$
$$= n \,.\, (n + 1) \,.\, \frac{n^2 + 5n + 6}{4} = \frac{n \,.\, (n + 1) \,.\, (n + 2) \,.\, (n + 3)}{4}$$

Odvodenie je hotové:

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 + \quad + n \,.\, (n + 1) \;\; (n + 2) = \frac{n \,.\, (n + 1) \,.\, (n + 2) \,.\, (n + 3)}{4} \tag{3}$$

Prepíšme ešte vzťahy (1), (2), (3) nasledovne:

$$1 + 2 + \quad + n = \frac{(n + 1) \,.\, n}{1 \,.\, 2}\,, \tag{1'}$$

$$\frac{2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2} + \frac{3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2} + \quad + \frac{(n + 1) \,.\, n}{1 \,.\, 2} = \frac{(n + 2) \,.\, (n + 1) \,.\, n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \tag{2'}$$

$$\frac{3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots + \frac{(n + 2) \,.\, (n + 1) \,.\, n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} =$$

$$= \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}. \qquad (3')$$

Čitatelia, ktorí už poznajú kombinačné čísla, iste tušia, že „skomplikovaním" zápisov odvodených vzťahov sme sledovali vlastne ich následné zjednodušenie:

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \quad + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}, \qquad (1'')$$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}, \qquad (2'')$$

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \quad + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}. \qquad (3'')$$

Všimnime si zovšeobecnenie, ktoré sa po porovnaní vzťahov (1″), (2″), (3″) ponúka: Zdá sa, že pre všetky prirodzené čísla k, n platí:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{k+i}{k} = \binom{k+n}{k+1}. \qquad (4)$$

Pokúsme sa dokázať toto tvrdenie s využitím viet o kombinačných číslach. Na základe známeho vzťahu (platného pre ľubovoľné celé nezáporné čísla n, k, $n > k$)

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

môžeme jednotlivé sčítance (s výnimkou prvého) na ľavej strane vzťahu (4) zapísať v tvare rozdielu odpovedajúcich kombinačných čísel, takže platí:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{k+i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \ldots +$$

$$+ \binom{k+n-1}{k} = \binom{k}{k} + \left[\binom{k+2}{k+1} - \binom{k+1}{k+1}\right] + \left[\binom{k+3}{k+1} -\right.$$

$$\left. - \binom{k+2}{k+1}\right] + \left[\binom{k+4}{k+1} - \binom{k+3}{k+1}\right] + \quad + \left[\binom{k+n}{k+1} -\right.$$

$$\left. - \binom{k+n-1}{k+1}\right].$$

Teraz stačí, aby sme si všimli, že menšiteľ v druhej (tretej, . . ., poslednej) hranatej zátvorke sa ruší s rovnako veľkým menšencom v prvej (druhej, . . . , predposlednej) hranatej zátvorke.

Môžeme teda písať:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k+i}{k}=\binom{k}{k}-\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+n}{k+1}=1-1+\binom{k+n}{k+1}=$$

$$=\binom{k+n}{k+1}.$$

Hypotéza je overená.

Literatúra

[1] Dományová M.: Pyramídy a čo s nimi, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 61, 1982/83, č. 10, s. 409—413

[2] Dományová M.: Ešte o pyramídach, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 62, 1983/84, č. 10, s. 419—423

[3] Calda E.: Netradiční odvození známých vzorců, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 7, s.

Řešení nerovnic pomocí vyšších derivací

RNDr. JIŘÍ HENZLER, CSc., RNDr. JAN MACH, VŠE Praha

Při řešení nerovnice $f(x) > 0$ bývá obvykle obtížné (v případě, že funkce f je polynom vyššího než čtvrtého stupně, často i nemožné) stanovit kořeny rovnice $f(x) = 0$. V matematické analýze úlohy tohoto typu vznikají nejčastěji při zkoumání monotónnosti funkce užitím klasického kritéria monotónnosti: Je-li funkce f spojitá v intervalu J a má-li uvnitř J stále kladnou (resp. zápornou) derivaci, je funkce f rostoucí (resp. klesající) v J.

Příklad. Rozhodnout o monotónnosti funkce

$$f(x) = 12x^6 - 9x^5 + 2x^4 + 0{,}1x + 3$$

v intervalu $\langle 0, \infty)$ pomocí klasického kritéria nelze, protože nerovnici

$$f'(x) = 72x^5 - 45x^4 + 8x^3 + 0{,}1 > 0$$

neumíme řešit. Lze postupovat takto:

Stanovíme derivace až do takového řádu n, kdy lze příslušnou nerovnici $f^{(n)}(x) > 0$ řešit; zde stačí druhá derivace:

$$f''(x) = 360x^4 - 180x^3 + 24x^2 = 360x^2 . \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{15}\right) =$$

$$= 360x^2 . \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{15 . 16}\right] > 0$$

pro všechna $x \neq 0$. Je tedy f″ kladná v intervalu $(0, \infty)$, f' spojitá

v $\langle 0, \infty)$, takže podle klasického kritéria je funkce f' rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$.
Protože dále platí $f'(0) = 0{,}1 > 0$, plyne z definice rostoucí funkce, že f' je kladná v celém intervalu $(0, \infty)$. Protože je funkce f spojitá v $\langle 0, \infty)$, je podle klasického kritéria funkce f rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$.

Myšlenku řešení tohoto příkladu nyní zobecníme.

Pomocná věta. Nechť funkce f je definovaná v intervalu $\langle a, b)$ a nechť má v tomto intervalu všechny derivace až do řádu n pro vhodné $n \in N$. Nechť dále

$$\forall\, x \in (a, b)\,;\ f^{(n)}(x) > 0\,, \tag{I}$$

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\,;\ f^{(k)}(a) \geqq 0\,. \tag{II}$$

Pak

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\ \forall\, x \in (a, b)\,;\ f^{(k)}(x) > 0\,. \tag{III}$$

Důkaz. Výrok

$$k \in \{0, 1, \ldots, n\} \Rightarrow \forall\, x \in (a, b)\,;\ f^{(n-k)}(x) > 0 \tag{IV}$$

je ekvivalentní výroku (III) — nabývá-li totiž k postupně hodnot $0, 1, \ldots, n$, nabývá $n - k$ postupně hodnot $n, n - 1, \ldots, 0$ a naopak. Výrok (IV) budeme dokazovat matematickou indukcí podle k.

a) Pro $k = 0$ pravá strana implikace (IV) platí podle (I).

b) Nechť již pravá strana implikace (IV) platí pro nějaké $k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Podle klasického kritéria monotónnosti (z existence derivace plyne spojitost!) je tedy funkce $f^{(n-k-1)}$ rostoucí v intervalu $\langle a, b)$. Z (II) pak plyne

$$\forall\, x \in (a, b)\,;\ f^{(n-k-1)}(x) > 0\,.$$

Tuto větu nejčastěji používáme ve tvaru:

Věta 1. Nechť funkce f je definovaná v intervalu $\langle a, b)$ a nechť má v tomto intervalu všechny derivace až do řádu n pro vhodné $n \in N$. Nechť dále

$$\forall\, x \in (a, b)\,;\ f^{(n)}(x) > 0\,,$$

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\,;\ f^{(k)}(a) \geqq 0\,.$$

Pak

$$\forall\, x \in (a, b)\,;\ f(x) > 0$$

Aplikací věty 1 na funkci $g(x) = f(-x)$ dostaneme:

Věta 2. Nechť funkce f je definovaná v intervalu $(a, b\rangle$ a nechť má v tomto intervalu všechny derivace až do řádu n pro vhodné $n \in N$. Nechť dále

$$\forall\, x \in (a, b)\,;\ (-1)^n \,.\, f^{(n)}(x) > 0\,,$$

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\,;\ (-1)^k \,.\, f^{(k)}(b) \geqq 0\,.$$

Pak

$$\forall\, x \in (a, b)\,;\ f(x) > 0\,.$$

Aplikací vět 1, 2 na funkci $g(x) = -f(x)$ dostaneme analogické věty pro přímé řešení nerovnice $f(x) < 0$

Věta 3. Nechť funkce f je definovaná v intervalu $(a, b >$ a nechť má v tomto intervalu všechny derivace až do řádu n pro vhodne $n \in N$. Nechť dále

$$\forall\, x \in (a, b)\ ;\ f^{(n)}(x) < 0\,.$$
$$\forall\, k \in \{0,\ 1, \ldots, n\}\ ;\ f^{(k)}(a) \leqq 0\,.$$

Pak

$$\forall\, x \in (a, b)\ ;\ f(x) < 0\,.$$

Věta 4. Nechť funkce f je definovaná v intervalu $(a, b>$ a nechť má v tomto intervalu všechny derivace až do řádu n pro vhodné $n \in N$. Nechť dále

$$\forall\, x \in (a, b)\ ;\ (-1)^n . f^{(n)}(x) < 0\,,$$
$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}\ ;\ (-1)^k . f^{(k)}(b) \leqq 0\,.$$

Pak

$$\forall\, x \in (a, b)\ ;\ f(x) < 0\,.$$

Uvedené věty lze formulovat i pro uzavřené intervaly. Lze rovněž formulovat analogické věty, jejichž tvrzení je „pak je funkce f rostoucí (klesající) v daném intervalu".

Příklad. Určíme největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x) = x^6 - 7x^5 + 21x^4 - 35x^3 - x^2 - 3x + 10$$

v intervalu $< 0, 1 >$.

Ukážeme-li, že funkce f je v intervalu $< 0, 1 >$ monotónní, bude stanovení maxima i minima snadné.

Protože je

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^5 - 35x^4 + 84x^3 - 105x^2 - 2x - 3\,,\\
f''(x) &= 30x^4 - 140x^3 + 252x^2 - 210x - 2\,,\\
f'''(x) &= 120x^3 - 420x^2 + 504x - 210\,,\\
f^{(4)}(x) &= 360x^2 - 840x + 504\,,\\
f^{(5)}(x) &= 720x - 840\,,\\
f^{(6)}(x) &= 720\,,
\end{aligned}$$

je zřejmě

$$f^{(6)}(x) > 0 \text{ pro všechna } x \in (-\infty, \infty)\,, \tag{6}$$
$$f^{(5)}(1) = -120 < 0\,, \tag{5}$$
$$f^{(4)}(1) = 24 > 0\,, \tag{4}$$
$$f'''(1) = -6 < 0\,, \tag{3}$$
$$f''(0) = -2 < 0\,, \tag{2}$$
$$f'(0) = -3 < 0\,. \tag{1}$$

Z (6), (5), (4), (3) plyne (věta 4), že f'' je záporná v intervalu $(-\infty, 1)$, a tedy i

$$f'''(x) < 0 \quad \text{pro všechna } x \in < 0,1'. \tag{3'}$$

Z (3'), (2), (1) plyne (věta 3), že

$$f'(x) < 0 \quad \text{pro všechna } x \in (0, 1)\,.$$

Daná funkce f je tedy klesající v intervalu $< 0, 1 >$, takže

$$\min f = f(1) = -14\,, \quad \max f = f(0) = 10\,.$$

FYZIKA

Několik poznámek k Mezinárodní soustavě jednotek (SI)

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., Praha

O mezinárodní soustavě jednotek bylo v minulém desetiletí mnoho napsáno, existují o ní i monotematické odborné publikace. Přesto, že je struktura této soustavy dostatečně známá, zejména v procesu výuky jsou s ní nové generace podrobně seznamovány, přesto pokládám za účelné připojit k ní několik poznámek, které vyjádří některé změny, které v této problematice v minulých letech nastaly, a některé nové poznatky.

Nejprve krátce k rozdělení jednotek do tří tříd. Rozumí se jednotek SI, tedy *hlavních* jednotek jednotlivých veličin. První třídu tvoří *základní* jednotky SI, druhou *odvozené* jednotky SI, třetí *doplňkové* jednotky SI. Druhá a třetí třída bývala někdy co do pořadí zaměňována, tj. doplňkové jednotky byly na druhém a odvozené na třetím místě. Na čtvrtém místě zůstávají násobky a díly jednotek SI, tvořené předepsaným způsobem *předponami* SI z hlavních jednotek. Jedinou výjimkou je *hmotnost*, kde se násobky a díly tvoří z „dílčí" jednotky gram, jež je takto anomální výchozí jednotkou. U ostatních veličin odvozeného charakteru jsou výchozími jednotkami jednotky hlavní.

Pro toto rozdělení do tříd, i když bylo oficiálně mezinárodně dohodnuto, není z čistě vědeckého hlediska zásadní důvod, protože nám fyzika pro to žádná objektivní vodítka neposkytuje. Mezinárodní soustava jednotek byla přijata 10. Generální konferencí vah a měr v Paříži, konanou v roce 1954, a to 6. rezolucí. Její dnes používaný název s mezinárodní zkratkou SI byl přijat 11. Generální konferencí vah a měr (konané v roce 1960, rovněž v Paříži), a to 12. resolucí. Rozšíření počtu základních jednotek na dnešních sedm (z původních šesti z roku 1954) přijala 14. Generální konference vah a měr (1971, Paříž) svým 3. usnesením.

11. Generální konference (1960) připustila třetí třídu jednotek SI, jednotky doplňkové, jež jsou pouze dvě a představují je jednotky rovinného a prostorového úhlu. Protože u jednotek této kategorie došlo k zásadním změnám proti dřívějšku, zmíníme se o nich později podrobněji.

Vraťme se nyní ke všeobecné charakteristice SI. Jednotky SI všech tří zmíněných tříd tvoří dohromady *koherentní* soubor jednotek. Koherentní soubor jednotek je takový, ve kterém ve vzájemných vztazích, které mezi nimi platí, se používá násobení (resp. také dělení) jednotek v různých mocninách, a to bez jakéhokoliv číselného faktoru. Někdy se koherentní jednotky definují jako takové, v jejichž definičních rovnicích je vesměs číselný součinitel rovný jedné. O jednotlivé koherentní jednotce nemá přesně vzato s hlediska koherence smysl hovořit, protože koherence (z lat. cohaerentia = souvislost) má význam teprve v určitém souboru více jednotek, v souboru systematicky uspořádaném. Je zřejmé, že násobky resp. díly jednotek SI nemohou být jednotkami koherentními. Mimosoustavové jednotky v převážné většině případů koherentní nejsou (výjimkou je např. dioptrie $= 1\ \mathrm{m}^{-1}$, jež do SI nepatří).

V oficiální publikaci o SI, kterou vydal Mezinárodní úřad vah a měr v Sèvres u Paříže v roce 1985 (Le Système International d'Unités (SI)) a jež je také jedním z použitých pramenů k tomuto krátkému článku, se mimo jiné zdůrazňuje, že *každá fyzikální veličina může mít pouze jedinou jednotku SI* (i když její název se může tvořit rozdílným způsobem), avšak jediné jednotce SI může vyhovovat více různých fyzikálních veličin. Příkladem tohoto tvrzení může být jednotka SI: $1\ \mathrm{m}^2 \,.\, \mathrm{s}^{-1}$, která je jednotkou plošné rychlosti, kinematické viskozity a měrné teplotní vodivosti, případně také součinitele difuze. Jiným případem je stejná jednotka SI energie (práce, tepla) rozepsaná do součinu základních jednotek) a momentu síly.

Pro přesnost je třeba uvést, že i když otázky týkajících se měřicích jednotek, tj. jejich názvů, značek, definic a realizací, tedy etalonů patří do Mezinárodní organizace vah a měr (tradičně zvané Metrickou konvencí, která vznikla již v roce 1875), přísluší problematika systému veličin, tj. jejich názvů, značení, definic a celého systematického uspořádání do zájmové oblasti Technického komitétu ISO-TC 12 Mezinárodní normalizační organizace (ISO), která od roku 1955 publikovala řadu mezinárodních norem[1]) týkajících se veličin (fyzikálních) a doporučujících přednostní používání jednotek SI v celém světě.

Nyní poněkud podrobněji o třetí třídě jednotek SI, doplňkových jednotkách SI.

Doplňkové jednotky, jež jsou dvě a jimiž je jednotka SI rovinného úhlu radián a jednotka SI prostorového úhlu steradián, byly jako samostatná třída jednotek SI vytvořeny 12. usnesením 11. Generální konference vah a měr v roce 1960. Mělo jít o kategorii jednotek, o jejichž definitivním začlenění buď mezi jednotky základní nebo mezi jednotky odvozené nebylo tehdy rozhodnuto. Nakonec se po delší době rozhodlo Mezinárodním výborem vah a měr (1. usnesením z roku 1980) o dalším postavení doplňkových jednotek jako o *odvozených bezrozměrných* jednotkách. Ve zdůvodnění k tomuto rozhodnutí, kterému předcházela jak obsáhlá jednání v samotném Mezinárodním výboru, tak i v Poradním výboru pro otázky jednotek, který je pomocným orgánem Výboru vah a měr, je uvedeno, že se přihlédlo ke skutečnosti, že rovinný úhel se dosud obecně vyjadřuje poměrem dvou délek a prostorový úhel poměrem plošného obsahu a druhé mocniny délky a že byla snaha zachovat koherenci uvnitř Mezinárodní soustavy jednotek, jež spočívá pouze na sedmi základních jednotkách. Od uvedeného data se tedy rovinný a prostorový úhel uvažují jako odvozené bezrozměrné veličiny a jejich hlavní jednotky SI za odvozené bezrozměrné jednotky.

Přitom mohou být tyto jednotky použity (není to však nutné) ve vztazích jiných odvozených jednotek SI, aby se rozlišily fyzikální veličiny rozdílné povahy, avšak stejného fyzikálního rozměru. Příkladem může být úhlová rychlost s jednotkou SI: radián zasekundu ($\mathrm{rad} \,.\, \mathrm{s}^{-1}$), úhlové zrychlení s jednotkou SI: radián za sekundu na druhou ($\mathrm{rad} \,.\, \mathrm{s}^{-2}$), zářivost s jednotkou SI watt na steradián ($\mathrm{W} \,.\, \mathrm{sr}^{-1}$), nebo zář s jednotkou SI watt na čtvereční metr a steradián ($\mathrm{W} \,.\, \mathrm{m}^{-2} \,.\, \mathrm{sr}^{-1}$).

Odvozené jednotky lze dnes, pokud jde o jejich názvy, rozdělit do 4 skupin, na

— jednotky SI s názvy odvozenými pouze z názvů základních jednotek (např. m^2, $\mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-1}$, $\mathrm{A} \,.\, \mathrm{m}^{-2}$, $\mathrm{mol} \,.\, \mathrm{m}^{-3}$ aj.).

---

[1]) Tyto normy ISO jsou k nahlédnutí ve Studovně Úřadu pro normalizaci a měření v Praze 1, Nov ´ Město, Na příkopě 17.
Jedná se zejména o tyto normy: ISO 31/0 Obecné principy týkající se veličin, jednotek a jejich značek, ISO 31/1 Veličiny a jednotky času a prostoru, ISO 312 V. a j. jevů periodických a jim příbuzných, ISO 31/3 V. a j. mechaniky, ISO 31/4 V. a j. termiky, ISO 31/5 V. a j. elektřiny a magnetismu, ISO 31/6 V. a j. světla a příbuzných elektromagnetických záření, ISO 37/7 V. a j. akustiky, ISO 31/8 V. a j. fyzikální chemie a molekulové fyziky, ISO 31/9 V. a j. atomové a jaderné fyziky, ISO 31/10 V. a j. jaderných reakcí a ionizujícího záření, ISO 31/11 Matematické značky a symboly používané ve fyzikálních vědách a v technologii, ISO 31/12 Bezrozměrné parametry a ISO 31/13 V. a j. ve fyzice pevné fáze.

— jednotky SI se samostatnými názvy (např. Hz, Pa, C, V, °C [2]), lm, Bq aj.),
— jednotky SI s názvy odvozenými z názvů základních jednotek a z názvů jednotek odvozených se samostatnými názvy (např. Pa . s, N . m, J/K, W . $(m . K)^{-1}$, J . mol^{-1}, Gy . s^{-1} aj.),
— jednotky SI s názvy odvozenými z názvů jednotek základních resp. z názvů odvozených jednotek, které mají samostatné názvy, a z názvů jednotek doplňkových (např. rad . s^{-1}, rad . s^{-2}, W . sr^{-1} aj.).

Je vhodné poznamenat, že odvozené jednotky mohou být často vyjadřovány různým způsobem, zvláště je-li to potřebné pro vysvětlení závislostí při výuce a výkladech, na prvním místě je však vždy nutno používat v ČSSR název předepsaný ČSN 01 1300 „Zákonné měřicí jednotky". Příkladem takové rozmanitosti je jednotka energie, kdy $1J = 1\,N . m = 1\,m^2 . kg^{-1} . s^{-2} = 1\,kg . m^2 . s^{-2}$, nebo magnetické indukce, kdy $1\,T = 1\,Wb . m^{-2} = 1\,V . s . m^{-2} = 1\,kg . s^{-2} . A^{-1}$ aj. I u doplňkových jednotek se připouští ve zvláštních případech vyjádření pomocí základních jednotek SI. Tak u radiánu lze psát $1\,rad = 1\,m . m^{-1} = 1$. Číslo jedna (1) lze použít jako jednotku u bezrozměrných veličin stejně tak, jako poměr dvou stejných jednotek SI. Poměr lze použít i u fyzikálních rozměrů, takže u rovinného úhlu bychom mohli psát $\dim \alpha = L . L^{-1}$.

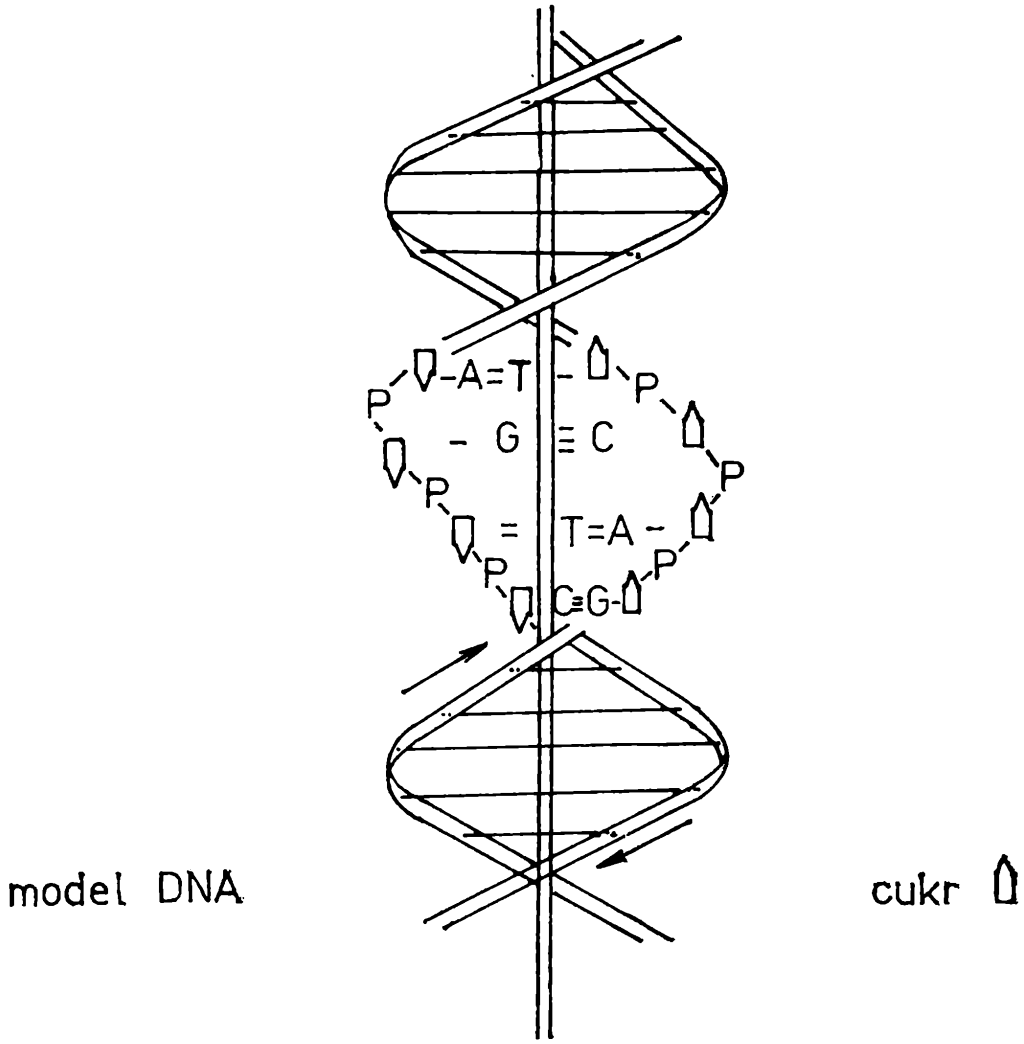
Některým dalším aktuálním otázkám SI, jako je např. změna definice jednotky délky nebo současný stav výzkumu ke zvýšení přesnosti reprodukce základních jednotek SI budou věnovány samostatné články.

Biologické účinky ionizujícího záření

RNDr. MARCEL OHERA, Brno

Účinek ionizujícího záření na živou tkáň má velmi složitou povahu a nelze přesně stanovit v současné době, které změny jsou odpovědné za radiační poškození. Účinek ionizujícího záření je vysvětlován teoriemi přímého a nepřímého účinku. *Teorie přímého účinku* vychází z předpokladu, že k biologickému účinku dojde, když je uvnitř buňky zasaženo biologicky důležité místo, jedná se o tzv. *zásahovou teorii.* Tato teorie

[2]) Podle zmíněné publikace Mezinárodního úřadu vah a měr je dnes Celsiův stupeň zařazován mezi odvozené jednotky SI se samostatným názvem



Obr. 1

se dostala později do rozporu s některými experimentálními výsledky. *Teorie nepřímého účinku*, nazývaná *radiálová teorie*, předpokládá, že k poškození kritických buněčných struktur dochází vznikem radikálů, které se vytvoří ionizací a disociací následkem dopadajícího ionizujícího záření. Lidská tkáň, která je tvořena organickými sloučeninami s lehkými prvky vodíkem, uhlíkem, fosforem ap., obsahuje převážně vodu. Vlivem záření nastanou některé sekundární chemické reakce. Radioaktivní záření působí především na vodu ve tkáních, kdy probíhají tyto reakce:

$$\gamma + H_2O \longrightarrow H_2O^+ + e^- \qquad (1)$$

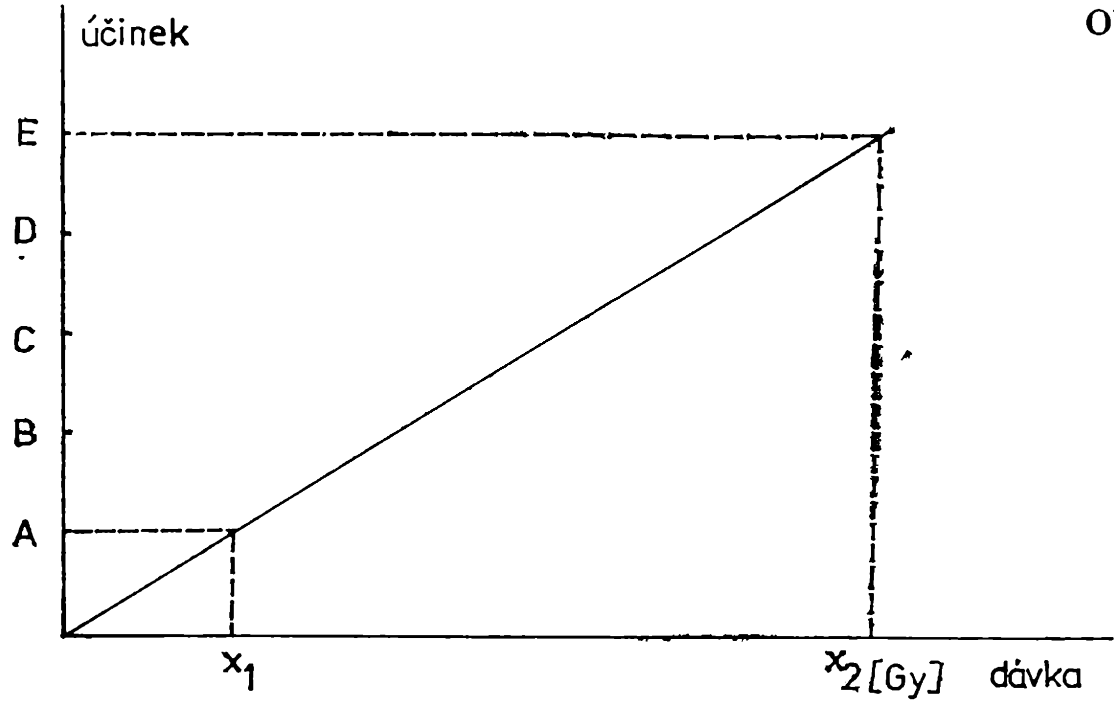
Dopadem fotonu na molekulu vody vznikne volný elektron a iont H_2O^+. Tento iont se rozpadá na vodíkový iont a volný radikál OH:

$$H_2O^+ \longrightarrow H^+ + OH \qquad (2)$$

Reakcí uvolněného elektronu s další molekulou vody podle rovnice

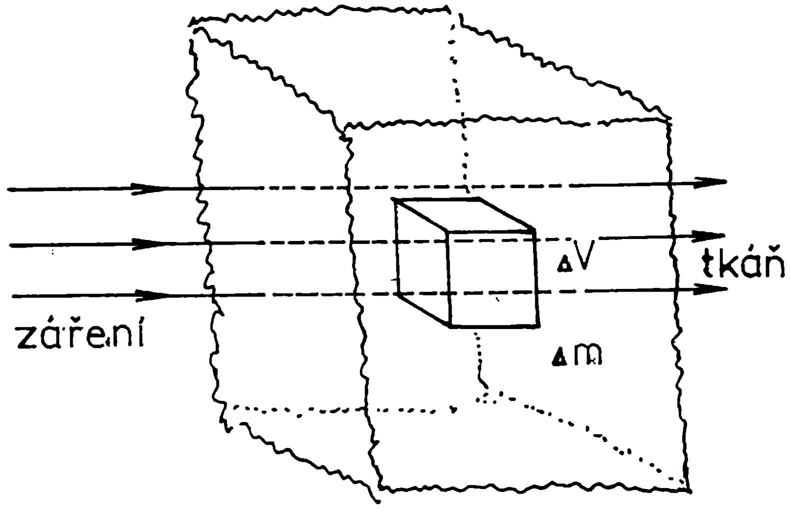
$$H_2O + e^- \longrightarrow H_2O^- \longrightarrow H + OH^- \qquad (3)$$

vzniká volný vodíkový radikál a hydroxilový iont. Výsledkem jedné interakce fotonu s molekulou vody jsou dva volné radikály a dva ionty. Volné radikály mají jeden volný nepárový elektron a jsou chemicky velmi reaktivní a mohou narušovat vazby ve sloučeninách mezi dvěma atomy



Obr. 2

uhlíku (C — C) nebo mezi atomy uhlíku a dusíku (C — N). Tyto změny vedou k přestavbě molekul a ke změnám biochemických procesů. Při reprodukční aktivitě buněk mají největší význam nukleové kyseliny, ze kterých se skládají tyto buňky. Jsou to kyselina deoxyribonukleová (DNK) a kyselina ribonukleová (RNK), které tvoří „základní kámen" živé hmoty. Podle *Watsona* a *Cricka* si můžeme představit molekulu nukleové kyseliny (obr. 1) jako spirálu skládající se ze dvou protisměrných řetězců kyseliny fosforečné a cukru (ribóza u RNK a deoxyribóza u DNK). Řetězce jsou uvnitř spojeny vodíkovými můstky, na nichž jsou zavěšeny báze purinové (adenin — A, guanin —G) a pyrimidinové (cytosin — C, thymin — T), které v normální DNA tvoří páry A = T, spojené dvojnou vazbou a C ≡ G, spojené trojnou vazbou. Pro představu rozměrů je výška jednoho helixu (otočka spirály o 360°) 34 nm. S určitými předpoklady lze soudit, že existuje analogie mezi procesy v H_2O a v DNK. Vlivem ozáření dochází k poruchám vazeb C—H, C—O, C—N a C—C. Tím dochází ke zlomům v řetězci, rozlomení molekuly na více úseků s menší molekulovou hmotností. Dochází rovněž k uvolnění vodíkových vazeb, které spojují obě spirály. Tím mohou rovněž vznikat některé nové vazby uvnitř jedné molekuly DNK, dále se mohou měnit i některé jiné fyzikální vlastnosti jako viskozita, rozpustnost ap. Je zřejmé, že se jedná o velmi složité a komplikované pochody, spojené s řadou dalších efektů, a tak není možné je běžně používat při vyjádření biologického účinku záření na lidský organismus. Je daleko jednodušší a pohodlnější stanovit množství absorbované energie ve tkáni, která odpovídá dopadajícímu záření. Použijeme-li termínu absorbovaná dávka (což je energie ionizujícího záření absorbovaná v jednotce hmotnosti v určitém místě ozařované látky, jednotka Gy) a známe-li vztah mezi



Obr. 3

absorbovanou dávkou a účinkem (velmi často u rozsahů dávek, se kterými se obvykle setkáváme při práci se zářením, je vztah mezi dávkou a vyvolaným biologickým účinkem lineární a bezprahový, viz obr. 2), je pak možno stanovit biologický účinek na základě absorbované dávky, tedy na základě fyzikálních vlastností interakce záření s hmotou.

