

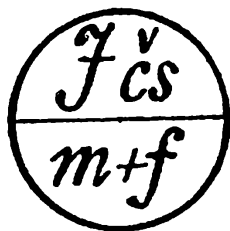
ROZHLED

**matematicko
– fyzikální**

(1)

**ROČNÍK 63, 1984/85
ZÁŘÍ**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE
Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK
Praha, prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc.,
PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář,
CSc., ÚNM Praha., dr. Martin Šolc,
CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Chrapan: Slovenské národné povstanie	1
J. Barták: Matematika v ekonomii	7
J. Mída: O nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem	13
I. Fischer: Integrované logické obvody SSI	15
J. Mudroň: Hrozba následkov jadrovej vojny I	24
L. Dvořák: Ještě ke geosynchronní Věži	29
A. Šolcová: Kdo byl Friedrich Wilhelm Bessel?	38
Přemýšlíme, řešíme .	41
Olympiády a SOČ .	43
Z nových knih	47
Pohledy do dějin .	3. str. obálky

Slovenské národné povstanie

Doc. dr. JÁN CHRAPAN, CSc., UK Bratislava

1

„Jsme právem hrdi na protifašistický zápas československého lidu. Nikdy však nezapomeneme, že rozhodující silou tohoto dějinného zápasu byl sovětský lid a jeho slavná armáda, která rozdrtila hitlerovský nacismus a přinesla svobodu porobeným národům.“

Gustáv Husák, B. Bystrica
29. 8. 1974

Slovenské národné povstanie — výraz protifašistického odboja. Pri-
pomeňme si udalosti z tohoto hrdinského obdobia našich dejín.

V roku 1943 poslalo vedenie KSČ z Moskvy na Slovensko *Karola Šmidkeho*, ktorý vytvoril spolu s *Gustávom Husákom* a *Ladislavom Novomeským* piaty ilegálny Ústredný výbor Komunistickej strany Slovenska. Tento obnovil ilegálnu sieť strany, narušenú perzekúciou fašistických orgánov. Z podnetu ilegálnej KSS sa tvorili ilegálne revolučné národné výbory. Ako vrcholné celonárodné odbojové centrum sa vytvorila Slovenská národná rada.

V roku 1943 sa na území Slovenska začali utvárať partizánske buňky, zachraňovali sa sovietski vojenski utečenci a príslušníci iných porobených európskych národov, ktorých prevádzali do partizánskych brigád. Pred letom 1944 partizánska činnosť nemala charakter masového pohybu. Dôvodom pre takýto stav bola skutočnosť, že Slovensko nebolo Nemcami okupované a vedenie Komunistickej strany Slovenska — bojového oddielu Komunistickej strany Československa — sa snažilo pripraviť ozbrojené povstanie bez toho, aby sa fašistickým orgánom poskytol dôvod pre zvýšenú perzekúciu. Odboj sa však pripravoval. SNR predstavovala jednotu hlavných zložiek národnooslobodzovacieho boja zhora, ilegálne národné výbory zasa zabezpečovali spoluprácu zdola. Situácia v slovenskej armáde naznačovala, že sú predpoklady pre jej získanie na stranu protifašistického boja.

Ilegálna SNR nadviazala spojenie s podplukovníkom *Jánom Golianom*, náčelníkom štábu veliteľstva pozemného vojska v Banskej Bystrici práve v čase, keď ho *Eduard Beneš* z Londýna vymenoval za vojenského veliteľa odboja na Slovensku. Z rokovania vznikla Vojenská rada, podriadená SNR. Jej hlavnou úlohou bolo pripraviť vojenskú stránku povstania na Slovensku.

Na jar 1944 vyvíjali Nemci úsilie vybudovať obranné postavenia, ktoré by uzavreli cesty cez Karpaty. Slovenské ministerstvo národnej obrany vyslalo v máji 1944 do východoslovenských Karpát dve dobre vyzbrojené divízie, ktorých 24 000 mužov malo dobudovať obranné postavenia a zaujať v nich pozície. To viedlo SNR v júli 1944 k rozhodnutiu: vo vhodnom čase otvoriť sovietskej armáde prechody cez Karpaty. Núdzový variant pripúšťal začiatok povstania v okamihu, keď by sa Nemci pokúsili okupovať Slovensko, a to aj vtedy, keby nebolo povstanie ešte vojensky pripravené. Na okupovanom Slovensku by sa povstanie mohlo len veľmi ťažko začať.

Vojenské ústredie nepostupovalo dosť veľkoryso. Z konšpiračných dôvodov nezapájalo do príprav povstania veliteľov západných, ale ani východných oblastí. Z armádnych zdrojov sa účinne nepodporovalo partizánske hnutie. Aj keď mala byť hlavnou ozbrojenou silou povstania armáda, predsa bolo treba naďalej posilňovať partizánske skupiny, ktoré mali dopĺňať operácie armády náhlymi prepadmi, rozrušovaním komunikácií a ničením tylu nepriateľa.

J. Golian pod tlakom londýnskej emigrantskej vlády znemožňoval kontakty s Moskvou. Preto sa komunistickí členovia SNR v tichosti dohodli využiť ponuku ministra národnej obrany generála *Čatloša*, ktorý chcel, nič nevediac o práci a zámeroch SNR, aby komunistickí činitelia odovzdali sovietskej armáde návrh, že on, Čatloš, vo vhodnej chvíli otvorí prechody cez Karpaty a uskutoční na Slovensku štátny prevrat. Členovia ÚV KSS zaujali k tomuto memorandu odmietavý postoj.

Moskovské vedenie prijalo koncepciu povstania tak, ako ju vypracovala Komunistická strana Slovenska. Avšak skôr, ako sa mohli výsledky moskovského rokovania využiť, udalosti na Slovensku sa neočakávane pohli a povstanie sa začalo podľa núdzového variantu, čo sa odohralo na Slovensku za Šmidkeho pobytu v Moskve.

Predvečer povstania

Partizánske hnutie na Slovensku posilňovali organizátori zo Sovietskeho zväzu. Ukrajinský štáb partizánskeho hnutia vypracoval spolu s predstaviteľmi Československa v Sovietskom zväze plán partizánskeho hnutia na Slovensku. Pri Kyjeve vznikla špeciálna škola pre výcvik budúcich československých organizátorov partizánskeho hnutia. Na východné Slovensko prichádzali horskými cestami celé partizánske skupiny. Vzdušnou cestou prišla ako prvá v noci z 25. na 26. 7. 1944 skupina, vedená *P. A. Veličkom*. Táto organizovala 1. partizánsku brigádu *M. R. Štefánika*. Pod vedením Slováka *E. Bielika* bola vysadená na Latictorskej holi osemčlenná skupina, ktorá sa rýchlo rozrástla a stala sa známou ako partizánska skupina Jánošík. Český vlastenec *Teodor Pola*

zoskočil so svojimi druhmi 27. 8. 1944 do priestoru Turčianskeho Martina a vytvoril partizánsky zväzok nazvaný Ján Žižka. Odhaduje sa, že do povstania prišlo okolo 600 organizátorov a že v predvečer povstania bolo na Slovensku asi 5000 partizánov.

V polovici augusta považovali štátne orgány situáciu za tak vážnu, že urobili mimoriadne opatrenia. Na likvidáciu partizánov vyslali do hôr armádu a 12. 8. 1944 vyhlásili stanné právo. Vojenská expedícia, na Golianov zásah, vyznela naprázdno. Celé jednotky prechádzali k partizánom. Od polovice augusta stíhala jedna otvorená akcia druhú. Dňa 28. augusta obsadili partizáni Liptovský Mikuláš a Brezno. Francúzsky partizánsky oddiel obsadil železničnú stanicu vo Vrútkach. Revolučný národný výbor vo Vrútkach vyhlásil Československú republiku. V Novákoch rozpustili židovský koncentračný tábor a tým oslobodili vyše 1500 väzňov. V Martine zajali nemeckú vojenskú misiu generála *Otta*, ktorá sa po rumunskom protifašistickom prevrate vracala do ríše a na druhý deň ju v kasárňach pri pokuse o odpor zlikvidovali.

Nemecký vyslanec *Ludin* hlásil do Berlína, že situácia nedovoľuje ďalej vyčkávať. Prezident Tiso s tým súhlasil, a tak sa rozhodlo, že 29. 8. 1944 začnú nemecké vojská obsadzovať Slovensko.

V noci z 29. na 30. augusta partizáni zišli k Banskej Bystrici, spojili sa so slovenskými vojakmi a mesto obsadili. Odvtedy až do konca októbra bola Banská Bystrica politickým, vojenským a partizánskym centrom Slovenského národného povstania. Tak sa začal revolučný nástup národa do nových čias. Mor ho!

Veľkú morálnu podporu získalo povstanie už na druhý deň, keď sa odpojil banskobystrický rozhlas od bratislavského vysielania a sám začal pôsobiť ako Slobodný slovenský vysielateľ Banská Bystrica. Výzvy na obranu národa, revolučné „Mor ho!“ tu prednášal hlásateľ *Ladislav Sára*, s ktorého menom je dnes spojené jedno z bratislavských gymnázií. Po viacerých bombardovaniach bol vysielateľ 2. septembra vyradený z prevádzky. Zásluhou rozhlasových pracovníkov, medzi ktorými bol aj neskorší člen katedry fyziky Vysokej školy technickej v Košiciach *ing. Šuba*, vybudoval sa mobilný vysielateľ s menším výkonom, ktorý potom podľa vojenskej situácie menil miesta vysielania.

Prvé boje, ešte 29. augusta večer, splanuli pri Žiline a Kežmarku, kam prenikli Nemci z Poľska. Do bratislavského rozhlasu prehovoril generál *Malár*, veliteľ východoslovenských divízií. Povstanie označil za predčasné a zbytočné. Nedemoralizoval tým síce obrancov stredného Slovenska, ale svojich vojakov zmiatol natoľko, že sa k povstaniu nepridali jednotne. Časť prešla k miestnym partizánom, časť sa prebila na stredné Slovensko a časť Nemci zajali. V nasledujúcich dňoch Nemci vyvíjali sústavný tlak na prístupové cesty do srdca povstania, Banskej Bystrice, kde sa

31. augusta zriadilo Veliteľstvo 1. čs. armády na Slovensku (povstaleckej) a kde 1. 9. 1944 vystúpila z ilegality Slovenská národná rada. Táto prijala Deklaráciu, ktorá obsahuje ciele povstania. Deklarácia sa stala východiskom k vydávaniu nariadení, vyhlasovaných s platnosťou zákona. Vzniklo 40 takýchto nariadení SNR. Jedným z nich bolo aj Nariadenie o poštátnení školstva. Už vtedy sa položil základ pre rozmach nášho školstva. Do práce Povereníctva pre školstvo sa zapojili aj neskorší profesori fyziky na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave *dr. Ján Vanovič* a *dr. Ján Fischer*.

Prvým dokumentom Komunistickej strany Slovenska, ktorá vyšla z ilegality, bolo „Vyhlásenie“ z 2. 9. 1944, ktorým sa obrátila k robotníkom a pracujúcej inteligencii. Robotníci v závodoch organizovali závodné výbory, ktoré podobne ako revolučné národné výbory v obciach mali za úlohu podporovať ozbrojený boj, prácu v závodoch, ich vojenskú obranu, zásobovanie a v prípade ohrozenia evakuáciu. Ich prácu riadil Ústredný odborový sekretariát, ktorý vznikol hneď v prvých dňoch povstania v Banskej Bystrici. Dňa 17. 9. 1944 sa zišiel v Národnom dome v Banskej Bystrici zjednocovací zjazd Slovenskej ľavice — Komunistickej strany Slovenska a Sociálnych demokratov na Slovensku. Zjazd prijal rezolúciu, organizačné smernice a zvolil vedúcich funkcionárov zjednotenej KSS. Predsedom sa stal *K. Šmidke* podpredsedmi *G. Husák* a *J. Čech*.

Na začiatku nasadili Nemci proti povstaniu dve divízie. V celku šlo asi o 15 000 mužov, vybavených kvalitnými zbraňami, s viacročnými bojovými skúsenosťami, s dobrou disciplínou, veliteľskou rutinou, s dobrou manévrovacou schopnosťou a dobre vybudovanou spravodajskou službou. V ďalšej etape, keď pre slabé výsledky vymenil veliaceho generála *Bergera* generál *Höfle*, stav nemeckých jednotiek vzrástol. Himmler prideliť Höflemu ďalšiu divíziu z Maďarska a špeciálnu brigádu *Dirlenwanger* z Poľska. Nemecké akcie podporovali letecké jednotky z *Piešťan*, *Malaciek*, *Krakova* a z *Budapešti*. V druhej polovici októbra získal Höfle divíziu pancierových granátnikov. V záverečnej etape viazal povstalecký front sedem divízií s celkovým počtom asi 40 000 mužov. Slovenské hory považovali aj dobre vyzbrojené nemecké útvary za nebezpečného protivníka, a preto často používali leť, vyhýbali sa nočnému boju a bezprostrednému dotyku s povstalcami.

Proti nemeckým divíziám stáli povstaleckí vojaci a partizáni. Počet partizánov rýchlo vzrástol na 18 000. Vznikli niekoľkotisícové partizánske brigády. V jednej z nich pod velením *E. Beelika* slúžil aj neskorší učiteľ Katedry teoretickej fyziky Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave *dr. Rudolf Zajac*. Partizáni boli považovaní za armádu komunistickej strany, za protiváhu buržoázne orientovaného vedenia povstaleckej armády. Partizánske jednotky boli internacionálne, tvorili ich príslušníci viac ako 20 národov. Po vytvorení Hlav-

ného štábu partizánskeho hnutia na Slovensku, 16. 9. 1944, vzrástla koordinovanosť akcií a disciplína. Hlavný štáb zabezpečoval činnosť v súlade so štábom partizánskeho hnutia v Kyjeve.

Do povstaleckej armády boli vyhlásené dve mobilizácie. Prihlásilo sa toľko záložníkov, že ich nebolo možné vyzbrojiť. Celkový počet vojakov dosahoval 60 000 mužov. Ich ručné zbrane podporovalo 120 diel a 40 mínometov, 10 bojaschopných lietadiel a 12 tankov. Z nepojazdných tankov zhotovili vo zvolenských železničných dielňach tri pancierové vlaky, ktoré úspešne zasahovali do bojov na Horehroní a na tratiach okolo Zvolena.

Najťažšie obranné boje za SNP prebiehali pri Strečne, Vrútkach a Martine, južne od Ružomberka na výšine Ostrô, v priestore Zvolen—Hronská Dúbrava—Banská Štiavnica, pri Žiari nad Hronom na hornej Nitre a pri Handlovej. Úspešné ofenzívne boje sa uskutočnili pri Švermove (Telgárt).

Aby sa mohla čo najlepšie organizovať obrana povstaleckého územia armádou aj partizánskymi oddielmi, zriadila SNR Radu na obranu Slovenska. Jej úlohou bolo kontrolovať politické pretváranie armády a zmierňovať občasné napätie medzi partizánmi a vojakmi. Členmi tejto rady boli však väčšinou príslušníci buržoázie, a tak jej rozhodnutia nie vždy vyzneli v záujme skutočného rozvoja revolúcie.

Slovenské národné povstanie sa v Čechách stretlo s hlbokými sympatiami. Stovky českých vlastencov prešli protektorátne hranice aj napriek tomu, že ríšsky protektor K. H. Frank nariadil trest smrti pre každého, kto neoprávnene prestúpi moravsko — slovenské hranice. Zo slovenskej strany sa len ťažko prebila na Moravu partizánska skupina *J. Ušiaka*. Ďalším skupinám sa už takýto prechod nepodaril.

Sovietska pomoc

Klement Gottwald v mene moskovského vedenia KSČ už 2. 9. 1944 požiadal sovietske orgány o pomoc pre bojujúce Slovensko. Materiál, potrebný pre boj, vojenská výstroj a výzbroj, lieky, to všetko prichádzalo k povstalcom zo Sovietskeho zväzu cez letisko Tri duby pri Banskej Bystrici, aj rôznymi poľnými letiskami zriadenými v horách, napríklad pri Muráni. Na Tri duby sa prepravila aj 2. čs. paradesančná brigáda, vyzbrojená a vycvičená v Sovietskom zväze. Už 8. 10. 1944 bola nasadená do boja západne od Zvolena, neskôr pri Brezne a Detve. Koncom októbra kryla táto brigáda ústup jednotiek do hôr. V polovici septembra priletel 1. čs. stíhací letecký pluk v ZSSR. Jeho 21 sovietskych stíhačiek s posádkami československých letcov operovalo z letiska Zolná pri Zvolene. Bojové úspechy dosahovali až do 25. 10. 1944, kedy 12 ešte použiteľných lietadiel odletelo späť do Sovietskeho zväzu.

Najrozsiahlejšou sovietskou vojenskou akciou, podporujúcou SNP, bola karpatsko-dukelská operácia, ktorú začali 8. 9. 1944 jednotky generálplukovníka *K. S. Moskalenka* a 1. ukrajinského frontu maršála

I. S. Koněva, s ktorými bojoval aj 1. čs. armádny zbor v ZSSR, vedený generálom *Ludvíkom Svobodom*. Operácie týchto jednotiek podporoval tlak 4. a 2. ukrajinského frontu v Rumunsku. Takto sa karpatsko-dukelská operácia rozvíjala v rámci širšieho útoku s cieľom vyhnať nemecké vojská z celého karpatsko-dunajského priestoru. Náročná karpatsko-dukelská operácia sa úspešne skončila až po päťdesiatich dňoch krutých bojov. Dala predpoklady na plnenie politických a hospodárskych úloh národnej a demokratickej revolúcie u nás.

V horách

Dňa 19. 10. 1944 nastúpili Nemci ku generálnemu útoku. Vojenské velenie sa 22. 10. uznieslo preniesť boj z otvorených frontov do hôr. Nezabezpečil sa však organizovaný ústup a v horách sa nepripravili potrebné základne.

Dňa 25. 10. 1944 sa začala evakuácia Banskej Bystrice. Predsedníctvo SNR a veliteľstvo povstaleckej armády preniesli svoje sídlo na Donovaly. O dva dni neskôr obsadili Nemci Banskú Bystricu. Veliteľ povstaleckej armády generál *Viest* vydal v tú noc rozkaz prejsť na partizánsky spôsob boja. Neuvedol však, ako to vykonať, a navyše rozkaz sa nedostal ku všetkým jednotkám. Falošné správy o rozpustení armády ochromili jej bojaskopnosť a vyvolali zmätok.

Odhaduje sa, že do hôr ustúpilo asi 50 000 vojakov a partizánov, politických pracovníkov, členov revolučných národných výborov. Časť z nich sa pre neznesiteľné zimné podmienky pokúsila vrátiť k ľudským obydliam. Jedným sa to podarilo, iní zahynuli v drsnej prírode, alebo ich chytili Nemci. Generálov *Viesta* a *Goliana* zajali. Neskôr zahynuli v koncentračnom tábore. Pri prechode cez Chabenec zahynul na chorobu a vyčerpanie aj *Ján Šverma*, zástupca moskovského vedenia KSČ.

Koncom roku 1944 partizáni ovládali všetky horské oblasti. Narúšali presuny nepriateľa, miestami úplne znemožnili správnu činnosť kléro-fašistickej bratislavskej vlády. V záverečnej etape boja boli účinné prechody partizánov frontovými líniami. Rozrušovali tým tyl nemeckého frontu, na oslobodené územie prevádzali mužstvo, výzbroj, politických pracovníkov, urýchlňovali postup sovietskych jednotiek.

Vznik novej ČSR

Na oslobodenom území začala účinkovať Slovenská národná rada — delegácia pre oslobodené územie. Od 21. 1. 1945 sídlila v Trebišove a od 30. 1. v Košiciach. Tu vydala Manifest, v ktorom vyzdvihla myšlienku novej Československej republiky a spojenectvo so Sovietskym zväzom. Zriadila Verejnú bezpečnosť, rozdelila konfiškované majetky. Národné výbory bez výhrad uznávali SNR za politickú predstaviteľku slovenského národa. Váhala len Ukrajinská národná rada Prjaševčiny, vytvorená

1. 3. 1945 v Prešove (Prjašev), ktorá sa 9. 4. postavila na stranu československej štátnosti a uznala SNR ako najvyšší orgán pre celé Slovensko.

Rokovaní medzi londýnskou emigráciou a vedením KSČ v Moskve sa zúčastnila aj delegácia SNR, v ktorej za KSS boli *G. Husák*, *L. Novomeský* a *J. Šoltész*. Táto delegácia neustupovala od zásad, prebojovaných v SNP a delegácia KSČ na čele s *K. Gottwaldom* ju podporovala. Účastníci týchto rokovaní pricestovali do Košíc 3. 4. 1945 a na druhý deň prezident *Beneš* vymenoval novú československú vládu, ktorej zloženie sa dohodlo pri moskovských rokovaníach. Pod predsedníctvom *Zd. Fierlingera* prijala nová vláda program, ktorý vošiel do dejín ako Košický vládny program, program ďalšieho vývoja vnútornej i zahraničnej politiky novej Československej republiky. S odstupom štyroch desiatok rokov vyniká prevratný revolučný význam základnej zmeny — moc buržoázie bola nahradená mocou robotníkov a všetkého pracujúceho ľudu.

Nesmriteľný odkaz Slovenského národného povstania uskutočňujeme a rozvíjame plnením záverov XVI. zjazdu KSČ.

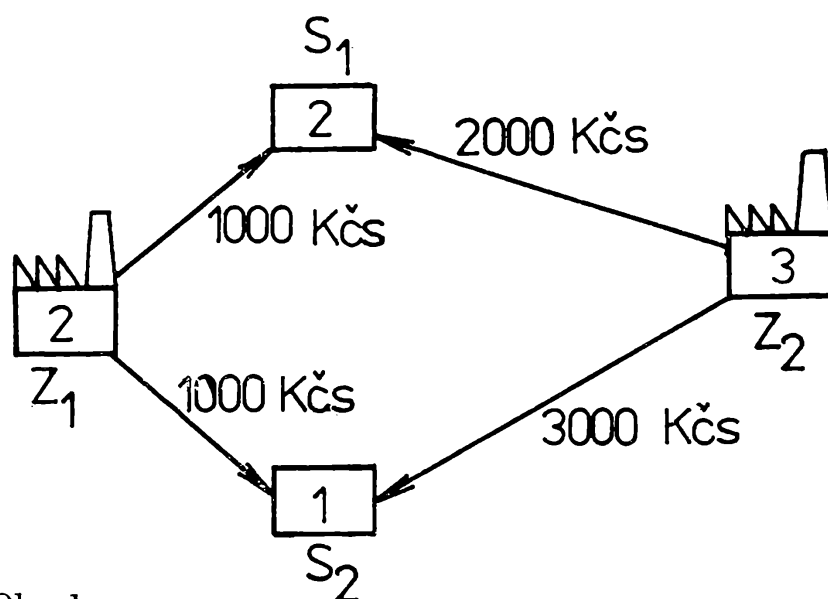
MATEMATIKA

Matematika v ekonomii

RNDr. ing. JAROSLAV BARTÁK, CSc., UK_Praha

Každý z nás se prakticky na každom kroku setkává s problémy, kdy má z několika možností vybrat tu, která je z jistého hlediska nejlepší — optimální. Tak např. potřebujeme-li se dostat z jednoho místa do druhého, vybíráme spojení většinou tak, aby bylo co možná nejrychlejší nebo nejlevnější nebo splňovalo některé další podmínky. Pokud není možností příliš mnoho, najdeme optimální řešení (může jich být i několik) většinou snadno intuitivně, aniž je zapotřebí použít silnější matematické prostředky. U rozsáhlejších úloh, kdy možností je velké množství (často jich je i nekonečně mnoho), jsme potom nuceni využít k řešení hlubších matematických metod. Řada z nich byla vypracována právě v souvislosti s problémy a úlohami ekonomie a řízení. V dnešní době matematické metody a modely v ekonomii představují značně rozsáhlou část matematiky a jejich uplatnění je ještě znásobováno možnostmi moderní výpočetní techniky.

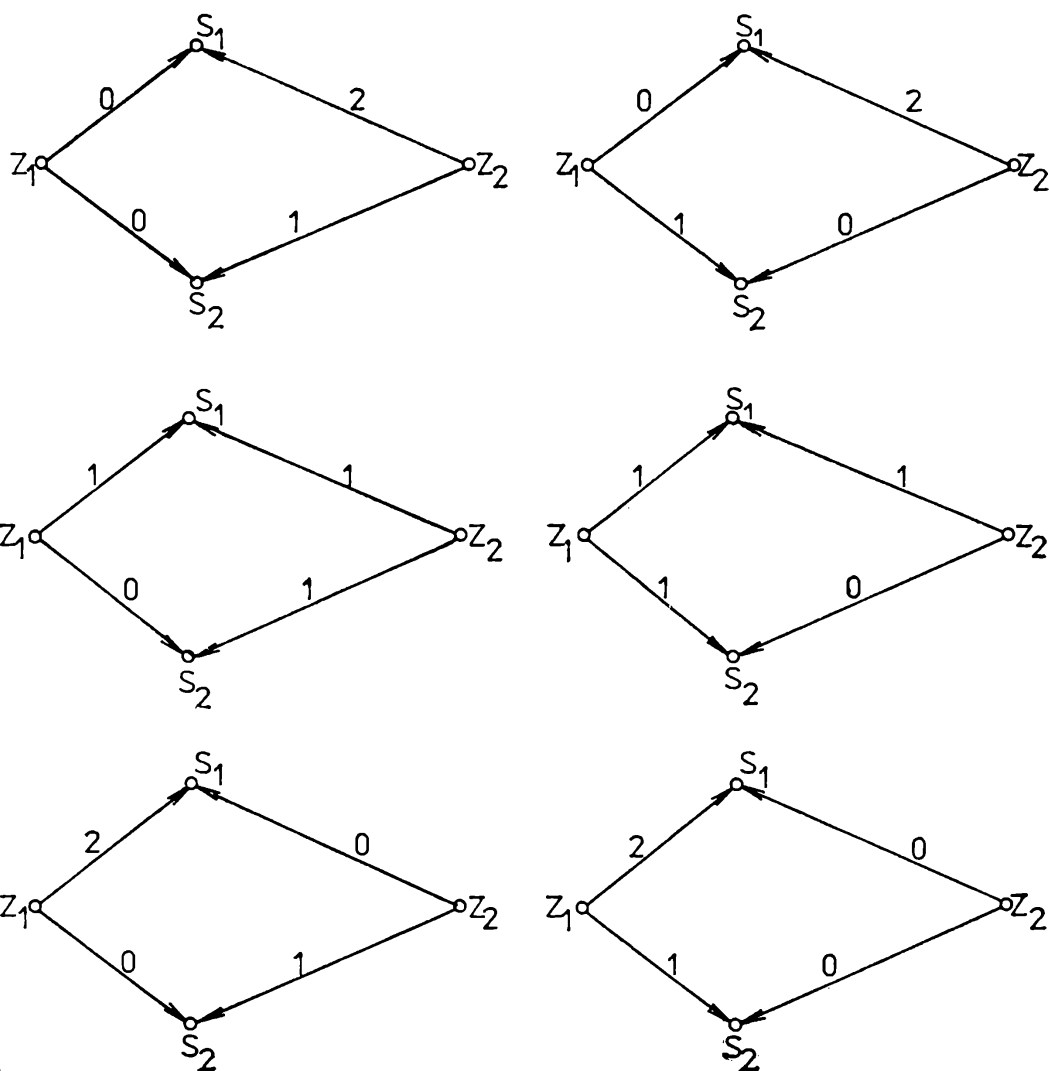
Jako ukázkou uvedeme dva jednoduché, víceméně školní problémy z ekonomické oblasti. Prvním z nich je tzv. *dopravní (transportní)*



Obr. 1

problém. Spočívá v tom, že máme určit plán rozvozu materiálů a výrobků mezi jednotlivými závody a spotřebiteli tak, abychom uspokojili požadavky spotřebitelů i výrobců a aby doprava byla co možná nejlevnější. To znamená, že jsme nuceni přihlížet jak k zájmu spotřebitelů, tak i ke kapacitám výrobců. Jednoduchý dopravní problém může být zadán třeba takto: Dva závody Z_1 , Z_2 vyrábějí určitý výrobek. Závod Z_1 je schopen za určité období vybavit dvě zásilky výrobků a závod Z_2 tři zásilky. Dva spotřebitelé S_1 a S_2 výrobek odebírají, přičemž spotřebitel S_1 potřebuje dvě a spotřebitel S_2 jednu zásilku (za totéž časové období). (Předpokládáme přitom, že spotřebitel může od závodu odebrat pouze celou zásilku.) Celá situace je znázorněna na obrázku 1. Čísla u závodů, resp. spotřebitelů vyjadřují zadané výrobní kapacity, resp. požadavky spotřebitelů a čísla u šipek značí náklady (v korunách) na přepravu jedné zásilky od závodu ke spotřebiteli. (Tak např. doprava jedné zásilky od závodu Z_1 ke spotřebiteli S_1 stojí 1000 Kčs.) Poznamenejme, že zadání údajů grafem je dosti běžné pro svoji přehlednost. Naším cílem je určit, kolik zásilek výrobků má který závod vyrábět a kterému spotřebiteli jich má kolik dodat, aby spotřebitelé byli uspokojeni, a aby náklady na dopravu byly minimální.

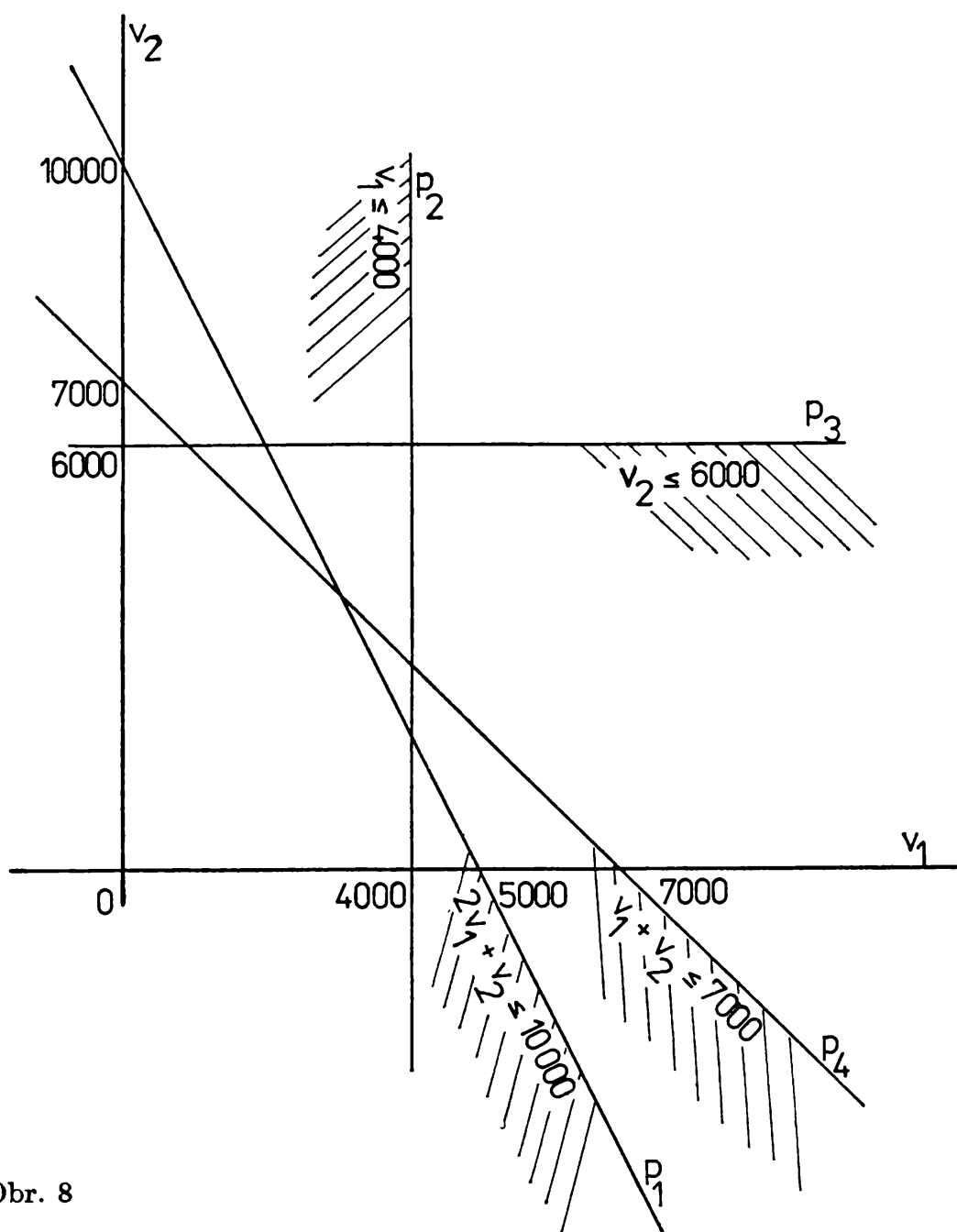
U takto jednoduché úlohy (uvádíme ji spíše pro pochopení problému) lze snadno zjistit všechny možnosti, jak spotřebitele uspokojit, a z nich vybrat tu, která je nejlevnější a kterou závody jsou schopny výrobně zajistit. Všechny možnosti zásobení spotřebitelů jsou zakresleny na obrázcích 2—7; nyní čísla u šipek neznamenaají cenu, nýbrž vyjadřují počet zásilek posílaných v naznačeném směru. Cena dopravy u jednotlivých variant z obrázků 2—7 je po řadě 7000 Kčs, 5000 Kčs, 6000 Kčs, 4000 Kčs, 5000 Kčs a 3000 Kčs. (Dostaneme ji z obrázků 1, 2—7 jako



Obr.

2	3
4	5
6	7

součet součinů počtu přepravovaných zásilek a příslušné ceny za dopravu jedné zásilky. Např. u varianty z obrázku 2 je to $0 \cdot 1000 \text{ Kčs} + 0 \cdot 1000 \text{ Kčs} + 2 \cdot 2000 \text{ Kčs} + 1 \cdot 3000 \text{ Kčs} = 7000 \text{ Kčs}$.) Nejlevnější varianta je tedy na obrázku 7. Při ní dopravní náklady činí 3000 Kčs. V tomto případě by však závod Z_1 musel vyrobit tři zásilky, což přesahuje jeho výrobní kapacitu. Snadno zjistíme, že nejlevnější možnost, kterou jsou závody schopny zajistit, je uvedena na obrázku 5. V tomto případě závod Z_1 musí vyrobit dvě zásilky výrobků, z nichž jednu odešle spotřebiteli S_1 a druhou spotřebiteli S_2 a závod Z_2 vyrobí jednu zásilku, kterou odešle spotřebiteli S_1 . Celkové dopravní náklady v tomto případě činí 4000 Kčs. Poznamenejme, že v reálné situaci jsou podmínky zpravidla mnohem komplikovanější a prostý výčet možností by byl jen ztěžka



Obr. 8

proveditelný. Proto byla vypracována řada metod a algoritmů umožňujících řešit i velmi rozsáhlé úlohy.

Jedním z prostředků optimalizačních metod je tzv. *lineární programování*. Ukažme si jeho užití na úloze týkající se skladby výrobního sortimentu.

Závod vyrábí dva výrobky V_1 a V_2 . Zisk na jednom kuse výrobku V_1 je 800 Kčs, zisk na jednom výrobku V_2 je 600 Kčs. K výrobě jednoho kusu výrobku V_1 je zapotřebí 2 kg suroviny a k výrobě jednoho kusu V_2

1 kg suroviny. Surovinu má závod k dispozici v omezeném množství 10 000 kg. Trh neodkoupí více než 4000 kusů výrobku V_1 a 6000 kusů V_2 . Kromě toho závod není schopen vyrábět více než 7000 kusů obou výrobků dohromady. Za těchto podmínek máme zjistit, kolik kusů kterého výrobku má závod vyrobit, aby finanční zisk výroby byl co nejvyšší.

Označíme-li v_1 , resp. v_2 počet vyráběných kusů výrobku V_1 , resp. V_2 , dostaneme zřejmě následující omezení:

$$2v_1 + v_2 \leq 10\,000, \quad (1)$$

$$v_1 \leq 4\,000, \quad (2)$$

$$v_2 \leq 6\,000, \quad (3)$$

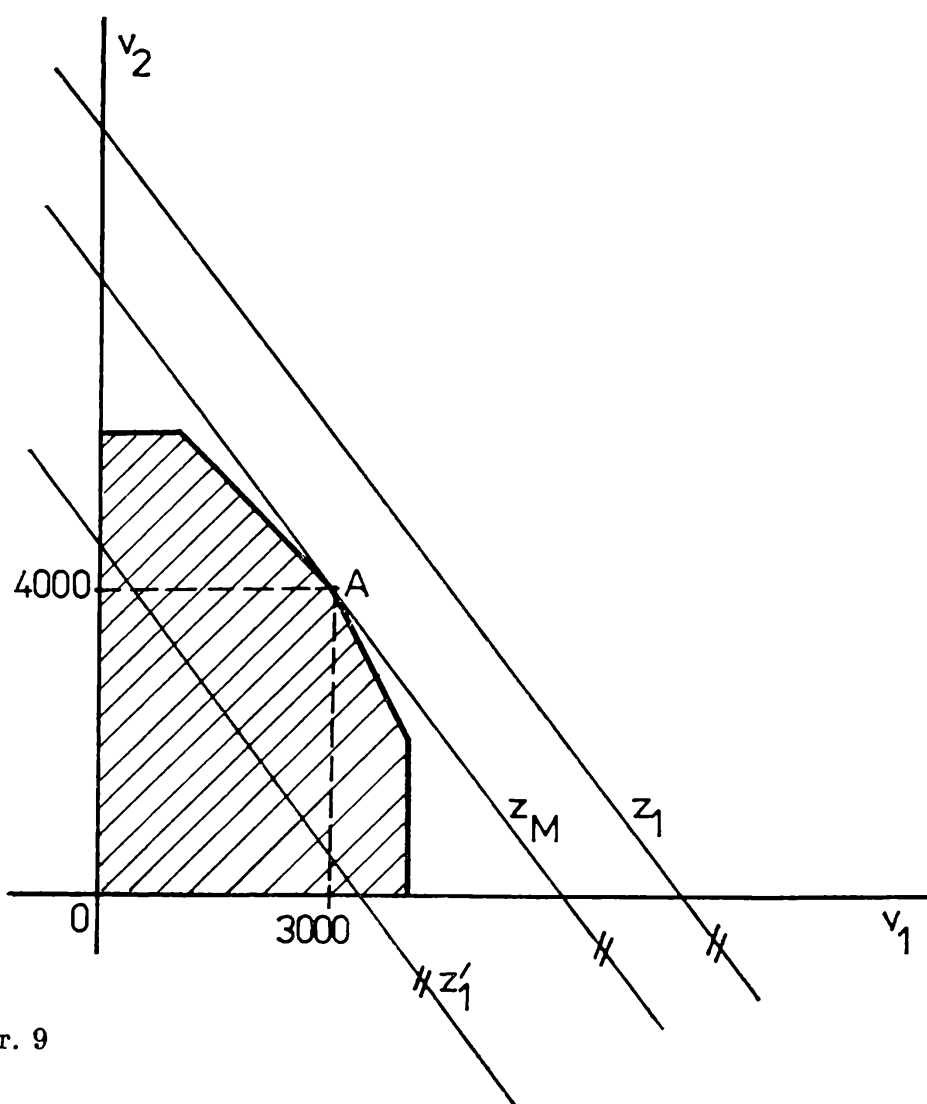
$$v_1 + v_2 \leq 7\,000 \quad (4)$$

Podmínka (1) zaručuje, že na výrobu nespotřebujeme více surovin, než kolik je k dispozici. Smysl dalších podmínek je zřejmý ze zadání problému. Celkový zisk (v korunách) je dán vztahem

$$Z = 800 v_1 + 600 v_2.$$

Graficky můžeme nerovnice (1)–(4) znázornit v rovině v_1, v_2 jako poloviny, jejichž hranice jsou tvořeny po řadě přímkami p_1, p_2, p_3, p_4 ; viz obrázek 8. Jejich společný průnik je překreslen na obrázku 9 jako vyšrafovaná oblast (polygon). Protože pouze body této vyšrafované oblasti splňují všechny nerovnice (1)–(4), a tedy také podmínky úlohy, musí v ní ležet i hledané optimální řešení. Určíme ho z podmínky maximálního zisku. Uděláme to tak, že v rovině v_1, v_2 znázorníme přímky o rovnicích $Z = 800 v_1 + 600 v_2$ pro různé hodnoty Z (je to soustava rovnoběžek). Vezmeme namátkově jednu z nich, třeba přímku z_1 se ziskem $Z = 6\,000\,000$ Kčs z obrázku 9. Ta nemá s vyšrafovanou oblastí žádný společný bod. Zisk 6 000 000 Kčs, který jí odpovídá, je proto při našich omezeních nedosažitelný. Musíme proto zmenšovat hodnotu zisku tak dlouho, až se dostaneme k nejvyššímu zisku, který jsme schopni v daných podmínkách realizovat. Geometricky to provedeme tak, že přímku z_1 rovnoběžně posunujeme tak dlouho, dokud nebude mít s vyšrafovanou oblastí alespoň jeden společný bod. Tak získáme přímku z_M . Její průsečík s vyšrafovanou oblastí — bod o souřadnicích 3000, 4000 dává řešení úlohy. Za daných podmínek je tedy nejvyšší zisk při výrobě 3000 kusů výrobku V_1 a 4000 kusů výrobku V_2 . V tomto případě zisk činí 4 800 000 Kčs. Kdybychom náhodně začali třeba s přímkou z_1 , která oblast protíná, mohli bychom zisk dále zvyšovat. Rovnoběžným posouváním ve směru osy v_2 bychom se opět dostali k přímce z_M .

Poznamenejme, že uvedená úloha byla dosti jednoduchá a bylo ji možné snadno graficky vyřešit. (Složitější situace by vznikla, kdybychom



Obr. 9

měli více než dva výrobky, neboť bychom museli pracovat v prostoru vyšší dimenze místo v rovině.)

Z matematického hlediska poslední úloha v podstatě znamenala řešení soustavy nerovnic. Problémy tohoto typu jsou přehledně a elementárně vyšetřovány v brožurce [2]. Tam rovněž najde čtenář další úlohy z oblasti lineárního programování. S celou řadou jiných obecných metod, z nichž snad nejznámější je tzv. *simplexová metoda*, se čtenář může seznámit v knize [1]. V té dále najde i dosti široký přehled o dalších problémech z oblasti matematických metod v ekonomii.

Literatura :

- [1] B. Korda a kol.: Matematické metody v ekonomii, SNTL/SVTL, Praha 1967.
- [2] F. Veselý: O nerovnostech a nerovnicích, Škola mladých matematiků svazek 48, Praha 1982.

0 nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

V Rozhledech se již mnohokrát psalo o nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Podle ní pro každých n nezáporných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (1)$$

Mezi oběma průměry je neostrá nerovnost. Přesto však lze mezi ně vložit další výrazy s proměnnými $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ukážeme, že např. pro každou n -tici nezáporných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \left(\frac{x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} + \dots + x_n^{\frac{1}{2}}}{n} \right)^2 \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (2)$$

Poznámka: Rovnost v nerovnosti (1) nastává, právě když

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n. \quad (3)$$

Pokud pro každou n -tici nezáporných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnosti (2), pak v každé z nich musí v případě, že platí (3), nastávat rovnost. Přesvědčte se, zda tomu tak skutečně je.

Pravá nerovnost (2) se dokáže snadno. Plyne z nerovnosti (1) takto:

$$\left(\frac{x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} + \dots + x_n^{\frac{1}{2}}}{n} \right)^2 \geq \left(\sqrt[n]{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \dots x_n^{\frac{1}{2}}} \right)^2 = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

K důkazu levé nerovnosti (2) užijeme *Cauchyovy nerovnosti*, s níž jste se mohli setkat např. v 7. čísle 62. ročníku Rozhledů. Připomeňme si ji. Podle ní pro každé dvě n -tice reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ a $b_1, b_2, \dots, b_n$ platí:

$$\begin{aligned} \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 \right) &\geq \\ &\geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \right)^2 \end{aligned}$$

Levou nerovnost (2) nejprve vynásobíme n^2 . Dostáváme:

$$n \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq \left(x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} + \dots + x_n^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

Po další úpravě docházíme k nerovnosti:

$$\underbrace{(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)}_{n \text{ sčítanců}} \left[\left(x_1^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(x_2^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \dots + \left(x_n^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \geq \\ \geq \left(1 \cdot x_1^{\frac{1}{2}} + 1 \cdot x_2^{\frac{1}{2}} + \dots + 1 \cdot x_n^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

Tato nerovnost zřejmě platí podle Cauchyovy nerovnosti a je ekvivalentní s levou nerovností (2).

Na závěr uvedeme dvě úlohy pro čtenáře. Nejdříve však musíme zavést pojem harmonického průměru.

Jsou-li $x_1, x_2, \dots, x_n$ libovolná kladná reálná čísla, pak číslo

$$\left(\frac{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

nazýváme *harmonickým průměrem* čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$

Slíbené úlohy zní:

a) Dokažte, že pro geometrický a harmonický průměr každých n kladných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \left(\frac{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1}}{n} \right)^{-1}$$

b) Dokažte, že mezi geometrický a harmonický průměr libovolných n kladných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ lze vložit výraz

$$\left(\frac{x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + \dots + x_n^{-\frac{1}{2}}}{n} \right)^{-2}$$

Integrované logické obvody SSI

IVAN FISCHER, CSc., PedF UK v Praze

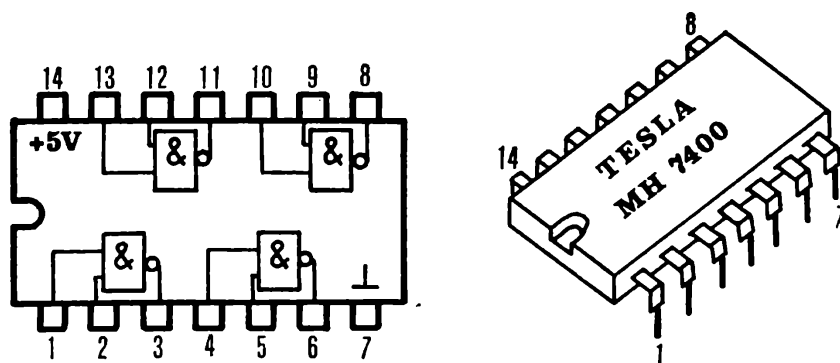
V článku [1] jsme si ukázali jednoduchou stavebnici logických obvodů druhé generace, tedy složených z jednotlivých tranzistorů, diod a odporů. Článek [2] nám předvedl užití takové stavebnice při matematizaci reálných situací a konstrukci automatizačního zařízení. Již v závěru článku bylo vidět, že stavba potřebného počtu logických obvodů z jednotlivých polovodičových součástek by byla na dnešní dobu zbytečně pracná a zdoluhavá, když máme možnost použít již hotové integrované logické obvody třetí či čtvrté generace (které jsou dnes levnější či srovnatelné ceny než obvody z jednotlivých tranzistorů).

V šedesátých letech se pro sestavení automatizačních obvodů vyráběly logické stavebnice, například naše nejstarší *Regimat* ze Závodů průmyslové automatizace. V krabičce velikosti magnetofonové kazety byly jeden až dva logické členy, které se propojovaly připájením drátových spojů. Stavebnice logických obvodů se postupně zdokonalovaly, až počátkem sedmdesátých let začala Tesla vyrábět integrované logické obvody třetí generace řady MH 74XX, které jsou ekvivalentem celosvětového standardu logických integrovaných obvodů TTL (transistor-transistor logic) SSI (nízkého stupně integrace — small scale integration). Do pouzdra rozměrů $7 \times 4 \times 20$ mm se čtrnácti nožičkami, sedmi po obou stranách (případně do trochu většího pouzdra se šestnácti nebo čtyřiaadvaceti nožičkami) se vejde na křemíkovou destičku, řekněme 2×2 mm, několik logických členů. Ty se propojují připájením nožiček integrovaného obvodu do desky s plošnými spoji nebo zasunutím do speciální patice a pak drátovými spoji. Ke každému výstupu je možno připojit až n vstupů jiných obvodů TTL, přičemž n nazýváme *logický zisk obvodu*.

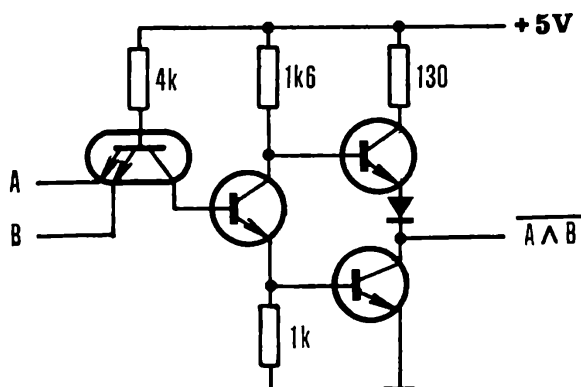
V přehledu uvádíme několik základních integrovaných obvodů TTL SSI (obvody s „otevřeným kolektorem“ a klopné obvody si necháme někdy na příště). První údaj značí název obvodu, další logickou funkcí, potom počet těchto logických funkcí v jednom obvodu, logický zisk a současnou maloobchodní cenu:

MH 7400	$X = \overline{A \wedge B}$	4	$n = 10$	13.50 Kčs
MH 7404	$X = \overline{A}$	6	$n = 10$	13.50 Kčs
MH 7410	$X = \overline{A \wedge B \wedge C}$	3	$n = 10$	13.50 Kčs
MH 7420	$X = \overline{A \wedge B \wedge C \wedge D}$	2	$n = 10$	13.50 Kčs
MH 7430	$X = \overline{A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F \wedge G \wedge H}$	1	$n = 10$	13.50 Kčs

Obr. 1



Obr. 2



MH 7437	$X = \overline{A \wedge B}$	4	$n = 30$	15.50 Kčs
MH 7440	$X = \overline{A \wedge B \wedge C \wedge D}$	2	$n = 30$	13.50 Kčs
MH 7450	$X = \overline{(A \wedge B) \vee (C \wedge D)}$	2	$n = 10$	13.50 Kčs
MH 7453	$X = \overline{(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \vee (E \wedge F) \vee (G \wedge H)}$	1	$n = 10$	13.50 Kčs

(Zasvěcení čtenáři vědí, že obvody MH 7450 a MH 7453 je možné rozšiřovat pomocí „expanderů“ MH 7460. Tuto možnost zatím pomineme, neboť ani pro zapojení příkladu v závěru článku by nepřinesla finanční úsporu.)

Pro první praktické pokusy s integrovanými obvody se nejlépe hodí stavebnice KYBER 1, která je za 290 Kčs běžně k dostání. Zapojení nožiček integrovaných obvodů si zájemce může najít v katalogu polovodičových součástek Tesla. Obrázek 1 ukazuje zapojení nožiček obvodu MH 7400 při pohledu shora. Schéma elektrického zapojení jednoho ze čtyř logických členů v integrovaném obvodu máme zakresleno v obrázku 2. Je využit tranzistor s více emitory, který ze školního vyučování neznáme, a proto si funkci obvodu z elektrického hlediska vysvětlovat nebudeme. Pro zvýšení spolehlivosti a rychlosti je obvod i jinak poněkud složitější než obvody ze článku [1], ve funkční logické činnosti však žádné rozdíly nejsou a obvody ze článku [1] můžeme s obvody stavebnice TTL libovolně kombinovat.

Již v článku [2] jsme viděli, že místo logických funkcí známých ze školy, tedy NEBO ($X = A \vee B$), A ($X = A \wedge B$) a funkce NE ($X = \overline{A}$), anglicky zvané OR, AND a NOT, vystačíme s jedinou logickou funkcí NOR ($X = \overline{A \vee B}$) nebo s funkcí NAND ($X = \overline{A \wedge B}$). Při učenějším pohledu na věc bychom řekli, že soustava funkcí AND, OR, NOT a právě tak soustava z funkcí NOR či soustava jen z funkcí NAND tvoří každá takzvaný „silně úplný soubor“, neboť umožňuje sestavit libovolnou logickou funkci. (Zájemce se více dozví v literatuře [5].) Stavebnice Regimat proto obsahovala členy NOR, stavebnice TTL obvodů SSI obsahuje členy NAND jako základní a nejužívanější logické funkce.

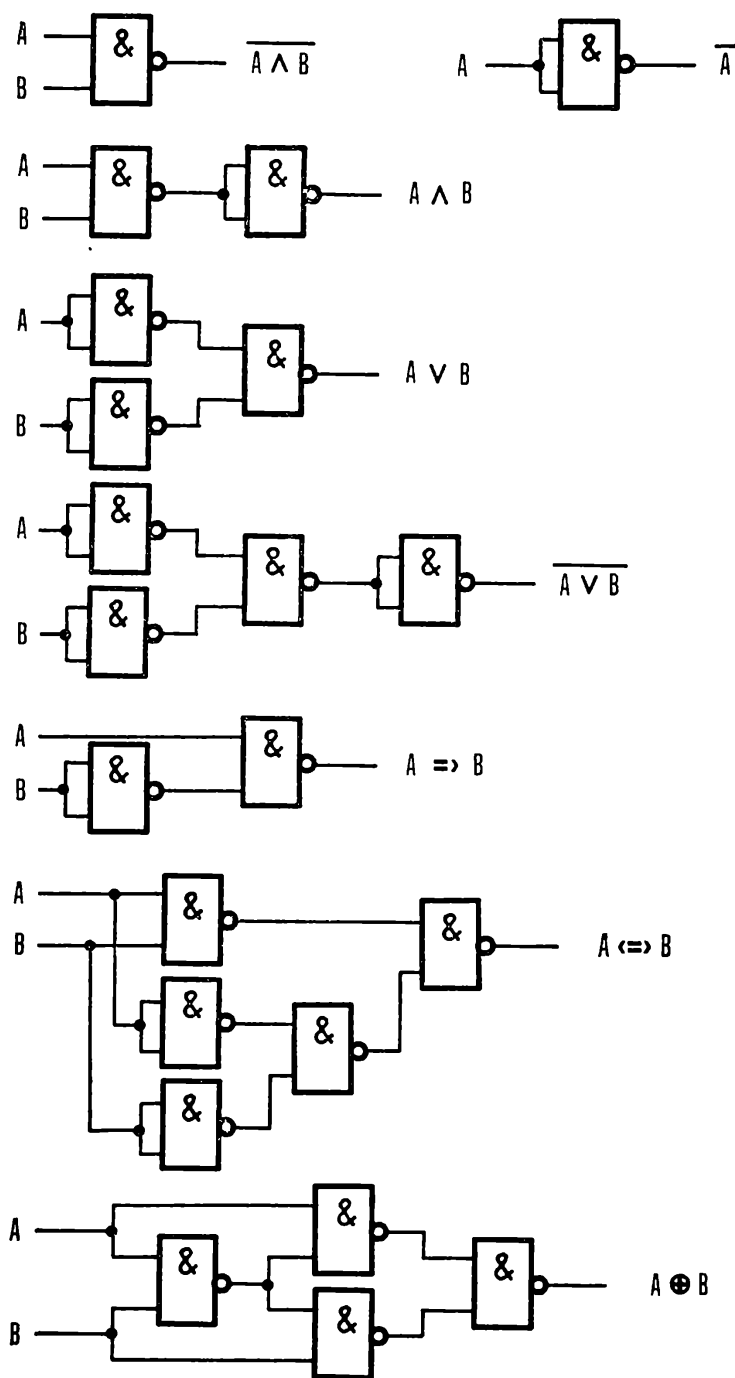
Ukážeme si, jak lze složit ze členů NAND některé nám známé logické funkce:

$$\begin{aligned}
 \text{NAND:} \quad & X = \overline{A \wedge B} \\
 \text{NOT:} \quad & X = \overline{A} = \overline{A \wedge A} \\
 \text{AND:} \quad & X = \overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}, \text{ respektive} \\
 & X = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \\
 \text{OR:} \quad & X = \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \\
 \text{NOR:} \quad & X = \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \\
 \text{IMPLIKACE:} \quad & X = (A \Rightarrow B) = \overline{A} \vee B = \overline{A \wedge \overline{B}} \\
 \text{EKVIVALENCE:} \quad & X = (A \Leftrightarrow B) = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) = \\
 & \quad \quad \quad = \overline{\overline{A \wedge B} \wedge \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \\
 \text{EXCLUSIVE-OR:} \quad & X = A \oplus B = (A \vee B) \wedge \overline{(A \wedge B)} = \\
 & \quad \quad \quad = \overline{\overline{A \wedge (\overline{A} \wedge B)} \vee \overline{B \wedge (\overline{A} \wedge B)}} = \\
 & \quad \quad \quad = \overline{A \wedge \overline{A} \wedge B \wedge \overline{B} \wedge \overline{A} \wedge B}
 \end{aligned}$$

Poslední uvedená funkce znamená „A nebo B, ale nikoliv oba současně“, výběrové NEBO, EXCLUSIVE-OR, a je negací ekvivalence.

V elektrotechnických schématech se místo $\wedge$ kreslí mnemotechnicky písmeno & (oba vstupy společně rovny jedné, potom výstup roven jedné) a místo $\vee$ kreslí mnemotechnicky 1 (alespoň jeden vstup je roven jedné, potom i výstup je roven jedné). Místo negace se kreslí kroužek před výstupem. Abychom porozuměli obrázkům logických zapojení v odborné literatuře, zkusíme již od tohoto článku používat místo značek známých ze školy tyto značky elektrotechniků. K předchozím rovnicím jsou takto na obrázku 3 nakreslena elektrotechnická schémata zapojení.

Tyto logické funkce NAND až EXCLUSIVE-OR si čtenář může složit i ze členů NOR. Zapojení ze členů AND, OR, NOT zná jistě ze školy



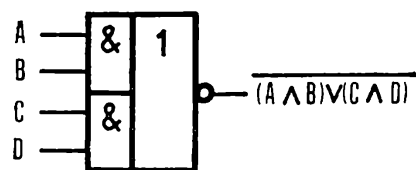
Obr. 3

a konečně jsme si je zopakovali při úpravách před zapojením ze členů NAND.

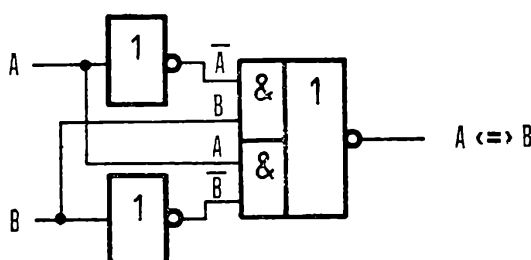
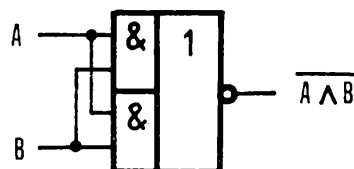
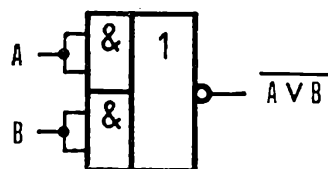
Rovněž logické členy zvané AND-NOR či AND-OR-INVERT

$X = \overline{(A \wedge B) \vee (C \wedge D)}$ z integrovaného obvodu MH 7450 vytvářejí „silně úplný soubor“, jak ukazuje každá z obou rovnic:

$$\text{NOR: } X = \overline{A \vee B} = \overline{(A \vee A) \vee (B \wedge B)},$$



Obr. 4



Obr. 5

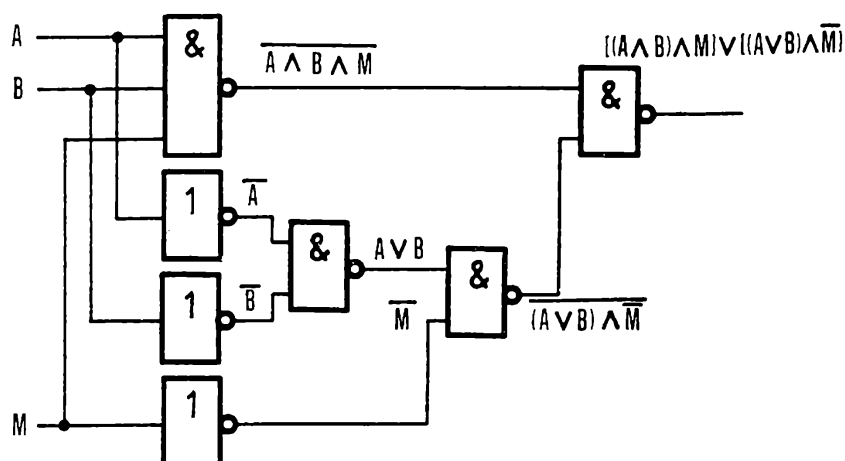
NAND: $X = \overline{A \wedge B} = \overline{(A \wedge B) \vee (A \wedge B)}$

Schematickou značku elektrotechniků pro tento logický člen a zapojení k oběma uvedeným rovnicím ukazuje obrázek 4. Obvod MH 7450 nám umožňuje zjednodušit mnohá zapojení (viz obrázek 5) a především obrazce plošných spojů.

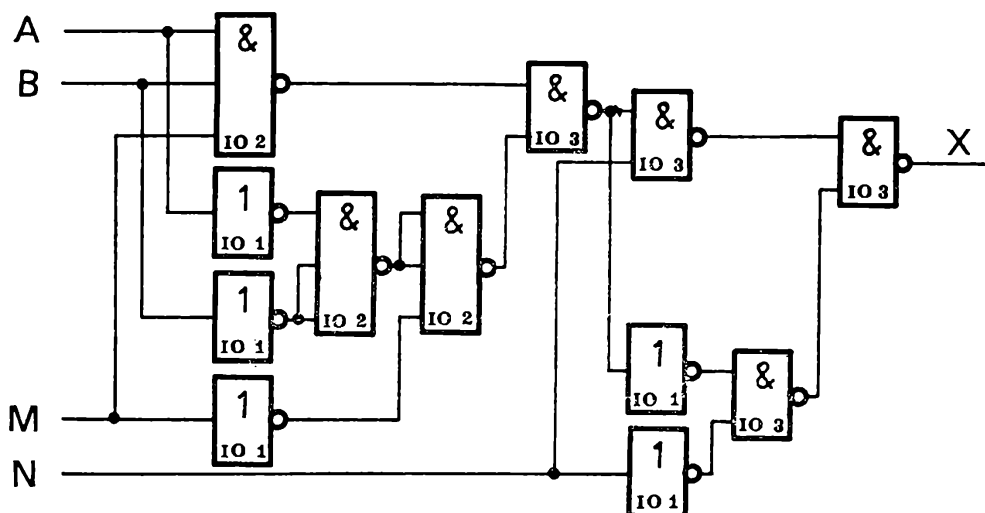
Naproti tomu soubor funkcí OR a EXCLUSIVE-OR tvoří „slabě úplný soubor“, neboť k vyjádření libovolné logické funkce jsou kromě OR a EXCLUSIVE OR potřebné i logické konstanty 0 a 1. Tak například $\overline{A} = 1 \oplus A$ a NOR: $\overline{A \vee B} = (A \vee B) \oplus 1$. Obdobně soubor AND a EXCLUSIVE-OR je slabě úplný.

Základem stavebnice TTL SSI jsou logické členy NAND. Pro zapojení s nimi se vyplácí zavést značení, kde $\wedge$ píšeme jako násobení a $\vee$ jako sčítání. (Pro stavebnici ze členů NOR by se toto značení již jevílo jako méně vhodné.) Při úpravách logických funkcí pro zapojení ze členů NAND totiž často směřujeme k „normálním disjunktivním formám“, neboli funkcím ve tvaru disjunkce konjunkcí vstupních proměnných, tedy podle navržené úpravy značení k součtu součinů.

Použití stavebnice TTL a předchozí úpravu značení si ukážeme na příkladu. Chceme postavit programovatelný logický obvod, kde budeme mít „datové vstupy“ A, B a „řídící vstup“ M . Při $M = 1$ bude na výstupu celého logického obvodu $A \wedge B$, při $M = 0$ bude na výstupu $A \vee B$. Obvod je popsán funkcí $X = (A \wedge B \wedge M) \vee [(A \vee B) \wedge \overline{M}]$ a sché-



Obr. 6



IO 1	MH 7404	} 40.50 Kčs
IO 2	MH 7410	
IO 3	MH 7400	

Obr. 7

ma zapojení ze členů NAND je nakresleno na obrázku 6. Přidáme požadavek, aby po přidání dalšího „řídícího vstupu“ N byla při $N = 1$ na výstupu funkce $A \wedge B$ a $A \vee B$, při $N = 0$ funkce negované, tedy $\overline{A \wedge B}$ a $\overline{A \vee B}$. Zapojení musí realizovat logickou funkci

$$(1) \quad X = [(A \wedge B) \wedge M \wedge N] \vee [(A \vee B) \wedge \overline{M} \wedge N] \vee \\ \vee [(\overline{A \wedge B}) \wedge M \wedge \overline{N}] \vee [(\overline{A \vee B}) \wedge \overline{M} \wedge \overline{N}].$$

K realizaci této funkce doplníme zapojení z obrázku 6 o další „logický přepínač“ tak, jak ukazuje obrázek 7. (Ten, kdo by se nespokojil s prohlédnutím hotového obrázku, si může napřed obvod zakreslit jen s po-

užitím členů AND, OR, NOT a teprve potom překreslit pomocí členů NAND, případně NAND a AND-OR-INVERT.) Doporučujeme čtenáři, aby si ke členům na obrázku 7 dopsal logické funkce tak, jako je tomu u obrázku 6. Poznamenejme, že náš programovatelný logický obvod bychom mohli dále a dále rozšiřovat přidáváním datových i řídicích vstupů, až bychom dospěli k univerzálním aritmeticko-logickým jednotkám počítačů (zkratka ALU).

Nyní si logickou funkci (1) přepíšeme pomocí značek sčítání a násobení do tvaru:

$$(2) \quad X = ABMN + (A + B)\overline{M}\overline{N} + (\overline{A}\overline{B})\overline{M}\overline{N} + (\overline{A} + \overline{B})\overline{M}\overline{N}$$

Podle pravidel výrokové logiky (respektive Boolovy algebry) odstraníme negace výrazů v závorkách a „roznásobíme“ závorky. Dostaneme tak funkci ve tvaru:

$$(3) \quad X = ABMN + \overline{A}\overline{M}\overline{N} + \overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{M}\overline{N} + \overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N}$$

Protože pro každé Y můžeme psát $Y = YZ + Y\overline{Z}$, upravíme takto funkci na tvar:

$$(4) \quad X = ABMN + AB\overline{M}\overline{N} + A\overline{B}\overline{M}\overline{N} + A\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \\ + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N}$$

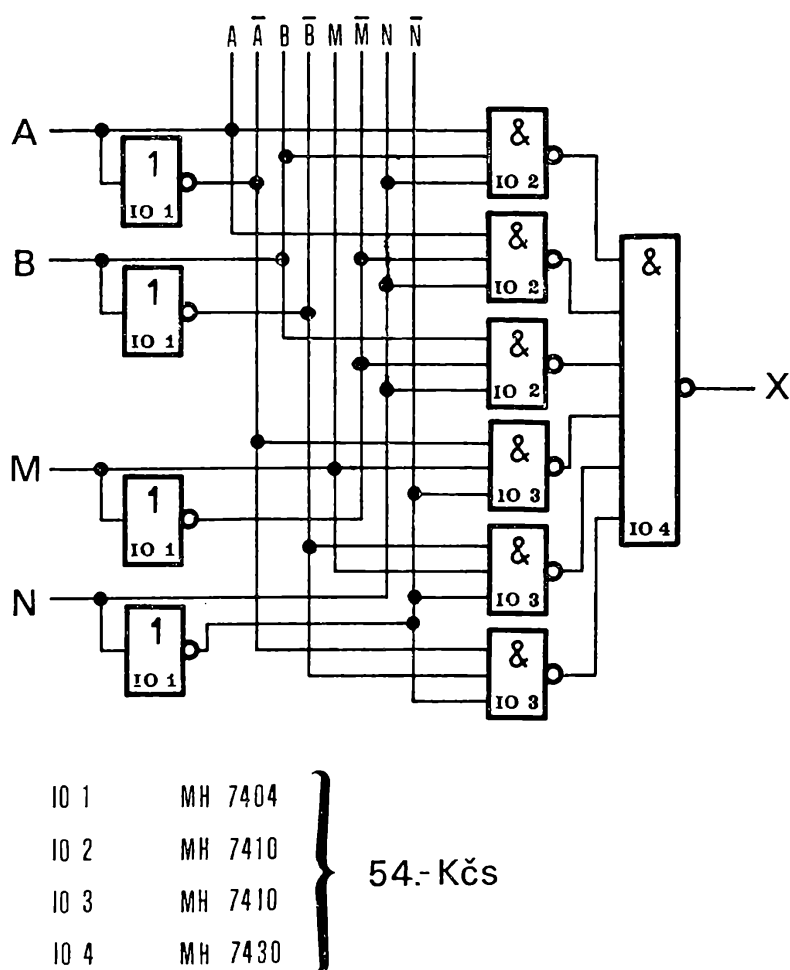
Ve tvaru (4) vynecháme podruhé se opakující členy, neboť ve výrokové logice pro každé Y platí $Y + Y = Y$. Dostaneme tak tvar

$$(5) \quad X = ABMN + AB\overline{M}\overline{N} + A\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \\ + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N} + A\overline{B}\overline{M}\overline{N} + \overline{A}\overline{B}\overline{M}\overline{N}$$

zvaný *úplná normální disjunktivní forma* (každý ze součinů obsahuje všechny proměnné). Pomocí tohoto tvaru funkce snadno vyplníme její tabulku (1) pravdivostních hodnot — v řádcích odpovídajících jednotli-

Tabulka 1

A	B	M	N	X	A	B	M	N	X
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1



Obr. 8

vým součinům v (5) píšeme 1, v ostatních řádcích 0. (Obdobně z tabulky pravdivostních hodnot zapíšeme snadno funkci ve tvaru úplné normální disjunktivní formy — podrobnější informace a další pojmy například normálních konjunktivních forem atd. opět čtenář nalezne v literatuře [5].)

V době, kdy se logické obvody sestavovaly z relé či z jednotlivých tranzistorů, bylo vyvinuto několik metod („procedur“), jak tvar funkce zjednodušit, tj. „minimalizovat“, a ušetřit tím co nejvíce relé nebo tranzistorů a diod. Se zavedením obvodů TTL a zvláště potom logických obvodů TTL středního stupně integrace MSI (či vysokého a velmi vysokého stupně integrace LSI a VLSI), jak si v příštím článku seriálu ukážeme, ustoupily tyto minimalizační metody do pozadí zájmu. Rovněž studiu vlastností logických funkcí NAND a NOR se dříve věnovala větší pozornost; dnešní normy například pro tyto funkce nezavádějí samostatnou značku a zapisují NAND a NOR jako negace AND a OR; pro logickou funkci EXCLUSIVE-OR je však značka $\oplus$ zaváděna. V dalším pokračování seriálu článků uvidíme, že mikroprocesory používají pouze logické funkce AND, OR, EXCLUSIVE-OR a případně i NOT, avšak nikoliv NAND či NOR. Důležitější než minimalizace jsou v období

posledních deseti let již matematické úpravy logických funkcí do tvaru, který umožní využít obvody zpravidla vyššího stupně integrace, které máme k dispozici.

Pokud bychom znali některou z metod „minimalizace“ logické funkce, dostali bychom funkci ve tvaru (7). K tomuto tvaru však můžeme dojít i úpravami funkce od tvaru (3). $\overline{B}MN$ lze psát jako $\overline{B}MN + A\overline{B}MN$ a $\overline{B}M\overline{N}$ jako $\overline{A}\overline{B}M\overline{N} + \overline{B}M\overline{N}$. Tak dostaneme tvar

$$(6) \quad X = ABMN + A\overline{B}MN + A\overline{M}N + \overline{B}MN + \overline{A}M\overline{N} + \overline{B}M\overline{N} + \overline{A}\overline{B}M\overline{N} + \overline{A}\overline{B}M\overline{N}$$

Potom již úpravami $ABMN + A\overline{B}MN = ABN$ a $\overline{A}\overline{B}M\overline{N} + \overline{A}\overline{B}M\overline{N} = \overline{A}\overline{B}N$ dospějeme k naší logické funkci ve tvaru

$$(7) \quad X = ABN + A\overline{M}N + \overline{B}MN + \overline{A}M\overline{N} + \overline{B}M\overline{N} + \overline{A}\overline{B}N$$

Tvar (7) bychom po takovéto minimalizaci disjunktivní formy upravili ještě pomocí DeMorganových zákonů na tvar (8) vhodný pro sestavení logického obvodu pouze ze členů NAND:

$$(8) \quad X = \overline{\overline{(ABN)} \overline{(A\overline{M}N)} \overline{(\overline{B}MN)} \overline{(\overline{A}M\overline{N})} \overline{(\overline{B}M\overline{N})} \overline{(\overline{A}\overline{B}N)}}$$

V zapojení logické funkce ve tvaru (8), které ukazuje obrázek 8, potřebujeme jeden člen NAND se šesti vstupy, šest členů NAND se třemi vstupy a čtyři negace. Při zapojení z jednotlivých tranzistorů podle článku [1] potřebujeme 11 tranzistorů. Použijeme-li obvody TTL, potřebujeme $1 \times \text{MH 7430}$ (dva vstupy nevyužijeme), $2 \times \text{MH 7410}$ a $1 \times \text{MH 7404}$ (dvě negace zůstanou nevyužity) celkem za 54 Kčs; pokud bychom mohli jinde využít třetinu MH 7404, potom za 49,50 Kčs.

Naproti tomu intuitivně sestavená a postupně rozšiřovaná realizace téže logické funkce podle obrázku 7 by potřebovala 12 tranzistorů, respektive tři integrované obvody TTL za 40,50 Kčs.

Minimalizace by nám v éře šedesátých let byla ušetřila jeden tehdy ještě velmi drahý tranzistor. Naproti tomu v době obvodů TTL stupně integrace SSI by se nám „minimalizací“ řešení prodražilo o 13,50 Kčs, či alespoň o 9 Kčs. V příštím článku si ukážeme užití logického obvodu TTL stupně MSI, kde celý náš obvod zapojíme velice jednoduše pomocí logické funkce MULTIPLEXER v jediném obvodu MH 74150 (za 37 Kčs) či pomocí jedné šestnáctiny pevné paměti MH 74188 obvodu LSI (celá paměť za 51 Kčs, naše funkce tedy za 3,02 Kčs). Proto tam, kde můžeme využít i zbytek paměti, používáme dnes ke generování

logických funkcií obvod MH 74188. Tak je tomu napríklad pri vytváraní riadiacích logických funkcií v niektorých mikroprocesorových systémoch či mikropočítačoch.

Literatura :

- [1] Fischer I.: Logické obvody z polovodičov. Rozhľedy matematicko-fyzikální, roč. 62, 1983/84, č. 5, str. 194—202.
- [2] Mazurová I. Výroková logika a akvárium. Rozhľedy matematicko-fyzikální, roč. 62, 1983/84, č. 8, str. 331—339.
- [3] Nessel V.: Polovodičové součástky v automatizaci. SNTL, Praha 1979
- [4] Polovodičové součástky Tesla. Katalog součástek 1982/83
- [5] Friedman A. D., Menon P. R.: Teorie a návrh logických obvodů. SNTL, Praha 1983

FYZIKA

Hrozba následkov jadrovej vojny I

pplk. MUDr. JOZEF MUDROŇ, Bratislava

Mier, život bez jadrových vojen, to je v súčasnosti prvoradá túžba celého ľudstva. Túžba sa stane skutočnosťou len ak sa ľudstvo rázne postaví za zachovanie mieru. Pre splnenie tejto naozaj všeludskej úlohy je predovšetkým potrebné, aby sme si všetci uvedomili charakter a rozsah nebezpečenstva jadrovej vojny. História nás učí, že vedecké poznanie bolo veľmi často zneužívané pre ničivé ciele vojny. Súčasná veda spôsobila kvalitatívnu zmenu vo formách vedenia vojny. Vojny minulosti, vedené mečmi v obratných rukách bojovníkov, mušketaми, bodákmi a delovými guľami prinášali jednotlivcom, ba celým národom nesmierne utrpenie. Dnešné vojny s použitím moderných ručných zbraní, tankov, lietadiel, chemických a bakteriologických zbraní ohrozujú priamo existenciu národov. Avšak vojna s použitím raketových jadrových zbraní, vedená z kozmu, siaha na existenciu samotnej ľudskej civilizácie. Predstavu o následkoch jadrovej vojny si budeme môcť lepšie vytvoriť po prečítaní série článkov, z ktorých prvý nazval autor Hrozba zneužitia modernej vedy.

Najbrutálnejším zneužitím výsledkov modernej vedy sú *zbrane hromadného ničenia (ZHN)*. Sú to zbrane, ktorých účinok v mieste použitia mnohonásobne prevyšuje účinok klasických zbraní. Pôsobia na veľkých plochách a ich účinok je prevažne dlhodobý. Medzi takéto zbrane počí-

tame: jadrové zbrane, chemické zbrane a biologické zbrane. Téma článku dáva priestor pre opísanie všetkých troch skupín zbraní, avšak z hľadiska jadrovej vojny sa venujem len prvej skupine.

Jadrové zbrane sú najničivejšie *ZHN*. Určené sú na hromadné ničenie živej sily ako aj na deštrukciu rôznych objektov a zariadení. Nebezpečie jadrových zbraní po ich výbuchu sa prejavuje v tlakovej vlne, prenikavej radiácii, elektromagnetickom impulze a v rádioaktívnom zamorení. Na krátko sa pri nich pristavme.

Tlaková vlna vzniká v priestore výbuchu ako dôsledok náhleho ohromného zvýšenia teploty s následným rozpínaním plynov. Oblasť takto vytlačeného vzduchu sa šíri nadzvukovou rýchlosťou. Tlaková vlna ohromnou silou zmetie všetko, na čo narazí. Spôsobuje nepriame zranenia zavalením osôb v troskách budov, lietajúcimi predmetmi a zeminou s kameňmi.

Prenikavé žiarenie taktiež pôsobí len niekoľko sekúnd po výbuchu. Jeho zdrojom je silne vzbudený ionizovaný plyn — rýchle chladnúca plazma, vytvorená prehriatím v epicentre výbuchu. Toto žiarenie má zložku viditeľnú, ultrafialovú a infračervenú. Jeho účinkom sa zapália horľavé materiály, nehorľavé mäknú, deformujú alebo roztavia sa. Živým tvorom toto žiarenie poškodzuje zrak, spôsobuje popáleniny.

Elektromagnetický impulz je dôsledkom indukcie, spôsobenej prudkým pohybom ionizovaných atómov plynu. Prejavuje sa indukciou vysokého napätia v anténach a v kábloch elektrického a telefónneho vedenia. Tento impulz ničí elektrické vodiče a moderné elektronické prvky (tlačené spoje, integrované obvody). Prebíja dielektriká, vymazáva magnetofónové záznamy a pamäte elektronických počítačov.

Rádioaktívne zamorenie sa prejaví na okolitom teréne a jednotlivých objektoch. Spôsobujú ho rádioaktívne látky, ktoré vznikajú vo veľkom množstve počas jadrového výbuchu. Pri explózii sa tieto látky dostávajú do vzduchu, kde sú roznášané vetrom a postupne sa usadzujú na všetko živé i neživé na zemskom povrchu. Dýchaním, potravou a vodou preniknú aj do živých organizmov, na ktorých vyvolávajú radiačné zmeny podľa množstva energie, ktorú rádioaktívne žiarenie organizmu odovzdalo.

V závislosti od jadrovej reakcie, od konštrukcie zbrane, charakteru okolitého prostredia a druhu výbuchu (vzdušný, pozemný, podzemný, pod vodnou hladinou) sa mení podiel jednotlivých ničivých faktorov jadrového výbuchu. V poslednej dobe sa zo strany NATO venuje najväčšia pozornosť jadrovým zbraniam so zvýšeným účinkom prenikavej radiácie, najmä so zvýšeným účinkom vysokoenergetického neutrónového žiarenia. Takéto „neutrónové zbrane“ patria do tretej generácie jadrových zbraní (1. generácia — štiepne jadrové zbrane, 2. generácia — termojadrové zbrane). Okrem priameho účinku na organizmus neutróny indukujú v okolitých látkach sekundárnu aktivitu. Dôsledkami neutrónovej aktivity sa zaoberá radiačná chronológia.

Účinky prenikavej radiácie na organizmus.

Prenikavá radiácia podobne ako prenikavé žiarenie pôsobí krátko po výbuchu. Pozostáva z toku neutrónov a žiarenia alfa, beta a gama. Pôsobí podľa kalibru zbrane 10 až 15 s po výbuchu. Pretože žiarenie alfa a beta pre krátky dobeh je bezvýznamné, hrá tu úlohu najmä žiarenie gama a neutrónové žiarenie.

Jednotlivé druhy ionizujúceho žiarenia vyvolávajú v ľudskom tele rádiofyzikálne a rádiochemické molekulárne interakcie, ktoré narušujú štruktúru buniek a ich informačnú sústavu. Rádiosenzitivita buniek je priamo úmerná ich metabolickej a reprodukčnej aktivite. Medzi najcitlivejšie patria biele krvinky, krvotvorné bunky kostnej drene, epiteliálne bunky čriev a bunky pohlavných žliaz a kože. Odolné proti žiareniu sú bunky spojivové, nervové, kostné a svalové. Okrem priameho pôsobenia na bunky spôsobuje ionizujúce žiarenie i poruchy centrálnej neurohumorálnej regulácie, nakoľko žiarenie tu pôsobí ako stressor. Výsledný klinický obraz, ktorému sa hovorí „choroba z ožiarenia“, je teda dôsledkom tkaninového a orgánového poškodenia žiarením a súčasne celkovým regulačným rozvratom v organizme.

Stupeň poškodenia organizmu závisí od dávky žiarenia, ktorú obdržal, od rádiosenzitivity organizmu a od jeho celkového stavu a odolnosti. Podľa závažnosti postihnutia môžeme rozlišovať tri formy choroby z ožiarenia:

- centrálné nervovú,
- črevnú,
- dreňovú.

Centrálné nervová forma choroby z ožiarenia vzniká po jednorázovom celotelovom ožiarení dávkou viac ako 50 Gy (jednotka dávky ožiarenia 1 Gy je pohltená energia v J, pripadajúca na 1 kg ožiareného organizmu. Pri takejto dávke dochádza k hrubým morfológickým zmenám v mozgu, ktoré sa prejavujú kŕčami, triaškou, psychickou alteráciou až ťažkou poruchou vedomia. Sprievodným znakom je úporné zvracanie a hnačky. Smrť nastáva úplným vyčerpaním a respiračným zlyhaním do dvoch dní po ožiarení.

Črevná forma choroby z ožiarenia vzniká po dávkach 10 až 50 Gy. Prejavuje sa silnými hnačkami s krvou v stolici, zvracaním, zlyhávaním krvného obehu, porušením vodného a minerálneho hospodárstva v tele. Bunky črevného epitelu odumierajú, tým sa obnažuje črevná stena a porušuje sa črevná bariéra. Do organizmu preniká črevná mikroflóra a jej produkty, stena čriev je natravovaná proteolytickými enzýmami tráviacich štiav. Dochádza k nekrózám a tvorbe vredov črevnej steny. Smrť nastáva do dvoch týždňoch po ožiarení.

Dreňová forma choroby z ožiarenia je vyvolaná ožiaréním dávkou

2 až 10 Gy. Hlavné patogenetické zmeny prebiehajú v kostnej dreni, v ktorej je krvotvorné tkanivo. Dochádza k útlmu delenia a vyzrievania krvotvorných buniek červenej a bielej rady. Za 24 hodín po ožiarení veľkou dávkou klesá počet buniek v dreni na menej ako tretinu. K útlmu krvotvorby sa pridružuje i smrteľné krvácanie z poklesu krvných doštičiek. Ďalšou príčinou smrti môže byť strata obranyschopnosti proti mikroorganizmom v dôsledku poklesu počtu bielych krviniek. Porušená je i humorálna a bunecná imunita. Smrť u tejto formy nastáva v 3. až 8. týždni po ožiarení.

Zasiahnutí, ktorí nezomrú pri niektorej z vyššie uvedených foriem choroby z ožiarenia, budú trpieť na dôsledky poškodenia tkanív, ako sú koža, pľúca, zrakový orgán a pohlavné žľazy. Ide o tzv. krátkodobé následky žiarenia.

Krátkodobé následky žiarenia.

Na koži sa podľa dávky žiarenia vytvorí silné začervenanie a opuch (dávka 2,5 až 5 Gy), k týmto sa pri dávke 5 až 10 Gy pridružujú pluzgiere a dočasné vypadnutie vlasov. Pri 10 až 30 Gy vznikajú vredy a koža odumiera vo všetkých vrstvách. Chorý má silné bolesti a ak prežije, rany sa hoja nepeknými jazvami. Častým následkom je malígne zvrhnutie postihnutej časti kože. Na ožiarenie sú citlivejší blondýni ako tmavo- vlaší a poškodenie kože je väčšie na odkrytých miestach, obrátených k zdroju žiarenia a na miestach, kde je koža napätá a kde je málo podkožného tuku. Kožu poškodzuje najmä beta aktívny spad.

Pľúca sú najrádiosenzitívnejším orgánom hrudníka. Po ožiarení v nich vzniká zápal, odumierajú epitelové bunky, do pľúcnych mechúrikov vniká tekutina, pľúca strácajú schopnosť dýchať. Pľúcne tkanivo sa fibrózne premení a potom neplní svoju respiračnú funkciu. Smrteľné dávky na pľúcne tkanivo sú od 25 do 50 Gy.

Zo zrakového orgánu býva dočasne alebo trvale poškodená rohovka, sklovec, sietnica a najčastejšie šošovka, u ktorej vzniká zákal.

Na pohlavných žľazách sú krátkodobé následky veľmi výrazné. Vaječníky sú vysokosenzitívne orgány na žiarenie, preto už dávka 1—2 Gy spôsobí úplnú sterilitu, trvajúcu aj niekoľko rokov. Dávka 4 až 5 Gy vyvolá trvalú sterilitu. Semeníky sú tiež veľmi citlivé. Dávka nižšia ako 1 Gy spôsobuje prechodné zníženie počtu zárodočných buniek, ktoré trvá niekoľko mesiacov. Dávka 2,5 Gy zapríčiní sterilitu na 2 až 3 roky a dávka nad 4 Gy má za následok trvalú sterilitu.

Sumarizujeme účinky ionizujúceho žiarenia v závislosti od dávky prijatej človekom.

- pri dávke 2 Gy dochádza k ľahkému priebehu choroby z ožiarenia, môžu sa však vyskytnúť neskoršie následky.
- pri 2—5 Gy by došlo k dreňovej forme choroby z ožiarenia s vysokou

úmrtnosťou. Kto by prežil, bol by trvale invalidný v dôsledku dlhodobého postradiačného postihnutia.

- pri 10—30 Gy nastáva do dvoch hodín funkčné oslabenie, ktoré trvá až do smrti, ktorá nastane po niekoľkých týždňoch.
- pri 30—80 Gy nastane behom 5 minút fyzická neschopnosť a trvá 30 až 45 minút. Ďalej je fyzická schopnosť obmedzená až do smrti, ktorá nastane do 6 dní.
- pri dávkach nad 80 Gy nastáva do 5 minút fyzická neschopnosť a smrť do 48 hodín.

Hlavnými príznakmi hneď po ožiarení by boli: nechutenstvo, zvracanie, slabosť, malátnosť, hnačky a psychická podráždenosť.

Priebeh nemoci z ožiarenia by bol ťažší a odlišný pri súčasnom poškodení organizmu ďalšími ničivými faktormi jadrového výbuchu — tlakovou vlnou a svetelným a tepelným žiarením. Tak isto by priebeh poranení, spôsobených týmito faktormi, pozmenil súčasné ožiarenie organizmu.

Obete, ktoré uniknú krátkodobým následkom ožiarenia a prežijú, sú vystavené následkom dlhodobých účinkov ionizujúceho žiarenia.

Dlhodobé účinky ionizujúceho žiarenia.

Hlavnými dlhodobými účinkami po ožiarení sú očné zmeny, nádorové bujnenie, genetické zmeny, neskorá fibróza z ožiarenia a cievne poškodenia. O niektorých si stručne pohovoríme.

Očné zmeny. Žiarenie spôsobuje zákal očnej šošovky. Dávka 2 Gy spôsobuje občasný výskyt, pri 6 až 7 Gy dôjde k postihu väčšiny ožiarených. Následky môžu nastúpiť od 6 mesiacov do 30 rokov. Stredná doba je 2 až 3 roky.

Nádorové bujnenie. Je najpríznačnejším dlhodobým následkom ožiarenia. Všeobecne platný názor na rádiologickú indukciu nádorového bujnenia hovorí o lineárnej závislosti dávok a ich účinkov. Z uvedeného vyplýva, že i pri nízkej dávke žiarenia existuje možnosť indukcie nádorového bujnenia. Najčastejšie pôjde o leukémie, nádory kože a pľúc.

Genetické následky. Je známe, že asi 10 % ľudí trpí ochorením, ktoré je čiastočne alebo úplne genetického pôvodu. Doteraz síce nie je známe, do akej miery sú tieto ochorenia udržiavané mechanizmom génových mutácií, ale predpokladané dávky žiarenia, ktoré by zvýšili počet prirodzených mutácií na dvojnásobok, je okolo 0,16 až 2,5 Gy. Veľmi ťažké následky by boli po ožiarení plodu. Predpokladá sa vzostup úmrtí pred narodením a tesne po narodení, ďalej zvýšený výskyt malformácií a mentálnych abnormalít. Dávka 1 Gy by mohla zdvojnásobiť výskyt týchto úmrtí a abnormalít. Ďalším zhubným následkom ožiarenia plodu je výskyt fatálneho nádorového ochorenia u detí. Dávka 1 Gy v prvom

trimestri gravidity spôsobuje 10 % rizika výskytu smrteľného nádorového ochorenia v detskom veku. Z toho vyplýva, že rakovinové riziko ožiarenia plodu je väčšie ako výskyt úmrtnosti a malformácií, čiže znetvorení.

Na záver nášho rozprávania zhrne, že všetky jadrové zbrane sú vysoko nehumánne. Veľké percento zasiahnutých, ktorí by pri explózii nezho-reli, neboli by zabíjajúcou tlakovou vlnou, zavalení okolitými predmetmi, oslepení prenikavým žiarením, zahynie na chorobu z ožiarenia po niekoľkých dňoch až rokoch, a to aj vtedy, keby sa dostali úplne mimo dosah následkov jadrových výbuchov na životné prostredie, o ktorých budú hovoriť ďalšie časti zo seriálu o následkoch totálnej jadrovej vojny.

Literatúra :

Jaroslav Beneš: Radioaktivní zamoření biosféry, ACADEMIA Praha 1974
Ján Chrapan: Radiačná chronológia, ALFA Bratislava 1974
Ján Chrapan: Fyzikálne základy radiačnej chronológie, ČSČF A22 (1972) 135S

Ještě ke geosynchronní Věži

RNDr. LEOŠ DVOŘÁK, CSc., MFF UK PRAHA

V článku [1] jsme se seznámili s tím, jak lze pomocí „kosmického výtahu“ (viz [2]) dostávat tělesa na oběžnou dráhu kolem Země bez použití raketových motorů. A to dokonce zcela zadarmo, nepočítáme-li náklady na stavbu Věže: Jak jsme v závěru článku zjistili, celková práce vykonaná motory výtahu při přemístění tělesa z povrchu Země na vrchol Věže je rovna nule. Nedořešenou jsme nechali pouze „maličkost“: Odkud se vzala energie, již přitom těleso získá?

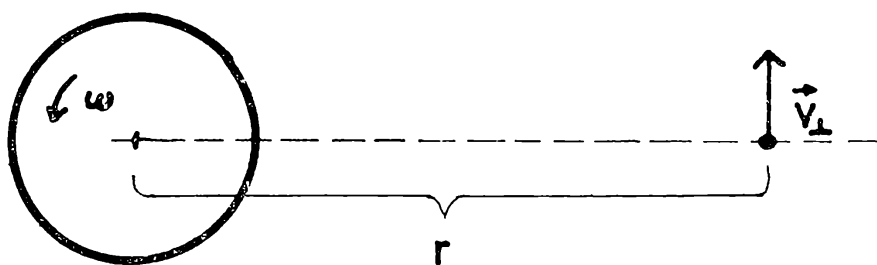
Věříme, že čtenář na tuto hádanku nalezl odpověď — alespoň kvalitativní. Není však nezajímavé rozebrat celou situaci podrobněji a samozřejmě kvantitativně.

Kvalitativní řešení hádanky

Podívejme se blíže na situaci z hlediska inerciálního systému (v němž je střed Země v klidu). Rychlost $v_{\perp}$, kterou těleso má ve směru kolmém na Věž (viz obr. 1), se mění se vzdáleností r od středu Země:

$$v_{\perp} = \omega_Z r, \quad (1)$$

kde ω_Z je úhlová rychlost otáčení Země. (Pozn.: Pro další rozbor bude výhodné kreslit na obrázcích Věž vodorovně.)



Obr. 1

Obr. 1. Pohyb tělesa momentálně stojícího ve Věži z hlediska inerciálního systému.

Při vytahování tělesa ve Věži $v_{\perp}$ roste; zřejmě tedy musí ve směru kolmém na Věž působit na těleso síla (označme ji $F_{\perp}$), která tento růst způsobí. Touto silou musí na těleso působit sama Věž. Nikoli motory, které těleso pomocí lana zdvíhají (síla, jíž motor působí, má radiální směr), ale sama konstrukce Věže. Právě práce této síly dodává tělesu potřebnou energii. A odkud se bere síla $F_{\perp}$? Představíme-li si pro jednoduchost Věž jako tuhou tyč „zapíchnutou“ do Země, je odpověď nasnadě: Věží otáčí zeměkoule, která tedy působí na Věž i potřebnou silou, resp. momentem síly — a dodává potřebnou energii. Odpověď na hádanku z článku [1] tedy zní: energie nákladu při jeho vytažení stoupne na úkor (kinetické) energie rotace Země.

Kvantitativní rozbor (varování před přílišným zjednodušením)

A nyní slíbený podrobnější rozbor. Určeme nejprve sílu $F_{\perp}$, jíž Věž působí na těleso o hmotnosti m , které v ní (v radiálním směru) stoupá rychlostí v_r .

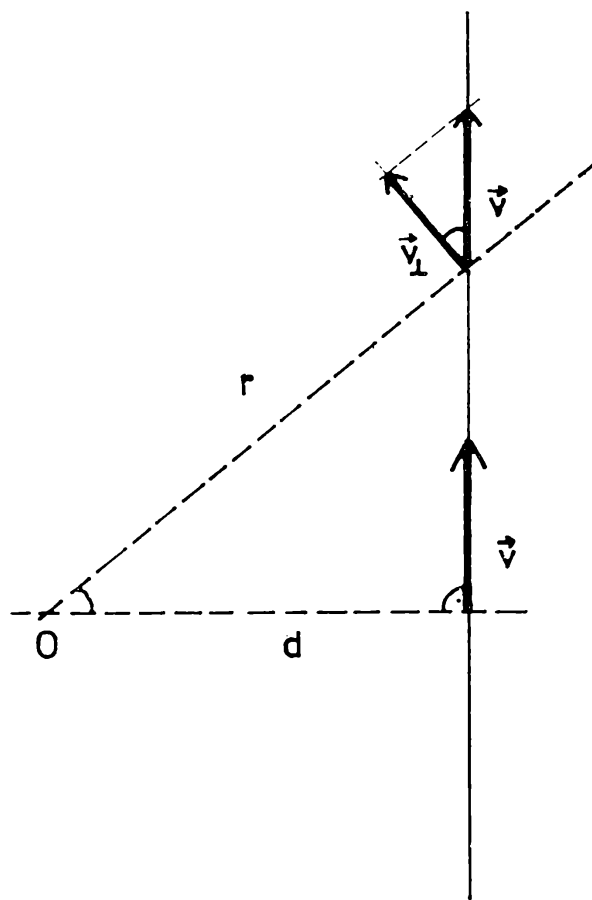
Síla se rovná hmotnosti násobené zrychlením. Ale pozor! Nesmíme se dát strhnout předchozími přímočarými (ale ve skutečnosti poněkud vágními) kvalitativními úvahami k tomu, abychom rozdíl rychlostí $v_{\perp}$ v časech např. t a $t + \Delta t$ dělený přírůstkem času Δt prohlásili za zrychlení ve směru kolmém na Věž a z něj vypočetli sílu. Šlo by o chybnou úvahu, jak ukazuje případ, kdy na těleso nepůsobí vůbec žádná síla (a tedy i $F_{\perp} = 0$).

Kdyby byla úvaha z předchozího odstavce správná, měla by podle ní v tomto případě rychlost $v_{\perp}$ zůstat konstantní. Ovšem těleso, na něž nepůsobí žádná síla, se pohybuje rovnoměrně přímočaře (viz. obr. 2). Rychlost tělesa označme $\mathbf{v}$ a její velikost v ($= |\mathbf{v}|$). Z podobnosti trojúhelníků na obr. 2. vidíme, že průměr $v_{\perp}$ rychlosti tělesa do směru kolmého na radiální splňuje vztah $v_{\perp} / v = d / r$. Platí tedy

$$v_{\perp} \cdot r = v \cdot d = \text{const.}$$

čili při pohybu tělesa, na něž nepůsobí vnější síly, se zachovává veličina $v_{\perp} \cdot r$ (nikoli $v_{\perp}$); zachovává se tedy i veličina

$$L = r \cdot m v_{\perp}, \quad (2)$$



Obr. 2

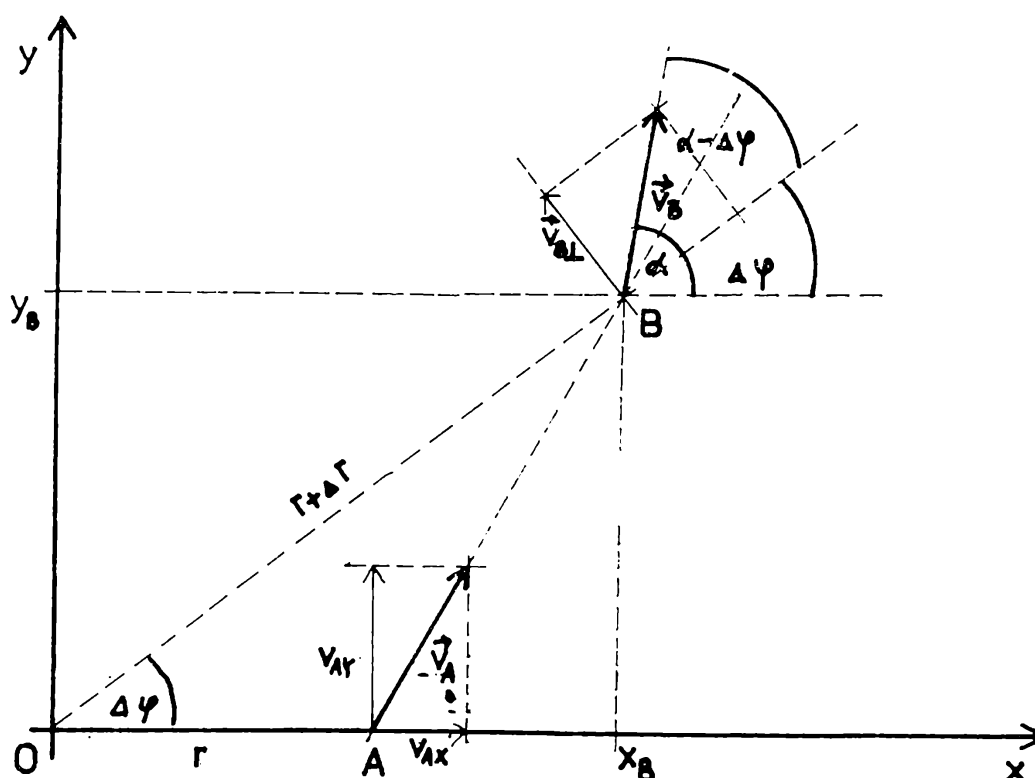
Obr. 2. Odvození složky rychlosti $v_{\perp}$ tělesa, na něž nepůsobí žádná síla.

kterou nazýváme *momentem hybnosti* daného tělesa — uvažovaného zde jako hmotný bod — vzhledem k danému bodu O , který je v klidu ve zvoleném inerciálním systému.

Přesněji řečeno, (2) je *složka* momentu hybnosti do směru kolmého na rovinu, v níž se děje pohyb. Moment hybnosti je totiž vektor. V uvažovaném problému se však směr tohoto vektoru nemění — místo abychom mluvili o „složce vektoru momentu hybnosti do daného směru“, budeme proto v našem rozboru mluvit většinou prostě o „momentu hybnosti“ a označovat tuto složku symbolem L (bez šipky a bez indexu označujícího složku).

(Pozn.: Obecně používáme v celém článku často symbol veličiny bez šipky pro označení složky příslušného vektoru. Ze souvislosti je vždy zřejmé, o složku do kterého směru jde: např. $v_{\perp}$ je složka rychlosti do směru kolmého na radiální apod.)

Z předchozího příkladu je zřejmé, proč je výše uvedená (přesprávně zjednodušená) úvaha chybná — směr kolmý na Věž není v inerciálním systému pevný, ale stále se mění. Při odvozování F_T to musíme vzít v úvahu.



Obr. 3. Odvození složky rychlosti $v_{\perp}$ tělesa, na něž působí síla.

Pokračování rozboru: popis pohybu tělesa

Převážná část odvození $F_{\perp}$ bude čistě kinematická. Uvažujme malé těleso (resp. hmotný bod) pohybující se v rovině xy . (Osy x a y jsou osami inerciálního systému, jehož počátek je ve středu Země.) V čase t nechť je těleso v bodě A na ose x (viz obr. 3) ve vzdálenosti r od počátku O . Rychlost tělesa $\mathbf{v}_A$ v tomto místě má složky v_{Ax} , v_{Ay} (je tedy $\mathbf{v}_A = (v_{Ax}, v_{Ay})$). Složka rychlosti kolmá na spojnici bodu A s počátkem O je zřejmě $v_{A\perp} = v_{Ay}$. Za malý časový interval Δt se těleso posune do bodu B . (Pozn.: Pro přehlednost je na obr. 3. posunutí značně přehrááno.) Interval Δt zvolíme tak malý, abychom mohli rychlost tělesa mezi body A a B považovat za konstantní. (Zanedbáváme změnu rychlosti danou zrychlením tělesa. Na rozdíl od článku [1] zde již nebudeme jednotlivá zanedbání podrobně odůvodňovat, čtenář si jejich korektnost může promyslet sám.)

Úhlová rychlost ω tělesa vzhledem k počátku O je

$$\omega = \frac{v_{A\perp}}{r} \quad (3)$$

(srovnej s (1); zde ovšem uvažujeme obecný pohyb a ω nemusí být spe-

ciálně rovno úhlové rychlosti rotace Země.) Úhel $\Delta\varphi$ (viz obr. 3) je tedy

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = \frac{v_{A\perp}}{r} \cdot \Delta t. \quad (4)$$

V dalším výpočtu budeme potřebovat vyjádřit $\sin \Delta\varphi$ a $\cos \Delta\varphi$. Pro dostatečně malé Δt je však $|\Delta\varphi| \ll 1$, a platí proto ($\Delta\varphi$ je vyjádřeno v radiánech!)

$$\sin \Delta\varphi \doteq \Delta\varphi = \frac{v_{A\perp}}{r} \Delta t; \quad \cos \Delta\varphi \doteq 1, \quad (5)$$

jak se může čtenář přesvědčit v matematických tabulkách nebo pomocí kalkulačky.

Je-li v bodě A zrychlení tělesa $\mathbf{a}_A = (a_{Ax}, a_{Ay})$, je zřejmě rychlost tělesa v bodě B

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{a}_A \Delta t,$$

čili rozepsáno ve složkách

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} + a_{Ax} \Delta t, \\ v_{By} &= v_{Ay} + a_{Ay} \Delta t. \end{aligned} \quad (6)$$

Průmět rychlosti $\mathbf{v}_B$ do směru kolmého na radiální je (viz obr. 3)

$$\begin{aligned} v_{B\perp} &= v_B \cdot \sin(\alpha - \Delta\varphi) = v_B \sin \alpha \cos \Delta\varphi - v_B \cos \alpha \sin \Delta\varphi \doteq \\ &\doteq v_B \cdot \sin \alpha \cdot 1 - v_B \cdot \cos \alpha \cdot \Delta\varphi = v_{By} - v_{Bx} \cdot \Delta\varphi, \end{aligned}$$

kde jsme využili (5) a toho, že $v_{Bx} = v_B \cdot \cos \alpha$, $v_{By} = v_B \cdot \sin \alpha$. Po dosazení (6) a (4) je

$$v_{B\perp} \doteq v_{Ay} + a_{Ay} \cdot \Delta t - v_{Ax} \cdot \frac{v_{A\perp}}{r} \cdot \Delta t. \quad (7)$$

Z obr. 3 je však zřejmé, že

$$(r + \Delta r) \cdot \cos \Delta\varphi = r + v_{Ax} \cdot \Delta t,$$

z čehož pomocí vztahu (5) dostáváme

$$v_{Ax} \cdot \Delta t = \Delta r \quad (8)$$

Uvědomíme-li si, že $v_{Ay} = v_{A\perp}$ a podobně pro složku zrychlení kolmou na radiální směr je $a_{A\perp} = a_{Ay}$, dostaneme ze (7) a (8)

$$v_{B\perp} = v_{A\perp} \frac{r - \Delta r}{r} + a_{A\perp} \cdot \Delta t$$

a po vynásobení veličinou $(r + \Delta r)$ (a zanedbání členů $(\Delta r)^2$ a $\Delta r \cdot \Delta t$) pak konečně

$$(r + \Delta r) v_{B\perp} - r \cdot v_{A\perp} = a_{A\perp} \cdot r \cdot \Delta t \quad (9)$$

Pokračování rozboru: dynamické vztahy

Vynásobíme-li získaný vztah hmotností tělesa m , dostaneme již vyjádření pro složku síly kolmou na radiální směr ($F_{A\perp} = ma_{A\perp}$). Uvědomíme-li si navíc, že podle (2) je $L_A = m \cdot r \cdot v_{A\perp}$ moment hybnosti tělesa v bodě A (tj. v čase t) a analogicky $L_B = m(r + \Delta r) v_{B\perp}$ moment hybnosti tělesa v bodě B (tj. v čase $t + \Delta t$), získá (9) jednoduchý tvar

$$L_B - L_A = r \cdot F_{A\perp} \Delta t \quad (10)$$

Označíme-li $\Delta L = L_B - L_A$ přírůstek momentu hybnosti za čas Δt , dostaneme z (10) konečný vztah

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = r \cdot F_{\perp} = M \quad (11)$$

Zde již nepíšeme index A u síly $F_{\perp}$, neboť odvození zřejmě platí analogicky pro libovolný bod dráhy tělesa. (Vždy totiž můžeme zvolit soustavu souřadnic tak, aby zadaný bod ležel na ose x .) Součin $r \cdot F_{\perp}$ je moment síly (vzhledem k bodu O), značíme jej M , tak jak jsme to již zapsali ve vztahu (11).

Vztah (11) nám říká, že změna momentu hybnosti dělená přírůstkem času se rovná momentu působící síly. Zde jsme jej odvodili pro hmotný bod; ve skutečnosti platí zcela obecně pro libovolné těleso nebo i soustavu těles. Přitom celkový moment hybnosti L takovéto soustavy je součtem momentů hybnosti jednotlivých těles (a moment hybnosti tělesa součtem momentů hybnosti „hmotných bodů“, z nichž se těleso skládá). M je pak celkový moment vnějších sil působících na soustavu — vnitřní síly mezi jednotlivými hmotnými body se nemusí uvažovat (pokud mají směr spojnic těchto bodů, což je prakticky vždy splněno). Poznamenejme ještě, že vztah (11) se nazývá *druhá věta impulsová*. (Pozn.: Čtenář znalý derivací jistě již uhodl, že ve vztahu (11) bychom měli ještě provést limitu $\Delta t \rightarrow 0$, takže by se na levé straně vztahu objevila derivace $\frac{dL}{dt}$. Takovýto vztah by pak platil zcela přesně. Čtenář derivací neznalý

by si měl uvědomovat, že nemáme-li se při použití vztahu (11) dopustit větších chyb, musí být Δt vždy dostatečně malé.)

Vztahu (11) nyní využijeme pro výpočet síly působící na těleso stoupající ve Věži rychlostí v_r . Úhlová rychlost ω takového tělesa je konstantní (rovna úhlové rychlosti otáčení Země ω_Z) a $v_{\perp} = r \cdot \omega_Z$. Moment hybnosti je tedy (viz 2))

$$L = m \cdot \omega_Z \cdot r^2 \quad (12)$$

a jeho přírůstek ΔL při změně radiální souřadnice z r na $r + \Delta r$, kde $\Delta r = v_r \cdot \Delta t$, je

$$\Delta L = m\omega_Z (r + \Delta r)^2 - m\omega_Z r^2 = 2m\omega_Z r \Delta r = 2m\omega_Z r \cdot v_r \cdot \Delta t.$$

Dosazením do (11) pak (po zkrácení r) dostáváme

$$F_{\perp} = 2m\omega_Z v_r \quad (13)$$

Touto silou (působící kolmo na radiální směr ve směru rotace) je nutno těleso urychlovat. V soustavě souřadnic otáčející se spolu se Zemí (v níž je Věž nehybná) je to tedy síla, kterou musíme při stoupání na těleso působit („z boku“), aby jeho dráha „nevybočila“ z Věže. Situace vypadá tak, jako bychom silou $T_{\perp}$ museli působit proti nějaké síle F_C (stejně velké jako $T_{\perp}$, ale opačného směru), která se snaží těleso z jeho dráhy vychýlit. Tato „zdánlivá“ (dnes se říká „setrvačná“) síla projevující se v rotující soustavě souřadnic při pohybu tělesa, se nazývá *Coriolisova síla*. Zde jsme ji odvodili jen pro speciální případ tělesa pohybujícího se v rotující soustavě v radiálním směru; analogicky by ji však bylo možno odvodit pro obecný případ.

Dokončení rozboru: práce síly $F_{\perp}$

Vraťme se do inerciální soustavy souřadnic a vypočtěme práci vykonanou silou $F_{\perp}$. Za čas Δt vykoná síla $F_{\perp}$ po dráze $\Delta s = v_{\perp} \Delta t$ práci

$$\begin{aligned} \Delta W &= F_{\perp} \cdot v_{\perp} \Delta t = 2m\omega_Z v_r \cdot v_{\perp} \Delta t = 2m\omega_Z v_r \cdot \Delta t \cdot r \cdot \omega_Z = \\ &= 2m\omega_Z^2 r \Delta r \doteq m\omega_Z^2 [(r + \Delta r)^2 - r^2] \end{aligned}$$

Úvahami analogickými úvahám v článku [1] pak již lehce odvodíme, že celková práce při změně r z hodnoty r_1 na r_2 je

$$W = m\omega_Z^2 r_2^2 - m\omega_Z^2 r_1^2 \quad (14)$$

Postačí tato práce k dodání energie, již těleso při zvednutí z $r_1 = r_Z$ na vrchol Věže ($r = r_2$) získalo?

Kinetická energie tělesa je (při nulové radiální rychlosti)

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \frac{1}{2} m \omega_Z^2 r^2$$

Potenciální energie tělesa v gravitačním poli Země je (κ je gravitační konstanta, M_Z hmotnost Země):

$$E_{\text{pot}} = - \frac{\kappa M_Z m}{r}. \quad (15)$$

(Pokud čtenář nezná vztah (15), nechť jej přijme za pravdivý. Zde by jeho odvozování článek příliš roztránilo a protáhlo.)

Rozdíl energií E_2 na vrcholu a E_1 u paty Věže je tedy

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= - \frac{\kappa M_Z m}{r_2} + \frac{1}{2} m \omega_Z^2 r_2^2 - \left(- \frac{\kappa M_Z m}{r_1} + \frac{1}{2} m \omega_Z^2 r_1^2 \right) = \\ &= \frac{\kappa M_Z m}{r_1} - \frac{\kappa M_Z m}{r_2} + \frac{1}{2} m \omega_Z^2 (r_2^2 - r_1^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Ze vztahů (5) a (13) v článku [1] však po úpravě plyne, že

$$\frac{\kappa M_Z m}{r_1} - \frac{\kappa M_Z m}{r_2} = \frac{1}{2} \omega_Z^2 (r_2^2 - r_1^2) m .$$

Po dosazení do (16) je tedy zřejmé, že rozdíl energií

$$E_2 - E_1 = m \omega_Z^2 (r_2^2 - r_1^2)$$

se rovná práci síly $F_{\perp}$ (viz (14)). Energetická bilance je tedy zachráněna,

A co na to Země?

Áby mohla Věž působit silou $F_{\perp}$ na těleso, musí na Věž působit Země — energie dodaná tělesu jde na úkor rotační energie Země. Při vytažení tělesa ve Věži se tedy zřejmě rotace Země poněkud zpomalí. Co to však znamená „poněkud“? Nemůže činnost kosmického výtahu změnit rotaci Země natolik, že by to mohlo mít závažné důsledky i pro běžný život (prodloužení dne a noci, změny počasí atd.)?

Změna rychlosti rotace Země se ovšem může spočítat. Pomůže nám k tomu 2. věta impulsová (11), resp. její důsledek. Na soustavu Země (+ Věž) + těleso totiž nepůsobí vnější síly (resp. jejich působení — např. gravitační působení Měsíce a Slunce — zde pro jednoduchost neuvažujeme). Moment vnějších sil je proto rovněž nulový a ze vztahu (11) pak plyne, že i změna momentu hybnosti je nulová: $\Delta L = 0$, čili nutně

$$L_{\text{celk.}} = \text{const.} , \quad (17)$$

kde celkový moment hybnosti

$$L_{\text{celk.}} = L_Z + L \quad (18)$$

je součtem momentu hybnosti Země L_Z a tělesa L .

Poznamenejme, že vztah (17) je speciálním případem *zákona zachování momentu hybnosti* (který říká, že moment hybnosti soustavy těles, na niž nepůsobí vnější síly, je konstantní). Tento zákon má stejně fundamentální význam jako zákon zachování energie.

Zákon zachování momentu hybnosti nám umožní vypočítat změnu úhlové rychlosti rotace Země při zdvihání těles i v případě, že Věž není ideálně tuhá a situace vypadá zřejmě nějak tak, jak to ukazuje obr. 4. Platnost vztahu (17) totiž nezávisí na tuhosti tyče, jejím tvaru ani na jiných konkrétních okolnostech.

Moment hybnosti malého tělesa (hmotného bodu) ve Věži je dán vztahem (12). Před zdviháním tělesa je tedy

$$L_1 = m \omega_Z r_1^2 \quad (19)$$

a po vyzdvižení na vrchol Věže

$$L_2 = m(\omega_Z + \Delta\omega)r_2^2 , \quad (20)$$



Obr. 4

Obr. 4. Schematický náčrtek reálné Věže při vytahování tělesa.

kde $\Delta\omega$ je přírůstek úhlové rychlosti rotace Země.

V obecném případě je moment hybnosti tělesa dán vztahem

$$L_{\text{tělesa}} = J \cdot \omega, \quad (21)$$

kde J je tzv. moment setrvačnosti tělesa (kolem dané osy), charakterizující rozložení hmotnosti v tělese. Např. pro homogenní kouli o hmotnosti M a poloměru R je pro osu procházející jejím středem

$$J_{\text{koule}} = \frac{2}{5} MR^2. \quad (22)$$

(Pokud se zde čtenář dočetl o momentu setrvačnosti poprvé v životě, musí na tomto místě přijmout vztahy (21) a (22) jako fakt. Odvození momentu setrvačnosti by totiž zasluhovalo zvláštní článek.)

Moment setrvačnosti Země i s Věží (označme jej J_Z) se při pohybu tělesa nemění; mění se jen úhlová rychlost (z hodnoty ω_Z na $\omega_Z + \Delta\omega$). Je tedy na začátku vytahování

$$L_{Z1} = J_Z \cdot \omega_Z \quad (23)$$

a na konci

$$L_{Z2} = J_Z \cdot (\omega_Z + \Delta\omega). \quad (24)$$

Protože celkový moment hybnosti zůstává konstantní ($L_1 + L_{Z1} = L_2 + L_{Z2}$), je (z (19), (20), (23) a (24))

$$\omega_Z (mr_1^2 + J_Z) = (\omega_Z + \Delta\omega) (mr_2^2 + J_Z),$$

z čehož po úpravě

$$\Delta\omega = -\omega_Z \frac{m(r_2^2 - r_1^2)}{J_Z + mr_2^2} \quad (25)$$

($\Delta\omega$ je záporné, rychlost rotace Země tedy po vytažení tělesa poklesne, jak je ostatně zřejmé již z názoru).

Pro hrubý odhad $\Delta\omega$ můžeme moment setrvačnosti Země odhadnout podle vztahu (22) pro homogenní kouli:

$$J_Z \approx \frac{2}{5} M_Z r_Z^2,$$

kde M_Z je hmotnost Země. (Ve skutečnosti bude J_Z poněkud nižší, neboť Země není homogenní. Příspěvek Věže k J_Z v tomto odhadu samozřejmě zanedbáváme.)

Ve vztahu (25) můžeme při odhadu zanedbat v čitateli r_1^2 oproti r_2^2 a ve jmenovateli člen mr_2^2 oproti J_Z (jistě nebudeme ve Věži zdvihat náklady o hmotnosti srovnatelné s hmotností Země!). Dostáváme pak

$$\left| \frac{\Delta\omega_Z}{\omega_Z} \right| \approx \frac{5}{2} \frac{m}{M_Z} \left(\frac{r_2}{r_Z} \right)^2 \approx 10^3 \cdot \frac{m}{M},$$

kde jsme za r_2 dosadili výšku Věže danou vztahem (15) v [1]. Při přesnějším odhadu J_Z by $|\Delta\omega_Z|$ vyšlo poněkud vyšší, ale řádově stejné. Např. pro těleso o hmotnosti tisíc tun tak můžeme odhadnout, že řádově je $|\Delta\omega_Z|/\omega_Z < 10^{-15}$. Vidíme, že při vytahování nákladů „rozumné“ hmotnosti se rotace Země příliš nezpomalí.

Co říci na závěr? Snad jen tolik, že náš rozbor problému, přestože nás přivedl k několika užitečným novým pojmům a vztahům, samozřejmě není vyčerpávající. Ale tak je tomu ve fyzice často, ať už se inspirujeme problematikou převzatou ze sci-fi či nikoliv. A nemělo by to být důvodem k rozčarování — máme se snad zlobit proto, že zůstávají zajímavé otázky k přemýšlení?

Literatura :

- [1] Dvořák, L.: Přepočítejte si sci-fi, RMF č. 8, roč. 62, str. 343.
- [2] Clarke, A. C.: Rajské fontány. Český překlad v: Clarke, A. C.: Vesmírná Odyssea 2001 / Rajské fontány, Odeon, Praha. 1982.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Kdo byl Friedrich Wilhelm Bessel?

(Ke 200. výročí narození — 22. 7. 1784)

Jako každého správného kluka té doby lákalo i Bessela moře. Od 15 let, po čtyřletém studiu na gymnáziu, se stal učněm známé obchodní firmy v Brémách. Osvědčil se při účetních pracech, ale jeho touhou bylo stát se lodním důstojníkem. Po nocích se připravoval ke zkouškám, učil se cizí řeči, zeměpis, studoval knihy o lodích a navigaci. Úloha, jak určit podle hvězd polohu lodi na moři, jej dovedla k astronomii. Brzy do-

kázal tuto úlohu řešit vlastní metodou; zájem o matematiku a astronomii ho již neopustil.

Ve dvaceti letech předložil známému a váženému astronomovi amatérovi *Heinrichu Olbersovi*, lékaři v Brémách, výpočet dráhy Halleyovy komety. Ačkoliv k tomu došlo při setkání na ulici, byla práce tak pozoruhodná, že by byla o dvacet let dříve jistě odměněna cenou pařížské Akademie. Na Olbersovo doporučení se potom rozhodl přijmout méně placené místo na soukromé hvězdárně v Lilienthalu u Brém, a tím byly určeny jeho další životní osudy. V roce 1813 dokončil stavbu pruské státní hvězdárny v Královci (nyní Kaliningrad, SSSR) a stal se jejím ředitelem.

Jako každý velký astronom té doby se zabýval určováním drah těles sluneční soustavy z výsledků pozorování a výpočtem poloh těchto těles v libovolném minulém či budoucím časovém okamžiku. Protože pohyb nebeských těles je řízen Newtonovým gravitačním zákonem, který je vyjádřen funkcí jednoduchého tvaru, setkávali se přitom tehdejší astronomové s matematickými problémy, jejichž řešením našli mnohé základní pojmy a poučky té oblasti matematiky, kterou dnes nazýváme matematická analýza, teorie funkcí a diferenciálních rovnic.

Jejich práci lze poznávat také z jejich vzájemné korespondence. V Gaussově dopise z roku 1829, adresovaném právě Besselovi, se např. dočteme, že *Gauss* nemíní nikdy publikovat své objevy v oblasti geometrie (tedy neeukleidovskou geometrii). V jiném dopise Besselovi z roku 1830 *Gauss* píše o svém přesvědčení, že pouze základy aritmetiky jsou nezbytné a pravdivé.

A Besselova práce na rozvoji matematiky? Jeho předchůdci, kteří jej také inspirovali, se zabývali např. hledáním odpovědí na tyto otázky: Jaký je tvar rovnoměrně kmitajících řetězců? (*Daniel Bernoulli* — 1738) nebo Jak popsat kmity napjaté membrány? (*Leonard Euler* — 1764). *Lagrange* (1770) řešil úlohu pohybu planety v gravitačním poli Slunce, kterou před více než 150 lety formuloval Kepler, jenž ji řešil přibližně numericky, kdežto *Lagrange* našel řešení ve tvaru nekonečných řad a *Laplace* našel přibližné vzorce. *Fourier* řešil úlohu z jiné oblasti — šíření tepla v homogenním válci a přitom dostal rovnici, v jejímž řešení se opět objeví funkce, které jsou spojeny se jménem Bessela.

Jaký tvar mají Besselovy funkce? Náleží k řešení diferenciální rovnice

typu $a \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + y = 0$, které lze vyjádřit takto:

$$y = A J_0(x) \sqrt{2x/a},$$

kde $J_0(x)$ je Besselova funkce nultého řádu, 1. druhu. Obecně

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(k+n)!}$$

pro kladné celé n nebo 0.

Dnes nesou jméno F. W. Bessela také obyčejné diferenciální rovnice tvaru

$$x^2 y'' + xy' + (x - n)^2 y = 0 ,$$

kde n je parametr (i komplexní) a x může být také komplexní. Bessel vydal první systematickou studii o řešeních těchto rovnic v práci o pohybu planet.

Pro astronomii je významné, že Bessel zaujal nový postoj k měření. Uvědomil si, že chyby přístroje jsou nutným zlem, a odvodil pracovní postupy, jak je zjistit. Vyšetřoval jejich vlivy a zavedl metody jejich odstraňování.

Ještě v době Besselova života byly hvězdy považovány za tak vzdálené, že pokus měřit hodnotu jejich vzdálenosti se zdál beznadějný. Bessel byl první, který přesně určil vzdálenost stálice. Měření konal již kolem roku 1812. V roce 1837 určil paralaxu hvězdy, jež je 600 000 krát dále než Slunce. Za tři roky byl jeho výsledek potvrzen.

Pozoruhodný je také jeho objev neviditelných průvodců hvězd. Roku 1834 zjistil, že vlastní pohyb Siria není rovnoměrný. Za 6 let změřil podobnou nerovnoměrnost u další hvězdy. V roce 1844 vyslovil hypotézu: Jediným vysvětlením může být přítomnost druhé hvězdy, je zřejmě méně hmotná, tmavá. Uvedl i oběžné doby. Besselův výsledek byl přijímán s nedůvěrou, ale již v roce 1862 byl potvrzen. Zjištění je důležité pro astronomy také proto, že ukázal, že mezi hvězdami mohou být značné rozdíly ve svítivosti.

Besselův plán ke zmapování celého nebe vizuálně byl pravděpodobně prvním pokusem mezinárodní spolupráce. Jeho přání však splnili až jeho nástupci, neboť F. W. Bessel zemřel roku 1844 a mapování bylo skončeno až v roce 1858.

Dr. Alena Šolcová

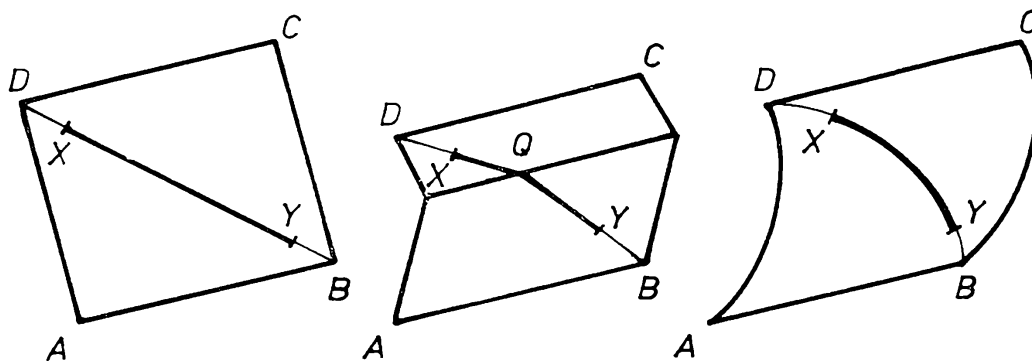
PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Kostky nejen Rubikovy

PhDr. ALENA ŠAROUNOVÁ, CSc., MFF UK Praha

6. Pavouk a moucha.

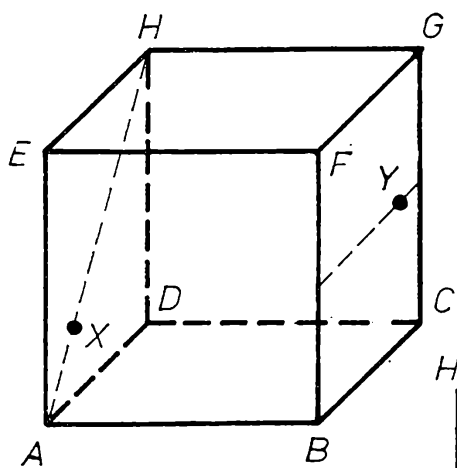
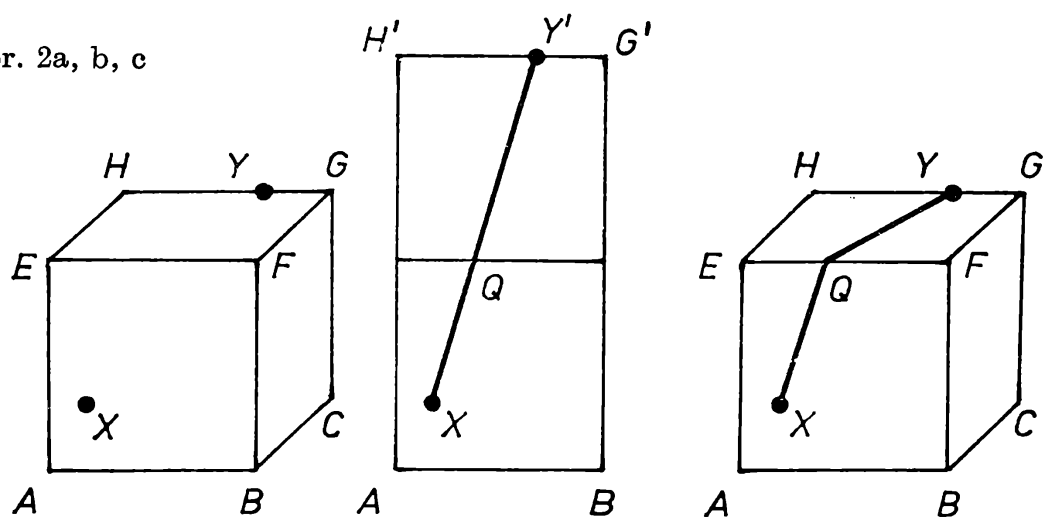
Všichni víte, že nejkratší spojnice dvou různých bodů X a Y v prostoru je úsečka s krajními body X , Y . Nejkratší cesta z vašeho domu do školy ale už přímá není — musíte se vyhýbat domům a dalším překážkám a sledovat všechny nerovnosti terénu; musíte jít „po zemi“. Na obr. 1a je nakreslený čtverec $ABCD$ — vystřižený ze čtvrtky papíru — a na jeho úhlopříčce BD body X a Y . Nejkratší cestou „po čtverci“, spojnici bodů X a Y je úsečka XY . Jestliže čtverec přehneme např. podél příčky rovnoběžné se stranou AB , úsečka XY se rozpadne na dvojici úseček XQ a QY . Tato dvojice úseček je stále nejkratší cestou po čtvrtce papíru z bodu X do bodu Y . Prohneme-li vystřižený čtverec jinak (např. tak, jako na obr. 1c), mění se i tvar čáry XY , její délka však zůstává konstantní.



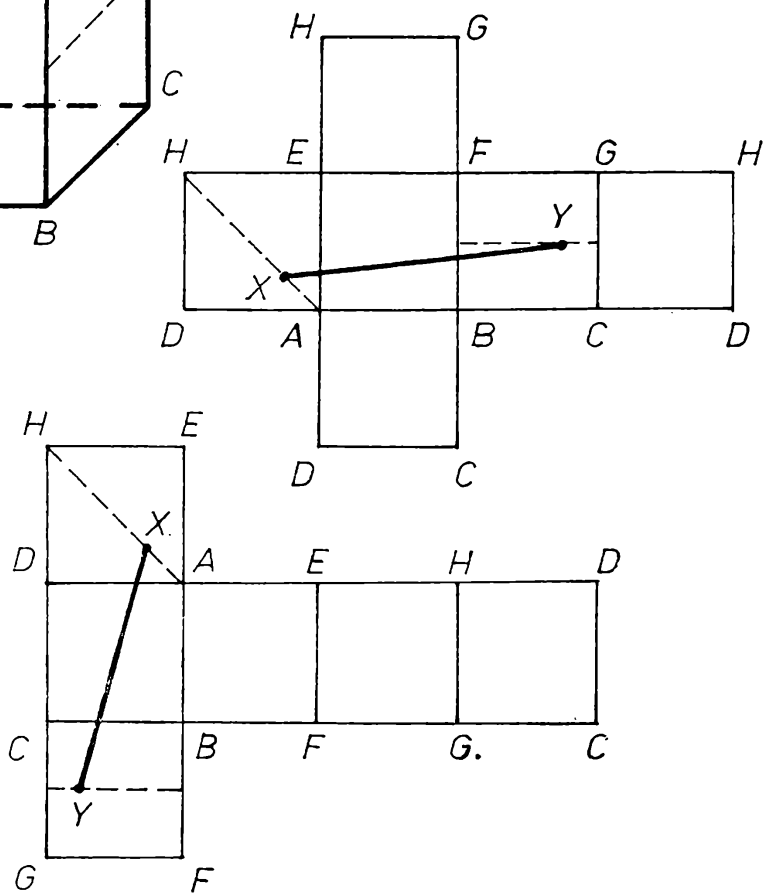
Obr. 1a, b, c

Na obr. 2a jsou na neprůhledné krychli $ABCDEFGH$ vyznačeny body X a Y . Chceme určit délku nejkratší „cesty z X do Y vedoucí po povrchu této krychle“. Hledaná cesta se bude zřejmě skládat ze dvou úseček (viz obr. 1b) se společným krajním bodem Q na hraně EF . Abychom polohu bodu Q určili, musíme horní stěnu krychle otočit podle hrany EF do roviny přední stěny (obr. 2b). Body G a H se při tomto otáčení přemístí do bodů G' a H' , bod Y do bodu Y' . Úsečka XY' je nejkratší spojnici bodů X a Y' vedoucí obdélníkem $ABG'H'$. Přímku EF protíná

Obr. 2a, b, c



Obr. 3a, b, c



v bodě Q . Na obrázku 2c je zakreslena nejkratší spojnice bodů X a Y na povrchu krychle.

Teď jsme již připraveni k řešení slibované „pavoučí úlohy“. Na obr. 3a je krychlová místnost $ABCDEFGH$. Na úhlopříčce AH levé stěny v jedné čtvrtině její délky — blíže k bodu A — číhá pavouk X . Na protilehlé stěně $BCGF$ sedí na střední příčce 12 moucha Y — opět v jedné čtvrtině její délky — blíže k bodu B . Nakreslete nejkratší cestu pavouka X k mouše Y — tj. nejkratší spojnici bodů X a Y , která vede stěnami krychle $ABCDEFGH$ (tedy třeba i stropem a podlahou oné místnosti).

Na obr. 3 b a 3 c máte návod, který vás možná přivede k zajímavým otázkám:

(1) Je nejkratší cesta skutečně jen jedna? Nenašly by se dvě různé a stejně dlouhé?

(2) Kolika způsoby je nutno zakreslit síť dané krychle, abychom vyšetřili všechny možnosti?

(3) Jakým způsobem lze přenést výsledek ze sítě do obr. 3a?

(4) Kam byste umístili „mouchu a pavouka“, aby měl pavouk výběr aspoň ze tří stejně výhodných cest?

Možná, že vás napadnou i četné otázky další. Mnoho zdaru v jejich řešení!

A na závěr se vraťme k lomené čáře z kapitoly 5. Najdete na ní takovou část, která je nejkratší spojnicí dvou jejích vrcholů neležících v jedné stěně krychle?

OLYMPIÁDY A SOČ

Fyzikálna olympiáda jubiluje

EVA BITTNEROVÁ, Bratislava

Čitateľom Rozhľadov iste netreba pripomínať, čo je fyzikálna olympiáda, aké sú jej základné ciele, aké prostriedky volí na dosiahnutie týchto cieľov a aká je jej štruktúra a organizácia. Čitateľ to všetko vie buď z vlastnej skúsenosti, buď z rozprávania svojich priateľov, priamych účastníkov niektorého z vyšších kôl olympiády, prípravných sústrede ní či azda samotnej medzinárodnej olympiády.

Rok 1984 je rokom, v ktorom slávi FO svoje 25. výročie. FO je preto už podujatím dvoch generácií. Riešiteľmi v jej prvých ročníkoch boli mnohí rodičia tých, ktorí sa teraz usilujú zapísať do análov FO. Fyzikálna olympiáda vznikla z iniciatívy niektorých vysokoškolských a stredoškolských profesorov koncom päťdesiatych rokov. Väčšina z nich sa už nemohla zúčastniť slávností z príležitosti XXV. ročníka FO v dňoch 6. až 10. 4. 1984 v Nitre. Účastníci týchto slávností si už len pripomenuli ich svetlú pamiatku. Medzi zaslúžilými dlhoročnými kormidelníkmi FO bol napríklad profesor EF VUT v Brne *RNDr. Rostislav Košťál*, ktorý od roku 1966 zastával funkciu predsedu Ústredného výboru FO, až kým ho v nej v roku 1977 nahradil docent EF SVŠT v Bratislave *RNDr. Ivan Náter*, ktorého zo zdravotných dôvodov od septembra 1983 vystriedal docent Pedagogickej fakulty v Nitre *RNDr. Ing. Daniel Kluvanec, CSc.*

Uvedme si teraz niekoľko čísel, z ktorých sa dá utvoriť predstava o popularite, dosahu a obťažnosti FO. Najprv ku kategórii E, kategórii pre žiakov ZŠ. Počet ZŠ u nás rokmi mierne stúpa. V roku 1972 ich bolo 3706, v roku 1980 už 3746. Asi 65 % ZŠ sa zúčastňuje prvého kola FO. Celoštátne to predstavuje 15 až 16 tisíc žiakov ročne. Z toho sa do tretieho, teda krajského kola prebojuje ročne len asi 500 až 600 najvytrvavejších a z nich tu úspešne obstojí asi 70 až 80 %.

So stredoškolskými kategóriami A, B, C, D je to inak. Tu sa do prvého kola súťaže každoročne zapája 5,5, až 6 tisíc študentov. Z toho polovica postúpi do druhého kola a z nej je tu asi 30 % úspešných. Do celoštátneho kola najvyššej kategórie, teda kategórie A, je pozývaných asi 80 úspešných riešiteľov druhého kola (ak ich vôbec toľko je). Z toho býva niekedy v treťom kole až polovica úspešných. Najlepších 10 až 15 obvykle splní kritériá, kladené na víťazov celoštátneho kola. Z víťazov, ale často aj z výborných mladších sa formuje reprezentačné družstvo pre medzinárodnú olympiádu. Účasť našich družstiev na pätnástich doterajších MFO dáva možnosť porovnať naše sily a vedomosti s 15 až 25 vyspelými štátmi sveta. Pätnásťročný priemer nás radí na druhé miesto, hneď za Sovietsky zväz.

Medzinárodné úspechy našej FO sú dielom žiakov, ich učiteľov, funkcionárov FO rôznych stupňov a pracovníkov Ústredného domu pionierov a mládeže Klementa Gottwalda v Bratislave, ktorí od roku 1977 hospodársky a organizačne zabezpečujú činnosť Ústredného výboru FO.

Na záver nášho rozprávania sa ešte pristavme pri súťažných úlohách, nie však zo strany riešiteľov, ale z pohľadu organizátorov súťaže. Títo potrebujú každoročne zhromaždiť 65 originálnych úloh, vhodných pre jednotlivé kategórie a kolá. Doteraz je to už 1625 úloh. Úlohy by mali byť pôvodné a nemali by sa opakovať. Navrhnuť a zostaviť ich môže každý.

Keď však zalistujeme v ročenkách FO, zistíme, že mená autorov úloh sa veľmi často opakujú. Čo keby ste aj vy skúsili navrhnúť a vypracovať čo len jednu úlohu. Ak sa vám to podarí, pošlite ju hoci predsedovi ÚV FO do Nitry. Váš návrh posúdi Komisia pre výber úloh. O tom, či úlohu zaradila, sa autor dozvie až po jej zadaní riešiteľom. To by bolo prekvapenie, keby ti napríklad na krajskom kole prečítali práve tvoju úlohu. Skús, možno to vyjde.

Celostátní kolo 33. ročníku matematické olympiády

RNDr. LEO BOČEK, CSc., MFF UK Praha

Letos se sjelo 80 nejlepších účastníků II. kola MO kategorie A do Čáslavi, kde proběhlo celostátní kolo 33. ročníku MO. Slavnostní zahájení dne 3. května 1984 bylo spojeno s pěkným kulturním programem, který nastudovali profesori a žáci čáslavských škol. Pro následující dva dny byly připraveny nejen soutěžní úlohy, ale zásluhou organizátorů v čele se zástupcem ředitele gymnázia v Čáslavi profesorem *Ladislavem Šachem* byl připraven bohatý kulturně společenský program. Jeho součástí byla i beseda s absolventy čáslavského gymnázia letcem-kosmonautem ing. podplukovníkem *Vladimírem Remkem*, zasloužilou mistryní sportu *Jarmilou Kratochvílovou* a zasloužilým trenérem ing. *Miroslavem Kváčem*. Tato beseda se zcela oprávněně těšila největšímu zájmu všech soutěžících žáků i členů ÚV MO. Její obsah nebyl bohužel zaznamenán, tak vás seznámíme alespoň s texty soutěžních úloh. První den to byla tato trojice úloh:

1. V prostoru je dána krychle $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Její střed označíme písmene S (průsečík tělesových úhlopříček). Najděte všechna přirozená čísla k , pro která existuje rovina neobsahující bod S a protínající právě k z polopřímek $SA_1, SA_2, \dots, SA_8$.

2. Nechť pro vnitřní úhly konvexního čtyřúhelníku platí

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta = 0,$$

potom je tento čtyřúhelník tětíkový nebo lichoběžník. Dokažte.

3. Nechť posloupnost $\{a_n\}$, $n \geq 0$, splňuje rekurentní vztah

$$(1) \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n.$$

Definujme posloupnost $\{b_n\}$, $n \geq 1$, vztahem

$$b_n = \left[\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \right],$$

přičemž klademe $b_n = 1$ pro $a_{n-1} = 0$. Dokažte, že od jistého členu počínaje splňuje posloupnost $\{b_n\}$ rovněž rekurentní vztah (1). Poznámka: $[x]$ značí celou část čísla x .

Druhý den byly úlohy trochu složitější, posuďte sami:

4. Nechtě je r přirozené číslo větší než 1. Potom existují kladná iracionální čísla x, y tak, že platí $xy = r$. Dokažte.

5. Najděte všechna přirozená čísla n , pro která existuje konvexní mnohostěn s n hranami, přičemž z právě jednoho jeho vrcholu vycházejí čtyři hrany a ze všech ostatních vrcholů 3 hrany.

6. Zobrazení f množiny Z všech celých čísel do sebe splňuje pro všechna $m \in Z$ podmínku

$$(2) \quad f(f(m)) = -m.$$

Potom platí: (a) f je zobrazení vzájemně jednoznačné, tj. prosté zobrazení množiny Z na množinu Z ,

$$(b) \text{ pro všechna } m \in Z \text{ platí } f(-m) = -f(m),$$

$$(c) f(m) = 0 \text{ právě tehdy, jestliže } m = 0.$$

Dokažte tato tvrzení a sestrojte příklad zobrazení f , které vyhovuje podmínce (2).

V neděli 6. května mohly být vyhlášeny výsledky. *Nejdříve uvádíme pořadí žáků z tříd, které nejsou zaměřeny na matematiku:*

1. Juraj Balász, gymnázium Košice, Kuzmányho ul.
2. Pavel Krtouš, gymnázium Liberec
3. Josef Pelikán, gymnázium K. Šatala, České Budějovice
- 4.—5. Ján Lužný, SPŠE Prešov
Petr Maršálek, gymnázium Praha 4, Ohradní
6. Ján Kováč, g. Poprad
7. Ivo Švec, g. J. Hronca, Bratislava
- 8.—11. Eva Koncová, g. J. Hronca, Bratislava
Eva Kopecká, g. J. Hronca, Bratislava
Tomáš Pecina, g. Turnov
Richard Pleva, g. Praha 3, Sladkovského nám.
- 12.—14. František Adamec, g. Ostrov n. Ohří
Richard Nemec, g. Banská Bystrica
Ivan Polách, 2. ročník g. J. Hronca, Bratislava
15. Bohumír Sládek, SPŠE Písek
16. Vladan Majerech, 1. ročník g. Pardubice
17. Jan Ternbach, g. Jevíčko

Vítězi 33. ročníku matematické olympiády se stali :

- 1.—2. Juraj Balász, g. Košice, Kuzmányho ul.
Jiří Witzany, g. W. Piecka, Praha
3. Ján Šefčík, g. A. Markuša, Bratislava
- 4.—7. David Bednárek, 2. ročník g. W. Piecka, Praha
Martin Grajcar, g. M. Koperníka, Bílovec
Vladimír Kordula, 2. ročník g. M. Koperníka, Bílovec
Pavel Krtouš, g. Liberec
- 8.—9. Adam Obdržálek, 2. roč. g. W. Piecka, Praha
Andrej Pastva, g. A. Markuša, Bratislava
- 10.—12. Petr Hájek, 2. roč. g. W. Piecka, Praha
Marián Šumšala, g. A. Markuša, Bratislava
Pavel Valtr, g. W. Piecka, Praha
13. Josef Pelikán, g. K. Šatala, České Budějovice
- 14.—17. Martin Černý, g. W. Piecka, Praha
Martin Foltin, g. A. Markuša, Bratislava
Ján Lužný, SPŠE Prešov
Petr Maršálek, g. Praha 4, Ohradní

Vítězům i dalším pětadvaceti úspěšným řešitelům úloh celostátního kola matematické olympiády blahopřejeme, všem jeho účastníkům přejeme hodně úspěchů v dalším studiu a s těmi, kteří ještě letos nematurují, se těšíme na shledanou na příštím celostátním kole MO ve Středoslovenském kraji.

Z NOVÝCH KNIH

Sobotka, Z.:

OTÁZKY A ODPOVEDE
Z MIKROPROCESOROV
A MIKROPOČÍTAČOV —
ARCHITEKTÚRA
A PROGRAMOVANIE

Vydala Alfa, n. p., Bratislava
1983, edícia elektrotechnickej litera-
túry, 2. upravené vydanie, 272 strán,
112 obr., brož. Kčs 18,—.

Zaujímajú vás „zázraky“ súčas-
nej vedy a techniky? Mikroproce-
sory a mikropočítače k nim určite

patria. Chcete poznať odpoveď na
niektoré základné otázky? Ktoré
typy logických obvodov používa-
me? Z čoho sa skladajú pamäti
MOS s postupným výberom a ako
pracujú? V čom sa líši kalkulátor
a mikropočítač? Z akých blokov
sa skladá mikroprocesor? Aké sú
výhody a nevýhody použitia vyš-
šieho programovacieho jazyka?

Uvedená knižka je súborom od-
povedí na 113 otázok z oblasti
aplikácií logických obvodov, mik-
ropočítačov a mikroprocesorov,
pamätí, prídavných zariadení k po-

čítačom a ich programovaníu. Zaoberá sa najdôležitejšími matematickými vzťahmi, kódovaním, skladbou a programovaním mikroprocesorov a mikropočítačov. Dozviete sa o základných typoch integrovaných obvodov, spoznáte hlavné poznatky o počítačoch, ich

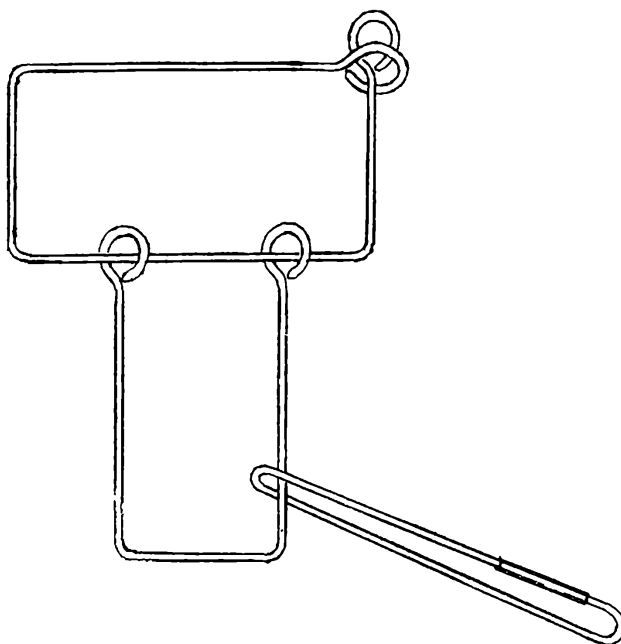
architektúre a programovaní. Odpovede na položené otázky sú ilustrované na príkladoch, grafických schémach a obrázkoch.

Zoznámte sa čo najskôr s touto progresívnou oblasťou našej elektroniky. Je to aj vaša budúcnosť.

Dušan Jedinák

Dva obdél níky

Od jiných hlavolamů se liší tento hlavolam tím, že připomíná dva obdél níky. Dobře se soustředte! Jeho výroba vyžaduje přesnou práci, jinak ho nebudete moci vyřešit. Schéma hlavolamu vidíte na obrázku.



Připravíme si tři tenčí ocelové dráty (dráty z kola), obyčejné kleště a na ohýbání drátu menší kleště s kulatými čelistmi. Třem připraveným drátům uštípíme na koncích závity a kloboučky a ohýbáme podle nákresu do tvaru dvou obdél níků a sponky.

Úloha zní: vyjmout sponku z obou obdél níků.

Josef Svoboda

Řešení tohoto hlavolamu bude uveřejněno v příštím čísle.

Bacilli Neperianes

John Napier (1550—1617), skotský šlechtic, psal svá vědecká pojednání latinsky a podepisoval je *Neper*. Zabýval se celou škálou věd a pavěd, ale objevitelem bacilů (drobných živočichů) není. V nadpisu zmíněné bacily mají s původci chorob společný jen tvar — tyčku; latinské slovo *bacillus* znamená hůlku, tyčku, tyčinku. Nadpis „Napierovy tyčky“ označuje předměty znázorněné na obrázku.

V posledním díle, které napsal a nazval *Rabdologia seu Numerationis*, popsal Napier výpočetní pomůcku, kterou vytvořil z proužků nastříhaných z tabulky násobilky. Cifry součinů zapsal do trojúhelníkových políček, jak vidíte na obrázku. Proužky nalepoval zprvu na dřevěné destičky, pak však použil tyčky ve tvaru kvádrů (viz obrázek). Posledním zlepšením, které navrhl, bylo polepení všech čtyř svislých stěn tyček, na protější stěny umisťoval násobky čísel doplňujících se na devět, například 3, 4, 5, 6 nebo 0, 2, 9. 7. Souprava deseti tyček sloužila rabdologii, tj. počítání s tyčkami.

Princip výpočtů je snadné odhadnout. Obrázek umožňuje určovat násobky čísla 35, například čtyřnásobek hledáme na řádku ve

výši číslice 4 v levém sloupci. V řádku si představíme šikmé pásy ve směru úhlopříček a jednotlivé cifry výsledku získáme zápisem součtů v pásech jako 1, 2 + 2, 0,

	3	5
1	3	5
2	6	10
3	9	15
4	12	20
5	15	25
6	18	30
7	21	35
8	24	40
9	27	45

tedy 140. Devítinásobek však dává 2, 7 + 4, 5, zde nutno součty 2, 11, 5 změnit na 2 + 1, 1, 5 a zapsat 315.

Napierovy tyčky byly v 17.—19. století východiskem pro konstrukce mechanických počítacích strojů s násobením. Vzbudily větší ohlas než Napierovy logaritmické tabulky, sloužily i k výpočtům s čísly mnohocifernými.

Jaroslav Šedivý

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

vydalo další příručku pro soutěží v matematické olympiádě. Napsali ji
Leo Boček a Antonín Vrba a jmenuje se

VYBRANÉ ÚLOHY Z MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY, kategorie B.

Sbírka obsahuje výběr úloh z 16. až 30. ročníku MO. V publikaci je devade-
sát řešených úloh typických pro kategorii B, jež je určena pro studenty
II. ročníku všech typů středních škol. Cena brožovaného výtisku je 6,50 Kčs

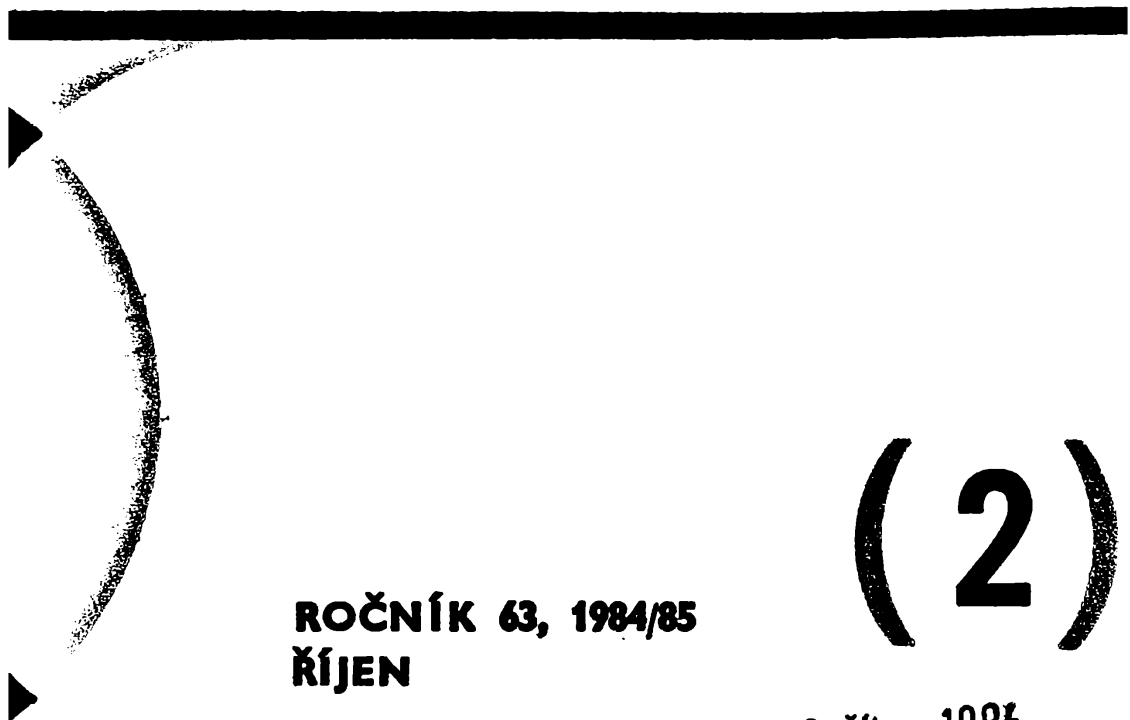
Vydává ministerstvo školství ve Státním
pedagogickém nakladatelství v Praze za
odborné péče Jednoty čs. matematiků
a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné
20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého
čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody,
nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12,
Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služ-
ba. Informace o předplatném podá a objed-
návky přijímá každá administrace PNS, poš-
ta a doručovatel. Objednávky do zahraničí
vyřizuje PNS — ústřední expedice a do-
voz tisku, Praha, závod 01, administrace vý-
vozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Ja-
zyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze 1984.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

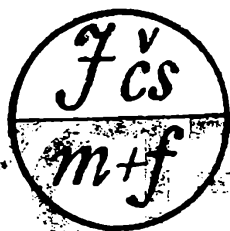


**ROČNÍK 63, 1984/85
ŘÍJEN**

(2)

– 3. října 1984

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE
Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK
Praha, prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc.,
PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář,
CSc., ÚNM Praha., dr. Martin Šolc,
CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

S. Horák: Velikost pravoúhlých průmětů rovinných obrazců	49
J. Barták: Co jsou to diferenciální rov- nice?	52
L. Drs: Pravoúhlá axonometrie určená směrem promítání	57
O. Janíková: Hrozba následků jadrovej vojny II	60
S. Jurečka: Jednparametrový model ató- mu vodíka	61
D. Kluvanec: Frekvenční charakteristiky elektrických dvojpólů	65
J. Mída: Kdo byl von Littrow?	75
I. Kraus: Objevy, které se staly základem fyziky pevných látek	76
Přemýšlíme, řešíme .	84
Naše soutěž .	88
Z nových knih	95
Informace	96
Pohledy do dějin	3. str. obálky

MATEMATIKA

Velikost pravoúhlých průmětů rovinných obrazců

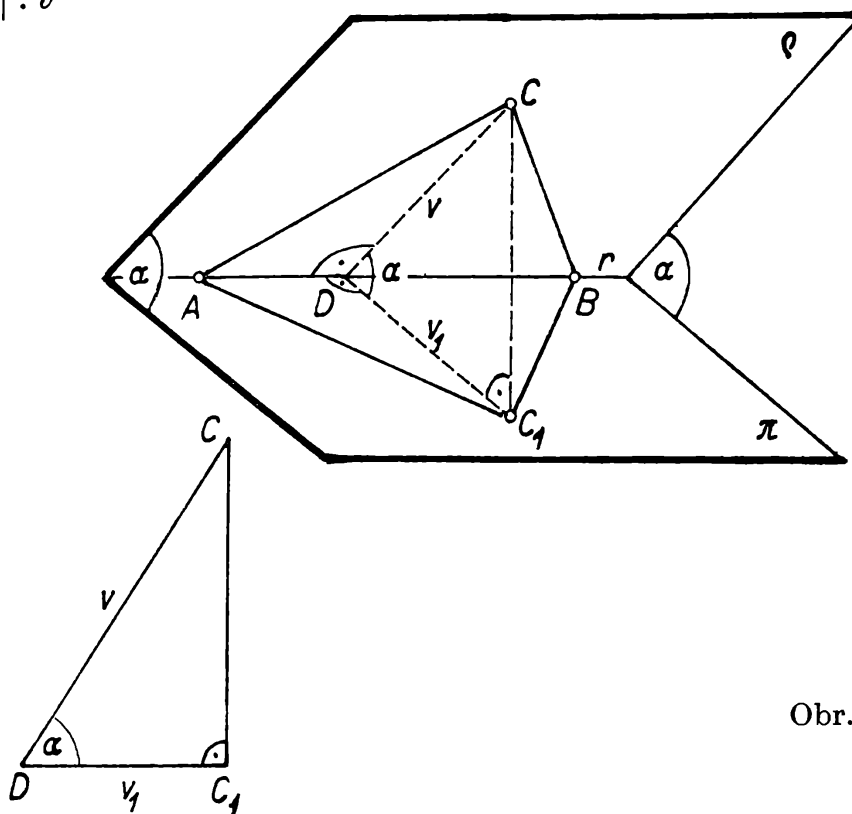
STANISLAV HORÁK, Praha

Mějme dvě různoběžné roviny ϱ, π nikoliv k sobě kolmé, jejichž ostrý úhel má velikost α . V rovině ϱ je dán trojúhelník ABC , který je pravoúhle promítnut do roviny π v trojúhelník $A_1B_1C_1$. Naší úlohou bude zjistit velikost obsahu S_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$, jestliže trojúhelník ABC má obsah S .

Poznámka. Písmena v, v_1 , jichž bude v textu užito, budou znamenat jednak výšku (tj. úsečku), jednak velikost výšky (tj. číslo). K omylu nemůže dojít, neboť z kontextu vyplyne, co se právě myslí, zda úsečka či číslo.

a) Všimneme si nejprve případu, kdy strana AB trojúhelníku ABC leží na průsečnici r rovin ϱ, π (obr. 1). Obsah trojúhelníku ABC je

$$S = \frac{1}{2} |AB| \cdot v$$



Obr. 1

kde v je velikost výšky na stranu AB . Obsah trojúhelníku ABC_1 je

$$S = \frac{1}{2} |AB| \cdot v$$

kde v_1 je velikost výšky v trojúhelníku ABC_1 na stranu AB . Přitom paty výšek obou trojúhelníků splývají, tj. v_1 je pravoúhlý průmět výšky v . Ale

$$v_1 = v \cos \alpha$$

(obr. 1a), a proto

$$S_1 = \frac{1}{2} |AB| v \cos \alpha = S \cos \alpha \quad (1)$$

b) Mějme nyní trojúhelník v takové poloze, kdy právě jeden jeho vrchol — např. A — leží na průsečnici r . Na obr. 2a je znázorněna již jen situace v rovině ϱ . Přímka BC protne průsečnici r v bodě D . Trojúhelníky ADC , ADB jsou v poloze, o níž jsme mluvili v odst. a), tj. jedna jejich strana leží v průsečnici r . Pak můžeme psát

$$S(ABC) = S(ADC) - S(ADB)$$

O průmětech těchto trojúhelníků platí (při úpravě užíváme výsledku odst. a):

$$\begin{aligned} S(A_1B_1C_1) &= S_1 = S(A_1D_1C_1) - S(A_1D_1B_1) = \\ &= S(ADC) \cos \alpha - S(ADB) \cos \alpha = \\ &= [S(ADC) - S(ADB)] \cos \alpha = S(ABC) \cos \alpha = S_1. \end{aligned}$$

I v tomto případě dostáváme pro obsah průmětu tentýž vzorec jako v odst. a).

c) Nyní si všimneme případu, kdy trojúhelník ABC nemá s průsečnicí $r = \varrho \cap \pi$ žádný společný bod (obr. 2b). Přímky AC , BC protnou přímku r po řadě v bodech D , E . Pak je

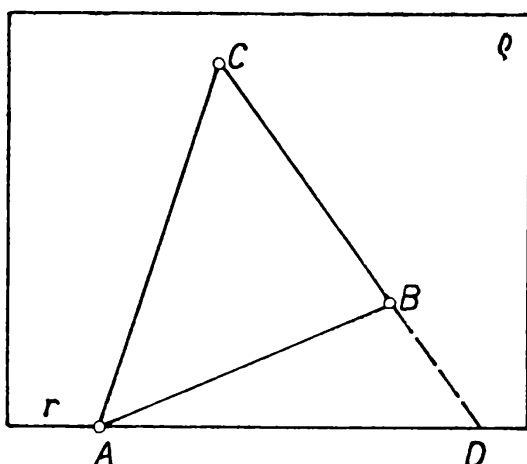
$$S = S(DEC) - S(DEBA) = S(DEC) - [S(DEA) + S(EBA)]$$

Ale obsahy trojúhelníků uvedených v závorce jsme probrali v odst. a) a b). Proto o průmětech platí

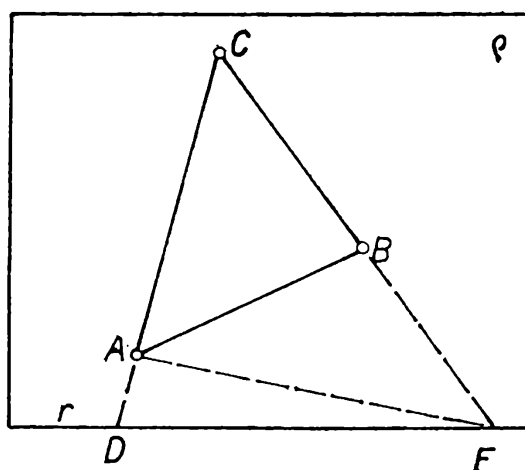
$$\begin{aligned} S(A_1B_1C_1) &= S(DEC_1) - [S(DEA_1) + S(EB_1A_1)] = \\ &= S(DEC) \cos \alpha - [S(DEA) \cos \alpha + S(EBA) \cos \alpha] = \\ &= S(ABC) \cos \alpha = S \cos \alpha. \end{aligned}$$

d) Zbývá případ, kdy trojúhelník ABC má s průsečnicí $r = \varrho \cap \pi$ společnou (nenulovou) úsečku, která není stranou trojúhelníku ABC . Obdobně jako v případě c) se dokáže, že i v tomto případě platí rovnost (1).

Dokázali jsme, že platí tato věta:



Obr. 2a



Obr. 2b

Pravoúhlý průmět trojúhelníku, který leží v rovině ρ , do roviny π svírající s rovinou ρ ostrý úhel α má obsah

$$S_1 = S \cos \alpha .$$

Odvozený vzorec však platí pro obsah pravoúhlého průmětu libovolného mnohoúhelníku. To si čtenář může dokázat rozkladem mnohoúhelníku na nepřekrývající se trojúhelníky. Věta platí i pro rovinné obrazce ohraničené křivkami. Důkaz tohoto tvrzení je ovšem podstatně složitější než důkaz pro obsah průmětu mnohoúhelníku.

Cvičení :

1. Trojúhelník ∇ rovině ρ má obsah 1 m^2 . Jeho pravoúhlý průmět do roviny π má obsah $0,5 \text{ m}^2$. Jak velký úhel svírají roviny ρ , π ? [60° .]
2. Pravidelný hranol trojboký s podstavou $A_1B_1C_1$ v první průmětně (délka podstavné hrany je 8 cm) je prořat rovinou σ v trojúhelníku ABC o obsahu 32 cm^2 , b) $M \text{ cm}^2$. Jak velká je první odchylka roviny σ ? Udejte omezení pro číslo M . [60° ; $M \geq 16\sqrt{3}$.]
3. Pravoúhlý průmět rovnoběžníka $ABCD$ v rovině ρ do roviny π je čtverec o straně délky a . Roviny ρ , π svírají úhel velikosti 45° . Jak velký obsah má rovnoběžník $ABCD$?
4. Za předpokladu, že dokázaná věta platí i pro kruh, dokažte, že obsah elipsy je dán vzorcem πab , kde a je délka hlavní poloosy, b je délka vedlejší poloosy.

Co jsou to diferenciální rovnice?

RNDr. ing. JAROSLAV BARTÁK, CSc., UK Praha

Při počítání s derivacemi zjistíme, že mezi funkcemi a jejich derivacemi platí řada vztahů. Tak např. pro funkci $y(t) = \cos t$, pro kterou, jak víme, je $y'(t) = -\sin t$, $y''(t) = -\cos t$, platí

$$(1) \quad y''(t) + y(t) = 0,$$

nebo funkce $y(t) = t^3 + 2t^2 - t + 1$ splňuje vztah

$$(2) \quad y'''(t) = 6,$$

funkce $y(t) = e^t$ vyhovuje rovnici

$$(3) \quad y'(t) = y(t)$$

anebo funkce $y(t) = t^5/6$ rovnici

$$(4) \quad t^2 y''(t) - 4t y'(t) + 6y(t) = t^5$$

(Čárkou u funkce značíme, jak je obvyklé, její derivaci. Počet čárek značí řád příslušné derivace. Poznamenejme, že někdy, zvláště v mechanice, je místo čárek zvykem používat pro označení derivace tečku. Tak

např. každý ze zápisů y'' , $\ddot{y}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$ značí druhou derivaci funkce y .)

V tomto článku si všimneme opačné úlohy; k danému vztahu mezi funkcí, jejími derivacemi a nezávisle proměnnou budeme hledat funkce, které tento vztah splňují. Vztahy (1), (2), (3) nebo (4) chápeme tedy jako rovnice pro neznámou funkci $y(t)$. V tom smyslu potom můžeme říci, že třeba funkce $y(t) = \cos t$ je řešením rovnice (1), nebo funkce $y(t) = t^3 + 2t^2 - t + 1$ je řešením rovnice (2), nebo funkce $y(t) = e^t$ řeší rovnici (3), anebo funkce $y(t) = t^5/6$ je řešením rovnice (4). (Pozor, řešením tedy je funkce, nikoliv číslo, jak jste byli zvyklí u algebraických rovnic!)

Rovnicím, v nichž se jako neznámá vyskytuje funkce a její derivace, říkáme *diferenciální rovnice*. Za jejich řešení považujeme takové funkce, které po dosazení převedou rovnici v identickou rovnost.

Dosazením zjistíme, že kromě funkce $y(t) = \cos t$ je také třeba funkce $y(t) = 2 \cos t - 5 \sin t$ nebo obecněji dokonce každá z funkcí $y(t) = A \cos t + B \sin t$, kde A , B jsou libovolné konstanty, řešením rovnice (1). Pro tuto funkci totiž platí $y'(t) = -A \sin t + B \cos t$,

$$y''(t) = -A \cos t - B \sin t, \text{ a tedy}$$

$$y''(t) + y(t) = -A \cos t - B \sin t + A \cos t + B \sin t = 0$$

Podobně funkce $y(t) = t^3 + At^2 + Bt + C$, kde A , B , C jsou libovolné konstanty, jsou další řešení rovnice (2). Rovnici (3) řeší každá z funkcí

tvaru $y(t) = C e^t$, anebo rovnice (4) má další řešení $y(t) = t^{5/6} + At^3 + Bt^2$, kde velká písmena značí opět libovolné konstanty. Ověřte to výpočtem příslušných derivací a jejich dosazením do rovnice.

¶ Jak vidíme, nelze tedy očekávat, že řešení diferenciální rovnice bude jediné; na příkladech jsme viděli rovnice, které mají dokonce nekonečně mnoho řešení. V praktických úlohách však většinou známe ještě další podmínky umožňující nám z nekonečně mnoha řešení vybrat to, které odpovídá popisované situaci. Smysl těchto podmínek si ukážeme na několika jednoduchých příkladech.

Zabývejme se nejprve vyšetřováním rovnoměrného přímočarého pohybu tělesa. Označme symbolem $s(t)$ jeho dráhu v časovém okamžiku t . Z fyziky je známo, že rychlost je derivací dráhy podle času. Označíme-li rychlost v čase t symbolem $v(t)$, platí tedy $s'(t) = v(t)$. Přímočarý rovnoměrný pohyb můžeme definovat jako pohyb, jehož rychlost je konstantní, tj. $v(t) = v$. Z posledních dvou rovností dostaneme porovnáním

$$(5) \quad s'(t) = v$$

Vztah (5) budeme chápat jako diferenciální rovnici pro dráhu $s(t)$ vyšetřovaného pohybu (přitom rychlost v považujeme za danou konstantu). Snadno zjistíme (jde vlastně o hledání primitivní funkce), že řešením rovnice (5) je každá z funkcí

$$(6) \quad s(t) = vt + C$$

kde C je libovolná (integrační) konstanta.

Pokusme se nyní určit fyzikální smysl konstanty C . Předpokládejme, že jsme pohyb začali vyšetřovat v počátečním čase $t = 0$ a že v té době těleso již mělo uraženu dráhu s_0 , což můžeme matematicky vyjádřit vztahem

$$(7) \quad s(0) = s_0.$$

Dosadíme-li do rovnice (6) za čas t nulu, dostaneme $s(0) = C$. Současně (podle (7)) má být $s(0) = s_0$, a tedy porovnání posledních dvou rovností dává $C = s_0$.

Po dosazení za takto určené C do rovnosti (6) dostaneme rovnici dráhy rovnoměrného přímočarého pohybu ve tvaru

$$s(t) = s_0 + vt$$

Vidíme tedy, že konstanta C má fyzikálně smysl počáteční dráhy, tj. dráhy uražené tělesem v čase $t = 0$. Podmínce (7) proto říkáme *počáteční podmínka*. Zpravidla řešení diferenciální rovnice je již počátečními podmínkami (obecně jich bývá tolik, kolik je řád nejvyšší derivace obsažené v rovnici) určeno jednoznačně. Úloze, kdy máme najít řešení diferenciální rovnice, které splňuje dané počáteční podmínky, říkáme *počáteční úloha*.

Podmínku (7) můžeme nahradit poněkud obecnější podmínkou, třeba podmínkou

$$s(t_0) = s_0 ,$$

v níž za počáteční čas bereme místo nuly okamžik t_0 . V tomto případě dostaneme $C = s_0 - vt_0$, a rovnice dráhy proto bude

$$s(t) = s_0 + v(t - t_0)$$

(V tomto vzorci zřejmě s_0 je dráha uražená v okamžiku t_0 a součin $v(t - t_0)$ představuje dráhu tělesa vykonanou od času t_0 do času t .)

Nyní si ukážeme, jak vypadá počáteční úloha pro rovnici druhého řádu. Na ni vede třeba vyšetřování přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu. Můžeme ho definovat jako pohyb, jehož zrychlení je konstantní (příkladem takového pohybu je např. volný pád). Podobně jako rychlost byla derivací dráhy, je zrychlení derivací rychlosti (a tedy druhou derivací dráhy). Označíme-li zrychlení v časovém okamžiku t symbolem $a(t)$, platí tedy

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} s(t) \right) = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

Vzhledem k tomu, že zrychlení je konstantní (rovné konstantě a), dostáváme pro dráhu přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu diferenciální rovnici

$$(8) \quad s''(t) = a$$

Integrováním odtud plyne

$$(9) \quad s'(t) = at + C_1$$

a další integrací

$$(10) \quad s(t) = \frac{1}{2} at^2 + C_1 t + C_2 ,$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné integrační konstanty. Jejich smysl opět určíme z počátečních podmínek. Nyní zadáváme dvě podmínky, jednu pro počáteční dráhu (jako u pohybu rovnoměrného) a druhou pro počáteční rychlost. Víme-li např., že dráha v čase t_0 byla s_0 a rychlost v_0 , můžeme počáteční podmínky zapsat ve tvaru

$$(11) \quad s(t_0) = s_0 ,$$

$$(12) \quad s'(t_0) = v_0 ,$$

(neboť $v(t_0) = s'(t_0)$); zde s_0, v_0 jsou dané hodnoty. Dosadíme-li do (9), (10) za t hodnotu t_0 , dostaneme porovnáním s (11), (12) pro konstanty C_1, C_2 soustavu algebraických rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} at_0^2 + C_1 t_0 + C_2 &= s_0 , \\ at_0 + C_1 &= v_0 , \end{aligned}$$

odkud plyne $C_1 = v_0 - at_0$, $C_2 = s_0 + \frac{1}{2} at_0^2 - v_0 t_0$

Nakonec dosadíme za C_1 , C_2 do rovnosti (10). Po snadné úpravě dostaneme

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

Snadno se přesvědčíme dosazením do rovnice (8) a do počátečních podmínek (11), (12), že tato funkce je vskutku řešením naší počáteční úlohy.

Vraťme se však ještě k počátečním podmínkám. Viděli jsme, že pro rovnici (5) stačilo zadat jednu počáteční podmínku, zatímco pro rovnici (8) jsme potřebovali dvě počáteční podmínky. Není to náhodné. Z fyzikálních důvodů je totiž obvykle přirozené zadávat tolik počátečních podmínek, kolik je řád nejvyšší derivace obsažené v rovnici. Zároveň jsme viděli, že je to i matematicky rozumné, neboť jsme dostali právě jedno řešení.

U počátečních úloh bývá nezávisle proměnná často interpretována jako čas. (Tak tomu bylo v předchozích dvou příkladech.) Počáteční podmínky určují stav popisovaného objektu v určitém (počátečním) okamžiku. Pomocí něho a příslušné diferenciální rovnice mnohdy můžeme popsat chování objektu v časech následujících i minulých (tj. můžeme předvídat jeho chování nebo sledovat jeho minulost). Jindy je možno interpretovat nezávisle proměnnou třeba jako prostorovou souřadnici. To je typické pro tzv. *okrajové úlohy*. Ukážeme si jednoduchý příklad takové úlohy. Nezávisle proměnnou budeme (jakožto prostorovou proměnnou) značit pro rozlišení symbolem x .

