

ROZHLEDY

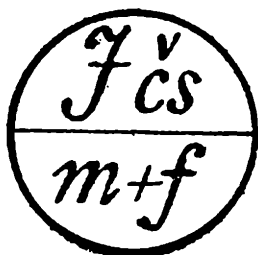
**matematicko
– fyzikální**



**ROČNÍK 62, 1983/84
ZÁŘÍ**

(1)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUČÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Kořínková,
CSc., ÚÚVPP Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Karel
Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák,
CSc., UK Praha, dr. Oldřich Petránek,
SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha, prof. dr.
Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr.
Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Kotyk: Ze vzpomínek .	1
E. Calda: Basketbal očima profesora Ypsilonu	2
E. Kraemer: O jedné vlastnosti tečen pa- raboly	6
O. Lepil: Na dně vzdušného oceánu .	15
J. Pižút, R. Zajac: První atomisti .	19
V. Šindelář: Metrická soustava a metric- ká konvence	20
F. Jáchim: Od vodního kola ke Kaplano- vě turbíně	24
Přemýšlíme, řešíme .	26
Olympiády a SOČ .	30
Informace	36
Z nových knih	43
Pohledy do dějin	3. str. obálky
J. Pech: Slovník matematických terminů (25-28)	příloha

Ze vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

V posledním článku „Ze vzpomínek na naše ROZHLEDY“ (roč. 61, čís. 1, str. 1 a 2) jsme se zabývali vzpomínkami na událost, jakou před šedesáti lety pro studující středních škol bylo rozhodnutí Jednoty československých matematiků a fyziků vydávat pro ně ROZHLEDY MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ. V tomto článku budeme vzpomínat, jak nový časopis plnil od počátku své poslání.

Navazující na dobrou tradici někdejší Přílohy Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky, ROZHLEDY získaly si záhy srdce čtenářů. Sešity nového časopisu náležely od počátku k oblíbené četbě žáků. Přinášely odborné a žákům přístupné stati z matematiky, fyziky, deskriptivní geometrie i z oborů příbuzných (chemie a věd technických), životopisy slavných badatelů a soutěžní úlohy, věnovaly pozornost různým zajímavostem i praktickému užití exaktních věd a pod. Na nové číslo časopisu se čtenáři proto vždy velmi těšili a dychtivě je očekávali. ROZHLEDY vhodně doplňovaly výklady učebnic a běžné učivo střední školy, přispívaly žákům k prohloubení přípravy k dalšímu studiu na školách vysokých, staly se jim proto vydatným a osvědčeným pomocníkem.

Naplnění zdravou sebedůvěrou, čtenáři ROZHLEDŮ doufali, že obstojí při maturitní zkoušce (tehdy tzv. zkoušce dospělosti) i podle nejprísnějších měřítek „velmi dobře“ a ke vstupu na vysokou školu získají doporučení „s vyznamenáním“. Netrvalo dlouho a jejich přání došla skutečně radostného splnění. Žákům dostalo se za příkladnou horlivost ve studiu a ROZHLEDŮM za jejich přispění nejlepšího vysvědčení.

Podobné pocity prožíval jsem v roce 1922 na býv. stát. reálce v Nové Pace jako pilný čtenář ROZHLEDŮ také já. Osobnost *Ladislava Červenky*, předsedy maturitní zkušební komise, byla nám dobře známa jako autora učebnic aritmetiky pro nižší třídy tehdejších středních škol*) a zemského školního inspektora. Za jeho hospitací při vyučování jsme poznali jeho pedagogické mistrovství, s nímž dovede v žácích nalézt vše, co vědí — tak má v očích žáků vypadat každý učitel, kantor-ideál, jehož zkoušení by nebylo třeba se bát. Nebáli jsme se však ani diskusí,

*) Vyšly v mnoha pečlivých vydáních nákladem Jednoty čsl. matematiků a fyziků v Praze.

jež při maturitních zkouškách konal se žáky nadprůměrnými, zvláště pak š čtenáři ROZHLEDŮ, a jimiž pronikal často až do učiva vysokých škol. Tak bylo i v mém případě. V přirozené a zcela logické souvislosti s otázkou žádanou učitelem fyziky o interferenci, difrakci (ohybu) a polarizaci světla vyzval mě, abych vyličil podrobněji vývoj názorů o podstatě světla. Se zanícením tak vzácného tématu hodným odpoutal jsem se zcela od chudičkových historických poznámek učebnice a v referátu trvajícím čtvrt hodiny vykládal jsem Newtonovu emisní (emanační, výronovou) teorii světla, Huygensovu teorii undulační (vlnovou), vědecké spory o existenci a záhadných vlastnostech hypotetického světelného éteru, záslušnou činnost a názory *Aug. J. Fresnela*, *Thom. Younga*, *Maxe Plancka* i jiných badatelů. Planckovou teorií kvantovou vrátili jsme se v našem století do jisté míry k staré překonané představě Newtonově o korpuskulární podstatě světla, ne však v její původní formě, nýbrž ve formě vyspělejší. Na vývojové spirále lidstva byla by Planckova teorie umístěna jistě nad teorií Newtonovou, v poloze vyšší.

Předseda zkušební komise se netajil svým uspokojením ani svou zálibou v dějinách exaktních věd. Vyzval mě zároveň, abych statěmi tohoto druhu pro jejich veliký význam výchovný ve svém budoucím učitelském povolání se svým vzácným idealismem přispíval také ke zpestření obsahu ROZHLEDŮ. Vyslovil jsem svůj souhlas bez váhání. Čtenářům ROZHLEDŮ je známo, že svůj závazek, tehdy učiněný, jsem po dobu delší čtyřiceti let v jejich oblíbeném časopise čestně a s radostí plnil.

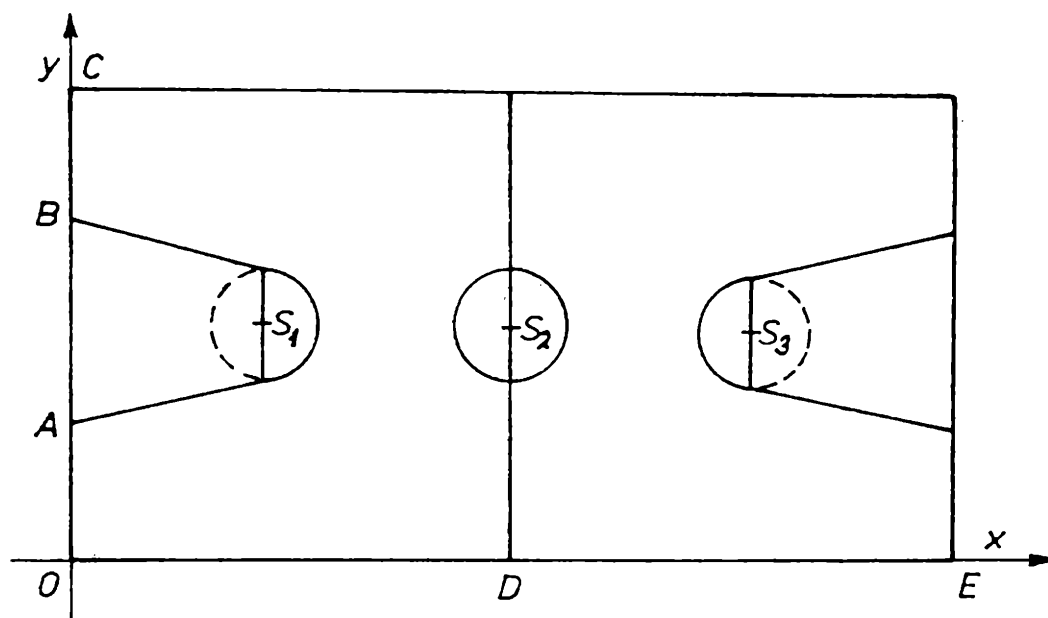
S inspektorem Ladislavem Červenkou sešel jsem se po letech (v roce 1936) v Pardubicích, kde — ve svém rodišti — žil na odpočinku. Za vzájemných návštěv besedovali jsme často nad ročníky ROZHLEDŮ, které nám byly přední ozdobou knihovny, naší společnou láskou.

MATEMATIKA

Basketbal očima profesora Ypsilonu

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

Třída profesora Ypsilonu žije blížícím se střetnutím svého basketbalového mužstva s družstvem třídy 4. B ve finále školního turnaje a zvědavé obou týmů se snaží zjistit informace o taktice, kterou soupeř v tomto utkání hodlá zvolit. Velmi cenné poznatky získal pro své svěřence sám profesor Ypsilon, když se mu v přestrojení za uklízečku podařilo



proniknout na soupeřův trénink. A protože mu jde u jeho žáků i o znalosti matematické, sdělil jim výsledek své výzvědné akce matematickou formou, a to pomocí obr. 1, na němž je v kartézské souřadnicové soustavě Oxy (s jednotkou délky rovnou 1 m) znázorněno basketbalové hřiště. Jeho rozměry a poloha na něm zakreslených úseček a kružnic jsou patrné ze souřadnic zakreslených bodů:

$$A = [0; 4], B = [0; 10], C = [0; 14], D = [13; 0], E = [26; 0],$$

$$S_1 = [5,8; 7], S_2 = [13; 7], S_3 = [20,2; 7];$$

přitom body S_1, S_2, S_3 jsou středy shodných kružnic o poloměru 1,8 m. A zde je už zjištění profesora Ypsilon:

Během celého tréninku nacvičoval soupeřův hráč H_1 střelbu z bodů hrací plochy vyplňujících útvar U_1 , jenž je dán rovnicí

$$(1) \quad (|x - 2| - x + 2)^2 + (|4 - x| - 4 + x)^2 + (|y| - y)^2 + (|2 - y| - 2 + y)^2 = 0;$$

hráč H_2 trénoval střelbu z bodů patřících útvaru U_2 , který má rovnici

$$(2) \quad |1 - (x - 4)^2 - (y - 12)^2| - 1 + (x - 4)^2 + (y - 12)^2 = 0;$$

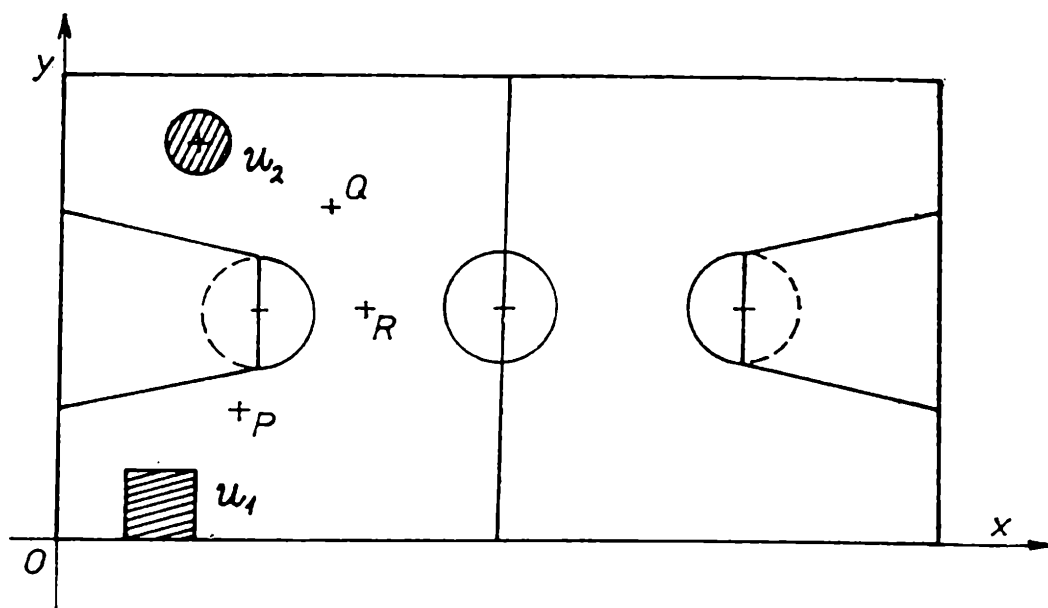
hráč H_3 střílel na koš jenom z míst náležejících útvaru U_3 , který lze vyjádřit rovnicí

$$(3) \quad [(x - 5)^2 + (y - 4)^2] [(x - 8)^2 + (y - 10)^2] [(x - 9)^2 + (y - 7)^2] = 0;$$

zbývající hráči cvičili střelbu pouze z blízkosti koše.

Je vám jistě jasné, že žáci profesora Ypsilon odhalili velmi brzy, jaké geometrické útvary „se skrývají“ pod uvedenými rovnicemi, a že svou přípravu na „zápas století“ přizpůsobili získanému výsledku. Poznáte také, jaké geometrické útvary měl profesor Ypsilon na mysli?

Obr. 2



Prozkoumejme nejprve rovnici (1) útvaru U_1 . Na základě věty, že pro všechna reálná čísla p, q platí

$$p^2 + q^2 = 0 \Leftrightarrow (p = 0 \wedge q = 0),$$

snadno usoudíme, že je ekvivalentní s touto soustavou rovnic:

$$|x - 2| - x + 2 = 0, \quad |4 - x| - 4 + x = 0, \quad |y| - y = 0, \quad |2 - y| - 2 + y = 0.$$

Uvědomíme-li si dále, že pro každé reálné číslo r platí

$$(4) \quad |r| - r = 0 \Leftrightarrow r \geq 0,$$

dostaneme, že pro každé reálné x, y je

$$|x - 2| - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0,$$

$$|4 - x| - 4 + x = 0 \Leftrightarrow 4 - x \geq 0,$$

$$|y| - y = 0 \Leftrightarrow y \geq 0,$$

$$|2 - y| - 2 + y = 0 \Leftrightarrow 2 - y \geq 0.$$

To však — vzhledem k platnosti všech těchto podmínek zároveň — znamená, že útvar U_1 je průnikem polorovin

$$x \geq 2, x \leq 4, y \geq 0, y \leq 2.$$

Je tedy útvar U_1 čtverec ohraničený přímkami o rovnicích

$$x = 2, x = 4, y = 0, y = 2,$$

který je znázorněn na obr. 2.

Rovnice (2) útvaru U_2 je podle (4) ekvivalentní s nerovnicí

$$1 - (x - 4)^2 - (y - 2)^2 \geq 0,$$

tj. s nerovnicí

$$(x - 4)^2 + (y - 12)^2 \leq 1,$$

z níž je patrné, že útvar U_2 je kruh o poloměru $r = 1$ se středem v bodě $[4; 12]$ — viz obr. 2.

K rozboru rovnice (3) útvaru U_3 použijeme známé věty:
Pro všechna reálná čísla s, t platí:

$$s \cdot t = 0 \Leftrightarrow (s = 0 \vee t = 0).$$

Rovnice (3) je tedy ekvivalentní s tím, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 0,$$

$$(x - 8)^2 + (y - 10)^2 = 0,$$

$$(x - 9)^2 + (y - 7)^2 = 0.$$

Protože první podmínce odpovídá pouze bod $P = [5; 4]$, druhé pouze bod $Q = [8; 10]$ a třetí jenom bod $R = [9; 7]$ — viz obr. 2, je útvar U_3 roven sjednocení těchto tří jednobodových množin, tj.

$$U_3 = \{P\} \cup \{Q\} \cup \{R\} = \{P, Q, R\}.$$

Všimli jste si, že geometrické útvary, které ve škole obvykle vyjadřujete nerovnicí (jako např. kruh U_2) nebo soustavu nerovnic (jako např. čtverec U_1), vyjádřil profesor Ypsilon jedinou rovnicí? Na základě jeho postupu jistě najdete rovnici kruhu (nikoli kružnice!) ležícího ve středu basketbalového hřiště v souřadnicové soustavě na obr. 1.

Vyjádření tohoto kruhu nerovnicí

$$(x - 13)^2 + (y - 7)^2 \leq 1,8^2$$

upravíme na tvar

$$1,8^2 - (x - 13)^2 - (y - 7)^2 \geq 0,$$

který pomocí (4) převedeme na rovnici:

$$|1,8^2 - (x - 13)^2 - (y - 7)^2| - 1,8^2 + (x - 13)^2 + (y - 7)^2 = 0.$$

Co kdybychom však z tohoto kruhu chtěli vyloučit jeho hraniční kružnici? Tento kruh bez hranice lze vyjádřit nerovnicí

$$1,8^2 - (x - 13)^2 - (y - 7)^2 > 0,$$

kterou však nelze převést na rovnici užitím (4): na rozdíl od této nerovnice, v níž je znak ostré nerovnosti, vystupuje totiž ve (4) znak nerovnosti neostře! Přijďte sami na to, která věta nám pomůže? Je to věta, kterou si sami snadno dokážete:

Pro každé reálné číslo u platí: $u > 0 \Leftrightarrow \frac{u}{|u|} - 1 = 0$. Jejím užitím

dostaneme rovnici daného kruhu bez jeho hraniční kružnice:

$$\frac{1,8^2 - (x - 13)^2 - (y - 7)^2}{|1,8^2 - (x - 13)^2 - (y - 7)^2|} - 1 = 0.$$

Připomeňme si ještě na závěr památná slova profesora Ypsilonu, jimiž svůj výklad o rovnicích geometrických útvarů kořenil:

Zatímco z vyjádření rovinných útvarů pomocí nerovnice nebo soustav nerovnic je téměř na první pohled zřejmé, o jaké útvary se jedná, není už to tak snadno vidět z jejich vyjádření jedinou rovnicí. Tento nedostatek lze obrátit ve výhodu např. na sportovních kolbištích. Zvolá-li při fotbalovém utkání trenér na obávaného střelce svého mužstva: „Franto, běž do pokutového území!“, rozumí tomuto pokynu i soupeř a může učinit rázná protiopatření. Avšak zvolání: „Franto, běž do útvaru o rovnici

$$(|x| - x)^2 + (|16,5 - x| - 16,5 + x)^2 + (|y - 11| - y + 11)^2 + (|59 - y| - 59 + y)^2 = 0 !“,$$

svou formou (připomínající černou magii) vyrazí soupeři dech, takže bude jen bezmocně přihlížet, jak Frantík elegantně zpracovává míč přihraný do pokutového území a pohodlně jej zasouvá do sítě. Je ovšem nutno, aby trenér sdělil před zápasem svým svěřencům souřadnicovou soustavu, v níž bude potřebné útvary vyjadřovat!

0 jedné vlastnosti tečen paraboly

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Připomeňme nejprve definici paraboly a ty její vlastnosti, které jsou zřejmé z názoru nebo se uvádějí v učebnicích matematiky pro střední školy.

Budiž v rovině dán bod F a přímka d , která jím neprochází (obr. 1). Množina všech bodů této roviny, z nichž každý má touž vzdálenost od bodu F a od přímky d , se nazývá *parabola*. Bod F je její *ohnisko* a přímka d její *řídící přímka*. Vzdálenost p ohniska F od přímky d se nazývá *parametr paraboly*; někdy se tímto názvem označuje číslo $2p$. Přímce $o \perp d$ vedené ohniskem F říkáme *osa paraboly*; podle ní je parabola souměrná. Je-li $D = o \cap d$, je střed V úsečky FD bodem paraboly; nazývá se *vrchol paraboly*.

Na obr. 1 vidíme, že parabola rozděluje rovinu na dvě části; parabolu

Důsledky věty 1. a) Nechť platí předpoklady věty 1; potom tečna paraboly sestrojená v jejím bodu $T[x_1, y_1]$, který není vrcholem paraboly, protíná vrcholovou tečnu v bodu $P \left[0, \frac{y_1}{2} \right]$.

b) Každé dvě různé tečny paraboly jsou různoběžné.

Důkaz. a) Protože bod $T[x_1, y_1]$ je bodem paraboly, je $y_1^2 = 2px_1$. Z toho a z rovnice tečny paraboly sestrojené v bodu T plyne, že tato tečna prochází bodem $P \left[0, \frac{y_1}{2} \right]$.

b) Je-li tečna t rovnoběžná s přímkou s , pak podle věty 1c) prochází průsečíkem P vrcholové tečny paraboly s přímkou $s' \perp s$ vedenou ohniskem paraboly. Z toho plyne, že taková tečna je právě jedna.

Poznámka. Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic jako ve větě 1, pak přímka q rovnoběžná s osou paraboly $y^2 = 2px$ má rovnici $y = c$ a protíná parabolu právě v jednom bodu. Z toho plyne, že pro různé body $T_1[x_1, y_1]$, $T_2[x_2, y_2]$ paraboly je $y_1 \neq y_2$.

Pomocná věta. Nechť platí předpoklady věty 1 a bod $P[x, y]$ nechť je průsečíkem tečen paraboly sestrojených v jejích různých bodech $T_1[x_1, y_1]$, $T_2[x_2, y_2]$. Potom druhá souřadnice bodu P je

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (\text{P})$$

Důkaz. Protože body T_1, T_2 leží na parabole $y^2 = 2px$, je

$$x_1 - x_2 = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2p}. \quad (1)$$

Protože je $T_1 \neq T_2$, je podle předešlé poznámky

$$y_1 - y_2 \neq 0. \quad (2)$$

Rovnice tečen paraboly v bodech T_1, T_2 jsou

$$y_1 y = p(x + x_1),$$

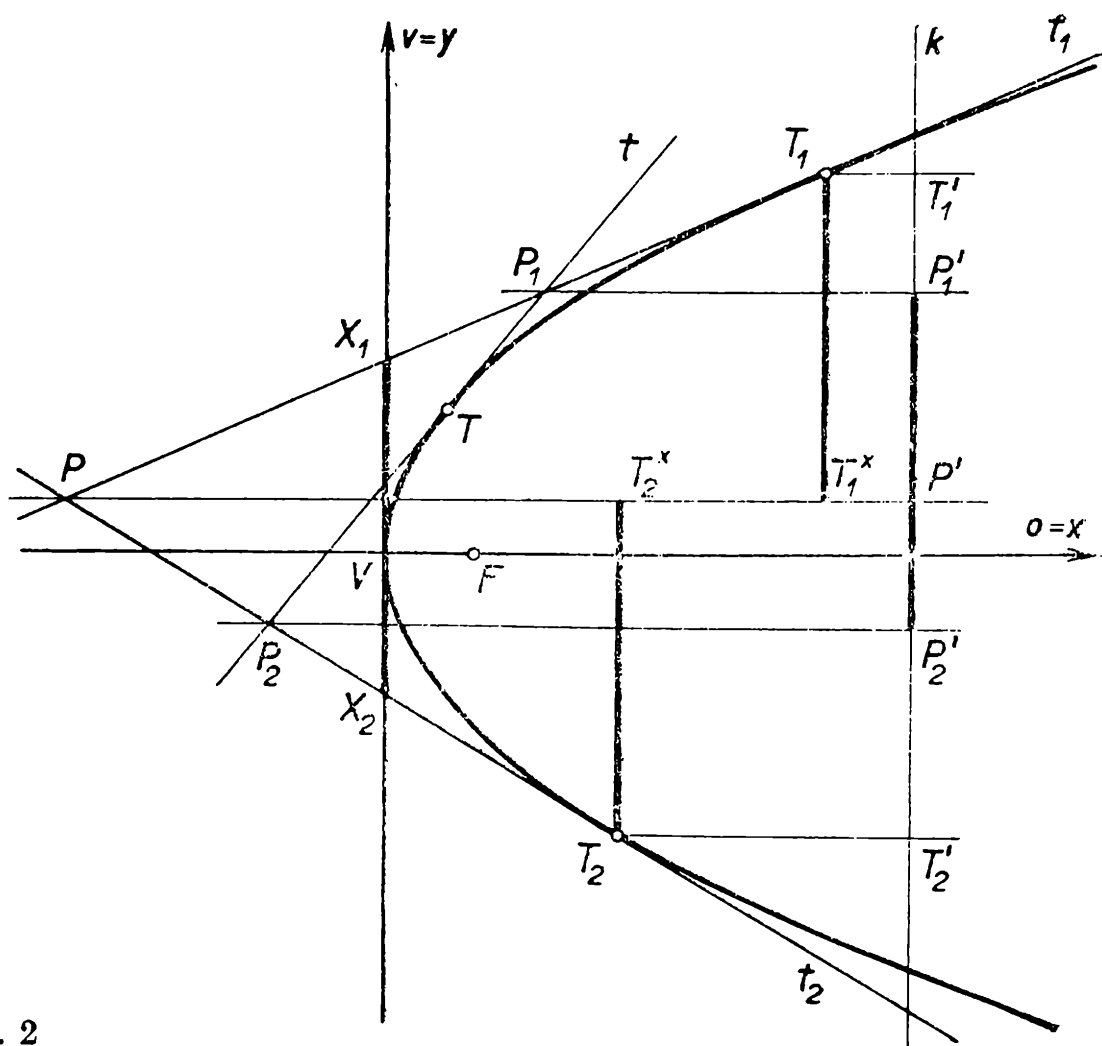
$$y_2 y = p(x + x_2).$$

Pro průsečík $P[x, y]$ těchto tečen platí obě uvedené rovnice, a tedy i rovnice, kterou dostaneme, násobíme-li druhou rovnici číslem -1 a potom rovnice sečteme. Tak dostaneme rovnici

$$(y_1 - y_2) y = p(x_1 - x_2),$$

kterou podle (1) můžeme napsat takto:

$$(y_1 - y_2) y = p \frac{y_1^2 - y_2^2}{2p}.$$



Obr. 2

Protože platí (2), můžeme tuto rovnici dělit číslem $y_1 - y_2$; tak dostaneme rovnost (P).

Věta 2. Budiž P průsečík tečen paraboly sestrojených v jejích různých bodech T_1, T_2 ; střed tětiny $T_1 T_2$ budiž bod S . Potom přímka PS je rovnoběžná s osou paraboly.

Důkaz. Nechť platí předpoklady věty 1; zároveň budiž $T_1[x_1, y_1]$, $T_2[x_2, y_2]$. Víme, že potom střed S úsečky $T_1 T_2$ má druhou souřadnici

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Podle pomocné věty to je také druhá souřadnice průsečíku $P \neq S$ obou tečen; proto přímka PS je rovnoběžná s osou x , tj. s osou paraboly.

Věta 3. Nechť t_1, t_2 jsou tečny paraboly v jejích různých bodech T_1, T_2 ; jejich průsečík budiž bod P . Přímka $t \neq t_1, r \neq t_2$ budiž libovolná tečna paraboly protínající tečny t_1, t_2 po řadě v bodech P_1, P_2 . Potom pravoúhlé průměty úseček $P_1 P_2, PT_1, PT_2$ na libovolnou kolmici k ose paraboly jsou shodné úsečky.

Důkaz. Dotykový bod tečny t s parabolou budiž bod T . Zvolme

kartézskou soustavu souřadnic jako ve větě 1 (obr. 2); v této soustavě budiž

$$T_1[x_1, y_1], T_2[x_2, y_2], T[x, y]. \quad (1)$$

Budiž k libovolná přímka kolmá k ose $o = x$ paraboly; potom každý bod této přímky k má touž první souřadnici $x = k$. Nechť body $P', T'_1, T'_2, P'_1, P'_2$ jsou pravoúhlé průměty bodů P, T_1, T_2, P_1, P_2 na přímku k ; potom přímky $PP', T_1T'_1, T_2T'_2, P_1P'_1, P_2P'_2$ jsou rovnoběžné s osou $o = x$ paraboly. Z toho podle (1) plyne, že je

$$T'_1[k, y_1], T'_2[k, y_2];$$

z pomocné věty a z (1) plyne, že je

$$P' \left[k, \frac{y_1 + y_2}{2} \right], P'_1 \left[k, \frac{y_1 + y}{2} \right], P' \left[k, \frac{y_2 + y}{2} \right].$$

Proto je

$$\left| P'_1 P'_2 \right| = \left| \frac{y_1 + y}{2} - \frac{y_2 + y}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| y_1 - y_2 \right|,$$

$$\left| P' T'_1 \right| = \left| \frac{y_1 + y_2}{2} - y_1 \right| = \frac{1}{2} \left| y_1 - y_2 \right|,$$

$$\left| P' T'_2 \right| = \left| \frac{y_1 + y_2}{2} - y_2 \right| = \frac{1}{2} \left| y_1 - y_2 \right|.$$

Úsečky $P'_1 P'_2, P' T'_1, P' T'_2$ jsou tedy shodné.

Poznámky. 1. Nechť jedna z tečen t_1, t_2 s průsečíkem P je vrcholová. Tento případ vidíme na obr. 1, kde první tečnou je přímka t s bodem dotyku T a druhou je vrcholová tečna v s bodem dotyku V ; bod S je středem úsečky TV . Pata kolmice vedené bodem T k přímce PS budiž T^x ; potom obrazec PTT^xV je rovnoběžník.

2. Nechť žádná z tečen t_1, t_2 s průsečíkem P není vrcholová (obr. 2). Průsečíky tečen t_1, t_2 s vrcholovou tečnou v budtež body X_1, X_2 ; body T_1^x, T_2^x budtež paty kolmic vedených body T_1, T_2 k přímce procházející bodem P rovnoběžně s osou paraboly. Potom obrazce $X_1 T_1 T_1^x X_2, X_2 T_2 T_2^x X_1$ jsou rovnoběžníky.

Důkaz. 1. Z věty 2 plyne, že je $PV \perp PS$; přímky PV, TT^x jsou tedy rovnoběžné. Z toho a ze souměrnosti bodů T, V podle středu S plyne, že také body P, T^x jsou souměrně sdruženy podle středu S ; proto obrazec PTT^xV je rovnoběžník.

2. Úsečka $X_1 X_2$ a její pravoúhlý průmět na libovolnou přímku k kolmou k ose o paraboly jsou shodné úsečky; úsečky $T_1 T_1^x, T_2 T_2^x$ jsou

shodné s pravoúhlými průměty úseček PT_1 , PT_2 na přímku $k \perp o$. Z toho podle věty 3 plyne, že je

$$|X_1X_2| = |T_1T_1^x| = |T_2T_2^x|. \quad (1)$$

Nechť v kartézské soustavě souřadnic zvolené jako ve větě 1 je $T_1[x_1, y_1]$, $T_2[x_2, y_2]$; potom podle důsledku a) věty 1 je

$$X_1 \left[0, \frac{y_1}{2} \right], X_2 \left[0, \frac{y_2}{2} \right]. \quad (2)$$

Protože bod T_1^x leží na rovnoběžce s osou paraboly vedené bodem $P = t_1 \cap t_2$, je podle pomocné věty

$$T_1^x \left[x_1, \frac{y_1 + y_2}{2} \right]. \quad (3)$$

Volme označení bodů T_1 , T_2 tak, aby bylo $y_2 < y_1$; potom je

$$\frac{y_2}{2} < \frac{y_1}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} < y_1$$

Podle (2) a (3) to znamená, že body X_2 , T_1^x leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou t_1 . Z toho podle (1) plyne, že obrazec $X_1T_1T_1^xX_2$ je rovnoběžník; obdobně se dokáže, že také obrazec $X_2T_2T_2^xX_1$ je rovnoběžník.

Na základě uvedených vlastností paraboly můžeme řešit některé konstrukční úlohy; jednoduše lze např. sestavit parabolu, známe-li dvě její tečny s bodem dotyku. Při této konstrukci se opíráme o tuto známou poučku:

V rovině je dána přímka p , na ní různé body A , B a uvnitř téže poloroviny vyřezané přímkou p jsou různé body P , Q . Nechť součet úhlů BAP , ABQ je menší než úhel přímý; potom se polopřímky AP , BQ protínají.

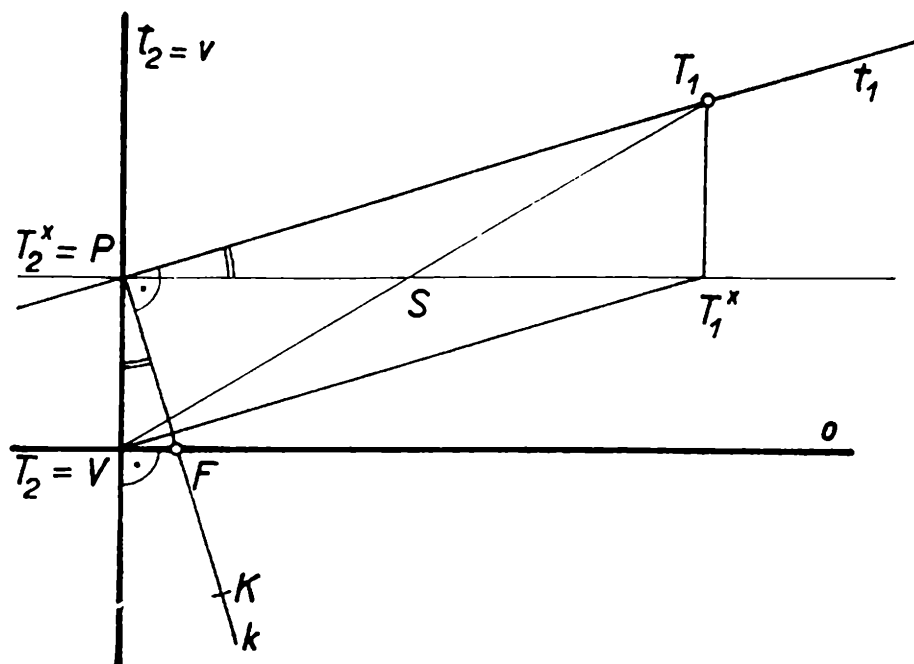
Věta 4. Nechť přímky t_1 , t_2 jsou různoběžky s průsečíkem P ; $T_1 \neq P$, $T_2 \neq P$ budtež po řadě body přímk t_1 , t_2 . Potom existuje právě jedna parabola, která se dotýká přímk t_1 , t_2 v bodech T_1 , T_2 .

Důkaz. Předpokládejme, že hledaná parabola π existuje a snažme se ji sestavit. Střed úsečky T_1T_2 budiž bod S ; podle věty 2 je osa paraboly π rovnoběžná s přímkou PS ; její vrcholová tečna je tedy přímka

$$v \perp PS. \quad (1)$$

Vedme body T_1 , T_2 kolmice k přímce PS a jejich paty označme T_1^x , T_2^x (obr. 3, 4). Body T_1^x , T_2^x leží na přímce PS . Z toho a ze souměrnosti bodů T_1 , T_2 a přímk $T_1T_1^x$, $T_2T_2^x$ podle středu S plyne, že buď

$$\begin{aligned} &\text{obrazec } T_1T_1^xT_2T_2^x \text{ je rovnoběžník nebo} \\ &(\text{je-li } PT_1 = PT_2) \text{ je } T_1^x = T_2^x = S. \end{aligned} \quad (2)$$



Obr. 3

Bod S je vnitřní bod konvexního úhlu T_1PT_2 , který je grafickým součtem úhlů SPT_1 , SPT_2 . Protože úhel T_1PT_2 není přímý, je aspoň jeden z úhlů SPT_1 , SPT_2 ostrý. Volme označení bodů T_1 , T_2 tak, aby ostrý byl úhel SPT_1 ; potom

bod T_1^x je vnitřní bod polopřímky PS . (3)

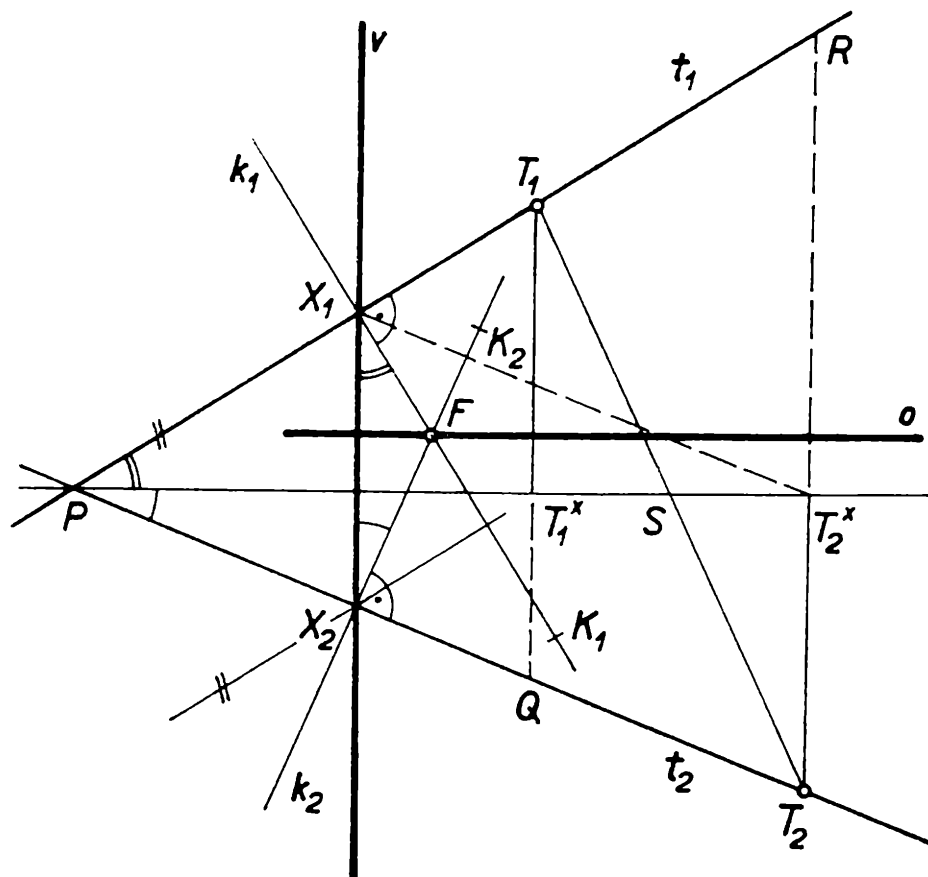
Úhel SPT_2 může být pravý, ostrý nebo tupý.

a) Nechť úhel SPT_2 je pravý (obr. 3). Potom je $t_2 \perp PS$, $T_2^x = P$ a podle (1) je přímka $t_2 = v$ vrcholovou tečnou paraboly π . Její osa $o \perp t_2$ prochází bodem $T_2 = V$, který je vrcholem paraboly π . Je-li přímka t_1 její tečna, je podle věty 1 c) bod $P = T_2^x$ patou kolmice $k \perp t_1$ vedené ohniskem paraboly π . Úhel T_1PT_2 je tupý a je rozdělen přímkou $k \perp t_1$ ve dva úhly. Budiž K bod přímky k ležící uvnitř poloroviny vT_1 ; potom úhel SPT_2 je ostrý a je shodný s úhlem SPT_1 . Proto polopřímka PK protíná osu $o \perp t_2$ v bodu F , který je tedy vnitřním bodem poloroviny vT_1 . Ohniskem F a vrcholovou tečnou $t_2 = v$ je určena právě jedna parabola π ; podle věty 1 c) je přímka $t_1 \perp FP$ její tečnou. Podle (2) je obrazec $T_1T_1^xT_2T_2^x$, tj. $T_1T_1^xVP$ rovnoběžník. Bodem $T_2 = V$ lze vést právě jednu rovnoběžku k přímce $t_1 = PT_1$; z toho podle první poznámky k větě 3 plyne, že bod T_1 je bod dotyku tečny t_1 s parabolou π .

b) Nechť úhel SPT_2 je ostrý (obr. 4). Potom

bod T_2^x je vnitřní bod polopřímky PS ; (4)

podle (3) to platí i pro T_1^x . Protože úhly SPT_1 , SPT_2 jsou ostré a přímky $T_1T_1^x$, $T_2T_2^x$ jsou kolmé k přímce PS , protíná přímka $T_1T_1^x$ polopřímku PT_2 v bodu Q a přímka $T_2T_2^x$ protíná polopřímku PT_1 v bodu R . Z druhé



Obr. 4

poznámky k větě 3 plyne tato konstrukce vrcholové tečny v paraboly π :

Bodem T_1^x vedeme rovnoběžku s přímkou $t_1 = PT_1$, sestrojíme její průsečík X_2 s přímkou t_2 , bodem X_2 vedeme přímkou $v \perp PS$ a sestrojíme bod $X_1 = v \cap t_1$.

Z rovnoběžníku $X_1T_1T_1^xX_2$ plyne, že je $|X_1X_2| = |T_1T_1^x|$; podle (2) je $|T_1T_1^x| = |T_2T_2^x|$. Proto je

$$|X_1X_2| = |T_2T_2^x|. \quad (5)$$

Bod T_1^x leží mezi body T_1, Q ; z toho a z právě provedené konstrukce plyne, že bod X_2 je mezi body P, Q a

$$\text{bod } X_1 \text{ leží mezi body } P, T_1. \quad (6)$$

Bod X_1 leží tedy uvnitř poloroviny t_2T_1 ; podle (4) to platí i pro bod T_2^x . Z toho podle (5) plyne, že obrazec $X_2T_2T_2^xX_1$ je rovnoběžník. Bod T_2^x leží mezi body T_2, R ; protože je $T_2^xX_1 \parallel t_2$, leží bod X_1 mezi body P, R , a tedy bod X_2 mezi body P, T_2 . Z toho a ze (6) plyne, že poloroviny vT_1, vT_2 splývají.

Přímka $PS \perp v$ rozděluje trojúhelník PX_1X_2 ve dva pravoúhlé trojúhelníky; jeden má vnější úhel $T_1X_1X_2$, druhý má vnější úhel $T_2X_2X_1$. Z toho plyne, že tyto dva úhly jsou tupé. První je rozdělen přímkou $k_1 \perp t_1$ vedenou bodem X_1 a druhý je rozdělen přímkou $k_2 \perp t_2$ vedenou bodem X_2 . Nechť K_1, K_2 jsou body přímek k_1, k_2 ležící uvnitř poloroviny vT_1 . Potom úhly $K_1X_1X_2, K_2X_2X_1$ jsou ostré a po řadě shod-

né s úhly SPT_1 , SPT_2 (mají ramena vzájemně kolmá). Proto se polopřímky X_1K_1 , X_2K_2 protínají v bodu F , který tedy leží uvnitř poloroviny vT_1 . Ohniskem F a vrcholovou tečnou $v = X_1X_2$ je určena právě jedna parabola π . Podle věty 1 c) jsou přímky $t_1 \perp X_1F$, $t_2 \perp X_2F$ její tečny. Bodem X_2 prochází právě jedna rovnoběžka s přímkou t_1 a bodem X_1 právě jedna rovnoběžka s přímkou t_2 ; z toho podle druhé poznámky k větě 3 plyne, že body T_1 , T_2 jsou body dotyku přímek t_1 , t_2 s parabolou π .

c) Nechť úhel SPT_2 je tupý. Potom bod T_2^x je vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce PS , bod T_1 leží mezi body T_1^x , Q a bod R leží mezi body T_2 , T_2^x . Z toho plynou některé odlišnosti důkazu, avšak jeho postup je přesně týž jako v případě b). Při stejném označení jako v případě b) je úhel $K_1X_1X_2$ ostrý, avšak úhel $K_2X_2X_1$ je tupý. Součet těchto dvou úhlů je shodný s úhlem T_1PT_2 , a tedy je menší než úhel přímý; proto se polopřímky X_1K_1 , K_2X_2 protínají v bodu F ležícím uvnitř poloroviny vT_1 , která splývá s polorovinou vT_2 .

Cvičení.

1. Jsou dány různoběžky t_1 , t_2 s průsečíkem P a na přímce t_1 je dán bod $T_1 \neq P$, kromě toho je dána přímka s , která není rovnoběžná s žádnou z přímek t_1 , t_2 . Sestrojte parabolu, která se dotýká přímky t_1 v bodu T_1 , má tečnu t_2 a osu rovnoběžnou s přímkou s .

2. Jsou dány různé přímky t_1 , t_2 , t_3 , které neprocházejí jedním bodem; každé dvě jsou různoběžné. Kromě toho je dána přímka s , která není rovnoběžná s žádnou z přímek t_1 , t_2 , t_3 . Sestrojte parabolu, která má tečny t_1 , t_2 , t_3 a osu rovnoběžnou s přímkou s . — *Pokyn:* Budiž v vrcholová tečna paraboly, $X_1 = v \cap t_1$, $X_2 = v \cap t_2$; bodem $P_1 = t_1 \cap t_3$ vedme přímku $k \parallel v$ a na ni pravouhle promítneme bod $P_2 = t_2 \cap t_3$ do bodu P'_2 . Potom obrazec $X_1P_1P'_2X_2$ je rovnoběžník.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle §6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

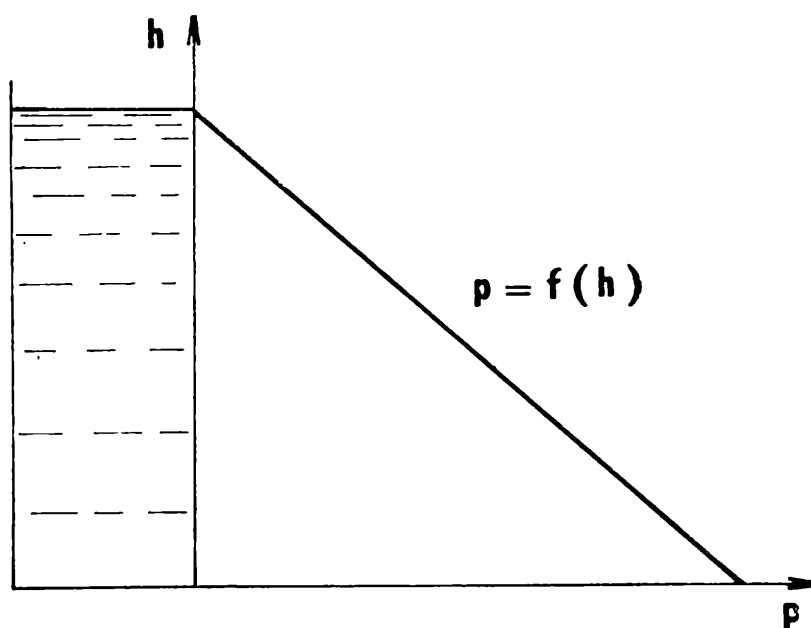
Redakce

Na dně vzdušného oceánu

RNDr. OLDŘICH LEPIL, CSc., přírodovědecká fakulta UP
Olomouc

Kdyby vám někdo položil otázku, jakým tlakem působí voda na tělo potápěče, který sestoupil na mořské dno, nebyla by odpověď nijak složitá. Víme, že hydrostatický tlak kapaliny je určen vztahem $p = h \rho g$, v němž h je hloubka pod hladinou, ρ je hustota kapaliny a g je tíhové zrychlení. Jde tedy o lineární závislost a tlak v libovolné hloubce můžeme jednoduše určit pomocí grafu na obr. 1.

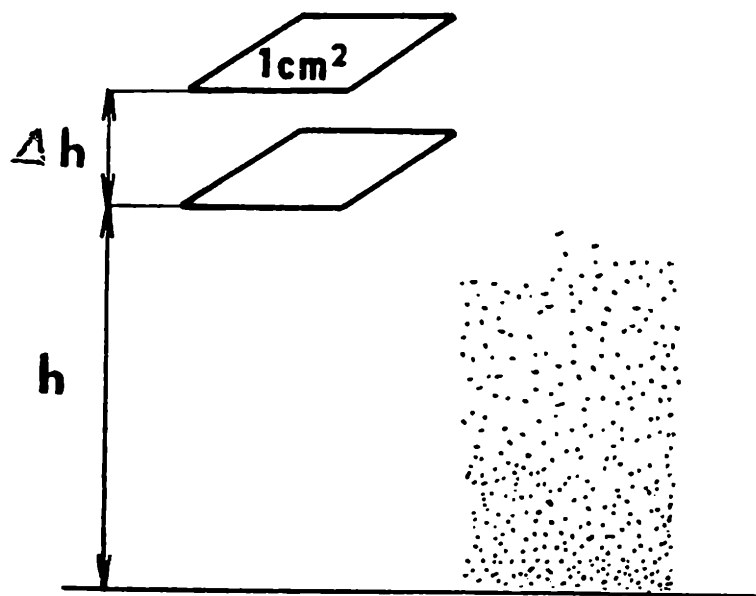
Popsaná závislost hydrostatického tlaku je důsledkem nestlačitelnosti vody, čili skutečnosti, že výše položené vrstvy vody nezpůsobují stlačení



Obr. 1

dolních vrstev a změnu jejich hustoty. Jinak by tomu bylo v případě, kdyby voda byla stlačitelná. Pak by se v závislosti na hloubce měnila hustota vody a vztah pro hydrostatický tlak by měl složitější průběh.

Takto musíme uvažovat, když chceme určit aerostatický tlak, což je tlak způsobený tíhou vrstev vzduchu. Ani si neuvědomujeme, že vlastně žijeme „na dně vzdušného oceánu“ pod několikakilometrovou vrstvou vzduchu, která obklopuje naši planetu. A není to, jak víte, tlak nijak malý. Odpovídá asi tlaku, jakému bychom byli vystaveni v hloubce 10 m pod hladinou vody. Náš vzdušný oceán se ovšem od skutečného oceánu liší také tím, že vlastně nemá hladinu, od níž bychom mohli



Obr. 2

měřit hloubku, a jeho horní vrstvy plynule přecházejí do kosmického prostoru.

Přesto se pokusíme nalézt vztah pro tlak vzduchu a jeho grafickou závislost. Polohu uvažovaného místa v našem vzdušném oceánu nemůžeme určovat od hladiny, takže veličina h v dalších úvahách bude vzdálenost od povrchu Země. To tedy znamená, že s rostoucím h se aerostatický tlak bude zmenšovat. Musíme také zavést určité zjednodušující předpoklady: konstantní tíhové zrychlení g a konstantní teplotu T vzduchu. Tlak na povrchu Země ($h = 0$) označíme p_0 a tlak ve výšce h bude p .

Uvažujme, že máme dvě plošky o obsahu 1 cm^2 , z nichž jedna je ve výšce h a druhá je od první vzdálena o Δh , tzn. je ve výšce $h + \Delta h$ (obr. 2). Změna tlaku vzduchu je dána tlakem sloupce vzduchu mezi oběma ploškami: $\Delta p = -\rho g \Delta h$. Znaménko minus udává, že tlak se s rostoucí výškou zmenšuje.

Hustota vzduchu ovšem není konstantní a je určena tlakem v uvažovaném místě. Abychom hustotu určili, musíme vzít na pomoc stavovou rovnici plynu ve tvaru

$$pV = \frac{m}{M_m} RT$$

(p — tlak plynu, V — objem plynu, m — hmotnost plynu, M_m — molární hmotnost, R — molární plynová konstanta, T — termodynamická teplota). Ze stavové rovnice snadno určíme hustotu plynu

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p M_m}{RT},$$

a po dosazení do vztahu pro Δp dostaneme

$$\Delta p = - \frac{p M_m g}{RT} \Delta h . \quad (1)$$

Poněvadž veličiny M_m , g , R a T jsou konstantní, můžeme vztah (1) upravit do tvaru

$$- \frac{\Delta p}{p} = \Delta \frac{M_m g h}{RT} . \quad (2)$$

V matematice je dokázáno, že podíl $\frac{\Delta p}{p}$ můžeme s malou chybou nahradit výrazem $\Delta \ln p$, v němž $\ln p$ je přirozený logaritmus tlaku.

$$\text{Důkaz: } \Delta \ln p = \ln(p + \Delta p) - \ln p = \ln \left(\frac{p + \Delta p}{p} \right) = \ln \left(1 + \frac{\Delta p}{p} \right) .$$

V tabulkách přirozených logaritmů, popř. pomocí kapesního kalkulátoru se můžeme přesvědčit o následujících výsledcích, které jsme uspořádali do tabulky:

$\frac{\Delta p}{p}$	$\ln \left(1 + \frac{\Delta p}{p} \right)$
0	0
0,001	0,001
0,01	0,01
0,02	0,0198

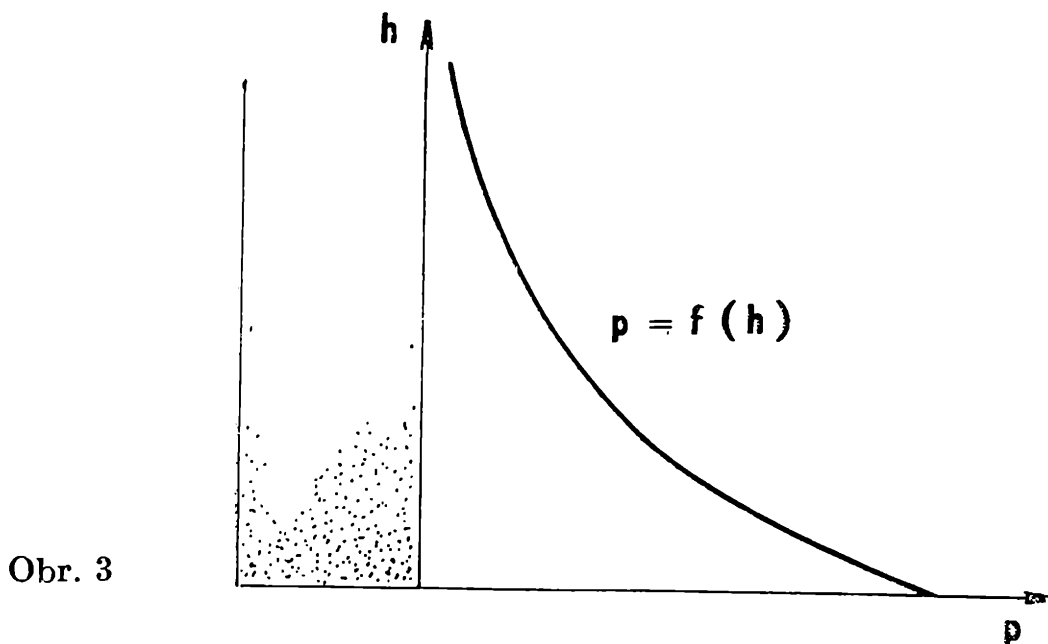
Z tabulky je patrné, že $\Delta \ln p \doteq \frac{\Delta p}{p}$, přičemž chyba nepřesahuje 1 %, jestliže $\frac{\Delta p}{p} < 0,02$.

Tento výsledek umožňuje upravit rovnici (2) do tvaru

$$\Delta \frac{M_m g h}{RT} + \Delta \ln p = 0$$

nebo

$$\Delta \left(\frac{M_m g}{RT} h + \ln p \right) = 0 .$$



Obr. 3

Změna výrazu v závorce však bude nulová jen v případě, bude-li mít tento výraz konstantní hodnotu

$$\frac{M_m g}{RT} h + \ln p = \text{konst.} \quad (3)$$

Na povrchu Země je $h = 0$ a tlak p_0 . Z těchto počátečních podmínek určíme hodnotu konstanty: $\ln p_0 = \text{konst.}$ Po dosazení a úpravě vztahu (3) dostaneme rovnici

$$\ln p - \ln p_0 = - \frac{M_m g}{RT} h ,$$

kterou podle pravidel pro logaritmování můžeme napsat ve tvaru

$$p = p_0 e^{- \frac{M_m g h}{RT}} \quad (4)$$

Číslo $e \doteq 2,718$ je základ přirozených logaritmů.

A to je výsledek, k němuž jsme chtěli dospět. Vztah (4) se nazývá barometrická rovnice a určuje závislost tlaku vzduchu na výšce. Je to tedy exponenciální závislost, jejíž graf je na obr. 3. Ze srovnání s grafem na obr. 1 si učiníme dobrou představu o tom, jak se mění tlak s hloubkou ve skutečném oceánu a s výškou v oceánu vzdušném.

Je ovšem třeba připomenout, že úvaha byla provedena za zjednodušujícího předpokladu, který není splněn zejména v případě teploty. Proto je ve skutečnosti průběh tlakových změn složitější. V tabelární podobě můžeme skutečnou závislost najít např. v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro střední školy, SPN, Praha 1970, tab 62 na s. 277. Podobné tabulky slouží k určování nadmořské výšky na základě barometrického měření.

Rovnice, ktorou jsme odvodiľi, vřak nemá význam jen jako odpověď na otázku o tlaku na dně oceánu. Mnohem významnějši úlohu sehrála v molekulové fyzice a zobecněni jejího fyzikálního smyslu umožnilo nalézt zákonitosti platné pro celý svět molekul. Proto se k barometrické rovnici v poněkud jiné podobě vrátíme v článku „O atmosféře planet“ v příštím čísle Rozhledů.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

První atomisti

K súčasným predstavám o atómoch, molekulách a tuhých látkach dospela fyzika po dlhej a namáhavej ceste, ktorú prekliessnili generácie bádateľov v neprehľadnej spleti zdanlivo nesúvisiacich prírodných javov. Začiatok cesty, ako v mnohom inom, je u starých Grékov.

Atomizmus vznikol asi pred dva a pol tisícročím v spore o otázku, či existuje iba jedno nemenné vševypĺňujúce bytie, ako to tvrdila eleatská filozofická škola, alebo či svet pozostáva z malých neviditeľných a nedeľiteľných čiastočiek — atómov, ktoré sa pohybujú v prázdne, ako to tvrdil *Leukippos* v 5. st. p. n. l. O Leukippovi vieme veľmi málo, a to tiež iba z podania iných. Nevedno ani, či pochádzal z maloázijského Milétu, alebo z Eleje, gréckej kolónie v južnom Taliansku.

Na Leukippovo učenie nadviazal *Demokritos*, významný grécky filozof, ktorý sa narodil v Abdére asi v r. 460 pred n. l. a pôsobil v Aténach, kde zomrel v r. 370 pred. n. l. Učil, že bytie sa skladá z nesčíselného množstva neviditeľných, veľmi jemných nedeľiteľných čiastočiek, ktoré sa pohybujú v prázdne, nevznikajú ani nezanikajú, sú večné a nemenné. Ale existujú medzi nimi rozdiely v tvare, veľkosti a tiaži. Tak napríklad atómy duše sú najdokonalejšie, preto majú tvar gule. Rôzne tvary atómov, ich vzájomné usporiadanie a poloha vytvárajú nekonečnú mnohotvárnosť prírody.

Najvýznamnejším atomistom helenistického obdobia bol *Epikuros* (340 až 270 pred n. l.). Z jeho obsiahleho diela — podobne ako z Demokritových spisov — sa zachovali iba zlomky. Epikurove názory pretlmočil rímsky spisovateľ *Titus Lucretius Carus* (asi 99 až 55 pred n. l.) v básni „O podstate sveta“ (*De rerum natura*).

Z prvej knihy *De rerum natura* je pasáž, v ktorej Lucretius popiera spojitosť hmoty a obraňuje jej atomovú štruktúru.

„Kdyby nebylo určité nejmenší části, mělo by každé tělísko bezpočet dílů, každý díl by se mohl rozdělit v půlky, ty zas v další, a nikdy by nebylo konce. Kde je pak rozdíl mezi velkým a malým? Nebude žádného: třeba že veškerý vesmír má bez počtu částí, přece by nejmenší díly měly zas nescíselné částice vlastní. Tomu se protiví zdravý rozum a praví, že tomu věriti nelze, proto se poddej a uznej jsoucnost dílů nedělitelných, velice malých. A jsou-li, musíš už uznat, že jsou nepropustné a trvají věčně.“ (Překlad *Julie Novákové*, vydanie z r. 1945.)

Lucretiova báseň silne zapôsobila aj na významných fyzikov 20. storočia. *A. Einstein* napísal v roku 1924 predhovor k tomuto klasickému dielu. V roku 1948 uverejnil *E. Schrödinger* v časopise *Annalen der Physik* článok pod nadpisom „2400 rokov kvantovej teórie“, v ktorom oprávne kladie začiatky atomistiky do čias Leukippových a Demokritových.

Ján Pišút, Rudolf Zajac

Metrická soustava a metrická konvence

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., ÚNM Praha

V názvu tohoto stručného pojednání jsou dva pojmy, které spolu sice souvisejí, ale z nichž každý má svůj osobitý smysl. Přestože jde o pojmy na první pohled zcela jasné, setkáme se dosti často s jejich ne zcela správnou interpretací, a proto je jistě vhodné se u nich krátce zastavit. Nejprve k pojmu prvému.

Staré míry (ve smyslu měřicích jednotek) byly voleny velmi rozmanitě, i když do značné míry prakticky. Tak např. u délky se tyto míry odvozovaly třeba z rozměrů částí lidského těla (loket, palec, dlaň, sáh aj.), z důsledků základních lidských úkolů (krok, kročej, hon, látro aj.) apod. Výhodou takto volených měr byla jejich bezesporná pohotovost a „příručnost“, když člověk potřeboval měřit, nevýhodou, zejména v nejstarších dobách, jejich regionální rozmanitost a nejednotnost, která se s postupným rozvojem zejména řemeslné i manufakturní výroby a obchodu stávala stále neúnosnější a která přímo vybízela k nějakému novému měrovému uspořádání. Je třeba ještě dodat, že mírou se od pradávna rozumělo nejen to, co dnes nazýváme jednotkou, ale také současně její realizace, tj. měřidlo. Dnes ovšem mírou rozumíme pouze určitou kategorii měřidel.

Zmíněná libovůle tvorby měr (jednotek) působila tedy, jak již jsme řekli, zmatek v obchodě, řemeslech a také při zeměměřických pracích, které v 17. století prodělávaly prudký kvalitativní vzestup, daný rostou-

cími požadavky na ně kladenými. Musíme poznamenat, že měření se v té době týkalo pouze značně malého počtu veličin, a to vedle délky, plošného obsahu a objemu také hmotnosti (dříve váhy). To byly také veličiny, které se týkaly primárně obecného zájmu. Další dvě veličiny, a to čas a úhel byly tehdy ponechány astronomům, u času se tato tradice dochovala prakticky dodnes.

Bylo tedy účelné tehdy požadovat, aby se našla jediná nová míra, která by byla základem všech měření vůbec (dokonce i včetně času). Protože základní geometrickou a fyzikální veličinou charakterizující neživý i živý svět je tradičně rozprostraněnost, začalo se uvažovat o délce jako o všem ostatním veličinám nadřazené veličině. S touto myšlenkou poprvé přišel francouzský fyzik a matematik *Monton* ve 2. polovině 17. století. Ovšem kterou délku zvolit za jednotkovou nebylo názorově jednoznačné a i tato otázka prodělala svůj vývoj. Přitom byla značná averze vůči definování takové míry (jednotky) prototypem odvozeným z nějaké pomíjivé vlastnosti objektu světa kolem nás, protože to vylučovalo při eventuálním poškození nebo zničení takového prototypu možnost nové reprodukce míry. Proto byla za takový objekt zvolena Země a určitý její délkový rozměr měl zaručovat dlouhodobou neproměnnost. I v tom se ovšem původci této myšlenky mýlili, časová neproměnnost není absolutní a při vysokých nárocích na přesnost reprodukce mohou se i zde vyskytnout původně nepředpokládané a nežádoucí rozdíly. Ostatně tato skutečnost způsobila, že se později opět přešlo na definici z prototypu, i když tento byl původně z rozměrů Země odvozen. Ale i tak tato původní myšlenka byla progresivní a přání, aby veškerá měření vůbec vycházela z takové délkové jednotky, byla na svou dobu revoluční. To, že touto jednotkou byl zvolen metr (z řeckého *metron* = = míra) jako zamýšlená desetimiliontá část kvadrantu poledníku Země, dobře víme. Původně se zamýšlelo namísto poledníku volit rovník (což by bylo mělo určité tvarové výhody), od této myšlenky se však odešlo, protože státy, které neleží na rovníku by se „mohly cítit dotčeny“, což u poledníků prý nepřijde v úvahu. Nebyla přijata ani zajímavá starší myšlenka, zvolit za základní délku „délku sekundového kyvadla“ (tj. matematického kyvadla s dobou kyvu 1 sekundy) navržená v 17. století *Huygensem*, čímž by byla uskutečněna měřicí vazba i na čas, a to tehdy pro nejednotnost hodnoty zemské tíže na různých místech povrchu Země.

Myšlenka metrické soustavy se realizovala odvozováním měr dalších veličin od metru jako jednotky délky. Především dalších geometrických veličin, plošného obsahu, s jednotkou čtverečný metr (později s arem a násobným hektarem) a objemu jednak s krychlovým metrem, zvláště pak s litrem, který prodělal také svůj vývoj. Původně měl být roven objemu 1000 gramů čisté vody za předepsaných podmínek, tato definice byla však zatížena chybami, takže až do začátku šedesátých let tohoto

století se 1 litr definoval jako $0,001\,000\,028\text{ m}^3$, tedy o 28 mm^3 větší nežli 1 dm^3 . Dnes od r. 1964 (kdy byla XII. Generální konference pro váhy a míry) platí, že $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$. Významnou novinkou spojenou s tehdy novou metrickou soustavou byl dekadický způsob tvorby násobků a dílů. Ten se mimo jiné uplatnil u odvození jednotky hmotnosti (tehdy váhy) nazvaného 1 gram, který měl být roven hmotnosti 1 cm^3 čisté vody. Později se ukázalo, že tento předpoklad není přesně splněn a tak se násobná jednotka — 1 kilogram definovala samostatným prototypem. Tím se ovšem původní myšlenka nadřazenosti metru opustila, prakticky pro nedostatečnou přesnost v realizacích. U času se ani uplatnit nemohla, protože jednotka času, která by se rovnala době kyvu matematického kyvadla 1 metr dlouhého, byla astronomy (a konečně i pro praktické použití) naprosto nepřijatelná. I když metrická soustava, která se už v minulém století začla ztotožňovat se soustavou jednotek, jejímiž základními jednotkami byl metr, kilogram a sekunda, již v pravém smyslu slova přestala existovat, používal se tento pojem nadále pro zmíněnou „třírozměrnou“ (původně dokonce „dvourozměrnou“ vycházející z délky a hmotnosti) soustavu a rozumí se tak dodnes. Původní, jistě velmi zajímavý úmysl brát za základ všech měr a měření metr se neukázal jako reálný; avšak tato myšlenka se uplatnila občas i v pozdějších letech často jen krátkodobě jako třeba u určování některých vlastností látek vztažených na jednotku délky. Vzpomeňme třeba staré jednotky tlaku zvané 1 technická atmosféra, která odpovídala za určitých podmínek 10 metrům vodního sloupce.

Metrická soustava je dnes již historický pojem pro soustavu charakterizovanou v předchozích odstavcích a tvořila význačný základ vývoje zakončeného dnešní Mezinárodní soustavou měřicích jednotek (SI).

Nyní k pojmu druhému. *Metrická konvence* je mezinárodní dohoda podepsaná v Paříži dne 20. května 1875 (v roce 1975 bylo celosvětově, ovšem i u nás oslavováno její 100. výročí), kterou podepsali zástupci dvaceti států (mimo jiných také bývalého Rakouska-Uherska). Metrická konvence, nebo též jinak Konvence o metru, obsahuje 14 článků, z nichž první hovoří o zřízení Mezinárodního úřadu pro váhy a míry, stálé vědecké instituci se sídlem v Paříži a šestý o vytvoření organizace, jejímž stálým orgánem je Mezinárodní úřad pro váhy a míry. Mohli bychom ji nazvat Mezinárodní organizací pro váhy a míry; tento název však nikdy nebyl oficiálně přijat a tak se zpravidla hovoří o Organizaci založené na metrické konvenci. Vrcholným orgánem této organizace je Generální konference pro váhy a míry, která je periodicky svolávána vždy do Paříže. Na této konferenci se účastní zástupci všech signatářských států Metrické konvence, kterých je dnes více nežli čtyřicet. Jednání Generálních konferencí připravuje Mezinárodní výbor pro váhy a míry, který se minimálně jednou ročně schází rovněž v Paříži. Tento výbor také

KVANTIFIKACE (z lat. *quantus* = jak mnohý + *facio*, -ere = dělat) — „zavádění počtu“; udání počtu, odhad počtu hodnot proměnné, pro které něco platí; **KVANTIFIKOVAT**, **KVANTIFIKOVANÝ** — udávající počet...; **KVANTIFIKÁTOR** — slovní obrat nebo znak vyjadřující „o jak velký počet, o jaké množství hodnot proměnné se jedná“

KVARTA (z lat. *quartus* = čtvrtý) — „čtvrté místo v nějakém pořadí“; čtvrtá třída dřívějších středních škol; čtvrtý stupeň diatonické stupnice; **KVARTIKA** — křivka nebo plocha analyticky vyjádřená rovnicí čtvrtého stupně

KVINTILIÓN (od lat. *quintus* = pátý + *mille* = tisíc) — uměle utvořené slovo pro označení páté mocniny miliónu; tvaru „-lión“ použito analogicky (v. milión)

KVOCIENT (z lat. *quotiens* = kolikrát) — poměr, podíl (podíl totiž udává, kolikrát je dělenec větší než dělitel)

KYBERNETIKA (z řec. *kybernétique techné* = kormidelnická dovednost, zběhlost v kormidelnictví; od *kybernó* = kormidlem řídit loď) — vědní obor o zákonitostech řízení, o řídicích zařízeních

LEMA, LEMMA (z řec. *lémma* = věc vzatá, získaná, nabytá; od *lambanó* = brát, dostat) — věta, které se použilo z jiné oblasti nebo se předem záměrně dokázala a která se tím stala větou pomocnou

LEMNISKÁTA (od řec. *lémniskos* — vlnící se stuha) — rovinná křivka, která se podobá stuze ve tvaru osmičky

LIMES viz **LIMITA**, **INFERIOR**, **SUPERIOR**

LIMITA (z lat. *limes*, *limitis* = příčná cesta, mez, hranice) — krajní mez; **LIMITA** posloupnosti — číslo, u něhož je blízko „konec posloupnosti“; číslo, ke kterému se členy posloupnosti přibližují jako ke „krajní mezi“

LINEÁRNÍ (od lat. *linea* = lněná nit, šňůra, čára) — týkající se čar, linií; v geometrii: přímkový, v algebře: prvního stupně, např. lineární funkce — funkce, jejíž hodnoty udává výraz 1. stupně a jejímž grafem je přímka; lineární interpolace — nahrazení hodnoty funkce hodnotou funkce lineární (v. interpolace)

LOGARITMUS (z řec. *logu arithmos* — „číslo poměru“; *arithmos* = číslo, *logos* = 1) slovo, řeč, nauka, věda — v. z. **LOGIE**; 2) rozum, myšlenka, důkaz — v. t. **LOGIE**; 3) poměr — matematický termín zavedený *Napierem* a motivovaný porovnáváním (tj. „poměry“) exponentů mocnin

-LOGIE (od řec. *logos* = slovo, řeč, nauka, věda) — koncová část složených slov pro názvy věd, např. biologie (řec. *bios* = život) = věda o životě, o živých organismech, (v. t. topologie)

LOGIKA (z řec. *logiké techné* = umění mluvit, od *logos* = řeč, rozum, myšlenka, důkaz) — věda zkoumající pravidla správného myšlení;

LOGICKÝ — „správně uvažující, rozumem zdůvodněný“, týkající se logiky, opírající se o pravidla logiky

LOKÁLNÍ (od lat. *locus* = místo) — místní, k určitému místu se vztahující, na určité místo omezený; v matematice: lokální vlastnosti funkcí (grafů, křivek, ploch) — vlastnosti uvažované v okolí jistého bodu; lokální dedukce — uplatnění dedukce „jen místy“, tj. v určitých úsecích teorie nebo jejího výkladu (postup typický pro učebnice)

MATEMATIKA (z řec. *mathématiké techné*, od *mathéma*, -atos = učení, nauka; *k manthanó* = učit) — termín sám o sobě neobsahuje ani v názvu pojem čísla nebo počítání; je to „učení, vědění, nauka vůbec“, jakýsi druh filozofie; teprve později, ale už ve starověku, se začal význam zužovat a přibližovat významu dnešnímu, tj. „věda o číselných, kvantitativních a prostorových stavech a vztazích našeho skutečného světa“

MAXIMUM (z lat. *maximus* = největší) — největší možné množství, největší možná hodnota (opak: minimum); **MAXIMÁLNÍ**

METODA (od řec. *meta* = přes, po, za a mnoho j. + *hodos* = cesta) — „po cestě“; postup; plánovitý (tj. „po předem stanovené cestě“) postup k dosažení cíle

METR (z řec. *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — základní jednotka délkové míry; **METRICKÝ** — vztahující se k metru, základní jednotce délkové míry

-METR¹ (v. metr) — koncová část složených slov vyjadřující, že přístroj nebo člověk provádí měření toho, co je vyjádřeno v první části složeného slova; např. barometr (řec. *baros* = tíže) — tlakoměr; geometr (řec. *gé* = země) — zeměměřič

-METR² (v. metr) — koncová část složených slov vyjadřující, že jde o základní jednotku délkové míry v počtu, jak uvádí předchozí část složeného slova; např. kilometr (řec. *chilioi* = tisíc) — tisíc metrů

-METRIE (v. metr) — koncová část složených slov pro „nauku o měření, o vyměřování“ toho, co je vyjádřeno předcházející částí složeného slova; např. geometrie (řec. *gé* = země) — „zeměměřičství“; cyklometrie (řec. *kyklos* = kolo, kruh) — nauka o měření kružnicových oblouků

METRIKA (z řec. *metriké techné* od *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — nauka o rytmických formách básnického jazyka, v matematice: pojem zobecňující vzdálenost bodů; **METRICKÝ** — týkající se metriky, vybavený metrikou, v matematice např.: metrický prostor

MILI- (od lat. *mille* = tisíc) — počáteční část složených slov mající význam „tisícina měrné jednotky“ vyjádřené v následující části složeného slova; např. milimetr — tisícina metru

MILIARDA (od lat. *mille* = tisíc) — „tisíc miliónů“

MILIMETR v. **MILI-** a **-METR²**

MILIÓN (od lat. *mille* = tisíc) — „velký tisíc“, „tisíc tisíců“

MINIMUM (z lat. *minus* = nejmenší) — nejmenší možné množství, nejmenší možná hodnota (opak: maximum); **MINIMÁLNÍ**; **MINIMALIZACE** — určení nejmenší míry nebo nejmenšího množství; snížení na nejmenší míru

MINORITNÍ (od lat. *minor* = menší) — menšinový

MINUS (z lat. *minus* = méně) — termín, který naznačuje, že nějakou veličinu máme zmenšit, tj. že půjde o odčítání (opak: plus)

MINUTA (od lat. *minuo*, *-ere* = zmenšovat) — lat. *minuta hora* = „zmenšená hodina“; termín jednotky časové i jednotky goniometrické

MODEL (od zdrobněliny lat. *modus* = míra, způsob) — „původní míra v menším“; *zmenšené* provedení předmětu sloužící jako návrh, vzor, jako jeho napodobenina; matematický model situace — nikoliv přesná kopie v menších rozměrech, ale *zjednodušený* obraz situace vyjádřený v matematických pojmech

MODIFIKACE (od lat. *modus* = míra, způsob + *facio*, *-ere* = dělat) — „utvoření příslušné míry, vhodných rozměrů, správného způsobu“; přizpůsobení, pozměnění, úprava

MODUL (ze zdrobněliny lat. *modus* = míra, způsob) — výraz používaný v matematice, fyzice apod. pro určitou hodnotu, míru, konstantu aj., v technice (i výpočetní) spíše název pro samostatnou jednotku složitějšího zařízení

MONOTÓNNÍ (od řec. *monos* = jediný, samotný + *tonos* = natažení, napětí, stupeň hlasu) — znící stále jen jedním tónem, stále stejný, jednotvárný; v matematice: monotónní funkce — má v každém bodě „stejnou vlastnost“, např. v každém bodě intervalu je rostoucí

MULTI- (z lat. *multus* = mnohý) — počáteční část složených slov vyjadřující „četnost, mnohost, mnoho-“; **MULTIGRAF** (řec. *grafó* = rýt, psát; v. graf) — „mnoho grafů“; mnohonásobný graf; **MULTIPLIKACE** (lat. *plico*, *-are* = vinout) — „rozmnožování“, násobení

NEFROIDA (od řec. *nefros* = ledvina + latinizované *-oideus* = podobající se) — ledvinovka; závitnice podobající se svým tvarem ledvinám

NEGACE (od lat. *nego*, *-are* = říkat, že ne; popírat) — popření, zápor, odmítnutí tvrzení; **NEGATIVNÍ** — zamítavý, odporující, záporný (opak: pozitivní — kladný); **NEGOVAT**

NEUTRÁLNÍ (od lat. *neuter* = žádný z obou) — neklonící se k žádné ze sporných stran; nestranný; neprojevuující se, nemající výrazné vlastnosti; v matematice: neutrální prvek — prvek, který se při početním výkonu „neprojevuje“, například nula při sčítání; $a + 0 = a$

NOMINÁLNÍ (od lat. *nomen*, *nominis* = jméno) — jmenovitý, týkající

se jmen; v logice: nominální definice — definice, která nevymezuje skutečný jev, nýbrž jen význam názvu nebo značky

NOMOGRAM (od řec. *nomos* = zvláštnost, způsob; řád, zákon + *grafó* = rýt, psát; v. -gram¹) — grafické znázornění vztahu mezi třemi a více proměnnými

NORMA (z lat. *norma* = úhelnice, tj. pomůcka na měření pravého úhlu; měřítko, míra, pravidlo, předpis) — závazné pravidlo, závazný předpis; **NORMÁLNÍ** — „úhelnicí vyměřený“; pravidelný, obvyklý; **NORMÁLA** — kolmice (přímka svírající pravý úhel s přímkou, křivkou, rovinou či plochou); **NORMÁLOVÝ** — vztahující se k normále

NULA (z lat. *nullus* = žádný) — „žádná cifra“ (podle původních zápisů čísel, kde se nechávalo volné místo, kam my píšeme nulu); dnes název číslice i čísla udávajícího počet prvků prázdné množiny

NUMERACE (od lat. *numerus* = řád, člen, číslo, počet) — číslování, způsob počítání, způsob zápisů čísel číslicemi; **NUMERICKÝ** — číselný

-OID, -OIDA, -OIDNÍ (z latinizovaného *-oideus* nebo *-oides*, řeckého *eidos* = podoba). K příponě přídavných jmen *-oidní*, mající význam „podobný něčemu, vypadající jako“, případně „příslušný, patřící k něčemu, týkající se něčeho“ se přidružila s tímž významem jednak přípona *-oid* pro podstatná jména všeobecně, jednak přípona *-oida* speciálně pro matematické křivky. Např.: **ASTEROID** (řec. *astér* = hvězda) — „vesmírné těleso podobající se hvězdě“; planetka; **ASTEROIDA** — „křivka podobající se hvězdě“, v. t. cykloida, deltoid, elipsoid, epicykloida, hyperboloid, hypocykloida, kardioida, kosinoida, paraboloid, sinusoida, strofoida, toroid, trochoida

OKTADICKÝ (z řec. *oktas*, *-ados* = osmička, číslo osm; *k októ* = osm) — osmičkový

OKTAEDR (z řec. *októ* = osm + *hedra* = vše, na čem se dá sedět, odpočívat) — osmistěn; těleso s osmi stěnami („na nichž může spočinout“)

OKTANT (od lat. *octo* = osm) — osmina prostoru; jeden z osmi dílů prostoru rozděleného třemi k sobě kolmými rovinami

OPERACE (od lat. *opus*, *operis* = dílo, práce) — provedení nějaké činnosti, postup práce, početní výkon, algebraická operace

ORDINÁLA (od lat. *ordo*, *inis* = řada, řád, pořadí) — kolmice k základnici, pořadnice (málo užívaný termín); **ORDINÁLNÍ** — v matematice: ordinální číslo vyjadřuje počet prvků množiny, ke kterému dojdeme uspořádáním prvků a jejich očíslováním; v jazykovědě: ordinální číslovky — číslovky řadové



dohlíží na činnost dříve zmíněného Mezinárodního úřadu pro váhy a míry se sídlem v Sèvres (tedy za okrajem Paříže) v pavilonu de Breteuil. Tento pavilon (který byl v té době ruinou) dala francouzská vláda v roce 1875 k dispozici s přilehlými budovami a pozemkem více nežli 25 000 m². Pavilon Breteuil, kde dnes Mezinárodní úřad sídlí, byl přestavěn z bývalého zámku Trianonu de Saint-Cloud, vedlejší budovy stejnojmenného zámku. Pavilon měl velmi bohatou historii, byl dlouho v majetku vévody z Orléansu, vlastníkem byla krátce i *Marie Antoinetta*, za velké revoluce se stal národním majetkem, později zde žila rodina *Napoleona II.* a konečně ve válce roku 1815 a 1871 se stal obětí války, takže v době jeho předání Mezinárodnímu úřadu zbyly z bývalého Trianonu de Saint-Cloud pouhé zdi. Rekonstrukce byla tehdy dokončena poměrně v krátké době, již v roce 1878. Dnešní vzhled je patrný z obrázku.

V čele Mezinárodního úřadu pro váhy a míry stojí ředitel, pracovní náplň je převážně experimentální. Vědeckých a odborných pracovníků je dnes pouze čtyřicet, k tomu přistupuje dalších asi 15 administrativních pracovníků. Původním úkolem úřadu bylo opatření, ověření a distribuce prototypů délky a hmotnosti všem členským státům. Dnešní úkoly jsou obsáhlejší, zaměřují se především na etalonáž a mezinárodní porovnávání a ověřování primárních etalonů vybraných základních veličin, délky, hmotnosti, elektrického odporu a elektrického napětí (jimiž je umožněna etalonáž elektrického proudu), teploty (podle Mezinárodní praktické teplotní stupnice) a svítivosti. Kromě toho je zde na nejvyšší úrovni zabezpečována jednotnost a přesnost některých dalších elektrických a fotometrických veličin a vybraných veličin ionizujícího záření, atomové a jaderné fyziky. Další odvozené veličiny se po stránce etalonážní neza-jišťují.

Metrická konvence je tedy základem významné mezinárodní organizace tzv. vládního typu (delegace na Generální konference musí být

schváleny vládou a vybaveny příslušnými pravomocemi). Ve svých počátcích umožnila metrická konvence zřízení Mezinárodního úřadu pro váhy a míry, který měl umožnit urychlené zavedení Metrické soustavy v co nejširším mezinárodním měřítku. Dnešním posláním tohoto orgánu je zajištění jednotnosti a přesnosti měřidel a měření většiny základních veličin. Organizace založená na Metrické konvenci je dnes vrcholnou prakticky celosvětovou vědeckou organizací pro oblast metrologie.

Od vodního kola ke Kaplanově turbíně

FRANTIŠEK JÁCHIM, základní škola, Volyně

Nejstarším zařízením, jímž byla přeměňována energie vody na využitelnou mechanickou energii, jsou vodní kola. O vodním kole se svislou osou se zmiňuje ve svém díle římský architekt *Marcus Vitruvius Pollio* (1. stol. př. n. l.). Na ose vodního kola byl nasazen pohyblivý mlýnský kámen — běhoun. Ve starověku nebyla vodní kola příliš rozšířena, neboť pro toto období je charakteristické využívání energie svalů. Počet otroků byl prakticky neomezený, energetické nároky společnosti nepříliš veliké.

Feudální společnost již pocítovala větší „hlad“ po energii. Ve středověku dochází ke stavbě velkých vodních kol, zejména ve spojení s mlýny a valchami. První spolehlivá zpráva o mlýnu v Čechách je obsažena v zakládací listině kostela v Uněticích (kolem r. 1130). Někdy v období 1140 již stojí vodní mlýn na Sázavě. S prvním slovenským vodním mlýnem je spjat klášter Bzovík. Od 13. století se již běžně využívá vodního kola na spodní vodu, které je využíváno v tzv. lodních mlýnech. Vodní kolo je umístěno mezi dvěma plavidly a nastavením celé konstrukce vůči proudu řeky se stabilizují otáčky vodního kola. S břehem byl mlýn pevně spojen, aby nebyl unášen vodním proudem.

V 18. století se konstruktéři vracejí k vodnímu kolu se svislou osou, avšak jako nová a pokroková se ukazuje myšlenka využít působení vody na lopatky v uzavřeném prostoru a tak při velkém spádu využívat i tlaku vody. Vzniká tak první turbína. Proslulý matematik a fyzik *Leonhard Euler* (1707—1783) navrhl zdokonalení Segnerova kola, doplnil je rozváděcím kolem, ale práce nějak zapadla, a tak až roku 1822 se zrodila podobná myšlenka v hlavě francouzského inženýra *Burdina*. Ten také zavádí název turbína.

Dnes se prakticky využívá tří typů vodních turbín: Francisovy,

Peltonovy a Kaplanovy. Americký inženýr anglického původu *James Bicheno Francis* (1815—1892) staví roku 1849 novou radiální přetlakovou turbínu pro spády kolem 300 m. Pro větší spády — až 1500 m — je vhodná turbína amerického vynálezce *Lestera Peltona* (1829—1908) z roku 1884.

S rozvojem využívání vodní energie pro výrobu elektřiny je úzce spjata celoživotní práce prof. ing. dr. *Viktora Kaplana* (1876—1934). Jím sestrojená turbína z roku 1912 se ukázala jako velmi kvalitní a efektivní vodní motor, zejména pro spádové poměry na našich řekách.

Viktor Kaplan začíná svou práci po absolvování vídeňské Vysoké školy technické roku 1903 na technice v Brně jako asistent u profesora Musila. Za práci *Bau rationeller Francisturbinen Laufräder* získává doktorát technických věd. Motivem pro jeho práci je zvyšování otáček Francisovy turbíny. Ačkoli tato turbína dosahuje až 88% účinnosti a je vhodná pro větší spády, pracuje při relativně malých otáčkách (asi 10 za sekundu); ke generátorům elektrické energie bývala proto připojována převodem, což nebylo výhodné. Peltonova turbína sice dosahuje větších otáček — 16 za sekundu, ale je vhodná pro veliké spády, proto nelze s ní počítat v našich podmínkách. Kaplan nejprve buduje speciální laboratoř, v níž přes různé konstrukční úpravy turbíny Francisovy dochází k turbíně zcela nového tvaru, kterou si dává roku 1913 patentovat. Oběžné kolo tvaru vřetena má nastavitelné lopatky, jimiž lze při proměnlivém spádu vody zachovat stejnou účinnost i výkon turbíny. Regulace sklonu lopatek oběžného kola se provádí automaticky v rozmezí ± 30 stupňů pístem v oleji uvnitř oběžného kola a tato regulace je pomocí řídicí vačky vedena táhlem i ke kolu rozváděcímu, kde vstupní ventil přizpůsobuje tok vody. Vzhledem k parametrům modelu nepoznal Kaplan vliv kavitace. S tímto velkým problémem se setkává teprve při instalaci turbíny v praxi.

Povězme si nyní, jak se vlastně kavitace projevuje. Klesne-li v některém místě vlivem velké rychlosti vody tlak na hodnotu, při níž voda vře, vznikají bublinky vzduchu. Po jejich proražení dochází k prudkým nárazům vody na lopatky a materiál se rozrušuje. Vzhledem k tomu, že vzduch obsažený ve vodě je bohatší na kyslík než vzduch atmosférický, působí bublinky také silně korozivně. Účinek kavitace se snižuje tím, že oběžné kolo se umístí pod volnou hladinou vytékající vody.

Obvykle je turbína z lité oceli, broušená a leštěná. Poprvé byla instalována na jezu v Poděbradech roku 1920, další turbína putuje do Švédska a později i do dalších států.

V současné době je Kaplanova turbína instalována na převážně větší našich vodních děl. Tak je vesměs užita v kaskádě na Váhu, na Vltavě ve Slapské přehradě jsou tři turbíny pro 56metrový spád (1954) s výkonem 50 MW, přičemž se přizpůsobují kolísání hladiny až o 24 metrů.

Rovněž na vodním díle Orlík spuštěném v roce 1961 jsou čtyři Kaplanovy turbíny s celkovým výkonem 376 MW při spádu 71 metrů. Hřídél jedné z nich byla jako vrcholný výrobek našeho strojírenství vystavena na Světové výstavě Expo 58 v Bruselu. Kaplanova turbína je i na díle vranském. Ze zahraničních vodních děl připomeňme alespoň francouzskou přehradu Donzère-Modragon, na níž je 6 turbín, každá s výkonem 50 MW pro 26 m spád.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Z dějin města Kocourkova

Nalezněte geometrickou konstrukci, kterou mohli v Kocourkově určit místo pro pomník purkmistra Silvestra Vikýře. Tato úloha byla otištěna v RMF číslo 6, ročník 59.

Připomeňme si některé informace potřebné k vyřešení úlohy: V Kocourkově měly pro purkmistrův život význam tři domy. Jsou to jeho dům, kde žil 80 let od narození až do smrti, radnice, z níž řídil půl století záležitosti obce a hospoda „U zlomeného koláče“, ve které pravidelně sedával od svého zvolení za starostu obce. Kocourkovským, kteří po purkmistrově smrti nevěděli, kam umístit jeho pomník, poradil neznámý pocestný, aby jej umístili tak, že vzdálenosti pomníku od radnice, hospody a purkmistrova domu budou v poměru $\frac{1}{50} : \frac{1}{50} : \frac{1}{80}$.

Při vyměřování občané zjistili, že určené tři domy stojí ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka.

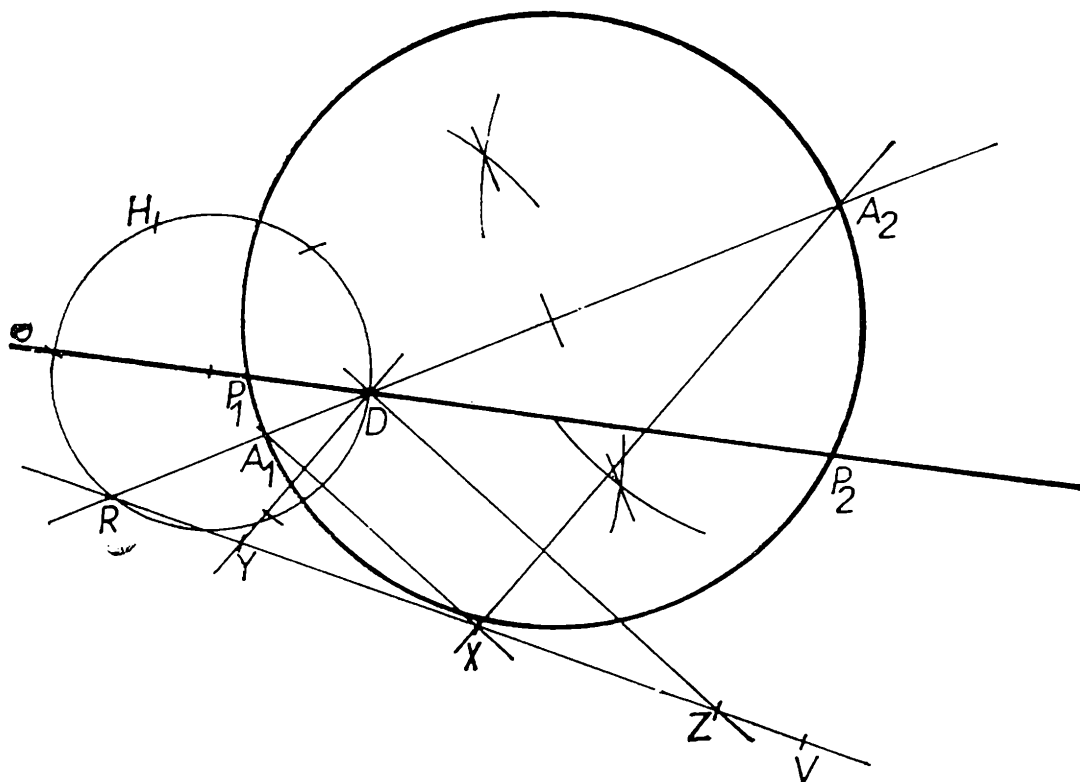
Naším úkolem je sestrojit množinu všech bodů P , které mají od vrcholů rovnostranného trojúhelníka RHD vzdálenosti v poměru

$$PR : PH : PD = \frac{1}{50} : \frac{1}{50} : \frac{1}{80}.$$

Řešení:

Prvky hledané množiny mají splňovat tyto podmínky:

- a) mají od bodů H , R stejné vzdálenosti,
 - b) mají od bodů R , D (resp. H , D) stálý poměr vzdáleností.
- ad a) Množina všech bodů, které mají od bodů H , R stejné vzdálenosti je osa souměrnosti úsečky HR .



ad b) Množina všech bodů, které mají od bodů R , D stálý poměr vzdáleností

$$PR : PD = \frac{1}{50} : \frac{1}{80}$$

je Apolloniova kružnice nad průměrem A_1A_2 , kde body A_1, A_2 leží v přímce RD , přičemž platí

$$A_1R : A_1D = A_2R : A_2D = PR : PD = \frac{1}{50} : \frac{1}{80} = 8 : 5 \quad (x)$$

Konstrukce Apolloniovy kružnice nad daným průměrem je zřejmá, známe-li body A_1, A_2 . Při jejich konstrukci postupujeme takto:

Na libovolnou přímku RV , která není totožná s přímkou RD , nanese úsečku $RX = 8$, od bodu X nanese na obě polopřímky, na něž bod X dělí přímku RV , úsečky $XY = XZ = 5$. Bodem X vedeme rovnoběžku s přímkou ZD a její průsečík s přímkou RD označíme A_1 . Dále bodem X vedeme rovnoběžku s přímkou YD a její průsečík s přímkou RD označíme A_2 .

Pro takto sestrojené body A_1, A_2 platí

$$A_1R : A_1D = A_2R : A_2D = \frac{1}{50} : \frac{1}{80},$$

neboť trojúhelníky $\triangle RYD$ a $\triangle RXA_2$ jsou si podobné, a také trojúhelníky $\triangle RZD$ a $\triangle RXA_1$ jsou si podobné.

Množina všech bodů, které mají od vrcholů rovnostranného trojúhelníka RHD vzdálenosti v poměru

$$\frac{1}{50} : \frac{1}{50} : \frac{1}{80},$$

je průnik množiny všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodů R, H , a množiny všech bodů, které mají od bodů R, D (resp. D, H) poměr vzdáleností

$$\frac{1}{50} : \frac{1}{80}.$$

Hledanou geometrickou konstrukcí je konstrukce průsečíku osy souměrnosti úsečky RH a Apolloniovy kružnice nad průměrem A_1A_2 , kde body A_1, A_2 leží na přímce RD a platí pro ně vztah (x).

Poznámka :

Hledaná množina obsahuje právě dva prvky P_1, P_2 . Kocourkovští se budou muset ještě jednou rozhodnout. Avšak vzhledem k tomu, že v obci velikosti Kocourkova stojí radnice a hospoda v centru obce, resp. na hlavním rynku, či jeho nejbližším okolí, vyberou si kocourkovští zajisté pro umístění purkmistrova pomníku místo nikoli vzdálenější od radnice a hospody, ale místo na obrázku označené bodem P_1 .

Vlasta Dragounová

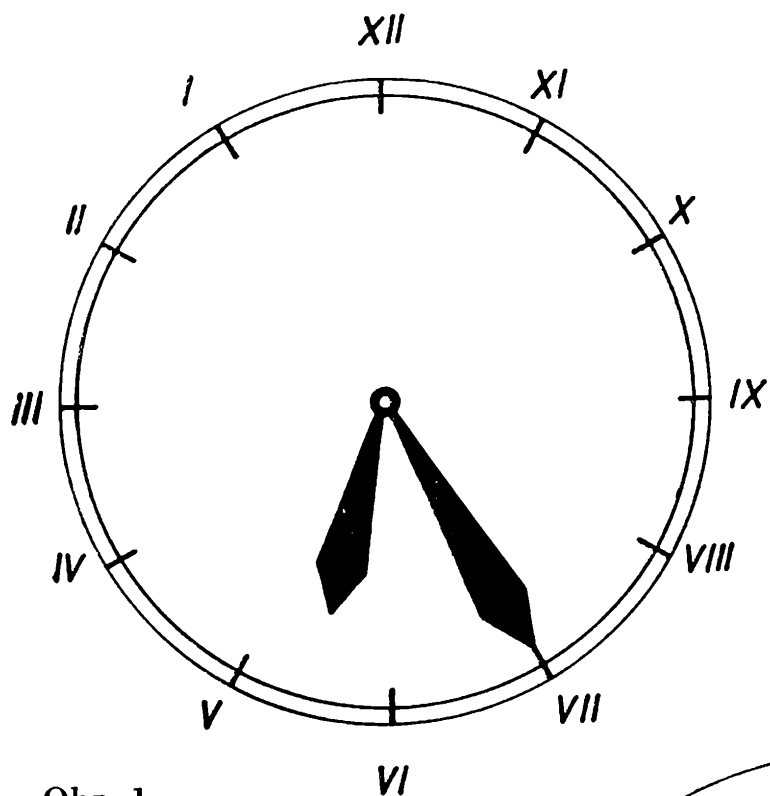
Řešení úlohy o kocourkovských hodinách

V červnovém čísle 61. ročníku *Rozhledů* se na str. 435 psalo o radničních hodinách v Kocourkově. Jejich obrázek přetiskujeme (obr. 1). Uvedme ještě, že jejich ručičky se pohybují v opačném smyslu než je obvyklé. O těchto hodinách hovoří úloha:

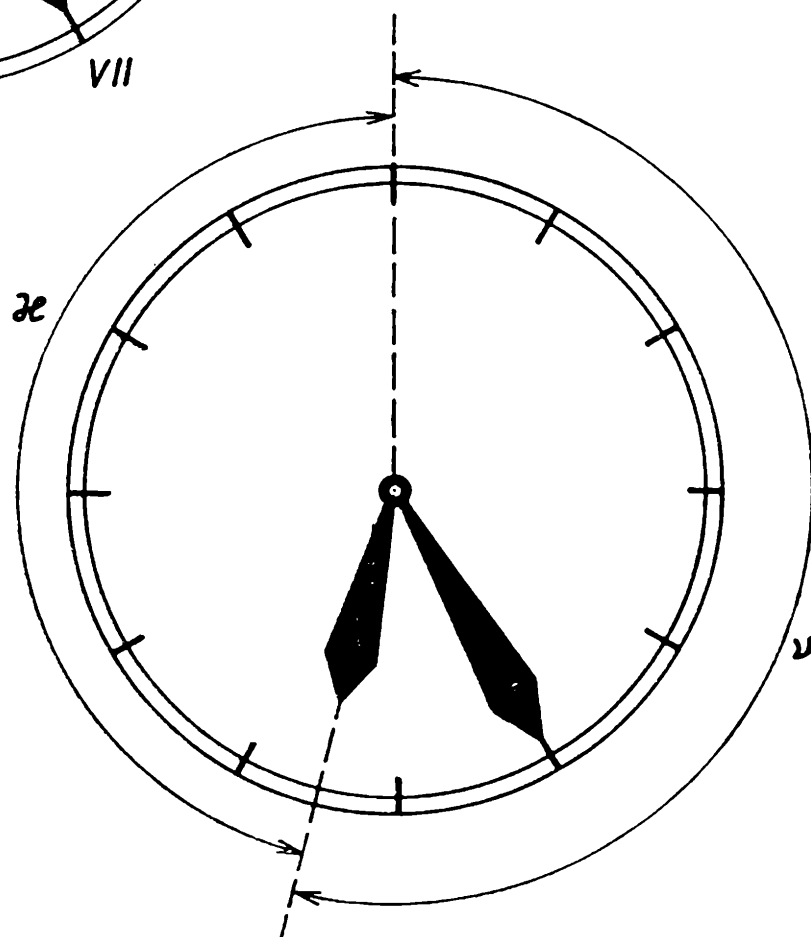
Představme si, že na ciferníku kocourkovských hodin nejsou napsány číslice. Nalezněte postup, jak z údaje, který na nich přečte člověk, jenž není s jejich zvláštností obeznámen, určíme, kolik je skutečný čas.

Při řešení úlohy vyjdeme z toho, že hlavní roli má na hodinách vždy malá ručička a že velká hraje v podstatě jen pomocnou úlohu. Při dostatečně velkém ciferníku by bylo možno určovat čas jen z polohy malé ručičky. Návštěvník, který není s kocourkovskými hodinami seznámen, si podle svého zvyku všímá úhlu ν (obr. 2), zatímco občan Kocourkova vychází při určování času z úhlu κ . Zřejmě

$$\nu + \kappa = 360^\circ.$$



Obr. 1



Obr. 2

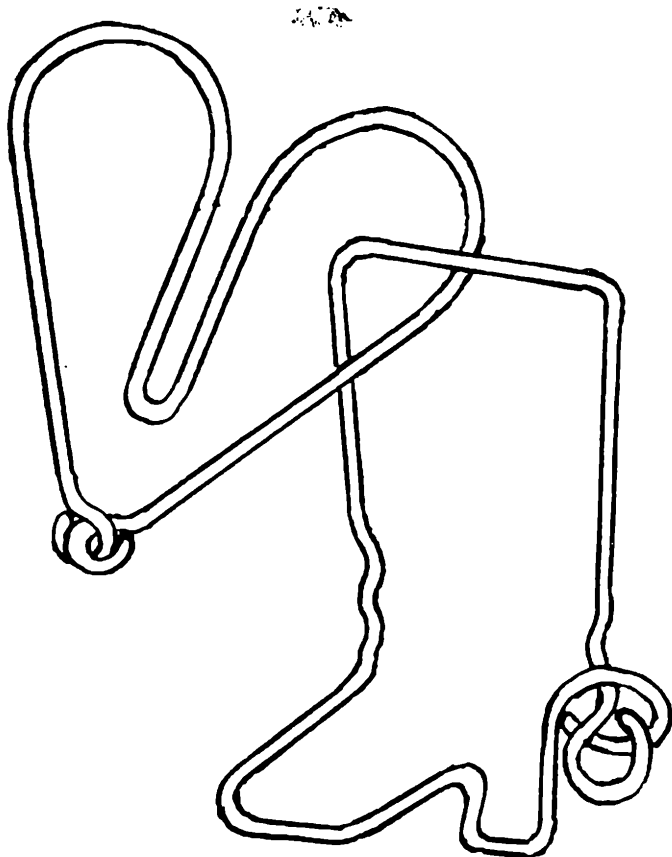
Odtud již plyne:

Z údaje, který by přečetl neinformovaný návštěvník Kocourkova, se skutečný čas získá odečtením od 12 hodin. Např. obr. 2 zachycuje skutečný čas 5 h 35 min, nepoučený pozorovatel přečte, že je 6 h 25 min.

Jiří Mída

Srdce v botě

Malým žertem mezi drátěnými hlavolamy je „Srdce v botě“. Zařadili jsme jej proto, aby se jeho řešitelé i výrobci snažili mít spíše srdce na pravém místě než v botě.



Obr. 1

K výrobě tohoto hlavolamu potřebujeme stejný materiál jako k předcházejícím drátěným hlavolamům, tedy ocelový drát (dráty ke kolu), štípací kleště a na ohýbání drátu kleště s kulatými čelistmi.

Podle nákresu (obr. 1) zhotovíme srdce i botu. Srdce se potom snažíme do boty zasunout. Když se nám to podaří, hlavolam jsme vlastně vyřešili, protože opačným postupem jej opět do staneme zpět, což je naším úkolem.

Josef Svoboda

OLYMPIÁDY A SOČ

Celostátní kolo matematické olympiády v Pardubicích

Pořadatelem III. kola kategorie A 32. ročníku matematické olympiády byl KV MO Východočeského kraje, soutěž se konala ve dnech 5.—8. května v Pardubicích. Slavnostního zahájení se zúčastnili zástupci stranických a státních orgánů kraje, okresu i města Pardubic. Vedoucí odboru školství KNV s. doc. dr. Miloslav Boháč předal na tomto shromáždění několika učitelům i školám Východočeského kraje čestná uznání

za dlouholetou úspěšnou práci v matematické olympiádě a dobrou péčí o talentované žáky. Za ministerstvo školství ČSR pozdravil všechny soutěžící i členy ÚV MO s. RNDr. Václav Šůla. Své mladší kolegy povzbudil též Jan Kratochvíl, bývalý žák pardubického gymnázia, vítěz čtyř ročníků MO a úspěšný účastník čtyř mezinárodních matematických olympiád.

Pro první soutěžní den vybralo předsednictvo ÚV MO tyto tři úlohy:

1. Nechť $n \geq 1$ je dané přirozené číslo. Uvažujme všechny takové n -tice reálných čísel $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, pro které platí

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i = k,$$

kde k je dané reálné číslo, $0 \leq k \leq n$. Určete, jakou největší hodnotu nabývá výraz

$$s = \left| \sum_{i=1}^n \sin 2x_i \right|$$

2. V rovině je dán trojúhelník ABC . Dokažte, že pro každý vnitřní bod P úsečky AB platí

$$|PC| \cdot |AB| < |PA| \cdot |BC| + |PB| \cdot |AC|.$$

3. Šachovnice 8×8 je tvořena čtverci o straně 3 cm. Na šachovnici položíme obdélníkový proužek papíru o rozměrech 6 cm a 3 cm. Řekneme, že se proužek překrývá s polem šachovnice, jestliže s ním má aspoň jeden společný vnitřní bod. Zjistěte, jaký je největší počet černých polí, s kterými se může daný obdélníkový proužek překrývat.

Druhý den se soutěžící potýkali s touto trojicí úloh:

4. Nechť je $n \geq 2$ dané přirozené číslo, $a_0, a_1, \dots, a_n$ za sebou následující členy aritmetické posloupnosti. Potom platí

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a_k = 0.$$

Dokažte.

5. Určete všechny dvojice (x, y) přirozených čísel, pro které platí

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt[3]{2} \right| < \frac{1}{y^3}.$$

6. Je dána kružnice $k = (S, r)$. Nechť je $\mathbf{M}$ množina všech takových trojúhelníků s vepsanou kružnicí k , jejichž největší úhel se rovná dvojnásobku nejmenšího úhlu. Najděte množinu všech bodů, kterou vyplní

druhé od bodu S nejvzdálenější vrcholy všech trojúhelníků z množiny M .

S první úlohou si většina soutěžících dobře poradila, úloha úzce navazovala na podobné úlohy z I. a II. kola soutěže. Stačilo dobře použít Cauchyovu nerovnost a vzorec pro sinus dvojnásobného argumentu. Největší hodnota výrazu s je $\sqrt{k(n-k)}$.

U druhé úlohy poznalo hodně žáků, že se jedná o speciální případ Ptolemaiovy věty. V tom případě se však vyžadoval její důkaz a i ten soutěžící hravě zvládli, například pomocí vzorce pro vzdálenost obrazů dvou bodů v kruhové inverzi. Kdo si nevěděl rady, šel na to analyticky, většinou se to povedlo, někdy se však žák zamotal do složitých výpočtů, zvláště když si vzal na pomoc ještě diferenciální počet. Pouze jeden soutěžící měl důkaz shodný s autorským řešením. Stačí totiž vést bodem P rovnoběžky se stranami BC a AC , jejich průsečíky se stranami AC a BC označit M , N . Dokazované tvrzení pak plyne z trojúhelníkové nerovnosti $|PC| < |CN| + |NP|$ a z podobnosti trojúhelníků ABC , APM a PBN .

Třetí úloha patřila k nejtěžším, jen pět soutěžících ji zvládlo bez ztráty bodů. Ještě dost soutěžících ukázalo, že je možné položit obdélník tak, aby se překrýval s šesti černými poli šachovnice. Horší bylo ukázat, že se nemůže překrývat se 7 černými poli.

K řešení čtvrté úlohy bylo třeba znát vzorce pro kombinační čísla a všimnout si, že pro $n \geq 1$ je

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

Pátá úloha opět úzce navazovala na podobnou úlohu z I. kola, úloze vyhovují pouze dvojice $(1, 1)$, $(2, 1)$ a $(3, 2)$. Šestá úloha vypadá na první pohled velmi složitá, nebyla však těžká. Protože se velikost největšího úhlu v uvažovaných trojúhelnících rovná dvojnásobku nejmenšího, musí být velikost prostředního úhlu z intervalu $< \pi/4, 2\pi/5 >$. Pak je už snadné dokázat, že hledanou množinou je mezikružší se středem v bodě

S a poloměrech $r/\sin \frac{\pi}{8}$, $r/\sin \frac{\pi}{5}$.

Zatímco se žáci mohli již bez nervozity věnovat poslechu folkové skupiny „Kantoři“, měli opravovatelé a členové předsednictva ÚV MO plno práce s opravováním úloh, aby mohly být v neděli 8. května vyhlášeny výsledky.

Pořadí žáků z tříd, které nejsou zaměřeny na matematiku :

- 1.— 2. Jaroslav Smejkal, Velké Meziříčí
Martin Štěpánek, Jaroměř

- 3.— 4. Juraj Balázs, Košice, Kuzmányho ul.
František Vencl, Česká Třebová
5. Ludmila Moravčíková, Žilina, Wolkerova ul.
6. Petr Maršálek, Praha 4, Ohradní
7. Dušan Pospíšil, Považská Bystrica
8. Viktor Martišovitš, Bratislava, Novohradská
9. Ignác Tereščák, Michalovce
10. Peter Karailiev, Michalovce
11. Martin Klazar, Louny
- 12.—13. Stanislav Jelen, Karlovy Vary
Martin Kolář, Brno, Křenová ul.
- 14.—16. Peter Borovanský, Bratislava, Novohradská
Fatima Cvrčková, Strakonice
Petr Daniel, Hradec Králové, Tylovo nábřeží
- 17.—18. Rudolf Blaško, Žilina, Wolkerova
Miroslav Ryška, Frýdek-Místek
19. Jan Daněk, Žilina, Wolkerova
20. Jiří Votinský, Pardubice

Vítězové 32. roč. MO :

- 1.— 2. Igor Kříž, 4. roč., G W. Piecka, Praha
Jiří Sgall, 4., G W Piecka, Praha
- 3.— 4. Vladimír Dančík, 4., Košice, Šmeralova
Marián Neamcu, 4., G A. Markuša, Bratislava
5. Xaver Gubáš, 4., G A. Markuša, Bratislava
- 6.— 7. Jaroslav Smejkal, 4., Velké Meziříčí
Martin Štěpánek, 4., Jaroměř
- 8.— 9. Juraj Balázs, 3., Košice, Kuzmányho ul.
František Vencl, 4., Česká Třebová
10. Ludmila Moravčíková, 4., Žilina, Wolkerova
- 11.—12. Petr Maršálek, 3., Praha 4, Ohradní
Jiří Witzany, 3., G W. Piecka, Praha
- 13.—14. Milan Kuchta, 4., G A. Markuša, Bratislava
Dušan Pospíšil, 3., Považská Bystrica
- 15.—17. Martin Černý, 3., G W. Piecka, Praha
Viktor Martišovitš, 4., Bratislava, Novohradská
Ján Šefčík, 2., G A. Markuša, Bratislava
- 18.—20. Marek Hatala, 4., Košice, Šmeralova
Vladan Pecha, 4., Bílovec
Pavel Valtr, 3., G W. Piecka, Praha

Všichni byli žáky gymnázií.

Na závěr je třeba poděkovat všem, kteří se zasloužili o zdárný průběh celostátního kola 32. roč. MO, především předsedovi KV MO *dr. Josefu Kubátovi* a jeho kolegům z gymnázia v Pardubicích. Kromě samotné soutěže připravili bohatý kulturně-společenský program nejen pro soutěžící, ale i pro členy ÚV MO.

RNDr. Leo Boček, CSc.

Jedna zajímavá úloha z matematické olympiády

IGOR KŘÍŽ, student gymnázia W. Piecka, Praha

V celostátním kole 31. ročníku matematické olympiády v roce 1982 se vyskytl tento příklad.

Úloha 4: V kruhu o poloměru 1 je zvoleno 64 navzájem různých bodů. Dokažte, že z nich lze vybrat 10 navzájem různých bodů, které leží v některém kruhu o poloměru $1/2$.

V obou případech jsou zřejmě míněny *uzavřené* kruhy. Řešení úlohy samo o sobě je poměrně jednoduché. Zmíněný kruh o poloměru 1 (označme jeho střed S) pokryjeme sedmi kruhy o poloměru $1/2$ (obr. 1).

Musí se ovšem dokázat, že se jedná o pokrytí. Nyní v některém ze zmíněných kruhů musí ležet 10 zvolených bodů. Kdyby totiž v každém z nich leželo nejvýš 9 zvolených bodů, bylo by těchto bodů dohromady nejvýš $7 \cdot 9 = 63 < 64$, což by byl spor.

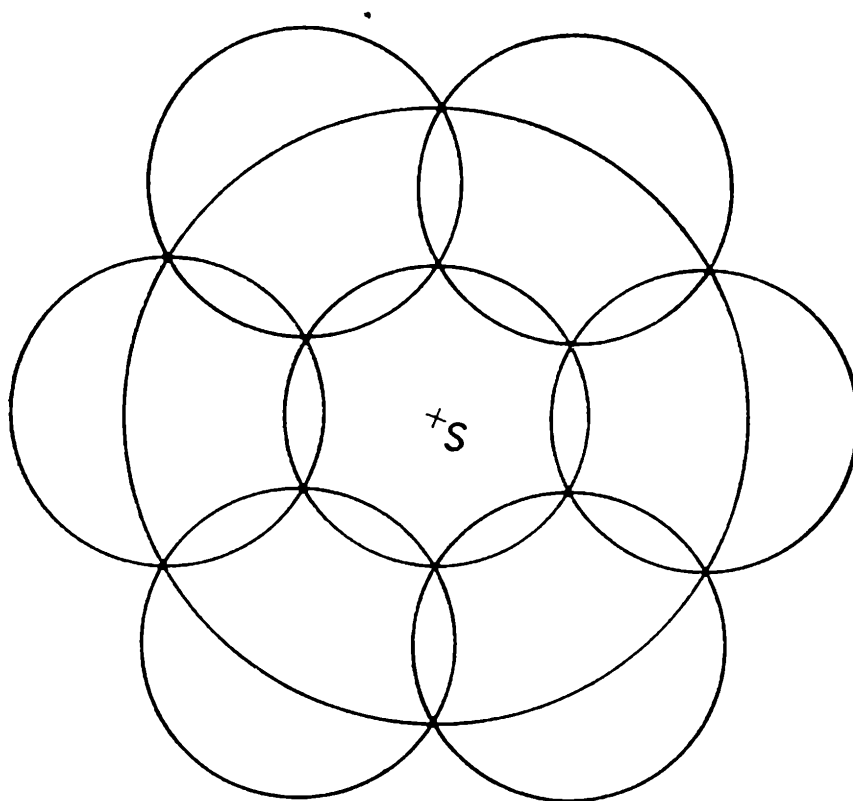
Formulace úlohy vede k přirozené otázce, zda 64 je nejmenší přirozené číslo n , pro něž platí

$V(n)$: Z každých n navzájem různých bodů, umístěných v kruhu o poloměru 1, lze vybrat 10 bodů, které leží v nějakém kruhu o poloměru $1/2$.

Věta $V(63)$ platí. Opravdu, vezměme si v kruhu K o poloměru 1 nějakých 63 různých bodů $A_1, \dots, A_{63}$. Mějme nyní pokrytí kruhu K sedmi kruhy $L_1, \dots, L_7$ jako na obr. 1. Ukážeme nyní, že existuje takové otočení σ se středem S kruhu K tak, že v některém kruhu $\sigma(L_i)$ leží aspoň 10 bodů A_j . Důkaz provedeme sporem. Zvolme σ tak, aby nějaký bod A_m ležel na hranici některého kruhu $\sigma(L_n)$. (Jestliže to nelze, leží všechny body A_i uvnitř toho kruhu L_j , který obsahuje S a jsme hotovi.) Nechť nyní v každém kruhu $\sigma(L_i)$ leží nejvýš 9 bodů A_j . Vzhledem k tomu, že bod A_m zřejmě leží současně ve dvou různých kruzích $\sigma(L_n)$, $\sigma(L_p)$, je bodů A_i dohromady nejvýš $7 \cdot 9 - 1 = 62 < 63$ — spor.

Poznamenejme, že jsme podstatně využili *uzavřenosti* kruhů $L_1, \dots, L_7$.

Nyní ovšem ukážeme, že už $V(62)$ *neplatí*. 62 bodů $A_1, \dots, A_{62}$, které tvoří protipříklad, zvolíme takto: $A_1, \dots, A_{53}$ umístíme v pravidelných



Obr. 1

intervalech na obvodě K . Zbývajících 9 bodů $A_{54}, \dots, A_{62}$ rozmístíme libovolně v pravidelných intervalech na obvodě některého kruhu K' se středem S a poloměrem ε , kde ε zvolíme tak malé, aby K' byl disjunkt-ní s každým kruhem o poloměru $1/2$, obsahujícím aspoň dva z bodů $A_1, \dots, A_{53}$ (to zřejmě lze).

Zvolme nyní kruh L o poloměru $1/2$. Jestliže by tento kruh obsahoval 10 bodů A_i , musel by zřejmě obsahovat aspoň jeden bod $A_1, \dots, A_{53}$. Jestliže obsahuje aspoň dva z těchto bodů, musel by obsahovat rovnou 10 z nich. Avšak snadno se zjistí, že mezi takovými 10 body se vždy najdou dva, které mají vzdálenost aspoň $\sin(9 \cdot \pi / 53) \cdot 2 > \sin(9 \cdot \pi / 54) \cdot 2 = 1$, tedy větší než průměr kruhu L . To ovšem nelze. Kruh L by tedy musel obsahovat právě jeden z bodů $A_1, \dots, A_{53}$, tedy všechny body $A_{54}, \dots, A_{62}$, což také není možné. Proto L obsahuje nejvýš 9 z bodů $A_1, \dots, A_{62}$, což jsme chtěli dokázat.

Máme tedy konečný výsledek.

Věta 1: Číslo $n = 63$ je nejmenší přirozené, pro něž platí $V(n)$.

Nakonec si uvědomme, že číslo 10, které se vyskytuje ve $V(n)$, nebylo pro naše úvahy podstatné. Nahradíme-li je libovolným $m \in \mathbb{N}$ a vezme-me-li si výrok

$V_m(n)$: Z každých n různých bodů v kruhu o poloměru 1 lze vybrat m bodů, které leží v některém kruhu o poloměru $1/2$,

dokážeme přesně analogicky toto tvrzení:

Věta 2: Číslo 7. $(m - 1)$ je nejmenší přirozené n , pro něž platí $V_m(n)$.

Chcete studovat na elektrotechnické fakultě VUT v Brně?

Doc. Dr. JAROSLAV BAYER, CSc.,
Doc. Dr. FRANTIŠEK ZŘÍDKAVESELÝ, CSc., VVT Brno

Studium na elektrotechnické fakultě Vysokého učení technického v Brně, nositele Řádu práce, je pětileté. Již od prvního ročníku jsou studenti rozděleni do jednotlivých studijních oborů a to: elektrotechnologie, silnoproudé elektrotechniky, elektroenergetiky, radiotechniky, telekomunikační techniky, mikroelektroniky, technické kybernetiky, elektronických počítačů a automatizovaných systémů řízení.

Teoretický základ studia elektrotechniky vychází z přírodovědných disciplín matematiky, fyziky a chemie. Přestože rozsah výuky prvních dvou ročníků je pro všechny výše jmenované obory stejný, je obsahová náplň jednotlivých předmětů poněkud odlišná. Od třetího ročníku výše mají ještě jednotlivé obory svá odborná zaměření.

Přijímací řízení na fakultu se skládá z písemné zkoušky z matematiky a fyziky a z ústního pohovoru ze všeobecných znalostí, event. ještě z doplňujících otázek z matematiky nebo fyziky. Výsledek přijímacího řízení je studentům písemně oznámen do čtyř týdnů.

Uchazeči: maturanti gymnázií, středních průmyslových škol, středních odborných škol s maturitou, kteří chtějí studovat na elektrotechnické fakultě, musí u přijímacích zkoušek prokázat dobré znalosti z matematiky i fyziky a to v rozsahu středoškolských osnov. Každý z uchazečů, který zašle vyplněnou „Příhlášku ke studiu na vysoké škole“ na příslušnou fakultu, obdrží stručný obsah látky z matematiky a fyziky požadovaný u přijímacích zkoušek. Přijímací zkouška prověřuje nejen znalosti uchazečů, ale také jejich schopnost aplikovat je při řešení jednotlivých úloh. Na počítání příkladů se klade hlavní důraz. Zkouška z fyziky má někdy formu testu, kde si student zadaný problém nejprve vyřeší a spočítá, než označí jednu z nabídnutých odpovědí.

U písemné zkoušky z matematiky v červnu r. 1982 bylo pět příkladů z následujících oblastí:

- 1) Úpravy algebraických výrazů s požadavkem udání podmínek existence daného výrazu
- 2) Řešení rovnic resp. nerovnic s absolutní hodnotou
- 3) Řešení jednoduché goniometrické rovnice

- 4) Úlohy z analytické geometrie v rovině, komplexní čísla, logaritmy, funkce logaritmické a exponenciální a kombinatorika
 5) Začátky infinitezimálního počtu.

Každý z příkladů byl samostatně hodnocen a na „dobrou“ bylo požadováno vyřešit správně více než polovinu příkladů.

Nyní uvedeme některé typické příklady a upozorníme na chyby, které se často u zkoušky vyskytovaly.

Příklad 1. Udejte podmínky existence výrazu A a zjednodušte

$$A = \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)}{\left(a^2 - b^2\right)^{-1} \left(\frac{a^4}{b^2} - \frac{b^4}{a^2}\right)}.$$

Řešení: Výraz A má smysl, jestliže platí: $a \cdot b \neq 0 \wedge a^2 \neq b^2$. Zjednodušením dostaneme složený zlomek

$$A = \frac{\frac{(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)}{(ab)^2}}{\frac{a^6 - b^6}{a + b)(a - b) \cdot a^2 b^2}},$$

jehož existence je rovněž podmíněna již uvedenými podmínkami. Dosazením vztahu

$$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3) \cdot (a^3 - b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \cdot (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

do částečně upraveného výrazu A a vykrácením obdržíme: $A = 1$. Je třeba si uvědomit, že výraz $A = 1$ platí pouze za podmínek:

$$a \cdot b \neq 0 \wedge a^2 \neq b^2,$$

každé další podmínky jsou zbytečné.

Příklad 2. Řešte v R rovnici: $x^2 - x - 9|x| + 11 = 0$.

Řešení: Abychom mohli odstranit absolutní hodnotu, musíme uvážit tyto možnosti: pro $x > 0$ nabude původní rovnice tvaru:

$$x^2 - 10x + 11 = 0,$$

a ta má řešení:

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{14} > 0,$$

takže x_1, x_2 je i řešením původní rovnice;

pro $x < 0$ nabude původní rovnice tvaru:

$$x^2 + 8x + 11 = 0,$$

a ta má řešení:

$$x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{5} < 0,$$

takže x_3, x_4 je rovněž řešením původní rovnice.

Zadaná kvadratická rovnice s absolutní hodnotou má tedy tato čtyři řešení v oboru reálných čísel:

$$5 + \sqrt{14}; 5 - \sqrt{14}; -4 + \sqrt{5}; -4 - \sqrt{5}.$$

(Přesvědčte se dosazením do původní rovnice, že všechny čtyři hodnoty vyhovují dané rovnici).

Příklad 3. Řešte goniometrickou rovnici:

$$\sin^2 x - \cos^2 x - 0,5 = 0.$$

Řešení: Výraz s goniometrickými funkcemi nám připomíná jeden ze vzorců pro funkce dvojnásobného argumentu:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Po úpravě dostaneme: $\cos 2x = -0,5$. Položíme $2x = y$

a řešíme rovnici: $\cos y = -0,5$.

Kořeny této rovnice pro $k \in \mathbb{Z}$ jsou:

$$y_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{a} \quad y_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi,$$

vzhledem k periodičnosti funkce kosinus.

Nyní se vrátíme k původní proměnné x a dostaneme:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{a} \quad x = \frac{2}{3}\pi + k\pi \quad \text{pro } k = 0, \pm 1, \dots$$

(Nezapomeňte na periodičnost goniometrických funkcí!)

Příklad 4. Řešte logaritmickou rovnici o neznámé $x \in \mathbb{R}$.

$$2 \log_{10}(x - 1) = 0,5(\log_{10} x^5 - \log_{10} x).$$

Řešení: Na základě znalostí některých vět o logaritmech můžeme danou rovnici upravit, takže dostaneme:

$$\log_{10}(x - 1)^2 = \log_{10} \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)$$

čili

$$(x - 1)^2 = x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Protože logaritmus je definován pouze pro kladná čísla, musí platit, že $x > 1$, takže $\frac{1}{2}$ není kořenem dané rovnice.

Množina všech řešení dané rovnice je tedy prázdná.
(Pozor: rozlišovat nemá řešení a nulové řešení.)

Příklad 5. Dokažte, že funkce $F : y = \frac{1}{2} \sin^2 x$, $G : y = -\frac{1}{4} \cos 2x$ jsou primitivní v intervalu $(-\infty; +\infty)$ k téže funkci a najděte konstantu, o kterou se liší.

Řešení: Derivací funkce F i G dostaneme

$$F' = \frac{1}{2} 2 \sin x \cos x = \sin x \cos x$$

$$G' = -\frac{1}{4} (-\sin 2x) \cdot 2 = \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x ;$$

Obě funkce F i G jsou primitivní k funkci $f : y = \sin x \cos x$ v intervalu $(-\infty; +\infty)$.

Abychom našli konstantu c , upravíme např. funkci $G(x)$

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{1}{4} \cos 2x = -\frac{1}{4} (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{4} (1 - 2 \sin^2 x) = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 x = -\frac{1}{4} + F(x) , \end{aligned}$$

tedy pro všechna $x \in (-\infty; +\infty)$ platí: $F(x) = G(x) + \frac{1}{4}$. Hledaná

konstanta je $\frac{1}{4}$

Tento příklad vyžaduje základní znalosti diferenciálního a integrálního počtu zvaného dohromady jediným názvem infinitezimální počet. Konkrétně — k výše uvedenému příkladu je třeba znát definici primitivní funkce a derivace, což je obsahem učiva posledního ročníku střední školy.

Ke zkoušce z fyziky je třeba pro řešení příkladů zdůraznit z mechaniky: kinematiku a dynamiku přímočarého a kruhového pohybu, šikmého vrhu, dále pohybové rovnice, zákon zachování hybnosti, zákon zachování a přeměny mechanické energie.

Z termiky: teplotní roztažnost látek, změny skupenství, kalorimetrickou rovnici a hlavní věty termodynamiky. *Z kmitů a vln:* harmonický pohyb kmitavý, základní charakteristiky vlnění. *Z elektřiny:* silové působení elektrostatického pole, kondenzátory, řazení kondenzátorů, Ohmův zákon, řazení rezistorů, Kirchhoffovy zákony, změny rozsahů měřících přístrojů, silové působení magnetického pole na nabitě částice a na vodiče, elektromagnetickou indukci, vznik střídavého proudu. *Z optiky:* zákon odrazu a lomu světla, zobrazování kulovým zrcadlem

a tenkou čočkou, lom světla hranolem. *Z atomistiky*: Bohrov model atomu, strukturu atomového obalu, základní charakteristiky mikročástic, zákon zachování náboje a hmotnosti při jaderných přeměnách, zákon radioaktivního rozpadu.

Při řešení příkladů z fyziky neprovádějí někteří studenti diskusi daného problému, což je právě to nejdůležitější. Snaží se řešit úlohu dosazením do určitého vztahu, aniž by provedli rozbor. Studenti mají malou praxi v matematické formulaci dané úlohy a v sestavování rovnic potřebných pro řešení příkladu. Na to vše by bylo třeba zaměřit pozornost během celého studia na střední škole a řešit co nejvíce příkladů ze všech oblastí fyziky.

Jako příklad požadavků při přijímacích zkouškách z fyziky na naši fakultě uvedeme některé úlohy, které byly zadávány v posledních letech.

Naznačíme stručně jejich řešení s poukazem na chyby, které se často vyskytovaly při jejich řešení. Podobné nedostatky se objevily i v jiných příkladech stejného typu.

Příklad 1. Motor vozidla o hmotnosti $m = 800$ kg vyvíjí v časovém intervalu $< t_1, t_2 >$, $t_1 = 0$ s, $t_2 = 10$ s, tažnou sílu o velikosti $F = 1600$ N. V okamžiku t_1 měla rychlost vozidla velikost $v_1 = 20$ ms⁻¹. Zanedbejte síly odporu a valivého tření a určete: a) Zrychlení vozidla. b) Rychlost v okamžiku t_2 . c) Dráhu uraženou v časovém intervalu $< t_1, t_2 >$. d) Práci, kterou vykonala síla F .

Řešení:

$m = 800$ kg; $t_1 = 0$ s; $t_2 = 10$ s; $F = 1600$ N; $v_1 = 20$ ms⁻¹;

a) $a = ?$, b) $v_2 = ?$, c) $s = ?$, d) $A = ?$

$$\text{a) } a = \frac{F}{m} = \frac{1600}{800} \text{ ms}^{-2} = 2 \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{b) } v_2 = v_1 + a(t_2 - t_1) = 20 + 2(10 - 0) = 40 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{c) } s = v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2 = 300 \text{ m}$$

$$\text{d) } A = F \cdot s = 1600 \cdot 300 \text{ J} = 480\,000 \text{ J} = 480 \text{ kJ}$$

Nejčastější chybou u takovýchto příkladů bylo to, že studenti vycházeli ze vztahů pro pohyb rovnoměrně zrychlený s nulovou počáteční

rychlostí: $v = at$, $s = \frac{1}{2} at^2$ a zapomněli připočítat počáteční rychlost v_1 jako u otázky b) resp. první člen v řešení c).

Příklad 2. V kalorimetru tepelné kapacity 84 JK^{-1} kondenzovalo 12 g vodní páry 100°C teplé. V kalorimetru bylo 266 g vody, která se ohřála z $16,5^\circ\text{C}$ na 40°C . Určete měrné skupenské teplo varu vody při normálním tlaku. Měrné teplo vody je $4200 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Řešení:

$V_k = 84 \text{ JK}^{-1}$; $m_1 = 12 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$; $t_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$; $m_2 = 226 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$; $t_2 = 16,5 \text{ }^\circ\text{C}$; $t = 40 \text{ }^\circ\text{C}$; $c = 4200 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$; $l_v = ?$

Z kalorimetrické rovnice vypočítáme l_v :

$$m_1 l_v + m_1 c (t_1 - t) = (m_2 c + V_k) (t - t_2)$$

Po dosazení zadaných hodnot plyne: $l_v = 2,1 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$.

Při sestavování kalorimetrické rovnice studenti často nepočítali s tepelnou energií uvolněnou při kondenzaci vodní páry a vynechali první člen v rovnici nebo zapomněli na to, že se zahřívá také kalorimetr a vynechali V_k na pravé straně rovnice.

Příklad 3. Určete rezistanci každého ze dvou rezistorů, které zapojeny za sebou mají výslednou rezistanci $0,7 \Omega$ a zapojeny vedle sebe $\frac{1}{7} \Omega$.

Řešení: Pro sériové zapojení rezistorů v této úloze platí

$$R_1 + R_2 = 0,7.$$

Pro paralelní zapojení platí:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 7$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé R_1 a R_2 .

Vypočítáme-li R_1 z druhé rovnice a dosadíme do první rovnice, dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici pro R_2

$$R_2^2 - 0,7 R_2 + 0,1 = 0.$$

Její kořeny určují hodnoty rezistance $R_2 = 0,5 \Omega$, $R'_2 = 0,2 \Omega$.

Pro rezistanci prvního odporu je $R_1 = 0,2 \Omega$; $R'_1 = 0,5 \Omega$.

V tomto příkladě měla řada studentů špatně napsanou pravou stranu druhé rovnice: místo 7 psali $\frac{1}{7}$. Neuvedomili si, že je třeba uvést převrácenou hodnotu rezistance pro paralelní zapojení. Většinou též neprovedli diskusi řešení.

Příklad 4. Drátěná čtvercová smyčka o délce strany 80 cm byla během $\frac{1}{2}$ sekundy zasunuta do homogenního magnetického pole o indukci 2T kolmo k indukčním čarám. Jak veliké elektromotorické napětí se v ní indukovalo?

Řešení:

$$a = 0,8 \text{ m}; \Delta t = 0,5 \text{ s}; B = 2\text{T}; U_i = ?$$

Podle Faradayova zákona platí

$$U_i = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t},$$

kde je třeba určit pro náš příklad změnu indukčního toku

$$\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS,$$

neboť $\Phi_1 = 0$ (smyčka byla mimo magnetické pole) a $\Phi_2 = BS$, kde S je plocha smyčky. Pole je totiž homogenní a vektor magnetické indukce je kolmý k ploše smyčky.

Tedy

$$U_i = - \frac{B \cdot S}{\Delta t} = - \frac{B \cdot a^2}{\Delta t} = - \frac{2 \cdot 0,8^2}{0,5} = - 2,56 \text{ V}$$

Znaménko minus ve výsledku znamená, že směr indukovaného proudu při pohledu proti vektoru B je ve směru pohybu hodinových ručiček, tedy v záporném smyslu.

Zde dělalo potíže určení změny indukčního toku $\Delta \Phi$. Dále studenti většinou neuvedli význam znaménka minus ve výsledku a neurčili směr indukovaného proudu ve smyčce.

V některých sestavách otázek se vyskytly také příklady z optiky. V nich dělala potíže znaménková konvence pro zobrazování kulovým zrcadlem a tenkou čočkou.

Poslední přijímací zkouška se skládala ze dvou částí. V první části byly zadány čtyři příklady uvedeného typu. Druhou část tvořily dvě otázky ze středoškolské fyziky. K otázkám byly připojeny vždy čtyři odpovědi, z nichž měli studenti vybrat odpověď správnou.

Ukázka zadaného textu :

Intenzita elektrického pole je číselně rovna :

- a) Práci potřebné k přenesení náboje 1C při napětí 1V.
- b) Potenciální energii náboje 1C v místě o potenciálu 1V
- c) Síle působící na kladný jednotkový náboj.
- d) Energii, kterou udělí elektrické pole volnému náboji 1C.

Radium $^{226}_{88}\text{Ra}$ se samovolně přeměňuje v jiný nuklid vyzářením částice alfa. Vzniklý nuklid X lze napsat ve tvaru :

$$\text{a) } ^{222}_{86}\text{X}, \text{ b) } ^{224}_{86}\text{X}, \text{ c) } ^{222}_{88}\text{X}, \text{ d) } ^{222}_{86}\text{X}.$$

Pro každý příklad a otázku byl stanoven určitý počet bodů za správné vyřešení. Pro úspěšné absolvování zkoušky bylo třeba dosáhnout více než polovinu z celkového počtu bodů.

Uvedeným článkem jsme chtěli zdůraznit nutnost soustavného studia matematiky a fyziky, při kterém velmi důležitou složkou je právě řešení příkladů. Je možné použít kterékoliv středoškolské sbírky příkladů.

Budou-li studenti takto připraveni, snadněji zvládnou problémy spojené s přechodem ze středoškolského studia na studium vysokoškolské.

Závěrem upozorňujeme, že uchazeči s výborným prospěchem po celou dobu studia na střední škole anebo s vyznamenáním, kteří se na některé z olympiád matematické nebo fyzikální umístili v kraji na prvním nebo druhém místě, jsou přijímáni na naši fakultu bez přijímacích zkoušek a během celého studia patří k nejlepším studentům naší fakulty.

Z NOVÝCH KNIH

Kolektiv autorů:

ČÍSLO A MYŠLENÍ

Vydala Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 1983, 1. vydání, překlad z ruštiny, 176 stran, 19 obr., váz. 16,— Kčs

Kniha je sborníkem sedmi prací tematicky zaměřených k problematice postavení matematiky v systému věd a její úloze v procesu poznání a aktivní přetvářející činnosti člověka. Seznamuje čtenáře přístupnou formou s některými možnostmi aplikací matematických metod při zpracování informací (Dorodnicyn, A. A.: Matematika a popisné vědy; Karpovová, N. I.: Matematizace vědy: problémy a důsledky; Ivanickij, G. R. — Kuniskij, A. S.: Hledání třetího rozměru) a dále s některými matematickými modely reálných procesů a jevů (Svirežev, J. M.: Matematické modelování biologických společenstev; Voroščuk, A. N.: Modelování systémů a demografie; Rvačev, L. A.: Jak se modelují epidemie; Moisejev, N. N.: Problém „modelu světa“).

Uvedená publikace je aktuálním příspěvkem k problematice realizace světonázorové výchovy při vyučování matematice, neboť aplikovatelnost matematiky na jiné speciální vědy je jedním z důkazů materialistického základu matematických poznatků.

Eva Zapotilová

Garczyński, S.:

CHYBY A OMYLY

Vydala Mladá fronta v edici Třináct, v Praze roku 1982, překlad z polštiny, strán 208, váz. Kčs 18,—

Stefan Garczyński dal za pravdu myšlence: „Chybu může urobiť každý, ale iba hlupák urobí tú istú chybu druhý raz.“ A tak pozoroval chyby, značil si omyly (svoje i cudzie). Analyzoval nielen ich logiku ale aj psychológiu, odhaloval zdroje, posudzoval možnosti pestovania rozumových schopností, skúmal definície, sledoval prax. Skúsenosti a výsledky zhrnul vo svojej knižke. Rozdelil ju na

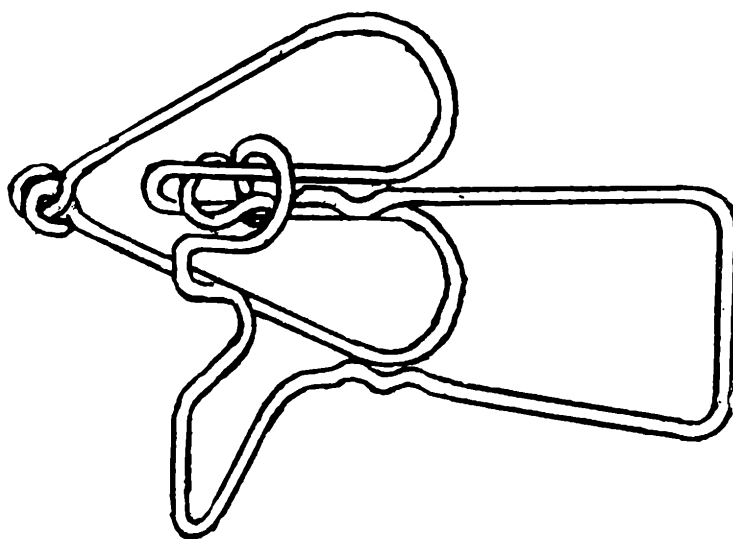
dve časti: Zdroje chýb a Fáza jednania. V prvej časti odhaľuje vonkajšie i vnútorné podmienky pre vznik chýb a omylov. Citlivo vystihuje a pútavo podáva svoje postrehy o hlúposti, duševných typoch, motivácii chýb, úlohe strachu, očakávania, emocií atď. v procese vzniku omylov a chýb. Druhá časť je orientovaná do prostredia činnosti. Nabáda k presným formuláciám problémov, k spresneniu cieľov a jednaniu o prostriedkoch ich dosiahnutia. Upozorňuje na nesprávne predpoklady, scestné metódy. Radí pri zhromažďovaní informácií a ich triedení. Neobchádza podiel za-

búdania a klamlivého vnímania a pamäti. Zdôrazňuje, že všeobecným nedostatkom nášho myslenia sú široké zovšeobecnenia opierajúce sa o úzky základ. Nabáda k väčšej kontrole úsudkov a hypotéz. Uznáva, že silnú oporu proti chybám má človek, v ktorom bola vypestovaná láska k pravde, ctižiadosť vidieť veci také, aké sú, názorová samostatnosť a odvaha v spojení sebakritičnosti a skromnosti. Chyby a omyly sú knižkou poučnou, podnecujúcou. Rozhodne na ňu nezabudnite a nezabudnete.

Dušan Jedinák

Řešení hlavolamu Srdce v bolě

Srdce nastavíme tak, abychom mohli jeho střední část (jehlu) zasunout do horizontálního oka a obejít jí vertikální oko (obr. 2).



Obr. 2

Aritmetiky Adama Riese

Rozvoj měst, řemesel a obchodu v Evropě od 15. století přinášel zvýšený zájem o účetnictví, o převody měn, o propočty různých měr, které nebyly ve všech městech podél obchodních cest stejné. Také praktické výpočty daní, úroků, předpokládaných zisků z půjček, rozdělování dědictví apod. vyvolávaly potřebu zdokonalovat se v aritmetických dovednostech. V době, kdy ne každý byl zběhlý v počítání, začali se na tuto práci specializovat počtáři, kteří se usazovali zejména v obchodních střediscích.

Počtáři byli někdy zaměstnanci měst, někde vytvářeli vlastní cech jako jiní řemeslníci, zřizovali si také školy, kde vyučovali mládež svým praktikám. Vynález knihtisku podnítil některé počtáře k sepisování příruček — početnice (aritmetik), které patřily mezi prvá matematická pojednání novodobého vývoje psaná v národních jazycích.

Adam Riese (1492—1559) sídlil v krušnohorském Annabergu od r. 1522, už v r. 1518 napsal svou první aritmetiku. Kniha byla pak mnohokrát vydána a stala se vzorem pro další početnice nebo byla přímo překládána do jiných

jazyků. Na obrázku vidíte titulní list knihy s rytinou Adama Riese, která představuje jeho podobiznu v 58 letech věku. Početnice tohoto

Rechenung nach der Lenge/ auff den Linien und Feder.

*Darzu forteil und bequendigkeit durch die Proportio-
nes/ Practica genant/ Mit gründlichem
vnterricht des vnsierens.*

*Durch Adam Riesen.
im 1550. Jar.*



*Cum gratia & priuilegio
Caesareo.*

autora patří mezi nejrozšířenější ve střední Evropě v polovině 16. století.

Předlohy těchto početnic však můžeme nalézt tam, kde se obchod a řemesla rozvíjely nejdříve — v renesanční Itálii. V dalších příspěvcích na tomto místě Rozhledů poznáte nejstarší české početnice z 15. století.

J. Foltá

Nakladatelství Mladá fronta vydává edici

MALE ENCYKLOPEDIE

Z oboru matematických, fyzikálních a technických věd vyšly v této knižnici tyto svazky:

F. Jílek — J. Kuba — J. Jílková: Světové vynálezy v datech

J. Foltá — L. Nový: Dějiny přírodních věd v datech

P. Lála — A. Vítek: Malá encyklopedie kosmonautiky

M. Chvojka — J. Skála: Malý slovník jednotek měření

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kašková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1983.

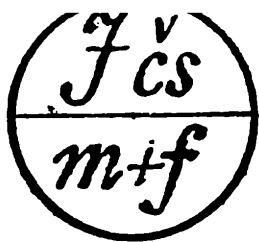
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(2)

**ROČNÍK 62, 1983/84
ŘÍJEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Hejný, ČVUT
Praha doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout
CSc, ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, doc. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Pra-
ha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Ota Šetzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Retigové 4, 116 39 Praha 1 - Nové
Město.

Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

P. Vondruška: O zajímavé aplikaci teori matic	45
V. Mráz: Klempířská úloha	47
E. Calda; Večerníček řeší problém profe- sora Ypsilonu	54
O. Lepil: O atmosféře planet .	57
D. Kunovjánková, V. Macháček; Názorně o zdánlivém pohybu Slunce po obloze	60
J. Mída: O dvou symbolech Univerzity Karlovy	66
J. Hrivňák: Matematik Jurij Vega .	68
J. Pišút, R. Zajac; Prvé fyzikálne predsta- vy o molekulách	69
Přemýšlíme; řešíme .	71
Naše soutěž	73
Výsledky loňské soutěže Rozhledů .	73
Naše soutěž, ročník 1983-84	83
Olympiády a SOČ	85
Z nových knih	88
Pohled do dějin	3. str. obálky
J. Pech; Slovník matematických termínů (29-32)	příloha

0 zajímavé aplikaci teorie matic

PAVEL VONDRUŠKA, ÚH ČSAV Praha

V tomto článku bych chtěl ukázat zajímavou souvislost mezi násobením matic a výpočtem konečného pořadí v šachovém turnaji pomocí *Sonneborn-Bergerova* systému (dále *SB*).

Hlavním ukazatelem pořadí v šachovém turnaji je celkový počet dosažených bodů. V případě, že dva či více hráčů získá stejný počet bodů, umístí se lépe ten, který má více pomocných bodů. Pomocné body se počítají pomocí *SB* systému. Postupuje se takto:

Nechť tedy máme dva či více hráčů, kteří dosáhli stejného počtu bodů. Spočteme pomocné body prvního z těchto hráčů. K základnímu počtu nula se postupně připočítávají dosažené body těch hráčů, které vybraný hráč porazil, dále se připočítává polovina bodů, kterých dosáhli hráči, se kterými remizoval. Potom se stejným způsobem vypočtou pomocné body ostatních hráčů se stejným počtem bodů.

Než tento postup matematicky popíšeme, budeme si muset vybudovat patřičný aparát z teorie matic.

Maticí A typu (m, n) budeme nazývat schéma $m \cdot n$ reálných čísel $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ sestavených v m řádcích a n sloupcích (tato čísla nazveme prvky matice *A*):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Je-li $m = n$, pak *A* se nazývá *čtvercová matice n -tého stupně*. Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ matice *A* tvoří její *hlavní diagonálu*. Součinem *AB* matice *A* typu (m, n) s maticí *B* typu (n, p) nazýváme matici *C* typu (m, p) , pro jejíž prvky c_{ik} platí:

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$k = 1, 2, \dots, p.$$

(Slovy: Prvek v i -tém řádku a k -tém sloupci matice *C* získáme tak, že prvky i -tého řádku matice *A* násobíme pořadě prvky k -tého sloupce

matice **B** a takto získané součiny sečteme.) Je vidět, že součin dvou matic je definován jen v tom případě, když první matice má týž počet sloupců jako druhá matice řádků. Speciálně pro prvky čtvercové matice **D**, která vznikne součinem čtvercové matice **A** n -tého stupně se sebou, platí:

$$d_{ik} = a_{i1} a_{1k} + a_{i2} a_{2k} + \dots + a_{in} a_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Je dobré uvědomit si, že čtvercové matice n -tého stupně ($n > 1$) nejsou vzhledem k takto definovanému násobení komutativní (tj. obecně $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$). Pro pochopení právě probraného kalkulu by bylo vhodné, abyste se pokusili najít nějaké dvě čtvercové matice stupně $n = 2$, jejichž součin není komutativní.

Nyní se vrátíme opět k určení pořadí v šachovém turnaji.

Mějme nyní tabulku šachového turnaje o n hráčích. Na hlavní diagonále ji doplníme nulami a získali jsme tak matici (označíme ji **A**), pro jejíž prvky platí:

$$a_{ik} + a_{ki} = 1 \text{ pokud } k \neq i, a_{ik} = 0 \text{ pro } i = k.$$

Dále vypočteme součin matic **A** . **A**. Výslednou matici označíme **B**. Pro prvky matice **B** platí:

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk}.$$

Pro součet prvků v i -tém řádku matice **B** získáváme vztah:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n b_{ik} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot a_{jk}.$$

Pro touž tabulku vypočteme pomocné body podle *SB* systému. Budeme postupovat podle algoritmu, který je uveden na začátku. Nejprve určíme získané body jednotlivých hráčů. Získané body j -tého hráče jsou:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}$$

Dále stanovíme pomocné body (*PB*) i -tého hráče. Body, které získali jednotliví soupeři tohoto hráče, násobíme 1, 0, 1/2 podle výsledku vzájemného zápasu (vítězství, prohra, remíza) a sečtou se. Uvědomíme-li si, že body jednotlivých soupeřů i -tého hráče vlastně násobíme a_{ij} , dostaneme matematické vyjádření *PB*:

$$PB = \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} \sum_{k=1}^n a_{jk} \right)$$

Jednoduchou úpravou tohoto výrazu získáme vztah (1):

$$PB = \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} \sum_{k=1}^n a_{jk} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} a_{jk} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot a_{jk}.$$

Jelikož i -tý hráč byl libovolný, dokázali jsme toto zajímavé tvrzení:

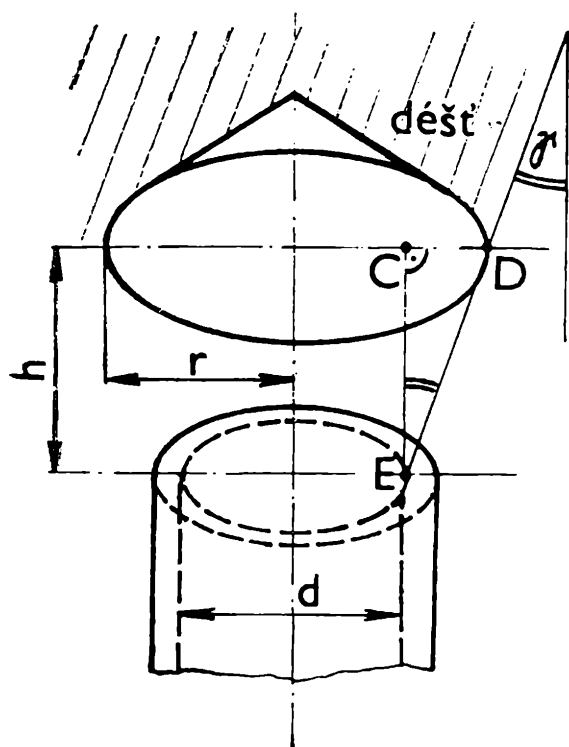
Počet pomocných bodů, které se v šachovém turnaji počítají pomocí *SB* systému, lze získat tím, že z tabulky vzájemných zápasů vytvoříme matici s nulami na hlavní diagonále, tu umocníme a sečteme prvky v jednotlivých řádcích. Získaný součet v i -tém řádku odpovídá počtu pomocných bodů i -tého hráče, vypočteného podle *SB* systému.

Klempířská úloha

Doc. dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc. UK Praha

Řešení i jednoduchých technických úloh mnohdy vede k matematickým úvahám. Také bychom mohli říci, že matematické prostředky podstatně usnadňují a zefektivňují i prosté výrobní postupy, zejména při často opakované práci konstruktéra nebo technika v přípravě výroby. Mnohé z těchto postupů se bez matematiky neobejdou. Ve vyučování, při němž se takové úlohy řeší, mluvíme o matematizaci reálných situací nebo také o mimomatematických aplikacích matematiky. Díky technickým, ekonomickým i jiným aplikacím matematického aparátu je matematice přisuzován velký význam. V tomto článku ukážeme jednoduché technické úlohy, z nichž je užitečnost matematiky zřejmá.

Začneme úlohou, kterou představuje obr. 1, na němž je horní konec komínové trubky o vnitřním průměru d opatřen plechovou stříškou — krytem tvaru rotačního kužele s poloměrem r kruhové podstavy. Vzdálenost h horního okraje trubky a dolního okraje klobouku se volí $h \geq d$. Z funkce ochranného krytu vyplývá, že do komína (do trubky) nesmí pršet ani při značném větru, který odchyluje svislý směr dešťových kapek o úhel γ .



$$|CE| = h$$

$$|CD| = r - \frac{d}{2}$$

$$\sphericalangle CED = \gamma$$

Obr. 1

Této podmínice vyhovuje kryt, který přesahuje vnitřní průměr d komínové trubky na každé straně o vzdálenost CD , závislé nejen na kótě h , ale také na velikosti úhlu γ . Z pravoúhlého trojúhelníku CDE je

$$\frac{r - \frac{d}{2}}{h} = \operatorname{tg} \gamma$$

a odtud pro r platí

$$r = \frac{d}{2} + h \operatorname{tg} \gamma. \quad (1)$$

V případě volby $h = 1,1 d$ má vzorec (1) tvar

$$r = \frac{d}{2} + 1,1 d \operatorname{tg} \gamma,$$

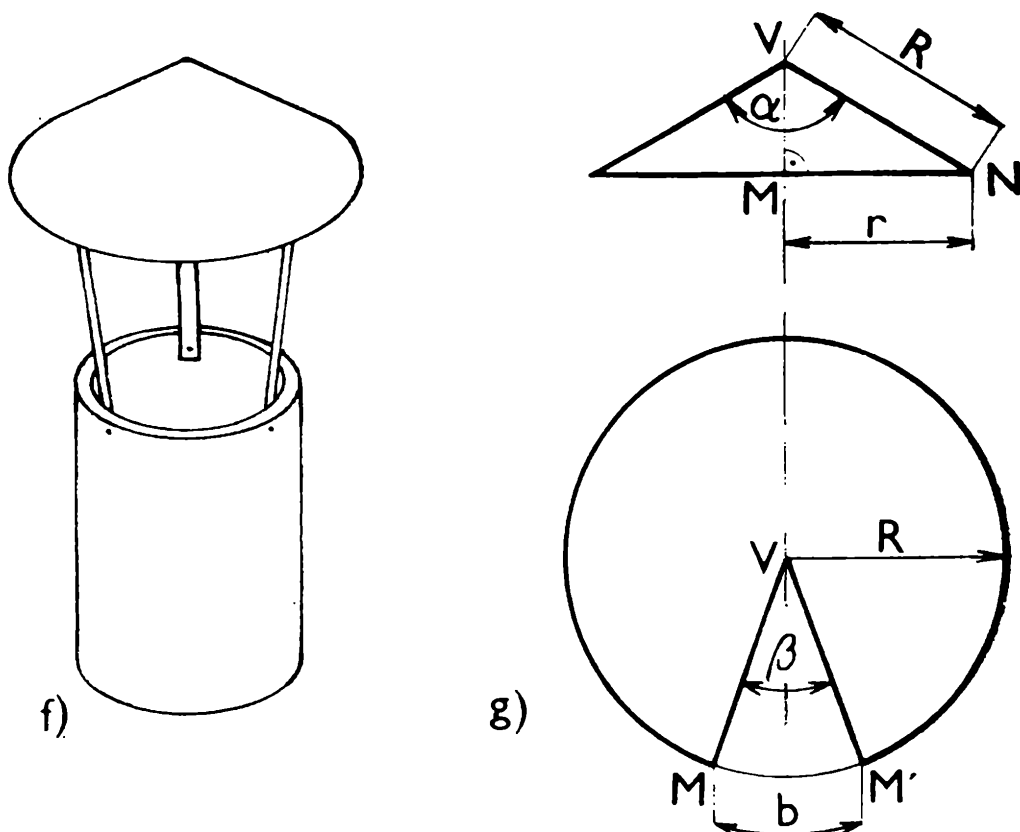
resp.

$$r \geq \frac{d}{2} + 1,1 d \operatorname{tg} \gamma. \quad (1')$$

Při $d = 200$ mm a zjištěném největším úhlu $\gamma = 40^\circ$ je podle vzorce (1')

$$r \geq \frac{200}{2} + 1,1 \cdot 200 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ,$$

$$r \geq 284,6; \text{ zvolíme } \underline{r = 285 \text{ mm.}}$$



Obr. 2

Kryt tvaru pláště rotačního kužele se bude vyrábět z plechu tak, že z plechového kruhu o poloměru R vystříhneme kruhovou výseč o středovém úhlu β , jak ukazuje obr. 2. Spojením (např. svářením) hran VM , VM' vznikne kryt znázorněný na obr. 2f. Na obr. 2g je výchozí tvar krytu okótován. Je zřejmé, že na velikosti středového úhlu β je závislá velikost úhlu α . Věnujme pozornost této závislosti. V pravoúhlém trojúhelníku VMN s pravým úhlem při vrcholu M je součet vnitřních úhlů 180° . Velikost úhlu VNM je tedy $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. V témž trojúhelníku je

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R}$, a tedy poloměr R kruhového plechu určeného k výrobě klobouku je

$$R = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (2)$$

Velikost obvodu kruhové podstavy krytu je $2\pi r$ a je stejná jako délka většího kruhového oblouku MM' , která je $2\pi R - b$, kde b je velikost kratšího oblouku MM' . Platí proto rovnost $2\pi r = 2\pi R - b$, z níž vyjádříme rozměr b :

$$b = 2\pi(R - r). \quad (3)$$

Dále platí $\text{arc } \beta = \frac{b}{R}$ (viz obr. 2), z čehož

$$b = R \cdot \text{arc } \beta. \quad (4)$$

Z rovností (4) a (3) plyne rovnost pravých stran těchto rovnic $R \cdot \text{arc } \beta = 2 \pi(R - r)$; z této rovnice vyjádříme $\text{arc } \beta$:

$$\text{arc } \beta = \frac{2 \pi(R - r)}{R}.$$

Po dosazení za R ze vztahu (2) a po snadné úpravě vychází

$$\text{arc } \beta = 2 \pi \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (5)$$

Např. pro $r = 365$ mm, $\alpha = 130^\circ$ je z (2) $R = \frac{365}{\sin 65^\circ} \doteq 403$ (mm)

Ze vztahu (5) je $\text{arc } \beta \doteq 2 \pi(1 - 0,906)$, $\text{arc } \beta \doteq 0,592$; z tabulek určíme $\beta \doteq 34^\circ 12'$ nebo tuto hodnotu vypočteme jako podíl $\frac{\text{arc } \beta}{\text{arc } 1^\circ}$, tedy $\beta \doteq$

$$\doteq \frac{0,592}{0,01745} \doteq 34^\circ 12'$$

Z (5) lze vyjádřit

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\text{arc } \beta}{2 \pi}. \quad (5')$$

Vystřihneme-li z plechového kruhu výseč se středovým úhlem β , pak úhel α vypočteme ze vztahu (5').

Příklad. Při úhlu $\beta = 100^\circ$ je podle (5') $\sin \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\text{arc } 100^\circ}{2 \pi} \doteq 0,722$,

a tedy $\frac{\alpha}{2} \doteq 46^\circ 15'$ a $\alpha \doteq 92^\circ 30'$

Klempíř, který často vyrábí takové kryty, nebo technik, který výrobu takových krytů nebo podobných součástí připravuje, si může sestavit dvojstupnici, umožňující vztah mezi velikostmi úhlů α , β vyčíslit bez počítání. Z této dvojstupnice vyčte k žádanému úhlu α příslušný úhel β nebo ovšem k zvolenému úhlu β určí příslušný úhel α . Ukážeme, jak se takové dvojstupnice sestavují.

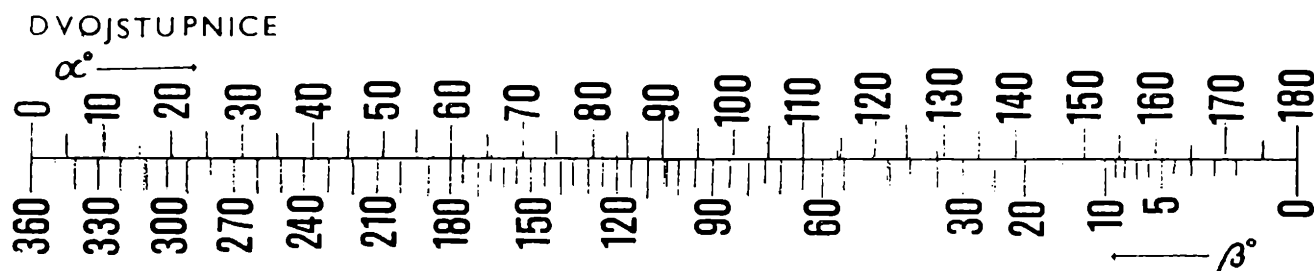
Do rovnice (5') dosazujeme za $\beta = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 350^\circ, 360^\circ$ a k vypočteným hodnotám $\sin \frac{\alpha}{2}$ podle matematických tabulek zjistíme přísluš-

né úhly $\frac{\alpha}{2}$ a vypočteme velikost úhlu α . Postup výpočtu podle rovnice (5') naznačuje část tabulky 1, podle níž sestrojíme dvojstupnici.

Tabulka 1

β	$\text{arc } \beta$	$\frac{\text{arc } \beta}{2\pi}$	$1 - \frac{\text{arc } \beta}{2\pi}$	$\frac{\alpha}{2}$	
0°	0,00000	0,00000	1,00000	90°	180°
1°	0,01745	0,00278	0,99722	85° 44'	171° 24'
2°	0,03491	0,00556	0,99444	83° 44'	167° 54'
350°	6,10865	0,97222	0,02778	1° 35'	3° 10'
360°	6,28318	1,00000	0,00000	0°	0°

Po jedné straně úsečky narýsujeme rovnoměrnou stupnici pro velikost úhlu α třeba tak, že intervalu 0°, 10° odpovídá úsečka délky 10 mm. Na druhé straně téže úsečky k jednotlivým dílkům stupnice α narýsujeme příslušné dílky stupnice β , jak je uvedeno na obr. 3.



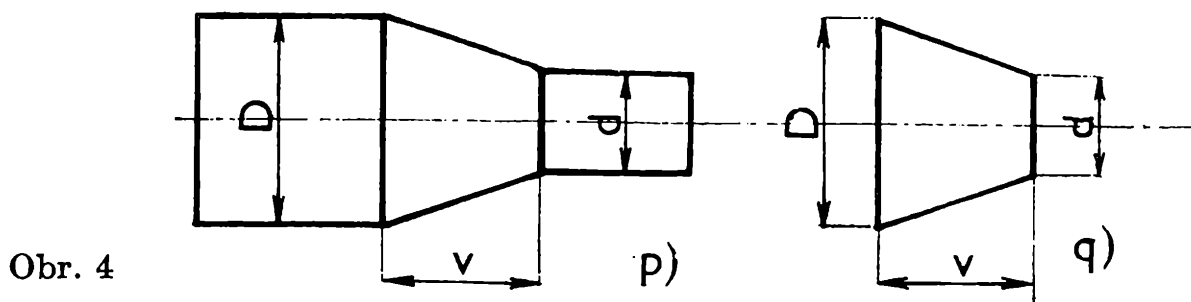
Obr. 3

Jistě není třeba připomínat, že k docílení přesnějšího čtení hodnot α a β je možno zvolit nositelku dvojstupnice (úsečku) delší a dělení stupnice pak může být jemnější.

Příklad. a) Při výrobě plechového krytu s úhlem $\alpha = 60^\circ, 75^\circ, 125^\circ$ určíme na dvojstupnici (obr. 3) k těmto úhlům α pořadě hodnoty $\beta \doteq 180^\circ, 141^\circ, 41^\circ$; přesnější výpočty nebo přesnější dvojstupnice dává hodnoty $\beta \doteq 180^\circ, 140^\circ 51', 40^\circ 40'$

b) Při volbě úhlu $\beta = 10^\circ, 40^\circ, 200^\circ$ vychází po řadě úhly $\alpha \doteq 153^\circ, 126^\circ, 52^\circ 30'$; přesnější výpočty nebo přesnější dvojstupnice dávají hodnoty úhlu $\alpha \doteq 153^\circ 10', 125^\circ 28', 52^\circ 46'$. Další úloha je opět z klempířské praxe.

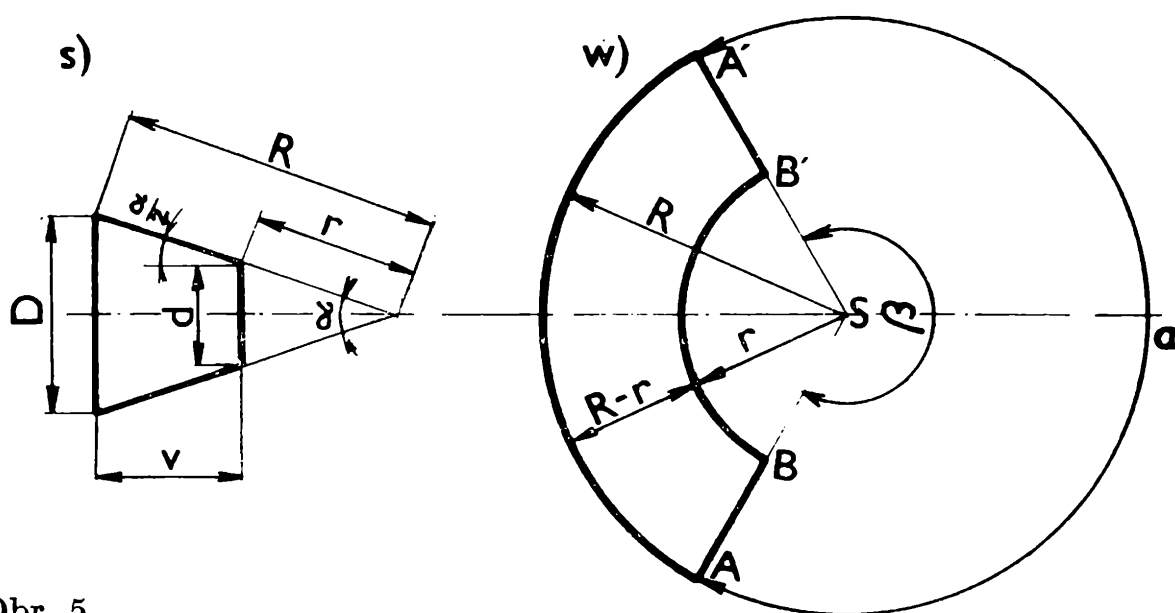
Úloha. Ke dvěma sousým plechovým trubkám o průměrech D, d , jejichž konce jsou od sebe vzdáleny o míru v (viz obr. 4p), má být zhotoven redukční přechod tvaru pláště komolého kužele (stručně redukce),



jehož podstatnou část ukazují obr. 4q. Redukci získáme svinutím plechového mezikruží (obr. 5w) tak, že úsečky AB , $A'B'$ splynou. Z daných rozměrů D , d , v plechové redukce máme vypočítat velikost úhlu α , poloměry r , R a velikost úhlu β .

Velikost úhlu α vypočteme podle obr. 5 takto:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{D}{2} - \frac{d}{2}}{v} ; \text{ po úpravě je } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{D - d}{2v} \quad (6)$$



Obr. 5

Z tabulek zjistíme úhel $\frac{\alpha}{2}$, jehož dvojnásobek je úhel α . Poloměr R vy-

počteme z rovnice $\frac{\frac{D}{2}}{R} = \sin \frac{\alpha}{2}$ (viz obr. 5s). Po úpravě této rovnice je

$$R = \frac{D}{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (7)$$

Pro výpočet poloměru r ovšem platí obdobný vzorec

$$r = \frac{d}{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (8)$$

Velikost úhlu β stanovíme na základě obr. 5. Nejdříve vypočteme délku oblouku $AA' = a$. Obvod plechové redukce πD je roven obvodu mezikruží zmenšenému o délku oblouku $AA' = a$. Zápis rovnicí je $\pi D = 2 \pi R - a$, z čehož pro délku oblouku a platí:

$$a = \pi (2R - D). \quad (9)$$

Protože $\frac{a}{R} = \text{arc } \beta$, platí

$$a = R \text{ arc } \beta. \quad (10)$$

Z pravých stran (9) a (10) plyne rovnice $\pi(2R - D) = R \text{ arc } \beta$, z níž je

$$\text{arc } \beta = \frac{\pi(2R - D)}{R}. \quad (11)$$

Po vyčíslení pravé strany rovnice (11) určíme z matematických tabulek velikost úhlu β .

Technická úloha. Je dáno $D = 280 \text{ mm}$, $d = 90 \text{ mm}$, $v = 300 \text{ mm}$ a má být vyrobena plechová redukce podle obr. 5.

Řešení: Podle (6) je $\frac{280 - 90}{2 \cdot 300} \doteq 0,316 \doteq \text{tg } \frac{\alpha}{2}$,

$$\frac{\alpha}{2} \doteq 17^\circ 34', \text{ a tedy úhel } \underline{\alpha \doteq 35^\circ 8'}$$

Podle (7), (8) a (11) po řadě vypočteme poloměry R , r a úhel β .

$$R \doteq \frac{280}{2 \cdot 0,30181}, \quad R \doteq 464 \text{ mm},$$

$$r \doteq \frac{90}{2 \cdot 0,30181}, \quad r \doteq 149 \text{ mm},$$

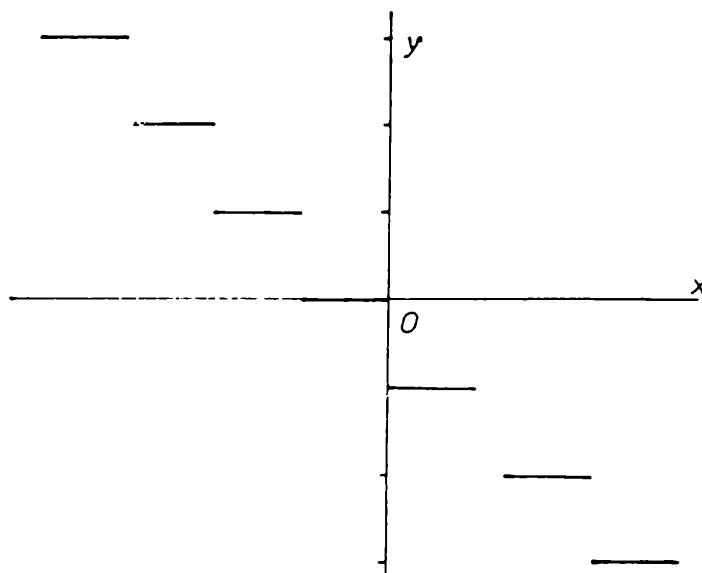
$$\text{arc } \beta \doteq \frac{\pi(2 \cdot 464 - 280)}{464} \doteq 4,307; \quad \underline{\beta \doteq 251^\circ 7'}$$

K vypočtené velikosti úhlu $\alpha \doteq 35^\circ 8'$ můžeme bez výpočtu stanovit velikost úhlu $\beta \doteq 251^\circ$ přímo na dvojstupnici z obr. 3.

Večerníček řeší problém profesora Ypsilon

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

„A nyní již u obrazovky vítám vás, milé děti!“, usmála se hlava telky a profesor Ypsilon zvedl oči od svých poznámek, v nichž se pokouší najít rovnici, jež pro každé dané celé kladné číslo n má v množině všech reálných čísel právě n kořenů. Zamyšleně začíná sledovat, jak z vesmírných dálav přilétá Večerníček, uklání se a začíná vystupovat po improvizovaném schodišti (znázorněném a doplněném o souřadnicovou soustavu na obr. 1), když tu se profesorova tvář rozjasňuje, a brzy i volání „Heuréka!“ se nese jeho pracovnou. Našel snad profesor Ypsilon řešení svého problému na Večerníčkových schodech?



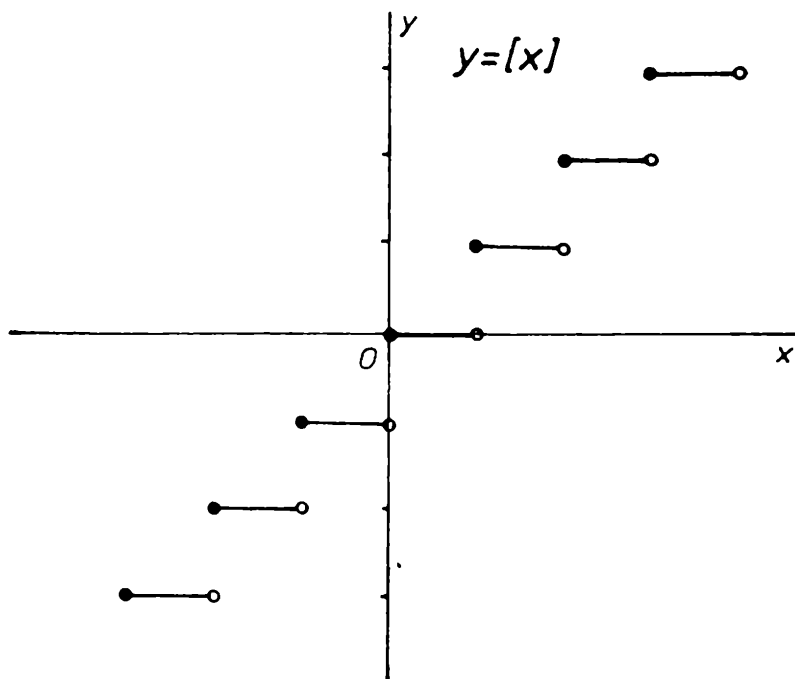
Obr. 1

Připomeňme si nejprve, že celou částí reálného čísla x — značíme ji $[x]$ — rozumíme to celé číslo, které je ze všech celých čísel, nejvýše rovných číslu x , největší. Je tedy např.:

$$[\sqrt{2}] = 1, [3] = 3, [0,5] = 0, [-\pi] = -4, \left[-\frac{1}{2}\right] = -1.$$

Sestrojme na základě této definice graf funkce $y = [x]$; jejím definičním oborem je množina všech reálných čísel, oborem funkčních hodnot množina všech čísel celých. Funkční hodnoty pro všechna x ze zvolených intervalů jsou uvedeny v následující tabulce:

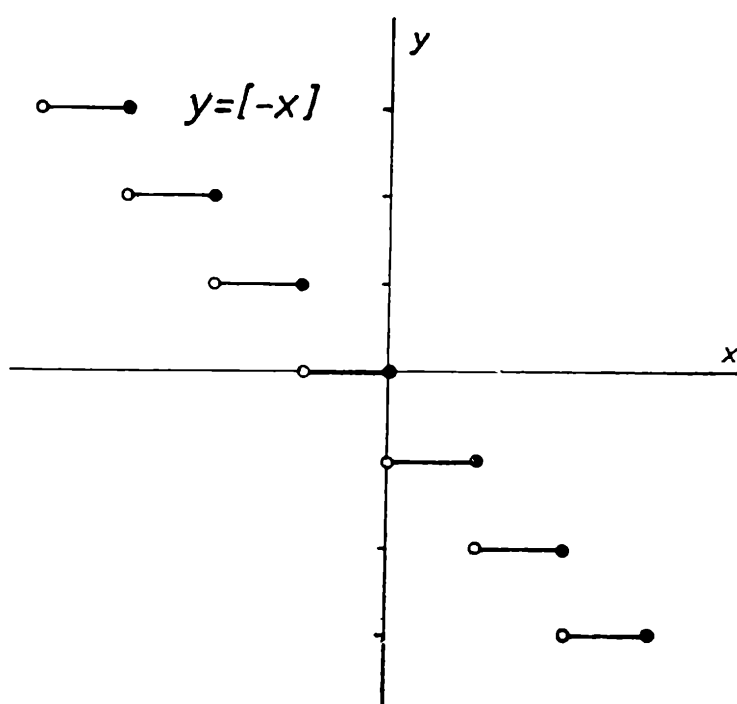
x	$< 0, 1)$	$< 1, 2)$	$< -1, 0)$	$< 2, 3)$	$< -2, -1)$	$< 3, 4)$	$< -3, -2)$	$\dots$
$[x]$	0	1	-1	2	-2	3	-3	.



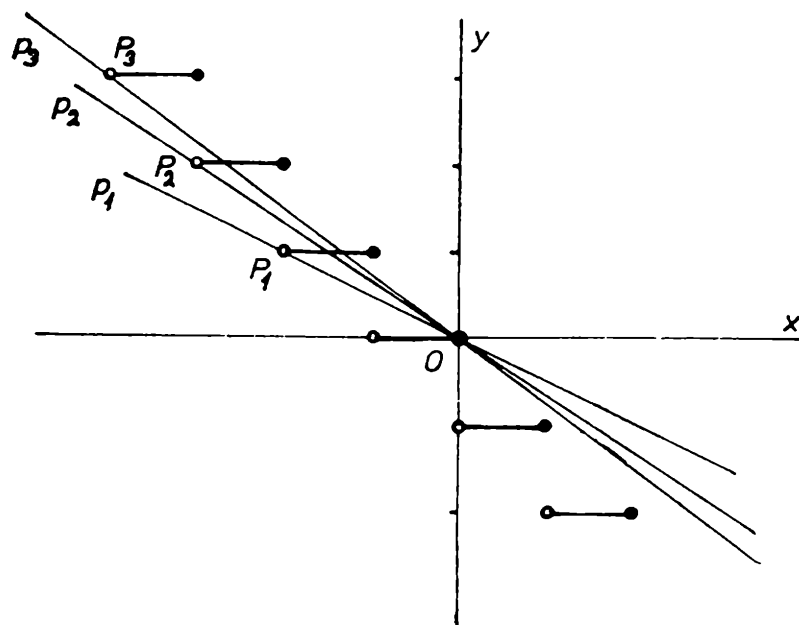
Obr. 2

Graf funkce $y = [x]$ se tedy skládá z úseček, které připomínají stupně schodiště (viz obr. 2); přitom levý koncový bod každé úsečky je bodem grafu dané funkce (znázorněno plným kolečkem), zatímco pravý koncový bod každé úsečky ke grafu této funkce nepatří (znázorněno prázdným kroužkem).