Představu o energii absorbované v tkáni si můžeme udělat takto: Energie E_i absorbovaná ve tkáni je např. energie potřebná k vzniku volného e^- a iontu H_2O^+ v rovnici (1). Když sečteme všechny tyto energie potřebné ke vzniku iontů v rovnici (1) v určitém objemu $\triangle V$ s hmotností $\triangle m$ (obr. 3), dostaneme celkovou absorbovanou energii

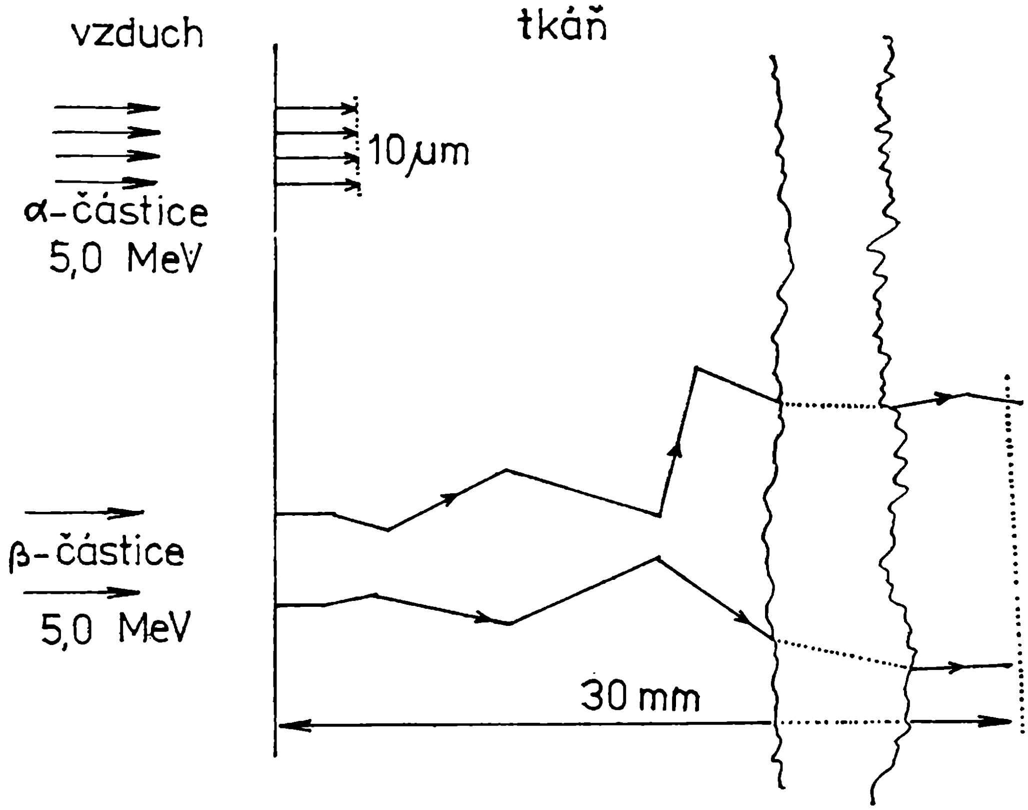
$$E_c = \sum_{i=1}^{n} E_i \tag{4}$$

a pak veličinu

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i}{\triangle m} \tag{5}$$

označíme jako absorbovanou dávku energie ve tkáni (jednotka 1 gray = = 1 Gy = 1 J . kg^{-1}). S rostoucí hodnotou D absorbované dávky roste i biologický účinek záření. Např. v obr. 2 je znázorněna bezprahová lineární závislost absorbované dávky a účinku. Čím větší je absorbovaná dávka, tím větší je biologický účinek záření. Účinek označený E způsobený dávkou x_2 je velmi silný a způsobuje těžké poškození lidského organismu, zatímco účinek v bodě A odpovídající dávce x_1 ($x_1 \ll x_2$) má minimální biologický účinek s poškozením tak malého množství buněk, které nemá žádný vliv na lidský organismus.

Takto se dá porovnat dávka a účinek u stejného typu záření, avšak při stejné dávce s použitím jiného typu záření (jedna dávka způsobena částicemi alfa, druhá dávka způsobena zářením beta) se účinek může



Obr. 4

značně lišit při lokálním poškození. Je tedy zřejmé, že různé druhy záření mají různý biologický účinek, a tedy při porovnání účinků u různých typů záření, což je velmi častý případ, nevystačíme s veličinou absorbovaná dávka. Musíme si uvědomit, že účinek záření souvisí s ionizací a disociací molekul tkáně v daném objemu $\triangle V$. Čím je větší ionizace a disociace ve zvoleném objemu $\triangle V$, tím vyšší bude biologické poškození v daném místě.

Ačkoliv tento jev vypadá poměrně složitý, dá se opět jednoduše vysvětlit na základě interakce jaderného záření s hmotou, v tomto případě s lidskou tkání. Všeobecně schopnost poškození tkáně organismu je tím vyšší, čím vyšší je hodnota lineárního přenosu energie (označováno zkratkou LET z angličtiny linear energy transfer). LET nabitých částic v prostředí je podíl $\triangle E_L$ a $\triangle l$, kde $\triangle E_L$ je lokálně udělená energie střední částice danému prostředí při jejím průchodu vzdáleností $\triangle l$.

$$L = \frac{\triangle E_L}{\triangle l} \tag{6}$$

Jinými slovy, čím větší množství energie předá částice na jednotkové vzdálenosti, tím vyšší je LET. Energie se předává tkáni ve formě ionizace, disociace molekul tak, jak již bylo zmíněno dříve. Rozdíl v biologickém účinku mezi zářením alfa a beta při stejné dávce se dá vysvětlit na základě LET. Např. částice α a β mají stejnou počáteční energii při vstupu do tkáně 5 MeV (obr. 4). Dále předpokládejme, že veškerou svou energii předají tkáni. Částice alfa předá svou energii na vzdálenosti cca $l_1 \approx 10\,\mu$m. Dráha částice β, na které předá svou energii i vzhledem

Tabulka č. 1.

Hodnoty jakostního faktoru pro jednotlivé druhy záření

Druh záření	jakostní faktor Q
Fotony gama záření a rtg záření	1
Elektrony a částice beta s $E_{max} > 30$ keV	1
Elektrony a částice beta s $E_{max} < 30$ keV	1,7
Tepelné neutrony	3
Rezonanční neutrony 0,5 keV až 1 keV	2,5
Neutrony středních energií 1 keV až 500 keV	8
Rychlé neutrony do 10 MeV	10
Protony a částice alfa	10
Odražená jádra a štěpné fragmenty	20

Tabulka č. 2.

Nejvyšší přípustné limity a mezní limity ionizujícího záření

Orgány a tkáně	Nejvyšší přípustné limity pro pracovníky		Nejvyšší přípustné limity pro jednotlivce z obyvatelstva Sv
	čtvrtletní Sv	roční Sv	
Gonády, aktivní kostní dřeň a v případě rovnoměrného ozáření celé tělo	0,03	0,05	0,005
kůže, štítná žláza a kost	0,15	0,30	0,03
ruce, nohy, předloktí, kotníky	0,40	0,75	0,075
kterýkoliv ostatní orgán či tkáň	0,08	0,15	0,015

Pozn.: Hodnoty menší než mezní limity jsou spojeny s poměrně nízkou pravděpodobností radiačního poškození a minimálním biologickým účinkem.

k tomu, že není přímočará, je nesrovnatelně delší (cca 30 mm při této energii). Pak je zřejmé, že $\triangle l_1 \ll \triangle l_2$, a tedy $\triangle E_\alpha / \triangle l_1 \gg \triangle E_\beta / \triangle l_2$. Pro rtg nebo gama záření, které je ve srovnání se zářením beta daleko pronikavější, by pak stejnou úvahou byl získán stejný vztah $\triangle E_\beta / \triangle l_2 \gg \triangle E_\gamma / \triangle l_3$. Z těchto úvah můžeme tedy vytvořit posloupnost hodnot LET

$$L_\alpha \gg L_\beta \gg L_\gamma \,. \tag{7}$$

Souvislost biologického účinku s lineárním přenosem energie je tedy zřejmá. Největší biologický účinek má v tomto případě záření alfa, nejmenší záření gama. Záření alfa, které prochází objemem $\triangle V$, zde způsobí daleko větší množství ionizace a disociace, než odpovídající záření gama.

Experimentálně bylo zjištěno, že gama a rtg záření mají nejmenší relativní biologický účinek a jejich hodnota (resp. relativní hodnota) byla zvolena 1. Ostatní částice *) mají tuto hodnotu vyšší a vždy větší než 1 (viz tabulka č. 1). Příslušný násobek se nazývá jakostním faktorem a koriguje vztah mezi dávkou a účinkem. Uvedeme příklad. V objemu $\triangle V$ tkáně je absorbovaná dávka ze záření alfa 1 Gy. Jestliže by ve stejném objemu $\triangle V$ byla absorbovaná dávka 1 Gy způsobená fotony gama, bude biologický účinek stejný? Vzhledem k tomu, že jakostní faktor pro gama je roven 1 a pro alfa je roven 10, bude účinek záření alfa v daném místě 10krát větší. Obdobně můžeme provést úvahy pro další druhy záření podle tabulky č. 1. Úvahu můžeme zobecnit a zavést novou veličinu, kterou budeme nazývat dávkový ekvivalent H a ten je definován

$$H = Q \,.\, D\,, \tag{8}$$

kde D je absorbovaná dávka v J/kg (Gy), Q je jakostní faktor, bezrozměrné číslo a H je dávkový ekvivalent, který má rovněž rozměr J/kg, ale pro rozlišení se používá jednotka sievert (Sv.).**) Pak nově zavedená veličina popisuje účinky záření s korekcí absorbované dávky D na použitý typ záření, což je obsaženo v jakostním faktoru Q. Při studiu vlivu záření na lidský organismus a při radiační ochraně se běžně používá této veličiny k vyjádření nejvyšších přípustných hodnot tak, jak je uvedeno v tabulce č. 2.

Je nutno ještě uvést, že v našich úvahách jsme se zabývali převážně vlivy ionizujícího záření na tkáň, kterou jsme považovali za homogenní hmotu s výše uvedenou molekulovou strukturou, a na ní jsme demonstrovali základní charakter interakce. Z fyzikální stránky jsme se dále např. nezabývali tím, že záření alfa, která má sice 10krát větší biologický účinek, proniká pouze několik desítek μm a nemůže tedy zasáhnout důležité orgány v lidském těle (vliv má např. při vdechování radonu do plic, kdy záření α radonu a jeho rozpadových produktů se dostává do přímého kontaktu s tkání plic). Nebrali jsme v úvahu rovněž velmi složitou strukturu lidského těla, kdy při posouzení biologického účinku ozáření se musí brát v úvahu řada faktorů, jako je lokální ozáření (ozáření pouze malé části těla), celotělové ozáření, různá radiosenzitivita lidských orgánů na ionizující záření ap. Rozbor těchto vlivů však plně přesahuje rámec tohoto článku.

*) U neutronů je způsob interakce s hmotou jiný, než u ionizujících částic a záření (α, β, γ)

**) Dříve se používala jednotka 1 rem = 0,01 Sv

Sondy o Halleyově kometě

RNDr. MARTIN ŠOLC, CSc., MFF UK v Praze

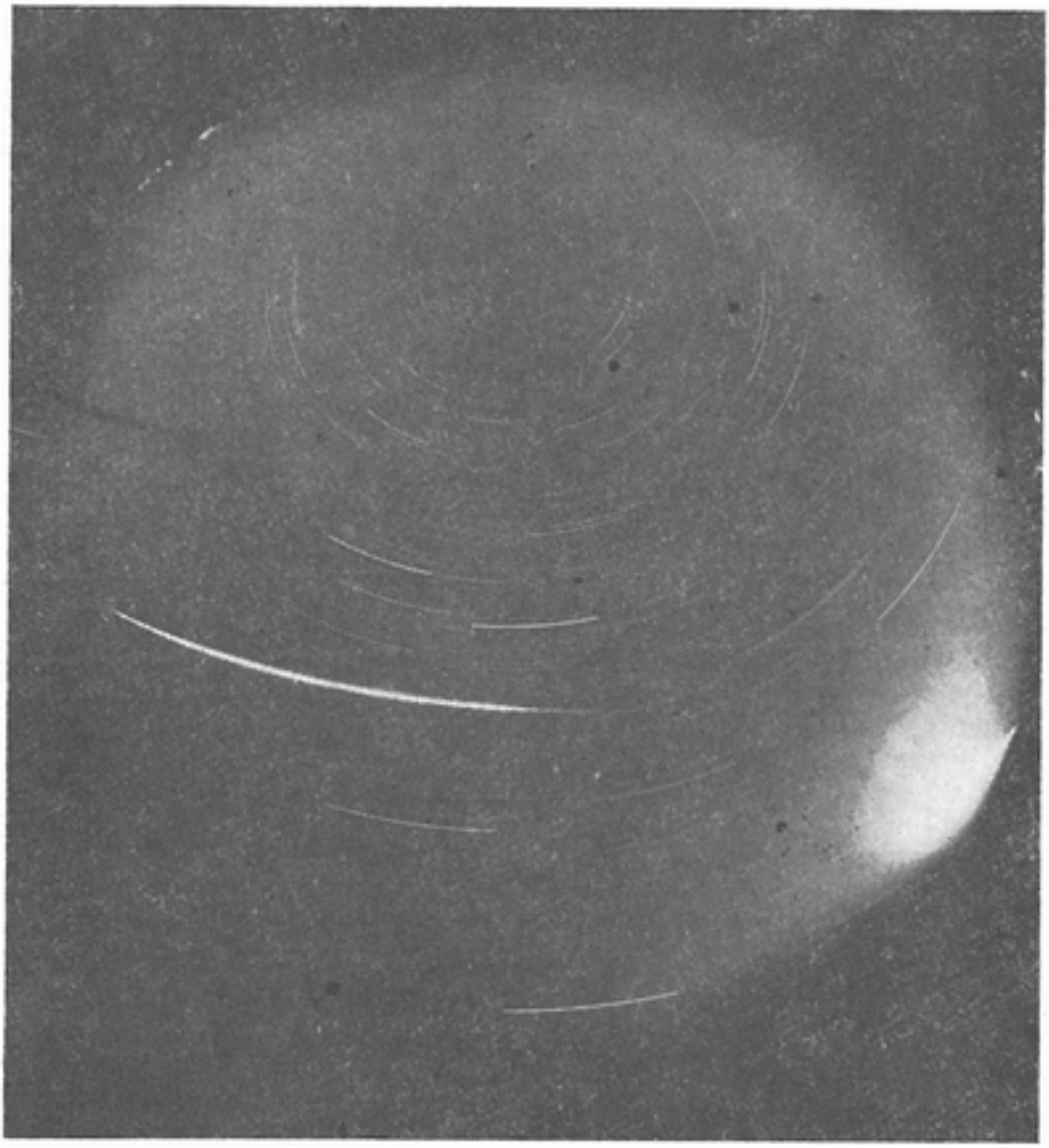
Předběžné hodnocení výsledků z počátku dubna ukazuje, že sondy Vegy i Giotto byly úspěšné. Ukázalo se, že představy o fyzikálních procesech v kometách byly zhruba správné, a tak hlavní význam sond je v tom, že tyto představy byly potvrzeny a upřesněny. Zpracování výsledků jednotlivých experimentů proběhne do března 1987 a nelze tedy vyloučit ještě nějaká překvapení, i když hlavní výsledky byly plánovány k publikaci v časopise NATURE v květnu 1986.

Jádro komety je patrně protáhlé a větší rozměr přesahuje 10 km. Je zahaleno velmi hustou vrstvou prachu, takže televizní kamery sond (včetně sondy Giotto) z něj viděly vždy jen nejbližší část ke Slunci, která byla trochu osvětlena. Překvapením je nízká odrazivost povrchu jádra, asi jen 3 % z dopadajícího viditelného světla se odrazí zpět. Jádro je tedy „pořádně špinavá sněhová koule" a vlastně vůbec nejčernější těleso sluneční soustavy, které zatím známe. Žádná z kamer neviděla celé jádro, schovávalo se do prachu jako válečná loď do dýmové clony. Rotační perioda jádra se odhaduje na 52 hodiny. Plyn a prach se z jádra uvolňují velmi nepravidelně, na snímcích byly patrny dvě oblasti aktivity. Maximální množství uvolněného plynu (molekul) dosáhlo desítku tun za sekundu a poměr hmotnosti uvolněného plynu a prachu byl asi 3:1. Teplota povrchu jádra byla patrně kolem 300 K, ale bude ještě zpřesněna. Celkově přinesly televizní kamery všech sond asi 1500 snímků různé kvality, z nichž se postupně vybírají nejlepší a filtrují od poruch a šumů. Na viditelných a infračervených spektrech experimentu TKS byly nalezeny pásy molekul vody, C_2, C_3, OH (nejsilnější) a CN. Pokud se potvrdí přítomnost čar molekuly S_2, která může vznikat jen na povrchu prachových zrn v mezihvězdném prostoru při ozařování kosmickým zářením, znamenalo by to, že materiál komentárního jádra je opravdu konzervou původní hmoty, z níž vznikala sluneční soustava. Z asi 1000 hmotnostních spekter materiálu prachových zrn (experiment PUMA) plyne přítomnost silikátů v obalu z lehčích prvků C, N, O. Magnetometry naměřily pole až 70 nT ve vrstvě, kde se sluneční vítr brzdí o komentární plazma (vně je pole asi 5 nT). Také ostatní experimenty pro detekci procesů v plazmatu a čítače prachu získaly cenné výsledky. Detailnější popis uvedeme v dalším článku této série.

Bolid Valeč dosud nenalezen

JOSEF BĚLÁČ, student fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT, Praha

Čas je pojem značně relativní. Mohl bych tedy tvrdit, že je to vlastně nedávno, co se podařilo vůbec poprvé na světě zachytit na fotografickém snímku pád bolidu. Když byl před 26 lety vyfotografován a později i nalezen *bolid Příbram* (pojmenovaný podle místa dopadu), šlo o velkou náhodu. Není divu, vždyť v té době sestávala pozorovací síť pouze ze



Snímek bolidu Valeč pořízený celooblohovou kamerou v Telči.

dvou stanic. Program sledování pádů bolidů pomocí celooblohových kamer byl na samém začátku. Úvodní úspěch do značné míry přispěl k tomu, že se během let vytvořila na celém území ČSSR hustá pozorovací síť, zachycující pády bolidů. Přes její značný rozsah a intenzitu pozorování se však astronomům nedařilo úspěch s meteoritem Příbram zopakovat. Poznamenejme, že ve světě byly dosud vyfotografovány a nalezeny pouze dva další bolidy, a to na americkém kontinentě (Los City v USA a Innisfree v Kanadě).

Za čtvrt století od pádu bolidu Příbram se opět potvrdilo úsloví, že trpělivost přináší růže. V létě předloňského roku (1984) se naskytla náhodným i cílevědomým pozorovatelům nádherná podívaná. Dne 3. srpna 1984 ve 23 h 05 min 53 s SELČ vniklo do zemské atmosféry jasně zářící těleso o hmotnosti téměř 400 kg a rozpoutalo na letní obloze vskutku ojedinělý ohňostroj. Jak ukázal pozdější průzkum, přihlíželo tomuto přírodnímu úkazu, mimo několika astronomů, jen pár náhodných svědků. Důležité však bylo, že pád bolidu zaznamenalo celkem osm kamer celooblohové sítě. Jeden z pořízených snímků je ukázán na obrázku. Na základě upozornění na tento úkaz a podle kombinací vizuálních údajů s fotografiemi, pořízenými na hvězdárně v Ondřejově, padlo podezření, že by mohl bolid proniknout svou světelnou dráhou do značné hloubky atmosféry. Tato skutečnost ukazovala na možnost pádu meteoritu, a proto byla ihned zahájena práce na vyhodnocení snímků ze všech stanic, které pád bolidu zaznamenaly. O rychlé vyhodnocení fotografií a výpočet dráhy se zasloužili pracovníci hvězdárny v Ondřejově *J. Boček*, *Z. Ceplecha* a *J. Spurný*.

Bylo zjištěno, že bolid ve svém maximu dosáhl absolutní jasnosti až — 10. hvězdné velikosti. Vnikl velmi malou rychlostí (necelých 13 km/s) nad územím Rakouska do zemské atmosféry a svou svítící dráhou pronikl až do výšky 19 km nad povrch Země. Na konci světelné dráhy měl rychlost již jen 2,5 km/s.

Po propočtu temné dráhy, po které se bolid pohyboval, bylo určeno místo dopadu. Hlavní část meteoritu (o pravděpodobné hmotnosti 16 kg) spolu s množstvím úlomků dopadla do oblasti mezi obcemi Valeč a Stropešín na jižní Moravě.

Poté, co byly známy výsledky výpočtů, objevily se výzvy v hromadných sdělovacích prostředcích, v místech předpokládaného dopadu meteoritů byly vyvěšeny informace pro obyvatele. Současně s tímto začaly i urychlené přípravy expedice na hledání meteoritů, jejíž organizace se ochotně ujala s. *H. Procházková*. Této expedice se spolu s odborníky *Z. Ceplechou* (hvězdárna Ondřejov) a *M. Bukovanskou* (petrograficko-mineralogické oddělení Národního muzea) zúčastnili především amatérští pozorovatelé. Jejich úloha nebyla vůbec jednoduchá, neboť na

EMISE (z lat. *emissio;* slož. z *ex-* — zde s významem „z, směr ven“, v. *ex-* + *mitto, -ere*, ptc. pf. *missus* = posílat) — 1. vysílání, vypouštění, vydávání něčeho odněkud ven (tedy jev, činnost); 2. „to, co je vysíláno, vypouštěno odněkud ven“ (např. nežádoucí nečistoty z továrních komínů). Opakem je IMISE (lat. *in-* = do, na, v) — 1. vysílání, vpouštění, vhánění něčeho odněkud dovnitř; 2. „to, co je vysíláno, vpouštěno, vháněno odněkud dovnitř“. Pozn.: Termín „emise“ i „imise“ v onom druhém významu může za určitých okolností znamenat jedno a totéž. Z pohledu průmyslového podniku nazveme ony nečistoty emisí, kdežto z pohledu pokaženého životního prostředí budou tytéž nečistoty imisí. Emise ve fyzice: proces vysílání částic (záření) z atomů; v. t. fotoemise, reemise, termoemise; EMISNÍ — vysílající, vysílaný; vydávající, vydávaný; EMISNÍ teorie — světlo je složeno z rychle letících částic vysílaných zdrojem; srov. MISE — poslání, úkol, poselstvo, delegace; v.t. emitor, emitovat, fotoemise, transmise

EMITOR (od lat. *emitto, -ere*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, směr ven“, v. *ex-* + *mitto, -ere* = posílat, v. emise; v. t. -or) — „vysílač“; ve fyzice: elektroda tranzistoru, která „vysílá“ volné nosiče nábojů; proto též název „emisní elektroda“; EMITOVAT — vysílat; ve fyzice: vyzařovat

EMPIRIE (z řec. *empeiria* = zkušenost; s tím souvisí lat. *experimentum* = pokus, zkouška) — zkušenost; EMPIRICKÝ — vycházející ze zkušenosti; EMPIRICKÁ věda — opírá své úvahy i závěry o faktický materiál získaný pozorováním

EMULZE (od lat. *emulgeo, -ere*, ptc. pf. *emulsus*; slož. z *ex-* — zde s významem „zevnitř, ven“, v. *ex-* + *mulgeo, -ere* = dojit) — „vydojení“; směs dvou vzájemně se nemísících kapalin, v sobě jemně rozptýlených, např. mléčný tuk v mléce (odtud název)

ENDO- (z řec. *endon* = uvnitř) — předpona s významem „vztah k vnitřku, uvnitř, vnitřní“; opakem: *exo-*, v. t. *Pozn.*: Předpona endo- je velmi častá v biologické terminologii, např. ENDOGENNÍ (řec. *gignomai* = rodit se, pocházet) — vzniklý uvnitř organismu; ENDOKRINNÍ (řec. *krinó* = tříbit, vybírat, posuzovat) — vnitřně, tj. do krve vyměšující

ENDOERGICKÝ (řec. *ergon* = dílo, práce, čin; v. energie) — endoergická reakce — energie se při ní spotřebuje „uvnitř“; srov. exoergický

ENDOTERMICKÝ (v. termický) — s tepelným procesem probíhajícím uvnitř; srov. exotermický

ENERGETIKA (z řec. *energétikos* = účinný, silný; slož. z *en-* = v, na + *ergon* = dílo, práce, čin, v. energie; v. t. -ika[1]) — 1. vědní obor zabývající se všemi druhy a formami energie; 2. průmyslové odvětví vyrábějící energii, zvláště elektrickou

ENERGETICKÝ — 1. vztahující se k energii; 2. týkající se energetiky jako průmyslového odvětví vyrábějícího energii

ENERGIE (z řec. *energeia*; slož. z *en* = v, na + *ergon* = dílo, práce, čin) — „účinnost, úsilná činnost"; činnost, mocná síla, schopnost konat práci; ENERGICKÝ — plný energie, rázný, rozhodný; v. t. erg. Pozn.: Z řec. *ergon* vzniklo dosti počeštělých přípon, a to zpravidla souvztažně pro podstatná a přídavná jména. Nejběžnější z nich jsou:

-ERGIE, -ERGICKÝ — např. energie, energický; endoergický, v. t.; exoergický, v. t.; alergie, alergický (řec. *allos* = jiný, druhý) — přecitlivělost, přecitlivělý, „jednající jinak než obvykle"; synergie, synergický (řec. *syn-* = s, spolu) — součinnost, spolupracující

-ERGETIKA, -ERGETICKÝ — např. energetika, energetický, v. t.;

-URG, -URGIE, -URGICKÝ — např. chirurg, chirurgie, chirurgický (řec. *cheir* = ruka) — „pracující rukama", lékař operatér; odvětví lékařské, které používá rukou i mechanických nástrojů k lékařským zákrokům; metalurgie, v. t.

ENTALPIE (slož. z řec. *en* = v, na + *thalpos* = horko) — tepelný obsah látek daný vnitřní energií

ENTROPIE (slož. z řec. *en* = v, na + *tropos* = obrat; od *trepó* = obracet, v. tropický) — schopnost „obrátit se", změniti se v něco jiného; ve fyzice: termodynamická funkce charakterizující stav a možnost změny stavu hmotných soustav; „obrácení jednoho stavu na stav jiný"

EPI-, EF- (z řec. *epi-* = na, při, k po, nad; podoba *ef-* před „f" a před přídechovým „h") — mnohovýznamová předpona s nejčastějším významem: 1. na, pro; 2. nahoře, nad, shora; 3. při, u, vedle. Např. EFEMÉRNÍ (v. efeméra) — „pro jeden den"; EPICENTRUM — místo ležící nad středem zdroje otřesu; EPILOG (řec. *logos* = slovo, řeč) — „řeč přiřazená", doslov

EPIDIASKOP (*epi-* — zde s významem „shora" + *dia-* — zde s významem „skrz, na druhou stranu", v. *dia-* + *skopeó* = hledět, pozorovat, v. -skop) — přístroj k promítání neprůhledných předloh osvětlených shora na ně dopadajícím světlem a k promítání diapozitivů (tj. „skrz průhledný film"); je to vlastně spojení epiprojektoru (v. t.) a diaprojektoru (v. t.)

EPIPROJEKCE (epi- — zde s významem „na, shora dolů" + projekce, v. t.) — promítání neprůhledných předloh osvětlených shora na ně dopadajícím světlem; EPIPROJEKTOR (v. -or) — přístroj, kterým se provádí epiprojekce; týž význam má termín episkop (v. t.)

EPISKOP (*epi-* — zde s významem „na, shora dolů" + *skopeó* = hledět, pozorovat, v. -skop) — přístroj k promítání neprůhledných předloh osvětlených shora na ně dopadajícím světlem (promítané předměty nepozorujeme „skrz ně", nýbrž „díváním se na ně shora");

EPISKOPICKÉ promítání; týž význam má termín epiprojektor, v. t. Pozn.: Existuje též termín EPISKOP s významem „biskup, církevní hodnostář", který „dohlíží shora na jemu svěřené"; EPISKOPÁLNÍ — řízený biskupy; EPISKOPÁT biskupský — hodnost nebo úřad biskupský, sbor biskupů

ERG (uměle zkráceno z řec. *ergon* = dílo, práce, čin; v. energie) — dříve používaná jednotka práce; v. t. megaerg

ERUPCE (z lat. eruptio; od *erumpo, -ere*, ptc. pf. *eruptus*; slož. z *ex-* — zde s významem „zevnitř, pohyb z nitra", v. *ex-* + *rumpo, -ere* = lámat, rozlomit, prorazit, poškodit) — vypuknutí, vyražení, vyšlehnutí, výbuch, vyvržení sopečných láterk; ERUPČNÍ — vybuchující, erupci doprovázející; ERUPTIVNÍ — jsoucí v souvislosti s erupcí, erupcí vzniklý, vyvřelý, výbušný, prudký. Srov. KORUPCE (lat. cum = s, spolu) — „společné poškození morální", úplatkářství

EUTEKTICKÝ (slož. z řec. *eu* = dobře + *tektikos*; k *tektón, -onos* = tesař, zedník, strůjce; od *tiktó* = rodit, plodit, tvořit) — „dobře, tj. snadno tvořitelný"; snadno tavitelný; EUTEKTICKÁ SLITINA — mající ze všech možností příslušných slitin dvou kovů nejnižší bod tání (je proto „snadno" tavitelná); k EUTEKTICKÉMU bodu slitiny dojdeme tehdy, když složení slitiny je v nejideálnějším poměru („slitina je dobře udělaná"); EUTEKTICKÁ teplota — nejnižší teplota, při níž může být slitina ještě v kapalném stavu.

EUTEKTIKUM (v. *-ikum*[1]) — jemnozrnná směs, jež se vytváří z jednotlivých krystalů, které se již nemohou v tuhém stavu rozpustit

EUTEKTOID (latiniz. *-oideus* = podobající se; od řec. *eidos* = podoba; v. *-oid*) — „vzhledově dobře udělané"; vzniklá naprosto stejnorodá směs složek.

Pozn.: Srov. TEKTONICKÝ — týkající se utváření zemské kůry; ARCHITEKT (řec. *archó* = být první, vládnout) — „přední zedník, mistr řemeslník"

EVAKUOVANÝ (od latiniz. *evacuo, -are*, ptc. pf. *evacuatus*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, ven, vy-"; v. *ex-* + *vacuus* = prázdný; v. *vakuum*) — „vyprázdněný"; nejběžnější význam je „vyklizený, vystěhovaný" — od vojenského termínu EVAKUACE — vyklizení určité oblasti od vojska, od obyvatel; vystěhování, odvoz z ohrožené oblasti. Ve fyzice: EVAKUOVANÁ trubice — vyprázdněná, vyčerpaná, tj. bez vzduchu

EVOLUCE (z lat. *evolutio*; od *evolvo, -ere*, ptc. pf. *evolutus*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, ven, roz-", v. *ex-* + *volvo, -ere* = valit, válet, koulet, vinout) — „rozvinutí;"; rozvíjení, vývoj; opak: involuce, v. t.; srov. REVOLUCE (*re-* — zde s významem „zpět, opačně") — „vývin událostí opačným směrem než dosud"

EX-, E- (z lat. předložky a předpony *ex-* = z; podoba *ex-* byla v latině před samohláskou i souhláskou, podoba *e-* jen před souhláskou) — předpona s významem: 1. „z, vy-, zevnitř, pohyb z nitra, nahoru, ven, od sebe, roz-"; 2. „ukončení nebo dovršení činnosti"; 3. „změna, při níž původní vlastnost mizí; nedostatek něčeho" Ad 1. v. ejektor, elace, elevace, eliminace, emanace, emerze, emise, emitor, emulze, erupce, evakuace evoluce, excentricita, exces, excitace, exhaustor, expanze, explicitně, exploze, expozice, extrakce; ad 2. efekt, exaktní, experiment; ad 3. elongace

EXAKTNÍ (z lat. *exactus*, ptc. pf. od *exigo*, *-ere*; slož. z *ex-* — zde s významem „dovršení činnosti", v. *ex-* + *ago*, *-ere* = hnát, konat; v. akce) — „úplně, dokonale provedený"; vědecky přesný, založený na vědecké přesnosti

EXCENTRICITA (slož. z lat. *ex-* — zde s významem „z, ven, pohyb z nitra", v. *ex-* + latiniz. *centrum* = bod ve středu kruhu, střed; v. *centrum*) — „vzdálenost od středu"; výstřednost; EXCENTRICKÝ — položený mimo střed, od středu vzdálený, nesoustředný; ve fyzice: výstředný; otáčející se kolem bodu, jenž není středem pohybu. Pozn.: Jako knižní slovo má EXCENTRICKÝ význam „výstřední, nápadný, nezvyklý, zvláštní".