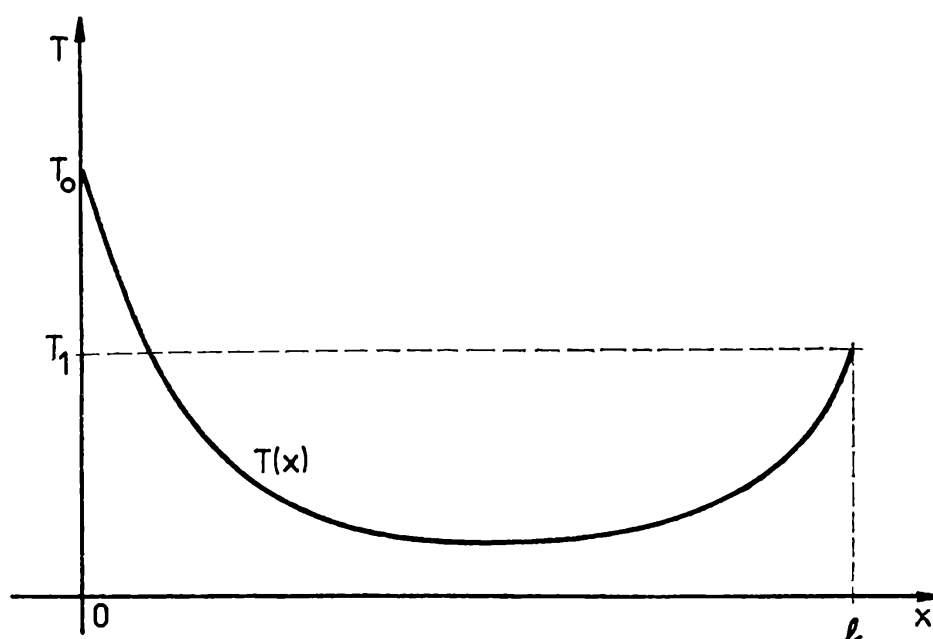
Hledejme rozložení teploty v tyči délky l , jejíž jeden konec je udržován na stálé teplotě T_0 a druhý na stálé teplotě T_1 . Předpokládejme, že teplota okolního prostředí je konstantní a rovna hodnotě T_p . Zavedme souřadný systém tak, aby osa x byla v ose tyče, aby začátek tyče byl v počátku a konec v místě o souřadnici l . Nakonec označme symbolem $T(x)$ teplotu tyče v místě o souřadnici x (předpokládáme přitom, že teplota je v každém průřezu konstantní). Potom je možno popsat rozložení teploty v tyči diferenciální rovnicí

$$(13) \quad \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - a(T(x) - T_p) = 0,$$

kde a je jistá kladná konstanta charakterizující prostředí. Kromě toho známe teplotu na krajích tyče; víme, že na jednom konci (třeba na začátku) je teplota tyče rovna T_0 a na druhém konci T_1 . Matematicky vyjádřeno

$$(14) \quad T(0) = T_0, \quad T(l) = T_1$$

Tyto podmínky určují stav objektu — v našem případě teplotu tyče — na jeho okrajích (konech). Proto jim říkáme *okrajové podmínky* a rov-



Obr. 1

nici spolu s okrajovými podmínkami nazýváme *okrajovou úlohou*. Řešení rovnice (13) je již obtížnější, než bylo řešení rovnic (5), (8), a nebudeme se jím v tomto článku zabývat. Přesvědčte se však dosazením, že řešením okrajové úlohy (13), (14) je funkce

$$T(x) = T_p + (e^{\sqrt{a}l} - e^{-\sqrt{a}l})^{-1} \left\{ \left[T_1 - T_p - (T_0 - T_p) e^{-\sqrt{a}l} \right] e^{\sqrt{a}x} + \left[(T_0 - T_p) e^{\sqrt{a}l} - T_1 + T_p \right] e^{-\sqrt{a}x} \right\}$$

Průběh funkce $T(x)$ udávající rozložení teploty v tyči je znázorněn na obr. 1.

Diferenciální rovnice jsou dnes jedním z nejmocnějších teoretických nástrojů fyziky a techniky v nejširším měřítku. Nacházejí však své uplatnění i v řadě dalších oblastí, jako např. v biologii, chemii, ekologii a v poslední době i ve společenských vědách. Samozřejmě nejsou většinou tak jednoduché jako ty, jimiž jsme se zabývali v tomto článku. V některém z dalších čísel Rozhledů se proto k problematice diferenciálních rovnic ještě vrátíme, ukážeme si některé metody řešení obecnějších diferenciálních rovnic a možnosti jejich použití při řešení konkrétních praktických úloh.

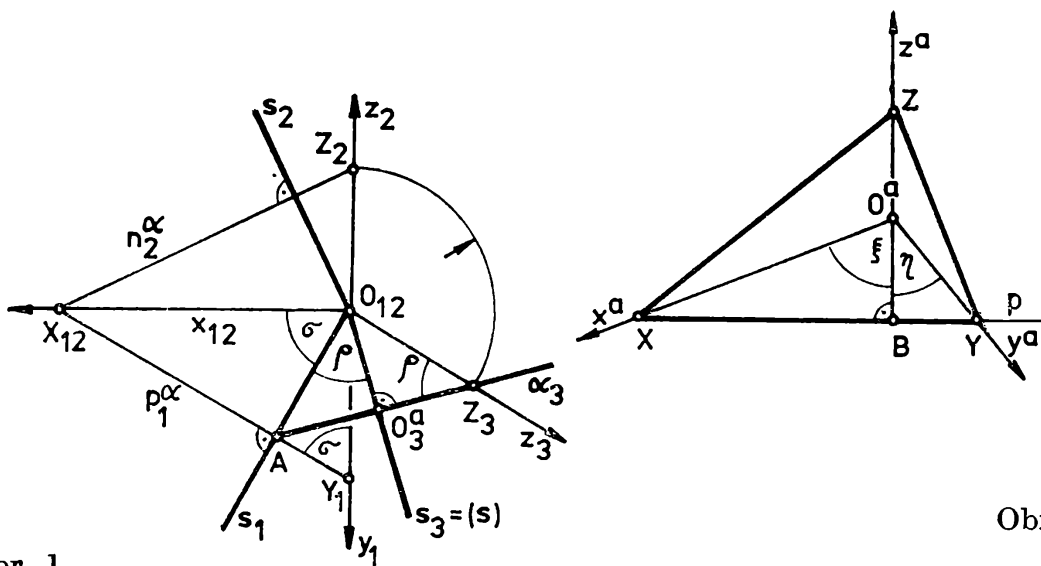
Pravoúhlá axonometrie určená směrem promítání

Doc. dr. ing. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT Praha

Pravoúhlou axonometrii určujeme obvykle osovým křížem nebo axonometrickým trojúhelníkem. Při tomto postupu se nám však může stát, že axonometrie takto určená neposkytne vhodný pohled na daný objekt, že se např. některá jeho významná stěna promítne téměř do úsečky, kružnice do štíhlé elipsy, která se těžko rýsuje, apod. Přirozeným požadavkem je proto konstrukce kolmé axonometrie, zadané směrem promítání, který volíme tak, aby zmíněné nevhodné případy nenastaly.

Na obr. 1 je určen směr promítání s , $O \in s$ půdorysem s_1 , $O \in s_1$ a sklopeným průmětem (s) do půdorysny, $O \in (s)$. Zvolme rovinu (ss_1) za třetí průmětnu. Pak je $(s) = s_3$. Axonometrickou průmětnu $\alpha \perp s$ zvolme bodem X na ose x . Stopa p^α má půdorys $p_1^\alpha \perp s_1$, $X_1 \in p_1^\alpha$. Označme $A = s_1 \cdot p_1^\alpha$. Třetí průmět axonometrické průmětny α je přímka α_3 , $A \in \alpha_3 \perp s_3$. Pata kolmice vedené bodem O k rovině α je počátek O^a axonometrického osového kříže a jeho třetí průmět je $O_3^a = s_3 \cdot \alpha_3$. Průsečíky roviny α s osami y a z označme Y a Z . Potom je $Y_1 = y_1 \cdot p_1^\alpha$, $Z_3 = z_3 \cdot \alpha_3$, $OZ_3 = OZ_2$, $Z_2 \in z_2$, $X_2Z_2 = n_2^\alpha$, $O_2 \in s_2 \perp \perp n_2^\alpha$. Body X , Y , Z jsou vrcholy axonometrického trojúhelníka, určeného směrem s . Sestrojíme ho na obr. 2. Zvolíme přímku p rovnoběžně s podélnou stranou papíru a na ní bod X . Na přímce p sestrojíme body B a Y tak, že $XB = X_1A$, $BY = AY_1$. Na kolmici bodem B k přímce p určíme body O^a a Z tak, aby $BO^a = AO^a$, $O^aZ = O_3^aZ_3$. Tím je sestrojen nejen axonometrický trojúhelník XYZ , ale i osy axonometrického osového kříže $x^a = O^aX$, $y^a = O^aY$ a $z^a = O^aZ$.

Nyní určíme délky axonometrických jednotek j_x , j_y a j_z , tj. průměty jednotlivých úseček os x , y a z .



Obr. 1

Obr. 2

Označme $m = OX$, $\sigma = \sphericalangle xs_1$, $\varrho = \sphericalangle s_1s_3$. Z obr. 1 vyplývají vztahy

$$\begin{aligned} X_1A &= m \cdot \sin \sigma, \\ OA &= m \cdot \cos \sigma = OY_1 \cdot \sin \sigma, \\ Y_1A &= OA \cdot \cotg \sigma, \\ AO_3^a &= OA \cdot \sin \varrho, \\ OO_3^a &= OA \cdot \cos \varrho, \\ Z_3O_3^a &= OO_3^a \cdot \cotg \varrho, \end{aligned}$$

které využijeme k výpočtu axonometrických jednotek. Nejsnadněji získáme jednotku j_z . Ze třetího průmětu totiž vyplývá

$$j_z = \cos \varrho. \quad (1)$$

Jednotku j_x určíme takto: Z úměry

$$j_x : XO^a = 1 : OX_1 = 1 : m$$

a z Pythagorovy věty (obr. 2)

$$(XO^a)^2 = (XB)^2 + (BO^a)^2$$

plyne pro jednotku j_x :

$$\begin{aligned} j_x &= \sqrt{(m^2 \cdot \sin^2 \sigma + m^2 \cdot \cos^2 \sigma \cdot \sin^2 \varrho)} \quad m = \\ &= \sqrt{(1 - \cos^2 \sigma \cdot \cos^2 \varrho)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Podobně vyjde z úměry $j_y \quad YO^a = 1 : OY_1$

a z Pythagorovy věty (obr. 2) $(YO^a)^2 = (YB)^2 + (BO^a)^2$

pro jednotku j_y vztah

$$\begin{aligned} j_y &= \sqrt{(OA^2 \cotg^2 \sigma + OA^2 \cdot \sin^2 \varrho) \cdot \sin \sigma : OA} = \\ &= \sqrt{(1 - \sin^2 \sigma \cdot \cos^2 \varrho)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Tím jsou vypočteny axonometrické jednotky v závislosti na úhlech σ a ϱ , určujících směr s promítání.

Z teorie kolmé axonometrie je známo, že součet čtverců axonometrických jednotek je roven dvěma, tj. $j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 = 2$.

Ověříme správnost tohoto vztahu z rovnic (1), (2) a (3):

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 \sigma \cdot \cos^2 \varrho + \cos^2 \varrho + 1 - \sin^2 \sigma \cdot \cos^2 \varrho &= \\ = 2 + \cos^2 \varrho - (\sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma) \cdot \cos^2 \varrho &= 2. \end{aligned}$$

Nakonec ještě určíme úhly $\xi = \sphericalangle x^a z^a$ a $\eta = \sphericalangle y^a z^a$, potřebné pro konstrukci osového kříže axonometrie. Z obr. 2 plyne:

$$\tg \xi = XB : BO^a = m \cdot \sin \sigma : (m \cdot \cos \sigma \cdot \sin \varrho) = \tg \sigma : \sin \varrho, \quad (4)$$

$$\tg \eta = YB : BO^a = m \cdot \cos \sigma \cdot \cotg \sigma : (m \cdot \cos \sigma \cdot \sin \varrho) = \cotg \sigma \cdot \sin \varrho. \quad (5)$$

Příklady:

1. Zvolme $\sigma = 60^\circ$, $\varrho = 45^\circ$, obr. 1. Pak je $\cos \sigma = 1 : 2$, $\sin \sigma = \sqrt{3} : 2$, $\operatorname{tg} \sigma = \sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} \sigma = \sqrt{3} : 3$, $\sin \varrho = \sqrt{2} : 2$, $\cos \varrho = \sqrt{2} : 2$. Z rovnic (1) až (5) určíme:

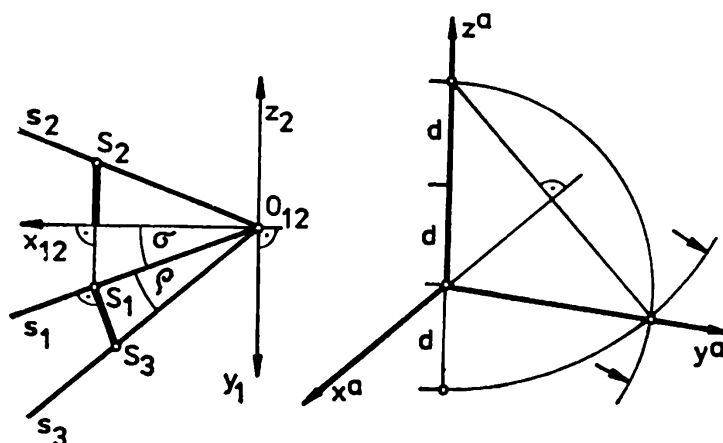
$$j_x = \sqrt{[1 - (1 : 4) \cdot (2 : 4)]} = \sqrt{7 : 8} = 0,9354 \dots,$$

$$j_y = \sqrt{[1 - (3 : 4) \cdot (2 : 4)]} = \sqrt{5 : 8} = 0,7906 \dots,$$

$$j_z = \sqrt{2} : 2 = 0,707$$

$$\operatorname{tg} \xi = \sqrt{3} \cdot 2 : \sqrt{2} = \sqrt{6} = 2,449 \dots, \xi \doteq 68^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \eta = \sqrt{3} : 3 \cdot (2 : \sqrt{2}) = \sqrt{6} : 3 = 0,8165 \dots, \eta \doteq 39^\circ$$



Obr. 3

2. V normě pro zobrazení v technickém kreslení ČSN 01 3123 se doporučuje používat tzv. *technickou dimetrii*. Její osový kříž je sestrojen na obr. 3 vpravo. Lze dokázat, že axonometrické jednotky jsou určeny hodnotami $j_x^2 = 2 : 9$, $j_y^2 = j_z^2 = 8 : 9$. Jakým směrem je tato axonometrie určena?

Nejprve zjistíme úhel ϱ ze vztahu (1)

$$\cos \varrho = j_z = 2 \cdot \sqrt{2} : 3 = 0,9428 \dots, \varrho \doteq 19^\circ$$

K výpočtu úhlu σ použijeme rovnici (2):

$$\begin{aligned} j_x^2 = 2 : 9 &= 1 - \cos^2 \sigma \cdot \cos^2 \varrho = 1 - \cos^2 (\sigma) \cdot 8 : 9, \text{ tj. } \cos^2 \sigma = \\ &= 7 : 9 \cdot (9 : 8) = 7 : 8. \end{aligned}$$

Z toho plyne $\cos \sigma = 0,9354 \dots$, $\sigma \doteq 21^\circ$

Z průmětů s_1 a s_3 sestrojených na základě úhlů σ a ϱ určíme ještě nárys s_2 , obr. 3 vlevo. Zvolíme bod $S_3 \in s_3$ a získáme postupně: $S_1 \in s_1$, $S_3 S_1 \perp s_1$, $S_1 S_2 \perp x_{12}$, $S_3 \dashv S_1 = S_2 \dashv X_{12}$, $O_2 S_2 = s_2$.

Hrozba následkov jadrovej vojny II

RNDr. OLGA JANISKOVÁ, MFF UK Bratislava

V prvej časti (Rozhledy 63,1, 1984|85) sme hovorili o tom, čo postihne bezprostredne po jadrovom výbuchu. Aké následky má takýto výbuch pre atmosféru, o tom sa dočítame v článku RNDr. Olgy Janiskovej z Katedry astronómie, geofyziky a meteorológie Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave:

Klimatické a atmosferické pomery po jadrovej vojne

Výbuchy jadrových zbraní, najmä tie, ktoré sa uskutečnia nízko nad zemským povrchom, odparia z neho pôdu a iné látky a za čelom nárazovej vlny vzniklý podtlak nasáva tieto plyny do epicentra výbuchu. Takto vzniká na povrchu zeme kráter. Nad vodnou hladinou je účinok podobný, len do epicentra sa nasávajú vodné pary. V určitom okamihu je už v epicentre toľko materiálu, že jeho pary začnú kondenzovať. Vznikajú rádioaktívne aerosóly. Okolitý zvířený prach, tiež väčšinou rádioaktívny, sa prúdením atmosféry roznáša s aerosólmi na veľké vzdialenosti. O týchto procesoch sa bližšie zmieňuje kniha [1]. Pri predchádzajúcich procesoch vzniká aj NO_x , ktorý v troposfére podporuje vznik fotochemického smogu a v stratosfére zapríčiňuje rozpad ozónu. Tento by sa znovu nazbieral v dostatočnom množstve až asi po troch rokoch. Porušenie ozónovej vrstvy vyvolá zvýšenie hladiny ultrafialového žiarenia, prenikajúceho so slnečným žiarením na zemský povrch. Vysoké dávky tohoto žiarenia nepriaznivo vplývajú na živé organizmy.

Najväčšie následky na klímu by mali splodiny obrovských požiarov, vyvolaných jadrovými výbuchmi. V krátkom čase by sa dostalo do atmosféry toľko popola a dymu, že by sa slnečný svit tak znížil, že by bola vylúčená poľnohospodárska produkcia na veľkej časti severnej pologuli.

Súvislý oblak zaciľňajúci slnko by z 90 % tvorili častice s rozmerami menšími ako $1\text{ }\mu\text{m}$, ktoré by sa usadzovali priemerne 5 až 10 dní. Na dlhú dobu niekoľkých týždňov by sa fyzikálne vlastnosti troposféry na severnej pologuli zmenili, väčšina slnečnej energie by sa pohltila v atmosfére namiesto toho, aby dopadla na zemský povrch a tento ohriala. Ohrievanie vysokých vrstiev atmosféry by malo za následok spomalenie usadzovania prachu a popola. Rozdielny obraz by vznikol, ak by

jadrová vojna prebehla v zime. Spálené plochy by boli menšie. Nízka zimná poloha slnka by však zvýraznila zatmenie v dôsledku aerosolov, popola a dymu, zvířených v ovzduší.

Ohrievanie troposféry by malo za následok preniknutie prachového oblaku do stratosféry, čím by sa postupne rozniesol nad celým povrchom Zeme. Súčasne by sa mohla narušiť odrazivosť atmosféry a tým celá energetická bilancia v nej, čo by malo za následok nedozerne zmeny v prúde vzdušných mäs, ktoré je, jednoducho povedané, nositeľom počasia.

Či by jadrovými výbuchmi spôsobené zmeny v klimatickom systéme viedli k dlhotrvajúcim zmenám, ťažko povedať. Následky týchto výbuchov možno prirovnať následkom výbuchov sopiek. Napríklad výbuch sopky Krakatau v roku 1883 vniesol do atmosféry množstvo aerosolov a prachu, porovnateľné s množstvom, ktoré by do atmosféry vzniesla jadrová vojna. Po výbuchu tejto sopky sa zvýšila teplota na severnej pologuli o 1 až 2 °C, a to na dobu sedem rokov. Nedá sa tiež jednoznačne predvídať, nakoľko by sa zmenila radiačná bilancia Zeme následkom zmeny albeda, ani to, či by usadzovanie tmavých aerosolov na polárnom snehu a ľade mohlo viesť k tak silnému topeniu, že by moria zaplavili nízko položené brehy. Je známe, že keby sa roztopil všetok ľad za polárnymi kruhmi, vody oceánov by sa zdvihli o 150 až 200 metrov.

Na záver nášho hrôzostrašného rozprávania môžeme povedať len toľko, že kto by aj unikol bezprostredným ničivým účinkom jadrových výbuchov a chorobe z ožiarenia, ten by bol dlhú dobu ťažko skúšaný nanajvýš nepriaznivými poveternostnými podmienkami.

Literatúra:

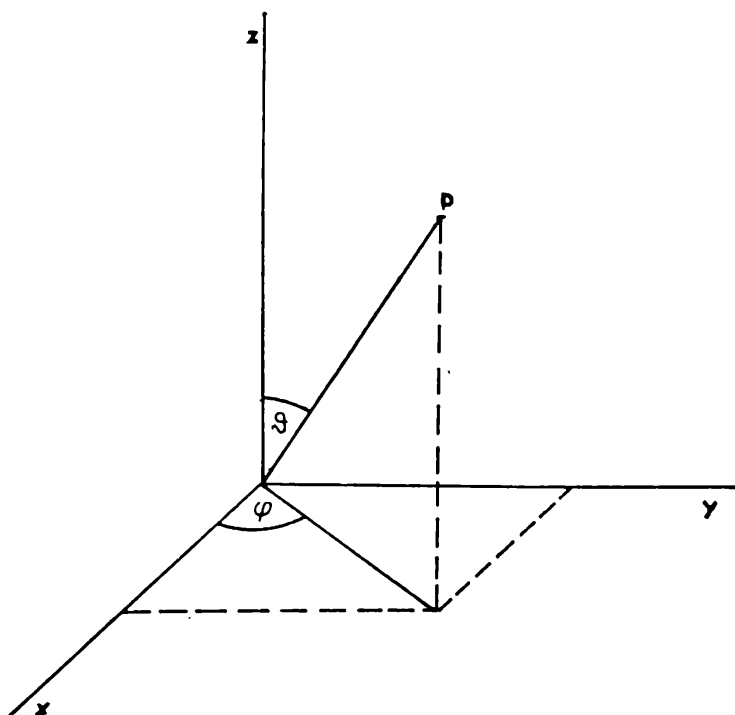
J. Chrapan : Radiačná chronológia, ALFA Bratislava 1974

Jednparametrový model atómu vodíka

RNDr. STANISLAV JUREČKA, Bratislava

Pri výklade kvantovomechanického modelu atómu vodíka sa stretávame s mnohými problémami. V tomto článku si ukážeme zjednodušenie Schrödingerovej rovnice, ktoré nám pomôže názornejšie pochopiť súvislosti medzi starou kvantovou teóriou *N. Bohra* a *Schrödingerovou* teóriou.

Bežný matematicky fundovaný výklad je nenázorný. Uplatnenie názorných prvkov pri kvantovomechanickom modeli atómu, tak ako sa s ním stretávame, možno zdokonaľovať po stránke fyzikálnej aj didaktickej [1]. Toto tvrdenie má svoje racionálne jadro v skutočnej závislosti



Obr. 1

kvantovomechanického modelu od všeobecnejších predpokladov z kvantovej mechaniky. Isté jednorozmerné zredukované trojrozmerné Schrödingerovej rovnice pre atóm vodíka môže byť dobrou pomôckou pre sprístupnenie trojrozmerného prípadu. Pre naše účely je výhodné začať s bezčasovou Schrödingerovou rovnicou pre časticu v potenciálovom poli. Táto rovnica má pri obvyklom značení tvar [2]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y, z) + V(x, y, z) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z) \quad (1)$$

Jednotlivé označenia majú nasledovný význam:

$\hbar = h/2\pi$, h je Planckova konštanta

m — hmotnosť elektrónu

$$\nabla^2 = \text{Laplaceov operátor} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\psi(x, y, z)$ — vlnová funkcia

E — celková energia

V je potenciálna energia elektrónu v poli protónu [2]:

$$V(r) = e^2/4\pi\epsilon_0 r$$

Jednorozmerné zredukované Schrödingerovej rovnice závisí od súradnicovej sústavy, v ktorej je vyjadrená. Pri použití kartézskych súradníc máme pre jednorozmerné zredukované rovnice (1) len jednu možnosť,

a to považovať jednu zo súradníc x, y, z za premennú a zvyšné dve za konštanty. Označme zvolenú premennú súradnicu x . Výsledná zredukovaná rovnica (1) prejde potom do tvaru:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x} \psi(x) = E\psi(x) \quad (2)$$

Jej matematické a fyzikálne vlastnosti sú príliš špeciálne na to, aby názorne ilustrovala rovnicu (1). Preskúmajme, aké možnosti pre zjednodušenie Schrödingerovej rovnice máme, ak použijeme sústavu sférických súradníc (obr. 1.). V tomto prípade máme dve možnosti pre jednorozmerné zredukovanie rovnice (1). Prvá možnosť je považovať uhly ϑ a φ za konštantné a r za premennú súradnicu. Takto by sme mohli študovať radiálny pohyb elektrónu. Druhá možnosť je zvoliť r a jeden z uhlov za konštanty a druhý uhol nechať premenný. Ak za premenný uhol zvolíme φ a uhol ϑ položíme rovný 90° , bude rovina pohybu elektrónu v atóme totožná s rovinou xy . Máme tak zreteľnú analógiu Bohrovho modelu atómu. Rovnice (1) sa potom zredukuje na tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d^2\psi(\varphi)}{d\varphi^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi(\varphi) = E\psi(\varphi), \quad (3)$$

čo je výhodnejšie zapísať ako:

$$\frac{d^2\psi(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi(\varphi) = 0 \quad (4)$$

Pre energiu môžeme vypísať:

$$E + e^2/4\pi\epsilon_0 r = E - V = p^2/2m$$

Výraz $\frac{2mr^2}{\hbar^2} \frac{p^2}{2m}$ je konštantný. E, V, r sú v našom prípade konštanty.

Dostaneme tak diferenciálnu rovnicu 2. rádu, ktorú riešime obvyklým spôsobom, uvádzaným vo vysokoškolských učebniciach matematiky [3]. Vlnová funkcia, ktorá je všeobecným riešením rovnice (4), má potom tvar:

$$\psi(\varphi) = A \exp \left\{ \pm \frac{ipr}{\hbar} \varphi \right\}$$

Ak požadujeme, aby vlnová funkcia mala jednoznačné hodnoty, t.j. aby $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$, dostaneme:

$$A \exp \left\{ \pm \frac{ipr}{\hbar} \varphi \right\} = A \exp \left\{ \pm \frac{ipr}{\hbar} (\varphi + 2\pi) \right\}$$

Pretože $\exp \{i(\varphi + n2\pi)\} = \exp \{i\varphi\}$, je zrejmé, že $pr = n\hbar$, kde

$$n = 1, 2, 3, \quad (5)$$

Prípád $n = 0$ môžeme vylúčiť, pretože vedie k nefyzikálnemu prípadu pohybu elektrónu. Vidíme, že vzťah (5) je Bohrova podmienka tak, ako sa s ňou stretávame aj v stredoškolskej fyzike. Bohrov postulát teraz chápeme ako dôsledok požiadavky, aby vlnová funkcia mala jednoznačné hodnoty. Jednorozmerné zjednodušenie Schrödingerovej rovnice, ktoré sme urobili, vedie k lepšiemu pochopeniu súvislostí medzi starou kvantovou teóriou Bohra a Schrödingerovou teóriou.

Pomocou rovnice (4) a podmienky (5) určíme polomer kvantovej dráhy elektrónu v Bohrovom modeli atómu vodíka. Najskôr ukážme, že pre náš systém platí: $E = V/2$. Energiu elektrónu vyjadríme ako súčet jeho kinetickej a potenciálnej energie: $E = E_k + V$. Deriváciu fyzikálnej veličiny A podľa času označme $\dot{A}$.

V izolovanej sústave platí: $\dot{E} = \dot{E}_k + \dot{V}$

$$\text{alebo } \frac{\delta E_k}{\delta p} \dot{p} + \frac{\delta V}{\delta r} \dot{r} = 0$$

$$\text{Pretože } p \frac{\delta E_k}{\delta p} = 2E_k \text{ a } r \frac{\delta V}{\delta r} = -V$$

môžeme napísať: $2E_k \dot{r} - V \dot{r} = 0$. Ak použijeme 2. impulzovú vetu, podľa ktorej $r \dot{p} = -\dot{r} p$, dostaneme:

$$(2E_k + V) r \dot{p} = 0,$$

$$\text{odkiaľ } E_k = -V/2. \text{ Teda } E = V/2 = -e^2/8\pi\epsilon_0 r \quad (6)$$

Rovnicu (4) môžeme potom zapísať v tvare

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{mre^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \psi(r) = 0$$

Požiadavka, aby vlnová funkcia $\psi(r)$ mala jednoznačné hodnoty, teraz znamená:

$$\frac{e^2 m r}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = n^2$$

$$\text{alebo } r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{e^2 m}, \text{ kde opäť } n = 1, 2, 3, \quad (7)$$

Tento vzťah vyjadruje pomer dráhy elektrónu v Bohrovom modeli atómu vodíka. Ak do rovnice (6) dosadíme polomer r vyjadrený rovnicou (7), tak pre energiu elektrónu na n -tej hladine dostaneme:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (8)$$

A to už je známy vzťah pre výpočet energetických hladín v Bohrovom modeli atómu vodíka.

Nakoniec si ešte vypočítajme napríklad Bohrov polomer dráhy elektrónu podľa vzťahu (7). Použijeme pritom hodnoty:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, m = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \\ \epsilon_0 = 1/36 \pi \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2, \text{ pre } n = 1 \text{ dostaneme:}$$

$$r = \frac{4 \cdot 10^{-9} (1,054 \cdot 10^{-34})^2 \text{ m}}{36(1,602 \cdot 10^{-19})^2 9,109 \cdot 10^{-31}} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Priemer atómu vodíka je teda rádovo 10^{-10} m .

Energia elektrónu na prvej hladine ($n = 1$) je podľa vzťahu (8)

$$E = \frac{-9,109 \cdot 10^{-31} (1,603 \cdot 10^{-19})^4 36^2 J}{32 (10^{-9})^2 (1,054 \cdot 10^{-34})^2} = -21,872 \cdot 10^{-19} J,$$

$$E = -13,6 \text{ eV}.$$

Literatúra :

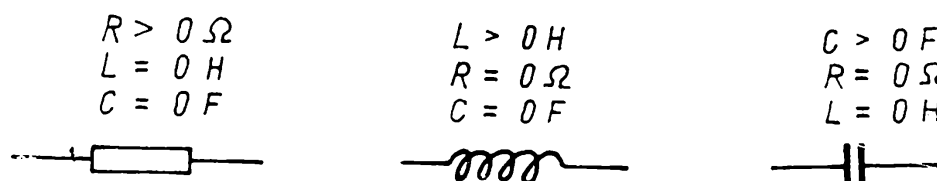
- [1] FREI, V.: Kvantová mechanický model atomu. MaF ve škole, 4, 1982, s. 269–276.
- [2] PIŠŮT, J.; GOMOLČÁK, L.: Úvod do kvantovej mechaniky. Bratislava, Alfa, 1975.
- [3] KLUVÁNEK, I.; MIŠÍK, L.; ŠVEC, M.: Matematika II. Alfa, Bratislava 1970.

Frekvenčné charakteristiky elektrických dvojpólov

Doc. dr. ing. DANIEL KLUVÁNEC, CSc., PF Nitra

Pre navrhovanie elektrických obvodov je potrebné poznať ich frekvenčné charakteristiky. Týmto pojmom označujeme funkcie vyjadrujúce závislosť elektrických veličín v obvode (impedancií, prúdov, napätí) od frekvencie ω zdroja napätia. Frekvenčné charakteristiky môžu byť vyjadrené ako funkcie, ako množiny dvojíc sebeodpovedajúcich hodnôt veličín, alebo grafom.

V článku sa budeme zaoberať pasívnymi dvojpólmi, ktoré obsahujú rezistory, cievky a kondenzátory. Predpokladáme, že pôjde o ideálne súčiastky, tj. indukčnosť a kapacita rezistorov, odpor a kapacita cievok ako aj odpor a indukčnosť kondenzátorov sú nulové (obr. 1).



Obr. 1

V určovaní charakteristík dvojpolov budeme používať symbolicko-komplexnú metódu. Impedancie, admitancie, prúdy a napätia vyjadríme ako komplexné časové vektory. V prípade, že symbolicko-komplexná metóda riešenia striedavých obvodov je vám neznáma, je potrebné, aby ste sa pred štúdiom tohto článku s ňou zoznámili. Odporúčame k tomu literatúru ([1], [2], [3]).

1. Základné pojmy

Združené charakteristiky sa nazývajú komplexné funkcie $I = f(\omega)$, $U = f(\omega)$, z ktorých každá v jednom vzťahu obsahuje dve reálne funkcie: závislosť amplitúd I , U prúdu a napätia od frekvencie ω , tj. $I = f(\omega)$ a závislosť začiatočných fáz φ_i , φ_u prúdov a napätí od frekvencie, t.j. $\varphi_i = f(\omega)$, $\varphi_u = f(\omega)$, kde indexom i sme označili fáz prúdu a indexom u fáz napätia.

Funkcie $I = f(\omega)$, $U = f(\omega)$ sa nazývajú amplitúdové charakteristiky prúdu, napätia, funkcie $\varphi_i = f(\omega)$, $\varphi_u = f(\omega)$ fázové charakteristiky prúdu a napätia.

Pre praktické úlohy a zjednodušenie úvah i znázorňovania charakteristík je vhodné vyjadriť relatívne frekvenčné charakteristiky. Podiel združenej charakteristiky určitej veličiny a vhodne zvolenej hodnoty tej istej veličiny (najčastejšie maximálnej amplitúdy) sa volá relatívna združená charakteristika.

Podiely amplitúdových charakteristík prúdu a napätia a vhodne zvolených hodnôt tých istých veličín (najčastejšie maximálnych amplitúd prúdu a napätia) sa nazývajú relatívne amplitúdové charakteristiky.

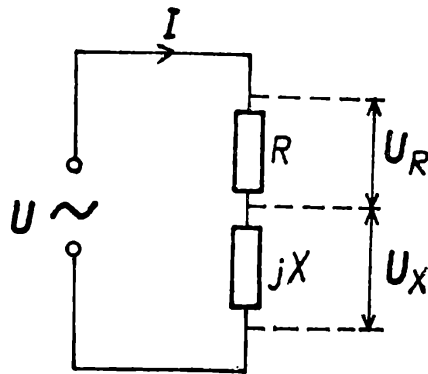
2. Sériové dvojpolý s impedanciou $R + jX$

Pôjde o jednoduché obvody, v ktorých rezistor s odporom R je spojený za sebou s cievkou s induktanciou X alebo s kondenzátorom s kapacitou X . Vo vzťahu $R + jX$ je komplexná jednotka $j = \sqrt{-1}$.

Vzťahy sa dajú zovšeobecniť na obvod s impedanciou $R + jX$.

Obvod s impedanciou $Z = R + jX$ pripojíme na zdroj so striedavým napätím U s nulovou začiatočnou fázou (obr. 2).

Všetky prúdy a napätia budeme fázove určovať vzhľadom na napätie U zdroja.



Obr. 2

Postupne určíme

a) združenú charakteristiku prúdu v obvode a z nej vyplývajúcu amplitúdovú charakteristiku prúdu a fázovú charakteristiku prúdu, relatívnu združenú charakteristiku prúdu a relatívnu amplitúdovú charakteristiku prúdu.

Pre prúd I v obvode podľa obr. 2 môžeme písať

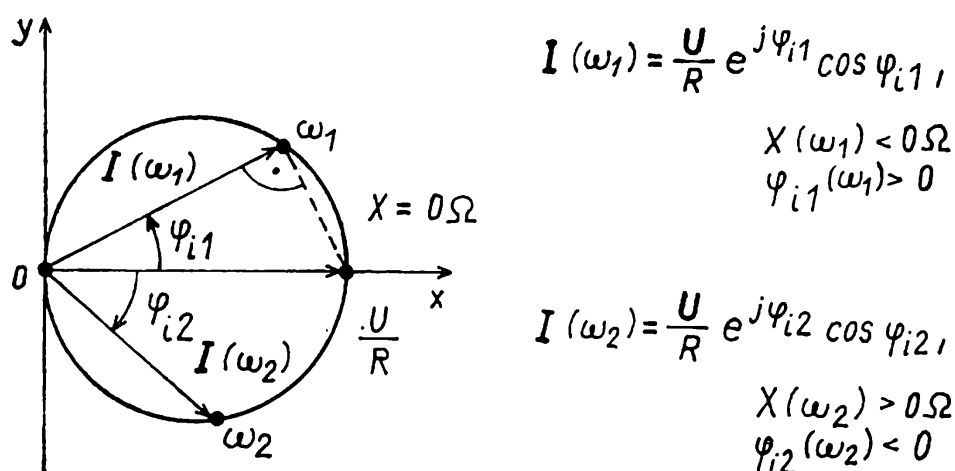
$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{Z} = \frac{U e^{j\omega t}}{R + jX} = \frac{U e^{j\omega t}}{R \left(1 + j\frac{X}{R}\right)} = \frac{U e^{j\omega t}}{R \sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2} e^{j\varphi}} = \\ &= \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)} = \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}} e^{j(\omega t + \varphi_i)} \end{aligned}$$

Vzťah

$$I = f(\omega) = \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}} e^{j(\omega t + \varphi_i)}, \dots \quad (1)$$

kde U je amplitúda napätia zdroja. φ argument impedancie $\left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, \varphi \in \left< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right>\right)$, φ_i začiatková fáza prúdu I , je absolútna

združená charakteristika prúdu. Je potrebné si uvedomiť, že v konkrétnom obvode reaktancia X je funkciou frekvencie ω , $X = f(\omega) = X(\omega)$. Vo funkcii (1) reaktancia X , fáza $\omega t + \varphi_i$ a začiatková fáza φ_i sú funkciou frekvencie ω .



Obr. 3

Graf funkcie (1) v komplexnej rovine je znázornený na obr. 3 (os x je os reálnych čísel, os y je os imaginárnych čísel). Pritom je potrebné uvážiť, že funkciu (1) možno napísať v tvare

$$I = \frac{U}{R} e^{j\varphi_i} \cos \varphi_i.$$

Amplitúdová charakteristika prúdu, ako to vyplýva zo vzťahu (1), je

$$I = \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}} = \frac{U}{R} \cos \varphi_i ; \quad \dots (2)$$

fázová charakteristika prúdu

$$\operatorname{tg} \varphi_i = -\frac{X}{R}, \quad \dots (3)$$

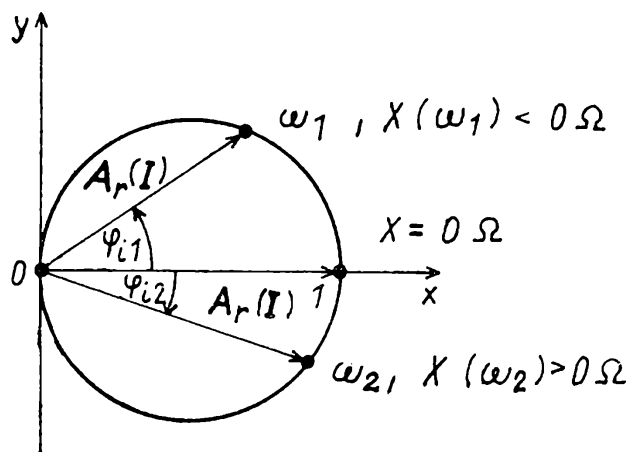
φ_i je začiatková fáza prúdu, $\varphi_i \in \left< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right>$

Relatívna združená charakteristika prúdu je

$$A_r(I) = \frac{I}{I_{\max}} = \frac{\frac{U}{R + jX}}{\frac{U}{R}} = \frac{1}{1 + j\frac{X}{R}} = \frac{1}{1 - j\operatorname{tg}\varphi_i} =$$

$$= e^{j\varphi_i} \cos \varphi_i, \quad \dots (4)$$

lebo $I_{\max} = \frac{U}{R}$ ($X = 0$). Na obr. 4 je graf funkcie $A_r(I) = f(\omega)$ v komplexnej rovine.



Obr. 4

Relatívna amplitúdová charakteristika je určená ako absolútna hodnota komplexnej funkcie (4)

$$A_r(I) = |A_r(I)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_i}} = \cos \varphi_i \quad \dots \dots (5)$$

Ak $X = 0 \Omega$, potom $\varphi_i = 0$ a $A_r(I) = A_r(I) = 1$. Ak $X < 0 \Omega$, $\varphi_i \in$

$< 0, \frac{\pi}{2} >$, ak $X > 0 \Omega$, $\varphi_i \in < 0, -\frac{\pi}{2} >$ a $|\cos \varphi_i| \leq 1$.

Úlohy 1:

1. Dokáž platnosť vzťahu $|e^{jz}| = 1$, ak z je reálne číslo.
2. Dokáž, že funkcie (2), (3) vyplývajú z funkcie (1).
3. Vysvetli postup, ako možno funkciu (1) vyjadriť v tvare

$$I = \frac{U}{R} e^{j\varphi_i} \cos \varphi_i$$

4. Prezri si obr. 3. Uváž, ako sa mení vektor $I(\omega)$, ak a) $X \in < 0 \Omega, \infty \Omega)$, b) $X \in < 0 \Omega, -\infty \Omega)$. Ako sa v oboch prípadoch menia amplitúda I prúdu a fáza prúdu φ_i , ako funkcie reaktancie X ?
5. Prezri si obr. 4. Uváž, ako sa mení vektor $A_r(I)$, ak a) $X \in < 0 \Omega, \infty \Omega)$, b) $X \in < 0 \Omega, -\infty \Omega)$. Ako sa v oboch prípadoch menia hodnoty $A_r(I)$ a φ_i ako funkcie reaktancie X ?

b) Podobným postupom ako v časti (a) určíme frekvenčné charakteristiky napätia na rezistore:

$$U_R = RI = R \frac{U}{R \left(1 + j \frac{X}{R}\right)} = \frac{U}{1 + j \operatorname{tg} \varphi} =$$

$$= \frac{U}{\sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}} e^{j(\omega t + \varphi_R)},$$

$$U_R = U e^{j\varphi_R} \cos \varphi_R, \quad \dots (6)$$

kde φ_R je začiatková fáza napätia na rezistore.

Amplitúdová charakteristika je

$$U_R = \frac{U}{\sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2}} = U \cos \varphi_R. \quad (7)$$

Fázová charakteristika

$$\operatorname{tg} \varphi_R = -\frac{X}{R}, \varphi_R \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (8)$$

Relatívna združená charakteristika

$$A_r(U_R) = \frac{U_R}{U_{R\max}} = \frac{1}{1 + j \operatorname{tg} \varphi} = e^{j\varphi_R} \cos \varphi_R. \quad (9)$$

Relatívna amplitúdová charakteristika

$$A_r(U_R) = \frac{U_R}{U_{R\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_R}} = \cos \varphi_R. \quad (10)$$

Úlohy 2:

1. Dokáž, že platí $U_R = U e^{j\varphi_R} \cos \varphi_R$.
2. V komplexnej rovine nakresli graf funkcie (6).
3. Uváž, ako sa mení U_R , ak a) $X \in < 0 \Omega, \infty \Omega)$, b) $X \in < 0 \Omega, -\infty \Omega)$. Pritom vychádzaj z funkcie (6) a jej grafu.
4. Uváž, ako sa mení φ_R , ak a) $X \in < 0 \Omega, \infty \Omega)$, b) $X \in < 0 \Omega, -\infty \Omega)$. Pritom vychádzaj z funkcie (6) a jej grafu.
5. V komplexnej rovine nakresli graf funkcie (9).
6. Uváž, ako sa mení vektor $A_r(U_R)$, ak a) $X \in < 0 \Omega, \infty \Omega)$, b) $X \in < 0 \Omega, -\infty \Omega >$. Pritom vychádzaj z funkcie (9) a jej grafu.
- c) Ďalej určíme frekvenčné charakteristiky pre napätie na reaktívnej súčiastke obvodu s reaktanciou X .

Absolútna združená charakteristika

$$U_x = j X I = j X \frac{U}{R + j X} = \frac{U}{1 - j \frac{R}{X}} = \frac{U}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{X}\right)^2}} e^{j(\omega t + \varphi_x)},$$

$$U_x = U e^{j\varphi_x} \cos \varphi_x. \quad (11)$$

Amplitúdová charakteristika

$$U_x = \frac{U}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{X}\right)^2}} U \cos \varphi_x . \quad (12)$$

Fázová charakteristika

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{R}{X} , \varphi_x \in \left< -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right> . \quad (13)$$

Z (8) a (13) vyplýva

$$\operatorname{tg} \varphi_R = - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_x} = \operatorname{cotg} \varphi_x$$

$$\text{a z toho } |\varphi_R| + |\varphi_x| = \frac{\pi}{2} . \quad (14)$$

Relatívna združená charakteristika

$$A_r(U_x) = \frac{U_x}{U_{x\max}} = \frac{1}{1 - j \operatorname{cotg} \varphi} = e^{j\varphi_x} \cos \varphi_x . \quad (15)$$

Relatívna emplitúdová charakteristika

$$A_r(U_x) = \frac{U_x}{U_{x\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_x}} = \cos \varphi_x = \sin \varphi . \quad (16)$$

Úlohy 3:

1. Zo vzťahu $\operatorname{tg} \varphi_R = - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_x}$ dokáž platnosť vzťahu (14).

2. Znázorni v komplexnej rovine grafy funkcií (11) a (15).

3. Uváž, ako sa menia veličiny

$U_x, A_r(U_x), \varphi_x, A_r(U_x)$, ak a) $X \in \langle 0, \infty \rangle$, b) $X \in \langle 0, -\infty \rangle$.

Pri určovaní hodnôt relatívnych amplitúdových charakteristík sa používa logaritmická funkcia

$$A = 20 \log A_r \quad (17)$$

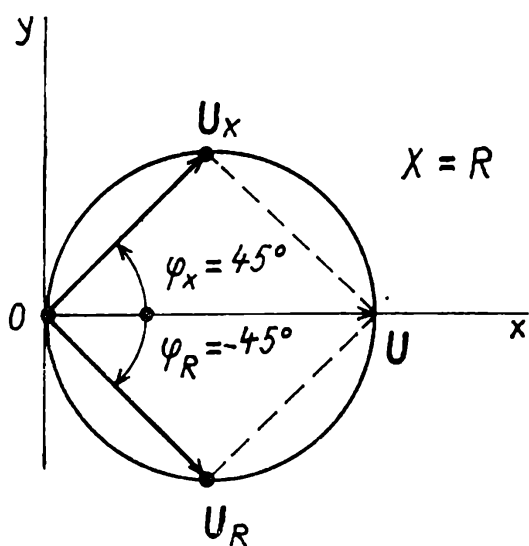
s jednotkou decibel, značka dB.

Vzhľadom na to, že $A_r \in \langle 0, 1 \rangle$, je $A < 0$ dB.

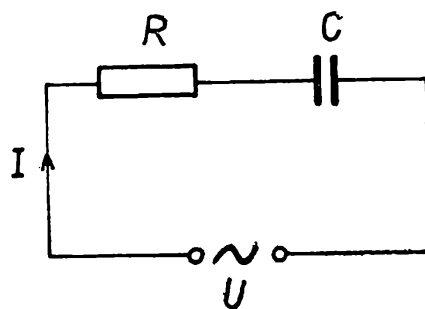
Vzťah (17) vyjadruje pokles amplitúdy elektrickej veličiny v decibeloch. Amplitúda napätia (resp. prúdu) sa zníži o 1 dB, ak sa zmenší na hodnotu asi 0,891 maximálnej hodnoty, lebo

$$-1 \text{ dB} = 20 \cdot \log 0,891.$$

Medzná frekvencia ω_m je hodnota frekvencie, pri ktorej poklesne elektrická veličina vzhľadom na maximálnu hodnotu o 3 dB. Ako vyplýva zo vzťahov (5), (10) a (16), nastane to pri frekvencii, pri ktorej platí $R = |X|$. Vtedy



Obr. 5



Obr. 6

$$A_r(I) = A_R(U_R) = A_x(U_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 ,$$

$$A = 20 \log 0,707 \doteq -3 \text{ dB} .$$

Pre tento prípad sú znázornené napätia U_R a U_x na obr. 5.

Úlohy 4:

Prezri si graf na obr. 5. Uváž, ako sa bude meniť U_R , U_x v týchto prípadoch:

a) $X \in < 0 \Omega, \infty \Omega)$, b) $X \in < 0 \Omega, -\infty \Omega)$

Príklad 1:

Napiš združené frekvenčné charakteristiky prúdu, napätia na rezistore a napätia na kondenzátore pre obvod, v ktorom rezistor s odporom $R = 20 \text{ k}\Omega$ spojený za sebou s kondenzátorom s kapacitou $C = 1,2 \text{ nF}$ sú pripojené na zdroj s harmonickým napätím $U = 116 \text{ V}$. Znázorni uvedené charakteristiky v komplexnej rovine.

Poznámka:

Hodnoty prúdov a napätí vo všetkých našich úvahách budú amplitúdy týchto veličín. Efektívne hodnoty určíme tak, že amplitúdy veličín vy-

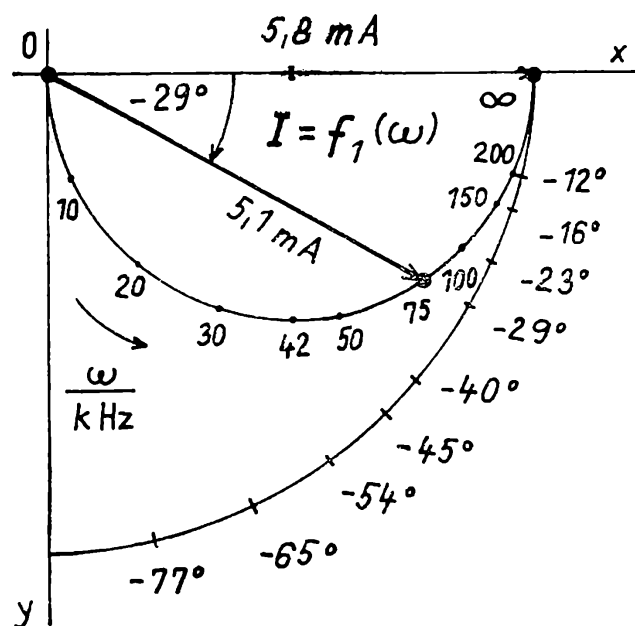
násobíme číslom $\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0,707$.

Riešenie, obr. 6

Podľa výsledku (1) máme

$$I = \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}} e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \frac{U}{R} e^{j\varphi_i} \cos \varphi_i .$$

Funkciu i graf zostrojíme pre $t = 0 \text{ s}$.



Obr. 7

Po dosadení za U , R dostaneme

$$I = 5,8 \text{ mA } e^{j\varphi_i} \cos \varphi_i, \quad (18)$$

$$\text{kde } \operatorname{tg} \varphi_i = -\frac{1}{\omega CR} = -\frac{4,2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}}{\omega}, \quad \varphi_i \in \left\langle 0, -\frac{\pi}{2} \right\rangle$$

Aby sme mohli na oblúk stupnice znázorniť stupnicu frekvencie, určíme najskôr ω_m a potom niekoľko sebeodpovedajúcich hodnôt ω_i , φ_i pre $\omega < \omega_m$ a $\omega > \omega_m$.

$$\operatorname{tg} \varphi_i = -1 = -\frac{4,2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}}{\omega_m}, \quad \omega_m = 42 \text{ kHz}.$$

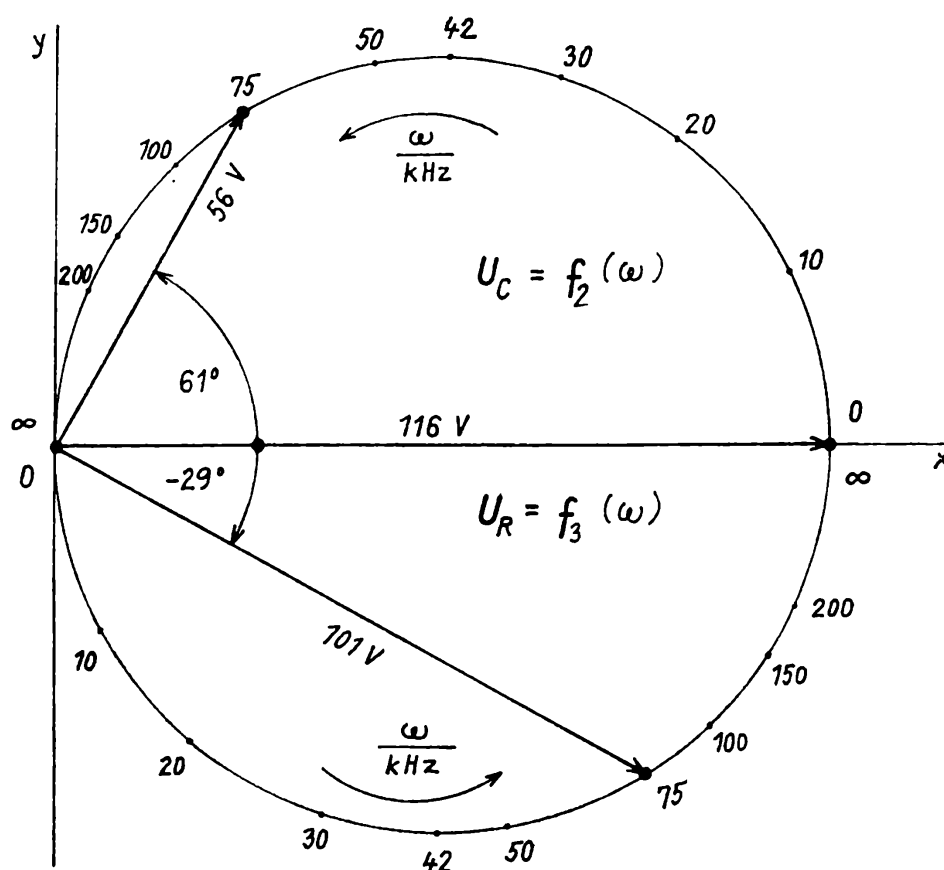
Tab. 1

$\frac{\omega}{\text{kHz}}$	200	150	100	50	30	20	10
$\frac{\varphi_i}{\text{stupeň } ^\circ}$	-12	-16	-23	-40	-54	-64	-77

Graf združenej charakteristiky prúdu (obr. 7) zostrojíme pomocou funkcie (18) a tabuľky. Graf je zostrojený v merítke $1 \text{ mA} \hat{=} 1 \text{ cm}$.

Zo vzťahov (6), (8), (11) a (13) možno pre napätia U_R , U_C písať ($t = 0 \text{ s}$)

$$U_R = 116 \text{ V } e^{j\varphi_R} \cos \varphi_R, \quad \operatorname{tg} \varphi_R = -\frac{4,2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}}{\omega}, \quad \varphi_R \in \left\langle 0, -\frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad (19)$$



Obr. 8

Tab. 2

$\frac{\omega}{\text{kHz}}$	10	20	30	50	100	150	200
$\frac{\varphi_R}{\text{stupeň } ^\circ}$	-77	-64	-54	-40	-23	-16	-12
$\frac{\varphi_C}{\text{stupeň } ^\circ}$	13	26	36	50	67	74	78

$$U_C = 116 \text{ V } e^{j\varphi_C} \cos \varphi_C, \text{ tg } \varphi_C = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ s}\omega, \varphi_C \in < 0, \frac{\pi}{2} > \quad (20)$$

Grafy funkcií U_R , U_C sú na obr. 8 ($10 \text{ V} \underline{\hat{=}} 1 \text{ cm}$).
 Pozn.: v grafe na obr. 7 sme vyznačili aj oblúk kružnice so stupnicou pre začiatočné fázy prúdu φ_i . Táto stupnica je len pomocná, aby sme v grafe mohli zostrojiť na oblúku s polovičným priemerom stupnicu frekvencie. Na obr. 8 sme stupnice začiatočných fáz φ_R , φ_C nekreslili. Pri zostrojaní grafov funkcií (18), (19), (20) musíme použiť uhlomer.

Úlohy 5:

1. Prezri si graf na obr. 7. Odpovedz na otázky:
 - Ako sa mení amplitúda I prúdu v obvode, ak frekvencia ω prúdu rastie od nuly k neobmedzenej hodnote?
 - Ako sa mení fáza φ_i prúdu v obvode, ak frekvencia ω prúdu rastie od nuly k neobmedzenej hodnote?
2. Urč prúd I v obvode v prípadoch
 - a) $\omega = 0$ Hz, b) $\omega = \infty$ Hz.
3. Pomocou pravítka a uhlomeru urč amplitúdu I prúdu a jeho začiatočnú fázu φ_i pre frekvencie 30 kHz, 50 kHz, 100 kHz.
4. Prezri si graf na obr. 8. Odpovedz na otázky
 - Ako sa mení amplitúda U_R napätia na rezistore, ak frekvencia ω rastie od nuly k neobmedzenej hodnote?
 - Ako sa mení amplitúda U_C napätia na kondenzátore, ak frekvencia ω rastie od nuly k neobmedzenej hodnote?
 - Ako sa pritom menia začiatočné fázy φ_R, φ_C ?
5. Z grafu na obr. 8 urč amplitúdy U_R, U_C pre frekvenciu $\omega = 20$ kHz.
(Dokončení v príštím čísle)

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Kdo byl von Littrow?

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

Nebudeme hovořit o „konkurentu“ *Emila Jana-Baptisty Litra*, s nímž jste se mohli seznámit v článku *Potíže s litrem*, který napsal ing. dr. Václav Šindelář, CSc., a byl otištěn v *Rozhledech* č. 3 roč. 62. Von Littrow totiž není fiktivní postava, která by byla vytvořena pro odůvodnění, že jednotka objemu litr byla pojmenována podle osoby a že její značka má být velké L.

Joseph Johann von Littrow skutečně žil a jeho osudy byly značně pestré. Posuďte sami.

J. J. Littrow se narodil 13. 3. 1781 v západních Čechách v *Horšovském Týně*, a to nikoli jako šlechtický synek, ale v podzámčí v domě u řeky Radbuzy v prosté rodině barvíře. Světlo světa spatřil v roce, v němž bylo v českých zemích zrušeno nevolnictví a vydán toleranční patent. Nikdo však netušil, že se blíží složité období napoleonských válek. Základní vzdělání získal v rodném městě, potom studoval v Plzni a na

univerzitách ve Vídni a v Praze. Během studia si privydělával vyučováním zámožnějších studentů. Vzdělání nabyl všestranné, neboť nejprve studoval práva a teologii a potom matematiku a astronomii.

V roce 1807 získal místo profesora astronomie na univerzitě v Krakově. Tehdy tzv. Malopolsko náleželo k rakouské říši. Když v roce 1809 připojil Napoleon Bonaparte po vítězné válce s Rakouskem Malopolsko k Varšavskému knížectví, kde vládl pod Napoleonovým dohledem saský král, rozhodl se J. J. Littrow odejít do Ruska. Jeho žádost byla příznivě vyřízena a v roce 1810 byl ustanoven profesorem astronomie na univerzitě v Kazani, která vznikla v roce 1805. Poznamenejme, že na této univerzitě studoval *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij* (1792—1856) a že od roku 1811 na ní vyučoval matematice. V Kazani J. J. Littrow založil hvězdárnu a zahájil na ní systematická astronomická pozorování. V roce 1816 odešel do Uher do Budína, kde se stal spoluředitel hvězdárny. Po třech letech přešel na vídeňskou hvězdárnu; jejím ředitelem byl až do své smrti dne 30. 11. 1840. Tři roky předtím v roce 1837 byl povýšen do šlechtického stavu.

J. J. von Littrow byl astronomem nikoli pouze rakouského, ale i evropského významu. Svědčí o tom jeho zvolení členem Londýnské královské společnosti a členem-korespondentem Petrohradské akademie věd. Byl velmi literárně činný, psal nejen vědecká pojednání, ale i populární spisy. Jeho nejvýznamnější knižní dílo je třísvazková *Theoretische und practische Astronomie* (Viedeň 1821 až 1827).

Objevy, které se staly základem fyziky pevných látek

Doc. RNDr. IVO KRAUS, CSc., FJFI ČVUT v Praze

Fyzika pevných látek představuje nejdůležitější z vědeckých základů současného technického rozvoje. Tematika, kterou se tento obor zabývá, zahrnuje nejen oblast základního významu, např. kvantové jevy (laserový efekt, supravodivost), ale také praktické úkoly výroby nových a zdokonalení známých materiálů pro elektroniku nebo řešení problémů pevnosti, plasticity či korozní odolnosti technických kovů. Doslova každý den přináší nové úspěchy této vědy. A nejde při tom pouze o využití závěrů již vypracovaných teorií, ale dovídáme se o objevech i vzniku teorií principiálně nových.

Článek je obsahem jedné z přednášek o historii i současnosti fyziky, které na požádání středních škol zajišťují učitelé FJFI.

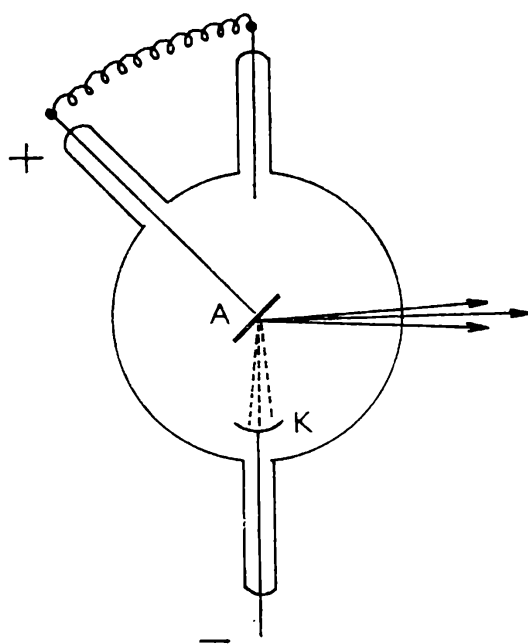
Nejpočetnější skupinu objektů studovaných metodami fyziky pevných látek tvoří krystaly — materiály s pravidelným uspořádáním atomů a iontů. U nich je význam zaměřen především na ty vlastnosti, které nazýváme strukturně senzitivní, tj. měnící se výrazně i při nepatrné změně mikroskopické struktury, jako např. elektrická vodivost. K cílevědomému ovlivňování krystalických pevných látek musíme získat exaktní informace o jejich vnitřní stavbě. Vznik i rozvoj největšího vědního oboru současnosti — fyziky pevných látek — byl proto podmíněn objevy, které umožnily stanovit krystalovou strukturu. Bez nich by mnoho technických zázraků jen sotva mohlo mít v „rodném listě“ letopočet našeho století.

Málokdo spojuje volt, ampér, newton nebo pascal se živými bytostmi. Definice těchto pojmů jsou odlidštěné, nic neříkají o osudech a genialitě těch, kteří jim dali své jméno.

Mezi osobnosti, jejichž myšlenky a dílo významně ovlivnily náš život, patří i *Wilhelm Conrad Röntgen*, objevitel neviditelných paprsků X. I když o nich ani dnes bezpochyby nevíme všechno, ztratily už dávno svou tajuplnost.

Otevřeme-li *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* z roku 1913, můžeme na straně 571 číst: „Když roku 1895 prolétly učeným světem první zprávy W. C. Röntgena, tehdy profesora na univerzitě ve Würzburgu, o objevu X-paprsků, vzbudily ve vědeckých kruzích neobyčejný rozruch a přirozenou zvědavost a touhu, aby každý sám mohl pozorovati zvláštní ty nové paprsky a přesvědčiti se o neobyčejných jejich vlastnostech. I není tedy divu, že přčetní badatelé všech národů vzdělaných jimi se zabývali, jejich vlastnosti zkoumali a jevy jimi způsobené snažili se vyložit.“

Jen málo objevů v přírodních vědách poskytlo příležitost pro experimentální i teoretickou práci tolika fyzikům jako právě rentgenové záření. Těm, kteří se o odhalení jeho tajemství zvláště zasloužili a jejichž činnost v oblasti výzkumu a praktického využití rentgenového záření přinesla lidstvu největší užitek, byla udělena Nobelova cena. První převzal roku 1901 sám Röntgen (1845 až 1923). Výsledky úsilí soustředěného počátkem 20. století ve většině světových fyzikálních laboratoří na hledání podstaty rentgenových paprsků byly odměněny Nobelovými cenami v letech 1914 a 1915. Projevu nejvyššího uznání vědecké práce se dostalo *Maxu von Laue*mu (1879 až 1960) za objev difrakce rentgenových paprsků při průchodu krystaly a otcí a synu Braggovým (*Sir William Henry Bragg*, 1862 až 1942, *Sir William Lawrence Bragg*, 1890 až 1971) za výzkum struktury krystalů pomocí rentgenových paprsků. Existence rentgenového záření umožnila i vědecké práce dalších laureátů Nobelovy ceny. Byli to např. *Ch. G. Barkla* (1917), *K. M. Siegbahn* (1924),



Obr. 1 Schéma původní Röntgenovy trubice

J. C. Kendrew a M. F. Perutz, F. H. C. Crick a J. D. Watson (1962), D. Crowfoot—Hodgkinová (1964).

Každá vědecká práce je souhrnem skromných úspěchů a trpkých zklamání. Jen málo vyvoleným přeje „šťastná náhoda“ tak jako trojhvězdi jmen Röntgen—Laue—Bragg.

První z objevů, kterými začínají dějiny moderní fyziky, dal lidstvu *Wilhelm Conrad Röntgen*. Jeho životní cesta, po níž vstoupil do historie přírodních věd, nebyla nijak přímočará. Rodina z něho chtěla mít obchodníka se sukem, jako vynikající absolvent polytechniky mohl být úspěšným strojním inženýrem. Ani s diplomem doktora, který získal na filozofické fakultě v Curychu, se mu však nechtělo ustoupit od své touhy pracovat v experimentální fyzice. Díky své houževnatosti v ní dosáhl zakrátko pozoruhodných výsledků při výzkumu stlačitelnosti kapalin a studiu mechanických, elektrických a optických vlastností krystalů. Po svém příchodu do Würzburgu, kde mu bylo v roce 1888 nabídnuto místo univerzitního profesora, se začal zajímat o katodové paprsky.

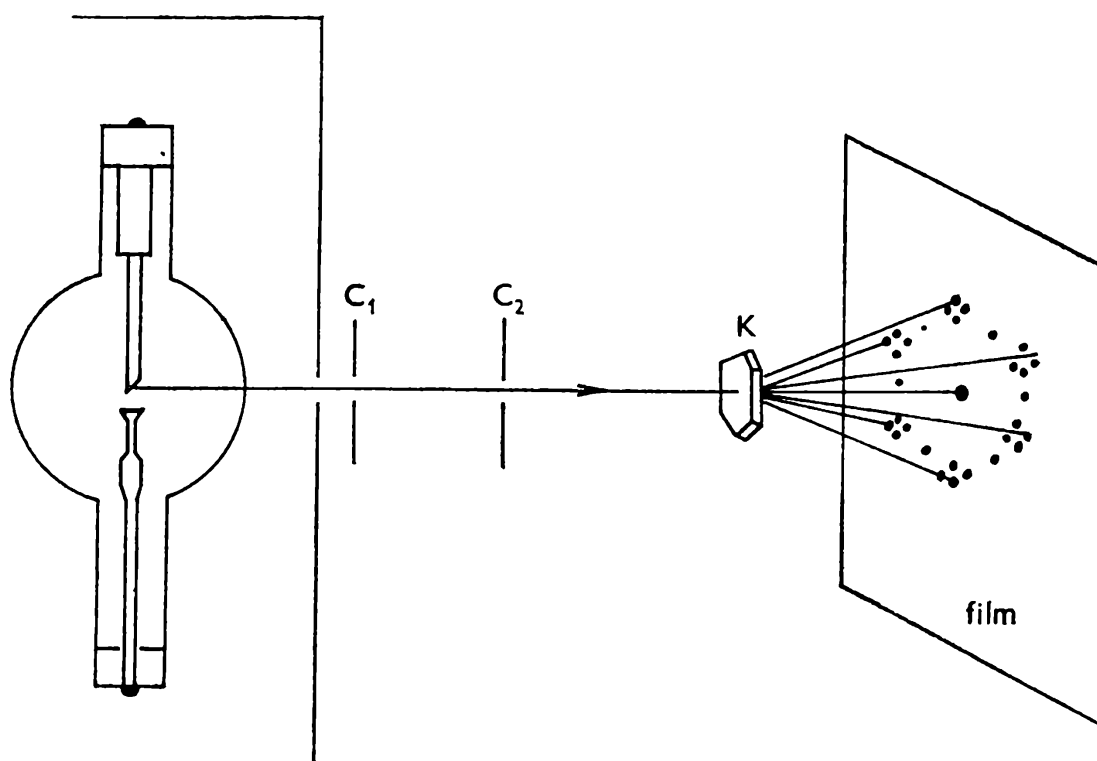
Jako řada jiných fyziků si i Röntgen brzy všiml, že fotografické desky umístěné v blízkosti katodové trubice a chráněné běžným způsobem před účinky světla, bývají často osvětlené. Přitom nemohlo jít o působení katodových paprsků, neboť používaná skleněná trubice paprsky nepropouštěla. Na rozdíl od svých předchůdců začal Röntgen tento zdánlivě vedlejší jev systematicky sledovat. Při pokusech, které prováděl v zatemněné laboratoři 8. listopadu 1895, zpozoroval, že po zapojení induktoru, z něhož přiváděl na výbojovou trubici napětí, několik poblíž

ležících krystalů platinokyanidu barya jasně fluoreskuje. Protože trubice byla ve světlotěsném obalu z tuhé černé lepenky, nemohlo být neviditelné záření „rozsvěcující“ krystaly zářením ultrafialovým. Když pak zhotovil stínítko s vrstvou platinokyanidu barya, zjistil, že překážky vkládané do dráhy paprsků vrhají na stínítko stín. Zdroj záření byl na stěně trubice v místě, kam na ni dopadal svazek elektronů (katodové záření).

Většina vědců by takový objev co nejrychleji opublikovala. Röntgen se však rozhodl nejprve zjistit základní fyzikální vlastnosti nových paprsků. Ukázalo se, že většina materiálů je pro ně průhledná, některé více, jiné méně. Kniha o 1000 stranách je téměř pohlcovala, sklo obsahující olovo zeslabovalo více než sklo obyčejné, platina více než stříbro nebo měď. Průhlednost klesala obecně s růstem hustoty tělesa a jeho tloušťkou. Využití této vlastnosti se nabízelo zvláště v lékařství. Není bez zajímavosti, že na prvním rentgenovém snímku lidského těla, zhotoveném již 22. prosince 1895, byla ruka Röntgenovy manželky.

Přestože byly základní vlastnosti rentgenového záření zjištěny do poloviny roku 1896, odpovědět jednoznačně na otázku, zda jsou paprsky povahy vlnové nebo korpuskulární, se podařilo až v březnu 1912. K těm vlastnostem, které podporovaly vlnovou teorii, patřil především způsob šíření paprsků ve vakuu (paprsky se šíří přímočaře rychlostí identickou s rychlostí viditelného světla a jejich intenzity ubývá se čtvercem vzdálenosti od bodového zdroje). Někteří fyzikové přisuzovali naopak záření povahu částic (elektricky neutrální dvojice). Tato představa se opírala o pokusy, z nichž vyplývalo, že zeлектроvaná tělesa jsou vybíjena účinkem iontů vznikajících ve vzduchu, kterým procházejí rentgenové paprsky. Pokud by záření bylo vlnového charakteru, musela by jeho energie být rozložena spojitě po vlnoploše. Protože molekula přijme jen tolik energie, kolik jí bude předáno částí dopadající vlnoplochy, mělo by účinkem slabého zdroje záření dojít k uvolnění elektronu (vzniku iontů) až po značně dlouhé době. Ve skutečnosti se však elektrony uvolňují okamžitě i při malé intenzitě záření. Tento „rozpor“ objasnila teprve kvantová mechanika, podle níž projevuje záření při ionizaci především své korpuskulární a nikoli vlnové vlastnosti. Jev, který by mohl jednoznačně rozhodnout, jaký charakter rentgenové záření má, je difrakce a s ní spojená interference.

I v tomto případě pomohla „náhoda“. V únoru 1912 dostal *P. P. Ewald*, doktorand vynikajícího fyzika mnichovské univerzity *A. Sommerfelda*, za úkol vypracovat teorii průchodu světelných vln prostorovou mřížkou vytvořenou z polarizovaných atomů (dipólů) navzájem vzdálených 10^{-8} cm. Ewald, který si s tímto problémem zpočátku nevěděl rady, se obrátil s prosbou o pomoc na teoretika *Maxe von Laueho*. A právě tehdy Laueho napadlo, že u rentgenového záření nebyly interferenční jevy dosud pozorovány zřejmě proto, jelikož libovolný umělý



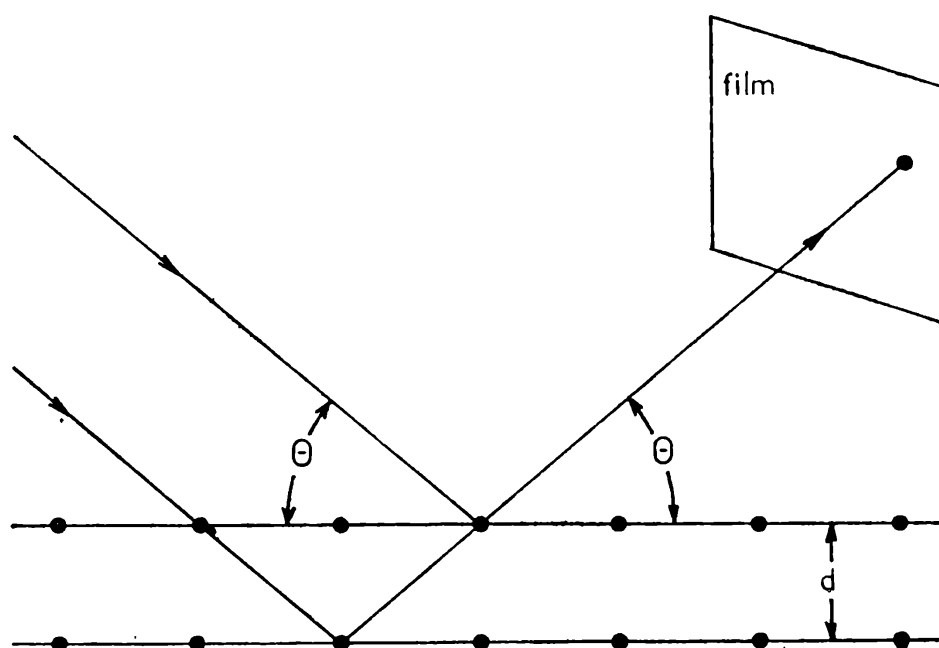
Obr. 2 Schématické uspořádání Laueova pokusu. Úzký svazek rentgenových paprsků vymezený soustavou clonek C_1 , C_2 prochází krystalem K a na fotografickém filmu dává vznik soustavě diskrétních skvrn, stopám difraktovaných svazků

difrakční systém je příliš hrubý. Mají-li však krystaly takovou stavbu, jakou v té době předpokládali mineralogové, pak by mohly být ideální difrakční mřížkou pro rentgenové paprsky.

Protože Laue sám nebyl experimentátor, požádal o provedení pokusu Sommerfelda. U něho však pochopení pro svou myšlenku nenalezl. Sommerfeld se domníval, že tepelným pohybem atomů se příliš naruší jejich pravidelné uspořádání, než aby mohl vzniknout interferenční efekt. Svému asistentovi Friedrichovi dokonce zakázal ztrácet s takovými nesmyslnými pokusy čas. Naštěstí měl *Friedrich* poněkud jiný názor než Sommerfeld a se svým přítelem *Knippingem* tajně experiment provedli. Zvolili k tomu krystal síranu měďnatého, který byl právě v laboratoři k dispozici.

Snímek získaný průchodem úzkého svazku rovnoběžných rentgenových paprsků destičkou tohoto krystalu ukazoval kromě stopy od přímo prošlého svazku soustavu pravidelně uspořádaných skvrn. Tak byla objevena difrakce rentgenových paprsků, prokázána jejich vlnová povaha a zároveň potvrzena hypotéza o mřížkové struktuře krystalů.

Interferenční jev, který obdrželi Friedrich s Knippingem, Laue teoreticky zpracoval. Ukázal, že jednotlivá difrakční maxima odpovídají svým



Obr. 3 W. H. Bragg a W. L. Bragg interpretovali difrakční obrazy jako výsledek interference paprsků reflektovaných na atomových mřížkových rovinách krystalu

rozložením vnitřní symetrie použitého krystalu. Přesto však Laueova teorie, vycházející z představy difrakce záření prostorovou mřížkou, zůstávala nepohodlná, a to jak pro určení vlnové délky ze známé struktury krystalu, tak naopak ke studiu struktury pomocí záření známé délky.

Když na podzim roku 1912 *W. H. Bragg* se svým synem *Williamem Lawrencem* analyzovali tvar difrakčních skvrn laueogramů detekovaných na filmech umístěných v různých polohách vzhledem ke krystalu, došli k závěru, že při experimentech nastává jev, který je podobný odrazu. Obyčejná reflexe to však být nemohla, tomu odporovaly dřívější zkušenosti získané Röntgenem a dalšími fyziky. Bragga napadlo, zda se krystal nemůže chovat tak, jako by obsahoval soubor rovin umístěných jedna za druhou v určitých vzdálenostech d . I když bude každá rovina reflektovat jen malé množství záření, může mít výsledný efekt od velkého počtu rovin intenzitu dostatečně velkou pro pozorování. To však bude platit jen v případě, jestliže se vlny vycházející od všech rovin navzájem zesílí. Bragg zjistil, že nutná podmínka pro zesílení spočívá v tom, aby se vlny odrážely pod určitými úhly. Analytický tvar této podmínky, tzv. Braggova rovnice ($\lambda = 2d \sin \Theta$), vyjadřuje souvislost mezi úhlem Θ , u něhož dochází při interferenci k maximálnímu zesílení paprsků odrážejících se od soustavy rovnoběžných atomových rovin, a vlnovou délkou λ použitého záření. Laueův pokus byl realizován na jaře 1912.



Obr. 4 Pracoviště rentgenové difraktografie na fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské vybavené moderní elektronikou, připomíná původní laboratoř W. K. Röntgena už jenom nezbytným zatemněním oken.

Jeho alternativní vysvětlení založené na představě, že rentgenové záření je reflektováno atomovými rovinami krystalu, podali Braggové v zimě téhož roku.

Braggova rovnice je základním vztahem rentgenové spektroskopie i rentgenové strukturní analýzy. Známe-li v daném případě mřížkovou konstantu, resp. vzdálenost rovin reflektujícího systému, můžeme měřením úhlů určovat vlnovou délku neznámých záření. Naopak s paprsky dané vlnové délky lze po stanovení úhlu vypočítat mezirovinnou vzdálenost. Tím získáme informace o vnitřní struktuře krystalu. Využití krystalů pro rozklad rentgenových paprsků ve spektrum přispělo k objasnění elektronové struktury atomů, rentgenová spektrální analýza umožnila rychlé určení chemického složení vícekomponentních materiálů. Pomocí difrakční analýzy se podařilo stanovit vzájemné rozložení atomů a iontů v krystalech tisíců látek, najít vztah mezi jejich chemickým složením, vlastnostmi a strukturou.

Práce *Debyea* a *Scherrera* z roku 1916, které rozšířily difrakční metodu i na polykrystalické látky, se staly základem pro aplikace rentgenové difrakce v technické praxi.

Důležitým mezníkem ve vývoji difrakčních metod byla de Broglieova hypotéza o vlnovém charakteru hmotných částic (1924), podle níž lze částici hmotnosti m pohybující se rychlostí v přiřadit vlnovou délku $\lambda = h/mv$, kde h je Planckova konstanta. Pokud bude svazek korpuskulárního záření o rychlosti v , které odpovídá hodnota λ srovnatelná s prů-



Obr. 5 Proměňování difrakčních diagramů bylo několikanásobně zpřesněno a urychleno současnou výpočetní technikou.

měry atomů, dopadat na krystalickou látku, dostaneme difrakční jevy obdobné difrakčním jevům rentgenových paprsků. Ke studiu struktury pevných látek má z korupuskulárního záření význam především záření elektronové, jehož difrakce byla zjištěna v roce 1927, a od roku 1936 i neutronové.

V Československu začal systematický výzkum v oboru fyziky, spektroskopie a difraktografie rentgenových paprsků až po roce 1920. V letech 1920–1935 se této problematice věnovaly tři kolektivy na Karlově univerzitě v Praze vedené *prof. V. Posejpalem*, *prof. F. Ulrychem* a *prof. V. Dolejškem*.

U prof. Posejpala ve Fyzikálním ústavu UK byla zkoumána především absorpce záření. Druhé pracoviště se vytvořilo kolem prof. Dolejška. S jeho jménem je spojena nová etapa vývoje naší fyziky charakterizovaná zespolečenštěním tvůrčí vědecké práce. Do okruhu Dolejškových spolupracovníků patřili v té době takové osobnosti naší fyziky jako akademik *J. Bačkovský*, členka korespondentka ČSAV *A. Kochanovská*, *prof. V. Kunzl* a *prof. M. Valouch*. Jejich práce ve Spektroskopickém ústavu UK se staly významným příspěvkem k poznání stavby hmoty. Difrakce rentgenového záření byla zde však využívána, stejně jako tomu bylo u prof. Posejpala, v podstatě jen pro účely základního výzkumu. Poslední z trojice našich předválečných rentgenografických laboratorí vybudoval v Mineralogickém ústavu UK *prof. Ulrych*. Za hlavní oblasti aplikace rentgenových paprsků zde bylo považováno prosvěcování látek

rentgenovým zářením, určování struktury a rentgenová spektroskopie k účelům chemické analýzy.

O využívání Laueova objevu v technice se dá v Československu mluvit teprve od poloviny třicátých let. Podobně jako u řady jiných vědních oborů byly objektivními podmínkami vzniku aplikované rentgenografie požadavky výroby, a to zvláště v oblasti zdokonalování vojenské techniky. Práce řízené ve Vojenském technickém a leteckém ústavu *P. Skularim* se zaměřovaly především na studium zbytkových napětí v kovech. Aktuální výrobní problémy byly řešeny i skupinou rentgenové mikrostruktury ve Fyzikálním výzkumu Škodových závodů. Vědeckou práci zde koordinoval zpočátku prof. Dolejšek, později prof. A. Kochanovská. Kromě pražských laboratoří přispělo k tradici naší rentgenografie také pracoviště přírodovědecké fakulty univerzity v Brně. Jeho zakladatelem byl prof. Šimek, který se s rentgenovou difrakční technikou seznámil v roce 1921 u W. L. Bragga.

Významným mezníkem rozvoje naší rentgenografie, stejně jako celé československé fyziky, byl rok 1945. Budování socialistické společnosti si vyžádalo kvalitativní změny charakteru výzkumné práce — věda začala být chápána jako kterékoliv jiné povolání.

Výsledkem cílevědomého prosazování difrakčních metod do základního i aplikovaného fyzikálního výzkumu bylo vybudování laboratoří s dobrým přístrojovým vybavením v ústavech ČSAV v Praze, Brně i Bratislavě. Metody rentgenové difrakce a spektroskopie představují dnes běžný prostředek výzkumu a kontroly materiálu, rentgenografie se stalo součástí výuky na většině našich vysokých škol. Ojedinelá nejsou ani zařízení na difrakci elektronů a od konce 60. let má vlastní experimentální základnu i československá neutronografie. Objevy Röntgena, Laueho a otce i syna Braggů, které přispěly jako málokteré jiné k rozvoji experimentální i teoretické fyziky, našly své pevné místo i v současné epoše vědeckotechnického pokroku.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Stádo

Čtyřicetihlavé stádo volů, krav a telat má cenu 600 zlatáků. Voli jsou po 18 zlatácích, krávy po 15 a telata po 10. Určete, kolik je kterých, víte-li také, že krávy tvoří nejpočetnější skupinu.

Řešení : Je-li v počet volů, k krav a t telat, pak podle zadání platí

$$18v + 15k + 10t = 600, \quad (1)$$

$$v + k + t = 40. \quad (2)$$

Vynásobme rovnici (2) deseti a odečteme ji od rovnice (1). Rozdíl těchto diofantovských rovnic je jednodušší diofantovská rovnice

$$8v + 5k = 200 \quad (3)$$

$$\text{Z jejích úprav } v = \frac{200 - 5k}{8} = 25 - \frac{5k}{8}$$

a

$$k = \frac{200 - 8v}{5} = 40 - \frac{8v}{5}$$

usoudíme, že k je dělitelno osmi a v pěti; $8|k$, $5|v$. Zavedeme pomocné neznámé p a q rovnostmi:

$$v = 5p, k = 8q \quad (4)$$

Po dosazení do rovnice (3) dostáváme:

$$40p + 40q = 200,$$

tj.

$$p + q = 5 \quad (5)$$

Rovnice (5) má v množině všech přirozených čísel čtyři řešení:

$$(p, q) \in \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

Pomocí vztahů (4) určíme příslušná v a k ; t pak z rovnice (2) upravené na tvar $t = 40 - (v + k)$. Tabulkový přehled nám umožní rychle nalézt řešení i provést zkoušku.

p	q	v	k	t	$18v$	$15k$	$10t$	kusů	zla- ťáků
1	4	5	32	3	90	480	30	40	600
2	3	10	24	6	180	360	60	40	600
3	2	15	16	9	270	240	90	40	600
4	1	20	8	12	360	120	120	40	600

Odpověď: Složení stáda není určeno jednoznačně. Z tabulky je vidět, že úloha má tři řešení.

Závěr pro matematické kutily. Diofantovskou rovnici (3) nahraďte jinou, jež vznikne odečtením α) 18 násobku, β) 15násobku rovnice (2) od rovnice (1), a pokračujte v řešení. V případě β uvažte, že platí $v + t < 40$. Vyřešte sami obdobnou úlohu, jež se v zadání liší jediným údajem: telata jsou po 8 zlaťácích.

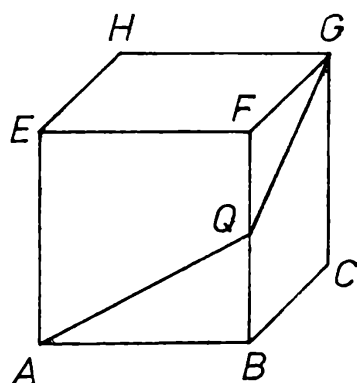
Jiří Mann

Kostky nejen Rubikovy

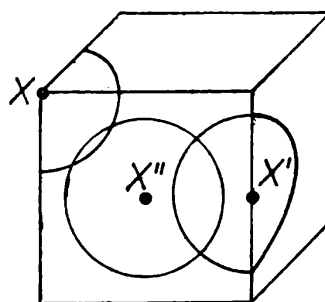
Dr. ALENA ŠAROUNOVÁ, CSc., UK Praha

7. Kruhy a krychle

Minule jsme řešili „pavoučí úlohu“ a hledali nejkratší spojnici dvou bodů na povrchu krychle. Pokusme se sestavit množinu všech bodů stěn krychle, jejichž vzdálenost (měřeno po povrchu krychle) od daného bodu X ležícího na krychli je menší nebo rovna nezápornému číslu r . V rovině by byl hledanou množinou dobů kruh $k(X, r)$. Na krychli je naše úloha obtížnější. Velmi záleží už na samotné volbě čísla r . Dvojicí nejvzdálenějších bodů krychle jsou koncové body jejich tělesových úhlopříček — na obr. 1 body $A-G$, $B-H$, $C-E$ a $D-F$. Je-li délka



Obr. 1



Obr. 2

hrany krychle $|AB| = a$, je vzdálenost bodů A, G (měřeno po povrchu krychle) $|AQ| + |QC|$, tedy $a\sqrt{5}$. Číslo r musíme volit z intervalu $(0, a\sqrt{5})$.

Mnoho záleží také na poloze bodu X . Na obr. 2 jsou zakreslené hledané množiny pro tři různé polohy bodu X a číslo $r = \frac{a}{3}$; možností je samozřejmě při různých volbách bodu X více.

Po tomto úvodu můžeme poradit zmateným mouchám:

Pavouk číhající na stanovišti S stačí uhlídat své okolí do vzdálenosti r od tohoto stanoviště. To znamená, že moucha sedící dále je před ním bezpečná. V krychlové místnosti sedělo celkem 8 pavouků — každý v jednom rohu místnosti. Každý z nich lapal mouchy do vzdálenosti $a/2$ od svého stanoviště (a je délka hrany krychle). Mouchám se podařilo dosáhnout dohody s pavoučím národem, podle níž bude nadále přebývat v této místnosti pouze 6 pavouků, ale jejich stanoviště budou ve stře-

dech jednotlivých stěn. Otázka z ní: Je tato dohoda pro mouchy výhodná?

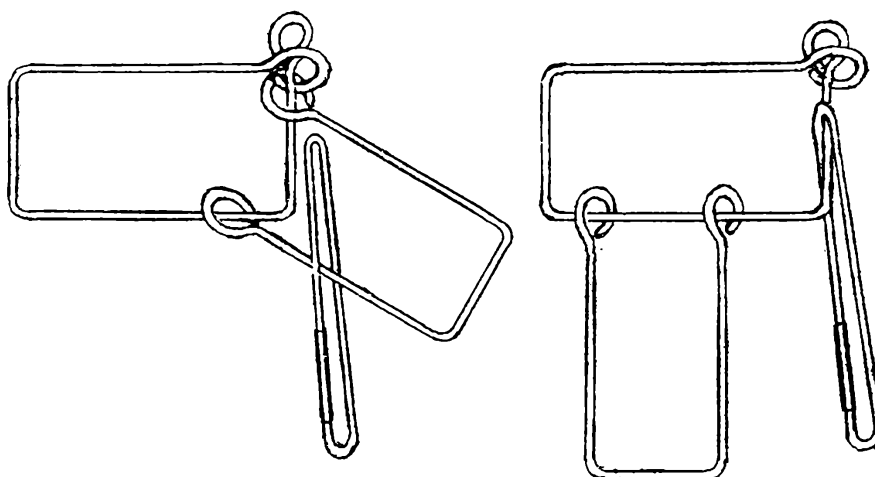
Jestliže ano, tak proč?

Není-li, při jaké volbě čísla r by mohla výhodnou být?

Nakreslete síť této místnosti a vyznačte v obou případech plochy, kam pavouci nemohou! Oba své obrázky porovnejte!

Řešení hlavolamu Dva obdélníky z čísla 1

Z nákresu na obrázku vidíme postup. Očka obou obdélníků posuneme k sobě a sponkou obejdeme zahnutý konec drátu. Tak se dostává sponka do druhého obdélníku. Jejím očkem provlékneme sponku. Úkol je vyřešen. Opačným postupem opět sponku zasuneme.



Jednoduché příklady z analytické geometrie

STANISLAV HORÁK, Praha

1. Tečny sestrojené ve vrcholech elipsy omezují obdélník. Rovnoosá hyperbola, která prochází jeho vrcholy, obsahuje i ohniska elipsy. — Dokažte.

2. Je dána hyperbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

kde $b > a$. Její průměr, který je kolmý na asymptotu, má délku $2d$. Potom platí

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2},$$

Dokažte.

3. Hlavní vrcholy elipsy označme A, B a M, N jsou dva libovolné body elipsy různé od A, B . Přímky AM, BN se protnou v bodě P a přímky AN, BM se protnou v bodě Q . — Dokažte, že vždy platí: přímky AB, PQ jsou k sobě kolmé.

4. Ohniskem paraboly je proložena libovolná přímka různá od osy paraboly. Tato přímka protne parabolu ve dvou různých bodech A, B . Dokažte, že tečna paraboly v bodě A (tečna paraboly v bodě B) je rovnoběžná s normálou paraboly v bodě B (s normálou paraboly v bodě A).

NAŠE SOUTĚŽ

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve školním roce 1983|84 se účastnilo soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních celkem 82 jednotlivců a 27 kolektivů, většinou trojčlenných; všech řešitelů bylo 149. Proti loňsku se počet řešitelů opět zvýšil. Úlohy z matematiky řešilo celkem 89 studujících, úlohy fyzikální celkem 67 a úlohy z konstrukční geometrie 7 účastníků soutěže. Z toho 2 řešili úlohy z matematiky, fyziky i z konstrukční geometrie, 10 úlohy z matematiky a fyziky a 2 úlohy z matematiky a z konstrukční geometrie. Nejúspěšnějším řešitelem byl

Ján Kováč, 4 A G v Popradu, který řešil všechny úlohy z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie; z toho jen dvě nesprávně. Další nejúspěšnější řešitele uvádíme podle jednotlivých předmětů:

Matematika:

1. Vladimír Kordula, 2 C G Bílovec
2. Ján Kováč, 4 A G Poprad

Fyzika:

1. Petr Surý, 4 A G Ostrava, ul. dr. Šmerala
2. Alžběta Paksyová, 4 B G s vyučovacím jazykem maďarským, Šamorín
3. Attila Halász, 2 B G s vyučovacím jazykem maďarským, Šamorín

Konstrukční geometrie :

1. Ján Kováč, 4 A G Poprad

Nakonec pripojujeme abecední seznamy všech řešitelů, nejprve úloh z matematiky, potom úloh fyzikálních a na závěr úloh z konstrukční geometrie. Za jménem každého řešitele uvádíme školu, na níž studoval; v každém seznamu uvádíme nejprve jednotlivce a potom řešitelské kolektivy. Některá jména nejsou možná uvedena správně; to však je proto, že někteří řešitelé nenapsali svá jména čitelně. Uvádíme jen příjmení; jen tam, kde jsou dva řešitelé téhož jména, uvádíme celé jméno.

Řešitelé úloh z matematiky :

Barsi, G Tata (Maďarsko), Blahovics, G maď. Komárno, Bercenková, G maď. Komárno; Boncsek, G maď. Komárno; Czibor, G maď. Komárno; Czimer, SPŠ maď. Komárno; Horváth, G maď. Komárno; Kernerová, G Tata (Maďarsko); Keszegh, G maď. Komárno; Kordorová, G maď. Galanta; Kordula, G Bílovec, Kováč, G Poprad; Kukel, G maď. Komárno; Laux, G maď. Komárno; Leboecz, SPŠ maď. Komárno; Ledeczky, SPŠ maď. Komárno; Lozsi, G maď. Galanta; Lukaová, G maď. Komárno; Lupínek, G Český Brod; Mészáros, G maď. Komárno; Mikle, G maď. Komárno; Molnárová, G maď. Komárno; Nágel, G maď. Komárno; Nagyová, G. maď. Komárno, Németh, SPTS Piešťany, Oláh ZŠ maď. Komárno; Olláry Péter, SPŠ maď. Komárno; Olláry Viktor, G maď. Komárno; Peřinová, G Jevíčko; Spátay, G maď. Komárno; Szabó, G maď. Komárno; Szalai, G maď. Komárno; Szegi, G maď. Komárno; Tamás, G maď. Komárno; Tichý, G Pelhřimov; Tóthová, G maď. Komárno; Varga, G maď. Komárno; Vinczeová, G maď. Komárno; Vörösová Claudia, G maď. Komárno; Vörösová Magda, G maď. Komárno.

Benkóczkyová, Farkasová; Jankó G maď. Komárno; Fehérváryová, Koczkaová, Némethová G maď. Komárno; Hócza, Benkovics, Lencsés, Geolog. škola Tatabánya (Maďarsko); Kecskésová, Baksicsová, Kerekesová, G maď. Komárno; Kelleová, Slušná, Zsembylová, G maď. Komárno; Mihály, Fraknoi, Průmyslová škola Esztergom (Maďarsko); Molnár, Takács, Audics, SPŠ maď. Komárno, Nagy, Mészáros, Farkos, SPŠ Komárno; Rigó, Bédi, Bognár, SPŠ maď. Komárno; Szoboszlai, Tóth Z., Lajos SPŠ maď. Komárno, Vincze, Zalaba, SPŠ maď. Komárno, Vörös, Sárai SPŠ maď. Komárno, Bakos, Gacsál, Horváthová, SPŠ maď. Komárno, Hevö, Nagy, Varga, SPŠ maď. Komárno; Orbán, Holop, SPŠ maď. Komárno; Tok, Dobronyiová, SPŠ maď. Komárno; Varga, Telekes, SPŠ maď. Komárno; Sóos, Darnayová, SPŠ Komárno; Berseová, Mészárosová, Vargová, G. maď. Komárno.

Řešitelé úloh z fyziky :

Bajkai, G maď. Komárno; Bajnoková, G maď. Komárno; Bakosová, G maď. Komárno; Bolemantová, G maď. Komárno; Czéplö, G maď.

Komárno; Czíkő, G maď. Komárno; Dědic, G Bílovec; Fazekas, G maď. Komárno; Feketeová, G maď. Komárno; Gerhardtová, G maď. Komárno; Hajalács, G maď. Komárno; Halász, G maď. Šamorín; Hlédik, G maď. Komárno; Jözsová, G maď. Komárno; Keszegková, G maď. Komárno; Kiss, G maď. Bratislava; Kováč, G Poprad; Madarász, G maď. Komárno; Markóová, G maď. Komárno; Medza, G maď. Komárno; Ménáros, G maď. Komárno; Meszi G maď. Komárno; Müller, G maď. Komárno; Nagy, G maď. Komárno; Olláry Viktor, G. maď. Komárno; Paksyová, G maď. Šamorín; Palásti (neuvedl školu ani místo, kde studuje); Péntes, G maď. Komárno; Siegl, G Brno, Slovenské nám.; Spátay, G maď. Komárno; Surý, G. Ostrava; Szegi, G. maď. Komárno; Szegiová, G maď. Komárno; Szijjártó, G. maď. Bratislava; Szücssová, G maď. Komárno; Tamás, G maď. Komárno; Tarics, G maď. Komárno; Tichý, G Pelhřimov; Tóth Josef, G maď. Bratislava; Tóthová, G maď. Komárno; Ujjová, G maď. Komárno; Veres, G maď. Komárno; Világi, G maď. Komárno, Vinczeová, G maď. Komárno.

Czíbor, Farkasová, Simkóová, G maď. Komárno; Fehérváryová, Koczková, G maď. Komárno; Kerekesová, Boncsek, Bagita, G maď. Komárno; Kiss František, Gaál, Novák, G maď. Komárno; Kürtiová, Tóth, G maď. Komárno; Lukaová, Szalai, Kukel, G maď. Komárno; Toth Arpád, Culinka, Garay, G maď. Komárno; Vargová, Simonová, Paálová, G maď. Komárno.

Řešitelé úloh z konstrukční geometrie:

Hevő, SPŠ maď. Komárno; Kováč, G Poprad; Tichý, G Pelhřimov; Barczy, Malászik, G. maď. Galanta; Holop, Orbán, SPŠ maď. Komárno.

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních děkuje všem řešitelům za projevený zájem o řešení úloh, vítězům blahopřeje a nejúspěšnějším z nich zašle z prostředků Státního pedagogického nakladatelství v Praze věcné výhry.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Čísla $\alpha \beta 1$, $\gamma \delta 1$ napsaná v desítkové soustavě jsou prvočísla. První je větší než druhé; jejich rozdíl je 330. Určete všechna prvočísla, která mají tuto vlastnost.

Stanislav Horák

(Došlo 47 řešení)

Většina řešení byla velmi slabá. Zdá se, že autorovu řešení se nejvíc přiblížilo řešení B. Sándora z Taty v Maďarsku.

Autorovo řešení.

Hledaná trojciferná prvočísla p , q můžeme zapsat takto:

$$p = 100a + 10\beta + 1,$$

$$q = 100\gamma + 10\delta + 1.$$

Přitom platí

$$0 < a \leq 9, \quad 0 < \gamma \leq 9,$$

$$0 \leq \beta \leq 9, \quad 0 \leq \delta \leq 9,$$

$$a > \gamma$$

Podle textu úlohy je $p - q = 330$,

tj. $100(a - \gamma) + 10(\beta - \delta) = 330$,

což po zjednodušení dá

$$10(a - \gamma) + (\beta - \delta) = 33$$

Nyní musíme rozlišit dva případy.

$$\text{A) } 10(a - \gamma) + (\beta - \delta) = 30 + 3,$$

z čehož plyne

$$a - \gamma = 3,$$

$$\beta - \delta = 3$$

Pro čísla a, γ a β, δ sestavíme tabulky.

a		4	5	6	7	8	9		β		3	4	5	6	7	8	9	
γ		1	2	3	4	5	6		δ		0	1	2	3	4	5	6	

Nyní, když známe hodnoty čísel a, β a γ, δ , můžeme zapsat všechny dvojice trojčíslných čísel, které vyhovují naší podmínce. Mezi nimi pak vyhledáme dvojice vyhovujících prvočísel.

- | | | | | | | | | | |
|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| p | | 431 | 441 | 451 | 461 | 471 | 481 | 491 | |
| q | | 101 | 111 | 121 | 131 | 141 | 151 | 161 | |

V tabulkách prvočísel zjistíme, že vyhovují dvojice (431; 101), (461; 131).

- | | | | | | | | | | |
|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| p | | 531 | 541 | 551 | 561 | 571 | 581 | 591 | |
| q | | 201 | 211 | 221 | 231 | 241 | 251 | 261 | |

Vyhovují dvojice (541; 211), (571; 241).

- | | | | | | | | | | |
|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| p | | 631 | 641 | 651 | 661 | 671 | 681 | 691 | |
| q | | 301 | 311 | 321 | 331 | 341 | 351 | 361 | |

Vyhovují dvojice (641; 311), (661; 331).

- | | | | | | | | | | |
|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| p | | 731 | 741 | 751 | 761 | 771 | 781 | 791 | |
| q | | 401 | 411 | 421 | 431 | 441 | 451 | 461 | |

Vyhovují dvojice (751; 421), (761; 431).

- | | | | | | | | | | |
|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| p | | 831 | 841 | 851 | 861 | 871 | 881 | 891 | |
| q | | 501 | 511 | 521 | 531 | 541 | 551 | 561 | |

Nevyhovuje žádná dvojice.

6.	p		931		941		951		961		971		981		991	
	q		601		611		621		631		641		651		661	

Vyhovuje dvojice (971; 641), (991; 661).

$$B) 10(\alpha - \gamma) + (\beta - \delta) = 40 - 7$$

a odtud vyplývá

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma &= 4 \\ \beta - \delta &= -7\end{aligned}$$

Pro čísla α , γ , a β , δ sestavíme zase tabulku.

α		4		5		6		7		8		9	
γ		0		1		2		3		4		5	
β		0		1		2							
δ		7		8		9							

Pomocí tabulek můžeme sestavovat čísla p , q .

1.	p		401		411		421	
	q		71		81		91	
2.	p		501		511		521	
	q		171		181		191	

Vyhovuje dvojice (521; 191).

3.	p		601		611		621	
	q		271		281		291	
4.	p		701		711		721	
	q		371		381		391	

Vyhovují dvojice (601; 271), (821; 491).

5.	p		801		811		821	
	q		471		481		491	
6.	p		901		911		921	
	q		571		581		591	

Shrneme: Předložené úloze vyhovují tyto dvojice prvočísel: (431; 101), (461; 131), (521; 191), (541; 211), (571; 241), (601; 271), (641; 311), (661; 331), (751; 421), (761; 431), (821; 491), (971; 641), (991; 661).

2. Necht a , e , u jsou po řadě velikosti hrany, stěnové úhlopříčky a tělesové úhlopříčky krychle. Dokažte, že potom platí

$$e\sqrt{au} + u\sqrt{ae} + a\sqrt{eu} < a^2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

Na základě toho dokažte, že je

$$^4\sqrt{6} + ^4\sqrt{12} + ^4\sqrt{18} < \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

Stanislav Horák

(Došlo 37 řešení)

Řešil Vladimír Kordula, II. C. G Bílovec

Známost nerovnost

$$2\sqrt{xy} < x + y,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $x = y$, budeme aplikovat na dvojčleny $a + e$, $a + u$, $e + u$. Zde ovšem budou platit ostré nerovnosti, neboť žádná dvě z čísel a , e , u se sobě nemohou rovnat:

$$2\sqrt{ae} < a + e,$$

$$2\sqrt{au} < a + u,$$

$$2\sqrt{eu} < e + u.$$

Sečtením všech tří nerovností a po kratší úpravě dojdeme k nerovnosti

$$u\sqrt{ae} + e\sqrt{au} + a\sqrt{eu} < ae + eu + au.$$

Ale

$$ae = a^2\sqrt{2}, \quad au = a^2\sqrt{3}, \quad eu = a^2\sqrt{6}$$

a tyto výrazy dosadíme do pravé strany poslední nerovnosti:

$$u\sqrt{ae} + e\sqrt{au} + a\sqrt{eu} < a^2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) \quad (1)$$

Tím jsme dokázali první část úlohy. Druhou část rozřešíme tak, že do levé části nerovnosti (1) dosadíme

$$e = a\sqrt{2}, \quad u = a\sqrt{3}$$

Levá strana nerovnosti bude (hned upravujeme):

$$\begin{aligned} a\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2\sqrt{3}} + a\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2\sqrt{2}} + a\sqrt{a^2\sqrt{6}} &= \\ &= a^2\sqrt[4]{12} + a^2\sqrt[4]{18} + a^2\sqrt[4]{6} \end{aligned}$$

Po této úpravě a po zkrácení číslem a^2 dostaneme výsledek

$$\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{18} < \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

NAŠE SOUTĚŽ, ročník 1984-85

Také letos vypisuje redakce Rozhledů spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze soutěž o ceny v řešení úloh z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Úloh z matematiky bude celkem 10, úloh z fyziky 5 a úlohy z konstrukční geometrie budou 3. Nejprve otiskujeme část úloh z matematiky; další úlohy budou otištěny v příštím čísle. Soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Při případném dobrém umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Všeobecné pokyny řešitelům

Řešení každé úlohy pište česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy), a to čitelně (možno-li, na stroji) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec také svou bytovou adresu i se směrovacím číslem. Každý kolektiv uveďte tyto údaje pro svého každého člena. Příjmení pište hůlkovým písmem.

Nejdříve napište text dané úlohy a potom přehledně její řešení. Toto řešení pište stručně, avšak výstižně a jasně; neužívejte zbytečně různé symboly! Dbejte na platnou terminologii a symboliku. Připojujete-li k řešení úlohy obrázky, narýsujte je pečlivě a čitelně je popište.

Úlohy k řešení

Matematika

Zatím otiskujeme 5 úloh z matematiky. Řešení těchto úloh zašlete nejpozději do 15. února 1985 na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních, které je uvedena na druhé straně obálky každého čísla tohoto časopisu.

1. Do desítkové soustavy převedte čísla, o nichž platí:

$$(xy\ 2)_{\alpha+1} = (4\ yx)_{\alpha}.$$

Stanislav Horák

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC , jemuž je opsána kružnice k o poloměru r . Přímka vedená vrcholem A kolmo k přímce AC (resp. AB) protne kružnici k ještě v bodu K (resp. L); budiž $|AK| = a$, $|AL| = a'$. Obdobně sestrojíme dvě úsečky mající krajní bod B a dvě úsečky mající krajní bod C ; velikosti těchto úseček budtež po řadě b , b' , c , c' . Dokažte, že je

$$a + b + c + a' + b' + c' \leq 4r \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right)$$

rovnost nastane právě tehdy, je-li trojúhelník ABC rovnostranný.

Stanislav Horák

3. Je dána krychle $ABCDEFGH$, jejíž hrana má délku a ; rovina ρ kolmá k tělesové úhlopříčce DF krychle protíná krychli v šestiúhelníku R . Vypočtete obsah řezu R v závislosti na vzdálenosti v roviny ρ od středu krychle.

Milan Koman

4. Zjistěte, kolika způsoby lze na obyčejné šachovnici rozmístit 16 pěšáků tak, aby v každé řadě i v každém sloupci byl jeden bílý a jeden černý pěšák.

Návod: Zjistěte nejdříve počet všech možných „cyklických“ rozmístění, tj. rozmístění, kde spojnice každých dvou pěšáků v téže řadě nebo v témže sloupci vytvoří jednu uzavřenou lomenou čáru. Přitom se přepouštějí lomené čáry, které samy sebe protínají.

Milan Koman

5. Patu výšky ke straně AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme R . Sestrojme bod R_1 souměrně sdružený k bodu R podle přímky BC a bod R_2 souměrně sdružený k bodu R podle přímky CA . Dokažte, že přímka R_1R_2 protíná strany BC , CA po řadě v bodech P , Q , které jsou patami zbývajících dvou výšek trojúhelníku ABC .

Emil Kraemer

Z NOVÝCH KNIH

Miloš Zapletal:
KNIHA HLAVOLAMŮ

Vydalo nakladatelství Albatros, Praha 1983, 1. vydání, 143 str., 151 obr., váz., 27 Kčs.

Knížka má zajímavou formu. Mladý učitel matematiky a tělesné výchovy se stává třídním v posledním ročníku základní školy. Od předchozího učitele matematiky se liší tím, že má v zásobě mnoho zajímavých her, hlavolamů, hříček a zábav. Nejprve zakládá Olympiádu důvtipu a potom matematicko-tělocvičný kroužek. Jak ke všemu došlo, si jistě se zájmem přečtete.

Náplní Olympiády důvtipu i kroužku bylo řešení hlavolamů, které všechny byly v podstatě zábavnými matematickými úlohami. V knížce se dozvíte, že takové problémy vymýšleli nejen matematikové, a to i význační jako např. *Archimédes*, *Euler*, *Gauss*

a *Lucas*, ale i lidé zcela jiných profesí. Bohužel u mnoha vskutku podivuhodných a krásných hlavolamů a hříček nejsou autoři známí.

V knížce jsou hlavolamy pouze zadávány, jejich řešení však v ní nenaleznete. Lze souhlasit s autorem, že by to knížku pokazilo, neboť čtenář se slabou vůlí by po několika minutách marného úsilí nahlédl do řešení a hlavolam by ztratil své kouzlo.

V závěru se pro čtenáře uvádějí další knížky se zábavnými matematickými úlohami. Takový seznam nemůže být samozřejmě úplný, rozhodně by v něm však měla být knížka *Matematika hrou i vážně*, kterou napsal B. Zelinka. Vyšla v roce 1979 jako 44. svazek Školy mladých matematiků v nakladatelství Mladá fronta.

Knihu hlavolamů doporučujeme každému, kdo našel v Rozhledech zálibu v rubrice Přemýšlíme, řešíme.

Jiří Mída

Astašenkov., P. T.:

ŽIVOT S ATÓMOM — Život a die-
lo I. V. Kurčatova

Vydala Smena, Bratislava 1983, edí-
cia Sputnik, preklad z ruštiny, 152
strán, 32 strán fotografickej prílohy,
viaz., Kčs 25,—

O životnej ceste, osobných vlast-
nostiach, výsledkoch vedeckej prá-
ce i organizačných schopnostiach
svetoznámeho vedca a organizáto-
ra sovietskeho atómového vedecko-
technického výskumu akademika
Igora Vasilieviča Kurčatova, ho-
vorí táto knižka. Patrí medzi
publikácie, ktoré mladým ľuďom
približujú významné medzníky vo
vývoji vedy a odhaľujú osobnosti,
ktoré prispeli k novým výsledkom.

P.T. Astašenkov vystihol zá-
kladné intelektuálne a charakte-
rové vlastnosti I. Kurčatova ako
vedca i človeka. Ukazuje cestu
sovietskych vedcov pri skrotení
energie atómového jadra. Pútavo
rozpráva príbehy zo života človeka
oddaného vede a vlasti. Päťdesiat
fotografií v knižke približuje veľmi
názorne postavu prvého nositeľa
Leninovej ceny, učiteľa mnohých
vedcov — jadrových fyzikov.

Knižka je svedectvom sovietskej
cesty za atómovou a vodíkovou
bombou, za prvou jadrovou elekt-
rárnou i úsilím ovládnuť riadenú
termojadrovú reakciu. Patrí do
rúk študentom aj učiteľom.

Dušan Jedíndk

INFORMACE

O mezinárodním matematickém kongresu

Ve dnech 16. až 24. srpna 1983 se konal ve Varšavě mezinárodní kongres matematiků. Jeho pořadatelem byl Instytut Matematyczny polské akademie věd, předsedou kongresu byl profesor *Olech*. Kongresu, který se konal v Paláci kultury a vědy, se účastnilo asi 5000 pracovníků všech kontinentů naší planety. V rámci tohoto kongresu uspořádala Mezinárodní komise pro vyučování matematice symposium na téma „Jaké by měly být cíle a obsah všeobecného matematického vzdělání“. Symposiu předsedala profesorka *A. Z. Krygowska* (Krakov) a profesor *H. G. Stein* (Bidefeld — NSR). Na tomto symposiu přednesli různí významní pracovníci v oboru didaktiky matematiky celkem 11 přednášek. Zároveň byly sděleny informace o vyučování matematice v různých zemích, uspořádán seminář o vztahu mezi historií a didaktikou matematiky aj. Otázkám, které jsou spjaté s vyučováním matematice, se věnovala pozornost také v sekci kongresu nazvané Historie a pedagogika.

doc. dr. Hana Kořínková, CSc., Praha

Násobení per gelosia

Jde o název jednoho z *osmi* způsobů násobení přirozených čísel, které popsal na konci 15. století *Luca Pacioli* v díle *Summa de arithmetica*. Metoda sice pochází z Indie, ale citovaný název dostala až v renesanční Itálii. Slovo *gelosia* (čte se dželozijs) znamenalo *závist*, přeneseně pak *žaluzie* v oknech, známé mřížkové zařízení, které umožňovalo skrytě pozorovat (závistivými pohledy) dění na ulici. V aritmetice se uplatnil význam *mřížka*, protože výpočet součinu se zapisoval do mřížkového schématu, které vidíme na obrázku.

Pacioli předvedl násobení dvou trojčiferných čísel 987 a 456, proto dostal čtvercovou mřížku. Nejprve připsal činitele k horní a k pravé straně čtverce (na obrázku jsou jejich číslice zapsány šablonkovými typy), pak vyplnil pole tabulky. V každém čtverečku vytváří úhlopříčka dva trojúhelníky, v horním je počet desítek a v dolním počet jednotek součinu jednociferných čísel (čísllice jsou dopsány rukou). Jednotlivé cifry výsledku získal Pacioli sčítáním čísel v šikmých pásích, jejichž směr naznačují šipky; začal nejspodnějším pásem, kde je samotné číslo 2,

		9 ↘	8 ↘	7 ↘	
4	3	6	3	2	4 ↘
5	4	5	0	3	5 ↘
0	5	4	8	4	6 ↘
		0	7	2	

to zapsal i pod spodní stranu čtverce. V dalším pásu dostal $5 + 4 + 8 = 17$, zapsal 7, ale 1 přičetl k součtu v následujícím pásu, tedy $1 + 8 + 3 + 0 + 4 + 4 = 20$, zapsal 0 a přičetl 2 k součtu v dalším pásu atd.

Ciframi výsledku orámoval zvyšující dvě strany mřížky; výsledek 450 072 začal číst dolů podél levé strany, pak podél dolní strany vpravo. Metoda *per gelosia* má však svou zrcadlovou variantu, kterou získáme po zobrazení mřížky podél svislé osy; změní se směr pásů, zápisy činitelů i čtení součinu. Napierovy tyčky popsané v minulém Pohledu do dějin též využívají určitou variantu metody *per gelosia*.

Jaroslav Šedivý

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ V ROCE 1984 VYDÁ:

Ungermann, Volf: POHYB TĚLESA V RADIÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI

Publikace je určena žákům všech typů středních škol, kteří se zajímají o fyziku a účastní se fyzikální olympiády. Knížka se zabývá výpočtem pohybů těles v gravitačním poli Země, Měsíce a Marsu. Atraktivní téma z kosmonautiky čtenáře zaujme a umožní mu pochopit složité fyzikální principy kosmických letů.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1984.



ROZHLEDY

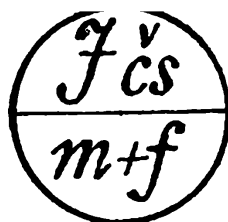
**matematicko
– fyzikální**

(3)

**ROČNÍK 63, 1984/85
LISTOPAD**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

E-7 XI. 1984



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
moúč, doc. dr. Milan Hejný CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE
Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK
Praha, prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc.,
PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář,
CSc., ÚNM Praha, dr. Martin Šolc,
CSc., UK Praha

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

P. Drlík: Zaujímavosti o číselných sústa- vách	97
E. Kraemer: Řešením úloh opakujeme geometrii I	102
J. Mída: Trojúhelníková a Cauchyova ne- rovnost	108
I. Fischer: Integrované logické obvody MSI	110
J. Chrapan: Hrozba následkov jadrovej vojny III	116
D. Kluvanec: Frekvenčné charakteristiky elektrických dvojpolov	121
R. Kubínek: Svět očima moderní fyziky	128
Z. Maršák: I teploměr je zajímavá fyzi- kální soustava	132
J. Polák: Pýr v jeteli .	134
Naše soutěž	135
Z nových knih .	143
Pohledy do dějin	. 3. str. obálky

Zaujímavosti o číselných sústavách

PETR DRLÍK, Pedagogická fakulta Nitra

ÚVOD

Rozvoj matematického myslenia prináša rad zaujímavých a pekných výsledkov aj v nie veľmi náročných úlohách. V súvislosti s rozvojom použitia počítačov došlo k rozvoju niektorých oblastí matematických poznatkov. Jednou z nich je aritmetika (pravidlá základných aritmetických operácií s číslami) v číselných sústavách s iným základom ako 10. Ukážme si niektoré netradičné číselné sústavy a možnosti ich použitia.

ROZVINUTÝ ZÁPIS ČÍSLA V ČÍSELNEJ SÚSTAVE

Číselná sústava je sústava určitých znakov a pravidiel pre zobrazenie čísel. Pre jednoduchosť uvažujme iba pozičné číselné sústavy, u ktorých význam znaku závisí od miesta, na ktorom sa nachádza. Príkladom pozičnej číselnej sústavy je desiatková číselná sústava, kde napríklad význam číslice 3 v číslach 3,389, 3712 závisí od polohy číslice v čísle.

Celé číslo $A = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ môžeme v číselnej sústave so základom z , kde $z > 1$, $z \in \mathbb{N}$, zapísať v rozvinutom tvare ako $A = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 \cdot z^0$, kde a_i pre $i = 0, \dots, n$ sú číslice také, že $a_i \in \{0, 1, \dots, z-1\}$.

Napríklad v desiatkovej sústave platí, že $z = 10$ a číslo $A = 823$ sa v rozvinutom tvare zapíše ako $A = 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$.

Možnosť zapísať číslo v rozvinutom tvare platí nielen pre všetky číselné sústavy so základom, ktorý je prirodzené číslo väčšie ako 1, ale pre všetky číselné sústavy, ktoré sa nazývajú *polyadické*. Sú to číselné sústavy, v ktorých je možné každé číslo jednoznačne zapísať v rozvinutom tvare a z neho jednoznačne vyjadriť hodnotu čísla sčítaním jednotlivých členov rozvoja.

PRÍKLAD NEPOLYADICKEJ ČÍSELNEJ SÚSTAVY

Uvažujme číselnú sústavu vytvorenú nasledovným spôsobom: Majme tri základy číselnej sústavy $p = 3$, $q = 5$, $r = 7$. Každé číslo v tejto číselnej sústave zapíšeme ako postupnosť zvyškov celočíselného delenia jednotlivými základmi v stanovenom poradí p, q, r .

Poznámka. Číslo A v desiatkovej číselnej sústave zapíšeme ako A_{10} . Potom napríklad číslo 52_{10} je $123_{(3, 5, 7)}$, pretože $52 : 3 = 17$, zvyšok 1, $52 : 5 = 10$, zvyšok 2 a $52 : 7 = 7$, zvyšok 3.

Zaujímavé je, že aj číslo 157_{10} sa v tejto číselnej sústave zapíše ako $123_{(3, 5, 7)}$. Bude viac takých čísel, ktoré majú rovnaký zápis v číselnej sústave so základmi 3, 5, 7? Dá sa určiť pravidlo pre zistenie čísel s rovnakým zápisom?

Je zrejmé, že uvedená sústava nie je polyadická. Číselné sústavy tohto typu sa nazývajú číselnými sústavami zvyškových tried. Ich výhodou je jednoduché vykonávanie aritmetických operácií, nevýhodou obťažné porovnávanie dvoch čísel podľa veľkosti a obťažný prevod do desiatkovej sústavy. Vlastnosti číselných sústav zvyškových tried boli použité v československých počítačoch EPOS a ZPA 600.

DVOJKOVÁ ČÍSELNÁ SÚSTAVA

Vráťme sa k polyadickým číselným sústavám. Uvažujme dvojkovú číselnú sústavu, t.j. číselnú sústavu so základom $z = 2$ a dvoma číslicami 0, 1.

Jej súvislosť s počítačmi je známa. Často sa hovorí, že počítače pracujú v dvojkovej sústave. Presnejšie by sa malo hovoriť, že počítače spracovávajú informáciu, ktorá je zakódovaná do postupnosti núl a jednotiek. Dôvod, prečo počítače nevyužívajú desiatkovú sústavu, je praktický. Je obťažné realizovať 10 rôznych stavov fyzikálnych veličín, ktoré by reprezentovali číslice 0 až 9. Oveľa ľahšie je technicky realizovať situáciu „existuje elektrický signál“ alebo „neexistuje elektrický signál“. Na zobrazenie tejto situácie stačí existenciu signálu v danom časovom okamihu vyjadriť jednotkou, neexistenciu nulou.

Použitie aritmetiky v desiatkovej sústave prináša zo sebou rad nepríjemností, ktoré si vzhľadom na náš zvyk na ňu ani neuvedomujeme. Na zvládnutie sčítania v desiatkovej sústave si potrebujeme zapamätať 10×10 pamäťových spojov ($0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, ..., $9 + 9 = 18$). Podobne pre násobenie potrebujeme taký istý počet zapamätaných súčinov. Počítač však v dvojkovej sústave stačí naučiť 2×2 pamäťové spoje pre sčítanie ($0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$) a 2×2 pamäťových spojov pre násobenie ($0 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 0$, $1 \times 0 = 0$, $1 \times 1 = 1$).

Naviac pomocou sčítania je možné v dvojkovej sústave rýchlo realizovať odčítanie, násobenie aj delenie čísel. Pre jednoduchosť si toto tvrdenie môžeme ukázať na prípade odčítania dvojkových čísel.

Zavedme si pojem doplnku dvojkového čísla A_2 . Doplnok dvojkového čísla A_2 vytvoríme tak, že v čísle zameníme jednotky na nuly a nuly na jednotky a k výsledku pripočítame jednotku. Doplnok k číslu A_2

označme $\overline{A}_2$. Doplnok k číslu $A_2 = 10100_2$ bude $\overline{A} = 01011 + 1 = 01100_2$ (nuly na začiatku čísla nebudeme vynechávať).

Hľadáme rozdiel $C_2 = A_2 - B_2$. Môžu nastať dva prípady: $A_2 \geq B_2$ alebo $A_2 < B_2$. Tieto prípady sa realizujú rôznym spôsobom.

V prípade, že $A_2 \geq B_2$, sčítame číslo A_2 s doplnkom $\overline{B}_2$. V získanom súčte vynecháme jednotku najvyššieho rádu a nahradíme ju znamienkom $+$. Výsledok je hľadaným rozdielom čísel A_2 a B_2 .

Príklad: Vypočítajte $C_2 = A_2 - B_2$, keď $A_2 = 10110$, $B_2 = 1010$.

Riešenie: $\overline{B}_2 = 0101 + 1 = 0110$,

$A_2 + \overline{B}_2 = 10110 + 0110 = 11100$, odtiaľ vynechaním jednotky najvyššieho rádu dostaneme hodnotu rozdielu $C_2 = 1100$; o správnosti výpočtu sa presvedčíme ľahko, pretože $A = 22_{10}$ a $B = 10_{10}$.

V prípade, že $A_2 < B_2$, sčítame číslo A_2 s doplnkom $\overline{B}_2$ tak, že v prípade, ak má A_2 menej miest, doplníme ho nulami zľava. Hľadaný rozdiel je doplnkom získaného súčtu so znamienkom $-$.

Príklad: Vypočítajte rozdiel $C_2 = A_2 - B_2$, keď $A_2 = 1011$, $B_2 = 10100$.

Riešenie: $\overline{B}_2 = 01011 + 1 = 01100$,

$D_2 = A_2 + \overline{B}_2 = 01011 + 01100 = 10111$,

$\overline{D}_2 = 01000 + 1 = 01001$

Odtiaľ $C_2 = -1001$.

Z uvedeného vidno, že odčítanie dvojkových čísel je možné uskutočniť použitím sčítania, zámeny núl a jednotiek a pričítania jednotky, čo sú pre počítač snadno a rýchlo realizovateľné operácie.

ČÍSELNÉ SÚSTAVY S CELOČÍSELNÝM ZÁKLADOM

V tradičných zavedeniach číselných sústav sa používa obmedzenie pre základ číselnej sústavy, ktorý má byť celé číslo väčšie ako 1. Rozšírme možnosť voľby základu na všetky celé čísla s výnimkou čísel $-1, 0, 1$. Absolútna hodnota základu nám bude udávať počet číslic danej sústavy, z toho je zároveň zrejmé, prečo nebudeme uvažovať za základ uvedené čísla.

Uvažujme číselnú sústavu so základom $z = -2$, nazvime ju negadvojkovou. Bude mať dve číslice 0 a 1. Číslo A_{-2} bude mať rozvinutý tvar zápisu

$A_{-2} = a_n \cdot (-2)^n + a_{n-1} \cdot (-2)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot (-2)^1 + a_0 \cdot (-2)^0$
 Číslo A_{-2} budeme zapisovať v tvare postupnosti číslic $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$.
 Číslo $A_{-2} = 11010_{-2}$ je teda $1 \cdot (-2)^4 + 1 \cdot (-2)^3 + 0 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^1 + 0 \cdot (-2)^0 = 16 - 8 - 2 = 6_{10}$

Skúste nájsť hodnotu čísla -6 v negadvojkovej sústave.

Existujú algoritmy, ktoré uskutočňujú prevod z desiatkovej sústavy do negadvojkovej a naopak. Sú v podstate ekvivalentné s algoritmami prevodu čísla z desiatkovej do dvojkovej sústavy a naopak. Skúste nájsť pravidlá prevodu medzi desiatkovou a negadvojkovou sústavou.

Zaujímavosťou negadvojkovej sústavy je skutočnosť, že na zápis záporných čísel nepotrebujeme znamienko mínus. Či je číslo kladné alebo záporné zistíme podľa toho, či najvyšší rád čísla je párnou alebo nepárnou mocninou čísla -2 .

Ďalšou zaujímavosťou negadvojkovej sústavy je jej aritmetika. Sčítanie v tejto sústave sa podobne ako v dvojkovej sústave riadi tabuľkou tvorenou 2×2 spojmi. Spoje $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$ a $1 + 0 = 1$ sú zhodné, ale $1 + 1 = 110$. Čiže pri sčítaní dvoch jednotiek dochádza k prenosu do dvoch vyšších rádo. Overte na príkladoch a zistite, prečo k tomu dochádza.

Podobnou úvahou je možné vytvárať číselné sústavy o ľubovoľnom zápornom celočíselnom základe. Počet číslic u nich bude zhodný s číselnou sústavou, ktorá má základ rovný absolútnej hodnote ich základu, číslice môžeme označovať rovnako. Všetky „nega-sústavy“ zobrazujú záporné čísla bez nutnosti zavedenia znamienka mínus. Tým dochádza k zjednodušeniu pravidiel operácií, predovšetkým násobenia a delenia.

TROJKOVÁ ROVNOVÁŽNA SÚSTAVA

Výjdime z jednej veľmi starej, ale myšlienkou mladej úlohy, známej už slávnemu matematikovi 13. storočia Fibonacci: „Nájdite súbor štyroch závaží takých, aby ich pomocou bolo možné navážiť tovar o hmotnosti od 1 kg do 40 kg včete. Závažia je možné v prípade potreby klať na obidve misky „trhových“ váh.

Dá sa ukázať, že jediné riešenie predstavujú závažia o hmotnostiach 27, 9, 3 a 1 kg. Zapišme matematicky túto situáciu. Prípad, kedy určité závašie položíme na „stranu závaží“, označme 1. Prípad, kedy závašie pridáme na „stranu tovaru“, označme $\bar{1}$.

Naváženie 1 kg tovaru potom môžeme zapísať ako 0001, 2 kg ako 001 $\bar{1}$, 5 kg ako 011 $\bar{1}$ atd. Zapište podobným spôsobom ostatné hmotnosti tovaru do 40 kg.

Príklad môžeme zovšeobecniť zavedením takzvanej trojkovej rovnovážnej sústavy. Hmotnosti 1, 3, 9 a 27 kg sú vlastne mocninami čísla 3. Zaveďme číselnú sústavu nasledovne: Trojková rovnovážna sústava je polyadickou číselnou sústavou so základom $z = 3$ a troma číslicami $\bar{1}$, 0, 1. Číslica $\bar{1}$ predstavuje vynásobenie príslušnej mocniny čísla 3 v rozvinutom zápise čísla číslom -1 .

Napríklad $B_3 = 1\bar{1}01\bar{1} = 1 \cdot 3^4 + (-1) \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + (-1) \cdot 3^0 = 81 - 27 + 3 - 1 = 56_{10}$

Všimnime si, že podobne ako u negadvojčkovej číselnej sústavy nie je potrebné na zápis záporného čísla používať znamienko mínus. Že je číslo záporné, vidíme okamžite z toho, že prvou číslicou čísla je $\bar{1}$. Napríklad $\bar{1}111_3 = -27 + 9 + 3 + 1 = -14_{10}$. To znamená, že nie je potrebné uvažovať doplnkové pravidlá znamienok pre aritmetické operácie.

Zaujímavá je aritmetika trojkovej rovnovážnej sústavy. Sčítanie sa realizuje podľa nasledovných predpisov: $1 + 1 = 1\bar{1}$, $1 + 0 = 1$, $1 + \bar{1} = 0$, $0 + 1 = 1$, $0 + 0 = 0$, $0 + \bar{1} = \bar{1}$, $\bar{1} + 1 = 0$, $\bar{1} + 0 = \bar{1}$, $\bar{1} + \bar{1} = \bar{1}1$.

Násobenie sa riadi predpismi:

$$1 \times 1 = 1, \quad 0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0 \times \bar{1} = \bar{1} \times 0 = 0, \quad 1 \times \bar{1} = \bar{1} \times 1 = \bar{1}, \quad \bar{1} \times \bar{1} = 1.$$

Trojková rovnovážna sústava je dnes predmetom štúdia a rozpracovávajú sa spôsoby jej použitia v počítačoch. Dvojková sústava dovoľuje s počítačmi komunikovať v tzv. dvojstavovej logike s možnosťami odpovedí „áno“ = 1, „nie“ = 0. Trojstavová logika je bližšia ľudskej logike, nakoľko jej tri stavy dovoľujú odpovedať na otázky „áno“ = 1, „nie“ = $\bar{1}$, „neviem“ = 0. Hlavnou výhodou však je jednoduchá technická realizácia jej aritmetiky. Na logických princípoch trojkovej rovnovážnej sústavy bol postavený napr. sovietsky počítač Setun už v roku 1963.

ZÁVER

Uvedené číselné sústavy predstavujú iba časť možností zovšeobecnenia pojmu číselnej sústavy. Ich použitie môže dať prehľad o spôsoboch zovšeobecňovania poznatkov pri tvorbe matematickej teórie. Dovoľuje tiež vniknúť hlbšie do tajov vykonávania aritmetických operácií počítačmi. A v neposlednej miere dáva prehľad o výhodách a nevýhodách desiatkovej číselnej sústavy.

Literatúra :

- [1] Knuth, D. E.: The Art of Computer Programming, z rus. Iskustvo programmirovaniya dlja EVM, II. Mir, Moskva 1977
- [2] Kasatkin, V. N.: Novoje o sistemach sčislenija. Vyšša škola, Kyjev 1982

Řešením úloh opakujeme geometrii I

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Geometrii nejlépe zopakujeme, řešíme-li nepříliš obtížné geometrické úlohy. Mnoho takových úloh nalezneme v bulharském časopisu *Matematika* a v jugoslávském časopisu *Matematičko fizički list*. Obě tato periodika mají obdobné poslání jako naše Rozhledy; na rozdíl od Rozhledů věnují však značnou část svého obsahu řešení úloh. Vybral jsem z nich (a to z^u různých ročníků) řadu geometrických úloh, které jsem metodicky utřídil. V tomto čísle otiskujeme úlohy, k jejichž řešení stačí v podstatě znalosti geometrie ze základní školy. Nejprve uvedeme věty, které se při řešení těchto úloh používají; jsou očíslovány, abychom se na ně mohli snadno odvolávat. Neuvádíme věty o shodnosti trojúhelníků, které každý čtenář jistě zná.

1. a) Proti delší straně trojúhelníku leží jeho větší vnitřní úhel; proti shodným stranám trojúhelníku leží jeho shodné vnitřní úhly.

b) Proti většímu vnitřnímu úhlu trojúhelníku leží jeho delší strana; proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníku leží jeho shodné strany.

2. a) Součet velikostí všech vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° .

b) Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku je 360° .

3. Dva ostré nebo dva tupé úhly, jejichž ramena jsou vzájemně kolmá, jsou shodné.

4. Budiž ACB konvexní úhel, který není přímý a není pravý; A_1 budiž průsečík přímky BC s kolmicí k této přímce vedenou bodem A . Potom platí:

a) Je-li úhel ACB ostrý, je A_1 vnitřní bod polopřímky CB (obr. 1).

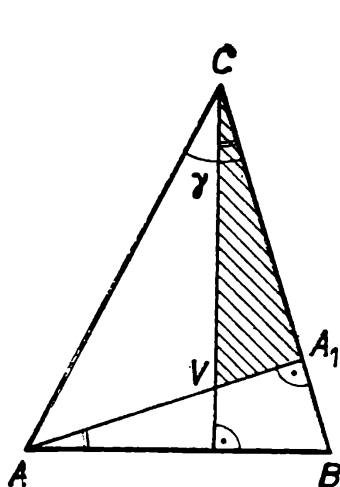
b) Je-li úhel ACB tupý, je A_1 vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce CB (obr. 2).

5. Výšky trojúhelníku procházejí týměž bodem V . Je-li trojúhelník ostroúhlý, leží bod V uvnitř tohoto trojúhelníku (obr. 1). Je-li trojúhelník tupoúhlý, leží bod V vně tohoto trojúhelníku, a to uvnitř úhlu, který je vrcholový k tupému úhlu tohoto trojúhelníku (obr. 2).

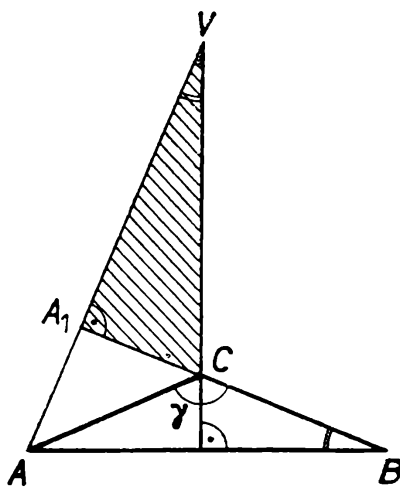
6. Nechť jsou v rovině dány dvě různé přímky CB , ER (obr. 6) a přímka CR , která je protíná; potom platí:

a) Jsou-li přímky CB , ER rovnoběžné, jsou střídavé úhly BCR , CRE shodné.

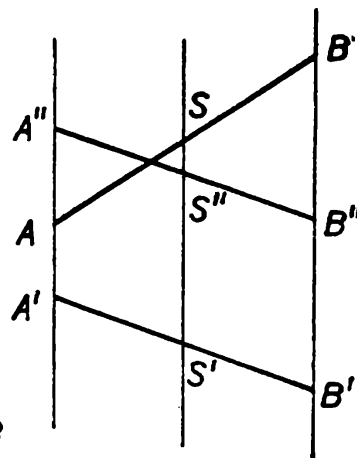
b) Jsou-li tyto střídavé úhly shodné, jsou přímky CB , ER rovnoběžné.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Důsledek: Součet velikostí dvou vnitřních úhlů rovnoběžníku, které přiléhají k téže jeho straně (např. úhly BCE , CER na obr. 6), je 180° . Protější vnitřní úhly rovnoběžníku jsou shodné.

7. Necht A , B jsou různé body roviny. Potom množina vrcholů všech pravých úhlů AVB ležících v této rovině je kružnice mající průměr AB (nad průměrem AB); body A , B k této množině nepatří.

8. Úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku (zvaná *střední příčka trojúhelníku*), je rovnoběžná s jeho třetí stranou; její délka je rovna polovině délky této strany.

9. a) Úsečka, která spojuje středy ramen lichoběžníku (zvaná *střední příčka lichoběžníku*), je rovnoběžná s jeho základnami; její délka je rovna aritmetickému průměru délek základů.

b) Úsečka, která spojuje středy protějších stran rovnoběžníku (zvaná *střední příčka rovnoběžníku*), je rovnoběžná a jeho druhými dvěma stranami a prochází jeho středem.

10. Průsečík úhlopříček AC , BD rovnoběžníku $ABCD$ (zvaný *střed rovnoběžníku*) je společným středem úseček AC , BD .

11. Každý průměr kružnice je její osou souměrnosti.

12. Výška k základně rovnoramenného trojúhelníku je jeho osou souměrnosti.

Na obr. 3 jsou přímky AA' , BB' rovnoběžné; bod S je středem úsečky AB a bod S' je středem úsečky $A'B'$; podle části a) věty 9 je $SS' \parallel AA'$. Přímka SS' protíná přímku $A''B'' \parallel A'B'$ v bodu S'' ; z části b) věty 9 a z toho, že bodem S prochází jediná rovnoběžka k přímce BB' , plyne že bod S'' je středem úsečky $A''B''$. O bodech A' , A'' říkáme, že jsou *rovnoběžnými průměty* bodu A ; obdobně nazýváme body B' , B'' rovno-

běžnými průměty bodu B atd. O úsečkách $A'B'$, $A''B''$ říkáme, že jsou rovnoběžnými průměty úsečky AB . Z uvedeného výkladu plyne, že platí tato věta:

13. Střed S' úsečky $A'B'$, která je rovnoběžným průmětem úsečky AB , je rovnoběžným průmětem středu S úsečky AB .

Úloha 1. V trojúhelníku ABC je nejdelší stranou úsečka AB ; sestrojme na prodloužení této strany za bod B bod M tak, aby úsečka BM byla shodná s úsečkou BC . Máme dokázat, že úhel ACM je tupý.

Důkaz. Obrázek si čtenář snadno načrtne; budiž $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Podle části a) věty 1 je $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle BMC| = \delta$. Podle části věty 2 je

$$\alpha + \delta + (\gamma + \delta) = 180^\circ \quad (1)$$

Podle části a) věty 1 je $\gamma > \alpha$; proto je $\gamma + \delta > \alpha + \delta$. Z toho podle rovnosti (1) plyne, že je $\gamma + \delta > 90^\circ$; úhel ACM je tedy tupý.

Úloha 2. Průsečík výšek trojúhelníku ABC , který není pravoúhlý, označme V ; předpokládejme, že úsečky AB , VC jsou shodné. Máme vypočíst velikost γ úhlu ACB .

Řešení. Průsečík přímky BC s výškou ke straně BC označme A_1 (obr. 1, 2).

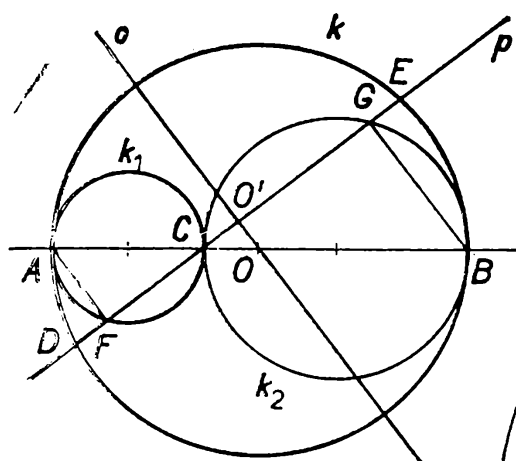
a) Nechť trojúhelník ABC je ostroúhlý. Potom podle části a) věty 4 leží bod A_1 uvnitř polopřímky BC i uvnitř polopřímky CB ; proto je vnitřním bodem úsečky BC , která je průnikem polopřímek BC , CB . Podle věty 5 leží bod V uvnitř trojúhelníku ABC , a tedy uvnitř úsečky AA_1 (obr. 1). Úhly VA_1C , BA_1A jsou pravé a podle věty 3 jsou ostré úhly CVA_1 , ABA_1 shodné; podle předpokladu je $|VC| = |AB|$. Z toho plyne, že

$$\triangle VA_1C \cong \triangle BA_1A \quad (usu)$$

Proto úsečky A_1C , A_1A jsou shodné; pravoúhlý trojúhelník AA_1C s přeponou AC je tedy rovnoramenný. Podle části a) věty 1 a podle věty 2 je $\gamma = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACA_1| = |\sphericalangle CAA_1| = 45^\circ$

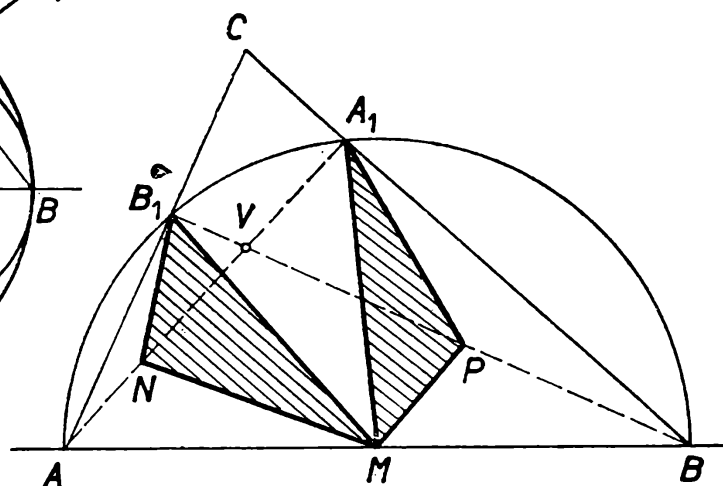
Čtenář se snadno přesvědčí, že právě provedený důkaz probíhá stejně, jestliže některý z vnitřních úhlů trojúhelníku ABC přilehlých ke straně AB je tupý. Označíme-li vrchol tohoto tupého úhlu A_1 , leží bod A_1 opět mezi body B , C , ale podle části b) věty 4 leží bod A uvnitř úsečky VA_1 .

b) Nechť v trojúhelníku ABC je úhel ACB tupý. Potom podle části b) věty 4 leží bod A_1 uvnitř polopřímky opačné k polopřímce CB (obr. 2). Podle věty 5 leží bod V uvnitř úhlu, který je vrcholový k vnitřnímu úhlu ACB ; proto bod A_1 leží mezi body A , V . Důkaz však probíhá stejně jako v případě a) až k tomuto kroku:



Obr. 4

Obr. 5



$|\sphericalangle ACA_1| = |\sphericalangle CAA_1| = 45^\circ$. Protože bod A_1 leží na prodloužení polopřímky CB za bod C , je

$$\gamma = |\sphericalangle ACB| = 180^\circ - |\sphericalangle ACA_1| = 135^\circ$$

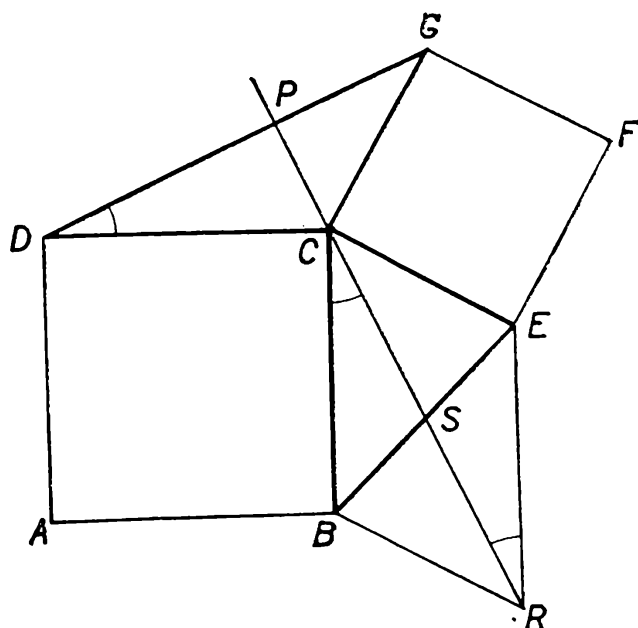
Úloha 3. Uvnitř průměru AB kružnice k je zvolen bod C a nad průměry AC , BC jsou sestrojeny kružnice k_1 , k_2 ; bodem C je vedena přímka $p \neq AB$, která není kolmá k přímce AB (obr. 4). Průsečíky přímky p s kružnicí k jsou body D , E a její průsečíky s kružnicemi k_1 , k_2 jsou po řadě body $F \neq C$, $G \neq C$. Máme dokázat, že úsečky DF , GE jsou shodné.

Důkaz. Vedme středem O kružnice k přímku $o \perp p$ a sestrojíme její průsečík O' s přímku p . Podle věty 7 jsou úhly AFC , BGC pravé, takže je $AF \perp p$, $BG \perp p$. Protože kolmice k téže přímce jsou rovnoběžné, je $AF \parallel BG \parallel OO'$. Body O' , F , G jsou po řadě rovnoběžné průměty bodů O , A , B na přímku p a bod O je středem úsečky AB . Podle věty 13 je bod O' středem úsečky FG ; z věty 11 plyne, že bod O' je také středem úsečky DE . Z toho plyne, že úsečky DA , GE jsou shodné.

Úloha 4. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou sestrojeny výšky ke stranám BC , AC protínající tyto strany po řadě v bodech A_1 , B_1 (obr. 5); bod V je průsečík výšek trojúhelníku ABC . Body M , N , P jsou po řadě středy úseček AB , AV , BV ; máme dokázat, že $\triangle MPA_1 \cong \triangle B_1NM$.

Řešení. Z části a) věty 4 plyne (viz počátek řešení úlohy 2), že bod A_1 leží uvnitř strany BC a bod B_1 leží uvnitř strany AC . Podle věty 5 leží bod V uvnitř trojúhelníku ABC , a tedy uvnitř úseček AA_1 , BB_1 . Podle věty 7 leží body A_1 , B_1 na kružnici k opsané nad průměrem AB ; proto je

$$|MA_1| = |MB_1| \quad (1)$$



Obr. 6

Podle věty 7 leží bod A_1 také na kružnici opsané nad průměrem BV ; proto je $|PA_1| = |PB| = |PV|$. Protože úsečka MN je střední příčka trojúhelníku ABV , je (podle věty 8) $|MN| = |PB|$, a tedy je

$$|PA_1| = |MN| \quad (2)$$

Zcela obdobně zjistíme, že je

$$|MP| = |NB_1| \quad (3)$$

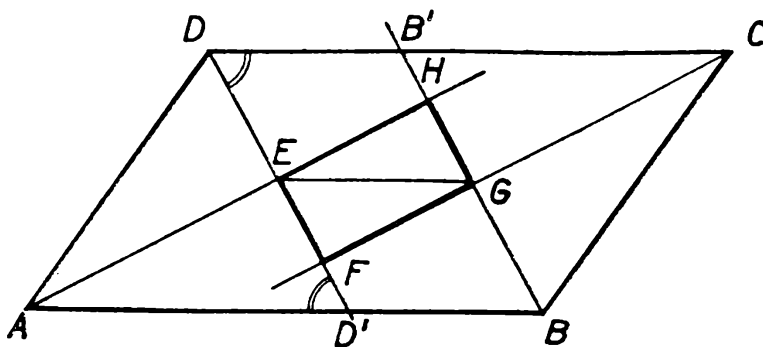
Z (1), (2) a (3) plyne, že je $\triangle MPA_1 \cong \triangle B_1NM$.

Úloha 5. Čtverec $ABCD$ a čtverec $CEFG$ mají společný jedině bod C ; zároveň úhel DCG je tupý (obr. 6) nebo pravý (obrázek si čtenář načrtne). Máme dokázat, že těžnice trojúhelníku CEB ke straně BE a výška ke straně DG trojúhelníku DCG leží v téže přímce.

Důkaz. Sestrojme rovnoběžník $CERB$ a jeho úhlopříčky BE , CR ; podle věty 10 je průsečík S těchto úhlopříček jejich společným středem. Proto úsečka CS je těžnicí trojúhelníku CEB . Vedme bodem C kolmici k přímce DG a sestrojme její průsečík P s touto přímkou. Podle předpokladu je úhel DCG tupý (obr. 6) nebo pravý; z části a) věty 2 plyne, že úhly CDG , CGD jsou ostré. Z části a) věty 4 plyne (obdobně jako na počátku řešení úlohy 2), že bod P je vnitřní bod úsečky DG ; proto

$$\text{úhel } CDP \text{ splývá s úhlem } CDG. \quad (1)$$

Bod P leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině DCB a bod R leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině CBA . Proto úhel s rameny CP , CR , jehož vnitřní body jsou body D , B , je grafickým součtem úhlů DCP , DCB , BCR ; přitom úhel DCB je pravý. Dokážeme-li, že součet úhlů



Obr. 7

$\angle DCP, \angle BCR$ je úhel pravý, pak tím dokážeme, že body P, C, R leží v přímce.

Protože úhel DCG je tupý nebo pravý a úhly DCB, ECG jsou pravé, je úhel BCE ostrý (obr. 6) nebo pravý (je-li úhel DCG pravý). Je-li úhel BCE ostrý, je podle důsledku věty 6 úhel CER tupý. Ramena tupých úhlů DCG, REC jsou vzájemně kolmá; podle věty 3 jsou tyto úhly shodné. Z toho a z konstrukce bodů E, R plyne, že je

$$\triangle DCG \cong \triangle REC, \triangle REC \cong \triangle CBR;$$

proto je $\triangle DCG \cong \triangle CBR$. Čtenář snadno zjistí, že to platí i tehdy, je-li úhel DCG pravý. Je tedy

$$|\sphericalangle CDG| = |\sphericalangle BCR| \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne, že je $|\sphericalangle CDP| = |\sphericalangle BCR|$; proto je

$$|\sphericalangle BCR| + |\sphericalangle DCP| = |\sphericalangle CDP| + |\sphericalangle DCP| = 90^\circ.$$

Úloha 6. Nechť $ABCD$ je obdélník nebo kosodélník, jehož strany AB, AD mají po řadě velikosti a, b ($a > b$). Máme dokázat, že osy vnitřních úhlů tohoto rovnoběžníku omezují pravoúhelník, jehož úhlopříčka má délku $d = a - b$.

Důkaz. Označme vrcholy daného rovnoběžníku $ABCD$ tak, aby úhel BAD byl ostrý (obr. 7) nebo pravý (jde-li o obdélník). Potom osa úhlu ADC protíná polopřímku AB v bodu D' ; je tedy $|\sphericalangle ADD'| = |\sphericalangle CDD'|$. Podle části a) věty 6 je také $|\sphericalangle CDD'| = |\sphericalangle AD'D|$; podle části b) věty 1 je trojúhelník ADD' rovnoramenný se základnou DD' . Protože je $AD < AB$, leží bod D' uvnitř úsečky AB . Z věty 12 plyne, že výška k základně DD' je osou úhlu DAD' a prochází středem E úsečky DD' ; zároveň je kolmá k přímce DD' . Obdobně zjistíme, že osa úhlu ABC protíná úsečku CD v jejím vnitřním bodu B' a že trojúhelník $BB'C$ je rovnoramenný se základnou BB' ; jeho výška k základně BB' prochází jejím středem G .

Podle důsledku věty 6 jsou úhly ABC , ADC shodné, a proto jsou shodné také úhly ADD' , ABB' , čili úhly $AD'D$, ABB' . Z toho podle části b) věty 6 plyne, že je $DD' \parallel BB'$. Obrazec $D'BB'D$ je tedy rovnoběžník se střední příčkou EG . Podle části b) věty 9 je $EG \parallel D'B$ a zároveň je

$$|EG| = |D'B| = |AB| - |AD'| = a - b.$$

Zároveň je zřejmé, že je $AE \perp BB'$, takže obrazec $EFGH$ na obr. 7 je pravoúhelník s úhlopříčkou EG .

Trojúhelníková a Cauchyova nerovnost

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

S Cauchyovou nerovností jste se mohli v Rozhledech setkat celkem nedávno, a to v článcích [1] a [2]. Připomeňme si ji ve vektorovém tvaru. Podle ní pro každé dva vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ z vektorového prostoru, v němž je definován skalární součin, platí

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|, \quad (1)$$

kde $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|$ je absolutní hodnota skalárního součinu vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ jsou po řadě velikosti vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Rovnost nastává, právě když jsou vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ lineárně závislé.

Nerovnost (1) má velmi jednoduchý geometrický význam. Jsou-li vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ nenulové a svírají-li úhel φ , pak nerovnost (1) lze psát ve tvaru:

$$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$|\cos \varphi| \leq 1,$$

která je splněna pro každý úhel φ .

Dále si ukážeme, že Cauchyovu nerovnost lze dokázat ještě jinak, než se uvádí v článcích [1], [2] a v knížce [3]. Využijeme trojúhelníkové nerovnosti.

Nechť $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou dva libovolné vektory. Potom podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \quad (2)$$

přítom rovnost nastává, právě když existuje nezáporné číslo k , pro které platí $\mathbf{a} = k \cdot \mathbf{b}$ nebo $\mathbf{b} = k \cdot \mathbf{a}$.

Nerovnost (1) dokážeme nepřímým důkazem. Nechť existují takové vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, pro které je

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| > |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|, \quad (3)$$

tj.

$$\varepsilon (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) > |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|, \quad (4)$$

kde $\varepsilon = 1$, jestliže je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \geq 0$, a $\varepsilon = -1$, jestliže je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$. Nerovnost (4) vynásobíme dvěma a k oběma jejím stranám přičteme $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$.

Dostáváme tak nerovnost

$$\mathbf{a}^2 + 2 \cdot (\varepsilon \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 > |\mathbf{a}|^2 + 2 \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2,$$

při jejíž úpravě, která přihlíží k tomu, že $|\varepsilon| = 1$, docházíme k nerovnosti

$$(\varepsilon \mathbf{a} + \mathbf{b})^2 > (|\varepsilon \mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2.$$

Z poslední nerovnosti plyne

$$|\varepsilon \mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\varepsilon \mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad (5)$$

což je spor s trojúhelníkovou nerovností (2) pro vektory $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{a}$ a $\mathbf{v} = \mathbf{b}$. Nerovnost (3) tedy neplatí pro žádné dva vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, čímž je dokázáno, že pro každé dva vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí Cauchyova nerovnost (1).

Zbývá nyní ještě zjistit, kdy nastává v nerovnosti (1) rovnost, tj. platí

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \quad (6)$$

Prohlédneme-li si nerovnosti (3), (4) a (5), zjistíme: Jestliže platí rovnost (6), pak platí rovnost

$$|\varepsilon \mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\varepsilon \mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

takže podle toho, co jsme uvedli za nerovností (2), potom existuje takové číslo $k \geq 0$, že

$$k \cdot \varepsilon \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{nebo} \quad \varepsilon \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{b}$$

Tedy platí-li v nerovnosti (1) rovnost, pak vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ jsou lineárně závislé.

Také obráceně snadno zjistíme: Jestliže jsou vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ lineárně závislé, pak v nerovnosti (1) nastává rovnost. Totiž z lineární závislosti vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ plyne existence reálného čísla h , pro které platí $\mathbf{a} = h \cdot \mathbf{b}$ nebo $\mathbf{b} = h \cdot \mathbf{a}$. Dosadíme-li podle kterékoli z těchto rovností do nerovnosti (1), vidíme, že v nerovnosti (1) nastává rovnost.

V posledních dvou odstavcích jsme tedy dokázali, že v Cauchyově nerovnosti (1) nastává rovnost, právě když vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ jsou lineárně závislé.

Poznámka. Cauchyova nerovnost bývá též někdy nazývána nerovností *Cauchyovou* — *Bunjakovského*, popř. *Schwarzovou* podle dalších dvou matematiků, kteří ji zobecnili.

Cvičení

1. Vyjděte z Cauchyovy nerovnosti pro vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a odvoďte z ní trojúhelníkovou nerovnost pro vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.
2. Zapište Cauchyovu nerovnost pro vektory z n -rozměrného aritmetického vektorového prostoru, kde n je přirozené číslo, v němž je skalární součin pro každé dvě uspořádané n -tice reálných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ definován takto:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$
 Cauchyovu nerovnost pro tento případ naleznete též v člancích [1] [2] a v knížce [3].

3. Dokažte, že pro každou n -tici reálných čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ platí:

$$a) \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2$$

$$b) x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1$$

Zjistěte, kdy v uvedených nerovnostech platí rovnost.

Literatura

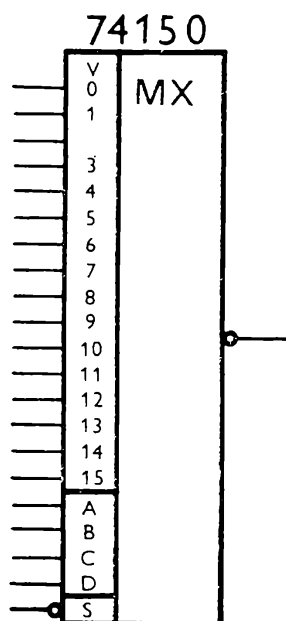
- 1] L. Vaňatová: Jak využít diskriminanty k důkazům, RMF č. 7, roč. 61, 1981/83, s. 277
- [2] J. Mída: O jedné metodě důkazu nerovností, RMF č. 7, roč. 62, 1983/84, s. 277
- [3] A. Kufner: Nerovnosti a odhady, ŠMM, svazek 39, Mladá fronta, Praha 1975

Integrované logické obvody MSI

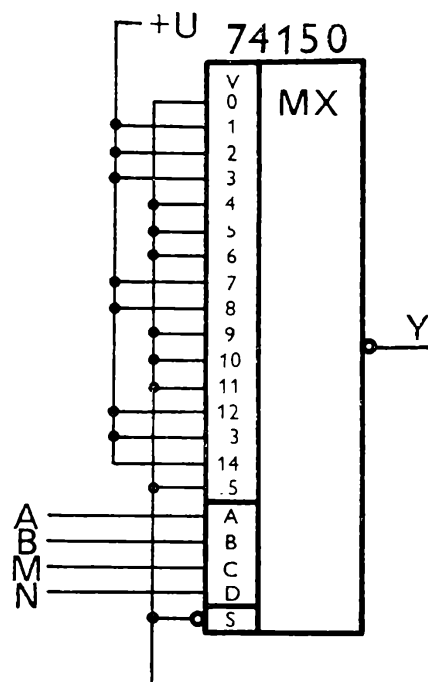
IVAN FISCHER, CSc., PedF UK v Praze

Ve článku (3) jsme se zabývali integrovanými logickými obvody nízkého stupně integrace, ve kterých bylo pomocí několika tranzistorů sestaveno jeden až šest logických členů realizujících základní logické funkce.

Možnost umístit do jednoho pouzdra integrovaného obvodu i několik desítek tranzistorů vedla ke konstrukci složitějších logických integrova-



Obr. 1



Obr. 2

ných obvodů středního stupně integrace, zvaných MSI (Medium Scale Integration). V jednom pouzdru tak nejsou jen jednotlivé logické členy, ale celé sítě takovýchto členů, které pak realizují již dosti složité logické funkce. Mezi logické obvody MSI patří především registry, čítače, posuvné registry, klopné obvody atd., tedy logické obvody používané k číslicovému zpracování informací, se kterými se také postupně seznámíme. Dnes se však podíváme na dva čistě logické kombinační obvody MSI, na multiplexery a na dekodéry.

Nejprve se zastavíme u obvodu Tesla MH 74150. Je ve větším pouzdře než obvody SSI, a to s dvanácti vývody po obou stranách. Na obrázku 1 vidíme jeho schematickou značku. Představu o logické funkci zvané *multiplexer* získáme z tabulky 1 jejích pravdivostních hodnot. Obvod realizuje logickou funkci

$$Y = \overline{V_0} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_1} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_2} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_3} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_4} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_5} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_6} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_7} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_8} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_9} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_{10}} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_{11}} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_{12}} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_{13}} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_{14}} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} + \overline{V_{15}} \overline{D} \overline{C} \overline{B} \overline{A} \overline{S} \quad (1)$$

(kde součin značí konjunkci a součet disjunkci). Prohlédneme-li si tabulku i funkční rovnici, pak zjistíme, že je-li „výběrový vstup“ $S = 1$ (select – výběr), je $Y = 1$ bez ohledu na logické hodnoty ostatních vstupů. Je-li naopak $S = 0$, je na výstupu Y negace té logické hodnoty „datového vstupu“ V_i , u kterého je pravdivá kombinace logických hodnot „adresových vstupů“ D, C, B, A či jejich negací.

Chápeme-li uspořádanou čtveřici logických hodnot $DCBA$ jako číslo

Tabulka 1

i	Vstupy																Výstup						
	S	D	C	B	A	V ₀	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V ₆	V ₇	V ₈	V ₉	V ₁₀	V ₁₁	V ₁₂	V ₁₃	V ₁₄	V ₁₅	Y	
0	0	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
0	0	0	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
1	0	0	0	0	1	—	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
1	—	—	—	—	—	—	—	1	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
2	0	0	0	0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
2	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
3	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
3	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
4	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
4	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
5	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
5	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
6	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
6	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
7	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
7	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
8	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
8	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
9	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
9	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
10	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
10	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
11	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
11	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
12	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
12	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
13	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
13	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
14	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
14	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
15	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
15	0	0	0	0	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Poznámka: značka „—“ představuje libovolnou logickou hodnotu, tj. 0 nebo 1.

zapsané ve dvojkové číselné soustavě (logické hodnoty 0 a 1 pokládáme za cifry 0 a 1 ve dvojkové soustavě), potom podle vztahu

$$i = D \cdot 2^3 + C \cdot 2^2 + B \cdot 2^1 + A \cdot 2^0 \quad (2)$$

a můžeme říci, že při $S = 0$ je $Y = \overline{V_i}$, kde i je dáno vztahem (2). (Ve vztahu (2) značí $\cdot$ násobení a $+$ sčítání.) Vztah (2) nám dává tušit souvislost mezi logickými obvody a aritmetikou ve dvojkové číselné soustavě, kterou se budeme později také zabývat.

Základním určením logické funkce multiplexeru je její zapojení jako přepínače šestnácti vstupních dat V_i na jeden výstup Y (v závislosti na nastavené adrese $DCBA$).

Úloha 1: Navrhněte logický obvod sestavený z multiplexeru a z logických obvodů popsaných v článku (3) tak, aby při $A = B = C = D = 0$ svítila svítivá dioda X právě tehdy, byl-li rozpojen alespoň jeden kontakt na dveřích či oknech střeženého objektu, a aby bylo možné změnami logických hodnot A, B, C, D a svícením diody X zjišťovat, který z kontaktů byl rozpojen.

Při konstrukci obvodů MSI se ukázalo, a platí to dosti obecně, že cena logického obvodu není přímo úměrná jeho složitosti. Složitější obvod je relativně levnější. Proto je někdy levnější (a vždy jednodušší a snazší) zapojit „středně složitou“ logickou funkci jako speciální případ „složitější“ logické funkce než jako funkci složenou ze základních logických členů.

Ve článku (3) jsme se zabývali cenou logické funkce

$$X = (AB) MN + (A + B) \overline{M}N + (\overline{A}B) M\overline{N} + (\overline{A} + \overline{B}) \overline{M}\overline{N} \quad (3)$$

složené různým způsobem z negací, konjunkcí, disjunkcí či funkcí NAND. Nejlevnější zapojení jsme našli za 40,50 Kčs.

Integrovaný logický obvod MH 74150 dnes stojí 37 Kčs. Pomocí jednoho jediného tohoto obvodu můžeme zapojit logickou funkci (3). K tomu zapojíme proměnné A, B, M, N na vstupy A, B, C, D multiplexeru a datové vstupy V_i připojíme k logickým konstantám 0 a 1 takto: $V_0 = 0, V_1 = V_2 = V_3 = 1, V_4 = V_5 = V_6 = 0, V_7 = V_8 = 1, V_9 = V_{10} = V_{11} = 0, V_{12} = V_{13} = V_{14} = 1, V_{15} = 0$ a konečně zapojíme $S = 0$. Pak nám po tomto dosazení funkce multiplexeru realizuje funkci (4),

$$Y = \overline{M}\overline{N}\overline{B}A + \overline{M}\overline{N}B\overline{A} + \overline{M}N\overline{B}A + \overline{M}NB\overline{A} + M\overline{N}\overline{B}\overline{A} + \\ + M\overline{N}B\overline{A} + MN\overline{B}\overline{A} + MN\overline{B}A, \quad (4)$$

která je ekvivalentní s funkcí (3).

Na obrázku 2 je schéma zapojení multiplexeru MH 74150 realizujícího logickou funkci (3) v jejím tvaru (4). Potřebné logické souvislosti vidíme i z tabulky 2. Multiplexer je vlastně při realizaci logické funkce jakousi tabulkou pravdivostních hodnot pouze s tím rozdílem, že do řádku

Tabulka 2

i	$D = N$	$C = M$	B	A	X	V_i	Y
0	0	0	0	0	1	$V_0 = 0$	1
1	0	0	0	1	0	$V_1 = 1$	0
2	0	0	1	0	0	$V_2 = 1$	0
3	0	0	1	1	0	$V_3 = 1$	0
4	0	1	0	0	1	$V_4 = 0$	1
5	0	1	0	1	1	$V_5 = 0$	1
6	0	1	1	0	1	$V_6 = 0$	1
7	0	1	1	1	0	$V_7 = 1$	0
8	1	0	0	0	0	$V_8 = 1$	0
9	1	0	0	1	1	$V_9 = 0$	1
10	1	0	1	0	1	$V_{10} = 0$	1
11	1	0	1	1	1	$V_{11} = 0$	1
12	1	1	0	0	0	$V_{12} = 1$	0
13	1	1	0	1	0	$V_{13} = 1$	0
14	1	1	1	0	0	$V_{14} = 1$	0
15	1	1	1	1	1	$V_{15} = 0$	1

i dosazujeme pomocí V_i opačnou logickou hodnotu, než bychom psali do tabulky pravdivostních hodnot.

Pro stavbu přepínačů osmi vstupů na jeden výstup či pro snadné generování logických funkcí tří proměnných slouží integrovaný logický obvod MH 74151. Proti obvodu MH 74150 má jen osm datových vstupů V_0 až V_7 , tři adresové vstupy A , B , C a má rovněž výběrový vstup S . Navíc má kromě „negovaného výstupu“ i „přísmý výstup“. Obvod MH 74151 tak představuje společné zapojení dvou logických funkcí

$$X = V_0 \overline{CBAS} + V_1 \overline{CBAS} + V_2 \overline{CBAS} + V_3 \overline{CBAS} + \\ + V_4 \overline{CBAS} + V_5 \overline{CBAS} + V_6 \overline{CBAS} + V_7 \overline{CBAS}, \quad (5)$$

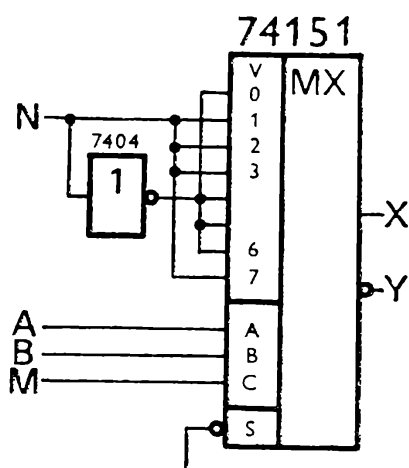
$$Y = \overline{X} \quad (6)$$

Dosadíme-li nyní A , B , M za A , B , C , $S = 0$ a $V_0 = \overline{N}$, $V_1 = V_2 = V_3 = N$, $V_4 = V_5 = V_6 = \overline{N}$ a $V_7 = N$, potom se tímto dosazením funkce (5) změní na funkci (7), která je opět ekvivalentní s funkcí (3), neboť je to její úplná normální disjunktivní forma

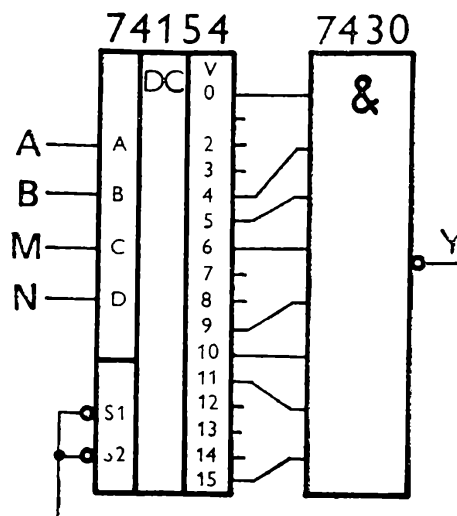
$$X = \overline{N} \overline{M} \overline{B} \overline{A} + N \overline{M} \overline{B} \overline{A} + N \overline{M} \overline{B} \overline{A} + N \overline{M} \overline{B} \overline{A} + \overline{N} \overline{M} \overline{B} \overline{A} + \\ + \overline{N} \overline{M} \overline{B} \overline{A} + \overline{N} \overline{M} \overline{B} \overline{A} + N M B A \quad (7)$$

Schéma zapojení je na obrázku 3. Jeho cena je 35,50 Kčs, 22 Kčs za MH 74151 plus 13,50 za MH 7404, ze kterého je využita jenom jedna šestina (obsahuje šest invertorů).

Obecně může být použito při dosazování logických hodnot za V_i čtyř



Obr. 3



Obr. 4

možností: $V_i = 1$, $V_i = 0$, $V_i = N$ a $V_i = N$. Takto lze pomocí multiplexeru MH 74151 a invertoru realizovat libovolnou logickou funkci čtyř proměnných a pomocí MH 74150 a invertoru libovolnou funkci pěti proměnných.

Úloha 2: Pomocí multiplexerů a dalších logických členů se pokuste upravit zapojení příkladů a úloh ze článku (2) — regulaci správné teploty vody v akváriu.

Druhým typem logických integrovaných obvodů MSI jsou *dekodéry*. Proti multiplexerům je to naopak soustava několika logických funkcí v jediném pouzdru. Obvod MH 74154 je dekodérem ze dvojkové do šestnáctkové (či desítkové) číselné soustavy. Logické hodnoty D, C, B, A chápáné jako cifry dvojkové soustavy umožňují vyjádřit čísla od nuly do patnáctky. Výstupy jsou označeny V_i a platí pro ně vztahy

$$V_0 = \overline{DCBA} \overline{S_1} \overline{S_2},$$

$$V_1 = \overline{DCBA} \overline{S_1} S_2,$$

...

$$V_{15} = \overline{DCBA} S_1 S_2.$$

Je-li alespoň na jednom výběrovém vstupu S logická hodnota 1, je na všech výstupech rovněž logická hodnota 1. Je-li $S_1 = S_2 = 0$, je $V_i = 0$ (kde i je vyjádřeno podle (2) logickými hodnotami D, C, B, A) a na všech ostatních výstupech pro $j \neq i$ je $V_j = 1$. Logická hodnota 0 je tedy jenom na tom výstupu, jehož adresa je nastavena na vstupech D, C, B, A .

Zapojíme-li nyní novou logickou funkci pomocí dekodéru MH 74154 a osmivstupového logického členu NAND MH 7430, položíme-li $S_1 = S_2 = 0$ a A, B, M, N dosadíme-li za A, B, C, D tak, že

$$Y = \overline{V_0 V_4 V_5 V_6 V_9 V_{10} V_{11} V_{15}}, \quad (8)$$

potom opäť dostávame logickou funkciu, ktorá je ekvivalentná s logickou funkciou (3). Schéma zapojenia je na obrázku 4 a jeho cena je 50,50 Kčs; 37 Kčs za MH 74154 a 13,50 za MH 7430.

Kromě MH 74154 se vyrábí dekodér MH 7442 ze dvojkové do desítkové soustavy. Proti obvodu MH 74154 postrádá výstupy V_{10} až V_{15} a vstupy S_1 a S_2 . Obdobně jako MH 74151 je i MH 7442 umístěn v malém pouzdru s dvakrát osmi výstupy po stranách.

V současné technické praxi se však logické obvody MSI pro generování logických funkcí používají jen zřídka. Další vývojové stádium posledních let — paměťové polovodičové obvody vysokého stupně integrace se dnes pro tyto účely hodí ještě lépe a jejich použití, jak příště uvidíme, je i snáze pochopitelné.

Použitá literatura :

- (1) Fischer I.: Logické obvody z polovodičů. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 62, 1983/84, č. 5, str. 197—202.
- (2) Mazurová I.: Výroková logika a akvárium. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 62, 1983/84, č. 8, str. 331—339.
- (3) Fischer I.: Integrované logické obvody SSI. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 63, 1984/85, č. 1, str. 15-24.
- (4) Bernard J.-M., Hugon J.: Od logických obvodů k mikroprocesorům. Díl 1., SNTL, Praha 1982
- (5) Friedman A. D., Menon P. R.: Teorie a návrh logických obvodů. SNTL, Praha 1983

FYZIKA

Hrozba následkov jadrovej vojny III

Hydrosféra po globálnej jadrovej katastrofe

Doc. dr. JÁN CHRAPAN, CSc., UK Bratislava

Voda, výnimočná látka s dobre známym chemickým vzorcom H_2O je na Zemi už od jej vzniku. Pokrýva tri štvrtiny povrchu našej planéty. Veľké množstvo sa jej nachádza v podobe drobných kvapiek alebo pary v atmosfére. Predstavuje 70 až 90 % hmotnosti biosféry, tvorí základnú zložku tekutého vnútrobunkového prostredia. Vodu preto nevyhnutne potrebujú všetky rastliny i živočíchy. Rovnako nevyhnutná je pre človeka a jeho hospodársku činnosť. Voda je najuniverzálnejším prírodným rozpúšťadlom. Rozpúšťa takmer všetky druhy molekúl a to nielen soli, ale aj organické molekuly. Pre túto svoju vlastnosť je z praktického hľadiska najvýznamnejším sprostredkovateľom geomigrácie — univerzálneho pohybu všetkých chemických látok a ich izotopov geosférami — hydrosférou, litosférou, atmosférou a biosférou. Kolobehom, migračným

cyklom vody sa v priebehu miliónov rokov vytvorila dynamická rovnováha geosfér. Z veľkej časti ju sprostredkováva pohyb čistej vody. Znečistená voda naopak túto rovnováhu narušuje. Stačilo by teda vodu neznečisťovať! Ale práve v tom je kameň úrazu. Civilizačná činnosť má za následok postupné znečistenie hydrosféry. Nukleárna vojna by ju však znečistila v krátkej dobe a v nedozernej miere. Zhodnotíme rádioaktívne zamorenie rezervoárov pitnej vody a oceánov spôsobené globálnou jadrovou vojnou. Nebudeme pri tom hovoriť o možných následkoch deštrukcie vodných diel, hoci musíme zdôrazniť, že v oblastiach priamo vystavených jadrovým výbuchom takéto účinky spôsobia vážne problémy. Narušenie existujúcich systémov zásobovania pitnou a užitkovou vodou by podstatne zvýšilo aj bez toho vysoké číslo, ktoré hovorí, že denne na svete umiera smädom 20 tisíc ľudí.

Pri úvahách podobných tým, do ktorých sa v ďalšom pustíme, vždy treba vychádzať z určitých zjednodušujúcich predpokladov. Hodnovernosť úvah bude záležať od toho, do akej miery sa naše východiskové predpoklady v reálnych podmienkach splnia.