Podobným způsobem lze sestavit rovněž graf funkce $y = [-x]$; k jeho konstrukci však můžeme využít i toho, že grafy funkcí $y = [x]$ a $y = [-x]$ jsou souměrné podle osy y . Z obr. 3, na němž je graf funkce $y = [-x]$ znázorněn, je zřejmé, že jde opět o Večerníčkovovo schodiště, „vylepšené“ pouze určením příslušnosti koncových bodů jednotlivých stupňů k tomuto schodišti.



Obr. 3



Obr. 4

Ptáte se, jak to vše souvisí s problémem profesora Ypsilon? Všimněte si, kolik společných bodů s grafem funkce $y = [-x]$ mají přímky p_1 , p_2 a p_3 procházející počátkem O a pořadě body $P_1 = [-2, 1]$, $P_2 = [-3, 2]$ a $P_3 = [-4, 3]$. Z obr. 4 je vidět, že pro přímku p_1 je to právě jeden bod (počátek O), pro přímku p_2 právě dva body a pro přímku p_3 právě tři body. Jistě si umíte zdůvodnit, že pro každý bod $P_n = [-n-1, n]$, kde n je libovolné celé kladné číslo, platí, že přímka OP_n má s grafem funkce $y = [-x]$ právě n společných bodů. Vyjádříme-li ještě přímku OP_n rovnicí

$$y = -\frac{n}{n+1}x,$$

dostáváme následující větu:

Pro každé celé kladné číslo n má rovnice

$$-\frac{n}{n+1}x = [-x]$$

právě n kořenů v množině všech reálných čísel.

Je rovněž patrné, že z těchto n kořenů je právě jeden roven nule a že zbývající kořeny mají tu vlastnost, že v každém z intervalů $(-2, -1)$, $(-3, -2)$, $(-4, -3)$, ..., $(-n, -n+1)$ leží právě jeden.

A nebyl by to ani profesor Ypsilon, kdyby neudal též způsob praktického využití svého objevu. Spočívá v tom, že si nemusíte zatěžovat paměť letopočty různých historických událostí, neboť si je můžete pomoci příslušné rovnice vypočítat. Chcete vědět, ve kterém roce n . l. čínský hvězdář *Jang Wei-t* zaznamenal výbuch supernovy, jež dala vznik Krab

mlhovině? Nemusíte hledat ani v paměti, ani v encyklopedických slovnících; stačí určit počet kořenů rovnice

$$- \frac{1054}{1055} x = [-x].$$

A protože víme, že tato rovnice má právě 1054 reálných kořenů, došlo k uvedené události v roce 1054 n. l.

FYZIKA

0 atmosféře planet

RNDr. OLDŘICH LEPIL, CSc. přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

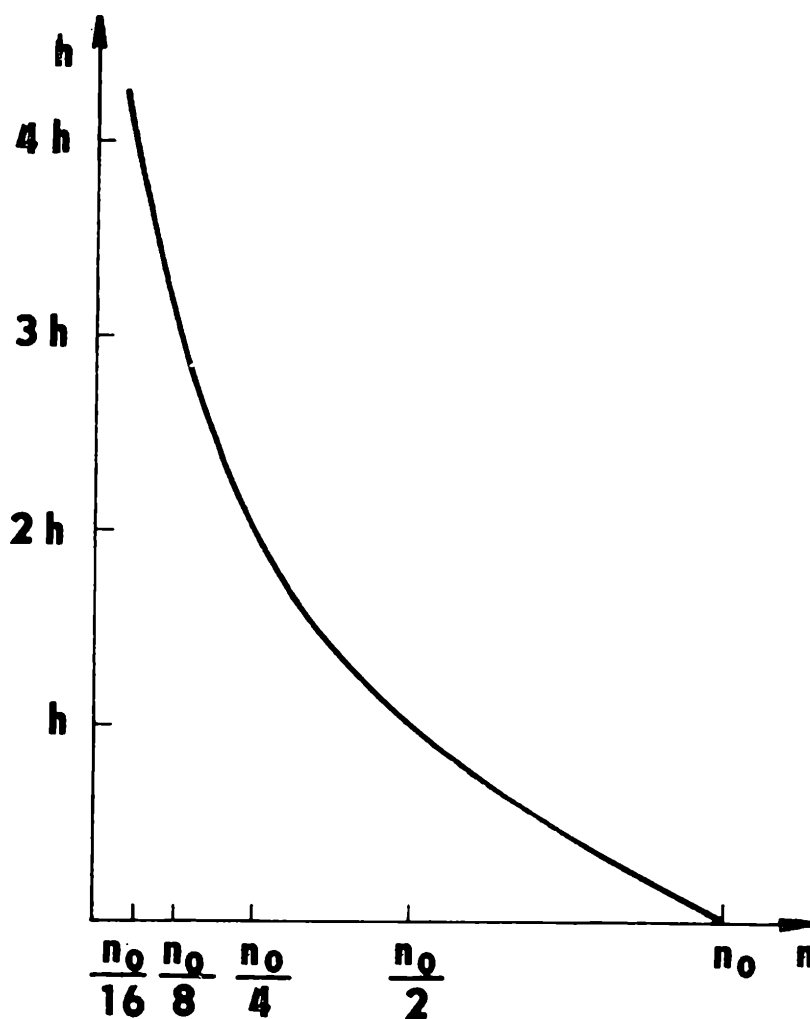
Vzdušný obal není výsadou naší Země. Hustou atmosféru mají i další velké planety naší sluneční soustavy — Venuše, Jupiter, Saturn. Je zde tedy zřejmá souvislost s hmotností planety. Čím větší je hmotnost planety, tím hustější má atmosféru. Mohli bychom se však zeptat, proč tomu tak je. Vždyť na molekuly plynu zde působí značná gravitační síla, která je přitahuje k povrchu planety. Proč tedy molekuly na povrch planety nedopadnou a atmosféra nezanikne.

Abychom našli odpověď na tuto zdánlivě paradoxní otázku, vrátíme se k závěru článku „Na dně vzdušného oceánu“ v minulém čísle Rozhledů. Zde jsme odvodili barometrickou rovnici, která umožňuje vypočítat tlak p vzduchu ve výšce h nad povrchem Země

$$p = p_0 e^{-\frac{M_m g h}{RT}}$$

(p_0 — tlak na povrchu Země, M_m — molární hmotnost, g — tíhové zrychlení, R — molární plynová konstanta, T — termodynamická teplota).

Barometrickou rovnici jsme odvodili za předpokladu, že vzduch je stlačitelný. Tuto vlastnost vzduchu vysvětlujeme představou o molekulární struktuře plynu. Plyn je tvořen molekulami, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou značné, takže molekuly na sebe působí jen v okamžiku, kdy se srazí. Přitom se mění směr a velikost rychlosti molekul. Při stlačování se zvětšuje počet molekul v objemové jednotce plynu a tomu od-



Obr. 1

povídá větší tlak plynu. Proto je mezi počtem n molekul v objemové jednotce plynu a tlakem plynu přímá úměrnost vyjádřená vztahem

$$p = n k T.$$

Konstanta $k = \frac{R}{N_A}$ je *Boltzmannova konstanta* a patří k nejdůležitějším konstantám molekulové fyziky ($k \doteq 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$). N_A je *Avogadrova konstanta*, která udává počet molekul v 1 molu libovolné chemicky stejnorodé látky ($N_A \doteq 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$).

Na základě těchto poznatků upravíme barometrickou rovnici dosazením $p = n k T$ a $p_0 = n_0 k T$, takže dostaneme

$$n = n_0 e^{-\frac{M_m g h}{RT}}$$

Zavedeme-li hmotnost jedné molekuly $m = \frac{M_m}{N_A}$, platí

$$n = n_0 e^{-\frac{m g h}{k T}} \quad (1)$$

Tím jsme dospěli ke vztahu, pomocí něhož můžeme určit počet molekul v objemové jednotce ve výšce h , známe-li počet molekul n_0 u povrchu Země ($h = 0$). Částic ubývá s rostoucí výškou exponenciálně (obr. 1). Jestliže v určité výšce h je počet částic poloviční, pak ve výšce $2h$ klesne počet částic na čtvrtinu, ve výšce $3h$ na osminu atd. Jestliže tedy roste výška aritmetickou řadou, pak částic ubývá řadou geometricou.

Ze vztahu (1) také vyplývá, že počet částic v objemové jednotce závisí na jejich hmotnosti. Čím větší bude hmotnost částic, tím rychleji se bude s výškou zmenšovat jejich počet. Proto se s výškou do jisté míry mění i složení atmosféry a ve velkých výškách se zvyšuje koncentrace lehkých prvků, např. vodíku.

Kdyby se atmosféra skládala jen z kyslíku, klesl by počet částic v objemové jednotce na polovinu ve výšce 5 km. Poněvadž převažující složkou ovzduší je lehčí dusík, poklesne počet částic na polovinu v poněkud větší výšce asi 5,5 km.

Počet částic v objemové jednotce atmosféry značně ovlivňuje termodynamická teplota ovzduší. Náznorný obraz si o tom uděláme, jestliže budeme uvažovat dva mezní případy, kdy $T \rightarrow 0$ nebo naopak $T \rightarrow \infty$. Pro tuto úvahu upravíme rovnici (1) do tvaru

$$n = \frac{n_0}{e^{\frac{m g h}{k T}}}.$$

Při nízkých teplotách, kdy $T \rightarrow 0$, se hodnota výrazu $e^{\frac{m g h}{k T}} \rightarrow \infty$ a hodnota $n \rightarrow 0$. To znamená, že při snižování teploty se počet částic v objemové jednotce plynu bude zmenšovat a při $T = 0$ K by atmosféra zanikla.

Naopak při $T \rightarrow \infty$ bude $e^{\frac{m g h}{k T}} \rightarrow 1$ a $n \rightarrow n_0$. Zjišťujeme, že při velmi vysokých teplotách by plyn rovnoměrně vyplnil celý prostor, takže počet částic v objemové jednotce na povrchu Země i v libovolné výšce by byl stejný. Ke stejnému výsledku bychom však dospěli také za předpokladu, že neexistuje gravitační pole, tzn. když $g = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. I v tomto případě by se částice rovnoměrně rozptýlily v prostoru.

Oba poznatky snadno vysvětlíme z představy molekulové fyziky, podle níž se molekuly plynu nepřetržitě pohybují tepelným pohybem, jehož energie je úměrná termodynamické teplotě plynu. Čím vyšší je teplota plynu, tím větší je jeho vnitřní energie. Při vzájemných srážkách si molekuly předávají energii a tím se udržuje jejich pohyb, který brání tomu, aby gravitačním působením dopadly na povrch Země. Jestliže je teplota plynu, a tedy jeho vnitřní energie tak velká, že podíl potenciální energie molekul ($m g h$) je zanedbatelný, vyplní molekuly prostor rovnoměrně.

Naopak při nízkých teplotách se tepelný pohyb molekul zpomaluje, vnitřní energie plynu se zmenšuje. Převažuje gravitační působení, tepelný pohyb a vzájemné srážky nemohou zabránit pohybu molekul k povrchu Země. V krajním případě, kdy $T = 0$ K, by tepelný pohyb ustal, molekuly by volným pádem dopadly na povrch Země a atmosféra by zanikla.

Daný stav atmosféry Země nebo i jiné planety je výsledkem dvou protikladných tendencí: tepelného pohybu, který směřuje k rovnoměrnému rozdělení molekul v prostoru, a gravitačního působení, které molekuly přitahuje k povrchu Země.

Pro fyziku je charakteristické, že každá zákonitost musí být experimentálně potvrzena. Dalším rysem fyziky je také snaha o zobecnění získaného poznatku, o jeho začlenění do širších souvislostí obecné fyzikální teorie. Jinak tomu není ani v případě rovnice (1), jejíž platnost byla potvrzena zajímavým pozorováním francouzského fyzika *Jeana Perrina*, který za výsledky svých pokusů obdržel Nobelovu cenu. Tento fyzik ovšem nesledoval částice ovzduší, které jsou pro přímé pozorování nedostupné. Vybral si částičky pryskyřice, jejíž molekuly jsou 10^8 krát větší než molekuly plynu a lze je pozorovat mikroskopem. Je pochopitelné, že velká hmotnost částic ovlivnila průběh závislosti (1) a částic s výškou ubývalo velmi rychle.

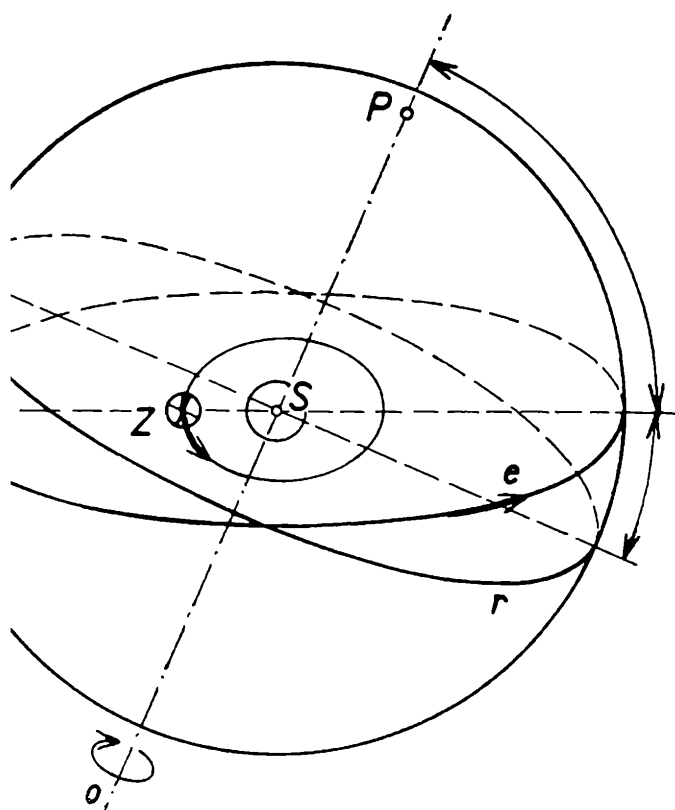
Tím byla nejen potvrzena platnost vztahu (1), ale byla prokázána jeho obecná platnost jako jednoho ze základních vztahů molekulové fyziky, který určuje rozložení částic v gravitačním poli. Podrobně si o tom povíme v článku „Pravděpodobná jistota“ v příštím čísle Rozhledů.

Názorně o zdánlivém pohybu Slunce po obloze

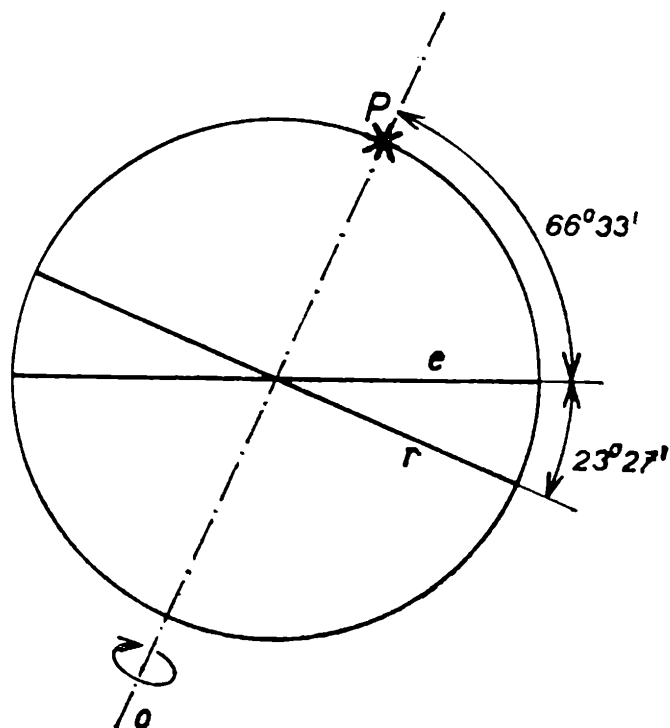
RNDr. DANUŠE KUNOVJÁNKOVÁ, PhDr. VLASTIMIL MACHÁČEK,
UK Praha

Při astronomickém pozorování promítáme Slunce a další vesmírná tělesa na tzv. *nebeskou sféru*, jejíž střed je v oku pozorovatele; lze si v něm představit i celou zeměkouli, protože má vzhledem ke sféře zanedbatelný poloměr, a dokonce celou oběžnou dráhu Země kolem Slunce, neboť i vzdálenost Země-Slunce je vzhledem k poloměru sféry zanedbatelně malá.

Na obr. 1a jsou Země, její oběžná dráha kolem Slunce a sféra znázorněny v takové velikosti, aby bylo vidět, že rovina zemského rovníku výtíná na sféře kružnici, zvanou *světový rovník* (r), a rovina oběžné dráhy



Obr. 1a



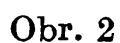
Obr. 1b

S: Slunce
 Z: Země s vyznačenou osou otáčení
 a rovníkem (v poloze „léto na se-
 verní polokouli“)
 s: nebeská sféra
 o: světová osa
 r: světový rovník
 e: ekliptika
 P: Polárka

Znázornění situace z obr. 1a v řezu

Země kolem Slunce protíná sféru v kružnici, zvané *ekliptika* (*e*). Pozorovatel tedy vidí v důsledku oběhu Země kolem Slunce roční zdánlivý pohyb Slunce po ekliptice. Ten je orientován proti pohybu hodinových ručiček. Rotace Země kolem vlastní osy způsobí denní zdánlivý pohyb Slunce a jiných hvězd po kružnicích v rovinách kolmých ke světové ose (*o*); její směr je dán směrem zemské osy, v němž leží Polárka (*P*). Protože zemská osa svírá s rovinou zemské dráhy úhel $66^{\circ} 33'$, je stejný úhel i mezi světovou osou a ekliptikou. Mezi rovinami ekliptiky a světového rovníku je pak úhel $23^{\circ} 27'$ (viz obr. 1a, 1b).

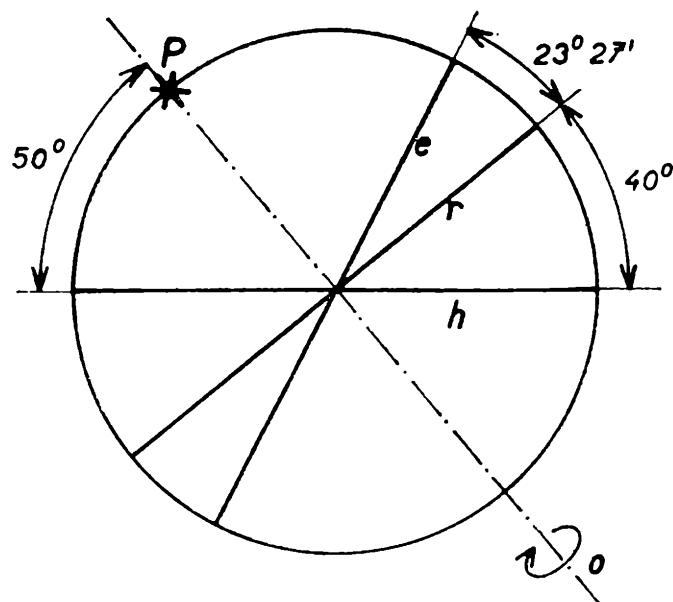
Z obr. 2 je zřejmé, že pozorovatel vidí Polárku nad obzorem ve výši, která odpovídá severní zeměpisné šířce pozorovatele. Na poloze pozorovatele na Zemi závisí i zdánlivé pohyby hvězd po obloze. Víme např., že v Československu (zeměpisná šířka přibližně 50°) Slunce v poledne



A diagram of a sphere with various geometric elements and labels. The sphere is shown with a horizontal equator and a vertical axis. A dashed line represents the axis of rotation, with a curved arrow indicating rotation around it. The axis is labeled with φ at the top and ψ at the bottom. The equator is labeled with S on the left and J on the right. A point Z is marked on the equator. A point V is marked on the axis. A point P is marked on the sphere's surface. A point 1 is marked on the equator. A point 0 is marked on the axis. A point o is marked on the axis. A point h is marked on the equator. A point e is marked on the sphere's surface. A point r is marked on the sphere's surface. A point h_1 is marked on the sphere's surface. A point h_2 is marked on the sphere's surface. A point IV is marked on the sphere's surface. A point III is marked on the sphere's surface. A point II is marked on the sphere's surface. A point I is marked on the sphere's surface. A point 0 is marked on the axis. A point 1 is marked on the equator. A point h is marked on the equator. A point e is marked on the sphere's surface. A point r is marked on the sphere's surface. A point h_1 is marked on the sphere's surface. A point h_2 is marked on the sphere's surface. A point IV is marked on the sphere's surface. A point III is marked on the sphere's surface. A point II is marked on the sphere's surface. A point I is marked on the sphere's surface.

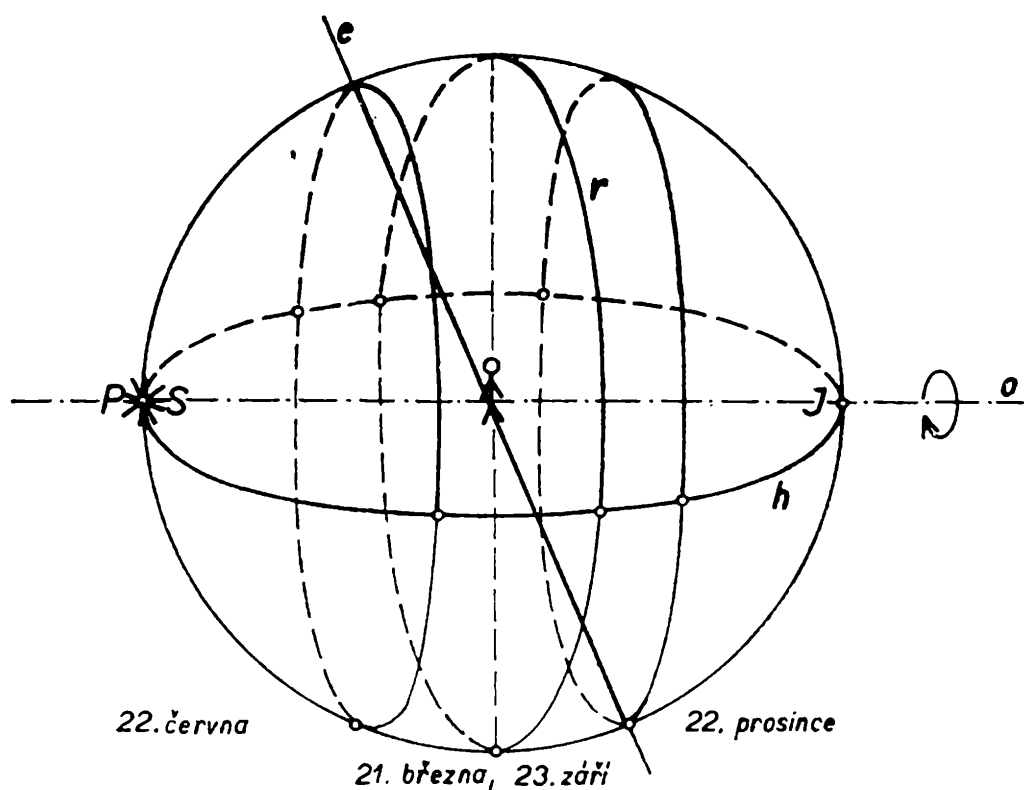
Obr. 3a

62



Obr. 3b

znázornění situace z obr. 3a v řezu

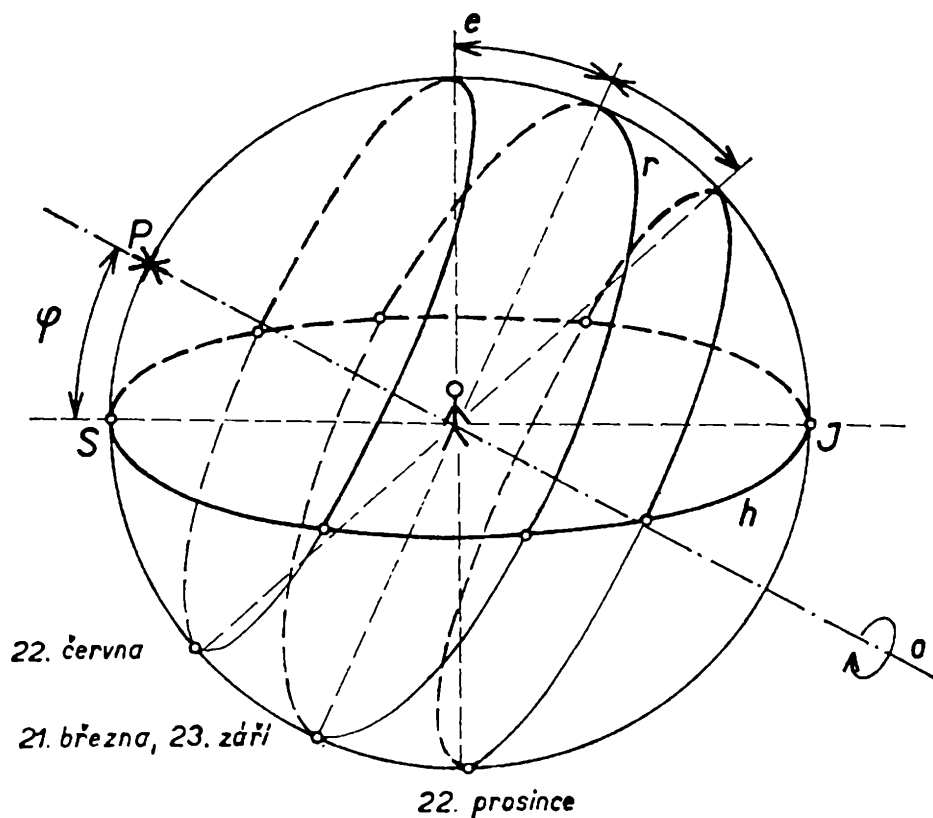


Obr. 4

$\varphi = 0^\circ$ (rovník)

Vidíme, že polední Slunce je přímo nad hlavou ve dvou dnech roku (21. března a 23. září). Slunce vychází a zapadá vždy kolmo k obzoru, proto na rovníku trvá svítání a soumrak krátce. Slunce je každý den 12 hodin nad obzorem a 12 hodin pod obzorem.

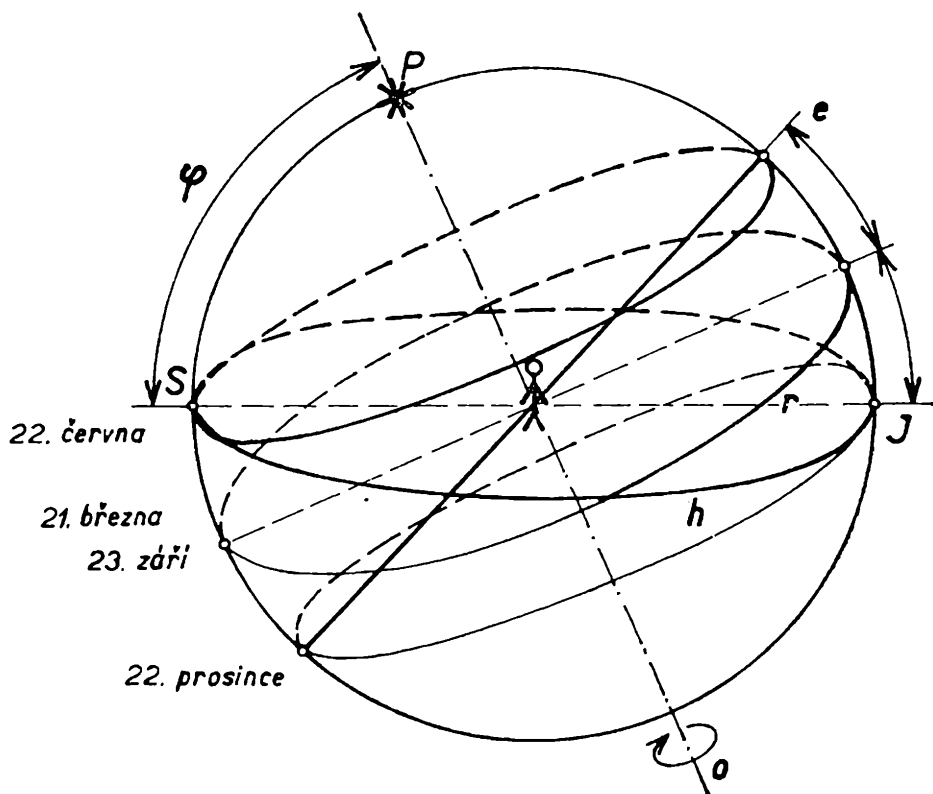
nikdy neprochází přímo nad hlavou pozorovatele, zatímco na rovníku dvakrát v roce a na obratnících jednou v roce. Tyto a další zajímavé jevy jsou podrobně popsány v učebnici fyziky pro 1. roč. střední všeobecně vzdělávací školy (gymnázia). Jejich vysvětlení provedeme nyní názorně pomocí obrázků 3, 4, 5, 6, 7, na nichž je znázorněna sféra pro různé zeměpisné šířky.



Obr. 5

$\varphi = + 23^{\circ} 27'$ (obratník Raka)

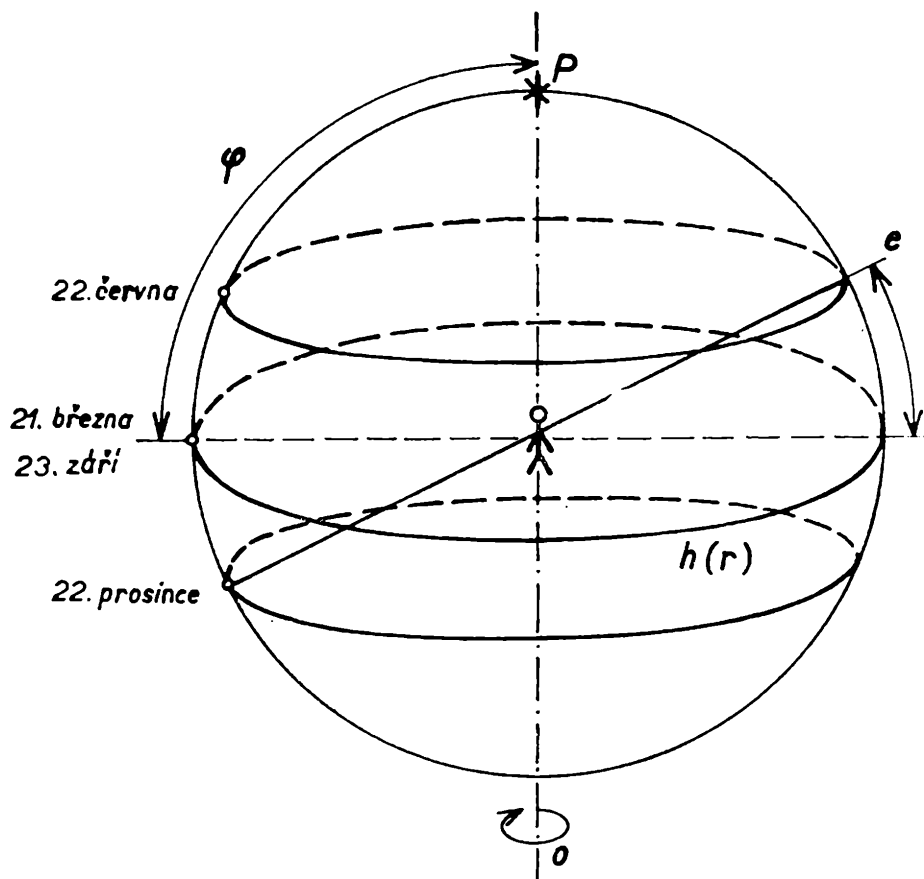
Polední Slunce je přímo nad hlavou (v zenitu) pouze 22. června. 22. prosince je půlnocní Slunce přesně v tzv. nadiru (podnožníku). Na obratníku Kozoroha je to naopak.



Obr. 6

$\varphi = + 66^{\circ} 33'$ (severní polární kruh)

V den letního slunovratu Slunce vůbec nezapadne a v den zimního slunovratu vůbec nevyjde. Na jižním polárním kruhu je to naopak.



Obr. 7

$\varphi = + 90^\circ$ (severní pól)

Denní pohyb Slunce se děje po kružnicích, jejichž roviny jsou téměř rovnoběžné s obzorem. V době od 21. března do 22. června Slunce stoupá po šroubovici stále výš nad obzor, od 22. června do 23. září klesá opět po šroubovici k obzoru. Je tedy půl roku nad obzorem a dalšího půl roku pod obzorem. Na jižním pólu je to naopak.

Na obr. 3a máme sféru, jak se jeví pozorovateli v severní zeměpisné šířce 50° . Rovina, v níž pozorovatel stojí, protíná sféru ve vodorovné kružnici (h), zvané *obzor* nebo *horizont*. V této rovině lze pomocí Polárky určit sever (S) a pak další světové strany (J , V , Z). Polárka (P), kterou pozorovatel vidí ve výšce 50° nad obzorem, určuje směr světové osy (o); k ní je kolmý světový rovník (r). Rovina ekliptiky (e) svírá s rovinou rovníku úhel $23^\circ 27'$ a je to roční zdánlivá dráha Slunce po obloze (obr. 3b). Na ekliptice jsme vyznačili čtyři důležité body — I, II, III, IV, v nichž se Slunce nachází ve dnech 21. března, 22. června, 23. září, 22. prosince, a zakreslili jeho zdánlivý pohyb v těchto dnech po drahách rovnoběžných s rovníkem; je zřejmé, že 21. března a 23. září se pohybuje po světovém rovníku. V těchto dvou dnech vychází přesně na východě (V) a zapadá přesně na západě (Z) a je právě 12 hodin nad obzorem a 12 hodin pod obzorem (*jarní a podzimní rovnodennost*). 22. červen je dnem letního slunovratu; v obr. 3a je zakreslena denní dráha Slunce pro tento den a je vidět, že Slunce je větší část dne nad obzorem (dlouhé dny a krátké noci) a jeho polední výška nad obzorem je největší, jaké může během

roku dosáhnout. Od toho dne se polední výška nad obzorem zmenšuje (letní slunovrat). Slunce vychází přibližně na severovýchodě a zapadá přibližně na severozápadě. 22. prosince je Slunce menší část dne nad obzorem (krátké dny a dlouhé noci) a jeho polední výška nad obzorem je nejmenší v roce. Od toho dne se zvětšuje (zimní slunovrat). Slunce vychází přibližně na jihovýchodě a zapadá přibližně na jihozápadě. V obr. 3a vidíme, že v zeměpisné šířce 50° (např. ČSSR) nemá pozorovatel polední Slunce nad hlavou v žádném dni v roce. Na obr. 3a jsou dále znázorněny denní zdánlivé dráhy hvězd H_1 , H_2 , které jsou zajímavé tím, že hvězda H_1 je po celých 24 hodin nad obzorem a hvězda H_2 je po celých 24 hodin pod obzorem. Obr. 3b znázorňuje obr. 3a v řezu.

Na obrázcích 4, 5, 6, 7 máme sféru, jak se jeví pozorovatelům v zeměpisných šířkách 0° (rovník), $+23^\circ 27'$ (obratník Raka), $+66^\circ 33'$ (severní polární kruh) a $+90^\circ$ (severní pól). Ve všech obrázcích vycházíme od vodorovné kružnice h , v níž sféru protíná rovina, na které stojí pozorovatel. Polárka (P) je vždy v takové výšce nad obzorem, která je rovna zeměpisné šířce pozorovatele; určuje směr světové osy (o). K té je kolmý světový rovník (r). Dále stačí znázornit pouze osu ekliptiky, abychom na sféře dostali ty body ekliptiky, v nichž se Slunce nachází 22. června a 22. prosince, a mohli zakreslit jeho denní zdánlivý pohyb v těchto dnech. Ve dnech 21. března a 23. září je denní zdánlivá dráha Slunce po světovém rovníku. Pod obrázky 4, 5, 6, 7 je uvedeno, co z nich lze vyčíst.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

O dvou symbolech Univerzity Karlovy

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

Symbody, o nichž budeme hovořit, jsou velmi rozdílného charakteru. Po staletí však doprovázely univerzitu, prožívaly s ní těžká i radostná léta, jsou dokladem její slavné minulosti a obsahují v sobě i výzvu nikdy nezradit slavné tradice.

Základním symbolem univerzity je její pečeť. Můžete si ji prohlédnout na obrázku. Pochází z roku 1348, v němž univerzita vznikla. Výjev na ní vyjadřuje, že univerzitu založil český král pro český národ. Karel IV. klečí a podává zakládací listinu stojícímu knížeti Václavovi, který byl

ORIENTACE (od lat. *orior*, *-iri* = zdvihat se, vycházet, vznikat) — usměrňování, „hledání, udávání východu“; poloha předmětu vzhledem k světovým stranám; v matematice: „nasměrování“ přímky, vektoru atd.; (kladná, záporná) orientace otáčení — proti směru nebo po směru otáčení hodinových ručiček (dle mezinárodní dohody); **ORIENTO VANÝ** — „ten, komu je udán směr, východ“; usměrněný, směrovaný

ORTO- (z řec. *orthos* = přímý, směrem vpřed nebo vzhůru, pravý, pravdivý) — počáteční část složených slov vyjadřující „přímost, rovnost, správnost, pravost“; v matematice též „něco s pravým úhlem“

ORTOCENTRUM (od řec. *orthos* = pravý + *kentron* = bodec, bodec ve středu kruhu; v. centrum) — průsečík výšek trojúhelníku, které jsou „rameny pravých úhlů“; **ORTOCENTRICKÝ**

ORTOGONÁLNÍ (od řec. *orthos* = pravý + *gónia* = úhel, kout) — pravoúhlý

ORTONORMÁLNÍ soustava (od řec. *orthos* = pravý + lat. *norma* = = zde: pravidlo, předpis; v. norma) — pravoúhlá soustava souřadnic, v níž jsou jednotky na osách stejně vzdáleny od počátku (významu by spíše odpovídal termín „normoortogonální“)

OSKULAČNÍ (od zdobněliny lat. *os*, *oris* = ústa) — „hubičkující, líbající“; oskulační kružnice — ta, která se ze všech možných kružnic „co nejvíce přimyká“ k dané křivce v daném jejím bodě

PANTOGRAF (od řec. *pas*, *pantos* = každý, všechnen + *grafó* = rýpsát) — „vše zapisující přístroj“, „přístroj schopný všechno narýsovat“; přístroj, kterým lze narýsovat zmenšený nebo zvětšený stejno-
lehlý geometrický obrazec ke kterémukoliv danému útvaru (pomocí pohybu ramen v kloubech)

PAR-, **PARA-** (z řec. mnohovýznamové předložky a předpony *para*) — předpona, která ve slovech, jež nejsou specializována, může mít významy: „vedle, nablízku, u, při, spolu, sousedící, na obou stranách, oboustranný, podobný; skrz, roz-; proti, odchýlný, rozdílný; mimo“

PARABOLA (od řec. *para* = vedle + *balló* = házet, vrhat) — „to, co je přehozeno vedle, aby bylo srovnáno“; srovnání, přirovnání; v matematice: kuželosečka, která souřadnicemi $[x, y]$ svých bodů splňuje rovnici $x^2 = py$, v níž se člen py „přirovnává“ x^2 ; naproti tomu hyperbola (řec. *hyper* = nad, přes) je „přirovnání s přebytkem“, vyjádřené

rovnicí $x^2 = py + \frac{p}{d} y^2$, elipsa je pak „přirovnání s nedostatkem, úbytkem“ (řec. *alleipsis* = vynechání, nedostatek), vyjádřené rovnici $x^2 = py - \frac{p}{d} y^2$; **PARABOLOID** (latinizované — *oideus* = podo-

- 30 bající se; v. -oid) — „podobající se parabole, týkající se paraboly“; plocha, jejíž rovinné řezy jsou paraboly
- PARADOX (od řec. *para* = proti, odchýlně + *doxa* = zdání, mínění) — výrok, který je proti našemu mínění, který se vymyká běžné zkušenosti; skutečně nebo zdánlivě protismyslné tvrzení; protismyslnost; zdánlivá nebo skutečná nesmyslnost; PARADOXNÍ
- PARALELA (od řec. *para* = vedle, u, spolu + *allélón* = navzájem, vespolek) — „věci vedle sebe kladené, navzájem přirovnávané“; srovnání, obdoba; v matematice: rovnoběžka se světovým rovníkem; PARALELNÍ — rovnoběžný, souběžný, současně probíhající; v matematice; paralelní (rovnoběžné) promítání; paralelní perspektiva — zobrazování, při kterém se zachovává rovnoběžnost přímek
- PARAMETR (od řec. *para* = vedle, u, spolu + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — proměnná, které je použito „vedle jiných, spolu s jinými proměnnými“, za něž se už dosazují konstanty; v geometrii: vzdálenost ohniska paraboly od její řídící přímky
- PARCIÁLNÍ (od lat. *pars*, *partis* = díl, část, strana) — dílčí, částečný
- PARITA (od lat. *par*, *paris* = stejný kvalitou, rovný kvalitou) — rovnost, stejný počet; čísla stejné parity — dávají stejný zbytek při dělení dvěma
- PARTIKULÁRNÍ (od zdrobněliny lat. *pars*, *partis* = díl, část, strana) — dílčí, částečný
- PENTAEDR (od řec. *pente* = pět + *hedra* = vše, na čem se dá sedět, odpočívat) — pětistěn; těleso s pěti stěnami („na nichž může spočívat“)
- PENTAGONAL (od řec. *pente* = pět + *gónia* = úhel, kout) — pětiúhelník; PENTAGONÁLNÍ — pětiúhelníkový, pětiúhelný
- PER- (z lat. předložk *per* = skrz, přes, po nebo z lat. příslovce *per* = = veskrze, úplně) — předpona s třemi skupinami významů: 1) „skrz, přes, po“ (o místě, času, prostřednictví); 2) „úplně, zcela, dokončení, dokonalé provedení“; 3) „nadměrnost, nad pravidelnou míru, přebytečný“
- PERI- (z řec. *peri* = okolo, vůkol, ob, o) — předpona s významem „kolem, okolo, se všech stran, ob-“
- PERICYKLOIDA (od řec. *peri* = okolo + *kyklos* = kolo, kruh + + latinizované -oideus = podobající se; v. cykloida) — křivka vytvořená bodem pevně spjatým s kružnicí kotálející se po vnější straně pevné kružnice, ale dotýkající se jí svou vnitřní stranou („objímá ji“)
- PERIMETR (od řec. *peri* = okolo + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — „míra kolem dokola“, obvod útvaru
- PERIODA (od řec. *peri* = okolo + *hodos* = chod, chůze, cesta) — jevy, které „chodí kolem v uzavřeném kruhu“, „koloběh“; skupina pravidelně se opakujících jevů; úsek, po kterém se nějaký jev opakuje;

- v matematice: pravidelné opakování skupin čísl v desítném zápisu čísla; pravidelné opakování hodnot funkce
- PERMUTACE** (od lat. *per*²) = zcela + *muto*, -are = měnit) — úplná změna, proměna; vzájemná výměna, změna pořadí určitých jevů; v matematice: záměna pořadí prvků v uspořádané skupině, resp. sama uspořádaná skupina, teč prosté zobrazení v množině
- PERSPEKTIVA** (od lat. *per* = skrz + *specie*, -ere = hledět, dívat se, pozorovat; *perspicere* = jasně, dobře vidět) — výhled do dálky; program se vzdálenými cíli; v malířství: způsob zobrazení prostoru vypracovaný v 15. a 16. století; v matematice: jedna ze zobrazovacích metod prostoru do roviny nebo na jinou plochu, která respektuje principy středového promítání
- PLANIMETRIE** (od lat. *planus* = rovný, plochý + řec. *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — „měření v rovině“; geometrie roviny, rovinová geometrie
- PLUS** (z lat. *plus* = více) — termín, který naznačuje, že nějakou veličinu máme zvětšit, tj. že půjde o sčítání (opak: *minus*)
- POLY-** (z řec. *polys* = mnohý, četný) — počáteční část složených slov mající význam „mnohost, četnost, přemíra“, **POLYEDR** (z řec. *hedra* = vše, na čem se dá sedět, odpočívat) — mnohostěn; těleso s mnoha stěnami („na nichž může spočinout“), **POLYGON** (řec. *gónia* = = úhel, kout) — mnohoúhelník, **POLYNOM** (řec. *nomos* = zvláštnost, způsob, řád) — mnohočlen
- POSTULÁT** (od lat. *postulo*, -are = důrazně žádat; po-, vy-, dožadovat; vymáhat) — „důrazně vyžádané“; požadavek; předpoklad přijímaný bez důkazu
- POTENCE** (od lat. *possum* = moci, být s to) — schopnost, výkonnost, účinnost; v matematice: mocnina; potenční množina = množina všech podmnožin dané množiny, **POTENCIÁL** — schopnost výkonu, výkonnost; **POTENCIÁLNÍ** — 1) možný, uskutečnitelný, jsoucí s to; 2) mající nějaký vztah k potenciálu
- POZICE** (od lat. *pono*, -ere = klást, pokládat) — „položení“; poloha, místo, postavení; **POZITIV** — „klad“; **POZITIVNÍ** — kladný
- PREDIKÁT** (od lat. *prae* = před, vpředu, dopředu; před, napřed, dříve; velmi, pře- + *dico*, -are = hlásat) — „veřejně vyhlášené, rozhlášené“; posudek; titul, přídomek; znak (slovo, skupina slov) označující nějaký základní vztah mezi objekty; v logice: výroková forma; **PREDIKÁTOVÝ** — týkající se výrokových forem
- PRIMITIVNÍ** (z lat. *primitivus* = první, prvotní; *k primus* = první) — prvotní; stojící na prvním, tj. nejnižším stupni společenskokulturního vývoje; velmi prostý, jednoduchý, nesložitý; primitivní funkce — „prvotní“ funkce ve vztahu k derivování, tj. funkce, jejíž derivaci známe
- PRINCIP** (z lat. *principium* = začátek, základ; slož. z *primus* = první +

+ *capio*, -*ere* = brát, chytat, „vzetí začátku“) — základní myšlenka, zásada; základní obecný zákon vědního oboru

PRO¹) (z řec. nebo lat. *pro* = před) — předpona mající význam „před, vpředu, napřed, dopředu; před, dříve; první stupeň vývoje, předcházející ve vývoji, před-“

PRO²) (z lat. *pro* = pro, za, jako, dle) — předpona mající význam „k ochraně, ve prospěch; zastupování; náhrada, odplata; ve shodě s něčím, na základě něčeho“

PROBLÉM (od řec. *pro*¹) = před + *balló* = házet, vrhat) — co je „předhozeno“ k řešení jako sporná otázka

PROCEDURA (od lat. *pro*¹) = před + *cedo*, -*ere* = kráčet) — postup

PROCENTO (od lat. *pro*²) = dle + *centum* = sto) — stý díl, setina; množství připadající na stý díl celku

PROFIL (od lat. *pro*²) = jako + *filum* = nit, vlákno, struna) — předmět naznačený „jako nití po okraji obrys; v matematice: obrys příčného průřezu; kolmý průřez

PROGRAM (od řec. *pro*¹) = před + *grafó* = rýt, psát; v. — *gram*¹) — „co je napsáno předem; předem stanovený pořad; PROGRAMÁTOR — sestavovatel programů

PROJEKCE (od lat. *pro*¹) = před + *iacio*, -*ere* = házet, vrhat) — „vrhání (metání) dopředu“ světelných paprsků, myšlenek apod.; promítání; PROJEKTIVNÍ geometrie — zabývá se těmi vlastnostmi geometrických útvarů, které se středovým promítáním nemění

PROMILE (od lat. *pro*²) = dle + *mille* = tisíc) — tisící díl, tisícina; množství připadající na tisící díl celku

PROPORCE (od lat. *pro*²) = dle + *portio* = díl, podíl, část) — „podle podílu“, „poměr“; rozměry dané vzájemným poměrem jednotlivých složek

RACIONÁLNÍ (od lat. mnohovýznamového *ratio*, -*onis*, jehož nejčastější významy jsou „rozum, poměr, číslo“) — racionální postup — postup rozumový, rozumný; racionální číslo — číslo „poměrové“ (vyjadřuje se zlomkem, podílem celých čísel); v. iracionální

RADIUS (od lat. *radius* = loukoť kola, paprsek) — slovo *radius* = „loukoť“ pro podobnost s narýsovanou kružnicí a jejími poloměry nabylo už v klasické latině matematického významu „poloměr“. Význam „paprsek“ pak ovlivnil další významový vývoj. RADIÁLNÍ — jdoucí ve směru poloměru, tj. od středu; týkající se poloměru: paprskovitý; RADIÁN — rovinný úhel sevřený dvěma poloměry, které vytínají na kružnici oblouk stejně dlouhý jako poloměr

RADIKÁL (od lat. *radex*, -*icis* = kořen) — člověk jdoucí do důsledků, „na kořen věci“; v matematice: kořen binomické rovnice; RADIKÁLNÍ — od základů („od kořene“), do důsledků provádějící, prováděný

považován za ochránce a patrona země české. Pečeť byla vždy v hluboké úctě mistrů i žáků. Po bělohorské tragédii však jezuité touto staroslavnou pečetí pohrdli a začali užívat upravenou, která zdůrazňovala, že univerzita se stala katolickou a že působí v rakouské říši. Avšak po úpravě statutu univerzity v roce 1654 se opět užívá původní starobylá pečeť. Od té doby již nebyla nikdy nahrazena jinou.

Všem našim čtenářům, kteří se připravují studovat na Univerzitě Karlově nebo na ní studují, přejeme, aby jednoho dne obdrželi diplom o úspěšném ukončení studia, na němž bude vytištěna pečeť Univerzity Karlovy, která každého absolventa zavazuje, aby ve svém dalším životě zůstal věrný tradicím univerzity.

Diplom o úspěšném ukončení studia na Univerzitě Karlově se předává při promoci ve velké aule Karolina, jež stojí na rohu Železné ulice a Ovocného trhu. Právě Karolinum představuje další univerzitní symbol.



Když král Václav IV. daroval univerzitě před šesti sty lety dne 28. srpna 1383 pro její Karlovu kolej palác bývalého královského mincmistra *Jana Rotleva*, netušil, že tato budova — nynější Karolinum — získá během času charakter symbolu univerzity a že se také stane kolébkou české vědy. Původní Karlova kolej byla na Starém Městě na nároží dnešních ulic Maiselovy a Jáchymovy.

Václav IV. původní Rotlevův dům pro potřeby univerzity přestavěl. Dodnes se však můžeme setkat v Karolinu se dvěma rotlevovskými znaky, na nichž je krácející lev po stupních. Jeden z těchto znaků je na arkýři, jenž vystupuje z Karolina směrem k Tylovu divadlu, a druhý je uvnitř budovy v 1. patře poblíž vchodu do malé auly.

Před šedesáti pěti lety v době vzniku Československé republiky bylo Karolinum nejen v téměř havarijním stavu, ale dokonce byl v jeho přízemí lahůdkářský obchod a vinárna. Ve třicátých letech vzniklo hnutí za jeho záchranu a obnovu pod heslem „Karolinum je statek národní“. V roce 1945 byl obnovou karolinského areálu pověřen *prof. arch. Jaroslav Fragner*. Podařilo se mu sloučit starobylé prostory se

současnými potřebami univerzity. Obnova byla dokončena před patnácti lety v roce 1968, což bylo rok po smrti národního umělce arch. Jaroslava Fragnera. Karolinum se opět stalo důstojným centrem univerzity.

Karolinum bylo i střediskem vědeckého života. V jeho prostorách se scházela Učená společnost, která vznikla kolem roku 1770 a jež později přijala název *Královská česká společnost nauk* a byla jednou z předchůdkyň Československé akademie věd. Při úpravě Karolina se na vědeckou společnost nezapomnělo. Jedna z upravených síní se nazývá sálem Královské české společnosti nauk.

Procházíme-li Karolinem, krása obnovených historických prostor nás vede k tomu, abychom vzpomněli těch, kteří zde působili. Připomeňme aspoň některé z nejstaršího období: *Jana Husa, Jeronýma Pražského, Jakoubka ze Stříbra, Tadeáše Hájka z Hájku a Jana Jesenia.*

Literatura :

- [1] K. Domin, V. Vojtíšek, J. Hutter: Karolinum statek národní, 2. vydání, Praha 1935
- [2] A. Kubíček, A. Petráňová, J. Petráň: Karolinum a historické koleje Univerzity Karlovy v Praze, Státní nakladatelství krásné literatury a umění, Praha 1961

Matematik Jurij Vega

JIRÍ HRIVŇÁK, Libčice n. Vlt.

Vloni uplynulo 180 let od úmrtí největšího slovinského matematika Jiřího Vegy. Narodil se 23. března 1754 v Zagorici nedaleko Krajiny ve Slovinsku v rodině sedláka Vehy (příjmení na Vagu si změnil až později). Středoškolská studia ukončil v Lublinu, kde byl jeho učitelem matematiky pozdější probošt ve Staré Boleslavi Josef Maffi.

Po ukončení lycea nastoupil k námořnictvu jako navigační inženýr, avšak později přestoupil k dělostřelectvu v hodnosti podporučíka; mohl tam více uplatňovat svoje znalosti z matematiky, která ho zajímala již od dětství. V roce 1782 vydal knihu „*Vorlesungen über die Mathematik*“; tím si vysloužil hodnost poručíka a zároveň byl jmenován učitelem matematiky ve škole pro dělostřelce. Roku 1790 byl povýšen na setníka a jmenován profesorem matematiky na téže škole. Když v roce 1790 hrozila válka s Turky, tábořil se školou v Lipníku na Moravě, kde také napsal předmluvu ke třetímu svazku svého výše uvedeného díla.

V devadesátých letech 18. století bojoval proti Francouzům; za úspěchy

v těchto bojích byl jmenován podplukovníkem a povýšen do baronského stavu. Získal si značné zásluhy o rakouskou armádu, zejména o zvýšení úrovně odborné přípravy důstojníků. Jeho „Vorlesungen über die Mathematik“ vyšly v několika vydáních a osvědčily se pro svůj lehký sloh jako školní učebnice. Největší zásluhy o matematiku si však získal vydáním (r. 1783) tehdy nejpřesnějších dvoudílných logaritmických tabulek, které zpracoval se svými žáky podle publikací vydaných dříve. V dalších letech vyšlo několik jeho jiných děl, která byla napsána německy nebo latinsky.

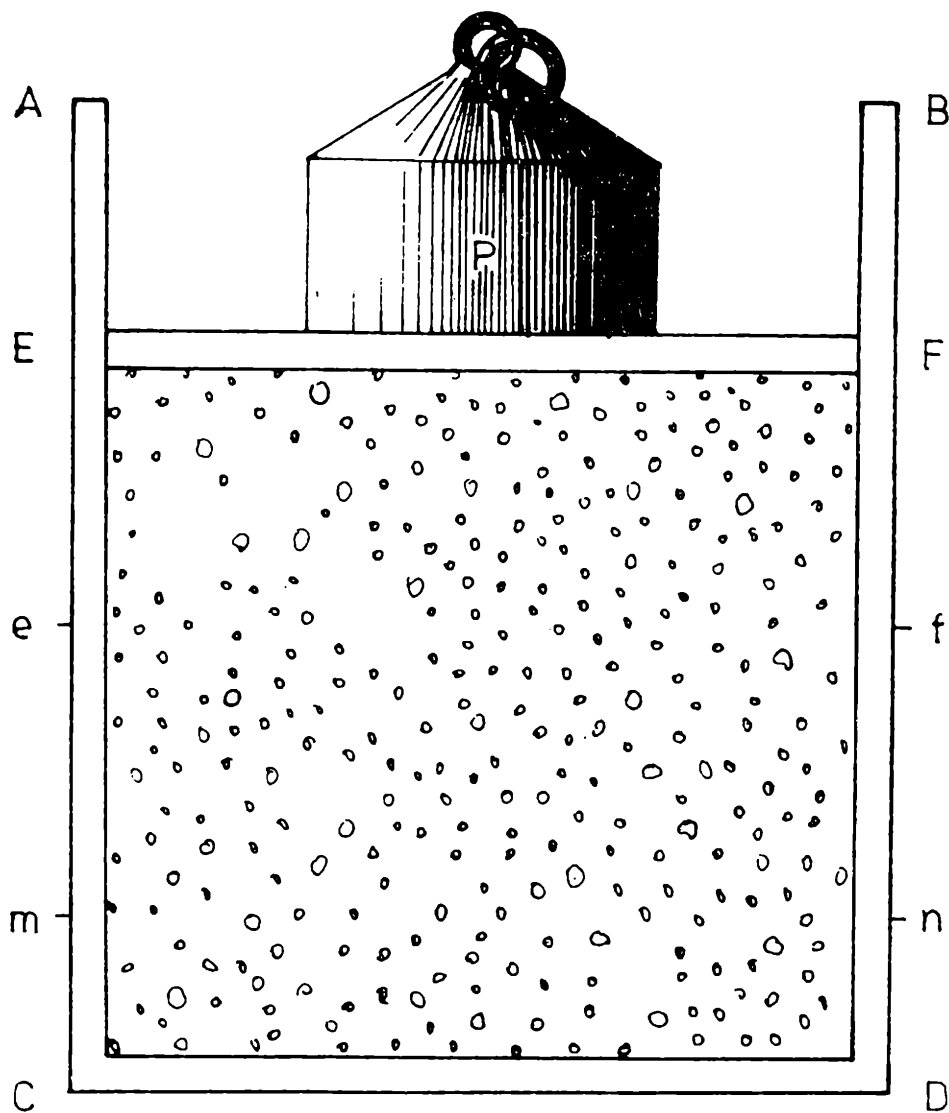
Pro své zásluhy o rozvoj matematiky se stal členem několika evropských vědeckých akademií a vědeckých společností. Ve svém životě byl dítětem štěstěny; skonal však velmi tragicky. Prodal jednomu mlynáři koně a když si ve smluvený den přijel pro peníze, byl lakomým mlynářem zabit a přivázán ke kůlu v řece. Jeho mrtvola byla nalezena až po 30 dnech (26. září 1802) a tragické okolnosti jeho smrti byly objasněny teprve po třiceti letech.

Prvé fyzikálne predstavy o molekulách

Fyzikálny výskum vzduchu a zriedených plynov sa datuje od čias, keď *Evangelista Torricelli* (1608—1647) a *Vincenzo Viviani* (1622—1703) vyhotovili prvý barometer a dokázali, že žijeme na dne vzdušného oceánu, ktorý pôsobí na nás atmosferickým tlakom. Fyzici v zapätí dokázali, že vzduch je stlačiteľný, experimentálne potvrdili hypotézu *Richarda Towneleya* o nepriamej úmernosti tlaku a objemu plynu pri danej teplote (Boylov — Mariottov zákon) a skonštruovali mechanické vývevy (*Otto von Guericke* a *Robert Hooke*). Predstavy o fyzikálnom zložení plynov a o podstate tepelných javov však do konca minulého storočia neprekročili úroveň hypotéz. *Robert Boyle* (1627—1691) si predstavoval čiastočky vzduchu ako malé pružiny, ktoré sa zvyšovaním teploty rozťahujú a spôsobujú tým zvýšenie tlaku na steny nádoby. Vo svojej knihe „Nové fyzikálno-mechanické experimenty, týkajúce sa pružnosti vzduchu a jej efektov“ (Oxford 1660) uviedol ako možnú alternatívu aj Descartovu teóriu vzduchu, pozostávajúceho z častíc rôznej veľkosti, víriacich v éteri.

Prvý fyzik a polyhistor, čo geniálne vytušil súvislosť tepelných javov s neusporiadaným pohybom molekúl, bol *Michail Vasilievič Lomonosov* (1711—1765). Predpokladal však mýlne, že teplota plynu súvisí iba s rotačným pohybom molekúl.

Prvú kinetickú teóriu plynov, podľa ktorej teplota súvisí s energiou postupného pohybu molekúl, vypracoval v roku 1738 *Daniel Bernoulli*.



Narodil sa 29. januára 1700 v Groningene v Holandsku. Pôsobil ako profesor matematiky v Petrohrade, potom ako profesor anatómie, botaniky a fyziky vo Švajčiarsku. Zomrel 17. marca 1782 v Bazileji. Podľa Bernoulliho teplo nie je nič iné ako neusporiadaný pohyb molekúl. Tlak plynu vysvetlil nárazom molekúl na stenu nádoby. Ak sa plyn nachádza v nádobe tvaru valca s pohyblivým piestom, zataženým závažím, nastane rovnováha, keď stredná sila, ktorou pôsobia molekuly, narážajúce na piest, bude vyvážená silou tiaže, pôsobiacej na piest so závažím. (Pozri reprodukciu originálneho obrázku D. Bernoulliho). Bernoulli vypočítal túto strednú silu a ukázal, že pri konštantnej teplote je nepriamo úmerná objemu. S rastom teploty vzrastie aj tlak a druhá mocnina rýchlostí častíc.

Bernoulliho hypotéza zostala vyše sto rokov nepovšimnutá. Až v druhej polovici minulého storočia na jej základoch vybudovali kinetickú teóriu plynov A. K. Krönig, R. Clausius, J. C. Maxwell a L. Boltzmann.

Ján Pišút, Rudolf Zajac

(podľa knihy *Atómy a kvantovanie*, ktorá vyjde v ALFE Bratislava 1983)

Ze starých časopisů

STANISLAV HORÁK, Praha

V jednom starším francouzském časopisu byla čtenářům předložena tato úloha:

Zjistěte, zda je konvergentní posloupnost čísel a_n daných vzorcem

$$a_n = \sin(2 + \sqrt{3})^n \pi, \text{ } n \text{ je číslo přirozené.}$$

V některém z dalších čísel časopisu bylo pak uvedeno řešení, které v poněkud rozvláčnější formě zde uvádím.

Nejprve si všimneme úhlu

$$\alpha_n = (2 + \sqrt{3})^n \pi$$

Jestliže dvojčlen v závorce rozvedeme podle binomické věty, dostaneme

$$\alpha_n = (A + B\sqrt{3}) \pi,$$

kde čísla A, B jsou přirozená čísla. K úhlu α_n připojíme úhel

$$\beta_n = (2 - \sqrt{3})^n \pi = (A - B\sqrt{3}) \pi \quad (1)$$

Potom platí

$$\alpha_n + \beta_n = 2A \pi, \text{ tj. } \alpha_n = 2A \pi - \beta_n$$

a odtud

$$\sin \alpha_n = -\sin \beta_n. \quad (2)$$

Z rovnice (1) vyplývá, že posloupnost čísel β_n je geometrická s kvocien-tem $q = 2 - \sqrt{3}$, o němž platí

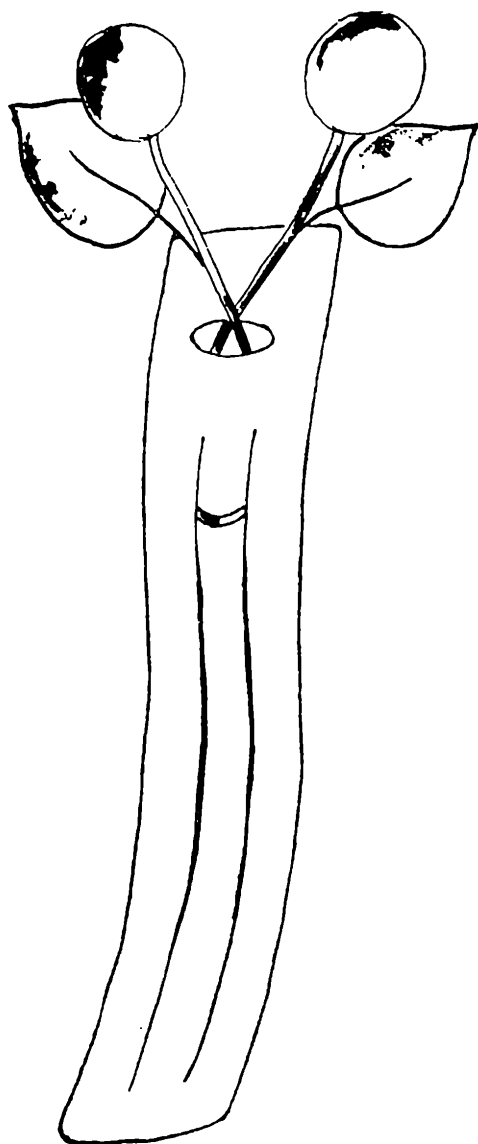
$$|0 < 2 - \sqrt{3} < 1|.$$

Tudíž posloupnost čísel β_n je konvergentní a konverguje k nule. Avšak potom i posloupnost čísel $\sin \beta_n$ konverguje k nule. Důsledek toho je — plyne to z (2) — že i posloupnost čísel $\sin \alpha_n$ je konvergentní a konverguje k nule. Tím je také tato pěkná úloha rozřešena.

Třešně krále Jiřího

Český panovník Jiří z Poděbrad, husitský král, tento „laskavec lidský“ a „mudřec přirozený“, jak jej český lid nazýval, byl nejen statečný a moudrý, ale měl také pochopení — jak tomu u velkých lidí bývá — pro leccaké šprýmy a kratochvíle svého věhlasného šaška „bratra“ Palečka. Jak pověst praví, řešil král Jiří rád nejen složité státnické záležitosti, ale i drobné hádanky a hlavolamy, jež bystří ducha a nedají ani prstům zahálet.

Tento vpravdě slavný panovník dal jméno dalšímu z hlavolamů, s nímž vás chci seznámit — „Třešním krále Jiřího“



K jeho zhotovení tentokrát postačí asi tři centimetry široký proužek kůže, koženky nebo jiné ohebné hmoty dlouhý asi 18 cm a dvě umělé třešně, které zakoupíme v šicích potřebách (mohou je však nahradit kuličky nebo korále).

Jak vám říká nákres, není výroba tohoto zajímavého hlavolamu nikterak náročná. Připravený pruh koženky nařízneme podélně dvěma řezy, které začínají asi 1,5 cm od dolního a končí asi 4 cm od horního okraje pruhu, na tři stejně široké proužky. Nyní jednu stopku umělé třešně (nebo šňůrku, na níž je připevněna kulička nebo korálek) provlékneme z přední strany oválným otvorem a zezadu oběma průřezy, načež ji spojíme se stopkou druhé třešně, kterou jsme rovněž provlékli oválným otvorem (nebo šňůrku s kuličkou jím provlékneme zezadu a připevníme na ni druhou kuličku) a hlavolam je připraven k řešení. Úkolem je vyjmout třešně bez mechanického poškození

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve školním roce 1982/83 se zúčastnilo soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních celkem 89 jednotlivců a 7 kolektivů (dvou a tříčlenných); všech řešitelů bylo 106. Proti loňsku se počet řešitelů opět zvětšil. Úlohy z matematiky řešilo celkem 44 studujících, úlohy fyzikální 72 studentů a úlohy z konstrukční geometrie 5 účastníků soutěže. Z toho 3 řešili úlohy z matematiky, fyziky i z konstrukční geometrie a 9 řešilo úlohy matematické a fyzikální. Nejúspěšnějším řešitelem byl

Jaroslav Smejkal, 4.A gymnázia ve Velkém Meziříčí, který řešil úspěšně všechny úlohy z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Další úspěšné řešitele uvádíme níže.

Matematika :

1. Jaroslav Smejkal, 4. A G ve Velkém Meziříčí;
2. Dalibor Damborský a Pavel Kráčmar, 3. C G M. Koperníka v Bílovci;
3. Ignác Tereščák, 3. B G v Michalovicích.

Fyzika :

1. Petr Surý, 3. A G v Ostravě;
2. Jaroslav Smejkal, 4. A G ve Velkém Meziříčí.

Konstrukční geometrie :

1. Jaroslav Smejkal, 4. A G ve Velkém Meziříčí;
2. Jiří Erhart, 4. C G M. Koperníka v Bílovci.

Nakonec připojujeme abecední seznamy všech řešitelů, nejprve úloh z matematiky, potom úloh fyzikálních a na závěr úloh z konstrukční geometrie. Za jménem každého řešitele uvádíme školu, na níž studoval; v seznamu řešitelů úloh z matematiky otiskujeme nejprve jednotlivce a potom řešitelské kolektivy.

Řešitelé úloh z matematiky :

I. Aubrecht, G Praha 8 — Kobylisy, C. Bende, G maď. Galanta, J. Dudáš, G Zlaté Moravce, M. Ďurenková, SPŠ Komárno, A. Edes, G maď. Komárno, J. Erhart, G Bílovec, I. Hofmannová, G Žďár nad Sáz., L. Honsú, G maď. Komárno, R. Jursa, G Topolčany, M. Koczka-ová, G maď. Komárno, J. Lihotský, G Opava, T. Lovász, G maď. Komárno, L. Lukálová, G maď. Komárno, G. Majorová, G maď. Komárno, E. Nagyová, G maď. Komárno, P. Németh, SPTŠ Piešťany, V. Olláry, G maď. Komárno, Z. Pálffy, G maď. Komárno, J. Ranošová, G Bílovec,

P. Raška, SOU SONP Poldi Kladno, J. Smejkal, G Velké Meziříčí.
I. Tamás, G maď. Komárno, I. Tereščák, G Bílovec, A. Tücsök, G maď.
Komárno, E. Ujjová, G maď. Komárno, S. Varga, G Topolčany, S.
Vinczeová, G maď. Komárno.

T. Bakos, F. Gascal, J. Czímer, SPŠS maď. Komárno, D. Damborský,
P. Kráčmar, G Bílovec, Z. Fekete, M. Dornay, SPŠS maď. Komárno,
M. Grajcar, A. Vargas, G Bílovec, R. Holop, G. Orbán, SPŠS maď.
Komárno, P. Olláry, S. Nagy, J. Hevô, SPŠS maď. Komárno, J. Varga,
C. Vörös, A. Melcsök, SPŠS maď. Komárno.

Řešitelé úloh z fyziky :

J. Aubrecht, G Praha 8 — Kobylisy, A. Bakosová, G maď. Komárno,
A. Balogh, G maď. Komárno, J. Bárányová, G maď. Komárno, E.
Bereczková, G maď. Komárno, M. Bökrosová, G Dunajská Bratislava,
B. Bóna, G maď. Komárno, R. Bútor, G Levice, L. Cséplö, G maď.
Komárno, J. Csintolan, G maď. Komárno, P. Czibor, G maď. Komárno,
M. Cziborová, G maď. Komárno, M. Dolejší, G Jihlava, J. Dudáš, G
Zlaté Moravce, A. Edes, G maď. Komárno, J. Erhart, G Bílovec, M.
Farkasová, G maď. Komárno, J. Féherváryová, G maď. Komárno,
E. Feketeová, G maď. Komárno, J. Fulajtár, G Dunajská Bratislava,
P. Gaálová, G maď. Komárno, M. Géza, G maď. Komárno, T. Gyarmati,
G maď. Komárno, M. Hlaváč, G Jihlava, E. Horváth, G maď. Komárno,
Z. Horváth, G maď. Dunajská Bratislava, E. Horváthová, G maď.
Košice, E. Józsová, G maď. Komárno, F. Kiss, G maď. Komárno, L.
Kukel, G maď. Komárno, V. Lami, G maď. Komárno, J. Laux, G maď.
Komárno, I. Lehotková, G maď. Komárno, A. Lélyová, G maď. Komárno,
T. Lovász, G maď. Komárno, L. Lukaová, G maď. Komárno, Š. Má-
tyás, G maď. Komárno, J. Mészáros, G maď. Dunajská Bratislava, Z.
Mináros, G maď. Komárno, C. Mészová, G maď. Komárno, J. Molnár,
G maď. Komárno, G. Nágel, G maď. Komárno, A. Nagyová, G maď.
Komárno, P. Németh, SPTŠ Piešťany, K. Némethová, G maď. Komárno,
E. Novotný, G maď. Komárno, V. Olláry, G maď. Komárno, Z. Pálffy,
G maď. Komárno, S. Palusková, G maď. Komárno, T. Papp, G maď.
Komárno, J. Ryška, G Jihlava, A. Sidóová, G maď. Dunajská Bratislava,
K. Simková, G maď. Komárno, J. Smejkal, G Velké Meziříčí, L. Spálav,
G Komárno, E. Stadtkuckeková, G Dunajská Bratislava, P. Surý, G
Ostrava, L. Szábó, G maď. Komárno, P. Szalai, G maď. Komárno, D.
Szege, G maď. Komárno, L. Takács, G maď. Komárno, I. Tamás, G maď.
Komárno, P. Tarics, G maď. Komárno, A. Tóth, G maď. Komárno,
V. Tóthová, G maď. Komárno, J. Trenčík, G maď. Komárno, E. Tücsö-
ková, G maď. Komárno, K. Vargová, G maď. Komárno, S. Vinczeová,
G maď. Komárno, P. Vörös, G maď. Komárno, C. Vörösová, G maď.
Komárno, I. Žuža, G maď. Komárno.

Řešitelé úloh z konstrukční geometrie :

J. Dudáš, G Zlaté Moravce, J. Erhart, G Bílovec, F. Hrabošová, SPŠ Komárno, A. Lakatosová, SPŠ Komárno, J. Smejkal, G Velké Meziříčí.

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních děkuje všem řešitelům za projevený zájem o řešení úloh, vítězům blahopřeje a nejúspěšnějším z nich zašle z prostředků Státního pedagogického nakladatelství věcné výhry

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Pro velikosti a, b, c stran trojúhelníka platí:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 30, \quad (1)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 362, \quad (2)$$

$$a^6 + b^6 + c^6 = 4950 \quad (3)$$

Vypočtete a, b, c a obsah trojúhelníka.

(Došlo 15 řešení)

Jan Fráňa

Řešení Jiřího Erharta, 4 C G. M. Koperníka, Bílovec :

Umocníme (1) na druhou a užijeme (2); tak dostaneme

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 = 900,$$

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 = 269 \quad (4)$$

Z (1) dostaneme

$$a^2 + b^2 = 30 - c^2, a^2 + c^2 = 30 - b^2, b^2 + c^2 = 30 - a^2. \quad (5)$$

Umocníme (1) na třetí a užijeme (2), (3) a (5); tak po úpravě dostaneme

$$a^6 + b^6 + c^6 + 3a^4(b^2 + c^2) + 3b^4(a^2 + c^2) + 3c^4(a^2 + b^2) + 6a^2 b^2 c^2 = 27\,000,$$

$$a^6 + b^6 + c^6 + 90(a^4 + b^4 + c^4) - 3(a^6 + b^6 + c^6) + 6a^2 b^2 c^2 = 27\,000,$$
$$90 \cdot 362 - 2 \cdot 4950 + 6a^2 b^2 c^2 = 27\,000,$$

$$a^2 b^2 c^2 = 720. \quad (6)$$

Rovnice (1), (4) a (6) tvoří novou soustavu rovnic, která určuje koeficienty kubické rovnice

$$x^3 - 30x^2 + 269x - 720 = 0$$

s kořeny a^2, b^2, c^2 ; podle zadání úlohy jsou a, b, c čísla kladná. Zavedením substituce $x = y + 10$ dostaneme redukovanou kubickou rovnici

$$y^3 - 31y - 30 = 0,$$

$$(y^3 + 1) - 31(y + 1) = 0.$$

Z toho plyne, že rovnice má kořeny $y_1 = -1, y_2 = 6, y_3 = -5$. Ze substituční rovnice dostaneme kořeny $x_1 = 9, x_2 = 16, x_3 = 5$. Hledaná soustava má tedy tyto kladné kořeny:

$$a = 3, b = 4, c = \sqrt{5}$$

Strany trojúhelníku mají tedy velikosti 3, 4, $\sqrt{5}$; jeho obsah P vypočteme podle Heronova vzorce. Výsledek je $P = \sqrt{11}$

2. Jisté číslo napsané v desítkové soustavě obsahuje pouze cifry 2 a 5, které se v zápisu čísla pravidelně střídají; číslo začíná číslicí 2. Jde tedy o číslo 252525... Může být takové číslo dělitelné jedenácti? Jestliže taková čísla existují, vyhledejte mezi nimi dvě nejmenší.

Stanislav Horák

(Došlo 17 řešení)

Upravené řešení Jána Dudáše, IV C G J. Krála, Zlaté Moravce :

Je vidět, že si musíme všimnout dvou případů: a) číslo končí cifrou 5, b) číslo končí cifrou 2.

a) Číslo má tvar

$$2525 \dots 25.$$

Počet dvojek je týž jako počet pětiek. Tento počet označme k (k je přirozené číslo). Cifry 5 stojí v čísle na lichých místech, cifry 2 na sudých místech. Hledané číslo musí splňovat kritérium dělitelnosti číslem 11, a proto musí platit

$$5k - 2k = 11t,$$

kde $t \geq 1$ je přirozené číslo. Tato rovnice je splněna pro

$$k = 11\alpha, t = 3\alpha,$$

při čemž $\alpha \geq 1$. Nejmenší dvě čísla požadované vlastnosti jsou pro $\alpha = 1$ a pro $\alpha = 2$. Jsou to čísla

$$\underbrace{2525 \quad 25}_{11 \text{ krát}},$$

$$\underbrace{2525 \quad 25}_{22 \text{ krát}}.$$

b) Číslo má tvar

$$2525 \dots 252.$$

Jestliže v tomto čísle je k počet dvojek, potom počet pětiek je $(k - 1)$.

Dvojky jsou vesměs na lichých místech, pětky na sudých. Aby hledané číslo bylo dělitelné číslem 11, musí platit

$$5(k - 1) - 2k = 11t$$

($t > 0$ je přirozené číslo). Odtud

$$k = 4t + 1 + \frac{2 - t}{3}.$$

Je okamžitě vidět, že

$$t = 2 - 3\alpha, \text{ kde } \alpha \leq 0.$$

Nejmenší dvě čísla, která v tomto případě vyhovují úloze, dostaneme pro $\alpha = 0$ a pro $\alpha = -1$. Jsou to

$$\underbrace{2525 \dots 25}_{8 \text{ krát}} 2, \quad \underbrace{2525}_{19 \text{ krát}} \underbrace{25}_{2} 2.$$

Nejmenší dvě čísla, která vyhovují úloze, jsou

$$\underbrace{2525}_{11 \text{ krát}} \underbrace{25}_{2}, \quad \underbrace{2525}_{8 \text{ krát}} \underbrace{25}_{2} 2.$$

3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Nad jeho stranou AB jako průměrem je v polorovině ABC sestrojena půlkružnice k , která protíná stranu BC v bodu D a stranu AC v bodu E . Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby obsah čtyřúhelníku $ABDE$ byl roven polovině obsahu daného trojúhelníku ABC .

Stanislav Horák

(Došlo 16 řešení)

Řešili Martin Grajcar a Angel Vargaš, III. C G Mikuláše Koperníka v Bílovci:

Pro stručnost označme (obr. 1)

$$|AB| = c, |BC| = a, |CA| = b;$$

$$|\sphericalangle BAE| = \alpha, |\sphericalangle ABD| = \beta, |\sphericalangle BDE| = \delta, |\sphericalangle BCA| = \gamma.$$

Poněvadž čtyřúhelník $ABDE$ je tětíkový, platí

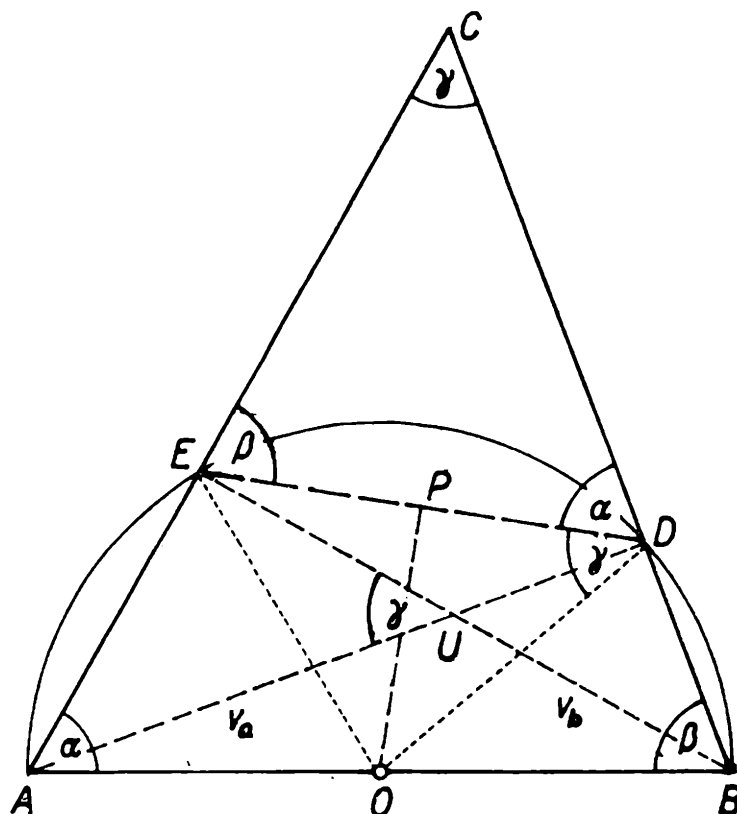
$$\delta = 180^\circ - \alpha$$

a také platí

$$|\sphericalangle EDC| = 180^\circ - \delta = \alpha.$$

Z toho však plyne, že

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC. \tag{1}$$



Obr. 1

Zároveň platí

$$\frac{1}{2} S(ABC) = S(DEC). \quad (2)$$

Ze vztahu (2) vyplývá

$$|AB|^2 |DE|^2 = |BC|^2 |EC|^2 = |CA|^2 |CD|^2 = 2,$$

jinak psáno

$$|AB| |DE| = |BC| |EC| = |CA| |CD| = \sqrt{2} \quad (3)$$

Snadným výpočtem zjistíme, že v rovnoramenném trojúhelníku ODE je

$$|\sphericalangle OED| = |\sphericalangle ODE| = \gamma.$$

Jestliže P je střed strany DE , potom

$$\cos \gamma = \frac{|PD|}{|OD|} = \frac{|PD|}{\frac{1}{2} c} = |DE| : c. \quad (4)$$

Ale ze vztahu (3) máme

$$|DE| = \frac{1}{\sqrt{2}} |AB| = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Dosadíme-li do (4), máme

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{2}} : c = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tomu vyhovuje jedině úhel velikosti 45° .

Nyní dokážeme, že pro úhel γ velikosti 45° je

$$S(ABDE) = \frac{1}{2} S(ABC). \quad (5)$$

Snadným výpočtem zjistíme, že

$$|\sphericalangle AOE| = 180^\circ - 2\alpha, \quad |\sphericalangle EOD| = 180^\circ - 2\gamma = 90^\circ, \quad |\sphericalangle DOB| = 180^\circ - 2\beta.$$

Nás z toho zajímá vztah

$$|\sphericalangle EOD| = 90^\circ$$

Trojúhelník OPE je pravoúhlý a rovnoramenný, a tudíž

$$|DE| = |OD| \sqrt{2} = \frac{1}{2} |AB| \sqrt{2}$$

Potom však vztah (3) platí v celém rozsahu a platí též

$$|AB|^2 - |DE|^2 = |BC|^2 - |EC|^2 = |CA|^2 - |CD|^2 = 2,$$

což znamená, že je splněn vztah (5).

Řešení autorovo se liší od řešení všech soutěžících, a proto uvedeme i je.

Pomocná věta. Jestliže e, f jsou délky úhlopříček konvexního čtyřúhelníku a ω je úhel jimi sevřený, pak obsah tohoto čtyřúhelníku je

$$S = \frac{1}{2} ef \sin \omega.$$

Vlastní řešení. Úhlopříčky čtyřúhelníku $ABDE$ jsou zároveň výškami trojúhelníku ABC , tj.

$$e = |AD| = v_a, f = |BE| = v_b.$$

Ze čtyřúhelníku $CDUE$ (U je průsečík úhlopříček AD, BE) plyne

$$|\sphericalangle EUD| = 180^\circ - \gamma,$$

a tudíž

$$\omega = \gamma.$$

Můžeme tedy psát

$$v_a = 2S : a, \quad v_b = 2S : b$$

a potom

$$S(ABDE) = \frac{1}{2} v_a v_b \sin \gamma = 2S^2 \sin \gamma : ab$$

Docházíme tak k rovnici $2S^2 \sin \gamma : ab = \frac{1}{2} S$.

Tuto rovnici postupně upravujeme:

$$4 S \sin \gamma = ab ,$$

$$4 S \sin^2 \gamma = ab \sin \gamma ,$$

$$4 S \sin^2 \gamma = 2 S ,$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\sin \gamma = \frac{\pm \sqrt{2}}{2}$$

Ale trojúhelník ABC je ostroúhlý, a proto $\sin \gamma = \frac{+\sqrt{2}}{2}$, a tomu odpovídá úhel $\gamma = 45^\circ$.

Tím jsme odvodili podmínku nutnou.

Předpokládejme nyní, že v ostroúhlém trojúhelníku platí $\gamma = 45^\circ$ a počítejme obsah čtyřúhelníku $ABDE$.

$$\begin{aligned} S(ABDE) &= \frac{1}{2} v_a v_b \sin \gamma = S^2 \sqrt{2} : ab = S^2 \sqrt{2} \sin \gamma : ab \sin \gamma = \\ &= S^2 : 2S = \frac{1}{2} S . \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že to je i podmínka postačující, a tím jsme s důkazem hotovi.

4. (Problém zpožděných vlaků). Na nádraží přijíždí postupně n vlaků ($n \geq 2$). Dva z nich měly zpoždění; nevíme však jaké. Označte $P_2(n)$ počet možných pořadí příjezdu všech vlaků. Řešte tyto úlohy:

- Určete $P_2(n)$ pro $n \leq 6$;
- najděte rekurentní formuli pro $P_2(n)$;
- určete $P_2(n)$ jako mnohočlen.

(Došlo 10 řešení)

Milan Koman

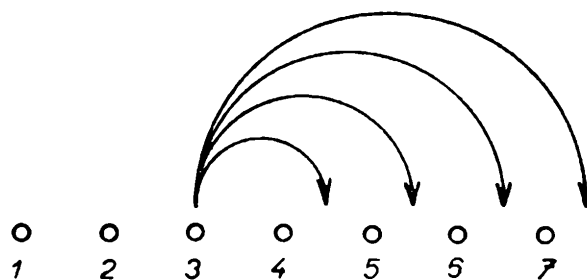
Počátek řešení uvádí autor takto :

Nejdříve určíme počet $P_1(n)$ všech možných pořadí vlaků

$$1, 2, 3, \dots, n \quad n \geq 1, \tag{1}$$

kdy právě jeden z nich má zpoždění.

Počet případů, kdy i -tý vlak má takové zpoždění, které má vliv na pořadí, je rovný $n - i$; viz obr. 2 pro $n = 7, i = 3$. Počet všech možných pořadí, tj. včetně pořadí (1), je roven



Obr. 2

$$P_1(n) = 1 + \sum_{i=1}^n (n - i) = 1 + \frac{1}{2} n(n - 1). \quad (2)$$

Nyní určíme počet $P_2(n)$ všech možných pořadí vlaků (1), kdy právě dva mají zpoždění. Rozlišíme dva případy:

a) Vlak č. 1 přijede jako první. Můžeme předpokládat, že nemá zpoždění. Těchto případů je $P_2(n - 1)$, neboť zpoždění mají dva z vlaků 2, 3, 4, ..., n .

b) Vlak č. 1 nepříjede jako první. Pak z vlaků 2, 3, 4, ..., n má zpoždění právě jeden. Počet možných pořadí těchto vlaků je $P_1(n - 1)$. Protože vlak č. 1 může přijet po vlaku č. 2, 3, 4, ..., n , je v případě b) počet možností rovný $(n - 1) P_1(n - 1)$. Celkem je tedy

$$P_2(n) = P_2(n - 1) + (n - 1) P_1(n - 1). \quad (3)$$

Tento vzorec můžeme upravit s použitím (2) na tvar

$$P_2(n) = P_2(n - 1) + \frac{1}{2} (n^3 - 4n^2 + 7n - 4). \quad (4)$$

Dále můžeme postupovat třemi způsoby.

1. *způsob (Smejkal, Ranošová)*. Z rovnosti (4) dostaneme diferenční rovnici

$$P_2(n) - P_2(n - 1) = \frac{1}{2} (n^3 - 4n^2 + 7n - 4), \quad (5)$$

ze které plyne, že $P_2(n)$ musí být polynom 4. stupně:

$$P_2(n) = a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 \quad (6)$$

Pomocí počátečních hodnot (které zjistíme např. ze vzorce (4))

$$P_2(2) = 2, P_2(3) = 6, P_2(4) = 18, P_2(5) = 46, P_2(6) = 101$$

můžeme určit koeficienty polynomu (6). Například dosazením do (6) a řešením soustavy lineárních rovnic, popřípadě Lagrangeovým nebo Newtonovým interpolačním polynomem. Tím dostaneme výsledek

$$P_2(n) = \frac{1}{24} (3n^4 - 10n^3 + 21n^2 - 14n + 24). \quad (7)$$

2. způsob (Tereščák). Z rovnosti (4) lze dostat sečtením

$$P_2(n) - P_2(n-1) = \frac{1}{2} (n^3 - 4n^2 + 7n - 4)$$

$$- P_2(n-1) + P_2(n-2) = \frac{1}{2} (-n^3 + 7n^2 - 18n + 16)$$

novou formuli

$$P_2(n) - 2P_2(n-1) + P_2(n-2) = \frac{1}{2} (3n^2 - 11n + 12),$$

kde na pravé straně je polynom již pouze 2. stupně. Opakujeme-li tento postup ještě třikrát, dostaneme nakonec

$$P_2(n) - 5P_2(n-1) + 10P_2(n-2) - 10P_2(n-3) + 5P_2(n-4) - P_2(n-5) = 0 \quad (8)$$

(Tuto formuli jiným postupem obdrželi též Damborský, Grajcar).

Z formule (8) opět plyne, že $P_2(n)$ je polynom 4. stupně, a další postup je pak stejný jako při prvním způsobu.

3. způsob (autorské řešení). Z formule (4) postupným sečtením $P_2(n)$, $P_2(n-1)$, ..., $P_2(2)$ dostaneme

$$P_2(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (i^3 - 4i^2 + 7i - 4).$$

Použitím součtových vzorců $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1)$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

dostaneme opět výsledek (8).

Poznámka. Úlohu lze zobecnit pro případ k ($1 \leq k \leq n$) zpožděných vlaků. Dostaneme opět rekurentní formuli, která je obdobou formule (3):

$$P_k(n) = P_k(n-1) + (n-1) P_{k-1}(n-1).$$

Pokuste se odvodit pro některá $k > 2$ explicitní vzorce pro $P_k(n)$. Nejlepší příspěvky uveřejníme.

Naše soutěž, ročník 1983 - 84

Také letos vypisuje redakce Rozhledů spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze soutěž o ceny v řešení úloh z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Úloh z matematiky bude celkem 10, úloh z fyziky 5 a úlohy z konstrukční geometrie budou 3. Nejprve otiskujeme část úloh z matematiky; další úlohy budou otištěny v příštím čísle. Soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Při případném dobrém umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Všeobecné pokyny řešitelům

Řešení každé úlohy piště čitelně (možno-li, na stroji) na zvláštní list formátu A 4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec také svou bytovou adresu i se směrovacím číslem. Každý kolektiv uveďte tyto údaje pro svého každého člena. Příjmení piště hůlkovým písmem.

Nejdříve napište text dané úlohy a potom přehledně její řešení. Toto řešení piště stručně, avšak výstižně a jasně; neužívejte zbytečně různé symboly! Dbejte na platnou terminologii a symboliku. Připojujete-li k řešení úlohy obrázky, narýsujte je pečlivě a čitelně je popište.

Úlohy k řešení

Matematika

Zatím otiskujeme 5 úloh z matematiky. Řešení těchto úloh zašlete nejpozději do 15. února 1984 na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla tohoto časopisu.

1. Čísla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ l napsaná v desítkové soustavě jsou prvočísla. První je větší než druhé; jejich rozdíl je 330. Určete všechna prvočísla, která mají tuto vlastnost.

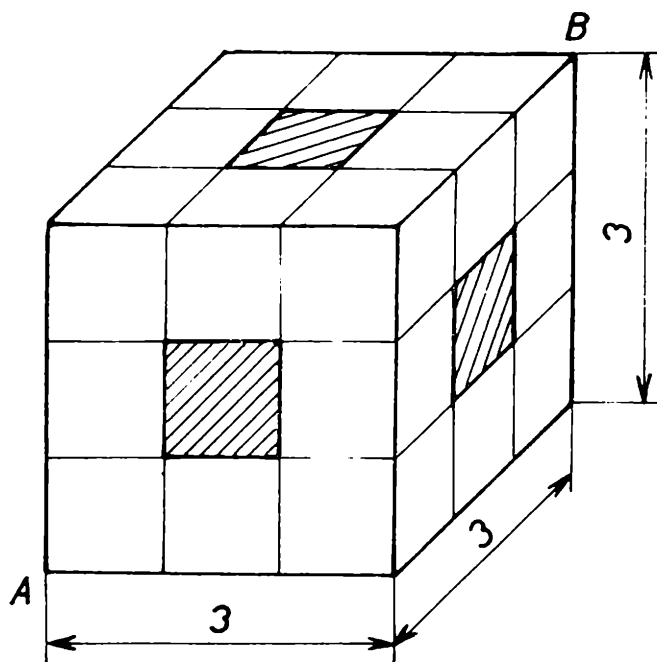
2. Nechtě a, e, u jsou po řadě velikosti hrany, stěnové úhlopříčky a tělesové úhlopříčky krychle. Dokažte, že potom platí

$$e \sqrt{au} + u \sqrt{ae} + a \sqrt{eu} < a^2 (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}).$$

Na základě tohoto dokažte, že je

$$\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{18} < \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

Autorem úloh 1 a 2 je Stanislav Horák.



Obr. 1

3. Z krychle, jejíž hrana má velikost 3, byly vyříznuty tři na vzájem kolmé komíny, procházející čtverci, které jsou na obr. 1 vyšrafovány. Najděte na povrchu zbylého tělesa nejkratší spojnici dvou protějších vrcholů A , B krychle.

Milan Koman

4. a) Je dán libovolný trojúhelník ABC ; bod S je střed jeho strany AB . Nad stranou AC sestrojte čtverec, který leží v polorovině opačné k polorovině ACB a nad stranou BC sestrojte čtverec ležící v polorovině opačné k polorovině BCA ; středy těchto čtverců označte S_1 , S_2 . Dokažte, že přímky SS_1 , SS_2 jsou vzájemně kolmé a že úsečky SS_1 , SS_2 jsou shodné.

b) Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Nad každou jeho stranou sestrojte čtverec, který má s tímto čtyřúhelníkem společnou jen tuto stranu. Nechť X , Y jsou středy čtverců sestavených nad stranami AB , CD a U , V jsou středy čtverců sestavených nad stranami BC , AD . Dokažte tato tvrzení: 1. Přímky XY , UV jsou vzájemně kolmé a úsečky XY , UV jsou shodné. 2. Není-li čtyřúhelník $ABCD$ rovnoběžník, pak středy úhlopříček AC , BD a středy úseček XY , UV jsou vrcholy čtverce.

Emil Kraemer

5. Je dán trojúhelník KLM . Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož základna AB leží na přímce KL a jemuž vepsaná kružnice prochází bodem K a dotýká se v bodě M přímky BC .

Jiří Mída

Dvacátý čtvrtý ročník fyzikální olympiády skončil

Ve dnech 23.—26. dubna 1983 proběhlo v Plzni celostátní kolo 24. ročníku fyzikální olympiády. Organizačně zajišťoval III. kolo KVFO Západočeského kraje pod vedením předsedy KVFO *ing. M. Rabase* a jednatele *M. Rádla*. Vzhledem k tomu, že v letošním ročníku bylo dosti obtížné krajské kolo (a tedy i menší počet těch úspěšných řešitelů, kteří vyřešili alespoň tři úlohy), bylo pozváno jen 51 účastníků (1 se nedostavil). Soutěžícím byly předloženy čtyři úlohy teoretické (první z oblasti mechaniky pohybu tělesa v radiálním gravitačním poli, druhá z paprskové optiky, další dvě z elektřiny). Překvapující byla úloha experimentální — stanovení Faradayovy konstanty F na základě elektrochemických a termodynamických úvah. Teoretické úlohy měly v bodovém hodnocení po 10 bodech, praktická úloha 20 bodů. Z celkového počtu 60 možných bodů získali dva soutěžící (*D. Kluvanec* a *I. Koreň*) po 45 bodech. Vzhledem k celkové obtížnosti celostátního kola, jež se projevila v tom, že pouze 8 řešitelů postačujícím způsobem vyřešilo 4. úlohu a 6 řešitelů úlohu experimentální, stanovil ÚVFO na svém zasedání limit pro úspěšného řešitele 18 bodů (tj. nadpoloviční počet bodů ve 3 úlohách). Prvních 15 řešitelů bylo prohlášeno vítězi 24. ročníku fyzikální olympiády.

Organizační výbor připravil několik akcí pro řešitele, jichž se mohli zúčastnit ve svém volném čase. Byla to jednak vlastivědná návštěva na zámek Kozel, dále exkurze do plzeňských závodů. Poslední večer patřil setkání s plzeňskou mládeží. Soutěžící přišel při zahájení pozdravit nestor plzeňských fyziků — *prof. dr. A. Špelda, DrSc.*, který připomněl jména významných plzeňských fyziků z minulého století.

Na závěrečném zasedání ÚVFO byli potvrzeni a na slavnostním závěru vyhlášeni úspěšní řešitelé a vítězové 24. ročníku FO.

- 1.— 2. Daniel Kluvanec, gymnázium Nitra, prof. dr. Piroško, 45 b.
Ivo Koreň, gymnázium Jevíčko, 45 b.
3. Jaroslav Smejkal, gymnázium Velké Meziříčí, prof. dr. Trojánek, 42 b.
4. Peter Kožuško, gymnázium Košice, Šrobárova, prof. dr. Scholtz, 36 b.
- 5.— 7. Miloš Drutarovský, SPŠ elektro Prešov, prof. Vrškout, 34 b.
Jan Chrastina, gymnázium Brno, Koněvova, prof. Mareš, 34 b.
Roman Šášik, gymnázium Nitra, prof. Teplička, 34 b.

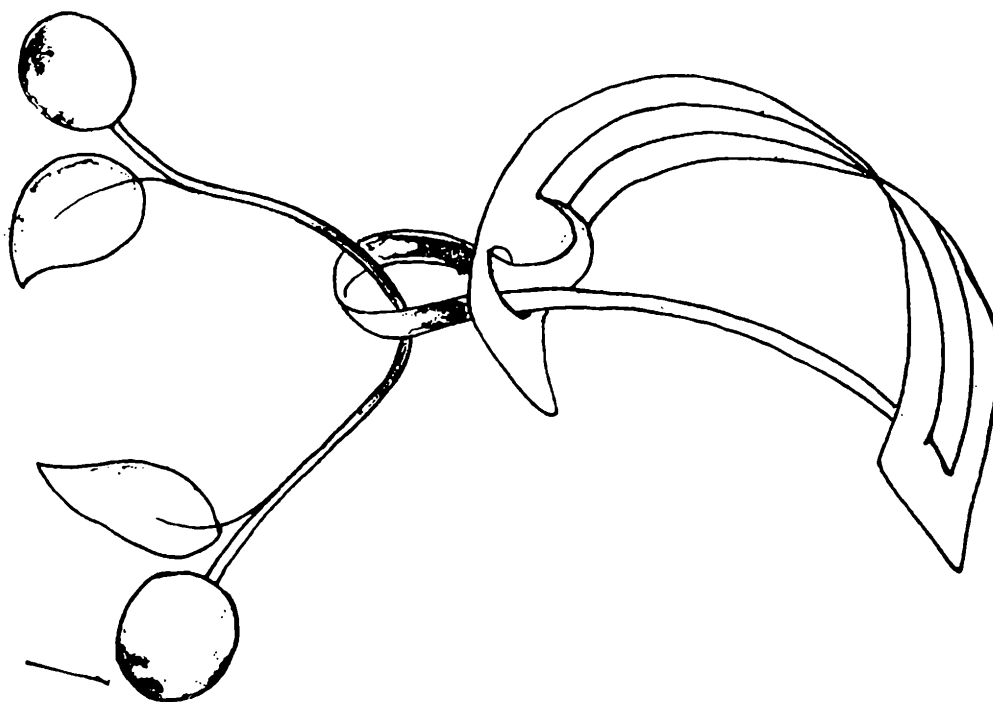
8. Martin Reysser, gymnázium Praha, Voděradská, prof. Šafaříková, 33 b.
- 9.—11. Michal Vojtek, gymnázium W. Piecka, Praha, prof. Zhouf, 32 b.
Richard Pulmann, Gymnázium Novohradská, Bratislava, prof. dr. Ivančíková, 32 b.
Peter Borovanský, gymnázium Novohradská, Bratislava, prof. dr. Ivančíková, 32 b.
12. Viktor Martišovitš, gymnázium Novohradská, Bratislava, prof. dr. Ivančíková, 31 b.
13. Pavel Urban, gymnázium Uherské Hradiště, prof. Nesrstová, 29. b.
14. Stanislav Panák, gymnázium Novohradská, Bratislava, prof. dr. Ivančíková, 28 b.
15. Zuzana Čubanová, gymnázium W. Piecka, Praha, prof. Zhouf, 27 b.

Dalších 14 řešitelů bylo úspěšných. Na základě výsledků III. i II. kola, výsledků dosažených v soustředěních v Hradci Králové a v Nitře bylo koncem června jmenováno československé družstvo na 14. MFO, která proběhla začátkem července v Bukurešti.

Dr. Ivo Volf, ÚVFO

Řešení hlavolamu ze str. 72

Střední pruh výřezu ohneme a provlékneme i se stopkou třešní (nebo šňůrkou s kuličkou) oválným otvorem a vyjmeme třešně (nebo kuličky). Opačným postupem je dostaneme zpět.



Třináctá mezinárodní fyzikální olympiáda

V pořadí již třináctá mezinárodní fyzikální olympiáda byla uspořádána ve dnech 19.—29. 6. 1982 v Malente nedaleko univerzitního města Kiel v Německé spolkové republice. Soutěže se zúčastnila družstva ze 17 států. Československé družstvo bylo sestaveno z nejlepších účastníků celostátního kola fyzikální olympiády a bylo vybráno na základě výsledků soustředění v Hradci Králové a v Nitře. Družstvo vedl *doc. dr. ing. Daniel Kluvanec*, CSc, pedagogickým vedoucím byl *dr. Ivo Volf*, oba členové ÚVFO.

Účastníkům byly předloženy tři teoretické a dvě praktické úlohy, z nichž mohli získat celkem 50 bodů. Nejlepší účastník soutěže *Manfred Lehn* (NSR) získal 43 bodů, čímž nasadil míru dalšího hodnocení účastníků. *Miroslav Kolesík* z gymnázia v Trnavě získal 37,75 bodu a II. cenu (pořadí 15.—16.) *Jiří Bajer* z gymnázia ve Frýdku-Místku získal 25.—26. pořadí, 34,5 bodu a II. cenu, *Petr Tichavský* z gymnázia v Bílovci se umístil na 30.—31. místě se 33,5 body a získal též II. cenu. Věcnou odměnu představoval fotografický přístroj Rolei. Další účastník *Daniel Kluvanec* z gymnázia v Nitře — Párovská ul. se umístil na 41. místě se 30,75 body a jeho spolužák ze školy *Roman Šášik* byl 43.—44. se 30,25 body. Oba získali III. cenu, kterou kromě pamětní medaile představoval dalekohled. Kromě toho všichni účastníci obdrželi pro ře-



Naši soutěžící získali tři druhé a dvě třetí ceny.
Zleva: Jiří Bajer, Daniel Kluvanec, Roman Šášik, Miroslav Kolesník, Petr Tichavský.

šení úloh kalkulačku TI 30, kterou si mohli ponechat jako dárek organizátorů soutěže.

I když mezinárodní olympiády jsou soutěží jednotlivců, přesto se neoficiálně sleduje na základě dosažených výsledků v této soutěži, jak jsou hodnocena družstva z jednotlivých států. Na 13. MFO nejlepších výsledků dosáhli sovětští soutěžící, kterým se podařilo získat z 250 možných bodů celkem 200,5, tj. 80 %. Dále se umístila družstva PLR, RS R, MLR, NSR (pořadatelé získali 178,25 bodů), Švédska a Československa (166,75 bodů, tedy 66,7 % z maximálního počtu možných dosažených bodů a 83,2 % oproti nejlepšímu družstvu). Potěšitelné je, že všichni účastníci našeho družstva byli při řešení úspěšní, třebaže D. Kluvanec a R. Šášik ukončili teprve III. ročník gymnázia. Celkem bylo na 13. mezinárodní fyzikální olympiádě uděleno 14 prvních, 19 druhých a 23 třetích cen, 10 pochvalných uznání, 18 účastníků bylo neúspěšných.

Na závěr 13. MFO bylo na zasedání mezinárodní komise navrženo, aby se v příštích letech konaly mezinárodní fyzikální olympiády v r. 1983 v Rumunsku, v r. 1984 ve Švédsku, v r. 1985 v Jugoslávii.

Ivo Volf, Daniel Kluvanec ÚVFO

Z NOVÝCH KNIH

M. Hejný - I. Kulich - J. Tvarožek ČO JE TOPOLOGIA ?

Vydala Alfa, vydavatelstvo technické a ekonomickej literatury, n. p. Bratislava v r. 1983, stran 240, 13,50 Kčs.

Knižnice Epsilon je našim čtenářům dobře známá svými již dvanácti vyšlými publikacemi, které vesměs mají sloužit studentům i učitelům všech druhů středních škol, jakož i širší veřejnosti, kterou se zajímá o matematiku. Uváděný svazek „Čo je topológia“ je jednou z nich. Velmi pěknou formou seznamuje čtenáře s poměrně mladou matematickou disciplinou, jakou je topologie. Výklad je dostatečně

ilustrován příklady, což jej činí srozumitelným a názornějším i pro čtenáře, kteří se s takto abstraktní matematickou disciplinou doposud nesetkali. Velké množství cvičení, jejichž řešení je uvedeno v druhé polovině svazku, umožňuje čtenáři aktivně zacházet s topologickými pojmy a tím si je dostatečně osvojit. Lze říci, že kniha umožní získat první informace o topologii studentům středních škol a je dobrou studijní pomůckou i pro posluchače vysokých škol, kteří se přímo nezabývají obecnou topologií. Jistě je i vhodnou literaturou pro matematické kroužky na gymnáziích s rozšířenou výukou matematiky.

Jaroslav Bayer

Spory abacistů s algoritmiky

V jednom „Pohledu do dějin“ jsme v minulém ročníku Rozhledů (č. 3) už zahlédli scénku ze 16. století, kde soupeřili abacisté s algoritmy. Připomeňme si, že abacisté tehdy už nepočítali na starodávném abaku, ale na linách (čarách vyjadřujících desítkové řády), a to pomocí početních známek. Algoritmici počítali písemně s indicko-arabskými číslicemi, ale poněkud odlišně než jsme my zvyklí; některé zapsané číslice v průběhu výpočtů škrtali, jak vidíte na kresbě.

Tuto ilustraci obsahovala jedna z prvních encyklopedií, kterou už v r. 1503 ve 12 svazcích pod názvem *Margarita Philosophica* vydal *Georgius Reisch* ve Freiburgu. (Během 16. století se dílo dočkalo 16 vydání!) Obrázek je alegorií, která vyjadřuje autorovo přesvědčení, že budoucnost patří písemnému počítání. Dívkou zosobněná *Arithmetica* vzhlíží s nadějí k *Boethiovi*, který byl v té době mylně pokládán za objevitele indicko-arabských číslic a početních algoritmů. Naproti tomu se *Pythagoras* jako zapřisáhlý abacista pokouší počítat na linách, kde má početními znamkami vyjádřena čísla 1241 a 82. Z výrazu



jeho tváře lze soudit, že mu počítání příliš nejde, nebo nestačí držet krok s moderními početními algoritmy.

Autor kresby bez rozpaků posadil vedle sebe (v oděvech svých současníků) dvě osobnosti, které ve skutečnosti oddělovalo celé tisíciletí; navíc předvádějí činnosti, které sotvakdy prováděly (o Boethiovi to lze říci zcela určitě). To však nic nemění na alegorické srozumitelnosti obrázku pro čtenáře v 16. století.

Jaroslav Foltá

SNTL — Nakladatelství technické literatury vydalo:

Josef ŠKRÁŠEK, Zdeněk TICHÝ:

ZÁKLADY APLIKOVANÉ MATEMATIKY I

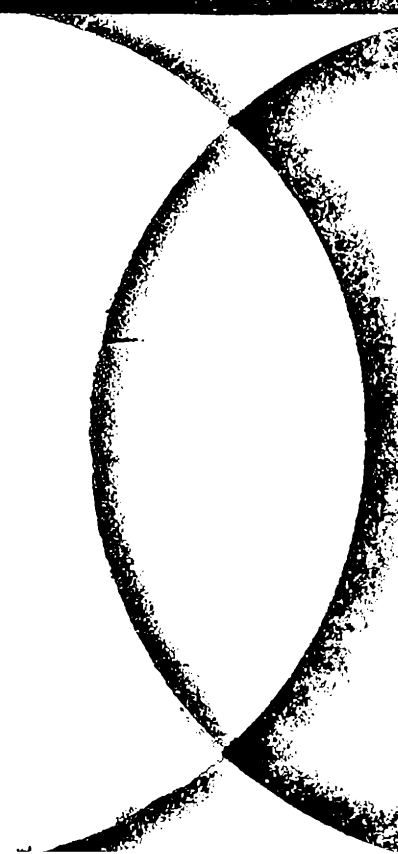
Úvodní díl přehledu užité matematiky obsahuje poznatky z matematické logiky a teorie množin, důležité pojmy a metody vyšší algebry, analytickou geometrii ve vektorovém i klasickém pojetí, diferenciální počet funkcí jedné a několika proměnných, numerické metody a nomografii. Výklad objasňují četné poznámky, řešené příklady a cvičení s výsledky.

Kniha je určena technikům a inženýrům, kterým umožní získat potřebné matematické znalosti k řešení provozních problémů. Způsobem zpracování je vhodná pro samostatné studium.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1983.



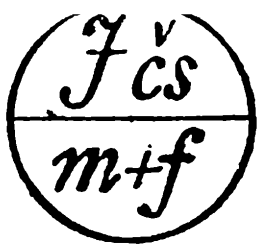
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(3)

**ROČNÍK 62, 1983/84
LISTOPAD**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, doc. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Pra-
ha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Retigové 4, 116 39 Praha 1 - Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

D. Hricířáková: Kritéria deliteľnosti prí- rodzených čísel číslami 19, 29, 39 atď.	89
P. Valent: Aj tak sa treba vedieť učiť .	91
J. Myslík, J. Kús: Maticová analýza elek- trických obvodů	94
V. Černý: Dve opice na lane a myšlien- kový experiment .	99
S. Horák: Akvadukt na ostrově Samos .	103
J. Šedivý: Boethius – učenec na predělu epoch	104
R. Zajac: História Brownovho pohybu	106
V. Šindelář: Potíže s litrem	108
Přemýšlíme, řešíme	112
Naše soutěž	120
E. Bittnerová: O práci Stanice mladých přirodovedcov v Bratislave	133
Z nových knih .	135
Pokyny pro autory článků do Rozhledů .	136
Pohledy do dějin	. 3. str. obálky

Kritéria deliteľnosti prirodzených čísel číslami 19, 29, 39 atď.

RNDr. DANIELA HRICIŠÁKOVÁ, PdF Trnava

V časopise *Kvant* (roč. 1974, č. 10) bolo uvedené kritérium deliteľnosti prirodzených čísel číslom 29 (autorom bol žiak 5. triedy *M. Levin*). Cieľom tohto článku je zovšeobecniť kritérium *M. Levina*:

Nech m je prirodzené číslo zapísané v desiatkovej sústave. V zápise čísla m oddelíme poslednú cifru. K takto zmenšenému číslu pričítame jej trojnásobok. Vytvorené číslo m_1 je deliteľné číslom 29 vtedy a len vtedy, keď aj pôvodné číslo m je deliteľné číslom 29.

Dôkaz. Číslo m napíšeme v tvare $m = 10a + b$, kde a je celé nezáporné číslo, $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Potom $m_1 = a + 3b$, a preto

$$10 m_1 = 10(a + 3b) = 10a + 30b = m + 29b. \quad (1)$$

Ak $29 \mid m$, tak z (1) vyplýva, že $29 \mid 10 m_1$. Pretože 29 a 10 sú čísla nesúdeliteľné, platí $29 \mid m_1$.

Ak $29 \mid m_1$, tak z (1) vyplýva, že $29 \mid m$.

Príklad 1. Zistite, či číslo 138794 je deliteľné číslom 29.

Riešenie. Určujeme postupne čísla m_1, m_2, m_3, m_4 k číslu $m = 138794$.

$\begin{array}{r} 13879 \\ 12 \\ \hline m_1 = 13891 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1389 \\ 3 \\ \hline m_2 = 1392 \end{array}$	$\begin{array}{r} 139 \\ 6 \\ \hline m_3 = 145 \end{array}$	$\begin{array}{r} 14 \\ 15 \\ \hline m_4 = 29 \end{array}$
--	---	---	--

Pretože $m_4 = 29$, je m deliteľné číslom 29.

Uvedené kritérium zovšeobecňuje nasledujúca veta.

Veta. Nech c, m sú prirodzené čísla, $d = 10c + 9$. Nech m_1 vznikne z čísla m (zapísaného v dekadické sústave) oddelením poslednej cifry a pričítaním jej $(c + 1)$ -násobku k pôvodnému číslu. Potom

$$d \mid m \Leftrightarrow d \mid m_1 \quad (2)$$

Dôkaz. Číslo m opäť píšeme v tvare $10a + b$, $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, potom $m_1 = a + (c + 1)b$,

$$\text{preto } 10 m_1 = 10[a + (c + 1)b] = 10a + 10bc + 10b = m + bd. \quad (3)$$

Ak $d \mid m$, tak z (3) vyplýva, že $d \mid 10 m_1$. Pretože d a 10 sú nesúdeliteľné (posledná cifra čísla d je 9), platí $d \mid m_1$.

Ak $d \mid m_1$, tak z (3) vyplýva, že $d \mid m$. Tým je dôkaz ekvivalencie (2) ukončený.

V nasledujúcich príkladoch ilustrujeme dokázanú vetu; zo zadaného čísla m postupne vytvárame čísla m_1, m_2, m_3 atď.

Príklad 2. Zistite, či $19 \mid 6555$.

Riešenie. Postupujeme ako v príklade 1; ak $m = 10a + b$, tak $m_1 = a + 2b$.

$$\begin{array}{r}
 m = 6555 \qquad \qquad \qquad 655 \qquad \qquad \qquad 66 \qquad \qquad \qquad 7 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 10 \qquad \qquad \qquad 10 \qquad \qquad \qquad 12 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad m_1 = 665 \qquad \qquad \qquad m_2 = 76 \qquad \qquad \qquad m_3 = 19
 \end{array}$$

Teda číslo 19 delí m_3 aj číslo 6555.

Príklad 3. Zistite, či $39 \mid 69537$.

Riešenie. V tomto prípade, keď $m = 10a + b$, vytvoríme $m_1 = a + 4b$.

$$\begin{array}{r}
 m = 69537 \qquad \qquad \qquad 6953 \qquad \qquad \qquad 698 \qquad \qquad \qquad 70 \qquad \qquad \qquad 7 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 28 \qquad \qquad \qquad 4 \qquad \qquad \qquad 8 \qquad \qquad \qquad 32 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad m_1 = 6981 \qquad \qquad \qquad m_2 = 702 \qquad \qquad \qquad m_3 = 78 \qquad \qquad \qquad m_4 = 39
 \end{array}$$

Teda číslo 39 delí m_4 aj číslo 69537.

Príklad 4. Zistite, či číslo 119 delí 701 267.

Riešenie. Ak $m = 10a + b$, tak $m_1 = a + 12b$.

$$\begin{array}{r}
 m = 701\,267 \qquad \qquad \qquad 70\,126 \qquad \qquad \qquad 7021 \qquad \qquad \qquad 702 \qquad \qquad \qquad 71 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 84 \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad 12 \qquad \qquad \qquad 48 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad m_1 = 70\,210 \qquad \qquad \qquad m_2 = 7021 \qquad \qquad \qquad m_3 = 714 \qquad \qquad \qquad m_4 = 119
 \end{array}$$

Teda číslo 119 delí číslo 701 267.

Doteraz sme skúmali iba deliteľnosť. Všimneme si zložitejšiu otázku zvyškov pri delení. Ako sa mení zvyšok pri delení číslom 19 pri prechode od čísla m k číslu m_1 ? Pomôžeme si príkladom.

Príklad 5. Máme určiť zvyšok pri delení čísla 100 005 číslom 19. Zvyšky pri delení číslom 19 nájdeme pomocou schémy:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & \leftarrow & 2 & \leftarrow & 4 & \leftarrow & 8 & \leftarrow & 16 & \leftarrow & 13 & \leftarrow & 7 & \leftarrow & 14 & \leftarrow & 9 \\
 & & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & \uparrow \\
 10 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 12 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 17 & \rightarrow & 18
 \end{array}$$

Z čísla $m = 100\,005$ vytvoríme už popísaným spôsobom čísla $m_1 = 10\,010$, $m_2 = 1001$, $m_3 = 102$, $m_4 = 14$.

Pre zvyšky platí:

$$\begin{array}{l}
 zv(14 \mid 19) = 14 \\
 zv(102 \mid 19) = 7 \\
 zv(1001 \mid 19) = 13
 \end{array}$$

Zo schémy hľadaný zvyšok 8 nájdeme ako štvrté číslo v poradí v smere šípkov od čísla 14.

$$\begin{aligned}zv(10010 \ 19) &= 16 \\zv(100005 \ 19) &= 8\end{aligned}$$

Čitateľovi prenecháme všeobecnú formuláciu „zákonu o zvyškoch“ pri delení číslom 19 aj dôkaz tohto tvrdenia. Podobne je treba vytvárať schémy pre delenie číslami 29, 39, atď. Zvlášť zaujímavé sú schémy pre tie z čísel 29, 39, 49, , ktoré sú zložené (nie sú prvočíslami).

Aj tak sa treba vedieť učiť

PhDr. PAVOL VALENT, Gymnázium Levice

Stáva sa, že aj veľmi inteligentní študenti v učení rezignujú, keď narazia na vzťah, ktorý nie je v učebnici alebo na prednáške logicky odvodený či dokázaný. Zvyčajne sa pokúsia vzťah sami odvodiť z iných obecnějších tvrdení alebo viet. Ak sa im to nepodarí, domnievajú sa, že sú málo múdri a stratia sebadôveru, či chuť do ďalšieho štúdia. Poznám napríklad žiaka, ktorý sa nevedel zmieriť s tým, že nedokázal pochopiť, prečo platí Coulombov zákon. Čítal text v učebnici fyziky pre gymnáziá (6) niekoľkokrát a nenašiel nijaké logické súvislosti, z ktorých by Coulombov zákon vyplynul. Pri konzultácii sa vyslovil, že ak nechápe ako Coulomb svoj zákon objavil, nie je ochotný ďalej študovať látku a vzťahy z neho odvodené.

Iný študent pri riešení istého matematického problému narazil na otázku, či dvoma rôznymi bodmi je určená práve jedna priamka. Keď sa jeho učiteľ vyjadril, že by odpovedal pozitívne bez toho, aby vetu dokazoval, začal študent pochybovať o hodnovernosti celej matematiky.

Tretí príklad sa týka autorov učebnice matematiky pre gymnáziá M 7 (3) a niektorých vyučujúcich, ktorí kritizujú stavbu uvedenej učebnice. Podľa nich má M 7 značné nedostatky, lebo využíva vety, ktoré nedokazuje. Napríklad v kapitole nazvanej monotónnosť a derivácia berie za základ viet o vzťahu monotónnosti a derivácie funkcie na intervale bez dôkazu pomerne komplikovanú i keď názornú Lagrangeovu vetu.

Ukážeme, že takýto prístup je nielen možný, ale najmä z didaktického hľadiska často veľmi osožný.

Vysvetlíme si však, ako sa má dostať prvý študent z miesta. Keby mal k dispozícii *Ilkovičovu* Fyziku II (4) a prečítal by v nej na strane 13-tej, že Coulomb potvrdil Priestleyovu a Cavendishovu hypotézu starostlivými meraniami pomocou torzných váh, pochopil by, že Coulombov zákon

treba brať za základné tvrdenie bez toho, aby sme sa snažili detailne pochopiť, ako k jeho objaveniu došlo. Žiaľ učebnica fyziky (6) tento fakt nielenže nezvýrazňuje, ale sa ho ešte snaží maskovať „výkladom“, ktorý sa žiakovi javí z logického hľadiska mimoriadne náročným.

Podobne je to u druhého žiaka. Vetu — dvoma rôznymi bodmi je určená práve jedna priamka — považujeme v elementárnej geometrii za pravdivú bez dôkazu. Je síce pravda, že ju možno dokázať z dvoch iných viet, ktoré sú však „vymyslené“ veľmi umele a to iba z dôvodu, aby bola splnená istá požiadavka na axiomatickú sústavu. Podobne ako v Coulombovom zákone aj pri tejto vete zohral základnú úlohu experiment a následná abstrakcia. Vzhľadom na jednoduchosť vety je každý z nás „Coulombom“ pri utvrdzovaní sa v názore, že dvoma rôznymi bodmi je určená práve jedna priamka. Svoj „experiment“, ktorý vám potvrdzuje platnosť tejto vety, môžete (povedané žartom) aj zatajiť a prehlásiť, že je to predsa jasné. Čo ak predsa len neprijímame uvedenú vetu za platnú bez dôkazu? Ukážme si ako ju možno odvodiť z iných obecných platných viet „nižšieho poschodia“:

I. Dvomi bodmi je určená aspoň jedna priamka.

II. Dvomi rôznymi bodmi je určená najviac jedna priamka.

Čitateľ iste uzná, že ak platia obe vety I. a II. súčasne, tak platí, že dvomi rôznymi bodmi je určená práve jedna priamka. Pokračovať podobne ďalej, aby sme našli obecnějšíe vety, z ktorých by bolo možné odvodiť vety I. a II. neodporúčame, pretože je to neriešiteľná úloha.

Pojednajme ešte o Lagrangeovej vete v učebnici M 7. Možno ju dokázať? Odpoveď je pozitívna. Pozri napríklad knihu (5)! V dôkaze sa vychádza z Rolleovej vety. Možno dokázať Rolleovu vetu? Možno. Pri jej dôkaze sa vychádza z niektorých jednoduchých viet, ktoré ani *Jarník* už nedokazuje. Buď sú to vety, ktorých dôkaz je veľmi jednoduchý alebo vety, ktoré sa nedokazujú.

Vnímavý čitateľ už tuší, čo sa mu snažíme povedať. Každá vedecká teória, tým skôr matematická alebo fyzikálna, je budovaná tak, že sa z istej množiny „východiskových“ viet logickými úvahami odvodzujú iné, komplikovanejšie a vzhľadom na študovanú oblasť užitočnejšie a povedzme tiež zaujímavejšie vety, aplikáciou ktorých riešime úlohy a problémy. Túto metódu budovania vedeckej teórie v exaktnom prevedení nazývame axiomatická. *Axiomatická metóda* je však súčasne metódou myslenia, a preto by o nej aspoň v základoch mal niečo vedieť každý študent.

Princíp axiomatickej metódy spočíva v štyroch fázach. Prvou fázou je výber základných viet, ktoré nedokazujeme, lebo sú samozrejme platné a ktoré preto voláme axiómy.

Druhá fáza spočíva v dedukcii viet, ktoré z axióm vyplývajú. Tretia

a štvrtá fáza axiomatickej metódy — totiž interpretácia a aplikácia nesúvisia s cieľom, pre ktorý bol napísaný tento článok, preto ich nebudeme popisovať. Treba poznamenať, že pre tvorbu axiomatických sústav je stanovený celý rad podmienok. Podrobné poučenie nájde čitateľ v knihách (1) a (2), prípadne v ľubovoľnej vysokoškolskej učebnici elementárnej geometrie, ktorá slúži ako školský príklad teórie vybudovanej axiomaticky.

Pre praktické potreby študujúcich sa oplatí prijať princíp odvodený od axiomatickej metódy: Nájdi si sám isté východiskové vety (ak ti ich ponúka autor učebnice alebo učiteľ, dôveruj mu) a z nich logicky odvodzuj ďalšie vety, vzťahy, vzorce a poznatky. Na základe toho možno napríklad pokročilému študentovi 4. ročníka gymnázia ako návod pre štúdium infinitezimálneho počtu poradiť: Ak sa chceš zdokonaľiť v derivovaní niektorých typov funkcií, resp. v hľadaní primitívnych funkcií, musíš nutne poznať derivácie a primitívne funkcie k elementárnym spamäti. Je iste veľmi užitočné, ak si študent vie tieto základné vzťahy sám odvodiť. Lenže z hľadiska axiomatickej metódy a efektívnosti pri riešení zložitejších úloh je úplne jedno, či si ich iba pamätá alebo dokonca musí pozrieť v tabuľkách. Ostatne väčšina študentov po čase odvodenie derivácií elementárných funkcií aj tak zabudne, čo im však nijako neprekáča úspešne riešiť úlohy. Rozdiel vo vedomostiach vzhľadom na použitie základných vzťahov pri derivovaní a integrovaní funkcií je tu iba kvantitatívny.

Pre ilustráciu prvých dvoch fáz axiomatickej metódy uveďme sústavu axióm Euklidovskej rovinnej geometrie, ktorá popisuje jeden zo základných vzťahov — incidenciu:

- I. Existuje aspoň jedna priamka.
 - II. Ak A , B sú dva body, tak existuje aspoň jedna priamka, na ktorej body A a B ležia.
 - III. Ak A , B sú dva rôzne body, tak existuje najviac jedna priamka, na ktorej leží bod A aj bod B .
 - IV. Ak a je priamka, tak existuje aspoň jeden bod B tak, že bod B neleží na priamke a .
 - V. Ak a je priamka, tak na nej ležia aspoň dva rôzne body B a C .
- Pokúste sa odvodiť dedukciou vety:
- V1: Ak A , B sú dva rôzne body, tak existuje práve jedna priamka, na ktorej obidva ležia.
 - V2: Množina bodov má aspoň tri rôzne prvky.
 - V3: Ku každej priamke existujú aspoň dve rôznobežky.
 - V4: Ku každému bodu existuje aspoň jedna priamka tak, že daný bod na nej neleží.
 - V5: Ku každému bodu X existujú aspoň dve také rôzne priamky, na ktorých bod X leží.

Urobte si experiment! Z uvedenej sústavy axióm vynechajte axiómu II. a zistite teraz, ktoré vety z vyššie uvedených platia v tejto axiomatickej sústave. Dokážete nejakú vetu, ktorá neplatí v prvom prípade?

Literatúra :

- [1] Gatial J. — Hejný M.: Stavba planimetrie, SPN Bratislava 1973
- [2] Hejný M.: Geometria naučila človeka myslieť, SPN Bratislava 1979
- [3] Riečan B. — Vaňatová L.: Matematika pre gymnáziá 7, SPN Bratislava 1980
- [4] Ilkovič D.: Fyzika II, Alfa, Bratislava 1973
- [5] Jarník V.: Diferenciální počet I, Academia Praha 1974
- [6] Fyzika pre 2. a 3. ročník gymnázia, SPN Bratislava 1977

FYZIKA

Maticová analýza elektrických obvodů

Doc. Ing. JIŘÍ MYSLÍK, CSc., Ing. JOSEF KŮS, Vysoká škola strojní a elektrotechnická
v Plzni

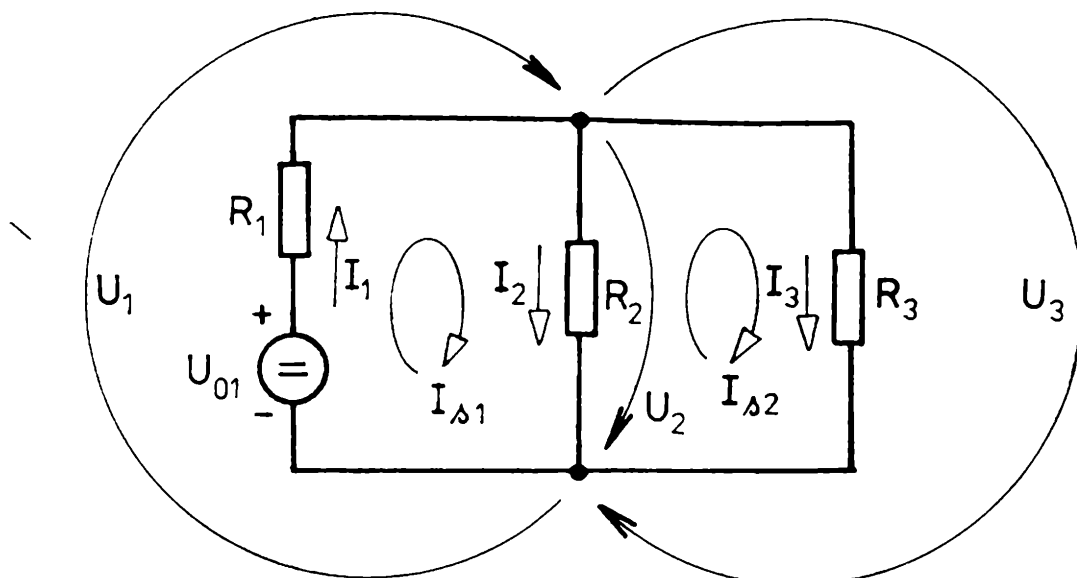
V závěru článku [1] jsme slíbili, že v některém z dalších čísel RMF popíšeme maticový algoritmus pro analýzu elektrických obvodů, který bude vhodný při použití počítače. V této práci se sice zabýváme analýzou stejnosměrných obvodů, ale odvozené výsledky je možno vcelku jednoduše zobecnit. Maticové algoritmy lze odvodit pro všechny obecné metody analýzy elektrických obvodů. My se omezíme na odvození algoritmu pro maticovou analýzu metodou smyčkových proudů.

Zabývejme se obvodem nakresleným na obr. 1. Jeho větve jsou zapojeny podle obr. 2, na kterém je nakreslena jistá j -tá větev (větším tohoto typu říkáme *napěťové větve*). Není nutné, aby ve všech větvích obvodu byly zapojeny napěťové zdroje (napětí zdrojů v některých větvích může být nulové).

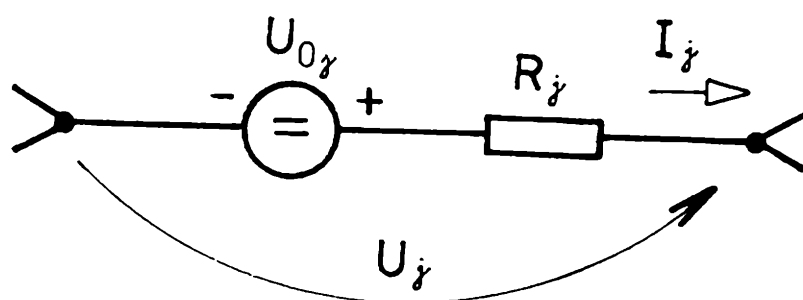
Pro větev na obr. 2 lze psát rovnici

$$U_j = R_j I_j - U_{0j} \quad (1)$$

Napíšeme-li rovnice typu (1) pro všechny větve obvodu na obr. 1, dostaneme soustavu rovnic



Obr. 1



Obr. 2

$$\left. \begin{array}{l} v_1 \quad U_1 = R_1 I_1 - U_{01} \\ v_2 \quad U_2 = R_2 I_2 \\ v_3 \quad U_3 = R_3 I_3 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Soustavu (2) můžeme zkráceně zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}_v \mathbf{I} - \mathbf{U}_0, \quad (3)$$

kde vedle matice větrových proudů $\mathbf{I}$ a matice větrových úbytků napětí $\mathbf{U}$ (obě matice byly zavedeny v článku [1]) vystupují další matice: matice větrových zdrojů napětí $\mathbf{U}_0$ a matice větrových impedancí $\mathbf{Z}_v$ ¹⁾. Čtenář, který je seznámen s maticemi alespoň tak, jak je uvedeno v článku [2], jistě dojde sám k závěru, že $\mathbf{U}_0$ je sloupcová matice. $\mathbf{Z}_v$ je čtvercová diagonální matice. Diagonální prvky matice $\mathbf{Z}_v$ jsou rovny hodnotám odporů jednotlivých větví. Počet řádků obou matic je roven počtu větví obvodu, tedy i počtu rovnic soustavy (2). Matice $\mathbf{U}_0$ a $\mathbf{Z}_v$ pro obvod na obr. 1 mají tudíž tvar (nulové prvky nevypisujeme, číslování větví odpovídá číslování větrových proudů)

¹⁾ Protože řešený obvod je čistě odporový, postačil by název matice větrových odporů. S ohledem na pozdější zobecnění ponecháme označení obecnější.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \mathbf{U}_0 = \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline U_{01} \\ \hline \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \mathbf{Z}_v = \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline R_1 & & & \\ \hline & & R_2 & \\ \hline & & & R_3 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Vraťme se k rovnici (3). Představuje Ohmův zákon v maticovém tvaru pro obvody s napěťovými větvemi. Matice, které zde vystupují, lze sestavit bez vypisování soustavy rovnic (2), jak čtenář jistě sám zjistil.

Vynásobíme nyní rov. (3) zleva transponovanou incidenční maticí ${}^t\mathbf{B}$ (incidenční matice $\mathbf{B}$ byla zavedena v článku [1]). Dostaneme

$${}^t\mathbf{B} \mathbf{U} = {}^t\mathbf{B} \mathbf{Z}_v \mathbf{I} - {}^t\mathbf{B} \mathbf{U}_0. \quad (4)$$

Rovněž v [1] jsme odvodili maticový zápis 2. Kirchhoffova zákona ve tvaru ${}^t\mathbf{B} \mathbf{U} = \mathbf{0}$. Levá strana rovnice (4) se tudíž rovná nulové matici a můžeme tedy psát, že

$$\mathbf{0} = {}^t\mathbf{B} \mathbf{Z}_v \mathbf{I} - {}^t\mathbf{B} \mathbf{U}_0. \quad (5)$$

Proudy ve větvích obvodu na obr. 1 souvisí s proudy ve smyčkách vzájemně jednoznačnými vztahy

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = I_{s1} \\ I_2 = I_{s1} - I_{s2} \\ I_3 = I_{s2} \end{array} \right\} \quad (6)$$

Soustavu rovnic (6) lze zapsat maticově

$$\begin{array}{c} \mathbf{I} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} s_1 \quad s_2 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline v_1 & 1 & \\ \hline v_2 & 1 & -1 \\ \hline v_3 & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline I_{s1} \\ \hline I_{s2} \\ \hline \end{array}
 \end{array} \quad (7)$$

V obdélníkové matici na pravé straně rov. (7) poznáváme opět incidenční matici $\mathbf{B}$, takže

$$\mathbf{I} = \mathbf{B} \mathbf{I}_s. \quad (8)$$

Dosadíme do rov. (5) za $\mathbf{I}$ vztah (8). Dostaneme rovnici

$$\mathbf{0} = {}^t\mathbf{B} \mathbf{Z}_v \mathbf{B} \mathbf{I}_s - {}^t\mathbf{B} \mathbf{U}_0. \quad (9)$$

Zavedme označení

$${}^t\mathbf{B} \mathbf{Z}_v \mathbf{B} = \mathbf{Z}_s \quad (10)$$

$${}^t\mathbf{B} \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_s \quad (11)$$

Matici $\mathbf{Z}_s$ nazveme *maticí smyčkových impedancí*, matici $\mathbf{U}_s$ pak *maticí smyčkových zdrojů napětí*. Počet řádků obou matic je roven počtu nezávislých smyček obvodu. Matice $\mathbf{U}_s$ je sloupcová, matice $\mathbf{Z}_s$ je čtvercová a zřejmě souměrná.

Po dosazení vztahů (10) a (11) do rovnice (9) dostáváme

$$\mathbf{Z}_s \mathbf{I}_s = \mathbf{U}_s. \quad (12)$$

V posledním vztahu je jediná neznámá, a to matice hledaných smyčkových proudů $\mathbf{I}_s$. Čtenář, obeznámený s pojmem inverzní matice (RMF 1972/73, str. 8) vidí, že vynásobením rov. (12) zleva inverzní maticí $\mathbf{Z}_s^{-1}$ nalezneme $\mathbf{I}_s$ jako

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{Z}_s^{-1} \mathbf{U}_s. \quad (13)$$

Poznamenejme, že matice $\mathbf{Z}_s$ je zřejmě regulární (tj. její determinant je různý od nuly).

Matici větvových proudů pak vypočteme ze vztahu (8); řešení obvodu dokončíme výpočtem matice větvových napětí $\mathbf{U}$ z Ohmova zákona (3).

S užitím uvedeného postupu řešíme tedy obvod v následujících krocích:

1. Pomocí větvových proudů orientujeme a očíslovujeme větve obvodu. Do nezávislých smyček zavedeme smyčkové proudy.
2. Pro obvod sestavíme incidenční matici $\mathbf{B}$, dále pak matice $\mathbf{U}_0$ a $\mathbf{Z}_v$.
3. Podle vztahů (10) a (11) vypočteme matice $\mathbf{Z}_s$ a $\mathbf{U}_s$.
4. Vypočítáme inverzní matici $\mathbf{Z}_s^{-1}$ a s užitím vztahu (13) matici smyčkových proudů $\mathbf{I}_s$.
5. Z rovnic (8) a (3) vypočteme matice větvových proudů $\mathbf{I}$ a větvových úbytků napětí obvodu $\mathbf{U}$.

Čtenář, kterému je pojem inverzní matice neznámý, může po vykonání kroků 1. až 3. postupovat tak, že maticovou rov. (12) napíše ve tvaru soustavy rovnic pro neznámé smyčkové proudy a tyto proudy vypočte řešením soustavy rovnic libovolnou vhodnou metodou. Krok 5. zůstane nezměněn.

Protože inverze matice je pracnější než řešení soustavy algebraických rovnic např. Gaussovou eliminační metodou, volíme řešení pomocí inverze matice obvykle pouze tehdy, je-li tento způsob ekonomičtější. Inverze bude výhodná např. při řešení téhož obvodu pro různé hodnoty větvových zdrojů napětí (z rov. (13) je zřejmé, že známe-li inverzní matici $\mathbf{Z}_s^{-1}$, můžeme snadno určit matici smyčkových proudů $\mathbf{I}_s$ pro libovolnou matici $\mathbf{U}_s = {}^t\mathbf{B} \mathbf{U}_0$).

Příklad

Aplikujme odvozený postup výpočtu na řešení obvodu podle obr. 1, ve kterém je $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $U_{01} = 10 \text{ V}$.

Krok 2.

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}; \mathbf{U}_0 = \begin{matrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} U_{01} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{V}]; \mathbf{Z}_v = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} [\Omega]$$

Krok 3.

$$\mathbf{Z}_s = {}^t \mathbf{B} \mathbf{Z}_v \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} [\Omega]$$

$$\mathbf{U}_s = {}^t \mathbf{B} \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{V}]$$

Krok 4.

$$\mathbf{Z}_s^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} [\text{S}]; \mathbf{I}_s = \mathbf{Z}_s^{-1} \mathbf{U}_s = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/11 \\ 20/11 \end{bmatrix} [\text{A}]$$

nebo pro rozepsání rov. (12) s užitím matic $\mathbf{Z}_s$ a $\mathbf{U}_s$ získaných v kroku 2:

$$\begin{aligned} 3 I_{s1} - 2 I_{s2} &= 10 \\ -2 I_{s1} + 5 I_{s2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{odkud } I_{s1} = \frac{50}{11} \text{ A}, I_{s2} = \frac{20}{11} \text{ A}, \quad \text{tedy opět } \mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} 50/11 \\ 20/11 \end{bmatrix} [\text{A}]$$

Krok 5.

$$\mathbf{I} = \begin{matrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \mathbf{B} \mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50/11 \\ 20/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/11 \\ 30/11 \\ 20/11 \end{bmatrix} [\text{A}]$$

$$\mathbf{U} = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} = \mathbf{Z}_N \mathbf{I} - \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50/11 \\ 30/11 \\ 20/11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60/11 \\ 60/11 \\ 60/11 \end{bmatrix} \quad [\text{V}]$$

O správnosti získaných výsledků se čtenář může přesvědčit řešením obvodu (obr. 1) např. transfigurací.

Zobecnění

Postup byl odvozen a ilustrován na jednoduchém stejnosměrném obvodu; lze ho však použít i pro řešení složitých obvodů střídavých. Prvky matic (s výjimkou incidenční matice **B**) jsou pak komplexní; existují-li indukční vazby mezi větvemi obvodu, budou v matici **Z_v** nenulové prvky i mimo hlavní diagonálu matice.

S rostoucí složitostí obvodu se zvětšují rozměry matic a roste tak pracnost výpočtu. Uvedený maticový algoritmus však řešení obvodu natolik formalizuje, že jej lze snadno naprogramovat a použít pak k řešení počítač. To je hlavní předností maticové analýzy obvodů.

Protože matice obsahují mnoho nulových prvků (jsou to tzv. *řídke matice*), sestavují se programy pro počítač většinou tak, aby se nulové prvky nemusely ukládat do paměti a aby se s nimi v průběhu výpočtu zbytečně nepočítalo.

Literatura :

- [1] Kús, J., Myslík, J.: Maticový tvar Kirchhoffových zákonů. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 58 (1979—80), č. 4, str. 161—167
- [2] Mída, J.: O maticích. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 59 (1979—80), č. 4, str. 154—161

Dve opice na lane a myšlienkový experiment

VLADIMÍR ČERNÝ, Ústav fyziky a biofyziky
UK, Bratislava

V rôznych kvízoch možno sa často stretnúť so starým problémom „dvoch opíc na lane“. Úloha znie tak: Dve opice rovnakej hmotnosti visia v rovnakej výške na lane prevesenom cez kladku, ktorá sa môže otáčať bez trenia. Hmotnosť lana a zotrvačnosť kladky sú zanedbateľné. Opice sú v klude. Odrazu si jedna z nich zmyslí šplhať po lane smerom nahor, ku kladke. Druhá opica sa stále pevne drží lana. Otázka znie: čo sa bude diať s touto druhou opicou, bude stúpať alebo klesať?

Úloha pochádza pravdepodobne od *L. Carrola*, autora *Alenky v ríši divov*, a stala sa jednou z najbúrlivejšie diskutovaných úloh rekreačného typu. Na stránkach nedelných vydaní magazínov súperili zástancovia „stúpania“ a „klesania“. Pravda, úloha je sformulovaná dostatočne presne, o jej riešení je zbytočné hádať sa. Stačí si napísať Newtonove pohybové rovnice typu $F = m \cdot a$ a úlohu potom rozriešiť, čo je iba trocha cvičenia v kinematike a v úpravách rovníc. Odporúčame čitateľovi, aby si precvičil sily na pohybových rovniciach a veríme, že ľahko dokáže správny výsledok: druhá opica bude stúpať ku kladke presne tak ako prvá a pri kladke sa stretnú.

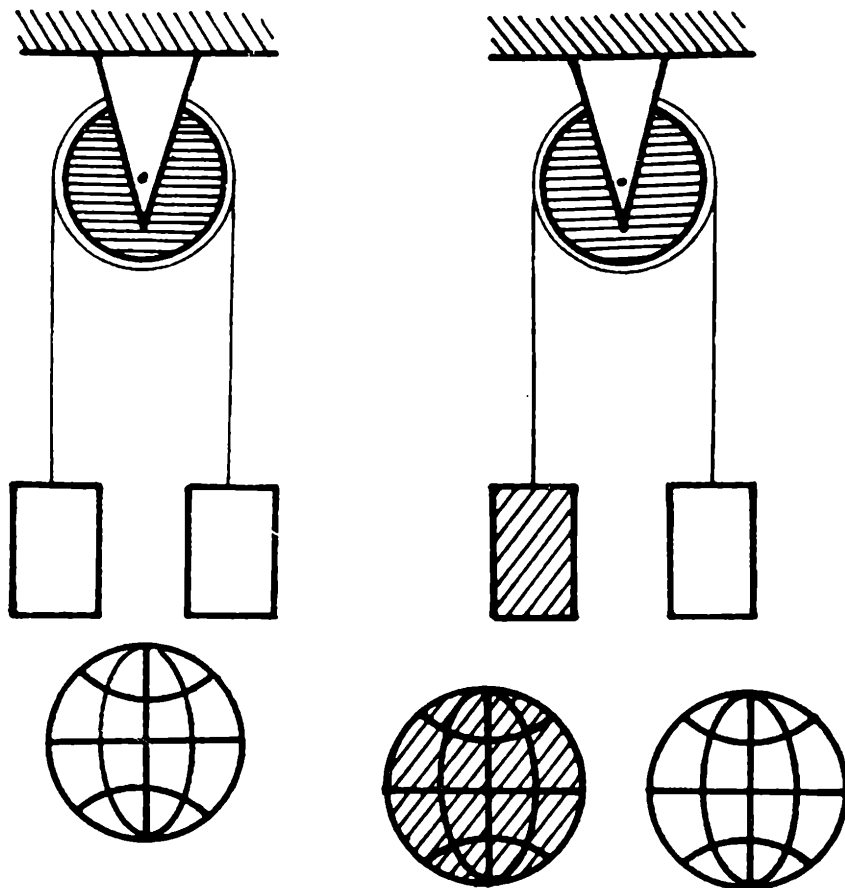
Ak si čitateľ napísal spomínané rovnice, isto prišiel i na to, v čom spočíva podstata výsledku: v trochu komplikovanejšej aplikácii princípu akcie a reakcie. Šplhajúca opica pôsobí na lano silou, presne takou istou silou pôsobí lano na opicu. Napätie lana sa cez kladku prenáša, preto lano pôsobí rovnakou silou aj na druhú opicu. Keďže opice majú rovnakú hmotnosť, sú aj tiažové sily rovnaké. Celkové sily pôsobiace na opice sú rovnaké, preto aj ich zrýchlenia budú rovnaké. Teraz je potrebná ešte kinematická úvaha, z ktorej vyplynie, že pri rovnakom zrýchlení a rovnakých počiatočných podmienkach (obidve opice v kľude) budú pohyby oboch opíc presne rovnaké, teda opice sa stretnú pri kladke. Striktne vzaté, pri nekonštantnom zrýchlení je táto kinematická úvaha mimo rámca stredoškolskej fyziky, hoci nie je ťažká.

Tu vlastne diskusia končí, máme výsledok, o správnosti ktorého nemožno pochybovať, iba ak by sme pochybovali o Newtonových rovniciach. Prečo teda píšeme tento článok? Lebo podľa výsledku cítiť, že pravdepodobne je možné dostať ho i priamo jednoduchou úvahou. Je totiž príliš symetrický — opice sa stretnú pri kladke.

Ukážeme si príklad takej úvahy, isto to nebude jediný možný spôsob. Ba možno sa niekomu bude zdať i príliš komplikovaný. Domnievame sa však, že ukážeme oveľa hlbšie, v čom spočíva jadro riešenia, navyše sa vyhneme akejkoľvek kinematike, a teda vyriešime i prípad nerovnomerného zrýchlenia opíc. De jure teda neopustíme aparát stredoškolskej fyziky, hoci de facto použijeme metódu myšlienkového experimentu, ktorý patrí do „vyššej školy fyzikálneho umenia“. Čitateľovi bude azda z ďalšieho jasné, čo tu máme na mysli.

Úloha je znázornená na obr. 1. Keďže autor nevie nakresliť opicu, na obrázku sú dve telesá geometrického tvaru. Ba dokonca je na obrázku explicitne znázornená schematicky aj Zem — aby sme na ňu nezabudli — ako príčina tiažovej sily.

Teraz trik: sily sa nezmenia — a teda úloha sa vôbec nezmení — ak si situáciu myšlienkovito predstavíme tak, ako je znázornená na obr. 2. Je tu hypotetická situácia: Nech existujú dva druhy gravitácie, „šrafovaná“ a „nešrafovaná“. „Šrafovaná Zem“ pôsobí iba na „šrafované“ teleso (opicu), „nešrafovaná Zem“ iba na „nešrafované“ teleso. Teda

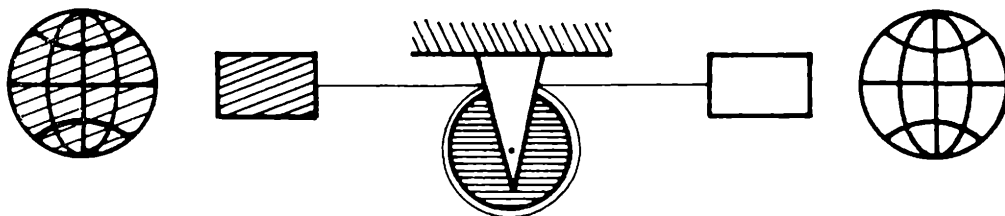


Obr. 1

Obr. 2

„nešrafovaná Zem“ nepôsobí na „šrafované“ teleso a naopak. Takáto hypotetická situácia neprotirečí žiadnym zákonom klasickej mechaniky*), môžeme teda vychádzať z takto pozmenenej, ale ekvivalentnej úlohy.

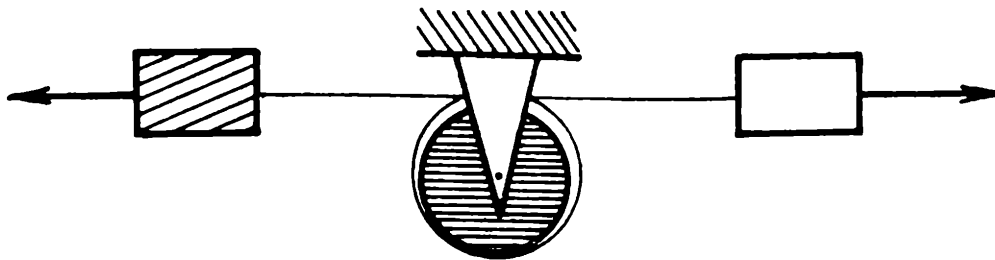
Teraz druhý trik: Zemegule odtiahneme od seba a situáciu vyrovnáme do priamky tak, ako je to znázornené na obr. 3. Zrejme pre skúmanie pohybu opíc voči kladke je nová situácia ekvivalentná pôvodnej. Navyše si všimnime, že v tomto usporiadaní kladka prestáva hrať dynamickú úlohu.



Obr. 3

Nakoniec tretí trik: Zrušme zemegule a ich pôsobenie nahradíme hypotetickým „antigravitačným zákonom“ „Šrafované“ a „nešrafované“ telesá sa navzájom odpudzujú konštantnou silou nezávislou na vzdialenosti o veľkosti $m.g$. (obr. 4). Silové pôsobenie je opäť ekvivalentné

*/ Situácia protirečí až zákonom všeobecnej teórie relativity, ale to pre našu úlohu nie je podstatné.



Obr. 4

predchádzajúcim situáciám, opäť neprotirečí žiadnym zákonom klasickej mechaniky. Podstatné tu je, že sme najprv rozvinuli situáciu do priamky, až potom sme mohli nahradiť tiažové sily vzájomným pôsobením dvoch telies (opíc).^{*} Ináč by nebol pre toto vzájomné pôsobenie splnený zákon akcie a reakcie.

Teraz sme už u konca. Kladka je zbytočná, vonkajšie pôsobenie na telesá neexistuje, iba ich vzájomné pôsobenie. Opice spolu s lanom tvoria teda izolovanú sústavu. Pretože bez vonkajšieho pôsobenia ťažisko celej sústavy musí ostať na mieste, môžu sa opice navzájom pohybovať, ale iba tak, aby ich celkové ťažisko bolo v klude. Opice sa teda musia stretnúť pri kladke.

Odporúčame čitateľovi, aby si všetky kroky predumal. Ak v tom prípadne nájde potešenie, vychutnať všetky argumenty, nech porozmýšľa, či sa fyzikou nechce vážnejšie zaoberať. Fyzika je krásna vec a myšlienkové experimenty patria k tomu najkrajšiemu, čo v nej existuje. Pravda, tu sme nevyčerpali celé spektrum možného použitia myšlienkových experimentov, nakoniec, celé to bola iba pekná hračka. Ale domnievame sa, že táto hračka ukázala podstatu úlohy oveľa hlbšie ako iné možné postupy riešenia. Pravda - myšlienkové experimenty vo fyzike sú vážnou vecou, stačí povedať, že napríklad *Einstein* bol ich majstrom a na nich sa dostal až k teórii relativity.*). Ale to už je mimo rámca nášho hrania.

Na záver si autor dovoľuje poďakovať R. Zajacovi a J. Pišútovi za niekoľko príjemných diskusií, z ktorých vyšiel podnet na napísanie tohto článku.

Literatúra :

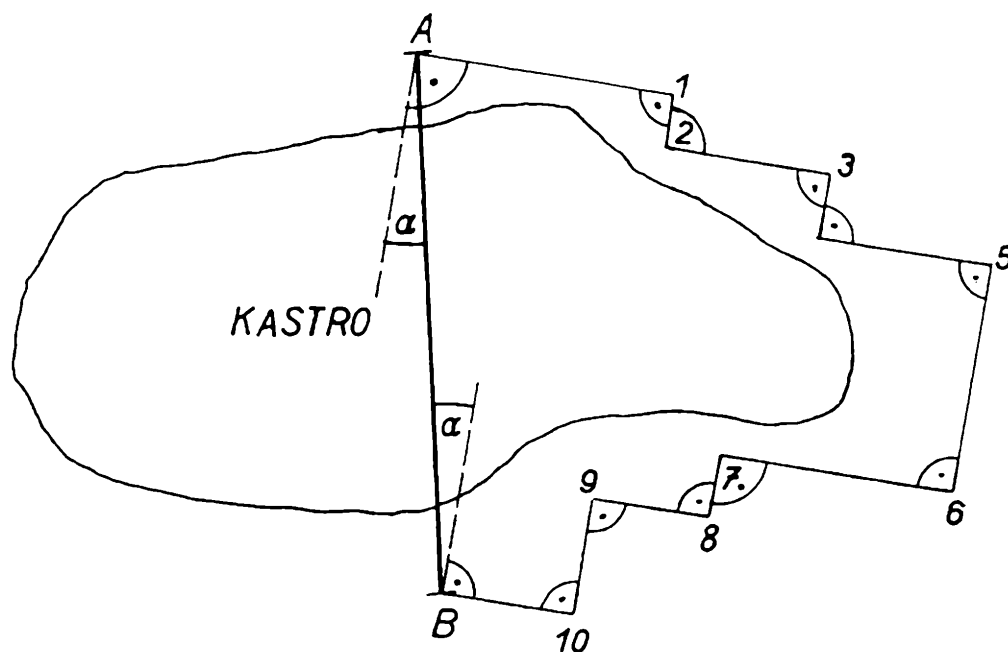
- [1] V. Černý, Relativita — vec jednoduchá ale rafinovaná I.—III. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 59 (1980/81), str. 301, 348, 445.

^{*}/ S niektorými Einsteinovými myšlienkovými experimentami sa môže čitateľ zoznámiť v autorovom článku o teórii relativity v tomto časopise. [1] Poznamenajme, že tam spomínaný „Einsteinov vagón“ v súvislosti so vzťahom $E = mc^2$ má k našej „hračke“ veľmi blízko.

Akvadukt na ostrově Samos

STANISLAV HORÁK, Praha

Na ostrově Samos (odtud pocházel *Pythagoras*) byl kolem r. 530 př. n. l. (tedy ještě za života *Pythagora*) prokopán horou Kastro tunel, jímž byla ze severní části ostrova přiváděna voda do města v jižní části. Na tehdejší dobu to bylo vynikající dílo. Tunel (dosud existuje) je asi 1 km dlouhý, 2 m široký a 2 m vysoký. Po jedné jeho straně je hluboký žlab (na začátku 2 m hloubky, u ústí 8 m), v němž bylo uloženo potrubí pro vodu. Do tunelu bylo prokopáno několik vertikálních šachet pro větrání a pro odstraňování vykopané horniny. Tunel — a to je to nejza-



jímavější — kopaly současně dvě party dělníků proti sobě; jedna ze severu, druhá z jihu. Někde uprostřed se setkaly. Rozdíl ve vodorovném směru byl necelých 10 m, ve svislém asi 3 m. Tenkrát, kdy se používaly velmi primitivní pomůcky, to byl úctyhodný výkon. Nás bude zajímat, jak si stavitel tunelu — jmenoval se *Eupalinos* a byl synem *Naustrophos* z *Megary* — při stavbě tunelu asi počínal.

Na přiloženém obrázku je znázorněn plán hory Kastro (220 m n. m.), bod *A* představuje vchod a bod *B* východ tunelu. *Eupalinos* spojil oba konce tunelu vně hory lomenou čarou *A123... 89 10B*. Každé dvě sou-

sední úsečky jsou k sobě kolmé. Eupalinos položil vlastně na terén triangulační pravoúhlou síť. Jeden směr úseček sítě svíral se směrem tunelu úhel α , který určoval směr kopání. Za poznámku stojí, že triangulační síť se používá dosud při vyměřování obsahů větších ploch či výšek. Přitom se však síť nemusí skládat jen z pravoúhlých trojúhelníků.

Je vidět, že metoda používaná ve starém Řecku vydržela dva a půl tisíce let.

Možná, že někoho z čtenářů napadne, že se jako teoretik stavby zúčastnil i sám Pythagoras. Vždyť *Thales*, učitel Pythagorův, sám své matematické vědomosti využíval v praxi (určení vzdálenosti lodí od břehu, stanovení výšky pyramidy). Avšak podle zpráv pozdějších řeckých matematiků byl Pythagoras proti tomu, aby se teoretické vědomosti prakticky využívaly. Naproti tomu žili tehdy matematicky vzdělaní lidé, kteří své vědomosti využívali v praxi a tím ulehčovali práci sobě i jiným. Příkladem je právě Eupalinos a o 100 let později stavitelé Parthenonu, *Iktinos* a *Kallikrates*.

Nakonec ještě poznámka. Kolem r. 700 př. n. l. dal židovský král zřídit podobný akvadukt, který sváděl vodu skrz kopec do Jeruzaléma. Uvědomme si, že mezi rokem 700 a 530 př. n. l. je sice rozdíl 170 let, ale tehdy to pro pokrok lidstva neznamenal vůbec nic. Aby se zjistilo, zda při výkopu se udržuje správný směr tunelu, prorážely se svislé šachty. Tak se stalo, že vznikl meandrovitě klikatý tunel dvakrát delší, než je vzdálenost obou konců tunelu. Tím je potvrzeno to, co v současné době je samozřejmé, tj. že teoretické výzkumy jsou pro praxi důležité.

Boethius - učenec na předělu epoch

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc., MFF UK Praha

V dějinách lidstva se období příznivá pro rozvoj věd střídala s obdobími jejich stagnace či dokonce úpadku. Římský vzdělanec, o kterém budeme hovořit, žil na sklonku epochy antické řecké vědy, napsal v *latinském jazyce* shrnující práce o výsledcích této vědy a pomohl tak vytvořit základ, ze kterého později vyrůstaly první výhonky scholastické vědy ve středověké Evropě.

Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius (asi 480—524) už dlouhým sledem svých jmen naznačuje svůj původ z vyšších vrstev tehdejší společnosti. Rod Aniciů patřil k římské aristokracii, jeho členové zastávali vysoké úřady, v posledních staletích římského imperia z něho pocházeli i dva císařové. Ale krátce před narozením Boethia zaniklo zá-

padořímské císařství (r. 476) rozvrácené nájezdy Visigotů, Vandalů a Ostrogotů v průběhu 5. století; doba byla velmi neutěšená.

Mladý Boethius záhy ztratil otce, ale ujal se ho vzdělaný šlechtic *Symmachus* a umožnil mu studium antické vědy přímo z řeckých pramenů i latinských překladů. Není jisté, zda mladík studoval v Athénách, spíše se zdá, že se musel spokojit se staršími spisy dovezenými z řeckých vědeckých center v dřívějších klidnějších dobách. Tento dojem vyvolává okolnost, že Boethius nikde necituje své současníky, ale vždy jen autory žijící před počátkem 5. století. Antické kultury si velmi vážil, ač jiní křesťané ji odmítali jako pohanskou a svým postojem přispěli k jejímu zániku.

Od chlapeckých let žil Boethius s celou římskou obcí pod nadvládou Ostrogotů, jejichž král *Theodorich* se v r. 493 prohlásil císařem, ale sídlil v Ravenně, ne v Římě. Stejně jako jiní kmenoví vládcí, kteří ovládli části bývalé římské říše, chtěl své sídlo vybavit vymoženostmi antiky (kulturou bydlení, hudebními nástroji, vodními hodinami apod.). Proto pozval Boethia jako znalce antických spisů ke svému dvoru, ten se zřejmě osvědčil v této roli; nový císař ho přijal do svých služeb, jmenoval ho konsulem (později i jeho dva syny) a svěřil mu další úřady. Boethius využíval svého vlivu na císaře k ochraně svých přátel z kruhů staré římské šlechty, patrně se i sám podílel na přípravě nějaké akce ke svržení nadvlády Ostrogotů, byl však zatčen, delší dobu vězněn a nakonec popraven v r. 524 či 525.

Ve vězení napsal Boethius spis *O útěše filozofie*, který se opisoval i vydával tiskem po celý středověk. Nás však zajímají jeho dřívější práce věnované matematice a logice, překládal totiž do latiny opisy prací Eukleidových, Archimedových a Ptolemaiových, filozofické spisy Platonovy a Aristotelovy, logické práce různých autorů, rozmanité přehledy a komentáře ke starověkým spisům. Pro všeobecné vzdělání mládeže v aritmetice, hudbě, geometrii a astronomii napsal učebnice*). Ve spisu *Arithmetica* popisuje počítání na abaku, do *Geometrie* zahrnul určitý výklad z Eukleidových *Základů* apod. Boethius zřejmě nebyl originálním tvůrcem v oblasti matematiky, ale dovedl napsat učebnice splňující požadavky doby.

Výraznější původnost se přisuzuje jeho pracím v logice, kde vytvořil *vlastní systém výrokové logiky*. I když jistě měl antické vzory, vložil do zpracování výrokové logiky svou důslednost v klasifikaci. Důkladně studoval zejména implikaci a ekvivalenci, ostrou disjunkci, konjunkci a negaci, klasifikoval výroky složené (podle počtu spojek), popsal mož-

*/ Někteří autoři-historici považují Boethia za autora názvu *quadrivium* (= čtyřcestí) pro tento typ vzdělání ve čtyřech oborech. Jak víme, nižší vzdělání bylo zahrnuto v tzv. *triviu*; do vědeckého jazyka proniklo slovo „triviální“ ve významu snadný, zřejmý, nenáročný.

nosti zaměňování jedněch spojek jinými, sepsal přehledy správných úsudků apod. (Určitou část poznatků obsažených v díle Boethiově získávají dnešní středoškoláci v učivu věnovaném základům logiky.)

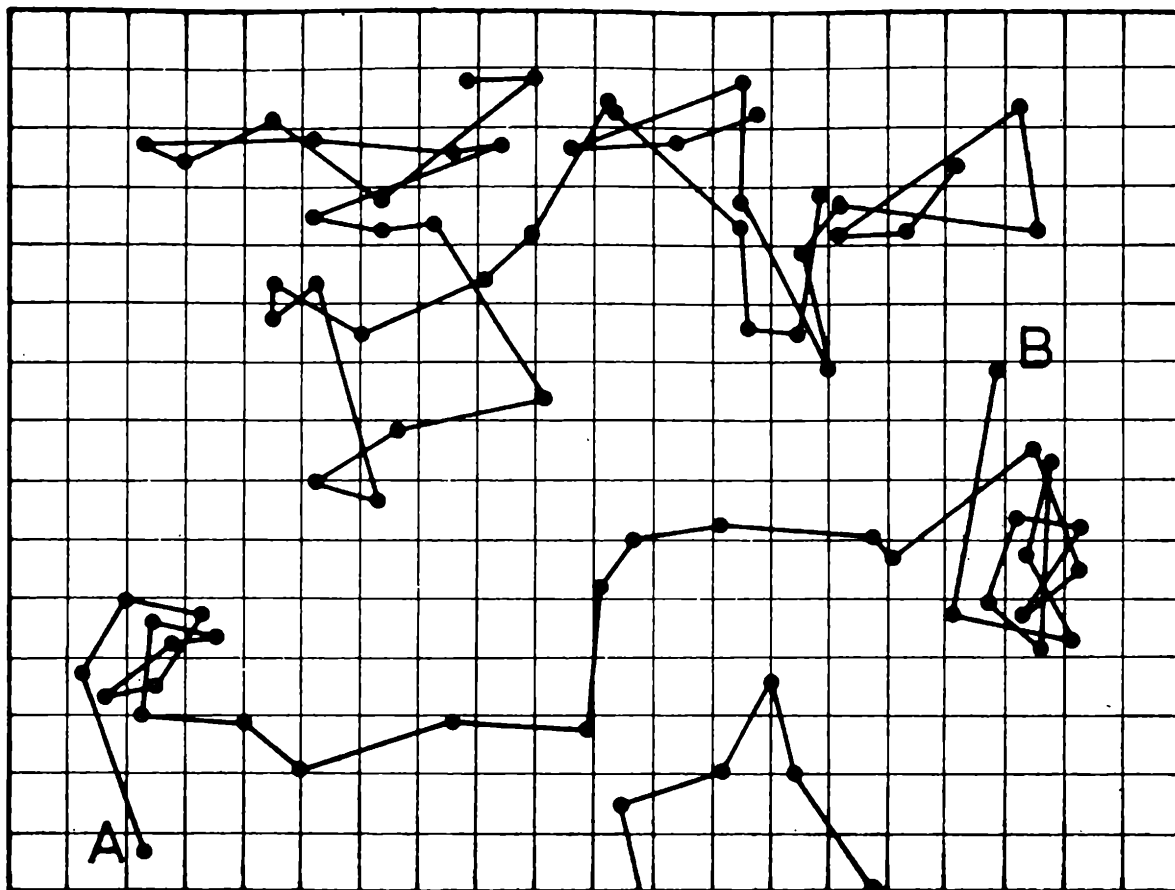
Boethiovo dílo *O hypotetickém sylogismu* dovršilo vývoj antické logiky a vytvořilo most do středověku; už v 10. století na ně navazovali předchůdci scholastiků. A právě tato role „přemostitele“ získala Boethiovi velké uznání v pozdějších staletích, kdy se latina stala vědeckým jazykem. Dokonce se mu připisovala řada děl, která nenapsal, resp. přenesení znalostí, které nemohl mít (v č. 2 tohoto ročníku Rozhledů je v Pohledu do dějin příklad takového omylu). To ovšem nic nemění na skutečném významu Boethiova díla pro přenesení aspoň části antické vzdělanosti do středověku.

História Brownovho pohybu

Botanik *Robert Brown* (1773—1858) skúmal v roku 1827 pod mikroskopom peľ rôznych kvetov vo vode, pri čom ho zaujal nepravidelný pohyb suspendovaných čiastočiek, ktorý pred ním už v roku 1819 pozoroval *Bywater* a iní. Brown byl presvedčený, že našiel „primitívne molekuly“ živej hmoty. Neskôr, po pokusoch s anorganickými suspendovanými látkami hovoril o „aktívnych molekulách“. V každom prípade neusporiadaný pohyb mal podľa Browna svoj pôvod v samotných časticiach a nie v kvapaline, v ktorej sú suspendované.

Trvalo vyše pol storočia, kým fyzici experimentálne ukázali, že opak je pravda (*M. Gouy* 1887, *F. M. Exner* 1900). Ale všetky pokusy určitých rýchlostí pohybu neusporiadaných častíc sa skončili neúspechom. Teraz vieme, že to nemalo význam, tak ako by nemalo význam určovať podľa rýchlosti chôdze kam dospeje úplne opitý, sem a tam sa fackajúci námorník.

Prvί, čo použili predstavu o neusporiadanom pohybe molekúl kvapaliny, narážajúcich do suspendovanej látky, boli *Albert Einstein* (1879—1955) v roku 1905 a *Marian Smoluchowski* (1872—1917) v roku 1906. Obaja už predtým sa zaoberali flukтуаčnými javmi. Smoluchowski vypočítal v r. 1904 z Boltzmannovej kinetickej teórie odchýlky od konštantnej hustoty plynu, ktorý je v termodynamickej rovnováhe, vzápätí Einstein určil odchýlky od konštantnej energie. Tieto odchýlky sú však pri veľkom počte molekúl (rádovo 10^{19} v 1 cm^3 plynu) tak malé, že ich nemožno experimentálne overiť.



Pri pomerne malom počte náhodných nárazov na mikroskopické častice je náhodný pohyb suspendovaných teliesok pod mikroskopom viditeľný. Einstein v roku 1905 vypočítal veľkosť konečného posuvu častice v danom čase v závislosti od jej veľkosti a teploty a viskozity kvapaliny, v ktorej je častica suspendovaná. Einsteinove výpočty, spočívajúce na Boltzmannových molekulárne kinetických predstavách, sa potvrdili s takou presnosťou, že zanovní protivníci molekulovej hypotézy (napr. nositeľ Nobelovej ceny za rok 1909 *Wilhelm Ostwald* (1853—1932)) sa presvedčili o existencii molekúl a o tom, že ich neusporiadaný pohyb je jedinou príčinou tepelných javov. Na našom obrázku je náčrt pohybu molekúl podľa Perrinových pozorovaní z roku 1909. Úsečky predstavujú spojnice polôh častíc (nie ich dráhu!) v intervaloch, trvajúcich 1/10 sekundy. Jedna častica prešla z bodu A do bodu B za 3 sekundy.

Rudolf Zajac

Řešení úlohy ze str. 118:

$$\begin{array}{r}
 600 + 198 = 798 \\
 : \quad + \quad - \\
 20 + 275 = 295 \\
 \hline
 30 + 473 = 503
 \end{array}$$

Potíže s litrem

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

Je všeobecně známo, že litr je jednou z jednotek metrické soustavy a že jako praktická jednotka objemu dostal samostatný název. Byla to dílčí jednotka, protože hlavní jednotkou byl krychlový metr. Litř byl původně definován jako objem jednoho kilogramu čisté, vzduchuprosté vody při její největší hustotě (tj. při $t = 3,99\text{ }^{\circ}\text{C} \doteq 4\text{ }^{\circ}\text{C}$) a při normálním barometrickém tlaku (tj. 101 325 Pa, dříve 760 Torr). Protože kilogram byl podle původního záměru odvozován z krychlového decimetru jako hmotnost čisté vody za dříve zmíněných podmínek, kterou tato objemová míra pojala, měla ovšem existovat rovnost 1 litř = 1 krychlový decimetr. Zbývá ještě dodat, že původně se takto odvodil gram, a to za pomoci krychlového centimetru, což navrhli a realizovali chemici v čele s Lavoisierem, kterým taková jednotka objemu i hmotnosti nejlépe vyhovovala. Teprve později byl hlavní jednotkou hmotnosti zvolen tisícinásobek gramu — kilogram, což nám dodnes činí obtíže s názvem kilogramu, který, ač hlavní jednotka hmotnosti a základní jednotka SI, má ve svém názvu předponu násobných jednotek, ačkoliv je to z hlediska hierarchie jednotek hrubý prohřešek.

Vraťme se však k litru. Řekli jsme již, že mělo platit $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$. Protože však každé měření a metrologické stanovování je zatíženo chybou, i když třeba velmi malou, nemohlo být odvození gramu, resp. později kilogramu z hmotnosti vody určitého objemu za předepsaných podmínek dokonale přesné a tím vznikl proti původnímu záměru rozdíl, který se promítl i do hodnoty litru, takže až do roku 1964 platilo, že

$$1\text{ litř} = 1\text{ l} = 1,000\,028 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3.$$

Teprve v roce 1964 přijala XII. Generální konference vah a měř rezoluci, podle níž platí, že

$$1\text{ litř} = 1\text{ l} = 1 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3 \text{ (přesně).}$$

Současně bylo také doporučeno, aby se litř jako jednotka objemu nepoužíval pro teoretické a vědecké účely.

Zmíněný nesoulad při odvozování jednotky hmotnosti byl vysvětlován hypoteticky také tím, že vzhledem ke snaze použít k experimentální práci co nejčistší vodu byla uskutečněna její mnohonásobná destilace, která snad způsobila malý rozdíl v izotopickém složení vody ve prospěch těžké vody. Tehdy se ovšem k takovým možnostem ještě přihlížet nemohlo.

Nyní krátce k odvození názvu jednotky litř. Název byl při malé úpravě převzat z názvu staré francouzské míry „litron“, používané pro su-

šiny již od středověku, doložené však až v 16. století, s hodnotou 1/16 pařížského (objemového) korce, což odpovídá zhruba dnešním 800 cm³ (tj. 0,8 litru). Ve středověké latině existuje výraz „litra“ pro objemovou míru kapalin (asi uvedené hodnoty) převzatý se staré řecké míry „λιτρο“, která byla však jednotkou „váhy“ (ve smyslu dnešní hmotnosti), rovné 12 uncím, což by zhruba odpovídalo asi 327 g. V zahraničních pramenech najdeme také jiný význam jednotka „litra“, jako v antice používané platidlo rovné 1 libře mědi. Litra byl též údajně v arabštině používaný název palestinské libry.

Ovšem značka litru „l“ (malé el), která odpovídala přijatým zásadám tvorby značek jednotek, že totiž byla dána malým písmenem, protože velká písmena u značek jednotek se používají pouze tehdy, je-li název jednotky odvozován z vlastního jména nějaké významné osoby, působila řadu obtíží, často i nejasností a omylů, protože při psaní na psacím stroji nebo při sazbě některých typů písmen velmi se podobala jedničce („l“) a byla tak s ní velmi často i zaměňována. Přes snahu rozlišit typy malého el a jedničky nepodařilo se zásadně tento problém vyřešit. Některá odvětví lidské činnosti si svévolně pomáhala tím, že místo malého písmene používala velké (L), to však činila i s jinými jednotkami (např. KG, T aj.) a celkové řešení to nepřineslo. Velká písmena se používala např. pro značení hodnot na obalech (bednách, pytlích apod.), kdy se k nápisům používalo šablon.

Aby se konečně našlo řešení, navrhovaly některé státy v Metrické konvenci (tj. v Mezinárodní organizaci vah a měr), aby se učinila výjimka z tvorby značek jednotek a zavedlo se oficiálně používání značky L pro litr. Jednání bylo dlouhé, byla zvažována řada argumentů pro i proti a jednotné stanovisko, které by se mohlo předložit Generální konferenci vah a měr, stále ještě chybělo. Přitom některé státy, které také původní návrh předložily, již tuto značku neoficiálně používaly. Na prvním místě stála Kanada. A v této době došlo k akci, která mnohému nutně vyloudí úsměv a kterou bychom právem mohli nazvat „kanadským žertíkem“. Během roku 1978 vydala chemická fakulta University z Waterloo v kanadském Ontariu 95 číslo svého časopisu Chem-News (datované april 1978) věnované životopisu fiktivního vědce *Clauda Emila Jana-Baptisty Litra*, který údajně žil v letech 1716 až 1778 ve Francii. Tím mělo být v žertu prokázáno, že osoba tohoto jména žila a že tedy může značka litru být velké el. I když vše, co se týkalo tohoto jmenovce, bylo vymyšleno, vedlo to nakonec k tomu, že bylo na XVI. Generální konferenci vah a měr, konané v roce 1979 v Paříži, přijato usnesení, že je pro jednotku litr připuštěno používat dvojí značky, malého resp. velkého písmene el. Má se však na příští konferenci rozhodnout, která z obou značek bude v budoucnu trvale a jednoznačně používána.