EXCES (z lat. *excessus*, slož. z *ex-* — zde s významem „pohyb z nitra, ven", v. *ex-* + *cedo*, *-ere*, ptc. pf. *cessus* = kráčet, ustupovat; v. proces) — „vystoupení"; vybočení z mezí, nemírnost, výstřelek; někdy též „odchod ze života". Ve fyzice: EXCES sférický — sférický nadbytek (součet vnitřních úhlů trojúhelníka narýsovaného na kulové ploše — řec. *sfaira* = koule — je totiž větší než součet vnitřních úhlů trojúhelníka v rovině). V astronomii: EXCES barevný — rozdíl naměřeného barevného indexu a barevného indexu předpokládaného u té které hvězdy

EXCITACE (z latiniz. *excitatio*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, nahoru, ven", v. *ex-* + *cito*, *-are*, ptc. pf. *citatus* = uvádět v rychlý pohyb) — „vydráždění"; podráždění, vyburcování, podrážděnost, vzrušení; ve fyzice: vzbuzení, zvýšení energie; EXCITOVANÝ atom — „vzbuzený" atom, u něhož vnější energie způsobila, že některý elektron přešel na hladinu s vyšší energií; EXCITAČNÍ — nutný k nabití energie pro excitaci atomů. Pozn.: Srov. RECITACE (lat. *re-* — zpět, opět, znova) — „opětné uvádění"; přednášení; CITACE — doslovné uvedení nějakého textu.

EXHAUSTOR (od lat. *exhaurio*, *-ire*, ptc. pf. *exhaustus*; slož. z *ex-* — zde s významem „z, vy-, zevnitř, pohyb z nitra, ven"; v. *ex-* + *haurio*, *-ire* = čerpat, nabírat, sát; v. t. -or) — „přístroj, který vyčerpává, odsává"; vývěva pro odsávání velkého množství plynu. Pozn.: Srov. biologický termín HAUSTORIE — kořeny, jimiž se parazitická rostlina zachycuje na rostlině hostitelské a „odsává" z ní živné látky.

ně čekaly více než 4 km^2, které bylo nutno prohledat. Jako první přišly na řadu rozlehlé lány polí, které musely být vzhledem ke žním prohlédnuty co nejdříve. Žně byly v té době v plném proudu, a proto se mohlo hledat jen v krátkých intervalech mezi sběrem slámy a orbou, což také znemožňovalo opakování prohlídky. Za tři týdny, které expedice trvala, prohledali její účastníci téměř 3 km^2, převážně polních ploch, a tím získali jistotu, že meteorit nebyl zaorán. Zbytek neprohledaných ploch, zvláště špatně přístupný terén, se stal cílem krátkodobých výprav amatérských astronomů, převážně meteorářů. Až do podzimu loňského roku prohledávali strže, křoviny i stráně, společně zažili pár krušných okamžiků i spoustu veselých příhod. Astronomové, ať už profesionálové nebo amatéři, nejsou totiž jen podivíni zahloubaní do problémů kolem hvězd. Jsou to především lidé, kteří našli svého zajímavého koníčka. Astronomii věnují svůj volný čas, protože jim poskytuje poučení i zábavu, obohacuje jejich život o nové hodnoty. Hledání meteoritu má pro ně zvláštní význam už proto, že tak velká pravděpodobnost nálezu, jaká byla u bolidu Valeč, se nenaskytne každý den.

Přestože v ohraničené oblasti zůstalo ještě dost neprohledaných míst, lze říci, že se pravděpodobnost nálezu značně snížila. Oblast totiž zahrnuje i místa, v nichž se mohl meteorit (pravděpodobně kamenný) dobře schovat. Jsou to například vodní plochy a les, jehož hustý podrost a vrstva spadaného listí dokáže takový balvan snadno ukrýt.

Závěrem mohu jen konstatovat, že tentokrát neměli astronomové při hledání meteoritu šťastnou ruku. I přes počáteční optimismus se zatím bolid Valeč nenašel. A tak nezbývá než doufat, že jim příroda poskytne další příležitost. Možná jí bude například bolid, který spadl v srpnu loňského roku na Valašsku. Jeho pádu byli svědky i účastníci celostátní meteorické expedice, konané v té době na Slovensku.

Vždyť i kdokoli z vás se může svým podílem zúčastnit příštího úspěchu naší astronomie. Stačí se jen někdy pozastavit z věčného spěchu a zadívat se večer na tmavou oblohu posetou milióny hvězd. Kdo ví, možná se vám podaří shlédnout ohňostroj podobný tomu ze 3. srpna 1984.

Případné informace o přeletu bolidů, hlavně přesný čas úkazu a jeho dráhu mezi hvězdami je třeba urychleně zaslat na adresu: oddělení meziplanetární hmoty, Astronomický ústav ČSAV, 251 65 Ondřejov.

Zájemci mohou nalézt přesný popis pádu bolidu Valeč v článku Zdeňka Ceplechy v časopise Říše hvězd č. 1 z r. 1985.

Řešení: algebrogramů ze str. 381

a) PYTHAGORAS

b) ISAAC NEWTON

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Einstein — bojovník za pravdu a mír

JOSEF KOTYK, Pardubice

Životní dílo Alberta Einsteina je našim čtenářům v obrysech známo.[1]) V náčrtku životopisu, který byl nalezen v jeho pozůstalosti, shrnul je Einstein, proslulý svou skromností, několika slovy: Vypracování teorie relativnosti, spojené s novým pojetím času, prostoru a gravitace. Náčrt relativistického modelu světa. Ekvivalence hmotnosti a energie. Příspěvky k teorii kvantové. Nedokončena zůstala jeho všeobecná teorie polí. *Lenin* označil Einsteina za jednoho z velkých přírodovědeckých novátorů. Pro nefyzika je však velikost Einsteina-vědce podle výroku *Thomase Manna* „dostupná jen tušením" Velikánům světových kulturních dějin, jakými z jeho předchůdců byli zejména *Galileo Galilei, Johannes Kepler* a *Isaac Newton*, se netoliko vyrovnal, hloubkou řešených problémů a společenským významem dosažených vědeckých výsledků je i předčil. *Max Planck*, zakladatel teorie kvant, napsal, že Einsteinova teorie relativnosti „tak neobyčejně zdokonalila a zároveň zjednodušila stavbu teoretické fyziky, že si ji už nelze z fyziky odmyslet." Albert Einstein stal se nesmrtelným.

V době, kdy Einstein vystoupil se svou speciální teorií relativnosti (1905), jevila se hypotéza o *ekvivalenci hmotnosti a energie* jako revoluce ve fyzice; po padesáti letech — v době Einsteinova úmrtí — nebyla však proměna energie v hmotnost a naopak již nic neobyčejného. Na mnohých experimentech mohli jsme již bezprostředně pozorovat, jak z kinetické energie vznikají elementární částice a jak tyto částice mohou zase zmizet, promění-li se v záření. Světoznámý *Einsteinův vzorec* $E = m \cdot c^2$, vyjadřující dialektickou souvislost hmotnosti a energie (c = rychlost světla ve vakuu) nabyl jako klíč k odhalení jaderné energie také ještě za Einsteinova života v atomové fyzice praktického významu a využití. Po nasazení atomové zbraně proti civilnímu obyvatelstvu v Japonsku v roce 1945 si Einstein, badatel, který po celý svůj život válku zavrhoval a proti ní bojoval, tím naléhavěji uvědomoval, že ve světě naplněném nebezpečím atomové války nesmí žádný vědec stát lhostejně stranou.

[1]) Viz také autorovy články v ROZHLEDECH, ročník 48: *Einstein a jeho princip stálé rychlosti světelné*, čísl. 3, str. 143 až 146; *Albert Einstein, vědec a prorok*, čísl. 7, str. 326 až 329.

Neustále zdůrazňoval zodpovědnost, kterou mají zejména fyzikové za udržení světového míru. „Přírodověda sice přivodila nynější nebezpečí," prohlásil v roce 1946, „skutečný problém spočívá však v myšlení a srdci člověka." Byl přesvědčen, že je třeba „nového způsobu myšlení". Lidstvo musí přizpůsobit své myšlení novému okolí, do něhož se dostalo. Upozorňoval, že atomová bomba změnila od základu podstatu světa. Zahraniční politika všech států se musí uspořádat tak, aby nevedla k atomovému zničení civilizace a všeobecné záhubě lidstva.

Obavy z atomové smrti lidstva provázely Einsteina v posledních deseti letech života vzhledem k politickému vývoji stále. Proto znovu a znovu pranýřoval protimírovou politiku Spojených států amerických a požadoval „dorozumění velkého stylu" mezi nimi a Sovětským svazem. Jak těžce prožíval hlubokou tragiku zneužití atomové energie k válečným účelům, dokládají slova, jež nalézáme v jeho dopise polskému fyzikovi *Leopoldu Infeldovi*[2]): „Lidé jsou jako písečný přesyp a člověk nikdy neví, co bude zítra navrch."

Na stolku vedle svého úmrtního lůžka zanechal Einstein nedokončený článek — opět důkaz, že do posledních chvil svého života se zabýval starostmi, jak zabránit atomové válce, neboť lidstvo by bylo ztraceno. Svým bojem za mír dosáhl tak Einstein i politicky světové výše.

Jméno Alberta Einsteina bude proto v paměti všech lidí dobré vůle žít dál a připomínat jim odkaz nejen zasloužilého vědce, avšak také neohroženého bojovníka za pravdu a trvalý mír.

Fyzika před deseti, sto a tisíci lety

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., Univerzita Palackého, Olomouc

S rokem 1976 se pojí řada exkluzivních fyzikálních objevů: byla prokázána existence řady elementárních částic se *šarmem* a *barvou* (tak se označují nová kvantová čísla částic), stejně jako jejich reakce. Např. byl pozorován *antibaryon lambda minus* se šarmem, byl zjištěn *mezon D* při anihilaci elektronu s pozitronem a naměřena jeho poměrně velká hmotnost neobvyklá ve světě elementárních částic. Byly zjištěny dlouho-

[2]) Spoluprací obou fyziků vzniklo dílo Einstein-Infeld: Physik als Abenteuer der Erkenntnis, vydané v Holandsku roku 1938. Český překlad pod názvem Fysika jako dobrodružství poznání vyšel v 1. vydání v Praze v roce 1945.

dobé rezonance a připraven 107. chemický prvek (při srážkách atomu vizmutu s kryptonem). Experimentálně byla znovu s vysokou přesností ověřena věta o ekvivalenci hmotnosti tíhové a setrvačné a konečně na základě zbytků radioaktivních jader rhenia a osmia byla „změřena" doba, jež uplynula od velkého třesku a jež je rovna $1{,}8 \cdot 10^{10}$ roků.

Před padesáti lety, tj. v roce 1936, byla středem zájmu fyziků fyzika atomového jádra, v níž učinili první úspěšné kroky *Niels Bohr* starší svou teorií složených jader a *Frenkel* s *Bohrem* svým kapkovým modelem jádra. *Condon* a spolupracovníci došli ke správnému závěru o nezávislosti jaderných sil na náboji nukleonů (tj. interakce je stejně velká mezi neutrony jako mezi protony či mezi protonem a neutronem). Od té doby se proto proton i neutron chápou jako tytéž částice — nukleony lišící se navzájem pouze dvěma různými stavy. Byla rovněž objevena difrakce neutronů, čímž byl nevývratně prokázán obecný charakter vlnově-korpuskulárního dualismu. Pomocí cyklotronů bylo dosaženo silných neutronových toků. V oblasti makroskopické fyziky byla sestrojena obecná teorie klasických polí *Diracem* a *Kirkwood* objasnil tzv. molekulární rozptyl světla. Na nahodilých zhuštěních molekul plynu totiž dochází k rozptylu světla — a protože podle Rayleighova zákona je intenzita rozptýleného záření přímo úměrná čtvrté mocnině frekvence světla, je tím objasněno, proč musí být obloha modrá. Je-li Slunce u obzoru, vidíme zase červánky, neboť prostředím s mikroskopickými nečistotami projde jen světlo delších vlnových délek (červené), nikoli modré.

Před sto lety (1886) se rozvíjela jen klasická, makroskopická fyzika: *Reynolds* vypracoval hydrodynamickou teorii mazání, maďarský fyzik *Eötvös* odvodil zákon závislosti povrchového napětí na teplotě. *Nernst* objevil vznik elektrického napětí v tělesech při teplotním gradientu; byly rovněž objeveny selénové usměrňovače a *Crookes* vyslovil hypotézu o evoluci chemických prvků, jež se teprve poměrně nedávno plně potvrdila.

V roce 1786 učinila první krůčky elektrodynamika, když *Galvani* objevil vztahy mezi elektřinou a kontrakcí svalů žáby. V optice *Rittenhaus* objevil optickou (difrakční) mřížku, jíž později (po r. 1821) *Fraunhofer* využil ve svých spektrálních přístrojích jako dalšího disperzního elementu vedle dosud jedině užívaného hranolu. Dalším tehdy významným objevem v elektřině byl elektroskop se zlatými lístky (*Bennet*); týž badatel také zjistil, že plamen je velmi dobře vodivý a že tedy zbavit elektricky nabité těleso náboje lze nejsnáze tím způsobem, že je rychle „přejedeme" plamenem. Byly rovněž dokázány tepelné účinky elektrické jiskry, a to i jiskry „vyrobené" v laboratoři. Tepelné účinky blesku byly ovšem známy od nepaměti.

V roce 1686 zavedl *Leibniz* pojem živé síly pohybujícího se tělesa (šlo o dvojnásobek kinetické energie tělesa) a formuloval zákon zachování živé síly soustavy těles; jde o historicky první předzvěst zákona zachování energie. *Descartes* naproti tomu charakterizoval pohyb těles pojmem mrtvé síly čili hybnosti a formuloval rovněž zákon zachování hybnosti pro soustavu těles (a dokonce pro celý vesmír); Descartesův zákon je ovšem starší než Leibnizův a patří k prvním zákonům zachování ve fyzice vůbec. Je zajímavé, že např. zákon zachování hmotnosti byl formulován až v 18. století. Téhož roku bylo připraveno do tisku *Newtonovo* základní dílo *Philosophiae naturalis Principia mathematica;* vyšlo pak v roce 1687.

V roce 1586 vyšly *Základy statiky* velkého holandského fyzika *Simona Stevina*; jde o první novodobou knihu o mechanice, v níž se mimo jiné explicite popírá možnost existence perpetua mobile, síly jsou chápány jako vektory a je formulován nejobecnější princip statiky — princip virtuálních posuvů. Stevin byl slavný a zámožný holandský inženýr a stavitel, za válek však zahynul poté, když přišel o veškerý svůj majetek; dnes není známo ani datum jeho úmrtí ani místo, kde zahynul a byl pohřben. Téhož roku (1586) založil svou slávu fyzik a student *Galileo Galilei* svou konstrukcí hydrostatických vah umožňujících rychlé a přesné určování hustoty látek. Získal tím takové uznání, že ač formálně nedokončil vysokou školu, stal se hned profesorem matematiky; fyzika totiž dosud neexistovala de jure, čili nebylo kateder fyziky ani profesorů fyziky. Pod slovem physicus se rozuměl lékař a fyzika byla součástí filozofie (šlo zpravidla o aristotelovské spekulace o přírodě a přírodních jevech, a to bez matematiky a bez experimentů). K žádnému staršímu datu, jež by končilo rokem 86, již nelze přiřadil žádný významnější fyzikální objev.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Úloha téměř kouzelná

Zapíše-li někdo v ústraní trojciferné číslo a pod něj toto číslo v obráceném pořadí jeho číslic, pak po odečtení menšího čísla od většího získá rozdíl obou čísel. Řekne-li vám číslici rozdílu, která je na místě jednotek (stovek), vy můžete udat celý rozdíl. Proč? (*Návod*: začněte důkazem, že rozdíl je násobkem čísla 99).

V. Mráz

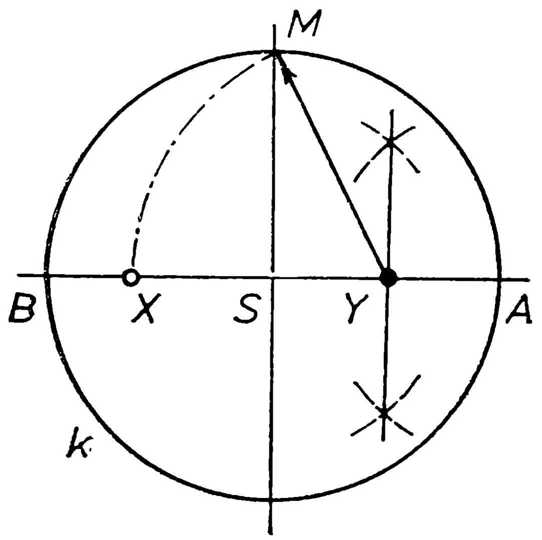
Úloha se sirkami

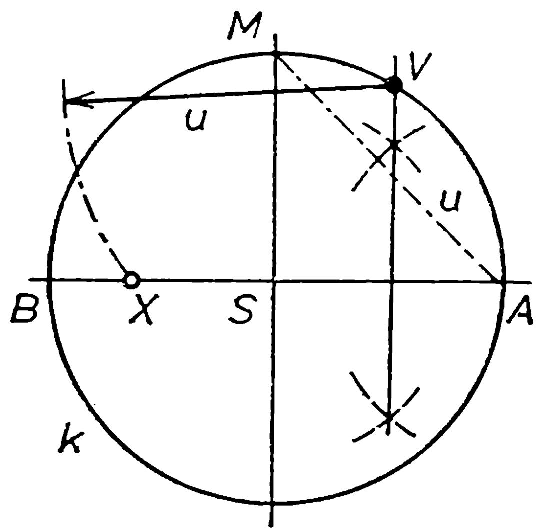
Vyzveme-li někoho, aby z počtu sirek v krabičce odebral tolik sirek, kolik je ciferný součet jejich počtu, pak jen letmým pohledem do krabičky snadno určíme počet sirek, který v krabičce zůstal. Jak to je možné? (*Návod*: Nejdříve dokažte, že výsledný rozdíl je násobkem devíti.)

V. Mráz

Dvě konstrukce s týmž výsledkem

Na obrázku vlevo je naznačen postup při sestrojování úsečky MX, jejíž délka se rovná velikosti strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice. Osa úsečky AS je tam použita k sestrojení bodu Y na průměru AB, který je středem kružnice s poloměrem YM; oblouk této kružnice protíná úsečku SB v bodu X.





Na obrázku vpravo je osa úsečky AS využita ke konstrukci bodu V na dané kružnici, který je středem pomocné kružnice o poloměru $u = |AM|$. Průsečík této kružnice s úsečkou SB je také označen písmenem X, ale teprve výpočtem potvrdíme, že úsečky SX mají stejnou délku na obou obrázcích.

Přesvědčte se o tom vlastním výpočtem pomocí Pythagorovy věty.

Miroslav Krajíček

Algebrogramy s tajenkou

Slovní algebrogramy už řešit umíte. Dnes se seznámíme s algebrogramy hláskovými, ve kterých je na rozdíl od slovních algebrogramů použito vedle sčítání i odčítání, násobení a dělení. Oba algebrogramy, které máte před sebou, obsahují 9 různých písmen. Musíme jim proto přiřadit pouze ty číslice, které jsou obsaženy v tajence. Pokud najdete řešení algebrogramu, nebude pro vás jistě problém vyřešit tajenku.

a)
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{TAP} & - & \mathrm{PSH} & = & \mathrm{PAO} \\ + & & + & & + \\ \mathrm{GPP} & - & \mathrm{TRO} & = & \mathrm{YYH} \\ \hline \mathrm{SGY} & - & \mathrm{ARP} & = & \mathrm{TRP} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{NNTS} & & \mathrm{WS} & = & \mathrm{WN} \\ - & & . & & + \\ \mathrm{NCE} & + & \mathrm{ET} & = & \mathrm{NEI} \\ \hline \mathrm{NCTO} & - & \mathrm{AAA} & = & \mathrm{NOS} \end{array}$$

Tajenka: 1234567859
(Řešení je na str. 375.)

Tajenka: 67880 123451

Jarmila Pěnčíková

OLYMPIÁDY A SOČ

Úlohy pro I. kolo XXVIII. ročníku fyzikální olympiády

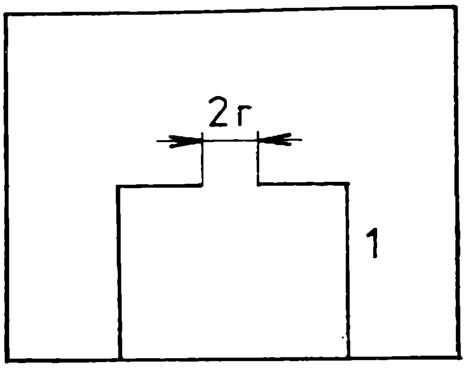
Kategorie A

1. Kyvadlo hodin je stejnorodá tenká ocelová tyč. Osa otáčení kyvadla je vodorovná a prochází koncovým bodem tyče.

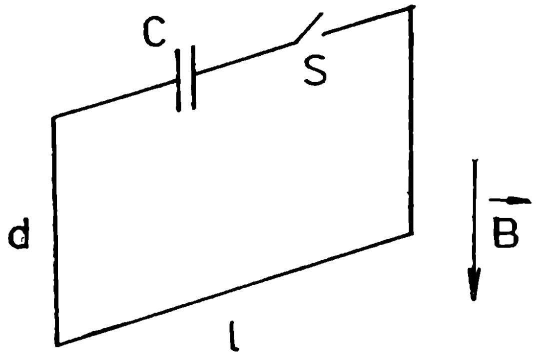
a) Určete délku l kyvadla tak, aby doba kmitu kyvadla byla T.

b) Určete změnu ΔT_1 doby kmitu T kyvadla, jestliže se změní jeho teplota o hodnotu $\Delta \vartheta$. Jakým rozdílem času Δt_1 se to projeví na chodu hodin řízených tímto kyvadlem za jeden den?

c) O jakou hodnotu ΔT_2 se změní doba kmitu tohoto kyvadla, jestliže ho přemístíme z místa s nadmořskou výškou h do místa s nadmořskou výškou $h + \Delta h$. Jakým rozdílem času Δt_2 se to projeví v chodu hodin řízených tímto kyvadlem za jeden den?



Obr. A-1



Obr. A-2

d) Navrhněte takové kyvadlo, aby změnou teploty kyvadla se neměnila doba jeho kmitu. Tento problém vyřešili hodináři již v první polovině 18. století.

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $T = 2{,}0$ s, $\triangle \vartheta = 15\ °C$, $\triangle h = 200$ m, $\alpha = 1{,}2 \,.\, 10^{-5}\ K^{-1}$.

2. Dvě nádoby jsou sestaveny podle obr. A-1. Na vnitřní nádobě je kruhový otvor o poloměru r, v němž je mýdlová blána s povrchovým napětím σ. Ve vnitřní nádobě je plyn objemu V_1, teploty T_1 a tlaku p_1. Ve vnější nádobě je vnitřní nádoba a plyn objemu V_2, teploty T_1. Mýdlová blána je rovinná.

a) Určete tlak p_2 plynu ve vnější nádobě.

Plyn ve vnější nádobě začneme ochlazovat tak, že jeho teplota T bude lineárně klesat; označme $T_1 - T = \triangle T$. Teplota T' plynu ve vnitřní nádobě v důsledku tepelné výměny s plynem ve vnější nádobě bude klesat tak, že $T_1 - T' = \triangle T' = \dfrac{\triangle T}{n}$, kde n je konstanta větší než jedna.

b) Popište děj, který bude probíhat v této soustavě při zvětšování rozdílu teplot $\triangle T$.

c) Určete mezní hodnotu $\triangle p_h$ rozdílu tlaků plynů ve vnitřní a ve vnější nádobě, po jejímž překročení mýdlová blána praskne.

d) Určete nejnižší mezní teplotu T_h plynu ve vnější nádobě, po jejímž překročení mýdlová blána praskne.

Plyny považujte za ideální.

3. V rovnorodom prostredí sú dva bodové zdroje Z_1, Z_2 koherentného vlnenia s vlnovou dĺžkou λ, ktorých vzájomná vzdialenosť je d. Interferenciu vlnenia budeme sledovať v prostredí na priamke $p \parallel Z_1Z_2$, ktorej vzdialenosť od úsečky Z_1Z_2 je $h \gg d$.

a) Určete počet n bodov na priamke p, v ktorých vzniknú interferenčné minimá.

b) Na priamke p určte vzájomnú vzdialenosť a dvoch súsedných interferenčných miním.

c) Navrhnite použitie uvedeného teoretického princípu na určenie neznámej vlnovej dĺžky λ vlnenia.

Úlohu riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty: $d = 0{,}050$ m, $\lambda = 0{,}010$ m, $h = 100$ m.

4. Elektricky vodivá tyč s dĺžkou l a hmotnosťou m je zavesená vodorovne na dvoch zvislých jemných a vodivých vláknach, ktorých dĺžka je d. Konce vlákien sú pripojené ku koncom tyče a spojené cez otvorený spínač s kondenzátorom s kapacitou C a s napätím U. Tyč je v rovnorodom magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$. Vektor $\boldsymbol{B}$ má smer zvisle dolu (obr. A-2). Zapneme spínač.

a) Stručne popíšte a fyzikálne zdôvodnite dej v uvedenej sústave po zapnutí spínača.

b) Určte najväčší uhol α odklonenia vlákien od zvislého smeru.

c) Určte teplo Q, ktoré pritom vznikne vo vodičoch obvodu. Predpokladajte, že prúd prechádza obvodom len krátku dobu (aká podmienka musí byť splnená, aby platil uvedený predpoklad?).

Úlohu riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty: $l = 0{,}30$ m, $m = 0{,}020$ kg, $d = 0{,}15$ m, $C = 200\,\mu F$, $U = 80$ V, $B = 1{,}5$ T. Je potrebné v tomto prípade uvažovať indukované napätie v elektrickom obvode? Zdôvodnite.

5. Doskový kondenzátor je v rovnorodom magnetickom poli s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$ kolmou na dosky kondenzátora. Vzájomná vzdialenosť dosiek kondenzátora je d. V strede zápornej dosky kondenzátora je zdroj pomalých elektrónov, ktoré vystupujú do priestoru medzi dosky kondenzátora s rôznymi začiatočnými smermi pohybu. Kondenzátor je pripojený na zdroj s napätím U.

a) Aké sily pôsobia na elektróny po vystúpení z dosky? Popíšte pohyb elektrónov medzi doskami kondenzátora.

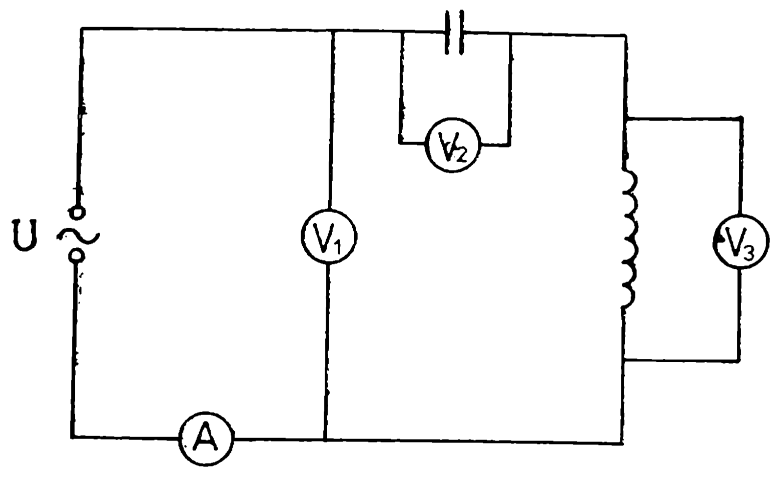
b) Určte podmienku pre napätie U, aby elektróny dopadli do jedného bodu alebo na malú plôšku na kladnej doske kondenzátora. Vykonajte diskusiu riešenia.

6. Meranie indukčnosti a odporu cievky.

Pomôcky: zdroj striedavého harmonického napätia 15 V s frekvenciou 50 Hz, niekoľko kondenzátorov s kapacitami 30 μF až 50 μF, cievka z rozkladného transformátora 1200 závitov, ampérmeter na meranie striedavého prúdu do 1,2 A, 3 voltmetre na meranie striedavého napätia.

Zapojenie obvodu na obr. A-3.

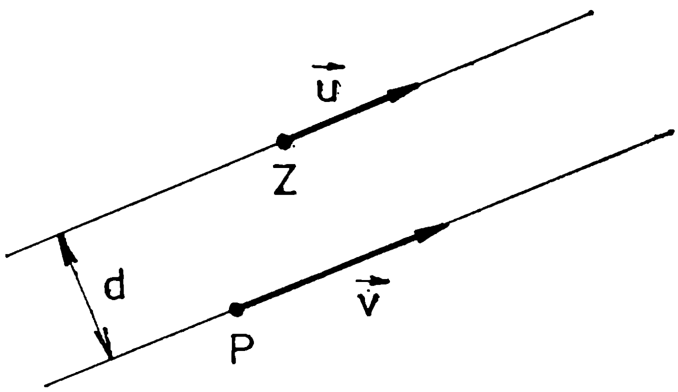
Úloha: Pomocou meracích prístrojov (meriame napätia U_1, U_2, U_3 a prúd I) a známej hodnoty C kapacity kondenzátora v zapojení podľa obr. A-3 navrhnite a zdôvodnite postup na meranie indukčnosti L a odporu cievky R, ak odpor spojovacích vodičov v porovnaní s hodnotou R je veľmi malý. Vykonajte merania pre rôzne hodnoty kapacity C kondenzátora, určte stredné hodnoty a chyby vypočítaných veličín.



Obr. A-3

Hodnoty meraných a vypočítaných veličín zaznamenajte do prehľadných tabuliek.

7. Obrázok A-4 znázorňuje začiatočnú polohu zdroja zvuku Z a prijímača zvuku P, ktoré sa pohybujú stálymi rýchlosťami $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ po dvoch navzájom rovnobežných priamkach. Vzdialenosť priamok je d. Zdroj vysiela zvukové vlnenie frekvencie f.



Obr. A-4

a) Určte závislosť frekvencie f' prijímaného zvukového vlnenia od času t v intervalu času $t \in (-\infty; \infty)$.

b) Za akých podmienok bude $f' = f$?

c) Vyšetrite a zobrazte závislosť frekvencie f' od času v konkrétnych prípadoch: $f = 1000$ Hz, $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$, $v = u = 20\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$, $d_1 = 10$ m, $d_2 = 2{,}0$ m, $d_3 = 0$ m, rýchlosť zvuku $c = 340\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$.

Kategorie B

1. Předpokládejme, že Země se pohybuje kolem Slunce po kružnici o poloměru $r_Z = 1{,}0000$ AU a s dobou oběhu $T_Z = 365{,}26$ dne. Předpokládejte dále, že planeta Venuše se pohybuje kolem Slunce po kružnici s dobou oběhu $T_V = 224{,}68$ dne. Planeta Mars se na své eliptické trajektorii dostane do největší vzdálenosti od Slunce $r_a = 249{,}2\ .\ 10^6$ km, její nejmenší vzdálenost od Slunce je $r_p = 206{,}7\ .\ 10^6$ km. Předpokládejte, že všechny planety se pohybují v téže rovině.

a) Stanovte poloměr kružnice, po níž se pohybuje Venuše kolem Slunce. Určete dobu oběhu Marsu kolem Slunce (tato doba se nazývá siderická doba oběhu planety).

b) Venuši pozorujeme na obloze v největší vzdálenosti 46° 20′ od Slunce. Určete, za jak dlouho je možno pozorovat Venuši opět v největší vzdálenosti od Slunce (tato doba se nazývá synodická doba oběhu planety).

c) Určete dobu, za kterou doletí kosmická loď k Venuši při minimální spotřebě paliva.

d) Mars pozorujeme v okamžiku, kdy středy Slunce, Země a Marsu jsou v jedné přímce. Určete dobu, za niž se tato situace bude opakovat. Určete dále dobu, za kterou doletí kosmická loď k Marsu při minimální spotřebě paliva. Pro řešení této úlohy si nejprve určete průměrnou vzdálenost Marsu od Slunce a nahraďte eliptickou trajektorii Marsu kružnicí.

e) Určete z daných hodnot a z hodnot vypočítaných hmotnost Slunce.

Návod k řešení najdete v publikaci: Ungermann, Z.—Volf, I.: *Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli*. Edice Škola mladých fyziků, sv. 17. Praha, SPN 1985.

2. Voda na zalévání zahrádky přitéká do zahrádkářské kolonie vodorovným potrubím o vnitřním průměru 25 mm rychlostí o velikosti 1,2 m . s^{-1}. Pak teče vodorovnou hadicí o vnitřním průměru 12,5 mm, která končí hubicí o obsahu příčného řezu 0,50 cm^2.

a) Jak velkou rychlostí protéká voda hadicí?

b) Stanovte přetlak vody v potrubí vzhledem k vodě v hadici.

c) Kolik vody se spotřebuje při zalévání zahrádky po dobu 45 min?

d) Do jaké největší vzdálenosti od hubice dostříkne voda, je-li hubice umístěna těsně nad vodorovným povrchem Země?

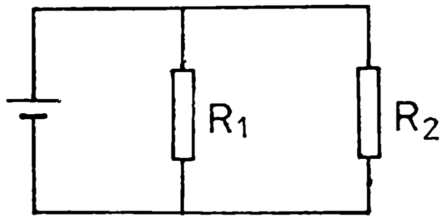
e) Do jaké vzdálenosti dostříkne voda, je-li hubice ve výšce 1,5 m nad vodorovným povrchem Země a úhel, který svírá počáteční rychlost s vodorovným směrem, je 45°, resp. 38°.

Při řešení předpokládejte nestlačitelnost kapaliny a zanedbejte vnitřní tření.