Predpokladajme, že rádioaktívny prach, popol a dym, jednoducho spad, sa v napadnutých oblastiach rozloží rovnomerne. Možno predpokladať, že počas zotrvania rádioaktívneho migrantu v atmosfére, teda čas, za ktorý sa polovičné množstvo zvírených častíc usadí, je asi 2 dni. Rádioaktívne aerosoly vyvrhnuté do stratosféry budú tam mať počas zotrvania 2 roky. Za túto dobu budú mať dosť času na to, aby sa rovnomerne rozložili po celej zemeguli. Pri našich úvahách budeme kalkulovať len s nuklidmi, ktoré majú pomerne dlhé polčasy premeny a vysokú toxicitu. Vznikajú štiepnymi reakciami (tabuľka).

Tabuľka

Nuklid	polčas premeny	energia premeny beta
^{89}Sr	51 dní	1,46 MeV
^{90}Sr	29 rokov	0,54 MeV
^{137}Cs	30 rokov	1,18 MeV
^{106}Ru	1 rok	0,04 MeV

Z genetického hľadiska sú nebezpečné aj nuklidy ^3H , ^{14}C , ^{45}Ca . Tieto vznikajú reakciami zachytu neutrónov. Pri niektorých spomínaných nuklidoch je zvlášť nebezpečná ich pomerne vysoká rozpustnosť vo vodách.

V reálnych podmienkach sa budú líšiť pomery v oblastiach vystavených jadrovej explózii od pomerov v oblastiach, ktoré budú od nej vzdialené, a tiež v oblastiach s rôznymi klimatickými, hydrologickými a pôdnymi podmienkami. Napríklad rozdiely budú medzi suchými a vlhkými oblasťami, alebo medzi oblasťami s hojnými zrážkami, avšak viac-menej rovnomerne rozloženými počas celého roka a oblasťami

a obdobím dažďov a sucha. Závažným momentom bude aj skutočnosť, odkiaľ sa čerpá pitná voda. Napríklad niektoré veľkomestá čerpajú vodu z horizontov, ktoré sú niekedy prekryté nepriepustnými nadložiami, čím sa spomalí imigrácia radionuklidov do týchto vrstiev predovšetkým prostredníctvom kontaminovaných dažďových vôd. Obyvatelia, ktorí čerpajú vodu z takýchto miest, by mohli mať pomerne nezávadnú vodu, ak samozrejme prežili iné následky jadrovej vojny a ak ich čerpací a vodovodný systém bude schopný prevádzky.

Teraz trochu o tvorbe a transporte rádionuklidov. Antropogénne nuklidy vytvorené „bombovým efektom“ migrujú do systému pitnej vody tromi cestami: — povrchovým odtokom, — infiltráciou zo zamorenej pôdy, — prenikaním kontaminovanej spodnej vody do vodných tokov. Vplyv priameho usadzovania spadú možno na povrchu sladkovodných nádrží a vodných tokov na rozdiel od povrchov morí a oceánov zanedbať. Žiarením a neutrónovým tokom indukovaná aktivita od ^3H , ^{14}C a ^{45}Ca nebude hlavnou zložkou rádioaktívneho depozitu. Vápnik silne absorbuje pôdy, takže jeho izotop 45 sa skôr premení, než by migroval do vôd. Výnimkou však budú krasové útvary. Zásoba podzemnej vody v týchto lokalitách bude silne znečistená práve izotopom 45 vápnika. Podobne aj stroncium, cézium a jód litosférou pomaly migrujú, absorbujú sa ešte v priesakovej oblasti, a tak hlbšie položené spodné vody výrazne nekontaminujú. Izotop 106 ruténia však dobre migruje, takže možno očakávať, že sa úplne zmieša so zásobami spodnej vody.

Aby sme si mohli vytvoriť určitú predstavu o zamorení povrchových vôd po jadrovom prepade, uveďme, že okolo roku 1963, keď sa v atmosfére maximálne prejavovali následky skúšok jadrových zbraní, ukázali merania, že dažďová voda v strednej Európe obsahovala asi 18 Bq.l^{-1} zvyškovej aktivity beta. Voda riek mala vtedy o rád nižšiu aktivitu beta. V prípade jadrovej vojny by dosiahla aktivita dažďovej vody rád 10^6 Bq.l^{-1} . Tieto naše veľmi kusé úvahy (systematický rozbor by si vyžiadal celú knihu) môžeme zhrnúť nasledovne: pitnú vodu po jadrovej vojne najviac kontaminujú izotopy z tabuľky a ^{131}I , a to najmä v oblastiach vystavených miestnemu spadu. V oblastiach, vystavených len celosvetovému spadu, to bude prevažne ^{131}I . Ten má však pomerne krátky polčas premeny ($T = 8,01$ dní), takže bude pôsobiť len v prvom období a to v závislosti od vzdušných prúdov. Najmenej zamorené budú rezervoáre spodnej vody. Potom nasledujú jazerá, rieky a nakoniec dažďová voda, ktorá bude mať najvyššiu aktivitu. V oblastiach priamo vystavených lokálnemu spadu bude dažďová voda nebezpečná už pri dotyku s pokožkou. Po 60 hodinách takéhoto dotyku sa začnú na koži objavovať viditeľné zmeny. Obyčajný odev preto neposkytne ochranu. Naopak, keď sa premočí, nebezpečie len zvyšuje. Pri rozsiahlom zničení

obydlí, ktoré bude sprievodným javom jadrového prepadu, môžeme povedať, že aj keď bude ožiarenie z kontaminovanej dažďovej vody v porovnaní s ožiareníím z tuhého spadu malé, predsa mnoho jedincov, vystavených po dlhú dobu dažďu, utrpí až smrteľné ožiarenie. Nemožno vylúčiť výskyt dažďa s koncentrovanou rádioaktivitou, ktorá presiahne priemerné hodnoty o jeden až dva rády. Normami prípustné hladiny aktivity budú o dva až tri rády presiahnuté aj pri tečúcej vode ešte po dobu jedného mesiaca po globálnej jadrovej vojne. Uvedomme si pri tom, že už aktivita na normami prípustnej hranici môže mať genetické následky. Kontaminácia spodnej vody vo veľkých hĺbkach vo väčšine prípadov nepresiahne nebezpečnú hranicu. Filtračný účinok nadložia, následkom ktorého sa budú nestabilné nuklidy zhromažďovať v povrchových vrstvách litosféry a v pôde, spôsobí prenik aktívneho depozitu do potravinového reťazca. Vlhka v koreňovej vrstve rastlín bude mať zvýšenú aktivitu beta predovšetkým od ^3H a ^{14}C .

Povedzme si teraz o možných vplyvoch regionálnych podmienok — terénnych tvarov a charakteru povrchu. Zvýšená kontaminácia povrchovej vody sa môže očakávať v hornatých, vápencových oblastiach (o aké u nás nie je núdza). Ďalej v oblastiach s večným ľadom, v púšťových a močaristých krajocho. V polosuchých oblastiach, kde sa zvykne zachytávať dažďová voda do cisterien, nebude možné túto vodu používať. Tu sú však horizonty spodnej vody veľmi hlboko, a tak budú uchránené pred kontamináciou. Takéto vrstvy sú však bežne ťažko dostupné. Vystane problém, ako ich využiť. V polosuchých oblastiach sa v obdobiach dažďov objavuje povrchová voda. Táto však bude mimoriadne aktívna z vymývania depozitu z horných vrstiev litosféry. V tropických oblastiach je plytko uložená spodná voda a pôdy tu majú malú filtračnú schopnosť. Tieto okolnosti prispievajú k zvýšeniu kontaminácie spodnej vody v trópocho. Výdatné a časté dažde v týchto oblastiach budú po najprv zvyšovať kontamináciu, neskôr po vyčistení atmosféry budú kontaminovanú vodu riediť a tým znižovať jej nebezpečnosť. Možno preto povedať, že po niekoľkých dňoch od jadrového prepadu bude voda v trópocho menej aktívna ako v polosuchých oblastiach. Všeobecne možno povedať, že pitná voda na južnej pologuli bude o niečo menej aktívna ako na pologuli severnej.

Na záver môžeme povedať, že zásoby pitnej vody budú po prípadnej nukleárnej vojne veľmi obmedzené. Ťažké bude získať pitnú vodu zo zásobární spodnej vody. Podstatné bude genetické poškodenie, spôsobené zamorenou pitnou vodou, aj keď bude menšie ako poškodenie, vyvolané žiarením uvoľneným pri jadrovej explózii alebo zo zamorenia potravinových reťazcov.

Zamorenie vody nebude vážnou prekážkou pre jej priemyselné využí-

tie. Jedinou výnimkou bude fotografický priemysel a všetko, čo súvisí s vyvolávaním filmového a fotografického materiálu. Obmedzia sa tým možnosti zdravotníctva. Poľnohospodárstvo príde o regulovateľný systém závlah, použitie chemických hnojív, obsahujúcich vápnik a draslík, zvýši zamorenie pôd jednak v dôsledku kontaminácie hnojív, jednak preto, že ich ióny vytláčajú ióny Sr a Cs a tým ich nútia migrovať.

Situácia v oceánoch nás, obyvateľov vnútrozemia, na prvý pohľad neovplyvňuje. No táto situácia má ďalekosiahly globálny význam. Priama aktivácia povrchových vrstiev morí a oceánov prostredníctvom jadrových reakcií, vyvolaných vo vode, zvýšeným tokom provokujúcich častíc je podľa kontaminácie spadom nepodstatná. Prenikanie rádioaktívnych migrantov do hĺbky oceánov a ich rozloženie v povrchových vrstvách závisí od fyzikálnych, chemických a biologických procesov. Rádionuklidy vnikajú do oceánov v roztokoch, koloidoch alebo časticiach. V hlbokých vodách Pacifiku možno počas zotrvania rádionuklidov odhadnúť na 1000 až 1500 rokov. V plytších nádržiach je táto doba kratšia. Usadeniny na dnách oceánov a morí budú dlhodobým rezervoárom rádionuklidov s dlhým polčasom premeny.

Všimnime si účinok kontaminácie na morskú faunu a flóru. Je všeobecne známe, že nižšie živočíchy sú na ožiarenie menej citlivé ako živočíchy vyššie. Prvoradé nebezpečie pre rastlinnú a živočíšnu ríšu treba však vidieť vo zvýšenom ultrafialovom žiarení, ktoré sa dá očakávať po porušení ozónovej vrstvy oxidmi dusíka v atmosfére. Zvýšený tok ultrafialového žiarenia zničí pripovrchovú vrstvu baktérií a planktón. Tým sa naruší v podstate prvý a najdôležitejší článok potravinového reťazca morských živočíchov.

Ešte 20 rokov po globálnej jadrovej vojne budú v morskej vode nebezpečne vysoké obsahy predovšetkým ^3H , ^{14}C , ^{55}Fe , ^{60}Co , ^{85}Kr , ^{90}Sr , ^{129}I , ^{137}Cs , ^{238}a ^{239}Pu , ^{241}Am a to nie v dôsledku ich polčasov premeny, ale následkom migračných pomerov.

Na koniec môžeme zdôrazniť, že zásadný hazard pri zamorení morí a oceánov spočíva v likvidácii vyšších živočíchov, zničení planktónu a vo vnesení rádionuklidov do biosféry a ohrození potravinového reťazca ľudí.

Na záver nášho rozprávania zdôraznime, že presnejšie riešenie otázky vplyvu globálnej jadrovej vojny na hydrosféru nenasádza na neznalosť jadrovo-fyzikálnych pomerov, ale chýba tu komplexné a dostatočne kompaktné spracovanie otázok pohybu nuklidov v geomigračnom cykle. A čo sa týka osudu celého ľudstva, výsledky ukazujú, že niet reálnych šancí na to, aby sa našiel kút na povrchu Zeme, kam by neprenikli zhubné následky jadrovej vojny.

Frekvenčné charakteristiky elektrických dvojpólov

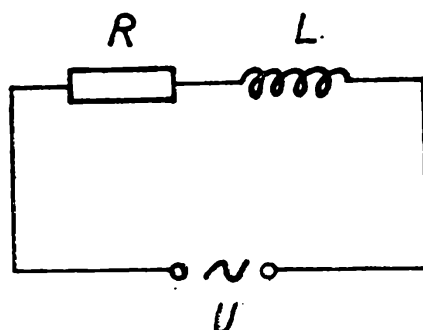
dokončení

Doc. dr. ing. DANIEL KLUVANEC, CSc., PF Nitra

Príklad 2:

Rezistor s odporom $R = 2,8 \text{ k}\Omega$ je spojený za sebou v jednoduchom obvode s cievkou s indukčnosťou $L = 0,20 \text{ H}$ a so zdrojom harmonického napätia $U = 14 \text{ V}$. Napíš vzťahy pre relatívne združené frekvenčné charakteristiky prúdu I , napätia U_R na rezistore a napätia U_L na cievke. Nakresli grafy funkcií

$$\{A_r(I) = f_1(\omega), A_r(U_R) = f_2(\omega), A_r(U_L) = f_3(\omega)\}.$$



Obr. 9

Riešenie, obr. 9.

Zo vzťahov (4), (3), (9), (8), (16) a (13) vyplýva

$$A_r(I) = e^{j\varphi_i} \cos \varphi_i, \operatorname{tg} \varphi_i = -7,1 \cdot 10^{-5} \omega, \varphi_i \in \langle 0, -\frac{\pi}{2} \rangle,$$

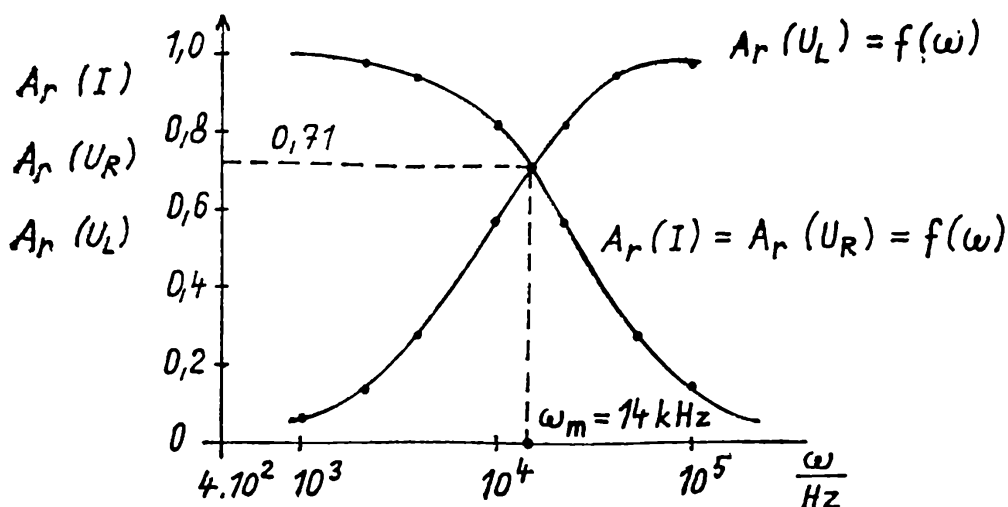
$$A_r(U_R) = e^{j\varphi_R} \cos \varphi_R, \operatorname{tg} \varphi_R = -7,1 \cdot 10^{-5} \omega, \varphi_R \in \langle 0, -\frac{\pi}{2} \rangle,$$

$$e^{j\varphi_L} = e^{j\varphi_L} (\cos \varphi_L, \operatorname{tg} \varphi_L = \frac{1,4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}}{\omega}, \varphi_L \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$$

$$\omega_m = 14 \text{ kHz}.$$

Tab. 3

$\frac{\omega}{\text{kHz}}$	1	2	4	10	20	50	100
$\frac{\varphi_i \varphi_R}{\text{stupeň } ^\circ}$	-4	-8	-16	-35	-55	-74	-82
$\frac{\varphi_L}{\text{stupeň } ^\circ}$	86	82	74	55	35	16	8



Obr. 10

K zostrojeniu skalárnych grafov funkcií $A_r(I) = \cos \varphi_i$, $A_r(U_R) = \cos \varphi_R$, $A_r(U_L) = \cos \varphi_L$ vypočítame a zaznamenáme do tabuľky hodnoty $\cos \varphi_i$, $\cos \varphi_R$, $\cos \varphi_L$.

Tab. 4

$\frac{\omega}{\text{kHz}}$	1	2	4	10	20	50	100
$\cos \varphi_i, \cos \varphi_R$ $A_r(I), A_r(U_R)$	1	0,99	0,96	0,82	0,57	0,18	0,14
$A_r(U_L)$ $\cos \varphi_L$	0,07	0,14	0,28	0,57	0,82	0,96	0,99

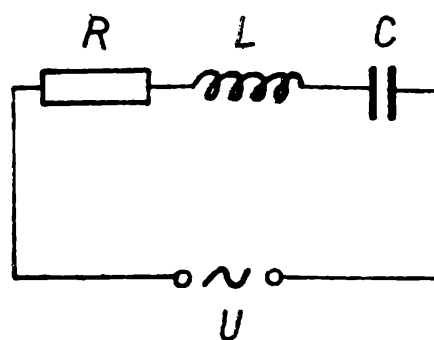
Začiatkové fázy φ_i , φ_R , φ_L sme prevzali z tab. 3. Grafy funkcií $A_r(I)$, $A_r(U_R)$, $A_r(U_L)$ sú na obr. 10. Na osi x pravouhlej súradnicovej sústavy je stupnica frekvencie v logaritmickú mierke ($x = \log \omega$).

Úlohy 6:

1. Prezri si tab. 3. Ako sa menia začiatkové fázy φ_i , φ_R , φ_L s rastúcou frekvenciou ω ?
2. Prezri si tab. 4. Ako sa menia hodnoty $A_r(I)$, $A_r(U_R)$, $A_r(U_L)$ s rastúcou frekvenciou? Súhlasí vyslovené hodnotenie s priebehom funkcie na obr. 20?
3. Z grafu na obr. 10 urč medznú frekvenciu ω_m obvodu.

Príklad 3:

Rezistor s odporom $R = 1,6 \text{ k}\Omega$, cievka s indukčnosťou $L = 0,50 \text{ H}$ a kondenzátor s kapacitou $C = 170 \text{ pF}$ sú spojené v jednoduchom obvode za sebou so zdrojom s napätím $U = 12 \text{ V}$. Urč a) rezonančnú frekvenciu



Obr. 11

ω_r obvodu, b) združenú frekvenčnú charakteristiku pre prúd a znázorni ju graficky. Pomocou nej urč amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku prúdu a frekvenčnú charakteristiku pre začiatočnú fázu φ_i prúdu, c) medzné frekvencie ω_m , d) napätia U_L , U_C na cievke a kondenzátore pri rezonančnej frekvencii.

Riešenie, obr. 11

Impedancia Z obvodu je

$$\begin{aligned} Z &= R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R \left(1 + j \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) = \\ &= R \left[1 + \frac{\omega_r L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right) \right] = R (1 + j Q_s x), \end{aligned} \quad (21)$$

kde $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ je rezonančná frekvencia obvodu, $Q_s = \frac{\omega_r L}{R}$ je

činiteľ kvality obvodu a $x = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}$ je pomerné rozladenie obvodu.

Uvedené označenia sa často používajú, lebo zjednodušujú zápis pri niektorých výpočtoch.

Pri frekvencii $\omega = \omega_r$ $Z = R$. Hovoríme, že obvod je v rezonancii. Pri frekvencii ω_r obvod má elektrické vlastnosti ako jednoduchý obvod s rezistorom s odporom R .

a) $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, dosadením $\omega_r = 108 \text{ kHz}$.

b) Zo vzťahu (21) máme

$$I = \frac{U}{R (1 + j Q_s x)} = \frac{U}{R \sqrt{1 + (Q_s x)^2}} e^{j(\omega t + \varphi_i)} =$$

$$= \frac{U}{R} e^{j\varphi_i} \cos \varphi_i, \quad (22)$$

pritom sme uvážili, že

$$\operatorname{tg} \varphi_i = -Q_s x, \varphi_i \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ a} \quad (23)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (Q_s x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_i}} = \cos \varphi_i.$$

Amplitúdová charakteristika prúdu

$$I = \frac{U}{R} \cos \varphi_i \quad (24)$$

Pre hodnoty veličín zadané v texte príkladu možno písať ($t = 0 \text{ s}$)

$$I = 7,5 \text{ mA } e^{j\varphi_i} \cos \varphi_i, \operatorname{tg} \varphi_i \doteq -34 x$$

$$I = 7,5 \text{ mA } \cos \varphi_i. \quad (25)$$

K určení funkcií (25) sme vopred vypočítali $Q_s = 34$.

K zostrojeniu grafu $I = f(x)$ vypočítame niekoľko sebeodpovedajúcich hodnôt veličín x , φ_i , $\cos \varphi_i$.

Tab. 5

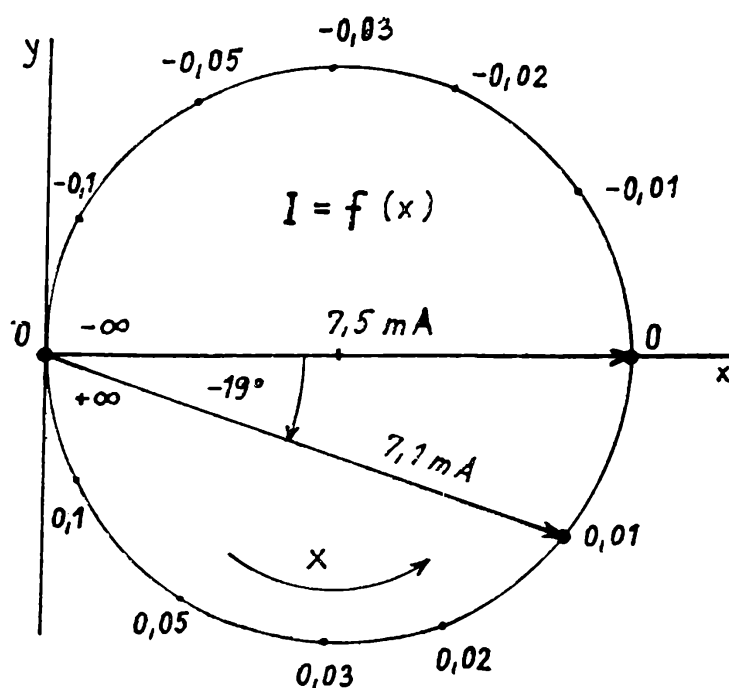
x	-0,1	-0,05	-0,03	-0,02	-0,01
$\frac{\varphi_i}{\text{stupeň } ^\circ}$	76	60	46	34	19
$A_r(I) =$ $= \cos \varphi_i$	0,24	0,50	0,69	0,83	0,95

x	0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,1
$\frac{\varphi_i}{\text{stupeň } ^\circ}$	0	Q-19	-34	-46	-60	-76
$A_r(I) =$ $\cos \varphi_i$	1	0,95	0,83	0,69	0,50	0,24

Graf funkcie (25) je na obr. 12, $1 \text{ mA} \underline{\underline{=}} 0,75 \text{ cm}$.

c) Medzné frekvencie vyplývajú zo vzťahu

$$|Q_s x| = 1,$$



Obr. 12

$$x = \pm \frac{1}{Q_s}.$$

Posledný vzťah možno všeobecne písať

$$\pm \frac{1}{Q_s} = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega},$$

po úprave

$$\omega^2 \mp \frac{\omega_r}{Q_s} \omega - \omega_r^2 = 0,$$

riešením

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\omega_r}{2Q_s} \pm \omega_r \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_s^2}}$$

$$\text{pre } Q_s \gg 1 \quad \omega_{1,2} = \omega_r \pm \frac{\omega_r}{2Q_s} = \omega_r \left(1 \pm \frac{1}{2Q_s} \right)$$

V rezonančnom obvode R, L, C jestvujú dve medzné frekvencie ω

$\omega_h = \omega_r \left(1 + \frac{1}{2Q_s} \right) = \omega_r \left(1 + \frac{x_m}{2} \right)$ je tzv. horný medzný kmitočet, v našom prípade $\omega_h \doteq 109,57$ kHz.

$\omega_d = \omega_r \left(1 - \frac{1}{2Q_s} \right) = \omega_r \left(1 - \frac{x_m}{2} \right)$ je tzv. dolný medzný kmitočet,

$x_m = \frac{1}{Q_s} \doteq 0,029$. V našom prípade $\omega_d \doteq 106,43$ kHz. Ak označíme

$$\omega_r \frac{x_m}{2} = \Delta \omega, \quad \Delta \omega \doteq 1,57 \text{ kHz}, \quad \omega_h = \omega_r + \Delta \omega, \quad \omega_d = \omega_r - \Delta \omega.$$

d) Pre napätia U_L na cievke, U_C na kondenzátore v rezonancii máme

$$U_L = \frac{U}{R(1 + jQx)} j\omega_r L = j U \omega_r L R = jQ_s U,$$

$$U_C = \frac{U}{R(1 + jQx)} \left(-j \frac{1}{\omega_r C} \right) = -jU \frac{1}{\omega_r RC} = -jQ_s U,$$

$$\text{lebo v rezonancii } x = 0; \quad Q_s = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r RC}$$

Amplitúdy napätí $U_L = U_C = 408 \text{ V}$. Odidve napätia majú

$$\text{však opačné začiatkové fázy } \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

Poznámky: na obr. 13 je graf funkcie $A_r(I) = \cos \varphi_i = f(x)$ pre určený obvod. Čiarkovane sme znázornili charakteristiky pre iné obvody, kde $Q_{s1} = 150$, $Q_{s2} = 5$.

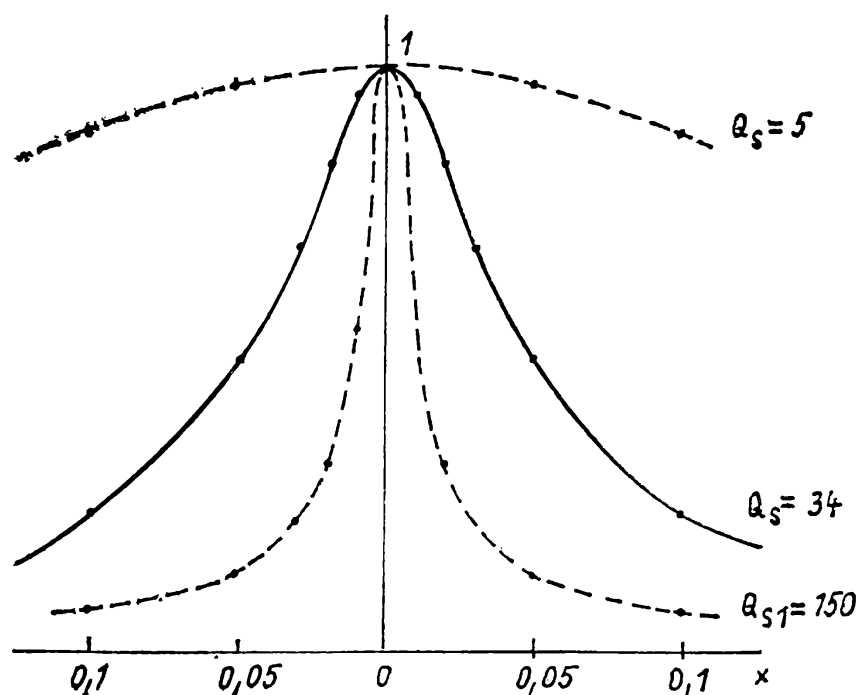
Úlohy 7:

1. Prezri si obr. 12. Vyslov, ako sa mení amplitúda I prúdu a začiatková fáza φ_i prúdu v sériovom rezonančnom obvode R, L, C , ak sa jeho pomerné rozladenie x mení v intervale $(-\infty, +\infty)$.
2. Z grafu na obr. 12 urč amplitúdu I prúdu a začiatkovú fázu φ_i prúdu pomerné rozladenie $x = -0,01$.
3. Z grafu na obr. 12 urč pomerné rozladenia x_{m1}, x_{m2} ($x_{m1} = -x_{m2}$) pre horný medzný kmitočet ω_h a dolný medzný kmitočet ω_d .
4. Prezri si obr. 13. Grafy sú znázornením relatívnych frekvenčných charakteristík prúdov $A_r = A_r(I)$ pre tri rôzne obvody s činiteľmi akosti $Q_{s1} > Q_s > Q_{s2}$. Pomocou grafov vyslov vzťah medzi ich priebehom a činiteľom akosti obvodov. Urč z grafov alebo výpočtom medzné frekvencie pre jednotlivé obvody.

3. Paralelné dvojpolý s admitanciou $G + jB$

Admitanciu $G + jB$ majú napr. elektrické obvody, v ktorých rezistor s vodivosťou G je paralelne spojený s cievkou alebo kondenzátorom so supptanciou B .

Postupy v určovaní frekvenčných charakteristík sú analogické s postupmi určovania frekvenčných charakteristík sériových obvodov. Rozdiel je v tom, že v paralelných obvodoch určujeme napätie U , prúdy I_i vo vetvách a ich začiatkové fázy vzhľadom na prúd $I = Ie^{j\omega t}$, ktorého začiatková fáza je nulová. Ak preštudujete prvé dve časti článku získate skúsenosti a zručnosti, pomocou ktorých napíšete združené frekvenčné



Obr. 13

charakteristiky $U = f_1(\omega)$, $I_G = f_2(\omega)$, $I_B = f_3(\omega)$ a pomocou nich amplitúdové frekvenčné charakteristiky $U = f_1(\omega)$, $I_G = f_2(\omega)$, $I_B = f_3(\omega)$, fázové frekvenčné charakteristiky $\varphi_u = f_4(\omega)$, $\varphi_G = f_4(\omega)$, $\varphi_B = f_6(\omega)$ a príslušné relatívne združené charakteristiky a relatívne amplitúdové charakteristiky. Znázorňujeme ich grafmi v komplexnej rovine alebo v pravouhlom grafe hodnôt vzájomne závislých veličín.

Úlohy 8:

1. Rezistor s odporom $R = 12 \text{ k}\Omega$ a cievka s vlastnou indukčnosťou $L = 0,30 \text{ H}$ sú spojené za sebou v jednoduchom obvode so zdrojom harmonického napätia $U = 70 \text{ V}$.

a) Urč združenú frekvenčnú charakteristiku prúdu $I = f_1(\omega)$ a znázorni ju graficky; amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku pre prúd $I = f_1(\omega)$, frekvenčnú charakteristiku pre začiatočnú fázu φ_i prúdu ($\varphi_i = f_2(\omega)$). Napíš vzťahy pre relatívnu združenú charakteristiku prúdu $A_r(I) = f_3(\omega)$ a relatívnu amplitúdovú charakteristiku $A_r(I) = f_3(\omega)$; b) Urč združené frekvenčné charakteristiky pre napätia na rezistore a cievke: $U_R = f_4(\omega)$, $U_L = f_5(\omega)$, znázorni ich graficky v komplexnej rovine. Pomocou nich napíš príslušné amplitúdové charakteristiky a charakteristiky pre začiatočné fázy: $U_R = f_4(\omega)$, $U_L = f_5(\omega)$, $\varphi_R = f_6(\omega)$, $\varphi_C = f_7(\omega)$. Urč relatívne charakteristiky $A_r(U_R) = f_8(\omega)$, $A_r(U_L) = f_9(\omega)$, $A_r(U_r) = f_8(\omega)$, $A_r(U_L) = f_9(\omega)$. Začiatočná fáza napätia je nulová. Grafy znázornite pre čas $t = 0 \text{ s}$.

2. Rezistor s odporom $R = 840 \Omega$, cievka s vlastnou indukčnosťou $L = 0,80 \text{ H}$ a kondenzátor s kapacitou $C = 2,8 \text{ nF}$ sú spojené v jed-

- noduchom obvodu so zdrojom harmonického napätia $U = 6,0 \text{ V}$.
- a) Urč rezonančnú frekvenciu ω_r obvodu. b) Urč činiteľ akosti Q_s obvodu. c) Napíš vzťah pre združenú frekvenčnú charakteristiku prúdu a znázorni ju graficky [$I = f(x)$]. d) Urč hornú medznú frekvenciu ω_h a dolnú medznú frekvenciu ω_d obvodu. Začiatočná fáza napätia je nulová. Graf zostrojte pre čas $t = 0 \text{ s}$.
3. Urč interval frekvencií v sériovom obvode rezistora ($R = 2,1 \text{ k}\Omega$), cievky ($L = 0,67 \text{ H}$) a kondenzátora ($C = 65 \text{ nF}$), v ktorom pokles amplitúdy I prúdu nie je väčší ako $3,0 \text{ dB}$.
4. Rezistor s odporom $R = 7,3 \text{ k}\Omega$ a kondenzátor s kapacitou $C = 15 \text{ nF}$ sú spojené vedľa seba na zdroj harmonického prúdu $I = 12 \text{ mA}$.
- a) Urč združenú frekvenčnú charakteristiku pre napätie $U = f_1(\omega)$ a znázorni ju graficky. Napíš vzťahy pre amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku napätia $U = f_1(\omega)$ a frekvenčnú charakteristiku začiatočnej fázy $\varphi_U = f_2(\omega)$. b) Urč združené a amplitúdové charakteristiky pre prúdy vo vetve rezistora a vo vetve kondenzátora $I_R = f_3(\omega)$, $I_C = f_4(\omega)$, znázorni ich graficky. Urč ďalej amplitúdové frekvenčné charakteristiky $I_R = f_3(\omega)$, $I_C = f_4(\omega)$ a frekvenčné charakteristiky pre začiatočné fázy $\varphi_R = f_5(\omega)$, $\varphi_C = f_6(\omega)$. c) Urč medznú frekvenciu ω_m obvodu.
- Začiatočná fáza zdroja prúdu je nulová. Grafy zostroj pre čas $t = 0 \text{ s}$.

Literatúra:

- [1] Hofman, K.: Vektorové znázornění střídavých proudů, symbolická metoda. SPN Praha, 1968 (Škola mladých fyziků).
- [2] Lepil, O.: Elektrické kmity a střídavý proud. SPN Praha, 1978 (Škola mladých fyziků).
- [3] Kneppo, E.: Střídavé proudy. SAV Bratislava, 1954.
- [4] Gvozďjak, L.: Základy elektrotechniky prenosu a spracovania správ. SVTL Bratislava, 1962.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Svět očima moderní fyziky

RNDr. ROMAN KUBÍNEK, Přírodovědecká fakulta UP Olomouc

Pro naši dobu je charakteristický rychlý rozvoj vědy a techniky. Moderní fyzika popisuje chování hmoty od rozměrů atomového jádra až po pozorovatelné galaxie. Studium nejmenších částic látky a jevů, jímž se zabývá atomová a jaderná fyzika, vedlo k vybudování moderní kvantové fyziky. Astrofyzika se naopak zabývá fyzikálními a chemickými

vlastnostmi látky ve vesmíru. Ve skutečnosti se však laik dostává do situace, kdy si klade zcela základní a přitom těžko zodpověditelné otázky — co je nekonečno, jak chápat vývoj vesmíru, co je prostor a čas? Zejména u mladých lidí se často setkáváme s kolísáním vztahu k náboženství. Mnozí mladí lidé jsou lhostejní k vědeckému světovému názoru, a to ve skutečnosti otevírá cestu náboženským vlivům. Každé náboženství vychází z existence nadpřirozené bytosti, která stvořila svět a existuje mimo něj. Snad proto se v poslední době uveřejňují různé publikace, týkající se vzniku a vývoje vesmíru. Zajímavá je například kniha profesora fyziky *Paula Davise* „*Bůh a nová fyzika*“, která na základě fyzikálních teorií ukazuje čtenářům, že ve vývoji a v celém vesmíru není pro boha jako stvořitele světa místo.

Teorie velkého třesku a kosmologický argument

Věda překonala tradiční náboženské názory, které se musí přizpůsobovat době a poznatkům vědy. To však neplatí zcela všeobecně. Neplatí to zejména tam, kde lidé o vědě vědí velice málo a mohou být náboženstvím zfanatizováni. Na otázky lidí, kteří se zabývají pochopením smyslu naší existence, dává vědecké odpovědi marxisticko-leninská filozofie.

Ve všech náboženstvích je hlavní otázkou problém genese, tedy vzniku a vývoje. Například bible začíná popisem stvoření světa a *První Kniha Mojžíšova* má název *Genesis*. Dnes však víme, že všechno bylo jinak. Veškerá hmota vesmíru byla v singulárním (prvotním) bodě a prostor a čas tedy vůbec neexistovaly. Pak vznikla podivná a astrofyzikálně ne zcela pochopená událost, takzvaný *velký třesk*, kdy náš vesmír vznikl a od té doby se neustále rozpíná. Protože prostor je zcela neoddelitelný od hmoty, explodoval spolu s hmotou také prostor. V prvních sekundách po velkém třesku měl vesmír značnou hustotu, takže většina částic anihilovala s odpovídajícími antičásticemi. Nadbytečné částice však už neměly s čím anihilovat a právě z nich vznikl postupně dnešní látkový vesmír, tj. galaxie, hvězdy, planety a také my lidé. Vzniká však otázka, co způsobilo velký třesk. Tato událost nás vede k tomu, abychom znovu prozkoumali starou teologickou diskusi, známou pod pojmem „*kosmologický argument*“.

Kosmologický argument dosáhl svého vyvrcholení v době života německého filozofa a matematika *Gottfrieda Wilhelma Leibnize* (1646 až 1716) a anglického učenice *Samuela Clarka* (1676—1729). Vycházeli z myšlenky, že každá událost má svou příčinu. Takto můžeme sledovat celý řetěz příčin a událostí v minulosti. Přitom se však předpokládalo, že tento postup nelze donekonečna opakovat, protože někde vše muselo začít. Prvotní příčinou dalšího dění byl pro ně bůh jako první stvořitel všeho, co existuje. I když tento argument se zdál zdůvodněný mnoha teologům, již v té době byl nemilosrdně napadán některými filozofy.

Mezi nimi vynikal anglický filozof *David Hume* (1711—1776). Tehdy se toho moc o vesmíru nevědělo. Jestliže předpokládáme, že všechno má svoji příčinu a tím i vysvětlení, proč potom teologové přešli na boha, který příčinu svého vzniku nemá. Jestliže bychom mohli mít boha bez příčiny, proč bychom nemohli mít bez příčiny i vesmír? Jak již bylo uvedeno, svět vznikl ze singulárního bodu a prostor a čas byl nekonečně zakřiven. Singulárnost je něco jako hranice prostoru a času a je nesmyslné uvažovat o uspořádání fyzického světa v tomto bodě. Stejně tak nemá cenu uvažovat o tom, co bylo dříve a co později, a tudíž o příčinách a následcích. Čas ani prostor neexistovaly, vznikly až velkým třeskem. Připomíná to dlouhodobou rozpravu křesťanských teologů, zda je bůh v čase nebo mimo čas. Již v 6. století *sv. Augustin* prorocky napsal, že svět byl stvořen s časem a ne v čase.

Dnes fyzikové pokládají čas za neoddělitelnou část fyzického světa. Čas je spojen s prostorem a hmotou a může být zpomalen gravitací a pohybem. Fyzikové se snaží spojit čtyři základní typy interakcí (gravitační, elektromagnetická, silná, slabá) v jednu, tedy vyjádřit je jednou obecnější tzv. unitární teorií. V roce 1967 přišli teoretičtí fyzikové *S. Weinberg* a *A. Salam* s doměnkou, že slabá a elektromagnetická interakce jsou projevem jediné tzv. elektroslabé interakce (Nobelova cena za fyziku, 1979). V současné době se budují základy sjednocené teorie elektroslabé a silné interakce. Unitární teorie vychází z předpokladu symetrických vlastností elementárních částic a fyzikálních zákonů a vývoj hmoty ve vesmíru popisuje jako postupné porušování základních symetrií. Je možné, že se podaří mimo jiné objasnit přebytek částic nad antičásticemi v současném vesmíru.

Scénář inflačního vesmíru

Další problémy s kosmologickým argumentem vznikají s rozvojem kvantové mechaniky. Ústřední předpoklad v argumentu, že všechny věci mají svou příčinu, musíme brát s rezervou. Mohli bychom najít argumenty, které existují mimoprostorově a bez příčiny. Lidé si je nevymysleli, pouze je objevili. Kvantová mechanika ukazuje, že vznik světa nemusí být příčinně podmíněn.

V poslední době fyzikové aplikovali kvantovou fyziku na celý vesmír. I když je tato teorie zatím v rozvoji a těžko se vysvětluje, nabízí nám různé možnosti. Podle ní například mohl celý fyzický svět vzniknout zároveň s prostoročasem, bez příčiny jako projev kvantových jevů. Jsou nám známé náhlé a bezpříčinné objevy částic v kvantové fyzice. Proč by tedy nemohl takto vzniknout i prostoročas?

Výpočty ukazují, že vzniklý kvantový kosmos by byl pouze přechodný stav, miniaturní velikostí i trváním a ne velký třesk kosmických rozměrů. Co však potom způsobilo, aby se tento kosmický zárodek rozrostl

v úplně vyvinutý vesmír? Pro toto tvrzení existuje nová smělá teorie, která se nazývá „*Scénář inflačního vesmíru*“ (neustále se rozšiřujícího). Podle tohoto scénáře převládla v prvobytném mikrokosmu vlivem kvantových jevů síla, kterou bychom mohli nazvat antigravitací. Ta byla spojena se silou, kterou rozvíjejí fyzikové vysokých energií. Působením této antigravitace mikrokosmos explodoval a rychle se rozšířil do obrovských rozměrů. Kolosální síla exploze vytvořila obrovskou teplotu, hmotu přeměnila v záření, a to se po určité době opět přeměnilo v hmotu, hvězdy a galaxie.

Velký význam tohoto nového kosmologického scénáře, který má základ v kvantověmechanické fyzice, je v tom, že nám poskytuje celkové vysvětlení všeho, co se potom dělo. Základ je v samotných fyzikálních zákonech, které vysvětlují vše včetně prostoročasu.

Logika fyzikálních zákonů

Fyzikální zákony působily a působí nezávisle na člověku, a proto nevyžadují žádné předpoklady. Při starší teorii velkého třesku musely být do fyziky zaneseny uměle fyzikální struktury od nejmenších elementárních částic — kvarků, po obří útvary převyšující hmotností, jasností a rozměrem i ty nejhmotnější a největší hvězdy — kvasary. Z uvedeného také vyplývá, že pro vznik světa není třeba žádná nadpřirozená bytost. Není také důležité, jak se věci v kosmu začaly vyvíjet. Důležité je, že se vše odvíjí podle fyzikálních zákonů a vesmír se tedy může „starat sám o sebe“.

Málokdo z fyziků, kteří se zabývali nejobecnějšími zákony fyziky, nebyl překvapen a inspirován krásou a jednoduchostí fyzikálních zákonů. Vezměme například teorii částic ve fyzice. Každý nový objev ukazuje na bohatou strukturu vzájemně souvisejících zákonů fyziky a hloubku symetrie matematických vztahů. Je zde překvapivý pořádek a harmonie. Zákony fyziky se vzájemně proplétají a doplňují s takovou přesností, že vše vypadá, jako by zde platil úmyslný řád.

V minulých stoletích teologové často uváděli tuto „úmyslnost“ jako argument o existenci boha. Anglický teolog *William Paley*, který zemřel začátkem minulého století, zdůrazňoval, že komplikované systémy v astronomii a biologii nemohou být výsledkem slepé náhody. Dnes víme, že jeho způsob uvažování nebyl správný. Vědci znají mnoho systémů ve fyzice a chemii, ve kterých pořádek a aktivita vznikají spontánně. Darwinova teorie evoluce vysvětluje, jak biologické organismy dosáhly velké přizpůsobivosti vůči svému okolí.

Ve vesmíru existují komplikované systémy, což je řád složitosti. Dále je druhý řád, řád jednoduchosti, který může pozorovat každý z nás. Všichni víme, že pravidelně vychází Slunce a bude den, a opačně Slunce zapadne a bude noc, vypustíme-li kámen z ruky, spadne na zem, že

stejně póly magnetu se odpuzují. Příroda se prostě chová logicky a zákony, které působí, vyjádřili fyzikové elegantními matematickými rovnicemi.

Jedna z vlastností člověka je, že dovede logicky abstraktně myslet. V souvislosti s moderní fyzikou se ukazuje, že samotná hmota dovede budovat hvězdy, galaxie a dokonce i život. Zdá se, že logika hmoty je dokonalejší nežli naše dosavadní logika. Příroda vytvořila rozum a vědomí nás lidí, a tím se setkává sama se sebou. To vše nasvědčuje tomu, že se jedná o uzavírání cyklu, který zatím neumíme pozorovat ani hodnotit. Hledat mystiku v začátcích vesmíru nemáme již zapotřebí, protože jsou zahrnuty do zákonů fyziky.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

I teploměr je zajímavá fyzikální soustava

Doc. dr. ZLATKO MARŠÁK, CSc. FJFI ČVUT, Praha

Objem baňky rtuťového teploměru při teplotě 0°C je $V_0 = 1\text{ cm}^3$. Průřez kapiláry při téže teplotě je $A_0 = 1\text{ mm}^2$. Jestliže rtuť při 0°C právě vyplňuje baňku teploměru, jaká je délka sloupce v kapiláře teploměru při teplotě $t^\circ\text{C}$? Teplotní součinitel délkové roztažnosti skla je $\alpha_s = 5 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ a objemová roztažnost rtuti je $\gamma_{\text{Hg}} = 0,2 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$.

Řešení:

Myšlenkový postup: A bychom určili délku sloupce Hg v kapiláře teploměru při určité teplotě $t \neq 0^\circ\text{C}$, musíme porovnat změnu objemu rtuti při dané teplotě vůči změně objemu skleněné baňky. Bude-li teplotní součinitel objemové roztažnosti (zopakujte si význam teplotního součinitele objemové roztažnosti látky) rtuti menší než skla, pak při teplotách větších než 0°C nevstoupí rtuť vůbec do kapiláry. Naopak při $\gamma_{\text{Hg}} > \gamma_s$ a při $t > 0^\circ\text{C}$ bude část objemu rtuti, ta část, která je rovna rozdílu objemu rtuti a objemu skleněné baňky při dané teplotě $t^\circ\text{C}$, vtlačena do kapiláry. Ze známého objemu rtuti v kapiláře a známého průřezu kapiláry při dané teplotě t (neboť i ten se mění s teplotou) vypočteme délku sloupce rtuti v kapiláře teploměru.

Výpočet: Předpokládejme $t > 0^\circ\text{C}$ a dále to, že délkové, plošné či objemové změny jsou lineární funkcí teploty. Objem skleněné baňky teploměru při teplotě $t^\circ\text{C}$ je

$$V_{s,t} = V_0 (1 + \gamma_s \cdot t),$$

kde V_0 je objem skleněné baňky při 0°C , objemová roztažnost skla $\gamma_s = 3\alpha_s$. Objem rtuti při téže teplotě t je

$$V_{\text{Hg},t} = V_{\text{Hg},0} (1 + \gamma_{\text{Hg}} \cdot t);$$

$V_{\text{Hg},0}$ je objem rtuti při 0°C . Podle zadání je $V_{\text{Hg},0} = V_0$.

Protože $\gamma_s = 3\alpha_s = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ je menší než $\gamma_{\text{Hg}} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, bude pro teploty $t > 0^\circ \text{C}$ platit, že do kapiláry teploměrn musí vystoupit objem rtuti

$$V_{\text{Hg},t} - V_{s,t} = V_0 \cdot t(\gamma_{\text{Hg}} - \gamma_s) \quad (1)$$

a tento objem můžeme vyjádřit pomocí průřezu kapiláry A_t (při teplotě t) a délky sloupce v kapiláře h . Protože změna plochy A kapiláry v závislosti na teplotě t je udána vztahem

$$A_t = A_0 (1 + \beta_s \cdot t), \quad (2)$$

kde β_s je teplotní součinitel plošné roztažnosti skla ($\beta_s = 2\alpha_s$) a A_0 je plocha kapiláry při 0°C , dostaneme spojením výrazů (1) a (2) výraz pro objem rtuti v kapiláře

$A_t \cdot h = A_0 \cdot (1 + 2\alpha_s \cdot t) \cdot h = V_{\text{Hg},t} - V_{s,t} = V_0 \cdot t(\gamma_{\text{Hg}} - \gamma_s)$,
odtud

$$h = \frac{V_0 \cdot t(\gamma_{\text{Hg}} - \gamma_s)}{A_0(1 + 2\alpha_s \cdot t)} \quad (3)$$

Dosazením zadaných hodnot vyjde

$$h \doteq \frac{10^3 \text{ mm}^3 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot t}{1 \text{ mm}^2 (1 + 10 \cdot 10^{-6} \cdot t)}. \quad (4)$$

Teploty $t \leq 10^{40} \text{ C}$ vedou k tomu, že druhý sčítanec ve jmenovateli nabývá řádových hodnot nejvýše rovných 10^{-1} . Za těchto podmínek pak jmenovatel výrazu (4) je rovný přibližně 1 a délka sloupce rtuti v kapiláře je

$$h = 0,2 \cdot t \text{ mm}$$

Diskuze řešení:

Výraz (4) ukazuje na to, že délka sloupce rtuti je za daných předpokladů a pro $t \leq 10^{40} \text{ C}$ přímo úměrná teplotě t . Toto bude platit vždy (viz vztah (3)), když

$$2\alpha_s \cdot t \ll 1$$

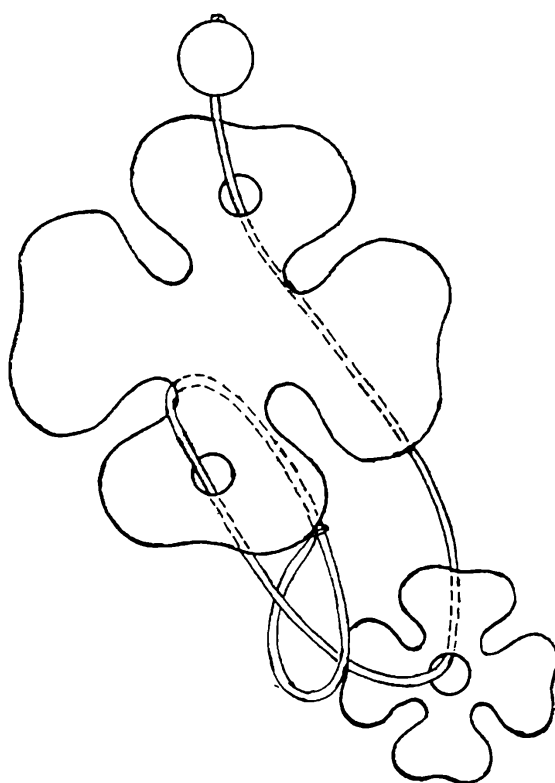
Při výpočtu jsme předpokládali o teplotách $t > 0^\circ \text{C}$.

Provedte úvahu pro $t < 0^\circ \text{C}$.

Pýr v jeteli

Hlavolam „Pýr v jeteli“ patří do série hlavolamů navzájem příbuzných ať už drátěných nebo vláknových, u nichž se opakuje motiv „smyčky“. Výroba ani řešení tohoto hlavolamu není nikterak náročné, avšak svým vzhledem je zajímavý a rozhodně by mohl obohatit sbírku těch sběratelů, kteří si ji budou chtít pořídit.

K výrobě hlavolamu budete tentokráté potřebovat kousek barevné destičky (nejlépe zelené) z umělé hmoty nebo z obarvené překližky,



kousek vlákna (nejlépe bužírky) a jeden skleněný nebo dřevěný korálek o průměru asi 15 mm.

Tvar čtyřlístku vyřezeme lupenkovou pilkou. Při kresbě čtyřlístku vycházíme z kružnic o poloměru asi 45 a 25 mm, které rozdělíme průměry na 8 úhlů 45°. Otvary ve čtyřlístcích jsou, jak patrně z nákresu, menší, než je průměr korálku. Smyčku na bužírce upevníme nejlépe tenkým drátkem, který získáme z vhodného elektrického vodiče.

Úkolem řešitele bude osvobodit oba čtyřlístky od „plazivého oddenku pýru“.

Jiří Polák

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

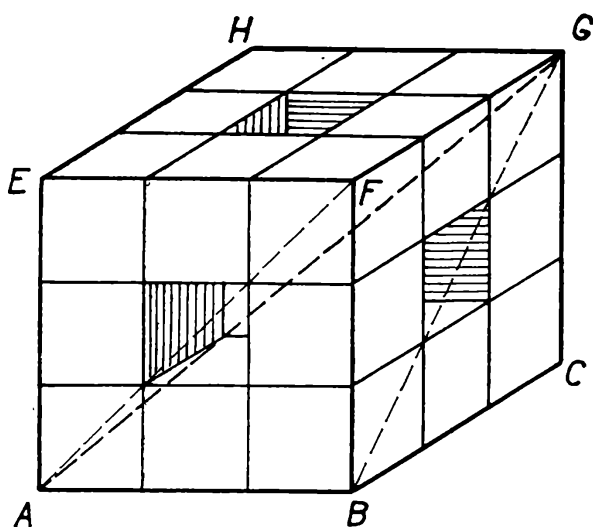
3. Z krychle, jejíž hrana má délku 3, byly vyříznuty tři navzájem kolmé komíny, procházející čtverci, které jsou na obr. 1 uprostřed stěn $ABFE$, $BCGF$, $EFGH$. Najděte na povrchu zbylého tělesa nejkratší spojnici dvou protějších vrcholů A , G krychle.

(Došlo 26 řešení.)

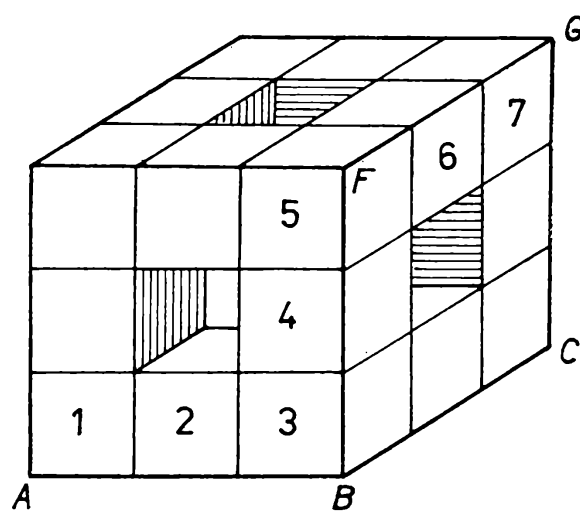
Milan Koman

Upravené řešení Jána Kováče, 4. A G Poprad:

Nejdříve dokážeme tuto pomocnou větu: Ke každé spojnici vrcholů A , G ležící na povrchu krychle s komínovitými otvory lze sestavit stejně dlouhou spojnici týchž bodů, která je částí čtyřstěnu $ABGF$ (obr. 1).



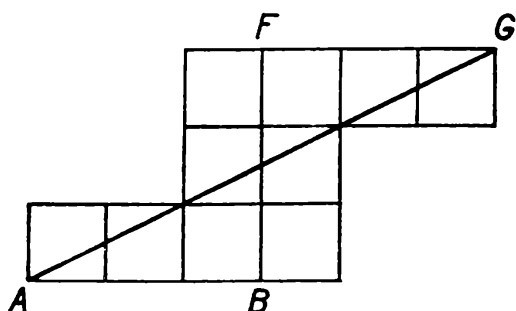
Obr. 1



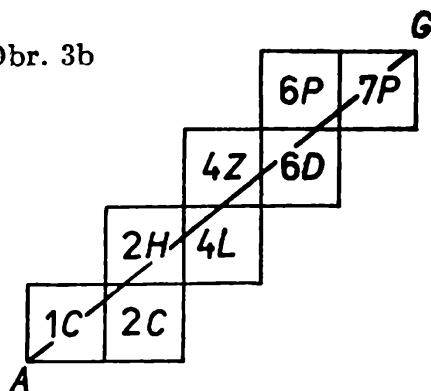
Obr. 2

Důkaz. Mějme na povrchu daného tělesa libovolnou spojnici vrcholů A , G . Protože toto těleso je souměrné podle úhlopříčné roviny $ACGE$, můžeme částí dané spojnice náležející trojbokému hranolu $ACDEGH$ zobrazit v souměrnosti podle roviny $ACGE$. Tak získáme novou spojnici náležející trojbokému hranolu $ABCEFG$. Tělesa $AFGE$ a $AFGB$ jsou souměrně sdružená podle roviny AFG a tělesa $AFGB$ a $ABGC$ jsou sou-

Obr. 3a



Obr. 3b



měrně sdružená podle roviny ABG . Proto můžeme ty úseky spojnice, které náležejí tělesům $AFGE$ a $ABGC$, převést pomocí rovinových souměrností do čtyřstěnu $ABGF$. Tím je důkaz proveden.

Stačí tedy hledat délku nejkratší spojnice vrcholů A , G náležející průniku povrchu daného tělesa a čtyřstěnu $ABGF$. V úvahu přicházejí dva typy spojnic, tj. procházející komíny a neprocházející komíny. Rozvineme příslušné části povrchu (obr. 3a, b). Pro lepší názornost jsou na obr. 2 jednotlivé krychle očíslovány; odpovídající očíslování je na rozvinuté části povrchu s komíny (obr. 3b). Přitom je užito toto označení stěn: C — čelní, P — pravá, L — levá, H — horní, D — dolní, Z — zadní. Na obr. 3a má spojnice délku d_1 , na obr. 3 b má délku d_2 , tj.

$$d_1 = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}, \quad d_2 = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Dostáváme tedy tento výsledek: Nejkratší spojnice vrcholů A , G na povrchu krychle s komínovitými otvory má délku $d = \sqrt{41}$

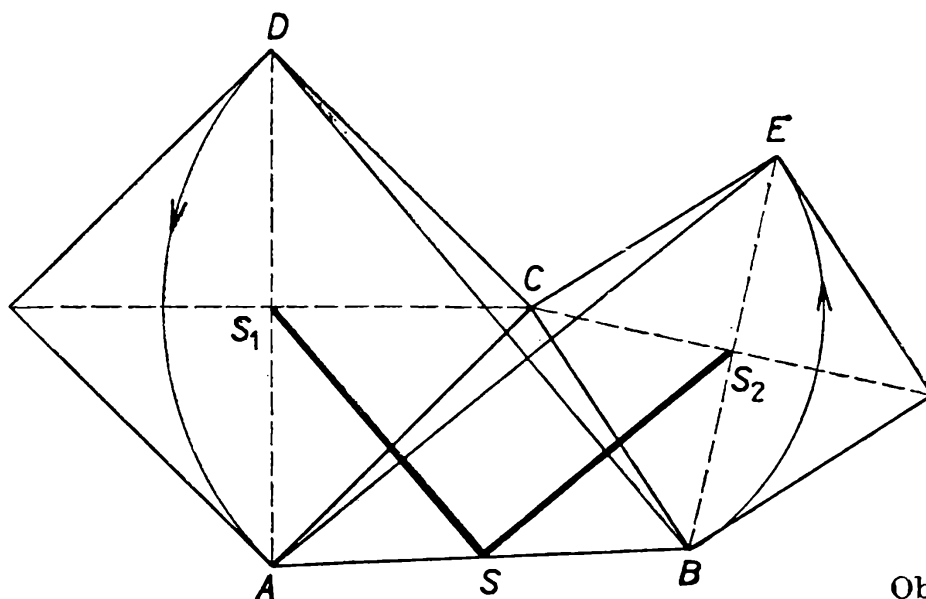
4. a) Je dán libovolný trojúhelník ABC ; bod S je střed jeho strany AB . Nad stranou AC sestrojte čtverec, který leží v polorovině opačné k polorovině ACB a nad stranou BC sestrojte čtverec ležící v polorovině opačné k polorovině BCA ; středy těchto čtverců označte S_1 , S_2 . Dokažte že přímky SS_1 , SS_2 jsou vzájemně kolmé a že úsečky SS_1 , SS_2 jsou shodné.

b) Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Nad každou jeho stranou sestrojte čtverec, který má s tímto čtyřúhelníkem společnou jen tuto stranu. Nechť X , Y jsou středy čtverců sestrojených nad stranami AB , CD a U , V jsou středy čtverců sestrojených nad stranami BC , AD . Dokažte toto tvrzení: 1. Přímky XY , UV jsou vzájemně kolmé a úsečky XY , UV jsou shodné. 2. Není-li čtyřúhelník $ABCD$ rovnoběžník, pak středy úhlopříček AC , BD a středy úseček XY , UV jsou vrcholy čtverce.

(Došlo 15 řešení.)

Emil Kraemer

Řešení, která došla, se opírají o shodnost trojúhelníků nebo jsou provedena užitím metody souřadnic; přitom skoro nikdo z řešitelů neřešil



Obr. 4

úlohu b). Uvedeme proto jednoduché řešení úlohy a), z něhož plyne snadno řešení úlohy b).

Ten vrchol čtverce sestrojeného nad stranou AC , který leží na přímce AS_1 , označme D . Obdobně budiž E ten vrchol čtverce sestrojeného nad stranou BC , který leží na přímce BS_2 (obr. 4). Potom úsečka SS_1 je střední příčka trojúhelníku ABD a úsečka SS_2 je střední příčka trojúhelníku ABE ; z toho plyne, že je

$$SS_1 \parallel BD, \quad SS_2 \parallel EA, \quad (1)$$

$$|SS_1| = \frac{1}{2} |BD|, \quad |SS_2| = \frac{1}{2} |EA| \quad (2)$$

Otočme přímku BD kolem bodu C v kladném smyslu o 90° ; potom přejde bod B do bodu E a bod D do bodu A . Proto se přímka BD otočí do přímky EA k ní kolmé a úsečka BD přejde do úsečky EA ; je tedy

$$EA \perp BD, \quad (3)$$

$$|EA| = |BD| \quad (4)$$

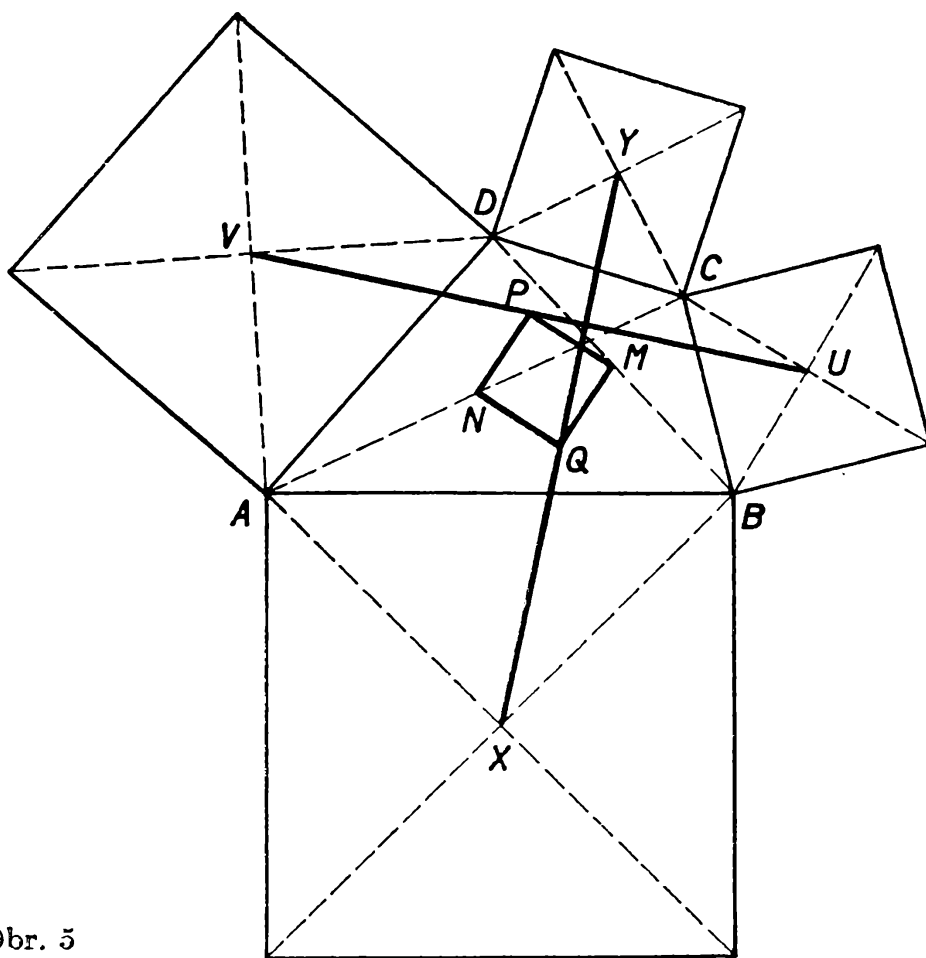
Podle (1) a (3) je tedy $SS_1 \perp SS_2$; podle (2) a (4) je $|SS_1| = |SS_2|$.

b) Střed úhlopříčky BD označme M , střed úhlopříčky AC označme N (obr. 5); protože čtyřúhelník $ABCD$ není rovnoběžník, je $M \neq N$. Úsečka BD je společná strana trojúhelníků BDC , BDA . Podle a) je

$$MU \perp MY \quad |MU| = |MY|, \quad (5)$$

$$MV \perp MX, \quad |MV| = |MX| \quad (6)$$

Otočme přímku UV kolem bodu M v kladném smyslu o 90° . Podle (5) přejde bod U do bodu Y a podle (6) přejde bod V do bodu X . Přímka UV se tedy otočí do přímky YX a úsečka UV do úsečky YX ; z toho plyne, že je



Obr. 5

$$YX \perp UV, \quad |YX| = |UV|$$

Střed P úsečky UV se otočí do středu Q úsečky YX ; proto je

$$MP \perp MQ, \quad |MP| = |MQ|, \quad (7)$$

takže trojúhelník PQM je pravoúhlý rovnoramenný s přeponou PQ .

Úsečka AC je společná strana trojúhelníků ACD , ACB . Obdobně jako v předešlém případě zjistíme, že při otočení přímky YX kolem bodu N v kladném smyslu o 90° přejde střed Q úsečky YX do středu P úsečky VU ; proto je

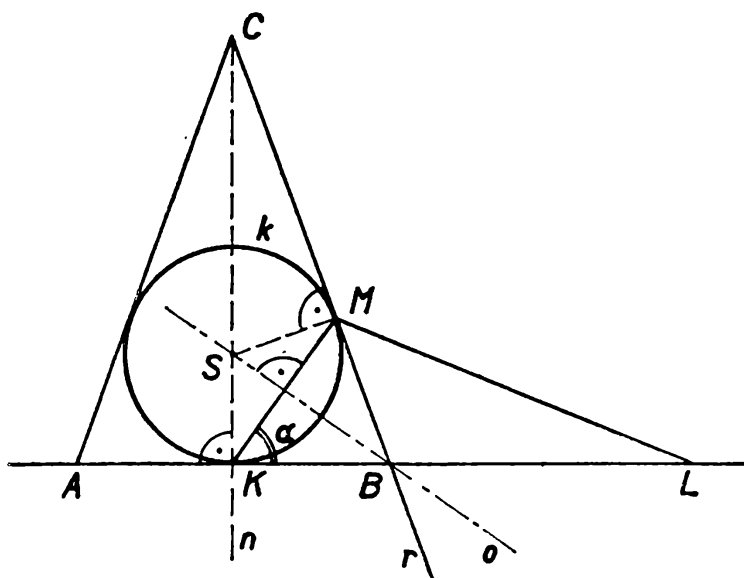
$$NQ \perp NP, \quad |NQ| = |NP|, \quad (8)$$

takže trojúhelník PQN je pravoúhlý rovnoramenný s přeponou PQ . Protože je $M \neq N$, leží trojúhelník PQN v polorovině opačné k polorovině PQM . Proto ze (7) a (8) plyne, že obrazec $MPNQ$ je čtverec.

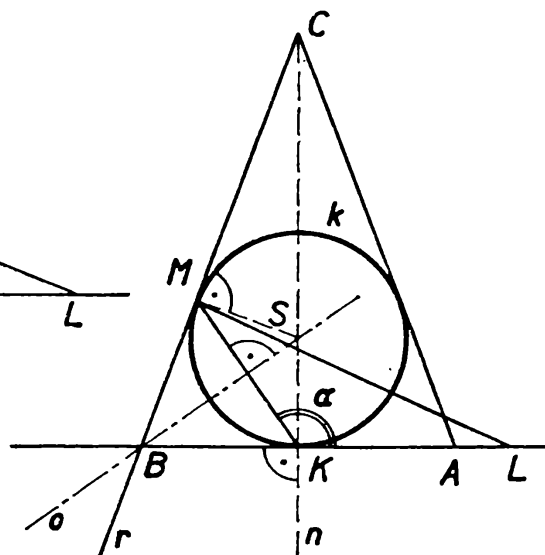
5. Je dán trojúhelník KLM . Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož základna AB leží na přímce KL a jemuž vepsaná kružnice prochází bodem K a dotýká se v bodu M přímky BC .

(Došlo 42 řešení.)

Jiří Mída



Obr. 6



Obr. 7

Upravené řešení Vladimíra Korduly, 2. C G Bílovec :

Rozbor (obr. 6): Z textu úlohy plyne, že bod K je bodem dotyku strany AB a kružnice k vepsané rovnoramennému trojúhelníku ABC . Proto je bod K středem jeho základny AB a bod C leží na kolmici n vedené bodem K k přímce AB , tj. k přímce KL . Na přímce n leží také střed S kružnice k ; je to zároveň bod osy o úsečky KM .

Konstrukce (obr. 6, 7): Nejprve sestrojíme bodem K kolmici n k přímce KL . Její průsečík s osou o úsečky KM označíme S . Bodem M vedeme přímku $r \perp SM$ a její průsečíky s přímkami KL , n označíme po řadě B , C . Bod A sestrojíme jako obraz bodu B ve středové souměrnosti se středem K . Body A , B , C jsou vrcholy hledaného trojúhelníku.

Zkouška: Z konstrukce plyne, že body A , B leží na přímce KL . Bod K je středem úsečky AB a přímka CK je kolmá k přímce AB ; proto trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB . Přímka SM je kolmá k přímce $r = BC$, přímka o je osou úsečky KM a bod K je středem úsečky AB ; z toho plyne, že kružnice vepsaná trojúhelníku ABC prochází bodem K a dotýká se strany BC v bodu M .

Diskuse: Budiž $\alpha = |\sphericalangle MKL|$; rozlišíme tři případy.

a) Nechť je $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (obr. 6). Protože BK , BM jsou tečny kružnice k v bodech K , M , je $|BK| = |BM|$; z toho plyne, že je

$$|\sphericalangle KBM| = |\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 2\alpha \quad (1)$$

Trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB ; proto je $0^\circ < \angle ABC < 90^\circ$. Podle rovnosti (1) je tedy

$$45^\circ < \alpha < 90^\circ \quad (2)$$

b) Nechť je $\alpha = 90^\circ$; potom přímky KL , o , r jsou vzájemně rovnoběžné, takže úloha nemá řešení.

c) Nechť je $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (obr. 7). Obdobnou úvahou jako v odstavci a) zjistíme, že je $\angle MKL = 2\alpha - 180^\circ$; z toho a z podmínky pro α plyne, že je

$$90^\circ < \alpha < 135^\circ \quad (3)$$

Podmínky (2) a (3) jsou pro existenci řešení nejen nutné, ale také postačující. Úloha má řešení, právě když je

$$\angle MKL \in (45^\circ, 90^\circ) \cup (90^\circ, 135^\circ)$$

Pokud řešení existuje, pak je právě jedno.

Úlohy k řešení

V tomto čísle otiskujeme zbývající úlohy z matematiky a všechny úlohy z fyziky a z konstrukční geometrie; první část úloh byla uveřejněna ve druhém čísle Rozhledů. Soutěže se mohou účastnit jednotlivci i kolektivy z téže třídy, nejvýše však trojčlenné; při případném umístění má však kolektiv nárok na jedinou cenu.

Všeobecné pokyny řešitelům

Řešení každé úlohy pište česky nebo slovensky (výjimečně rusky nebo německy), a to čitelně (možno-li, na stroji) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec také svou bytovou adresu se směrovacím číslem. Každý kolektiv uveďte tyto údaje pro každého svého člena. Příjmení pište hůlkovým písmem.

Nejdříve napište číslo úlohy a její text, potom pište přehledně řešení, a to stručně, ale výstižně a jasně; neužívejte zbytečně různé symboly. Dbejte na platnou terminologii a symboliku. Připojujete-li k řešení úlohy obrázky, narýsujte je pečlivě a čitelně je popište.

Matematika

6. Základny AB , CD rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ mají délky $|AB| = a$, $|CD| = c$; jeho úhlopříčky jsou vzájemně kolmé a protínají se v bodu P . Tímto bodem je vedena přímka p kolmo k ramenu

lichoběžníku $ABCD$; její průsečíky s rameny tohoto lichoběžníku jsou body X, Y . Vypočítejte délku úsečky XY .

Emil Kraemer

7. Jsou dány dva různé body O_1, O_2 a kladné číslo ρ . Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby bod O_1 byl středem přepony AB , bod O_2 středem odvěsny AC a aby kružnice vepsaná trojúhelníku ABC měla poloměr ρ .

Jiří Mída

8. Nechť $k \geq 4$ je dané přirozené číslo a nechť $A_1, A_2, \dots, A_k$ je k -tice libovolných dvouprvkových a navzájem různých množin. Nechť každé dvě z těchto množin mají neprázdný průnik; dokažte, že potom platí:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \neq \emptyset$$

Zjistěte, zda platí analogické tvrzení i v případě $k = 3$.

Jaroslav Morávek

9. Pro každé přirozené číslo $n > 30$ platí: Je-li n prvočíslo, pak zbytek při dělení čísla n třiceti je číslo 1 nebo prvočíslo menší než 30. Dokažte obměnu věty a rozhodněte, zda platí věta obrácená.

Jaroslav Šedivý

10. V tomto čísle Rozhledů si přečtete článek Trojúhelníková a Cauchyova nerovnost; pomůže vám při řešení této úlohy: Nechť t_a, t_b, t_c jsou délky těžnic a v_a, v_b, v_c délky výšek trojúhelníku ABC , jehož obsah je roven jedné. Jaký je největší obvod tohoto trojúhelníku, jestliže platí tato nerovnost:

$$(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)(v_a^2 + v_b^2 + v_c^2) \leq 27?$$

Jaroslav Švrček

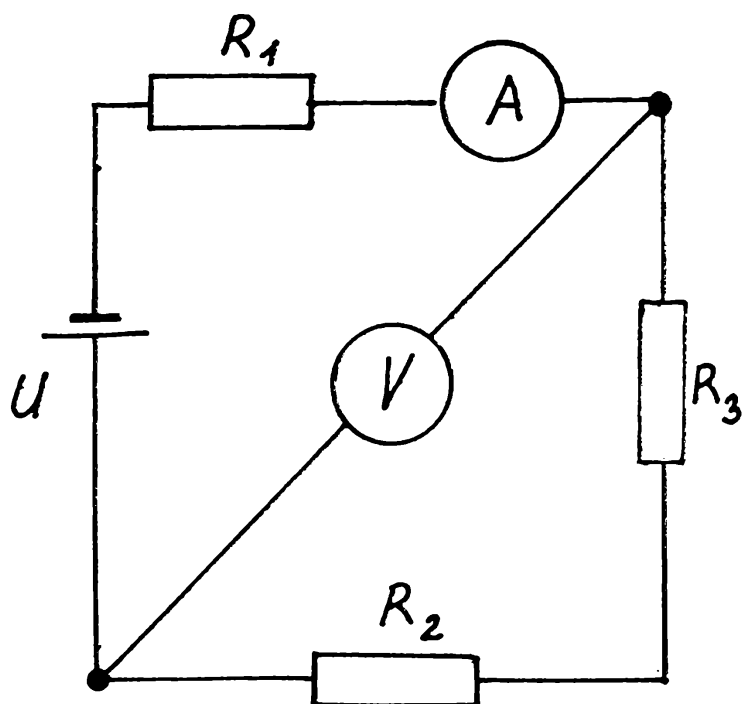
Fyzika

1. Rybář jel na loďce proti proudu řeky. Projížděl pod mostem, kde mu spadlo bidlo do vody; zpozoroval to za půl hodiny. Vesloval zpět a dostihl bidlo 5 km od mostu. Jakou rychlostí teče voda v řece, jestliže se rybář pohybuje po proudu i proti proudu stejnou rychlostí vzhledem k vodě.

Eva Havránková

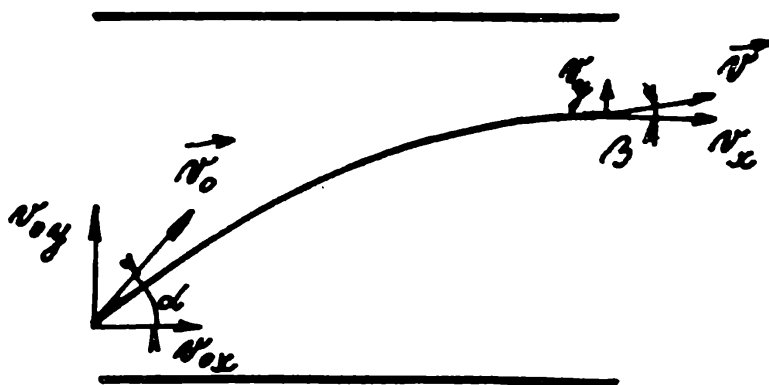
2. Na obr. 1. je ukázán elektrický obvod sestavený z odporů $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$, $R_3 = 300 \Omega$, z voltmetrů a ampérmetrů. Obvod je připojen k baterii o napětí $U = 100 \text{ V}$. Vypočítejte, jaký proud ukáže ampérmetr a jaké napětí voltmetr, je-li vnitřní odpor ampérmetru $R_A = 40 \Omega$ a vnitřní odpor voltmetru $R_V = 2000 \Omega$. Úlohu řešte nejprve obecně a potom číselně.

Zdeněk Janouš



3. Elektron vletěl mezi elektrody deskového kondenzátoru pod úhlem α vzhledem k rovině deskových elektrod a vyletěl pod úhlem β , přičemž je $\beta < \alpha$ (obr. 2). Délku kondenzátoru označme l , rozdíl potenciálů mezi deskovými elektrodami U a vzdálenost mezi nimi d . Určete počáteční rychlost elektronu a jeho energii při výletu z kondenzátoru. Gravi- tační pole země zanedbejte.

Zdeněk Janout



4. Co se může stát, jestliže plave led v olovu? Kus ledu o hmotnosti $m_1 = 0,4$ kg a teplotě $\vartheta_1 = -20^\circ \text{C}$ se vhodí do roztaveného olova o hmotnosti $m_2 = 1$ kg a teplotě $\vartheta_2 = 400^\circ \text{C}$. Rozhodněte, zda zůstala část ledu po vyrovnání teplot ve skupenství pevném. Zanedbejte ztráty a vypařování do okolí.

Zlatko Maršák

5. Atomové jádro ^{69}Zn je ve vzbuzeném stavu. Do základního stavu přejde tak, že vyše foton záření gama o energii $E_\gamma = 436 \text{ keV}$. Vzbuzené jádro zinku bylo před vysláním fotonu v klidu. Jakou kinetickou energii bude mít jádro ^{69}Zn po vyslání fotonu?

Stanislav Pospíšil

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány tři úsečky HK , LM , NP , jejichž délky jsou vesměs různé; každé dvě z nich jsou vzájemně mimoběžné. Najděte přímku p , která prochází daným bodem R a má tu vlastnost, že pravoúhlé průměty všech tří úseček do této přímky mají touž délku.

Stanislav Horák

2. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Jak musím zvolit rovinu ρ , má-li být její řez se čtyřstěnem $ABCD$ rovnoběžník? Jakou vlastnost musí mít čtyřstěn $ABCD$, má-li být uvedený řez pravoúhelník? Může být v tomto případě řezem roviny ρ se čtyřstěnem $ABCD$ čtverec?

Emil Kraemer

3. Podstavou trojbokého kolmého hranolu je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB . Vedte bodem C rovinu ρ tak, aby její řez s daným hranolem byl rovnostranný trojúhelník $A'B'C$.

Emil Kraemer

Z NOVÝCH KNIH

Tarasov, L. V. — Tarasovová, A. N.: **OTÁZKY A ÚLOHY Z FYZIKY** Vydala Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., Bratislava, v roku 1983, preklad z ruštiny 384 strán, 187 obr. viaz. Kčs24,—

„Sokratovský dialóg“ stále patrí k osvedčeným metódam diskusie, argumentácie a objasňovania podstaty problémov. Formu dialógu si zvolili aj autori uvedenej knižky. Chcú prehĺbiť vedomosti zo stredoškolskej fyziky a na analýze žiackych chýb rozvinúť hlbšie pochopenie fyzikálnych zákonitostí. V rozhovoroch učiteľa a jedného

či dvoch študentov sa odvíjajú mnohé otázky z kinematiky, dynamiky a statiky, z molekulárno-kinetickej teórie látok, termodynamiky, elektrického a magnetického poľa, šírenia svetla apod. Rôzne stránky skúmaných problémov spolu s detailami riešenia sú v diskusii zdôraznené a prehlbujú tak lepšie pochopenie danej problematiky.

Autori, vychádzajúc z dlhoročných pedagogických skúseností, sa sústredili na otázky, ktoré robili často študentom pri štúdiu problémy: správne použitie zákonov dynamiky pre pohyb telies

v priestore a čase, špecifickosť pohybu po kružnici, svet kmitov a vln, molekulárna fyzika a termodynamika ako základ súčasnej fyziky, problematika elmg. poľa, uplatnenie základných zákonitostí v elektrických obvodoch, geometrická optika a nezávislosť zákonov zachovania energie, hybnosti a momentu hybnosti.

Ak do knižky „Otázky a úlohy z fyziky“ len trochu nazriete, rýchlo spoznáte, že sa môžete naučiť veľa nového. Rozhovor vás vtiahne k hlbšiemu chápaniu fyzikálnych súvislostí a prehodnote-

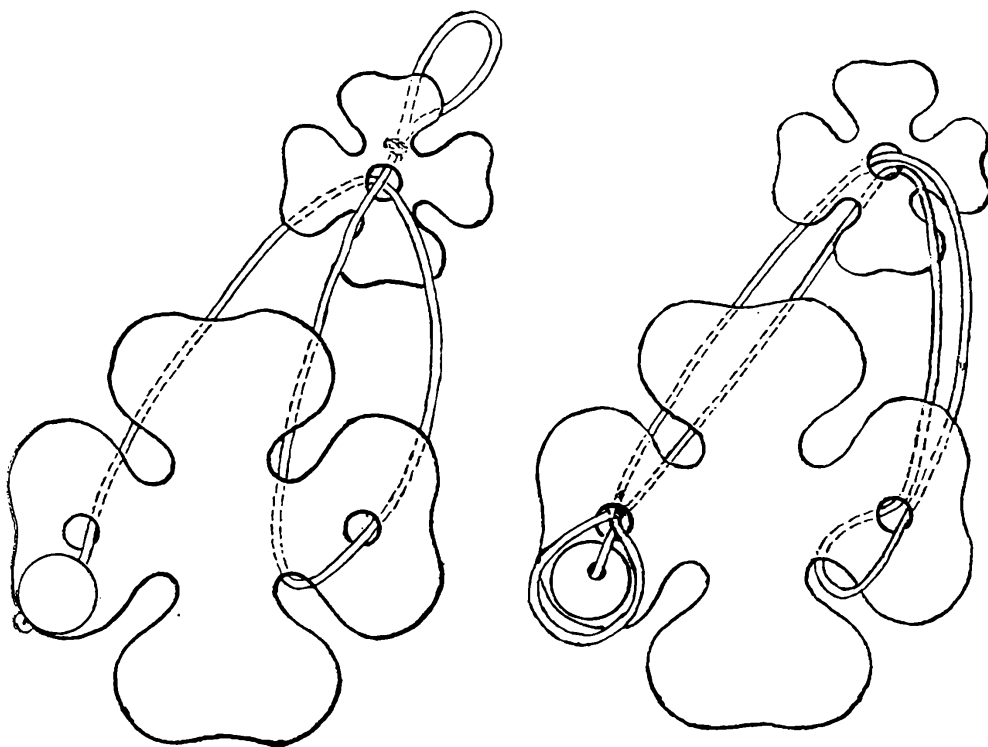
niu vlastných vedomostí. Spoznáte niu vlastných vedomostí. Spoznajte, že „človek sa musí učiť rozmyšľať a nie učiť sa naspamäť“.

Ak chcete premýšľať, pozrite sa aj do knižky *M. J. Tulčínskeho* „Zbierka kvalitatívnych úloh z fyziky“, ktorú vydala Alfa v Bratislave v roku 1978. Získate tu bohatý materiál na fyzikálne úvahy. Ak si budete chcieť oddýchnuť, osviežiť sa, skúste si prelistovať knižku „Besedy o fyzike“ od *M. I. Bludova*. Vyšla v SPN Bratislava v roku 1979.

Dušan Jedinák

Řešení hlavolamu „Pýr v jeteli“ (viz nákres)

1. Smyčku vlákna protáhneme otvorem ve středu menšího čtyřlístku.
2. Smyčku dále provlékneme otvorem většího čtyřlístku, jímž prochází vlákno s korálkem. Ten pak provlékneme smyčkou a vlákno osvobodíme vyvléknutím ze zbývajících otvorů. A tím jsme „jetel“ zbavili „pýru“.

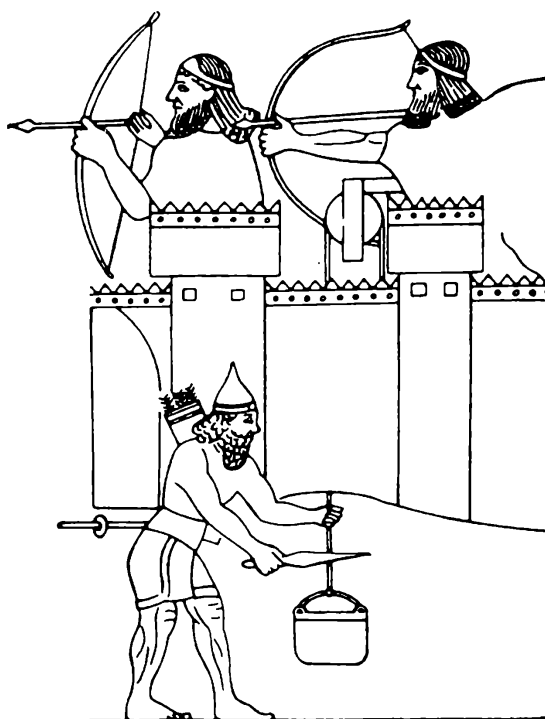


První zobrazení kladky

Ještě před necelými sto lety se soudilo, že zakladateli všech věd, tedy i fyziky, byli antičtí Řekové. K nejvýznamnějším objevům starověké fyziky a techniky patřilo pět tzv. *potencí*, pět jednoduchých strojů (mechanismů). Dnes hovoříme o šesti; na principu páky funguje páka, kladka a kolo na hřídeli, na principu nakloněné roviny klín, šroub a — což si Řekové neuvědomili — také nakloněná rovina. Objev a popis jednoduchých i z nich odvozených složitých mechanismů býval spojován se jmény dvou největších fyziků starověku, *Archiméda* a *Heróna*.

Velké překvapení přinesly historikům vědy vykopávky v Mezopotámii. Na obrázku vidíme kresbu z jedné z assyrských památek, na které je dobře patrná kladka. Je však jisté, že se používala i mnohem dříve při budování monumentálních staveb v této oblasti.

Za kolébkou technické civilizace nepokládáme tedy antické Řecko, ale velké říční civilizace Orientu, tj. národy usazené v údolích Nilu, Eufratu a Tigridu, dále Indu a Gangy i čínských řek. Nejstarší však je asi civilizace v Mezopotá-



mii, kde žili Sumerové, po nich Babyloňané a Asyřané čili Chaldejci. Technicky náročné stavby sítě zavlažovacích kanálů, hradeb měst i komplexů vysokých budov vyžadovaly umné využívání a zdokonalování jednoduchých strojů. Tyto činnosti přispívaly i k rozvíjení geometrických a počtářských dovedností a praktik, které byly základem pro pěstování matematiky.

Vladimír Malíšek

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

vydalo novou příručku pro účastníky matematické olympiády. Zpracovali ji Leo Boček a Antonín Vrba a jmenuje se

VYBRANÉ ÚLOHY Z MO, KATEGORIE C

V publikaci je sto deset řešených úloh typických pro kategorii C, jež byly vybrány z 16. až 30. ročníku MO. Vtipná a obratná řešení úloh ukazují, jak důležité je logické usuzování v matematice. Sbírka úloh je určena nejen soutěžícím v matematické olympiádě, ale všem žákům středních škol, kteří se hlouběji zajímají o matematiku.

(Kčs 9,—)

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, ČSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1984.

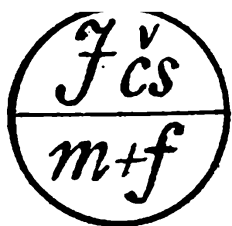
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

**ROČNÍK 63, 1984/85
PROSINEC**

(4)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava,
Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha,
doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Hana Kořínková, CSc., ÚÚVPP Praha,
prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra,
ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

S. Komenda: Náhoda ve službách členství	145
M. Trch: O jednom kritériu dělitelnosti sedmi a jeho zobecnění	147
E. Kraemer: Řešením úloh opakujeme geometrii II	151
D. Chorvát: Hrozba následků jadrovej vojny IV	157
I. Volf: Pohyb tělesa v odporujícím prostředí	162
J. Machalický: O závislosti gravitačních sil na prostředí, které obklopuje tělesa	170
J. Šedivý: Henri Poincaré – vědec s výraznou Intuicí	175
J. Mann: Matematickým kutilům pod stromeček	181
E. Calda: Profesor Ypsilon o harmonické řadě a velkém třesku	183
Naše soutěž	184
Olympiády a SOČ .	191
Z nových knih .	192
Pohledy do dějin	. 3. str. obálky

MATEMATIKA

Náhoda ve službách člověčenství

RNDr. STANISLAV KOMENDA, CSc., lék. fakulta UP Olomouc

Ne, nebude řeč o šťastné náhodě, která někomu pomohla. Neutopit se, ačkoli se led prolomil. Anebo vyváznout s pouhými škrábanci, zatímco auto už žádný chirurg nedá dohromady. Tyto řádky budou věnovány náhodě jako takové. Náhodě, která nás doprovází na našich cestách, ať se nám to líbí nebo nelíbí. A navštěvuje nás, i když nejsme právě doma. Protože i zloděj se někdy rozhoduje podle nahodilých okolností, který byt nebo která chata se stanou nejvhodnějším objektem jeho zájmu.

Náhoda bývá podceňována, zlehčována a někdy dokonce odmítána. Vylučována ze slušné společnosti. Jindy jsou k ní zraky upírány jako k jediné naději. To když se čeká od jednoho sázkového týdne k druhému, od losování k losování. Obojí je počínání pošetilé. Rozhodně je lépe dát si trochu práce a zkusit se s náhodou seznámit. S dobrým známým se totiž můžeme vždycky snáze dohodnout.

Život je jen náhoda — zpívá se v jedné písničce. To je jistě poněkud nadsazené. Život není jenom náhoda. Život je docela hezký vynález — má ovšem svoje rizika. To poznal člověk už dávno. Teprve mnohem později však pochopil, že je tu i určitá možnost o tahle rizika se rozdělit. Samozřejmě, ne tak, že svoje rizika hodí na krk někomu jinému. Něco za něco. Aby to bylo spravedlivé, každý rok trochu . . . a v dohodě s jinými, sousedy i lidmi docela neznámými, dají se dohromady prostředky, které učiní následky náhodných rizik snesitelnými. Takhle nějak vznikala pojištění — nemocenské, havarijní i ta další. Jeden z momentů, kdy si člověk uvědomoval svoje lidství. Co bylo až dosud náhodnou katastrofou pro jedince, stalo se drobným pravidelným vydáním pro člena společenství.

Aby mohl takový systém „rizika na zálohu“ začít fungovat, bylo třeba nejdříve trochu počítat. Jak často se realizuje riziko — s těmi či jinými následky . . . a jak vysoký musí tedy být pravidelný vklad každého účastníka této hry — včetně režijních nákladů pojišťovací organizace, samozřejmě. Náhodu pojistné události bylo třeba poznat, pochopit — a spočítat její chování soustavou vzorců a konstant.

Vlastností náhody využíváme i v docela jiné oblasti lidské činnosti. Je ovšem smutné — a přitom nikterak výjimečné — že k podstatnému

pokroku přitom přispěly požadavky válečné výroby. Jedná se o destrukční zkoušky předmětů masové produkce.

Typickým výrobkem tohoto druhu jsou žárovky. Hlavním funkčním parametrem žárovky je její životnost, tj. doba, po kterou dokáže žárovka dodávat světlo požadované intenzity. Jenomže, když se takové měření na dané žárovce provede, nemáme už žárovku, ale jen skleněnou baňku, nehodící se ani na vánoční stromeček. To je případ situace, kdy měřením se ničí měřené. (Ve válečné výrobě, o níž byla řeč výše, se jednalo o kontrolu jakosti střeliva a dělostřeleckých nábojů.) Kontroly jakosti se ovšem vzdát nemůžeme ani v situacích tohoto typu. Naopak, význam kontroly se vzrůstajícími nároky na jakost zahrnuje všechny druhy výrobků. Ukázalo se, že pomoci může náhoda. Když se trochu počítalo, vyšlo najevo, že stačí docela dobře proměřit vlastnosti vybraného vzorku z rozsáhlého souboru výrobků daného druhu, aby se dostal už poměrně výstižný obraz o celém souboru. Náklady na měření spolu s cenou toho, co se měřením zničilo, představují poplatek za získanou informaci. Což ukazuje — v této speciální situaci — že informace může být zbožím právě tak, jako bezešvé punčochy, ovčí sýr nebo elektrická lokomotiva.

Přeskočme teď o pořádný kus jinam. A přitom tam, kde jsme vlastně pořád jako doma. Máme na mysli léky a hodnocení jejich účinku.

S tím, jak nám přibývá let, začínáme pozorněji naslouchat řečem o tom, co pomáhá, když někde píchá a jinde tlačí, když se chce spát moc anebo vůbec ne . . . Však to znáte. Nemáme v úmyslu fandit sousedské výpomoci v diagnóze a terapii. Vůbec ne. Nicméně, i při naprosto objektivním hodnocení bývá konstatován rozdílný účinek při opakované aplikaci daného léku. Jak se vlastně posuzuje, zdali je preparát účinný nebo ne? S použitím exaktních kontrolních metod? Možná se to bude zdát podivné, ale . . . k takové kontrole dostává pozvánku náhoda. Vybranému souboru jedinců se podá lék a po nějaké době neutrální látka, tzv. placebo. Obojí má stejný tvar, jedny tablety jsou modré, druhé zelené. Pro jistotu se pořadí aplikace u poloviny jedinců obrátí: nejdříve placebo, potom lék. A srovnává se efekt. Je to jako v tom docela jednoduchém pokusu s házením mincí. Kdyby lék nepůsobil, měla by hlava (pacient chválí modré) i lev (pacient chválí zelené) stejnou šanci. Podání hlav i lvů řídí ovšem náhoda. A my víme jak. Takže, padá-li hlava podstatně častěji než v polovině případů, svědčí to o účinnosti léku.

A ještě jeden příklad.

Málokdo dnes pochybuje o souvislosti mezi kouřením a výskytem plicní rakoviny. Dokonce ani kuřáci většinou nepochybují — utěšují se představou, že tato souvislost má trhliny, jimiž vykukuje náhoda: ne

každý kuřák skončí rakovinou plic. (Jsou tu taky infarkty a dopravní nehody.) A pak rakovinou plic může onemocnět i ten, kdo si v trafice kupoval vždycky jenom noviny a pohlednice. Bylo zapotřebí provést nesmírně rozsáhlé statistické studie, roztrždit statisíce případů, registrovat v pamětech počítačů údaje o dlouhé řadě faktorů. Věk, pohlaví, životospráva, případné dědičné vlivy, ukazatele vnějšího prostředí . . . a taky intenzita kouření. Teprve v takových rozsáhlých souborech údajů se mohly prosadit statistické zákonitosti, jimiž se náhoda poslušně řídí. Data se proměnila v informaci, informace v poznání a vědění: kouřit se nemá.

Jen tak mimochodem — když už mluvíme o vědění — napadlo vás někdy, že také do něho zasahuje náhoda? Že přeháníme? No dobrá, ale . . . Snad jenom jednu otázku: Vy jste si nevytáhli nervózní zpocenou rukou svoje maturitní otázky z krabice . . . úplně stejně, jako se z osudí vytahuje pět čísel Matesa?

O jednom kritériu dělitelnosti sedmi a jeho zobecnění

RNDr. MILAN TRCH, CSc., UK Praha

Nedávno se mi dostal do ruky malý sešitek dr. Josefa Daňka „Dělitelnost, rozklad v prvočinitele, největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel“, který v roce 1940 vytiskla tiskárna K. Kovalíka v Židlochovicích „Nákladem autorovým“. Ve stručném šestnáctistránkovém pojednání jsou mimo jiné bez důkazů uvedena známá kritéria dělitelnosti některými čísly; mezi nimi je však na straně 5 pod číslem 12. uvedeno i toto kritérium dělitelnosti sedmi, cituji:

„Číslo je dělitelné sedmi, když dvojnásobný součin jednotek odečítáme od daného čísla, napsaného bez jednotek, a obdržíme číslo dělitelné 7 nebo nulu:

$$\begin{array}{r}
 16\ 62,5 \\
 \underline{10} \\
 16\ 5,2 \\
 \underline{4} \\
 16,1 \\
 \underline{2} \\
 14
 \end{array}$$

Když je číslo velké, postupujeme podle uvedeného způsobu tak dlouho, až zůstanou čísla malá.“

Podstata uvedeného kritéria je víceméně jasná. Vychází se z faktu, že $3 \cdot 7 = 21$. Od daného čísla se odečítají takové násobky čísla 21, aby se odečetly jednotky. Tím se vlastně dané číslo zmenšuje o násobky sedmi, a tedy původní číslo je dělitelné sedmi právě tehdy, když je sedmi dělitelné i nově získané číslo. Výpočet se tak opírá o dvě základní tvrzení, která uvedeme ve formě vět:

Věta 1: Budte a, p, x libovolná celá čísla. Potom p dělí a právě tehdy, když p dělí čísla $a - p \cdot x, a + p \cdot x$.

Důkaz: Jestliže p dělí a , existuje číslo y tak, že $a = p \cdot y$. Potom platí: $a \pm p \cdot x = p \cdot y \pm p \cdot x$, a tedy p dělí obě čísla $a - p \cdot x, a + p \cdot x$. Jestliže naopak p dělí např. číslo $a - p \cdot x$, potom existuje z tak, že $a - p \cdot x = p \cdot z$, a odtud $a = p \cdot (x + z)$.

Věta 2: Nechť p je prvočíslo, $2 \neq p \neq 5$, nechť číslo a končí v dekadickém zápise nulou. Potom p dělí a právě tehdy, když p dělí číslo $\frac{a}{10}$

Důkaz: Číslo a lze vzhledem k jeho tvaru psát jako součin celých čísel $10 \cdot \frac{a}{10}$. Protože p je prvočíslo, nutně p dělí jednoho z činitelů.

Vzhledem k podmínce $2 \neq p \neq 5$ nutně p dělí $\frac{a}{10}$ Obrácené tvrzení je zřejmé.

Celý zápis úlohy ze zmíněného sešitku by tedy měl spíše být zapsán ve tvaru:

$$\begin{array}{r} 16\ 625 \\ - 105 \\ \hline 16\ 520 \\ - 42 \\ \hline 1\ 610 \\ - 21 \\ \hline 140 \end{array}$$

Podstata metody tedy spočívá ve „zmenšování“ čísla vhodnými úpravami „od konce“ daného čísla.

Zamyslíme-li se chvíli nad touto metodou, dostaneme rychle i její zobecnění na všechna další prvočísla $p, 2 \neq p \neq 5$. Stačí si totiž uvědo-

mit, že dekadický zápis prvočísla p potom končí některou z cifer 1, 3, 7, 9. Pozorujme teď, jakou cifrou končí násobky $1 \cdot p, 2 \cdot p, 3 \cdot p, 4 \cdot p, 5 \cdot p$.

1. Končí-li p cifrou 1, pak násobky končí po řadě ciframi 1, 2, 3, 4 a 5.
2. Končí-li p cifrou 3, pak násobky končí po řadě ciframi 3, 6, 9, 2 a 5.
3. Končí-li p cifrou 7, pak násobky končí po řadě ciframi 7, 4, 1, 8 a 5.
4. Konečně končí-li p cifrou 9, potom násobky končí po řadě ciframi 9, 8, 7, 6, 5.

Je-li nyní dáno číslo $b = b_n 10^n + b_{n-1} 10^{n-1} + \dots + b_1 10^1 + b_0$, pak lze vždy přičíst nebo odečíst vhodný násobek čísla p tak, aby po úpravě číslo končilo nulou. Potom můžeme použít větu 2 a celý postup znovu opakovat tak dlouho, dokud získané číslo není menší nebo rovno $5 \cdot p$; přitom stále pracujeme pouze s kladnými čísly. K použití této metody vždy stačí znát prvních pět násobků daného prvočísla. Ukážeme si to v konkrétních příkladech.

Příklad : Rozhodněte, zda číslo 7 931 037 je dělitelné prvočísly $p_1 = 61$, $p_2 = 29$, $p_3 = 17$, $p_4 = 13$.

Řešení : Určíme nejprve násobky prvočísel p_1, p_2, p_3, p_4 čísly 1, 2, 3, 4 a 5:

a) 61, 122, 183, 244 a 305

b) 29, 58, 87, 116, 145

Pomocí těchto násobků budeme dále již jen vhodně upravovat dané číslo:

$$\begin{array}{r}
 7\ 931\ 037 \\
 + 183 \\
 \hline
 7\ 931\ 220 \\
 - 122 \\
 \hline
 7\ 930\ 00 \\
 - 183 \\
 \hline
 610
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7\ 931\ 037 \\
 - 87 \\
 \hline
 7\ 930\ 950 \\
 + 145 \\
 \hline
 7\ 932\ 40 \\
 + 116 \\
 \hline
 7\ 944\ 0 \\
 + 116 \\
 \hline
 8\ 060 \\
 - 116 \\
 \hline
 6\ 90
 \end{array}$$

Číslo 7 931 037 je dělitelné 61,

ale není dělitelné číslem 29.

c) 17, 34, 51, 68 a 85

d) 13, 26, 39, 51 a 65

a znovu můžeme celý výpočet opakovat tentokrát s čísly p_3 a p_4 .

$$\begin{array}{r}
7\ 931\ 037 \\
- 17 \\
\hline
7\ 931\ 02\ 0 \\
68 \\
\hline
7\ 931\ 7\ 0 \\
- 17 \\
\hline
7\ 93\ 00 \\
17 \\
\hline
8\ 1\ 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
7\ 931\ 037 \\
13 \\
\hline
7\ 931\ 05\ 0 \\
- 65 \\
\hline
7\ 930\ 4\ 0 \\
2\ 6 \\
\hline
7\ 933\ 0 \\
- 13 \\
\hline
7\ 92\ 0 \\
- 52 \\
\hline
7\ 4\ 0 \\
2\ 6 \\
\hline
1\ 0\ 0
\end{array}$$

Číslo 7 931 037 tedy není dělitelné ani prvočíslem 13, ani prvočíslem 17. Ve spojení s postupným dělením však tato metoda umožňuje i řešení složitějších úloh.

Příklad: Rozhodněte, zda lze volit cifru $x \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$ tak, aby číslo $214x178$ bylo dělitelné prvočíslem 19.

Řešení: Určíme násobky čísla 19 čísla 1, 2, 3, 4 a 5:
19, 38, 57, 76, 95 a provedeme postupné úpravy čísla $214x178$:

$$\begin{array}{r}
214x178 \\
- 38 \\
\hline
214x14\ 0 \\
76 \\
\hline
214x9\ 0 \\
- 19 \\
\hline
24x9 \\
- 19 \\
\hline
5x9
\end{array}$$

Další úvahy už raději provedeme v dekadickém zápise čísla $5x9$. Podle vyložené metody od čísla $5 \cdot 10^2 + x \cdot 10^1 + 9$ odečteme číslo 19. Tak dostaneme číslo $5 \cdot 10^2 + (x - 1) \cdot 10$, které podle věty 2 vydělíme deseti a získané číslo $5 \cdot 10^1 + (x - 1)$ je menší než pětinasobek čísla 19. Proto je toto číslo dělitelné devatenácti pouze tehdy, když jde o číslo 57. Nutně tedy $x - 1 = 7$ a odtud $x = 8$.

Na procvičení si nyní libovolně můžete zvolit celé číslo a prověřit popsanou metodou dělitelnost tohoto čísla různými prvočísly. Na závěr

snad můžeme ještě metodu více zobecnit. V provedených úvahách je totiž možné požadavek, aby p bylo prvočíslo, nahradit požadavkem, aby p bylo číslo nesoudělné s číslem 10. I při tomto oslabeném předpokladu totiž stále platí věta 2.

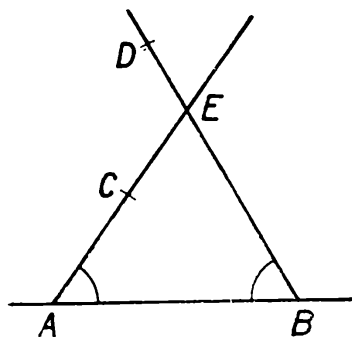
Řešením úloh opakujeme geometrii II

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

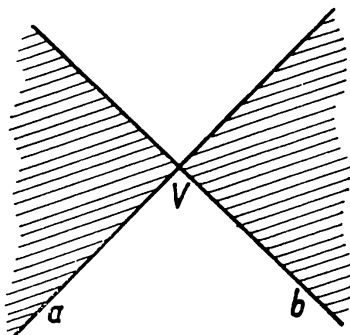
V předešlém článku (Rozhledy, č. 3, str. 102) jsme si připomněli několik jednoduchých vět z planimetrie, které jsme potom užili při řešení šesti nepříliš obtížných úloh. K těmto větám, které jsme označili čísly 1 až 13 (a na něž se budeme i nyní odvolávat), připojíme ještě čtyři věty, které užijeme při řešení dalších úloh vybraných ze zahraničních časopisů citovaných v předešlém článku. Nejprve však připomeneme několik pojmů, které už čtenář množná zapomněl.

Na obr. 1 je přímka AB a mimo ni různé body C , D , které leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou AB . Potom konvexní úhly BAC , ABD se nazývají *úhly přilehlé*. Dvě různoběžky a , b rozdělují rovinu, v níž leží, ve čtyři konvexní úhly se společným vrcholem v průsečíku V přímek a , b (obr. 2). Každé dva z těchto úhlů, které mají společný jedině vrchol V , se nazývají *úhly vrcholové*; na obr. 2 jsou dva z nich vyznačeny čárkováním. Z geometrie víme, že platí tyto dvě věty:

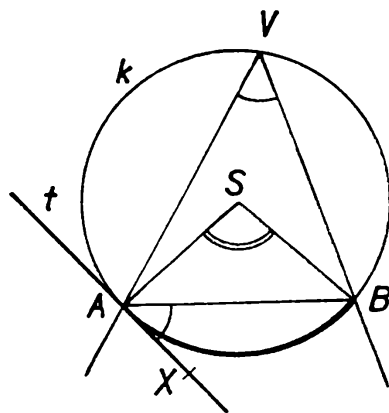
13. V rovině buďtež dány přilehlé úhly BAC , ABD , jejichž grafický součet je menší než úhel přímý. Potom se polopřímky AC , BD protínají v bodu E , který leží uvnitř poloroviny ABC (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

14. Vrcholové úhly jsou shodné (obr. 2).

Ke každé tětivě AB kružnice k mající střed S přísluší právě jeden středový úhel ASB , a to takto: Neprochází-li tětiva AB středem S (obr. 3), přísluší k ní konvexní středový úhel ASB ; prochází-li tětiva AB středem S , přísluší k ní jeden (zvolený) přímý středový úhel ASB . Obráceně, k danému konvexnímu nebo přímému úhlu ASB (A, B jsou body kružnice k) přísluší tětiva AB . Budiž $V \neq A, V \neq B$ libovolný bod kružnice k (obr. 3); potom se konvexní úhel AVB nazývá *obvodový úhel* příslušný k tomu oblouku AB kružnice k , který leží v polorovině opačné k polorovině ABV ; na obr. 3 je tento oblouk silně vytažen. Sestrojíme-li v bodu A tečnu t kružnice k a zvolíme-li na ní bod $X \neq A$, vznikne konvexní úhel BAX zvaný *úsekový úhel*; říkáme, že přísluší k tomu oblouku AB kružnice k , který leží v úhlu BAX . Obdobně existuje úsekový úhel s vrcholem v bodu B . Připomeňme ještě, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož vrcholy leží na kružnici, se nazývá *tětivový čtyřúhelník*. Z geometrie víme, že platí věty, které nyní uvedeme.

15. a) Ke shodným tětivám AB, CD téže kružnice o středu S přísluší shodné středové úhly ASB, CSD .

b) Ke shodným konvexním (nebo přímým) středovým úhlům téže kružnice přísluší její shodné tětivy.

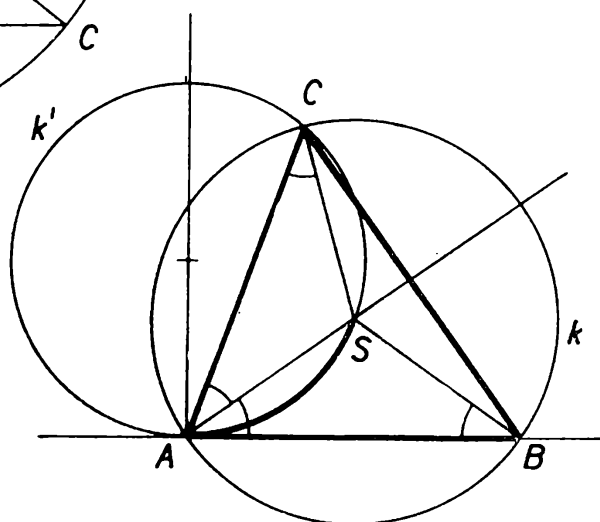
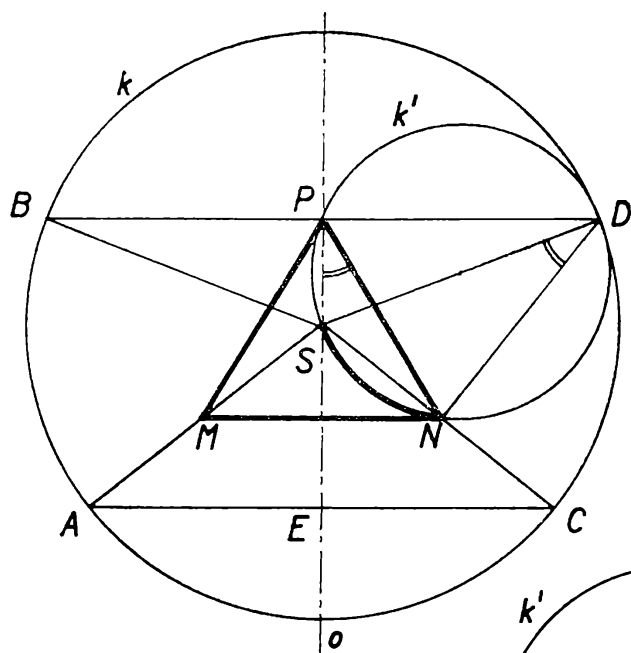
16. Obvodové a úsekové úhly příslušné k témuž oblouku AB kružnice k jsou shodné; každý je shodný s polovinou příslušného úhlu středového.

Důsledek: Součet velikostí protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je 180° .

Úloha 7. Na obr. 4 je narysována kružnice k mající střed S . Na kružnici k leží body A, B, C, D tak, že shodné úhly ASB, CSD mají velikost 60° a že trojúhelníky ACS, BDS mají společný jedině vrchol S ; body M, N, P jsou po řadě středy úseček SA, SC, BD . Máme dokázat, že trojúhelník MNP je rovnostranný.

Řešení. Trojúhelník ACS je rovnoramenný se základnou AC ; podle věty 12 je souměrný podle své výšky ke straně AC . Patu této výšky označme E . Ze souměrnosti shodných úseček SA, SC podle přímky $o = SE$ plyne, že jejich středy M, N jsou souměrně sdruženy podle přímky o . Úhel ESB je grafickým součtem úhlu ESA, ASB a úhel ESD je grafickým součtem úhlů ESC, CSD . Ze shodnosti úhlů ESA, ESC a úhlů ASB, CSD plyne, že úhly ESB a ESD jsou shodné; zároveň jsou shodné také úsečky SB, SD . Z toho plyne, že body B, D jsou souměrně sdruženy podle přímky o ; střed P úsečky BD je tedy průsečíkem vzájemně kolmých přímek $BD, o = SE$. Ze souměrností bodů M, N podle osy o plyne, že trojúhelník MNP je rovnoramenný se základnou MN .

V rovnoramenném trojúhelníku SCD se základnou CD má úhel CSD velikost 60° ; podle části a) věty 1 jsou jeho vnitřní úhly SCD, SDC



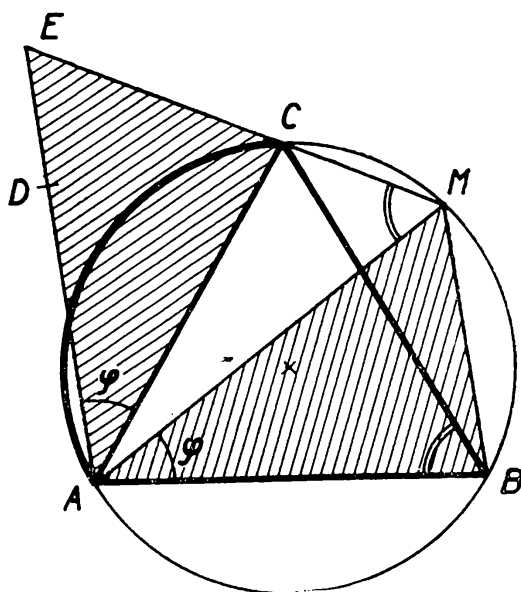
shodné. Z části a) věty 2 plyne, že každý z nich má velikost 60° . Podle části b) věty 1 je trojúhelník SCD rovnostranný. Podle věty 12 je souměrný podle výšky ke straně SC , tj. podle přímky DN ; je tedy $|\sphericalangle SDN| = 30^\circ$. Podle věty 7 leží vrcholy pravých úhlů SND , SPD na kružnici k' , která má průměr SD . Úhly SPN , SDN jsou v této kružnici obvodové a přísluší k témuž oblouku SN ; podle věty 16 je $|\sphericalangle SPN| = |\sphericalangle SDN| = 30^\circ$. Protože přímka $o = SE$ je osou souměrností rovnostranného trojúhelníku MNP , je $|\sphericalangle MPN| = 60^\circ$. Z toho plyne (stejně jako na počátku tohoto odstavce), že trojúhelník MNP je rovnostranný.

Úloha 8. Kružnice k , která je opsána trojúhelníku ABC , má střed S neležící na žádné z přímk AB , AC ; kružnice k' opsaná trojúhelníku ACS se dotýká přímky AB v bodu A (obr. 5). Máme dokázat, že trojúhelník ABC je rovnoramenný.

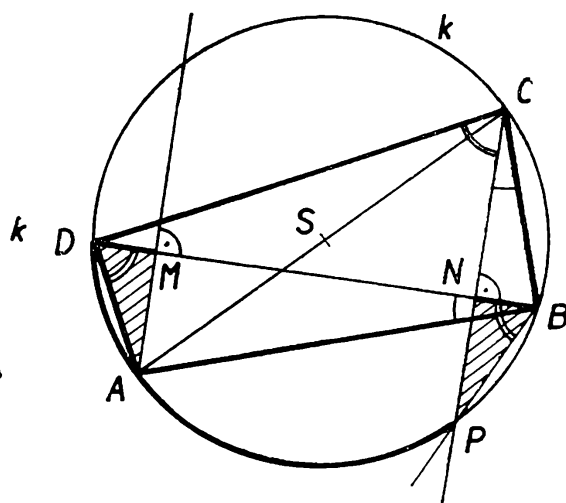
Řešení. Podle předpokladu jsou trojúhelníky ABS , ACS rovnoramenné se základnami AB , AC . Z toho podle části a) věty 1 plyne, že je

$$|\nless SAB| = |\nless SBA| \quad (1)$$

$$|\nabla SAC| = |\nabla SCA| \quad (2)$$



Obr. 6



Obr. 7

Úsekový úhel BAS a obvodový úhel SCA patří k témuž oblouku AS kružnice k' ; podle věty 16 je proto

$$|\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle SAB|. \quad (3)$$

Z (1), (2) a (3) a z části a) věty 2 plyne, že trojúhelníky ABS , ACS mají také shodné úhly při vrcholu S ; zároveň je $|SA| = |SB| = |SC|$. Proto je $\triangle ABS \cong \triangle ACS$ (sus), a tedy je $|AB| = |AC|$.

Úloha 9. Na kružnici k , která je opsána rovnostrannému trojúhelníku ABC , je zvolen bod M , a to uvnitř konvexního úhlu BAC (obr. 6). Máme dokázat, že je $|MB| + |MC| = |MA|$.

Řešení. Bod M leží uvnitř poloroviny ACB . V polorovině k ní opačné sestrojme úhel CAD shodný s úhlem BAM ; jeho velikost budiž φ . Potom je

$$|\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle MAC| + \varphi = |\sphericalangle BAC| = 60^\circ;$$

podle věty 16 je $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ABC| = 60^\circ$. Podle věty 13 se polopřímky AD , MC protínají v bodu E , který leží uvnitř poloroviny AMC ; protože bod E leží uvnitř polopřímky AD , leží uvnitř poloroviny ACD . Podle části a) věty 2 je také $|\sphericalangle AEM| = 60^\circ$. Z části b) věty 1 plyne, že trojúhelník AME je rovnostranný; je tedy

$$|ME| = |MA| = |AE|. \quad (1)$$

Protože je ještě $|AC| = |AB|$ a $|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle BAM| = \varphi$, je $\triangle ACE \cong \triangle ABM$ (sus); z toho plyne, že je $|CE| = |MB|$. Je tedy $|MB| + |MC| = |CE| + |MC| = |ME|$, a tedy podle (1) je $|MB| + |MC| = |MA|$.

Úloha 10. Konvexní různoběžník $ABCD$ je vepsán do kružnice k mající střed S ; jeho úhlopříčka AC je průměrem kružnice k . Vrcholy A ,

C jsou vedeny kolmice k přímce BD a sestrojeny po řadě jejich průsečíky M, N s touto přímkou. Máme dokázat, že body M, N leží uvnitř úsečky BD , a to tak, že úsečky BN, DM jsou shodné.

Řešení. a) Je-li $BD \perp AC$, je $M = N$ a body B, D jsou souměrně sdruženy podle průměru AC kružnice k (věta 11). Proto bod $M = N$ je středem úsečky BD .

b) Nechtě přímky AC, BD nejsou vzájemně kolmé. Protože $ABCD$ není rovnoběžník, není úhlopříčka BD průměrem kružnice k . Proto střed S této kružnice leží buď uvnitř poloroviny BDC (obr. 7) nebo uvnitř poloroviny BDA ; obrázek pro druhý případ si nakreslí čtenář sám a uvidí, že důkaz probíhá v tomto případě stejně jako v případě znázorněném na obr. 7. Podle věty 7 je

$$BA \perp CB, DA \perp CD. \quad (1)$$

Bod D leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině ACB . Proto přímka AC protíná úsečku BD v jejím vnitřním bodu, který tedy náleží vnitřní oblasti omezené kružnicí k ; proto je také vnitřním bodem tětiny AC . Polopřímka BD rozděluje tedy pravý úhel ABC na ostré úhly ABD, CBD a polopřímka DB rozděluje pravý úhel ADC na ostré úhly ADB, CDB . Z části a) věty 4 potom plyne, že body M, N leží uvnitř úsečky BD .

Přímky AC, BD nejsou rovnoběžné; proto přímka $CN \perp BD$ není tečnou kružnice k . Protíná ji tedy ještě v bodu $P \neq C$. Bod N je vnitřní bod tětiny CP kružnice k ; proto úhel BCN splývá s úhlem BCP . Zároveň to je vnitřní úhel pravoúhlého trojúhelníku BNC s přeponou BC , a proto je ostrý; výše jsme zjistili, že také úhel ABD je ostrý. Podle (1) je $BA \perp CB$ a zároveň je $BD \perp CP$; podle věty 3 je

$$|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle ABD|$$

Úhly BCP, ABD jsou shodné obvodové úhly v kružnici k ; podle věty 16 k nim náležejí shodné středové úhly BSP, ASD . Podle části b) věty 15 jsou tětiny BP, AD shodné, tj.

$$|BP| = |AD| \quad (2)$$

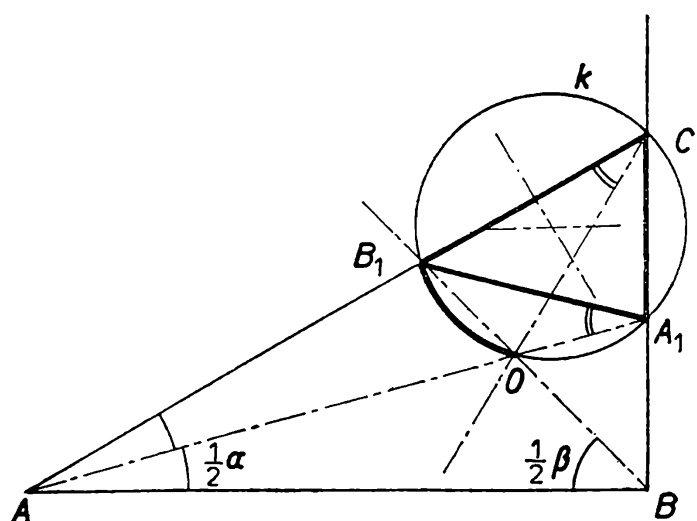
Obvodové úhly DBP, DCP patří k oblouku DAP kružnice k ; podle části a) věty 16 je

$$|\sphericalangle DBP| = |\sphericalangle DCP| \quad (3)$$

Úhly DCP, ADB jsou ostré; podle (1) je $DA \perp CD$ a podle konstrukce je $DB \perp CP$. Podle věty 3 je

$$|\sphericalangle DCP| = |\sphericalangle ADB| \quad (4)$$

Z (3) a (4) plyne, že je $|\sphericalangle DBP| = |\sphericalangle ADB|$, takže pravoúhlé trojúhelníky BNP, DMA mají shodné ostré úhly; podle (2) mají také shodné přepony. Proto je $\triangle BNP \cong \triangle DMA$, z čehož plyne, že je $|BN| = |DM|$



Obr. 8

Úloha 11. V trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle ABC| = 3 \cdot |\sphericalangle BAC|$. Z geometrie víme, že osy jeho vnitřních úhlů procházejí týmž bodem O , který je vnitřním bodem trojúhelníku ABC . Přímka AO protíná strany BC v jejím vnitřním bodu A_1 a přímka BO protíná stranu AC v jejím vnitřním bodu B_1 ; předpokládejme, že čtyřúhelník OA_1CB_1 je tětiový (obr. 8). Máme vypočítat velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku A_1B_1C .

Řešení. Budiž $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle ACB| = \gamma$; podle předpokladu je $\beta = 3\alpha$. Podle části a) věty 2 je

$$\begin{aligned} \alpha + 3\alpha + \gamma &= 180^\circ \\ \gamma &= 180^\circ - 4\alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Podle předpokladu je $|\sphericalangle BAO| = \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle ABO| = \frac{\beta}{2} = \frac{3\alpha}{2}$; podle části a) věty 2 je

$$|\sphericalangle AOB| = 180^\circ - \frac{4\alpha}{2} = 180^\circ - 2\alpha.$$

Podle věty 14 jsou vrcholové úhly AOB , A_1OB_1 shodné, takže

$$|\sphericalangle A_1OB_1| = 180^\circ - 2\alpha. \quad (2)$$

Podle důsledku věty 16 je $|\sphericalangle A_1CB_1| + |\sphericalangle A_1OB_1| = 180^\circ$, tj. podle (1) a (2) je

$$\begin{aligned} 180^\circ - 4\alpha + 180^\circ - 2\alpha &= 180^\circ, \\ \alpha &= 30^\circ. \end{aligned} \quad (3)$$

Podle předpokladu je $\beta = 3\alpha$ čili

$$\beta = 90^\circ; \quad (4)$$

podle (1) je

$$\gamma = 60^\circ \quad (5)$$

Obvodové úhly OA_1B_1 , OCB_1 patrí k témuž oblouku OB_1 kružnice k opsané čtýrúhelníku OA_1CB_1 ; podle věty 16 a podle (5) je

$$|\sphericalangle OA_1B_1| = |\sphericalangle OCB_1| = \frac{\gamma}{2} = 30^\circ \quad (6)$$

Podle části a) věty 2 a podle (3) a (4) je

$$|\sphericalangle AA_1C| = |\sphericalangle BAA_1| + |\sphericalangle ABA_1| = \frac{\alpha}{2} + \beta = 105^\circ \quad (7)$$

Potom podle (6) a (7) je

$$|\sphericalangle B_1A_1C| = |\sphericalangle AA_1C| - |\sphericalangle OA_1B_1| = 105^\circ - 30^\circ = 75^\circ \quad (8)$$

Z části a) věty 2 plyne podle (5) a (8), že je $|\sphericalangle A_1B_1C| = 45^\circ$.

FYZIKA

Hrozba následkov jadrovej vojny IV

Možné dôsledky globálnej jadrovej vojny na poľnohospodársku a živočíšnu produkciu

Doc. dr. DUŠAN CHORVÁT, CSc., MFF UK Bratislava

Pri hodnotení možných účinkov globálnej jadrovej vojny na poľnohospodársku a živočíšnu produkciu, ktorá je ešte stále základom výroby potravín (i keď sa dnes snažíme rozvíjať aj iné typy takejto výroby — napr. biotechnológie), je potrebné vychádzať z dvoch základných hľadísk:

- z hľadiska okamžitých dôsledkov jadrových výbuchov na užitkové poľnohospodárske zvieratá a poľnohospodárske kultúry,
- z hľadiska účinkov, ktoré sa prejavujú v období po skončení takejto vojny v produkcii potravín.

Druhé hľadisko sa často v oficiálnych prejavoch vojnychtivých politikov nespomína, alebo sa považuje za bezvýznamné, čomu — žiaľ — zďaleka nie je tak.

Ponajprv sa sústreďme na okamžité účinky — tieto súvisia priamo s jadrovým výbuchom a sú charakterizované predovšetkým ťažkým poškodením zdravotného stavu prakticky všetkých živých organizmov. Vznikajú v dvoch časovo pomerne presne vymedzených obdobiach:

1. V období pri a bezprostredne po výbuchu (do jedného dňa), kedy rozhodujúce budú účinky prenikavého žiarenia gama, vyvolávajúceho veľmi veľké celotelové ožiarenie organizmov, a ďalej účinky tepelnej a tlakovej vlny (najmä v bezprostrednom okolí epicentra výbuchu), v dôsledku čoho hynú zvieratá a zničia sa poľnohospodárske kultúry. Veľkosť účinkov bude závisieť od celotelového ožiarenia, od rôznej citlivosti živočíšnych a rastlinných druhov voči žiareniu rôznej energie, pri tlakovom a tepelnom pôsobení bude rozhodujúca vzdialenosť od epicentra výbuchu.

U užitkových zvierat možno za najcitlivejšie voči ožiareniu gama považovať ovce a hovädzí dobytok, odolnejšie sú ošípané a ešte odolnejšia je hydina. Dôsledky závisia aj od toho, či sú zvieratá ustajnené, alebo sa voľne pasú. Ak prijmeme *Bondiettiho* predpoklad [1], že pri jadrovom výbuchu prežije 75 % obyvateľstva v zasiahnutej oblasti, potom z ustajnených zvierat prežije 64 % oviec, 67 % dojníc a iného hovädzieho dobytku a 72 % ošípaných, zatiaľ čo na pastve prežije iba 53 % oviec a dobytku a 69 % ošípaných.

Poľnohospodárske kultúry sú odolnejšie voči ožiareniu gama ako zvieratá. Pritom však treba pamätať, že dávka, ktorá zabije 10 % plodín, zníži výnosy až o 50 %. Citlivosť voči ožiareniu u rôznych rastlinných druhov veľmi kolíše a závisí od druhu (rozdiely sú až 100 násobné) a veku (rozdiely až 50 násobné). Najťažšie poškodenie vyvolá ožiarenie plodín v období tesne pred ich dozretím a u druhov s veľkým bunecným jadrom a veľkým počtom chromozómov. Najcitlivejší z tohto hľadiska je jačmeň, odolnejšie sú potom plodiny v poradí: žito, ovos, pšenica, kukurica, slnečnica, lucerna, cukrová trstina, sója, ryža. Ako príklad na veľkosť rozdielu v odolnosti môže poslúžiť údaj, podľa ktorého u jačmeňa dosiahneme 50 % redukcii výnosov pro dávke 5 až 6 Gy¹⁾, zatiaľ čo u ryže na to potrebujeme 140 Gy.

2. V období tesne po výbuchu — od jedného týždňa do jedného mesiaca — kedy rozhodujúcimi budú účinky lokálneho rádioaktívneho spadu.

Rádioaktívny spad vzniká tým, že pri výbuchu jadrovej nálož (najmä prízemnom), je obrovské množstvo rôznych pevných materiálov zo zemského povrchu vtiahnuté do ohniska výbuchu a rozbité na nepatrné čiastočky, ktoré vytvoria rádioaktívny mrak. Častice mraku, väčšie ako 20 μm , vypadnú vo forme prachu na zemský povrch vo veľmi krátkom čase po výbuchu (väčšina prakticky ešte počas prvého dňa). Túto časť nazývame *rýchlým* alebo *lokálnym spadom*. Tento zamorí okolie epicentra výbuchu v smere vanúceho vetra, a to podľa veľkosti jadrovej

¹⁾ 1 Gy, čítaj grej, je jednotkou absorbovanej dávky, 1 Gy — 1 J/kg

nálože, až do vzdialenosti 500 km. Ostatné častice, menšie ako 20 μm , vynesie výbuch až do stratosféry, kde sa zdržia aj viac ako rok. Táto časť obsahuje asi polovicu aktivity rádioaktívnych látok, vzniklých pri výbuchu. Stratosféra sa tak stáva zásobníkom týchto látok. Zo stratosféry je potom dlhú dobu zamorovaný celý zemský povrch. Takéto zamorenie nazývame *globálnym spadom*. Výsledkom tohto procesu je zvýšenie obsahu rádioaktívnych látok na zemi a tým aj v užitkových zvieratách a plodinách prinajmenšom počas 10 rokov po výbuchu.

Pokúsme sa odhadnúť, aké následky ponesie so sebou lokálny spad z výbuchu jadrovej nálože nad poľnohospodársky vyspelou krajinou. Dá sa ukázať, že keď vybuchne jadrová nálož, ekvivalentná 1 megatone TNT, jediný nuklid s výraznou aktivitou gama v lokálnom spade (napr. ^{90}Sr) spôsobí povrchové zamorenie o veľkosti $5,55 \cdot 10^{10} \text{ Bq/km}^2$ v oblasti do 150 km od epicentra a ešte vo vzdialenosti väčšej ako 400 km bude zamorenie týmto rádionuklidom iba 10-krát menšie. Takéto zamorenie vyvolá v oblasti pri epicentre celotelové ožiarenie netienených užitkových zvierat a plodín dávkami až 4,5 Gy počas prvých 24 hodín po výbuchu. To by spôsobilo uhynutie väčšiny zvierat a zníženie výnosov obilia. Pritom sme nebrali do úvahy doplňujúce celotelové ožiarenie týchto zvierat a plodín z rádioaktívneho mraku. Lokálny spad v dôsledku pomerne veľkého rozmeru častíc neprenikne priamo do dýchacieho traktu zvierat. Pretože však okrem gama-aktívnych nuklidov obsahuje aj celý rad nuklidov s tzv. beta aktivitou, ktorých energia je dostatočná na poškodenie povrchov plodín a pokožky zvierat. Na koži vyvolá otvorené rany s možnosťou infekcie. Listy rastlín stratia svoje asimilačné schopnosti, znížia sa výnosy, alebo rastliny vyschnú. V prípade konzumácie takto zamorených plodín užitkovými zvieratami a človekom, poškodia sa steny ich gastrointestinálneho traktu (pažeráka — žalúdk — čriev), čo následne spôsobí vysokú pravdepodobnosť vzniku otvorených rán na týchto povrchoch s možnosťou bakteriálnej infekcie a stratou imunity.

Veľmi nebezpečnou je aj kontaminácia mlieka nestabilným jódom (najmä nuklidom ^{131}I) a inými rozpadovými produktami, prítomnými v lokálnom spade. Po skrívení kontaminovaných listov plodín sa tieto rozpadové produkty veľmi ľahko prenášajú v organizme dojnice do mlieka a po požití takéhoto mlieka človekom sa ukladajú v jeho telesných orgánoch. Ako príklad možno uviesť, že týždeň po výbuchu v dôsledku zamorenia pastvín lokálnym spadom vo vzdialenosti 300 km od epicentra vyvolá požitie litra mlieka od kravy, napasenej na tejto pastvine, ožiarenie detskej štítnej žľazy dávkou 2 Gy, čo je takmer stonásobne vyššia hodnota, než akú pripúšťajú súčasné normy.

Užitkové zvieratá, ktoré prežijú, budú mať ťažkosti s prijímaním potravy, čo zaviní ich chudnutie. Zvieratá, ktoré prežijú aj toto obdobie, začnú normálne žrať až asi po 60 dňoch, ale priberať budú veľmi pomaly.

Rádioaktívny jód poškodí aj ich štítnu žľazu, čo spôsobí u dojnic úbytok produkcie mlieka.

V ďalšom si pohovorme o dlhodobých účinkoch, ktoré súvisia s celým radom faktorov, nielen s aktivitou rádioaktívnych nuklidov, ako o tom hovoria *Bondietti* a *Hjort* [1, 2].

1. V dôsledku globálneho spadú sa v plodinách a zvieratách vytvorí vysoká koncentrácia rádioaktívnych látok. Ako sme už spomenuli, do stratosféry sa po globálnej jadrovej vojne dostane asi polovica uvoľnenej aktivity pri všetkých výbuchoch uvoľnených rádionuklidov a táto sa pomerne pomaly (rýchlosťou asi pol celkového množstva za rok) bude presúvať naspäť, takže asi o 7 rokov sa takto „uložená“ aktivita zníži na 1 % a 99 % sa jej vráti na zemský povrch. Každé miesto severnej pologule by sa v dôsledku globálnej jadrovej vojny z takového spadú (predovšetkým z nuklidov ^{90}Sr a ^{137}Cs) zamorilo tak, že aktivita 1 km^2 by dosiahla asi $2,2 \cdot 10^{10}\text{ Bq}$. Počas prvých povojnových rokov by bola väčšina poľnohospodárskych plodín zamorená priamo globálnym spadom cez povrchové časti rastlín, ale približne po troch rokoch by sa začalo uplatňovať zamorenie rádioaktívnymi látkami cez koreňový systém plodín. Vzhľadom na pomerne vysokú odolnosť plodín voči žiareniu by bolo možné aj pri takýchto vysokých hladinách zamorenia dosiahnuť poľnohospodársku úrodu, ale ľudia, pracujúci na poliach (alebo pohybujúci sa voľne po zemskom povrchu), by v dôsledku zamorenia pôdy dostali takú vysokú celotelovú dávku (až 2 Gy za prvý rok), že by sa vlastne zmenili na zamestnancov, profesionálne pracujúcimi s rádioaktívnymi látkami, pričom súčasné normy ochrany pred žiarením takéto dávky považujú, ako o tom hovorí *Mudroň* [3], aj pre túto kategóriu pracovníkov za rizikovú alebo vôbec neprípustnú.

Základné rastlinné a živočíšne produkty budú rôzne kontaminované. Kontaminácia zrnín bude postupne klesať a to z hodnoty 370 Bq/kg k pomerne nízkym hodnotám až po desiatich rokoch. U mäsa a mlieka zo zvierat, ktoré vojnu prežijú alebo sa narodia po nej, sa po počiatočnom poklese ustáli koncentrácia asi na desatinu počiatočnej hodnoty. Ďalej bude klesať už len veľmi pomaly. Ožiarenie síce reprodukciu zvierat významne nezníži, ale u novonarodených zvierat budú časté defekty a deformácie.

Vysoké riziko vyvolá taktiež vdychovanie jemných častíc globálneho spadú a používanie zamorenej vody [Chrapan (4)].

2. V dôsledku zničenia priemyselnej infraštruktúry, potrebnej pre výrobu poľnohospodárskych strojov a mechanizácie, sa poľnohospodárske práce po vojne vrátia k primitívnym spôsobom obrábania pôdy — k ručnému obrábaniu alebo obrábaniu s jednoduchým pluhom a zvieracím záprahom.

3. V dôsledku zániku výroby umelých hnojív a pesticídov sa znížia výnosy na poliach a zanikne umelá ochrana rastlín pred škodcami, čo v prvých rokoch vyvolá rôzne typy poľnohospodárskych katastrof. Predpokladá sa tiež, že v dôsledku globálnej jadrovej vojny bude zničená banka šľachtených osív a zaniknú špeciálne pestovateľské techniky, umožňujúce dosahovať vysoké úrody, čo opäť zníži množstvo dorábaných plodín. V dôsledku zániku veterinárnej ochrany vzniknú epidémie u zvierat.

4. V dôsledku zániku dopravných a obchodných systémov a štruktúr sa zničí národný a medzinárodný systém výmeny a distribúcie potravín, čo vyvolá nevyhnutnosť vystačiť s vlastnými — a to spravidla nedostatočnými — zdrojmi potravín. Dôsledkom budú hladomory a neriešiteľné sociálne situácie, a to aj v krajinách, ktoré nemusia byť priamo zasiahnuté jadrovým útokom.

5. Poľnohospodárske výnosy sa znížia aj v dôsledku veľkej škály zmien v zložení atmosféry a v dôsledku výrazných klimatických zmien a zmien meteorologických a tepelných podmienok na Zemi (Janisková [5]).

Uvedené úvahy sú iba veľmi stručným výpočtom možných dôsledkov globálnej jadrovej vojny na poľnohospodársku a živočíšnu produkciu.

Aj na základe uvedeného však možno jednoznačne konštatovať, že zásobovanie ľudstva potravinami po takejto vojne, ako aj zabezpečenie podmienok pre život, by sa stalo neriešiteľným problémom. Pokusy presvedčiť ľudí, že takúto vojnu možno prežiť v krytoch so zásobami potravín, sú nehoráznym podvodom. Ľudia by sa pri takejto vojne a po nej ocitli pri zabezpečovaní svojej výživy priamo v dobe kamennej, pričom treba pripomenúť, že v tejto predhistorickej dobe žili na zemi jednotlivci a nie miliardy ľudí a naši predkovia boli pre takýto život biologicky neporovnateľne lepšie prispôsobení. Treba si uvedomiť, že globálna jadrová vojna nie je obmedzená na dobu jej trvania, že katastrofickými sú predovšetkým jej povojnové dôsledky a že jedine zachovanie mieru dáva ľudstvu nádej na prežitie.

Literatúra :

- [1] E. A. Bondietti: Effects GNW on Agr culture, Ambio, 2—3, 1982
- [2] H. W. Hjort: The impact CNW on Global Food Supplies, Ambio, 2—3, 1982
- [3] J. Mudroň: Hrozba zneužitia modernej vedy, Rozhledy mat. fyz., č. 1, roč. 63, str. 24
- [4] J. Chrapan: Hydrosféra po globálnej jadrovej katastrofe, Rozhledy mat. fyz., č. 3, roč. 63, str. 116
- [5] O. Janisková: Klimatické a atmosferické pomery po jadrovej vojne, Rozhledy mat. fyz., č. 2, roč. 63, str. 60

Pohyb tělesa v odporujícím prostředí

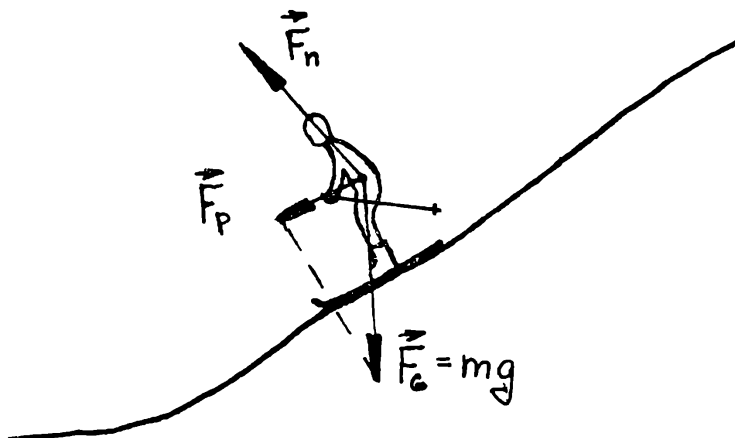
RNDr. IVO VOLF, ÚV FO

Velmi často se uvádí v textech fyzikálních úloh podmínka, že tření nebo odpor prostředí se při řešení má nebo může zanedbat. Přitom však pohyby bez působení odporových sil se prakticky nevyskytují. Dokonce při řešení některých problémů se s těmito silami musí počítat (např. při pohybu výsadkáře bez otevřeného padáku, s padákem, pohyb závodního automobilu aj.). V našem článku se chceme zabývat některými jednoduchými případy pohybu, které dovedeme vyřešit se znalostí středoškolské matematiky a fyziky, bez využívání různě složitých diferenciálních rovnic.

1. Pohyb tělesa při působení odporové síly

Úvodem vyřešíme několik úloh; jejich řešení jsme naznačili a podrobný postup ponecháváme čtenáři.

Ú 1: Lyžař sjíždí s kopce s úhlem sklonu α po přímé trati, poté přejede na vodorovný úsek. Na počátku byl lyžař v klidu ve vzdálenosti s měřené podél svahu od úpatí kopce. Zjistěte, jak se mění jeho rychlost při jízdě po svahu a po vodorovném úseku, nebudeme-li uvažovat tření a další odporové síly. Úlohu řešte pro $s = 100$ m, $\alpha = 30^\circ$, $g \doteq 9,8$ m $\cdot$ s $^{-2}$.



Obr. 1

Řešení: Lyžař se bude pohybovat tak, že na něj na svahu působí síla $F_p = m g \sin \alpha$, která je výslednicí dvou sil: tíhové díly $F_G = m g$ a síly, jíž působí podložka na lyže, $F_n = m g \cos \alpha$ (obr. 1). Při jízdě po svahu bude zrychlení pohybu $a_1 = g \sin \alpha$, lyžař sjede na úpatí kopce za dobu

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}} \text{ a získá rychlost } v_1 = \sqrt{2sg \sin \alpha}. \text{ Po vodorovné rovině}$$

jede lyžař rovnoměrným pohybem rychlostí v_1 . Pro dané hodnoty je $a_1 \doteq 4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $t_1 \doteq 6,4 \text{ s}$, $v_1 \doteq 31,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ú 2: Řešte úlohu dle předchozí situace, avšak při jízdě působí na lyžaře při pohybu stálá odporová síla velikosti F_0 , $F_0 = -f m g$, $f = 0,05$.

Řešení: Odporová síla působí proti pohybu, má tedy opačný směr než vektor rychlosti. Proto výslednice sil při jízdě po svahu je

$$F_p = m g \sin \alpha - f m g = m g (\sin \alpha - f).$$

Stanovíme nejprve podmínku pro to, aby se lyžař pohyboval ($F_p \geq 0$), tedy $\sin \alpha - f \geq 0$, $f \leq \sin \alpha$. Pro případ $f_{\max} = \sin \alpha$ nebo v případě, že uvažíme statické tření, musí se lyžař před jízdou nejprve odrazit. Po svahu se lyžař pohybuje rovnoměrně zrychleně se stálým zrychlením $a_1 = g (\sin \alpha - f)$, po vodorovné rovině se stálým zrychlením $a_2 = -f g$.

Za dobu $t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g (\sin \alpha - f)}}$ dosáhne na úpatí lyžař rychlosti $v_1 = \sqrt{2 s g (\sin \alpha - f)}$. Po vodorovné rovině se bude lyžař pohybovat

rovnoměrně zpomaleně, zastaví se tedy za dobu $t_2 = \frac{v_1}{f g} =$

$$= \frac{\sqrt{2 s g (\sin \alpha - f)}}{f g} \text{ ve vzdálenosti}$$

$$s_b = -\frac{v_1^2}{2a_2} = s \left(\frac{\sin \alpha}{f} - 1 \right).$$

Pro dané hodnoty je $a_1 \doteq 4,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_2 \doteq 0,49 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $t_1 \doteq 6,7 \text{ s}$, $v_1 \doteq 29,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $t_2 \doteq 60 \text{ s}$, $s_b \doteq 900 \text{ m}$.

Ú 3: Řešte tutéž výchozí situaci, ale se změněnými podmínkami: po první polovinu dráhy s je odporová síla $F_{01} = -f_1 m g$, po druhou polovinu dráhy je odporová síla $F_{02} = -f_2 m g$, $f_1 < f_2 < \sin \alpha$, po vodorovném úseku síla $F_{03} = -f_3 m g$. Určete průběh rychlosti. Úlohu řešte obecně, potom pro hodnoty $f_1 = 0,05$, $f_2 = 0,10$, $f_3 = 0,15$.

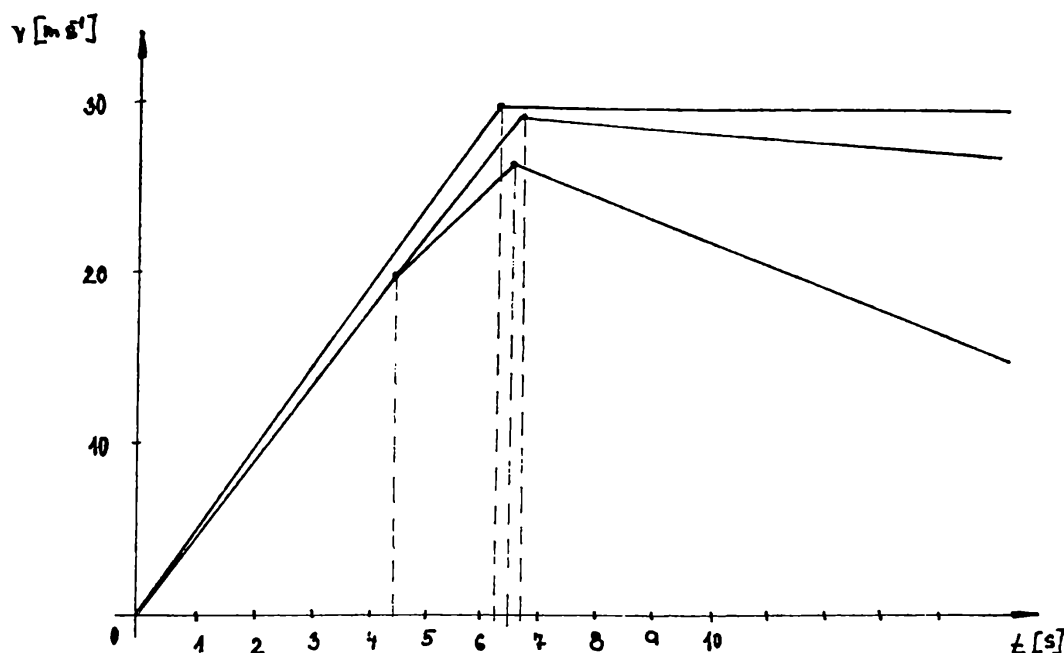
Řešení: Úlohu rozložíme do tří částí, přičemž výsledky řešení na sebe navazují. Lyžař se zprvu pohybuje se zrychlením $a_1 = g (\sin \alpha - f_1)$

a za dobu $t_1 = \sqrt{\frac{s}{g (\sin \alpha - f_1)}}$ dosáhne rychlosti $v_1 =$

$\sqrt{s g (\sin \alpha - f_1)}$ Pro velikost zrychlení na druhém úseku je $a_2 =$

$g (\sin \alpha - f_2)$, tento úsek projede za dobu $t_2 = \frac{v_2 - v_1}{g (\sin \alpha - f_2)}$ a

dosáhne rychlosti v_2 , přičemž platí $\frac{s}{2} = v_p t_2 =$



Obr. 2

$$= \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot \frac{v_2 - v_1}{g(\sin \alpha - f_2)} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g(\sin \alpha - f_2)}$$

Pro rychlost v_2 je potom $v_2 =$

$$= \sqrt{2 s g \sin \alpha - s g (f_1 + f_2)} \quad \text{Ve třetí} \text{ fázi pohybu působí síla } F_{03}$$

$$\text{zrychlení } a_3 = -f_3 g, \text{ lyžař zastaví za dobu } t_3 = \frac{\sqrt{s g (2 \sin \alpha - f_1 - f_2)}}{g f_3},$$

$$\text{zabrzdí na vzdálenosti } s_b = \frac{2 \sin \alpha - f_1 - f_2}{2 f_3} s.$$

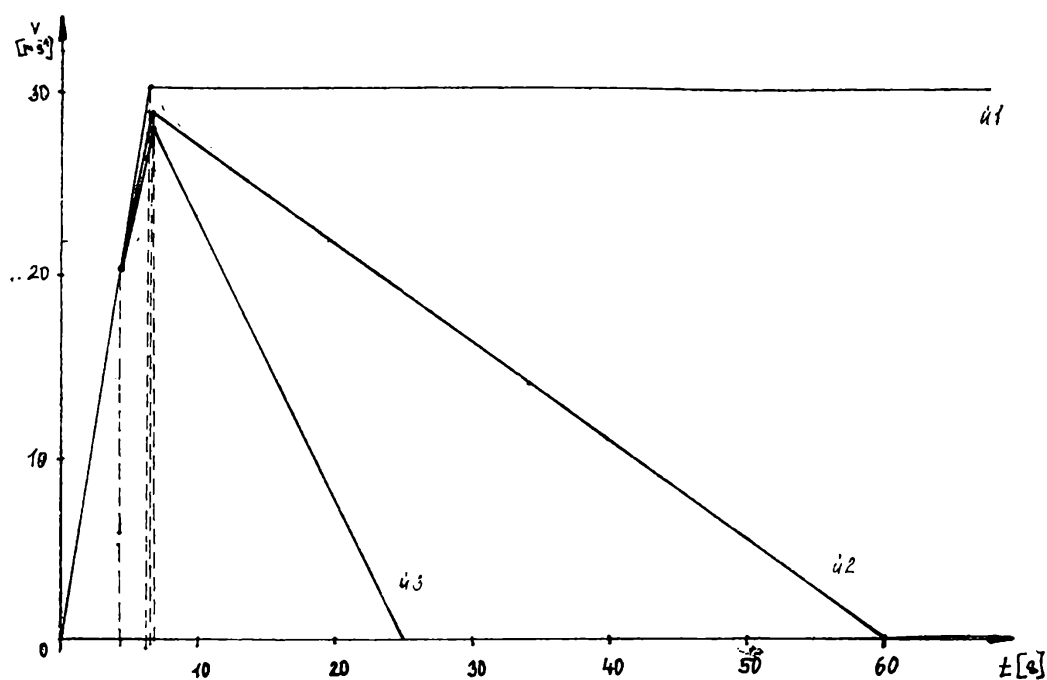
Pro dané hodnoty je $a_1 \doteq 4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $t_1 \doteq 4,5 \text{ s}$, $v_1 \doteq 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $a_2 \doteq 3,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $v_2 \doteq 29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $t_2 = 2,00 \text{ s}$, $a_3 \doteq 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $t_3 \doteq 19,6 \text{ s}$, $s_b \doteq 283 \text{ m}$.

Ú 4: Do grafu rychlosti jako funkce času znázorněte případy pohybu z úlohy Ú 3.

Řešení: Z uvedených řešení je zřejmé, že výsledky nezávisí na hmotnosti lyžaře. Zakreslíme jednotlivé případy do soustavy souřadnic $(t; v)$.

Obr. 2 podrobně znázorňuje jízdu po svahu, obr. 3 celý pohyb.

Zjistili jsme, že při pohybu lyžaře se jeho rychlost stále zvětšuje, velikost rychlosti je omezena úsekem na svahu, po němž se lyžař pohybuje. Z praxe však víme, že lyžař dosáhne na velmi dlouhém svahu určité rychlosti, jež se dále již nezvětšuje. Proto v dalších úvahách budeme předpokládat, že odporová síla závisí i na rychlosti pohybujícího se tělesa.



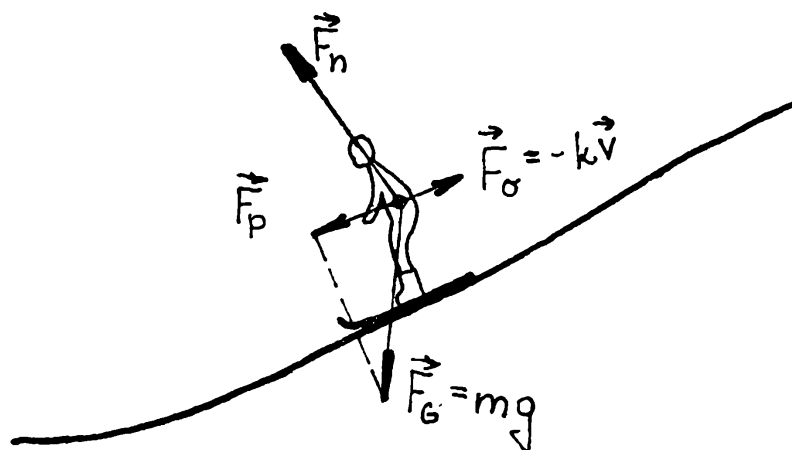
Obr. 3

Ú 5: Řešte tutéž výchozí situaci jako v úloze Ú 1, ale při pohybu působí nyní na lyžaře odporová síla $F_0 = -k_1 v$. Hmotnost lyžaře je $m = 80 \text{ kg}$, součinitel k zvolíme $k = 7,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Stanovte nyní, jak se mění rychlost pohybujícího se lyžaře.

Řešení: Úlohu budeme řešit dynamicky. Na lyžaře působí při pohybu (obr. 4) tíhová síla F_G , síla F_n a odporová síla F_0 . Výsledná působící síla

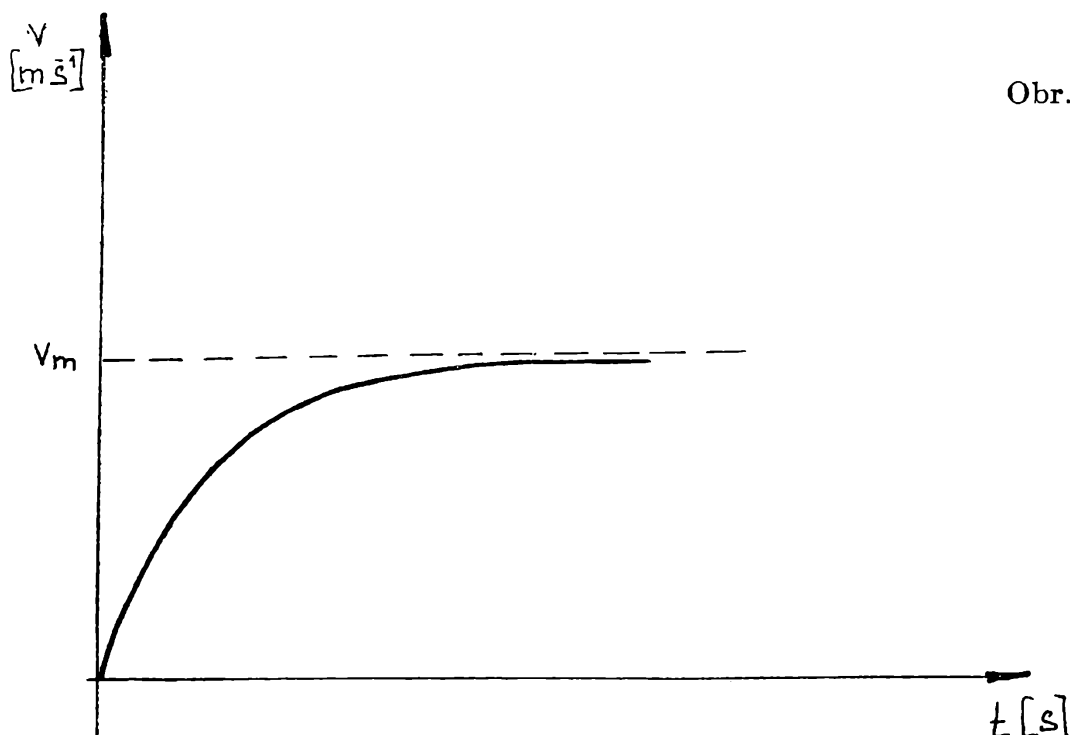
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_0 ,$$

tedy můžeme napsat $m \mathbf{a} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_0$.



Obr. 4

Úlohu zjednodušíme, budeme-li uvažovat pohyb podél svahu; potom je $m \cdot a = m g \sin \alpha - k_1 v$. Z tohoto vztahu je zřejmé, že okamžité



Obr. 5

zrychlení závisí i na velikosti okamžité rychlosti. S rostoucí rychlostí se však zmenšuje zrychlení pohybu a tím také přírůstky rychlosti: rychlost proto není lineární funkcí času. Při jisté velikosti rychlosti v_m je zrychlení lyžaře nulové, takže také

$$m g \sin \alpha - k_1 v_m = 0 \text{ N, tedy } v_m = \frac{m g \sin \alpha}{k_1}$$

Pro dané hodnoty je $v_m \doteq 53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ na dostatečně dlouhém svahu. Středoškolskými způsoby řešení však nedostaneme vztah pro rychlost

jako funkci času, platí $v = \frac{1}{k_1} m g \sin \alpha (1 - e^{-k_1 t})$, kde číslo e je základ přirozených logaritmů.

Při větších rychlostech než asi $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (pro vzduch, pro vodu je to méně) však lineární závislost odporové síly na rychlosti nedává správné výsledky, a proto uvážíme (ve shodě se závěry *Newtonovými*) závislost kvadratickou.

Ú 6: Řešte opět tutéž výchozí situaci jako v úloze Ú 5, avšak na lyžaře tentokrát působí odporová síla $F_0 = -k_2 v^2$, kde zvolíme $k_2 = 0,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$.

Řešení: Opět napíšeme pohybovou rovnici jako při řešení úlohy Ú 5. Ve směru pohybu platí $m a = m g \sin \alpha - k_2 v^2$. Také tentokrát závisí velikost okamžité rychlosti na zrychlení, ale to se mění v závislosti na postupném zvětšování rychlosti. Mezní rychlost v_m určíme z podmínky

$m a = 0 \text{ N}$, tedy $v_m = \frac{m g \sin \alpha}{k_2}$. Pro dané hodnoty je $v_m \doteq 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,

což vcelku odpovídá maximální rychlosti dosahované zkušenými lyžaři-sportovci při sjezdu po závodní dráze.

Pokusíme se ještě načrtnout průběh rychlosti v závislosti na čase (obr. 5). Rychlost lyžaře se stále přibližuje rychlosti mezní; křivka má exponenciální průběh.

2. Pád tělesa v odporujícím prostředí

Svémi geniálními úvahami a veřejnými pokusy na šikmé věži v Pise dokázal *Galileo Galilei* hypotézu o tom, že pád tělesa ve vzduchu je (za jistých podmínek a do jistých hodnot rychlosti) pohyb rovnoměrně zrychlený. Tím byla opuštěna do té doby vládnoucí myšlenka o tom, že pád tělesa je rovnoměrný pohyb, jehož rychlost závisí na tíhové síle, jíž Země působí na toto těleso. Galileo Galilei však již nevysvětlil, proč tělesa týchž lineárních rozměrů, avšak podstatně různých hmotností, nedopadnou touž rychlostí, tj. nedopadnou z téže výšky na povrch Země v témž časovém okamžiku. Odpověď na tuto otázku podal až *Newton*, který uvážil odporovou sílu, jíž při pohybu působí prostředí na těleso. Ve vakuu, kde při pádu na tělesa odporová síla nepůsobí (např. v tzv. Newtonově trubici) dopadnou tělesa z určité výšky touž rychlostí a ve stejném časovém okamžiku. V tzv. experimentální fyzice se došlo na základě experimentálního výzkumu k závěru, že při malých rychlostech (asi do $2\text{--}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) vyhovuje pro velikost odporové síly, jíž vzduch působí na těleso, závislost lineární tak, jak ji pro tělesa tvaru koule uvádí *Stokesův zákon*: $F_0 = 6\pi\eta r v$ (kde η je dynamická viskozita prostředí, r lineární rozměr tělesa tvaru koule, v je velikost okamžité rychlosti). Pro větší rychlosti (do velikosti rychlosti zvuku ve vzduchu, tj. asi $330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 1200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$) vyjadřuje lépe odporovou sílu *New-*

tonův vztah $F_0 = \frac{1}{2} C \rho S v^2$, kde C je tvarový součinitel (pro kouli je

$C = 0,37$), S obsah příčného řezu tělesa kolmo ke směru pohybu, ρ je hustota prostředí.

V teoretické fyzice se často píše $F_0 = -k_1 v$ nebo $F_0 = -k_2 v^2$, kde k_1, k_2 jsou vhodně zvolené koeficienty. Následující rovnice pro pád tělesa ve vzduchu

$$m a = m g - k_1 v \text{ nebo } m a = m g - k_2 v^2$$

však vyřešit nedovedeme, a proto budeme dále řešit úlohy jen pro zvláštní případy.

Ú 7: Dešťový mrak je ve výšce 800 m nad povrchem Země. Jakou rychlostí by dopadla kapka vody na povrch Země, kdybychom neuvažovali odporovou sílu vzduchu? Ve skutečnosti však dopadla kapka na

povrch Země rychlostí $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vysvětli, jaká je střední odporová síla F_{op} , jíž vzduch působí při pohybu na kapku.

Řešení: Kapka by dopadla na povrch Země rychlostí $v_1 = 125 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ve skutečnosti dopadne rychlostí $v_2 = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, neboť na ni působí při pohybu odporová síla F_0 . Při dopadu má kapka pohybovou energii

$$E_k = \frac{1}{2} m v_2^2. \text{ Původní potenciální energie kapky je } E_{p0} = m g h \text{ vzhle-}$$

dem ke vztažné soustavě spojené s povrchem Země. Práce odporové síly $W = E_{p0} - E_k$, průměrná odporová síla ($F_{\text{op}} \cdot h = W$)

$$F_{\text{op}} = \frac{E_{p0} - E_k}{h} = m g - \frac{m v_2^2}{2h}.$$

Uvažujme kapku o průměru asi 5 mm a o hmotnosti asi $0,1 \text{ g} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$. Potom $F_{\text{op}} \doteq 0,001 \text{ N}$, tíhová síla $F_G = m g \doteq 0,001 \text{ N}$. Průměrná odporová síla je téměř rovna tíhové síle F_G .

Ú 8: Stanovte, jaké největší rychlosti může dosáhnout míček o hmotnosti 50 g , volně padající v husté atmosféře. Průměr míčku je $8,0 \text{ cm}$, tvarový součinitel v Newtonově vztahu $C = 0,37$, hustota vzduchu je $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení: Předpokládáme, že míček dosáhne rychlosti větší než $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, ale menší, než je rychlost zvuku ve vzduchu. Proto k popisu pohybu využijeme Newtonova vztahu pro velikost odporové síly F_0 . Platí $m a = m g - 12 C_D S v^2$.

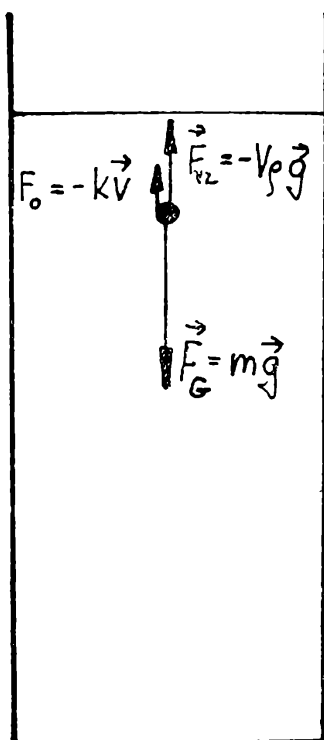
V případě dosažení mezní rychlosti v_m je pohyb míčku rovnoměrný, a proto výsledná působící síla je nulová, zrychlení $a = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ vzhledem ke vztažné soustavě spojené s povrchem Země. Je tedy

$$v_m = \frac{2 m g}{C_D S} \doteq 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Odhadneme ještě vzdálenost, kterou míč urazí do získání rychlosti nepřilíši odlišné od mezní rychlosti. Při volném pádu se zrychlením g by byla hledaná vzdálenost k dosažení rychlosti asi $21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dána $s = \frac{v^2}{2g} \doteq 22 \text{ m}$. Vezmeme-li v úvahu průměrné zrychlení $a_p = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,

je hledaná vzdálenost asi 88 m . Lze tedy předpokládat, že této rychlosti může míček reálně dosáhnout na „rozumně dlouhé“ dráze.

Ú 9: Malou skleněnou kuličku o průměru d , hustotě ρ pustíme z klidu do kapaliny o hustotě ρ_k a dynamické viskozitě η . Stanovte, jaké mezní rychlosti může kulička dosáhnout. Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty $d = 4 \text{ mm}$, $\rho = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_k = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, dynamická viskozita $\eta = 0,0010 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. 6

Řešení : Předpokládejme, že se kulička bude pohybovat malou rychlostí. Proto pro velikost odporové síly, kterou voda působí na kuličku, platí Stokesův zákon, $F_o = 6\pi\eta r v$. Na kuličku působí dále tíhová síla $F_G =$

$$= m g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g, \text{ hydrostatická vztlaková síla } F_{vz} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k g.$$

Potom můžeme napsat pohybovou rovnici (obr. 6):

$$m a = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k g - 6 \pi \eta r v$$

Pro mezní rychlost v_m je zrychlení kuličky nulové, tedy po algebraické úpravě

$$v_m = \frac{2}{9} \frac{r^2 (\rho - \rho_k)}{\eta} g ,$$

a pro dané hodnoty vychází $v_m \doteq 3,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, což vcelku odpovídá odhadnuté rychlosti, pro níž jsme užili Stokesova zákona.

Využijeme-li k pokusu dutých skleněných kuliček se střední hustotou $\rho = 1\,050 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, změní se výsledek na hodnotu $v_m \doteq 0,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, což je opět hodnota rychlosti, odpovídající Stokesovu zákonu.

(Pokračování)

O závislosti gravitačních sil na prostředí, které obklopuje tělesa

Ing. JIŘÍ MACHALICKÝ, CSc., ČVUT Praha

Ve slavných Newtonových Principiích¹⁾, jimiž bylo završeno velké úsilí řady významných fyziků, je obsažen také gravitační zákon. Tvar tohoto zákona, který mu vtiskl geniální anglický přírodovědec vyhovuje s neobyčejnou přesností jak při všech pozemských pozorováních, tak při pohybu těles naší sluneční soustavy (až na pohyb Merkurova perihelia). Obecná teorie gravitace, kterou vybudoval *Albert Einstein* v r. 1916, obsahuje Newtonův gravitační zákon jako zvláštní případ, při vzájemné rychlosti gravitujících těles malé proti rychlosti světla a je-li pole slabé.

Uvažujme nyní o Newtonově gravitačním zákonu v jednoduchém případě dvou homogenních koulí o hmotnostech M a m ($M > m$), jejichž středy jsou ve vzdálenosti r (obr. 1).

Pro sílu $\vec{F}(M, m)$, již působí těžší koule na lehčí kouli, lze napsat výraz

$$\vec{F}(M, m) = -\kappa \frac{Mm}{r^2} \vec{r}^0, \quad (1)$$

v němž κ je Newtonova gravitační konstanta a $\vec{r}^0$ jednotkový vektor určující spolu se vzdáleností r vzájemnou polohu gravitujících koulí.

Znaménko minus v této rovnici svědčí o tom, že síla $\vec{F}(M, m)$ má vždy opačný směr než vektor $\vec{r}^0$ (výraz $\frac{Mm}{r^2}$ je vždy kladný), že jde tedy

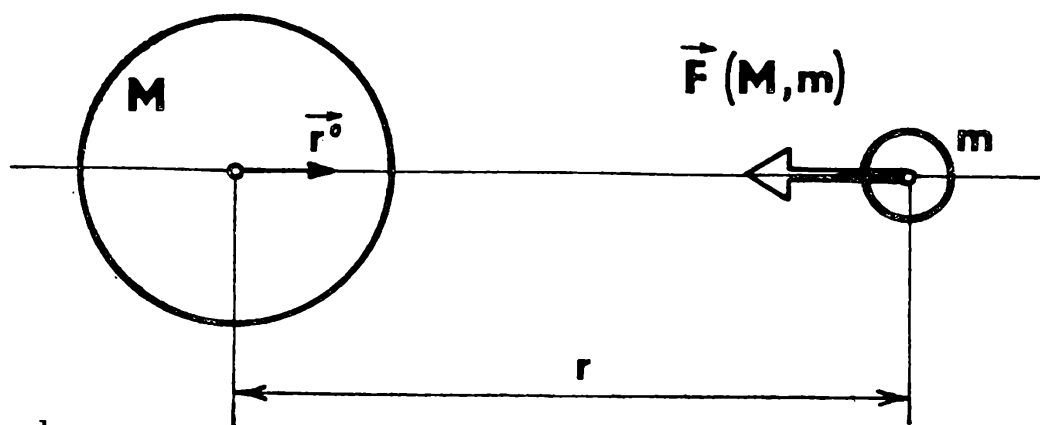
o *přitažlivou sílu*. První experimentální určení gravitační konstanty provedl pomocí torzních vah teprve po více než 100 letech od zveřejnění gravitačního zákona anglický fyzik *Henri Cavendish* (1731–1810). V literatuře pro ni najdeme nejčastěji hodnotu²⁾

$$\kappa = (6,673 \pm 0,003) \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (2)$$

Věnujme se nyní úvahám o problému obsaženém v názvu tohoto

¹⁾ Philosophiae naturalis principia mathematica (Matematické principy přírodovědecké filosofie) vyšly v r. 1687.

²⁾ podle měření Heylových, provedených torzními vahami (ocelový válec hmotnosti 66 kg a malé kuličky z platiny, zlata . . . ve vakuu)



Obr. 1

článku. V rov. (1) se neobjevuje nic, co by poukazovalo na vliv prostředí obklopujícího interagující koule. Tato skutečnost byla ověřována experimentálně a přesnými pokusy bylo zjištěno, že vloží-li se mezi tělesa nějaká látka, nemá to vliv na vzájemnou interakci těles. Proto se považuje všeobecně gravitační konstanta za *universální fyzikální konstantu*, nezávislou na okolním prostředí. Tento poznatek dovoluje vyslovit názor, že gravitační síla (1) je nezávislá na prostředí, které interagující koule obklopuje, a je tedy stejná, jako by byla ve vakuu³).

Nezávislost gravitační síly (1) na prostředí, které obklopuje interagující koule, však neznamená, že výsledná interakce je stejná v prostředí jako ve vakuu.

Na výsledném silovém působení se totiž podílí okolní prostředí jednak *svým vlastním gravitačním polem*, jednak *hydrostatickými silami*, které *vznikají v prostředí vlivem vnějšího gravitačního pole*.

Tato skutečnost je vyjádřena pro speciální případ *zemského tíhového pole* ve známém Archimédově zákoně⁴):

³) Totéž platí i pro elektrostatickou sílu Coulombovu, již se přitahují (nebo odpuzují) nabitě koule. Jestliže náboje vložené na koule jsou Q , q , platí

$$\vec{F}(Q, q) = \frac{Q q}{4\pi \epsilon_0 r_s^2} \vec{r}^o$$

kde $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ je permitivita vakua (také univerzální konstanta). Znaménka nábojů Q , q rozhodují o tom, jde-li o přitahování (+ −, − +) či odpuzování (+ +, − −).

⁴) Archimédes ze Syrakus (287—212 př. n. l.) byl nejen největším matematikem starého Řecka, ale vynikl též řešením řady úloh z mechaniky, např. o rovnováze těles, první poznatky o těžišti těles . . . , z nichž řada měla praktické užítí (kladkostroj, vodní šnek jako jedno z nejstarších vodních čerpadel, šnekový převod . . . atd.). Uvedený klasický tvar zákona je jedním z nejstarších kvantitativních fyzikálních zákonů. Osvědčuje se již po 22 století při řešení mnohých úloh o rovnováze a pohybu těles nacházejících se v zemském tíhovém poli a ponořených do nějaké tekutiny.

Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou rovnou tíze kapaliny tělesem vytlačené. (3)

Problém vlivu prostředí na gravitační pole makroskopických těles řešil v nedávné době *prof. dr. Z. Horák, DrSc.* Abychom si tuto problematiku přiblížili, předpokládejme pro jednoduchost, že do nekonečné homogenní tekutiny vložíme homogenní kouli. Než jsme vložili kouli do tekutiny bylo gravitační pole tekutiny v celém prostoru nulové z důvodů souměrnosti, resp. v důsledku platnosti principu superpozice. *Po vložení koule do tekutiny je výsledné pole všude vně této koule stejné, jako kdyby koule byla ve vakuu, ale měla hmotnost menší o hmotnost vytlačené tekutiny.* Prof. Horák nazval tuto zmenšenou hmotnost *zdánlivou* hmotností ponořené koule. Na základě této úvahy můžeme vyslovit větu:

Gravitační pole homogenní koule ponořené do nekonečné homogenní tekutiny je stejné jako gravitační pole, které by ve vakuu vzbudila koule mající zdánlivou hmotnost. (4)

S přihlédnutím k uvedeným skutečnostem je možno vyjádřit velikost gravitační síly, již na sebe působí dvě koule ponořené do neomezené homogenní tekutiny, výrazem

$$\vec{F} = \kappa \frac{m^*_1 \cdot m^*_2}{r^2}, \quad (5)$$

v němž m^*_1, m^*_2 jsou zdánlivé hmotnosti koulí. Jestliže budeme uvažovat o dvou tělesech (s hustotou ρ_1 a ρ_2) vložených do nekonečné homogenní tekutiny hustoty σ , pak sílu působící mezi nimi můžeme vyjádřit vztahem

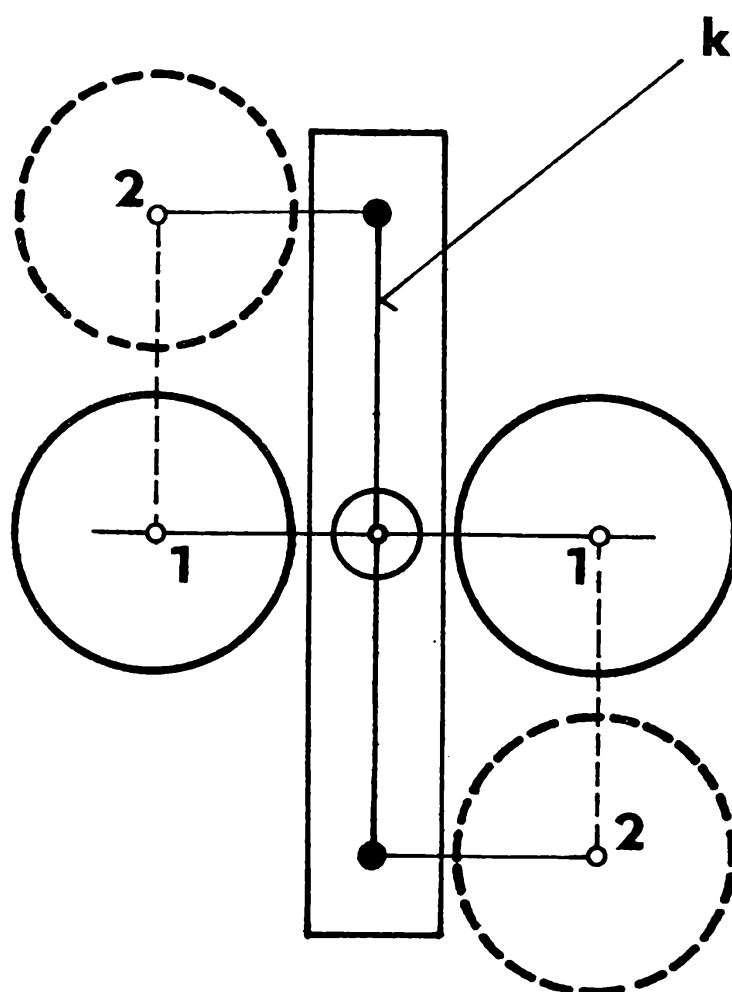
$$\vec{F} = \vec{F}_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho_1}\right) \left(1 - \frac{\sigma}{\rho_2}\right), \quad (6)$$

kde $\vec{F}_0$ je síla, již na sebe působí tatáž dvě tělesa (koule) ve vakuu.

Síla $\vec{F}$ může být *přitažlivá* nebo *odpudivá* podle toho, jaká znaménka mají rozdíly $(\rho_1 - \sigma)$ a $(\rho_2 - \sigma)$, resp. zdánlivé hmotnosti m^*_1 a m^*_2 .

Zobecněný zákon (6), který je možno považovat za spojení gravitačního zákona Newtonova a Archimédova zákona, platí ovšem přesně jen pro tělesa (koule) v neomezené tekutině. To můžeme zdůvodnit tím, že tekutina obklopující koule vytváří své vlastní gravitační pole, jež je přesně nulové v celém prostoru jednom tehdy, je-li tekutina homogenní (a tedy v ní nejsou ani žádné dutiny).

Skutečnost, že po celých 22 století nebyly shledány žádné odchylky od platnosti klasického tvaru Archimédova zákona (který platí jen ve speciálním případě zemského tíhového pole), je možno vysvětlit tím, že gravitační pole homogenní tekutiny konečného objemu je mnohem



Obr. 2. Schéma torzních vah k měření gravitační konstanty (půdorys)

slabší než zemské tíhové pole při povrchu Země, na kteroužto oblast se dosavadní uplatnění tohoto zákona omezovalo.

V zemském tíhovém poli jsou však zahrnuty i setrvačné účinky rotačního pohybu Země kolem její osy. Je tedy zřejmá nutnost rozšířit platnost Archimédova zákona i k stanovení toho, jak se budou chovat tělesa ponořená do tekutiny a podrobená působení setrvačných sil, které jsou úměrné setrvačné hmotnosti⁵⁾.

Že tomu tak skutečně je, o tom nás přesvědčuje i praktická zkušenost. Například při odstředování mléka mají drobné částice tuku (másla) ve zbývající tekutině (prakticky vodě) zápornou zdánlivou hmotnost a podléhají tedy záporné odstředivé (tj. dostředivé) síle.

⁵⁾ podle obecné teorie relativity je setrvačná hmotnost těles totožná s gravitační hmotností, což je potvrzeno s vysokou relativní přesností také experimentálně (viz B. Vybíral: Fyzikální pole z hlediska teorie relativity, SPN Praha 1969, str. 167)

S podobným projevem „záporné setrvačnosti“ se můžeme setkat také při jízdě tramvají nebo autobusem, doprovázíme-li nějaké dítě, které si třeba z pouti odnáší známý, lehkým plynem naplněný balónek. Pokud vůz jede rovnoměrně, vznáší se balónek klidně tak, že nit, na níž je uvázán, je svislá. Když však řidič brzdí, zpomaluje se balónek ve vzduchu uvnitř vozu více než samotný vůz, tzn. že zatím co cestující jsou setrvačností hněti ve směru jízdy, balónek má snahu pohybovat se opačným směrem. Podobně je tomu, když vůz zatáčí.

Nadlehčování těles podle Archimédova zákona je tedy v plném souhlasu s dobře známými jevy nejen v tíhovém poli zemském, ale i v poli setrvačných sil, hlavně odstředivých, které mohou mnohonásobně překročit tíhu tělesa.

V souhlasu s uvedeným zobecněním gravitačního zákona pro tělesa ponořená v prostředí jsou i nejnovější měření gravitační konstanty, která provedli v r. 1981 v National Bureau of Standards (USA) *G. G. Luther* a *W. R. Towler* [5]. Měřili periodu kmitů torsního kyvadla k vloženého i se závěsným vláknem do evakuované komory (viz schéma na obr. 2). Torsní kmity kyvadla byly vzbuzeny těžkými wolframovými koulemi, které byly vysunuty ze symetrické polohy 1—1 do polohy 2—2. Tyto koule byly v atmosférickém vzduchu vně vyčerpané komory. Uplatnila se zde tedy jen jedna z obou korekcí ve vzorci (6). Pro gravitační konstantu vychází z těchto měření hodnota

$$\kappa = (6,6726 \pm 0,0005) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (7)$$

O návrhu prof. Horáka na nově koncipovaný experiment k určení této důležité konstanty je možno se dočíst v některém z posledních čísel časopisu *Vesmír*. Provedení těchto náročných měření se ujal *doc. B. Vybíral* z Pedagogické fakulty v Hradci Králové.

Literatura :

- [1] Sborník 6. a 7. Konference čsl. fyziků, Ostrava 1979, Praha 1981
- [2] Z. Horák, Archimédův princip a Newtonův gravitační zákon (rukopis článku pro časopis *Vesmír*, květen 1983)
- [3] Z. Horák, Gravitační interakce v tekutém prostředí (rukopis článku pro Bulletin československé společnosti pro mechaniku při ČSAV, květen 1983)
- [4] Z. Horák, Finding a better value of the mass of the Earth (rukopis sdělení pro časopis *Nature*, Editorial Office Mcmillan Journals Ltd, London — květen 1983)
- [5] *Phys. Rev. Letters* 48, 121 (1982)
- [6] B. N. Taylor, D. N. Langenberg, W. H. Parker: Fundamentální fyzikální konstanty, *Čs. Čas. Fys.* A č. 2, Sv. 23 (1973) — překlad z angl. originálu v časopisu *Scientific American* 223 (1970) č. 4, 62

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Henri Poincaré - vědec s výraznou intuicí

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc., MFF UK Praha

Na jaře r. 1984 uplynulo 130 let od narození význačného vědce, který v mnoha oborech matematiky a fyziky projevils dovednost spojovat metody různých odvětví k řešení aktuálních vědeckých problémů. Připomeňme si jeho životní osudy a naznačme aspoň některé jeho vědecké výsledky, které lze přístupně objasnit.



Jules Henri Poincaré se narodil 29. 4. 1854 v městě Nancy ve východní Francii, které se v té době začínalo měnit v průmyslové centrum Lotrinska. Spolu se sestrou Alinou byl Henri (jménem Jules ho neoslovovali) novou generací v rodině s tradicí lékárnickou a lékařskou; otec Léon Poincaré byl profesorem lékařské fakulty. V pěti letech onemocněl Henri těžkým záškrtem, který mu způsobil ztrátu řeči, pohyblivosti nohou apod., až po roce se ukázalo, že následky nejsou trvalé. V době, kdy byl

upoután na lůžko a nemohl mluvit, získal neobyčejně rozvinutou sluchovou paměť; základy vzdělání mu poskytoval soused, školní inspektor. Jakmile se Henri naučil číst, hlal popularizační vědeckou literaturu, studoval mapy apod. Jeho schopnost soustředěně přemýšlet a nevnímat okolí byla už v dětství zdrojem řady žertovných příhod.

Jako osmiletý vstoupil do lycea, kde záhy vynikal v historii a zeměpise, slohových úkolech, ale měl potíže s krasopisem (psal sice oběma rukama, ale nepříliš úhledně). Návštěva na světové výstavě konané v r. 1867 v Paříži ukázala Henrimu divy tehdejší techniky a patrně obrátila jeho pozornost od historického romantismu k exaktním vědám; tímto směrem ho orientoval i jeho strýc. Někdy v r. 1868 sdělil učitel matematiky Henriho matce: „Madam, váš syn bude velkým matematikem!“; bezprostředním podnětem k tomu byla samostatně vypracovaná řešení geometrických úloh s originálními postupy. Už v tomto věku se projevil jeho styl práce — nepsal si žádné pomocné výpočty a náčrtky, raději v hlavě všechno promyslel a napsal až hotové řešení. Přitom „nosil v hlavě“ problém i delší dobu, bavil se o běžných záležitostech, ale pojednou zvážněl, odešel do samoty a přemýšlel velmi soustředěně, než napsal řešení.

Nejspíše podle přání rodičů si v 15 letech zvolil humanitní větev studia, ne přírodovědnou, ale závěrečné zkoušky (baccalauréats) skládal v r. 1871 na obou větvích. Všechno zvládl i v pohnuté době pruské okupace města Nancy po prohrané válce v r. 1870. Aby se mohl přihlásit k přijímacím zkouškám na matematicky náročné vysoké školy, zvolil si studium ve speciálních matematických třídách lycea. Takové třídy (dva ročníky) byly zřízeny na mnoha francouzských lyceích, každoročně se pro jejich žáky pořádala celostátní soutěž v řešení úloh. Henri Poincaré, student provinciálního lycea, se proslavil svými vítězstvími v letech 1872 a 1873; novináři přitom zdůrazňovali okolnost, že jde o francouzského studenta z okupovaného města.

Henri spoléhal na svou sluchovou paměť do té míry, že si psal jen velmi ledabylé poznámky z výkladu profesorů; tím je dosti popuzoval a byl proto často vyvoláván, aby zopakoval předvedený důkaz nebo složitý výpočet. Teprve když je přesvědčil, že si skutečně všechno pamatuje, tolerovali jeho zvláštní způsob účasti na výuce. Přijímací zkoušky skládal na dvě vysoké školy — École Normale Supérieure (studium učitelství) a na École Polytechnique; na první se umístil jako pátý (zkazil rys), na druhé byl první. Od podzimu r. 1873 studoval tedy na technice, která byla vojenskou školou s velmi náročným studiem, kde přednášeli významní vědci, např. *Charles Hermite*. Také tam pokračoval Henri ve svém způsobu studia s minimem poznámek, ale při reprodukcích důkazů neselhával, naopak leckdy předvedl i kratší a elegantnější důkazy; patřil mezi tři nejlepší studenty školy; v té době už publikoval svou

první práci ve vědeckém časopise. Do studia se pohroužil do té míry, že zapomínal psát domů; matka mu proto posílala dotazníky o zdravotním stavu, zásobě prádla, o datech příjezdu apod., Henri odpovídal většinou jedním slovem nebo číslicí.

Dvouletá École Polytechnique byla všeobecnou přípravou na specializované inženýrské školy různého zaměření. Mladý Poincaré si zvolil spolu s dvěma přáteli École des Mines (Vysokou školu báňskou), kde pak kromě matematiky vynikal i v krystalografii, jež v té době byla poprvé spojována s idejemi teorie grup. Praktická složka výuky zahrnovala i zahraniční exkurze do dolů, Poincaré navštívil i Rakousko-Uhersko a Skandinávii. Jako důlní inženýr nastoupil v dubnu r. 1879 na šachty ve Vézoules, kde pak v září málem zahynul při inspekci po výbuchu důlních plynů. Při tomto zaměstnání se ve volném čase vrátil ke svým beletristickým sklonům a začal psát román se společenskou tematikou, ten sice dokončil, ale nevydal (obdobné téma pak zpracoval Maupassant). Chvatné ukončení románu souviselo s definitivním příklonem Poincarého k matematice.

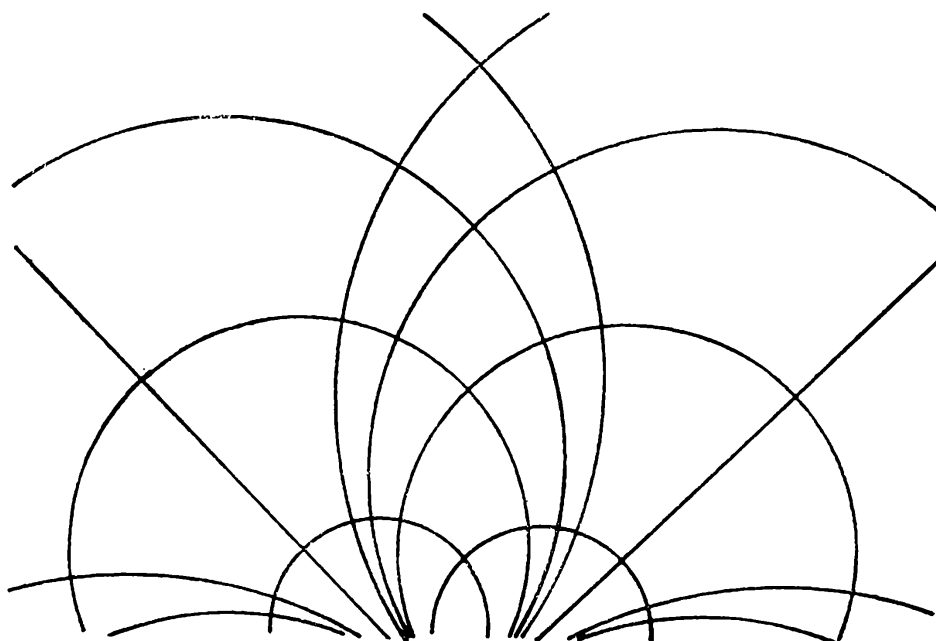
Ještě v době studia na École des Mines napsal ditertační práci „O vlastnostech funkcí definovaných diferenciálními rovnicemi s parciálními derivacemi“, v srpnu r. 1879 ji obhájil a získal tak možnost přednášet na vysoké škole. Už 1. 12. 1879 nastoupil na univerzitu v normandském městě Caen, kde se intenzívně pustil do vědecké práce. Chtěl se zúčastnit soutěže vypsane akademii věd na téma řešení lineárních diferenciálních rovnic s racionálními koeficienty, které odolávaly úsilí matematiků už takřka 200 let; podařilo se vyřešit jen některé typy těchto rovnic. Trahuje se historka, že Poincaré dostal rozhodující nápad na silvestrovském večírku pár minut před půlnocí, spěšně se omluvil a odešel přemýšlet do samoty. Práci odevzdal, ale Grand Prix (Velkou cenu) nezískal, naznačil však natolik nový přístup k problému, že byl Ch. Hermitem přímo vyzván, aby pokračoval v bádání tímto směrem. Naznačme si stručně, o čem šlo.

Diferenciální rovnice vyjadřují závislosti různých derivací funkcí a těchto funkcí, zapisují se například ve tvaru

$$y^{(n)} + A_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x) \cdot y' + A_n(x) \cdot y = 0,$$

$y^{(n)}$ je n -tá derivace neznámé funkce $y = f(x)$, $A_n(x)$ je polynomická nebo racionální funkce; obdobný význam mají další symboly. Takové rovnice slouží k matematickému vyjádření fyzikálních dějů a jejich řešení má proto zásadní význam; místo proměnné x v reálném oboru se však často pracuje s funkcemi komplexní proměnné z . Na počátku 19. století bylo už známo, že neznámé funkce není možno vždy vyjádřit pomocí elementárních funkcí (polynomických, goniometrických, exponenciálních apod.), proto byly zavedeny a tabelovány nové funkce pro některé typy diferenciálních rovnic, řada z nich vykazovala periodicitu, tj. $f(z + c) =$

Obr. 1



$= f(z)$ pro každé z a pro určité hodnoty c . Graf takové funkce nad rovinou komplexních čísel je složen z jakýchsi „střešních dílců“ nad pravoúhelníky, na které rovinu rozdělíme. Tuto pravoúhelníkovou parketáž roviny lze reprodukovat posunutími $z' = z + c$, která patří do určité grupy posunutí. Poincaré se zabýval dalším typem diferenciálních rovnic a jeho hlavním objevem bylo to, že je splňují funkce periodické v obecnějším smyslu slova, platí pro ně totiž

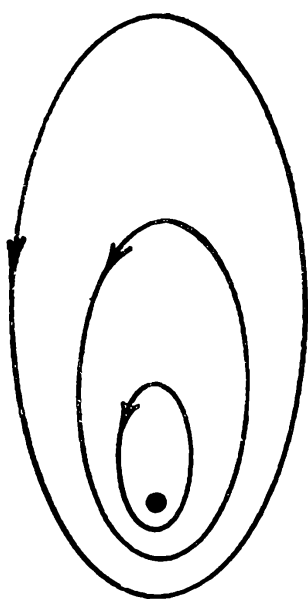
$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = f(z)$$

pro všechna z a určité čtveřice čísel a, b, c, d . Tomuto zobecnění periodičnosti funkcí odpovídá i obecnější parketáž roviny, kterou tvoří obrazce omezené úsečkami a oblouky kružnic (obr. 1); jeden lze zobrazit na všechny ostatní určitými zobrazeními typu

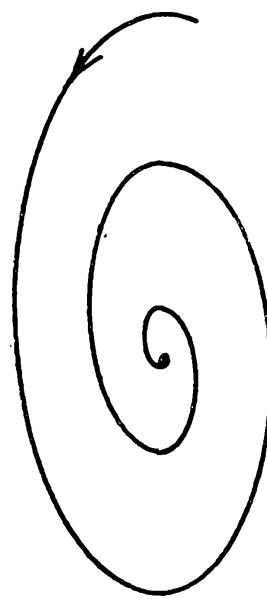
$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

která tvoří grupu (za určitých podmínek pro koeficienty). Tato grupa vyjadřuje dokonce zobrazení neeukleidovské geometrie Lobačevského. Poincaré tedy využil svých znalostí teorie grup a geometrie k řešení problematiky diferenciálních rovnic; geometrická intuice a schopnost zobecňovat mu „odemkla brány“ do světa nových funkcí. Modely neeukleidovských geometrií, které tím zdůraznil, se nyní nazývají Poincarého modely.

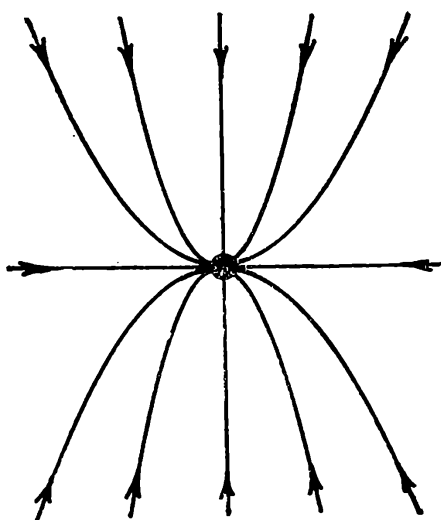
Henri Poincaré byl úzkostlivý, aby si nepřisvojil cizí objevy, nové funkce nazýval fuchsové nebo kleinovské, protože v pracích *L. Fuchse*



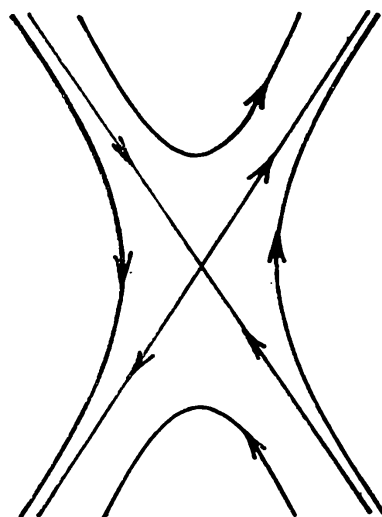
Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c



Obr. 2d

a *F. Kleina* našel drobné podněty pro své úvahy. (Dnes se tyto třídy funkcí nazývají automorfní funkce komplexní proměnné.) Dalším výrazným vkladem Poincarého do rozvoje matematiky bylo založení tzv. kvalitativní teorie diferenciálních rovnic, tj. přímé studium některých vlastností funkcí popsaných diferenciálními rovnicemi bez toho, že se funkce vyjádřily kvantitativně (předpisem či tabelací). Pro určitý typ rovnic zjistil Poincaré všechny možné typy tzv. singulárních bodů; na obr. 2 jsou naznačeny případy centrálního bodu (grafy funkcí ho „obkružují“), spirálového bodu, do kterého se „zavíjejí“, dále sedlového bodu a uzlu. Také zde si pomohl projekcí roviny na kulovou plochu a geometrickou intuicí.

Naznačené objevy spolu s mnoha dalšími z let 1880—86 získaly Poincarému velký věhlas, už v r. 1881 přešel na pařížskou univerzitu, v r. 1887 byl zvolen (ve 33 letech) členem Akademie věd. Jeho zájem se postupně přenášel do problematiky fyzikální, studoval klasický problém tří těles, rovnovážné tvary tekutin, přílivové vlny, psal monografie o nebeské mechanice, elektřině, optice apod., proto se stal na univerzitě vedoucím katedry matematické fyziky (1886) a matematické astronomie (1896). Přesto v letech 1894—1904 publikoval šest zásadních článků, kterými založil nové odvětví matematiky — „analysis situs“, dnes nazývané topologie. „Každý problém, který jsem řešil, mne přivedl k analysis situs,“ napsal v r. 1901. Zhruba v témž desetiletí se Poincaré zabýval problémy, které souvisely s odmítnutím hypotézy o existenci éteru a s postupným odkrýváním poznatků, jež vedly k speciální teorii relativity; uveřejnil články o časoprostoru, Lorentzových transformacích a řadu dalších. V téže době publikoval také knihy věnované filozofii vědy, psychologické problematice objevování i úvahám o budoucnosti vědy; zde se však nevyhnul omylům a dostal se do tvrdých názorových střetnutí i sporů o prvenství. (Vzhledem k složitosti těchto otázek a nutnosti podrobněji popsat stanoviska velkého počtu vědců upustíme zde od dalšího výkladu.)

Vraťme se k životním osudům Henri Poincarého, který zásadně pracoval v samotě, nejraději přemýšlel při pomalé chůzi v přírodě nebo aspoň po místnosti, cinkaje přitom tiše klíči. Přes poměrně slabé zdraví neúnavně pracoval a po r. 1900 i hodně cestoval, zúčastňoval se kongresů, jezdil na přednášková turné po Evropě i do zámoří. V r. 1912 se podrobil operaci, ze které se dobře zotavoval, ale v důsledku embolie náhle zemřel dne 17. 7. 1912 ve věku 58 let. Jeho vědecká práce udivuje svým rozsahem a hloubkou originálních myšlenek, řešením aktuálních problémů vědy v období let 1880—1912. (Pro úplnost dodejme ještě, že příjmení Poincaré nesli i jeho bratraci Raymond a Lucien; první byl prezidentem republiky v době první světové války a druhý byl později rektorem Sorbonny.)

OPRAVA

V článku „Frekvenční charakteristiky elektrických dvojpólů“ (č. 2 a 3 roč. 63, 1984/85) došlo bohužel k chybám. Obrázky 7 a 8 byly při reprodukci zmenšeny, takže pro obr. 7 platí $1\text{mA} \cong 0,81\text{ cm}$ a v obr. 8 je $10\text{V} \cong \cong 0,65\text{ cm}$. Dále došlo k chybě v zápisu fyzikální jednotky $[\omega] = 1\text{ s}^{-1}$ (ne správně Hz).

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Matematickým kutilům pod stromeček

JIŘÍ MANN, Dvůr Králové n. L.

Mandel a ještě tucet úloh na rozloučenou s rokem 1984. Pomůcky: dostatek papíru, kuličkové pero — a dost! Zato nápověda: $61^2 = 3721$, $63^2 = 3969$, $65^2 = 4225$, $492^2 = 242\,064$.

1. Výběrem nebo změnou pořadí cifer čísla 1984 sestavte co nejvíce úplných čtverců, tj. 2. mocnin přirozených čísel.
2. Součin dvou kladných čísel je 1984. Jejich poměr je 31. Určete je.
3. Kterým nejmenším přirozeným číslem musíme vynásobit číslo 1984, aby součin byl $\alpha\beta$) 3. mocninou přirozeného čísla?
4. Kterým nejmenším přirozeným číslem musíme dělit číslo 1984, aby α) 2. odmocnina, β) 3. odmocnina z podílu byla přirozené číslo?
5. Napište 1984 jako součin přirozených čísel sestavených z cifer 1 až 9. V součinu se však cifry nesmějí opakovat. Nepoužívejte číslo 1 jako činitele ani zápisy pomocí mocnin.
6. Součet dvou čísel je 19, jejich součin 84. Určete je.
7. Rozdíl 2. mocnin dvou přirozených čísel je 1984. Určete všechny takové číselné dvojice.
8. Zjistěte, zda je větší $\sqrt[3]{19}$ nebo $\sqrt[3]{84}$.
9. Dělenec je 1984, dělitel dvojciferný, zbytek 41. Jak souvisí podíl s rokem 1984?
10. Součet tří čísel je 1984. Sedmina prvního, jedenáctina druhého a třináctina třetího si jsou rovny. Určete ta čísla.
11. Napište 4 nejmenší přirozená čísla, jež při dělení čísly 5, 9 a 11 dávají zbytek 4 (i podíl je přirozené číslo).
12. Cifry čtyřciferného čísla $ABCD$ jsou navzájem různé. O dvou z nich vytvořených číslech BC a AD platí: dvojnásobek prvního čísla je 2. mocninou druhého. Určete všechna taková čtyřciferná čísla.
13. Součin dvou čísel je 1000. Zvětšíme-li každé o 12, je součin 1984. Která to jsou čísla?
14. Dekadický zápis obyčejného zlomku je $7,75$. Určete čitatele a jmenovatele, víte-li že jejich součin je 1984.

15. Obsah obdélníku je 1984, obvod 1000. Stanovte délky stran.
16. Rozdíl dvou přirozených čísel je 1984, jejich největší společný dělitel je 31. Najděte takovou dvojici nejmenších čísel.
17. Součet dvou přirozených čísel je 1056, jejich nejmenší společný násobek je 1984. Určete je.
18. Součet, rozdíl, součin a podíl dvou přirozených čísel dávají dohromady 1984. Najděte ta čísla.
19. Zjistěte, jak součet všech dělitelů čísla 496 souvisí s číslem 1984.
20. Zapište číslo 1984 v soustavě se základem a) $z = 2$, b) $z = 3$, c) $z = 4$, d) $z = 32$, e) $z = 62$, f) $z = 100$, g) $z = 1984$. Doporučený tvar zápisu: $(1, 21, 24)_{35}$, tj. $1 \cdot 35^2 + 21 \cdot 35 + 24$. Je-li $z < 10$, stačí 5533_7 .
21. Součet prvních pěti členů neklesající geometrické posloupnosti je 1984, 1. člen a kvocient jsou přirozená čísla. Najděte všechny takové posloupnosti.
22. Napište číslo 1984 jako součet 31členné neklesající aritmetické posloupnosti, jejímiž členy jsou přirozená čísla.
23. Nejprve si připravte hodinky. — Úloha: Rozdíl dat letošního a příštího roku je 1; $1985 - 1984 = 1$. Máte 20 sekund na výpočet obdobného rozdílu 2. mocnin. — Hotovo? Potom tedy poslední část úlohy. K výpočtu přibližné velikosti rozdílu 2. odmocnin by vám měly stačit 3 minuty a nápověda: odmocniny jsou rovny asi 44,5 — vzorec znáte.
24. Z cifer čtyřciferného čísla $ABCD$ lze sestavit pět dvojciferných čísel vázaných vztahy: $CB = DA + DC$, $BC = 2 \cdot DB$. Najděte všechna čtyřciferná čísla s těmito vlastnostmi.
25. Řešte soustavu lineárních rovnic o třech neznámých.

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x + z &= 9 \\z - y &= 8 \\z - x &= 4\end{aligned}$$

K určení tří neznámých stačí 3 rovnice. Jak je to zde?

26. Při dělení se zbytek rovnal podílu, součet dělence a dělitele byl 1984. Zapište ono dělení.

27. Součet dat dvou sousedních roků je úplný čtverec. Najděte všechny takové dvojice v našem století.

V novém roce pište na konci data

$$\sqrt[4]{1 + 9 + 8 + 4 + \sqrt[6]{1 + 9 + 84 + \sqrt[4]{1! + 9! + 8! + 4!}}}$$

Profesor Ypsilon o harmonické řadě a velkém třesku

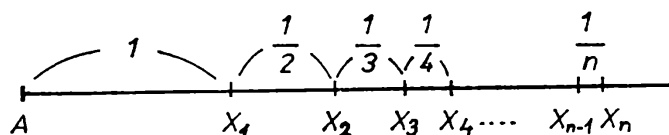
RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

„Je vám jistě známo“, zahájil profesor Ypsilon hodinu matematiky věnovanou praktickým aplikacím tématu o posloupnostech, „že v moderní kosmogonii má prioritní postavení teorie velkého třesku, podle níž vznikl vesmír obrovskou explozí (viz obr. 1), ke které došlo asi před osmnácti miliardami let. Představme si, že současně s okamžikem, kdy vesmír vybuchl a počal se rozpínat, začneme na zvolené polopřímce od jejího počátečního bodu A (viz obr. 2) vyznačovat v sekundových intervalech body $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_{n-1}, X_n$, tak, že pro jejich vzájemné vzdálenosti v metrech platí

$$|AX_1| = 1, |X_1X_2| = \frac{1}{2}, |X_2X_3| = \frac{1}{3}, |X_3X_4| = \frac{1}{4}, \dots, |X_{n-1}X_n| = \frac{1}{n}, \dots$$



Obr. 1



Obr. 2

Pro vzdálenosti v metrech bodu A od bodů $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n$, v nichž budeme na konci 1., 2., 3., 4., . . . , n -té sekundy, tak dostáváme:

$$|AX_1| = 1, |AX_2| = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, |AX_3| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$|AX_4| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \quad |AX_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n}$$

Ptáme se, do jaké vzdálenosti od bodu A se při vyznačování bodů U_i dostaneme, budeme-li toto značení provádět od okamžiku velkého třesku nepřetržitě až po naše časy. Bude tato vzdálenost na konci 2. tisíciletí našeho letopočtu větší nebo menší než 1 km?”, obrátil se profesor Ypsilon na třídu téměř nedutající a na rtech mu pohlávil úsměv Mefistův.

(Pokračování)

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

6. Dokažte, že pro libovolné kladné celé číslo n platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\log_2 j \right]^* &= \left[\log_2 1 \right]^* + \left[\log_2 2 \right]^* + \dots + \left[\log_2 n \right]^* = \\ &= 1 + n \left[\log_2 n \right]^* - 2^{\left[\log_2 n \right]^*}. \end{aligned}$$

Symbol $[a]^*$, kde a je reálné číslo, označuje nejmenší celé číslo k splňující nerovnost $k \geq a$.

(Došlo 5 řešení.)

Jaroslav Morávek

I. Řešení (matematickou indukcí) podle Jána Kováče, 4 A G Poprad, Anny Kernerové, 4 G Tata (Maďarsko) a trojice Benkovics, Hócza, Lencsés, 3 G Tatabánya (Maďarsko):

1. Pro $n = 1$ a $n = 2$ ověříme identitu bezprostředním výpočtem.

2. Indukční krok $n \rightarrow n + 1$, kde je $n \geq 2$. Podle indukčního předpokladu platí

$$\begin{aligned} [\log_2 1]^* + [\log_2 2]^* + \dots + [\log_2 n]^* + [\log_2 (n+1)]^* &= \\ = 1 + n[\log_2 n]^* - 2^{\left[\log_2 n \right]^*} + [\log_2 (n+1)]^* & \end{aligned}$$

K provedení indukčního kroku potřebujeme tedy ukázat, že platí

$$\begin{aligned} 1 + n[\log_2 n]^* - 2^{\left[\log_2 n \right]^*} + [\log_2 (n+1)]^* &= \\ = 1 + (n+1) [\log_2 (n+1)]^* - 2^{\left[\log_2 (n+1) \right]^*}, & \end{aligned}$$

čili

$$n[\log_2 n]^* - 2^{\left[\log_2 n \right]^*} = n[\log_2 (n+1)]^* - 2^{\left[\log_2 (n+1) \right]^*} \quad (1)$$

pro $n = 2, 3, \dots$

Pro důkaz vztahu (1) označíme jeho levou stranu L , pravou stranu P a rozlišíme tyto dva případy:

(a) $n = 2^r$, kde r je kladné celé,

(b) $2^r < n < 2^{r+1}$, kde r je kladné celé.

V případě (a) dostáváme $L = n \cdot r - 2^r$ a $P = n(r+1) - 2^{r+1} = n \cdot r - 2^r$, a tedy $L = P$.

V případě (b) dostáváme $L = n(r + 1) - 2^{r+1}$, $P = n(r + 1) - 2^{r+1}$,
a tedy $L = P$

II. Řešení Vladimíra Korduly 2 C G Bílovec; obdobně začal Vítězslav Lupínek, 3 B G Český Brod, avšak důkaz identity dokončil matematickou indukcí:

Nejprve si všimneme, že pro libovolné kladné n a pro libovolné nezáporné celé y platí:

$[\log_2 n]^* = y + 1$ právě tehdy, jestliže $n \in \langle 2^y + 1, 2^{y+1} \rangle$.
Položme $y = [\log_2 n]^* - 1$. S použitím výše uvedeného faktu dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\log_2 j \right]^* &= 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 3 + \dots + 2^{y-1} + y + \\ &+ (n - 2^y)(y + 1) = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{y-1}) + (2^1 + 2^2 + \\ &+ \dots + 2^{y-1}) + (2^{y-2} + 2^{y-1}) + 2^{y-1} + (n - 2^y)(y + 1) = \\ &= (2^y - 2^0) + (2^y - 2^1) + \dots + (2^y - 2^{y-1}) + (n - 2^y)(y + 1) = \\ &= y \cdot 2^y - (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{y-1}) + (n - 2^y)(y + 1) = \\ &= y \cdot 2^y - 2^y + 1 + (n - 2^y)(y + 1) = \\ &= 1 + n(y + 1) - 2^{y+1} = 1 + n([\log_2 n]^* - 1) - 2^{[\log_2 n]^*} \end{aligned}$$

což dokončuje důkaz.

Poznámka: Funkce $x \rightarrow [x]^*$ má podobné použití jako funkce $x \rightarrow [x]$, nazývaná „celou částí“. Na rozdíl od $[x]$ se pro $[x]^*$ doposud žádný název neustálil. V angličtině se $[x]^*$ někdy hovorově označuje názvem „ceiling“ (strop), popř. „post office function“ (poštovní funkce). (Poslední název je narážkou na skutečnost, že na poštách většiny zemí se při určování výše poplatku za odesílaný balík hmotnost balíku zaokrouhluje nahoru.) Všimněme si, že pro libovolné reálné x platí $[x]^* = -[-x]$.

7. Určete nejmenší přirozené číslo dělitelné jedenácti, jehož ciferný součet je 1983.
(Došlo 28 řešení.)

Jiří Sedláček

Řešení Jána Kováče, IV A. gymnázium Poprad (upraveno autorem úlohy):

Hledané číslo má aspoň 221 cifer, jinak by totiž ciferný součet nedosáhl 1983, ani kdyby všechny cifry byly devítky. Číslo

$$C = 75999 \dots 9$$

končící 219 devítkami (a mající tedy 221 číslic) je dělitelné jedenácti

a má ciferný součet 1983. Hledané minimální číslo má proto právě 221 cifer a v desítkové soustavě je můžeme zapsat jako

$$c_1 c_2 c_3 \dots c_{221}.$$

Je vidět, že c_1 není ani 1 ani 2, neboť pak by ciferný součet byl menší než 1983, i kdybychom za ostatní c_i dosadili samé devítky. Dále si uvědomíme, že c_3 musí být devítka, neboť jinak bychom číslo upravili tím, že c_1 nahradíme hodnotou $c_1 - 1$ a c_3 hodnotou $c_3 + 1$. Tím by vzniklo číslo menší, rovněž dělitelné jedenácti a s ciferným součtem 1983. Z podobného důvodu také $c_4, c_5, \dots, c_{221}$ musí být devítky.

Protože ciferný součet hledaného minimálního čísla je 1983, musí platit

$$c_1 + c_2 + 219 \cdot 9 = 1983$$

čili

$$c_1 + c_2 = 12.$$

Vyzkoušíme-li nyní všechny možné rozklady čísla 12 na součet dvou prvků z množiny $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a použijeme-li kritéria dělitelnosti jedenácti, vidíme, že vyhovuje jen $c_1 = 7, c_2 = 5$. Z toho plyne, že řešením je číslo C uvedené na začátku.

8. Dokažte, že pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d , platí:

$$(a + c)^2 (b + d)^2 \geq (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d).$$

Předpokládejte, že výrazy v závorkách nabývají jen kladných hodnot.

Jaroslav Šedivý

(Došlo 44 řešení.)

Řešení Jána Kováče, 4 A G Poprad:

Pre každé dve reálne čísla x, y platí: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$.

(Dôkaz získame úpravou nerovnice $(x-y)^2 \geq 0$.)

Podľa tejto vety platí

$$(a + b + c - d)(a - b + c + d) \leq \left(\frac{2a + 2c}{2}\right)^2 = (a + c)^2,$$

$$(a - b + c + d)(-a + b + c + d) \leq \left(\frac{2b + 2d}{2}\right)^2 = (b + d)^2.$$

Čísla na ľavých stranách oboch nerovností sú podľa zadania kladné, preto môžeme obe nerovnosti vynásobiť:

$$(a + c)^2 (b + d)^2 \geq (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d).$$

[Řešení, ve kterých se použilo násobení nerovnic bez úvahy o kladnosti jejich stran, jsou neúplná. Z platnosti $A \leq B, C \leq D$ neplyne vždy platnost $AC \leq BD$; například $-5 \leq 4, -10 \leq 9$, ale $50 > 36$.]

Fyzika

1. Jakou maximální energii může při srážce s volným klidným elektronem ztratit alfa částice mající kinetickou energii $T_\alpha = 5,48 \text{ MeV}$? (Došlo 52 řešení.)

Stanislav Pospíšil

Protože soustavu složenou z elektronu a dopadající alfa částice můžeme považovat za izolovanou, budou pro soustavu platit zákony zachování energie a hybnosti (ZZE, ZZH)

$$E = \text{konst.}, \quad (\text{ZZE})$$

$$\mathbf{P} = \overrightarrow{\text{konst.}}, \quad (\text{ZZH})$$

kde E a $\mathbf{P}$ označují celkovou energii a celkovou hybnost soustavy. Víme, že silové působení mezi oběma částicemi vymizí, budou-li částice od sebe nekonečně daleko. Budeme-li dále hovořit o případě před srážkou, budeme mít na mysli, že dopadající částice je od elektronu vzdálena ještě nekonečně daleko. Když se pak obě srážející se částice vzdálí od sebe opět do nekonečna, říkáme, že jde o případ po srážce. Všechny veličiny vztahující se k případu po srážce budeme označovat čárkou. Vzhledem k tomu, že srážka je pružná, ZZE přechází na zákon zachování celkové kinetické energie,

$$T = T'$$

Označíme-li si symboly T_α , T_e , $\mathbf{p}_\alpha$, $\mathbf{p}_e$ kinetické energie a hybnosti alfa částice a elektronu před srážkou, můžeme vzhledem k tomu, že $T_e = 0$, $\mathbf{p}_e = \vec{0}$, psát ZZE ve tvaru

$$T_\alpha = T'_\alpha + T'_e$$

a ZZH ve tvaru

$$\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}'_\alpha + \mathbf{p}'_e$$

Protože rychlost alfa částice je při $T_\alpha = 5,48 \text{ MeV}$ podstatně menší než rychlost světla, $\frac{v_\alpha}{c} \doteq 5 \times 10^{-2}$, můžeme celou úlohu řešit dostatečně přesně nerelativisticky, tj. pro kinetickou energii užívat vztahu $T = \frac{p^2}{2m}$. Obě rovnice plynoucí ze zákonů zachování přepíšeme do tvarů

$$\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{p'_\alpha{}^2}{2m_\alpha} + \frac{p_e'^2}{2m_e},$$

$$p_{\alpha}^2 - 2p_{\alpha}p_e' \cos \varphi_e + p_e'^2 = p_{\alpha}'^2,$$

kde φ_e je úhel, pod kterým se odráží elektron vzhledem ke směru dopadu alfa částice. Řešením těchto rovnic, vyloučíme-li $p_{\alpha}'^2$, dostáváme velikost hybnosti odraženého elektronu v závislosti na úhlu jeho odrazu a na hybnosti dopadající alfa částice,

$$p_e' = \frac{2m_e}{m_e + m_{\alpha}} p_{\alpha} \cos \varphi_e.$$

Pro kinetickou energii odraženého elektronu v závislosti na úhlu odrazu při zadané energii T_{α} odtud dostáváme

$$T_e' = \frac{4 m_e m_{\alpha}}{(m_e + m_{\alpha})^2} T_{\alpha} \cos^2 \varphi_e$$

Maximální kinetickou energii získá elektron, letí-li po srážce pod úhlem $\varphi_e = 0^{\circ}$. Protože podle ZZE platí

$$\Delta T_{\alpha} = T_{\alpha} - T_e' = T_e,$$

je maximální energie, kterou může alfa částice ztratit při srážce s volným klidným elektronem, rovna

$$(\Delta T_{\alpha})_{\max} = \frac{4 m_e m_{\alpha}}{(m_e + m_{\alpha})^2} T_{\alpha}.$$

Vzhledem k tomu, že hmotnost alfa částice je mnohem větší než hmot-

nost elektronu, $\frac{m_e}{m_{\alpha}} \doteq \frac{1}{7200}$, vidíme, že alfa částice může při jedné

takové srážce ztratit jen velmi malou část své energie. Pro zadanou energii $T_{\alpha} = 5,48 \text{ MeV}$ je tato ztráta přibližně rovna 3 keV.

Poznámka:

Při zadané hodnotě energie alfa částice nemůže dojít k nepružné srážce s elektronem, tj.:

1. ke zvýšení vnitřní energie některé ze srážejících se částic;
2. k vytvoření vázaného stavu elektron — alfa částice (k zachycení elektronu alfa částicí a k vytvoření jedenkrát ionizovaného atomu helia).

2. Jaká je minimální vzdálenost, na kterou se může přiblížit alfa částice mající kinetickou energii $T_{\alpha} = 5,48 \text{ MeV}$ k jádru lehkého vodíku? Jádro vodíku bylo před srážkou v klidu.

(Došlo 41 řešení.)

Stanislav Pospíšil

Upravené řešení Eleonóry Ujjové, 4 C G s vyučovacím jazykem maďarským, Komárno:

Nejblíže se k sobě obě částice při dané energii T_α přiblíží, půjde-li o čelní pružnou srážku. Můžeme psát zákon zachování energie (ZZE) ve tvaru

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha'^2 + \frac{1}{2} m_H v_H'^2 + W_p$$

a zákon zachování hybnosti (ZZH) ve tvaru,

$$m_\alpha \vec{V}_\alpha = m_\alpha \vec{V}_\alpha' + m_H \vec{V}_H',$$

kde m_α a $\vec{V}_\alpha$ jsou hmotnost alfa částice a její rychlost před srážkou, $\vec{V}_\alpha'$ její rychlost v průběhu srážky, m_H a $\vec{V}_H$ jsou hmotnost protonu a jeho rychlost v průběhu srážky. Symbol W_p označuje potenciální energii vzájemného coulombického odpuzování obou částic v průběhu srážky,

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_\alpha Q_H}{r},$$

kde Q_α a Q_H jsou náboje alfa částice a protonu, r je vzdálenost mezi těmito částicemi a $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ je tzv. permitivita vakua.

Při čelní srážce bude směr vektorů $\vec{V}_\alpha'$ a $\vec{V}_H'$ stejný jako vektoru $\vec{V}_\alpha$. V okamžiku maximálního přiblížení obou částic (místě obratu v jejich relativním pohybu) je rychlost obou částic $\vec{V}_\alpha'$ a $\vec{V}_H'$ stejná, $\vec{V}_\alpha' = \vec{V}_H' = \vec{V}'$. ZZE a ZZH mají v případě tvar

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} (m_\alpha + m_H) v'^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_\alpha Q_H}{r_{\min}},$$

$$m_\alpha v_\alpha = (m_\alpha + m_H) v'$$

a představují soustavu dvou rovnic o dvou neznámých v' a $r_{\min}$

$\left(v_\alpha = \sqrt{\frac{2T_\alpha}{m_\alpha}}\right)$. Jejím řešením dostáváme pro minimální vzdálenost $r_{\min}$ vztah

$$r_{\min} = \frac{Q_\alpha Q_H}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 + \frac{m_\alpha}{m_H}}{T_\alpha}$$

Dosadíme-li číselné hodnoty $Q_\alpha = 2 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $Q_H = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$,

$$\frac{m_\alpha}{m_H} = 4, T_\alpha = 5,48 \times 1,6 \times 10^{-13} \text{ J},$$

dostáváme $r_{\min} = 2,6 \times 10^{-15} \text{ m}$

3. Kyvadlo hodin má dobu kyvu 0,5 s v místě, kde je tíhové zrychlení $9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jaké je tíhové zrychlení v místě, kde se hodiny opožďují o 20 s za den?
(Došlo 45 řešení.)

Pavla Zieleniecová

Řešení Petra Surého, 4 A G Ostrava, ul dr. Šmerala :

Označíme-li t_1 dobu kyvu kyvadla správných hodin a t_2 dobu kyvu kyvadla hodin, které se opožďují, platí

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g_1}},$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g_2}}.$$

Odtud

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \frac{g_2}{g_1}.$$

Kyvadlo s dobou kyvu t_1 vykoná za den (86 400 s)

$$n_1 = \frac{86\,400 \text{ s}}{t_1} \text{ kyvů} \tag{1}$$

a kyvadlo s dobou kyvu t_2

$$n_2 = \frac{86\,400 \text{ s}}{t_2} \text{ kyvů.}$$

Jelikož se druhé hodiny zpožďují za den o 20 s, platí vztah

$$n_1 = n_2 + \frac{20 \text{ s}}{t_2}.$$

Po dosazení za n_1 a n_2 dostaneme

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{86\,400 \text{ s}}{86\,420 \text{ s}}$$

a po dosazení do (1) máme pro hledané tíhové zrychlení g_2 vztah

$$g_2 = g_1 \left(\frac{86\,400}{86\,420} \right)^2$$

$$\text{číselně } g_2 = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \left(\frac{86\,400}{86\,420} \right)^2$$

Tíhové zrychlení na druhém místě je $9,80211 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

OLYMPIÁDY A SOČ

25. mezinárodní matematická olympiáda

RNDr. LEO BOČEK, Praha CSc., UK

Jubilejní, již 25. mezinárodní matematická olympiáda se konala letos v Československu, v Praze. Zúčastnilo se jí 192 soutěžících ze 34 zemí, poprvé se MMO zúčastnili žáci z Kypru a z Norska. Vedoucí delegací se sjeli do Prahy již 29. června, aby provedli výběr úloh. Kromě toho se na malém symposiu seznámili s formami péče o žáky talentované v matematice v různých zemích. Slavnostní zahájení 25. MMO se konalo 3. července 1984 v staroslavném Karolinu ve velké aule Karlovy univerzity. Byli přítomni zástupci ÚV KSČ, ÚV SSM a dalších institucí, slavnostní projev přednesl 1. náměstek ministra školství ČSR *prof. dr. V. Čisář, CSc.* Přivítal zástupce UNESCO pana *E. C. Jacobsena* a připomněl bohaté kulturní tradice českého národa a zvláště Prahy, spojené s jmény mnoha učenců, například J. A. Komenského, B. Bolzana, T. Braheho, J. Keplera. V závěru svého projevu vyzdvihl nutnost zachování míru, základního předpokladu pro další život na naší planetě.

Další dva dny byly vyhrazeny vlastní soutěži, každý den řešili žáci během 4,5 hodiny tři náročné úlohy, vybrané mezinárodní jury. Pak bylo již více času na prohlídky Prahy, výlet na Karlštejn a návštěvu Laterny magiky. V pondělí 9. července se opět všichni sešli v Karolinu k slavnostnímu vyhlášení výsledků. Závěrečný projev přednesl náměstek ministra školství ČSR *dr. K. Čepička, CSc.* Nejúspěšnější účastníci 25. MMO pak převzali od ministra školství ČSR *doc. dr. M. Vondrušky* diplomy. Bylo uděleno 14 prvních cen, pět z nich získali reprezentanti Sovětského svazu, po dvou žáci Bulharska a Rumunska. Další první ceny získali po jednom zástupci NDR, USA, Vietnamu, Velké Británie a Maďarska. Dvanáct soutěžících absolvovalo 25. MMO bez ztráty bodů. Z československých účastníků získali *Jiří Witzany* z gymnázia W. Piecka v Praze a *Juraj Balázs* z gymnázia v Košicích, Kuzmányho ul. druhé ceny, *M. Grajcar* z gymnázia M. Koperníka v Bílovci a *J. Šefčík* z gymnázia A. Markuša v Bratislavě získali třetí ceny. V neoficiálním pořadí družstev se umístilo Československo na 13. místě.

V některém z příštích čísel přineseme podrobný rozbor úloh 25. MMO. Zatím si můžete zkusit sami vyřešit ty dvě úlohy, které se ukázaly být méně těžké:

1. Nechť x, y, z jsou nezáporná čísla, $x + y + z = 1$. Dokažte, že $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq 7/27$.

4. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ se přímka CD dotýká kružnice o průměru AB . Dokažte, že přímka AB se dotýká kružnice o průměru CD tehdy a jen tehdy, když jsou přímky BC , AD rovnoběžné.

Z NOVÝCH KNIH

FYZIKA PRE VŠETKÝCH

3. diel

ELEKTRÓNY

Z ruského originálu *Fizika dlja vseh vseh 3 — Elektróny*, který vydala Nauka, Moskva 1979, přeložili doc. dr. Ján Chrapan, CSc., a prom. ped. Eva Tokáriková.

Vydala Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry. n. p., Bratislava 1984. Technicky a výtvarně zpracovalo nakladatelství Mir v Moskvě, vytištěno v SSSR, 222 stran, 42 obr., 1. vydání, náklad 4000 výtisků, váz. 17,— Kčs.

První dva díly *Fyziky pre všetkých* napsali společně akademik L. D. Landau a prof. A. I. Kitajgorodskij. V prvním svazku se čtenář seznámil se zákonitostmi pohybu velkých těles a s přitažlivými silami. Druhá kniha byla věnována molekulové stavbě látek a pohybu molekul. V knížce *Elektróny* se probírá elektrická stavba látek, elektrické síly a elektromagnetické pole. Ve čtvrtém závěrečném dílu se bude hovořit o fotonech, o stavbě atomového jádra a jaderných silách.

Knížka *Elektróny* není učebnice ani příručka, ale populárněvědecká publikace. Předpokládá u čtenáře jisté všeobecné znalosti z fyziky. Tyto poznatky připomíná neškol-

ským pohledem „z jiné strany“, doplňuje, rozšiřuje a ukazuje je čtenáři v nových souvislostech. Již v první kapitole se vysvětluje tzv. fenomenologický postup při zkoumání přírody. Soustavně se věnuje pozornost vzniku fyzikálních teorií. Tyto teorie se neuvádějí jen v současném obvyklém „uhlaženém“ tvaru, ale ukazují se i potíže na cestě k nim.

Pro naše čtenáře bude jistě zajímavá vzpomínka autora, jak se mu podařilo vysvětlit tajemství experimentů světově známého českého kouzelníka, kterého američtí novináři nazývali podle mytického mudrce, matematika a čaroděje „českým Merlinem“. Dokázal např. „zmagnetovat“ dřevěné zápalky.

Při dalším vydání knížky by bylo vhodné aspoň v poznámce pod čarou uvést v kapitole věnované elektrotechnice jméno Františka Křížíka a v kapitole o radio-technice jméno Jozefa Murgaše.

Knížku doporučujeme jako doplňkovou četbu studentům středních škol, a to zvláště těm, kteří chtějí na vysokých školách studovat technické a přírodovědné obory.

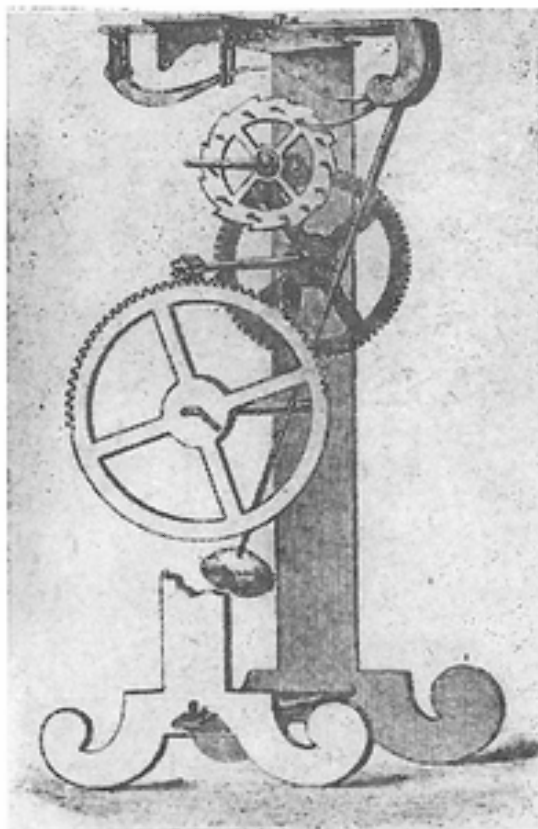
Jiří Mída

Galileiho kyvadlové hodiny

Přesné měření času bylo odvěkým problémem; starověk znal kromě slunečních hodin ještě vodní hodiny (klepsydry), které měřily čas množstvím vyteklé vody, resp. přesýpací hodiny s pískem. Krátké časové intervaly nebylo možno měřit ani na kolečkových hodinách vynalezených ve 14. století. Ještě *Galileo Galilei* (1564—1642) objevil izochronismus kyvů lamp na dlouhých závěsech v katedrále jen na základě odpočítávání vlastního tepu.

Galilei ovšem cítil potřebu mít mnohem přesnější měřidlo času nezávislé na životních rytmech člověka. Na sklonku svého dramatického života navrhl konstrukci kyvadlových hodin, ale jejich realizaci odkázal svému synovi, právníku Vincenzovi. Galilei považoval svůj návrh za fyzikálně důležitou a finančně významnou záležitost, ale syn ji chápal jen jako jedno z otcových podivínství, které by ho případně přivedlo do dluhů. A tak se skutečným vynálezcem kyvadlových hodin stal Holanďan *Christian Huygens*.

Hodiny, které Galilei navrhl, byly sestaveny a vyzkoušeny až mnohem později, spíše ze zájmu o Galileiho práce vůbec. Zjistilo se, že tyto hodiny (znázorněné na našem obrázku) by Huygensovým



konkurovat nemohly, ale jako první vlašťovka v problematice přesného měření času (jinými než astronomickými metodami) mají své místo v dějinách vědy. Galilei užíval matematiky ve fyzice jen skromně, pracoval také ještě v duchu antické tradice a vyjadřoval fyzikální zákony pomocí poměrů veličin, zákon kyvadla vyjádřil ve tvaru: Doby kyvu se mají k sobě jako druhé odmocniny z jejich délek.

Vladimír Malíšek

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ VYDALO:

Kuzněcov: EINSTEIN — ŽIVOT, SMRT, NESMRTELNOST

Spolu s životopisem a dílem jsou v knize sledovány i Einsteinovy filozofické názory. Výklad je podáván populárním, avšak seriózně pojatým způsobem. Kniha je nejen užitečná jako životopisné dílo, ale také z hlediska rozšiřování vzdělání čtenáře v oblasti fyziky a jeho filozofického obzoru.

Kčs 49,—

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3\$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1984.

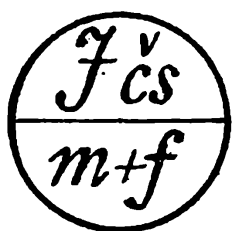
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

**ROČNÍK 63, 1984/85
LEDEN**

(5)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný CSc., UK, Bratislava,
Stanislav Horák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr. Ján Chrapan, CSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš
doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha,
doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Hana Kořínková, CSc., ÚÚVPP Praha,
prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha,
dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra,
ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha,
dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

O. Houdek: Fibonacci dnes? .	193
I. Bušek: Stavíme nejkratší silnici	197
A. Hnáth: Tri prístupy k riešeniu jednej úlohy .	201
I. Fischer: Paměti PROM jako logické kombinační obvody LSI .	204
M. Kociský: Hrozba následkov jadrovej vojny (V.)	209
I. Volf: Pohyb tělesa v odporujícím prostředí (dokončení)	213
M. Ohera: Termoluminiscenční dozimetr	219
J. Šedivý: 250 let učebnice Geometria practica V. J. Veselého .	224
J. Mann: Matematickým kutilům pod stromček – řešení	226
E. Calda: Profesor Ypsilon o harmonické řadě a velkém třesku	230
J. Svoboda: Čtyřdílný hlavolam .	234
Naše soutěž	235
Z. Kluiber: Fyzika v 6. ročníku SOČ .	238
Pohledy do dějin .	. 3. str. obálky

Fibonacci dnes?

RNDr. OLDŘICH HOUDEK, Laboratoř výp. techniky, Jičín

Když v roce 1228 znamenitý matematik *Leonardo z Pisy*, známější jako *Fibonacci*, uvedl v jedné ze svých knih posloupnost

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots, \quad (1)$$

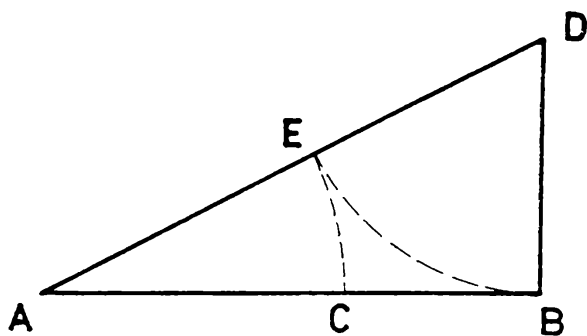
z níž možno odvodit další posloupnosti tohoto typu, např. záměnou jednotlivých členů zlomky, jejichž čitatele a jmenovatele (zde bez prvního členu) odpovídají původní posloupnosti

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \quad (2)$$

těžko mohl předvídat, že se jí budou zabírat přírodovědci ještě po sedmi stoletích.

Co je tedy na posloupnosti zajímavé? Především, že hodnota každého jejího členu je rovna součtu dvou členů předcházejících. Čtenář může namítnout, že existují posloupnosti se zajímavějšími vlastnostmi. Ukázalo se však, že Fibonacciho posloupnost souvisí se základním vztahem mezi geometrií a algebrou a z hlediska přírodních věd posloupnost je odrazem makroskopické vazby mezi tvarem a strukturou neživých i živých soustav, posuzujeme-li je z hlediska symetrie.

V případě statických — neživých systémů tuto skutečnost intuitivně chápali již starověcí architekti a umělci, jak o tom svědčí tzv. *zlatý řez*. Tento pojem značí určitý poměr, úměru, či pravidlo, podle kterého lze rozdělit danou úsečku. Konkrétně to odpovídá rozdělení úsečky na dvě části takovým způsobem, aby poměr menší a větší části byl roven poměru větší části a délek obou částí. Na obr. 1 je geometrická konstrukce zlatého řezu, který pak charakterizuje úměra



Obr. 1

$$|CB| : |AC| = |AC| : |AB| \quad (3)$$

Označíme-li $|AB| = a$, $|AC| = x$, potom z geometrického řešení, kde

$$|AD| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}, |AC| = |AE| = |AD| - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = x, \quad (4)$$

obdržíme po dosazení jako číselnou hodnotu poměru zlatého řezu

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \doteq 0,618$$

Přejdeme nyní k řešení algebraickému. Při zachování stejného označení můžeme nyní úměru (3) vyjádřit ve tvaru

$$(a - x) : x = x : a,$$

jejíž úprava vede k rovnici

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \quad (5)$$

s kořenem $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ čili $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \doteq 0,618$

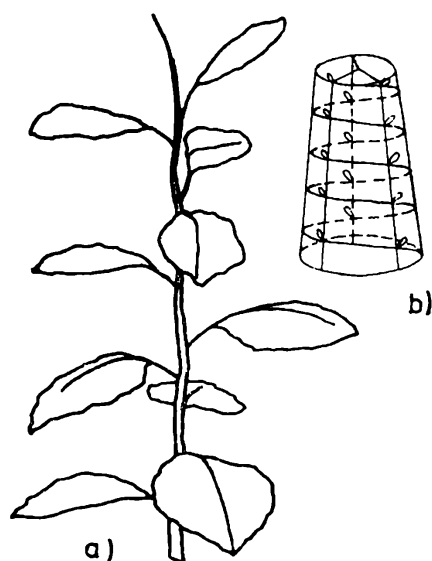
Starověcí umělci se zabývali pouze geometrickou stránkou problému $\doteq$ charakterizující tvar příslušné soustavy. Prvý, kdo přihlédl současně k oběma aspektům řešení, byl až *J. Kepler*. Jak se čtenář může sám přesvědčit, vyčíslíme-li jednotlivé zlomky posloupnosti (2), získáváme postupně hodnoty, které se stále více budou blížit číselné hodnotě zla-

tého řezu, např.: $\frac{3}{5} = 0,6000$, $\frac{8}{13} \doteq 0,615$, $\frac{55}{89} \doteq 0,617$ Tak Kep-

ler prokázal, že Fibonacciho posloupnost konverguje k číselné hodnotě zlatého řezu.

Do té doby, jak bylo již výše řečeno, se zlatý řez realizoval prostřednictvím geometrie, tj. makroskopicky, a to především při konstrukci a stavbě uměleckých děl. Proporce budov, soch jako celku, jakož i jejich částí odpovídaly zlatému řezu. Později též rozměry maleb, obrazů, rámců, desek knih apod. Hlubší byl zde pohled Keplerův. Velký astronom a filosof chápal geometrii jako odraz harmonie — symetrie světa. Ale odlišně od pythagorejců neviděl základy této harmonie v číselných poměrech, ale pod čísly skrytých v geometrických tvarech, což umožnilo, aby jako první spojil Fibonacciho čísla s makrostrukturou dynamických, tj. živých soustav.

Tuto myšlenku, k jejíž široké realizaci dochází až v posledních dvou stoletích, možno ilustrovat následujícím příkladem. Všimněme si postavení listů na stonku či stvolu rostliny (obr. 2a). Již pohledem zjistíme,



Obr. 2a, b

že místa, z nichž listy vyrůstají, nejsou ve stejné výši. Jejich spojením by se ukázalo, že leží na šroubovici (obr. 2b), která lodyhu jako osu obtáčí.

Přírodovědci toto spirální postavení listů na ose charakterizují zlomkem, jehož číselník je roven počtu závitů šroubovice a jmenovatel počtu listů v jednom cyklu, což je vzdálenost mezi dvěma nejbližšími listy, které se nacházejí těsně nad sebou (obr. 2b). Jestliže ke splnění této podmínky je např. třeba tři otáček a přitom mjíme osm intervalů (vzdáleností mezi sousedními listy), je geometrie a struktura listové soustavy charakterizována zlomkem $3/8$. Na obr. 2b je tedy znázorněna listová uspořádanost odpovídající poměru $1/3$. Další zkoumání a měření ukázala, že nejčastější rozložení, a to nejen listů, ale i semen šišek, slunečnice, zrn kukuřice, seřazení květních částí, ale i kořenů rostlin odpovídají těmto hodnotám

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}$$

Všimneme-li si blíže těchto posloupností, potom v prvním případě (počínaje třetím členem), možno jednotlivé zlomky vyjádřit ve tvaru, např.

$$\frac{2}{5} = \frac{1+1}{2+3}, \quad \frac{3}{8} = \frac{1+2}{3+5}, \quad \frac{5}{13} = \frac{2+3}{5+8},$$

Obdobně i v druhém případě, kde jsou zlomky $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}$ zaměněny našemu

případu odpovídajícími hodnotami $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}$. Je zřejmé, že v obou případech, přihlédneme-li k jejich struktuře, jde opět o modifikované Fibonacciho posloupnosti. Pro ilustraci možno uvést několik konkrétních

ních příkladů. Tak lípa — $1/2$, víno — $1/3$, dub — $2/5$ semena šišek borovice — $8/13$, jedle — $21/34$, slunečnice (se dvěma spirálami) — $34/55$ a $89/144$.

Tato měření jsou převážně dílem vědců minulého století. Naše doba přinesla rozšíření těchto vztahů na říši živočišnou, a to i na mikroskopické úrovni. Tak analogickým porovnáním jako v případě listů rýh na ulitách hlemýžďů se došlo ke zlomkům $1/2$, $1/3$, $2/5$ — tedy opět k Fibonacciho číslům. Obdobné výsledky přinesla zkoumání šroubovicové struktury kostních tkání a svalových vláken srdce. Pro tyto dynamické soustavy je charakteristická tzv. neklasická symetrie. Jejím příkladem může být otočení o úhel $360/n$, kde n je celé číslo. Kombinací s posuvem (translací) vzniká tzv. šroubovicová symetrie, která nemůže být prvkem symetrie žádné neživé soustavy (krystalu), ale je klíčem k poznání strukturních charakteristik složitých molekul, které mají důležitou úlohu v živých soustavách. Příkladem mohou být bílkoviny, obří molekuly se šroubovicovou strukturou, jejíž stavební složky jsou různé aminokyselinové zbytky. A opět jako už v případě listů a rýh i zde poloha dvou stejných aminokyselinových zbytků nacházejících se těsně nad sebou je určena zlomkem, který je Fibonacciho číslem.

V současnosti bádání pokračuje na molekulární úrovni, např. studiem rozložení buněk a jejich molekul v místech kde ze stonků vyrůstají listy, a zahrnuje i vztahy mezi geometrií a strukturou tak významných látek jako je kyselina deoxyribonukleová — nositelka dědičných vlastností všech živých soustav. Není proto divu, že všechny tyto dřívější a současné poznatky se dnes staly základem samostatného vědeckého oboru — nauky o symetrii. Růst krystalů i ulity živočicha to jsou symboly dějů, které se snaží nauka o symetrii vysvětlit, jinak řečeno odpovědět, jak vznikaly a vyrůstaly z původního neuspořádaného stavu — jak vznikal pořádek z chaosu.

Z tohoto obecného hlediska se pak Fibonacciho čísla a řady jeví jako makroskopické číselné charakteristiky vztahů mezi tvarem a strukturou látek umožňující spojením geometrie a algebry (grup) komplexnější pohled na přírodu a její děje. A tak je-li otazník symbolem pochyb, může být v nadpisu článku vynechán, neboť Fibonacci patří dnešku.

Stavíme nejkratší silnici

Dr. IVAN BUŠEK, Pedagogický ústav hl. m. Prahy

V praxi se setkáváme s požadavkem vybudování komunikačního systému, který by spojoval několik míst tak, aby příslušná komunikace (např. silnice) měla nejkratší délku. V takovém případě bývají totiž zpravidla nejmenší náklady na vybudování komunikace a zároveň je zajištěna i maximální hospodárnost provozu. Seznamte se s jednou takovou úlohou, jejíž řešení vyžaduje nejen znalost jednoho tematického celku, ale i jistý nadhled a pochopení souvislostí mezi jednotlivými partii matematiky. Při řešení úlohy, ze které vyplývá i zajímavý vztah známý z fyziky, si můžete mimo jiné zopakovat užití shodných zobrazení v rovině, aplikace diferenciálního počtu i něco z analytické geometrie a goniometrie.

Úloha. Na plánu jsou zobrazeny dvě obce A , B a přímá železniční trať (obr. 1). Vzdálenost obce A od trati je a , vzdálenost obce B od trati je c . Určete na železniční trati místo X tak, aby délka silnice budované z A do B a vedoucí přes X byla nejkratší.



Obr. 1

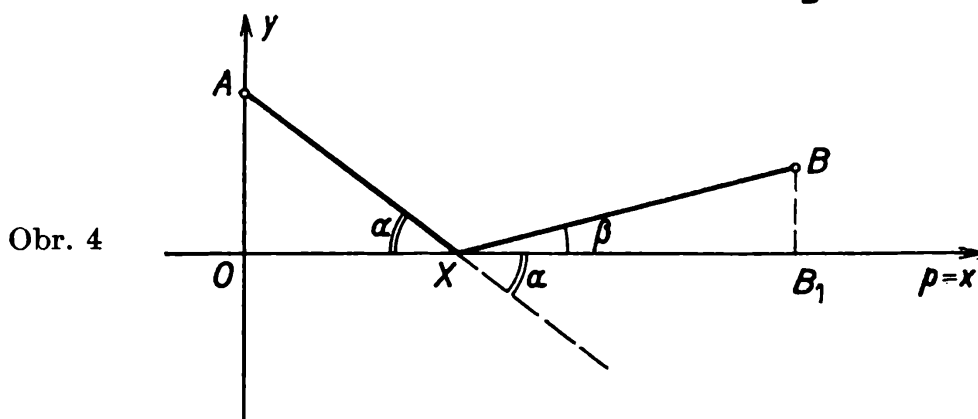
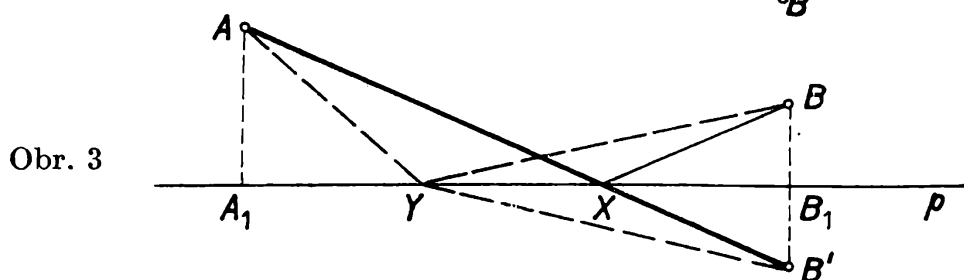
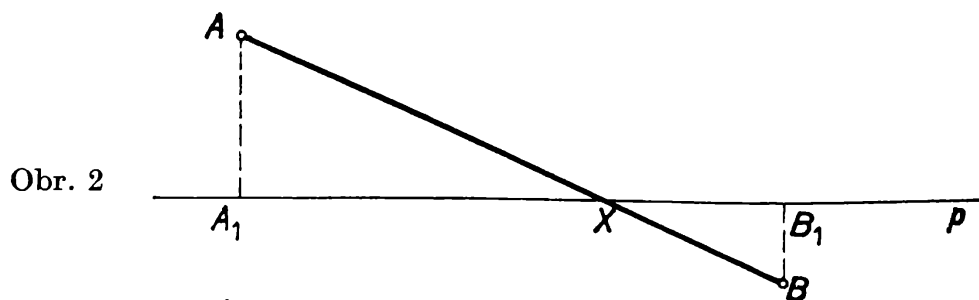
- Řešte geometricky užitím shodných zobrazení v rovině.
- Řešte užitím diferenciálního počtu.

Řešení. Matematizací dané reálné situace získáme tuto úlohu:

V téže polorovině s hraniční přímkou p (přímka p znázorňuje železniční trať) leží dva různé body A , B . Máme určit na přímce p bod X tak, aby součet $s = |AX| + |BX|$ byl minimální. Přitom $|AX|$ (resp. $|BX|$) je délka úsečky AX (resp. BX), tj. nejkratší vzdálenost bodů A , X (resp. B , X).

a) Proberme nejprve případ, kdy body A , B leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p . Pak je zřejmé, že s je nejkratší vzdálenost bodů A , B , tj. délka úsečky AB , a hledaný bod X je průsečík úsečky AB s přímkou p (obr. 2).

Leží-li body A , B uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou p , sestro-



jíme bod B' souměrně sdružený k bodu B podle přímky p (obr. 3). Je-li Y libovolný bod přímky p , je součet $|AY| + |YB|$ roven součtu $|AY| + |YB'|$. Z toho plyne, že součet $|AY| + |YB|$ je nejmenší právě tehdy, je-li nejmenší součet $|AY| + |YB'|$; to nastane, právě když bod Y splyne s průsečíkem X přímky AB' s přímkou p .

b) Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby její osa x splývala s přímkou p a její osa y splývala s kolmicí vedenou k přímce p jedním z daných bodů A, B . Označení bodů A, B zvolíme tak, aby bod A ležel na kladné poloose y a bod B měl první souřadnici kladnou. Protože jde o případ, kdy body A, B leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou p , je také druhá souřadnice bodu B kladná (obr. 4). Je-li X libovolný bod přímky p , je tedy

$$A = [0, a], B = [b, c], X = [x, 0],$$

$$a > 0, b > 0, c > 0.$$

Podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů je

$$|AX| = \sqrt{x^2 + a^2}, |BX| = \sqrt{(x - b)^2 + c^2}.$$

takže je

$$|AX| + |BX| = s = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - b)^2 + c^2}$$

Hledejme minimum funkce $s(x)$, kde s je dáno předešlým vzorcem, který můžeme přepsat takto:

$$s(x) = (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + [(x - b)^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}$$

Potom podle známých vzorců z diferenciálního počtu (jde o derivaci složených funkcí) je

$$s'(x) = \frac{1}{2} (x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} 2x + \frac{1}{2} [(x - b)^2 + c^2]^{-\frac{1}{2}} 2(x - b),$$

$$s'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{(x - b)^2 + c^2}} \quad (1)$$

Funkce $s(x)$ má derivaci v každém bodu intervalu $(-\infty, +\infty)$; proto může mít lokální extrém jedině v bodu x , kde je $s'(x) = 0$, tj. právě tehdy, je-li

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{b - x}{\sqrt{(x - b)^2 + c^2}} \quad (2)$$

Je-li $x \leq 0$, je levá strana poslední rovnice záporná nebo rovná nule; protože je $b > 0$, je zároveň pravá strana rovnice kladná. Je-li $x \geq b$, je levá strana téže rovnice kladná, kdežto pravá je nekladná. Z toho plyne, že rovnice (2) může mít kořen jedině v intervalu $(0, b)$, tj. pro tento kořen x je $0 < x < b$. To však znamená, že hledaný bod X (pokud existuje) leží mezi body O, B_1 (obr. 4).

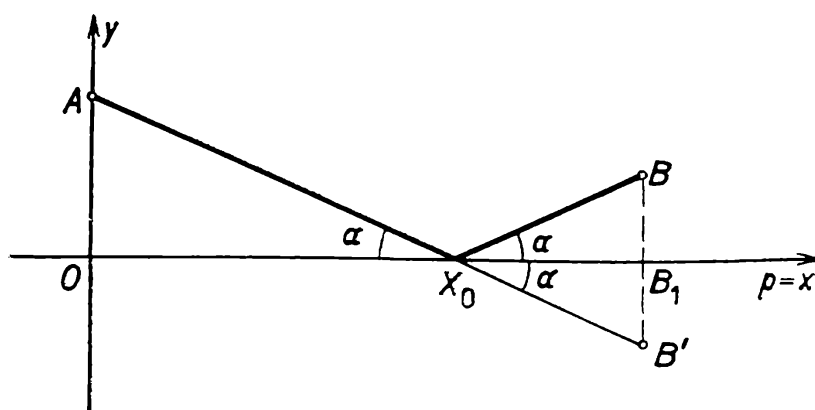
Leží-li bod X mezi body O, B_1 , pak velikosti ostrých úhlů OXA, B_1XB označme po řadě α, β . Z obr. 4 plyne, že

$$\cos \alpha = \frac{|OX|}{|AX|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \cos \beta = \frac{|B_1X|}{|BX|} = \frac{b - x}{\sqrt{(x - b)^2 + c^2}} \quad (3)$$

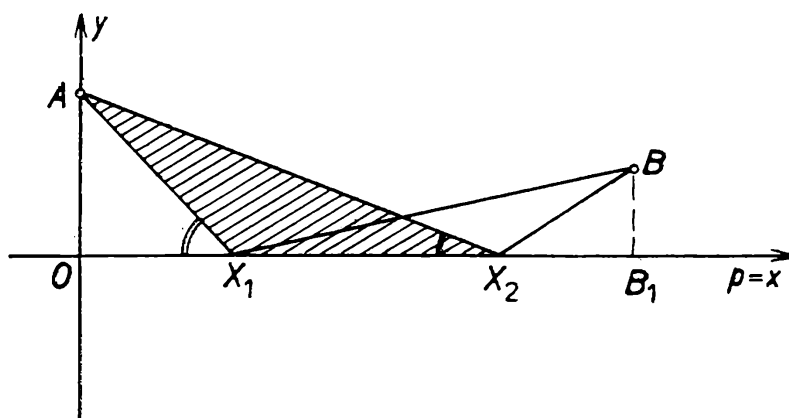
Rovnice (2) tedy znamená, že platí $\cos \alpha = \cos \beta$; protože jde o ostré úhly, nastane to právě tehdy, je-li $\alpha = \beta$. Z obr. 4 plyne, že to nastane, právě když přímky AX, BX jsou souměrně sdružené podle přímky $p = x$, tj. právě když přímka AX prochází bodem B' souměrně sdruženým k bodu B podle přímky $p = x$. Označme potom průsečík přímek $AB', p = x$ písmenem X_0 (obr. 5) a jeho první souřadnici označme x_0 .

Jde nyní o to, zda pro $x = x_0$ má funkce $s(x)$ skutečně minimum a zda toto minimum je absolutní. Podle (1) a (3) je

$$s'(x) = \cos \alpha - \cos \beta. \quad (4)$$



Obr. 5



Obr. 6

Roste-li x od 0 do b , pohybuje se bod X po přímce $p = x$ od bodu O do bodu B_1 . Z obr. 6 je zřejmé (podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku AX_1X_2), že zároveň α klesá; z trojúhelníku BX_1X_2 zase plyne, že β roste. Protože čísla α, β jsou z intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos \alpha$ roste a $\cos \beta$ klesá.

Z toho podle (4) plyne, že $s'(x)$ v intervalu $(0, b)$ roste. Je-li $x < x_0$, je $\alpha > \beta$, a tedy $\cos \alpha < \cos \beta$, čili podle (4) je $s'(x) < 0$; z rovnosti (1) je patrné, že je $s'(x) < 0$ také pro $x \leq 0$. Z toho plyne, že funkce $s(x)$ je v intervalu $(-\infty, x_0)$ klesající. Obdobně zjistíme, že v intervalu $(x_0, +\infty)$ je $s'(x) > 0$, takže v tomto intervalu je funkce $s(x)$ rostoucí. To znamená, že funkce $s(x)$ má v bodu x_0 absolutní minimum.

Závěrem si všimněme jedné velmi zajímavé skutečnosti. Nejkratší silnici postavíme právě tehdy, když platí $\alpha = \beta$, což je geometrická analogie zákona odrazu, který známe z nauky o vlnění.

Tri prístupy k riešeniu jednej úlohy

ANTON HNÁTH, Gymnázium P. Horova Michalovce

Riešením nižšie uvedenej úlohy chceme pripomenúť známú skúsenosť, že často popri zdĺhavejších riešeniach istej úlohy existujú i riešenia krátke (tie nám obvykle imponujú najviac).

Zoberme si štvorčekový papier (ten môžeme pri riešení našich úloh stále používať ako vhodnú, jednoduchú pomôcku). Priesečníky vodoravných a zvislých liniek nazvime mrežové body. Obdĺžnik, ktorého všetky vrcholy ležia v mrežových bodoch a ktorého strany ležia na vodoravných a zvislých linkách, nazveme mrežový obdĺžnik.

Dohovor: Vodoravný rozmer obdĺžnika budeme nazývať *šírkou*, zvislý rozmer *výškou*.

Úloha: Koľko mrežových obdĺžnikov (štvorec považujeme za obdĺžnik) leží v mrežovom obdĺžniku $p \times q$?

Počet všetkých obdĺžnikov určíme tromi spôsobmi.

I. spôsob: Vyberme zo zvoleného mrežového obdĺžnika $p \times q$ jeden pás výšky 1. V tomto páse je zrejmé:

$$\begin{aligned} & p \text{ obdĺžnikov šírky } 1, \\ & p - 1 \text{ obdĺžnikov šírky } 2, \end{aligned}$$

1 obdĺžnik šírky p .

Keďže pásov výšky 1 je v obdĺžniku q , dostali sme

$$q(p + p - 1 + \dots + 1) = q \frac{1}{2}(p + 1) \text{ obdĺžnikov výšky } 1.$$

Ďalej zoberme pás s výškou 2. V jednom z nich je opäť

$$\frac{1}{2} p(p + 1) \text{ obdĺžnikov s výškou } 2. \text{ Všetkých pásov s výškou } 2 \text{ je } q - 1,$$

preto dostávame spolu $(q - 1) \frac{1}{2} p(p + 1)$ obdĺžnikov s výškou 2.

V pásoch s výškou 3 je spolu $(q - 2) \frac{1}{2} p(p + 1)$ obdĺžnikov s výškou

3. Napokon vidíme, že pás výšky q je jediný a obsahuje $1 \cdot \frac{1}{2} p(p + 1)$

obdĺžnikov s výškou q . Počet všetkých obdĺžnikov v danom obdĺžniku je:

$$\begin{aligned} & q \frac{1}{2} p (p + 1) + (q - 1) \frac{1}{2} p (p + 1) + \dots + 2 \frac{1}{2} p (p + 1) + \\ & + 1 \frac{1}{2} p (p + 1) = \frac{1}{2} p (p + 1) (q + q - 1 + \dots + 3 + 2 + 1) = \\ & = \frac{1}{2} p (p + 1) \frac{1}{2} q (q + 1) = \frac{1}{4} p q (p + 1) (q + 1). \end{aligned}$$

Skôr, ako uvedieme druhý spôsob riešenia, naznačme odvodenie výsledku pre počet všetkých kombinácií k -tej triedy z n prvkov s opakovaním (počet označíme $C'_k(n)$).

Označme prvky množiny M , z ktorých budeme tvoriť kombinácie s opakovaním $1, 2, 3, \dots, n$.

Poznámka: Hoci na poradí prvkov v k -prvkovej skupine nezáleží, budeme kombinácie s opakovaním zapisovať tak, že zachováme poradie. (Príklady zápisov kombinácií 4-tej triedy 5-prvkovej množiny $[1, 2, 3, 4, 5]$ s opakovaním: 1255, 1114, 2244, atď.).

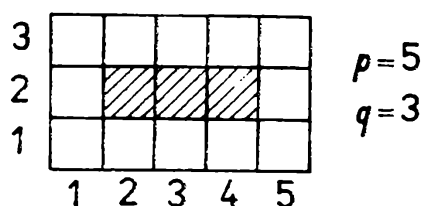
Každej kombinácii k -tej triedy z n prvkov s opakovaním môžeme priradiť $(n + k)$ -člennú skupinu tak, že k nej pridáme všetkých n prvkov množiny M a zachováme poradie (Napríklad kombinácii 1255 priradíme $(4 + 5)$ -člennú skupinu 112234555, kombinácii 2222 9-člennú skupinu 12222234 atď.). Takéto priradenie z množiny všetkých kombinácií k -tej triedy z n prvkov s opakovaním do množiny všetkých $(n + k)$ -členných skupín je vzájomne jednoznačné. Stačí preto zistiť počet všetkých $(n + k)$ -členných skupín (každý prvok množiny M sa v nich vyskytuje aspoň raz). Napíšme prvky $(n + k)$ -člennej skupiny a umiestnime medzi každú susednú dvojicu rôznych prvkov čiaru. Týchto čiar bude $n - 1$, lebo $(n + k)$ -členná skupina obsahuje n rôznych prvkov. Ale medzi $n + k$ prvkami existuje práve $n + k - 1$ „voľných miest“. Z nich máme vybrať $n - 1$, do ktorých umiestnime čiary. To sa dá spraviť:

$$\binom{n + k - 1}{n - 1} = \binom{n + k - 1}{k} = C'_k(n)$$

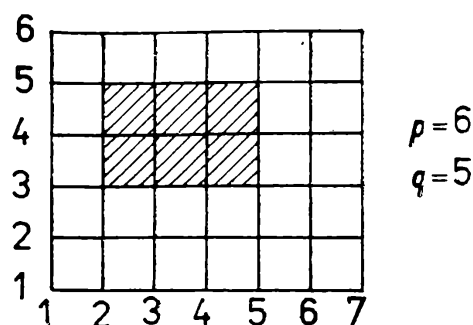
spôsobmi. (Například rozmiestneniu čiar $xx/xx/x/xxx/x$ zodpovedá 9-členná skupina 112234445 a tej kombinácia 4-tej triedy z 5 prvkov s opakovaním 1244).

Po zdĺhavom úvode prejdime k riešeniu úlohy:

II. spôsob: Každý obdĺžnik sa dá vytvoriť ako prienik vodorovného a zvislého pásu. Každý vodorovný pás môžeme charakterizovať dvojicou prirodzených čísel (a, b) , pričom $1 \leq a \leq b \leq q$, a každý zvislý pás dvojicou prirodzených čísel (c, d) , pričom platí $1 \leq c \leq d \leq p$. Obdĺžnik



Obr. 1



Obr. 2

na obr. 1 je prienikom vodorovného pásu (2, 2) a zvislého pásu (2, 4). Zvislých pásov je práve toľko, koľko je kombinácií 2. triedy z p prvkov s opakovaním, a vodorovných práve toľko, koľko je kombinácií 2. triedy z q prvkov s opakovaním. Všetkých obdĺžnikov je preto

$$C'_2(p) \cdot C'_2(q). \text{ To je ale } \binom{p+1}{2} \binom{q+1}{2}$$

Teraz uvedieme riešenie najjednoduchšie, ktoré vyžaduje len znalosť kombinácií bez opakovania.

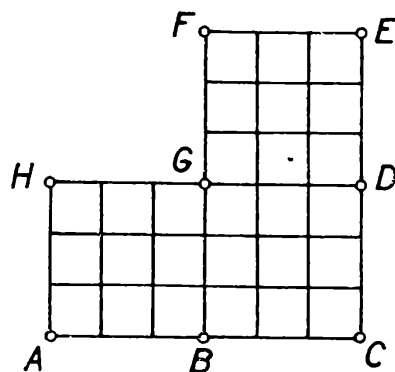
III. spôsob: Očíslujme zvislé úsečky daného obdĺžnika s rozmermi p, q číslami $1, 2, \dots, p, p+1$, vodorovné úsečky $1, 2, \dots, q, q+1$. (Pozri obr. 2, kde $p=6, q=5$.) Každý mrežový obdĺžnik sa dá, a to jednoznačne, vyjadriť ako prienik jedného zvislého a jedného vodorovného pásu. Zvislý pás je jednoznačne určený dvojicou prirodzených čísel a, b ($a \neq b$) a zároveň $a, b \in \langle 1, p+1 \rangle$. Zvislých pásov je teda práve toľko, koľko je navzájom rôznych dvojíc prirodzených čísel v intervale $\langle 1, p+1 \rangle$. Tých je — ako vie každý, kto sa učil o kombináciách bez opakovania — $\binom{p+1}{2}$. Rovnako ukážeme, že vodorovných pásov je $\binom{q+1}{2}$ (Mrežový obdĺžnik na obr. 2 je prienikom zvislého pásu (2, 5) a vodorovného pásu (3, 5)). Počet všetkých mrežových obdĺžnikov je teda:

$$\binom{p+1}{2} \binom{q+1}{2}$$

Poznámka: V texte sme často, kvôli skráteniu, miesto „mrežový obdĺžnik“ používali slovo „obdĺžnik“.

Na záver uvádzame pre čitateľa z mnohých núkajúcich sa úloh súvisiacich s riešenou úlohou tri:

1. Koľko je v mrežovom obdĺžniku mrežových štvorcov?
2. Určte počet všetkých mrežových obdĺžnikov v útvere na obrázku 3.
3. Koľko je v mrežovom obdĺžniku $p \times q$ mrežových obdĺžnikov s obsahom menším ako 5?



Obr. 3

Návody na riešenie úloh :

1. Uvedomíme si, že maximálny rozmer mrežového štvorca v mrežovom obdĺžniku $p \times q$ je $\min(p, q)$. Štvorcov so stranou 1 je $p \cdot q$, so stranou 2: $(p - 1)(q - 1)$ atď. až so stranou $\min(p, q)$: $\max(p, q) - \min(p, q) + 1$.

2. Označme počet všetkých mrežových obdĺžnikov v útware U $p(U)$. Potom platí: $p(U) = p(ACDH) + p(BCEF) - p(BCDG)$, kde $p(ACDH)$ značí počet všetkých mrežových obdĺžnikov v obdĺžniku ACDH atď.). Ďalej použijeme výsledok z článku.

3. Mrežové obdĺžniky majú jeden z týchto štyroch obsahov: 1, 2, 3, 4. Treba nájsť všetky obdĺžniky 1×1 , 1×2 , 2×1 , 1×3 , 3×1 , 1×4 , 4×1 , 2×2 . Tých je po rade $p \cdot q$, $p(q - 1)$, až $(p - 1)(q - 1)$. Spolu je to $8pq - 7(p + q) + 1$ hľadaných obdĺžnikov. (Výsledok určite správny, ak $\min(p, q) \geq 4$. Či výsledok platí i v prípade, ak $\min(p, q) < 4$ zistí čitateľ ľahko sám.)

Paměti PROM jako logické kombinační obvody LSI

IVAN FISCHER, CSc., Ped FUK v Praze

V minulých článkoch jsme si popsali logické obvody složené z jednotlivých diod, odporů a tranzistorů, integrované logické obvody TTL nízkého (SSI) a středního (MSI) stupně integrace. Na řadě by tedy mohly být obvody vysokého (LSI — Large Scale Integration) a velmi vysokého (VLSI — Very Large Scale Integration) stupně integrace, které se v posledních několika letech objevily mezi výrobky Tesly. Umístění několika stovek až několika tisíců tranzistorů na křemíkovou destičku plochy

několika čtverečních milimetrů umožnilo v jediném integrovaném obvodu sestavit velice složité logické obvody. Mezi integrované obvody LSI a VLSI patří především mikroprocesory (výkonná část malých počítačů realizující logické funkce, aritmetické součty a rozdíly a určující větvení programu podle výsledků logických a aritmetických operací — nulových, záporných atp. výsledků), paměti (určené především pro uložení programu, dat či mezivýsledků v počítačích) a různé programovatelné podpůrné obvody mikropočítačů.

I když náš seriál článků ještě nedospěl k popisu mikropočítače, můžeme si dnes alespoň ukázat využití paměti ve funkci logického kombinačního obvodu. Jako matematici si pod pojmem paměť budeme představovat tabulku pravdivostních hodnot. Adresové vstupy určují příslušný řádek tabulky — jsou to nezávisle proměnné hodnoty logické funkce. V daném řádku pak může být, jak jsme i v matematice zvyklí, zapsáno několik logických hodnot (závisle proměnných) logických funkcí, jak je vidět i v tabulce 1. Paměťový obvod dále obsahuje datové a řídicí vstupy a datové výstupy, pomocí kterých je možné do paměti zapsat logické hodnoty (jako když vyplňujeme tabulku pravdivostních hodnot) a číst tyto hodnoty. V paměťových integrovaných obvodech jsou takovéto „pravdivostní tabulky“ zpravidla se 16, 32, 256, 512, 1024, 2048 nebo 16 384 řádky (4, 5, 8, 9, 10, 11 či 14 nezávisle proměnných) a s jedním, čtyřmi či osmi sloupci závisle proměnných — můžeme proto do nich zapsat jednu až osm různých logických funkcí.

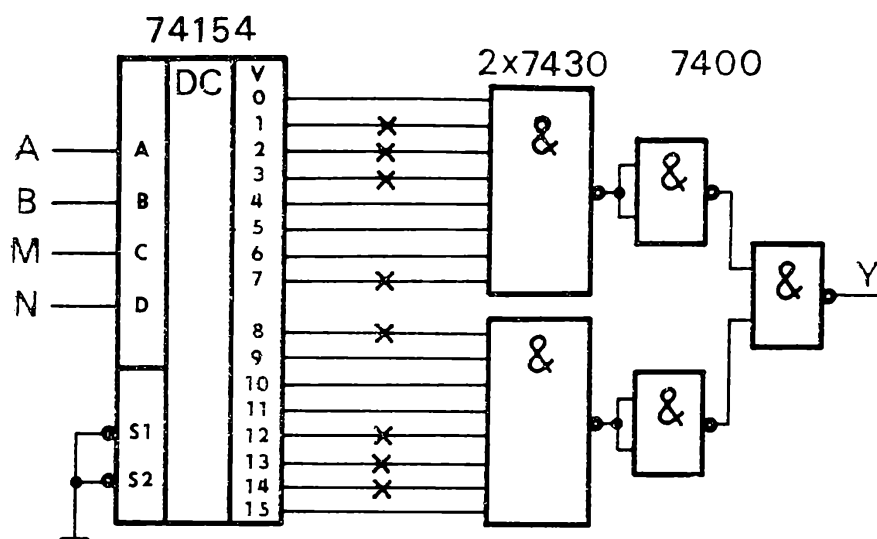
Paměti se dělí na několik druhů. Jsou to jednak paměti RWM (Read Write Memory), ze kterých lze nejenom číst, ale i zapsat a změnit vložená data. Dělí se na statické paměti, které si uložená data pamatují stále (pokud nevypneme napájecí napětí) a paměti dynamické. U dynamických pamětí jsou data „zapamatována“ pomocí nabití malých kondenzátorů — tak malých, že je potřeba do tří tisícín sekundy znovu do nich zapsat táž data, jinak se kondenzátory vybijí a paměť vše zapomene. S dynamickou pamětí proto musíme neustále pracovat, nesmíme ji nechat „stát“ a odtud plyne její název. Dále jsou to paměti ROM (Read Only Memory), ze kterých lze data pouze číst a nelze během provozu tato data měnit či zapsat nová. Data jsou do paměti zepsána již během výroby (pak hovoříme pouze o paměti ROM), nebo jsou uživatelem data uložena jednou pro vždy přepálením spojů uvnitř paměti či proražením některých diod v integrovaném obvodu, pak hovoříme o pamětech PROM (Programmable ROM). Nejdražší a výrobně nejsložitější jsou paměti EPROM (Erasable PROM). Jsou to programovatelné mazatelné pevné paměti. Obdobně jako u dynamických pamětí i u pamětí EPROM jsou data zapamatována pomocí nabitých kondenzátorů s tím rozdílem, že u pamětí EPROM se tyto kondenzátory nemusejí znovu nabít ani po deseti letech (déle se zatím tyto paměti ještě nevyrábějí). Přitom je však

Tabulka 1

Tesla MH 74199

<i>E</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>Y1</i>	<i>Y2</i>	<i>Y3</i>	<i>Y4</i>	<i>Y5</i>	<i>Y6</i>	<i>Y7</i>	<i>Y8</i>
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

možné působením ultrafialového světla či rentgenového záření tyto kondenzátory vybit během několika minut a znovu pak do nich uložit nová data. Všechny druhy pamětí ROM si tak pamatují uložená data i při vypnutí napájecího napětí.



Obr. 1

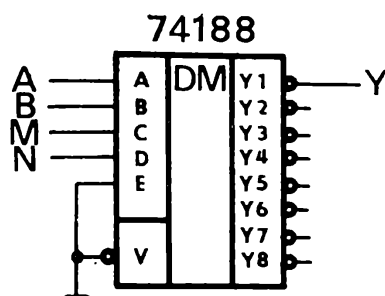
Takto popsaným pamětem RWM i ROM se říká paměti RAM (Random Access Memory), paměti s libovolným přístupem — určeným adresou. Kromě toho existují paměti FIFO (First in, First out), ze kterých lze data číst postupně v tom pořadí, ve kterém byla zapsána — jako když auta projíždějí cestu se zákazem předjíždění, a paměti LIFO (Last in, First out), kde naposled uložená data čteme jako prvá — obdobně jako postupně ukládáme či bereme papíry na stole na kupičce.

Nejrozšířenější jsou dnes integrované obvody s pamětmi RAM. Vžilo se označení, kdy místo RAM RWM píšeme pouze RAM a místo RAM ROM píšeme pouze ROM. Naproti tomu paměti na magnetofonových páskách by nám mohly připomínat paměti FIFO. Paměti FIFO se též nazývají posuvnými registry a jsou také vyráběny jako integrované obvody. Paměti LIFO se někdy nazývají zásobníky; tvoří se většinou z pamětí RAM RWM způsobem jejich adresování.

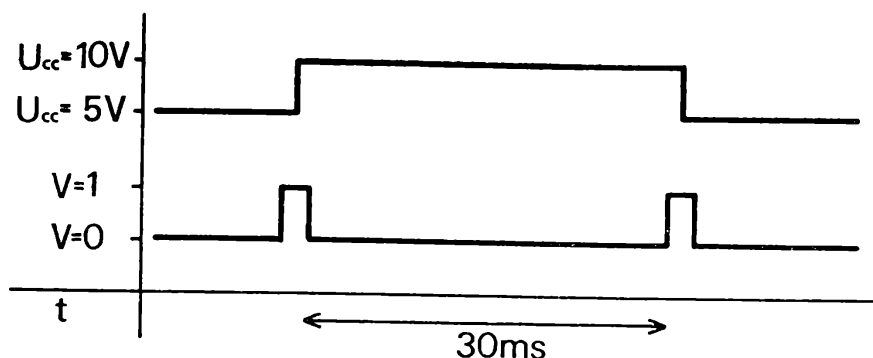
Před popsáním činnosti statických pamětí RWM si v příštím článku napřed vysvětlíme činnosti klopných obvodů. Paměť ROM, především PROM, si však můžeme ukázat na následujícím modelu. Tak jako v minulém článku si zapojíme logické obvody dekodér a logické členy NAND podle obrázku 1.

Pokud v zapojení podle obrázku 1 v místech označených křížkem spoje zatím nepřerušíme, bude na výstupu stále logická hodnota 1 nezávisle na logických hodnotách A, B, M, N . Přerušíme-li nyní spoje mezi obvody 74154 a 7430 v místech označených křížkem, bude na výstupu Y logická hodnota určená funkcí

$$(1) \quad Y = ABMN + AB\bar{M}N + A\bar{B}\bar{M}N + \bar{A}B\bar{M}N + \bar{A}\bar{B}M\bar{N} + \bar{A}\bar{B}M\bar{N} + \bar{A}\bar{B}M\bar{N} + \bar{A}\bar{B}M\bar{N}$$



Obr. 2



Obr. 3

tak, jako tomu bylo v zapojeních popisovaných v posledních dvou článcích (1) a (2) seriálu. Přerušením spojů jsme tak obvod složený z 74154, dvou 7430 a tří čtvrtin obvodu 7400 „trvale“ naprogramovali.

Obdobně by se choval i obvod paměti PROM typu MH 74 188. Jeho schematická značka je na obrázku 2 i se zapojením k realizaci logické funkce (1).

Při $V = 1$ bude na výstupu vždy logická hodnota 1 (ať je obvod naprogramován či nikoliv). Při $V = 0$ bude u nenaprogramovaného obvodu na výstupu logická hodnota 0, u naprogramovaného pak příslušná zvolená logická hodnota stanovená adresou na vstupech A, B, C, D, E .

Programování se provádí tak, že výstup, kde má být logická hodnota 1, spojíme se záporným pólem zdroje (0 V, logická 0), nastavíme příslušnou adresu a na dobu 30 tisíc sekund zvýšíme napájecí napětí celého obvodu (značívá se U_{CC}) z 5 V na 10 až 12 V. Navíc v době změny napájecího napětí z 5 na 10 voltů a pak z 10 na 5 voltů musí být $V = 1$, jinak je $V = 0$. Průběh napětí při programování ukazuje obrázek 3. Zvýšením napájecího napětí a zkratováním příslušného výstupu dojde uvnitř integrovaného obvodu k přepálení daného spoje, jako když jsme přerušovali spoje označené křížkem v zapojení podle obrázku 1.

I v amatérských podmínkách lze z integrovaných obvodů TTL poměrně snadno sestavit programátor paměti PROM (jak popisují články (3) a (4)).

Jestliže zapojíme vstupy A, B, M, N a výstup Y podle obrázku 3 a paměť naprogramujeme podle tabulky 1, pak bude obvod MH 74 188

realizovat logickou funkci (1). Vidíme, že výstupy $Y2$ až $Y8$ odpovídající stejnojmenným sloupcům tabulky, jsme zatím nevyužili a zrovna tak jsme ještě nevyužili polovinu sloupce $Y1$ pro $E = 1$. Z celé paměti za 51 Kčs jsme tak použili pouze jednu její šestnáctinu. Dalších patnáct šestnáctin paměti máme k dispozici pro další pokusy — k realizaci jiných logických funkcí. K využití paměti PROM jako generátorů logických funkcí i ke konstrukci jejich programátoru z obvodů TTL se v našem seriálu ještě vrátíme, až si předvedeme konkrétní příklady některých logických automatů.

V Tesle se vyrábějí ještě paměti PROM MH 74S 287 (8 adresových vstupů, 256 řádků pro 4 logické funkce) a MH 74S 571 (9 adresových vstupů, 512 řádků tabulky pro čtyři logické funkce). Jejich pravdivostní tabulky by se nám však již na stránku Rozhledů nevešly.

Literatura :

- [1] Ivan Fischer, CSc.: Integrované logické obvody SSI. Rozhledy matematicko-fyzikální, č. 1, roč. 63, 1984/85, str. 15.
- [2] Ivan Fischer, CSc.: Integrované logické obvody MSI. Rozhledy matematicko-fyzikální, č. 3, roč. 63, 1984/85, str. 110.
- [3] Ing. Vladimír Váňa, prom. mat.: Programátor paměti MH 74188. Amatérské radio A/2, 1982, příloha Amatérské radio k závěrům XVI. sjezdu KSČ — mikroelektronika.
- [4] Ing. Jaroslav Musil: Programátor paměti MH 74S 287. Amatérské radio A/5, 1984, příloha Amatérské radio k závěrům XVI. sjezdu KSČ — mikroelektronika.

FYZIKA

Hrozba následkov jadrovej vojny (V.)

Doc. dr. MATEJ KOCISKÝ, CSc., MFF UK Bratislava

Na záver úvah o hrozbe následkov jadrovej vojny, ktoré sme prinášali v predchádzajúcich číslach Rozhledov, sústreďme svoju pozornosť na dve prognostické či futurologické úvahy, vzťahujúce sa na ekonomické a morálne dôsledky globálnej jadrovej vojny, ktoré čitateľovi sprostredkoval a svojim komentárom doplnil doc. PhDr. Matej Kosický, CSc. Autorom ekonomickej úvahy je *Yves Laulan* — hlavný ekonóm najväčšej francúzskej banky Société General, publicista, externý prednášateľ na

vysokých školách. V období rokov 1969—1974 bol riaditeľom ekonomického oddelenia a predsedom ekonomického výboru NATO.

Autormi druhej úvahy sú: sovietsky lekár *Jevgenij Čazov* — námestník ministra zdravotníctva ZSSR a riaditeľ kardiologického výskumného centra, člen prezídia Akadémie vied ZSSR a *M. E. Vartanjan* — zástupca riaditeľa Inštitútu psychiatrie Sovietskej akadémie lekárskych vied. Obidve úvahy boli uverejnené vo švédskom časopise *Ambio* z roku 1982.

Spoločnosť po globálnej jadrovej vojne

V súvislosti s úvahami o dôsledkoch globálnej jadrovej vojny vznikol nový pojem „spoločnosť po nukleárnej vojne“, alebo skrátené „post-nukleárna spoločnosť“. Sme svedkami vzniku a rozvoja akejsi novej vednej špecializácie, odvetvia futurologie, ktoré by sme oprávnené mohli nazvať „čiernou futurologiou“. Domnievam sa, že popularizácia jej výsledkov je prepotrebná. Chcel by som sa však ešte v úvode dotknúť jedného metodologického problému tejto čiernej futurologie. Uvedomil som si ho v súvislosti s úvahami, o ktorých bude reč. Vedecký základ týchto úvah spočíva v tom, že vychádzajú z histórie, z reálnych, vedecky spracovaných skúseností ľudstva a ich autori používajú metódu analógie. Lenže tieto analógie majú isté slabiny. Úvahy čiernej futurologie väčšinou vychádzajú zo skúsenosti tzv. konvenčných vojen, resp. z prírodných katastrof, masových pohrôm s podobnými dôsledkami, aké mali vojny (zemetrasenia, záplavy, požiare [1]).

Skúsenosti z použitia jadrových bômb v Hirošime a Nagasaki však naznačujú, zdôrazňujem, že len naznačujú, že globálna jadrová vojna by predstavovala úplne nový, kvalitatívne odlišný druh deštrukcie v porovnaní so známymi druhmi katastrof, a to tak z hľadiska rozsahu, ako aj hĺbky zásahu do súčasnej ľudskej civilizácie.

Z metodologického hľadiska by omnoho správnejšie bolo porovnávať postnukleárnu spoločnosť s tými regresmi, ktoré boli späté so zánikom dávnych ľudských civilizácií, o ktorých sa však zachovalo relatívne málo informácií.

Prejdime však k vlastným úvahám spomenutých autorov. Yves Laulan vychádza zo základného porovnania tzv. konvenčných vojen s globálnou nukleárnou vojnou vo vzťahu k ekonomike a zisťuje, že po konvenčnej vojne obyčajne nastáva istá ekonomická renesancia, že takáto vojna môže viesť k prosperite, k úplnej zamestnanosti, k lepšiemu využívaniu zdrojov, k obnove a k zdokonaleniu výrobného zariadenia, čiže konvenčná vojna môže stimulovať ekonomiku. Podstatná pritom je otázka miery deštrukcie, všeobecne charakterizovaná obnoviteľnosťou ekonomiky.

V prípade globálnej nukleárnej vojny by sa táto miera prekročila,

preto by predstavovala úplne novú kategóriu vojny. Laulan bez osobitného odôvodnenia stanovuje limit obnoviteľnosti ekonomiky 10 %-ným podielom zabitých príslušníkov populácie. Ak je teda, podľa Laulana, podiel zabitých menší ako 10 %, ide o konvenčnú vojnu. Na druhej strane ak by podiel zabitých prevýšil 50 % populácie, potom by ľudská civilizácia úplne zmizla. Tvrdí, že existujú antropologické a historické dôkazy o hranici, za ktorou sa sociálna skupina nemôže obnoviť.

Predpokladá pritom, že v budúcej možnej globálnej nukleárnej vojne by sa strata populácie pohybovala medzi 10 až 50 %. Celá jeho úvaha je založená na tomto predpoklade. Je tento predpoklad správny? Nie je osobitne dokázaný. Len sa domnievam, že nie je prehnaný, ale skôr možno pripustiť ešte väčšie straty. Laulan pri tomto akomsi strednom variante podáva takúto charakteristiku ekonomiky: Uspokojenie potrieb by sa obmedzilo na základné potreby: jedlo, vodu, oblečenie, obydlie. Uspokojovanie týchto potrieb by pohltilo celú produkciu, úplne by zmizli investície, nebolo by rozšírenej reprodukcie, nebolo by ekonomického rastu. Nebolo by výmeny, resp. ľudstvo by sa vrátilo k najzákladnejším formám výmeny primitívnej spoločnosti. Neboli by potrebné osobitné prostriedky výmeny — peniaze, nastala by tzv. demonetarizácia ekonomiky. Rozpadla by sa medzinárodná deľba práce, ktorá je významným faktorom ekonomického rastu.

Okrem veľkého počtu mŕtvych by veľká časť tých, ktorí by prežili globálnu jadrovú vojnu, bola vyradená z ekonomickej aktivity pre zranenie a pomalé umieranie. Laulan predpokladá pri 50 % mŕtvych a 25 % zranených a ináč práceneschopných, že len 25 % populácie by malo plniť úlohy obnovy. Globálna jadrová vojna by spôsobila radikálny úbytok výrobcov a rast počtu konzumentov, čiže by sa podstatne zmenila štruktúra práce a spotreby, pomer ekonomicky aktívnych a pasívnych obyvateľov. Abnormálne by vzrástli potreby na zdravotnícke služby, kým niektoré tradičné druhy spotreby (oddychové aktivity, vzdelávanie, umenie) by zmizli.

Devastačné účinky jadrovej vojny by boli priamo úmerné ekonomickej vyspelosti krajín, pričom by zasiahli predovšetkým najvyspelejšie krajiny. Nepriamo by však zasiahli aj rozvojové krajiny, závislé od vyspelých krajín. Import potravín do rozvojových krajín je pre ne životne dôležitý. Len v roku 1980 predstavoval 63 miliónov ton pšenice a ryže. Bohatstvo krajín vyvážajúcich ropu by sa stalo bezcenným, lebo by ju nebolo za čo vymeniť. Krajiny, ktoré by ju potrebovali, by nemohli za ňu dodávať ani potraviny, ani technologické zariadenia.

Súhrnná predstava postnukleárnej spoločnosti je teda veľmi pochmúrna. Bola by to spoločnosť nového, ekonomicky bezprecedentného typu bez ekonomického rastu, súhrn izolovaných sebestačných spoločenstiev

s autoritatívnymi režimami vynútenými obmedzenými zdrojmi, existujúcich na báze primitívneho poľnohospodárstva, spoločenstvá pripomínajúce stredoveké kláštory.

Dvojica sovietskych autorov dopĺňa tento obraz postnukleárnej spoločnosti o charakteristiku správania sa ľudí tejto spoločnosti. Podľa ich odhadu minimálne 1/3 tej časti populácie, ktorá by prežila jadrovú katastrofu, by trpela ťažkými psychickými poruchami. Šlo by o dlhotrvajúce stavy úzkosti, depresívne stavy, podráždenosť, konfliktné správanie, stratu orientácie, halucinácie. Podľa jednej psychiatrickej štúdie, ktorú uvedení autori citujú, u tých ľudí, čo prežijú nejakú katastrofu, sa objavujú tieto zmeny v ich správaní:

1. demoralizácia, pocity apátie, bezvýchodiskovosti;
2. dezorientácia, t.j. neschopnosť zaradiť sa do času a priestoru, objekty sa zdajú byť menlivé, čas akoby sa zastavil, prejavuje sa neschopnosť zapamätať si najzákladnejšie údaje (napr. mená priateľov a blízkych);
3. strata kontaktu s inými ľuďmi.

U tých, čo prežili výbuchy atómových bômb v Hirošime a Nagasaki, sa zachoval nadhlo pocit viny z toho, že nemohli pomôcť veľkému počtu volajúcich o pomoc. Dlho pôsobil aj pocit osobnej bezvýznamnosti, neistoty, úzkosti a strachu z chorôb a dôsledkov radiácie, prejavujúcich sa aj v deformáciach ich detí. Sú stále poznačení a diskriminovaní [2].

Globálna nukleárna vojna by teda dlhodobo pôsobila zhubne na tú časť ľudstva, ktorá by ju prežila, aj po tejto psychickej stránke. Spôsobila by podstatnú dezorganizáciu medziľudských vzťahov v dôsledku chronických neurotických stavov, apatie, redukcie pracovných schopností a pod. Pritom pomoc postihnutým by bola veľmi obmedzená v dôsledku porušeného pomeru počtu postihnutých a psychiatrov a obmedzených možností liečebných prostriedkov a liekov.

Aký by to bol život, keby ľudstvo globálnu nukleárnu vojnu vôbec prežilo? Domnievam sa, že ho nemožno merať sústavou dnešných hodnôt, lebo tie by nukleárna vojna zničila. My dnes viac-menej len tušíme, že by to už nebol plnohodnotný ľudský život, ale nanejvýš len ubohé živorenie.

Keď sa človek hlbšie zamyslí nad úvahou Yve Laulana, tohto bývalého predsedu ekonomického výboru NATO, pomerne ľahko môže v nej objaviť akýsi skrytý význam, podtext, ktorý je v konečných dôsledkoch optimistický. Veď tento uznávaný odborník na ekonómiu vojny vlastne tvrdí, že z budúcej možnej globálnej nukleárnej vojny nemôže mať nikdo ekonomický zisk (na nej nebude možné zarobiť). Nemáme dôvod pochybovať o pravdivosti resp. veľkej pravdepodobnosti jeho úvah. Tieto

úvahy majú bezpochyby mierumilovný zmysel, sú varovaním pred takouto vojnou.

My si však uvedomujeme, že na zachovanie mieru nestačí len samo poznanie toho, že vojna nemôže byť pre nikoho výnosným podnikom. Buržoázia sa neriadi vždy len racionálnymi argumentmi. Pôsobia tu aj neracionálne triedne záujmy. V jej konaní sa môže prejaviť aj patologická reakcia na beznádejnú situáciu (pre ňu ako triedu beznádejnú), konanie podľa zásady „po nás potopa“. Veľmi dobre poznáme bezmedznosť a bezohľadnosť egoizmu majetných tried a ich príslušníkov. Buržoázii okrem vlastných triednych záujmov nie je nič sväté. Je schopná hazardu, je schopná obetovať všetky hodnoty, ak sa niekto dotýka jej triednych záujmov. Tak ako veľakrát v histórii vládnuca vrstva obetovala záujmy národov len, aby mohla realizovať svoje triedne záujmy, dokázala by z tých istých egoistických dôvodov obetovať aj život na Zemi. Takéto sily, ktoré sú schopné všetkého, na svete existujú, pôsobia. Takéto sily treba skrotiť, len tak možno zachovať mier!

Literatúra :

- [1] O. Janisková: Klimatické a atmosferické pomery po jadrovej vojne, Rozhľady mat. fyz. roč. 63, č. 2, str. 60.
- [2] R. Jung: Paprsky z popela, Mladá fronta Praha, 1964

Pohyb tělesa v odporujícím prostředí

RNDr. IVO VOLF, ÚVFO

(dokončení)

3. Příklady využití pohybu tělesa v odporujícím prostředí

Je známo, že drobné prachové částice, nízká oblačnost, mlha aj. ovlivňují viditelnost ve vzduchu i vlhkost ovzduší. Při řešení problémů můžeme využít závěrů o pádu tělesa v odporujícím prostředí.

Ú 10: Odhadněte, jakou rychlostí klesá za bezvětří mrak, který je tvořen drobnými kapičkami vody o průměru 0,005 až 0,05 mm. Za jak dlouho klesne mlžný závoj mraku o výšce 250 m? Dynamická viskozita vzduchu je $17,1 \cdot 10^{-6}$ Pa.s.

Řešení: Mrak je vytvořen drobnými kapičkami vody o poloměru $r_1 = 2,5 \cdot 10^{-6}$ m až $r_2 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ m. Na kapičky působí tíhové pole Země silou $F_G = mg$, odporová síla proti pohybu je $F_0 = 6\pi\eta r v$, neboť předpokládáme, že se jedná o pohyb tělesa s malou rychlostí. Vzhledem

k podílu hustoty ρ_k vody a hustoty ρ_v vzduchu $\frac{\rho_k}{\rho_v} \doteq 780$ nemusíme

uvažovat aerostatickou vztlakovou sílu $F_{vz} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k g$, která je vzhledem k dalším silám velmi malá. Potom platí pro pohyb kapky

$$m a = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k g - 6 \pi \eta r v$$

Mezní rychlost pádu kapky vypočteme $v_m = \frac{2}{9} \frac{r^2 \rho_k g}{\eta}$

Po dosazení daných hodnot je $v_{m1} = 0,0072 \text{ m s}^{-1}$, $v_{m2} = 0,72 \text{ m s}^{-1}$. Mrak o výšce 250 m bude tedy padat za bezvětří v případě větších kapek 350 s, v případě menších kapek 35 000 s, tedy necelých 10 h. Při klesání se však jednotlivé kapičky postupně spojují, tím se zvětšují (jejich hmotnost, objem, obsah příčného řezu, tíha se zvětšuje, ne však lineárně). Proto se rychlost zvětšovaných kapek také zvětšuje, mění se i závislost odporové síly na rychlosti, nelze již užít Stokesova zákona. Kapky o průměru 3 až 5 mm dopadají na povrch Země rychlostí asi 8 m s^{-1} .

Ú 11: Při pádu malé kuličky o hustotě ρ a poloměru r ve viskózním prostředí o dynamické viskozitě η a hustotě ρ_k lze určit z měření dráhy a času rychlost v_m rovnoměrného pohybu kuličky, která je mezní rychlostí pádu této kuličky v prostředí. V laboratoři se zjistilo, že dva stejné po sobě následující úseky délky 10 cm prošla kulička o poloměru 2,0 mm v oleji hustoty 950 kg m^{-3} za stejné doby 2,7 s rovnoměrným pohybem. Hustota materiálu kuličky byla $11\,300 \text{ kg m}^{-3}$. Určete z těchto údajů dynamickou viskozitu oleje.

Řešení: Předpokládáme, že pro pohyb kuličky platí nám již známá pohybová rovnice

$$m a = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k g - 6 \pi \eta r v$$

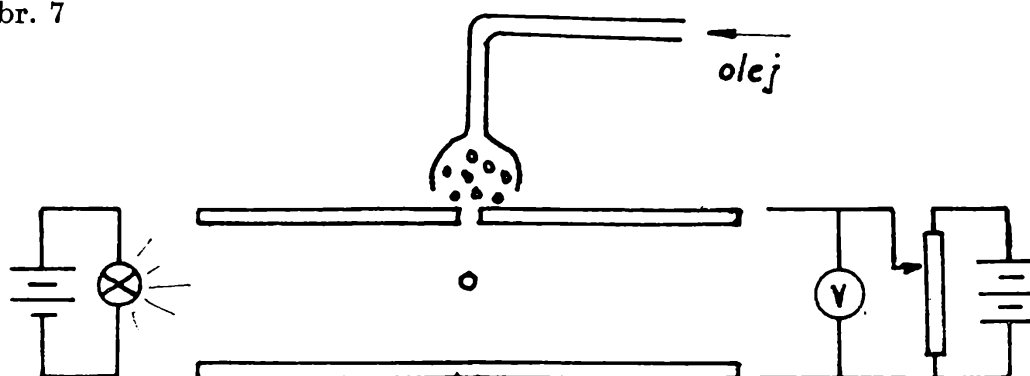
Pro odporovou sílu platí Stokesův zákon, pro mezní rychlost v_m kuličky je $a = 0 \text{ m s}^{-2}$, mezní rychlost však určíme z údajů o pohybu kuličky

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{0,10 \text{ m}}{2,7 \text{ s}} = 0,037 \text{ m s}^{-1} = 3,7 \text{ cm s}^{-1}.$$

Odtud pro dynamickou viskozitu oleje

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 (\rho - \rho_k) g}{v_m}$$

Obr. 7



Pro dané hodnoty je $\eta = 2,44 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, tj. asi $2,5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Podle fyzikálních tabulek je dynamická viskozita glycerínu při 20°C $1,48 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, pro ricinový olej $2,44 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ při teplotě 10°C , pro olej transformátorový $0,032 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Uvedenou metodou lze experimentálně zjišťovat hodnoty dynamické viskozity kapalin.

Ú 12: Jaké mezní rychlosti dosáhl výsadkář při pohybu s otevřeným padákem, uvážíme-li, že pro velikost odporové síly platí vztah $F_0 = \frac{1}{2} C \rho S v^2$. Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 100 \text{ kg}$, $C = 1,30$, $S = 50 \text{ m}^2$, $\rho = 1,20 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Řešení: Napíšete pohybovou rovnici $ma = mg - \frac{1}{2} C \rho S v^2$, pro dané hodnoty vyjde mezní rychlost $v_m \doteq 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Ú 13: Tahová síla motoru, jíž působí při jízdě na automobil o hmotnosti m ve směru pohybu, dosahuje hodnoty $F_{\max}$. Tato síla odpovídá při rychlosti v maximálnímu výkonu motoru $P_{\max}$. Odporová síla proti pohybu automobilu je závislá na druhé mocnině rychlosti, její velikost $F_0 = k v^2$. Určete maximální rychlost, jíž automobil může při jízdě dosáhnout. Úlohu řešte obecně, potom pro hodnoty $m = 1000 \text{ kg}$, $P_{\max} = 40 \text{ kW}$, $k = 0,62 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

Řešení: Při dosažení maximální rychlosti je výsledná síla působící na automobil nulová, $F_{\max} = F_0$, $P_{\max} = k v^3$, tedy $v = \sqrt[3]{P_{\max}/k}$, pro dané hodnoty $v \doteq 40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 145 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

4. Pohyb nabitého tělesa ve viskózním prostředí

Rovnoměrného pohybu nabité kapky oleje ve viskózním prostředí použil Robert Millikan (čti Miliken, 1868–1953), který v letech 1910–11

změřil náboj elektronu a dokázal tak diskrétnost (nespojitosť) změn elektrického náboje.

Základem pokusné aparatury byla komora, v níž byl vodík za nižšího tlaku, než je tlak normální. Do prostoru byl vháněn olej, přičemž se rozprašovačem vytvářely kapky o průměru asi 0,001 mm. V dolní části komory, v níž se termostatem udržovala stálá teplota, byl umístěn deskový kondenzátor (obr. 7), skládající se ze dvou kruhových mosazných desek o průměru 22 cm, mezi nimiž byla vzdálenost 1,6 cm. Desky musely být přesně rovnoběžné. Po nabití desek se mezi nimi vytvořilo homogenní elektrické pole. Uprostřed horní desky byl velmi malý otvor (řádově stejný jako průměr ostří jehly), kterým se mohly kapky oleje dostávat do prostoru kondenzátoru.

Pomalou padající kapky byly ozářeny silným zdrojem světla a byly pozorovány mikroskopem se stupnicí, na níž byly znázorněny dvě rysky ve vzájemné vzdálenosti 0,5222 cm. Osvětlené kapky bylo možno pozorovat jako jasné „hvězdičky“ na tmavém pozadí. V olověném pouzdře mimo prostor komory byla umístěna rentgenka, která umožňovala ionizaci plynu v komoře. Tak se mohlo stát, že po zapojení rentgenky se změnil náboj na kapkách oleje.

Jestliže kondenzátor nebyl nabit, pak pro rovnoměrný pohyb kapičky platí rovnováha sil

$$m g = F_{vz} + 6 \pi \eta r v,$$

kde m je hmotnost kapičky, F_{vz} aerostatická vztlaková síla, již plyn působí na kapku, $6 \pi \eta r v = F_0$ je odporová síla proti pohybu. Odtud můžeme vypočítat mezní rychlost

$$v = \frac{m g - F_{vz}}{6 \pi \eta r}$$

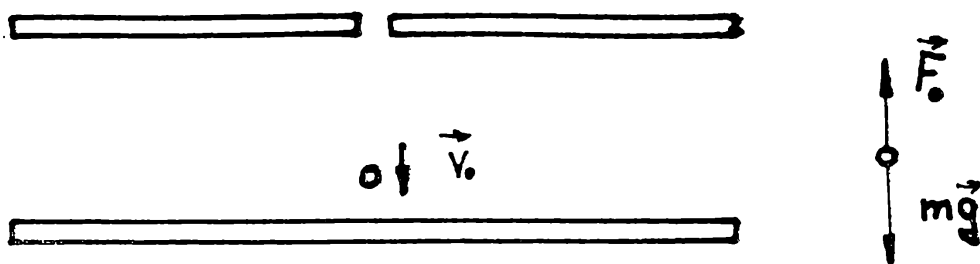
Protože aerostatická vztlaková síla F_{vz} je oproti tíhové síle $m g$ mnohem menší (obr. 8a), můžeme vztah upravit pro pohyb kapičky při nezapojeném kondenzátoru

$$v_0 = \frac{m g}{6 \pi \eta r}$$

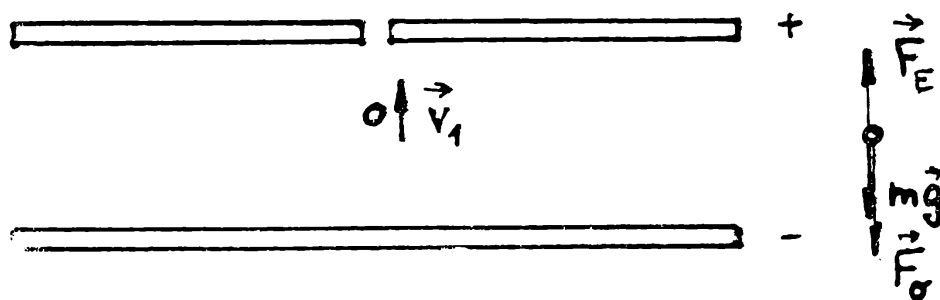
Připojíme-li kondenzátor ke zdroji o napětí U tak, že horní deska je kladná, (obr. 8 b) pak mezi deskami kondenzátoru se vytvoří elektrické

pole s intenzitou $E = \frac{U}{d}$, kde d je vzájemná vzdálenost obou desek.

Na kapičku s nábojem Q_1 působí elektrické pole silou $F_E = Q_1 E$. Proto při rovnoměrném pohybu kapičky platí



Obr. 8a



Obr. 8b

$$v_1 = \frac{Q_1 E - m g}{6 \pi \eta r},$$

kapička se pohybuje směrem vzhůru. Když došla k horní značce pozorované v mikroskopu, byl zdroj odpojen, desky kondenzátoru vybity a kapička zase padala rovnoměrně dolů. Poté, co došla k dolní značce, byly desky kondenzátoru opět připojeny ke zdroji a kapka stoupala rovnoměrně vzhůru. Pokud se neměnil náboj kapičky, pak rychlosti v_0 , v_1 se během měření neměnily.

Po zapojení rentgenky na krátkou dobu zachytila nabitá kapička při svém pohybu ionty (kladné i záporné), přičemž se skokem změnila rychlost pohybu kapičky na hodnotu v_2 , z čehož usoudil Millikan, že se také skokem mění náboj kapičky.

Uurčíme nejprve z údajů o pohybu kapičky náboj Q_1 ; platí

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{m g}{Q_1 E - m g}, \text{ tedy pro náboj } Q_1 = \frac{m g}{v_0 E} (v_0 + v_1).$$

V případě, že kapička má náboj Q_2 , je $Q_2 = \frac{m g}{v_0 E} (v_0 + v_2)$.

Odečtením rovnic zjistil Millikan pro změnu náboje Q_0 kapičky

$$(v_2 - v_1) \frac{m g}{v_0 E} = Q_2 - Q_1 = Q_0 = \text{konst.} (v_2 - v_1).$$

Millikan prováděl měření po dlouhou dobu — jednu kapičku oleje pozoroval třeba i 5 až 6 h, přičemž zachytila stovky iontů. Zjistil, že rozdíl rychlostí $v_2 - v_1 = n k$, kde n je celé číslo a k je konstanta. Tak došel k závěru, že náboj elektronu není nějaká průměrná statistická střední hodnota, ale že náboj iontů je buď roven náboji elektronu nebo je roven jeho celistvému násobku (bez ohledu na znaménko). Tak pomocí rovnoměrného pádu kapiček oleje (později použil při měření kapiček glycerinu a rtuti) dospěl Millikan ke stanovení hodnoty velmi důležité fyzikální konstanty — k náboji elektronu $Q_e \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Ú 14: Při pozorování kapiček oleje sledoval Millikan v mikroskopu jejich pohyb mezi značkami A, B , kde vzdálenost $AB = 0,5222 \text{ cm}$. Když se změnil náboj kapičky, změnila se i doba, za kterou prošla uvedenou vzdáleností. Millikan obdržel údaje: $t_1 = 34,8 \text{ s}$, $t_2 = 21,5 \text{ s}$, $t_3 = 12,5 \text{ s}$, $t_4 = 15,4 \text{ s}$. Určete průměrnou rychlost pohybu kapičky a rozdíly rychlostí.

Řešení: Průměrná rychlost se stanoví $v_p = \frac{s}{t_i}$, tedy $v_1 \doteq 0,015 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$,

$v_2 \doteq 0,024 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_3 \doteq 0,042 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_4 = 0,033 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Určíme rozdíly rychlostí: $v_2 - v_1 = 0,009 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_3 - v_1 = 0,027 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_4 - v_1 = 0,018 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Zřejmě ve všech případech platí $v_i - v_1 = n \text{ konst}$. Odtud také možno usoudit, že $Q_0 = Q_i - Q_1 = n \text{ const}$.

Ú 15: Při stanovení změny náboje olejové kapičky $Q_0 = Q_2 - Q_1$ je nutno znát velikost konstanty $k = \frac{mg}{v_0 E}$. Navrhněte, jak potřebné veličiny zjistit.

Řešení: Velikost intenzity elektrického pole deskového kondenzátoru určíme ze vztahu $E = \frac{U}{d}$, kde U je napětí a d vzájemná vzdálenost obou desek. Rychlost v_0 kapičky stanovíme z pádu kapičky při nenabitém kondenzátoru, velikost tíhového zrychlení je známa. Hmotnost kapičky určíme z rovnoměrného pádu při nenabitém kondenzátoru, když soustava bude naplněna plynem o známé hustotě ρ_v a dynamické viskozitě η (měření lze provést i při atmosférickém tlaku vzduchu). Pro pád platí pohybová rovnice

$$m a = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_v g - 6 \pi \eta r v ,$$

Při rovnoměrném pohybu na známé vzdálenosti AB rychlostí $v_0 = \frac{AB}{t}$

je zrychlení nulové, potom pro poloměr kapičky

$$r = \sqrt{\frac{9 \eta v_0}{2(\rho - \rho_v) g}}$$

Ze znalosti lineárních rozměrů kapičky pak stanovíme její hmotnost. Millikan pracoval s kapičkami menšího průměru než 0,001 mm, tedy

$$\text{jejich hmotnost } m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \doteq 5 \cdot 10^{-16} \text{ kg.}$$

Zachycením iontu hmotnosti řádově 10^{-25} kg není možno identifikovat změnu hmotnosti kapičky, proto rychlost kapičky při nenabitém kondenzátoru zůstávala přibližně stejná. Náboj kapičky se však podstatně změnil, což se projevilo i značnými změnami rychlosti vždy poté, co byly desky kondenzátoru připojeny ke zdroji.

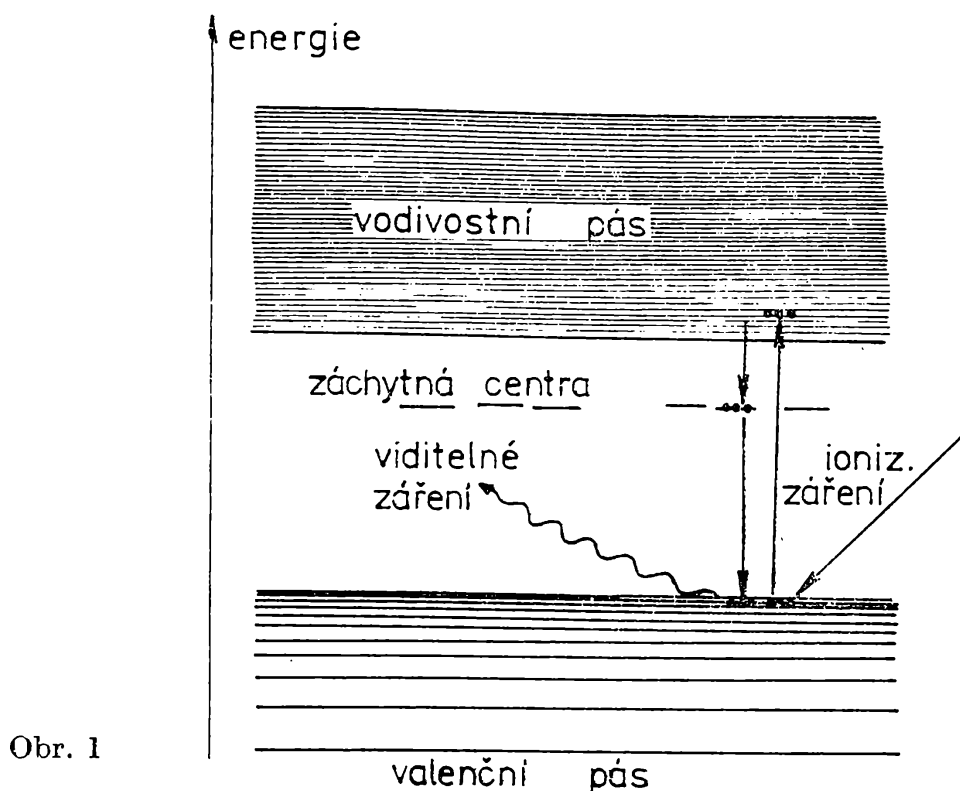
V našem článku jsme ukázali, že při pohybu tělesa působí na ně odporové síly, jež nelze vždy zanedbat. Velikost odporové síly nemusí být konstatní, může lineárně, kvadraticky, ale také dosti složitě záviset na rychlosti pohybu tělesa. Přitom jsme předvedli, že řešení pohybových problémů může ve fyzice poskytovat nové impulsy i v jiných oblastech, než je mechanika. Dalším problémem může být např. sledování ionizačních drah ve Wilsonově mlžné komoře, ale o tom až někdy příště.

Termoluminiscenční dozimetr

RNDr. MARCEL OHERA, Brno

Při detekci jaderného záření se nejčastěji využívá jeho schopnosti ionizovat prostředí, kdy dochází ke vzniku kladných iontů a volných elektronů. Nejvhodnějším prostředím pro ionizaci se jeví plyny v uzavřených komorách, tzv. *ionizační komory*, kdy vznikající náboj byl odváděn a jeho hodnota byla úměrná intenzitě záření.

Pro detekci jaderného záření se dá použít i pevných látek, vesměs anorganických chemikálií, které při ozáření projevují luminiscenci, tj. po absorpci přeměňují jadernou energii na světelnou energii v oblasti viditelných vlnových délek. Sirník zinečnatý aktivovaný stříbrem ZnS (Ag) má maximum emisního spektra v oblasti 450 nm. Doba trvání jednoho záblesku je 10^{-5} s. ZnS(Ag) není citlivý na fotony gama, avšak dobře registruje částice alfa. Nejpoužívanější anorganickou látkou pro

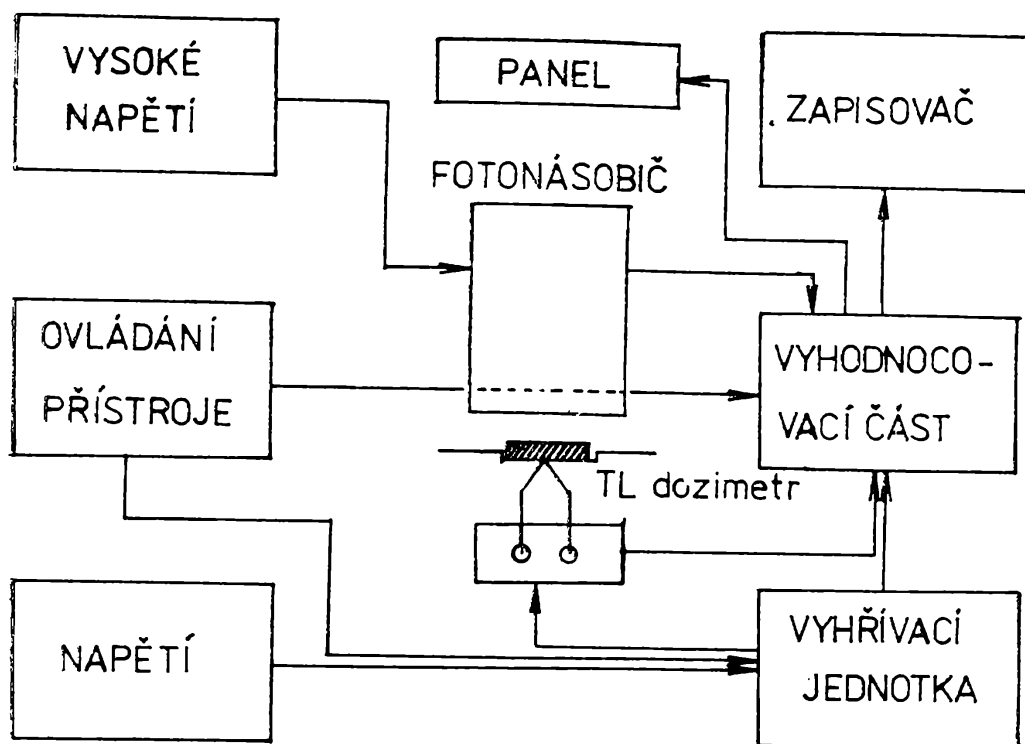


Obr. 1

detekci především záření gama je jodid sodný aktivovaný 1 až 2 % thalia NaJ(Tl). Jeho emisní spektrum luminiscenčního záření má maximum při 410 nm. Trvání záblesků je $2,5 \cdot 10^{-6}$ s.

Tyto detektory z pevných látek jsou vhodné pro okamžitou registraci a vyhodnocení ionizujícího záření v laboratoři, protože k luminiscenci dochází okamžitě při ozáření. Stejně tak ionizační komory jsou poměrně velké, a tak jsou málo vhodné pro stanovení expozice nebo dávky v daném bodě.

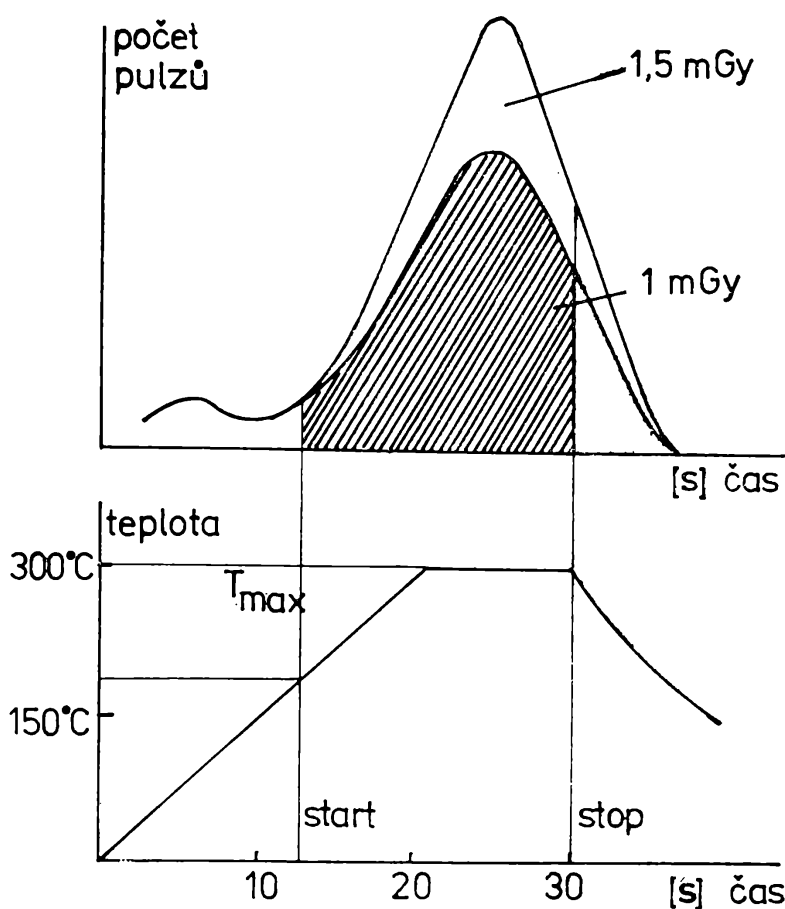
Byla proto snaha najít dozimetry s minimálními rozměry (lineární rozměry několik milimetrů) a s možností uchovat informace o velikosti ozáření (expozice nebo absorbovaná dávka) po delší dobu. Materiály, které splňují tyto požadavky, byly skutečně vyvinuty. Dozimetry mají velikosti asi jako tabletky nebo jsou ve formě jemného prášku. Jsou vyrobeny z různých materiálů jako CaSO_4 s dysprosiem, LiF, $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$ s manganem, CaF_2 s manganem, aluminofosfátová skla ap. Tento způsob dozimetrie je založen na jevu *termoluminiscence*, tj. vlastnosti některých látek shromažďovat energii absorbovanou při měření záření a uvolnit ji v podobě viditelného světla až po zahřátí na teplotu několika stovek stupňů °C. Počet světelných fotonů uvolněných při zahřátí termoluminiscenční látky (dále jen TL) je úměrný dávce, která se v ní absorbuje.



Obr. 2

Fyzikální princip činnosti takového dozimetru je uveden na obr. 1. Jev termoluminiscence lze vysvětlit na základě energiových pásů, které se vytvářejí u krystalických pevných látek, kterými jsou TL dozimetry. Valenční pás odpovídá energii elektronů vázaných na ionty krystalové mříže. Prochází-li termoluminiscenční látkou záření gama, jsou elektrony excitovány do vodivostního pásu, odkud samy po krátké době přecházejí do tzv. záchytných center, která jsou vytvořena příměsí cizích atomů (aktivátory) v zakázaném pásu energií. Teprve při zahřátí je možné, aby elektrony získaly dostatečnou energii a unikly ze záchytných center do valenčního pásu. Energie při tomto přechodu je vyzářena ve formě elektromagnetického vlnění v oblasti viditelného spektra.

Vlastní vyhodnocovací zařízení je blokově zakresleno na obr. 2. Ozářený dozimetr je vložen na vyhřívací misku (např. aluminofosfátová skla vyráběná u nás mají průměr 8 mm a výšku 1 mm, LiF dozimetry jsou teflonové disky s průměrem 12,8 mm a výškou 0,4 mm), která je umístěna pod fotonásobičem. K misce je zespodu přitisknuto vyhřívací tělísko a dozimetr se začne rychle ohřívát. Průběh nárůstu teploty pro aluminofosfátové sklo je uveden na obr. 3. Od teploty 160 °C je spuštěn měřicí cyklus a fotonásobič registruje a zesiluje světelné záblesky, které vycházejí z detektoru při zvyšování teploty. U dozimetru z aluminofosfátového skla je maximum světelných záblesků asi při 550 nm (zelené

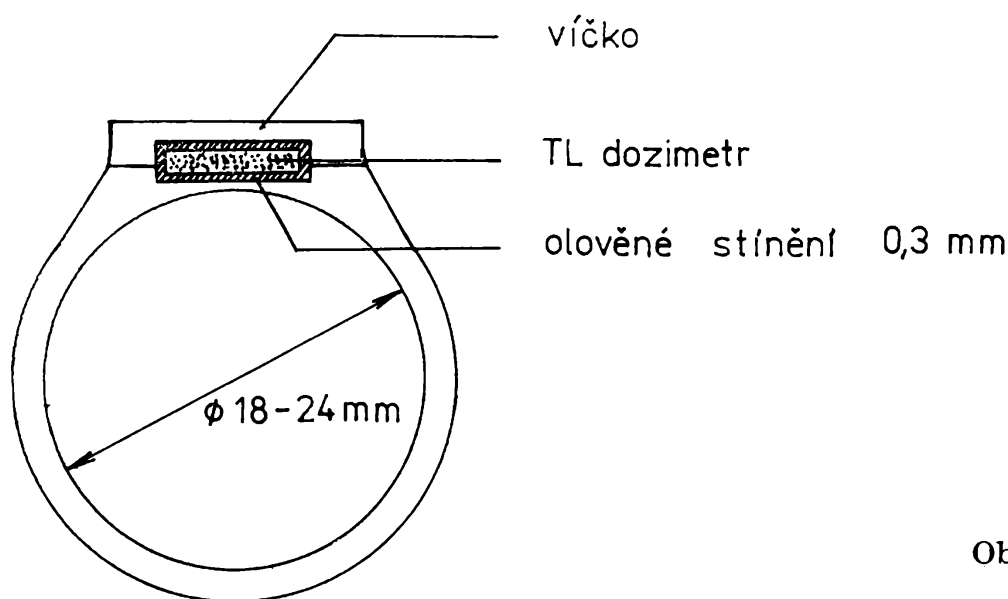


Obr. 3

světlo) u dozimetrů LiF je oblast světelných záblesků v intervalu 350 až 600 nm s maximem v 400 nm (fialové světlo). Křivku závislosti odezvy na čase vykreslí připojený zapisovač. Vyšrafovaná plocha odpovídá dávce 1 mGy (jednotka 1 Gy = 1 gray = 1 J/kg odpovídá energii 1 J absorbované v 1 kg látky), kterou byl dozimetr ozářen. Pro různé typy dozimetrů, kterých je v současné době celá řada, se používají různé jiné způsoby vyhřívacích cyklů.

Dozimetry vesměs registrují záření gama a rtg záření, některé druhy je možno vhodně použít pro stanovení toku neutronů. Dozimetry je možné používat opakovaně. Po proběhnutí uvedeného měřicího cyklu nejsou ze všech zachytných center v dozimetru odstraněny elektrony. Tato zachytná centra se „vymažou“ zahřátím na vyšší teplotu nebo se ponechají na určité teplotě několik hodin. Způsob mazání dozimetru opět závisí na jeho druhu. Tímto procesem se odstraní zbytková energie a dozimetr je připraven k dalšímu měření.

Není nutné stanovovat plochu pod křivkou k vyhodnocení dávky, neboť měřicí zařízení registruje počet světelných záblesků a jeho počet, který je úměrný dávce a ploše pod křivkou, zobrazí na číslicovém panelu.



Obr. 4

V ČSSR se v celostátní dozimetrické službě zavedl *prstýnkový dozimetr* (obr. 4), kde se používá jako detektoru aluminofosfátového skla. Prstýnek je vyroben z umělé hmoty a vyrábí se v pěti rozměrech od 18 do 24 mm. TL dozimetr je vložen do prstýnku ve válcovém krytu z olova o tloušťce 0,3 mm. Olověný kryt dozimetru je použit z důvodů energetické kompenzace energií pod 200 keV, kde skla vykazují větší citlivost na tyto energie. S těmito dozimetry je možno stanovit expozice od 0,5 $\mu\text{C/kg}$ do jednotek mC/kg (jednotka C/kg odpovídá počtu iontů jednoho znaménka s celkovým nábojem v coulombech C vzniklých v 1 kg vzduchu). Vzhledem k umístění na ruce umožňuje dozimetr stanovit skutečné údaje ozáření rukou při práci s radioaktivním materiálem.

TL dozimetry jsou svými vlastnostmi velmi vhodným detektorem záření gama a v poslední době se jejich použití rozšiřuje na řadě pracovišť s radioaktivním materiálem.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

250 let učebnice *Geometria practica*

V. J. Veselého

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc., MFF UK Praha

V první polovině 18. století bylo vydáno jen několik českých spisů s matematickým obsahem, nejrozsáhlejší z nich je učebnice, kterou vlastním nákladem vydal pražský měšťaň *Václav Josef Veselý* (1683 až 1736). Název díla je velmi dlouhý, je vytištěn dvojbarevně (černě a červeně) na celé první stránce, navíc různými typy písma, pražskou hovorovou češtinou té doby:

Gruntovní počátek mathematického umění, *Geometria practica*, *Trigonometria plana*, *Sterometria*, *Užívání tabullarum sinuum a logarithmorum*, skrže což vejšky, hloubky, dýlky, šířky, pole, lesy, rybníky, louky, zahrady, města, kraje a corpora vyměřit se mohou. S připojeným nivelírováním neb vodním měřením. Z některýma novýma problematy rozmnožená a ponejprv v českém jazyku vydána od Vácslava Jozeffa Veselého, přísežného zemského mlynáře a geometra. Vytištěno v Praze v Královým dvoře u Matěje Adama Högra, arcibiskupského impressora, 1734.

Dříve než budeme hovořit o samotné knize, vysvětleme si autorovy tituly. V době velké kolonizace dosud neobydlených území ve 13. století byly založeny tzv. zemské desky, tj. knihy, ve kterých byla zapsána vlastnická práva krále, šlechty, klášterů a měst, s údaji o výměře pozemků. Tyto údaje shromažďovali nebo prověřovali zemští úředníci, kteří byli vázáni přísahou, že budou měřit správně, proto se nazývali *přísežní zemští měřiči* neboli *geometři*. Část jejich práce spočívala i v pomoci při výstavbě jezů na řekách, náhonů k mlýnům apod., proto dostávali i titul *zemských mlynářů*. Od 16. století se na nich požadovalo i kreslení map různých území; své dovednosti získávali především jako učedníci pomáhající při měření, kdy si osvojovali i nezbytné výpočetní praktiky. V 17. století se poněkud prohlubovala teoretická příprava budoucích zeměměřičů; v českých zemích až po založení pražské inženýrské školy na počátku 18. století. Vyučovalo se však německy, zejména podle

učebnice *G. C. Stahla*, vojenského inženýra. V. J. Veselý psal svou učebnici pro mladé lidi českého původu, kteří neznali dobře latinsky ani německy a chtěli se stát zeměměřiči. Použil různé předlohy, zejména Stahlovu učebnici, ale i některé francouzské prameny.

V předmluvě ke knize, kterou věnoval magistrátu Starého Města Pražského, vyjadřuje velmi květnatým slohem důvody, proč je záhodno vydávat knihy v mateřském jazyku; dále vyzdvihuje přednosti a užitečnost matematiky a zejména geometrie. „Umínil jsem sobě gruntovní počátek Mathematického umění (též Geometriam practicam) dlé vybraných authorův a mé vlastní zkušenosti v jazyku mateřském českém z povinné lásky k mé milé vlasti a k obecnému dobrému (nelituje nákladu) na světlo vydati . .“

Kniha má formát „špalíčku“, stránky formátu $10\text{ cm} \times 15,5\text{ cm}$; 625 číslovaných stran + 20 stran obsahu a oprav tiskových chyb vytváří 4 cm vysoký svazek. Český text je tištěn tzv. švabachem, ale latinské termíny latinkou; podle potřeby se typy písma střídají i na témž řádku. Latinských termínů je velmi mnoho, protože v období pobělohorského útlaku se vývoj české matematické terminologie zastavil. Některé formulace působí dnes poněkud nezvykle a jsou jen obtížně srozumitelné, například:

V punktu mathematickým není dokonce žádná extensí k nalezení, takže žádné dýlky, šířky, tak hloubky na sobě nemá . .

Ačkoliv punkt dokonce žádný díl nemá, předce následuje z jeho pořád válení linyje.

Circl jest jedna rovná plochá figura s jednou okrouhlou linyjí peripherií circumferenti, okolkem jmenována, v který všechny linyje od prostředního punktu na circumferenti tažený stejný dýlky jsou.

Jedna podlouhlá hranatost jest, která čtyry stejný kouty má, ale vždycky jenom dvě strany stejný naproti sobě, taky parallelogrammum se jmenuje.

Tyto ukázky jsou vybrány z 25 úvodních definic základních pojmů, formulace jsou poplatné stylu Eukleidových Základů. Jistě lze vyrozumět, že jde o popis představy o bodu jako bezrozměrném objektu, o čáře vznikající pohybem bodu, o kruhu a kružnici, o rovnoběžníku.

Kniha má 23 kapitol v prvním dílu a 4 kapitoly ve druhém dílu věnovaném zeměměřičské praxi. Autor popisuje zejména konstrukce rovnoběžek, kolmic, dělení úseček a úhlů na daný počet dílů, „rejsování“ pravidelných mnohoúhelníků apod. Řada kapitol má obsah aritmetický, uvádí početní výkony až po určování druhých a třetích odmocnin, práci s tabulkami goniometrických funkcí a logaritmů. Procvičují se také výpočty obsahů, objemů, řeší se trigonometrické úlohy, značná pozornost se věnuje tzv. proměňování obrazců a těles (konstrukcím čtverce,

který má stejný obsah jako daný trojúhelník či kruh apod.). Mnohé konstrukce jsou ovšem jen přibližné, protože konstrukce pravítkem a kružítkem není možná.

Veselého učebnice je cenným svědectvím úrovně znalostí předávaných na počátku 18. století inženýrům-zeměměřičům, zároveň dokumentuje neutěšený stav českého jazyka v oblasti vědecké terminologie. Především však jde o doklad, že národní povědomí neuhasínalo ani v těžkém období útlaku po třicetileté válce.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Matematickým kutilům pod stromeček - řešení

JIŘÍ MANN, Dvůr Králové n. L.

Poznámka. Neznámé, pomocné neznámé, součty apod., tj. x , y , a , p , $S'_k(n)$ atd., jejichž význam je z textu zřejmý (kryje se s obvyklým školním), jsou přirozená čísla.

1. Druhé mocniny jsou: 1, 4, 9, 49, 81 a 1849.

2. Zapišeme a upravíme vztahy mezi hledanými čísly x a y . $x : y = 31$, $x = 31y$, potom $xy = 31y^2 = 1984 = 31 \cdot 2^6$. $y^2 = 2^6$, $y = 2^3 = 8$, $x = 31 \cdot 2^3 = 248$. Řešením je dvojice 8, 248.

3. $1984 = 2^6 \cdot 31$. Exponenty prvočinitelů 2. mocniny jsou sudá čísla, u 3. mocniny jsou dělitelné třemi. Oběma požadavkům vyhovuje činitel 2^6 . V části α musíme 1984 vynásobit číslem 31, v β číslem $31^2 = 961$. (Součiny jsou $61\,504 = 2^6 \cdot 31^2 = 248^2$ a $1\,906\,624 = 2^6 \cdot 31^3 = 124^3$.)

4. Obdobnými úvahami jako v předchozí úloze najdeme řešení: $\alpha) \sqrt[3]{1984 : 31} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 8$, $\beta) \sqrt[3]{1984 : 31} = 2^2 = 4$. V obou částech musíme dělit číslem 31.

5. $1984 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 31 = 4 \cdot 8 \cdot 62 = 31 \cdot 64$.

6. 1. způsob. Ze součtu poznáváme, že čísla jsou opačné parity. Vhodné liché číslo je 7, je prvočinitelem v rozkladu součinu 84. $19 - 7 = 12$, $12 \cdot 7 = 84$. Čísla jsou 7 a 12.

2. způsob. Zřejmě $x \neq y$, zvolíme $x > y$ a určíme rozdíl $x - y$. Platí:

$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 19^2 - 4 \cdot 84 = 361 - 336 = 25$, $x - y = 5$. Ze známého součtu a rozdílu určíme snadno jednotlivé neznámé: $(x + y) + (x - y) = 2x$, $x = (19 + 5) : 2 = 12$, $y = (19 - 5) : 2 = 7$. Totéž řešení.

3. způsob. V redukované kvadratické rovnici platí $z^2 + pz + q = 0$, $z_1 + z_2 = -p$, $z_1 z_2 = q$. Zde je $-p = x + y = 19$, $q = xy = 84$, $z^2 + 19z + 84 = 0$, $x = z_1 = 12$, $y = z_2 = 7$.

7. 1. způsob. Podle zadání je $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 1984 = 2 \cdot 992 = 4 \cdot 496 = 8 \cdot 248 = 16 \cdot 124 = 32 \cdot 62$. U 1. dvojice položíme $x - y = 2$, $x + y = 992$, potom $x = 497$, $y = 495$. Obdobně u dalších. Najdeme 5 dvojic: 47, 15; 70, 54; 128, 120; 250, 246; 497, 495.

2. způsob. $x^2 = y^2 + 1984 = (y + d)^2$, $2yd + d^2 = 1984$, $y = (1984 - d^2) : 2d$. d je zřejmě sudé, $d = 2e$. Po dosazení za d a úpravě je $y = (496 - e^2) : e$. e musí být dělitelem čísla $496 = 2^4 \cdot 31$ a menší než $\sqrt{496}$, proto $e \in \{495, 246, 120, 54, 15\}$ atd. Táž řešení jako při 1. způsobu.

8. Porovnáme 6. mocniny obou čísel. $(\sqrt[3]{19})^6 = 19^3 = 6859$. $(\sqrt[3]{84})^6 = 84^2 = 7056$. $6859 < 7056$, proto $\sqrt[3]{19} < \sqrt[3]{84}$. Použili jsme větu: Pro různá kladná čísla a , b je 6 členný činitel v identitě $a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + \dots + b^5)$ kladný, proto oba dvojčleny jsou současně buď kladné anebo záporné.

9. Dělení $1984 : x \doteq y$ (zb. 41), $41 < x < 100$, zapíšeme ve tvaru $1984 = xy + 41$. $xy = 1943 = 29 \cdot 67$, proto $x = 67$, $y = 29$. $1984 : 67 \doteq 29$ (zb. 41). Podíl 29 udává počet dní v únoru.

10. Neznámé x , y , z a pomocná neznámá m jsou podle zadání vázány vztahy $\frac{x}{7} = \frac{y}{11} = \frac{z}{13} = m$. Potom platí: $x = 7m$, $y = 11m$, $z = 13m$ a $x + y + z = 31m = 1984$, $m = 64$. $x = 7 \cdot 64 = 448$, $y = 11 \cdot 64 = 704$, $z = 13 \cdot 64 = 832$. Čísla jsou po řadě 448, 704 a 832.

11. Čísla 5, 9, 11 jsou nesoudělná, $n(5, 9, 11) = 5 \cdot 9 \cdot 11 = 495$. Jimi jsou dělitelna (beze zbytku) pouze čísla tvaru $495k$ a žádná jiná. Zbytek 4 dají čísla, jejichž zápis je $495k + 4$; z nich 4 nejmenší jsou 499, 994, 1489 a 1984. Užití nejmenšího společného násobku je nutné pro úplnost řešení: Zapište obdobně čísla, jež při dělení čísly 4, 6 a 9 dají zbytek 1. Máte i 37?

12. Úlohu zapíšeme $2 \cdot BC = AD^2$ a ihned vidíme, že obě čísla jsou sudá. Určíme AD . Platí $BC < 99$, proto $2 \cdot BC = AD^2 < 198$, $AD < \sqrt{198} < 15$. Tedy $AD \in \{10, 12, 14\}$. Je-li $AD = 10$, je $BC = AD^2 : 2 = 50$, tj. $D = C = 0$, což nelze. Jestliže $AD = 12$, je $BC = AD^2 : 2 = 72$, tedy $D = C = 2$, opět spor. Při $AD = 14$ je $BC = 98$. Pak $ABCD = 1984$, a to je jediné řešení.

13. Prvý součin je $xy = 1000$, druhý $(x + 12)(y + 12) = xy + 12(x + y) + 12^2 = 1144 + 12(x + y) = 1984$. Z rovnosti posledních dvou výrazů plyne $x + y = (1984 - 1144) : 12 = 70$. Zřejmě $x \neq y$, položíme $x > y$ a určíme $x - y$. Platí $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 900$, $x - y = 30$; $x = 50$, $y = 20$. Hledaná čísla jsou 20 a 50.

14. Podle zadání je $\frac{x}{y} = 7,75$, $x = 7,75y$ a $xy = 7,75y^2 = 1984$.
 $y = \sqrt{1984 : 7,75} = \sqrt{256} = 16$ a $x = 124$. Čitatel je 124 a jmenovatel 16.

15. Obsah $P = xy = 1984$, obvod $o = 2(x + y) = 1000$, $x + y = 500$, sestavíme a řešíme kvadratickou rovnici $z^2 - 500z + 1984 = 0$.
 $x = z_1 = 496$, $y = z_2 = 4$. Velikosti stran obdélníku jsou 4 a 496. — Jiný postup začíná určením $x - y$.

16. Hledaná čísla x, y jsou soudělná, $D(x, y) = 31$, zavedeme pomocné neznámé p, q $x = 31p$, $y = 31q$, $D(p, q) = 1$. Známe rozdíl: $x - y = 31(p - q) = 1984$, $p - q = 1984 : 31 = 64$. Požadavkům úlohy vyhovuje dvojice $p = 65$, $q = 1$; potom $x = 2015$, $y = 31$. Dvojice je 31, 2015.

17. Hledaná čísla x, y jsou patrně soudělná, pišme $x = kp$, $y = kq$,
 $x + y = k(p + q) = 1056$; $n(x, y) = kpq = 1984$. Upravíme podíl součtu a nejmenšího společného násobku čísel x, y . Platí $\frac{x + y}{n(x, y)} =$

$$= \frac{k(p + q)}{kpq} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1056}{1984} = \frac{33}{62} = \frac{1}{2} + \frac{1}{31}.$$

Jiný vhodný rozklad zlomku $\frac{33}{62}$ není; položíme $p = 2$, $q = 31$ a určíme k ; $k = 1056 : (p + q) = 1056 : 33 (= 1984 : 62) = 32$. Je tedy $x = 32 \cdot 2 = 64$, $y = 32 \cdot 31 = 992$. Hledaná čísla jsou 64 a 992.

18. Položíme $x = ky$. Podle zadání je potom $x + y + x - y + xy + x/y = 2ky + ky^2 + k = k(y + 1)^2 = 1984 = 2^6 \cdot 31$. $y + 1$ je základem 2. mocniny, proto $y + 1 \in \{2, 4, 8\}$, tj. $y \in \{1, 3, 7\}$. K jednotlivým velikostem y určíme příslušná k a x : $y_1 = 1$, $k_1 = 496$, $x_1 = 496$; $y_2 = 3$, $k_2 = 124$, $x_2 = 372$; $y_3 = 7$, $k_3 = 31$; $x_3 = 217$. Úloha má 3 řešení. Dvojice čísel jsou 496, 1; 372, 3; 217, 7.

19. $496 = 2^4 \cdot 31$. Součet všech dělitelů čísla 496 $S(496) = (1 + 2 + 4 + 8 + 16)(1 + 31) = 992$. Zápis souvislosti všech tří čísel: $1984 = 992 \cdot 2 = 496 \cdot 4$.

20. Řešení spojíme v jediném zápisu.
 $1984 = 11111000000_2 = 2201111_3 = 133000_4 = (1,30)_{32} = (32,0)_{62} = (19,84)_{100} = (1,0)_{1984}$.

21. Součet $S_5 = a_1 + \dots + a_5 = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = a_1 Q = 1984 = 2^6 \cdot 31$. Číslo Q je liché, proto $Q = 31$. Potom $q = 2$, $a_1 = 2^6 = 64$. Úloha má jediné řešení $P = \{64, 128, 256, 512, 1024\}$.

22. Příslušný součtový vzorec je $S_n = na + (n-1) \binom{n}{2} d$. Zde $n = 31$, takže $1984 = 31a + 15 \cdot 31d = 31(a + 15d)$, po zkrácení $a + 15d = 64$. Vhodná řešení této neurčité rovnice jsou $(a, d) \in \{(64, 0), (49, 1), (34, 2), (19, 3), (4, 4)\}$. Rozepíšeme:

$$\begin{aligned} 1984 &= 4 + 8 + \dots + 124 = 19 + 22 + \dots + 109 = \\ &= 34 + 36 + \dots + 94 = 49 + 50 + \dots + 79 = 64 \cdot 31. \end{aligned}$$

23. $1985^2 - 1984^2 = (1985 + 1984)(1985 - 1984) = 3969$. Vzorec je $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, znovu použitý ve tvaru $a - b = (a^2 - b^2) / (a + b)$. $\sqrt{1985} - \sqrt{1984} = (1985 - 1984) : (\sqrt{1985} + \sqrt{1984}) \doteq 1 : (2 \cdot 44,5) = 1 : 89$. (Počítáno s nápovědou.) Hledané rozdíly jsou tedy 3969 a $1/89$. Přesnější velikost druhého jste si jistě dodatečně našli sami.

24. Jde o soustavu diofantovských rovnic s neznámými A, B, C, D . Ze zadání jsou zřejmá omezení $0 < A < 10$, $0 < B < 10$, $0 < C < 10$, $0 < D < 10$. S ohledem na možný přechod přes desítku při sčítání či násobení jsou v obou rovnicích, tj. $CB = DA + DC$ a $BC = 2 \cdot DB$, vždy 2 možnosti. V 1. rovnici to jsou

1. $A + C = B$, $2 \cdot D = C$;
2. $A + C = B + 10$, $2 \cdot D + 1 = C$.

Ve 2. pak

- α) $2 \cdot B = C$, $2 \cdot D = B$;
- β) $2 \cdot B = C + 10$, $2 \cdot D + 1 = B$.

Řešení musíme hledat ve 4 možných spojeních: 1α), 1β), 2α), 2β).

1α) $A + C = B$, $2 \cdot D = C$, $2 \cdot B = C$, $2 \cdot D = B$.

Sečteme 1. a 3. rovnici a upravíme: $A + C + 2 \cdot B = B + C$, $A + B = 0$, spor. Zde není řešení.

1β) $A + C = B$, $2 \cdot D = C$, $2 \cdot B = C + 10$, $2 \cdot D + 1 = B$.

Dosazením za $2 \cdot D$ z 2. do 4. rovnice dostaneme $B = C + 1$. Dosadíme za B do 1. a 3. rovnice. Z 1. určíme A : $A + C = C + 1$, $A = 1$. Ze 3. určíme C : $2 \cdot (C + 1) = C + 10$, $C = 8$ a $B = C + 1 = 9$. Z 2. rovnice plyne $D = C : 2 = 4$. Řešení: $ABCD = 1984$.

2α) $A + C = B + 10$, $2 \cdot D + 1 = C$, $2 \cdot B = C$, $2 \cdot D = B$. Sečteme 2. a 3. rovnici a upravíme: $2 \cdot D + 1 + C = C + 2 \cdot B$, $2(B - D) = 1$, spor, zde není řešení.

2β) $A + C = B + 10$, $2 \cdot D + 1 = C$, $2 \cdot B = C + 10$, $2 \cdot D + 1 = B$. Z porovnání 2. a 4. rovnice plyne $B = C$. Rovnice 1. dá $A = 10$, spor. V tomto případě není řešení.

Jediné číslo 1984 má požadované vlastnosti.

25. V tomto příkladu nejsou řešením přirozená čísla. Ze součtu 1., 3. a 4. rovnice určíme $z = 6,5$, dále snadno $y = 1,5$, $x = 2,5$. Druhá rovnice je součtem 1. a 3., tyto 3 rovnice jsou tedy lineárně závislé. Dvě z nich spolu se 4. určují jednoznačně neznámé x, y, z .

26. Dělení zapíšeme $x : y \doteq z$ (zb. z), tj. $x = zy + z$, $z < y$. Upravíme součet $x + y$ takto: $x + y = zy + z + y = 1984$, $zy + z + y + 1 = (z + 1)(y + 1) = 1985 = 5 \cdot 397$. Z rovnice $(z + 1)(y + 1) = 5 \cdot 397$ a ze vztahu $z < y$ plyne $y = 396$, $z = 4$. Zápis dělení: $1588 : 396 \doteq 4$ (zb. 4).

27. Součet dat 2 sousedních roků je liché číslo. Krajiní velikosti takových součtů v našem století jsou 3803 a 3999. Úloha vyžaduje, aby součet byl 2. mocninou. Podle nápovědy je $61^2 = 3721$, $63^2 = 3969$, $65^2 = 4225$. Vyhovuje pouze $3969 = 1984 + 1985$. V našem století je jediná dvojice roků s vlastnostmi uvedenými v zadání, a to roky 1984 a 1985.

Profesor Ypsilon o harmonické řadě a velkém třesku

(dokončení)

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

V úloze prof. Ypsilon jde zřejmě o částečný součet nekonečné řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$$

jejíž n -tý člen je roven $\frac{1}{n}$; tato řada se nazývá řadou harmonickou.

Navzdory tomu, že její n -tý člen se s rostoucím n blíží k nule, vzrůstá součet

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

jejích prvních n členů s rostoucím n nade všechny meze; jinak řečeno, součet prvních n členů harmonické řady je pro dostatečně velké číslo n větší než libovolně zvolené číslo. Říkáme také, že harmonická řada nemá součet, nebo že diverguje k plus nekonečnu.

Profesor Ypsilon na nás skromně požaduje, abychom určili součet s_n pro případ, že n je rovno počtu sekund, které až dosud uplynuly od vzniku vesmíru; za předpokladu, že k tomu došlo před osmnácti miliardami let, snadno zjistíte, že tento počet je dán číslem

$$n = 18 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60^2 = 5,67648 \cdot 10^{17}$$

Vzhledem k tomu, že přesné určení součtu s_n pro tak velké číslo n je prakticky nemožné, spokojíme se s určením ohraničeného intervalu, v němž číslo s_n pro uvedené n leží.

Dříve než určíme dolní odhad čísla s_n , tj. levý krajní bod hledaného intervalu, všimneme si součtů s_2 , s_4 , s_8 a s_{16} :

$$s_2 = s_2^1 = 1 + \frac{1}{2};$$

$$s_4 = s_2^2 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2};$$

$$s_8 = s_2^3 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2};$$

$$\begin{aligned} s_{16} = s_2^4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) > 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \\ &+ 8 \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{4}{2} \end{aligned}$$

Prohlédnete-li si pozorně získané výsledky, jistě přijdete na to, že je můžeme shrnout do věty (ve které zatím ponecháváme stranou případ $n = 1$):

Pro každé přirozené číslo $n = 2, 3, 4$, je

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že podobně lze odhadnout i součty s_{32} , s_{64} a další, nabízí se hypotéza, že

$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ pro každé přirozené číslo n větší než jedna. Její platnost dokážeme matematickou indukcí.

O několik řádků výše bylo již ukázáno, že toto tvrzení platí pro $n = 2$, neboť je $s_2^2 > 1 + \frac{2}{2}$.

Ve druhém kroku zvolíme libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ a budeme předpokládat, že pro ně platí $s_2^n > 1 + \frac{n}{2}$; dokážeme, že platí $s_2^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{2}$

Na základě svých zkušeností s úpravami součtů s_4 , s_8 a s_{16} dostáváme:

$$\begin{aligned} s_2^{n+1} &= s_2^n + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) > \\ &> s_2^n + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \right); \end{aligned}$$

uvědomíme-li si, že uzávorkovaná skupina má

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n(2 - 1) = 2^n$$

členů, je dále

$$s_2^{n+1} > s_2^n + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = s_2^n + \frac{1}{2} > 1 + \frac{n+1}{2};$$

tím je pravdivost naší hypotézy dokázána. Přihlédneme-li ještě k případu $n = 1$, dostaneme větu:

Součet prvních 2^n členů harmonické řady je pro každé přirozené číslo n větší nebo roven číslu $1 + \frac{n}{2}$.

Všimněte si, že z této věty vyplývá tvrzení uvedené v úvodu, že harmonická řada nemá součet. Je-li totiž dáno libovolně velké číslo K , lze k němu vždycky najít přirozené číslo n takové, že $1 + \frac{n}{2} > K$;

protože pro toto číslo n platí $s_2^n \geq 1 + \frac{n}{2}$, platí pro něj také $s_2^n > K$.

Pro takto určené přirozené číslo n je tedy součet prvních 2^n členů harmonické řady větší než předem zvolené číslo K .

Dokázaná věta umožňuje určit dolní odhad čísla s_n pro $n = 5,67648 \cdot 10^{17}$; vzhledem k tomu, že je $5,67648 \cdot 10^{17} > 2^{58}$, platí

$$s_{5,67648 \cdot 10^{17}} > s_{2^{58}} \geq 1 + \frac{58}{2} = 30$$

Horní odhad čísla s_n pro toto číslo n určíme podobně; vzhledem k tomu, že je $2^{59} > 5,67648 \cdot 10^{17}$, platí

$$s_{2^{59}} > s_{5,67648 \cdot 10^{17}}$$

Pro součet prvních 2^{59} členů harmonické řady dostáváme:

$$\begin{aligned} s_{2^{59}} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{15}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^{58}} + \frac{1}{2^{58} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{59} - 1}\right) + \frac{1}{2^{59}} < \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^{58}} + \frac{1}{2^{58}} + \dots + \frac{1}{2^{58}}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \dots + \\ &+ 2^{58} \cdot \frac{1}{2^{58}} = 59 \end{aligned}$$

(V řádku, který následuje po znaku nerovnosti, jsme na člen $\frac{1}{2^{59}}$ ne-

zapomněli; součtem $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ jsme nenahradili jen součet $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ale

součet $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2^{59}}$.)

Pro horní odhad tak máme:

$$s_{5,67648 \cdot 10^{17}} < s_{2^{59}} < 59$$

Shrnutím těchto výsledků dostáváme

$$30 < s_{5,67648 \cdot 10^{17}} < 59,$$

čímž je problém profesora Ypsilon vyřešen: budeme-li na zvolené polo-
přímce v sekundových intervalech vyznačovat body X_i nepřetržitě

od okamžiku velkého třesku až po současnost, budeme nyní od bodu, z něhož jsme vyšli, vzdáleni více než 30 m, ale méně než 59 m.

Součet s_n prvních n členů harmonické řady vzrůstá tedy s rostoucím n velmi pomalu; nezapomeňte však na to, že přesto překročí libovolnou hranici! Kdybychom ve vyznačování bodů X_i pokračovali i v budoucnosti, dojdeme ke každému předem stanovenému bodu X dané polopřímky, byť by jeho vzdálenost od bodu A byla jakkoli velká!