Nyní se seznámíme s obsahem biografického článku zmíněného ča-

sopisu, který byl prý uveřejněn k 200. výročí smrti této „metrologicky významné osobnosti“.

Claude Emile Jean-Baptiste Litre se narodil 12. února 1716 ve Francii ve vesnici Margaux v kraji Médoc. Jeho otec byl malovýrobcem vinných lahví, stejně jako jeho dědeček a pradědeček. Litrovy lahve byly dokonce významnými pomocníky bordeauxského vinařství již od roku 1620. Rodinnou tradicí bylo obalové sklo pro kapaliny a je nepochybné, že problematika uskladňování kapalin spolu se znalostmi vlastností skla ovlivnily zásadně Litrovy pozdější práce v měření objemu. V 16 letech, kdy začal projevovat svoje matematické nadání, byl poslán do Paříže, aby tam studoval u *Pierrera de Maupertuis* (1698 až 1759). U něho se naučil také vědeckému způsobu myšlení.

V roce 1730 bylo ve vědeckých kruzích Francie diskutováno o správnosti Newtonovy teorie týkající se tvaru Země. Podle *Newtona* (1643 až 1727) měla Země tvar sféroidu poněkud zploštělého na pólech, což Newton vysvětloval působením odstředivých sil v důsledku rotace Země. Aby bylo možno k Newtonově teorii zaujmout objektivní stanovisko, rozhodla francouzská Akademie věd uskutečnit měření zakřivení Země jednak na rovníku, jednak v blízkosti pólu. Prvního měření konaného v r. 1735 v Peru se ujala expedice pod vedením význačného zeměpisce *La Condamine* (1701 až 1774), na druhé měření ve švédském Laponsku se vypravila v roce 1736 expedice vedená *Maupertuisem*. Této výpravy se účastnil mladý Litre jako *Maupertuisův* asistent. Švédská královská akademie jmenovala do této výpravy jako svého oficiálního zástupce *Anderse Celsia* (1701 až 1744), profesora astronomie na universitě v Uppsale. Z obou se stali dobří přátelé. Je téměř nepochybné, že Celsius, který se dosud zabýval přesným měřením a který byl zastáncem stodílkových stupnic pro měření kvantitativních veličin, měl rozhodující vliv na Litrovo pozdější rozhodnutí vyrábět vědecké přístroje. Patnáct let následujících po návratu z úspěšné expedice je v Litrově životním běhu velmi mlhavých, je málo historických faktů a informací. Je známo pouze to, že v roce 1740 založil výrobu a prodej vědeckých přístrojů a že se vrátil do Bordeaux, aby zdokonalil sklářskou techniku.

V roce 1751 měl Litre již velmi dobré postavení. V září téhož roku měl *Buillaume Rouelle* (1703 až 1770), který byl proslulým demonstrátorem chemických pokusů v Jardin du Roi (v Královské zahradě), přednášku o Methodách v chemii, při které podrobně předváděl Litrovo chemické sklo. Do konce roku 1751 se zečtyřnásobil rozsah Litrových pokusů. Během padesátých let stal se Litre prakticky monopolním výrobcem chemických aparátů. V šedesátých a sedmdesátých letech Litrova proslulost v celé Francii vzrůstala a jeho výrobky se stávaly již tradicí a zásadně přispěly k *Lavoisierově* (1743 až 1794) „Chemické revoluci“

Litre nebyl ovšem chemikem, z tohoto hlediska nemůže být s Lavoisierem srovnáván, byl však mnohem více nežli úspěšným obchodníkem. Uměl například velmi přesně měřit objem, zavedl takovou technologii výroby skleněných válců, že tolerance jejich vnitřních průměrů činila max. 0,1 % po celé délce válců, nikdo předtím nedovedl tak přesně graduovat skleněné válce na desetiny, setiny a někdy dokonce i na tisíce. Jeho graduované válce a byrety (jež sám vynášel a také nazval) používali chemici v celé Evropě.

Jeho nejvýznamnějším spísem jsou Volumetrické studie (*Études Volumétriques*). Toto dílo přeložil do angličtiny *Joseph Priestley* (1733 až 1804) v roce 1764 a do němčiny *Karl Wilhelm Scheele* (1742 až 1786).

V roce 1765 navštívil Anglii, aby od Královské společnosti obdržel čestnou zlatou medaili. Litre na oplátku dovezl Společnosti sadu skleněných válců. Bohužel tyto válce nepřežily pokusy sira *Humpryho Davyho* (1778 až 1829), který v nich v roce 1812 vyráběl chlorodusík.

V následujících letech prochází Litre údobím kulminujícím pracovní aktivity provázené velkou řadou patentů, o některé z nichž musel vést spory s německými, benátskými a českými sklárnami. Přestože mu byla ze strany pařížských vědců projevována snad až pochlebnictvím zaváňující úcta, nebyl nikdy pojat mezi členy Akademie věd, přesto, že svými přístroji členy této Akademie vybavoval a s mnohými z nich byl v úzkém přátelském vztahu. Je možné, že to bylo dílem Lavoisiera, který asi nechtěl aristokratickou atmosféru Akademie narušit přítomností „dodavatele přístrojů“. Zdá se však, že odepření takové vědecké pocty se Litra nijak zvláště nedotklo, pro jeho poklidnou, trpělivou až flegmatickou povahu.

Litre zemřel uprostřed tvrdé, čínorodé práce, jinak v dobrém zdravotním stavu 5. srpna 1778 na choleru, jejíž epidemie v tomto roce v Paříži řádila.

Ještě se krátce vrátíme k několika myšlenkám z jeho díla Volumetrické studie. V tomto díle volil za etalonový objem míru velmi blízkou „královské odměrce“ (*flacon royal*), zavedené Jindřichem IV. v roce 1595 pro odměřování vína. Současně však uvádí, že v některých racionálních soustavách jednotek jeví se výhodnějším vyjadřovat objem kapaliny nepřímou, a to hmotností rtuti. Litrov sen o nové soustavě se uskutečnil až 15 let po jeho smrti, kdy známý matematik *Lagrange* (1736 až 1813) byl jmenován do čela komise, která takovou soustavu měla navrhnout. V roce 1795 se pak zrodil metrický systém. Litrova myšlenka byla přitom přijata pouze s tím rozdílem, že namísto rtuti se za normální volumetrickou kapalinu volila voda. Chemik *Antoine de Fourcroy* (1755 až 1809), který před vytvořením díla zásadního významu o chemickém názvosloví spolu s Lavoisierem pečlivě prostudoval přístrojovou techniku vyrobenou v Litrových podnicích, byl tím, kdo první navrhl, aby pro jednotku objemu bylo použito Litrovo jméno. Tak zní fiktivní životopis.

Na konec článku *Ken Woolnera* je připojena poznámka o velkých obtížích, s nimiž se setkal při sestavování Litrova životopisu. Lituje, že Litre nepublikoval, že se ztratila jeho korespondence s Celsiem a že pro svou rozbitelnost nezůstaly žádné památky jeho chemického odměrného skla. Prosí též o další pomoc širokou čtenářskou obec.

Potud článek, který je v originále ještě doplněn Litrovou podobiznou od neznámého autora a soudobými vyobrazeními Priestleyovy a Lavoisierovy aparatury, jejichž části jsou údajně Litrovými výrobky.

Závěru tohoto pojednání není jistě třeba, je jen možno při čtení kanadského pojednání vzpomenout také našeho všemělce Járy Cimermana, k jehož odkazu se mnozí z nás hlásí.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Z umělecké dílny profesora Ypsilonu

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

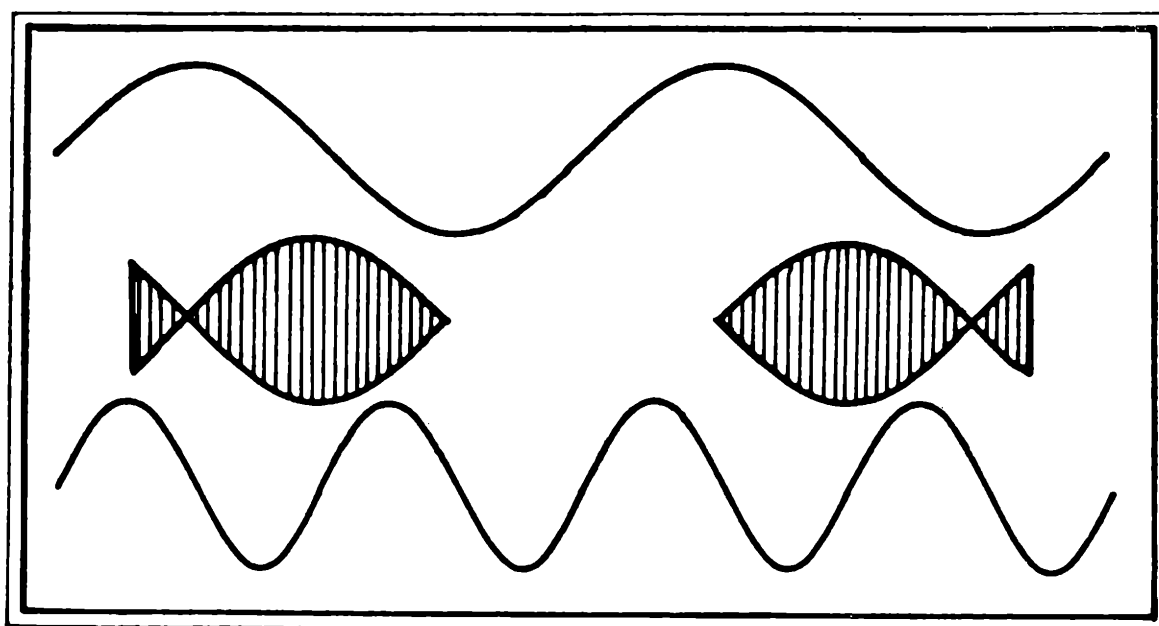
„Ve své malířské tvorbě vycházím z přesvědčení, že adekvátní obraz reality může podat pouze matematika, že jedině její prostředky umožňují zmocnit se skutečnosti všestranně, umocnit ji a přetvořit v umělecké dílo,“ prohlásil profesor Ypsilon, když na přehlídce zájmové činnosti žáků a učitelů školy zahajoval výstavu svých obrazů. „Nový směr, jehož jsou mé obrazy průkopníkem, se neobrací k pohodlnému konzumentu výtvarného umění, ale vyžaduje, aby divák iniciativně spolupracoval s tvůrcem díla, aby jeho obrazy aktivně dotvářel. Na druhé straně však můj novátorský postup umožňuje uměleckou tvorbu i adeptům, kteří vůbec neumějí vzít štětec do ruky! K vytvoření působivého díla stačí jen trocha fantazie a elementárních matematických znalostí...“ Posudme, do jaké míry jsou tvůrčí výboje profesora Ypsilonu tímto krédem skutečně prostoupeny, a to na reprodukcích jeho obrazů, které se na přehlídce setkaly s největším ohlasem.

Vezměme nejprve obraz „Setkání v akváriu“, který je reprodukován na obr. 1. Diváci, kteří nejsou v matematice příliš zběhlí, vidí na tomto obraze pouze jistou množinu matematických znaků a symbolů a jejich umělecký zážitek je nulový. Jak jiná je však situace u diváka v matematice aspoň trochu školeného! Do roviny obrazu umístí v duchu kartézskou

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \frac{7}{4}\pi \wedge |y| \leq |\cos x| \} \\
 M_2 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 2\pi \wedge y = 2 + \sin x \} \\
 M_3 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 2\pi \wedge y = -2 + \sin 2x \} \\
 M &= M_1 \cup M_2 \cup M_3
 \end{aligned}$$

Y.: SETKÁNÍ V AKVÁRIU

Obr. 1



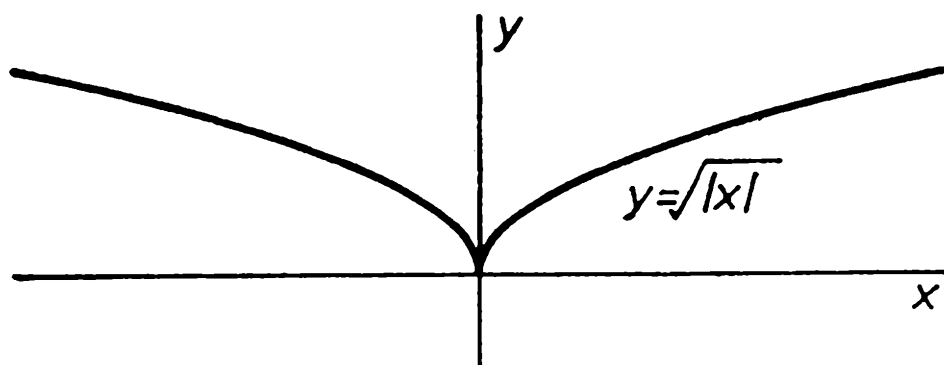
Obr. 2

souřadnicovou soustavu Oxy tak, že její počátek O je ve středu obrazu a její osy jsou rovnoběžné s hranami rámu, který má tvar pravoúhelníka. (Takto zvolená souřadnicová soustava je východiskem pro vizuální ztvárnění každého díla profesora Ypsilonu.) Jejím prostřednictvím pak divák přiřadí prvkům množiny M , kterou vytvořil umělec, příslušné body jeho plátna. Touto transformací abstraktně-matematického díla „Setkání v akváriu“ do oblasti zrakového vnímání vznikne oku lahodící kompozice na obr. 2. Za svůj umělecký výkon je divák odměněn nejen pocitem estetické libosti, ale i uspokojením z aktivní tvůrčí činnosti.

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 4\} \\
 M_2 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1 \wedge y = 1 + \sqrt{|x|}\} \\
 M_3 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x-1| \leq 1 \wedge y = -2 + \sqrt{|x-1|}\} \\
 M_4 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x-2| \leq 1 \wedge y = \sqrt{|x-2|}\} \\
 M_5 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \wedge y \leq -1 - |x-4|\} \\
 \\
 M &= M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5
 \end{aligned}$$

Y: MĚSÍČNÍ NOC

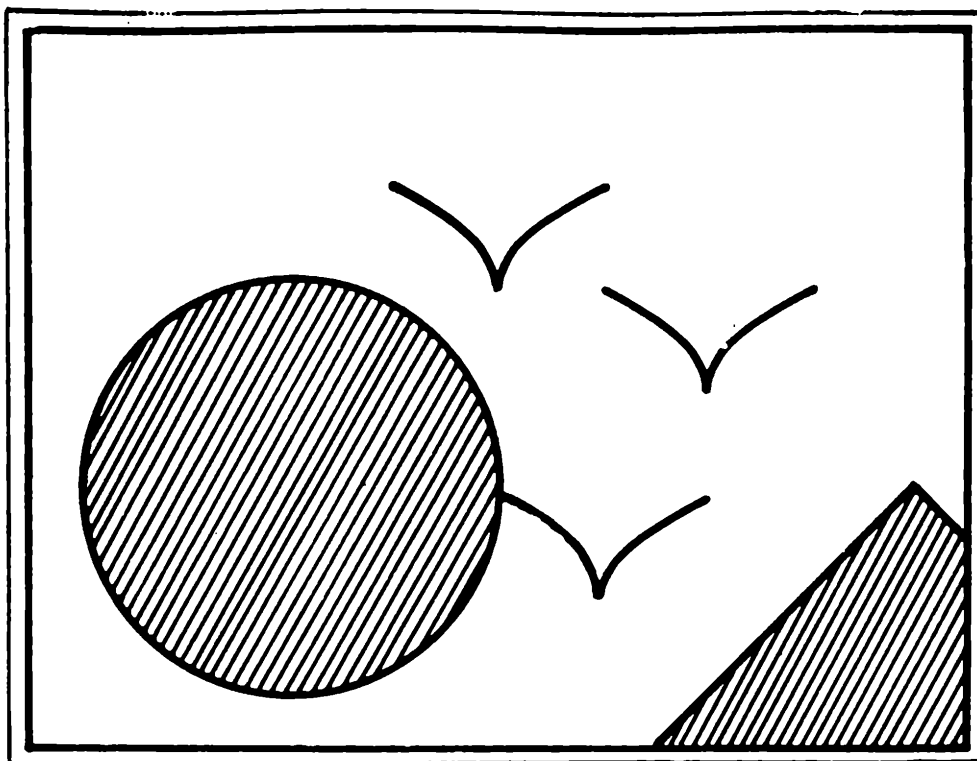
Obr. 3



Obr. 4

Další obraz profesora Ypsilonu, nazvaný „Měsíční noc“, je reprodukován na obr. 3. Pokud na vás nedýchá velebností měsíčního úplňku a tesknou osamělostí nočních letců, připomeňte si graf funkce $y = \sqrt{|x|}$ (viz obr. 4) a rozmyslete si postup, který umožňuje z tohoto grafu odvodit grafy funkcí $y = 1 + \sqrt{|x|}$, $y = -2 + \sqrt{|x-1|}$ a $y = \sqrt{|x-2|}$. Snad uslyšíte šumění perutí alespoň při pohledu na obr. 5, na němž je Ypsilonova matematická abstrakce přetavena do formy přístupnější!

Chcete-li dále porozumět Mistrovu obrazu „Husité na Baltu“, který je reprodukován na obr. 6, sestrojte si grafy funkcí $y = 3^{|x|}$ (viz obr. 7) a $y = 3^{-|x|}$ (viz. obr. 8). Uměli byste vysvětlit, jakým způsobem je dostanete ze známého grafu funkce $y = 3^x$? Výsledkem vašeho přetvoření Ypsilonova díla by měl být obr. 9, na němž je Mistrův obraz zpřístupněn chápání i té části umělecké veřejnosti, která se v matematice orientuje jen s velkými obtížemi.



Obr. 5

$$M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1 \wedge 2 \geq y \geq 3^{|x|} - 1\}$$

$$M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1 \wedge 3^{-|x|} - 1 \geq y \geq -\frac{2}{3}\}$$

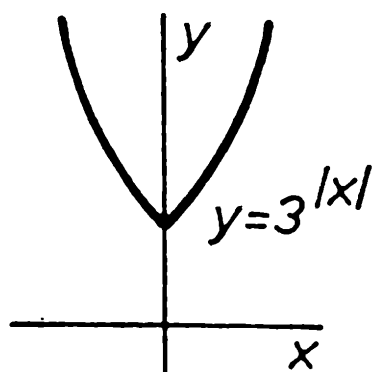
$$M_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq \pi \wedge y = -\frac{3}{2} + \cos 2x\}$$

$$M_4 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq \pi \wedge y = -2 + \cos 2x\}$$

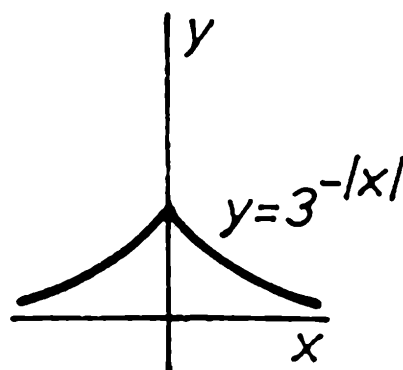
$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$$

Y.: HUSITÉ NA BALTU

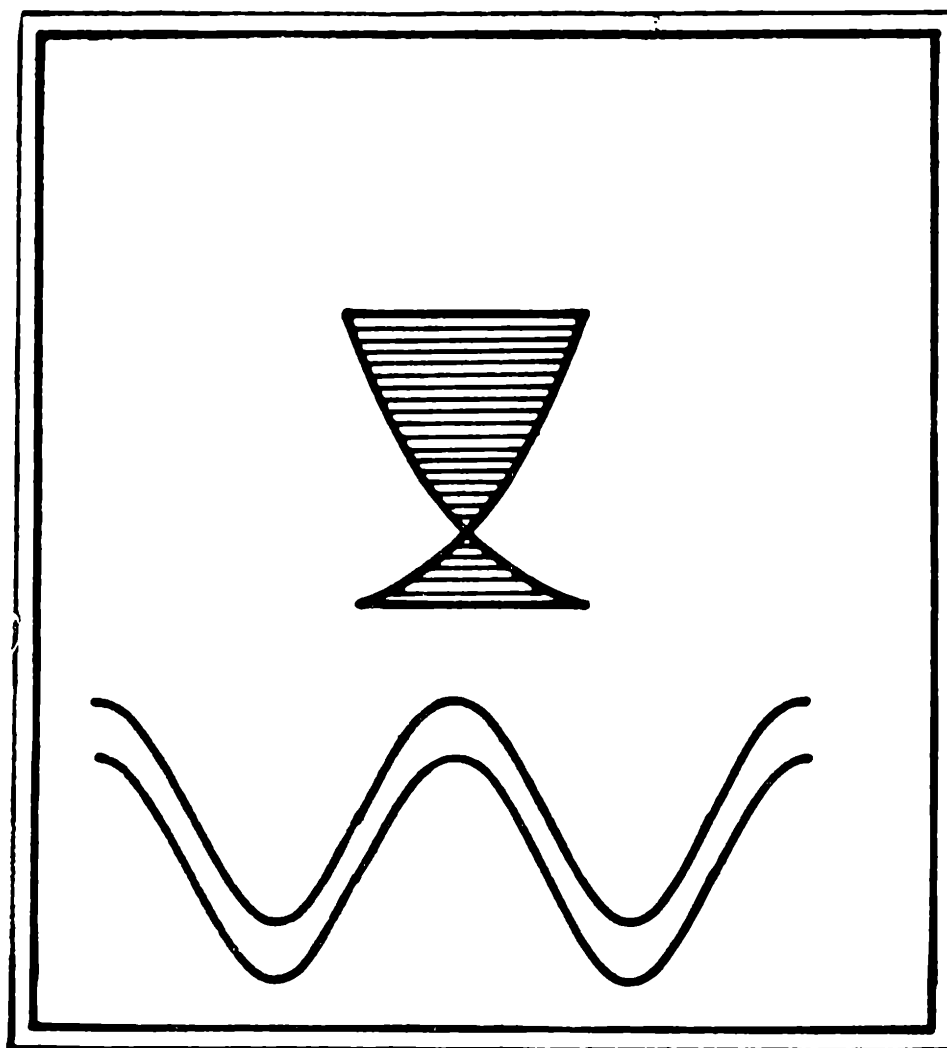
Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8



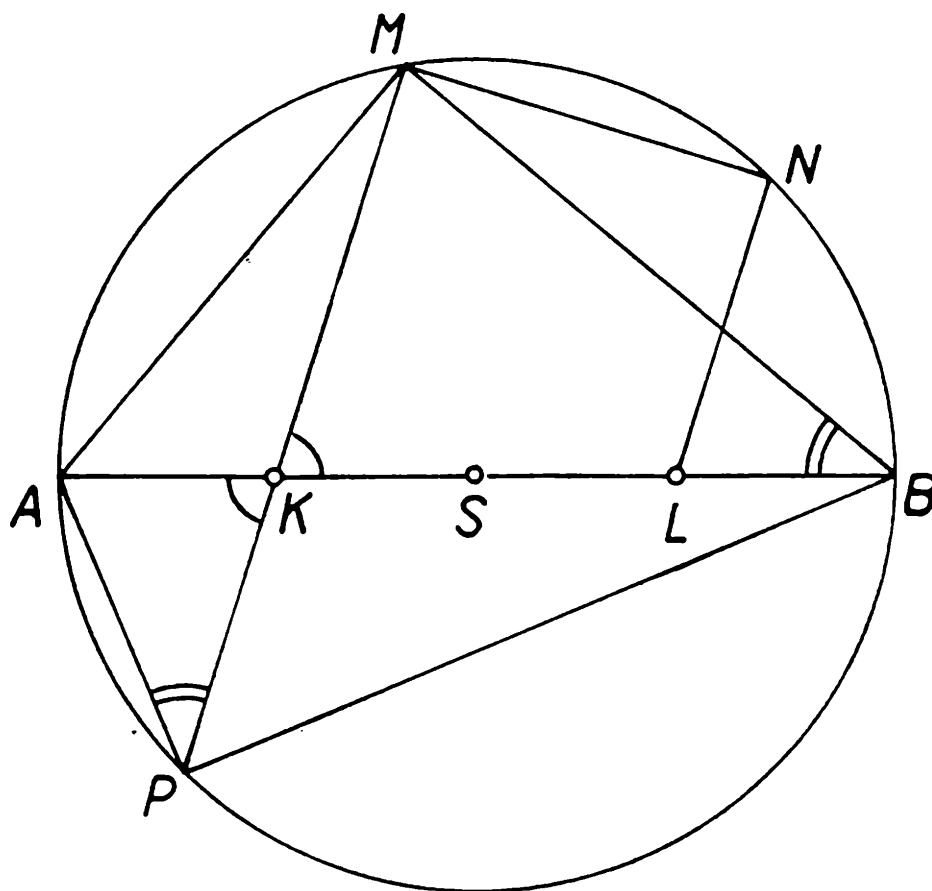
Obr. 9

Z kruhů blízkých profesorovi Ypsilonovi se proslýchá, že v současné době pracuje na monumentální fresce „Řekové před Trójou“, kterou chce dokumentovat, že jeho nový umělecký směr zvládne i náměty nejaktuálnější. Profesor Ypsilon si však přesto najde čas k tomu, aby zhodnotil všechna umělecká díla vytvořená jeho novou metodou, která mu zašlete k posouzení, a postará se, aby čtenáři Rozhledů byli s nejlepšími seznámeni.

Z geometrie kružnice

STANISLAV HORÁK, Praha

Je dána kružnice se středem S a její libovolný průměr AB . Na tomto průměru jsou zvoleny dva různé body K, L tak, že $|SK| = |SL|$. Body K, L jsou vedeny dvě rovnoběžné přímky, které na kružnici vytnou (v téže polorovině vyřazené přímkou AB) body M, N . Máme dokázat, že pro každé dvě rovnoběžky KM a LN je $|KM| \cdot |LN| = \text{konst.}$



Důkaz (obr.). Přímka KM protne po druhé kružnici v bodě P . Evidentně platí

$$|KP| = |LN|. \quad (1)$$

Nyní dokážeme podobnost

$$\triangle APK \sim \triangle MBK.$$

Podobnost trojúhelníků se zjistí na základě věty (*uu*), neboť

1. $\sphericalangle APK \equiv \sphericalangle APM = \sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle MBK$ (obvodové úhly nad tětivou AM)
2. $\sphericalangle AKP = \sphericalangle MKB$ (úhly vrcholové).

Tím je naše tvrzení dokázáno, a můžeme proto psát úměru

$$|AK| : |PK| = |KM| : |BK|,$$

z čehož

$$|KM| \cdot |KP| = |AK| \cdot |BK| = \text{konst.}$$

Po dosazení z (1) za KP dostaneme výsledek

$$|KM| \cdot |LN| = |AK| \cdot |BK| = \text{konst.}$$

Cvičení. Pokuste se dokázat, že $\triangle PBK \sim \triangle AMK$ a z toho znovu dokažte vztah $|KM| \cdot |LN| = \text{konst.}$

Uvažujte a počítejte

Uvedená písmena znamenají rozdílné číslice a každé písmeno označuje pouze jednu číslici. Uvažováním a výpočty nahraďte písmena číslicemi tak, aby vzniklá čísla vyhovovala naznačeným početním úkonům ve vodorovném i svislém směru.

$$\begin{array}{r} \boxed{a} \boxed{b} \boxed{b} + \boxed{c} \boxed{d} \boxed{e} = \boxed{f} \boxed{d} \boxed{e} \\ + \quad \quad \quad - \\ \boxed{g} \boxed{b} + \boxed{g} \boxed{f} \boxed{h} = \boxed{g} \boxed{d} \boxed{h} \\ \hline \boxed{i} \boxed{b} + \boxed{j} \boxed{f} \boxed{i} = \boxed{h} \boxed{b} \boxed{i} \end{array}$$

Řešení je na straně 107.

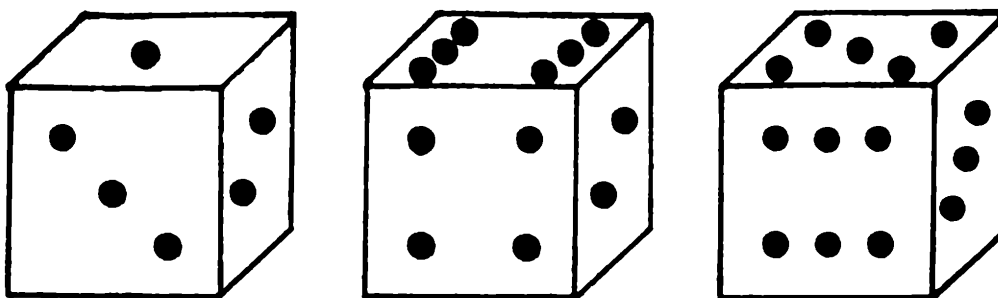
Petr Hnilička

Kostky nejen Rubikovy

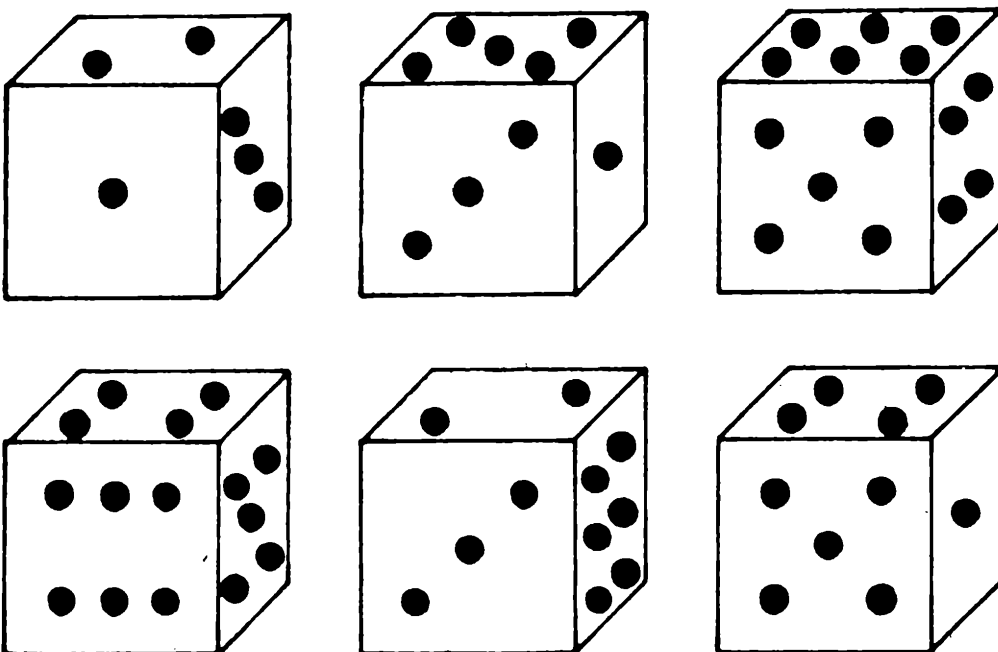
4. Hrací kostky

Znáte dobře hrací kostky? Jejich stěny jsou „popsány“ různým počtem očí — a to tak, že jejich součet na protilehlých stěnách krychle má být sedm (ne všechny prodávané kostky tuto podmínku splňují).

Na obr. 1 jsou zakreslené tři pohledy na jednu hrací kostku — nazve-



Obr. 1



Obr. 2

me ji třeba *A*. Dobře si prohlédněte polohu očí na jejích viditelných stěnách a zkuste si představit (případně dokreslit) stěny neviditelné.

Na obr. 2 jsou znázorněny dvě různé hrací kostky — naše kostka *A* a od ní odlišná (ale také „správná“) kostka *B*. Rozhodněte, o kterou kostku se v jednotlivých případech jedná. Jste hotovi? Pokud jste ve všech případech rozhodli jednoznačně, tvrdíte víc, než na co máte právo. Své řešení zkontrolujte pomocí skutečných kostek s popsányi stěnami.

Phdr. Alena Šarounová

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

5. (Hra s mincemi). Na stole je položeno $2n$ mincí lícem nahoru. Je dáno přirozené číslo $a < 2n$ ($a > 0$). Při každém tahu zvolíme a mincí, které obrátíme. Dokažte, že po konečném počtu tahů můžeme dosáhnout postavení, při kterém mají všechny mince nahoře rub.
(Došlo 11 řešení)

Milan Koman

1. způsob (Ranošová, Stejskal, Grajcar — Vargas).

Zvolíme libovolných $a + 1$ mincí (což lze, neboť $a < 2n$). Z nich při 1. tahu otočíme prvních a mincí, při 2. tahu posledních a mincí. Tím se první a poslední z $a + 1$ mincí otočí a všechny ostatní zaujmou zase původní polohu. Otočíme tak dvě z původních $2n$ mincí. Provedeme-li tento postup (dvojtať) n -krát, můžeme otočit všechny mince na rub.

2. způsob (Damborský — Kráčmar). Je-li $2n$ násobkem čísla a ($2n = ka$), je postup zřejmý. Stačí k tahů.
Nechť je tedy

$$2n = k \cdot a + l, \text{ kde } 0 < l < a.$$

Pak otočíme nejdříve k tahy prvních ka mincí na rub. Zbylých l mincí otočíme takto:

a) Nechť l je sudé číslo. Točíme $a - l/2$ mincí z rubu na líc a $l/2$ mincí z líce na rub. Na stole zůstane a mincí lícem nahoru a ostatní lícem dolů. Ty otočíme dalším posledním tahem. Potřebujeme $k + 2$ tahy.

b) Nechť l je liché číslo. Pak jsou k i a lichá čísla. Otočíme l mincí z líce na rub a $a - l$ mincí z rubu na líc. Na stole zůstane sudý počet $(a - l)$ mincí lícem nahoru a zbytek lícem dolů. Tím převedeme úlohu na případ a). Celkem potřebujeme $k + 3$ tahy.

Poznámka 1. Druhý způsob má výhodu v tom, že je kratší. Počet tahů $k + 3$ v případě b) se pro $k = 1$ již nedá snížit. Pro $k > 1$ ho lze snížit pouze na $k + 2$. Řešení najdete jistě sami.

Poznámka 2. Úlohu lze zobecnit takto: Na stole leží $m = l + r$ mincí, z nich l lícem nahoru a r rubem nahoru. Jedním tahem je možno otočit a mincí. Cílem je otočit všechny mince lícem nahoru.

a) Zjistěte, pro která l, r, a je úloha řešitelná.

b) Určete nejmenší možný počet tahů, kterými lze dosáhnout cíle. Pokud se vám podaří úlohu řešit, pošlete nám své řešení.

6. Do dané kružnice $k = (S, r)$ vepíšeme libovolný trojúhelník ABC . Průsečíky přímk AS , BS , CS s přímkami BC , CA , AB (pokud existují) budtež A_1 , B_1 , C_1 . Řešte tyto úlohy:

- Stanovte nutnou a postačující podmínku pro to, kdy bod A_1 (resp. B_1 , resp. C_1) neexistuje.
- Je možné, aby současně neexistovaly dva (tři) z bodů A_1 , B_1 , C_1 ?
- Jestliže body A_1 , B_1 , C_1 existují, potom platí:

$$\frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|BB_1|} + \frac{1}{|CC_1|} = \frac{2}{r}.$$

Dokažte.

Emil Kraemer

(Došlo 9 řešení)

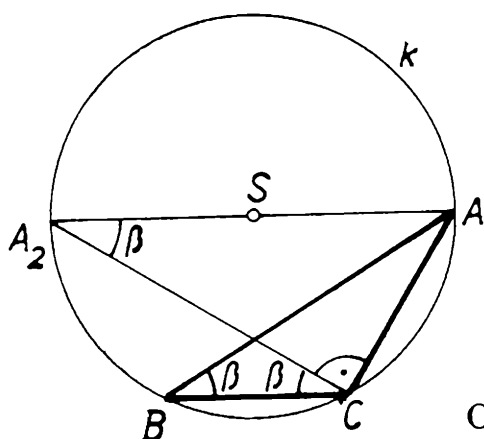
Žádné ze zaslaných řešení nebylo bezvadné. Většina řešitelů používala při řešení obsahů trojúhelníků AA_1B , AA_1C , BB_1C , BB_1A , CC_1A , CC_1B ; někteří přitom řešili příklad jen pro případ, kdy daný trojúhelník ABC je ostroúhlý. Uvedeme autorovo řešení, které je úplné.

Zvolme označení vrcholů A , B , C tak, aby při obvyklém označení velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC bylo

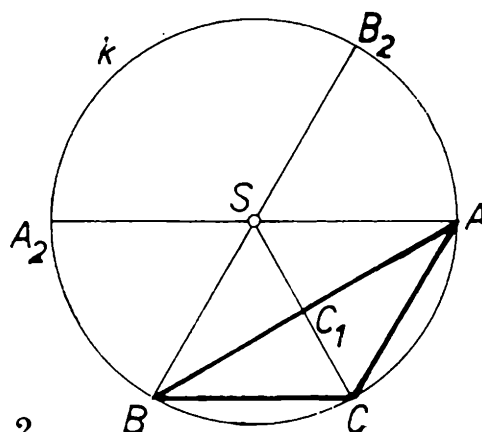
$$\alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

Z toho plyne, že úhly o velikostech α , β jsou ostré. Druhý průsečík přímky AS s kružnicí k označme A_2 .

a) Je-li $AS \parallel BC$, pak bod A_1 neexistuje. Obrazec A_2ACB je potom rovnoramenný lichoběžník, jehož vnitřní úhel ACB je tupý (obr. 1).

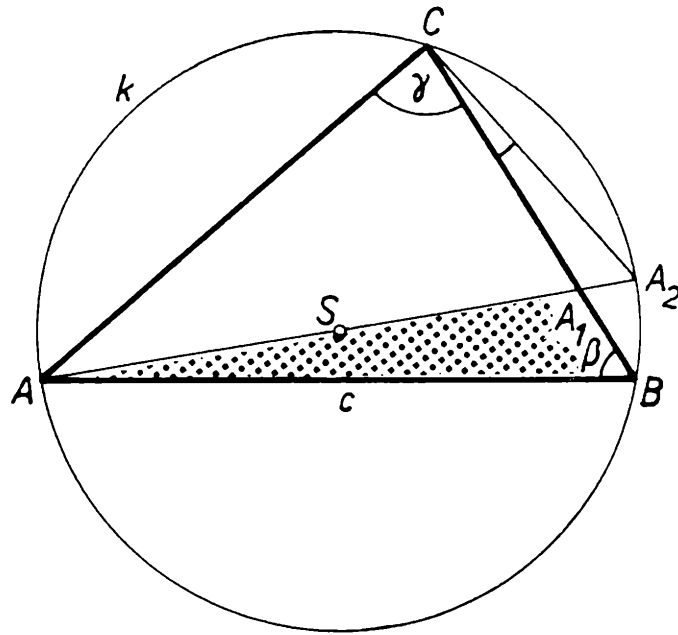


Obr. 1



Obr. 2

Podle Thaletovy věty je úhel ACA_2 pravý. Tupý úhel ACB je tedy grafickým součtem pravého úhlu ACA_2 s ostrým úhlem BCA_2 . Protože je $AS \parallel BC$, je (úhly střídavé)



Obr. 3

$$|\sphericalangle BCA_2| = |\sphericalangle AA_2C|. \quad (1)$$

Obvodové úhly AA_2C , ABC přísluší k téže tětivě AC ; proto je

$$|\sphericalangle AA_2C| = |\sphericalangle ABC| = \beta. \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne, že je $|\sphericalangle BCA_2| = \beta$, takže je

$$|\sphericalangle ACB| = \gamma = 90^\circ + \beta. \quad (3)$$

Obráceně, nechť platí (3). Potom je $|\sphericalangle BCA_2| = \beta = |\sphericalangle ABC|$; zároveň platí (2), tj. $|\sphericalangle AA_2C| = \beta$. Z rovnosti střídavých úhlů AA_2C , BCA_2 plyne, že je $AA_2 \parallel BC$; bod A_1 tedy neexistuje.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby neexistoval bod A_1 , je tedy $\gamma = 90^\circ + \beta$. Obdobně nutná a postačující podmínka pro to, aby neexistoval bod B_1 , je $\gamma = 90^\circ + \alpha$.

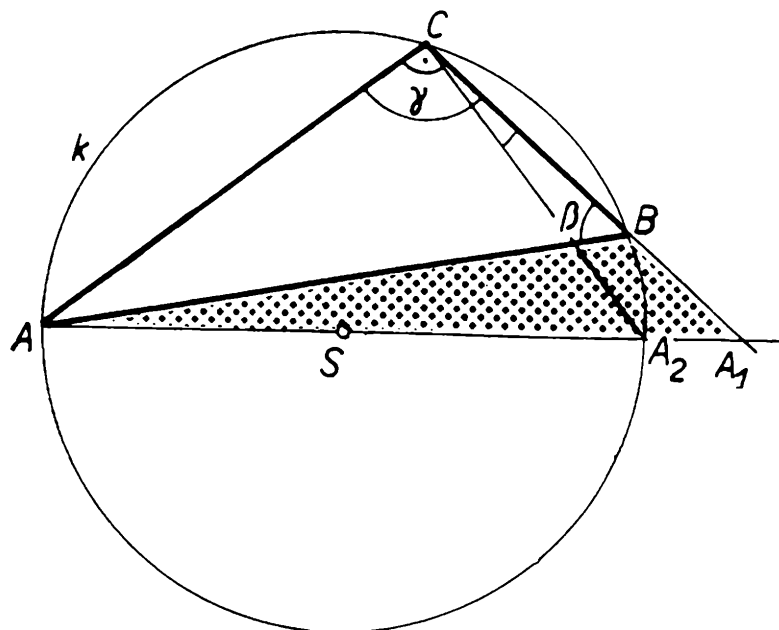
b) Nutné a postačující podmínky pro to, aby neexistovaly body A_1 , B_1 , jsou tedy tyto dvě:

$$\gamma = 90^\circ + \beta, \quad \gamma = 90^\circ + \alpha.$$

Z nich plyne, že je $\alpha = \beta$ a že $2\gamma = 180^\circ + \alpha + \beta$. Protože $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, je $2\gamma = 360^\circ - \gamma$ čili $\gamma = 120^\circ$. Body A_1 , B_1 neexistují tedy právě tehdy, je-li trojúhelník ABC rovnoramenný s úhlem proti základně o velikosti $\gamma = 120^\circ$. Jeho vrcholy jsou sousedícími vrcholy pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice k (obr. 2). Zároveň je patrné, že bod C_1 potom existuje; je to střed základny AB .

c) Nechť body A_1 , B_1 , C_1 existují. Potom (za předpokladu, že je opět $\alpha \leq \beta \leq \gamma$) je

$$\gamma \neq 90^\circ + \beta, \quad \gamma \neq 90^\circ + \alpha. \quad (4)$$



Obr. 4

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou AB , je bod S středem této přepony, takže je $A_1 = B$, $B_1 = A$, $C_1 = S$; je tedy

$$|AA_1| = |BB_1| = 2r, \quad |CC_1| = r.$$

Proto je

$$\frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|BB_1|} + \frac{1}{|CC_1|} = \frac{2}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r}.$$

Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý (obr. 3) nebo tupoúhlý (obr. 4), vypočteme $|AA_1|$ podle sinové věty aplikované na trojúhelník ABA_1 , který je v obou obrázcích vyšrafován. Je-li $|AB| = c$, je

$$|AA_1| = \frac{c \sin |\sphericalangle ABA_1|}{\sin |\sphericalangle AA_1B|}. \quad (5)$$

Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý (obr. 3), leží střed S kružnice k uvnitř tohoto trojúhelníku, a proto bod A_1 je vnitřní bod úsečky BC . Z toho plyne, že je

$$|\sphericalangle ABA_1| = |\sphericalangle ABC| = \beta. \quad (6)$$

Dále je (podle věty o obvodových úhlech)

$$|\sphericalangle BAA_1| = |\sphericalangle BAA_2| = |\sphericalangle BCA_2| = 90^\circ - \gamma.$$

Pro součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABA_1 pak je

$$|\sphericalangle AA_1B| + (90^\circ - \gamma) + \beta = 180^\circ,$$

$$|\sphericalangle AA_1B| = 90^\circ + \gamma - \beta.$$

Protože $\sin |\sphericalangle AA_1B| = \cos(\gamma - \beta)$, je podle (5) a (6)

$$|AA_1| = \frac{c \sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)}. \quad (7)$$

Je-li trojúhelník ABC tupoúhlý (obr. 4), leží bod S uvnitř poloroviny opačné k polorovině ABC (neboť je $\gamma > 90^\circ$). Protože je $BC \leq AC$, leží bod A_1 na prodloužení strany BC za bod B . Obdobným postupem jako v předešlém případě zjistíme, že platí opět (7). Podle (4) má zlomek v (7) smysl.

Podle známého vzorce pro poloměr r kružnice opsané trojúhelníku ABC je

$$c = 2r \sin \gamma,$$

takže podle (7) je

$$|AA_1| = \frac{2 r \sin \beta \sin \gamma}{\cos(\gamma - \beta)}.$$

Užijeme-li vzorce

$$\cos(\gamma - \beta) = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma,$$

dostaneme výsledek

$$\frac{1}{|AA_1|} = \frac{1}{2r} (\cotg \beta \cotg \gamma + 1)$$

$$\text{a obdobně} \quad \frac{1}{|BB_1|} = \frac{1}{2r} (\cotg \gamma \cotg \alpha + 1),$$

$$\frac{1}{|CC_1|} = \frac{1}{2r} (\cotg \alpha \cotg \beta + 1).$$

Protože je $0 < \alpha < 90^\circ$, $0 < \beta < 90^\circ$, $0 < \gamma < 180^\circ$, $\gamma \neq 90^\circ$, je

$$\tg \alpha \cotg \alpha = \tg \beta \cotg \beta = \tg \gamma \cotg \gamma = 1. \quad (8)$$

Proto je

$$\cotg \alpha \cotg \beta \cotg \gamma (\tg \alpha + \tg \beta + \tg \gamma) = \cotg \beta \cotg \gamma + \cotg \gamma \cotg \alpha + \cotg \alpha \cotg \beta.$$

Podle výše uvedených tří vzorců je tedy

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|BB_1|} + \frac{1}{|CC_1|} = \\ &= \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r} (\cotg \alpha \cotg \beta \cotg \gamma (\tg \alpha + \tg \beta + \tg \gamma)). \end{aligned}$$

Protože je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, je — jak známo —

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma;$$

proto podle (8) je

$$S = \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r} = \frac{2}{r}.$$

7. V rovině rovnostranného trojúhelníka ABC leží bod P , který má od vrcholů A, B, C po řadě vzdálenosti 3 cm, 5 cm, 8 cm. Řešte postupně tyto úlohy:

- Dokažte, že bod P neleží na žádné z přímek AB, BC, CA .
- Udejte otevřený interval (p, q) , do kterého patří velikost a strany trojúhelníku ABC .
- Zjistěte polohu bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC .
- Sestrojte trojúhelník ABC a potom vypočtěte velikost a jeho strany.
- Dokažte, že bod P je bodem kružnice, která je opsána trojúhelníku ABC .

(Došlo 7 řešení)

Emil Kraemer

Upravené řešení Ignáce Tereščáka, 3. B G Michalovce :

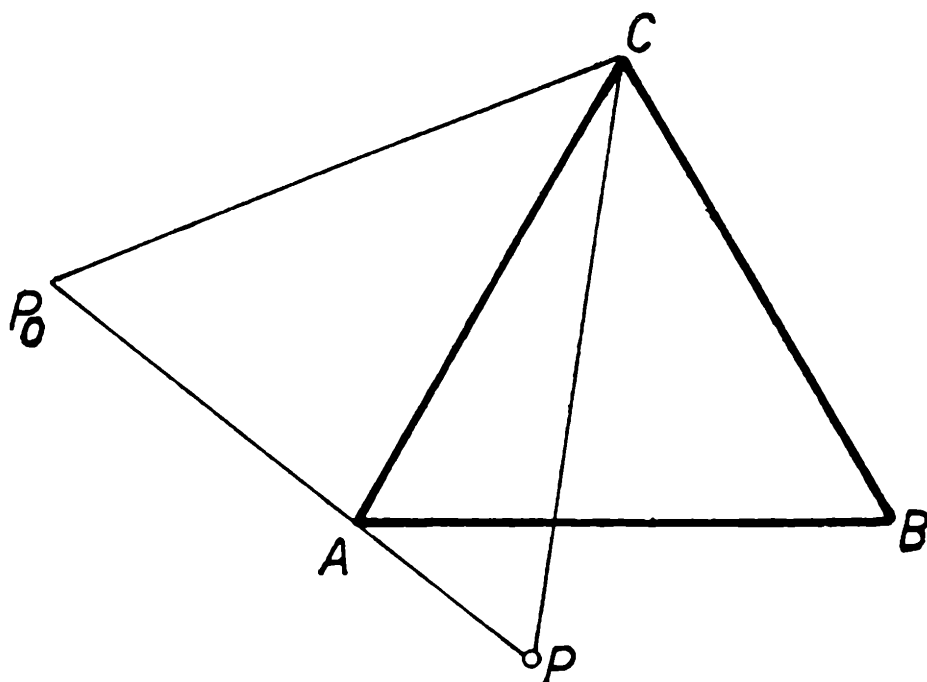
a) Nechť bod P leží na prodloužení úsečky AB za bod B ; potom je $|AP| > |BP| = 5$, což odporuje předpokladu. Je-li P vnitřní bod úsečky AB , je $|AB| = |AP| + |PB| = 3 + 5 = 8$; pak však je $|CP| < 8$, což je opět ve sporu s předpokladem. Nechť bod P leží na prodloužení úsečky AB za bod A . Potom je $|AB| = 5 - 3 = 2$ a v trojúhelníku PAC je součet stran PA, AC menší než strana PC , což není možné. Bod P neleží tedy na přímce AB . Zcela obdobně dokážeme, že neleží na přímce BC nebo CA .

b) Z trojúhelníku ACP plyne, že je $5 < a < 11$; z trojúhelníku ABP plyne, že je $2 < a < 8$ a z trojúhelníku BCP plyne, že je $3 < a < 13$. Z těchto nerovností plyne, že je

$$5 < a < 8, \tag{1}$$

takže a leží v intervalu $(5, 8)$.

c) Podle a) neleží bod P na žádné z přímek AB, BC, CA . Předpokládejme, že leží uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC , jehož strana má velikost a . Potom je $|CP| < a$; podle (1) je tedy $|CP| < 8$, ale to odporuje předpokladu, podle něhož je $|CP| = 8$. Bod P leží tedy vně trojúhelníku ABC . Trojúhelník ABP má strany o velikostech $|AP| = 3, |BP| = 5, |AB| = a > 5$; z toho plyne, že největší úhel je úhel APB , takže úhly BAP, ABP jsou ostré. Takové trojúhelníky ABP (při daném AB) jsou právě dva; jsou souměrně sdruženy podle přímky AB . Z podmínky $|CP| = 8 > a$ plyne, že bod P leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině ABC ; pak však leží uvnitř úhlu ACB .



Obr. 5

d) Předpokládejme, že jsme trojúhelník ABC už sestrojili (obr. 5). Otočme body B, P kolem vrcholu C o 60° , a to tak, aby bod B po otočení splynul s bodem A . Bod P přejde do bodu P_0 , takže je

$$|AP_0| = |BP| = 5; \quad (2)$$

podle předpokladu je

$$|AP| = 3. \quad (3)$$

Protože je $|CP_0| = |CP| = 8$ a $|\sphericalangle P_0CP| = 60^\circ$, je trojúhelník P_0PC rovnostranný. Podle (2) a (3) je

$$|AP_0| + |AP| = 8 = |PP_0|;$$

to znamená, že bod A leží uvnitř úsečky PP_0 . Z toho plyne tato konstrukce rovnostranného trojúhelníku ABC :

* Sestrojíme rovnostranný trojúhelník P_0PC o straně, jejíž velikost je 8. Uvnitř strany P_0P sestrojíme bod A tak, aby bylo $|AP_0| = 5$. Potom sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby ležel v polorovině ACP . Podle konstrukce je $|AP| = 3$, $|PC| = 8$; zbývá dokázat, že je $|BP| = 5$. To plyne z toho, že po otočení bodů B, P kolem bodu C , v němž přejde bod B do bodu A , přejde bod P do bodu P_0 , takže $|BP| = |AP_0| = 5$.

V trojúhelníku ACP je $|AP| = 3$, $|CP| = 8$, $|\sphericalangle APC| = 60^\circ$. Je-li $|AC| = a$, je podle kosinové věty

$$a^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ,$$

$$a = 7.$$

e) Protože je $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, leží bod P na kružnici procházející body A, B, C .

8. Představte si, že máte krychli o hraně délky a cm, kde a je přirozené číslo. Tuto krychli rozřežeme na krychle, z nichž každá má hranu o délce 1 cm. Zjistěte, pro která čísla a se podaří ze získaných jednotkových krychlí slepit krychli, která má hranu délky $2a$ cm a má uvnitř dutinu, jež však nemusí mít tvar krychle.

(Došlo 20 řešení)

Jiří Mída

Upravené řešení Attily Édese, 4. A G mad., Komárno:

Objem kocky o hrane a je

$$T_a = a^3.$$

Druhá kocka musí mať hranu $2a$ cm. Objem tejto kocky je

$$T_{2a} = (2a)^3 = 8a^3.$$

Vieme, že vo vnútri tejto kocky môže byť dutina. Najväčší objem možnej prázdnej časti je

$$T_p = (2a - 2)^3 = 8a^3 - 24a^2 + 24a - 8.$$

Na výstavbu veľkej kocky je potrebné aspoň

$$T_{2a} - T_p = 8a^3 - (8a^3 - 24a^2 + 24a - 8) = 24a^2 - 24a + 8$$

jednotlivých kociek.

Počet kociek, ktoré potrebujeme na výstavbu veľkej kocky, má byť rovný, alebo je menej ako počet jednotlivých kociek danej malej kocky, t. j.

$$24a^2 - 24a + 8 \leq a^3.$$

Po úprave dostaneme nerovnosť

$$8(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) - 7a^3 \geq 0,$$

ktorej je možné dať tvar

$$[2(a - 1)]^3 - \left(a \sqrt[3]{7}\right)^3 \geq 0,$$

odkiaľ plynie

$$2(a - 1) \geq a \sqrt[3]{7}$$

Platí teda, že

$$a \geq \frac{2}{2 - \sqrt[3]{7}} \doteq 22,97,$$

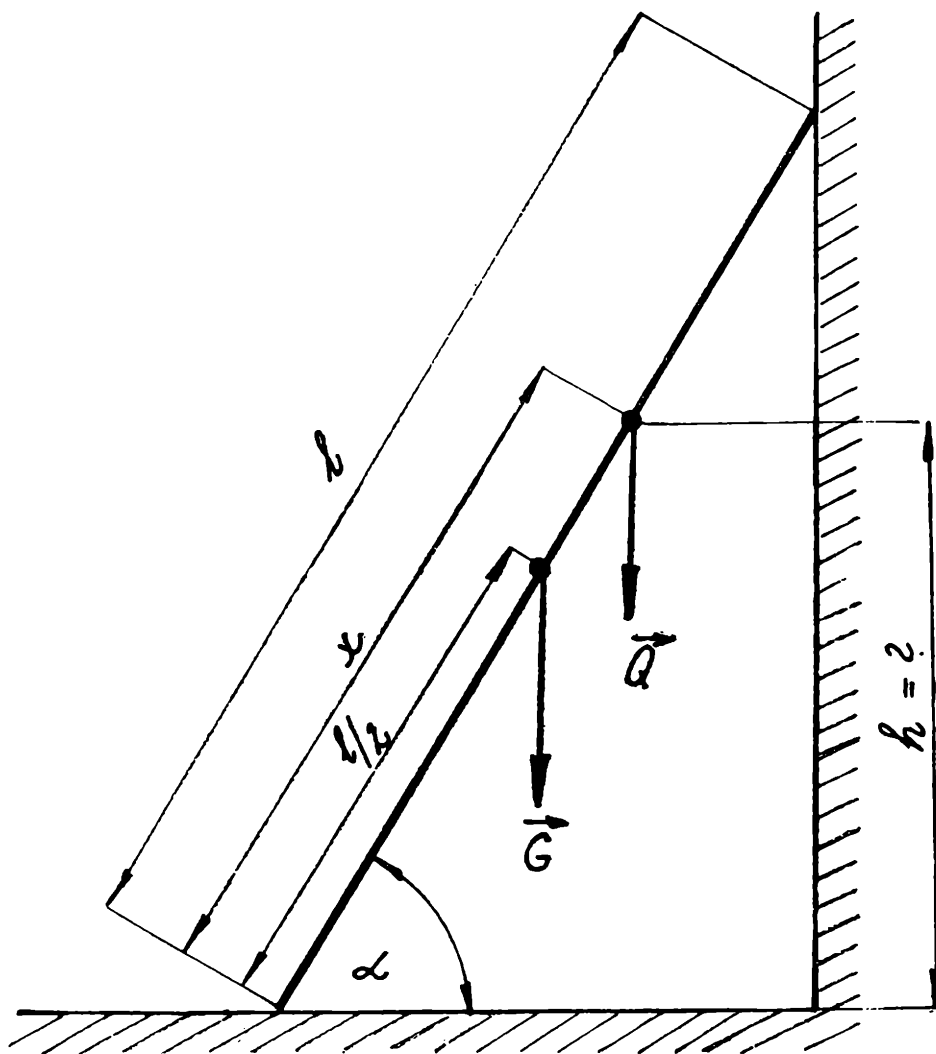
$$a \geq 23.$$

1. Žebřík o tíze G a délce l je přistaven ke stěně (obr. 1). Úhel mezi žebříkem a podlahou má velikost α ; koeficient tření mezi žebříkem a podlahou je k_1 , mezi žebříkem a stěnou je k_2 . Na jakou maximální výšku h může vystoupit člověk tíhy Q ?

Zdeněk Janout

(Došlo 61 řešení)

Obr. 1



Řešení Petra Surého, 3. A Gymnázium Ostrava, ul. dr. Šmerala :

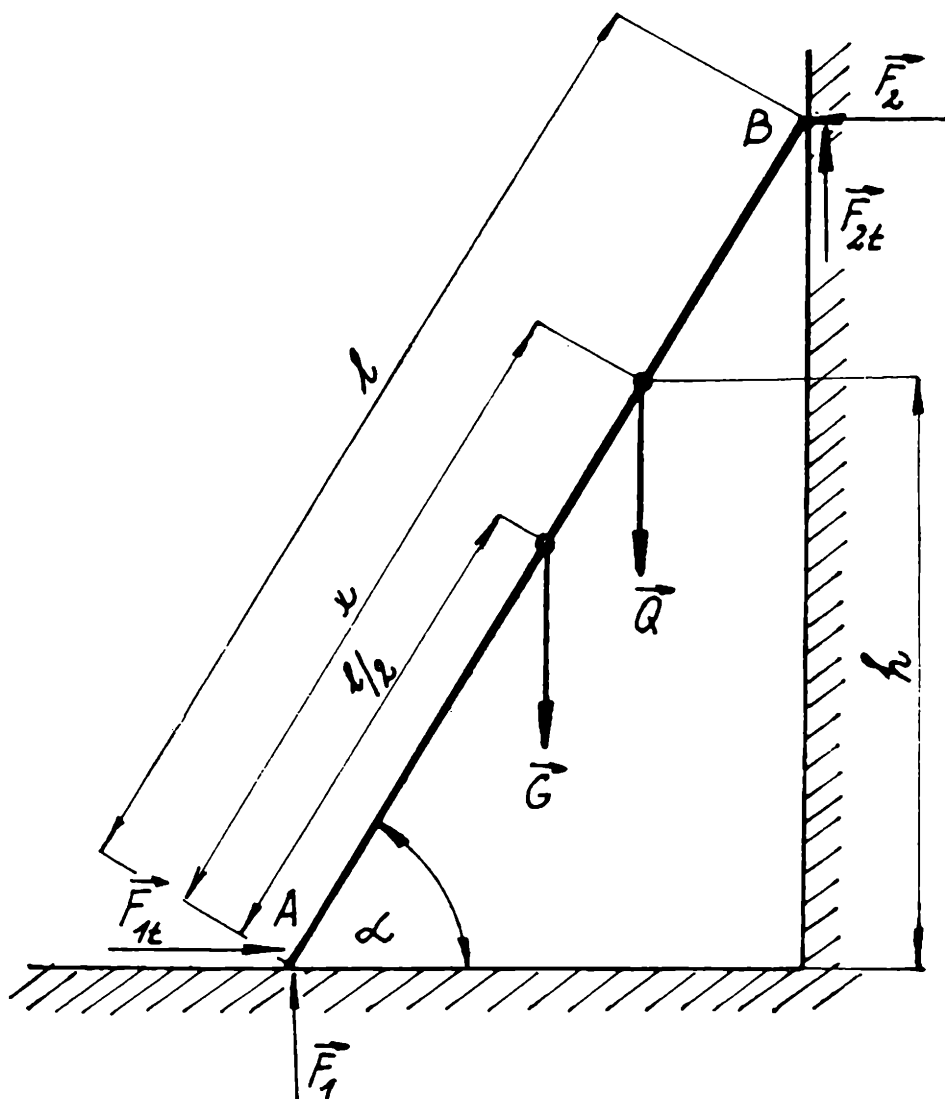
Na žebřík působí tíhová síla G v jeho hmotném středu, tíhová síla Q ve vzdálenosti x od dolního konce žebříku, síly tření F_{1t} a F_{2t} o podlahu a o stěnu a reakce F_1 a F_2 podlahy a stěny v bodech dotyku A , B (viz obr. 2).

Pro síly tření F_{1t} a F_{2t} platí

$$F_{1t} = k_1 F_1; F_{2t} = k_2 F_2. \quad (1)$$

Aby žebřík s člověkem nespádl, musí být výslednice sil působících na žebřík nulová a rovněž momenty těchto sil vzhledem k bodům A , B musí být nulové. Má tedy platit

Obr. 2



$$F_1 + F_{2t} - G - Q = 0, \quad (2)$$

$$F_2 - F_{1t} = 0 \quad (3)$$

a pro momenty vzhledem k bodům A a B

$$F_2 l \sin \alpha + F_{2t} l \cos \alpha - G \frac{l}{2} \cos \alpha - Q x \cos \alpha = 0, \quad (4)$$

$$-F_1 l \cos \alpha + F_{1t} l \sin \alpha + G \frac{l}{2} \cos \alpha + Q(l - x) \cos \alpha = 0. \quad (5)$$

Sečtením (4) a (5) dostaneme pro úhel α podmínku

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_1 - F_{2t}}{F_2 + F_{1t}} + Q \frac{2x - l}{(F_2 + F_{1t}) l}. \quad (6)$$

Z rovnic (1), (2) a (3) dosadíme do (6) a po úpravě dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - k_1 k_2}{2k_1} + Q \frac{(2x - l)(1 + k_1 k_2)}{2k_1 (G + Q) l}. \quad (7)$$

Z rovnice (7) vyjádříme x a dosadíme do vztahu

$$h = x \sin \alpha.$$

Úpravou dostaneme pro maximální výšku hledaný vztah

$$h = \frac{(1 + k_1 k_2 (G + 2Q) + 2(G + Q) (k_1 \operatorname{tg} \alpha - 1))}{2Q (1 + k_1 k_2)} l \sin \alpha.$$

Poznámka autora: Pěkně vypracovaná řešení dále zaslali: I. Aubrecht, 3. D G Náhorní v Praze 8; E. Horváthová, III. A G s vyučovacím jazykem maďarským v Košicích; V. Ollány, II. B G s vyučovacím jazykem maďarským v Komárně a J. Smejkal, IV. A G Velké Meziříčí.

2. Na koncích nitě vedené přes pevnou kladku jsou zavěšena závaží hmotnosti $m_1 = m_2$, která se nepohybují. Jakou hmotnost m musí mít přívazek k jednomu z obou závaží, má-li každé závaží urazit za dobu t dráhu s ? — Řešte obecně a potom pro $m_1 = m_2 = 240$ g, $t = 4$ s, $s = 160$ cm.

Stanislav Nový

(Došlo 72 řešení)

Řešení Iva Aubrechta, 3 D G Náhorní, Praha 8:

Na soustavu o hmotnosti $m_1 + m_2 + m$ působí stálá síla velikosti $(m + m_1)g - m_2g$. Proto jde o rovnoměrně zrychlený pohyb. Pro zrychlení soustavy těles platí

$$a = \frac{(m + m_1)g - m_2g}{m_1 + m_2 + m} = \frac{m}{m_1 + m_2 + m} g,$$

tedy

$$\frac{m}{m + 2m_1} gt^2 = 2s.$$

Z toho vyplývá, že je

$$m = \frac{4m_1 s}{gt^2 - 2s};$$

pro konkrétní zadání

$$m = \frac{4 \cdot 0,24 \cdot 1,6}{9,81 \cdot 4^2 - 2 \cdot 1,6} \text{ kg} = 0,0099896 \text{ kg} \doteq 10 \text{ g}.$$

Přívazek měl hmotnost $m = 10$ g.

Úlohy k řešení

V tomto čísle otiskujeme zbývajících úlohy z matematiky a všechny úlohy z fyziky i z konstrukční geometrie; první část úloh byla uveřejněna ve druhém čísle Rozhledů. Soutěže se mohou účastnit jednotlivci i kolektivy z téže třídy, nejvýše však trojčlenné; při případném umístění má však kolektiv nárok na jedinou cenu.

Řešení každé úlohy pište čitelně na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte velmi čitelně své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec svou bytovou adresu i se směrovacím číslem. Příjmení napište hůlkovým písmem. Každý kolektiv uvede tyto údaje pro každého svého člena. Pište čitelně, přehledně a jasně; obrázky, které připojíte k řešení úlohy, narýsujte pečlivě a čitelně je popište.

Řešení všech úloh zašlete nepozději do 15. dubna 1984 na adresu redakce Rozhledů, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla. Na obálku svého dopisu napište *Naše soutěž*.

Matematika

6. Dokažte, že pro libovolné kladné celé číslo n platí

$$\sum_{j=1}^n [\log_2 j]^* = [\log_2 1]^* + [\log_2 2]^* + \dots + [\log_2 n]^* = \\ = 1 + n[\log_2 n]^* - 2^{[\log_2 n]^*}$$

Symbol $[a]^*$, kde a je reálné číslo, označuje nejmenší celé číslo k splňující nerovnost $k \geq a$.

Jaroslav Morávek

7. Určete nejmenší přirozené číslo dělitelné jedenácti, jehož ciferný součet je 1983.

Jiří Sedláček

8. Dokažte, že pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d platí:

$$(a+c)^2 (b+d)^2 \geq (a+b+c-d)(a+b-c+d) \cdot (a-b+c+d) \cdot (-a+b+c+d).$$

Předpokládejte, že výrazy v závorkách nabývají jen kladných hodnot.

Jaroslav Šedivý

9. Nechtě $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2]$ jsou libovolné tři body ležící na kružnici o poloměru $r = 2$, která má střed v počátku kartézské

soustavy souřadnic. Dokažte, že potom pro jejich souřadnice platí nerovnost

$$|a_1b_1c_1 + 2a_2b_2c_2| < 17.$$

Jaroslav Švrček

10. Do čtverce $ABCD$ o straně délky a vepište čtyřúhelník $KLMN$ o nejmenším obvodu tak, aby body K, L, M, N ležely po řadě na stranách AB, BC, CD, DA a aby zároveň jedna z jeho úhlopříček měla délku d ($a \leq d < a\sqrt{2}$).

Jaroslav Švrček

Fyzika

1. Jakou maximální energii může při srážce s volným klidným elektronem ztratit alfa částice mající kinetickou energii $T = 5,48 \text{ MeV}$?

Stanislav Pospíšil

2. Jaká je minimální vzdálenost, na kterou se může přiblížit alfa částice mající kinetickou energii $T_\alpha = 5,48 \text{ MeV}$ k jádru lehkého vodíku? Jádro vodíku bylo před srážkou v klidu.

Stanislav Pospíšil

3. Kyvadlo hodin má dobu kyvu $0,5 \text{ s}$ v místě, kde je tíhové zrychlení $9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jaké je tíhové zrychlení v místě, kde se hodiny opoždují o 20 s za den?

Pavla Zieleniecová

4. Dřevěný váleček, který má výšku 5 cm a poloměr podstavy 4 cm , plave na hladině vody v nádobě tak, že je ponořen do $3/4$ své výšky. (Podstavy válečku jsou vodorovné.) Na hladinu vody nalijeme vrstvu oleje tak, aby hladina oleje byla ve stejné rovině jako podstava válečku. Hustota oleje je $650 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jak vysoká je vrstva oleje? Jak se bude váleček chovat, budeme-li olej na hladinu dále přilévát?

Pavla Zieleniecová

5. Malá olejová kapička o hmotnosti m kladně nabitá nábojem Q se pohybuje mezi vodorovnými deskami kondenzátoru, které jsou od sebe vzdáleny o d . Nabijeme-li kondenzátor tak, že horní deska bude kladná a napětí na deskách bude U , bude se kulička pohybovat tak, že se její rychlost ustálí na velikosti v a bude orientována ve směru dolů. Jaké napětí U' musí být na kondenzátoru, aby se rychlost kuličky ustálila na stejné velikosti v , ale ve směru nahoru?

Pavla Zieleniecová

1. Jsou dány dvě mimoběžky a, o a rovina β , která neobsahuje žádnou z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož prostorová osa je přímka o , jehož vrcholy A, B leží po řadě v přímce a , resp. v rovině β . (Prostorová osa čtverce je přímka, která prochází středem čtverce kolmo k jeho rovině.)

Stanislav Horák

2. Je dána přímka p a bod T , který není bodem přímky p . Sestrojte pravidelný osmistěn, který má tělesovou úhlopříčku v přímce p a střed jedné stěny v bodu T .

Emil Kraemer

3. Body A, B, C, D kružnice k jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku; tečny kružnice sestrojené v bodech A, B, C, D omezují rovněž konvexní čtyřúhelník. Dokažte, že úhlopříčky obou těchto čtyřúhelníků procházejí tímž bodem. (K důkazu užíjte přímek, z nichž každá má od roviny kružnice k odchylku 45° .)

Emil Kraemer

INFORMACE

O práci Stanice mladých přírodovedcov v Bratislave

EVA BITTNEROVÁ, Bratislava

V apríli 1983 uplynulo 26 rokov od chvíle, keď sa oficiálne otvorili brány Stanice mladých prírodovedcov v Bratislave na Budkovej ceste. Odvtedy tu našlo zábavu a poučenie viac ako 10 000 bratislavských chlapcov a dievčat. Mnohým z nich sa pôvodne nenáročná zábava zmenila na zábavnú prácu, ktorej zasvätili aj svoj ďalší život.

Vela miesta by nám zabralo postupné vymenúvanie jednotlivých prírodovedných záujmových špecializácií od poľnohospodárskych, záhradkárskejších, ovocinárskych, chovateľských, akvaristických až k chemickým, astronómickým, fyzikálnym a matematickým. Dobré vybavenie a krásne prostredie Stanice dáva predpoklady, aby si mládež osvojila návyky jednotlivých, s prírodnými vedami súvisiacich, profesií. Sústreďme však svoju pozornosť na podujatia Stanice, ktoré



Foto Igor Chrapan

súvisia s vyhľadávaním talentov z matematiky a fyziky a so starostlivosťou venovanou deťom, ktoré prejavili o tieto krásne, no neľahké vedné disciplíny záujem. Najmä sedemdesiate roky priniesly rozmach v práci záujmových útvarov mladých matematikov, fyzikov a astronómov. Činnosť týchto útvarov riadia odborní pedagogickí pracovníci Stanice, externí spolupracovníci z radov bratislavských vedeckých a pedagogických pracovníkov a študentov tunajších vysokých škôl. Práca týchto útvarov pozostáva z pravidelnej týždennej činnosti, zameranej na systematickú prípravu pre fyzikálnu a matematickú olympiádu, konzultačné a poradenské práce a práce záujmovej činnosti, ktorá rozširuje a prehĺbuje poznatky zo školskej fyziky a matematiky.

Pracovníci Stanice úzko spolupracujú s krajskými výbormi matematickej a fyzikálnej olympiády a podieľajú sa na organizačnom zabezpečovaní ich činnosti. Od roku 1977, kedy prešiel do Bratislavy sekretariát *Ústredného výboru fyzikálnej olympiády*, ujala sa Stanica z poverenia MŠ SSR finančného zabezpečovania celoštátnych podujatí, riadených ÚV FO a ÚV MO. Nemalú popularitu majú letné tábory a zimné sústreďenia mladých matematikov a fyzikov. Stanica ich organizuje vo svojich priestoroch, v športovo-rekreačných zariadeniach *Ústredného domu pionierov a mládeže Klementa Gottwalda*, ktorého je súčasťou, a na iných rekreačných miestach na Slovensku.

Neustále sa hľadajú nové formy popularizácie prírodovednej činnosti

medzi mládežou. Odrazom toho sú aj konferencie a semináre s prírodovednou tematikou, ktoré Stanica poriada pre deti, ale aj pre dospelých.

Mládež sa rada a ochotne zúčastňuje podujatí Stanice, a to nielen pasívne. Využíva krásne prostredie k poučeniu spojenému s oddychom a rekreáciou. Poznatky, súvisiace s hlbokými zážitkami s bezprostredného kontaktu s prírodou, utriedené prácou v laboratóriách a pri seminárnych rozhovoroch alebo zaujímavých prednáškach, sú dobrým základom pre úspešné osvojenie školského učiva. A takto, ruka v ruke so školou, prebúdza Stanica v mládeži záujem o prírodné vedy a vyhľadáva a vychováva talenty.

Na záver počujme samotnú mládež. Napríklad v krúžku, navštevovanom gymnazistami z Vazovovej ulice v Bratislave, hovoria: „Fyzika je veda o javoch v prírode a o ich vzájomných súvislostiach. Pri práci na Stanici sme akosi bližšie k prírode a sme tu väčšinou tí, ktorých príroda, azda svojimi zákonmi, očarila. V školských laviciach ju tak bezprestredne necítíme. A práve preto sa nám zdá matematika a fyzika, s ktorou sa stretávame tu na Stanici, akousi živšou a zaujímavejšou.“

Z NOVÝCH KNIH

J. Švercl - J. Tarbajovský TECHNICKÉ KRESLENIE

Zbierka príkladov a úloh z deskriptívnej geometrie. Z českého originálu (vydaném SNTL v Praze) přeložila T. Žáryová, vydala ALFA, Bratislava, 1983, 136 stran, 182 obrázků.

Tato pomocná kniha obsahuje konstrukční úlohy z planimetrie, úlohy z pravoúhlého promítání na dvě vzájemně kolmé průmětny, z promítání kosoúhlého a z pravoúhlé axonometrie. Vedle toho tu jsou úlohy o kuželosečkách řešené užitím osové afinity nebo středové kolineace, jakož i úlohy z kinematické geometrie v rovině. Kromě 46 řešených úloh obsahuje kniha 350 úloh neřešených. Výklad řešených úloh je stručný a výstižný a je doprovázen pěkně naryso-

vanými obrázky. Dané prvky v neřešených úlohách jsou zadány v kartézské soustavě souřadnic nebo pravoúhlými průměty na dvě vzájemně kolmé průmětny, někde i jinak. K obtížnějším neřešeným úlohám je připojen návod k řešení.

Knížka je určena pro odborné školy strojnické. Tím je určen výběr látky i způsob jejího výkladu, který rychle směřuje k příslušným konstrukcím. Proto se knížka hodí především k procvičování probrané látky nebo k opakování určitých tematických celků. Pro tyto účely ji lze studentům středních odborných škol vřele doporučit. Mnohé náměty pro výuku deskriptivní geometrie v ní najdou také učitelé tohoto vyučovacího předmětu, působící na gymnáziích.

Emil Kraemer

Pokyny pro autory článků do Rozhledů

Rozhledy matematicko-fyzikální mohou otisknout jenom ty články, které byly zaslány redakci ve dvou exemplářích s úplným autorovým jménem, jeho akademickými a vědeckými tituly, s udáním pracoviště, bytové adresy a rodného čísla autora.

O otištění rozhoduje redakční rada nebo vedoucí redaktor po vyjádření recenzenta. *Nevyžádané rukopisy se nevracejí.*

Rozhledy matematicko-fyzikální jsou určeny především studentům středních škol a středních odborných učilišť s maturitou. Proto všechny uveřejňované články musí být psány srozumitelně a nemají být příliš dlouhé. Autoři se samozřejmě řídí pravidly českého nebo slovenského pravopisu, respektují přijaté názvy a značky a (ve fyzice) zákonem stanovené jednotky a označení.

V rukopise článku je třeba uvést nejprve titul příspěvku, potom jméno a působiště autora. Text se píše na stroji (nikoliv však perličkou) černou páskou ob řádek, a to po jedné straně bílého papíru formátu A4. *Na každé stránce má být nejvýše 30 řádek, z nichž každý obsahuje 60 úhozů.* Nadpisy nebo zdůrazněná slova textu podtrhujte jenom obyčejnou (ne propisovací) tužkou. Poznámky pod čarou — pokud možno v minimálním počtu — je třeba v textu vyznačit postupně číslicemi v exponentu a psát je hned za řádek rukopisu, k němuž patří; od ostatního textu se oddělí vodorovnými čarami. *Obrázky se nekreslí do textu článků!*

Matematické výrazy a vzorce se píší vždy na zvláštní řádek a doplňují se ručně (čitelně!) inkoustem, tuší nebo propisovací tužkou; zvláštní pozornost je třeba věnovat přepisování indexů a exponentů. Vzorce se číslovají v oblých závorkách na pravé straně, a to jenom tehdy, jestliže se na ně odvoláváme v dalším textu. V odkazech na literaturu uvádíme jenom publikace dostupné čtenářům Rozhledů, tj. především literaturu psanou v českém nebo slovenském jazyce; ze zahraniční literatury se uvádí nanejvýš publikace knižní.

Obrázky se rýsuje tuší na pauzovací papír nebo na bílou čtvrtku a popisují se normalizovaným písmem šablonou 5 mm; čáry musí být ostré a nerozpité. Očíslované texty k obrázkům se přikládají na konec rukopisu. Je třeba pamatovat na to, že se obrázky pro tisk zmenšují v poměru 1 : 2. Fotografie musí být ostré, kvalitní a zhotovené na leském bílém papíru. Autor může také zaslat redakci jenom obrázky narýsované tužkou; redakce dá takové obrázky pro tisk narýsovat. I v tomto případě je třeba dodat obrázky jasně narýsované a čitelně popsané.

Adresa redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních:

M. D. Rettigové 4

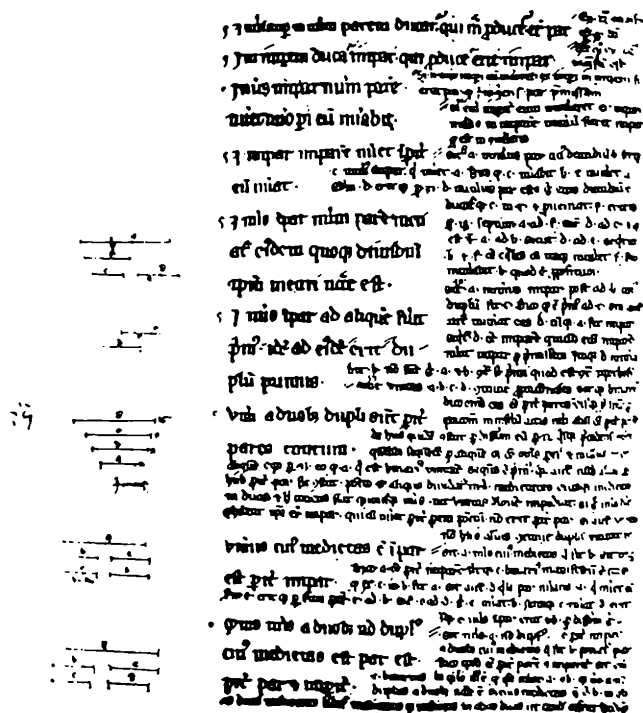
116 39 Praha 1 — Nové Město

Eukleidovy Základy

Jedním ze základních děl řecké antické matematiky, které se dochovalo do moderní doby, jsou Eukleidovy *Základy* (řecky: *Stoicheia*). Vznikly v alexandrijském Múzeu (doslova: útočišti múz) zřízeném kolem zač. 3. století př. n. l. Ptolemaiem I. Múseion mělo bohatou knihovnu rukopisů, v době vrcholu své existence až 700 000 svitků; vědci v něm pobírali za svou činnost rentu. Mezi nimi působila řada matematiků, z nichž *Eukleides* (? 365—300 ?) se stal nejproslulejším právě díky třinácti knihám *Základů*, které se staly vzorem logicky, deduktivně ze základních nedokazovaných tvrzení (axiomů a postulátů) vyvozovaných vět. Eukleidovy *Základy* se však nedochovaly v původní formě. Dnešní texty tohoto díla se opírají o rukopisy, které nebyly napsány před 7. stoletím n. l. a bezesporu už v nich bylo proti originálu zapracováno mnoho komentářů či textových změn.

Latinské překlady arabské verze tohoto díla se staly hlavními zdroji znalosti Eukleidových *Základů* v Evropě. Jeden z prvních překladů pochází asi z poloviny 12. století a byl jen souborem vět bez důkazů. Ze stejné doby pochází překlad *Adelharda z Bathu*. Na počátku druhé poloviny 13. století pořídil nový překlad

Eukleidových *Základů* *Giovanni Campano z Novary*, který vedle arabských rukopisů použil i Adelhardova překladu. Campano text doplnil vlastními komentáři, vy-



světlivkami, úvahami i doplňujícím výkladem.

Prvý tisk *Základů* vydaný 1482 v Benátkách byl jen vydáním Campanova překladu. Teprve na konci 19. století byla pořízena moderní kritická edice (řecko-latinská) *Heibergova*, která se stala základem překladů *Základů* do národních jazyků. Česky je vydal v roce 1907 *F. Servít*.

J. Folta

Nakladatelství MLADÁ FRONTA vydalo v edici KOLUMBUS:

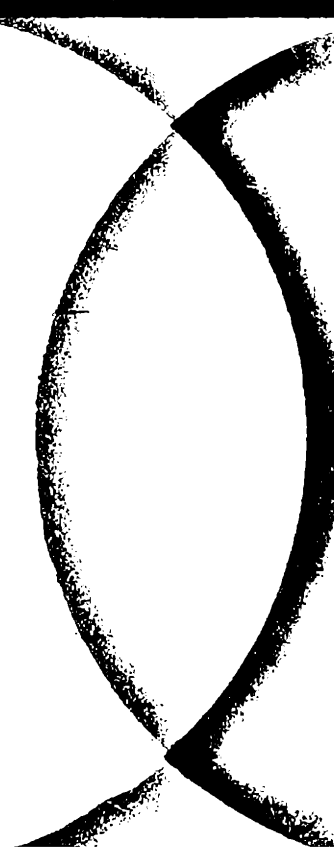
Steven Weinberg: PRVNÍ TŘI MINUTY

Světově proslulá kniha amerického fyzika se zabývá současnými kosmologickými teoriemi. Autorův pohled za hranice existence lidstva je fantastický, a přece reálný, je odrazem nepatrnosti člověka před nekonečnem kosmu i důkazem velikosti jeho rozumu. Přeložil M. Horák. 176 str. textu, 8 str. přílohy, váz. 18 Kčs.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novina. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kašpova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. Praha 1983.



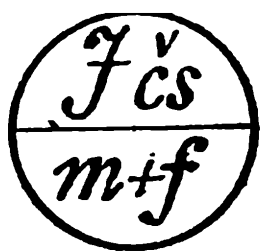
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

**ROČNÍK 62, 1983/84
PROSINEC**

(4)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání

Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, doc. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Pra-
ha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Retigové 4, 116 39 Praha 1 - Nové
Město.

Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Drexler: Aritmetické operace v čísel- ných soustavách snadno a rychle	137
J. Mída: Lineární diofantovské rovnice	143
E. Calda: Profesor Ypsilon o zdravém rozumu	143
S. Horák: Ortogonálně opsané trojúhel- níky	151
V. Šindelář: Několik poznámek k publi- kaci „Malý slovník jednotek měření“	154
D. Jedinák: Blaise Pascal .	158
J. Pišút, R. Zajac: Objev elektrónu .	161
Přemýšlíme, řešíme	162
Naše soutěž	165
Olympiády a SOČ	175
Informace	177
Z nových knih	179
J. Pech: Slovník matematických terminů (33–36)	příloha
Pohledy do dějin	. 3. str. obálky

Aritmetické operace v číselných soustavách snadno a rychle

AN DREXLER, student ČVUT FEL, Praha

V tomto příspěvku uvádíme velmi jednoduché postupy pro realizaci aritmetických operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení) v číselných soustavách s libovolným základem. Na rozdíl od postupů klasických, známých z dostupné literatury, na příklad viz (1), a vyučovaných i na některých školách zaměřených na výpočetní techniku a programování, se dále uvedené postupy vyznačují těmito výhodami:

- není třeba znát pravidla vyčíslování aritmetických operací v číselné soustavě s daným základem;
- k výpočtům se nemusí používat pomůcek, jako například klasických tabulek pro sčítání a násobení v dané soustavě, ani tak zvaného číselného kruhu, na jehož obvodu jsou rozmístěna čísla od nuly do základu zmenšeného o jednotku číselné soustavy;
- při aritmetických operacích není zapotřebí převádět čísla z dané soustavy do desítkové a naopak;
- pro realizaci aritmetických operací lze vystačit s pravidly platnými pro desítkovou číselnou soustavu.

Předpokládáme, že čtenář je alespoň informativně obeznámen se zápisem čísel v nejrůznějších číselných soustavách; méně informovaným zájemcům doporučujeme dostupnou a velmi dobře zpracovanou publikaci (2). V dalším výkladu se zaměříme nejprve na *dvojkovou (binární)* a *šestnáctkovou (hexadecimální)* soustavu, které mají svůj praktický význam pro číslicovou techniku a programování (číslíkové počítače, mikroprocesorové systémy, automaty a podobně). Pro jednoduchost dále uvedené postupy neformulujeme jako matematická tvrzení, ani neuvádíme důkazy, které si čtenáři mohou snadno odvodit samostatně.

1. Sčítání ve dvojkové soustavě

Pro sčítání ve dvojkové soustavě sečteme oba operandy podle pravidel platných pro desítkovou soustavu. Pak prohlédneme směrem od nejnižšího dvojkového řádu výsledné číslo. Je-li na n -té bitové pozici zprava jiná číslice než 0 nebo 1, přičteme konstantu $8 \cdot 10^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Číslo 8 je v této konstantě vlastně doplňkem základu 2 dvojkové

soustavy do základu 10 desítkové soustavy, ve které součet realizujeme. Proto se přičtením konstanty $8 \cdot 10^n$ provede úprava příslušné bitové pozice v modulu 2 a vzniká přenos do vyššího řádu. V praxi je dvojkové sčítání velmi jednoduché. Sečtěme například čísla 10010110_2 a 11100100_2 :

$$\begin{array}{r}
 10010110 \\
 + 11100100 \\
 \hline
 21110210 \\
 + \quad 800 \\
 \hline
 21111010 \\
 + 80000000 \\
 \hline
 101111010
 \end{array}$$

Výsledek je tedy číslo 101111010_2 . Pro zrychlení výpočtu nemusíme u konstant $8 \cdot 10^n$ vypisovat nuly, stačí jen konstantu 8 bez nul napsat pod příslušnou pozici, jak budeme dělat obdobně i u jiných konstant v dalších příkladech.

Máme-li sečíst více než dva operandy, postupujeme analogicky, přičemž konstanty $8 \cdot 10^n$ přičítáme k příslušným pozicím případně i vícekrát, dokud na nich nedosáhneme číslic 0 nebo 1. Pro ilustraci vícenásobného sečítání ve dvojkové soustavě sečtěme čísla 1111_2 , 111_2 a 11_2 :

$$\begin{array}{r}
 1111 \\
 111 \\
 + 11 \\
 \hline
 1233 \\
 + 8 \\
 \hline
 1241 \\
 + 8 \\
 \hline
 1321 \\
 + 8 \\
 \hline
 1401 \\
 + 8 \\
 \hline
 2201 \\
 + 8 \\
 \hline
 3001 \\
 + 8 \\
 \hline
 11001
 \end{array}$$

Výsledek součtu $1111_2 + 111_2 + 11_2$ je tudíž 11001_2 . Postup je možno zrychlit odhadnutím počtu cifer 8, které je zapotřebí k dané pozici přičíst, a tedy přičtením příslušného násobku 8 (v našem případě 16). Jinou možností zrychlení postupu je sčítání vždy jen dvou sčítanců, přičemž

přidáváme k výslednému součtu následující. V našem případě postupujeme:

$$\begin{array}{r}
 1111 \\
 + \quad 111 \\
 \hline
 1222 \\
 + \quad 888 \\
 \hline
 2110 \\
 + \quad 11 \\
 \hline
 2121 \\
 + \quad 888 \\
 \hline
 11001
 \end{array}$$

Zkrácení postupu bylo v tomto případě dosaženo současným přičtením konstant 8 ke třem bitovým pozicím, což by v předchozím příkladu nebylo jednoduše možné.

2. Sčítání v šestnáctkové soustavě

Při sčítání v šestnáctkové soustavě napíšeme každou číslici (0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F) jako desítkové dvoučíslí, tj. 00, 01, ..., 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Oba operandy opět sečteme jako desítková čísla. Je-li ve výsledku k -té dvoučíslí ($k = 0, 1, 2, \dots$) zprava větší než 15 (odpovídá nejvyšší číslici F), přičítáme k výsledku konstantu $84 \cdot 10^{2k}$. V této konstantě je číslo 84 vlastně doplňkem základu 16 šestnáctkové soustavy do čísla 100, které je základem stovkové soustavy (sčítáme totiž dvoučíslí). Přičtením této konstanty se opět realizuje úprava příslušného dvoučíslí do modulu 16 a vzniká přenos do nejbližšího vyššího dvoučíslí. Pro ilustraci stanovme součet čísel $C7A4_{16}$ a $29DA_{16}$ (nadbytečné nuly v konstantách $84 \cdot 10^{2k}$ vynecháváme, což umožní upravovat více dvoučíslí výsledku současně):

$$\begin{array}{r}
 12071004 \\
 + \quad 2091310 \\
 \hline
 14162314 \\
 + \quad 8484 \\
 \hline
 15010714
 \end{array}$$

Rozdělením výsledku zprava na dvoučíslí je vidět, že vychází součet $F17E$. Při vícenásobném sčítání postupujeme obdobně, jako bylo uvedeno v případě dvojkové soustavy.

3. Dvojkové a šestnáctkové odečítání

Postupy jsou analogické jako při dvojkovém a šestnáctkovém sčítání

s tím rozdílem, že příslušné konstanty $8 \cdot 10^n$ a $84 \cdot 10^{2k}$ od odpovídajících pozic (dvoučíslí) odečítáme. Příklad odečítání ve dvojkové soustavě:

$$\begin{array}{r} 11101101 \\ - 10001010 \\ \hline 1100091 \\ - \quad 8 \\ \hline 1100011 \end{array}$$

Dále pro ilustraci stanovme rozdíl čísel $ABCD_{16}$ a $4E5F_{16}$ v šestnáctkové soustavě:

$$\begin{array}{r} 10111213 \\ - 4140515 \\ \hline 5970698 \\ - \quad 84 \quad 84 \\ \hline 5130614 \end{array} \quad \text{tj. } 5D6E_{16}.$$

4. Dvojkové a šestnáctkové násobení

Ve dvojkové soustavě oba operandy jednoduše vynásobíme, jako by se jednalo o desítková čísla. Výsledek pak již známým způsobem upravujeme přičítáním konstanty $8 \cdot 10^n$ tak dlouho, dokud na jednotlivých pozicích nebudou čísla 0 nebo 1. Tyto úpravy bitových pozic někdy vyžadují přičíst tutéž konstantu ke stejné pozici vícekrát, než se dosáhne žádané 0 nebo 1. Příklad dvojkového násobení:

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \cdot 1001 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline 1102101 \\ + \quad 8 \\ \hline 1110101 \end{array}$$

Při násobení v šestnáctkové soustavě zadáme jednotlivé číslice 0, 1... F jako desítková trojčíslí, to jest 000, 001 ... 015. K výslednému součinu přičítáme konstanty $984 \cdot 10^{3m}$ (m je číslo 0, 1, 2, ..., upravovaného trojčíslí zprava), dokud jednotlivá trojčíslí nebudou menší než 016. Připomeňme, že v uvedené konstantě je číslo 984 doplněk základu 16 šestnáctkové soustavy do základu 1000 tisícové soustavy (zde počítáme s trojčíslími). Ke konkrétní ilustraci spočítejme hodnotu součinu šestnáctkových čísel 32_{16} a $B3_{16}$; jednotlivé mezivýsledky dílčích součinů nerozepisujeme:

$$\begin{array}{r}
 3002 \\
 11003 \\
\hline
 33031006 \\
+ 984984 \\
\hline
 1018015006 \\
+ 984 \\
\hline
 2002015006
\end{array}$$

Rozdělením výsledku zprava na trojčíslí vyplýne, že součin obou šestnáctkových čísel 32_{16} a $B3_{16}$ je šestnáctkové číslo $22F6_{16}$. Všimněte si, že v tomto případě bylo třeba přičíst ke 3. trojčíslí výsledku konstantu 984 celkem dvakrát a že konstanty pro úpravu 2. a 3. trojčíslí jsme pro zrychlení postupu napsali vedle sebe jako jeden sčítanec.

5. Dvojkové a šestnáctkové dělení

Ve dvojkové soustavě oba operandy vydělíme, jako by šlo o čísla desítková. Pokud je podílem číslo celé (bez desetinné části), prohlédneme zleva jeho jednotlivé číslice a pokud nejsou 0 nebo 1, odečteme od příslušné pozice známou konstantu 8. Příklad dělení v dvojkové soustavě s celočíselným podílem:

$$\begin{array}{r}
1000110 : 111 = 9010 \\
 - 8 \\
\hline
 1010
\end{array}$$

Výsledek dvojkového dělení $1000110_2 : 111$ je tedy dvojkové číslo 1010_2 .

V praxi se však častěji setkáme s případem, kdy podíl dvojkových čísel v desítkové soustavě není celočíselný. V takovém případě vyčíslíme konstantu $8 : d$, kde d je 2. operand — dělitel v realizovaném dělení. Tuto konstantu napíšeme bez uvažování desetinné čárky a zleva předcházejících nul, prohlédneme výsledek podílu zleva a od pozic, které nejsou 0 nebo 1, konstantu odečítáme. Postup osvětlíme příkladem výpočtu podílu $1100011_2 : 1001_2$. Konstanta $8 : d$ je rovna $8 : 1001 = 0,0079920$, čili bez uvažování desetinné tečky a levých nul 79920. Tuto konstantu počínaje jejím levým číslem 7 napíšeme postupně pod pozice podílu, které nejsou 0 nebo 1, a odečteme. Dostaneme:

$$\begin{array}{r}
1100011 \quad 1001 \div 1098,912 \\
 - 79,920 \\
\hline
 1018,992 \\
 - 7,992 \\
\hline
 1011
\end{array}$$

Podíl dvojkových čísel 1100011_2 a 1001_2 je tedy 1011_2 . Podíl dvojkových čísel nám v tomto případě vyšel jako celé dvojkové číslo; uvedeným postupem lze získat i desetinná dvojková čísla, pokračujeme-li v odečítání konstant i od pozic za desetinnou čárkou.

Šestnáctkové dělení je obdobou dělení dvojkového s tím rozdílem, že operandy zadáváme jako skupiny trojčíslí (viz odstavec o násobení) a postupujeme zleva od těch trojčíslí výsledku, které nejsou menší než 016 , odečítáme konstantu $984 : d$ (bez uvažování desetinné čárky a levých nul), kde d je dělitel. Zdůrazněme ještě, že od výsledku je nutno konstanty $8 : d$ (dvojková soustava) a $984 : d$ (šestnáctková soustava) někdy odečíst i vícekrát, než dosáhneme úpravu pozic či trojčíslí do modulu dané soustavy, viz následující příklad pro výpočet podílu $3D4_{16}$

$1C_{16}$. Odečítaná konstanta $984 : d$ bude $984 \ 1012$, což po odstranění desetinné čárky a levých nul dává 972332 . Postupujeme:

$$\begin{array}{r}
 3013004 \ 1012 \div 2977,276 \\
 \underline{- \quad 972,332} \\
 2004,944 \\
 \underline{- \quad \quad ,972} \\
 2003,972 \\
 \underline{- \quad \quad ,972} \\
 2003
 \end{array}$$

Rozdělením výsledku na trojčíslí vychází, že $3D4_{16} \ 1C_{16}$ dává 23_{16} . Všimněte si, že pro úpravu trojčíslí za desetinnou čárkou jsme konstantu $972 \dots$ od něj museli odečíst dvakrát. Podobně bychom v odečítání pokračovali i za desetinnou čárkou v případě, že by podíl v šestnáctkové soustavě nevyšel celý.

6. Aritmetické operace v jiných číselných soustavách

Aritmetické operace v soustavách o základu menším než asi 30 lze realizovat obdobně, jako bylo popsáno v případě šestnáctkové soustavy, s tím rozdílem, že konstanty pro úpravu výsledku při sčítání a odečítání budou $a \cdot 10^{2k}$, při násobení $b \cdot 10^{3m}$ a při dělení $b : d$, kde a, b jsou doplňky základu dané soustavy do desítkových čísel 100 a 1000. Tak například pro soustavu o základu 9 bude konstanta pro sčítání a odečítání $91 \cdot 10^{2k}$, pro násobení $991 \cdot 10^{3m}$ a pro dělení $991 : d$, kde d je dělitel.

Hlubavý čte nář by pravděpodobně zjistil, že při sčítání a odečítání v soustavách o základu menším než 5 ještě není třeba používat dvoučíslí jako v případě šestnáctkové soustavy při sčítání a odečítání, stejně jako to, že například u trojkové soustavy lze pro násobení a dělení namísto s trojčíslími vystačit s dvojčíslími, kde konstanty a, b , pak budou doplňky základů soustav do čísel 10 a 100. Rovněž by bylo možno ana-

logické postupy odvodit pro číselné soustavy o základu větším než asi 30, kde by se na příklad pro násobení číslice musely v operandech psát jako čtyřčíslí a podobně. Takové varianty postupů však již jsou mimo rámec příspěvku, jehož hlavním cílem bylo pouze upozornit na možnost realizace aritmetiky v číselných soustavách prakticky „na koleně“ a přitom podstatně jednodušeji, než se učí na školách nebo publikuje v literatuře.

Uvedené postupy pro aritmetiku v číselných soustavách mohou celkem snadno využít studenti středních škol zaměřených na výpočetní techniku a programování, stejně tak jako vývojoví pracovníci, kteří se zabývají konstrukcí nebo programováním číslicových systémů (například mikroprocesorů), zejména za pomoci i těch nejjednodušších kapesních kalkulátorů.

Literatura

- [1] BEK, R.: Dvojková soustava. Rozhledy MF, 51, č. 8, str. 351.
- [2] JELÍNEK, M.: Numerační soustavy. SPN, Praha 1974.

Lineární diofantovské rovnice

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

S prvním a třetím slovem z nadpisu článku se setkáváme v učebnicích matematiky často. Druhé slovo „diofantovské“ říká, že se budeme zabývat lineárními rovnicemi s celočíselnými koeficienty, u nichž se požaduje, aby jejich řešení byla z jisté dané množiny celých čísel. Většinou je tato množina buď množinou Z všech celých čísel nebo množinou N všech přirozených čísel. Název těchto rovnic je podle jednoho z posledních velkých antických matematiků. Jmenoval se *Diofantos* a žil v *Alexandrii* asi kolem poloviny 3. stol. n. l.

V článku se seznámíme s jednou metodou užívanou při řešení lineárních diofantovských rovnic. Vysvětlíme si ji při řešení úloh.

Úloha 1. V obchodě Petr koupil několik sáčků s bonbóny. Mohl si je vybrat v ceně 2 Kčs nebo 3 Kčs. Celkem zaplatil 16 Kčs. Kolik kterých sáčků koupil?

Řešení. Úlohy tohoto typu se v běžné životní praxi řeší experimentálně. Nyní si ukážeme postup, v němž experimentování bude nahrazeno úvahami, kterými nalezneme množinu všech možných počtů dražších sáčků.

Označme x, y po řadě počty sáčků po 2 Kčs a 3 Kčs. Potom musí platit

$$2x + 3y = 16,$$

tj.

$$2x = 16 - 3y,$$

a tedy

$$x = \frac{16 - 3y}{2} = 8 - \frac{3y}{2}. \quad (1)$$

Všimněte si, že jsme vyjádřili neznámou, u níž byl menší koeficient. Prohlédněte si řádek označený (1). Čísla x a y mají být nezáporná a, a proto číslo y musí být nezáporné sudé a zároveň musí být

$$8 - \frac{3y}{2} \geq 0,$$

tj.

$$3y \leq 16,$$

nebo

$$y \leq 5\frac{1}{3}.$$

Tedy $y \in \{0, 2, 4\}$. Příslušné počty levnějších sáčků jsou po řadě 8, 5, 2.

Vysvětlenou metodu řešení si můžete vyzkoušet při řešení dalších úloh.

Úloha 2. Kolika způsoby lze rozměnit padesátikorunu na dvoukoruny a pětikoruny? [4]

Úloha 3. V oboru přirozených čísel řešte pro neznámé x a y rovnice:

- (a) $3x - 7y = 21;$
(b) $105x + 90y = 60.$

Rovnice (a) má nekonečně mnoho řešení, rovnice (b) žádné řešení. V oboru celých čísel by však rovnice (b) řešení měla a dokonce by jich bylo nekonečně mnoho. Avšak i v oboru celých čísel se můžeme setkat s diofantovskými rovnicemi, které nemají žádné řešení.

Úloha 4. V oboru celých čísel řešte pro neznámé x a y rovnici

$$3x - 21y = 14.$$

Řešení. Z dané rovnice postupně dostáváme:

$$3x = 21y + 14,$$

$$x = 7y + \frac{14}{3}.$$

Pro každé celé číslo y platí, že číslo $7y + \frac{14}{3}$ není celé, tj. číslo x nemůže být celé pro žádné celé číslo y . Daná rovnice tedy nemá v oboru celých čísel řešení.

Úloha 5. Po vzoru rovnice v úloze 4 se pokuste sestavit lineární diofantovskou rovnici, která nemá v oboru celých čísel řešení.

Řešení této úlohy vede k hledání nějaké postačující podmínky, aby diofantovská rovnice

$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad (2)$$

kde x, y jsou neznámé, neměla v oboru celých čísel řešení.

Pokud $|a| \leq |b|$, pak z řešení úlohy 4 víme, že řešení neexistuje, jestliže číslo b je dělitelné číslem a a číslo c nikoli.

Úloha 6. V oboru celých čísel řešte pro neznámé x a y rovnici

$$63x + 42y = 692.$$

Řešení. Na levé straně dané rovnice vytkneme číslo 21 a dostaneme:

$$21 \cdot (3x + 2y) = 692.$$

Daná rovnice tedy může mít řešení jedině tehdy, jestliže číslo 692 je násobkem čísla 21. Snadno se přesvědčíme, že číslo 692 není násobkem tří, a tedy ani čísla 21. Daná rovnice proto nemá řešení.

Můžeme tedy zformulovat obecnější postačující podmínku, aby diofantovská rovnice (2) neměla v oboru celých čísel řešení. K tomu stačí, aby největší společný dělitel čísel a, b nebyl dělitelem čísla c .

Vzniká ovšem otázka, jak je tomu s řešitelností rovnice (2) v oboru celých čísel, jestliže největší společný dělitel čísel a, b dělí číslo c . Lze dokázat, že potom řešení vždy existuje. Důkaz lze nalézt např. v [1] na str. 10 a o problému budeme ještě hovořit v poznámce za řešením úlohy 10.

Úloha 7 Chlapec střílel do terče a zasáhl jen mezikruží označená čísla 5 a 7. Kolikrát které z těchto mezikruží zasáhl, jestliže dosáhl celkem 84 bodů?

Řešení. Označme x, y po řadě počty zásahů mezikruží označených 5, 7. Potom dostáváme rovnici

$$5x + 7y = 84,$$

z níž vyjádříme neznámou, u které je menší koeficient. Dostáváme

$$x = \frac{84 - 7y}{5}.$$

Čísla 84 a 7 jsou pro další úvahy dost velká; přesněji řečeno jsou větší než jmenovatel 5. Proto provedeme úpravy, které si pozorně prohlédněte. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(80 + 4) - (5 + 2)y}{5} = \frac{80}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5y}{5} - \frac{2}{5}y = \\ &= (16 - y) + \frac{4 - 2y}{5} = (16 - y) + 2 \cdot \frac{2 - y}{5} \end{aligned}$$

Mají-li být čísla x , y celá, pak číslo $2 - y$ musí být násobkem pěti. To lze napsat takto:

$$2 - y = 5t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

tj.

$$y = 2 - 5t. \quad (3)$$

Pak

$$x = [16 - (2 - 5t)] + 2 \cdot \frac{5t}{5} = 14 + 7t. \quad (4)$$

Ze vzorce (3) pro y plyne, že k tomu, aby číslo y bylo celé kladné, je nutno, aby bylo $t \leq 0$. Ze vzorce (4) zase plyne, že $t > -2$. Úloha má tedy dvě řešení, která nalezneme, volíme-li $t = 0, -1$.

Postup z řešení předchozí úlohy použijte při řešení dalších dvou úloh.

Úloha 8. V oboru celých čísel řešte pro neznámé x, y rovnici

$$63x + 42y = 693.$$

$$[x = 1 - 2t, y = 15 + 3t, t \in \mathbb{Z}]$$

Úloha 9. Na rovnoramenných vahách, kde je možno klást závaží na obě misky, lze odvážit 10 g, 20 g, ..., 120 g cukru, máme-li tři dvacetigramová a dvě padesátigramová závaží. Přesvědčte se o tom.

Kdybychom měli šest kusů každého druhu uvedených závaží, kolika způsoby by bylo možno navážit 190 g cukru? [2]

Úloha 10. V oboru celých čísel řešte pro neznámé x a y rovnici

$$90x - 24y = 198.$$

Řešení. Nejprve danou rovnici vydělíme největším společným dělitelem čísel 90 a 24, tj. číslem 6. Kdyby číslo 198 nebylo dělitelné šesti, pak by ovšem úloha neměla řešení. Dostáváme rovnici:

$$15x - 4y = 33. \quad (5)$$

Menší absolutní hodnotu má koeficient u neznámé y , tedy počítáme:

$$y = \frac{15x - 33}{4} = 3x + \frac{3}{4}x - 8 - \frac{1}{4} = -8 + 3x + \frac{-1 + 3x}{4}. \quad (6)$$

Zavedeme pomocnou neznámou $t \in \mathbb{Z}$. Položíme

$$-1 + 3x = 4t,$$

a tak dojdeme k diofantovské rovnici

$$3x - 4t = 1. \quad 7$$

Výše provedený výpočet budeme analogicky opakovat. Dostáváme

$$x = \frac{1 + 4t}{3} = \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3}t = t + \frac{1 + t}{3}. \quad (8)$$

Zavedeme další pomocnou neznámou $s \in \mathbb{Z}$, a to vztahem

$$1 + t = 3s,$$

$$\text{tj.} \quad t = 3s - 1.$$

Ze vztahu (8) pak dostaneme

$$x = 4s - 1 \quad (9)$$

a ze vztahu (6)

$$y = -12 + 15s.$$

Čtenáři přenecháváme, aby se přesvědčil o správnosti výpočtů, jimiž jsme v závěru získali vzorce pro x a y a aby provedl zkoušku, že čísla x , y určená posledními vzorci jsou pro každé celé číslo s řešením dané rovnice v oboru celých čísel.

Poznámka. Porovnáme-li diofantovské rovnice (5), (7), (9), vidíme, že naším postupem se nakonec musí dojít k diofantovské rovnici, v níž koeficient u některé neznámé je roven jedné. Odtud plyne, že v případě, když největší společný dělitel čísel a , b v rovnici (2) dělí číslo c , pak rovnice (2) má v oboru celých čísel vždy řešení.

Úloha 11. Z cisterny je třeba přelít 100 litrů petroleje do třílitrových a pětilitrových kanystrů. Nalezněte všechny možnosti, jestliže objem každého kanystru má být zcela využit.

$$[30, 2; 25, 5; 20, 8; 15, 11; 10, 14; 5, 17; 0, 20]$$

Úloha 12. Na dopravu strojních dílů se v závodě užívají palety dvou druhů. Při přepravě jistých dílů se na paletu jednoho druhu vešlo pět kusů a na paletu druhého druhu sedm kusů. Celkem bylo přepraveno 118 součástí a každá paleta byla plná.

$$\text{Kolik kterých palet se užilo?} \quad [18, 4; 11, 9; 4, 14]$$

Na závěr uvádíme ještě úlohu, která vede k diofantovské rovnici o třech neznámých.

Úloha 13. Pokladník, jedné společenské organizace má v zásobě příspěvkové známky v hodnotách 10 Kčs, 12 Kčs, 15 Kčs. V pokladním deníku je uvedeno, že jejich celková hodnota činí 128 Kčs.

Zjistěte, jaké jsou možnosti pro jejich počty.

$[x = 8 + 3s + 6t, y = 4 - 5s - 5t, z = 2s, s \text{ a } t \text{ jsou vhodná celá čísla}]$

Literatura

[1] J. VYŠÍN: Neurčité rovnice, JČMF, Praha 1949

[2] I. GERŽA: Neurčité diofantické rovnice, RMF č. 4, roč. 60, str. 149—151

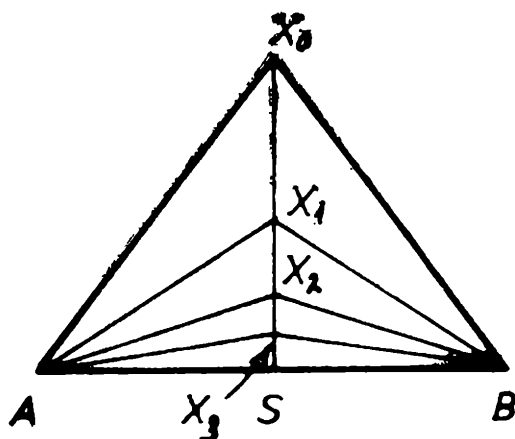
Profesor Ypsilon o zdravém rozumu

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

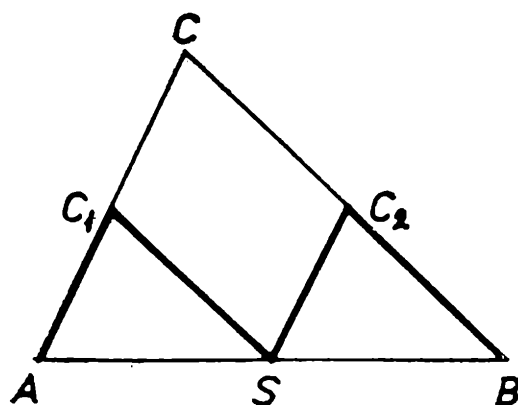
Na závěr svého krátkého léčebného pobytu na klinice v N. proslovil profesor Ypsilon přednášku „O možnostech zdravého rozumu“, která se u přítomných setkala s živým zájmem a nevšedním porozuměním. Profesor Ypsilon věří, že její hlavní myšlenky se setkají se stejným pochopením i u vás.

Zdravým rozumem se obvykle míní schopnost posuzovat danou situaci jaro mysli, schopnost přistupovat k řešení úlohy bez použití rozsáhlých systémů teoretických, schopnost nedělat z problému problém. Vytvořil se u každého z nás jistým zobecněním konkrétních zkušeností a prožitků a v běžných situacích může být dobrým pomocníkem. Nemůžeme však od něho očekávat, že nám dobře poradí i v případech, které se v praktickém životě často nepřicházejí — při porovnávání mohutností nekonečných množin, při studiu neeuklidovské geometrie, kvantové mechaniky nebo podmínek vzniku černé díry. Zdravý rozum je nástroj mocný a užitečný, není to však nástroj všemocný a může nás někdy dovést i k výsledku zcela zcestnému. Dokládají to i následující úvahy, v nichž sice budete postrádat obvyklou přesnost profesora Ypsilonu, které však přesto nebudou postrádat zajímavosti.

V rovnoramenném trojúhelníku ABX_0 (viz obr. 1) se středem S jeho základny AB je sestrojena posloupnost bodů $X_1, X_2, X_3, \dots$ takto: X_1 je středem úsečky SX_0 , X_2 středem úsečky SX_1 , X_3 středem úsečky SX_2 atd. Je zřejmé, že lomené čáry $AX_0B, AX_1B, AX_2B, AX_3B, \dots$ se postupně přibližují k úsečce AB ; můžeme též — poněkud mlhavě — říci, že vzájemná rozlišitelnost úsečky AB a lomené čáry AX_nB je tím menší, čím větší je číslo n . Rovněž pro délku $|AX_n| + |X_nB|$ lomené



Obr. 1



Obr. 2

čáry AX_nB platí, že se od délky úsečky AB liší tím méně, čím je číslo n větší. Je-li nám známý pojem limity₁ posloupnosti, můžeme se pokusit zdůvodnit, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|AX_n| + |X_nB|) = |AB|.$$

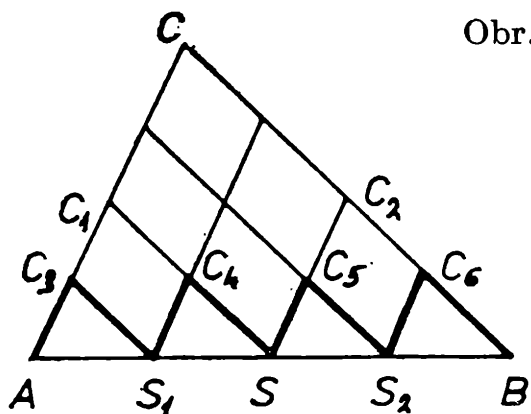
Pro zdravý rozum je tento příklad pouhým potvrzením toho, co už tušil dávno: Zmenšuje-li se s rostoucím n vzájemná rozlišitelnost lomené čáry AX_nB a úsečky AB , potom délka této lomené čáry se blíží velikosti úsečky AB . Jinak řečeno: Blíží-li se lomená čára AX_nB s rostoucím n úsečce AB , potom limita posloupnosti délek lomených čar AX_nB je rovna délce úsečky AB .

Nenapovídá i vám zdravý rozum, že „nerozlišitelnost dvou křivek implikuje rovnost jejich délek“? Podívejme se, k jakým důsledkům nás tento zdánlivě správný názor dovede.

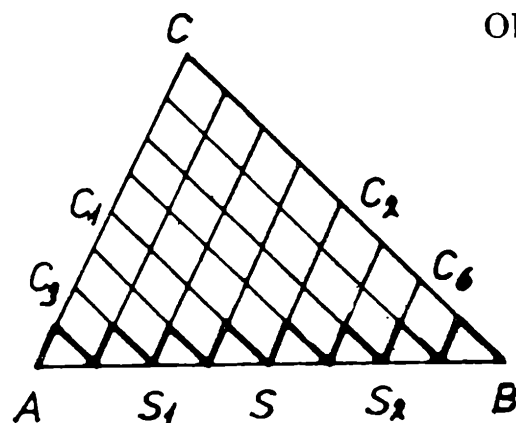
Vezměme libovolný trojúhelník ABC (viz obr. 2) a označme lomenou čáru ACB symbolem L_1 . Sestrojme bod C_1 (resp. C_2) jako průsečík strany AC (resp. BC) a rovnoběžky se stranou BC (resp. AC) vedené středem S strany AB ; vznikne tak lomená čára $L_2 = AC_1SC_2B$, která je na obr. 2 silněji vytažena. Provedeme-li podobnou konstrukci v každém z trojúhelníků ASC_1 a SBC_2 , dostaneme lomenou čáru $L_3 = AC_3S_1C_4SC_5S_2C_6B$, která je znázorněna na obr. 3. Pokračujeme-li naznačeným způsobem, dostaneme posloupnost $L_1, L_2, L_3, L_4, \dots$ lomených čar (na obr. 4 je silně vytažena lomená čára L_4), které mají tyto vlastnosti:

1. Délky všech takto sestavených lomených čar jsou stejné a rovnají se délce lomené čáry L_1 . Tento fakt vyplývá z toho, že v každé lomené čáře L_n je součet délek všech jejích úseček rovnoběžných se stranou AC roven délce této strany a součet délek všech jejích úseček rovnoběžných se stranou BC roven $|BC|$. Tak např. pro lomenou čáru L_2 (viz obr. 2) je

$$|SC_2| = |C_1C|, |SC_1| = |CC_2|,$$



Obr. 3



Obr. 4

takže je vskutku

$$|AC_1| + |C_1S| + |SC_2| + |C_2B| = |AC| + |CB|.$$

2. S rostoucím n se vzájemná rozlišitelnost lomené čáry L_n a úsečky AB stále zmenšuje. Zvolíme-li např. na úsečce AB v obr. 3 místo tří bodů S_1, S, S_2 těchto bodů 10^{10} , bude příslušná lomená čára prakticky zcela nerozlišitelná od úsečky AB .

Podle výše uvedené domněnky je limita posloupnosti délek lomených čar L_n rovna délce úsečky AB . Protože však délka každé lomené čáry L_n je rovna $|AC| + |BC|$, je uvedená posloupnost konstantní a její limita je rovna $|AC| + |BC|$. Dostáváme tak, že v trojúhelníku ABC na obr. 2 platí

$$|AB| = |AC| + |BC|.$$

„Dokázali“ jsme tak, že existuje aspoň jeden trojúhelník a v něm dvě strany tak, že součet jejich velikostí je roven velikosti strany zbývající. Protože však trojúhelník ABC byl libovolný a protože jsme lomené čáry mohli sestavovat nejen nad stranou AB , ale i nad stranou AC nebo BC , „dokázali“ jsme tvrzení silnější: V každém trojúhelníku je součet velikostí každých jeho dvou stran roven velikosti strany zbývající.

Nezdá-li se snad někomu toto tvrzení dostatečně podezřelé a pochybuje-li o jeho nesprávnosti, možná že jej přesvědčíme ukázkami „vět“, které jsou nepravdivé ještě evidentněji a které lze z tohoto výsledku odvodit. Označíme-li velikosti stran libovolného trojúhelníka písmeny a, b, c , potom platí:

A) Z rovností

$$(a + b) + c = c, a + (b + c) = 2a, (a + c) + b = 2b$$

vyplývá

$$a = b = c,$$

což znamená, že každý trojúhelník je rovnostranný!

B) Z toho, že pro poloviční obvod trojúhelníka je

$$s = \frac{a + b + c}{2} = a = b = c,$$

vyplývá, že platí

$$s - a = s - b = s - c = 0,$$

takže z Heronova vzorce

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dostáváme, že obsah každého trojúhelníka je roven nule!

C) Sečteme-li rovnosti

$$a + b = c, a + c = b, b + c = a,$$

vznikne rovnost

$$2(a + b + c) = a + b + c,$$

z níž — vzhledem k tomu, že je $a + b + c \neq 0$ — vyplývá, že $2 = 1$!

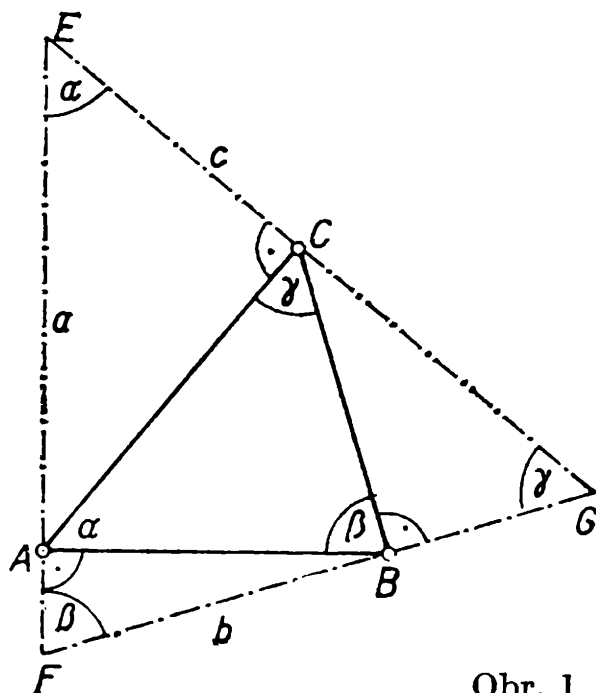
Je zřejmé, že tato nepravdivá tvrzení jsou důsledkem mylné výchozí domněnky, že z „nerozlišitelnosti dvou křivek vyplývá rovnost jejich délek“. Avšak některé posluchače Ypsilonovy přednášky, jejichž zdravý rozum nebyl dostatečně vědecky třiben, přivedly uvedené výsledky — v domnění, že jde o nejnovější matematické objevy — do nadšení téměř bezmezného. Mnozí z nich ihned po skončení přednášky zaslali švédské Královské akademii věd návrh na jmenování profesora Ypsilonu laureátem Nobelovy ceny za matematiku. Jeho kladnému vyřízení zabránila nejs píše pouze ta okolnost, že v této disciplíně se Nobelova cena neuděluje.

Ortogonalně opsané trojúhelníky

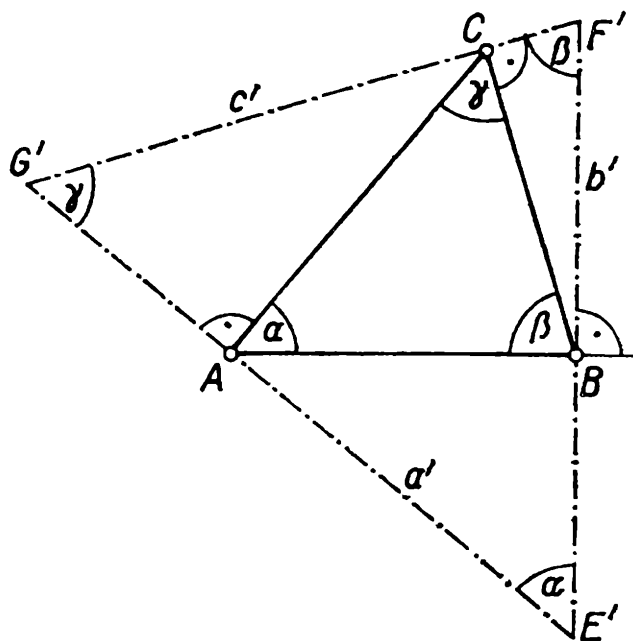
STANISLAV HORÁK, Praha

V belgickém časopisu *Mathésis* z r. 1898 vyšla na str. 163 kratší stať o trojúhelnících orthogonalně opsaných danému trojúhelníku ABC . Poněvadž začátek je velmi elementární a velmi pěkný, mohou se s ním seznámit i naši nejmladší čtenáři.

I. Ve vrcholu A daného trojúhelníku ABC vztyčme ke straně AB kolmici, označíme ji a . Ve vrcholu B vztyčme kolmici b na stranu BC a posléze ve vrcholu C vztyčme kolmici c na stranu CA . Ještě označme



Obr. 1



Obr. 2

$a \cap b = F$, $b \cap c = G$, $c \cap a = E$. (Symbol $a \cap b = F$ znamená: průsečík přímek a , b je bod F .) Trojúhelník EFG je trojúhelník ortogonálně opsaný trojúhelníku ABC .

Věta 1. Trojúhelníky ABC , EFG jsou podobné.

Důkaz (obr. 1). Úhly daného trojúhelníka (i jejich velikosti) označíme, jak je zvykem α , β , γ .

Všimněme si, že v pravoúhlém trojúhelníku ACE mají ostré úhly velikosti $90^\circ - \alpha$, α , tj.

$$|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha.$$

Podobně se dá ukázat, že v pravoúhlém trojúhelníku ABF jsou velikosti ostrých úhlů $90^\circ - \beta$, β , tj.

$$|\sphericalangle AFB| = |\sphericalangle ABC| = \beta.$$

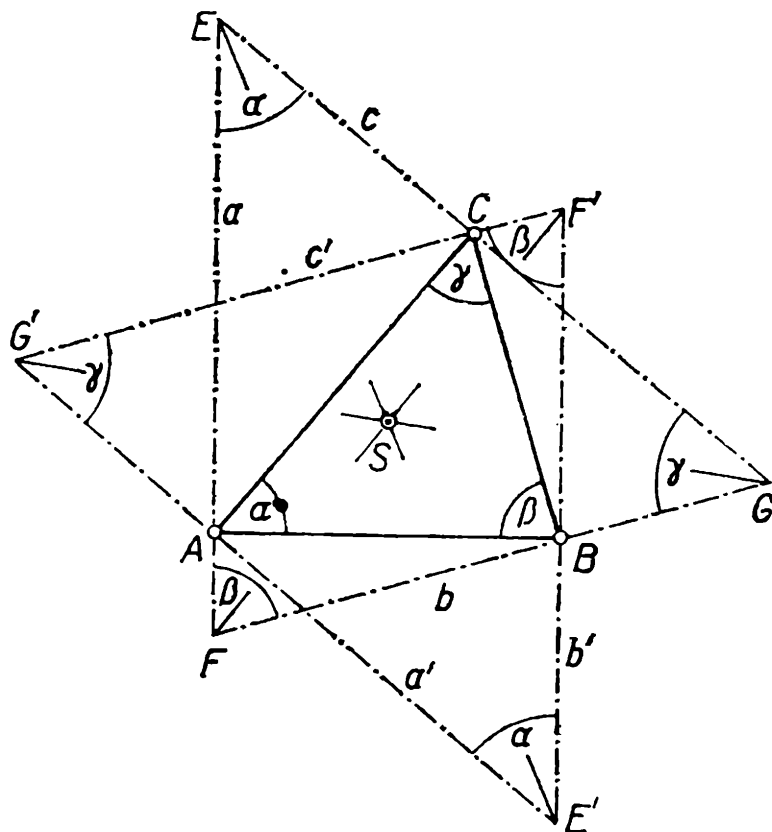
Tím jsme ukázali, že trojúhelníky ABC , EFG se shodují ve dvou úhlech — a tudíž ve třech — jsou tedy podobné. Napíšeme

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG.$$

II. Existuje však ještě jeden trojúhelník ortogonálně opsaný trojúhelníku ABC ; je to trojúhelník $E'F'G'$ a dostaneme jej touto konstrukcí (obr. 2): Ve vrcholu A vztyčíme kolmici a' na stranu AC , ve vrcholu B vztyčíme kolmici b' na stranu AB a ve vrcholu C vztyčíme kolmici c' na stranu BC . Potom $E' = a' \cap b'$, $F' = b' \cap c'$, $G' = c' \cap a'$.

Věta 2. Trojúhelníky ABC , $E'F'G'$ jsou podobné.

Důkaz se provádí úplně stejně jako důkaz věty 1. Proto jej přenechávám jako cvičení čtenářům.



Obr. 3

O dvojici trojúhelníků EFG , $E'F'G'$ ortogonálně opsaných danému trojúhelníku ABC platí

$$\begin{aligned}\triangle EFG &\sim \triangle ABC \\ \triangle E'F'G' &\sim \triangle ABC\end{aligned}$$

a z toho plyne

$$\triangle EFG \sim \triangle E'F'G',$$

tj. oba trojúhelníky ortogonálně opsané trojúhelníku ABC jsou podobné. Platí však mnohem víc, což vyjádříme větou.

Věta 3. Oba trojúhelníky ortogonálně opsané danému trojúhelníku ABC jsou souměrně sdružené podle středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Důkaz (obr. 3). Přímky a , b' ($a \parallel b'$) jsou souměrně sdružené podle středu S . Přímky a' , c ($a' \parallel c$) jsou také souměrně sdružené podle středu S . Proto musí být podle středu S souměrně sdružené i body E , E' . Ale i přímky b , c' ($b \parallel c'$) jsou souměrně sdružené podle S , a proto jsou souměrně sdružené podle S i body F , F' ; G , G' . Tím je tvrzení věty 3 prokázáno.

Z důkazu věty 3 plyne další věta:

Věta 4. Oba trojúhelníky ortogonálně opsané danému trojúhelníku ABC jsou shodné.

A touto pěknou větou článek ukončíme.

Několik poznámek k publikaci „Malý slovník jednotek měření“

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., ÚNMPraha

Koncem minulého roku vyšla v nakladatelství Mladá fronta publikace autorů *Miloše Chvojky* a *Jiřího Skály* s titulem „Malý slovník jednotek měření“. Zaměření publikace lze uvítat, zvláště zajímavý a informačně účelný je vlastní slovník, který obsahuje zejména staré i cizí jednotky. Bohužel se obsah publikace dotkl také metrologické problematiky současné, zejména struktury Mezinárodní soustavy jednotek SI a některých dalších jednotek používaných v měření. Bohužel proto, že v této části publikace je řada značných nedostatků, které desorientují širokou technickou a netechnickou veřejnost. Krátce o těchto nedostatcích pojednám a pokusím se je napravit.

Především se lze pozastavit nad názvem publikace. Je známo, že kvantifikaci nějakých objektů lze uskutečnit jednak měřením, jednak počítáním (čítáním). V současné době existuje v některých odborných kruzích snaha zařadit úkon „počítání“ (pokud ovšem nejde o operaci ryze matematickou) také do „měření“. Poukazuje na to např. definice jednotky molu, který je dnes šestou základní jednotkou v (soustavě) SI. Podle toho mohla být publikace klidně nazvána „Malý slovník měřicích jednotek“ nebo v případě, že úkon „počítání“ měl být zvláště vyzdvižen, „Malý slovník měřicích a početních jednotek“. To ovšem není nic podstatného, i když to odporuje platným normativům (vydaným ÚNM, FSÚ aj.).

Mnohem závažnější je používání termínu „normál“ pro realizaci měřicích jednotek, který je v našem technickém jazyce archaismem a byl nahrazen již v roce 1962 zákonem č. 35 termínem „etalon“. Používání nesprávných termínů významnějšího charakteru je jednou ze zásadních závad publikace a lze se s ním setkat i v jinak uspokojujivé první části knihy (na konci str. 14), zejména však velmi často v části druhé s názvem „Jednotky a jejich normály“. Tam se také setkáme s termínem „prototyp“, který byl mezinárodně již dříve v metrologickém významu povoleno pouze u metru a kilogramu. Pro realizace jednotek jiných veličin (resp. též jiných jednotek délky) má se používat výhradně termín etalon. Bohužel se kromě nesprávného používání termínů „normál“ a „prototyp“ setkáme na str. 17 a 19 s nepochopitelným a dnešní terminologií

cizím prolínáním obou termínů. V dalším textu nejsou pak ani autory uváděné definice dodržovány, neboť např. na str. 17 se uvádí, že „normálem rozumíme dohodu...“, prototypem pak realizaci normálu“, a na str. 19 je opět psáno, že „Nejstarší normály jednotek délky byly zhotovovány...“. To jistě nepřispívá k náležité orientaci čtenáře.

Jistou závadou, i když při daném zaměření publikace nikoliv prvořadou, je skutečnost, že hodnoty některých veličin a jednotek nejsou v celé publikaci uváděny stejně a že se liší počtem platných číslic, resp. zaokrouhlováním. Např. na str. 20 je uváděna hodnota námořní míle „asi 1850 m“, zatímco na str. 162 je správná hodnota „1852 (přesně)“. Hodnota normálního tíhového zrychlení je rovněž v publikaci na několika místech uváděna nejednotně. Podobně pro hodnotu elementárního náboje najdeme na str. 19 (u elektronvoltage) hodnotu $1,60219 \cdot 10^{-19}$, na str. 94 hodnotu $1,602 \cdot 10^{-19}$ a na str. 168 hodnotu $1,6021 \cdot 10^{-19}$ (což také odporuje zásadám zaokrouhlování).

Na str. 34 se setkáme se správným vysvětlením pojmu „fyzikálního rozměru“. Ovšem jen potud, pokud se nehovoří o „rozměru jednotek“, který se sice dosud občas používá, ale jeho používání namísto řádného fyzikálního rozměru může vést k závažným omylům. Tak např. jednotka SI úhlové rychlosti je $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, avšak jednotkový „pseudorozměr“ by zněl s^{-1} , což odpovídá značce jednotky frekvence. Pokud nebudou jednotky rovinného a prostorového úhlu znovu navráceny mezi odvozené jednotky SI (přesněji mezi jednotky odvozených veličin), je používání „rozměrů jednotek“ nejednoznačné, a tudíž obecně nesprávné. Kromě toho je samotné zaměňování fyzikálního rozměru a rozměrů jednotek z hlediska fyzikální etiky přinejmenším nevhodné. S takovýmto zaměňováním se bohužel v publikaci setkáme na mnohých místech.

Nevhodné aplikování fyzikálních rozměrů je např. u hesel: henry, joule, newton, ohm, siemens, tesla, watt; u hesla pascal tato závada naštěstí není.

Snahu autorů podat při zachování stručnosti ucelený přehled o měřicích jednotkách je nutno hodnotit kladně. To se odráží v některých vstupních oddílech, např. v oddílu „Soustavy jednotek“. Naproti tomu je škoda, že některé informace týkající se SI jsou neúplné a některé (pokud jsou obsaženy v abecedně uspořádaném přehledu) dokonce chybné. Postupně se o nich zmíním, i když si nečiním přitom nárok na úplnost vytykánych závad. Kromě toho opět je nevhodně pojatý fyzikální rozměr v tabulce 2 na str. 38 a první sloupec této tabulky, který obsahuje napřeskáčku názvy resp. značky jednotek a který touto nejednotností (buď název nebo značka) odporuje mezinárodně přijatým zásadám. Tato poslední závada je ovšem druhořadá. V tabulce 3 na str. 39 chybí již delší dobu používané předpony násobků jednotek peta (P) a exa (E). V tabulce 5 na str. 40 měla být u „nepřesných“ vedlejších jednotek vyznačena přibližná rovnost (to se týká astronomické jednotky parseku,

světelného roku a elektronvoltage). V tabulce dále chybí atomová hmotnostní jednotka.

Ke tvrzení o zpracování ČSN 01 1300 je nutno podotknout, že tato norma respektuje usnesení Generálních konferencí vah a měr a doporučení ISO, ale odpovídá také v hlavních bodech normě RVHP 1052/78 „Jednotky fyzikálních veličin“, což je pro mezinárodní spolupráci důležité. V informacích týkajících se zavádění SI v ČSSR je řada nepřesností. Tak např. dnem 31. 12. 1979 zavádění SI u nás oficiálně skončilo. To je v 6. řádku zdola na str. 41, kde by mělo být místo slova „zavádějí“ použito výrazu „používají“. To jen svědčí o tom, že třebaže celá problematika měřicích jednotek patří v ČSSR pod egidu Úřadu pro normalizaci a měření, kde dosud existuje meziresortní Ústřední komise pro zavádění SI, nebyl text knihy konzultován s některým z odborníků tohoto úřadu. Proto vznikla řada nepřesností a chyb, které snižují hodnotu jinak zajímavé a účelné publikace. Nyní ještě upozorním na některé závady ve slovníkové části. Na začátek každé poznámky uvedu příslušné heslo.

akr: na chybné používání tohoto výrazu není vhodné poukazovat, protože termín je ve správném pojetí dostatečně znám.

ampérhodina: u tohoto termínu i dalších, které se skládají z názvů dvou jednotek, je vhodné mezi oběma názvy vynechat mezeru.

ar: používání aru nemůže být v soustavě SI povoleno, protože tam samozřejmě nepatří, byl mimosoustavovou jednotkou. Do 31. 12. 1979 to byla jednotka dočasná, dnes je její používání obecně nepřipustné.

atmosféra: přibližná rovnost v prvním řádku hesla není správná, protože atmosféry je více, jak je také dále rozvedeno. Mělo být vysvětleno, co značí ata a atp.

barn: její používání je dnes nepřipustné.

coulomb: jeden z příkladů nesprávně aplikovaného „fyzikálního rozměru“. Kromě toho symbolické značení rozměrů se dělo značkou veličiny (a ne jednotky) v okrouhlých závorkách. Lomené závorky (se značkou veličiny) se ponechávají symbolickému značení jednotek. Značka jednotky v lomených závorkách neznačí podle normalizovaných zásad symbolicky v žádném případě rozměr.

curie: jednotka dnes v ČSSR nepřipustná.

elektronvolt: je v ČSSR vedlejší zákonná jednotka a nemůže být vedlejší jednotkou v SI. To je hrubá chyba, protože jde o mimosoustavovou jednotku, která zcela logicky do SI nepatří.

gauss: jednotka dnes nepřipustná.

gray: jednotka absorbované dávky.

jednotka astronomická: je vedlejší jednotka, ale nepatří do SI.

jednotka atomová hmotnostní: platí totéž co u jednotky astronomické.

kalorie: jednotka sice stará, ale dnes nepřipustná. Tvrzením, že je dodnes

všeobecně rozšířená, bychom její důsledné odstranění (pokud ještě někde přežívá) asi příliš nepodpořili.

kelvin: je jednotka termodynamické teploty. Je nutno rozlišit, vždyť máme např. mezinárodní praktickou teplotu aj.

kilogram měrného paliva: mezi 1 kg měrného paliva a hodnotou $2,93 \cdot 10^7 \text{ J}$ nemá být rovnítko, ale značka „odpovídá“ $\triangleq$.

kilopond: byl jednotkou dočasnou, vedlejší jednotkou nebyl a není a v soustavě SI jako mimosoustavová jednotka také nebyl.

litr: je vedlejší zákonnou jednotkou, ale do SI nepatří.

minuta: je vedlejší zákonná jednotka, ale do SI nepatří.

neper: je jednotka dnes nepřipustná, takže tvrzení o tom, že se „často používá“ je nesprávné.

nit: je nepřipustný název.

parsek: je vedlejší jednotka, ale do SI nepatří.

pond: chybí upozornění, že jde o jednotku dnes nepřipustnou. Kromě toho normální tíhové zrychlení má číselnou hodnotu 9,80665. Místo gravitačního pole má se hovořit o poli tíhovém (toto se týká též řady jiných případů).

rok: je vedlejší jednotka, ale do SI nepatří.

rok světelný: chybí uvést, že jde o vedlejší jednotku.

sievert: odvozená jednotka SI, mezinárodně přijatá jednotka ekvivalentní dávky.

son: není žádnou hlavní jednotkou v SI.

torr: zde uvedena opět jiná hodnota „normálního tíhového zrychlení“. Správně má být $9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

uzel: má mezinárodní uznanou hodnotu $1852 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, kterou lze mezinárodně přechodně používat.

voltampér: má charakter vedlejší jednotky, což není řečeno.

Příloha na str. 253 až 255 je pro velké množství chyb použitelná jen se značnou opatrností.

Celkově jsem při posuzování publikace na značných rozpacích. Na jedné straně mohu zcela nepokrytě prohlásit, že se mi ve svém celkovém pojetí líbí. Autoři se však neměli pouštět do informací o jednotkách současných, protože se tam zřejmě pro nedostatek pramenů a zčásti i terminologických zkušeností dopustili řady nežádoucích nepřesností, k teré mohou desorientovat veřejnost.

Blaise Pascal

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topolčany

Pascalov otec Étienne bol úradníkom na súde v Clermont-Ferand v kraji Auvergne; tu sa narodil 19. VI. 1623 syn Blaise. V roku 1631 sa odsťahovali do Paríža. Stretnutia otca, ktorý patril medzi organizátorov Parížskeho vedeckého krúžku, s prírodovedne orientovanými učencami doby, mali účinok aj na syna. V roku 1633 skúmal mladý Pascal zvukové javy v závislosti od intenzity a výšky. Dvanásťročný Blaise dobre pozná Euklidovu geometriu. V roku 1640 napísal pojednanie o kuželosečkách, v ktorom uviedol (bez dôkazu) vetu, podľa ktorej protíhlé strany šesťuholníka, vpísaného do kuželosečky, sa pretínajú v troch bodoch tej istej priamky.

Povinnosti kráľovského komisára pre dane a poplatky priviedly E. Pascala v roku 1639 (až do roku 1648) do Rouenu. Pozorný syn Blaise, aby uľahčil otcovi počítanie, konštruuje sčítací stroj, predchodcu mechanických kalkulačiek. Od francúzskeho kráľa Ľudovíta XIII. dostal výsadné právo stroj na sčítovanie a odčítanie zhotovovať a predávať. Podstatou mechanizmu bola sústava ozubených koliesok a stupňovitých valcov. Desiatkový prenos sa uskutočnil tak, že koliesko vyššieho rádu sa pootočí o jeden zub vtedy, ak sa koliesko nižšieho rádu otočí o desať zubov. Stroj mohol sčítať čísla až do šesťmiestneho výsledku.

Pascalovo meno si určite pamätáte nielen podľa jednotky tlaku v sústave SI, ktorá sa tak volá na jeho počesť, ale aj podľa Pascalovho zákona: Tlak v kvapalinách sa šíri vo všetkých smeroch rovnako. V Pojednaní o rovnováhe kvapalín z roku 1653, ktoré vyšlo až po Pascalovej smrti, vyjadril závislosť hydrostatického tlaku, opísal hydrostatický paradox, zákon spojených nádob a princíp hydraulického lisu. Výsledky svojich prác týkajúcich sa atmosférického tlaku opísal v práci Pojednanie o tlaku vzduchu, ktorá vyšla tlačou až v roku 1663. Po zopakovaní Torricelliho pokusu dokázal Pascal, že tlak vzduchu závisí na nadmorskej výške, teplote a vlhkosti vzduchu. Vyvrátil tak nesprávnu predstavu o strachu z prázdnoty, ktorá panovala od čias Aristotela. „Nech už oceňujeme akokoľvek vysoko názory predchodcov, pravda si zaslúži ešte vyššie ocenenie, lebo v skutočnosti je pravda staršia ako všetky názory. A ak si myslíme, že pravda sa zrodila až vtedy, keď ju ľudia odhalili, znamená to iba, že nepoznáme jej podstatu.“ Táto Pascalova poznámka ukazuje

- REÁLNÍ, REÁLNÝ** (od lat. *res* = věc) — věcný, skutečný, vycházející ze skutečnosti; reálné číslo — číslo, které může vyjádřit rozměry skutečných věcí; **REALIZACE** — uskutečnění
- RE-** (od lat. *re-* = zpět) — předpona mající význam opakování, návrat zpět, znova, opět: novost, nové utváření, nově; opak, protiva, zpětnost; zmenšení činnosti
- RECIPROKÝ** (od lat. *re-* = zpět + lat. *pro* = kupředu) — „směřující vpřed i vzad“; „vracející se k východišti“; vzájemný, vzájemně závislý; v matematice: převrácený; **RECIPROCITA** — vzájemnost, vzájemný vztah; v matematice: převrácenost
- REDUKCE** (od lat. *re-* = zpět + *duco*, *-ere* — táhnout, vést — „stažení“; snížení, omezení, zmenšení (počtu, rozměru, výkonu); zjednodušení; **REDUKČNÍ** — týkající se redukce, způsobující redukci; redukční úhel — jeho pomocí zmenšujeme (nebo i zvětšujeme) úsečky v daném poměru; **REDUKOVANÝ** — zjednodušený
- REFLEXIVNÍ** (od lat. *re-* = zpět + *flecto*, *-ere* = ohýbat, obracet) — „zpět ohýbající, nazpět odrážející“; zvratný; reflexivní relace — obsahuje uspořádané dvojice, jejichž první složka „se zrcadlí“ (tj. rovná se) složce druhé; **REFLEXIVNOXT** — zrcadlení
- REKAPITULACE** (od lat. *re-* = zpět + zdrobnělina od *caput*, *-itis* = hlava, hlavní část knihy, odstavec, kapitola) — „opětné rychlé probrání jednotlivých kapitol“, přehledné shrnutí
- REKURENTNÍ** (od lat. *re-* = zpět + *curro*, *-ere* = běžet) — „běžící nazpět“; rekurentní zadání posloupnosti — člen posloupnosti určíme, „odběhneme-li nazpět“, „vrátíme-li se“ k jednomu nebo několika členům předchozím
- RELACE** (od lat. *relatio* od *refero*, *-ferre* = nésti zpět) — „nošení zpět, odnášení, opětné nesení“; podávání zprávy, zpráva, hlášení, vysílání, pořad, vztah, poměr; v matematice: vztah vyjádřený množinou uspořádaných dvojic; **RELATIVNÍ** — poměrný, podmíněný (opak: absolutní), vztažný
- RESPEKTIVE** (od lat. *re-* = zpět + *spicio*, *-ere* = hledět) — „při opětném pohledu“, „podíváme-li se na to ještě jednou“; vlastně, lépe řečeno, popřípadě
- REGISTR** (ze střlat. *registrum* od *res gesta* = věc vykonaná, stručně zaznamenaná událost) — „seznam vykonaných věcí“; abecedně uspořádaný seznam, soupis, rejstřík; v matematice: technické zařízení pro uchování informace v počítači; **REGISTRAČNÍ, REGISTROVAT**
- REGULA FALSI** (z lat. *regula* = pravítko, pravidlo a z *falsum* = klam, lež, nepravda, výmysl, mýlka) — matematický postup (pravidlo), kterým se k správnému výsledku dostaneme od nepřesného (falešného) odhadu několika kroky zpřesňujícími odhad
- REGULÁRNÍ** (z lat. *regularis* = pravidelný; k *regula*) — pravidelný, jsoucí v souladu s pravidly, pořádný, řádný; regulární matice —

34 „řádná“ matice (s nenulovým determinanem), opak: v. singulární =
= ojedinělý

REKTIKACE (od lat. *rectus* = rovný, přímý, správný, dobrý +
facio, -ere = dělat) — „udělat rovným“; napřimení; rektifikace kruž-
nice — „narovnání kružnice do přímky“, konstrukce úsečky, která má
stejnou délku jako kružnice

RÉTORICKÝ (od řec. *rhétor*, -oros = řečník) — řečnický; rétorická
algebra — algebra s mnohoslovnými větami, bez dohodnutých zkratk
či symbolů

ROTACE (od lat. *rota* = kolo) — „kolotání“; otáčení, otáčivý pohyb;
ROTAČNÍ — otáčivý, vzniklý otáčením — rotací

SEGMENT (z lat. *segmentum k seco*, -are = sekat, řezat, dělit) — úsek;
dílek, v matematice: úsek (kružnice nebo jiné čáry), úseč kruhu apod.

SEKANS (z lat. *seco*, -are = sekat, řezat, dělit) — „sekající, sečný“;
goniometrická funkce, jejíž hodnotu měříme na sečně jednotkové
kružnice (sečna — přímka protínající, „sekající“ kružnici ve dvou
bodech)

SEKUNDA (z lat. *secundus* = druhý) — „*Secunda minuta hora*“ =
„druhá zmenšená hodina“, tj. „druhé, další zmenšení hodiny“,
zatímco „prvním zmenšením“ bylo pouhé „minuta hora“, v. minuta.
Protože termín „minuta“ už byl vžitý bez přívlastku „prima“ (= prv-
ní), v druhém případě, utvořeném analogicky, musel být přívlastek
„secunda“ zdůrazněn. Doslovným překladem „sekundy“ je „v teřina“
od staročeského „vterý“ (= druhý); srov. „úterý“, tj. „druhý den
týdne“; SEKUNDÁRNÍ — jsoucí na druhém místě, druhotný, dru-
hořadý, vedlejší, podřazený, dodatečný (opak: primární)

SEMIKUBICKÝ (od lat. *semi-* = polo- + řec. *kybos* = kostka; v.
kubatura) — „polokubický“; semikubická parabola — parabola

o rovnici $y = x^{\frac{3}{2}}$, kde exponent se rovná „polovině ze tří“

SEPARACE (od lat. *separo*, -are = oddělovat, odlučovat) — oddělování;
místnost určená k osamocení (nemocných apod.); v matematice:
separace proměnných — metoda řešení diferenciálních rovnic, při
které se proměnné od sebe „oddělí“, každá na jednu stranu rovnice

SÉRIE (z lat. *series* = řetěz, řada) — řada, sled; řada jednotlivostí
majících něco společného a tvořících nějaký celek; SÉRIOVÝ —
jsoucí za sebou, řadový, hromadný, vyráběný, vyskytující se v sériích

SFÉRA (z řec. *sfaira* = koule) — koule, vesmírný prostor kolem země-
koule; okruh (působnosti); v matematice: kulová plocha; SFÉRICKÝ
— týkající se koule, kulový; v matematice: týkající se geometrických
útvárů na kulové ploše, např. sférický trojúhelník

SCHÉMA (z řec. *schéma*, -atos = postava, podoba, tvářnost) — v zá-

kladních rysech naznačená struktura něčeho; jednoduché znázornění;
SCHEMATICKÝ

SIGNATURA (od lat. *signum* = znamení, značka) — značka (pro předmět, knihy ve sbírce apod.); podpis (zvl. umělce na výtvarném díle; SIGNUM — odznak, znamení; v matematice: funkce s hodnotami 0, -1, 1 pro nulu, záporná a kladná čísla; SIGNIFIKANTNÍ (lat. *facio*, -ere = dělat) — „dávající znamení, naznačující“; příznačný; v matematice: významný

SINGULÁRNÍ (od lat. *singuli* = jednotliví, po jednom) — ojedinělý, jednotlivý, jednotlivce se týkající, vyskytující se ojediněle, jedinečný, zvláštní; v matematice: nevyskytující se všeobecně, v množství, nýbrž jen „ojediněle, jednotlivě“ a mající proto zvláštní vlastnosti; např. singulární bod křivky — bod křivky, ve kterém křivka sama sebe protíná nebo náhle změni směr; singulární matice — „ojedinělá“ matice (s determinantem rovným nule); opak: regulární

SINUS (z lat. *sinus* = záhyb, záhyb oděvu na prsou, záliv) — latinský matematický termín „sinus“ vznikl překladem arabského termínu „*džaiḥ*“ (= záhyb, výstřih, prohlubenina). Ten zase vznikl z převzatého, ale nepřeloženého indického slova „*džíva*“, což je zkrácené „*arddhadžíva*“ (= polovina tětiny luku, polovina tětiny kružnice). Důvodem názvu je tedy podobnost odměřování hodnoty sinu jako poloviny tětiny jednotkové kružnice; SINUSOIDA (latinizované -*oideus* = podobající se) — „podobající se sinu, týkající se sinu“ křivka, která je grafickým zobrazením funkce sinus

SKALÁR (od lat. *scalae* = žebřík, schody) — číselný údaj, který lze zobrazit na číselné ose, tj. „na stupnici“

SPECIÁLNÍ (od lat. *species* = pohled; vzhled, podoba, představa; vzor, druh) — určitého druhu; zaměřený, určený jen k určité věci; zvláštní; SPECIFICKÝ (lat. *facio*, -ere = dělat) — příznačný pro něco, osobitý

SPIRÁLA (od řec. *speira* = točenina, otáčení) — závitnice; v geometrii: křivka, kterou opisuje bod pohybující se rovnoměrně po přímce, která se zároveň otáčí kolem pevného bodu, jímž prochází

STATISTIKA (od lat. *status* = postoj, postavení, stav, poměry) — „údaje týkající se určitého stavu, určitých poměrů“; obor zabývající se zkoumáním a kvantitativní charakteristikou hromadných jevů; číselná evidence hromadných jevů

STEREO- (z řec. *stereos* = tuhý, tvrdý, pevný) — počáteční část složených slov mající význam „týkající se prostoru“, „prostorový“. Význam „prostorový“, který původní řecké slovo nemělo, vznikl rozšířením pojmu na další vlastnost tuhých těles, totiž na prostorovost; STERADIÁN (lat. *radius* = paprsek, poloměr; v. radius; koncové „-reo“ první části složeného slova odpadlo, protože základní slovo také začínalo na „r“) — „radián pojatý v prostoru“; v. radián

- 36 STEREOGRAFICKÝ, STEREOGRAFNÍ (od řec. *stereos* = pevný, prostorový + *grafó* = rýt, psát) — „píšící v prostoru“; stereografické promítání — středové promítání kulové plochy (tedy „prostorového tělesa“) do roviny v případě, kdy střed promítání leží na kulové ploše
- STEREOMETRIE (od řec. *stereos* = prostorový + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — „měření v prostoru“; prostorová geometrie; část geometrie, která zkoumá vlastnosti prostorových útvarů; STEREO-METRICKÝ
- STRATEGIE (od řec. *stratos* = vojsko + *hégeomai* = být vůdcem) — „voje vůdcovství“; nauka o přípravě a řízení velkých válečných operací; způsob řízení složité činnosti k dosažení vytčeného cíle; v matematice (v teorii her): souhrn pravidel, podle nichž hráč na základě své volby provádí tahy v jednotlivých situacích
- STRIKTNÍ (od lat. *stringo*, *-ere* = svírat, stahovat) — „sevržený“; strohý, stručný, přísný, nepřipouštějící námitek
- STROFOIDA (od řec. *strofó* = točit, obracet + latinizované *-oideus* = podobající se) — rovinná křivka 3. stupně, která připomíná smyčku
- STRUKTURA (od lat. *struo*, *-ere* = vrstvit, stavět) — způsob složení, uspořádání („vrstvení“) nějaké látky, prvků, částí nebo složek nějakého celku, v matematice: též algebraické struktury
- SUB- (z lat. *sub* = pod) — předpona mající význam „pod, dole, dolní, méně než“; SUBDETERMINANT (v. determinant) — „poddeterminant“; determinant nižšího stupně
- SUBSTITUCE (od lat. *sub* = pod + *statuo*, *-ere* = postavit, stanovit) — zastoupení, nahrazení; v matematice: dosazení výrazu, resp. nové proměnné za jiný výraz, resp. jinou proměnnou
- SUMA (z lat. *summa* = nejvyšší místo, hlavní věc, souhrn, součet; od *summus* = nejvyšší) — určité množství peněz, součet většího počtu číselných položek; SUMACE — „vytváření sumy“, sčítání
- SUPERIOR (z lat. *superior* = vyšší, hořejší) — *limes superior* (lat. *limes*, *-itis* = příčná cesta, mez, hranice); — „horní hranice, horní mez“ · největší hromadná hodnota posloupnosti
- SUPREMUM (z lat. *supremus k super* = nahoře, svrchu) — supremum množiny čísel — číslo „přiléhající k množině těsně shora“ (srov. infimum)
- SURDICKÝ (od lat. *surdus* — hluchý) — kdo je nahluchlý, nerozumí dobře, co se povídá, je „nechápat“; matematickému termínu „surdický výraz“ však spíše odpovídá „nepochopitelný výraz“, iracionální číslo
- SY-, SYM-, SYN- (z řec. *syn* = sou-, s, spolu, společně) — předpona mající význam „s, spolu, dohromady“

jeho túžbu po experimentálnom poznaní vedeckých faktov bez ohľadu na úctu k autoritám. V duchovnom živote však Pascal pociťoval, že silu rozumu treba dopĺňovať silou lásky: „Pravdu poznávame nielen rozumom, ale tiež srdcom. Srdce má svoje dôvody, ktoré rozum nepozná.“

Jednou z neznámejších prác B. Pascala je *Traité du triangle arithmétique* — pojednanie o aritmetickom trojuholníku. Vyšlo v roku 1654. Obsahuje jednoduchý spôsob, ako vyčísliť $C_k(n)$, počet kombinácií k -tej triedy z n prvkov. Podstatou je vzťah $C_k(n) = C_k(n-1) + C_{k-1}(n-1)$ dokazovaný indukciou. Tu sa objavuje princíp matematickej indukcie vo forme, akú poznáme dnes. Jednotlivé kombinačné čísla možno vhodne usporiadať do trojuholníkovej schémy, ktorú dnes nazývame Pascalov trojuholník. Tabuľku binomických koeficientov poznali už indickí matematici okolo 2. storočia pred n. l. a využívali ju v niektorých úlohách kombinatoriky. Ale asi nepoznali ich využitie pre rozklad mocniny dvojčlenu. Pascal sa zaoberal problematikou kombinatoriky asi aj preto, lebo tadiaľ viedla cesta k všeobecnejším úlohám pravdepodobnosti. Zamýšľal napísať prácu Matematika náhody.

V hľadaní pravdy Pascal nikdy neustal. Na poli matematiky odhalil v teórii čísel pravidlá deliteľnosti, v rokoch 1658–59 skúmal vlastnosti cykloidy (rovinná krivka opísaná bodom kružnice valiacej sa po priamke). Určil jej plochu, ťažisko jej odseku, objem a ťažisko telesa, ktoré vznikne rotáciou odseku cykloidy. Leibniz označil výsledky Pascalovej práce „Traktát o sínuse kruhového výseku“ za podnet pre vznik pojmu derivácia. Pascal sa tak zapísal medzi predchodcov diferenciálneho a integrálneho počtu. Práce *L'art de persuader* (Umenie presvedčiť) a *L'esprit géométrique* (Geometrický duch) sú ukážkou, ako B. Pascal chápal význam axiomatickej metódy pre matematiku. „Všetko sa musí dokázať a pri dôkaze nemožno použiť nič iné okrem axióm a predtým dokázaných viet. Nikdy nemožno zneužiť to, že sa rôzne veci často označujú rovnakým termínom; preto určený termín musí byť v mysli zamenený za definíciu.“

Pascal cítil, že pravda je jednoduchá. Veril, že správne myslenie ukazuje k nej cestu. Ukázal vznešenosť matematického spôsobu myslenia. Priblížil človeka k pochopeniu nekonečne veľkého i nekonečne malého. Vedel, že matematikou nedokáže všetko, ale čo dokáže, to je jednoznačné. Výsledkami svojej vedeckej práce prispel k základom matematickej analýzy,¹³ projektívnej geometrie, teórie pravdepodobnosti, výpočtovej techniky. Významný maďarský matematik A. Rényi ocenil Pascalovo dielo slovami: „... napriek svojej nedokončenosti a rozpornosti možno ho aj dnes po troch storočiach prirovnať k jasne horiacej pochodni, ktorá osvietila ostatným cestu k modernej matematike.“

Život B. Pascala sa odohrával v časoch tridsaťročnej vojny (1618–1648), za panovania Ludovíta XIII. a Ludovíta XIV. Protireformačné hnútie strhlo Pascala na stranu umiernených jansenistov, ktorí hlásali

príkladný cnostný život. (Jansenizmus bolo náboženské hnutie vo vnútri katolíckej cirkvi, zdôrazňujúce božiu milosť a život podľa vzoru prvých kresťanov.) Svoj boj za všeludské ideály odsudzujúci podstatu feudálne absolutistickej morálky vyjadril Pascal v 18 dopisoch: *Lettres provinciales* — Listy z venkova. Výrazom mučivého hľadania „stredú“ medzi vedou a náboženstvom sa stali *Myšlienky* (pracoval na nich od roku 1660, vyšli až po jeho smrti v roku 1670). Nedokončený súbor osobných poznámok, v ktorom Pascal preniknutý láskou k človeku „bičuje“ ľudské slabosti. „Myšlienky“ vynikajú silou predstavivosti, expresivitou, dramatickosťou. Sú pozoruhodným filozofickým, ale aj dôstojným literárnym dielom francúzskej literatúry. L. N. Tolstoj označil Pascala za človeka mohutného rozumu a veľkého srdca.

Blaise Pascal bol od svojich 24 rokov ťažko chorý. Jeho život bol plný bolestí fyzických i duševných. Aj tak pre neho splynul život a myslenie do jedného celku. Zomrel v Paríži 19. augusta 1662 vo veku 39 rokov.

Blaise Pascal tušil dialektickú jednotu medzi teóriou a empiriou, rozumovosťou a zmyslovosťou, dedukciou a indukciou. Viedol dramatické súboje medzi rozumom a vierou, medzi hlasom vedy a dogmou náboženskej autority. Vo filozofických názoroch hľadajúc matematické a ľudské nekonečno váhal medzi racionalizmom a iracionalizmom, intelektom a intuíciou, medzi človekom a bohom. Úzkosť a osamotenosť človeka vo vesmíre kompenzoval túžbou po večnej pravde vedeckej i náboženskej. Skepticizmus sklamaného racionalizmu prekonával „poriadkom srdca“

Pascal odhaľoval kvantitatívne vzťahy, vyjadroval myšlienky, prejavoval dobrotu srdca a ducha lásky. Videl ohraničenosť ľudského intelektu, a predsa veril perspektívam rozumového bádania. Hľadal miesto človeka v kozme, bojoval za všeludské ideály skúmajúc ľudskú podstatu a zmysel života. Hľásal úctu k vedeckým faktom, neustal pri sledovaní pravdy a dobra. Obrátil myslenie svojej doby smerom k štúdiu ľudského vnútra, zviazal nové poznatky vedy a techniky s pravým humanizmom. A v tom nám je, i napriek rozporuplnému osobnému a myšlienkovému osudu, blízky aj v našej dobe.

Literatúra

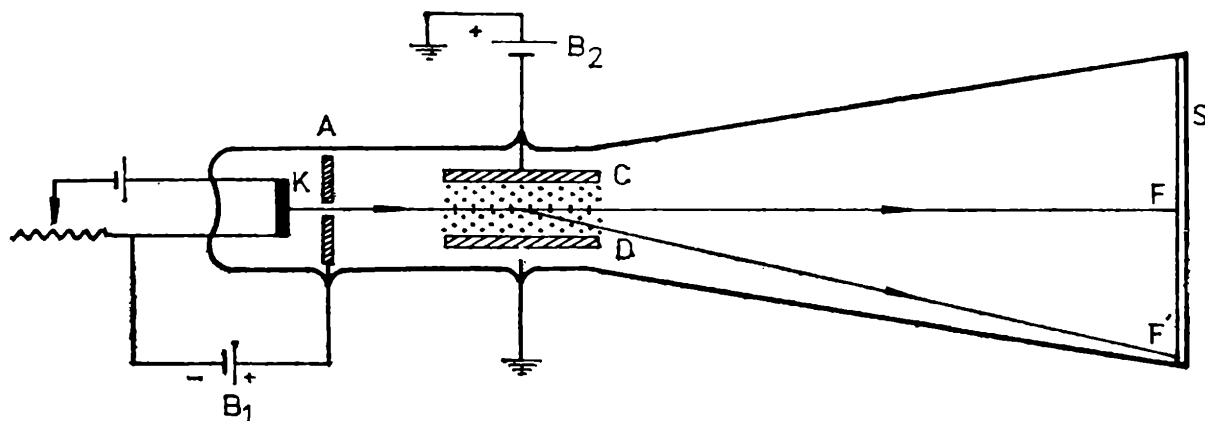
- [1] BALÁŽ, P.: Význační fyzici. Bratislava, SPN 1966.
- [2] GINDIKIN, S. G.: Rasskazy o fizikach i matematikach. Moskva, Nauka 1981.
- [3] PASCAL, B.: Myšlenky. Praha, Odeon 1973.
- [4] RÉNYI, A.: Blaise Pascal, matematik a mysliteľ. Praha, Pokroky matematiky, fyziky a astronómie, roč. XVIII/1973, č. 5.
- [5] RÉNYI, A.: Dialogy o matematice. Praha, Mladá fronta 1980.

Objav elektrónu

Hypotézu o existencii elementárneho náboja vyslovil v roku 1834 *Michael Faraday* (1791—1867) v súvislosti so zákonmi elektrolýzy. Jeho myšlienky rozvinul v roku 1881 *G. Johnstone Stoney* (1826—1911), ktorý v roku 1891 pomenoval elementárny náboj elektrónom.

Priame dôkazy existencie elektrónov umožnili pokusy s Geisslerovými trubicami. *Heinrich Geissler* (1815—1879) vynášiel v roku 1855 ortuťovú vývevu a skonštruoval sklenené trubice, z ktorých vyčerpал vzduch. Pri výskume elektrických výbojov v Geisslerových trubicách sa ukázalo, že z katódy vyletujú častice a že sklené steny trubic svietia.

Joseph John Thomson (1856—1940) začal sériu pokusov s katódovými lúčmi v Cavendishovom laboratóriu v Cambridgi v roku 1897. Do trubice umiestnil dosky kondenzátora, pričom bola doska *C* nabitá záporne a doska *D* kladne (pozri obrázok). Častice sa vychyľovali smerom od *C* k *D*, teda ich náboj bol záporný. Pri dopade katódových lúčov na stenu trubice táto svietila a veľkosť výchylky možno určiť z posunutia svetielkujúceho bodu z miesta *F* (pri nenabitých doskách) na miesto *F'* (pri nabitých doskách).



Na náboj častice e pôsobí v elektrickom poli kondenzátora v smere CD , teda kolmo na jej trajektóriu, sila $F_1 = eE$, kde E je príslušná zložka vektora intenzity elektrického poľa. Táto sila udelí elektrónu hmotnosti m v smere CD zrýchlenie veľkosti a , takže $F_1 = ma = eE$. Z toho $e/m = a/E$. Bolo treba poznať zrýchlenie a častice v smere CD . Na to jediná informácia, totiž vzdialenosť $F'F$, nestačí. Predstavme si, že by sme chceli určiť tiažové zrýchlenie telesa vodorovne vrhnutého v homogénnom gravitačnom poli Zeme. Okrem informácie o bode dopadu F' častice, ktorá letí po parabolickej dráhe, potrebovali by sme ešte ďalší údaj, najlepšie jej počiatočnú rýchlosť v_0 . Tú určil J. J. Thomson vtipným spôsobom. Po zapnutí kondenzátora dosiahol (na obrázku v smere kolmom na rovinu nákresu) vhodným magnetickým poľom, že častica opäť dopadla do bodu F . Sila F_2 , ktorou pôsobilo kombinova-

né magnetické a elektrické pole na časticu, bola teda nulová. Pre túto silu platí vo vektorom zápise $\mathbf{F}_2 = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B})$. Pre $\mathbf{F}_2 = 0$ z toho vyplýva pre veľkosť počiatočnej rýchlosti častice v smere jej letu v_0 a pre vzájomne kolmé zložky vektorov elektrického a magnetického poľa, kolmé aj na trajektóriu častice, že $E = v_0 B$. Z toho $v_0 = E/B$ bez ohľadu na hmotnosť a náboj častice. Teraz už možno vypočítat zrýchlenie a častice, ktorá dopadla do F' , a určiť e/m .

Keď Thomson dosadil do takto získaného výsledku pre e/m hodnotu Faradayovho elementárneho náboja, dostal pre hmotnosť elektrónu hodnotu 1800krát menšiu, ako je hmotnosť vodíkového atómu.

Ján Pišút, Rudolf Zajac

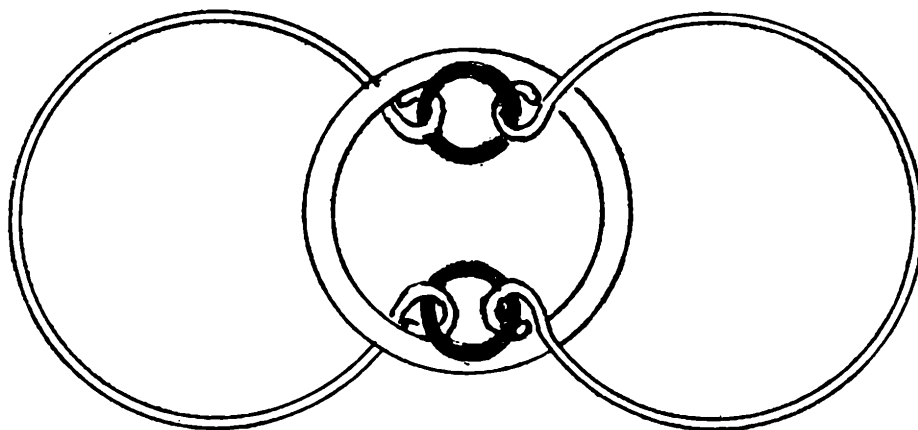
(Podľa knihy autorov „Atómy a kvantovanie“, ktorá vyšla v r. 1983 v Nakladateľstve ALFA Bratislava)

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Hlavlám Kroužek

Řešení hlavlámů pomáhá rozvíjet prostorovou představivost. Řešitel rozvíjí však i své tvůrčí schopnosti, když se snaží hlavlám vyrobit nejprve podle návodu, pak vymýšlí nějakou jeho tvarově odlišnou variantu.

K výrobě hlavlámu Kroužek budete potřebovat dva malé kroužky (na obr. 1 černé) a jeden větší. Dále můžete využít dráty z vysloužilého kola, tzv. špice; kleštěmi uštípnete jejich konce a dráty ohnete podle nákresu do tvaru oblouků s průměrem větším, než je průměr bílého kroužku. Ohnuté konce drátů můžete upevnit cínem, jakmile do oček



Obr. 1

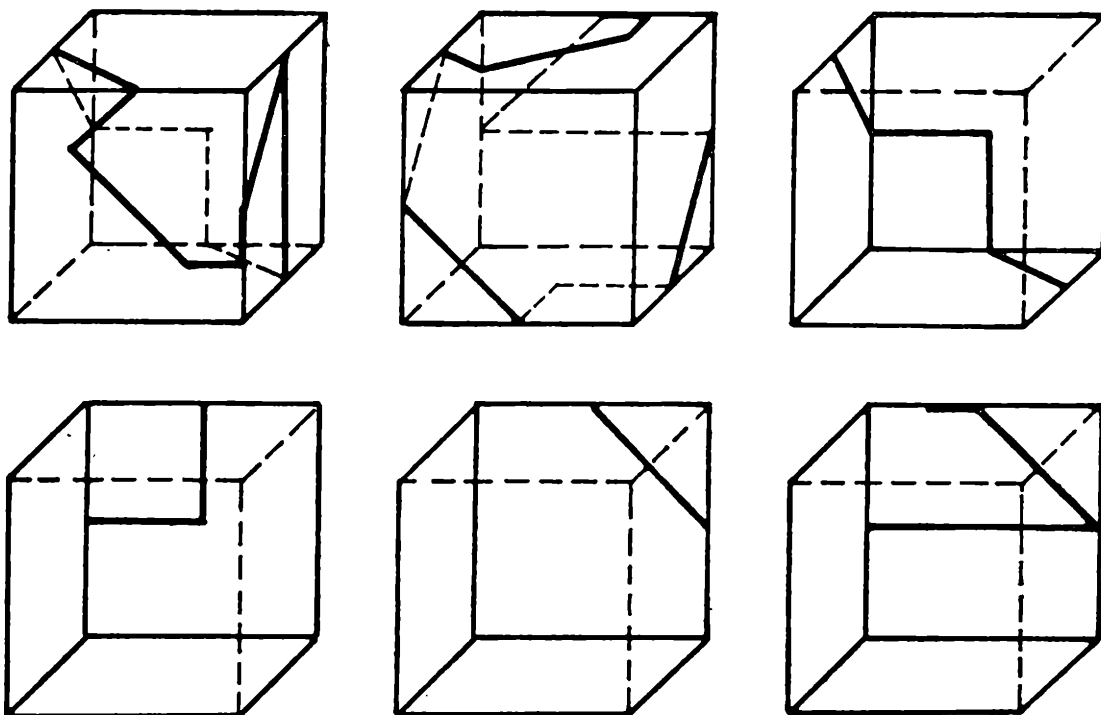
navléknete černé kroužky. Bílý kroužek můžete sice navléknout pohodlně dříve než černé kroužky, ale učiníte-li tak až nakonec, ověříte, zda se z hotového hlavolamu podaří bílý kroužek vyjmout. To je úkol každého řešitele, kterému svůj výrobek předložíte. (Řešení je na str. 164.)

Josef Svoboda

Kostky nejen Rubikovy

5. Lomená čára

Na krychli leží lomená uzavřená čára, skládající se z 11 úseček. Na obrázku vidíte celkem 6 krychlí, dvě z nadhledu zprava (jak je vidáme v učebnicích nejčastěji), zbývající čtyři jsou zobrazeny v podhledu



zleva. Na prvních dvou je lomená čára zakreslena celá — na viditelných stěnách plně, na stěnách neviditelných slaběji a přerušovaně. Dobře si ji prohlédněte, označte všechny její vrcholy a určete nejdelší a nejkratší úsečky, z nichž se skládá.

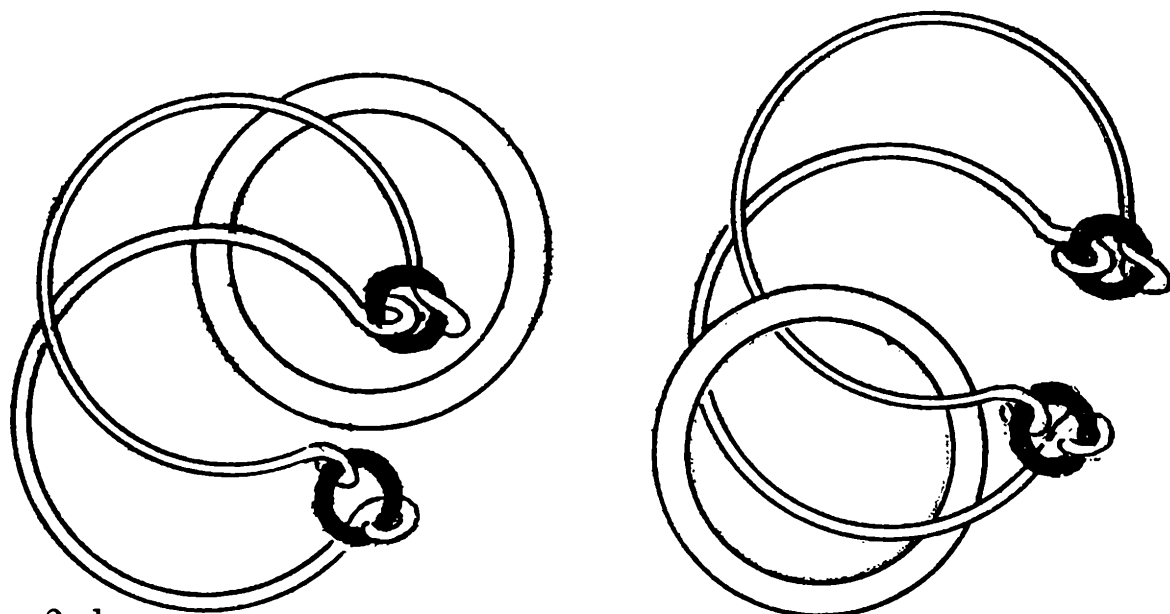
V dalších čtyřech krychlích část této čáry chybí. Dokreslete ji. (Je ve všech případech jednoznačně zadána?) Svá řešení uložte — za měsíc je budeme potřebovat v dalších úlohách.

Zadaná lomená čára je složená z 11 úseček a má též 11 vrcholů. Určete vzdálenost dvojice nejbližších a dvojice nejvzdálenějších vrcholů, je-li hrana krychle a .

Dr. Alena Šarounová

Řešení hlavolamu Kroužek

Oba oblouky překlopíme na sebe a posuneme tak, aby se navzájem nekryly. Kroužek nasuneme na jedno rameno takto vzniklého útvaru a vyvlékáme ho z obou oblouků tak, jak ukazují obrázky 2a, b.