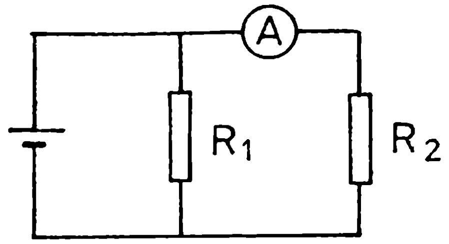
3. Jízdní řád udává vzájemnou vzdálenost stanic Hradec Králové a hlavního nádraží v Praze 116 km. Kolejnice byly kladeny tak, že při teplotě 25 °C se začátek další kolejnice těsně dotýkal konce předcházející kolejnice. Součinitel teplotní délkové roztažnosti pro kolejnice je 1,2 . 10^{-5} K^{-1}.

a) Jaká je šířka jedné mezery mezi kolejnicemi při teplotě — 25 °C, je-li délka kolejnice 15 m. Stanovte, jaká část uvedené vzdálenosti mezi stanicemi připadá na dilatační mezery při této teplotě.

b) V létě se kolejnice zahřeje na teplotu 45 °C. Zjistěte, zda se kolejnice v důsledku tlakových sil neporuší, je-li mez pevnosti v tahu pro ocel (3,3 až 8,0) . 10^8 Pa, Youngův modul pružnosti při deformaci tahem pro ocel 2,2 . 10^{11} Pa.



Obr. B-1



Obr. B-2

c) Kolejnice se na delších přímých úsecích svařují. Stanovte, zda zůstane kolejnice dostatečně pružná v uvedených teplotních rozmezích od — 25 °C do 45 °C, je-li mez pružnosti oceli 2,5 10^8 Pa.

d) Kolo lokomotivy má při teplotě 25 °C průměr 1,00 m. Určete rozdíl v počtu otáček kola na trati 116 km v létě N_1 a v zimě N_2 za mezních teplot uvedených v částech a), b).

4. V elektrickém obvodu znázorněném na schématu na obr. B-1 je nutno změřit proud I_2, procházející rezistorem o odporu R_2. Zvolíme tento postup: do větve s rezistorem o odporu R_2 zapojíme ampérmetr (obr. B-2) s odporem R_A. Údaj ampérmetru považujeme za přesný.

a) Vyjádřete proud I_A jako funkci odporu ampérmetru R_A.

b) Jaký odpor R_A volíme pro ampérmetr, aby se údaj ampérmetru I_A lišil od proudu I_2 nejvýše o hodnotu p %?

Řešení úlohy b) zdůvodněte, pak řešte pro hodnoty: $r = 1{,}0\,\Omega$, $R_1 = 1{,}0\,\Omega$, $R_2 = 3{,}0\,\Omega$, $p = 3{,}0$ %.

5. Hloubku ponorky lze regulovat vpuštěním či vytlačením vody do nádrží. Ocelová láhev objemu 100 l je naplněna stlačeným vzduchem o hmotnosti 10 kg při teplotě 20 °C. Je umístěna na palubě ponorky, která je v hloubce 300 m, kde je teplota okolní vody 5,0 °C; hustota mořské vody je 1030 kg . m^{-3}.

a) Stanovte tlak p_1 a hustotu ρ_1 vzduchu v láhvi při teplotě t_1.

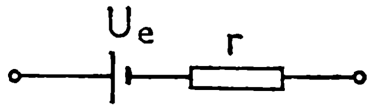
b) Stanovte tlak p_2 a hustotu ρ_2 vzduchu v láhvi při teplotě t_2.

c) V ponorce vzduch z láhve proudí do nádrže zcela naplněné vodou. Jaký maximální objem vody může vytlačit vzduch z nádrže ponorky?

d) Za jaké podmínky se změní velikost hydrostatické vztlakové síly, působící na ponorku? Určete tuto změnu hydrostatické vztlakové síly. Vzduch budeme pokládat za ideální plyn. Molární hmotnost vzduchu je $M_m = 0{,}029$ kg . mol^{-1}, tlak při volném povrchu moře je 1,0 . 10^5 Pa.

6. Závislost příkonu spotřebiče na proudu v obvodu.

Pomůcky: Máte k dispozici plochou baterii 4,5 V jako stejnosměrný zdroj napětí, voltmetr, ampérmetr, reostat (např. 1200 Ω, 0,63 A), spojovací vodiče. S ohledem na použité přístroje i metodu měření zvýšíte vnitřní odpor zdroje tím, že k baterii připojíte sériově odpor asi 250 Ω (podle obr. B-3).



Obr. B-3

Úloha: Určete, jak závisí příkon P spotřebiče na proudu I, který prochází obvodem. Určete dále elektromotorické napětí U_e a vnitřní odpor r zdroje.

Poznámky k řešení úlohy:

1. Jako úvodní cvičení nakreslete graf příkonu P spotřebiče jako funkci vnějšího odporu R v obvodu stejnosměrného zdroje napětí $U_e = 4{,}5$ V a vnitřního odporu $r = 250\ \Omega$. Vnější odpor volte od hodnoty 50 Ω do 500 Ω. Pak nakreslete graf funkce $P(R)$. Určete, při které hodnotě odporu R spotřebiče je příkon spotřebiče v uzavřeném elektrickém obvodu největší.

2. Navrhněte postup měření k tomu, abyste s použitím udaných pomůcek získali hledanou funkci příkonu spotřebiče $P = f(I)$. Získané údaje zapište do vhodné tabulky.

3. Sestrojte graf funkce $P = f(I)$ a určete maximální příkon P_{max} spotřebiče.

4. Z hodnot v tabulce sestrojte graf funkce $U = f(I)$, U je napětí na spotřebiči. Z grafu určete extrapolací hodnotu U_0 pro $I_0 = 0\ A$, I_k pro $U = 0$ V. Určete podíl $r = U_0/I_k$.

5. Z hodnot v tabulce sestrojte graf funkce $I = f(R)$. Zjistěte hodnotu I_k pro $R = 0\ \Omega$.

7. Dálkovým teplovodem délky $L = 10$ km o průměru potrubí $D = 80$ cm je vedena horká voda z teplárny do sídliště a ochlazená voda zpět. Potrubí je izolováno vrstvou tepelné izolace tloušťky $d = 15$ cm a měrné tepelné vodivosti $\lambda = 0{,}080\ \mathrm{W\,.\,m^{-1}\,.\,K^{-1}}$. Na výstupu z teplárny je teplota vody $T_1 = 130$ °C, na vstupu je teplota vracející se vody $T_2 = 60$ °C.

a) Jakou rychlostí proudí voda v potrubí a jaký je objemový tok vody v potrubí, dodává-li teplárna tepelný výkon $P_t = 80$ MW?

b) Jaký je rozdíl tlaků na vstupu a na výstupu čerpadla, je-li jeho měrná práce $w = 820\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}}$ (tj. práce potřebná na přečerpání 1 kg vody).

c) Jaká je účinnost přenosu tepla s ohledem na ztráty tepla vedením izolační vrstvou do okolí, předpokládáme-li teplotu pláště izolace v obou dvou směrech $T_3 = 20$ °C.

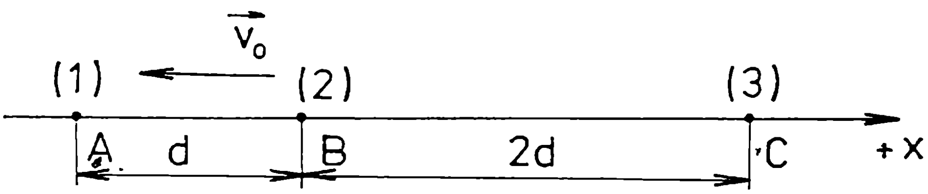
d) Jaký pokles teploty vody na trase ke spotřebiteli představuje tepelná ztráta?

Poznámka: Pro zjednodušení výpočtu v částech a), b) zanedbáme tepelné ztráty na trase, v části c) zanedbáme pokles teploty podél trasy a tepelnou izolaci považujeme za tenkou planparalelní vrstvu. Uvažte, zda tato zjednodušení podstatně ovlivní výsledky.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty; hustota vody je $\varrho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, měrná tepelná kapacita $c = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Kategorie C

1. Na vodorovnej hladkej podložke sú tri malé gulôčky s hmotnosťami m_1, m_2, m_3. Gulôčky považujeme za hmotné body umiestnené v bodoch A, B, C na jednej priamke; $AB = d$, $BC = 2d$ (obr. C-1).



Obr. C-1

Gulôčku (2) uvedieme nárazom do pohybu v smere od B k A. Pohyb považujeme od začiatku za priamočarý rovnomerný s rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0$; neuvažujeme otáčavý pohyb gulôčky. Trenie medzi gulôčkou a podložkou neuvažujeme.

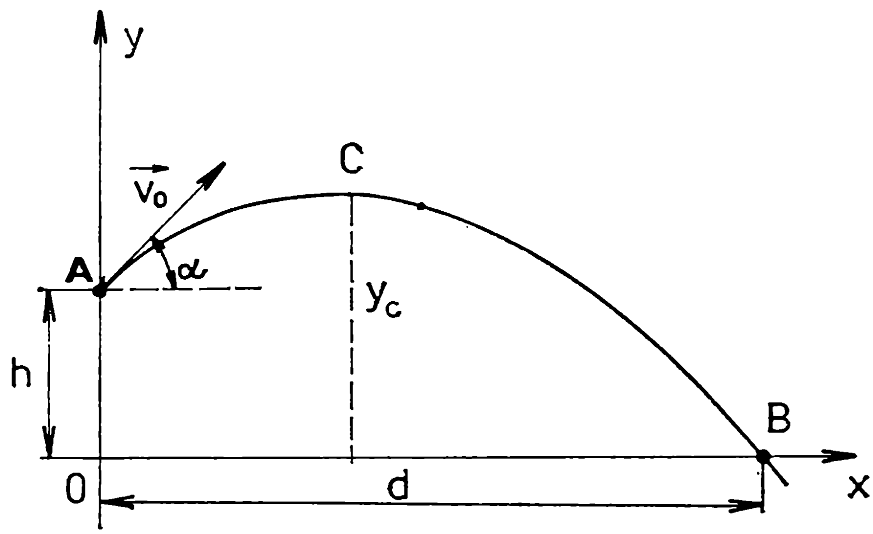
a) Opíšte dej, ktorý prebieha v sústave gulôčiek (1), (2), (3) pri dokonale pružných zrazoch. Urobte diskusiu deja.

b) Určte konečné rýchlosti gulôčiek po zraze, ak pre ich hmotnosti platí vzťahy: $m_1 = 2\,m_2$, $m_3 = m_2$.

c) Na milimetrovom papieri znázornite graf funkcie $v = f(t)$ pre každú gulôčku v podmienkach úlohy b). Čas t meríme od okamihu nárazu na gulôčku (2) v polohe B.

2. Z bodu A ve výšce h nad vodorovným povrchem Země je vrženo těleso, které považujeme za hmotný bod o hmotnosti m, šikmo vzhůru ve směru svírajícím s vodorovnou rovinou úhel α (obr. C-2). Těleso dopadne na vodorovný povrch Země v bodě B, $OB = d$.

Obr. C-2



a) Určete velikost počáteční rychlosti v_0 vrhu v bodě A v závislosti na d, α.

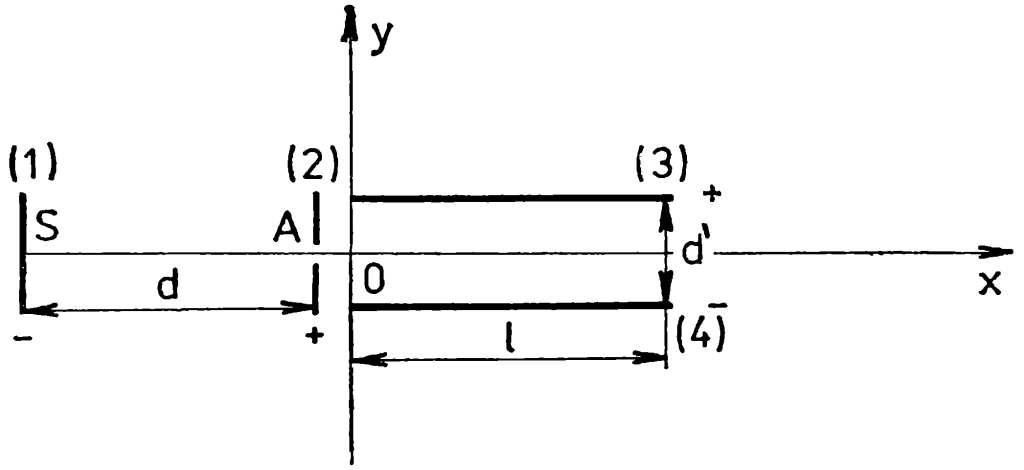
b) Vyjádřete rovnici trajektorie tělesa v soustavě souřadnic O, x, y ve svislé rovině s využitím veličin h, d, α.

c) Určete souřadnici y_C nejvyššího bodu trajektorie.

d) Určete práci W nutnou k uskutečnění vrhu.

e) Porovnejte práce vykonané vrhačem koule a oštěpářem v těchto podmínkách: $h = 1{,}8$ m, $\alpha = 45°$, hmotnost koule $m_1 = 7{,}25$ kg, hmotnost oštěpu $m_2 = 0{,}80$ kg, $d_1 = 19{,}43$ m, $d_2 = 84{,}58$ m; hmotný střed vrhaného tělesa v počáteční poloze je v bodě A. Uvažte, jakým způsobem získala koule rychlost v_{01} v okamžiku, kdy opouští ruku vrhače, a jakým způsobem získal rychlost v_{02} oštěp. Určete podíl velikostí obou rychlostí.

3. Dvě kovové desky (1) a (2) jsou ve svislé rovině, jsou spolu rovnoběžné a od sebe vzdálené o délku d. V bodě S u desky (1) je uvolněn



Obr. C-3

elektron. Jeho počáteční rychlost v bodě S považujeme na nulovou. V bodě A dosáhne elektron rychlosti v_0 (obr. C-3). Účinek tíhové síly působící na elektron mezi body S a A je zanedbatelný vzhledem k účinku síly elektrického pole.

a) Určete kinetickou energii elektronu v bodě A. Určete velikost elektrické síly F_e působící na elektron mezi body S a A v homogenním elektrickém poli.

b) Určete dobu t pohybu elektronu mezi deskami (1) a (2). Ověřte, že předpoklad zanedbatelného účinku tíhové síly na elektron je reálný.

c) Malým otvorem v bodě A desky (2) projde elektron rychlostí v_0 do homogenního elektrického pole kondenzátoru mezi vodorovnými deskami (3) a (4) ve vakuu. Vzdálenost desek kondenzátoru je d', délka jedné desky je l. Mezi deskami kondenzátoru je napětí U. Účinek tíhové síly působící na elektron je zanedbatelný vzhledem k účinku síly elektrického pole kondenzátoru. Načrtněte trajektorii elektronu v elektrickém poli kondenzátoru do obrázku a náčrtek zdůvodněte. Napište rovnici trajektorie elektronu v soustavě souřadnic O, x, y v elektrickém poli kondenzátoru. Určete podmínku pro to, aby elektron prošel elektrickým polem kondenzátoru bez dotyku s deskou. Jaká je v tomto případě odchylka y_2 elektronu od osy Ox při výstupu elektronu z elektrického pole kondenzátoru?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $d = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ m, $v_0 = 5{,}9 \cdot 10^7$ m . s^{-1}, $U = 1{,}0 \cdot 10^3$ V, $d' = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ m, $l = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ m.

4. Soustava dvou kondenzátorů, z nichž jeden má stálou kapacitu C_1 a druhý má proměnnou kapacitu C, jsou připojeny za sebou ke zdroji o napětí U_0 (obr. C-4a).

a) Pro určitou kapacitu C proměnného kondenzátoru určete napětí U_1 mezi svorkami kondenzátoru se stálou kapacitou C_1 a napětí U mezi svorkami kondenzátoru s proměnnou kapacitou C.

b) Pro hodnoty $U_0 = 200$ V, $C_1 = 0{,}50$ μF doplňte tabulku s využitím výsledků úlohy a):

$\frac{C}{\mu F}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$\frac{U_1}{V}$						
$\frac{U}{V}$						

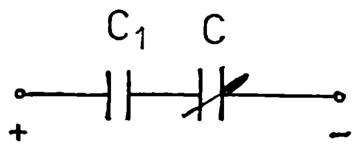
Nakreslete na milimetrový papír grafy funkcí $U_1 = f_1(C)$, $U = f(C)$. Kapacitu spojovacích vodičů považujte za nulovou.

c) Kondenzátor se stálou kapacitou C_1 nahradíme rezistorem se stálým odporem R_1 a kondenzátor s proměnnou kapacitou C nahradíme rezistorem s proměnným odporem R (obr. C-4b). Pro určitý odpor R proměnného rezistoru určete napětí U_1 mezi svorkami rezistoru se stálým odporem R_1 a napětí U mezi svorkami rezistoru s proměnným odporem R.

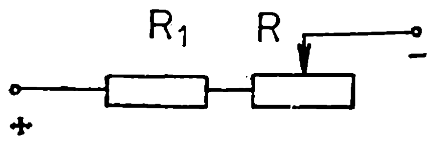
d) Pro hodnoty $U = 200$ V, $R_1 = 500\,\Omega$ doplňte tabulku s využitím výsledků úlohy c):

$\frac{R}{\Omega}$	0,00	100	200	300	400	500
$\frac{U_1}{V}$						
$\frac{U}{V}$						

Nakreslete na milimetrový papír grafy funkcí $U_1 = \varphi_1(R)$, $U = \varphi(R)$. Odpor spojovacích vodičů považujte za nulový.



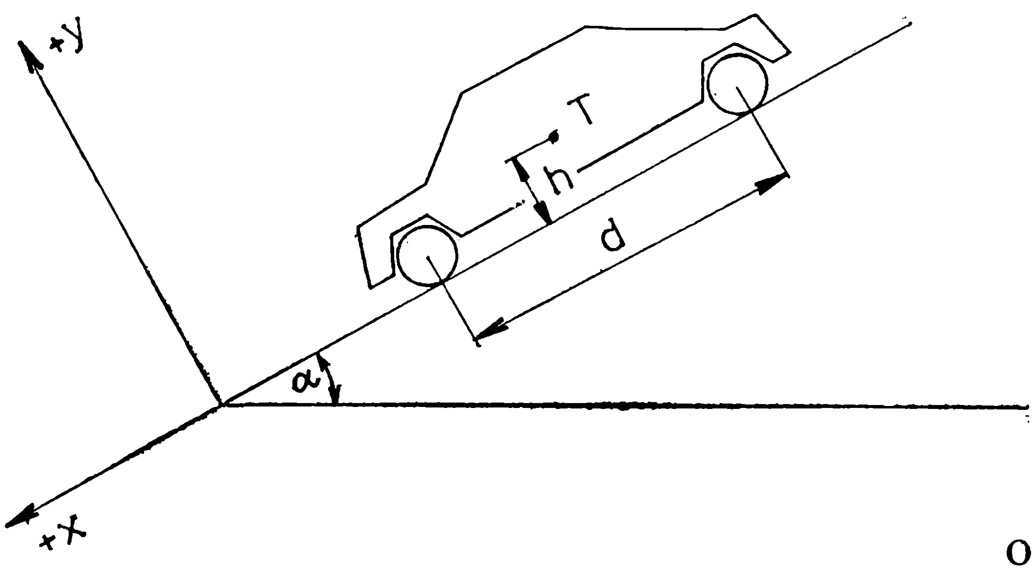
Obr. C-4a



Obr. C-4b

e) Porovnejte grafy z úloh b) a d). K čemu je možno takové soustavy kondenzátorů nebo rezistorů použít?

5. Po přímé silnici, jejíž vozovka svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 6{,}0°$, jede automobil po svahu dolů stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, $v = 60$ km . h^{-1}. Na povrchu vozovky je uježděný sníh. Mezi vozovkou a pneumatikami je součinitel klidového tření $f_0 = 0{,}22$ a součinitel smykového tření $f = 0{,}050$. Vzdálenost náprav automobilu od sebe je $d = 2{,}0$ m. Jede-li automobil po vodorovné silnici, působí vozovka na obě nápravy automobilu stejně velikými tlakovými silami. Hmotný střed automobilu je ve výšce $h = 0{,}50$ m nad vozovkou (obr. C-5).



Obr. C-5

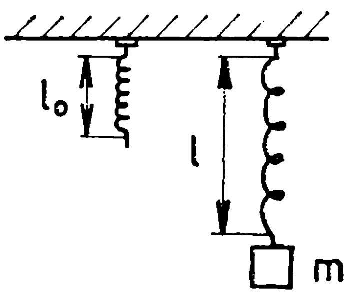
a) Znázorněte na obrázku všechny síly, které působí při jízdě na automobil.

b) Je řidič schopen zastavit automobil na svahu? Uvažte, co se stane, jestliže řidič prudkým sešlápnutím brzdového pedálu zablokuje kola vozidla.

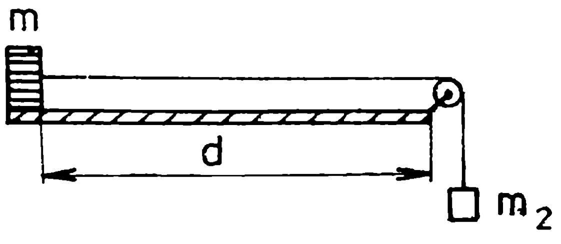
c) Pokud se podaří řidiči zastavit automobil na svahu, postačí k zajištění klidové polohy vozidla jen ruční brzda působící na zadní kola? Jak zajistí v tomto případě nehybnost vozidla na vozovce?

Poznámka: Brzdění vozidla je optimální, jestliže nedochází k prosmekávání kol a tření má charakter klidového tření.

6. Určení hmotnosti tělesa srovnávací metodou. Máte k dispozici těleso, jehož hmotnost máte určit, a závaží o hmotnosti $m_1 = 0{,}100$ kg.



Obr. C-6



Obr. C-7

a) Určete hmotnost tělesa s využitím Hookeova zákona pomocí zařízení znázorněného na obr. C-6.

Příprava: Dokažte, že podle Hookeova zákona platí $m = m_1 \frac{\triangle l}{\triangle l_1}$, kde $\triangle l$ je prodloužení pružiny po zavěšení tělesa o hmotnosti m, $\triangle l_1$ je prodloužení pružiny po zavěšení tělesa o hmotnosti m_1. Popište pokusy, které provedete. Zapište další potřebné pomůcky.

Měření: Stanovte, které veličiny k řešení úlohy musíte změřit. Měření každé veličiny opakujte za stejných podmínek pětkrát a zapište do tabulky. Pro každou veličinu stanovte aritmetický průměr z naměřených hodnot a průměrnou relativní odchylku (podle učebnice fyziky pro I. ročník gymnázia, s. 290).

Určení hmotnosti m_1: Použijte stanovené aritmetické průměry veličin k určení hmotnosti m. Odhadněte relativní odchylku hmotnosti m; číselnou hodnotu hmotnosti m správně zaohrouhlete.

b) Určete hmotnost tělesa s využitím druhého Newtonova pohybového zákona pomocí zařízení znázorněného na obr. C-7.

Příprava: Dokažte, že podle druhého Newtonova pohybového zákona

platí $m = \frac{a_1}{a}(m_1 + m) - m_2$,

kde a_1 je velikost zrychlení soustavy, ve které použijeme kromě tělesa o hmotnosti m_1 ještě těleso o hmotnosti m_2, a je velikost zrychlení soustavy, ve které použijeme kromě tělesa o hmotnosti m ještě tělesa o hmotnosti m_2. Napište, které zjednodušující předpoklady při použití vztahu pro hmotnost uděláte. Popište pokusy, které provedete. Zapište další potřebné pomůcky. Proč je výhodné volit hmotnost m_2 malou vzhledem k hmotnostem m a m_1? Jak se změní uvedený vztah, můžeme-li předpokládat, že platí $m_2 \ll m_1$, $m_2 \ll m$?

Měření: Stanovte, které veličiny k řešení úlohy musíte změřit. Měření každé veličiny opakujte při konstantním d a za stejných podmínek pětkrát, zapište do tabulky. Pro každou veličinu stanovte aritmetický průměr z naměřených hodnot a průměrnou relativní odchylku.

Určení hmotnosti m: Použijte stanovené aritmetické průměry k určení hmotnosti m. Odhadněte relativní odchylku hmotnosti m; číselnou hodnotu m správně zaokrouhlete.

c) Zhodnocení postupů měření a), b): Porovnejte číselné hodnoty hmotnosti m stanovené postupem a), b). Můžete považovat jeden z nich za přesnější než druhý? Zdůvodněte. Na kolik platných číslic se shodují číselné hodnoty veličiny m zjištěné postupem a) a postupem b)? Zapište tuto společnou hodnotu hmotnosti m.

7. Při přistávání letadla se kola podvozku roztáčejí třením o povrch přistávací plochy. Kola podvozku přitom konají rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb, pokud jejich obvodová rychlost nedosáhne velikosti přistávací rychlosti v_0 posuvného pohybu letadla. Hmotnost letadla $m = 160$ t. Podvozek letadla má $N = 8$ kol, z nichž každé má poloměr $r = 0{,}80$ m a moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení $I = 12$ kg . m^2. Předpokládáme, že při dosednutí podvozku letadla na přistávací plochu působí na každé kolo normálová tlaková síla o velikosti $F_n = 200$ kN. Velikost přistávací rychlosti letadla $v_0 = 300$ km . h^{-1}. Součinitel klidového tření mezi přistávací plochou a kolem je $f_0 = 0{,}50$, součinitel smykového tření mezi přistávací plochou a kolem je $f = 0{,}40$.

Pro zjednodušení podmínek řešení úlohy neuvažujeme odpor prostředí (ve skutečnosti je tento odpor značný).

Poznámka: Pohybová rovnice pro rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb je $\boldsymbol{M} = I\vec{\alpha}$, kde $\boldsymbol{M}$ je moment síly vzhledem k ose otáčení, $\vec{\alpha}$ je konstantní úhlové zrychlení.

a) Určete dobu t_0, po kterou trvá roztáčení kol podvozku. Předpokládáme, že po dobu t_0 se nezmění rychlost posuvného pohybu letadla.

b) Určete změnu rychlosti letadla za dobu t_0. Ověřte, že předpoklad zavedený v úloze a) je reálný.

c) Na jaké nejkratší přistávací dráze $d_{\min}$ je letadlo schopno zastavit, uvažujeme-li jen působení třecích sil přistávací plochy na kola podvozku? Předpokládáme přitom, že dráha, kterou letadlo urazí za dobu t_0, je zanedbatelná vzhledem k celkové přistávací dráze d.

d) Určete podíl práce W vykonané třecími silami a tepla Q, kterým se ohřeje povrch kol podvozku a přistávací plochy.

Kategorie D bude otištěna v č. 10.

26. mezinárodní matematická olympiáda

Konala se v minulém roce od 29. června do 12. července ve *Finsku*. Vlastní soutěž proběhla v městečku *Joutsa* 4. a 5. července za rekordní účasti 209 soutěžících žáků z celkem 39 zemí (spolu se šesti francouzskými studenty přijel dokonce i jeden Íránec, který studuje ve Francii).

Dvě trojice úloh, které olympionici řešili po oba dny, vám nyní předkládáme. Jejich náročnost si můžete ověřit na vlastní kůži (soutěžící měli na každou trojici pouze čtyři a půl hodiny).

1. Je dán konvexní tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a kružnice k, jejíž střed leží na straně AB a která se dotýká ostatních tří stran BC, CD, DA čtyřúhelníka. Dokažte, že pak platí
$$|AD| + |BC| = |AB| .$$
2. Nechť n, k jsou daná navzájem nesoudělná přirozená čísla, $0 < k < n$, a nechť $M = \{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Každý prvek j množiny M obarvíme jednou ze dvou barev (modrá a bílá), a to tak, že
   a) číslo j má vždy touž barvu jako číslo $n - j$;
   b) každé číslo $j \in \mathrm{M}$, $j \neq k$, má touž barvu jako číslo $|k - j|$
   Dokažte, že pak všechny prvky množiny M mají stejnou barvu.
3. Je-li $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j \,.\, x^j$, $n \geqq 0$, mnohočlen s celočíselnými koeficienty, označme $w(P)$ počet všech jeho koefiicientů a_j, které nejsou dělitelné dvěma. Nechť $Q_j(x) = (1 + x)^j$ pro $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.
   Jsou-li i_1, i_2, $\ldots$, i_n celá čísla splňující nerovnosti
$$0 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_n ,$$
   pak platí
$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \ldots + Q_{i_n}) \geqq w(Q_{i_1}) .$$
   Dokažte.
4. Množina **M** má právě 1985 prvků; jsou to vesměs celá kladná čísla, jejichž prvočinitelé nejsou větší než 26.
   Dokažte, že v **M** lze nalézt čtyři navzájem různá čísla, jejichž součin je čtvrtou mocninou celého čísla.
5. Je dán trojúhelník ABC a kružnice k se středem O, která prochází body A, C a protíná úsečky AB, BC v dalších dvou bodech K a N, $K \neq N$. Přitom kružnice k_1, resp. k_2, opsané trojúhelníku ABC, resp. BNK, mají právě dva společné body B a M. Dokažte, že úhel OMB je pravý.
6. Ke každému reálnému číslu x_1 sestrojíme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že položíme
$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n}\right)$$
   pro každé přirozené číslo n.
   Dokažte, že existuje právě jedna hodnota x_1 taková, že pro každé n platí
$$0 < x_n < x_{n+1} < 1 .$$

Řešení úloh nebudeme v Rozhledech publikovat, najdete je v ročence 34. ročníku MO. Pokud byste však nalezli nějaké zvlášť zajímavé řešení (zejména 3., 5. a 6. úlohy), pošlete je autorovi těchto řádků.

Výsledky našich reprezentantů nejlépe nahlédnete z následujícího přehledu:

	1	2	3	4	5	6	body celkem	cena
Radek Adamec, 3. roč.	0	7	0	0	0	0	7	—
Petr Hájek, 3. roč.	0	0	0	0	6	5	11	—
Adam Obdržálek, 3. roč.	1	7	1	7	0	6	22	II.
Marcel Polakovič, 2. roč.	7	7	0	4	0	7	25	II.
Jarmila Ranošová, 4. roč.	7	3	0	3	7	3	23	II.
Ján Šefčík, 4. roč.	7	7	0	1	1	1	17	III.

Vedoucí naší delegace byl *dr. František Zítek, CSc.*, z Matematického ústavu ČSAV, zástupcem vedoucího *dr. Júlia Lukátšová* z ministerstva školství SSR. Příští, již 27. ročník MMO se bude pravděpodobně konat letos v polském hlavním městě Varšavě.

Karel Horák

Kalendár M-F: máj 1986

6. V. 1906 sa v Paríži narodil *André Weil*, francúzsky matematik. Dosiahol pozoruhodné výsledky v teórii grúp, abstraktnej algebraickej geometrii a algebrickej teórii čísel.

6. V. 1951 zomrel *Elie Joseph Cartan*, francúzsky matematik. Zaoberal sa teóriou spojitých grúp a diferenciálnymi rovnicami. Založil algebrickú teóriu Lieho grúp, rozvinul teóriu symetrických priestorov.

9. V. 1931 zomrel v Pasadene *Albert Abraham Michelson*, americký fyzik nemeckého pôvodu. Zaoberal sa analýzou svetla a svetelných javov, skúmal štruktúru spektrálnych čiar. Zistil, že rýchlosť svetla v smere pohybu Zeme i v smere kolmom na smer jej pohybu je rovnako veľká. V roku 1907 dostal Nobelovu cenu za fyziku.

10. V. 1746 sa v Beaune narodil *Gaspard Monge*, francúzsky matematik. Rozvinul deskriptívnu geometriu, ovplyvnil analytickú a diferenciálnu geometriu. Využíval infinitezimálny počet pri štúdiu priestorových kriviek a plôch.

11. V. 1686 zomrel v Hamburgu *Otto von Guericke*, nemecký fyzik. dokázal existenciu tlaku vzduchu, zkonštruoval vývevu, manometer. Skúmal vlastnosti elektriny.

14. V. 1686 sa v Gdaňsku narodil *Gabriel Fahrenheit*, nemecký fyzik. Zkonštruoval prvý ortuťový teplomer a zaviedol teplotnú stupnicu, kde teplota topenia ľadu je 32 °F a teplota varu vody 212 °F.

14\. V. 1761 zomrel *Thomas Simpson*, anglický matematik. Zaoberal sa trigonometriou, matematickou analýzou a počtom pravdepodobnosti. Odvodil pravidlo pre približný numerický výpočet určitého integrálu.

16\. V. 1821 sa v Okatove (Kalužská oblasť ZSSR) narodil *Pafnutij Lvovič Čebyšev*, ruský matematik a mechanik. Pracoval v teórii čísel, počte pravděpodobnosti, integrálnom počte, v teórii mechanizmov. Skonštruoval kalkulačný stroj.

17\. V. 1881 sa v Gočove narodil *Jur Hronec*, slovenský matematik. Zaoberal sa diferenciálnymi rovnicami. Mal veľký vplyv na rozvoj vysokého školstva na Slovensku.

18\. V. 1711 sa v Dubrovníku narodil *Rudžer Josip Boškovič*, chorvátsky fyzik, matematik, astronóm a filozof. Zaoberal sa sférickou trigonometriou, kombinatorickou analýzou, teóriou pravděpodobnosti. Predvídal niektoré idey teórie relativity a neeuklidovskej geometrie.

18\. V. 1891 sa v Ronsdorfe pri Barmene narodil *Rudolf Carnap*, nemecký matematik, logik a filozof. Zaoberal sa základmi matematiky a logiky, stal sa predstaviteľom filozofie logického pozitivizmu.