Všimněme si ještě na závěr zajímavé možnosti praktické aplikace získaných poznatků, kterou navrhuje profesor Ypsilon:

„Jestliže jste s nasazením života svého oře i svého vlastního vysvobodili z moci dračí obludy královskou dceru a nabízí-li vám skrblický monarcha, její otec, jen polovinu království, požádejte ho slušně, leč důrazně, aby dal připravit papírové čtverce, jejichž obsahy (v plošných

jednotkách v daném království používaných) jsou postupně $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},$

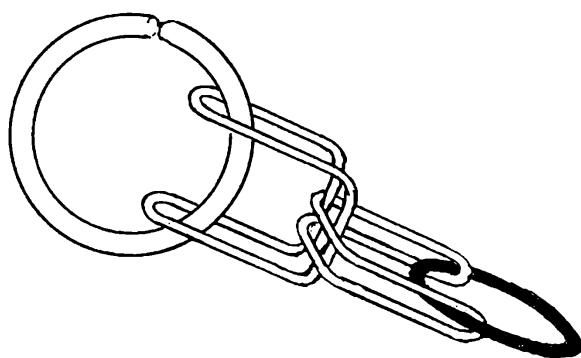
$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$ Sdělte mu dále, že si jeho nabídky velmi vážíte,

že se však spokojíte, bude-li souhlasit, pouze s tou částí jeho království, kterou lze těmito čtverci pokrýt. Je zcela evidentní, že lakomý mocnář, který začal své nabídky předat vám polovinu království litovat již ve chvíli, kdy ji vyslovil, bude s vaším návrhem okamžitě souhlasit; nedovede si totiž představit, že by připravenými čtverci bylo možno pokrýt více než pět — šest plošných jednotek. Jaké však bude jeho překvapení, když mu matematickými vývody dokážete, že konečným počtem těchto čtverců lze pokrýt říši libovolné konečné velikosti! Pozor však na to, aby zchytralý panovník nakonec nepřelstil vás. V žádném případě nepřistupujte na to, aby pod záminkou, že matematickému důkazu nerozumí, došlo ke skutečnému pokrývání povrchu jeho království uvedenými čtverci. Nezapomeňte, že za dobu osmnácti miliard let byste nepokryli více než 59 plošných jednotek.

Čtyřdílný hlavolam

Je to hlavolam, jehož výroba bude snad poněkud pracnější než u předcházejících druhů, ne však natolik, aby výrobci, kteří si poradili s předcházejícími „spletenci“, hravě nezvládli i tento oříšek.

K jeho výrobě bude třeba si připravit dva ocelové kruhy — jeden větší vyrobený ze silného, druhý menší z drátu menšího průměru —



dále měděný drát o průměru 2,5—3 mm. Řez menšího kroužku musí mít menší průměr, než je průměr měděného drátu. Z náradí budeme tentokrát potřebovat obvyklé kleště na ohýbání a štípání, pájedlo, pájku a pilku na železo. Máme-li vše připraveno, můžeme se pustit do práce.

Z měděného drátu postupným ohýbáním vyrobíme podle nákresu (obr. 1) dvě stejné součástky, v nichž jsou uvězněny oba kroužky. Tyto součástky sletujeme cínem. Silnější ocelový kroužek přerízneme v jednom místě pilkou na železo a řez roztáhneme natolik, aby vzniklou mezerou pohodlně prošel menší ocelový kroužek, ne však měděná konstrukce.

Hlavo!am vyřešíme, když se nám ho podaří rozložit na čtyři díly a samozřejmě opět složit.

Josef Svoboda

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

9. Necht $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2]$ jsou libovolné tři body ležící na kružnici o poloměru $r = 2$, která má střed v počátku kartézské soustavy souřadnic. Dokažte, že potom pro jejich souřadnice platí nerovnost

$$|a_1b_1c_1 + 2a_2b_2c_2| < 17$$

(Došlo 14 řešení.)

Jaroslav Švrček

Řešení Jána Kováče, 4. A G Poprad:

Body A , B , C ležia na danej kružnici práve vtedy, keď platí:

$$a_1^2 + a_2^2 = 4, \quad b_1^2 + b_2^2 = 4, \quad c_1^2 + c_2^2 = 4. \quad (1)$$

Označme $x_1 = \frac{a_1}{2}$, $x_2 = \frac{a_2}{2}$, $y_1 = \frac{b_1}{2}$, $y_2 = \frac{b_2}{2}$, $z_1 = \frac{c_1}{2}$,

$z_2 = \frac{c_2}{2}$; potom podľa (1) body A, B, C ležia na danej kružnici práve vtedy, keď platí:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad y_1^2 + y_2^2 = 1, \quad z_1^2 + z_2^2 = 1. \quad (2)$$

Z toho vyplýva, že je

$$x_1^2 \leq 1, \quad x_2^2 \leq 1, \quad y_1^2 \leq 1, \quad y_2^2 \leq 1, \quad z_1^2 \leq 1, \quad z_2^2 \leq 1. \quad (3)$$

Platí:

$$\begin{aligned} (|x_1| |y_1| - |z_1|)^2 &\geq 0, \quad x_1^2 y_1^2 - 2|x_1 y_1 z_1| + z_1^2 \geq 0, \\ |x_1 y_1 z_1| &\leq \frac{x_1^2 y_1^2 + z_1^2}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Platí:

$$\begin{aligned} (|x_2| |y_2| - |z_2|)^2 &\geq 0, \quad x_2^2 y_2^2 - 2|x_2 y_2 z_2| + z_2^2 \geq 0, \\ 2|x_2 y_2 z_2| &\leq x_2^2 y_2^2 + z_2^2. \end{aligned} \quad (5)$$

A teda podľa (4), (5), (2) a (3) platí:

$$\begin{aligned} |x_1 y_1 z_1| + 2|x_2 y_2 z_2| &\leq |x_1 y_1 z_1| + 2|x_2 y_2 z_2| \leq \\ &\leq \frac{(1 - x_2^2)(1 - y_2^2) + 1 - z_2^2}{2} + x_2^2 y_2^2 + z_2^2 = \\ &= 1 + \frac{x_2^2(2y_2^2 - 1) + y_2^2(x_2^2 - 1) + z_2^2}{2} \leq \\ &\leq 1 + \frac{1(2 \cdot 1 - 1) + 1(1 - 1) + 1}{2} = 2. \end{aligned}$$

Dokázali sme, že, že platí:

$$\begin{aligned} |x_1 y_1 z_1| + 2|x_2 y_2 z_2| &\leq 2, \\ \left| \frac{a_1 b_1 c_1}{8} + 2 \frac{a_2 b_2 c_2}{8} \right| &\leq 2, \\ |a_1 b_1 c_1| + 2|a_2 b_2 c_2| &\leq 16 < 17 \end{aligned}$$

10. Do čtverce $ABCD$ o strane délky a vepíše čtyřúhelník $KLMN$ o nejmenším obvodu tak, aby body K, L, M, N ležely po řadě na stranách AB, BC, CD, DA a aby zároveň jedna z jeho úhlopříček měla délku d ($a \leq d < a\sqrt{2}$).

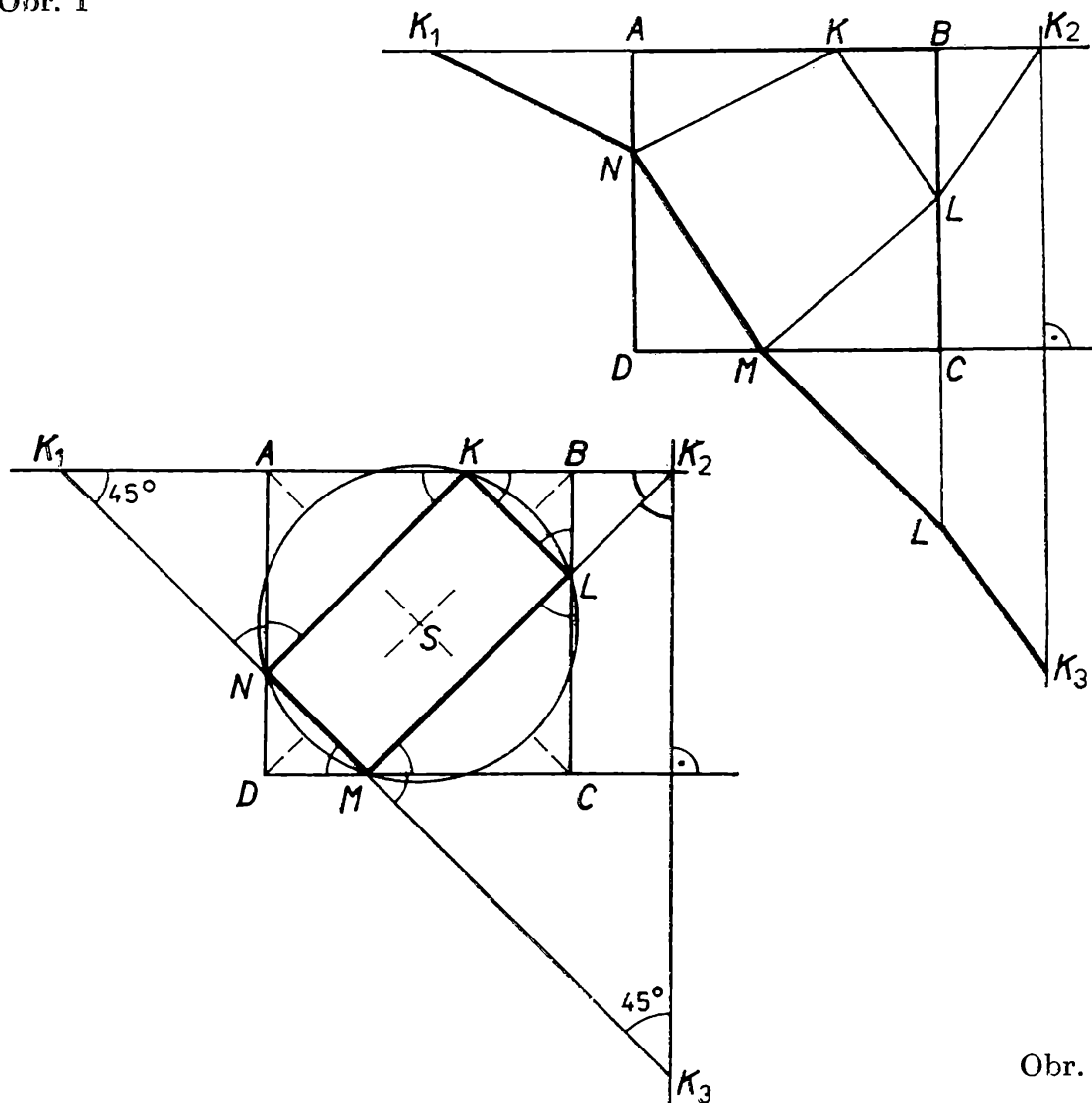
(Došlo 10 řešení.)

Jaroslav Švrček

Upravené řešení Jána Kováče, 4. A G Poprad :

! Budiž $KLMN$ libovolný čtyřúhelník vepsaný do čtverce $ABCD$. Sestrojme bod K_1 souměrně sdružený k bodu K podle přímky AD , bod K_2 souměrně sdružený k bodu K podle přímky BC a body L_1, K_3 po řadě souměrně sdružené k bodům L, K_2 podle přímky CD (obr. 1). Potom

Obr. 1



Obr. 2

délka lomené čáry $K_1NML_1K_3$ je rovna obvodu čtyřúhelníku $KLMN$; zároveň je

$$|K_1K_2| = |K_1A| + |AB| + |BK_2| = 2a, \quad |K_2K_3| = 2a.$$

Obvod čtyřúhelníku $KLMN$ je nejmenší, je-li čára $K_1NML_1K_3$ úsečkou (obr. 2). Bod K leží uvnitř strany AB ; z toho a z konstrukce bodu K_1 plyne, že je $|AK_1| = |AK| < a$. Proto přímka K_1K_3 protíná strany AD, CD po řadě v různých bodech N, M . Přímka MK_2 protíná stranu BC

v jejím vnitřním bodu L . Z věty o součtu velikostí úhlů trojúhelníku a z věty o vrcholových úhlech plyne, že úhly označené na obr. 2 obloučky jsou shodné; každý z nich má velikost 45° . Obrazec $KLMN$ je proto pravoúhelník, který je souměrný podle úhlopříček čtverce $ABCD$. Proto jeho střed S je zároveň středem čtverce $ABCD$. Z toho plyne, že vrcholy pravoúhelníku $KLMN$ leží na kružnici, která má střed S a poloměr $r = \frac{d}{2}$. Ke každému vnitřnímu bodu K úsečky AB dostaneme tedy

právě jeden pravoúhelník, který má ze všech čtyřúhelníků $KLMN$ nejmenší obvod. Jeho střed je středem čtverce $ABCD$. Pro danou délku d jeho úhlopříčky dostaneme tedy tuto konstrukci:

1. Sestrojíme kružnici $k = \left[S, \frac{d}{2} \right]$ 2. Sestrojíme její průsečík K se stranou AB . 3. Sestrojíme pravoúhelník $KLMN$, který má střední příčky v přímkách AC , BD a jeden vrchol v bodu K .

Zároveň je zřejmé, že tento pravoúhelník má požadované vlastnosti. Je-li $d = a$, má úloha jedno řešení; je-li $a < d < a\sqrt{2}$, má úloha dvě řešení.

OLYMPIÁDY A SOČ

Fyzika v 6. ročníku SOČ

RNDr. ZDENĚK KLUIBER, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Celostátní přehlídka činnosti Socialistického svazu mládeže na středních školách, která se konala ve dnech 21.—23. 6. 1984 v Nitře, byla i vyvrcholením 6. ročníku středoškolské odborné činnosti. V uplynulém období byl důraz položen zejména na větší seznamování žáků s výsledky vědy a techniky, na vytváření předpokladů pro zvýšení podílu mladé generace na řešení aktuálních úkolů naší socialistické společnosti.

Ve školním roce 1983—84 vzrostl počet zájmových odborných kroužků na 5443, zejména se zvýšil podíl kroužků v technických oborech. Určitým nedostatkem však nadále zůstává pouhé 22 % zastoupení odborníků z praxe ve funkci vedoucích těchto kroužků. Většina témat samostatných prací žáků je proto stále zadávána školami, jen 27 % témat bylo získáno z výrobní a společenské praxe. Řešení těchto problémů je třeba hledat

především v užší spolupráci škol s patronátními závody, v těsnějším spojení svazáckých organizací škol s radami mladých odborníků ze závodů.

Na 6. celostátní přehlídce středoškolské odborné činnosti bylo obhajováno celkem 438 prací ve 20 oborech. Řada výsledků prací je dílčím, přesto však významným přínosem pro uplatnění ve vědeckotechnické praxi i v oblasti společenskovední. Většina účastníků přehlídky potvrdila poměrně dobré znalosti v jednotlivých specializovaných oblastech svých odborných zájmů. Přehlídka se stala i skutečnou výměnou získaných pracovních výsledků žáků a jejich zkušeností z vlastní odborné práce.

Úspěšný průběh celostátní přehlídky zaznamenala v oblasti přírodovědných předmětů zejména fyzika. Bylo obhajováno 20 prací z astronomie, experimentální a teoretické fyziky. Jako nejlepší práce v oboru fyzika byly vyhodnoceny:

1. *Michal Kvasnička, SPŠE Praha*: Grafově — teoretická formalizace řešení rozpadových řad radioaktivních nuklidů.
2. *Tomáš Černý, SPŠCH Kralupy nad Vltavou*: Chemické děje v elektrochemickém zdroji typu Leclanchova článku — zinkochloridové články.
3. *Miloslav Zejda, Gymnázium Třebíč*: Proměnná hvězda TW-dra.

Některé práce zachytily dílčí řešení problémů, jejichž výsledky budou součástí podkladů pro podání návrhů patentů a zlepšovacích návrhů (Chemické děje v elektrochemickém zdroji typu Leclanchova článku — zinkochloridové články, Doplnky k automobilům Škoda), všímají si možnosti náhrady výrobků z dovozu vlastní produkcí (Vplyv teploty prevádzky na náchylnost ocele 32 Ch 06 ku krehkému lomu), řeší i dílčí úkoly aplikovaného a základního výzkumu (Proměnná hvězda TW-dra) atd. Potěšitelné je, že práce nalézají poměrně široké uplatnění ve výuce fyziky i v činnosti hvězdáren, částečně v práci průmyslových závodů i výzkumných ústavů.

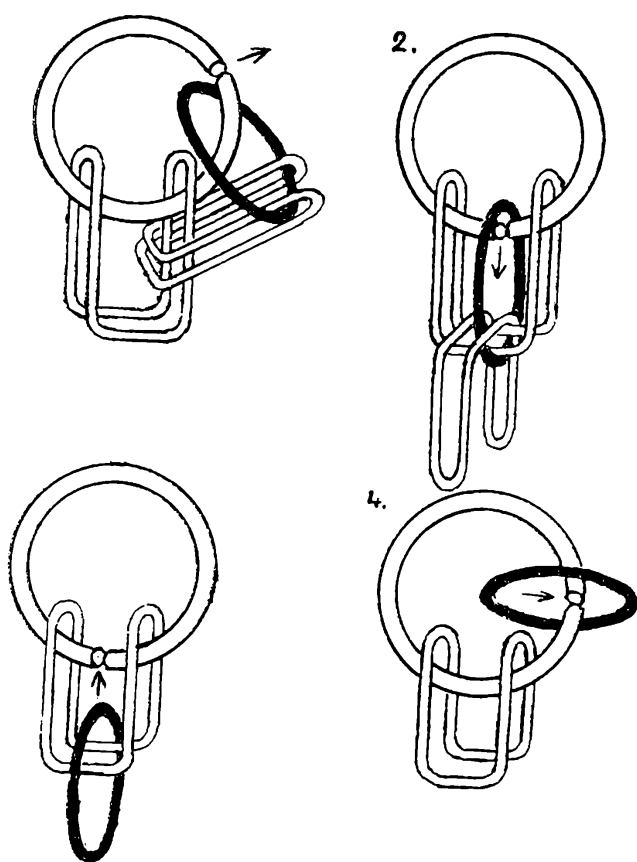
Žáci studují odbornou literaturu, pravidelně sledují zejména tyto časopisy: Rozhledy matematicko-fyzikální, Amatérské rádio, Kozmos, Elektron, Věda a technika mládeži, Říše hvězd a dalších 16 odborných časopisů.

Vysokou úroveň měla asi třetina prací, a to právě z oblasti experimentální i teoretické fyziky. Obdobně jako v dalších oborech bylo asi 65 % prací zpracováno jednotlivci. Převažující počet konzultantů prací z oboru fyzika jsou vědečtí a odborní pracovníci. Naprostá většina účastníků celostátní přehlídky oboru fyzika chce studovat na vysoké škole technického zaměření nebo na matematicko-fyzikálních a přírodovědeckých fakultách.

Účastníci přehlídky oboru fyzika kladně hodnotí středoškolskou odbornou činnost jako významnou formu přípravy pro budoucí odbornou

práci v oboru, ve kterém v budoucnu chtějí nalézt své pracovní uplatnění. Rozšiřování dílčích vzájemných vazeb mezi fyzikální olympiádou a středoškolskou odbornou činností v oboru fyzika napomáhá k výraznějšímu spojování teoretických a praktických znalostí v řadě studovaných fyzikálních problémů. Nadále je vhodné volit zejména taková témata prací, při jejichž řešení bude možné uplatňovat samostatnou práci žáků v laboratořích, teoretické poznatky ze školní výuky fyziky a ze studia odborné literatury. Zpracování prací by tak mělo především rozšiřovat znalosti v oborech odborných zájmů žáků.

Dosažené výsledky na přehlídkách středoškolské odborné činnosti a zejména rozvoj nových forem aktivit, realizovaných v okresech a krajích a zaměřených k efektivnějšímu zapojování co největšího počtu mládeže do středoškolské odborné činnosti, vytváří předpoklady pro její další zkvalitnění. Středoškolská odborná činnost se stala neoddělitelnou součástí práce středních škol.



Řešení

čtyřdílného hlavolamu

1. Menší kroužek protáhne-
me otvorem ve větším krouž-
ku ve směru šipky (obr. 1.)
a konstrukci dáme do polohy,
kterou ukazuje obr. 2.

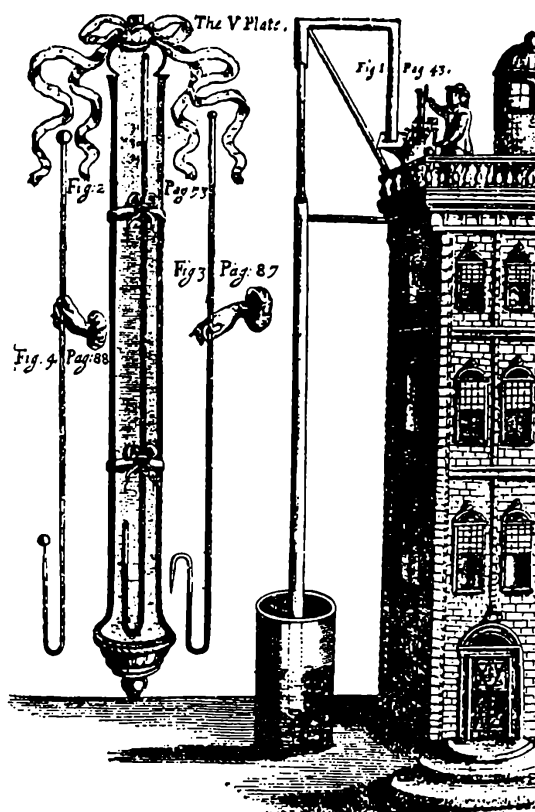
2. Nyní znovu provlékne-
me menší kroužek zmíněným
otvorem ve směru šipky (obr.
2.) a tím jsme osvobodili prv-
ní konstrukci.

Další postup jasně vyplývá
z vyobrazení 3. a 4.

Boyleův pokus s atmosférickým tlakem

Aristotelská fyzika učila, že každý ze čtyř pozemských živlů, tj. země, voda, vzduch, oheň, má své „přirozené místo“. Oheň a vzduch stoupá nahoru, voda a země padá dolů; do svých „přirozených míst“ se tělesa příslušného složení pohybují bez působení vnějších sil a přímočaře. Vzduch je relativně lehký vůči vodě a zemi, proto na ně netlačí. Kdyby však byl od nich vzdalován, příroda by se tomu bránila, protože má „strach z prázdnoty“ (horror vacui), do prázdnoty by vnikaly kapaliny nebo vzduch. Považovalo se tedy po 2000 let za vyloučené, aby atmosféra tlačila na povrch kapaliny nebo zemský povrch.

Proto bylo tak velkým překvapením, když *Torricelli* zjistil, že atmosféra tlačí na kapaliny natolik, že „udrží“ 760 mm rtuti či 10 m vody. Nad hladinou v zataveném rameni prvního barometru vzniklo dokonce vakuum, proti němuž příroda nijak neprotestovala. Není divu, že pokus se mnohokrát opakoval. *Otto von Guericke* měl na svém domě v Magdeburku ohromný teploměr a tlakoměr, na němž každý mohl číst, jaké bude počasí. Něco podobného vytvořil i *Boyle* (1627–1691) v Londýně; jeho zařízení vidíme na obrázku.



Tyto pokusy měly principiální význam a veřejnost plně zaujaly. Připomeňme si ještě, že Boyle byl první, kdo vymezil předmět chemie, definoval pojmy prvek, směs, sloučenina. Z jeho pokusů o tlaku plynů odvodil *Townley* zákon zvaný dnes Boyleův zákon, který patří k nejstarším kvantitativním vztahům ve fyzice.

Vladimír Melíšek

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ VYDALO:

Jozef Moravčík a kol.:
XXXI. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Brožura se přidrží zavedeného a ověřeného schématu: a) informace o průběhu XXXI. ročníku MO, b) úlohy všech kol a všech kategorií, c) zpráva o korespondenčním semináři, d) zpráva o mezinárodní MO. Nejpodrobnější a pro soutěžící MO také nejhodnotnější je část obsahující řešení všech úloh XXXI. ročníku MO.

Kčs 7,

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3\$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze 1985.

ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

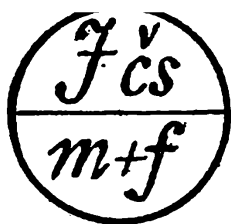


**ROČNÍK 63, 1984/85
ÚNOR**

(6)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**





ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný CSc., UK, Bratislava,
Stanislav Horák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr. Ján Chrapan, CSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš
doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha,
doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Hana Kořínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha, prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha, dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

L. Bončev a kol.: Význam fyziky pro technický pokrok	241
S. Horák: O tětiovém čtyřúhelníku	244
E. Kraemer: Řešením úloh opakujeme geometrii III	246
J. Nečas: Co je mikropočítač	252
I. Kraus: Rentgenová tenzometri	254
R. Hudec: Kdy zachytíme gravitační zá-	260
F. Jáchim: Tadeáš Hájek z Hájku a po- čátky observační astronomie v Čechách	262
E. Calda: Profesor Ypsilon na krosu Pa- tamatikovem	265
J. Straka: Jedna matematická zábava	268
Naše soutěž	273
M. Gnoth: Z úloh matematickej olympiá- dy v ZSSR	280
E. Calda: Příklady k přijímací zkoušce z matematiky na MFF UK v Praze v r. 1984	285
Z nových knih	287
Pohledy do dějin	3. str. obálky

Význam fyziky pro technický pokrok

Doc. LJUBOMIR BONČEV, doc. ing. Nikolaj ANDREJEV, CSc., VMEI Sofie

Ing. NIKOLAJ GANEV, doc. RNDr. Ivo Kraus, CSc., FJFI ČVUT Praha

Úloha vědy ve společnosti

Vědou v širším smyslu rozumíme nepřetržité poznávání přírody, společnosti a myšlení, které vede ke stále pravdivějšímu odrazu objektivní skutečnosti v našem vědomí. V užším smyslu se nazývají vědou určité obory, lišící se předmětem, metodami a případně i technikou výzkumu. Vznik a vývoj věd je podmíněn výrobou. Mechanika a matematika vznikly pravděpodobně „na žádost“ budovatelů zavlažovacích systémů a velkých staveb starověku, astronomii potřebovali mořeplavci apod.

Při vývoji vědy nedochází pouze ke kvantitativnímu hromadění poznatků, ale i k hlubokým kvalitativním změnám. Proto se úloha vědy ve společnosti mění stejně, jako se střídají období extenzivního růstu s obdobími intenzivních revolučních přeměn. Je však třeba dodat, že dřívější tendence tohoto typu ve vědě a technice měly víceméně jen lokální charakter. Příkladem mohou být změny, které vyvolala heliocentrická soustava v astronomii nebo Darwinova teorie v biologii.

Vědeckotechnická revoluce

Generace žijící ve dvacátém století jsou svědky zásadních změn společenského významu vědy, které označujeme jako vědeckotechnická revoluce. Toto historické období je charakteristické jak dalším zrychlením vědeckého pokroku, tak i novým vztahem vědy a praxe. Zatímco dříve výroba zpravidla vědu předstihovala, dochází dnes k situaci zcela opačné. Věda, která proniká do výroby prostřednictvím lidí schopných ovládnout a uplatnit vědecké poznatky, se stává výrobní silou. Dochází k přechodu od mechanizace jako jedné kvality ke kvalitě nové — automatizaci a kybernetickému řízení.

Vztah přírodních věd a technického pokroku v posledních dvou stoletích

Povšimněme si na několika konkrétních příkladech změn, kterými prošla úloha vědy v rozvoji techniky během posledních 150—200 let.

Až do konce minulého století byl základem tohoto rozvoje průmysl a jeho rozvětvený technický aparát. Vědu představovali jednotlivci. I když se často jednalo o geniální osobnosti, na materiální výrobu měli jen nepodstatný vliv. Naopak to byly technické objevy, které působily rozhodující měrou na orientaci tehdejší vědy. Vývoj techniky probíhal v minulém století převážně intuitivně, věda a výroba byly dezintegrovány. Tak např. *James Watt* (1736—1810) zkonstruoval parní stroj už kolem roku 1780, i když jeho fyzikální princip byl zformulován francouzským fyzikem *Carnotem* (1796—1832) teprve o padesát let později. Naopak *Thomas Alva Edison* (1847—1932) postavil v New Yorku 1882 první elektrárnu, aniž při tom vědomě využil v té době již známý jev elektromagnetické indukce a zákony *Ohmovy* (1787—1854) a *Kirchhoffovy* (1824—1887). Není bez zajímavosti, že tvůrci některých významných vynálezů nebyli vůbec profesionálně spjati s oborem, v němž dosáhli úspěchu, a dokonce ani ne s vědou v širším smyslu. Dopřádací stroj zkonstruoval kadeřník *Richard Arkwright* (1732—1792), telegraf je dílem malíře *Samuela Morse* (1791—1872), *Watt* byl původně hodinářem a tvůrcem prvního parníku *Robert Fulton* (1765—1815) zlatníkem.

Bylo by samozřejmě nesprávné tvrdit, že před vědeckotechnickou revolucí věda nijak příznivě výrobu neovlivňovala. Vědecké poznatky byly ovšem praxí využívány se značným zpožděním. Dnes už jen málokdo ví, že princip fotografie čekal na své využití celých 112 let (1727 až 1839). Od vynálezu elektromotorů k jeho praktickému uplatnění uplynulo 57 let (1829—1886), telefon začal sloužit za 56 let po svém objevu (1820—1876). Podobný osud měla i elektronka, která byla užita roku 1915, přestože k objevu došlo už o 31 let dříve.

Dalším příkladem opožděné aplikace vědeckých poznatků je princip rozhlasového vysílání z roku 1867, uvedený do života teprve na počátku našeho století (1902), nebo první výzkumy struktury technických materiálů pomocí rentgenového záření (1913) objeveného koncem roku 1895.

Fyzika v průmyslovém rozvoji dneška

Počínaje druhou třetinou dvacátého století se začíná doba realizace nejdůležitějších úspěchů vědy ve výrobě podstatně zkracovat. Ilustrujme to např. tyto údaje:

- od objevu štěpení uranu k zahájení činnosti první atomové elektrárny uplynulo 15 let (1939—1954),

- k průmyslové výrobě tranzistorů stačilo 5 let (1948—1953), sluneční baterie začaly sloužit dokonce za 2 roky (1953—1955),

- náročná technologie výroby integrovaných obvodů byla vyřešena za 3 roky (1958—1961),

- cestu od vypuštění první umělé družice Země k prvním krokům člověka na Měsíci prošlo lidstvo za 12 let (1957—1969).

Není pochyb o tom, že na přípravě vědeckotechnické revoluce mají podíl všechny vědní obory. Nejvýznamnější úlohu však přitom sehrála fyzika — přinejmenším vytvořením kvalitativně nových experimentálních podmínek výzkumné práce.

Důležité fyzikální objevy tohoto století daly základ novým vědním oborům, jako je technická fyzika, nauka o pružnosti, elektronika, kybernetika, jaderná energetika a řada jiných. Vznikla nová výrobní odvětví, jejichž existence je podmíněna vědeckým výzkumem. Např. elektrotechnický průmysl se opírá o úspěchy fyziky polovodičů, z vědeckých laboratorí čerpá svoje metody i metalurgie nebo chemický průmysl syntetických materiálů. Modernizace a optimalizace výrobního procesu vytváří naopak materiální základnu umožňující další rozvoj vědy. Časový odstup mezi objevy a zavedením odpovídající výroby se zkracuje, spojení experimentální činnosti vědců s průmyslovou technologií je stále bezprostřednější. Výzkum se stal rozhodujícím faktorem celého pokroku techniky a výrobních sil. Tempo rozvoje výroby je určováno především tempem vědeckého pokroku, protože „vědecká odvětví“ průmyslu získávají stále větší význam ve srovnání s odvětvími tradičními.

Hlavní cíle, k nimž v současné době směřuje fyzikální výzkum, můžeme označit pojmy „automatizace výroby, vývoj progresivních technologií, úspora surovin a energie, vytváření nových energetických zařízení, intelektualizace a elektronizace výrobních procesů“.

Řešení těchto úkolů je nemyslitelné bez mezinárodní vědeckotechnické spolupráce. Malé země jako např. Československo nebo Bulharská lidová republika se nemohou stát významnou vědeckou silou ve všech oblastech, které představují strategické směry vědeckotechnické revoluce. Proto je třeba soustředit úsilí především na intenzivní rozvoj těch oblastí vědy, které úzce souvisejí se specializací národního hospodářství.

Jestliže nebudeme pochybovat, že vývoj techniky je dnes určován dosaženými úspěchy ve fyzice, musí být požadavkům současné epochy přizpůsobena i výuka fyziky. Přitom však zdaleka nejde jen o otázky výběru sdělovaných informací. Podstatně důležitější je naučit se chápat význam základních fyzikálních poznatků pro praxi, aby ti z dnešních studentů, kteří se jednou stanou profesionálními vědci — fyziky, usměřovali svou práci cílevědomě podle potřeb techniky. Budoucí inženýři musí naopak získat návyky pracovat s nově objevenými fyzikálními zákonitostmi tak, aby se doba potřebná k jejich zavedení do výroby zkrátila na minimum.

MATEMATIKA

O tětívovém čtyřúhelníku

STANISLAV HORÁK, Praha

V článku je odvozena zajímavá věta o tětívovém čtyřúhelníku. K jejímu důkazu je však potřeba znát jednu větu z geometrie trojúhelníka. Tu odvodíme hned.

Pomocná věta. V každém trojúhelníku (při obvyklém označení) platí

$$2rv_c = ab .$$

Důkaz (obr. 1). Danému trojúhelníku ABC opišme kružnici $k = (S; r)$. Patu výšky z vrcholu C označme D a patu kolmice ze středu S na stranu BC označme K . Ihned je patrné, že

$$\sphericalangle KSB = \sphericalangle KSC = \alpha ,$$

neboť to je polovina středového úhlu nad tětivou BC . Proto

$$\triangle SKB \sim \triangle ADC$$

a odtud

$$|SB| : |KB| = |AC| : |DC| .$$

Jinak psáno

$$r : \frac{1}{2}a = b : v_c ,$$

což je ekvivalentní se vztahem

$$2rv_c = ab .$$

Pro úplnost dodejme, že tento vztah platí i pro tupouhlý a pravoúhlý trojúhelník. Důkaz pro tyto dva případy přenechávám čtenářům. Jinak můžeme pomocnou větu považovat za dokázanou a přistoupíme k jejímu užití na tětívovém čtyřúhelníku.

Věta 1. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jemuž je opsána kružnice $k = (S; r)$. Na ní je zvolen libovolný bod M různý od vrcholů A, B, C, D . Jestliže jeho vzdálenosti od přímek AB, BC, CD, DA označíme po řadě a, b, c, d , pak platí

$$ac = bd .$$

Důkaz (obr. 2). Paty kolmic z bodu M na přímky AB, BC, CD, DA postupně označme E, F, G, H . Dále označme

$$|ME| = a , |MF| = b , |MG| = c , |MH| = d .$$

Dodatek. Označíme-li e, f vzdálenosti bodu M od úhlopříček AC, BD , platí

$$ef = ac = bd.$$

Důkaz tohoto tvrzení se provádí úplně stejně jako důkaz věty 1. Důsledek toho je další věta:

Věta 1. platí i pro nekonvexní tětíkový čtyřúhelník. Dokažte podrobně sami.

Cvičení. Všimněte si, že

$$\triangle MEB \sim \triangle MHD \text{ a } \triangle MGD \sim \triangle MFB$$

podle věty uu. Z této skutečnosti lze též dokázat větu 1.

Řešením úloh opakujeme geometrii III

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V předešlých dvou článcích (Rozhledy č. 3 a 4) jsme zopakovali několik důležitých pojmů a vět z planimetrie; všechny uvedené věty jsme očíslovali, abychom se na ně mohli odvolávat. Připojíme ještě definici podobnosti trojúhelníků a větu o podobných trojúhelnících, kterou označíme (navazující na předešlé dva články) číslem 18.

Nechť $ABC, A'B'C'$ jsou dané trojúhelníky a k je kladné číslo. Jestliže je

$$|A'B'| = k|AB|, |B'C'| = k|BC|, |C'A'| = k|CA|, \quad (1)$$

pak je $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'A'C'|, |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle C'B'A'|, |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle A'C'B'|$. Potom říkáme, že trojúhelníky $ABC, A'B'C'$ jsou podobné a píšeme $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ nebo $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. Z rovností (1) plyne, že pro tyto trojúhelníky platí tyto rovnosti:

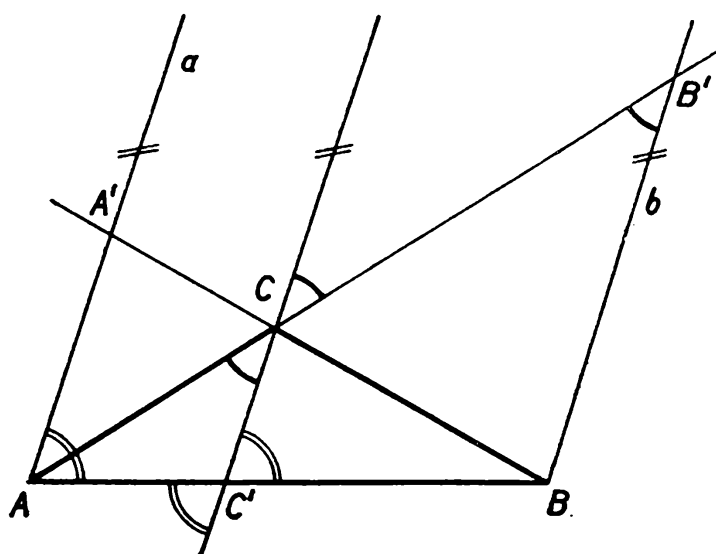
$$\frac{|A'B'|}{|B'C'|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \frac{|A'B'|}{|C'A'|} = \frac{|AB|}{|CA|}, \frac{|B'C'|}{|C'A'|} = \frac{|BC|}{|CA|}. \quad (2)$$

Podobnost trojúhelníků se nejčastěji zjišťuje podle věty, kterou nyní uvedeme.

18. Nechť pro trojúhelníky $ABC, A'B'C'$ platí: $|\sphericalangle B'A'C'| = |\sphericalangle BAC|, |\sphericalangle C'B'A'| = |\sphericalangle CBA|$. Potom je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Tato věta se obvykle nazývá *věta uu* o podobných trojúhelnících; ukážeme její užití na čtyřech úlohách, které doplňují úlohy z předešlých dvou článků.

Poznámka k větě 18. Budiž P pata výšky ke straně AB trojúhelníku



Obr. 1

ABC a P' pata výšky ke straně $A'B'$ trojúhelníku $A'B'C'$. Je-li $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, je

$$\frac{|A'B'|}{|C'P'|} = \frac{|AB|}{|CP|}.$$

Důkaz je jednoduchý. Podle definice podobnosti trojúhelníků je $|A'B'| = k|AB|$, $|B'C'| = k|BC|$, $|C'A'| = k|CA|$. Trojúhelníky APC , $A'P'C'$ jsou pravoúhlé a zároveň je $|\angle PAC| = |\angle P'A'C'|$, ať je úhel BAC ostrý nebo tupý: podle věty 18 je tedy $\Delta APC \sim \Delta A'P'C'$. Protože je $|C'A'| = k|CA|$, je také $|C'P'| = k|CP|$; totéž platí, je-li úhel BAC pravý ($P = A$). Je tedy vždy

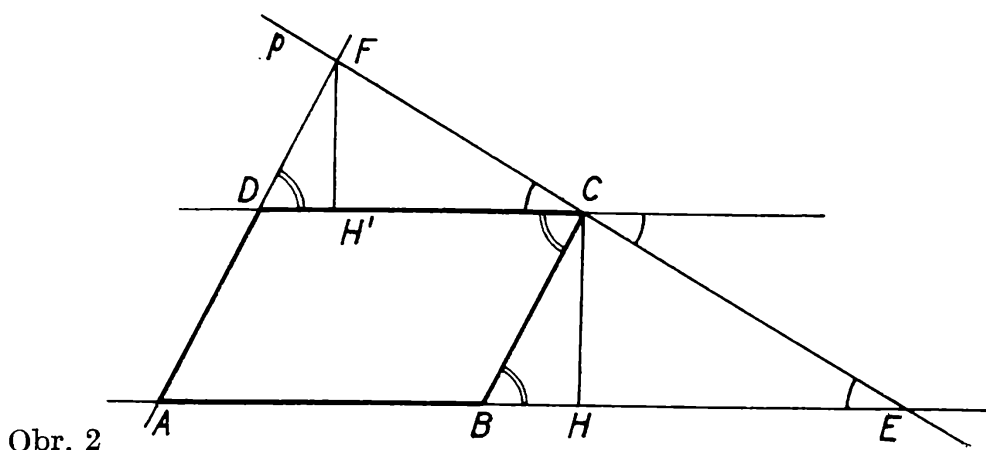
$$\frac{|A'B'|}{|C'P'|} = \frac{k|AB|}{k|CP|} = \frac{|AB|}{|CP|}.$$

Úloha 12. Zvolme uvnitř strany AB libovolného trojúhelníku ABC bod C' a body A, B vedme po řadě přímky a, b rovnoběžné s přímkou CC' (obr. 1), průsečík přímek BC, a označme A' , průsečík přímek AC, b označme B' .

Budiž $|AA'| = p$, $|BB'| = q$; máme dokázat, že je

$$|CC'| = \frac{pq}{p+q}. \quad (3)$$

Řešení. Na obr. 1 jsou obloučky označeny shodné vrcholové úhly při vrcholu C a s nimi shodný úhel $AB'B$. Shodnost těchto úhlů plyne z věty 15 (o úhlech vrcholových) a z části a) věty 6 (o úhlech střídavých). Je tedy $|\angle C'CA| = |\angle BB'A|$; zároveň úhel $C'AC$ splývá s úhlem BAB' ; podle věty 18 je tedy $\Delta AC'C \sim \Delta ABB'$. Z toho podle rovností (2) plyne, že je



Obr. 2

$$\frac{|AC'|}{|CC'|} = \frac{|AB|}{|B'B|}. \quad (4)$$

Zcela obdobně zjistíme, že je $\Delta BC'C \sim \Delta BAA'$; z toho plyne, že je

$$\frac{|BC'|}{|CC'|} = \frac{|AB|}{|A'A|}. \quad (5)$$

Protože bod C' je vnitřní bod úsečky AB , je $|AC'| + |BC'| = |AB|$, čili podle rovností (4) a (5) je

$$\frac{|AB|}{q} |CC'| + \frac{|AB|}{p} |CC'| = |AB|.$$

Protože je $|AB| > 0$, dostáváme po dělení číslem $|AB|$ tuto rovnost:

$$|CC'| \frac{p+q}{pq} = 1,$$

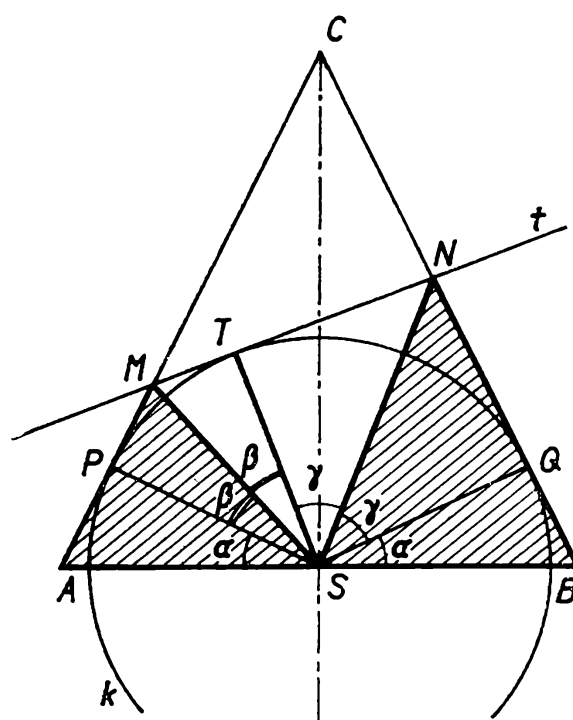
$$|CC'| = \frac{pq}{p+q}.$$

Úloha 13. Je dán libovolný rovnoběžník $ABCD$. Jeho vrcholem C prochází přímka p protínající přímku AB v bodu E , který leží na prodloužení úsečky AB za bod B ; průsečík přímky p s přímkou AD je bod F (obr. 2). Nechtě S , P , Q jsou po řadě obsahy rovnoběžníku $ABCD$, trojúhelníku BCE a trojúhelníku DFC . Máme dokázat, že je $S = 2\sqrt{PQ}$.

Řešení. Budiž H pata výšky ke straně BE trojúhelníku BCE ; potom CH je také výškou rovnoběžníku $ABCD$. Patu výšky ke straně CD trojúhelníku DFC označíme H' . Víme, že je

$$S = |CD| \cdot |CH|, \quad P = \frac{1}{2} |BE| \cdot |CH|, \quad Q = \frac{1}{2} |CD| \cdot |FH'|. \quad (6)$$

Na obr. 2 jsou označeny obloučky shodné vrcholové úhly při vrcholu C a s nimi shodný úhel BEC ; jejich shodnost plyne z věty 15 a z části a) věty 6. Je tedy $|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle DCF|$; zcela obdobně zjistíme, že je



Obr. 3

$|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle FDC|$. Podle věty 18 je tedy $\triangle BCE \sim \triangle DFC$. Podle poznámky k větě 18 je

$$\frac{|CD|}{|FH'|} = \frac{|BE|}{|CH|},$$

$$|CD| \cdot |CH| = |BE| \cdot |FH'|,$$

$$|CD|^2 \cdot |CH|^2 = |BE| \cdot |CH| \cdot |FH'| \cdot |CD|.$$

Z toho podle rovností (6) plyne, že je

$$S^2 = 2P \cdot 2Q,$$

$$S = 2\sqrt{PQ}.$$

Připomeňme si ještě jednu větu, která plyne ze souměrnosti kružnice podle jejího průměru; označme ji číslem 19.

19. Nechť bod C náleží vnější oblasti kružnice k mající střed S ; dotykové body tečen kružnice k , které procházejí bodem C , budtež P, Q . Potom trojúhelníky CSP, CSQ jsou souměrně sdružené podle přímky CS (obr. 3).

Úloha 14. Budiž S střed základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC . Sestrojme kružnici k , která má střed S a dotýká se přímek CA, CB po řadě v bodech P, Q (obr. 3). Uvnitř oblouku PQ kružnice k , který leží v trojúhelníku ABC , zvolme libovolný bod T , sestrojme v něm tečnu t kružnice k a určíme po řadě průsečíky M, N tečny t s přímkami $CA,$

Úloha 15. Osa úhlu ADC lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) protíná stranu AB v jejím vnitřním bodu E (obr. 4). Do trojúhelníku AED je vepsána kružnice k , která se dotýká stran AE , AD po řadě v bodech M , N ; zároveň je $|AD| = 2$, $|MN| = 1$. Máme vypočíst velikost úhlu ADC .

Řešení. Úhly CDE , AED jsou střídavé a přímky CD , AE jsou rovnoběžné; podle části a) věty 6 jsou úhly CDE , AED shodné. Podle předpokladu je úhel CDE shodný s úhlem ADE ; proto také úhly ADE , AED jsou shodné. Podle části b) věty 1 jsou také úsečky AD , AE shodné; trojúhelník ADE je tedy rovnoramenný se základnou DE . Její střed označme O . Podle věty 12 je trojúhelník ADE souměrný podle přímky AO , která je tedy osou úhlu EAD ; proto na ní leží střed S kružnice k . Protože je $AO \perp ED$, dotýká se kružnice k přímky DE v bodu O . Ze souměrnosti trojúhelníku ADE a kružnice k podle přímky AO (viz větu 11) plyne, že body M , N jsou souměrně sdruženy podle přímky AO ; je tedy $MN \perp AO$. Protože je také $ED \perp AO$, je $MN \parallel ED$. Na obr. 4 jsou obloučky označeny shodné vrcholové úhly při vrcholu M a s nimi shodný úhel AED ; shodnost těchto úhlů plyne z věty 15 a z části a) věty 6. Je tedy $|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle AED|$; kromě toho úhel MAN splývá s úhlem EAD . Podle věty 18 je tedy $\triangle AMN \sim \triangle AED$; podle rovností (2) z toho plyne, že je

$$\frac{|AN|}{|MN|} = \frac{|AD|}{|ED|}. \quad (10)$$

Budiž $|OD| = |OE| = x$; podle věty 19 je potom $|DN| = |OD| = x$, $|EM| = |OE| = x$. Podle předpokladu je $|AD| = 2$, takže je $|AN| = |AD| - |DN| = 2 - x$; podle předpokladu je $|MN| = 1$. Z toho všeho podle (10) plyne, že je

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{1} &= \frac{2}{2x}, \\ 2x - x^2 &= 1, \\ (x-1)^2 &= 0, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Je tedy $|OD| = |OE| = 1$, takže je $|DE| = 2 = |AD|$; protože trojúhelník ADE je rovnoramenný se základnou DE , je $|AE| = |AD| = 2$. Trojúhelník ADE je tedy rovnostranný. Podle části a) věty 1 a podle části a) věty 2 má každý jeho vnitřní úhel velikost 60° . Je tedy $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle ADE| = 60^\circ$, takže úhel ADC má velikost 120° .

Co je mikropočítač

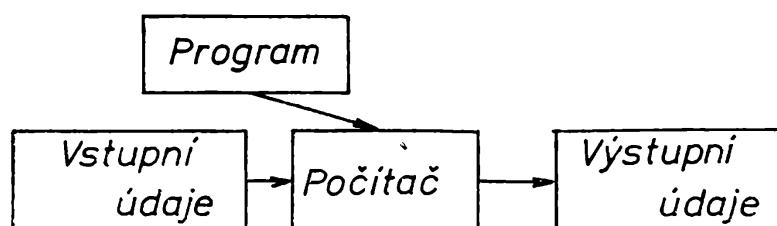
RNDr. JIŘÍ NEČAS, Praha

Zhruba v polovině našeho století se začínají objevovat číslicové počítače, nazývané zpravidla vznešeně samočinnými počítači. Při zmínce o nich si téměř každý vybavil velký, drahý a „chytrý“ stroj. Funkční parametry počítačů se postupně zlepšovaly, bylo na nich možno řešit stále komplikovanější úlohy, vyžadující rozsáhlejší a důmyslnější programy. Zpočátku šlo o numerické řešení matematických problémů, později i o zpracování velkých objemů dat, o zpracování textů i o další typy úloh. Společné všem oblastem používání počítačů je to, že se podle určitého algoritmu, který je v počítači uložen ve formě programu, přetvářejí vstupní údaje v údaje výstupní (obr. 1). Počítače samy jsou konstruovány jako univerzální zařízení a pro danou úlohu se připravují uložením příslušného programu.

K uložení programu i dat (vstupních a výstupních údajů a mezivýsledků) slouží *paměť počítače*. Její obsah může být čten a podle potřeby i měněn (přepisován). Výběr a zpracování jednotlivých instrukcí, jimiž je program tvořen, probíhá v *procesoru*. Číslicový počítač se běžně používá k řešení celé řady úloh, přičemž často může několik úloh být zpracováváno prakticky současně.

Počítače však nejsou jedinými elektronickými zařízeními na zpracování dat — na přetváření informace. Pevně sestavené jednoúčelové kombinační a sekvenční logické obvody se uplatňují na nejrozmanitějších místech; jako příklad uveďme reléové zabezpečovací zařízení na železnici, turnikety na stanicích metra a řídicí obvody automatické pračky.

Co rozhoduje o tom, zda se k přetváření údajů použije počítač nebo pevně sestavené logické obvody? Je to především ekonomické hledisko. Příklady, které jsme uvedli, naznačují, že počítač bývá vhodné použít tam, kde je třeba řešit řadu různých úloh, kdežto pevně sestavené logické obvody se uplatňují v situacích, kde se řeší stále táž úloha. Z uvedených příkladů lze vytušit i jakési další, rovněž poněkud mlhavé kritérium: u počítačů mívá vstupní i výstupní informace tvar posloupnosti znaků (parametry matematické úlohy, ekonomická data, texty apod.), kdežto informace zpracovávaná jednoúčelovými pevně sestavenými obvody mívá technologický charakter (vstupní údaje se získávají zpravidla různými čidly, výstupní údaje slouží k spínání a vypínání elektrických obvodů apod.). Prudký rozvoj polovodičové technologie a i některé další faktory způsobují, že hranice mezi použitím počítačů a „pevné logiky“ se posouvá, že oblast využívání počítačů se zvětšuje.



Obr. 1

Jak pevně sestavené logické obvody, tak obvody v počítačích dnes převážně využívají *tranzistory*, a to zpravidla nikoliv samostatné, nýbrž sdružované často až do nesmírně složitých součástí — tzv. *integrovaných obvodů*. Jedním integrovaným obvodem může být tvořen i celý procesor — tzv. *mikroprocesor*. Dnešní mikroprocesory se sice zatím svými funkčními parametry nevyrovnají procesorům současných středních a velkých počítačů, avšak předčí procesory počítačů z přelomu padesátých a šedesátých let. V porovnání s jinými procesory mají mikroprocesory velmi malé rozměry (např. destička velká přibližně 1 cm²), malou spotřebu elektrické energie a jsou poměrně velmi levné (desítky až stovky Kčs). Tyto skutečnosti, zejména cena, působí růst počtu aplikací, v nichž se uplatní počítače. Mikropočítače, tj. počítače, jejichž procesorem je mikroprocesor, se používají i tam, kde dříve přicházelo v úvahu jedině použít pevně sestavené logické obvody. Dnes se v mnoha případech uplatňují jednoúčelové mikropočítače, pracující stále podle téhož programu, který bývá uložen v tzv. *pevné paměti* (ROM — read-only memory, tj. paměť jen k čtení), z níž procesor může její obsah číst, avšak nemůže jej měnit. Kromě této paměti mívá mikropočítač k uložení mezivýsledků a dalších údajů i *paměť operační* (RWM — read-write memory, tj. paměť ke čtení a psaní; zpravidla se místo RWM označuje ne zcela vhodně RAM — random-access memory, paměť s nahodilým přístupem), která je pamětí v „klasickém“ smyslu: Údaje z ní lze číst a staré údaje lze přepisovat novými.

Kromě mikroprocesoru a pamětí musí mikropočítač obsahovat vstupní a výstupní obvody, pomocí nichž komunikuje s okolím, ať již s člověkem nebo s řízeným procesem.

Jednotlivé části mikropočítače jsou připojeny ke *sběrnici*; sběrníková koncepce umožňuje vyrábět stavebnicově koncipované mikropočítače, jež lze vhodně sestavit podle potřeby dané příslušnou aplikací.

Z hlediska využívání můžeme mikropočítače klasifikovat takto:

1. Mikropočítače sloužící jako malé univerzální číslicové počítače; informace do nich vstupuje i z nich vystupuje pomocí znaků; jsou vybaveny relativně velkou pamětí typu RWM, do níž se ukládají i zpracovávané programy (mohou se vkládat např. z magnetické kazety.).

2. Mikropočítače sloužící jako číslicové počítače určené k zpracování jedné úlohy; informace vstupují a vystupují pomocí znaků; program

je uložen v pevné paměti (např. mikropočítače v autobusových nebo vlakových pokladnách).

3. Speciální mikropočítače sloužící k řízení nějakého procesu; program je uložen v pevné paměti; vstupní informace se získává vhodnými čidly a výstupní informace je zpravidla tvořena signály ovládajícími určité elektrické obvody (např. mikropočítače k řízení výtahů ve výškových stavbách nebo k řízení vlaků podzemní dráhy).

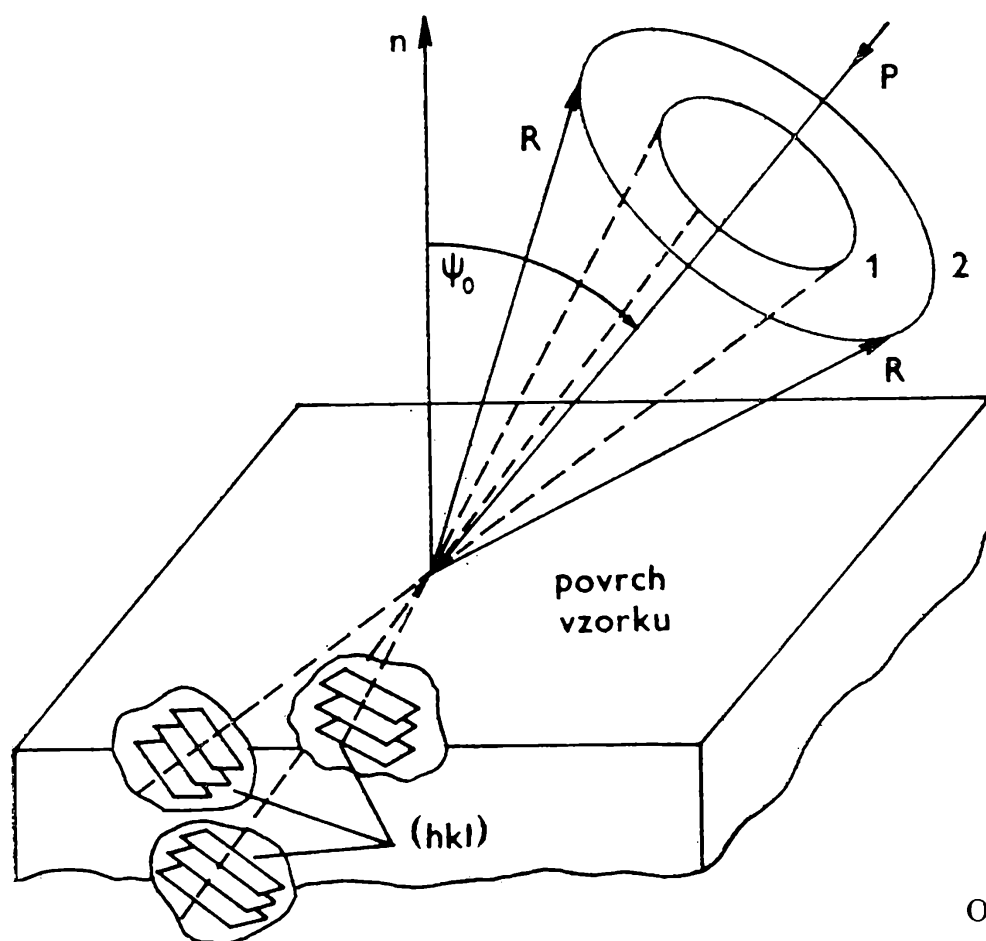
S mikropočítači se lze setkat v nejrozmanitějších situacích. U mikropočítačů uvedených v bodech 1 a 2 bývají nejnápadnějšími částmi *obrazovka* a *klávesnice* (pro výstup, resp. vstup dat); jimi je prakticky určen vzhled mikropočítače. Naproti tomu řídicí mikropočítače, uvedené v bodě 3, mohou mít zcela nepatrné rozměry. Charakteristické pro všechny mikropočítače je to, že jsou to zařízení na přetváření informace, jejichž jádrem je mikroprocesor a jež jsou vybavena určitou pamětí, v níž je uložen příslušný program. K počítání v původním smyslu slova se mikropočítače využívají jen v některých případech. Ovšem počítačem se dnes rozumí stroj, který transformuje vstupní informaci v informaci výstupní podle zadaného programu, jenž je vyjádřením určitého algoritmu. A lze očekávat, že nebude trvat dlouho, kdy počítáním se bude běžně rozumět přetváření informace (vyjádřené znaky) podle zadaného algoritmu.

FYZIKA

Rentgenová tenzometrie

Doc. RNDr. IVO KRAUS, CSc., FJFI ČVUT v Praze

Rentgenová tenzometrie představuje v současné době jednu z nejvýznamnějších oblastí praktického využití difrakce (rozptylu) rentgenových paprsků na atomech nebo iontech krystalických látek. Vznik rentgenové tenzometrie — rentgenografického měření napětí — byl podmíněn jak Laueho objevem difrakce rentgenových paprsků na krystalové mřížce v roce 1912, tak dalšími výzkumy, které na slavný pokus navazovaly. Byl to zejména *W. H. Bragg* a jeho syn *William Lawrence*, kterým se podařilo vyložit Laueho difrakční experiment představou reflexe rentgenového záření na atomových rovinách krystalu. Jednoduchá Braggova rovnice určila podmínku, při níž se paprsky vlnové délky λ budou po odrazu na rovinách vzdálených o hodnotu d navzájem zesilovat. Je-li



Obr. 1

Θ úhel dopadu na rovinu a n celé číslo, dojde k zesílení, jestliže $n\lambda = 2d \cdot \sin \Theta$.

Braggova rovnice našla bezprostředně po svém odvození koncem roku 1913 široké využití při studiu struktur monokrystalů a stala se základem i dalšího nového vědního oboru — rentgenové spektroskopie. Pro technickou praxi, jejímiž hlavními objekty zkoumání jsou materiály polykrystalické (složené z velkého množství krystalků), se stala difrakční metoda přínosem teprve od roku 1916, kdy *P. Debye* s *P. Scherrerem* v Německu a nezávisle také *A. W. Hull* v USA ukázali, že difrakční obraz lze získat i ze vzorků práškových a polykrystalických.

Charakterizujme stručně základní myšlenku experimentálního uspořádání, nazývaného dnes zpravidla Debyeova-Scherrerova metoda. Uvnitř polykrystalických materiálů, např. technických kovů, obsahujících v objemu $\approx (10^{-3}$ až $10^{-1})$ mm³ zasaženém svazkem monochromatického rentgenového záření velké množství (10^6 až 10^8) náhodně orientovaných krystalů velikosti $\approx \mu\text{m}^3$, se najde vždy dostatečný počet takových, v nichž jsou určité atomové roviny skloněny vzhledem k dopadajícímu svazku paprsků tak, aby byla splněna Braggova rovnice. Uvažované roviny budeme označovat symbolem (hkl) a jejich vzdálenosti d_{hkl} .

Na obr. 1 je znázorněn svazek paprsků P dopadající na vzorek pod úhlem $\psi_0 \neq 0$ vzhledem k povrchové normále n . Normály k reflektujícím rovinám (hkl) tvoří površky kužele (1). Odražené paprsky R leží na povrchu kužele (2), který dá na rovinném filmu umístěném kolmo ke směru svazku P vznik křivce (průsečnici kuželové plochy s rovinou), tzv. Debyeově-Scherrerově linii. Systém atomových mřížkových rovin se vzdálenostmi $d_{h'k'l'}$ vytvoří obdobnou linii, avšak odlišných rozměrů. Difraktované paprsky mohou být detekovány i jinými způsoby než filmem, např. Geigerovým-Müllerovým nebo scintilačním počítačem.

Jestliže svazek paralelních rentgenových paprsků dopadá šikmo na povrch nenapjatého zkoumaného materiálu (obr. 2a), kdy jsou vzdálenosti příznivě orientovaných rovin (hkl) ve všech krystalcích stejné (nezávisle na sklonu vzhledem k povrchu vzorku), má difrakční linie tvar kružnice. V krystalcích materiálu, na nějž působí jednoosé napětí σ (obr. 2b), bude vzdálenost atomových rovin (hkl) záviset na orientaci k povrchu resp. ke směru napětí σ . Difrakční linie pak už ovšem nebude kružnicí.

Změní-li se vzdálenost mezi rovinami (hkl), změní se tvar a poloha odpovídající difrakční linie. Naopak proměřením velikosti „levého“ a „pravého“ poloměru zdeformované kružnice (obr. 2b) lze určit mezirovinnou vzdálenost rovin (hkl) krystalků různě skloněných k povrchu napjatého vzorku. Označíme-li mezirovinnou vzdálenost d_{hkl} u materiálu, na nějž nepůsobí napětí, jako d_0 , a tutéž veličinu stejného materiálu ve stavu napjatosti symbolem d , pak výraz

$$\varepsilon = \frac{d - d_0}{d_0}$$

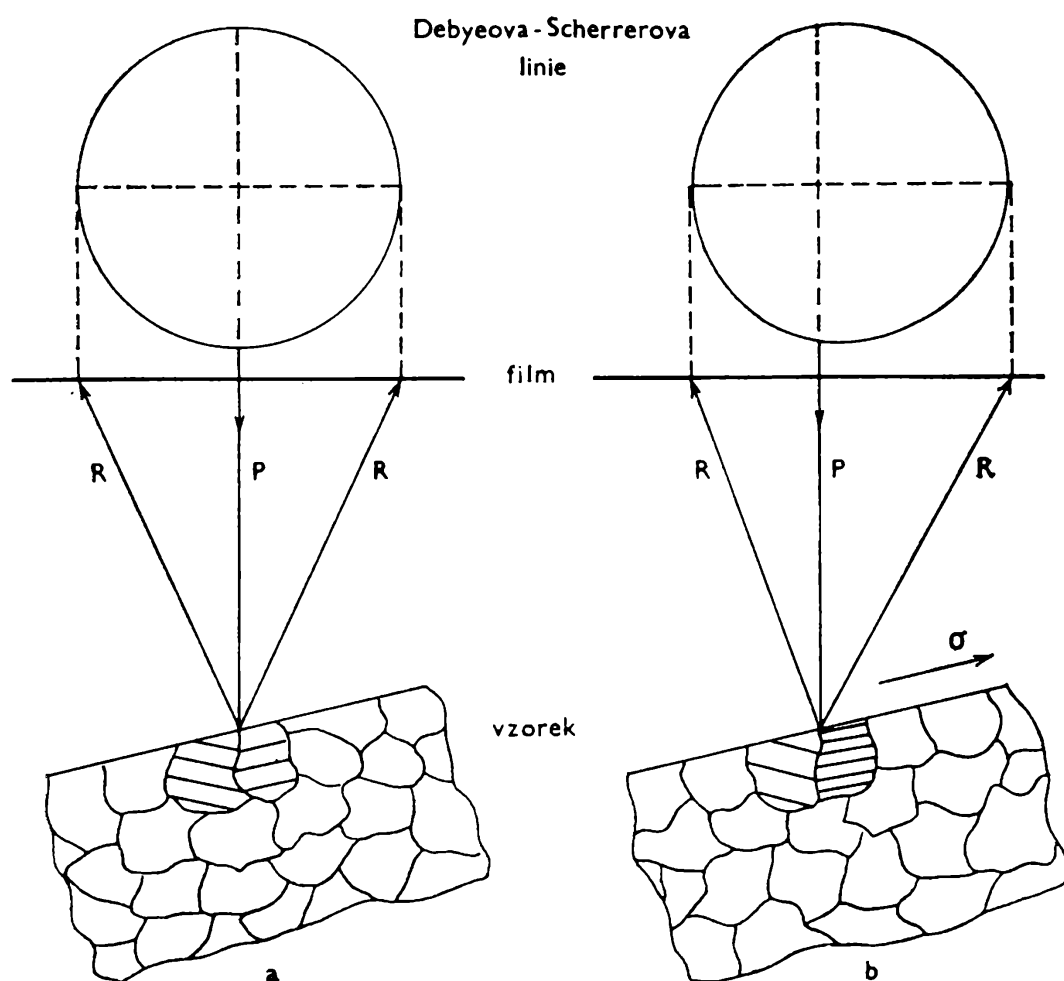
vyjadřuje relativní deformaci mezirovinné vzdálenosti vyvolanou působícím napětím σ . Jak ale víme, mezi relativní deformací a napětím platí vztah (Hookův zákon)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

(E je Youngův modul pružnosti).

Změříme-li rentgenograficky deformaci ε , můžeme výpočtem stanovit odpovídající napětí σ . Princip rentgenové tenzometrie spočívá tedy ve ztotožnění deformací krystalové mřížky s deformacemi, které vyplývají ze vztahů teorie elasticity.

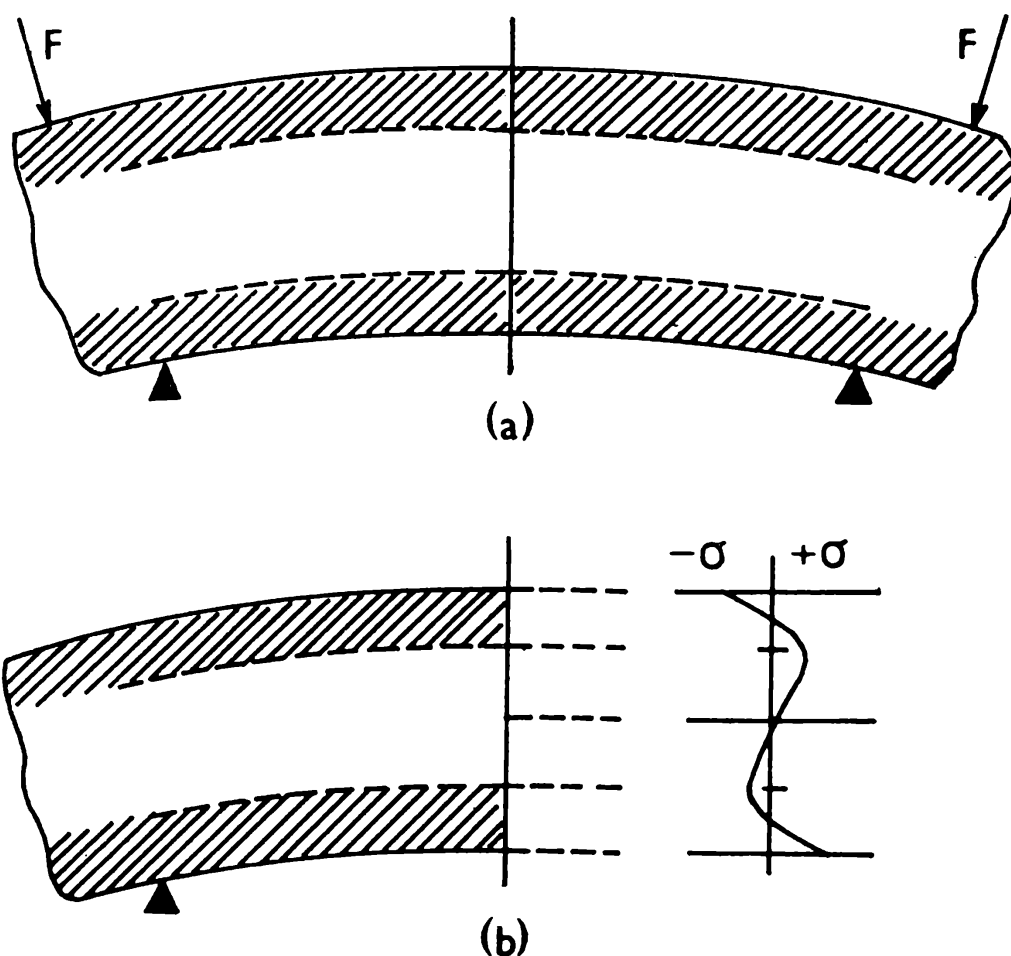
Fyziku a techniku však nezajímají jen napětí vložená — existující v tělese pouze po dobu působení vnější síly. Stejně důležitá, a v mnoha oblastech průmyslové výroby ještě významnější, jsou tzv. zbytková (vnitřní, reziduální) napětí. Vznikají vlivem těch technologických procesů, které vedou k plastické deformaci některých částí uvažovaného



Obr. 2

objektu. Příkladem může být tváření kovových materiálů za studena, broušení, soustružení, frézování, tepelné nebo chemicko-tepelné zpracování. I když příčina vyvolávající plastickou deformaci vymizí, napětí, resp. deformace, existovat nepřestanou. Ilustrujme si vznik takovýchto zbytkových napětí na destičce (nosníku) uložené na dvou podpěrách a zatížené dvěma stejnými silami F (obr. 3). Pro další úvahy je užitečné si nosník myšlenkově rozdělit na vlákna, která jsou v nenapjatém stavu přímkami rovnoběžnými s delší stranou podélného řezu.

U prohnuté destičky bude ve všech bodech téhož vlákna mezi podpěrami existovat konstantní napětí: na vypuklé straně je tahového charakteru, na straně vyduté vznikají tlaky. Hodnoty napětí jsou maximální v povrchovém vlákně, směrem ke středu nosníku klesají na nulu. Stejným směrem bude v nosníku docházet s rostoucím zatížením F postupně k překročení meze kluzu (šrafovaná oblast na obr. 3). Jestliže při určité tloušťce plasticky zdeformované vrstvy nosník odlehčíme, vznikne v něm stav zbytkové napjatosti schematicky znázorněný na obr. 3b (tahům přiřazujeme znaménko „plus“, tlakům „minus“).



Obr. 3

Pro měření vložených napětí byla vypracována celá řada metod, které jsou z hlediska časové náročnosti pro provozní podmínky vhodnější než rentgenová tenzometrie. K nejrozšířenějším „měřičům“ napětí patří odporové tenzometry. Jsou založeny na zjišťování relativních deformací měřením zprostředkující veličiny. Využívá se u nich vlastnosti, že elektrický odpor vodiče se při deformaci mění. Přiložíme-li drát (vodič) na konstrukci tak, aby sledoval její relativní deformaci, a známe-li, jak se mění odpor drátu při změně délky, můžeme ze změny odporu usoudit na proběhlou deformaci.

Pokud je však třeba stanovit v daném objektu zbytkové napětí, bude práce s odporovými tenzometry komplikovanější. Můžeme totiž zjistit pouze deformaci, která vznikne porušením rovnováhy zbytkových napětí — např. po odstranění části napjatého tělesa odvrtáním, odříznutím apod. Takový zásah do existujícího stavu napjatosti však vede k porušení celistvosti vzorku, případně k znehodnocení jeho funkčních vlastností. Difrakční metoda stanovení zbytkových napětí na povrchu materiálu je naproti tomu zcela nedestruktivní. V tom spočívá její hlavní přednost.

Význam měření zbytkových napětí si nejlépe uvědomíme z příkladů, jak mohou tato napětí ovlivňovat vlastnosti polykrystalických — zejména kovových — materiálů.

a) Tlaková napětí zvyšují únavovou pevnost namáhaných výrobků, zatímco napětí tahová ji mohou snižovat.

b) Bylo pozorováno, že dostatečně vysoká zbytková napětí způsobují sama o sobě tzv. křehký lom součástky, a to bez jakýchkoliv dodatečných mechanických působení. K takové situaci dochází např. za současného účinku vysokých tahových zbytkových napětí a určitého faktoru, obvykle chemického původu, vyvolávajícího křehkost materiálu. Nestabilita napětového stavu může někdy vést k tomu, že i malé změny výsledné napjatosti tělesa jsou příčinou jeho úplné destrukce. Poškození tohoto typu vzniká např. místní změnou teploty, povrchovým mechanickým poškozením (škrábnutím) apod. Bezprostřednost destrukce má charakter výbuchu. Rychlé šíření křehkého lomu zde souvisí s uvolněním skryté deformační energie, tj. potenciální energie atomů vysunutých při deformaci z rovnovážných poloh.

c) Prokázán je i vliv zbytkových napětí na korozní odolnost součástek. Většinou bylo zjištěno, že přítomností tlaků v povrchové vrstvě se intenzita korozních procesů snižuje.

Rentgenová tenzometrie má velké perspektivy zvláště v oblasti kontroly technologie výroby. Už dnes je v některých průmyslově vyspělých zemích rentgenová difrakční technika součástí výstupní kontroly mechanického zpracování vyvolávajícího na povrchu součástek zbytkovou napjatost.

Díky rozvoji výpočetní techniky a novým citlivým detektorům ionizujícího záření se z laboratorního měření napětí v kovových materiálech pomocí rentgenových paprsků stal efektivní způsob kontroly provozní praxe. Rentgenová tenzometrie je tak vzorem aplikace experimentální fyziky ve sféře výroby, konkrétním příkladem bezprostředního sepětí vědy a techniky.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Kdy zachytíme gravitační záření

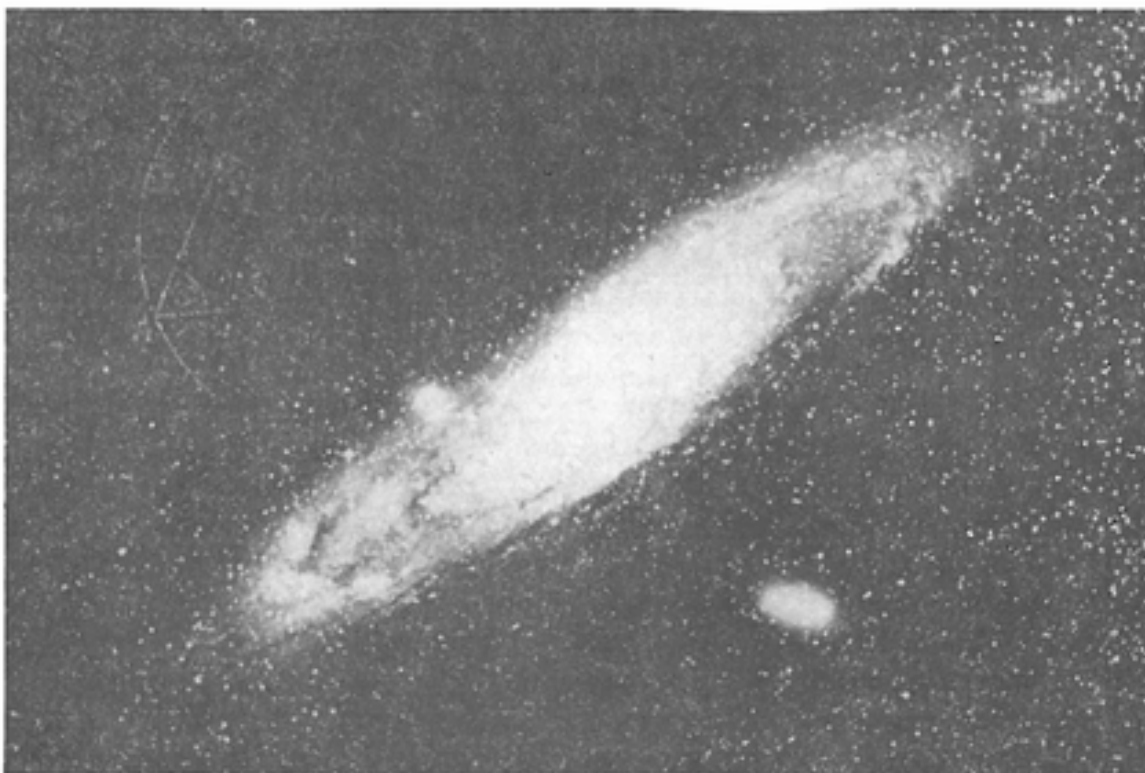
RNDr. RENÉ HUDEC, CSc., AÚ ČSAV Ondřejov

Již v roce 1916 teoreticky předpověděl Albert Einstein existenci gravitačního záření — vlnám podobných gravitačních poruch šířících se vesmírem rychlostí světla. Jde o určitou obdobu elektromagnetických vln, které vznikají urychlováním nábojů. V případě gravitačních vln by mělo jít o následek urychlování hmoty vhodným způsobem.

Ačkoli se fyzikové již léta snaží gravitační vlny z vesmíru zachytit, zatím žádný takový experiment neskončil s přesvědčivým kladným výsledkem. Zásadní potíž je totiž v tom, že gravitační jevy jsou velmi slabé — např. gravitační síla mezi dvěma protony je 10^{36} krát menší než síla elektrostatická. To znamená, že i účinnost produkce gravitačních vln musí být mimořádně nízká. Měřitelné jevy lze proto očekávat jen od obřích hmot podrobovaných velkým zrychlením — tedy jen od jevů ve vesmíru, jako jsou např. gravitační zhroucení hvězd nebo interakce s černými dírami. Přitom právě zachycení gravitačních vln by pro současnou fyziku i astrofyziku bylo mimořádně významné — kromě ověření teorie by totiž mohlo do vesmíru „otevřít“ i nové pozorovací okno. Ale jak gravitační vlny hledat?

Gravitační záření by mělo být schopné uvést hmotná tělesa do pohybu, tedy např. měnit vzdálenost mezi dvěma testovacími částicemi. Jejich pohyb by přitom měl být kolmý na směr šíření vln a amplituda výkmitu by měla být úměrná jejich vzájemné vzdálenosti v příčném směru. Protože však jsou očekávané projevy mimořádně slabé, bude i posuv testovacích těles extrémně malý. Ani pro kolapsy hvězd v naší galaxii nelze pro tělesa vzdálená 1 m očekávat větší výchylku než pouhou setinu průměru jádra vodíku!

Detekce gravitačních vln má však přesto již svou historii. První pokusy probíhaly totiž již na přelomu 60. a 70. let pod vedením *prof. Webera* z univerzity v Marylandu. Měřily se tehdy vibrace zařízení ve formě hliníkových válců uložených ve vzduchoprázdnu na antivibračním stole, aby se vyloučily vedlejší mechanické, zvukové a seizmické vlivy. Navíc bylo identické zařízení umístěno ještě ve druhé laboratoři ve vzdálenosti asi 1000 km. Oba přístroje překvapivě zaznamenávaly současné jevy téměř denně, ale pozdější experimenty tento objev nepotvrdily. Pro tehdejší výsledky ostatně nemáme dodnes uspokojivé vysvětlení, ale zdá se téměř jisté, že o gravitační vlny nešlo — ty by totiž nebyly zaznamenávány tak často. Vždyť kolaps hvězdy v naší galaxii lze očekávat jen jednou za 30 let a ani počet odhadovaných interakcí s černými děrami není příliš vysoký — méně než 50 za rok.



V naší Galaxii by podle odhadu mohlo docházet ročně až k 50 interakcím hvězd s černou dírou. Zachytíme již brzy gravitační záření vznikající při těchto jevech? (Foto autor)

Jaká je však situace v hledání gravitačních vln dnes? Vědci se snaží dosavadní přístroje co nejvíce zdokonalit — především jde o snížení tepelného „pozadí“ přístrojů projevujícího se jako šum detektoru. Jedna z cest spočívá v chlazení zařízení až na teplotu kapalného hélia a v použití co největší hmoty válce — až 6 t. To je cesta dvou skupin v USA, jedné v Itálii, jedné v Japonsku a jedné v ČLR. Jiný směr zvolili vědci v SSSR — rozhodli se pro použití materiálu s co nejnižším útlumem oscilací, a tedy pro detektory na bázi monokrystalů. Třetí možnost tkví ve zvětšení posuvu testovacích hmot. Znamená to, že se musí použít volné testovací hmotné částice daleko od sebe a jejich poloha se měří interferenčně. Při vzdálenosti 3 m lze dnes měřit výchylky až o 10^{-15} m, jak ukazují výsledky dosažené řadou skupin. Dnes se vzdálenost částic zvyšuje až na desítky metrů. Pro dosažení citlivosti 10^{-21} (tedy poměru mezi výchylkou částic a jejich vzájemnou vzdáleností), která je potřebná ke zjištění jevů z extragalaktických vzdáleností, bude třeba jít ještě dále a vzdálit částice od sebe až na kilometry. Připomeňme, že k zachycení jevů z naší Galaxie, soustavy Mléčné dráhy, „stačí“ citlivost 10^{-18} . Astronomové by však rádi zachycovali gravitační vlny přicházející nejen z naší Galaxie, a tak se zařízení se vzdáleností testovacích částic

několika kilometrů již připravují. Problém však zůstává s řadou faktorů, které je třeba odstranit, jako je např. seizmický šum.

Do hledání gravitačních vln z vesmíru se již zapojily i kosmické sondy letící ke vzdáleným planetám — představovaly testovací hmoty s velkou vzdáleností a umožňovaly tak hledání gravitačních vln s velmi nízkou frekvencí. V rádiových signálech sond byl hledán dopplerovský posuv odpovídající těmto jevům, ale s negativním výsledkem. A tak i pro tento „kosmický“ experiment platí stejný závěr jako pro dosavadní pokusy pozemní — citlivost je zřejmě dosud pro detekci gravitačních vln příliš malá. Bude proto zapotřebí dalších, mnohem přesnějších zařízení, aby bylo možno říci více.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

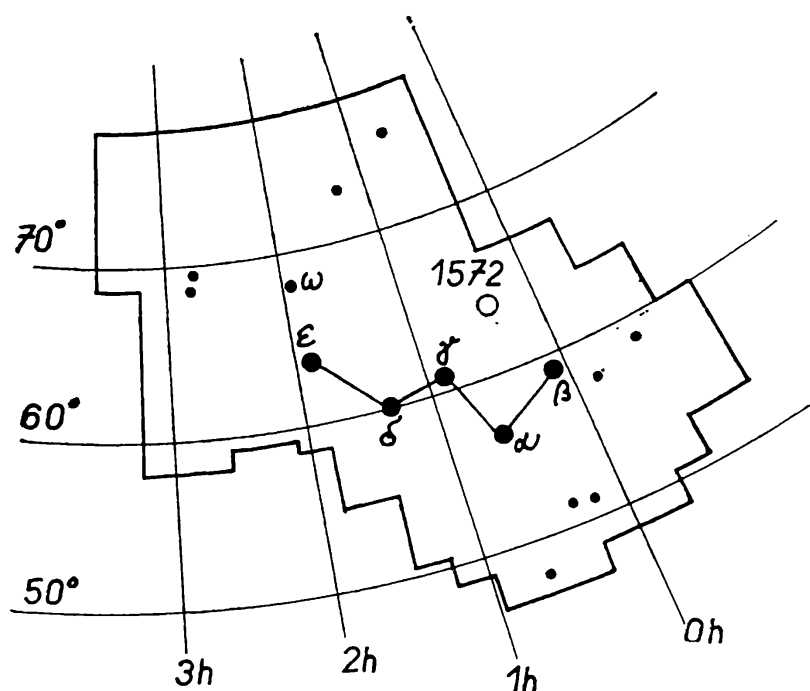
Tadeáš Hájek z Hájku a počátky observační astronomie v Čechách

FRANTIŠEK JÁCHIM, Vimperk

Ve druhé polovině 16. století a počátkem století 17. (do r. 1620) nabývá Praha význam jako středisko vědy a umění. Do českých zemí proniká mohutný proud renesance a humanismu, který přináší s sebou nové pohledy na společenský život i nové nazírání na přírodu.

Nejvýznamnější osobností v oblasti přírodních věd je u nás *Tadeáš Hájek z Hájku* (1525 až 1600). Již jeho otec Šimon Hájek byl člověk velmi vzdělaný a s citem pro hodnotné vědecké spisy. Není proto divu, že v domě U zelených hájků na Starém Městě jsou takové spisy jako rukopis Koperníkových tezí o heliocentrické soustavě, později známý jako Malý komentář. Tadeáš Hájek studoval na pražské univerzitě, kde dosáhl roku 1551 hodnosti mistra svobodných umění. Za studiem lékařství odchází na univerzitu do italské Bologni. Po návratu do vlasti přednáší nějaký čas na pražské univerzitě matematiku. Z této doby pochází jeho první spis *O chvále geometrie*, v němž ukazuje důležitost geometrie pro praxi. V šedesátých letech pracuje Hájek na zhotovení mapy Čech. Za tím účelem procestoval značnou část území a měřil polové výšky řady míst.

Pro své schopnosti lékařské a diplomatické se stal roku 1572 osobním



Obr. 1. Souhvězdí Kassiopeje. Prázdným kolečkem je označena poloha supernovy z roku 1572.

lékařem císaře *Maxmiliána II.* a po jeho smrti osobním lékařem a rádčem *Rudolfa II.* Rok 1572 je pro Hájka i počátkem práce astronomické. Náhlé vzplanutí hvězdy v souhvězdí Kassiopeji (obr. 1) se stalo středem zájmu mnoha pozorovatelů. Objevila se celá řada pojednání a spisků, většinou poplatných aristotelismu. V Evropě bylo snad jen deset vědců, kteří dovedli neobvyklý úkaz hodnotit především ve světle pozorování. Mezi tuto skupinu vědců patří práce Hájek a *Tycho Brahe*. Hájek provádí svá pozorování počátkem listopadu 1572, Brahe nezávisle na něm pozoruje supernovu poprvé 11. listopadu 1572. Hvězda byla nesmírně jasná (hvězdná velikost v tu dobu byla $-4,1^m$) a byla pozorovatelná i za dne. Podívejme se nyní na důvody, které vedly Hájka k závěru, že jde o stálici a nikoli o kometu, za kterou byla většinou považována. Především Hájka zajímala vzdálenost objektu. Vycházeje z předpokladu, že blízký objekt musí se projevovat nenulovou denní paralaxou, pokoušel se paralaxu nalézt. Protože supernova se nacházela v souhvězdí obtočnovém, využil pro měření horní a dolní kulminaci hvězdy. Hájek tedy užíval pozorování v poledníkové rovině (podobná pozorování dělal také *Tycho Brahe* a někteří další astronomové). Na základě měření času se pokoušel nalézt přesné souřadnice objektu, resp. pokoušel se nalézt vlastní pohyb hvězdy. Tehdejší časoměrná technika mu však nedovolovala dosahovat příliš velké přesnosti. Hájek touto metodou poněkud předběhl dobu. Závěr Hájkových pozorování byl však jednoznačný.

Měřitelnou paralaxu nezjistil, což svědčilo o velké vzdálenosti tělesa. Nebylo však pochyb, že nová hvězda je mnohem dále než Měsíc. A zjištění stálosti její polohy mezi ostatními stálicemi svědčilo o její příslušnosti do sféry stálic. Takový závěr byl však v ostrém rozporu s tehdejšími aristotelovským pohledem na sféru stálic. Aristotelova koncepce uspořádání vesmíru se opírá o dvě kvalitativně odlišné části vesmíru. Vnitřní část je nehybná a je tvořena čtyřmi elementy (země, voda, vzduch, oheň). K veškeré změně dochází vzájemným mísením těchto elementů. Tato oblast sahá až po sféru Měsíce. Vše, co je za měsíční sférou, je éterický vesmír neměnný a věčný. Taková konstrukce již předem vylučuje jakoukoli změnu nebo pohyb, vznikání a zanikání ve stálicovém vesmíru.

Pozorování Hájkova dostává do rukou za svého působení v Čechách Tycho Brahe a označuje je za nejpřesnější po svých vlastních. Přitom si neodpustíme dodat, že Brahe prováděl pozorování s nesrovnatelně dokonalejšími pozorovacími pomůckami.

Co se však podařilo prokázat pro novou hvězdu, podařilo se také při sledování komet v letech 1577 až 1580. Hájek byl opět mezi prvními, kteří se zaměřili na pozorné sledování komety z roku 1577 (později označené Brahe 1577). Hájek opět nenalezl měřitelnou paralaxu a věčná správnost Aristotelova učení je i v tomto případě vážně narušena. Nicméně cesta, kterou nastoupila astronomie — zvláště zásluhou Hájka — se ukázala jako jediná možná při objektivním hodnocení astronomických jevů. Souhrnnou zprávu o pozorování komety publikuje Hájek pod názvem *Descriptio Cometae* (Praha 1578). Z hlediska dnešní astronomie nelze vyloučit možnost, že hlava některé komety může projít mezi Zemí a Měsícem, avšak při pozorování komety z roku 1577 musíme tuto okolnost vyloučit. Proto je tak významný Hájkův závěr, že kometa patří do supralunární oblasti.

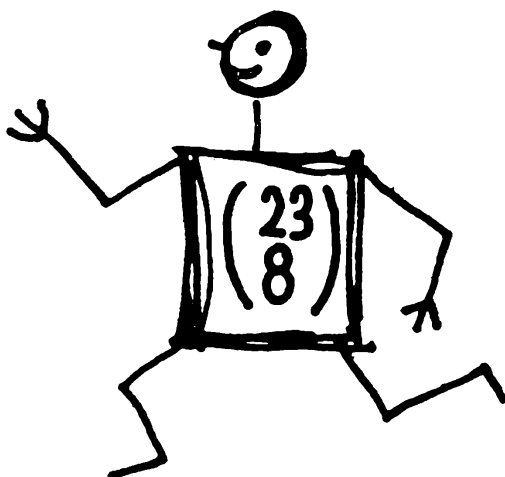
Bohatá korespondence Hájka s nejpřednějšími vědci renesanční Evropy svědčí o jeho velkém významu ve vědě samotné i v její podpoře na dvoře císaře Rudolfa II. Zejména Hájkovým přičiněním se Praha stávala centrem evropského vědeckého dění. K Hájkovi se obracel anglický matematik *John Dee*, pracoval pro něj i významný konstruktér přístrojů *Erasmus Habermel* a hodinář *Pavel z Litomyšle*. Na bezprostřední Hájkův podnět povolává Rudolf II. do Čech Tychona Brahe, jehož skvělá pozorování přivádějí do Prahy roku 1600 *J. Keplera*.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Profesor Ypsilon na krosu Patamatikovem

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK PRAHA

Na patamatikovské návsi bylo ve výroční den narození zakladatele patamatematiky, mistra Patamatika, neobyčejně rušno již od samého kuropění: prapory vlály, hudba hrála a množina osob proudících k Patamatikově rodné chaloupce byla konečná jen tak tak. Zde se totiž nacházela startovní kancelář běhu Patamatikovem, na kterém se každoročně scházejí ctitelé patamatematiky a sportu z blízkého i vzdáleného okolí. V tomto přespolečném běhu nestartují závodníci hromadně, ale



Obr. 1

jednotlivě v půlminutových intervalech, přičemž první běžec vybíhá na trať přesně ve chvíli, kdy hodiny na místní radnici ukazují 7 hodin 57 minut. Tento neobvyklý čas startu připomíná účastníkům krosu, že zakladatel patamatematiky po celou dobu své školní docházky začínal v tomto okamžiku svůj strhující běh do školní budovy vzdálené jeden kilometr a že jen málokdy byl v tomto závodě s časem poražen a obdržel poznámku o pozdním příchodu.

Novinkou letošního ročníku bylo označování přihlášených borců; starovní čísla nebyla tvořena čísly přirozenými, jak je ve sportovních

soutěžích zvykem, ale kombinačními čísly $\binom{n}{k}$, kde n, k jsou celá kladná

a $n \geq k$ (viz obr. 1). Závodníci vybíhali na trať podle svých startovních čísel v pořadí určeném posloupností

$$\binom{1}{1}, \binom{2}{1}, \binom{3}{1}, \binom{2}{2}, \binom{4}{1}, \binom{3}{2}, \binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3}, \binom{6}{1}, \binom{5}{2}, \binom{4}{3}, \binom{7}{1}, \binom{6}{2}, \binom{5}{3}, \binom{4}{4}$$

kteřá je utvořena takto: ze dvou kombinačních čísel $\binom{n}{k}, \binom{r}{s}$ „jde dříve“

to, jestliže přísluší menší z obou součtů $n + k, r + s$; je-li $n + k = r + s$, „jde dříve“ to kombinační číslo, jestliže náleží menší z obou čísel k, s .

Je tedy v této posloupnosti např. číslo $\binom{55}{30}$ před číslem $\binom{60}{35}$, neboť je

$55 + 30 < 60 + 35$, ale číslo $\binom{75}{10}$ je před číslem $\binom{55}{30}$, protože při

rovnosti $75 + 10 = 55 + 30$ je $10 < 30$. Na základě všech výše uvedených údajů si každý účastník běhu vypočetl, v kolik hodin bude vyběhat na trať, a podle toho si rozvrhl čas na prohlídku patamatikových památek, posláním tohoto krosu není totiž jen boj s časem a zápolení o dech, ale i snaha o duchovní povznesení sportmenů.

Hoříte-li touhou zúčastnit se příštího ročníku, měli byste se již nyní přesvědčit o tom, že tento výpočet zvládnete. Pokuste se proto určit, v kolik hodin na krosu Patamatikovem startoval letos profesor Ypsilon,

jestliže měl startovní číslo $\binom{42}{16}$

Určíme nejprve obecně, kolikátým členem uvažované posloupnosti kombinačních čísel je startovní číslo $\binom{n}{k}$. Za tímto účelem seskupíme

členy této posloupnosti, do skupin tak, aby každá dvě kombinační čísla

$\binom{n}{k}$ a $\binom{r}{s}$ byla v téže skupině právě tehdy, když je $n + k = r + s$:

$$\left[\binom{1}{1} \right], \left[\binom{2}{1} \right], \left[\binom{3}{1}, \binom{2}{2} \right], \left[\binom{4}{1}, \binom{3}{2} \right], \left[\binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3} \right], \left[\binom{6}{1}, \binom{5}{2}, \binom{4}{3} \right], \\ \left[\binom{7}{1}, \binom{6}{2}, \binom{5}{3}, \binom{4}{4} \right], \dots$$

V první skupině je tedy pouze číslo $\binom{1}{1}$, ve druhé jen číslo $\binom{2}{1}$, ve

třetí jenom kombinační čísla $\binom{3}{1}$ a $\binom{2}{2}$, ve čtvrté pouze kombinační

čísla $\binom{4}{1}$ a $\binom{3}{2}$ atd. Všimneme-li si, že na prvním místě m -té skupiny je

kombinační číslo $\binom{m}{1}$, snadno určíme, v kolikáté skupině je číslo $\binom{n}{k}$.

Vzhledem k tomu, že číslo $\binom{n}{k}$ patří do téže skupiny jako číslo

$\binom{n+k-1}{1}$ a protože toto kombinační číslo je na prvním místě této skupiny, je číslo $\binom{n}{k}$ v $(n+k-1)$ -ní skupině.

Pořadové číslo členu $\binom{n}{k}$ dané posloupnosti — označíme je $p(n, k)$ — dostaneme zřejmě tak, že sečteme počty členů všech skupin, které jsou před skupinou obsahující číslo $\binom{n}{k}$, a k tomuto součtu přičteme ještě číslo k , neboť $\binom{n}{k}$ je ve své skupině na k -tém místě. Je tedy např.:

$$p(5, 1) = (1 + 1 + 2 + 2) + 1 = 7,$$

$$p(5, 2) = (1 + 1 + 2 + 2 + 3) + 2 = 11,$$

$$p(5, 3) = (1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3) + 3 = 15.$$

Zavedeme-li pro počet členů m -té skupiny označení p_m , dostáváme pro pořadové číslo $p(n, k)$ členu $\binom{n}{k}$ v uvažované posloupnosti tento vztah:

$$p(n, k) = (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n+k-2}) + k.$$

Porovnáním počtu členů jednotlivých skupin se můžete přesvědčit, že

pro m sudé je $p_m = \frac{m}{2}$, zatímco pro m liché je $p_m = \frac{m+1}{2}$. Vztah pro

$p(n, k)$ lze tedy ještě upravit v závislosti na tom, zda $n+k$ je číslo sudé nebo liché:

jestliže $n+k$ je sudé číslo, platí:

$$\begin{aligned} p(n, k) &= \left(1 + 1 + 2 + 2 + \dots + \frac{n+k-2}{2} + \frac{n+k-2}{2} \right) + k = \\ &= \frac{(n+k-2)(n+k)}{4} + k; \end{aligned}$$

jestliže $n+k$ je liché číslo, platí:

$$\begin{aligned} p(n, k) &= \left(1 + 1 + 2 + 2 + \dots + \frac{n+k-3}{2} + \frac{n+k-3}{2} + \right. \\ &\left. + \frac{n+k-1}{2} \right) + k = \frac{(n+k-1)^2}{4} + k \end{aligned}$$

Dostáváme tak tento výsledek: kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je ve výše uvedené posloupnosti kombinačních čísel na místě

$\left(\frac{(n+k-2)(n+k)}{4} + k \right)$ -tém, je-li $n+k$ sudé, a na místě

$\left(\frac{(n + k - 1^2)}{4} + k \right)$ -tém, je-li $n + k$ liché.

Pro startovní číslo $\binom{42}{16}$ profesora Ypsilon je tedy

$$p(42, 16) = \frac{(42 + 16 - 2)(42 + 16)}{4} + 16 = 828,$$

což znamená, že profesor Ypsilon vybíhal na trať patamatikovského krosu jako 828. závodník. Došlo k tomu v okamžiku, kdy od startu

prvního závodníka uplynulo $\frac{827}{2}$ minut, tj. 6 hodin 53 minut 30 sekund.

Profesor Ypsilon tedy vyběhl na trať, když patamatikové hodiny ukazovaly 14 hodin 50 minut 30 sekund.

Zlí jazykové tvrdí, že pak během několika okamžiků zmizel v hlubokém lese a že byl pátracími četami pořadatelů nalezen až krátce po půlnoci v hájovně Pod smrskem, s jejímž osazenstvem právě diskutoval o vzájemné souvislosti patamatematiky a přespolečných běhů.

Jedna matematická zábava

Dr. JOSEF STRAKA, VŠZ Praha

V knížce 777 matematických zábav a her od autorů *Novoveského, Křižalkoviče a Lečka* (SPN, Praha 1983) je na str. 112 uveden příklad 14, ve kterém je daný kruh dělen jistými přímkami na určitý počet částí tohoto kruhu a je zde napsáno, že je možno dokázat, že maximální počet

částí daného kruhu je určen vzorcem $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$, kde n je počet přímek, které kruh protínají. Dohodneme se, že sečnou kruhu rozumíme přímku, která je sečnou hraniční kružnice. Dokážeme platnost uvedeného vzorce pro všechna přirozená čísla a v druhé části článku úlohu rozšíříme.

Nejdříve však připomeneme jeden typ matematického důkazu, tzv. matematickou indukci, kterou se dokazuje platnost nějakého vztahu nebo vzorce pro všechna přirozená čísla n nebo alespoň pro všechna ta z nich, která jsou větší než určité přirozené číslo n_0 . Důkaz tvoří dva kroky.

- a) Ověříme platnost daného vzorce pro konkrétní přirozené číslo n , zpravidla pro první možné.
 b) Z předpokladu, že daný vzorec platí pro libovolné přirozené číslo n , dokážeme, že platí i pro přirozené číslo $n + 1$.

Tím je daný vztah (vzorec) dokázán matematickou indukcí pro každé přirozené číslo. Vskutku, podle a) se např. dosazením přesvědčíme, že vzorec platí pro přirozené číslo 1. Podle b) platí též vzorec i pro přirozené číslo $1 + 1 = 2$, tedy také pro přirozené číslo $2 + 1 = 3$, atd. Vztah (vzorec) tedy opravdu platí pro všechna přirozená čísla. Pro názornost dokážeme tímto způsobem známou rovnost, které v dalším využijeme. Dokážeme, že

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1). \quad (1)$$

- a) Pro $n = 1$ se dosazením přesvědčíme, že platí rovnost

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1).$$

- b) Z předpokladu, že pro libovolné přirozené číslo n platí vzorec (1), dokážeme, že platí i pro přirozené číslo $n + 1$, tj. máme dokázat

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2). \quad (2)$$

Přičteme-li k rovnosti (1) přirozené číslo $n + 1$, dostaneme $1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{1}{2} n (n + 1) + n + 1 = (n + 1) \left(\frac{1}{2} n + 1 \right) = \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2)$, což je vzorec (2). Jistě víte, že pro úspornost

můžeme levou stranu v (1) napsat např. symbolem $\sum_{k=1}^{k=n} k$.

Nyní se již můžeme zabývat úlohou v úvodu článku. Dokážeme, že maximální počet částí daného kruhu je určen vzorcem $\frac{1}{2} (n^2 + n + 2)$, kde n je počet sečen daného kruhu.

Prohlédněte si pozorně obrázky 1 až 5. První až pátý kruh obsahuje postupně 2, 4, 7, 11, 16 částí. Dosadíte-li do uvedeného vzorce postupně přirozená čísla 1, 2, 3, 4, 5, dostanete právě uvedený maximální počet částí daného kruhu. Např. pro $n = 10$ dostanete maximálně 56 částí.

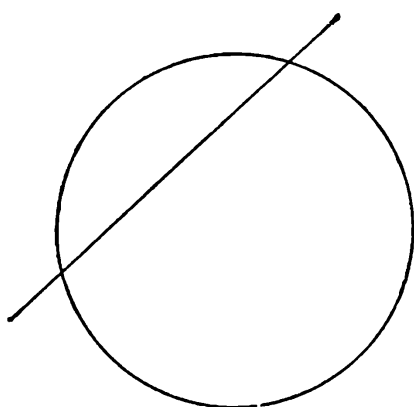
Sestavme si přehlednou tabulku, která nás dovede k cíli.

Přirozené číslo n (počet sečen)	Vhodné vyjádření maximálního počtu částí daného kruhu
$n = 1$	2
$n = 2$	$2 + 2$
$n = 3$	$2 + 2 + 3$
$n = 4$	$2 + 2 + 3 + 4$
$n = 5$	$2 + 2 + 3 + 4 + 5$
$n = 10$	$2 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 + 10$
n	$2 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = 1 + 1 + 2 +$ $+ 3 + \dots + n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 +$ $+ \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} (n^2 + n + 2)$

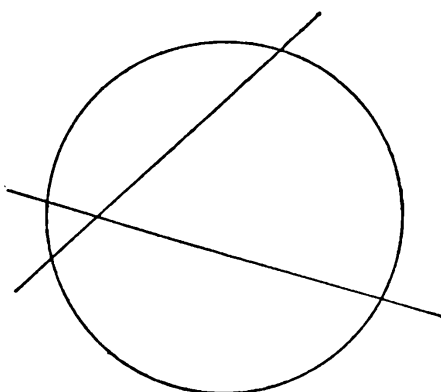
Poznámka: V úloze se dosud nehovořilo o tom, jakou vzájemnou polohu musí mít sečny daného kruhu, aby počet částí kruhu byl maximální. Rozvážíte-li si úlohu podrobněji, dojdete k závěru, že maximální počet částí kruhu vznikne z takových n sečen, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, žádné tři z nich neprocházejí týž průsečíkem a všechny průsečíky jsou vnitřními body kruhu. Takových průsečíků, jak sami zjistíte, je

právě $\frac{1}{2} n(n-1)$. Např. v obr. 5 (pro $n = 5$) opravdu vychází $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 =$

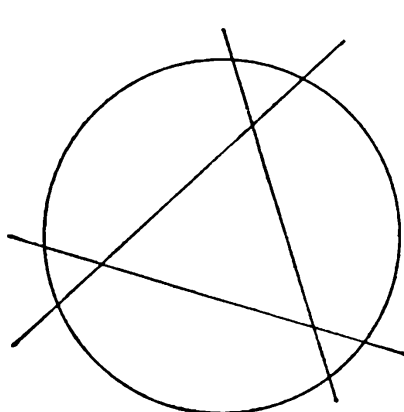
$= 10$ průsečíků. Jinak řečeno: Každá sečna musí obsahovat právě $n-1$ průsečíků se zbývajících sečnami, které jsou všechny vnitřními body kruhu. Těchto $n-1$ průsečíků jisté sečny se zbývajících sečnami určuje spolu s průsečíky s hraniční kružnicí n úseček, z nichž každé dvě mají společný nejvýše jeden krajní bod, a každá z těchto úseček rozděluje právě jednu již existující část kruhu na dvě části. Např. obr. 6, 7 a 8 nevyhovují maximálnímu počtu částí kruhu právě z výše uvedeného důvodu. Z nich je patrné, že kruh může být sečnami rozdělen také na menší počet částí. Je-li např. i počet sečen navzájem rovnoběžných,



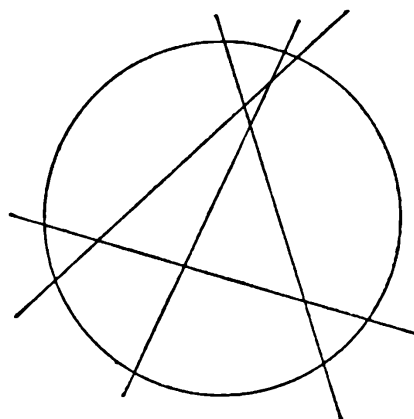
Obr. 1



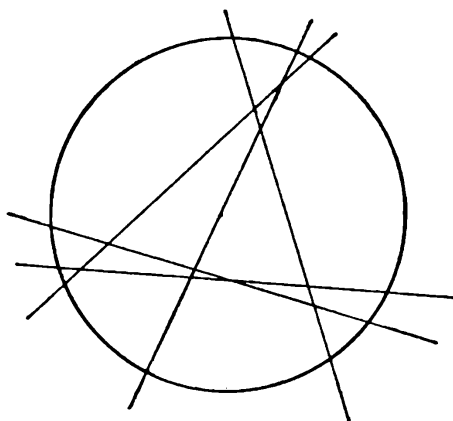
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



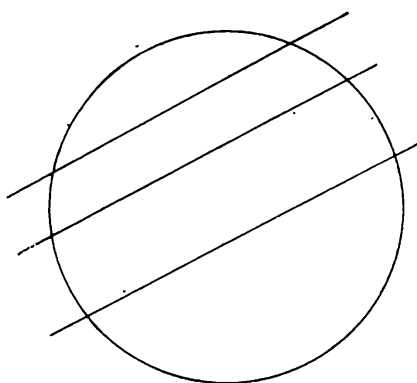
Obr. 5

vznikne $i + 1$ částí kruhu. Táž situace může nastat také při jiné vzájemné poloze sečen.

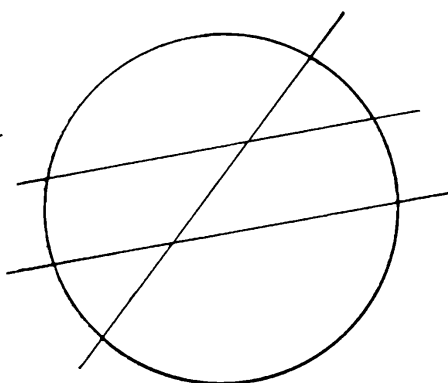
Uvedený vzorec však můžeme dokázat matematickou indukcí i jinak. Propočítejte si, že pro každé přirozené číslo n platí rovnost

$$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2) + (n + 1) = \frac{1}{2}[(n + 1)^2 + (n + 1) + 2].$$

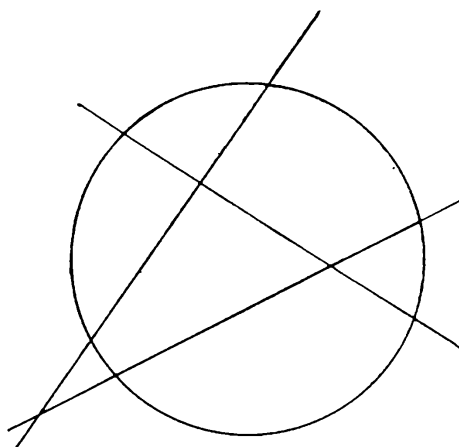
Rozšířme naši úlohu a ptejme se, pro která přirozená čísla n je číslo



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ sudé, resp. liché. Jinak řečeno: Kolik musí být dáno sečen daného kruhu (vyhovujících výše uvedené poznámce), aby maximální počet částí kruhu byl udán sudým, resp. lichým přirozeným číslem?

Pro další stručné vyjádření označme množinu všech přirozených čísel symbolem N . Jestliže si tabulku na str. 270 rozšíříme např. až do přirozeného čísla $n = 20$, zjistíme, že pro přirozená čísla

$$1, 2; 5, 6; 9, 10; 13, 14; 17, 18 \quad (3)$$

dostaneme sudý počet částí kruhu postupně vyjádřený čísly 2, 4; 16, 22; 46, 56; 92, 106; 154, 162. Pro přirozená čísla

$$3, 4; 7, 8; 11, 12; 15, 16; 19, 20 \quad (4)$$

dostaneme lichý počet částí kruhu postupně vyjádřený čísly 7, 11; 29, 37; 67, 79; 121, 137; 191, 211.

Zamyslíme-li se nad čísly (3), snadno objevíme, že přirozená čísla 1, 5, 9, 13, 17, ... jsou právě ta přirozená čísla, která při dělení čtyřmi dají zbytek 1. Všechna taková přirozená čísla můžeme vyjádřit zápisem $4k - 3 \wedge k \in N$. Obdobně čísla 2, 6, 10, ... můžeme zapsat ve tvaru $4k - 2 \wedge k \in N$. Lze tedy čísla (3) úsporně vyjádřit ve tvarech

$$4k - 3 \wedge k \in N \quad \vee \quad 4k - 2 \wedge k \in N \quad (3')$$

a čísla (4) ve tvarech

$$4k - 1 \wedge k \in N \quad \vee \quad 4k \wedge k \in N. \quad (4')$$

Nyní již můžeme dokázat následující tvrzení. Pro přirozená čísla tvaru (3') je počet částí kruhu vyjádřen sudým přirozeným číslem a pro přirozená čísla tvaru (4') lichým přirozeným číslem, kde čísla (3'), resp. (4') udávají počet sečen daného kruhu. Na ukázkou dokážeme tvrzení pro

přirozená čísla $n = 4k - 3 \wedge k \in N$. Dosadíme-li do vzorce $\frac{1}{2}(n^2 +$

$+ n + 2)$, postupně dostaneme $\frac{1}{2}[(4k - 3)^2 + 4k - 3 + 2] = 8k^2 - 10k + 4 = 2(4k^2 - 5k + 2)$, což je vskutku tvar sudých přirozených čísel. (Kvadratický trojčlen v poslední závorce je nerozložitelný v oboru

všech reálných čísel a pro každé přirozené číslo k nabývá jen kladných hodnot. Je tedy kvadratický trojčlen přirozeným číslem a jeho dvojnásobek je sudé přirozené číslo.)

Obdobně po dosazení přirozených čísel $n = 4k - 1 \wedge k \in N$ do výrazu $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ dostaneme celkem $2(4k^2 - k) + 1$, což je tvar lichých přirozených čísel.

Ostatní dva případy si ověřte sami jako vhodné cvičení.

Závěr.

Uvažování nad matematickým problémem v mnoha případech (ne-li ve všech) začíná právě hrou, zábavou, experimentováním, a to může přerůst ve vnitřní motiv hlubšího zkoumání daného problému. Právě takový účel mají mít různé matematické hry či zábavy, které mohou velkou mírou přispět k rozvoji tvůrčího matematického myšlení.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Fyzika

4. Dřevěný váleček, který má výšku 5 cm a poloměr podstavy 4 cm, plave na hladině vody v nádobě tak, že je ponořen do 3/4 své výšky. (Podstavy válečku jsou vodorovné.) Na hladinu vody nalijeme vrstvu oleje tak, aby hladina oleje byla ve stejné rovině jako podstava válečku.

Hustota oleje je $650 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jak vysoká je vrstva oleje? Jak se bude váleček chovat, budeme-li olej na hladinu dále přilévat?

(Došlo 52 řešení)

Pavla Zieleniecová

Autorské řešení:

Budiž V objem válečku, V_1 objem části válečku ponořené ve vodě, V_2 objem části válečku ponořené v oleji, ρ hustota dřeva, ρ_1 hustota vody, ρ_2 hustota oleje.

Na váleček plovoucí na vodě s vrstvou oleje působí tři síly: ve směru svisle dolů tíhová síla $G = \rho Vg$, ve směru svisle nahoru vztlaková síla ve vodě $F_1 = \rho_1 V_1 g$, ve směru svisle nahoru vztlaková síla v oleji $F_2 = \rho_2 V_2 g$. Váleček je v rovnováze, tj. výslednice sil, které na něj působí, je nulová: $G = F_1 + F_2$, uvážíme-li směr působících sil. Po dosazení za G , F_1 a F_2 do této rovnosti a po úpravě dostaneme:

$$\rho V = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2. \quad (1)$$

Je-li r poloměr válečku, v jeho výška a d výška olejové vrstvy, tj. výška části válečku ponořené v oleji, je

$$V = \pi r^2 v, \quad V_1 = \pi r^2 (v - d), \quad V_2 = \pi r^2 d.$$

Po dosazení za V , V_1 , V_2 do rovnosti (1) dostaneme po úpravě tento výsledek:

$$d = v \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (2)$$

Hustotu ρ dřeva, z něhož je váleček zhotoven, určíme z hloubky ponoření válečku plovoucího ve vodě bez oleje.

Na váleček plovoucí na vodě působí také tři síly: tíhová síla ve směru svisle dolů $G = \rho Vg$, vztlaková síla ve vodě svisle nahoru $F_3 = \rho_1 V_3 g$, vztlaková síla F_4 ve vzduchu svisle nahoru. Velikost vztlakové síly F_4 je ve srovnání s tíhovou silou a vztlakovou silou ve vodě zanedbatelně malá. Váleček je opět v rovnováze, tj. $G = F_3$, čili

$$\rho Vg = \rho_1 V_3 g$$

$$\rho \pi r^2 v = \rho_1 \pi r^2 \cdot \frac{3}{4} v,$$

$$\rho = \frac{3}{4} \rho_1$$

Dosadíme-li nyní za ρ do rovnosti (2), dostaneme po úpravě tento výsledek:

$$d = \frac{v}{4} \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Za hustotu vody dosazujeme $\rho_1 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, takže dostaneme

$$d = \frac{5}{4} \frac{1000}{1000 - 650} \text{ cm} = 3,6 \text{ cm}.$$

Tloušťka olejové vrstvy je ve chvíli, kdy hladina oleje dosáhne úrovně horní podstaty válečku, rovna 3,6 cm.

Budeme-li olej dále přilévat, nebude se poloha válečku vzhledem k rozhraní voda—olej měnit. Olej sice překryje i horní podstavu válečku, ale vztlakové síly F_1 a F_2 se tím nezmění; podmínka pro rovnováhu a s ní výraz pro výšku d části válečku ponořené v oleji se nezmění. Zároveň vidíme, že hloubka ponoření válečku ve vodě a v oleji nezávisí na jeho poloměru; v zadání úlohy je tedy údaj o poloměru zbytečný.

5. Malá olejová kapička o hmotnosti m kladně nabitá nábojem Q se pohybuje mezi vodorovnými deskami kondenzátoru, které jsou od sebe vzdáleny o d . Nabijeme-li kondenzátor tak, že horní deska bude kladná a napětí na deskách bude U , bude se kapička pohybovat tak, že se její rychlost ustálí na velikosti v a bude orientována ve směru dolů. Jaké napětí U' musí být na kondenzátoru, má-li se rychlost kapičky ustálit na stejné velikosti v , ale ve směru nahoru?

(Došlo 51 řešení)

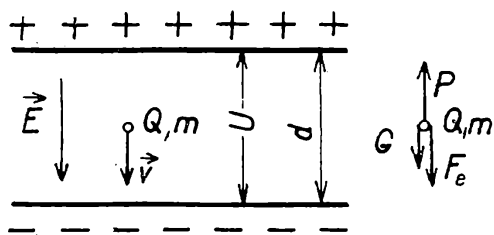
Pavla Zieleniecová

Řešení Alžběty Paksyové, 4 B G s maďarským vyučovacím jazykem v Šamoríně:

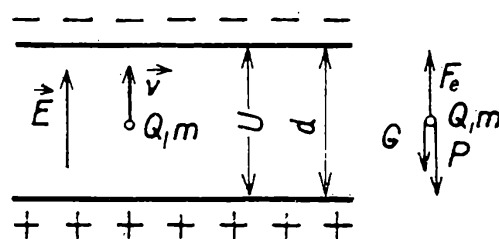
Kvapka o hmotnosti m kladně nabitá nábojem Q se pohybuje mezi vodorovnými deskami kondenzátoru. Intenzita elektrického pole bude

$$E = \frac{U}{d}.$$

Keď je kondenzátor nabitý tak, že horná deska bude kladná, ide o situá-



Obr. 1



Obr. 2

ciu na obr. 1. Na olejovú kvapku, ktorá sa pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}$ v smere dolu, pôsobia následujúce sily:

Sila odporu prostredia $\mathbf{P}$ orientovaná zvisle nahor,
gravitačná sila $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ zvisle nadol,

elektrická sila (zvisle nadol) $\mathbf{F}_e = \mathbf{E}Q$, $F_e = \frac{U}{d} Q$.

Kulôčka sa pohybuje konstantnou rýchlosťou, teda výslednica všetkých síl sa rovná nule, t. j.

$$P = G + F_e,$$

$$P = mg + \frac{U}{d} Q.$$

Aby sa kvapka pohybovala smerom nahor, musí sa zmeniť polarita napätia (dolná doska bude kladná). Ak napätie je U' , potom na olejovú kvapku pôsobia sily (obr. 2):

elektrická sila o veľkosti $F_e = \frac{U'}{d} Q$ (nahor),

gravitačná sila o veľkosti $G = m \cdot g$ (nadol),

sila odporu P , ktorá je taká veľká ako v predchádzajúcej situácii (lebo rýchlosť je taká veľká), ale opačne orientovaná.

Aj teraz platí, že výslednica všetkých síl sa rovná nule, takže

$$F_e = G + P,$$

$$\frac{U'}{d} Q = 2mg + \frac{U}{d} Q,$$

$$U' = \frac{2mgd}{Q} + U$$

Na kondenzátore musí byť o $\frac{2mgd}{Q}$ väčšie napätie ako v prvom prípade a toto napätie musí byť opačne orientované ako U .

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány dvě mimoběžky α , β a rovina β , která neobsahuje žádnou z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož prostorová osa je přímka α a jehož vrcholy leží po řadě v přímce α , resp. v rovině β . (Prostorová osa čtverce je přímka, která prochází středem čtverce kolmo k jeho rovině.)
(Došla 2 řešení)

Stanislav Horák

Autorovo řešení.

Přímku α otočíme o 90° kolem osy α do polohy α' . Průsečík $B = \alpha' \cap \beta$ je jeden vrchol žádaného čtverce. Otočíme-li vrchol B kolem osy α zpět na přímku α , dostaneme vrchol A čtverce. Otočíme-li vrchol B kolem osy α o 90° v původním smyslu, dostaneme třetí vrchol čtverce C . Tím známe tři vrcholy čtverce a úloha je v podstatě vyřešena.

Úloha má jediné řešení právě tehdy, když přímka α' je s rovinou β různoběžná.

Může se však stát, že přímka α' je rovnoběžná s rovinou β a tu jsou myslitelné dvě možnosti

a) přímka a' neleží v rovině β , nemá tudíž s rovinou β žádný společný bod a úloha nemá řešení.

b) přímka a' leží v rovině β . Potom úloha má nekonečně mnoho řešení, neboť každý bod přímky a' můžeme považovat za vrchol B hledaného čtverce.

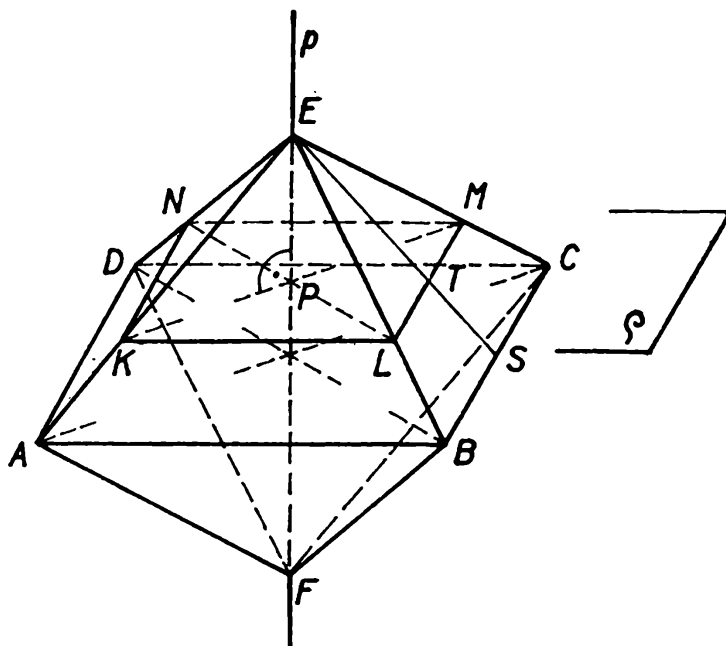
2. Je dána přímka p a bod T , který není bodem přímky p . Sestrojte pravidelný osmistěn, který má tělesovou úhlopříčku v přímce p a střed jedné stěny v bodu T .

(Došlo 5 řešení)

Emil Kraemer

Upravené řešení Jána Kováče, 4A G Poprad:

Střed T stěny BCE pravoúhlého osmistěnu $ABCDEFGF$ je zároveň těžištěm trojúhelníku BCE ; střed hrany BC budiž S (obr. 3). Rovina $\varrho \perp p$ procházející bodem T protíná osmistěn ve čtverci $KLMN$, jehož



Obr. 3

střed je průsečík P přímky p s rovinou ϱ . Zároveň je $KL \parallel MN \parallel AB$, $LM \parallel NK \parallel BC$; z toho plyne, že trojúhelník KLE je rovnostranný. Čtverec $KLMN$ je stejnoolehý ke čtverci $ABCD$ podle středu E ; koeficient této stejnoolehlosti je

$$k = \frac{|ET|}{|ES|} = \frac{2}{3}.$$

Z provedeného rozboru plyne tato konstrukce:

1. Bodem T vedeme rovinu $\varrho \perp p$.
2. Sestrojíme bod $P = p \cap \varrho$.
3. V rovině ϱ sestrojíme čtverec $KLMN$ mající střed P a střed strany LM v bodu T .
4. Sestrojíme kulovou plochu κ , která má střed v bodu K

a poloměr $r = |KL|$. 5. Sestrojíme průsečík E plochy κ s přímkou p . 6. Sestrojíme čtverec $ABCD$ jako obraz čtverce $KLMN$ ve stejnolehlosti se středem E a koeficientem

$$k' = \frac{1}{k} = \frac{3}{2}$$

7. Sestrojíme bod F souměrně sdružený k bodu E podle roviny čtverce $ABCD$.

Z konstrukce plyne, že sestrojený osmistěn $ABCDEFGF$ je pravidelný a splňuje dané podmínky. Všechny kroky konstrukce kromě konstrukce bodu E mají jedno řešení. Konstrukce bodu E má dvě řešení, neboť vzdálenost přímky p od středu K kulové plochy κ je

$$d = |KP| = |KL| \frac{\sqrt{2}}{2} < |KL| = r.$$

Úloha má dvě řešení; sestrojené osmistěny jsou souměrně sdružené podle roviny ρ

3. Body A, B, C, D kružnice k jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku; tečny kružnice k sestrojené v bodech A, B, C, D omezují rovněž konvexní čtyřúhelník. Dokažte, že úhlopříčky obou těchto čtyřúhelníků procházejí tímž bodem. (K důkazu užíjte přímek, z nichž každá má od roviny kružnice k odchylku 45° .)

(Došlo 1 řešení)

Emil Kraemer

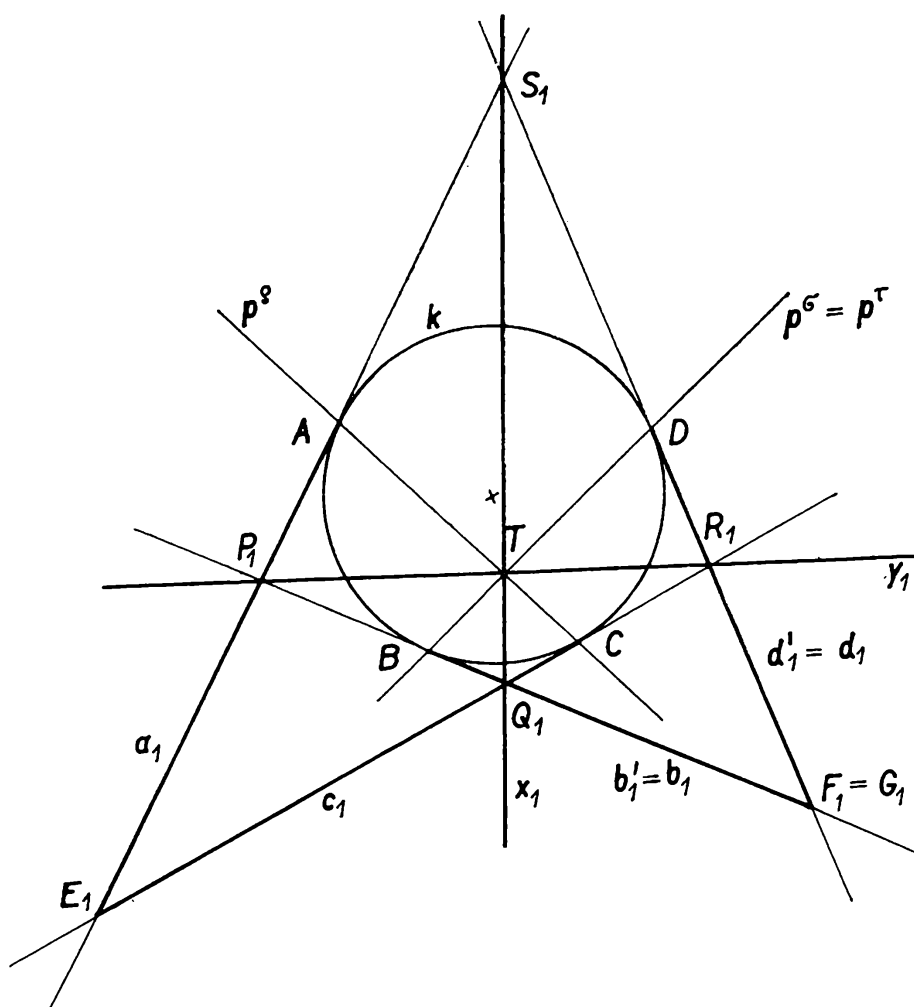
Autorovo řešení:

Kružnice k a její tečny a_1, b_1, c_1, d_1 sestrojené po řadě v bodech A, B, C, D leží v rovině π . Předpokládejme nejprve, že tečny a_1, b_1, c_1, d_1 omezují různoběžník $P_1Q_1R_1S_1$; označení jeho vrcholů volme takto:

$$P_1 = a_1 \cap b_1, Q_1 = b_1 \cap c_1, R_1 = c_1 \cap d_1, S_1 = d_1 \cap a_1.$$

Potom existují také body $E_1 = a_1 \cap c_1, F_1 = b_1 \cap d_1$ (obr. 4). Rovina π rozděluje prostor ve dva navzájem opačné poloprostory, které označíme $+\pi, -\pi$. Je-li rovina π vodorovná, můžeme za poloprostor $+\pi$ zvolit ten, jehož vnitřní body leží nad rovinou π .

Tečna a_1 je pravoúhlým průmětem (do roviny π) přímky a , která prochází bodem A a má od roviny π odchylku 45° ; ze dvou možných přímek a zvolme tu, jejíž body náležející poloprostoru $+\pi$ mají průměty na polopřímce AE_1 . Obdobně tečna c_1 je pravoúhlým průmětem přímky c , která prochází bodem C a má od roviny π odchylku 45° ; ze dvou možných přímek c zvolme tu, jejíž body náležející poloprostoru $+\pi$ mají průměty na polopřímce CE_1 . Z konstrukce přímek a, c a z rovnosti $|E_1A| = |E_1C|$ plyne, že přímky a, c se protínají v bodu E , jehož pravoúhlý průmět do roviny π je bod $E_1 = a_1 \cap c_1$. Různoběžky a, c určí rovinu $\rho = ACE$, která protíná rovinu π v přímce $p^e = AC$.



Obr. 4

Zcela obdobně existují různoběžky b , d mající v rovině π pravoúhlé průměty b_1 , d_1 . Průsečík F_1 přímek b_1 , d_1 je pravoúhlým průmětem bodu $F = b \cap d$, který leží uvnitř poloprostoru $+\pi$. Přímka b prochází bodem B , přímka d prochází bodem D ; každá z těchto přímek má od roviny π odchylku 45° . Různoběžky b , d určí rovinu $\sigma = BDF$, která protíná rovinu π v přímce $p^\sigma = BD$. Průsečík T přímek $p^\rho = AC$, $p^\sigma = BD$ je společným bodem rovin ρ , σ ; proto je bodem jejich průsečnice x .

Z konstrukce přímek b , c a z rovnosti $|Q_1B| = |Q_1C|$ plyne, že se přímky b , c protínají v bodu Q , jehož pravoúhlý průmět do roviny π je bod $Q_1 = b_1 \cap c_1$. Bod Q leží na přímce c , a tedy v rovině ρ ; zároveň leží na přímce b , a tedy v rovině σ . Průsečnice x rovin ρ , σ tedy prochází bodem Q . Zcela obdobně zjistíme, že přímka x prochází průsečíkem S přímek a , d , jehož pravoúhlý průmět do roviny π je bod $S_1 = a_1 \cap d_1$. Pravoúhlý průmět přímky $x = \rho \cap \sigma$ je tedy přímka $x_1 = Q_1S_1$, která prochází bodem T (neboť bod T splývá se svým pravoúhlým průmětem do roviny π).

Sestrojíme přímku b' souměrně sdruženou k přímce b podle roviny π a přímku d' souměrně sdruženou k přímce d podle roviny π . Přímky b' , d' se protínají v bodu G , jehož pravoúhlý průmět G_1 do roviny π splývá s bodem F_1 . Různoběžky b' , d' určí rovinu $\tau = BDG$, která protíná rovinu π v přímce $p^\tau = BD = p^\sigma$. Průsečnice y rovin ϱ , τ prochází tedy bodem $T = p^\varrho \cap p^\tau$. Stejně jako dříve zjistíme, že se přímky b' , a protínají v bodu P , jehož pravoúhlý průmět do roviny π je bod P_1 ; přímky d' , c se protínají v bodu R , jehož pravoúhlý průmět do roviny π je bod R_1 . Průsečnice y rovin ϱ , τ prochází body P , R a také bodem T ; proto její pravoúhlý průmět y_1 do roviny π prochází body P_1 , R_1 , T .

Jestliže přímky a_1 , b_1 , c_1 , d_1 omezují lichoběžník, v němž je např. $a_1 \parallel c_1$, pak je důkaz v podstatě stejný. Rozdíl je v tom, že přímky a , c jsou nyní rovnoběžné; leží však opět v rovině ϱ , která protíná rovinu π v přímce $p^\varrho = AC$. Je-li $a_1 \parallel c_1$, $b_1 \parallel d_1$, je postup důkazu opět týž; rozdíl je v tom, že je $a \parallel c$, $b \parallel d$.

OLYMPIÁDY A SOČ

Z úloh matematickej olympiády v ZSSR

PhDr. MARIÁN GNOTH, Pedagogická fakulta Nitra

V Sovietskom zväze sa okrem všezväzových matematických olympiád každoročne usporadúvajú aj školské matematické olympiády jednotlivých ročníkov základných škôl — a to od 4. až po 10. ročník. Olympiády týchto ročníkov predchádzajú okresným, oblastným, republikovým a všezväzovým matematickým olympiádám. Najúspešnejší žiaci sú potom neskôr účastníkmi veľkých medzinárodných matematických olympiád, kde dokumentujú vysokú úroveň sovietskej matematiky ako vedy. V tomto krátkom článku na ilustráciách niekoľkých príkladov poukážeme na to, pred aké úkoly v rámci MO sú vystavení žiaci 10. ročníka základnej školy. Uvádzané príklady sú citované z brožúrky *Matematičeskije olympiady školnikov* (posobiye dlja učitelej, Prosveščeniye, Moskva 1982) od I. S. Petrakova.

Príklad č. 1:

Dokážte, že platí:

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-1) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} = 2^n$$

kde n je ľubovoľné prirodzené číslo.

Príklad č. 2:

Určte súčet

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n}$$

Príklad č. 3:

Dve kružnice o polomeroch R a r sa navzájom zvonka dotýkajú v bode T . Priamka p je spoločnou dotyčnicou oboch kružníc v bodoch A a C . Určte polomer kružnice, ktorá je vpísaná krivočiaremu „trojuholníku“ ACT .

Príklad č. 4:

Vo vnútri pravouhlého trojuholníka $\triangle ABC$ s pravým uhlom pri vrchole C zvolte bod M tak, aby trojuholníky $\triangle AMB$, $\triangle BMC$, a $\triangle AMC$ mali rovnaký obsah. Dokážte, že platí:

$$5 \cdot |MC|^2 = |MB|^2 + |MA|^2$$

Riešenia

Príklad 1:

Označme danú výrokovú formu symbolom $V(n)$. Správnosť výrokovej formy pre ľubovoľné prirodzené číslo $n \in N$ dokážeme metódou matematickej indukcie:

1. Pre $n = 1$ vyplýva $V(1) \equiv \left[\frac{1+1}{2 \cdot 1 - 1} = 2^1 \right]$, tj. $2 = 2$, čiže

$V(1)$ je pravdivý výrok.

2. Nech tvrdenie je správne pre $n = k$, tj.

$$V(k) \equiv \left[\frac{(k+1)(k+2)\dots(2k-1) \cdot 2k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)} = 2^k \right]$$

Dokážeme správnosť výrokovej formy pre $n = k + 1$.

Ľavú stranu nášho tvrdenia budeme postupne upravovať nasledovne:

Dosadíme za n výraz $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{(k+2)(k+3)\dots(2k-1) \cdot 2k \cdot (2k+1)(2k+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)(2k+1)} = \\ & = \frac{(k+2)(k+3)\dots(2k-1) \cdot 2k \cdot (2k+1) \cdot 2 \cdot (k+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)(2k+1)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\dots(2k-1) \cdot 2k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)} \cdot \frac{(2k+1) \cdot 2}{2k+1} =$$

$$= 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}.$$

Teda pre výrokovú formu $V(k+1)$ bude platiť:

$$V(k+1) \equiv [2^{k+1} = 2^{k+1}],$$

čo je pravdivý výrok, a keďže k je ľubovoľné prirodzené číslo, tak dané tvrdenie platí pre všetky prirodzené čísla.

Príklad č. 2:

Kvôli určeniu súčtu daného konečného radu si daný rad rozpíšeme:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} +$$

$$+ \dots + \frac{n}{2^n} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] +$$

$$\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] + \dots +$$

$$+ \dots + \left[\frac{1}{2^n} \right].$$

Výrazy v zátvorkách predstavujú konečné geometrické postupnosti s kvocientom $q = \frac{1}{2}$. Dosadíme si ich súčty miesto výrazov v zátvorkách a čiastočne ich upravíme. Dostaneme:

$$S = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} =$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right] - \frac{1}{2^n} (n-2)$$

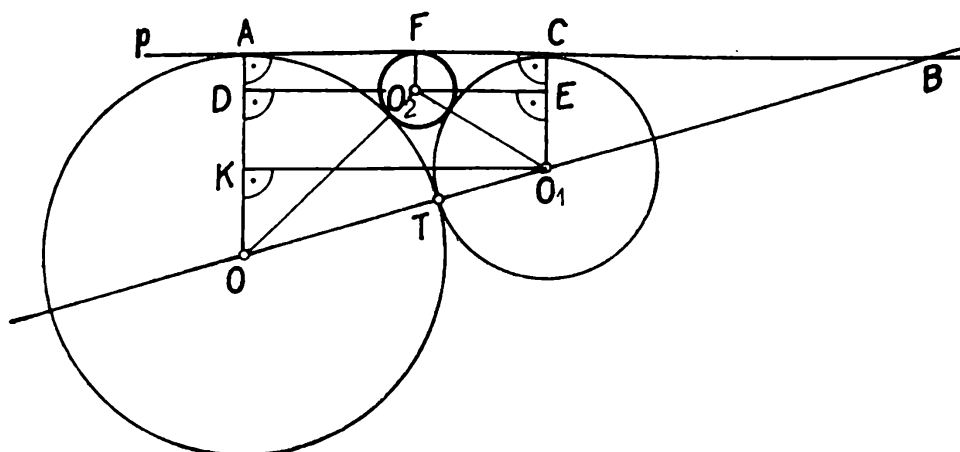
Výraz v zátvorke opäť predstavuje konečný geometrický rad s kvocientom $q = \frac{1}{2}$. Potom súčet daného konečného radu je:

$$S = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$

Príklad č. 3:

Označme vzdialenosti $|DO_2| = m$, $|EO_2| = n$, $|CO_1| = r$, $|OA| = R$, $|FO_2| = x$, $|OO_1| = R + r$ (obr. 1).

Z Pythagorovej vety pre trojuholníky $\triangle OKO_1$, $\triangle ODO_2$, $\triangle O_2EO_1$ vyplýva:



Obr. 1

$$\begin{aligned}(R + r)^2 &= (m + n)^2 + (R - r)^2, \\(R + x)^2 &= (R - x)^2 = m^2, \\(r + x)^2 &= (r - x)^2 + n^2.\end{aligned}$$

Umocnením výrazov v zátvorkách dostávame nasledovné rovnice:

$$\begin{aligned}R^2 + 2rR + r^2 &= m^2 + 2mn + n^2 + R^2 - 2rR + r^2, \\R^2 + 2xR + x^2 &= R^2 - 2xR + x^2 + m^2, \\r^2 + 2xr + x^2 &= r^2 - 2xr + x^2 + n^2.\end{aligned}$$

Z týchto rovníc po malej úprave plynie:

$$\begin{aligned}(m + n)^2 &= 4Rr, \\4Rx &= m^2, \\4rx &= n^2,\end{aligned}\tag{1}$$

resp. vzhľadom na $m = 2\sqrt{Rx}$, $n = 2\sqrt{rx}$ sa rovnica (1) dá napísať vo forme

$$4Rr = [\sqrt{4Rx} + \sqrt{4rx}]^2.$$

Riešením tejto rovnice je

$$x = \frac{Rr}{[\sqrt{R} + \sqrt{r}]^2},$$

čo je polomer hľadanej vpísanej kružnice „trojuholníku“ $\triangle ACT$.

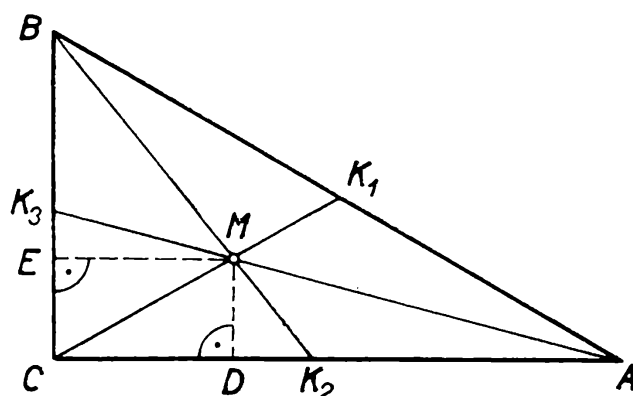
Príklad č. 4:

Nech M je vnútorný bod pravouhlého trojuholníka $\triangle ABC$ s pravým uhlom pri vrchole C . Z podmienky úlohy (obr. 2) vyplýva

$$S_{\triangle AMC} = S_{\triangle BMC},$$

tj. $\frac{1}{2} h_b \cdot b = \frac{1}{2} h_a \cdot a$, kde $h_b = |MD|$, $h_a = |ME|$ sú výšky v trojuhol-

níkoch $\triangle AMC$, resp. $\triangle BMC$. Teda $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$,



Obr. 2

resp. $\text{tg}(\angle K_1CA) = \text{tg}(\angle K_1AC)$, t.j. $\angle K_1AC = \angle K_1CA$, a teda i $CK_1 = AK_1$ ($\triangle ACK_1$ je rovnoramenný trojuholník). Z analogickej úvahy vyplýva zhodnosť strán BK_1 a CK_1 : $|BK_1| = |CK_1|$, čo značí, že úsečka CK_1 je ťažnica na stranu AB . Obsah trojuholníka $\triangle AMC$ je

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} b \cdot |CM| \cdot \sin(\angle K_1CA),$$

alebo tiež

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} b \cdot |CM| \sin(\angle BAC) = \frac{1}{2} b \cdot |CM| \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab \cdot |CM|}{2c}.$$

Teda obsah celého trojuholníka ABC je

$$3 \cdot \frac{ab \cdot |CM|}{2c} = \frac{1}{2} ab.$$

Z tejto rovnice plynie vzťah: $c = 3 \cdot |CM|$.

Keďže $c = 2 |CK_1|$, potom $|CM| = \frac{2}{3} \cdot |CK_1|$, t.j. bod M je priesečník ťažníc trojuholníka $\triangle ABC$, čiže platia vzťahy:

$$|BM| = \frac{2}{3} \cdot |BK_2|, \quad |AM| = \frac{2}{3} \cdot |AK_3|$$

Potom

$$\begin{aligned} |MA|^2 + |MB|^2 &= \frac{4}{9} \left[\left(\frac{1}{4} a^2 + b^2 \right) + \left(\frac{1}{4} b^2 + a^2 \right) \right] = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{1}{4} (5a^2 + 5b^2) \right] = \frac{4}{9} \cdot 5 \cdot |K_1C|^2 = 5 \cdot |MC|^2. \end{aligned}$$

Citované príklady prezrádzajú, že žiakom 10. ročníka základnej školy sa predkladajú náročné úlohy na riešenie a úspešne sa ich môžu zhostiť len tí najlepší. Dva-tri príklady sa na matematickej olympiáde dávajú primerané schopnostiam žiakov a v priemere dve úlohy veľmi náročné, zvládnutie ktorých je možné len talentovaným, nadaným žiakom. Takýmto spôsobom sa v ZSSR vyhľadávajú matematické talenty, ktorým sa potom venuje zvýšená pozornosť.

INFORMACE

Příklady k přijímací zkoušce z matematiky na MFF UK v Praze v r. 1984

RNDr. EMIL CALDA, UK Praha

V rámci přijímacího řízení konali v červnu 1984 uchazeči o studium na matematicko-fyzikální fakultě univerzity Karlovy písemnou zkoušku z matematiky, která pozůstávala z řešení úloh jednoho ze tří souborů A, B, C, na jejich vypracování měli 90 minut čistého času. Zájemci o studium matematiky, resp. fyziky, řešili příklady souboru A, resp. B, uchazečům o studium učitelství matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie byly zadány úlohy ze souboru C. Následující přehled těchto souborů je doplněn o výsledky jednotlivých příkladů, abyste měli možnost porovnat je se svými; je samozřejmé, že studentům u přijímacích zkoušek nebyly tyto výsledky k dispozici.

Soubor A:

1. Určete všechna reálná čísla x , pro které platí

$$\frac{2x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 6} > 1.$$

[Všetchna $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$].

2. Najděte všechna reálná čísla x , která vyhovují rovnici

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

[Nevyhovuje žádné reálné x .]

3. Určete počet všech sudých čísel n , pro něž platí $1000 \leq n < 10\,000$ a která jsou (v desítkové soustavě) zapsána navzájem různými číslicemi. [Počet těchto čísel je 2296.]

4. Najděte rovnici kružnice, která se dotýká obou os soustavy souřadnic a prochází bodem $[2, -1]$. Určete všechna řešení.

[Vyhovují právě dvě kružnice: $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$,
 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$.]

5. Je dána soustava rovnic $ax + 2y = 3b + 3$,
 $(b + 5)x + 4y = 3a + 1$.

Zvětšíme-li každý z parametrů o jednu, dostaneme soustavu rovnic, která má nekonečně mnoho řešení. Určete hodnoty parametrů a, b .

$$\left[a = \frac{16}{9}, b = -\frac{4}{9} \right]$$

Soubor B:

1. V oboru reálných čísel řešte nerovnici

$$\frac{1}{|2x - 3|} + 8 \geq \frac{5}{|3 - 2x|}$$

$$\left[\text{Všechna } x \in (-\infty, \frac{5}{4}) \cup (\frac{7}{4}, \infty) \right]$$

2. Dvojciferné číslo x zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet 9. Záměnou pořadí číslic vznikne číslo, které po vynásobení číslem x dává 1458. Určete všechna taková čísla x .

[Vyhovují právě čísla 18, 81.]

3. Řešte vzhledem k neznámé t (log je označení pro dekadický logaritmus) rovnici

$$-8 \cdot 3^{\log t} + 2 \cdot 9^{\log t} - 90 = 0.$$

[Jediné řešení, $t = 100$.]

4. Na krychli o délce hrany c zvolte jeden vrchol a rovinou, procházející vrcholy sousedními se zvoleným vrcholem, rozdělte krychli na dvě tělesa. Určete, v jakém poměru jsou jejich povrchy.

$$\left[\text{Povrchy jsou v poměru } \frac{4 + \sqrt{3}}{13}, \text{ resp. } \frac{13}{4 + \sqrt{3}} \right]$$

5. Mějme kružnici o poloměru r . Najděte vzorec pro výpočet poměru obsahu pravidelného n -úhelníku této kružnici vepsaného k obsahu pravidelného n -úhelníku této kružnici opsaného (v závislosti na n).

Najděte pak nejmenší n , pro něž je tento poměr větší než $\frac{3}{4}$.

$$\left[\frac{P_v}{P_o} = \cos^2 \frac{\pi}{n}, n = 5 \right]$$

Soubor C:

1. Každý ze dvou podobných obdélníků má jednu stranu dlouhou 15 cm, jeden z nich má obvod 36 cm. Určete obvod druhého, jestliže víte, že obdélníky nejsou shodné.

[Obvod druhého je 180 cm.]

2. Určete souřadnice bodu C , jsou-li body A, B, C vrcholy rovnostranného trojúhelníku a $A = [2, 3], B = [-1, 4]$.

$$\left[c_1 = \left[\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{7 + 3\sqrt{3}}{2} \right], c_2 = \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{7 - 3\sqrt{3}}{2} \right] \right]$$

3. V množině všech reálných čísel řešte nerovnici

$$x \sqrt{x^2} \leq 2x - 1.$$

[Všechna $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup \{1\}$.]

4. Určete všechna reálná x , pro něž platí

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8}.$$

$$\left[x = \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{24} + m \frac{\pi}{2}, k, m \text{ celá.} \right]$$

5. Velikosti stran a, b, c pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou v tomto pořadí třemi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti. Určete $\operatorname{tg} \alpha$ a $\operatorname{tg} \beta$, kde α, β jsou ostré úhly trojúhelníku ABC .

$$\left[\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right].$$

Budete-li na konci školního roku konat přijímací zkoušky na MFF UK v Praze i vy, povšimněte si bysty nad schodištěm ve 2. patře budovy, v níž se obvykle tyto zkoušky konají (budova Ke Karlovu 3). Jde o bystu *Stanislava Vydry*, českého matematika a vlastence, profesora matematiky pražské univerzity, od jehož smrti uplynulo letos 180 let. Připomeňte si při této příležitosti neslavnou prověrku matematických znalostí *F. L. Věky*, kterou byl nucen jako student během jedné z přednášek profesora Vydry podstoupit, a neodkládejte svou přípravu na maturitu ani na přijímací zkoušky na vysokou školu na poslední chvíli!

Z NOVÝCH KNIH

Jan Halada:
OSVÍCENSTVÍ —
VĚK ROZUMU

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1984, 1. vydání, 344 str., 60 obr., brož., 21,— Kčs.

O osvícenství jste slyšeli při hodinách dějepisu a české literatury. Pro někoho může být překvapením, že v Rozhledech matematicko-fyzikálních upozorňujeme na

knížku, která se zabývá tímto hnutím z 18. století. Důvod naznačuje obálka, na níž je portrét francouzského matematika *Jeana le Ronda d'Alemberta*, který spolu s *Denisem Diderotem* redigoval slavnou Encyklopedii.

Osvícenství byl velmi široký myšlenkový proud, přičemž většina osvícenců se zabývala přírodními vědami, a to především matematikou a fyzikou. V knížce se

např. dozvíte, že známý filozof *François Marie Arouet* — *Voltaire* byl nadšeným stoupencem Newtonovy mechaniky a matematiky. S jeho teoriemi se seznámil za svého pobytu v Anglii a po návratu do vlasti napsal pro francouzské čtenáře knihu „Elementy Newtonovy filozofie.“

Ideály a ideje osvícenství se postupně rozšířily z Francie po celé Evropě i do Ameriky. V celé jedné kapitole se píše o českém a slovenském osvícenství. Zde se setkáváme nejen např. s *Josefem Dobrovským*, ale i s osvícenci matematiky a fyziky, a to s *Josefem Steplingem*, *Janem Tesánkem* a *Bernardem Bolzanem*. Poslednímu z nich je věnována značná pozornost; v příloze mezi ukázkami z děl osvícenců je i výňatek z Bolzanovy práce „O nejlepším státě“ a jeho akademická řeč „O neustálém pokroku lidstva“.

Knížka Osvícenství — věk rozumu je velmi čtivě napsána a každého, kdo má zájem o dějiny přírodních věd v širších souvislostech, jistě zaujme.

Jiří Mída

V. Huťka, E. Benko, J. Žilinková:
**MATEMATIKA I PRE
EKONÓMOV**

V červnu 1984 vyšel v nakladatelství Alfa slovensky psaný první díl učebnice matematiky pro studenty všech směrů Vysoké školy ekonomické. Trojici zkušených autorů se plně podařilo zpracovat přístupnou a srozumitelnou formou základy matematické analýzy při dodržení potřebného stupně korektnosti výkladu.

Knížka je rozvržena do šesti kapitol. V první kapitole navazující na středoškolskou látku jsou shrnuty základy teorie množin potřebné pro další výklad. Druhá kapitola je věnována funkci jedné reálné proměnné, rozšiřuje a upevňuje středoškolské znalosti, zejména pojmy spojitosti a limity funkce. Ve třetí kapitole je vyložen diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné včetně průběhu funkce, Taylorova rozvoje a numerického řešení rovnic. Čtvrtá kapitola obsahuje integrální počet funkce jedné proměnné, a to jak metody výpočtu neurčitých integrálů tak i výklad určitého integrálu s geometrickými i jinými aplikacemi. Pátá kapitola je věnována nekonečným řadám číselným i funkčním, vyšetřování jejich konvergence i stejnoměrné konvergence funkčních řad a rozvojem funkce v nekonečnou potenční řadu. V poslední šesté kapitole je vyložena funkce více proměnných včetně Taylorova rozvoje a extrémů lokálních, vázaných i globálních.

Celý výklad je bohatě doprovázen vhodně volenými příklady (celkem 227), z nichž mnohé jsou aplikací různých ekonomických oblastí a jež ovlivnily i poměrně rozsáhlý počet 368 stran. Kromě těchto propočítaných příkladů, jež usnadní studentům pochopení vykládané látky, jsou na konci každé kapitoly uvedeny texty příkladů v celkovém počtu 122, jež slouží k procvičování; je jen škoda, že nejsou uvedeny výsledky těchto příkladů.

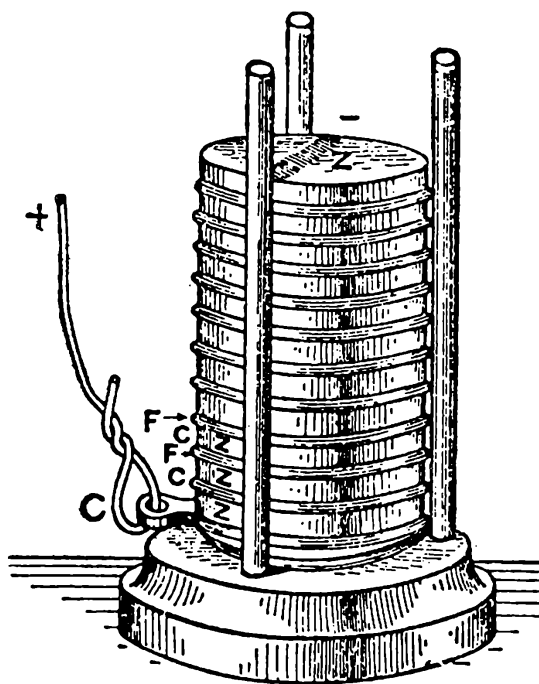
J. Chudý

Voltův sloup

Od dob Gilbertových (1600) do objevu galvanických článků na sklonku 18. století se nauka o elektřině omezovala na elektrostatiku a na popis zajímavých jevů souvisejících s nárazovým, tedy neustáleným elektrickým proudem; říkalo se mu proto „elektrický konflikt“. Nové období dějin nauky o elektřině začalo objevem chemických zdrojů ustáleného stejnosměrného proudu.

Historicky první byl asi v r. 1751 objev *Sulzerho*, který sdělil, že po navlhčení a dotyku olověného a stříbrného proužku pocítil na prvním kyselou a na druhém žíravou chuť. Významnější byl objev lékaře *Galvaniho* (1791), že proud vzniká, dotýká-li se měděný drát nervů a železná deska svalů žáby. Galvani však tvrdil, že tento proud je vždy jen organického původu.

Nejvýznamnějším objevitelem raného období elektrokinetiky se stal *Alessandro Giuseppe Volta* (19. 2. 1745 až 5. 3. 1827). Byl odpůrcem Galvaniho, vytvořil ryze fyzikální teorii vzniku napětí při „vlhkém kontaktu“ dvou různých kovů a popřel biologickou teorii galvanických článků. Jeho teorie triumfovala, když sestrojil první galvanickou baterii, tzv. Voltův



sloup, složený ze série zinkových a měděných kotoučků oddělených sukrem, jež bylo navlhčeno slanou nebo okyselenou vodou. Voltovy úspěchy byly tak velké, že Napoleon ho zbavil povinnosti přednášet, ale zakázal mu odejít do penze, prý se slovy „generál umírá v poli“. Volta vynalezl také elektrofor, tj. citlivý elektroskop se slaměným stéblem, který umožnil kvantitativní pozorování, dále audiometr a přístroj na chemickou analýzu plynů.

Vladimír Molišek

**Nakladatelství MLADÁ FRONTA
vydalo v edici KOLUMBUS:**

E. L. Andronikašvili: VZPOMÍNKY NA KAPALNÉ HÉLIUM

Svěží, s humorem napsané vzpomínky příslušníka mladší generace sovětských fyziků. Čtenář se seznámí se světem „velké vědy“, s mimořádně zajímavými portréty významných světových vědců. Váz. 25 Kčs.

P. L. Kapica: EXPERIMENT, TEORIE, PRAXE

Vynikající světový fyzik, nositel Nobelovy ceny, akademik P. L. Kapica vypráví o půl století své práce a o svých vědeckých objevech, vzpomíná na své učitele a spolupracovníky, formuluje názory na vědeckou činnost a zamýšlí se nad vážnými problémy naší současnosti — životním prostředím, přírodními zdroji a zdroji energie. Váz. 30 Kčs.

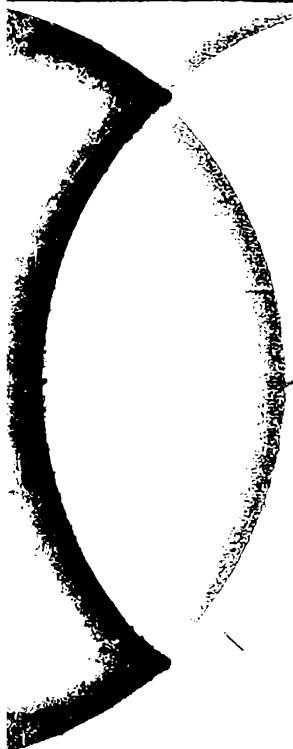
Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3\$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1985.

ROZHLEDY

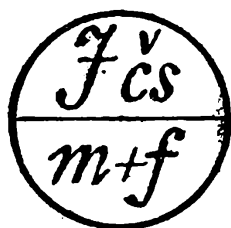
**matematicko
– fyzikální**



**ROČNÍK 63, 1984/85
BŘEZEN**

(7)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko

- fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný CSc., UK,
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, pplk. doc. dr. Ján Chrapan,
CSc., VVTŠ-ČSSP Liptovský Mikuláš
doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha,
doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT
Praha, doc. dr. Hana Kořínková, CSc.,
ÚÚVPP Praha, prof. dr. Vladimír Ma-
jerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Ka-
rel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, doc.
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha. dr. Martin Šolc, CSc.,
UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

K. Šindelář: Funkční pojetí úměrnosti a výpočty	289
J. Šilhán: Programovatelný kalkulátor v různých souvislostech .	293
J. Anděl, P. Anděl: Jak riskovat vědecky	297
J. Kotyk: Vrh šikmo vzhůru	303
B. Vybíral: O teorii relativity trochu jinak I	308
B. Heřmanský: Velká jaderná energie	313
P. Ferko, I. Kmeť: Rozvoj klasické fyziky v prvej polovici 19. storočia	318
J. Pačes: O Ústavu fyzikálních problé- mů v Moskvě	322
A. Michalcová, M. Hejný: Janko Hraško v Paralelölände I	326
D. Kluvanec, I. Volf: 15. MFO	330
Naše soutěž	333
E. Bittnerová: Letná škola mladých fy- zikov	334
J. Šedivý/ Sjezdy JČSMF a JSMF v ro- ce 1984	336
Pohledy do dějin .	. 3. str. obálky

Funkční pojetí úměrností a výpočty

Doc. RNDr. KAREL ŠINDELÁŘ, CSc., ÚÚVPP Praha

Nové pojetí matematiky na naší základní škole upustilo od klasické trojčlenky jako metody řešení úloh o úměrnostech a místo toho používá k řešení takových úloh vyjádření obou úměrností jako funkcí rovnicí, tabulkou nebo kartézským grafem. Je to ve shodě s vývojem novodobé matematiky. Pro aplikace pak toto nové pojetí poskytuje nástroj stejně účinný a někdy dokonce početně ještě schůdnější nežli staré pojetí trojčlenkové. Je jen škoda, že ve svém novém funkčním pojetí pronikají úměrnosti jen velmi zvolna do všech oborů, kde je lze uplatnit, ať jde o přírodní vědy, techniku nebo jiná odvětví lidské činnosti.

Přímá úměrnost vyjádřená rovnicí $y = k \cdot x$ má tu vlastnost, že nulové hodnotě proměnné x odpovídá nulová hodnota funkce y a všechny další dvojice hodnot obou proměnných, které si odpovídají, jsou ve

stejném poměru $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = k$, jehož udavatelem je

právě koeficient (konstanta) této přímé úměrnosti k . Podle toho lze přímou úměrnost mezi funkcemi vždy rozpoznat a pak již použít jejího funkčního vyjádření k řešení příslušné úlohy.

Obdobně nepřímou úměrnost $y = \frac{k}{x}$ charakterizuje ta vlastnost, že součin hodnot obou proměnných, které si v dané nepřímé úměrnosti odpovídají, $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \dots = x_n \cdot y_n = k$, je konstantní a je roven právě koeficientu (konstantě) této nepřímé úměrnosti.

Jako příklad rozřešíme třeba tuto úlohu: Svislý stožár vysoký 20 m osvětlený sluncem vrhá na vodorovnou rovinu, která prochází jeho patou, stín délky 16 m. Jak dlouhý stín vrhá svislá tyč délky 2,5 m a jak je vysoká svislá věž, která vrhá stín délky 24 m?

Očíslujeme si všechny tři předměty. Stožár dostane číslo 1, tyč číslo 2 a věž číslo 3. Označíme-li výšku předmětu x a délku jeho stínu y , bude platit $y = k \cdot x$.

Sestavíme tabulku a vyplníme všechny její údaje, které známe (metry,

	1 stožár	2 tyč	3 věž
x	20	2,5	
y	16		24

v nichž jsou udávány všechny délky, nemusíme do této tabulky zapisovat).

Dosaďme dále do rovnice přímé úměrnosti $y = k \cdot x$ údaje z prvního sloupce, které oba známe. Dostaneme

$$16 = k \cdot 20 ,$$

odkud vypočteme

$$k = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Ale to znamená, že rovnice naší přímé úměrnosti je

$$y = \frac{4}{5} \cdot x = 0,8 x .$$

Vypočteme-li z ní x , dostaneme

$$x = \frac{5}{4} \cdot y = 1,25 y ,$$

čímž je rovnice připravena k výpočtům obou požadovaných hodnot.

Dosaďme-li za x hodnotu $x_2 = 2,5$, vypočteme $y_2 = 2$, a dosaďme-li za y hodnotu $y_3 = 24$, vypočteme $x_3 = 30$. Doplníme-li tabulku vypočtenými výsledky, dostaneme

	1 stožár	2 tyč	3 věž
x	20	2,5	30
y	16	2	24

odkud již snadno přečteme odpovědi na obě otázky úlohy.

Další úloha se týká *Boylova-Mariottova* zákona o izotermických dějích: Ideální plyn je při teplotě 293,1 K (20 °C) uzavřen v nádobě o objemu 8 l pod tlakem 90 kPa. Pod jakým tlakem bude za stejné teploty uzavřen v nádobách o objemu 10 l, 15 l, 40 l a jaký objem mají nádoby, ve kterých je uzavřen pod tlakem 36 kPa a 24 kPa?

Je-li objem plynu x a jeho tlak y , platí pro izotermické děje podle *Boylova-Mariottova* zákona

$$x \cdot y = k \text{ a z toho } y = \frac{k}{x} .$$

Sestavíme tabulku, do níž budeme zapisovat jen známé číselné hodnoty objemu v litrech a tlaku v kilopaskalech:

x	8	10	15	40		
y	90				36	24

Z prvního sloupce tabulky, v němž známe oba údaje, dosadíme do rovnice nepřímé úměrnosti $y = \frac{k}{x}$, dostaneme $90 = \frac{k}{8}$, odkud vypočteme $k = 8 \cdot 90 = 720$.

Je tedy rovnice naší nepřímé úměrnosti

$$y = \frac{720}{x} \quad \text{a obráceně i} \quad x = \frac{720}{y}$$

S jejím použitím doplníme tabulku naší nepřímé úměrnosti a z ní potom

x	8	10	15	40	20	30
y	90	72	48	18	36	24

přečteme již odpovědi na všechny dané otázky.

Zcela obdobně se řeší i úlohy o koncentraci daného množství určité látky v roztocích o různých objemech.

V chemii můžeme přímé úměrnosti použít například k výpočtu objemu plynů, reaktantů a produktů chemické reakce užitím Avogadrova zákona. Řešme například úlohu: Určete objem dusíku a vodíku, jejichž sloučením vznikne 6 l amoniaku (přičemž měření objemu provádíme za téže teploty i téhož tlaku).

Sestavíme opět tabulku, za jejíž horní záhlaví použijeme jednotlivé členy chemické rovnice, do prvního řádku (označeného v levém záhlaví písmenem x) budeme zapisovat stechiometrické koeficienty (udávající počet molekul nebo také grammolekul) jednotlivých látek účastnících se chemické reakce a do druhého řádku (posledního označeného písmenem y) pak číselné hodnoty objemů v litrech. Dostaneme tak tabulku:

	$\text{N}_2 + 3\text{H}_2 = 2\text{NH}_3$		
x	1	3	2
y			6

Abychom určili koeficient k v rovnici přímé úměrnosti $y = k \cdot x$, dosadíme do ní obě hodnoty z posledního sloupce (které obě známe), čímž dostaneme

$$6 = k \cdot 2,$$

odkud vypočteme $k = 3$. Dosazením takto určeného koeficientu do rovnice přímé úměrnosti dostaneme tuto rovnici ve tvaru

$$y = 3x.$$

Z něho již snadno vypočteme postupným dosazováním za x chybějící číselné údaje ve druhém (posledním) řádku tabulky, která po jejich doplnění bude:

	N ₂ + 3H ₂ = 2NH ₃		
x	1	3	2
y	3	9	6

Z takto doplněné tabulky je již možno přečíst výsledek, že k výrobě 6 l amoniaku je třeba 3 l dusíku a 9 l vodíku téže teploty i tlaku, jaké bude mít vyrobený amoniak.

K výpočtům objemu (a tlaku) plynů, jaké jsme prováděli v posledních dvou příkladech, je třeba poznamenat, že pro skutečné plyny neplatí zcela přesně, neboť ani Avogadrův ani Boyleův-Mariottův zákon neberou v úvahu objem molekul ani přitažlivé síly mezi nimi, takže výpočty na nich založené vedou k výsledkům jen přibližným.

Zato k výsledkům zcela přesným vede přímá úměrnost při výpočtu hmotnosti jednotlivých látek účastnících se chemické reakce. Taková je například úloha:

Kolik hydroxidu sodného je třeba k neutralizaci 150 g kyseliny octové? Kolik při tom vznikne octanu sodného a kolik se uvolní vody?

Napišeme opět tabulku, v jejímž horním záhlaví budou jednotlivé členy rovnice, podle níž probíhá chemická reakce. Do prvního řádku (za levým záhlavím x) budeme zapisovat molární hmotnosti M jednotlivých látek, do druhého posledního řádku (za levým záhlavím y) budeme pak zapisovat skutečné hmotnosti m jednotlivých látek. Tak dostaneme tabulku (opět bez označování jednotek, například gramů):

	CH ₃ COOH + NaOH = CH ₃ COONa + H ₂ O			
$x = M$	60	40	82	18
$y = m$	150			

Do rovnice přímé úměrnosti $y = k \cdot x$ opět dosadíme, a to oba číselné údaje z prvního sloupce tabulky, které známe; dostaneme

$$150 = k \cdot 60,$$

odkud vypočteme $k = \frac{150}{60} = \frac{5}{2}$

Rovnice naší přímé úměrnosti tedy je $y = \frac{5}{2} \cdot x = 2,5 \cdot x$.

Dosadíme-li do ní postupně jednotlivé další prvky (číselné údaje) prvního řádku, dostaneme zbývající prvky (číselné údaje) posledního druhého řádku, takže tabulka po doplnění nabude tvaru:

	CH ₃ COOH + NaOH = CH ₃ COONa + H ₂ O			
$x = M$	60	40	82	18
$y = m$	150	100	205	45

z něhož můžeme již přečíst odpovědi na všechny otázky úlohy.

Zkoušku správnosti výpočtu můžeme provádět užitím zákona o zachování hmotnosti (který objevili *Lomonosov* a *Lavoisier*) po vyplnění jak prvního, tak druhého řádku. Součet hmotností (molárních i skutečných) ve všech sloupcích na levé straně chemické rovnice je při správném počítání roven obdobnému součtu na pravé straně rovnice.

Programovatelný kalkulátor v různých souvislostech

JINDŘICH ŠILHÁN, TST Náradí, Ždánice

Nedávno jsem se stal vlastníkem programovatelného kalkulátoru a začal získávat první zkušenosti s touto technikou. Přitom padl do mých rukou program provádějící rozklad přirozeného čísla na prvočinitele. Byl hezký, věcně správný, podepsaný jménem vzbuzujícím důvěru — v praxi však nepoužitelný. Později jsem zjistil, že takových programů existuje víc a že dokonce tvoří zvláštní třídu. Podle svého vzniku jsou to programy, které jejich autor psal na zakázku. Některé z nich nacházíme na stránkách časopisů, kde mají šířit slávu svého tvůrce. Jen výjimečně jsou také v poznámkovém bloku svého autora. To je samozřejmé: kdyby svůj program používal, hned by si jeho slabin všiml a zařídil by jejich odstranění.

Závadou zmíněného programu byla pomalost. Postupně zkoušel dělitelnost všemi přirozenými čísly menšími než je zadané číslo N . Čtenáře jistě napadne, že bylo zbytečno zkoušet dělitelnost sudými čísly většími než 2 a čísly většími než $\sqrt{N}$. Tato omezení jsem do programu zabudoval a výpočet se tím zrychlil o několik řádů. Zkoušel jsem ještě, zda by nešlo rychlost dále zvýšit využitím ideí, na nich spočívá *metoda Eratosthenova síta*, to však nebylo jednoznačné. Jistě je možno získat čas tím, že stroj nebude zkoušet dělitelnost násobky prvočísel, zase se však čas ztratí na testech, zda každý ze zkoušených dělitelů je nebo není sám násobkem. Nakonec se jako nesporné urychlení ukázalo jen přeskakování násobků tří, i naučil jsem program, aby dělitelnost násobky tří nezkoušel.

Trochu práce dalo ještě, abych to všechno srovnal do 50 programových kroků, protože víc jich můj HP-25 neměl, a pak už stroj počítal dosti slušnou rychlostí. Za hodinu při testování došel asi k děliteli 7800. To znamená, že číslo kolem 10^8 rozkládal na prvočinitele maximálně něco přes hodinu. Nejdéle samozřejmě běžel, pokud vložené číslo N bylo prvočíslo, protože jen tehdy musel vyzkoušet jako dělitele všechna čísla až

do $\sqrt{N}$ včetně. Jelikož zobrazovač u HP-25 má 10 míst, rozklad devítimístných a kratších čísel nepůsobil potíže. Rozklad desetimístných čísel vyžadoval v programu malou úpravu, která v podstatě nezpomalila výpočet.

Nakonec jsem tedy měl možnost rozkládat na prvočinitele i největší desetimístná čísla v časech právě tak na hranici únosnosti. Jelikož to bylo v době chřipkové epidemie a byl jsem jejím účastníkem, měl jsem poměrně dost času. I vkládal jsem do stroje různá čísla a pořídil některé zajímavé rozklady. Některé z nich si uvedeme:

$$66\,601\,933 = 5\,851 \times 11\,383,$$

(Na tomto rozkladu jsem zkoušel rychlost různých verzí programu. Nakonec výpočet trval asi 45 minut.)

$$745\,457\,057 = 18\,773 \times 39\,709,$$

$$9\,999\,999\,931 = 21\,893 \times 456\,767,$$

$$9\,999\,999\,923 = 13\,759 \times 726\,797,$$

$$9\,999\,999\,999 = 3^2 \times 11 \times 41 \times 271 \times 9\,091,$$

$$9\,999\,999\,975 = 3 \times 5^2 \times 7 \times 59 \times 113 \times 2\,857.$$

Kromě jiného jsem rozložil na prvočísla 100 největších desetimístných čísel. Ve většině rozkladů se vyskytovalo prvočíslo větší než 10 000. Největší dvě lichá čísla, která takového prvočinitele neměla, jsou rozložena na posledních dvou řádcích.

Zajímavou záležitostí jsou prvočísla. Největší prvočíslo neexistuje, to lze snadno dokázat sporem. Existují tedy prvočísla i na hladině 10^{10} . Mezi stovkou největších desetimístných čísel jsou tři:

$$9\,999\,999\,929,$$

$$9\,999\,999\,943,$$

$$9\,999\,999\,967.$$

Dá se tedy odhadnout, že i mezi tak velkými čísly je několik procent čísel, která nelze rozložit. To je víc, než bychom zřejmě čekali.

Jaký to má praktický význam? Rozkladu na prvočinitele lze použít např. při navrhování ozubených převodů. K tomu účelu však není potřeba sestavovat program schopný najít největší desetimístné prvočíslo a dokonce opotřebovávat stroj na jeho nalezení. Vždyť jen ověření každého z uvedených tří prvočísel znamenalo 12 hodin chodu kalkulátoru.

Zamysleme se však nad tím, jak si má počínat začátečník, dostane-li nový programovatelný kalkulátor.

Nejprve je potřeba přečíst pozorně návod k obsluze. U složitějších strojů je dosti obsáhlý, pro začátek ovšem nepotřebujeme znát všechny možnosti stroje. Mnohé stejně nebudeme hned používat a zapomněli bychom je. Musíme však znát základní početní úkony, základní funkce (sin, log), závorky, jak se stroj programuje, jak se program dá větvit. Na překážku bývá, je-li návod v cizí řeči, ale ani to by nás nemělo odradit. Se slovníkem v ruce se dostaneme kupředu, protože slovní zásoba těchto

textů nebývá příliš široká a navíc je zde řada symbolů a příklady. Vše, co čteme, samozřejmě hned realizujeme na kalkulátoru — jednak se tím práce stává zajímavější, jednak se krom toho i tím snižuje ona jazyková bariéra.

Potom by měl adept vytvořit své první samostatné programy. Začne jistě těmi nejjednoduššími, bude asi programovat volný pád, objem jehlanu či podobné jednoduché vzorce. Jestliže program nepracuje, jak by měl, snadno najde chybu, a tím si ujasní, čemu snad v návodu nerozuměl. Po určité době novic dorazí k řešení kvadratické rovnice. Tady se setká s komplikacemi: Co když je diskriminant záporný? Jak to vůbec stroj zjistí? A co má udělat, když to zjistí? Tyto starosti si náš učeň může ušetřit a program opsat z návodu, kde většinou bývá; v tom případě ovšem projde tímto stadiem později při řešení jiného problému. Nakonec i toto zvládne a sestaví několik podobných programů s jednoduchým rozvětvením. V této chvíli přestává být učněm a může pomýšlet na jakousi soukromou tovaryšskou zkoušku. Při ní by měl řešit problém matematicky nepříliš složitý, obecně srozumitelný, přitom ale ne už zcela jednoduchý. Příslušný program by měl mít několikere větvení a pokud možno obsahovat i podprogram.