Obr. 2 ab

Navlékání kroužku je obtížnější. Oba oblouky sklopíme na sebe a pak jeden posuneme co nejdále od druhého, aby se nepřekrývaly. Na rameno tak vzniklého útvaru navlékneme kroužek a posuneme ho k místu, kde se oba oblouky kříží; pak oba oblouky vytočíme od sebe. Kroužek se dostane mezi oblouky.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle m6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

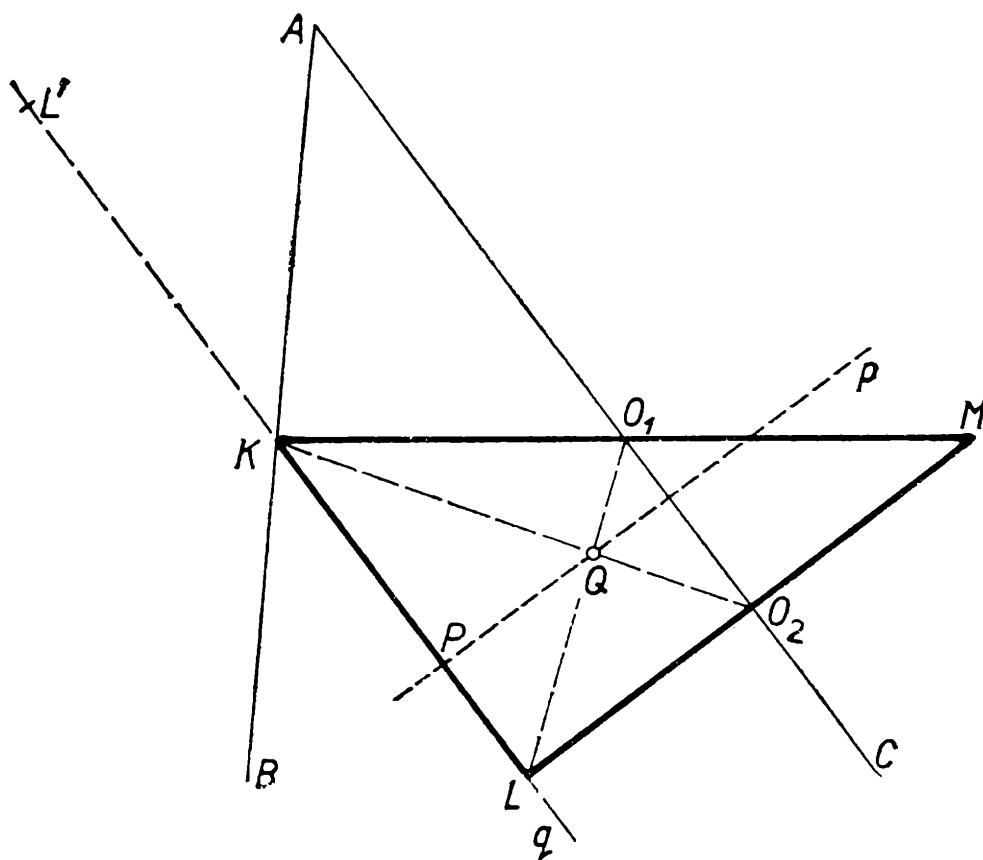
Matematika

9. Je dán konvexní úhel BAC , který není nulový ani přímý; Q budiž jeho daný vnitřní bod. Sestrojte trojúhelník KLM tak, aby bod K byl bodem polopřímky AB , aby středy O_1, O_2 stran KM, LM náležely přímce AC , aby bylo $|KL| = |AK|$ a bod Q byl těžištěm trojúhelníku KLM . (Došlo 18 řešení)

Jiří Mída

Upravené řešení Jaroslava Smejkal, 4. A G Velké Meziříčí:

Rozbor (obr. 1): Úsečka O_1O_2 je střední příčka trojúhelníka KLM , a tedy je rovnoběžná s úsečkou KL a $|O_1O_2| = \frac{1}{2} |KL|$. V těžišti Q se



Obz. 1

protínají těžnice KO_2 a LO_1 . Odtud již plyne, že strana KL leží na přímce q rovnoběžné s přímkou AC , která leží v polorovině ACB a od přímky AC má trojnásobnou vzdálenost než bod Q .

Konstrukce: Sestrojíme přímku p procházející bodem Q a kolmou k AC . Na této přímce nalezneme v polovině ACB bod P , jehož vzdálenost od přímky AC je trojnásobek vzdálenosti bodu Q od přímky AC . Bodem P potom vedeme rovnoběžku q s přímkou AC . Průsečík přímky q a AB označíme K a na přímce q sestrojíme bod L , pro který platí $|KL| = |AK|$. Průsečík přímky LQ (KQ) s přímkou AC označíme O_1 (O_2). Pak již zbývá sestrojit průsečík M přímek KO_1 a LO_2 .

Zkouška: Z konstrukce plyne, že bod K je bodem polopřímky $\vec{AB}$ a že $|KL| = |AK|$. Úsečka O_1O_2 je obrazem úsečky KL ve stejnolehlosti se středem Q a koeficientem $-\frac{1}{2}$, a tedy $|O_1O_2| = \frac{1}{2}|KL|$. Z konstrukce plyne, že přímky $O_1O_2 = AC$ a $KL = q$ jsou rovnoběžné a že bod M je průsečíkem přímek KO_1 a LO_2 . Úsečka O_1O_2 je tedy střední příčkou $\triangle KLM$ a přímky LO_1 a KO_2 jsou jeho těžnice. Bod Q je těžištěm $\triangle KLM$, neboť je průsečíkem těžnic LO_1 a KO_2 . Sestrojený trojúhelník KLM tedy vyhovuje všem podmínkám zadání.

Diskuse: Z konstrukce plyne, že při libovolné volbě úhlu BAC a bodu Q podle zadání jsou jediné pro konstrukci bodu L dvě možnosti, takže úloha má vždy dvě řešení.

10. Je dáno přirozené číslo p a konečná neprázdná množina $\mathbf{M}$ uzavřených ohraničených intervalů na reálné ose, přičemž žádná $(p+1)$ -tice navzájem různých intervalů z $\mathbf{M}$ neobsahuje společný bod. Dokažte, že množinu $\mathbf{M}$ lze rozložit na méně než $p+1$ disjunktních částí tak, že žádné dva navzájem různé intervaly z jedné a téže části rozkladu neobsahují společný bod.

Poznámka. Uzavřeným ohraničeným intervalem rozumíme množinu tvaru $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$, kde $a \leq b$ jsou daná reálná čísla. (Došla 3 řešení.)

Jaroslav Morávek

Autorovo řešení: Důkaz tvrzení podáme úplnou indukcí podle parametru $m \stackrel{\text{def}}{=} \text{počet prvků množiny } \mathbf{M}$.

(i) Pro $m \leq p$ je tvrzení zřejmé.

(ii) $m \rightarrow m+1$: Nechť $\mathbf{M}$ obsahuje $m+1$ intervalů.

Z intervalů $\langle a, b \rangle \in \mathbf{M}$ vybereme ten, který má nejmenší pravý konec b . (V případě, že je takovýchto intervalů více, zvolíme kterýkoliv z nich.)

Vybraný interval označíme $\langle a^*, b^* \rangle$, tj. platí

$$b^* = \min \{b \mid \langle a, b \rangle \in \mathbf{M}\}.$$

Ukážeme nyní, že interval $\langle a^*, b^* \rangle$ má neprázdný průnik s nejvýše $p-1$ intervaly množiny $\mathbf{M}' = \mathbf{M} \setminus \{\langle a^*, b^* \rangle\}$. Kdyby totiž v $\mathbf{M}'$ existovalo p intervalů $\langle a^{(1)}, b^{(1)} \rangle, \langle a^{(2)}, b^{(2)} \rangle, \dots, \langle a^{(p)}, b^{(p)} \rangle$ tak, že

$$\langle a^*, b^* \rangle \cap \langle a^{(j)}, b^{(j)} \rangle \neq \emptyset \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

muselo by vzhledem ke konstrukci čísla b^* platit

$$b^* \in \langle a^{(j)}, b^{(j)} \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

$$\text{a tedy } \langle a^*, b^* \rangle \cap \langle a^{(1)}, b^{(1)} \rangle \cap \dots \cap \langle a^{(p)}, b^{(p)} \rangle \neq \emptyset.$$

To je však ve sporu s předpokladem úlohy.

K dokončení důkazu použijeme indukčního předpokladu, na jehož základě existuje rozklad množiny M' na disjunktní části $M'_1, M'_2, \dots, M'_q$ takový, že platí $q \leq p$ a žádné dva intervaly z jedné a téže části rozkladu nemají společný bod. Přitom rozlišíme tyto dva případy:

$$\text{A) } q < p$$

$$\text{B) } q = p.$$

V případě A) je zřejmě systém $\{M'_1, M'_2, \dots, M'_q, \langle a^*, b^* \rangle\}$ požadovaným rozkladem množiny M .

V případě B) použijeme faktu, že $\langle a^*, b^* \rangle$ má neprázdný průnik s nejvýše $p - 1$ intervaly množiny M' . Existuje tedy aspoň jedno M'_i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, že každý interval množiny M'_i je disjunktní s intervalem $\langle a^*, b^* \rangle$. Přidáním intervalu $\langle a^*, b^* \rangle$ k množině M'_i dostáváme ze systému $\{M'_1, M'_2, \dots, M'_q\}$ zřejmě požadovaný rozklad množiny M . Důkaz indukci je dokončen.

Poznámka: Na základě popsaného důkazu lze sestavit algoritmus pro nalezení požadovaného rozkladu. Takový algoritmus je popsán v řešení Jaroslava Smejkal ze 4. A G. Velké Meziříčí.

11. Je dána množina

$$M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

kde n je celé číslo větší než 3. Určete, kolika způsoby je možno z M_n vybrat prvky a, b, c, d tak, aby platilo

$$a < b < c < d, \quad a + d = c + b.$$

(Došlo 6 řešení.)

Jiří Sedláček

Řešení Pavla Kráčmara a Dalibora Damborského, 3. C G Bílovec:

Počet způsobů, kterými je možno z množiny M_n vybrat prvky a, b, c, d tak, aby vyhovovaly podmínkám úlohy, označme P_n . Můžeme klást $P_3 = 0$ v souladu s tím, že z množiny $\{1, 2, 3\}$ nelze vybrat žádnou čtveřici. Pro $n \geq 4$ položme

$$\Delta P_n = P_n - P_{n-1}.$$

Dá se dokázat, že platí toto:

Je-li n sudé číslo ($n = 2k + 2$), pak $\Delta P_n = k^2$,

je-li n liché ($n = 2k + 3$), pak

$$\Delta P_n = k(k + 1).$$

Dále je zřejmé, že platí

$$P_n = \sum_{i=4}^n \Delta P_i. \quad (1)$$

Řešení rozdělíme na dva případy, kdy n je sudé a kdy n je liché.

a) Je-li n sudé ($n = 2k + 2$), pak podle (1) máme

$$P_n = \sum_{i=4}^n \Delta P_i = \sum_{j=1}^k (j^2 + (j-1)j) = 2 \sum_{j=1}^k j^2 - \sum_{j=1}^k j.$$

Podle známých vzorců

$$\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

$$\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$$

vypočteme po malé úpravě, že

$$P_n = \frac{(n-2)n(2n-5)}{24}$$

b) Je-li n liché ($n = 2k + 3$), dostaneme podobným postupem výsledek

$$P_n = \frac{(n-3)(n-1)(2n-1)}{24}.$$

12. Jsou dány dva různé body A, B , které leží uvnitř téže pol roviny s hraniční přímkou p . Sestrojte na přímce p bod X tak, aby velikost konvexního úhlu AXB byla co největší.

(Došlo 20 řešení.)

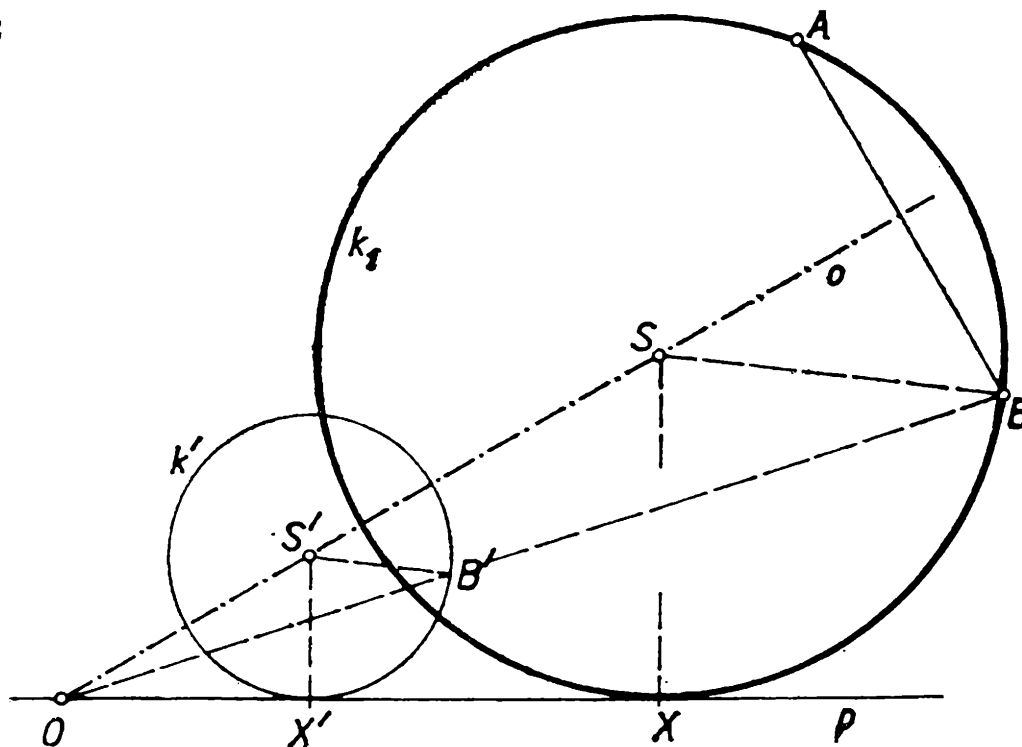
Jaroslav Švrček

Řešení Ignáce Tereščaka, 3. B G Michalovce:

Z vety o obvodových uhloch a skutočnosti, že z bodov kružnicového oblúka nad AB väčšej dĺžky je vidieť AB pod menším uhlom ako z bodov kružnicového oblúka kratšej dĺžky, plynie, že bod $X \in p \cap k$, kde k je kružnica dotýkajúca sa priamky p a $A \in k, B \in k$. Stred S kružnice k leží na osi o úsečky AB v polrovine pA .

Zoberme ľubovoľný bod S' priamky o vnútri polroviny pA a zostrojme kružnicu k' o stredu S' , ktorá sa dotýka priamky p (obr. 2.). Potom

Obr. 2



kružnice k' a k sú rovnolahlé so stredom rovnolahlosti v bode $O = o \cap p$. V prípade $o \parallel p$ ide o posunutie. Ak nie je $AB \perp p$, $AB \parallel p$, dostaneme dve rôzne kružnice k , a to k_1 a k_2 , dva dotykové body X_1, X_2 . Z úvodnej vety plynie, že hľadaný bod bude bodom kružnice s kratším oblúkom nad AB , v danom prípade s menším polomerom. Z toho už plynie konštrukcia. Dostávame jeden bod X , ak nie $AB \perp p$, dva body X_1, X_2 , ak $AB \perp p$; body X_1, X_2 sú súmerne združené podľa priamky AB .

Fyzika

3. V uzavrenej trubici dĺžky $h = 150$ cm jsou olovené broky. Trubicu prevrátíme ze svislého směru o 180° celkem $n = 40$ krát. Vypočtete změnu teploty broků za předpokladu, že z celkové změny vnitřní energie soustavy připadá $\eta = 60\%$ na změnu vnitřní energie broků. Měrné teplo olova je $c = 0,13$ kJ. kg⁻¹. K⁻¹, tíhové zrychlení volte $g \doteq 10$ m s⁻². Řešte nejprve obecně a potom numericky pro zadané hodnoty. (Došlo 66 řešení.)

Stanislav Nový

Řešení Anikó Sidóové, G maď., Dunajská, Bratislava:

Keď trubicu 40krát otočíme, guľky budú mať potenciálnu energiu $40 mgh$. 60% tejto energie sa premení na vnútornú energiu guľiek, takže platí:

$$0,6 \cdot 40 mgh = mc \Delta T.$$

Z tohto vzťahu môžeme vyjadriť ΔT :

$$\Delta T = \frac{24 \, gh}{c}.$$

Skúška dimenzie:

$$[\Delta T] = \left[\frac{m \cdot s^{-2} \cdot m}{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}} \right] = \left[\frac{m^2 \cdot s^{-2}}{m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}} \right] = [K].$$

Dosadením hodnot:

$$\Delta T = \frac{24 \cdot 10 \cdot 1,5}{130} \text{ K} \doteq 2,769 \text{ K}$$

Zmena teploty brokov je 2,7 K.

Další varianta řešení, kterou zaslal Jiří Erhart, G Bílovec:

Při každém převrácení trubice se energie broků změní o $W_0 = mgh$. Během pádu broků na dno trubice se tato potenciální energie přeměňuje na kinetickou energii. Po dopadu se $\eta = 60 \%$ této kinetické energie přemění na vnitřní energii broků — zvýší se tak jejich teplota o ΔT . Platí tedy

$$\frac{\eta}{100} \cdot n W_0 = c m \Delta T, \quad (1)$$

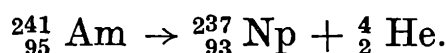
kde m je hmotnost broků a n je počet převrácení trubice. Z (1) plyne, že změna teploty broků je

$$\Delta T = \frac{\eta n h}{100 c} g$$

Pro hodnoty $h = 1,5 \text{ m}$, $n = 40$, $\eta = 60 \%$, $c = 130 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je

$$\Delta T \doteq 2,7 \text{ K}.$$

4. Radioaktivní jádro $^{241}_{95}\text{Am}$ se rozpadlo takto:



Energie rozpadu $Q = 5,48 \text{ MeV}$. Jakou kinetickou energii bude mít vzniklá alfa částice, bylo-li mateřské jádro před rozpadem v klidu? (Došlo 56 řešení.)

Stanislav Pospíšil

Upravené řešení Jaroslava Smejkal, 4. A G Velké Meziříčí:

Platí zákon zachování hybnosti. Protože mateřské jádro bylo před rozpadem v klidu, musí platit

$$m_{N_p} \mathbf{v}_{N_p} + m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{0},$$

tj.

$$m_{N_p} v_{N_p} = m_\alpha v_\alpha$$

(m_{N_p} , m_α — hmotnosti jádra neptunia a alfa částice;

$\mathbf{v}_{N_p}$, $\mathbf{v}_\alpha$ — rychlosti jádra neptunia a alfa částice po rozpadu;

v_{N_p} , v_α — velikosti těchto rychlostí).

Odtud dostáváme

$$v_{N_p} = \frac{m_\alpha}{m_{N_p}} \cdot v_\alpha.$$

Energie rozpadu se projeví jako kinetická energie alfa částice a jádra neptunia. Platí tedy

$$Q = E_{k_\alpha} + E_{k_{N_p}} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_{N_p} v_{N_p}^2.$$

Dosadíme-li do této rovnice výše získaný výraz pro v_{N_p} , dostáváme, že

$$Q = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{N_p}} \right).$$

Protože $\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$ udává kinetickou energii alfa částice, můžeme ji odtud vyjádřit a dostáváme toto řešení úlohy:

$$E_{k_\alpha} = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{N_p}}}$$

Pro číselný výpočet kinetické energie využijeme toho, že hmotnosti atomů lze vyjádřit pomocí relativních atomových hmotností,

$$M_X = A_r({}_Z^AX) \cdot u \doteq A \cdot u.$$

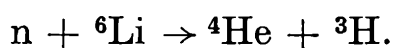
Pro hmotnosti alfa částice a jádra neptunia dostatečně přesně platí, že $m_\alpha \doteq 4 u$, $m_{N_p} \doteq 237 u$.

Číselná hodnota kinetické energie alfa částice po rozpadu je tedy rovna

$$E_{k_\alpha} = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{N_p}}} \doteq \frac{5,48}{1 + \frac{4}{237}} \text{ MeV} = 5,39 \text{ MeV} = 8,63 \times 10^{-13} \text{ J}.$$

Alfa částice odnese většinu z energie rozpadu.

5. Velmi pomalý neutron ($T_n = 0,025 \text{ eV}$) byl zachycen jádrem ${}^6\text{Li}$ a vyvolal jadernou reakci



Energie této reakce je $Q = 4,8 \text{ MeV}$ Jaké budou kinetické energie T_α , T_T vzniklých částic alfa a tricia?

Poznámka. Energie reakce $Q = (m_n + m_{Li} - m_\alpha - m_T) c^2$.

(Došlo 17 řešení.)

Stanislav Pospíšil

Upravené řešení Jaroslava Smejkal, 4. A G Velké Meziříčí:

Soustava tvořená neutronem a lithiem je izolovanou soustavou. Platí v ní zákon zachování energie (ZZE) a zákon zachování hybnosti (ZZH) ve tvaru

$$E = E', \quad (\text{ZZE})$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' \quad (\text{ZZH})$$

(E a $\mathbf{P}$ jsou celková energie a celková hybnost soustavy před reakcí, čárkou jsou označeny tyto veličiny po reakci). Za předpokladu, že jádro lithia bylo v klidu, můžeme obě rovnice rozepsat do tvarů

$$Q + T_n = T_T + T_\alpha,$$

$$m_n \mathbf{v}_n = m_T \mathbf{v}_T + m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$$

(symbolem T značíme kinetickou energii dané částice, symbolem m její hmotnost, symbolem $\mathbf{v}$ její rychlost).

Orientujme souřadnou soustavu tak, že osa x má směr a orientaci rychlosti neutronu před reakcí. Označme φ úhel, který svírá rychlost alfa částice $\mathbf{v}_\alpha$ s osou x , ψ úhel, který svírá s touto osou rychlost jádra tricia (tritonu) $\mathbf{v}_T$ (obr. 3). Zákon zachování hybnosti nyní můžeme rozepsat pro obě složky, ve směru osy x

$$m_n v_n = m_T v_T \cos \psi + m_\alpha v_\alpha \cos \varphi,$$

ve směru osy y

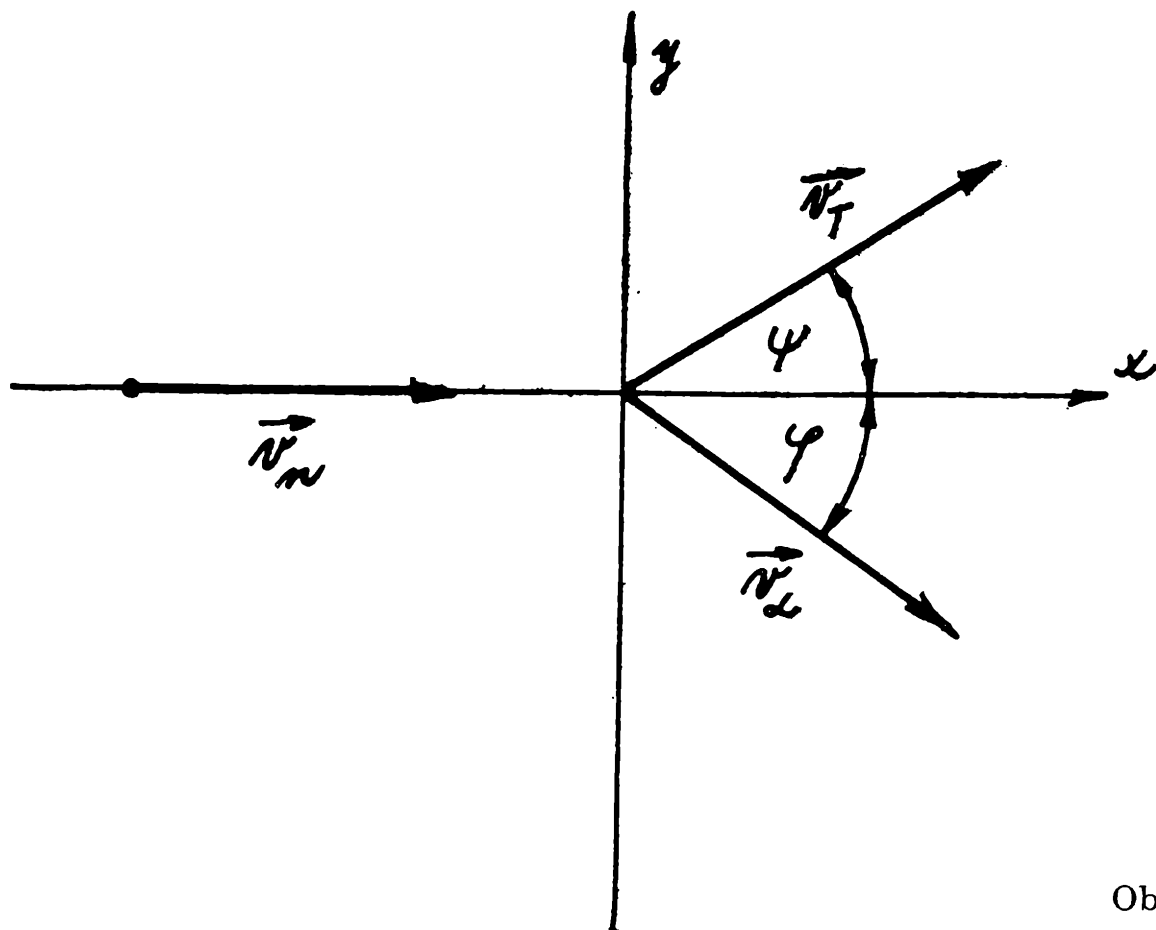
$$0 = m_T v_T \sin \psi - m_\alpha v_\alpha \sin \varphi.$$

Tyto dvě rovnice spolu s rovnicí plynoucí ze zákona zachování energie

$$T_n + Q = T_T + T_\alpha$$

představují soustavu tří rovnic, které umožňují sestavit následující kvadratickou rovnici pro rychlost v_α , kterou získá částice alfa vyletující pod úhlem φ ,

$$\begin{aligned} v_\alpha^2 \left[\frac{1}{2} m_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_T} \right) - v_\alpha \left[\frac{m_\alpha}{m_T} \cos \varphi \sqrt{2m_n T_n} \right] + \right. \\ \left. + \left[T_n \frac{m_n}{m_T} - Q - T_n \right] \right] = 0 \end{aligned}$$



Obr. 3

Nalezením jejího řešení a využitím vztahu

$$T_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} v^2$$

dostáváme vztah pro kinetickou energii T_{α} ,

$$T_{\alpha} = Q \frac{m_{\alpha}}{(m_{\alpha} + m_T)^2} \left\{ \sqrt{m_n \frac{T_n}{Q}} \cos \varphi + \sqrt{m_n \frac{T_n}{Q} \cos^2 \psi + \left(1 + \frac{m_T}{m_{\alpha}}\right) (m_T - m_n) \frac{T_n}{Q} + m_T \left(1 + \frac{m_T}{m_{\alpha}}\right)} \right\}^2$$

S využitím ZZE můžeme nalézt i kinetickou energii tritonu

$$T_T = T_n + Q - T_{\alpha}.$$

Závislost kinetických energií na úhlu je důsledkem nenulové celkové hybnosti, tj. nenulové rychlosti pohybu soustavy jako celku. Vztahy pro kinetické energie T_{α} a T_T se podstatně zjednoduší, vezmeme-li v úvahu, že zadaná kinetická energie neutronu T_n je řádově 10^8 krát menší než energie reakce. V tomto případě lze ve vztahu pro T_{α} členy obsahující podíl $\frac{T_n}{Q}$ zanedbat a pro kinetické energie alfa částice a tritonu dostáváme vztahy

$$T_{\alpha} = Q \frac{1}{1 + \frac{m_{\alpha}}{m_T}},$$

$$T_T = Q \frac{1}{1 + \frac{m_T}{m_{\alpha}}},$$

které jsou zcela analogické vztahům užitým v předcházejícím příkladu č. 4, kde se od počátku předpokládalo, že soustava má nulovou celkovou hybnost. Vzhledem k tomu, že pro poměr hmotností alfa částice a tritonu platí dostatečně přesně

$$\frac{m_{\alpha}}{m_T} = \frac{4}{3},$$

dostáváme tyto číselné výsledky:

$$T_{\alpha} = Q \frac{3}{7} = 4,8 \frac{3}{7} \text{ MeV} = 2,06 \text{ MeV} = 3,3 \times 10^{-13} \text{ J},$$

$$T_T = Q \frac{4}{7} = 2,74 \text{ MeV} = 4,4 \times 10^{-13} \text{ J}$$

Poznámka autora úloh č. 4 a 5. Většina řešitelů se v řešení obou úloh dopouštěla faktických nebo formálních chyb při formulování zákona zachování hybnosti (ZZH). Úvaha by měla být tato:

Protože soustava je izolovaná (jak soustava rozpadajícího se jádra v příkladu č. 4, tak soustava neutron plus lithium v příkladu č. 5), zachovává se celková hybnost soustavy

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}'$$

($\mathbf{P}$ je celková hybnost soustavy před procesem, $\mathbf{P}'$ je celková hybnost soustavy po procesu). V obou příkladech můžeme předpokládat, že celková hybnost soustavy je nulová

$$\mathbf{P} = \mathbf{0}$$

(je zadáno, že jádro americia je před rozpadem v klidu; v příkladu č. 5 se předpokládá, že jádro lithia je před reakcí v klidu a zadaná kinetická energie neutronu je mnohem menší než energie reakce). Proto je celková hybnost po procesu rovněž nulová

$$\mathbf{P}' = \mathbf{0},$$

tj.

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ jsou hybnosti vzniklých částic. Odtud dále plyne

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2,$$

$$p_1 = p_2,$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Poslední rovnice spolu s rovnicí plynoucí ze zákona zachování energie

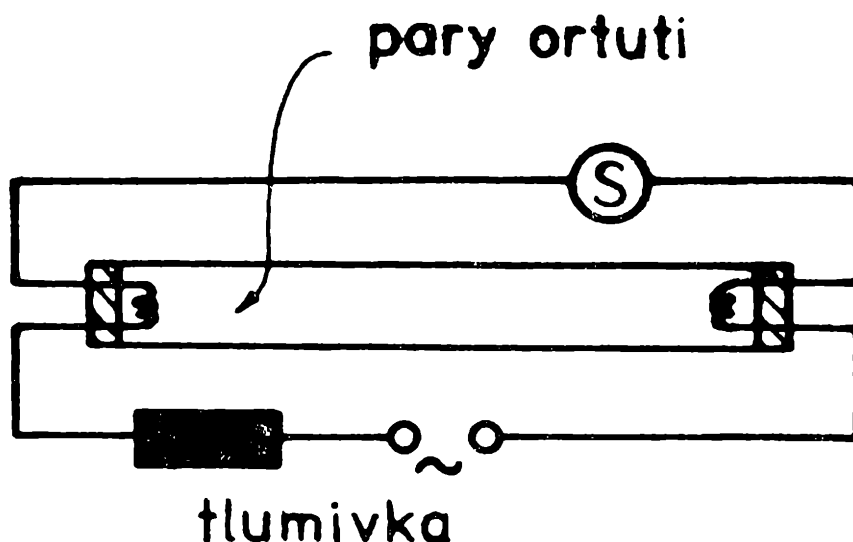
$$Q = T_1 + T_2$$

tvoří soustavu dvou rovnic, dostačující k nalezení řešení úloh formulovaných v úlohách č. 4 a 5. Relativně malé hodnoty energie Q opravňují použití nerelativistického přiblížení.

OLYMPIÁDY A SOČ

Třináctá mezinárodní fyzikální olympiáda

Jak je zvykem, dostali účastníci 13. MFO v roce 1982 k řešení tři teoretické úlohy, k čemuž měli vymezený čas od 8,00 h do 13,00 h. Úlohy dostali přeloženy do mateřského jazyka, byly však k dispozici i texty v některém z jednacích jazyků mezinárodních fyzikálních olympiád (ruština, němčina, angličtina, francouzština). Uvedeme texty úloh: 1. Žiarivka (luminiscenčná trubica) je pripojená na striedavé elektrické napätie frekvenciou $f = 50,0$ Hz podľa schémy na obr. 1. Napätie na



Obr. 1

svorkách $U = 228$ V, prúd v obvode žiarivky $I = 0,600$ A, napätie na svietiacej žiarivke $U' = 84,0$ V a odpor tlmivky $R = 26,3 \Omega$.

a) Určte vlastnú indukčnosť L tlmivky.

b) Určte fázový posun φ medzi celkovým napätím a prúdom v obvode.

c) Určte skutočný výkon P obvodu.

d) Tlmivka okrem obmedzenia prúdu v obvode má ešte jednu dôležitú funkciu. Definujte túto funkciu a bližšie fyzikálne vysvetlite jej význam.

e) Nakreslite graf funkcie, ktorá vyjadruje závislosť svetelného toku žiarivky od času.

f) Vysvetlite, prečo žiarivku postačuje zapnúť len jedenkrát, hoci okamžité napätie na žiarivke periodicky nadobúda nulové okamžité hodnoty a pritom žiarivka nezhasne.

g) Výrobca žiariviek odporúča spojiť do série s tlmivkou kondenzátor s kapacitou $C = 4,7 \mu\text{F}$. Aký vplyv má kondenzátor na činnosť obvodu žiarivky a aký praktický význam má toto zapojenie.

h) Spektroskopom pozorujte čiasti žiarivky s luminofórom a bez luminofóra. Vysvetlite rozdiel medzi pozorovanými spektrami. Žiarivku samotnú považujte za ideálny rezistor. Tlmivka je cievka s vyššou vlastnou indukčnosťou, ktorá má železné jadro. Štartér S (pozri obr. 1) je zariadenie obsahujúce kontakt, ktorý na krátky čas uzavrie obvod nakrátko v okamihu pripojenia obvodu na elektrickú sieť. Po rozsvietení žiarivky sa kontakt rozpojí.

Pozn.: K riešeniu úlohy mali súťažiaci k dispozícii priamohľadný spektroskop a žiarivku, ktorej steny v jednej polovici boli a v druhej polovici neboli pokryté luminofórom.

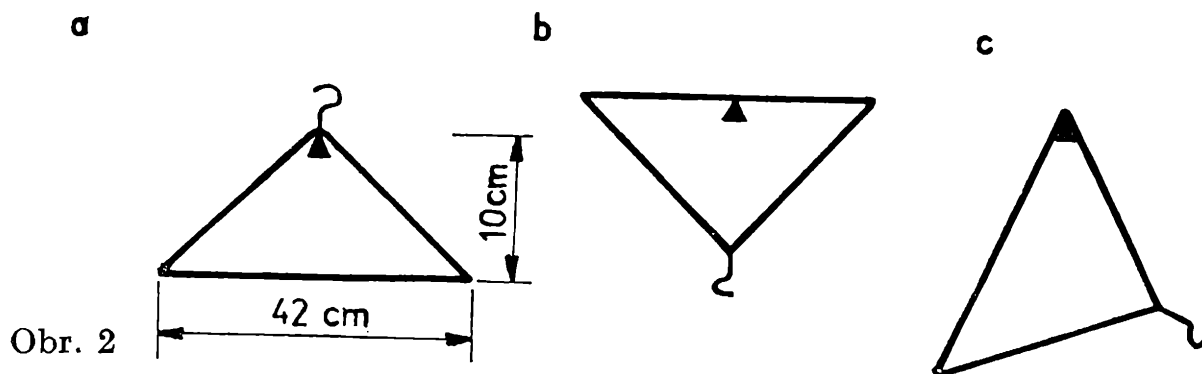
2. Ramínko z drátu koná kmitavý pohyb s malou amplitudou ve svislé rovine kolem vodorovné osy (obr. 2 abc). V případech a, b je ramínko v rovnovážné poloze a jeho nejdelší strana je vodorovná. Zbývající dvě strany ramínka mají touž délku. Ve všech třech případech je doba kmitu ramínka T stejná. Určete polohu hmotného středu ramínka a dobu kmitu T . Z obrázku nemůžeme zjistit další údaje kromě uvedených rozměrů.

3. Balón o hmotnosti $m = 0,187 \text{ kg}$ má stálý objem $V = 1,10 \text{ m}^3$. Ve spodní části má otvor. Objem balónového obalu je velmi malý. Vzduch v okolí balónu na povrchu Země má teplotu $t_1 = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$, tlak $p_1 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ a hustotu $\rho = 1,20 \text{ kg m}^{-3}$.

a) Určete teplotu t_2 vzduchu uvnitř balónu, jestliže se balón nad povrchem Země právě vznáší.

b) Balón je pomocí vlákna přivázan k bodu na povrchu Země. Vzduch uvnitř balónu zahřejeme na teplotu $t_3 = 110 \text{ }^\circ\text{C}$. Určete sílu F , kterou balón působí na vlákno.

c) Vzduch uvnitř balónu má teplotu t_3 . Otvor balónu zavážeme. Balón po uvolnění začne v atmosféře stoupat. Předpokládáme, že se teplota vzduchu v balónu přitom nemění. Teplotu t_1 okolního vzduchu považujte ve všech výškách, v nichž se balón nachází, za stálou a rovnou t_1 . Tlak vzduchu na povrchu Země je p_1 . Určete výšku h nad povrchem Země, do níž balón vystoupí.



Obr. 2

d) V rovnovážné poloze, již dosáhne balón v části c), vychýlíme balón ve svislém směru o vzdálenost $\Delta h = 10$ m z této polohy a uvolníme ho. Kvalitativně charakterizujte další pohyb balónu.

Pro čtenáře, který si úlohy vyřeší, uvádíme alespoň některé číselné výsledky: 1. a) $L = 1,08 H$, b) $\varphi = 63,9^\circ$, c) $P = 59,9 W$. 2. $T = 1,03$ s, 3. a) $t_2 = 68,4^\circ C$, b) $F = 1,21 N$, c) $h = 841$ m.

Za řešení teoretických úloh mohl každý soutěžící získat celkem 30 b. Naši soutěžící byli hodnoceni: *M. Kolesík* 29,0 b., *P. Tichavský* 22,5 b., *J. Bajer* 21,0 b., *R. Šášik* 20,25 b., *D. Kluvanec* 18,25 b.

V dalších dvou praktických úlohách se řešilo:

4. Určení ohniskové vzdálenosti a indexu lomu čočky.
5. Studium pohybu válce po vodorovné rovině.

Texty těchto dvou úloh a úplná řešení všech úloh budou publikovány v ročence fyzikální olympiády za 23. ročník.

*Doc. dr. ing. D. Kluvanec, CSc.,
Dr. I. Volf, ÚVFO*

INFORMACE

Prijímacie pohovory na MFF UK v Bratislave

HELENA BEREKOVÁ, TOMÁŠ HECHT

Predkladáme dve varianty písomných testov z matematiky, ktoré žiaci dostali na prijímacích pohovoroch na MFF UK v Bratislave. V zátvorke za každým príkladom uvádzame počet bodov za správne riešenie príkladu. Na vypracovanie testu bolo 60 minút. Hodnotenie testu: 16—20 bodov — výborne, 12—15 veľmi dobre, 7—11 dobre, 6 alebo menej nevyhovujúce.

Vo variante C mali vaši rovesníci problémy s príkladmi 2b, 2c, 5a, 5c, vo variante D s príkladmi 1b, 2, 5b. Vyskúšajte si svoje sily!

Variant A C

1. Vypočítajte:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6} \quad (4b.)$$

2. Pretekov v behu na 100 m sa zúčastnili 5 pretekári: Adam, Boris, Cyril, Dávid a Emil.

a) Koľko je všetkých poradí, v ktorom mohli dobehnúť do cieľa? (1 b.)

b) Koľko je všetkých poradí, v ktorom mohli dobehnúť do cieľa, ak vieme, že Adam dobehol pred Borisom? (napr. Adam druhý, Boris 4.) (2 b.)

c) Koľko je všetkých poradí, v ktorom mohli dobehnúť do cieľa, ak vieme, že Adam nebol prvý a Boris nebol posledný? (2 b.)

3. Určte vzájomnú polohu priamky p a roviny ϱ , a keď sú rôznoběžné, súradnice ich priesečníka:

$$\varrho: 2x + 3y + z - 3 = 0,$$

$$p: x = 1 + 2t, y = 3 + t, z = 4 - t. \quad (4 \text{ b.})$$

4. Daný je pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ so stranou 1. Označme G stred úsečky DE , H stred úsečky BC . Vypočítajte dĺžku GH ! (3 b.)

5. Usporiadajte dané reálne čísla podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie!

$$a) \sin 10, \operatorname{tg} 10, \cos 10; \quad (1 \text{ b.})$$

$$b) 2^{300}, 3^{200}, 70^{50}; \quad (2 \text{ b.})$$

$$c) 100!, \sqrt[3]{200!}, \log(1000!). \quad (1 \text{ b.})$$

Variant A D

1. Vypočítajte:

$$a) (1 + i \sqrt{3})^7, \quad (2 \text{ b.})$$

$$b) 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 1985i^{1984} \quad (2 \text{ b.})$$

2. Koľkými spôsobmi možno rozmeniť stokorunáčku, ak máme k dispozícii 20-korunáčky, 10-korunáčky a 5-korunáčky. (4 b.)

3. Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$, ktorého podstava je štvorec ležiaci v rovine xy , $A[0, 0, 0]$, $B[5, 0, 0]$, $D[0, 5, 0]$ a jeho výška je 7. Vypočítajte uhol φ priamok DV a CV . (4 b.)

4. Do jedného obrázku nakreslite grafy funkcií:

$$a) y = x^2, y = 10x^2, y = 0,1x^2; \quad (1 \text{ b.})$$

$$b) y = \log_2 x, y = \log_{10} x, y = \log_{0,5} x; \quad (2 \text{ b.})$$

$$c) y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, y = \sqrt[10]{x}. \quad (1 \text{ b.})$$

(Teda vzniknú tri obrázky, na každom z nich budú tri grafy.)

5. V množine reálnych čísel riešte uvedené nerovnice a preveďte diskusiu vzhľadom na parameter a :

$$a) x^2 + ax + 1 > 0; \quad (2 \text{ b.})$$

$$b) |x - 1| < |x - a| \text{ (Využijte geometrickej interpretácii absolútnej hodnoty.)} \quad (2 \text{ b.})$$

Výsledky:

Varianta C: 1. 2, 2.a) 120, 2.b) 60, 2.c) 78, 3. priamky sú rôznobežné, priesečník $X[-3, 1, 6]$, 4. $|GH| = 1,5$, 5.a) $\cos 10 < \sin 10 < \operatorname{tg} 10$, 5.b) $2^{300} < 70^{50} < 3^{200}$, 5.c) $\log(1000!) < 100! < \sqrt[10]{200!}$

Varianta D: 1.a) $128(1 + i\sqrt{3})$, 1.b) $993 - 992i$, 2. 36, 3. $\cos \varphi = \frac{98}{123}$,

5.a) pre $a \in (-2, 2)$ $P = R$, ináč $P = (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, kde $x_1 < x_2$ sú korene príslušnej kvadratickej rovnice, 5.b) pre $a < 1$ $P = \left(\frac{1+a}{2}, \infty\right)$,

pre $a = 1$ $P = \emptyset$, pre $a > 1$ $P = \left(-\infty, \frac{1+a}{2}\right)$.

Z NOVÝCH KNIH

J. Grygar - D. Chochol:

V HLBINÁCH VESMÍRU

Vydali Mladé letá, slovenské vydavateľstvo kníh pre mládež, n. p. Bratislava, v roku 1983, strán 153, farebné a čiernobiele ilustrácie, viaz. Kčs 24,—

V kozmickej ére ľudstva sa stále viac hovorí o slnečnej sústave a hviezdnych svetoch. Základné astronomické poznatky o vesmíre patria už k všeobecnému vzdelaniu. Nové objavy odкрývajú počiatočné štádia vývoja vesmíru a ukazujú vzdialené divy rozpínajúceho sa kozmu. Pribúdajúce poznatky naplňajú vedecké i popularizujúce publikácie.

Preklad úspešnej knižky J. Grygara (Albatros, Praha 1975) do slovenčiny, doplnený návodom na jednoduché astronomické pozorovania od D. Chochola, dáva do rúk čitateľov zaujímavú a podnetnú informáciu o základných astronomických objektoch, pojmach a údajoch. Prvá časť knižky je pútavým rozprávaním o živote hviezd a tajomstvách vesmírnych telies, náznakom našej cesty za poznáním vesmíru. Druhá časť obsahuje krátke návody, ako sa orientovať na oblohe, ako pozorovať planéty, čo si všímať na hviezdach, kométach, meteoroch. Vysvetlený je jav zatmenia Slnka a Mesiaca. Súčasťou knižky sú: malá galéria slávnych astronómov, stručný pre-

hľad dejín astronómie, zoznam súhvezdí, prehľad najjasnejších hviezd, premenných hviezd viditeľných voľným okom, základné údaje o planétach a mesiacoch slnecnej sústavy, prehľad význačných komét a pravidelných meteorických rojov, program zatmení Slnka a Mesiaca do roku 1990 a ďalšie tabuľky. Voľnou prílohou je farebná mapka severnej hviezdnej oblohy. V závere je prehľad odporúčanej literatúry a fotografická príloha.

Publikácia patrí do rúk žiakom v astronomických krúžkoch, stredoškólakom i všetkým začínajúcim záujemcom o astronómiu.

Dušan Jedinák

M. Grün :

KOSMONAUTIKA - SOUČASNOST A BUDOUCNOST

Vydal Horizont, v Prahe roku 1983, v edícii Malá moderní encyklopedie sv. 96, strán 336, farebná šesťnásťstránková príloha, brož. Kčs 24,—

Môžete byť kozmonautom? Ako navrhnuť družicu? Kozmonautika: 2001? Chcete poznať odpoveď na tieto otázky? Pozrite sa do knižky Kosmonautika — súčasnosť a budúcnosť.

Ing. Marcel Grün, pracovník Hvězdárny a planetaria hl. m. Prahy, spracoval pestré spektrum kozmonautickej problematiky do zaujímavej publikácie nakladateľstva Socialistického akadémie ČSSR. Záujemci o tento novodobý odbor ľudskej činnosti môžu tak spoznať

minulosť, súčasnosť i budúcnosť jedného smeru vedeckotechnickej revolúcie.

Knižka je rozdelená na 12 kapitol, ktoré nás vedú od úsvitu kozmickej éry, cez dynamiku kozmického letu a základy raketovej techniky k výsledkom kozmického výskumu. Dočítame sa o problémoch života človeka vo vesmírnom priestore, o širokom použití kozmických výdobytkov v rôznych odvetviach vedy, techniky a národného hospodárstva. Spoznáme silu spolupráce ľudí i celých organizácií pri realizovaní veľkých projektov.

V knižke je veľa zaujímavých, bežne nepublikovaných údajov a postrehov. Autor vyvážene približuje technické vybavenie družíc, sond a rakiet, prístrojové zabezpečenie pri pilotovaných letoch i nenahraditeľný ľudský podiel na výsledkoch a ďalších perspektívach. Publikácia prináša aktuálne informácie o sovietskych, amerických i ďalších kozmických výskumoch. Kapitola „Užitečná kosmonautika“ je dôstojným prehľadom základných aplikácií kozmonautiky. Súčasťou knižky je podnetný výber literatúry z tejto problematiky.

Grünova knižka sa veľmi dobre číta. Je doplnená schémami, obrázkami, prehľadnými tabuľkami. Poskytuje cenné prehľadné informácie, otvára brány k pochopeniu celej kozmonautickej problematiky, láka k hlbšiemu štúdiu jednotlivých problémov. Patrí do rúk študentov, učiteľov, lektorov.

Dušan Jedinák

České praktické početnice ze 16. a počátku 17. století

V 16. století se začal podobně jako v celé Evropě v českých zemích rozvíjet městský život, řemesla a obchod. To si současně vynutilo potřebu znalostí praktické matematiky, a proto mezi nejstaršími českými tištěnými knihami nalézáme i početnice. Byly určeny pro nejširší okruh čtenářů, od žáků elementárních škol až po řemeslníky a obchodníky. Obsahují proto řadu praktických příkladů, které jsou někdy doplněny obrázkem, jak vidíme na straně přetištěné z nejstarší české tištěné početnice.

Touto početnicí jsou „Nové knížky o počtech na cifry a na liny přitom některé regule a exempla, mince rozličné podle běhu kupeckého krátce a užitečně sebraná“ od Ondřeje Klatovského. Poprvé byla vytištěna v roce 1530 v Norimberku v tiskárně Fridricha Peypuse a pak v roce 1558 v Praze u Jana Kantora. V úvodu knihy autor vyzdvihuje význam matematiky a počtů. Hlásí se tu k výroku Pythagora „... ten každý nic neumí, který počítati neumí...“ a Platona, který „rozdíl mezi lidmi a zvířaty klade, že člověk počítati umí...“. Klatovský uvádí i didaktické poznámky, např. z římského básníka Quinta Horatia Flacca „cožkoli učíš, uč krátce, aby

Wechsel-slowe

zmienieni.



Item geden
prissel tpea
niezomięty
rzekl mu/wy
mien mi. 15.
gr. att. 6. &
na missen
stau minge/
deym. 3. S.
missenky za
2. bila &/ wo
tazka to mu
ma dati kolik grossuow strzybrnych / die
ley takto rzy 2. & att. da di mi 3. & miss.
30 mi da 15 gr. att. 6. & att. / 12. & miss.
geden gr. strzybrny / geden gr. strzy
brny 8. & att. / Growney zadni počet
sprawim zagedno / wzdicley gr. na & 6.
knim przydey / stane wreguli takto facit
13. gr. strzybrnych 15. & 1. hl.
2. & att. 3. & mis. III. & att.

Item geden byl dluzen druhemu 6. funtu
minge

učedlnici rychleji pochopující, pamětlivi toho zachovali...“. Obsah dělí Klatovský do čtyř traktátů, jejichž úvodní listy jsou vyzdobeny dřevořezami, zachycujícími výjevy ze života počtářů nebo kupců. První traktát je o počítání na cifrách, druhý o počítání na linách, třetí o zlomcích a čtvrtý o „rozličném běhu kupeckém“.

Ivana Füzéková

Zajímáte se o dějiny techniky a exaktních věd?

Doporučujeme vám návštěvu dvou pražských muzeí:

NÁRODNÍ TECHNICKÉ MUZEUM, Praha 7 — Letná, Kostelní 42
VOJENSKÉ MUZEUM — expozice letectva a kosmonautiky,
Praha 9 — Kbely, Mladoboleslavská

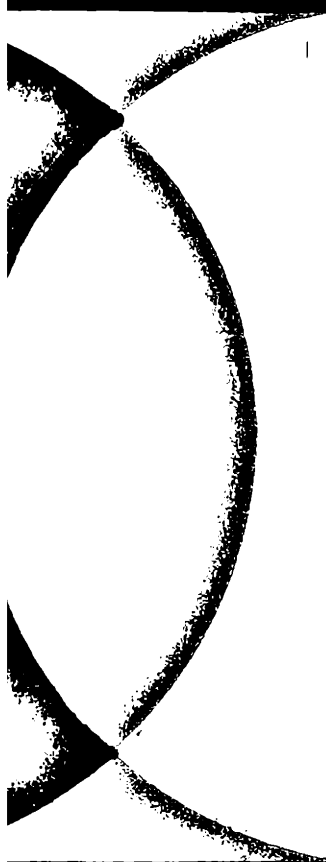
Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
Praha 1983.

ROZHLEDY

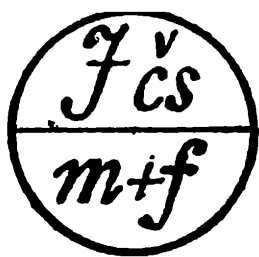
**matematicko
– fyzikální**



**ROČNÍK 62, 1983/84
LEDEN**

(5)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc.,
UK Bratislava, Stanislav Horák,
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, doc. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Pra-
ha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Retigové 4, 116 39 Praha 1 - Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

M. Trch: O kritériích dělitelnosti celých čísel některými prvočíslly	181
V. Mráz: Brachystochrona a další cykloidy	186
I. Fischer: Logické obvody z polovodičů	194
J. Šedivý: Indické rášiky	202
J. Chrapan: Objev radioaktivity	204
M. Melichar: Elektronový obal atomu a atomová spektra	206
J. Chrapan: 40 rokov vysokohorského ob- servatória na Skalnatom plese	211
E. Kraemer: In memoriam profesora Zdeňka Pírka	214
K životnímu jubileu profesora Josefa Kotyka	215
Přemýšlíme, řešíme	216
Naše soutěž	218
Olympiády a SOČ	223
Informace	225
Pohledy do dějin	. 3. str. obálky

O kritériích dělitelnosti celých čísel některými prvočísly

RNDr. MILAN TRCH, CSc., UK Praha

Elementární teorie čísel je partie matematiky, která dobře umožňuje rozvíjet matematické myšlení žáků a přitom se opírá jen o několik základních vlastností celých čísel. Dříve se různá kritéria dělitelnosti těšila poměrně značné oblibě. V dnešní době minikalkulátorů se však bude jistě mnohým zdát rozumnější přímo vyzkoušet s pomocí minikalkulátoru, zda je jedno číslo dělitelné druhým číslem beze zbytku či nikoliv. Takový postup je však možný jen s čísly, která se do minikalkulátoru prostě řekne „vejdou“ (obvykle nejvýše osmimístná celá čísla). Dříve než přistoupíme k vlastnímu tématu, připomeňme si základní pojmy a vlastnosti celých čísel, kterých budeme užívat.

Víme, že každé celé číslo x má právě jeden z následujících tvarů: 0 , n , $-n$, kde n je přirozené číslo. Přitom každé přirozené číslo a lze právě jediným způsobem vyjádřit ve tvaru:

(1) $a = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo, $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ a přitom $a_k \neq 0$. (tzv. dekadický zápis čísla a)

Říkáme, že celé číslo a dělí celé číslo b právě tehdy, když existuje celé číslo x takové, že platí $a \cdot x = b$. Tento fakt zapisujeme stručně symbolem $a \mid b$. O čísle a přitom říkáme, že je dělitelem čísla b . O čísle b naopak říkáme, že je násobkem čísla a . Snadným důsledkem tohoto zavedení jsou tato tvrzení:

- a) Libovolné celé číslo x dělí číslo 0 .
- b) Čísla 1 a -1 dělí libovolné celé číslo y .

Důležitou vlastnost celých čísel popisuje tzv. věta „o dělení se zbytkem“. I tyto věty uvádíme bez důkazů:

Věta 1: Pro každá dvě celá čísla a, b taková, že $b \neq 0$, existují jednoznačně celá čísla q, r tak, že $a = b \cdot q + r$; přitom platí $0 \leq r < |b|$. Pro naše potřeby je však účelné vyslovit toto tvrzení ještě v jiném tvaru.

Věta 2: Pro každá dvě celá čísla a, b taková, že $b \neq 0$, existují jednoznačně celá čísla s, t taková, že $a = b \cdot s + t$ a přitom je $-\left|\frac{b}{2}\right| \leq t < \left|\frac{b}{2}\right|$.

Výhodou této formulace, která je ostatně snadným důsledkem formulace předchozí, je, že zbytky při dělení jsou — co do absolutní hodnoty — menší. Snadno lze také nahlédnout vlastnosti, které spojují dělitelnost čísel celých a čísel přirozených:

Věta 3: Pro každá dvě celá čísla x, y platí:

Číslo x dělí číslo y právě tehdy, když $|x|$ dělí $|y|$. Je-li přitom navíc $y \neq 0$, potom $|x| \leq |y|$.

Tato vlastnost nám prakticky umožňuje omezit se při zkoumání dělitelnosti celých čísel na zkoumání dělitelnosti přirozených čísel. Připomeňme si ještě pojem prvočísla a jeho vlastnosti.

Prvočíslem nazýváme takové přirozené číslo p , které splňuje podmínku $p > 1$ a přitom p nemá žádné jiné dělitele kromě čísel 1, p . (Uvědomte si, že i čísla opačná k prvočísłům mají z hlediska dělitelnosti zcela stejné vlastnosti jako prvočísla. Věta 3 nám však umožňuje zkoumat pouze dělitelnost kladnými čísly, v našem případě pak speciálně prvočísla.)

Základní vlastnost prvočísel popisuje následující věta, kterou opět vyslovíme bez důkazu:

Věta 4: Jestliže p je prvočíslo, které dělí součin $a \cdot b$ celých čísel a, b potom p dělí alespoň jednoho z činitelů, tj. $p \mid a$ nebo $p \mid b$.

Cílem tohoto článku je pojednat o kritériích dělitelnosti některými prvočísla. Podstatou všech kritérií dělitelnosti nějakého čísla x daným číslem p je nahrazení čísla x takovým číslem y , pro které platí:

- 1) p dělí x právě tehdy, když p dělí y ,
- 2) y je menší než x a fakt $p \mid y$ se dá snadněji ověřit.

Tento postup se opírá o větu „o dělení se zbytkem“ a větu následující.

Věta 5: Buďte a, b, x, y celá čísla taková, že $b = a \cdot x + y$, pak platí $a \mid b$ právě tehdy, když $a \mid y$.

Důkaz: Jestliže $a \mid b$, pak existuje celé číslo k tak, že $a \cdot k = b$, a proto lze y vyjádřit ve tvaru $y = a \cdot (k - x)$; odtud plyne $a \mid y$. Jestliže naopak $a \mid y$, existuje celé číslo m tak, že $a \cdot m = y$. Dosadíme-li za y , dostáváme $b = a \cdot (x + m)$, a tedy $a \mid b$.

Kritéria pro dělitelnost celých čísel zapsaných v dekadickém zápisu čísla 2 a 5 jsou známa — nutnou a postačující podmínkou, aby v (1) byla cifra a_0 byla dělitelná číslem 2 anebo 5. Důkaz těchto tvrzení je speciálním případem věty 5. Nyní se proto dále zaměříme na dělitelnost prvočísla p , pro která $2 \neq p \neq 5$. Obecnější úvahy jsou snáze pochopitelné, porozumíme-li principu kritérií dělitelnosti prvočísla 3 a 11.

1/ Kritérium dělitelnosti prvočíslem 3

Víme, že libovolné nenulové celé číslo a je dělitelné číslem 3 právě tehdy, když je číslem 3 dělitelné číslo $|a|$. Takové číslo lze však zapsat ve tvaru (1). Dále víme, že platí:

$10 = 3 \cdot 3 + 1$; pro naše účely však stačí vědět, že existuje celé číslo b_1 tak, že $10 = 3 \cdot b_1 + 1$.

$10^2 = (3 \cdot 3 + 1)^2 = 3^2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 = 3 \cdot (3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) + 1$;
existuje tedy celé číslo b_2 tak, že $10^2 = 3 \cdot b_2 + 1$.

Zobecněním této úvahy snadno nahlédneme, že podobné vyjádření existuje i pro další mocniny desítky. Například pro číslo 10^3 platí:

$$10^3 = 10 \cdot 10^2 = (3 \cdot b_1 + 1) (3 \cdot b_2 + 1) = 3 (3b_1 \cdot b_2 + b_1 + b_2) + 1.$$

Pro libovolné přirozené číslo n tedy existuje celé číslo b_n tak, že $10^n = 3 \cdot b_n + 1$. Dosadíme-li nyní tyto výrazy za mocniny desítky do (1), dostáváme:

$$|a| = a_k \cdot (3 \cdot b_k + 1) + a_{k-1} (3 \cdot b_{k-1} + 1) + \dots + a_1 (3 \cdot b_1 + 1) + a_0.$$

Po roznásobení a vytknutí čísla 3 ze všech součinů, ve kterých se vyskytuje, dostáváme:

$$|a| = 3 \cdot (a_k b_k + a_{k-1} b_{k-1} + \dots + a_1 b_1) + (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0).$$

Podle věty 5 okamžitě dostáváme známé kritérium dělitelnosti třemi: Číslo 3 dělí číslo $|a|$ právě tehdy, když 3 dělí číslo $a_k + \dots + a_0$.

Slovy: 3 dělí $|a|$, právě když ciferný součet je dělitelný třemi.

Cvičení 1. Zcela obdobně zní i kritérium dělitelnosti číslem 9; přirozené číslo a zapsané ve tvaru (1) je dělitelné devíti právě tehdy, když ciferný součet $a_k + \dots + a_1 + a_0$ je dělitelný devíti. Pokuste se i toto kritérium samostatně odvodit a dokázat!

2) Kritérium dělitelnosti prvočíslem 11

I při tomto kritériu budeme vycházet z dekadického zápisu ve tvaru (1) Z věty 3 je zřejmé, že se bez újmy na obecnosti můžeme zajímat pouze o přirozená čísla. Podobně jako v předchozím případě vyjádříme mocniny desítky, tentokrát pomocí věty 2:

$$10 = 11 - 1; \text{ existuje tedy celé číslo } b_1 \text{ tak, že } 10 = 11 \cdot b_1 - 1.$$

$$10^2 = (11 - 1)^2 = 11 \cdot 11 - 2 \cdot 11 + 1; \text{ existuje tedy celé číslo } b_2 \text{ tak, že platí } 10^2 = 11 \cdot b_2 + 1.$$

$$10^3 = 10 \cdot 10^2 = (11 \cdot b_1 - 1) (11 \cdot b_2 + 1) = 11 (11 \cdot b_1 \cdot b_2 + b_1 - b_2) - 1;$$

$$\text{existuje tedy celé číslo } b_3 \text{ tak, že } 10^3 = 11 \cdot b_3 - 1.$$

Podobně lze vyjádřit i číslo $10^4 = 10 \cdot 10^3 = 11 (11b_1 \cdot b_3 - b_1 - b_3) + 1$. Odtud již snadno nahlédneme, že pro každé přirozené číslo n platí: $10^{2n-1} = 11 \cdot b_{2n-1} - 1$ a $10^{2n} = 11 \cdot b_{2n} + 1$, kde b_{2n-1} , b_{2n} jsou nějaká celá čísla. Dosadíme-li tyto vztahy opět do (1) za mocniny desítky, dostaneme při vhodném uspořádání sčítanců:

$$a = a_0 + a_2 \cdot (11 \cdot b_2 + 1) + a_4 \cdot (11 \cdot b_4 + 1) + \dots + a_1 \cdot (11 \cdot b_1 - 1) + a_3 \cdot (11 \cdot b_3 - 1) + a_5 \cdot (11 \cdot b_5 - 1) + \dots$$

Po úpravě tohoto výrazu a vytknutí čísla 11 ze všech součinů, kde se vyskytuje, dostaneme:

$$a = 11 \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_k) + [(a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)].$$

Podle věty 5 je číslo a dělitelné číslem 11 právě tehdy, když číslem 11 je dělitelné číslo $[(a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)]$. Slovy: Číslo a je dělitelné jedenácti právě tehdy, když je dělitelné jedenácti číslo, které vznikne tak, že sečteme cifry na místech sudých řádů a zmenšíme jej o součet cifer na místech lichých řádů.

(Pozor — místa je třeba počítat od konce vyjádření čísla a .)

Cvičení 2: Rozhodněte, zda kritérium zůstane pravdivé, jestliže změníme pořadí závorek v rozdílu; tj. od součtu cifer na místech lichých řádů odečteme součet cifer na místech sudých řádů. Zdůvodněte!

Příklad 1: Rozhodněte, zda číslo 127 395 689 102 je dělitelné číslem 3 respektive číslem 11.

Řešení: Ciferný součet je 53. Proto podle kritéria dělitelnosti třemi není dané číslo dělitelné třemi.

Součet cifer sudých řádů je $2 + 1 + 8 + 5 + 3 + 2$; tj. 21. Součet cifer lichých řádů je $0 + 9 + 6 + 9 + 7 + 1$; tj. 32. Součet cifer sudých řádů zmenšený o součet cifer lichých řádů je číslo -11 . Toto číslo je jedenácti dělitelné, a proto je dělitelné jedenácti i dané číslo.

Všimněte si, že při odvozování kritérií bylo vždy rozhodující vhodné vyjádření mocnin desítky. Pokusíme se nyní tuto metodu použít i pro dělitelnost sedmi.

3) Kritérium dělitelnosti prvočíslem 7

Zaměříme se rovnou na hledání vhodného vyjádření mocnin desítky podle věty 2 o dělení se zbytkem.

$10^1 = 7 \cdot 1 + 3$; tedy existuje celé číslo b_1 tak, že $10^1 = 7 \cdot b_1 + 3$.
 $10^2 = (7 \cdot 1 + 3)^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3^2$. Vyjádříme-li 3^2 ve tvaru $1 \cdot 7 + 2$, lze říci, že existuje celé číslo b_2 takové, že platí $10^2 = 7 \cdot b_2 + 2$.

$$\begin{aligned} 10^3 &= 10 \cdot 10^2 = (7 \cdot b_1 + 3) \cdot (7 \cdot b_2 + 2) = \\ &= 7 \cdot (7 \cdot b_1 \cdot b_2 + 3 \cdot b_2 + 2 \cdot b_1) + 6 \end{aligned}$$

Vyjádříme-li ještě číslo 6 ve tvaru $7 \cdot 1 - 1$, lze říci, že existuje celé číslo b_3 tak, že $10^3 = 7 \cdot b_3 - 1$.

Nyní již snadno najdeme ostatní vyjádření: $10^4 = 10 \cdot 10^3 =$

$$\begin{aligned} &= (7 \cdot b_1 + 3) \cdot (7 \cdot b_3 - 1) = 7 \cdot (7 \cdot b_1 \cdot b_3 + 3 \cdot b_3 - b_1) - 3; \\ &\text{existuje tedy celé číslo } b_4 \text{ tak, že } 10^4 = 7 \cdot b_4 - 3. \end{aligned}$$

$$10^5 = 10^2 \cdot 10^3 = (7 \cdot b_2 + 2) \cdot (7 \cdot b_3 - 1) = 7 \cdot (7 \cdot b_2 \cdot b_3 + 2 \cdot b_3 - b_2) - 2;$$

existuje tedy celé číslo b_5 tak, že $10^5 = 7 \cdot b_5 - 2$.

$$10^6 = 10^3 \cdot 10^3 = (7 \cdot b_3 - 1)^2 = 7 \cdot (7 \cdot b_3^2 - 2 \cdot b_3) + 1; \text{ existuje tedy celé číslo } b_6 \text{ tak, že } 10^6 = 7 \cdot b_6 + 1.$$

Nyní již jen ukážeme, že se zbytky při dělení vyšších mocnin desítky periodicky opakují. Například číslo 10^7 lze zřejmě psát ve tvaru $10 \cdot 10^6 = (7 \cdot b_1 + 3) \cdot (7 \cdot b_6 + 1)$; tj. existuje b_7 tak, že $10^7 = 7 \cdot b_7 + 3$. Pro nás je však důležité, že zbytek při dělení sedmi je u čísel 10 a 10^7 stejný. Podobně lze nahlédnout, že i čísla 10^2 a 10^8 mají také stejný zbytek. Zkrátka lze ukázat, že pro každé přirozené číslo n mají čísla 10^n a 10^{n+6} týž zbytek při dělení sedmi. Důkaz tohoto tvrzení je snadný. Je-li totiž $10^n = 7 \cdot b_n + r$, kde $-3 \leq r \leq 3$ dle věty 2, pak číslo 10^{n+6} lze vyjádřit ve tvaru:

$$10^n \cdot 10^6 = (7 \cdot b_n + r) \cdot (7 \cdot b_6 + 1) = 7 \cdot b_{n+6} + r, \text{ kde } b_{n+6} \text{ je vhodné celé číslo.}$$

Po zjištění těchto faktů můžeme postupovat jako v předchozích případech (to znamená, že do (1) dosadíme získané výrazy za mocniny desítky, roznásobíme a ze všech součinů, které obsahují číslo 7, vytkneme). Získáme tak vyjádření daného čísla ve tvaru $7 \cdot x + y$ (číslo y je součtem všech ostatních součinů, které neobsahují číslo 7). Ke zjištění, zda dané číslo je dělitelné sedmi, postačí zjistit, zda také číslo y je dělitelné sedmi. Celý postup nejlépe pochopíme na konkrétním příkladě.

Příklad 2: Rozhodněte zda číslo 901 065 130 je dělitelné sedmi.

Řešení: Zapišeme-li dané číslo v mocninách desítky, dostáváme: $9 \cdot 10^8 + 1 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1$. Dosadíme-li do tohoto zápisu vyjádření za mocniny desítky, dostáváme po vytknutí čísla 7:

$7 \cdot (9 \cdot b_8 + 1 \cdot b_6 + 6 \cdot b_4 + 5 \cdot b_3 + 1 \cdot b_2 + 3 \cdot b_1) + (9 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 6 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3)$. Podle věty 5 je dané číslo dělitelné sedmi právě tehdy, když je sedmi dělitelné číslo ve druhé závorce; tj. číslo $9 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 6 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3$, což je číslo 7. Protože druhé číslo sedmi dělitelné je, je sedmi dělitelné i číslo zadané; tj. číslo 901 065 130. Při praktickém výpočtu je účelné celý zápis řešení zjednodušit do tabulky (to je možné, protože nás zajímá pouze druhý sčítanec, který neobsahuje násobky sedmi):

dané číslo	9	0	1	0	6	5	1	3	0
zbytky řádů	2	3	1	-2	-3	-1	2	3	1
sčítanci	18	0	1	0	-18	-5	2	9	0

Po sečtení všech sčítanců (zde číslo 7) zbývá rozhodnout o dělitelnosti tohoto součtu. K vyplnění takovéto tabulky zřejmě stačí objevit „periodu“ zbytků; tj. skupinu čísel 1, 3, 2, — 1, — 3, — 2, 1, a automaticky ji zprava doleva vypisovat, kam až je třeba.

Cvičení 3: Rozhodněte, která z následujících čísel jsou dělitelná prvočísky 3, 7 a 11:

- | | | |
|--------------------|----------------------------|----------------|
| a) 192 837 465 | b) 824 565 112 | c) 293 375 313 |
| d) 814 635 235 271 | e) 123 456 789 987 654 321 | |

Cvičení 4: Zjistěte, zda lze volit cifru $x \in \{0, 1, \dots, 9\}$ tak, aby číslo 4 866 x 75 412 respektive číslo 11 567 x 2 x 365 bylo dělitelné jedenácti. Lze volit cifru x tak, aby dané číslo bylo dělitelné sedmi?

Cvičení 5: Kolika způsoby lze volit cifry x, y tak, aby číslo 12 375 6 x 2 5 y 1 bylo dělitelné sedmi?

(Úloha má celkem 14 dvojic řešení.)

Je zřejmé, že mocniny desítky při dělení se zbytkem prvočíslem p , kde $2 \neq p \neq 5$, mohou vždy poskytnout jen omezený počet zbytků. Proto i v obecném případě se musí po konečném počtu kroků začít zbytky opakovat. Po nalezení příslušné „periody“ zbytků je již lehké (pokud není „perioda“ příliš velká) ověřovat obdobnou tabulkou jako u prvočísla 7 dělitelnost dalšími prvočísky.

Problém: Pokuste se samostatně popsat podobná kritéria dělitelnosti pro prvočísla 13, 17, 37 a 41.

Brachystochrona a další cykloidy

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc. UK Praha

Nové matematické poznatky vznikají zpravidla propracováváním matematické teorie a k jejich praktickému použití dochází popř. až později. Tak tomu bylo např. s dvojkovou (dyadickou) číselnou soustavou, o níž se psalo již v 17. století, jež pak byla k dispozici při konstrukci samočinných počítačů ve čtyřicátých letech 20. století. Mnohem častěji však je třeba matematicky řešit konkrétní fyzikální, technické problémy a dnes i problémy z jiných oblastí vědy a praxe, což také vede k rozvoji matematiky. Připomeňme třeba infinitesimální počet, jak se dříve nazýval diferenciální a integrální počet, k jehož objevení došlo současně a nezávisle na sobě v 17. století jednak sedmadvacetiletým *G. W. Leibnizem* (1646 až 1716) v roce 1673 při použití geometrické tematiky, jednak dvaadvacetiletým *I. Newtonem* (1643 až 1727) v roce 1665 při řešení

kinematické úlohy. Při každém novém objevu se zpravidla uplatňuje dosavadní vývoj vědy a nejinak tomu bylo i u diferenciálního a integrálního počtu, jehož vývoj značně urychlilo vydání knihy *Geometrie* v roce 1637 od *R. Descarta* (1596 až 1650), v níž byla klasická geometrie podrobena algebraickým metodám. Na dalších příkladech by bylo možno ukázat, že matematické vyřešení mimomatematických problémů může být základem vzniku i nových matematických odvětví.

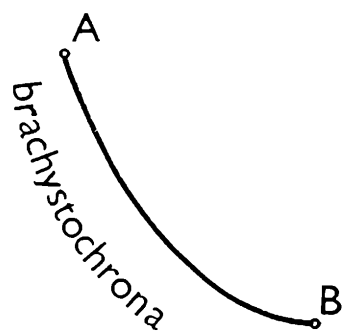
V tomto článku si povšimneme dvou, resp. tří různých fyzikálních úloh, k jejichž matematickému vyřešení došlo před více než 280 lety a jimiž bývá datován vznik *variačního počtu*. Název variačního počtu je z roku 1766 a zavedl ho *Leonhard Euler* (1707 až 1783). Četné použití variačního počtu je ve fyzice, zejména v mechanice. Zpravidla jde o to, nalézt mezi funkcemi určitých vlastností takovou funkci, pro niž daný integrál, závislý na těchto funkcích (funkcionál), nabývá extrémní hodnoty (tzv. ostrého minima nebo ostrého maxima). Ve variačním počtu se ovšem vydatně užívá diferenciálního a integrálního počtu včetně řešení diferenciálních rovnic.

Jednou z prvních úloh formulovaných švýcarským matematikem *Johannem Bernoullim* (1667 až 1748), kterou se svým starším bratrem *Jakobem* (1655 až 1705) kolem roku 1697 vyřešil, je úloha o *brachystochroně*, o níž se zmíníme na prvním místě. Jde o stanovení tvaru dráhy (přesně vyrobeného žlábků), po které hmotný bod (kulička) v gravitačním poli proběhne za *nejkratší dobu* z výše položeného bodu *A* do níže položeného bodu *B*, přičemž bod *B* neleží na svislici pod bodem *A*.¹⁾ Počáteční rychlost hmotného bodu v místě *A* je nulová. Připomeňme, že nikterak nejde o nejkratší dráhu — tou je úsečka spojující body *A* a *B*, ale jde o nejkratší čas *t* potřebný k proběhnutí této hledané dráhy. Onen minimální čas je závislý nejen na proběhnuté dráze, ale také na rychlosti.

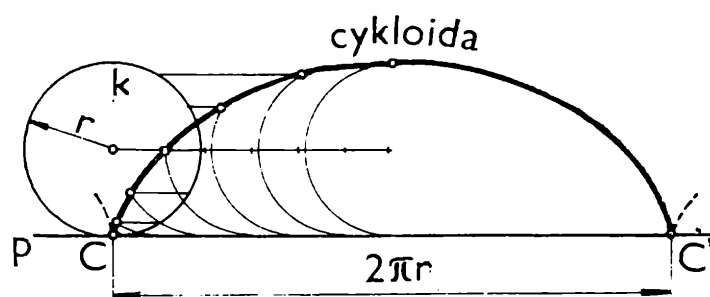
Úloha o *brachystochroně* (řecky značí *brachys* — krátký a *chronos* — čas) vznikla v devadesátých letech 17. století a mezi matematiky i mezi fyziky byl o vyřešení této úlohy mimořádný zájem. Předtím se ještě např. italský astronom a matematik *Galileo Galilei* (1564 až 1642) domníval, že křivkou hledané vlastnosti je oblouk kružnice. Bratři *Bernoulli*ové dokázali, že touto křivkou je oblouk *cykloidy*. Od té doby se cykloida také nazývá brachystochrona — viz obr. 1. Cykloida je rovinná křivka, již opisuje pevný bod *C* obvodu kružnice, která se bez klouzáni kotálí po přímce *p*; na obr. 2 je cykloida znázorněna (v řečtině slovo *cykloida* značí, že je „kruhem vytvořená“.²⁾ Přesný důkaz, který v posledních letech 17. století provedli bratři *Bernoulli*ové, je složitý

¹⁾ Kdyby body *A*, *B* byly na svislici, pak by hledaná dráha zřejmě byla úsečka *AB*.

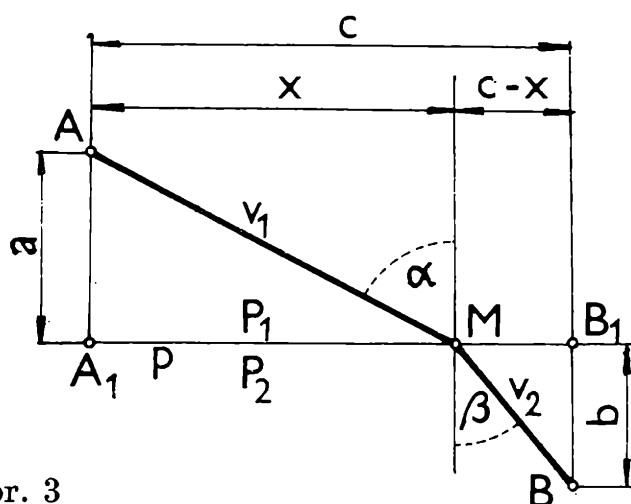
²⁾ V poznámce na konci článku se k cykloidě ještě vrátíme.



Obr. 1



Obr. 2



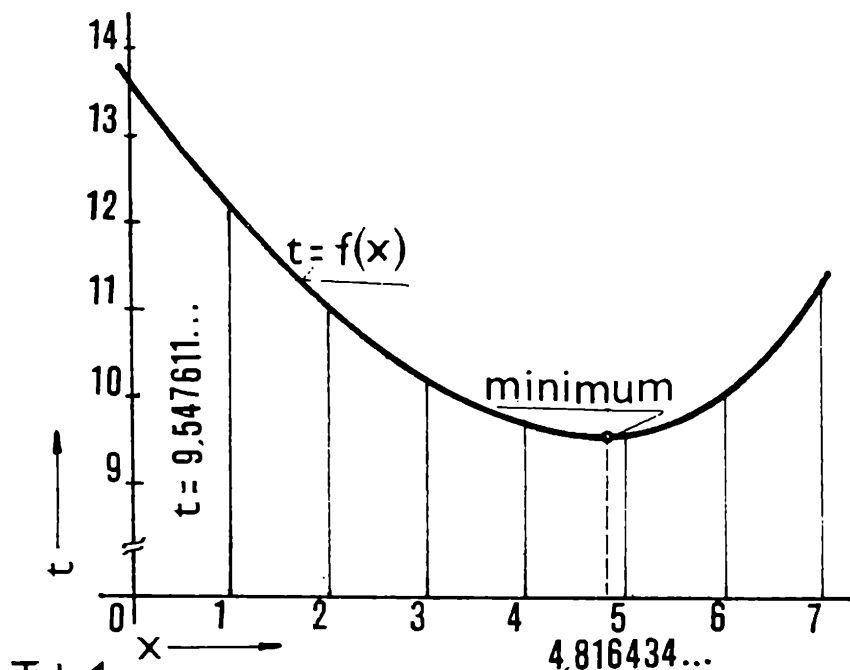
Obr. 3

a my jen řekneme, že je uveden v knize *M. A. Lavrentjev, L. A. Ljusternik: Kurs variačního počtu*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952, 260 stran. Zmínili jsme se o něm z historických důvodů a také proto, že vyřešení úlohy o brachystochroně bývá pokládáno — jak jsme už řekli — za základ variačního počtu.

Probereme jinou a jednodušší úlohu z matematiky, jejímž vyřešením získáme i řešení další úlohy z optiky, která vede k Fermatovu principu. Nejdříve k úloze z mechaniky: Přímka p dělí rovinu na dvě části (prostředí) P_1 a P_2 . V prostředí P_1 se hmotný bod pohybuje rychlostí v_1 a v prostředí P_2 rychlostí v_2 . Máme stanovit dráhu hmotného bodu tak, aby se co nejdříve dostal z bodu A v prostředí P_1 do bodu B v prostředí P_2 . Situace úlohy je znázorněna na obr. 3; přitom je užito toto označení:

Délky úseček AA_1 , BB_1 , A_1B_1 budtež po řadě a , b , c . Přímky AA_1 , BB_1 jsou kolmé k přímce p . Části dráhy hmotného bodu, tj. úsečky AM , MB , z nichž se celá dráha skládá, jsou po řadě v prostředích P_1 a P_2 ; bod M přitom leží na přímce p . Úloha bude vyřešena, vypočte-li se délka x úsečky A_1M , jak znázorňuje obr. 3. Snadno nahlédneme; Jestliže o rychlostech v_1 , v_2 platí $v_1 > v_2$, je $x > 0,5 c$; je-li $v_1 < v_2$, je $x < 0,5 c$.³⁾

³⁾ Je-li $v_1 = v_2$, je drahou hmotného bodu úsečka AB (bod M by ležel na průsečíku přímek AB , p).



Tab.1

x	0	1	2	3	4	5	6	7
t	13.54	12.14	11.06	10.25	9.71	9.56	10.04	11.34

Obr. 4

Řešení úlohy: Počátek souřadnicového systému položme do bodu A_1 , přičemž vodorovná osa je totožná s přímkou p . Vypočteme čas t ze závislosti $t = f(x)$. Zřejmě platí

$$t = f(x) = \frac{|AM|}{v_1} + \frac{|BM|}{v_2},$$

$$t = f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}. \quad (1)$$

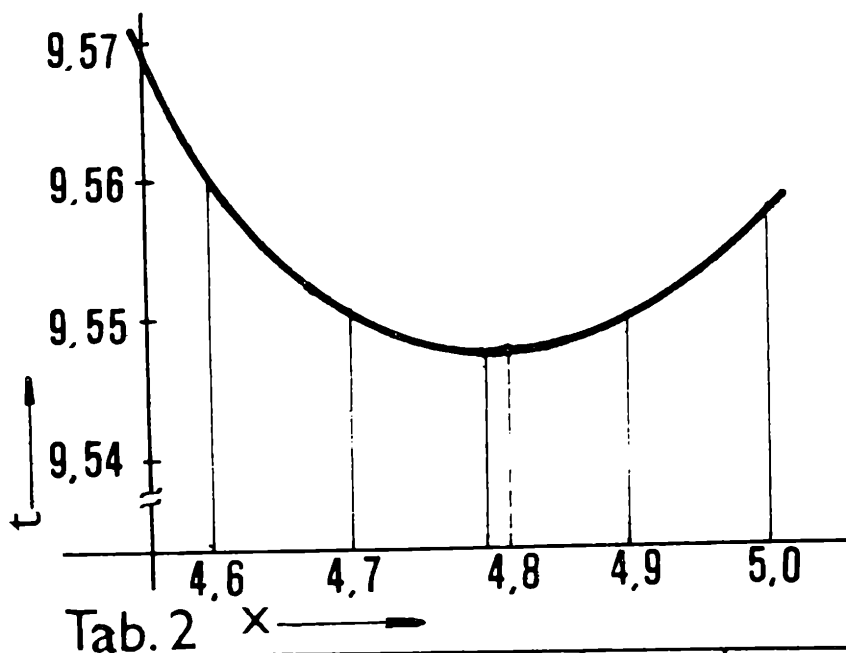
Řešení úlohy si přiblížíme na numerickém příkladu. Budiž $a = 3$ m, $b = 2$ m, $c = 6$ m, $v_1 = 1$ m/s, $v_2 = 0,6$ m/s. Po dosazení těchto hodnot má funkce (1) tvar:

$$t = f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \frac{\sqrt{4 + (6 - x)^2}}{0,6}. \quad (1n)$$

Dále je třeba zjistit, pro kterou hodnotu x nabývá funkce $t = f(x)$ minimální hodnoty, tedy pro kterou vzdálenost x je čas t nejkratší. Čtenář znalý diferenciálního počtu stanoví první derivaci funkce (1), položí ji rovnu nule a vzniklou rovnici řeší podle neznámé x .

První derivace funkce (1) je

$$f'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}}; \quad (2)$$



x	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
t	9,561	9,551	9,548	9,550	9,558

Obr. 5

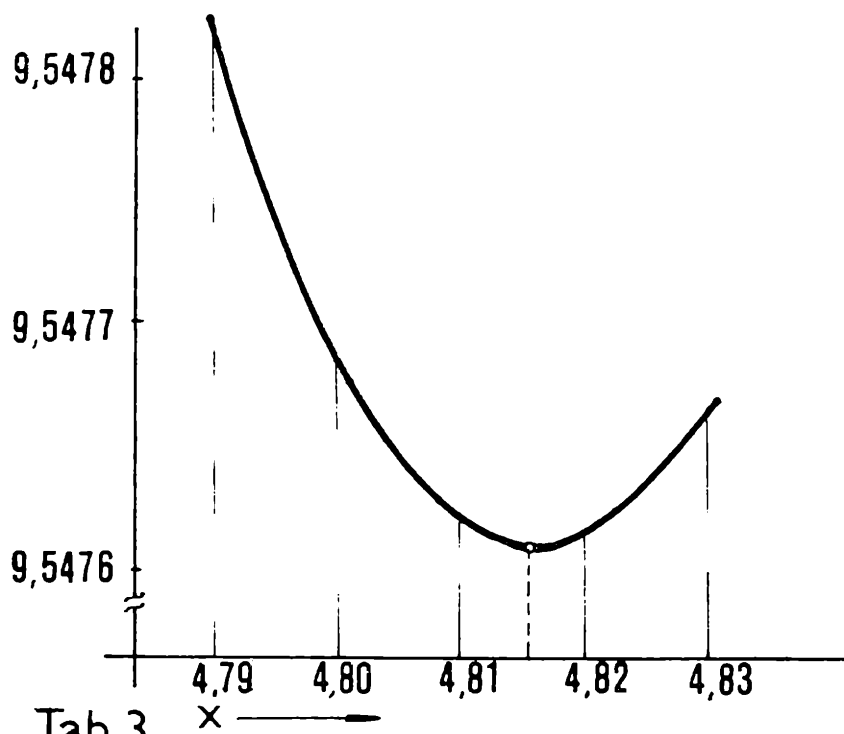
po numerickém dosazení do (2) a položení této derivace nule dostaneme rovnici

$$\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{6-x}{0,6\sqrt{(x-6)^2+4}} = 0. \quad (2n)$$

Kořenem rovnice (2n) je $x = 4,8164342\dots$, což je vzdálenost bodu M od bodu A_1 a pro toto x nabývá funkce (1n) nejmenší hodnoty $t = 9,5476116\dots$ ⁴⁾. My k tomuto výsledku dojdeme pracněji tak, že budeme sledovat grafický průběh funkce (1n) na obr. 4, který je sestaven podle připojené tabulky 1, na níž jsou k jednotlivým hodnotám x vypočteny příslušné hodnoty t . Z grafu odhadujeme, že $x \in \langle 4,6; 5,0 \rangle$; v tomto intervalu postupujeme po desetínách a dostaneme tabulku 2 připojeným obr. 5. Dále odhadujeme, že x je blízko 4,81 (viz tab. 3 na obr. 6). Další postup se může opakovat tak dlouho, až dosáhneme žádané přesnosti výpočtu, tedy např. $x = 4,816434\dots$ ($x = 9,5476116\dots$). Získali jsme řešení naší fyzikální úlohy z mechaniky — vzdálenost bodu M od bodu A_1 na přímce p .

Nyní ukážeme, že uvedené řešení je stejné i pro úlohu z optiky, kterou formuloval *Pierre Fermat* (1601 až 1665). Její řešení potvrzuje tzv. Fermatův princip. Toto pozoruhodné tvrzení Fermat vyslovil roku 1657 a má tento smysl: Světelný paprsek procházející z bodu A v jednom průhledném prostředí P_1 do bodu B v jiném průhledném

⁴⁾ Jak se přibližně řeší rovnice (2n) a rovnice obdobné uvedeme v některém z příštích článků; jde o řešení s libovolně zvolenou přesností resp. nepřesností.



Tab. 3

x	4,79	4,80	4,81	4,82	4,83
t	9,547813	9,547690	9,547624	9,547615	9,547665

Obr. 6

prostředí P_2 probíhá po „nejrychlejší dráze“. Tou je ta dráha, při níž se poměr sinů úhlů α , β rovná poměru rychlostí světla v prostředích P_1 a P_2 — viz obr. 3. Jedná se o *index lomu světla* pro daná optická prostředí a jeho numerická hodnota je

$$\lambda = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

V optice se s indexem lomu počítá při užití zákona lomu světla. Abychom to ozřejmili, vraťme se k obr. 3, na němž jsou označeny úhly α a β , které svírá kolmice na přímku p v bodě M s úsečkami AM a BM . Již jsme uvedli, že délka úsečky $A_1M = x$ hledaného bodu M musí vyhovovat rovnici (2), tedy rovnici

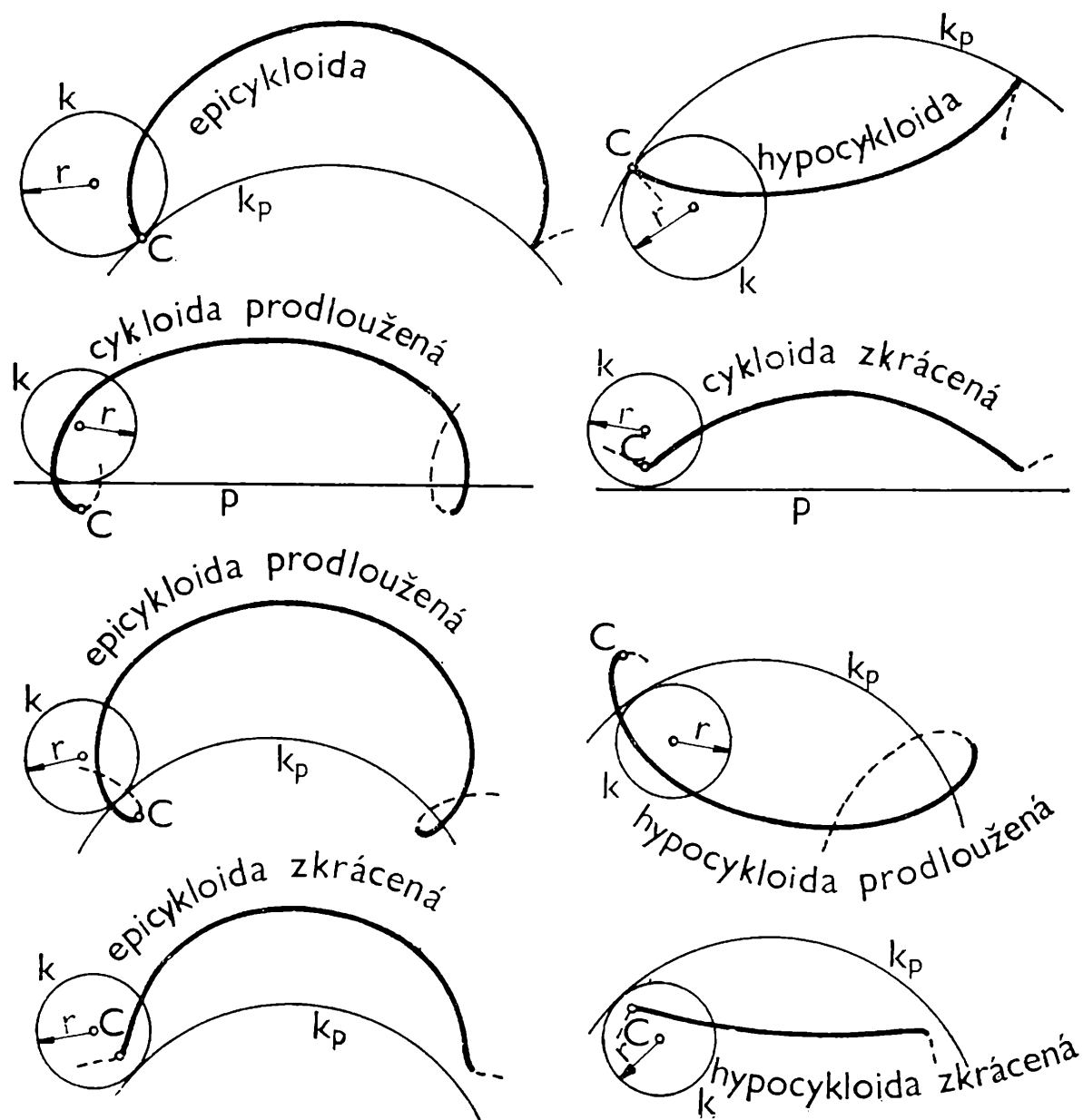
$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

již můžeme na základě obr. 3 přepsat takto:

$$\frac{|A_1M|}{v_1 |AM|} = \frac{|MB_1|}{v_2 |BM|}$$

čili

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}$$

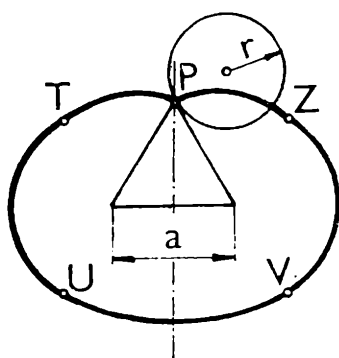


Obr. 7

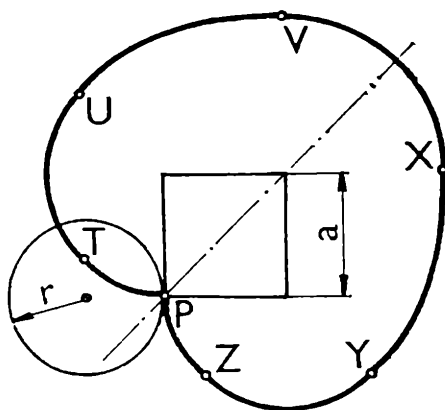
a konečně máme známý vzorec z optiky pro index lomu světla

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

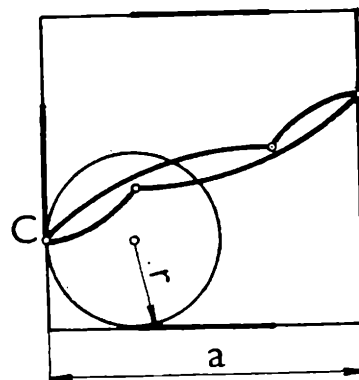
Poznámka o cykloidách. Cykloida je znázorněna na obr. 2, resp. oblouk cykloidy na obr. 1. Kotálí-li se kružnice k vně (uvnitř) pevné kružnice k_n , pak pevný bod C na tvořící kružnici k opíše epicykloidu (hypocykloidu). Když je pevný bod C vně (uvnitř) kotálející se kružnice, pak v případě kotálení po přímce p vznikne cykloida prodloužená (cykloida zkrácená), jimž oběma se také říká trochoidy; bude-li kotálení vně (uvnitř) pevné kružnice k_n , pak bod C opíše epicykloidu prodlouženou (hypocykloidu prodlouženou) nebo epicykloidu zkrácenou (hypocykloidu zkrácenou) viz obr. 7.



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

S praktickým použitím cykloid se setkáváme např. při konstrukci profilu zubů cykloidního ozubení⁵⁾ používaného třeba v hodinářství. Cykloidu zkrácenou opisuje třeba ventilka na duši jízdního kola při jízdě po rovině. Bod na vnějším průměru železničního kola jedoucího po přímé koleji opisuje cykloidu prodlouženou.

Za cvičení si čtenář může sestavit asteroidu (hvězdicu), což je hypocykloida s poloměrem tvořící kružnice, který je čtvrtinou poloměru pevné kružnice (je to čtyřdílná uzavřená křivka). Kardioida (srdcovka) je také uzavřená osově souměrná epicykloida, jejíž poloměr tvořící kružnice je stejně velký jako poloměr pevné kružnice. V případě, že poloměr tvořící kružnice je polovinou poloměru pevné kružnice, je opsaná hypocykloida průměrem (úsečkou) pevné kružnice. Jestliže poloměr pevné kružnice je polovinou poloměru tvořící kružnice, přičemž obě kružnice mají vnitřní dotyk, opíše pevný bod tvořící kružnice právě tuto tvořící kružnici. Doporučujeme pilnému čtenáři, aby si k uvedeným příkladům nakreslil obrázky. Rovněž se může přesvědčit, že při kotálení větší kružnice tvořící po menší kružnici pevné oblouk vzniklé epicykloidy sám sebe protne.

Na obr. 8 je nakreslena uzavřená osově souměrná křivka $PTUVZ$, opsaná pevným bodem P kružnice, kotálející se vně po obvodu rovnostranného trojúhelníka o straně a ($r = \frac{3a}{2\pi}$, oblouky PT , UV , ZP náleží cykloidě, oblouky TU , ZV kružnici). Obdobná úloha je na obr. 9; pevný bod P kotálející se kružnice o poloměru r ($r = \frac{2a}{\pi}$) po čtverci o straně a vytvořil uzavřenou osově souměrnou křivku $PTUVXYZ$, pozůstávající

⁵⁾ O běžnějším evolventním ozubení jsme uveřejnili článek *Geometrie ozubeného soukolí* v našem časopise ročník 60 číslo 10 na str. 439 a n.

z oblouků cykloidy a kružnice. Konečně na obr. 10 je středově souměrná uzavřená křivka sestavená ze čtyř oblouků cykloidy, vzniklé kotálením kružnice k s pevným bodem P po vnitřku čtvercového otvoru. Poloměr r tvořící kružnice byl zvolen — jako v předcházejících úlohách — tak, aby se dotyková dráha (v obr. 10 je silněji vytažena) rovnala obvodu kružnice $\left(r = \frac{2a}{\pi + 4}\right)$.

Poznámka. Kromě literatury uvedené v článku může si čtenář přečíst článek Jiřího Mídy v našem časopise roč. 42 (1963/4) č. 6 na str. 268—272, nazvaný Fermatův princip.

FYZIKA

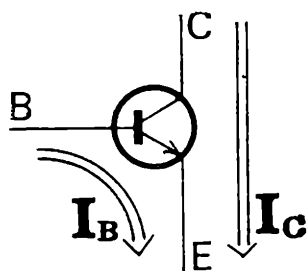
Logické obvody z polovodičů

IVAN FISCHER, CSc., PedF UK Praha

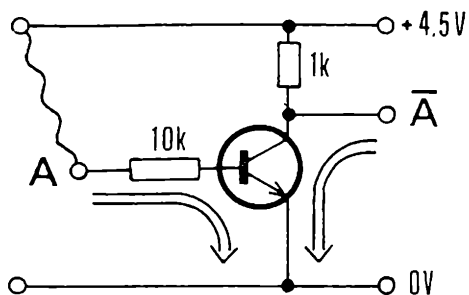
V automatizační technice a v signalizačních zařízeních se významně uplatňuje *matematická výroková logika*. V tomto a v několika volně navazujících článcích si ukážeme některé příklady matematizace reálných situací z této oblasti. Než se však zaměříme na matematický přístup k příslušným úlohám, velmi stručně si naznačíme možnosti, jak technicky realizovat logické výrazy a funkce, jak je tedy možno použít aplikace výrokové logiky v automatizaci.

Matematicky zaměřený čtenář si patrně jen orientačně prohlédne další text a obrázky a bude řešit problémy jako matematik — psát rovnice a kreslit schémata na papíře. Čtenář, kterému je bližší fyzika, si možná bude chtít takovéto automatizační zařízení postavit. Proto se soustředíme na technicky nejsnazší logické obvody z tranzistorů, diod a odporů, jejichž vývody je možno poměrně jednoduše propojovat pájením na pájecí lištu, prkénko s hřebíčky či tištěný spoj z cuprextitu. Integrované logické obvody se z tohoto pohledu jeví jako složitější, neboť k jejich propojování bychom potřebovali speciální patice, respektive speciálně zhotovené tištěné spoje. O integrovaných logických obvodech, čítačích impulsů, pamětech a podobně si pohovoříme až v některém z příštích článků.

První automatická zařízení byla konstruována z relé. Připomenout si



Obr. 1



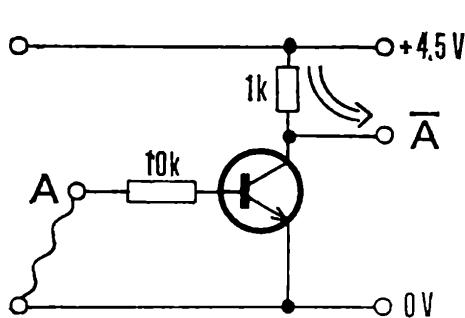
Obr. 2

můžeme automatické telefonní ústředny, zabezpečovací zařízení na železnici, automaty ovládající světla semaforů na pražských křižovatkách. Automaty (a počítače) sestavené z relé jsou relativně rozměrné, pomalé a spotřebují poměrně velké množství elektrické energie. Pro realizaci rozsáhlejších zařízení se nehodí. Hovoří se o nich jen jako o *nulté generaci počítačů*. *První generace počítačů* byla postavena z elektronek (vakuových diod, triod) koncem čtyřicátých a začátkem padesátých let. Tato zařízení vykazovala značnou poruchovost, kdy po několika hodinách provozu bylo nutno vyhledat a vyměnit „spálenou“ elektronku.

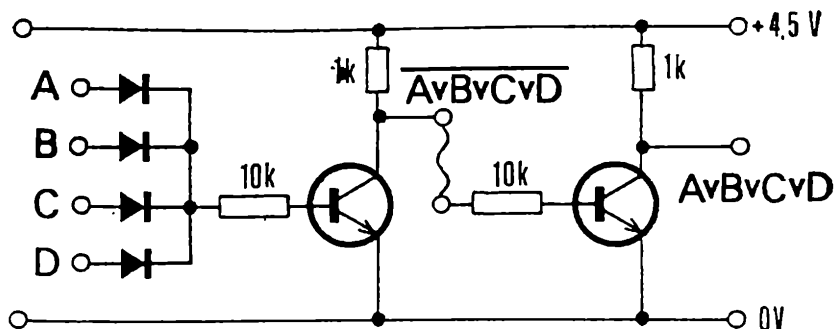
Druhou generací počítačů a logických obvodů jsou elektrická zařízení z jednotlivých polovodičových součástek. Taková zařízení se stavěla od druhé poloviny padesátých let. Pro účely průmyslové automatizace se vyráběly stavebnice jednotlivých logických členů. Touto technikou byly zhotovovány stolní kalkulačky. Druhá generace logických obvodů přinesla zmenšení rozměrů, značné snížení poruchovosti, úspory elektrické energie.

Třetí generací jsou automatická zařízení a počítače sestavené z integrovaných logických obvodů. Objevily se koncem šedesátých let. Pro konstrukci menších automatických zařízení se stále používají. Stolní kalkulačky Tesla, postavené z logických integrovaných obvodů, měly velikost větší bonboniéry. Jako *čtvrtá generace* se označují logické integrované obvody s velkou hustotou integrace (tisíce tranzistorů na ploše několika čtverečních milimetrů). Mikropočítače obsahující mikroprocesor, paměti, tlačítka a číslicový displej se vejdou na desku formátu velkého školního sešitu — jejich obdoba v první generaci zabírala několik místností. Velikost kapesní kalkulačky je nám všem dobře známa. Princip zapojení nejjednodušších logických členů v rámci integrovaných obvodů třetí a konečně i čtvrté generace je jen vylepšením těch obvodů druhé generace, které si nyní popíšeme.

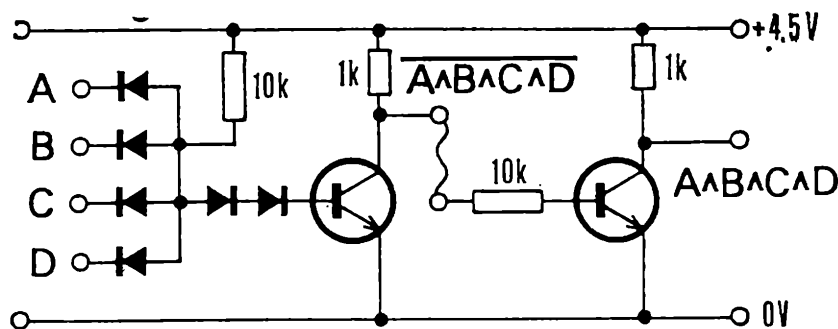
Budeme-li si chtít postavit logické obvody a vyzkoušet jednoduchá automatizační zařízení, můžeme použít nejlevnější křemíkové tranzistory KC 148. Lépe se budou pájet tranzistory KC 508 či KSY 21. Vyhoví však libovolné křemíkové i germániové tranzistory NPN, ať již nové nebo druhé a třetí jakosti z partiových prodejen nebo získané z desek vyrazených počítačů. Odpory, a právě tak i diody, mohou být opět zcela libovolné. Žárovky použijeme nejlépe na 6 V a 0,05 A pro jízdní



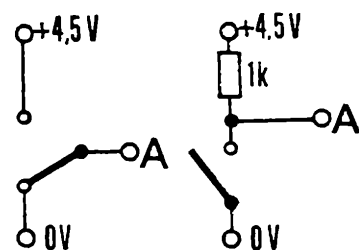
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6 ab

kola. Místo žárovček můžeme použít svítivé diody (červené, zelené, žluté).

Tranzistor se používá jako zesilovač (obr. 1). Teče-li do báze B tranzistoru proud velikosti I_B k emitoru E, pak teče od kolektoru C do emitoru E podstatně větší proud I_C , přičemž platí, že $I_C = \beta \cdot I_B$, kde β se nazývá *zesilovací činitel* tranzistoru a nabývá hodnot 20 až 900 podle druhu a konkrétního výrobku tranzistoru.

Pokud je proud jdoucí do kolektoru vhodně omezen odporem, pracuje tranzistor jako spínač. Propustí veškerý takto omezený proud, nebo nepropustí (takřka) žádný proud. To je základem nejjednoduššího logického obvodu — invertoru, který realizuje logickou funkci negace.

Na obrázku 2 je takový invertor nakreslen. Připojíme-li vstup A na napětí $+4,5$ V (ploché baterie), prochází bází tranzistoru proud $450 \mu\text{A}$. Proud $4,5$ mA, který při daném napětí může projít odporem $1 \text{ k}\Omega$, je sveden přes kolektor a emitor tranzistoru k nule (k zápornému pólu baterie). Na výstupu $\bar{A}$ je potom napětí (téměř) 0 V. Je-li (obr. 3) vstup A připojen na nulu (nebo není vůbec nikam připojen), tranzistorem neprochází (takřka) žádný proud. Na výstup $\bar{A}$ máme přes odpor $1 \text{ k}\Omega$ přivedeno napětí $4,5$ V. Jestliže napětí 0 až $0,2$ V bude pro nás představovat logickou hodnotu nula — neplatí a kladné napětí $4,5$ V (2 V až $4,5$ V) bude představovat logickou hodnotu jedna — platí, potom na výstupu $\bar{A}$ je hodnota odpovídající negaci hodnoty na vstupu A.

Připojíme-li podle obrázku 4 před invertor přes diody více vstupů, dostaneme logický člen NOR, který realizuje logickou funkci „není pravda, že platí A nebo že platí B “, tedy $\overline{A \vee B}$, respektive $\overline{A \vee B \vee C \vee D \vee \dots}$. Připojíme-li dále na výstup tohoto obvodu další invertor, dostaneme logický člen, který realizuje logickou funkci NEBO (alternativu, disjunkci, anglicky OR), tedy $A \vee B$, respektive $A \vee B \vee C \vee D \vee \dots$ podle počtu vstupů obvodu.

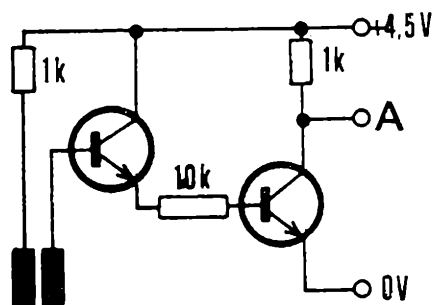
Pro realizaci logické funkce NAND, znamenající, že „není pravda, že platí A a zároveň platí B “, to jest $\overline{A \wedge B}$, respektive $\overline{A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \dots}$, lze použít obvod podle obrázku 5. Je-li některý ze vstupů připojen k nule, potom proud procházející odporem $10\text{ k}\Omega$ je diodou a tímto vstupem sveden k nule, pod odporem $10\text{ k}\Omega$ je napětí téměř nula voltů, tranzistor je tedy uzavřen a na výstupu obvodu bude logická hodnota jedna. Pouze tehdy, nebude-li žádný ze vstupů připojen na nulu, bude na výstupu obvodu logická hodnota nula. Dvě diody před bází tranzistoru pouze zvyšují spolehlivost obvodu (vyrovnávají úbytek napětí na diodě u vstupu obvodu). Když se za obvod realizující logickou funkci NAND připojí invertor, dostáváme obvod realizující logickou funkci $A \wedge B$, respektive $A \wedge B \wedge C \wedge D \dots$ (konjunkci, anglicky AND).

U obvodů z obrázků 4 a 5 nezávisí chování obvodu na nezapojených vstupech. Obvod se čtyřmi vstupy tak můžeme použít pro funkci pouze dvou proměnných, obvody NAND a NOR můžeme použít jako invertory atd. Počet vstupů obvodů může být libovolně velký.

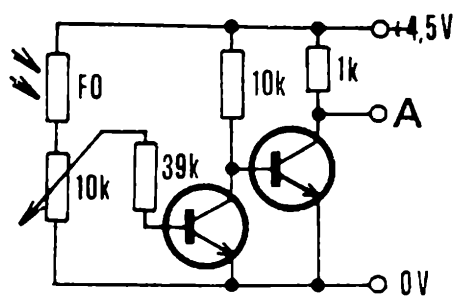
Obvody realizující logické funkce A, NEBO, NAND, NOR a negaci se nazývají souhrnně *kombinační logické členy*, Jejich kombinováním — připojením výstupů jedněch na vstupy druhých obvodů — můžeme realizovat složitější logické funkce, například $[(A \wedge B) \vee \overline{C}] \wedge D$, jak si ještě ukážeme.

Pro stanovení hodnot logických proměnných $A, B, C, \dots$ to jest vlastně výchozích logických hodnot, můžeme použít v nejjednodušších případech různé přepínače, vypínače a kontakty podle obrázků 6a a 6b. Obdobně můžeme použít i výstupy různých obvodů reagujících na dotyk prstu, vodivé spojení kontaktů, na intenzitu osvětlení, velikost teploty, intenzitu a tón zvuku, na infračervené světlo, elektromagnetické pole, rádiové vlny, přítomnost jedovatého nebo výbušného plynu atd. Pomocí fotobuňky (obvodu reagujícího na intenzitu dopadajícího světelného paprsku) můžeme snímat polohu různých ručičkových měřicích přístrojů, tlakoměrů, ampérmetrů, vah i ručiček hodin. Souhrnně tyto obvody nazveme *kybernetická čidla* a některé si nyní ukážeme.

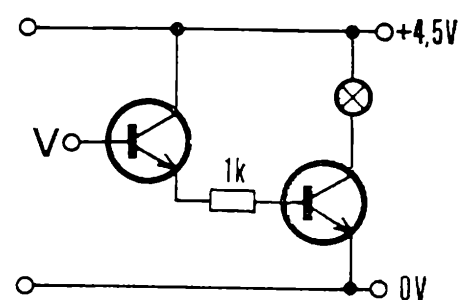
Pro indikaci výšky hladiny kapaliny můžeme použít senzorický spínač podle obrázku 7, který má na výstupu A logickou hodnotu 1, pokud však kontakty vodivě spojíme (postačí i přiložení vlhkého prstu), pak je na výstupu logická hodnota nula. Spojíme-li totiž kontakty senzo-



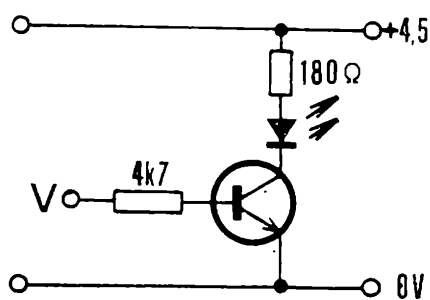
Obr. 7



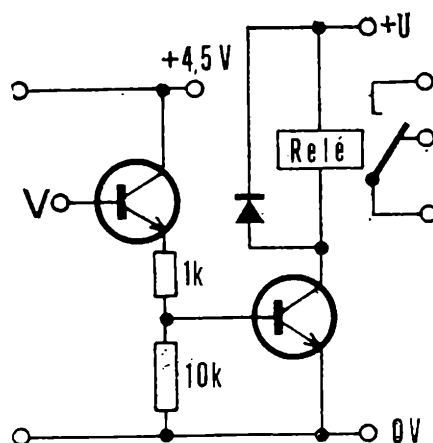
Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

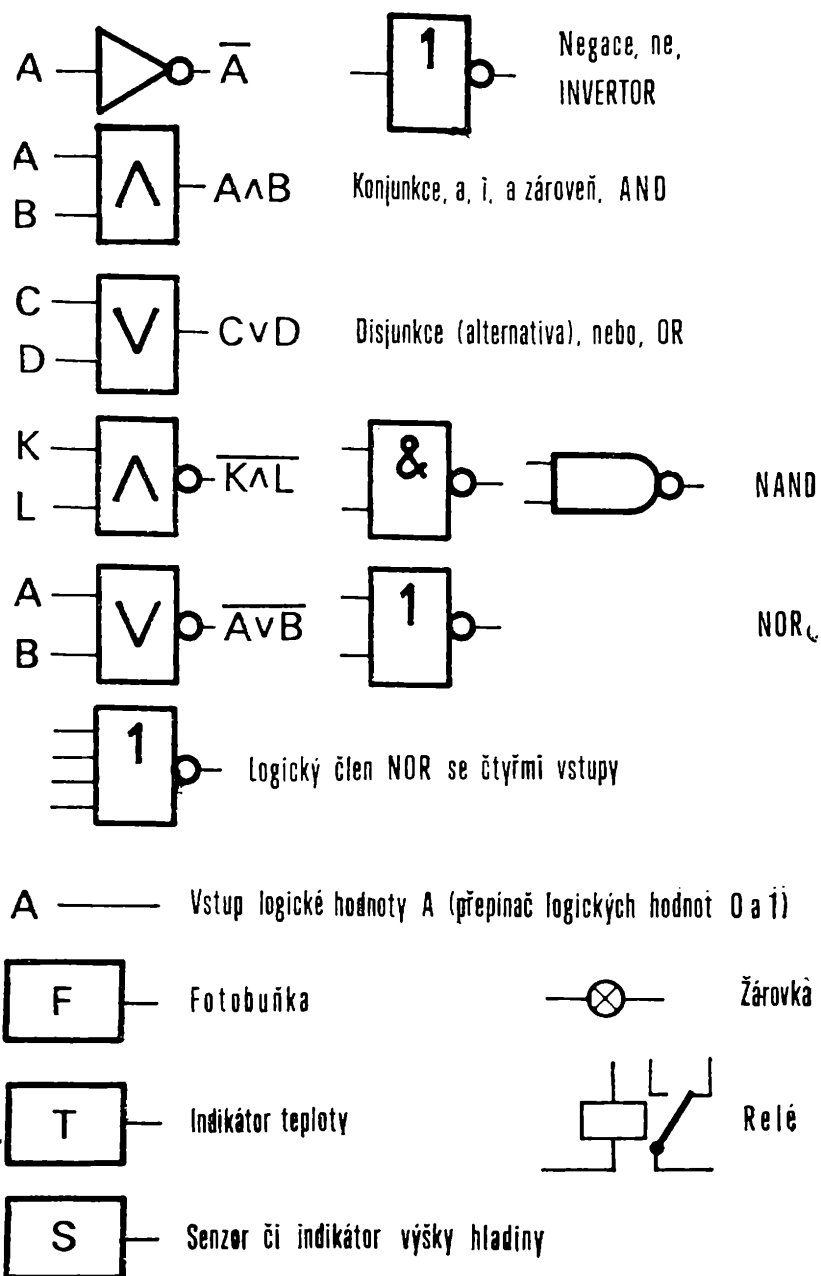


Obr. 11

rického spínače, protéká prvním tranzistorem (na obrázku vlevo) proud přes odpory 1 k Ω a 10 k Ω do báze druhého tranzistoru, ten se otevře a na výstupu je logická hodnota nula. (V tomto obvodu je nezbytné použít jako první tranzistor křemíkový, a to s co možná největším zesilovacím činitelem β .)

Zapojení podle obrázku 8 tvoří fotobuňku. Je-li fotoodpor F osvětlen (vyhovět by měl prakticky libovolný dostupný fotoodpor), je na výstupu A logická hodnota jedna. Je-li fotoodpor zastíněn, je na výstupu A logická hodnota nula. Potenciometrem přitom zkusmo nastavíme obvod na zvolenou intenzitu osvětlení, při které se mění logické hodnoty na výstupu. (Takovýto obvod je někdy schopen rozlišovat i stavy slunečno a pod mrakem.) Obvykle fotobuňka rozlišuje stavy, kdy dopadá na fotoodpor intenzivní světelný paprsek ze žárovky, a stav, kdy je tento paprsek přerušen (rukou, předmětem). Obvod využívá toho, že bázi prochází proud tehdy, je-li napětí mezi bází a emitorem germániového tranzistoru větší než 0,2 V, u křemíkového tranzistoru větší než 0,7 V. Intenzitou dopadajícího světla se mění velikost fotoodporu, který spolu s potenciometrem tvoří dělič napětí. Polohou běžce potenciometru pak nastavíme právě potřebné napětí pro otevření prvního tranzistoru. Druhý tranzistor pracuje jako zesilovač a současně jako invertor.

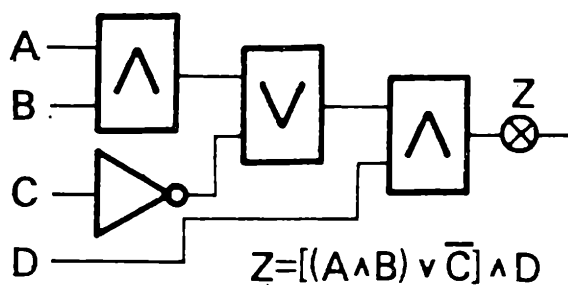
Pokud v obrázku 8 nahradíme fotoodpor termistorem (odporem, jehož velikost je závislá na teplotě), chová se obvod nikoliv jako indikátor světla, ale jako indikátor teploty, jejíž velikost si opět nastavíme pomocí



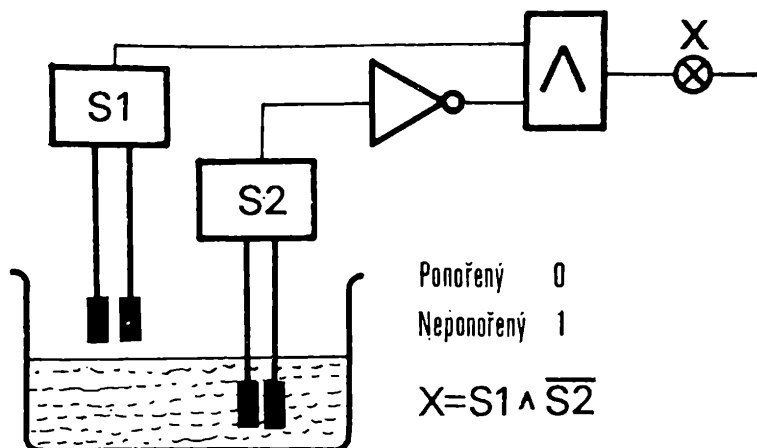
Obr. 12

potenciometru. Obvod vyhodnocuje i změny, jestli jsme na několik sekund přiložili prst na termistor nebo jestli termistor opět ochladl na pokojovou teplotu. (Opět by měl vyhovět libovolný termistor, který si seženeme.) Částečnou nevýhodou obvodu je, že se logická hodnota na výstupu mění jen pozvolna z hodnoty nula na jedna a naopak. Po určité době je na výstupu napětí, které neodpovídá ani jedné logické hodnotě. Pro potřeby námi v dalších člancích uváděných příkladů to vadit nebude.

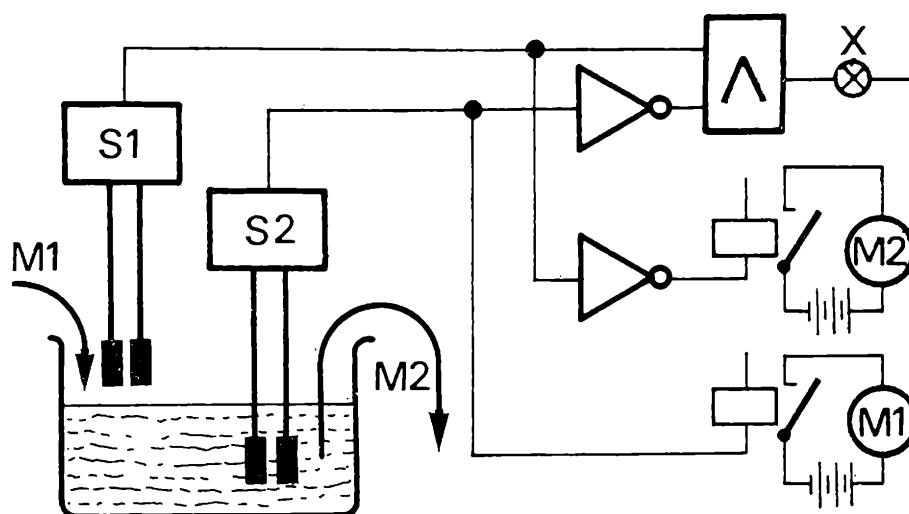
Zbývá se ještě zmínit o tom, jak rozlišovat logické hodnoty na výstupu obvodů, nechceme-li používat voltmetr. Postačí nám obvod z obrázku 9, 10 nebo 11. (Tranzistory použijeme křemíkové, v obvodu 11 pak jako druhý nejlépe KF 508). Je-li na vstup V přivedeno napětí odpovídající logické hodnotě jedna, rozsvítí se žárovka, respektive svítivá dioda, nebo sepne kotva relé. Přes kontakty relé pak můžeme



Obr. 13



Obr. 14



Obr. 15

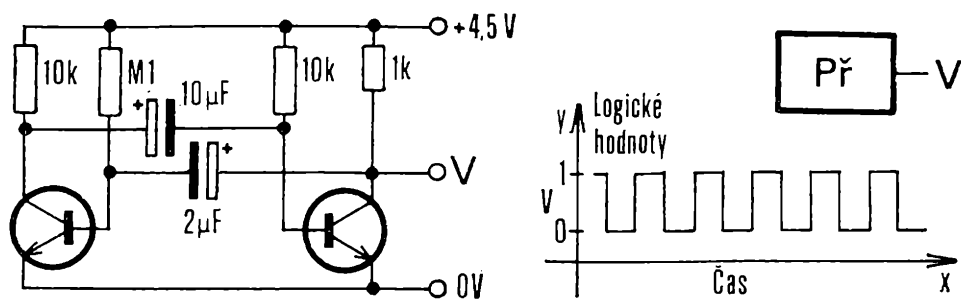
ovládat výkonové elektrické obvody — topení, čerpadla, ventilátory, světla, stroje atd. Na obrázku 11 je $+U$ takové napětí, při kterém nám relé bezpečně spíná (6, 12 či 24 V bývá nejčastěji).

Při kreslení schémat logických obvodů používáme smluvené značky podle obrázku 12. Napájecí napětí $+4,5\text{ V}$ ani společný nulový vodič pro žádný z obvodů nekreslíme.

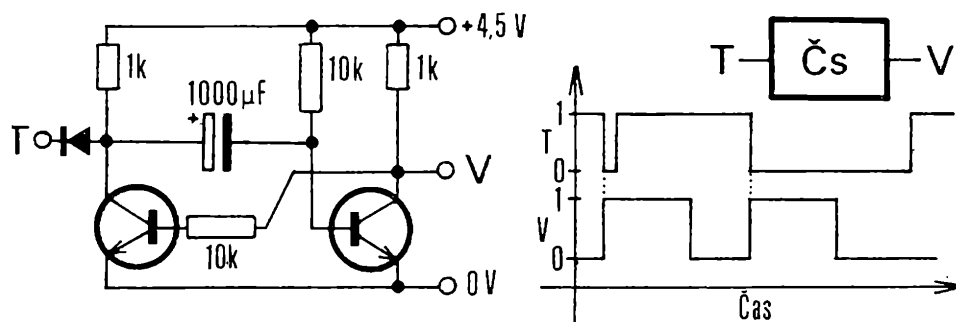
Nyní si můžeme podle obrázku 13 schematicky znázornit zapojení složitějšího logického obvodu, který nám bude realizovat již zmíněnou funkci $Z = [A \wedge B) \vee \overline{C}] \wedge D$.

Chceme-li žárovkou signalizovat, že hladina v nádrži je ve správné výši, upevníme pod a nad hladinu kontakty dvou senzorických spínačů S1 a S2. Je-li na výstupu S1 hodnota logické jedna a na výstupu S2 hodnota logické nula, je za invertorem hodnota logické jedna a na výstupu konjunkce rovněž hodnota logické jedna — žárovka svítí. Zapojení je nakresleno na obrázku 14. Svit žárovky závisí na funkční hodnotě složené logické funkce $X = S1 \wedge \overline{S2}$, kde S1 a S2 jsou proměnné.

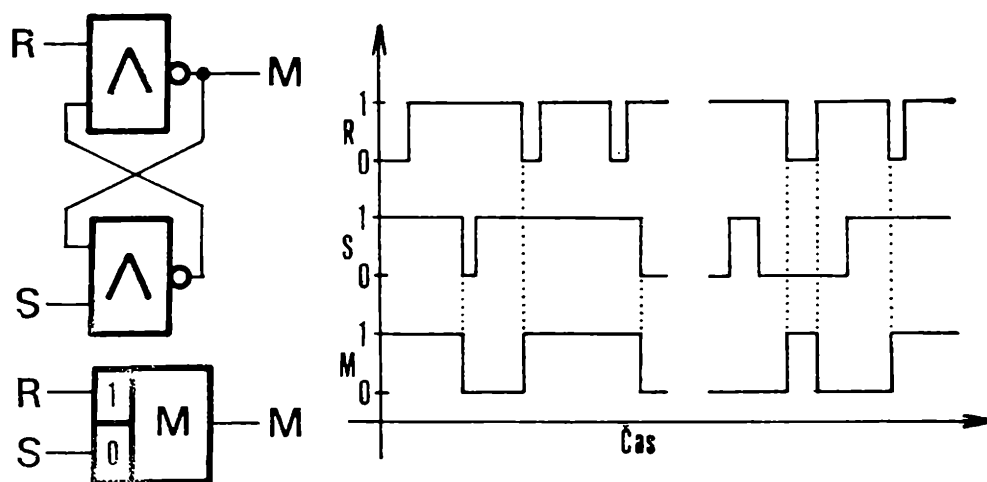
Kromě žárovky X můžeme u popsaného zařízení připojit ještě dvě relé, která nám spínají motorky čerpadel. M1 doplňuje vodu do nádrže a M2 nám vodu z nádrže odčerpává. Pro automatické udržování výšky



Obr. 16



Obr. 17



Obr. 18

hladiny ve správné výši musí platit $M1 = S2$ a $M2 = \overline{S1}$. Schéma zapojení signalizačního i obou automatizačních obvodů je na obrázku 15.

Pro naše modely automatizačních zařízení můžeme použít kromě kombinačních logických členů a kybernetických čidel i sekvenční logické obvody. Logická hodnota na výstupu obvodu je závislá na posloupnosti (sekvenci) změn logické hodnoty na vstupu obvodu. K jejich popsání nestačí již logické funkce z výrokové logiky, ale používají se různé tabulky či grafické znázornění, které využijeme i my.

Na obrázku 16 je nakresleno zapojení přerušovače („blikátka“), na jehož výstupu se pravidelně střídají logická nula a jednička. Obvod z obrázku 17 představuje časový spínač, je-li na vstup přivedeno napětí odpovídající logické hodnotě nula, pak po dobu časové konstanty

(v našem případě 10 až 30 sekund) je na výstupu obvodu hodnota logické jedna. Čas, po který je na výstupu logická jedna, není nijak ovlivněn tím, jak krátce či dlouze byla na vstup obvodu připojena logická nula. (Chování těchto dvou obvodů si zde zdůvodňovat nebudeme.)

Ze dvou obvodů NAND můžeme podle obrázku 18 zapojit nejjednodušší paměť. Připojíme-li na vstup R logickou nulu, bude na výstupu logická jedna tak dlouho, dokud naopak na vstup S nepřipojíme logickou nulu, pak i na výstupu bude nula. Situace, kdy na vstupech R a S bude současně logická nula, by neměla nastat („zakázaný stav“). Obvod si tedy pamatuje hodnotu jedné logické proměnné (kapacita paměti je jeden „bit“). Chování tohoto paměťového obvodu si zkuste sami zdůvodnit z chování obvodů NAND, ze kterých je složen.

Ve výčtu logických obvodů, zvláště pak pamětí, bychom mohli ještě dlouho pokračovat. Pro jednodušší aplikace matematické logiky však dosud uvedené obvody plně postačují.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Indické rášiky

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc., MFF UK Praha

Na třetí straně obálky tohoto čísla přináší Pohled do dějin informací o dvou regulích (pravidlech) pro řešení slovních úloh v 16. století. Do českých početnic přeshly tyto regule z dobové matematické literatury rozšířené ve všech zemích Evropy. Jejich původ je však možné hledat o celé tisíciletí dříve v indických matematických spisech.

V indické matematice už od 5. století n. l. zaujímaly výrazno místo početní praktiky, jež sloužily k rychlému řešení slovních úloh, ve kterých hrála podstatnou roli úměrnost veličin, a to jak přímá, tak nepřímá. Ukažme si tři příklady z jedné indické učebnice⁺):

A. Jedna a čtvrt otepi santalového dřeva stojí 10 a půl penízu, kolik bude stát 9 a čtvrt otepi?

⁺) Jde o text *Pátiganita* autora *Šrídharý* z doby kolem r. 900 n. l.; texty úloh č. 25, 34 a 44 jsou jen nepatrně upraveny. Varianty těchto úloh jsou však obsaženy ve spisech starších i mladších.

- B. Každý z 20 náhrdelníků obsahuje 8 perel. Ó, matematiku, urči počet náhrdelníků po 6 perlách z téhož celkového počtu perel.
- C. Když tři dělníci dostávají za dva dny práce pět rupií, řekni, kolik rupií dostane osm lidí za devět dní práce?

Indičtí počtáři, jak víme, vytvořili poziční desítkovou soustavu zápisu čísel. Pozičně, tj. s důrazem na umístění symbolů čísel, zaznamenávali i „výtahy“ ze slovních textů. Pro naše tři případy to byly tyto záznamy:

$$A : \frac{5}{4} \quad \frac{21}{2} \quad \frac{37}{4} \quad \square$$

$$C \quad \begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 2 & 9 \\ 5 & \square \end{array}$$

$$B \quad \square \quad 8 \quad 20 \quad 6$$

Prázdná políčka, která jsou naznačena pravoúhelníky, měli počtáři na svých početních deskách, patřila neznámé, tj. hledanému množství. Podle počtu míst se *zapsanými* čísly dostaly tyto záznamy svá jména

A, B : *trajrášika*

(trojmístná)

C : *pañčarášika*

(pětimístná)

Sedmimístná *saptarášika* a devítimístná *navarášika*, to byly další případy takových záznamů. Indické počtářské umění přebírali, jak víme, Arabové a jimi ovládané národy. Znamý učenec *al-Bírúní* napsal dokonce samostatný spis *O indických rášikách*; jiní zahrnovali informace o nich do svých rozsáhlejších prací. Jako součást vzdělání kupců a řemeslníků našly tyto početní praktiky své uplatnění i ve středověké Evropě.

Vraťme se k indickým pramenům tohoto početního umění; „pravidlo tří veličin“ je v citované knize vysloveno takto:

Na první a poslední místo se mají dát dané a žádané, které se nemění; a do středu výsledek, který se mění; jeho součin s posledním se má dělit prvním množstvím.

V našem příkladu A to znamená, že první a poslední údaj se týká počtu otepí (ty se už nemění), prostřední je cena, která se „změní“. Dnes bychom zapsali a vypočítali:

$$\frac{5}{4} \quad \frac{21}{2} = \frac{37}{4} : x \qquad x = \left(\frac{21}{2} \cdot \frac{37}{4} \right) \frac{5}{4}$$

V příkladě B jde o „obrácené pravidlo tří veličin“ (vjastatrajrášika) — nepřímou úměrnost. Pravidlo pro zápis je stejné, ale „prostřední se násobí prvním a dělí se posledním“ Neznámou si představujeme vlevo, tedy

$$x : 8 = 20 : 6$$

$$x = (8 \cdot 20) : 6$$

Příkladem pañčarášiky je úloha C; v případě celočíselných údajů pravidlo požadovalo jen přenést „výsledek“ na druhou stranu, tedy číslo 5 do pravého sloupce, vynásobit čísla v pravém sloupci a součin dělit

„druhou stranou“, tj. součinem čísel v levém sloupci. V našem příkladě vyjde $(8 \cdot 9 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 2)$, výsledek 60 rupií. Indiští počtáři však ovládali toto pravidlo i pro údaje zapsané zlomky, při jeho aplikaci pak ještě vyměňovali jmenovatele zlomků zapsaných na témž řádku.

Algebraickou symbolikou můžeme obsah a řešení úloh počítaných paňčarášikou zapsat takto

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{x}{e}, \quad x = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d}$$

Vidíte, že algebraická symbolika je velkým dobrodiním, které nás zbavuje nutnosti pamatovat si desítky speciálních pravidel pro řešení úloh různých typů.

Objav rádioaktivity



H. A. Becquerel 15. 12. 1852; 25. 8. 1908

Objav rádioaktivity spadá do obdobia, v ktorom sa otvára nová epocha v dejinách ľudstva. Viaz sa k prelomu XIX. a XX. storočia, široko zasahuje do vývoja ľudstva a zanecháva hlboké stopy aj v spoločenskej sfére. S objavom rádioaktivity sa bezprostredne viažu mená profesora *Henriho Andree Becquerela* a manželov *Curie*.

Becquerelov objav z roku 1896 spočíval v zistení, že s atómami uránu súvisí prítomnosť prenikavého ionizujúceho žiarenia. Vedeckému bádaniu sa tým otvorilo nové rozsiahle pole, na ktoré sa bez váhania pustilo mnoho bádateľov. Svorne, plece pri pleci, prekonávali úskalia a riešili

problémy, ktoré im pri tom príroda predkladala. Preskúmala sa podstata tohto žiarenia. Ukázalo sa, že sa skladá z jadier atómov hélia (žiarenie



P. Curie 15. 5. 1859; 19. 4. 1906



M. Skłodowska-Curie 7. 11. 1867;
4. 7. 1934



I. Joliot-Curie 12. 9. 1897;
17. 3. 1956



F. Joliot-Curie 19. 3. 1900;
14. 8. 1958

alfa), z prúdu elektrónov (žiarenie beta) a prenikavého elektromagnetického žiarenia s vlnovou dĺžkou ešte kratšou, ako malo, len krátko pred tým objavené, Röntgenovo žiarenie. A to sa už odvíjali udalosti prvých rokov XX. storočia. Ostaneme v rodine Curieovcov a pritom sa nevzdialime od objavu rádioaktivity. Prejdeme do tretieho desaťročia tohto storočia bez toho, aby sme opustili Paríž.

Píše sa rok 1934. Manželia *Irena a Frederic Joliot-Curieovci* skúmajú vo Wilsonovej hmlovej komore, umiestnenej v magnetickom poli, žiarenie polónia, tienené hliníkovou fóliou. Pri tejto práci si všimnú indukovanú pozitronovú aktivitu tieniacej fólie. Svoj objav vysvetľujú smelou intuíciou: jadro hliníka zachytáva častice alfa z polónia, vyžaruje neutrón a mení sa na nové jadro fosforu. Toto však nie je obyčajný fosfor, ale jeho rádioaktívny izotop. To bol prvý prípad vytvorenia rádioaktívnej látky v laboratóriu — objav umelej rádioaktivity.

Dve generácie Curieovcov dali ľudstvu rádioaktivitu, ktorú toto bohaté využíva v rôznych oblastiach vedy a techniky. Za veľkú prácu dostali všetci zúčastnení Nobelovu cenu, a to za fyziku H. A. Becquerel a manželia Curie za objav a prácu v oblasti spontánnej rádioaktivity (1903) a za chémiu M. Sklodovská-Curie (1911) za objav rádia a polónia a manželia Joliot-Curie (1935) za práce na syntéze nových rádioaktívnych prvkov.

Doc. dr. Ján Chrapan, CSc.

Elektronový obal atómu a atómová spektra

RNDr. MIROSLAV MELICHAR, Soběslav

Vývoj názorů na stavbu elektronového obalu atomu představuje jednu z nejzajímavějších kapitol dějin přírodních věd. Je to zároveň historie důležité hraniční oblasti mezi fyzikou a chemií. Školská chemie nyní zdůrazňuje obecný základ, ze kterého vychází, a proto její výuka začíná zjednodušeným výkladem vlnově-mechanického modelu atomu. To je nepochybně správné, ale poksytuje to žákům jen omezenou možnost plně pochopit souvislosti s odpovídajícím učivem ve fyzice. Vzniká riziko rozvoje falešných představ o možnostech experimentálního sledování struktury atomů. Tento článek se proto snaží v rámci historických souvislostí ukázat vztah mezi vývojem poznání atomového obalu a studiem atomových spekter a tím pomoci čtenáři získat obecnější pohled na tuto problematiku.

Hypotéza, že se všechny látky skládají z atomů, vznikla již ve starém Řecku. Na vyšší úrovni ji v roce 1803 obnovil *John Dalton*, který exis-

tencí atomů vysvětloval platnost právě objevených chemických slučovacích zákonů, založených na velkém množství přesných pokusů a pozorování. Důsledkem byl vznik nynějšího způsobu zápisu chemických vzorců a představ o molekulách (v r. 1811). Tak začala na začátku 19. století vznikat vědecká chemie.

Ač se později stala nejdůležitějším zdrojem informací o struktuře atomového obalu spektra, rozvíjelo se jejich studium dlouho zcela nezávisle na atomové teorii. Pojem spektrum pochází od *Isaaca Newtona*, který se v roce 1666 zabýval rozkladem bílého světla pomocí skleněného hranolu a výsledky těchto pokusů jako první popsal a zdůvodnil. Studium spekter se začalo bouřlivě rozvíjet až v 19. století v Německu. Bylo to hlavně díky optikovi *Josefu Fraunhoferovi*, který se proslavil studiem slunečního záření (objevil v něm tzv. Fraunhoferovy čáry) a vytvořil první přesný přístroj k vyhodnocování spekter — spektroskop.

Je všeobecně známo, že sloučeniny některých prvků (např. alkalických kovů, vápníku nebo mědi) výrazně zbarvují nesvítivý plamen plynového kahanu. Tohoto jevu se běžně používá k jejich rychlému důkazu v chemických laboratořích. Když asi v polovině minulého století začali vědci zkoumat spektra vznikající rozkladem takto získaného záření (tedy emisní spektra prvků), zjistili, že se skládají pouze z jednotlivých čar a jsou pro jednotlivé prvky typická. Němci *Gustav Kirchhoff* a *Robert Bunsen* na tyto objevy navázali a podařilo se jim vysvětlit vznik Fraunhoferových čar ve spektru slunečního záření tím, že prvky přítomné v zemské atmosféře část tohoto záření pohlcují. (Pohlcováním záření vznikají spektra absorpční.) Dva roky nato — v roce 1861 — Kirchhoff s Bunsenem objevili během studia spekter tehdy známých alkalických kovů (lithia, sodíku a draslíku) dva nové prvky této skupiny (cesium a francium) pouze na základě pozorování dosud nevysvětlených spektrálních čar. Od té doby se spektroskopická identifikace stala nejlepším důkazem existence nového prvku. V roce 1868 tak bylo ve slunečním obalu objeveno helium, jehož přítomnost na Zemi byla prokázána až po 30 letech. (O heliu se proto dlouho předpokládalo, že je prvkem Slunce a že se na Zemi vůbec nemůže vyskytovat.) Přestože spektroskopie slavila velké praktické úspěchy, chyběl dosud logický výklad vzniku spekter. První hypotézy o tom, že spektra prvků vlastně souvisejí s vnitřní stavbou jejich atomů, se objevily až okolo roku 1907.

Až do konce minulého století byla totiž uznávána platnost Daltonovy hypotézy, která považovala atomy za nejmenší, dále nedělitelné částice hmoty. Teprve objev elektronu při studiu elektrických výbojů ve zředěných plynech ukázal, že atomy jsou složené. Krátce na to, v roce 1898, vznikl první model stavby atomu. Atom byl pokládán za kladně nabitou kouli, v níž jsou ponořeny elektrony se záporným nábojem. Označoval se jako *pudinkový model*, protože umístění elektronů připomínalo rozinky zamíchané v anglickém pudinku. Základem moderní představy

o struktuře atomu je rozlišení jádra a obalu, které prokázal *Ernest Rutherford* v roce 1911. Důkazem byl následující experiment: Tenká fólie zlata (zlato bylo zvoleno pro svou mimořádnou kujnost) byla ozařována proudem částic alfa. Velká většina částic prošla zlatým plíškem bez patrné odchylky od původní dráhy, některé se však odrazily pod značným úhlem zpět. Tím bylo prokázáno, že hustota ani rozložení elektrických nábojů uvnitř atomů nejsou rovnoměrné. Výsledkem byla představa malého jádra s velkou hustotou a kladným elektrickým nábojem a mnohem rozsáhlejšího elektronového obalu atomu, jehož hustota je téměř zanedbatelná. Rozměry atomového jádra a obalu přitom vyplynuly z poměru počtu částic alfa, které během experimentu prošly zlatou fólií, a počtu odražených částic. Elektronům v atomovém obalu připisoval Rutherford oběžné dráhy kolem jádra podobné drahám planet kolem Slunce — proto vzniklo pojmenování *planetární model* atomu. Právě tato představa o pohybech elektronů byla mylná, představovala však již možnost hledat souvislosti mezi strukturou atomového obalu a vznikem atomových spekter. O dosažení tohoto cíle se snažil dánský fyzik *Niels Bohr*, který planetární model atomu v roce 1913 doplnil a upravil.

Bohr musel především hledat odpověď na otázku, proč se emisní spektra prvků skládají pouze z jednotlivých čar odpovídajících přesně vymezeným hodnotám energie. Rozžhavené tuhé látky totiž vysílají záření, jehož spektrum je spojité, což odpovídá plynulým změnám energie. Původně se předpokládalo, že spektrální čáry vznikají vzájemným působením skupin atomů. Na začátku našeho století se začal prosazovat názor, že ke vzniku jedné čáry v atomovém spektru stačí změna stavu jednoho elektronu v atomu. Bylo zřejmé, že energie elektronů v atomech se může měnit jen o určité celistvé hodnoty, charakteristické pro jednotlivé prvky. Tyto hodnoty nazýváme kvanta energie. (Kvantová teorie byla použita v roce 1905 při výkladu fotoelektrického jevu.) Bohr rozpracoval představu, že se elektrony pohybují v obalu atomu po určitých drahách — orbitech, které charakterizoval kvantovými čísly. Vyslovil zároveň předpoklad, že plynulý přechod elektronu z jedné dráhy na druhou není možný, ale že elektron může přejít do jiného orbitu přeskokem. Energie vyzařovaného (v emisním spektru) nebo pohlcovaného záření (v absorpčním spektru) je pak dána rozdílem energií elektronu v obou orbitech. Tyto základní myšlenky jsou platné dodnes, ačkoliv pod pojmem orbit chápeme určitý prostor a ne přesně vymezenou oběžnou dráhu.

Bohrovi se na základě jeho modelu atomu podařilo vypočítat energie jednotlivých čar spektra vodíku, které výborně souhlasily s experimentálními výsledky. Navíc dal podnět ke studiu vodíkového spektra v infračervené a ultrafialové oblasti. Vysvětlení vzniku spektra vodíku bylo velikým úspěchem, i když se jedná jen o nejjednodušší prvek.

Bohrův model však nedosáhl všeobecného uznání, kritizováno bylo zejména velké množství blíže nezdůvodněných výchozích předpokladů. Hledala se proto teorie, která by dokázala vysvětlit i spektra složitějších prvků a v jejímž základě by bylo méně nedokázaných tvrzení.

V roce 1923 vystoupil *Louis de Broglie* s hypotézou, podle níž všechny hmotné částice mají současně i částečně charakter vln. (Opačná představa, že světlo, jež je elektromagnetickým vlněním, lze současně chápat jako proud částic — fotonů, se osvědčila už dříve při výkladu fotoelektrického jevu.) Vlnový charakter lze snadno zanedbat u větších těles, ale nelze jej podle Broglieho opomíjet při studiu atomů a elementárních částic. Z této představy vyšel Rakušan *Erwin Schrödinger* a v roce 1926 popsal chování elektronu v atomu vlnovou rovnicí. Vlnová rovnice má nekonečně mnoho řešení charakterizovaných hodnotami tří parametrů, které lze ztotožnit s kvantovými čísly z Bohrova modelu atomu. Kvantová čísla a jejich přípustné hodnoty se tedy objevují jako logická součást řešení vlnové rovnice a nemusí již být zaváděna pomocí zvláštních předpokladů. (Jedná se o hlavní, vedlejší a magnetické kvantové číslo. Spinové kvantové číslo z řešení Schrödingerovy vlnové rovnice přímo nevyplývá.) Jednotlivým řešením Schrödingerovy rovnice přiřazujeme prostory nejpravděpodobnějšího výskytu elektronů v obalu atomu, které podle tradice nazýváme orbity, případně orbitaly. Úspěch *vlnově-mechanického modelu* atomu spočívá nejenom v jeho schopnosti vysvětlovat spektra složitějších prvků, ale i v tom, že metodami vlnové mechaniky lze popsat podstatu vzniku chemických vazeb ve sloučeninách a strukturu molekul. Rozsáhlejší aplikace metod vlnové mechaniky umožnil v posledních desetiletích rozvoj moderní výpočetní techniky.

Přestože dnes používáme k popisu struktury elektronového obalu atomu vlnově-mechanický model, pracujeme stále s řadou pojmů, které byly vytvořeny již před jeho vznikem. Stále živé jsou např. pojmy orbit, slupka nebo podslupka, i když se jejich obsah zčásti změnil a ztratil svou původní názornost. (To vyplývá především ze skutečnosti, že si uvědomujeme, že elektronům nemůžeme v atomovém obalu přiřipovat přesnou dráhu jejich pohybu.) Často zachováváme i tradiční symboliku. Např. slupky v atomovém obalu označujeme velkými písmeny K, L, M, ... , což nám připomíná význam Röntgenových spekter pro poznání atomové struktury. Spektroskopie Röntgenova záření sehrála důležitou úlohu při poznávání uspořádání vnitřních slupek atomového obalu, protože toto záření díky své vysoké energii, na rozdíl od viditelného světla, výrazně působí i na elektrony umístěné v blízkosti jádra ve složitějších atomech. Mnoho začátečníků překvapí fakt, že hodnoty vedlejšího kvantového čísla vyjadřujeme písmeny *s*, *p*, *d*, *f* a ne přímo číselnými hodnotami odpovídajícími příslušnému řešení Schrödingerovy rovnice. Je to zbytek symboliky používané k popisu sérií spektrálních

čar, jež se dělily na ostré (sharp), hlavní (principal), difúzní (diffusal) a základní (fundamental).

Současně se vznikem nových teoretických představ o struktuře elektronového obalu atomu se na přelomu století a v prvních letech našeho století rozvíjela i spektroskopická technika. Holandský fyzik *Pieter Zeeman* pozoroval v roce 1896 poprvé štěpení jednotlivých spektrálních čar na několik oddělených v magnetickém poli. Tento jev byl z velké části vysvětlen existencí magnetického kvantového čísla. Později byla objevena jemná struktura spektrálních čar — mnohé spektrální čáry jsou vlastně dvojicí čar ležících blízko sebe. V roce 1925 byla proto vyslovena hypotéza, že elektron má vlastní vnitřní moment hybnosti a s ním spojený magnetický moment. Existence tzv. spinu dovolila přesně předpovídat štěpení spektrálních čar v magnetickém poli i jemnou strukturu atomových spekter. Elektron byl však v této souvislosti považován za malou rotující kuličku nesoucí záporný elektrický náboj. Tato představa přímo odporovala základům vlnové mechaniky, kde je elektronu připisován současně i charakter vlnění a není možno přesně určit způsob jeho pohybu. V roce 1928 dále rozvinul vlnově-mechanický model atomu *Paul Adrien Maurice Dirac*. Jeho relativistická teorie zahrnuje spin jako svůj logický důsledek, má však jen omezené použití vzhledem ke své složitosti a velmi nízké názornosti. Ve škole zůstává vysvětlení spinu elektronu dodnes určitým problémem pro učitele i pro žáky, protože spin neodpovídá žádnému jevu z oblasti našich zkušeností, a proto bývá často chápán nesprávně.

Vlnová mechanika je teorií, která zbořila řadu uznávaných tvrzení klasické fyziky a jejíž předpoklady zdánlivě odporují běžným zkušenostem (tvrdí např., že hmota má vlastnosti vlnění a že chování elementárních částic lze popisovat jen s určitou pravděpodobností). Proto by základní informace o vlnově-mechanickém modelu struktury elektronového obalu atomu měly být vždy ilustrovány příklady experimentů, které vedly k vytvoření tohoto modelu a potvrzují i v současnosti jeho správnost. K hlubšímu pochopení našich dnešních představ o stavbě hmoty přispívá rovněž znalost základních myšlenek nejvýznamnějších starších, již překonaných teorií, které vytvářely cestu k nynějšímu stavu poznání.

Doporučená literatura :

Uvedenou problematikou se zabývá krásná populárněvědecká publikace V. I. Rydnika *Zákony světa atomů* vydaná nakladatelstvím Panorama v edici Pyramida, Praha 1979.

Část tematiky zachycuje seriál článků J. Pišúta *O Kvantách, vlnách a atómech* v Rozhledech matematicko-fyzikálních 59 (1980—1981),

č. 2—5. Jeho druhá časť (v č. 3) sa zabýva výkladom pojmu kvantum, fotoelektrickým jevom a Bohrovou interpretáci atomových spekter.

Díličí informácie o Daltonovi, jeho atomovej teórii a o objeve helia poskytuje kniha I. Boháčka *Elixíry života a smrti* vydaná nakladateľstvom Albatros, Praha 1979. Objav helia podrobnejšie popisuje článok J. Zýky v časopise *Vesmír* 57 (1978), č. 11, str. 329—330.

Dalšie informácie poskytnú vysokoškolské učebnice:

A. Beiser: *Úvod do modernej fyziky*, Academia, Praha 1978

W. J. Moore: *Fyzikálna chémia*, SNTL, Praha 1979

40 rokov vysokohorského observatória na Skalnatom plese

Doc. RNDr. JÁN CHRAPAN, CSc., UK Bratislava

K panoráme Skalnatého plesa, ktorá sa nám otvorí v hornej časti lanovej dráhy z Tatranskej Lomnice, neodmysliteľne patrí charakteristická budova observatória s dvoma kupolami. Je neodmysliteľná a pre Skalnaté pleso charakteristická, veď už 40 rokov sa vzhliada v jeho vodách.

Na malej vyvýšenine nad plesom v nadmorskej výške 1783 m dokončili túto stavbu na jeseň roku 1943. Presadiť výstavbu hvezdárne v ťažkých vojnových rokoch vôbec nebolo ľahké. Napriek tomu zvíťazila cieľavedomá húževnatosť iniciátora stavby a prvého riaditeľa hvezdárne, RNDr. Antonína Bečvářa, ktorý u vtedajších vládnych kruhov argumentoval tým, že v strednej Európe už len Slovensko nemá hvezdárňu. Ako silný dôvod pre vybudovanie hvezdárne slúžila skutočnosť, že starodálský (dnes Hurbanovo) 60 cm reflektor, demontovaný po mníchovskej dohode z observatória v Hurbanove, ležal nevyužitý v Prešove. Bečvář mal blízky vzťah k Tatrám. Ako meteorológ a astronóm sa stal v roku 1937 klimatológom Štátnych kúpeľov na Štrbskom plese. Tu si inštaloval vlastný amatérsky ďalekohľad a získal ním veľmi dobré série snímok niekoľkých komét. Miesto pre budúcu hvezdárňu však vybral mylne. Ukázalo sa, že predbežné astroklimatologické pozorovania robil v nadpriemerne priaznivom období. Neskôr sa zistilo, že Skalnaté pleso patrí k najveternejším miestam v Tatrách. Pri voľbe miesta však zohrala rozhodujúcu úlohu novopostavená lanovka na Lomnický štít. Vrchol Lomnického štítu (2632 m n. m.) Bečvář odmietol pre ťažké životné podmienky a nedostatok miesta, a tak sa novej hvezdárni obmedzil severný a západný obzor.

Pri ústupe fašistických vojsk bola práca observatória na čas prerušená. Vďaka pracovníkom lanovky, ktorí odmietli vyviešť likvidačnú jednotku nemeckej armády na Skalnaté pleso, unikla hviezdáreň demolácii. Nemci sa pre nedostatok času obmedzili len na to, že vyhodili do povetria stanicu lanovky a prvý stožiar v Tatranskej Lomnici a prerušili elektrické vedenie na Skalnaté pleso a Lomnický štít.

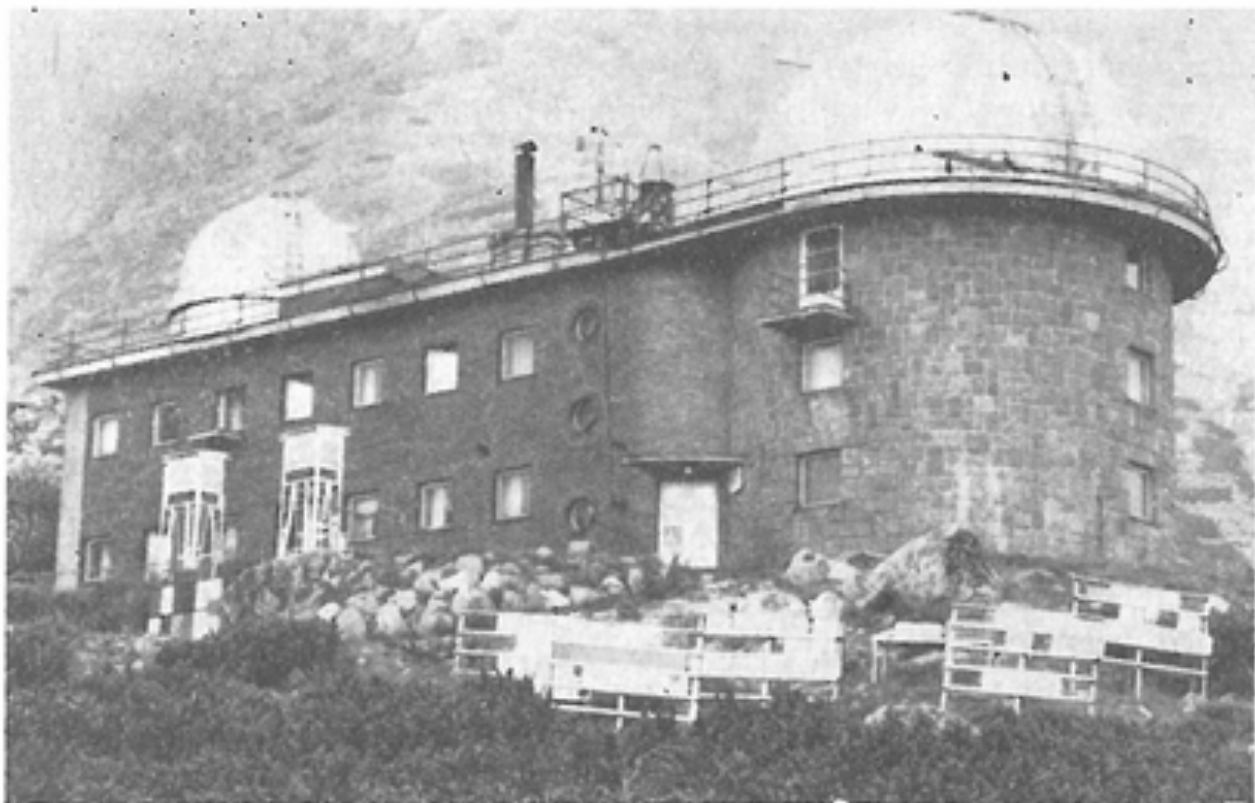
V osobe prvého riaditeľa observatória sa zlučovala astronómia a meteorológia. Táto skutočnosť je badateľná dodnes. Do konca roku 1960 pracovalo na Skalnatom plese synoptické observatórium riadené Štátnym meteorologickým ústavom v Bratislave. V septembri 1962 prevzali túto prácu pracovníci Laboratória meteorológie a klimatológie v Bratislave. V súčasnosti riadi meteorologické práce na observatóriu Geofyzikálny ústav SAV. Riešia sa otázky základného výskumu zamerané na slnečnú radiáciu a horskú meteorológiu. Od roku 1947 do roku 1976 pracoval na observatóriu klasický seizmograf s mechanickou registráciou. V súčasnosti zabezpečuje seizmické merania modernejší elektromagnetický seizmograf.

Štyridsať rokov neúnavnej práce erudovaného kolektívu je obdobie, ktorého podrobnejšie bilancovanie by si vyžiadalo veľa miesta. Preto pripomeniem len tie programy, ktorých úspešným plnením sa hviezdáreň na Skalnatom plese dostala do vedomia širšej fyzikálnej verejnosti, do kruhov neastronómov.

Nepretržitým pokračovaním prác dr. Bečvářa zo Štrbského plesa je pozorovanie slnečnej fotosféry. Výsledky — relatívne čísla slnečných škvrn sa zasielajú svetovej centrále do Bruselu. V máji 1982 inštalovali moderný interferenčný filter pre výskum slnečnej chromosféry. Tým sa skvalitnilo skúmanie základných dôležitých fyzikálnych procesov na Slnku a ich vzťahu k Zemi.

Impozantná je zbierka 10 000 snímok, vari ešte aj dnes jedna z najväčších na svete, na ktorých je zachytených vyše 1000 meteórov. Aj vizuálne skupinovú pozorovanie meteórov sa zapísalo do dejín astronómie objavom meteorického roja Ursíd z 22. 12. 1945.

Prvých desať povojnových rokov bolo Skalnaté pleso známe systematickým hľadaním komét, ktoré prinieslo objav desiatich nových komét. Doktor *Mrkos* pokračoval v tejto namáhavej nočnej práci na Lomnickom štíte až do roku 1959 a tu sa mu podarilo objaviť ešte 8 ďalších komét. Od roku 1946 sa zhotovovali pozičné snímky komét 60 cm zrkadlovým ďalekohľadom a od roku 1965 pomocou 30 cm Zeissovho astrografu, umiestneného v západnej malej kopuli. Namerané polohy sa zverejňujú prostredníctvom Medzinárodnej astronomickej únie. Uvedený astrograf slúži aj na snímkovanie planetoidov. Táto práca bola korunovaná objavom dvoch planetoidov, a to planetoidu Tatry (planetoidu číslo 1989) a planetoidu číslo 1807 Slovakia.



Po doktorovi A. Bečvářovi bol za riaditeľa observatória na Skalnatom plese menovaný *doc. dr. V. Guth*, odborník pre meteorickú astronómiu. So vznikom SAV sa stalo observatórium od roku 1953 jedným z vedeckých pracovísk tejto našej hlavnej vedeckej inštitúcie pod názvom Astronomický ústav SAV.

V roku 1952 sa na Skalnatom plese začali pozorovania premenných hviezd. Už viac ako dvadsať rokov sa zaznamenávajú jasnosti premenných hviezd pomocou fotoelektrického fotometra, ktorý je v ohnisku 60 cm ďalekohľadu vo východnej veľkej kopuli. V roku 1978 bol pôvodný 60 cm reflektor vymenený za modernejší prístroj, tiež firmy Zeiss, optické parametre sa pritom nezmenili.

K menu doktora *Záviša Bochníčka*, tretieho riaditeľa observatória, sa viažu prvé, predovšetkým vizuálne, Akadémiou vied ZSSR hodnotené ako najpresnejšie, pozorovania umelých družíc. Skalnaté pleso bolo prvým miestom, z ktorého sa pozoroval prístrojový modul Sputnika 1.

Observatórium má bohatú tradíciu v popularizovaní výsledkov astronomického výskumu, ktorú založila doktorka *Ludmila Pajdušáková*, riaditeľka ústavu v rokoch 1958—1979.

Medzinárodný význam Skalnatého plesa by nebol úplne dôkreslený, ak by sme neuviedli svetoznámy kreslený atlas celej oblohy, zhrnutý do 16 máp s katalógom, ktorý vznikol predvážne prácou A. Bečvářa v rokoch 1946—1949. Je to známy „*Atlas Coeli Skalnaté pleso*“, ktorého prvé vydanie vyšlo u nás. Právo na zahraničné vydania odkúpili do USA. Honorár si nechal Bečvář preplatiť vo fotografických platniach, na ktoré sa v observatóriu snímkovala obloha až do roku 1953.

Observatórium na Skalnatom plese má už svoju históriu a tak, ako patrí do panorámy Tatier, tak patrí aj do venca svetových observatórií. Pôvodná budova, projektovaná pre prácu piatich ľudí, slúži dnes za pracovisko až dvadsiatim odborníkom. Tento stav sa však už v najbližšej budúcnosti zlepší. V septembri 1979 sa položil základný kameň areálu Astronomického ústavu SAV na starolesnianskych lúkach. Okrem budovy, ktorá bude znamenať podstatné zlepšenie pracovných podmienok vedeckých a odborných pracovníkov, stavajú sa tu tiež zariadenia na pozorovanie Slnka. A takto, po viac ako štyridsiatich rokoch, opustí slnečná astronómia Skalnaté pleso a usadí sa na úpäť Tatier.

Astronomický ústav, ktorý začínal s jediňým vysokoškolsky vzdelaným pracovníkom, má dnes, pod vedením riaditeľa *RNDr. Júliusa Sýkora*, 18 vedeckých pracovníkov. Tento stav sa prirodzene odráža aj na počte a kvalite vedeckých prác ústavu a je samozrejmou súčasťou rozvoja našej spoločnosti.

In memoriam profesora Zdeňka Pírka

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Dne 15. května 1983 náhle zemřel profesor matematiky na elektrotechnické fakultě Českého vysokého učení technického (ČVUT) v Praze RNDr. Zdeněk Pírko, DrSc. Patřil dříve mezi pilné autory článků do *Rozhledů*, které také v letech 1941 až 1951 redigoval, a to nejprve s profesorem *Vyčichlem* a *dr. Wanglerem*, později s profesory *Urbanem* a *Kašparem*. Proto připomínka jeho života a celoživotního díla patří také na stránky našeho časopisu.

Zdeněk Pírko se narodil 12. prosince 1909 v Pacově v rodině nižšího státního zaměstnance, avšak od roku 1910 žil převážně v Praze. V letech 1919 až 1927 studoval na II. reálném gymnáziu v Praze — Vinohradech; jeho oblíbeným profesorem zde byl redaktor prvních devíti ročníků našich *Rozhledů* (1922—1930) *PhDr. Vladimír Ryšavý*. V letech 1927 až 1932 studoval Pírko na tehdejší přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy v Praze; studia ukončil státními zkouškami z matematiky a fyziky. Po skončení vojenské prezenční služby se podrobil rigoróznímu řízení a získal titul doktora přírodních věd (RNDr.). Potom pracoval ve Vojenském technickém a leteckém ústavu v Praze a od roku 1936 vyučoval matematiku a fyziku na středních školách; ve školním roce 1936/37 působil na reformním reálném gymnáziu v Tišnově a od roku 1937 byl profesorem reálky v Praze — Karlíně. Hned po skončení druhé světové války přešel na ČVUT v Praze, kde se v roce 1947 habilitoval v oboru algebraické a diferenciální geometrie; roku 1951 byl jmenován

řádným profesorem matematiky. Po zřízení samostatné elektrotechnické fakulty ČVUT v Praze byl v letech 1950 až 1952 jejím prvním děkanem a tutéž funkci vykonával ještě v letech 1956 až 1960.

Při náročné činnosti vysokoškolského učitele zastával profesor Pírko řadu významných a odpovědných funkcí. V letech 1955 až 1957 byl náměstkem ministra školství a kultury. řadu let pracoval jako generální tajemník Státního výboru pro vysoké školy, byl vědeckým sekretářem Státní komise pro vědecké hodnosti a předsedou komise pro obhajoby kandidátských disertací v oboru geometrie a topologie při ČVUT v Praze.

Kromě Rozhledů redigoval po druhé světové válce postupně tyto časopisy: *Fyzika v technice*, *Sovětská věda — Matematika, fyzika a astronomie*, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie a Práce ČVUT (řada teoretická)*. Napsal více než 300 prací z oboru matematiky a fyziky, z nichž značná část má popularizační charakter. Jeho vědecká a veřejná činnost byla oceněna v roce 1957 udělením doktorátu věd (DrSc), v roce 1959 státním vyznamenáním Za zásluhy o výstavbu, medailí Jana Amose Komenského a řadou dalších uznání.

K rozsáhlé vědecké, odborné a veřejné činnosti profesora Pírka patří jeho více než čtyřicetileté učitelské působení na středních a vysokých školách, výchova mladých vědeckých pracovníků a mnohaleté vedení katedry matematiky a deskriptivní geometrie na elektrotechnické fakultě ČVUT v Praze.

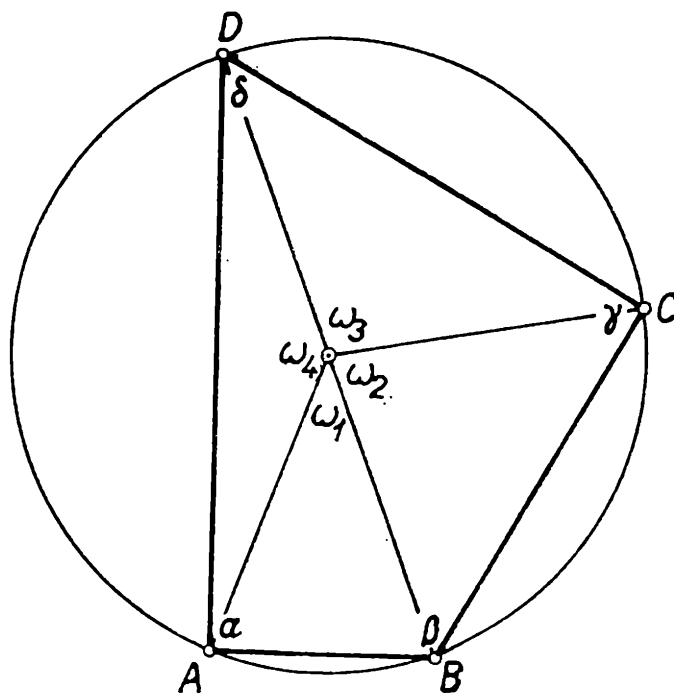
V profesoru Pírkovi odešel neúnavný pracovník, který významně přispěl k výchově našich matematiků a inženýrů, k rozvoji naší vědy i našeho školství. V Rozhledech však na něho vzpomínáme zejména proto, že patřil k okruhu těch našich matematiků a fyziků, kteří se zasloužili o to, že Rozhledy mohly plnit své poslání i v mimořádně obtížné době druhé světové války, kdy naše vlast byla okupována německými fašisty. Čest jeho památce.

K životnímu jubileu profesora Josefa Kotyka

Koncem roku 1983 se dožil vzácného životního jubilea profesor Josef Kotyk, žijící na odpočinku v Pardubicích. Narodil se 25. prosince 1903 v rodině rolníka v Příbyslavi u Nové Paky, studoval na reálce v Nové Pace a v letech 1922 až 1926 na přírodovědecké fakultě University Karlovy v Praze. Vyučoval 40 let na středních školách v Levicích, Mostě a od roku 1936 až do roku 1967 v Pardubicích. Patřil k horlivým čtenářům Rozhledů od jejich prvního ročníku, jako středoškolský profesor je úspěšně propagoval a 40 let do nich soustavně píše. K významnému životnímu jubileu mu přeje redakční rada Rozhledů pevné zdraví, spokojenost a chuť do další práce pro naše čtenáře.

Deset geometrických úloh

1. V tětivovém čtyřúhelníku (obr. 1) (tětivovému čtyřúhelníku se dá opsat kružnice) a) mají středové úhly velikosti $\omega_1 = 40^\circ$, $\omega_2 = 80^\circ$, $\omega_3 = 100^\circ$, $\omega_4 = 140^\circ$. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů α , β , γ , δ .
b) Vypočítejte velikosti středových úhlů, jestliže o vnitřních úhlech tětivového čtyřúhelníka platí $\alpha = \frac{3}{4}\beta$, $\gamma = \frac{6}{5}\delta$. [V tětivovém čtyřúhelníku o vnitřních úhlech platí $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$]



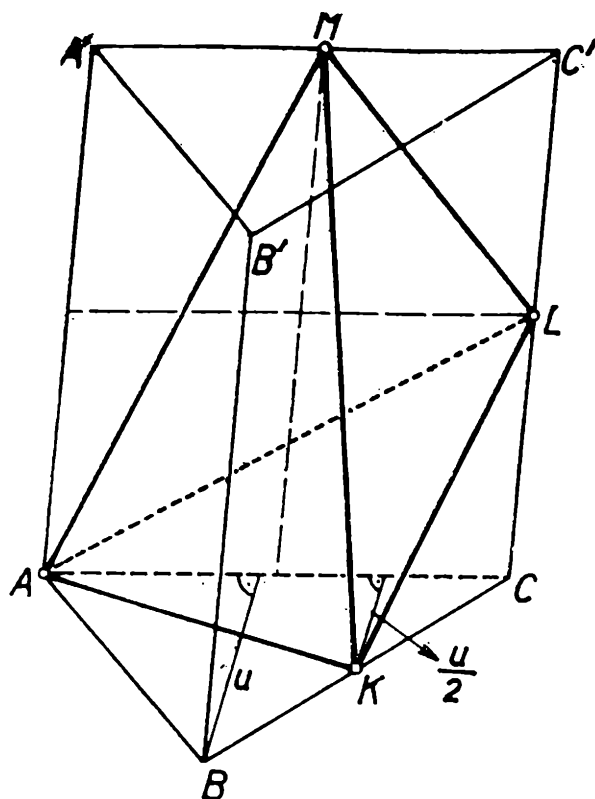
Obr. 1

2. Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k . Osa vnitřního úhlu CAB (ABC ; BCA) protne kružnici k ještě v bodě A' (B' ; C'). Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka $A'B'C'$. [Tento příklad a následující dva jsou určeny na procvičení věty o shodných úhlech nad týmž obloukem kružnice.]

$$\left[90^\circ - \frac{\alpha}{2}, 90^\circ - \frac{\beta}{2}, 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right]$$

3. Totéž, jenom osy úhlů nahradte výškami trojúhelníka.

$$[180^\circ - 2\alpha, 180^\circ - 2\beta, 180^\circ - 2\gamma]$$



Obr. 2

4. Jestliže v trojúhelníku střed vepsané kružnice je souměrně sdružený podle některé strany se středem opsané kružnice, potom jeden z úhlů trojúhelníka má velikost 36° .

[Zase tu jde o středové a obvodové úhly.]

5. Je dán trojúhelník ABC . Označme O střed kružnice vepsané a O_A střed kružnice vně vepsané, která leží uvnitř úhlu CAB . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCO obsahuje i bod O_A .

[Obvodové úhly.]

6. Jestliže v trojúhelníku ABC délka strany AB je aritmetickým průměrem délek druhých dvou stran, pak výška na stranu AB je třikrát delší než poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC . — Dokažte.

[Vyjděte ze vzorce $\rho = \frac{S}{s}$, kde s je obvod trojúhelníka a S jeho obsah.]

7. Je dán trojúhelník ABC . V úhlu ACB je sestrojena kružnice k , která se polopřímek CA , CB dotýká v bodech E , F (oba jsou na prodloužení úseček CA , CB za body A , B). Dále se dotýká přímky AB .

Dokažte, že platí:

$$|CE| + |CF| = |AB| + |BC| + |CA|.$$

8. Dokažte, že v lichoběžníku platí: Součet obou základů je menší než součet úhlopříček.

[Označme AB dolní základnu, CD horní základnu. Rovnoběžka vedená vrcholem C a BD protne dolní základnu v bodě E .]

9. Objemy těles V_c , V_a , V_b , která vzniknou rotací pravoúhlého trojúhelníka po řadě kolem přepony a odvěsen, jsou vázány vztahem

$$\frac{1}{V_c^2} = \frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2}$$

Dokažte.

$$\left[V_c = \frac{1}{3} \pi v^2 c_1 + \frac{1}{3} \pi v^2 c_2 = \frac{1}{3} \pi v^2 c; v^2 = c_1 c_2 = \frac{cc_1}{c^2} = \frac{a^2 b^2}{c^2} \text{ atd.} \right]$$

10. (Obr. 2.) Je dán kolmý trojboký hranol $ABCA'B'C'$ ($|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|CA| = 15$, $|AA'| = 10$). Body K , L , M jsou středy hran. Vypočítejte velikost objemu čtyřstěnu $KLMA$.

$\left[V = \frac{1}{3} (ALM) \cdot \frac{u}{2} \right]$, kde $\frac{u}{2}$ je výška čtyřstěnu na stěnu ALM a zároveň poloviční výška trojúhelníku ABC . Obsah (ABC) užitím Heronova vzorce.]

Stanislav Horák

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány dvě různoběžné roviny ρ , σ a bod E , který neleží v žádné z nich. Sestrojte krychli $ABCDEFGH$, která má stěnu $ABCD$ v dané rovině ρ a vrchol G (protilehlý k vrcholu A) v rovině σ .

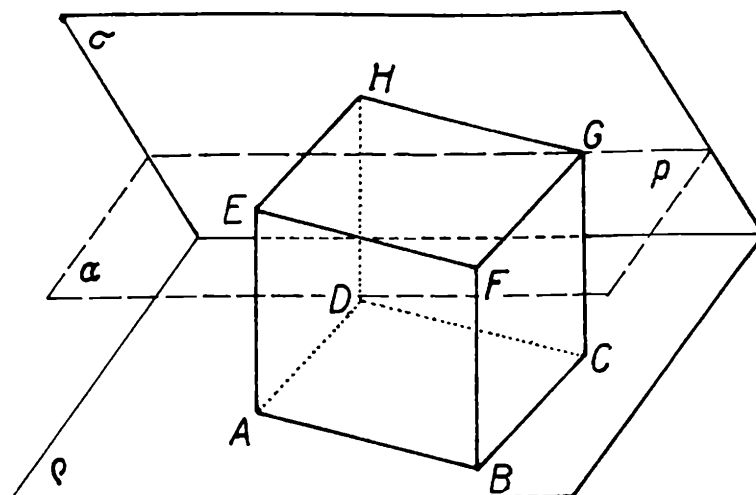
Stanislav Horák

(Došlo 5 řešení)

Podle řešení Andrey Lakatosové, II. J. maď. SPŠ Komárno a Jiřího Erharta, 4. C, G Mikuláše Koperníka Bílovec:

(Obr. 1) Leží-li stěna $ABCD$ v rovině ρ , pak stěna $EFGH$ leží v rovině $\alpha \parallel \rho$, která prochází bodem E . Vzdálenost rovin α , ρ je rovna délce a hrany krychle. Vrchol G nutně leží v přímce $p = \alpha \cap \sigma$ a je od bodu E vzdálen o délku $a\sqrt{2}$

Konstrukce: Z daného bodu E spustíme na rovinu ρ kolmici; její patu označíme A (je to vrchol krychle). V rovině α opíšeme kružnici $k = (E; a\sqrt{2})$, která přímku p protne v bodě G , což je další vrchol krychle.



Obr. 1

Pata kolmice z vrcholu G na rovinu ϱ je vrchol C . Zbývající vrcholy krychle se již snadno sestrojí.