18\. V. 1971 zomrel *Alexander Genadejevič Kuroš*, sovietsky matematik. Pracoval v oblasti modernej algebry, teórii grúp.

27\. V. 1976 zomrel v Tule *Alexander Naumovič Frumkin*, sovietsky fyzik a chemik. Patrí k zakladateľom elektrochemickej kinetiky.

dj

Z NOVÝCH KNIH

Walter Conrad:

ELEKTROTECHNIKA STŘEDEM ZÁJMU OD ELEKTRÁREN K MIKROELEKTRONICE

Vydalo SNTL — Nakladatelství technicke literatury, n. p., Praha 1985, z němčiny přeložil ing. Milan Dufek, CSc., 1. vydání, 208 stran, 101 obr. 8200 výtisků, 20 Kčs.

Knížka hovoří velmi poutavým způsobem o současné elektrotechnice, a to o výrobě a rozvodu elektrické energie, o přenosu informací, o řídicí technice, automatizaci a mikroelektronice. V jednotlivých článcích je stručně popsán vývoj k dnešnímu stavu a naznačují se i další tendence. I z historie se zde dozvíme leccos překvapujícího, např. že videotelefon měl premiéru již před padesáti lety v roce 1936 na veletrhu v Lipsku. Mezi výhledy do budoucnosti je např. zajímavý článek o optických kabelech. V knížce se píše i o snahách splnit dávný sen lidstva — navázat spojení s mimozemskými civilizacemi.

V knížce se můžeme přesvědčit, že elektronika není jediná špičková oblast současné elektrotechniky a že další rozvoj elektroniky není jediný úkol stojící před elektrotechnickým výzkumem.

Jiří Mída

Maxwellův traktát o elektřině a magnetizmu

Podobný význam pro elektřinu, magnetismus a optiku jako Newtonova Principia pro mechaniku má dvoudílný *Maxwellův* Traktát o elektřině a magnetismu. Z titulního listu se dovídáme rok i místo vydání, jakož i to, že Maxwell byl magistrem svobodných umění (M. A. čili Magister of Arts), doktorem práv (LL D) a profesorem experimentální (nikoli teoretické) fyziky v Cambridge. A podobně jako *Newtonova* Principia byla dovršením a zobecněním experimentálního díla *Galileiova*, Maxwellovo dílo je paralelou a korunou *Faradayových* Experimental Researches (Experimentální výzkumy). A tak jako velkému *Koperníkovu* dílu De revolutionibus předcházelo elementárnější vysvětlení nových koncepcí (v díle De libris revolutionum Copernici narratio prima, tj. První zpráva o Koperníkových knihách o obězích), velkému dílu Maxwellovu předcházelo jeho vlastní pojednání An elementary Treatise on Electricity (Elementární pojednání o elektřině z r. 1881). A bylo tohoto úvodu skutečně třeba. Německé i francouzské spisy stály ještě dlouho na pozicích překonané fluidové teorie elektrických a magnetických jevů a v Anglii samé největší fyzik *Kelvin* do smrti neuznal koncepce Maxwellovy. Stál tedy vlastně Maxwell (a mrtvý už Faraday) se svými idejemi proti celému vědeckému světu; čestnou výjimkou jsou v tomto ohledu čeští fyzikové — 2. díl *Seydlerovy* Theoretické fysiky stojí na straně Maxwellově a stejně i pozdější naši fyzikové. Konečně berlínská Akademie věd je znepokojena Maxwellovou předpovědí existence elektromagnetických vln a jejich totožnosti se světlem, vypisuje cenu za experimentální důkazy těchto tezí; vítězem je *Hertz* a výsledkem nová fyzika a založení radiotechniky.

Ve svém díle Maxwell poprvé správně objasnil podstatu elektrického a magnetického pole, dokázal jejich neoddělitelnost, podal správné řešení problému podstaty světla a vytvořil matematicky dokonalou teorii natolik produktivní, že je dodnes zdrojem nových faktů v elektrodynamice i v optice.

Vladimír Mališek

47 233

Čo je matematika?

Matematika je prostriedok špeciálne prispôsobený na osvojenie si rôznych abstraktných pojmov a čo sa toho týka, jej moc je neohraničená.

P. Dirac

Matematika je klbko vlny, motanica nití, kde všetky časti matematiky pôsobia navzájom na seba celkom nepredvídateľným spôsobom.

J. A. Dieudonné

Matematika je nástroj pre usudzovanie. V nej sú sústredené výsledky exaktného myslenia mnohých ľudí.

R. Feynman

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(10)

ROČNÍK 64, 1985/86
ČERVEN

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

Nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

MATEMATIKA

Kód BCD s opakováním

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

V článku [2] jste se mohli seznámit se samoopravným kódem, který byl sedmibitový a vznikl z kódu BCD (viz [1]) připojením tří paritních bitů. V tomto článku si ukážeme, že paritní bity nepředstavují jedinou možnost pro sestavování samoopravných kódů. Matematici a konstruktéři strojů pro zpracování informací objevili další principy.

V tabulce 1 je kód BCD; čísla 8, 4, 2, 1 v záhlaví tabulky jsou jeho váhy. Kód v tabulce 2 vznikl z kódu BCD tak, že každý znak se třikrát zopakoval. Např. kódové slovo pro číslici 6 je v kódu BCD

O I I O

a v kódu z tabulky 2

O O O I I I I I I O O O

Kód z tabulky 2 je velmi neúsporný, neboť je dvanáctibitový, přičemž

Tabulka 1

	Kód BCD
d	8 4 2 1
0	O O O O
1	O O O I
2	O O I O
3	O O I I
4	O I O O
5	O I O I
6	O I I O
	O I I I
8	I O O O
9	I O O I

Tabulka 2

	Kód BCD s opakováním			
d	8	4	2	1
0	O O O	O O O	O O O	O O O
1	O O O	O O O	O O O	I I I
2	O O O	O O O	I I I	O O O
3	O O O	O O O	I I I	I I I
4	O O O	I I I	O O O	O O O
5	O O O	I I I	O O O	I I I
6	O O O	I I I	I I I	O O O
7	O O O	I I I	I I I	I I I
8	I I I	O O O	O O O	O O O
9	I I I	O O O	O O O	I I I

každé jeho slovo nese stejnou informaci jako příslušné čtyřbitové kódové slovo kódu BCD.

V kódu z tabulky 2 se jedna chyba v kódovém slově projeví velmi názorně. Např. dvanáctice

$$\text{O O O I O I O O O I I I} \tag{1}$$

není kódovým slovem, neboť pátý znak zleva je chybný, nemá být O, nýbrž I. Jak jsme na chybu přišli? Dvanáctici (1) si stačí rozdělit na čtyři trojice zleva (nebo zprava), a zjistíme, že druhá trojice zleva neobsahuje tři stejné znaky.

Z trojice OOO jednou chybou vznikají trojice

$$\text{IOO, OIO, OOI} \tag{2}$$

a z trojice III jednou chybou vznikají trojice

$$\text{OII, IOI, IIO} \tag{3}$$

Správná trojice se z trojic (2) a (3) nalezne „hlasováním" V trojicích (2) má „většinu" znak O, a proto původní trojice byla OOO. Z obdobného důvodu je třeba každou trojici (3) opravit na trojici III.

Při popisu opravy je úmyslně užito slova „hlasování", aby se naznačilo, že k opravě je možno užít elektronických obvodů, o nichž se psalo např. v článku [3].

V kódových slovech z tabulky 2 lze tedy opravit vždy jednu chybu. Popsanou metodu lze zobecnit. Kdybychom znaky původního kódu BCD psali vedle sebe pětkrát, bylo by možno opravovat nikoli pouze jednu chybu, ale i každé dvě chyby.

Na závěr poznamenejme, že v tomto článku popsaný dvanáctibitový samoopravný kód je zřejmě nevhodný pro praktické aplikace. Vždyť např. z článku [2] známe sedmibitový samoopravný kód, který také umožňuje opravu jedné chyby. Myšlenka opakování znaků v kódovém slově však není zcela neužitečná a lze ji prakticky využít. Blíže se o tom můžete dočíst v knížce [4] v kapitolách 17 a 18.

Cvičení

1. Kolik chyb by bylo možno nejvýše opravit v kódových slovech kódu, který by vznikl z kódu BCD sedminásobným opakováním znaků?
2. Jak by tomu bylo s opravami chyb v případě, že bychom znaky kódu BCD opakovali dvakrát (čtyřikrát)?
3. Lze metody popsané v článku užít pro vytváření samoopravných kódů z dalších kódů popsaných v článku [1], tj. např. z kódu Aikenova?

Lieratura :

[1] Mída J.: Čtyřbitové kódy desítkových číslic, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 2, s. 51—54

[2] Mída J.: O jednom druhu samoopravných kódů, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 9, s. 353—356

[3] Mráz V.: Logické obvody s členy NAND, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 64, 1985/86, č. 4, s. 137–145
[4] Aršinov M. N.—Sadovskij L. E.: Kody i matematika, bibliotečka „Kvant", svazek 30, Nauka, Moskva 1983

Nejmenší ciferný součet

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

Jestliže jste někdy sledovali televizní soutěžní pořad Buď — anebo, víte, že při výběru soutěžících hraje podstatnou roli číslo, kterému budeme v tomto článku říkat nejmenší ciferný součet; dospějeme k němu následujícím způsobem. Představme si, že je dáno celé kladné číslo a a že postupně utvoříme ciferný součet a_1 čísla a, ciferný součet a_2 čísla a_1, ciferný součet a_3 čísla a_2 atd. Je zřejmé, že po konečném počtu kroků dojdeme k jednocifernému číslu; toto jednociferné číslo nazveme nejmenším ciferným součtem čísla a a označíme je cif a. Je tedy např. cif $568 = 1$, cif $783 = 9$ a cif $6 = 6$, neboť postupně tvořenými cifernými součty daných čísel vzniknou tyto konečné posloupnosti:

$$568,\ 19,\ 10,\ 1; \quad 783,\ 18,\ 9; \quad 6,\ 6$$

Prozkoumáme, jak závisí nejmenší ciferný součet součtu, resp. součinu, daných celých kladných čísel a, b na jejich nejmenším ciferném součtu, tj. v jakém vztahu jsou čísla cif $(a + b)$ resp. cif (ab) a čísla cif a, cif b.

Připomeňme si nejprve známou větu (viz např. 14. svazek Školy mladých matematiků *O dělitelnosti čísel celých*): Dělíme-li dané číslo a jeho ciferný součet devíti, dostaneme v obou případech stejný zbytek. Podle této věty dávají stejný zbytek při dělení devíti nejen dané číslo a a jeho ciferný součet a_1, ale i číslo a_1 a jeho ciferný součet a_2, dále pak také číslo a_2 a jeho ciferný součet a_3 atd. Odtud vyplývá, že každé celé kladné číslo a a jeho nejmenší ciferný součet cif a dávají při dělení devíti týž zbytek. Protože libovolná celá čísla mají při dělení devíti týž zbytek právě tehdy, když číslo devět dělí jejich rozdíl, platí pro každé celé kladné číslo a: $9 \mid (a - \text{cif } a)$. Pro libovolná celá kladná čísla a, b je tedy

$$9 \mid (a - \text{cif}\, a)\,, \quad 9 \mid (b - \text{cif}\, b)\,,$$

takže číslo devět dělí i součet $(a - \text{cif}\, a) + (b - \text{cif}\, b)$, tj.

$$9 \mid [(a + b) - (\text{cif}\, a + \text{cif}\, b)]\,,$$

což znamená, že čísla $a + b$, cif a + cif b dávají při dělení devíti týž zbytek, dejme tomu r. Má tedy při dělení devíti zbytek r i číslo cif $(a + b)$ — neboť má stejný zbytek jako číslo $a + b$ — a také číslo cif (cif a + cif b) — neboť má stejný zbytek jako číslo cif a + cif b. Vzhledem k tomu, že cif $(a + b)$, cif (cif a + cif b) jsou kladná jednociferná čísla, která při dělení devíti dávají týž zbytek, platí

$$\operatorname{cif}(a + b) = \operatorname{cif}(\operatorname{cif} a + \operatorname{cif} b) .$$

Podobně odvodíme i vztah pro cif (ab). Z toho, že

$$9 \mid (a - \operatorname{cif} a) , \quad 9 \mid (b - \operatorname{cif} b)$$

plyne, že také

$$9 \mid [b(a - \operatorname{cif} a)] , \quad 9 \mid [(b - \operatorname{cif} b) \operatorname{cif} a] ,$$

a proto číslo devět dělí i součet $b(a - \operatorname{cif} a) + (b - \operatorname{cif} b) \operatorname{cif} a$, tj.

$$9 \mid (ab - \operatorname{cif} a \,.\, \operatorname{cif} b)$$

Dávají tedy při dělení devíti čísla ab, cif a . cif b týž zbytek, takže tentýž zbytek dává i každé z čísel cif (ab), cif (cif a . cif b). Protože cif (ab), cif (cif a . cif$b$) jsou kladná jednociferná čísla, která při dělení devíti mají týž zbytek, platí

$$\operatorname{cif}(ab) = \operatorname{cif}(\operatorname{cif} a \,.\, \operatorname{cif} b) .$$

Ilustrujme získané výsledky na namátkově zvolených číslech, třeba $a = 783$, $b = 6$:

$$\operatorname{cif}(783 + 6) = \operatorname{cif} 789 = 6 , \ \operatorname{cif}(\operatorname{cif} 783 + \operatorname{cif} 6) = \operatorname{cif}(9 + 6) = \\ = \operatorname{cif} 15 = 6 .$$

$$\operatorname{cif}(783 \,.\, 6) = \operatorname{cif} 4698 = 9, \ \operatorname{cif}(\operatorname{cif} 783 \,.\, \operatorname{cif} 6) = \operatorname{cif}(9 \,.\, 6) = \\ = \operatorname{cif} 54 = 9 .$$

Odvozené vztahy lze zobecnit; ukažme např., že pro libovolná celá kladná čísla a, b, c platí

$$\operatorname{cif}(abc) = \operatorname{cif}(\operatorname{cif} a \,.\, \operatorname{cif} b \,.\, \operatorname{cif} c)$$

Užitím vzorce pro cif (ab) dostaneme:

$$\operatorname{cif}(abc) = \operatorname{cif}((ab)c) = \operatorname{cif}(\operatorname{cif}(ab) \,.\, \operatorname{cif} c) = \\ = \operatorname{cif}(\operatorname{cif}(\operatorname{cif} a \,.\, \operatorname{cif} b) \operatorname{cif} c) = \operatorname{cif}[\operatorname{cif}(\operatorname{cif} a \,.\, \operatorname{cif} b) \operatorname{cif}(\operatorname{cif} c)] ,$$

neboť platí cif (cif c) = cif c;
označíme-li nyní

$$x = \operatorname{cif} a \,.\, \operatorname{cif} b , \quad y = \operatorname{cif} c ,$$

dostáváme

$$\operatorname{cif}[\operatorname{cif}(\operatorname{cif} a \,.\, \operatorname{cif} b) \operatorname{cif}(\operatorname{cif} c)] = \operatorname{cif}(\operatorname{cif} x \,.\, \operatorname{cif} y) = \operatorname{cif}(xy) = \\ = \operatorname{cif}(\operatorname{cif} a \,.\, \operatorname{cif} b \,.\, \operatorname{cif} c) ,$$

což jsme chtěli dokázat.

Závěrem ukážeme aplikaci těchto vlastností nejmenšího ciferného součtu v úloze, kterou profesor Ypsilon navrhl do matematické varianty soutěže Buď — anebo, a to jako otázku z algebry za pět set:

Čísel, jejichž ciferný součet je 1985, je nekonečně mnoho. Je aspoň jedno z nich třetí mocninou přirozeného čísla?

Existuje-li takovéto přirozené číslo n, pak platí rovnost

$$\operatorname{cif} n^3 = \operatorname{cif}(\operatorname{cif}^3 n) ,$$

kterou dostaneme ze vztahu cif $(abc) = \text{cif}\,(\text{cif}\, a \,.\, \text{cif}\, b \;\; \text{cif}\, c)$, položíme-li $a = b = c = n$; z podmínek úlohy přitom vyplývá, že je

$$\text{cif}\, n^3 = \text{cif}\, 1985 = 5\,.$$

Protože cif n je kladné jednociferné číslo, může být $\text{cif}^3\, n$ rovno pouze některému z čísel 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, jejichž nejmenší ciferný součet nabývá jen těchto tří hodnot: 1, 8, 9. Pro číslo n je tedy $\text{cif}\,(\text{cif}^3\, n) \in \{1, 8. 9\}$, což znamená, že je

$$\text{cif}\,(\text{cif}^3\, n) \neq 5\,,$$

tj.

$$\text{cif}\,(\text{cif}^3\, n) \neq \text{cif}\, n^3$$

Máme tak tento výsledek: Přirozené číslo, jehož třetí mocnina má ciferný součet rovný číslu 1985, neexistuje.

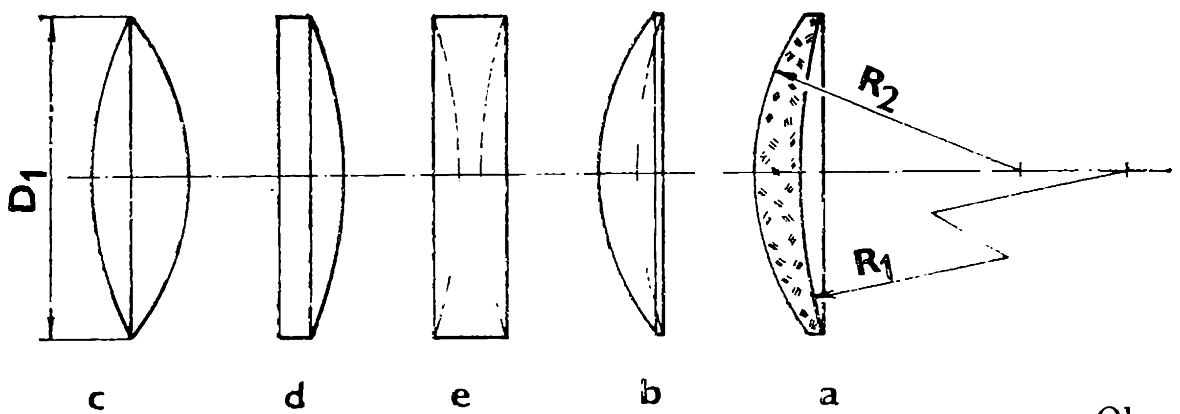
Chcete-li, můžete se pokusit ukázat, že toto tvrzení platí i v případě, že jde o druhou mocninu přirozeného čísla.

Technické užití jednoho vzorce

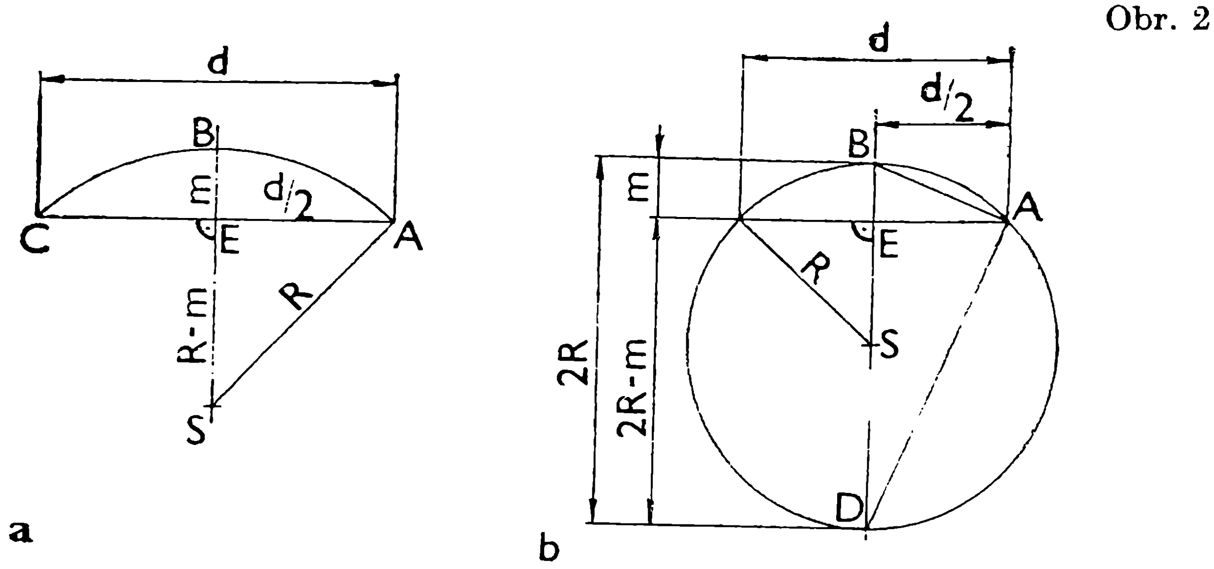
Doc. dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc. UK Praha

Při řešení mnohých technických úloh se neobejdeme bez matematických vědomostí. V tomto článku budeme sledovat vzorec, k němuž nás přivede jistá technická tematika. Jde o známou Pythagorovu větu, popř o jednu z Euklidových vět, jak dále uvidíme. Ukážeme na užití vzorce v různých technických podmínkách, popř. vzorec ještě upravíme podle podmínek úlohy. K tomu v technické praxi často dochází.

Začneme úlohou z rozměrové techniky. Máme dost přesně stanovit oba poloměry kulových ploch optické konvex-konkávní čočky, jejíž osový řez je částečně okótován na obr. 1a; je to rozptylka a o poloměrech zaoblení platí $R_1 > R_2$. Stejným způsobem lze stanovit kulové zaoblení spojené konvex-konkávní čočky z obr. 1b nebo i čoček z obr. 1c,



Obr. 1



d, e (po řadě to jsou konvex-konvexní spojka, plan-konvexní spojka, konkáv-konkávní rozptylka).

Popíšeme nepřímou metodu měření poloměru R kulového zaoblení, neboť nebudeme měřit přímo poloměr R, ale vypočteme ho z jiných rozměrů. Stanovíme vzorec (rovnici), kde R bude neznámou, a to podle situace znázorněné na obr. 2a. Z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník SEA s pravým úhlem při vrcholu E plyne

$$R^2 = (R - m)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

po jednoduché úpravě má tento vzorec tvar

$$8\,Rm - 4\,m^2 - d^2 = 0 \qquad (1)$$

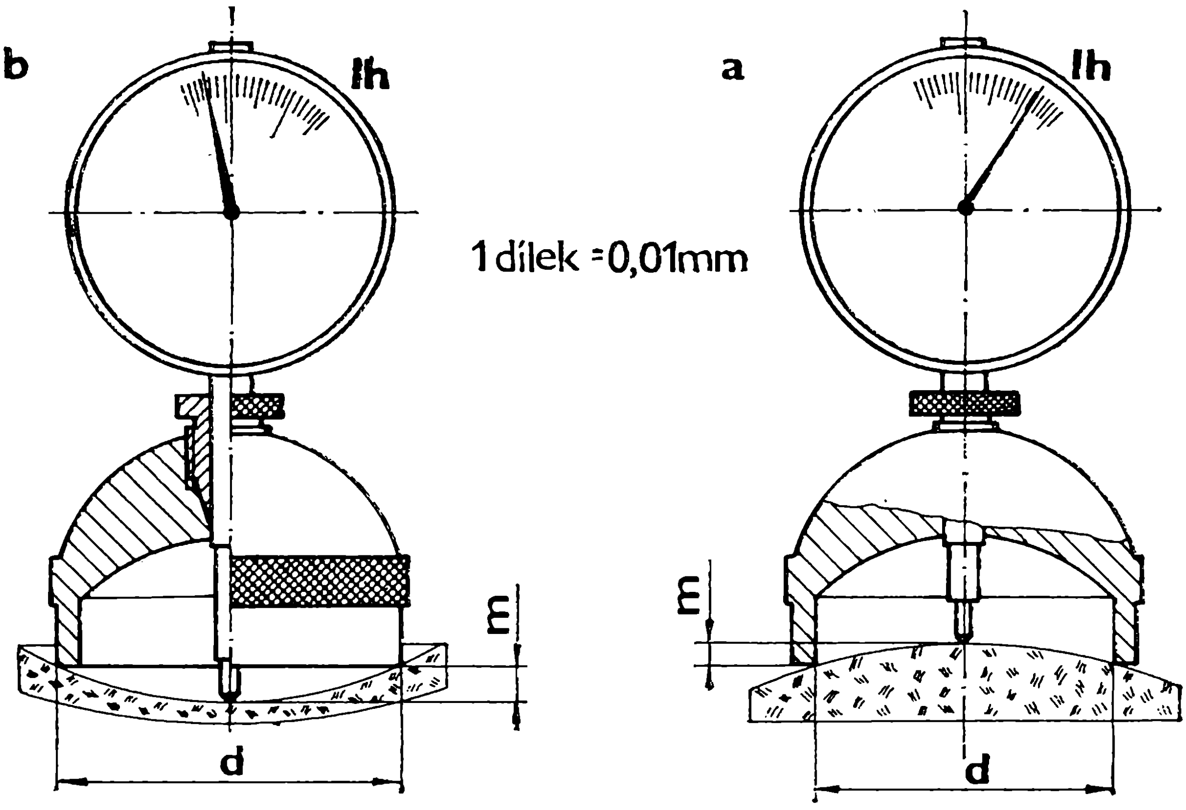
K vzorci (1) dojdeme také tak, že zapíšeme Euklidovu větu o výšce AE pro pravoúhlý trojúhelník DAB s pravým úhlem při vrcholu A — viz obr. 2 b. Platí

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = (2\,R - m)m\,;$$

po snadné úpravě opět dostaneme vzorec (1). Chápeme-li (1) jako rovnici o neznámé R, pak pro tuto neznámou platí

$$R = \frac{4\,m^2 + d^2}{8\,m}\,. \qquad (2)$$

Vraťme se k naší technické úloze. Rozměr m změříme sférometrem, jehož měřicí hrana mající tvar kružnice má průměr d — viz obr. 3. Rozměr m přečteme na indikátorových hodinkách Ih, kde jeden dílek stupnice odpovídá posunu měřícího dotyku o 0,01 mm. Čtenáře snad nepřekvapí, že průměr d přesné měřicí hrany sférometru pro konkávní (vydutou) část čočky (obr. 2a) i pro konvexní (vypuklou) část čočky (obr. 2b) je okótován stejně. Do vzorce (2) ovšem dosazujeme hodnotu d, kterou při měření použijeme.



Obr. 3

Na obr. 3 vidíme použití sférometru a) při měření konvexní strany čočky s užitím menšího průměru d, b) při měření konkávní strany čočky s užitím většího průměru d sférometru.

Úloha. Nechť naměřené hodnoty jsou a) $m = (3{,}63 \pm 0{,}005)$ mm při $d = (45 \pm 0{,}002)$ mm a b) $m = (2{,}17 \pm 0{,}005)$ mm při $d = (40 \pm 0{,}002)$ mm. Po dosazení naměřených hodnot do vzorce (2) je

$$\text{a)}\ R_2 = \frac{4\ \ 3{,}63^2 + 45^2}{8\ \ 3{,}63} = 71{,}546404\ \text{(mm), přesněji}$$

$$R_2 = (71{,}5 \pm 0{,}1)\ \text{mm},$$

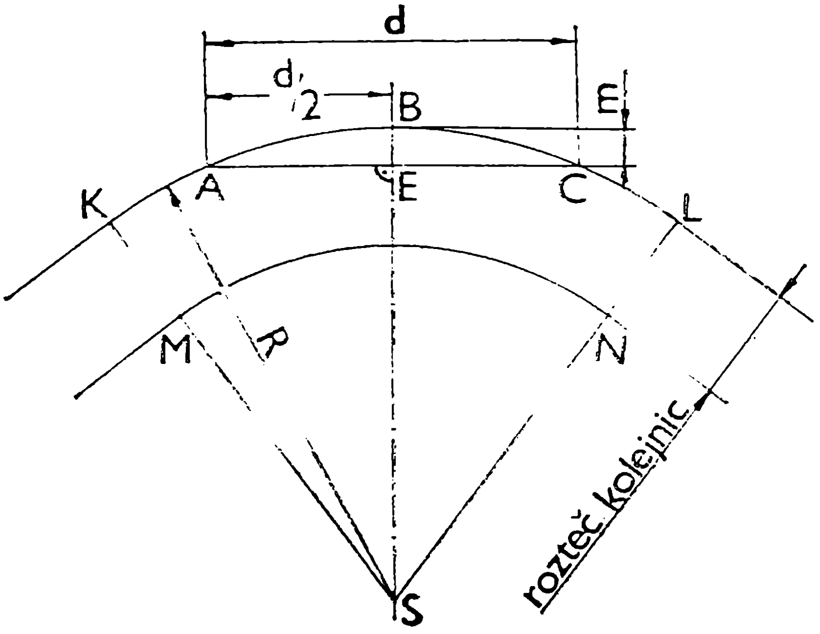
$$\text{b)}\ R_1 = \frac{4\,.\,2{,}17^2 + 40^2}{8\,.\,2{,}17} = 117{,}73246\ \text{(mm), přesněji}$$

$$R_1 = (117{,}7 \pm 0{,}2)\ \text{mm}.$$

K oběma hodnotám poloměrů R_2, R_1 poznamenejme, že byly vypočteny z rozměrů zatížených chybami (způsobených výrobní tolerancí), a proto s nimi počítáme jako s čísly neúplnými.[1])

[1]) Podrobné poučení čtenář najde v článku *Přesnost výpočtů s neúplnými čísly*, který byl uveřejněn v RMF roč. 57 (1978/79) č. 7, str. 296 a n. Absolutní chybu poloměru R označme α_R a obdobně i absolutní chyby dalších rozměrů. Pak platí

$$\alpha_R = \frac{\alpha_m}{2} + \frac{d\,.\,\alpha_d}{4m} + \frac{\alpha m\,.\,d^2}{8m^2}\,.$$



Obr. 4

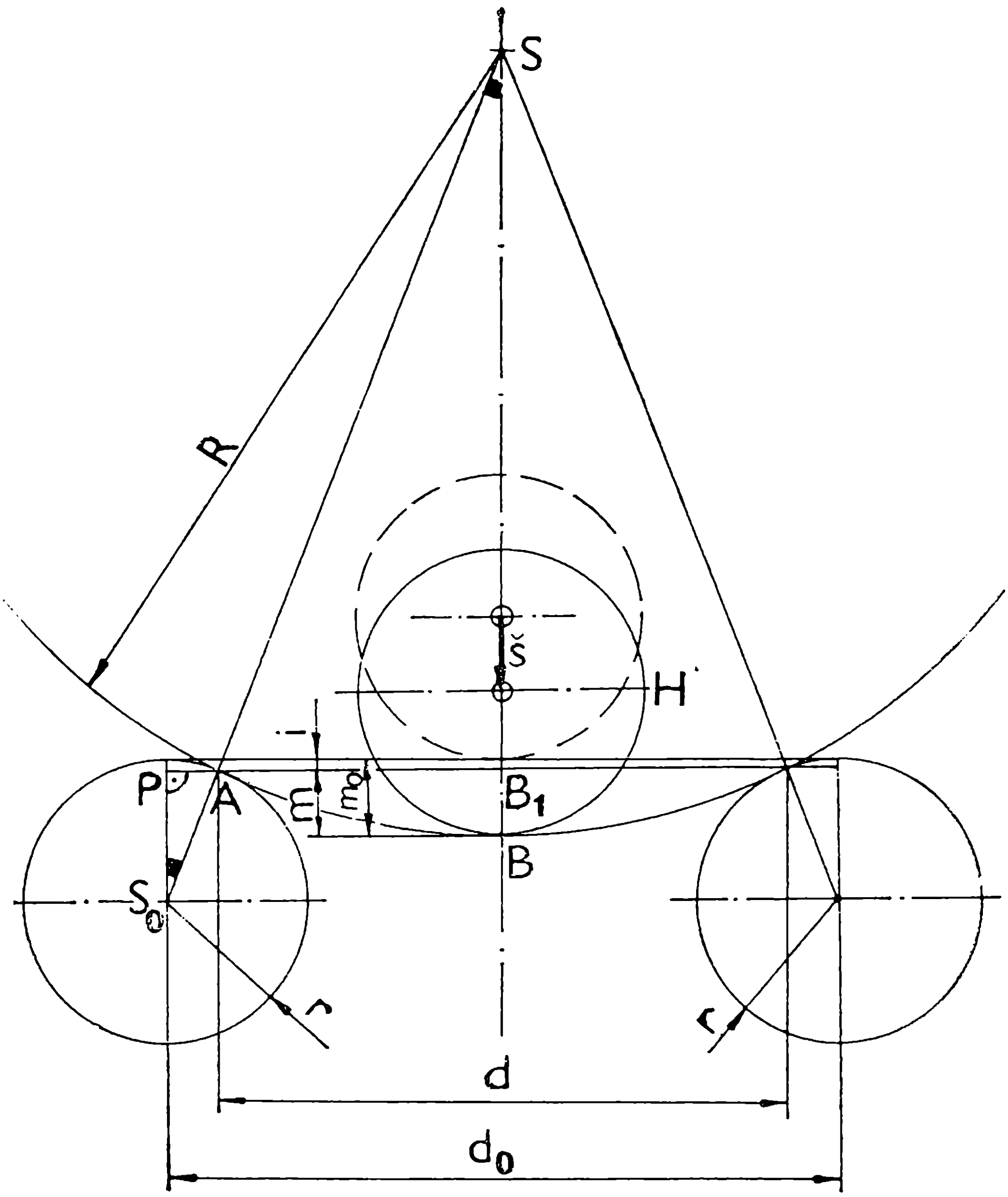
Uvedenou úlohu z optiky doplníme úlohou z oboru kolejové dopravy. Mějme v kolejišti na zabudovaných kolejnicích změřit poloměr R jejich zakřivení. I zde je možné využít obr. 2 a; situaci zobrazuje obr. 4, kde oblouk zakřivení kolejnice je $\overset{\frown}{KBL}$. Protože poloměr zakřivení R je dost velký, je třeba místo přímého jeho změření (např. radiusovou šablonou) přistoupit k výpočtu R. Je zřejmé, že úloha nepřináší nic nového. Mezi zvolené body A, C oblouku $\overset{\frown}{KBL}$ kolejnice napneme tenký drát délky d (tětiva kružnice) o středu E úsečky AC, odměříme vzdálenost $m = |BE|$. Nyní již užijeme vzorce (2) k výpočtu poloměru R zakřivení kolejnice.