Jedním z problémů, který všechny tyto vlastnosti má, je právě prvočíselný rozklad. Že má malé praktické použití, to není pro tuto chvíli podstatné.

Potom by ale toto stadium her mělo skončit. Jistěže je vhodné dál žasnout nad možnostmi dříve nevídanými, které se teď tak snadno nabízejí. Zbavily numerickou matematiku únavného boje o každé desetinné místo a činí použitelnými výpočetní postupy, jejichž nasazení jsme se dříve z časových důvodů vyhýbali. Jestliže tyto postupy jsou dnes v našem dosahu, bylo by škoda jich používat jen pro zábavu. Nějakou tou kratochvílí můžeme kalkulátor zaměstnat občas i později, těžiště našeho zájmu by se však mělo přesunout na problémy praxe.

Jak by takové praktické problémy mohly vypadat? Možností je mnoho. Každý středoškolský student dělá praktika. S kalkulátorem je můžeme zpracovat lépe, tak jak to náš profesor ani nemůže požadovat s ohledem na ty, kdo kalkulátorem nedisponují. Můžeme zpracovat víc měření, určit chyby veličin atd. V matematice můžeme modifikovat do obecné podoby příklady, které jsou do učebnic stále ještě vybírány tak, aby se tam výrazy krátily, rušily apod., prostě aby nebyly numericky příliš náročné. Nu a nespočet problémů praktických v nejvlastnějším smyslu toho slova před námi vyvstane, zvykneme-li si ptát se: kolik může činit to a to? (hmotnost domu, vzdálenost věže, rychlost loďky . . .). Kdo nelitoval prostředků a kalkulátor si opatřil, má bezpochyby vztah k matematice a bude pro něj jistě snadné ve výčtu pokračovat.

Praktické problémy mají ještě jednu výhodu: nevědí, co jsme ve škole ještě nebrali a stále nám ukazují, co všechno v matematice ještě neznáme

(metody řešení rovnic, interpolaci, metody numerické integrace ...). Odstraníme-li samostatným studiem některé z těchto mezer, přešla naše symbióza s kalkulátorem zase do dalšího stádia.

Naši mladí čtenáři vlastní i stroje velmi výkonné. (Celkem běžná TI-58 má kapacitu asi 5krát větší než HP-25 zmíněná na začátku článku). Přesvědčil jsem se však, že mnozí z nich i po letech setrvávají v onom stádiu her. Způsob ovládání stroje většinou nebývá hledán v návodu, ale metodou zkoušek a omylu přímo na klávesnici stroje. Tímto způsobem lze najít mnohé, trvá to však dlouho a zdaleka neodhalíme všechny možnosti, o nebezpečí vzniku pověr (kdy si mylně vysvětlíme nějakou operaci stroje) ani nemluvě. „Praktické“ použití kalkulátoru se často redukuje na počítání školních úloh, které, jak jsme se už zmínili, patří ještě většinou do předkalkulátorové éry. To ovšem uživateli spíše škodí, protože se nic nového nenaučí, zato se odnaučí počítat. Zřejmě to majitelé podvědomě cítí a snad také proto mají takový úspěch různé bojové hry, jimiž své stroje opatřují podnikaví výrobci. Hrát s kalkulátorem podle cizího programu stále jen námořní bitvu apod. jistě jde. Je to však podobné počínání jako ořezávat tužku břitvou.

Následující odstavec je určen nejpokročilejším.

Cílem programování je řešení problému, a to většinou fyzikálního, chemického nebo z jiné přírodní či společenské vědy. Dostaneme-li se až k tomuto poznání, zjistíme obvykle, že sestavení programu není na věci to nejobtížnější. Náročnější bývá matematická stránka věci a ještě náročnější je někdy ta fyzika, chemie či ekonomika. To by si měli uvědomit zejména ti z čtenářů, kteří se zabývají myšlenkou konkurovat s nějakým programem v SOČ. Stále se v této soutěži objevují programy, které stály své autory spoustu času a námahy, ale jsou nepoužitelné pro špatné vzorce či nevhodné numerické metody. Proti takovému zklamání se ovšem může vlastními silami stěží pojistit. Mnohem jistější je vybrat si vedoucího, který formuluje problém (už to je někdy polovina úspěchu!) a zadá literaturu k prostudování. A protože nemůžeme od vedoucího čekat, že se bude přizpůsobovat nám, bude asi nutné, abychom se my přizpůsobili jemu. Student by si tedy měl zvolit téma, pro které ve svém okolí najde člověka ke konzultování. Někdy stačí i poštovní styk. (Poslední čtyři věty platí ostatně i pro jiné obory SOČ a nejen pro SOČ.)

Na závěr uvedeme několik pramenů, které by mohly čtenáři dát informace o kapesních kalkulátorech a programování na nich. Csákány A.: Co umí kapesní kalkulátor. Praha, SNTL 1982. Kopřiva J., Pokorný Z.: Programování kapesních kalkulátorů. Praha 1983, účelový tisk petřínské hvězdárny. Tato kniha obsahuje zásady programování. V r. 1985 má v Brně vyjít jako její volné pokračování kniha programů, v níž čtenář najde m.j. i program na prvočíselný rozklad podobný programu, z něhož vzešel náš článek. Obě díla lze koupit na Lidových hvězdárnách.

Amatérské radio, řada A. Časopis se věnuje malé výpočetní technice soustavně. Zejména cenný je roč. 1981, kde je série článků o programovacím jazyku BASIC, v němž bude pravděpodobně pracovat většina kalkulátorů blízké budoucnosti. Jiný česky psaný materiál o tomto jazyku není autorovi článku znám.

S programovatelnými kalkulátory se budeme i na stránkách našeho časopisu setkávat stále častěji, protože doba, kdy ovládnou náš život, se blíží.

Jak riskovat vědecky

Doc. RNDr. JIŘÍ ANDĚL, DrSc., UK PRAHA
PETR ANDĚL, gymnázium W. Piecka Praha

1. Úvod

Jistě jste byli mnohokrát svědky napínavého závěru hokejového utkání, kdy jedno mužstvo (třeba A) prohrávalo o jednu jedinou branku s druhým mužstvem (řekněme B). Odhodlá se trenér mužstva A k odvolání brankáře? V mnoha případech se k tomu skutečně odhodlá a většinou se pak během krátké doby skóre změní — ať už ve prospěch či neprospěch mužstva A . Potom se obvykle brankář vrátí na své místo a stav utkání se už dál nezmění.

Snadno si můžeme představit, že celé utkání je jakoby složeno z velmi krátkých úseků. V každém z nich buď dá branku mužstvo A , nebo dá branku mužstvo B , nebo žádná branka nepadne. Jsou-li úseky dostatečně krátké, lze vyloučit možnost, že by v některém z nich mohly padnout dvě nebo více branek. V utkání samozřejmě vítězí to mužstvo, které dá víc branek.

Ještě názorněji lze toto schéma hry pochopit na příkladě šachového zápasu hráčů A a B , který se hraje na n partií. Každá partie končí buď vítězstvím některého z hráčů nebo remízou. Je jasné, že vítězem zápasu se stane ten hráč, který dosáhne většího počtu vítězství než jeho protivník.

Zůstaneme-li u posledního příkladu, můžeme v nejjednodušším případě hru popsat tímto matematickým modelem:

a) Nechť p_A je pravděpodobnost, že partii vyhraje hráč A ; nechť p_B je pravděpodobnost, že partii vyhraje hráč B ; nechť $p_R = 1 - p_A - p_B$ je pravděpodobnost, že partie skončí remízou.

b) Nechť pravděpodobnosti p_A , p_B (a také p_R) jsou při každé partii tytéž.

c) Necht výsledky jednotlivých partií jsou na sobě nezávislé.

Podobný model bychom mohli vytvořit i pro jiné hry včetně hokeje, o kterém byla řeč na začátku. Označme nyní P pravděpodobnost, že celé utkání (složené z n partií) vyhraje hráč A .

Jak vyplývá z úvodního příkladu, může hráč A změnou stylu své hry často také změnit pravděpodobnost výhry p_A . Obvykle při útočném pojetí hry p_A roste, při obranném pojetí p_A klesá. Naneštěstí se při změně pravděpodobnosti p_A mění také pravděpodobnost p_B . Z celé řady praktických příkladů se dá usoudit, že s růstem p_A zpravidla roste také p_B , s poklesem p_A klesá i p_B . V tomto příspěvku se omezíme na změny vyjádřené následujícím pravidlem:

d) Změní-li se u všech partií p_A na $p_A + \Delta$, pak se současně změní p_B na $p_B + \Delta$ (a tedy p_R se změní na $p_R - 2\Delta$). Číslo Δ může být kladné i záporné. Vždy však musí být takové, aby i nové hodnoty měly charakter pravděpodobností, tj. musí stále platit

$$0 \leq p_A + \Delta \leq 1, \quad 0 \leq p_B + \Delta \leq 1, \quad 0 \leq p_R - 2\Delta \leq 1.$$

Značná idealizace modelu ve srovnání se skutečnou hrou spočívá v zavedení podmínek b) a c). Často dochází naopak k tomu, že hráč po získání určité převahy (tj. po výhře v několika počátečních partiích) mění svůj styl tak, aby bez dalšího riskování svou převahu udržel. Vytvoření odpovídajícího modelu by však značně překročilo rámec našeho příspěvku. Naproti tomu předpoklad d) se zdá být dostatečně realistický. Je jistou analogií toho, že při rovnosti bodů v hokejových či fotbalových soutěžích se jako první pomocné kritérium bere rozdíl branek.

Zůstaneme tedy u modelu popsaného požadavky a) až d) a v jeho rámci se budeme zabývat následujícími problémy:

A) Jak vypočítat pravděpodobnost celkové výhry P ?

B) Je pro hráče A výhodné zvýšit p_A na $p_A + \Delta$ ($\Delta > 0$), když se přitom p_B rovněž zvýší na $p_B + \Delta$?

C) U mnoha her lze předpokládat, že p_A a p_B jsou velmi malá čísla a počet partií n je velký. Jak se projeví na pravděpodobnosti P prodloužení hry, když místo n partií je nutno sehrát $2n$ partií?

2. Výpočet pravděpodobnosti P , že zvítězí hráč A

Necht $p_{ij}^{(n)}$ značí pravděpodobnost, že v n partiích i -krát vyhraje hráč A , j -krát vyhraje hráč B a $(n-i-j)$ -krát dojde k remíze. Výpočet $p_{ij}^{(n)}$ je založen na dvou známých pravidlech pro počítání pravděpodobností.

I. Pravidlo o sčítání pravděpodobností. Pravděpodobnost sjednocení konečného nebo spočetného počtu vzájemně disjunktních jevů je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů.

II. Pravidlo o násobení pravděpodobností. Pravděpodobnost průniku

konečného nebo spočetného počtu vzájemně nezávislých jevů je rovna součinu pravděpodobností těchto jevů.

Jedna z možností, jak může i partií vyhrát A a j partií vyhrát B , je typu

$$\underbrace{A A \dots A}_i \quad \underbrace{B B \dots B}_j \quad \underbrace{R R \dots R}_{n-i-j},$$

kde písmeno A značí výhru hráče A , písmeno B značí výhru hráče B a R značí remízu. Podle pravidla II je pravděpodobnost tohoto jevu rovna

$$\underbrace{p_A p_A \dots p_A}_i \underbrace{p_B p_B \dots p_B}_j \underbrace{p_R p_R \dots p_R}_{n-i-j} = p_A^i p_B^j p_R^{n-i-j}.$$

Ke stejnému výsledku dospějeme vzhledem ke komutativnosti násobení i při každém jiném rozmístění i symbolů A , j symbolů B a $n-i-j$ symbolů R . Všech možných takových rozmístění je

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}.$$

Libovolná dvě různá rozmístění reprezentují disjunktní jevy. Proto podle pravidla I dostáváme

$$p_{ij}^{(n)} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_A^i p_B^j p_R^{n-i-j}$$

(Jde o tzv. pravděpodobnosti trinomického rozdělení.)

Hráč A vyhraje celou hru složenou z n partií v případě, že vyhraje víc partií než hráč B . Proto pravděpodobnost P tohoto jevu dostaneme opět pomocí pravidla I jako

$$P = \sum_{0 \leq j < i \leq n} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} p_{ij}^{(n)}$$

Pro rychlý praktický počet je vhodný zejména vzorec

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{[(j-1)/2]} p_{ij}^{(n)} \quad (1)$$

kde $[(i-1)/2]$ je celá část čísla $(i-1)/2$. Je-li $p_R > 0$ a $p_A > 0$, můžeme $p_{ij}^{(n)}$ počítat rekurentně podle vzorců

$$p_{k-1,0}^{(n)} = p_k^{(n)} \frac{n-k}{k+1} \frac{p_A}{p_R},$$

$$p^{(n)}_{k-j-1, j+1} = p^{(n)}_{k-j, j} \frac{k-j}{j+1} \frac{p_B}{p_A},$$

$$p_{00}^{(n)} = p_R^n.$$

Je-li $p_R = 0$, bude počet remíz nulový a $p_B = 1 - p_A$, takže

$$p_{ij}^{(n)} = \binom{n}{i} p_A^i (1 - p_A)^j \text{ pro } j = n - i;$$

jinak je $p_{ij}^{(n)}$ rovno nule. V tomto případě

$$P = \sum_{i < n-i} p^{(n)}_{i, n-i}.$$

Po úpravě dostaneme

$$P = \sum_{k=0}^{[n/2]} p^{(n)}_{n-k, k},$$

kde $[n/2]$ je celá část čísla $n/2$. Položme pro stručnost

$$p^{(n)}_{i, n-i} = p_i. \text{ Pak tedy}$$

$$P = \sum_{k=0}^{[n/2]} p_{n-k} \quad (2)$$

a jednotlivé sčítance můžeme vypočítat pomocí vzorců

$$p_n = p_A^{(n)},$$

$$p_{n-k-1} = p_{n-k} \frac{n-k}{k+1} \frac{1-p_A}{p_A}.$$

Je-li $p_A = 0$, nemůže hráč A vyhrát v žádné partii. Nemůže tedy také vyhrát celou hru, takže v tomto případě je $P = 0$. Nakonec ještě uvažme případ, kdy platí $p_B = 0$. Hráč B pak nemůže vyhrát v žádné partii, takže hráč A vyhraje celou hru právě tehdy, vyhraje-li alespoň jednu partii. Pravděpodobnost tohoto jevu je rovna

$$P = 1 - (1 - p_A)^n. \quad (3)$$

Výpočet pravděpodobnosti P se tedy provádí podle vzorců (1), (2) a (3). Pro $p_A = 0,3$, $p_B = 0,2$ a některé hodnoty n jsou pravděpodobnosti P uvedeny v tabulce 1.

Při velkých hodnotách n se výpočet P podle uvedených vzorců stává obtížný, ne-li prakticky nemožný. Uvedeme alespoň nejdůležitější aproximaci v případě, že p_A , p_B a p_R jsou kladná čísla. Označme

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

Funkce φ je hustota a Φ je distribuční funkce normálního (Gaussova) rozdělení. Jejich výpočet bývá naprogramován i na malých kalkulátorech, jako je třeba TI-58 nebo TI-59. Položme

$$\alpha = (p_A - p_B) \left[\frac{(1 - p_A)^n}{p_B p_R} \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1 - p_A}{n p_B p_R} \right]^{1/2},$$

$$\beta = (1 - p_A + p_B) \left[\frac{p_A}{p_B p_R} \right]^{1/2}$$

Dá se dokázat (viz [1]), že P lze aproximovat pomocí

$$P^* = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha + \beta x) \varphi(x) dx.$$

Výpočet tohoto integrálu se provádí numericky. Kvalitu aproximace můžeme posoudit z tabulky 1.

Tabulka 1.

Pravděpodobnost P výhry hráče A a její aproximace P^* pro $p_A = 0,3$, $p_B = 0,2$ a vybrané hodnoty n .

n	P	P^*
2	0,3900	0,3810
3	0,4410	0,4345
4	0,4767	0,4716
5	0,5043	0,5000
10	0,5918	0,5893
20	0,6853	0,6840
40	0,7857	0,7854
60	0,8448	0,8448

3. Vliv změny pravděpodobností p_A a p_B na pravděpodobnost P celkového vítězství hráče A

Pro určitost budeme v této části článku předpokládat, že hráč A je lepší než hráč B v tom smyslu, že platí $p_A > p_B$. Nechť platí podmínka d). Položme si otázku: Je pro hráče A výhodnější systém pravděpodobností $p_A = 0,3$, $p_B = 0,2$, $p_R = 0,5$, nebo systém $p_A = 0,5$, $p_B = 0,4$, $p_R = 0,1$? (Autoři tuto otázku položili také několika svým kolegům. Všichni byli přesvědčeni, že ve druhém případě je hodnota P vyšší.) Odpověď můžeme získat z numerických údajů uvedených v tab. 2 a v tab. 3.

Tabulka 2. Pravděpodobnost P výhry hráče A pro vybrané hodnoty p_A , p_B a n .

p_A	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
p_B	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$n = 5$	0,410	0,494	0,504	0,506	0,533
$n = 10$	0,651	0,616	0,592	0,578	0,563

Tabulka 3. Pravděpodobnost P výhry hráče A pro vybrané hodnoty p_A, p_B při $n = 2$.

p_A	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
p_B	0	0,1	0,2	0,3	0,4
P	0,360	0,450	0,480	0,450	0,360

Je překvapující, že chování pravděpodobnosti P závisí na počtu partií n . Je-li $p_A - p_B = 0,1$, pak při $n = 5$ pravděpodobnost P s rostoucím p_A roste, ale při $n = 10$ klesá. Je-li $p_A - p_B = 0,2$, pak při $n = 2$ není průběh P ani monotónní funkcí p_A . Zvýšení p_A se dosáhne zpravidla riskantnějším vedením hry. Je vidět, že někdy se riskování vyplácí — vede-li ke zvýšení P .

4. Limitní chování pravděpodobnosti P

Vyšetříme nyní případ, kdy p_A, p_B a p_R závisejí na počtu partií n , přičemž p_A a p_B s rostoucím n klesají k nule. Nechť pro $n \rightarrow \infty$ platí

$$np_A \rightarrow \lambda_A, \quad np_B \rightarrow \lambda_B,$$

kde λ_A a λ_B jsou nějaká kladná čísla.

Při odvozování výsledků použijeme následující známé tvrzení. Nechť x_n je posloupnost čísel, která při $n \rightarrow \infty$ konverguje k číslu x . Pak platí

$$\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \rightarrow e^x.$$

Pro pevná i a j dostaneme postupnou úpravou

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_A^i p_B^j (1-p_A-p_B)^{n-i-j} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{i!j!(n-i-j)(n-i-j-1)\dots 1} \times p_A^i p_B^j (1-p_A-p_B)^{n-i-j} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i-j+1)}{i!j!n^{i+j}} (np_A)^i (np_B)^j \times \\ &\times \left(1 - \frac{np_A + np_B}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np_A + np_B}{n}\right)^{-i-j} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\lambda_A^i \lambda_B^j}{i!j!} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)} = \pi_{ij}. \end{aligned}$$

Symbolem π_{ij} jsme označili příslušnou limitní hodnotu pravděpodobnosti $p_{ij}^{(n)}$. Limitní hodnota pravděpodobnosti P , že vyhraje hráč A , je pak rovna

$$\sum_{0=j<i} \sum \pi_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \pi_{ij} = \pi_{10} + (\pi_{20} + \pi_{21}) + (\pi_{30} + \pi_{31} + \pi_{32}) + \dots$$

Limitní hodnota závisí jen na λ_A a λ_B . To má následující interpretaci. Nechť pravděpodobnosti p_A a p_B jsou velmi malá kladná čísla a nechť počet partií n je dostatečně veliký. Zvětšíme-li počet partií dvojnásobně, pak pravděpodobnost celkové výhry hráče A zůstane prakticky stejná, jako když počet partií nezměníme, ale pravděpodobnosti p_A a p_B budou dvojnásobné.

Literatura:

[1] P. Anděl: Aplikace trinomického rozdělení. Práce SOČ, Praha 1984.

FYZIKA

Vrh šikmo vzhůru

JOSEF KOTYK, Parbubice

témat mechaniky, vhodných pro zájmový fyzikální kroužek k rozšíření běžného učiva, je velmi poutavým vrh šikmo vzhůru, řešený prostředky analytické geometrie.

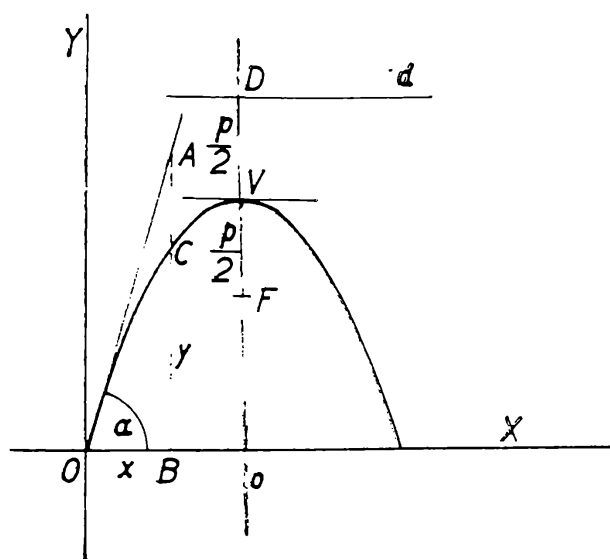
Úvodní otázku do dané problematiky položme takto: Pod jakým elevačním (výškovým) úhlem α musíme z počátku soustavy pravoúhlých souřadnic vrhnout ve vakuu hmotný bod danou rychlostí v_0 , abychom zasáhli bodový cíl $C(x, y)$?

Řešení: Po čase t , počítaném od začátku pohybu, jsou souřadnice hmotného bodu (viz obr. 1)

$$x = |OB| = |OA| \cos \alpha = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y = |BC| = |AB| - |AC| = |OA| \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Vyloučíme-li z obou rovnic proměnnou t tj. z (1) vyjádříme t a dosadíme do (2), vychází rovnice dráhy



Obr. 1

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2, \quad (3)$$

kterou upravíme užitím vztahu $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ a řešíme jako goniometrickou pro úhel α ve tvaru kvadratické rovnice

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha - x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right) = 0;$$

nalézáme kořeny

$$(\operatorname{tg} \alpha)_{1,2} = \frac{v_0^2}{gx} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right)} \right].$$

Podle znaménka diskriminantu $1 - \frac{2g}{v_0^2} \cdot \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right)$

mohou nastat tři případy:

I. Je-li záporný, cíl nelze zasáhnout.

II. Je-li kladný, lze cíl zasáhnout dvěma vrhy vykonanými pod výškovými úhly α_1, α_2 ; $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

III. Je-li roven nule, lze cíl zasáhnout jedním vrhem vykonaným pod

výškovým úhlem α , o němž platí $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{g \cdot x}$.

Zabývejme se nyní vyšetřením dráhy. Její rovnice (3) ukazuje, že je to *parabola* s osou rovnoběžnou s osou Y , otevřená záporným směrem (dolů — viz obr. 1), procházející počátkem O a vrcholem $V(x_V, y_V)$. Rovnici paraboly v této poloze známe ve vrcholovém tvaru

$$(x - x_V)^2 = -2p \cdot (y - y_V) \quad (4)$$

kde $p > 0$ udává vzdálenost ohniska F od řídicí přímky d . Rovnici (3) převedeme tedy rovněž na vrcholový tvar a dostaneme

$$\left(x - \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}\right)^2 = -2 \cdot \frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g} \cdot \left(y - \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}\right); \quad (5)$$

srovnáváním rovnic (4) a (5) pak ihned získáme souřadnice vrcholu

$$x_V = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}, \quad y_V = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

i veličinu

$$p = |FD| = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g}.$$

Souřadnice průsečíku osy paraboly s řídicí přímkou jsou pak

$$x_D = x_V = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}, \quad y_D = y_V + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Shledáváme zejména, že souřadnice y_D nezávisí na elevačním úhlu. Při téže počáteční rychlosti v_0 všechny parabolické dráhy mají společnou řídicí

přímku, stanovenou rovnicí $y = \frac{v_0^2}{2g}$. V bodě $\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$ dotýká se jí parabola daná rovnicí (viz výše případ III.)

$$1 - \frac{2g}{v_0^2} \cdot \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0$$

neboli ve vrcholovém tvaru

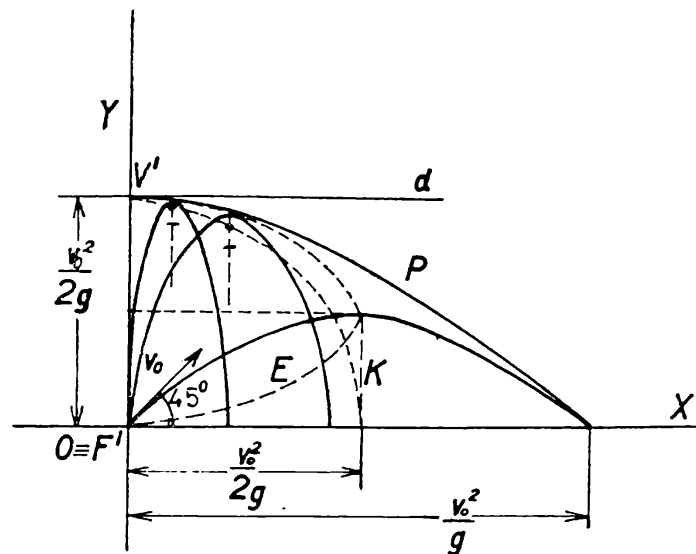
$$x^2 = -\frac{2v_0^2}{g} \cdot \left(y - \frac{v_0^2}{2g}\right) \quad (6)$$

— parabola zv. ochranná (viz obr. 2, křivka P) — jež má osu v ose Y , vrchol V' $\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$ a v řídicí přímce parabolických drah svou vrcholovou tečnu. Každý cíl, který leží vně této paraboly (např. na ose X body, jejichž $x > \frac{v_0^2}{g}$, na ose Y body, jejichž $y > \frac{v_0^2}{2g}$), je nezasažitelný.

Výraz $\frac{v_0^2}{2g}$ udává největší výšku výstupu (y_V pro $\alpha = 90^\circ$), v hodnotě

dvojnásobné $\frac{v_0^2}{g}$ pak největší délku doletu na vodorovné rovině ($2x_V$ pro $\alpha = 45^\circ$).

Srovnáváním rovnic (4) a (6) zjistíme, že ochranné parabole přísluší



Obr. 2

$p' = \frac{v_0^2}{g}$ a její řídící přímce rovnice

$$y = y_{V'} + \frac{1}{2} p' = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Její ohnisko F' má souřadnice

$$x_{F'} = x_{V'} = 0,$$

$$y_{F'} = y_{V'} - \frac{1}{2} p' = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} = 0;$$

ohnisko ochranné paraboly leží tedy v počátku.

Co je však *geometrickým místem ohnisek parabolických drah*?

Z rozboru rovnice (5) vyplývají pro souřadnice ohniska F parabolické dráhy tyto údaje:

$$x_F = x_V = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin 2\alpha,$$

$$y_F = y_V - \frac{1}{2} p = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g} = - \frac{v_0^2}{2g} \cdot \cos 2\alpha$$

O nich zřejmě platí:

$$x_F^2 + y_F^2 = \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^2$$

Ohniska parabolických drah leží na kružnici, jež je opsána z počátku poloměrem $\frac{v_0^2}{2g}$ (viz obr. 2, křivka K); v bodě $\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$ dotýká se ochranné paraboly P i společné řídící přímky d parabolických drah. Pro elevační úhel $\alpha = 45^\circ$ leží ohnisko F v bodě $\left(\frac{v_0^2}{2g}, 0\right)$ na ose X .

Zbývá zodpovědět ještě poslední otázku: Co je *geometrickým místem vrcholů parabolických drah*?

Poněvadž subtangenta paraboly je, jak známo, půlena jejím vrcholem, protíná tečna parabolické dráhy, vedená počátkem pod úhlem α (viz obr. 1), osu paraboly v bodě, jehož souřadnice x_V , $2y_V$ a délka tečny $\sqrt{x_V^2 + (2y_V)^2}$ tvoří pravoúhlý trojúhelník s úhlem α . Odtud dosadíme

$$\sin \alpha = \frac{2y_V}{\sqrt{x_V^2 + 4y_V^2}}$$

do výrazu pro výšku vrhu

$$y_V = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

a po snadné úpravě nalézáme rovnici hledaného geom. místa:

$$g \cdot x_V^2 + 4g \cdot y_V^2 - 2v_0^2 \cdot y_V = 0. \quad (7)$$

Shledáváme, že to je *elipsa* se středem o souřadnicích x_S , y_S , s hlavní poloosou a a vedlejší b ; její hlavní osa je rovnoběžná s osou X (viz obr. 2, křivka E). Rovnici elipsy v této obecné osově poloze známe ve tvaru

$$b^2 \cdot (x - x_S)^2 + a^2 \cdot (y - y_S)^2 = a^2 \cdot b^2 \quad (8)$$

Rovnici (7) převedeme tedy rovněž na tvar (8); zní:

$$\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2 \cdot x^2 + \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 \cdot \left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2 \quad (9)$$

Srovnáváním rovnic (8) a (9) dostáváme pak ihned souřadnice středu

$$x_S = 0, y_S = \frac{v_0^2}{4g} \text{ i velikosti poloos } a = \frac{v_0^2}{2g}, b = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{a}{2}. \text{ V bodě}$$

$\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$ dotýká se elipsa E kružnice K , ochranné paraboly P i společné řídící přímky d parabolických drah.

Své úvahy bychom mohli rozšířit z I. do II. kvadrantu nákrešné roviny a posléze i do prostoru, kde by ovšem do našich představ vstoupily také plochy 2. stupně, např. paraboloid zv. ochranný aj.

0 teorii relativity trochu jinak I

Doc. ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., ÚV FO

1. Problematika historického výkladu speciální teorie relativity

Se speciální teorií relativity se zpravidla seznamujeme tak, jak v průběhu svého historického vývoje vznikla. Výklad začíná popisem Michelsonova pokusu z r. 1881 (obvykle se popisuje jeho zpřesněná verze z r. 1887) — pokusu, který měl rozhodnout, která ze tří protichůdných hypotéz éteru bude platit. Nepotvrdil žádnou z nich, i když se *H. A. Lorentz* snažil zachránit svou hypotézu absolutně klidného éteru zavedením kontrakce délky ramen Michelsonova interferometru, jejichž osy byly ve směru pohybu interferometru. Pokus totiž ukazoval, že neplatí zákon skládání rychlostí, když jedna z rychlostí je rychlost světla ve vakuu. To bylo zcela proti dosavadním zkušenostem fyziků a vyvolalo to čtvrt století trvající krizi fyziky. Krizi dokázal překonat až r. 1905 *Albert Einstein*, málo zatížený myšlením fyziků druhé poloviny 19. století (v době realizace prvního Michelsonova pokusu byly Einsteinovy teprve 2 roky).

Einstein řešil problém radikálním způsobem: vyslovil dva postuláty, tzv. principy relativity, tak, aby důsledky z nich plynoucí byly v souladu s výsledky Michelsonova pokusu a Maxwellovy teorie elektromagnetického pole (zbavené však přebytkového éteru). Podle prvního z postulátů, tzv. *speciálního principu relativity*, mají fyzikální zákony stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách souřadnic. Zajímavé je, že k tomuto zobecnění výsledků Michelsonova pokusu nezávisle dospěli již před Einsteinem *Lorentz* (1904) a *Poincaré* (1905). Bezprostředním základem pro reformu pohledu na chápání prostoru a času a jiných „nepochopitelných“ důsledků byl druhý z postulátů: slavný *Einsteinův princip konstantní rychlosti světla* — rychlost světla ve vakuu má ve všech inerciálních vztažných soustavách stejnou velikost, nezávislou ani na rychlosti zdroje ani pozorovatele. Právě tento druhý postulát je příčinou toho, proč je teorie relativity obtížně pochopitelná a některé její výsledky „zcela nelogické“ — jako např. nejzávažnější poznatek fyziky 20. století: $E = mc^2$ (častá otázka: proč obecný vztah mezi energií a hmotností je vázán právě rychlostí světla?).

Lze říci, že nesnadná pochopitelnost Einsteinovy speciální teorie relativity je dána právě jejím historickým pojetím, které — jak bylo stručně nastíněno — vzniklo před 80 lety za složitých podmínek. Dnes však existuje cesta, jak zpřístupnit výklad speciální teorie relativity a umožnit přitom lépe pochopit její fyzikální výklad a důsledky. Je to

cesta založená na existenci gravitačního pole vesmíru jako celku. Osnovu tohoto výkladu navrhl již r. 1962 profesor fyziky na pražské technice *Zdeněk Horák* [1, 2, 3].

Podstatným výchozím bodem tohoto tzv. *megafyzikálního* pojetí teorie relativity je požadavek, aby si každý uvědomil, že existuje vesmír s ohromným množstvím svítící i nesvítící hmoty a že tato hmota je nositelem nezanedbatelného gravitačního pole. Tuto skutečnost si však dnes uvědomuje každý žák základní školy. Avšak v době *Galilea Galilei* (16. až 17. století) byly z našeho hlediska představy o vesmíru velmi chudé a svět byl velmi „těsný“ — Slunce obklopovaly sféry jednotlivých planet a svět byl uzavřen křišťálovou sférou stálic. A až 20 let po formulaci speciální teorie relativity Einsteinem bylo rozpoznáno, že tzv. mlhoviny jsou vlastně značně vzdálené útvary, podobné naší Galaxii (*E. P. Hubble*, 1924). Dnes se odhaduje, že hmotnost svítících objektů poznané části vesmíru — metagalaxie — má nepředstavitelnou velikost asi 10^{54} kg a že největšími současnými dalekohledy lze za příznivých podmínek identifikovat objekty vzdálené až 10 miliard světelných let (asi 10^{26} m) a největšími radioteleskopy objekty ještě o řád vzdálenější. Veškerá tato hmota je podřízena určitému řádu a vývoji — tím se zabývá kosmologie a kosmogonie. Z hlediska našeho cíle se však není nutno těmito otázkami zabývat a není dokonce ani nutno řešit problém konečnosti či nekonečnosti vesmíru, i když z hlediska marxisticko-leninské filozofie je správné vesmír chápat jako nekonečně hmotný — s nekonečně velikou hmotností, neomezený v čase a v prostoru.

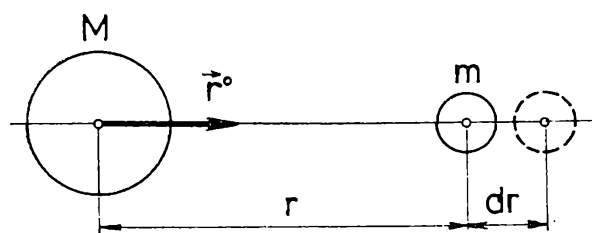
2. Některé poznatky z teorie gravitačního pole

Každá hmota (tj. především látka, ale i pole) má nenulovou hmotnost, která je mírou jejích setrvačných a gravitačních účinků. Podle Newtonova zákona všeobecné gravitace každý materiální objekt vyvolává gravitační pole. Nositelem gravitačního pole musí samozřejmě být i vesmír jako celek. Zdá se být neřešitelným problémem, jaké toto pole je, neboť dostatečně přesně a úplně neznáme ani hmotnosti materiálních objektů ve vesmíru ani jejich rozložení. Uvidíme, že tomu tak není. Aby bylo možno problém dobře pochopit, bude užitečné shrnout základní pojmy Newtonovy elementární teorie gravitace (je však třeba předeslat, že pokoušet se počítat gravitační pole vesmíru Newtonovou teorií gravitace v euklidovském prostoru by bylo zcela chybné).

Tak tedy, gravitační interakce je vždy nenulová a má přitažlivý charakter. Pro dva „bodové“ objekty anebo dva objekty s kulově symetrickou hustotou platí vně jejich povrchů Newtonův gravitační zákon:

$$\mathbf{F} = -\kappa \frac{mM}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad (1)$$

kde $\kappa = (6,6726 \pm 0,0005) 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta,



Obr. 1

M , m jsou hmotnosti těles, r jejich vzájemná vzdálenost a $\vec{r}^0$ jednotkový polohový vektor, vedený ze středu tělesa hmotnosti M , je-li $\vec{F}$ síla, kterou působí těleso hmotnosti M na těleso hmotnosti m (obr. 1). V okolí hmotných těles existuje gravitační pole, jehož schopnost silově působit na jiné těleso, které se v něm nachází, charakterizujeme intenzitou gravitačního pole $\vec{E}_g$. Pro určitý bod pole intenzitu definujeme jako sílu, která v tomto bodě působí na „bodové“ těleso jednotkové hmotnosti. Má-li toto testovací těleso hmotnost m , je

$$\vec{E}_g = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2)$$

Pro pole „bodového“ tělesa tedy podle (1) je

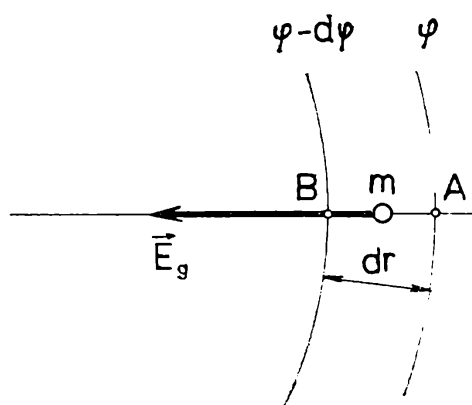
$$\vec{E}_g = -\kappa \frac{M}{r^2} \vec{r}^0. \quad (3)$$

Jestliže na těleso v gravitačním poli působí síly, má pole tendenci těleso přemístit (není-li pohybu tělesa nějak zabráněno) a tím vykonat práci. Říkáme, že těleso má v poli potenciální energii. Pro určitý bod pole ji definujeme jako práci, kterou pole vykoná při přemístění tělesa z určitého místa pole do nekonečna. Je zřejmé, že u gravitačního pole, kde působící síly jsou vždy přitažlivé, bude tato práce (a tedy i potenciální energie) záporná. Při přemístění tělesa z polohy r do polohy r' ji vypočteme tak, že nejprve vyjádříme elementární práci a pak výraz integrujeme v daných mezích od r do r' . Bude-li se těleso hmotnosti m posouvat po siločáře (obr. 1), není nutno vyjadřovat sílu a elementární dráhu vektorově (resp. síla a elementární dráha jsou vektory souhlasně rovnoběžné). Pak práce

$$W = \int_r^{r'} F dr = -\kappa m M \int_r^{r'} \frac{dr}{r^2} = -\kappa m M \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{r'} = \kappa m M \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right).$$

Tato práce se rovná potenciální energii tělesa E_p v bodě o poloze r , když $r' \rightarrow \infty$. Tedy

$$E_p = -\kappa \frac{mM}{r}. \quad (4)$$



Obr. 2

Protože potenciální energie je funkcí místa pole, dává nám tato veličina jinou možnost popsat pomocí ní pole, a to tak, že vztáhneme tuto energii na jednotkovou hmotnost tělesa, které se v poli nachází. Příslušná veličina se nazývá *potenciál gravitačního pole* a označuje se φ_g . Je tedy

$$\varphi_g = \frac{E_p}{m}. \quad (5)$$

Pro případ pole „bodového“ tělesa je

$$\varphi_g = -\kappa \frac{M}{r}.$$

Je-li naopak znám potenciál v určitém místě pole, můžeme podle (5) určit potenciální energii tělesa:

$$E_p = m \varphi_g. \quad (6)$$

Protože obě veličiny, tj. intenzita a potenciál, popisují totéž pole, musí mezi nimi existovat jednoznačný vztah. Ten určíme např. z úvahy o změně potenciální energie a vykonané práci polem při posunutí tělesa o elementární dráhu dr ; na obr. 2 to bude z bodu A do bodu B . Platí

$$-md\varphi_g = m E_g dr$$

Odtud, vezmeme-li v úvahu vektorový charakter intenzity $\mathbf{E}_g$, vychází

$$\mathbf{E}_g = -\frac{d\varphi}{dr} \mathbf{r}^0 \quad (7)$$

Nyní si blíže všimněme vlastností potenciálu gravitačního pole. Pro všechna reálná tělesa ($m \neq 0$) v bodech v konečné vzdálenosti od nich je potenciál nenulový a vždy záporný ($m > 0$). Jeho jednotka je

$$[\varphi_g] = \left[\frac{E_p}{m} \right] = \frac{J}{kg} = m^2 \cdot s^{-2}; \quad (8)$$

je tedy rovna druhé mocnině jednotky rychlosti. Podle Newtonovy teorie gravitace je gravitační interakce lineární, tj. platí zde princip superpozice (podle Einsteinovy teorie gravitace je však tento princip omezen jen na slabá gravitační pole). Pro potenciál pole to např. znamená, že výsledný

potenciál pole od několika „bodových“ těles dostaneme prostým sečtením dílčích potenciálů v příslušném bodě. Protože potenciál je vždy jen jednoho znaménka (je záporný), nemůže být výsledný potenciál v konečné vzdálenosti nikdy nulový. Intenzita pole jako vektorová veličina však pro určitý bod (nebo oblast) může být nulová. Pak podle (7) musí zde být potenciál konstantní (matematicky by mohl být i nulový, ale fyzikálně je to vyloučené, protože $m \neq 0$).

3. Gravitační pole vesmíru

Vrátíme se nyní k otázce, jaké gravitační pole vyvolávají blíže neurčené materiální objekty celého vesmíru. Odpověď na ni se zdá být značně obtížná, ale není tomu tak. Stačí přijmout nelokální platnost a obecné důsledky prvního Newtonova pohybového zákona neboli *principu setrvačnosti*: „Existuje takový vztažný systém, který nazveme inerciální, ve kterém se libovolná volná částice pohybuje rovnoměrně přímočaře.“ Tento zákon ve skutečnosti postuluje reálnou existenci nelokálních inerciálních vztažných soustav. Slůvkem „nelokální“ se zdůrazňuje, že není na mysli lokální realizace inerciálních soustav, které se dá dosáhnout pro určitý bod nebo velmi omezenou oblast prostoru kompenzací gravitačních sil silami setrvačnosti. Přibližně takovou lokální realizací je např. soustava spojená s tělesem kosmické lodi obíhající na dráze kolem Země.

Ve svých důsledcích nemůže být princip setrvačnosti (a tím i nelokální inerciální vztažný systém) obecně realizován na Zemi, v její blízkosti, ani v heliocentrické soustavě. Tak by se dalo ve výčtu vyšších vesmírných soustav pokračovat. Je to proto, že nenulová intenzita „místních“ gravitačních polí těchto objektů by způsobila urychlování volných těles, která se v nich nacházejí. Dokonalý inerciální vztažný systém lze předpokládat až v gravitačním poli vesmíru jako celku, v němž si odmyslíme lokální gravitační pole, resp. celkové gravitační pole vyrovnáme. Takové pole neurychluje tělesa, má tedy nulovou intenzitu a podle (7) konstantní potenciál. Neboli obecná platnost principu setrvačnosti je podmíněna *nulovou hodnotou intenzity a konstantním potenciálem gravitačního pole vesmíru jako celku*.

Označíme-li gravitační potenciál vesmíru φ_* , musí na základě principu setrvačnosti platit

$$\varphi_* = \text{konst.} \quad (9)$$

Vzhledem k tomu, že potenciál gravitačního pole je vždy záporný a má podle (8) rozměr druhé mocniny rychlosti, můžeme pro konstantu v (9) psát $\text{konst.} = -c_*^2$ a výraz (9) formálně vyjádřit ve tvaru

$$\varphi_* = -c_*^2. \quad (10)$$

Přitom c_* je zatím neznámá rychlost — co do velikosti i fyzikálního významu.

Velká jaderná energetika

Doc. ing. BEDŘICH HEŘMANSKÝ, CSc., FJFI ČVUT, Praha

V prosinci 1982 uplynulo již 40 let od okamžiku, kdy italský fyzik *Enrico Fermi* zahájil se svými spolupracovníky v prostorách Chicagské university úspěšný provoz prvního experimentálního jaderného reaktoru. Tak byla poprvé uskutečněna ustálená štěpná řetězová reakce a experimentálně prokázána možnost využití jaderné energie.

Prvou praktickou aplikaci představuje sovětská experimentální jaderná elektrárna o výkonu 5 MW, která byla v roce 1954 — tedy za pouhých 12 let od Fermiho experimentu — spuštěna v Obninsku. Ještě kratšími intervaly je charakterizován další rozvoj jaderné energetiky. Období experimentálních prototypů přechází postupně v široký nástup průmyslových jaderných centrál s tzv. „tepelnými reaktory“. Snaha o důsledné vyřešení energetické otázky však žene vývoj neúprosně dál. Teprve průmyslová výstavba velkých jaderných elektráren s množivými rychlými reaktory však může zajistit potřebné zdroje energie alespoň pro nejbližší století. Proč teprve rychlé množivé reaktory je možno považovat za důsledné řešení energetického problému? Na tuto otázku se pokusíme odpovědět v dalších kapitolách tohoto článku.

Kritická velikost reaktoru

Základním jaderným procesem, který probíhá v jaderných reaktorech, je štěpení uranu neutrony. Jestliže neutron vnikne do jádra atomu uranu, pak může dojít k rozštěpení jádra na dvě částice (štěpné produkty), podstatně odlišné od původního prvku. Z hlediska využití tohoto jevu pro jadernou energetiku je důležité, že se při štěpení uvolňuje velké množství energie (asi 200 MeV či 32 pJ na 1 štěpení), a dále, že při štěpení vznikají 2 nebo 3 neutrony, které mohou principiálně způsobit štěpení dalších jader a vyvolat tak štěpnou řetězovou reakci.

Větší část uvolněných neutronů je pro štěpení uranu ztracena, neboť vyvolá jiné jaderné reakce (parazitní absorpce), nebo unikne ze soustavy. Jelikož únik elektronů je úměrný velikosti povrchu soustavy a vznik nových neutronů jejímu objemu, lze zmenšením poměru povrchu a objemu docílit příznivějších podmínek pro realizaci štěpné řetězové reakce. Uvažujeme-li jednoduchý tvar štěpné soustavy, povrch při zvětšování rozměrů soustavy roste vždy pomaleji než její objem a podmínky pro vznik rozbíhající se štěpné řetězové reakce lze splnit prostým zvětšováním rozměrů soustavy. Velikost soustavy, při níž probíhá ustálená řetězová reakce, nazýváme *kritickou velikostí soustavy*. Množství štěpného

materiálu, v němž může probíhat ustálená štěpná řetězová reakce, nazýváme kritickou hmotností.

Tepelné reaktory

Neutrony vznikající při štěpení jader uranu (štěpné neutrony) mají vysokou energii a pravděpodobnost, že způsobí štěpení dalších jader, je malá. To je jedním z důvodů, proč v samotném přírodním uranu je samovolně probíhající ustálená štěpná řetězová reakce neuskutečnitelná. (V ojedinělých případech však mohla patrně štěpná řetězová reakce v přírodě probíhat. Jak ukazují nálezy ochuzeného uranu v Gabunu, došlo před 1800 milióny léty v některých zvlášť bohatých částech ložiska k uskutečnění přírodní štěpné řetězové reakce po dobu 10—70 tisíc let.)

Jednou z možností, jak vytvořit fyzikální podmínky umožňující vznik samovolně se udržující štěpné řetězové reakce, je pružnými srážkami s jádry atomů zpomalit štěpné neutrony na nízkou, tzv. *tepelnou energii* a tím podstatně zvýšit pravděpodobnost štěpné reakce. Ke zpomalování neutronů se používá moderátorů — látek s velmi lehkými jádry, na nichž probíhá intenzivní pružný rozptyl neutronů, aniž dochází ve větší míře k jejich absorpci. Vynikajícím moderátorem je těžká voda, dobrým moderátorem je grafit a intenzivní zpomalování neutronů probíhá i v obyčejné vodě. S použitím těžké vody nebo grafitu lze uskutečnit ustálenou štěpnou řetězovou reakci i v přírodním uranu. V reaktorech s moderátorem probíhá štěpení jader U 235 především tepelnými, tj. zpomalenými neutrony; proto hovoříme o tepelných reaktorech.

Při štěpení jader uranu dochází k přeměně jaderné energie na kinetickou energii odštěpků. Odštěpky jader se zabrzdí v bezprostředním okolí rozštěpeného jádra, což se projeví lokálním uvolněním tepelné energie. Teplo se odvádí teplotonosnou látkou (chladičem) do dalších okruhů jaderné elektrárny a přeměňuje se na elektrickou energii.

Tepelné reaktory tvoří základ dnešní jaderné energetiky. Přibližně lze odhadnout, že v současné době je v provozu již 300 jaderných tepelných reaktorů o celkovém čistém elektrickém výkonu asi 160 GW, přesnější údaje najdeme v publikaci (1). Připočteme-li rozestavěné jednotky, pak se tento počet ještě zdvojnásobí.

V uspořádání jednotlivých typů panuje pozoruhodná rozmanitost. V principu je možno různou kombinací základních součástí (tj. moderátoru, chladiče, paliva aj.) konstruovat téměř neomezený počet nových typů reaktorů. Ve skutečnosti je však značný počet kombinací předem vyloučen z fyzikálních důvodů nebo na základě omezení, která vyplývají z ekonomických úvah. Tak bylo postaveno několik desítek různých typů experimentálních reaktorů; základní typy, které se dnes podílejí na rozvoji jaderných reaktorů, lze však shrnout do osmi základních skupin. Jednotlivé typy se odlišují především použitým moderátorem a chladičem, v menší míře konstrukcí a uspořádáním aktivní zóny. Přehled

Tab. 1. Základní typy reaktorů a jejich označení dle MAAE

Označení dle moderátoru	Chladivo	Typ	Zkratka
Lehkovodní reaktory	H ₂ O	Tlakovodní reaktor Varný reaktor	PWR BWR
Grafitové reaktory	CO ₂	Magnoxový reaktor Pokročilý plynem chlazený reaktor	GCR AGR
		Vysokoteplotní reaktor	HTGR
	He H ₂ O	Sovětský reaktor RBM	LWGR
Těžkovodní reaktory	D ₂ O	Kanadský typ Candu	PHWR
Bez moderátoru	Na	Rychlý množivý reaktor	FBR

základních typů tepelných reaktorů a jejich označení podle Mezinárodní agentury pro atomovou energii (MAAE) udává tabulka 1.

Nejrozšířenějším typem podle počtu jednotek i čistého elektrického výkonu jsou tlakovodní reaktory moderované a chlazené obyčejnou vodou. Uvážíme-li jejich předpokládanou životnost, podrží si své výsadní postavení ještě několik desetiletí. Některé jednotky dosahují výkonu již 1300 MW (např. reaktory jaderné elektrárny Biblis v NSR) a není známa žádná zásadní překážka, která by znemožňovala extrapolaci čistého výkonu až na hranici 2000 MW.

Také v ČSSR tvoří tlakovodní reaktory základ jaderné energetiky. Výstavba jaderných elektráren se sovětskými reaktory VVER-440 v ČSSR a v dalších zemích RVHP probíhá v těsné spolupráci se Sovětským svazem. V současné době se pracuje na dvou staveništích: v *Jaslovských Bohunicích* na západním Slovensku (elektrárny V1 a V2 každá se dvěma bloky VVER-440) a v *Dukovanech* na jižní Moravě (V3, V4). Elektrárny V1 a V2 dodává Sovětský svaz, na výstavbě dalších jaderných elektráren se významně podílí i československý průmysl. Podle předběžného programu bude výstavba bloků s reaktory VVER-440 ukončena jadernou elektrárnou v *Mochovcích u Levic* na západním Slovensku (4×440 MW); tato elektrárna má být uvedena do provozu v 8. pětiletce. Další výstavba jaderných elektráren v ČSSR se bude pravděpodobně rozvíjet již s novým typem tlakovodního reaktoru VVER-1000. Pro výstavbu elektráren s těmito typy reaktorů je vybráno staveniště *Malovice* u Českých Budějovic, kde mají být umístěny 4 bloky.

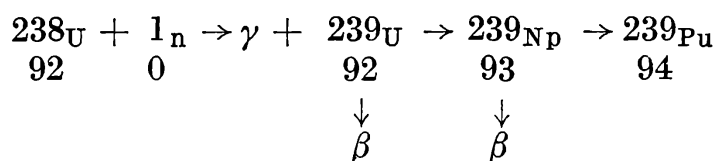
Úloha rychlých množivých reaktorů

Přestože současné tepelné reaktory představují bezesporu významný pokrok v řešení energetického problému, nelze je ještě považovat za

řešení „konečné“. Jelikož výchozím štěpným materiálem v tepelných reaktorech je izotop uranu $U\ 235$, nelze v těchto reaktorech ekonomicky využít všechnen uran. Koncentrace $U\ 235$ dosahuje v přírodním uranu pouze 0,7 %, lze tedy v tepelných reaktorech v principu využít pouze několik procent uranu. V takovém případě by byly světové zásoby uranu srovnatelné s klasickými zdroji energie a vystačily by patrně pouze na několik desetiletí. Problém podstatně dokonalejšího využití jaderného paliva řeší tzv. „velká jaderná energetika“ založená na opětovném využití vyhořelého paliva v rychlých množivých reaktorech.

Jaký je principiální rozdíl mezi tepelným a rychlým reaktorem? Ke štěpení jader atomu $U\ 235$ v tepelných reaktorech se využívá tepelných neutronů zpomalených v moderátoru, jejichž hlavní předností je vysoká pravděpodobnost štěpení. Jinou cestou, jak zajistit trvalý průběh štěpné řetězové reakce, je zvyšovat koncentraci štěpných izotopů (tj. $U\ 235$, $U\ 233$ či $Pu\ 239$). V takovém případě je štěpení vyvoláno rychlými neutrony, není nutno používat moderátoru a hovoříme o rychlých reaktorech.

Jelikož pravděpodobnost štěpení rychlými neutrony, které se při štěpení uvolňují, zůstává nízká, vyžaduje tato v principu jednodušší cesta daleko větší množství štěpného materiálu. Tato zdánlivá nevýhoda je vyvážena tím, že v rychlém reaktoru dochází v daleko menší míře k parazitní absorpci neutronů, a tedy lze část neutronů využít k transmutaci izotopu $U\ 238$ na izotop plutonia $Pu\ 239$:



Konverze $U\ 238$ na $Pu\ 239$ probíhá ovšem ve všech reaktorech, obsahujících $U\ 238$. Důležitá však je kvantitativní stránka tohoto procesu. Vhodnou fyzikální veličinou charakterizující množivé vlastnosti reaktoru je plutoniový koeficient x_p , udávající počet jader nově vzniklého paliva (plutonia) na jedno rozštěpené jádro. Zatímco v tepelných reaktorech je hodnota x_p podstatně menší než 1, může v rychlých reaktorech dosáhnout hodnota plutoniového koeficientu hodnoty větší než 1, tj. spálením 1 kg $U\ 235$ vznikne z $U\ 238$ více než 1 kg $Pu\ 239$. O důležitosti této skutečnosti svědčí následující jednoduchá úvaha:

Uvažujme energetickou soustavu vytvořenou reaktory s plutoniovým koeficientem x_p . Jestliže celková zásoba $U\ 235$ v přírodním uranu je M , pak po jeho využití a opětovném přepracování bude k dispozici $x_p M$ izotopu plutonia $Pu\ 239$. Toto plutonium je možno v dalším cyklu použít jako palivo v uvažované soustavě reaktorů, čímž vznikne $x_p^2 M$ dalšího $Pu\ 239$. Tento proces lze neustále opakovat. Celkové množství

štěpného materiálu, které je možno využít jako zdroj energie, bude tedy dáno součtem řady

$$M + x_p M + x_p^2 M + \dots$$

Jestliže bude v uvažované soustavě reaktorů $x_p < 1$, pak součet této řady je konečný, tj.

$$M(1 + x_p + x_p^2 + \dots) = \frac{M}{1 - x_p}.$$

I kdybychom dosáhli relativně vysoké hodnoty, např. $x_p = 0,9$, pak by to znamenalo, že místo 0,7 % U 235 můžeme využít o $1/(1 - x_p)$ uranu více, tj. přibližně 7 % přírodního uranu. Kvalitativně nová situace však vzniká, uvažujeme-li soustavu rychlých množivých reaktorů s plutoniovým koeficientem $x_p > 1$. V takovém případě je v zásadě možno využít kromě U 235 také veškeré zásoby U 238 a potenciální zásoby jaderného paliva vzrostou prakticky o řád.

Úspěšné vyřešení technických problémů spjatých s vývojem průmyslových rychlých reaktorů má však ještě další pozitivní aspekty. To, že rychlé množivé reaktory mohou používat jako paliva plutonium, které si samy vyrobily, se projeví nízkým podílem ceny uranu na ceně vyrobené elektrické energie. Ekonomika rychlých reaktorů tak bude málo citlivá na ceny paliva a pro energetiku budou ekonomicky přípustné i takové zdroje uranu, které dnes nemají průmyslový význam.

Jako příklad budoucích zdrojů štěpitelného materiálu lze v takovém případě uvést ložiska břidlice, která se rozkládají podél západního okraje Apalačských hor v USA. Tyto břidlice mají 5 m silnou vrstvu obsahující uran v koncentraci 60 g/t. To je hluboko pod hodnotou přijatelnou za dnešní situace. Energetický obsah těchto břidlic na čtvereční metr by byl ekvivalentní 2000 t uhlí, energetický obsah plochy 13 km² by byl ekvivalentní světovým zásobám ropy. Jiným příkladem je uran rozpuštěný v mořské vodě, jehož energetický obsah plně opravňuje považovat mořskou vodu za významnou potenciální energetickou surovinu. Podobných příkladů by bylo možno uvést více.

Jelikož první prototypy průmyslových rychlých množivých reaktorů jsou již v provozu (SSSR: BN-600; Francie: Phénix-250; Velká Británie: PFR-250), lze konstatovat, že již soudobá jaderná technika poskytuje v podobě rychlého množivého reaktoru průmyslově realizovatelnou variantu prakticky neomezeného zdroje energie. Právem proto můžeme velkou jadernou energetiku považovat za možnou alternativu konečného řešení energetického problému.

Literatura :

- [1] Heřmanský, B.: „Jaderné reaktory“, Populární přednášky o fyzice, sv. 31, SNTL — Praha, 1980

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Rozvoj klasickej fyziky v prvej polovici 19. storočia

Doc. dr. PAVOL FERKO, CSc., ing IGOR KMEŤ, PF Banská Bystrica

1. Úvod

Dejiny ukazujú, aký historický význam mala fyzika pre rozvoj techniky, filozofie a ľudskej spoločnosti vôbec. Dejiny fyziky majú význam ideologický, lebo podávajú konkrétny obraz svetonázorových konfliktov, z ktorých sa postupne zrodil vedecký svetový názor.

Pretože z tejto oblasti je nedostatok študijnej literatúry, chceme aspoň stručným prehľadom dejín fyziky zaplniť jestvujúcu medzeru.

2. Charakteristika vedy a spoločnosti

Politické udalosti i sociálno-ekonomické faktory vniesli podstatné zmeny do podmienok rozvoja vied v 1. polovici 19. storočia (1800—1850) v porovnaní s koncom 18. storočia. Podmienky rozvoja vied neboli v kultúrnych krajinách rovnaké.

Veľká francúzska revolúcia sprevádzaná na jednej strane rozvojom sieti rôznych špeciálnych kultúrno-vzdelávacích zariadení, bola na druhej strane príčinou zrušenia všetkých akadémií ako „semenište aristokratizmu“.

Na jeseň roku 1794 bola v Paríži otvorená Polytechnická škola a Národný inštitút, do ktorého sa združili znova otvorené akadémie. *Bonaparte* požiadal Inštitút roku 1802 o spracovanie prehľadu rozvoja vedy vo Francúzsku od roku 1789 — tedy od Francúzskej buržoárnej revolúcie. Prvý a jediný prehľad zostavil *Cuvier* roku 1808. V tomto čase sa vo Francúzsku začala technická revolúcia a tá spôsobila rýchlejší rozvoj fyzikálno-matematickým ako i ostatným prírodným vedám. *Cuvier* tvrdil, že k veľkým objavom možno dospieť len cestou mnohých experimentov, urobených pomocou váženia, merania a výpočtov, realizovaných porovnávaním, ale podmienky vo Francúzsku ani zďaleka neboli priaznivé experimentálnej vedecko-výskumnej práci. Ani na Polytechnickej škole, ani v Národnom inštitúte neboli vedecko-výskumné laboratória. Aj inde sa vyskytovali len zriedka. Preto vedci tejto doby robili výskumy za veľmi ťažkých podmienok, často i vo vlastnom byte. Tak

napr. pracovali *Ampér*, *Fresnel* a iní. Veľmi dobre vybavené vedecké kabinety boli zriaďované v palácoch buržoázie, ktorá pozývala známych vedcov na prípravu efektných zábav. Vedci aspoň touto cestou mali možnosť vo voľnom čase využívať bohaté vybavenie kabinetov i pre prípravu vedeckých experimentov. Francúzski učitelia boli materiálne závislí od centralizovaného Národného inštitútu, ktorý často brzdil vydávanie originálnych vedeckých prác, napríklad len z takých dôvodov, že si to neželali niektorí starší akademici, ktorí nechceli uznať nové vplyvy a prúdy. Takáto bola situácia vo Francúzsku.

V nemeckých štátoch na začiatku 19. storočia už existovalo viacero univerzít. Charakteristické je, že pod vedou rozumeli súhrn všetkých vied, zatiaľ čo na francúzskych vysokých školách tej doby sa rozvíjali temer výhradne len fyzikálno-matematické a ostatné prírodné vedy. Územná blízkosť rôznych fakúlt na univerzitách prispievala k výmene názorov, ako aj k vzájomnému vplyvu rôznych vied. Nakoľko Nemecko bolo v tom čase technicky i ekonomicky zaostalou krajinou, fyzikálno-matematickým a prírodným vedám venovali teda menšiu pozornosť ako filozofii, bohoslovestvu alebo klasickej filológii. Preto práve v Nemecku prirodzene vznikali pokusy aplikovať filozofické názory nielen na historické procesy, ale aj na prírodné javy. Keďže Nemecko bolo rozdrobené, a to spôsobovalo aj decentralizáciu práce univerzít, tento jav prispel k tomu, že začalo vznikať veľké množstvo rôznorodých periodických časopisov, kde sa publikovali vedecké práce a viedla široká a mnohostranná diskusia o špeciálnych ako aj všeobecných otázkach.

V polovici storočia prudko silnejúci prakticismus, spojený so začiatkom technického i priemyselného prevratu v Strednej Európe, vyžadoval od prírodovedcov rozvoj aplikovaných výskumov. Táto situácia mimoriadne vyhrtila vzťahy medzi empirickým a teoretickým smerom bádania. Medzi časťou nemeckých prírodovedcov, zvlášť medzi fyzikmi, sa postupne vytváral pohľadový postoj k teórii. Vydavateľ časopisu „*Annalen der Physik*“, známy fyzik *Poggendorff*, odmietal všetky články, v ktorých videl hoc i malú tendenciu k naturfilozofickému teoretizovaniu. Proti teoretickým výskumom vystupoval vedúci činiteľ berlínskej školy fyzikov *Magnus*.

Čo sa týka materiálnych podmienok pre vedeckú prácu, tieto vzhľadom k tomu, že nemecké univerzity patrili kniežatám a princom, boli rôznorodé. Nejestvovalo jednotné financovanie. Podmienky sa menili od univerzity k univerzite veľmi zvláštnym spôsobom. Charakteristické pre nemecké univerzity už v tom čase bolo skoro povinné spájanie učebného procesu s vedecko-výskumnou prácou. Nemecké univerzity veľmi utrpeli napoleonovskými vojnami; zlepšenie nastalo približne v rokoch 1830—1840.

V Anglicku, kde priemyselná revolúcia zvíťazila už na začiatku nami opisovanej doby, bolo postavenie vedy odlišné ako vo Francúzsku a Ne-

mecku. Anglicko nemalo také zariadenia ako napríklad francúzsky Národný inštitút, ani systém univerzít, podobný s nemeckým. Staré anglické univerzity Oxford a Cambridge boli bohatšie ako iné zariadenia na pevnine.

Nehľadiac na obrovské úspechy anglickej vedy v tomto čase, v samotnom Anglicku tieto úspechy sa považovali za nedostatočné. Snaha systematizovať smer vedeckého výskumu priviedla v roku 1830 k utvoreniu „Asociácie pre podporu vedy“, ktorá zohrala vážnu úlohu pri rozvoji anglickej vedy. Treba poznamenať, že v tom čase podobná organizácia už existovala v Nemecku. Založil ju *A. Humboldt* roku 1828. Anglickí vedci pracovali individuálne. Aj keď nezakladali vlastné školy, dospeli k mnohým objavom, ktoré odkrývali nové cesty k neobjaveným tajomstvám prírody.

Porovnávajúc vedecké úspechy troch západoeurópskych krajín — Francúzska, Nemecka a Anglicka v prvej polovici 19. storočia, známy anglický historik *J. Th. Mertz* písal: „Francúzsko bolo tou krajinou, kde sa po prvý raz začali uplatňovať najnovšie metódy merania, výpočtov i klasifikácií, a to v širokých meradlách na štúdium prírody ako celku. Objavy urobené vo Francúzsku boli využité k tomu, aby revolucionizovali remeslá a priemysel. Ukazuje sa, že duch vedy, ako ho poznáme, bol už úplne vytvorený vo Francúzsku zo začiatku storočia“. Ako ďalej poznamenáva Mertz, „ten istý vedecký duch sa udomácňuje aj na nemeckých univerzitách ako integrálna časť univerzitného cyklu. To, čo chýbalo francúzskej vede, historická úplnosť a filozofická kritika, bolo jej pridané v Nemecku . . .“

„Uvedenie vedeckého ducha ako ustanovujúceho kanonu systematických a metodologických výskumov (štúdií) sa v Anglicku uskutočnilo neskôršie než v druhých krajinách. Typickým pre toto obdobie v Anglicku bolo to, že počas celého storočia v mnohých izolovaných oblastiach vedy vznikali mnohé vynikajúce pionierske práce fundamentálneho významu. Individuálne snahy, v protíváhe s kolektívnymi, boli tu nahradené radom vynikajúcich objavov, ktoré buď revolucionizovali prax, alebo odkrývali nové cesty k skrytým tajomstvám prírody. Primát z hľadiska najúplnejších vedeckých prác čo do formy a obsahu, ktoré sa stali klasickými, patrí Francúzsku. Najviac vedeckých prác bolo vypracovaných v Nemecku. Najväčším podielom nových myšlienok, ktoré počas storočia obohacovali vedu, prispelo Anglicko“, — uzatvára Mertz.

Čo sa týka ostatných európskych štátov a USA, tu je ťažko hovoriť o existencii národnej vedy.

3. Situácia vo fyzike

Fyzika bola v prvej polovici 19. storočia samostatnou vedou. Newtonská fenomenologická metóda sa považovala za základnú a všeobecne

uznávanú. Mechanika, vyzbrojená metódami matematickej analýzy, bola premenená v silný, fundamentálny nástroj výskumu. Fyzikálny experiment sa prevažne stal kvantitatívny, merateľný a dosiahol vysokú presnosť v rôznych odboroch, opierajúc sa o rýchlo rozvíjajúce sa prístrojové vybavenie.

Keď sa pozrieme bližšie na stav jednotlivých oblastí fyziky — optiku, elektrinu, magnetizmus, teplo, nie je ťažké spozorovať, že nazhromaždený empirický materiál sa interpretoval pomocou starých metafyzických teórií. V optike v tomto období vládla emisná korpuskulárna teória popri jestvujúcej vlnovej hypotéze, ktorá zohrávala osobitnú úlohu oficiálnej „opozície“. V náuke o magnetizme vládla magnetická fluidová teória. V teórii o elektrine sa nové objavy popisovali pomocou predstáv o dvoch nezávažných elektrických fluidách, údajne zistených experimentálne. V náuke o teple si ešte zachovávala vládu teória flogistónu (nevážiteľná tepelná látka).

Koncom 18. a začiatkom 19. storočia sa novým experimentálnym objavom prispôbovali staré teórie len v snahe o zachovanie. Ale história je neúprosná.

Prvá polovica 19. storočia je známa revolučnými zmenami odohrávajúcimi sa v jednotlivých oblastiach fyziky. Najprv takýto prevrat nastáva v optike. Emisná teória neuspokojuje . . . Zaniká teória magnetických fluid. A nakoniec, v polovici storočia pod tlakom technických zdokonalení aj teória flogistónu — kalorika (hypotetické tepelné fluidum). Elektrické fluidá si ešte zachovávajú svoju pôsobnosť.

V skúmanom období začína silný odstup od prežitkov vo fyzikálnych teóriách svetla, magnetizmu a tepla. Stroskotanie teórie kalorika je sprevádzané druhou dôležitou udalosťou — objavom fundamentálneho zákona energetickej ekvivalentnosti a premeny všetkých foriem pohybu i vzájomného pôsobenia — zákona zachovania energie. A práve v tejto epoche pod tlakom chemických objavov odohráva sa tretia dôležitá udalosť — fyzikálno-chemický atomizmus, ktorý čaká veľká budúcnosť. Náuka o elektrine začína nadobúdať veľký praktický význam a vytvára sa najužšie spojenie medzi teoretickými štúdiami a ich praktickým využitím. V druhých oblastiach fyzika tejto doby nenachádza praktické upotrebenie. Zatiaľ je schopná vysvetliť len početné fyzikálne javy, ktoré už technická prax široko využíva.

S podobnou situáciou v oblasti hydromechaniky sme sa stretli už v dejinách vedy 18. storočia. Naliehavé požiadavky každodennej praxe prinútili inžinierov samostatne rozpracovať zjednodušené metódy aplikovanej hydromechaniky, založené na využití výdobytkov a predstáv fyziky. Podobné problémy boli riešené aj v druhých oblastiach technických vied, ako napríklad v teórii tepla v spojení s rozširujúcou sa výrobou a praktickým použitím parných strojov, sušiarňí a pod.

Fyzik *Peclet*, autor francúzskej príručky „O teple a jeho využití v ume-

ní a remeslách“, hovorí, že „fyzikálne výskumy sa opierajú o teoretickú fyziku, ale vôbec nie o jednoduchú aplikáciu základných zákonov fyziky, chémie a mechaniky. Teoretická fyzika vnáša do technickej fyziky — aplikovanej fyziky — len svoje všeobecné zákony a metódy výskumu, ktoré málo uspokojili. Každé odvetvie priemyslu potrebuje špeciálne výskumy, ktoré sa musia vykonať tak, ako vo všeobecnej — teoretickej fyzike“. Túto epochu charakterizuje vstup aplikovanej fyziky do fyzikálneho diania. Na jej rozvoji sa aktívne zúčastňovali samotní fyzici. Peclet hovorí, že vznik aplikovanej fyziky je úzko spojený s priemyselnou revolúciou. Ďalej poznamenáva, že rozvoj aplikovaných fyzikálnych výskumov prispel k rozšíreniu faktického materiálu samotnej vedy.

Poznámka:

Príspevok je spracovaný na základe rozsiahlej monografie *J. G. Dorfman*: *Vesmírnaja istoria fyziky s drevnejších vremen do konca 19. veka*. Izdatelstvo Nauka 1974 Moskva.

O Ústavu fyzikálných problémů v Moskvě

RNDr. J. PAČES, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Když se *P. L. Kapica* vrátil v roce 1934 ze svého třináctiletého pobytu v Anglii do SSSR, rozhodla se sovětská vláda zřídit pro něho vědecký ústav. Kapica si přinesl s sebou z Anglie i tematiku: výzkum látek v extrémně silných magnetických polích a nízkých teplotách. Byla to tematika v té době vysoce moderní, pro niž byly na světě vytvořeny podmínky pouze v Mondově laboratoři, která byla v Cambridge vybudována pro tento účel a jejímž byl *P. L. Kapica* ředitelem. Pro nový ústav sovětská vláda zařízení Mondovy laboratoře zakoupila. Nebylo to nijak snadné. Cambridgeská univerzita vyhověla žádosti o prodej unikátního zařízení teprve na doporučení, dalo by se dokonce říci intervenci *Rutherforda*, který si velice vážil svého žáka, jehož brzy po jeho příjezdu začal považovat za spolupracovníka a jmenoval ho dokonce svým zástupcem ve funkci ředitele laboratoře.

Bylo tedy zakoupeno unikátní a vysoce speciální vybavení pro výzkum v oborech, ve kterých zcela nedávno zazářil Kapica ve vědeckém světě velice výrazně. A přesto ústav nedostal název ani podle silných magnetických polí ani podle nízkých teplot. Kapica vybral název co nejobecnější. Protože jeden fyzikální ústav už v Moskvě byl, dostala nová vědecká instituce název Ústav fyzikálních problémů. Kapica o tom napsal v jed-

ním článku: „Tento poněkud neobvyklý název má vyjádřit to, že se ústav nebude zabývat nějakou určitou vědeckou oblastí, ale bude ústavem, zkoumajícím různé vědecké problémy, jejichž okruh bude určovat ten personál, ty vědecké kádry, které v něm budou pracovat. Tedy tento ústav je určen pro čistou, nikoli aplikovanou vědeckou práci.“ My bychom dnes řekli, že ústav se měl zabývat základním výzkumem.

Jako předtím v Anglii, tak i nyní jako ředitel moskevského ústavu zaměřoval Kapica svou vědeckou práci a tím i program značné části ústavu takovým směrem, kde se rýsovala problematika nová, překvapující, kde se objevilo něco nepochopitelného. A tak se stalo, že „koeficient využití“ (jak bychom to nazvali mluvou našich současných dotazníků) drahého zařízení pro získávání extrémně silných pulsních magnetických polí, které ovlivnilo i stavebně budovu ústavu, nedosáhl dostatečně uspokojivých hodnot. Před zraky fyziků se totiž otevřel nový svět: záhadné vlastnosti helia pod lambda-bodem, což je teplota, při níž dochází v kapalném heliu k fázovému přechodu. Nová fáze — helium II — je kapalina neuvěřitelných vlastností. Jednou z nich je supratekutost, objevená, pojmenovaná a zevrubně experimentálně prozkoumaná Kapicou v druhé polovině třicátých let v Ústavu fyzikálních problémů. (S třicetiletým zpožděním byly tyto práce oceněny Nobelovou cenou.) A za čtyři roky po objevu supratekutosti vyšla ze stejného ústavu, ve kterém pracovala jenom hrstka stálých pracovníků, i teorie supratekutého helia, jejímž autorem byl *L. D. Landau*. Objev a teorie supratekutosti byly snad největším úspěchem mladého ústavu a potvrzením správnosti nastoupené cesty. Je pravda, že většina problémů, zkoumaných v ústavu, souvisela nějakým způsobem s nízkými teplotami. Je to tím, že v ústavu byla a je jako málokde jinde rozvinuta kryogenní technika. Rovněž je pravda, že většina problémů, řešených v ústavu, patří do základního výzkumu. Každé pravidlo má však výjimku. Ostatně ani snad nejde o výjimku, jak je patrné ze stejného článku Kapici. Citujme jenom o několik řádků dál: „Mezi užitou a čistou vědou je jenom jeden rozdíl: v užité vědě vědecké problémy přicházejí ze života, zatímco čisté vědy samy vedou k aplikovatelným výsledkům, protože žádné vědecké poznání nemůže zůstat nevyužitým, — najde tak nebo jinak své využití a dá praktické výsledky, i když je těžké předvídat, kdy a jak k tomu dojde.“

Necelý rok poté, co se v časopisech *Doklady AV SSSR* a v *Nature* objevily slavné práce o viskozitě kapalného helia pod lambda bodem, vyšel v *Žurnálu technické fyziky* Kapicův článek pod názvem „Turbo-detander pro získání nízkých teplot a jeho použití pro zkapalnění vzduchu.“ Zdá se tedy, že práce na problémech základního i aplikovaného výzkumu probíhaly více méně současně. A jak k tomu došlo, vysvětluje sám akademik Kapica v přednášce o kyslíku z roku 1944. Bylo zřejmé, že levný kyslík by umožnil intenzifikaci procesů zejména v chemickém průmyslu a v metalurgii. Nejlevnějším zdrojem kyslíku je vzduch, z ně-

hož je možno získat kyslík rektifikací, tedy v podstatě destilací zkapalněného vzduchu. Ale zkapalnění vzduchu bylo energeticky náročné, protože vzduch bylo třeba stlačovat na 200 atmosfér. K ochlazení stlačeného vzduchu byla použita adiabatická expanze v pístovém detanderu. V dalším stupni, využívajícím Joule-Thomsonovu expanzi, se vzduch ochlazoval dále, až zkapalňoval. Pístový detander fungoval v podstatě stejně jako válec parního stroje, z něhož rovněž vychází pára chladnější, než která do něho vstupuje. Už dávno bylo spočítáno, že nahrazení pístového stroje turbinou by celý proces náramně zlevnilo. Jenomže všechny pokusy s použitím parních turbin ztroskotaly na hanebně nízké účinnosti.

Kapica se angažoval v řešení tohoto problému nejprve jako fyzik. Jako první si všiml toho, že stlačený a ochlazený vzduch se svými vlastnostmi blíží spíše kapalině než páře. Navrhl proto použít pro expanzní stroj turbinu podobnou vodní. V průmyslu nenalezl pro svůj návrh pochopení, proto se pustil do vývoje zařízení jako inženýr. Za necelé tři roky byl v ústavu fyzikálních problémů získán kyslík novou, několikrát účinnější, a tedy i hospodárnější metodou, která nepotřebuje používat vysokých tlaků. Přední pracoviště základního výzkumu se tedy na čas změnilo ve vývojové pracoviště a vydalo výsledek, který ovlivnil rozvoj mnoha oblastí průmyslu na celém světě.

Kapica chápal toto aplikační extempore jako jev mimořádný, který byl umožněn tím, že on sám měl jak badatelské, tak inženýrské vlohy a zkušenosti. Dodejme k tomu ještě, že na úspěchu se významně podílely i rozsáhlé a bohatě vybavené dílny ústavu.

Ústav fyzikálních problémů byl od počátku budován jako elitní vědecké pracoviště. Měl vždy nevelký počet stálých vědeckých pracovníků, jejichž výběru věnoval akademik Kapica mimořádnou pozornost. Když se dnes ohlédneme nazpět, vidíme, že mezi nimi byli dva nositelé Nobelovy ceny, vždy bylo a dodnes je mezi nimi vysoké procento doktorů věd a členů akademie. Taková koncentrace vynikajících vědeckých kádrů není samoučelná. Ústav se od počátku velice angažuje ve výchově mladých vědeckých pracovníků, kteří odtud odcházejí zpravidla na významná místa v jiných vědeckých institucích. V samotném ústavu zůstává některý absolvent přípravy jenom zřídka. Protože každý vědecký pracovník vede alespoň jednoho diplomanta, stážistu nebo aspiranta, je v ústavu vždy převaha mladých fyziků. A tak mladický elán a touha vyniknout ve spojení se zkušenostmi renomovaných vědeckých pracovníků zajišťují nestárnoucí tvůrčí atmosféru ústavu. I ti mladí byli vždy pečlivě vybíráni. Zpočátku ústav organizoval pro studenty MGU nízkoteplotní praktika, která vedli vědečtí pracovníci ústavu a vybírali ze studentů talentované jedince, kteří se potom mohli ucházet o stáž v ústavu. Později, po založení Moskevského fyzikálně technického institutu — vysoké školy pro mimořádně talentované studenty, byli diplomanti

a stážisté vybírání převážně z řad jeho studentů. Většina vědeckých pracovníků ústavu na této vysoké škole přednáší. Přednášení a vůbec styk starších a zkušených vědeckých pracovníků s mládeží má význam nejen pro mladé. Kapica o tom napsal: „Na tuto práci (mluvil o výběru mladých vědeckých kádří) nelze litovat sil, a to nejen proto, že mladé vědecké kádry jsou naše budoucnost. Oni jsou naše přítomnost. Když člověk začíná stárnout, jenom mládež, jenom jeho žáci ho mohou zachránit od předčasného okorávání mozku. Každý žák musí v oblasti, ve které pracuje, znát více, než zná v této oblasti jeho učitel. A kdo potom učí svého učitele, jestli ne jeho žák ?

Učitel určuje díky svým zkušenostem směr práce, ale koneckonců učitele učí jeho žáci, oni prohlubují jeho znalosti a rozšiřují jeho obzor. Bez žáků vědec obvykle velice brzo hyne jako tvůrčí osobnost a přestává postupovat dopředu. Nikdy jsem nezapomněl na slova svého velkého učitele Rutherforda, že pouze díky svým žákům se cítil také mladým. A když sám začínám stárnout, cítím, že kontakt s mládeží je *modus vivendi*, který člověka chrání od uvadání, zabezpečuje udržení svěžesti a zájmu o vše nové a pokrokové ve vědě. Vždyť konzervatismus ve vědě je pro vědce horší než předčasná smrt, je to brzda rozvoje vědy.“

Že tato představa o vlivu studentů na vývoj učitele a jeho duševní svěžest je správná, to velice dobře dokumentuje situace v Ústavu fyzikálních problémů. Zbytku první generace stálých vědeckých pracovníků je dnes kolem osmdesáti (Kapica zemřel loni na jaře krátce před svými devadesátinami). Růst celkového počtu nových vědeckých pracovníků je téměř nulový, protože výběr je velice přísný. Věkový průměr je tedy vysoký. A přesto je ve stěnách ústavu cítit elán, který je neklamným příznakem mládí. Je tedy zřejmé, že tímto mladistvým duchem infikují atmosféru ústavu ti diplomanti, stážisté, aspiranti, kteří stráví v ústavu 3—6 let a po vyškolení odcházejí jinam.

Ústav fyzikálních problémů ovlivňuje úroveň jiných vědeckých pracovišť nejenom tím, že pro ně vychovává kvalitní vědecké kádry. Velice účinnou formou „vědecké propagandy“ je jeho seminář. Od počátku existence ústavu prosazoval akademik Kapica konání pravidelných seminářů. Jak vyplývá ze vzpomínek první generace zaměstnanců, nebyl to úkol lehký. Ředitel ústavu musil vyvinout zpočátku značný tlak, uplatnit vytrvalost, trpělivost i tvrdošijnost, aby dosáhl toho, že se ze semináře stala trvalá instituce. Sám jsem zažil několik zasedání „Kapicova semináře“ či „Kapičnicku“ až v tom období, kdy už byl renomovanou institucí, kam chodili nejen spolupracovníci ústavu a ústavů okolních, ale nenechali si ho ujít ani ti fyzici, kteří se zrovna ocitli v Moskvě. Seminář řídil osobně akademik Kapica, který ho zahajoval a končil na vteřinu přesně v určený moment úderem kladívka o gong. Třeba v polovině slova neukázněného přednášejícího. Dlouhou dobu byl centrální postavou semináře akademik Landau, který sice seminář neřídil, ale

přesto mu udával tón. Poslouchal velmi pozorně, reagoval velmi živě na to, s čím nesouhlasil, diskutoval, přel se s přednášejícím i s posluchači, prostě byla ho plná posluchárna. Byl to přímo umělecký zážitek být při tom a sledovat, jak Landau myslí, proniká do problému a často ho i dotváří. Po jeho smrti se stal ústřední postavou akademik *Borovik-Romanov*, nesmírně erudovaný fyzik, vynikající experimentátor a člověk s velkým taktem, který dnes po smrti Kapici řídí ústav. Seminář se mění, jak se mění fyzika a fyzikové, ale to podstatné zůstává: tvůrčí atmosféra, kritičnost, nestrannost, snaha dopátrat se pravdy — vědecké pravdy. Není divu, že mnoho fyziků si pokládá za čest referovat na semináři o svých výsledcích a že tedy není problém, jak sehnat zajímavý referát, ale spíše jak to udělat, aby referenti nestáli příliš dlouho ve frontě.

Ústavu fyzikálních problémů bude brzo 50 let. Je to vidět na budovách i na stromech v parku, do kterého je zasazen. Je to vidět i na šedinách dobré poloviny vědeckých pracovníků. Je to vidět i na stopách, které pracovníci a odchovanci ústavu zanechali na rozvoji fyziky. Stáří ústavu však nic nezměnilo na jeho atmosféře, na věčně mladé touze objevovat neznámé.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

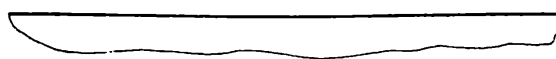
Janko Hraško v Paralelolande I

ANNA MICHALCOVÁ, Zvolen, MILAN HEJNÝ, Bratislava

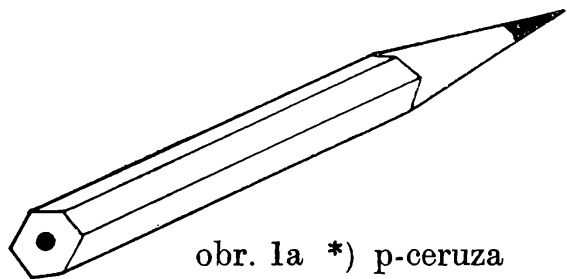
Bolo horúce júlové poludnie. V dedinke Smrdáky na Záhorí dovarila práve tetka Hraškovie obed. Po synkovi ho pošle otcovi na pole. Na minikárku upevnila kastrólik s demikátom, lyžicu vyložila Jankovi na rameno a on šiel. Otec sa už na oboch veľmi tešil — na dobrý obed aj na syna, ktorý podchvíľou otca či už múdrosťou ohúril, alebo fígľom rozosmial. Ej, veruže otec Hraško ľúbil svojho Janka. Jediné, čo otca trápilo, bola Jankova malá výška. Aj teraz, keď s chuťou ujedal z demikátu, prehodil:

— Ná, co len z tebja bude, synku, keď si ty len taký zákrpek. Ale syn smelo a veselo odvetil:

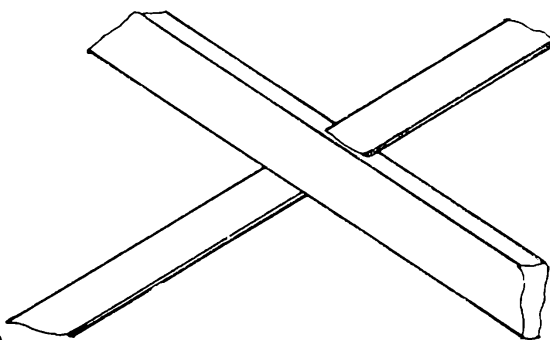
— Len sa vy, tatko múj, o mňa nebojte. Hlavná vec, že mám tolkeho fištróna.



obr. 1b p-pravítko



obr. 1a *) p-ceruza



obr. 1c p-rovnobežník

Na spiatocnej ceste z poľa domov si Janko dožičil zábavky. Prázdny kastrólik hodil na vlnky potoka, naskočil, lyžicu vzal namiesto vesla a už si to kastrólikoval proti prúdu. Ustatý od lyžicovania, zadriemal Janko na dne kastrólika. Zobudil sa, až keď ho obrovitá vlna vyhodila do výšky. A to už bolo zle. Po suchej zemi ani slychu ani vidu, všade len voda, voda, voda. Janko bol na mori. Na nepokojnom, rozbúrenom mori.

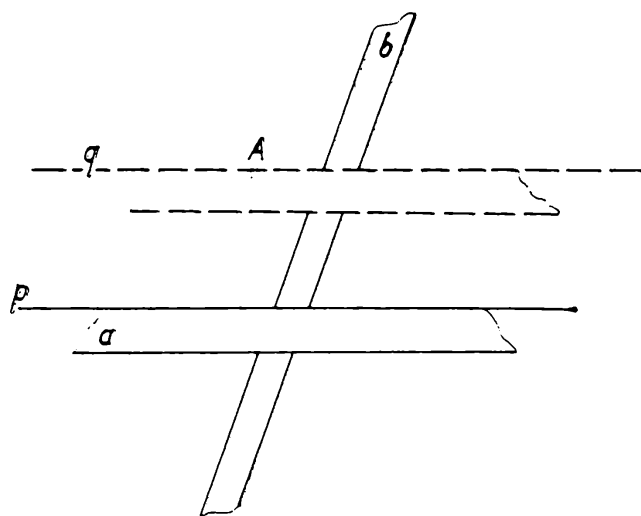
Ušetríme nervy čitateľa a nebudeme dopodrobna opisovať strašnú búrku, Jankovo stroskotanie, zožranie žralokom, vylovenie žraloka a zachránenie Janka. Všetko to je už vykreslené v mnohej inej vedeckej literatúre (pozri napr. *J. C. Hronský: Smelý zajko v Afrike.*).

V rozprávaní budeme pokračovať od okamihu Jankovej záchrany. Od tohto momentu sú totiž Hraškové príhody originálne, podnes, ako je nám známe, ešte nikde nezverejnené. Rybári, ktorí nášho hrdinu zachránili, pochádzajú z Paralelolandu — z krajiny, ktorú doposiaľ navštívilo iba niekoľko čudákov. Títo však o svojej ceste podávali oznamy strohé a pre nezasvetenca ťažko čitateľné. Preto je nasledujúci opis príhod Janka Hraška vlastne prvým cestopisom o Paralelolande, určeným širokej čitateľskej obci.

Medzi Záhorím a Paralelolandom je viacero odlišností. Zanedbáme nepodstatné a upriamime sa na jedinú, a najdôležitejšiu: rysovacie nástroje, pomocou ktorých Paralelollandania spoznávajú geometrické vlastnosti svojej krajiny.

V Paralelolande nevedia, čo je kružidlo či odpichovadlo, nepoznajú tu pravouholník a nikdy nepočuli o uhlomeri. Jediné, čo geometri krajiny poznajú a pomocou čoho získavajú znalosti o svojej zemi, sú tri rysovacie inštrumenty (pozri obr. 1):

*) „p“ značí „paralelolandská“, „-ý“, „-é“; neskôr budeme symbol „p“ vypúšťať.



Obr.

Na kreslenie čiar je p-ceruzka, podľa p-pravítka rysujeme priamky a podľa p-rovnoobežníka rovnoobežky. p-Žiaci občas kreslia priamky aj pomocou p-rovnoobežníka, ale to už nie je podľa p-predpisu, takže po tejto chybe dostávajú p-žiaci p-pätku alebo p-poznámku do žiackej, podľa toho, či vyučujúci považuje tento priestupok za nedostatok znalostí, či za prebytok samostatnosti. Materiál, z ktorého je pravítko i rovnoobežník zhotovené, je taký čudný, že sa po ňom nedá vôbec kresliť. Napríklad nebolo možné takto prenášať dĺžku úsečky. Spôsob použitia rovnoobežníka je naznačený na obr. 2.

Keď potrebujeme bodom A viesť rovnoobežku s priamkou p , postupujeme takto: Pohyblivé rameno a sa priloží k priamke p , potom sa po pevne držanom ramene b posunie k bodu A a v tejto polohe sa podľa neho narysuje rovnoobežka q .

Keď sa Janko v Paralelolande trocha rozhlíadal a zistil opísanú nezvyčajnú osobitosť zeme, veľmi sa zaradoval. Po celom Záhorí bol Janko vychýrený matematik a geometrické konštrukcie boli v škole jeho najobľúbenejším učivom. Znalosti, ktorými prevyšoval svojich záchrancov a všetkých domorodcov, mu dávajú príležitosť získať slávu a prípadne aj čosi konkrétnejšie k nej.

Janko bol múdry chlapec a vedel, že sa nesmie prenáhliť. Preto sa rozhodol spísať si aspoň niekoľko konštrukcií, ktoré môžu Paralelolandania so svojimi obmedzenými možnosťami objaviť. Skôr však dobrý syn napísal domov list, aby sa rodičia nestrachoali. Teraz čakal odpoveď a s ňou i dáku tú dobrotu, pretože práve v tej dobe boli v Smrdákoch hody.

Ubehlo niekoľko dní. V štúdiu novej geometrie urobil Janko značné pokroky. Vedel toho veľa, lenže bolo to akosi rozhádzané. Pribral sa preto do upratovania svojich vedomostí. Napísal:

Základné konštrukcie Paralelolandu sú:

1. Dané dva rôzne body spojiť priamkou.

2. Nájst priesečník dvoch rôznobežných priamok.
3. Daným bodom viesť rovnobežku s danou priamkou.

Ešte raz si Janko nahlas prečítal všetky tri základné konštrukcie, aby sa uistil, že formulácia je správna a náležitá. Vtedy ktosi zaklepal na dvere. Do Jankovej izbičky nazrela kučeravá hlavička dievčatka.

— Ty si to ten Janko Hraško zo Záhoria?

— Áno, ja, — začudovane odpovedal Janko.

— Mňa volajú Paralilka, alebo krátko Lilka. Môj dedko je tu poštárom a posielal ti balík, ktorý ti ráno nemohol doručiť, lebo si nebol doma, — povedalo dievčatko a položilo na stôl balík.

— Hurá! To je od mamky! — zvolal Janko a dodal, — Lilka, nože počkaj, okoštuješ!

Dievčatku ponúkol obsah balíka a sám sa pribral do čítania listu. Rodičia synka bozkávajú a prosia ho, aby dával na seba pozor a čo najskôr sa vrátil v zdraví domov.

Z čítania Janka vytrhla štiplavá poznámka Lilky, ktorá si ujedala z balíka:

— A to zviera sa volalo Bundáš alebo Dunčo?

— To je, Lilka, mýlka! Ja sem predsa ze Smrdákú a nje z Brodského.

— Aha, ty sa učíš geometriu, — zahovárala Lilka, keď pobadala, ako je Janko na túto tému háklivý.

Janko, podpichnutý poznámkou, chcel tomu kučeravému dievčisku vysvetliť, že toto tu nie je žiadne učenie, že on, Janko Hraško, vie z geometrie viac ako všetci geometri Paralelolandu dokopy, že s takými malými rysovacími prostriedkami, ako oni tu používajú, sa tiež veľa objaviť nedá, že . . . Proste, mal toho na jazyku veľa, ale podarilo sa mu ovládnuť. Radšej sa urobil hlúpym a predstieral, že viac, ako je napísané na papieri, nevie.

— Keď je tak, skús si, Janko, vyriešiť naše „ôsmacke kritérium“. Sú to úlohy, ktoré musí vedieť riešiť každý ôsmak:

Ú. 1. Danú úsečku AB rozdeliť napoly.

Ú. 2. Danú úsečku AB rozdeliť na 4 rovnaké časti.

Ú. 3. Keď je daná úsečka AB , nájsť bod C tak, aby bod B bol stredom úsečky AC . Inak: zdvojnásobiť danú úsečku AB .

Ú. 4. Zostrojiť n -násobok danej úsečky AB .

Ú. 5. Danú úsečku AB rozdeliť na tri rovnaké časti.

Ú. 6. Danú úsečku AB rozdeliť na n rovnakých častí.

Lilka dopísala šiestu úlohu, pozrela na hodinky a s výkrikom „To bude virgas!“ utiekla. Na Jankovu otázku, kedy príde nabudúce, odpovedala už vo dverách stručným „čau“!

Hraško ostal s úlohami sám. Nuž čo, pustil sa do riešenia. Netrvalo dlho a všetky boli rozriešené. Je síce pravda, že sa ešte občas pomýlil a použil pri riešení aj iný inštrument ako pravítko a rovnobežník, ale

napokon všetky chyby odstránil. Starostlivo si vypísal všetky riešenia a ku každému kroku v riešení pripísal aj číslo použitej základnej konštrukcie. S uspokojením hľadel na výsledok svojej práce. Bol si istý, že Lilka od úžasu onemie.

Lenže budúce stretnutie Janka Hraška s Lilkou nedopadne celkom tak, ako si Janko predstavuje. Ako dopadne? Pokúste sa to zistiť! O mesiac si budete môcť svoje dohady overiť.

OLYMPIÁDY A SOČ

Patnáctá mezinárodní fyzikální olympiáda

Doc. RNDr. ing. DANIEL KLUVANEC, CSc., RNDr. IVO VOLF, ÚV FO

Organizátorem 15. mezinárodní fyzikální olympiády, nejvyšší soutěže pro žáky středních škol se zájmem o fyziku, bylo v r. 1984 Švédské království. Na přípravě a finančním zabezpečení soutěže se podílelo ministerstvo vzdělání, Národní komise pro vzdělávání, Švédská fyzikální společnost, řada výrobních organizací, obchodních společností a vědecko-výzkumných institucí.

15. MFO se zúčastnila družstva z 18 států: Bulharské lidové republiky (BG), Československé socialistické republiky (CS), Finské republiky (SF), Islandu (IS), Socialistické federativní republiky Jugoslávie (YU), Kuby (CU), Maďarské lidové republiky (H), Německé demokratické republiky (DDR), Spolkové republiky Německa (D), Nizozemského království (NL), Norského království (N), Polské lidové republiky (PL), Rakouské republiky (A), Rumunské socialistické republiky (R), Svazu sovětských socialistických republik (SU), Švédského království (S), Spojeného království Velké Británie a Severního Irska (GB), Vietnamské socialistické republiky (VN). Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících z řad žáků středních škol ve věku do 20 let, jeden vedoucí družstva a jeden pedagogický vedoucí. Z některých států se z finančních důvodů zúčastnilo soutěže méně soutěžících (IS jen 2, CU pouze 4, GB jen 4, VN pouze 3).

Vedoucím československého družstva na 15. MFO byl jmenován předseda ÚV FO doc. RNDr. ing. Daniel Kluvanec, CSc., vedoucí katedry fyziky a základů techniky Pedagogické fakulty v Nitře, pedagogickým



vedoucím 1. místopředseda ÚV FO *RNDr. Ivo Volf*, odborný asistent katedry fyziky a základů techniky Pedagogické fakulty v Hradci Králové. Obě jmenovaná pracoviště se podílela ve školním roce 1983/84 na přípravě účastníků československého reprezentačního družstva na 15. MFO. Příprava probíhala po celý školní rok v určitých etapách. V říjnu obdrželi účastníci širšího výběru, doporučení jednotlivými KV FO, materiály ke korespondenční části přípravy. Na základě doporučení a výsledků řešení zadaných úloh bylo 20 soutěžících vybráno do prosincového soustředění, které bylo uspořádáno v Nitře. Druhé soustředění proběhlo v Hradci Králové koncem března 1984, zúčastnili se ho vítězové krajských kol FO v kategorii A. Nejlepší řešitelé z celostátního kola FO v kategorii A byli pozváni do Nitry na závěrečné přípravné soustředění, na jehož závěru bylo navrženo ministerstvem školství ČSR a SSR jmenovat československé družstvo na 15. MFO ve složení:

- CS 1 Viliam Schichman, 4. roč. gymnázia v Prešově, Konštantinova ul. (2. místo v celostátním kole),
- CS 2 Patrik Španěl, 3. roč. gymnázia W. Piecka v Praze (6.—7. místo v celostátním kole),

- CS 3 Josef Pelikán, 4. roč. gymnázia v Českých Budějovicích (4.—5. místo v celostátním kole),
 CS 4 Ján Lúžný, 3. roč. SPŠ elektro v Prešově (4.—5. místo v celostátním kole),
 CS 5 Dagmar Kluvancová, 4. roč. gymnázia v Nitře, Párovská ul. (1. místo v celostátním kole).

Náhradníci byli jmenováni: Ivo Čermák, 4. roč. gymnázia v Bílovci (3. místo v celostátním kole), Miroslav Ryška, 4. roč. gymnázia ve Frýdku-Místku (6.—7. místo v celostátním kole).

Delegace odletěla do Stockholmu 22. června 1984, dva dny před zahájením soutěže. Oba dny věnovali členové delegace přípravě na řešení teoretických úloh, zejména metodice řešení obtížnějších úloh ze sovětských a polských fyzikálních olympiád a řešení úloh, v nichž je nutno provádět syntézu poznatků z několika oborů fyziky.

Družstva na 15. MFO byla ubytována v internátní střední škole ve městě Sigtuna, kde proběhly úvodní i závěrečný ceremoniál a řešení teoretických úloh. Řešení experimentálních úloh proběhlo na Královské vysoké škole technické ve Stockholmu. Internátní střední škola v Sigtuně — Sigtuna Stiftelsen — Humanistiska Laroverket — patří mezi nejlepší školy v zemi a absolvovala ji řada významných švédských osobností, mj. švédský král *Carl XVI Gustaf* a ministerský předseda *Olof Palme*.

Soutěž proběhla ve dnech 26. června (teoretické úlohy) a 28. června 1984 (experimentální úlohy). První den byly předloženy tři úlohy na dobu 5 h (jedna úloha byla z optiky, druhá z mechaniky s užitím znalostí o kmitech, třetí z elektromagnetismu), druhý den 2 experimentální úlohy (první z elektromagnetismu, druhá z vlnové optiky).

Nejlepší řešitelé soutěže — *Jan de Boer* z Nizozemského království a *Sorin Spănoche* z Rumunska dosáhli 43 bodů, a tak vymezili podle statutu mezinárodních fyzikálních olympiád hranici pro úspěšnost řešitelů (minimum 21 bodů) i hranice pro stanovení cen. Na třetím místě se v celkovém pořadí umístil *Patrik Španěl* z Prahy se ziskem 42,5 bodu.

Českoslovenští účastníci se umístili takto:

- CS 2 Patrik Španěl získal 42,5 bodu, 3. místo a I. cenu,
 CS 4 Ján Lúžný získal 30,5 bodu, 18.—19. místo a III. cenu,
 CS 3 Josef Pelikán získal 25 bodů, 31.—32. místo a čestné uznání,
 CS 1 Viliam Schichman získal 23 bodů, 41.—42. místo a čestné uznání,
 CS 5 Dagmar Kluvancová získala 22 bodů, 43.—44. místo a čestné uznání.

Kromě toho získal Patrik Španěl speciální cenu za řešení teoretických úloh. *D. Kluvancová* se po několika letech stala úspěšnou řešitelkou z řad dívčí části soutěží na MFO (na několika předcházejících MFO byly dívky neúspěšné) a získala speciální cenu za tento úspěch.

Mezinárodní fyzikální olympiády jsou soutěží jednotlivců. Tradičně však všichni vedoucí propočítávají výsledky celého družstva a pořadí, v jakém se jednotlivá družstva umístila. V letošní 15. MFO dosáhli nejlepšího výsledku soutěžící ze SSSR (celkově 190 b), dále družstva RSR (181,5 b), MLR (153 b), Spolkové republiky Německa (151,5 b). V pořadí na 5. místě z 18 zúčastněných států se umístilo družstvo Československa se 143 body.

Organizátoři věnovali mnoho pozornosti společenské prestiži 15. MFO. Soutěž zahájila ministryně vzdělávání *Lena Hjelm-Wallén*, na závěrečném ceremoniálu vystoupil nositel Nobelovy ceny za fyziku v r. 1981, švédský fyzik *K. Siegbahn*. Účastníci 15. MFO byli přijati představiteli města Sigtuna, zúčastnili se slavnostní recepce, kterou uspořádala primátorka hlavního města Stockholmu. Po dobu soutěže se účastníci zúčastnili řady kulturních akcí — představení opery od *Gaetana Donizettiho* *Viva la Mama*, prohlédli si Wasovovo muzeum, v programu byla prohlídka hlavního města, návštěva skansenu a zábavního areálu v Djurgarden, vyjížďka do přírodní rezervace na ostrově Ängsö, prohlídka fyzikální fakulty na univerzitě v Uppsale. Vedoucí navštívili typickou střední školu Vilundaskolan v Märstě.

Hodnotíme-li účast našich soutěžících na 15. MFO, je třeba kladně ocenit zodpovědnost, s níž členové delegace přistupovali k reprezentaci Československa na této mezinárodní soutěži. Současně je třeba připomenout, že za dobu od 10. MFO, pořádané v r. 1977 v Hradci Králové, patří československé družstvo na MFO vždy do první třetiny v pořadí družstev, pouze jeden žák z celkového počtu 30 účastníků posledních 6 mezinárodních fyzikálních olympiád se stal neúspěšným. Svědčí to zejména o dobře rozpracované péči o širší i o užší výběr soutěžících na MFO, který v posledních letech organizují střediska ÚV FO pro žáky nadané na fyziku, jež pracují v Hradci Králové a v Nitře.

Na závěrečném slavnostním zasedání byly všechny delegace pozvány zástupcem SFRJ do města Portorož na břehu Jaderského moře, kde bude uspořádána 16. MFO.

NAŠE SOUTĚŽ

UPOZORNĚNÍ

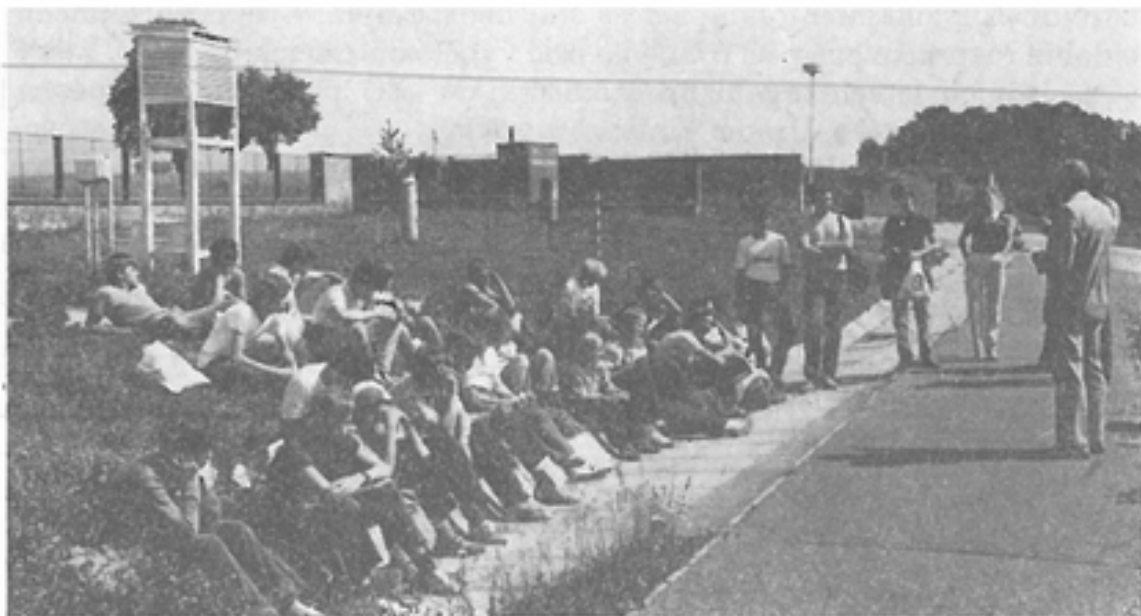
Řešení úloh otištěných ve 3. čísle Rozhledů roč. 63 zašlete na adresu redakce nejpozději do 15. dubna 1985.

Letná škola mladých fyzikov

EVA BITTNEROVÁ

Svit, mesto chémie, sa stalo v druhej polovici prázdnin už po druhýkrát domovom pre 35 žiakov bratislavských základných škôl a gymnázií. Letnú školu mladých fyzikov usporiadala pobočka Jednoty slovenských matematikov a fyzikov, vedeckej spoločnosti SAV v Bratislave, v spolupráci s Ústredným domom pionierov a mládeže Klementa Gottwalda. Podujatie sa stretlo s plným pochopením vedenia Strednej priemyselnej školy chemickej vo Svite, ktoré poskytlo účastníkom areál svojho inter-nátu.

Účastníci Letnej školy mladých fyzikov si prezreli pracovisko Astronomického ústavu SAV na Skalnom plese a aerologické pracovisko Hydrometeorologického ústavu v Gánovciach. Vypočuli si odborné prednášky pracovníkov týchto ústavov a priamo sa zúčastnili niektorých ich pracovných úkonov, napríklad prípravy a vypustenia meteorologickej sondy. Pracovník Vysokej vojenskej technickej školy z Liptovského Mikuláša upozornil v celovečernej besede s praktickými ukážkami na možnosť získavania elektrickej energie v ťažko prístupných horských oblastiach pomocou nízkovýkonových vodných turbín.



Obr. 1. Riaditeľ Hydrometeorologického ústavu v Gánovciach dr. Pribiš pod šírým nebom zasväčuje účastníkov LŠMF do tajov meteorológie.



Obr. 2

Obr. 2. Meteorologická sonda v Hydrometeorologickom ústave v Gánovciach pri Popradě pred vypustením.



Obr. 3

Obr. 3. Dr. I. Baník a účastníci LŠMF „skladajú kmity“. Stopu kyvadla vyznačuje voda, vytekajúca z deravej konzervy.

Štrnásť dní strávili mladí chlapci a dievčatá v malebnej tatranskej prírode riešením fyzikálnych problémov, nastolovaných priamo prírodou, meteorologickými meraniami a astronomickými pozorovaniami. Praktická práca pod šírou oblohou sa opierala o teoretické poznatky, ktoré mladí fyzici získali na seminároch, vedených skúsenými pedagógmi. Voľné chvíle vyplnili účastníci letnej školy zápolením na futbalovom a volejbalovom ihrisku, za šachovnicou a pri stolnom tenise. O vyváženosti záujmov mladých fyzikov svedčila aj bohatá účasť na spoločenských hrách a hudobných večeroch.

Vyhľadávanie a podchyťovanie talentov je vážna spoločenská úloha, pre splnenie ktorej dala letná škola vo Svite všetky predpoklady.

Sjezdy JČSMF a JSMF v roce 1984

Ve dnech 25.—27. října 1984 se v hotelu Moskva v Gottwaldově konaly souběžně dva sjezdy — Sjezd Jednoty československých matematiků a fyziků, vědecké společnosti při ČSAV, a Zjazd Jednoty slovenských matematikov a fyzikov, vedeckej spoločnosti pri SAV. Delegáti obou sjezdů se na oddělených zasedáních zabývali zprávami o činnosti za uplynulé období 1981—84, schvalovali po obsáhlých diskusích programy činnosti na další léta a volili nové řídicí orgány své Jednoty. Na společných zasedáních projednali společné úkoly a programy, schválili udělení sjezdových vyznamenání členům obou Jednot a zvolili vrcholné orgány.

Zahajovacího zasedání se zúčastnila řada čestných hostů, zástupců ČSAV a SAV, ministerstev školství, vysokých škol a stranických i městských orgánů v Gottwaldově. V úvodu přednesl Komorní orchestr gottwaldovských symfoniků několik skladeb ze svého repertoáru. Po pozdravných projevech začalo pracovní jednání sjezdu podle připraveného a schváleného programu. Na společných zasedáních vyslechli delegáti také dvě odborné přednášky; *prof. dr. J. Pišút, DrSc.*, hovořil velmi zajímavě na téma „Dvě teorie Nielse Bohra, které nevyšly“, *RNDr. J. Nešetřil, CSc.*, přednesl výklad k tématu „Historická perspektiva konečné matematiky“. Bohatou pracovní náplň obou sjezdů doplnily exkurze do JZD Slušovice, lázní Luhačovice nebo zámku Kroměříž (podle výběru delegátů), večerní návštěva jedné ze tří gottwaldovských scén a společenské setkání všech účastníků obou sjezdů.

Upřímný zájem všech diskutujících o prohloubení a zkvalitnění činnosti JČSMF a JSMF dává záruku, že obě organizace splní své náročné programy při podpoře rozvoje vědeckého poznání a spolupráce, vyučování matematice a fyzice na všech stupních škol a v práci s mladými zájemci o různé obory matematiky a fyziky.

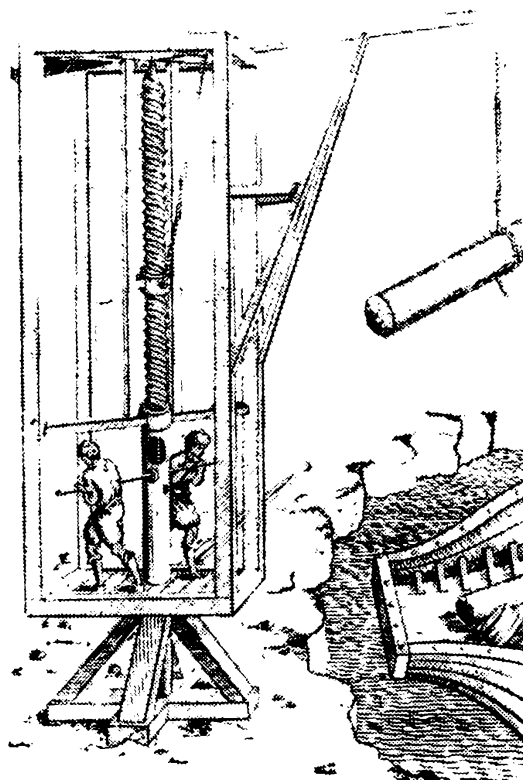
Náš časopis vychází za odborné péče JČSMF a JSMF; obě Jednoty také úzce spolupracují s ministerstvy školství, podílejí se na organizaci Matematické olympiády, Fyzikální olympiády, pythagoriád a dalších soutěží. Výbory poboček obou Jednot pořádají místní akce, na které jste jistě zváni i svými vyučujícími; máte tak možnost poznat práci členů Jednot bezprostředně (na řadě středních škol působí důvěrníci JČSMF, resp. JSMF). Zvolíte-li si povolání, ve kterém bude hrát matematika s fyzikou důležitou roli, shledáte jistě účelným stát se též členy Jednoty, organizace, která v r. 1987 oslaví 125 let své činnosti.

Jaroslav Šedivý

Jeřáb na principu šroubu

Při zvedání těžkých břemen, například v přístavech, se používaly jeřáby, nejstarší z nich fungovaly na principu šroubu kombinovaného s kladkami. Na obrázku vidíte jeřáb z ilustrace obsažené v jedné učebnici mechaniky ze 17. století. Idea jeřábu je však mnohem starší, pochází od *Heróna Alexandrijského*, který žil patrně v 1. století př. n. l. Římský autor *Vitruvius Pollio*, autor jediného zachovaného antického díla o architektuře, mechanice a technice, rozeznával už jeřáby jedno- až čtyřsloupové s kladkostroji, pákami a rumpály. Nejtěžší břemena se zvedala pomocí rumpálů se šlapacími koly.

Na zobrazeném zařízení je dobře patrné, že i malou silou lze vykonat velkou práci, že však „co ušetříme na síle, to ztratíme na dráze“. Toto tzv. zlaté pravidlo mechaniky (formulované *Galileim*) vedlo později k zavedení pojmu práce, k poznání faktu, že práci nelze ušetřit, později i k formulaci principu virtuálních posuvů jako nejobecnějšího zákona statiky. Jeho zobecnění na tzv. *d'Alembertův princip* bylo už natolik obsažné, že se zdálo, že může konkurovat Newtonovým



principům a pohybovým zákonům. Vzájemný vztah těchto dvou pojetí mechaniky objasnil v 18. století francouzský učenec *J. L. Lagrange*. V podstatě nejvyšším zobecněním zmíněných principů je zákon zachování energie objevený *R. Maye-rem* v r. 1842.

Vladimír Malíšek

V knižnici ŠKOLA_MLADÝCH_MATEMATIKŮ

vyšel koncem roku 1984 její 55. svazek nazvaný

FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Knížku napsal Ljubomir Davidov a z bulharštiny do češtiny ji přeložili Zlata a Alois Kufnerovi. Příručka je určena především žákům nejvyšších tříd gymnázií a odborných škol.
(Vydal ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta, 96 stran, brož. 6 Kčs.)

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3\$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1985.

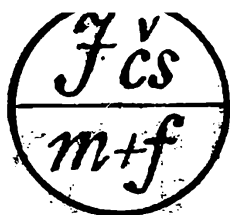
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

**ROČNÍK 63, 1984/85
DUBEN**

(8)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný
CSc., UK, Bratislava, Stanislav Ho-
rák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr.
Ján Crapan, CSc., VVTŠ - ČSSP
Liptovský Mikuláš, doc. Jaroslav
Chudý ČVUT Praha, doc. ing. Zde-
něk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Hana Kořínková, CSc.,
ÚÚVPP Praha, prof. dr. Vladimír Ma-
jerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Ka-
rel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, doc.
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha, dr. Martin Šolc, CSc.,
UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.

Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9 .

OBSAH

L. Faktorová: Významná výročí a dnešek 337

J. Mída: Zamyšlení nad jízdenkou MHD 340

L. Jelínek: Z finitní matematiky . 342

E. Kraemer: Zobecnění věty Ptolemaiovy 345

I. Fischer: Sekvenční logické obvody 349

B. Vybíral: O teorii relativity trochu
jinak II. 357

E. Calda: Kdy se vlastně narodil Isaac
Newton? 362

P. Ferko, I. Kmeť: Rozvoj a vyvrcholení
klasické fyziky v druhé polovině 19.
století 363

S. Šafrata: Vzpomínka na P. L. Kapicu 369

J. Mann: Tři cifry . 374

J. Svoboda: Kroužek v pružině 375

I. Volf: Celostátní kolo 25. roč. FO . 376

L. Pátý: Co víte o MFF UK v Praze
a studiu na ní? . 378

P. Dederá, Z. Vašek: Vysoká vojenská
škola Československo-sovětského přá-
telství . 379

Z nových knih 382

Pohledy do dějin . 3. str. obálky

Významná výročí a dnešek

Doc dr. LADISLAVA FAKTOROVÁ, CSc., UK Praha

Slavné historické události, vyvrcholení národně osvobozenického boje československého lidu a osvobození naší vlasti Sovětskou armádou, jejichž čtyřicáté výročí si právě připomínáme, jsou pro nás jednak bohatým zdrojem poučení, jednak důvodem k zamyšlení a zhodnocení toho, co jsme z odkazu těchto historických událostí za uplynulých 40 let dokázali uskutečnit a jak tento odkaz budeme dále rozvíjet a naplňovat. Bez pochopení a zhodnocení předcházejícího historického vývoje nemůže žádná generace porozumět tomu, co se odehrává v dnešní době, nemůže zaujímat správné stanovisko k základním problémům lidstva ani k aktuálním otázkám současného světa.

Poznání minulosti pomáhá člověku pochopit jeho místo a roli ve společnosti, vyvolává úctu ke všemu, co vytvořily předcházející generace svou prací, obětmi a hrdinstvím. Umožňuje pochopit zákonitosti společenského vývoje, orientovat se v současné situaci a poznávat i tendence a perspektivy vývoje do budoucnosti. Významná výročí událostí před čtyřiceti léty a události, které jim předcházely, jsou stálým zdrojem poznatků.

Druhá světová válka ukázala, jak imperialismus, jeho reakčnost a agresivita ohrožuje lidskou civilizaci. Fašismus jako produkt imperialismu odhalil svou expanzivní militaristickou politiku a její metody. Druhá světová válka si vyžádala 50 miliónů lidských životů; otřesné je, že z toho polovina nebyli vůbec vojáci, ale civilní obyvatelstvo, a dokonce z toho asi 5 miliónů bylo dětí. Na evropském kontinentě zahynulo 40 miliónů lidí, z toho 20 miliónů bylo sovětských občanů, Spojené Státy a Velká Británie ztratily dohromady 670 tisíc, našich občanů zahynulo 360 000. Prostředkem masového vyhlazování civilního obyvatelstva byly koncentrační tábory, kam fašisté zavlekli přes 18 miliónů lidí, aby na nich páchali ty nejbestiálnější zločiny. Hřízy koncentračních táborů, kde zahynulo 11 miliónů lidí, poznali také naši vysokoškoláci, kteří v akci 17. listopadu byli odvezeni do Sachsenhausenu. Materiální ztráty druhé světové války nelze vůbec vyčíslit. Nenahraditelné hodnoty vytvářené po staletí předcházejícími generacemi ztratilo lidstvo navždy. Nejvíce

obětí přinesl Sovětský svaz, který utrpěl i největší materiální ztráty, aby v boji vykoupil nejen svobodu své země, ale i svobodu mnoha dalších zemí.

Druhá světová válka změnila politickou mapu světa ve prospěch socialismu, demokracie, skutečného humanismu a úsilí o mírové uspořádání světa bez rozdílů společenského zřízení. Potvrdila, že revoluční přechod od kapitalismu k socialismu zahájený Velkou říjnovou revolucí je zákonitý, a proto nezvratný.

Další rozvoj naší společnosti bude záležet na celkové úrovni a připravenosti mladé generace, na jejím vzdělání s výchově. Je symbolické, že právě rok významných výročí je současně Mezinárodním rokem mládeže. K mládeži a ke škole se obrací pozornost nejen stranických a státních orgánů, ale i celé naší veřejnosti.

Dlouhodobý program dalšího rozvoje naší výchovně vzdělávací soustavy se stal od r. 1976 základem postupného přebudování organizace a obsahu všech stupňů škol.

V souladu s potřebami naší společnosti a jejího sociálně ekonomického rozvoje byla zavedena desetiletá školní docházka. K tomu se postupně vytvářejí potřebné кадровé i materiální předpoklady. Upravil se pracovní a polytechnický charakter základní školy. Realizuje se nové pojetí gymnázií, středních odborných škol a středních odborných učilišť. Modernizovaný obsah výuky na všech středních školách umožňuje lepší přípravu mládeže jak pro praktická povolání, tak pro vysoké školy. Nejvýrazněji se nové pojetí projevuje na gymnáziích především důslednějším uplatněním polytechnického principu zařazením předmětů technického a ekonomického zaměření. Stále více absolventů středních škol bude nastupovat na dělnická povolání, protože vědeckotechnický rozvoj přináší i na charakter těchto profesí náročnější požadavky.

Přeměna vědy v bezprostřední výrobní sílu si vyžaduje budování nových vědních oborů, které vznikají na rozhraní tradičních disciplín nebo jejich spojováním — biokybernetika, optoelektronika, astrogeologie atd.

Z hlediska dlouhodobého hospodářského a sociálního rozvoje ČSSR byla upravena celá soustava učebních a studijních oborů. Pro vědeckotechnický rozvoj, jak zdůraznilo osmé zasedání ÚV KSČ, je třeba zlepšit přípravu odborníků a rychleji uplatňovat výsledky vědy ve společenské praxi. Veliká úloha zde připadá také středním a vysokým školám. Už v průběhu studia se doporučuje orientovat mládež na vědeckovýzkumnou práci, objevovat a dále rozvíjet všechny talenty a vytvářet pro jejich uplatnění optimální podmínky.

Dnes studuje na středních školách čtyřikrát více studentů než před válkou. Více jich také odchází studovat na vysoké školy. Před druhou světovou válkou studovalo na všech vysokých školách v Československu

asi 27 tisíc studentů, ve školním roce 1983/84 jsme měli 181 000 vysokoškolských studentů, tj. téměř sedmkrát více než před válkou.

Velkou pozornost věnuje v současné době federální vláda rozmístování absolventů středních a vysokých škol. Nedaří se dosud vždy usměrňovat zájem o studium tak, aby zájem byl v souladu s potřebami a možnostmi společnosti. Důsledkem toho je, že na některé studijní osoby se hlásí nadměrný počet a na jiné je zase malý zájem uchazečů. Často jsou to právě obory perspektivní, často obory vyžadující matematiku nebo přímo obory matematické. Pochopit tuto společenskou potřebu u středoškoláků při volbě oboru a potom u absolventů vysokých škol při nástupu do zaměstnání znamená také naplňovat odkaz významných výročí našeho národně osvobozeneského boje konkrétními postoji a činy.

Do popředí práce všech škol se proto dostává zásada jednoty výchovy a vzdělání, ideově politická výchova, výchova vlastenecká a internacionální a výchova k práci, která je tak nezbytná pro společnost i pro šťastný život každého člověka.

Generální tajemník ÚV KSČ a prezident republiky soudruh *Gustáv Husák* na XVI. sjezdu KSČ řekl:

„Socialistická škola musí dávat dětem a mladým lidem dobrý základ všeobecného a odborného vzdělání, probouzet v nich touhu po vědění. Musí systematicky a účinně formovat ideově politický, morální a odborný profil žáků a studentů, pěstovat v nich úctu k hodnotám vytvářeným po celé generace, lásku k vlasti a internacionální cítění. Pracovitost, bohatý citový život, smysl pro kolektiv, pro povinnost, přímé a čestné jednání, vůle a zájem aktivně se podílet na rozvoji i obraně socialistické společnosti, to jsou vlastnosti, které škola pomáhá vštěpovat mladému člověku pro celý život.

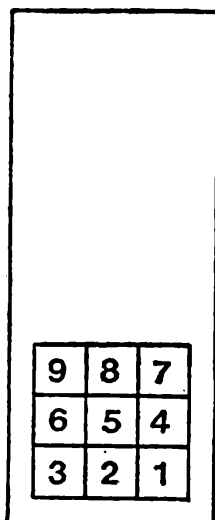
Je velmi důležité, aby ze středních a vysokých škol vycházeli absolventi, kteří jsou dobře odborně i politicky připraveni pro praktický život, jsou schopni zavádět výsledky vědy a techniky do výroby, být nositeli všeho pokrokového, co podmiňuje další vývoj naší země.“

V těchto slovech soudruha Husáka jsou vyjádřeny cíle a úkoly současné školy, i odkaz významných výročí naší mládeže a dnešku.

Zamyšlení nad jízdenkou MHD

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK PRAHA

Se zkratkou MHD jste se jistě sekali — označuje městskou hromadnou dopravu. V současné době se v ní užívají vedle různých průkazek jízdenky, jež si cestující předem zakoupí a v dopravním prostředku je označují ve strojku. Na těchto jízdenkách je v Praze a v dalších městech vytištěn čtverec rozdělený na devět menších čtverců, v nichž jsou čísla 1 až 9 (obr. 1). Strojkem se vyděrují do některých políček 1 až 9 otvory, a to



Obr. 1

9	●	7
6	5	●
3	●	1

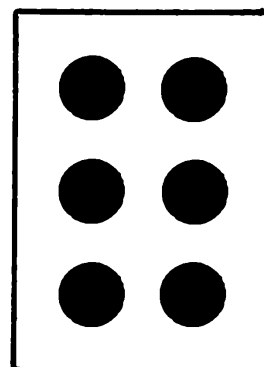
Obr. 2a

9	●	7
6	●	4
●	●	1

2b

●	8	7
6	●	●
●	2	●

2c



Obr. 3

do každého nejvýše jeden. Přitom v každé označené jízdence je aspoň jeden otvor. Při případné kontrole se cestující, který předloží jízdenku označenou jinak, než děrují strojky v příslušném vozidle MHD, považuje za „černého pasažéra“. Příklady dolních částí označených jízdenek jsou na obr. 2a, b, c.

Při pohledu na jízdenku MHD nás snadno napadne problém:

Kolik je různých možností pro označení jízdenky strojkem, jestliže předpokládáme, že strojky mohou děrovat jeden až devět otvorů?

Pro každé políčko jsou dvě možnosti: buď v něm strojek otvor prorazí, anebo neprorazí. Políček je devět, takže možností je celkem

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{9 \text{ činitelů}} = 2^9 = 512.$$

Ovšem v tomto počtu je i případ, kdy není jízdenka označena, takže možností pro označení jízdenek je celkem $512 - 1 = 511$.

Uvedme ještě další dvě úlohy:

- *Kolik je možností pro vyděrování tří otvorů v jízdence?*
- *Kolik je možností pro vyděrování aspoň tří otvorů v jízdence?*

Další podobné úlohy jistě zformulujete sami.

Podívejme se na jízdenku MHD jinýma očima. Nejprve to bude pohled čtenáře detektivek. Počet všech možností děrování jízdenek je 511. Vzhledem k tak značnému počtu by se jízdenky dalo skvěle využít při šifrovaných vzkazech. Např. se lze dohodnout, že jízdenka vyděrovaná tak jako na obr. 2a znamená: „Přiď zítra v dohodnutou dobu na dohodnuté místo!“ Smluvených hesel by mohlo být celkem 511.

Další pohled na jízdenku MHD je inspirován teorií informace. Každé z políček 1 až 9 je vlastně dvojpohovým elementem — políčko je buď neporušené nebo proděrované. Označme stav neporušeného políčka znakem 0, proděrovaného znakem 1. Pak stav na obr. 2a lze popsat konečnou posloupností 010100010, stav na obr. 2b devíticí 011010010, stav na obr. 2c devíticí 101110001 a stav na obr. 1 posloupností devíti 0. V teorii informace se takové konečné posloupnosti nazývají *slovy* a počet znaků v takovém slově se označuje jako počet *bitů*. Tedy na jízdence MHD jsou zobrazena devítibitová slova. Avšak revizor při kontrole získává z jízdenky informaci hodnoty 1 bit, neboť mu jde o odpověď na otázku: „Má tento cestující platnou jízdenku?“ Možné odpovědi jsou samozřejmě jen dvě: ano — ne, tj. zapsáno znaky: 1 nebo 0. Revizorovo rozhodování samozřejmě probíhá v duchu pravidel, tj. cestující, jenž má správně označenou jízdenku, necestuje „načerno“, i kdyby si ji přinesl z jiného vozidla MHD.

Zajímavé je, že obdobného seskupení dvojpohových elementů, jako je na jízdence MHD, se v Anglii v době napoleonských válek začalo užívat při optickém telegrafování. Píše se o tom v knížce O. Kliky *Vyprávění o telegrafech* (NADAS, Praha 1978). Nešlo o vlajkovou nebo semaforovou signalizaci. Základem telegrafu byla velká deska se šesti velkými otvory, které uzavíraly otočné klapky (obr. 3), jež se ovládaly provázky. Každý otvor měl dva stavy: buď byl uzavřený anebo otevřený, tj. průhledný. Možností zde bylo celkem $2^6 = 64$, což plně stačilo pro přiřazení stavů desky písmenům abecedy a adresám, pro koho je zpráva určena. Autorem tohoto optického telegrafu byl lord *George Murray*.

Z finitní matematiky

RNDr. LIBOR JELÍNEK, UK Praha

S číselnými množinami se během školní docházky seznamujeme snad všichni. Nejprve s množinou přirozených čísel, později s celými a racionálními čísly, dále s množinou reálných čísel, až konečně s množinou čísel komplexních. Někdy hovoříme o *tělese* racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, o *tělese* reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, o *tělese* komplexních čísel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Nyní si vysvětlíme, co rozumíme tělesem, neboť jste se s tímto pojmem v algebře na střední škole nesetkali.

Těleso $(T, +, \cdot)$ je množina T (*nosič tělesa*) opatřená operacemi „+“, „·“, které zároveň splňují všechny tyto vlastnosti:

(s0) Pro každé dva prvky $a \in T$, $b \in T$ existuje právě jeden takový prvek $c \in T$, že platí

$$a + b = c ;$$

(s1) pro každé tři prvky $a \in T$, $b \in T$, $c \in T$ je

$$(a + b) + c = a + (b + c) ;$$

(s2) existuje prvek $0 \in T$ takový, že pro každý prvek $a \in T$ je

$$0 + a = a + 0 = a ;$$

(s3) ke každému prvku $a \in T$ existuje takový prvek $(-a) \in T$, že

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 ;$$

(s4) pro každé dva prvky $a \in T$, $b \in T$ je

$$a + b = b + a ;$$

(n0) pro každé dva prvky $a \in T$, $b \in T$ existuje právě jeden prvek $c \in T$ takový, že platí

$$a \cdot b = c ;$$

(n1) pro každé tři prvky $a \in T$, $b \in T$, $c \in T$ je

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) ;$$

(n2) existuje prvek $1 \in T$, $1 \neq 0$, takový, že pro každý prvek $a \in T$, je

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a ;$$

(n3) ke každému prvku $a \in T$, $a \neq 0$, existuje takový prvek $a^{-1} \in T$, že platí

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 ;$$

(d) pro každé tři prvky $a \in T$, $b \in T$, $c \in T$ je

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c ,$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a .$$

V definici jsou shrnuty a symbolicky zapsány zcela běžné vlastnosti sčítání a násobení, které užíváte při výpočtech v množinách $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, či $\mathbb{C}$.

Tak například vlastnost (s0) resp. (n0) zaručuje, že ke každým dvěma prvkům tělesa existuje v příslušném tělese jejich součet (resp. součin). Ve vlastnosti (s1) (resp. (n1)) odhalíte asociativní zákon; (s2) (resp. (n2)) zaručuje v tělese existenci neutrálního prvku vzhledem k operaci sčítání (resp. násobení), tj. prvku nulového (resp. jednotkového). V bodech (s3), (n3) se hovoří o inverzních prvcích; ve vlastnosti (s4) čtenář jistě pozná komutativní zákon, podobně jako ve vlastnosti (d) zákon distributivní. Komutativní zákon pro násobení není v definici uveden. Je-li splněn, nazývá se *těleso komutativní*.

Dále se vydáme cestou poněkud neobvyklou, která nás dovede až do oblastí, jež s matematikou zdánlivě nesouvisí.

Nosič tělesa není v definici blíže specifikován. Z vlastností (s2), (n2) pouze vyplývá existence dvou prvků množiny T ; nulového (označeného symbolem 0) a jednotkového (označeného symbolem 1). Předpokládejme, že již neobsahuje žádné další prvky, a pokusme se definovat operace sčítání a násobení na množině $\{0, 1\}$ tak, aby vyhovovaly definici tělesa.

Když si uvědomíme, že 0 je neutrální prvek vzhledem ke sčítání a 1 neutrální prvek vzhledem k násobení, napíšeme bez zaváhání výsledky těchto operací:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0 & 0 \cdot 1 = 0 \\ 0 + 1 = 1 & 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 + 0 = 1 & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

Dále je třeba odpovědět na poměrně nesnadnou otázku: „kolik je $1 + 1$?“ Nesnadnost spočívá v tom, že pro výsledek operace máme na vybranou pouze prvky 0 a 1 (abychom vyhověli vlastnosti (s0)). Zavrhneme výsledek $1 + 1 = 1$, neboť pak by platilo

$$1 + 1 = 1 + 0,$$

což nutně vede ke sporu s předpokladem $1 \neq 0$.

Jelikož nemáme dále na vybranou, položme $1 + 1 = 0$.

Výsledek operace $0 \cdot 0$ je zřejmě 0, neboť v každém tělese platí silnější tvrzení: $\forall a \in T; 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$. (Pokuste se sami o důkaz.)

Získané výsledky je možno velmi přehledně zapsat tabulkami:

$$T_2 = \{0, 1\}$$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

(Takové tabulky se nazývají *Cayleyho* podle významného britského matematika který žil v minulém století.)

Ověřte, zda takto definované operace splňují vlastnosti (s0) až (d).

Operace v tělese $(T_2, +, \cdot)$ popisují tyto tabulky:

$(T_3 = \{0, 1, 2\}$	$+$	0	1	2		$.$	0	1	2
	0	0	1	2		0	0	0	0
	1	1	2	0		1	0	1	2
	2	2	0	1		2	0	2	1

Přesvědčte se o tom!

$(T_2, +, .)$, $(T_3, +, .)$ jsou *konečná tělesa*, někdy nazývaná *Galoisova pole* (podle francouzského matematika, zakladatele moderní algebry, který zahynul v souboji ve věku pouhých 21 let).

Konstrukce konečného tělesa $(T_n, +, .)$, kde n je prvočíslo, úzce souvisí s binární relací *kongruence modulo n* na množině celých čísel (Z) . Příslušnou definici této relace si nyní uvedeme.

Řekneme, že $x \in Z$ a $y \in Z$ jsou *kongruentní modulo n* , kde n je přirozené číslo, právě tehdy, když existuje číslo $t \in Z$ takové, že

$$x - y = t \cdot n.$$

Zapisujeme $x \equiv y \pmod{n}$; čteme „ x je kongruentní s y modulo n “. Například:

$$\begin{aligned} -2 &\equiv 0 \equiv 2 \equiv 4 \equiv 6 \dots \pmod{2}, \\ -1 &\equiv 1 \equiv 3 \equiv 5 \equiv 7 \dots \pmod{2}, \\ -3 &\equiv 0 \equiv 3 \equiv 6 \equiv 9 \dots \pmod{3}, \\ -2 &\equiv 1 \equiv 4 \equiv 7 \equiv 10 \dots \pmod{3}, \\ -1 &\equiv 2 \equiv 5 \equiv 8 \equiv 11 \dots \pmod{3}, \text{ atd.} \end{aligned}$$

Jistě vám neušlo, že v tělese $(T_3, +, .)$ je například $1 + 2 = 0$, přičemž v množině Z je $1 + 2 = 3$ a $3 \equiv 0 \pmod{3}$;

nebo že v tělese $(T_3, +, .)$ je $2 \cdot 2 = 1$,

přičemž v množině Z je $2 \cdot 2 = 4$ a $4 \equiv 1 \pmod{3}$.

Pokuste se naznačeným způsobem sestavit Cayleyho tabulky operací sčítání a násobení v množině $T_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a ověřte, že $(T_5, +, .)$ je opět těleso.

Postup lze užít při konstrukci každého konečného tělesa $(T_p, +, .)$, kde p je prvočíslo. Určíme vždy nejprve výsledek operace v množině celých čísel a potom nalezneme v množině T_p prvek s ním kongruentní podle modulu p . Tento prvek je výsledek dané operace v tělese $(T_p, +, .)$.

Poněkud složitějším způsobem lze ještě sestavit konečná tělesa, jejichž nosič má q prvků, kde q je libovolná přirozená mocnina prvočísla. Jako příklad uveďme těleso $(T_4, +, .)$, kde operace sčítání a násobení definujeme takto:

$$T_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$+$	0	1	2	3		$.$	0	1	2	3
0	0	1	2	3		0	0	0	0	0
1	1	0	3	2		1	0	1	2	3
2	2	3	0	1		2	0	2	3	1
3	3	2	1	0		3	0	3	1	2

Konečná tělesa s jiným počtem prvků neexistují! Tedy například těleso $(T_6, +, \cdot)$ neexistuje, neboť 6 nelze napsat jako přirozenou mocninu žádného prvočísla.

Zdůvodněte, proč množina $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ s operacemi sčítání a násobení, jež jsou definovány užítím kongruence (mod 6) těleso netvoří.

Zobecnění věty Ptolemaiovy

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V učebnicích pro naše bývalé reálky se uváděla věta vyjadřující vztah mezi délkami stran a úhlopříček konvexního tětiového čtyřúhelníku; je to takový čtyřúhelník, jehož všechny vrcholy leží na téže kružnici. Tato věta se nazývá Ptolemaiova podle řeckého astronoma a matematika, který se nazýval *Claudius Ptolemaeus* a žil asi v letech 85 až 165 našeho letopočtu. Uvedená věta je obsažena v jeho významné „*Velké sbírce*“, která je však spíše známa pod arabským názvem „*Almagest*“. Jsou-li délky stran AB, BC, CD, DA konvexního tětiového čtyřúhelníku po řadě a, b, c, d a délky jeho úhlopříček e, f , pak podle Ptolemaiovy věty platí:

$$ef = ac + bd \quad (1)$$

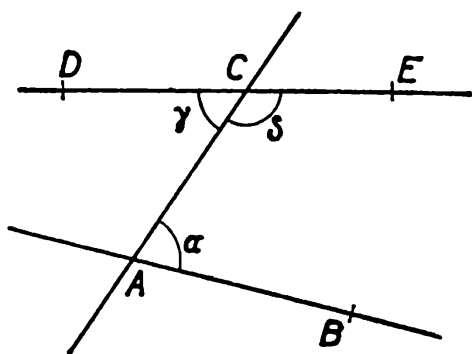
Tato věta je však jen zvláštním případem věty, která platí pro libovolný konvexní čtyřúhelník. Než ji vyslovíme a dokážeme, připomeneme několik poznatků ze školské geometrie, na něž se budeme při důkazu odvolávat.

Na obr. 1 je přímka AC a mimo ni různé body B, E , které leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou AC . Uvnitř poloroviny opačné k polorovině ACB je na přímce CE dán bod D . Potom konvexní úhly BAC, DCA (označené po řadě α, γ) se nazývají *úhly střídavé* a konvexní úhly BAC, ECA (označené po řadě α, δ) se jmenují *úhly přilehlé*. Ze školy víme, že pro uvedené úhly platí dvě důležité věty, které nyní uvedeme.

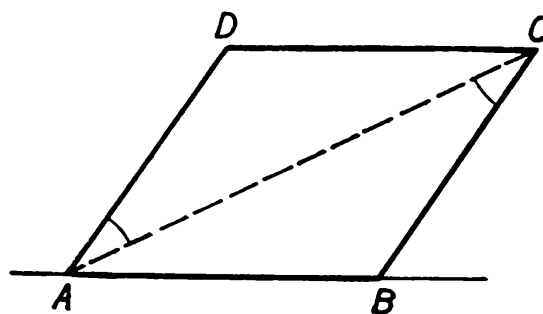
Věta 1. Nechť přímka AC odděluje body B, D , které s ní leží v téže rovině (obr. 1); potom platí:

a) Jsou-li přímky AB, CD rovnoběžné, jsou střídavé úhly BAC, DCA shodné.

b) Jsou-li střídavé úhly BAC, DCA shodné, jsou přímky AB, CD rovnoběžné.



Obr. 1



Obr. 2

Věta 2. Necht body B, E leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou u AC (obr. 1); potom platí:

a) Jsou-li přímky AB, CE rovnoběžné, je součet přilehlých úhlů BAC, ECA úhel přímý.

b) Je-li součet přilehlých úhlů BAC, ECA úhel přímý, jsou přímky AB, CE rovnoběžné.

Pomocí věty 1 snadno dokážeme další větu, kterou použijeme při důkazu zobecněné věty Ptolemaiovy.

Věta 3. Necht úsečky AD, BC neleží v téže přímce, ale leží v téže polorovině s hraniční přímkou AB . Jsou-li tyto úsečky shodné a rovnoběžné, je obrazec $ABCD$ rovnoběžník (obr. 2).

Důkaz. Podle předpokladu leží bod C uvnitř poloroviny ABD ; protože je $BC \parallel AD$, leží bod C také uvnitř poloroviny ADB . Je tedy vnitřním bodem průniku polorovin ABD, ADB , tj. vnitřním bodem konvexního úhlu BAD . Proto přímka AC odděluje body B, D . Úhly CAD, ACB jsou tedy střídavé; přímky AD, BC jsou (podle předpokladu) rovnoběžné. Podle části a) věty 1 jsou úhly CAD, ACB shodné; protože je $AD = BC$, je

$$\triangle ACD \cong \triangle CAB \text{ (sus)}$$

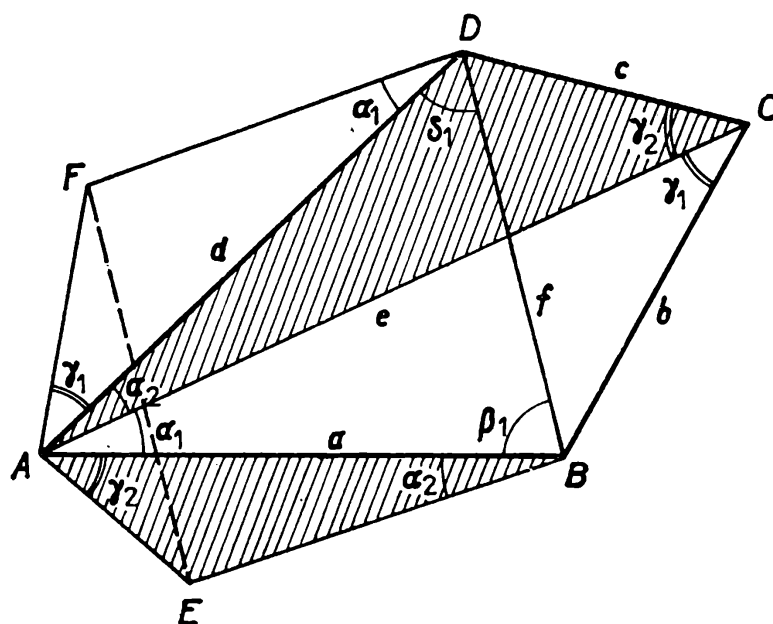
Z toho plyne, že úhly ACD, CAB jsou shodné; zároveň to jsou úhly střídavé. Podle části b) věty 1 jsou přímky AB, CD rovnoběžné. Obrazec $ABCD$ je tedy rovnoběžník.

Připomeňme ještě, že pro každý trojúhelník ABC platí věta kosinová, podle níž je

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 - 2|BC| \cdot |CA| \cdot \cos |\sphericalangle ACB|$$

Věta 4 (zobecnění věty Ptolemaiovy). Necht $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, jehož strany AB, BC, CD, DA mají po řadě délky a, b, c, d ; velikosti jeho vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C, D buďtež po řadě $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, a délky jeho úhlopříček AC, BD buďtež po řadě e, f . Potom platí:

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos (\alpha + \gamma). \quad (2)$$



Obr. 3

Poznámka. Protože $\beta + \delta = 360^\circ - (\alpha + \gamma)$, je $\cos (\beta + \delta) = \cos (\alpha + \gamma)$. Proto v rovnosti (2) můžeme místo $\cos (\alpha + \gamma)$ psát $\cos (\beta + \delta)$.

Důkaz. Budiž $|\sphericalangle BAC| = \alpha_1$, $|\sphericalangle DAC| = \alpha_2$, $|\sphericalangle BCA| = \gamma_1$, $|\sphericalangle DCA| = \gamma_2$; potom je (obr. 3)

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma \quad (3)$$

V polorovině opačné k polorovině ABC sestrojme trojúhelník ABE tak, aby úhel EBA byl shodný s úhlem DAC a úhel EAB byl shodný s úhlem DCA ; potom je

$$\triangle ABE \sim \triangle CAD \quad (\text{uu})$$

Z toho plyne, že je

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CA|}, \text{ čili } |AE| = \frac{ac}{e}, \quad (4)$$

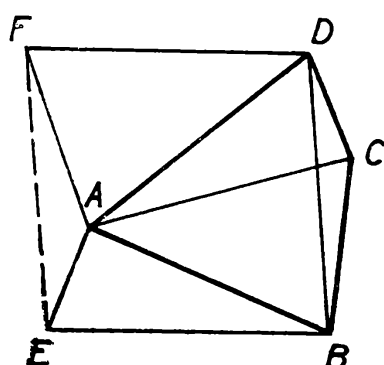
$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|CA|}, \text{ čili } |BE| = \frac{ad}{e}. \quad (5)$$

V polorovině opačné k polorovině ADC sestrojme trojúhelník ADF tak, aby úhel FDA byl shodný s úhlem BAC a úhel FAD byl shodný s úhlem BCA ; potom je

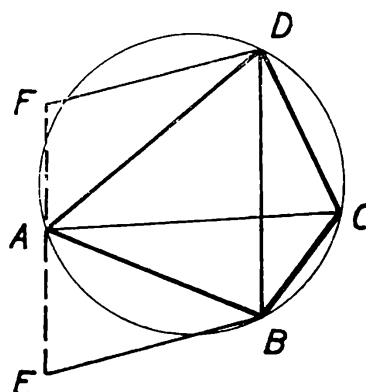
$$\triangle ADF \sim \triangle CAB \quad (\text{uu})$$

Z toho plyne, že je

$$\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|CA|}, \text{ čili } |AF| = \frac{bd}{e}, \quad (6)$$



Obr. 4



Obr. 5

$$\frac{|DF|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|CA|}, \text{ čili } |DF| = \frac{ad}{e} \quad (7)$$

Budiž $|\sphericalangle ABD| = \beta_1$, $|\sphericalangle ADB| = \delta_1$ (obr. 3). Potom z trojúhelníku ABD plyne, že je $\alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1 < 180^\circ$, a tedy $\alpha_1 + \delta_1 < 180^\circ$. Protože je

$$|\sphericalangle BDF| = |\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle FDA| = \delta_1 + \alpha_1 < 180^\circ,$$

leží bod F uvnitř poloroviny BDA . Zcela obdobně zjistíme, že také bod E leží uvnitř poloroviny BDA . Úsečky BE , DF leží tedy v téže polorovině s hraniční přímkou BD ; proto úhly BDF , DBE jsou přilehlé. Zároveň je podle rovnosti (3)

$$|\sphericalangle BDF| + |\sphericalangle DBE| = \alpha_1 + \delta_1 + \beta_1 + \alpha_2 = \alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180^\circ,$$

neboť α , β_1 , δ_1 jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABD . Podle části b) věty 2 jsou úsečky BE , DF rovnoběžné; podle rovností (5) a (7) jsou shodné. Protože leží v téže polorovině s hraniční přímkou BD , je podle věty 3 obrazec $BDFE$ rovnoběžník; proto je

$$|EF| = |BD| = f. \quad (8)$$

Úhel s rameny AE , AF , jehož vnitřními body jsou vrcholy B , C , D čtyřúhelníku $ABCD$, je grafickým součtem konvexních úhlů EAB , BAD , DAF , které mají po řadě velikosti γ_2 , α , γ_1 . Podle rovnosti (3) je jeho velikost rovna $\alpha + \gamma$. Protože α , γ jsou velikosti dvou vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$, je $\alpha + \gamma < 360^\circ$; zároveň mohou nastat právě tyto tři případy:

$$\alpha + \gamma < 180^\circ, \alpha + \gamma > 180^\circ, \alpha + \gamma = 180^\circ.$$

V prvním případě (obr. 3) jsou body A , E , F vrcholy trojúhelníku, jehož vnitřní úhel EAF má velikost $\alpha + \gamma$. Podle kosinové věty platí:

$$|EF|^2 = |AE|^2 + |AF|^2 - 2|AE| \cdot |AF| \cdot \cos(\alpha + \gamma).$$

Podle (8), (4) a (6) je tedy

$$f^2 = \frac{a^2 c^2}{e^2} + \frac{b^2 d^2}{e^2} - 2 \frac{abcd}{e^2} \cos(\alpha + \gamma), \quad (9)$$

takže platí rovnost (2) uvedená ve větě 4.

V druhém případě (obr. 4) jsou opět body A, E, F vrcholy trojúhelníku, avšak velikost jeho vnitřního úhlu EAF je $360^\circ - (\alpha + \gamma)$. Protože však kosinus tohoto úhlu je rovný $\cos(\alpha + \gamma)$, platí opět rovnost (9), a tedy také rovnost (2).

V třetím případě (obr. 5) leží body A, E, F v přímce tak, že bod A je mezi body E, F ; proto podle rovností (4) a (6) je

$$|EF| = |AE| + |AF| = \frac{ac}{e} + \frac{bd}{e}.$$

Podle rovnosti (8) je tedy $ef = ac + bd$, takže platí rovnost (1). Avšak tento výsledek plyne také z rovnosti (2), neboť nyní je $\cos(\alpha + \gamma) = \cos 180^\circ = -1$. Z rovnosti (2) tedy plyne, že je

$$\begin{aligned} e^2 f^2 &= a^2 c^2 + 2abcd + b^2 d^2 \\ (ef)^2 &= (ac + bd)^2. \end{aligned}$$

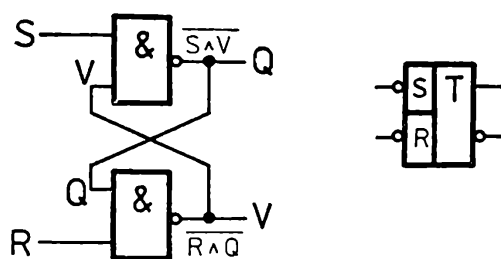
Protože a, b, c, d, e, f jsou vesměs kladná čísla, plyne z poslední rovnosti rovnost (1). V tomto případě ($\alpha + \gamma = 180^\circ$) je čtyřúhelník $ABCD$ tětíkový; tak dostáváme z věty 4 větu Ptolemaiovu.

Sekvenční logické obvody

Doc. IVAN FISCHER, CSc., PedF UK v Praze

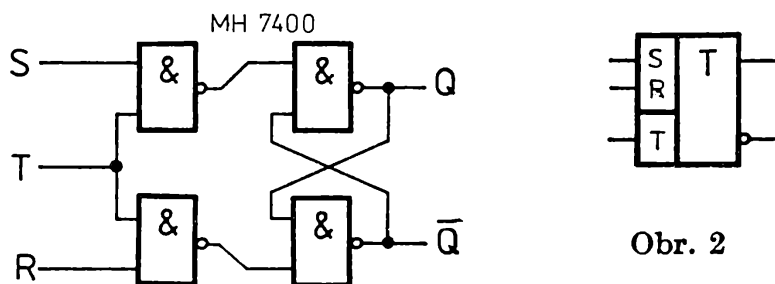
V minulých dílech seriálu jsme se zajímali o kombinační logické obvody, jejichž vzájemným „kombinováním“ jsme dokázali sestavit síť logických členů, která realizovala libovolnou logickou funkci, libovolný booleovský polynom či výrok z výrokové logiky. Nyní se zaměříme na takzvané sekvenční logické obvody a číslicové integrované obvody. Jejich stav (logické hodnoty na výstupech) závisí nejen na jejich zapojení do sítě obvodů, ale i na posloupnosti (sekvenci) jejich předchozích stavů.

Základem všech sekvenčních logických obvodů je *paměťový klopný obvod* $R-S$, se kterým jsme se setkali již v článku [1]. Je spojen ze dvou logických členů NAND, které vzájemně ovlivňují své stavy. Znázorněno máme na obrázku 1, kde je i jeho schematická značka. V základním stavu obvodu je $R = S = 1$. Při nulovém impulsu na vstup S (posloupnost $S = 1, S = 0, S = 1$) proběhne následující děj: $S = 0$, a tedy $Q = 1$; $Q = 1$ a současně i $R = 1$, a tedy $V = 0$; protože $V = 0$, je $Q = 1$ bez ohledu na logickou hodnotu vstupu S , tedy i při $S = 1$ zůstává stabilní stav obvodu $Q = 1$. Obdobně proběhne děj při nulovém impulsu na



Obr. 1

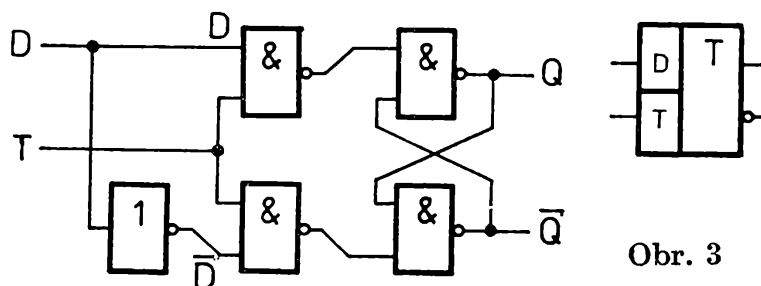
vstup R , po kterém bude $Q = 0$. Vstup S se nazývá po anglickém *set* (nastavení), R po *reset* (znovunastavení, přestavení do původní polohy, nulování). Při stavu $S = R = 0$ bude na výstupech $Q = 1$, $V = 1$ a pokud tento stav prohlásíme za zakázaný (což bude potřeba technicky zajistit), bude vždy $V = \bar{Q}$. Tak také budeme výstup V značit, proto je u tohoto výstupu ve schématu kroužek značící negaci. Kroužky se rovněž kreslí ke vstupům R a S , což nám značí, že obvod reaguje na nulové impulsy a ne na jedničkové impulsy.



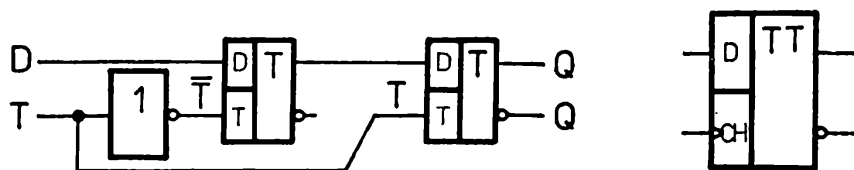
Obr. 2

Následným vylepšením klopného obvodu $R - S$ je klopný obvod T . Vznikne připojením dalších logických členů a řídicího vstupu T podle obrázku 2. Vstupy S , R jsou připojeny ke klopnému obvodu $R - S$ přes členy NAND, jsou tedy negovány — základní stav bude $R = S = 0$ a obvod se bude překlápět při jedničkových impulsích na R či S , ovšem jenom v tu dobu, kdy bude $T = 1$. V dobu, kdy je $T = 0$, obvod na změny logických hodnot R , S nereaguje. T je od *Time* (čas, doba). Zakázaným stavem je tentokrát $R = S = 1$.

Spojíme-li pomocí invertoru podle obrázku 3 vstupy R a S v jediný vstup D (datový vstup), vznikne jednoduchý klopný obvod D . Ten již



Obr. 3



Obr. 4

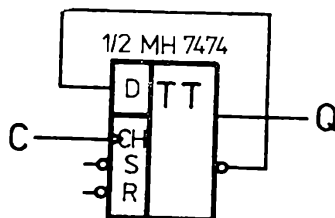
má pomocí invertoru „ošetřen“ zakázaný stav z obvodu T . Při $T = 1$ je na výstup zapsána logická hodnota vstupu D . Při $T = 0$ již obvod na další změny logických hodnot vstupu D nereaguje a pamatuje si poslední logickou hodnotu na vstupu D před změnou $T = 1$ na $T = 0$. V mikroprocesorové technice se takovýto klopný obvod nazývá *Latch* (doslova západka, někdy též lapač, lapač impulsů) a slouží k uchování logických hodnot. Mikroprocesor vypočítá logickou hodnotu, kterou přivede na vstup D . Následuje impuls na T (bývává značen i CL , viz další text) a klopný obvod D si pamatuje vypočítanou logickou hodnotu. Na výstup Q může být připojeno další zařízení (svítivá dioda, relé, další logický obvod atd.) a takto zapojenému klopnému obvodu D pak říkáme výstupní *port* (brána). Mikroprocesor může řešit nové úkoly a po čase znovu vypočítá logickou hodnotu, kterou znovu přivede a nechá zapamatovat na výstupním portu.

Předchozí klopné obvody $R - S$ a T bychom museli zapojit z logických členů NAND. Obvod typu D (Latch) se vyrábí jako integrovaný obvod MH 7475 — obsahuje čtyři klopné obvody D , vždy dva a dva se společným vstupem T .

Další možnosti nám přináší spojení dvou jednoduchých klopných obvodů D spolu s invertorem a případně i s dalšími logickými členy do seskupení zvaného *registr* — dvojitý klopný obvod D či klopný obvod $J - K$.

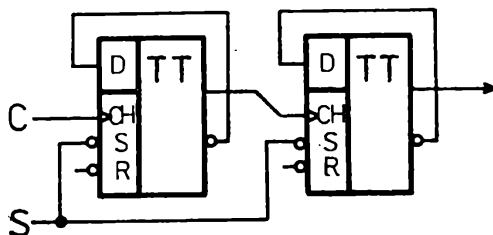
Zapojení dvojitého klopného obvodu D máme na obrázku 4. Při $T = 0$ se zapíše logická hodnota z D do prvního klopného obvodu. Při změně T na $T = 1$ se první klopný obvod uzavře a otevře se druhý klopný obvod, do kterého se přepíše logická hodnota z prvního klopného obvodu. K zapsání a zapamatování logické hodnoty D na výstup Q tedy dojde v okamžiku změny T z $T = 0$ na $T = 1$. V ostatní dobu dvojitý klopný obvod D změny logických hodnot D ignoruje. Vstup T se obvykle u registrů (dvojitých klopných obvodů) značíva podle *Clock* (hodiny) a podle toho, jestliže k zápisu logické hodnoty ze vstupu na výstup dochází při změně T z $T = 1$ na $T = 0$ jako CL (na logickou nulu — nízké napětí — L jako Low), či při změně logické hodnoty T z $T = 0$ na $T = 1$ jako CH (H jako High — vyšší napětí odpovídající logické hodnotě 1). Jde-li o signál CL nebo CH se ve schématech značí na vstupu šipkou dovnitř při CH či šipkou ven při CL .

V integrovaném provedení obsahuje obvod MH 7474 dva dvojité klopné obvody typu D. Proti zapojení z obrázku 4 obsahují navíc i vstupy R a S . Ty ovlivňují dvojité klopný obvod obdobně jako u jednoduchého klopného obvodu typu $R - S$. Je-li však $R = S = 1$, chová se klopný obvod D jako na obrázku 4 — reaguje na logické hodnoty D a CH .



Obr. 5

Zapojíme-li dvojité klopný obvod D podle obrázku 5, budou se po impulsích na vstupu CH objevovat na výstupu Q střídavě nuly a jedničky. Je-li například $Q = 1$ a změní se CH z $CH = 0$ na $CH = 1$, bude pak $Q = 0$. Nyní se změní $CH = 1$ na $CH = 0$ a znovu na $CH = 1$ a bude $Q = 1$. Proti frekvenci střídání 0 a 1 na vstupu CH bude frekvence střídání logických hodnot Q poloviční, zapojení tedy pracuje jako dělič dvěma.



Obr. 6

Na obrázku 6 máme již zapojeny oba klopné obvody z MH 7474 a celé zapojení pracuje jako dělič čtyřmi. Přivedeme-li impuls $S = 0$, bude $Q0 = Q1 = 1$ a $\overline{Q0} = \overline{Q1} = 0$. Nyní s příchodem jedničkových impulsů na hodinovém vstupu C se budou vyskytovat kombinace logických hodnot $\overline{Q0}$ a $\overline{Q1}$: 00, 01, 10, 11, 00, 01, 10, 11 atd. Pokud zapojíme analogicky čtyři klopné obvody, dostaneme dělič 16. Zapojením osmi klopných obvodů dělič 256. Pokládejme osmici logických hodnot $\overline{Q7}$, $\overline{Q6}$, $\overline{Q5}$, $\overline{Q4}$, $\overline{Q3}$, $\overline{Q2}$, $\overline{Q1}$, $\overline{Q0}$ za číslo zapsané ve dvojkové číselné soustavě. Index za Q odpovídá řádu cifry. Číslo ve dvojkové soustavě budeme značit písmenem B za poslední cifrou (obdobně D za poslední cifrou v desítkové soustavě a H v šestnáctkové — hexadecimální číselné soustavě). Potom by zapojení realizovalo čítač, to jest obvod, který počítá impulsy (přičítáním po jedné — čítáním neboli inkrementací). Po impulsu $S = 0$ bude

$$0000\ 0000\ B = 0D = 0H$$

Po impulsu $C = 1$ dostáváme stav

$$0000\ 0001\ B = 1D = 1H$$

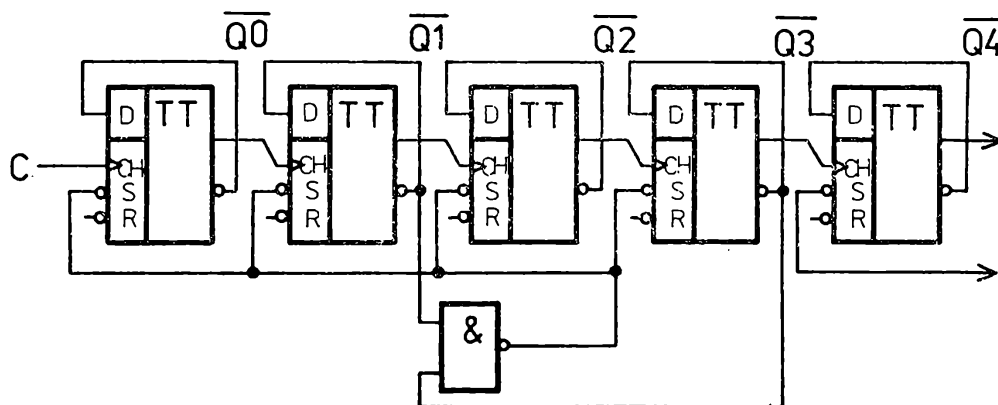
a po dalších impulsích $C = 1$ postupně dostaneme

0000 0010 B =	2D =	2H
0000 0011 B =	3D =	3H
0000 0100 B =	4D =	4H
0000 0101 B =	5D =	5H
0000 0110 B =	6D =	6H
0000 0111 B =	7D =	7H
0000 1000 B =	8D =	8H
0000 1001 B =	9D =	9H
0000 1010 B =	10D =	AH
0000 1011 B =	11D =	BH
0000 1100 B =	12D =	CH
0000 1101 B =	13D =	DH
0000 1110 B =	14D =	EH
0000 1111 B =	15D =	FH
0001 0000 B =	16D =	10H
0001 0001 B =	17D =	11H
...		
1111 1111 B =	255D =	FFH
0000 0000 B =	0D =	0H
0000 0001 B =	1D =	1H

Ptáte-li se, proč si popisujeme právě osmimístný čítač ve dvojkové číselné soustavě, proč používáme písmena B, D, H a proč se zmiňujeme o šestnáctkové číselné soustavě, tak je to proto, že tento číselný formát a tato symbolika je použita i u mikroprocesoru MHB 8080, ke kterému se postupně chceme dostat.

Čítač, tentokrát podle obrázku 7, by nám čítal v desítkové číselné soustavě — ovšem vyjádřené (kódované) pomocí dvojkové číselné soustavy. Hovoříme o kódu BDC (Binary Coded Decimal — dvojkově kódované číslo desítkové soustavy). Vyjděme opět od stavu

$$0000\ 0000\ B = 0D$$



Obr. 7

a po impulsech $C = 1$ postupně dostáváme

$$0000\ 0001\ B = 1D$$

$$0000\ 0010\ B = 2D$$

$$0000\ 0011\ B = 3D$$

...

$$0000\ 1000\ B = 8D$$

$$0000\ 1001\ B = 9D,$$

stav 0000 1010 B vyvolává nulování první čtveřice klopných obvodů a tím přičtení jednotky ke druhé čtveřici, tedy

$$0001\ 0000\ B = 10D$$

a dále opět

$$0001\ 0001\ B = 11D$$

$$0001\ 0010\ B = 12D$$

...

$$0001\ 1001\ B = 19D$$

$$0010\ 0000\ B = 20D$$

$$0010\ 0000\ B = 20D$$

$$0010\ 0001\ B = 21D$$

$$0010\ 0010\ B = 22D$$

...

$$1001\ 1001\ B = 99D$$

$$0000\ 0000\ B = 0D$$

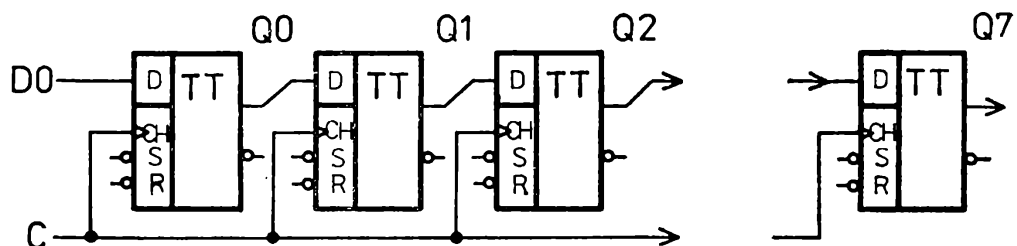
$$0000\ 0001\ B = 1D$$

Pochopitelně spojením takovýcho tří čtveřic bychom dostali čítač od 0 do 999 v kódu BCD, kde čtveřice dvojkových cifer vyjadřuje vždy jednu cifru desítkovou.

Úloha: Navrhněte čítač pro měření času v šedesátkové číselné soustavě (dělič 10 a dělič 6) a kódu BCD.

Z dvojitých klopných obvodů typu D si můžeme zapojit i takzvaný posuvný registr podle obrázku 8. Pomocí vstupů R a S u jednotlivých

Obr. 8



klopných obvodů nastavíme například číslo 5, jestliže $Q7, Q6, \dots, Q0$ pokládáme za cifry dvojkové soustavy

$$0000\ 0101\ B = 5D = 5H$$

Bude-li $D0 = 0$, pak po impulsech $C = 1$ postupně dostaneme

$$0000\ 1010\ B = 10D = AH$$

$$0001\ 0100\ B = 20D = 14H$$

$$0010\ 1000\ B = 40D = 28H$$

Posun o jedno místo doleva totiž odpovídá součinu původního čísla se základem číselné soustavy — ve dvojkové číselné soustavě dvojnásobek (a v desítkové desetinásobek). Pomocí tohoto poznatku se násobí v mikroprocesorech ve dvojkové číselné soustavě.

Úloha: Navrhněte posuvný registr pro posun vpravo (odpovídající dělení dvěma).

Spojíme-li v zapojení podle obrázku 8 výstup $Q7$ se vstupem $D0$, dostaneme kruhový posuvný registr. I tento úkon umí provádět mikroprocesor. Nastavíme-li číslo

$$0100\ 1010\ B = 4AH,$$

potom impulsy $C = 1$ postupně způsobí změny

$$1001\ 0100\ B = 94H$$

$$0010\ 1001\ B = 29H$$

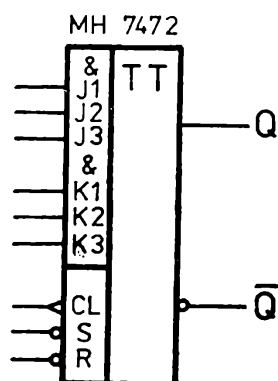
$$0101\ 0010\ B = 52H$$

$$1010\ 0100\ B = A4H$$

atd., kdy se cifra ze sedmého místa přesune na nulté místo a ostatní cifry se posouvají o jedno místo vlevo. Místo o cifrách by však bylo na místě hovořit již znovu o logických hodnotách, neboť především pro práci s logickými hodnotami se tato „rotace“ používá. Osmici logických hodnot či dvojkových cifer nazýváme *byte* („bajt“), zatímco jednu každou z cifer či logických hodnot nazýváme *bit* (a čteme bit). Provádíme-li logické operace s hodnotami na nultém bitu, potom tyto rotace umožní uložit si osm logických hodnot do byte a podle potřeby si je do nultého bitu přesouvat. Posuvné registry nacházejí uplatnění při zobrazení výsledků z mikropočítače na televizní obrazovce a při přenosu číslicových informací po jediné dvojici drátů telefonem či při jejich záznamu na magnetofon, kdy celý byte zobrazujeme postupně bit po bitu.

Vraťme se však ještě k registrům a dvojitým klopným obvodům. Ty se kromě typu D vyrábějí ve složitější podobě typu klopného obvodu $J - K$. Obvod $J - K$ má opět nastavovací vstupy R a S . Hodinový vstup reaguje za změnu z 1 na 0, je to tedy CL . Místo vstupu D mají tyto obvody dva vstupy J a K obdobně jako klopný obvod typu T. V integrovaném provedení MH 7472 má navíc klopný obvod místo vstupů J a K vstupy $J1, J2, J3$ a $K1, K2, K3$ zapojené tak, že $J = J1 \wedge J2 \wedge J3$, $K = K1 \wedge K2 \wedge K3$. Naproti tomu polský integrovaný obvod UCY 7473N obsahuje dva obvody $J - K$ jen s jednoduchými vstupy J a K , nemá však naproti tomu vyvedeny vstupy S , ale jenom vstupy R . Obvod $J - K$ z MH 7472 je znázorněn na obrázku 9.

Jak se obvod $J - K$ chová? Činnost R a S je stejná jako v obvodu typu D , o CL již zmínka byla. Při $J = K = 0$ se stav obvodu nemění při žádné změně CL . Při $J = K = 1$ působí impulsy na CL negací předchozí hodnoty výstupu Q (funkce čítání). Při $J = 0$, $K = 1$ způsobí impulsy na CL stav $Q = 0$, při $J = 1$, $K = 0$ stav $Q = 1$. To se výborně hodí pro stavbu čítačů v kódu BCD.



Obr. 9

O zapojení klopného obvodu $J - K$ z logických členů NAND a o jejich využití pro stavbu čítačů, posuvných a kruhových posuvných registrů se může čtenář mnohé dozvědět v literatuře [2] a [3]. Přeskočíme však tuto problematiku, neboť celé čítače a posuvné registry si můžeme pořídit již zapojené v jediném pouzdru logických integrovaných obvodů TTL stupně integrace MSI. Jim se budeme věnovat opět v některém příštím čísle Rozhledů.

Literatura :

- [1] Fischer I.: Logické obvody z polovodičů. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 62, 1983/84, č. 5, str. 197—202
- [2] Pütz J.: Úvod do číslicové techniky. SNTL, Praha 1983
- [3] Syrovátko M.: Černoch B.: Zapojení s integrovanými obvody. SNTL, Praha 1984.

0 teorii relativity trochu jinak II.

Doc. Ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., ÚV FO

4. Závislost hmotnosti tělesa na rychlosti a gravitační potenciál vesmíru

Těleso v gravitačním poli vesmíru má — analogicky výrazu (6) — potenciální energii

$$E_* = m \varphi_* . \quad (11)$$

Bude-li ve zvolené inerciální vztažné soustavě kinetická energie tělesa E_k , musí na základě zákona zachování mechanické energie pro celkovou energii tělesa v gravitačním poli vesmíru platit

$$E_k + E_* = \text{konst.} \quad (12)$$

Má-li dojít ke změně pohybového stavu tělesa v dané inerciální vztažné soustavě, musí na něj působit podle druhého Newtonova pohybového zákona síla

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} , \quad (13)$$

kde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je okamžitá hybnost tělesa. Síla $\mathbf{F}$ na elementární dráze $d\mathbf{r}$, která má směr a orientaci síly, vykoná elementární práci $dW = \mathbf{F}d\mathbf{r}$, projevující se přírůstkem kinetické energie tělesa v uvažované inerciální vztažné soustavě:

$$dE_k = \frac{dp}{dt} dr = v dp , \quad (14)$$

kde $v = \frac{dr}{dt}$ je velikost rychlosti tělesa.

Podle (12) se změna kinetické energie musí projevit změnou potenciální energie:

$$dE_k = - dE_* . \quad (15)$$

V souladu s (6) lze změny potenciální energie částice v gravitačním poli pro daný zdroj pole dosáhnout:

1. Změnou potenciálu φ_g , tedy změnou polohy tělesa v poli.
2. Změnou hmotnosti tělesa (je-li $\varphi_g = \text{konst.}$). V případě gravitačního pole vesmíru je možný jen druhý případ; tedy podle (11) je

$$dE_* = \varphi_* dm . \quad (16)$$

Pak po dosazení (14) a (16) do (15) je

$$\begin{aligned} v \, dp &= -\varphi_* \, dm, \\ \text{neboli po vynásobení rovnice hmotností } m \\ p \, dp &= -\varphi_* \, m \, dm. \end{aligned} \quad (17)$$

Rovnici (17) lze snadno integrovat. Na obou stranách jde o integrál lineární funkce:

$$\int_{x_1}^{x_2} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

Čtenář, kterému je integrování neznámé, nechť si uvědomí, že v daném případě lineární funkce jde o výpočet obsahu pravoúhlého trojúhelníka (pro dolní mez nulovou) nebo lichoběžníka. Problém lze rovněž převést na řešení součtu řady, v našem případě aritmetické.