Diskuse: Označme x vzdálenost vrcholu E od přímky p . Mohou nastat tři případy:

- $x > a\sqrt{2}$ Kružnice k nemá s přímkou p žádný společný bod a neexistuje řešení.
- $x = a\sqrt{2}$ Kružnice k se přímkou p dotýká (právě v bodě G) a úloha má jediné řešení.
- $x < a\sqrt{2}$ Kružnice k má s přímkou p společné dva různé body G_1, G_2 a úloha má dvě různá řešení.

2. Dokažte, že existuje čtyřstěn, jehož všechny stěny jsou shodné rovnoramenné (ne rovnostranné) trojúhelníky. Sestrojte tento čtyřstěn, jestliže jeho dvě protější hrany leží na daných mimoběžkách p, q , které nejsou prostorově kolmé.

Emil Kraemer

(Došla 4 řešení)

Upravené řešení Jiřího Erharta, 4 C G Bílovec :

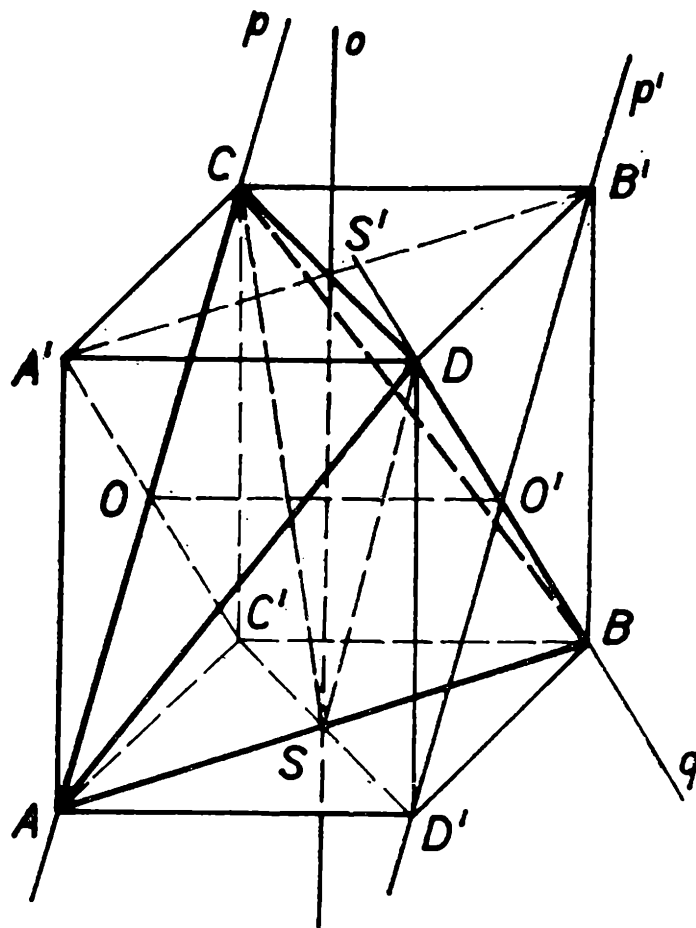
a) Předpokládejme, že výše popsany čtyřstěn existuje. Z jeho šesti hran jsou čtyři rameny shodných rovnoramenných trojúhelníků; ze zbývajících dvou opět shodných hran je každá základnou dvou z uvedených rovnoramenných trojúhelníků. Tyto dvě shodné hrany budtež AB, CD ; jejich středy označme po řadě S, S' (obr. 2). Podle předpokladu je

$$|AB| = |CD| = a, \quad (1)$$

$$|AC| = |AD| = |BC| = |BD| = b \neq a. \quad (2)$$

Úsečky SC, SD jsou po řadě výškami ke společné základně AB shodných rovnoramenných trojúhelníků ABC, ABD ; proto je

$$SC \perp AB, \quad SD \perp AB.$$



Obr. 2

To znamená, že přímka CD leží v rovině kolmé k přímce AB ; proto je

$$AB \perp CD. \quad (3)$$

Zároveň je $|SC| = |SD|$, takže přímka $o = SS'$ je výškou rovnoramenného trojúhelníku CDS se základnou CD ; proto je

$$o = SS' \perp CD. \quad (4)$$

Obdobně se dokáže, že přímka $o = SS'$ je výškou rovnoramenného trojúhelníku ABS' se základnou AB , takže je

$$o = SS' \perp AB. \quad (5)$$

Sestrojíme bodem S' rovnoběžku s přímkou AB a na ní body A', B' tak, aby bylo $AA' \parallel BB' \parallel SS'$; obdobně vedme bodem S rovnoběžku s přímkou CD a na ní sestrojíme body C', D' tak, aby byla $CC' \parallel DD' \parallel SS'$. Potom je $|A'B'| = |AB|$, $|C'D'| = |CD|$; z toho podle (1) plyne, že úsečky $AB, C'D', CD, A'B'$ jsou shodné. Bod S je středem úseček $AB, C'D'$ a bod S' je středem úseček $A'B', CD$; obrazce $AC'BD'$, $A'CB'D$ jsou tedy shodné pravoúhelníky. Protože je $A'B' \parallel AB$, je podle (3) také $A'B' \perp CD$; obdobně je $C'D' \perp AB$. Pravoúhelníky $AC'BD'$, $A'CB'D$ jsou tedy shodné čtverce. Protože je $A'B' \parallel AB$, $C'D' \parallel CD$, je podle (5) a (4) také $A'B' \perp SS'$, $C'D' \perp SS'$. Z toho podle (4) a (5) plyne, že roviny uvedených shodných čtverců jsou kolmé k přímce $o = SS'$. Těleso s vr-

choly $A, C', B, D', A', C, B', D$ je tedy kvádr se čtvercovými podstavami; z (1) a (2) plyne, že jeho boční stěny jsou obdélníky (nikoli čtverce). Proto přímky $p = AC, q = BD$, na nichž leží úhlopříčky protějších bočních stěn kváдру, nejsou prostorově kolmé.

Je-li $AC'BD'A'CB'D$ kvádr, jehož podstavy $AC'BD', A'CB'D$ jsou čtverce a jehož boční stěny jsou obdélníky (obr. 2), pak čtyřstěn $ABCD$ má vlastnost uvedenou v textu úlohy. Tak jsme dokázali existenci tohoto čtyřstěnu; zároveň jsme však dokázali, že každý takový čtyřstěn má dva vrcholy v protějších vrcholech jedné podstavy uvedeného kváдру a druhé dva v protějších vrcholech jeho druhé podstavy.

b) Z provedeného rozboru plyne, že přímka $p' = B'D'$ (obr. 2) je pravoúhlým průmětem přímky $p = AC$ do roviny stěny $DB'BD'$ kváдру, která je rovnoběžná s rovinou stěny $AA'CC'$. Jsou-li O, O' středy těchto stěn, je přímka OO' kolmá k jejich rovinám a úsečka OO' je shodná se stranou čtvercové podstavy $A'CB'D$ kváдру. Z toho plyne tato konstrukce čtyřstěnu $ABCD$, jehož hrany AC, BD leží po řadě na daných přímkách p, q (obr. 2):

1. Přímkou q proložíme rovinu $\varrho \parallel p$. 2. Do roviny ϱ pravoúhle promítneme přímku p ; tak dostaneme přímku p' . 3. Sestrojíme průsečík O' přímek p', q . 4. Bodem O' vedeme kolmici k rovině ϱ a sestrojíme její průsečík O s přímkou p . 5. V rovině ϱ sestrojíme obdélník $DB'BD'$ tak, aby jedna jeho střední příčka byla shodná s úsečkou OO' . 6. Sestrojíme pravoúhelník $AD'B'C$ tak, aby jeho střední příčkou byla úsečka OO' a aby bylo $AD' \parallel CB' \parallel OO'$. Potom body A, C, B, D jsou vrcholy čtyřstěnu, který má zřejmě požadované vlastnosti.

Z konstrukce plyne, že rovina ϱ je právě jedna, přímka p' též právě jedna a bod O' také právě jeden; rovněž bod O je právě jeden. V rovině ϱ však lze sestrojit právě dva obdélníky, mající požadovanou vlastnost. Z toho pak plyne, že úloha má právě dvě řešení.

3. V průmětně je dán rovnoběžník $A'C'E'G'$, jehož vrcholy jsou rovnoběžnými průměty sousedních vrcholů A, C, E, G pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$. Narýsujte průmět $A'B'C'D'E'F'G'H'$ tohoto osmiúhelníku.

Emil Kraemer

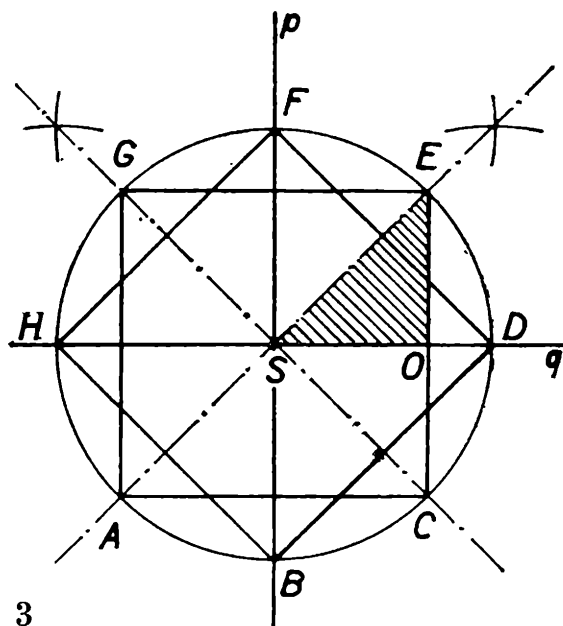
(Došlo 5 řešení)

Zjednodušené řešení Jaroslava Smejkal, 4 A G Velké Meziříčí :

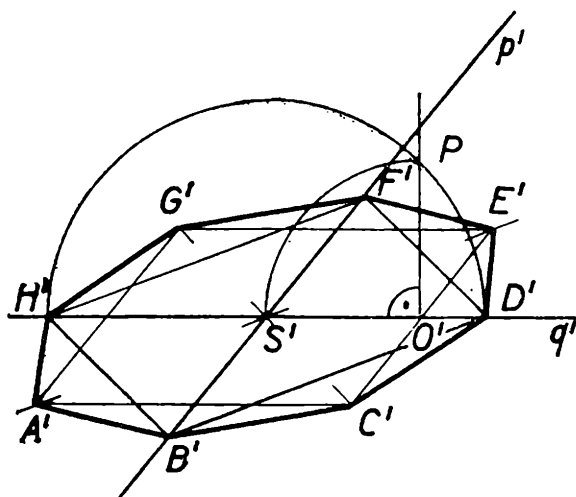
Body A, C, E, G jsou vrcholy čtverce a rovněž body B, D, F, H jsou vrcholy čtverce (obr. 3). Úhlopříčky AE, CG prvního čtverce i úhlopříčky BF, DH druhého čtverce procházejí středem S daného osmiúhelníku. Zároveň je

$$p = BF \parallel AG, \quad q = DH \parallel AC, \quad (1)$$

$$BD \parallel HF \parallel AE. \quad (2)$$



Obr. 3



Obr. 4

Je-li O průsečík vzájemně kolmých přímek $q = DH$, CE , je $|\angle OSE| = 45^\circ$, takže SE je přepona pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku OSE . Podle Pythagorovy věty je

$$|SE|^2 = 2 |SO|^2, \\ \frac{|SO|}{|SD|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Rovnoběžné promítání zachovává rovnoběžnost přímek (pokud tyto přímky nepatří do směru promítání). Proto průmětem čtverce $ACEG$ je rovnoběžník $A'C'E'G'$; průsečík S' jeho úhlopříček je průmětem středu S daného osmiúhelníku (obr. 4). Průměty přímek $p = BF$, $q = DH$, pro něž platí (1) a které procházejí bodem S , jsou přímky

$$p' \parallel A'G', \quad q' \parallel A'C'$$

procházející bodem S' . Průmětem průsečíku O přímek q , CE je průsečík O' přímek q' , $C'E'$,

Rovnoběžné promítání zachovává také poměr velikostí úseček ležících na téže přímce (pokud nenáleží směru promítání). Proto pro velikosti průmětů $S'O'$, $S'D'$ úseček SO , SD platí podle (3)

$$\frac{|S'O'|}{|S'D'|} = \frac{|SO|}{|SD|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sestrojíme tedy v obr. 4 pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník $S'O'P$ s přeponou $S'P$ a na polopřímce $S'O'$ sestrojíme bod D' tak, aby bylo $|S'D'| = |S'P|$. Průmětem bodu H je bod H' souměrně sdružený k bodu D' podle středu S' . Podle (2) je potom

$$B'D' \parallel H'F' \parallel A'E'$$

Čtrnáctá mezinárodní fyzikální olympiáda

Vyvrcholením 24. ročníku fyzikální olympiády byla příprava československého družstva na 14. mezinárodní fyzikální olympiádu. Po písemném řešení přípravných úloh, po dvou týdenních soustředěních v Nitře, jež byla uspořádána v prosinci a v dubnu, a na základě výsledků celostátního kola FO bylo vybráno 10 nejlepších řešitelů v kategorii A ve 24. ročníku FO a pozváno na závěrečné soustředění v Hradci Králové. V soustředěních se řešily náročnější úlohy z fyziky, přednášející ve svých lekcích doplňovali obsah středoškolské fyziky v souladu s požadavky MFO. Hodně času bylo věnováno řešení experimentálních úloh, zejména tvůrčího charakteru, a zátěžovým testům (řešení náročnějších fyzikálních úloh). Na závěr bylo jmenováno československé družstvo ve složení:

1. *Ivo Koreň*, gymnázium Jevíčko a Hradec Králové,
2. *Daniel Kluvanec*, gymnázium Nitra (podruhé na MFO),
3. *Roman Šášik*, gymnázium Nitra (podruhé na MFO),
4. *Miloš Drutarovský*, SPŠ elektro Prešov,
5. *Jaroslav Smejkal*, gymnázium Velké Meziříčí.

Náhradníkem družstva byl Jan Chrastina z gymnázia Koněvova ul. v Brně.

Do Bukurešti odletělo československé družstvo 4. července 1983. Na 14. MFO se sjela družstva ze 16 zemí. Zastoupeno bylo Bulharsko, Československo, Finsko, Francie, Jugoslávie, Kuba, Maďarsko, NDR, NSR, Nizozemí, Polsko, Rakousko, Rumunsko, SSSR, Švédsko, Vietnam. Na 14. MFO bylo 80 soutěžících, 32 vedoucích a 3 pozorovatelé.

Organizačně zajišťovalo 14. MFO ministerstvo školství RSR, Národní centrum pro fyziku a fyzikální fakulta Bukureštské univerzity, v jejíchž prostorách se soutěž odehrávala.

V teoretické části byly soutěžícím zadány 7. července čtyři poměrně časově náročné a k řešení dosti obtížné fyzikální úlohy. Navíc byla zadána jako nepovinná úloha pro zájemce (tj. nepočítala se do hodnocení soutěže, ale řešitelům byla předána speciální cena), která se týkala kvalitativního vysvětlení *Coandova jevu*, propagující výsledky rumunské fyziky. Jako experimentální úloha byl zadán problém elektrického měření s omezenými prostředky na základě předcházejícího teoretického myšlenkového zpracování. Během teoretických úloh nebylo soutěžícím

(bez vědomí mezinárodní komise) povoleno používat elektronických kalkulátorů (z důvodu nejednotného vybavení družstev různými typy programovatelných a obyčejných kalkulátorů), takže mnoho soutěžících nedokončilo výpočty během řešení. Experimentální úloha vyžadovala dosti dlouhé teoretické objasnění použité metody.

Maximální počet dosažitelných bodů na 14. MFO byl stanoven 50. Nejlepší účastník *Ivan Ivanov z BLR*, který se účastnil již podruhé MFO, získal 43,75 bodu; na základě tohoto výsledku se podle organizačního statutu stanovuje hranice úspěšnosti (21 bodů) a meze pro udělování cen. Z 80 soutěžících bylo 48 úspěšných; 7 soutěžících získalo 1. cenu, 9 získalo 2. cenu, 15 účastníků obdrželo 3. cenu a zbývajících 17 soutěžících pochvalné uznání. Potvrzení o účasti na 14. MFO si odvezlo 32 neúspěšných soutěžících. Průměrný výsledek soutěžících byl 23,4 bodu. Z uvedených výsledků je zřejmé, že 14. MFO patřila mezi náročnější soutěže, uspořádané v posledních letech.

Naši soutěžící se umístili takto:

Jaroslav Smejkal získal 1. cenu a pořadí 7 se 39, 25 body,
Daniel Kluvanec získal 2. cenu a pořadí 16 se 34 body,
Miloš Drutarovský získal 3. cenu, pořadí 25 se 30 body,
Ivo Koreň byl úspěšným řešitelem, pořadí 38—39 se 22 body,
Roman Šášík byl úspěšným řešitelem, pořadí 40 s 21,75 body.

I když 14. MFO tak jako další mezinárodní soutěže tohoto typu jsou soutěží jednotlivců, sledují se na soutěži vždy výsledky celého družstva. Z tohoto hlediska bylo v neoficiálním pořadí nejlepší družstvo SSSR, které získalo 191,75 bodů. Dále se umístilo družstvo Rumunska — 187,25 bodů, družstvo NSR — 153 bodů. Československé družstvo získalo velmi čestné 4. pořadí se 147 body.

Závěrem můžeme konstatovat, že českoslovenští soutěžící byli na soutěž dobře připraveni, že splnili svůj úkol při reprezentaci Československa na 14. MFO velmi dobře; od 10. MFO v Hradci Králové v r. 1977 je to opět výraznější úspěch, neboť se zařadili mezi čtyři nejlepší družstva. Tento výsledek také potvrzuje oprávněnost několikasupňové přípravy širšího i užšího výběru, k níž ÚVFO v posledních letech přistoupil a kterou neustále zdokonaluje.

Chtěli bychom veřejně poděkovat československým účastníkům 14. MFO za úspěšnou reprezentaci, jejich učitelům fyziky za desítky hodin, které věnovali individuální práci s jednotlivými soutěžícími. Chceme také poděkovat pracovníkům organizačního aktivu ÚVFO za jejich podíl na přípravě soutěžících.

Doc. dr. ing. D. Kluvanec, CSc.
Dr. Ivo Volf, ÚVFO

Písomná prijímacia skúška z fyziky na Matematicko-fyzikálnej fakulte v Bratislave

RNDr. VÁCLAV KOUBEK, CSc., UK Bratislava

Na Matematicko-fyzikálnu fakultu Univerzity Komenského v Bratislave prichádzajú absolventi stredných škôl, aby sa uchádzali o štúdium niektorého z odborov matematiky a fyziky, alebo o štúdium učiteľstva týchto predmetov. Prevažná väčšina z nich sa zúčastní na prijímacej písomnej skúške z fyziky.

Cieľom písomnej skúšky je zistiť, v akej miere budúci poslucháč ovláda základné učivo strednej školy. V priebehu 60 minút trvania skúšky treba písomne zodpovedať na rad otázok, zameraných na učivo, s ktorým sa pri svojom stredoškolskom štúdiu stretávajú žiaci gymnázia, stredných odborných škôl alebo stredných odborných učilísk. Niektoré z týchto otázok majú za úlohu zistiť, ako je žiak schopný reprodukovať zapamätané fyzikálne poznatky. Časť otázok sa zameriava na skúmanie úrovne tvorivých schopností uchádzača pri aplikáciach jeho vedomostí z fyziky.

Riešenia jednotlivých úloh sa hodnotia bodovaním a potom priradením známky 1 až 4, podľa dosiahnutého počtu bodov. Klasifikácia i bodovanie majú poskytnúť skúšobnej komisii dostatok podkladov pre zostavenie poradia úspešnosti účastníkov prijímacej skúšky.

V uplynulých rokoch riešili budúci poslucháči MFF UK v Bratislave na prijímacích skúškach z fyziky úlohy, ktoré možno zaradiť do niekoľkých skupín. V ďalšom texte ich charakterizujeme pomocou vybraných príkladov.

1. Úlohy o fyzikálnych veličinách a o ich jednotkách

Typickým reprezentantom tejto skupiny je jednoduchá úloha, pri ktorej treba veličinu (rýchlosť) vyjadriť pomocou iných jednotiek.

U 1: Vyjadrite veličinu 36 km h^{-1} pomocou jednotiek m s^{-1} .

$[10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$.

2. Úlohy o fyzikálnych zákonoch a definíciach

V týchto úlohách bolo obvykle treba matematickou i slovnou formou vyjadriť niektorú fyzikálnu závislosť, napr.:

U 2: Vyjadrite Coulombov zákon matematicky i slovne.

$$\left[F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \right]$$

[Sila vzájomného pôsobenia dvoch (bodových) elektrických nábojov je priamo úmerná súčinu ich veľkostí a nepriamo úmerná štvorcu ich vzdialenosti.]

Pri niektorých úlohách tohoto typu bolo treba namiesto slovného vyjadrenia uviesť významy symbolov vystupujúcich v matematickom vyjadrení, napr.

F —sila, k —konštanta, Q_1, Q_2 —elektrické náboje, r —ich vzájomná vzdialenosť.

Iné úlohy tejto skupiny boli formulované odlišne, napr.:

U 3: Magnetický indukčný tok, prechádzajúci plochou, ktorú uzatvára závit vodiča, sa zmení o $\Delta \Phi$ za dobu Δt . Napíšte vzťah, pomocou ktorého možno vyjadriť napätie indukované na závite.

$$[U = - \Delta \Phi / \Delta t]$$

3. Úlohy, ktoré majú zistiť úroveň schopností žiakov používať súradnicový graf fyzikálnej závislosti, obvykle v kombinácii s jednoduchou výpočtovou úlohou.

U 4: Automobil sa zastavuje so stálym zrýchlením $a = -6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a. Ako sa zmení jeho rýchlosť po 0,5 s? [$v = -3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$]

b. Načrtnite kvalitatívny graf závislosti rýchlosti od času.

4. Úlohy, zamerané na poznatky žiakov o fyzikálnej podstate technických zariadení, prístrojov alebo strojov, napr.:

U 5: Na akom fyzikálnom jave je založený princíp činnosti elektromotora?

[Na silovom pôsobení magnetického poľa na vodič, ktorým preteká elektrický prúd.]

5. Pri každej písomnej skúške bola časť úloh zameraná na overenie schopností žiakov riešiť jednoduché fyzikálne kvantitatívne úlohy, napr.:

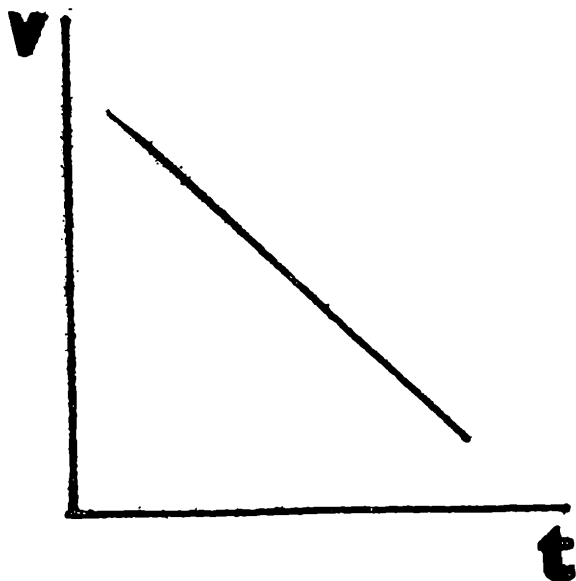
U 6: V potrubí, ktorého priečny rez je kruhový a má priemer d_1 , prúdi ideálna kvapalina rýchlosťou $v_1 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vypočítajte rýchlosť v_2 kvapaliny v tej časti potrubia, ktorej priemer je $d_2 = d_1/2$.

$$[v_2 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

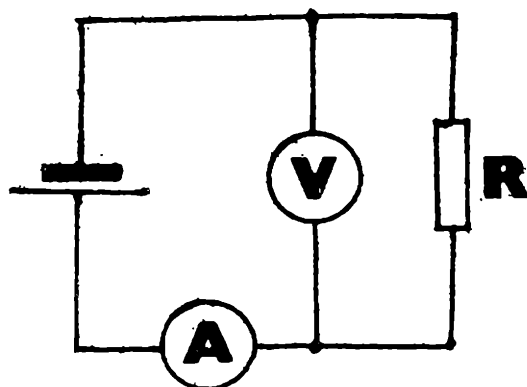
U 7: Pomer vlastných períód kmitov dvoch matematických kyvadiel má hodnotu 2/3. Aký je pomer dĺžok kyvadiel?

$$[4/9]$$

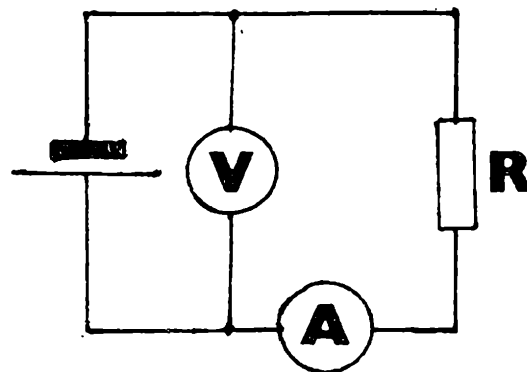
6. Často sa vyskytovali kombinované a komplexné úlohy, pri ktorých



Obr. 1: K riešeniu úlohy U4 b.



Obr. 2: K úlohe U9 a.



Obr. 3: K úlohe U9 b.

mal riešiteľ preukázať schopnosť vytvoriť si úsudok o jave charakterizovanom empirickými údajmi, napr.:

U 8: Rýchlosť v priamočiareho pohybu telesa v závislosti od času t je daná tabuľkou

t/s	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0
$v/m \ s^{-1}$	0,0	3,0	6,0	9,0	12,0

- Určte priemernú hodnotu zrýchlenia počas prvých troch sekúnd trvania pohybu. [$3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$]
- Určte druh pohybu, ktorý koná teleso. Svoj názor zdôvodnite. [Pohyb je rovnomerne zrýchlený: Rýchlosť sa zväčšuje priamo úmerne s časom.]

Pri niektorých úlohách tohto typu mal žiak ukázať, že vie nakresliť schému elektrického obvodu podľa pokynov uvedených v texte úlohy a že rozumie funkcii jednotlivých jej prvkov:

U 9: Nakreslite schému elektrického obvodu, v ktorom sú za sebou (sériovo) spojené prvky — zdroj jednosmerného napätia, rezistor, ampérmeter.

- Do obvodu pripojte (do schémy zakreslite) voltmeter tak, aby bolo možné stanoviť (meraním) odpor R rezistora.
- Je možné pri meraní zapojiť voltmeter aj iným spôsobom? Ak áno, nakreslite inú schému zapojenia.

- c. Zapojenia, ktoré ste znázornili dvoma schémami, môžu zapríčiniť chybu pri meraní veličín U alebo I . Doplňte: V schéme na obr. 2 je zapojenie príčinou vzniku chyby merania veličiny..... [I]
V schéme na obr. 3 je zapojenie príčinou vzniku chyby merania veličiny [U]
- d. Vypočítajte odpor R rezistora, ak prístroje ukazujú hodnoty $U = 6,2 \text{ V}$, $I = 0,20 \text{ A}$. [31 Ω]

7. Niektoré úlohy mali formu otázok, ku ktorým bolo možné zvoliť jednu z viacerých odpovedí:

U 10: Medzi rovnobežnými doskami kondenzátora so vzájomnou vzdialenosťou d je vzduchová medzera. Vzdialenosť dosiek upravíme na $d_1 = d/2$. Kapacita kondenzátora sa pri tom

- A) zdvojnásobí, B) zmenší na štvrtinu,
C) zmenší na polovicu, D) nezmení. [A]

U 11: Dva rezistory s odpormi R_1 , R_2 spojíme paralelne. Výsledný odpor bude

- A) $R = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$ B) $R = R_1 + R_2$
C) $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ D) $R = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ [C]

U 12: Častica $\frac{4}{2}\alpha$ vnikne do jadra ${}^{14}_7\text{N}$ dusíka. Vznikne jadro kyslíka a jeden protón podľa rovnice

- A) ${}^{14}_7\text{N} + \frac{4}{2}\alpha = {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$ B) ${}^{14}_7\text{N} + \frac{4}{2}\alpha = {}^{16}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$
C) ${}^{14}_7\text{N} + \frac{4}{2}\alpha = {}^{19}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$ D) ${}^{14}_7\text{N} + \frac{4}{2}\alpha = {}^{18}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$ [A]

Pri zostavovaní úloh vychádzali ich autori z osnov a učebníc fyziky, používaných na stredných školách, a pridržali sa platného vydania publikácie „Názvy a značky školskej fyziky“ SPN Bratislava, 1979.

Pri hodnotení úrovne odpovedí na otázky obsiahnuté v úlohách opravovateľa písomných prác brali do úvahy predovšetkým formulácie, ktoré sú obsiahnuté v platných učebniciach fyziky, používaných na stredných školách, najmä na gymnáziách. Pri klasifikácii jednotlivých riešení úloh posudzovali predovšetkým vecnú správnosť a logický zámer riešenia.

Veríme, že viacerých čitateľov tohto článku privedie v budúcnosti ich záujem o matematiku a fyziku k rozhodnutiu študovať na matematicko-fyzikálnej fakulte. Chceli by sme im poradiť, aby si pred prijímacou skúškou zopakovali podstatné časti fyziky strednej školy. O výbere tohto učiva by sa mali poradiť so svojím učiteľom fyziky a požiadať ho zároveň o pomoc pri výbere úloh, ktoré by bolo treba pred skúškou vyriešiť.

Trojčlenka v 16. století

Početnice *Ondřeje Klatovského* z r. 1530 obsahuje návody k řešení určitých typů praktických úloh. Návod čili pravidlo v té době nazývali latinským slovem *regula*.

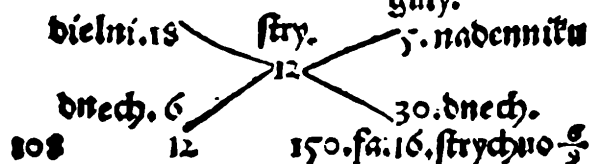
Regula de tri — pravidlo tří, naše trojčlenka, měla nejrozsáhlejší použití v obchodních počtech, proto se honosila i titulem *regula aurea* (zlaté pravidlo). Ze tří známých údajů se vypočítával neznámý čtvrtý; praxe však kladla i náročnější úlohy, například na základě pěti údajů vypočítat šestý. K tomu byla vymyšlena *regula de quinque* — pravidlo pěti, jakási „pětičlenka“, která byla zastoupena i v učebnici Klatovského.

Náš obrázek ukazuje ilustraci obklopenou textem: „Item 18 nadennikuov v 6 dnech skopaly 12 strychů vinicí. Votázka, kolik strychuov 5 nadennikuov v 30 dnech skopají.“ (Poněkud nezvyklý pravopis jsme ponechali, ale do spisovné češtiny jistě překládat nemusíme.)

Řešení úlohy je zapsáno schematicky; slova „Stojí v reguly“ končí před schématem s pěti čísly, která jsou zapsána ve vrcholech a středu obdélníku s vyznačenými úhlopříčkami. Na horním řádku jsou počty dělníků čili nádeníků, uprostřed je počet strychů, na dolním řádku počty dní. Pod schématem je řádek s čísly $108 =$



Item 18. nadennikuov v 6. dnech skopaly 12 strychu vinicí. Votázka, kolik strychuov 5 nadennikuov v 30. dnech skopají. Stogúvse guly.



$= 6 \cdot 18, 12$ a $150 = 5 \cdot 30$, který tiskař nevhodně posunul vlevo, takže porušil „zakryty“ ve sloupcích; na řádek vmáčkl ještě výsledek $16 \text{ strychuov } \frac{6}{9}$. Zkratka Fa

znamená Facit (= to dělá), kterou se všude v knize ohlašuje výsledek. Řádek

108 12 150

je dobovým zápisem úměry $108 : 12 = 150 : x$. Protože se pro neznámou tehdy ještě žádný symbol neužíval, zapisovala se jen tři čísla; *regula de tri* pak prikazovala: Násob prostřední s pravým a výsledek děl levým. Provedete-li takový výpočet, získáte zapsaný výsledek.

Pokuste se vyřešit úlohu z Klatovského učebnice nezávisle na jeho regulích. Jak rychle získáte výsledek?

Ivana Füzéková

Žáci v NDR mají také svůj matematický časopis . Jmenuje se

ALPHA

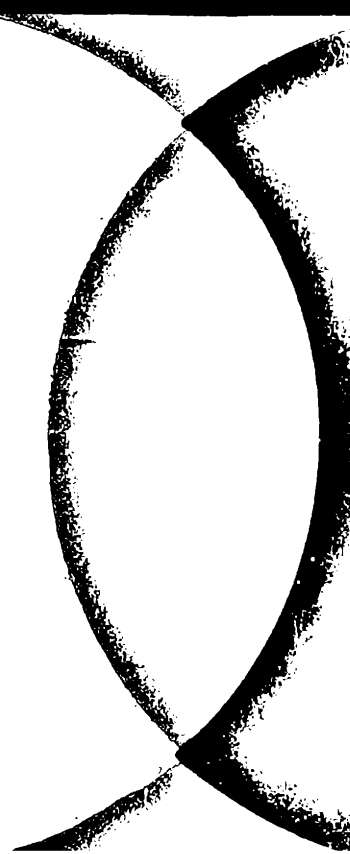
a v roce 1984 zahájil 18. ročník. Vychází šestkrát do roka; rozsah každého čísla je 24 stran, formát je větší než u Rozhledů, neboť je A4.

Každé číslo obsahuje vedle článků velký počet řešených i neřešených úloh. Můžete zde nalézt i úlohy z matematické olympiády NDR.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1984.



ROZHLEDY

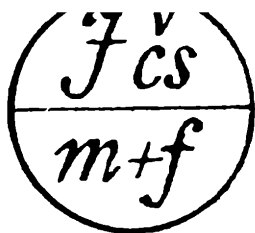
**matematicko
– fyzikální**



**ROČNÍK 62, 1983/84
ÚNOR**

(6)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha.
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

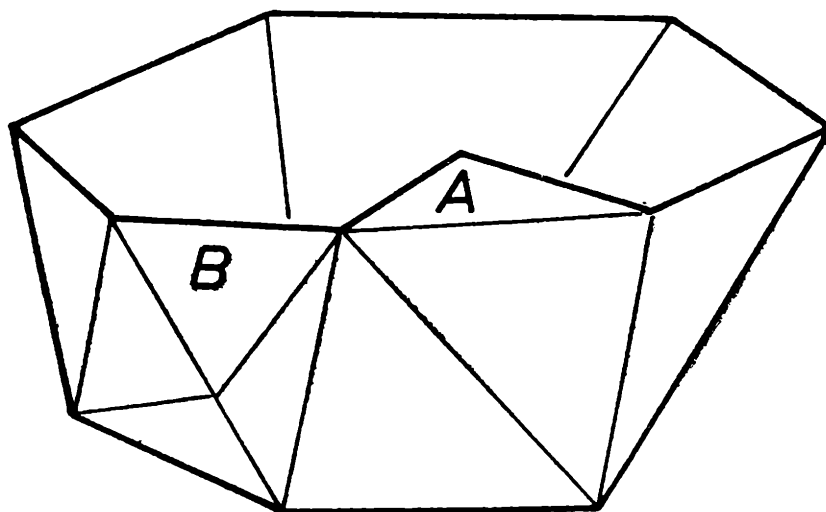
OBSAH

L. Boček: Jedna Eulerova věta a jedna geometrická úloha	229
E. Kraemer: Parabola v polární sousta- vě souřadnic	232
I. Bušek: Určování maximálního členu binomického rozvoje	237
O. Lepil: Pravděpodobná jistota	241
J. Šedivý: Leonhard Euler – vědec a učitel	247
J. Machalický: K pětaosmdesátinám prof. RNDr. Zdeňka Horáka, DrSc.	254
R. Zajac: Prvé modely atomu	256
P. Ferko: Stručný pohľad na vývoj fyzi- kálneho obrazu sveta	258
Přemýšlíme, řešíme	264
Olympiády a SOČ	267
Informace	272
Z nových knih	275
Pohledy do dějin	. 3. str. obálky

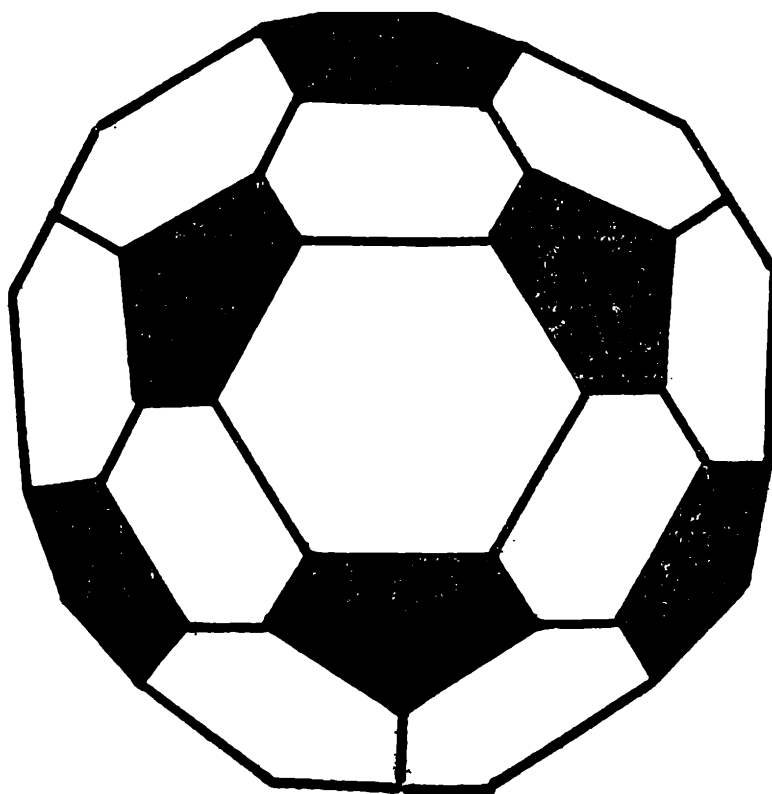
Jedna Eulerova věta a jedna geometrická úloha

RNDr. LEO BOČEK, CSc., MFF UK Praha

Jedním z nejvýznamnějších matematiků 18. století byl bezesporu *Leonhard Euler* (čti ojler), který žil v letech 1707–1783, pocházel z Baskileje, ale působil převážně v Berlíně a Petrohradě. S jeho jménem jste se setkali v úvodu do teorie grafů — vzpomeňte si na úlohu o sedmi mostech města Královce — a v matematickém slovníku najdete celou řadu matematických pojmů, které nesou jméno tohoto velkého matematika, buď proto, že příslušné tvrzení Euler sám objevil, nebo proto, že jako první jasně zformuloval některé vztahy, známé již dříve. K nim patří známá Eulerova věta o konvexních mnohostěnech: označíme-li po řadě s , h , v počet stěn, hran a vrcholů konvexního mnohostěnu, pak platí $s - h + v = 2$. Například pro čtyřstěn je $s = 4$, $h = 6$, $v = 4$, pro kvádr je $s = 6$, $h = 12$, $v = 8$, v případě n -bokého jehlanu je $s = n + 1$, $h = 2n$, $v = n + 1$. Vždy platí výše uvedený vzorec. Jeho důkaz najdete v různých matematických knížkách, například v 27. svazku ŠMM, *Stanislav Horák: Mnohostěny*. My si tady naznačíme krátce jiný důkaz. Zvolme si některou stěnu konvexního mnohostěnu, necht' je to n -úhelník, $n > 3$. Spojíme-li některý jeho vrchol $n - 3$ úhlopříčkami se všemi ostatními nesousedními vrcholy, rozdělíme tím zvolený mnohoúhelník na $n - 2$ trojúhelníků. Místo původní jedné stěny n -úhelníkové máme teď $n - 2$ stěn trojúhelníkových, počet stěn se tedy zvýšil o $n - 3$, zároveň však přibýlo též $n - 3$ hran (úhlopříčky n -úhelníku), zatímco se počet vrcholů nezměnil a nezměnilo se ani číslo $s - h + v$. To můžeme



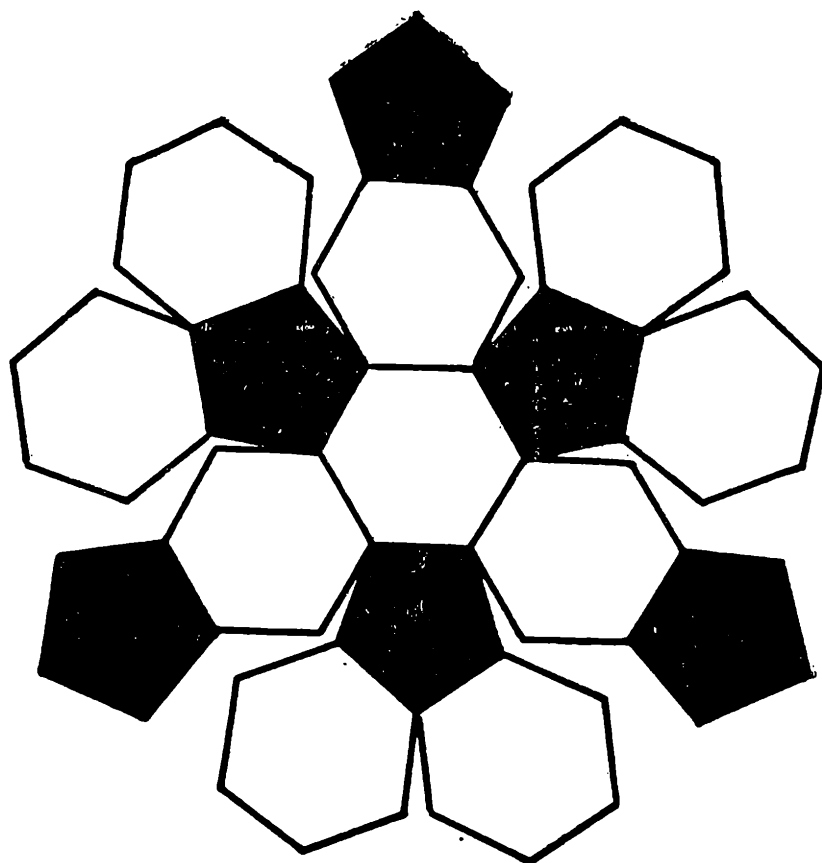
Obr. 1



Obr. 2

udělat pro každou stěnu, výsledkem bude mnohostěn, jehož všechny stěny budou trojúhelníky, přičemž výraz $s - h + v$ bude stejný jako pro výchozí mnohostěn. Stačí tedy dokázat Eulerovu větu jen pro konvexní mnohostěny, jejichž všechny stěny jsou trojúhelníky. Matematické říkají, že bez újmy na obecnosti můžeme podle předcházejícího předpokládat, že jsou všechny stěny trojúhelníkové. Představme si takový mnohostěn. Odebereme-li jednu stěnu, tvoří ostatní stěny takovou skořápku, jejíž hranicí je obvod odebraného trojúhelníku. Skořápka má stejný počet vrcholů a stejný počet hran jako mnohostěn, má však o jednu stěnu méně. Od hranice skořápky budeme postupně odebírat další a další trojúhelníkové stěny, asi tak, jako když loupeme vajíčko (obr. 1). Odebereme-li stěnu typu A, ubude zároveň jeden vrchol, počet hran se zmenší o dvě, výraz $s - h + v$ se nezmění. Uebereme-li stěnu typu B, zůstává počet vrcholů zachován a ubude jedna stěna a jedna hrana. Uvedený výraz se opět nezmění. Protože se jedná o konvexní mnohostěn, můžeme v tomto postupu pokračovat tak dlouho, až nám zbude jen jeden trojúhelník. Pro ten je $s - h + v = 1$, a totéž tedy platí i pro výchozí skořápku. Přidáním té první odebrané stěny pak nahlédneme, že pro konvexní mnohostěn platí $s - h + v = 2$.

V matematické soutěži pro středoškoláky v NSR byla loni tato pěkná a zajímavá úloha: Povrch míče na kopanou se skládá z černých pětiúhelníků a bílých šestiúhelníků, každý pětiúhelník má společné strany jen s šestiúhelníky, zatímco podél stran šestiúhelníku sousedí střídavě pětiúhelníky a šestiúhelníky. V každém vrcholu se stýkají právě tři mnohoúhelníky. Kolik je na míči pětiúhelníků a kolik šestiúhelníků?



Obr. 3

Řešení se opírá o uvedenou Eulerovu větu o mnohostěnech. Na fotbalový míč (obr. 2) se můžeme dívat jako na konvexní mnohostěn, označme m počet pětiúhelníků a n počet šestiúhelníků, které tvoří jeho povrch. Je tedy $s = m + n$. Protože se podél každé hrany stýkají dvě stěny mnohostěnu, je $h = (5m + 6n)/2$. Uvažujme teď jen ty hrany, podél nichž hraničí pětiúhelník a šestiúhelník. Těch je $5m$, protože podél každé strany každého pětiúhelníku hraničí právě jeden šestiúhelník. Na druhé straně sousedí každý šestiúhelník podél tří svých stran s pětiúhelníky, proto je $5m = 3n$. Konečně víme, že z každého vrcholu vycházejí tři hrany a na každé hraně leží dva vrcholy, tedy $3v = 2h$. Máme tudíž pro m, n, h, v tyto čtyři rovnice

$$\begin{aligned} m + n + v - h &= 2, \\ 5m + 6n - 2h &= 0, \\ 5m - 3n &= 0, \\ 3v - 2h &= 0. \end{aligned}$$

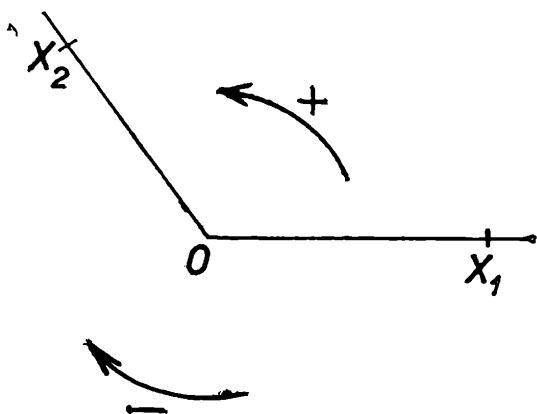
Vylučovací metodou dostáváme $m = 12$, $n = 20$. Přesvědčíme se, že obdržené hodnoty jsou opravdu řešením úlohy. Nejlépe tak, že si takový skutečný míč prohlédneme a zkontrolujeme, zda má všechny uvedené vlastnosti. Můžeme si také sestavit síť takového mnohostěnu a tu slepit. Jedna polovina sítě je znázorněna na obr. 3.

Parabola v polární soustavě souřadnic

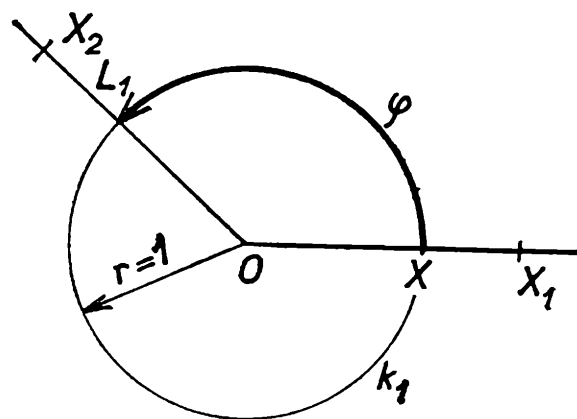
Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Na střední škole se probírá analytické vyjádření kuželoseček v kartézské soustavě souřadnic. V některých aplikacích, např. v astronomii, se však užívá analytické vyjádření těchto křivek v polární soustavě souřadnic. Ukážeme, jak se takové vyjádření odvodí pro parabolu. Nejprve si však připomeneme pojem orientovaného úhlu i jeho velikosti a definici funkcí $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ pro $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Uspořádaná dvojice polopřímek OX_1 , OX_2 se společným počátkem O se nazývá *orientovaný úhel* a označuje se $\widehat{X_1OX_2}$ (obr. 1). Polopřímky



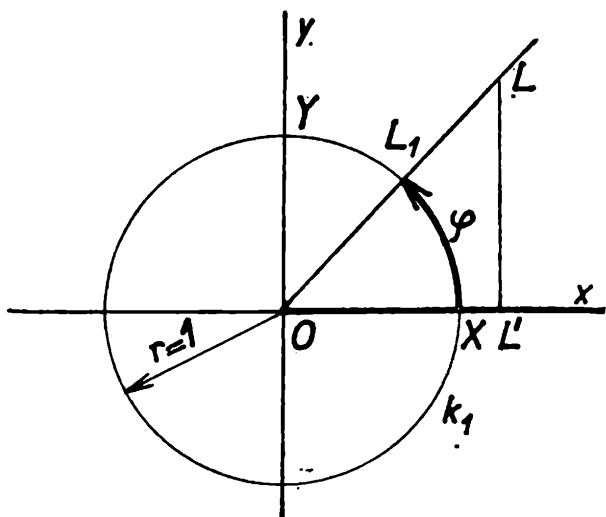
Obr. 1



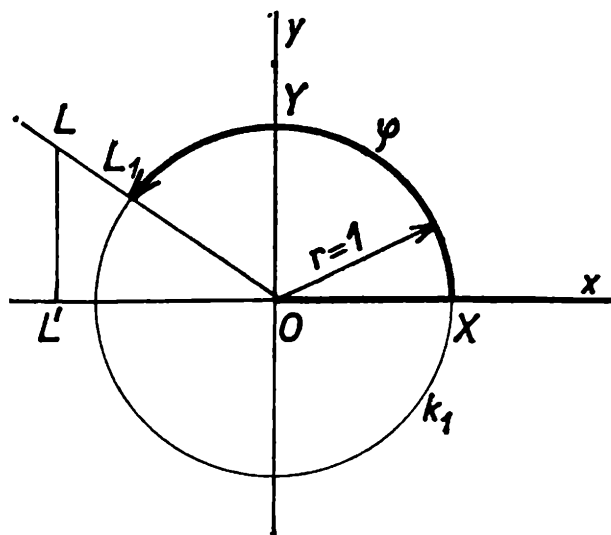
Obr. 2

OX_1 , OX_2 jsou jeho *ramena*, bod O je jeho *vrchol*. Tento úhel si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky, která se v rovině OX_1X_2 otáčí kolem svého počátku O . Toto otáčení se děje v kladném smyslu (proti pohybu hodinových ručiček) nebo v záporném smyslu (souhlasně s pohybem hodinových ručiček). Při jednom i při druhém otáčení můžeme bod O oběhnout libovolněkrát. Tato představa vede k definici velikosti orientovaného úhlu, kterou nyní uvedeme.

Kolem vrcholu O orientovaného úhlu $\widehat{X_1OX_2}$ opíšeme kružnici k_1 poloměrem rovným jedné (jednotková kružnice) a sestrojíme po řadě její průsečíky X , L_1 s rameny OX_1 , OX_2 (obr. 2). *Velikostí orientovaného úhlu* $\widehat{X_1OX_2}$ je potom každé reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna délce kterékoli dráhy, kterou vykoná bod X , jestliže po kružnici k_1 přejde do bodu L_1 . Tuto velikost pokládáme za kladnou, otáčí-li se bod X v kladném smyslu a pokládáme ji za zápornou, otáčí-li se tento bod v záporném smyslu. Z toho plyne, že orientovaný úhel má nekonečně



Obr. 3



Obr. 4

mnoho velikostí; kterékoli dvě se liší o celistvý násobek čísla 2π (tj. o celistvý násobek délky jednotkové kružnice). V tomto článku se však omezíme na velikost φ orientovaného úhlu patřící do intervalu $< 0, 2\pi$, tj. na reálné číslo φ , pro něž je $0 \leq \varphi < 2\pi$. Především je zřejmé, že platí věta, kterou nyní vyslovíme.

Věta 1. V rovině budiž dána polopřímka OX a reálné číslo $\varphi \in < 0, 2\pi$). Potom v této rovině existuje právě jeden orientovaný úhel $\widehat{XOL}$, který má velikost φ .

Zvolme v rovině tři různé body O, X, Y tak, aby orientovaný úhel $\widehat{XOY}$ měl velikost rovnou $\frac{\pi}{2}$ a aby bylo $|OX| = |OY| = 1$ (obr. 3, 4).

Tím je zvolena *kartézská soustava souřadnic* $\{O, \vec{OX}, \vec{OY}\}$; bod O je její počátek, přímky $x = OX, y = OY$ jsou její osy. První osa x i druhá osa y jsou číselné osy; na každé je bod O obrazem nuly a body X, Y jsou obrazy čísla jedna. Podle věty 1 existuje ke každému reálnému číslu $\varphi \in < 0, 2\pi$) právě jeden orientovaný úhel $\widehat{XOL}$, který má velikost φ . Jeho rameno OL protíná jednotkovou kružnici k_1 v bodu L_1 . Potom první souřadnice bodu L_1 v soustavě souřadnic $\{O, \vec{OX}, \vec{OY}\}$ se nazývá kosinus φ (píšeme $\cos \varphi$) a jeho druhá souřadnice se jmenuje sinus φ (píšeme $\sin \varphi$). Vyjadřujeme to zápisem $L_1 = [\cos \varphi, \sin \varphi]$. Je-li $L \neq L_1$, je $|OL| = r > 0, r \neq 1$; potom stejnolehlost se středem O , která převádí bod L_1 do bodu L , má koeficient

$$k = \frac{|OL|}{|OL_1|} = \frac{r}{1} = r > 0.$$

Z toho plyne, že je $L = [r \cos \varphi, r \sin \varphi]$. Vedme bodem L kolmici k ose x

a sestrojme její průsečík L' s touto osou (obr. 3, 4); potom je vzdálenost bodů O, L' rovna absolutní hodnotě první souřadnice bodu L , tj.

$$|OL'| = |r \cos \varphi|. \quad (1)$$

Z definice funkce $\cos \varphi$ plyne, že pro $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ a pro $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi$ je $\cos \varphi \geq 0$, kdežto pro $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ je $\cos \varphi < 0$. Protože je $r > 0$, plyne z toho a z rovnosti (1), že je

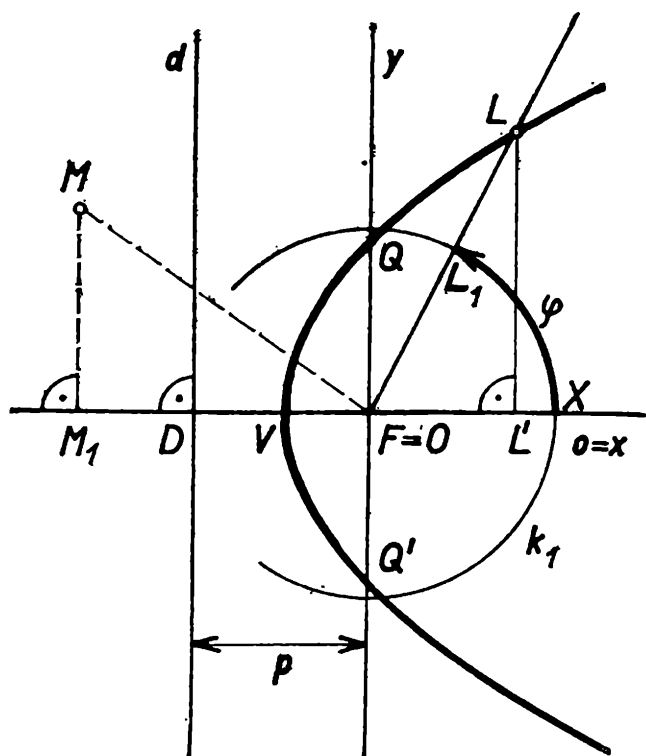
$$|OL'| = r \cos \varphi \text{ pro } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ a pro } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi, \quad (2)$$

$$|OL'| = -r \cos \varphi \text{ pro } \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}. \quad (3)$$

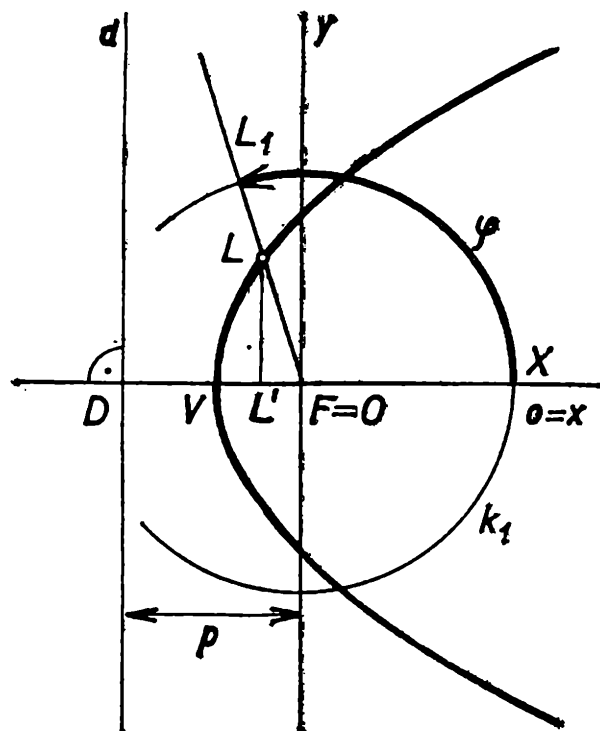
Zvolme v rovině polopřímku, jejíž počátek označíme O ; říká se jí *polární osa* a bodu O říkáme *počátek* (obr. 3, 4). Na obr. 3, 4 je tato polopřímka vytažena tlustě. Na polární ose zvolme bod X tak, aby bylo $|OX| = 1$. O každé polopřímce OL budeme předpokládat, že vznikla otočením polární osy OX kolem počátku O v kladném smyslu. Tím jsme v rovině zvolili *polární soustavu souřadnic*. Budiž $L \neq O$ libovolný bod roviny; potom úsečku OL nazýváme *průvodič* (radiusvektor) bodu L ; její délce r říkáme *modul bodu L* . Potom orientovaný úhel $\widehat{XOL}$ má v intervalu $< 0, 2\pi)$ velikost φ , které říkáme *argument* nebo *polární úhel bodu L* . Čísla $r > 0, \varphi \in < 0, 2\pi)$ nazýváme *polární souřadnice bodu L* ve zvolené polární soustavě souřadnic; vyjadřujeme to zápisem $L = [r, \varphi]$. Počátku O přiřazujeme modul nula; argument mu žádný nepřisuzujeme.

Potom každému bodu $L \neq O$ roviny přísluší právě jeden modul $r > 0$ a právě jeden argument $\varphi \in < 0, 2\pi)$. Obráceně, každé uspořádané dvojici reálných čísel $r > 0, \varphi \in < 0, 2\pi)$ přísluší (viz věta 1) právě jeden bod $L \neq O$. Počátek O je jednoznačně charakterizován modulem $r = 0$.

Budiž v rovině dán bod F a přímka d , která jím neprochází (obr. 5). Množina všech bodů této roviny, z nichž každý má stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky d , se nazývá *parabola*. Bod F je její *ohnisko*, přímce d se říká *řídící přímka* paraboly. Přímka $o \perp d$ vedená ohniskem F je osou souměrnosti paraboly, a proto se nazývá *osa paraboly*. Budiž D průsečík této osy s řídící přímkou d . Je-li $V \neq D$ bod osy o , je jeho vzdálenost od řídící přímky d rovna $|DV|$; je-li zároveň V bodem paraboly, je $|DV| = |FD|$; to znamená, že bod V je středem úsečky DF . Osa o paraboly má tedy s parabolou společný jediný bod V , a to střed úsečky DF ; nazývá se *vrchol paraboly*.



Obr. 5



Obr. 6

Věta 2. Parabola, která má ohnisko F a řídící přímku d , leží uvnitř poloroviny dF .

Důkaz. Žádný bod přímky d není zřejmě bodem paraboly. Budiž M libovolný bod, který leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině dF a není bodem osy paraboly (obr. 5). Vedme jím kolmici k ose paraboly; její průsečík M_1 s osou se nazývá pravoúhlý průmět bodu M na osu. Potom velikost úsečky M_1D je rovna vzdálenosti každého z bodů M , M_1 od přímky d . Protože je $MF > M_1F > M_1D$, není žádný z bodů M , M_1 bodem paraboly.

Věta 3. Necht parabola má ohnisko F a řídící přímku d . Budiž D průsečík její osy s přímkou d a velikost úsečky FD budiž p . Potom v polární soustavě souřadnic, která má počátek O v ohnisku F a polární osu v polopřímce opačné k polopřímce FD , má tato parabola rovnici

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (4)$$

Důkaz. Sestrojíme na polární ose bod X tak, aby bylo $|FX| = 1$. Budiž L libovolný bod ležící v rovině paraboly; jeho pravoúhlý průmět na osu paraboly označme L' (obr. 5, 6). Potom vzdálenost bodu L od řídící přímky d je

$$v = |DL'|. \quad (5)$$

Předpokládejme nyní, že bod L má ve zvolené polární soustavě souřadnic

souřadnice $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$; je tedy $L = [r, \varphi]$. Zároveň předpokládejme, že bod L leží uvnitř poloroviny dF ; potom platí:

1. Je-li $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (obr. 5), leží bod L' (který pro $\varphi = 0$ splývá s bodem L) na prodloužení úsečky DF za bod F ; totéž platí pro případ, kdy je $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$. Je-li $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (což nastane pro bod Q na obr. 5) nebo $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (pro bod Q'), splývá bod L' s bodem F . Ve všech těchto případech je podle (5)

$$v = |DL'| = |DF| + |FL'| = p + |FL'|. \quad (6)$$

2. Je-li $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ (obr. 6), leží bod L' (který pro $\varphi = \pi$ splývá s bodem L), mezi body D, F ; v tomto případě je tedy

$$v = |DL'| = |DF| - |FL'| = p - |FL'|. \quad (7)$$

Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic $\{F, \vec{FX}, \vec{FY}\}$ tak, aby orientovaný úhel $\widehat{XFY}$ měl velikost $\frac{\pi}{2}$, je podle (2) v 1. případě $|FL'| = r \cos \varphi$, kdežto podle (3) je v druhém případě $|FL'| = -r \cos \varphi$. Z rovností (6), resp. (7), tedy plyne, že je vždy

$$v = p + r \cos \varphi. \quad (8)$$

Leží-li tedy bod $L = [r, \varphi]$ uvnitř poloroviny dF , má od řídicí přímky d paraboly vzdálenost v , pro kterou platí rovnost (8).

a) Nechť nyní bod $L = [r, \varphi]$ je libovolným bodem paraboly. Leží-li na její ose, je středem V úsečky DF , takže má argument $\varphi = \pi$; pro $\varphi = 0$ žádný bod polopřímky FX není bodem paraboly. Je tedy $0 < \varphi < 2\pi$. Podle věty 2 leží bod L uvnitř poloroviny dF ; pro jeho vzdálenost v od řídicí přímky d paraboly tedy platí rovnost (8). Jeho vzdálenost od ohniska $F = O$ je $|FL| = r$. Protože bod L je bodem paraboly, je $|FL| = v$, čili

$$r = p + r \cos \varphi;$$

zároveň je $0 < \varphi < 2\pi$. Z toho plyne, že platí rovnice a nerovnosti uvedené v řádku (4).

b) Obráceně, nechť pro souřadnice bodu $L = [r, \varphi]$ platí rovnice a nerovnosti uvedené v řádku (4). Z rovnice tam uvedené plyne, že je

$$r = p + r \cos \varphi. \quad (9)$$

Zároveň bod L leží uvnitř poloroviny dF . Pro případ, v němž je $0 <$

$\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ nebo $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi$, to platí pro každý bod $L = [r, \varphi]$. Budiž tedy $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$; potom je $\cos \varphi < 0$, a tedy $1 - \cos \varphi > 1$ čili

$$\frac{1}{1 - \cos \varphi} < 1.$$

Z toho a z rovnice uvedené v řádku (4) plyne, že je $r < p$. To znamená, že bod $L = [r, \varphi]$ leží uvnitř oblasti omezené kružnicí, která má střed F a poloměr $p = |DF|$; proto leží uvnitř poloroviny dF . Potom pro jeho vzdálenost v od řídicí přímky d paraboly platí rovnost (8). Zároveň však platí rovnice (9), v níž je $r = |FL|$; je tedy $|FL| = v$, takže bod L je bodem paraboly.

Z a), b) plyne, že rovnice a nerovnosti uvedené v řádku (4) platí právě tehdy, je-li bod $L = [r, \varphi]$ bodem paraboly. Proto tato rovnice a uvedené nerovnosti jsou analytickým vyjádřením paraboly.

Určování maximálního členu binomického rozvoje

Dr. IVAN BUŠEK, Pedagogický ústav hl. m. Prahy

Binomický rozvoj mocniny $(1 + x)^n$ se zapisuje jako součet

$$1^n + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

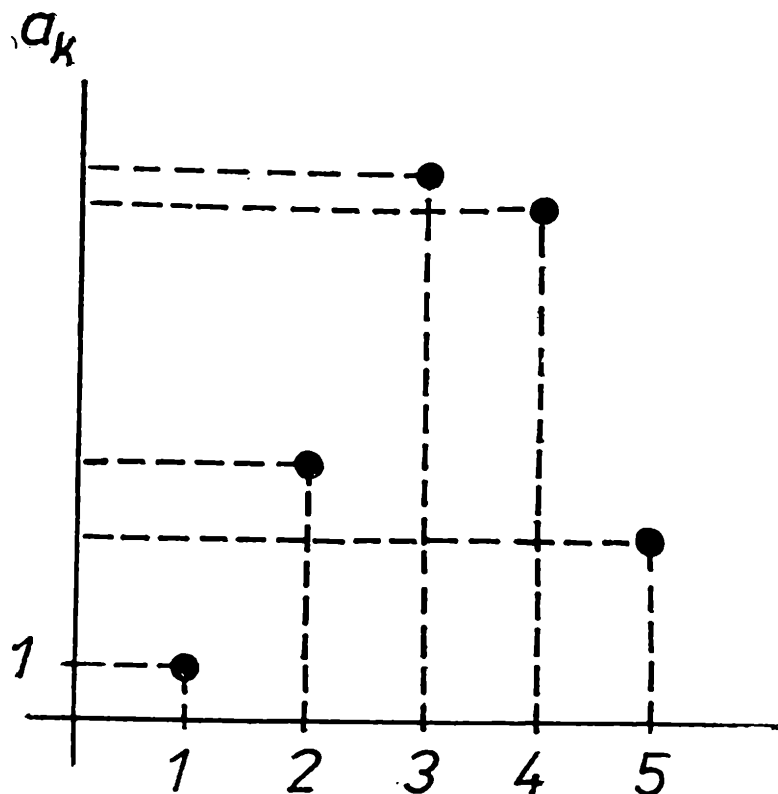
Jednotlivé sčítance můžeme považovat za členy konečné posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{n+1}$; k -tý člen této posloupnosti lze zapsat:

$$a_k = \binom{n}{k-1} x^{k-1}.$$

Zvolme například $x = \sqrt[4]{2}$, $n = 4$; máme

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt[4]{2})^4 &= 1 + \binom{4}{1}\sqrt[4]{2} + \binom{4}{2}(\sqrt[4]{2})^2 + \binom{4}{3}(\sqrt[4]{2})^3 + \binom{4}{4}(\sqrt[4]{2})^4 = \\ &= 1 + 4\sqrt[4]{2} + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2\sqrt[4]{2} + 4. \end{aligned}$$

Z členů tohoto binomického rozvoje je zřejmě největší ten, který je



Obr. 1

prostřední, tedy třetí. Názorně to ukazuje obr. 1 s grafem členů posloupnosti $a_k = \binom{4}{k-1} (\sqrt{2})^{k-1}$ pro $k = 1, 2, \dots, 5$.

Zvolíme-li $n = 5$ a ponecháme $x = \sqrt{2}$, dostaneme

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^5 &= 1 + \binom{5}{1} \sqrt{2} + \binom{5}{2} (\sqrt{2})^2 + \binom{5}{3} (\sqrt{2})^3 + \binom{5}{4} (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^5 = \\ &= 1 + 5\sqrt{2} + 10 \cdot 2 + 20\sqrt{2} + 20 + 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tentokrát je největším členem čtvrtý člen posloupnosti; graf na obr. 2 ukazuje, že posloupnost roste pro $k = 1, 2, 3, 4$, ale klesá pro $k = 4, 5, 6$.

Zatímco pro malá n můžeme maximální člen snadno určit popsáním postupem, pro $n > 10$ je tento postup málo vhodný. Podívejme se, jak lze pomocí nerovnic a některých logických znalostí rozřešit tuto úlohu:

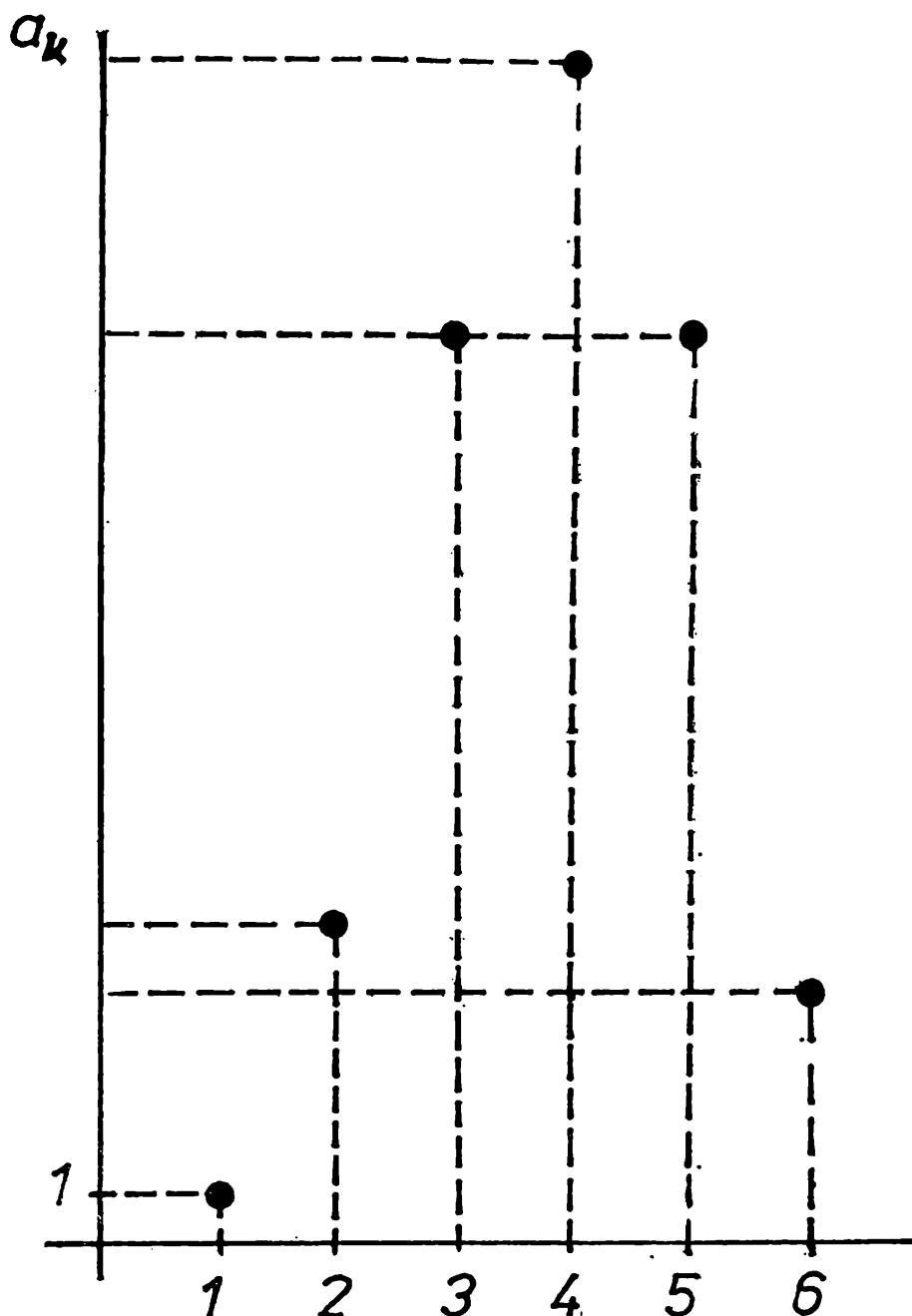
Zjistěte, který člen binomického rozvoje výrazu $(1 + \sqrt{2})^{50}$ nabývá maximální hodnoty.

Řešení: Budeme vyvozovat důsledky z nerovností $a_{k+1} \leq a_k$, $a_{k+1} \geq a_k$ pro přirozená čísla $k \leq 50$.

a) Předpokládejme, že platí $a_{k+1} \leq a_k$.

Pak platí

$$\binom{50}{k} (\sqrt{2})^k \leq \binom{50}{k-1} (\sqrt{2})^{k-1}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 50.$$



Obr. 2

Řešíme tedy nerovnici

$$\frac{50!}{(50-k)! k!} (\sqrt{2})^k \leq \frac{50!}{(51-k)! (k-1)!} (\sqrt{2})^{k-1}.$$

Nerovnici vynásobíme kladným výrazem $\frac{(k-1)! (50-k)!}{50! (\sqrt{2})^{k-1}}$

a dostaneme $\frac{\sqrt{2}}{k} \leq \frac{1}{51-k}.$

Po vynásobení dalším kladným výrazem $k(51-k)$ získáme nerovnici

$$51\sqrt{2} - k\sqrt{2} \leq k,$$

dále

$$k + k\sqrt{2} \geq 51\sqrt{2},$$

odkud

$$k \geq \frac{51\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}},$$

tj.

$$k \geq 29,8,$$

takže pro všechna k z daného definičního oboru platí

$$k \geq 30.$$

Dokázali jsme, že pro všechna přirozená čísla $k \leq 50$ platí implikace

$$a_{k+1} \leq a_k \Rightarrow k \geq 30.$$

Obměna této implikace, která má stejnou pravdivostní hodnotu, zní:

$$k < 30 \Rightarrow a_{k+1} > a_k.$$

Tím jsme dokázali, že posloupnost, kterou tvoří členy binomického rozvoje daného výrazu, je pro všechna přirozená čísla $k < 30$ rostoucí. Konkrétně pro $k = 29$ máme

$$a_{30} > a_{29}.$$

b) Předpokládejme, že platí $a_{k+1} \geq a_k$.

Pak platí

$$\binom{50}{k} (\sqrt{2})^k \geq \binom{50}{k-1} (\sqrt{2})^{k-1}, \text{ kde } k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 50.$$

Stejným postupem jako v předcházející části odtud dostaneme

$$k \leq 29,8; \text{ tj. } k \leq 29.$$

Dokázali jsme, že pro všechna přirozená čísla $k \leq 50$ platí implikace

$$a_{k+1} \geq a_k \Rightarrow k \leq 29.$$

Její obměna říká: $k > 29 \Rightarrow a_{k+1} < a_k$.

Tím jsme dokázali, že posloupnost členů binomického rozvoje daného výrazu je pro všechna přirozená čísla $k > 29 \wedge k \leq 50$ klesající. Konkrétně pro $k = 30$ máme platný výrok

$$a_{31} < a_{30}.$$

Protože je také $a_{29} < a_{30}$, je člen a_{30} největším členem zkoumané posloupnosti.

Největší hodnoty nabývá tedy třicátý člen binomického rozvoje, tj.

$$a_{30} = \binom{50}{29} (\sqrt[3]{2})^{29}$$

je maximálním členem posloupnosti s členy $a_k = \binom{50}{k-1} (\sqrt[3]{2})^{k-1}$.

Obdobným způsobem můžete samostatně vyřešit následující úlohy. Zjistěte, který člen binomického rozvoje daného výrazu nabývá maximální hodnoty:

- a) $(1 + \sqrt[3]{3})^{20}$,
- b) $(1 + \sqrt[3]{7})^{77}$,
- c) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5})^{299}$.

FYZIKA

Pravděpodobná jistota

RNDr. OLDŘICH LEPIL, CSc., UP, Olomouc

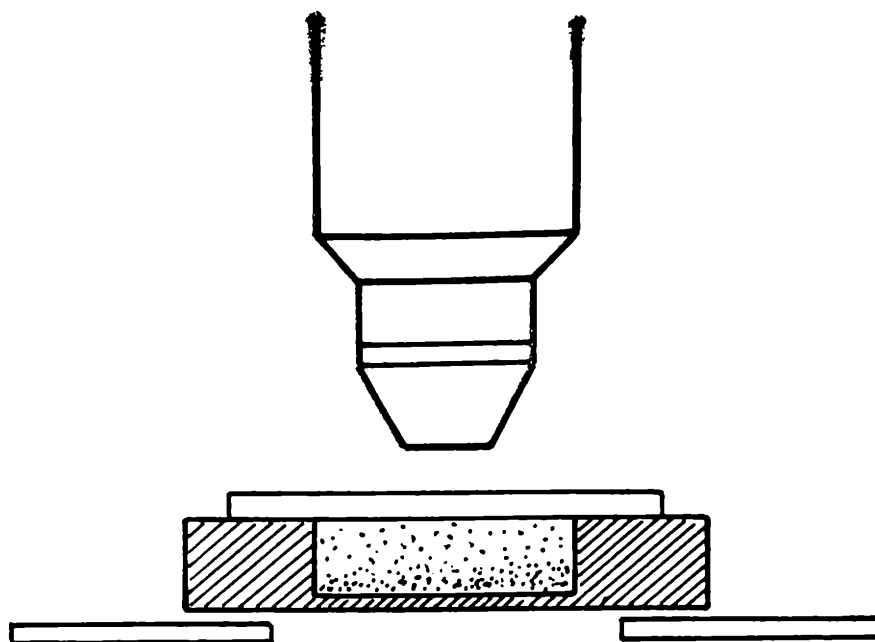
Charakteristickým rysem molekulové fyziky je pravděpodobnostní ráz veličin, kterými popisujeme např. děje v plynech. Jestliže třeba v dynamice řekneme, že se těleso v daném okamžiku nachází v určitém bodě prostoru a pohybuje se určitou rychlostí, pak poloha a rychlost jsou veličiny daného tělesa a můžeme je s jistotou přesností měřit.

Zcela jinak je tomu ve světě molekul. Sice i zde předpokládáme, že se tyto částice pohybují podle zákonů dynamiky, ale nemá smysl mluvit o poloze či rychlosti určité molekuly. To vyplynulo již z obsahu článku *O atmosférách planet* v říjnovém čísle Rozhledů, v němž jsme se zabývali počtem molekul v jednotkovém objemu v závislosti na výšce. Nemohli jsme říci, která molekula je právě v určité výšce, ale vztah

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad (1)$$

(n , n_0 — počet molekul v objemové jednotce ve výšce $h = 0$ a h , e — základ přirozených logaritmů, m — hmotnost molekuly, g — tíhové zrych-

Obr. 1



lení, k — Boltzmannova konstanta, T — termodynamická teplota) nás informoval o podílu z celkového počtu molekul, který se v dané výšce nachází. Rovnice (1) představuje statistické rozdělení molekul v gravitačním poli Země.

Výraz $m g h$ je vlastně potenciální energie částic a vztah (1) představuje statistické rozdělení částic v gravitačním poli v závislosti na jejich potenciální energii. Od této myšlenky není daleko ke zobecnění, které provedl *L. Boltzmann*. Roku 1896 vyslovil závěr, že vztah (1) popisuje obecně stav soustavy částic, které se chaoticky pohybují v poli libovolných sil a mají energii E . Vztah, který tuto závislost vyjadřuje, označujeme jako Boltzmannovo rozdělení

$$n = n_0 e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (2)$$

Částice mohou mít samozřejmě energii potenciální i energii kinetickou, takže $E = m g h + \frac{1}{2} m v^2$. V případě gravitačního pole nás rozdělení rychlostí částic, které se nacházely v určité výšce, v podstatě nezajímalo, takže Boltzmannovo rozdělení mělo podobu vztahu (1).

Jak jsme již naznačili v článku O atmosférách planet, potvrdil Boltzmannovu myšlenku *J. Perrin*. Z pryskyřice *garcinia morela* (gummiguty) připravil mnohonásobným odstředováním dokonale stejnorodou emulzi. Částice emulze měly poloměr řádově 10^{-6} m a jejich hmotnost byla 10^8 krát větší než hmotnost molekul vzduchu. Jestliže tedy v ovzduší klesne počet částic na polovinu ve výšce 5 km, pak v emulzi gummiguty to bude již ve výšce 0,05 mm.

Perrin naplnil emulzí prohlubeň v podložním sklíčku a mikroskopem sledoval částice v různých výškách postupným zaostřováním objektivu (obr. 1). Pořídil řadu fotografií okamžitých poloh částic ve čtyřech

výškách vzdálených od sebe o $30\text{ }\mu\text{m}$ a spočítal v nich počty částic pryskyřice. Výsledek experimentu a hodnoty určené výpočtem pomocí vztahu (1) jsou v tabulce 1.

Tabulka 1

$\frac{h}{\mu\text{m}}$	n	
	exper.	teor.
5	100	100
35	47	48
65	22	23
95	6	11

Těmito pokusy bylo nejen potvrzeno Boltzmannovo rozdělení částic v gravitačním poli, ale podařilo se experimentálně určit jednu z nejdůležitějších konstant molekulové fyziky — *Avogadrovu konstantu* N_A . Jestliže totiž známe počty částic n_1 a n_2 ve výškách h_1 a h_2 , platí

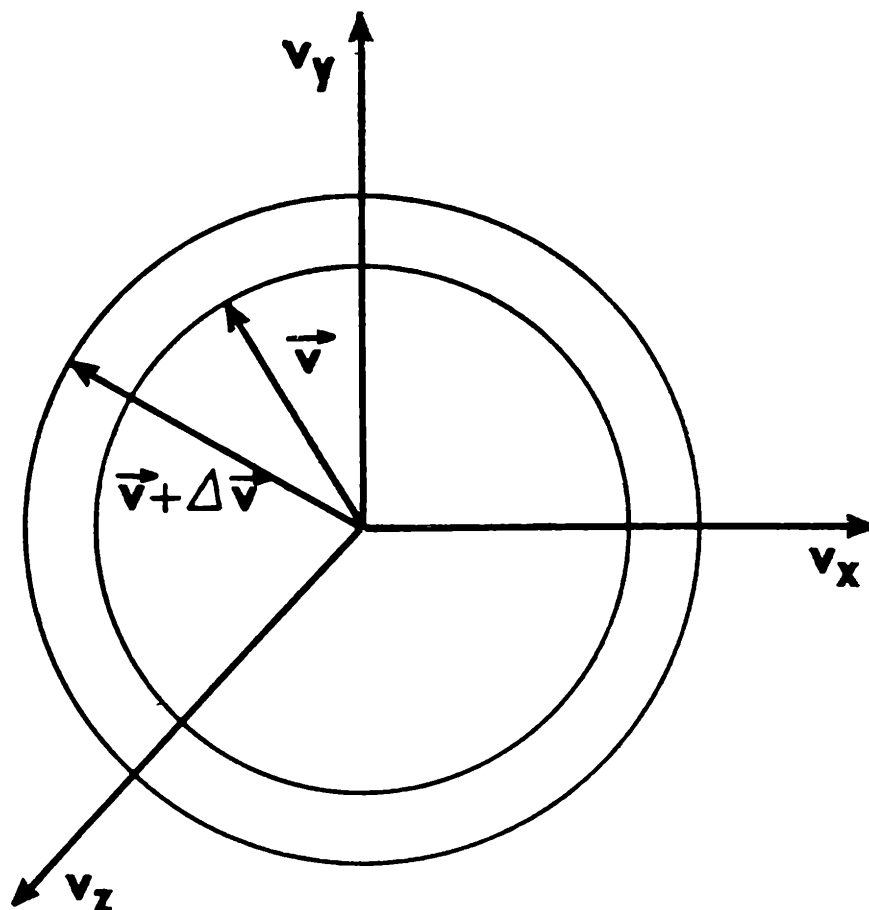
$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{mg}{kT}(h_1-h_2)}$$

Všechny veličiny v tomto vztahu lze určit experimentálně, a to umožňuje vypočítat Boltzmannovu konstantu k . Poněvadž $k = \frac{R}{N_A}$ a molární konstanta R byla určena měřením stavových dějů v plynech, můžeme vypočítat Avogadrovu konstantu.

Vraťme se však ke vztahu (2) a uvažujme jiný případ, kdy budou mít všechny částice prakticky stejnou potenciální energii, ale budou se lišit velikostí kinetické energie. To je případ plynu uzavřeného v nádobě. Všechny molekuly jsou prakticky ve stejné výšce nad Zemí, ale pohybují se různou rychlostí. A nás zajímá statistické rozdělení velikosti těchto rychlostí. Nebudeme tedy uvažovat potenciální energii částic, kterou můžeme zahrnout do určité konstanty, a položíme $E = \frac{1}{2} m v^2$.

Základním předpokladem molekulové fyziky je však naprostá chaotičnost tepelného pohybu. To znamená, že molekuly se pohybují všemi směry se stejnou pravděpodobností. Kdybychom např. vzali jen molekuly, které se pohybují rychlostí v a přenesli vektory těchto rychlostí do jednoho bodu, vyplnily by koncové body vektorů povrch koule o poloměru v . Na obr. 2 je tato koule umístěna do souřadnicové soustavy v_x, v_y, v_z .

Uvažme nyní, kolik molekul bude mít rychlost v intervalu od v do $v + \Delta v$. Z obr. 2 je patrné, že to budou všechny molekuly, jejichž kon-



Obr. 2

cové body vektorů budou ležet v prostoru mezi koulí o poloměru v a koulí o poloměru $v + \Delta v$. Objem tohoto prostoru je

$$\Delta V = 4\pi v^2 \Delta v.$$

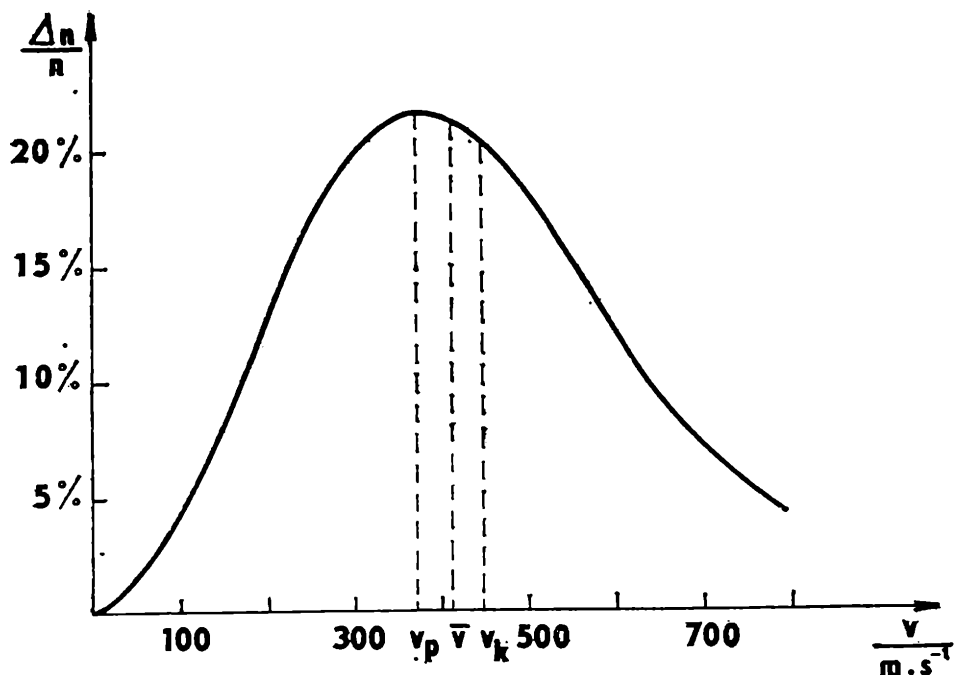
Poněvadž ve vztahu pro kinetickou energii je v^2 , závisí velikost kinetické energie jen na velikosti rychlosti a nikoliv na směru rychlosti. Jestliže Δv je malé, vyplní prostor ΔV koncové body vektorů molekul, které mají stejnou kinetickou energii. V objemové jednotce bude počet koncových bodů určen Boltzmannovým rozdělením

$$n = n_0 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

V objemu ΔV bude těchto koncových bodů, tj. počet molekul s rychlostí v intervalu $(v, v + \Delta v)$ je

$$\Delta n = n \Delta V = 4\pi n_0 v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Delta v.$$

Matematickými prostředky, které přesahují možnosti středoškolské matematiky, bylo vypočítáno, že $n_0 = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$.



Platí tedy

$$\Delta n = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Delta v. \quad (3)$$

Tento složitý vztah odvodil anglický fyzik *J. C. Maxwell*, a proto se také označuje jako *Maxwellův zákon pro rozdělení rychlostí molekul plynu*.

Ze vztahu je patrné, že počet molekul, jejichž rychlost leží v intervalu $(v, v + \Delta v)$, je úměrná celkovému počtu molekul, který však neznáme.

Proto je vhodnější určovat relativní četnosti $\frac{\Delta n}{n}$ molekul v uvažovaném intervalu rychlostí. Tato relativní četnost je úměrná šířce intervalu rychlostí Δv . Obvykle uvažujeme interval, v němž se rychlost změní o jednotku (jednotkový interval), čili určujeme funkci $y(v) = \frac{\Delta n}{n \Delta v}$.

Tuto funkci odvodíme ze vztahu (3) a napíšeme ji ve tvaru

$$y(v) = K v^2 e^{-\alpha v^2},$$

kde konstanty K a α jsou určeny vztahy

$$K = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad \alpha = \frac{m}{2kT}.$$

Proveďme fyzikální rozbor nalezené funkce. Jestliže $v = 0$, bude $y = 0$. Avšak pro $v = \infty$ je opět $y = 0$. To tedy znamená, že funkce $y(v)$ bude mít maximum při určité rychlosti, kterou označíme v_p . Tuto rychlost bude mít největší počet molekul; je to nejpravděpodobnější rychlost molekul při dané teplotě.

Pro kyslík při teplotě 0° C jsou hodnoty relativních četností pro intervaly rychlostí $\Delta v = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ uvedeny v tabulce 2. Graficky je vyjádřen průběh této závislosti na obr. 3.

Tabulka 2

v	$v + \Delta v$	$\frac{\Delta n}{n} 100 \%$
m .s ⁻¹		
0	100	1,4
100	200	8,1
200	300	16,7
300	400	21,5
400	500	20,3
500	600	15,1
600	700	9,2
700	> 700	7,7

Z grafické závislosti je zřejmé, že nejpravděpodobnější rychlost v_p není totožná s průměrnou rychlostí molekul $\bar{v}$. Poněvadž relativních četností molekul ubývá vpravo od v_p pozvolněji než vlevo, je $\bar{v} > v_p$. Střední kvadratická rychlost v_k , která se určuje z úhrnné kinetické energie molekul, je větší než $\bar{v}$. Z teorie vyplývají pro tyto rychlosti molekul vztahy

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}; \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}; v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

a velikosti těchto rychlostí jsou v poměru

$$v_p : \bar{v} : v_k = \sqrt{2} : \sqrt{\frac{8}{\pi}} : \sqrt{3} \doteq 1 : 1,1 : 1,2.$$

Průběh funkce $y(v)$ je samozřejmě ovlivněn teplotou. Čím vyšší je termodynamická teplota plynu, tím více se maximum křivky posouvá vpravo a křivka má plochý průběh.

A ještě jeden zajímavý výsledek vyplývá z Maxwellova rozdělení rychlostí. S jistou pravděpodobností mohou některé molekuly získat při vzájemných srážkách tak velkou rychlost, že molekula překročí únikovou rychlost v gravitačním poli Země ($11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$) nebo jiného kosmického tělesa. Tím můžeme zdůvodnit např. malý podíl vodíku v ovzduší Země nebo také nepřítomnost atmosféry kolem Měsíce, kde je

úniková rychlost jen $2,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Vidíme, že zánik atmosféry může být způsoben jak nízkou teplotou a značným gravitačním působením, tak vysokou teplotou a menšími gravitačními silami.

Také Maxwellův vztah byl experimentálně ověřen různými vědeckými pokusy. K nejznámějším patří *pokus Sternův*, při němž bylo studováno statistické rozdělení rychlostí molekul stříbra, a *pokus Lammertův*, spočívající v měření rychlostí molekul rtuti. Tyto pokusy jsou popsány ve všech učebnicích molekulové fyziky i v učebnici fyziky pro střední školu.

Můžeme tedy uzavřít konstatováním, že jsme poznali nejdůležitější zákonitosti klasické statistiky Maxwellovy — Boltzmannovy, která je teoretickým základem celé molekulové fyziky.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Leonhard Euler — vědec a učitel

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc., MFF UK Praha

„Počítal, jako jiní dýchají“, těmito slovy výstižně charakterizovali muže, který byl neúnavný ve vědecké činnosti až do konce života. A to i přesto, že v 31 letech oslepl na jedno oko a postupně přestával vidět i na druhé, v 64 letech oslepl zcela a i pak ještě kolem 300 prací nadošktoval jen na základě představ o postupu výpočtů či geometrických konstrukcí.

Ale začněme jeho mládím, kam nás přivádí i pěkná rytina s jeho podobou. Leonhard, narozený 15. 4. 1707 v Basileji, byl prvorozeným synem *Paula Eulera*, který pocházel z rodu hřebenařů, ale stal se protestantským farářem. Za univerzitních studií poslouchal otec přednášky *Jakoba Bernoulliho* a měl doma řadu učebnic; první Leonhardovou učebnicí matematiky prý byla Rudolphova Algebra z r. 1553, pro dítě jistě velmi obtížná kniha. Po domácím vzdělávání vstoupil r. 1713 do latinské školy v Basileji, ve 13 letech už na tamní filozofickou fakultu, kterou v 17 letech vystudoval. Podle tehdejších zvyklostí získal titul *magister artium* a mohl pokračovat ve studiu na některé z dalších fakult; pod vlivem otce se zapsal na teologii, ale všechno dopadlo jinak.



Už za studií na filozofické fakultě se jevil profesoru matematiky a fyziky *Johannu Bernoullimu* jako snaživý a nadaný, dostával proto od něho matematické spisy k samostatnému studiu a problémy k promýšlení, v sobotu odpoledne mohl dokonce za Bernoullim docházet a ptát se na nejasné věci. Sprátelil se též s mladými Bernoulliovými syny Nicholasem a Danielem na celý život. Profesor Bernoulli přesvědčil Eulera-otce, aby syna nenutil ke studiu theologie; Leonhard začal vědecky pracovat v matematice, která ovšem jako tzv. praktická matematika zahrnovala většinu fyziky, techniky, astronomie, geodézie apod. Už v 18 letech napsal své první pojednání, které v r. 1726 otiskl významný časopis *Acta Eruditorum* vycházející v Lipsku, šlo o konstrukci izochron v prostředí kladoucím odpor. V témž roce zaslal do soutěže pařížské akademie práci o nejvýhodnějším rozmístění a délce stěžňů na plachetnici; šlo samozřejmě o ryze teoretickou práci, protože Euler do té doby námořní loď nepoznal. Cenu tehdy nezískal, ale této periodicky se opakující soutěže se zúčastňoval i později a celkem dvanáctkrát zvítězil mezi roky 1738—1772.

Pro mladé vědce nebyla na švýcarských ani německých univerzitách volná místa, v Petrohradě se však rozbíhala činnost Akademie věd založené carem *Petrem I.* Oba mladí Bernoulliové odjeli do Ruska už v r. 1725, přispěli k pozvání L. Eulera v r. 1726, ale na obor fyziologie, pro-

tože i tam všechna místa pro matematiku i fyziku byla již obsazena. Euler se pustil do studia medicíny a na jaře 1727 odjel do Ruska, aby se ujal funkce. V den jeho příjezdu však zemřela carevna Kateřina I., která mu pozvání zaslala; zástupce Petr II. vědecké práci nepřál, pozvání zrušil, ale dovolil, aby se Euler stal námořním důstojníkem. Po této naštěstí nedlouhé epizodě se s nástupem Anny I. postavení Akademie upevnilo. Euler vědecky pracoval v matematice a fyzice, postupně získal i profesury z těchto oborů (1731, 1733). Na rozdíl od desítek jiných cizích učenců působících tehdy v Rusku se Euler v krátké době naučil rusky. V r. 1734 se oženil s dcerou švýcarského malíře a získal vlastní dům.

V době svého prvního pobytu v Petrohradě (1727—1741) byl Euler zaměstnáván velmi mnohostranně, v roli vládního poradce posuzoval výkresy strojů, lodí, převzal v r. 1735 dozor nad kartografickým oddělením, které zpracovávalo mapy celé ruské říše, pracoval v komisi pro míry a váhy, učil v kadetní škole (pro námořní důstojníky), občas i na gymnáziu zřízeném při Akademii. Pro jeho žáky napsal i různé učebnice; na obrázku vidíte titulní list „Úvodu do počtů pro potřebu gymnasia při Císařské akademii věd“ vydané v r. 1738 (v r. 1740 a dalších vycházely ruské překlady díla). V této publikaci začal výkladem čtyř základních početních výkonů, ale později v učebnicích pro vyšší třídy zařazoval i nejnovější výsledky vědy. Na rozdíl od tehdy běžně zavedených učebnic, kde žák napodoboval vzorové příklady, aniž se dozvídal, proč se řeší popsáním způsobem, Euler přístupně vykládal i nejnutnější teoretický základ. S velkým úsilím psal učebnice pro vysokoškolské studium, vyšla např. *Scientia navalis* (Mořská věda) — kniha o stavbě lodí a mořské navigaci, *Mechanica* (1736) — dvoudílná rozsáhlá učebnice aj.

Své vědecké výsledky publikoval Euler především v časopise Akademie, jehož dlouhý název začíná slovem *Commentarii*; do r. 1741 uveřejnil kolem 80 příspěvků. Řešil problémy analýzy (diferenciálního a integrálního počtu), geometrie, algebry a zejména teorie čísel, dále mechaniky, balistiky, astronomie, geodézie, optiky, teorie hudby. Pozoruhodně důkladný byl v zaznamenávání problémů; už do Petrohradu přijel s dvěma sešity poznámek, kde kromě formulací úloh zapisoval své nápady, jak k řešení přistoupit, částečná řešení atd. Tyto sešity si vedl celý život, často se vracel s novými přístupy k problémům zapsaným před desetiletími. Zejména na sklonku života pak publikoval několik set krátkých pojednání o tak dlouho zrajících problémech. Euler vedl rozsáhlou korespondenci s vědci celé Evropy, z ní vzešlo také mnoho problémů tzv. rekreační matematiky, například o mostech v Královci, o šachovnici (rozestavení dam, pohyby koně), o 36 důstojnících apod.

Nejisté osudy členů petrohradské Akademie v období kolem r. 1740, kdy v ovzduší intrik probíhaly boje o carský trůn, přiměly Eulera, aby

Einleitung
zur
Rechen - Kunst
zum Gebrauch
des
GYMNASII
bey der
**Kaiserlichen Academie der
Wissenschaften**
in
St. Peterßburg.

Gedruckt in der Academischen Buchdruckerey
1738.

přijal nabídku pruského krále a odešel do Berlína. V letech 1741—66 tam vedl matematické oddělení Berlínské akademie, ale kromě vědecké práce plnil desítky jiných úkolů, zastupoval často nemocného prezidenta akademie i v hospodářských záležitostech, opět byl poradcem v řadě technických projektů (průplavů, fontán v Postupimi apod.), sám zdokonalil Segnerovo kolo a vypracoval technickou dokumentaci k jeho využití, pracoval v kartografii atd. Pokračoval tak v plnění úkolů zadávaných panovníkem jako předtím v Rusku; pro militaristicky laděnou politiku pruského krále byl typický i příkaz rychle přeložit anglickou knihu o dělostřelbě. Také úkol organizovat prodej kalendářů, státní loterii a pojišťovnictví byl dán státními zájmy k získání peněz na vedení válek. Euler ani v Berlíně nepřerušil práci pro petrohradskou Akademii, publikoval odborně matematické práce v jejím časopise, zasílal vyžádané

materiály, školil mladé ruské vědce, dopisoval si s M. V. Lomonosovem, od r. 1760 vyjadřoval přání vrátit se do Petrohradu.

Berlínské období Eulerovy vědecké práce zahrnuje přes 260 jeho článků a knih. Matematický latinsky psaný spis *Metoda objevování křivek, které mají maximální či minimální vlastnosti* (1744) založil tzv. variační počet, zkoumající způsoby matematického řešení složitých extrémálních problémů mechaniky. Knihy *Úvod do analýzy nekonečných veličin* (1748), *Diferenciální počet* (1755) a *Integrální počet* (1768–70) měly zásadní význam pro tuto odvětví matematiky; jejich terminologie a symbolika se v krátké době stala normou pro ostatní autory, např. symboly $\sin$, $\cos$ aj. pro jednotlivé funkce probírané dnes na středních školách, zápis $f(x)$ hodnoty funkce, symboly e , π , i pro významné konstanty. Pomocí nekonečných řad našel mnoho zajímavých způsobů výpočtů těchto konstant, stejnou metodou získával poznatky o funkcích komplexní proměnné, např. $e^{i\pi} = -1$, nekonečnou mnohoznačnost logaritmické funkce v komplexním oboru. Euler vnesl velký vklad i do rozvoje nauky o řešení rovnic, v letech 1742–1751 se dopracovával od domněnek k důkazu tzv. základní věty algebry (i když ne zcela dokonalemu), pracoval dovedně s komplexními čísly. V geometrii odvodil mnoho zajímavých vzorců a vět (známá Eulerova věta o mnohostěnech, Eulerova přímka v trojúhelníku, vzorec pro výpočet objemu čtyřstěnu ze souřadnic vrcholů atd.), zavedl termíny střed stejnolehlosti, afinita, studoval útvary konstantní šířky. Teprve Euler systematicky zpracoval metodu souřadnic včetně kartézského systému souřadnic v rovině a v prostoru, prostudoval kvadratické útvary v prostoru, odvodil důležité poznatky diferenciální geometrie ploch.

Ve svém oblíbeném oboru — teorii čísel — navázal na *P. Fermata*, publikoval na 150 prací a vedl rozsáhlou korespondenci, např. s *Goldbachem*. Euler dokázal tzv. malou Fermatovu větu, studoval rozdělení prvočísel, řešení diofantovských rovnic aj. Kromě hotových výsledků nashodil velký počet problémů a domněnek, které matematici řešili nebo zobecňovali po celé století.

Celá řada Eulerových matematických výsledků byla inspirována řešením fyzikálních problémů, stal se zakladatelem matematické fyziky, rozvinul analytické metody mechaniky. Docházel zejména k řešení diferenciálních rovnic obyčejných i parciálních, k extrémálním problémům řešeným metodami již zmíněného variačního počtu. Zabýval se studiem pohybu a stability lodí, pohybu planet a jejich měsíců, prouděním kapalin, kmitáním strun a vlněním vůbec (šířením zvuku, světla), napětím v nosnících, rozkladem světla a konstrukcí optických systémů bez chromatické vady apod. Euler zavedl pojem momentu setrvačnosti a volné osy, jeho jménem se nazývají tři úhly, které jednoznačně určují polohu tuhého tělesa vzhledem k osám souřadnic; také některé další fyzikální věty a vzorce. V době svého berlínského pobytu vydal druhý

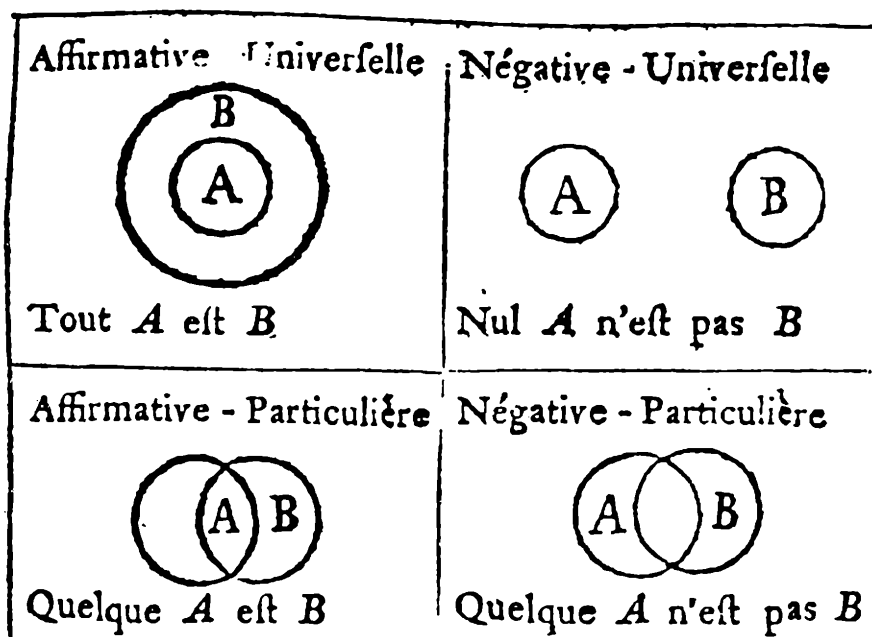
díl spisu *Mořská věda* (1748), *Úvahy o prostoru a času* (1750), zejména však *Teorii pohybu tuhých těles* (1765).

Po několikaletých napjatých vztazích s pruským králem byl Euler v r. 1766 uvolněn z Berlínské akademie (na jeho místo nastoupil *J. L. Lagrange*) a odjel do Ruska. V Petrohradě byl okázale přijat carevnou Kateřinou II., dostal vysoký plat, peníze na koupi domu, záruku státní služby pro tři syny atd. Brzy ho však postihlo neštěstí — oslepl úplně; ale nevzdal se duševní činnosti, naopak ji vystupňoval. Pokus o operativní odstranění očního neduhu v r. 1771 přinesl jen krátkodobý výsledek, v témž roce Euler málem uhořel při požáru města, shořely mu četné rukopisy. Při práci psal výpočty se vzorci popaměti na tabuli nebo desku stolu, jeho pomocníci, zejména basilejský rodák *A. N. Fuss*, je rychle opisovali spolu s diktovaným textem a tak vznikaly Eulerovy vědecké články a knihy. V době slepoty napsal takto Euler polovinu z počtu svých prací, za rok 1777 například přes sto titulů (!). Svůj pohyb kolem tabule či psacího stolu kontroloval dotykem prstů poblíž okraje desky; za léta slepoty prý okraje vyhladil, ba vyryl drážku. Ještě v létě r. 1783 byl Euler duševně čilý, zajímal se o zprávy kolem letu bratří Montgolfierů balónem (5. 6. 1783). V posledním dnu života 18. 9. 1783 dokonce počítal rychlost balónu, diskutoval o další planetě Uran (objevené v r. 1781); navečer při kouření dýmky se pojednou udeřil rukama do čela a se slovy „Umírám“ upadl do bezvědomí a zanedlouho zemřel.

V rozsáhlé Eulerově publikační činnosti po r. 1766 převládaly krátké články o jednotlivých problémech, v knižní podobě v Petrohradě dokončil a vydal svůj trojdílný *Integrální počet* (1768–70), tři díly spisu *Dioptrika* (1769) věnovaného optice, *Teorie pohybů Měsíce* (1772) o 775 stranách, spis *Úplné uvedení do algebry* (1770), jehož ruská varianta byla vydána dříve a svou elementární částí sloužila jako učebnice v gymnáziu. Takřka všechny středoškolské učebnice algebry až do našeho století dodržovaly postup Eulerova výkladu. Výčet knižních publikací uzavřeme *Dopisy německé princezně* (1768–1772), dílem, které bylo novátorským činem — populárněvědeckým spisem určeným pro veřejnost. Euler v něm vykládal formou francouzsky psaných dopisů různé otázky fyziky, filozofie, etiky, teorie hudby a logiky. Šestnáctiletá dcera markraběte brandenburgského byla víceméně fiktivní adresátkou, protože obsahu listů sotva mohla rozumět. Z listů věnovaných logice se často připomínají diagramy, tzv. *Eulerovy kruhy*, které znázorňují rozsahy pojmů a jejich množinové vztahy. Na obrázku vidíme tabulku „Znázornění čtyř druhů výroků“.

[V 19. století vytvořil *J. Venn* typ diagramů s kruhy, ale na odlišném principu, protože Eulerovy kruhy už pro tři množiny vyžadují nakreslení příliš mnoha případů, nehodí se k řešení logických úloh.]

Emblèmes des quatre especes de Propositions



Kladný obecný
Každé *A* je *B*

Záporný obecný
Žádné *A* není *B*

Kladný částečný
Některé *A* je *B*

Záporný částečný
Některé *A* není *B*

Příval Eulerových příspěvků zpracovaných v posledním období jeho života přesáhl kapacitu časopisů, do kterých přispíval, proto vycházely ještě dlouho po jeho smrti. Padesát let mezi lety 1735—1785 lze označit za eulerovské půlstoletí ve vývoji matematiky, kdy jeho práce udivovaly, ale hlavně inspirovaly k následování či soutěžení. Z problematiky řešené Eulerem vyšel například *J. L. Lagrange*, navazoval na ni *K. F. Gauss* a další matematici 19. století. Mimořádným přínosem byla Eulerova činnost pro rozvoj matematiky v Rusku, kde vychoval první generaci vědců, kteří pak po zřízení univerzit a gymnázií v dalších městech (v. r. 1802) vytvořili širší základnu, ze které vyrostli učenci jako *N. I. Lobačevskij*, *M. V. Ostrogradskij*, *P. L. Čebyšev* aj.

Role Eulera-učitele vůbec nezaniká ve srovnání s rolí Eulera-vědce.

K pětadesátinám prof. RNDr. Zdeňka Horáka, DrSc.

Ing. JIŘÍ MACHALICKÝ, CSc., ČVUT Praha

Milí mladí přátelé, na stránkách tohoto časopisu jste si mohli přečíst občas příspěvky význačného českého fyzika, prof. Z. Horáka, který se nedávno dožil 85 let. Protože mi bylo dopřáno dlouhou řadu let s ním spolupracovat na katedře fyziky strojní fakulty ČVUT, rád bych alespoň ve zkratce popsal životní dráhu tohoto nevšedního vědce, učitele a člověka.

Prof. Horák se narodil 6. října 1898 v Praze, reálné gymnázium na Královských Vinohradech zakončil zkouškou dospělosti s vyznamenáním a v r. 1917 se zapsal na filosofickou fakultu University Karlovy ke studiu matematiky a fyziky. V r. 1923 získal jako jeden z prvních absolventů této fakulty v nově zrozené Československé republice doktorát přírodních věd na základě disertační práce, nazvané „*Princip energie a rovnice fyziky*“. Další rozpracování a formování této obtížné problematiky podal prof. Horák ve své habilitační práci v r. 1928.

Užitím teorie vybudované v těchto dvou pracích na řešení úloh o rázu v mechanických systémech dospěl k teoretickému objevu některých nových jevů (zpětné rotace tělesa po šikmém a vrtném rázu), jejichž existence byla ve sporu s klasickými teoriemi. Správnost své nové teorie potvrdil prof. Horák vhodně navrženými experimenty. Různé problémy z tohoto oboru řešil se svými spolupracovníky po skončení druhé světové války asi až do r. 1964. Problematikou rázu těles se zabýval 35 let a publikoval o ní více než 20 původních prací.

Ruku v ruce s vědeckou prací byl však prof. Horák plně zaujat i výukou fyziky na fakultách ČVUT, jíž se věnoval plných 100 semestrů (od r. 1920 do r. 1970). To je v historii nejen našich vysokých škol zcela ojedinělý případ. Po osvobození v r. 1945 byl jmenován řádným profesorem na tehdejší fakultě strojního a elektrotechnického inženýrství ČVUT. S velkou energií se tehdy věnoval budování fyzikálního ústavu, přípravě přednášek a psaní skript a učebnic. V r. 1951 byl jmenován vedoucím katedry fyziky už na samostatné strojní fakultě a v r. 1954 mu byla udělena hodnost doktora fyzikálně matematických věd. Od této doby vydal sám dvě učebnice a spolu s dalšími autory, svými bývalými žáky, ještě tři další knihy zaměřené na výuku fyziky na technických fakultách. V r. 1963 vydal velmi zdařilou monografii „*Tenzory v elektrotechnice a ve fyzice*“ (s prof. Ing. Dr. J. Kučerou, DrSc., z elektrotechnické

fakulty ČVUT). V prvním díle této knihy vysvětluje prof. Horák dostatečně podrobně základy tenzorového počtu, který se v poslední době tak osvědčuje v mnoha vědních oborech. V druhém díle shrnul a doplnil své dřívější práce, v nichž aplikoval tenzorovou metodu k řešení úloh klasické i kvantové mechaniky, a připojil stať o speciální i obecné teorii relativity.

Začátkem šedesátých let zaměřil prof. Horák svou tvůrčí vědeckou činnost na další obory fyziky: na problémy speciální i obecné teorie relativity, týkající se elektromagnetického a gravitačního pole. K pojmům mikrofyziky a makrofyziky připojil další pojem *megafyzika*, která vysvětluje řadu fyzikálních jevů včetně zákona setrvačnosti působením vzdálených kosmických těles. Ve svých kosmologických úvahách dospěl k novému modelu nekonečného vesmíru, který se skládá z neomezeného počtu konečných oscilujících světů, které se navzájem gravitačně neovlivňují. Takový vesmír splňuje dokonalý kosmologický princip, kterému náš rozpínavý vesmír nevyhovuje.

K hlubšímu zkoumání teorie relativity byl prof. Horák přiveden také, když se zamýšlel nad problémem výkladu elektrodynamických jevů. Dospěl k názoru, že obvyklý fenomenologický výklad těchto jevů je možno nahradit logickým fyzikálním výkladem jedině na základě teorie relativity. S neobyčejnou důkladností vybudoval postupně novou koncepci teorie elektromagnetizmu, založenou na důsledné materialistické interpretaci fyzikálních jevů. Svůj moderní projekt výuky elektromagnetizmu začlenil organicky do knihy *Fyzika* (spoluautor prof. Ing. Dr. F. Krupka, CSc.), která je základní učební pomůckou studentů strojní fakulty ČVUT. V r. 1971 uveřejnil prof. Horák v zjednodušené formě také návrh na relativistický výklad základních elektrodynamických zákonů na středních školách (časopis *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, č. 3, roč. XVI, str. 145—151).

Na závěr tohoto krátkého článku, jímž jsem vám chtěl přiblížit osobnost a dílo profesora Horáka, bych se rád zmínil ještě o jedné z jeho prací z poslední doby. Je to pojednání o vlivu prostředí na gravitační interakci, které vyjde v některém z příštích čísel časopisu *Vesmír* pod názvem Archimédův princip a Newtonův gravitační zákon. Se svolením autora jsem zpracoval tento zajímavý materiál do formy vhodné k otištění v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

S upřímným poděkováním za všechno, čím přispěl prof. Horák k povznesení fyzikální i všeobecné vzdělanosti tisíců svých žáků a řady spolupracovníků, i za všechno, čím přispěl k dobrému jménu české fyziky ve světě, mu přejeme, aby i v dalších letech mu bylo dopřáno radovat se z nových poznatků o tajemstvích, které — jak sám říká — v takovém množství skrývá nedohledný vesmír.

Prvé modely atómu

I. Thomsonov a Rutherfordov model

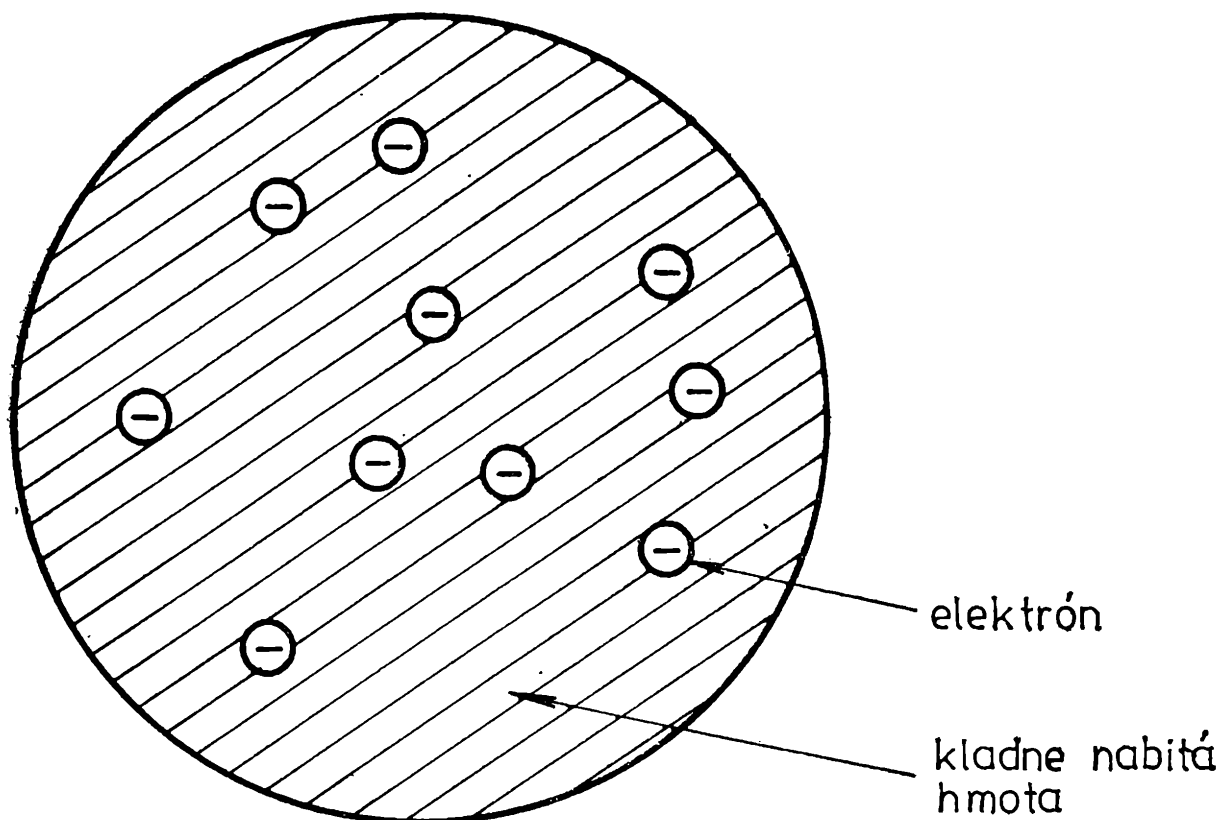
Medzníkom v dejinách atomistiky bol rok 1897, keď *Joseph John Thomson* (1856—1940) v Cavendishovom laboratóriu v Cambridgei dokázal, že lúče, ktoré vysielala katóda v Geisslerovej trubici, sú elektróny. *Hendrik Antoon Lorentz* (1853—1928) vypracoval klasickú teóriu elektrónu a pomocou nej predpovedal rozštiepenie čiar atómových spektier v magnetickom poli. Tento jav experimentálne dokázal *Pieter Zeeman* (1855—1943). Ukázalo sa teda, že elektróny sa nachádzajú v neporušených atómoch a sú zodpovedné za ich charakteristické čiarové spektrá. V roku 1898 *Ernest Rutherford* (1871—1937) dokázal, že lúče β , ktoré vysielajú rádioaktívne látky, nie sú ničím iným ako elektrónmi. A tie isté častice vyletujú z kovov, osvetlených ultrafialovým svetlom.

Všetky tieto objavy prezradzovali, že atómy sú zložené útvary, ktorých základnou a univerzálnou zložkou sú elektróny. Pred fyzikmi vystala aktuálna úloha: vytvoriť model atómu.

Prvý model atómu, ak odhliadneme od pokusov lorda *Kelvina* a niektorých ďalších, ktoré upadli do zabudnutia, pochádza od J. J. Thomsona z roku 1904. Do dejín vošiel pod nie celkom prílevným názvom „hrozienkový koláč“. V tomto modeli sú elektróny rozmiestnené v kladne nabitej hmote atómu tvaru gule ako hrozienka v koláči. Takýto útvar je stabilný, ako to v r. 1878 experimentálne dokázal americký fyzik *Alfred Marshall Mayer* (1836—1897). Mayer zapichol zmagnetizované špendlíky so severným pólom na hornom konci do malých korkových zátiok plávajúcich na vode. Keď priložil k povrchu vody južný pól vhodne zvoleného tyčového magnetu, zoskupili sa hlavičky špendlíkov do pravidelných mnohouholníkov. Thomson nahradil vo svojom modeli zmagnetizované špendlíkové hlavičky elektrónmi a pole vonkajšieho magnetu kladným nábojom, ktorý sa rozprestiera rovnomerne v celom atóme a kompenzuje záporné náboje elektrónov. Vo vzbudenom atóme sa elektróny rozkmitali okolo rovnovážnej polohy a vyslali elektromagnetické žiarenie, ktoré sa registruje v spektroskope. Aby mohol aj za týchto podmienok zabezpečiť stabilitu atómov s veľkým počtom vonkajších elektrónov, umiestnil väčší počet elektrónov blízko stredu. V Thomsonovom modeli sa atómy nasledujúcich prvkov líšili pridaním takéhoto „vnútorného“ elektrónu.

Thomson bol tiež prvý, čo sa snažil získať informácie o atómoch z rozptylových procesov. Podľa neho sa častica pri zrážke s elektrónom, ktorý je viazaný v atóme, iba nepatrne odkloní od svojej dráhy. Badateľný je iba mnohonásobný rozptyl po zrážkach s viacerými elektrónmi.

Rutherford v r. 1899 zaregistroval dva druhy častíc, ktoré vyžaruje



urán: prenikavé častice β a ľahšie absorbovateľné častice α . V roku 1902 sa mu podarilo dokázať, že trajektória lúča z častíc α sa ohýba v elektrickom a magnetickom poli, a určil v podstate Thomsonovou metódou pomer náboja a hmotnosti, teda merný náboj tejto častice. Z týchto pokusov bolo zrejmé, že častice α sú kladne nabité. Rutherford bol presvedčený, že častica α je dvakrát ionizovaný atóm hélia. Dokázal to až v r. 1908. Po neúnavných pokusoch zhotovil tak tenké sklo, ktoré prepúšťalo častice α , ale atómy hélia nie. Z trubky zhotovenej z takéhoto skla difundovali častice α do evakuovanej nádoby, kde po dlhšom čase viazali na seba elektróny, čím vzniklo spektroskopicky dokázané hélium.

Pre ďalší vývin atómovej fyziky boli rozhodujúce rozptylové pokusy Rutherfordových žiakov *H. W. J. Geigera* (1882–1945) a *E. Marsdena* (1889–1970), ktorí v r. 1909 ostreľovali tenkú fóliu zlata časticami α . Na ich prekvapenie sa asi jedna z 8000 častíc α , ktoré narazili na fóliu, odklonila viac ako o 90° od svojej trajektórie, teda ako by sa odrazila od fólie. Rutherford našiel správnu interpretáciu: atómy zlata majú veľmi malé kladne nabité jadrá, v ktorých je sústredená takmer celá ich hmotnosť. Na kladnú časticu α pôsobí veľká odpudivá sila, keď sa dostane do blízkosti jadra atómu zlata. Vo väčšej vzdialenosti od jadra sú iba elektróny, ktoré časticu α prepustia (iba nepatrne odchyľia od jej dráhy). Túto teóriu vyslovil Rutherford v predbežnom oznámení začiatkom roku 1911. V tom istom roku uverejnil rozsiahly článok, v ktorom priniesol presný výpočet rozptylových procesov a dokázal, že Thomsonov model

nijako neobstojí vzhľadom na Geigerove a Marsdenove merania. Rutherford navrhol model atómu, v ktorom okolo malého jadra, sústredujúceho takmer celú hmotnosť atómu, obiehajú elektróny ako planéty okolo Slnka. Nadviazal pritom na model japonského fyzika *Hantaro Nagaoku* (1865—1950) z roku 1903. Nagaoka si predstavoval atóm ako planétu Saturn so svojimi prstencami, ktoré pozostávajú z elektrónov. Pri svojich úvahách použil Maxwellove výpočty z roku 1859 o stabilite prstencov Saturna. Nagaokov model neobstál popri Thomsonovom, lebo jeho atóm z elektricky nabitých častíc nie je stabilný. Stačí pripomenúť, že elektróny v Nagaokových prstencoch sa odpudzujú, zatiaľ čo medzi časťami prstencov Saturna pôsobia príťažlivé gravitačné sily. Ale ani Rutherfordov planetárny model atómu podľa klasickej elektrodynamiky nie je stabilný. Elektróny, obehajúce okolo jadra, vyžarujú elektromagnetické vlny, strácajú energiu, v dôsledku čoho by v zlomku sekundy museli padnúť na jadro. Rutherford vyvrátil Thomsonov model, ale sám nebol presvedčený o reálnosti svojho modelu, tým menej presvedčil vtedajšiu fyzikálnu verejnosť.

Rudolf Zajac

Stručný pohľad na vývoj fyzikálneho obrazu sveta

Doc. dr. PAVOL FERKO, CSc., PF Banská Bystrica

Fyzikálny obraz sveta sa s vývojom vedy mení, čo znamená, že sa menia náhľady na zloženie, štruktúru materiálnych telies, ich konkrétne fyzikálne alebo iné vlastnosti. Štruktúra elementárnych častíc je veľmi zložitá, nemožno si ich predstaviť, ale možno ich matematicky popísať. To je práve vyššia forma poňatia hmoty v súlade s Leninovým chápaním matérie, lebo miznú hranice, v ktorých sme matériu dosiaľ poznali. Vývoj prírodných vied bude hranice nášho poznania posunovať ďalej. Ak by niekedy bolo možné všetky fyzikálne veličiny vyjadriť energiou, neplynú z toho, že matéria ako objektívna realita zmizla. Znamená to len toľko, upozornil Lenin, že sa jej formy, napr. látka mení na pole.

V príspevku chceme stručne naznačiť, ako sa vyvíjal fyzikálny obraz sveta z pohľadu klasickej a relativistickej fyziky.

1. Klasická fyzika

Klasická mechanika, dielo *I. Newtona*, si dodnes zachovala pôvodný tvar. Vo všetkých sústavách súradníc platí rovnaká geometria samotného

priestoru, a to geometria euklidovská. Rôzne sústavy súradníc sú rovnocenné. Všetky fyzikálne javy prebiehajú úplne zhodne vo všetkých inerciálnych sústavách súradníc.

Klasická mechanika považuje sily pôsobiace na atómy za známe, ale aké sú to sily v skutočnosti, čo o nich možno uviesť, na to už odpoveď nedáva, ale pripúšťa ľubovoľné sily v prírode, o ktorých predpokladá, že pôsobia okamžite na diaľku a podliehajú zákonu akcie a reakcie. Gravitačná interakcia bola objavená Newtonom, ktorý formuloval Zákon všeobecnej gravitácie. Treba však zdôrazniť univerzálny charakter gravitačnej interakcie, ktorej sú podrobené bez výnimky všetky telesá vo vesmíre. Bola to práve Newtonova mechanika spolu so všetkými jeho zákonmi, zvlášť zákonom všeobecnej gravitácie, ktoré v astronómii umožnili vypočítať s veľkou presnosťou pohyb Mesiaca a planét. Ale i v našej dobe prebieha pohyb umelých družíc i rakiet podľa zákonov klasickej mechaniky. Zvlášť zákony zachovania platia nezávisle od charakteru síl pôsobiacich medzi telesami, čo znamená, že tieto zákony bezprostredne súvisia so základnými vlastnosťami priestoru a času. Po objavení princípov klasickej mechaniky sa teoretická fyzika vyvíjala po celé dve storočia pod vplyvom Newtonovým, a tak aj oblasti náuky o elektrine a magnetizme sa stali špecifickými aplikáciami univerzálnej Newtonovej mechaniky.

Po *Faradayovom* objave elektromagnetickej indukcie, ktorý pozdejšie viedol k rozvoju elektrotechniky, sa ukázalo, že na jeho vysvetlenie nestačí klasická mechanika s koncepciou pôsobenia na diaľku, ale že je potrebná nová fyzikálna koncepcia. Teda prvýkrát sa stretávame so situáciou, že klasická mechanika nie je univerzálne platná, ale má svoju obmedzenú platnosť.

Novou koncepciou bola koncepcia elektrického a magnetického poľa. I keď nešlo o pojmy úplne nové, ktoré zatiaľ mali len pomocný charakter, nové bolo to, že poliam bol pripísaný význam objektívnej fyzikálnej reality. Tak vzniká nová fyzikálna teória — teória elektromagnetického poľa. Táto teória bola vytvorená *Maxwellom*, ktorý ju formuloval v štyroch rovniciach pre elektrické a magnetické pole. Maxwellove rovnice obsahujú nový teoretický predpoklad, ktorý spočíva v tom, že i premenné elektrické pole, podobne ako vodivý prúd vytvára magnetické pole. Tento nový, po Newtonovej mechanike veľký krok vpred, *Lenin* charakterizoval slovami „odlet fantázie do skutočnosti“. Najväčším dôsledkom tejto teórie bola predpoveď existencie priečných elektromagnetických vln, ktoré sa môžu šíriť vo vákuu rýchlosťou svetla. Táto teória umožnila Maxwellovi vytvoriť elektromagnetickú teóriu svetla. Maxwellova teória ukazuje, že voľné elektromagnetické pole môže existovať i v neprítomnosti elektrických nábojov a prúdov, musí však byť premenné tak v čase ako v priestore. To znamená, že pole nemožno považovať za pomocný pojem, ako tomu bolo v Newtonovej mechanike,

ale treba ho považovať za fyzikálnu realitu, t. j. pokladať ho za materiálne.

Už starovekí učitelia sa snažili vytvoriť určitý názor na podstatu svetla. Ich predstavy boli však veľmi nejasné. Dlhú dobu sa udržiaval názor, že svetlo je akási jemná látka, ktorá vychádza z oka a pomocou nej pri pozorovaní okolitých predmetov akoby tykadlami ohmatávame.

Prvé teórie svetla boli vyslovené až koncom 17. storočia. Prvá bola teória výronová (emanačná), ktorú vypracoval *Newton*. Tvrdil, že svetlo je akási jemná látka, ktorú svietiace telesá vyžarujú. Svetelné častice vyletujú zo zdroja veľkou rýchlosťou, šíria sa okolitým vzduchom i vo vákuu priamočiare a ak dopadnú na hladkú plochu, odrážajú sa na spôsob pružných teliesok.

Druhá bola teória vlnová (undulačná), vyslovená holandským fyzikom *Huygensom*. Tento predpokladal, že celý vesmír je vyplnený nesmierne jemným a pružným prostredím, ktoré nemôžeme našimi zmyslami vnímať a nazval ho éterom. Éter podľa neho preniká ako veľmi jemný plyn cez všetky telesá aj vzduchoprázdny priestor. Účinkom svetelného zdroja vzniká v ňom svetelný rozruch, ktorý sa šíri všetkými smermi v tvare vlny, podobne ako vznikajú a postupujú vo vzduchu zvukové vlny.

Newtonova teória bola lepšie prepracovaná a táto okolnosť, ako aj veľká vedecká autorita Newtonova spôsobila, že Huygensova teória našla len málo prívržencov a upadla skoro do zabudnutia.

Newton sa vyslovil o vlnovej teórii odmietavo. Najväčší nedostatok tejto teórie bol v tom, že nevedela vysvetliť rozdielne správanie svetla a zvuku, lebo podľa tejto teórie je svetlo, podobne ako zvuk, pozdĺžnym vlnením.

Začiatkom 19. storočia boli objavené niektoré prekvapujúce optické javy. Ich vysvetlenie robilo ťažkosti ako teórii vlnovej, tak aj výronovej. Polarizáciou svetla sa dokázalo, že svetlo je priečnym vlnením, lebo ak by bolo pozdĺžnym vlnením, zostala by polarizácia nevysvetliteľná.

Neobyčajný rozvoj náuky o elektrine počas 19. storočia ukázal na prekvapujúcu obdobu a súvislosť medzi javmi elektrickými a svetelnými, a tak vznikla nová, v poradí už tretia, elektromagnetická teória svetla, ktorej zakladateľom bol *Maxwell*. Dospel k výsledku, že elektrické a magnetické pole sa šíri prostredím ako elektromagnetický rozruch v tvare priečných vln, a to rovnakou rýchlosťou ako rozruchy svetelné. Z toho usúdil, že medzi oboma druhmi nie je podstatný rozdiel, a preto svetelné vlny sú v podstate vlnami elektromagnetickými.

Tak sa optika, ktorá až do tejto doby bola časťou mechaniky, lebo vykladala vznik svetla čiste mechanickým kmitaním častíc svetelného zdroja, zaraďuje do náuky o elektromagnetickom poli.

Po formulácii rovníc elektromagnetického poľa a vytvorení elektromagnetickej teórie svetla začína nová epocha vo fyzike — rozvoj náuky o elektromagnetizme.

Lorentz dosiahol najvýznamnejší úspech tým, že zbavil éter jeho mechanických vlastností a látku schopnosti byť nositeľom elektromagnetických vlastností.

Táto epocha sa vyznačovala objavmi aplikačného charakteru v elektrotechnike a rádiatechnike, čo viedlo k novej revolúcii v technike.

2. Relativistická fyzika

Teória relativity vzniká z rozporu medzi Newtonovskou klasickou mechanikou a Maxwellovou klasickou elektrodynamikou. Tento rozpor spočíval v tom, že elektrodynamika (aspoň zdanlivo) dávala možnosť rozlíšiť inerciálne systémy, kým v mechanike sú všetky inerciálne sústavy ekvivalentné (Galileov princíp relativity).

I napriek teoretickým možnostiam výsledky všetkých experimentov z oblasti mechaniky a elektrodynamiky potvrdzujú ekvivalenciu všetkých inerciálnych sústav. Zvlášť významný *Michelsonov pokus*, ktorý ukazuje, že rýchlosť svetla vo vákuu nezávisí od pohybu zdroja svetla ani pozorovateľa, prehlbuje rozpor medzi elektrodynamikou a mechanikou, súvisiaci so zákonom skladania rýchlostí v klasickej mechanike. Tento rozpor bol odstránený špeciálnou teóriou relativity, ktorú vypracoval *Einstein* a je po Newtonovej a Maxwellovej teórii v poradí treťou fyzikálnou teóriou základného významu. Jej základ tvoria dva princípy: 1. špeciálny princíp relativity — podľa ktorého všetky prírodné javy prebiehajú rovnako vo všetkých inerciálnych sústavách: 2. princíp konštantnej rýchlosti svetla vo vákuu, podľa ktorého je rýchlosť svetla vo všetkých inerciálnych sústavách rovnaká.

Špeciálna teória relativity nahradzuje Galileove transformácie klasickej mechaniky transformáciami Lorentzovými, ktoré ukazujú, že čas nie je veličinou absolútnou, ale relatívnym pojmom. Ani priestorová vzdialenosť medzi udalosťami nie je absolútna, ale relatívna. Významnou vlastnosťou Lorentzových transformácií je to, že čas a priestorové súradnice v nich nevystupujú oddelené, čo znamená, že priestor a čas tvoria jednotný celok.

Vývoj fyziky plne potvrdil Einsteinove úvahy, keď preukázal, že pojem priestoru a času, ako je definovaný vo všeobecnej teórii relativity, úplne vyhovuje nielen pri skúmaní elektromagnetických, ale i ďalších interakcií.

Maxwellove rovnice sú invariantné vzhľadom k Lorentzovým transformáciám, čo znamená, že platia vo všetkých inerciálnych sústavách. Touto dokázanou správnosťou z hľadiska špeciálnej teórie relativity hypotéza o étere stráca zmysel, čo znamená, že elektromagnetické pole predstavuje samostatne existujúcu realitu s významným fyzikálnym

záverom — elektrické a magnetické pole chápané prv oddelenie, v skutočnosti vytvára jediný celok — elektromagnetické pole.

Za týchto podmienok vzniká problém správne formulovať rovnice mechaniky, lebo Newtonove rovnice klasickej mechaniky musíme považovať za nesprávne. Tento problém vyriešil *Einstein*, keď vytvoril relativistickú mechaniku, ktorá na rozdiel od Newtonovej mechaniky spĺňa požiadavku invariance vzhľadom od Lorentzovým transformáciám a je v úplnej zhode s Maxwellovou elektrodynamikou. Mechanika a elektrodynamika tak splynuli v jednu teóriu, teóriu najvyššieho stupňa dokonalosti. Relativistická mechanika ukázala, že môžu existovať materiálne objekty s nulovou pokojovou hmotnosťou — fotóny. Nesmierny význam teórie relativity vyjadril *Lenin*, keď nazval Einsteina „velikým reformátorom prírodovedy“.

Vo všeobecnej teórii relativity, ktorú Einstein formuloval neskoršie, prestáva kinematika byť nezávislá na akýchkoľvek ďalších fyzikálnych pojmoch. Geometrický charakter telies závisí od gravitačných polí. Na základe všeobecnej teórie relativity sa dnes rozvíja kozmológia, skúmajúca problémy vesmíru ako celku.

Neskoršie však klasická fyzika nemohla objasniť existenciu stabilného atómu. Vzniká naliehavá otázka, ako nájsť východisko z tejto situácie. Existuje len jedno východisko, analyzovať a podrobiť kritike základné pojmy klasickej fyziky. Treba podrobiť kritike klasické predstavy o charaktere pohybu.

Heisenberg vyslovil relácie neurčitosti, ktoré vyjadrujú, že pojem z klasickej teórie všeobecne nemá zmysel, takže ho nemožno použiť vo všetkých prípadoch. Nie je teda obmedzená možnosť poznania sveta, ale je obmedzená možnosť použitia istých klasických pojmov, vystupujúcich v Heisenbergových reláciách neurčitosti. Všeobecnejšou fyzikálnou teóriou je kvantová mechanika ako ďalšia veľká fyzikálna teória, ktorá objasnila a matematicky popísala z jednotného hľadiska väčšinu javov, ktoré patria do oblasti kvantovej fyziky, najmä atómovej fyziky; napr. poloha elektrónu v priestore atómu môže byť charakterizovaná len štatistickým rozdelením pravdepodobnosti jeho výskytu v priestore, ale nemôže byť popísaná pomocou trajektórie. V kvantovej mechanike je typický ten prípad, kedy rozdiely vo výsledkoch pokusu sú spôsobené vnútornými príčinami.

So zrodom kvantovej mechaniky začína nový vek fyziky. Pomocou nej sa podarilo objasniť nielen samostatnú existenciu atómov a molekúl, ale celý ohromný okruh javov atómového sveta. Kvantová fyzika sa stala základom molekulárnej biológie a kvantovej elektroniky.

Kvantová mechanika sa nezrieka príčinnosti, ale naopak, vychádza z postulátu o existencii príčinnosti, z požiadavky existencie určitých

dynamických zákonov, ktoré sú všeobecnejšie než zákony klasickej mechaniky.

Kvantová mechanika ako fyzikálna teória pri svojom dôsledku pripisuje kvantové vlastnosti nielen elektrónom, ale všetkej hmote ako celku, to znamená, že sa rozšíril kvantový popis aj na elektromagnetické pole. Elektromagnetické pole čiže fotóny sú rovnako materiálne ako elektróny a pozitróny, čiže látka. To znamená, že elektromagnetické pole na jednej strane a elektróny a pozitróny na druhej strane vystupujú v kvantovej elektrodynamike ako dve rovnocenné formy jedinej hmoty.

Kvantová elektrodynamika sa budovala na základe logickej syntézy základných fyzikálnych ideí a koncepcií vytvorených v predchádzajúcich etapách. V kvantovej elektrodynamike tvoria jeden organický celok Maxwellova elektrodynamika, špeciálna teória relativity a kvantová mechanika. Teda kvantová elektrodynamika je najnovšou etapou v prirodzenom a zákonitom vývoji týchto troch veľkých fyzikálnych teórií. Pre svoju neobyčajnú krásu a logickú stavbu spočívajúcu na najvšeobecnejších fyzikálnych koncepciách o hmote časopriestoru a pre matematické metódy bola kvantová elektrodynamika uznávaná za vzor fyzikálnej teórie. Preto sa na základe nej začala budovať ďalšia teória, teória elementárnych častíc.

Záver

Súčasný pokrok vo fyzike upozorňuje na problém o medziach použiteľnosti kvantovej elektrodynamiky. Fyzikálna teória stojí pred novou revíziou základných fyzikálnych pojmov, čo bude možné vyriešiť novým matematickým modelom, ale tak, aby fyzikálna teória nebola oddelená od jej matematickej formy. Je nutné spojenie teoretických a experimentálnych metód s jednotou obsahu a matematickou formou.

Príroda a fyzikálny obraz sveta sa neustále vyvíja a mení, preto nejestvuje fyzikálna teória budúcnosti.

Literatúra :

- [1] Achiezer, O. I.: Vývoj fyzikálneho obrazu sveta. Praha, SPN 1975
- [2] Cirbes, V. — Hajko, V.: Vyučovanie fyziky a vedecký svetonázor. Bratislava, SPN 1963
- [3] Fuka, J. a kol.: Fyzika pre 11. ročník všeobecnovzdelávacích škôl. Bratislava, SPN 1955.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Píšu, píšu 1984

Už jste si zvykli, že je rok 1984 a ne 1983? Číslo 1984 dostaneme z čísla 1983 nejen přičtením jedničky, ale na příklad i takto:

$$1 = -1 - 9 + 8 + 3$$

$$9 = (19 + 8) : 3$$

$$8 = 19 - 9 - 3$$

$$4 = 1 \cdot 9 - 8 + 3$$

Překontrolujte správnost následujících rovností:

$$1 + 9 = 8 + \sqrt[3]{4}$$

$$-1 + 9 = \sqrt[3]{8} \cdot 4$$

$$1 + \sqrt[3]{9} = 8 - 4$$

$$1 - \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8} - 4$$

$$1 + \sqrt[3]{9} = 8 - \sqrt[3]{4}$$

$$1 + \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4}$$

$$1 - 9 = 8 - 4^2$$

$$\sqrt[3]{-1 + 9} = 8 : 4$$

$$-1^2 + 9^2 = 8^2 + 4^2$$

$$1 = (98 + \sqrt[3]{4}) \%$$

$$19 + 84 = 1 + 98 + 4$$

$$1 + 9 + 8 + 4 = -1 - 9 + 8 \cdot 4$$

$$1 + 9 - 8 - 4 = (1 - 9) : (8 - 4)$$

$$1 - 9 + 8 + 4 = 1 \cdot (9 - 8) \cdot 4$$

$$1 + 9 + 8 + 4 = -1 - 9 + 8 \cdot 4$$

$$19 - 8 \cdot 4 = -1 \cdot 9 - 8 + 4$$

$$1^2 + 9^2 - 8^2 - 4^2 = -1 - \sqrt[3]{9} + 8 - \sqrt[3]{4}, \quad \sqrt[3]{198 - \sqrt[3]{4}} = 1 + 9 + 8 - 4$$

$$\sqrt[3]{1^2 + 9^2 + 8^2 + 4^2} = 1 \cdot 9 \cdot \sqrt[3]{8 : 4}, \quad \sqrt[3]{19 + 8 - \sqrt[3]{4}} = 1 : (9 - 8) + 4$$

$$\sqrt[3]{1 - 9 + 8 + 4} = 1 + 9 + 8 - 4^2, \quad \sqrt[3]{1 + 9 + 8 - \sqrt[3]{4}} = 1 - 9 + 8 + 4$$

$$19 \cdot (8 - 4) = 9 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = 84 + 1 - 9 = -4 + (1 + 9) \cdot 8$$

$$(1 + 9) \cdot 8 : 4 = 9 + 8 + 4 - 1 = \sqrt[3]{841} - 9 = \sqrt[3]{(41 + 9) \cdot 8}$$

$$1 \cdot 98 - 4 = 4 + 89 + 1$$

$$19 + 8 \cdot 4 = 48 + \sqrt[3]{9 \cdot 1}$$

$$(1 + 9)(8 - 4) = 48 - 9 + 1$$

$$1 + 9 - 8 + 4 = 48 : (9 - 1)$$

Zkuste sestavit další obdobné rovnosti.

Změna letopočtu je událostí celosvětového významu, avšak dočasné platnosti. Vypočtete:

49 . 81 — 1984

Jiří Mann

Poutníče, postůj, přemýšlej a počítej!

Téměř v každé knížce se zábavnými matematickými úlohami se uvádí, že na hrobce slavného antického matematika *Diofanta*, jenž žil v *Alexandrii* asi kolem poloviny 3. stol. n. l., bylo možno číst nápis:

„Poutníče! Zde odpočívá smrtelná schránka Diofanta. Čísla, jaký div, mohou vyprávět, jak dlouho žil. Šestina jeho života bylo bezstarostné dětství. Dvanáctina uplynula, když se jeho brada pokryla chmýřím. Sedminu pak prožil v bezdětném manželství. Pak uplynulo ještě pět let, než byl obšťastněn prvním synem. Tomu však krutý osud dopřál jen polovinu života jako jeho otcí. V hlubokém smutku prožil pak ctihodný stařec konec svých pozemských dnů, když svého syna o čtyři roky přežil.

Řekni poutníče, jak stár byl Diofantos, když smrt ho odvedla k předkům?“

Epitaf byl samozřejmě řecky a byl ve verších. Český překlad je citován podle [1], str. 52.

Nápis představuje úlohu, jež se obvykle řeší rovnicí; tak je tomu i v knížkách [1] a [2]. Jde-li o nápis na náhrobním kameni, pak by mělo být možno všechny údaje o Diofantově životě vypočítat z paměti. Lze se tedy domnívat, že všechny tyto údaje jsou celá čísla. Z tohoto předpokladu plyne, že věk, v němž Diofantos zemřel, musí být dělitelný čísly 6, 12, 7 a 2. Jejich nejmenším společným násobkem je číslo 84. Další společné násobky jsou již pro věk příliš veliké. Ověřte, že epitafu skutečně odpovídá, že se Diofantos dožil 84 let.

Uvedený nápis, pokud vůbec na Diofantově hrobce byl, mohl poutník číst teprve několik desetiletí po jeho pohřbu. Autorem epitafu totiž byl podle [2] epigramatik *Méthodóros*, který žil snad ve 4. stol. n. l. Byl autorem veršovaných matematických úloh a údajný nápis na Diofantově hrobce je jednou z nich.

Literatura :

- [1] B. Zelinka: Matematika hrou i vážně, Mladá fronta, Škola mladých matematiků, sv. 44, Praha 1979
- [2] V. D. Čistjakov: Starinnye zadači po elementarnoj matematike, 3. vydání, Minsk 1978

Jiří Mída

Z geometrie pravidelného pětiúhelníka

STANISLAV HORÁK, Praha

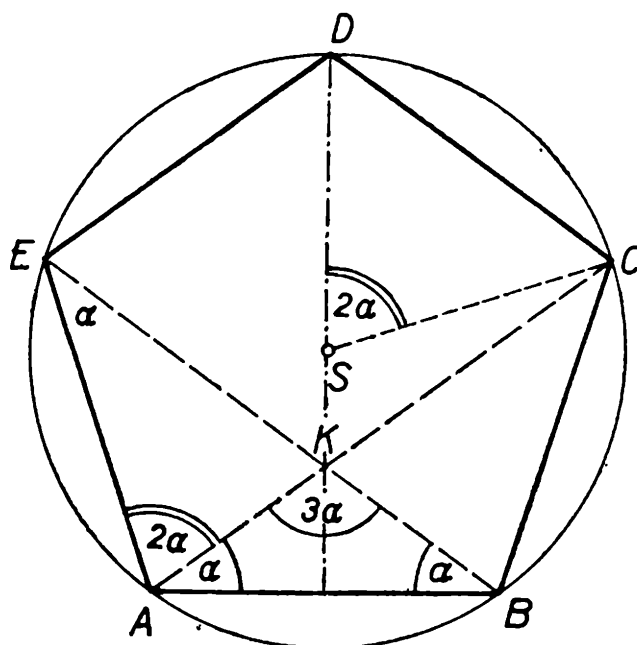
V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ narýsujme úhlopříčky AC , BE , které se protnou v bodě K . Potom platí

$$|EK|^2 = |BK| \cdot |BE|.$$

Dokažte.

Důkaz (obr. 1.). Velikost středového úhlu nad stranami pětiúhelníka označme 2α . Víme, že

$$2\alpha = 360^\circ : 5 = 72^\circ.$$



Obr. 1

Tedy (S je střed kružnice opsané našemu pětiúhelníku)

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC| = \quad = 2\alpha = 72^\circ.$$

A nyní si všimněme trojúhelníků ABK , BEA . Oba jsou rovnoramenné a shodují se v úhlech při základně. Jsou tudíž podobné, a platí proto úměra

$$|BK| : |BA| = |BA| : |BE|,$$

z čehož

$$|BA|^2 = |BK| \cdot |BE|. \quad (1)$$

Zbývá nám ještě dokázat, že trojúhelník AEK je rovnoramenný. Jeho úhly jsou

$$|\sphericalangle A EK| = \alpha = 36^\circ, |\sphericalangle E AK| = 2 \alpha = 72^\circ$$

a potom

$$|\sphericalangle E KA| = 180^\circ - \alpha - 2 \alpha = 72^\circ.$$

Důsledek toho je, že $|AE| = |KE|$. Po dosazení do (1) máme výsledek

$$|EK|^2 = |BK| \cdot |BE|.$$

Tím je vyslovená věta dokázána.

Otázky. 1. Jak velké jsou úhly ADC , AEC ?

2. Jak velké jsou nekonvexní úhly ASD , ASE ?

OLYMPIÁDY A SOČ

Čtrnáctá mezinárodní fyzikální olympiáda

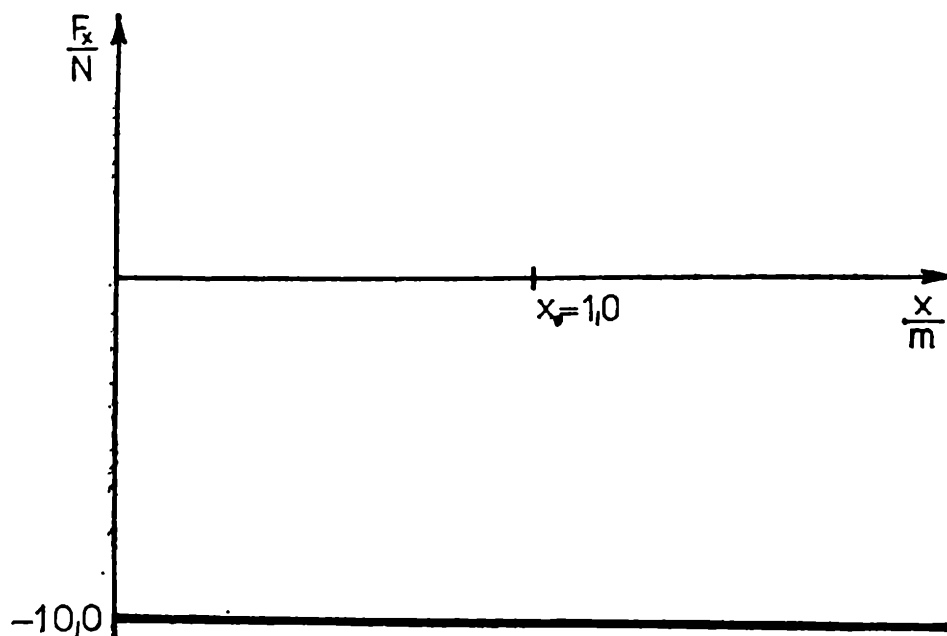


S úsměvem na tváři po úspěchu na 14. MFO v Bukurešti (od leva):
Roman Šášik (úspěšný), Daniel Kluvanec (2. cena), Jaroslav Smejkal
(1. cena), Miloš Drutarovský (3. cena), Ivo Koreň (úspěšný)

Pouze pětici nejlepších účastníků fyzikální olympiády se podaří probojovat se na mezinárodní fyzikální olympiádu. Každým rokem se však naší soutěže účastní asi 7000 soutěžících v kategoriích A — D z řad středoškolské mládeže a asi 17 000 soutěžících ze škol základních. Chtěli bychom čtenáře Rozhledů, z nichž mnoho nacházíme mezi řešiteli fyzikální olympiády, seznámit s úlohami, zadanými na 14. MFO v Bukurešti. Protože jde o úlohy poněkud jinak koncipované, než je zvykem v československé fyzikální olympiádě, počítáme s tím, že se řada čtenářů do řešení pustí.

Úloha 1: Částice se pohybuje podél kladné poloosy Ox působením stálé síly $F = -10,00$ N, směřující do počátku soustavy souřadnic (obr. 1). V počátečním bodě O kolmo k ose x je umístěna ideálně odrazující rovinná stěna. Na částici působí současně při pohybu třecí síla o velikosti $F_t = 1,00$ N. Částice se v určitém okamžiku nachází v bodě daném souřadnicí $x_0 = 1,00$ m, přičemž má v tomto okamžiku kinetickou energii $E_k = 10,0$ J. Úlohu řešte jako jednorozměrný problém.

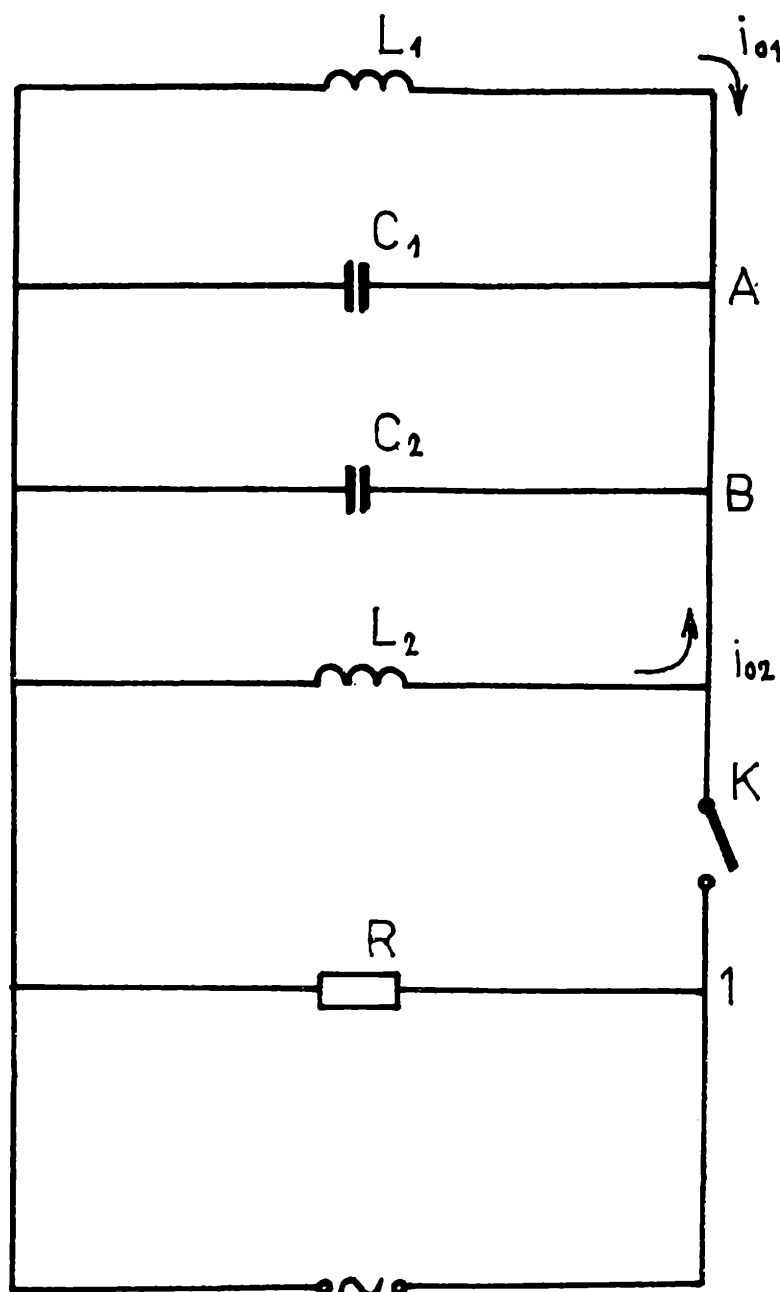
- Určete délku dráhy, kterou projde částice do úplného zastavení.
- Načrtněte graf potenciální energie $E_p(x)$ jako funkci vzdálenosti x částice pohybující se v poli síly F .



Obr. 1

- Znáznorněte graficky, ale pouze kvalitativně, rychlost částice jako funkci její souřadnice x .

Úloha 2: Elektrický obvod střídavého proudu (obr. 2) se skládá ze dvou ideálních cívek s vlastními indukčnostmi $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 20$ mH, dvou kondenzátorů o kapacitách $C_1 = 10$ nF, $C_2 = 5,0$ nF a rezistoru o odporu $R = 100$ k Ω . Je-li obvod uzavřen (klíč je zapnut v poloze 1), mění se frekvence na generátoru harmonického napětí, přičemž amplituda harmonického střídavého proudu zůstává v obvodu stálá.



Obr. 2

a) Určete podíl $f_m/\Delta f$, kde f_m je frekvence, při níž je činný výkon P_m obvodu maximální, $\Delta f = f_+ - f_-$ je rozdíl frekvencí, při nichž je činný výkon roven polovině maximálního výkonu P_m .

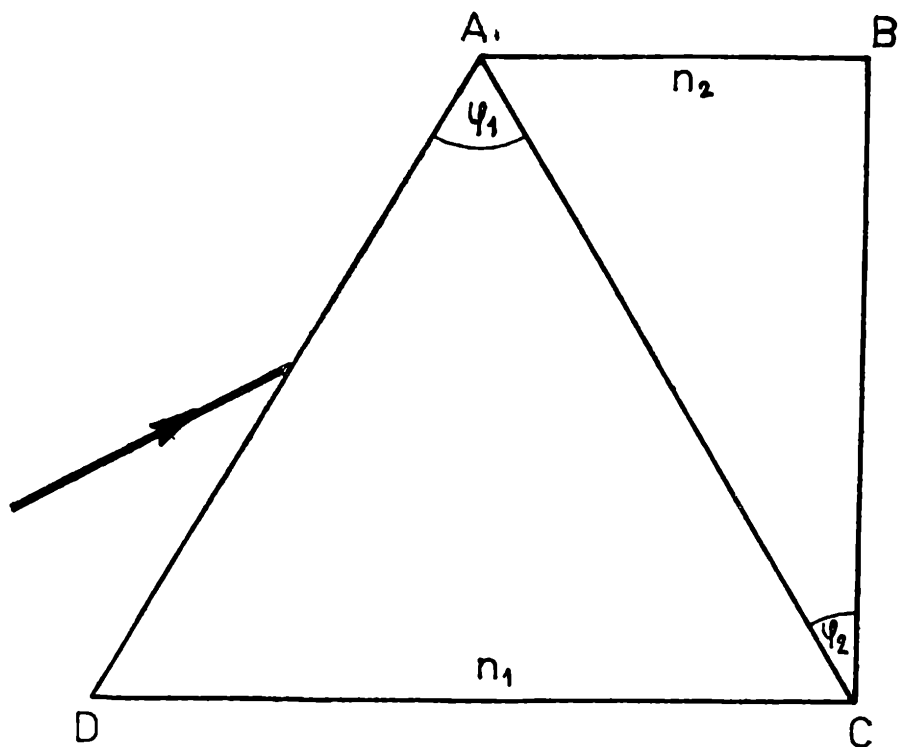
Dále spínač rozpojíme. Je známo, že v určitém okamžiku t_0 po rozpojení obvodu mají proudy v cívkách L_1 , L_2 hodnoty $i_{01} = 0,10$ A, $i_{02} = 0,20$ A (na obr. 2 jsou vyznačeny směry proudu), napětí na svorkách kondenzátoru je rovno $u_0 = 40,0$ V. Určete:

b) frekvenci f volných elektrických kmitů v obvodu obou cívek a obou kondenzátorů (tj. v obvodu $L_1 C_1 C_2 L_2$),

c) proud ve vodiči AB v obvodu,

d) amplitudu kmitů proudu I_1 v cívce L_1 .

Vzájemnou indukčnost obou cívek neuvažujte.



Obr. 3

Úloha 3: Dva hranoly s lámavými úhly $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$ jsou slepeny podle obr. 3 (úhel při vrcholu C je pravý). Indexy lomu hranolů jsou dány vztahy:

$$n_1 = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2}, \quad n_2 = a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2},$$

kde λ je vlnová délka procházejícího světla, $a_1 = 1,1$, $b_1 = 1,0 \cdot 10^{-13} \text{m}$, $a_2 = 1,3$, $b_2 = 5,0 \cdot 10^{-14} \text{m}^2$.

a) Pro libovolný úhel dopadu určete takovou vlnovou délku λ_0 dopadajícího záření, jež prochází hranoly, aby nedošlo k lomu na stěně AC . Určete hodnoty n_1 , n_2 indexu lomu pro tuto vlnovou délku.

b) Načrtněte přibližně chod paprsků pro tři záření různé vlnové délky ($\lambda_1 > \lambda_0 > \lambda_2$). Úhel dopadu je pro všechny tři paprsky stejný.

c) Určete úhel nejmenší deviace paprsku způsobené soustavou hranolů pro záření o vlnové délce λ_0 .

d) Určete vlnovou délku záření dopadajícího na soustavu rovnoběžně se základnou DC a vycházejícího ze soustavy také rovnoběžně se základnou DC .

Úloha 4: Dochází k rozptylu fotonu s vlnovou délkou λ_i na volném elektronu. V důsledku pružné srážky se elektron zastavil, ale foton s vlnovou délkou λ_0 se odchýlil od původního směru pohybu prvního fotonu o úhel $\Theta = 60^\circ$. Potom došlo k novému rozptylu vzniklého fotonu na dalším volném elektronu, který byl v klidu. Výsledkem nové srážky byl foton o vlnové délce $\lambda_f = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{m}$, který se odklonil od směru pohybu předcházejícího fotonu opět o úhel $\Theta = 60^\circ$. Určete de Broglieovu vlnovou délku elektronu, který se dostal do vzájemné interakce s pohy-



bujícím se prvním fotonem. Znáte následující hodnoty veličin: Planckova konstanta $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, klidová hmotnost elektronu $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, rychlost světla ve vakuu $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Doplňková nepovinná úloha, jejíž řešení nemělo vliv na celkové hodnocení, ale za jejíž správné řešení byla udělena speciální cena: Podívejte se na emblém 14. MFO a kvalitativně vysvětlete, proč proud kapaliny se neoddělí od válce po čárkované čáře, ale obtéká válec po plné čáře. Tato skutečnost má spojitost s jevem *Coandovým*, který byl patentován ve Francii r. 1936 rumunským inženýrem *Henri Coandou*.

Úloha 5 (experimentální): Máte k dispozici následující pomůcky: zdroj stejnosměrného napětí, který se skládá z baterie a trvale připojeného rezistoru, dva voltmetry, odporovou dekádu.

a) Určete elektromotorické napětí U_e zdroje pomocí pouze dvou daných voltmetrů (bez použití dekády), přičemž využijete co nejméně elektrických obvodů.

b) Určete elektromotorické napětí U_e stejnosměrného zdroje, vnitřní odpor r zdroje a vnitřní odpor R_V použitého voltmetru, přičemž použijete pouze jednoho voltmetru a odporové dekády. K určení těchto veličin si sestrojte dva vhodné grafy, které získáte na základě experimentálních údajů a které odpovídají vhodným lineárním rovnicím, získaným teoretickými úvahami.

c) Poukažte na zdroje nepřesností měření a ukažte, které z nich mají největší vliv na výsledky měření.

D. Klovaneč, I. Volf

Příklady k přijímací zkoušce na MFF UK v Praze

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

Jestliže jste studenty nynějšího 4. ročníku střední školy a pokud jste se rozhodli pro studium na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy univerzity, uvítáte jistě možnost seznámit se s příklady pro přijímací zkoušku z matematiky na tuto fakultu. Chápete jistě, byť s politováním, že nejde o příklady připravené pro přijímací řízení v letošním školním roce; jedná se o úlohy obsažené v písemné zkoušce z matematiky, kterou konali uchazeči o studium na MFF UK v červnu 1983. První z následujících dvou souborů byl určen zájemcům o odborné studium matematiky nebo fyziky, druhý uchazečům o studium učitelství matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie.

Odborné studium:

1. Zjistěte, zda funkce $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ nabývá hodnoty 2 a určete obor jejích hodnot.
2. Dokažte, že v rovnoramenném trojúhelníku, v němž v je velikost výšky k základně, ρ poloměr kružnice vepsané a α úhel při základně, platí:

$$\frac{v}{\rho} = 1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

3. Nechť a, b jsou libovolně zvolená celá kladná čísla. Menší z čísel

$$\frac{a}{b}, \frac{a + 7b}{a + b}$$

označme A , větší z těchto čísel označme B . Dokažte, že platí

$$A < \sqrt[7]{7} < B.$$

4. V trojúhelníku ABC se stranami $a = 3, b = 4, c = 5$ ved'te vrcholem C kolmici na stranu AB , její patou C_1 ved'te kolmici na stranu AC , její patou C_2 kolmici na stranu AB , atd. Určete délku s lomené čáry $CC_1C_2C_3 \dots$
5. Nádrž lze napouštět třemi přítoky A, B, C . Plníme-li nádrž vždy dvěma přítoky současně, naplní se přítoky A a B za 2 hod., přítoky B a C

za 4 hod. a přítoky A a C za 3 hod. Zjistěte, kterým z přítoků A , B , C se nádrž naplní za nejkratší dobu a zda při současném plnění všemi třemi přítoky stačí k naplnění celé nádrže doba 100 min.

Učitelské studium:

1. Určete všechna $x \in R$, pro něž je součet nekonečné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x = 2x + 2^2 x + 2^3 x + 2^4 x +$$

roven jedné.

2. Jsou dány body $A = [2, 0, 3]$, $B = [2, 2, -7]$, $C = [3, -1, -2]$ a rovina α o rovnici $3x + y - 2z - 5 = 0$. Přímka p je rovnoběžná s přímkou BC a prochází bodem A . Určete její průsečík s rovinou α .
3. Určete vzdálenost vrcholu B' krychle $ABCD A'B'C'D'$ od roviny $A'BC'$, jestliže hrana krychle má délku a .
4. V množině R všech reálných čísel řešte nerovnici

$$\frac{x^3 - 8x^2 + 15x}{-x^2 + 2x - 2} < 0.$$

5. V množině R všech reálných čísel řešte rovnici

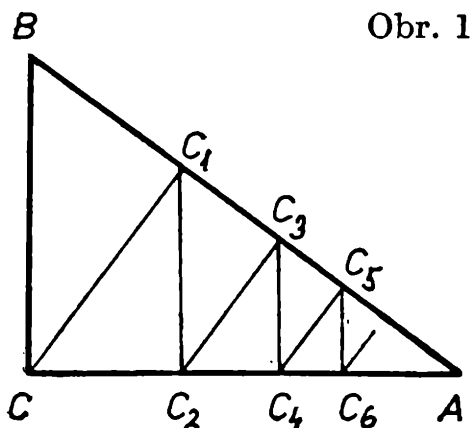
$$3(4^x + 9^{x+1}) = 2 \left(3 \cdot 4^{x+1} - \frac{9^{x+1}}{4} \right).$$

K úspěšnému vykonání zkoušky, pro niž bylo vyhrazeno devadesát minut čistého času, stačilo vyřešit libovolné čtyři příklady z pěti, které byly zadány. Můžete si proto vybrat libovolné čtyři příklady z jednoho z obou souborů a pokusit se je během půldruhé hodiny vyřešit. Nebudete-li příliš úspěšní, nezoufejte — do doby konání letošních přijímacích zkoušek se můžete ještě v mnohém zdokonalit! Svou přípravu ke zkouškám však nezanedbejte ani v případě, kdy jste si s vybranými příklady poradili snadno — může se stát, že v souboru příkladů pro letošní přijímací řízení se objeví témata, která nebudou patřit k vašim stránkám nejsilnějším.

Z výše uvedených příkladů vzbudil největší „popísemkové“ diskuse 4. příklad prvního souboru; podívejme se blíže na oba způsoby, jimiž uchazeči tuto úlohu řešili. Většina řešitelů postupovala způsobem známým ze střední školy (viz obr. 1):

délka lomené čáry $|CC_1| + |C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_3C_4| +$

je nekonečná geometrická řada s prvním členem $|CC_1| = \frac{ab}{c}$ a kvocien-
tem $q = \frac{b}{c}$. Vzhledem k tomu, že je $|q| < 1$, má tato řada součet



Obr. 1

$$s = \frac{|CC_1|}{1-a} = \frac{ab}{c-b},$$

který je roven délce dané lomené čáry.

Někteří řešitelé, postupovali méně tradičním způsobem (viz obr. 2): k danému trojúhelníku ABC sestrojíme trojúhelník ACD , kde D je společný bod přímky CC_1 a kolmice vedené bodem A k přímce AC . Sestrojíme dále průsečíky $C'_2, C'_4, C'_6, \dots$ přímky AD pořadě s přímkami $C_2C_3, C_4C_5, C_6C_7, \dots$ a také průsečíky $C'_3, C'_5, C'_7, \dots$ přímky CD pořadě s přímkami $C_3C_4, C_5C_6, C_7C_8, \dots$. Vzhledem k tomu, že jsou navzájem rovnoběžné přímky $CD, C_2C_3, C_4C_5, C_6C_7, \dots$ a také přímky $AD, C_1C_2, C_3C_4, C_5C_6, \dots$, platí jednak

$$|C_1C_2| = |DC'_2|, |C_3C_4| = |C'_2C'_4|, |C_5C_6| = |C'_4C'_6|, \dots,$$

jednak

$$|C_2C_3| = |C_1C'_3|, |C_4C_5| = |C'_3C'_5|, |C_6C_7| = |C'_5C'_7|, \dots$$

Je tedy zřejmé

$$|CC_1| + |C_2C_3| + |C_4C_5| + \dots = |CC_1| + |C_1C'_3| + |C'_3C'_5| + |C'_5C'_7| + \dots = |CD|,$$

$$|C_1C_2| + |C_3C_4| + |C_5C_6| + \dots = |DC'_2| + |C'_2C'_4| + |C'_4C'_6| + \dots = |AD|,$$

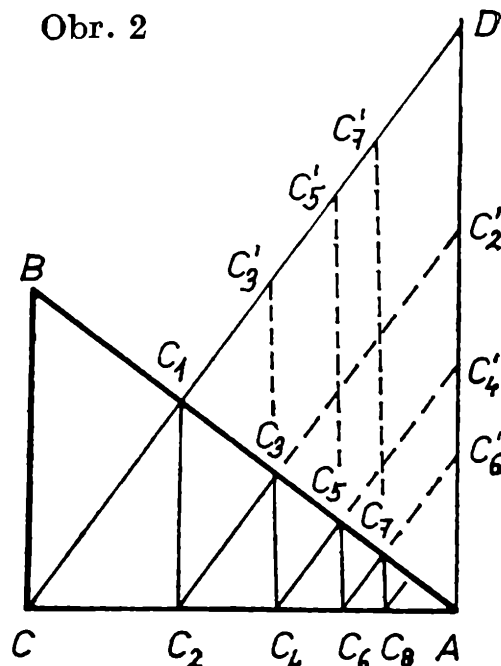
takže platí

$$|CC_1| + |C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_3C_4| + \dots = |CD| + |AD|.$$

Určíme-li ještě z podobných trojúhelníků ABC a DCA

$$|CD| = \frac{bc}{a}, \quad |AD| = \frac{b^2}{a},$$

dostáváme pro délku s dané lomené čáry



Obr. 2

$$s = |CC_1| + |C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_3C_4| + \dots = \frac{bc}{a} + \frac{b^2}{a} = \frac{b(b+c)}{a}.$$

I když to není na první pohled patrné, jsou výsledky získané oběma způsoby shodné, a to nejen pro dané hodnoty $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$; pro velikosti a , b odvěsen a velikost c přepony libovolného pravoúhlého trojúhelníka totiž platí:

$$\frac{b(b+c)}{a} - \frac{ab}{c-b} = \frac{b[(c+b)(c-b) - a^2]}{a(c-b)} = \frac{b(c^2 - a^2 - b^2)}{a(c-b)} = 0.$$

Přestože jsme dospěli k témuž výsledku jako při prvním řešení, je v tomto druhém postupu „malý“ háček: platí vztah

$$|CC_1| + |C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_3C_4| + \dots = (|CC_1| + |C_2C_3| + |C_4C_5| + \dots) + (|C_1C_2| + |C_3C_4| + |C_5C_6| + \dots),$$

kterého jsme při řešení použili? Nedopouštíme se chyby, když komutativní a asociativní zákon, který platí pro součet konečného počtu čísel, přenášíme i na součet nekonečného počtu sčítanců? Z teorie nekonečných řad vyplývá, že tyto zákony pro nekonečný počet sčítanců sice obecně neplatí, avšak pro naši nekonečnou řadu $|CC_1| + |C_1C_2| + |C_2C_3| + \dots$ je výše uvedený vztah v pořádku.

Omezený rozsah časopisu nám znemožňuje, abychom se zabývali i zbývajícími příklady — jistě si je vyřešíte sami. A nezapomeňte přitom na heslo profesora Ypsilonu, jehož naplněním můžete svou přípravu velmi zkvalitnit:

Úspěch, sílu — najdeš v týmu!

Z NOVÝCH KNIH

Kuzněcov, L. A.

SBORNIK ZADANIJ PO VYSŠEJ MATEMATIKE

Vydala Vyššaja škola, Moskva 1983,
175 stran, brož. Kčs 4,50, v ruštině.

Českým čtenářům se prostřednictvím n. p. Zahraniční literatura dostává do rukou hutná sbírka

úloh (5022 jednotlivých příkladů), kterou autoři doporučují pro vysoké školy technické. Zahrnuje 10 oblastí vysokoškolské matematiky — výpočty limit, derivací a integrálů (i vícenásobných), příklady na konstrukce grafů funkcí, na řešení diferenciálních rovnic prvního i vyšších řádů. Najdete

tu také soubory příkladů z vektorové analýzy, analytické geometrie, lineární algebry, příkladů na sčítání a zjišťování konvergence řad a rozvoj funkcí v řady. Každý oddíl je uveden otázkami z teorie a teoretickými cvičeními, tj. otázkami osvěžujícími znalost potřebných definic a vět (včetně jednoduchých důkazových úloh). Jednotlivé oddíly obsahují kolem 17 souborů příkladů, je to vždy 31 obměn téhož typu příkladu.

Mnozí budou ve sbírce marně hledat řešení příkladů nebo alespoň výsledky. Některé úlohy by si to jistě zasloužily, např. při řešení diferenciálních rovnic má čtenář jedinou jistotu, že rovnice, se kterou se potýká, je řešitelná. Uvádění výsledků však zřejmě neodpovídá záměru autorů, neboť sbírka má sloužit hlavně pro zadávání kontrolních písemných prací v prvních semestrech vysokých škol. Užitečná však bude i těm studentům středních škol, kteří se chtějí v matematice dostat dál; najdou v ní množství úloh i na středoškolské úrovni. Dodatek ke sbírce vysvětluje Gaussovu eliminační metodu řešení nedegenerované soustavy lineárních rovnic a uvádí pro ni program ve FORTRANU.

Tato obsažná sbírka jistě nezatíží naši kapsu ani cenou, ani svou hmotností 115 g.

Alena Šolcová

Jadrenko, M. I. - Dorogovcev, A. Ja.

VARIANTY EKZAMENACIONNYCH ZADANIJ PO MATEMATIKE

Vydala Vyšša škola, Kijev 1983, II. vydání (opravené a doplněné), 175 stran, Kčs 4,50, v ruštině.

Druhá ze sbírek ze Zahraniční literatury přináší vybrané úlohy z matematiky, předkládané při písemných a ústních přijímacích zkouškách na Kyjevské státní univerzitě v letech 1974—1980. K většině úloh je uvedeno řešení, k ostatním návody a odpovědi. Celkem autoři shromáždili 106 pětic úloh z písemných zkoušek a 238 příkladů z ústních zkoušek ze šesti fakult v Kyjevě.