Při volbě $d = 5$ metrů bylo změřeno $m = 15{,}6$ mm. Měření je nutno provést několikrát a na různých úsecích měřeného oblouku kolejnic. Pak se do vzorce (2) dosazuje aritmetický průměr změřených hodnot m. Po dosazení do (2) v cm je vypočtený poloměr zakřivení kolejnice $R = 200$ m, jak plyne z připojeného výpočtu:

$$R = \frac{4\ 1{,}56^2 + 500^2}{8\,.\,1{,}56} = 20\,033\ (\mathrm{cm}) \doteq 200\ (\mathrm{m})$$

Poloměr druhé části páru kolejnic je ovšem nutno zmenšit o rozteč kolejnic, jestliže jsme měřili větší poloměr.

Zajímavější situace vzniká při ohýbání kolejnice do tvaru předepsaného oblouku o poloměru R. Princip technického zařízení, na kterém se ohýbání provádí je na obr. 5. Mezi dvěma rolnami (kladkami) o poloměru r, jejichž středy mají stálou vzdálenost d_0, je proválcovávána kolejnice, a to rolnou H, jejíž pozvolný rotační pohyb je odvozen od motoru. Postupným posunem hnací rolny H ve směru šipky $š$ o hodnotu m_0 se dosáhne žádaného ohnutí kolejnice. Z obr. 5 vidíme, že úlohu vyřešíme,



Obr. 5

když na základě daných rozměrů R, d_o a r vypočteme velikost posuvu m_o hnací rolny H. Zřejmě platí

$$m_o = m + \mathrm{i} \tag{3}$$

Ze vztahu (1) je

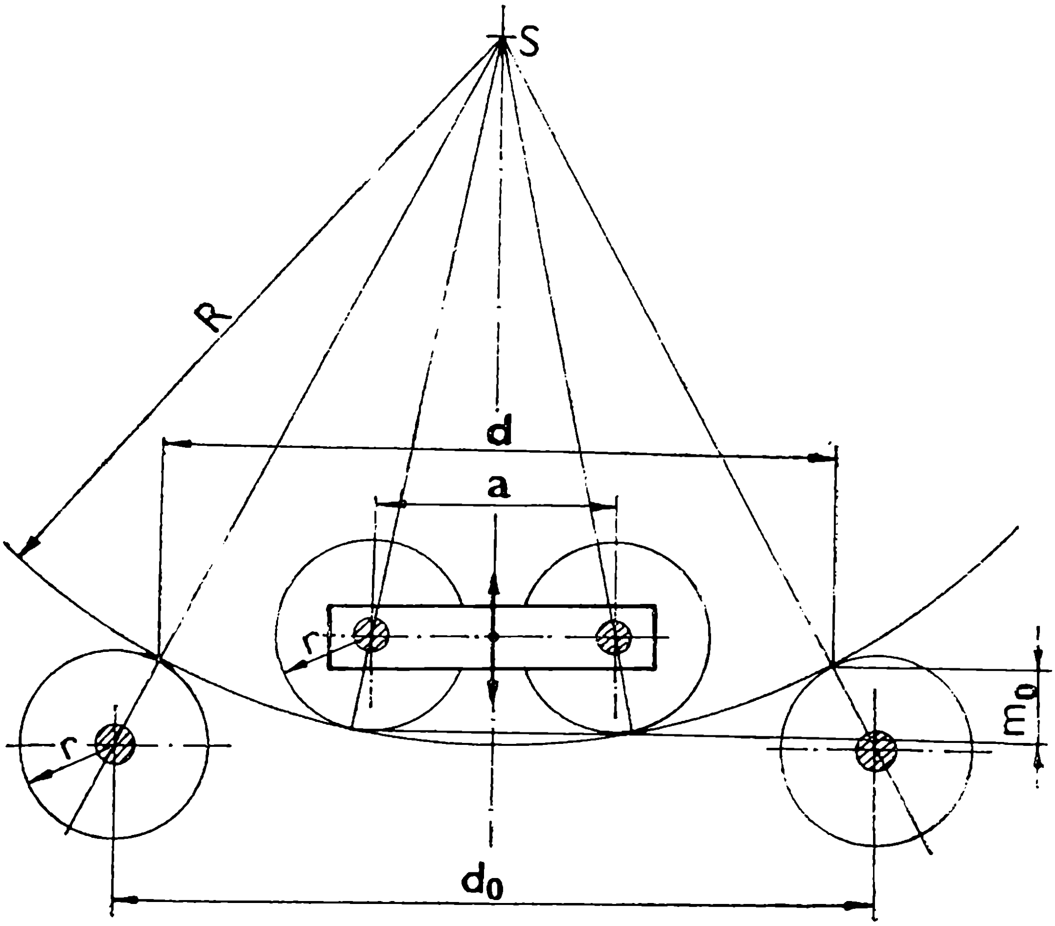
$$m = R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - d^2} \tag{4}$$

Eliminujme v tomto vzorci d zavedením hodnoty d_o takto: Zřejmě platí $\triangle\, S_oPA \sim \triangle\, SB_1A$, a proto

$$\frac{d_o - d}{2} \quad r = \frac{d}{2} : R\,,$$

z toho je

$$d = \frac{R \quad d_o}{R + r}$$



Obr. 6

a po dosazení za d do (4) je

$$m = R - \frac{1}{2}\sqrt{4\,R^2 - \left(\frac{R\,d_o}{R + r}\right)^2}$$

po jednoduché úpravě je

$$m = R - \frac{R}{2(R + r)}\sqrt{4(R + r)^2 - d_o{}^2} \tag{5}$$

Hodnotu i vypočteme opět z podobných trojúhelníků

$$\triangle\, S_0PA \sim \triangle\, SB_1A$$

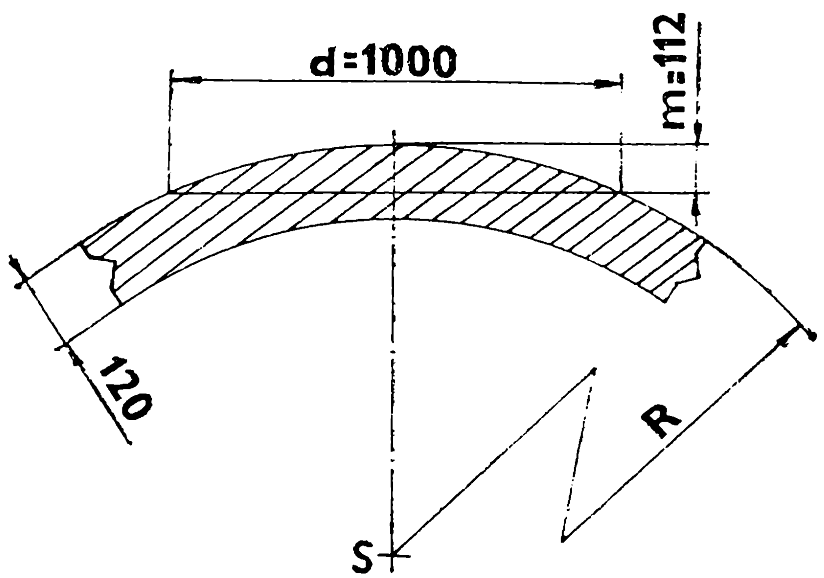
$$\frac{r - i}{r} = \frac{R - m}{R},$$

z čehož je

$$i = \frac{m\,.\,r}{R}. \tag{6}$$

Za m dosadíme pravou stranu z (5) a dostáváme

$$i = \left(R - \frac{R}{2(R + m)}\sqrt{4(R + r)^2 - d_o^2}\right)\frac{r}{R}$$



Obr. 7

a po snadné úpravě je

$$i = r - \frac{r}{2(R+r)} \sqrt{4(R+r)^2 - d_o^2}$$

Po dosazení pravých stran z (5) a z tohoto posledního vzorce do (3) máme

$$m_o = R - \frac{R}{2(R+r)} \sqrt{4(R+r)^2 - d_o^2} + r -$$

$$- \frac{r}{2(R+r)} \sqrt{4(R+r)^2 - d_o^2}$$

a po úpravě, jejíž provedení čtenáři vřele doporučujeme, konečně dostáváme

$$m_o = R + r - \frac{1}{2} \sqrt{4(R+r)^2 - d_o^2} \tag{7}$$

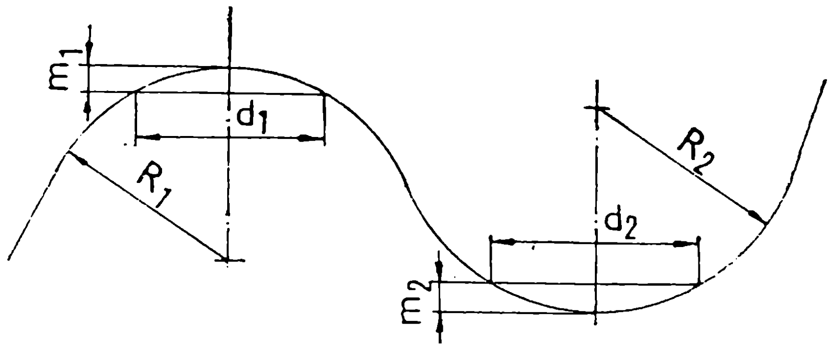
Úloha: Na zařízení z obr. 5 se má ohnout část kolejnice do tvaru oblouku o poloměru $R = 10$ m. Rolny mají poloměry $r = 11$ cm a vzdálenost jejich os $d_o = 6$ dm. Po dosazení těchto hodnot (v cm) do vzorce (7) dostaneme

$$m_o = 1000 + 11 - 0{,}5 \sqrt{4 \,.\, (1000 + 11)^2 - 3600} = 0{,}4453 \text{ (cm)} =$$
$$= 4{,}53 \text{ mm}.$$

Hnací rolnu H (z obr. 5) je třeba posunout o 4,53 mm. S ohledem na pružnost ocelové kolejnice toto posunutí bude trošku větší než vypočtená hodnota 4,53 mm.

Při neuvažování složitějších geometrických poměrů zařízení z obr. 5 a při výpočtu velikosti posunutí rolny H jen ze vzorce (4) dostáváme hodnotu posunutí

$$m = 1000 - 0{,}5 \sqrt{4 \,.\, 1000^2 - 60^2} = 0{,}45015 \text{ (cm)} = 4{,}5015 \text{ (mm)}.$$



Obr. 8

Nepatrný rozdíl vede k tomu, že při velkých poloměrech R zaoblení kolejnic vystačíme se vzorcem (4), při malých poloměrech R užijeme vzorce (7).

Tento závěr je zvlášť opodstatněn v případě malých hodnot poloměrů r, popř. i větších vzdáleností d_0 středů rolen. Technické důvody však brání příliš velké hodnotě d_0, popř. k zlepšení podmínek při ohýbání kolejnic bychom mohli uvažovat o zdvojení rolny H jak ukazuje obr. 6. Pilný čtenář se pokusí o řešení geometrických vztahů pro situaci na tomto obrázku; zjistí, že výpočet posunutí m_0 je ještě složitější.

Cvičení:

1. Jestliže $r = 0$, pak ovšem $d_0 = d$. Po dosazení těchto hodnot do vzorce (7) a po snadné úpravě dostaneme vzorec (4), v němž $m_0 = m$. Proveďte.
2. Jak velký je poloměr zaoblení dvojvypuklé (konvex-konvexní) čočky, jestliže při $d = (65 \pm 0{,}02)$ mm byla naměřena hodnota $m = (5{,}245 \pm 0{,}003)$ mm?
3. Na betonovém segmentu tvaru kruhového oblouku o vnějším poloměru R a tloušťce 120 mm byla změřena míra $m = 112$ mm při délce tětivy $d = 1000$ mm (viz obr. 7). Vypočtěte velikost poloměru R.
4. Vypočtěte, který z poloměrů R_1, R_2 z obr. 8 je větší, jestliže známe rozměry $d_1 = 15{,}6$ m, $d_2 = 13{,}1$ m a $m_1 = 30$ cm, $m_2 = 28{,}5$ cm.

Ako rozlosovať turnaj

RNDr. ŠTEFAN PORUBSKÝ, CSc., MÚ SAV Bratislava

Často sa stáva, že potrebujeme rozlosovať turnaj, ktorý sa hrá jednokolove. Môžu to byť turnaje šachové, alebo triedne turnaje v rozmanitých druhoch športu. Športové organizácie z času na čas vydávajú brožúrky, ktoré obsahujú tabuľky pre rozlosovanie turnajov pre rozmanitý počet účastníkov. Takéto tabuľky sú často nedostupné, a preto sa často zostavujú „na kolene“, čo je pomerne zdĺhavé, najmä ak ide o turnaje s väčším počtom účastníkov. Pritom existuje veľmi jednoduchá metóda na rozlosovanie jednokolových turnajov, s ktorou by sme vás radi v nasledujúcich riadkoch oboznámili. Je veľmi jednoduchá a je založená na teórii kongruencií. Pre tých, ktorí sa s týmto pojmom nestretli, najprv niekoľko všeobecných informácií.

Pojem kongruencie zaviedol do matematiky *Carl Friedrich Gauss* (1777—1855) vo svojej prvej knihe „*Disquisitiones Arithmeticae*“, ktorú napísal vo veku 19 až 21 rokov. V tomto diele položil základy teórie čísiel a v podstate určil smer jej vývoja takmer dodnes. Do Gaussa bola teória čísiel v podstate zbierkou viac menej pekných a zaujímavých výsledkov, z ktorých mnohé boli celkom iste hlboké, ale boli predsa v podstate osamotené. V Disquisitiones Arithmeticae pre veľkú väčšinu týchto výsledkov boli odhalené vzájomné súvislosti. Gaussove výsledky si zasluhujú o to väčší obdiv, že všetky tieto výsledky dosiahol sám bez akéhokoľvek vonkajšieho vplyvu.

Teóriu kongruencií by sme mohli nazvať symbolickým jazykom teórie deliteľnosti. Gauss zaviedol tento pojem hneď na začiatku Disquisitiones Arithmeticae a odvtedy sa pojem kongruencie stal integrálnou súčasťou matematiky.

Hovoríme, že dve celé čísla x, y sú kongruentné modulo N, kde N e obyčajne prirodzené číslo, ak N delí rozdiel $x - y$. Gauss zaviedol označenie

$$x \equiv y \pmod{N},$$

ktoré sa používa dodnes. Pravidlá pre počítanie s kongruentnými číslami veľmi pripomínajú pravidlá pre počítanie so znamienkom rovnosti " $=$ " Napríklad, ak

$$x \equiv y \pmod{N} \quad \text{a tiež} \quad y \equiv t \pmod{N},$$

tak aj

$$x \equiv t \pmod{N}$$

Ďalej, ak

$$x \equiv y \pmod{N}$$
$$t \equiv z \pmod{N}$$

tak

$$x \pm t \equiv y \pm z \pmod{N},$$

alebo

$$kx \equiv ky \pmod{N}$$

pre každé celé číslo k. Ale pozor, na rozdiel od rovnosti v kongruencii vo všeobecnosti nemôžeme krátiť. Presnejšie, ak

$$kx \equiv ky \pmod{N},$$

tak odtiaľ nevyplýva, že aj

$$x \equiv y \pmod{N}$$

Napríklad, zrejme

$$10 \quad 1 = 10 \,.\, 2 \pmod{10},$$

ale

$$1 \neq 2 \pmod{10}$$

Pre krátenie platí nasledujúce pravidlo: Ak čísla k, N sú nesúdeliteľné celé čísla, tak z kongruencie

$$kx \equiv ky \pmod N$$

vyplýva kongruencia

$$x \equiv y \pmod N$$

Pokúste sa sami dokázať toto jednoduché tvrdenie. Našim cieľom nie je uviesť kompletný zoznam pravidiel pre počítanie s kongruenciami, a preto odkazujeme čitateľa na knižku *A. Apfelbecka* „Kongruence", ktorá vyšla ako zv. 21 v edícii Škola mladých matematikov v r. 1968, alebo na inú knižku z teórie čísiel.

Predpokladajme, že máme N účastníkov turnaja. V prípade, že N by bolo nepárne, tak očividne nemôžeme všetkých účastníkov turnaja rozdeliť do dvojíc súperov. Preto pridáme jedného fiktívneho účastníka. V turnaji potom ten účastník, ktorého súper v danom kole je tento fiktívny účastník, v tomto kole „pauzuje". Takto bez ujmy na všeobecnosti môžeme předpokladať, že N je párne.

Nech

$$U_1, U_2, \quad , U_N,$$

kde N je párne, sú všetci účastníci nášho turnaja. Ako sme už povedali, náš turnaj sa má hrať jednokolove, t.j. každá dvojica súperov sa stretne len raz, a preto potrebujeme rozlosovať celkove len $N - 1$ kôl.

Pristúpme k pravidlu rozlosovania. Uvažujme najprv len prvých $N - 1$ účastníkov.

$$U_1, U_2, \qquad U_{N-1} \tag{1}$$

Účastníka U_N si ponecháme ako „rezervu" pre neskoršie účely. Pravidlo, ktorým určíme súpera $U_{y_{x,k}}$ účastníka U_x, pre $x = 1, 2, \quad , N - 1$, v k-tom kole je dané splnením kongruencie

$$y_{x,k} \equiv k - x \pmod{N - 1} \tag{2}$$

To, že k danému U_x spomedzi $U_1, \quad , U_{N-1}$ vždy nájdeme medzi $U_1, \quad , U_{N-1}$ takého účastníka $U_{y_{x,k}}$, ktorý túto kongruenciu (2) spĺňa, vyplýva z toho, že každé celé číslo je kongruentné modulo $N - 1$ s (práve) jedným číslom spomedzi čísiel $1, 2, \ldots, N - 1$.

Okamžite tiež vidíme, že v tom istom kole (t.j. pre pevné k) sú rôznym účastníkom priradení rôzni súperi. Keby tomu tak nebolo, tak by existovali rôzne x, t v množine $\{1, 2, \quad , N - 1\}$, pre ktoré $y_{x,k} = y_{t,k}$. Lenže táto rovnosť implikuje kongruenciu

$$k - x \equiv k - t \pmod{N - 1}$$

Táto zase implikuje kongruenciu

$$x \equiv t \pmod{N - 1},$$

čo nie je možné, lebo v množine $\{1, 2, \ldots, N - 1\}$ neexistujú dve rôzne navzájom kongruentné čísla modulo $N - 1$.

Ak kongruenciu (2) prepíšeme do tvaru

$$x + y_{x,k} \equiv k \pmod{N-1},$$

tak vidíme, že v k-tom kole, ak $U_{y_{x,k}}$ je vylosovaným súperom pre U_x, tak aj naopak U_x bude vylosovaným súperom pre $U_{y_{x,k}}$, čím je splnená podmienka jednokolovosti nášho turnaja.

Komplikácia vznikne, ak si uvedomíme, že môže vzniknúť situácia, v ktorej

$$y_{x,k} = x, \tag{3}$$

t.j. že účastník U_x by musel hrať sám so sebou, čo je absurdné. A práve pre túto okolnosť sme si nechali účastníka U_N v rezerve. Ak vznikne situácia, že platí (3), tak v k-tom kole za súpera účastníka U_x vezmeme účastníka U_N. Uvážme, že v každom kole môže takáto situácia vzniknúť najviac jedenkrát. Naozaj, z (2) pre tento prípad dostaneme, že platí

$$2x \equiv k \pmod{N-1}.$$

Keby existovalo aj ďalšie $t \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$, pre ktoré tiež

$$2t \equiv k \pmod{N-1},$$

tak porovnaním posledných dvoch kongruencií okamžite dostaneme podmienku

$$2x \equiv 2t \pmod{N-1}$$

Vzhľadom na to, že $N-1$ je nepárne, môžeme v poslednej kongruencii krátiť číslom 2, čím dostaneme

$$x \equiv t \pmod{N-1}.$$

Vieme však, že v množine $\{1, 2, \ldots, N-1\}$ neexistujú dve rôzne navzájom kongruentné čísla modulo $N-1$, a preto v každom kole existuje najviac jeden účastník U_x, pre ktorého platí (3). To, že takýto naozaj existuje sa presvedčíme dosadením čísiel

$$x = \frac{k}{2}, \text{ ak } k \text{ je párne;}$$

$$x = \frac{k + N - 1}{2}, \text{ ak } k \text{ je nepárne.}$$

Posledné, čo potrebujem dokázať, je, že každý účastník sa postupne stretne s každým zo zvyšných súperov. Uvážte, že k tomu nám stačí ukázať, že so žiadnym súperom sa nestretne dvakrát (prečo?).

Rozlišujme dva prípady. Najprv vezmime účastníka U_N. Podľa pravidla nášho rozlosovania sa U_N v k-tom kole stretne s tým účastníkom U_{x_0}, pre ktorého platí

$$2x_0 \equiv k \pmod{N-1}.$$

V s-tom kole zase s tým U_{t_0}, pre ktorého platí

$$2t_0 \equiv s \pmod{N-1}.$$

Obr. 1

kolo	účastník U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
1	U_5	U_4	$\times$	U_2	U_1
2	$\times$	U_5	U_4	U_3	U_2
3	U_2	U_1	U_5	$\times$	U_3
4	U_3	$\times$	U_1	U_5	U_4

Keby platilo $U_{t_0} = U_{s_0}$, tak dostaneme

$$2t_0 \equiv 2s_0 \equiv s \equiv k \pmod{N-1}$$

Odtiaľ plynie $s = k$ (prečo?), a teda naozaj U_N sa nestretne so žiadnym súperom dvakrát.

Vezmime teraz niektorého účastníka U_x spomedzi (1). Tento U_x sa v kole k_0, pre ktoré platí

$$k_0 \equiv 2x \pmod{N-1},$$

stretne s účastníkom U_N, pričom vieme, že v žiadnom inom kole sa s ním už nestretne. Uvažujme ďalej. Keby sa U_x v dvoch kolách, povedzme r-tom a s-tom, kde $r \neq k_0$ a $s \neq k_0$ stretol s tým istým účastníkom U_t tak z (2) dostaneme

$$t \equiv r - x \pmod{N-1},$$
$$t \equiv s - x \pmod{N-1}$$

Z týchto dvoch kongruencií okamžite vyplýva, že

$$r \equiv s \pmod{N-1}$$

Odtiaľ zase, že $r = s$, čím je dokázané, že aj žiadny úča stník spomedz (1) sa nestretne so žiadnym súperom dvakrát. Tým sme sa úplne presvedčili o korektnosti predloženého spôsobu rozlosovania turnaja. Napríklad, pre piatich účastníkov tabuľka turnaja rozlosovaného týmto spôsobom vyzerá tak, ako je to uvedené na obrázku 1, pričom krížik $\times$ znamená, že tento účastník v tomto kole nehrá.

Řešení křížovky ze str. 424

1	9	6	8
9	8	8	3
7	7	4	4
5	8	5	3

7. 11. 1968

FYZIKA

O náboji v elektrodynamike

IVAN PARULEK, VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš
ALENA VODILOVÁ, VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš

Termíny hmota, interakcia, čas, hmotnosť, sila, náboj a energia sú základnými pojmami v súčasnej fyzike. Takéto redukovanie prírody na fundamenty zodpovedá obvyklému chápaniu reality človekom. Existuje však aj iný prístup, ktorý vychádza z názoru, že v prírode nie sú fundamenty [1]. Toto hľadisko (hľadisko bootstrapu) sa snaží chápať prírodu v rámci selfkonzistencie. Za výhodu považuje takýto prístup práve možnosť zaobísť sa bez fundamentov.

Za fundamentálnu možno považovať tú komponentu, ktorá je ľubovoľne voliteľná. Skutočne, fundamentalistické koncepcie pripúšťajú ľubovôľu pri voľbe kvantitatívnych charakteristík častíc, akými sú napríklad hmotnosť, spin, náboj a iné kvantové čísla častíc.

Najvýznamnejšou veličinou, ktorá evidentne akceptuje túto koncepciu, je elektrický náboj. Tento nereprezentuje len kvantové číslo, ktoré sa zachováva, ale určuje priamo veľkosť elektromagnetických síl [2].

„Budovanie" pojmov sila, energia, interakcia, náboj je korektné na javoch, ktoré sú v súčasnosti najlepšie teoreticky prepracované. Niet pochybností, že sú to práve elektromagnetické javy [3]. Ich teória je známa ako kvantová elektrodynamika (QED) a slúži aj ako prototyp pri budovaní teórie ostatných druhov síl [4].

Základným východiskom QED je práve elektrický náboj a pojem elektromagnetického poľa. Obvykle si zavádzame ako primárny pojem elektrického náboja, pole chápeme ako jeho atribút, ako formu interakcie elektricky nabitých častíc.

Má postup, ktorý pripisuje elektrickému náboju prioritu, zmysel aj v rámci QED?

Vnútorný rozpor existuje už v klasickej elektrodynamike. S pomocou Maxwellových rovníc môžeme určiť parametre poľa pri zvolenom priestorovom rozložení elektrických nábojov a prúdov. Ale priestorové rozloženie nábojov je ovplyvňované samotným poľom [5]. Súčasne je zaujímavé, že zákon zachovania elektrického náboja súvisí s dnes často používanou vlastnosťou elektromagnetického poľa, konkrétne môže byť považovaný za dôsledok jeho kalibračnej invariantnosti [6].

Zdá sa, že fundamentalistickú interpretáciu elektrického náboja podporuje problém pôvodu jeho veľkosti. Príčiny, prečo elektrón má náboj okolo 1,6 . 10^{-19} C a nie iný, prečo číselná hodnota náboja všetkých elementárnych častíc s výnimkou hypotetických kvarkov je rovnaká [7], nie sú dnes známe.[1])

Podľa QED však existuje elektromagnetické pole aj v „prázdnom" priestore — vákuu a náboj elementárnych častíc je v permanentnom silovom pôsobení tohto stavu poľa.

Zaoberajme sa vákuom ako fyzikálnou realitou podrobnejšie. Vákuový stav elektromagnetického poľa predstavuje pole bez fotónov. Napriek tomu je pozoruhodný tým, že mu zodpovedá energia E_0, ktorú môžeme podľa [8] napísať

$$E_0 = \sum_{\lambda} \frac{1}{4\pi} h\omega_\lambda ,$$

kde h je Planckova konštanta, ω_λ je uhlová frekvencia.
Okrem toho vo vákuovom stave existujú aj nenulové fluktuácie parametrov poľa. Napríklad, stredné kvadratické odchýlky intenzity elektrického a magnetického poľa nie sú rovné nule. Tieto fluktuácie ovplyvňujú pohyb elektricky nabitých častíc aj v atómových sústavách. Jedným z úspechov Diracovej rovnice je objasnenie jemnej štruktúry atómových spektier ako dôsledok relativistických a spinových efektov. V súhlase s touto teóriou stavy s kvantovými číslami $n = 2$, $l = 0$, $s = 1/2$; $n = 2$, $l = 1$, $s = 1/2$ v atóme vodíka, predstavujú rovnakú energetickú

---

[1]) Už *Stoney* (1894) a neskôr *Helmholtz* vyslovili domnienku, že hodnota $e = F/N = (9{,}6522 \,.\, 10^7/6{,}026 \,.\, 10^{26})\mathrm{C} = 1{,}6018 \,.\, 10^{-19}$ C nie je len nejakou štatistickou strednou hodnotou náboja jednomocných iónov pri elektrolýze, ale skôr skutočným elementárnym nábojom, t.j. nedeliteľným „atómom elektriny" v takom zmysle, že všetky elementárne náboje sú celistvým násobkom toku elementárneho množstva *e*.

Experimentálne sa pokúsili túto otázku riešiť *J. J. Thomson, C. T. R. Wilson* a *Ehrenhoft*. Ich práce potvrdili v podstate tento názor, ale naprosto spoľahlivo a jednoznačne potvrdil existenciu elementárneho náboja v r. 1911 *R. A. Millikan*[2]. Analogickú metódu použil v r. 1918 *A. F. Joffe* na určenie náboja elektrónu uvoľneného žiarením (fotoefekt).

[2]) *Millikan, Robert Andrews* (1868—1953) — skonštruoval kondenzátor, pomocou ktorého meral náboje drobných olejových kvapôčok a tak zistil, že náboj elektrónu je elementárne kvantum akéhokoľvek elektrického náboja. Experimentálne stanovil aj veľkosť kinetickej energie elektrónu, ktorá sa uvoľňuje z povrchu kovu pôsobením energie dopadajúceho fotónu. Tým objavil premenu svetelnej energie na elektrickú. Zaoberal sa meraním Planckovej konštanty pomocou fotoefektu, stúdiom ultrafialovej časti spektra, stavbou atómu a kozmickým žiarením, o ktorom nazhromaždil nové poznatky. Napísal niekoľko učebníc fyziky. V r. 1923 dostal Nobelovu cenu za fyziku, za prácu o elementárnom elektrickom náboji a fotoelektrickom jave.

hladinu. V r. 1947 *W. E. Lamb*[3]) a *R. C. Retherford* použili radiospektroskopickú metódu na presné určenie energetických stavov. Výsledkom experimentu bolo zistenie energetického posuvu medzi týmito stavmi, čo je dôsledkom vplyvu vákuového poľa na pohyb elektrónov v atóme [9]. V súčasnosti sa vákuovému stavu elektromagnetického poľa pripisuje stále väčší význam aj v takých fyzikálnych problémoch, akým je gravitačné pole [10].

Vplyv fluktuácií vákua na pohyb elektrónov v atóme jednoduchým a názorným spôsobom vyjadril *T. A. Welton* [11]. Samotná Weltonova metóda dáva dobrý odhad pre Lambov posuv. V súhlase s týmto prístupom nájdime strednú kvadratickú fluktuáciu rýchlosti častice s nábojom Q, určovanú vákuovým stavom poľa. V rámci klasickej nerelativistickej teórie platí pohybová rovnica [12]

$$\delta\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{\varepsilon} Q}{m_0},$$

kde $\vec{\varepsilon}$ je intenzita elektrického poľa zodpovedajúca fluktuáciám vákuového stavu poľa a m_0 je pokojová hmotnosť. Ak pre jednu frekvenciu poľa platí

$$\delta\dot{\vec{v}} = \frac{Q}{m_0} \vec{E}_{0\omega} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) ,$$

potom po integrácii

$$\delta\vec{v}_\omega = \frac{Q\, E_0}{\omega m_0} \cos\, (\vec{k} \cdot \vec{r} \,.\, - \omega t)$$

a stredná kvadratická fluktuácia rýchlosti je

$$\overline{\left(\delta\vec{v}_\omega\right)^2} = \frac{Q^2\, E^2_{0\omega}}{2m_0^2\, \omega^2}, \qquad (1)$$

kde $E_{0\omega}$ je amplitúda intenzity elektrického poľa zodpovedajúca nulo-

---

[3]) *Lamb, Willis Eugene* — americký fyzik, ktorý sa zaoberal otázkami teórie a vzájomného pôsobenia neutrónov a rôznych prvkov, teórie β rozpadu, teórie poľa jadrovej štruktúry, teórie a konštrukcie magnetrónových oscilátorov, teórie mikrovlnovej spektroskopie, teórie elektrodynamickej energie, skúmal fluktuáciu kozmického žiarenia, vznik dvojíc usporiadania fragmentov štiepenia jadier atď. Najvýznamnejšie výsledky dosiahol pri výskume jadrovej štruktúry vodíkového spektra, ťažkého vodíka a hélia. So spolupracovníkmi vypracoval novú metódu merania, ktorá umožnila presne vypočítať rozdiel energií dvoch hladín vodíka, čo vnieslo nové svetlo do teórie elektrónu. R. 1955 dostal Nobelovu cenu za fyziku spolu s *P. Kuschom*, za objavy súvisiace s mikroštruktúrou spektrálnych čiar vodíka.

vým kmitom jednej frekvencie. V súhlase s QED pre energiu jednej frekvencie vákuového stavu poľa v objeme V_0 platí [13]

$$\frac{\omega h}{4\pi} = \frac{1}{2} \int\limits_{V_0} (\varepsilon_0 \varepsilon_\omega^2 + \mu_0 H_\omega^2)\, \mathrm{d}V = \int\limits_{V_0} \varepsilon_0 \varepsilon_\omega^2\, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} E_{0\omega}^2 V_0 \varepsilon_0 \tag{2}$$

kde ε_0 je permitivita a μ_0 je permeabilita vákua. Uvažovali sme v čase strednú hodnotu. Porovnaním pravej a ľavej strany výrazu (2) pre amplitúdu $E_{0\omega}$ dostaneme

$$E_{0\omega}^2 = \frac{h\omega}{2\pi V_0 \varepsilon_0}\,. \tag{3}$$

Po dosadení vzťahu (3) do (1) pre strednú kvadratickú hodnotu rýchlosti dostaneme

$$\overline{\left(\delta \vec{v}_\omega\right)^2} = \frac{Q^2 h}{4\pi\, m_0^2\, V_0 \varepsilon_0 \omega}$$

Jednotlivé frekvencie poľa predstavujú nezávislé vibračné stavy, preto výsledná stredná kvadratická fluktuácia rýchlosti je daná superpozíciou príspevkov od jednotlivých frekvencií poľa [12], tj.

$$\left(\delta \vec{v}\right)^2 = \int \overline{(\delta v_\omega)^2}\, \frac{\omega^2 V_0}{\pi^2 c_2}\, \mathrm{d}\omega = \frac{Q^2 h}{4\pi^3\, m_0^2\, \varepsilon_0\, c^3} \int \omega \mathrm{d}\omega \tag{4}$$

Hranice integrálu vo vzťahu (4) by sme mali uvažovať od nuly do nekonečna. V tomto prípade integrál diverguje. Tento problém nevznikne, ak uvážime relativistickú povahu elektrónu. Existencia elektrón-pozitrónového vákua spôsobuje, že frekvencie poľa, väčšie ako

$$\omega_M = \frac{4\pi\ m_0\, c^2}{h}$$

sa neuplatňujú v uvažovanom procese [13]. Takto pre kvadratickú fluktuáciu rýchlosti platí

$$\overline{(\delta\, v)^2} = \frac{Q^2 h}{4\pi^3 m_0^2\, \varepsilon_0 c_0^3} \int\limits_0^{\omega_M} \omega \mathrm{d}\omega = \frac{2Q^2 c}{\pi\, \varepsilon_0 h}\,. \tag{5}$$

Podľa základného postulátu špeciálnej teórie relativity je zrejmé

$$\overline{(\delta\, v)^2} \leqq c^2 \tag{6}$$

potom zo vzťahu (5) vyplýva

$$Q \leqq \frac{1}{2} \sqrt{2\pi\varepsilon_0\, c\ h} \approx 1{,}7\ \ 10^{-18}\ \mathrm{C} \tag{7}$$

Táto nerovnosť, i keď pripúšťa rádove vyššiu hodnotu elektrického náboja, neodporuje experimentálnej skúsenosti, podľa ktorej $Q = 1{,}602\,.\,10^{-19}$ C.