Uvažujeme-li, že těleso urychlujeme z klidového stavu v pozorovací soustavě, je dolní integrační mez pro levou stranu $p = 0$ a pro pravou stranu $m = m_0$ (m_0 je klidová hmotnost). Uvažujeme-li výsledný pohybový stav obecné velikosti, budou horní integrační meze $p = mv$ a m . Tedy

$$\int_0^p p \, dp = \varphi_* \int_{m_0}^m m \, dm, \quad \frac{p^2}{2} = -\frac{\varphi_*}{2} (m^2 - m_0^2),$$

neboli

$$m^2 v^2 = -\varphi_* (m^2 - m_0^2).$$

Odtud při uvážení výrazu (10) dostáváme hledanou závislost hmotnosti tělesa (částice) na jeho rychlosti v uvažované inerciální vztažné soustavě:

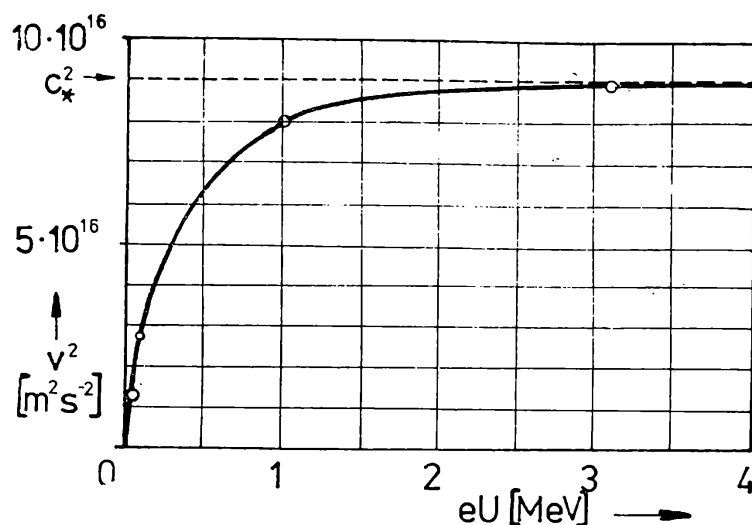
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\varphi_*}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_*^2}}}. \quad (18)$$

Ze vztahu (18) ihned plyne fyzikální význam rychlosti c_* : aby m bylo reálné, musí pro $m_0 \neq 0$ být vždy $v < c_*$. V limitním případě pro $m_0 = 0$ je $v = c_*$. Formálně zavedená rychlost c_* ve vztahu (10) dostává tedy význam *mezní rychlosti* materiálních objektů. Tato rychlost je podle (10) určena gravitačním potenciálem vesmíru:

$$c_* = \sqrt{-\varphi_*} \quad (19)$$

Protože však φ_* neznáme, musíme c_* určit experimentálně.

Pro experimentální studium pohybu materiálních objektů jsou nejvýhodnější elektrony. Mají velmi malou hmotnost a relativně velký elektrický náboj (mají velký měrný náboj) a rychlost jejich pohybu lze změnou



Obr. 3

urychlovacího napětí snadno měnit až do velkých hodnot. Lze je také snadno registrovat. Na obr. 3. je experimentální křivka, která udává závislost druhé mocniny rychlosti elektronů na jejich energii eU , kde U je urychlovací napětí. Z obr. 3 je zřejmé, že křivka se asymptoticky blíží k přímce $v^2 = 9,0 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Mezní rychlost tedy je $c_* \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Mezní rychlost je rovna rychlosti fotonů ve vakuu (tedy rychlosti světla ve vakuu), protože fotony jsou částice, u nichž nebyla spolehlivě zjištěna nenulová klidová hmotnost (jejich klidová hmotnost se považuje za nulovou). Podle nejnovějších měření je $c_* = c = (2,997\,924\,56 \pm 0,000\,000\,01) \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a gravitační potenciál vesmíru má tedy experimentálně zjištěnou hodnotu $\varphi_* = -(8,987\,551\,67 \pm 0,000\,000\,06) \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

5. Vzájemná vazba hmotnosti a energie

Jak nyní, dostaneme v megafyzikálním pojetí nejzávažnější Einsteinův vztah $E = mc^2$? Odvození je jednoduché. Spojíme-li vztahy (15) a (16), dostaneme rovnici

$$dE_k = -\varphi_* dm,$$

kterou lze snadno integrovat:

$$E_k = -\varphi_* \int_{m_0}^m dm = -\varphi_* (m - m_0) = c_*^2 (m - m_0). \quad (20)$$

Zapíšeme-li tento vztah ve tvaru

$$E_k = E - E_0,$$

dostaneme hledané Einsteinovy vztahy pro celkovou a klidovou energii tělesa v uvažované inerciální vztažné soustavě:

$$E = -m\varphi_* = mc^2, \quad (21)$$

$$E_0 = -m_0\varphi_* = m_0c^2. \quad (22)$$

Fyzikální obsah těchto vztahů je sice stejný jako Einsteinových vztahů $E = mc^2$, $E_0 = m_0 c^2$, avšak jejich interpretace s mezní rychlostí c_* , danou gravitačním potenciálem vesmíru, je pro pochopení přijatelnější a cesta k jejich vyvození je podstatně jednodušší.

6. Jak dospějeme k Lorentzově transformaci?

Uvedený postup, využívající úvah o gravitačním poli vesmíru a vedoucí ke dvěma nejzávažnějším výsledkům teorie relativity, dosud nepotřeboval Lorentzovy transformační vztahy. Pro odvození dalších vztahů je však jejich znalost nezbytná. Rovnice, která je pro jejich odvození východiskem, má základ opět v diferenciální rovnici (17). Provedeme-li nyní její integraci v mezích pro hybnost $p' = m'u'$, $p = mu$ a odpovídající hmotnost m' , m , dostaneme rovnici

$$m^2(u^2 + \varphi_*) = m'^2(u'^2 + \varphi_*). \quad (23)$$

Studujeme-li setrvačný pohyb tělesa (částice) ze dvou různých inerciálních vztažných soustav S , S' a zvolíme-li počáteční podmínky tak, že trajektorie částice prochází jejich společným počátkem v okamžiku $t = t' = 0$, bude

$$u^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} \quad u'^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2}.$$

Po dosazení do (23) dostaneme

$$x^2 + y^2 + z^2 + \varphi_* t^2 = \xi^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2 + \varphi_* t'^2), \quad (24)$$

kde

$$\xi = \frac{m'}{m} \frac{t}{t'}.$$

Protože se vzhledem k homogenitě vesmíru (podrobněji viz např. [4], str. 208) nemůže fyzikálně projevit záměna čárkované soustavy za nečárkovanou, musí být $\xi = 1$. Z toho pak plyne (ve zvláštním případě $u' = 0$, $u = v$) známý výraz pro dilataci času dvou souměstných událostí

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_*^2}}}. \quad (25)$$

Pak má rovnice (24), při uvážení $\varphi_* = -c_*^2$, tvar

$$x^2 + y^2 + z^2 - c_*^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c_*^2 t'^2, \quad (26)$$

která je výchozím bodem Einsteinova výkladu speciální teorie relativity a vyhovují jí známé Lorentzovy transformační vztahy. Naznačený postup lze dále rozvinout (viz [4]).

7. Závěr

Popsaný postup výkladu speciální teorie relativity má oproti běžnému (historickému) výkladu několik předností:

1. Propojuje obecné zákony mechaniky (prvé dva pohybové Newtonovy zákony a princip zachování mechanické energie) s teorií relativity.
2. Vystačí jen s jedním výchozím postulátem (principem speciální teorie relativity).
3. Jednoduše dospívá k nejvýznamnějším výsledkům teorie relativity (18), (21), (22), (25), a to bez aplikace Lorentzovy transformace.
4. Dává výsledkům speciální teorie relativity názornější a úplnější fyzikální obsah.

Přitom tento výklad speciální teorie relativity, respektující gravitační pole vesmíru jako celku, neodporuje Einsteinovu vědeckému systému teorie relativity. Naopak umožňuje lépe pochopit nejen výsledky speciální teorie relativity, ale i vazbu speciální a obecné teorie relativity. Obecná teorie se právě zabývá vlivem místních gravitačních polí (místních gravitačních nehomogenit pole vesmíru) na fyzikální děje.

Zbývá ještě poznámka o postavení druhého Einsteinova postulátu: principu stálé rychlosti světla ve vakuu (vlastně principu stálé mezní rychlosti) v megafyzikálním pojetí teorie relativity. Tento princip je vlastně důsledkem konstantního potenciálu vesmíru, stejného ve všech inerciálních vztažných soustavách, a ten je přímým důsledkem platnosti principu setrvačnosti. Michelsonův pokus je pak možno zařadit jako verifikační pokus, který ve svém důsledku ověřuje princip setrvačnosti (prostřednictvím mezní rychlosti fotonů, kterou nelze pohybem zdroje ani pozorovatele přeskročit).

Literatura :

- [1] Horák, Z.: Distant Cosmic Matter and Relativity. Bull. Astr. Inst. of Czechoslovakia 14 (1963), č. 3, str. 117
- [2] Horák, Z.: Cosmic Potential — a Fundamental Physical Constant. Bull. Astr. Inst. of Czechoslovakia 14 (1963) č. 4, str. 119
- [3] Horák, Z.: Rychlost elektromagnetických vln a gravitační potenciál vesmíru. Elektrotechnický obzor 52 (1963), str. 157.
- [4] Vybíral, B.: Fyzikální pole z hlediska teorie relativity. SPN, Praha 1976; upravené a rozšířené slovenské znění: SPN, Bratislava 1980

Kdy se vlastně narodil Isaac Newton?

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

Začnete-li si v různých publikacích, ve kterých je z toho či z onoho důvodu zmínka o Isaacu Newtonovi, všimnout data jeho narození, brzy zjistíte, že tyto údaje nejsou všude stejné. Tak např. Ilustrovaný encyklopedický slovník (Academia, Praha 1981), Filozofický slovník (Svoboda, Praha 1976), Slovník školské matematiky (SPN, Praha 1981), Laueovy Dějiny fyziky (Orbis, Praha 1959) a Struikovy Dějiny matematiky (Orbis Praha 1963) uvádějí, že se narodil roku 1643. Naproti tomu Dějiny přírodních věd v datech (Mladá fronta, Praha 1979) a Součková lístkovnice Kdo byl kdo (Albatros, Praha 1980) považují za rok Newtonova narození rok 1642, stejně jako autor doslovu k Namerově knize Případ Galilei (Mladá fronta, Praha 1982), který v závěru říká: „Stojí za povšimnutí, že *Galilei* zemřel roku 1642, téhož roku, kdy se narodil *Isaac Newton*, který dopracoval klasickou mechaniku do vrcholné podoby, jež se stala na dlouhou dobu vzorem vědy vůbec.“ Pokusme se tuto nesrovnalost vysvětlit.

Její původ je v reformě kalendáře provedené papežem Řehořem XIII. v roce 1582, která měla nejen vyrovnat zpoždění juliánského kalendáře způsobené tím, že juliánský rok je asi o 0,008 dne delší než rok tropický, ale i novým určením přestupných roků tuto odchylku podstatně zmenšit. Z jeho nařízení bylo v uvedeném roce vynecháno deset dnů, a to tak, že den, který bychom 4. října 1582 označili jako zítřek, dostal datum 15. 10. Nový kalendář, podle Řehořova latinského jména *Gregorius* zvaný *gregoriánský*, však nebyl ve všech zemích nábožensky rozdělené Evropy zaveden najednou. Zatímco ve Francii, Itálii, Španělsku, Portugalsku a Polsku byl přijat ihned, byl v protestantských a pravoslavných zemích odmítnut. Tyto země používaly i nadále juliánský kalendář a ke kalendáři gregoriánskému přešly později; ve Velké Británii k tomu došlo v roce 1752.

V uvedených faktech se tají vysvětlení „záhady“ roku narození I. Newtona. V době jeho narození byl v Anglii používán kalendář juliánský a podle něho se Newton narodil 25. 12. 1642. Vyjádříme-li toto datum v gregoriánském kalendáři, který byl v této zemi zaveden později, dojde nejen ke změně dne a měsíce, ale i letopočtu; počet dnů, které je nutno

vynechat k vyrovnání zpoždění juliánského kalendáře za gregoriánským, je totiž větší než počet dnů roku 1642, které následují po 25. prosinci. Podle gregoriánského kalendáře se tedy I. Newton narodil v roce 1643. Kdyby se Newton narodil o několik dní dříve, např. 20. 12. 1642 (podle juliánského kalendáře), byl by letopočet jeho narození v juliánském i gregoriánském kalendáři stejný, a to 1642.

Podobných příkladů lze najít více. Tak např. ruský fyzik *A. S. Popov* zemřel podle zmíněné Součkovy kartotéky *Kdo byl kdo* dne 31. 12. 1905, zatímco Ilustrovaný encyklopedický slovník a Dějiny přírodních věd v datech uvádějí, že k tomu došlo v roce 1906. Důvod odlišnosti obou údajů spočívá opět v tom, že první je v kalendáři juliánském (v té době v Rusku ještě používaném) a druhý v gregoriánském, který byl zaveden až po Říjnové revoluci, v roce 1918.

I když tyto odlišnosti časových údajů v různých pramenech nejsou podstatné, není jistě na škodu, umíme-li je vysvětlit. Přesto však budete nepochybně souhlasit s tím, že mnohem důležitější než znalost životopisných dat významných osobností je znalost jejich díla a výsledků, kterých dosáhly.

Rozvoj a vyvrcholenie klasickej fyziky v druhej polovici 19. storočia

Doc. dr. PAVOL FERKO, CSc., Ing. IGOR KMEŤ, PF Banská Bystrica

1. Charakteristika vedy a spoločnosti

Druhá polovica 19. storočia (1850—1890) sa vyznačovala veľkými úspechmi skoro vo všetkých oblastiach prírodných vied. Konkrétne úspechy vedy si prebojovali cestu k technike a priemyselnej výrobe. V tomto období sa už nedali výsledky dosiahnuté prírodnými vedami interpretovať len z pohľadu klasických pozícií. Najväčší vplyv mali tieto úspechy na tepelnú techniku a elektrotechniku. Parný stroj sa stal základnou hybnou silou ako v priemysle, tak aj v doprave. Ak na začiatku 19. storočia podnikatelia nekládli veľký význam ekonomickej otázke využitia parných strojov, teraz sa už otázka o zvýšení ich účinnosti dostala do centra pozornosti. Riešenie tejto otázky prispelo k rýchlemu rozvoju termodynamiky. Zvyšovanie účinnosti parných strojov bolo

spojené s využívaním vlastností prehriatej pary, čím sa dosiahlo úplné potlačenie strát od vnútornej kondenzácie pary.

V tomto smere sa veľa práce urobilo v 50-tych rokoch 19. storočia. Inžinier *Gustav Adolf Hirn* (1815—1890) podrobne rozpracoval nielen teóriu tohto problému, ale aj uskutočnil rad dôležitých praktických opatrení vo svojej továrni. V roku 1862 boli položené základy výroby parných strojov na prehriatu paru.

Bádateľská a konštruktérska práca pri zdokonaľovaní parných strojov sa neobmedzovala len na zvýšenie účinnosti tepelných strojov. Intenzívne sa rozpracovávala problematika spaľovacích motorov. Pre všetky tieto práce bolo potrebné mať presné a hlboké znalosti o tepelných konštantách plynov a pár. K stanoveniu ich číselných hodnôt bolo treba nevyhnutne zostrojiť nákladné a precízne zariadenia.

Z iniciatívy francúzskeho Výboru pre parné stroje, ktoré založilo Ministerstvo spoločenskej práce, bolo organizované zo štátnych prostriedkov jedno z prvých veľkých vedecko-výskumných laboratórií fyzikom *Henri Victorom Regnaultom* (1811—1878). Vláda veľkodušne odbremenila podnikateľov od nákladov na vedecký výskum, ktorý im neskôr prinášal nemalý zisk. Spolu s tepelnou technikou začala sa rozvíjať elektrotechnika. Ak sa v prvej polovici storočia praktické uplatnenie elektriny obmedzovalo na telegraf a galvanizáciu, v tomto období sa objavilo elektrické osvetlenie a neskôršie aj elektrické stroje.

Už v 60-tych rokoch vystriedali chemické zdroje elektrického prúdu elektrické generátory. V 70-tych rokoch dostalo sa elektrickým generátorom jednosmerného prúdu širokého uplatnenia.

V roku 1876 dostal *P. N. Jabločkov* patent na oblúkovú lampu, ktorá sa skoro stala známa vo svete — Jabločkova sviečka. Pod názvom „ruské svetlo“ obišla skoro všetky hlavné mestá sveta. Bol objavený generátor striedavého prúdu. Ku koncu druhej polovice 19. storočia objavil *Edison* žiarovku s uhlíkovým vláknom (1879). Elektrotechnika využívajúca vlastnosti striedavého prúdu získala vládnuce postavenie, udomácňuje sa v najrôznejších oblastiach techniky. Táto skutočnosť viedla k prestavbe technického vzdelania a k rozvoju fyzikálnych a elektrotechnických laboratórií.

V priemysle a obchode sa stále viac ukazovala potreba nielen zavádzania jednotných a presných jednotiek merania, ale aj vhodných meracích metód. V roku 1875 v Paríži, za účasti 18 krajín, bol utvorený *Výbor pre miery a váhy*, ktorý mal rozpracovať a chrániť medzinárodné etalóny metrickej sústavy. Spoločenská potreba inžinierskych profesií prudko vzrástla, čo prispelo predovšetkým k zakladaniu fyzikálnych laboratórií pri vysokých školách.

Na Heideberskej univerzite (Nemecko) boli ešte v roku 1846 zriadené študentské fyzikálne laboratóriá, na Petrohradskej univerzite v roku

1865 bolo po prvý raz organizované fyzikálne praktikum. V Oxforde fyzikálne laboratória vznikli v roku 1866 a v Göteborgu roku 1867, na Sorbone (Paríž) v roku 1868. V Nemecku bol v roku 1888 utvorený Štátny inštitút exaktných vied a presnej mechaniky, na ktorý prispel továrnik *Werner von Siemens*.

V roku 1893 vznikol Hlavný ciachovací úrad v Petrohrade, roku 1899 podobná vedecko-výskumná ustanovizeň — Národné fyzikálne laboratórium — bolo založené v Anglicku a v roku 1901 bol zriadený Národný úrad etalónov v USA.

V týchto inštitúciách sa robili vedecké výskumy, výsledky ktorých široko využil kapitalistický priemysel, čo mu prinášalo obrovské zisky. Buržoázne vlády ochotne financovali prácu v týchto inštitúciách. Táto forma organizovania vedecko-výskumnej práce sa ukazovala nedostatočnou z hľadiska objemu práce a nepružnou pre rýchlo sa rozvíjajúci priemysel. Ukázalo sa, že rozvoj vedy nestačí tempu rozvoja priemyslu. Predovšetkým to bolo výrazné v Nemecku. Nemecká buržoázia v prevažnej miere zastúpená predstaviteľmi najmladších, rýchlo sa rozvíjajúcich odvetví ako elektrotechnického, tak aj chemického, zanietené sa postavila za vedecký výskum, v ktorom videla mohutnú zbraň v konkurenčnom boji. Univerzitná forma výskumnej práce sa pri tom ukázala nevyhovujúcou. Do popredia sa dostávajú súkromné výskumné laboratória a ústavy, tiež štátne a pološtátne výskumné ustanovizne, úzko zviazané s veľkopriemyslom.

2. Situácia vo fyzike

Fyzika v tejto dobe prežívala nebývalý rozkvet. Bola tesne spätou s výrobou. Nielenže napomáha pri zdokonaľovaní techniky, ale jej aj vytyčuje principiálne nové smery.

Predovšetkým izolované oblasti experimentálnej a teoretickej fyziky sa menili pod tlakom objavených faktov. Fyzikálny výskum bol zameraný na teóriu elektromagnetického poľa a teóriu o teple. Myšlienky *Faradaya* po dlhú dobu ostávali nepochopené a neuznané, ale nakoniec dostali matematickú formu v elektrodynamike syntetizovanej *Maxwellom*. „V tom čase, keď starý systém považoval silové centrum za reálnosť a sily za matematický pojem, Faraday jasne videl ich štruktúru a pôsobenie (vplyv) v priestore od bodu k bodu. Potenciál, ktorý bol dovtedy považovaný za zjednodušujúcu veličinu, potrebnú pri výpočtoch, stal sa preň reálne existujúcou priestorovou veličinou, príčinou pôsobenia sily“, píše v „Statiach a prejavoch“ *L. E. Boltzmann*. Takýto obraz prijal Maxwell ako osobitný podklad pre svoje rovnice.

Hypotézy *N. A. Umova* o lokalizácii mechanickej energie v materiálnom prostredí, o hustote tejto energie i o možnosti jej premeny umožnili formulovať rovnice pohybu energie v priestore, ktorá sa začala interpre-

tovať z hľadiska šírenia elektromagnetickej energie po novom (Umovov-Poyntingov žiarový vektor, vyjadrujúci smer a hustotu prúdenia energie v elektromagnetickom poli).

Experimentálny objav elektromagnetických vln (*Hertz*) a potvrdenie teórie elektromagnetického poľa položili základy novému smeru fyzikálnych výskumov — rádiofyzike.

Po objavení fundamentálneho zákona kvantitatívnej ekvivalentnosti všetkých foriem pohybu a vzájomného pôsobenia (zákon zachovania a premeny energie pre makroskopické systémy) nasledoval objav druhého zákona (princípu) (*Clausius, Thomson*), ktorý umožnil rozvinúť fenomenologickú termodynamiku ako univerzálnu vedu o tepelných procesoch. Súčasne sa rozvíjala kinetická teória plynov, založená na hypotéze chaotického (neusporiadaného) pohybu častíc. Tento ďalší rozvoj molekulárno-kinetických teórií 17. a 18. storočia ukázal sa neobyčejne plodným, prispel k prekvapujúcim predpovediam, napr. predpovedi o nezávislosti koeficientu trenia od tlaku, k určeniu závislostí medzi trením, difúziou a tepelnou vodivosťou a pod.

Ďalšie prehĺbenie štatistickej teórie a spresnenie pojmu pravdepodobnosti celkového stavu veľkého počtu chaoticky sa pohybujúcich atómov umožnilo modernejšie interpretovať II. termodynamický princíp (*Boltzmann*).

Prudký rozvoj a udivujúce úspechy dosiahla v tejto dobe experimentálna optika. Objavenie spektrálnej analýzy *Kirchhoffom* a *Bunsenom* nielenže vyzbrojilo fyzikov a chemikov novou metódou zisťovania prvkov u pozemských i u kozmických objektov, ale priviedlo aj k početným novým výskumom v oblasti dvojlomu lúčov, natáčania polarizačnej roviny, interferencii atď. Optické metódy merania dosiahli vysokú presnosť. V tejto dobe sa začali systematicky skúmať elektrické výboje v plynach pri nízkych tlakoch. Tento výskum neskôr prispel k odhaleniu mnohých javov, ktoré priviedli fyziku k prehĺbeniu predstáv o stavbe hmoty.

Klasickú fyziku konca sledovanej doby dnes nazývame aj predkvantovou fyzikou. Už v polovici 19. storočia interpretácia fyzikálnych javov narazila na veľmi vážne ťažkosti. Ako sa odkrývali nové oblasti vedy, tieto ťažkosti viac a viac narastali. Fyzici v druhej polovici 19. storočia boli presvedčení, že všetky fyzikálne javy môžu byť zahrnuté do základov mechaniky. Ale elektromagnetické javy sa v žiadnom prípade nedali mechanicky vysvetliť.

Tepelné javy, na ktoré sa pozeralo ako na prejav neusporiadaného pohybu molekúl, akoby nasvedčovali mechanickým názorom. Ale aplikácia mechanických zákonov, menovite zákona zachovania mechanickej energie, umožnila len vysloviť I. termodynamickú vetu. Fyzici robili zúfalé pokusy mechanicky vysvetliť aj II. termodynamickú vetu, ale všetky tieto snahy boli márne.

Táto situácia priviedla fyzikov k rôznym záverom. Medzi nimi možno nájsť niekoľko druhov pozitivistických koncepcií. Zástanci týchto koncepcií (napr. *Kirchhoff*) videli ideál vedeckej teórie v termodynamike. Takéto obmedzenie fyzikálnej teórie nemohlo uspokojiť bádateľov, ktorým sa už podarilo dosiahnuť pozoruhodných výsledkov pri skúmaní vnútorného mechanizmu javov, ako napríklad v kinetickej teórii plynov.

K týmto fyzikom patrila i *Maxwell*, ktorý upozornil na fakt, že medzi zjavne rozličnými javmi prírody možno pozorovať podobu matematických zákonov, ktorým sa javy prírody podriaďujú. Z toho všeobecne známeho faktu *Maxwell* prišiel k záveru, že vhodne vybraná fyzikálna analógia môže viesť k matematickým postupom dobre opisujúcim daný fyzikálny jav, nehladiac na to, že sa zjavne odlišuje od pripisovanej mu analógie, rozvíja myšlienku jednotných matematických postupov skúmania fyzikálne rozdielnych procesov. *Maxwell* predpokladal, že jeden z týchto javov môže takýmto spôsobom slúžiť pre ilustráciu druhého. Preto vo svojich raných teoretických prácach sa celkom stránil vyslovovať akékoľvek hypotézy o mechanizme vnútorných procesov. *Maxwellovu* koncepciu nie vždy správne chápali a ako poznamenáva Boltzmann „bolo veľa takých bádateľov, ktorí nerozumeli *Maxwellovým* hypotézam a pokladali ich za nepravdepodobné a absurdné,“ presnejšie, ktorí prijímali jeho nepravdepodobné analógie za hypotézy. Nakoľko *Maxwell* nepripisoval reálny význam ani jednému zo svojich modelov a považoval ich všetky za ilustratívne fikcie, treba správne oceniť Hertzovo vyslovenie: „*Maxwellova* teória — to sú *Maxwellove* rovnice“. Očividne reálnymi v predstavách samotného *Maxwella* boli len ním zostavené matematické formulácie. „Jednako“ — písal Boltzmann — „postupne nové myšlienky si prebýjali cestu vo všetkých oblastiach . . . Ukázalo sa, že tieto myšlienky dokonca oveľa viac zodpovedajú duchu vedy než staré hypotézy; stali sa vhodnými pre samotných bádateľov. Staré hypotézy sa mohli len do tých čias považovať za správne, pokiaľ sa všetky javy s nimi zhodovali. Filozofia *maxwellovských* myšlienok bola zovšeobecnená v učení o tom, že poznanie vo všeobecnosti nepredstavuje nič iné ako odhalenie podobností.“

Tretia koncepcia bola navrhnutá rakúskym fyzikom i filozofom — idealistom *Ernstom Machom* (1836—1916). *Mach* sám seba považoval za pokračovateľa *Maxwella* a celkom schvaľoval metódu fyzikálnych analógií ako základnú poznávaciu metódu. „*Maxwell* sa vo veľkej miere približuje k ideálnej metóde skúmania prírody, v tom je jeho neobyčajný úspech“ — tvrdí *Mach*. V zrelom veku sa *Maxwell* fakticky zriekol metódy analógií a priznal oprávnenosť hypotéz. Ale sám *Mach* ide vo svojich úvahách oveľa ďalej než *Maxwell*. Odvolávajúc sa na psychofyziologické predpoklady o tom, že priestorové predstavy sú bezprostredne spojené so zmyslovými vnemami, *Mach* tvrdí, akoby preto mohli mať

význam len pre zmyslové vnímanie (zmyslovú zrozumiteľnosť) a odtiaľto prichádza k záveru, že atómom, ktoré sú nedostupné zmyslovému vnímaniu, nemáme právo pripisovať vlastnosti reálnej hmoty. Mach tvrdí, že úloha vedy spočíva v „ekonomickom“ popise faktov, tzn. v takom opise, v ktorom používame len nevyhnutné a najúčelnejšie predstavy. „Ekonomia myslenia“ pri prispôbení sa skúsenosti, podľa mienky Macha, podmieňuje nepretržité používanie analógií.

Proces nášho chápania podľa názorov Macha spočíva v tom, že neobvyklé „nepochopiteľnosti“ spájame s obvyklými „nepochopiteľnosťami“, na ktoré sme už zvyknutí. Mach preto pokladal analógiu za spôsob, ktorý umožňuje získať ucelenú predstavu a chápanie rôznorodých faktov, takže podľa jeho názoru má analógia veľiký teoreticko-poznávací význam. Ale, hovorí Mach, analógiu — nie totožnosť a metódy využívané pri výskume — nesmieme miešať s výsledkami výskumu. Mach zdôrazňoval, že mechanické chápanie prírody je založené na širokej analógii medzi pohybom hmoty v priestore a kvalitatívnymi fyzikálnymi zmenami látok. Jednako možnosť uskutočniť túto analógiu, v širokých rozmeroch nám nedáva právo pripúšťať, že všetky fyzikálne procesy sú v jadre procesy mechanické. Zákony mechaniky môžu slúžiť len ako formálne vzory a inštrukcie. Premiestňovanie telies v priestore, pokračuje Mach, sú najjednoduchšie názorné procesy, ktoré môžeme najľahšie sledovať v našej obrazotvornosti. Každý fyzikálny proces má svoju mechanickú stránku, prejavujúcu sa napríklad v rozťažnosti látok, kmitaní, priťahovaní atď. Preto si môžeme jasne predstaviť a interpretovať fyzikálne javy pomocou mechanických analógií. Mach kategoricky zdôrazňuje, že čisto mechanické procesy vôbec neexistujú, lebo zároveň pri jednoduchých premiestňovaniach vždy vznikajú magnetické a elektrické javy a tepelné procesy. Každý fyzikálny jav sa v podstate vzťahuje na všetky oblasti fyziky.

Takýmto spôsobom Mach rozhodne a správne popiera dogmatizmus mechanistických názorov.

Charakteristickou zvláštnosťou fyziky v tomto období bolo úspešné spájanie širokého teoretického aparátu, výpočtových metód fyzikálnych výskumov s experimentom. Touto zvláštnosťou sa vyznačovali práce takých vynikajúcich fyzikov, ako boli *Boltzmann*, *Helmholtz*, *Maxwell* a *William Thomson*.

V tomto čase sa objavuje nielen tendencia k rozdeleniu bádateľov na teoretikov a experimentátorov, ale aj rozdelenie samotnej vedy na dve disciplíny — experimentálnu a teoretickú fyziku. Táto forma celkom prirodzeného rozdelenia práce na vedecko-výskumnú činnosť mohutnela a dospela k chybnnej tendencii odtrhnutia teórie od experimentu. Rozvoju tejto tendencie v hlavnej miere napomohlo zrodenie čistej matematiky.

„Devätnáste storočie — neskoršie písal *Bertrand Russell* — právom sa hrdiac objavom princípu evolúcie a vynálezom parného stroja, má

ešte väčšie právo pýšiť sa objavom čistej matematiky Čistá matematika bola objavená anglickým matematikom *G. Boolom* (1815—1864) v diele, ktoré má názov „Zákony myslenia“, vydanom v roku 1854.“ Úspechy čistej matematiky — vedy o logike výstavby sústavy poznatkov, priviedli niektorých fyzikov — teoretikov, stojacích na pozitivistických pozíciách, k mylnej predstave o teoretickej fyzike ako zvláštnej časti matematiky.

Na záver možno konštatovať, že v období druhej polovice devätnásteho storočia veľké úspechy experimentálnych a teoretických výskumov významne prispeli k vyvrcholeniu klasickej fyziky.

Poznámka : Príspevok je spracovaný na základe rozsiahlej monografie J. G. Dorfman: *Vesmírnaja istoria fyziky s drevnejšich vremen do konca 19. veka* (Izdatelstvo Nauka 1974 Moskva).

Vzpomínka na P. L. Kapicu

RNDr. STANISLAV ŠAFRATA, CSc., FzÚ ČSAV Praha

Tři měsíce před svými devadesátými narozeninami zemřel dne 8. dubna 1984 v Moskvě *Petr Leonidovič Kapica*, ředitel jím založeného Ústavu fyzikálních problémů AV SSSR v Moskvě a člen prezidia Akademie věd SSSR. Odešel velikán moderní fyziky, dvojnásobný hrdina SSSR, nositel Nobelovy ceny a četných dalších cen a vyznamenání. Odešla v něm mnohostranná osobnost současné vědy a techniky, na niž budeme ještě dlouho vzpomínat.

P. L. Kapica se narodil v Kronštadt v tehdejším carském Rusku 9. července 1894 v rodině generála technických vojsk. Absolvoval elektromechanickou fakultu polytechnického institutu v Petrohradě (nynějším Leningradě) v roce 1918. Po vysoké škole začal pracovat pod vedením *A. F. Ioffe* na témže učilišti. V r. 1921 odejel do Anglie, kde pracoval 13 let na univerzitě v Cambridge ve známé Cavendishově laboratoři zpočátku pod vedením *E. Rutherforda*, později jako ředitel Mondovy laboratoře. Po návratu do SSSR v r. 1934 založil Ústav fyzikálních problémů AV SSSR, jehož ředitelem byl, s přestávkou v letech 1946—1955, až do své smrti. V roce 1929 byl zvolen členem Královské společnosti v Londýně, v témže roce členem korespondentem AV SSSR, a v r. 1939 akademikem AV SSSR. V následujícím období ho poctilo více než 30 zahraničních akademií a univerzit členstvím a čestnými doktoráty.



Akademik P. L. Kapica

I když se zabýval různými problémy fyziky a matematiky (jako např. speciální přípravou Wollastanových vláken, výzkumem drah částic alfa v magnetickém poli, podstatou kulového blesku, teorií pohybu tenkých vrstev viskózních kapalin, teorií kořenů Besselových funkcí atd.), jsou čtyři oblasti, kterým věnoval nejvíce svého zájmu.

Ve dvacátých letech vytvořil unikátní metodiku silných impulsních magnetických polí, jíž využil při výzkumu elektrického odporu a magnetostrikce pevných látek a Zeemanova jevu. Objevil lineární závislost elektrického odporu na magnetickém poli, což bylo teoreticky vysvětleno až 30 let po jeho pokusech. K vytvoření impulsů silných magnetických polí použil nekonvenční techniky. Velký generátor elektrického proudu s rotorem o váze 2,5 tuny byl po roztočení spojen v podstatě nakrátko malou cívkou, v níž se vytvořilo na dobu 10 milisekund pole 32 T. Špičkový výkon generátoru byl přitom 220 MW. Stejného principu vytváření impulsních magnetických polí se užívá i dnes, i když místo Kapicova mechanického akumulátoru energie se používá baterií kondenzátorů pro akumulaci elektrické energie. P. L. Kapica v těchto letech zahájil éru používání velké techniky ve fyzikálních experimentech. Byl

prvním, který prokázal nutnost a účelnost tohoto způsobu experimentování ve fyzice.

Ve třicátých letech a v období druhé světové války se P. L. Kapica zajímal o fyziku a techniku nízkých teplot. V roce 1934 uvedl do chodu první model zkapalňovače helia, který nepotřeboval ke své činnosti předchlazení kapalným vzduchem a kapalným vodíkem. Jeho první zkapalňovač měl výkon 2 l kapalného helia za hodinu. K ochlazení helia docházelo při expanzi ve speciálním pístovém expandéru, kde mazadlem mezi pístem a válcem bylo plynné helium. Tohoto principu zkapalňování se dodnes ve světě užívá. V několika zemích byly vyrobeny tisíce takových heliových zkapalňovačů různých výkonů až do stovek litrů za hodinu.

V r. 1937 objevil P. L. Kapica supratekutost helia a prozkoumal různé vlastnosti této supratekutiny v důmyslných pokusech, prováděných na miniaturních zařízeních vyrobených s mikroskopickou přesností. Dokázal, že je také mistrem experimentální techniky na druhém konci rozměrové škály. Objevem a výzkumem supratekutosti helia založil P. L. Kapica fyziku kvantových kapalin. Nejzajímavější objekty této fyziky — supratekuté fáze lehkého izotopu helia (^3He) — jsou v současné době předmětem intenzivního výzkumu, jemuž se v celém světě věnují stovky fyziků.

Období svého zájmu o nízké teploty završil P. L. Kapica rozpracováním nové metody zkapalňování vzduchu. Zavedl do této techniky nízkotlaký cyklus, který umožnil nahradit pístové kompresory a expandéry turbinovými typy. Sám navrhl turbinový expandér, přičemž vyšel z fyzikálního poznatku, že studený plyn má spíše vlastnosti kapaliny než plynu. Jeho turbinový expandér má účinnost okolo 85 %. Tento nový způsob zkapalňování plynů značně zvýšil obranyschopnost SSSR ve 2. světové válce zvýšením účinnosti a zkvalitněním metalurgického průmyslu a přispěl výrazně k jeho zefektivnění i při mírovém budování. Při množství kyslíku, používaného v moderní metalurgii, jde o stamilionové částky úspor ročně.

Třetí oblastí Kapicova zájmu v poválečném období byla silnoproudá elektronika. Na základě fyzikálních výpočtů pohybu elektronů v elektromagnetickém poli zkonstruoval výkonné generátory mikrovlnného záření pro kontinuální provoz. Výkon těchto generátorů, tzv. nigotronů, dosáhl až 200 kW. (Název generátorů pochází z kombinace slov Nikolinaja gora, což je místo, kde je Kapicova chata, v níž vznikly myšlenky konstrukce generátoru).

Čtvrtou a poslední oblastí Kapicova zájmu byla fyzika vysokoteplotního plazmatu, jež v Kapicově pojetí úzce souvisela s předcházející oblastí. Výkonné generátory mikrovlnného záření byly prostředkem ohřátí plazmatu na teploty blízké těm, jež jsou potřebné na uskutečnění termojaderných reakcí. V této poslední oblasti Kapicova fyzikálního



*P. L. Kapica (vpravo) v laboratoři Ústavu fyzikálních problémů v Moskvě
s laborantem S. J. Filimonovem v roce 1939*

a inženýrského zájmu bylo vypracováno mnoho velkých experimentálních zařízení a byla rozpracována řada nových metod diagnostiky dějů v plazmatu. Podle vyjádření svých spolupracovníků Kapica mužně a odvážně bojoval s překážkami, stojícími na cestě k nejperspektivnějšímu zdroji energie. Bohužel, smrt mu zabránila dosáhnout rozhodujícího vítězství na tomto čtvrtém bitevním poli.

Věnovali jsme mnoho pozornosti vědeckým a technickým zájmům P. L. Kapicy, protože především tato činnost učinila tohoto největšího experimentátora a inženýra fyziky světoznámým. My, kteří jsme ho znali blíže a měli jsme možnost se s ním setkávat a hovořit s ním i s jeho spolupracovníky, jsme si ho však vážili i jako velikého organizátora vědy a výchovy mladých vědeckých pracovníků a také jako všestrannou, smělou a odvážnou osobnost. Doplňme proto pohled na legendárního fyzika ještě několika dalšími poznámkami.

P. L. Kapica byl jedním z iniciátorů založení a tvůrců Moskevského fyzikálně-technického ústavu, jímž bylo vychováno několik generací sovětských fyziků pro výzkum a techniku. Kromě zajištění podmínek pro výchovu fyziků „ve velkém“ se zajímal P. L. Kapica přímo o výchovu vědeckých aspirantů ve svém ústavu. Problémy pro zkoušky aspirantů formuloval a předával jim je předem. Přitom souhlasil s tím, aby se o jejich řešení radili s vědeckými pracovníky ústavu. V některých případech šlo o náročné úlohy i pro školitele. Tímto způsobem byli vtaženi do výchovy kolektivy pracovníků ústavu, které to sbližovalo s aspiranty a podněcovalo to jejich zájem o vědeckou výchovu.

P. L. Kapica se nezajímal jen o svoji vědeckou specializaci. Zajímal se o fyziku a techniku vcelku, o všechno okolo a zejména o lidi, kteří v procesu tvoření a spotřeby vědy i techniky vystupovali. Jsou známy jeho přátelské vztahy se spisovateli, malíři, umělci a filmovými tvůrci. S nimi všemi dovedl obsažně i kriticky hovořit. Na jeho vystoupení v prezídiu AV SSSR, kde zaujímal stanoviska i k nefyzikální problematice, se těšili všichni, kteří chtěli slyšet něco nového, oproštěného od běžného formalismu. P. L. Kapica neměl rád lidi „prázdné“ bez ohledu na jejich postavení i mnohmluvnost. Ti nikdy nepatřili k okruhu jeho přátel.

P. L. Kapica nadevše oceňoval tvůrčí schopnosti člověka. Rozvoj tvůrčích schopností považoval za nejdůležitější úkol vědeckého pracovníka, pedagoga i celé společnosti. V tvůrčí činnosti viděl naplnění života člověka i hlavní perspektivu lidstva. Sám na sobě neustále dokazoval plodotvornost a účelnost tvůrčího myšlení a tvůrčí práce. Byl člověkem s mimořádně vysokou sebedůvěrou. Věřil, že začne-li něco, vyřeší to lépe než kdokoli jiný. Tato sebedůvěra, podložená širokým a hlubokým pochopením fyziky, ovládnutím matematiky a inženýrskou vynalézavostí, byla reálně potvrzována během téměř sedmdesáti let jeho nepřetržité vědecké práce. Říkával, že cizíma rukama dobrou práci neuděláš. Vyskytly-li se problémy a překážky v práci, říkával svým spolupracovníkům, že záchrana tonoucích musí být především dílem rukou tonoucích.

Zájem P. L. Kapicy o globální a perspektivní problémy lidstva, zejména otázky energie, výživy a vztahy lidí na celém světě, byl těsně spjat s jeho hlubokým a vážným znepokojením rostoucí hrozbou světového válečného konfliktu. To ho přivedlo do řad obránců míru a do světového výboru pugwashského hnutí, kde aktivně v zájmu míru vystupoval. I když jeho obavy o mír byly velké, věřil, že síly rozumu lidstva přemohou síly, které by lidstvo chtěly uvrhnout do válečné zhouby.

Rozvoj fyziky nízkých teplot a heliové techniky v naší zemi je nerozlučně spjat s P. L. Kapidou. První zkapalňovač helia v ČSSR byl vyroben podle dokumentace z jeho ústavu. Prvním krůčkům a krokům v blízkosti absolutní nuly teploty se učili naši fyzici v jeho ústavu v Moskvě. Československo patřilo k zemím, které P. L. Kapica rád navštěvoval a kde v Karlových Varech i ve Vysokých Tatrách během krátkých pobytů nabíral síly k další práci. Vzpomínka na tohoto velikána moderní fyziky zůstane v naší zemi trvalá.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Tři cifry

JIŘÍ MANN, Dvůr Králové n. L.

Z cifer 2, 4, 8 jsou vytvořena čísla a z nich pomocí základních početních výkonů sestaveny jednoduché výrazy. Ty, které mají stejnou velikost, jsou spojeny v rovnostech. Pokuste se nalézt další rovnosti, popřípadě i jiné ciferné trojice či čtveřice s obdobnými vlastnostmi.

$$42 - 8 = 4 \cdot 8 + 2$$

$$2 - \frac{8}{4} = 4 - \frac{8}{2} = 2 \cdot 4 - 8$$

$$4 + \frac{8}{2} = 2(8 - 4)$$

$$8 + \frac{4}{2} = 8 + 4 - 2$$

$$2 - \frac{4}{8} = \frac{8 - 2}{4}$$

$$8 - \frac{4}{2} = 8 - 4 + 2 = \frac{8 + 4}{2}$$

$$2 + \frac{4}{8} = \frac{8 + 2}{4}$$

$$28 - 4 = 2(8 + 4) = 4(8 - 2) = \frac{48}{2}$$

$$2 + \frac{8}{4} = \frac{8}{4 - 2} = \frac{2 \cdot 8}{4}$$

$$24 - 8 = 8(4 - 2) = \frac{4 \cdot 8}{2}$$

Při použití dalších početních výkonů a symbolů bychom patrně našli ještě mnoho rovností; zde jsou některé z nich:

$$\sqrt[4]{8^2} = \frac{8}{4} \sqrt{2}$$

$$\frac{(8 - 2)!}{4!} = 4 \cdot 8 - 2$$

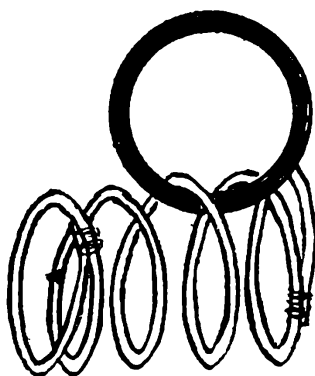
$$\binom{8 - 4}{2} = \frac{2 \cdot 4!}{8}$$

$$(8 - 4)^2 = \frac{8^2}{4} = 4 \sqrt{2 \cdot 8} = 8 \log_2 4 = \frac{4 \cdot 8}{2} =$$

Kroužek v pružině

Velmi jednoduchým hlavolamem jak v řešení, tak ve výrobě je „kroužek v pružině“. Je to vlastně hříčka, kterou tvoří ocelová pružina a kroužek z kovu nebo umělé hmoty.

Přiměřenou pružinu můžeme sehnat v obchodě nebo si ji musíme zhotovit z ocelového drátu (drátu od kola) postupným ohýbáním pomocí



kleští s kulatými čelistmi. Konce pružiny pevně ovineme vláknem z elektrického vodiče a sletujeme pájkou. Kroužek musí mít o něco větší průměr, než je průměr pružiny.

Naším úkolem bude nasadit kroužek na pružinu tak, aby se v ní volně pohyboval z jednoho konce pružiny na druhý a aby ho nebylo možno sejmut, protože konce pružiny jsou pevně svázány (viz obr.).

Když se to podaří, jednoduchou operací kroužek zase sejmem.

Josef Svoboda

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

OLYMPIÁDY A SOČ

Celostátní kolo 25. ročníku fyzikální olympiády

RNDr. IVO VOLF, Ústřední výbor FO

Ve dnech 6.—10. dubna 1984 proběhlo v Nitře celostátní kolo 25. ročníku fyzikální olympiády, které bylo spojeno s oslavou 25 let trvání této soutěže. Souběžně s celostátním kolem proběhla konference, věnovaná péči o žáky talentované na fyziku.

V soutěži byly předloženy 64 pozvaným účastníkům celostátního kola v kategorii A čtyři teoretické úlohy s celkovým bodovým hodnocením 40 b. Zajímavá byla výzkumná experimentální úloha, při níž měli účastníci navrhnout postup a provést příslušná měření pro stanovení indexu skla, z něhož bylo vyrobeno předložené zrcadlo. Za úspěšné vyřešení mohl soutěžící získat 20 bodů.

Na slavnostním závěrečném zasedání promluvila náměstkyně ministra školství SSR *dr. Marta Vláchová, CSc.*, která zhodnotila dvacet pět let průběhu fyzikální olympiády nejen jako poznatkové soutěže pro zájemce o fyziku, ale také jako významný prostředek při vyhledávání žáků základních a středních škol talentovaných na fyziku a rozvoje jejich kladného postoje k fyzice. Na zasedání byli vyznamenáni organizační pracovníci aktivu fyzikální olympiády a učitelé fyziky, kteří se významně zasloužili o rozvoj této soutěže. Proběhlo také vyhodnocení celostátního kola 25. ročníku FO. Z celkového počtu 64 účastníků bylo vyhlášeno 20 vítězů, dalších 22 účastníků bylo úspěšných a 22 účastníků bylo neúspěšných. Nejlepší účastník získal 50 bodů, takže hranice 25 bodů byla kritériem úspěšnosti.

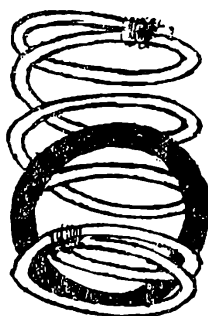
Vítězi 25. ročníku fyzikální olympiády byly prohlášeni (a pohár vítěze si odvezli):

1. Dagmar Kluvancová, g. Nitra — 50 bodů; 2. Viliam Šichman, g. Prešov — 47 b.; 3. Ivo Čermák, g. Bílovec — 46 b.; 4.—5. Ján Lúžný, SPŠE Prešov, Josef Pelikán, g. České Budějovice — 45 b.; 6.—7. Patrik Španěl, g. W. Piecka Praha, Miroslav Rýška, g. Frýdek-Místek — 44 b.;

8. Ivo Bajer, g. Frýdek-Místek — 43 b.; 9.—12. Zbyněk Linhart, g. Pardubice, Martin Bezák, g. Prievidza, Szilárd Kecskés, g. Banská Štiavnica, František Adamec, g. Ostrov. n. O. — 42 b.; 13. Richard Pleva, g. Praha, Sladkovského — 40 b., 14. David Vokrouhlický, g. Praha-Libeň, — 39 b.; 15.—16. Radek Pelc, g. Mělník, Pavel Jungwirth, g. W. Piecka Praha — 38 b.; 17.—18. Pavel Beluský, g. Nitra, Pavel Zemčík, SPŠE Brno — 37 b.; 19.—20. Martin Janoušek, g. Praha 10, Jiří Kunžák, g. Pelhřimov — 36 b.

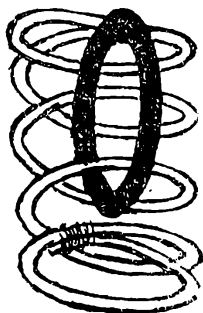
ŘEŠENÍ HLAVOLAMU ZE STR. 375:

1. Kroužek navlékneme na pružinu a necháme jej do ní vklouznout. (obr. 1).

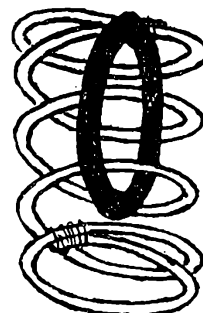


Obr. 1

2. Kroužkem otočíme doprava (obr. 2 — šipka ukazuje směr otáčení), a tím ho dostaneme do potřebné polohy, aby nebylo možno ho posunováním z pružiny sejmout (obr. 3).



Obr. 2



Obr. 3

Co víte o matematicko- fyzikální fakultě UK v Praze a studiu na ní?

Některým našim čtenářům se dostalo toto číslo našeho časopisu do rukou jen náhodně, jiní čtou „Rozhledy“ pravidelně, zřejmě ze zájmu o matematiku a fyziku. U některých z vás — čtenářů — může vzniknout zájem o tyto obory tak velký, že začnete uvažovat o možnosti zvolit si práci v matematice nebo fyzice za povolání. K těmto našim čtenářům se obracíme se zprávou o tom, jak získat informace o matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze a o studiu na ní.

Matematicko-fyzikální fakulta UK pořádá již řadu let „*Den otevřených dveří*“, určený středoškolským studentům a sledující cíl informovat je o své existenci, o studiu na fakultě a o možnostech uplatnění absolventů. V loňském roce proběhla tato akce dne 8. listopadu. Dopolední program proběhl odděleně pro zájemce o odborné studium matematiky a fyziky a pro zájemce o studium učitelství těchto oborů. První část určená zájemcům o odborné studium matematiky nebo fyziky měla přes devět set účastníků z řad středoškolských studentů. Tito studenti vyslechli informace o studiu z úst děkana fakulty a dalších předních pracovníků fakulty. Dozvěděli se zajímavé informace o směrných číslech pro jednotlivé studijní obory, o počtu přihlášených a přijatých uchazečů v uplynulém roce a o možnostech ubytování v pražských kolejích. Jako doplněk dopoledního programu bylo promítnutí filmu o MFF UK „Generace pro zítřek“ a humorná vložka hostů z divadla Jára da Cimrmana. Zájemci o učitelské studium — bylo jich na dvě stě — se dozvěděli informace o učitelském studiu a vyslechli přednášky o patamatematice, vývoji počítačích strojů, o modelech vesmíru a fyzice nízkých tlaků. Nakonec dopoledne navštívili fyzikální praktikum a seznámili se s úlohami tohoto praktika a s využitím mikropočítačů při laboratorních pracích. Odpoledne mělo společný program pro zájemce pro oba druhy studia. Každý ze studentů si mohl vybrat z široké nabídky možností podle svého zájmu: exkurzi k velkému počítači, přednášky se společným názvem „Krása a důvtip matematiky“, hru GO, fyzikální demonstrační pokusy, exkurze do fyzikálních laboratoří fakulty, přednášky o fyzice raného vesmíru a o aplikacích jaderné fyziky. Zajímavost programu dokládaly

dlouhotrvající diskuse mezi přednášejícími a účastníky. — Pokud tato informace o aktivitě MFF UK v někom z vás vzbudila zájem o účast na „Dnu otevřených dveří 1985“, můžete si zajistit pozvání na tuto akci tím, že napíšete na adresu „MFF UK, studijní oddělení, 121 16 Praha 2 — Nové Město, Ke Karlovu 3“.

Libor Pátý

Vysoká vojenská škola Československo-sovětského přátelství

PhDr. PAVEL DEDERA, doc. Ing. ZDENĚK VAŠEK

Mezi nejmladší vysoké školy v ČSSR patří VVTŠ ČSSP v Liptovském Mikuláši, která vznikla rozhodnutím prezidenta ČSSR v roce 1973.

Sídlem školy je Liptovský Mikuláš, město významné historie a kulturních tradic s překrásným přírodním okolím. Město je nesmazatelně zapsáno v historii předválečného dělnického hnutí, národně-osvobozenického boje v době 2. světové války, i v poválečné a socialistické výstavbě. Z města je přímé spojení do nejvýznamnějších center turistiky a zimních sportů v Nízkých, Západních a Vysokých Tatrách.

Hlavním posláním školy je výchova a vzdělávání vojenských inženýrů s vysokými morálně politickými a morálně volnými vlastnostmi, odborně připravených plnit všechny úkoly současné armády vyzbrojené nejmodernější technikou u vojsk, v ústavech a zařízeních československé lidové armády. Jde o přípravu na činnost vysoce kolektivní se specializovanými úkony, jejichž realizace je automatizovaná se začleněním řídicích počítačů. V jednotě odborné, specializované činnosti plní absolventi školy i výchovnou funkci u podřízených vojáků.

Kromě této úlohy je škola i významnou vědecko-výzkumnou institucí. Vysoko kvalifikovaný vědecko-pedagogický sbor školy se podílí na řešení řady vědeckých úloh státního a rezortního charakteru. Ve vybraných oborech je VVTŠ ČSSP školícím pracovištěm pro studium vědecké aspirantury. Ve studijním směru mikroelektronika — laserová technika připravuje škola také občanskou mládež pro inženýrskotechnické funkce ve výrobních závodech.



Foto: Ján Krajčí

Posluchači školy studujú v oborech velitelsko-inžényrských ve štyrochletom štúdiu a vojensko-inžényrských v päťletom štúdiu. Štúdium je členené na skupiny predmetů spoločensko viednich, formujúcich svetový názor posluchačů na marxisticko-leninských základoch, na predmety všeobecne teoretické, jejichž pilířom je matematika a fyzika — predmety, ktorým je venovaná odpoviadajúca pozornosť jak v počte hodín, tak i náročnosti. Nasledujú predmety všeobecne inžényrské, ktoré jsou diferencované podľa zvolenej špecializácie, a pak predmety vojenské a vojenskoodborné. V týchto predmetoch je učivo jednoznačne zaměřeno na problematiku príslušného druhu vojska. Štujú sa predmety takticko-operatívne a takticko-odborné. V súvislosti se všeobecnými inžényrskými predmety je štúdium zaměřeno na konštrukciu, prevádz, údržbu a opravy špeciálnej vojenskej techniky v príslušnom odbore.

Výukové priestory školy, prednáškové sály, laboratóre, vedeckovýskumná pracovisko, kabinety a cvičisko jsou vybaveny najmodernejšou technikou (včetně najmodernejších didaktických prostriedků). Vysoká odborná úroveň vedeckopedagogického sboru školy a všestranná péče o každého posluchače jsou spolu s materiálnym zabezpečením výuky zárukou kvality, perspektívneho rústu a uplatnění absolventů školy.

Posluchači po nástupu do školy a podání žádosti k přijetí do služebního poměru vojáka z povolání jsou určeni do pětíměsíční náhradní vojenské

služby, po které se stávají vojáky z povolání v hodnosti rotmistr. Jejich další povyšování v průběhu studia až do hodnosti podporučíka je podmíněno studijními výsledky.

Studium a úplné zaopatření (strava, výstrojní výbava, ubytování v nových, moderních internátech) jsou zdarma. Posluchači od přijetí za vojáka z povolání mají měsíční služební příjem, odstupňovaný podle ročníku studia.

Ve volném čase se mohou posluchači zabývat činnostmi, které nabízí kulturní a turistický region města, řada zájmových kroužků a sportovních oddílů Vojenské tělovýchovné jednoty a stále se rozšiřující možnosti s dobudováním kulturní a tělovýchovné části nejmodernějšího, komplexně a účelně vybaveného vysokoškolského areálu. V mnoha oborech zájmové umělecké činnosti a sportovních disciplín dosáhli příslušníci školy přední místa a ocenění i na akcích celostátního charakteru, podobně jako i v oborech studentské vědecké odborné činnosti nebo ve svazáckém hnutí Zenit.

Po úspěšném složení státních závěrečných zkoušek včetně obhájení diplomové práce jsou posluchači vyřazeni v hodnosti poručíka a je jim udělen titul „inženýr“. Absolventi školy nastupují do samostatných velitelských a jiných funkcí u vojsk, ústavů a zařízení ČSLA. Ti, kteří se osvědčí v praxi, mají možnost pokračovat v postgraduálním studiu, které otvírá možnosti postupu ve funkcích, nebo pro studium vědecké aspirantury.

Výsledky, kterých škola za svou krátkou historii již dosáhla, úspěšná činnost a uplatnění jejích absolventů v praxi, aktivní zapojení příslušníků školy do společenského a vědeckého života naší společnosti potvrzují, že VVTŠ ČSSP se stala významnou součástí československé výchovně vzdělávací soustavy.

UPOZORNĚNÍ ČTENÁŘŮM

Úlohy pro I. kola všech kategorií 35. ročníku matematické olympiády a úlohy pro I. kola kategorií A, B, C, D 27. ročníku fyzikální olympiády budou otištěny v 10. čísle našeho časopisu.

Z NOVÝCH KNIH

L. D. Landau —

A. J. Kitajgorodskij:

FYZIKA PRE VŠETKÝCH

1., 2., 3. a 4. diel

Vydalo nakladateľstvo Alfa Bratislava v koedícii s vydavateľstvom Mir Moskva v rokoch 1982 až 1984, štvordielny preklad z ruštiny v rozsahu 950 strán, v celkovej cene 70,— Kčs.

Preložili doc. dr. Ján Chrapan, CSc., a prom. ped. Eva Tokáriková.

Dielo, ktoré podáva základné fyzikálne myšlienky v úzkej súvislosti s ich praktickým využitím bez zvláštneho matematického aparátu, ale aj bez zlahčujúcich prirovnaní (ktoré často v očiach odborníkov znižujú populárne písané pojednania), vyšlo z pera autorskej dvojice známych sovietskych vedcov *Leva Davidoviča Landaua* a *Alexandra Isaakoviča Kitajgorodského*. Prvá časť diela sa zrodila v úzkej spolupráci oboch autorov ešte začiatkom šesťdesiatych rokov (u nás vyšla v Alfe v roku 1967 v preklade J. Chrapana). Po tragédii, ktorá postihla akademika Landaua, ubehlo takmer 10 rokov, pokým druhý autor pristúpil k dovŕšeniu pôvodného zámyslu a dielo ukončil, doplniac ho časťami o elektrónoch, fotónoch a jadrách atómov. Autor pritom vychádzal z poznania, ako sám hovorí, že k Fyzike pre všetkých neprístupovali čitatelia ako

k učebnici fyziky, ale ako ku knihe vedecko-populárnej, ktorá rozširuje školské vedomosti a ktorá si všíma to, čo sa z nejakých príčin v učebných osnovách nenachádza.

Dielo rozdelil autor do štyroch častí a nazval ich: Fyzikálne telesá, Molekuly, Elektróny, Fotóny a jadrá.

V prvej knihe sa hovorí o zákonoch pohybu a gravitácie, ktoré sú nesporne základmi celej prírodovedy. V druhej knihe nás upúta rozprávanie o zložitejších kombináciach atómov, o makromolekulách syntetických materiálov, o molekulovej biológii a o fyzikálnej podstate chemických reakcií. V tretej knihe sa neobvyklým spôsobom uvádzajú najjednoduchšie predstavy, ktorými sa opisujú elektrické javy. Asi tretina rozsahu knihy je venovaná otázkam elektrotechniky. Posledná kniha zo série Fyziky pre všetkých ukazuje použitie zákonov elektromagnetických vln rôznych dĺžok. Pred jadrovou fyzikou sa hovorí o vlnovej mechanike a o špeciálnej teórii relativity. Svoj výklad končí autor aktuálnou témou — zdroje energie na Zemi — a krátkou zmienkou o fyzike vesmíru.

Preklad vyšiel z pera osvedčenej dvojice slovenských odborníkov a popularizátorov, ktorí majú bohaté skúsenosti z vedeckej i pedagogickej práce. Odborne ho revidoval

známy teoretický fyzik *V. Bezák*. Materiál redakčne spracoval skúsený kolektív redakcie teoretickej literatúry nakladateľstva Alfa v Bratislave. Tieto skutočnosti sa odrazili v čistom slohu a takmer bezchybnom texte. Ľudová múdrosť však vraví, že aj majster tesár sa utne. Prax nás učí, že sa to stáva aj viacerým majstrom, a tak upozorním na jedno z mála nedopatrení, ktoré v sérii Fyziky pre všetkých nájdeme, lebo sú to všetko chybičky, ktoré sa ľahko v ďalšom vydaní odstránia. Na str. 99 druhého dielu sa hovorí m. i. o teplote tavenia železa a ortute. Uvádzajú sa hodnoty 1539°C a -39°C a o sedem strán neskôr sú to už chybné hodnoty 1527°C a 39°C . Tamže na str. 117 má byť teplota tavenia síry 119°C a nie 113°C . A ešte k prekladu: prečo upúšťať od bežného vyjadrenia „anorganická látka“ a nahrádzať ho, ako je to na str. 30 2. dielu, slovom neorganická. Ďalej na str. 84 stručnosť vyjadrenia dala vete smiešny obsah. Píše sa: „Ak sa čitateľ ešte nikdy nestretol so železnou parou, iste bez ťažkostí uverí, že ľubovoľnú látku môžeme mať (v troch skupenstvách)“. Azda sa niektorý čitateľ stretol so železnou parou, a preto má pri uverení ďalšieho tvrdenia ťažkosti? Stačí zameniť slovo „ak“ slovami „Napriek tomu, že . . .“ a vec bude v poriadku. Na tieto chyby upozorňujem preto, aby ste aj vy, milí mladí čitatelia, čítali pozorne, zásahy „tlačiarenského škriatka“ si poznamenali a upozorniac na ne redakciu (ktorej adresu nájdete na

poslednej strane každej zo štvorice kníh) pomohli zvýšiť hodnotu tohoto krásneho diela.

Eva Bittnerová

Suchotin, A. K.:

PARADOXY VEDY

Vydalo vydavateľstvo Smena v Bratislave v roku 1984, edícia Sputnik. Preklad z ruského jazyka, 205 strán, viaz. Kčs 25.—

Často vidíme iba výsledky vedeckého výskumu. Menej vieme o cestách, ktoré k nim viedli. Ak chcete poznať niektoré zaujímavosti o neočakávaných zvratoch, metódach a osudoch vedeckých objavov, pozrite si knižku „Paradoxy vedy“ od Anatolija Konstantinoviča Suchotina.

Dozviete sa o príčinách, charaktere a význame paradoxov, z ktorých sa často tvorí vedecký objav. Paradoxom se rozumie nezvyčajný, neočakávaný záver, hlboko sa rozchádzajúci so všeobecne prijatými predstavami. V knižke nájdete zaujímavosti o tom, ako riešili stretnutia s paradoxom významní vedci, napr. Galois, Lobačevskij, Galilei, Einstein, Planck, Broglie a ďalší. Spoznáte podstatu a účel paradigmy v osudoch vedeckých objavov, budete sa môcť zamyslieť nad úlohou intuície a logiky v tvorivom myslení. V citovaných myšlienkach niektorých vedcov, napr. Seley, Polya, Born, Poincaré atď., vytušíte krásu novej myšlienky, spôsob ako ju zachytiť, spracovať.

Publikácia je napísaná pútavým, prehľadným spôsobom. Často sa citujú myšlienky významných vedcov, odkrývajú sa ich osudy pri riešení záhad vedeckého výskumu. Medzi zaujímavosti patria postrehy o úlohe nešpecialistov pri nových objavoch. Osudy ľudí, ktorých k vede priťahla silná túžba po poznaní zákonitostí a odhalení paradoxov, sú viac ako poučné. Ak sa chcete presvedčiť, zoberte do rúk knižku, o ktorej sme tu hovorili.

Dušan Jedinák

Haupt, D.:

MNOŽINOVÝ POČET ZROZUMITEĽNE

Vydala ALFA, Bratislava 1984, preklad z nemeckého jazyka, 152 strán, 62 obrázkov, viaz. Kčs 12.—

Počuli ste už o kardinálnych a ordinálnych číslach? Viete rozlíšiť spočítateľné a nespočítateľné množiny? Čo si predstavujete pod pojmom mohutnosť množiny? Na tieto a ďalšie otázky zo základov teórie množín odpovedá

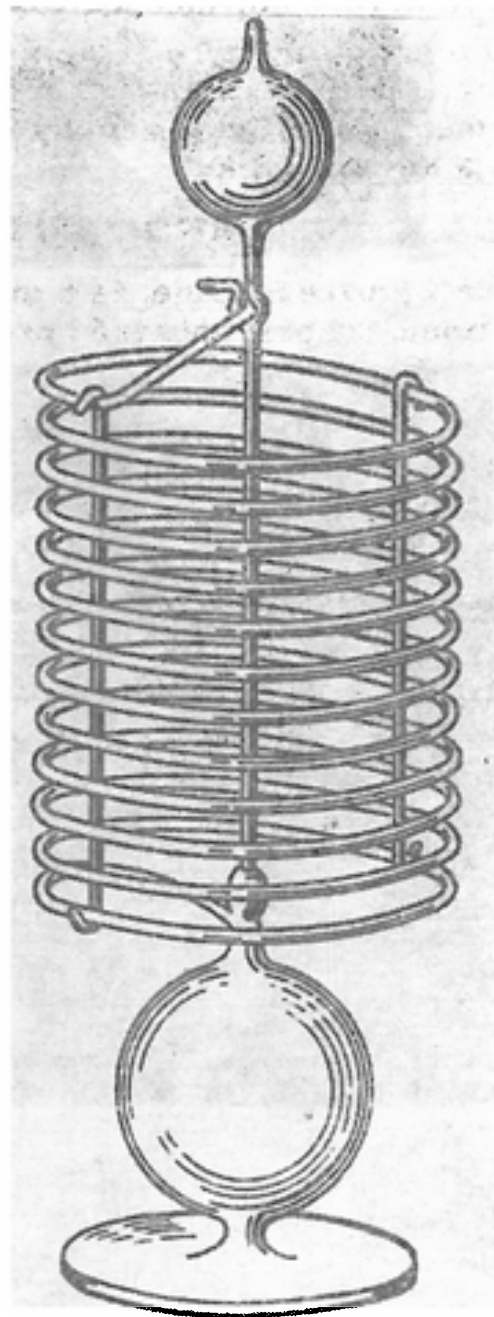
autor horeuvedenej knižky. Sú v nej jednoducho vysvetlené všetky základné pojmy na jednoduchých príkladoch, obrázkoch a tabuľkách. Dozviete sa o základných pojmoch dvojhodnotovej logiky, algebre množín, reláciách, zobrazeniach, záludnostiach nekonečných množín aj o historických súvislostiach a niektorých jednoduchých aplikáciach teórie množín. Základné poznatky si môžete preveriť na pripojených cvičeniach. Ak vás problematika zaujme, môžete si v školskej knižnici požičať knižku Neznámy svet nekonečných množín od N. J. Vilenkina, ktorú vydalo SNTL Praha v roku 1971. Tam nájdete veľa veľmi zaujímavých úloh, ktoré vám možno „nedajú spať“. Ak budete chcieť matematicky studovať čo-to o množinách všeobecne, pozrite sa do knižky „Seznamujeme se s množinami“ (Bečvář, J. a kol., SNTL Praha 1982). Spoznáte, že teória množín je nielen základná disciplína celej matematiky, ale aj veľmi zaujímavá a podnetná pre ďalšie štúdium.

Dušan Jedinák

Florentinský teploměr

Termika jako fyzikální věda není starého data. Zatímco mechanika a optika mají kořeny v antickém Řecku, první měření teploty, a tedy první kroky v experimentální termice učinili až příslušníci „Accademia del Cimento“, žáci Galileiovi. V těch dobách byla fyzika na univerzitách součástí filozofie, nikoli experimentální vědou. Odpůrci oficiálního pojetí se proto sdružovali v soukromých společnostech a vytkli si za cíl zkoumat fyzikální otázky metodou experimentální. Mluví se tedy někdy nepřesně o „Akademii pokusu“. (Ve skutečnosti se zapřísahali, že budou držet pohromadě jako cement. Jiná byla „Akademie otrubová“, která však přežila „Akademii cementovou“.)

Galilei převzal z antiky Herónův termoskop — otevřenou trubici s baňkou naplněnou vzduchem a ponořenou otevřeným koncem trubice do vody. Když se vzduch v baňce zahřál, hladina vody v kapiláře se posunula. Galileiovi žáci, aby dosáhli větší přesnosti, svinuli kapiláru do tvaru spirály a kapiláru zataвили, aby výsledek neovlivňovaly změny tlaku vzduchu. Tímto způsobem mohli měřit až tisíciný stupně. Nedospěli však k unifikaci základních bodů teplotní stupnice (o to se zasloužil až *Fahrenheit* r. 1717) a tím spíše ani k dohodě, jak očíslovat stupnici mezi základ-



ními body. S decimalizací přišel *Celsius* kolem r. 1730 a označil teplotu varu vody 0° a teplotu tuhnutí 100° . *Martin Strömer* stupnici obrátil a tato úprava se vžila pod názvem stupnice *Celsiova*.

Vladimír Malíšek

PRÁCE, vydavatelství a nakladatelství ROH, vydává v roce 1985 ve II. řadě knihovny KAMARÁD knížku

TAJE MATEMATIKY,

kterou napsal nedávno zesnulý významný popularizátor matematiky a kosmonautiky

RNDr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc.

Autor v knížce ukazuje, že o matematice, která se zdá chladnou a přísnou, lze psát zábavně i pro laika srozumitelně.

(Brož., asi 22 Kčs)

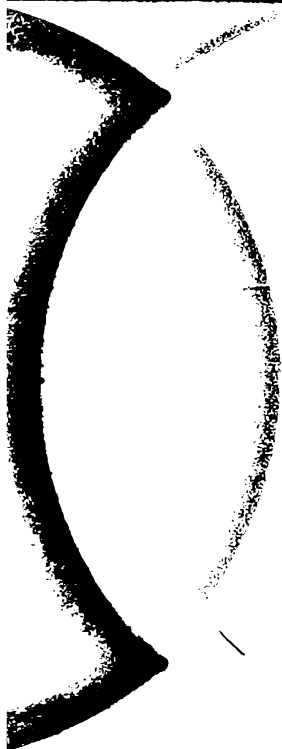
Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3\$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1985.

ROZHLEDY

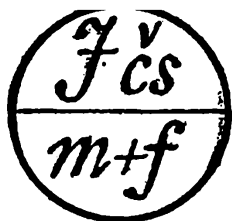
**matematicko
– fyzikální**



**ROČNÍK 63, 1984/85
KVĚTEN**

(9)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný
CSc., UK, Bratislava, Stanislav Ho-
rák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr.
Ján Chrapan, CSc., VVTŠ - ČSSP
Liptovský Mikuláš, doc. Jaroslav
Chudý ČVUT Praha, doc. ing. Zde-
něk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Hana Kořínková, CSc.,
ÚÚVPP Praha, prof. dr. Vladimír Ma-
jerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Ka-
rel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, doc.
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha, dr. Martin Šolc, CSc.,
UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigová 4, 11639 Praha 1-Nové
Město.

Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Nečas: Desítková soustava nepouží- vající nulu	385
M. Štědrý: Odmocnina z čísel surdických	387
M. Trch: O posloupnostech definova- ných rekurentně	389
V. Mráz: Geometrie a měření závitů	391
P. Brada: Ionizující záření v nukleární medicině	403
J. Myslík: Vztahy mezi napětími a prou- dy v lineárních elektrických obvodech	408
L. Kalvoda: Využití neutronové difrakce ve studiu pevných látek	411
R. Hudec: Nový pohled na Mars	415
V. Flajšinger: Opravdu jen legenda?	418
M. Michalcová, M. Hejný: Janko Hra- ko v Paralelolandu II. .	421
E. Procházková: Víte, kolika způsoby lze řešit případ odebrání části plynu z bomby za stálé teploty?	428
J. Mída: O jakou úlohu jde? .	432
Pohledy do dějin	3. str. obálky

Desítková soustava nepoužívající nulu

RNDr. JIŘÍ NEČAS, Praha

Mnozí čtenáři našeho časopisu se asi neotíí být závislími na používání desítkové soustavy a jsou ochotni pracovat v poziční číselné soustavě o jakémkoli celočíselném základu $z \geq 2$. Všeobecně je známo, že při vyjadřování přirozených čísel se používá z různých číslic o hodnotách $0, 1, \dots, z - 1$; libovolné přirozené číslo n lze pak vyjádřit konečnou posloupností číslic

$$a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, \quad (1)$$

přičemž

$$n = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0. \quad (2)$$

Je známo, že se vedou diskuse o tom, zda je či není vhodné považovat nulu za přirozené číslo. Zatím se přikloňme ke konzervativnějšímu přístupu a nulu mezi přirozená čísla nepočítejme. Aby bylo vyjádření přirozeného čísla n ve tvaru (2), tj. vyjádření posloupností číslic (1) jednoznačné, je třeba přidat doplňující podmínku $a_k \neq 0$; velikost čísla k ovšem závisí na n .

Navzdory eleganci obecně vykonávaných úvah položme pro náš další výklad $z = 10$. K zápisu přirozených čísel v desítkové soustavě obvykle používáme číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Pro libovolné přirozené číslo r pak existuje

$$9 \cdot 10^{r-1} = 0,9 \cdot 10^r \quad (3)$$

r -místných (r -ciferných) přirozených čísel.

Při zápisu přirozeného čísla v obvyklé desítkové soustavě může na kterémkoli místě kromě místa prvního stát kterákoli číslice, na prvním místě to ovšem může být jen některá z devíti nenulových číslic. Toto omezení, s nímž úzce souvisí výskyt koeficientu 0,9 ve vyjádření (3), v běžné praxi nevadí. V řadě technických reprezentací ostatně neuvažujeme ani teoretickou možnost práce se všemi přirozenými čísly, nýbrž se omezujeme na přirozená čísla nejvýše K -ciferná (tj. menší než 10^K), kde K je předem dané přirozené číslo; ve vyjádření tvaru (1), resp. (2) klademe $k = K$ nezávisle na n , přičemž nula může být na kterémkoli místě. (Čtenář si může představit počítadlo otáček u cívkového magnetofonu, počítadlo kilometrů u automobilu; podobně jsou ukládána čísla ve vymezeném prostoru paměti v počítači.)

Tabulka 1

0*)	1	9	10	11	19	20	21	29	30	31
A	1	9	Z	11	19	1Z	21	29	2Z	31
90	99	100	101	109	110	111	200	210	1000	1110
8Z	99	9Z	Z1	Z9	ZZ	111	19Z	1ZZ	99Z	ZZZ

Horní řádek vyjadřuje číslo v obvyklé, dolní v „pozměněné“ desítkové soustavě

*) Nulu jako přirozené číslo uvažujeme v závěru článku.

Při rozvoji počítačových věd se ukázala plodnou myšlenka v určitém smyslu nerozlišovat přirozená čísla a konečné posloupnosti prvků z nějaké pevně dané konečné množiny A . Představme si, že množina A má 10 prvků; nabízí se možnost označit je prostě desítkovými číslicemi. Myšlenka považovat pak každou konečnou posloupnost prvků z množiny A za číslo vyjádřené v desítkové soustavě je asi dost přirozená, ale . . . Zde nám požadavek nenulovosti první číslice, diktovaný jednoznačností vyjádření přirozeného čísla ve tvaru (1), popř. (2), bude vadit. Vždyť např. posloupnosti 0089, 089 a 89 jsou vzájemně různé, avšak odpovídá jim totéž číslo; přitom máme-li pracovat s množinou všech konečných posloupností prvků z A , nemůžeme ty posloupnosti, které začínají prvkem, jemuž více méně náhodně byla přiřazena nula, prostě vyloučit.

Přesto však nemusíme výše uvedenou ideu zcela zavrhnout. Desítkovou poziční číselnou soustavu lze „pozměnit“ tak, že její symboly budou mít hodnoty 1, 2, . . . , 8, 9, „deset“. Pro poslední z uvedených hodnot budeme používat symbol Z . Prvky naší množiny A můžeme pak označit symboly 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Z . Posloupnost číslic (1) budeme opět interpretovat jako číslo dané mnohočlenem (2), přičemž $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Z\}$. Doporučuji čtenáři, aby si ověřil, že tímto způsobem je definováno vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech konečných posloupností prvků z desetiprvkové množiny A do množiny všech přirozených čísel. V tabulce 1 je uvedeno pro porovnání vyjádření některých přirozených čísel jak v obvyklé, tak v pozměněné desítkové soustavě.

Pokud má čtenář zájem, může si pro pozměněnou desítkovou soustavu upravit známé algoritmy pro aritmetické operace.

Počet r -ciferných čísel v pozměněné desítkové soustavě je 10^r (tradičně zapsáno; v naší notaci bychom psali Z^r); odpadá tedy koeficient 0,9 z vyjádření ve tvaru (3).

V závěru článku se přikloňme k progresivnějšímu postoji a považujeme za přirozené číslo i nulu. Pak je ovšem zcela „logické“ za konečnou posloupnost prvků z množiny A považovat i prázdnou posloupnost, tj. posloupnost, která nemá žádný člen. Tato posloupnost pak odpovídá

číslo 0 (graficky bývá nutné k vyjádření prázdné posloupnosti použít nějaký zvláštní symbol, zpravidla se používá Λ). Číslo 0 je vyjádřeno 0-ciferným číslem; i pro $r = 0$ platí, že počet r -ciferných čísel je 10^r .

Přivrženci dvojkové soustavy si jistě rádi přenesou uvedené úvahy na problematiku dvojkové soustavy a dvojprvkové množiny A .

Odmocnina z čísel surdických

RNDr. MILAN ŠTĚDRÝ, CSc., MÚ ČSAV

Surdickými čísly se nazývají čísla tvaru $a \pm \sqrt[b]{b}$, kde a, b jsou čísla racionální a $\sqrt[b]{b}$ je iracionální. V článku Vl. Malíška, publikovaném v prvním čísle 60. ročníku Rozhledů (1981/82), byly uvedeny vztahy, které v některých případech dovolují vyjádřit druhou odmocninu ze surdického čísla pomocí výrazů neobsahujících odmocniny ze surdických čísel. Tyto vztahy jsou někdy nazývány Bhaskarovými vzorci (*Ačarija Bhaskara* byl indický matematik žijící ve 12. století).

V tomto článku nejprve ukážeme situaci, ve které lze Bhaskarových vzorců s výhodou použít. Potom vzorce odvodíme způsobem, který se poněkud liší od návodu uvedeného ve výše zmíněném článku. Toto odvození je dobře známé, ale navzdory tomu snad stojí za to věnovat mu trochu pozornosti. Je totiž výsledkem užitečné snahy řešit problém — v našem případě bikvadratickou rovnici — dvěma různými způsoby.

Ukážeme, že pro každá dvě nezáporná čísla a, b splňující $a^3 \geq b$ platí

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^3 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^3 - b}}{2}} \quad (1)$$

Dokázat tento vzorec lze jednoduše umocněním obou stran. Na první pohled je pravá strana vztahu (1) složitější než levá. Přesto někdy tento vzorec poslouží k tomu, aby se odmocnina ze surdického čísla převedla na jednodušší tvar.

Například počítejme $\cos(\pi/10)$. Pro jednoduchost označíme $\varphi = \pi/10$ a $y = \cos \varphi$. Podle Moivroy věty je

$$\cos 5\varphi = y(16y^4 - 20y^2 + 5).$$

Poněvadž $\cos 5\varphi = 0$, dostaneme řešením bikvadratické rovnice $16y^4 - 20y^2 + 5 = 0$ (pomocí substituce $y^2 = \xi$) tento vztah:

$$\cos(\pi/10) = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad (2)$$

Použitím $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ najdeme

$$\sin (\pi / 10) = \frac{1}{4} \sqrt{6 - \sqrt{20}} .$$

Upravíme-li pravou stranu této rovnosti pomocí vzorce (1), zjistíme, že

$$\sin (\pi / 10) = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) . \quad (3)$$

Možnost úprav tohoto typu byla důvodem, proč kdysi bývaly Bhaskarovy vzorce uváděny i ve středoškolských příručkách. Samozřejmě nelze takto zjednodušit každou odmocninu ze surdického čísla.

Aplikujeme-li vztah (1) například na pravou stranu rovnosti (2), dostaneme sice jiný výraz, ale nikoliv jednodušší.

Pro zajímavost poznamenejme, že vztah (3) lze odvodit i přímo, jestliže si počínáme trochu obratněji. Pro $\varphi = \pi / 10$ totiž platí, že $\sin 3\varphi = \cos 2\varphi$. Poněvadž $\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1$ a podle Moivrovovy věty $\sin 3\varphi = 3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi$, musí $x = \sin (\pi / 10)$ splňovat

$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Vzhledem k tomu, že $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(4x^2 + 2x - 1)$, dostaneme vztah (3) řešením kvadratické rovnice $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Nakonec uvedeme slíbené odvození vztahů (1). Stačí zabývat se případem, kdy čísla a, b jsou kladná a splňují $a^2 > b$. Snadno zjistíme, že čísla $\xi_1 = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ a $\xi_2 = \sqrt{a - \sqrt{b}}$ jsou kladné kořeny bikvadratické rovnice

$$\xi^4 - 2a\xi^2 + a^2 - b = 0 . \quad (4)$$

Skutečně, položíme-li $\xi^2 = \eta$, máme pro η rovnici $\eta^2 - 2a\eta + a^2 - b = 0$. Odtud $\eta = a \pm \sqrt{b}$, a proto $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ jsou kladné kořeny rovnice (4).

Rovnici (4) nyní zapíšeme ve tvaru

$$\xi^2 + \frac{a^2 - b}{\xi^2} - 2a = 0 .$$

Po snadné úpravě dostaneme

$$\left(\xi + \frac{\sqrt{a^2 - b}}{\xi} \right)^2 = 2(a + \sqrt{a^2 - b}) .$$

Proto kladné kořeny rovnice (4) splňují vztah

$$\xi + \frac{\sqrt{a^2 - b}}{\xi} = \sqrt{2} \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}}$$

který lze zapsat ve tvaru

$$\xi^2 - \sqrt{2} \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}} \xi + \sqrt{a^2 - b} = 0 .$$

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme pro výše definovaná čísla ξ_1, ξ_2 vztah

$$\xi_{1,2} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Tím je vzorec (1) odvozen.

O posloupnostech definovaných rekurentně

RNDr. MILAN TRCH, CSc., UK Praha

Pojem posloupnosti vám jistě není zcela neznámý. Strohá definice říká, že posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme zobrazení množiny přirozených čísel do množiny čísel reálných (resp. čísel komplexních). Posloupnost můžeme zadat několika způsoby. Nejjednodušší způsob spočívá v uvedení předpisu pro výpočet n -tého členu. Tak můžeme zadat například tyto posloupnosti:

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde pro každé $n \in N$ je $a_n = \frac{1}{n}$. Vypíšeme-li prvních

devět členů bude zápis posloupnosti vypadat takto:

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots \right\}$$

b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde pro každé $n \in N$ je $b_n = (-1)^n - 1$. Při vypsání

prvních deseti členů bude nyní zápis vypadat takto:
 $\{-2, 0, -2, 0, -2, 0, -2, 0, -2, 0, \dots\}$

Tím jsme se zároveň seznámili s dalším způsobem zápisu posloupnosti, který vychází z toho, že z vypsání několika prvních členů posloupnosti je již zřejmé pravidlo umožňující sestavit další členy posloupnosti. Všimněme si i tohoto způsobu zadání posloupnosti na jednoduchých příkladech:

c) $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, \dots\}$. Je snad každému

zřejmé, jak pokračovat, a snadno se nahlédne, že tuto posloupnost lze určit předpisem $c_n = (-1)^{n-1} \cdot n$

$$d) \left\{ d_n \right\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 0, 11, 0, 111, 0, 1111, 0, 11111, \dots\}.$$

I nyní je snadné vypsat další členy posloupnosti. Nalezení vzorce je již trochu obtížnější a lze třeba uvést:

$$a_{2n-1} = \underbrace{11 \dots 1}_{n\text{-krát}}, \quad a_{2n} = 0 \text{ pro každé } n \in N$$

$$e) \left\{ e_n \right\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, \dots\}.$$

Zde už se spíše princip popíše slovy, protože je to snazší, než uvádět nějaký konkrétní vzorec pro e_n .

Vedle těchto způsobů popisu členů posloupnosti však existuje ještě jedna důležitá metoda — zadání posloupnosti *rekurentním předpisem*. S tímto způsobem se setkáváme například při studiu aritmetické a geometrické posloupnosti. Ukažme si i tuto metodu na konkrétních příkladech:

$$f) \left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots\} \text{ je aritmetická posloupnost}$$

s diferencí $d = 3$ a její členy mohou být popsány podmínkou:

„Pro každé $n \in N$ je $f_{n+1} = f_n + 3$, $f_1 = 1$.“

$$g) \left\{ g_n \right\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 2, -4, 8, -16, 32, -64, \dots\} \text{ je geometrická}$$

posloupnost s kvocientem $q = -2$ a $g_1 = -1$.

Její členy mohou být popsány podmínkou:

„ $g_1 = -1$ a pro každé $n \in N$ je $g_{n+1} = g_n \cdot (-2)$.“

Určení následujícího členu v posloupnosti zadané rekurentně tedy vychází z předpokladu, že známe všechny členy jemu předcházející a příslušný „předpis“ pro výpočet požadovaného členu. Příkladem mohou být tyto posloupnosti:

$$h) \left\{ h_n \right\}_{n=1}^{\infty}, \text{ kde pro každé } n \in N \text{ je } h_{n+2} = h_{n+1} + 2 \cdot h_n \text{ a přitom}$$

$h_1 = 1$, $h_2 = 1$. Vypíšeme-li prvních deset členů, dostaneme posloupnost

$$\{1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, \dots\}.$$

$$i) \left\{ j_n \right\}_{n=1}^{\infty}, \text{ kde pro každé } n \in N \text{ je } j_{n+2} = j_{n+1} \cdot j_n \text{ a přitom } j_2 = 3,$$

$j_1 = 2$. Po vypsání prvních osmi členů dostaneme posloupnost:

$$\{2, 3, 6, 18, 108, 1944, 34992, 68024448, \dots\}$$

k) $\left\{k_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, kde pro každé $n \in N$ je $k_{n+2} = k_{n+1} \cdot (-1)^n \cdot k_n$ a přitom

$k_1 = -1, k_2 = 2$. Tak dostaneme posloupnost
 $\{-1, 2, 2, 4, -8, -32, -256, 8192, \dots\}$.

Podobných předpisů bychom mohli vymyslet celou řadu a sestavovat z nich „výpisy“ několika prvních členů posloupnosti. Je vidět, že v některých případech (viz např. c) f), g)) umíme posloupnost zadat všemi uvažovanými způsoby — vzorcem pro n -tý člen posloupnosti, který je funkcí proměnné n ; rekurentním předpisem, ale samozřejmě i výpisem několika prvních členů posloupnosti. Je však už těžší najít — pokud to vůbec možné je — k danému rekurentnímu předpisu zadání téže posloupnosti pomocí vzorce pro n -tý člen s proměnnou n . Takový vzorec však umíme najít v některých jednodušších případech — například tehdy,

když posloupnost $\left\{p_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje rekurentní podmínce typu: „Pro

každé $n \in N$ je $p_{n+2} + a \cdot p_{n+1} + b \cdot p_n = 0$, kde a, b jsou daná reálná čísla.“

Tato podmínka umožňuje vždy ze dvou po sobě následujících členů určit i další člen posloupnosti. Zvolíme-li nějak prvé dva členy posloup-

nosti $\left\{p_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, pak už jsou ostatní členy posloupnosti jednoznačně určeny.

Všimněte si, že speciálním případem je i známá tzv. „*Fibonacciho posloupnost*“ $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$, ve které je každý člen pro $n \geq 3$ součtem dvou předcházejících členů.

O tom, jak se dají popsat všechny posloupnosti, které vyhovují uvedené podmínce, se zmíníme v dalším článku.

Geometrie a měření závitů

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Závit je základním prvkem rozebratelných strojních součástí, pohybových mechanismů nebo měřicích zařízení. Jsou to rozmanité šrouby a matice, které neplní jen funkci spojovací a upevňovací. Např. u obráběcích strojů i u jiných zařízení je od pohybových šroubů odvozován přímočarý pohyb jiných součástí. Na tom se zakládají také třeba upínací přípravky, vřetenové lisy, šroubové zdviháky atd. Šroub a matice s jem-

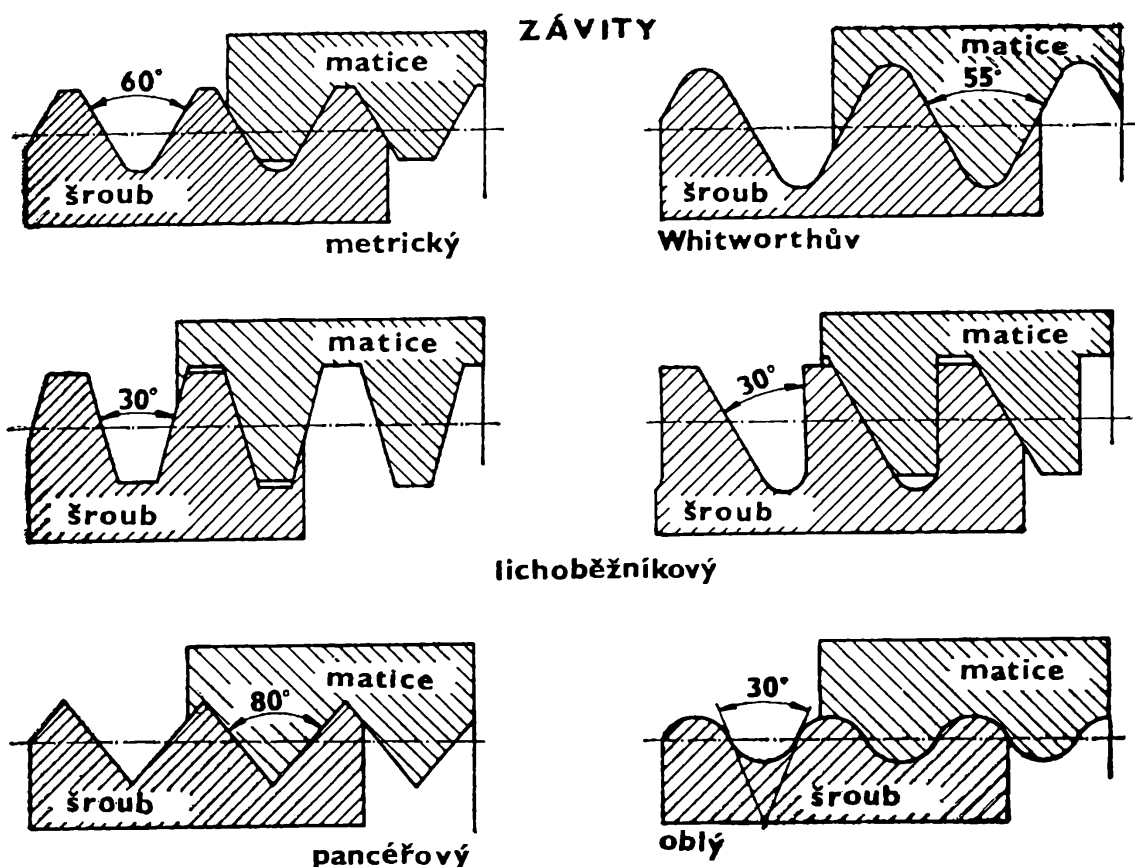
ným metrickým závitem a přesným *stoupáním závitu* $s = 0,5$ mm jsou základem některých přesných měřidel, např. mikrometrů. Obvod mikrometrové matice je totiž rozdělen na 50 stejných dílků a při pootočení matice každý dílek udává posunutí dotykových měřicích ploch mikrometru o 0,01 mm.

Při ohromném rozšíření závitů ve výrobě ovšem došlo k jejich normalizaci. V roce 1841 zavedl anglický mechanik a podnikatel v Manchesteru *Josef Whitworth* (1803—1887) závitovou stupnici, která se rozšířila i v Evropě. Profil *Whitworthova závitu* je trojúhelníkový se zaobleným vrcholovým úhlem 55° ; jeho rozměry jsou v anglických palcích s označením např. $W \frac{3}{4}''$ ($= 19,05$ mm, neboť $1'' = 25,4$ mm) s počtem 10 závitů na $1''$ (jeho stoupání je proto 2,54 mm). V roce 1860 navrhl v Americe *William Sellers* (1824—1905), který pracoval ve Franklinově ústavu ve Filadelfii, novou závitovou stupnici. Místo vrcholového úhlu 55° zavedl úhel 60° a místo zaoblení zavedl rovné (válcové) sražení na největším průměru závitu; stoupání závitu bylo jemnější než u závitu *Whitworthova*. Rozměry *Sellersova závitu* byly rovněž udány v palcích.

K normalizaci závitů i větších průměrů došlo na mezinárodním sjezdu v Curychu roku 1899. Šlo již o metrickou mezinárodní soustavu SI (Système International). Vrcholový úhel trojúhelníkového profilu závitu byl zvolen 60° , vrcholy závitu byly rovněž srazeny a byla zajištěna vrcholová vůle mezi svorníkem a maticí na velkém i na malém průměru závitu. Rozměry SI závitu již byly udávány v mm. Z této mezinárodní závitové soustavy vznikla METRICKÁ SOUSTAVA v letech 1911 až 1923, která obsahovala průměry závitů od 1 mm do 149 mm. Československá státní norma (ČSN 1001) stanovila 5 řad metrického závitu; řada A má běžné *stoupání* (např. M52 se stoupáním 5 mm) a řady B, C, D, E, s jemnějším stoupáním (s označením např. $M52 \times 3$, $M52 \times 2$, $M52 \times 1,5$, $M52 \times 1$).

V současné době státy Rady vzájemné hospodářské pomoci (RVHP) vydávají řadu norem závitů závazných pro zúčastněné státy, např. norma METRICKÝ ZÁVIT — PROFIL s číslem ČSN 01 4007, ST-SEV 180-75. V těchto normách jsou uvedeny metrické závity od průměru 0,25 mm až do průměru 600 mm se stoupáním $s = 0,075$; 0,09; 0,1; . . . ; 5; 5,5; 6 mm (v této normě se stoupání označuje jako rozteč závitu P). U některého metrického závitu lze volit až šest různých stoupání, např. M12 ($s = 1,75$), dále $M12 \times 1,5$, $M12 \times 1,25$, $M12 \times 1$, $M12 \times 0,75$, $M12 \times 0,5$. Dosud však je v ČSN zaveden trubkový (plynový) závit, jehož profil je shodný s *Whitworthovým závitem*. *Jmenovitý průměr* trubkového závitu je udáván podle průměru světlosti trubky. Např. $G \frac{3}{4}''$ je označení trubkovitého závitu, který má být vyřezán na trubce o světlosti $\frac{3}{4}''$.

Geometrická tematika závitů je tak zajímavá a významná, že i deskriptivní geometrie řeší některé úlohy o závitových plochách. Čtenář



Obr. 1

asi umí rozlišit pravý (nejběžnější) a levý závit. Také možná ví, že závit může být jednoduchý (nejběžnější) i vícechodý, např. čtyřchodý; pak stoupání závitu s je čtyřnásobkem jeho rozteče t resp. P . My se zaměříme na geometrické vztahy profilu zpravidla jednoduchého metrického závitu a na důsledky, které plynou pro velmi přesné měření závitu, jež není jen teoretickou otázkou, ale je běžně realizováno v technické praxi našich závodů. Přesto, že se budeme věnovat především *metrickému závitu*, může čtenář užitou metodu přesného měření závitu aplikovat i na další druhy závitů, např. na *závit Whitworthův*, *lichoběžníkový* (trapezský) včetně *závitů vícechodých*. Některé profily i nemetrických závitů jsou na obr. 1

Na obr. 2 je okótovaný metrický závit šroubu s maticí, o němž již víme, že má vrcholový úhel $\alpha = 60^\circ$. Závit šroubu je sražen válcovou ploškou o šířce $s/8$. Přes tyto plošky se měří *velký průměr závitu šroubu* d , který se též nazývá *jmenovitým průměrem závitu*. Poloměr zaoblení ve vrcholu závitového dna šroubu $r = h/6$, přičemž míra h je tzv. „*myšlená hloubka závitu*“ a její velikost je odvozena od stoupání s závitu. Snadno z obr. 3 vypočteme, že

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} s \text{ nebo } h \doteq 0,866025404 s. \quad (1)$$

Tabulka 1

Jmenovitý průměr závitu d	Stoupání (rozteč) s	Průměry závitů				Hloubka závitu h_1
		$d = D$	$d_2 = D_2$	$d_1 = D_1$	d_3	
3	0,5	3,000	2,675	2,459	2,387	0,271
	0,35	3,000	2,773	2,621	2,571	
4	0,7	4,000	3,545		3,141	0,379
	0,5		3,675	3,459	3,387	0,271
5	0,8	5,000	4,480	4,134		0,433
	0,5	5,000		4,459	4,387	
6	1	6,000	5,350		4,773	0,541
8	1,25		7,188	6,647	6,466	
		8,000	7,350	6,917		
10	1,5	10,000		8,376	8,160	0,812
12	1,75	12,000	10,863	10,106		0,947
16	2	16,000	14,701		13,546	1,083
36	4			31,670	31,093	
56	5,5		52,428		49,252	
	1		55,350	54,917	54,773	0,541
600	6	600,000	596,103	593,505	592,539	3,248

malý průměr závitu šroubu $d_1 = d - 2 \cdot \frac{5}{8} h$ nebo $d_1 = d - 1,082532 s$,
(3)

malý průměr závitu šroubu ve vrcholu zaoblení závitového dna

$d_2 = d - 2 \cdot \frac{17}{24} h$ nebo $d_2 = d - 1,226869 s$.
(4)

Skutečný rozměr malého průměru je z intervalu $\langle d_2, d_1 \rangle$; proto se velikost zaoblení r ani přesně nedodrží. Obdobná je situace u *velkého*

průměru závitu matice D . Na obr. 3 je zakótovaná i míra $h_1 = \frac{5}{8} h$, která se nazývá *nosná hloubka závitu*, neboť na ní je zprostředkován styk šroubu a matice. Tato míra se uplatní při pevnostních výpočtech závitu na otláčení (viz tabulka 2). Průměr d_3 se využije zpravidla k výpočtu průřezu jádra šroubu a jeho namáhání na tah. Připojená tabulka 1

uvádí k vybraným jmenovitým průměrům d a jejich stoupání s další charakteristické rozměry závitu; prázdná políčka v tabulce si pilný čtenář z vlastního výpočtu doplní sám. V případě dvou řádků u jmenovitého průměru d v tabulce 1 je v prvním řádku zapsán závit základní řady, který se označuje např. M4 (jeho $s = 0,7$) a v druhém řádku je uveden některý z jemných závitů, např. M4 $\times 0,5$.

Časté používání metrických závitů vede k tabelování vypočtených hodnot z obr. 3. O jedné z nich, o nosné hloubce závitu $h_1 = \frac{5}{8} h$, již byla řeč. Další vypočtené hodnoty $k \cdot h$ pro daná k jsou v tabulce 2. I v této tabulce si prázdná políčka čtenář doplní. Místo součinu hodnot $k \cdot h$ ovšem může užít vzorců (5) až (8):

$$\frac{5}{8} h = 0,54127 s, \quad (5)$$

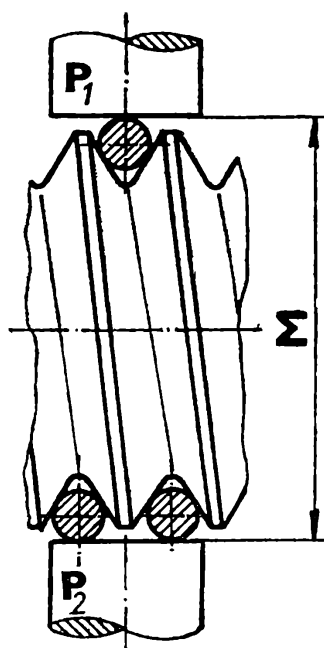
$$\frac{3}{8} h = 0,32476 s, \quad (6)$$

$$\frac{1}{4} h = 0,21651 s, \quad (7)$$

$$\frac{1}{8} h = 0,10825 s. \quad (8)$$

Tabulka 2

stoupání s	h	$\frac{5}{8} h$	$\frac{3}{8} h$	$\frac{1}{4} h$	$\frac{1}{8} h$	průměr drátku d_D
0,5	0,4330	0,2706	0,1624	0,1083	0,0541	0,290
0,7	0,6062	0,3789	0,2273	0,1516	0,0758	0,455
0,8	0,6928	0,4330	0,2598	0,1732	0,0866	0,455
1	0,8660	0,5413	0,3248		0,1083	0,620
1,25		0,6766	0,4059	0,2706	0,1353	0,725
1,5	1,2990		0,4871	0,3248		0,895
1,75	1,5155	0,9472	0,5683	0,3789		1,100
2	1,7321	1,0825		0,4330	0,2165	1,350
3		1,6238	0,9743		0,3248	2,050
4	3,4641		1,2990	0,86603	0,4330	2,550
5	4,3301	2,7063	1,6238	1,0825		3,200
6	5,1962	3,2476	1,9486	1,2990	0,6495	4,000



Obr. 4

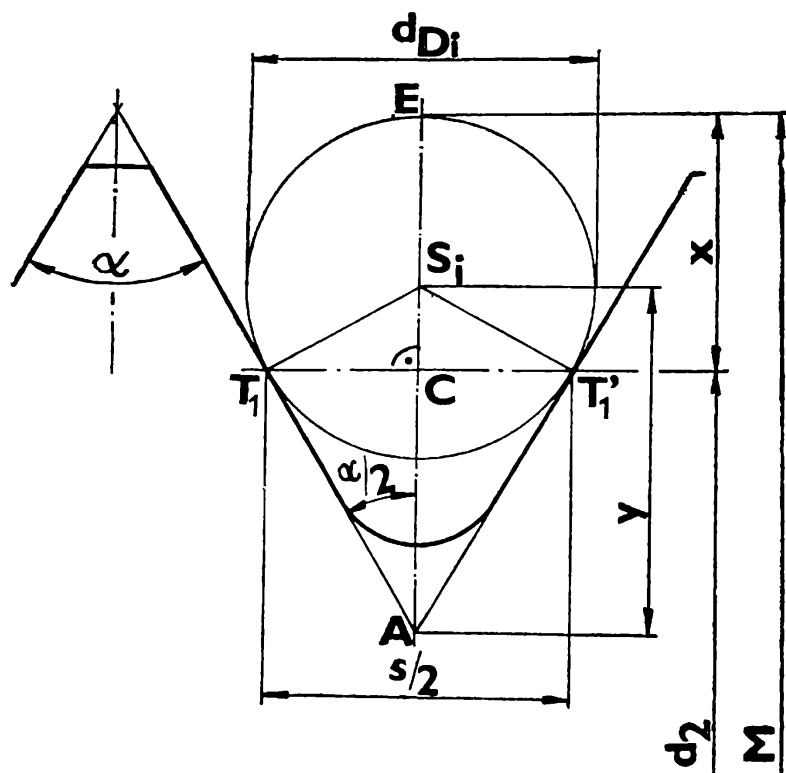
Uvedli jsme dost informací o rozměrech metrického závitu, takže můžeme přistoupit k problematice jeho měření. Závít v matici se může kontrolovat několika měřidly (kalibry). Válečkovým kalibrem lze kontrolovat, zda průměr D_1 matice (otvor) není příliš velký. Dále pak dobrá strana závitového kalibru se musí dát zašroubovat do matice a zmetková strana kalibru nikoliv. Kontrola závitu šroubu, zvláště při sériové nebo hromadné, výrobě, je obdobná. Průměr d snadno změříme posuvným měřítkem nebo mikrometrem. Při individuální (kusové) výrobě zvláště přesných šroubových závitů se měřením zjišťuje střední průměr závitu d_2 tzv. *metodou přesných drátků* o průměru d_D .

Princip měření přes drátku je nakreslen na obr. 4. Měřicí dotykové plošky P_1 a P_2 mikrometru a měřený závit se vloží mezi tři přesné drátky (válečky). Při sevření dotykových ploch mikrometru se na mikrometru (nebo komparátoru, optimetru apod.) přečte míra M . Tato změřená míra M se porovnává s vypočtenou hodnotou, která bývá také uvedena na dílenském výkresu. Věnujme pozornost tomuto výpočtu.

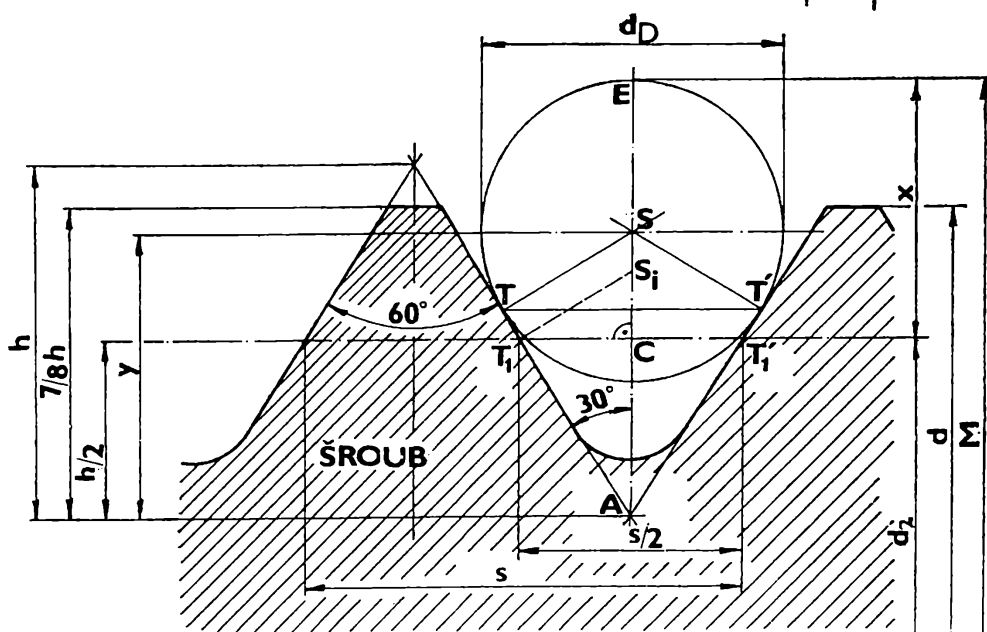
Ideální měřicí drátek by se při měření měl dotýkat závitu v bodech T_1, T'_1 na jeho středním průměru d_2 (viz. obr. 5 a 6). Snadný výpočet vede k ideálnímu průměru měřicího drátku d_{D1} . V pravoúhlém trojúhelníku S_1CT_1 s pravým úhlem při vrcholu C je úhel $CT_1S_1 = \alpha/2$, a tedy platí:

$$\frac{s}{4} : \frac{d_{D1}}{2} = \cos \alpha/2, \text{ z čehož je pro } \alpha = 60^\circ$$

$$d_{D1} = \frac{s}{\sqrt{3}}; (d_{D1} \doteq 0,57735 s). \quad (9)$$



Obr. 5



Obr. 6

Aby se nemuselo vyrábět příliš mnoho přesných měřicích drátků, upouští se od požadavku, aby se přesný měřicí drátek dotýkal závitu na středním průměru d_2 v bodech T_1, T'_1 a volí se průměr přesného měřicího drátku $d_D \neq d_{Di}$ tak, aby byl jeho dotyk v bodech T, T' blízkých bodům T_1, T'_1 a přitom byl drátek použitelný i pro jiné (blízké) stoupání s .^{*)}

^{*)} Toho bylo využito v tabulce 2 např. v řádcích pro $s = 0,7$ a pro $s = 0,8$. Místo přesného měřicího drátku o průměru $d_{Di} = 0,404$ pro $s = 0,7$ a $d_{Di} = 0,462$ pro $s = 0,8$ byl zvolen jediný průměr drátku $d_D = 0,455$.

Sledujme však, jak se v případě volby $d_D \neq d_{Dt}$ jeví geometrické poměry pro hledaný rozměr x , resp. $2x$, který je závislý na d_D . Z obr. 5 i 6 je zřejmé, že míru M vypočteme jako součet velikosti středního průměru závitu d_2 a rozměru $2x$. Tedy

$$M = d_2 + 2x. \quad (10)$$

Dále budeme sledovat obr. 6 a stanovíme rozměr x . Označme $|AS| = y$. Z pravoúhlého trojúhelníku AST s pravým úhlem při vrcholu T plyne

$$\frac{d_D}{2} : y = \sin \alpha \text{ a pro } \alpha = 60^\circ \text{ je}$$

$$|AS| = y = \frac{d_D}{2}. \quad (11)$$

$$\text{Dále je } |ES| = |TS| = \frac{d_D}{2}, \quad (12)$$

$$|CT_1| = \frac{s}{4}$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ACT_1 s pravým úhlem při vrcholu C a úhlu $\alpha/2 = 30^\circ$ při vrcholu A plyne

$$\frac{|CT_1|}{|AC|} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

z čehož je

$$|AC| = |CT_1| \sqrt{3} = \frac{s \sqrt{3}}{4}. \quad (13)$$

Rozměr $x = |CE| = |ES| + |CS| = |ES| + y - |AC|$;
po dosazení z (12), (11), (13) je

$$x = \frac{3}{2} d_D - \frac{\sqrt{3}}{4} s$$

a ovšem $2x$ má tvar

$$2x = 3d_D - \frac{\sqrt{3}}{2} s \quad (14)$$

a míra M , s kterou porovnáváme při kontrole vyrobený závit, je po dosazení do vzorce (10)

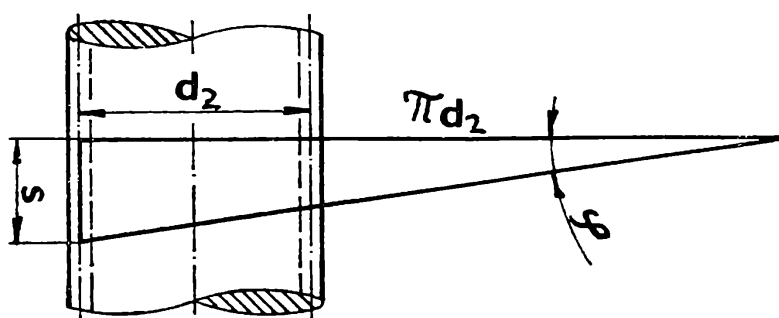
$$M = d_2 + 3d_D - \frac{\sqrt{3}}{2} s, \text{ resp. } M = d_2 + 3d_D - 0,86603 s. \quad (15)$$

Je užitečné zvolit si některé jmenovité průměry normalizovaných metrických závitů s daným stoupáním a vypočítat podle vzorce (15) míru M . To je provedeno v horní části tabulky 3, v níž je také uvedeno stoupání závitu s , střední průměr závitu d_2 a průměr přesného měřicího drátku d_D (srovnej s tabulkami 1 a 2).

Tabulka 3

d	s	d_s	d_D	$a \times (11)$	$M(15)$
3	0,5	2,675	0,290	0,473	3,12'
4	0,7	3,545	0,455	0,759	4,304
5	0,8	4,480	0,455	0,672	5,152
6	1	5,350	0,620	0,994	6,344
8	1,25	7,188	0,725	1,092	7,280
10	1,5	9,026	0,895	1,386	10,412
12	1,75	10,863	1,100	1,784	12,647
16	2	14,701	1,350	2,318	17,019
24	3	22,051	2,050	3,552	25,603
36	4	33,402	2,550	4,186	37,588
48	5	44,752	3,200	5,270	50,022
72	6	68,103	4,000	6,804	74,907
72	1,5	71,026	0,895	1,386	72,412

d	s	φ	$\alpha'/_2$	$2\pi(11K)$	$M(15)$
3	0,5	3,4050°	29,956°	0,438	3,113
4	0,7	3,5964°	29,956°	0,760	4,305
5	0,8	3,2532°	29,961°	0,673	5,153
6	1	3,4050°	29,956°	0,996	6,346
8	1,25	3,1680°	29,962°	1,094	8,282
10	1,5	3,0284°	29,965°	1,388	10,414
12	1,75	2,9355°	29,968°	1,787	12,650
16	2	2,4796°	29,977°	2,320	17,021
24	3	2,4798°	29,977°	3,555	25,606
36	4	2,1829°	29,982°	4,189	37,591
48	5	2,0367°	29,984°	5,273	50,025
72	6	1,6064°	29,991°	6,806	74,909
72	1,5	0,3852°	29,998°	1,386	72,412



Obr. 7

S takto vyřešeným úkolem bychom mohli být spokojeni, alespoň při běžném měření přesných závitů. Avšak v případě měření středního průměru závitu, resp. míry M na tisíce mm je nutno uvážit, že drátky při styku s bokem závitu a dotykovými ploškami měřidla se nejen našikmí o úhel stoupání měřeného závitu φ , ale zcela nepatrně se i od osy závitu oddálí. Toto oddálení by nevzniklo, kdyby místo průměru drátku d_D byla vložena tenká destička o stejném průměru. Protože tomu tak není, je třeba vypočtenou hodnotu x , resp. $2x$, zvětšit o korekci K , jež je závislá na stoupání závitu s a na úhlu stoupání φ . Zřejmě pak bude hodnota $2x$ i při stejném stoupání s větší u menšího jmenovitého průměru závitu než u většího (protože oddálení přesných měřicích drátků je větší).

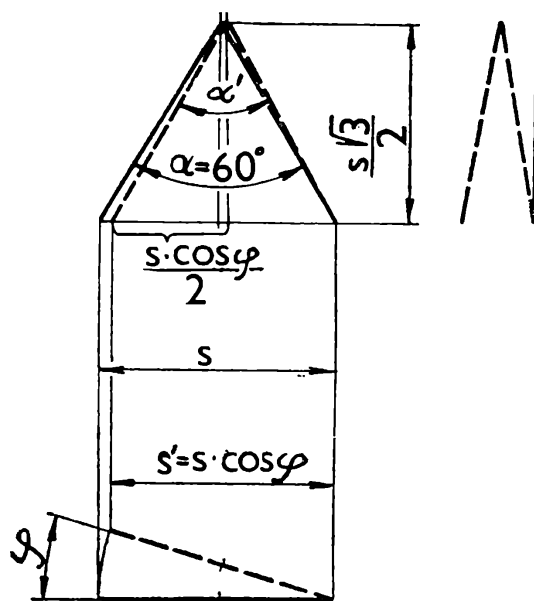
K pochopení korekce K přispěje úvaha, kterou dobře znají technici měřící profil (obrys) závitu na dílenském mikroskopu. Stoupání závitu totiž způsobuje, že úhel α závitové mezery je zastíněn bokem závitu a v okuláru mikroskopu se pak jeví $\alpha' < \alpha$. Proto kontrolující technik buď pootočí osu okuláru o úhel stoupání φ , anebo o tento úhel našikmí osu měřeného závitu. Tak se dosáhne nezkreslení (nezastínění) profilu závitu.

K stanovení úhlu stoupání φ se vychází z obvodu závitu vypočteného ze středního průměru d_2 a příslušného stoupání s , jak znázorňuje obr. 7. Platí

$$\frac{s}{\pi d_2} = \operatorname{tg} \varphi \quad (16)$$

Přiblížíme si nyní zmenšení vrcholového úhlu α na úhel α' . Nárys na obr. 8 představuje z tenkého drátu vytvořený profil drážky závitu s vrcholovým úhlem $\alpha = 60^\circ$. Pootočíme-li tento profil o úhel stoupání φ , jak je ukázáno čárkovaně v půdoryse, pak úhel $\alpha' < \alpha$ zjišťujeme v nárysu (čárkovaně). U metrického závitu s úhlem $\alpha = 60^\circ$ platí (viz (1)):

$$\begin{aligned} \frac{s \cdot \cos \varphi}{2} : \frac{s \sqrt{3}}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \text{ a z toho je} \\ \frac{\cos \varphi}{\sqrt{3}} &= \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$



Obr. 8

Vraťme se k výpočtu hodnoty $2x$ zahrnující korekci K vztaženou k sou-
pání závitu s a k jeho průměru d_2 . Vzorec (14) mohl také zůstat ve tvaru:

$$2x = d_D + 2y - \frac{\sqrt{3}}{2} s,$$

tj.

$$2x = d_D + \frac{d_D}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} s.$$

Nahradíme-li v posledním vzorci úhel α úhlem α' , obdržíme:

$$2x = d_D + \frac{d_D}{\sin \alpha'/2} - \frac{\sqrt{3}}{2} s. \quad (14K)$$

Po dosazení do vzorce (10) dostáváme:

$$M = d_2 + d_D + \frac{d_D}{\sin \alpha'/2} - \frac{\sqrt{3}}{2} s. \quad (15K)$$

Jako ilustraci provedeme výpočet hodnoty $2x$ s korekcí K pro závit
M10 ($s = 1,5$) a pro závit M72 $\times$ 1,5, které mají ovšem stejné stoupání,
avšak úhly stoupání obou závitů jsou různé.

Pro M10 je podle (16) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1,5}{\pi \cdot 9,026} = 0,052900$ a úhel $\varphi = 2,0281^\circ$;

podle (17) je $\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} = \frac{\cos 3,0281^\circ}{\sqrt{3}} \cdot \frac{0,9986}{1,732} = 0,57656$ a úhel

$\alpha'/2 = 29,965^\circ$.

Po dosazení do (14K) je $2x = 0,895 + \frac{0,895}{\sin 29,965^\circ} - 1,29904 =$
 $= 1,388$ a podle (10) je $M = 9,026 + 1,388 = 10,414$ (bez korekce K
je $2x = 1,386$ a $M = 10,412$).

Pro $M72 \times 1,5$ je podle (16) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1,5}{\pi \cdot 71,026} = 0,006722$ a úhel
 $\varphi = 0,3852^\circ$; podle (17) je $\frac{\cos 0,3852^\circ}{1,732} = 0,5773$ a úhel $\alpha'/2 =$
 $= 29,998^\circ$.

Po dosazení do (14K) je $2x = 0,895 + \frac{0,895}{\sin 29,998^\circ} - 1,29904 =$
 $= 1,386$, a tedy $M = 71,026 + 1,386 = 72,412$ (bez korekce K je
 $2x = 1,386$ a $M = 72,412$).

Výsledky výpočtů hodnot $2x$ a míry M s korekcí K jsou pro zvolené
závity uvedeny v pravé části tabulky 3. Při porovnání hodnot M z horní
a dolní části tabulky 3 (vypočtené bez korekce K a s korekcí K) zjistíme,
že jde o rozdíly v tisícinách mm.

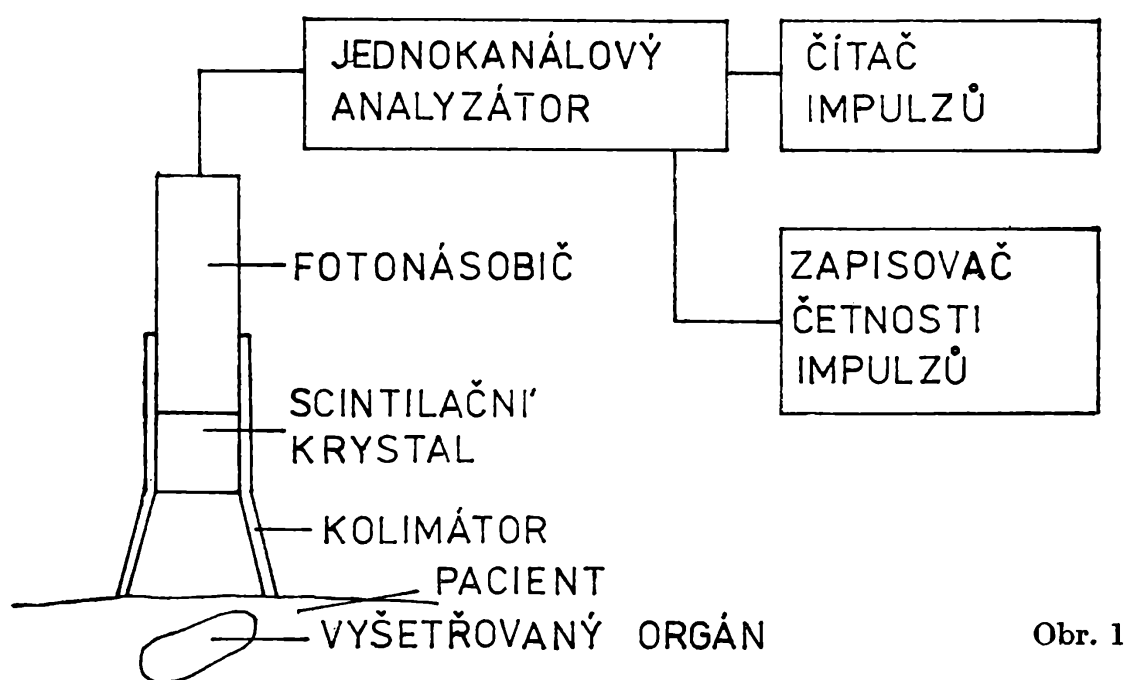
Čtenáře, který se zajímá o technické měření, bude třeba zajímat, že
již při velmi přesném měření (ještě přesnějším, než kterému jsme věno-
vali pozornost) se do naměřené hodnoty promítá i tlak měřících plošek
měřidla na měřený předmět. Proto se při takovém měření, např. na mini-
metru, tato korekce na tlak odčítá od míry M .

FYZIKA

Ionizující záření v nukleární medicíně

Ing. PAVEL BRADA, OÚNZ Jihlava

Objev umělé radioaktivity v roce 1934 spolu s pokrokem v elektronice
umožňujícím citlivou detekci ionizujícího záření dal vzniknout novému
oboru v lékařství — nukleární medicíně. Princip metod nukleární medi-
cíny je následující: pacientovi se vpíchne do žíly (nebo se mu dá vypít)
určité množství radioaktivního preparátu, který potom putuje do jednot-
livých orgánů a pomocí vhodného detekčního systému se registruje
záření, které z těchto orgánů vychází. K detekci se využívá především



Obr. 1

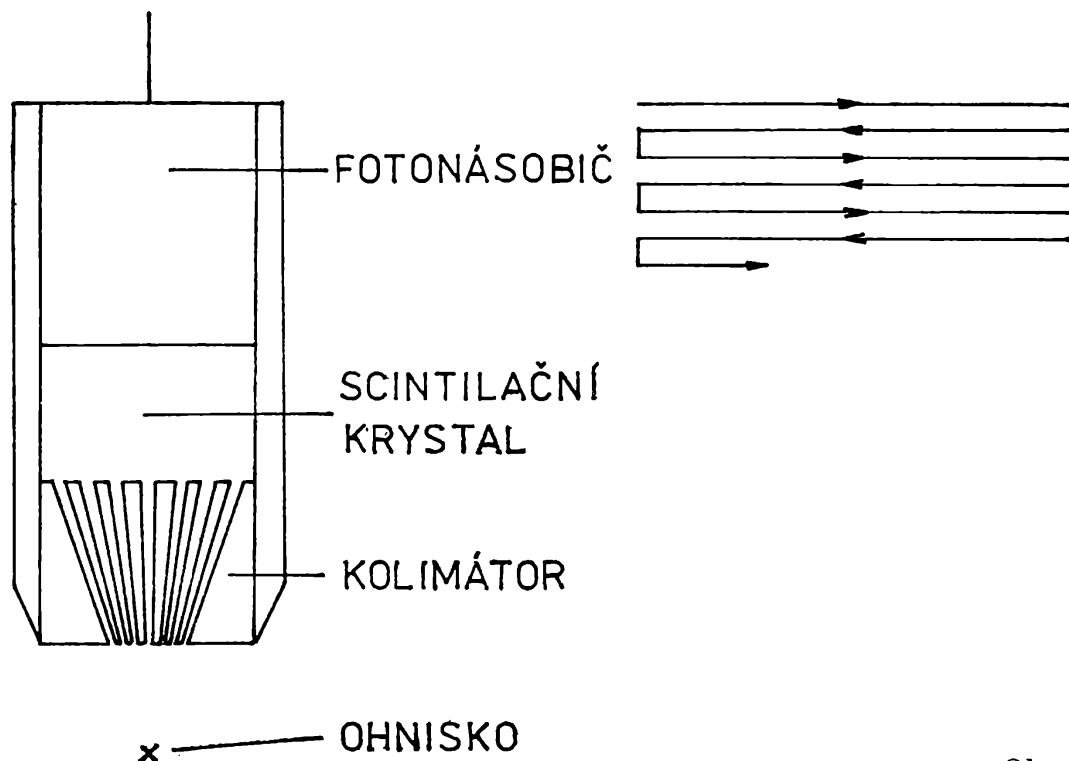
záření gama, ve speciálních případech i záření beta. Rozmístění radioaktivního preparátu v těle pacienta závisí na chemických vlastnostech použitého radionuklidu nebo chemické sloučeniny, na kterou je radionuklid vázán. Informace, kterou lze získat detekcí záření vycházejícího z určitého orgánu, je buď zobrazení tvaru orgánu nebo zjištění funkce orgánu podle časové závislosti odezvy detektoru.

Chceme-li detekovat pouze množství záření, které vychází z určitého orgánu, použijeme k tomu tzv. *scintilační detektor opatřený kolimátorem* (obr. 1). Kolimátor zabezpečuje, aby do detektoru přicházelo záření gama pouze z vyšetřovaného orgánu a nikoliv odjinud. Je tvořen 1,5 až 2 cm silnými olověnými stěnami, které pohltí záření gama ze sousedních oblastí. Záření, které projde kolimátorem, vstupuje do scintilačního detektoru, který je tvořen speciálním krystalem a fotonásobičem. Jednotlivá kvanta záření gama interagují s hmotou krystalu za vzniku světelných záblesků (scintilací). Tyto záblesky jsou pomocí fotonásobiče převáděny na elektrické impulsy, které jsou vedeny do jednokanálového analyzátoru. Analyzátozem projdou jenom ty impulsy, které spadají do určitého rozmezí podle své velikosti, přičemž všechny ostatní impulsy se odstraní. Z analyzátoru se impulsy vedou buď k čítači impulsů, kde se sčítají prošlé impulsy, nebo k zapisovači četnosti impulsů, kde se graficky zapisuje počet prošlých impulsů za časovou jednotku v závislosti na čase. Výsledkem měření je tedy buď číslo, které znamená počet registrovaných impulsů, nebo křivka, která určuje časový průběh aktivity ve vyšetřovaném orgánu.

Chceme-li zjistit tvar vyšetřovaného orgánu, lépe řečeno prostorové

SONDA GAMAGRAFU

POHYB SONDY

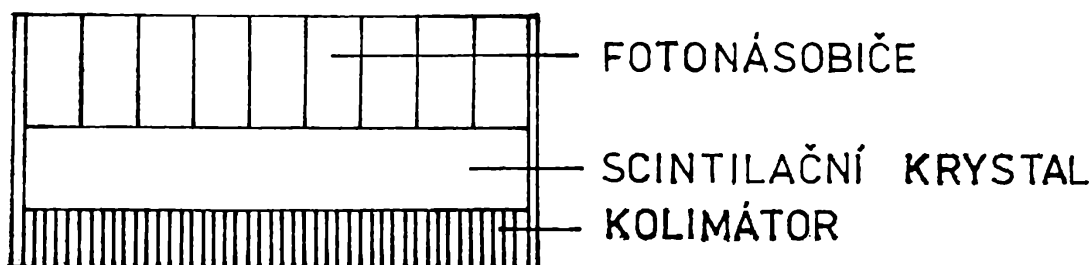


Obr. 2

rozmístění radionuklidu v určité oblasti těla, používáme k tomu buď přístroj zvaný *gamagraf* nebo *gamakameru*.

Princip gamagrafu spočívá v tom, že scintilační detektor snímá pouze jeden bod a zároveň projíždí meandrovitým pohybem nad pacientem (obr. 2). K tomu, aby byl snímán pouze jeden bod, přesněji malá oblast kolem tohoto bodu, je třeba speciální kolimátor (obr. 2). Tento kolimátor je tvořen olověným válcem provrtaným několika desítkami otvorů, které míří všechny do jednoho bodu (ohniska). Detektor potom snímá pouze ty impulsy, které jsou způsobeny gama kvanty vycházejícími z tohoto bodu, přičemž ostatní kvanta gama jsou kolimátorem pohlcena. Po vyhodnocení impulsů je informace vedena k tiskacímu zařízení, které se pohybuje na stejném rameni s detektorem a které tiskne barevný obrázek v měřítku 1:1. Každá barva odpovídá určitému rozmezí četnosti impulsů. Tímto způsobem se získá informace o tom, ve kterých místech těla se radioaktivní preparát vychytává více a ve kterých méně.

Dokonalejším zařízením pro získání informace rozložení aktivity v těle pacienta je *gama kamera*, která je založena na následujícím principu: Scintilační krystal má větší rozměry, aby zachytil aspoň polovinu šíře pacienta, kolimátor je tvořen válcem s rovnoběžně vyvrtanými otvory, takže detektor snímá pouze to záření gama, které vychází kolmo vzhůru z pacienta (viz obr. 3). Záření vycházející šikmo je kolimátorem pohlceno. Scintilace, která vznikne v krystalu, je snímána současně vše mi



fotonásobiči naráz, přičemž velikost proudového impulsu z fotonásobiče klesá se vzdáleností místa vzniku scintilace od fotonásobiče. Impulsy od jedné scintilace, které vycházejí z různých fotonásobičů, mají tedy různou velikost.

Elektronicky lze potom zpětně stanovit, ve kterém místě ke scintilaci došlo, a zaznamenat tak obraz rozložení aktivity v těle pacienta. Kamera se může nad pacientem pohybovat a v poměrně velice krátkém čase udělat snímek celého pacienta. Výhodou gamakamery je možnost zhotovení několika snímků v krátkých časových intervalech, čímž je možno sledovat rozložení aktivity v těle pacienta v závislosti na čase.

V současné době jsou v zahraničí vyvíjeny přístroje, které jsou schopny podat informaci o rozložení aktivity ve všech třech rozměrech současně a nikoliv jenom v jedné ploše, jak je tomu u gamagrafu nebo u gamakamery.

Radionuklidy, které se v nukleární medicíně používají, se získávají buď z jaderného reaktoru jako štěpné produkty při štěpení uranu nebo bombardováním vhodného terčíku neutrony či nabitými částicemi. Jako vhodné radionuklidy musí být vybírány takové, které mají krátký poločas přeměny, aby zářily v těle pacienta co nejkratší dobu a nedošlo tak k poškození organismu ozářením. Tak např. k vyšetření štítné žlázy se používá ^{131}I , který má poločas přeměny 8 dní, k vyšetření jater se používá ^{198}Au , jež má poločas přeměny 2,7 dne, atd. . . Při používání radionuklidů s ještě kratšími poločasy dochází ovšem k problémům s rychlou přepravou radionuklidu z místa výroby do místa aplikace, nehledě k tomu, že takový radionuklid se musí rychle spotřebovat, dokud se ho většina nepřemění na dceřinný nuklid. Proto byly vyvinuty tzv. *radionuklidové generátory*, ve kterých se vyrábí potřebný radionuklid přímo na oddělení. Nejčastěji používaný je generátor technéciový¹⁾. Tento ge-

1) Hušák V., Radionuklidový generátor ^{99}Mo - $^{99\text{m}}\text{Tc}$ a jeho použití v lékařství; Rozhledy mat. fyz. č. 9, ročník 60, 1981–82, str. 396.

nerátor obsahuje radionuklid ^{99}Mo s poločasem přeměny 66 hodin, který se získává v jaderném reaktoru. ^{99}Mo se přeměňuje na $^{99\text{m}}\text{Tc}$, což je radioizotop technécia ve vzbuzeném stavu (písmeno m značí metastabilní stav), který se vyzářením kvanta gama dostává do svého základního stavu s poločasem přeměny 8 hodin. Propláchneme-li generátor roztokem NaCl, dochází uvnitř k chemické reakci, při které vzniká technecistan sodný, který je vyplavován ven z generátoru, přičemž ^{99}Mo v generátoru zůstává. $^{99\text{m}}\text{Tc}$ je tedy v generátoru vyráběn a můžeme ho denně odebírat. Vzhledem k poměrně krátkému poločasu přeměny ^{99}Mo (66 h) vydrží generátor na oddělení maximálně 2 týdny, potom se jeho aktivita sníží pod mez využitelnosti.

Další způsob využívání radionuklidů s velmi krátkými poločasy lze realizovat pomocí *cyklotronu* (přístroje pro urychlení těžkých nabitých částic) instalovaného přímo na oddělení. Bombardováním vhodného terčíku tokem těžkých nabitých částic urychlených v cyklotronu dochází k jaderné reakci na jádrech atomů terčíku. Vznikají při tom různé radionuklidy v závislosti na druhu a energii bombardujících částic a druhu atomů terčíku. Vzniklé radionuklidy, které chceme použít k výrobě radioaktivního preparátu (radiofarmaka), odseparujeme od terčíku chemickou a fyzikální cestou.

Výroba radiofarmak spočívá ve vytvoření vhodné chemické sloučeniny, která obsahuje žádaný radionuklid. Tak např. pro vyšetření štítné žlázy se používá jodid sodný s radioaktivním ^{131}I , pro vyšetření kostí pyrofosfát značený $^{99\text{m}}\text{Tc}$, pro vyšetření jater koloid zlata s radioaktivním ^{198}Au atd.

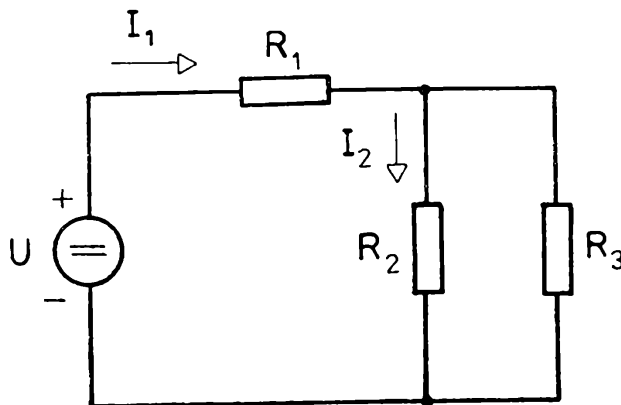
Pomocí metod nukleární medicíny lze poznat, jestli orgány lidského těla pracují normálně či ne (ledviny, štítná žláza, srdce, . . .), dále lze určit oblast, která je postižena zánětem nebo tvorbou nádoru. Nádorové buňky totiž vychytávají radiofarmakon obvykle jiným způsobem než buňky zdravé. Pomocí tzv. RIA-metod lze stanovit množství některých hormonů v krvi. Provádí se to tak, že se pacientovi odebere vzorek krve, který se pak zkoumá chemickou cestou pomocí látek značených radionuklidy. Tímto způsobem je možné rozpoznat těhotenství již po osmi dnech od početí, u novorozenat lze takto zjistit sníženou funkci jejich štítné žlázy a v případě potřeby zahájit včas léčbu, aby se zabránilo vážné poruše vedoucí k debilitě dítěte.

Nukleární medicína je moderní lékařský obor, který má před sebou velké perspektivy. Rychlejšímu rozvoji však brání poměrně vysoké náklady, které je nutno investovat do přístrojů a potřebných radiofarmak. Při vývoji nových typů přístrojů se uplatní především počítačová technika, která umožní zpracovat automaticky velké množství dat a v některých případech i stanovit konečnou diagnózu za minimální účasti personálu.

Vztahy mezi napětími a proudy v lineárních elektrických obvodech

Doc. ing. JIŘÍ MÝSLÍK, CSc., Vysoká škola strojní a elektrotechnická v Plzni

Zabývejme se jednoduchým stejnosměrným obvodem, který je nakreslen na obr. 1. V tomto obvodu je $U = 10 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$ a $R_2 = 2 \Omega$. Odpor rezistoru R_3 neznáme. Naším úkolem je určit velikost proudu I_2 , jestliže proud $I_1 = 1,5 \text{ A}$.



Obr. 1

Řešení této úlohy není složité. Z rovnic

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}, \quad (1)$$

$$R_2 I_2 = R_3 (I_1 - I_2) \quad (2)$$

můžeme vypočítat nejen velikost proudu I_2 , ale i odporu rezistoru R_3 . Můžeme však postupovat také jinak.

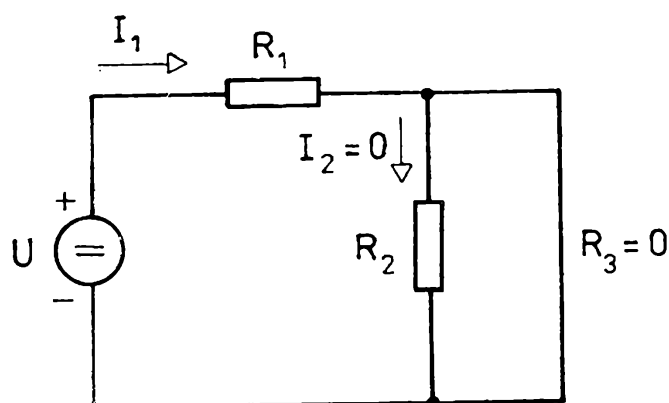
Řešený obvod je lineární, a proto mezi větrovými proudy I_1 a I_2 platí lineární vztah. Obecně můžeme psát, že

$$I_2 = a I_1 + b, \quad (3)$$

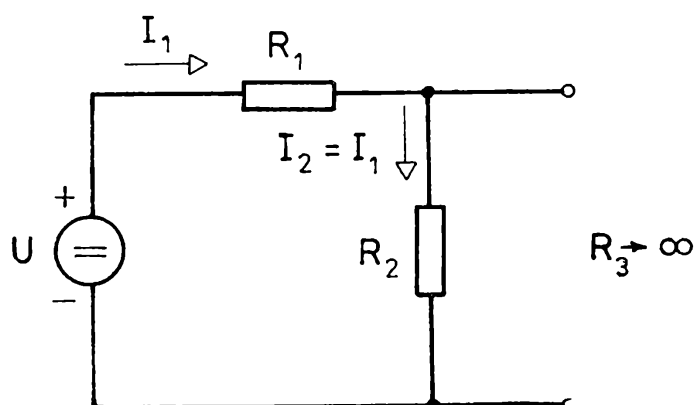
kde a, b jsou konstanty. Tyto konstanty musíme nyní vypočítat. K tomu zřejmě potřebujeme znát velikosti proudu I_2 pro dvě různé velikosti proudu I_1 . Nejsnadněji je určíme následující úvahou.

Kdyby odpor R_3 byl nulový (obráz. 2), potom zřejmě proud

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 2 \text{ A} \quad (4)$$



Obr. 2



Obr. 3

a proud $I_2 = 0$. Kdyby odpor $R_3 \rightarrow \infty$ (obr. 3), potom by platilo

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} = 1,4286 \text{ A} . \quad (5)$$

Dosadíme-li tyto výsledky do rov. (3), dostaneme soustavu dvou rovnic

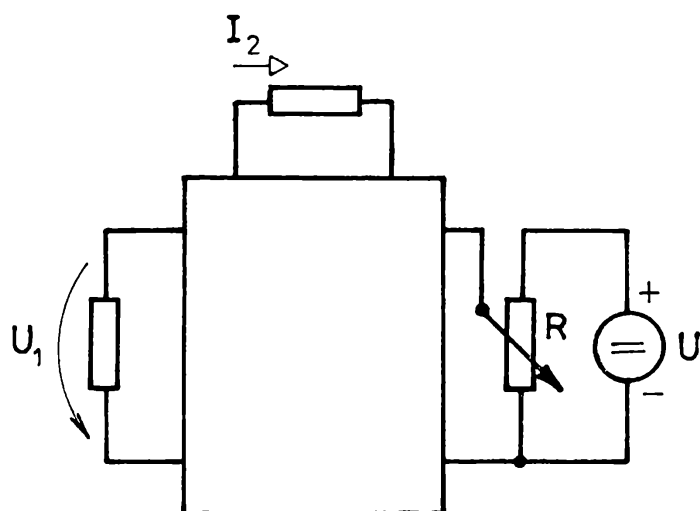
$$\left. \begin{aligned} 0 &= a \cdot 2 + b \\ 1,4286 &= a \cdot 1,4286 + b \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Z této soustavy snadno vypočteme, že $a = -2,5$ a $b = 5$. Jestliže podle zadání úlohy byl proud $I_1 = 1,5 \text{ A}$, potom proud I_2 měl velikost

$$I_2 = aI_1 + b = -2,5 \cdot 1,5 + 5 = 1,25 \text{ A} . \quad (7)$$

Všimněme si, že jsme velikost proudu I_2 vypočetli, aniž jsme znali odpor rezistoru R_3 .

Nyní uvažujeme lineární stejnosměrný obvod složený z libovolného počtu rezistorů a (nezávislých) zdrojů. Z tohoto obvodu vyjmeme tři větve tak, jak je nakresleno na obr. 4. Napětí zdroje U neznáme a rovněž nemáme žádné údaje o potenciometru R . Víme však, že jestliže napětí $U_1 = 5 \text{ V}$, potom proud $I_2 = 1 \text{ A}$ a jestliže napětí $U_1 = 8 \text{ V}$, potom proud $I_2 = 1,5 \text{ A}$. Jestliže nyní nastavíme potenciometr R například tak, že proud $I_2 = 2 \text{ A}$, potom snadno můžeme vypočítat příslušnou velikost napětí U_1 .



Obr. 4

V analogii s předchozím můžeme psát, že

$$U_1 = aI_2 + b \quad (8)$$

Dosadíme-li do této rovnice výše uvedené číselné hodnoty, dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\left. \begin{aligned} 5 &= a \cdot 1 + b \\ 8 &= a \cdot 1,5 + b \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Z této soustavy vypočteme $a = 6$ a $b = -1$. Jestliže $I_2 = 2$ A, potom po dosazení do rov. (8) dostáváme, že

$$U_1 = 6 \cdot 2 - 1 = 11 \text{ V} \quad (10)$$

Lze dokázat, že v lineárních elektrických obvodech platí lineární závislosti mezi libovolným počtem napětí a proudů. Tento důkaz však neuvádíme. I když není obtížný, vyžaduje určité speciální znalosti z teorie obvodů, které u našich čtenářů nepředpokládáme. Pouze uvedeme, že například pro tři různá napětí a proudy p , q , a r libovolného lineárního stejnosměrného obvodu bychom mohli tuto závislost zapsat ve tvaru

$$p = aq + br + c. \quad (11)$$

Konstanty a , b a c mohou obecně být kladné, záporné, případně i nulové.

Popsané lineární závislosti mezi základními obvodovými veličinami (napětími, proudy) lineárních elektrických obvodů bývají často užitečné při analýze obvodů v případě, že v obvodu dojde ke změně jeho parametrů. V praxi to bývá nejčastěji při zkratech nebo při přerušení větve.

Využití neutronové difrakce ve studiu pevných látek

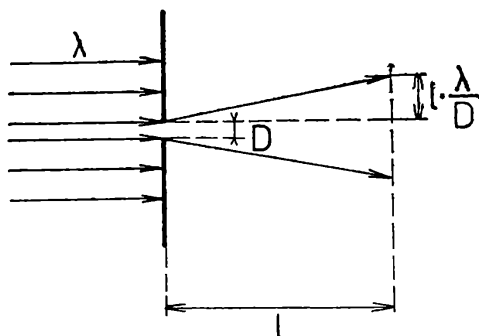
Ing. LADISLAV KALVODA, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT, Praha

Neutronová difrakce představuje jednu z metod studia vnitřního uspořádání pevných látek. Spolu s dalšími difrakčními metodami (rentgenografie, elektronografie) umožňuje nahlédnout do struktury materiálů a zkoumat složité zákonitosti, které ji podmiňují.

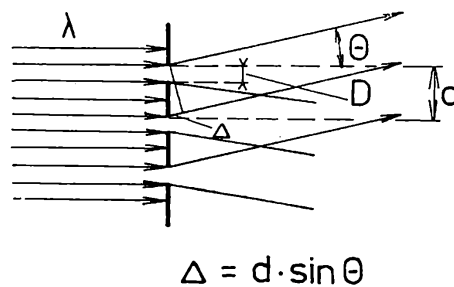
Existence jevu difrakce neutronů je potvrzením jejich duálního charakteru, který umožňuje přiřadit hmotné částici s hybností p vlnovou délku $\lambda = h/p$ (zde h je Planckova konstanta, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s). Tuto myšlenku vyslovil v obecné podobě poprvé *Louis de Broglie* v r. 1924. Předpoklad, že i pohyb neutronů je možno popsat pomocí zákonů vlnové mechaniky, učinil v r. 1936 *W. M. Elsasser*. Tento předpoklad byl ještě v témže roce potvrzen i experimentálně pozorováním jevu difrakce neutronů, které uskutečnili nezávisle na sobě *H. Halban* s *P. Preiswerkem* a *D. P. Mitchel* s *P. N. Powersem*.

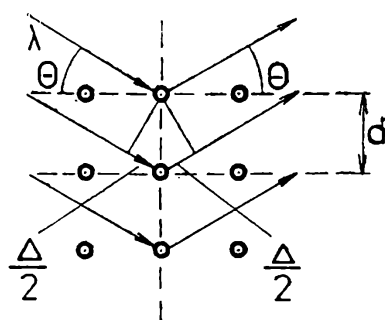
Princip difrakčního jevu je možno objasnit na příkladu průchodu světelné rovinné vlny soustavou rovnoběžných štěrbin. Mějme tedy světelný svazek s vlnovou délkou λ . Prochází-li tento monochromatický svazek štěrbinou o šířce D , lze po průchodu pozorovat úhlové rozšíření prošlého svazku úměrné podílu λ/D (obr. 1). Jestliže necháme stejný světelný svazek dopadat na soustavu rovnoběžných štěrbin s šířkou D a vzájemnou vzdáleností d , bude vlivem interference docházet k zeslabení či zesílení prošlého svazku. Vznikají difrakční minima a maxima. Geometrickou podmínku vzniku světelného difrakčního maxima můžeme v tomto případě napsat ve tvaru (obr. 2):

Obr. 1



Obr. 2





Obr. 3

$$\Delta = 2 \cdot d \cdot \sin \theta$$

$$d \cdot \sin \theta = n\lambda, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

kde θ je úhel mezi dopadajícím a rozptýleným svazkem a přirozené číslo n udává řád difrakčního maxima.

Pravidelné rozmístění atomů a molekul v krystalické látce tvoří prostorovou mříž vymežující velké množství různých soustav rovnoběžných krystalových rovin. Zjednodušeně lze každou soustavu přirovnat k systému rovnoběžných ekvidistantních „štěrbín“ o vzdálenosti d a fiktivní šířce D úměrné rozptylové mohutnosti jednotlivých rozptylových center mřížky (obr. 3). Dá se tedy očekávat, že při průchodu vhodného záření krystalickou látkou bude možno pozorovat difrakční jev. Z analogie s difrakcí světelného paprsku plyne podmínka pro vlnovou délku takového záření — musí být stejného řádu jako mezirovinná vzdálenost d , tedy 10^{-1} nm. Na základě podobné úvahy uskutečnili *Max von Laue* a *P. P. Ewald* r. 1912 první pokus s difrakcí rentgenového záření na krystalu CuS; rozbor získaného difrakčního obrazce potom přivedl *W. L. Bragg* k formulaci geometrické podmínky vzniku difrakčního maxima rentgenového záření při jeho rozptylu krystalickou látkou:

$$2 \cdot d \cdot \sin \theta = n\lambda, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

kde d je mezirovinná vzdálenost difraktující soustavy krystalových rovin a $2 \cdot \theta$ je úhel mezi dopadajícím a rozptýleným svazkem. Úhel θ je obvykle označován jako Braggův úhel. Vztah (2) je až na součinitel 2 formálně shodný s (1). Tento rozdíl plyne z geometrických podmínek interference paprsků, rozptýlených sousedními rozptylovými centry (atomy v případě rentgenového záření a štěrbinami v případě světelných paprsků) — viz obr. 2 a obr. 3.

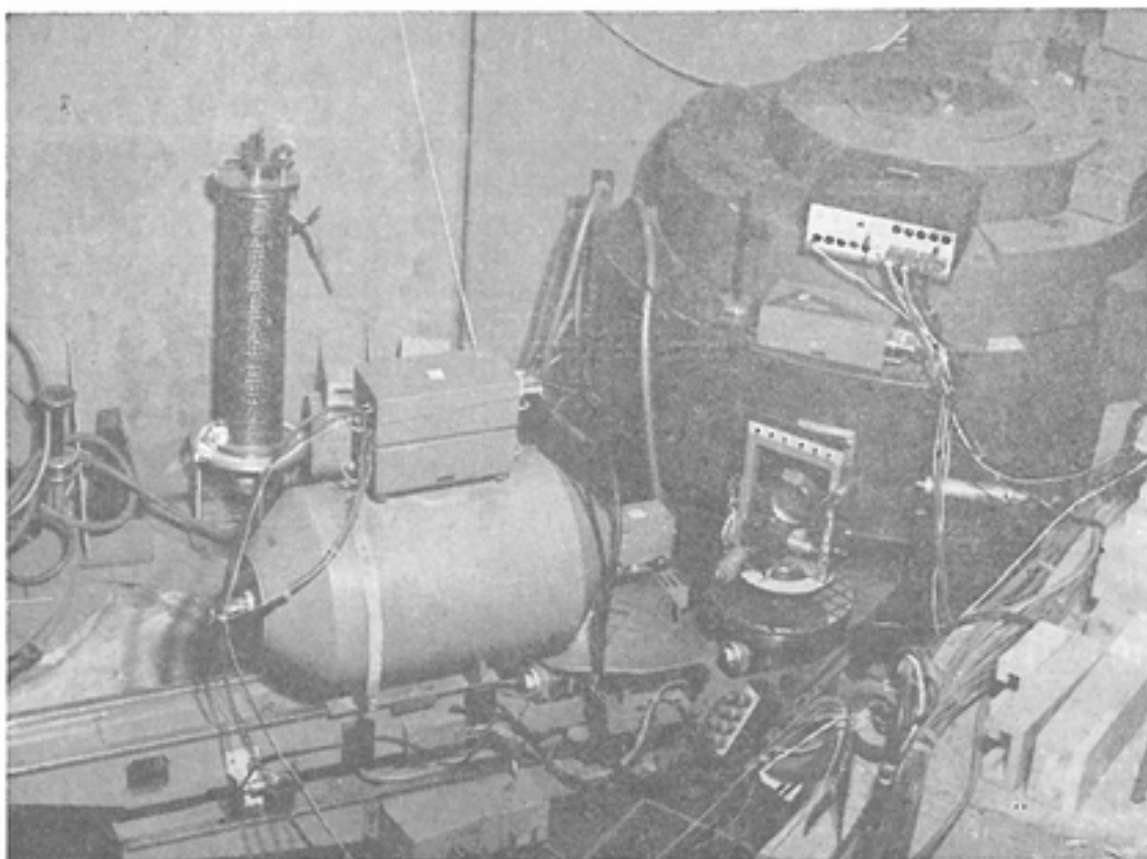
Difrakce rentgenového záření byla historicky první difrakční metodou využitou ke studiu struktury krystalických látek. Existence dostupných výkonných rentgenových zdrojů a vyhovující fyzikální vlastnosti rentgenového záření jsou hlavním důvodem, že i v současné době je tato metoda z difrakčních metod nejrozšířenější [1]. Z fyzikálních vlastností rentgenového záření však plynou i některá praktická omezení této metody: malý rozptyl v případě lehkých prvků, špatná vzájemná rozlišitelnost prvků s blízkým protonovým číslem a také velká absorpce rent-

genového záření těžšími prvky. V těchto případech nelze obvykle získat rentgenovou difrakcí odpovídající výsledky.

Pro difrakci neutronů uvedená omezení neplatí, neboť charakter interakce neutronů s atomy zkoumané látky je odlišný od charakteru interakce kvanta rentgenového záření. *Metoda difrakce neutronů* (používá se také označení neutronografie nebo neutronová difrakce) umožňuje získat informace o případné magnetické struktuře materiálů, protože rozptyl neutronu atomem je závislý také na velikosti a orientaci magnetického momentu atomu (tzv. *magnetický rozptyl*) [2].

Rozvoj praktického využití neutronové difrakce souvisel s existencí dostatečně intenzivních zdrojů tepelných neutronů (s vlnovou délkou okolo 10^{-1} nm). Přestože teoretické základy neutronové difrakce byly rozpracovány už koncem třicátých let, její opravdový rozmach nastal až v padesátých letech, kdy byly vybudovány první výzkumné jaderné reaktory, které produkovaly intenzivní neutronové svazky. V dnešní době se kromě jaderných reaktorů se stacionárním neutronovým tokem 10^{13} až 10^{15} neutronů na 1 cm^2 za 1 s využívá i pulzních jaderných reaktorů, u kterých je dosahováno o 1 až 2 řády vyšších hodnot neutronového toku v jednom pulzu. Velkou budoucnost mají před sebou také neutronové zdroje založené na využití lineárního urychlovače elektronů. Při dopadu pulzu urychlených elektronů na vhodný terč (obvykle plutoniový nebo uranový) dojde ke vzniku brzděného γ -záření, jehož kvanta interagují s jádry atomů terče a výsledkem je *emise neutronů*. Předností těchto pulzních neutronových zdrojů je velmi krátká dosažitelná doba trvání jednoho pulzu (řádově několik ms), což poskytuje dobré podmínky pro další fyzikální experimenty.

První praktické aplikace neutronové difrakce byly zaměřeny především na stanovení základních fyzikálních charakteristik rozptylu neutronů hmotou (amplitudy rozptylu a účinné průřezy pro jednotlivé prvky a jejich izotopy). Prvních úspěchů bylo dosaženo při dořešení struktur některých látek, u kterých se uplatnila uvedená omezení rentgenové difrakce. Tak bylo například upřesněno rozložení atomů vodíku ve struktuře izomorfních sloučenin LiH, NaH a KH, stanovena struktura ledu, upřesněny otázky fázových přechodů ve sloučeninách typu NH_4Cl , potvrzena existence suprastruktury ve slitinách kovů přechodové grupy a upřesněna struktura kysličníků kovů typu XY_2O_4 (např. MgAl_2O_4). Další oblastí aplikace neutronové difrakce byl výzkum zaměřený na určení magnetických struktur. Experimentálně získané výsledky potvrdily možnost existence antiferomagnetického uspořádání, do té doby pouze teoreticky předvídaného, na konkrétním případě sloučeniny MnO. Podrobný výzkum byl věnován určení spinových orientací v krystalech kovů přechodové grupy a objasnění jejich feromagnetických vlastností. Na základě neutronografických měření byla stanovena magnetická struktura magnetitu Fe_3O_4 a některých s ním izomorfních sloučenin



Obr. 4

(např. MgFe_2O_4). Na základě jejich vnějších ferromagnetických vlastností a vnitřní antiferomagnetické struktury byly tyto látky nazvány ferity.

V průběhu šedesátých a sedmdesátých let se možnosti využití neutronové difrakce dále rozšiřovaly. Rozvoj pulzních zdrojů neutronů umožnil konstrukci zařízení, vhodných ke zkoumání struktur složitých organických makromolekulárních látek. Vysoká pronikavá schopnost neutronů se výhodně uplatnila při studiu přednostního uspořádání krystalitů v polykrystalických tvářených materiálech (trubky, plechy, dráty). Nízká energie tepelného neutronu, která je stejného řádu jako energie tepelných kmitů krystalové mříže (10^{-2} až 10^{-3}eV), umožnila přímé studium dynamiky tepelného pohybu atomů.

V současné době zaujímá neutronografie významné místo mezi metodami výzkumu pevných látek. Při řešení složitých problémů je často úspěšně využíváno kombinace výsledků získaných difrakcí neutronů s rentgenografickými výsledky. Přitom se využívá vzájemně se doplňujících vlastností rentgenové a neutronové difrakce. Další rozvoj experimentálních metod neutronové difrakce je v současné době spojen především se zdokonalováním registračních zařízení (využití pozičně citli-

vých detektorů, umožňujících najednou proměřit velkou úhlovou oblast 2π) a s rozvojem vysoce intenzivních neutronových zdrojů.

V ČSSR je neutronografický výzkum soustředěn u jaderného reaktoru VVR-S v ÚJV Řež u Prahy. Zde také je detašované pracoviště neutronografické laboratoře katedry inženýrství pevných látek fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT. Základním vybavením neutronografické laboratoře je neutronový spektrometr KSN-2 (obr. 4), spojený s automatizovanou řídicí a detekční aparaturou. Ve své výzkumné práci je pracoviště zaměřeno na dvě základní oblasti využití neutronové difrakce: studium magnetických a krystalových struktur práškových i monokrystalických látek a studium přednostního uspořádání krystalitů tvářených kovových materiálů. Kromě toho se pracoviště neutronografické laboratoře podílí také na pedagogické práci katedry; při práci na výzkumném úkolu, diplomové práci či při studentské vědecké a odborné činnosti se studenti prakticky zdokonalují v zásadách a metodách provádění experimentu a vyhodnocení získaných údajů.

Literatura

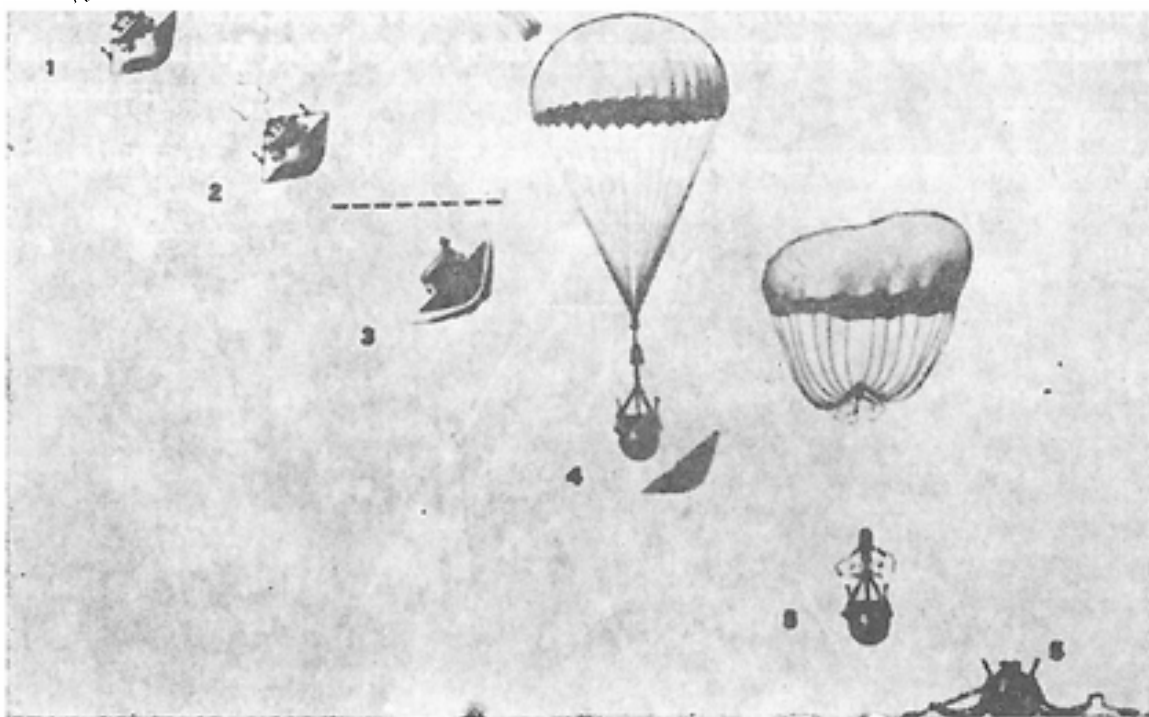
- [1] Kraus, I.: Objevy, které se staly základem fyziky pevných látek. *Rozhledy M-F 63* (1984/85), str. 76
- [2] Bacon, J.: *Difrakce neutronů* (překl. z angl.) Atomizdat, Moskva 1958

Nový pohled na Mars

RNDr. RENÉ HUDEC, CSc., AÚ ČSAV, Ondřejov

Společně s Venuší patří Mars mezi nejbližší planety naší sluneční soustavy. Z hlediska kosmonautiky je tudíž jednou z nejsnáze dostupných planet — sondy k Marsu startují již více než 20 let. Lety kosmických sond podstatně rozšířily naše poznatky o této planetě, která se průměrem 6 788 km řadí mezi Zemi a Měsíc.

Původně se předpokládalo, že Mars by mohl být alespoň v některých směrech podobný Zemi — vždyť 1 den trvá na Marsu 24 hodin a 40 minut a rotační osa Marsu je k rovině jeho dráhy skloněná o 25° , takže jsou na Marsu roční období podobná, jako známe u nás. Mars však obíhá dále od Slunce než naše Země, a tak nepřekvapí, že průměrná střední teplota na Marsu je pouhých -60°C , podstatně méně než na naší planetě. V roce 1983 ukončila činnost na Marsu poslední ještě pracující stanice *Viking*, jedna ze dvou sond, které na rudé planetě přistály v roce 1976. Můžeme



Obr. 1. Schéma přistání sovětských meziplanetárních sond na povrchu Marsu. Čárkovaná hranice představuje začátek atmosféry. Foto autor.

se tedy alespoň ve stručnosti pokusit shrnout poznatky získané o Marsu prostřednictvím posledních kosmických sond.

I když sondy již nepracují, pro velké množství získaných dat nebylo možno dosud všechny údaje vyhodnotit — vždyť například jen z oběžné dráhy kolem Marsu bylo získáno asi 55 000 snímků a srovnatelné množství infračervených dat.

Mars obíhá kolem Slunce po protáhlejší dráze než naše Země, výstřednost jeho dráhy je 0,093, zatímco u Země jen 0,017. To je příčinou toho, že roční období na Marsu jsou proměnná v délce i v intenzitě. Proto je jižní léto kratší a teplejší než léto severní — souhlasí totiž s obdobím největšího přiblížení Marsu ke Slunci. Zatímco za severního léta vystupují maximální denní teploty na $+10^{\circ}\text{C}$, na jihu to je až $+20^{\circ}\text{C}$.

Díky práci kosmických sond známe poměrně dobře atmosféru Marsu — víme, že je řidší než na Zemi a je tvořena převážně kysličníkem uhličitým CO_2 . Ten tvoří 95,3 % jejího obsahu, zbytek připadá na dusík N_2 (2,7%), argon (1,6 %), kyslík O_2 (0,1%) a stopy CO , H_2O , Ne , Kr , Xe a O_3 .

Pozoruhodné je, že atmosférický tlak kolísá s ročním obdobím — v místě přistání jedné ze sond to byly změny mezi 7 a 9 milibary. Toto kolísání tlaku způsobuje zamrzání podstatně části CO_2 do polárních čepiček. Na severní polokouli je čepička tvořena z převážné části ledem H_2O , ale na jihu směsí H_2O a CO_2 . Máme nyní i důkazy o poměrně velkém množství CO_2 a vody vázaných v povrchových a podpovrchových vrstvách hornin. V atmosféře je ovšem vodní páry jen nepatrné množství — kdyby voda z ovzduší pokrývala povrch planety, byla by tloušťka této vrstvy jen setinu milimetru vysoká! Pouze nad zbytkem severní polární čepičky je vodní páry asi desetkrát více — je to jeden z důkazů toho, že tato čepička je tvořena vodním ledem.

I když v létě kolem poledne může teplota na Marsově povrchu vystoupit až na několik desítek $^{\circ}\text{C}$, v noci klesá vždy hluboko pod bod mrazu — například v jižním létě na -70 až -80 $^{\circ}\text{C}$, takže denní střední teplota je vždy záporná. Povrch Marsu je proto stále zmrzlý. Na rovníku se dnes síla zmrzlé vrstvy odhaduje na 1 km, na pólech dokonce až na 4 km.

Přímé přistání sond na povrchu rudé planety umožnilo i první rozbor půdy na Marsu. Zajímavé je, že v místech přistání sond, vzdálených od sebe tisíc km, je složení povrchové horniny prakticky totožné. Je to zřejmě způsobeno globálními prachovými bouřemi, které pokryjí povrch promíchanou vrstvou prachu. Povrch je tvořen jíly bohatými na železo — například na planině Utopia ukázal rozbor půdy 43 % SiO_2 , 20 % Fe_2O_3 , 5 % CaO , 1 % TiO_2 , 6 % SiO_3 a 1 % Cl .

Prachové bouře, které zřejmě vedou k homogennímu pokrytí stejnou vrstvou materiálu, jsou na Marsu nejnápadnějším projevem ročních období. Většinou totiž vznikají v létě na jižní polokouli, odkud se však mohou postupně rozšířit na celou planetu. Průběh jedné z nich byl dokonce sledován přímo — po dobu téměř 4 měsíců zuřila prachová bouře na celé planetě. Přesnou příčinu vzniku prachových bouří dosud neznáme.

(pokračování)

UPOZORNĚNÍ ČTENÁŘŮM

Úlohy pro I. kola všech kategorií 35. ročníku matematické olympiády a úlohy pro I. kola kategorií A, B, C, D 27. ročníku fyzikální olympiády budou otištěny v 10. čísle našeho časopisu.

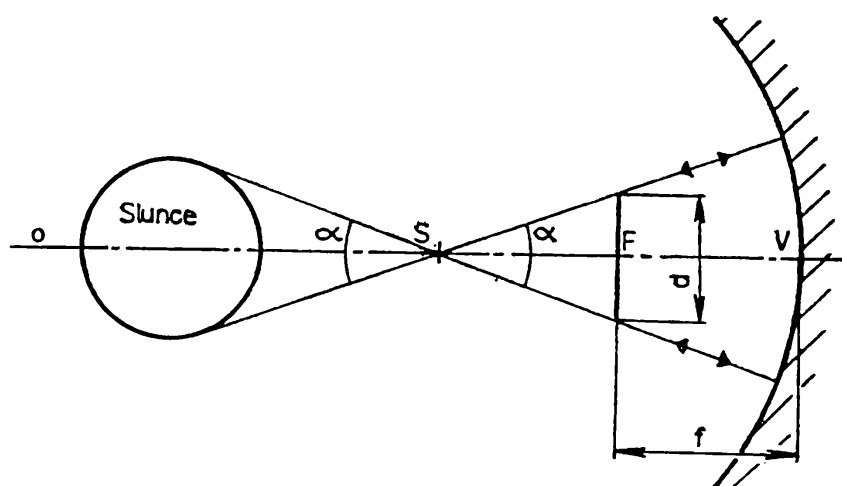
Opravdu jen legenda?

RNDr. VLASTIMIL FLAJŠINGR, Střední průmyslová škola, Gottwaldov

V článku [3] se psalo o soutěži, kterou v hodinách fyziky uskutečňujeme na naší škole již několik let. Jedna ze soutěžních úloh byla převzata z [7]: „Existuje legenda, že *Archimédés* (287—212 př. n. l.) při obléhání Syrákús, které napadli Římané, zapaloval římské lodě slunečními paprsky tak, že je usměrnil na lodě pomocí kulového zrcadla. Později byl v Syrákúsách postaven pomník, který zobrazuje Archiméda se zrcadlem směřujícím na moře. Toto zrcadlo je vyrobeno ve tvaru kulového vrchlíku s poloměrem křivosti 1 m a s poloměrem otvoru 30 cm. Mohl Archimédés tímto zrcadlem zapalovat římské lodě?“ Všichni žáci odpověděli na tuto otázku negativně, většina odpověď doprovodila jednoduchým náčrtem či výpočtem a uvedla, že by to bylo možné jen pro vzdálenost 50 cm lodi od zrcadla. Podobně je zničení římského loďstva soustředěným slunečním světlem např. v [6] považováno za technicky nemožné, laureáti Nobelovy ceny *N. Karpov* a *M. Prochorov* tuto krásnou legendu v [4] nazývají čistou fantazií. Uvádějí přitom, že „zákony geometrické optiky nedávají možnost zkoncentrovat světelnou energii běžných zdrojů světla do úzkého svazku paprsků a soustředit ji na větší vzdálenost, než jsou rozměry příslušného optického zařízení.“ Nejnověji se pak v některých zahraničních časopisech objevují úvahy o Archimédově metacím stroji, kde zrcadlo plnilo funkci optického zaměřovače. Kdo v dnešní době riskuje psát o obléhání Syrákús v roce 211 př. n. l. římským vojevůdcem *Claudiem Marcellem* a Archimédových zrcadlech, ten se vystavuje mnoha nebezpečím. Jedním z nich je např. pochybnost o tom, zda mohla zrcadla vyrobená před 2000 lety odrážet sluneční světlo, aniž by je silně rozptylovala.

Přes všechny uvedené argumenty není však zrod této legendy stavěn na zcela nepravděpodobných fyzikálních základech [5], [8], které lze přiblížit následujícím způsobem.

Těleso se zahřívá tehdy, jestliže energie na těleso dopadající je větší než energie tělesem vyzařovaná. Tento proces trvá tak dlouho, pokud existuje tento energetický rozdíl. Přitom podle zákona *Stefanova-Boltzmannova* energie vyzařovaná jednotkovým povrchem zářícího tělesa v jednotce času je přímo úměrná čtvrté mocnině termodynamické teploty. Při zahřátí tělesa na teplotu T musí na jeho jednotkový povrch



Obr. 1

dopadat zářivý tok, který je rovněž přímo úměrný čtvrté mocnině termodynamické teploty.

Uvažujme duté zrcadlo s povrchem S_1 a ohniskovou vzdáleností f . Jeho prostřednictvím je pak možno v ohniskové rovině vytvořit obraz Slunce (obr. 1), přičemž veškerý sluneční zářivý tok se soustředí v kruhové plošce o průměru d a obsahu S_2 . Jejich velikosti je možno určit ze vztahů

$$d = 2f \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

$$S_2 = \pi f^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

kde $\alpha = 30'$ je úhlový průměr slunce. Ze zákona Stefanova-Boltzmannova plyne, že intenzita vyzařování M_e je přímo úměrná čtvrté mocnině termodynamické teploty. Tedy

$$\frac{M_{e2}}{M_{e1}} = \frac{T_2^4}{T_1^4}. \quad (3)$$

Definujeme-li zářivý tok Φ_e vztahem

$$M_e = \frac{\Phi_e}{S}, \quad (4)$$

je zřejmé, že platí

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{T_2^4}{T_1^4}. \quad (5)$$

Ze vztahu (5) plyne, že teplota T_2 tělesa umístěného v ohnisku zrcadla

bude $\sqrt[4]{\frac{S_1}{S_2}}$ krát větší než teplota T_1 , na kterou zahřívá slunce povrch

zrcadla. Vztah mezi povrchem zrcadla a teplotou T_2 části tělesa umístěného v jeho ohnisku o obsahu S_2 je možno vyjádřit vztahem

$$S_1 = S_2 \frac{T_2^4}{T_1^4} = \pi f \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{T_2^4}{T_1^4}. \quad (6)$$

Údaje o zápalných teplotách různých materiálů je možno získat i četbou běžné románové literatury [1]. Tak např. pro zapálení papíru je zapotřebí asi 250 °C, tedy asi 520 K. Pro suché dřevo je tato teplota kolem 500° až 700 °C, tedy 800 až 1000 K. Tyto hodnoty experimentálně ověřoval francouzský přírodovědec *G. Buffon* (1707—1788). Suché prosmolené dřevo se mu podařilo zažehnout ze vzdálenosti 47 m pomocí 168 zrcadel upevněných na společném rámu. Povrch každého z nich byl 310 cm², jejich celkový povrch byl tedy 5,2 m². Je možno předpokládat, že ke vzplanutí tohoto dřeva postačí teplota $T_2 = 800$ K. Pro teplotu $T_1 = 330$ K plyne ze vztahu (6), že $S_1 = 4,6$ m². Výsledek Buffonova pokusu tak v podstatě neodporuje vztahu (6).

Jak velký by tedy musel být povrch zrcadla, s nímž Archimédés podle legendy zapaloval římské triremy až do vzdálenosti 300 loktů (1 loket = 0,59391 m)? Pro stejný materiál a stejné hodnoty T_1 a T_2 jako v Buffonově pokuse vypočítáme ze vztahu (6), že $S_1 = 65$ m².

Významnou roli zde ovšem sehrával také časový faktor. Archimédés musel pohyblivé triremy zapalovat rychle. Pokud by to mělo být v časovém intervalu menším než 20 s, pak podle empirických údajů [5] by povrch jeho zrcadla musel být asi dvakrát větší, $S'_1 = 133$ m². Sestrojit zařízení těchto rozměrů by ještě nemuselo být pro staré Řeky velkým problémem, stavěli stavby daleko mohutnější. Neřešitelným by však pro ně bylo zabezpečit správnou funkci zrcadla včetně možnosti rychlé změny jeho ohniskové vzdálenosti. Vždyť jen odlití pětimetrového zrcadla pro dalekohled hvězdárny na Mount Palomaru, který byl uveden do provozu v roce 1949, trvalo pět let a jeho vybroušení jedenáct let.

Archimédés měl však ještě jednu možnost. Vedl obranu Syrákús proti Římanům, vynalezl řadu zbraní, nepochybně byl schopen umístit na hradby Syrákús několik set obránců vybavených lesklými kovovými štíty, jejichž celkový povrch mu zaručoval splnění výše uvedených předpokladů. „Prasátka“ od těchto štítů namířená na bok římské triremy pak mohla být zbraní vpravdě zničující.

Rekonstrukci této hypotézy provedl v roce 1973 řecký fyzik *J. Sakkos* [2]. Loď ve vzdálenosti 200 m byla zničena za jednu minutu!

Odpověď na úvodní úlohu je tedy možno upřesnit. Archimédés sám se svým zrcadlem římské lodě zapálit nemohl. S pěti sty spolubojovníky by se však už jeho záměr mohl uskutečnit.