Úlohy jsou seřazeny podle fakult (mechanicko-matematická, geologická, geografická, ekonomická, fyzikální a radiofyzikální, kybernetiky) a liší se obtížností. V průměru jsou na studenty kladeny stejné nároky jako při přijímacích zkouškách na naše vysoké školy. Sbíрку proto ocení jednak „postižení“ — abiturienti připravující se ke zkouškám, jednak druhá strana — učitelé středních a vysokých škol. Nahlížet do ní mohou i studenti vyšších ročníků středních škol, kteří si chtějí prohloubit znalosti v matematice.

Alena Šolcová

Species aritmetiky

V početnicích ze 16. století nalézáme početní výkony (species = = způsoby) nejen s podivnými názvy, ale i v neobvyklém počtu. Názvy jsou buď latinské, například subtractio (čteme subtrakciój) nebo s pozměněnou koncovkou — subtrakcý.

Jiří Goerl z Goerlštejna vydal v r. 1577 česky psanou početnici; byl to český překlad části jeho vlastního německého spisu z r. 1567, doplněný některými pasážemi z knihy Klatovského i dalších českých prací tohoto druhu. Goerlova knížka je pozoruhodná tím, že jako jediná má vytištěný obsah (registrum). Jednu jeho stránku vidíte na obrázku s nadpisem „Index anebo registrum pro snadnější vyhledání jedné každé věci, o čemžkoliv se v této knížce píše, a nejprvé: V traktátu prvním“.

Pod řádkem „Arythmetyka, od koho nalezená jest“ následují species aritmetiky: *numeratio* (zápis čísel, tady trojí), *additio* (sčítání), *subtractio* (odčítání), *duplatio* (zdvojování), *mediatio* (půlení), *multiplicatio* (násobení), *divisio* (dělení), *progressio* (posloupnost).

Pořadí „způsobů aritmetiky“ bylo ustálené, takže se mluvilo o prvním, druhém atd. Numeraci ani posloupnosti dnes za početní způsoby nepovažujeme; zdvojování a půlení se stala zvláštními

^{Registrum.}
I N D E X
 anebo
Registrum pro snadnějšý
wyhledání jedné každé věci /
o čemžkoliv se v této Knížce
píše a nejprvé:
V Traktátu prvním.

	Liff.
Arythmetyka od koho nalezena jest	— II.
Numeracy Latinská — — —	— w témž
Numeracy Česká — — —	— III
Numeracy na Linach — — —	— IIII
Additio — — — — —	— V.
Subtractio — — — — —	— VI
příklad Subtrakcý — — —	— VII
Duplatio — — — — —	— w témž
Mediatio — — — — —	— VIII
Multiplicatio — — — — —	— IX
Divisio — — — — —	— X
Progressio — — — — —	— XI
Exempla k vysvětlení multiplis	
čacý na Wáhu — — —	— w témž
	Wys

případy násobení, resp. dělení. Už Klatovský psal: „Duplatio a mediatio zdají se mi zbytečné a daremné zaneprázdnění. Nebo duplatio jiného nic není než skrze 2 multiplicatio. Mediatio jest skrze 2 divisio.“

A tak ze sedmi či osmi „způsobů“ aritmetiky zbyly čtyři základní početní výkony, které jsme si my osvojili už na začátku školní docházky.

Ivana Füzéková

V Polské lidové republice se vydává populárně vědecký měsíčník

DELTA

Zabývá se matematikou, fyzikou a astronomií. Vydávají jej za podpory ministerstva osvěty a výchovy tři polské vědecké společnosti — matematická, fyzikální a astronomická. Formát Deltý je A4 a každé číslo má mimo obálku 16 stran. Obsahem Delta připomíná naše Rozhledy.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1984.

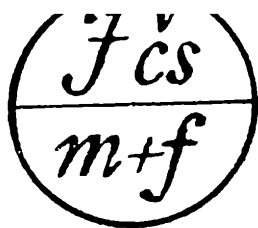
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(7)

**ROČNÍK 62, 1983/84
BŘEZEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE
Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK
Praha, prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc.,
PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář,
CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.

Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Mída: O jedné metodě důkazu nerov- nosti	277
L. Boček: Eulerův vzorec pro vzdálenost středů kružnic trojúhelníku opsané a vepsané	280
T. Hejnal: Exponenciální tvar komplex- ních čísel .	282
O. Lepil: Neobvyklá kyvadla	289
F. Jáchim: Čerenkovovo záření	295
R. Hudec: Infračervený pohled do ves- míru	297
R. Zajec: Prvé modely atomu .	299
S. Lada: Z historie jízdního kola .	302
Přemýšlíme, řešíme	305
Olympiády a SOČ .	313
Informace	314
Pohledy do dějin .	. 3. str. obálky
J. Pech: Slovník matematických terminů (37–40)	příloha

0 jedné metodě důkazu nerovností

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

Začněme jednoduchou úlohou. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla a, b platí:

$$(a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a - b)^2. \quad (1)$$

Tuto nerovnost můžeme dokázat např. tak, že nejprve vypočteme rozdíl R pravé a levé strany nerovnosti (1) a vhodně jej upravíme. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} R &= (a^2 - b^2)^2 - 4ab(a - b)^2 = (a - b)^2 \cdot (a + b)^2 - 4ab(a - b)^2 = \\ &= (a - b)^2 \cdot [a^2 + 2ab + b^2 - 4ab] = (a - b)^4 \end{aligned}$$

Odvodili jsme tak rovnost

$$(a^2 - b^2)^2 - 4ab(a - b)^2 = (a - b)^4,$$

z níž plyne dokazovaná nerovnost (1). Rovnost v nerovnosti (1) nastává, právě když $(a - b)^4 = 0$, tj. právě když $a = b$.

Předvedený postup použijeme k důkazu *Cauchyovy nerovnosti*. Tato nerovnost se nejlépe pamatuje ve vektorovém tvaru. Podle ní pro každé dva vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ z vektorového prostoru, v němž je definován skalární součin, platí

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|,$$

kde $|\mathbf{a}|$ a $|\mathbf{b}|$ jsou po řadě velikosti vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

V aritmetickém modelu n -rozměrného vektorového prostoru, kde n je přirozené číslo, podle Cauchyovy nerovnosti pro každé dvě uspořádané n -tice reálných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ platí:

$$|(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2},$$

tj.

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

Jiný tvar Cauchyovy nerovnosti dostaneme, umocníme-li poslední nerovnost na druhou. Dostáváme:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2). \quad (2)$$

Nerovnost (2) dokážeme. Nejprve vypočteme rozdíl

$$R = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Pro zjednodušení zápisů budeme nadále užívat součtových sumačních symbolů Σ . Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i,j=1}^n a_i^2 b_j^2 - \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_i)^2 + 2 \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (a_i b_i) (a_j b_j) \right) \right] = \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (a_i b_j)^2 - 2 \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (a_i b_j) (a_j b_i) \right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \end{aligned}$$

Odvodili jsme tak rovnost

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

jež se nazývá *Lagrangeovou identitou*. Pravá strana této rovnosti je zřejmě nezáporná, a proto tedy platí Cauchyova nerovnost (2). Současně je vidět, kdy nastane v nerovnosti (2) rovnost. Bude tomu tak, právě když pro každá dvě různá přirozená čísla $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ bude platit

$$a_i b_j - a_j b_i = 0 \quad (3)$$

Můžeme rozlišit dvě možnosti. Buď

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0, \quad (4)$$

anebo některé $a_i \neq 0$. Označme $\frac{b_i}{a_i} = d$, tj. $b_i = d \cdot a_i$. Z rovnosti (3) plynou obdobné rovnosti pro všechna další b_j a a_j . Díváme-li se na n -tice $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ jako na vektory, můžeme psát

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = d \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (5)$$

Z podmínek (4) a (5) plyne, že v nerovnosti (2) nastává rovnost, právě když vektory $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ jsou lineárně závislé, tj. jeden z nich je násobkem druhého.

V článku jsme si ukázali celkem neobvyklý postup důkazu nerovnosti. Vyšetřuje se rozdíl jejích stran a z odvozené rovnosti pak vyplýne dokazovaná nerovnost.

Cvičení

1. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla a, b platí:

a) $a^2 + 4b^2 + 2ab \geq 6ab$

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + c$,

c) $\sqrt{8ab} \leq (a+b)\sqrt{2}$,

d) $a^2\sqrt{5} + b^2\sqrt{2} \geq 2ab$.

2. Dokažte, že pro každá tři reálná čísla a, b, c platí:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$,

b) $\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ac)$,

c) $(a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 \geq ab + bc + ac$

3. Dokažte, že pro každé dvě n -tice reálných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ platí:

a) $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i$,

b) $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 + \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i^2$.

4. Užijte Cauchyovu nerovnost a dokažte:

a) Pro každou n -tici reálných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ platí:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

b) Pro každou n -tici kladných reálných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ platí:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2.$$

Literatura :

- [1] A. Kufner: Nerovnosti a odhady, ŠMM sv. 39, Mladá fronta, Praha 1975
 [2] I. Ch. Sivašinskij: Neravenstva v zadačach, Nauka, Moskva 1967

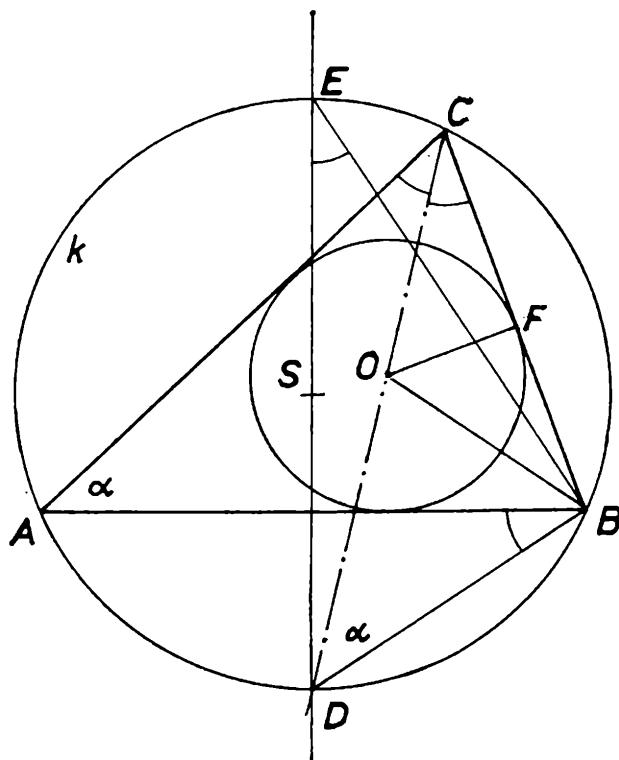
Eulerův vzorec pro vzdálenost středů kružnic trojúhelníku opsané a vepsané

RNDr. LEO BOČEK, CSc., MFF UK Praha

Pro vzdálenost d středů kružnice trojúhelníku opsané a vepsané platí tzv. Eulerův vzorec

$$(1) \quad d^2 = R(R - 2r),$$

kde R je poloměr kružnice opsané a r poloměr kružnice vepsané. Naznačíme si důkaz uvedeného vzorce (obr. 1); S je střed kružnice k trojúhelníku ABC opsané, O je střed kružnice vepsané. Mocnost bodu O ke

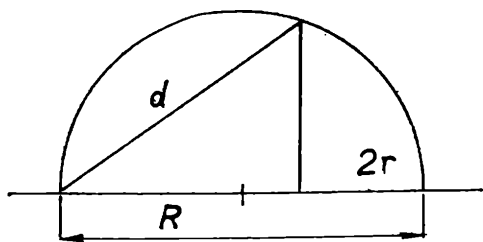


Obr. 1

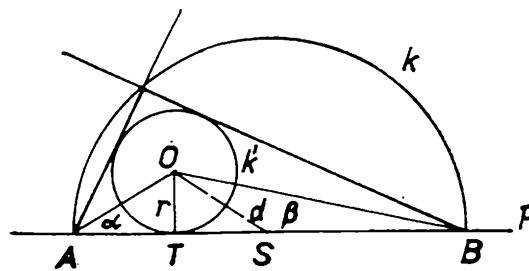
kružnici k je rovna $-|OX| |OY|$, kde XY je libovolná tětiva kružnice k procházející bodem O . Prochází-li tato tětiva body S a O , je $-|OX| |OY| = d^2 - R^2$. Je-li $X = C$, je $Y = D$, přičemž se sobě rovnají úhly ACD , DCB . Je tedy

$$(2) \quad R^2 - d^2 = |OC| |OD|$$

Dále je $|\sphericalangle DBO| = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, což vyplývá z rovnosti obvodových úhlů ACD a ABD . Z téhož důvodu je $|\sphericalangle ODB| = \alpha$, a proto $|\sphericalangle DOB| =$



Obr. 2



Obr. 3

$= \frac{1}{2} (\beta + \gamma)$. Trojúhelník DOB je tudíž rovnoramenný, $|OD| = |BD|$

Označíme-li ještě F patu kolmice vedené bodem O na BC a E druhý průsečík přímky SD s kružnicí k , vidíme, že jsou pravoúhlé trojúhelníky OFC a DBE podobné. Proto je

$$|DE| \cdot |DB| = |OC| \cdot |OF|, \text{ odkud } |OC| \cdot |OD| = 2Rr$$

Dosadíme-li tento výsledek do vztahu (2), dostaneme (1).

Pomocí Eulerova vzorce (1) můžeme jednoduše řešit úlohu z loňského ročníku matematické olympiády v NSR: Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, jsou-li dány poloměry R, r kružnic trojúhelníku opsané a vepsané.

Řešení: Na základě vzorce $d^2 = R(R - 2r)$ sestrojíme pomocí Euklidovy věty (například o odvěsně) vzdálenost d (obr. 2). Střed S kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku splývá se středem přepony. Zvolíme si proto libovolnou přímku p , na ní bod S (obr. 3). Sestrojíme kružnici k se středem S o poloměru R , její průsečíky s přímkou p označíme A, B . Jsou to vrcholy na přeponě hledaného trojúhelníku. Střed O kružnice k' trojúhelníku vepsané má od přímky p vzdálenost r a od středu S vzdálenost d . Takový bod existuje pouze pro $d \geq r$, tedy v případě $R \geq r(1 + \sqrt{2})$. To je nutná podmínka řešitelnosti úlohy. Sestrojíme kružnici k' , a protože je $d + r < R$, leží body A, B ve vnější oblasti kružnice k' . Tečny vedené body A, B ke kružnici k' tvoří hledaný trojúhelník. Označíme-li totiž $\alpha = |\sphericalangle OAT|$, $\beta = |\sphericalangle OBT|$, kde je T pata kolmice vedené bodem O k přímce p , je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R - \sqrt{d^2 - r^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{r}{R + \sqrt{d^2 - r^2}},$$

a tedy $\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = 1$.

Proto je $\alpha + \beta = 45^\circ$, a tudíž je obdrženy trojúhelník skutečně pravoúhlý. Až na shodnost má úloha právě jedno řešení.

Exponenciální tvar komplexních čísel

RNDr. TOMÁŠ HEJNAL, CSc., SOU ČKD Praha

1. Úvod

Účelem tohoto článku je seznámit čtenáře studující na středních školách s vyjádřením komplexních čísel v exponenciálním tvaru, s násobením, dělením, umocňováním a odmocňováním komplexních čísel vyjádřených v exponenciálním tvaru a s geometrickým významem těchto početních výkonů. Exponenciální tvar komplexních čísel není totiž většinou ve středoškolském učivu zahrnut, i když je velice často používán v matematice, fyzice i v technické praxi. Jeho použití přitom uvedené početní výkony s komplexními čísly podstatně zjednodušuje a objasňuje názorným způsobem jejich geometrický význam.

2. Předpokládané znalosti

U každého čtenáře tohoto článku předpokládáme:

(a) Znalost vyjádření komplexních čísel v algebraickém a goniometrickém tvaru včetně jejich znázornění v Gaussově rovině komplexních čísel a včetně jejich převodů z jednoho tvaru do druhého. Tuto znalost si zopakujte znázorněním čísla $z = 3 + 4i$ v rovině komplexních čísel a nalezením jeho goniometrického tvaru a dále znázorněním čísla $10 (\cos 37^\circ + i \sin 37^\circ)$ a nalezením jeho algebraického tvaru.

(b) Znalost nejednoznačnosti argumentu komplexních čísel, tj. znalost toho, že dvě komplexní čísla o stejné absolutní hodnotě $|z|$, jejichž argumenty se od sebe liší o celistvý násobek plného úhlu, představují ve skutečnosti totéž komplexní číslo $z = z_1 + iz_2$, takže při jejich vyjádření v algebraickém tvaru mají touž reálnou část z_1 a touž imaginární část z_2 . Proto můžeme libovolné komplexní číslo z vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} z &= z_1 + iz_2 = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= |z| [\cos (\varphi + n \cdot 360^\circ) + i \sin (\varphi + n \cdot 360^\circ)], \end{aligned} \quad (1)$$

kde n je libovolné celé číslo. Tuto znalost si zopakujte znázorněním čísla $z = 3 + 4i \doteq 5 \cdot [\cos (53^\circ + n \cdot 360^\circ) + i \sin (53^\circ + n \cdot 360^\circ)]$ v Gaussově rovině komplexních čísel pro několik hodnot celého čísla n .

(c) Znalost sčítání a odčítání komplexních čísel v algebraickém tvaru a znalost geometrického významu těchto početních výkonů jakožto vektorový součet či rozdíl vektorů, jimiž dotyčná čísla v Gaussově rovině znázorníme. Tuto znalost si zopakujte tak, že v Gaussově rovině znázorníte čísla $z = 3 + 4i$ a $w = 5 + 2i$, graficky naleznete jejich součet

$z + w$, a podle obrázku vysvětlíte, proč je reálná část tohoto součtu $3 + 5 = 8$ a imaginární část $4 + 2 = 6$.

(d) Znalost násobení a dělení komplexních čísel v algebraickém tvaru, přičemž není nutno znát geometrický význam těchto početních výkonů. Tuto znalost si zopakujte nalezením podílu w/z a součinu $w \cdot z$ pro $z = 3 + 4i$ a $w = 5 + 2i$.

(e) Znalost základních pravidel pro počítání s mocninami a odmocninami, tj. znalost vzorců

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad (2)$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \quad (3)$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad (4)$$

$$\sqrt[r]{a} = a^{1/r} \quad (5)$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad (6)$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \quad (7)$$

Tyto vzorce je možno si zopakovat na příkladech $10^3 \cdot 10^2 = 10^5$, $10^3/10^2 = 10^1$, $(10^3)^2 = 10^6$, $10\,000^{1/4} = \sqrt[4]{10\,000} = 10$, $10^{-3} = 1/10^3 = 1/1000 = 0,001$ a $(10\text{ m})^3 = 10^3 \cdot \text{m}^3 = 1000\text{ m}^3$.

3. Exponenciální tvar komplexních čísel

Libovolné komplexní číslo z , vyjádřené v algebraickém či goniometrickém tvaru dle vztahu (1), můžeme vyjádřit též v exponenciálním tvaru

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{i(\varphi + n \cdot 360^\circ)}, \quad (8)$$

kde n je libovolné celé číslo, např. $z = 3 + 4i \doteq 5 \cdot [\cos(53^\circ + n \cdot 360^\circ) + i \sin(53^\circ + n \cdot 360^\circ)] = 5 \cdot e^{i(53^\circ + n \cdot 360^\circ)}$. K rovnici (8) snadno dospějeme, užijeme-li ve vztahu (1) Eulerova vzorce

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha, \quad (9)$$

kde $e = 2,7182818\dots$ je Eulerovým číslem. (Je nutno dosadit $\alpha = \varphi$ a $\alpha = \varphi + n \cdot 360^\circ$.) Eulerovo číslo je iracionální a používáme ho v matematice velice často, především k vyjádření exponenciálních funkcí a základu přirozených logaritmů. Odvození Eulerova vzorce je poněkud obtížnější, takže se jím nyní nebudeme zabývat a výraz na levé straně Eulerova vztahu (9) budeme prozatím považovat za zkrácené označení výrazu na jeho pravé straně. Tím však považujeme exponenciální tvar

komplexních čísel pouze za zkrácené vyjádření jejich goniometrického tvaru, takže goniometrickým tvarem komplexních čísel se nebudeme dále zabývat. Při použití exponenciálního tvaru si však musíme uvědomit, že v něm vystupují mocniny Eulerova čísla e , s nimiž je nutno počítat skutečně jakožto s mocninami. Proto při provádění početních výkonů s komplexními čísly vyjádřenými v exponenciálním tvaru budeme pro mocniny Eulerova čísla e používat vzorce (2) až (7), případně i vzorec

$$e^{i \cdot n \cdot 360^\circ} = 1 \quad (10)$$

kde n je libovolné přirozené číslo, který okamžitě vyplývá z Eulerova vztahu (9) (je nutno dosadit $\alpha = n \cdot 360^\circ$) či ze znázornění tohoto čísla v Gaussově rovině.

4. Početní výkony s komplexními čísly

(a) *Sčítání a odčítání* komplexních čísel v exponenciálním tvaru neprovádíme, protože takovýto výpočet by byl složitý. Máme-li sečíst či odečíst dvě komplexní čísla udaná v exponenciálním tvaru, provedeme to nejsnáze tak, že je nejprve převedeme do algebraického tvaru, v algebraickém tvaru je sečteme či odečteme a výsledek pak buďto ponecháme v algebraickém tvaru, nebo ho převedeme opět do exponenciálního tvaru, např. $5 \cdot e^{i30^\circ} + 10 \cdot e^{i120^\circ} \doteq (4,330 + 2,500i) + (-5,000 + 8,660i) = -0,670 + 11,160i \doteq 11,180 \cdot e^{i93^\circ 30'}$

(b) *Násobení* komplexních čísel provádíme v exponenciálním tvaru podle pravidel pro počítání s mocninami velmi jednoduše. Máme-li vynásobit komplexní číslo

$$z = |z| \cdot e^{i(\phi_z + n_z \cdot 360^\circ)} \quad (11)$$

s číslem

$$w = |w| \cdot e^{i(\phi_w + n_w \cdot 360^\circ)} \quad (12)$$

obdržíme za použití vzorce (2)

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot e^{i(\phi_z + n_z \cdot 360^\circ)} \cdot |w| \cdot e^{i(\phi_w + n_w \cdot 360^\circ)} = \\ &= |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\phi_z + \phi_w)} \end{aligned} \quad (13)$$

přičemž poslední úpravu bylo možno provést na základě vzorce (10), neboť n_z i n_w jsou celá čísla, takže i jejich součet $n = n_z + n_w$ je celé číslo. Z tohoto výpočtu je ihned vidět geometrický význam součinu dvou komplexních čísel — součin $z \cdot w$ má absolutní hodnotu danou součinem absolutních hodnot obou činitelů $|z| \cdot |w|$; protože při násobení mocnin Eulerova čísla sčítáme jejich exponenty, je argument součinu komplexních čísel dán součtem argumentů obou činitelů, takže ho lze vyjádřit součtem $\phi_z + \phi_w$. Přitom vidíme, že obdržený výsledek je zcela jednoznačný v tom smyslu, že ho můžeme znázornit v Gaussově rovině komplexních čísel jediným vektorem, takže při jeho vyjádření v algebraickém

tvaru je jeho reálná i imaginární část určena zcela jednoznačně. Důsledkem této jednoznačnosti součinu $z \cdot w$ pak je, že při jeho výpočtu můžeme použít pouze jedinou hodnotu argumentů obou násobených čísel, tj. ve vztazích (11) až (13) jsme mohli zvolit např. $n_z = n_w = 0$. Jako ilustrativní příklad nyní vynásobme čísla

$$z = 8 \cdot e^{i60^\circ} \quad (14)$$

a

$$w = 2 \cdot e^{i45^\circ} \quad (15)$$

Jejich součin je

$$z \cdot w = 8 \cdot e^{i60^\circ} \cdot 2 \cdot e^{i45^\circ} = 16 \cdot e^{i105^\circ} \quad (16)$$

Grafické znázornění násobených čísel (14) a (15) a jejich součinu (16) přenecháváme čtenáři spolu s ukázáním vztahů mezi absolutními hodnotami a argumenty těchto tří komplexních čísel.

(c) *Dělení* komplexních čísel vyjádřených vztahy (11) a (12) provedeme zcela obdobně. Použijeme-li vzorec (3), máme

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| \cdot e^{i(\phi_z + n_z \cdot 360^\circ)}}{|w| \cdot e^{i(\phi_w + n_w \cdot 360^\circ)}} = \frac{|z|}{|w|} \cdot e^{i(\phi_z - \phi_w)} \quad (17)$$

přičemž poslední úpravu bylo možno provést opět na základě vzorce (10), neboť n_z i n_w jsou celá čísla, takže i jejich rozdíl $n = n_z - n_w$ je celé číslo. Z uvedeného výpočtu vidíme, že výsledek je opět jednoznačný, takže jsme mohli ve vztazích (11), (12) a (17) zvolit např. $n_z = n_w = 0$; absolutní hodnota podílu je dána podílem absolutních hodnot dělence a dělitele a argument podílu je dán rozdílem argumentů dělence a dělitele. Jako ilustrativní příklad ponecháváme čtenáři vydělení čísel (14) a (15), grafické znázornění dělence, dělitele i podílu tohoto příkladu v Gaussově rovině a objasnění vztahů mezi jejich absolutními hodnotami a argumenty.

(d) *Umocňování* komplexních čísel je v exponenciálním tvaru rovněž snadnou záležitostí. Při výpočtu s -té mocniny čísla z , vyjádřeného vztahem (11) za použití vztahu (4) a (7) ihned máme

$$z^s = (|z| \cdot e^{i(\phi_z + n_z \cdot 360^\circ)})^s = |z|^s \cdot e^{is\phi_z}, \quad (18)$$

neboť $n = s \cdot n_z$ je opět číslem celým, takže bylo možno použít vzorce (10). (Předpokládáme, že se jedná o výpočet mocniny s celočíselným exponentem s). Z tohoto výpočtu opět vyplývá jednoznačnost výsledku, takže jsme mohli při volbě argumentu položit v rovnicích (11) a (18) $n_z = 0$. Zároveň z toho plyne geometrický význam umocňování komplexních čísel — číslo z^s má absolutní hodnotu $|z|^s$ a argument $s \cdot \phi_z$. Jako ilustrativní příklad ponecháváme čtenáři výpočet třetí mocniny čísla z udaného rovnicí (14), grafické znázornění tohoto čísla i jeho třetí

mocniny a objasnění vztahů mezi absolutními hodnotami a argumenty obou znázorněných čísel.

(e) *Odmocňování* komplexních čísel je nejobtížnějším početním výkonem. Počítáme-li k -tou odmocninu z komplexního čísla z , vyjádřeného v exponenciálním tvaru dle rovnice (11), (k je přirozené číslo), potom podle pravidel pro počítání s odmocninami a mocninami (5), (7) a (4)

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{z} &= (|z| \cdot e^{i(\phi_z + n_z \cdot 360^\circ)})^{1/k} = |z|^{1/k} \cdot e^{i(\phi_z + n_z \cdot 360^\circ)/k} = \\ &= \sqrt[k]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\phi_z}{k} + \frac{n_z \cdot 360^\circ}{k}\right)}\end{aligned}\quad (19)$$

Podíl $n = n_z/k$ vystupující v exponentu Eulerova čísla je nyní celým číslem pouze pro určité hodnoty celého čísla n_z , takže nelze použít vzorce (10), výraz $n_z \cdot 360^\circ/k$ nepředstavuje vždy celistvý násobek plného úhlu a bylo nutno ho ve vztahu (19) ponechat. Proto při vyjádření odmocňovaného čísla nemůžeme vzít pouze jedinou hodnotu argumentu, tj. v rovnicích (11) a (19) nemůžeme zvolit např. $n_z = 0$. Dosazujeme-li nyní za n_z postupně čísla $n_z = 0, n_z = 1, \dots, n_z = k - 1$, dostáváme postupně k od sebe různých k -tých odmocnin komplexního čísla z , jejichž argumenty se od sebe liší vždy o úhel $360^\circ/k$. Pro $n_z = k$ již dostaneme totéž komplexní číslo jako pro $n_z = 0$ (zvětšení argumentu o plný úhel se v geometrickém znázornění a ve vyjádření tohoto čísla v algebraickém tvaru neprojeví), pro $n_z = k + 1$ totéž číslo jako pro $n_z = 1$ atd., takže dokončíme-li tuto úvahu pro zbývající přirozená čísla n_z a pro záporná celá čísla n_z vidíme, že pro žádné další celé číslo n_z již nedostaneme nový výsledek. Je tedy zřejmé, že k -tých odmocnin z libovolného komplexního čísla je vždy k , což souvisí s tím, že při výpočtu podílu $n = n_z/k$ (n_z je libovolné celé číslo, k je pevně určené přirozené číslo) můžeme dostat pouze k od sebe různých zbytků, jež nabývají hodnot $0, 1, \dots, k-1$. Ze vztahu (19) přitom vyplývá, že všechny k -té odmocniny z čísla z mají

stejnou absolutní hodnotu $\sqrt[k]{|z|}$, že argument první z nich je φ_z/k (pro $n_z = 0$) a že každá další má argument o $360^\circ/k$ větší nežli předcházející. Proto geometrické znázornění těchto k různých k -tých odmocnin tvoří vektory vycházející z počátku a končící ve vrcholech pravidelného k -úhelníka v Gaussově rovině, jehož střed je totožný s počátkem; přitom spojnice počátku s prvním vrcholem (pro $n_z = 0$) svírá s kladnou reálnou poloosou úhel φ_z/k . Jako ilustrativní příklad si najdeme třetí odmocninu z čísla daného rovnicí (14):

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8 \cdot e^{i60^\circ}} &= \sqrt[3]{8 \cdot e^{i(60^\circ + n \cdot 360^\circ)}} = \sqrt[3]{8 \cdot e^{i(60^\circ + n \cdot 360^\circ)/3}} = \\ &= 2 \cdot e^{i(20^\circ + n \cdot 120^\circ)}\end{aligned}\quad (20)$$

Znázornění čísla z dle rovnice (14) a jeho tří třetích odmocnin dle rovnice (20) pro $n = 0$, $n = 1$ a $n = 2$ přenecháváme čtenáři, který se jistě přesvědčí i o tom, že koncové body vektorů, jimiž tyto odmocniny znázorní, jsou vrcholy pravidelného (tj. rovnostranného) trojúhelníka se středem v počátku a že pro další hodnoty celého n již nedostane žádnou další odmocninu z čísla z . Vidíme tedy, že výsledek výpočtu (20) můžeme vyjádřit též ve tvaru

$$2 \cdot e^{i(20^\circ + n \cdot 120^\circ)} = \begin{cases} 2 \cdot e^{i20^\circ} \doteq 1,879 + 0,684i \\ 2 \cdot e^{i140^\circ} \doteq -1,532 + 1,286i \\ 2 \cdot e^{i260^\circ} \doteq -0,347 - 1,970i \end{cases} \quad (21)$$

což souvisí s tím, že pro libovolné celé číslo n dostáváme při dělení třemi výraz $n/3 = a + b/3$, kde číslo a jakožto neúplný podíl (tj. „výsledek dělení“) je celým číslem a číslo b , jakožto zbytek může nabývat pouze hodnot $b = 0$, $b = 1$ a $b = 2$, takže v argumentu výsledku (20) vystupuje vlastně výraz $20^\circ + n \cdot 120^\circ = 20^\circ + n \cdot 360^\circ/3 = 20^\circ + a \cdot 360^\circ + b \cdot 120^\circ$. Protože odmocňování komplexních čísel je poněkud obtížnější, může čtenář v tomto případě provést i zkoušku uváděného příkladu a přesvědčit se, že nalezením třetí mocniny všech čísel daných rovnicí (21) dostane zpět výchozí číslo dané rovnicí (14).

5. Diskuse

Nyní předkládáme čtenáři několik dalších podnětů k zamyšlení:

(a) Souvisí nějak skutečnost, že neumíme upravit výrazy $a^r + a^s$ či $a^r - a^s$ s tím, že součet a rozdíl komplexních čísel nelze v exponenciálním tvaru jednoduše počítat?

(b) Je možno pomocí sinové a kosinové věty odvodit vztahy pro výpočet součtu a rozdílu komplexních čísel vyjádřených v exponenciálním tvaru? Jestliže ano, jsou tyto vztahy jednoduché?

(c) Lze vztahy (2)–(7) postupně zobecňovat tak, aby základy mocnin byla čísla komplexní a exponenty byly postupně čísla celými, racionálními, reálnými a nakonec i komplexními?

(d) Je při výpočtu vyšších mocnin komplexních čísel vyjádřených v algebraickém tvaru vhodnější použít binomické věty, anebo je výhodnější převést je do exponenciálního tvaru a umocnit je pak dle vztahu (18)?

(e) Můžeme vypočítat druhou odmocninu komplexního čísla, užijeme-li pouze algebraický tvar? Lze tak počítat i vyšší odmocniny?

(f) Pomocí Eulerova vztahu lze všechna předchozí tvrzení přepsat z exponenciálního tvaru do goniometrického tvaru. Budou tato tvrzení v goniometrickém tvaru jednodušší a pochopitelnější?

(g) Jak souvisí umocňování komplexních čísel o absolutní hodnotě rovné jedné (tj. umocňování komplexní jednotky) s *Moirveovou větou* psanou ve tvaru

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos (n\varphi) + i \sin (n\varphi) \quad ?$$

(h) Jestliže nyní budeme považovat reálná čísla za speciální případ čísel komplexních, budeme i nadále tvrdit, že k -tá odmocnina z kladného čísla je pouze jediná a je kladným číslem?

(i) Umožnilo zavedení exponenciálního tvaru komplexních čísel jednoduché objasnění geometrického významu násobení, dělení, umocňování a odmocňování komplexních čísel?

(j) Je možno vyjádřit předchozí vztahy tak, aby argumenty byly udávány v radiánech?

(k) Jaký je vztah mezi výpočtem k -té odmocniny komplexních čísel a rozkladem celých čísel na třídy kongruentních prvků modulo k ? (Dvě celá čísla b, c , jsou kongruentní modulo k , píšeme

$$b \equiv c \pmod{k},$$

jestliže jejich rozdíl $b - c$ je dělitelný přirozeným číslem k beze zbytku. K tomu však dojde pouze tehdy, jestliže obě tato čísla dávají při dělení číslem k tentýž zbytek, takže je zařadíme do téže třídy vzájemně kongruentních čísel. Podle možných velikostí zbytku, jež musí být přirozeným číslem, usoudíme, že množina celých čísel se rozpadá na k tříd vzájemně kongruentních celých čísel.)

6. Závěr

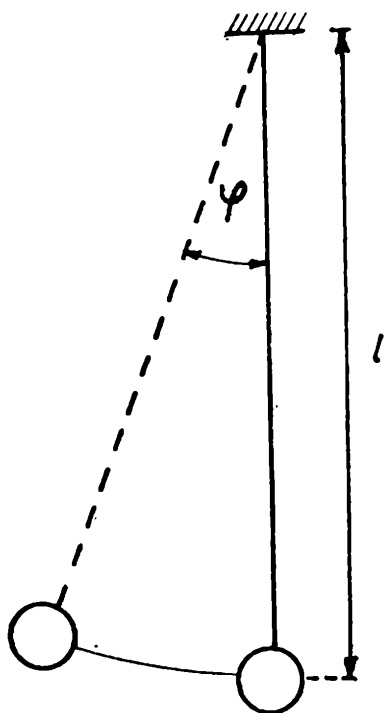
Při výpočtech s komplexními čísly je vhodné používat pouze algebraický a exponenciální tvar. Převody z jednoho tvaru do druhého lze snadno a rychle provádět pomocí modernějších kapesních kalkulátorů. Sčítání a odčítání je vhodné provádět v algebraickém tvaru, násobení a dělení lze provádět v obou tvarech a při umocňování a odmocňování je nutno dát přednost exponenciálnímu tvaru.

Neobvyklá kyvadla

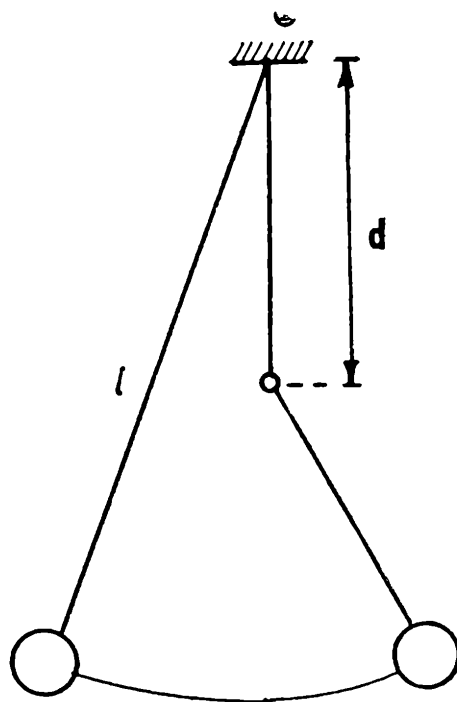
RNDr. OLDŘICH LEPIL, CSc., UP, Olomouc

Dalo by se říci, že kyvadlo a rozbor jeho pohybu patří ke „zlatému fondu“ našich učebnic fyziky. To je dáno především tím, že kyvadlo bylo v minulosti prakticky nejdůležitějším časoměrným zařízením. Proto bylo nutno důkladně propracovat jeho teorii, aby sloužilo nejen v pendlovkách našich prababiček, ale i při měření poloh hvězd v astronomických observatořích, při určování zeměpisné délky nebo ve fyzikální laboratoři při přesném měření tíhového zrychlení.

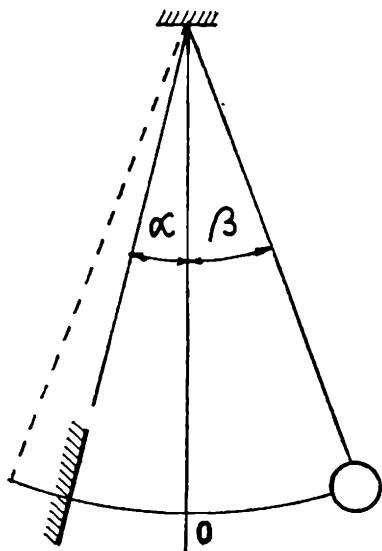
Dnes bychom ovšem kyvadlo v hodinách hledali jen těžko, a tak můžeme termín kyvadlo považovat za historické označení tělesa, které je zavěšeno nad těžištěm a může volně kmitat s malou amplitudou výchylky kolem rovnovážné polohy. Nejjednodušším objektem tohoto druhu je těleso o hmotnosti m , které je zavěšeno na tuhém vlákně nebo tyči o zanedbatelné hmotnosti (obr. 1). Pro periodu T tohoto jednoduchého, tzv. *matematického kyvadla* je v každé učebnici fyziky odvozen známý vztah



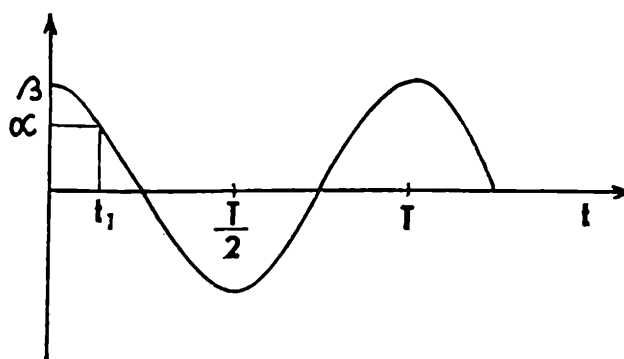
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

v němž l je délka závěsu kyvadla a g je tíhové zrychlení.

Pohyb kyvadla však poskytuje řadu příkladů, na nichž si můžeme prohloubit schopnost fyzikální analýzy a popisu reálných dějů. Proto se v tomto příspěvku zaměříme na tři příklady pohybu kyvadel, jejichž neobvyklost spočívá v tom, že jejich kmitání je ovlivňováno vnějším působením.

Příklad 1: Uvažujme kyvadlo, které je zavěšeno v blízkosti svislé stěny a do stěny je zatlučen hřebík právě v polovině délky l závěsu kyvadla (obr. 2). Určete, s jakou periodou bude kyvadlo kmitat.

Rozbor kmitání tohoto kyvadla nebude nijak složitý. Perioda T kyvadla se zřejmě bude skládat ze dvou částí (poloperiod), pro které platí

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{a} \quad T_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}},$$

takže

$$T = T_1 + T_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \doteq 1,7 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Příklad jsme řešili pro zvláštní případ, kdy hřebík je od bodu závěsu ve vzdálenosti $d = \frac{l}{2}$. Odvoďte samostatně obecný vztah pro periodu tohoto kyvadla při libovolné vzdálenosti hřebíku od bodu závěsu.

Příklad 2: Na nakloněné stěně, která svírá se svislým směrem úhel α (obr. 3), je zavěšeno kyvadlo délky l . Kyvadlo kmitá ve svislé rovině,

kolmé ke stěně. V počátečním okamžiku bylo kyvadlo odkloněno o úhel β od svislého směru. Určete periodu kyvadla v případě, že $\alpha < \beta$ a náraz kuličky kyvadla na stěnu je dokonale pružný.

Kdyby kyvadlu nestála v cestě stěna, kmitalo by s periodou určenou rovnicí (1). Označíme tuto periodu T_0 . Jestliže kulička narazí na stěnu, velikost její rychlosti se nezmění, ale kulička se začne pohybovat opačným směrem. To znamená, že perioda T kyvadla bude menší o dobu τ , za kterou by kyvadlo vykonalo pohyb z bodu A do bodu B a zpět.

Poněvadž kyvadlo koná harmonický pohyb, můžeme okamžitý úhel φ , který svírá závěs se svislým směrem, popsat rovnicí

$$\varphi = \beta \cos \omega t ,$$

jejímž grafem je kosinusoida na obr. 4. Z grafu je zřejmé, že hledaný čas $\tau = 2 t_1$, kde t_1 je čas, za který kyvadlo přejde z největší výchylky β do výchylky α . Tento čas určíme z rovnice

$$\alpha = \beta \cos \omega t_1 ,$$

odtud

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

Pak

$$\tau = 2 t_1 = \frac{2}{\omega} \arccos \frac{\alpha}{\beta} = \frac{T_0}{\pi} \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

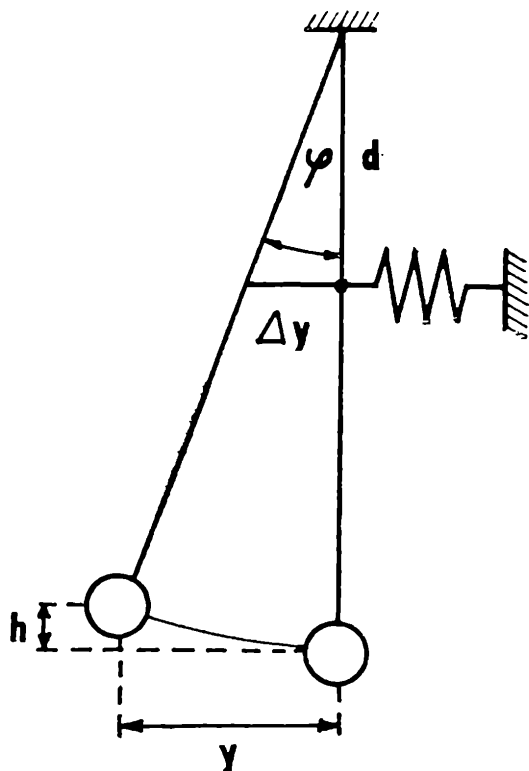
Pro periodu kyvadla tedy platí vztah

$$T = T_0 - \tau = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

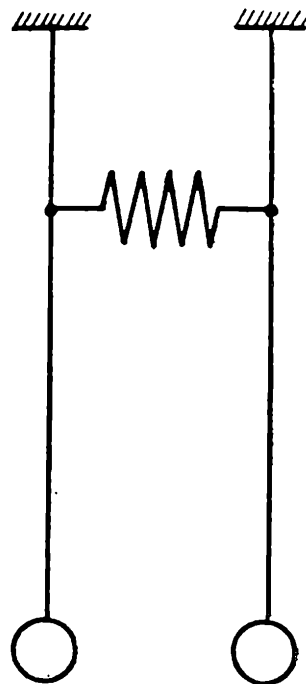
Snadno se přesvědčíme, že pro $\alpha = \beta$ je $T = T_0$ ($\arccos 1 = 0$) a pro $\alpha = 0$ je $T = \frac{T_0}{2} \left(\arccos 0 = \frac{\pi}{2} \right)$.

Příklad 3: Ke kyvadlu, které je tvořeno kuličkou o hmotnosti m na konci tuhé tyče délky l (hmotnost tyče zanedbáme), je ve vzdálenosti d od závěsu připojena pružina (obr. 5). Druhý konec pružiny je pevný; tuhost pružiny označíme k (tuhostí pružiny rozumíme veličinu $k = \frac{F}{y}$, tzn. sílu, která způsobuje jednotkovou deformaci pružiny). Určete periodu kyvadla.

Tento příklad je složitější a jeho řešení najdeme rozбором pohybu kyvadla z hlediska energie. Jestliže při největší výchylce z rovnovážné polohy svírá kyvadlo se svislým směrem úhel φ_m , bude jeho potenciální



Obr. 5



Obr. 6

energie dána změnou polohy kuličky a deformací pružiny. Celková potenciální energie

$$E_p = mgh + \frac{1}{2} k (\Delta y)^2.$$

Poněvadž

$$h = l - l \cos \varphi_m = l (1 - \cos \varphi_m) = 2l \sin^2 \frac{\varphi_m}{2}$$

a

$$\Delta y = d \sin \varphi_m$$

bude

$$E_p = 2 mgl \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} + \frac{1}{2} kd^2 \sin^2 \varphi_m$$

Naše úvahy platí pro malé výchylky, kdy $\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} \approx \frac{\varphi_m^2}{4}$ a $\sin^2 \varphi_m \approx \varphi_m^2$, takže

$$E_p = \frac{1}{2} mgl \varphi_m^2 + \frac{1}{2} kd^2 \varphi_m^2.$$

Když kyvadlo prochází rovnovážnou polohou, má největší kinetickou energii. Rychlost kyvadla dosahuje největší hodnoty (odvození najdete v učebnici fyziky)

$$v_m = \omega y \approx \omega l \varphi_m ,$$

a kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 l^2 \varphi_m^2$$

Na základě zákona zachování energie můžeme psát $E_p = E_k$, takže

$$\frac{1}{2} m \omega^2 l^2 \varphi_m^2 = \frac{1}{2} m g l \varphi_m^2 + \frac{1}{2} k d^2 \varphi_m^2$$

a po úpravě najdeme vztah pro úhlovou frekvenci kyvadla

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{k d^2}{m g l}} ,$$

v němž ω_0 je úhlová frekvence odpovídající vztahu (1). Vidíme, že vlivem působení pružiny kmitá kyvadlo s větší frekvencí ($\omega > \omega_0$) a jeho

perioda je kratší. Výraz $\frac{k d^2}{m g l}$ je konstantní a nahradíme ho konstantou

K . Tato konstanta je zřejmě nejvíc ovlivněna polohou místa, v němž je pružina upevněna. Čím větší bude vzdálenost d , tím více se budou lišit úhlové frekvence ω a ω_0 a kyvadlo bude tím více rozladěno. K zajímavému výsledku bychom dospěli v případě, že $d = l$. Najděte vztah pro výslednou úhlovou frekvenci, jestliže víte, že pro úhlovou frekvenci pružinového oscilátoru platí vztah $\omega_p^2 = \frac{k}{m}$.

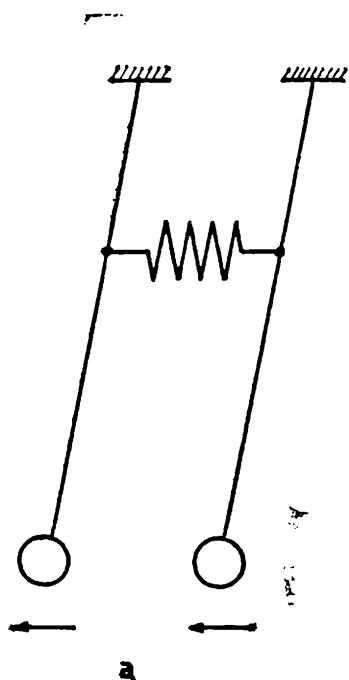
Výsledky řešení příkladu 3 použijeme k výkladu zajímavého a fyzikálně významného případu tzv. *spřažených kyvadel* (obr. 6). Kdybychom jedno kyvadlo drželi pevně, pak jde o případ, který jsme právě řešili, a kyvadlo by kmitalo s úhlovou frekvencí

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + K}$$

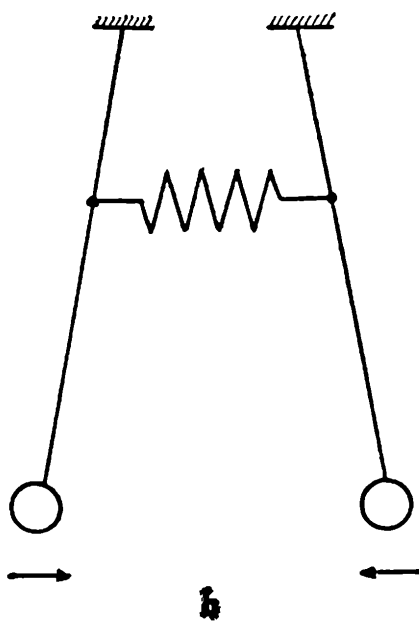
V případě, že obě kyvadla budou kmitat se stejnou amplitudou výchylky, mohou nastat v podstatě dva základní případy, označované jako kmitání symetrické (obr. 7a) a antisymetrické (obr. 7b).

Při symetrickém kmitání se obě kyvadla pohybují stejným směrem, pružina mezi nimi se nedeformuje, takže kyvadla na sebe vlastně nepůsobí. Jejich úhlová frekvence $\omega_1 = \omega_0$. Naopak, při antisymetrickém kmitání se kyvadla pohybují opačným směrem, pružina se napíná, avšak její střed je v klidu. Výsledek je takový, jako by kmitání ovlivňovaly dvě pružiny spojené paralelně. Z teorie vyplývá, že výsledná tuhost k' takto spojených pružin: $k' = 2k$, a tedy úhlová frekvence antisymetricky kmitajících kyvadel je

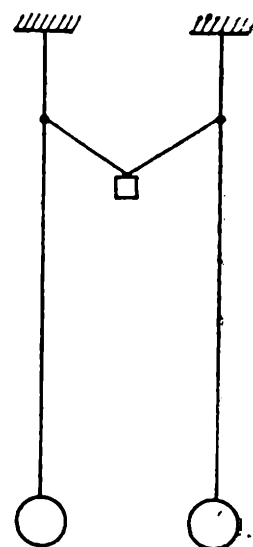
$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + 2K}$$



Obr. 7



Obr. 8



Dospěli jsme k velmi zajímavému závěru, že systém spřažených kyvadel má dvě frekvence vlastního kmitání, které odpovídají symetrickým (ω_1) a antisymetrickým (ω_2) kmitům. Přitom tyto frekvence jsou souměrně rozloženy na obě strany od frekvence ω .

O důsledcích tohoto poznatku se snadno můžeme přesvědčit pokusem se dvěma kyvadly, která spřáhneme způsobem patrným z obr. 8. Jestliže jedno kyvadlo rozkmitáme, jeho kmitání se po chvíli přenese na druhé kyvadlo a tento děj se opakuje. V soustavě spřažených kyvadel vznikají rázy, jejichž frekvence je určena rozdílem frekvencí symetrických a antisymetrických kmitů. O tom se snadno přesvědčíte, když jejich frekvence, nebo lépe periody změříte pomocí stopek (měříme kmitání ve směru kolmém k nákrese).

Poznatek o symetrickém a antisymetrickém kmitání má řadu důsledků, které známe i z jiných oblastí fyziky nebo z technické praxe. Např. v radiotechnice se rozladění jedné frekvence na dvě ve vázaných oscilačních obvodech využívá v konstrukci rozhlasových přijímačů (mezifrekvenční filtry v superheterodynech). Můžeme dokonce jít až do fyziky pevných látek, kde na principu spřažených kyvadel vysvětlujeme rozpad energetických hladin elektronů v atomech krystalové mříže.

A tak se nám dnes kyvadlo nehodí ani tak jako součást hodin, ale jako názorný model pro pochopení řady i velmi složitých fyzikálních dějů.

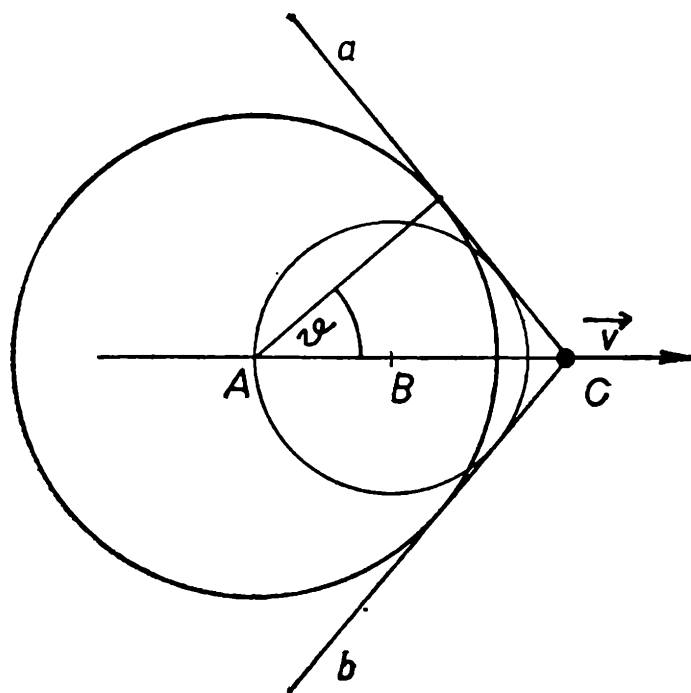
Čerenkovovo záření

FRANTIŠEK JÁCHIM, Vimperk

Roku 1934 si *P. A. Čerenkov* při jednom ze svých pokusů všiml neobvyčejného jevu. Elektron pohybující se kapalinou byl provázen namodralým svítícím kuželem. Jev byl objasněn v roce 1937 *I. E. Tammem* a *I. M. Frankem*, kteří spolu s *P. A. Čerenkovem* dostali za objev a teoretické zdůvodnění jevu roku 1958 Nobelovu cenu.

Příčinou vzniku světelného záření, které provází letící elektron, je to, že elektron pohybující se rychlostí vyšší, než je rychlost světla v tomto prostředí, je brzděn svým vlastním elektromagnetickým polem, a musí tedy emitovat elektromagnetické záření.

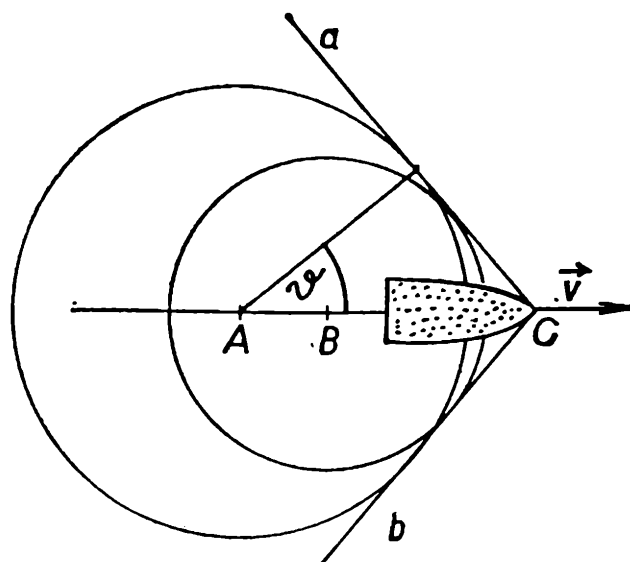
Zmíněný jev má svoji analogii v mnohem prostším ději — ve zvlnění vodní hladiny za plující lodí. Loď plující klidnou hladinou vytváří na ní vlny, jejichž čelo je na obr. 1. znázorněno polopřímkami *a*, *b*. K situaci



Obr. 1

na obr. 1 dojde však pouze tehdy, pohybuje-li se loď rychleji než vzbuzené vlny. Loď se pohybuje ve směru přímky *AC* rychlostí *v*. Je-li před lodí v bodě *A*, stane se tento bod zdrojem vlnění. Postupně se zdroji vlnění stávají i body *B* a *C*. Zatímco loď urazí vzdálenost *AC*, uplyne čas *t* a za tento čas se vlna z bodu *A* dostane na kružnici s poloměrem *u · t*, kde *u* je velikost rychlosti šíření vln na vodní hladině. Pro velikost úhlu *φ* pak platí vztah

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot t}{v \cdot t} = \frac{u}{v}. \quad (1)$$



Obr. 2

Úhel ϑ je tedy úhel udávající směr šíření vln vzhledem ke směru pohybu lodi.

Nahradme nyní loď rychle letícím elektrónem a vodu průhledným dielektrikem. Půjde o jev analogický, pouze v důsledku kvantitativních změn rychlostí tělesa a vlnění v látce dojde ke kvalitativně jinému průvodnímu efektu. Označíme-li rychlost elektrónu v a rychlost světla ve vakuu c , potom vztah (1) lze zapsat takto:

$$\cos \vartheta = \frac{(c/n) \cdot t}{v \cdot t} = \frac{c}{n \cdot v}. \quad (2)$$

Světlo se v každém prostředí pohybuje rychlostí c/n , kde n je index lomu pro dané prostředí. Abychom však situaci mohli znázornit podle obr. 2, musí být $v > c/n$. Poznamenejme ještě, že v případě s lodí se vlnění šíří v rovině (po hladině), v případě s letícím elektrónem v homogenním prostředí jde o prostorové šíření vlnění (kuželová plocha).

Čerenkovovo záření je emitováno právě tehdy, pohybuje-li se elektrón v prostředí rychleji než světlo. Neodporuje však tento požadavek speciální teorii relativity? Vždyť rychlost světla je mezní rychlostí pohybu jakéhokoli signálu. Ale pozor, první Einsteinův postulát speciální teorie relativity hovoří pouze o rychlosti světla ve vakuu jako limitní rychlosti materiálního světa. V různých prostředích se světlo pohybuje různou rychlostí, vždy menší než ve vakuu. Např. ve vodě, jejíž index lomu je asi 1,33, se světlo pohybuje rychlostí přibližně $225\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Podobně je tomu i v benzolu, s nímž Čerenkov dělal své pokusy. Protože rychlost elektrónu v benzolu byla větší než rychlost světla v této látce, vznikalo doprovodné vlnění, jehož vlnová délka byla ve viditelné oblasti spektra, a tak mohl být pozorován svítící doprovodný kužel s úhlem $(\pi - 2\vartheta)$ u hlavního vrcholu. Pro úhel ϑ vycházela hodnota 38 stupňů 30 minut, která se od vypočtené lišila pouze o 10 minut.

Svůj podíl na objevu záření dnes nazývaného Čerenkovovým má

i *S. I. Vavilov* (1891—1951), fyzik zabývající se studiem fotoluminiscence, zejména luminiscence roztoků. Proto se také (zvláště v SSSR) záření nazývá Vavilovovo-Čerenkovovo.

Fyzikálně je vztah (2) cenný tím, že na základě změřeného úhlu θ lze stanovit rychlost pohybující se částice. Přestože je Čerenkovovo záření velmi slabé, lze je fotonásobičem přeměnit na elektrické impulsy a ty potom registrovat. Čerenkovova počítače lze využít rovněž k registraci fotonů, které při dopadu uvolňují elektrony a ty potom mohou budít Čerenkovovo záření. Záření δ se směřuje do olověného bloku, z něhož vystupují rychlé elektrony a ty v plexiskle budí Čerenkovovo záření. Kromě plexiskla jsou k přímému pozorování vhodné především organické izolanty.

Infračervený pohled do vesmíru

RNDr. RENÉ HUDEC, CSc., Astronomický ústav ČSAV Ondřejov

V poslední době dochází — zejména díky pokroku kosmické techniky — k růstu zájmu astronomů o pozorování v infračervené (tepelné) a submilimetrové (málo prozkoumané oblasti mezi zářením infračerveným a rádiovým) oblasti elektromagnetického spektra. Ukazuje se totiž, že právě tímto způsobem lze získat unikátní informace například o vzniku hvězd a hvězdných soustav a dokonce i o struktuře celého vesmíru, tedy o zásadních astrofyzikálních problémech.

Proč se tato pozorování začínají uskutečňovat až nyní? Je to především tím, že pozorování ze zemského povrchu jsou v těchto oblastech vážně rušena zemskou atmosférou, a tak jsme odkázáni na měření z palub umělých družic. V pásmu mezi 2 a 30 μm propouští zemské ovzduší záření jen v několika „oknech“ a v oblasti mezi 30 a 1000 μm je dokonce zcela neprůhledné.

Od února 1983 pracuje na oběžné dráze speciální mezinárodní družice IRAS, na jejímž vývoji se podíleli vědci z Holandska, Velké Británie a z USA. Jejím hlavním úkolem je pozorování oblohy ve vlnových délkách mezi 8 a 120 μm infračerveným dalekohledem o průměru 60 cm. Teleskop musí být chlazen na velmi nízké teploty kapalným héliem, aby vlastní tepelné záření přístroje nerušilo měření vzdálených nebeských zdrojů. Jinak — bez chlazení — by totiž bylo vlastní záření přístroje silnější než kosmické zdroje. Očekáváme, že družice postupně zmapuje celou oblohu s rozlišením asi 1,5 obloukové minuty při vlnové délce 100 μm . Počítá se s detekcí velkého počtu — alespoň 100 000 — zdrojů,

a to jak hvězd, tak i galaxií, oblaků mezihvězdného plynu a prachu a také těles naší sluneční soustavy. Pozoruhodné je, že družice IRAS se již podílela i na objevu několika komet, mimo jiné i komety IRAS-Araki-Alcock, která byla v květnu 1983 po krátkou dobu jasným objektem na noční obloze viditelným i pouhým okem.

Bezesporu nejzajímavější možností infračervené astronomie je přímé sledování procesu rození hvězd v prachových a plynných mračnách. Viditelné světlo je silně rozptylováno prachovými částicemi, a proto v něm dovnitř oblaků obklopujících nově vznikající hvězdy nevidíme. Teprve v oblasti vlnových délek přes $1\ \mu\text{m}$ lze vidět dovnitř nerušeně. Pozoruhodné je, že některé galaxie jsou v infračerveném záření svítivější než ve viditelném světle. Zdroj tohoto intenzivního záření dosud zcela přesně neznáme, ale není vyloučeno, že opět pozorujeme rození hvězd skrytých za hustými prachovými mračky. Potíž je v tom, že takové galaxie nejsou žádnou výjimkou, přitom v řadě případů jsou již kosmologicky staré a co je nejpodstatnější — pozorované záření by odpovídalo rození gigantického množství — zhruba 100 miliónů — hvězd. Proto očekáváme, že teprve další data přinesou alespoň částečné vysvětlení tohoto jevu.

Obor vlnových délek mezi 1 a $10\ \mu\text{m}$ je i oblastí emise řady molekul — dosud jich tam bylo detekováno přes 50. Většinou tomu bylo v tmavých mračnách, kde jsou molekuly chráněny před ultrafialovým zářením. Ve vesmíru byly tímto způsobem detekovány i organické sloučeniny — není proto divu, že máme již několik hypotéz o vzniku chemických předchůdců života v kosmu a jejich roli při zrození života na naší planetě. Emise některých molekul — např. CO — lze využít i ke studiu rozdělení hmoty v naší Galaxii a dalších galaktických soustavách, protože září díky srážkám s vodíkem, který představuje největší část kosmické hmoty. Ale v infračerveném oboru lze sledovat například i vzdálené galaxie, které se od nás vzdalují velkou rychlostí blíží se rychlosti světla. Jejich světlo je proto posunuto směrem k červené oblasti takovým způsobem, že se přesouvá do infračerveného oboru. Infračervená pozorování jsou nesmírně důležitá i pro pochopení vesmíru jako celku. Objev záření o teplotě 3K patří k největším astronomickým objevům poslední doby a podrobný výzkum mikrovlnného záření s velkým rudým posuvem nám poskytne další informace o zrodu a struktuře celého vesmíru.

Pro řadu úkolů je však i šedesáticentimetrový infračervený dalekohled příliš malým přístrojem. Tak například zrození hvězd předchází podle současných názorů vznik zhuštěnin — kondenzací v molekulárních oblacích. Než se začne smršťovat, má průměrná předhvězdná mlhovina hmotnost přibližně hmotnosti našeho Slunce, teplotu asi 10 kelvinů a průměr asi 0,3 světelného roku. Nejbližší oblaka, v nichž se rodí hvězdy, jsou od nás asi 500 světelných let daleko, a protože pro jejich studium

- SYMBOL** (od řec. *syn* = sou-, s, spolu + *balló* = házet, vrhat) — „hozené dohromady“; předmět, který v sobě zahrnuje obecnější pojem; který má hlubší, obvykle skrytý význam; znak; znamení; v matematice: znak matematického objektu, vztahu nebo operace;
SYMBOLICKÝ, SYMBOLIKA — vyjadřování pomocí symbolů
- SYMETRIE** (od řec. *syn* = sou-, s, spolu + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — souměrnost
- SYNTÉZA** (od řec. *syn* = s, sou-, spolu + *tithémi* = klásti, stavět) — „sestavení“, „složení“; sklad, shrnutí, sjednocení v celek
- SYSTÉM** (od řec. *syn* = s, sou- + *histémi* = stavět, postavit) — „sestavení“; soustava; způsob uspořádání („sestavení“) věcí, myšlenek apod. podle určitého hlediska; v matematice: systém množin (běžnější termín místo „množina množin“); parametrický systém útvarů apod.
- TANGENS, TANGENTA** (od lat. *tango*, -ere = dotýkat se) — dotýkající se, tečný; tečna (zřídka); hlavní význam: goniometrická funkce, jejíž hodnotu naměřujeme na tečně jednotkové kružnice; **TANGENCIÁLNÍ** — tečný, tečnový; **TANGENTOIDA** latinizované -oideus = podobající se) — „podobající se funkci tangens, týkající se funkce tangens“; křivka, která je grafickým zobrazením funkce tangens
- TAUTOLOGIE** (od řec. *tauton* = totéž + *logos* = slovo, řeč) — „řeč o tomtéž“; vyjádření téhož jinými slovy; v logice: tautologie výrokového počtu — výroková formule, která je pravdivá, ať jsou hodnoty výrokových proměnných v nich užité jakékoliv
- TEODOLIT** (od řec. *theaomai* = dívat se; koncové -lit vzniklo analogií) — přístroj k měření vodorovných a svislých úhlů (jednou z jeho podstatných součástí je dalekohled)
- TEORÉM** (od řec. *theaomai* = dívat se) — obecně platná poučka; správně utvořená věta, pro kterou existuje důkaz
- TEORIE** (z řec. *theória* = podívaná, dívání se k *theaomai* = dívat se) — „pohled na problémy“; abstraktní systém poznatků o určitém okruhu jevů, často pokus o výklad jevů; v logice: deduktivní teorie — systém vět (teorémů) odvoditelných z axiomů
- TERMÍN** (z lat. *terminus* = mezník, hranice, cíl) — „přesně ohraničená mez“ v oblasti času nebo jazykového vyjadřování; lhůta (přesně stanovená doba); odborné pojmenování s jednoznačným významem
- TERNÁRNÍ** (od lat. *terni* = po třech, trojí) — trojitý, složený ze tří složek
- TETRAEDR** (od řec. *tetra* = čtyři + *hedra* = vše, na čem se dá sedět, odpočívat) — čtyřstěn; těleso se čtyřmi možnými podstavami („na nichž může spočinout“)
- TOLERANCE** (od lat. *tolero*, -are = snášet, trpět, vydržet) — snášenlivost, trpělivost; rozsah přípustné nepřesnosti (nepřesnost, kterou „ještě sneseme“); dovolená odchylka

- 38 **TOPOGRAFIE** (od řec. *topos* = místo + *grafó* = rýt, psát) — místopis; nauka o vzhledu zemského povrchu a o jeho znázornění na mapě
- TOPOLOGIE** (od řec. *topos* = místo + *logos* = slovo, řeč) — „nauka o místech“; matematický obor, původně „analýza polohy“ geometrických útvarů s využitím vlastností spojitosti, dnes rozsáhlá část moderní matematiky
- TRAJEKTORIE** (od lat. *trans* = přes, za + *iacio*, -ere = házet, vrhat) — dráha předmětu, který „byl přehozen“ z jednoho místa na druhé; spojitá křivka, kterou opíše pohybující se bod
- TRANS-, TRANZ-** (z lat. *trans* = přes, za) — předpona mající význam „přesahování; směr napříč, z jedné strany na druhou; pronikání; přetvoření, přepracování, přeměna, pře-“
- TRANSCENDENTNÍ** (od lat. *trans* = přes, za + *scando*, -ere = stoupat) — „překračující meze“, ve filozofii: vymykající se smyslovému i rozumovému poznání, nadsmyslný; v matematice: přesahující obor kořenů algebraických rovnic s celočíselnými koeficienty
- TRANSFORMACE** (od lat. *trans* = přes, za + *forma* = vnější tvar, podoba, způsob) — přeměna, přetvoření; v matematice: zobrazení; transformace souřadnic — přechod od jedné soustavy souřadnic k jiné;
- TRANSFORMOVAT**
- TRANSLACE** (od lat. *trans* = přes, za + *fero, ferre, tuli, latum* = nésti) — „přenesení“; přemísťování, přemístění, přeložení; v geometrii: posunutí; **TRANSLAČNÍ** — posuvný, vzniklý translací,
- TRANSPONOVAT** (od lat. *trans* = přes, za + *pono*, -ere = klásti pokládat) — přenést, přenášet, převádět; **TRANSPOZICE** — přenesení, přenášení, převádění
- TRANSVERZÁLNÍ** (od lat. *trans* = přes, za + *verto*, -ere = točit, obracet) — „točící se, natočený napříč“; vedený napříč, příčný; **TRANSVERZÁLA** — příčka mezi útvary
- TRANZITIVNÍ** (od lat. *trans* = přes, za + *eo, ire, ii, itum* = jíti) — „přecházející (i o vlastnostech, vztazích apod.)“; **TRANZITIVNOST** — v matematice: „přechod vztahu“ — vztah platný mezi prvním a druhým objektem a mezi druhým a třetím objektem, platí i mezi prvním a třetím
- TRI-** (z řec. *treis* nebo z lat. *tres* = tři) — předpona mající význam „tří-, troj-, trojčetnost“
- TRIANGULACE** (od lat. *tres* = tři + *angulus* = úhel) — vyměřování v terénu na základě trojúhelníků; **TRIANGULAČNÍ** — sloužící k triangulaci; **TRIANGL** — zastaralý název pro trojúhelník i pro terénní značku vrcholu trojúhelníkové sítě
- TRIGONOMETRIE** (od řec. *treis* = tři + *gónia* = úhel, kout + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — „měření trojúhelníků“; nauka o vztazích mezi stranami a úhly v trojúhelníku; **TRIGONOMETRICKÝ** — trojúhelníkový; týkající se trigonometrie

TRILIÓN (od lat. *tres* = tři + *mille* = tisíc) — uměle utvořeno pro označení třetí mocniny miliónu; tvaru — *lión* použito analogicky (v. milión)

TRIMETRIE (od řec. *treis* = tři + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — „trojí měření“; situace v axonometrii, kdy na třech osách jsou tři různá měřítka (jde tedy o „trojí měření“); srov. dimetrie

TRINOM (od řec. *treis* = tři + *nomos* = zvláštnost, způsob, řád) — trojčlen; **TRINOMICKÝ** — trojčlenný

TRISEKCE (od lat. *tres* = tři + *seco*, *-are* = sekat, řezat, dělit) — „třetění“; rozdělení útvaru na tři shodné části

TRIVIÁLNÍ (od lat. *tres* = tři + *via* = cesta) — v tereziánském školství bylo tzv. trivium, tj. čtení, psaní, počty; protože to byly nejzákladnější, „obyčejné“ předměty, nabylo slovo „triviální“ též významu „zcela obyčejný, všední, jednoduchý“

TROCHOIDA (od řec. *trochos* = kolo + latinizované *-oideus* = podobající se) — křivka „podobající se kolu“; křivka vytvořená bodem pevně spojeným s kružnicí, která se kotálí po jiné kružnici, ať po její vnější straně (v. epitrochoida) nebo po vnitřní straně (v. hypotrochoida)

VARIACE (od lat. *varius* = rozmanitý, různý, proměnlivý) — obměna, střídání; v matematice: uspořádaná skupina určitého počtu prvků nějaké množiny; **VARIABILNÍ** — proměnlivý, schopný obměny; **VARIAČNÍ** — pozměňující, v matematice: variační počet — část matematické analýzy, která svými metodami připomínala „pozměňování funkcí“ s cílem najít mezi funkcemi určitého typu tu, která má požadované (optimální, extrémní) vlastnosti; **ARIANTA** — pozměněná podoba určitého tématu, obměna, jedna z více možností řešení

VEKTOR (od lat. *veho*, *-ere* = vézt, vozit, táhnout) — „pohybovač“; v matematice: původně pojem veličiny charakterizované kromě velikosti i směrem a smyslem (spojené tedy s představou pohybu, posouvání sil) a znázorňované šipkami, později mnohem abstraktnější pojem charakterizovaný axiomy vektorového prostoru

VERIFIKACE (od lat. *verus* = pravý, pravdivý + *facio*, *-ere* = dělat) — potvrzení správnosti, pravdivosti; ověření; **VERIFIKOVAT**

VERTIKÁLA (od lat. *vertex*, *-icis* = vrchol, vrch) — „přímka s nějakým vztahem k vrcholu“; svislice; **VERTIKÁLNÍ** — svislý

Použitá literatura

Všechny učebnice matematiky běžně používané na gymnáziích ve šk. r. 1980/81

Pražák—Novotný—Sedláček: Latinsko-český slovník, Praha, ČGU 1948

Lepař: Nehomérovský slovník řeckočeský, Ml. Boleslav, Vačlena, 1892

Holub—Lyer: Stručný etymologický slovník jazyka českého, Praha, SPN 1978

Rejman: Slovník cizích slov, Praha, SPN 1971

Ottův slovník naučný

Technický slovník naučný

Slovník spisovného jazyka českého, Praha, ACADEMIA

Časopis Rozhledy matematicko-fyzikální

Časopis Naše řeč

potrebujeme asi desetkrát vyšší rozlišení, než kolik činí jejích průměr, vyžadujeme rozlišení asi desetkrát lepší, než tomu je u družice IRAS. Na počátek devadesátých let je sice připravován start velké infračervené observatoře s chlazeným teleskopem o průměru 1 metru, ale tento úkol je i mimo jeho dosah. Proto se začíná uvažovat o vývoji ještě většího přístroje o průměru zrcadla 20 m. Taková observatoř by musela být periodicky navštěvována k doplnění zásob chladicího hélia, ale to již dnes není žádná překážka. Tak velký infračervený dalekohled ve vesmíru by již měl umožnit i přímé sledování předhvězdných disků a procesů vzniku hvězd a planetárních systémů. Od několika set okolních hvězd do vzdálenosti 30 světelných let by jím mělo být možno přímo pozorovat i záření planet stejných nebo větších než největší planeta naší sluneční soustavy — Jupiter.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

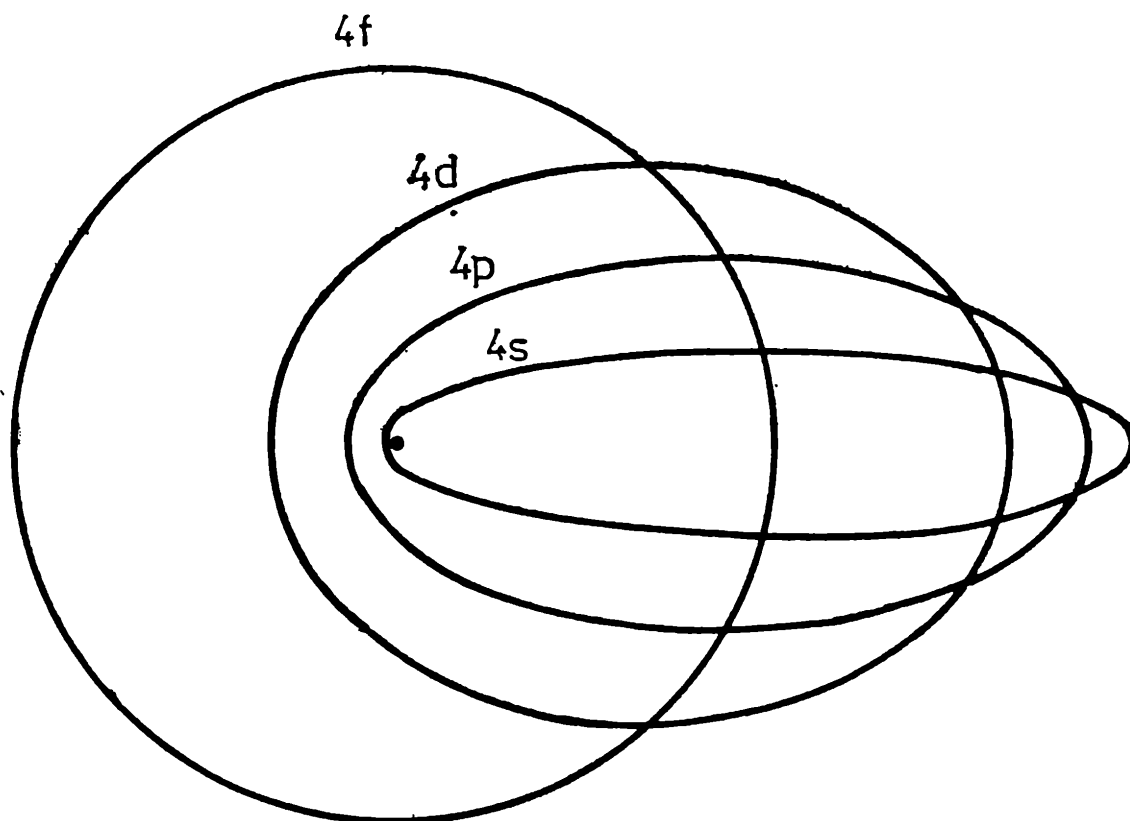
Prvé modely atómu

II. Bohrov - Sommerfeldov model

V roku 1911 konkurovali dva klasické modely atómu, Thomsonov a Rutherfordov. Prvý predstavoval stabilný útvar, ale bol v rozpore s rozptylovými experimentami. Druhý, s kladným jadrom a elektrónmi, ktoré okolo neho obiehajú ako planéty okolo Slnka, nemohol opisovať stabilný atóm, pokiaľ platila klasická elektrodynamika. Je len pochopiteľné, že v tejto situácii sa fyzici začali utiekať ku kvantovej hypotéze, ktorá sa už osvedčila v prípade žiarenia absolútne čierneho telesa, fotoelektrického efektu a pri stanovení špecifickej tepelnej kapacity kryštálov pri nízkych teplotách.

Medzi prvými, čo sa snažili pojať kvantovú hypotézu do modelu atómu, bol brniansky rodák *Arthur Erich Haas* (1884—1941). Jeho vzťah medzi Planckovou konštantou a rozmermi atómu sympaticky prijali na prvom Solvayovom kongrese v roku 1911. Pravda, Haas vychádzal ešte z Thomsonovho modelu.

Revolučný obrat nastal až v roku 1913 po uverejnení článku *Nielsa Henrika Davida Bohra* (1885—1962) O stavbe atómov a molekúl. Bohr vyslovil radikálny predpoklad, že v atómových procesoch neplatia zákony klasickej elektrodynamiky. Už tým pripravil pôdu pre nové



idey vo fyzike, podľa ktorých v mikrosвете neplatia ani zákony klasickej Newtonovej mechaniky.

Bohr sa v roku 1913 jednoznačne prohlásil k Rutherfordovmu modelu atómu, ale vyčítal mu popri nestabilite ešte druhý nedostatok: z Rutherfordových informácií nemožno usúdiť nič o rozmeroch atómu. Bohr si všimol, že Planckova konštanta má takú veľkosť a fyzikálny rozmer (súčin energie a času), že spolu s nábojmi a hmotnosťami častíc pomocou nej dostaneme veľkosť vodíkového atómu (Bohrov polomer atómu $0,529177 \cdot 10^{-10}$ m).

Bohr potom vypracoval model atómu vodíka, v ktorom elektrón obiehajúci okolo kladne nabitého jadra nevyžaruje elektromagnetické vlny, keď sa pohybuje po „povolených“ kruhových dráhach. Pri preskoku z jednej „povolenej“ dráhy na druhú pohltí alebo vyžiari svetelné kvantum (fotón). Z teórie vyplynulo, že „povolené“ sú práve tie dráhy, pre ktoré moment hybnosti elektrónu sa rovná celočíselnému násobku Planckovej konstanty, predelenej 2π . V tomto modeli jediné kvantové číslo $n = 1, 2, 3, \dots$ určuje moment hybnosti a energiu elektrónu v atóme a spolu s nimi aj všetky ostatné fyzikálne veličiny. Frekvencia vyžiarého fotónu rovná sa rozdielu energií, ktoré má elektrón na povolených dráhach, predelenému Planckovou konštantou. Tento vzťah vošiel do fyziky ako Bohrova podmienka frekvencií. Vlnové dĺžky spektrálnych čiar, určené z tejto podmienky, boli vo vynikajúcej zhode s experimentmi.

Rozštiepenie spektrálnych čiar vo vonkajšom magnetickom a elektrickom poli a iné experimenty však ukázali, že na opis stavu v atóme vodíka

nestačí jediné kvantové číslo. V zložitejších atómoch je situácia ešte komplikovanejšia. Tu sa vonkajšie „optické“ elektróny aj bez zásahu zvonku nachádzajú v magnetickom poli, tvorenom ostatnými elektrónmi. Experimentálne údaje nútili fyzikov zaviesť tri a v dvadsiatych rokoch dokonca štyri kvantové čísla, charakterizujúce stav elektrónu v atóme: hlavné, vedľajšie, magnetické a spinové kvantové číslo.

O názorné vysvetlenie vedľajšieho kvantového čísla sa pokúsili v r. 1915 nezávisle *Arnold Sommerfeld* (1868–1951) a *William Wilson* (1875–1965). Sommerfeld nahradil kruhové dráhy eliptickými s kvantovanými hlavnými a vedľajšími poloosami. Na našom obrázku sú nakreslené dráhy $4s$, $4p$, $4d$ a $4f$ atómu vodíka s hlavnou poloosou úmernou $4h$, kde h je Planckova konštanta. Vedľajšie poloosi majú veľkosť úmernú h , $2h$, $3h$, $4h$, posledná dráha $4f$ je kruhová. Pri pohybe častice po eliptickej dráhe jej energia závisí len od veľkosti veľkej poloosi, zatiaľ čo moment hybnosti závisí od veľkosti malej poloosi. V súlade s tým danej hodnote energie v našom prípade prislúchajú 4 možné hodnoty momentu hybnosti. Určovalo ich azimutálne kvantové číslo, s ktorým korešponduje terajšie vedľajšie kvantové číslo. Napokon priemet momentu hybnosti do význačného smeru a s ním aj orientácia eliptickej dráhy v priestore (vektor momentu hybnosti je kolmý na rovinu elipsy) boli tiež kvantované, a to pomocou magnetického kvantového čísla. Aj po Sommerfeldových korektúrach Bohrovho modelu zostalo veľa otázok v teórii atómu nevyriešených. Teória poskytovala iba kvalitatívne informácie o intenzite spektrálnych čiar atómu vodíka, zostala bezmocná pri riešení zložitejších systémov, počnúc atómom hélia. Fyzici začali uvažovať o novej kvantovej mechanike. V roku 1925 *Werner Heisenberg* (1901–1976) ukázal, že v novej teórii sa treba vzdať kinematických predstáv klasickej fyziky, podľa ktorých sa častice pohybujú po trajektoriách. Názorný model v zmysle klasických predstáv teda nie je možný.

Bohrova-Sommerfeldova teória však bola historicky nevyhnutným stupňom pri prechode od klasickej fyziky ku kvantovej mechanike. Základný Bohrov postulát — podmienka frekvencií, ostal v platnosti aj v kvantovej mechanike. Experimentálne bol prvý raz dokázaný v r. 1914 vo Franckovom-Hertzovom pokuse. O ňom ale nabadúce.

Rudolf Zajac

Z historie jízdního kola

STANISLAV LADA, UK Praha

Myšlenka využít ke zrychlení dopravy osob kolo poháněné lidskou silou je velmi stará. Jejím skutečným otcem je malíř, sochař, architekt, vědec a spisovatel v jedné osobě — Florentin *Leonardo da Vinci* (1452 — 1519).

Při vyhledávání jeho nepublikovaných kreseb byl v jednom archivu objeven výkres, na němž bylo jízdní kolo se stejně velkými koly, s převodem a pohodlným sedadlem. Po přezkoumání, zda je původní, bylo dokázáno, že autorem je Leonardo da Vinci. Ten se při jeho kresbě zřejmě inspiroval ručně či nožně poháněnými kruhy a koly hrnčírů, brusičů a dalších řemeslníků té doby. Jako mnoho jeho jiných vynálezů i jízdní kolo zůstalo jen v nákrese a nenašlo žádného mecenáše. Nikoho v té době zřejmě nelákalo šlapání. Pro historii jízdního kola je to zajímavý poznatek. Jízdní kolo existovalo v zobrazení již před tím, než bylo zhotoveno.

Málokdo asi ví, že první „jízdní kolo“ spatřilo světlo světa ve Francii. Bylo to počátkem roku 1779 za vlády krále Ludvíka XVI., když ho výstřední šlechtic hrabě *Méde de Sivrac* předváděl v aleji před královským palácem v Paříži.

S opravdovým jízdním kolem nemělo ještě mnoho společného. Podobalo se spíše hračce, jakémusi dřevěnému koni na kolech, a nazývalo se „celerifere“ — „rychlotořič“. Řídítka byla pevná, podobala se držadlům na dětském houpacím koni a nedalo se jimi řídit.

Celerifera měla hmotnost asi 40 kg a jezdec se při jízdě prudce rozběhl, skočil na sedadlo a ujel až 10 metrů, nebo si na ni sedl rozkročmo a nohama se odrážel od země. Celerifera byla nějakou dobu senzací Paříže a potom zmizela ve víru událostí buržoazní revoluce.

První říditelné jízdní kolo, které mělo veřejný úspěch a četné stoupence, sestrojil v roce 1815 Němec *Karl Drais* (1785—1851). Drais byl lesním inženýrem a první jízdu na svém běhacím stroji vykonal ve městě Karlsruhe, kde žil. Dne 12. ledna 1818 mu byl na jeho drezínu, jak bylo toto kolo po vynálezci nazváno, udělen patent.

Draisův vynález měl několik základních prvků dnešního jízdního kola: říditelnost a stejně velké přední i zadní kolo, kola okovaná železnou obručí a spojena mezi sebou tyčí. Drezína byla dřevěná, 2,5 m dlouhá a dosahovalo se na ní rychlostí až 15 km za hodinu.

Při jízdě seděl jezdec na drezíně rozkročmo a odrážením nohou od země ji uváděl do pohybu.

Drezína se přes Francii dostala do Velké Británie, kde na ní byly uspo-

řádány první závody. V českých zemích viděli drezínu Pražané již v roce 1820.

Pro nás je zajímavé, že o tomto páně Draisově jednostopém vozidle píše ve čtyřicáté znělce prvního zpěvu své Slávy dcery básník *Jan Kollár*. Poprvé na světě se o technice píše v básni. Je možné, že díky drezíně, na které Kollár jezdil za svou Mínou, získal čas k napsání Slávy dcery. Máme na to doklad, kde Kollár píše:

Abych pak běh zrychlil kroku svého,
a si času přitom uspořil,
koupil jsem si stroj, který utvořil
v Mannheimě Drais roku přítomného.

Drezína vydržela bez podstatných změn přes 40 let. V roce 1861 měl na pařížské avenue de Montaigne zámečnickou a kolářskou živnost pan *Piere Ernest Michaux*. Nemohl se dívat na to, jak jeho syn trhá podrážky bot na drezíně a přitom vlastně neví, kam s nohama. Nelenil a k ose předního kola přidělal protikliky se šlapátky a to celé upevnil v tzv. vidlici, která tvořila součást řízení předního kola.

Vzniklo první šlapací kolo světa. Kolo dostalo název velocipéd od slova „velox“, což má význam rychlý a „pedes“, což jsou nohy. Velocipédy probudily velký zájem veřejnosti o tento nový dopravní prostředek. Na Světové výstavě v Paříži v roce 1867 byl velocipéd senzací.

Tehdejší doba ještě neznala převody u kola v té podobě, v jaké je známe dnes. Mnozí výrobci velocipédů přišli na to, že pro klikový nožní pohon je vhodnější větší přední kolo, aby se mohla zvýšit rychlost jízdy. Změna konstrukce znamenala změnu používaných materiálů na kola. Dřevo bylo nahrazeno kovem. Místo loukotí se začaly používat kovové paprsky, které roku 1867 poprvé použil u své konstrukce velocipédu Angličan *Madison*.

Přední kolo se dále zvětšovalo a zároveň se zmenšovalo kolo zadní. Tak vznikl anglický „bone-shaker“ (česky kostitřas) s ohromným předním kolem a klikami s pedály a malinkým kolem vzadu.

Silnice, cesty a pěšiny, jak je známe dnes, neexistovaly a jízda po tehdejších kamenitých vozových cestách nebo pěšinách byla velmi nepohodlná a vyžadovala téměř artistické výkony, protože se jezdec při šlapání musel předklánět. To nutilo výrobce velocipédů zavádět různá zlepšení.

Železné a ocelové pásy, pásky a tyče nahrazovaly dřevo. V roce 1869 Angličan *Meyer* začal při výrobě velocipédů uplatňovat kovové rámy. Dvoumetrový průměr předního kola si vyžádal změnu upevnění ráfu k náboji tangenciálně vedenými kovovými paprsky. Vymyslil to Angličan *Cowper*, uplatnil to u obou kol a od roku 1870 se to používá dodnes.

Tehdejší velocipédy byly velmi robustní a jejich hmotnost se pohybovala okolo 50 kg.

Točivé součásti vozů a strojů používaných v 18. století se skládaly z hřídelů a ložisek. Hřídele, které se vyráběly z tvrdého materiálu, se otáčely v ložiskách z měkčího materiálu. Tím se opotřebování hřídelů přenášelo na ložiska, která se musela častěji měnit. Delší životnost ložisek a stoupající počet otáček hřídelů vozů a strojů vedl výrobu k používání nových ložisek.

Přišel na to anglický slévač *P. Vaughan*, který si dal roku 1794 patentovat kovová kuličková ložiska pro hřídel, zvanou nápravu, nesoucí kola podvozku vozidla.

Kuličková a válečková ložiska se při výrobě velocipédů a později jízdních kol začala používat od roku 1869. Stalo se to ve francouzském městě Melunu, kde je poprvé použil tamnější výrobce velocipédových rámu *Surriray*.

V roce 1832 se pařížskému výrobcí medailí *André Gallovi* podařilo konstrukčně přizpůsobit normální článkový řetěz k pohonu ozubených kol. Tento řetěz se k pohonu jízdních kol používá dodnes a po svém vynálezci se nazývá Gallův řetěz.

Bezpečnou a rychlou jízdu tehdejších velocipédů řešil v létech 1879—1885 Angličan *Harry Lawson*. Jeho jízdní kolo mělo přední i zadní kolo stejně veliké a poměrně menšího průměru. Kličky se šlapadly byly umístěny ve středu rámu a k otáčení zadního kola a tím k pohybu jízdního kola kupředu docházelo převodem pomocí Gallova řetězu.

Významným pokrokem bylo, že kola velocipédu byla opatřena gumovými obručkami, jejichž pomocí si poprvé zpříjemnil jízdu Francouz *M. Thevenon* ve městě Lyonu kolem roku 1865.

Další pokrok v obručkách kol nastal, když plná guma byla nahrazena pneumatikou v podobě gumové hadice naplněné vzduchem. Pčinil se o to irský zvěrolékař z města Dublinu *John B. Dunlop* (1839—1921), který si ji roku 1888 dal patentovat. Jeho pneumatika se udržela a při stálém zdokonalování umožnila úžasný rozvoj cyklistického sportu a rozšíření jízdního kola jako dopravního prostředku.

O používání pneumatik se dále zasloužil Francouz *André Michelin* (1853—1931) spolu s bratrem *Eduardem*. Zdokonalili gumové pneumatiky tak, že se daly snadněji demontovat a začali jejich průmyslovou výrobu. Pneumatika dala jízdnímu kolu pohodlnost a rychlost, dvě vlastnosti, bez nichž si nelze představit moderní dopravní prostředek.

V roce 1900 se začaly u jízdních kol montovat první volnoběžky. Volnoběžku vynalezl roku 1893 Němec *E. Sachs*.

Volnoběžný náboj je dosti složité zařízení zadního kola. Zajišťuje záběr a tím i pohon, při jízdě s kopce automaticky záběr vypíná, takže umožňuje jezdcí činit za jízdy přestávky při šlapání. Při obráceném smyslu šlapání zajišťuje volnoběžný náboj intenzivní brzdění.

Jestliže počítáme od roku 1879, kdy *H. Lawson* sestrojil kolo, jehož principy platí dodnes, je modernímu jízdnímu kolu přes sto let. Za tu dobu došlo k celé řadě jeho zlepšení a k použití takových materiálů, které činí kolo lehké a bezpečné.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Magické čtverce s konstantou 1984

JÍŘÍ MANN, Dvůr Králové

Zde je jeden z nich:

529	991	199	265
397	67	859	661
331	133	925	595
727	793	1	463

Číselné čtvercové schéma se nazývá *magický čtverec*, má-li tyto vlastnosti: součty čísel v jednotlivých sloupcích, řádcích i obou úhlopříčkách jsou rovny témuž číslu, tzv. konstantě magického čtverce. Přesvědčte se, že tento požadavek je zde splněn, a proveďte následující součty, které však nejsou všechny, jež lze vytvořit. Další odvoďte sami z některých z nich, například užitím otočení.

$$\begin{array}{l}
 529 + 265 + 463 + 727, \quad 67 + 859 + 925 + 133, \\
 529 + 859 + 463 + 133, \quad 529 + 991 + 1 + 463, \\
 397 + 991 + 595 + 1, \quad 397 + 661 + 595 + 331, \\
 \quad 991 + 199 + 1 + 793, \\
 \quad 397 + 67 + 925 + 595, \\
 \quad 397 + 199 + 595 + 793.
 \end{array}$$

Pro $m \in \{1, 2\}$ platí:

$$\begin{aligned} 67^m + 661^m + 463^m + 793^m &= 529^m + 199^m + 925^m + 331^m, \\ 529^m + 991^m + 67^m + 397^m &= 925^m + 595^m + 463^m + 1^m, \\ 529^m + 991^m + 199^m + 265^m &= 727^m + 793^m + 1^m + 463^m, \\ 397^m + 67^m + 859^m + 661^m &= 331^m + 133^m + 925^m + 595^m. \end{aligned}$$

Pro $n \in \{1, 2, 3\}$ platí:

$$\begin{aligned} 529^n + 67^n + 925^n + 463^n &= 727^n + 133^n + 859^n + 265^n, \\ 529^n + 265^n + 463^n + 727^n + 67^n + 859^n + 925^n + 133^n &= \\ = 991^n + 199^n + 661^n + 595^n + 1^n + 793^n + 331^n + 397^n. \end{aligned}$$

Z uvedeného magického čtverce lze snadno odvodit desítky dalších s touž konstantou 1984. Například:

506	646	406	426
466	366	606	546
446	386	626	526
566	586	346	486

Za povšimnutí stojí jeho složka 366 připomínající vlastnost, kterou se rok 1984 liší od šesti jemu nejbližších let. — Najděte metodu sestavování a počet čtverců.

Další dva čtverce už nejsou magické.

62	1 984	32
7 936	16	31
8	124	3 968

15 872	124	3 968
496	1 984	7 936
992	31 744	248

Přesvědčte se, že součiny čísel v jednotlivých řádcích, sloupcích a v hlavní úhlopříčce jsou tytéž. Vedlejším výsledkem tohoto příkladu je, že nadále už budete vědět, která z úhlopříček se nazývá hlavní a která vedlejší. V pravém čtverci se sobě rovná osm součinů.

Z geometrie pravidelného desetiúhelníka

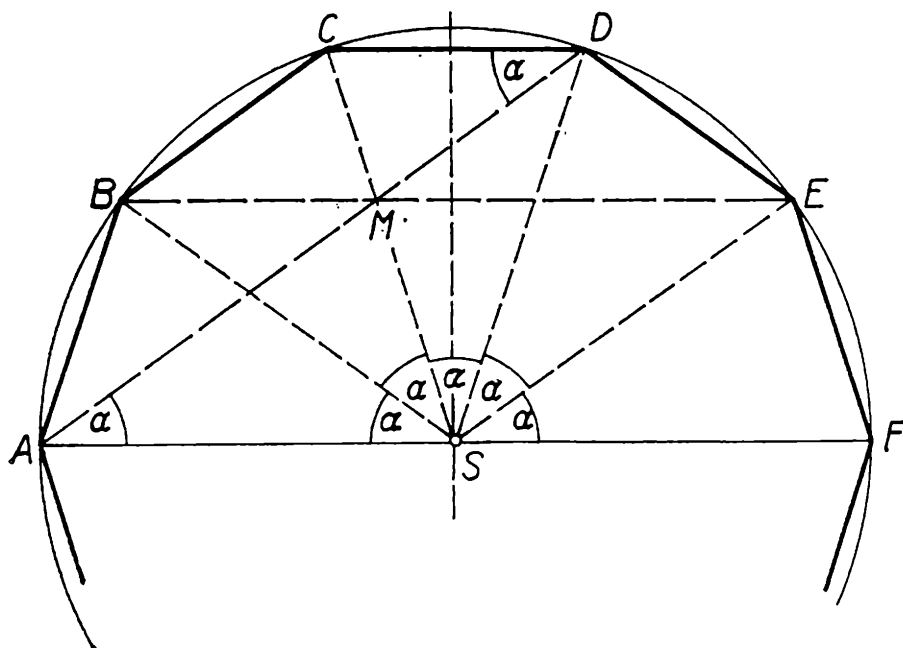
STANISLAV HORÁK, Praha

V tomto článku dokážeme větu:

Je dán pravidelný desetiúhelník $ABCDEFGHIKL$. V něm platí

$$AD = SA + AB$$

kde S je střed kružnice opsané desetiúhelníku.



Důkaz (obr.). Středový úhel nad stranami desetiúhelníka označíme α . Víme, že $\alpha = 360^\circ : 10 = 36^\circ$. Tedy

$$|\nless ASB| = |\nless BSC| = \dots = a$$

Ale také

$$|\nless SAD| = \alpha$$

neboť to je obvodový úhel příslušný středovému úhlu $\sphericalangle DSF = 2\alpha$. Průsečík přímek AD , CS označme M . Trojúhelník ASM je rovnoramenný, neboť o jeho úhlech platí

$$|\sphericalangle SAM| = \alpha = 36^\circ, \quad |\sphericalangle ASM| = 2\alpha = 72^\circ,$$

a proto

$$|\sphericalangle AMS| = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ.$$

V dŭsledku toho

$$AM = SA \quad (1)$$

Dále si všimněme trojúhelníku CDM . Ten je s trojúhelníkem SAM stejnohlehlý podle středu stejnolehlosti M . Je proto také rovnoramenný, a tudíž

$$CD = MD = AB ,$$

čímž je věta dokázána.

Poznámka. V trojúhelníku CDM můžeme vypočítat velikosti jeho úhlů, a tím se dokáže (jiným způsobem), že je rovnoramenný.

Otázky: 1. Jak velké jsou úhly $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle BAE$?

2. Jak dlouhá je úsečka SM ?

3. Jestliže jste našli odpověď na 2. otázku, snadno dokážete, že přímka BE prochází bodem M .

Tři úlohy

a) Je možno určit součet všech různých trojčiferných čísel, složených ze tří různých číslic s výjimkou nuly — a to tak, že v každém z nich je obsažena každá z uvedených číslic právě jednou —, aniž by bylo nutno příslušná čísla vypsat a sečíst? Experimentálně zjistěte jejich součet a ověřte si, kolikrát se každá z číslic vyskytne na místě stovek, desítek a jednotek.

b) Podle toho určete součet všech čtyřčiferných čísel, složených ze čtyř různých cifer (při zachování všech podmínek, uvedených u čísel trojčiferných).

c) Podobně určete za těchto podmínek součet všech čísel, složených z pěti různých cifer.

Řešení tří úloh

a) Ze tří různých číslic (s výjimkou nuly) lze sestavit 6 trojčiferných čísel. Každá z číslic bude právě dvakrát na místě stovek, právě dvakrát na místě desítek a právě dvakrát na místě jednotek. Je proto ciferný součet každého z uvažovaných trojčiferných čísel obsažen v součtu všech těchto čísel $(200 + 20 + 2)$ krát, tedy 222 krát. Obecně: $222(a + b + c)$, kde a, b, c jsou cifry navzájem různé a různé od nuly.

b) Všech čísel bude 24. Každá z cifer bude právě šestkrát na každém řádovém místě čtyřčiferných čísel v desítkové soustavě. Součet všech čtyřčiferných čísel bude: $6\,666(a + b + c + d)$, kde a, b, c, d jsou cifry navzájem různé a různé od nuly.

c) Všech čísel bude 120. Součet všech pěticefurných čísel bude $266\,664(a + b + c + d + e)$, kde a, b, c, d, e jsou opět cifry navzájem různé a různé od nuly.

RNDr. Jaromír Maláč, Brno

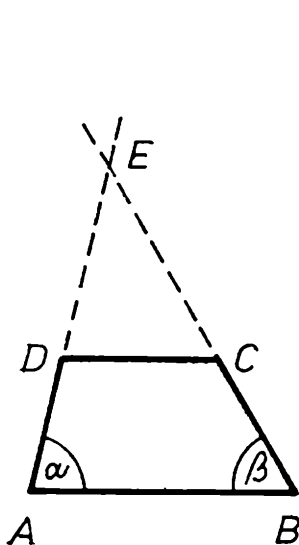
Profesor Ypsilon o lichoběžkách a patamematice

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

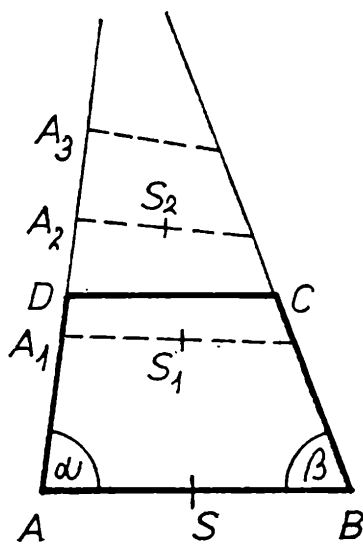
Při prohlídce školní matematické knihovny zaujal profesora Ypsilonu časopis „Patamatemické výhledy“ ze školního roku 1639—40 a při listování zažloutlými stránkami objemné revue padl jeho pohled na pozoruhodný článek neznámého patamatematického mistra. Autor v něm dokazuje, že dvě přímky v rovině nemusejí být jen rovnoběžné nebo různoběžné, ale že existuje ještě třetí možnost; přímky, které tuto dosud neznámou polohu zauímají a které tedy nejsou ani rovnoběžné ani různoběžné, nazývá přímkami lichoběžnými či lichoběžkami. Tato trojí možná vzájemná poloha dvou přímek v rovině je ilustrována pomocí lichoběžníka $ABCD$ na obr. 1, z něhož je také odvozeno označení pro lichoběžné přímky: přímky AB a CD jsou rovnoběžné, přímky AB a BC , BC a CD , CD a DA , DA a AB jsou různoběžné a konečně přímky AD a BC jsou lichoběžné. Lichoběžnost těchto přímek vyplývá z toho, že nejsou rovnoběžné (což je zřejmé, neboť je $\alpha + \beta \neq \pi$) a že nejsou ani různoběžné, neboť — jak autor dále ukazuje — nemají společný bod. Dospějeme-li prodloužením ramen lichoběžníka ke společnému bodu E obou přímek, jest to pouhé šálení smyslů, neboť takový bod ve skutečnosti neexistuje. Toto své tvrzení dokazuje zmíněný patamatematický mistr následujícím způsobem.

Na polopřímkách AD a BC určenými vrcholy lichoběžníka $ABCD$ se středem S základny AB (viz obr. 2) sestrojíme pořadě body A_1 a B_1 tak, aby platilo

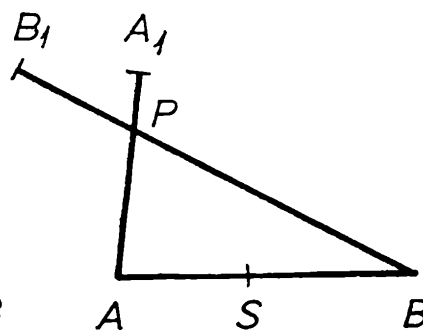
$$|A_1A| = |AS| = |BS| = |BB_1|$$



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

a ukážeme, že předpoklad existence společného bodu P úseček A_1A a B_1B vede ke sporu. Je-li tedy P společný bod úseček A_1A a B_1B , potom platí

$$|AP| \leq |AA_1| \text{ a } |BP| \leq |BB_1| ,$$

a to bez ohledu na to, je-li bod P jejich bodem vnitřním (viz obr. 3) nebo bodem krajním. Dostáváme tak nerovnost

$$|AP| + |BP| \leq |AA_1| + |BB_1|$$

a vzhledem k tomu, že je

$$|AA_1| = |AS| = |BS| = |BB_1|$$

máme pro její pravou stranu

$$|AA_1| + |BB_1| = |AS| + |BS| = |AB|$$

což znamená, že platí

$$|AP| + |BP| \leq |AB|$$

tento výsledek je však ve sporu se známou větou o součtu velikostí dvou stran trojúhelníka. Tím je dokázáno, že úsečky AA_1 a BB_1 na polopřímkách AD a BC nemají společný bod.

V dalším kroku sestrojíme střed S_1 úsečky A_1B_1 a body A_2B_2 ležící po řadě na polopřímkách opačných k polopřímkám A_1A a B_1B tak, aby platilo

$$|A_2A_1| = |A_1S_1| = |B_1S_1| = |B_1B_2|$$

Stejným způsobem jako pro úsečky AA_1 a BB_1 dokážeme, že také úsečky A_1A_2 a B_1B_2 nemají společný bod. Ve třetím kroku sestrojíme střed S_2 úsečky A_2B_2 a body A_3 a B_3 na polopřímkách opačných k polopřímkám A_2A a B_2B tak, aby platilo

$$|A_3A_2| = |A_2S_2| = |B_2S_2| = |B_3B_2|$$

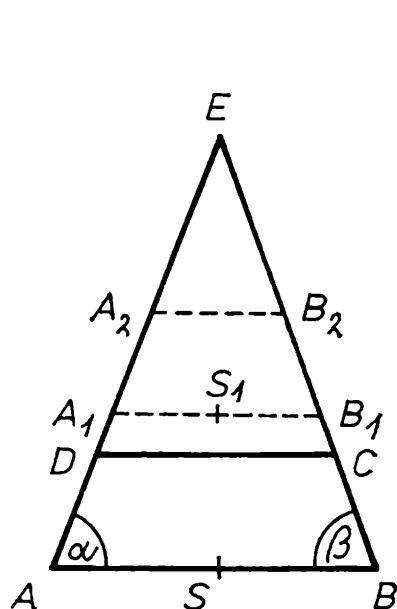
ze stejného důvodu jako v případech předcházejících nemají úsečky A_3A_2 a B_3B_2 společný bod.

Tímto způsobem pokračujeme bez omezení dále: máme-li sestrojeny body A_n a B_n , sestrojíme body A_{n+1} a B_{n+1} ležící na polopřímkách opačných k polopřímkám A_nA a B_nB tak, aby platilo

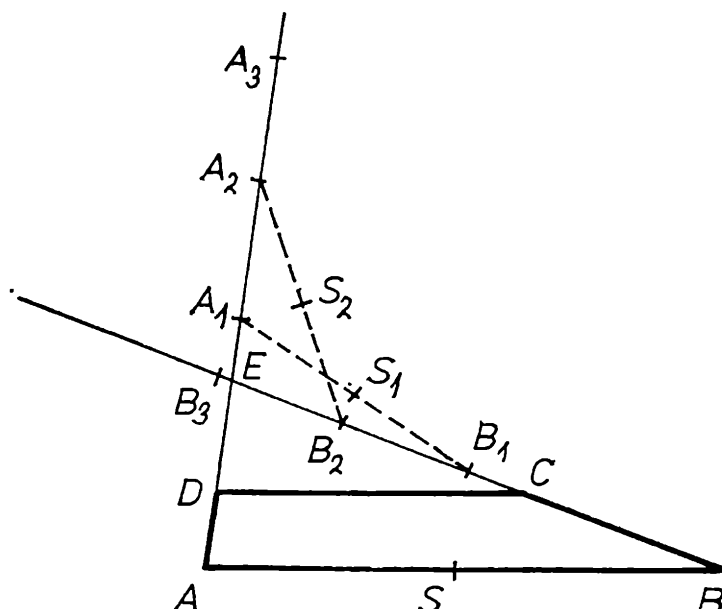
$$|A_{n+1}A_n| = |A_nS_n| = |B_nS_n| = |B_{n+1}B_n|$$

kde S_n je střed úsečky A_nB_n ; o úsečkách $A_{n+1}A_n$ a $B_{n+1}B_n$ platí, že nemají společný bod.

Nemají-li však společný bod úsečky AA_1 a BB_1 a pro všechna přirozená čísla n ani úsečky A_nA_{n+1} a B_nB_{n+1} , potom — dovozuje patamatematik — nemají společný bod ani polopřímky AD a BC ; a protože



Obr. 4



Obr. 5

je $\alpha + \beta < \pi$ (viz obr. 2), nemohou se přímky AD a BC protnout ani v polorovině opačné k polorovině ABC . Dospěli jsme tak k pozoruhodnému závěru, který je v rozporu nejen s vaší každodenní zkušeností, ale i s axiomy euklidovské geometrie:

Přímky AD a BC , na kterých leží ramena lichoběžníka $ABCD$, nemají společný bod!

Když po tomto matematickém šoku nabyl profesor Ypsilon znovu vědomí, přečetl bedlivě celý článek ještě jednou a brzy spokojený úsměv na jeho rtech hlásal, že prohlédl léčku podšitého patamatematika. Hned nazítří pak seznámil své žáky s uvedenou problematikou; první, kdo padl do nastražené pasti, byl žák Pěnkava.

„Domnívám se,“ pravil, „že tímto postupem ke společnému bodu přímek AD a BC nemůžeme nikdy dospět; body $A_1, A_2, A_3, \dots$ na přímce AD , jakož i body $B_1, B_2, B_3, \dots$ na přímce BC postupně sestrojované uvedeným způsobem, se ke společnému bodu obou přímek sice stále přibližují, nikdy ho však nedosáhnou. Autor článku tak vlastně z toho, že naznačenou konstrukcí nelze ke společnému bodu přímek AD a BC dospět, vyvozuje, že tento bod neexistuje. Avšak — zakončil bystrý student vítězoslavně své vývody — nemůžeme-li dospět ke společnému bodu přímek AD a BC tímto způsobem, neznamena to, že neexistuje způsob jiný, jak tento bod sestrojit!“

Skutečně, uvedenou konstrukcí nelze ke společnému bodu přímek AD a BC dospět v případě, že lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný, jak je patrné z následující úvahy (viz obr. 4). Protože v trojúhelníku ASE je $|AE| > |AS|$, je bod A_1 , pro nějž je $|AA_1| = |AS|$, vnitřním bodem úsečky AE ; protože v trojúhelníku A_1S_1E je $|A_1E| > |A_1S_1|$, je bod A_2 , pro nějž je $|A_1A_2| = |A_1S_2|$, vnitřním bodem úsečky A_1E , atd.

Pro každé přirozené číslo n je tak bod A_{n+1} vnitřním bodem úsečky A_nE , což znamená, že nelze takto sestrojit úsečku A_nA_{n+1} , která by obsahovala bod E .

Avšak tvrzení žáka Pěnkavy, že ke společnému bodu přímek AD a BC nelze vůbec dojít, není pravdivé v případě, že se jedná o lichoběžník nerovnoramenný. „Znamená to, že úklady patamatematického mistra spočívají v něčem jiném,“ pravil profesor Ypsilon a narysoval nerovnoramenný lichoběžník $ABCD$ znázorněný na obr. 5.

Sestrojíme známým způsobem body A_1 a B_1 , dále body A_2 a B_2 a konečně body A_3 a B_3 . V souladu s uvedeným důkazem nemají odpovídající si úsečky AA_1 a BB_1 , a A_1A_2 a B_1B_2 , A_2A_3 a B_2B_3 společný bod; vidíme však, že společný bod mají úsečky AA_1 a B_2B_3 ! Zamyslíme-li se nad tímto faktem, snadno odhalíme patamatematikovu léčku: z toho, že nemají společný bod žádné dvě odpovídající si úsečky A_nA_{n+1} a B_nB_{n+1} , ještě neplyne, že také přímky AD a BC nemají společný bod! K tomu, abychom toto tvrzení dokázali, by bylo zapotřebí ukázat, že nejen úsečky A_nA_{n+1} a B_nB_{n+1} nemají pro žádné přirozené n společný bod, ale že se neprotínají ani libovolné jiné úsečky A_mA_{m+1} a B_kB_{k+1} . Všimněte si ještě, že autor článku v Patamatematických výhledech dokázal vlastně něco úplně jiného, než tvrdí: dokázal, že žádné dvě odpovídající si úsečky A_nA_{n+1} a B_nB_{n+1} na přímkách AD a BC nemají společný bod, a tvrdí, že přímky AD a BC nemají společný bod.

„Domnívám se,“ uzavřel profesor Ypsilon, „že patamatematický mistr tak nečiní z nevědomosti, ale z cílevědomé snahy přimět na podkladě překvapujících tvrzení k zamyšlení i osoby, které této specificky lidské činnosti příliš neholdují. Patamatematika a matematika nestojí totiž na protilehlých pólech v procesu poznání; rozpor mezi nimi není antagonistický a překonatelný tedy jen zánikem jedné a vítězstvím druhé vědy. Patamatematika je sestrou matematiky a plně uznává její vůdčí roli. Svou úlohu vidí v tom, aby v prostředí, které matematické není příznivě nakloněno, vytvářela zprvu jen ostrůvky a posléze i souvislé oblasti zájmu o problémy patamatematické, od kterých už je jen krůček k pochopení a interesu o otázky matematické.“

Stav beztlíže a problémy kolem něj

Jules Verne ve své knize *Cesta na měsíc* popisuje cestu kosmického „náboje“ bez jakýchkoli motorů. Cestující proletěli více než polovinu cesty, aniž pocítili stav beztlíže (beztížný stav). Nedovedli ani zjistit, zda letí nebo ne.

a) Je to možné? Odpověď zdůvodněte.

Představte si, že jste kapitánem kosmické lodi a řídíte ji. Členové posádky vás požádají, abyste vytvořil „beztížný stav“ potřebný pro plánované experimenty ve stavu beztíže.

b) Co uděláte? Odpověď zdůvodněte.

(Řešení naleznete na str. 320)

Josef Novák

OLYMPIÁDY A SOČ

Olympiáda v Československu

Ano, je tomu tak. Jubilejní, již 25. mezinárodní matematická olympiáda se bude konat začátkem července tohoto roku v Praze. Ministerstvo školství ČSR pověřilo její organizací matematicko-fyzikální fakultu UK a Matematický ústav ČSAV v Praze. Přípravný výbor pracuje pod vedením *prof. dr. K. Drbohlava, DrSc.*, z MFF UK Praha, nemálo práce má jednatel výboru *dr. J. Durdil, CSc.*, z téže fakulty. Očekává se účast asi 200 soutěžících žáků z více než 30 zemí, jak tomu bylo i na posledních dvou mezinárodních matematických olympiádách v Budapešti a v Paříži. Po celostátním kole československé matematické olympiády, které se koná letos v prvních májových dnech v Čáslavi, budeme již vědět více o tom, kdo bude na domácí půdě reprezentovat naši republiku. Přejeme šestici československých účastníků na 25. MMO velmi dobré výsledky, aby každý z nich získal některou z prvních, druhých nebo aspoň třetích cen. A všem zahraničním účastníkům soutěže i jejich vedoucím přejeme, aby se jim v Československu líbilo.

L. Boček

Úlohy 24. mezinárodní matematické olympiády

1. Určete všechny funkce f , které zobrazují množinu $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel do $\mathbb{R}^+$ a které vyhovují podmínkám:

(1) $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x)$ pro všechna kladná reálná čísla x, y ;

(2) $f(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow +\infty$.

2. V rovině jsou dány dvě protínající se kružnice k_1 a k_2 se středy O_1 , resp. O_2 , o různých poloměrech; označme A jeden z jejich průsečíků. Jedna z obou společných tečen kružnic k_1, k_2 se dotýká kružnice k_1

v bodě P_1 a kružnice k_2 v bodě P_2 , druhá se dotýká kružnice k_1 v bodě Q_1 a kružnice k_2 v bodě Q_2 . Označme M_1 střed úsečky P_1Q_1 a M_2 střed úsečky P_2Q_2 . Dokažte, že platí

$$\sphericalangle O_1AO_2 \doteq \sphericalangle M_1AM_2$$

3. Nechtě a, b, c jsou celá kladná čísla, po dvou nesoudělná. Dokažte, že

$$2abc - ab - bc - ca$$

je největší celé číslo, které se nedá vyjádřit ve tvaru

$$xbc + yca + zab,$$

kde x, y, z jsou celá nezáporná čísla.

4. Nechtě E je množina všech bodů ležících na obvodu rovnostranného trojúhelníku ABC . Rozhodněte, zda pro každý rozklad množiny E na dvě podmnožiny existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož všechny tři vrcholy leží v jedné z obou podmnožin.

5. Rozhodněte, zda lze najít 1983 vesměs různých přirozených čísel, ne větších než 10^5 , tak, aby žádná tři z nich nebyla třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti.

6. Jsou-li a, b, c délky stran libovolného trojúhelníku, potom platí

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

dokažte. Kdy platí rovnost?

INFORMACE

Požadavky z fyziky k přijímacím zkouškám na MFF UK v Praze

Doc. RNDr. JOSEF NOVÁK, CSc., UK Praha

Při přijímacích zkouškách v červnu v roce 1983 byly při písemných zkouškách z fyziky dány uchazečům podle jednotlivých zaměření následující příklady. V závorce je uveden výsledek správného řešení. Výuka na MFF UK podle nových učebních plánů probíhá v těchto oborech:

Matematické obory: Matematická analýza; Přibližné a numerické

metody; Pravděpodobnost a matematická statistika; Teoretická kybernetika a matematická informatika; Teorie systémů.

Písemná zkouška z fyziky pro matematické obory

1. Závodník urazil přímou trať o délce $s = 100$ m za dobu $t_c = 10,2$ s. První část dráhy $s_1 = 20$ m běžel pohybem rovnoměrně zrychleným, zbytek s_2 pohybem rovnoměrným. Jaké bylo jeho zrychlení a ? Jaké největší rychlosti v_m dosáhl?

$$(a = 3,46 \text{ m/s}^2; v = 11,76 \text{ m/s})$$

2. Elektrická pec je připojena k síti o napětí $U = 220$ V. Do série s pecí je zapojen omezující resistor o odporu $R = 0,2 \Omega$. Určete příkon pece, teče-li obvodem proud 20 A. ($P = 4,32$ kW)

3. Jak je třeba nahřát vzduch v otevřeném balónu ve tvaru koule o průměru $d = 10$ m, aby vzletěl, je-li hmotnost obalu $m = 10$ kg? Atmosférický tlak je $b = 98$ kPa, teplota okolního vzduchu 300 K, molární hmotnost vzduchu je $M_m = 29$ g mol⁻¹. (Plynová konstanta je $R_m = 8,31$ J mol⁻¹ · K⁻¹). Při řešení předpokládejte, že objem balónu zůstává konstantní.

$$(\Delta T = 5,1 \text{ K})$$

4. Automobil o hmotnosti 1000 kg projíždí na vodorovné silnici zatáčku o poloměru $r = 50$ m rychlostí $v_0 = 36$ km/h. Vypočtěte tečné napětí pneumatik, které se dotýkají silnice plochou o obsahu $S = 0,04$ m². Při které rychlosti dostane automobil smyk, je-li součinitel smykového tření $f = 0,36$?

$$(v = 13,3 \text{ m/s})$$

5. Při kolmém dopadu monochromatického světla na ploskovypuklou čočku ležící na rovinné skleněné desce vznikají interferenční tzv. *Newtonovy kroužky*. Popište jejich vznik a vzhled v procházejícím světle. Jak se změní jejich poloměry, použijeme-li světlo o větší vlnové délce?

- a) zvětší se,
- b) zůstanou nezměněny,
- c) zmenší se.

Odůvodněte svoji odpověď slovním výkladem, případně doplňte náčrtkem.

(zvětší se)

Fyzikální obory: Fyzika mezních oborů; Fyzika pevných látek; Fyzikální elektronika; Biofyzika a chemická fyzika; Jaderná fyzika; Optika.

Písemná zkouška z fyziky pro fyzikální obory

1. Koule o hmotnosti $m_1 = 5$ kg se pohybuje rovnoměrně přímočaře

rychlostí $v_1 = 5 \text{ m s}^{-1}$. Po stejné dráze ji dohání rovnoměrným přímočarým pohybem druhá koule o hmotnosti $m_2 = 10 \text{ kg}$ a rychlostí $v_2 = 8 \text{ m s}^{-1}$. Dojde k nepružnému rázu. Určete rychlost koulí po rázu a stanovte, jaká část mechanické energie se při rázu přeměnila na energii jiného druhu.

$$(u = 7 \text{ m/s}, 4 \%)$$

2. Vzduch o objemu $V_1 = 1$ litr, teploty $t_1 = 20^\circ\text{C}$, stlačíme izotermicky na objem $V_2 = 0,1$ litru a potom jej necháme adiabaticky rozpnout na objem $V_3 = 2$ litry. Jaká bude výsledná teplota vzduchu, když *Poissonova konstanta* $\kappa = 1,4$?

$$(T = 88,4 \text{ K})$$

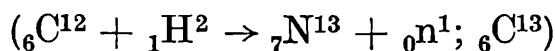
3. Na rovinné rozhraní dvou prostředí o absolutních indexech lomu n_1, n_2 dopadá světelný paprsek, částečně se odráží a lomí. Jaký je relativní index lomu obou prostředí, jestliže při úhlu dopadu $\alpha = 60^\circ$ svírají odražený a lomený paprsek spolu pravý úhel?

$$(N_{21} = 1,732)$$

4. Jaké množství tepla Q se vybaví ve vodiči, přes který se vybije deskový kondenzátor původně nabitý na rozdíl potenciálu $U = 2 \text{ kV}$? Desky kondenzátoru mají plochu o obsahu $S = 0,1 \text{ m}^2$, jejich vzdálenost $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, dielektrikum mezi deskami má relativní permitivitu $\epsilon_r = 10$. Permitivita vakua je $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$.

$$(Q = 8,85 \cdot 10^{-3} \text{ J})$$

5. Při ostřelování jádra uhlíku ${}_{61}\text{C}^{12}$ deuterony ${}_1\text{H}^2$ probíhá jaderná reakce, při níž vzniká jádro radioaktivního dusíku a je emitován neutron.
a) Napište úplnou rovnici pro tuto jadernou reakci.
b) Jádro dusíku se dále rozpadá za vyslání pozitronu. Jádro kterého prvku vzniká při tomto rozpadu?



Učitelské studium pro 5.—12. post. ročník všeob. vzděl. škol pro aprobace: matematika—fyzika; matematika—deskriptivní geometrie; fyzika — základy techniky.

Písemná zkouška z fyziky pro učitelské studium

1. Mezní vlnová délka záření, které vyvolá vnější fotoelektrický jev u wolframu, je $0,275 \mu\text{m}$. Wolfram byl ozařován ultrafialovým zářením o vlnové délce $0,120 \mu\text{m}$. Vypočtete:

- výstupní práci elektronu wolgramu (v jednotkách J a eV);
- rychlost, kterou elektrony vystupují z kovu.

Řešte nejdříve obecně, pak pro zadané hodnoty. Všechny další potřebné údaje vyhledejte v tabulkách.

$$(W = 7,22 \cdot 10^{-19} \text{ J} \doteq 4,52 \text{ V})$$

2. V těsné blízkosti vodorovně upevněného přímého vodiče je zavěšen ve svých koncových bodech na dvou lehkých vodivých vláknech délky d druhý přímý vodič délky l a hmotnosti m . Prochází-li oběma vodorovnými vodiči stejný proud I , vychýlí se zavěšený vodič tak, že jeho závěsná vlákna jsou vodorovná. Určete proud I . Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty $d = 4 \text{ cm}$, $l = 98,1 \text{ cm}$, $m = 1 \text{ g}$. Měly proudy stejné nebo opačné směry? Při řešení předpokládejte, že silové působení mezi vodiči probíhá ve vakuu, permeabilita vakua $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

$$(I \doteq 63,2 \text{ A})$$

3. Láhev obsahuje molekulový kyslík o hmotnosti $m = 1,0 \text{ g}$, tlaku $p_1 = 1,0 \text{ MPa}$ a teplotě $t_1 = 47^\circ\text{C}$. Uzávěr láhve dobře netěsní, takže kyslík uniká do okolí. Po určité době byl opět změřen tlak a teplota kyslíku. Bylo zjištěno, že tlak klesl na $\frac{5}{8}$ své původní hodnoty a teplota na hodnotu $t_2 = 27^\circ\text{C}$. Určete:

a) vnitřní objem V láhve za předpokladu, že při uvedené změně teploty zůstává objem konstatní;

b) hmotnost m kyslíku, který unikl.

Za daných podmínek považujeme molekulový kyslík za ideální plyn. Molární plynová konstanta $R_m \doteq 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$. Řešte nejdříve obecně, pak pro zadané hodnoty.

$$(V \doteq 83 \text{ cm}^3, m = 0,33 \text{ g})$$

4. Válcová otevřená nádoba z plechu o tíhové síle $G_1 = 150 \text{ N}$ má výšku $h = 50 \text{ cm}$ a vnější poloměr dna $r = 20 \text{ cm}$. Uprostřed dna na jeho vnější straně je přidělán háček, jehož tíhová síla je zanedbatelná vzhledem ke G_1 . Nádoba s háčkem plave na vodě o hustotě $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určete:

a) Výšku x_1 vyčnívající části nádoby nad volným povrchem vody, vložíme-li do nádoby ocelové těleso o tíhové síle $G_2 = 350 \text{ N}$.

b) Výšku x_2 vyčnívající části nádoby nad volným povrchem vody, zavěsíme-li totéž ocelové těleso na háček na dně nádoby. Hustota oceli je $\rho_0 = 7\,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

V obou případech předpokládáme, že nádoba plave tak, že její osa je svislá. Řešte nejdříve obecně, pak pro zadané hodnoty. Tíhové zrychlení volte $g \doteq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$(x_1 \doteq 0,09 \text{ m}, x_2 \doteq 0,13 \text{ m})$$

5. Z vodivého drátu o odporu $R = 10$ ohmů vytvoříme smyčku tvaru kružnice. Do kterých míst A a B smyčky musíme připojit přívodní vodiče, aby odpor takto zapojené smyčky v elektrickém obvodu byl 1 ohm? Řečte nejdříve obecně, pak pro zadané hodnoty.

$$(x_1 = 0,9 \text{ L}, x_2 = 0,1 \text{ L})$$

Dále jsou uvedeny příklady správného řešení a hodnocení některých úloh z písemných prací.

Příklad č. 2 z písemné zkoušky pro matematické obory

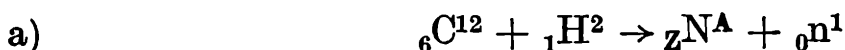
Napětí na svorkách pece je

$$U_p = U - RI, \quad 1 \text{ bod}$$

příkon pece $P = U_p \cdot I$, takže podle předešlého řádku je

$$\begin{aligned} P &= (U - RI) \cdot I = UI - RI^2 = \\ &= 220 \text{ V} \cdot 20 \text{ A} - 0,1 \Omega \cdot 4 \cdot 10^2 \text{ A}^2 = 44 \cdot 10^2 - 80 = 4,32 \text{ kW} . \end{aligned} \quad 2 \text{ body}$$

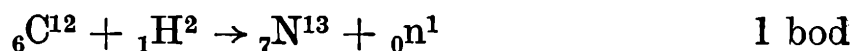
Příklad č. 5 z písemné zkoušky pro fyzikální obory



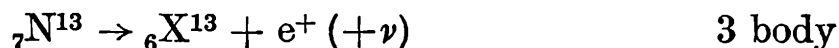
Musí být zachován součet hmotnostních a atomových čísel, tedy

$$\left. \begin{array}{l} 12 + 2 = A + 1 \\ 6 + 1 = Z + 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 13 \\ Z = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{vzniká } {}_7\text{N}^{13} \quad 2 \text{ body}$$

Úplná rovnice zní tedy



b) Pozitronová emise vede k dceřinnému jádru s nižším atomovým číslem $Z - 1$, hmotnostní číslo zůstává beze změny. Tedy



Atomové číslo vznikajícího prvku je 6, tzn. vzniká jádro uhlíku ${}_6\text{C}^{13}$.

Příklad č. 3 z písemné zkoušky pro učitelské studium

Pro počáteční stav kyslíku platí stavová rovnice

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_m} R_m T_1, \quad (1)$$

kde $M_m = 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotnost O_2 , T_1 počáteční termodynamická teplota kyslíku.

Podobně pro konečný stav kyslíku platí

1 bod

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_m} R_m T_2, \quad (2)$$

kde $m_2 = m_1 - m$ je hmotnost kyslíku v láhvi.

Ze vztahu (1) vyplývá

$$V = \frac{m_1 R_m T_1}{M_m p_1}.$$

Podělením vztahů (1) a (2) dostaneme

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1}{m_2 T_2}$$

a odtud

$$m_2 = \frac{m_1 p_2 T_1}{p_1 T_2}.$$

Protože hledaná hmotnost $m = m_1 - m_2$, dostáváme po dosazení a úpravě

$$m = m_1 \left(1 - \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} \right) = m_1 \frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{p_1 T_2}. \quad 2 \text{ body}$$

Pro zadané hodnoty:

$$V = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 320}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 1,0 \cdot 10^6} \text{ m}^3 \doteq 83,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3,$$

$$V = 83 \text{ cm}^3. \quad 1 \text{ bod}$$

$$m = 1,0 \cdot 10^{-3} \frac{1,0 \cdot 10^6 \cdot 300 - \frac{5}{8} \cdot 10^6 \cdot 320}{1,0 \cdot 10^6 \cdot 320} \text{ kg} \doteq 0,33 \cdot 10^{-3} \text{ kg},$$

$$m = 0,33 \text{ g}. \quad 1 \text{ bod}$$

Příklad č. 5 z písemné zkoušky pro učitelské studium

Odporů částí (1) a (2) mezi body A , B jsou přímo úměrné jejich délkám:

$$R_1 = R \frac{x}{L}$$

$$R_2 = R \frac{L - x}{L} = R \left(1 - \frac{x}{L} \right), \quad 1 \text{ bod}$$

kde L je délka smyčky.

Části (1) a (2) jsou připojeny paralelně, takže odpor smyčky je

$$R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R^2 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{R \left(\frac{x}{L} + 1 - \frac{x}{L}\right)} = R \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad 1 \text{ bod}$$

Z podmínky úlohy $R_c = \frac{R}{10}$ dostáváme vztah

$$\frac{R}{10} = R \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right),$$

neboli po úpravě $10x^2 - 10Lx + L^2 = 0$.

Kořeny kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{10L \mp \sqrt{100L^2 - 40L^2}}{20} = \frac{10 \mp 2\sqrt{15}}{20} L,$$

neboli $x_1 \doteq 0,887L \doteq 0,9L$, 2 body
 $x_2 \doteq 0,113L \doteq 0,1L$

Vzdálenost mezi body je přibližně 0,9 délky smyčky vodiče (resp. 0,1 délky).

Řešení úloh ze str. 312

a) *Jules Verne* má ve své knize *Cesta na měsíc* řadu chyb. Neměl správnou představu o beztížném stavu. Myslel si, že beztížný stav je stav, kdy je přitažlivá síla Měsíce v rovnováze s přitažlivou silou Země. Proto se mylně domníval, že beztížný stav cestovatelé pocítí pouze v jednom bodě dráhy mezi Zemí a Měsícem.

Cestovatelé (z knihy Julese Verna) byli samozřejmě v beztížném stavu po celou dobu letu.

b) Kapitán kosmické lodi musí vypnout motory kosmické lodi. Beztížný stav je vlastně volný pád tělesa, tedy i pohyb kosmické lodi jen v důsledku přitažlivé síly.

K tomu, aby se těleso dostalo do beztížného stavu, je potřeba vytvořit podmínky, při kterých na něj kromě přitažlivé (gravitační) síly nepůsobí žádná jiná síla. Při pohybu kosmické lodi kolem Země je přitažlivá (gravitační) síla v tomto případě dostředivou silou. Kosmická loď se pohybuje (volným pádem) po kružnici kolem Země podobně, jako se pohybuje po kružnici hmotný bod na vlákně. Úlohu vlákna v případě kosmické lodi přebírá přitažlivá (gravitační) síla.

Sčítání na linách

Jiří Mikuláš Brněnský byl po nějaký čas rektorem školy v Úsově na Moravě, pak působil v Praze na škole Matouše Collina a v r. 1566 si založil vlastní školu, kde vyučoval česky a latinsky. Zřejmě pro potřebu této školy vydal v r. 1567 početnici „Knížka, v níž obsahují se začátkové umění aritmetického, to jest počtův na cifry neb liny, poznání pro pacholata a lidi kupecké sebraná“. Učebnice obsahuje jeden traktát o počítání na linách, druhý o počítání s číslicemi.

Na obrázku vidíme část stránky z Brněnského početnice, a to z partie o sčítání na linách. Můžeme číst záznam sčítaných peněžních obnosů ve zlatých, groších a tzv. bílých penízech:

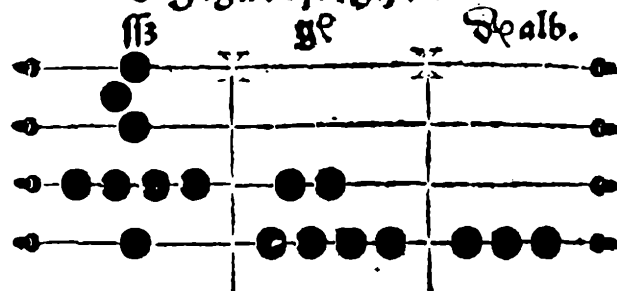
Za žito 125 zl 12 gr 4 b. p.

a obdobně za pšenici, ječmen, oves a hrách. Slovo facit pod čarou zastupuje výsledek, zde součet (doslova facit = to dělá). Součet byl však pouze dopsán podle spodního obrázku ohlášeného slovy „V figůře stojí tákto:“.

Rovnoběžné úsečky zakreslené vodorovně jsou liny, černá kolečka znázorňují početní známky, tzv. grošíky. Na nejspodnější lince znamenal grošík jednotku, na druhé desítku, na třetí stovku, na vrchní tisíc. Grošík umístěný v mezeře se

o počtu na Zináč:		vr.
Žito	1 2 5 113 12 gr 4.	
pšeničky	2 3 4 113 16 gr 5.	
Ječmen	4 5 0 113 20 gr 2.	De alb
Oves	1 7 6 113 10 gr 0	
Hrách	6 5 4 113 24 gr 6.	
facit	1 6 4 1 113 24 gr 3.	De alb.

V figůře stojí tákto:



rovnal pětinasobku hodnoty přiřazené nižší lince neboli polovině hodnoty grošíku na vyšší lince.

Na obrázku jsou tři sloupce s údaji součtu, v levém je znázorněno $1000 + 500 + 100 + 40 + 1 = 1641$ zlatých, ve středním $20 + 4 = 24$ grošů, v pravém 3 bílé peníze. Zkontrolujte součet vlastním výpočtem na linách; nejprve vyznačte částku za žito a pak přidávejte „grošíky“ za další sčítance; nezapomínejte na přechody $1 - 5 - 10 - 50 - 100 - 500 - 1000$ z liny do mezery a na další linu. Při převodech mezi sloupci uplatněte vztah $1 \text{ zlatý} = 30 \text{ grošů}$, $1 \text{ groš} = 7 \text{ bílých penízů}$.

Ivana Füzéková

UPOZORNĚNÍ

Poštovní zásilky a dopisy je třeba redakci Rozhledů zasílat výhradně na adresu:

Redakce časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1-Nové Město

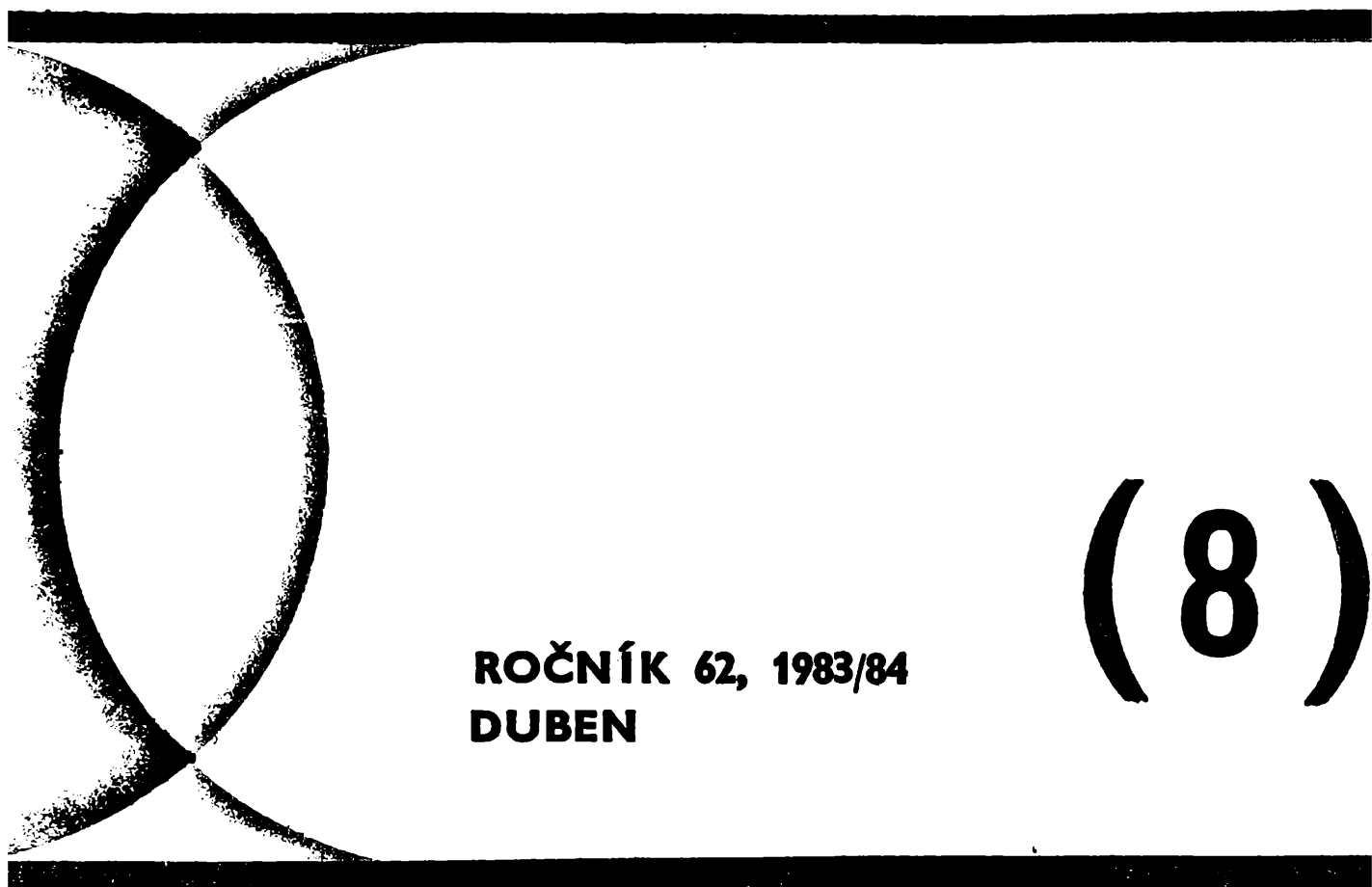
Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1984.

ROZHLEDY

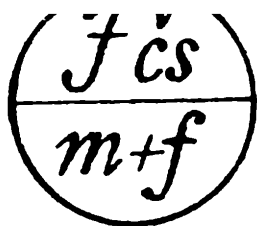
matematicko – fyzikální



ROČNÍK 62, 1983/84
DUBEN

(8)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZAJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE
Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK
Praha, prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc.,
PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář,
CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Mída: Půl století matematické olym- piády v SSSR	321
J. Vyšín: Rozklad konečné množiny bodů v rovině vyhovující daným podmínkám	322
E. Kraemer: Elipsa v polární soustavě souřadnic	327
I. Mazurová: Výroková logika a akvárium	331
O. Lepil: Zrychlená kyvadla	339
L. Dvořák: Přepočítejte si sci-fi .	343
J. Kotyk: O ladění	353
R. Zajac: Franckov-Hertzov pokus	355
Přemýšlíme, řešíme	357
Olympiády a SOČ .	365
Z nových knih .	367
Pohledy do dějin	. 3. str. obálky

Půl století matematické olympiády v SSSR

První matematické soutěže pro žáky středních škol vznikaly v evropských zemích už v minulém století. Matematické časopisy uveřejňovaly pro středoškoláky úlohy a vypisovaly na jejich řešení ceny. Šlo o korespondenční soutěže, žádná setkání řešitelů se nekonala a všichni soutěžící byli vlastně „osamělými běžci“.

V českých zemích byla poprvé časopisecká soutěž vyhlášena v roce 1870 a připravila ji tehdejší Jednota českých matematiků. V časopisech Jednoty se v takových soutěžích pak trvale pokračovalo a dnes na ně navazuje soutěž Rozhledů.

V polovině třicátých let 20. století si několik předních sovětských matematiků uvědomilo, že škola nerozvíjí dostatečně nadání žáků, kteří mají vlohy pro matematiku. V Leningradě a v Moskvě se začali profesori matematiky tamějších univerzit podílet na činnosti středoškolských matematických kroužků. Iniciátory byli v Leningradě *B. N. Delone* a *V. A. Tartakovskij*, v Moskvě *L. G. Šnirelman* a *L. A. Ljusternik*.

Na jaře v roce 1934 uspořádala leningradská univerzita matematickou olympiádu pro žáky, kteří byli členy matematických kroužků. Byla první v celém Sovětském svazu. Soutěž měla charakter klauzurní práce. Žáci ve stanovené době řešili předložené úlohy. V roce 1934 se zásluhou *L. A. Ljusternika* začaly vydávat knížky edice „Populjarnaja biblioteka po matematike“.

První moskevská matematická olympiáda se uskutečnila v roce 1935. Do její organizace se zapojili pracovníci mechanicko-matematické fakulty Moskevské státní univerzity a Matematického ústavu Akademie věd SSSR. Předsedou organizačního výboru se stal *P. S. Alexandrov*, prezident Moskevské matematické společnosti.

Po válce se začaly matematické olympiády postupně pořádat i v dalších sovětských městech, v nichž sídlily univerzity nebo pedagogické instituty. Celostátní charakter matematické olympiády postupně nabývaly od roku 1960. V roce 1967 se celostátní olympiáda poprvé pořádala pod názvem Všesvazová matematická olympiáda.

V Sovětském svazu vznikl před padesáti lety nový typ matematické soutěže pro žáky středních škol. Na řešení úloh se žáci nepřipravují zcela samostatně, mohou pracovat v matematických kroužcích, zúčastnit se přípravných přednášek a seminářů a studovat literaturu, která se pro ně vydává. Soutěže tohoto typu se dnes pořádají v mnoha zemích, a to nejen v matematice.

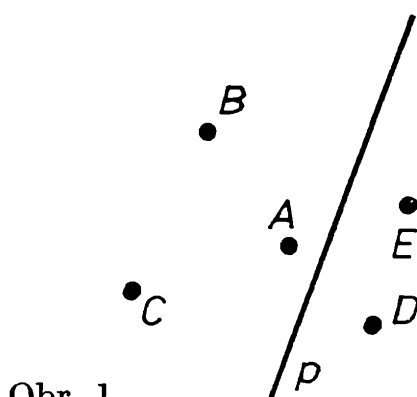
RNDr. Jiří Mída, CSc.

Rozklad konečné množiny bodů v rovině vyhovující daným podmínkám

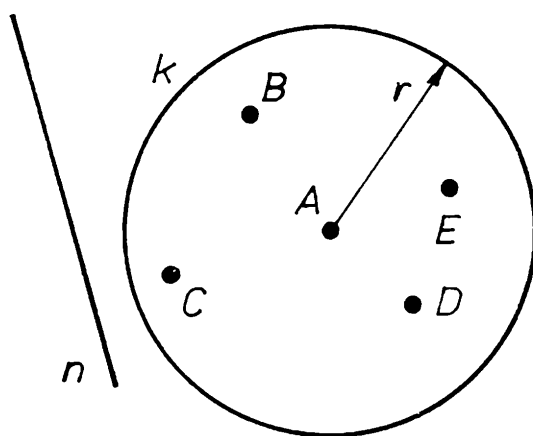
† Doc. JAN VYŠÍN, CSc. Praha

Ve školských úlohách obvykle hledáme matematický objekt (množinu bodů), který splňuje dané podmínky. V této stati se budeme zabývat kategorií úloh, kde hledaný objekt *nesplňuje* dané podmínky, tj. vyhýbáme se objektům, které dané podmínky splňují.

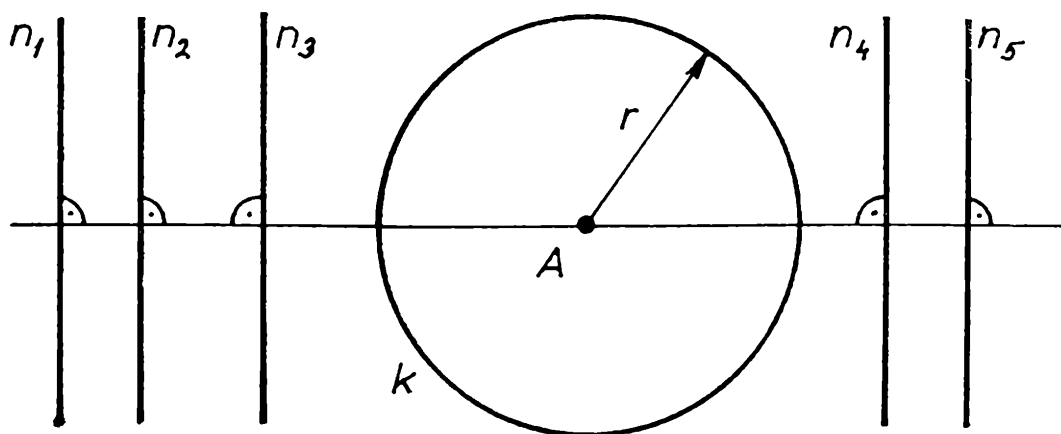
Např. v rovině je dáno pět bodů; máme sestavit aspoň jednu přímku, která neprochází žádným z těchto pěti bodů. (na obr. 1 jsou dány body A, B, C, D, E .) Podle názoru (naivního) snadno načrtneme přímku p . Kdyby však byl počet daných bodů např. MILIÓN, bylo by asi načrtnutí hledané přímky p obtížné.



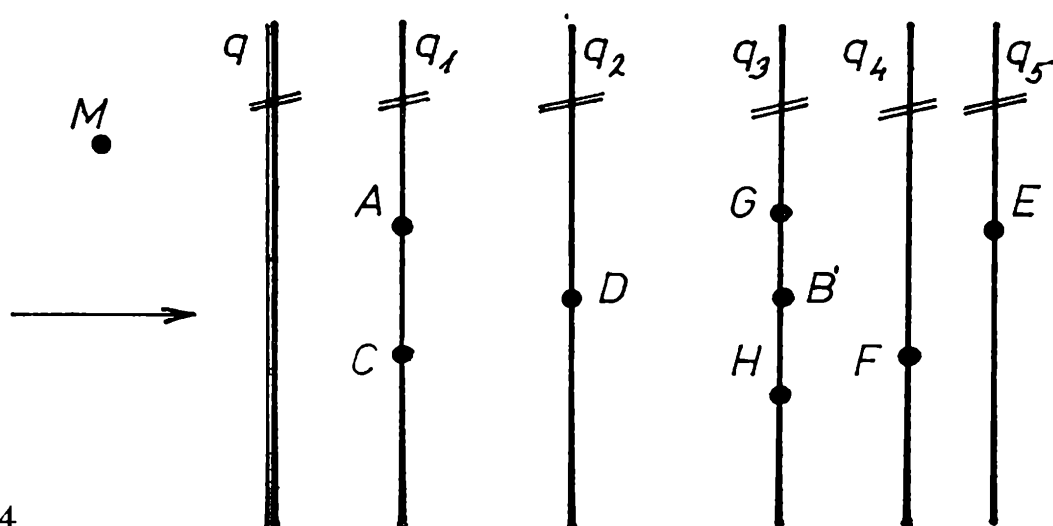
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Příklad 1. V rovině je dán milión bodů, máme sestavit sto tisíc přímek, z nichž žádná neobsahuje žádný z daných bodů.

a) Při řešení této úlohy nevystačíme s prostým názorem; zde je třeba úvahy. Velká čísla, která se vyskytují v zadání úlohy, nemají zastrášovat řešitele, ale mají ho spíše upozorňovat, že musí použít deduktivního postupu, který asi nebude záviset na numerických údajích.

Prozradíme řešiteli jeden trik, který se může použít v mnoha jiných případech a který se podstatně opírá o skutečnost, že množina M daných bodů je konečná. Ukážeme postup na množině M o pěti bodech A, B, C, D, E .

Vybereme ze vzdáleností AB, AC, AD, AE největší a označíme r číslo větší, než je tato největší vzdálenost; sestojíme kružnici k se středem A a poloměrem r (obr. 2). Pak všechny body z M leží uvnitř kruhu omezeného kružnicí k . Sestojíme vnější přímku (nesečnu) n kružnice k . Přímka n patrně neobsahuje žádný z bodů A, B, C, D, E .

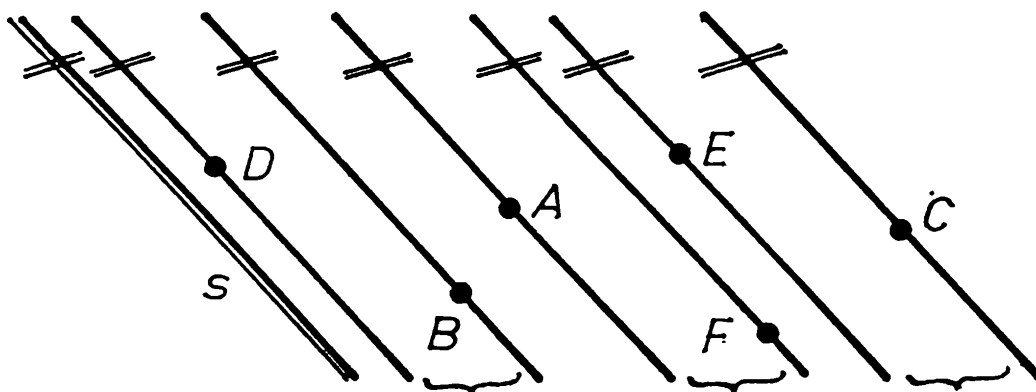
b) Konstrukci nesečny n lze libovolněkrát opakovat (viz např. obr. 3); n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 mají od středu A vzdálenost větší než r , jsou tedy vnější přímky kružnice k a žádná z nich neobsahuje žádný z bodů A, B, C, D, E .

Příklad 2. Je dána množina M o n bodech; k je číslo menší než n . Najděte přímku p tak, aby vnitřek jedné poloroviny s hranicí p obsahoval k bodů z M a vnitřek druhé poloroviny s hranicí p obsahoval zbývající body z M .

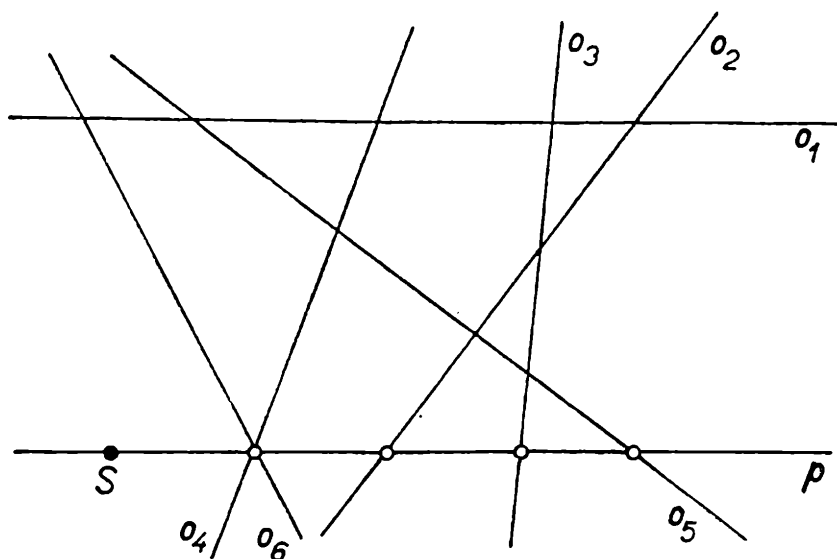
Základní myšlenka řešení může být třeba tato:

Narýsujeme přímku q tak, aby všechny body množiny M náležely vnitřku jedné poloroviny s hranicí q . V polorovině s hranicí q , v níž neleží žádný bod množiny M , zvolme bod M . Přímku q pak posunujeme kolmo na její směr tak, aby postupně „přešla“ body množiny M . Na obr. 4 je znázorněno 6 poloh přímky q , a to $q, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$.

Přitom bude posunovaná přímka q v polohách q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 „přeska-
kovat“ body množiny M , a to buď po jednom (D, E, F) nebo po dvou



Obr. 5



Obr. 6

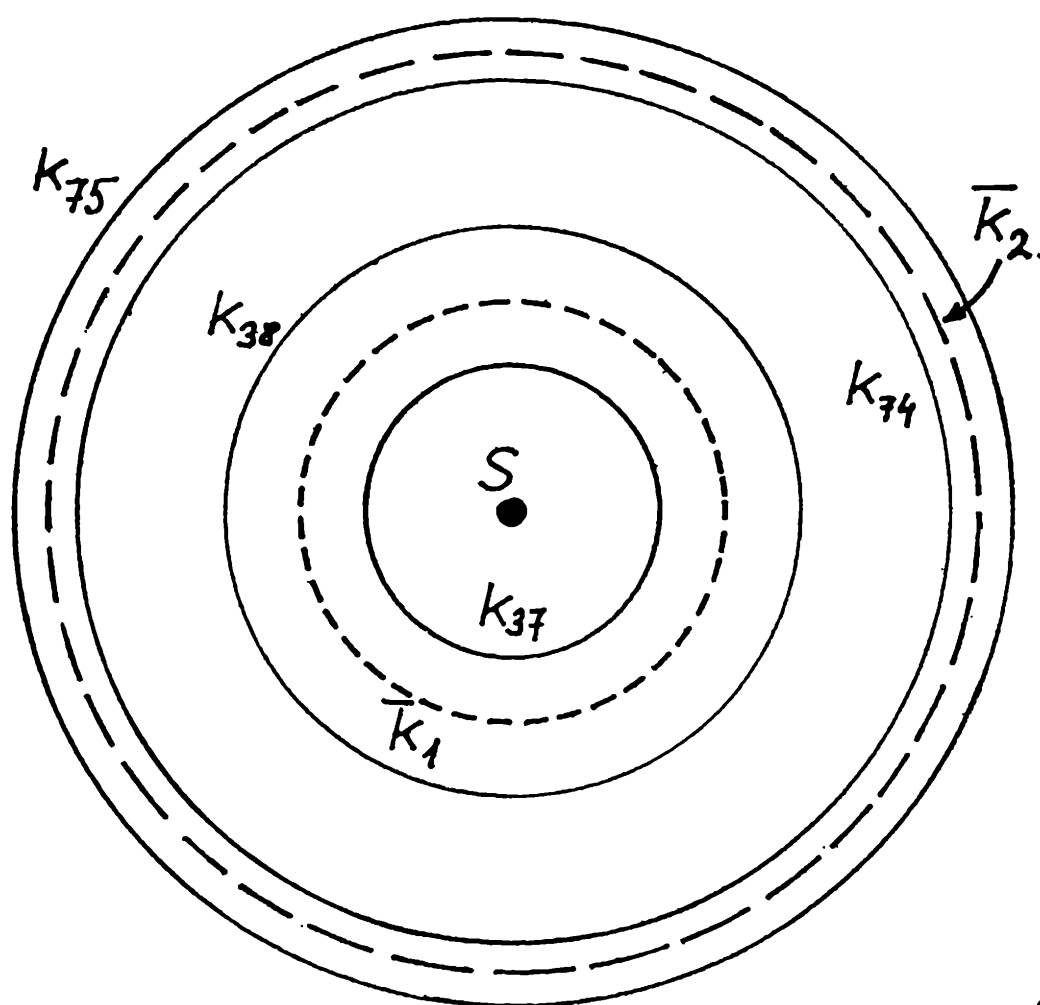
(A, C) nebo po třech (B, G, H) atd. Tak poroste počet bodů z $\mathbf{M}$, které se octnou v polorovinách q_1M , q_2M , q_3M atd. Mají-li body z množiny $\mathbf{M}$ překračovat *po jednom* do polorovin q_1M , q_2M , q_3M atd., nesmí být spojnice žádných dvou bodů rovnoběžná s přímkou q .

K rozřešení úlohy potřebujeme tedy dva pomocné poznatky:

- I. Je-li $\mathbf{M}$ konečná množina bodů v rovině, lze najít takovou přímku a v rovině, že množina $\mathbf{M}$ leží uvnitř jedné poloroviny s hranicí a .
 - II. Je-li $\mathbf{M}$ konečná množina bodů v rovině, existuje přímka, která není rovnoběžná se spojnici žádných dvou bodů z množiny $\mathbf{M}$.
- Ad. I. Tuto větu snadno ověříme, promítneme-li pravouhle všechny body z $\mathbf{M}$ na pevnou přímku z .
- Ad. II. Tuto větu snadno ověříme, vedeme-li pevným bodem T rovnoběžky se spojnici každých dvou bodů z $\mathbf{M}$.

Příklad 3. V rovině je dána množina $\mathbf{M}$, která obsahuje počet bodů dělitelný třemi. Pak lze vést dvě rovnoběžné přímky $a \parallel b$ tak, že vzniknou dvě poloroviny a pás roviny tak, že uvnitř pásu a v každé ze dvou polorovin leží stejný počet bodů z množiny $\mathbf{M}$.

Použijeme výsledku a postupu z příkladu 2. Položíme $k = \frac{1}{3}n$, kde n



Obr. 7

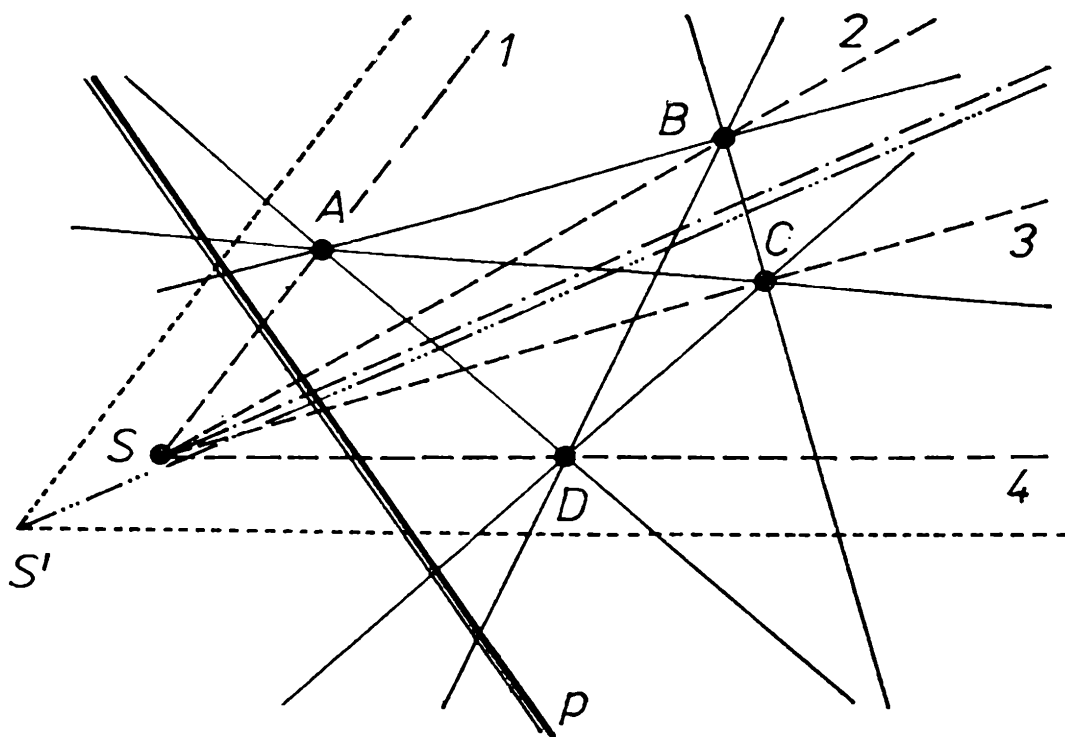
je počet bodů množiny M . Směr s přímek a , b zvolíme tak, aby byl různý od směrů spojníc každých dvou bodů množiny M . Přímky směru s procházející jednotlivými body $z M$, jsou vesměs navzájem různé, a tak lze rozložit množinu M na jednobodové množiny přímkami směru s .

Na obr. 5 je takový rozklad proveden pro $n = 6$. Rozklad množiny M na 3 dvoubodové množiny je $M = \{B; D\} \cup \{A; F\} \cup \{C; E\}$.

Příklad 4. V rovině je dána konečná množina bodů M . Máme určit takový bod S této roviny, aby vzdálenosti SX byly vesměs navzájem různé pro všechny body X množiny M .

Dva různé body $X, Y \in M$ mají od hledaného bodu S různé vzdálenosti právě tehdy, když bod S neleží na ose úsečky XY . Hledaný bod S musí tedy ležet mimo všechny osy všech úseček XY , $X, Y \in M$. Je-li n počet bodů množiny M , je počet os dvojic XY dán číslem $\binom{n}{2}$. Pro $n = 4$ je $\binom{n}{2} = 6$ a osy jsou $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6$ (obr. 6).

Zvolíme bod S ležící mimo přímky $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6$. Ten má zřejmě různé vzdálenosti od všech bodů A, B, C, D .



Obr. 8

Bod S můžeme zvolit takto: Sestrojíme pomocnou přímku $p \neq o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6$; na té leží *nejvýše* šest bodů přímek $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6$; na obr. 6 jsou jen čtyři a jsou vyznačeny kroužky. Každý jiný bod $S \in p$ vyhovuje požadavkům úlohy, tj. neleží na žádné z přímek $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6$; má tedy od všech čtyř bodů A, B, C, D různé vzdálenosti.

Příklad 5. Množina M se skládá ze 111 bodů roviny⁺). Máme sestrojit dvě soustředné kružnice k_1, k_2 v této rovině tak, aby každá ze tří množin, tj. vnitřek kružnice k_1 , vnitřek mezikruží (k_1, k_2) a vnějšek kružnice k_2 obsahoval po 37 bodech z M .

Jde o to, vyhledat střed kružnic k_1, k_2 . Jako v příkladu 4 je to bod S ležící mimo osy všech dvojic XY , kde X, Y jsou body z M . Bod S se vyhledá jako při řešení příkladu 4. Tím je každému bodu $X \in M$ přiřazena jedna kružnice se středem S a poloměrem SX , a to tak, že dvěma různým bodům $X, Y \in M$ jsou přiřazeny dvě různé kružnice se středem S . Označíme k_r tu kružnici se středem S , která má poloměr r . Množinu kružnic k_r uspořádáme podle rostoucích poloměrů r . Vyhledáme dvojice kružnic k_{37} a k_{38} a mezi nimi sestrojíme kružnici k_1 se středem S (obr. 7) a právě tak sestrojíme kružnici k_2 mezi k_{74} a k_{75} . Kružnice k_1, k_2 vyhovují daným požadavkům.⁺⁺)

Příklad 6. V rovině je dána konečná množina M o $2n$ bodech (n přirozené).

I) Máme sestrojit ostrý úhel α , jehož vnitřek obsahuje množinu M .

⁺) Tento počet může být libovolné číslo dělitelné třemi.

⁺⁺) k_1, k_2 neobsahují žádný bod z M .

II) Máme sestrojít ostrý úhel $\beta < \alpha$, který obsahuje právě n bodů množiny $\mathbf{M}$.

Obr. 8 znázorňuje situaci pro $n = 2$. Sestrojíme přímku p tak, aby množina $\mathbf{M}$ ležela uvnitř jedné poloroviny s hranicí p . Bod S zvolíme tak, aby ležel uvnitř opačné poloroviny s hranicí p a aby neležel na žádné z přímek AB, AC, AD, BC, BD, CD , tj. na žádné přímce XY , kde $X, Y \in \mathbf{M}$.

Polopřímky SA, SB, SC, SD očíslováme čísla 1, 2, 3, 4 (obecně 1, 2, 3, ..., $2n$) tak, aby za sebou následovaly např. v záporném smyslu otáčení SA, SB, SC, SD . Množina $\mathbf{M}$ pak leží v úhlu ASD , resp. uvnitř úhlu, který vznikl posunutím úhlu ASD do polohy s vrcholem S' (obr. 8). Očíslované polopřímky rozdělíme do dvou skupin 1, 2 a 3, 4 (obecně 1 až n a $n + 1$ až $2n$) a vedeme bodem S polopřímku rozdělující úhel $2S3$). Posunutím úhlu α do polohy naznačené tečkami posuneme i uvedenou polopřímku. Tím jsou obě úlohy I, II rozřešeny.

Elipsa v polární soustavě souřadnic

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Připomeňme si nejprve definici elipsy a její vlastnosti, které z definice snadno vyplývají. Nechť v rovině jsou dány dva různé body F, G . Potom množina všech bodů L roviny, z nichž každý má tu vlastnost, že grafický součet úseček FL, GL je shodný s danou úsečkou větší než úsečka FG , se nazývá *elipsa*. Bodům F, G říkáme *ohniska elipsy*; v dalším textu je budeme stále označovat písmeny F, G .

Náleží-li elipse bod L ležící mimo přímku FG , pak jí zřejmě náleží také bod L_1 souměrně sdružený k bodu L podle přímky $o_1 = FG$; tato přímka je tedy osou souměrnosti elipsy. Totéž platí pro osu o_2 úsečky FG . Proto se přímky o_1, o_2 nazývají *osy elipsy*; $o_1 = FG$ je *hlavní osa*, o_2 je *vedlejší osa* elipsy. Ze souměrnosti elipsy podle vzájemně kolmých os o_1, o_2 plyne její souměrnost podle jejich průsečíku S , jemuž se říká *střed elipsy*; je zároveň středem úsečky FG (obr. 1).

Zvolíme-li jednotku délky, pak číslo $e = |SF| = |SG|$ se nazývá *excentricita elipsy*. Podle definice elipsy je pro každý její bod L číslo $|FL| + |GL|$ stále totéž; označujeme je $2a$. Podle definice elipsy je zároveň

$$2a > 2e; \quad (1)$$

proto je možno sestrojít rovnoramenný trojúhelník FGC se základnou FG , jehož každé rameno má délku a . Bod C náleží tedy elipse; číslu $b =$

kou FG , pak předpokládáme, že vznikla otočením polopřímky FG kolem bodu A v kladném smyslu (tj. proti pohybu hodinových ručiček). V tomto případě je $\varphi \in (0, 2\pi)$ délka dráhy, kterou na kružnici $k_1 = (F, \rho = 1)$ proběhne při popsaném otáčení bod polopřímky FG od počáteční polohy (na polopřímce FG) do průsečíku kružnice k_1 s polopřímkou FL . Na obr. 1, 2 je tato dráha silně vytažena. Číslo $r = |FL| > 0$ se nazývá *modul bodu L* , číslo φ se jmenuje *argument bodu L* . Počátek F má modul $r = 0$, ale argument mu žádný nepřisuzujeme. Každý bod $L \neq F$ roviny má tedy právě dvě souřadnice a obráceně, každé dvojici reálných čísel $r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$ přísluší v rovině právě jeden bod $L \neq F$.

Věta 2. Nechť elipsa k má ohniska F, G , poloosy a, b ($a > b$) a excentricitu e . Potom v polární soustavě souřadnic, která má počátek v ohnisku F a polární osu v polopřímce FG , má elipsa k rovnici

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad (3)$$

přitom je

$$\varepsilon = \frac{e}{a} < 1, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Důkaz. Budiž L libovolný bod, který leží v rovině elipsy k , ale není bodem její hlavní osy $o_1 = FG$. Potom body F, G, L jsou vrcholy trojúhelníku FGL (obr. 1, 2), jehož strany mají tyto délky:

$$|FG| = 2e, \quad |FL| = r, \quad |GL| = r_1. \quad (4)$$

Z geometrie víme, že potom platí tyto nerovnosti:

$$|r - r_1| < 2e < r + r_1. \quad (5)$$

Nechť orientovaný úhel $\widehat{GFL}$ má velikost $\varphi \in (0, 2\pi)$; $\varphi \neq \pi$. Je-li $0 < \varphi < \pi$, je velikost vnitřního úhlu GFL trojúhelníku FGL rovna číslu φ (obr. 1); je-li $\pi < \varphi < 2\pi$, je velikost téhož úhlu rovna číslu $2\pi - \varphi$ (obr. 2). Protože je však $\cos(2\pi - \varphi) = \cos \varphi$, platí v obou případech podle kosinové věty užití na trojúhelník FGL tato rovnost:

$$|GL|^2 = |FL|^2 + |FG|^2 - 2|FL||FG| \cdot \cos \varphi.$$

Podle řádku (4) je tedy

$$r_1^2 = r^2 + 4e^2 - 4er \cos \varphi. \quad (6)$$

a) Budiž nyní $L = [r, \varphi]$ libovolný bod elipsy k , který neleží na její hlavní ose $o_1 = FG$. Potom podle definice elipsy je $|FL| + |GL| = 2a$ čili podle řádku (4) je $r_1 = 2a - r$. Z toho podle rovnosti (6) plyne, že je

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4e^2 - 4er \cos \varphi$$

$$a^2 - e^2 = ar \left(1 - \frac{e}{a} \cos \varphi \right).$$

Protože je $\frac{e}{a} < 1$, $\cos \varphi \leq 1$, je $1 - \frac{e}{a} \cos \varphi > 0$; protože platí také rovnost (2), je

$$\frac{b^2}{a} = r \left(1 - \frac{e}{a} \cos \varphi \right).$$

Z toho plyne, že pro souřadnice r, φ každého bodu $L = [r, \varphi]$ elipsy k , který neleží na její hlavní ose $o_1 = FG$, platí vzorec (3) ve větě 2.

b) Nechť bod $L = [r, \varphi]$ roviny není bodem elipsy k a neleží na její hlavní ose $o_1 = FG$; potom je $|FL| + |GL| \neq 2a$, čili podle řádku (4) je

$$r_1 \neq 2a - r. \quad (7)$$

Číslo $r = |FL|$ je kladné pro každý bod $L \neq F$, avšak číslo $2a - r$ může být také rovno nule nebo může být záporné. Protože je $r > 0$, plyne pro $2a - r \geq 0$ z nerovnosti (7), že je

$$r_1^2 \neq (2a - r)^2. \quad (8)$$

Je-li však $2a - r < 0$, může být $r_1^2 = (2a - r)^2$; to nastane právě tehdy, je-li $r_1 = -(2a - r)$ čili je-li $2a = r - r_1$. Potom je $r - r_1 > 0$, a tedy je $|r - r_1| = r - r_1$. Protože body F, G, L jsou vrcholy trojúhelníku FGL , platí nerovnosti (5). V našem případě $r - r_1 = 2a$ z levé nerovnosti řádku (5) plyne, že je $2a < 2e$; to však je ve sporu s předpokladem (1) platném pro elipsu k s excentricitou e a hlavní poloosou a . Příklad $r_1 = -(2a - r)$ tedy nemůže nastat. Pro každý bod L roviny elipsy k platí proto nerovnost (8). Z toho podle (6) plyne, že je

$$4a^2 - 4ar + r^2 \neq r^2 + 4e^2 - 4er \cos \varphi.$$

Ať je v této nerovnosti levá strana větší nebo menší než pravá strana, plyne z ní úpravou provedenou na počátku odstavce a), že je

$$\frac{b^2}{a} \neq r \left(1 - \frac{e}{a} \cos \varphi \right).$$

Z toho plyne, že pro souřadnice bodu $L = [r, \varphi]$, který neleží na elipse k a neleží na její hlavní ose $o_1 = FG$, neplatí vzorec (3) uvedený ve větě 2.

Zbývá ještě vyšetřit případ, kdy bod $L = [r, \varphi]$ je bodem hlavní osy $o_1 = FG$ elipsy. Je-li $L = F$, je $r = 0$, kdežto pravá strana vzorce (3) není rovna nule; v tomto případě vzorec (3) opět neplatí. Je-li $L \neq F$

bod osy o_1 , je buď $\varphi = 0$ (pro vnitřní body polopřímky FG), nebo je $\varphi = \pi$ (pro vnitřní body polopřímky opačné k polopřímce FG). Ptejme se, pro která r potom (tj. pro $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \pi$) platí vzorec (3) z věty 2.

Je-li $\varphi = 0$, je $\cos \varphi = 1$; ze vzorce (3) při použití vzorce (2) dostaneme, že je

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a}} = \frac{b^2}{a - e} = \frac{(a + e)(a - e)}{a - e} = a + e.$$

To znamená, že bod L má souřadnice $r = a + e$, $\varphi = 0$; to však je bod B (vrchol) hlavní osy elipsy k .

Je-li $\varphi = \pi$, je $\cos \varphi = -1$; ze vzorce (3) při použití vzorce (2) dostaneme obdobným výpočtem, že je $r = a - e$. To znamená, že bod L má souřadnice $r = a - e$, $\varphi = \pi$; to je však bod A (vrchol) hlavní osy elipsy k .

Vzorec (3) ve větě 2 platí tedy pro souřadnice r , φ každého bodu $L = [r, \varphi]$ elipsy k a platí jedině pro souřadnice bodů elipsy k . Proto tomuto vzorci říkáme rovnice elipsy k .

Výroková logika a akvárium

IVA MAZUROVÁ, Klub mikroelektroniky SSM na PedF UK
v Praze

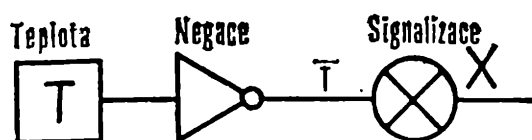
V tomto článku si na jednoduchém příkladu ukážeme aplikaci výrokové logiky při „matematizaci reálných situací“. To nám umožní sestavit schémata logických obvodů, realizujících signalizační či přímo automatická řídicí (rozhodovací) zařízení.