Aj keď nie sú v uvedenom postupe zahrnuté všetky fyzikálne aspekty problému (napríklad sme uvažovali len klasickú a nerelativistickú pohybovú rovnicu častice), nerovnosť (7) naznačuje, že predpokladaná ľubovolnosť veľkosti náboja nemusí byť oprávnená už v rámci QED. Vidíme, že keď uvažujeme o fyzikálnych javoch komplexne, ostáva fundamentalistické stanovisko polemické.

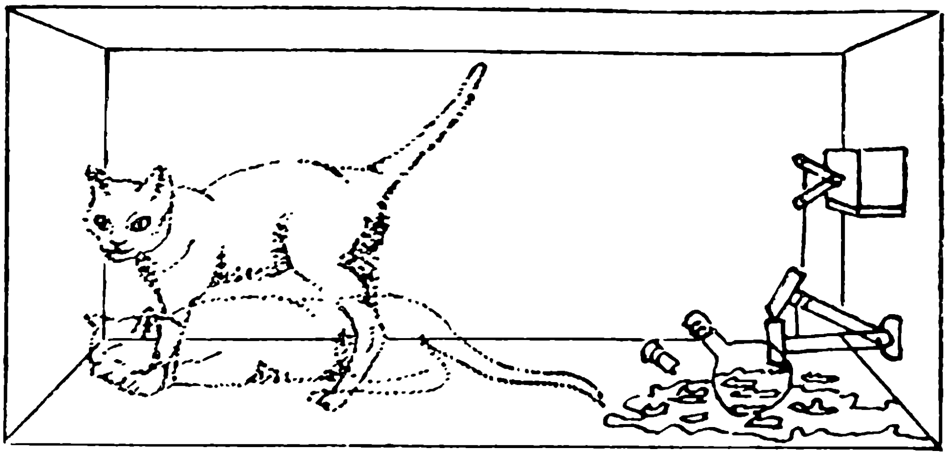
Literatúra:

[1] Chew, G. F.: Čs. čas. fyz. A 23 (1973), 21.
[2] Achijezer, A. I., Rekalo, M. P.: Usp. fiz. nauk, 144 (1974), 487.
[3] Blažek, M.: Sedmá konference čs. fyziků, zv. II, Praha 1981, BB-11.
[4] Pišút, J.: PMFA 30, č. 1 (1985) 17.
[5] Beresteckij, V. B.: Usp. fiz. nauk. 120 (1976) 439.
[6] Feynman, R. P.: The Theory of Fundamental Processes. W. A. Benjamin, Inc., New York 1961.
[7] Ford, K. W.: The World of Elementary Particles, Blaisdell Publishing Co, New York 1963.
[8] Loudon, R.: The Quantum Theory of Light. Clarendom Press, Oxford 1973.
[9] Weisskopf, V. F.: Usp. fiz. nauk, 138 (1982) 455.
[10] Zeľdovič, J. B.: Usp. fiz. nauk 133 (1981) 479.
[11] Sokolov, A. A., Ternov, I. M., Žukovskij, VČ.: Kvantovaja mechanika. Nauka, Moskva 1979.
[12] Bjorken, J. D., Drell, S. D.: Relativistic Quantum Mechanics. McGraw-Hill, New York 1965.
[13] Levič, V. G., Vdovič, J. A., Mjalmin, V. A.: Kurs teoretičeskoj fiziki, Nauka, Moskva 1971.
[14] Bober, J.: Malá encyklopédia bádateľov a vynálezcov. Obzor, Bratislava 1973.
[15] Baláž, P.: Význační fyzici. SPN, Bratislava 1966.
[16] Zajac, R., Chrapan, J.: Dejiny fyziky, ER UK Bratislava 1982.

Schrödingerova kočka

RNDr. RENATA KRATSCHMEROVÁ, přírodovědecká fakulta UP Olomouc

Ve fyzice se setkáváme často s různými paradoxy, ať už je to v mechanice, optice nebo jiných oblastech fyziky. Například všichni jsme se seznámili na základní a středních školách s hydrostatickým paradoxem, ale zřejmě méně známý je paradoxon často diskutovaný v kvantové fyzice, známý pod pojmem *Schrödingerova kočka.* Málokterý učitel střední školy má při probírání tématu kvantová fyzika čas k tomu, aby žáky hlouběji seznámil s problémy, které vznikají při vysvětlování fyzikálních jevů z různých hledisek.



Obr. 1

Klademe si základní otázku: Kde je hranice mezi klasickou fyzikou a kvantovou fyzikou? Jak přiblížit kvantovou fyziku šestnáctiletým žákům? Žijeme ve světě reálně existujících objektů s objektivně danými vlastnostmi. Všechny informace o mikrosystémech (fotonech, atomech) získáváme pomocí pokusů a výsledků v tomto světě klasické fyziky. Přesto tvrdíme, že všechna tělesa, která nás obklopují a která jsou objekty zkoumání klasické fyziky, jsou složena z atomů a elementárních částic, jejichž chování a vlastnosti popisují zákony kvantové fyziky. Musí tedy existovat hranice, na které popis jevů pomocí poznatků klasické fyziky ztrácí platnost a kdy již převládají kvantové efekty. Je problémem, jak stanovit polohu této hranice. I při volbě vhodné hranice mají fyzikální zákony, které objevujeme pomocí našich experimentálních zařízení, jen přibližnou platnost. I když jsou to dobrá přiblížení, jsou to přesto jen přiblížení. Otázkou zůstává, jak budou exaktní fyzikální zákony vypadat a zda je můžeme stále ještě vyjadřovat pomocí pojmů o chování objektů v našem okolí, které vidíme a jichž se můžeme dotýkat?

Zabývejme se nyní paradoxem s kočkou, neboť jeho správné pochopení nám pomůže při objasňování vztahu mezi klasickou a kvantovou fyzikou. Představme si následující situaci.

Kočka je uzavřena v ocelové komoře s „časovanou bombou", kterou je však třeba chránit před přímým dotekem kočky. Bombu nám představuje Geigerův počítač, ve kterém se nachází nepatrné množství radioaktivní látky. Této látky je tak málo, že se během jedné hodiny může rozpadnout právě jeden atom látky. Se stejnou pravděpodobností se však nerozpadne žádný. Dojde-li k rozpadu jednoho atomu, Geigerův počítač „naskočí" a přes malé relé uvede do pohybu kladívko, které roztříští nádobu s jedem. Necháme-li celý systém hodinu bez zásahu, tj. sám sobě, můžeme říci, že kočka ještě žije, když se v této době nerozpadl žádný atom. První rozpad atomu by ji otrávil.

V kvantové fyzice bychom k vyjádření této situace použili funkci, kterou označujeme řeckým písmenem ψ a nazýváme ji vlnovou funkcí. Toto označení pro popis mikročástic v kvantové fyzice zavedl *Erwin Schrödinger* ve svém díle *Annalen der Physik*, které vyšlo právě před šedesáti lety, tj. v roce 1926. Vlnová funkce ψ je funkcí prostorových souřadnic a času. Je to funkce pravděpodobnostní, neboť z ní lze vyjádřit pravděpodobnost výskytu částice v dané části prostoru.

V našem případě by tato vlnová funkce po uplynutí jedné hodiny nabyla takového tvaru, že proměnné, kterými vyjádříme existenci mrtvé a živé kočky, budou mít stejnou velikost.

Na obr. 1 máme zobrazen náš systém, a to v obou stavech, které mohou nastat po uplynutí jedné hodiny. Systém je tvořen radioaktivní látkou, počítačem, relé, kladívkem, jedem a kočkou. V prvním stavu je nádoba s jedem neporušená a kočka žije, ve druhém stavu je baňka s jedem rozbitá a kočka je mrtvá. Zobrazení obou stavů se překrývá — jako u „roztřepané" fotografie. Ostré rozhraní mezi oběma stavy se v tomto zobrazení ztrácí; podíváme-li se na obr. 1, máme před sebou zdvojený obraz.

Při hlubším rozboru však zjistíme, že tato situace neobsahuje nic nejasného nebo rozporného. Pouze v poslední fázi experimentu je rozdí mezi oběma stavy systému tak malý, že nám uniká, zvláště když zapomeneme na atomární systém, který celý tento mikroproces vyvolal. Vyloučíme-li tedy z našich úvah atomární systém, ztratí se rozdíl mezi oběma stavy a spolu se Schrödingerem máme před sebou paradoxon, který neumíme vysvětlit. A to jen proto, že jsme neuvažovali mikroproces, který celou situaci vyvolal. Pravděpodobnost původně omezená jen na oblast atomů zapříčinila pozorovatelnou událost.

Jaký význam má tedy pro nás případ Schrödingerovy kočky? Z jeho rozporu vyplývá, že při zkoumání daného problému je třeba se pečlivě zamyslet nad tím, který ze systémů právě uvažujeme. Celek může obsahovat několik systémů, z nichž každý může procházet různými stavy ostře definovanými zákony pravděpodobnosti (jeden atom se s padesátiprocentní pravděpodobností rozpadl a způsobil rozbití baňky s jedem a smrt kočky). V mikrosvětě se uplatňuje statistická pravděpodobnost a za stejných podmínek se stejné mikroobjekty chovají v určitých mezích různě. Stav makroobjektu je dán chováním mikroobjektů, ze kterých se skládá. Tak je tomu i v našem případě.

Cesta poznání, kterou před námi odkrývá kvantová fyzika, není zdaleka jednoduchá. Vede nás však k novému a hlubšímu poznání objektivní reality, k poznání, které nám nedokáže vysvětlit samotná klasická fyzika.

Pohled do středu Galaxie

RNDr. RENÉ HUDEC, CSc., AÚ ČSAV Ondřejov

Největší rádiový dalekohled na světě, sovětský RATAN 600 na Kavkaze, úspěšně pokračuje ve své práci. Za poslední čtyři roky bylo na něm uskutečněno přes 10 000 pozorování Slunce, Měsíce, planet a jejich oběžnic, galaxií, rádiových galaxií, kvazarů a dalších objektů. Pomocí anténní soustavy RATAN, obrovského prstence o průměru téměř 600 m, byla uskutečněna dosud nejcitlivější přehlídka celé oblohy v rádiovém oboru.

Stavba RATAN 600 byla ukončena v roce 1977 a od roku 1980 pracují všechny čtyři anténní sektory. O pozorování na tomto přístroji je velký zájem, a to nejen mezi sovětskými astronomy. Dnes se systémem pozoruje průměrně 21 hodin denně — a z celkové doby připadá průměrně přes 50 % na hosty. Pozorovací čas na přístroji přiděluje zvláštní programový výbor. A jaké jsou výsledky?

Přibližme si je alespoň stručně na několika případech pozorování z poslední doby. Jedny z nejzajímavějších výsledků přineslo pozorování jádra naší Galaxie, o němž toho víme velmi málo. Díky rádiovým údajům bylo možno určit elektronovou hustotu a teplotu v oblasti ionizovaného vodíku poblíž kinematického středu Galaxie. Lze z toho odvodit průběh gravitačního potenciálu v této oblasti — jak se ukazuje, musí být v jádře Galaxie obsažena hmota o hmotnosti rovné asi 3 miliónům hmotností našeho Slunce. S využitím doplňkových informací z infračervené oblasti a odhadů intenzity ionizujícího ultrafialového záření bylo tak možno navrhnout model celé centrální oblasti. Nezdá se nyní, že by v jádru mohl být bodový objekt o hmotnosti větší než asi 1000 až 10 000 hmotností Slunce.

Hypotéza, že jádro naší Galaxie obsahuje masivní černou díru, se ukázala jako málo pravděpodobná. Rádiová pozorování na zařízení RATAN totiž nepotvrdila existenci zhuštěnin plynu v oblastech ionizovaného vodíku poblíž galaktického jádra, nalezených v infračervené oblasti. Kinematika těchto zhuštěnin připouštěla přítomnost kompaktního masivního objektu, ale nyní je zřejmé, že detaily pozorované v infračerveném světle se na jádro Galaxie promítají jen náhodně. Podle názoru sovětských rádiových astronomů se jádro naší Galaxie skládá tedy z obyčejných hvězd a neobsahuje masivní černou díru, která by mohla vyvolávat energetickou aktivitu jádra.

Srovnání rádiových a infračervených měření rovněž umožnila první odhad obsahu prachu mezi Zemí a galaktickým jádrem. Tento prach zeslabí světlo na cestě od galaktického jádra k nám asi biliónkrát.

Otázka existence či neexistence masivní černé díry v jádře naší Galaxie úzce souvisí s ověřením modelu jádra rádiových galaxií obsahujících černou díru. Dosud však není jasno, zda aktivita jader těchto galaxií plyne z akrece hmoty na kompaktní útvary v jádře nebo naopak z vývrhů hmoty z jádra a tím z excitace okolního prostředí.

Nové údaje o rozložení rádiového záření po obloze přinesla celková přehlídka nebe. Ukázalo se přitom, že počet rádiových zdrojů roste sice s poklesem citlivosti, ale množství velmi slabých zdrojů je mnohem menší, než by odpovídalo statickému Euklidovskému modelu vesmíru. Pátrání po vzdálených slabých zdrojích se na dalekohledu RATAN 600 provádělo na vlnových délkách mezi 1 až 30 cm, přičemž během 24 hodin bylo zaznamenáno asi 500 zdrojů. Celkově toto mapování oblohy odhalilo asi 3000 zdrojů, z nichž většina dosud nebyla známa. S využitím dnešní maximální citlivosti anténní soustavy odhadujeme, že zařízení je schopno pracovat a dosahem asi 1 miliónu rádiových zdrojů.

Mezi rádiovými kosmickými zdroji, které pozorujeme anténní soustavou RATAN 600, jsou objekty různých populací. K silným zdrojům mezi 30 až 100 Jy[1]) patří supernovy a mohutné rádiové galaxie s normálním spektrem. Ke středním zdrojům mezi 0,1 až 30 Jy patří kvazary a rádiové galaxie různých svítivostí. K objektům pod 0,01 Jy už prakticky nespadají kvazary a mohutné rádiové galaxie — zřejmě je tomu tak díky přiblížení k pozorovanému horizontu vesmíru. Další růst citlivosti tedy vede k tomu, že u ještě slabších zdrojů pozorujeme objekty málo svítivé a blízké. Očekáváme, že kdybychom mohli zvýšit citlivost přístroje ještě 100 až 1000 krát, zaplnilo by se rádiové nebe normálními hvězdami.

A jaké jsou další plány sovětských rádiových astronomů využívajících největší rádiový teleskop na světě? Je to například experiment „Cholod“, zaměřený na pozorování velmi vzdálených a slabých zdrojů s citlivostí 0,5 mJy. V případě kvazarů to odpovídá extrémně vzdáleným objektům s rudým posuvem převyšujícím 50. Problém je však v tom, že i když na rádiových vlnách tyto objekty pozorujeme, nemůžeme určit jejich další vlastnosti a ani vzdálenost, protože opticky nejsou viditelné ani největšími pozemskými dalekohledy. Pouze s největším dalekohledem na světě, se sovětským šestimetrem na Kavkaze, se plánují pokusy o optické zachycení alespoň některých z nich.

Mezi další ze zajímavých programů patří hledání fluktuací reliktového záření — pozůstatku po zrodu dnešního vesmíru při tzv. velkém třesku, stop protogalaxií a protokup, tedy zárodků velkorozměrných astronomických struktur. Již dnes je však jasné, že práce sovětského rádiového „obra“ přinesla mnoho cenných a jinak nedostupných údajů, které prohloubily naše znalosti o vesmíru.

---

[1]) Jy je značka speciální jednotky *jansky*, nazvané po americkém radioastronomovi K. Janském (1905 až 1950) českého původu. Jde o jednotku hustoty zářivého toku používanou v radioastronomii; 1 Jy = 10^{-26} W . m^{-2} . Hz^{-1}. (Poznámka recenzenta.)

Hans Christian Örsted

JOSEF KOTYK, Pardubice

Důležitým mezníkem ve vývoji fyziky je zjištění souvislosti mezi dvěma významnými skupinami fyzikálních jevů, které byly dlouho považovány za zcela odlišné, mezi jevy magnetickými a elektrickými. Tímto mezníkem je Örstedův objev elektromagnetismu, uveřejněný roku 1820.

Dánský fyzik *Hans Christian Örsted*[1]) se narodil roku 1777 v městečku Rudkjöbingu na ostrově Langelandu jako syn lékárníka. Úspěšná universitní studia zakončil roku 1799 dosažením doktorátu mediciny, všechen zájem věnoval však i dále jen přírodním vědám. Již v roce 1806 byl jmenován profesorem fyziky a chemie na universitě v Kodani, v roce 1829 dokonce rektorem tamější polytechnické školy. Dne 21. července 1820 uveřejnil spis ***Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticum***, v němž popsal objev, který učinil náhodně nedlouho předtím při jedné přednášce: Deklinační magnetka, ke které vedl rovnoběžně elektrický proud, se vychýlila z roviny magnetického poledníku. Autor díla vypravuje o tom vlastními slovy takto[2]): „Galvanická elektřina, jdoucí od severu k jihu nad volně zavěšenou magnetkou, vychyluje magnetku severním koncem k východu; při témž směru pohybu elektřiny, je-li pod magnetkou, vychyluje ji k západu."

Örsted studoval poutavý jev blíže a poznal, že účinek nenastal, když směr elektrického proudu byl k magnetce kolmý. Zjistil také, že i naopak magnet uvádí do pohybu pohyblivý vodič, nebo že vodič uzavřený do kruhu, protékaný elektrickým proudem, nachází-li se v blízkosti přímého proudovodiče, jímž prochází proud, se chová podobně jako magnetka. Proud vedený smyčkou, ovinutou kolem kusu železa, jej zmagnetuje.

Örsted stal se tak zakladatelem systematického studia elektromagnetismu, dalšími pokusy a výzkumy vlastností neferomagnetických látek pak předchůdcem věhlasného *Michaela Faradaye* (1791 až 1867); někdy bývá nazýván dokonce „otcem" diamagnetismu a paramagnetismu.

---

[1]) Jméno bývá psáno také *Oersted*, někdy též *Oerstedt*.

[2]) Cituji z článku *Mateja Rákoša* „200 rokov od narodenia Hansa Christiana Örsteda" v časopise Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. XXIII., čís. 3. (Cit. str. 128.)

Vystoupení Hanse Christiana Örsteda na scéně dějin vědy znamená tedy důležitý krok ve vývoji fyziky. Örstedův objev vyvrátil všechny představy o existenci magnetismu jako zvláštní hypotetické magnetické substance. Örsted dal přímý podnět k materialistickému chápání podstaty magnetického pole. Jeho přesvědčení o jednotě všech přírodních sil vedlo k logickému závěru, že působení elektrického proudu na magnetku musí být vzájemné, a k prvnímu úspěšnému pokusu s elektromagnetickou indukcí, který provedl před 155 lety dne 29. srpna 1831 Faraday. Tím byly vytvořeny předpoklady pro novou éru v dějinách techniky a energetiky, éru elektrifikace.

Za významný objev dostalo se Örstedovi vysokého uznání. K jeho poctě byla jednotka Gaussovy intenzity magnetického pole v dříve užívané soustavě jednotek CGS nazvána jeho jménem. Od francouzského Institutu national de France[3]) v Paříži dostal Örsted cenu 3000 franků, od anglické Royal Society (Královské společnosti) v Londýně Copleyovu medaili, od dánského krále venkovské sídlo nedaleko Kodaně, kde roku 1851 — před 135 lety — zemřel.

Poznámka.

V pokusech Örstedových pokračovali zejména francouzští fyzikové, zvláště *André Marie Ampère.* Vyjádřil známými vtipnými pravidly[4]), jak lze určit směr výchylky kladného pólu magnetky v magnetickém poli přímého vodiče, zdokonalil Örstedovy pokusy (např. užitím astatické magnetky vymýtil vlivy zemského magnetického pole, zjistil, že elektrické proudy procházející ve stejném směru se přitahují, v opačném odpuzují, určil směr intenzity magnetického pole, které vzniká kolem středu kruhového vodiče, dokázal otáčivé efekty na dvou proudových smyčkách, ukázal, že solenoid působí jako tyčový magnet a stanovil polohu jeho pólů aj.

Ampère, autor hypotézy o vzniku magnetismu v látkách působením molekulárních proudů, jeden ze slavných 40 „nesmrtelných" Académie française, zemřel dne 10. června 1836 — před 150 lety — zcela opuštěn v Marseille. Název „ampér", mezinárodně přijatý pro jednotku elektrického proudu, zůstal však ve všech jazycích trvalým uctěním jeho nehynoucí památky.

---

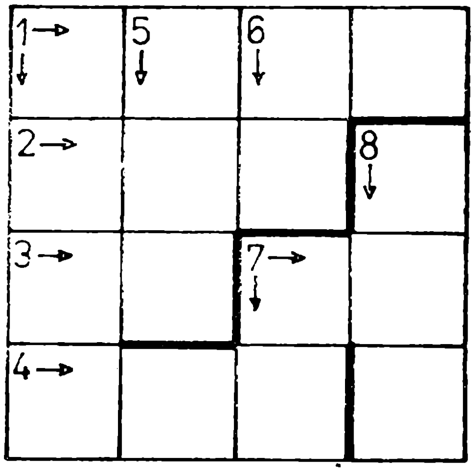
[3]) Institut national de France byl soubor pěti Akademií, z nichž proslula zejména Académie française o 40 členech (40 „nesmrtelných"; jejich počet se doplňoval volbou).

[4]) Jedno méně užívané zní: Myslíme-li si nad magnetkou plavce, který plave ve vodiči ve směru elektrického proudu a dívá se na magnetku, vychyluje se severní pól magnetky k jeho levé ruce.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Číselná křížovka

U číselné křížovky se dodržují stejné zásady luštění jako u křížovky slovní, pouze místo písmen se do příslušných políček vepisují číslice. Věřím, že vám tato křížovka zpříjemní poslední dny letošního školního roku.



Vodorovně:
1. Rok narození studenta Dvořáka.
2. Počet studentových spolužáků vynásobený číslem 26.
3. Šťastné číslo studenta Dvořáka.
4. Počet známek na studentově vysvědčení vynásobený číslem 45.
7. Čtyřnásobek měsíce, ve kterém se student narodil.

Svisle:
1. Rok, ve kterém začal Dvořák chodit do základní školy.
5. Koncové trojčíslí roku, kdy bude student Dvořák maturovat.
6. Číslo domu, ve kterém Dvořák bydlí.
7. Odmocnina z roku, kdy bude Dvořák slavit 57. narozeniny.
8. Třetí mocnina dne narození studenta Dvořáka.

Kdy se student Dvořák narodil?

Jarmila Pěnčíková

OLYMPIÁDY A SOČ

Úlohy 36. ročníku matematické olympiády 1986/87

Kategorie A

A-I-1

Reálná funkce f je definována na množině všech uspořádaných dvojic (n, x), kde $n \geqq 1$ je přirozené číslo, x je reálné číslo. Funkce f splňuje podmínky

$$f(1, x) = x$$
$$f(2n, x) = n + f(n, x + 1)$$
$$f(2n + 1, x) = n + f(n + 1, x + 1)$$

Dokažte, že pro $n \geqq 2$ a každé reálné číslo x platí

$$f(n, x) = n + x + [\log_2 (n - 1)]$$

Symbol $[x]$ značí celou část čísla x, tj. $[x] \leqq x < [x] + 1$, $[x]$ celé číslo.

A-I-2

Funkce f zobrazuje interval $\mathbf{I} = (-c, c)$, $c > 0$, do množiny komplexních čísel tak, že pro každé $t \in \mathbf{I}$ platí

$$|f(t)| = f(t) (\cos t + \mathrm{i} \sin t)$$
$$|f(t)| - 1 = |f(t) - 3|$$

a ke každému $t \in \mathbf{I}$ lze nalézt $s \in \mathbf{I}$ tak, že

$$2|f(t)| < |f(s)|.$$

Vypočtěte c (na tři platné číslice) a vypočtěte $f(t_0)$, víte-li, že $|f(t_0)| = 5$.

A-I-3

Nechť n je přirozené číslo, $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \quad \leqq a_n$, $b_1, b_2, \quad , b_n$ jsou reálná čísla. Kolik řešení má soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_1x_1 + x_2 + \quad &+ x_n = b_1 \\ x_1 + a_2x_2 + \quad &+ x_n = b_2 \\ \\ x_1 + x_2 + \quad &+ a_nx_n = b_n \;? \end{aligned}$$

Proveďte diskusi.

A-I-4

Nechť body A', B', C' leží na jednotkové kružnici se středem S opsané trojúhelníku ABC tak, že dvojice vektorů SA' a BC, SB' a CA, SC'

a AB jsou souhlasně rovnoběžné. Jsou-li P a P' obsahy trojúhelníků ABC a $A'B'C'$, pak platí

$$P' \geqq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{P}{2}}.$$

Dokažte.

A-I-5

Nechť funkce f je pro $s > 0$, $t > 0$ definována předpisem

$$f(s, t) = \frac{st(1 - st)}{(1 + s^2)(1 + t^2)}.$$

Dokažte, že tato funkce nabývá svého maxima právě v jednom bodě. Nalezněte tento bod a maximum funkce.

A-I-6

Šachovnica pozostáva z 8×8 polí vytvárajúcich štvorec. Veža je jedna z figúrok, s ktorými sa hrá šach. Povieme, že daná veža je neohrozená, ak v tom riadku a v tom stĺpci, v ktorom sa tá veža nachádza, niet už okrem nej inej veže.

a) Určte počet takých rozmiestnení 8 veží na šachovnici, pri ktorých je každá z nich neohrozená.
b) Určte počet takých rozmiestnení 8 veží na šachovnici, pri ktorých je aspoň jedna z nich neohrozená.
c) Určte počet takých rozmiestnení 8 veží na šachovnici, pri ktorých je aspoň jedna z nich neohrozená a žiadne dve nie sú v tom istom riadku.
d) Riešte úlohy b) a c) pre štvorcovú šachovnicu pozostávajúcu z $n \times n$ polí, pričom sa rozmiestňuje k veží ($1 \leqq k \leqq n$).

Tematické okruhy: Funkce
Soustavy rovnic
Kombinatorické úlohy

Kategorie B

B-I-1

Najděte všechny dvojice (p, k), kde p je prvočíslo a k je přirozené číslo, pro něž má rovnice $x^2 - 2(p^k + 2)\,x + p^{2k} = 0$ řešení v oboru celých čísel.

B-I-2

V každém pravoúhlém trojúhelníku o přeponě c a odvěsnách a, b platí $2(au^2 + + bv^2) \leqq 5cw^2 \sqrt{2}$, kde u, v, w jsou po řadě délky těžnic ke stranám a, b, c.
Dokažte.

B-I-3

Ak pre kladná čísla a, b, c, p, q, r platí $ac \geqq b^2$, $pr \geqq q^2$, tak platí tiež

$(a + p)(c + r) \geqq (b + q)^2$. Dokážte. Ukážte ďalej, kedy platí $(a + p)(c + r) = (b + q)^2$.

B-I-4

Je dána kružnice k se středem S a na ní dva body A, C ($A \neq C$). Jaká je nutná a postačující podmínka pro velikost úhlu ASC, aby existoval rovnoběžník $ABCD$, jehož obvod má s kružnicí k šest společných bodů?

B-I-5

Nájdite všetky usporiadané dvojice (p, q) prvočísel p, q, pre ktoré platí $3p^2 + 6p = 2q^2 + 7q$.

B-I-6

K danému čtverci $ABCD$ sestrojíme kružnici k se středem A a poloměrem $|AB|$. Na straně BC, resp. CD, zvolíme bod E, resp. F, tak, aby přímka EF byla tečnou kružnice k. Označme G střed úsečky AD, H průsečík přímek CG, EF a K průsečík přímek AH, CD. Dokažte, že přímka EK je osou úhlu CEF.

Tematické okruhy: Teorie čísel
Planimetrie
Nerovnosti

Kategorie C

C-I-1

Na niťeném závěsu se kývá závaží. Šířka rozkmitu je 56 cm, výškový rozdíl nejnižší a nejvyšší polohy závaží je 8 cm. Vypočtěte délku závěsu.

C-I-2

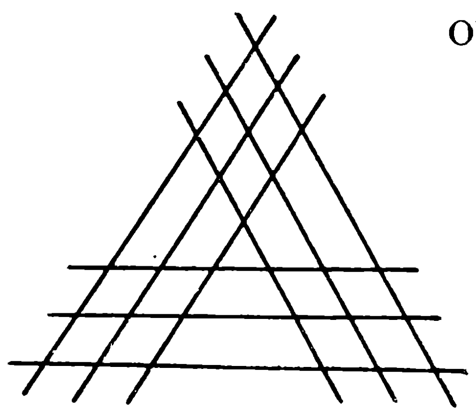
Určete čísla a, b, c tak, aby byla řešeními rovnice $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

C-I-3

V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, středy jeho stran AB, BC, CD, DA označíme K, L, M, N. Dokažte, že přímky AC, BD jsou k sobě kolmé právě tehdy, když je $|KM| = |NL|$. Dokažte, že přímky KM, NL jsou k sobě kolmé právě tehdy, když je $|AC| = |BD|$.

C-I-4

Jakým nejmenším počtem barev je možno obarvit průsečíky přímek na obrázku č. 1 tak, aby na žádné vyznačené přímce neležely dva body téže barvy?



Obr. 1

C-I-5

Nech m, n sú ľubovolné prirodzené čísla, pre ktoré číslo 5 nedelí číslo $mn(m+n)$. Potom číslo 5^2 nedelí číslo $(m+n)^5 - m^5 - n^5$. Dokážte.

C-I-6

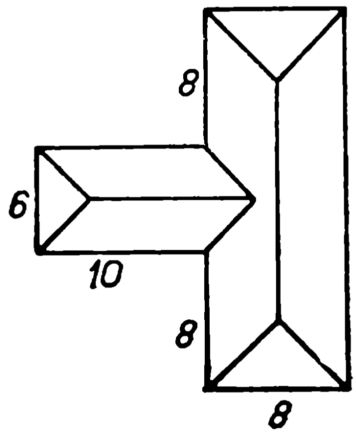
Je dán čtverec $ABCD$. Zvolme libovolně bod P a označme A', B', C', D' obrazy bodu P ve středových souměrnostech se středem v bodech A, B, C, D. Dokažte, že $A'B'C'D'$ je čtverec. Určete množinu všech bodů P, pro které je průnik čtverců $ABCD$, $A'B'C'D'$ neprázdný.

Tematické okruhy: Rovnice
Kombinatorické úlohy
Teorie čísel

Kategorie Z8

Z8-I-1

Na obrázku č. 2 je zobrazen půdorys střechy, rozměry jsou uvedeny v metrech. Všechny střešní plochy mají týž spád, přičemž nižší hřeben



Obr. 2

je 3 metry vysoko nad rovinou okapů. Vypočtěte celkový povrch střechy.

Z8-I-2

Dokažte nerovnost $\frac{1}{201} + \frac{1}{202} + \qquad + \frac{1}{300} > \frac{1}{3}$

Z8-I-3

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme a, b vzdálenosti vrcholu E od přímek AB a BC. Určete vzdálenost bodu E od úhlopříčky AD pomocí a, b.