Literatura

- [1] Bradbury, R.: 451° Fahrenheita, Odeon, Praha 1978
- [2] Bulat, V. L.: Podžeg ili ne podžeg?, 12, Kvant, 1974

- [3] Flajšingr, V.: Nad jedním soutěžním problémem, 5, Matematika a fyzika ve škole, 1982
- [4] Karpov, N. V. - Prochorov, A. M.: Lasery, 6, Rozhledy matematicko-fyzikální, 1973
- [5] Semenčinskij, S. G.: Linzy, zrkala i Archimed, 12, Kvant, 1974
- [6] Smejkal, L.: Dědictví chytrých, Albatros, Praha 1977
- [7] Tulčinskij, M. J.: Zbierka kvalitatívnych úloh z fyziky, Alfa, Bratislava 1978
- [8] Tůma, J.: Ohnivá jehla, 12, ABC mladých techniků a přírodovědců, 1981

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Janko Hraško v Paralelolande II.

ANNA MICHALCOVÁ, Zvolen, MILAN HEJNÝ, Bratislava

Rekapitulácia časti I. Riadením osudu sa záhorský šarvanec Janko Hraško dostáva do Paralelolandu, zeme, v ktorej nepoznajú kružidlo ani odpichovadlo, merítka ani uhlomer. Paralelolandskí vedci poznávajú geometrické vlastnosti svojho priestoru iba pomocou pravítka, ceruzy a rovnobežnítky, nástroja, ktorým sa dá viesť daným bodom rovnobežka s danou priamkou.

Janko Hraško, oboznámený s ďaleko bohatšou geometriou, si zaumieni stať sa na základe svojich znalostí prvým geometrom Paralelolandu. Ku sláve postupuje systematicky. Vypíše si základné paralelolandské konštrukcie:

1. Dané dva rôzne body spojiť priamkou.
2. Nájsť priesečník dvoch rôznobežných priamok.
3. Daným bodom viesť rovnobežku s danou priamkou.

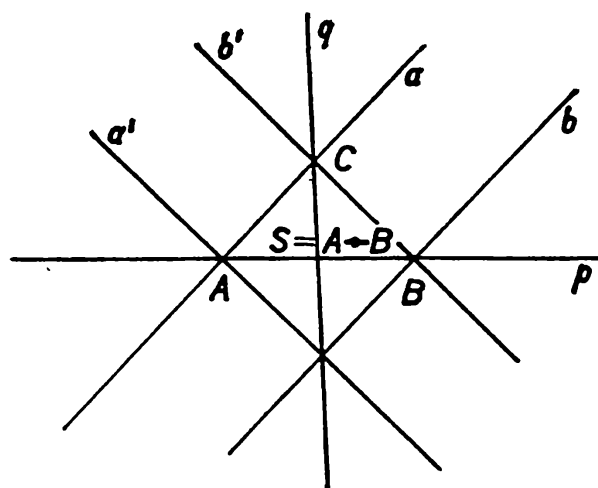
Pomocou týchto a iba týchto konštrukcií bude Janko riešiť všetky ďalšie príklady.

Od priateľky (Para)lilky sa Janko dozvie, že v Paralelolande musí každý ôsmak vedieť riešiť istých 6 úloh. Janko sa pustí do ich riešenia.

Keď po dvoch dňoch prišla Lilka navštíviť Janka, mal už riešenia všetkých šiestich úloh pedantne zapísané. Ukázal Lilke riešenie prvej úlohy:

Ú. 1. Danú úsečku AB rozdeliť napoly (pozri obr. 3).

Riešenie: 1. volím a : $A \in a$; 2. konštruujem b : $B \in b \parallel a$ (3); 3. volím a' : $A \in a'$; 4. konštruujem b' : $B \in b' \parallel a'$ (3); 5. konštruujem C : =



Obr. 3

$= a \cap b' (2)$; 6. konštruujem $D: = a' \cap b (2)$; 7. konštruujem $p: =$
 $\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$
 $AB (1)$; 8. konštruujem $q: = CD (1)$; 9. konštruujem $S: = p \cap q (2)$;
 tvrdím, že $S = A + B$ je stred úsečky AB .

Lilka si Jankove riešenie chvíľu prezerala a potom povedala:

L: Ak tomu dobre rozumiem, tak tvoja konstrukcia sa skladá z deviatich krokov. V prvom kroku si zvolíš priamku a tak, aby prechádzala cez bod A .

J: Áno.

L: V druhom kroku cez bod B vedieš rovnobežku b s priamkou a .

J: Áno. A táto trojka tu (ukazuje na symbol „(3)“) značí, že to môžem urobiť pomocou základnej konštrukcie 3.

L: V treťom kroku zvolíš priamku a' cez bod A , vo štvrtom kroku vedieš cez B rovnobežku b' s priamkou a' atď..

J: Skvele. Pochopila si to okamžite.

L: Nie celkom. Prečo si nepripísal nič ku kroku 1. a kroku 3.? Všade máš v zátvorke uvedené číslo základnej konštrukcie, ale pri týchto dvoch krokoch ti to číslo chýba.

J: Chýba? Nechýba! Tam nič písať netreba. To totiž nie je konštrukcia, ale voľba. Nerysujem nejakú presne určenú priamku, ale z nekonečného množstva priamok idúcich cez bod A volím jednu.

L: A jak som si myslela, že keď povieš „rysujem“, že to značí „konštruujem“. Mimochodom, ako vieš, že taká priamka existuje?

Táto otázka Janka zaskočila. Spočiatku sa mu zdala veľmi hlúpa, ale čím viac o nej uvažoval, tým viac bol ochotný pripustiť jej opodstatnenosť. Napokon privolil.

J: Dobre teda. Keď chceš, urobím to inak. Nebudem voliť priamku cez bod A , ale zvolím priamo bod C . Potom postupne konštruujem:

$\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$
 2. $a: = AC (1)$; 3. $b': = BC (1)$; 4. $b: B \in b \parallel a (3)$; 5. $a': A \in a' \parallel b'$

↔

(3); 6. $p: = AB$ (1); 7. $D: = a' \cap b$ (2); 8. $q: = CD$ (1); 9. $A + B = S: = p \cap q$ (2). A je to!

L: Nehnevaj sa, Janičko, možno že som hlúpa, ale stále mi akosi ten začiatok nelezie do hlavy. Ako to, že si mohol voliť bod C ? Podľa ktorej základnej konštrukcie?

Janko sa na chvíľu odmlčí a tvrdo rozmýšľa. Má Lilka pravdu, alebo nemá? Zrazu mu svitne a pochopí, že Lilka hovorí múdro.

J: Máš pravdu, Lilka. S tými tromi základnými konštrukciami nevystačíme. Potrebujeme pridať ešte štvrtú základnú konštrukciu: „V rovine vždy môžeme zvoliť bod alebo priamku.“ Táto konštrukcia mi umožní povedať „zvolím si priamo bod C “ a riešenie je už hádam v poriadku.

L: Teraz mi je to jasné. Myslím, že to doplnenie bolo potrebné. Ale vieš čo? Keď tak nad tým uvažujem, jedna drobnosť mi predsa ešte nie je celkom zrejmá. Ten tvoj návod pre konštrukciu $A + B$ je všeobecný?

J: Čo tým zas myslíš?

L: Či ti ten návod musí vždy vychádzať. Nikdy nemôže vybuchnúť?

J: Nikdy. To je jasné!

↔

L: Aj keby som náhodou bod C zvolila na priamke AB ?

Janka už začali Lilkine poznámky rozčuľovať, o čom svedčí aj to, že začal hovoriť rodnou záhoráčinou.

J: Ja si to tak sprostó neurobím!

L: Teda tvoj návod platí len pre teba, keď budeš voliť tak, ako ty chceš, nie?

J: No áno. Ale puací aj pro tebja, keď mi nebudeš robiť proci!

L: Ja nerobím prieky, len sa držím presne toho návodu, čo si povedal.

J: Tak dobre. Nech je po tvojom. Upresním svoje riešenie.

↔

Janko k vete „Zvolím si priamo bod C “ dopísal „mimo priamku AB “. Potom sa obrátil k Lilke.

J: Spokojná?

L: O mňa nejde, hlavne, že si spokojný ty.

J: Ja som spokojný najmä preto, že si spokojná ty.

L: Lenže ja spokojná nie som.

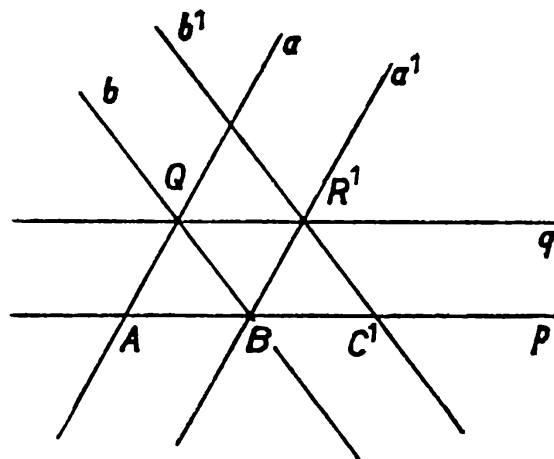
J: Co zas vymýšľaš?

L: Len to, že zo základných konštrukcií nevyplýva, že taký bod C vieš zvoliť.

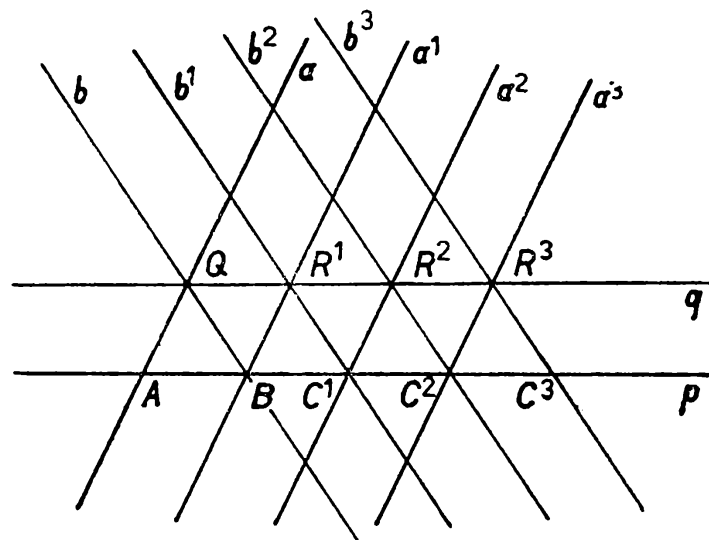
J: A to už ako?

L: Podľa dodanej štvrtej základnej konštrukcie vieš, že bod C môžeš zvoliť. Ja si to predstavujem takto: vezmeš do ruky ceruzu, zavrieš oči a pichneš ňou do papiera. Tak si si zvolil bod C .

J: Proč by sem zavírau oči? Naopak. Najprv si nakreslím priamku



Obr. 5



Obr. 6

Platí $|AM| = |ME| = |EN| = |NB| = \frac{1}{4} |AB|$.

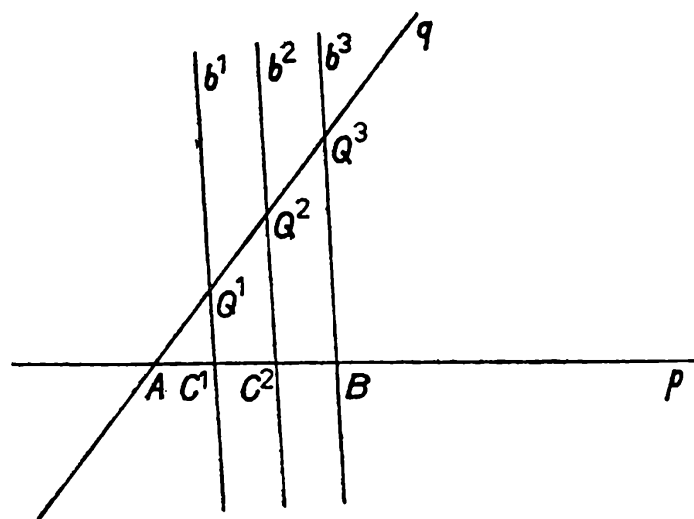
Ú. 3. Zdvojnásobiť danú úsečku AB (pozri obr. 5).

Riešenie: 1. zvolím $Q \notin AB$ (4); 2. $p := AB$ (1); 3. $a := AQ$ (1);
 4. $a^1: B \in a^1 \parallel a$ (3); 5. $q: Q \in q \parallel p$ (3); 6. $R^1 := a^1 \cap q$ (2); 7. $b := BQ$ (1);
 8. $b^1: R^1 \in b^1 \parallel b$ (3); 9. $C^1 = s_B(A) := p \cap b^1$ (2).
 Platí $|AC^1| = 2|AB|$.

Ú. 4. Zostrojiť n -násobok úsečky AB (pozri obr. 6).

Riešenie: pre $n = 2$ pozri predchádzajúcu úlohu. Pre $n > 2$, $n \in N$ je konštrukcia po bod C^1 zhodná s Ú. 3. Ďalej konštruujeme: 10. $a^2: C^1 \in a^2 \parallel a$ (3); 11. $R^2 := a^2 \cap q$ (2); 12. $b^2: R^2 \in b^2 \parallel b$ (3); 13. $C^2 := p \cap b^2$ (2); platí $|AC^2| = 3|AB|$. Podobne ďalej, až $C^{n-1}: p \cap b^{n-1}$ (2); kde $|AC^{n-1}| = n|AB|$.

Ú. 5. Rozdeliť danú úsečku AB na tri rovnaké časti (pozri obr. 7.).



Obr. 7

Riešenie: 1. zvolím $Q^1 \notin AB$ (4); 2. $q: = A Q^1$ (1); 3. $p: = AB$ (1); 4. podľa Ú. 4. zostrojíme body Q^2, Q^3 , pre ktoré platí $|A Q^1| = |Q^1 Q^2| = |Q^2 Q^3|$; 5. $b^3: = B Q^3$ (1); 6. $b^2: Q^2 \in b^2 \parallel b^3$ (3); 7. $C^2: = b^2 \cap p$ (2); 8. $b^1: Q^1 \in b^1 \parallel b^3$ (3); 9. $C^1: = b^1 \cap p$ (2).

Platí $|A C^1| = |C^1 C^2| = |C^2 B| = \frac{1}{3} |A B|$

Ú. 6. Rozdeliť danú úsečku AB na n rovnakých častí.

Riešenie: konštrukcia ako v Ú. 5 pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$. Na priamke q zostrojíme n bodov $Q^1, Q^2, \dots, Q^n$, pre ktoré platí $|A Q^1| = |Q^1 Q^2| = \dots = |Q^{n-1} Q^n|$. Podľa Ú. 5. zostrojíme priamky $b^n, \dots, b^1$ a body $C^{n-1}, \dots, C^1$, pre ktoré platí

$$|A C^1| = |C^1 C^2| = \dots = |C^{n-1} B| = \frac{1}{n} |A B|.$$

Lilka si prezrela všetky Jankove riešenia a musela uznať, že na začiatočníka je to vynikajúce. Ten chalan je múdry. Možno by vedel vyriešiť aj spor bratov Hnevajovcov. Povedala:

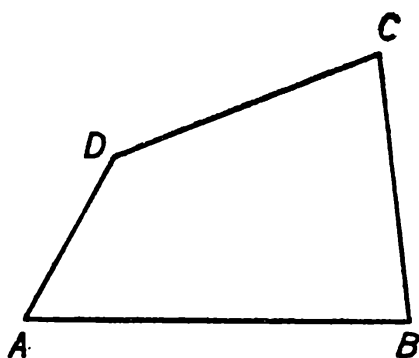
L: Janko, ty si taký šikovný, ty by si určite vyriešil spor bratov Paľa a Ďura Hnevajovcov.

J: A čo je to za spor? Rozprávaj rýchlo! Už som zvedavý.

L: Pred rokom zomrel Paľovi a Ďurovi otec. Zanechal im pole, ktoré malo tvar štvoruholníka (pozri obr. 8). Každý z bratov mal z neho dostať polovicu...

J: To je predsa jednoduché! Pozri, takto (a začal pole deliť).

L: Áno, tak si pole rozdelili aj bratia, ale dlho spokojní neboli. Paľovi sa totiž ušla časť, ktorá je nekonvexná. Namietal, že nekonvexné pole sa horšie obrába, a žiadal, aby rozdelili pole nanovo tak, aby boli obe časti konvexné. Podarilo sa to. Paľo dostal pole trojuholníkové



Obr. 8

a Ďuro štvoruholníkové konvexné. Aj to sa im videlo nespravodlivé. Preto hľadali niekoho, kto by im rozdelil pole na dve konvexné štvoruholníkové časti, samozrejme rovnoploché.

J: Nenašli nikoho, a preto to mám skúsiť ja, pravda!

L: Ale nie! Našli. Našli dokonca tak šikovného geometra, ktorému mohli ešte určiť na hranici poľa bod a on cez tento bod viedol deliacu úsečku, ktorá pole rozdeľuje.

J: Nuž, v čom je teda chyba?

L: Chyba je v tom, že ani jedno teraz nerodí. Úroda, ktorú bratia zobrali, je slabá. Vraj preto, že narušili tvar otcovho poľa. Bratia tomu veria. Rozhodli sa rozdeliť pole na dve rovnoploché časti tak, aby jedna z častí bola podobná s pôvodným otcovým poľom.

J: A nepohádajú se potom o túto časť?

L: Nie. Rozhodli sa meniť si polia každým rokom, len aby sa tvar jedného zachoval. No a tu je ten problém. Doteraz v Paralelolande nenašli nikoho, kto by to dokázal. Janko, však to skúsiš?

J: Pravdaže skúsím. A určite sa mi to podarí. Najskôr urobím všetky predchádzajúce delenia, aby som sa uistil, či nespravili niekde chybu. A potom sa pustím do problému.

O tom, ako Janko úlohy riešil a či vyriešil aj problém bratov Hneva-jovcov, sa dozviete v budúcej záverečnej časti seriálu.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Víte, kolika způsoby lze řešit případ odebrání části plynu z bomby za stálé teploty?

Doc. RNDr. EVA PROCHÁZKOVÁ, CSc., PdF České Budějovice

Při přijímacích zkouškách z fyziky na pedagogické fakultě se objevil příklad, který uchazeči řešili různými způsoby. K řešení přistupovali většinou intuitivně, aniž podávali řádné zdůvodnění postupu. Je zajímavé, že způsobů řešení je poměrně hodně. Uvádíme zde pět možností i s patřičným vyvozením.

Zadání příkladu:

Z tlakové láhve s plynem o objemu $V_1 = 40$ litrů a počátečním tlaku $p_1 = 8,2$ MPa byla odebrána část plynu. Tlak v láhvi klesl na $p_2 = 7$ MPa při nezměněné teplotě. Určete objem V_3 odebraného plynu při tlaku $p_3 = 0,1$ MPa a téže teplotě.

1. způsob řešení:

Vyjdeme z Daltonova zákona upraveného v našem případě na tvar

$$p_1 V_1 = p_2 V_1 + p_3 V_3, \quad (1)$$

kde na levé straně je součin tlaku a objemu plynu jako celku a na pravé straně je součet součinů tlaků a objemů částí plynu.

Vycházíme zde z představy, že plyn o původním stavu p_1, V_1 se při stálé teplotě T rozdělil na dvě části o stavu p_2, V_1 a p_3, V_3 , jejichž smísením by bylo možno opět plyn v původním stavu získat. Všechn plyn má v bombě tlak p_1 . Plyn zbylý v bombě má v ní tlak p_2 . Kdybychom odebraný plyn vrátili do bomby mající objem V_1 , jeho tlak v bombě p'_3 by se dal vypočítat z Boylova-Mariottova zákona

$$p'_3 V_1 = p_3 V_3; \quad (2)$$

odtud plyne

$$p'_3 = \frac{p_3 V_3}{V_1}. \quad (3)$$

Daltonův zákon stanoví, že každý plyn ve směsi ostatních plynů uzavřených v určitém prostoru se chová tak, jako by sám vyplňoval celý prostor [1]. To znamená, že částečný tlak (parciální tlak) každé jednotlivé složky plynu není ovlivněn přítomností ostatních složek ve směsi a celkový tlak směsi je dán součtem parciálních tlaků. Parciální tlaky uvažujeme obvykle u různých druhů plynu, ale není důvod, proč bychom je nemohli uvažovat i u dvou částí náplně bomby složené

z týchž plynů. V našem případě lze tedy pro celkový tlak a parciální tlaky částí plynu v bombě napsat vztah

$$p_1 = p_2 + p'_2. \quad (4)$$

Vynásobením této rovnice objemem V_1 , v němž jsou plyny „ve směsi“, dostaneme

$$p_1 V_1 = p_2 V_1 + p'_2 V_1. \quad (5)$$

Sem můžeme dosadit za $p'_2 V_1$ ze vztahu (2), takže dostaneme

$$p_1 V_1 = p_2 V_1 + p_2 V_2,$$

což je již uvedená rovnice (1).

Další úpravou této rovnice dostaneme vztah

$$V_2 = V_1 \frac{p_1 - p_2}{p_2}, \quad (6)$$

kam lze dosadit číselné hodnoty veličin.

2. způsob řešení:

Lze uvažovat také jinak:

Původní stav plynu byl p_1 , V_1 ; nový stav plynu při téže teplotě T je tento: část zůstala v bombě o objemu V_1 , kde má tlak p_2 , část byla odebrána a při tlaku p_2 by měla objem V'_2 . Můžeme tedy sestavit rovnici vyjadřující Boyleův-Mariottův zákon:

$$p_1 V_1 = p_2 (V_1 + V'_2). \quad (7)$$

Pro objem V_2 při tlaku p_2 platí rovněž Boyleův-Mariottův zákon, a to ve tvaru

$$p_2 V'_2 = p_2 V_2. \quad (8)$$

Dosazením tohoto výrazu do rovnice (7) dostaneme vztah

$$p_1 V_1 = p_2 V_1 + p_2 V_2,$$

který je totožný s výchozím vztahem (1) prvního způsobu řešení a vede ke konečnému výrazu (6), který je obecným řešením úlohy.

3. způsob řešení:

Tento postup řešení je modifikací druhého způsobu řešení, ve výchozí rovnici vyjadřující Boyleův-Mariottův zákon se však uvažuje souhrnný objem obou částí plynu při tlaku p_2 ; označíme ho V_2 a rovnice má pak tvar

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (9)$$

Odtud lze určit

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2}. \quad (10)$$

Objem V_2 se skládá z objemu V_1 zbylého plynu v bombě a objemu V'_2 odebraného plynu o tlaku p_2 , takže $V_2 = V_1 + V'_2$, odtud

$$V'_2 = V_2 - V_1. \quad (11)$$

Po dosazení z rovnice (10) a vytknutí V_1 dostaneme

$$V'_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) = V_1 \frac{p_1 - p_2}{p_2} \quad (12)$$

Objem V_3 při tlaku p_3 vypočteme opět z Boylova-Mariottova zákona, podle něhož

$$p_3 V'_3 = p_3 V_3,$$

odtud

$$V_3 = V'_3 \frac{p_2}{p_3}. \quad (13)$$

Po dosazení ze vztahu (12)

$$V_3 = V_1 \frac{p_1 - p_2}{p_3} \cdot \frac{p_2}{p_3} = V_1 \frac{p_1 - p_2}{p_3}.$$

Dospěli jsme opět k výrazu (6).

4. způsob řešení:

Při dalším způsobu řešení vyjdeme z těchto úvah:

Při stálé teplotě T je při tlaku p_1 v bombě plyn o hmotnosti m_1 , při tlaku p_2 je v bombě plyn o hmotnosti m_2 . Bomba má objem V_1 . Platí

$$m_1 : m_2 = p_1 : p_2. \quad (14)$$

Tento vztah lze odvodit ze stavových rovnic pro oba stavy plynu:

$$\frac{p_1 V_1}{T} = \frac{m_1}{M} R, \quad \frac{p_2 V_1}{T} = \frac{m_2}{M} R, \quad (15)$$

kde M je molární hmotnost plynu. Vydělením rovnic dostaneme uvedený vztah.

Uvažujeme-li plyn o stálém tlaku, např. o tlaku p_1 , pak objemy V_1 , V'_1 obou množství plynu při tomto tlaku jsou úměrné hmotnostem m_1 , m_2 a platí $V_1 : V'_1 = m_1 : m_2$.

$$(16)$$

Rovněž tento vztah plyne ze stavových rovnic pro dvě množství plynu při stálém tlaku a teplotě

$$\frac{p_1 V_1}{T} = \frac{m_1}{M} R, \quad \frac{p_1 V'_1}{T} = \frac{m_2}{M} R \quad (17)$$

jejich vydělením.

Po dosazení do předešlé úměry dostaneme

$$V_1 : V'_1 = p_1 : p_2, \quad (18)$$

kde oba objemy, jak už bylo řečeno, jsou uvažovány při témž tlaku p_1 . Odtud

$$V'_1 = \frac{V_1 p_2}{p_1}. \quad (19)$$

Při tlaku p_1 byl původní objem plynu V_1 ; plyn, který zůstal v bombě, by měl při tlaku p_1 objem V'_1 a plyn, který byl z bomby odebrán, by při tlaku p_1 měl objem $V'_2 = V_1 - V'_1$.

$$(20)$$

Objem V_3 odebraného plynu při tlaku p_3 určíme z Boylova-Mariottova zákona ve tvaru

$$p_1 V'_2 = p_3 V_3, \quad (21)$$

odtud

$$V_2 = V'_2 \frac{p_1}{p_2}. \quad (22)$$

Po dosazení nejprve ze vztahu (20) a pak z (19) dostaneme

$$V_2 = (V_1 - V'_1) \frac{p_1}{p_2} = V_1 \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) \frac{p_1}{p_2} = V_1 \frac{p_1 - p_2}{p_2}$$

Výsledek je též jako vztah (6) z dosavadních způsobů řešení.

5. způsob řešení:

Jestliže odebráním plynu z objemu V_1 poklesne tlak z p_1 na p_2 , znamená to, že část plynu zbylá v bombě má v objemu V_1 tlak p_2 a odebraná část plynu měla původně v objemu V_1 parciální tlak $(p_1 - p_2)$; to můžeme ověřit skutečností, že jejím vrácením do bomby by musel tlak plynu v bombě opět vzrůst na hodnotu danou součtem parciálních tlaků obou částí plynu neboli na hodnotu $p_2 + (p_1 - p_2) = p_1$. (24)

Pro odebranou část plynu, která by při tlaku p_2 měla objem V_2 , můžeme sestavit vztah plynoucí z Boyleva-Mariottova zákona, tj.

$$V_1 (p_1 - p_2) = V_2 p_2. \quad (25)$$

Odtud rovnou plyne

$$V_2 = V_1 \frac{p_1 - p_2}{p_2},$$

což je opět řešení (6) úlohy.

Pro dosazení do vztahu (6) upravíme zadané hodnoty veličin takto:

$$\begin{aligned} V_1 &= 40 \text{ l} = 0,040 \text{ m}^3, \\ p_1 &= 8,2 \text{ MPa} = 8,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \\ p_2 &= 7 \text{ MPa} = 7 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \\ p_2 &= 0,1 \text{ MPa} = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme výsledek:

$$V_2 = 0,040 \cdot \frac{(8,2 - 7) \cdot 10^6}{0,1 \cdot 10^6} \text{ m}^3 = 0,040 \frac{1,2}{0,1} \text{ m}^3 = 0,48 \text{ m}^3.$$

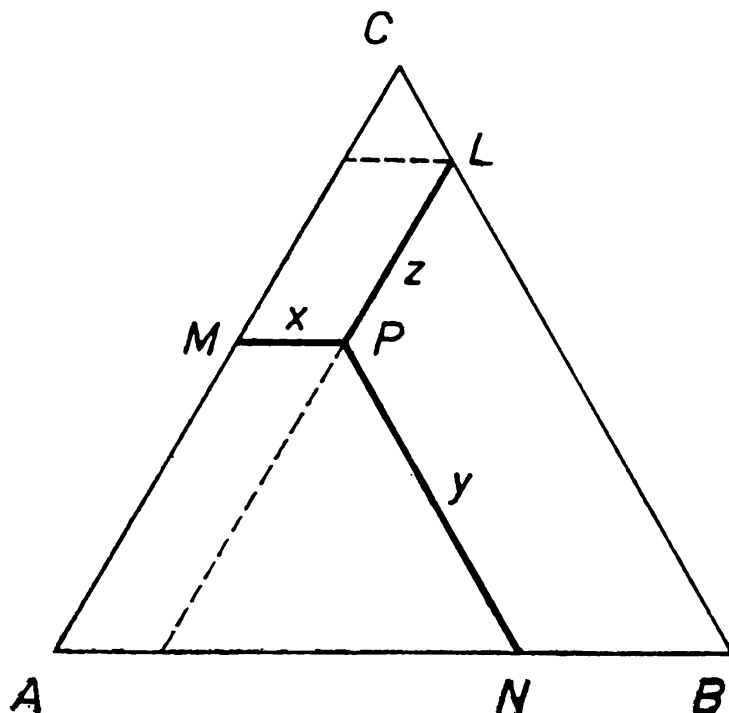
Uvedli jsme zde několik způsobů řešení zadané úlohy. Kdyby vás napadly ještě jiné postupy, napište je do redakce!

Literatura

- [1] Hlavička A. a kol.: Fyzika pro pedagogické fakulty I (2. vyd.). SPN Praha 1978.

O jakou úlohu jde?

Představte si, že se díváte do zahraničního žákovského matematického časopisu, který je v jazyce, jemuž vůbec nerozumíte, a že v něm vidíte obrázek:



Pokuste se zformulovat a pak vyřešit úlohu, jejíž řešení by mohl tento obrázek ilustrovat. Takovou úlohu nemusíte samozřejmě vymyslet jen jednu.

Jiří Mída

Poznámka redakce: Úlohy, které vytvoříte, můžete zaslat do redakce; nejzajímavější otiskneme.

Pascalův pokus o tlaku vzduchu

Podle aristotelské fyziky vzduch nemůže působit na zemský povrch tlakem, protože prý přirozené místo lehkého vzduchu je nahoře a pevné země dole; snaží se tedy od sebe oddělit — a to by se jim podařilo, nebýt ještě silnějšího principu *horror vacui*, tj. strachu přírody z prázdnoty.

Torricelli sice vymyslel pokus, který poté provedl *Viviani* a jehož výsledkem je Torricelliho vakuum nad hladinou rtuti v trubici, leč zastánci starých ideí se bránili tím, že strach přírody z prázdnoty má určitou konečnou hodnotu, nebo že rtuť není vytlačena vzhůru o 760 mm tlakem vzduchu, ale prý rtuťové částice jsou vázány neviditelnými nitěmi ke „stropu“ trubice atd. Teprve vtipný pokus *Pascalův* rázem vyvrátil všechny tyto možnosti.

Naplníme-li rtutí celou *Pascalovu* kombinovanou trubici (dlouhou něco přes 1,5 metru), uzavřeme střední otvor palcem a obrátíme dolů jako u pokusu *Torricelliho*, zůstane rtuť v dolní trubici ve výši asi 76 cm a ve střední rozšířené části je rovněž malé jezírko rtuti. Proč tedy zůstává viset rtuť na domnělých vlákních zavěšených na kůži našeho palce a nikoli v horní trubici? Na otázku nám odpoví sama příroda v okamžiku,



kdy palec odkryjeme: rtuť z jezírka vyběhne v horní trubici do výše 76 cm, v dolní trubici je stlačena na nulovou úroveň. *Guerickeho* pokusy s vývěvou byly sice efektnější, ale pokus *Pascalův* je názornější a přesvědčivější.

Vladimír Malíšek

SNTL — Nakladatelství technické literatury
SNTL — Nakladatelství technické literatury
 vydalo v letech 1981 až 1984 čtyřdílnou knihu

OD LOGICKÝCH OBVODŮ K MIKROPROCESORŮM,

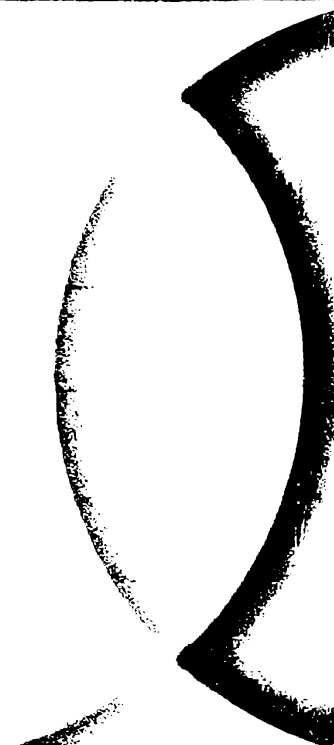
kteřá byla přeložena z francouzštiny. Napsali ji Jean-Michel Bernard, Jean Hugot a Robert le Corvec.

Kniha je určena studentům vysokých škol technického směru a projektantům automatických systémů logického typu. Mohou ji však s úspěchem studovat i zájemci z řad žáků středních škol.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3\$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, ČSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1985.



ROZHLEDY

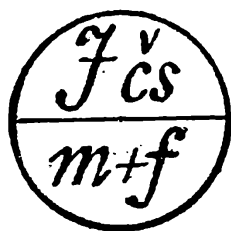
**matematicko
– fyzikální**



**ROČNÍK 63, 1984/85
ČERVEN**

(10)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP
Olomouc, doc. dr. Milan Hejný
CSc., UK, Bratislava, Stanislav Ho-
rák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr.
Ján Chrapan, CSc., VVTŠ - ČSSP
Liptovský Mikuláš, doc. Jaroslav
Chudý ČVUT Praha, doc. ing. Zde-
něk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Hana Kořínková, CSc.,
ÚÚVPP Praha, prof. dr. Vladimír Ma-
jerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Ka-
rel Mižoň, CSc., ČVUT Praha, doc.
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha, dr. Martin Šolc, CSc.,
UK Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigová 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

L. Jelinek: Z finitní geometrie – neřeši- telný problém dlouhé ploché dráhy	433
E. Kraemer: Hyperbola v polární sou- stavě souřadnic .	438
R. Hudec: Nový pohled na Mars (2) .	444
J. Kotyk: 350 let od narození Roberta Hooka	446
J. Mída: O jednom neobvyklém kódování	448
A. Michalcová, M. Hejný: Janko Hraško v Paralelolandě III .	450
Úlohy domácí části I. kola 35. ročníku MO, školní rok 1985/86 .	454
Úlohy pro I. kolo XXVII. ročníku FO	458
Z nových knih .	474
D. Jedinák: Drobné poznatky velkých	474
Pohledy do dějin .	. 3. str. obálky

Z finitní geometrie - neřešitelný problém dlouhé ploché dráhy

RNDr. LIBOR JELÍNEK, UK Praha

Princip analytické geometrie v eukleidovské rovině spočívá na existenci vzájemně jednoznačného zobrazení množiny bodů roviny na množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Pomocí kartézské soustavy souřadnic je každému bodu X přiřazena uspořádaná dvojice $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; x, y jsou souřadnice bodu X . V dané kartézské soustavě souřadnic pak přímo píšeme $X = (x, y)$, tedy ztotožníme bod roviny s uspořádanou dvojicí jeho souřadnic.

Podobně lze každou přímku roviny popsat analytickou rovnicí $ax + by + c = 0$ ($a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ nebo $b \neq 0$). Tato korespondence není sice vzájemně jednoznačná, ale pro nás je podstatné to, že neexistuje přímka, kterou bychom nemohli rovnicí tohoto tvaru charakterizovat.

Když místo z tělesa $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vyjdeme z některého konečného tělesa $(T_n, +, \cdot)$, viz [2], vytvoříme užitím metody analytické geometrie tak zvanou *konečnou afinní rovinu řádu n* nad tělesem $(T_n, +, \cdot)$. Za sestrojenou ji budeme považovat tehdy, když popíšeme množinu bodů, množinu přímek a vzájemnou incidenci (tj. který bod leží na které přímce).

Předvedeme si nyní konstrukci konečné afinní roviny nad tělesem $(T_4, +, \cdot)$. Sledujte pozorně postup a potom sestrojte samostatně afinní rovinu nad některým jiným konečným tělesem.

Připomeňme si, viz [2], že $T_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ a operace $+, \cdot$ jsou definovány těmito tabulkami:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Množina bodů vytvářené afinní roviny obsahuje 4^2 bodů odpovídajících uspořádaným dvojicím $(0, 0), (0, 1), \dots, (3, 3)$, označme je $A, B, \dots, P$. Užitím analogie s kartézskou soustavou souřadnic je sestavíme do schématu:

$$\begin{array}{llll}
M = (0, 3) & N = (1, 3) & O = (2, 3) & P = (3, 3) \\
I = (0, 2) & J = (1, 2) & A = (2, 2) & L = (3, 2) \\
E = (0, 1) & F = (1, 1) & G = (2, 1) & H = (3, 1) \\
A = (0, 0) & B = (1, 0) & C = (2, 0) & D = (3, 0)
\end{array}$$

Množinu přímek nejlépe postihneme systematickým výčtem rovnic tvaru $ax + by + c = 0$, kde a, b, c jsou prvky množiny T_4 a samozřejmě $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$.

Je-li $a = 0, b = 1, c \in \{0, 1, 2, 3\}$, sestavíme čtyři analytické rovnice navzájem rovnoběžných přímek:

$$\begin{array}{ll}
y = 0 & \text{(I)} \\
y + 1 = 0 & \text{(II)} \\
y + 2 = 0 & \text{(III)} \\
y + 3 = 0 & \text{(IV)}
\end{array}$$

O jejich rovnoběžnosti v naší afinní rovině se přesvědčíme tím, že určíme, které body na jednotlivých přímkách leží. Nemají-li totiž přímky společný bod, jsou rovnoběžné, neboť leží v téže rovině.

Nejprve však dokončíme systematický výčet:

$$\begin{array}{ll}
a = 1, \quad b = 0 & \begin{array}{l} x = 0 \quad \text{(V)} \\ x + 1 = 0 \quad \text{(VI)} \\ x + 2 = 0 \quad \text{(VII)} \\ x + 3 = 0 \quad \text{(VIII)} \end{array} \\
a = 1, \quad b = 1 & \begin{array}{l} x + y = 0 \quad \text{(IX)} \\ x + y + 1 = 0 \quad \text{(X)} \\ x + y + 2 = 0 \quad \text{(XI)} \\ x + y + 3 = 0 \quad \text{(XII)} \end{array} \\
a = 1, \quad b = 2 & \begin{array}{l} x + 2y = 0 \quad \text{(XIII)} \\ x + 2y + 1 = 0 \quad \text{(XIV)} \\ x + 2y + 2 = 0 \quad \text{(XV)} \\ x + 2y + 3 = 0 \quad \text{(XVI)} \end{array} \\
a = 1, \quad b = 3 & \begin{array}{l} x + 3y = 0 \quad \text{(XVII)} \\ x + 3y + 1 = 0 \quad \text{(XVIII)} \\ x + 3y + 2 = 0 \quad \text{(XIX)} \\ x + 3y + 3 = 0 \quad \text{(XX)} \end{array}
\end{array}$$

Rovnice přímek jsme označili pomocí římských číslic (I) až (XX). Každá čtveřice tvoří, stejně jako (I) až (IV), svazek navzájem rovnoběžných přímek.

Dalším pokračováním bychom získali pouze rovnice ekvivalentní s některou již uvedenou.

Například pro $a = 0, b = 2$ je

$$\begin{array}{ll}
2y = 0 & \text{ekvivalentní s (I),} \\
2y + 1 = 0 & \text{ekvivalentní s (IV),}
\end{array}$$

neboť provedením ekvivalentních úprav obdržíme rovnici (IV):

$$\begin{array}{rcl} 2y + 1 = 0 & & /.3 \\ 3 \cdot 2y + 3 \cdot 1 = 0 & & \\ 1 \cdot y + 3 = 0 & & \\ y + 3 = 0 & & \text{atd.} \end{array}$$

(výsledky jednotlivých operací nacházíme v tabulce, například $3 \cdot 2 = 1$)

Dále zkoumejme, s kterými body jednotlivé přímky incidují:

přímka (I): $y = 0$ zřejmě inciduje s body, které mají druhou souřadnici nulovou, tedy s body $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (3, 0)$;

přímka (II): $y + 1 = 0$ inciduje s body $E = (0, 1)$, $F = (1, 1)$, $G = (2, 1)$, $H = (3, 1)$, neboť rovnici $y + 1 = 0$ lze ekvivalentními úpravami převést na tvar $y = 1$ takto:

$$\begin{array}{rcl} y + 1 = 0 & & /+1 \\ y + 1 + 1 = 0 + 1 & & (1 + 1 = 0) \\ y = 1 & & \end{array}$$

Obecný postup nalezení bodů ležících na přímce si předvedeme na příkladu (XX): $x + 3y + 3 = 0$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Je-li } x = 0, \text{ pak} & 0 + 3y + 3 = 0 & /+3 \\ & 3y + 3 + 3 = 0 + 3 & (3 + 3 = 0) \\ & 3y + 0 = 3 & / \cdot 2 \\ 2 & 3y = 2 & 3 \quad (2 \cdot 3 = 1) \\ & y = 1 & \end{array}$$

Leží tedy na přímce (XX) bod $E = (0, 1)$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Je-li } x = 1, \text{ pak} & 1 + 3y + 3 = 0 & (1 + 3 = 2) \\ & 3y + 2 = 0 & /+2 \\ & 3y + 2 + 2 = 2 & (2 + 2 = 0) \\ & 3y = 2 & / \cdot 2 \\ & 2 \cdot 3y = 2 \cdot 2 & (3 \cdot 2 = 1, \\ & & 2 \cdot 2 = 3) \\ & y = 3 & \end{array}$$

Dalším bodem přímky (XX) je $N = (1, 3)$ atd.

Obdobným postupem čtenář jistě snadno určí body ležící na ostatních přímkách.

Přímka:		inciduje s body:
(I):	$y = 0$	A, B, C, D
(II):	$y + 1 = 0$	E, F, G, H
(III):	$y + 2 = 0$	I, J, K, L
(IV):	$y + 3 = 0$	M, N, O, P

Přímka:		inciduje s body:
(V):	$x = 0$	A, E, I, M
(VI):	$x + 1 = 0$	B, F, J, N
(VII):	$x + 2 = 0$	C, G, K, O
(VIII):	$x + 3 = 0$	D, H, L, P
(IX):	$x + y = 0$	A, F, K, P
(X):	$x + y + 1 = 0$	E, B, O, L
(XI):	$x + y + 2 = 0$	I, N, C, H
(XII):	$x + y + 3 = 0$	M, J, G, D
(XIII):	$x + 2y = 0$	A, N, G, L
(XIV):	$x + 2y + 1 = 0$	M, B, K, H
(XV):	$x + 2y + 2 = 0$	E, J, C, P
(XVI):	$x + 2y + 3 = 0$	I, F, O, D
(XVII):	$x + 3y = 0$	A, J, O, H
(XVIII):	$x + 3y + 1 = 0$	I, B, G, P
(XIX):	$x + 3y + 2 = 0$	M, F, C, L
(XX):	$x + 3y + 3 = 0$	E, N, K, D

Popsali jsme vyčerpávajícím způsobem konečnou afinní rovinu řádu 4 nad tělesem $(\mathbf{L}_4, +, \cdot)$. Titulek článku hovoří o souvislosti konečných geometrií se soutěžími na ploché dráze. Všimneme si několika zajímavých vlastností dané geometrické konfigurace, které nám pomohou tuto souvislost odhalit.

Šestnácti body prochází dvacet přímek, každou tvoří právě čtyři body. Přímky lze rozdělit do pěti skupin po čtyřech navzájem rovnoběžných přímkách (tzv. směrů). Každým daným bodem prochází právě jedna přímka z každé skupiny, tedy celkem pět přímek. Každou dvojici různých bodů prochází právě jedna přímka roviny.

Po uvedení těchto vlastností přijdou na možnost užití konečné afinní roviny při motocyklových závodech pravděpodobně i ti, kteří se mezi sportovní fanoušky nepočítají.

Popíšeme rozpis, podle kterého se jezdí mnohé mezinárodní soutěže jednotlivců na ploché dráze.

Startuje šestnáct jezdců a celkem se uskuteční dvacet jízd. V každé jízdě se utkají vždy čtyři jezdci. Jízdy jsou rozděleny do pěti kol po čtyřech a v každém kole startují všichni účastníci právě jednou. V pěti jízdách se tak každý závodník utká se všemi zbývajících patnácti jezdci (v každé jízdě kola se třemi). Každá dvojice jezdců se sejde na startu právě jednou, což zaručuje vysokou objektivnost soutěže.

Tentokrát vám nápadná shoda už nemohla ujít. Označíme-li jednotlivé jezdce písmeny $A, B, \dots, P$ a jízdy (I) až (XX), sestavíme užitím tabulky incidence v afinní rovině rozpis jízd soutěže, přičemž čtverice jízd vždy tvoří jedno kolo.

Profesor *Karel Havlíček* uvádí v knize [1], že se nepodařilo zjistit, kdo

a na základě čeho sestavil plán jízd motocyklových závodů na ploché dráze, odpovídající konečné afinní rovině řádu 4.

Jisté je, že v době konání prvních takových soutěží ve 30. letech našeho století mohl být rozpis sestaven pomocí teorie konečných rovin, rozpracované americkým matematikem *O. Veblenem* a jeho spolupracovníky v prvním desetiletí našeho století. Pravděpodobnější však je, že byl sestaven čistě zkusmo. Pro neznalost matematické podstaty problému hovoří i tato skutečnost: podobné soutěže se jezdí i na tak zvaných dlouhých plochých drahách, kde v jedné jízdě startuje šest jezdců. U nás jsou taková závodiště v Pardubicích a v Mariánských Lázních. Pořadatelé i sportovci by jistě přivítali i pro tyto závody rozpis jízd obdobných vlastností, jako poskytuje afinní rovina řádu 4 pro klasické soutěže na krátkých tratích. Ti, kdo se jej snaží sestavit, se však namáhají zbytečně, protože konečná afinní rovina řádu 6 neexistuje! A tedy neexistuje ani rozpis jízd, podle kterého by se v sedmi kolech o šesti jízdách utkalo třicet šest jezdců každý s každým.

Matematikové to vědí už dávno a snad i pořadatelé začínají tušit, že na dlouhých plochých drahách se bude i nadále jezdit podle rozpisů, které nejsou úplně objektivní.

Neexistence afinní roviny řádu 6 úzce souvisí s neexistencí šestiprvkového tělesa, viz [2]. Nelze ji totiž sestavit způsobem popsaným v tomto článku, tedy nad tělesem. Afinní rovinu řádu 6 (jinými slovy geometrickou konfiguraci třiceti šesti bodů a čtyřiceti dvou přímk se vzájemnou incidencí požadovaných vlastností) nelze sestavit ani jiným způsobem. Dokázal to kolem roku 1900 *G. Tarry* v souvislosti s řešením slavné Eulerovy úlohy o šestatřiceti důstojnících (sestavit 36 důstojníků šesti různých hodností ze šesti různých pluků do čtverce tak, aby v každé řadě a v každém zástupu dva důstojníci byli různých hodností a z různých pluků). *G. Tarry* ověřil systematickým výčtem nemožnost vyhovět zadání úlohy, což ve svých důsledcích dokazuje také neexistenci afinní roviny řádu 6. Navíc dnes existuje i elegantnější důkaz, opírající se o teorii čísel.

Možná se zeptáte, proč matematikové s takovým úsilím dokazují, že něco neexistuje. Odpověď je jednoduchá. I důkaz neexistence je pozitivní v tom smyslu, že ušetří spoustu sil těm, kteří v dané oblasti bádají.

V našem případě by důkaz neexistence afinní roviny řádu 6 ušetřil spoustu marné práce lidem, kteří se snažili nebo dosud snaží sestavit rozpis jízd pro dlouhou plochou dráhu. Pokud by ovšem matematický důkaz přijali.

Literatura :

- [1] Havlíček K.: Cesty moderní matematiky (Horizont, Praha 1976)
- [2] Jelínek L.: Z finitní matematiky (Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 63, č. 8, str. 342)

Hyperbola v polární soustavě souřadnic

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V článku otištěném v šestém čísle ročníku 62 (1983/84) Rozhledů matematicko-fyzikálních najde čtenář podrobný výklad o polární soustavě souřadnic a o analytickém vyjádření paraboly v této soustavě. V osmém čísle téhož ročníku Rozhledů je dokázáno, že platí tato věta:

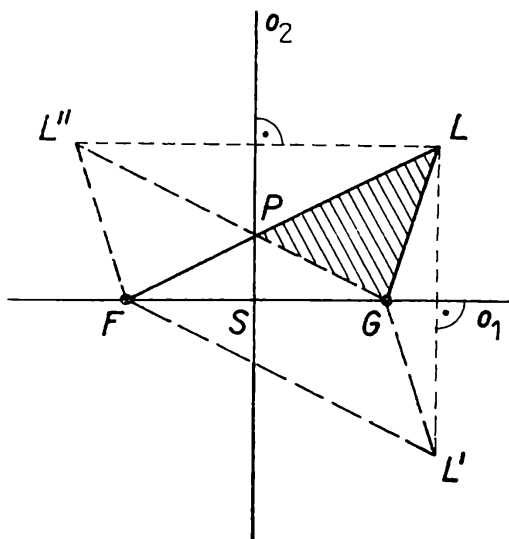
Nechť elipsa má ohniska F, G , excentricitu e a hlavní poloosu a . Potom v polární soustavě souřadnic, která má počátek v ohnisku F a polární osu v polopřímce FG , má elipsa rovnici

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

přitom je

$$\varepsilon = \frac{e}{a} < 1, \quad p = \frac{a^2 - e^2}{a}.$$

Zbývá ještě probrat rovnici hyperboly v polární soustavě souřadnic; uvidíme, že je obdobná k rovnici elipsy.



Obr. 1

Nechť F, G, L jsou body v rovině, které neleží v přímce. Jsou to tedy vrcholy trojúhelníku FGL (obr. 1). Je-li $|FL| = r$, $|GL| = r_1$, je (jak víme z geometrie)

$$|r - r_1| < |FG| < r + r_1 \quad (1)$$

Čísla r, r_1 jsou po řadě vzdálenosti bodu L od bodů F, G . Nechť různé body F, G roviny jsou nyní pevné; bod L téže roviny nechť má tu vlastnost, že $|r - r_1|$ je rovno danému kladnému číslu. Potom množina všech

bodů L této roviny, z nichž každý má právě uvedenou vlastnost, se nazývá hyperbola. Bodům F, G říkáme *ohniska hyperboly*.

Náleží-li hyperbole bod L neležící na přímce $o_1 = FG$, pak jí také náleží bod L' souměrně sdružený k bodu L podle přímky o_1 (obr. 1); přímka o_1 je tedy osou souměrnosti hyperboly. Totéž platí pro osu o_2 úsečky FG (obr. 1). Platí tedy věta, kterou nyní uvedeme.

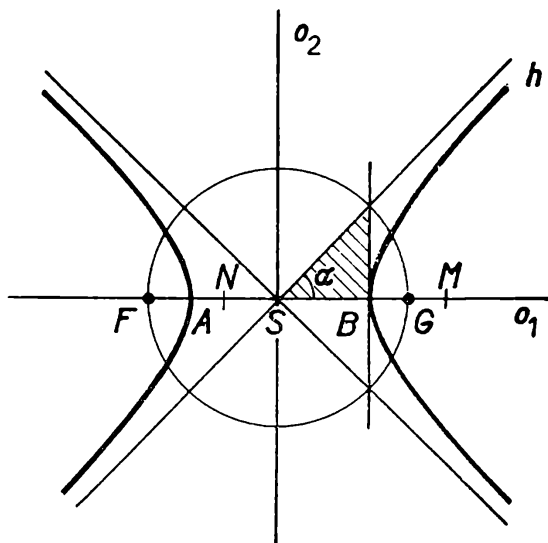
Věta 1. Hyperbola s ohnisky F, G je souměrná podle přímky $o_1 = FG$ a podle osy o_2 úsečky FG .

Přímky o_1, o_2 se nazývají *osy hyperboly*; přímce o_1 říkáme hlavní osa, přímce o_2 vedlejší osa hyperboly. Protože osy o_1, o_2 jsou vzájemně kolmé, je hyperbola souměrná podle jejich průsečíku S , jemuž se říká *střed hyperboly*. Zvolíme-li jednotku délky, pak číslo $e = |SF| = |SG|$ se nazývá excentricita hyperboly. Budiž L libovolný bod hyperboly s ohnisky F, G , $|FL| = r$, $|GL| = r_1$. Podle definice hyperboly je $|r - r_1|$ kladná konstanta; označuje se obvykle $2a$. Podle levé části nerovností (1) je $2a < 2e$, čili

$$a < e. \quad (2)$$

Číslu a říkáme *hlavní poloosa hyperboly*; důvod tohoto pojmenování je zřejmý z věty, kterou nyní dokážeme.

Věta 2. Na hlavní ose hyperboly leží právě dva její body; každý z nich má od středu hyperboly vzdálenost rovnou její hlavní poloose a .



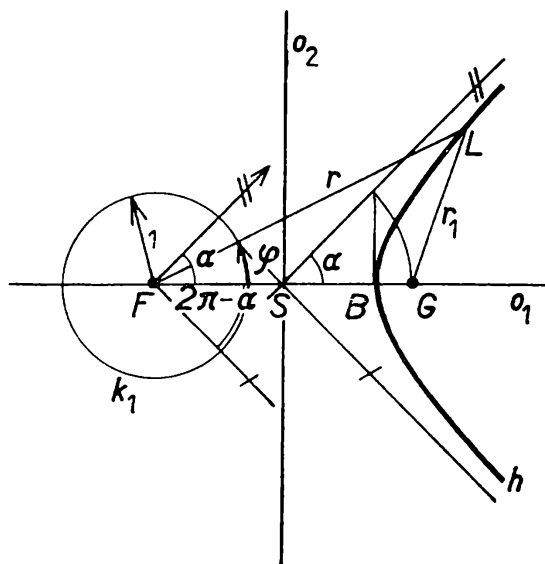
Obr. 2

Důkaz. Nechť F, G jsou ohniska s S je střed hyperboly h . Sestrojme na její hlavní ose $o_1 = FG$ body A, B tak, aby bylo $|SA| = |SB| = a$. Z nerovnosti (2) plyne, že body A, B leží uvnitř úsečky FG ; jejich označení volme tak, aby bod A ležel mezi body F, S (obr. 2). Potom je $|FB| = |FS| + |SB| = e + a$, $|GB| = |GS| - |SB| = e - a$, takže $|FB| - |GB| = 2a$; bod B je tedy bodem hyperboly h . Z konstrukce

bodu A a ze souměrnosti hyperboly podle osy o_2 úsečky FG plyne, že také bod A je bodem hyperboly h .

Budiž M libovolný bod ležící na prodloužení úsečky FG za bod G (obr. 2); potom je $|FM| - |GM| = |FG| = 2e > 2a$. Bod M není tedy bodem hyperboly. Ze souměrnosti hyperboly podle osy o_2 plyne, že totéž platí pro bod M' , který leží na prodloužení úsečky GF za bod F . Čtenář snadno dokáže, že také žádný bod N ležící mezi body F, G není bodem hyperboly.

Body A, B hyperboly, které leží na její hlavní ose, se nazývají *vrcholy hyperboly*; jsou odděleny vedlejší osou o_2 hyperboly. Jsou-li F, G ohniska této hyperboly a O je libovolný bod osy o_2 (která je osou úsečky FG), je $|FO| - |GO| = 0$; to znamená, že žádný bod osy o_2 není bodem hyperboly. Z toho plyne, že hyperbola je sjednocení dvou neprázdných bodových množin, které nemají žádný společný bod. Jedna (k níž patří vrchol A) náleží vnitřku poloroviny o_2F , druhá (obsahující vrchol B)

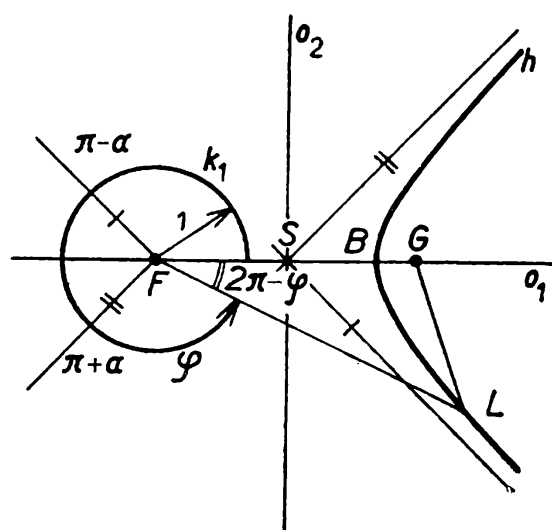


Obr. 3

náleží vnitřku poloroviny o_2G ; říkáme jim *větve hyperboly*. Ta z nich, která je částí vnitřku poloroviny o_2F , se nazývá *přílehlá k ohnisku F*; o druhé větvi říkáme, že je *přílehlá k ohnisku G*. Na obr. 2 jsou narysovány části každé z obou větví hyperboly mající ohniska F, G a vrcholy A, B .

Pomocná věta. Nechť F, G, L jsou body roviny, které neleží v přímce a o_2 je osa úsečky FG ; potom platí: Leží-li bod L uvnitř poloroviny o_2G , je $FL > GL$; leží-li bod L uvnitř poloroviny o_2F , je $FL < GL$.

Důkaz. Nechť bod L leží uvnitř poloroviny o_2G (obr. 1). Potom osa o_2 protíná úsečku FL v jejím vnitřním bodu P . Z toho, z vlastnosti osy úsečky a z trojúhelníku GPL plyne, že je $FL = FP + PL = GP + PL > GL$.



Obr. 4

Nechť polopřímka FG (je tedy $G \neq F$) je polární osa a bod F je počátek polární soustavy souřadnic v rovině. Potom libovolný bod $L \neq F$ roviny má polární souřadnice $r = |FL| > 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, což píšeme $L = [r, \varphi]$. Číslo φ je velikost orientovaného úhlu GFL ; přitom se omezuje na interval $\langle 0, 2\pi \rangle$, takže je $0 \leq \varphi < 2\pi$. Na obr. 3 a na obr. 4 je φ délka silně vytaženého oblouku kružnice k_1 , která má střed v bodu F a poloměr rovný jednotce délky. Předpokládejme nyní, že bod L neleží na přímce $o_1 = FG$; potom je $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$ a body F, G, L jsou vrcholy trojúhelníku (obr. 3, 4), jehož strany mají tyto délky:

$$|FG| = 2e, \quad |FL| = r, \quad |GL| = r_1. \quad (3)$$

Z geometrie víme, že potom platí nerovnosti uvedené v řádku (1). Je-li $0 < \varphi < \pi$, je velikost vnitřního úhlu GFL uvedeného trojúhelníku rovna číslu φ (obr. 3); je-li $\pi < \varphi < 2\pi$, je velikost téhož úhlu trojúhelníku GFL rovna číslu $2\pi - \varphi$ (obr. 4). Protože však je $\cos(2\pi - \varphi) = \cos \varphi$, platí v obou případech podle kosinové věty tato rovnost:

$$|GL|^2 = |FL|^2 + |FG|^2 - 2|FL| \cdot |FG| \cos \varphi.$$

Podle řádku (3) je tedy

$$r_1^2 = r^2 + 4e^2 - 4er \cos \varphi. \quad (4)$$

Věta 3. Nechť hyperbola h má ohniska F, G , excentricitu e a hlavní poloosu a . Potom v polární soustavě souřadnic, která má počátek v ohnisku F a polární osu v polopřímce FG , platí:

a) Větev hyperboly přilehlá k ohnisku G má rovnici

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi < \alpha, \quad 2\pi - \alpha < \varphi < 2\pi$$

b) Větev hyperboly přilehlá k ohnisku F má rovnici

$$r = \frac{-p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi < \pi - \alpha, \quad \pi + \alpha < \varphi < 2\pi.$$

V obou případech je $\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$, $p = \frac{a^2 - e^2}{a}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$\cos \alpha = \frac{a}{e}.$$

Důkaz části a) věty 3: Budiž o_2 osa úsečky FG a L budiž libovolný bod větve hyperboly přilehlé k ohnisku G ; to znamená, že bod L je vnitřní bod poloroviny o_2G . Z toho plyne, že je buď $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ nebo

$\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$. Probereme nejprve případ, kdy bod L neleží na polární ose FG a potom případ, v němž je bod L bodem polopřímky FG .

1. Nechť bod L neleží na polární ose FG ; to znamená, že je $\varphi \neq 0$, takže je

$$\text{buď } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ nebo } \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi. \quad (5)$$

První případ je na obr. 3, druhý na obr. 4. Podle pomocné věty je $FL > GL$; je-li $|FL| = r$, $|GL| = r_1$, je tedy $r > r_1$. Podle definice hyperboly je $r - r_1 = 2a$, čili

$$r_1 = r - 2a$$

Podle rovnosti (4) potom platí:

$$\begin{aligned} r^2 - 4ar + 4a^2 &= r^2 + 4e^2 - 4er \cos \varphi, \\ a^2 - e^2 &= r(a - e \cos \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos \varphi}. \quad (7)$$

Z toho plyne, že platí také rovnost uvedená v části a) věty 3. Z nerovnosti (2) plyne, že je $a^2 - e^2 < 0$, podle předpokladu je $r > 0$. Z toho a z rovnosti (7) plyne, že je $a - e \cos \varphi < 0$, čili

$$\cos \varphi > \frac{a}{e}; \quad (8)$$

zároveň platí nerovnosti (5). Kladné číslo $\frac{a}{e} < 1$ je kosinem úhlu α náležejícímu intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; zároveň je kosinem úhlu $2\pi - \alpha$ náležejícímu intervalu $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. V intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je funkce $\cos \varphi$ klesající; proto z první nerovnosti v řádku (5) a z nerovnosti (8) plyne, že je

$0 < \varphi < \alpha$. V intervalu $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ je funkce $\cos \varphi$ rostoucí; proto z druhé nerovnosti v řádku (5) a z nerovnosti (8) plyne, že je $2\pi - \alpha < \varphi < 2\pi$.

Obráceně, nechť platí vzorec uvedený v části a) věty 3 a příslušné nerovnosti pro $\varphi \neq 0$. To znamená, že ke každému takovému $\varphi \neq 0$ existuje právě jeden bod $L = [r, \varphi]$, jehož modul r je udán vzorcem v části a) věty 3. Body F, G, L jsou tedy vrcholy trojúhelníku, jehož strany mají délky uvedené v řádku (3) a jehož vnitřní úhel GFL má velikost φ nebo $2\pi - \varphi$. Proto platí rovnost (4). Z platnosti vzorce uvedeného v části a) věty 3 plyne platnost vzorce (7) a z toho platnost vzorce (6). Z porovnání rovnosti (4) s rovností (6) plyne, že je

$$r_1^2 = r^2 - 4ar + 4a^2 = (r - 2a)^2;$$

proto je

$$r_1 = \sqrt{(r - 2a)^2} = |r - 2a|$$

Je tedy $r_1 = 2a - r$ nebo $r_1 = r - 2a$. V prvním případě je $r + r_1 = 2a$; to však znamená, že je $|FL| + |GL| = 2a$. Protože je $|FL| + |GL| > |FG|$, je $2a > 2e$; to je však ve sporu s nerovností (2). Proto nemůže být $r_1 = 2a - r$, takže je $r_1 = r - 2a$, čili $r - r_1 = 2a$, tj. $|FL| - |GL| = 2a$; to však znamená, že bod L je bodem větve hyperboly přilehlé k ohnisku G .

2. Zbývá probrat případ, kdy bod L leží na polární ose FG ; potom je $\varphi = 0$, takže je $\cos \varphi = 1$. Proto je

$$1 - \varepsilon \cos \varphi = 1 - \varepsilon = 1 - \frac{e}{a} = \frac{a - e}{a};$$

zároveň je

$$p = \frac{a^2 - e^2}{a}.$$

Z toho plyne, že je

$$\frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = \frac{a^2 - e^2}{a - e} = a + e.$$

To však znamená, že bod L má souřadnice $r = a + e$, $\varphi = 0$; splývá tedy s vrcholem B hyperboly, neboť $|FB| = |FS| + |SB| = a + e$.

Důkaz části b) věty 3 čtenář provede zcela obdobně. V tomto případě je $r < r_1$, takže je $r_1 - r = 2a$. Z toho a ze vzorce (4) plyne (pro $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$) vzorec uvedený v části b) věty 3. Protože je $r > 0$, $-p > 0$, je $a + e \cos \varphi > 0$, a tedy je

$$\cos \varphi > -\frac{a}{e} = \cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha),$$

kde $\frac{a}{e} = \cos \alpha$. Z toho plyne, že je $0 < \varphi < \pi - \alpha$, resp. $\pi + \alpha < \varphi <$

$< 2\pi$. Pro $\varphi = 0$ plyne ze vzorce v části b) věty 3, že je $r = e - a$; to znamená, že je $L = B$.

Poznámka. Protože je hyperbola souměrná podle os $o_1 = FG$, $o_2 \perp o_1$, stačí zjistit její průběh v prvním kvadrantu (v němž leží na obr. 3, 4 horní část větve hyperboly přilehlé k ohnisku G). Tento průběh poznáme ze vzorce uvedeného v části a) věty 3. Pro $\varphi = 0$ je $r = a + e$. Roste-li φ od 0 do α , roste r od $a + e$ do $+\infty$; větev hyperboly není tedy v prvním kvadrantu (a tedy ani v ostatních kvadrantech) omezená.

Směr, který je určen polopřímkou náležející v polární soustavě souřadnic orientovanému úhlu α $\left(\cos \alpha = \frac{a}{e}\right)$, se nazývá *asymptotický směr*.

Druhý asymptotický směr je k němu souměrný podle osy o_1 hyperboly. Přímký, které náležejí kterémukoli z těchto dvou směrů a procházejí středem hyperboly, se nazývají asymptoty. Části obou asymptot jsou narýsovány na obr. 2, 3, 4.

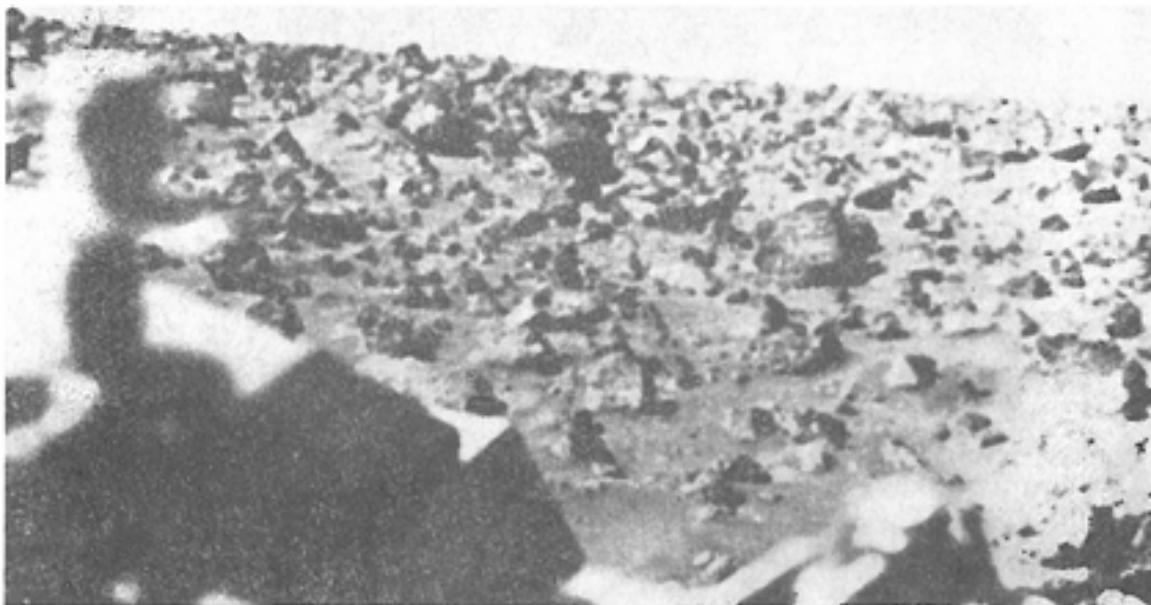
FYZIKA

Nový pohled na Mars (2)

RNDr. RENÉ HUDEC, CSc., AÚ ČSAV, Ondřejov

Jednou z možných příčin vzniku prachových bouří mohou být teplotní rozdíly mezi noční a denní stranou planety, způsobené dopravením menšího množství prachu — např. místními větry — do ovzduší. Tento prvo počáteční prach by totiž mohl vyvolat vzrůst absorpce slunečního záření v ovzduší na denní straně a naopak účinnější tepelné vyzařování na noční straně. Ve větších výškách „zaprášené“ atmosféry by proto mohly mezi denní a noční stranou panovat větší rozdíly teplot, než tomu je v čistém ovzduší. To by mohlo vést k mohutným větrům mezi oběma polokoulemi — a tedy ke zvěření dalšího prachu, čímž se proces ještě zesílí. Teprve když je vzduch zcela nasycen prachem, dojde k vyrovnání teplot a prachová bouře ustane.

Poměrně hodně toho nyní víme i o povrchových útvarech na Marsu. Víme, že na planetě existuje poměrně silná severo-j jižní asymetrie: většina starých kráterů je na jižní polokouli, zatímco mladší krátery



Typický záběr povrchu Marsu zblízka z paluby přistávací sondy.

Foto archiv autora

jsou většinou na severu. Ani rozdělení dalších hlavních povrchových struktur není rovnoměrné — většina velkých sopek, kaňonů, proláklín a vyschlých řečišť je v oblasti *Tharsis* o průměru asi 5 000 km se středem na rovníku planety.

Podobně jako na našem Měsíci, i na Marsu jsou dominantním zjevem impaktní krátery. Většina jižní polokoule je jimi hustě poseta — soudíme proto, že povrch pochází z dávné minulosti, z doby asi před 4 miliardami let. Stejně jako na Měsíci je i na Marsu několik velkých impaktních bazénů — největší z nich, *Hellas*, má průměr 1800 km. Při existenci silných prachových bouří je tak dávný terén překvapující. Vědci, odhadují, že erozní vliv těchto bouří musí být velmi malý, menší než 10^{-9} m za rok. Sondy, které přímo na Marsu přistály, přitom za prachových bouří naměřily rychlost větru až 30 m/s. I jindy vane na povrchu vítr o rychlosti mezi 2 a 7 m/s. Proto se prach formuje v „závětrí“ překážek — ať už balvanů nebo velkých kráterů, za nimiž vytváří závěje dlouhé až stovky km. Na Marsu jsou — zejména ve vyšších šířkách — běžné i písečné duny. Zajímavé je, že takové duny mohou vytvářet pouze částice o velikosti zrněk písku — prach je nevytváří. Na Zemi zrnka písku vznikají vodní erozí křemičitých hornin, na Marsu je však obojí vzácností. Možná jde v tomto případě o drobné slepence prachu tvořené buď zmrznutím nebo elektrostatickými silami.

I když mezi povrchovými strukturami na Marsu krátery vedou co do počtu, bezesporu nejvýznamnějšími útvary jsou velké sopky — jsou totiž ve srovnání se zemskými obří. Ta největší z nich, *Olympus Mons*, má při úpatí průměr 700 km a ční 25 km vysoko nad okolní planinou. Její vrcholový kráter má průměr 90 km. Podobně i ztuhlé proudy lávy jsou u marťanských sopek až 100 násobně delší a širší než na Zemi. Je proto pravděpodobné, že frekvence výbuchů byla u sopek na Marsu podstatně větší než na naší Zemi. Velký rozměr samotných vulkánů je zřejmě důsledkem nedostatku tektoniky kůry na Marsu. Například havajské sopky na Zemi mají poměrně krátkou životnost, neboť je posuv zemské kůry přesouvá pryč od zdroje horkého magmatu ve stacionární spodní vrstvě. Na Marsu naproti tomu zůstává sopka na stejném místě nad zdrojem magmatu, její činnost může být tedy dlouhá a nerušená. A tak není divu, že naroste do úctyhodného rozměru.

Na Marsu je i řada dalších zajímavých struktur — kaňonů, proláclin a systémů vyschlých řečišť, jimiž kdysi tekla voda. Nešlo však o období poklidných zemských řek, ale spíše o náhlý katastrofální průtok vody, a to až 1 km³/s. Patrně šlo o vodu uvolněnou nějakým způsobem zevnitř planety — možná proniknutím rozžhaveného magmatu do podzemního ledovce, možná tlakem z porézních hornin zmrzlé kůry.

Poslední kosmické sondy nám o Marsu přinesly řadu nových poznatků — zde jsme si všimli jen několika vybraných. Přesto však je na Marsu stále ještě řada starých i nových záhad, které mohou vyřešit teprve další komplexní kosmické výzkumy.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

350 let od narození Roberta Hooke

JOSEF KOTYK, Pardubice

V 2. pol. XVII. století počal zájem o staré scholastické vědění zjevně ochabovat. Obecně zrálo přesvědčení, že musí ustoupit skutečnému poznání přírody. Zvýšený zájem o přírodu přivodil pokrok exaktních věd. Z badatelů, kteří se o to zasloužili, vystupuje do popředí zvláště Robert Hooke.

Robert Hooke se narodil dne 18. června 1635 ve *Freshwateru* na ostrově *Wightu*. Již za studií ve *Westminsteru* a *Oxfordu* projevoval neobyčejnou

mechanickou zručnost; asistoval při chemických a fyzikálních pokusech a osvědčil se jako obratný experimentátor. V kroužku vynikajících oxfordských učenců (*Roberta Boyla* aj). zaujal záhy významné místo. Poněvadž univerzity setrvávaly ještě při scholastické metodě, hledali vědečtí pracovníci nová střediska a nalézali je v učených společnostech, jež zakládali panovníci. Tak vznikla za vlády krále Karla II. i v Londýně roku 1662 slavná *Royal Society* (Královská společnost). Hooke byl ještě v témž roce ustanoven jejím experimentátorem; již roku 1663 byl zvolen jejím členem. Svou invencí, fantazií a experimentální zručností dovedl vyvinouti, ač stále churavěl, tak mimořádné pracovní úsilí, že pomohl nevyčerpatelnou řadou pokusů a vynálezů Královské společnosti překonati těžkosti v jejím počátečním období; v roce 1678 stal se jejím tajemníkem. Od roku 1665 působil jako profesor na londýnské *Gresham College*. Zemřel v Londýně dne 3. března 1703.

Úspěšná spolupráce Hookova s Boylem přinesla záhy plodné výsledky. K řešení problému stlačitelnosti vzduchu přispěl Hooke zdokonalením Boyleovy vývěvy. Roku 1660 uveřejnil Boyle zákon, který vyjadřuje vztah mezi tlakem rtuťového sloupce a objemem uzavřeného vzduchu, tvrdívá se však¹⁾, že prvním objevitelem zákona v Boyleově laboratoři byl právě Hooke. Historie je o to složitější, že zákon zv. *Boylův* objevil později (r. 1679) samostatně též francouzský fyzik *Edme Mariotte*.

V roce 1661 uveřejnil Hooke pojednání o kapilaritě. Vynalezl rovněž spirálu pro setrvačnické kapesních hodin (nepokoj), zlepšil mikrometr v dalekohledu na měření malých úhlů, zdokonalil drobný Holandana *Zachariáše Jansena* a uveřejnil prvé zvětšené obrazy sněhových vloček, pomocí mikroskopu objevil na vzorku korku buněčnou strukturu aj. Jeho mikroskopická pozorování byla tak zajímavá, že je od roku 1663 musel převádět na každém zasedání Královské společnosti. Stala se také podnětem k vydání Hookova klasického díla „*Mikrografie*“ (1665). Kniha pojednává také o hoření, teplo charakterizuje jako druh pohybu, světlo jako „velmi krátké kmity konané napříč ke směru šíření ve stejnorodém prostředí“ s rychlostí „příliš velikou pro experimentální změření“. Závěry o interferenci a ohybu světla, k nimž Hooke dospěl při studiu barev tenkých vrstev, podložil opět hodnotnými experimenty.

Hooke pracoval úspěšně také v *astronomii*, Keplerovými zákony byl pohyb planet kolem Slunce popsán kinematicky, scházelo však ještě řešení dynamické. Jaká síla působí tento pohyb? Hookova odpověď (z roku 1666) na tuto otázku zní: Všechna nebeská tělesa vykazují přitažlivost nejen vůči svému vlastnímu středu, nýbrž i vzhledem k ostatním nebeským tělesům. Přitažlivé síly jsou tím větší, čím jsou tělesa k sobě blíže, Hooke přiznává však, že jejich závislost na vzdálenosti „pokusně dosud neodhalil“; to rozřešil Isaac Newton ve svých „*Princi-*

¹⁾ Činí tak např. E. Deeson: Hooke, *Physics Education*, 6, 1971, 3.

piích“ o 20 let později.²⁾ Hookův nárok na prioritu (prvenství) objevu vedl k vleklým a podrážděným sporům obou učenců, kteří patřili k největším osobnostem své doby.

V díle „*Lextures de Potentia Restutiva*“ (1678) píše Hooke o vlastnostech pružných těles. Ze středoškolského učiva je našim čtenářům z této kapitoly fyziky znám *Hookův zákon*: *Pružná deformace je úměrná síle, která ji vyvolává*. Pro zajímavost uvádím, že Hooke vyjádřil svůj zákon anagramem³⁾, tj. skupinou hlásek *ceiinosstuv* (*Ut tensio sic vis*). Dodám ještě, že také Newton anagramů často používal — oba sokové zřejmě proto, aby jimi zajistili prvenství svého objevu. Ke sporům přesto docházelo a zejména Hooke stal se jimi proslulým; přezdívka „*univerzální žalobce*“, kterou získal, zůstává toho trvalým dokladem. Ač rozhledem (nikoli však hloubkou propracování) svých myšlenek zastiňuje své současníky — i samotného Newtona — byl Hooke svým jednáním na sklonku svého života zneprátelen téměř se všemi.

O jednom neobvyklém kódování

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., PedF UK v Praze

V 17. století panovala mezi vědci čilá korespondence. V dopisech si sdělovali své úvahy, domněnky a objevy. Bylo však nebezpečí, že objev si přivlastní adresát dopisu. Přitom „odcizení“ mohlo být jen zdánlivé, neboť se mohlo stát, že příjemce dopisu už sám příslušný problém rozřešil a pouze váhal s publikováním.

Sdělení o objevech se začala oznamovat zakódovaně. Snaha byla, aby zakódované sdělení nebyl schopen nikdo rozluštit. V budoucnu pak mělo sloužit jako doklad prvenství. Používalo se k tomu tzv. *anagramů*. Jádrem objevu se zformulovalo v krátkém výroku, v němž se pak změnilo pořadí písmen. Tento změněný výrok potom objevitel rozeslal svým kolegům. Později, když vyšla kniha s podrobným výkladem objevu, byl v ní otištěn i příslušný anagram a jeho rozluštění.

Ukažte si vytvoření anagramu na jednoduchém příkladě. Chceme zakódovat slovo MALTA. Přemístěním písmen dostaneme např. *anagra-*

²⁾ Jejich prvou část předložil Newton Královské společnosti v roce 1686; slavné dílo „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ vyšlo roku 1687

³⁾ Podrobněji se o anagramech dočtete v článku „O jednom neobvyklém kódování“.

my AALMT, MLATA, TAMLA. Kolik vlastně takových anagramů existuje?

Písmeno A se ve slově MALTA vyskytuje dvakrát; zvolíme tedy množinu $\{A_1, A_2, L, M, T\}$. Vytvoříme-li libovolnou permutaci této množiny a v ní pak položíme $A_1 = A_2 = A$, dostaneme anagram ke slovu MALTA. Permutací z pěti prvků je celkem $5! = 120$. Avšak substitucí $A_1 = A_2 = A$ se počet všech permutací zmenší na polovinu, tj. na 60. Počet různých anagramů ke slovu MALTA je tedy $60 - 1 = 59$.

Jestliže si vypíšete všechny anagramy ke slovu MALTA, pak naleznete anagram, který má v češtině význam, a to slovo TLAMA. Jedním z anagramů je také slovo MALAT, kde stačí nad druhé A připsat čárku a dostaneme příjmení českého hudebního skladatele a pedagoga Jana Maláta.

V článku Josefa Kotyka, který je věnován *Robertu Hookovi*, se uvádí anagram, kterým zakódoval zákon, jenž dnes označujeme jeho jménem. Anagram zní:

c e i i i n o s s s t t u v

Obsahuje celkem 14 písmen, třikrát písmeno i, třikrát písmeno s a dvakrát písmeno t. Obdobnou úvahou jako výše vypočteme, že z Hookova anagramu je možno celkem vytvořit

$$\frac{14!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} - 1 = 1\,210\,809\,599$$

posloupností písmen, které odpovídají větám, z nichž mohl anagram vzniknout. Tyto věty jsou ovšem psány bez mezer mezi slovy. Dekódovat tento anagram je tedy práce časově velmi náročná. Přesto však byly anagramy nejen luštěny, ale některé i rozluštěny. Dekódování totiž ulehčovala znalost problematiky, kterou se autor anagramu zabýval.

N. J. Vilenkin ve své knížce *Kombinatorika* (SNTL Praha 1977) uvádí, že *Christian Huyghens* (1629 až 1695) objev Saturnova měsíce Titána včetně doby jeho oběhu zakódoval také do anagramu. Matematik *John Wallis* (1616 až 1703) však Huyghensův anagram rozluštil a sestavil o tomto objevu svůj anagram, který zaslal Huyghensovi. Vše nakonec vypadalo tak, že prioritu objevu má Wallis. Ten se však přiznal, že pouze chtěl ukázat nevhodnost anagramů pro uchovávání tajemství.

S anagramy se setkáváme ještě dnes, a to v zábavných přílohách novin a časopisů; zde se však hovoří o *přesmyčkách* a požaduje se, aby vzniklé slovo nebylo jen skupinou písmen bez významu. Uvedme několik příkladů: vosa — sova, maso — osma, sokol — kolos, salva — sláva, román — norma.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Janko Hraško v Paralelolande III

ANNA MICHALCOVÁ, Zvolen, MILAN HEJNÝ, Bratislava

Rekapitulácia časti I. a II. Záhorský chlapec Janko Hraško sa dostane do Paralelolandu, zeme, v ktorej nepoznajú kružidlo, kde jedinými rysovacími inštrumentmi sú pravítko a rovnobežník, nástroj, ktorým možno daným bodom viesť rovnobežku s danou priamkou. Pretože Janko pozná ďaleko bohatšiu geometriu, pokúša sa svoje znalosti využiť k získaniu slávy najlepšieho geometra Paralelolandu. Pomocou štyroch základných konštrukcií:

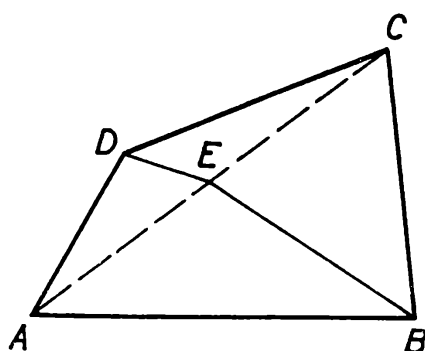
1. Dané dva rôzne body spojiť priamkou
2. Nájsť priesečník dvoch rôznobežných priamok
3. Daným bodom viesť rovnobežku s danou priamkou
4. K danej množine priamok a bodov zvoliť bod, ktorý neleží na žiadnej z daných priamok a nesplýva so žiadnym z daných bodov, úspešne rieši „ôsmacke kritérium“ — šesť úloh, tvoriacich základ paralelolandských geometrických znalostí. Rozhodujúce sú dve z týchto úloh:

Ú. 4. Zostrojiť n -násobok danej úsečky a

Ú. 6. danú úsečku rozdeliť na n rovnakých častí.

Po tomto úspechu Lilka oboznámi Janka Hraška s geometrickým problémom bratov Hnevajovcov. Treba rozdeliť na dve rovnaké časti štvoruholníkové pole, ktoré bratia zdedili po otcovi. Paralelolandanom sa podarilo nájsť doteraz tri riešenia: prvé nevyhovovalo, lebo jedna časť bola nekonvexná; chybou druhého bolo, že jedna časť bola trojuholníková a druhá štvoruholníková. Keď sa konečne našlo delenie na dve rovnoploché štvoruholníkové konvexné časti, zistilo sa, že pole dáva slabú úrodu. Poveršivý brat Ďuro to vysvetľoval tým, že pri delení bol narušený pôvodný tvar otcovho poľa. Bratia potom hľadali delenie otcovho poľa na také dve rovnoploché polia, z ktorých jedno by bolo podobné s pôvodným poľom. Na tvar druhého poľa žiadne podmienky nekládli. Janko sa pokúšal problém bratov rozriešiť. Prv však skúsil nájsť všetky tri predošlé riešenia.

Keď asi po týždni prišla Lilka opäť navštíviť priateľa Janka, mohol sa už pochváliť viacerými výsledkami.



Obr. 9

J: Myslím, Lilka, že som už blízko riešenia. Ty poznáš niektoré z tých predošlých, ktoré zamietli?

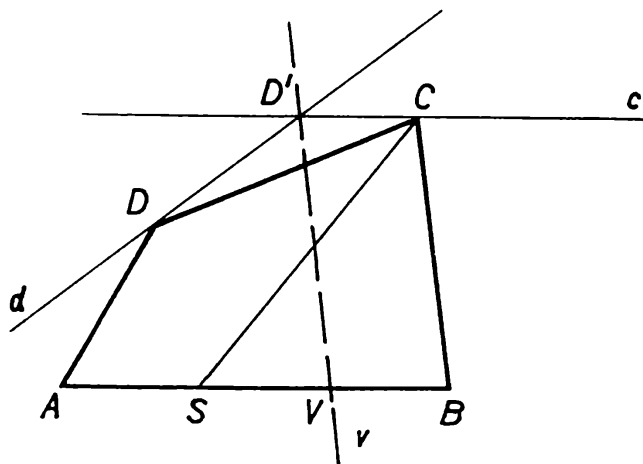
L: To prvé poznám (a načrtla obrázok 9.).

Bod E je stred úsečky AC , preto sú štvoruholníky $ABED$ a $BCDE$ rovnoploché. Ale druhý je nekonvexný.

J: Múdra! Správne riešenie. A vieš aj to druhé, na trojuholník a štvoruholník?

L: Nuž, aby som pravdu povedala, ani som sa o to veľmi nepokúšala. Asi by som to nezvládla.

J: Tak pozri sem (a kresliac obrázok 10., pokračoval).



Obr. 10

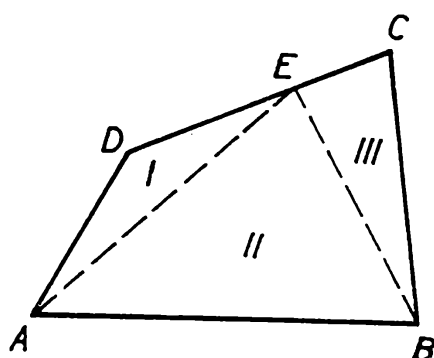
Najprv vediem priamku c bodom C rovnobežne s AB . Potom bodom

D vediem rovnobežku d s AC . Ich priesečník označím $D' = c \cap d$.

Rovnobežka v , vedená bodom D' s priamkou BC pretne priamku AB v bode V . Vezmeme stred $S = A + V$ a máme riešenie: trojuholník SBC a štvoruholník $ASCD$ majú rovnaký obsah.

L: To bolo trochu veľa. Vôbec neviem, prečo je to tak. Vysvetli mi to!

J: Moment. Najprv ti ešte ukážem ďalšie riešenie. Znovu si nakreslíme

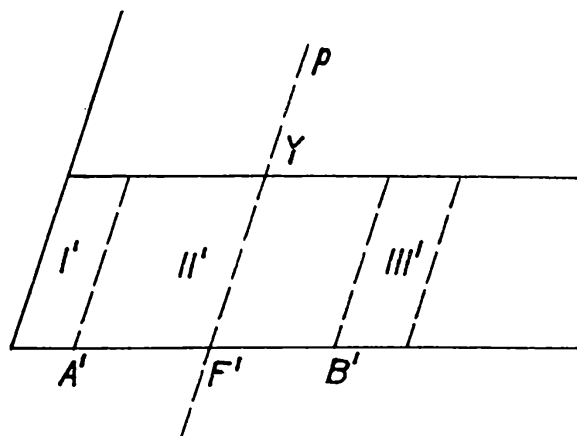


Obr. 11

štvoruholníkové pole (kreslí obr. 11.) a ty mi na hranici štvoruholníka vyznač jeden bod, cez ktorý treba viesť deliacu čiaru.

L: Trebárs cez tento (označí bod E).

J: Dobré. Spojíme bod E s bodmi A a B . Tým sa štvoruholník rozpadol na tri trojuholníky. Označme ich I, II a III. Teraz urobím takéto kúžlo: každý z trojuholníkov premením na rovnoplochý rovnobežník, pričom tri takto vytvorené rovnobežníky I', II', III' dokopy vytvoria nový rovnobežník (a Janko bleskurýchle narysoval niekoľko čiar a vedľa obrázka 11. sa objavil nový obrázok 12.). Tento výsledný



Obr. 12

rovnobežník rozdelíme osou p na polovice. Teraz už stačí nájsť na úsečke AB bod F , ktorý delí úsečku AB v rovnakom pomere, ako bod F' delí úsečku $A'B'$. To je jednoduché.

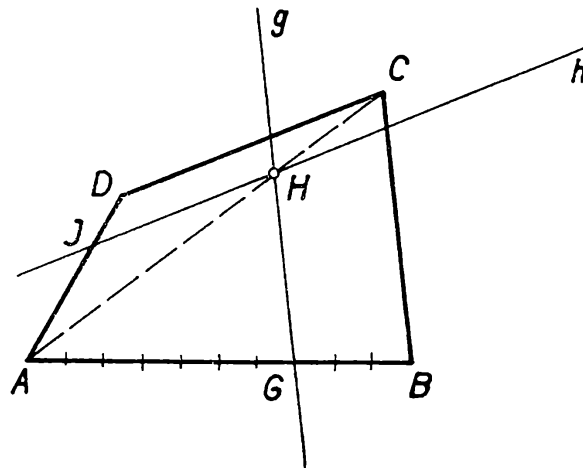
L: Kukám, kukám, z údivu nevychádzam. Šibrinkuješ tu hore dolu, čosi namachlíš a tvrdíš, že je to riešenie. Nechcel by si to dokázať?

J: Tak ja robím a ty frfleš — to je pekná spolupráca! Čo keby si sa teraz pousilovala trochu aj ty?

L: Si ty, Janko, podvratník! Celý týždeň hútaš a dumáš, z izby nevylezieš, nespávaš a teraz chceš odo mňa, aby som za chvíľu prišla na to, čo tebe trvalo týždeň!

Nakoniec sa však Lilka do dôkazov pribrala a s menšou pomocou ich všetky úspešne urobila. Keď bola robota dokončená, obrátila sa Lilka

na Janka so žiadosťou, aby jej ukázal aj posledné riešenie, to, ktoré doposiaľ ani jeden Paralelolandán nepozná: ako rozdeliť štvoruholník na rovnoploché časti, z ktorých jedna je podobná pôvodnému štvoruholníku. Janko priznal, že doteraz sa mu nepodarilo odhaliť presné riešenie, ale že má riešenie, ktoré je skoro presné. Potom stíšil hlas a s nádychom spikleneckej tajuplnosti komentoval svoje riešenie (pozri obr. 13.).



Obr. 13

J: Úsečku AB rozdelím na 10 rovnakých častí. Siedmy dielik označím

↔

G . Bodom G vediem rovnobežku g s priamkou BC . Priamka g pretne uhlopriečku AC v bode H . Bodom H vediem rovnobežku h s priam-

↔

kou CD . Bod J , v ktorom priamka h pretne stranu AD , je štvrtý vrchol hľadaného delenia. Štvoruholník $AGHJ$ je podobný so štvoruholníkom $ABCD$ a jeho obsah je veľmi približne rovný polovici obsahu veľkého štvoruholníka.

Lilka chcela ešte čosi povedať, lenže autori jej vzali slovo. Vraj — stačilo.

Rozprávanie končí. Vieme, žiadalo by sa čosi viac — happyend. Sláva pre Janka Hraška, perspektívna svadba s Lilkou a šťastný návrat do „Smrdákú“, najlepšie v dobe hodov. To všetko prenechávame láskavému čitateľovi a jeho fantázii. Ale okrem rozprávačského dorábania prenechávame čitateľovi aj čosi ťažšie: dorábanie matematické. Sú vlastne Jankove konštrukcie dobré? Neklamal nás? S akou presnosťou našiel Janko posledné riešenie, ktoré tak dôverne prezradil Lilke? Nedalo sa nájsť lepšie? Nedá sa nájsť celkom presné riešenie? A čo keby pole, ktoré bratia Hnevajovci dedili, bolo nekonvexným štvoruholníkom, alebo dokonca päťuholníkom, prípadne n -uholníkom. Dala by sa nájsť deliaca čiara?

Skúste, možno, že sa vám to podarí. A ak sa vám aj všetko rozriešiť nepošťastní, určite sa veľa naučíte — a to za námahu stojí!

OLYMPIÁDY A SOČ

Úlohy domácí části I. kola 35. ročníku matematické olympiády, školní rok 1985/86

Kategorie A

1. V rovině jsou dány dva různé body A, C . Pro reálné číslo $m > 2|AC|/\sqrt{3}$ sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s maximálním obsahem, pro který platí $|AB| + |BC| + |CD| = m$.

2. Je dáno přirozené číslo n . Určete počet všech množin $M \subset \{1, 2, \dots, n\} \times \{-1, 1\}$, pro něž existuje taková n -tice reálných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, že

$$(i, j) \in M \Leftrightarrow ja_i > 0$$

platí pro všechny dvojice $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{-1, 1\}$.

3. Je dáno číslo $\alpha \in (0, \pi)$. Najděte reálné číslo r s touto vlastností: Je-li A množina bodů libovolného rovinného úhlu velikosti α s vrcholem v počátku kartézské soustavy souřadnic, pak pro každý bod $X \in A$ existuje bod $M \in A$ s celočíselnými souřadnicemi, který má od bodu X vzdálenost nejvýše r .

4. Najděte nejmenší přirozené n takové, že existují dva neshodné pythagorejské trojúhelníky s přeponou délky n . (Trojúhelník se nazývá pythagorejský, je-li pravoúhlý a délky jeho stran jsou vyjádřeny celými čísly.)

5. Je dám mnohočlen

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

který nabývá jen nezáporných hodnot. Označme

$$Q(x) = a_0x^n + 2a_1x^{n-1} + \dots + na_{n-1}x + (n+1)a_n.$$

Je-li $P(1) = 0$, pak je také $Q(1) = 0$. Dokažte.

6. Pro vnitřní úhly trojúhelníku ABC platí

$$\sin \frac{\gamma}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}.$$

Určete vztah mezi stranami a, b, c takového trojúhelníku.

Tématické okruhy: Pythagorejské trojúhelníky

Polynomy

Funkce a zobrazení

Úlohy na pokrytí

Kategorie B

1. Do trojúhelníku ABC se stranami a, b, c vepíšme kružnici a sestrojme k ní další tři tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníku. Každá z těchto tečen utíná od trojúhelníka ABC po jednom trojúhelníku. Do každého z těchto tří trojúhelníků vepíšme kružnici. Vyjádřete součet obsahů všech čtyř vepsaných kruhů pomocí délek a, b, c .

2. Nechť F je zobrazení množiny všech přirozených čísel na množinu $\{-1, 1\}$, pro které platí $F(1) = -1$ a $F(2k + 1) = -F(2k - 1)$, $F(2k) = F(k)$ pro každé přirozené k . Dokažte, že pak platí:

- a) $F(3k) = -F(k)$ pro všechna přirozená k ;
- b) jeli $r \geq 0$ a $1 \leq s \leq 2^r$, $s \neq 2^{r-1}$, pak je $F(s + 2^r) = F(s)$.

3. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými velikostmi stran a s obvodem 990.

4. Nechť n je dané přirozené číslo. Určete počet všech (po dvou neshodných) trojúhelníků, jejichž strany mají celočíselnou velikost nejvýše rovnou n . Kolik je mezi nimi rovnoramenných?

5. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \cos x \cos 2x + \cos Ax \cos 3Ax,$$

kde A je iracionální číslo, není periodická.

6. Dokažte, že pro přirozená čísla $k < m < n$ platí nerovnost

$$\frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k)}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)} < \left(\frac{2m-k}{2n-k} \right)^{k+1}$$

Tématické okruhy: Funkce a zobrazení

Nerovnosti

Teorie čísel

Kategorie C

1. Uvnitř konvexního sedmiúhelníku $A_1A_2 \dots A_7$ opsaného kružnici o poloměru r je dán bod X . Vyjádřete r pomocí velikostí stran sedmiúhelníku a vzdáleností bodu X od přímek $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_7A_1$.

2. Určete všechna přirozená čísla n , která se nedají vyjádřit ve tvaru $n = 3x + 5y$,

kde x, y jsou přirozená čísla.

3. Je dán rovnoběžník $ABCD$ a v jeho rovině dva body K, L . Uvažujeme všechny rovnoběžníky $PQRS$ shodné s rovnoběžníkem $ABCD$, které leží v téže rovině, přímka PQ prochází bodem K a přímka PS bodem L . Určete množinu všech vrcholů P takových rovnoběžníků a dokažte, že existují dva body takové, že úhlopříčka PR každého uvažovaného rovnoběžníku $PQRS$ prochází aspoň jedním z nich.

4. Jsou dány různoběžky p, q a na přímce q tři různé body A, B, C , $A \notin p$. Je-li $R \notin q$ libovolný bod přímky p , označme S průsečík přímky p s přímkou rovnoběžnou s AR a procházející bodem B . Nechť T je průsečík přímek AR a CS . Dokažte, že vzdálenost bodu T od přímky p na volbě bodu R nezávisí.

5. Uvnitř dané krychle určete středy všech kulových ploch, které se dotýkají jejích tří sousedních stěn se společným vrcholem a tří sousedních hran krychle, které v těchto stěnách neleží.

6. Je dán mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_n$. Každou ze stran a úhlopříček daného mnohoúhelníku obarvíme červeně nebo modře tak, že strany A_1A_2 a A_2A_3 budou červené a strana A_3A_4 a všechny úhlopříčky vedoucí z vrcholu A_3 budou modré. Určete n , platí-li navíc: Při každém takovém obarvení existuje aspoň 49 dvojbarevných trojúhelníků, přičemž existuje obarvení, ve kterém je jich právě 49.

Tématické okruhy: Mnohoúhelníky

Dělitelnost

Stereometrie

Úlohy I. kola kategorie Z8, určené pro žáky 8. ročníku základní školy

1. Najděte všechny dvojice dvojčíferných čísel, které mají obě tyto vlastnosti:

- jejich součet je dělitelný číslem 23,
- odečteme-li od většího čísla menší, dostaneme číslo dělitelné číslem 29.

2. Délky stran pravoúhlých trojúhelníků jsou vyjádřeny přirozenými čísly a jedna z odvěsen má délku 15. Zjistěte všechny pravoúhlé trojúhelníky s uvedenými vlastnostmi.

3. Zjistěte hodnotu výrazu

$$\frac{11(6^2 + 5^2)(6^4 + 5^4)(6^8 + 5^8)(6^{16} + 5^{16})}{6^{32} - 5^{32}}$$

4. Je dán čtverec $ABCD$ se stranou velikosti a . Vrcholem A vedeme libovolnou přímku, která protíná stranu BC v bodě M a prodloužení strany DC v bodě N . Dokažte, že

$$\frac{1}{|CM|} - \frac{1}{|CN|} = \frac{1}{a}.$$

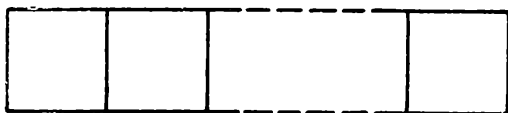
5. Ve třech nádobách je 18 l vody. Polovinu vody z první nádoby přelili do druhé, pak jednu třetinu vody z druhé do třetí, jednu čtvrtinu vody z třetí do první nádoby. Potom zůstalo ve všech nádobách stejné množství vody. Jaké množství vody bylo původně v každé nádobě?

6. Krychle $ABCD A'B'C'D'$ má hranu délky $a = 4$ cm. Zjistěte, jakou část povrchu krychle zaujímají body, které mají od vrcholu A' i od vrcholu B' vzdálenost nejvýše rovnou délce hrany krychle. Znázorněte tuto část povrchu na síti krychle.

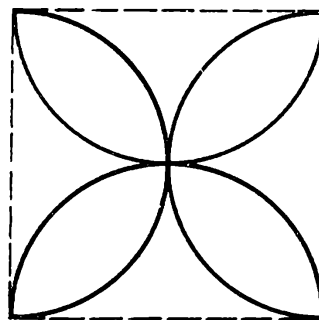
Úkoly I. kola kategorie Z7, určené pro žáky 7. ročníků základní školy

1. Námořník vzpomínal, že při poslední plavbě kolem Evropy vyplouval se svou lodí z Leningradu za krásného slunečního rána první pondělí v měsíci. První pondělí po první neděli v témže měsíci se koupal již v Kodani. Poslední sobotu před poslední nedělí v dalším měsíci si prohlížel Atény. Do Oděsy připlul poslední sobotu téhož měsíce. Určete den, měsíc a rok začátku a konce cesty. Příhoda není starší sedmi let.

2. Pás je složen z 1985 čtverců (obr. 1). V každém čtverci je jedna číslice. Dvojice sousedních číslic tvoří dvojciferné číslo, které je násobkem čísla 17 nebo 23. Určete číslici první, jestliže je poslední číslice 7.



Obr. 1



Obr. 2

3. Narýsujte trojúhelník ABC o stranách $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm. Sestrojte uvnitř trojúhelníku ABC bod D tak, aby trojúhelníky ABD , BCD a ACD měly stejný obsah.

4. Zvolíme libovolně osm po sobě následujících přirozených čísel. Zjistěte, kolik mezi nimi může být a) nejvýše, b) nejméně prvočísel. Uveďte příklady.

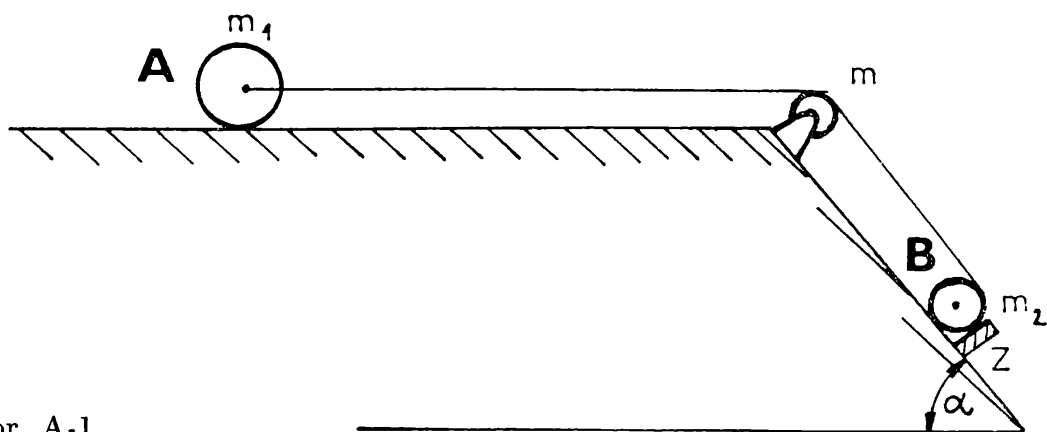
5. Věžní hodiny odbíjejí malým zvonem každou čtvrt hodinu: první čtvrt jeden úder, druhá čtvrt dva údery, třetí čtvrt tři údery, čtvrtá čtvrt čtyři údery. Dále odbíjejí velkým zvonem na konci každé hodiny příslušný počet úderů (1, 2, 3, ..., 12 úderů). Zjistěte nejkratší dobu, za kterou můžeme slyšet 1000 úderů. (Dobu mezi údery při odbíjení téže čtvrt hodiny nebo hodiny nepočítejte.)

6. Narýsujte čtyřlístek a vypočtěte jeho obsah; délka strany čtverce je $a = 6$ cm (obr. 2).

Úlohy pro I. kolo XXVII. ročníku FO

Kategória A

1. Rovnorodé valce A , B s hmotnosťami m_1 , m_2 sú navzájom spojené vláknom vedeným cez kladku s hmotnosťou m (obr. A-1). Valec A je položený na vodorovnej podložke, valec B na naklonenej podložke, ktorá zvierá s vodorovnou rovinou uhol α . Časti vlákna medzi kladkou a valcami sú rovnobežné s príslušnou podložkou. Vlákno je spojené s valcom A v mieste geometrickej osi, súčasne je vlákno navinuté na povrch valca B . Ak uvoľníme záťažku Z , sústava telies sa dá do pohybu.



Obr. A-1

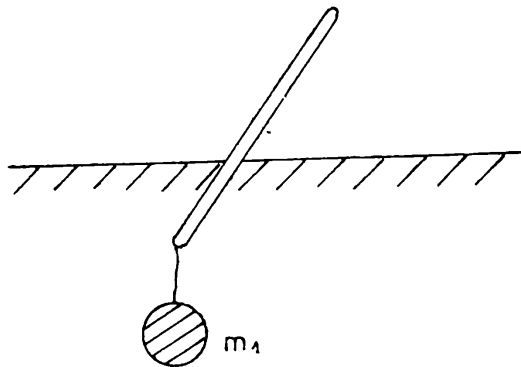
- Určte veľkosti zrýchlení a_1 , a_2 posuvného pohybu valca A a valca B .
- Určte veľkosti síl F_1 , F_2 , ktoré počas pohybu napínajú vodorovnú a šikmú časť vlákna.

Vlákno je dokonale ohybné a nekľže po obvode kladky. Hmotnosť vlákna a jeho predĺženie sú zanedbateľné. Valivý odpor pri pohybe valcov po podložkách je veľmi malý. Valce sa pohybujú po podložkách bez kĺzania.

2. Rovnorodá tyč s dĺžkou d a kolmým rezom s obsahom S má hustotu ρ . Na jeden koniec tyče priviažeme pomocou jemného lana teleso z ocele s hustotou ρ_1 . Tyč spolu s telesom položíme na hladinu jazera, ktorého voda má hustotu ρ_0 , $\rho_0 > \rho$ (obr. A-2).

- Určte hmotnosť m_1 telesa tak, aby tyč bola v rovnovážnej polohe stálej so zvislou osou.
- Určte hmotnosť m_1 telesa tak, aby tyč bola v rovnovážnej polohe voľnej.
- Určte hmotnosť m_1 telesa tak, aby tyč bola v rovnovážnej polohe vratkej so zvislou osou.

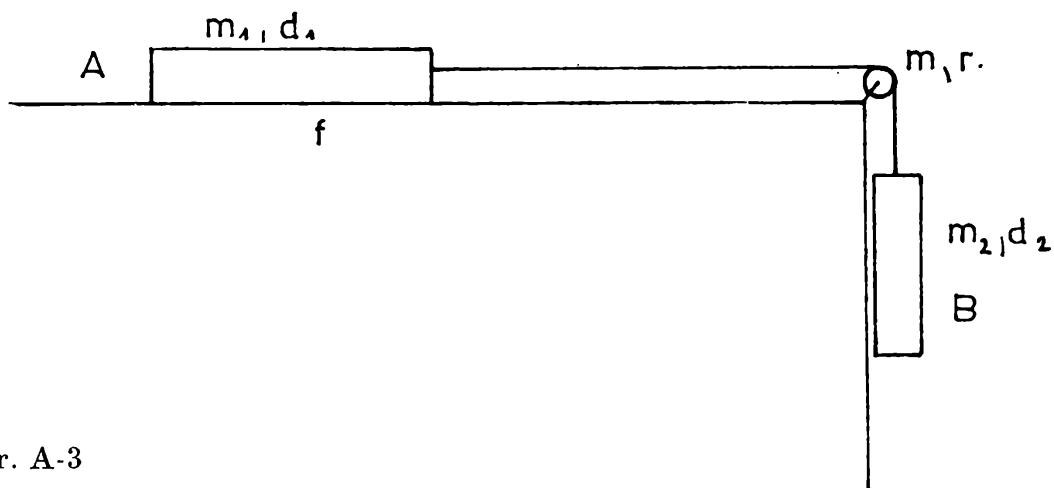
Povrchové napätie vody a hmotnosť lana v riešení úlohy neuvažujte.



Obr. A-2

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $d = 4,0 \text{ m}$,
 $S = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho = 0,50 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
 $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

3. Dve tyče z medi s hmotnosťami m_1 , m_2 a dĺžkami d_1 , d_2 sú spojené vláknom vedeným cez kladku s hmotnosťou m a polomerom r (obr. A-3). Časť vlákna nad podložkou, na ktorej je položená tyč A, je vodorovná. Súčiniteľ klzného trenia medzi tyčou a podložkou je f . Ak sústavu telies uvoľníme, začne sa pohybovať.



Obr. A-3

- Ako sa zmení rozloženie voľných elektrónov v tyčiach v porovnaní so stavom, keď obidve tyče boli v pokoji?
- Určte elektrické napätie U_1 medzi koncami tyče A a elektrické napätie U_2 medzi koncami tyče B.
- Určte kladne a záporne zelektizované časti tyčí.
- Urobte diskusiu riešenia.

Hmotnosť vlákna a trenie v ose kladky neuvažujte.

4. Jedna deska deskového kondenzátoru môže konať harmonické kmity s úhlovou frekvenciou ω a amplitudou Δd ve smere kolmém k rovině desky. Druhá deska kondenzátoru je nepohyblivá. Obsah desek kondenzátoru je S , jejich vzájemná vzdálenost v čase $t = 0 \text{ s}$ je d_0 . Mezi deskami kondenzátoru je vzduch.

- Deska kondenzátoru kmitá. Kondenzátor připojíme ke zdroji se stejnosměrným napětím U . Určete kapacitu kondenzátoru. Určete proud procházející obvodem zdroje s kondenzátorem.
- Kondenzátor při stálé vzdálenosti d_0 desek nejprve připojíme ke zdroji se stejnosměrným napětím U . Potom zdroj napětí odpojíme od kondenzátoru a desku rozkmitáme. Určete v tomto případě napětí mezi deskami kondenzátoru a charakterizujte jeho průběh.
- Kondenzátor, jehož jedna deska kmitá, připojíme do obvodu s cívkou s vlastní indukčností L . Určete rezonanční frekvenci f_r oscilačního obvodu kondenzátoru s cívkou. Určete interval, v němž se bude rezonanční frekvence obvodu měnit.
- Jak se změní výsledky úloh a), b), c) za předpokladu

$$\frac{\Delta d}{d_0} \ll 1 ?$$

Vnitřní odpor zdroje, odpor kondenzátoru a odpor cívky neuvažujte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $S = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, $d_0 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\Delta d = 0,10 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $L = 20 \cdot 10^{-6} \text{ H}$, $U = 50 \text{ V}$, $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$.

Pro uvedené hodnoty vypočítejte maximální a minimální kapacitu kondenzátoru, amplitudu střídavé složky napětí v úloze b), maximální a minimální rezonanční frekvenci oscilačního obvodu v úloze c).

5. V rentgence jsou elektrony emitovány z katody. Mezi anodou a katodou rentgenky je napětí U .

- Určete hmotnost m elektronu v okamžiku před dopadem na anodu.

Určete podíl $\frac{m}{m_0}$, kde m_0 je klidová hmotnost elektronu.

- Určete velikost rychlosti elektronu v v okamžiku před dopadem na anodu. Určete podíl $\frac{v}{v_0}$, kde v_0 je velikost rychlosti elektronu v okamžiku před dopadem na anodu, jestliže neuvažujeme relativistickou změnu hmotnosti elektronu.

- Při jakém napětí U' bude mít elektron v okamžiku před dopadem na anodu hmotnost $2m_0$? Jaká bude v tomto případě jeho rychlost? Rychlost elektronů při výstupu z katody je velmi malá. Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnotu $U = 150 \text{ kV}$.

6. Vyšetřovanie fyzikálnej závislosti

Pomôcky: tranzistor KU 611, katalóg polovodičových súčiastok, jednoduchý termostat (termoska), miliampérmeter, voltmeter, potenciometer, zdroj napätia, milimetrový papier, spojovacie vodiče.

Úloha: Vyšetrite fyzikálnu závislosť $I_C = f(U_{EB})$ kolektorového prúdu tranzistora v zapojení s kolektorom nakrátko od napätia U_{EB} medzi emitorm a bázou.

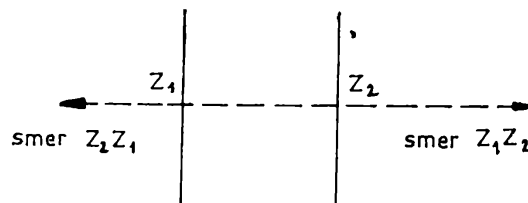
- Navrhnete zapojenie a prevedte meranie aspoň pri troch rôznych teplotách.
- Získané údaje zapíšete do tabuliek.
- Vyneste namerané údaje do priamkového grafu za predpokladu, že

$$I_C = I_0 \exp \left(\frac{b e U_{EB}}{k T} \right).$$

Z grafu určte konštantu b .

- Pomocou výsledkov úlohy c) určte Boltzmannovu konštantu k .
- Odhadnite odchylku vypočítanej hodnoty konštanty k .

7. Směrová anténa je sestavena ze dvou rovnoběžných kovových tyčí (obr. A-4), které jsou připojeny k vysílači jako zdroji vysokofrekvenčního



Obr. A-4

proudu. Vlnová délka elektromagnetické vlny vyzařované z antény je λ . Proudů procházející oběma částmi antény mají stejné frekvence.

- Proud procházející druhou tyčí je fázově opožděn o $\frac{\pi}{2}$ vzhledem

k proudu procházejícímu první tyčí. Do jaké vzájemné vzdálenosti d_1 musíme tyče antény umístit, aby elektrická složka elektromagnetického vlnění ve směru polopřímky Z_1Z_2 v rovině antény byla maximální?

- Proud procházející druhou tyčí fázově předbíhá o $\frac{\pi}{2}$ proud pro-

cházející první tyčí. Do jaké vzájemné vzdálenosti d_2 musíme tyče umístit, aby elektrická složka elektromagnetického vlnění ve směru polopřímky Z_1Z_2 v rovině antény byla znovu maximální?

- Vzdálenost tyčí antény zvolíme podle úlohy a), soustavou však procházejí proudy způsobem uvedeným v úloze b). Jaká je v tomto případě elektrická složka elektromagnetického vlnění ve směru polopřímky Z_1Z_2 ? Podle tohoto výsledku usudte, jaká je elektrická složka elektromagnetického vlnění v úloze a) ve směru polopřímky Z_2Z_1 .

Kategorie B

1. Vlak byl vypraven přesně ve 12 h 00 min 00 s. U předního konce lokomotivy stál pozorovatel, jehož digitální hodinky mají trvalou odchylku od přesného času. Když jeho hodinky ukazovaly právě 12 h

00 min 00 s, začal kolem něj už projíždět předposlední vagón, který projel za 10 s. Poslední vagón minul pozorovatele za dobu 8,0 s. Vlak se pohyboval rovnoměrně zrychleně.

Stanovte, o kolik sekund ukazují pozorovatelovy hodinky méně, než je přesný čas.

Vagóny vlaku jsou stejně dlouhé, vzdálenost zadního konce vagónu od předního konce následujícího vagónu je zanedbatelná.

2. Kyvadlo je tvořeno malou mosaznou kuličkou o hmotnosti m , zavěšenou na vlákně zanedbatelné hmotnosti vzhledem ke hmotnosti m a stálé délky l . Kyvadlo považujeme za matematické kyvadlo.

- Doba kyvu tohoto kyvadla ve vakuu je t_0 . Určete jeho délku l .
- Jaká je doba kyvu t tohoto kyvadla ve vzduchu za normálních atmosférických podmínek, tj. při tlaku $p_h = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T_0 = 273 \text{ K}$?
- Jak se změní počet kyvů za 1 den, jestliže se při téže teplotě T_0 tlak vzduchu změní o 3 %?
- Jak se změní počet kyvů tohoto kyvadla za 1 den, jestliže se při témž tlaku teplota vzduchu změní o 3 K?

Řešte obecně, potom pro hodnoty $t_0 = 1,00 \text{ s}$, $m = 10 \text{ g}$, hustota mosazi $\rho_k = 8,60 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Odpor vzduchu při pohybu kyvadla neuvažujte.

3. Geostacionární družice se pohybuje po kruhové trajektorii v rovině rovníku.

- Jaká je doba T oběhu družice? Zdůvodněte, proč tato doba není 24 h.
- Určete výšku h družice nad povrchem Země, její úhlovou rychlost ω a její rychlost v .
- Určete maximální vzájemnou vzdálenost $d_{\max}$ dvou míst na povrchu Země, z nichž lze družici použít ke spojovacím účelům.
- Družice se stejnou dobou oběhu jako v části a) se pohybuje po kruhové trajektorii v rovině, v níž leží oba póly Země. Popište její pohyb. Ve vhodném měřítku (při pohledu na povrch Země z místa nad severním pólem) načrtněte, nad kterými místy na povrchu Země družice prolétala. Na počátku pozorování byla družice právě nad severním pólem a její okamžitá rychlost byla v rovině nultého poledníku.

4. V pohádce o Zlatovlásce dostal princ za úkol přelévat vodu z rybníka sítím. Šlo zřejmě o rovinné síto, jehož stěny byly kolmé k rovině síta.

Předpokládáme, že síto bylo zhotoveno z látky, kterou voda nesmáčí.

- Určete objem vody, která zůstala v sítu o obsahu podstavy $0,10 \text{ m}^2$ s kruhovými otvory o průměru $1,0 \text{ mm}$. Dno síta je vodorovné.
- Může princ za těchto podmínek naplnit vodou bazén rozměrů $2,0 \times 6,0 \text{ m}^2$ do výšky 60 cm za 12 h ? Vodu nabírá z rybníka jednou za 20 s .
- Princ změnil sklon stěn síta vzhledem k vodorovné podstavě, aby tak úkol splnil. Zdůvodněte.

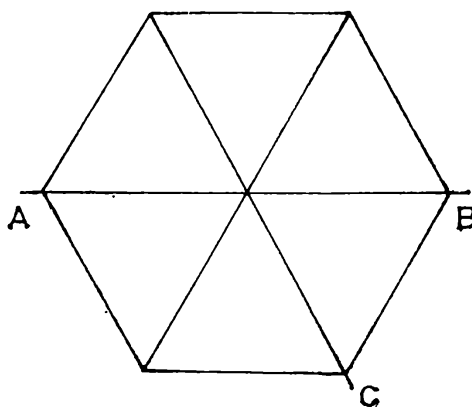
d) Co by se stalo, kdyby princ nedržel síto vodorovně? Co by se stalo, kdyby voda síto smáčela?

5. Rezistory téhož odporu R tvoří soustavu znázorněnou na obr. B-1. Určete odpor soustavy.

a) mezi body A, B , b) mezi body A, C , c) mezi body B, C .

Nakreslete zjednodušené schéma pro každý případ.

Návod: Pro každý případ najděte osu souměrnosti obvodu, na které leží body se stejným potenciálem.



Obr. B-1

6. Stanovení závislosti frekvence základního tónu struny na délce struny a napínající síle.

Máte *k dispozici*: ocelovou kytarovou strunu, kladku, upevňovací svorku, trojboký hranol (pražec), cívku 12 000 závitů, tyčový magnet nebo jádro z rozkladného transformátoru, spojovací vodiče, osciloskop, tónový frekvenční generátor, váhy a sadu závaží, ocelové délkové měřítko, mikrometrické měřítko, misku na závaží.

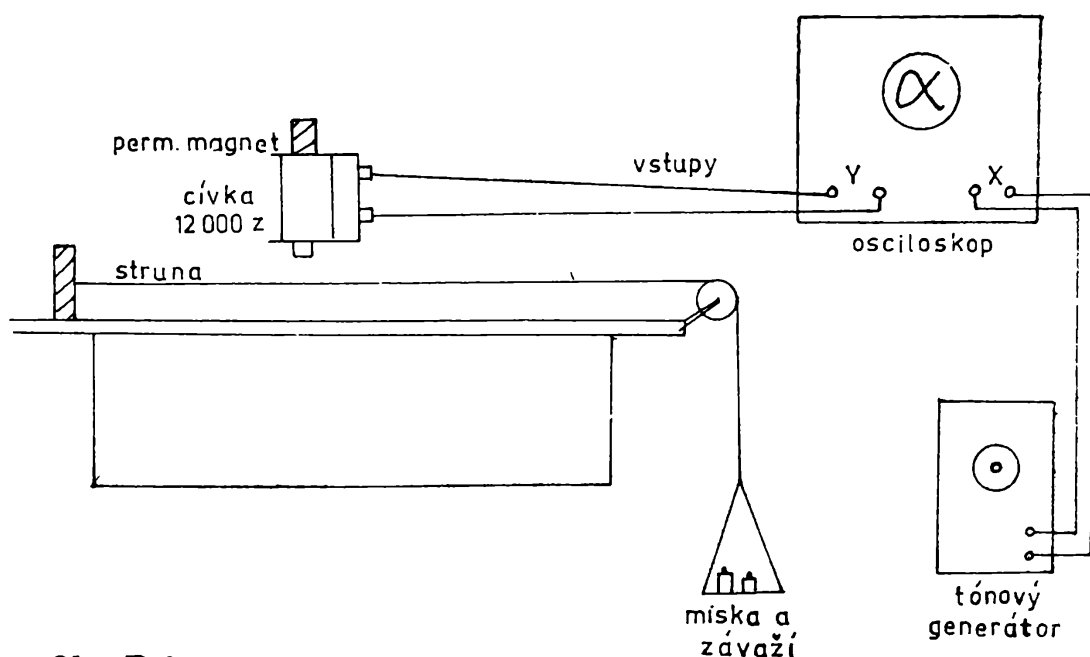
Příprava: Frekvence základního tónu struny závisí na délce struny d ,

na hmotnosti 1 m délky struny $\mu = \frac{m}{d}$, na napínající síle F :

$$f = \frac{1}{2d} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{md}}.$$

Úkoly:

1. Sestavte měřicí soupravu podle obr. B-2.
2. Změřte hodnoty veličin m , d , F . Navrhněte způsob, jak určit hmotnost kmitající části struny. Určete frekvenci základního tónu struny výpočtem.
3. Seznamte se s činností osciloskopu.
4. Na jeden vstup osciloskopu připojte výstup ze snímače, na druhý vstup připojte výstup z frekvenčního generátoru. Změnou frekvence na generátoru se snažte docílit některé jednoduché Lissajousovy

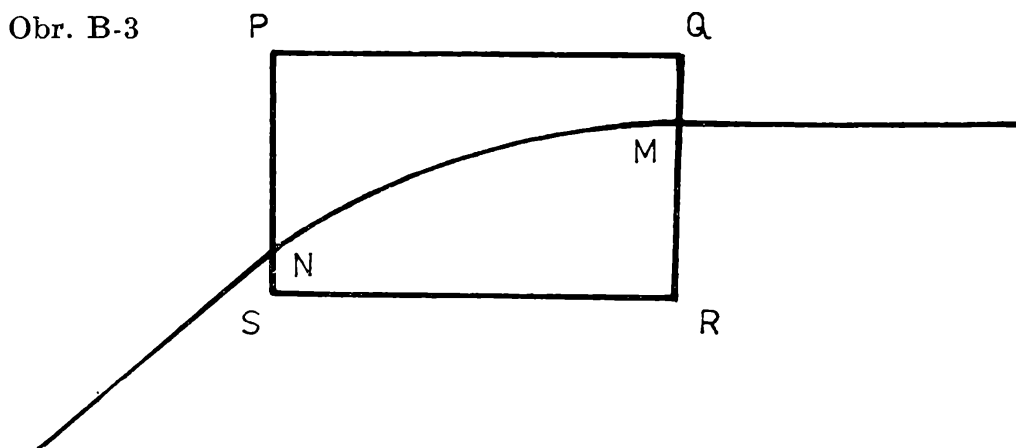


Obr. B-2

křivky a stanovte poměr frekvence struny f_s a frekvence kmitů z generátoru f_g .

5. Porovnejte oba získané výsledky.

7. Abychom určili velikost rychlosti $\mathbf{v}$ elektronů při jejich pohybu v Crookesově trubici, použili jsme vliv homogenního magnetického pole o známé indukci $\mathbf{B}$ na trajektorii elektronu. Magnetická indukce $\mathbf{B}$ je kolmá k rovině, v níž leží trajektorie elektronů. Elektron vstoupí do magnetického pole v bodě M ve směru kolmém k úsečce QR , vystupují z magnetického pole v bodě N (obr. B-3). Změřili jsme délky úseček



Obr. B-3

PQ , QM , PN . Tíhovou sílu působící na elektron neuvažujeme. Před vstupem do magnetického pole se elektron pohybuje stálou rychlostí $\mathbf{v}$.

a) Popište síly, které působí na elektron pohybující se v jednotlivých úsecích trajektorie, tj. před bodem M , mezi body M , N , za bodem N .

Popište tvar trajektorie v jednotlivých úsecích.

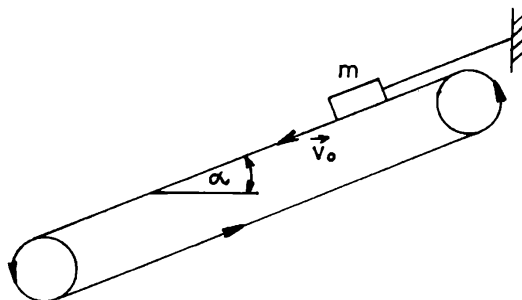
- b) Určete rychlost elektronu před vstupem do magnetického pole.
- c) Určete úhel mezi vektorovou přímkou rychlosti elektronu v bodě M a vektorovou přímkou jeho rychlosti v bodě N . Úlohu řešte obecně, potom pro hodnoty $B = 0,0020 \text{ T}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $PQ = 50 \text{ mm}$, $QM = 7,0 \text{ mm}$, $PN = 25 \text{ mm}$.

Kategorie C

1. Technika měření času umožňuje dnes měřit čas při sportovních závodech s přesností $0,01 \text{ s}$, tj. s odchylkou $0,005 \text{ s}$.

- a) S jakou maximální odchylkou musí být změřena závodní dráha, aby mělo měření času s uvedenou přesností smysl, v případech:
 - pro běh na 100 m při naměřeném čase $t_1 = 9,93 \text{ s}$;
 - pro běh na $10\,000 \text{ m}$ při naměřeném čase $t_2 = 27 \text{ min } 22,50 \text{ s}$;
 - pro plavecký závod žen 200 m — motýlek při naměřeném čase $t_3 = 2 \text{ min } 10,44 \text{ s}$?
- b) Ve třetím případě určete maximální odchylku měření plavecké dráhy v bazénu o délce $50,0 \text{ m}$.
- c) Domníváte se, že existují technické možnosti měření závodní dráhy s odchylkou určenou v jednotlivých případech úlohy a), b)?

2. Pás transportéru, jehož rovina svírá s vodorovnou rovinou ostrý úhel α , se pohybuje stálou rychlostí $\mathbf{v}_0$ vzhledem k povrchu země. Na pásu je těleso o hmotnosti m (např. cihla), které je upoutáno vláknem k nehybné stěně (obr. C-1).

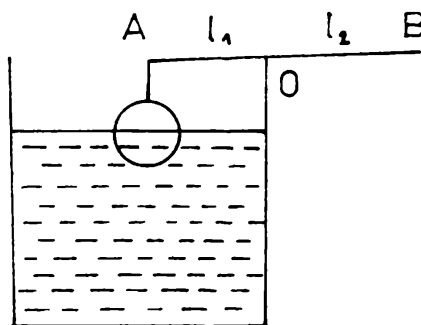


Obr. C-1

Přestřihneme-li vlákno, pohybuje se těleso po pásu, až dosáhne rychlosti $\mathbf{v}_0$ vzhledem k povrchu země. Označíme t_0 dobu trvání tohoto děje.

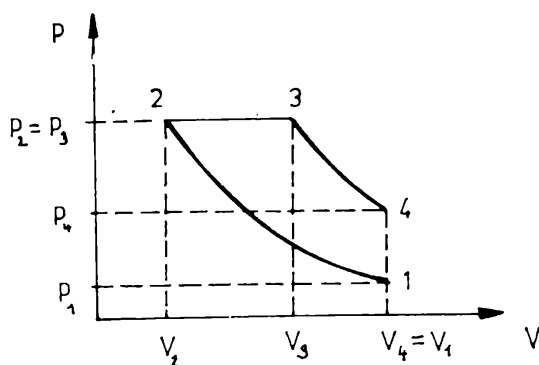
- a) Jak se mění rychlost tělesa vzhledem k pásu během doby t_0 ? Jakou kinetickou energii má těleso na počátku a na konci doby t_0 vzhledem k povrchu země, vzhledem k pásu?
- b) Určete směr a velikost třecí síly $\mathbf{F}_t$ působící na těleso během doby t_0 , je-li f součinitel smykového tření mezi tělesem a pásem. Jaká výsledná síla působí na těleso během doby t_0 ? Jaký pohyb koná těleso vzhledem k povrchu země, vzhledem k pásu během doby t_0 ?
- c) Jakou práci vykoná výsledná síla působící na těleso během doby t_0 ? Jakou částí se na tom podílí třecí síla $\mathbf{F}_t$?

3. Na stejnorodé tenké tyči AB o hmotnosti m je zavěšena stejnorodá koule o poloměru R a hustotě ρ_1 . Tyč je podepřena v bodě O na okraji válcové nádoby o velkém průměru s kapalinou o hustotě ρ_2 . Bod O rozděluje tyč na dvě části o délkách l_1 a l_2 . Hmotnost vlákna je zanedbatelná. Soustava je v rovnovážné poloze při vodorovné ose tyče, je-li koule ponořena do kapaliny polovinou svého objemu (obr. C-2).



Obr. C-2

- Určete podíl $\frac{l_1}{l_2}$
 - Proveďte diskusi určeného vztahu pro $\frac{l_1}{l_2}$ vzhledem k parametrům ρ_1 a ρ_2 .
 - Řešte úlohu a) pro hliníkovou kuličku o poloměru $R = 0,50$ cm a vodu, je-li hmotnost tyče $m = 4,0$ g. Rozhodněte, který z případů diskutovaných v úloze b) v tomto případě platí.
4. V ideálním plynu stálé hmotnosti proběhl děj 1—2—3—4 znázorněný grafem funkce $p = f(V)$ na obr. C-3. Úseky 1—2 a 3—4 odpovídají izotermickým dějům.



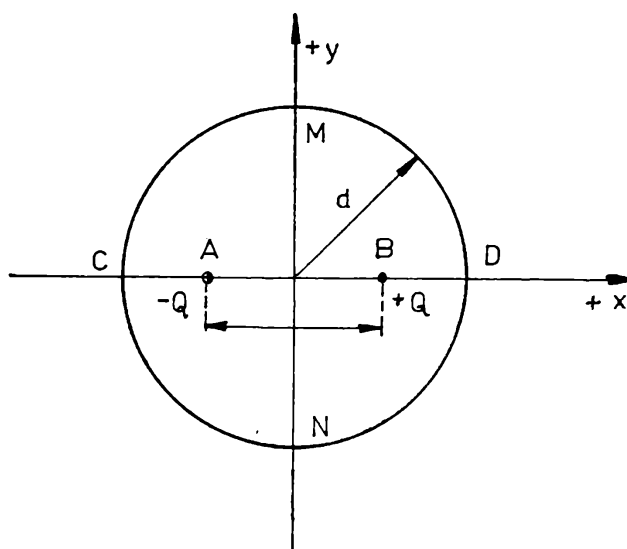
Obr. C-3

- Napište vztahy mezi parametry p , V , T v krajních bodech každého úseku děje. Jaký vztah platí mezi teplotami izotermických dějů 1—2 a 3—4? Ve kterém úseku děje plyn koná práci? Ve kterém úseku děje plyn odevzdává teplo svému okolí? Odpovědi zdůvodněte.
- Znázorněte děj 1—2—3—4 na milimetrový papír grafem $p = f(T)$.
- Znázorněte děj 1—2—3—4 na milimetrový papír grafem funkce $V = f(T)$.

- d) Znázorněte děj 1—2—3—4 grafy funkcí $U = f(V)$ a $U = f(p)$, kde U je vnitřní energie plynného tělesa. Hodnoty V_1 až V_4 a p_1 až p_4 v grafech b), c), d) se shodují s odpovídajícími hodnotami na obr. C-3.

5. Elektrický dipól je složený ze dvou bodových nábojů $+Q$ a $-Q$, jejichž vzájemná vzdálenost je d . Kolem středu S dipólu je opsána myšlená koule o poloměru d . Dipól se nachází ve vakuu (obr. C-4).

- Určete intenzitu $\mathbf{E}_S$ elektrického pole dipólu v bodě S .
- Určete intenzitu $\mathbf{E}_C$, $\mathbf{E}_D$ elektrického pole dipólu v bodech C a D .
- Určete intenzitu $\mathbf{E}_M$, $\mathbf{E}_N$ elektrického pole dipólu v bodech M a N .
- Pomocí definice elektrického potenciálu v daném místě elektrického



Obr. C-4

pole dokažte úvahou, že elektrický potenciál φ_S elektrického pole dipólu v bodě S (i ve všech bodech osy y) je nulový.

- e) Po obecném vyřešení řešte úlohy a), b), c) pro hodnoty:

$$Q = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}, d = 2,0 \text{ cm}, k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}.$$

Na milimetrový papír narýsujte v tomto případě obrázky znázorňující výsledek úlohy a), úlohy b) a úlohy c).

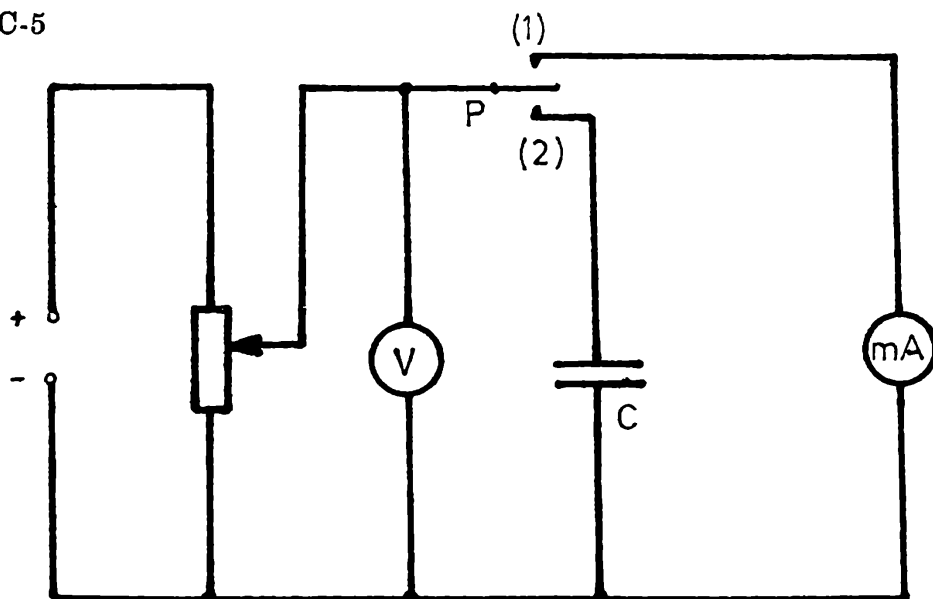
Poznámka: Pro znázornění velikosti intenzity elektrického pole dipólu volte např. $1 \text{ cm} \doteq 1 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

6. Určení kapacity kondenzátoru:

- a) Ověřte vztah přímé úměrnosti napětí U a elektrického náboje Q kondenzátoru.

Příprava: Prostudujte schéma na obr. C-5. Kondenzátor o neznámé kapacitě nabijeme na napětí U , je-li přepínač P v poloze ($P-2$). Potom vybijeme kondenzátor, je-li přepínač P v poloze ($1-2$) a změříme nárazový proud $I_{\max}$ miliampérmetrem (popř. mikroampérmetrem).

Obr. C-5



Nárazový proud $I_{\max}$ je přímo úměrný náboji kondenzátoru, $I_{\max} \sim Q$. Pokusem ověřujeme tedy vztah $U \sim I_{\max}$.

Provedení: Podle obr. C-5 zapíšte pomůcky, které k provedení pokusu potřebujete.

(Použijte např. kondenzátor o kapacitě $10 \mu\text{F}$, miliampérmetr v univerzálním měřidle 202, zdroj napětí 10 V.) Sestavte pokus a proveďte 5 až 8 měření dvojic U , $I_{\max}$. Do tabulky zapíšte hodnoty U , $I_{\max}$,

$\frac{I_{\max}}{U}$ a podle tabulky sestrojte na milimetrový papír graf

$U = f(I_{\max})$. Opakujte pokus pro týž kondenzátor.

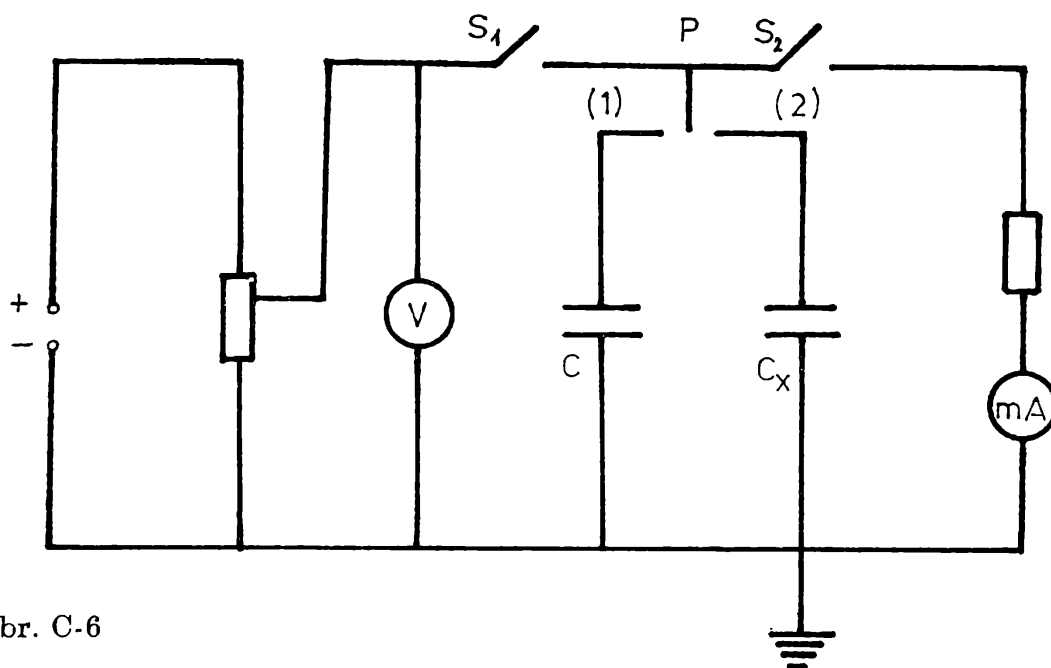
(Poznámka: Před čtením hodnoty napětí U nechte napětí na kondenzátoru ustálit. Čtení nárazového proudu $I_{\max}$ si před vlastním měřením nacvičte.)

Zhodnocení výsledku: Porovnejte vztah $U = f(I_{\max})$ získaný pokusem s hypotézou $U \sim I_{\max}$.

- b) Určete kapacitu C_x kondenzátoru použitím kondenzátoru o známé kapacitě C .

Příprava: Prostudujte schéma na obr. C-6.

1. fáze pokusu: Kondenzátor o známé kapacitě C nabijeme, je-li přepínač P v poloze $(P-1)$ a spínač S_1 se uzavře. Po změření napětí U se otevře spínač S_1 a uzavře spínač S_2 , změří se maximální nárazový proud I .
2. fáze pokusu: Kondenzátor o neznámé kapacitě C_x nabijeme při stejném napětí U , je-li přepínač P v poloze $(P-2)$ a spínač S_1 se uzavře. Potom se kondenzátor o kapacitě C_x vybije tak, že se



Obr. C-6

otevře spínač S_1 a ihned uzavře spínač S_2 ; změří se maximální nárazový proud I_x . Při stejném napětí U v obou fázích pokusu

platí $\frac{I_x}{I} = \frac{C_x}{C}$; odtud se určí $C_x = C \frac{I_x}{I}$.

Provedení: Zapište pomůcky podle obr. C-6, které k provedení pokusu potřebujete.

(Použijte např. kondenzátor o kapacitě $10 \mu\text{F}$; kapacita C_x by měla být řádově stejná jako C , zdroj napětí a měřicí přístroje jako v úloze a).

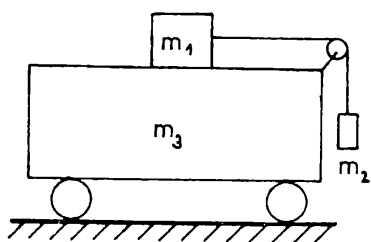
Provedte 5 až 8 měření pro různé hodnoty U . Zapište do tabulky naměřené hodnoty U , I , I_x a z nich určenou hodnotu C_x . Určete aritmetický průměr $\bar{C}_x$.

Opakujte pokus pro stejné hodnoty C a C_x .

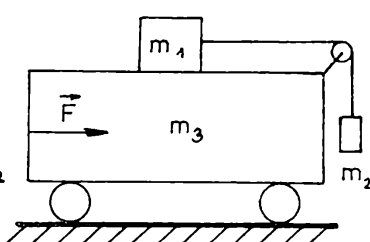
(Poznámka: Napětí U musí být v obou fázích pokusu stejné, kontroluje se na voltmetru. Čtení nárazových proudů I a I_x se provede pokud možno rychle za sebou, dovednost je nutno před měřením nacvičit. Spínače S_1 a S_2 nejsou nikdy současně uzavřené.)

Zhodnocení výsledku: Porovnejte navzájem hodnoty $\bar{C}_x$ nalezené v první a druhé řadě měření, popř. s hodnotou uvedenou na kondenzátoru. Odhadněte relativní odchylku zjištěné hodnoty C_x od jmenovité hodnoty kapacity kondenzátoru.

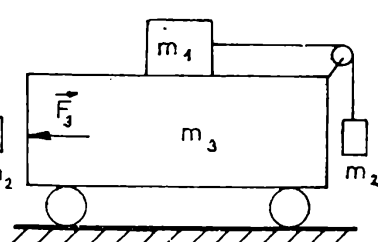
7. Na vodorovné hladké desce stolu je vozíček, na jehož horní hladké vodorovné desce je tuhé těleso o hmotnosti m_1 , spojené vláknem s tělesem



Obr. C-7



Obr. C-8



Obr. C-9

o hmotnosti m_2 . Hmotnost vozíčku je m_3 , hmotnost vlákna neuvažujeme; $m_1 < m_2 < m_3$ (obr. C-7).

- Vozíček je zabrzděn. Určete velikost a směr zrychlení a_1 pohybu tělesa o hmotnosti m_1 vzhledem k vozíčku.
- Vozíček je uvolněn a na jeho stěnu působí kolmo stálá tlaková síla F (obr. C-8).

Určete velikost síly F tak, aby zrychlení pohybu tělesa o hmotnosti m_1 vzhledem k vozíčku bylo nulové.

Popište pohyb tělesa o hmotnosti m_1 vzhledem k vozíčku, působí-li na vozíček místo síly F stálá síla F_1 nebo F_2 stejného směru jako síla F , pro jejichž velikosti platí $F_1 < F$, $F_2 > F$.

- Popište pohyb tělesa o hmotnosti m_1 vzhledem k vozíčku, na který působí stálá síla F_3 (obr. C-9).
- Na konkrétním případě úlohy b) pro $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$,

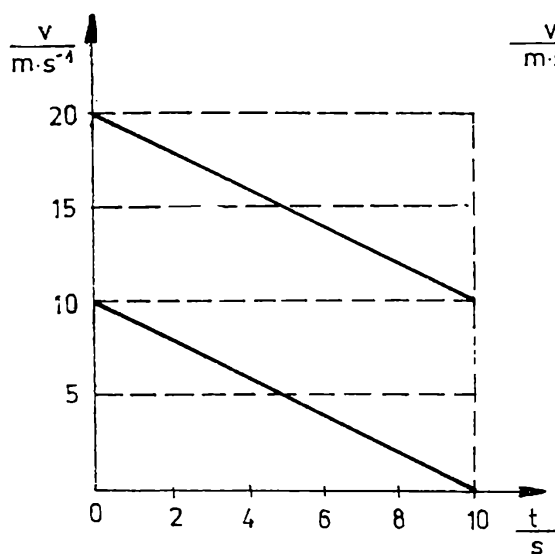
$$F_1 = \frac{F}{2}, F_2 = 2F \text{ se přesvědčte, že jste úlohu b) správně řešili.}$$

Kategória D

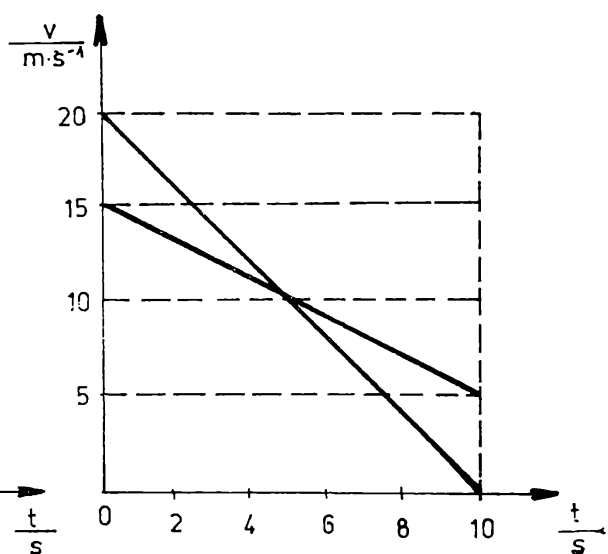
1. Prostudujte grafy rychlosti jako funkce času přímočarých pohybů podle obrázků D-1, D-2, D-3, D-4.

- Popište oba pohyby znázorněné v každém obrázku a stanovte, v čem se shodují a v čem se od sebe liší.
- Určete velikost počáteční rychlosti v_0 a velikost koncové rychlosti v_k každého z obou pohybů na obrázcích. Stanovte dále velikost zrychlení a , dobu trvání pohybu Δt a dráhu pohybu s jako funkce času. Všechny výsledky sestavte do tabulky:

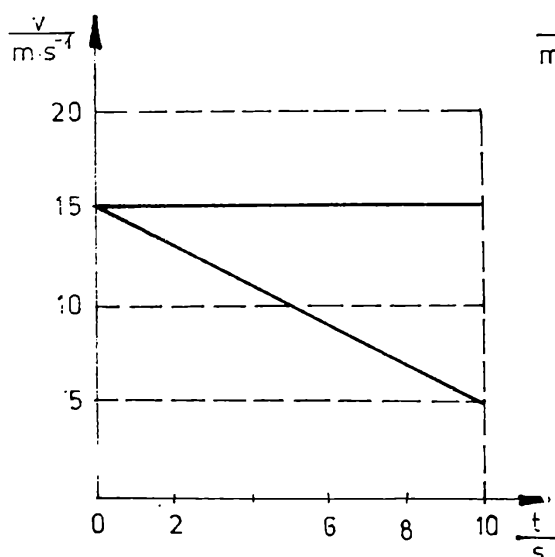
obr.	v_{01}	v_{02}	v_{k1}	v_{k2}	Δt_1	Δt_2	a_1	a_2	s_1	s_2
	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$				s		$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$		m	
D-1										
D-2										
D-3										
D-4										



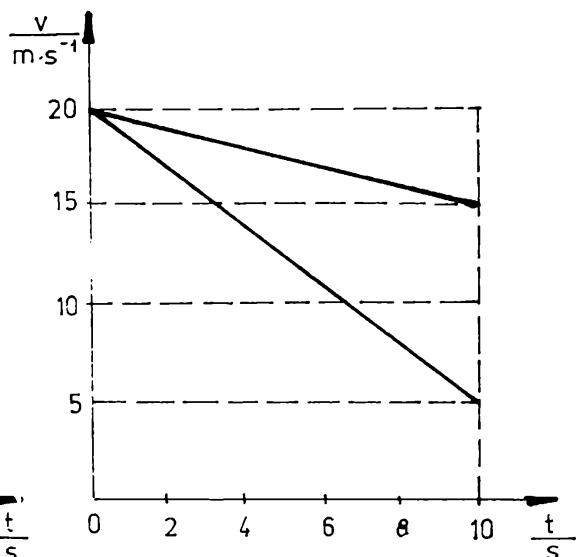
Obr. D-1



Obr. D-2



Obr. D-3



Obr. D-4

2. Najděte v jízdním řádu ČSD trať 010 Praha—Kolín—Česká Třebová. V tomto traťovém úseku vyberte rychlíky jedoucí z Prahy v době od 13 h 00 min do 18 h 00 min, dále všechny rychlíky vyjíždějící ve stejné době z České Třebové do Prahy.

- a) Sestavte tabulku odjezdů rychlíků ze stanice Praha, příjezdů a odjezdů ve stanicích Kolín, Pardubice, Choceň a příjezdů do stanice Česká Třebová; podobně odjezdů rychlíků v opačném směru z České Třebové, příjezdů a odjezdů ve stanicích Choceň, Pardubice, Kolín a příjezdů do Prahy. Na milimetrový papír sestrojte grafikon jízdy těchto vlaků.
- b) Podobnou tabulku sestavte pro tytéž stanice pro osobní vlaky 5004

- a 5011. Do grafikonu rychlíků nakreslete grafikon těchto osobních vlaků pro tytéž stanice.
- c) Použitím jízdního řádu a grafikonu určete průměrnou rychlost obou osobních vlaků a srovnajte ji s průměrnou rychlostí Ostravanu (R 105).
3. Ocelová guľa hmotnosti M je zavesená na lanku. Lanko je nemeňnej dĺžky d a zanedbateľnej hmotnosti. Na túto guľu, ktorá je v pokoji v rovnovážnej polohe stálej, narazí ocelová guľôčka hmotnosti m , ktorá sa pohybuje rýchlosťou v_0 vo vodorovnom smere. Ide o stredový dokonale pružný zraz.
- a) Akú rýchlosť v_1 získa guľa po zraze a akú rýchlosť bude mať guľôčka?

Urobte diskusiu vzhľadom na pomer hmotností $\frac{m}{M}$.

- b) O aký úhol α od rovnovážnej polohy stálej sa vychýli lanko po zraze obidvoch telies?

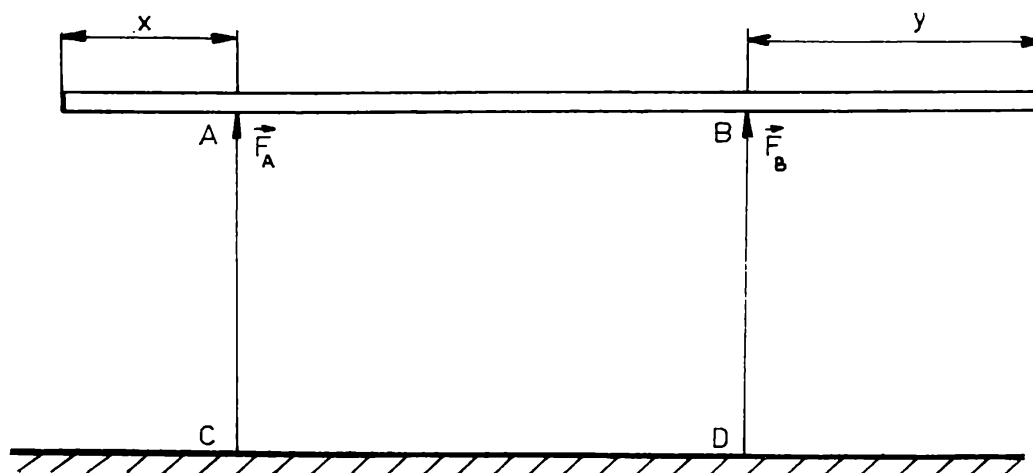
Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty $M = 10 \text{ kg}$, $m = 20 \text{ g}$, $d = 2,0 \text{ m}$, $v_0 = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pri riešení sa môžete pozrieť do učebnice Fyzika pre I. ročník gymnázia, cvičenie 9.

4. Dvaja robotníci nesú tenkú rovnorodú kladu dĺžky d , hmotnosti m . Držia kladu vo vzdialenostiach x , y od koncov (obr. D-5).

- a) Určte sily $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, ktorými pôsobia robotníci na kladu.
- b) Určte prácu, ktorú vykonajú robotníci, ak preniesú kladu na vzdialenosť s , keď sa pohybujú po vodorovnej rovine.
- c) Určte prácu, ktorú vykonajú robotníci, ak preniesú kladu na vzdialenosť s , keď sa pohybujú hore zvähom, ktorý zvierá s vodorovnou rovinou uhol α .
- d) Určte prácu, ktorú vykonajú robotníci, ak preniesú kladu na vzdiale-

Obr. D-5



nosť s , keď sa pohybujú dolu zvaňom, ktorý zvierá s vodorovnou rovinou uhol β .

Úlohu riešte pre údaje: $d = 8,0$ m, $m = 70$ kg, $x = 1,0$ m, $y = 1,5$ m, $s = 200$ m, $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

5. Na bramborové brigádě potrebovali dva svazáci přemístiť dřevěnou bednu po vodorovné rovině na poměrně velkou vzdálenost. Rozhodli se, že ji budou pomalu převalovat vždy kolem hrany téže délky. Zvolili hranu střední délky. Dokažte, že při zvoleném způsobu převalování vykonají největší práci.

Při řešení úlohy považujte bednu za stejnorodý kvádr o hranách a , b , c , $a > b > c$.

6. Stanovení hustoty plastelíny:

1. Máte k dispozici následující *pomůcky*: míček na stolní tenis, plastelínu, odměrný válec s dostatečně velkým obsahem příčného řezu, nádobu s vodou (např. větší kádinku), kousek drátu.
2. *Příprava*: Ponoříme-li do kapaliny těleso, jehož střední hustota je rovna hustotě kapaliny, pak se těleso v kapalině vznáší. Hustota plastelíny je větší než hustota vody, proto stejnorodé těleso z plastelíny klesá ke dnu; naopak míček na stolní tenis plove ve vodě. Jestliže míček obalíme plastelínou vhodného objemu, získáme těleso, které se ve vodě vznáší. Hustotu ρ_p plastelíny určíme

$$\rho_p = \frac{\rho_v(V_m + V_p) - m_m}{V_p},$$

kde ρ_v je hustota vody, V_m objem míčku, V_p objem plastelíny, m_m hmotnost míčku.

3. *Úkoly*:

- a) Odvoďte výše uvedený vztah pro výpočet hustoty plastelíny.
- b) Určete objem míčku jeho úplným ponořením do vody v odměrném válci.
- c) Obalte míček plastelínou, ponořte jej do nádoby s vodou, a tak dlouho plastelínu přidávejte a ubírejte, až se míček obalený plastelínou ve vodě vznáší. Protože dosáhnout rovnovážné polohy míčku vznášejícího se ve vodě je obtížné, stačí, aby míček velmi pomalu stoupal či klesal ve vodě.
- d) Pokus a měření opakujte alespoň pětkrát. Určete průměrnou hodnotu hustoty plastelíny. Na kolik platných číslic jste mohli stanovit číselnou hodnotu hustoty? Odhadněte relativní odchylku měření.

7. Na nakloněnou rovinu, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α , položíme šestiboký pravidelný stejnorodý hranol jednou boční stěnou tak, že boční hrany jsou kolmé ke spádnicí nakloněné roviny.

Součinitel smykového tření mezi boční stěnou, na které hranol leží, a nakloněnou rovinou je f , součinitel klidového tření je f_0 , $f_0 > f$.

- a) Hranol se bude posouvat po nakloněné rovině, nebo se bude odvalovat, nebo zůstane na nakloněné rovině v klidu. Popište situaci, ve které nastane vždy právě jeden z uvedených případů.
- b) Řešte úlohu pro daný hranol, $f = 0,30$, $f_0 = 0,50$, $\alpha = 20^\circ$, 30° , 40° . Výsledek zobecněte pro $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Z NOVÝCH KNIH

Jaroslav Smítal:

O FUNKCIACH A FUNKCIONÁLNYCH ROVNICIACH

Vydala Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry n. p. Bratislava v r. 1984 ako 9215 publikáciu. Má 144 strán, 25 obr. Náklad 2000 kusov. Cena k 10 Kčs, brožovaná.

Do edície ε pribudla ďalšia kniha, ktorá vhodne doplní medzeru v slovenskej a českej literatúre na tému funkcionálne rovnice a iterácie.

Kniha je rozdelená do piatich kapitol. Prvá obsahuje základné pojmy o funkciách a ich vlastnostiach. Pojem spojitost a derivácia nedefinuje tradičným „ ε -ovým spôsobom“. Čitateľ má možnosť na riešených i neriešených príkladoch si overiť, ako pochopil tieto základné pojmy.

Druhá kapitola je venovaná funkcionálnym rovniciam viacerých premenných. Nedefinuje presne, čo je funkcionálna rovnica, pretože taká definícia nie je jednoduchá, ale namiesto toho uvádza

niekoľko príkladov, na ktorých pojem vysvetľuje a ho rieši. Najviac miesta venuje Cauchyho funkcionálnej rovnici. Dokazuje niekoľko viet, ktoré umožňujú riešiť uvedený typ rovnice.

V tretej kapitole na príkladoch z bežného života intuitívne zaviedie pojem iterácie funkcie. Definuje pevný bod, pojem generovanej funkcie a niekoľko viet, ktoré umožňujú hlbšie nazrieť do vlastností spojitých funkcií, ktoré majú pevné body. Zaoberá sa funkciami, ktoré generujú periodické postupnosti, ich periodami a rádmi. Čitateľ má možnosť získané vedomosti si overovať na vzorových príkladoch a nevyriešených úlohách a pritom si uvedomuje, že skúmanie existencie cyklov funkcie nemusí byť jednoduchá záležitosť. Ich všeobecné existencie rieši Šarkovského veta. Na základe týchto pojmov definuje chaotické a stabilné funkcie.

Použitie iterácií — to je názov štvrtej kapitoly. Autor vedie čitateľa k tomu, ako ich výhodne môže aplikovať v oblasti fyziky,

biológie a v iných vedných oboroch. Napr. Fibonacciho model vývoja populácie králikov, pravidelne sa opakujúce premnoženie hrabošov, model šírenia sa epidémie, model vývoja populácie dravec—korisť. Čitateľ postupne spoznáva, ako možno uvedené modely matematicky vyjadriť, ktoré funkcie je najvýhodnejšie voliť...

V nasledujúcej kapitole sa autor venuje funkcionálnym rovniciam jednej premennej. Riešenie tohoto typu rovníc nie je spravidla jednoduché. Zadefinuje pojem invariant zobrazenia a ukáže jeho aplikáciu pri riešení funkcionálnej rovnice jednej premennej. Spomedzi lineárnych funkcií uvádza niektoré

špeciálne druhy a to: Lineárne funkcionálne rovnice, homogenné a nehomogenné funkcionálne rovnice, Abelovu a Schröderovu rovnicu a zaoberá sa ich riešením.

Kniha je doplnená zoznamom literatúry. Čitateľ má možnosť získané vedomosti jej štúdiom si rozšíriť.

Publikácia je určená stredoškolským profesorom, ktorí ju môžu vhodné použiť ako literatúru na matematických seminároch, pri príprave žiakov na MO a korešpondenčné semináre. Určitým nedostatkom knihy je, že neobsahuje výsledky úloh, prípadne návody na ich riešenie.

Jozef Kušnier

Drobné poznatky veľkých

Často hovoríme o významných vedcoch len príliš vážne. Ako keby neboli ľuďmi a nemali všedné starosti ako každý z nás. Aj každý slávny matematik či fyzik bol predovšetkým človekom. Z mäsa i krvi. A riešil problémy nielen odborné. Význační matematici a fyzici s veľkou presnosťou vedeli vystihnúť podstatu mnohých ľudských radostí a starostí.

Skúste si nájsť aspoň jeden ich drobný poznatok, ktorý vyvolá úsmev na tvári, alebo potešenie na duši. Myšlienku, ktorá odhalí zmysel. Postreh, ktorý sprístupní vedecký poznatok i ľudskú osobnosť. Tak vyberajte:

Galilei: Dve pravdy si nikdy nemôžu odporovať.

Kopernik: Úlohou vedy je vzdalovať človeka od zla, usmerňovať jeho myseľ k väčšej dokonalosti.

Tycho Brahe: Ani najvyššia svetská moc, ani bohatstvo — len vláda vedy pretrvá.

Kepler: Príroda má v oblube jednoduchosť a jednotnosť.

Descartes: Iba tých pokladám za svojich priateľov, ktorí sú takí smelí, že ma upozornia na moje chyby.

Bacon F.: Prírodu môžeme ovládnuť iba tým, že sa podriadime jej zákonom.

Pascal: Nemožno popierať existenciu všetkého, čo nie je pochopiteľné.

Newton: Ani jeden veľký objav sa nezrodil bez smelého odhadu.

Euler: Keď rieši úlohu niekto iný, všetko je jasné, ak ju riešiš sám, nič ťa nenapadá.

Gauss: Výsledky vlastného premýšľania sú hodnotnejšie, ako všetka získaná cudzia múdrosť.

Lagrange: Skrytá harmónia je mocnejšia ako zjavná.

Franklin: Polovica pravdy je často veľká lož.

Faraday: Je lepšie byť slepý k zaujatosti a hbitý pre postrehnutí dobrej vôle.

Mendelejev: Veda je vtedy prospešná, keď ju prijímame nielen rozumom, ale aj srdcom.

Röntgen: Proti vnútornému zadosťučineniu z rozriešenia problému je každé uznanie bezvýznamné.

Ioffe: Pravdu dosiahne iba ten, kto ju bez ustania hľadá.

Boltzmann: Nie je nič praktickejšie ako dobrá teória.

Planck: Veda sama o sebe objavuje nové hodnoty, učí nás predovšetkým pravdivosti a bázni.

Ciolkovskij: Základným motívom môjho života je vytvoriť niečo užitočného pre ľudí, neprežiť život zbytočne, pomôcť ľuďom i keď len málo vpred.

Cantor: Pre svoje práce vyžadujem straníckosť, nie však pre svoju pominuteľnú osobu, ale straníckosť pre pravdu, ktorá je večná.

Ak vás zaujala niektorá myšlienka a nepoznáte nič bližšie o autovi, hľadajte v životopisných poznámkach učebníc, medzi popularizačnou literatúrou, spýtajte sa svojich učiteľov. Vytvorte si album myšlienok, ktoré vám premostia cestu z minulosti do budúcnosti. Múdry človek sa nikdy nenasýti vzácnými myšlienkami. Nech stretnutia s veľkými osobnosťami vedy, nielen cez ich vedecký odkaz, ale aj cez ich hlboko ľudské hodnoty, sú pre vás novým obzorom poznávania.

Skúste nazrieť do knižky *Evy Kunovskej* „Vědu dělají lidé“, ktorú vydalo Pressfoto-ČTK v Prahe v roku 1976. Možná dáte za pravdu myšlienke *A. I. Kitajgorodského*: „Vedu robia ľudia, ale na ich práci sa spolu s matematickými vzorcami a fyzikálnymi prístrojmi zúčastňujú ich sklony a temperament, úsilie a zásady.“

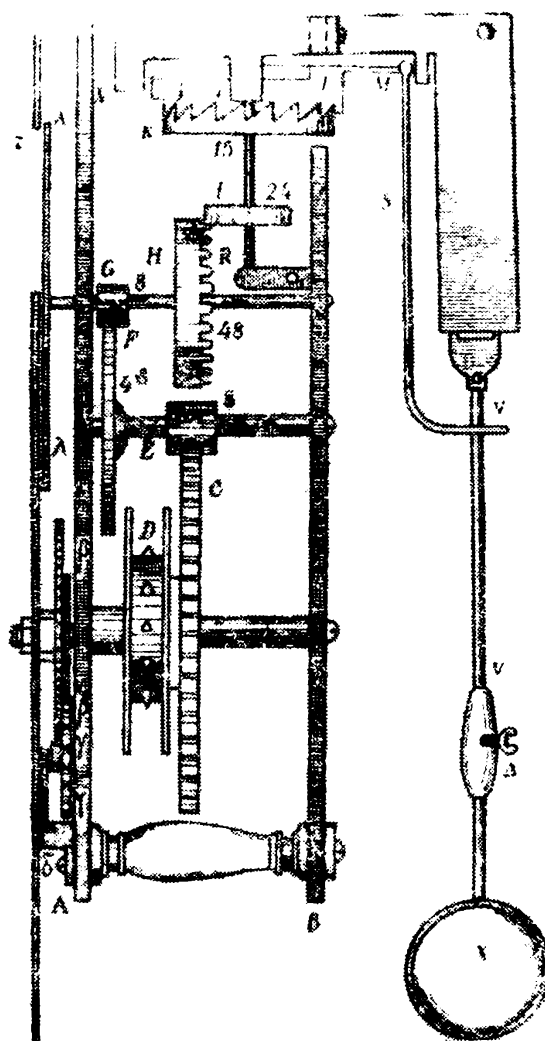
Dušan Jedinák

Huygensovy kyvadlové hodiny

Hodiny jsou jedním z nejstarších měřicích přístrojů vůbec. Avšak přesné kyvadlové hodiny pocházejí teprve od holandského matematika a fyzika *Christiana Huygense* (1656). Jejich teorii, včetně teorie matematického a fyzického kyvadla, vypracoval v díle *Horologium oscillatorium*, tj. *Kyvadlové hodiny* (1673). Trvalý pohyb hodin zabezpečovalo závaží jako motor hodin, kotva jejich chod a izochronnost jejího pohybu kyvadlo konstantní délky jako regulátor. Výsledný pravidelný otáčivý pohyb bylo již snadné převést na rychlejší či pomalejší pohyb pomocí ozubených kol, což je patrné z Huygensova obrázku.

Galileiho hodiny, zhotovené později podle jeho návrhu, tyto části a tedy ani všechny vlastnosti neměly, a nemohly tedy skutečně sloužit svému účelu.

Hodiny jako měřicí přístroj mají za sebou dlouhý vývoj, bohaté jsou jejich dějiny před Huygensem i po něm, jeho dílo však zůstává jedním z hlavních mezníků na této dlouhé cestě. Huygens (1629 až 1695) však nebyl jen velký technik, ale především velký fyzik a matematik, který své vynálezy učinil takřka mimochodem, při řešení základních problémů fyzikálních. Od něho pochází idea



vlnové teorie světla, základní pojmy mechaniky (odstředivá síla, moment setrvačnosti aj.), objev struktury Saturnova prstence aj. Je zajímavé, že to vše učinil člověk, formálním vzděláním právník.

Vladimír Malíšek

Nakladatelství ACADEMIA vydalo knihu

VESMÍRNÍ SOUSEDÉ NAŠÍ PLANETY

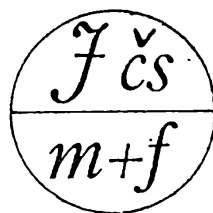
Její autor ZDENĚK KOPAL, litomyšlský rodák, působící jako profesor astronomie na univerzitě v Manchesteru ve Velké Británii, se ve své knize zabývá soustavou planet, její strukturou i průzkumem planet kosmickými sondami. Dále rozebírá otázku, kdy a jak začal život na naší planetě a jak asi bude tvář Země vypadat v budoucnosti.

(228 str., 70 obr., 8 str. barevné obrazové přílohy, váz. 38,— Kčs)

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3\$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje PNS. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta, doručovatel a předplatitelská střediska. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kaňkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešové, ČSČ.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1985.



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 63, 1984-85

VEDOUcí REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER, UK PRAHA
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA: Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, CSc., UP Olomouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT Praha, pplk. doc. dr. Ján Chrapan, CSc., VVTŠ ČSSP Liptovský Mikuláš, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Kořínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, docent dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha, prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha, dr. Martin Šolc, CSc., UK Praha.

Vydává ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

0844

OBSAH

Úvodní články

Bončev Ljubomir, Andrejev Nikolaj, Ganev Nikolaj, Kraus Ivo: Význam fyziky pro technický pokrok	241
Faktorová Ladislava: Významná výročí a dnešek	337
Chrapan Ján: Slovenské národné povstanie	1

Matematika

Anděl Jiří, Anděl Petr: Jak riskovat vědecky	297
Barták Jaroslav: Matematika v ekonomii	7
Co jsou to diferenciální rovnice?	52
Bušek Ivan: Stavíme nejkratší silnici	197
Drlík Petr: Zaujímavosti o číselných systémech	97
Drs Ladislav: Pravoúhlá axonometrie určená směrem promítání	57
Fischer Ivan: Integrované logické obvody SSI	15
Integrované logické obvody MSI	110
Paměti PROM jako logické kombinační obvody LSI	204
Sekvenční logické obvody	349
Hnáth Anton: Tri prístupy k riešeniu jednej úlohy	201
Horák Stanislav: Velikost pravoúhlých průmětů rovinných obrazců	49
O tětiovém čtyřúhelníku	244
Houdek Oldřich: Fibonacci dnes?	193
Jelínek Libor: Z finitní matematiky	342
Z finitní geometrie — neřešitelný problém dlouhé ploché dráhy	433
Komenda Stanislav: Náhoda ve službách člověčenství	145
Kraemer Emil: Řešením úloh opakujeme geometrii I., II., III. 102, 151,	246
Zobecnění věty Ptolemaiovy	345
Hyperbola v polární soustavě souřadnic	438
Mída Jiří: O nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem	13
Trojúhelníková a Cauchyova nerovnost	108
Zamyšlení nad jízdenkou MHD	340
Mráz Vlastimil: Geometrie a měření závitů	391
Nečas Jiří: Co je mikropočítač	252
Desítková soustava nepoužívající nulu	385
Šilhán Jindřich: Programovatelný kalkulátor v různých souvislostech	293
Šindelář Karel: Funkční pojetí úměrností a výpočty	289
Štědrý Milan: Odmocnina z čísel surdických	387
Trch Milan: O jednom kritériu dělitelnosti sedmi a jeho zobecnění	147
O posloupnostech definovaných rekurentně	389

Fyzika

Brada Pavel: Ionizující záření v nukleární medicíně	403
Dvořák Leoš: Ještě ke geosynchronní Věži	29
Heřmanský Bedřich: Velká jaderná energetika	313
Hudec René: Kdy zachytíme gravitační záření	260
Nový pohled na Mars	415, 444
Chorvát Dušan: Hrozba následkov jadrovej vojny IV.	157
Chrapan Ján: Hrozba následkov jadrovej vojny III.	116
Janisková Oľga: Hrozba následkov jadrovej vojny II.	60
Jurečka Stanislav: Jednoparametrový model atómu vodíka	61
Kalvoda Ladislav: Využití neutronové difrakce ve studiu pevných látek	411
Klivanec Daniel: Frekvenčné charakteristiky elektrických dvojpólů	65, 121
Kociský Matej: Hrozba následkov jadrovej vojny V.	209
Kotyk Jozef: Vrh šikmo vzhôru	303
Kraus Ivo: Rentgenová tenzometrie	254
Machalický Jiří: O závislosti gravitačních sil na prostředí, které obklopuje tělesa	170
Mudroň Jozef: Hrozba následkov jadrovej vojny I.	24
Myslík Jiří: Vztahy mezi napětími a proudy v lineárních elektrických obvodech	408
Ohera Marcel: Termoluminiscenční dozimetr	219
Volf Ivo: Pohyb tělesa v odporujícím prostředí	162, 213
Vybíral Bohumil: O teorii relativity trochu jinak I., II.	308, 357

Z dějin exaktních věd

Calda Emil: Kdy se vlastně narodil Isaac Newton?	362
Ferko Pavol, Kmeť Igor: Rozvoj klasickej fyziky v prvej polovici 19. storočia	318
Rozvoj a vyvrcholenie klasickej fyziky v druhej polovici 19. storočia	363
Flajšinger Vlastimil: Opravdu jen legenda?	418
Jáchim František: Tadeáš Hájek z Hájku a počátky observační astronomie v Čechách	262
Kotyk Josef: 350 let od narození Roberta Hooka	446
Kraus Ivo: Objevy, které se staly základem fyziky pevných látek	76
Kubínek Roman: Svět očima moderní fyziky	128
Mída Jiří: Kdo byl von Littrow?	75
O jednom neobvyklém kódování	448
Pačes Jaroslav: O Ústavu fyzikálních problémů v Moskvě	322
Šafrata Stanislav: Vzpomínka na P. L. Kapicu	369
Šedivý Jaroslav: Henri Poincaré — vědec s výraznou intuicí	175
250 let učebnice Geometria practica V. J. Veselého	224
Šolcová Alena: Kdo byl Friedrich Wilhelm Bessel?	38

Přemýšlíme, řešíme ...

Calda Emil: Profesor Ypsilon o harmonické řadě a velkém třesku	182, 230
Profesor Ypsilon na krosu Patamatikovem	265
Hejný Milan, Michalcová Anna: Janko Hraško v Paralelolande I., II., III.	326, 421, 450
Horák Stanislav: Jednoduché příklady z analytické geometrie	87
Mann Jiří: Stádo	84
Matematickým kutilům pod stromeček	181, 226
Tři cifry	374
Maršák Zlatko: I teploměr je zajímavá fyzikální soustava	132
Mída Jiří: O jakou úlohu jde?	432
Procházková Eva: Víte, kolika způsoby lze řešit případ odebrání části plynu z bomby za stálé teploty?	428
Straka Josef: Jedna matematická zábava	268
Svoboda Josef: Hlavalamy	48, 134, 234, 375
Šarounová Alena: Kostky nejen Rubikovy	41, 86

Naše soutěž

Výsledky loňské soutěže	88
Řešení úloh minulého ročníku	90, 135, 184, 235, 273
Úlohy k řešení	94, 140

Olympiády a SOČ

MO	45, 191, 280, 454
FO	43, 330, 334, 376, 458
SOČ	238

Informace

Calda Emil: Příklady k přijímací zkoušce z matematiky na MFF UK v Praze v r. 1984	285
Dedera Pavel, Vašek Zdeněk: Vysoká vojenská škola ČSSP	379
Kořínková Hana: O mezinárodním matematickém kongresu	96
Pátý Libor: Co víte o MFF UK v Praze a studiu na ní?	378
Šedivý Jaroslav: Sjezdy JČSMF a JSMF v roce 1984	334
Šedivý Jaroslav: Sjezdy JČSMF a JSMF v roce 1984	336

Z nových knih 47, 95, 143, 192, 287, 382, 474

Jedinák Dušan: Drobné poznatky velkých 475

Pohledy do dějin (Jaroslav Šedivý, Vladimír Malíšek) 3. str. obálek