Pokud bychom nechtěli zůstat pouze u schémat na papíře, můžeme si podle článku [1] takové logické obvody skutečně postavit. Tyto obvody můžeme také zapojit na stavebnici Minilogik, vyráběné n. p. Komenium.

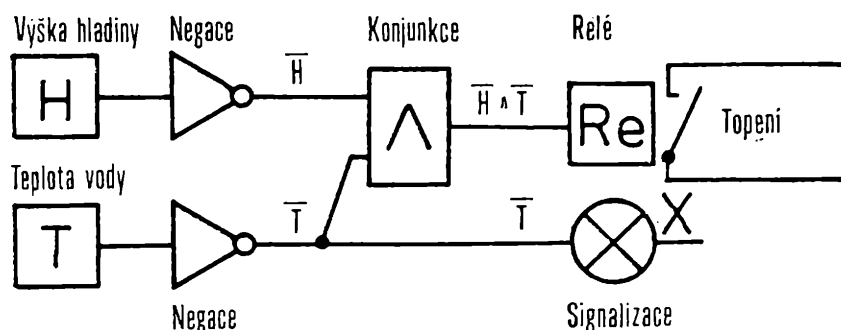
Předpokládáme, že máme k dispozici logické členy realizující disjunci, konjunci a negaci. Dále používáme kybernetická čidla, která mají na výstupu následující logické hodnoty:

Fotobuňka

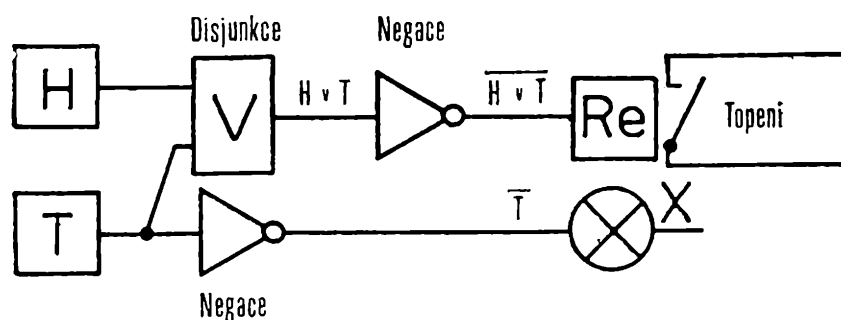
osvětlená ... $F = 1$
zastíněná ... $F = 0$



Obr. 1



Obr. 2a



Obr. 2b

Indikátor teploty

vyšší než nastavená teplota $T = 1$
 nižší než nastavená teplota $T = 0$

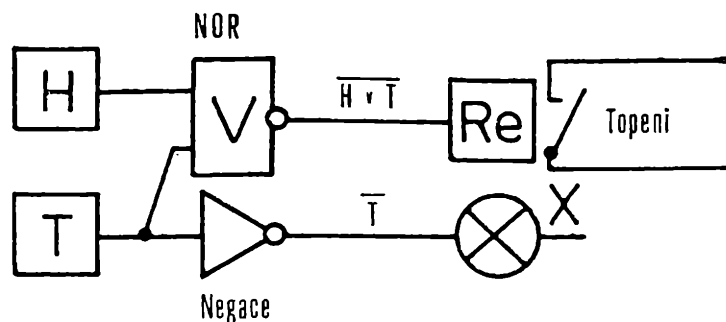
Indikátor výšky hladiny

kontakty nad hladinou $H = 1$
 kontakty pod hladinou $H = 0$

K signalizaci použijeme *žárovky* či *svítivé diody*. Svícení znamená logickou hodnotu 1. Můžeme použít též relé, které při logické hodnotě 1 sepne (a zapojí například elektrický obvod topení). Pro přerušované svícení žárovek (blikání) použijeme *přerušovač*, na jehož výstupu $Př$ se pravidelně střídají logické hodnoty 0 a 1 (pro blikání proto můžeme použít $Př$ místo $\overline{Př}$).

Příklad 1. V akváriu se vzácnými rybami nebo v bazénu botanické zahrady s tropickými lekníny chceme signalizovat, že je dostatečná teplota vody.

Řešení: Nízká teplota vody způsobuje, že logická hodnota $T = 0$. Při $T = 0$ svítí žárovka X , tj. logická hodnota $X = 1$. To signalizuje, že je potřeba topením vodu ohřívat tak dlouho, dokud žárovka nezhasne. Logický obvod musí realizovat funkci $X = \overline{T}$. Schéma obvodu je na obrázku 1.



Obr. 3

Příklad 2. V situaci podle 1. příkladu bychom mohli kromě signalizační žárovky zapojit i relé (jeho kontakty by sepnuly ponorný ohřívač vody v akváriu). Ponorný ohřívač je konstruován tak, že musí být při topení ponořen do vody, jinak se přehřeje a shoří. Proto kromě indikátoru teploty T musíme použít i indikátor výšky hladiny H .

Řešení: Žárovka X signalizuje nízkou teplotu (jako v 1. příkladu). Relé Re sepne ohřívač vody, jen když je v akváriu nízká teplota a současně je dostatek vody, tedy $H = 0$. Proto sestavíme soustavu dvou funkčních rovnic pro logické proměnné:

$$(1) \quad X = \overline{T},$$

$$(2) \quad Re = \overline{T} \wedge \overline{H}.$$

K realizaci funkce (1) potřebujeme jednu negaci, k realizaci funkce (2) dvě negace a jednu konjunkci. Jako matematici asi navrhneme zjednodušení funkce (2). Užijeme de Morganových zákonů výrokové logiky a dostaneme:

$$(2') \quad Re = \overline{T \vee H}.$$

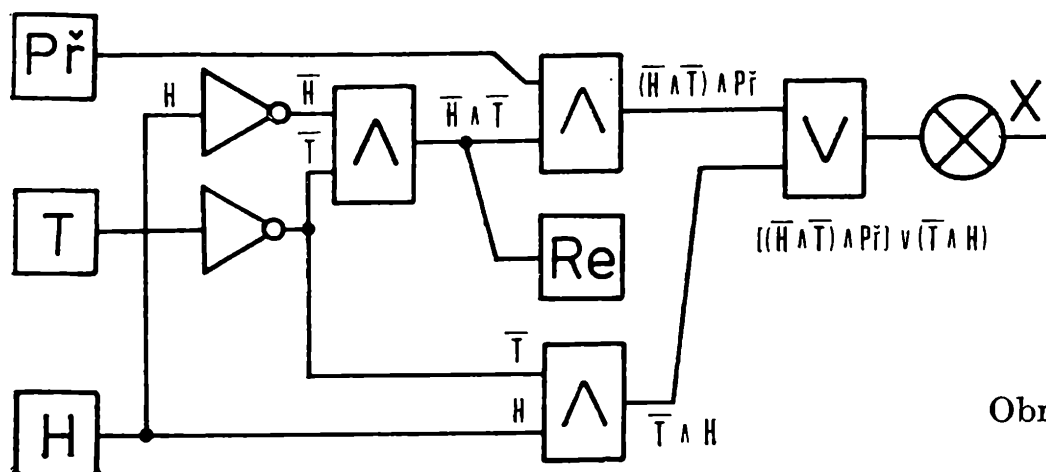
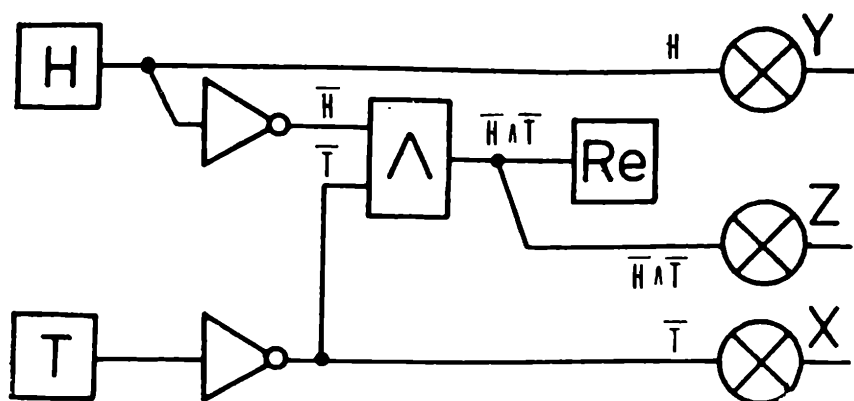
Tento tvar funkce (2') vyžaduje jen jednu negaci a jednu disjunkci.

Funkce (1) a (2) však nemusíme zapojovat samostatně; negaci $\overline{T}$ z funkce (1) můžeme použít i pro realizaci funkce (2), jak vidíme na obrázku 2a.

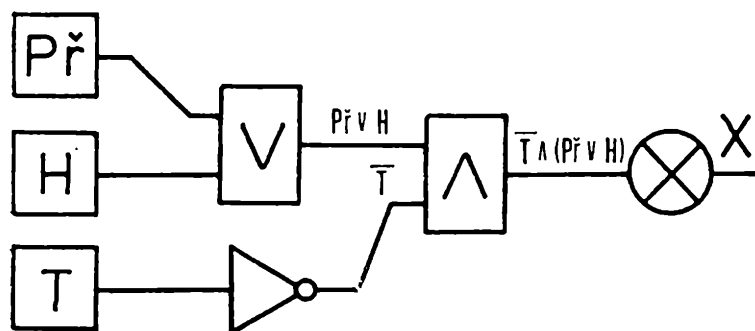
Pak ovšem naše úprava nepřinesla pro soustavu jako celek žádnou výhodu, vždy potřebujeme dvě negace a jeden další logický člen (disjunkci či konjunkci). Obrázek 2a ukazuje zapojení funkcí (1) a (2), obrázek 2b zapojení funkcí (1) a (2').

Pokud jsme si přečetli článek [1] nebo metodickou příručku [2], pak víme, že pro realizaci logické funkce disjunkce (konjunkce) máme k dispozici nejprve jednodušší obvod NOR (negované disjunkce) či NAND (negované konjunkce), ze kterých teprve přidáním logického členu negace vytvoříme logické funkce disjunkci či konjunkci. Funkce ve tvaru (2') by nám pak umožnila přímo využít logický člen NOR, který kreslíme značkou disjunkce v obdélníku s kroužkem. Schéma zapojení vidíme na obrázku 3.

Obr. 4



Obr. 5a

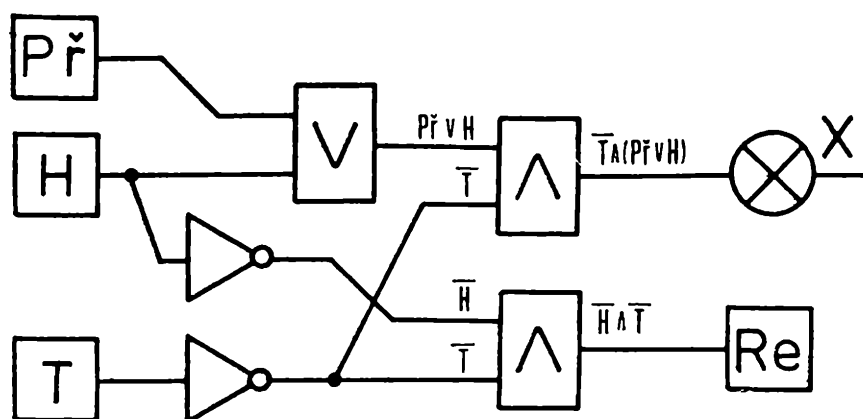


Obr. 5b

Z matematického hlediska máme tedy více možností, jak obvod navrhnout (úloha nemá jediné řešení). Z hlediska praktické realizace obvodu však musíme vycházet z toho, jaké součástky máme k dispozici a kromě toho se musíme snažit o řešení ekonomicky nejvýhodnější.

Příklad 3. Vraťme se k příkladu 2. Navržený automatizační obvod nám vyhovuje. Signalizační obvod se žárovkou X nám však pouze ukazuje, že je nízká teplota vody, ale neukáže již, jestli bylo či nebylo zapnuto ohřívání vody (vlivem nízké hladiny po odpaření vody).

Pro sledování výšky hladiny bychom mohli od indikátoru H vést vedení k signalizační žárovce Y nebo od relé ještě vedení k signalizační žárovce Z . Na obrázku 4 vidíme doplněné zapojení z obrázku 2. Ve schématu na obrázku 4 je však jedna ze žárovek Y a Z nadbytečná.



Obr. 6

K žárovce X z obrázku 2 stačí přidat jen jednu ze žárovek Y a Z . Znamená to však zavést další elektrické vedení od akvária (bazénku) na kontrolní stanoviště.

Pomocí obvodu s přerušovačem $Př$ proto navrhne potřebnou signalizaci jedinou signalizační žárovkou X (a tím i jediným elektrickým vedením).

Řešení: Obvod navrhne tak, aby žárovka přerušovaně svítila, je-li nízká teplota vody a ohřívač je zapnut, a svítila trvale, pokud je nízká teplota vody a ohřívač nemůže být sepnut pro nízkou hladinu vody. Svícení žárovky určuje logická funkce:

$$(3) \quad X = [(\overline{T} \wedge \overline{H}) \wedge Př] \vee (\overline{T} \wedge H).$$

Schéma zapojení obou funkcí (2) a (3) je na obrázku 5a. Funkci (3) můžeme pomocí pravidel výrokové logiky upravit.

Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} X &= \overline{T} \wedge [(\overline{H} \wedge Př) \vee H], \\ X &= \overline{T} \wedge [(\overline{H} \vee H) \wedge (Př \vee H)]. \end{aligned}$$

Tedy konečný tvar je:

$$(3') \quad X = \overline{T} \wedge (Př \vee H),$$

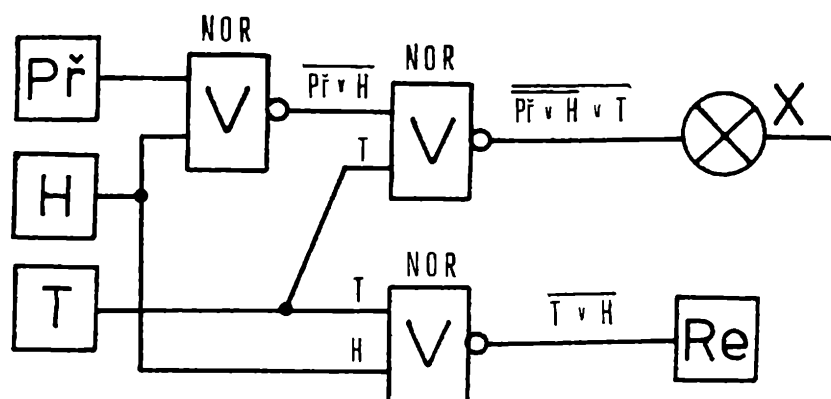
neboť $\overline{H} \vee H = 1$ a $1 \wedge A = A$ pro každé A . Schéma zjednodušeného zapojení signalizace je na obrázku 5b. Pro ovládání relé musíme připojit další logické členy podle obrázku 6.

Podíváme-li se na obrázky 5a a 6, vidíme, že zdánlivě tak elegantní úprava funkce (3) na tvar (3') nám ušetřila pouze jediný člen konjunkce. Použijeme-li však technicky jednodušší logickou funkci NOR a jestliže tvar (3') upravíme na tvar

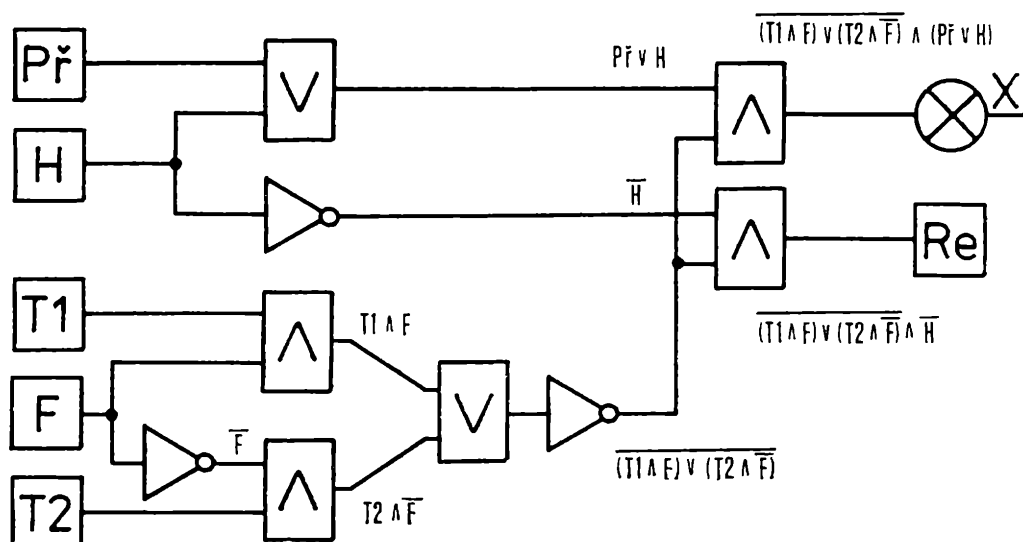
$$(3'') \quad X = \overline{T \vee Př \vee H},$$

pak můžeme obvod zapojit z logických funkcí (2') a (3'') podle obr. 7.

Obr. 7



Obr. 8

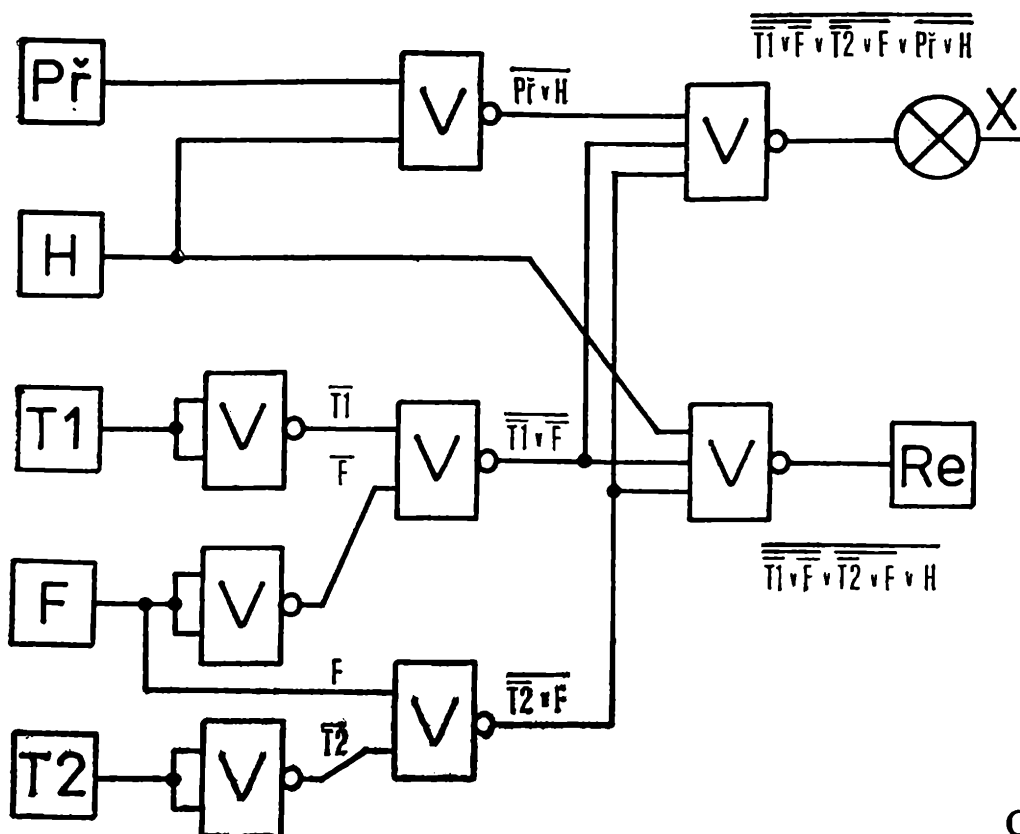


Úloha 1. Situaci ze 3. příkladu obměňte tak, že svit žárovky X znamená nedostatek vody (obsluha musí jít vodu doplnit) a přerušované svícení X signalizuje ještě závažnější poruchu — při nedostatku vody je navíc nízká teplota vody. Nízkou teplotu automaticky zvyšovanou ohřívačem není potřeba signalizovat. (ohřívač je sepnut automaticky, je-li nízká teplota a dostatek vody). Navrhněte schémata zapojení a napište funkční rovnice!

Příklad 4. Při náročnějších požadavcích na udržování správné teploty vody v akváriu či bazénku a lekníny se požadují rozdílné teploty vody ve dne a v noci. Tento rozdíl činí asi $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ a přibližně odpovídá skutečným podmínkám v přírodě. Proto doplníme 3. příklad.

Řešení je možné pomocí dvou indikátorů teploty $T1$ a $T2$, které v závislosti na denním světle „přepínáme“ pomocí logických členů. Denní světlo snímáme citlivou fotobuňkou F (umístěnou tak, aby v noci nesnímala omylem pouliční osvětlení a podobně). Osvětlená fotobuňka má na výstupu logickou hodnotu 1 a v noci (po setmění) logickou hodnotu 0.

Řešení: Indikátor teploty T můžeme nahradit dvěma indikátory $T1$ a $T2$ např. takto:



Obr. 7

$$(4) \quad T = (T1 \wedge F) \vee (T2 \wedge \overline{F}).$$

Použijeme-li při řešení logických členů konjunkce, disjunkce a negace (například z pomůcky Minilogik), potom dostáváme dosazením (4) za T do (3') logickou funkci

$$(5) \quad X = \overline{(T1 \wedge F) \vee (T2 \wedge \overline{F}) \wedge (P\check{r} \vee H)},$$

dosazením (4) do (2) dostáváme logickou funkci

$$(6) \quad Re = \overline{(T1 \wedge F) \vee (T2 \wedge \overline{F}) \wedge \overline{H}}.$$

Zapojení je znázorněno na obrázku 8.

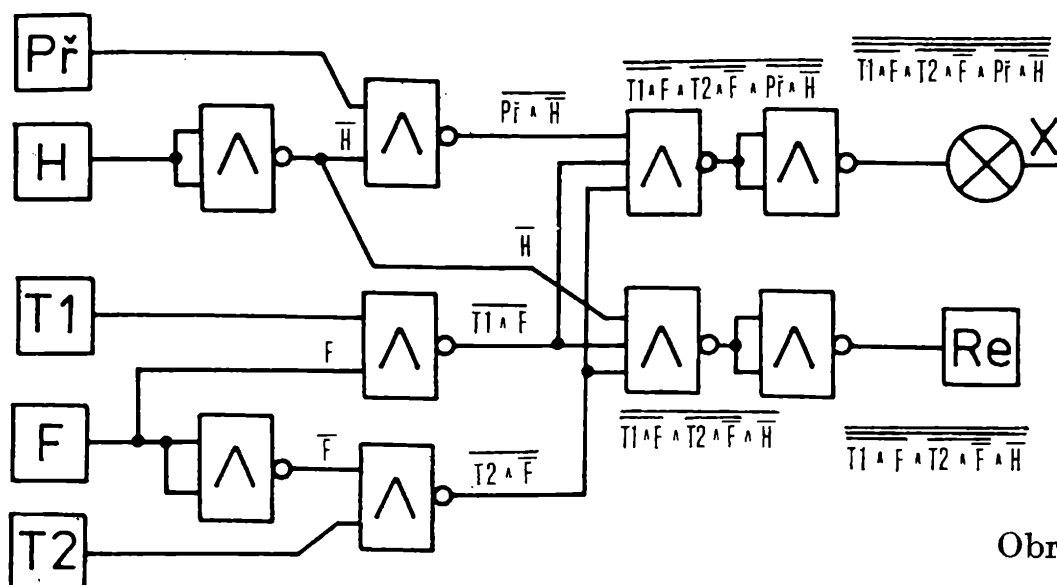
Chceme-li signalizační i automatizační obvod zapojit pouze ze členů NOR, potom logickou funkci (5) upravíme na tvar

$$(5') \quad X = \overline{\overline{\overline{T1}} \vee \overline{\overline{F}} \vee \overline{\overline{T2}} \vee \overline{\overline{F}} \vee \overline{\overline{P\check{r}}} \vee \overline{\overline{H}}}$$

a funkci (6) upravíme na tvar

$$(6') \quad Re = \overline{\overline{\overline{T1}} \vee \overline{\overline{F}} \vee \overline{\overline{T2}} \vee \overline{\overline{F}} \vee \overline{\overline{H}}}.$$

Negaci zapojíme ze členu NOR pomocí vztahu $\overline{A} = \overline{A \vee A}$. Zapojení je znázorněno na obrázku 9.



Obr. 10

Pro zapojení ze členů NAND (negované konjunkce) upravíme funkci (5) na tvar

$$(5'') \quad X = \overline{T1 \wedge F \wedge T2 \wedge F \wedge Pře \wedge H}$$

a funkci (6) na tvar

$$(6'') \quad Re = \overline{T1 \wedge F \wedge T2 \wedge F \wedge H}.$$

Dvojité negace nám umožňují zapojit obvod pouze ze členů NAND. Opět využijeme vztah $\overline{A} = A \wedge A$. Tvar (5'') lze zjednodušit ještě tím, že pro blikání žárovky můžeme použít $Pře$ místo $\overline{Pře}$. Zapojení ukazuje obrázek 10. Použití členů NAND umožňuje postavit celý obvod i z integrovaných logických obvodů Tesla MH 7410 a dvou MH 7400, o kterých se více dozvíme z dalších článků v některých příštích Rozhledech.

Úloha 2

Rozšířte úlohu 1 analogicky k příkladu 4, tedy s rozdílnou denní a noční teplotou vody.

Úloha 3

Úlohu 2 upravte na obvody ze členů NAND a ze členů NOR. Nakreslete schéma zapojení a napište funkční rovnice.

Úloha 4

Denní teplota je o 3 °C vyšší než noční teplota (případ $T1 = 1$, $T2 = 0$ nemůže nastat)

S ohledem na to se pokuste zjednodušit řešení příkladu 4 i úloh 2 a 3.

Přehled použité literatury

- [1] Fischer I.: Logické obvody z polovodičů. Rozhledy matematicko-fyzikální, 1983/84, č. 5, s. 194–202.

- [2] Fischer I.: Minilogik — metodická příručka k souboru pomůcek k výuce výrokové logiky. N. p. Komenium, Praha 1983.
 [3] Mráz V.: Logika pro pedagogy. Skriptum PedF UK, SPN, Praha 1981.
 [4] Uhlíř J.; Slípka J.: Polovodičové impulsové a spínací obvody. SNTL, Praha 1976.
 [5] Bernard J.-M., Hugon J.; Od logických obvodů k mikroprocesorům. Díl 1., SNTL, Praha 1982.

FYZIKA

Zrychlená kyvadla

RNDr. OLDŘICH LEPIL, CSc., UP Olomouc

V článku *Neobvyklá kyvadla* (RMF č. 7) jsme se zabývali kmitáním kyvadel, jejichž pohyb byl ovlivňován vnějším působením. Přitom jsme vždy předpokládali, že bod závěsu kyvadla byl v klidu. Může však nastat i případ, že se celé kyvadlo, včetně bodu závěsu bude pohybovat. I to můžeme považovat za vnější působení na kyvadlo a bude nás zajímat, jaký vliv na periodu kmitání kyvadla bude mít jeho celkový pohyb.

O jakou fyzikální situaci se jedná, ukážeme nejlépe na konkrétním příkladu. Řekněme, že kyvadlo tvořené vláknem délky l a kuličkou o hmotnosti m je zavěšeno v kabině výtahu, která se pohybuje se zrychlením a směrem vzhůru. S tímto zrychlením se také pohybuje závěs kyvadla a na kuličku působí kromě tíhové síly $F_G = mg$ ještě setrvačná síla o velikosti $F_S = ma$. Její směr je opačný než směr zrychlení výtahu, a je tedy souhlasný se směrem tíhové síly. Proto na kuličku kyvadla působí celková síla o velikosti

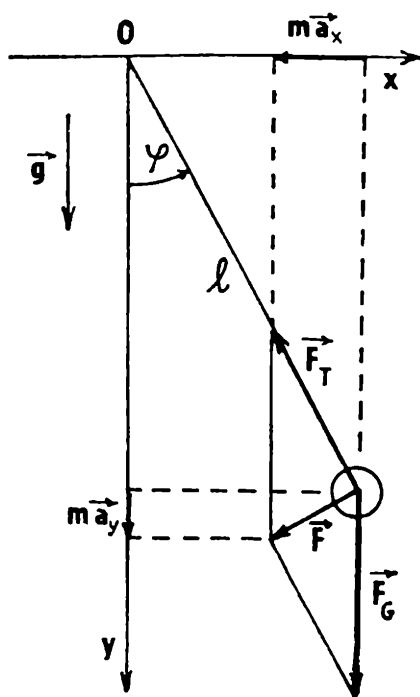
$$F = mg + ma = m(g + a).$$

Jestliže pro periodu kyvadla, jehož bod závěsu je v klidu (nebo se pohybuje pohybem rovnoměrným přímočarým), platí vztah

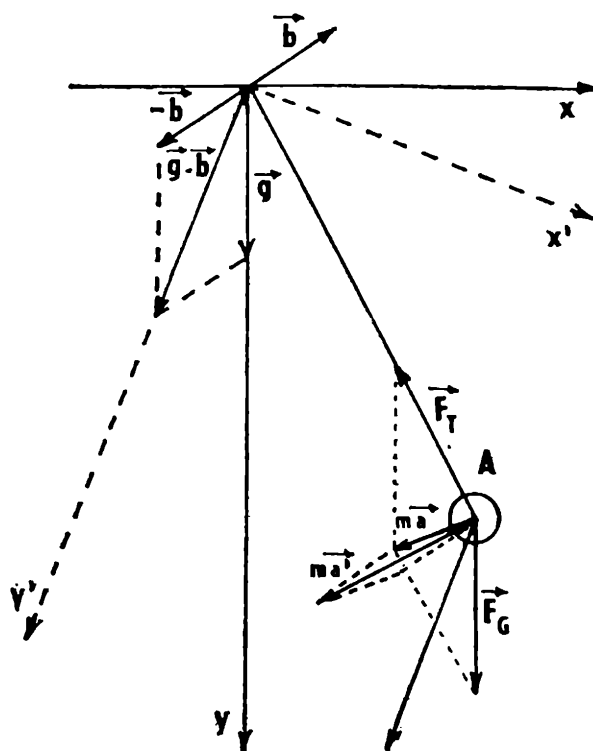
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

pak pro naše kyvadlo, jehož kmitání způsobuje síla F , zřejmě platí

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a}}$$



Obr. 1



Obr. 2

To znamená, že kyvadlo kmitá s kratší periodou a jeho frekvence se zvětšuje. Snadno dospějete k závěru, že naopak při zrychleném pohybu výtahu směrem dolů se perioda kmitání kyvadla bude prodlužovat podle vztahu

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - a}}$$

Sami odpovězte na otázku, jaký by byl výsledek našeho pokusu v kabině padající volným pádem ($a = g$), nebo dokonce v případě, že by se kabina pohybovala směrem dolů se zrychlením $a > g$.

Provedme nyní zobecnění případu kyvadla, jehož bod závěsu se pohybuje zrychleným pohybem. K tomu účelu umístíme bod závěsu kyvadla do počátečního bodu vztažné soustavy (obr. 1). Kladný směr osy OY jsme zvolili ve směru vektoru tíhového zrychlení. Pokud je bod závěsu v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém, je kyvadlo v inerciální vztažné soustavě. Sílu $\mathbf{F}$, která působí na kuličku kyvadla, určíme pomocí 2. pohybového zákona

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_T. \quad (1)$$

Síla $\mathbf{F}_T$ je tahová síla vlákna závěsu. Rovnice (1) představuje pohybovou rovnici kyvadla. K popisu pohybu kyvadla nám však obvykle postačí průměty výsledné síly do os vztažné soustavy

$$\begin{aligned} m a_x &= -F_T \sin \varphi, \\ m a_y &= m g - F_T \cos \varphi. \end{aligned}$$

Poněvadž se při pohybu kyvadla délka l závěsu nemění, platí mezi souřadnicemi těžiště kuličky vztah

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Proto k popisu pohybu kyvadla postačuje, když známe časovou závislost jen jedné souřadnice a můžeme určit hodnoty všech kinematických veličin.

Avšak vraťme se k našemu kyvadlu v situaci, kdy se bod závěsu kyvadla pohybuje se zrychlením $\mathbf{b}$ vzhledem k inerciální vztažné soustavě (obr. 2). Zrychlení $\mathbf{a}$ kuličky (bod A) vzhledem k inerciální vztažné soustavě bude určeno vektorovým součtem

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{b},$$

v němž $\mathbf{a}'$ je zrychlení kuličky vzhledem k neinerciální vztažné soustavě spojené se zrychleně se pohybujícím bodem závěsu. Pohybová rovnice kyvadla bude mít nyní tvar

$$m \mathbf{a}' + m \mathbf{b} = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_T$$

Z této rovnice najdeme sílu

$$m \mathbf{a}' = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_T - m \mathbf{b} = m (\mathbf{g} - \mathbf{b}) + \mathbf{F}_T, \quad (2)$$

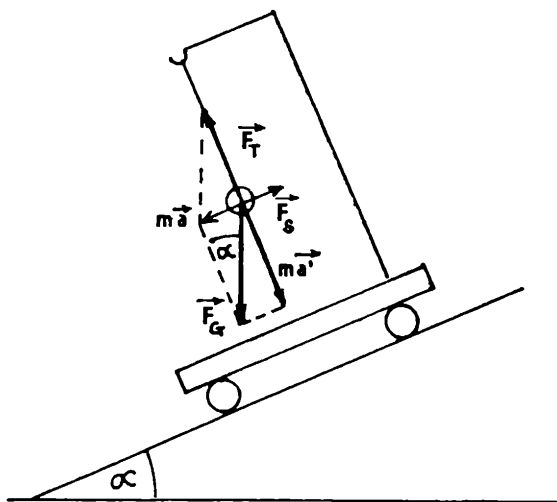
která v neinerciální vztažné soustavě, tj. v soustavě pohybující se zrychleně, působí na kuličku.

Jestliže tedy chceme použít 2. pohybový zákon v neinerciální vztažné soustavě, musíme ke všem reálným silám, které v této soustavě na kuličku působí, připočítat vektor $m(-\mathbf{b})$. Tento vektor jsme nazvali setrvačná síla. V rovnici (2) jsme sečetli setrvačnou sílu se silou tíhovou. Tím jsme získali sílu, která má v neinerciální vztažné soustavě význam nové „tíhové síly“ a určuje nový „svislý směr“. Tzn. význam vektoru $\mathbf{g}$ přejímá vektor $(\mathbf{g} - \mathbf{b})$ a kyvadlo kmitá kolem rovnovážné polohy, která leží na nové vertikále Y' . S ní můžeme spojit i novou vztažnou soustavu, v níž kyvadlo kmitá. Poněvadž velikost nové tíhové síly $\mathbf{g}' = (\mathbf{g} - \mathbf{b})$, platí pro periodu kyvadla vztah

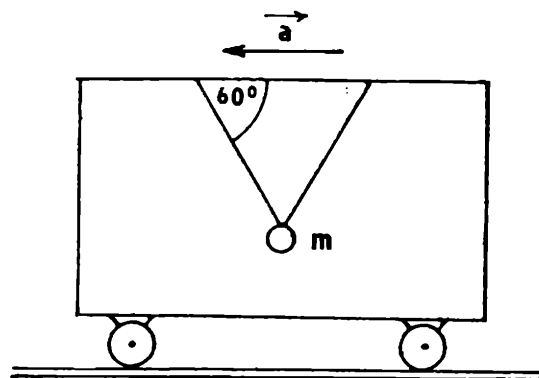
$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Tím jsme dospěli k závěru, který nám umožňuje určit periodu kyvadla, jehož bod závěsu se pohybuje zrychleně. Získaný výsledek použijeme pro řešení následujícího příkladu: Kyvadlo je zavěšeno na vozíku, který se pohybuje bez tření po nakloněné rovině s úhlem sklonu α (obr. 3). Určete rovnovážnou polohu kyvadla a periodu jeho kmitání.

Vozík se po nakloněné rovině pohybuje se zrychlením o velikosti $a = g \sin \alpha$, takže kulička bude v rovnovážné poloze tehdy, když se bude



Obr. 3



Obr. 4

pohybovat vzhledem k nakloněné rovině se stejným zrychlením jako vozík. Na kuličku působí dvě reálné síly: tíhová síla $\mathbf{F}_G$ a tahová síla $\mathbf{F}_T$. Výslednice těchto sil musí v rovnovážné poloze udělovat kuličce zrychlení $\mathbf{a}$. Z obr. 3 je patrné, že je to možné jen v případě, když bude závěs kyvadla kolmý k nakloněné rovině. Tím je také určen „svislý směr“ v neinerciální vztažné soustavě spojené s vozíkem.

Velikost „tíhového“ zrychlení g' v této soustavě určíme rovněž pomocí obr. 3. Z něho je patrné, že

$$g' = |\mathbf{g} - \mathbf{a}| = \sqrt{g^2 - g^2 \sin^2 \alpha} = g \cos \alpha.$$

Kyvadlo tedy kmitá s periodou

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}.$$

Snadno si ověříme, jak se změní vztah pro periodu kyvadla, jestliže se vozík s kyvadlem bude pohybovat po vodorovné nebo svislé rovině.

Jestliže jste dobře pochopili, jak souvisí perioda kyvadla se zrychlením vztažné soustavy, ve které kyvadlo kmitá, nebude pro vás problém vyřešit následující příklady:

1. V jakém poměru budou periody kmitání téhož kyvadla na Zemi a na Měsíci, jestliže hmotnost Země je 81krát větší než hmotnost Měsíce a poloměr Země je 3,7krát větší než poloměr Měsíce. [1 2,4]

2. Kyvadlo s periodou 1 s, zavěšené v kabině výtahu, vykoná za 2min 30s celkem 100 kmitů. Určete s jakým zrychlením a kterým směrem se kyvadlo pohybuje. [5,4 m s⁻² dolů]

3. Kabina výtahu se pohybuje vzhůru nejprve po dobu t_1 se zrychlením $\mathbf{a}_1$ a potom se pohybuje po dobu t_2 zpomaleně se zrychlením $-\mathbf{a}_2$. Určete obecně, kolik kmitů vykoná kyvadlo délky l zavěšené v kabině výtahu

za dobu jeho pohybu. Řešte pro $a_1 = a_2 = 0,5 \text{ g}$, $t_1 = t_2 = 10 \text{ s}$, $l = 0,5 \text{ m}$. [14]

4. Raketa startuje svisle vzhůru se zrychlením $a = 3 \text{ g}$. Kolik celých kmitů vykoná kyvadlo délky 1 m umístěné v raketě za dobu, za kterou raketa dosáhne výšky 1480 m . Změnu tíhového zrychlení při pohybu rakety neuvažujte. [10]

5. Ve vagónu je zavěšeno kyvadlo, které ve stojícím vagónu kmitá s periodou T_0 . Určete periodu tohoto kyvadla, jestliže se vagón pohybuje vodorovně se zrychlením o velikosti $a = \frac{g}{2}$. $[0,9 T_0]$

6. Ve vagónu, který se pohybuje vodorovným směrem se zrychlením o velikosti $a = \frac{g}{2}$ je zavěšeno způsobem patrným z obr. 4 těleso m o hmotnosti 1 kg . Hmotnost vláken závěsu můžeme zanedbat. Určete tahové síly, kterými jsou napínána obě vlákna. Změní se při pohybu vagónu perioda kyvadla? $[1,1 \text{ g N}; 0,1 \text{ g N}]$

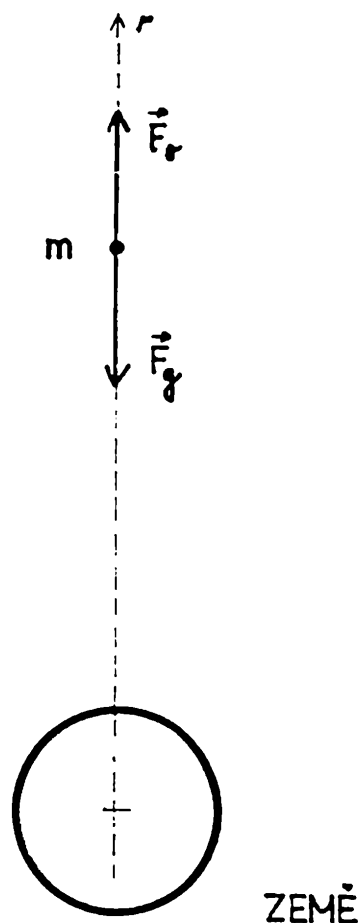
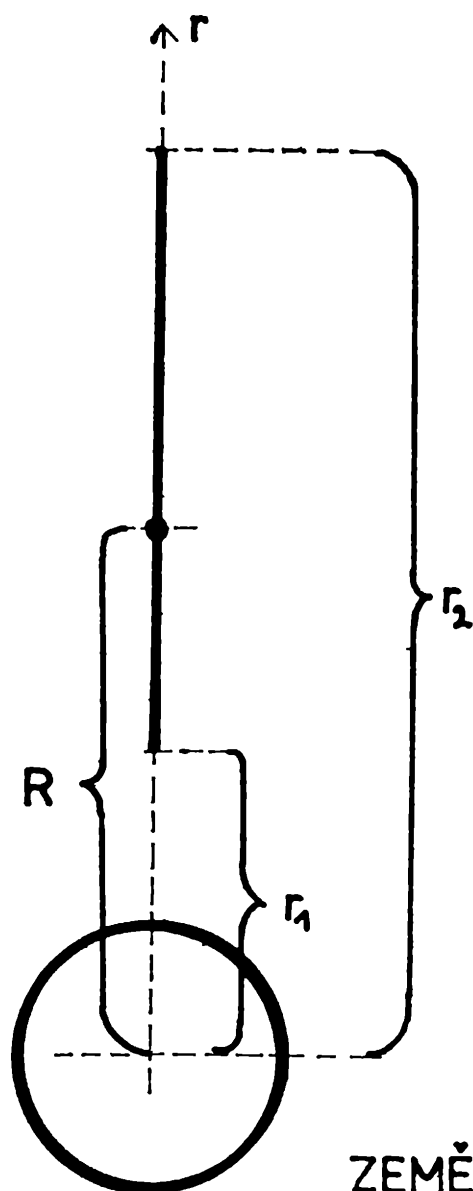
Přepočítejte si sci-fi

RNDr. LEOŠ DVOŘÁK, CSc., MFF UK Praha

Název článku nemá být pobídkou k tomu, aby si čtenář přepočítával tituly science-fiction ve své knihovničce. Spíše k tomu, aby vzal některou knížku či povídku a přesvědčil se, zda její autor ctí fyzikální zákony a jejich důsledky, či pouze „žongluje“ s vědeckými termíny a rádoby přesnými údaji.

Autor sci-fi má ovšem právo vymyslet si svět, v němž platí jiné fyzikální zákony, resp. známé fyzikální zákony jsou modifikovány. (Pěkným příkladem je třeba „Piknik u cesty“ bratří *Strugackých*.) V tom případě můžeme ověřovat jen to, zda autor dodržuje pravidla hry, která sám stanovil.

Celá řada sci-fi však nevychází za rámec známých fyzikálních zákonů. Z fyzikálního hlediska jsou z nich pro nás zvláště zajímavé ty, v nichž jsou fyzikální zákonitosti resp. jejich důsledky, aplikace apod. klíčové pro zápletku či její řešení. V těchto případech můžeme snad poněkud nadneseně říci, že fyzika je jedním z protagonistů děje. A právě v těchto případech by neměla být přerukována a zkreslována — podobně jako autor nesmí lživě vykreslit psychologii postav (nemá-li vzniknout „škvár“). Tím spíše, že tyto příběhy se často tak dobře čtou. Je proto



Obr. 2. Síly působící na hmotný bod v soustavě souřadnic spojené se Zemí

Obr. 1. Schematické znázornění geosynchronní Věže

docela namísto si občas nějakou sci-fi přepočítat. Navíc provést takový rozbor obvykle znamená blíže se seznámit s určitým fyzikálním problémem, což je samo o sobě zajímavé a užitečné. Na sci-fi se tak docela dobře můžeme přiučit i fyzice. (Což samozřejmě není myšlenka originální, že mohou sci-fi povídky motivovat poznávání vědy, ukazuje přesvědčivě třeba *I. Asimov* ve sborníku „Těžká planeta“.)

Jedním z nejznámějších autorů, kteří často „zapojují do hry“ fyziku, je *A. C. Clarke*. Ve svém posledním románu [1] nechává jeho hrdiny budovat tzv. geosynchronní věž sahající do výše desítek tisíc kilometrů a sloužící k dopravě nákladů na oběžnou dráhu (a dál) bez pomoci raketových motorů — v principu tak, že se náklad vytáhne na laně jako ve výtahu. (Lze tedy mluvit o „kosmickém výtahu“; v románu je ovšem stavba nejčastěji označována prostě jako Věž, čehož se můžeme přidržet i my.) Jde o problém, který přímo vybízí k přepočítání, zejména když si

v doslovu knihy přečteme, že podobné projekty jsou již dnes diskutovány. Pokusme se tedy určit alespoň přibližně základní parametry a vlastnosti Věže.

Geosynchronní věž se nestaví od země. Vychází se z družice na geostacionární dráze, tj. z družice, která (viděno ze Země) „visí“ na jednom místě nad rovníkem. Z ní se Věž postupně „spouští“ směrem k Zemi. Aby však družice zůstávala v rovnováze, musí se současně montovat druhá část Věže směřující na opačnou stranu (viz obr. 1.). Odstředivá síla působící na tuto druhou část je větší než síla gravitační; u první části (bližší k Zemi) je tomu naopak, a tak lze dosáhnout toho, že celková síla na Věž působící je rovna nule. (Pozn.: Celkovou silou zde míníme sílu v soustavě souřadnic, která se otáčí spolu se Zemí.) Až spodní konec Věže dosáhne k zemi, je stavba hotova.

Ověřme nejprve, v jakém vztahu musí být vzdálenosti spodního a horního konce Věže od středu Země, aby Věž byla opravdu v rovnováze. Budeme přitom pro jednoduchost předpokládat, že Věž je ve všech místech stejně široká a ze stejného materiálu — tedy že jde v podstatě o homogenní tyč. (Její délkovou hustotu označíme ρ_l ; ρ_l je tedy hmotnost části Věže o délce 1 m.)

Věž bude v rovnováze tehdy, jestliže celková síla na ni působící bude nulová. Spočteme tedy obecně sílu působící na Věž, která je v klidu vůči Zemi a jejíž konce mají radiální souřadnice (= vzdálenosti od středu Země) r_1 a r_2 ($r_1 < r_2$). (Hloubavý čtenář může nyní článek odložit a pokusit se nejprve o řešení sám.)

Problém budeme řešit v soustavě souřadnic spojené se Zemí. Jde o soustavu rotující (vůči inerciálnímu systému), takže na hmotný bod o hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu Země, který je vůči soustavě v klidu, působí odstředivá síla

$$F_o = m \omega_z^2 r, \quad (1)$$

kde ω_z je úhlová rychlost otáčení Země:

$$\omega_z = \frac{2\pi}{86\,400} \text{ s}^{-1} \doteq 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}. \quad (2)$$

Gravitační síla, již Země působí na tentýž hmotný bod, je

$$F_g = - m \frac{\kappa M_Z}{r^2}, \quad (3)$$

kde $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ je gravitační konstanta a $M_Z \doteq 5,98$

10^{24} kg je hmotnost Země. Znaménkem minus v (3) vyjadřujeme skutečnost, že gravitační síla míří proti směru osy, na níž odečítáme souřadnici r (vzdálenost od středu Země) — viz obr. 2. (Ve vztazích (2),

(3) a dalších tedy F znamená průmět vektoru síly do směru zmíněné osy, nikoli velikost síly — ta je $|F|$.

Sečtením (1) a (3) dostaneme celkovou sílu působící na daný hmotný bod:

$$F(r) = m \cdot \left(\omega_Z^2 r - \frac{\kappa M_Z}{r^2} \right). \quad (4)$$

Geostacionární družice se nachází právě v takové vzdálenosti R od středu Země, že síla na ni působící je rovna nule:

$$F(R) = 0.$$

Dosazením této podmínky do (4) dostaneme po úpravě

$$R = \sqrt[3]{\frac{\kappa M_Z}{\omega_Z^2}} \doteq 42,3 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad (5)$$

což odpovídá obvykle udávané výšce 36 000 km nad povrchem Země. Pro $r > R$ je $F(r) > 0$ (síla má směr od Země), pro $r < R$ je $F(r) < 0$ (síla míří ke středu Země).

Uvažujeme nyní část Věže v intervalu $(r, r + \Delta r)$, kde

$$0 < \Delta r \ll r \quad (6)$$

(viz obr. 3.), tj. část o délce Δr vzdálenou r od středu Země. Sílu ΔF působící na tuto část můžeme určit podle vztahu (4), neboť vzhledem k (6) můžeme část považovat pro daný účel za hmotný bod (předpokládáme, že šířka Věže je rovněž mnohem menší než r). Hmotnost dané části je $m = \rho_l \Delta r$, takže

$$\Delta F(r, r + \Delta r) = \rho_l \left(\omega_Z^2 r - \frac{\kappa M_Z}{r^2} \right) \Delta r. \quad (7)$$

Představíme-li si celou Věž rozdělenou na části o délce Δr , získáme zřejmě celkovou sílu působící na Věž součtem příspěvků (7) od všech částí. Pro zadané číselné hodnoty bychom to mohli dělat numericky (např. s pomocí programovatelné kalkulačky), lze to však udělat i obecně (analyticky).

Na první pohled vypadá následující úprava dosti krkolomně. Vztah (7) můžeme přibližně zapsat jako

$$\begin{aligned} \Delta F(r, r + \Delta r) \doteq \rho_l \left\{ \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 (r + \Delta r)^2 + \frac{\kappa M_Z}{(r + \Delta r)} \right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 r^2 + \frac{\kappa M_Z}{r} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Upravíme-li totiž v (8) $(r + \Delta r)^2 = r^2 + 2 r \Delta r + (\Delta r)^2$ a

$$\begin{aligned} \frac{\kappa M_Z}{r + \Delta r} &= \frac{\kappa M_Z}{r} \left[\frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{r}} \right] = \\ &= \frac{\kappa M_Z}{r} \cdot \left[1 - \frac{\Delta r}{r} + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 - \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

(jde o geometrickou řadu s kvocientem $-\Delta r/r$), dostáváme

$$\begin{aligned} \varrho_l \left\{ \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 (r + \Delta r)^2 + \frac{\kappa M_Z}{(r + \Delta r)} \right] - \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 r^2 + \frac{\kappa M_Z}{r} \right] \right\} = \\ = \varrho_l \left(\omega_Z^2 r - \frac{\kappa M_Z}{r^2} \right) \Delta r + \varrho_l \frac{1}{2} \omega_Z^2 r^2 \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 + \varrho_l \frac{\kappa M_Z}{r} \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \\ \cdot \left[1 - \frac{\Delta r}{r} + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 - \dots \right] = \varrho_l \left(\omega_Z^2 r - \frac{\kappa M_Z}{r^2} \right) \Delta r + \\ + \varrho_l \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 r^2 + \frac{\kappa M_Z}{r + \Delta r} \right] \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 = \varrho_l \Delta r \left[\left(\omega_Z^2 r - \frac{\kappa M_Z}{r^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \omega_Z^2 r + \frac{\kappa M_Z}{r(r + \Delta r)} \right) \left(\frac{\Delta r}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Protože však $\left| \frac{\Delta r}{r} \right| \ll 1$ (viz (6)), lze druhý člen v hranaté závorce ve výrazu (9) zanedbat. (Při $r \approx 10^4$ km a např. $\Delta r = 1$ m se tím dopustíme chyby řádu 10^{-7} ; chyby stejného řádu jsme se již dopustili, když jsme považovali část Věže za hmotný bod. Volbou $\Delta r = 1$ mm je chyba řádu 10^{-10} a je zřejmé, že ji můžeme učinit libovolně malou. Zde nepřihlížíme k šířce Věže. V dalším proto již ve vztahu (8) apod. nebudeme zvlášť vyznačovat, že se jedná o rovnost přibližnou.)

Síla působící na část Věže v intervalu $(r + \Delta r, r + 2 \Delta r)$ je zřejmě (analogicky ke vztahu (8))

$$\begin{aligned} \Delta F(r + \Delta r, r + 2 \Delta r) &= \varrho_l \left\{ \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 (r + 2 \Delta r)^2 + \frac{\kappa M_Z}{(r + 2 \Delta r)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 (r + \Delta r)^2 + \frac{\kappa M_Z}{r + \Delta r} \right] \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

a na část v intervalu $(r, r + 2 \Delta r)$, tedy (sečtením (8) a (10)):

$$\Delta F(r, r + 2\Delta r) = \varrho_l \left\{ \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 (r + 2\Delta r)^2 + \frac{\kappa M_Z}{(r + 2\Delta r)} \right] - \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 r^2 + \frac{\kappa M_Z}{r} \right] \right\}.$$

Tak můžeme postupovat dál a dál až „projdeme“ celou Věž. Ve vztahu pro celkovou sílu se přitom objevují jen souřadnice začátku a konce intervalu. Je tedy zřejmé, že tímto postupem získáme pro celkovou sílu působící na Věž (jejíž spodní konec má souřadnici r_1 a horní r_2) výraz

$$F(r_1, r_2) = \varrho_l \left\{ \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 r_2^2 + \frac{\kappa M_Z}{r_2} \right] - \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 r_1^2 + \frac{\kappa M_Z}{r_1} \right] \right\}. \quad (11)$$

Čtenář obeznámený se základy vyšší matematiky si zřejmě již uvědomil, že jsme právě nedělali vlastně nic jiného, než integrovali pravou stranu vztahu (7) (v mezích r_1, r_2). Čtenář neznalý integrování může na uvedeném příkladu získat názornou představu o principu a účelu integrování.

(Zjednodušeně lze říci, že základní myšlenkou integrování je idea sčítání velmi malých příspěvků. V praxi se ovšem neintegruje tak „rozvláčně“, jak jsme to výše činili my. Matematická analýza vytvořila pro integrování elegantní a účinný formalismus, takže lze psát prostě

$$F(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \varrho_l \left(\omega_Z^2 r - \frac{\kappa M_Z}{r^2} \right) dr$$
 a pomocí několika jednoduchých pravidel vyjde pak výsledek (11).)

Výsledek (11) můžeme zjednodušit, vyjádříme-li κM_Z pomocí poloměru R geostacionární dráhy ze vztahu (5). Dostaneme

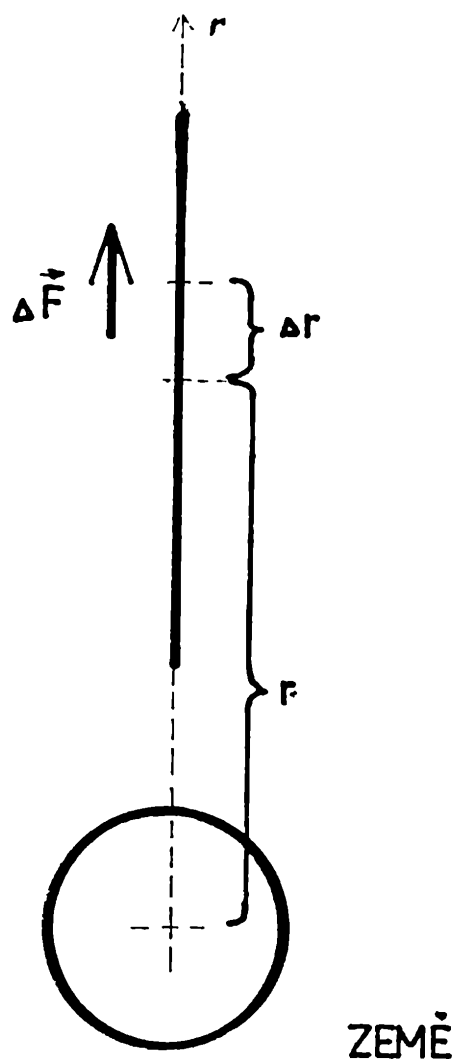
$$F(r_1, r_2) = \varrho_l \omega_Z^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} r_2^2 + \frac{R^3}{r_2} \right] - \left[\frac{1}{2} r_1^2 + \frac{R^3}{r_1} \right] \right\}. \quad (12)$$

Pro Věž v rovnováze musí být $F(r_1, r_2) = 0$, čili (jak plyne z (12))

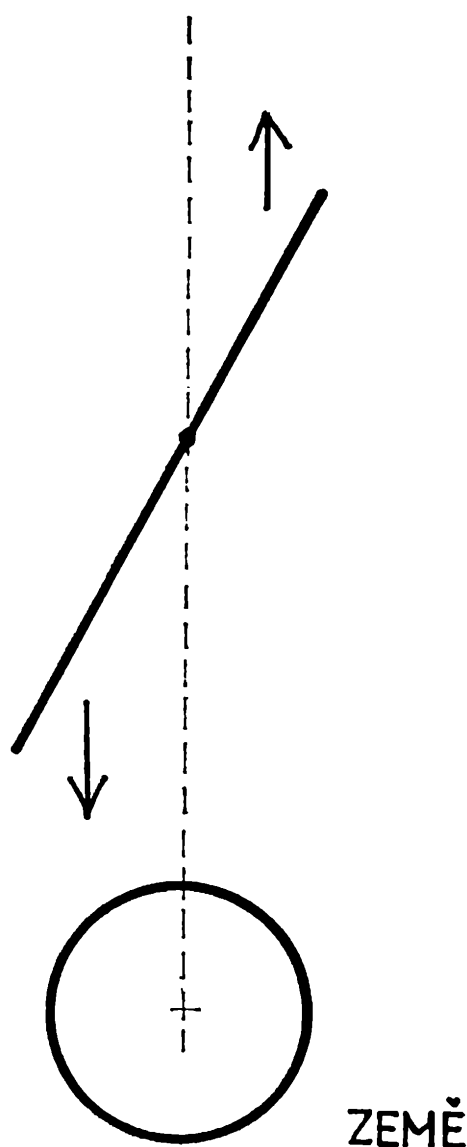
$$r_2^2 + \frac{2R^3}{r_2} = r_1^2 + \frac{2R^3}{r_1}. \quad (13)$$

Po dostavění je $r_1 = r_Z$, kde poloměr Země $r_Z = 6,38 \cdot 10^6$ m. Úpravou (13) dostáváme pro r_2 rovnici 3. stupně

$$(r_2)^3 - \frac{2R^3}{r_Z} \left(1 + \frac{r_Z^3}{2R^3} \right) r_2 + 2R^3 = 0. \quad (14)$$



Obr. 3. Síla působící na malou část Věže



Obr. 4. Schematické znázornění sil působících při naklonění Věže

Kubickou rovnicí lze řešit přesně, ale výsledek má poměrně komplikovaný tvar. Zajímáme-li se jen o přibližnou velikost r_2 , můžeme (14) přepsat do tvaru

$$(r_2)^3 - 2R^3 \left[\frac{r_2}{r_Z} - 1 + \frac{r_2}{2R} \cdot \frac{r_Z^2}{R^2} \right] = 0$$

a v hranaté závorce můžeme zřejmě druhé dva členy zanedbat oproti prvnímu. Po vydělení r_2 a odmocnění pak již lehce určíme r_2 jako

$$r_2 \doteq R \sqrt{\frac{2R}{r_Z}} \doteq 1,54 \cdot 10^8 \text{ m.} \quad (15)$$

(Pozn.: Přesná hodnota vypočtená ze (14) se neliší od hodnoty (15) více než o 3 ‰.)

Stopadesát tisíc kilometrů je úctyhodná výška. *A. C. Clarke* uvádí ve svém románu celkovou výšku nižší — to je ovšem možné, není-li hmotnost Věže rozdělena podél její délky rovnoměrně. (V románové konstrukci se skutečně průměr Věže s výškou mění; detaily rozložení hmotnosti ovšem samozřejmě uvedeny nejsou.)

Věž při svém budování tedy může být v rovnováze a mohla by doslova „viset“ z oblaků bez jakéhokoli zavěšení. Někdy se lze setkat s námitkou, že rovnováha takovéto konstrukce by nebyla stabilní vůči pootočení (kolem osy rovnoběžné s osou rotace Země). Argumentuje se tím, že družice na nízkých oběžných drahách mají krátkou dobu oběhu, zatímco družice na vysokých oběžných drahách dlouhou. Podle toho by tedy např. spodní konec Věže měl tendenci předbíhat geostacionární družici a horní konec by se zpožďoval — Věž by se pak měla „překlopit na bok“. Uvedený argument ale platí jen pro družice, které nejsou na ničem zavěšené — spodní část Věže ovšem „visí“ na zbytku Věže a situace horní části je analogická. Protože ve spodní části Věže převládá gravitační síla nad odstředivou a v horní části je tomu naopak, vrací při naklonění moment těchto sil Věž opět do svislé polohy (viz obr. 4.). Vůči pootočení je tedy rovnováha stabilní.

Jinak je tomu, uvažujeme-li posun celé Věže ve svislém směru. Posuneme-li celou Věž vzhůru, je to totéž, jako bychom odebrali kousek na jejím spodním konci (kde síla na něj působící směřovala k Zemi) a přidali jej na horní konec (kde na něj působí síla směřující od Země). I bez výpočtu (který si ovšem čtenář může snadno provést sám) je tedy zřejmé, že po posunu vzhůru bude na Věž působit síla působící rovněž vzhůru — tedy od rovnovážné polohy. Při posunu dolů je tomu naopak; vzhledem k posunutí nahoru a dolů jde tedy o rovnováhu nestabilní.

Z praktického hlediska je ovšem jasné, jak lze zabránit tomu, aby Věž neodlétla do kosmického prostoru nebo naopak nespadla na Zemi: Horní část Věže se zkonstruuje o něco delší resp. hmotnější než odpovídá rovnovážnému stavu (takže Věž je „odtahována“ od Země) a spodní konec Věže se ukotví v zemi. Takto je nutno zakotvit Věž už při jejím budování. (V románě je stavba Věže skutečně ukotvena — přesvědčujeme se opět, že *Clarke* patří k autorům, kteří fyziku ctí.)

Odhadněme ještě napětí (tah) působící ve Věži. To ovšem závisí na místě: daný element Věže musí držet spodní části Věže silou, jejíž velikost se podle principu akce a reakce rovná velikosti celkové síly (gravitační a odstředivé) na tyto části působící. Na základě této úvahy je zřejmé, že Věž je nejvíce namáhána „uprostřed“ (pro $r = R$, tj. v místě geostacionární dráhy — části Věže nad ní by již uvažovaný úsek Věže „nadlehčovaly“).

Napětí σ je dáno jako síla dělená obsahem průřezu Věže S . Sílu působící na celou spodní část Věže (pro $r \in < r_Z, R >$) však určíme lehce ze vztahu (12) — stačí v něm psát R místo r_2 (a r_Z místo r_1 .) (R je souřadnice

horního a r_Z spodního konce příslušné části Věže a odvození vztahu (12) platilo obecně pro libovolnou část Věže). Po úpravě dostaneme

$$F(r_Z, R) = -\varrho_l (\omega R)^2 \left[\frac{R}{r_Z} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_Z}{R} \right)^2 \right] \quad (16)$$

Záporné znaménko značí pouze, že síla je orientována k Zemi, a při odvozování napětí jej nemusíme uvažovat.

Známe-li plochu průřezu S Věže, je její délková hustota $\varrho_l = S \cdot \varrho$, kde ϱ je hustota materiálu Věže. Po dosazení do (16), vydělení S (a zanedbání posledního členu v hranaté závorce) dostáváme pro napětí vztah

$$\sigma = \frac{|F|}{S} = (\omega R)^2 \left(\frac{R}{r_Z} - \frac{3}{2} \right) \cdot \varrho \quad (17)$$

Pro konstrukci Věže je vhodné použít materiál lehký a přitom pevný. Takovým materiálem je např. diamant (má $\varrho = 3,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Po dosazení (2), (5) a r_Z do (17) je v tomto případě napětí

$$\sigma \doteq 1,7 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (18)$$

Pevnost materiálu Věže v tahu by tedy musela být větší než tato hodnota. Bohužel odhad teoretické meze pevnosti diamantu je „jen“ asi $0,8 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ a prakticky dosahované hodnoty jsou ještě téměř $2 \times$ nižší [2]. Pevnější materiál ale dosud neexistuje. (To je jeden z hlavních důvodů, proč by dnes Věž nebylo možno realizovat). V Clarkově románu je Věž konstruována z hypotetického materiálu („hyperfilamentu“), který je monokrystalem diamantu upraveným různými příměsemi. Budoucnost rozhodne, zda se nějaký podobný materiál s postačující pevností podaří vytvořit.

Situace může být příznivější, pokud průměr Věže (a tedy ani její průřez S) není po celé délce konstantní, ale ke krajům se zmenšuje. (V Clarkově popisu tomu tak skutečně je). Zde se tímto problémem zabývat nebudeme; „znalejší“ čtenář se může o rozbor obecnější situace pokusit sám.

Na závěr ještě jednu fyzikální hádanku pro čtenáře. Souvisí s prací, kterou je nutno vykonat, aby bylo nějaké těleso (náklad) vytaženo v již hotové Věži ze spodního konce ($r = r_Z$) na vrchol ($r = r_2$). Síla působící na těleso ovšem závisí na místě, tj. na r , nelze proto jednoduše užít vztahu pro práci „síla krát dráha“. Při posunu „o malý kousek“ Δr (splňující (6)) lze však sílu (danou (4)) považovat za konstantní — odpovídající práce je pak

$$\Delta W = - F(r) \Delta r = - m \left(\omega_Z^2 r - \frac{\kappa M_Z}{r^2} \right) \Delta r, \quad (19)$$

kde m je hmotnost tělesa. (Pozn.: Záporné znaménko před m ve vztahu (19) je dáno tím, že ΔW značí práci, kterou při vytahování konáme — přitom podle principu akce a reakce musíme působit na těleso silou opačného směru než je výslednice $\Delta F(r)$ síly gravitační a odstředivé.)

Celkovou práci W dostaneme sečtením všech příspěvků ΔW (Přesněji bychom s využitím vyšší matematiky řekli, že práce je integrál síly po dráze.) Takovouto operaci jsme však již s výrazem analogickým výrazu (19) prováděli — viz výše (7) a další úpravy. Odvození proto již nemusíme opakovat a (v analogii s výsledkem (11)) můžeme přímo napsat, že celková práce potřebná k vytažení tělesa z místa o souřadnici r_1 do místa o souřadnici r_2 je

$$W = m \left\{ - \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 r_2^2 + \frac{\kappa M_Z}{r_2} \right] + \left[\frac{1}{2} \omega_Z^2 r_1^2 + \frac{\kappa M_Z}{r_1} \right] \right\} \quad (20)$$

Je-li $r_1 = r_Z$ a r_2 souřadnice vrcholu Věže, dostáváme z podmínky (13) (a z (5)), že

$$W = 0 !$$

To je snad samo o sobě překvapující, ale nikoli záhadné — ve spodní části Věže těleso zdviháme, v horní je naopak musíme brzdit (celková síla zde působící míří nahoru), takže v této fázi těleso práci koná (je tam $\Delta W < 0$).

Paradoxní se ovšem situace jeví v inerciálním systému: Na začátku je těleso na povrchu Země, má tedy jistou potenciální energii a poměrně malou energii kinetickou (jeho rychlost je rovna obvodové rychlosti rotace Země). Na konci je těleso vzdáleno od Země přes sto tisíc kilometrů, jeho potenciální energie je tedy podstatně vyšší a rovněž jeho kinetická energie je podstatně vyšší než na začátku (jeho rychlost je nyní řádově $10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$). Uvedené hodnoty lze vyjádřit vzorcem či spočítat číselně, není to však podstatné — výpočet potvrdí, že energie tělesa vzrostla. Přitom celková práce, kterou vykonaly motory výtahu při zdvihání je rovna nule. Formulace slibované hádanky je tím již nasnadě! Odkud se vzal přírůstek energie tělesa?

Literatura :

- [1] Clarke, A. C.: Vesmírná odyssea 2001/Rajské fontány, Odeon, Praha, 1982.
- [2] Kroupa, F.: Pevné pevné látky, Československý časopis pro fyziku *A19*, 1969, č. 3, s. 295—303.

O ladění

JOSEF KOTYK, Pardubice

K základním tónům jedné oktávy se v hudbě připojují ještě další tóny. Zvyšováním a snižováním tónů o malý půltón¹⁾ (interval $25/24$) přistupují do každého intervalu (malého nebo velkého) celého tónu stupnice dva nové tóny tím, že tón nižší se o malý půltón zvýší a tón vyšší o malý půltón sníží, např. mezi tóny C a D vloží se tóny Cis a Des, jejichž výšky se poněkud liší. Rozdíl je však jen nepatrný: Relativní výška tónu C je 1, tónu Cis pak $1.25/24 = 1,041\bar{6} \doteq 1,042$; relativní výška tónu D je $9/8 = 1,125$, tónu Des pak

$$9/8 : 25/24 = 27/25 = 1,080.$$

Takové tóny jako Cis a Des rozlišujeme proto pouze tehdy, když je tvoříme, řídíce se při tom sluchem, např. při sborovém zpěvu a u smyčcových nástrojů (při smyčcovém kvartetu). Soustavu tónů sluchem čistě zladěnou nazýváme pak *laděním přirozeným*. Jejich řada tvoří tzv. *stupnici chromatickou*.

Chromatická stupnice má např. ve velké oktávě základní tvrdé stupnice C dur kromě obvyklých 8 tónů C, D, E, F, G, A, H, c také 5 tónů Cis, Dis, Fis, Gis, Ais, které vznikly zvýšením tónů C, D, F, G, A o malý půltón, a dalších 5 tónů Des, Es, Ges, As, Hes = B, které vznikly snížením tónů D, E, G, A, H o malý půltón, obsahuje tedy celkem $8 + 5 + 5 = 18$ tónů.

Hudební nástroje, které mají stále předem naladěné tóny (např. klavír, varhany), byly by při přirozeném (čistém) ladění příliš složité a hra na nich by byla ztížena. Proto u nich mezi tóny tak blízkými jako Cis a Des rozdílu nečiníme; oba se jednoduše nahrazují tónem jediným, tzv. *temperovaným* Cis = Des o výšce 1,059. Ztotožnění tónů, které ve skutečnosti totožné nejsou, je ovšem akusticky nevýhodné. Při *temperovaném ladění* trpí akordy (souzvuky) — zejména tercie, také např. známý terckvintový trojzvuk I, III, V — na své konsonanci (libozvučnosti). Konsonance je přísně zachována jen při ladění přirozeném. Tím se vysvětluje lahodnost sborového zpěvu a komorní hudby.

Temperovaného ladění se užívá již od konce 18. století v hudbě orchestrální. Jeho základem je temperovaný půltón, stanovený hodnotou

¹⁾ Předběžné objasnění pojmů zde používaných mohou čtenáři nalézt v autorově článku „*Počátky hudební akustiky*“ v Rozhledech, roč. 61, čís. 7, str. 288 až 290.

$\sqrt[12]{2}$. Temperovaná stupnice má totiž $8 + 5 = 13$ tónů, jejichž intervaly zv. temperované půltóny volíme vesměs stejné. Relativní výšky tónů tvoří pak geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 1$ a posledním $a_{13} = 2$; avšak $a_{13} = a_1 \cdot q^{12}$, připadá tedy na stálý interval temperované stupnice velikost $q = \sqrt[12]{2} \doteq 1,0595$, jak bylo již pro temperované Cis $\equiv$ Des výše uvedeno.

Klavíry ladíme zpravidla po kvintách. Toto ladění nazýváme proto *kvintovým* nebo také *pythagorejským*. Spočívá na okolnosti, že 12 kvint se rovná velmi přibližně 7 oktávám. Uvažte, s jakou přesností!

Tóny užívané v hudbě začínají nejhlubším subkontra C_2 absolutní výšky asi 16 Hz a řadí se v 8 po sobě jdoucích oktáv. V pořadí od nejnižších se jmenují: subkontraoktáva (s označením tónů $C_2, D_2, \dots$), kontraoktáva ($C_1, D_1, \dots$), velká oktáva ($C, D, \dots$), malá oktáva ($c, d, \dots$), jednou čárkovaná oktáva ($c^1, d^1, \dots$), dvakrát čárkovaná oktáva ($c^2, d^2, \dots$), třikrát čárkovaná oktáva ($c^3, d^3, \dots$) a čtyřikrát čárkovaná oktáva ($c^4, d^4, \dots$). V závorkách uvádím značky dvou tónů, jimiž se oktávy začínají; jednotlivé oktávy obsahují především 8 tónů postupujících podle stupnice tvrdé (dur). V oktávách zv. čárkovaných se od dřívějšího nevhodného užívání čárek c', c'', c''', c'''' atd. upustilo a označování tónů se zjednodušilo užitím číslic.

Absolutní výšky všech tónů jsou určeny podle výšky *základního tónu ladičího*, jež je stanovena mezinárodní dohodou. Podle ustanovení mezinárodní úmluvy ve Vídni z roku 1885 byl tón, jemuž přísluší 435 kmitů za sekundu, označen jako *normální* neboli *komorní* a^1 ; jeho zdrojem se stala normální ladička. Mezinárodní dohodou uzavřenou v roce 1939 byl zaveden *základní ladičí tón* a^1 o absolutní výšce 440 Hz.

Cvičení.

Určete absolutní výšku tónu c^1 v ladění a) přirozeném, b) temperovaném!

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle §6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Franckov-Hertzov pokus

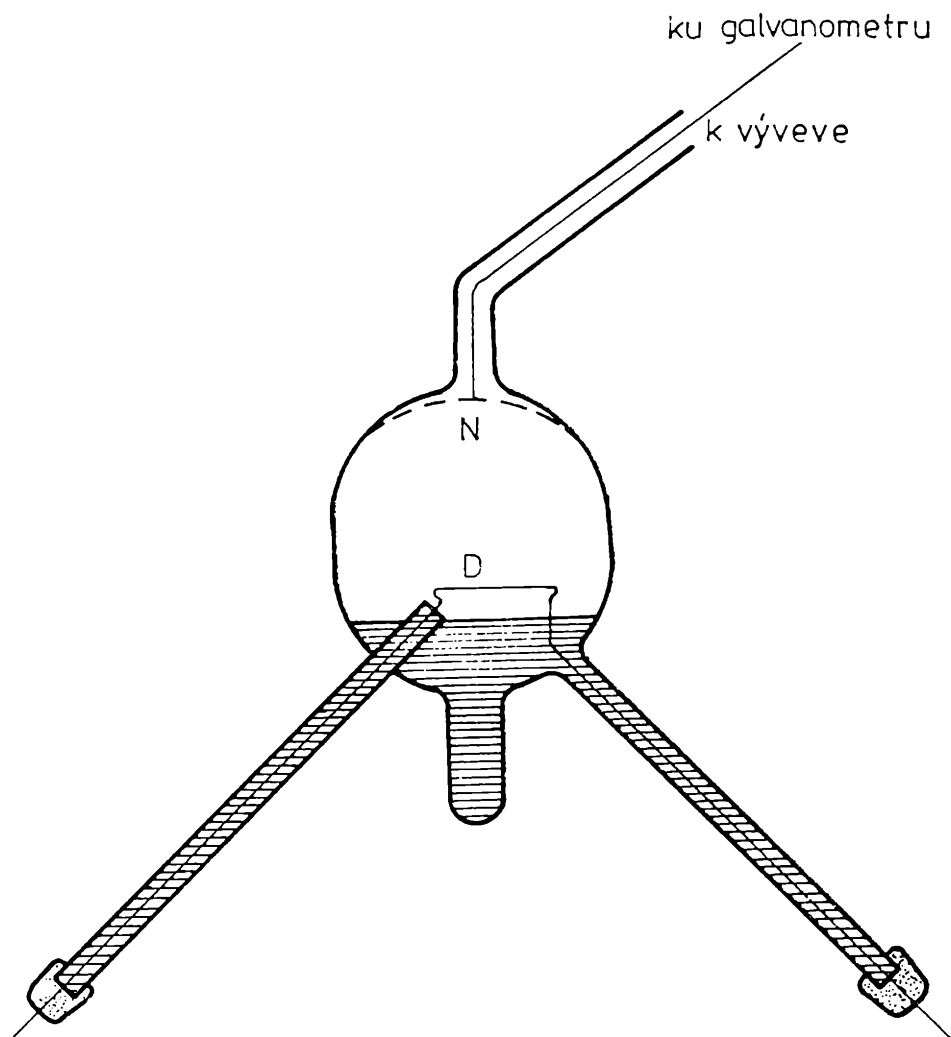
Základná hypotéza Bohrovej atómovej teórie vyjadruje skutočnosť, že atómy sú stabilné útvary, ktoré môžu nadobúdať iba diskkrétne hodnoty energie. Prechod zo stavu s danou energiou na inú energetickú hladinu je sprevádzaný vyžiarением alebo pohltением svetelného kvanta (fotónu). Najvýznamnejšími experimentami, ktoré potvrdili túto skutočnosť boli Franckove a Hertzove pokusy. Sú dôležité najmä v tom, že ukázali kvantový charakter energetických hladín pri interakcii elektrónov s atómami (a nie len pri interakcii atómov so žiarením).

Obaja významní experimentátori spočiatku nemali vôbec v úmysle potvrdiť Bohrovu teóriu. *James Franck* (1882—1964) a *Gustav Ludwig Hertz* (1887—1975) pôsobili od r. 1911 v Berlíne, prvý ako docent, druhý ako asistent u profesora *Heinricha Rubensa* (1865—1922), ktorý stál už v roku 1900 pri kolíske kvantovej teórie.

Franck a Hertz od r. 1911 študovali vzťah medzi ionizačnými potenciálmi plynov a kvantovou teóriou. Inými slovami, skúmali, aký potenciálový rozdiel je potrebný, aby sa elektrón uvoľnil z atómu, v ktorom je viazaný. V roku 1913 už poznali hodnoty ionizačných potenciálov hélia, vodíka, kyslíka a iných plynov. Neskôr skúmali zrážky elektrónov s atómami inertných plynov. Najvýznamnejšie boli ich experimenty v roku 1914, keď skúmali zrážky elektrónov s ortuťovými parami.

Ich aparátúra bola pomerne jednoduchá. Kremíková banka (pozri obrázok) bola sčasti naplnená ortuťou. Rozžhavený platinový drôt D emitoval katódové lúče, platinovú mriežku N spojili cez galvanometer so Zemou. Pri tlaku 1 mm Hg (133,3 Pa) a teplote 150 °C zvyšovali napätie na katóde až na 4,9 V. Pri tomto napätí sa popri čiarach od rozžhavenej platinovej katódy objavila v spektroskope čiara z ortuťového spektra, a to s vlnovou dĺžkou 253,6 nm. Energia elektrónov E , ktoré vyvolali emisiu svetla spomínanej vlnovej dĺžky λ presne vyhovovala Planckovmu vzťahu $E = h\nu = hc/\lambda$, kde ν je frekvencia žiarenia, c rýchlosť svetla.

Franck a Hertz podali túto interpretáciu svojho experimentu: Kým urýchlené elektróny nedosiahnu energiu $h\nu$, pružne sa odrážajú od atómov ortuti. Len čo dosiahnu energiu $h\nu$, časť elektrónov spôsobí ionizáciu ortuťových pár a časť pri tom vyvolá vyžiarenie svetla o vlnovej dĺžke 253,6 nm, ktorá korešponduje pri energii $E = 4,9$ eV so vzťahom $E = h\nu$. Vychádzali pri tom z názoru *Johannesa Starka* (1874—



1957) z roku 1908, na základe ktorého čiarové spektrá vznikajú v súvislosti s procesom ionizácie atómov a molekúl, pri čom ich frekvencia súvisí s ionizačným potenciálom V podľa vzťahu $V = h \nu$.

Bohr mal námietky proti tejto interpretácii. Zo spektroskopických údajov je zrejmé, že ionizačný potenciál ortuti je 10,5 voltov. Kinetickú energiu elektrónu 4,9 eV potrebnú na vznik spektrálnej čiary 253,6 nm nemožno ináč interpretovať ako prechodom elektrónu z jednej stacionárnej energetickej hladiny atómu na druhú. Je dôkazom, že prechod elektrónu z niektorej kvantovej hladiny na inú hladinu je sprevádzaný vyžiarovaním svetla podľa Bohrovej podmienky frekvencií $h \nu_{nm} = E_m - E_n$, kde E_m , E_n sú príslušné kvantované energetické hladiny, h Planckova konštanta, ν_{nm} frekvencia vyžiareného svetla.

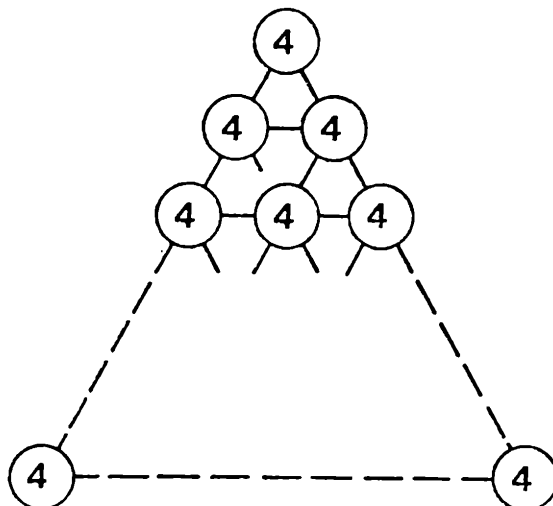
Franck a Hertz v roku 1919 plne prijali Bohrovu interpretáciu. Pokiaľ pri ich pokuse zaregistrovali nejaký únik elektrónov z pár ortuti, nebolo to v dôsledku ionizácie, ale bol to prejav sekundárneho fotoelektrického efektu. Franckovi a Hertzovi udelili za ich experimentálne objavy Nobelovu cenu pre rok 1925.

Rudolf Zajac

Několik hříček s letopočtem 1984

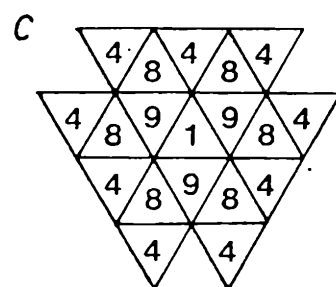
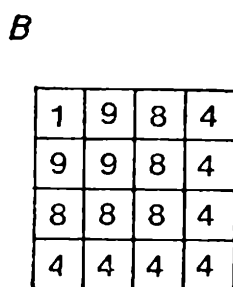
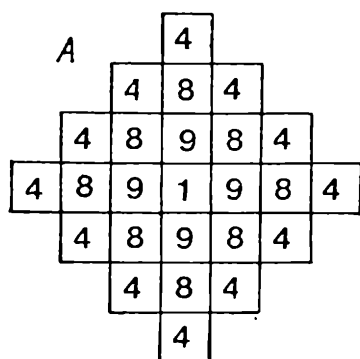
JIŘÍ MANN, Dvůr Králové nad Labem

Kamenem úrazu při psaní letopočtu 1984 byla v prvních lednových dnech čtyřka na jeho konci. Představte si, že na obr. 1 je na každé straně obvodu velkého rovnostranného trojúhelníka celkem 31 čtyřek a že v jeho vnitřku je nakreslena celá trojúhelníková mříž včetně koleček se čtyřkami. Nalezněte součet všech čtyřek v takto doplněném obr. 1.



Obr. 1

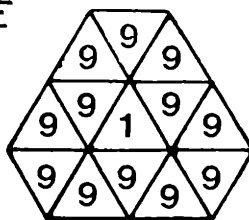
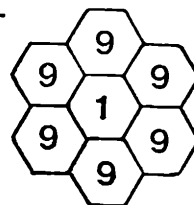
Podívejte se nyní na obr. 2. Ve schématech A, B, C můžete mnoha způsoby přechíst letopočet 1984. Postupuje se přitom z jednoho čtverce na druhý přes společnou stranu nebo vrchol. Další obdobná schémata vytvořte doplněním jejich základů D, E, F na obr. 3.



Obr. 2

D

9	9	9
9	1	9
9	9	9

E*F*

Obr. 3

V další úloze jsou zvýhodněni hráči šachů. Určete, kolikrát na každé z šachovnic 5 krát 5 z obr. 4 „si přečte“ letopočet 1984 král, dáma, věž či jezdec.

1	1	4	1	1
1	9	8	9	1
4	8	4	8	4
1	9	8	9	1
1	1	4	1	1

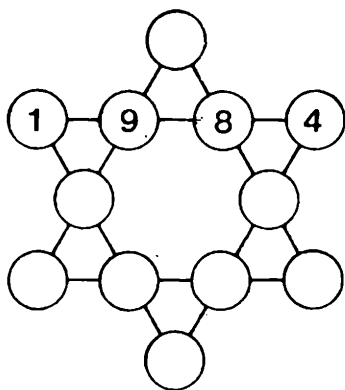
1	9	8	4	1
4	8	9	8	9
8	9	1	9	8
9	8	9	8	4
1	4	8	9	1

8	4	8	9	8
9	1	9	1	4
8	4	8	4	8
4	1	9	1	9
8	9	8	4	8

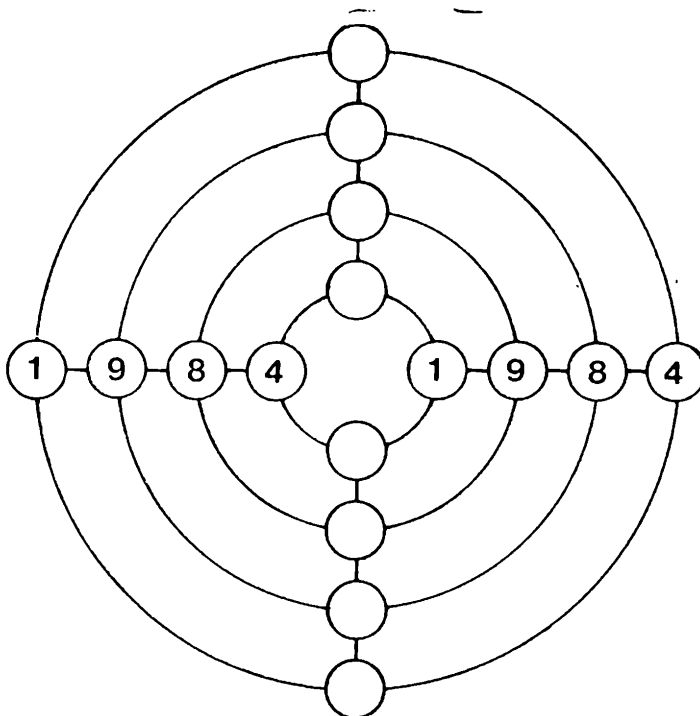
Obr. 4

Ve schématech na obr. 5 doplňte do prázdných kroužků a čtverečků čísla 1, 9, 8, 4 tak, aby ve schématech vznikly čtveřice čísel o stejném součtu. U čtverce nezapomeňte na úhlopříčky. Sestavte i prostupující se čtverce.

Obr. 5



1	9	8	4



Podívejme se nyní do prostoru. Není obtížné ze 64 bodů vytvořit vrcholy jednotkové krychlové mříže, která vyplňuje krychli o hraně délky 4 cm, a každému bodu přidělit některé z čísel 1, 9, 8, 4. Představte si, že ve čtyřech vrstvách, které jsou po řadě nad sebou, jsou tato čísla rozložena takto:

4 8 9 1	9 1 4 8	1 9 8 4	8 4 1 9
8 1 4 9	1 9 8 4	9 1 4 8	4 9 8 1
9 4 1 8	4 8 9 1	8 4 1 9	1 8 9 4
1 9 8 4	8 4 1 9	4 8 9 1	9 1 4 8

Přesvědčte se, že jsou stejné součty čtveřic čísel na hranách krychle, na přímkách rovnoběžných s hranami a ležícími ve stěnách, dále na tělesových úhlopříčkách a kromě čtyř výjimek i na stěnových úhlopříčkách.

Dvoubarevná krychle

JIŘINA DOŠKOVÁ, studentka PŘFUK Praha

Krychlová stavebnice je bohatým zdrojem úloh různých typů. V tomto článku vyřešíme jednu takovou úlohu.

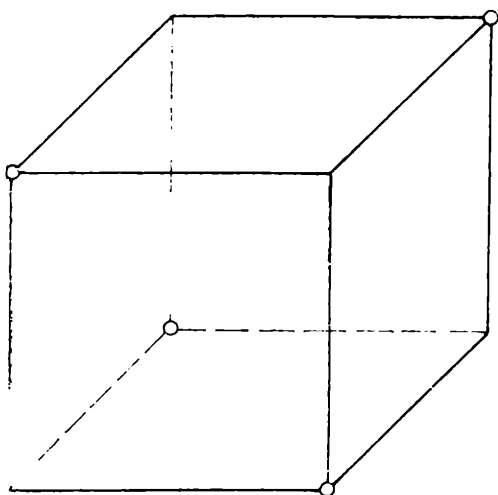
Dvoubarevná krychle je složena z n^3 shodných jednotkových krychliček, z nichž některé jsou červené a ostatní bílé. Sestavme tuto krychli tak, že v každé řadě i v každém sloupci je vidět právě jedna červená krychlička. Naším úkolem je zjistit minimální počet m červených krychliček, potřebných k sestavení této krychle.

Jistě vás napadne, že počet červených krychliček závisí na jejich umístění na hranách a rozích krychle. Na první pohled to vypadá tak, že minimální počet červených krychliček bude při umístění na rozích, jak je naznačeno na obr. 1. Podívejme se, jak situace v tomto případě vypadá. Na každé stěně je vidět n červených krychliček, ale z nich čtyři jsou společné vždy pro tři stěny. Počítali jsme je tedy třikrát, takže musíme dvakrát jejich počet odečíst. Celkem je k sestavení této krychle potřeba

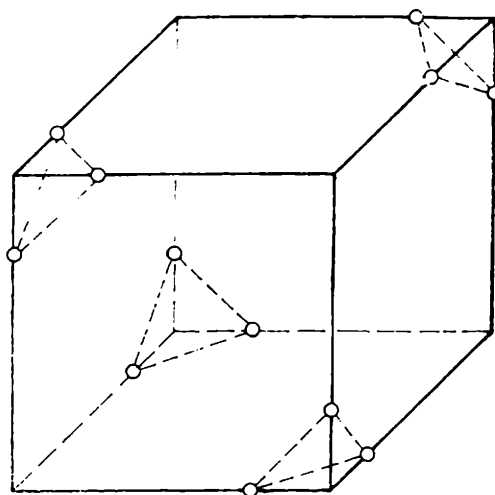
$$6n - 2 \cdot 4 = 6n - 8$$

červených krychliček.

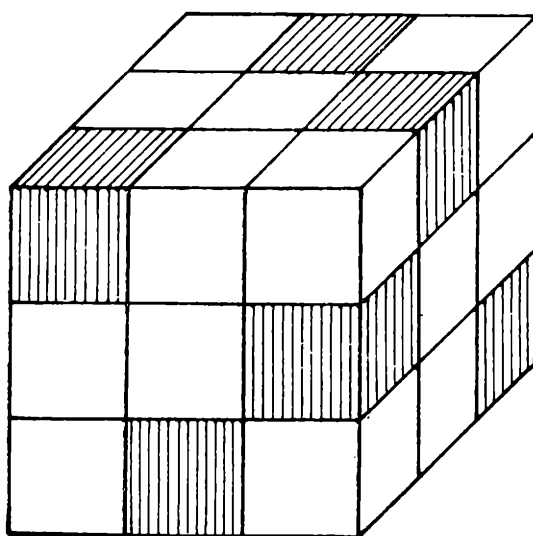
Nyní vyjdeme ze situace na obr. 1. Z jednoho rohu červenou krychličku odstraníme a nahradíme ji třemi červenými krychličkami kolem tohoto rohu. Jaký je počet červených krychliček v tomto případě, si můžete odvodit sami; stejně tak pro další případy, kdy postupně ode-



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

bíráme další červené rohové krychličky a umísťujeme vždy tři červené krychličky na hrany kolem příslušných rohů.

Nakonec dojdeme k situaci, znázorněné na obr. 2. Snadno si odvodíme, že počet červených krychliček je

$$6n - 12.$$

Z našich úvah vyplývá, že čím více červených krychliček umístíme kolem rohů, tím menší je jejich celkový počet. Více než dvanáct jich takto umístit nemůžeme, protože bychom porušili požadavek právě jedné viditelné červené krychličky v každé řadě a v každém sloupci.

Takže minimální počet červených krychliček je

$$m = 6n - 12,$$

avšak jen pro $n \geq 4$. Odpověď na otázku, proč je tomu tak, vás jistě napadne, podíváte-li se např. na obr. 3, kde $n = 3$. Tady nám nezbyvá nic jiného, než umístit aspoň dvě červené krychličky na rohy, takže jejich celkový počet bude

$$m = 8 = 2^3.$$

Pro $n = 2$ musíme dokonce všechny červené krychličky umístit na rohy podle obr. 1., pak

$$m = 4 = 2^2.$$

Nakonec nám zůstal případ $n = 1$, kdy zřejmě také

$$m = 1.$$

Podle předchozích úvah můžeme sestavit tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
m	1	4	8	12	18	24	30	36	42	48	

Z tabulky je dobře vidět, že pro $n \geq 4$ čísla m jsou členy aritmetické posloupnosti, určené rekurentním vzorcem

$$a_{r+1} = a_r + 6$$

a prvním členem

$$a_1 = 12.$$

Ze všech našich úvah vyplývá závěr:

- a) je-li $n = 1$, pak $m = 1$;
- b) je-li $1 < n < 4$, pak $m = 2^n$;
- c) je-li $n \geq 4$, pak $m = 6n - 12$.

Profesor Ypsilon o bludných kořenech v patamematice

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

„Patamatematická teorie řešení rovnic vychází z okolnosti, že postup při hledání kořenů je v mnohém podobný práci provazochodcově na laně napjatém nad hlubinou — v tom i onom případě stačí jediný chybný krok a kýžený cíl mizí v nedohlednu!“, pravil profesor Ypsilon a neprodleně přistoupil k demonstraci svého tvrzení na následujícím příkladu:

V množině všech reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt[3]{|x-1|(|x|+1)} = a$$

s neznámou x a reálným paramterem a .

Je zřejmé, že pro $a < 0$ nemá daná rovnice žádné reálné kořeny a že pro $a = 0$ má kořen jediný, a to $x = 1$. Předpokládejme tedy, že je $a > 0$, a postupujme známým způsobem: utvoříme rozklad množiny všech reálných čísel na intervaly $(-\infty, 0)$, $< 0, 1 >$, $(1, \infty)$, v nichž budeme postupně hledat kořeny dané rovnice.

Pro $x \in (-\infty, 0)$ dostáváme

$$\sqrt[3]{|x-1|(|x|+1)} = \sqrt[3]{(1-x)^2} = |1-x| = 1-x;$$

rovnice

$$1-x=a,$$

kterou tak dostaneme, má v intervalu $(-\infty, 0)$ jediný kořen $x = 1-a$ pouze v tom případě, je-li $a > 1$; je-li $0 < a \leq 1$, nemá daná rovnice v tomto intervalu řešení.

V intervalu $< 0, 1 >$ platí pro levou stranu dané rovnice

$$\sqrt[3]{|1-x|(|x|+1)} = \sqrt[3]{1-x^2}$$

a řešením rovnice

$$\sqrt[3]{1-x^2} = a$$

dostáváme v případě, že je $0 < a \leq 1$, jediný kořen $x = \sqrt[3]{1-a^2}$; v případě, že je $a > 1$, nemá daná rovnice v intervalu $< 0, 1 >$ řešení.

Konečně pro interval $(1, \infty)$ je

$$\sqrt[3]{|1-x|(|x|+1)} = \sqrt[3]{x^2-1}$$

a snadno zjistíme, že rovnice

$$\sqrt[3]{x^2-1} = a$$

má v tomto intervalu pro každé $a > 0$ jediný kořen $x = \sqrt[3]{a^2+1}$.

Shrnutím dílčích výsledků dospíváme k závěru, že rovnice

$$\sqrt[3]{|1-x|(|x|+1)} = a$$

s neznámou x a kladným parametrem a má v množině všech reálných čísel právě dva kořeny:

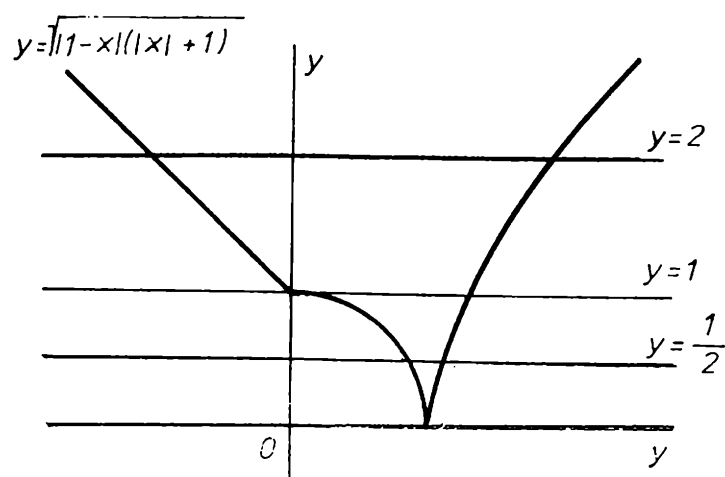
$$\text{pro } 0 < a \leq 1 \quad x_1 = \sqrt[3]{1-a^2}, x_2 = \sqrt[3]{a^2+1};$$

$$\text{pro } a > 1 \quad : x_1 = 1-a, x_2 = \sqrt[3]{a^2+1}.$$

Získaný výsledek můžeme ověřit graficky (viz obr. 1). Užitím předcházejících výsledků dostáváme, že grafem funkce

$$y = \sqrt[3]{|1-x|(|x|+1)}$$

je v intervalu $(-\infty, 0)$ polopřímka, která je částí přímky $y = 1-x$;



Obr. 1

v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je grafem této funkce kruhový oblouk $y = \sqrt{1 - x^2}$, který je částí kružnice $x^2 + y^2 = 1$, a konečně v intervalu $(1, \infty)$ je grafem příslušné funkce hyperbolický oblouk $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ležící na rovnosé hyperbole $x^2 - y^2 = 1$.

Všimněte si pozoruhodné vlastnosti naší funkce: i když se její graf skládá ze tří křivek různého druhu — z polopřímky, kruhového a hyperbolického oblouku — je tato funkce pro celý svůj definiční obor, jímž je množina všech reálných čísel, dána jedinou rovnicí! Z obr. 1, v němž jsou kromě grafu dané funkce znázorněny i grafy funkcí $y = \frac{1}{2}$,

$y = 1$ a $y = 2$, je jasné patrné, že graf uvedené funkce má s každou přímkou o rovnici $y = a$, kde $a > 0$, právě dva společné body.

Viděli jsme, — pokračoval profesor Ypsilon — že cesta, po které jsme kráčeli při řešení dané rovnice, byla velmi úzká; kdybychom z ní sešli, mohli bychom v džungli matematických symbolů, příkazů a zákazů zabloudit a nikdy bychom k jejím kořenům nedospěli. Aby však i řešitelé, kterým se všechny nástrahy zvládnout nepoštěstí, mohli pocítit uspokojení z tvůrčího činu, jímž vyřešení každé rovnice nepochybně je, zavádí patamatematika pojem bludného kořenu rovnice. Původně se jím rozumělo každé číslo, ke kterému řešitel při řešení dané rovnice došel, a to nezávisle na tom, zda je či není jejím kořenem. Ukázalo se však brzy, že tato definice je příliš široká — k tomu, aby byl nalezen bludný kořen rovnice, není většinou vůbec nutno ji řešit!

V moderní patamatematice se za bludný kořen rovnice považuje pouze to číslo, jehož vzdálenost na reálné ose od jejího libovolného kořenu není větší než jisté (předem dané) nezáporné číslo b , které se nazývá poloměr bloudivosti. Je-li tedy číslo x_0 kořenem dané rovnice, jejíž poloměr bloudivosti je b , je bludným kořenem této rovnice každé číslo x z definičního oboru rovnice, pro něž platí

$$|x - x_0| \leq b.$$

Jaké jsou např. bludné kořeny rovnice

$$\sqrt{|x-1|(|x|+1)} = 1,$$

jejíž kořeny jsou (v souladu s předchozím výsledkem pro $a = 1$) čísla 0 a $\sqrt{2}$? Zvolíme-li poloměr bloudivosti $b = \frac{1}{2}$, jsou jejími bludnými kořeny právě ta čísla x , pro něž platí

$$x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Při poloměru bloudivosti $b = 1$ jsou bludnými kořeny této rovnice právě všechna čísla z intervalu $\langle -1, \sqrt{2} + 1 \rangle$; je-li poloměr bloudivosti $b = 0$, má daná rovnice právě dva bludné kořeny, které jsou rovny jejím kořenům 0 a $\sqrt{2}$. V případě $b = 0$ tak patamatematická teorie řešení rovnic vplývá do teorie matematické.

Avšak nespornou výhodou teorie bludných kořenů rovnic — uzavírá svou exkurzi do patamatematiky profesor Ypsilon — je to, že napomáhá zmenšit počet žáků (při dostatečně velkém poloměru bloudivosti), kteří pro své bloudění při řešení rovnic bývají někdy do množiny kořenů zahrnováni.

Platí Archimédův zákon v kosmické lodi?

Doc. dr. JOSEF NOVÁK, CSc., UK Praha

Nejdříve upřesníme otázku. Jde o kosmickou loď, která je ve stavu beztíže (v beztížném stavu).

Otázku platnosti Archimédova zákona ve výše uvedených podmínkách řešili dva kamarádi takto:

První: Archimédův zákon neplatí. Podstata Archimédova zákona spočívá v tom, že v důsledku rozdílu hustot tělesa (objemu V) a kapaliny (o stejném objemu V) je zapotřebí různé práce na jejich zvednutí do určité výše h . V beztížném stavu je rozdíl mezi těmito pracemi roven nule, protože práce potřebná na zvednutí tělesa a kapaliny o stejném objemu do výše h je rovna nule. Ke stejnému závěru se dojde, jestliže uvažujeme tlaky přenášené na těleso v kapalině. Vztaková síla je podmíněna rozdílem tlaků na dolní a horní základnu (podstavu) tělesa.

V beztížném stavu je tento rozdíl nulový, a tedy nulová je i vztlaková síla.

V beztížném stavu uvnitř kapaliny nepůsobí vztlaková síla, a neplatí tedy Archimédův zákon.

Druhý: Archimédův zákon platí i v beztížném stavu. Dříve než budeme uvažovat beztížný stav, uvažme případ výtahu, který se pohybuje s určitým zrychlením a tímž směrem, jako má gravitační zrychlení g , a nechť $a < g$. Na těleso o objemu V ponořené do kapaliny hustoty ρ_0 působí v tomto případě vztlaková síla

$$F = \rho_0 (g - a) V \quad (1)$$

Tíha kapaliny o objemu tělesa se též rovná $\rho_0 (g - a) V$, neboli vztlaková síla se rovná tíze kapaliny vytlačené tělesem, a tedy Archimédův zákon platí.

Zvětšujeme-li velikost zrychlení a tak, že se postupně blíží velikosti gravitačního zrychlení g , bude se vztlaková síla podle (1) postupně zmenšovat, ale současně se bude přesně tak zmenšovat i tíha vytlačené kapaliny.

Tedy, jestliže se postupně bude velikost zrychlení a blížit velikosti gravitačního zrychlení g , bude stále zachována platnost Archimédova zákona.

V mezním (limitním) případě, kdy se velikost zrychlení a bude rovnat velikosti gravitačního zrychlení g , nastane stav beztíže (beztížný stav). Vztlaková síla bude rovna nule, ale též tíha kapaliny vytlačené tělesem bude rovna nule. Proto nic nebrání tomu tvrdit, že Archimédův zákon platí i v beztížném stavu.

Rozhodněte, který z kamarádů má pravdu a své rozhodnutí zdůvodněte. (Řešení si můžete zkontrolovat na str. 366.)

OLYMPIÁDY A SOČ

Pařížská mezinárodní matematická olympiáda

24. ročník MMO se konal ve dnech 1. až 12. července 1983 v Paříži za účasti 186 soutěžících ze 32 zemí ze všech pěti trvale obydlených světadílů. Družstva byla šestičlenná, pouze Španělsko zastupovali čtyři a Lucembursko dva žáci.

Československé družstvo tvořili *Igor Kříž*, *Jiří Sgall* a *Jiří Witzany* z gymnázia W. Piecka v Praze, *Xaver Gubáš* a *Marian Neamtu* z gymnázia A. Markuša v Bratislavě, *Vladimír Dančík* z gymnázia v Košicích

na Šmeralově ulici. Všichni s výjimkou Jiřího Witzanyho měli právě po maturitě.

V organizaci soutěže nedošlo proti minulým létům k žádným změnám. Soutěžní úlohy byly však dost obtížné, zvláště pátá a šestá, což se také projevilo ve výsledcích. Aby se dodržela tradice, podle níž ceny získává přibližně polovina soutěžících, bylo třeba stanovit velmi mírné podmínky. Jen čtyři žáci (tři z NSR a jeden ze SSSR) dokázali projít soutěží bez bodové ztráty. Celkem bylo uděleno 9 prvních cen, 27 druhých cen a 57 třetích cen. Kromě toho udělila porota ještě tři zvláštní ceny za elegantní a originální řešení jednotlivých úloh.

Pět našich soutěžících získalo ceny, J. Sgall první cenu, I. Kříž druhou cenu, V. Dančík, X. Gubáš a J. Witzany třetí ceny. Uvedme ještě prvních deset míst neoficiálního pořadí družstev podle bodového hodnocení: NSR (212 bodů), USA (171), Maďarsko (170), SSSR (169), Rumunsko (161), Vietnam (148), Holandsko (143), ČSSR (142), Bulharsko (137), Francie (123).

Těžko se lze vžít do soutěžního zápolení, které vede někdy k maximálnímu soustředění, jindy k nervozitě a neúspěchům. Náročnost MMO nejlépe oceníte, když se sami pokusíte soutěžní úlohy vyřešit. Rozhledy je uveřejnily v 7. čísle letošního ročníku.

jm

ŘEŠENÍ fyzikálního problému ze str. 365

V případě, že existuje zrychlení $a < g$, je velikost vztlakové síly působící na těleso rovna velikosti tíhy kapaliny vytlačené tělesem. V tomto smyslu má pravdu druhý kamarád.

Toto tvrzení však neplatí v mezním (limitním) případě, kdy je velikost zrychlení a rovna velikosti zrychlení g .

Při přechodu do beztlížného stavu (v tom nejposlednějším okamžiku) dochází ke skoku, který kvalitativně mění celou situaci. Tento skok souvisí s tím, že v případě, že $a = g$, se objevuje symetrie: mizí rozdíl mezi směrem „nahoru“ a „dolů“. Je-li rozdíl $(g - a)$ jakkoli malý (ale nenulový), stále platí vymezený směr „zdola nahoru“. Právě tímto směrem působí vztlaková síla. Jestliže však je $a = g$, tento směr zmizí a všechny směry se stávají fyzikálně ekvivalentní. To představuje onen skok. Zmizení nebo objevení se symetrie vždy probíhá skokem. V beztlížném stavu pojmy „nahore“ a „dole“ ztrácejí smysl, a proto není možno ani zjistit, která základna tělesa je horní a která dolní.

Pravdu má tedy první kamarád. V kosmické lodi ve stavu beztlíže Archimédův zákon neplatí.

Volně podle knihy

L. V Tarasov — A. N. Tarasovová: *Otázky a úlohy z fyziky*; ALFA Bratislava 1983.

Z NOVÝCH KNIH

Ján Ivan :

MATEMATIKA 1, PRÍRUČKA PRE VYSOKÉ ŠKOLY TECHNICKÉ

Vyšlo ako spoločná publikácia vydavateľstiev Alfa a SNTL v 1983 roku.

Prvý diel dvojdielnej učebnice matematiky má 705 strán a stojí 47,— Kčs. Kniha je určená študentom vysokých škôl technických, ale užitočná je aj pre stredoškôľakov, ktorí sa pripravujú na štúdium technického smeru. Kniha je rozdelená do 12 kapitol diferenciálneho a integrálneho počtu a 5 kapitol algebry a geometrie.

Pri spracovaní tradičného materiálu sa autor snaží o čo možno najzrozumiteľnejší výklad. Náročnejšie pojmy, najmä pokiaľ ide o prvých 12 kapitol, sú pekne motivované. Dôkazy viet sú metodicky rozmyslené a bez skokov. Bohatý príkladový materiál pomáha čitateľovi postrehnúť hlbšie vnútorné súvislosti. Množstvo aplikačných ilustrácií ukazuje smery a spôsoby využitia teoretických poznatkov v praxi. Z tejto koncepcie sa vymyká azda iba 9. kapitola, v ktorej sa neurčitý integrál podáva iba ako kalkulačná technika teoreticky fundovaná. Hojný počet výstižných obrázkov napomáha rozvoju intuície. Sériu cvičení, ktorá je uvedená na záver každej kapitoly, aktivizuje čitateľa a dáva mu možnosť preveriť si mieru porozumenia látky.

Už dlhšie bola v učebnicovej li-

teratúre pocítovaná potreba učebnice, ktorá by v jednotnej koncepcii a ucelene podala základný kurz matematiky pre vysoké školy technické. Preto treba vydanie novej učebnice privítať a popriať jej zdárne pôsobenie. *Milan Hejný*

Čulík, F., Noga, M. :

ÚVOD DO ŠTATISTICKEJ FYZIKY A TERMODYNAMIKY

Vydala ALFA, n. p., Bratislava spoločne s SNTL, n. p., Praha, v roce 1982.

I. vydání, 302 stran, vázané, cena 26,— Kčs.

Termodynamika a statistická fyzika jsou významnými částmi základního kursu teoretické fyziky na vysokých školách. Uvedená učebnice byla MŠ SSR schválena v roce 1981 jako vysokoškolská učebnice pro posluchače matematicko-fyzikálních a přírodovědeckých fakult. Tato moderní slovenská učebnice fyziky a termodynamiky zahrnuje základní poznatky potřebné pro osvojení metod statistické fyziky, dále pak ke zdůvodnění principů fenomenologické termodynamiky a k objasnění jejího pojmového aparátu. Předpokládá se, že čtenář je seznámen se základy kvantové mechaniky. Názvy jednotlivých kapitol jsou:

1. Gibbsove rozdelenia;
2. Maxwellova-Boltzmannova štatistika;
3. Kvantová štatistika ideálnych plynov;

4. Rovnováha fáz a fázové prechody;
5. Fluktuácie, stochastické procesy a kinetické rovnice;
6. Štatistický operátor nerovnovážnych systémov.

Učebnice rovněž přihlíží k nejnovějším problémům kvantové statistické fyziky, prezentuje její metody a nejnovější výsledky a poukazuje na jejich vhodné praktické použití i v jiných vědních oborech. Poskytuje nezbytný základ pro studium další odborné literatury. Napsaná je jasně a srozumitelně.

Vydání čs. učebnice statistické fyziky a termodynamiky bylo pro potřeby čs. fyziky žádoucí. Knihu doporučuji zejména posluchačům fyzikálních oborů vysokých škol univerzitního směru, je však vhodná i pro náročnější studenty jiných vysokých škol, dále pak pro fyziky-pedagogy a pro odborníky v praxi.

Stanislav Pospíšil

Horák, P. - Niepel, E.:

PREHLAD MATEMATIKY

Vydala Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., Bratislava, v roku 1983, 1. vyd., 600 strán, 217 obr., viaz. Kčs 30,—

Stále viac a stále častejšie potrebujeme mať prehľad o základných pojmoch a vzťahoch elementárnej matematiky. Vedieť použiť teorémy, aplikovať algoritmy. Je dobré mať po ruke stručnú a rýchlu informáciu o matematickej problematike na stredoškolskej úrovni. „Prehľad matematiky“ splňuje tieto požiadavky.

Publikácia je rozdelená na pätnásť častí: logika, teória množín, aritmetika, algebra, kombinatorika, teória grafov, trigonometria, matematická analýza, pravdepodobnosť, matematická štatistika, numerická analýza, planimetria, stereometria, analytická geometria v rovine a v priestore. Knižka obsahuje definície všetkých základných pojmov, matematické vety charakterizujú vlastnosti jednotlivých pojmov. Spôsob ich využitia je vysvetlený v riešených príkladoch. Stručné komentáre obsahujú aj upozornenia na najčastejšie chyby pri riešení úloh.

Rozsah učiva prevyšuje gymnaziálne osnovy a spojitou prechádza do problematiky prvých ročníkov vysokých škôl. Veľmi vhodne je rozšírená tematika numerickej matematiky, ktorú možno využiť pri programovaní samočinných počítačov. Ďalej sa dozviete aj o dôkaze dvojitou indukciou, infime a supreme, o riešení kubickej a recipročnej rovnice, o práci s matricami, rozklade na parciálne zlomky. Kombinatorika je obohatená o vytvárajúce funkcie a princíp zapojenia a vypojenia. V analytickej geometrii si rozšírite poznatky o kvadratické plochy a využitie matíc i determinantov. Nové poznatky získate z teórie grafov, pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.

„Prehľad matematiky“ obsahuje dostatočne široký výber rôznych oblastí matematiky. Je určený pre študentov, ktorí si potrebujú zopakovať svoje vedomosti.

Dušan Jedinák

Pythagorův stoleček

Mezi české početnice ze 16. století patří také spis s řeckým názvem *Isagogikon*; tak se v té době nazývaly publikace, které poskytovaly základní poučení. Autoři knížky, o které chceme hovořit, *Beneš Optát z Telče* a *Petr Gzel*, ji vydali nejprve v r. 1535 pod názvem *Isagogikon*. V předmluvě k ní objasňují, že je to „první uvedení, každému počínajícímu se učití a to ku poznání dvojího, každému velmi potřebného umění“. Ve druhém vydání v r. 1548 vyšla pod titulem „*Knížky početní, na rozličné koupě v nově vytištěné*“.

Kniha obsahuje pravopis (ortografii), učí tedy také číst a psát česky, až potom učí počítat. Aritmetika je v ní rozdělena na dvě části, v první se probírá „sedmery způsob počtů“ — početní výkony, o kterých jsme už na tomto místě psali, zařazena je i osmá species — posloupnost (*progressio*). Druhá část aritmetiky obsahuje pravidla neboli reguly pro řešení úloh určitých typů.

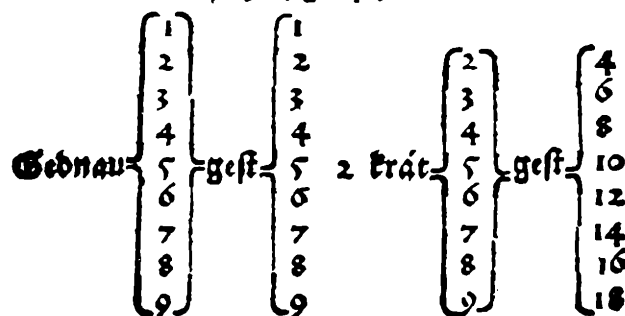
Popisy výpočtů a návody k řešení úloh nejsou však v *Isagogiku* tak podrobné jako v ostatních učebnicích, o kterých jsme se již zmiňovali. Příklady řešené speciálními regulami nejsou také nijak důkladně typizovány. Na obrázku z *Isagogika* však vidíme přehlednou tabulku malé násobilky a začá-

Až po ty
so čtyři /
stolečka
soboto
na linách
jest po-
střebí.

Šestý způsob Arythmetry *Mensula Pythagore:* Stoleček Pythagorů.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

¶ Sednau gedno ginače/
štrze figury zčerednře.



tek rozpisu součinů při násobení jednou a dvěma. „Šestý způsob arythmetry“ byl, jak víme, název pro násobení; „*Mensula Pythagore*“ neboli „Stoleček Pythagorů“ má zřejmě být deska stolu s tabulkou násobků. Žák si měl tabulku osvojit zpaměti, teprve pak mohl násobit, a to jak „na cifrách“, tak „na linách“; při druhém způsobu počítání však postačil výsek z tabulky, jak sděluje text po levé straně: „Až po tyto čtyři (řádky) stolečka tohoto na linách jest potřebí.“

Ivana Füzéková

Pro studenty středních škol a další zájemce o matematiku a fyziku se v Sovětském svazu vydává časopis

KVANT

který byl založen v roce 1970. Vychází každý měsíc, číslo má mimo obálku 64 stran. Vydává jej Akademie věd SSSR a Akademie pedagogických věd SSSR v moskevském nakladatelství Nauka.

Časopis se čte nejen v Sovětském svazu, ale i v zahraničí. Jeho obsah a texty úloh pro čtenáře jsou tištěny nejen rusky, ale i anglicky.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1984.

ROZHLEDY

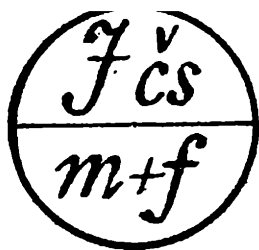
**matematicko
– fyzikální**



**ROČNÍK 62, 1983/84
KVĚTEN**

(9)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. Ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE
Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK
Praha, prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc.,
PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář,
CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

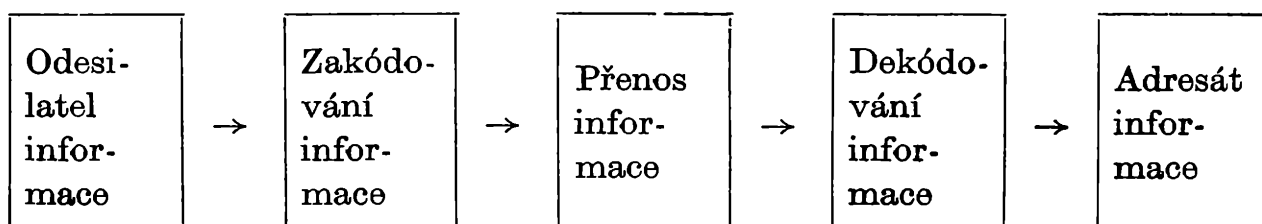
A. Bicanová, M. Trch: O komunikaci, kó- dování a kryptografii 1. .	369
S. Horák: Napoleonovy trojúhelníky .	373
V. Mráz: Pět klasických logických spojek	377
O. Lepil: Parametrické kmitání	384
R. Zajac: Objev vinových vlastností elektrónu	389
Přemýšlíme, řešíme	392
34. ročník MO, školní rok 1984/85	394
Úlohy pro I. kolo XXVI. ročníku FO .	398
Z nových knih .	415
Pohledy do dějin .	. 3. str. obálky

0 komunikaci, kódování a kryptografii I.

Ing. ALENA BICANOVÁ, RNDr. MILAN TRCH, CSc., UK Praha

Příjemná chvíle, venku je nepohoda a doma teplo, klid. Odpočíváte po celodenním shonu a přelétáte očima první řádky tohoto článku. Možná, že přitom posloucháte svoji oblíbenou desku. Ani si přitom asi neuvědomujete, že se od samého začátku setkáváte s jakýmsi „kódováním“ . . . Své myšlenky jsme zakódovali do slov, vět a odstavců, tiskař je vysázel, pošta vám doručila váš oblíbený časopis. A vy se teď snažíte pochopit, co jsme měli na mysli při psaní tohoto článku. Hudba vám tiše zní, ale i ona svou cestu k vám vykonala z nahrávacího studia přes továrnu, kde byla „zalisována“ do kusu umělé hmoty, která teď krouží na vašem gramofonu. A reproduktory se zoufale snaží vrátit tónům co nejvěrněji jejich původní podobu. Možná, že za chvíli odložíte i tento časopis a třeba si pustíte televizi. Ale hlas komentátorky se cestou k vám skryje do elektromagnetických vln. A nebýt té kouzelné skříňky s obrazovkou, neuvidíte ani příjemnou tvář hlasatelky . . .

V širším slova smyslu takto pojaté „kódování“ souvisí vždy s komunikací lidí, předáváním a přenosem či šířením informací nebo kulturních hodnot. Takové předávání informace má v zásadě velice jednoduchou strukturu, kterou zachycuje následující schéma:



Způsob kódování informace zřejmě závisí na vzdálenosti odesílatele a adresáta informace, na technických možnostech přenosu informace, ale také na jejím obsahu, poslání a určení. My se dále zaměříme na komunikaci lidí a ukážeme si některé situace, které nám přiblíží uvedené obecné schéma.

Naznačené schéma se velice zjednodušuje při přímém hovoru dvou osob, kdy vlastní přenos informace komunikaci významně neovlivňuje.

Kódování v tomto případě splývá se schopností odesílatele „mluvit“ a dekódování zase splývá se schopností „pochopit“ mluvené slovo adresátem. Stačí však, aby hovor probíhal za hluku strojů a vyslané informace nemusí být spolehlivě dekódovány. Jde-li však o telefonní hovor, pak na podstatě hovoru se nic nemění, jen lidská řeč je „zakódována“ do elektrických signálů pomocí telefonu a u příjemce znovu „dekódována“ zpět do lidské řeči.

Tato situace však může být zkomplikována, jestliže jeden z účastníků hovoru nezná dost dobře (nebo vůbec nezná) mateřský jazyk druhého. V takovém případě bývá prostředníkem jazyk, který oba účastníci hovoru dostatečně ovládají. Zakódování myšlenek a jejich dekódování bývá v takovém případě méně přesné. Ale díky úzkému kontaktu obou osob je většinou možno obsah sdělovaných informací upřesnit.

Zcela jiná situace nastává v případě, kdy se dostáváme do styku s přenášenou informací, která nám původně ani určena nebyla, ale je středem našeho zájmu. V podobné situaci se kdysi ocitl i francouzský vědec *Jean Francois Champollion* (1790—1832), když uviděl v Alexandrii neznámý nápis v hieroglyfech a řeckém písmu. Z předpokladu, že nápis má též obsah, po letech práce odhalil tajemství hieroglyfického písma starých Egyptanů. A díky tomu dnes máme poměrně dobré znalosti o vývoji staré Egyptské říše.

Podobným způsobem přispěl k rozvoji poznání i český vědec profesor University Karlovy *Bedřich Hrozný* (1879—1952), zakladatel chetitologie, který rozluštil chetitštinu a podal základ k rozluštění maloasijského obrázkového písma. Je snad zřejmé z těchto dvou posledních ukázek, jak významně ovlivňuje „kódování a dekódování“ znalost jazyka a jeho grafický záznam. Cílem našeho článku je však pojednat o některých jednodušších metodách a možnostech kódování a dekódování informací. Proto se v dalším omezíme pouze na kódování informací sdělovaných v českém jazyce prostřednictvím grafického záznamu — písma. Vycházíme tedy ze známé struktury českého jazyka; přitom písemný záznam přenášených informací budeme pokládat za přesný v tom smyslu, že při přenosu nedojde ke změně textu. Uvědomme si, že cílem kódování je utajení obsahu přenášených informací před některými osobami, kterým není informace určena. V duchu schématu o přenášení informace je toho možno dosáhnout v zásadě dvěma různými způsoby — buď vyloučíme možnost kontaktu nežádoucích osob s přenášenou informací, anebo použijeme takový způsob kódování a dekódování informace, který není nežádoucím osobám známý. Takový způsob zápisu informací se obvykle označuje slovem „kryptografie“ nebo „šifra“. Encyklopedický slovník pod heslem „kryptografie“ stručně uvádí, cituji: „Psaní neviditelným písmem nebo šifrovaným písmem, šifrování“. Jeden z nejstarších známých způsobů kódování pochází už z dob vlády Julia Caesara ve starém Římě. Podstata tohoto kódování spočívala v dohodnutém „posunutí“

používané abecedy. Ukážeme si tuto nejjednodušší metodu na konkrétním příkladě. Podstatou tohoto způsobu kódování je změna významu písmen podle předem daného vzájemně jednoznačného předpisu, tj. dohodnutého vzájemně jednoznačného zobrazení základní abecedy. K zakódování informace použijeme minimální „telegrafickou“ abecedu, kterou posuneme o tři písmena. Příslušné zobrazení tedy bude dáno tabulkou:

abeceda	A B C D E F G H I J K L M
kódy písmen	D E F G H I J K L M N O P
abeceda	N O P Q R S T U V W X Y Z
kódy písmen	Q R S T U V W X Y Z A B C

Podívejme se nyní, jak pomocí této abecedy zakódujeme zprávu, která byla 13. 12. 1983 uveřejněna v Rudém právu:

„Na III. sjezd komunistické mládeže Řecka odcestovala do Atén delegace ÚV SSM vedená jeho předsedou J. Jenerálem.“

Při zakódování této zprávy pomocí minimální abecedy o 26 písmenech v textu odhlédneme od teček, háčeků a čárek. Výsledkem je tento text:

QD LLL VMHCG NRPXQLVWLFNH PODGHCH UHFND
RGFHVWRYDOD GRDWHQ GH OHJDFH
XY VVP YHGHQD MHKR SUHGVHRX M MHQH UDOHP

Adresát této zprávy snadno text dekóduje pomocí inverzního zobrazení dosazením správných hlásek za kódová písmena. Pokud se však ocitneme v situaci člověka, který tuto informaci zachytil a ví, že byla zakódována pomocí „posunutí“ abecedy, můžeme tuto informaci celkem snadno dekódovat také. Stačí si k tomu uvědomit, že původní abecedu lze posunout celkem dvaceti pěti různými způsoby (identické zobrazení nepovažujeme za zakódování textu). Proto můžeme zkusmo dekódovat celý text. Není však třeba „luštit“ celý text; stačí když vybereme nějaké slovo a postupným „posouváním“ abecedy najdeme slovo, které dává nějaký význam. Vezměme pro názornost z našeho textu slovo VMHCG; zapišme si jej do sloupce a postupně o jedno písmeno posouvajme abecedu:

V		W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P
		Q R S T U
M		N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G
		H I J K L

H		I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
		C	D			E	F	G													
C		D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
		X	Y			Z	A	B													
G		H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
		B	C			D	E	F													

Při hledání slova, která dává v českém jazyce nějaký smysl, narazíme na slovo „SJEZD“. To znamená, že při zakódování textu bylo písmeno S nahrazeno písmenem V. Sestavení dekódovací tabulky je už v tomto případě snadné a zcela mechanicky lze potom provést dekódování celého textu. Poznamenejme, že bychom mohli luštitelům situaci mírně ztížit tím, že bychom nedodrželi mezeru mezi slovy. Místo toho můžeme zapisovat text pravidelně ve skupinách např. pěti písmen. Pak by zakódovaný text vypadal takto: „QDLLL VMHCG NRPXQ LVWLF NHPOD ... atd.“ Dekódování takového textu bude probíhat ve dvou etapách — nejprve musíme odhalit způsob zakódování a převést text do správné abecedy, potom bude následovat jeho „redakce“ a převedení do normální řeči doplněním čárek, teček a háčeků. Pokuste se nyní samostatně dekódovat následující informaci, kterou jsme rovněž převzali z Rudého práva:

OEGPK NZITG TEGXR WPOTY XOYJV DHAPK HZNRW WDGED
IKGOJ YXOTO STKAR XOSPA TZPCP OXYXY TCKED WPSZP
RWKBX CJANR WSCTR WCPEG XZAPS KYXOC XBPZT SPCXX
HBTRZ PKAZJ OPSPK YAPHI PSDZH BSTHP IXZKR X!

Vycházejte z toho, že i tato zpráva byla zakódována pouze pomocí posunutí abecedy, přitom se opět používá pouze dvacet šest písmen a pravděpodobně nejsou dodrženy mezery mezi jednotlivými slovy. Řešení textu přineseme v pokračování tohoto článku v příštím čísle.

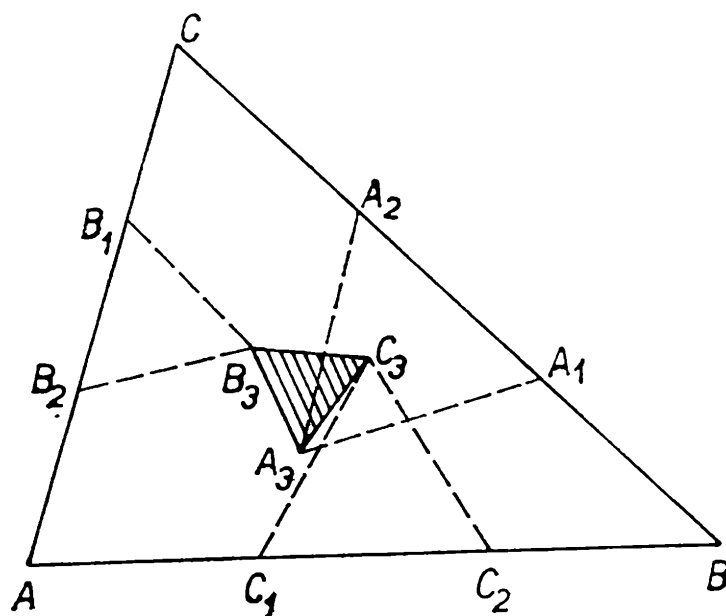
Napoleonovy trojúhelníky

STANISLAV HORÁK, Praha

Napoleon Bonaparte byl nejen vynikající vojevůdce a státník, ale i dobrý matematik. Matematiku i matematiky měl ve velké úctě, jak ukazuje následující historka. Jeden slavný francouzský spisovatel, člen Institutu (ve Francii to je nejvyšší oficiální instituce pro vědu a umění), si Napoleono-
vi stěžoval, že členové Institutu mu neprokazují náležitou úctu. Napoleon stížnost vyslechl a pak se zeptal: „Znáte diferenciální počet?“. „Nikoliv,“ zněla odpověď. „Tak proč si stěžujete?“, odvětil Napoleon. (Viz A. Z. Manfred, Napoleon Bonaparte, str. 312 a 313.)

V 6. čísle Rozhledů min. ročníku na str. 243 a násl. vyšel článek prof. dr. J. Kůsta *Morleyova věta*. V něm jste se seznámili s jedním rovnostranným trojúhelníkem, který příslušel danému různostrannému trojúhelníku. Zde chci upozornit na jiný rovnostranný trojúhelník příslušný k danému trojúhelníku ABC , který se připisuje velkému Korsičanovi.

Stranu AB (BC ; CA) trojúhelníka ABC , který není rovnostranný, rozdělme na tři shodné úsečky AC_1 , C_1C_2 , C_2B (BA_1 , A_1A_2 , A_2B ; CB_1 , B_1B_2 , B_2A). Nad úsečkou C_1C_2 (A_1A_2 ; B_1B_2) sestrojme v polorovině ABC (BCA ; CAB) rovnostranný trojúhelník $C_1C_2C_3$ ($A_1A_2A_3$; $B_1B_2B_3$). Potom body C_3 , A_3 , B_3 jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku, kterému se říká *Napoleonův trojúhelník* (obr. 1).

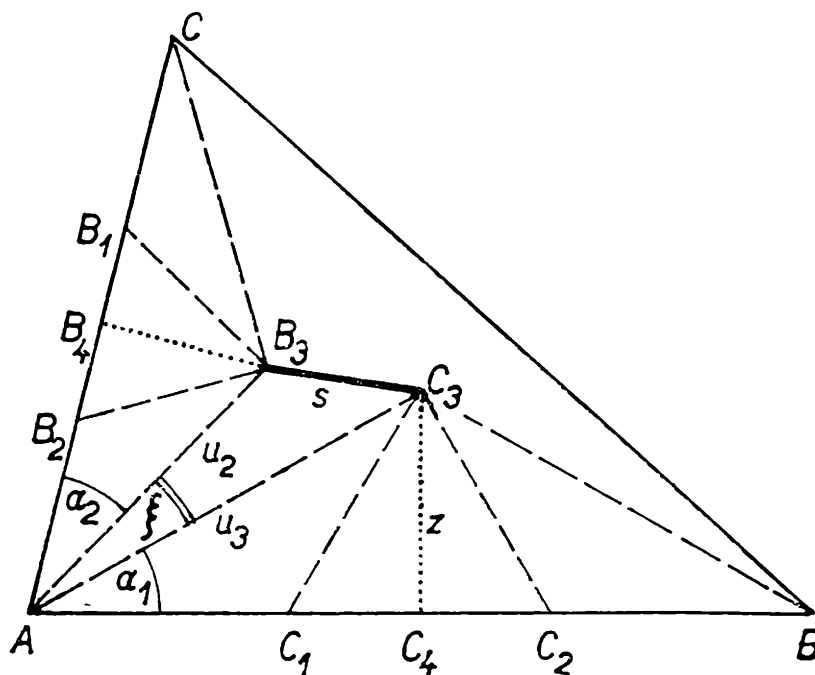


Obr. 1

Úkolem tohoto článku je provedení důkazu, že Napoleonův trojúhelník je skutečně rovnostranný.

Střed strany AB označme C_4 (obr. 2) a dále ještě označme

$$|C_3C_4| = z, \quad |AC_3| = |BC_3| = u_3.$$



Obr. 2

Velikosti stran trojúhelníku ABC jsou jako obvykle a, b, c . Z trojúhelníka $C_1C_2C_3$ plyne

$$z = \frac{c}{6} \sqrt{3}$$

a z trojúhelníka AC_3C_4 plyne

$$u_3 = \frac{c}{3} \sqrt{3}.$$

Podobně se dá vypočítat

$$u_2 = |AB_3| = |CB_3| = \frac{b}{3} \sqrt{3}.$$

Označme ještě

$$\sphericalangle C_3AC_4 = \alpha_1, \sphericalangle B_3AB_1 = \alpha_2.$$

O nich platí (viz trojúhelník AC_3C_4 a trojúhelník AB_3B_4 , kde B_4 je střed strany AC):

$$\sin \alpha_1 = \frac{z}{u_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 30^\circ.$$

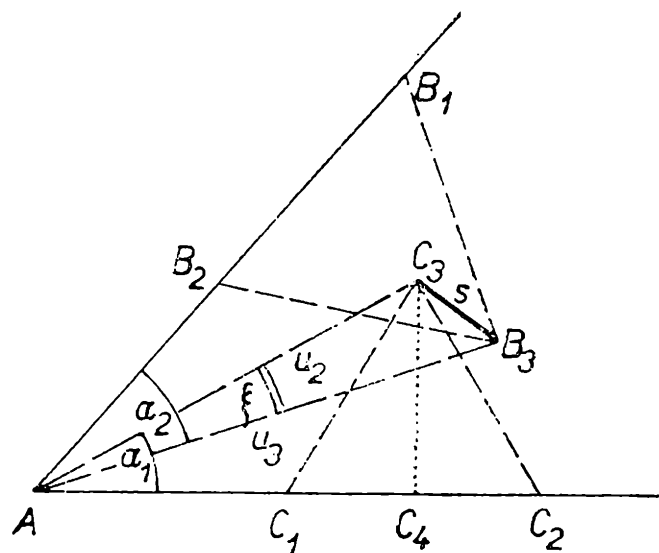
Podobně

$$\sin \alpha_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = 30^\circ.$$

Potom

$$\xi = |\sphericalangle B_3AC_3| = \alpha - \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha - 60^\circ.$$

Délka s strany B_3C_3 trojúhelníka $A_3B_3C_3$ je (používáme kosinovou větu



Obr. 3

na trojúhelník AB_3C_3):

$$\begin{aligned} s^2 &= u_2^2 + u_3^2 - 2u_2u_3\cos\xi = \\ &= \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{2}{3}bc\cos(\alpha - 60^\circ) = \\ &= \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{2}{3}bc\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right). \end{aligned}$$

Z kosinové věty použité na trojúhelník ABC vyplývá

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

a ze vzorce pro obsah S trojúhelníka ABC dostaneme

$$\sin\alpha = \frac{2S}{bc}.$$

Po dosazení a po kratší úpravě máme

$$s^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} - \frac{2}{3}S\sqrt{3}.$$

Dostali jsme výraz, který se cyklickou záměnou nemění. Pro nás to znamená, že

$$|A_3B_3| = |A_3C_3| = |B_3C_3| = s.$$

Tím je důkaz našeho tvrzení proveden.

Je však nutno se zmínit o jedné důležité věci. Obr. 2 byl narysován tak, že se úhly α_1 , α_2 , ξ nepřekrývaly. Je však možné, že se tyto úhly překrývají (obr. 3), a pak musíme ukázat, že to nemá vliv na výsledek.

Z obr. 3 vyčteme

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \xi = \alpha.$$

Ale i zde platí (dokažte sami)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ,$$

a proto

$$\xi = 60^\circ - \alpha.$$

Poněvadž

$$\cos(\alpha - 60^\circ) = \cos(60^\circ - \alpha),$$

nemá překrývání úhlů vliv na výsledek.

Z našeho výsledku vyplývá ještě jeden důsledek. Poněvadž s^2 je vždy nezáporné číslo, musí platit

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4 S \sqrt{3}. \quad (1)$$

V dalším ukážeme, že znaménko rovnosti platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Pišme:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 4 S \sqrt{3}, \\ (a^2 + b^2 + c^2)^2 &= 48 S^2. \end{aligned}$$

Pravou stranu rovnosti budeme postupně upravovat; přitom použijeme Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku:

$$\begin{aligned} 48 S^2 &= 48 s (s - a) (s - b) (s - c) = 3 (a + b + c) (-a + b + c)(a - \\ &- b + c) (a + b - c) = 3 (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2). \end{aligned}$$

Platí tedy (a rovnost hned upravujeme):

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 &= 3 (-a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2) \\ a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 &= 3 (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + \\ &+ 2b^2c^2 + 2a^2c^2) \\ a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2 &= 0, \\ (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Dospěli jsme k součtu tří druhých mocnin, který je roven nule. To je možné jedině tak, že každý ze tří výrazů je roven nule, tj.

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2 = c^2 - a^2 = 0,$$

což znamená, že $a = b = c$ a daný trojúhelník ABC je skutečně rovnostranný. V nerovnosti (1) musíme tedy psát nerovnost neostrou. Tím jsme s důkazem hotovi.

Cvičení

1. Jestliže rovnostranné trojúhelníky $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ sestrojíme vně trojúhelníku ABC , dostaneme jiný Napoleonův trojúhelník. Dokažte, že to je trojúhelník rovnostranný.
2. Sestrojte Napoleonovy trojúhelníky v tupoúhlém (pravoúhlém) trojúhelníku a dokažte, že jsou rovnostranné.
3. Sestrojte Napoleonovy trojúhelníky v rovnostranném trojúhelníku. Co můžete říci? Svě tvrzení zdůvodněte.

Pět klasických logických spojek

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Ve škole jste poznali zpravidla pět logických spojek, někdy též nazývaných funktory. Často se zapisují znaky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ a čtou se pořadě non, et, vel, implikuje, je ekvivalentní, anebo se čtou *není pravda*, *že*. ; a ; ... *nebo* ... ; *jestliže* , *pak* ; ... , *právě když*

Na prvním místě uvedená spojka negace $\neg$ (non) je jediná jednomístná spojka; mění pravdivostní hodnotu (dále jen ph) výrokové proměnné 1 (pravda) na 0 (nepravda) a obráceně. Často se místo znaku $\neg$, jenž se píše před výrokovou proměnnou, např. $\neg p$, zapisuje pruh nad proměnnou, tedy $\bar{p}$. Této dohody se přidržíme i my. Ostatní spojky jsou dvojmístné a píšeme je mezi výrokové proměnné. Náš čtenář asi zná i ph některých dále uvedených pravdivostních funkcí, které závisí na ph výrokových proměnných a nabývají opět ph 1 (pravda) nebo ph 0 (nepravda). Stručně píšeme jen 1 nebo 0.

V tabulce 1 uvedeme ph nejen pěti logických spojek, o nichž byla řeč, ale zapíšeme i další definiční tabulky pravdivostních funkcí pro dvě výrokové proměnné, jichž je celkem šestnáct. Připojíme-li k dvojmístným spojkám ještě jednomístnou spojku negace, můžeme všechny pravdivostní funkce z tabulky 1 vyjádřit uvedenými pěti spojkami. Posléze i tento počet logických spojek ještě snížíme.

Tabulka 1

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Spojka konjunkce (logického součinu) se zapisuje znakem $\wedge$ mezi proměnné a v tabulce 1 je jí užito k zápisu pravdivostní funkce $f_8 = p \wedge q$. Rovněž další logické spojky zapisujeme mezi výrokové proměnné. Disjunkce (logický součet) je funkce $f_2 = p \vee q$, implikace je funkce $f_5 = p \Rightarrow q$ a ekvivalence $f_7 = p \Leftrightarrow q$.

Uvedenými pěti logickými spojkami, které se nazývají též klasické spojky, dokážeme zapsat i všechny ostatní pravdivostní funkce uvedené v tabulce 1. Předně vidíme, že funkce f_1 je tautologie čili zákon výrokové logiky, protože ve všech (čtyřech) případech nabývá ph 1. Její negace je funkce $f_{16} = \overline{f_1}$, která nabývá vždy jen ph 0 a říká se jí kontradikce. Některé důležité tautologie a některé kontradikce ještě poznáme. Ke shora probraným funkcím f_8, f_2, f_5 a f_7 dostaneme jejich negováním pořadě funkce f_9, f_{15}, f_{12} a f_{10} . Platí tedy $f_9 = \overline{f_8}, f_{15} = \overline{f_2}, f_{12} = \overline{f_5}, f_{10} = \overline{f_7}$. Z tabulky 1 také vyčteme, že $f_4 = p$ a její negací je $f_{13} = \overline{p}$; negací funkce $f_6 = q$ dostaneme funkci $f_{11} = \overline{q}$. Zbývá určit funkci f_3 a její negaci f_{14} . Snadno nahlédneme, že $f_3 = q \Rightarrow p$ a ovšem $f_{14} = \overline{f_3} = \overline{q \Rightarrow p}$. Povšimněme si, že když je tautologie připojena konjunkcí k nějaké pravdivostní funkci, nebo když je kontradikce připojena disjunkcí k nějaké pravdivostní funkci, tato funkce se nezmění; stručně to zapíšeme takto:

$$f \wedge 1 = f, f \vee 0 = f$$

Použití pravdivostních tabulek (resp. tabulky 1) ukážeme na implikaci, tedy na funkci $f_5 = (p \Rightarrow q)$. Vidíme, že ph implikace je třikrát 1 a jen pro $p = 1, q = 0$ je ph $(p \Rightarrow q) = 0$. Obdobná situace je pro funkci $f_3 = (q \Rightarrow p)$. Místo porovnání implikací f_5 a f_3 vypíšme tyto pravdivostní funkce i jejich negace do tabulky 2, v níž jsou u f_5 a u f_3 pod výrokovými proměnnými na čtyřech řádcích jejich ph a pod spojkou implikace jsou zapsány ph funkcí f_5, f_3 a ph jejich negací, tedy ph funkcí f_{12}, f_{14} .

Tabulka 2

$f_5 = p \Rightarrow q$	$f_{12} = \overline{f_5} = \overline{p \Rightarrow q}$	$f_3 = q \Rightarrow p$	$f_{14} = \overline{f_3} = \overline{q \Rightarrow p}$
1 1 1	0	1 1 1	0
1 0 0	1	0 1 1	0
0 1 1	0	1 0 0	1
0 1 0	0	0 1 0	0

Některých funkčních hodnot z tabulky 1 resp. 2 užíváme ke stanovení ph složených funkcí i s více než dvěma výrokovými proměnnými.⁷ Jako příklad stanovme ph dvou pravdivostních funkcí F a G s třemi výrokovými proměnnými p, q, r :

$$F = [p \Leftrightarrow (q \wedge r)] \vee (q \Rightarrow \bar{p}), \quad (F)$$

$$G = (p \Leftrightarrow q) \wedge [r \vee (q \Rightarrow \bar{p})]. \quad (G)$$

Stojí za povšimnutí, že u obou funkcí je stejná posloupnost výrokových proměnných i logických spojek, avšak uzávorkování je u obou pravdivostních funkcí rozdílné, takže jde o dvě různé funkce. Rozdílné uzávorkování má ovšem podstatný vliv na ph obou funkcí F, G ; ostatně je zřejmé, že funkce F je disjunkcí a funkce G je konjunkcí.

V zápisu obou složených funkcí jsou tři proměnné p, q, r , a proto má tabulka 3 pravdivostních hodnot obou funkcí $2^3 = 8$ řádků. Kromě uvedených tří proměnných je v zápisu obou funkcí ještě negovaná proměnná $\bar{p}$, proto ke sloupcům nadepsaným p, q, r základního sloupce tabulky 3 ještě připojíme sloupec pro $\bar{p}$. Ze základního sloupce a ze sloupce nadepsaného $\bar{p}$ vybíráme pravdivostní hodnoty proměnných při stanovení ph F a ph G na jednotlivých řádcích tabulky. Výsledný sloupec ph F a ph G je v tabulce 3 uveden. Místo detailního popisu pro získávání výsledných ph na všech osmi řádcích uvedeme jako příklad pravdivostního vyhodnocení toto vyhodnocení na prvním a na druhém řádku tabulky 3. Podrobný komentář připojujeme k druhému řádku tabulky, tedy pro $p = 1, q = 1, r = 0$ (a ovšem $\bar{p} = 0$).

Tabulka 3

p	q	r	$\bar{p}$	$F = [p \Leftrightarrow (q \wedge r)] \vee (q \Rightarrow \bar{p})$	$G = (p \Leftrightarrow q) \wedge [r \vee (q \Rightarrow \bar{p})]$
1	1	1	0	1 1 1 1 1 1 0 0	1 1 1 1 1 1 0 0
1	1	0	0	1 0 1 0 0 0 1 0 0	1 1 1 0 0 0 1 0 0
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Ve druhém řádku tabulky 3 pro funkci F platí: $q \wedge r = 1 \wedge 0 = 0$, $p \Leftrightarrow (q \wedge r) = 1 \Leftrightarrow 0 = 0$; dále $q \Rightarrow \bar{p} = 1 \Rightarrow 0 = 0$ a konečně ph

$F = 0 \vee 0 = 0$. Pro funkci G platí: $p \Leftrightarrow q = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$; dále $q \Rightarrow \bar{p} = 1 \Rightarrow 0 = 0$, $r \vee (q \Rightarrow \bar{p}) = 0 \vee 0 = 0$ a konečně $\text{ph } G = 1 \wedge 0 = 0$.

Zjišťujeme, že obě funkce F , G jsou splnitelné formule, neboť obě nabývají alespoň na jednom řádku $\text{ph } 1$ a alespoň na jednom řádku $\text{ph } 0$. U obou funkcí např. na prvním řádku v tabulce 3 je $\text{ph } F = \text{ph } G = 1$, na druhém řádku mají obě funkce $\text{ph } 0$. Na třetím řádku je $\text{ph } F \neq \text{ph } G$. Z výsledného sloupce pravdivostních hodnot funkce F a funkce G tedy zjišťujeme, že jde o dvě různé pravdivostní funkce (jsou to splnitelné formule).

V zápisu pravdivostních funkcí F , G bylo použito všech pěti klasických spojek ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$). Všeobecně platí, že počet pěti klasických spojek, lze redukovat např. jen na čtyři spojky ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$), ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$), ($\neg$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$), na tři ($\neg$, $\wedge$, $\vee$), ($\neg$, $\wedge$, $\Rightarrow$), ($\neg$, $\vee$, $\Leftrightarrow$), na dvě spojky ($\neg$, $\wedge$), ($\neg$, $\vee$), ($\neg$, $\Rightarrow$). Na méně než dvě klasické spojky redukce i provést nelze. Přitom se bez spojky negace neobejdeme. Říkáme, že čtveřice (i pětice) logických spojek tvoří funkčně úplný systém těchto spojek. Funkčně úplný systém tvoří i trojice nebo dvojice uvedených logických spojek.

O možnosti redukovat počet pěti klasických logických spojek na jejich menší počet vyplývá z aplikace následujících zákonů (tautologií) výrokové logiky na pravdivostní funkce. O jejich platnosti se může čtenář přesvědčit tabulkovou metodou.

Ekvivalenci převedeme na konjunkci dvou implikací podle tohoto zákona:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)). \quad (1)$$

Implikaci převedeme na negaci a disjunkci takto:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \quad (2)$$

Zbyly tři spojky ($\neg$, $\wedge$, $\vee$). Jejich počet je možno o jednu zmenšit užitím zákona dvojí negace

$$\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p \quad (3)$$

a zákonů de Morganových:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}, \quad (p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \quad (4)$$

Uvedeme ještě další zákony výrokové logiky, které použijeme. Jsou to komutativní zákony (5), asociativní zákony (6), distributivní zákony (7), zákony idempotence (8) a zákony rozšíření (9). Po řadě je:

$$(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a), \quad (a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a), \quad (5)$$

$$((a \wedge b) \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge (b \wedge c)), \quad ((a \vee b) \vee c) \Leftrightarrow (a \vee (b \vee c)), \quad (6)$$

a proto se často píše jen buď $a \wedge b \wedge c$, anebo $a \vee b \vee c$,

$$\begin{aligned} ((a \vee b) \wedge c) &\Leftrightarrow ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) , \\ ((a \wedge b) \vee c) &\Leftrightarrow ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) , \end{aligned} \quad (7)$$

$$(a \wedge a) \Leftrightarrow a , \quad (a \vee a) \Leftrightarrow a , \quad (8)$$

$$a \Leftrightarrow (a \wedge (b \vee \bar{b})) , \quad a \Leftrightarrow (a \vee (b \wedge \bar{b})) \quad (9)$$

Ukážeme transformaci pravdivostní funkce G s pěti logickými spojkami na tzv. tvar *úplné normální disjunktivní (součtové) formy* (úndf) a na tvar *úplné normální konjunktivní (součinové) formy* (únkf). Při obou těchto tvarech únf vystačíme se spojkami ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) ve specifickém uspořádání, které je pro úplné normální formy charakteristické.

Nejdříve přistoupíme k transformaci dané pravdivostní funkce

$$G = (p \Leftrightarrow q) \wedge [r \vee (q \Rightarrow \bar{p})]$$

na tvar úplné normální konjunktivní formy. Při následujících úpravách formule G vždy uvedeme použití příslušného zákona.

$$G = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge [r \vee (q \Rightarrow \bar{p})] ,$$

ekvivalence byla nahrazena konjunkcí dvou implikací podle zákona (1).

$$G = (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge [r \vee (\bar{q} \vee \bar{p})] ,$$

implikace byly převedeny na negaci a disjunkci podle zákona (2).

$$G = (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) , \quad (\text{nkf } G)$$

komutativní zákon (5) pro disjunkci dovolil zaměnit proměnné ve druhé a třetí závorce; ve třetí závorce byl předtím použit také asociativní zákon (6) pro disjunkci (vynechání závorky). Funkce (nkf G) má již tvar normální konjunktivní formy. Dále je třeba obě disjunkce v prvních dvou závorkách rozšířit o proměnnou r ; užijeme zákona rozšíření (9).

$$G = [(\bar{p} \vee q) \vee (r \wedge \bar{r})] \wedge [(p \vee \bar{q}) \vee (r \wedge \bar{r})] \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) .$$

Po aplikaci distributivního zákona (7) získáme tvar (únkf G).

$$G = (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) , \quad (\text{únkf } G).$$

Tvar (únkf G) se nazývá úplná normální konjunktivní forma pravdivostní funkce G .*)

*) Podrobněji se píše o normálních formách v Rozhledech č. 4, 6 a 7 roč 55 (1976–77).

Z únkf G je zřejmé, že funkce G nabývá pětkrát ph 0. Jsou zde v pěti závorkách (tzv. elementárních disjunkcích) obsaženy všechny tři výrokové proměnné, ať již v přímém nebo negovaném tvaru. Tyto elementární disjunkce jsou spojeny spojkou konjunkce. Odtud název *úplná normální konjunktivní forma*. Zřejmě stačí, aby alespoň výraz v jedné závorce měl ph 0, a také pak ph únkf $G = 0$. To v našem případě nastane pětkrát. Nechť výraz v první závorce má ph 0, což je pro $p = 1, q = r = 0$. Rovněž při $p = 1, q = 0, r = 1$ má výraz v druhé závorce ph 0, a tedy i ph $G = 0$. Čtenář si tyto a příslušné další řádky vyhledá v tabulce 3.

Nyní budeme pravdivostní funkci G transformovat na úplnou normální disjunktivní formu. Vyjdeme z tvaru (nkf G).

$$G = (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r). \quad (\text{nkf } G)$$

Asociativnost (6) konjunkce umožňuje první dvě závorky uzavřít do další závorky takto:

$$G = \{(\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})\} \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$$

Po použití distributivního zákona (7) dostáváme:

$$\begin{aligned} G &= \{[\bar{p} \wedge (p \vee \bar{q})] \vee [q \wedge (p \vee \bar{q})]\} \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) = \\ &= \{(\bar{p} \wedge p) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge \bar{q})\} \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r), \end{aligned}$$

obě kontradikce, které jsou připojeny spojkou $\vee$ lze vypustit (jsou čárkovane podtrženy). Dostaneme

$$G = \{(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)\} \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r).$$

Distributivní zákon (7) umožňuje tuto úpravu

$$\begin{aligned} G &= [(\bar{p} \wedge \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)] \vee [(p \wedge q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)] = \\ &= (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{p}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{p}) \vee \\ &\quad \vee (p \wedge q \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q \wedge r); \end{aligned}$$

zákon idempotence (8) umožňuje v první závorce vypustit $\bar{p}$ a ve druhé závorce vypustit $\bar{q}$ a nakonec vypustit i celý výraz v druhé závorce; rovněž výrazy ve čtvrté a páté závorce se vypouštějí, neboť to jsou disjunkcí připojené kontradikce (vypouštěné výrazy jsou čárkovane podtrženy). Dostali jsme tvar

$$G = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r),$$

v němž výraz v první závorce na základě zákona (9) rozšíříme o proměnnou r ; pak ještě užijeme distributivního zákona (7) a máme

$$G = [(\bar{p} \wedge \bar{q}) \wedge (r \vee \bar{r})] \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) = \\ = (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee \underline{(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)} \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Zákon idempotence (8) dovoluje vypustit výraz $\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r$. Po užití asociativnosti (6) již získáváme tvar úndf G

$$G = (p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}). \quad (\text{úndf } G)$$

Tvar úndf pravdivostní funkce G umožňuje ihned stanovit, pro které trojice proměnných je $\text{ph } G = 1$. Zřejmě nabývá funkce G $\text{ph } 1$ třikrát. Je-li $p = q = r = 1$, pak je ph konjunkce v první závorce 1, a tedy je i $\text{ph } G = 1$; v druhé závorce je $\text{ph } G = 1$ při $p = q = 0$ a $r = 1$; konečně když je $p = q = r = 0$, a to v třetí závorce, je $\text{ph } G = 1$.

Nejen lze z úndf nebo z únkf určit ph dané funkce, ale také z tabulky daných ph jisté funkce můžeme zapsat úndf nebo únkf. O to se čtenář může pokusit tím, že k výsledným $\text{ph } G$ stanoví přímo tvar (úndf G). Ještě poznamenejme, že tautologie nemá únkf a kontradikce nemá úndf.

V úplných normálních formách pravdivostních funkcí se používá právě jen trojice spojek ($\neg$, $\wedge$, $\vee$).^{*} Bude velmi užitečné redukovat úndf a únkf tak, že vystačíme jen se dvěma spojkami ($\neg$, $\wedge$), ($\neg$, $\vee$). Ukážeme to na pravdivostní funkci G , jejíž obě úplné normální formy jsme určili. Budeme transformovat úndf G , na tvar a) jen se spojkami ($\neg$, $\wedge$), b) jen se spojkami ($\neg$, $\vee$); dále budeme transformovat únkf G na tvar c) jen se spojkami ($\neg$, $\vee$), d) jen se spojkami ($\neg$, $\wedge$).

Řešení:

$$\begin{aligned} \text{a) } G &= (p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) = & (\text{úndf } G) \\ &= \underline{\underline{(p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})}} = \\ &= \underline{\underline{p \wedge q \wedge r \wedge \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r \wedge \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}}} . & (\text{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } G &= \underline{\underline{p \wedge q \wedge r}} \vee \underline{\underline{\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r}} \vee \underline{\underline{\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}}} = \\ &= \underline{\underline{\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r}}} \vee \underline{\underline{p \vee q \vee \bar{r}}} \vee \underline{\underline{p \vee q \vee r}} & (\text{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } G &= (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge \\ &\quad \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) = & (\text{únkf } G) \\ &= \underline{\underline{(\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge \\ &\quad \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)}} = \\ &= \underline{\underline{\bar{p} \vee q \vee r \vee \bar{p} \vee q \vee \bar{r} \vee p \vee \bar{q} \vee r \vee p \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \\ &\quad \vee \bar{p} \vee \bar{q} \vee r}} & (\text{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d) \quad G &= \overline{\overline{p \vee q \vee r}} \wedge \overline{\overline{p \vee q \vee \bar{r}}} \wedge \overline{\overline{p \vee \bar{q} \vee r}} \wedge \overline{\overline{p \vee \bar{q} \vee \bar{r}}} \wedge \\
&\quad \wedge \overline{\overline{p \vee \bar{q} \vee r}} = \\
&= \overline{p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}} \wedge \overline{p \wedge \bar{q} \wedge r} \wedge \overline{\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}} \wedge \overline{\bar{p} \wedge q \wedge r} \wedge \\
&\quad \wedge \overline{p \wedge q \wedge \bar{r}} \quad (d)
\end{aligned}$$

V příštím článku nadepsaném „Dvě neklasické spojky“ ukážeme postradatelnost všech pěti klasických logických spojek. Poznáme, že stačí jediná (neklasická) spojka k zapsání každé složené pravdivostní funkce. K novým poznatkům, které mají četné technické aplikace, využijeme nejen výsledků všech čtyř transformací normálních forem na tvary (a), (b), (c), (d) funkce G , ale poznáme i mnohé další zajímavosti. Čtenáři, kteří se zajímají o sestavování elektronických obvodů s logickými členy, najdou další užitečné poznatky z Boolovy algebry.

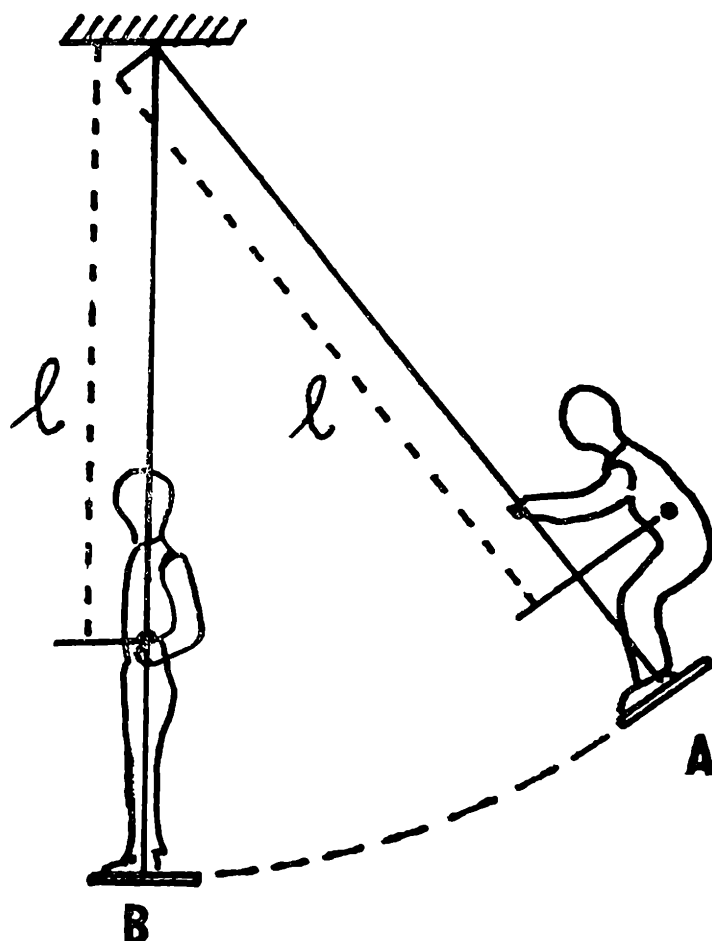
FYZIKA

Parametrické kmitání

RNDr. OLDŘICH LEPIL, CSc., UP Olomouc

V předcházejících příspěvcích o kyvadlech (RMF č. 7 a 8) jsme se zabývali různými případy vnějšího působení na kyvadlo, při nichž docházelo ke změnám periody kmitání. Perioda kmitání kyvadla však může být ovlivněna i bez vnějšího působení tak, že se v průběhu periody mění jeho délka. Jistě jste se mnohokrát houpali na houpačce a víte, co musíte udělat, aby se její kmitání udrželo, nebo abyste při houpání dosáhli větší výchylky.

Když bude houpačka v největší vzdálenosti od rovnovážné polohy (A na obr. 1), musíme se přikrčit a tím snížit svoje těžiště. Naopak při průchodu rovnovážnou polohou B se prudce vztyčíme a tím zvýšíme polohu těžiště těla. Tyto pohyby vlastně představují změnu polohy bodu kyvadla, v němž je soustředěna jeho hmotnost. Mění se vzdálenost tohoto bodu od místa závěsu, a tedy délka kyvadla. Poněvadž kmitání je ovlivněno změnami délky, tzn. parametru kyvadla, označuje se jako *parametrické kmitání*.



Obr. 1

Pro parametrické kmitání je charakteristické, že se vlivem změn parametrů kmitající soustavy v průběhu periody zvyšuje její energie. To má za následek postupné narůstání amplitudy výchylky soustavy. Taková soustava pak nekmitá tlumeně, jak bychom bez vnějšího působení na kmitající soustavu očekávali, ale její amplituda výchylky se zvětšuje. Nastává *parametrická rezonance*. V našem případě houpačky se však amplituda výchylky ustálí na hodnotě, při níž přírůstek energie získaný parametrickým kmitáním je právě roven ztrátám energie při pohybu houpačky.

Celý případ parametrického kmitání houpačky si rozebereme podrobněji na příkladu matematického kyvadla proměnné délky (obr. 2). Kyvadlo hmotnosti m a délky l vychýlíme o úhel α_0 (poloha 1) a necháme kmitat. V rovnovážné poloze 2 má kyvadlo rychlost v_0 . V tomto okamžiku kyvadlo zkrátíme o délku Δl , takže hmotný bod kyvadla bude v poloze 3. Tím se ovšem rychlost kyvadla nezmění a kyvadlo se dále pohybuje po oblouku o menším poloměru, až dosáhne polohy 4. Podle zákona zachování energie je poloha 4 o h_0 výše než poloha 3, obdobně, jako je poloha 1 výše než poloha 2. Kyvadlo je však od rovnovážné polohy odkloněno o úhel α . V tomto okamžiku kyvadlo opět prodloužíme na původní délku l , takže se hmotný bod nachází v poloze 5. Vzhledem k $\alpha > \alpha_0$ je poloha 5 ve výšce $h > h_0$ nad rovnovážnou polohou 2. Kyvadlo má větší energii

$$\Delta W_2 = -m g \Delta l_1 = -m g \Delta l \cos \alpha = -m g \Delta l \left(1 - \frac{h}{l}\right)$$

Přírůstek energie kyvadla za polovinu periody

$$\Delta E = \Delta W_1 + \Delta W_2 = m g h \frac{\Delta l}{l} + m v_0^2 \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

Podle zákona zachování energie je počáteční energie kyvadla

$$E_0 = m g h_0 = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

a tedy $v_0^2 = 2 g h_0$. Dosazením do rovnice (1) dostaneme po úpravě

$$\Delta E = m g \frac{\Delta l}{l} (h + 2 h_0) = 2 E_0 \frac{\Delta l}{l} \left(\frac{h}{2 h_0} + 1\right)$$

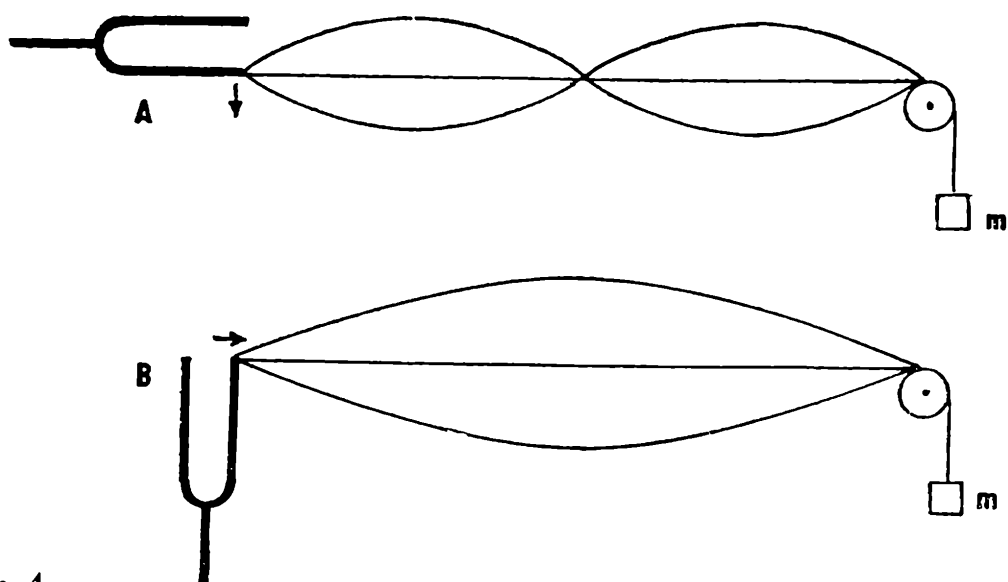
Poněvadž $h \doteq h_0$ je přírůstek energie za polovinu periody je

$$\Delta E \doteq 3 E_0 \frac{\Delta l}{l}$$

Vidíme, že přírůstek energie soustavy při parametrickém kmitání je funkční veličiny $\frac{\Delta l}{l}$, která se také označuje *hloubka modulace parametru*, tzn. v našem případě délky kyvadla.

Parametrem kmitání kyvadla je také tíhové zrychlení, které za obvyklých podmínek považujeme za konstatní. Periodické změny tohoto parametru dosáhneme např. způsobem patrným z obr. 3. Kulička kyvadla je ocelová, tedy feromagnetická a pod yvadklem je umístěn elektromagnet. Eletromagnet je periodicky zapojován v okamžicích, kdy kyvadlo prochází úseky mezi polohami 1, 2 a 3, 4. Tím kyvadlo získává dodatečné zrychlení v úsecích 1, 0 a 3, 0, které jsou delší než úseky 0, 2 a 0, 4, v nichž je kyvadlo zpomalováno. Účinky magnetického pole v podstatě představují periodické zvětšování tíhového zrychlení kyvadla a práce magnetických sil urychlujících kyvadlo je větší než jejich brzdící účinek. Proto se amplituda kyvadla zvětšuje a nastává opět jeho parametrická rezonance. Její frekvence se však liší od frekvence vlastního kmitání kyvadla.

Parametrické kmitání popsal již roku 1859 německý experimentální fyzik *F. Melde*, který také dokázal rozdíl mezi vlastní rezonanční frekvencí kmitajícího systému a frekvencí parametrické rezonance. Tento rozdíl demonstroval pokusem známým dnes jako *Meldeův pokus*; jeho princip je na obr. 4. Melde k experimentu použil pružné vlákno, které na rozdíl od kyvadla nemá jedinou rezonanční frekvenci, ale může v něm



Obr. 4

probíhat chvění s řadou frekvencí, které jsou celistvými násobky frekvence základní.

Vlákno je rozkmitáváno pomocí ladičky a napětí vlákna, které určuje jeho základní rezonanční frekvenci, je dáno hmotností závaží, zavěšeného na konci vlákna. Je-li ladička v poloze *A*, budí její rameno ve vlákne příčné kmity a při určité hmotnosti závaží se na vlákne vytvoří jedna stojatá vlna. Jestliže se za stejných podmínek ladička přemístí do polohy *B*, způsobuje kmitání ladičky periodickou změnu napětí vlákna, tzn. periodicky se mění parametr jeho chvění. Největší amplituda výchylky vlákna nastává vždy, když se rameno pohybuje ve směru šipky. Přitom se vlákno vychyluje střídavě na jednu a druhou stranu, takže na vlákne se vytváří stojatá vlna. Tím je dokázáno, že parametrická rezonance byla vyvolána periodickým dějem dvojnásobné frekvence, než je vlastní frekvence kmitání vlákna. K podobnému závěru dospíváme i u houpačky, jejíž parametrická rezonance je vyvolána periodickým dějem, tzn. střídavým přikrčováním a vztyčováním s dvojnásobnou frekvencí, než je vlastní frekvence houpačky.

Podstatu parametrického kmitání jsme si objasnili na jednoduchých příkladech mechanických soustav. Je třeba konstatovat, že tento druh parametrického kmitání v technické praxi nenalezl velké uplatnění. Spíše dělá problémy konstruktérům některých velkých točivých strojů, kde při rotaci součástí s nesymetricky rozloženou hmotností mohou vznikat síly, které vyvolají nežádoucí parametrickou rezonanci.

Mnohem významnější je využití parametrického kmitání v elektrických oscilátorech. Např. u oscilačního obvodu tvořeného cívkou a kondenzátorem lze parametry, tzn. indukčnost *L* a kapacitu *C* poměrně snadno periodicky měnit a tím dosáhnout parametrické rezonance. V současné době našly značné využití obvody s polovodičovými součástkami, u nichž se dá vnějším napětím měnit kapacita přechodu PN.

Tyto součástky se využívají především v tzv. *parametrických zesilovačích*. Jejich princip je obdobný Meldeovu pokusu. Jestliže je součástka s měnitelnou kapacitou v oscilačním obvodu, který má určitou vlastní frekvenci, pak lze napětím dvojnásobné frekvence přivedeným na součástku vyvolat parametrické kmitání. Při určité hloubce modulace parametru (tzn. $\frac{\Delta C}{C}$) nastane parametrická rezonance a kmity poloviční frekvence se značně zesílí. Hlavní předností elektronických parametrických zesilovačů je, že mohou pracovat na velmi vysokých frekvencích a s malým vlastním šumem.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Objav vlnových vlastností elektrónu

V Bohrovom modele atómu sa kvantové podmienky požadovali ako nejaký vonkajší zásah do klasického planetárneho modelu. Nová teória sa zrodila až v rokoch 1925—1926, keď vznikla kvantová mechanika v dvoch rôznych formách, ktoré navrhli *Werner Heisenberg* (1901—1976) a *Erwin Schrödinger* (1887—1961). Ako sa ukázalo, sú to ekvivalentné teórie.

Prológom k Schrödingerovej vlnovej mechanike boli de Broglieho práce z roku 1923 a 1924. V nich *Louis Victor Pierre Raymond de Broglie* (nar. 15. 8. 1892 v Dieppe) priradil vlnu voľnému elektrónu, pričom použil vzťah $E = h\nu$ (pôvodne zavedený M. Planckom pre kvantá elektromagnetického žiarenia) aj pre častice s nenulovou pokojovou hmotnosťou. Na základe relativistických úvah dospel k vzťahu, ktorý má vo vektorovom zápise tvar $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} / 2\pi$. Pri tom E je energia priamočiaro rovnomerne sa pohybujúceho elektrónu, $\mathbf{p}$ vektor jeho hybnosti, $\hbar$ Planckova konštanta, ν a $\mathbf{k}$ frekvencia a vlnový vektor vlny, ktorú priradil voľnej častici. Smer vlnového vektora je kolmý na vlnoplochu a jeho veľkosť súvisí s vlnovou dĺžkou vzťahom $k = 2\pi/\lambda$.

Kvantová mechanika neposkytuje názorný obraz o charaktere vlny, priradenej častici. Predsa sa však dokázalo, že zväzok elektrónov pri vzájomnom pôsobení s vhodne zvolenými makroskopickými telesami

sa správa podobne ako elektromagnetické vlny s vlnovou dĺžkou $\lambda = h/p$, kde p je veľkosť hybnosti elektrónu.

Od čias *Thomasa Younga* (1773—1829) a *Jeana Augustina Fresnela* (1788—1827) je známych veľa pokusov, ktoré dokazujú vlnovú povahu svetla aj neviditeľného elektromagnetického žiarenia. Z veľkého množstva experimentov spomenieme tu iba dva.

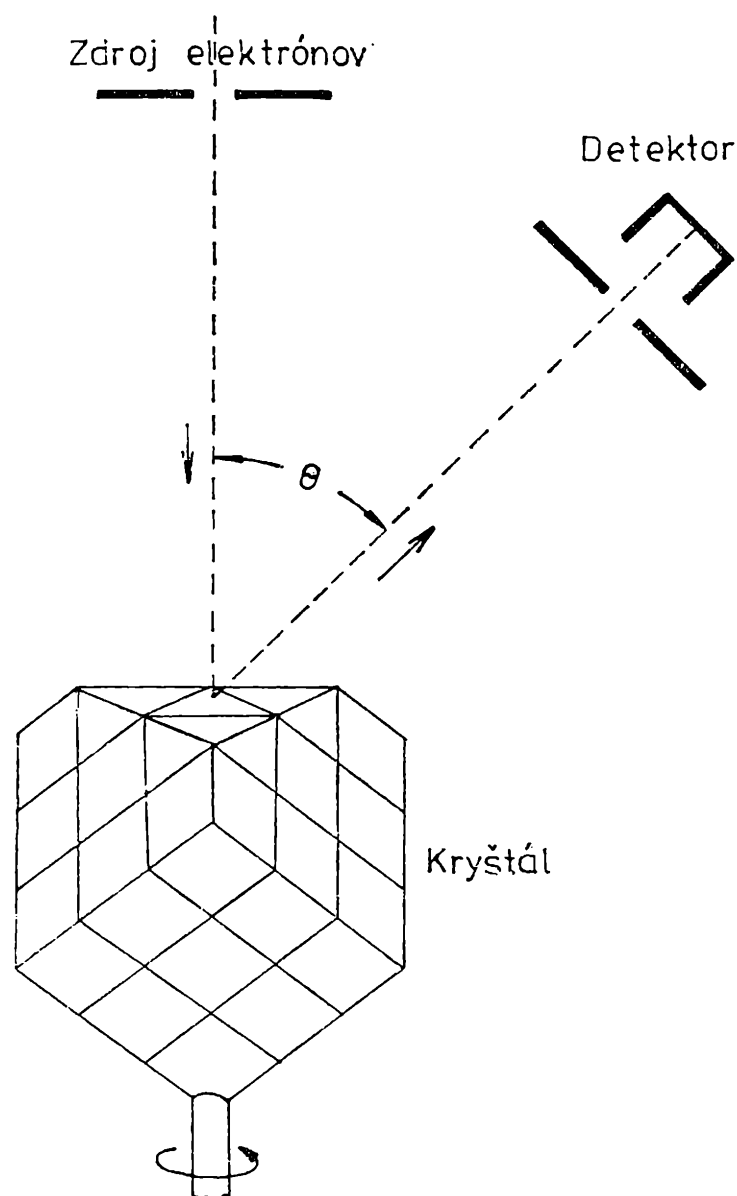
1. Elektromagnetické žiarenie, dopadajúce kolmo na optickú mriežku (tj. platničku alebo kovové zrkadlo s presne rovnakými rovnobežnými vrypmi) vytvorí po prechode alebo odraze od nej interferenčné obrazce s hlavnými maximami intenzity podľa vzťahu $d \cdot \sin \psi = m\lambda$, kde d je mriežková konštanta (súčet šírky vrypu a šírky štrbiny), $m = 0, 1, 2, \dots$, λ vlnová dĺžka dopadajúceho svetla, ψ uhol medzi normálou k mriežke a smermi hlavných maxím.