Z8-I-4

Určete nejmenší a největší čtyřciferné číslo s těmito vlastnostmi:

a) číslo je dělitelné jedenácti,

b) rozdíl tohoto čísla a jeho ciferného součtu je dělitelný číslem 17.

Z8-I-5

V rovnici $\frac{x+b}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{x+b}{a^2+2ab+b^2}-\frac{x-b}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a}$

s neznámou x a reálnými čísly a, b

a) udejte podmínky řešitelnosti,

b) najděte reálný kořen,

c) proveďte zkoušku.

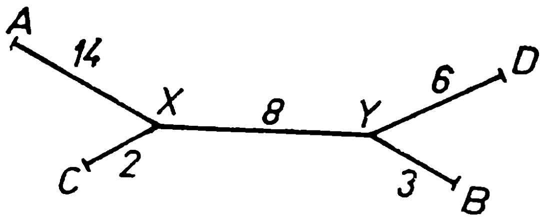
Z8-I-6

Existuje rovnoběžník, který se dá složit ze tří nepřekrývajících se rovnoramenných trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné? Pokud ano, ukažte jeden takový.

Kategorie Z7

Z7-I-1

Přátelé Kouba a Mácha jsou řidiči tramvají. Kouba jezdí na trati č. 1 vedoucí z A do B. Mácha jezdí na trati č. 2 spojující C a D. Čísla na plánu (obr. 3) udávají vzdálenosti v kilometrech. Tramvaje jezdí rychlostí 60 km za hodinu. Řidiči mají na každé konečné zastávce 5 minut na odpočinek. Přesně ve 12 hodin vyjel Kouba z konečné A a Mácha z konečné C. Kolikrát se v době od 12 do 19 hodin potkají v úseku XY? Udejte přesné časy a místa jejich setkání.



Obr. 3

Z7-I-2

Krychle o hraně 15 cm byla sestavena z 62 menších krychlí dvou různých velikostí. Najděte dvě taková složení, která se liší nejen způsobem složení, ale i velikostmi menších krychlí. Načrtněte názorný obrázek složené krychle.

Z7-I-3

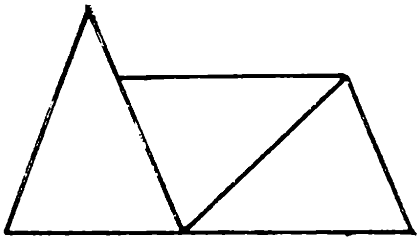
Číslo na poznávací značce automobilu nazveme šťastným číslem, jestliže ciferný součet prvních dvou číslic se rovná cifernému součtu druhých dvou číslic. Zjistěte, kolik je šťastných čísel na poznávacích značkách začínajících písmeny ABZ.

Z7-I-4

— Co děláš?

— Skládám ze tří shodných rovnoramenných trojúhelníků pětiúhelníky. Zatím jich mám šest. Jeden je na obrázku č. 4.

— A jak jsou dlouhé strany těch trojúhelníků?



Obr. 4

— To ti nepovím. Ale řeknu ti, že z těch šesti pětiúhelníků mají dva obvod 19 cm a čtyři 23 cm. To by ti mělo stačit. Prozradím ti ještě, že délky stran trojúhelníků jsou celá čísla.

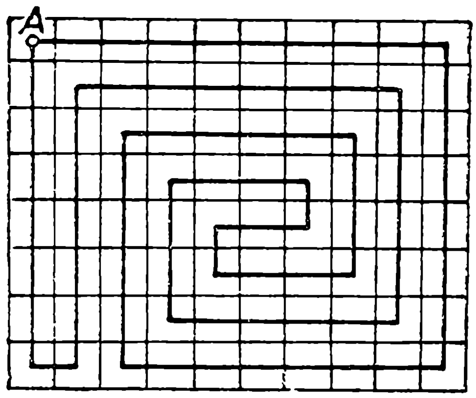
Úkol pro vás:

a) Určete délky stran tří rovnoramenných trojúhelníků.

b) Narýsujte všech šest pětiúhelníků, které lze sestavit z těchto tří trojúhelníků.

Z7-I-5

Obrazárnu tvoří 80 čtvercových místností o straně 4 metry. Hlídač koná každou hodinu obhlídku všech místností podle plánu (obr. 5). Začíná i končí v místnosti A. Přitom projde středem každé místnosti.



Obr. 5

a) Kolik metrů celkem ujde?

b) Zjistěte, zda by si mohl délku pochůzky nějak zkrátit.

Z7-I-6

Množina M se skládá ze všech osmiciferných čísel zapsaných pouze pomocí 1 a 3. Najděte v množině M číslo, které je beze zbytku dělitelné číslem 7 a přitom je

a) co nejmenší,

b) co největší,

c) má co největší počet 3,

d) má co největší počet 1.

Své tvrzení odůvodněte. V případě a) musíte například ukázat, že všechna čísla množiny M, která jsou menší než nalezené číslo, nejsou dělitelná číslem 7. K dělení můžete použít počítačky.

Kategorie Z6

Z6-I-1

Máte k dispozici libovolný počet červených a modrých tyček stejné délky. Z osmi z nich můžete sestavit model pravidelného čtyřbokého jehlanu. Kolik takových navzájem různých modelů můžete sestavit? Dva modely jsou různé, jestliže je nemůžeme postavit vedle sebe tak, aby všechny odpovídající hrany měly stejnou barvu.

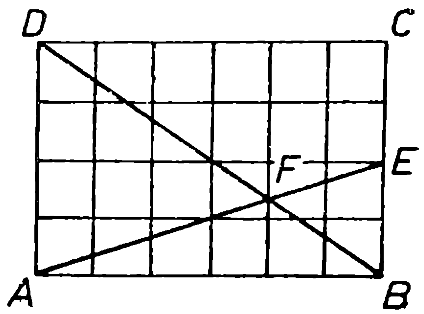
Z6-I-2

Vyřešte algebrogram

$$\begin{array}{rrrrr} Š & K & O & L & A \\ & & L & E & V \\ & & L & E & V \\ \hline U & M & Y & L & A \end{array}$$

Z6-I-3

Vypočítejte, jakou část obsahu obdélníku $ABCD$ tvoří obsah (obr. 6)



Obr. 6

a) trojúhelníku ABF,
b) trojúhelníku BFE,
c) čtyřúhelníku $DFEC$,
d) trojúhelníku AFD.

Z6-I-4

17. květen 1985 byl den s matematickým datem: Součin čísel označujících den a měsíc se rovná poslednímu dvojčíslí letopočtu, 17 . 5 = 85. Zjistěte, které roky 20. století neobsahují ani jeden den s matematickým datem.

Z6-I-5

Pod každou dvojicí sousedních čísel na obrázku vlevo je jejich součin. Například 1,5 6 = 9, 6 2 = 12, atd. Napište místo teček na obrázku vpravo čísla tak, aby byl pod každou dvojicí sousedních čísel vždy jejich součin.

1,5   6   2
  9   12
   108

1,5   4   2
  6   3
       72

Z6-I-6

Najděte všechny trojice jednociferných čísel, pro které platí, že jejich součin je pětinásobkem jejich součtu.

Úlohy pro I. kolo XXVIII. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie D

1. Pri pretekoch v behu na 100 m sa bežec rozbiehal po štarte rovnomerne zrýchleným pohybom po dráhe $d_1 = 20$ m za dobu $t_1 = 3{,}5$ s. Potom až do cieľa bežal stálou rýchlosťou.

a) Určte zrýchlenie pohybu na prvom úseku dráhy.

b) Určte maximálnu rýchlosť, ktorú bežec dosiahol.

c) Za akú dobu zabehol bežec dráhu 100 m?

a) Nakreslite graf rýchlosti a zrýchlenia ako funkcie času.

2. Na hladine jazera pláva rovnorodý valec s polomerom R a s výškou h. Valec je zhotovený z materiálu, ktorého hustota je dvakrát menšia ako hustota vody. Uvažujme dve rovnovážne polohy plávajúceho valca: v polohe A je os valca kolmá na voľný povrch vody, v polohe B je os valca rovnobežná s voľným povrchom vody.

a) Určte, ako sa zmení poloha ťažiska valca pri preklopení valca z polohy A do polohy B.

b) Určte, ako sa zmení poloha ťažiska kvapalinového telesa rovnakého objemu, ako je ponorená časť valca, keď preklopíme valec z polohy A do polohy B.

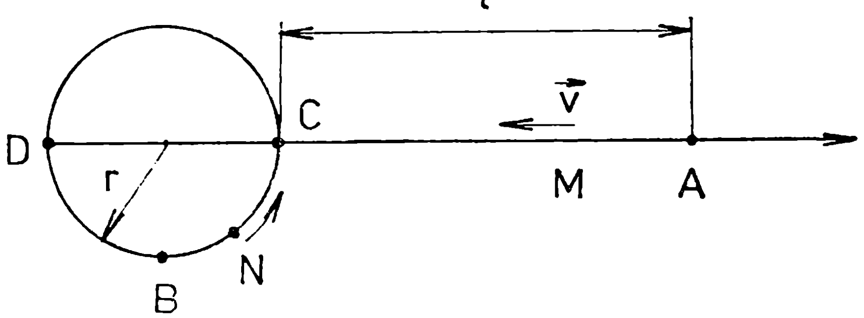
c) Akú prácu musíme urobiť, keď preklopíme valec z polohy A do polohy B.

Urobte diskusiu s ohľadom na R, h. Úlohu c) riešte pre hodnoty $R = 6{,}0$ cm, $h = 20$ cm, $\varrho_0 = 1000$ kg . m^{-3}.

3. Hmotný bod M se pohybuje po přímce stálou rychlostí v, jeho počáteční poloha je dána bodem A (obr. D-1). Současně s bodem M se začne pohybovat hmotný bod N z počáteční polohy B po kružnici o poloměru r, a to pohybem rovnoměrně zrychleným. Při prvním oběhu bodu N se oba hmotné body setkají v místech C, D, vzdálenost $AC = l$.

a) Stanovte počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ hmotného bodu N.

b) Stanovte zrychlení $\boldsymbol{a}$ bodu N.



Obr. D-1

c) Proveďte diskusi vztahu pro zrychlení a vzhledem k podmínkám úlohy.

4. Těleso padalo volným pádem po dobu 14 s.

a) Jakou dráhu urazilo těleso v poslední sekundě pohybu?

b) Určete dráhy, jež těleso urazilo postupně v první sekundě, ve druhé třetí, . . , ve 14. sekundě. Označte s_n dráhu, kterou těleso urazí za čas t_n. Výsledky zapište do tabulky:

$\frac{t_n}{\mathrm{s}}$	1	2	3	4	5	6		12	13	14
$\frac{s_n}{\mathrm{m}}$										
$\frac{s_n - s_{n-1}}{\mathrm{m}}$										
$\frac{s_n - s_{n-1}}{s_1}$										

c) Určete poměr dráhy tělesa vykonané v n-té sekundě a dráhy tohoto tělesa vykonané v první sekundě. Vyslovte závěr.

5. Hliníková nádoba tvaru válce má vnější rozměry: výšku h, průměr dna d. Tloušťka stěn i dna je x, $x \ll h$, $x \ll d$.

a) Určete, o jaký úhel α_1 musíme nádobu naklonit, aby se dostala do rovnovážné polohy vratké.

b) Řešte úlohu a) v případě, že nádoba je dnem vzhůru; úhel označte α_2.

c) U obou výsledků proveďte diskusi pro případ $h \gg d$, $d \gg h$; výsledky fyzikálně zdůvodněte.

Úlohu řešte obecně, potom pro hodnotu $h = d$.

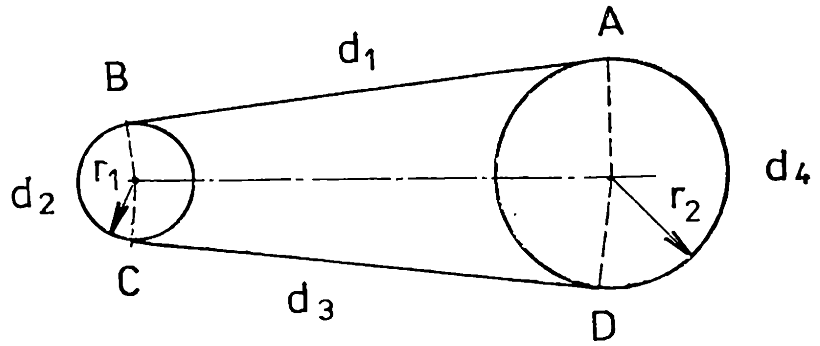
6. Určování hustoty cukru.

Úloha: S použitím vhodných pomůcek určete hustotu kostkového cukru a odhadněte, jaké chyby měření jste se dopustili.

Poznámky: K měření použijte více kostek cukru a předpokládejte, že mají všechny stejnou hustotu. Ke každému způsobu (navrhněte alespoň dva různé způsoby) proveďte 5 až 10 měření s různým počtem kostek cukru. Jeden ze způsobů by měl být uskutečnitelný s předměty, které máte v domácnosti. Jestliže chcete ukázat své tvořivé schopnosti, provádějte měření s cukrem tvaru bridž.

Pozor: Cukr se při měření nesmí znehodnotit.

7. Závodní automobil se pohybuje po rychlostním okruhu, který se skládá ze dvou přímých úseků AB, CD a dvou kruhových zatáček BC, DA (viz obr. D-2). Úseky AB, CD mají stejnou délku $d_1 = d_3 = 680$ m,



Obr. D-2

první zatáčka má poloměr $r_1 = 80$ m, délka oblouku $d_2 = 228$ m, druhá zatáčka má poloměr $r_2 = 180$ m, délka oblouku $d_4 = 618$ m. Závodní automobil má největší dosažitelnou rychlost $v_m = 210$ km . h^{-1}, největší dosažitelné zrychlení při zrychleném pohybu $a_1 = 4{,}9$ m . s^{-2}, při zpomaleném pohybu $a_2 = 7{,}5$ m . s^{-2}. Automobil projíždí zatáčky stálými rychlostmi, rychlost v zatáčkách je omezena podmínkou, že dostředivé zrychlení nesmí překročit hodnotu $a_d = 2{,}8$ m s^{-2}.

a) Určete doby t_1, t_2, za které projede automobil přímé úseky AB, CD okruhu.

b) Určete, za jakou dobu může projet závodní automobil celý okruh.

c) Určete největší průměrnou rychlost automobilu na okruhu.

Výsledky celostátního kola 35. ročníku matematické olympiády, které se konalo v Pelhřimově 24. — 27. dubna 1986

1.—5. David Bednárek, gymnázium W. Piecka, Praha
Petr Hájek, gymnázium W. Piecka, Praha
Vladimír Kordula, gymnázium M. Koperníka, Bílovec
Adam Obdržálek, gymnázium W. Piecka, Praha
Petr Šleich, gymnázium Děčín

6.—7. Martin Heisler, gymnázium W. Piecka, Praha
Vladan Majerech, gymnázium Pardubice

8.—9. Anton Belan, gymnázium A. Markuša, Bratislava
Roman Soták, gymnázium Košice, Šmeralova

Kde je také třeba mladých talentovaných matematiků

Ing. HANA MLÁDKOVÁ, 169. PS Praha 4

Většina mladých matematiků se v současné době zabývá odbornými problémy odděleně, omezuje se jen na konzultace s kapacitami a výsledky své práce uplatňuje pouze v různých soutěžích a olympiádách. Je to škoda, neboť mladých nadějných matematiků je potřeba na různých místech, v neposlední řadě mohou svou činností i odborným zaměřením významně přispět k výchově mladé socialistické generace. Ptáte se kde? V pionýrských skupinách! A jak? Jako dobrovolní pionýrští vedoucí nebo instruktoři u oddílů s matematickým a fyzikálním zaměřením.

Pokud máte kromě zájmu o matematiku či jiné exaktní vědy (fyzika, geometrie, programování) ještě kladný vztah k dětem a zájem o zmíněný druh činnosti, jste pro práci se zájmovým oddílem přímo stvořen. Shrňme si pro přehlednost základní předpoklady dobrého vedoucího zájmového oddílu do 3 bodů:

1. odborné předpoklady
2. kladný vztah k dětem
3. zájem o práci v PO.

Jste-li studentem gymnázia či jiné SŠ a čtete-li pravidelně Rozhledy matematicko-fyzikální, je u vás splnění 1. bodu nesporné. Bohužel ale právě bod 2. a zejména 3. u mladých zájemců o matematiku často chybí. Patříte-li k těmto čtenářům, další čtení článku by pro vás bylo zřejmě ztrátou času. Dále někteří z vás o této činnosti dosud nepřemýšleli, či nevědí o podobných možnostech. Právě pro vás je určen tento článek. Zejména zbystřete pozornost vy, kdož uvažujete o *studiu učitelství na MFF UK či PedF UK. Práce v PO se při přijímacích pohovorech a v průběhu celého studia těchto oborů velmi cení a v některých studijních kroužcích je dokonce povinná.*

Jaká je současná situace s matematickými oddíly na pionýrských skupinách (PS)? Po pravdě řečeno — nevalná. Nutno poznamenat, že takovéto oddíly nejsou na PS častým jevem. Je to způsobeno hlavně již zmíněným nedostatkem zapálených matematiků-vedoucích a obvykle i nezájmem členské základny, který zase pramení z nedostatečného podchycení mladých talentů, nedostatečné propagace, nedůvěry k činnosti v těchto oddílech. Tímto faktem vás však nechci odradit. Záleží především na vás, jak k založení takového oddílu přistoupíte, jaký zájem v dětech vzbudíte. Nemusíte se bát nezdaru na první schůzce. Do oddílů s matematickým zaměřením se většinou hlásí děti s nadprůměrnou inteligencí, děti zvídavé, hloubavé, mírné, leckdy vděčné za sebemenší nový poznatek či slůvko uznání.

Jak na to? Nejdříve je nutno pohovořit si se skupinovým vedoucím na PS, kde hodláte svůj plán založení matematického oddílu realizovat (nejlépe v místě bydliště či studia). Ten vám již jistě ochotně a rád sdělí vše potřebné. Potom vás čeká nábor členů. Je otázkou vaší nápaditosti a fantazie, jaký způsob zvolíte, jestli plakáty s termínem zahajovací schůzky, informační letáky, či individuální rozhovor v každé třídě (nesmíte však zapomenout, že pokud chcete získat dostatečný počet členů, je nutno provést nábor nejméně ve všech třídách II. stupně).

Co s dětmi dělat? Hodně záleží na první schůzce. Děti musíte upoutat, vzbudit v nich zájem o činnost v oddíle. Dobře se osvědčilo hned na první schůzce seznámit děti s dlouhodobým plánem práce a programem akcí. Protože děti v matematických oddílech jsou různého věku a s různým stupněm odborných znalostí, je nevyhnutelné je rozdělit do družin. To můžeme udělat při druhé schůzce. A potom již přijde na řadu běžná činnost, která musí být zajímavá, poutavá a pestrá. Několik námětů pro začátek:

— řešení zajímavých příkladů mimo školní osnovy
— matematické hříčky
— matematické soutěže jednotlivců i skupin
— příprava na olympiády
— seznámení se slavnými osobnostmi z dějin
— topografické práce v terénu
— besedy s odborníky, profesory
— seznámení s odborným tiskem
— dopisování s mladými matematiky zemí RVHP
— práce s minikalkulátory
— návštěvy tématických výstav (výpočetní techniky)
— exkurze do výpočetních středisek atd.

Pro ty, kteří si netroufají či nemají možnost vést oddíl po celý rok, uveďme aspoň typ na prázdniny. Jsou jím pionýrské a svazácké tábory s výukou matematiky. Známé jsou např. Tábory mladých Pythagorovců (TMP), pořádané každý rok KDPM v Hradci Králové. V takovýchto táborech je stále třeba vhodných oddílových vedoucích s požadovanými odbornými předpoklady.

Přečtení těchto několika základních informací vám ještě nemůže zaručit, že budete úspěšným vedoucím matematického oddílu. I v této činnosti je třeba se zdokonalovat, získávat zkušenosti a hlavně se nenechat odradit případnými počátečními neúspěchy. Pokud to však myslíte s prací v matematickém oddíle vážně a potřebujete další typy či rady, napište si o ně na adresu:

Ing. Hana Mládková
Gončarenkova 38
147 00 Praha 4-Braník.

Na obálku připište heslo: MATEMATICKÝ ODDÍL.

Kalendár M-F: jún 1986

1. VI. 1796 sa v Paríži narodil *Nicolas Léonard Sadi-Carnot*, francúzsky fyzik. Vypracoval teóriu tepelných strojov. Patrí k zakladateľom termodynamiky.

6. VI. 1436 sa v Kráľovci narodil *Johann Müller — Regiomontanus*, nemecký astronóm a matematik. Aplikoval trigonometriu v astronómii, zostavil tabuľky, vydával astronomické ročenky.

7. VI. 1826 zomrel *Joseph von Fraunhofer*, nemecký fyzik a astronóm. Študoval absorpčné čiary v spektre Slnka, zdokonalil ďalekohľad.

8. VI. 1851 sa narodil *Jacques Arsène d'Arsonval*, francúzsky fyziológ a fyzik. Patrí k zakladateľom biofyziky. Skúmal vplyv vysokofrekvenčných prúdov, skonštruoval prístroje pre fyziologický výskum.

10. VI. 1836 zomrel v Marseille *André Marie Ampère*, francúzsky fyzik a matematik. Objavil základné zákony elektrodynamiky. Aplikoval vyššiu matematiku na problémy mechaniky. Zaujímal sa o diferenciálne rovnice a variačný počet.

13. VI. 1871 sa narodil *Ernest Steinitz*, nemecký matematik. Pracoval v algebraickej teórii čísel a abstraktnej algebre.

13. VI. 1831 sa v Glenlair (Škótsko) narodil *James Clerk Maxwell*, škótsky fyzik. Matematicky spracoval Faradayove zákony o elektrine a magnetizme, vytvoril teóriu elektromagnetického poľa. Maxwellove rovnice sa stali základom elektrodynamiky.

14. VI. 1736 sa v Angoulème narodil *Charles Augustin Coulomb*, francúzsky fyzik a vojenský inžinier. Prispel k rozvoju náuky o elektrine a magnetizme, uverejnil základy metódy merania malých síl pomocou torzných váh, zaviedol pojmy magnetický moment a polarizácia elektrického náboja.

14. VI. 1856 sa v Rjazani narodil *Andrej Andrejevič Markov*, ruský matematik. Pracoval v teórii čísel, teórii dif. rovníc, teórii pravdepodobnosti a štatistiky.

14. IV. 1746 zomrel *Colin Maclaurin*,, škótsky matematik. Prvý publikoval prácu o rozklade funkcií na mocninný rad.

21. VI. 1781 sa v Pithiries narodil *Siméon Denis Poisson*, francúzsky matematik a fyzik. Zaoberal sa teóriou diferenciálnych rovníc, teóriou pravdepodobnosti, pružnosti a tepla. Zaviedol potenciál.
27. VI. 1806 sa v Madure (India) narodil *August de Morgan*, škótsky matematik a logik. Usiloval sa zjednotiť logiku a matematiku.
26. VI. 1831 zomrela *Sofia Germainová*, francúzska matematička. Ako prvá žena získala cenu Parížskej akadémie vied.
28. VI. 1906 sa v Katoviciach narodila *Maria Goepertová-Mayerová*, americká fyzička polského pôvodu. Skúmala atómovú štruktúru a procesy prebiehajúce v atómoch. V roku 1963 dostala spolu s H. Jensenom a E. Wignerom Nobelovu cenu za fyziku za teóriu o štruktúre elektrónového obalu atómového jadra.

Júl 1986

1. VII. 1646 sa v Lipsku narodil *Gottfried Wilhelm Leibniz*, nemecký matematik, fyzik a filozof. Vypracoval základy diferenciálneho počtu, vytvoril preň terminológiu i symboliku. Bol predchodcom modernej matematickej logiky.
1. VII. 1796 sa v Paríži narodil *Nicolas Léonard Sadi Carnot*, francúzsky fyzik. Patrí k zakladateľom modernej termodynamiky a teórie tepelných strojov.
2. VII. 1906 sa v Strasbourgu narodil *Hans Albrecht Bethe*, nemecký fyzik. Rozpracoval teóriu jadrových reakcií, aplikoval kvantovú mechaniku v teórii atómu. V roku 1967 získal Nobelovu cenu za fyziku.
8. VII. 1476 zomrel v Ríme *Johann Müller-Regiomontanus*, nemecký astronóm a matematik.
9. VII. 1856 v Turíne zomrel *Amedeo Avogadro*, taliansky fyzik. Skúmal vlastnosti plynov, zaviedol pojem molekuly. Odhalil zákon, že rovnaké objemy rôznych plynov pri rovnakej teplote i tlaku obsahujú rovnaký počet molekúl.
11. VII. 1916 sa v Austrálii v Atortone narodil *Alexander Michajlovič Prochorov*, sovietsky fyzik. Patrí k zakladateľom kvantovej elektroniky. V roku 1964 získal spolu s Townesom a Basovom Nobelovu cenu za práce, ktoré viedli ku konštrukcii laserov a maserov.
13. VII. 1921 zomrel *Gabriel Lippmann*, francúzsky fyzik. Skúmal elektrokapilárne javy, objavil termoendosmózu. V roku 1908 získal Nobelovu cenu za metódy farebnej fotografie na princípe interferencie svetla.
16. VII. 1801 sa v Elberfelde narodil *Julius Plücker*, nemecký matematik a fyzik. Pracoval v oblasti magnetických vlastností kryštálov, elektrickej vodivosti plynov, spektroskopii. Uverejnil všeobecnú teóriu algebraických kriviek.

16. VII. 1888 sa v Amsterdame narodil *Frederik Zernike*, holandský fyzik. Študoval optické javy. Za objav fázovo-kontrastného mikroskopu získal v roku 1953 Nobelovu cenu.

20. VII. 1866 zomrel v Selasce pri Lago Maggiore *Georg Fridrich Bernhard Riemann, nemecký matematik.* Vytvoril nový pohľad na geometriu umožňujúci zahrnúť euklidovskú aj neeuklidovskú geometriu. K rozvoju matematiky a fyziky prispel novými pojmami, vetami a metódami.

26. VII. 1941 zomrel v Paríži *Henri Léon Lebesgue*, francúzsky matematik. Patrí k zakladateľom teórie funkcií, teórie miery. Vytvoril novú predstavu o integrovaní.

27. VII. 1871 sa v Berlíne narodil *Ernesto Zermelo*, nemecký matematik. Sformuloval axiomatický systém teórie množín, zaoberal sa variačným počtom a použitím teórie pravdepodobnosti v štatistickej fyzike.

August 1986

8. VIII. 1901 sa v Cantone narodil *Ernest Orlando Lawrence*, americký fyzik. Skúmal fotoelektrický jav, kanálové lúče, radioaktivitu. V roku 1939 získal Nobelovu cenu za vynález a konštrukciu cyklotrónu. Zúčastnil sa na projekte prvej atómovej bomby.

9. VIII. 1776 sa v Turíne narodil *Amadeo Conte di Quarengna Avogadro*, taliansky fyzik. Položil základy molekulárnej teórie. Na základe jeho zákona sa určujú molekulové a atómové hmotnosti i chemické vzorce zlúčenín.

16. VIII. 1821 sa v Richmonde narodil *Arthur Cayley*, anglický matematik. Položil základy súčasnej algebraickej geometrie, odhalil vzťah medzi teóriou invariantov a projektívnou geometriou. Zaviedol pojem abstraktnej grupy, študoval algebraické krivky.

17. VIII. 1601 sa v Beaumont de Lomagne narodil *Pierre de Fermat*, francúzsky právnik a matematik. Matematika bola pre neho záľubou. Položil základy analytickej geometrie, teórie pravdepodobnosti. Úspešný bol v teórii čísel. Ovládal celý rad cudzích jazykov, písal básne.

20. VIII. 1961 zomrel v Randolphe (Anglicko) *Percy Wiliams Bridgman*, americký fyzik. V roku 1946 získal Nobelovu cenu za konštrukciu zariadenia na výrobu extrémne vysokých tlakov a za objavy v oblasti vysokých tlakov. Mal široký rozhľad v prírodných vedách i filozofii.

23. VIII. 1806 zomrel v Paríži *Charles Augustin Coulomb*, francúzsky fyzik a inžinier. Prispel k vytvoreniu presných experimentálnych metód výskumu elektrostatických javov. Odhalil vzťah pre veľkosť sily medzi dvoma elektrickými nábojmi.

28. VIII. 1901 sa v Moskve narodil *Pjotr Sergejevič Novikov*, sovietsky matematik. Zaoberal sa deskriptívnou teóriou množín, teóriou grúp

a teóriou algoritmov. Založil sovietsku školu matematickej logiky.

30. VIII. 1856 sa v Brémach narodil *Carl David Tolmé Runge*, nemecky matematik. Vypracoval numerické metódy riešenia diferenciálnych rovníc. Skúmal spektrálne čiary.

30. VIII. 1871 sa v Growe Spring (Nový Zéland) narodil *Ernest Rutherford, lord of Nelson*, anglický fyzik. Venoval sa výskumu radioaktivity, vypracoval model atómu. Uskutočnil prvú umelú jadrovú reakciu. V roku 1908 dostal Nobelovu cenu za chémiu.

31. VIII. 1821 sa v Postupime narodil *Hermann Ludwing Ferdinand von Helmholtz*, nemecký fyzik a fyziológ. Bol významným prírodovedcom 19. storočia. Matematicky formuloval zákon zachovania energie. Zaoberal sa hydrodynamikou, elektromagnetizmom, akustikou, optikou. Rozpracoval fyzikálne a fyziologické základy teórie hudby. Vypracoval teóriu priestorového a farebného videnia.

Co stačí k vystudování matematiky

Dvoje manšestráky
Stravenky do menzy a sleva na tramvaj
v hodnotě dané jednotkovou cenou
a vztahem kalendáře k přestupnému roku:
Jednou či dvakrát?

A pět let. Nepodmíněně

Mírné snížení vlahosti jarních večerů
prospívá soustředění
na věci x a y
na věci funkcí a náhodných jevů
na věci výsledků
které lze dvakrát podtrhnouti

a umožňuje vidět skrze prach
usedající roztržitě na věci ducha

To stačí k vystudování matematiky
Není to však nutné

S. Komenda

Foucaultův důkaz rotace Země

V očích fyzika, který navštíví Francii, není pařížský Pantheon (chrám všech bohů čili stavba stejného jména jako proslulý Pantheon v antickém Římě) jen divem pařížské architektury a francouzské statiky, ale zejména místem, kde byl poprvé podán přímý důkaz rotace Země. Zda je Země kulová a zda koná rotační a revoluční pohyb, patřilo po tisíciletí k fundamentálním přírodovědeckým a světonázorovým otázkám, o nichž se mnoho psalo a za které se mnoho trpělo. Od *Besselova* důkazu paralaxy hvězd (1838) a od *Foucaultova* pokusu (1850) veškeré pochybnosti přestávají a heliocentrismus i představa o rotaci Země se stávají fyzikálními fakty.

Foucaultovo kyvadlo bylo těžké kovové závaží zavěšené na 67 metrů dlouhém laně, jež bylo předem vychýleno a přivázáno provazy ke stěně. Poté byly provazy přepáleny, aby snad nezačalo kyvadlo opisovat elipsu a aby již předem nedostalo nějaký příčný pohyb. Jediným důvodem očekávaného stáčení roviny kyvu kyvadla tedy byla rotace Země, neboť kyvadlo zachovává svoji rovinu kyvu vůči hvězdám a Země se pod ním otáčí. A skutečně za přítomnosti vědců a aristokracie se rovina kyvu stáčela ve shodě s poučkou, že za hodinu se na místě o zeměpisné šířce φ rovina kyvu stočí o úhel $15° . \sin \varphi$. Později (1852) sestrojil *Foucault* rovněž gyroskop, jímž dokázal totéž; gyroskopický kompas je od té doby významným přístrojem (zejména v letectví); *Foucault* vyvrátil rovněž odvěkou korpuskulární teorii světla svými měřeními rychlosti světla ve vodě a objevil Foucaultovy proudy. Za své vědecké zásluhy byl *Léon Jean Bernard Foucault* (19. 9. 1819 Paříž — 11. 2. 1868 Paříž), někdejší student medicíny, poté velký fyzik a astronom, odměněn Napoleonem III. ročním důchodem 10 000 franků a členstvím ve Francouzské akademii. Zasloužil se rovněž o rozvoj fotografie a jako první začal sestavovat dalekohled se zrcadly tvořenými vrstvami kovu na skle.

Vladimír Mališek

47 233

Čo je matematika?

Matematika je to, za pomoci čoho ľudia riadia prírodu i seba.

A. M. Kolmogorov

Matematika je ako celok metódou poznania sveta.

A. Lasota

Matematika je v najširšom zmysle, rozvíjanie všetkých druhov formálnych, pre myslenie nutných, deduktívnych spôsobov úsudzovania.

A. N. Whitehead

Vydává ministerstvo školství ČSR, Praha 1, Karmelitská 7 ve Státním pedagogickém nakladatelství, Praha 1, Ostrovní 30 za odborné péče Jednotky čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, nov. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 64, 1985-86

Vydává ministerstvo školství ČSR
ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze
za odborné péče
Jednoty československých matematiků a fyziků

OBSAH

Úvodní články

Matematika

Fyzika

Z dějin exaktních věd