2. Interferenciu röntgenových lúčov, prechádzajúcich priestorovou mriežkou, skúmali *Braggovci* (otec *William Henry*, 1862—1942 a syn *William Lawrence*, 1890—1971). Za priestorové mriežky im slúžili vhodné kryštály. Lúče sa na atómoch kryštálu rozptyľujú, pričom rozptýlené lúče sa v dôsledku interferencie zosilujú a zoslabujú. Braggovci ukázali, že sa zosilí lúče, ktoré dopadajú na rovinu kryštálu pod uhlom φ k jej normále, ak platí $2d \cdot \sin \varphi = n\lambda$, kde d je vzdialenosť medzi dvoma rovinami mriežky, vytvorenej (kubickým) kryštálom, λ vlnová dĺžka dopadajúceho žiarenia, $n = 1, 2, 3, \dots$. Ak lúč dopadá pod uhlami vyhovujúcimi Braggovmu vzťahu (a len pod takými uhlami), výsledný efekt je ten istý, ako keby sa lúč pod uhlom $(-\varphi)$ k normále odrazil ako od zrkadla.

Ak prechádza zväzok röntgenových lúčov tenkou kovovou fóliou, ktorá predstavuje zhľuk neusporiadaných mikroskopických kryštálov, medzi nimi vždy budú také, pri ktorých normála ich povrchovej plošky zvierá s dopadajúcim lúčom uhol φ , ktorý vyhovuje Braggovmu vzťahu. Všetky lúče odrazené pod Braggovým uhlom φ vytvárajú svojimi dráhami plášť kužela. Ak zachytíme rozptýlené lúče na fotografickej platni, ktorá je kolmá na smer dopadajúceho lúča, dostaneme na nej koncentrické difrakčné kruhy. Táto metóda štúdia interferencie röntgenových lúčov pochádza od *Petra J. W. Debyea* (1884—1966) a *Paula Scherrera* (1890—1970).

Tieto dva typy interferenčných pokusov zohrali významnú úlohu pri dôkaze vlnových vlastností elektrónov. Žiaľ v bežnej učebnicovej literatúre je dosť nepresností, ako na to upozornil *J. Komrska* v *Pokrokoch matematiky, fyziky a astronómie* 22 (1982) str. 24—37, 61—74, 148—162.

Vlnová povaha elektrónov prejavila sa v pokusoch *Clintona Josepha Davissona* (1881—1958) a jeho spolupracovníkov *Lestera Halberta Germera* (1896—1971) a *Charlesa Henryho Kunsmana* (1890—1970), ktoré začali robiť už v rokoch 1920—1923. Títo „experimentátori“ skúmali vyletovanie elektrónov z kryštalických vzoriek, ktoré bombardovali



Obr. 1

elektrónmi. Už vtedy usúdili, že malá časť elektrónov mala také veľké energie, že nemohli pochádzať z bombardovanej látky. Boli to naletujúce elektróny, odchýlené o veľké uhly. Takéto správanie elektrónov sa nedalo vysvetliť mechanickou predstavou odrazených „biliardových guľičiek“. Davissonovo vysvetlenie pomocou Bohrovho modelu atómov látky nebolo presvedčivé. Keď sa potom v roku 1925 v Göttingene na Einsteinov popud začali fyzici zaujímať o de Broglieho teóriu, uverejnil vtedy 21-ročný poslucháč *Walter Elsasser* článok *Poznámky ku kvantovej mechanike voľných elektrónov*, v ktorom uviedol prvú vlnovomechanickú interpretáciu Davissonovho a Kunsmanovho pokusu. Považoval však za potrebné zdokonaľiť experimenty, aby sa mohlo dosiahnuť aj kvantitatívne potvrdenie de Broglieho vzťahov. K tomu však v Göttingene nedošlo zrejme preto, lebo tamojší profesori teoretickej a experimentálnej fyziky *Max Born* a *James Franck* neprikladali v tom čase ešte de Broglieho teórii význam.

Ako to už v histórii býva, pomohla náhoda. Davissonovi a Germerovi

sa v roku 1925 stala nehoda na experimentálnom zariadení, v dôsledku ktorej museli vyžíhať kryštalický niklový prášok. Dostali monokryštály niklu, ktoré pri dopade pomalých elektrónov zohrávajú tú istú úlohu ako optická mriežka pri kolmom dopade svetla (obr. 1). Kvantitatívne výsledky boli po rôznych zdokonaleniach v dobrej zhode s de Broglieho vzťahom $p = h\mathbf{k}/2\pi$. Správu o tom uverejnili v roku 1927. Davisson a Germer skúmali aj šikmý dopad pomalých elektrónov na monokryštály niklu. Zhodu s de Broglieho vzťahom potom určili za pomoci teoretikov *Eckarta a Hansa Albrechta Betheho* (nar. 1906).

V roku 1926 vyšli články Erwina Schrödingera, v ktorých uverejnil svoju pohybovú kvantovomechanickú rovnicu. Experimentálny dôkaz vlnových vlastností elektrónu, predpovedaných de Brogliem, sa stal vrcholne aktuálny. Tejto úlohy sa vedome podujal *George Paget Thomson* (1892—1975) v Aberdeene. Spolu s *Alexandrom Reidom* sa mu podarilo nezávisle od Davissona a Germera, a to Debyeovou-Scherrerovou metódou, dokázať vlnovú povahu rýchlych elektrónov pri prechode cez celuloidovú fóliu a potom aj pri prechode cez zlaté, hliníkové a platinové fólie.

Davisson a Thomson dostali za objav difrakcie elektrónov na kryštáloch v roku 1937 Nobelovu cenu. G. P. Thomson dostal Nobelovu cenu za potvrdenie vlnových vlastností elektrónov 41 rokov po tom, čo ju udelili jeho otcovi, J. J. Thomsonovi za objav elektrónov-častíc. Obaja ju dostali zaslúžene.

Rudolf Zajac

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Nový obraz do galerie profesora Ypsilonu

Ve 3. čísle RMF letošního ročníku se psalo o novém uměleckém směru, který založil profesor Ypsilon. Do redakce jsme dostali dopis *Romana Siegla*, studenta gymnázia v Brně-Králově Poli. Obraz otiskujeme ve dvou verzích — v jedné pro znalce nového směru a ve druhé pro ostatní, kteří se v něm ještě nevyznají.

$$\mathbf{M}_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 ; (y - 2)^2 + (x - 4)^2 \leq 4\}$$

$$\mathbf{M}_2 = \left\{ [x, y] \in \mathbf{R}^2 ; y \leq -\frac{(x+4)^2}{4} \wedge -8,5 \leq x \leq 0,4 \right\}$$

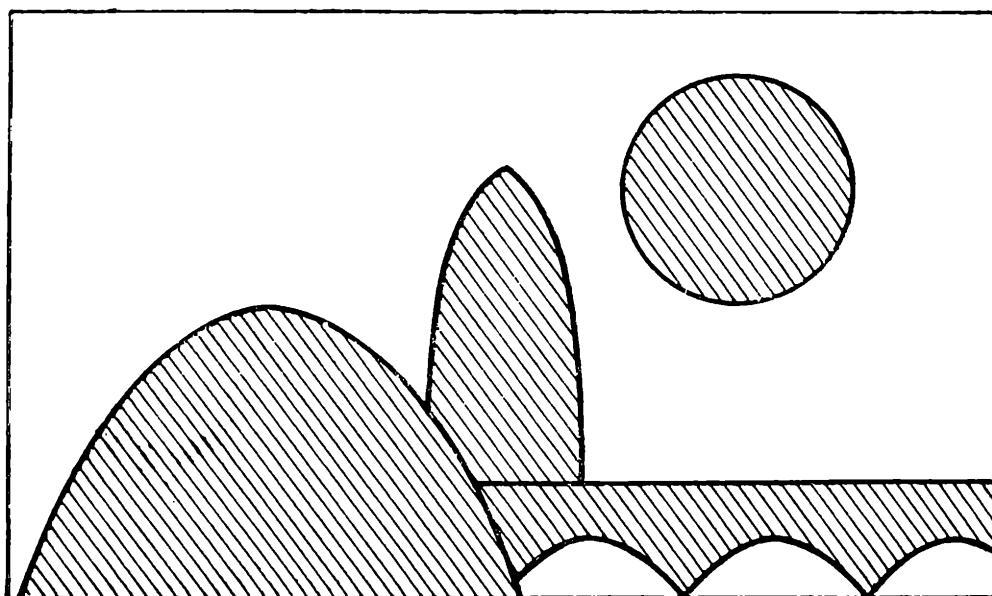
$$\mathbf{M}_3 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 ; y \leq -3 \wedge -0,5 < x \leq 8,5\}$$

$$\mathbf{M}_4 = \left\{ [x, y] \in \mathbf{R}^2 ; y \leq \frac{5}{2} - |\operatorname{tg} x| \wedge -0,41 \pi \leq x \leq 0,43 \pi \right\}$$

$$\mathbf{M}_5 = \left\{ [x, y] \in \mathbf{R}^2 ; y \leq -5,1 + |\sin x| \wedge \frac{\pi}{10} \leq x \leq 2,7 \pi \right\}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup (\mathbf{M}_4 \setminus \mathbf{M}_3) \cup (\mathbf{M}_5 \setminus \mathbf{M}_3)$$

Roman Siegl: *Bagdád ve svitu Luny*



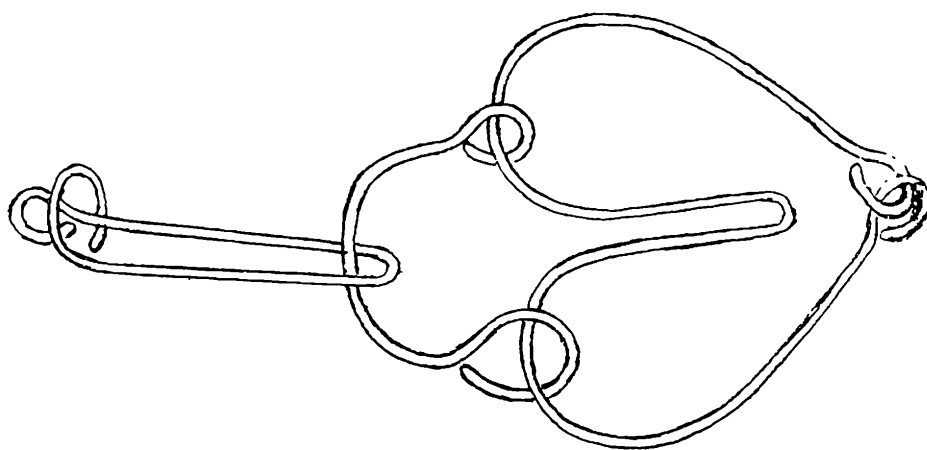
Srdce

Hlavalam Srdce přinese potěšení i radost každému, kdo si ho vlastníma rukama zhotoví a bez pomoci návodu vyřeší. Půjde o to, jak vyjmout jehlu ze zajetí srdce. Nebudete k tomu potřebovat mnoho, stačí trochu zručnosti, dobrá pozorovací a kombinační schopnost; i vy nad ním zvítězíte, budete-li mít dost trpělivosti. (Řešení je na str. 414.)

K výrobě si připravíte štípací kleště, kleště s kulatými čelistmi na

ohýbání drátu a několik „špící“ ke stolu, které nakoupíte v železářství. Hlavolam se skládá, jak je patrné z nákresu, ze tří částí: srdce, oblouku se dvěma očky a jehly. Postupným ohýbáním kleštěmi s kulatými čelistmi si tyto části vyrobíte a hlavolam sestavíte. Na obloučku je jedno oko menší a druhé větší. To proto, že tímto větším okem musí volně projít celá jehla i s vlastním okem.

Josef Svoboda, Třebíč



OLYMPIÁDY A SOČ

34. ročník matematické olympiády, školní rok 1984/85

Úlohy první části I. kola kategorií A, B, C

Kategorie A

1. Nechť $M = A_1A_2\dots A_n$ je konvexní n -úhelník ($n \geq 3$), $c_1, c_2, \dots, c_n$ reálná čísla. Pro $X \in M$ označme

$$f(X) = \sum_{i=1}^n c_i d_i,$$

kde d_i je vzdálenost bodu X od přímky A_iA_{i+1} , $1 \leq i \leq n$,
($A_{n+1} = A_1$)

- a) Jestliže existují tři body X_1, X_2, X_3 neležící v přímce tak, že $f(X_1) = f(X_2) = f(X_3)$, pak je funkce f na M konstantní. Dokažte.

b) Nalezněte všechny trojúhelníky a čtyřúhelníky, pro které je funkce f při $c_i = 1$ konstantní, tj. součet vzdáleností bodu X od stran trojúhelníku (čtyřúhelníku) je konstantní.

2. Nechť m je přirozené číslo, p prvočíslo. Označme

$$m!! = 1.3.5.7. \dots \quad m \text{ pro } m \text{ liché,}$$

$$m!! = 2.4.6.8. \dots \quad m \text{ pro } m \text{ sudé,}$$

tzv. dvojný faktoriál čísla m . Určete nejvyšší mocninu prvočísla p , která ještě dělí číslo $m!!$.

3. Dokažte, že

a) v tětiovém pětiúhelníku s vnitřními úhly $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ (v tomto pořadí) platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = 3\pi$, $\alpha_1 + \alpha_3 > \pi$,
 $\alpha_2 + \alpha_4 > \pi$, $\alpha_3 + \alpha_5 > \pi$;

b) jsou-li $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ duté úhly ($0 < \alpha_i < \pi$) splňující všechny uvedené vztahy, pak existuje tětiový pětiúhelník s vnitřními úhly $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ (v tomto pořadí).

4. Nechť x_i jsou kladná reálná čísla, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 2$. Pak pro každé k , $1 \leq k < n$ je

$$\frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k x_i + \frac{1}{(n-k)^2} \sum_{i=k+1}^n x_i \geq 2$$

Dokažte.

5. Najděte nejmenší číslo k takové, že platí: je-li dán libovolný trojúhelník ABC se stranami $a \leq b \leq c$, pak existuje

a) rovnoramenný trojúhelník XYZ ,

b) pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník XYZ ,

který obsahuje trojúhelník ABC a pro jehož obsah P platí $P \leq kb^2$.

6. Mějme n^2 reálných čísel uspořádaných do čtvercové tabulky $n \times n$ a necht' je jejich součet roven nule. Označme C aritmetický průměr druhých mocnin těchto čísel, s_i aritmetický průměr čísel v i -tém sloupci, r_j aritmetický průměr čísel v j -tém řádku tabulky, S aritmetický průměr čísel s_i^2 a R aritmetický průměr čísel r_j^2 . Potom platí nerovnost $C \geq R + S$. Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

Kategorie B

1. Zobrazení f roviny do sebe zobrazuje bod $[x, y]$ na bod $[ax + by + m, cx + dy + n]$, přičemž se body $[3, 0]$, $[1, 2]$ a $[-1, -1]$ zobrazí po řadě na body $[1, 4]$, $[-1, 2]$ a $[2, 0]$. Určete koeficienty a, b, c, d, m, n . Ukažte, že zobrazení f je shodnost s jediným samodružným bodem, tedy otočení. Vypočtete úhel otočení.

2. Necht a, b jsou nesoudělná přirozená čísla. Určete nejmenší přirozené číslo m tak, aby pro všechna celá čísla $c, c \geq m$ měla rovnice $ax + by = c$ řešení v oboru přirozených čísel.
3. Je dána kružnice k . Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s kolmými úhlopříčkami AC, BD a vepsaný kružnici k , znáte-li velikosti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jeho vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C, D . Určete podmínky řešitelnosti.
4. Nalezněte všechna přirozená čísla n taková, že $1, 2, \dots, n$ lze opatřit znaménky $+$ a $-$ tak, aby se pak jejich součet rovnal nule.
5. Najděte všechny tětiové čtyřúhelníky $ABCD$ o obsahu 8 cm^2 , pro které je součet úhlopříček 8 cm a $|AB| = |BC|$.
6. K, M, N jsou konečné množiny reálných čísel s počtem prvků po řadě k, m, n . Označme L množinu všech čísel tvaru $x + y + z$, kde $x \in K, y \in M, z \in N$. Ukažte, že množina L má aspoň $k + m + n - 2$ prvků.

Kategorie C

1. Dokažte, že pro každý rozklad množiny $M = \{1, 2, \dots, 15\}$ na dvě disjunkt ní podmnožiny A, B platí: v alespoň jedné z množin A, B lze nalézt tři čísla x, y, z tak, že x je největší společný dělitel čísel y, z .
2. Určete rozměry pravidelných čtyřbokých hranolů s těmito vlastnostmi:
 - (1) délky jeho hran jsou vyjádřeny celými čísly,
 - (1) velikost objemu hranolu a velikost jeho povrchu jsou vyjádřeny týmž číslem.
3. Na úhlopříčce AC daného čtverce $ABCD$ zvolme bod E tak, aby $|AE| = \frac{1}{3} |AC|$. Dokažte, že přímka DE protíná stranu AB v jejím středu.
4. Od pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ o hraně $|AB| = 6 \text{ cm}$ oddělíme pravidelný čtyřstěn $AB'C'D'$ o hraně $|AB'| = 2 \text{ cm}$, kde $B' \in AB, C' \in AC, D' \in AD$. Vypočtete povrch tělesa $BCDB'C'D'$. Oč je tento povrch menší než povrch původního čtyřstěnu $ABCD$?
5. Je dán trojúhelník KLM . Sestrojte rovnoramenný trojúhelník KAB tak, aby kružnice jemu vepsaná procházela bodem L a dotýkala se přímky KM v bodě M .
6. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou vyjádřeny celými čísly, jedno z těchto čísel je 20. Jaké mohou být délky ostatních stran trojúhelníku?

Úlohy I. kola kategorie Z, určené pro žáky 8. a 7. tříd základní školy

MOZ 8 — úlohy pro žáky 8. tříd

1. Najděte všechna čtyřciferná přirozená čísla dělitelná číslem 99, která mají tuto vlastnost: vyměníme-li mezi sebou první dvě cifry, dostaneme čtyřciferné číslo dělitelné číslem 91.
2. Je dán obdélník $ABCD$ o obsahu 42 cm^2 , velikosti jeho stran jsou vyjádřeny v cm přirozenými čísly. Necht M je takový vnitřní bod obdélníku $ABCD$, že přímky jím procházející rovnoběžně se stranami obdélníku rozdělí daný obdélník na čtyři pravoúhelníky, jejichž rozměry jsou také vyjádřeny přirozenými čísly. Zjistěte všechny možnosti pro polohu bodu M v případě, že mezi vzniklými pravoúhelníky je alespoň jeden čtverec, a určete velikosti stran všech takových čtverců.
3. Je dána úsečka AB . Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou BC , ve kterém pro patu P výšky z vrcholu A na stranu BC platí: $d(BP) : d(CP) = 3 : 5$. Kolik řešení má úloha?
4. Určete všechny dvojice prvočísel p, q , pro které platí

$$11p + 13q = 1985$$

5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC , který je rozdělen úsečkami KL, KM, LM , kde body K, L, M jsou v uvedeném pořadí středy stran AB, BC a AC , na čtyři menší rovnostranné trojúhelníky. Kolika způsoby je možno strany těchto menších trojúhelníků očíslovat čísly 1, 2, ..., 9 tak, aby součet tří čísel na stranách každého z menších trojúhelníků byl stejný a jeden byl očíslován čísly 4, 5, 6 (v libovolném pořadí)? Dvě číslování jsou různá, jestliže aspoň jedna z devíti úseček $AK, BK, \dots$ je v každém z nich očíslována jiným číslem.
6. Do rovnostranného trojúhelníku ABC se stranou délky 8 cm je vepsán pravoúhelník $XYZT$ tak, že body X, Y leží na úsečce AB , bod Z na úsečce BC a bod T na úsečce AC .
 - a) Vypočítejte obsah pravoúhelníku v závislosti na velikosti úsečky AX a zjistěte, pro kterou její hodnotu $d(AX_0)$ je největší.
 - b) Najděte vzdálenost $d(AX)$, pro kterou se obsah pravoúhelníku $XYZT$ rovná $\frac{3}{8}$ obsahu trojúhelníku ABC .

V 34. ročníku MO se chceme v kategorii Z pro 8. třídy zaměřit hlavně na tyto tematické okruhy: Dělitelnost celých čísel, jednoduché rovnice řešené v celých číslech. Jednoduché kombinatorické úlohy. Konstrukční úlohy na trojúhelník, pravoúhelník, lichoběžník. Obsahy trojúhelníků, čtyřúhelníků, mnohoúhelníků a jejich částí.

MOZ 7 — úlohy pro žáky 7. tříd

1. Nahraďte písmena číslicemi tak, aby vznikl správný zápis součtu:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & P & S & I & C & I \\
 & P & S & I & C & I \\
 & P & S & I & C & I \\
 \hline
 H & A & F & A & N & I
 \end{array}$$

2. Narýsujte trojúhelník ABC ; $d(AB) = 5$ cm, $d(BC) = 10$ cm, $d(AC) = 6$ cm. Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo $XY \parallel AB$ a současně $d(AX) = d(XY)$.
3. Představte si, že máte přesné dvouramenné váhy. Jaký nejmenší počet vážení potřebujete, abyste z 81 dvoukorun určili jedinou mezi nimi falešnou, jestliže víte, že falešná dvoukoruna je lehčí než pravá. Své tvrzení zdůvodněte.
4. Anička, Václav, Jakub a Lukáš jsou čtyřčata. Anička věděla, že Lukáš nikdy nelže, naopak Jakub vždy lže a Václav to střídá: jednou lže, pak hned říká pravdu a pak zase lže, a tak dále. Jednou přiběhli chlapci odpoledne domů a jeden řekl Aničce: „Maminka na tebe čeká v samoobsluze.“ „Dobře, Lukáši,“ řekla Anička. Na to se bratr zasmál a řekl „Jsem Václav.“ Víte, kdo vyřídil Aničce mamčin vzkaz? A byl vzkaz správný?
5. Jaký nejmenší počet čtverečků musíte vyšrafovat na šachovnici 6×6 , aby se na zbývající nevyšrafovanou část šachovnice nedal nakreslit útvar ve tvaru kříže složený z pěti čtverečků, stejně velkých, jako jsou čtverečky šachovnice. Určete všechny možnosti vyšrafování šachovnice.
6. Představte si, že vynásobíme všechna přirozená čísla od 1 do 63. Potom vynásobíme všechna přirozená čísla od 1 do 61. Nakonec vezmeme rozdíl těchto dvou součinů. Je tento rozdíl dělitelný číslem 71?

Úlohy pro 1. kolo XXVI. ročníku FO

Kategória A

1. Rovnorodá tyč s délkou l koná kmity v zvislej rovine okolo osi o , ktorá je kolmá na tyč. Tyč má zanedbateľný prierez.
- a) Doba kmitu tyče je T' . Určte vzdialenosť a' osi od hmotného stredu tyče. Urobte diskusiu riešenia.

b) Určte vzdialenosť a'' osi od hmotného stredu tyče tak, aby doba

$$\text{kmitu tyče bola } T'' = 3 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

c) Určte vzdialenosť $a_{\min}$ osi o od hmotného stredu tyče tak, aby doba kmitu T tyče dosiahla najmenšiu možnú hodnotu $T_{\min}$. Určte $T_{\min}$.

Úlohy a), b), c) riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $l = 0,400 \text{ m}$, $T' = 1,20 \text{ s}$.

d) Funkciu $T = f(a)$ pre danú hodnotu l znázorníte graficky. Z grafu funkcie $T = f(a)$ určte a' , $a_{\min}$, $T_{\min}$.

2. Planparalelné doštičky z rôzneho skla s indexami lomu n_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k$, s rôznymi hrúbkami d_i sú v ľubovoľnom poradí uložené tesne na seba tak, že medzi nimi nevznikajú medzery. V okolí doštičiek je vákuum. Uhol dopadu lúča na sústavu doštičiek je α_0 .

a) Dokážte, že uhol vystupujúceho lúča zo sústavy doštičiek je rovný uhlu dopadu α_0 .

b) Určte vzájomnú vzdialenosť a medzi kolmicami dopadu lúča dopadajúceho na sústavu doštičiek a lúča vystupujúceho zo sústavy doštičiek.

c) Určte vzájomnú vzdialenosť b medzi priamkami určenými dopadajúcim a vystupujúcim lúčom zo sústavy doštičiek.

d) Určte efektívny index lomu n sústavy definovaný ako index lomu homogénneho prostredia s hrúbkou $d = d_1 + d_2 + \dots + d_k$, ktoré by spôsobilo pri rovnakom uhle dopadu lúča α_0 rovnakú vzájomnú vzdialenosť a medzi kolmicami dopadajúceho a vystupujúceho lúča ako v prípade sústavy doštičiek.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $k = 3$, $d_1 = 5,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $n_1 = 1,51$, $d_2 = 6,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $n_2 = 1,61$, $d_3 = 7,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $n_3 = 1,75$, $\alpha_0 = 30^\circ$.

3. V spektre héliového lasera sú najintenzívnejšie čiary zodpovedajúce žiareniu s vlnovými dĺžkami $\lambda_1 = 4,88 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, $\lambda_2 = 5,15 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Laserové lúče dopadajú kolmo na jednu stenu optického hranola. Závislosť indexu

lomu n a vlnovej dĺžky λ žiarenia je daná vzťahom $n = 1 + \frac{a}{\lambda^2}$, kde kon-

štanta $a = 2,38 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$. Určte možné hodnoty lámavého uhla φ hranola tak, aby zväzok lúčov vystupujúci z hranola obsahoval žiarenie s vlnovou dĺžkou λ_2 a neobsahoval žiarenie s vlnovou dĺžkou λ_1 .

4. Máte k dispozícii dva rovnaké kondenzátory s kapacitami C a zdroj s elektromotorickým napätím U_e . Navrhnite také spojenie kondenzátorov a zdroja napätia, aby ste získali medzi dvojicou určitých bodov

tejto sústavy čo najväčšie elektrické napätie, a stanovte ho. Kondenzátory a zdroj môžete podľa potreby vopred niekoľkokrát ľubovoľným spôsobom pospájať. Správnosť navrhnutého postupu fyzikálne dokážte.

5. Dve guľôčky sú zavesené na rovnakých vláknach tak, že v rovnovážnej polohe sú vlákna rovnobežné a guľôčky sa navzájom dotýkajú. Hmotnosť prvej guľôčky je m_1 .

Prvú guľôčku vychýlime o uhol α v zvislej rovine, určenej oboma vláknami. Pri napnutí vlákna guľôčku uvoľníme. Po zrážke s druhou guľôčkou zostane prvá guľôčka v pokoji a druhá guľôčka sa vychýli o uhol β . Druhá guľôčka potom narazí na prvú guľôčku. Predpokladáme, že pri obidvoch zrážkach guľôčiek nastáva vždy rovnaké trvalé zníženie energie guľôčiek v dôsledku práce vykonanej pri zmene vnútornej energie guľôčiek.

a) Určte hmotnosť m_2 druhej guľôčky.

b) Určte podiel $k = \frac{W_0}{W}$, kde W_0 je práca vykonaná pri trvalej

deformácii guľôčiek a pri zvýšení ich teploty, W je práca vykonaná pri maximálnej deformácii guľôčiek pri ich zraze a pri zvýšení ich teploty.

c) Určte uhol γ , o ktorý sa vychýli napäté vlákno prvej guľôčky po druhom zraze guľôčiek ak je podiel k pri obidvoch zrazoch rovnaký. Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 14^\circ$, $m_1 = 30$ g.

Rozmery guľôčiek a trenie neuvažujte. Obe vlákna považujte za neroztiahnuteľné.

6. Meranie frekvenčných charakteristík sériového elektrického dvojpoľu. Pomôcky: rezistor s odporom $R = 100 \Omega$, kondenzátor s kapacitou $C = 2,0 \mu\text{F}$, RC-generátor s efektívnym napätím $U = 10$ V, spojovacie vodiče, jeden alebo dva voltmetre, ampérmeter.

Postup: Navrhnite zapojenia, nakreslite potrebné schémy k určeniu:

- amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky prúdu a relatívnej frekvenčnej charakteristiky prúdu;
- amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky napätia na rezistore a relatívnej frekvenčnej charakteristiky napätia na rezistore;
- amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky napätia na kondenzátore a relatívnej frekvenčnej charakteristiky napätia na kondenzátore;
- medznej frekvencie ω_m obvodu.

Merané veličiny zapisujte do tabuliek. Všetky charakteristiky znázornite graficky.

Výpočtom určte ďalej závislosti začiatočnej fázy φ_i prúdu, začiatoč-

nej fázy φ_R napätia na rezistore a začiatočnej fázy φ_C napätia na kondenzátore od frekvencie ω . Začiatočnú fázu napätia zdroja považujte za nulovú.

Pomocou nameraných hodnôt z časti a), b), c) úlohy a vypočítaných hodnôt φ_i , φ_R , φ_C nakreslite grafy združených charakteristík prúdu, napätia na rezistore a napätia na kondenzátore.

7. Kondenzátor s kapacitou C a cievka s vlastnou indukčnosťou L a odporom R sú zapojené za sebou a pripojené ku svorkám generátora s efektívnou hodnotou U harmonického napätia.

- Určte rezonančnú frekvenciu ω_r obvodu.
- Určte činiteľ akosti Q_s obvodu.
- Napište funkciu vyjadrujúcu relatívnu frekvenčnú charakteristiku prúdu v obvode a pre určené hodnoty R , L , C ju znázornite graficky.
- Napište funkciu vyjadrujúcu frekvenčnú charakteristiku fázy prúdu a pre určené hodnoty R , L , C ju znázornite graficky.
- Určte dolný medzný kmitočet ω_d a horný medzný kmitočet ω_h obvodu.
- Určte efektívne napätie U_C medzi svorkami kondenzátora pri rezonančnej frekvencii ω_r obvodu.

V riešení úloh c), d) za nezávisle premennú veličinu si zvolte pomerné rozladenie obvodu.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $C = 360 \text{ nF}$, $L = 10,0 \text{ mH}$, $R = 3,00 \Omega$, $U = 3,00 \text{ V}$.

Odpory, kapacity a indukčnosti spojovacích vodičov neuvažujte.

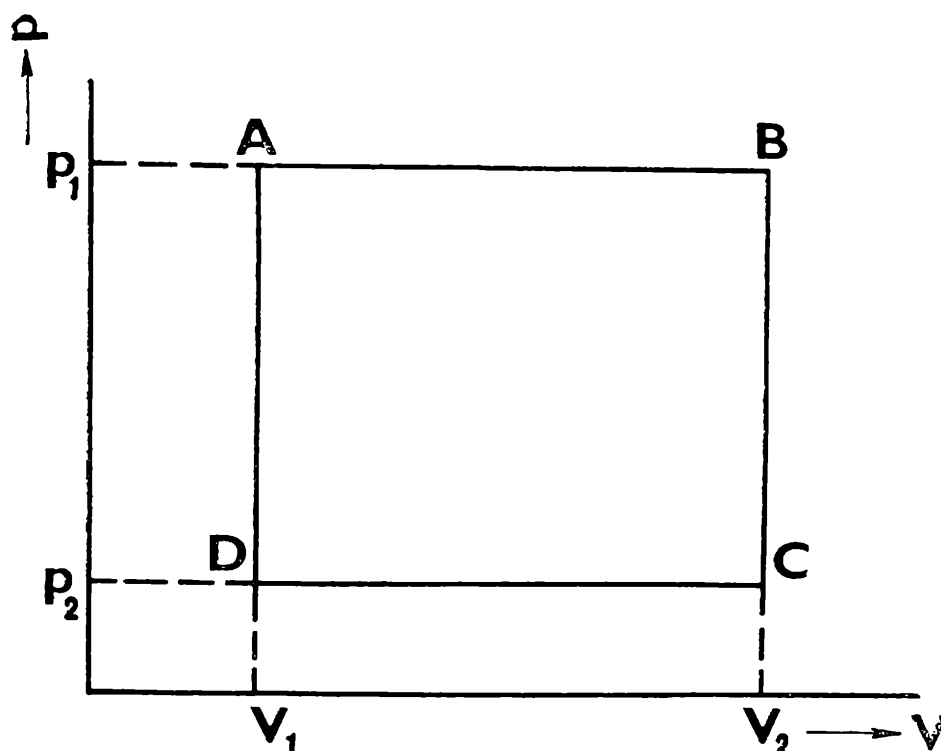
Kategorie B

1. Umělá družice Země prolétá nad Novosibirskem, když je tam přesně 19.00 h. Když prolétá nad Moskvou, je tam přesně 18.00 h.

- Uečter polohu místa na povrchu Země, nad nímž družice proletí, když v Praze bude 19.00 h, popř. 20 h 30 min.
- Zjistěte, zda elektromagnetické signály z družice, proletující nad Novosibirskem, lze zachytit v Moskvě. Jde o signály s velmi krátkou délkou vlny, které může zachytit jen přijímač, když mezi ním a vysílačem nejsou terénní překážky.

V uvedených místech platí pásmový čas. K řešení úlohy si zaveďte tzv. světový čas podle hvězdárny v Greenwichi. Úlohu řešte s pomocí mapy nebo globusu a určete předem přesný místní čas.

2. Míč se pohybuje ve svislém směru v místnosti, jejíž výška je h . Označme $k = \frac{E_k - E'_k}{E_k}$ relativní změnu kinetické energie při odrazu,



Obr. B-1

E_k je kinetická energie míče těsně před odrazem, E'_k je kinetická energie míče těsně po odrazu. Relativní změna kinetické energie při odrazu míče od stropu je k_s , při odrazu od podlahy je k_p .

a) Míč byl vržen rychlostí v_0 svisle vzhůru, po odrazu od stropu a od podlahy vystoupil právě do místa, z něhož byl vržen. Určete výšku h_0 nad podlahou, z níž byl míč vržen.

b) Proveďte diskusi řešení:

Řešte obecně, potom pro hodnoty $h = 3,5$ m, $k_s = 0,40$, $k_p = 0,30$, $v_0 = 4,7$ m $\cdot$ s $^{-1}$, popř. $v'_0 = 8,0$ m $\cdot$ s $^{-1}$. Odpor prostředí neuvažujte, míč považujte za hmotný bod.

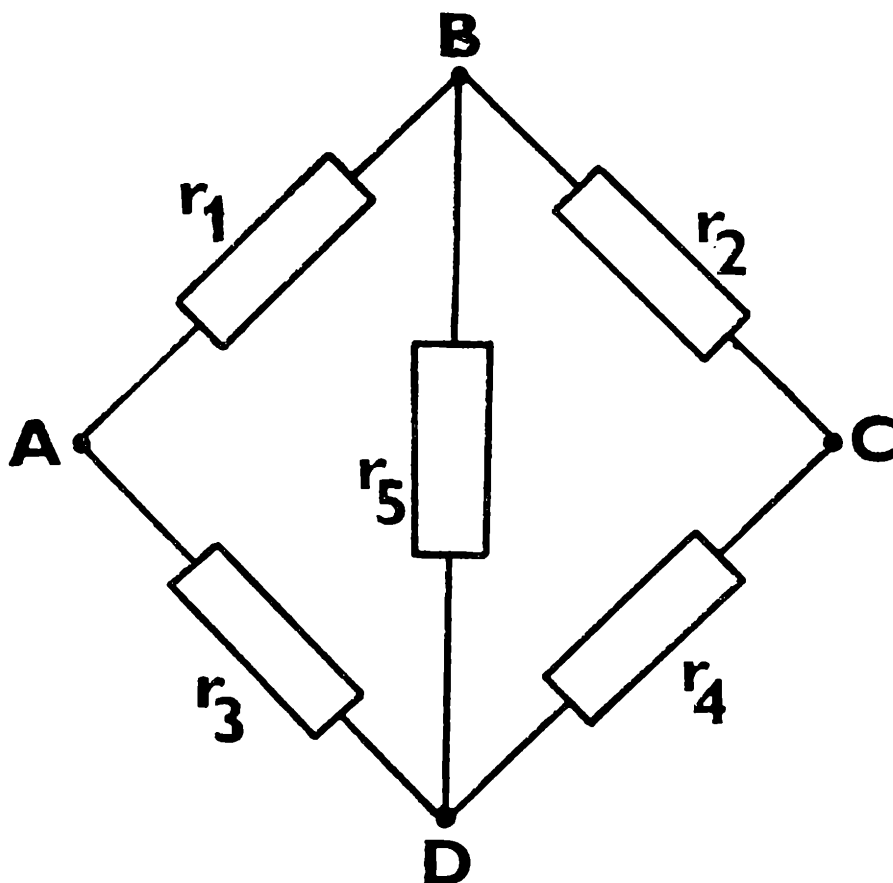
3. Stejnorodá ocelová tyč všude stejného průřezu koná harmonické kmity s malou amplitudou kolem vodorovné osy, procházející koncem tyče kolmo na tyč. Doba kyvu tyče při teplotě 0,00 °C a normálním tíhovém zrychlení je 1,00 s.

a) Stanovte délku l_0 tyče při teplotě 0,00 °C.

b) Stanovte funkci $T = f(t)$, kde T je doba kyvu kyvadla, t jeho teplota. Sestrojte graf funkce $T = f(t)$ v oboru teplot (− 20 °C; 30 °C).

c) O kolik sekund se předběhnou nebo opozdí za 1 den hodiny s tímto kyvadlem pro případ stálé teploty 30 °C, − 20 °C?

4. V ideálním plynu o látkovém množství n molů probíhá kruhový děj složený ze dvou izobarických a ze dvou izochorických dějů (obr. B-1). Počáteční tlak plynu je p_1 , počáteční objem plynu V_1 . Nejnížší teplota plynu při ději je $T_{\min}$, nejvyšší teplota $T_{\max}$.



Obr. B-2

- Určete objem, tlak a teplotu plynu pro stavy plynu určené body A , B , C , D v obrázku.
- Znázorněte cyklus A, B, C, D, A v soustavě souřadnic (p, T) a v soustavě (V, T) . Stanovte $T_{\min}$, $T_{\max}$.
- Vypočítejte práci plynu při kruhovém ději.
- Stanovte termodynamickou účinnost η stroje, v němž děj probíhá.
- Ukažte, že termodynamická účinnost stroje v části d) úlohy je menší než termodynamická účinnost Carnotova cyklu s teplotou ohříváku $T_{\max}$ a teplotou chladiče $T_{\min}$.

Úlohu řešte obecně, grafy načrtněte na základě obecných úvah. Části c), d), e) řešte pro hodnoty $T_{\min} = 300 \text{ K}$, $T_{\max} = 600 \text{ K}$, $n = 1 \text{ kmol}$, $p_1 V_1 = 3,00 \cdot 10^6 \text{ J}$.

5. Rezistory s odpory r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 jsou zapojeny podle schematu na obr. B-2.

- Určete výsledný odpor R_1 mezi body B, D .
- Určete výsledný odpor R_2 mezi body A, C .

Odpory spojovacích vodičů a vnitřní odpor zdroje jsou vzhledem k odporům rezistorů zanedbatelné.

Poznámka: K řešení úlohy je vhodné prostudovat příslušné části z brožur Školy mladých fyziků: Z. Vitamvás: Teorémy při řešení elektrických obvodů, K. Hofman: Kirchhofovy zákony, popř. stu-

dijní text pro kategorii B v XXV. ročníku FO M. Simerský: Teorémy při řešení elektrických obvodů.

6. Elektrický obvod se skládá ze zdroje stejnosměrného napětí, posuvného reostatu a cívky, jejíž osa je vodorovná a směřuje k severu. Do bezprostřední blízkosti cívky umístíme malou magnetku, volně otáčivou kolem svislé osy. Prochází-li obvodem elektrický proud a vychýlíme-li poněkud magnetku z rovnovážné polohy, začne magnetka kmitat.
- a) Provedte pokus a vysvětlete, proč magnetka koná kmitavý pohyb.
 - b) Abychom pro následující měření omezili rušivý vliv magnetického pole Země na pohyb magnetky, kompenzujeme ho vhodně umístěným permanentním magnetem. Jak poznáte, že jste dosáhli tohoto omezení? Vysvětlete.
 - c) Sestavte si soupravu z následujících pomůcek: baterie akumulátorů, cívka 1200 závitů bez jádra, reostat 100 Ω , spínač, ampérmetr. Dále použijete vhodnou magnetku a stopky. Zjistěte dobu kmitu magnetky.
 - d) Pokus opakujte, až získáte aspoň 10–15 dvojic hodnot proudu I a doby kmitu T magnetky pro různé hodnoty proudu procházejícího obvodem.
 - e) Sestrojte graf funkce $T = f(I)$. Protože pravděpodobně tato funkce není lineární, sestrojte graf $\log \{T\} = f(\log \{I\})$, tedy souřadnicové osy označíte $\log \{I\}$, $\log \{T\}$.
 - f) Na základě grafu zjistěte hodnoty koeficientů a , b ve vztahu

$$\log \{T\} = \log \{a\} + b \log \{I\}$$

Zapište funkci $T = a I^b$.

- g) Funkce $T = a \cdot I^b$ je empiricky zjištěná funkce. Zaokrouhlete exponent a a napište zjednodušený vztah $T = f(I)$. Vysvětlete, proč jste dospěli k poněkud jiné závislosti.
 - h) Navrhněte, zda by šlo dané měření použít ke stanovení magnetické indukce pole cívky v místě, v němž je magnetka.
7. Při opakování Millikanova pokusu bylo měření prováděno s kapičkami oleje o hustotě $900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, napětí mezi deskami kondenzátoru vzdálenými od sebe 1,6 cm bylo 147 V. Vzdálenost značek, mezi nimiž byl pohyb kapiček pozorován, byla 0,522 cm.
- a) Pro stanovení hmotnosti kapičky byla komora naplněna vzduchem při atmosférickém tlaku. Bylo zjištěno, že udanou vzdálenost prošla kapička za 147 s. Určete poloměr kapičky a její hmotnost, je-li dynamická viskozita vzduchu $17,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ a hustota vzduchu $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
 - b) Poté byla souprava naplněna vodíkem za sníženého tlaku. Popište

stručně způsob, jak postupoval Millikan, aby zjistil diskrétnost elektrického náboje.

- c) Při měření byly zjištěny doby t_g , kdy se kapka pohybovala mezi značkami v tíhovém poli rovnoměrně při nulovém napětí kondenzátoru, a doby t_E , za kterou stejnou vzdálenost urazila kapka rovnoměrným pohybem při kondenzátoru připojeném ke zdroj napětí. Určete rychlost pohybu a rozdíly rychlostí při různém náboji kapiček.

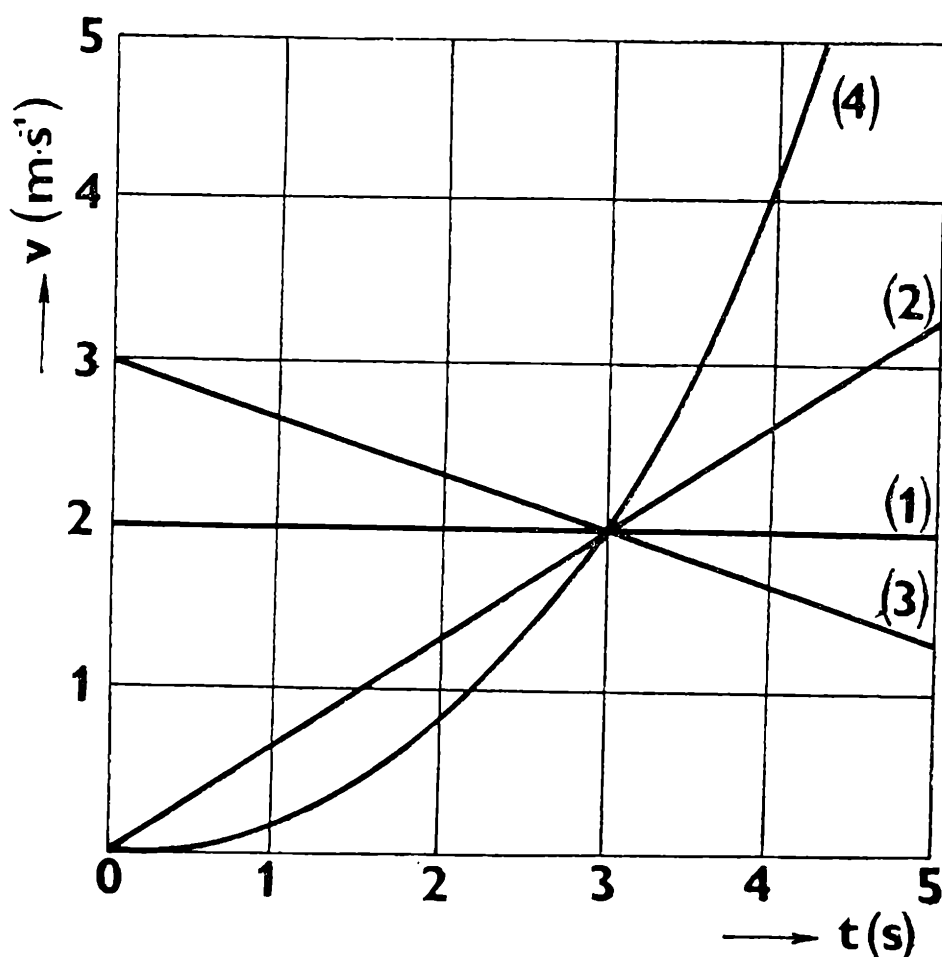
$t_g(s)$	13,6	13,8	13,4	13,4	13,6	13,6	13,7	13,5	13,6	13,8
$t_E(s)$	12,5	12,4	21,8	34,8	84,5	85,5	34,6	34,8	16,0	34,8
$v \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$										
$v_i - v_{i-1}$ (m · s ⁻¹)										

Doplňte tabulku a potvrďte diskrétnost náboje. Určete nejmenší změnu rychlosti, která byla pozorována. Vylučte nejmenší změny rychlosti, vzniklé nepřesnosti opakovaných měření.

- d) Stanovte náboje elektronu. Užitím Faradayova zákona pro elektrolyzu ověřte výsledek svého výpočtu.

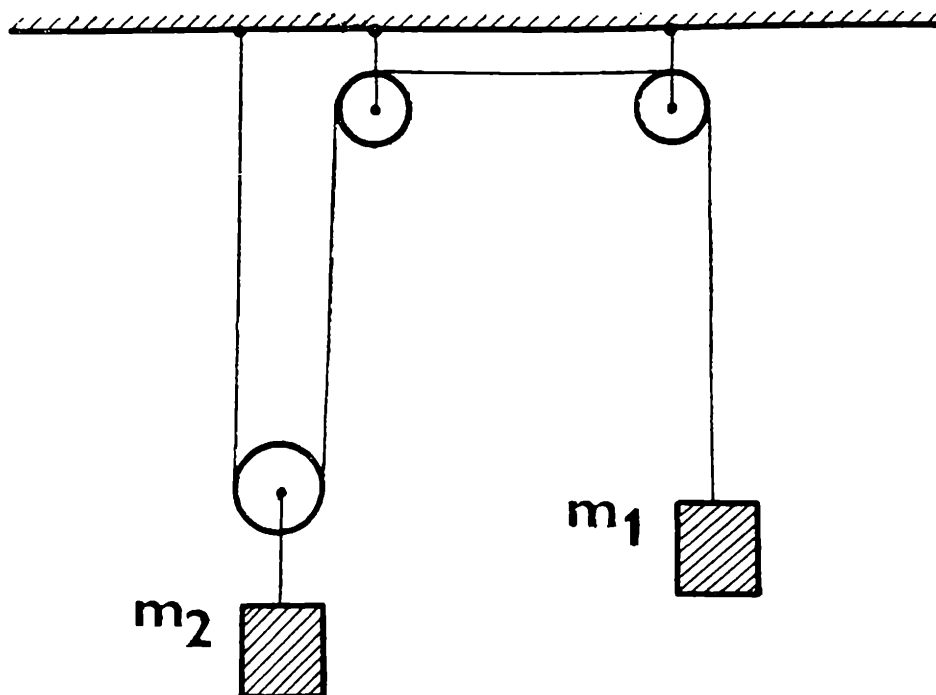
Kategorie C

- Na obr. C-1 jsou grafy znázorňující čtyři funkce $v = f(t)$, kde v je velikost rychlosti pohybu hmotného bodu a t je čas.
 - Jaké pohyby hmotného bodu znázorňují grafy (1), (2), (3)? Odpovědi zdůvodněte.
 - Zapište obecně rovnici dráhy $s = f(t)$ v případech (1), (2), (3), víte-li, že v okamžiku $t = 0$ s je dráha nulová. Sestavte tabulky hodnot této funkce pro t v intervalu $t \in < 0 \text{ s}, 4 \text{ s} >$. Na milimetrový papír narýsujte příslušné grafy.
 - Zapište obecně rovnici dráhy $s = f(v)$ v případech (1), (2), (3), víte-li, že v okamžiku $t = 0$ s je dráha nulová. Sestavte tabulky hodnot této funkce pro v v intervalu $v \in < 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} >$. Na milimetrový papír narýsujte příslušné grafy.
 - Graf (4) je parabola. Zapište obecně rovnici rychlosti pohybu $v = f(t)$ odpovídající grafu. Zapište obecně rovnici zrychlení pohybu $a = f(t)$ odpovídající grafu. Sestavte tabulku hodnot této funkce pro čas t v intervalu $t \in < 0 \text{ s}, 4 \text{ s} >$. Na milimetrový papír narýsujte příslušný graf. Jakou informaci tím získáte o funkci $s = f(t)$?



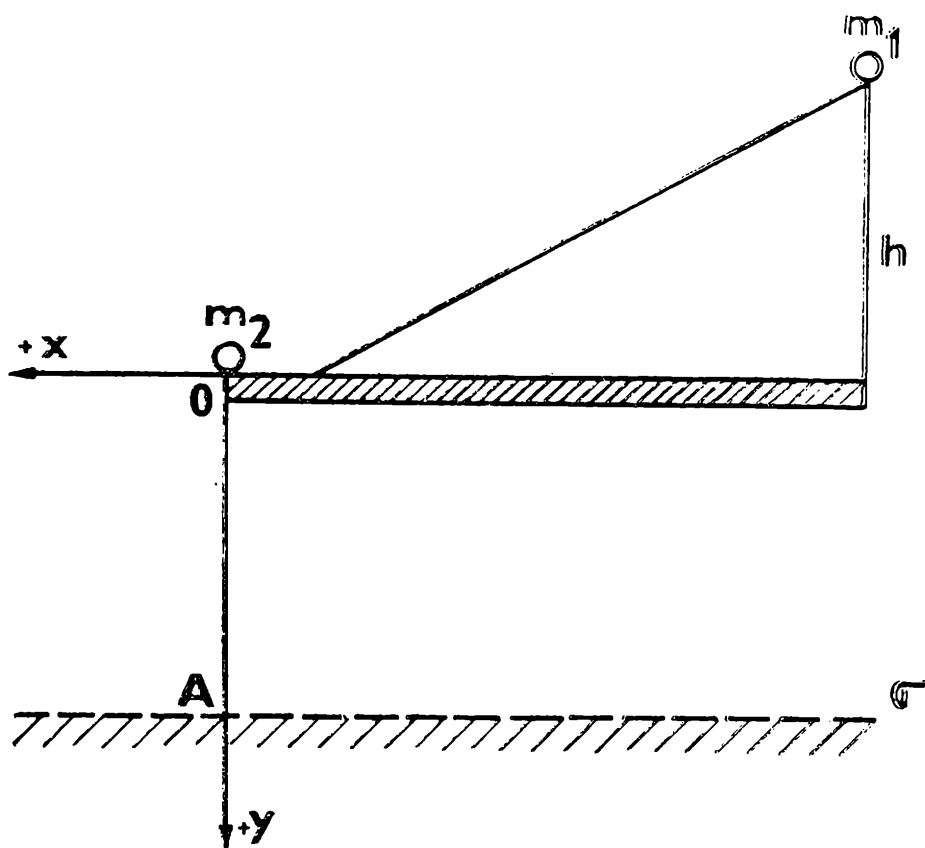
Obr. C-1

2. V soustavě těles znázorněné na obr. C-2 je hmotnost vlákna a kladek zanedbatelná vzhledem k hmotnostem m_1 a m_2 těles. Třecí síly při pohybu těles neuvažujte.
 - a) Jaký vztah musí splňovat hmotnosti m_1 a m_2 těles, aby soustava byla v rovnovážné poloze v klidu? Nakreslete náčrtek.
 - b) Jaký vztah musí splňovat hmotnosti m_1 a m_2 těles, aby těleso o hmotnosti m_2 klesalo rovnoměrně zrychleným pohybem? Určete v tomto případě velikost zrychlení $|a_2|$ a velikost síly $|F|$, kterou je napínáno vlákno. Nakreslete náčrtek.
 - c) Řešte úlohu b) v případě, že těleso o hmotnosti m_2 stoupá rovnoměrně zrychleným pohybem. Nakreslete náčrtek.
 - d) Určete směr a velikost zrychlení a_2 a síly F pro hodnoty $m_1 = 6,0 \text{ kg}$, $m_2 = 8,0 \text{ kg}$.
3. Nádrž s velkým objemem je naplněná kvapalinou s hustotou ρ . V kvapaline plávají dve rovnorodé tělesá: rotačný valec a guľa. Obidve tělesá mají rovnakú hmotnosť a pri danej teplote aj rovnaký objem. Os plávajúceho rotačného valca je zvislá a valec je ponorený do kvapaliny polovicou svojho objemu. Polomer valca je r_1 a jeho výška je h .
 - a) Určte hustotu ρ_1 valca. Určte hustotu ρ_2 a polomer r_2 gule.



Obr. C-2

- b) Určte práce W_1 , W_2 vykonané pri zdvihnutí každého z obidvoch telies tesne nad voľný povrch kvapaliny.
- c) Vyjadrite podmienku, pre ktorú platí $W_1 = W_2$.
Polohu voľného povrchu kvapaliny v nádrži považujte za stálu, ak je kvapalina bez telies, alebo v nej sú obidve plávajúce telesá. Použite vzťah medzi vykonanou prácou a zmenou potenciálnej energie tiažovej sústavy teleso — kvapalina pri zdvihnutí telesa tesne nad voľný povrch kapaliny. Hmotný stred pologule je v rovine súmernosti vo vzdialenosti $\frac{3r}{8}$ od podstavy.
4. V automobile o hmotnosti 1500 kg, ktorý jede rýchlosťou $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, sedí vodič pripnutý bezpečnostným pásem. Hmotnosť vodiča je 80 kg. Obě části pásu přiléhajícího k hrudníku vodiče svírají spolu úhel 120° . Šířka pásu je 7,0 cm, tloušťka je 2,0 mm; mez pevnosti materiálu je $5,0 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.
- a) Automobil najede na strom a zastaví se za dobu $3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ po nárazu. Určete průměrnou velikost síly $|\mathbf{F}|$, která při nárazu působí na automobil. Porovnejte velikost této síly s tíhou automobilu a vodiče.
- b) Jakou destrukční práci vykonají síly nárazu?
- c) Přetrhne se bezpečnostní pás při nárazu? Přetrhne se bezpečnostní pás za stejných podmínek při dvojnásobné velikosti rychlosti automobilu před nárazem?
- Úlohu řešíme modelově za zjednodušených podmínek. Řešení v modelové situaci porovnejte se skutečností.
5. Oxid uhličitý o hmotnosti m je uzavřen ve válci pístem, který se posunuje bez tření. Na vnější straně pístu je vzduch při stálém atmo-



Obr. C-3

sférickém tlaku. Oxid uhličitý považujte za ideální plyn. Teplota oxidu uhličitého se zvýší z hodnoty t_1 na t_2 .

a) Jakou práci W plyn přitom vykoná?

b) Jaké teplo Q plyn přijme?

c) Jak se změní vnitřní energie U plynu pod pístem?

d) Řešte úlohy a), b), c) pro hodnoty: $m = 20$ g, $t_1 = 20$ °C, $t_2 = 108$ °C, $C_V = 28,8$ J.mol⁻¹ . K⁻¹, $M_m = 44,0 \cdot 10^{-3}$ kg mol⁻¹.

6. Ověření platnosti zákona zachování hybnosti

Určete hybnost dvou koulí o stejných poloměrech a různých hmotnostech před dokonale pružným rázem a po něm a ověřte platnost zákona zachování hybnosti.

Příprava úlohy

1. Podle obr. C-3 uvažujeme pokusnou soustavu skládající se ze dvou homogenních dokonale pružných koulí o hmotnostech m_1 a m_2 , $m_1 > m_2$, z nakloněné roviny o výšce h , která v nejnižším místě přechází v krátkou vodorovnou část. V hloubce y_0 pod touto částí je vodorovná rovina σ . Koule o hmotnosti m_1 je v nejvyšším místě nakloněné roviny a koule o hmotnosti m_2 je na okraji vodorovné podložky připojené v nejnižším místě nakloněné roviny

2. Koule o hmotnosti m_1 koná po uvolnění bez nárazu rovnoměrně zrychlený valivý pohyb bez smyku. Moment setrvačnosti koule

$I = \frac{2}{5} m_1 r^2$. Označme $\vec{\omega}$ úhlovou rychlost valivého pohybu koule na konci jejího pohybu po nakloněné rovině, $\mathbf{v}_1$ posuvnou rychlost jejího hmotného středu. Protože vylučujeme smyk, platí $|\vec{\omega}| = \frac{|\mathbf{v}_1|}{r}$.

Dokažte, že platí $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{\frac{10}{7} g h}$. Určete hybnost koulí před rázem

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2|$$

3. Koule o hmotnosti m_1 narazí na kouli o hmotnosti m_2 , která je v klidu. Předpokládáme, že ráz je středový, dokonale pružný. Po vodorovném vrhu v téže svislé rovině dopadnou koule na rovinu σ ve vzdálenostech x_1 a x_2 od bodu A . Dokažte, že pro vodorovné složky rychlostí koulí v rovině σ platí

$$|\mathbf{v}_{1x}| = x_1 \sqrt{\frac{g}{2 y_0}}, \quad |\mathbf{v}_{2x}| = x_2 \sqrt{\frac{g}{2 y_0}}.$$

Určete vodorovné složky hybností $|\mathbf{p}_{1x}|$ a $|\mathbf{p}_{2x}|$ obou koulí v rovině σ .

4. Podle bodů 2. a 3. запиšte zákon zachování hybnosti pro soustavu koulí.

Řešení úlohy

Podle přípravy úlohy запиšte pomůcky, které k řešení úlohy potřebujete. Sestavte pokus a změřte veličiny, m_1 , m_2 , h , y_0 . Při těchto konstantních veličinách proveďte pokus pětkrát; pokaždé změřte délky x_1 a x_2 a запиšte do tabulky. Určete aritmetické průměry naměřených délek x_{1p} , x_{2p} . Určete hodnoty $|\mathbf{p}|$, $|\mathbf{p}_{1x}|$, $|\mathbf{p}_{2x}|$. Ověřte, zda je splněn zákon zachování hybnosti pro soustavu koulí před rázem a při dopadu na rovinu σ .

Zhodnocení úlohy

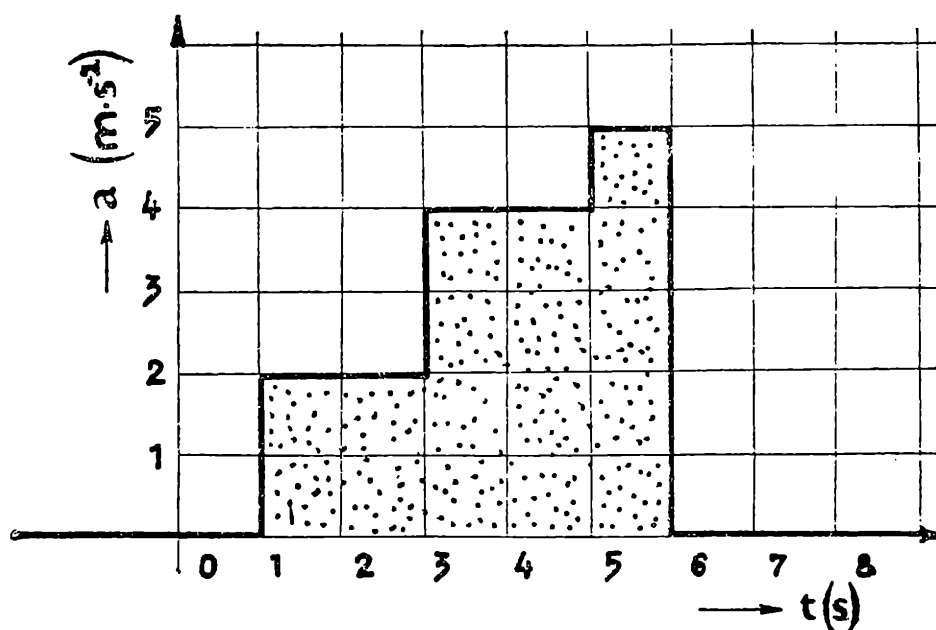
Proč volíme stejný poloměr obou koulí?

Které zjednodušující nebo idealizující předpoklady pro řešení úlohy jste použili? Uveďte takové, které nevyplývají přímo z textu.

Uvažte, které z nich vedou k systematickým chybám měření.

7. Nákladní automobil o hmotnosti m_1 a osobní automobil o hmotnosti m_2 jedou po přímé silnici proti sobě rychlostmi $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ vzhledem k vozovce; $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$.

a) Dojde ke srážce, při níž zůstanou obě vozidla spojena. Určete rychlost $\mathbf{u}$ celku vzhledem k vozovce v okamžiku, kdy vzájemná vzdálenost vozidel je nulová. Určete změnu rychlosti nákladního automobilu $\mathbf{u} - \mathbf{v}_1$ a osobního automobilu $\mathbf{u} - \mathbf{v}_2$. Určete úbytek

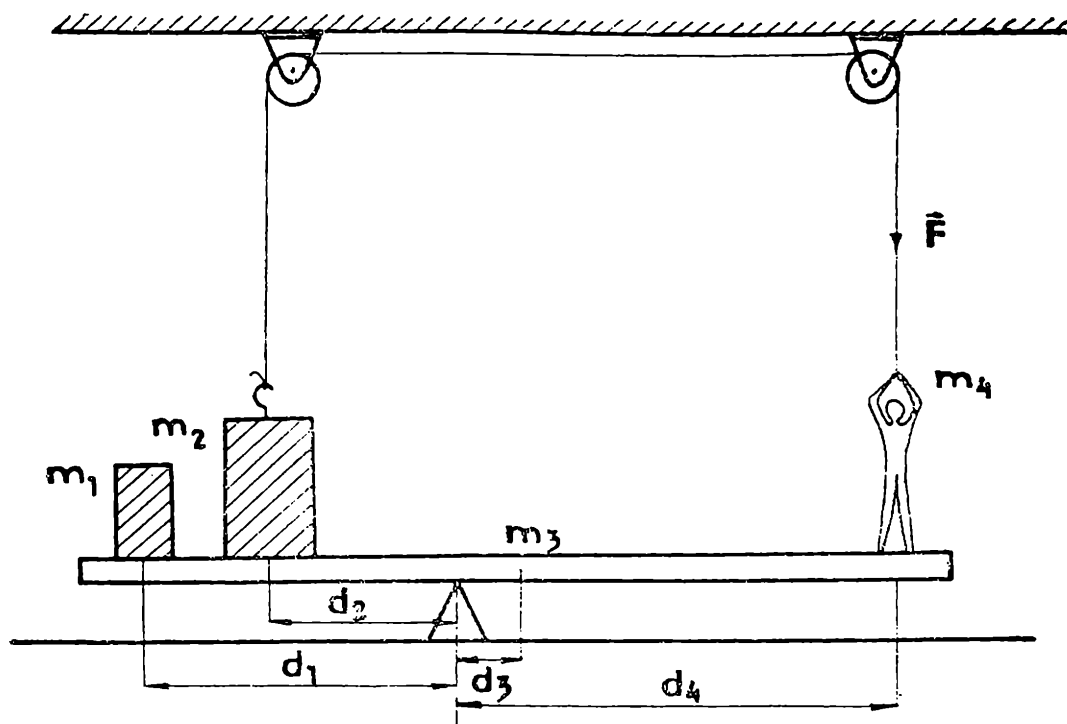


Obr. D-1

- kinetické energie soustavy při srážce. Modelujte děj nepružným středovým rázem dvou koulí.
- b) Dojde ke srážce, po níž nezůstanou vozidla spojená, ale pohybují se rychlostmi u_1 a u_2 vzhledem k vozovce. Byla změřena rychlost u_1 . Určete směr a velikost rychlosti u_2 . Určete úbytek kinetické energie soustavy při srážce. Modelujte děj přímým středovým rázem nedokonale pružných koulí.
- c) $m_1 = 15 \text{ t}$, $m_2 = 1,5 \text{ t}$, $|v_1| = |v_2| = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pro tyto hodnoty řešte úlohu a). Řešte úlohu b) pro tytéž hodnoty, jestliže rychlost nákladního automobilu po srážce vzhledem k vozovce byla $|u_1| = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Porovnejte úbytek kinetické energie soustavy v případě a) a v případě b). Po modelovém vyřešení úloh a) a b) popište reálné situace v obou případech.

Kategória D

1. Na obr. D-1 je graf funkcie $a = f(t)$, kde a je veľkosť zrýchlenia hmotného bodu v čase t . Bod sa pohybuje po priamej dráhe, v čase $t = 0 \text{ s}$ je veľkosť rýchlosti hmotného bodu $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a dráha $s_0 = 0 \text{ m}$.
- a) Zapište funkcia $v = f_1(t)$, kde v je veľkosť rýchlosti hmotného bodu, v časovom intervale $\langle 0 \text{ s}; 8 \text{ s} \rangle$. Hodnoty rýchlosti zostavte do tabuľky a na milimetrovom papieri zostrojte graf funkcie $v = f_1(t)$
- b) Zapište funkcia $s = f_2(t)$, kde s je dráha, v tomže časovom intervale $\langle 0 \text{ s}; 8 \text{ s} \rangle$. Hodnoty dráhy zostavte do tabuľky a na milimetrovom papieri zostrojte graf funkcie $s = f_2(t)$.
- c) Určte priemernú rýchlosť v_p hmotného bodu v časovom intervale $\langle 0 \text{ s}; 8 \text{ s} \rangle$.



Obr. D-2

- d) Akú veličinu modeluje obsah plochy obmedzenej osou času a grafom funkcie $a = f(t)$? Odpoveď zdôvodnite.
2. Z určitého miesta A bylo vrženo svisle vzhůru těleso počáteční rychlostí v_0 . Když těleso dosáhlo maximální výšky, bylo z téhož místa A vrženo svisle vzhůru druhé těleso stejnou počáteční rychlostí v_0 .
- V kterém čase t_1 od počátku pohybu prvního tělesa se obě tělesa setkala?
 - V jaké výšce h_x nad místem A se tělesa setkala?
 - Jak velkou vzájemnou rychlostí se obě tělesa setkala?
 - V kterém čase bude velikost vzájemné rychlosti obou těles rovna velikosti rychlosti v_0 ? Odpověď zdůvodněte.
- Řešte obecně, potom pro $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Odpor vzduchu neuvažujte.
3. Rovnorodá klada má všude rovnaký obsah kolmého rezu, jej hmotnosť je m_3 . Klada je podopretá vo vzdialenosti d_3 vľavo od svojho stredu (obr. D-2). Na klade vľavo od podpory sú položené dve valcové telesá s hmotnosťami m_1 , m_2 ; ich pozdĺžne osi sú vo vzdialenostiach d_1 , d_2 od podpory. Vo vzdialenosti d_4 vpravo od podpory stojí na klade chlapec s hmotnosťou m_4 , ktorý ťahá za lano vedené cez dve kladky. Druhý koniec lana je upevnený na stred hornej podstavky telesa s hmotnosťou m_2 . Hmotnosť lana považujte vzhľadom na hmotnosť ostatných telies sústavy za zanedbateľnú. Laná nad chlapcom a telesom s hmotnosťou m_2 sú zvislé.
- Určte silu F , ktorou chlapec pôsobí na lano tak, aby sústava bola v pokoji a pozdĺžna os klady bola vodorovná. Riešte všeobecne,

potom pre hodnoty $m_1 = 20 \text{ kg}$, $m_2 = 40 \text{ kg}$, $m_3 = 20 \text{ kg}$, $m_4 = 50 \text{ kg}$, $d_1 = 5 d_3$, $d_2 = 3 d_3$, $d_4 = 7 d_3$.

- b) Nájdite množinu hodnôt m_4 (pre zadané hodnoty ostatných veličín), aby chlapec mohol udržať sústavu v rovnováhe. Akými silami je lano napínané pre hodnoty m_4 v obore tejto množiny?

4. Na automobil s hmotnosťou m pôsobí pri jazde úhrnná trecia sila $\mathbf{F}_t$ a úhrnná odporová sila vzduchu $\mathbf{F}_0$. Veľkosť sily $\mathbf{F}_t$ je $F_t = f \cdot F_n$, kde F_n je veľkosť složky tiaže automobilu vo smere kolmom na povrch cesty, f je súčiniteľ. Veľkosť odporovej sily vzduchu je priamo úmerná veľkosti rýchlosti.

- a) Automobil ide po priamej vodorovnej ceste takou rýchlosťou v_0 , pri ktorej je úhrnná odporová sila vzduchu $\mathbf{F}_0$ rovnako veľká ako úhrnná trecia sila $\mathbf{F}_t$. Stanovte výkon motora P_0 .

- b) Automobil ide po priamej ceste so stálym stúpaním $\frac{h}{d}$, kde h je výška kopca od úpätia a d dĺžka meraná pozdĺž kopca. Určte výkon motora P pri rýchlosti v rovnomerného pohybu.

Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty: $m = 1000 \text{ kg}$, $f = 0,10$, $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $h = 250 \text{ m}$, $d = 1000 \text{ m}$, $v = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $9,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- c) Pre zadané hodnoty zostrojte graf funkcie $P = f(v)$ podľa vzťahu zisteného v úlohe b). Na základe tohoto grafu určte rýchlosť v_1 , pri ktorej $P = P_0$.

5. Těleso o hmotnosti m je zavěšeno na vlákně délky d .

- a) Těleso je v rovnovážné poloze stálé. Jak velkou rychlost v_1 ve vodorovném směru mu musíme udělit, aby v nejvyšším bodě kruhové dráhy tělesa byla výslednice sil působících na těleso nulová?

- b) Jakou silou $\mathbf{F}_t$ je v tomto případě napínáno vlákno, když těleso prochází rovnovážnou polohou?

Třecí sílu, hmotnost a prodloužení vlákna neuvažujeme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 0,20 \text{ m}$, $m = 0,50 \text{ kg}$.

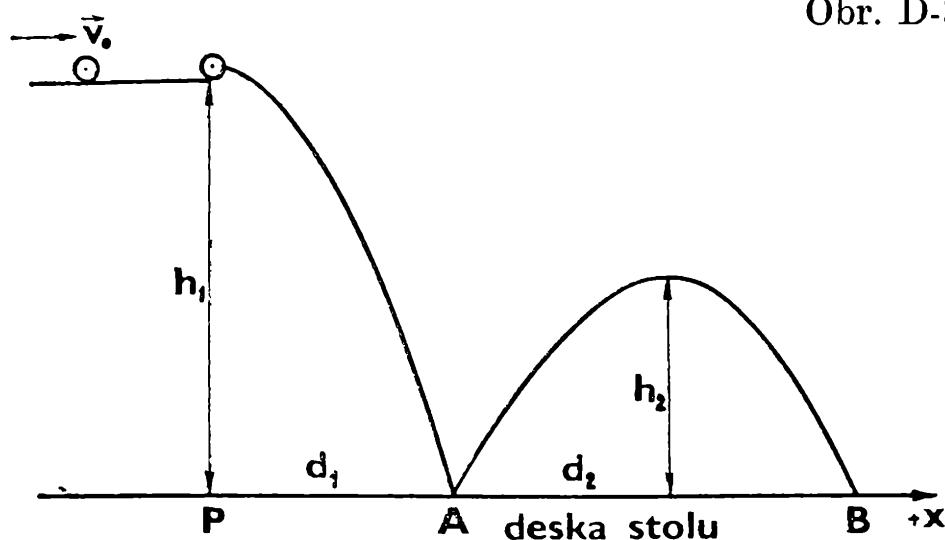
6. Měření součinitele vzpruživosti

O kvalitě míčku na stolní tenis rozhoduje součinitel vzpruživosti míčku při dopadu na desku hracího stolu.

Teoretická příprava

Když míček volně spuštěný z výšky h_1 na desku stolu dopadne rychlostí $v_1 = \sqrt{2 g h_1}$, odrazí se od desky a pohybuje se vzhůru, až se zastaví ve výšce h_2 , $h_2 < h_1$. Míček se odrazí rychlostí $v_2 = \sqrt{2 g h_2}$. Součinitel vzpruživosti potom definujeme

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$



Výšku h_1 změříme, výšku h_2 odhadneme tak, že promítneme míček v okamžiku, kdy se zastaví v horní poloze, na stupnici délkového měřidla, které postavíme svisle za míček. Odhad výšky h_2 však nebývá přesný, a proto spolehlivě nezjistíme hodnotu součinitele k .

Použijeme proto jiný postup: Míček necháme pohybovat po vodorovné podložce ve výšce h_1 nad deskou stolu. Míček opustí podložku rychlostí v_0 ve směru vodorovném a dále se pohybuje tak, že se skládají dva nezávislé pohyby: pohyb ve směru vodorovném stálou rychlostí v_0 a volný pád míčku. Míček získá ve svislém směru rychlost v_1 a dopadne výslednou rychlostí $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ v bodě A (obr. D-3), odrazí se rychlostí $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$, kde $\mathbf{v}_2$ je rychlost míčku ve směru svislém po odrazu v bodě A , $v_2 < v_1$, a dopadne podruhé na desku stolu v bodě B . Změříme vzdálenosti $d_1 = PA$, $d_2 = AB$ podle obr. D-3.

Vzdálenost PA ve směru vodorovném urazí míček rychlostí v_0 za dobu $t_1 = \frac{d_1}{v_0}$, dopadne proto ve směru svislém rychlostí

$$v_1 = g t_1 = \frac{d_1 g}{v_0}.$$

Do bodu B se dostane míček za další dobu t_2 po odrazu z bodu A , pak platí $t_2 = \frac{d_2}{v_0}$. Do výšky h_2 se míček dostane za dobu $\frac{t_2}{2}$, tedy rychlost, s níž se míček odrazil ve směru svislém

$$v_2 = g \frac{t_2}{2} = \frac{g d_2}{2 v_0}.$$

Součinitel vzpruživosti

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{d_2}{2 d_1}.$$

Pomůcky: stůl na stolní tenis (nebo jiná vhodná deska, školní lavice, popř. podlaha), míček, tyčový metr, deska (prkno).

a) Míček volně spustíte z výšky asi 100 cm, odhadněte výšku h_2 . Měření opakujte pro různé výšky h_1 a určete hodnotu součinitele vzpruživosti k .

b) Sestavte soupravu podle obrázku, míček nechte pohybovat libovolnou rychlostí po desce, změřte vzdálenosti d_1 , d_2 a určete součinitel k . Dokažte, že řešení úlohy nezávisí na počáteční rychlosti míčku po vodorovné desce.

K lepšímu vyznačení míst dopadu můžete míček mírně poprášit strouhanou křídou, mastkem nebo dětským zásypem, avšak jen tak, aby se příliš nezměnily pružné vlastnosti míčku při dopadu.

7. Gulôčka s hmotnosťou m je zavesená na niti dĺžky d . Kým je gulôčka v pokoji, je vo výške h nad vodorovnou podlahou. Veľmi malými opakujúcimi sa silovými impulzami gulôčku rozkývame a amplitúdu jej kmitov zväčšujeme až dovtedy, kým sa niť nepretrhne. O použitej niti vieme, že sa pretrhne vtedy, keď je napínaná silou F_p . Hmotnosť nite je zanedbateľne malá, odpor vzduchu zanedbávame, dĺžka nite sa pôsobením sily (menšej ako F_p) nemení.

a) Akou veľkou rýchlosťou v_p dopadne gulôčka na podlahu?

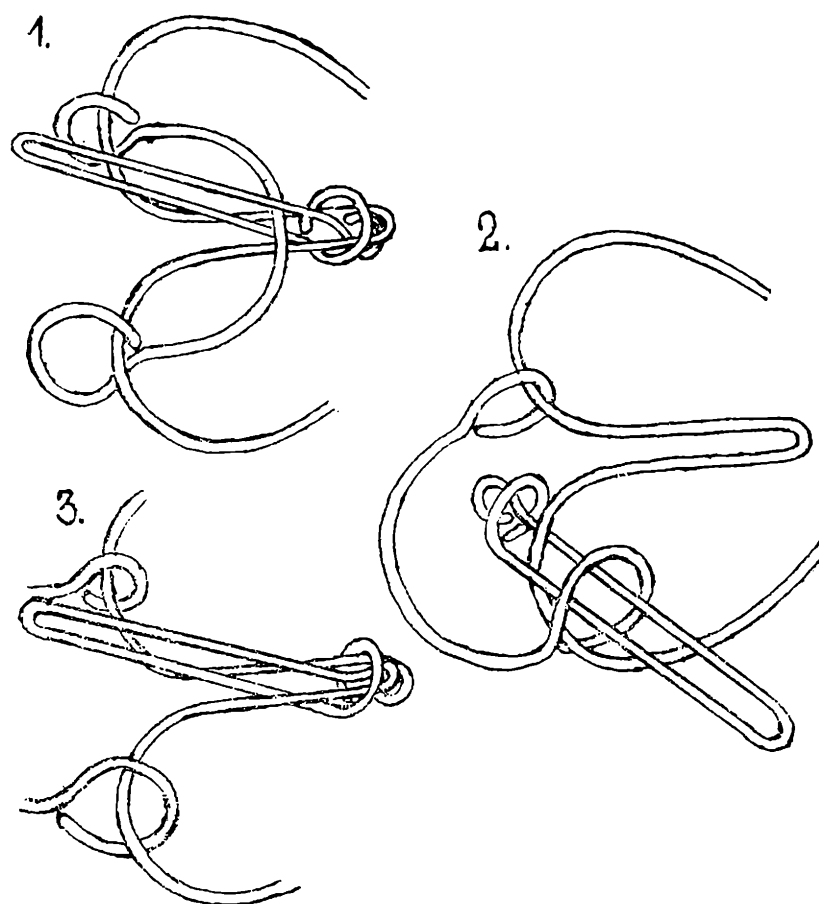
b) V akej vzdialenosti x od bodu A na podlahe, ktorý sa nachádza pod bodom závesu, dopadne gulôčka na podlahu?

Úlohu riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty: $m = 0,50$ kg, $d = 1,0$ m, $F_p = 10$ N, $h = 2,0$ m.

Řešení hlavolamu Srdce

1. Oblouk s jehlou sklopíme, očko jehly navlékneme na vnitřní smyčku srdce a vnitřním menším očkem jehly ji obejdeme, jehlu vysmekneme a posouváme tak, aby jehla byla jen v srdci a mimo oblouk. (Obr. 1.)

2. Nyní posouváme jehlu po obvodu srdce k většímu očku na oblouku a tímto očkem celou jehlu provlékneme. (Obr. 2.)



3. Očko jehly znova navlékneme na vnútornú smyčku srdca a jehlu z ní vysmekneme ako pri prvej operácii. Tým jsme jehlu ze srdce osvobodili. (Obr. 3.) Opačným postupem dostaneme jehlu na pôvodné miesto.

Z NOVÝCH KNIH

Ján Pišút, Rudolf Zajac:

O ATÓMOCH A KVANTOVANÍ

Vydala ALFA — vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1. vydanie, Bratislava 1983, 264 strán, 77 obrázkov, 15,— Kčs, edícia Gama, zväzok 1.

Autori s im vlastnou sviežosťou jazyka približujú čitateľovi základné poznatky z elementárnej kvantovej mechaniky. Kniha ne-

obvyklým spôsobom kombinuje historické hľadisko, súčasnú štruktúru kvantovej teórie a aplikáciu získaných poznatkov. Nachádzame v nej príklady, z ktorých väčšina je riešená. Takto je dielo „O atómoch a kvantovaní“ nielen plynule napísanou knihou pre osvieženie pamäti či zdrojom podnetov pre samostatné myslenie, ale je aj učebnicou úvodu do kvantovo-mechanického myslenia, ktorá by

nemala chýbať v knižnici študentov prírodovedných a technických smerov. Kniha bude dobrou pomôckou stredoškolským profesorom a určite ju s úspechom preštudujú aj stredoškoláci, ktorí majú hlbší záujem o modernú fyziku a chémiu.

Súčasťou každej kapitoly sú poznámky o živote a diele vedcov, ktorých práca je pre problematiku kapitoly rozhodujúca. Škoda, že sa pri formálnej úprave knihy graficky neoddelili biografické časti a že sa nevypracoval menný register. Súčasná úprava sťažuje využitie zhromaždeného historického materiálu.

Autori rozvrhli knihu do 8. kapitol. V úvodnej kapitole približujú vývoj predstáv o atónoch a ich súvislosť so vznikom kvantovej mechaniky v rokoch 1925—1926. V druhej kapitole sa hovorí o atónoch, ich rozmeroch a čiarových spektrách. Z didaktického hľadiska je zaujímavá tretia kapitola, v ktorej autori učia využívať rozmerovú analýzu na ohodnotenie vlastností atómov. Záujemcom o hlbšie štúdium tohto postupu tu navrhujú ďalšiu študijnú literatúru. Teória vlnenia sa aplikuje na mikročastice vo štvrtej kapitole. Piata kapitola sa zaoberá podaním kvantových stavov elektrónov ako čistých harmonických kmitov de Broglieho vlny. Štruktúrou zložitejších atómov sa zaoberá šiesta kapitola. V ďalšej,

siedmej kapitole autori hovoria o chemickej väzbe a štruktúre molekúl. Svoj výklad končia fyzikálnym významom vlnovej funkcie, vzťahom neurčitosti a Schrödingerovou rovnicou.

Odhliadnúc od pripomienky o grafickom rozlíšení textu a jeho vybavení registrom nemožno knihe vyčítať chyby, ktoré by jej uberali na hodnote. Osvedčený kolektív redakcie teoretickej literatúry nakladateľstva ALFA neostal ani v prípade tejto knihy nič dlžný svojej už tradične dobrej povesti.

Kniha O atónoch a kvantovaní vyšla v pomerne malom náklade 1600 výtlačkov. Iste nebude treba dlho čakať na jej druhé vydanie, v ktorom sa autori vyhnú niektorým nepresnostiam, ako je „rádioaktívna častica“, alebo vyjadrenie skutočnosti, že v roku 1914 bola Rutherfordovi jasná existencia protónu tvrdením, že v tomto roku Rutherford protóny objavil. Pri preberaní niektorých údajov z originálnych prác sa v ďalšom vydaní autori iste vyhnú používaniu jednotiek mimo sústavy SI.

V knihe O atónoch a kvantovaní sa autorom podarilo podať obávanú časť modernej fyziky bez náročného matematického aparátu, pri tom však tak, že neutrpela exaktnosť výkladu. Kniha bude čitateľovi dobrým pomocníkom pri prenikaní do spôsobu myslenia v kvantovej mechanike.

Ján Chrapan

Násobení „na cifrách“

Dovednost písemně násobit přirozená čísla byla v 16. století ještě dost nevšední, užívalo se také více než deset různých způsobů zápisu výpočtů. Ten, který ukazuje náš obrázek, je stejný, jaký se učí naše děti v současnosti. Vidíte stránku z české učebnice, kterou vydal v r. 1577 Jiří Goerl z Goerlštejna.

Na předcházejících stránkách vyložil a předvedl Goerl, jak se dané číslo násobí (multiplicuje) jednociferným číslem (figurou — číslicí); postupný výpočet takového součinu nazýval „vedením figury [cifry násobitele] skrze všechny figury [cifry násobence]“. Proto v naší ukázce můžeme číst:

„Veď první figúru skrze všechny, jakž prvé povědíno, potom druhou též podobně, toliko na druhé místo blíž k levé ruce Facit (to jest, cto přijde) posad a podtrhni též linu, kteréž v hromadu summúj takto.“

Ke spodnímu výpočtu se vztahují jen řádky pod titulkem „Skrze tři figúry“ [= násobení trojciferným číslem]; předvádí se však násobení čtyřciferným číslem. Text říká:

„Těž podobně multiplicuj skrze tři (čtyři) figúry, jediné každé figúře multiplicované blíž k levé ruce vobjedno místo se podej takto.“

Veď první figúru skrze všechny, jakž prvé povědíno / potom druhou též podobně / toliko na druhé místo blíž k levé ruce Facit (to jest cto přijde) posad / a podtrhni též Linu / kteréž v hromadu Summúj takto.

$$\begin{array}{r}
 124 \\
 \times 97 \\
 \hline
 868 \\
 1116 \\
 \hline
 12028
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7956 \\
 \times 84 \\
 \hline
 31824 \\
 63648 \\
 \hline
 668304
 \end{array}$$

Skrze tři figúry.

Těž podobně Multiplicuj skrze tři / čtyři figúry / jediné každé figúře multiplicované blíž k levé ruce vobjedno místo se podej takto.

$$\begin{array}{r}
 23456789 \\
 \times 6789 \\
 \hline
 211111101 \\
 187654312 \\
 164197523 \\
 140740734 \\
 \hline
 1592248140521
 \end{array}$$

proba.

Zápisy výpočtů jsou pro nás dnes nepochybně srozumitelnější než výklad. Je to dáno i tím, že už během 16. století se ustálily tiskařské typy číslic, takže bez námahy přečteme zápisy čísel.

Ivana Füzéková

V knižnici Škola mladých matematiků vyšel další svazek. Jmenuje se

MNOŽINY BODŮ V PROSTORU

a jeho autorem je Josef Holubář. Příručka se v prvním vydání v roce 1965 nazývala Geometrická místa bodů v prostoru.

Knížka přináší příklady množin bodů v prostoru vybrané tak, aby mladé matematiky zaujaly a poučily, rozšířily a hlavně prohloubily jejich geometrické myšlení.

Pro nové vydání příručku upravil Leo Boček. Vyšla v nákladě 6000 výt., má 64 stran a její cena je 4,— Kčs.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kaškova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1984.

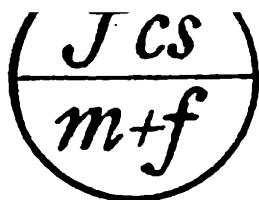
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

**ROČNÍK 62, 1983/84
ČERVEN**

(10)

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE
Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK
Praha, prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc.,
PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář,
CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigová 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

I. Bužek: Krevní skupiny a kombinatorika	417
M. Dományová: Ešte o pyramidách .	419
A. Bicanová, M. Trch: O komunikaci, kó- dování a kryptografii II.	423
V. Mráz: Dvě neklasické spojky .	428
R. Baďura: Měření teploty přechodu PN	434
V. Šindelář: Několik novinek z oblasti měřicích jednotek	439
K. Šindelář: Před rokem odešel prof. dr. Karel Havlíček	445
F. Jáchim: Před 50 lety zemřela Mari Curieová-Sklodovská	447
M. Šolc: Nobelovy ceny za fyziku 1983 astrofyzikům	449
A. Zenkert: Pojedete o prázdninách do Postupimi?	451
Přemýšlíme, řešíme	452
Olympiády a SOČ .	456
Z nových knih .	458
Pohledy do dějin .	3. str. obálky

Krevní skupiny a kombinatorika

PhDr. IVAN BUŠEK, Pedagogický ústav hl. m. Prahy

Lékaři si odedávna přáli nahradit člověku ztrátu krve a tím mu zachránit život. Převod krve (transfúze) mezi dvěma osobami byl však úspěšný jen někdy, často končil smrtí příjemce krve. Bezpečný převod krve byl umožněn až objevením existence čtyř krevních skupin. Tento objev provedl v r. 1907 český lékař *Jan Janský*. Krevní skupiny mají velký význam, protože základním předpokladem úspěšné transfúze je, že příjemce a dárce krve musí mít stejnou krevní skupinu. Krevní skupiny označujeme A, B, AB, 0. Sejde-li se náhodně 10 osob, může jejich rozdělení podle krevních skupin vypadat např. takto:

krevní skupina	A	B	AB	0
počet osob	4	2	1	3

Pro jinou skupinu 10 osob může nastat zcela jiné rozdělení. Lze určit počet všech možných — navzájem různých — rozdělení 10 osob podle jejich krevních skupin?

Zkusme společně najít odpověď na tuto otázku. Řešíme tedy úlohu:

Určete počet všech možných (navzájem různých) rozdělení 10 osob podle krevních skupin.

Ukažme si různé způsoby řešení.

1. způsob

Rozdělení uvedené v tabulce lze zapsat tak, že nejprve napíšeme tolik jedniček, kolik je osob s krevní skupinou A. Pak zapíšeme nulu a dále tolik jedniček, kolik je osob s krevní skupinou B. Potom zase nulu a tolik jedniček, kolik je osob s krevní skupinou AB, a nakonec nulu a tolik jedniček, kolik je osob s krevní skupinou 0. Nuly zde hrají roli předělů, mezi jednotlivými skupinami.

Zápis vypadá takto: 1111011010111

Takovým způsobem lze zapsat všechna možná rozdělení 10 osob podle krevních skupin. Z tohoto zápisu je patrné, že vytváříme permutace s opakováním z 10 prvků prvního druhu (z 10 jedniček) a ze 3 prvků

druhého druhu (ze 3 nul). To znamená, že počet všech možných rozdělení 10 osob podle krevních skupin se rovná

$$P'_{10,3}(13) = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$$

2. způsob

Všechna možná rozdělení zapsaná pomocí jedniček a nul se liší tím, na kterých místech se vyskytují nuly. Víme, že tři nuly můžeme rozmístit na 13 míst $\binom{13}{3}$ způsoby. Proto hledaný počet rozdělení je

$$C_3(13) = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286.$$

Kdybychom si všímali jedniček místo nul, dostaneme podobně

$$C_{10}(13) = \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286.$$

3. způsob

Zapisujeme-li rovnou všechny desetičlenné množiny z prvků A, B, AB, 0, vytváříme vlastně množiny všech kombinací desáté třídy s opakováním z prvků čtyř druhů. Vzorec pro počet kombinací k -té třídy s opakováním z prvků p druhů je

$$C'_k(p) = \binom{k + p - 1}{k}.$$

V této úloze dostáváme

$$C'_{10}(4) = \binom{10 + 4 - 1}{10} = \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286.$$

Opět zjišťujeme, že počet všech možných rozdělení 10 osob podle krevních skupin se rovná 286.

Znalost kombinatoriky nám umožnila zjistit všechna možná rozdělení 10 osob podle krevních skupin. Je však třeba vědět i to, že užití lidské krve v lékařství neustále roste. Stoupá i počet těch, kterým transfúze vrací život a kteří ji nezbytně potřebují. Proto se rozvíjí hnutí dárců krve. Každý zdravý člověk starší devatenácti let by se měl stát dárce krve, neboť tak může významně přispět k záchraně života jiných lidí, případně i k záchraně vlastního života.

Ešte o pyramídach

RNDr. MÁRIA DOMÁNYOVÁ, Gymnázium Pavla Horova Michalovce

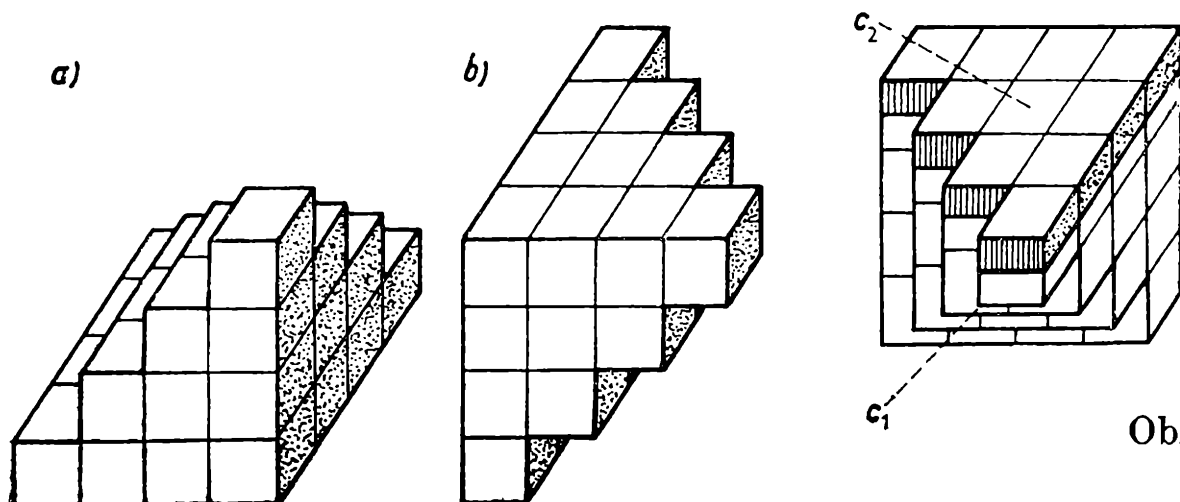
Pre tých, ktorých zaujala hra s pyramídami (Rozhľady č. 10, ročník 1982/83), prinášame ešte niekoľko úvah a námetov.

V článku Pyramídy a čo s nimi sme okrem iného odvodili vzťahy

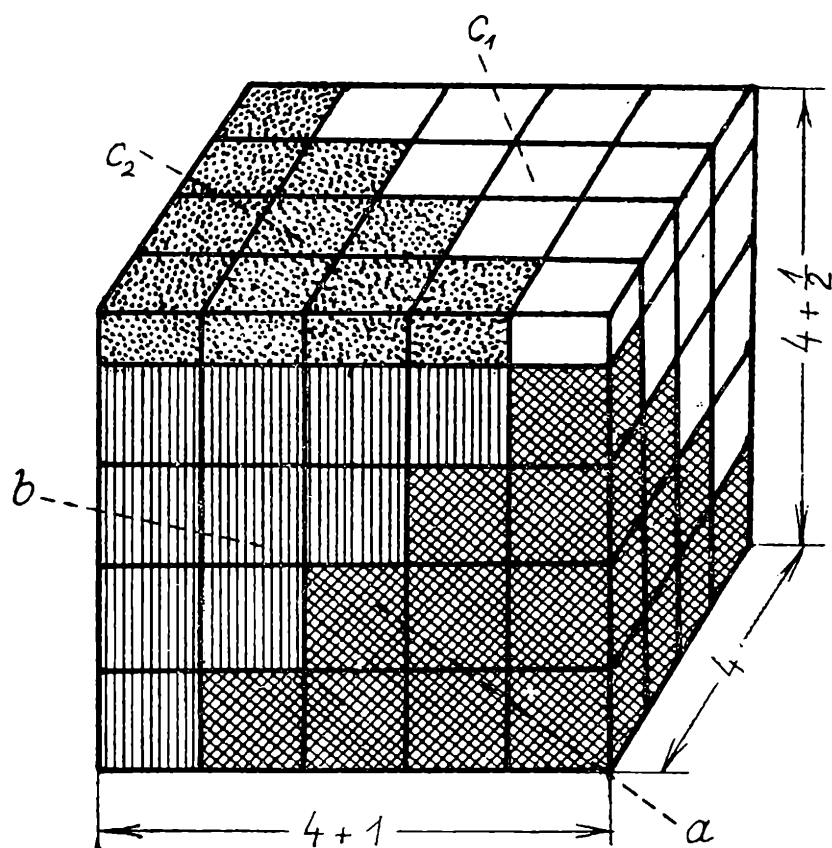
$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{1}{6} n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2), \quad (1)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1), \quad (2)$$

pričom súčty na ľavých stranách rovností sme interpretovali ako počty gúľ v odpovedajúcich n -vrstvomých pyramídach („trojuholníkovvej“ a „štvorcovej“). Pri odvodzanií vzťahov sme sa nechali inšpirovať geometrickým experimentovaním, ktoré malo „rovinový“ charakter (rozloženie vrstiev v jednej rovine, preskupenie gúľ vo vrstve, spájanie vrstiev). Vďaka tomuto experimentovaniu sa algebraické odvodenie zdalo pomerne prirodzené a zrejmé. V prospech geometrického experimentu chceme ešte uviesť, že s jeho použitím môžeme často „vytúšiť“ nielen cestu vedúcu k riešeniu, ale aj samotný výsledok. Ukážeme si to na príklade vzťahu (2). Experimentovanie bude mať tentoraz charakter „priestorový“. Gule vo vrstvách štvorcovej pyramídy nahradíme kockami, a tieto zoradíme tak, ako ukazuje pre $n = 4$ obr. 1. Spojením troch takýchto pyramíd (pozri obr. 2) vytvoríme štvorvrstvomý kváder so základňou zloženou zo $(4 + 1) \cdot 4$ kociek, na ktorého vrchnej stene leží ešte neúplná vrstva z $1 + 2 + 3 + 4$ kociek. Ak rozrežeme výčnelok rovnobežne na dva diely, môžeme ho umiestniť na hornej stene kvádra ako ďalšiu vrstvu, ktorej výška však bude iba polovičná. Ak objem



Obr. 1



Obr. 2

kociek považujeme za jednotkový, je zrejmé, že počet kociek, z ktorých vzniknuté teleso pozostáva, je totožný s jeho objemom. Platí teda

$$3 \quad (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 4 \quad (4 + 1) \cdot \left(4 + \frac{1}{2}\right)$$

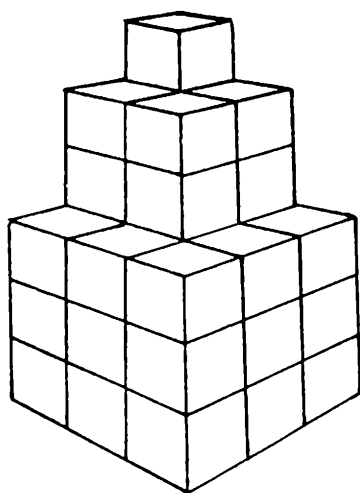
a môžeme sa domnievať, že bude platiť aj vo všeobecnosti

$$3 \quad (1^2 + 2^2 + \quad + n^2) = n \quad (n + 1) \quad \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

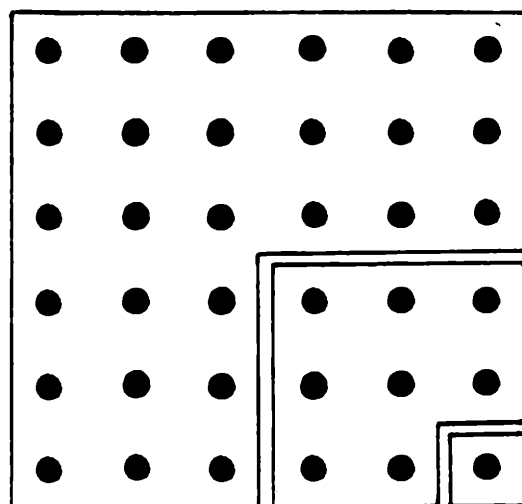
Posledný vzťah však už možno jednoduchou úpravou previesť na tvar (2).

Práve použitý postup nám pomohol ozrejmiť si výsledok, ktorý sme už poznali a ktorý bol na prvý pohľad dosť nenázorný. Uvedený priestorový experiment by tiež mohol poslúžiť (chce to však trochu predstavivosti) na rýchle vybavenie si už známeho vzorca pri jeho použití vo výpočtoch. Ale predovšetkým (a o to nám šlo): V prípade, že by sme vzťah (2) ešte nepoznali, dal by nám spomínaný postup podklad pre vyslovenie hypotézy o tom, aký vlastne je. (Pravda, túto domnienku by potom bolo potrebné niektorou z matematických metód (napr. matematickou indukciou — dokázať.)

Urobme ešte jeden experiment — tentoraz algebraický. Postavme si za cieľ nájsť vzorec pre súčet $1^3 + 2^3 + \quad + n^3$. (Na obr. 3 sme nakreslili pre $n = 3$ odpovedajúcu pyramídu — zloženú z kociek, ktoré



Obr. 3



Obr. 4

sme použili miesto gúľ, aby sme sa vyhli úvahám o stabilite takto vytvorenej sústavy.) Skúsme na náš príklad „naslepo“ aplikovať algebraické úpravy obdobné tým, ktoré sme použili pri riešení predchádzajúcich úloh o pyramídach:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 1^3 + (1 + 1)^3 + (2 + 1)^3 + \dots + [(n - 1) + 1]^3 = 1^3 + (1^3 + 2^3 + \dots + (n - 1)^3) + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + \dots + 3 \cdot (n - 1)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + \dots + 3 \cdot (n - 1) \cdot 1^2 + (n - 1) \cdot 1^3$$

a teda

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n - 1)^3 + n^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + (n - 1)^3 + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2) + 3 \cdot (1 + 2 + \dots + (n - 1)) + n.$$

Tento postup, ako sa zdá, nepovedie k vytýčenému cieľu (keďže súčet $1^3 + 2^3 + \dots + (n - 1)^3$ na ľavej strane rovnosti sa ruší s rovnakým súčtom na pravej strane); ale všimnime si inú vec: z poslednej rovnosti možno použitím jednoduchých úprav (na základe znalosti súčtu $1 + 2 + \dots + (n - 1)$) vyjadriť súčet $1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2$.

Skutočne:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2) &= n^3 - n - 3 \cdot (1 + 2 + \dots + (n - 1)) \\ + (n - 1) &= n^3 - n - \frac{3}{2} (n - 1) \cdot n = (n - 1) \cdot n \cdot \left(n + 1 - \frac{3}{2} \right) = \\ &= (n - 1) \cdot n \cdot \left(n - \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

a odtiaľ

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{1}{3} (n-1) \cdot n \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) = \\ = \frac{1}{6} (n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$$

Posledný vzťah platí pre všetky prirodzené čísla $n > 1$ (keďže $n-1 \geq 1$) a tak použitím substitúcie $m = n-1$ môžeme písať

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{1}{6} m \cdot (m+1) \cdot [2(m+1)-1] = \\ = \frac{1}{6} m \cdot (m+1) \cdot (2m+1)$$

Dospeli sme teda opäť — tentoraz čisto algebraickou cestou — ku vzťahu (2). (Zámena premenných m, n z oboru prirodzených čísel je zrejme úplne formálna.)

Pravda, uvedený postup úlohu, ktorú sme si zadali, neriešil (nám šlo o súčet tretích mocnín prirodzených čísel od 1 po n); privádza nás však na myšlienku začať so zkúmaním súčtu štvrtých mocnín prirodzených čísel. Postup sa pokúsime ešte trochu „vylepšiť“ pripočítaním „vhodne zapísanej nuly“ k uvažovanému súčtu. Dostávame:

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 + (n+1)^4 - (n+1)^4 = \\ = 1^4 + (1+1)^4 + (2+1)^4 + \dots + (n+1)^4 - (n+1)^4 = \\ = 1^4 + (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + 4(1^3 + 1 + 2^3 + 1 + \dots + n^3 + 1) + \\ + 6(1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + \dots + n^2 + 1^2) + 4(1 + 1^3 + 2 + 1^3 + \dots + \\ + n + 1^3) + n + 1^4 - (n+1)^4,$$

a teda

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 + 4(1^3 + 2^3 + \dots + \\ + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 4(1 + 2 + \dots + n) + n - \\ - (n+1)^4 + 1,$$

odtiaľ

$$4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = (n+1)^4 - (n+1) - \\ - 6 \cdot \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n \cdot (n+1) = \\ = (n+1) [(n+1)^3 - 1 - n \cdot (2n+1) - 2n] = \\ = (n+1) \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n^2 - n - 2n) = \\ = (n+1) \cdot n^2 \cdot (n+1) = n^2 \cdot (n+1)^2$$

Platí teda

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 \cdot (n + 1)^2, \quad (3)$$

čo je už hľadaný vzťah.

(„Vylepšenie“ postupu malo za následok, že odpadla nutnosť použiť substitúciu v závere riešenia.)

Ak sa vám metóda zapáčila, iste sa s úspechom pokúsite nájsť vzorec napr. pre súčet $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.¹

Na záver sa ešte vráťme ku geometrickému experimentu. V úvode článku sme ukázali, ako bolo možné na jeho základe „predvídať“ vzťah (2). Schéma na obr. 4 ukazuje výsledok rovinného geometrického pokusu s pyramídou znázornenou na obr. 3 (pričom jednotlivé kocky sú reprezentované iba svojimi stredmi). Z tohto znázornenia je zrejmé, že platnosť vzťahu

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2,$$

a teda aj vzťahu (3) bolo možné dopredu očakávať (a samozrejme, dodatočne dokázať — napr. matematickou indukciou).

0 komunikaci, kódování a kryptografii II.

Ing. ALENA BICANOVÁ, RNDr. MILAN TRCH, CSc., UK Praha

Jak jsme slíbili v první části článku, bude v tomto článku podáno řešení zakódované zprávy. Připomeňme si, že zakódovaný text používá minimální abecedy (tj. nerozlišuje háčky a čárky), vznikl posunutím abecedy a nedodrží mezery mezi slovy. Pro úplnost zopakujeme i znění zakódovaného textu:

OEGPK NZITG TEGXR WPOTY XOYJV DHAPK HZNRW WDGED
IKGOJ YXOTO STKAR XOSPA TZPCP OXYXY TCKED WPSZP
RWKBX CJANR WCTR WCEPG XZAPS KYXOC XBPZT SPCXX
HBTRZ PKAZJ OPSPK YAPHI PSDZH BSTHP IXZKR X

Při dekódování tohoto textu budeme postupovat opět posouváním abecedy a hledáním slova, které bude mít nějaký smysl. Písmena ze zakódované zprávy budeme postupně přepisovat do sloupce tak dlouho, až nám bude jasné, jaké zobrazení bylo k zakódování použito:

O		P Q R S T U V W X Y		Z A B C D E F G H I J K L M N
E		F G H I J K L M N O		P Q R S T U V W X Y Z A B C D
G		H I J K L M N O P Q		R S T U V W X Y Z A B C D E F
P		Q R S T U V W X Y Z		A B C D E F G H I J K L M N O
K		L M N O P Q R S T U		V W X Y Z A B C D E F G H I J
N		O P Q R S T U V W X		Y Z A B C D E F G H I J K L M

Je vidět, že je pouze jediný sloupec, ve kterém se objevuje slovo, mající v českém jazyce smysl, tj. slovo ZPRAVY. Odtud je zřejmé, že při kódování bylo písmeno *Z* nahrazeno písmenem *O*, písmeno *P* písmenem *E* atd. Nyní už snadno sestavíme tabulku pro dekódování zprávy:

kódová písmena		A B C D E F G H I J K L M
správná abeceda		L M N O P Q R S T U V W X
kódová písmena		N O P Q R S T U V W X Y Z
správná abeceda		Y Z A B C D E F G H I J K

Po dekódování textu dostaneme zprávu, ve které je třeba doplnit háčky, čárky, tečky a mezery mezi slovy tak, aby dávala jasný smysl:

ZPRAV YKTER EPRIC HAZEJ IZJUG OSLAV SKYCH HORPO
TVRZU JIZEZ DEVLIC IZDAL EKANE ZIJIJ ENVPO HADKA CHVMI
NULYC HDNEC HNAPR IKLAD VJIZN IMAKE DONII SMECK
AVLKU ZADAV ILAST ADOOS MDESA TIOVC I

A to i vám jistě po chvilce přemýšlení dá původní zprávu ve znění:
„Zprávy, které přicházejí z jugoslávských hor, potvrzují, že zde vlci
zdaleka nežijí jen v pohádkách. V minulých dnech například v jižní
Makedonii smečka vlků zadávala stádo osmdesáti ovci.“

Všimněme si nyní z hlediska matematiky, co na tomto způsobu kódování je podstatné. V našich příkladech jsme použili zjednodušenou abecedu českého jazyka (vynechali jsme háčky, čárky i větnou interpunkci) a celé kódování se opíralo o vzájemně jednoznačné zobrazení této abecedy do jiné množiny. To, že jsem použil vzájemně jednoznačné zobrazení do stejné abecedy není vůbec podstatné; spíše souvisí s technickou stránkou věci, protože tato písmena umí každý napsat i přečíst,

jsou na každém psacím stroji atd. Stejně dobře bychom však mohli kódovat pomocí jakékoliv soustavy znaků, která má potřebný počet prvků. Bez újmy na obecnosti můžeme písmena základní abecedy jazyka ztotožnit s množinou prvních n přirozených čísel (číslo n závisí na počtu použitých znaků; v našich případech bylo vždy 26, ale lze použít i více znaků například pro hlásky ě, š, č, ř, ž, ý, á, í, é, ů, ú. Můžeme však přidat i čárku mezi slovy, pomlčku, tečku, mezeru apod.). Ztotožníme-li v našem případě základní zjednodušenou abecedu o dvaceti šesti písmenech po řadě s čísly 1, 2, ..., 26, pak zadání kódovací tabulky (tj. vzájemně jednoznačného zobrazení abecedy) vlastně představuje zadání nějaké vzájemně jednoznačné funkce na množině $\{1, 2, \dots, 25\}$. Z kombinatoriky je známo, že počet všech takových vzájemně jednoznačných funkcí je dán číslem $26!$. Odvození tohoto vztahu je jednoduché. V matematických tabulkách se uvádí pro číslo 26 faktoriál hodnota 403 291 461 126 605 635 584 000 000. A z tohoto počtu potenciálních kódovacích funkcí (nezajímají nás jednoduché funkce, které například zaměňují úlohu dvou či tří písmen) jsme dosud poznali pouhých 25 zobrazení, které vznikají pouhým posunutím abecedy a dají se navíc snadno dekodovat. Napadá nás proto přirozená otázka, zda bychom neuměli nalézt nějaký obecnější (ale přece jen ne příliš komplikovaný) způsob, jak předepsat alespoň trochu složitější kódovací funkce. Vyjdeme opět z našeho příkladu o posouvání abecedy, ale tentokrát se na tento problém budeme dívat z hlediska matematiky. Pro začátek plně nahradíme základní zjednodušenou abecedu množinou čísel 0, 1, 2, ..., 25 a budeme vycházet z následující korespondence písmen a čísel:

abeceda	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L,, Y, Z																								
čísla	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,, 24, 25,																								

Při řešení úlohy ze začátku tohoto článku jsme sestavili dekodovací tabulku, ve které kódovému písmenu A je přiřazeno písmeno L . Nahradíme-li písmena čísla, dostaneme následující tabulku funkce na množině 0, 1, 2, ..., 24, 25:

x	0	1	2		14	15	16		24	25
$f(x)$	11	12	13		25	0	1		9	10

To znamená, že obrazem čísla x je buď číslo $(x + 11)$, je-li $x + 11 \leq 25$, anebo číslo $(x + 11) - 26$, je-li $(x + 11) > 25$. Jinými slovy je možné funkci $f(x)$ zadat také předpisem:

$$f(x) = \text{rest}_{26}(x + 11),$$

která číslu x přiřazuje číslo $\text{rest}_{26}(x + 11)$, tj. zbytek při dělení čísla $(x + 11)$ číslem 26.

Zobecníme-li tyto poznatky na libovolnou kódovací abecedu o m prvcích, pak každé „posunutí“ abecedy o k kódovacích písmen je možné (při daném ztotožnění kódovacích písmen s čísly $0, 1, 2, \dots, m - 1$) vyjádřit jako funkci na množině $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ danou předpisem:

$$f(x) = \text{rest}_m(x + k);$$

přitom k je nějaké pevně zvolené číslo z množiny $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$.

Kódovací tabulka určená funkcí $F(x) \equiv \text{rest}_{26}(7 \cdot x + 13)$

Písmeno	Číslo písmene	Hodnota $F(x)$	Kódové písmeno
A	0	13	N
B	1	20	U
C	2	1	B
D	3	8	I
E	4	15	P
F	5	22	W
G	6	3	D
H	7	10	K
I	8	17	R
J	9	24	Y
K	10	5	F
L	11	12	M
M	12	19	T
N	13	0	A
O	14	7	H
P	15	14	O
Q	16	21	V
R	17	2	C
S	18	9	J
T	19	16	Q
U	20	23	X
V	21	4	E
W	22	11	L
X	23	18	S
Y	24	25	Z
Z	25	6	G

Toto vyjádření kódovací funkce umožňuje další zobecnění. Položme si jednoduchou otázku, zda bychom nedokázali podobným předpisem

najít nějaké další kódovací funkce. Vodítkem nám může pro začátek být i předpis kódování „posunutím“ abecedy. Co kdybychom místo určování zbytku při dělení číslem m z čísla $(x + k)$ se pokusili určovat zbytek při dělení číslem m z obecnějšího čísla typu $(a \cdot x + b)$. To znamená, že bychom se vlastně zajímali o obecnější „lineární“ funkci na množině $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ danou předpisem $F(x) = \text{rest}_m(a \cdot x + b)$. Aby však tato funkce mohla posloužit ke kódování, musí být vzájemně jednoznačným zobrazením množiny $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ na sebe. Z dělitelnosti číslem m a několika jednoduchých vět lze ukázat, že nutnou a postačující podmínkou je nesoudělnost čísla a s číslem m ; k tomu se vrátíme podrobněji v článku úzce zaměřenému k lineárnímu kódování. Na závěr tohoto článku si již jen ukážeme, jak pomocí tohoto obecnějšího předpisu pro lineární kódování můžeme získat příslušnou kódovací tabulku. I nyní budeme pro jednoduchost pracovat s minimální abecedou (tj. nebudeme odlišovat hlásky s čárkou či háčkem), která obsahuje 26 písmen. Pro určení kódovací tabulky budeme vycházet z přiřazení čísel 0, 1, ..., 25 a písmen abecedy podle tabulky:

abeceda	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
čísla	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9																25

Vezměme za číslo a například číslo 7, které je nesoudělné s číslem 26, za číslo b vezměme například číslo 13. Potom kódovací funkce je dána předpisem $F(x) = \text{rest}_{26}(7 \cdot x + 13)$. Tento funkční předpis již umožňuje sestavit celou kódovací tabulku. Obrazem písmena A bude písmeno patřící číslu 13, tj. písmeno N . Podobně určíme obraz písmena B . Číslu 1, které zastupuje písmeno B , je funkčním předpisem určeno číslo 20. Proto písmenu B je přiřazeno písmeno U . Kódovací tabulka je na vedlejší straně.

Tímto způsobem můžeme získat celou řadu lineárních kódovacích funkcí; mezi čísla 0, 1, 2, ..., 24, 25 jsou s číslem 26 soudělná právě všechna sudá čísla a číslo 13. Proto v předpise funkce $F(x)$ můžeme za hodnotu a volit některé z čísel 1, 3, 5, ..., 9, 11, 15, 17, ..., 23, 25. Máme tedy celkem 12 různých možností. Za b můžeme dosadit libovolné z čísel 0, 1, 2, ..., 24, 25; máme tedy pro b celkem 26 různých možností. Proto můžeme sestavit celkem $12 \cdot 26 = 312$ různých lineárních kódovacích funkcí. O možnosti jejich dekódování se zmíníme v některém z příštích čísel.

Dvě neklasické spojky

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK PRAHA

Pět klasických logických spojek je název článku v předešlém čísle Rozhledů. Na tento článek dnes navazujeme. Mimo jiné jsme tam ukázali, že každou pravdivostní funkci, i když obsahuje všech pět klasických spojek ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$), lze po vhodné transformaci zapsat jen menším počtem těchto spojek. Vystačí se i jen s některou dvojicí těchto spojek: ($\neg, \wedge$) nebo ($\neg, \vee$) nebo ($\neg, \Rightarrow$), nikoliv však s dvojicí ($\neg, \Leftrightarrow$). Bez spojky negace ($\neg$) se nelze obejít. Poznali jsme také, že každou pravdivostní funkci dokážeme transformovat na specifický tvar s užitím zvláštního uspořádání výrokových proměnných a spojek ($\neg, \wedge, \vee$). Tyto tvary se nazývají *úplná normální disjunktivní forma* (úndf) a *úplná normální konjunktivní forma* (únkf). K úplným normálním formám se i v dnešním článku vrátíme.

Nejdříve však ukážeme další dvě neklasické logické spojky, resp. další dvě pravdivostní funkce, které mají pozoruhodnou vlastnost; každá sama o sobě může nahradit každou jinou logickou spojku. Je to spojka *Shefferova* (čti šeferova) a spojka *Peirceova* (čti pírsova), někdy též zvaná *Nicodova* (čti nykodova). Jde o binární spojky. Shefferovu pravdivostní funkci zapíšeme $p | q$ a čteme buď p šefr q , nebo p neslučitelno s q . Peirceovu pravdivostní funkci zapisujeme $p \downarrow q$ a čteme buď p pírs q , nebo p ani q . Jako jsme o shora uvedených peticích, čtveřicích, trojicích a dvojicích spojek řekli, že tvoří funkčně úplný systém spojek, lze to prohlásit i o každé ze spojek $|, \downarrow$.

V tabulce 1 předešlého článku jsme poznali pravdivostní funkci f_9 , která je negací funkce $f_8 = p \wedge q$. Platí tedy $f_9 = \overline{p \wedge q}$. Nahradíme-li zápis $p \wedge q$ se dvěma spojkami zápisem $p | q$ s jednou spojkou, dostaneme zákon (S) výrokové logiky; připojená tabulka ph Shefferovy funkce o tom přesvědčuje:

$$\begin{array}{c|c|c} (p | q) & \Leftrightarrow & \overline{p \wedge q} \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \quad (S)$$

Z tabulky je zřejmé, že se nestane, aby pro $p = q = 1$ byla ph Shefferovy funkce 1; proto se někdy čte p neslučitelno s q .

V tabulce 1 předešlého článku jsme poznali pravdivostní funkci f_{15} jako negaci $f_2 = p \vee q$. Platí tedy $f_{15} = \overline{p \vee q}$. Můžeme proto zapsat zákon (P) výrokové logiky, k němuž také připojujeme tabulku ph.

$$\frac{(p \downarrow q)}{\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \frac{\overline{p \vee q}}{\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}} \quad (\text{P})$$

Zápis Peirceovy funkce $p \downarrow q$ lze také číst *ani ne p, ani ne q* (např. *ani nekouřím, ani nepiji alkohol*, kde p značí výrok *kouřím*, q značí výrok *piji alkohol*), nebo se čte jen p *ani* q .

Z pravdivostní tabulky Shefferovy funkce a z pravdivostní tabulky Peirceovy funkce je zřejmé, že pro obě tyto funkce platí komutativní zákon (viz druhý a třetí řádek uvedených tabulek):

$$(p \mid q) \Leftrightarrow (q \mid p), \quad (10 \text{ s})$$

$$(p \downarrow q) \Leftrightarrow (q \downarrow p) \quad (10 \text{ p})$$

Ukážeme pozoruhodnou vlastnost, že negaci lze nahradit jednak Shefferovu spojkou, jednak Peirceovu spojkou:

$$\frac{\neg p}{\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array}} \Leftrightarrow \frac{(p \mid p)}{\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}} \quad (11 \text{ s})$$

$$\frac{\neg p}{\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array}} \Leftrightarrow \frac{(p \downarrow p)}{\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}} \quad (11 \text{ p})$$

V obou tabulkách výsledné ph srovnáme s prvním a čtvrtým řádkem ph definičních tabulek uvedených pod (S) a pod (P).

Transformace konjunkce (logického součinu) a disjunkce (logického součtu) na Shefferovu a na Peirceovu funkci plyne z následujících tautologií, nebo lépe z postupů uvedeného v jejich důkazech.

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \mid q) \mid (p \mid q)] \quad (12 \text{ s})$$

Důkaz: $p \wedge q = \overline{\overline{p \wedge q}} = \overline{p \mid q} = (p \mid q) \mid (p \mid q)$. Abychom zkrátili zápis důkazu, píšeme jen rovnítko místo přesnějšího $(p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{\overline{p \wedge q}}$; $\overline{\overline{p \wedge q}} \Leftrightarrow \overline{p \mid q} \quad p \mid q \Leftrightarrow [(p \mid q) \mid (p \mid q)]$; podobně i dále.

$$(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \mid p) \mid (q \mid q)] \quad (13 \text{ s})$$

Důkaz: $p \vee q = \overline{\overline{p \vee q}} = \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}} = \overline{\overline{p} \mid \overline{q}} = (p \mid p) \mid (q \mid q)$.

$$(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)] \quad (13 \text{ p})$$

$$\text{Důkaz: } p \vee q = \overline{\overline{p \vee q}} = \overline{p \downarrow q} = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)] \quad (12 \text{ p})$$

$$\text{Důkaz: } p \wedge q = \overline{\overline{p \wedge q}} = \overline{\overline{p} \downarrow \overline{q}} = \overline{p \downarrow q} = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

Transformaci implikace a ekvivalence na Shefferovu a Peirceovu pravdivostní funkci bychom už nemuseli provádět. Víme totiž, že spojky $(\overline{}, \wedge)$, $(\overline{}, \vee)$ tvoří funkčně úplný systém logických spojek a spojka $\overline{}$ (non) a obě spojky $\wedge$ (et), $\vee$ (vel) jsme již na obě neklasické spojky transformovali. Přesto provedeme transformaci na obě neklasické spojky.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \mid (q \mid q)] \quad (14 \text{ s})$$

$$\text{Důkaz: } p \Rightarrow q = \overline{p \wedge \overline{q}} = p \mid \overline{q} = p \mid (q \mid q)$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q] \quad (14 \text{ p})$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } (p \Rightarrow q) &= \overline{\overline{p \wedge \overline{q}}} = \overline{\overline{p} \downarrow \overline{q}} = \overline{\overline{p} \downarrow q} = (\overline{p} \downarrow q) \downarrow (\overline{p} \downarrow q) = \\ &= [(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q] \end{aligned}$$

K dalším významným vlastnostem obou uvedených pravdivostních funkcí patří, že nejsou asociativní. Ani jedna z funkcí

$$[(p \mid q) \mid r] \Leftrightarrow [p \mid (q \mid r)], \quad [(p \downarrow q) \downarrow r] \Leftrightarrow [p \downarrow (q \downarrow r)]$$

není tautologií. Stačí provést pravdivostní vyhodnocení obou ekvivalencí třeba pro $p = q = 1, r = 0$, abychom zjistili, že levé strany mají ph 1 a pravé strany ph 0, takže obě ekvivalence mají ph 0 a nikoliv ph 1. Vzniká otázka, jak chápat zápis $p \mid q \mid r$ a zápis $p \downarrow q \downarrow r$, popř. obdobné zápisy pro 4, 5, 6, ..., n proměnných. Odpověď dávají tyto dvě ekvivalence (Sn) a (Pn), jež jsou tautologiemi. Obě tautologie jsou doplněny pravdivostními tabulkami, z nichž plyne, že ph $(p \mid q \mid r)$ stanovíme jako negaci ph konjunkce těchto proměnných, tedy jako ph $\overline{p \wedge q \wedge r}$ a rovněž ph $(p \downarrow q \downarrow r)$ je negací výrazu v závorce, tedy jako ph $\overline{p \vee q \vee r}$ (viz tabulka 4).

Např. výraz $p \mid q \mid r \mid s \mid t$ má pro $p = q = s = 1, r = t = 0$ ph 1; výraz $p \downarrow q \downarrow r \downarrow s \downarrow t$ má při stejných ph výrokových proměnných ph 0.

Jak se s neklasickými spojkami pracuje, ukážeme na pravdivostní funkci $H = [p \Rightarrow (q \wedge r)] \vee \overline{q}$; převedme ji na funkci a) jen se spojkou $\downarrow$, b) jen se spojkou $\mid$

Řešení:

$$\begin{aligned} H &= \overline{p} \vee (q \wedge r) \vee \overline{q} = \overline{p} \vee [(q \vee \overline{q}) \wedge (\overline{q} \vee r)] = \overline{p} \vee \overline{q} \vee r = \\ &= \overline{\overline{\overline{p} \vee \overline{q} \vee r}} = \overline{\overline{p} \downarrow \overline{q} \downarrow r} = (\overline{p} \downarrow \overline{q} \downarrow r) \downarrow (\overline{p} \downarrow \overline{q} \downarrow r) = \\ &= \{[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \downarrow r]\} \downarrow \{[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \downarrow r]\} \end{aligned}$$

tím je úkol splněn. Poslední zápis lze ještě upravit na tvar

$$\{[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)] \downarrow r\} \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow p] = [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \downarrow r] \downarrow 0.$$

O posledních dvou tvarech se ještě zmíníme.

Při vyjádření funkce H jen spojkou Shefferovou vyjděme z již získaného tvaru. Platí

$$\begin{aligned} H &= \bar{p} \vee \bar{q} \vee r = \overline{\overline{\bar{p}} \vee \overline{\bar{q}} \vee \overline{r}} = \overline{p \wedge q \wedge \bar{r}} = \\ &= p \mid q \mid \bar{r} = p \mid q \mid (r \mid r). \end{aligned}$$

Při některém elektrotechnickém využívání dvou neklasických spojek vyhovuje často jen vyjádření dané pravdivostní funkce spojkami ($\overline{}$, $\mid$) nebo ($\overline{}$, $\downarrow$). U funkce H to byly její tvary:

$$H = \overline{\bar{p} \downarrow \bar{q} \downarrow r}, \quad H = p \mid q \mid \bar{r}$$

Tabulka 4

p	q	r	$\overline{p \wedge q \wedge r} \Leftrightarrow (p \mid q \mid r) \dots (S_n)$			$\overline{p \vee q \vee r} \Leftrightarrow (p \downarrow q \downarrow r) \quad (P_n)$		
1	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1

Uvedený příklad transformace upozorňuje na zajímavý vztah mezi tvary úndf a únkf na straně jedné a spojkami ($\overline{}$, $\mid$, $\downarrow$, $\wedge$, $\vee$) na straně druhé. V předešlém článku jsme transformovali funkci G na (úndf G) z níž byly utvořeny tvary (a), (b), a na (únkf G), z níž vznikly tvary (c), (d). Uvedeme zde výsledky těchto úprav a připíšeme další zajímavé vztahy s uplatněním spojek $\mid$, $\downarrow$. Úpravy jsou zřejmé a nepotřebují komentáře.

$$G = (p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) = \quad (\text{úndf } G)$$

$$= \overline{(p \wedge q \wedge r) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})} = \quad (\text{a})$$

$$= (p \mid q \mid r) \mid (\bar{p} \mid \bar{q} \mid r) \mid (\bar{p} \mid \bar{q} \mid \bar{r}) = \quad (\text{a}')$$

$$= (p \vee q \vee r) \mid (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \mid (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \quad (\text{a}'')$$

$$G = (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \vee (p \vee q \vee \bar{r}) \vee (p \vee q \vee r) = \quad (\text{b})$$

$$= (\bar{p} \downarrow \bar{q} \downarrow \bar{r}) \vee (p \downarrow q \downarrow \bar{r}) \vee (p \downarrow q \downarrow r) \quad (\text{b}')$$

$$G = (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \wedge \\ \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) = \quad (\text{únkf } G)$$

$$= \overline{\bar{p} \vee q \vee r} \vee \overline{\bar{p} \vee q \vee \bar{r}} \vee \overline{p \vee \bar{q} \vee r} \vee \overline{p \vee \bar{q} \vee \bar{r}} \vee \overline{\bar{p} \vee \bar{q} \vee r} = \quad (c)$$

$$= (\bar{p} \downarrow q \downarrow r) \downarrow (\bar{p} \downarrow q \downarrow \bar{r}) \downarrow (p \downarrow \bar{q} \downarrow r) \downarrow (p \downarrow \bar{q} \downarrow \bar{r}) \downarrow (\bar{p} \downarrow \bar{q} \downarrow r) = \quad (c')$$

$$= (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \downarrow (p \wedge \bar{q} \wedge r) \downarrow (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \downarrow \\ \downarrow (\bar{p} \wedge q \wedge r) \downarrow (p \wedge q \wedge \bar{r}) \quad (c'')$$

$$G = \overline{p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}} \wedge \overline{p \wedge \bar{q} \wedge r} \wedge \overline{\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}} \wedge \\ \wedge \overline{\bar{p} \wedge q \wedge r} \wedge \overline{p \wedge q \wedge \bar{r}} = \quad (d)$$

$$= (p \mid \bar{q} \mid \bar{r}) \wedge (p \mid \bar{q} \mid r) \wedge (\bar{p} \mid q \mid \bar{r}) \wedge (\bar{p} \mid q \mid r) \wedge (p \mid q \mid \bar{r}) \quad (d')$$

Stejně zajímavé vztahy, které jsou mezi úndf a tvary se spojkami $(\overline{}, \mid), (\overline{}, \downarrow, \vee), (\overline{}, \vee, \mid)$ a mezi únkf a tvary se spojkami $(\overline{}, \downarrow), (\overline{}, \mid, \wedge), (\overline{}, \wedge, \downarrow)$ platí také mezi ndf a nkf, tj. normálními formami (neúplnými).

$$G = (p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \quad (\text{ndf } G)$$

$$= (p \mid q \mid r) \mid (\bar{p} \mid \bar{q}) = \quad (a^*)$$

$$= (p \vee q \vee r) \mid (\bar{p} \vee \bar{q}) = \quad (a^{**})$$

$$= (\bar{p} \downarrow \bar{q} \downarrow \bar{r}) \vee (p \downarrow q) \quad (b^*)$$

$$G = (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{p} \vee r) \wedge (p \vee \bar{q}) = \quad (\text{nkf } G)$$

$$= (\bar{p} \downarrow q) \downarrow (\bar{p} \downarrow r) \downarrow (p \downarrow \bar{q}) = \quad (c^*)$$

$$= (p \wedge \bar{q}) \downarrow (p \wedge \bar{r}) \downarrow (\bar{p} \wedge q) = \quad (c^{**})$$

$$= (p \mid \bar{q}) \wedge (p \mid \bar{r}) \wedge (\bar{p} \mid q) \quad (d^*)$$

Všech těchto osm zápisů funkce G , stejně jako předcházejících dvanáct zápisů této funkce má při stejném základním sloupci pravdivostních hodnot (viz tabulka 3 v minulém článku) vždy výsledný sloupec ph 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1.

Všimneme si dalších vlastností Shefferovy a Peirceovy funkce, které si čtenář snadno dokáže sám.

$$[(p \mid p) \mid p] \Leftrightarrow 1 \quad (15 \text{ s})$$

$$[(p \downarrow p) \downarrow p] \Leftrightarrow 0 \quad (15 \text{ p})$$

Když Z je pravdivostní funkce, pak platí tautologie

$$\{Z \mid [(p \mid p) \mid p]\} \Leftrightarrow \bar{Z}, \text{ resp. } (Z \mid 1) \Leftrightarrow \bar{Z}, \quad (16 \text{ s})$$

$$\{Z \mid [(p \downarrow p) \downarrow p]\} \Leftrightarrow \bar{Z}, \text{ resp. } (Z \downarrow 0) \Leftrightarrow \bar{Z}. \quad (16 \text{ p})$$

Při transformaci ekvivalence na Shefferovu funkci a na Peirceovu funkci platí:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\{[p \mid (q \mid q)] \mid [q \mid (p \mid p)]\} \mid 1), \quad (17 \text{ s})$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \{[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow p]\} \quad (17 \text{ p})$$

Následující poznámka se týká především názvů některých pravdivostních čili Boolových (čti búlových) funkcí běžně používaných v elektrotechnické literatuře; chceme jí připomenout jednak aplikace pěti klasických logických spojek, které jsme probrali v minulém článku, jednak aplikace neklasických spojek Shefferovy ($\mid$) a Peirceovy ($\downarrow$), jimž jsme věnovali pozornost v tomto článku.

Někdy se konjunkce (logický součin $p \wedge q$) značí také $p \& q$ nejčastěji však $p \cdot q$ nebo jen pq a nazývá se AND (v angličtině toto slovo značí spojku *a*). Normální nebo úplná normální konjunktivní forma se pak nazývá normální nebo úplná normální součinná forma.

Pro disjunkci (logický součet $p \vee q$) se v technické literatuře užívá též znaku $+$, tedy $p + q$ a tato spojka se nazývá OR (v angličtině značí nebo). Místo o normální nebo úplné normální disjunktivní formě se pak jedná o normální nebo úplné normální součtové formě.

Negace konjunkce (logického součinu), jež se zapíše $\overline{p \wedge q}$ nebo $\overline{p \& q}$, nebo $\overline{p \cdot q}$ nebo $\overline{pq}$, je Shefferovou pravdivostní funkcí $p \mid q$ a její spojka v technické literatuře se nazývá NAND (písmeno N je zkratkou negace).

Negace disjunkce $\overline{p \vee q}$ nebo $\overline{p + q}$ je Peirceova pravdivostní funkce $p \downarrow q$ a nazývá se NOR (*ne nebo* čili *ani ne*).

Při užívání znaku $\oplus$, jenž se zapisuje mezi výrokové proměnné, tedy $p \oplus q$, jde o *nonekvivalenci*, čili o tzv. vylučovací (exkluzivní) disjunkci, kterou jsme poznali v tabulce 1 minulého článku jako funkci $f_{10} = p \Leftrightarrow q$. V logické literatuře se pro *vylučovací disjunkci* používá znak $\underline{\vee}$ nebo znak $\vee\vee$, a latinsky se čte toto vylučovací nebo slovem *aut*. Tato neklasická spojka sama o sobě ani ve spojení s negací netvoří funkčně úplný systém.

Cvičení :

1. Zapište v minulém článku uvedenou funkci $F = [p \Leftrightarrow (q \wedge r)] \vee \vee (q \Rightarrow \bar{p})$ ve tvaru únkf (úndf).
2. O platnosti tautologií (15s), (15p), (16s), (16p), (17s), (17p) se přesvědčte tabulkovou metodou.
3. Dokažte tabulkovou metodou, že formule (12s), (13p), (14s), (14p) jsou také pořadě tautologie (17s), (17p). Ukažte, že též platí

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) &\Leftrightarrow [(p \mid q) \mid 1], \\
(p \vee q) &\Leftrightarrow [(p \downarrow q) \downarrow 0], \\
(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow [(p \mid (p \mid q))], \\
(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \{[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow 0\}, \\
(p \Leftrightarrow q) &\Leftrightarrow (\{[p \mid (p \mid q)] \mid [q \mid (q \mid p)]\} \mid 1), \\
(p \Leftrightarrow q) &\Leftrightarrow \{[(p \downarrow q) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow q) \downarrow q]\}
\end{aligned}$$

4. Ke každé z únkf F a úndf F z cvičení 1. zapište úpravy těchto forem jen se spojkami $(\overline{}, \downarrow)$, $(\overline{}, \wedge, \mid)$, $(\overline{}, \wedge, \downarrow)$ a se spojkami $(\overline{}, \mid)$, $(\overline{}, \wedge, \downarrow)$, $(\overline{}, \wedge, \mid)$ obdobně, jako bylo provedeno s únkf G a s úndf G .
5. Určete výsledný sloupec pravdivostních hodnot funkce $K = (p \oplus q) \vee [p \downarrow (q \downarrow \overline{p})]$ a dokažte, že i funkce $\overline{p \Leftrightarrow q}$, resp. $p \underline{\vee} q$ nabývá stejných pravdivostních hodnot.
6. Dokažte, že funkce $[p \downarrow (q \mid \overline{p})] \Rightarrow (p \oplus q)$ je tautologie a funkce $[(p \oplus q) \Rightarrow \overline{q}] \wedge (p \vee q)$ je splnitelná formule.

FYZIKA

Měření teploty přechodu PN

RADOMÍR BAŽURA, gymnázium Přerov

1. Úvod

Současné široké proniknutí elektroniky prakticky do všech oborů lidské činnosti bylo umožněno využitím polovodičových součástek. Polovodičové součástky mají oproti elektronkám řadu předností, hlavně malé rozměry a malý příkon, ale jejich nevýhodou je značná závislost jejich funkce na teplotě. Tato závislost vyplývá z fyzikálních vlastností polovodičů. Rozhodující je přitom teplota uvnitř součástky. Teplota PN přechodu je jednou z veličin výrazně ovlivňujících vlastnosti přechodu PN. Vystupuje např. v rovnici voltampérové charakteristiky polovodičové diody (obr. 1).

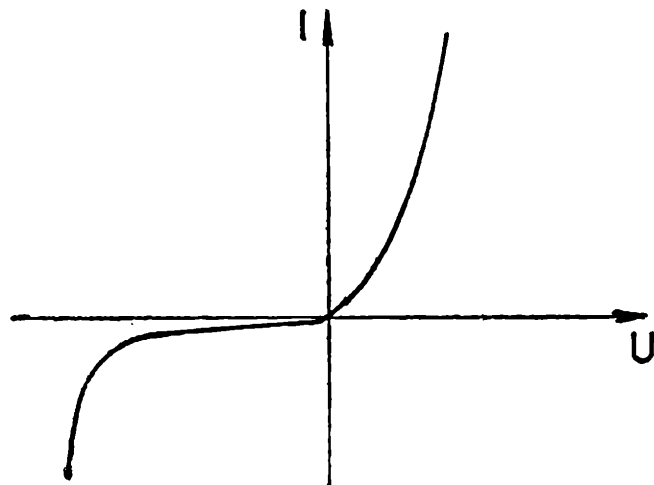
$$I = I_s \cdot \left(\exp \frac{U}{U_T} - 1 \right) \quad (1)$$

Ve vztahu (1) je U vnější napětí připojené k PN přechodu. I_s je tzv. klidový proud, jehož velikost závisí na fyzikálních vlastnostech PN přechodu. Symbolem U_T je označen výraz

$$U_T = \frac{k \cdot T}{e}, \quad (1a)$$

kde k je Boltzmanova konstanta ($1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$), T absolutní teplota přechodu PN, e je elementární náboj ($1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

Proto správná funkce polovodičových součástek s PN přechody (dioda, tranzistor atd.) je podmíněna udržení teplot PN přechodů v součástce



Obr. 1

v určitém rozmezí teplot, které ke každé součástce udává její výrobce ve svém katalogu (viz. např. [2]).

Teplota uvnitř součástky se však vlivem tepelné vodivosti polovodiče, z něhož je součástka vyrobena, a pouzdra součástky nemusí rovnat teplotě okolí. Teplota uvnitř součástky se většinou dosti liší od teploty okolí a závisí i na výkonu, který součástka přenáší. Při přenášení větších výkonů se součástka značně zahřívá a nemá-li dojít ke zhoršení jejích funkčních vlastností, je třeba ji chladit např. pomocí chladiče. Pro výpočet teploty uvnitř polovodičové součástky se udává přibližný vztah (viz [2]):

$$t_j = t_a + R_t \cdot P$$

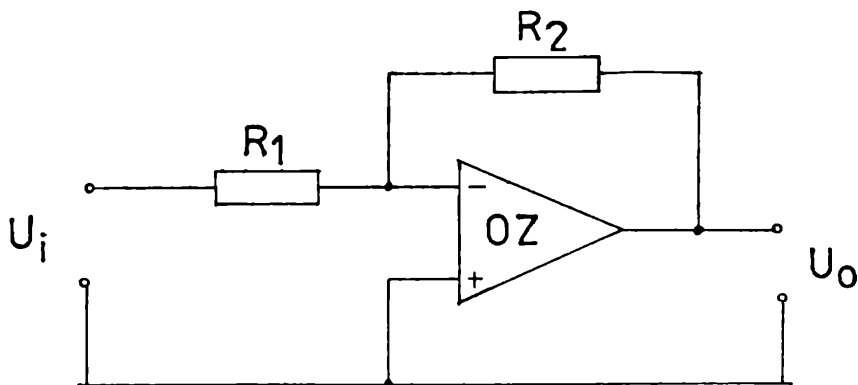
kde t_j je teplota přechodu, t_a teplota okolí, P výkon přenášený součástkou a R_t celkový tepelný odpor součástky. Tento vztah se používá při výpočtu chladičů polovodičových součástek, ale k přesnějšímu určení teploty uvnitř součástky není vhodný.

Pro měření teploty přechodu PN tranzistoru je možno využít zapojení tranzistoru ve zpětné vazbě tzv. operačního zesilovače. Jak uvidíme z teoretického vztahu, je výstupní napětí zesilovače při tomto zapojení funkcí i absolutní teploty přechodu báze-kolektor, čehož lze při vhodných podmínkách měření využít k měření teploty přechodu PN zapojeného tranzistoru. Toto měření neklade nároky na vybavení měřicí technikou a dá se provést i v amatérských podmínkách. Může být námětem např. pro práci v zájmovém kroužku fyziky apod.

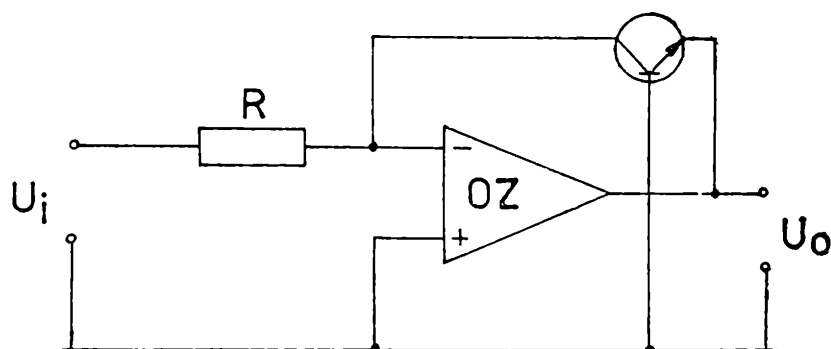
2. Operační zesilovač

Mezi zesilovači elektrických signálů zaujímají zejména ve výpočetní a měřicí technice významné místo tzv. operační zesilovače. Vyznačují se velkým zesilením (tj. poměrem výstupního napětí U_o a vstupního napětí U_i) a velkým vstupním odporem.

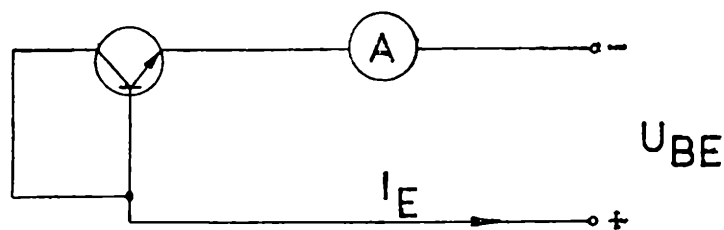
Zpravidla se vyrábějí jako samostatné celky, dnes i jako integrované obvody. K nim se do zpětné vazby připojují vhodné elektrotechnické



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

součástky: odpor, kondenzátor apod. Vlastnosti součástky ve zpětné vazbě zesilovače dávají celému zapojení charakteristické vlastnosti. Nejjednodušší zapojení operačního zesilovače je tzv. invertující zesilovač, který má ve zpětné vazbě zapojený odpor; je znázorněn na obr. 2. Pro tento zesilovač lze odvodit (viz. např. [1]):

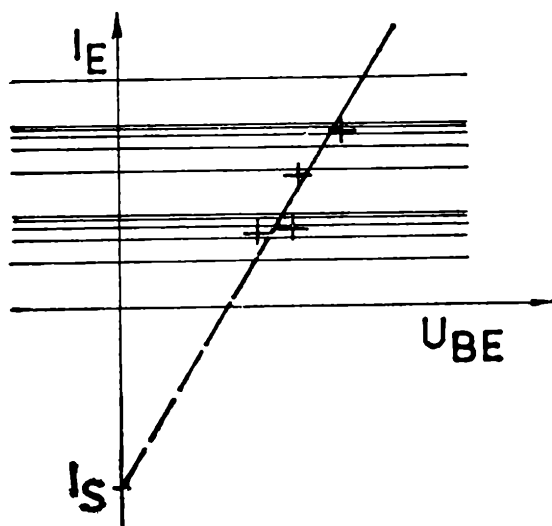
$$U_o = -\frac{R_2}{R_1} U_i$$

Pro popis vlastností PN přechodu mezi bází a emitorem v tranzistoru můžeme použít vztah (1). Jak vyplývá z funkce tranzistoru, je proud kolektoru I_c přibližně roven proudu emitorem. Proto můžeme ve vztahu

(1) za proud I považovat proud I_c . Napětí mezi bází a emitorem označíme U_{BE} . Dosadíme do vztahu (1) za U_T ze vztahu (1a) a vypočítáme U :

$$U = \frac{k \cdot T}{e} \ln \frac{I}{I_s}.$$

Tento vztah napíšeme pro $U = U_{BE}$, $I = I_c$:



Obr. 5

$$U_{BE} = \frac{k \cdot T}{e} \ln \frac{I_c}{I_s} \quad (1b)$$

Zapojíme-li tranzistor do zpětné vazby operačního zesilovače místo odporu R_2 (viz. obr. 3), je

$$I_c = \frac{U_i}{R}$$

$$\text{a platí } U_{BE} = -U_o = \frac{k \cdot T}{e} \cdot \ln \frac{U_i}{R \cdot I_s} \quad (2)$$

Popsané zapojení operačního zesilovače znázorněného na obr. 3 se nazývá logaritmický zesilovač. Ze vztahu (2) je zřejmé, že výstupní napětí logaritmického zesilovače závisí na teplotě přechodu PN tranzistoru zapojeného do zpětné vazby zesilovače.

3. Měření teploty přechodu PN

Z rovnice (2) vyjádříme teplotu T :

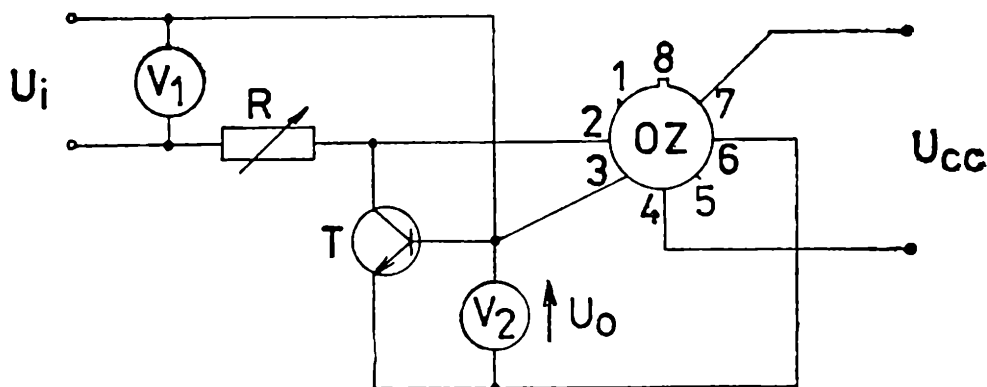
$$T = \frac{U_{BE} \cdot e}{k \cdot \ln \frac{U_i}{R \cdot I_s}} \quad (3)$$

Z veličin na pravé straně (3) můžeme přímo změřit U_i , U_{BE} a R . Klidový proud I_s však musíme stanovit z voltampérové charakteristiky popsané rovnicí (1).

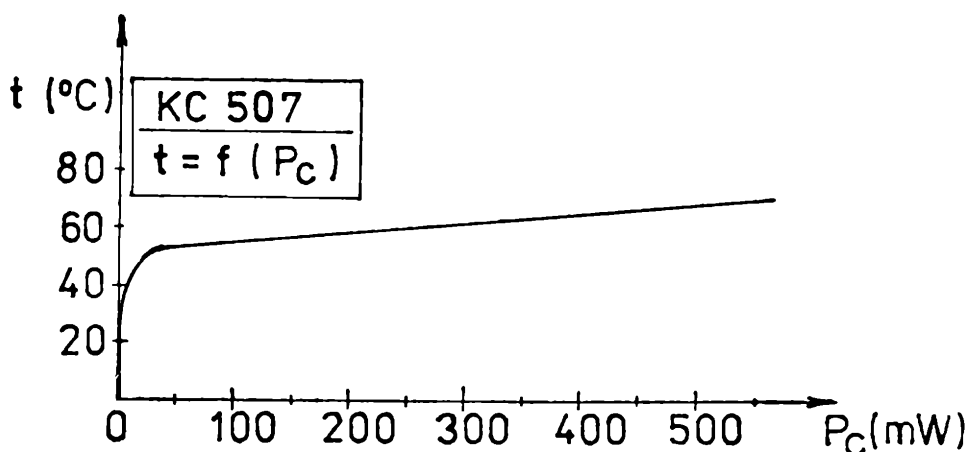
Měření se tedy musí skládat ze dvou částí:

- určení I_s tranzistoru v zapojení podle obr. 4,
- měření U_i a U_{BE} v zapojení podle obr. 3.

a) Pro určení I_s využijeme toho, že I_e je exponenciální funkcí U_{BE} , jejímž grafem v semilogaritmické síti je přímka, (viz. obr. 5), což je výhodné pro extrapolaci. U_{BE} při tomto měření volíme malé, aby tranzistorem protékaly co nejmenší proudy (až 10^{-9} A). Při malých proudech



Obr. 6



Obr. 7

I_b a I_c jsou teploty přechodů stejné. Z naměřených hodnot sestojíme graf $I_e = f(U_{BE})$ v semilogaritmické síti a z něj určíme I_s podle obr. 5.

b) Pro určení U_i a U_{BE} použijeme zapojení podle obr. 3. Na místě odporu R zapojíme odporovou dekádu. Napájecí napětí volíme podle použitého operačního zesilovače. Při měření můžeme měnit U_i i R .

4. Výsledky měření

Pro měření je možno použít operační zesilovač MAA 741 a tranzistor KC 507, dále pak měřicí přístroje UNI 10 a Tesla BM 518 (pro měření I_e) a odporovou dekádu L 111. Lze však použít i dostupnější přístroje — např. Metra DU 10 (Avomet) a při měření závislosti I_e na U_{BE} měřit v oblasti přiměřeně větších proudů a napětí.

Na obr. 6 je nakresleno montážní schéma měřicí aparatury.

Na obr. 7 je uvedena naměřená závislost teploty PN přechodu na výkonu přenášeném tranzistorem.

I přes poměrně složitou teorii je měření poměrně jednoduché a při pečlivém měření dává dobré výsledky. Měření je příkladem toho, jak lze makroskopicky měřit veličiny popisující děje v mikrosvětě, jinak utajené přímému pozorování.

Literatura :

- [1] Amatérské rádio pro konstruktéry č. 3/roč. XXXI
- [2] Konstrukční katalog Tesla Rožnov sv. C (1975—76)

Několik novinek z oblasti měřicích jednotek

Ing. dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ. CSc., Praha

V říjnu minulého roku (přesněji od 17. do 21. října 1983) konala se v Paříži 17. Generální konference vah a měr, která je vrcholným orgánem Metrické konvence. Metrická konvence představuje vlastně Mezinárodní organizaci vah a měr, existující letos již 109. rok, a mající dnes celosvětový rozhodující význam v oblasti měřicích jednotek a v jejich realizacích, jimiž jsou etalony.

Konference přijala několik významných usnesení, které se týkají jednotek a kromě toho byla podána při zasedání řada významných informací z téže problematiky.

Prvním, nejvýznamnějším bodem na pořadu jednání bylo přijetí *nové definice první ze základních jednotek SI metru*.

Vzhledem k významnosti tohoto bodu uvedeme si po krátké historické reminiscenci týkající se metru nezkrácené znění první z důležitých usnesení konference.

Metr byl definován první Generální konferencí vah a měr, konané v roce 1889, jako délka mezinárodního platinového prototypu uloženého v Pavilonu de Breteuil.

V roce 1960 přijala jedenáctá Generální konference svým 6. usnesením novou definici metru, založenou na vlnové délce oranžového záření vysílaného atomem kryptonu 86. Tato definice, dosud platná, umožňovala mnohem přesnější realizaci jednotky délky pomocí přirozeného a univerzálně použitelného etalonu. Podle pokynů téže konference (obsažených v 7. usnesení) vypracoval Mezinárodní výbor vah a měr (CIPM) instrukce, umožňující zavedení této definice do praxe a zvolil sekundární etalony vlnové délky pro interferenční měření délky.

Od roku 1960 zaznamenaly práce spojené s využitím laserů v oblasti měření frekvence a s měřením jejich vlnových délek významných výsledků. V návaznosti na tyto práce doporučila čtrnáctá Generální konference vah a měr v roce 1975 ve svém 1. usnesení metrologickým laboratořím

členských států a Mezinárodnímu úřadu vah a měr pokračovat v těchto pracích za koordinace CIPM.

Ve skutečnosti bylo od této doby zjištěno, že používané lasery představují etalony vlnové delky, jejichž přesnost a reprodukovatelnost přesahuje v těchto vlastnostech záření kryptonu 86 vystupujícího v definici metru. Pokrok zaznamenaný v tomto směru byl rozhodující.

Mezinárodní výbor vah a měr studoval za asistence svých Poradních výborů s přihlédnutím ke všem uvedeným aspektům otázku nové definice metru. Jeho Poradní výbor pro definici metru a Poradní výbor pro jednotky zvážily pozorně všechny vědecké skutečnosti, o které by se mohl opírat takový návrh. Současně byla diskutována forma, kterou by měla mít nová definice. Rovněž byly zvažovány praktické důsledky navrhované změny. Bylo dohodnuto, že definice založená na rychlosti světla přinese od nynějška významné zlepšení v praxi prováděných nejpresnějších měření délek, aniž by to způsobilo obtíže v jakémkoliv jiném směru.

Mezinárodní výbor vah a měr konstatoval, že nová definice, která je navrhována, plně vyhovuje praktickým účelům. Ve srovnání s jinými definicemi základních jednotek SI poskytuje maximální záruku, že zůstane po dlouhou dobu beze změny.

V souladu s uvedenými skutečnostmi navrhl Mezinárodní výbor vah a měr sedmnácté Generální konferenci toto usnesení:

*Sedmnáctá Generální konference vah a měr
po uvážení,*

— že současná definice metru neumožňuje realizaci metru s dostatečnou přesností, jež by pokrývala všechny požadavky;

— že pokrok dosažený v aplikacích laserů umožňuje získat záření reprodukovatelnější a snáze získatelné, nežli je etalonové záření lampy kryptonu 86;

— že pokrok uskutečněný v měření frekvence a vlnové délky příslušných záření umožnil dosažení souhlasných stanovení rychlosti světla, jejíž přesnost je omezena v principu realizací metru podle jeho současné definice;

— že hodnoty vlnových délek stanovené pomocí měření frekvence a dané hodnoty rychlosti světla dosahují vyšší přesnosti proti hodnotám, které lze získat porovnáváním s vlnovou délkou etalonového záření kryptonu 86;

— že se naskýtá výhoda, zejména pro astronomii a geodezii, podržet beze změny hodnotu rychlosti světla doporučenou v roce 1975 patnáctou Generální konferencí vah a měr, a to její 2. rezolucí ($c = 299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$);

— že nová definice metru byla uvažována v různých formulacích, přičemž cílem všech bylo získat rychlost světla s přesnou hodnotou,

rovnou doporučené hodnotě a že její zavedení nezpůsobí žádnou vážnější diskontinuitu jednotky délky, počítá-li se s relativní nejistotou ve výši $\pm 4 \cdot 10^{-9}$ nejlepších realizací metru podle dosavadní definice;

— že byly konzultovány a zásadně diskutovány rozličné formy, ať již se jednalo o dráhu uraženou světlem za určitý čas, nebo o vlnovou délku záření s frekvencí měřenou nebo stanovenou a bylo shledáno, že jsou rovnocenné, přičemž konečné rozhodnutí vyznělo ve prospěch formy první;

— že Poradní výbor pro definici metru je již nyní v stavu vydat instrukce pro uvedení takové definice do praxe, instrukce, které mohou obsahovat také používání oranžového záření kryptonu 86, používaného dosud jako etalon a které mohou být později doplněny nebo revidovány;

rozhoduje takto

1. Metr je délka dráhy, kterou urazí (uběhne) ve vakuu světlo za dobu $1/299\,792\,458$ sekundy.

2. Definice metru platná od roku 1960, založená na přechodu mezi hladinami $2p_{10}$ a $5d_5$ atomu kryptonu 86 se ruší.

Mezinárodní výbor vah a měr pokládá mimoto za nutné poskytnout praktikům údaje o obecných pravidlech, jež je zapotřebí respektovat, aby se nová definice uvedla do praxe a aby se zajistila jednotnost zejména v laboratorích délek.

Podle toho sedmnáctá Generální konference vah a měr přijala následující rezoluci, v níž žádá Mezinárodní výbor vah a měr — aby zařídil vypracování instrukce pro praktické zavedení nové definice metru,

- aby zvolil záření, která by mohla být doporučena jako etalony vlnové délky pro interferenční měření a zařídil vypracování instrukce k jejich používání,
- aby pokračoval v začatých studiích směřujících ke zdokonalení etalonů.

Další jednání se týkalo *hmotnosti a příbuzných veličin*.

Uchovávání mezinárodního prototypu kilogramu či obecněji platinoiridiových prototypů kilogramu a přesnost měření hmotnosti nese s sebou problémy, které byly zdůrazněny 1. usnesením šestnácté Generální konference vah a měr (1979). Některé z těchto problémů mají být vyřešeny dříve, nežli se začne s ověřováním státních etalonů (členských států), jež bylo doporučeno 1. usnesením patnácté Generální konference (1975).

Další problémy se objevují při měření veličin přímo odvozených od hmotnosti, jako třeba hustoty, síly nebo tlaku.

Pro studium zmíněných problémů a k zabezpečení akcí s tím spojených zřídil Mezinárodní výbor v roce 1980 Poradní výbor pro hmotnost a příbuzné veličiny (mezinárodně značený CCM — z francouzského Comité Consultatif pour les Masses et les grandeurs apparentées).

Usnesení 1 z roku 1979 zdůraznilo nutnost věnovat zvýšenou pozornost opravě na tlak vzduchu při porovnávání hmotností. Tato korekce závisí zejména na hustotě vzduchu, která je počítána nejčastěji z tlaku, teploty a vlhkosti.

Mezinárodní výbor se domnívá, že lze zlepšiti jednotnost měření hmotnosti a současně jejich přesnost, bude-li dán do náležitého souladu způsob výpočtu hustoty vzduchu v různých laboratořích.

V souladu s tím, co bylo řečeno, *přijala Generální konference další rezoluci tohoto znění :*

Sedmnáctá Generální konference vah a měr připomíná 1. rezoluci šestnácté Generální konference vah a měr (1979), vztahující se k měření hmotnosti,

s uvážením, že korekce na vztlak vzduchu zásadně závisí na hustotě okolního vzduchu a že jednotnost a přesnost měření hmotnosti lze zlepšit výzvou ke všem laboratořím, aby při výpočtu hustoty vzduchu z okolních podmínek používaly jednotný vztah, který by byl všem oznámen a který by byl uznán za dostatečně přesný,

a žádá Mezinárodní výbor vah a měr,

- aby vytvořil a doporučil takovýto vztah,
- aby sledoval a koordinoval výzkumné studie již započaté, nebo ty, jež mají být uskutečněny, směřující ke zlepšení experimentálního stanovení hustoty vzduchu a korekce na vztlak vzduchu,
- aby zveřejnil doporučený vztah, jakmile to umožní nejlepší experimentální stanovení.

Následujícím projednávaným problémem byla *sekunda a Mezinárodní atomový čas*.

V souvislosti s ustanoveními danými čtrnáctou Generální konferencí (1971), a to její 1. rezolucí, spolupracuje BIPM s Mezinárodním úřadem času na vytvoření Mezinárodního atomového času (značeného TAI — z francouzského názvu Temps Atomique International). Rozšíření této časové stupnice má umožnit uživatelům co nejpřesnější realizaci TAI založené na sekundě, jednotce SI.

Je tedy základním požadavkem, aby TAI byl řízen primárními etalony frekvence spočívajícími na kmitání cesia, jež realizují s nejlepší přesností definici sekundy. Těchto etalonů je ve skutečnosti malý počet. Vazby mezi těmito primárními etalony, TAI a časovými stupnicemi tvoří ve většině zúčastněných zemí další významný prvek k rozšiřování sekundy SI.

Generální konference vyslechla zprávu o projektech týkajících se realizace sekundy a jejího šíření (přenosu) prostřednictvím TAI.

Další zprávu vyslechla Generální konference na téma elektrické etalony.

Šestnáctá Generální konference (1979) doporučila svou 6. rezolucí, aby byly výhledové práce, týkající se přesnějších realizací elektrických jednotek, aktivně sledovány.

Nová metoda uchovávání ohmu, metoda vycházející z kvantifikovaného Hallova jevu slibuje nový pokrok v této oblasti. Splní-li se očekávání, bude pravděpodobné, že BIPM dá do pracovního aplikování tuto novou metodu uchovávání ohmu, tak jako dal do obdobného aplikování Josephsonův jev pro uchovávání voltu. Ampér by byl pak takto uchováván dlouhodobě s nejvyššími zárukami stability.

Avšak podobně jako Josephsonův jev používá při uchovávání voltu konstantu e/h , objevuje se u této nové metody konstanta e^2/h . Hodnoty těchto konstant nejsou dosud známy s dostatečnou přesností, aby vedly k přesným stanovením voltu a ohmu.

Spočítatelný kondenzátor umožňuje za pomoci hodnoty rychlosti světla realizaci faradu. Porovnání faradu s ohmem by mělo umožnit stanovení konstanty e^2/h s nejistotou, která by nepřesahovala několik stomiliontin.

Nadále se jeví jako nutné nové metody realizací dalších elektrických jednotek. Na některých takových metodách se pracuje ve vybraných laboratořích.

Následující zpráva se týkala *Mezinárodní praktické teplotní stupnice*.

Výhledové studie týkající se revize Mezinárodní praktické teplotní stupnice 1968 (EIPT-68; z francouzského názvu „Échelle Internationale Pratique de Température“) pokračují. Koordinuje je Poradní výbor pro termometrii (CCT — tj. Comité Consultatif de Thermométrie) při Mezinárodním výboru vah a měr.

Význačná zlepšení byla dosažena ve stanovování termodynamických teplot. To umožňuje zmenšit rozdíl mezi termodynamickou a novou stupnicí, jejíž zpřesnění v hlavních rysech předpokládá CCT v roce 1987. Teploty několika teplotních bodů byly stanoveny s nejlepší přesností. Interpolační přístroje mezi těmito pevnými body jsou předměty srovnávacích studií s účelem zlepšit reprodukovatelnost měření a vytvořit přesnější interpolační funkce.

Dále byly předneseny *problémy týkající se fotometrie a radiometrie*. Laboratoře členských zemí odpověděly velmi kladně na stanovisko šestnácté Generální konference (1979), které je vyzývalo svou 4. rezolucí, aby zintenzivnily svoji aktivitu, pokud jde o realizaci kandely podle nové definice (3. rezoluce). Na desátém zasedání Poradního výboru pro fotometrii a radiometrii (CCPR — Comité Consultatif de Photométrie et Radiométrie) konaném v roce 1982, předložilo šestnáct laboratoří zprávy pojednávající o realizacích nové definice. Řada laboratoří se také zaměřila na goniofotometrii, sloužící k odvození lumenu z kandely.

CCPR uspořádal srovnávací měření svítivosti a světelného toku, v souladu s přáním šestnácté Generální konference (4. rezoluce).

Významné pokroky v radiometrii a ve spektrometrii lze v blízké době očekávat. Čím dále tím více jsou používány křemíkové fotodiody s kvantovým přesně spočítatelným působením, radiometry pracující za velmi nízkých teplot a kalibrované ohřevem elektrickým proudem, synchrotronová záření a lasery s ovládanou intenzitou.

Pokud jde o *ionizační záření*, byli účastníci konference seznámeni s touto zprávou. Zlepšení jednotnosti měření vytváří jednu ze základních podmínek rozvoje aplikací ionizujícího záření. Ať již se jedná o průmyslové nebo lékařské aplikace nebo o ochranu osob, pokrok musí vždy mít oporu ve významných měřeních.

Jednotnost měření v těchto oblastech se značně zlepšila v průběhu posledních dvaceti let na popud Poradního výboru pro etalony ionizačních záření (CCEMRT — Comité Consultatif des Étalons de Mesure des Rayonnements Ionisants) a díky pracem úspěšně vedeným BIPM: studiu metod a měřidel, dodržování doporučení, mezinárodním porovnáváním, distribuci etalonových zdrojů, šíření Mezinárodní soustavy jednotek v zájmových oblastech atd.

Informační zpráva o *Mezinárodní soustavě jednotek* zněla takto: Poradní výbor pro jednotky (CCU — Comité Consultatif des Unités) provádí pravidelná zkušební měření směřující ke zlepšení účinnosti Mezinárodní soustavy jednotek (SI), k jejímu přizpůsobení potřebám nových oblastí nebo pokroku znalostí a techniky, se současným přihlédnutím ke koherenci, jednoduchosti a nezbytné kontinuitě. Musí přitom studovat četné návrhy podávané mezinárodními organizacemi i orgány členských zemí ale také jednotlivci, obsahující podněty k rozšíření nebo úpravám SI. I když tyto návrhy nejsou třeba na konec přijaty, jsou vždy předmětem pozorné diskuse.

CCU studoval podrobně spolu s Poradním výborem pro definici metru případné důsledky změny definice metru. Okolnostmi byl určen k tomu, aby tvořil záštitu kontinuity a koherence SI. Výsledkem zmíněných diskusí byla redakce první z uvedených rezolucí sedmnácté Generální konference vah a měr, CCU schválil její formu i obsah.

Před dalším pořadem Generální konference, věnované otázkám organizačním a ekonomickým, byl ještě předložen podrobně rozpracovaný program prací navrhovaných Mezinárodním výborem vah a měr (CIPM) na léta 1985 až 1988, obsažený v dodatcích, který bude účastníkům zaslán.

Ve vystoupeních jednotlivých delegací byla také v řadě případů podána informace o postupu při zavádění metrické soustavy v příslušné zemi, pokud tato dosud používala nebo používá nějakou soustavu starší.

Před rokem odešel prof. dr. Karel Havlíček

Doc. RNDr. KAREL ŠINDELÁŘ, CSc.



27. května 1984 uplynul právě rok ode dne, kdy nás navždy opustil prof. RNDr. Karel Havlíček.

Narodil se dne 4. září 1913 v rodině železničního úředníka v Praze.

Po maturitě na reálce v Praze-Vinohradech dokončil roku 1932 vysokoškolské studium na tehdejší přírodovědecké fakultě Karlovy university v Praze, a to v oboru matematiky a deskriptivní geometrie; roku 1939 získal doktorát přírodních věd.

Působil jako učitel na mnoha školách od tehdejší obecné a měšťanské školy přes reálku a gymnázia až po fakultu speciálních nauk ČVUT v Praze. Jako člen výboru tehdejší JČMF si získal mnoho zásluh o zachranu jejího majetku, hlavně knihovny, před okupanty. Své práci v Jednotě zůstal pak profesor Havlíček věrný po celý život. Ihned po osvobození roku 1945 věnoval všechny své síly znovuotevření a uvedení do chodu pražských vysokých škol. Na universitě byl od května 1945 asistentem, od roku 1951 docentem a od roku 1967 profesorem. Kromě toho působil externě i na mnoha dalších vysokých školách, zejména na Vysoké škole strojní a textilní v Liberci, na níž vedl katedru matematiky a položil pevné základy k její dnešní dobré vědecké úrovni.

Ve své vědecké práci se prof. Havlíček věnoval převážně geometrii. V posledním desetiletí svého života založil a vedl na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university v Praze seminář kombinatorické geometrie, z jehož členů vyrostla řada našich významných matematiků. Značně přispěl také k organizaci našeho vědeckého matematického života, například tím, že po válce byl redaktorem Časopisu pro pěstování matematiky. Mnoho svých sil věnoval popularizaci matematiky, ať již

v rámci Socialistické akademie nebo Lidové university v Praze, pro níž vytvořil a vedl katedru matematiky.

Ve své skromnosti profesor Havlíček sám o sobě říkával, že se cítí více učitelem než vědeckým pracovníkem. To souviselo s jeho povahou a zálibami, v jejichž středu byla vždy mládež a zvláště studenstvo, pro něž nikdy nelitoval práce ani námahy. Po celý svůj život bojoval za zlidštění výuky matematiky, za její zpřístupnění pro všechnu naši mládež v duchu našich nejlepších a nejpokrokovějších tradic. Mnoho obdivu získal svým pojednáním *„Zásady J. A. Komenského a naše dnešní učebnice matematiky“*, uveřejněným na pokračování roku 1960 v tehdejší časopise *Matematika ve škole*.

Vytvoření kladného vztahu mládeže k matematice pokládal prof. Havlíček za vůbec nejdůležitější úkol školy a školní výuky. Odmítal proto vyžadovat od mládeže zvládání složitých matematických vzorců nebo důkazů nazpaměť; nechtěl mít, jak sám žertovně říkával, ze studentů živé běhající encyklopedie nebo kompendia; stačilo mu, dovedl-li si student potřebný vzorec nalézt v literatuře. Ale na druhé straně na základě Pavlovova učení o vyšší činnosti člověka odmítal i opačný extrém, bránit vytváření tzv. dynamických stereotypů, což jsou sledy několika po sobě jdoucích podmíněných reflexů při činnostech, které se pravidelně opakují, například při početních postupech, mezi něž zahrnoval i pamětné zvládání vzorců často používaných i beze snahy naučit se jim nazpaměť...

Pro naši mládež napsal profesor Havlíček mnoho článků; jenom v našich *Rozhledech* jich otiskl 19, většinou vesměs po druhé světové válce. Téměř všechny jsou věnovány geometrii. Jeho poslední článek v *Rozhledech* nazvaný *Vzácné jubileum* napsal ke stému výročí narození akademika Bohumila Bydžovského (*Rozhledy*, 1980, str. 368—371). Kromě toho uveřejňoval profesor Havlíček obdobné práce pro mládež nebo k matematickému vzdělávání mládeže ve Vědě a technice mládeži, v Osvětové práci i jinde. Pro školu mladých matematiků napsal knížky *„Prostory o čtyřech a více rozměrech“* a *„Analytická geometrie a nerovnosti“*, které byly vydány v letech 1965—7 Mladou frontou. Studující mládeži věnoval své drobné, ale nesmírně užitečné práce *„Diferenciální počet pro začátečníky“* a *„Integrální počet pro začátečníky“*. S autorským kolektivem napsal i popularizační práci *„Cesty moderní matematiky“* a sám nebo se spolupracovníky vydal i další popularizační knižní publikace. Proslovil také mnoho popularizačních přednášek. S mládeží pořádal často exkurse Prahou, na nichž ukazoval studentům různé geometrické zajímavosti výtvarného umění, zejména architektury a urbanistiky.

Není proto divu, že práce prof. Havlíčka byla mnohokrát oceněna a odměněna. Již roku 1951 mu byla udělena cena Královské české společnosti nauk, roku 1960 cena ministerstva školství a Státního pedago-

gického nakladatelství za článek „Zásady J. Á. Komenského a dnešní učebnice matematiky“, roku 1968 zvláštní odměna ČSAV za publikační činnost v oblasti popularizace matematiky. Byl poctěn i řadou čestných uznání Karlovy university v Praze, Lidové university, Socialistické akademie, ROH a ČSTV, kde byl vyznamenán zlatou medailí za práci rozhodčího při akademickém mistrovství světa v šachu konaném, v Harrahově roku 1967.

Naše mládež, žáci i všichni přátelé prof. Havlíčka očekávali 4. září 1983, den jeho sedmdesátých narozenin. Ale jubilant se těchto svých narozenin již nedožil. Jeho smrtí ztratila naše věda vynikajícího pracovníka, všichni jeho žáci jedinečného učitele a celá naše veřejnost nesmírně dobrého člověka, jehož zářivá památka nikdy nevymizí ze srdcí všech, kteří ho znali.

Před 50 lety zemřela Marie Curieová-Sklodowská

FRANTIŠEK JÁCHIM, Vimperk

V červenci 1984 uplyne 50 let od smrti Marie Curieové-Sklodowské, významné badatelky v oblasti přírodní radioaktivity. Spolu se svým manželem *Pierrem Curiem* vykonala průkopnické experimentální práce atomové fyziky. Na jejich práci navazuje posléze dcera *Irena* a zeť *Frédéric Joliot*, který jakoby symbolicky završuje práci rodiny Curieových spuštěním prvního francouzského jaderného reaktoru v roce 1948.

Marie vystudovala dívčí gymnázium ve Varšavě a potom působila nějakou dobu jako vychovatelka v rodinách. Vzhledem k tomu, že v tehdejšímu Polsku nesměly ženy studovat na univerzitách, odjíždí roku 1891 do zahraničí. Cílem její cesty je Paříž, kde se zapisuje na Sorbonnu ke studiu fyziky a chemie. Ihned po skončení studií pracuje nějaký čas u *prof. G. Lippmanna*, u něj také si odbývá vědecký debut zakončený prací O magnetických vlastnostech kalených ocelí (1897). Hlavní obor jejího vědeckého zájmu je v tu dobu již určen: Roku 1895 se provdává za Pierra Curieho a oba manželé začínají zkoumat radioaktivitu látek. Od roku 1897 se Marie výhradně věnuje radioaktivitě. Podnětem jsou jí rovněž právě dokončené Bequerelovy práce. Neviditelné paprsky vycházející z různých rud v sobě skrývaly dosud nepoznané zákonitosti. Při proměňování vzorků různých druhů rud se ukázal velmi překvapivý výsledek: rudy uranové a thoriové (smolinec, autunit, chalkolit, karnotit, thorianit) září silněji než odpovídá obsahu uranu nebo thoria. Smolinec zářil 3krát silněji a chalkolit 2,2 krát více než odpovídalo zastoupení tehdy známých radioaktivních prvků. Velmi překvapivé bylo rovněž

rozdílné záření chalkolitu přírodního a umělého. Zatímco přírodní chalkolit způsobil ionizační proud $52 \cdot 10^{-12}$ A, uměle připravený vyvolával pouze proud $9 \cdot 10^{-12}$ A. Výsledky svých prací zveřejnili Curieovi v *Comptes rendus* 12. dubna 1898. Vyslovili zde domněnku, že musí existovat dosud neznámý prvek s velkou radioaktivitou. V červenci téhož roku se jim podařilo separovat několik setin gramu nového prvku se silným zářením, zářením α . Na počest své vlasti jej Marie nazývá polonium. Téhož roku objevují další prvek — radium; své sdělení uveřejňují opět v *Comptes rendus* 26. prosince. Jelikož rádiu zářilo asi 10^6 silněji než polonium, užívá Marie jeho názvu pro obecný děj záření; do vědy zavádí pojem radioaktivita. K získání radia však bylo zapotřebí velmi mnoho smolincové rudy, neboť je v ní obsaženo asi 10^{-4} %. Na žádost Curieových posílá důlní rada Kroupa zdarma 5 kg jáchymovského smolince, později opět zdarma ještě 1000 kg rudy. Potom si však i v Jáchymově uvědomili, že jejich odpady nejsou tak zcela bezcenné a ceny smolince prudce rostly. Z 8 tun smolince se podařilo získat pouze 0,120 gramu chloridu radnatého. Čisté radium získává Marie Curieová až v roce 1910. Stanoví také jeho poměrnou atomovou hmotnost na 226,4. Tato hodnota je později jen nepatrně zpřesněna. Na radiu prokázala existenci tzv. poločasu rozpadu, jako charakteristickou veličinu pro jednotlivé radioaktivní látky. Spolu s manželem vyslovuje domněnku, že radioaktivita má příčinu v dějích uvnitř atomů. Tragická smrt Pierra v roce 1906 jakoby ještě více koncentrovala vědecké práci jeho ženy, která sama pokračuje v započatém díle. V roce 1908 vydává *Dílo Pierra Curie* a roku 1910 svou *Studii o radioaktivitě* (*Traité de Radioactivité*), která má 971 stran. Roku 1914 se stává Marie Curieová ředitelkou nově vzniklého pařížského ústavu Institut de Radium.

V letech 1903 a 1911 se jí dostává nejvyšší vědecké pocty — Nobelovy ceny. Poprvé ji získává spolu s Pierrem a H. Bequerelem za objev přirozené radioaktivity, podruhé sama za objev polonia a důkaz existence radia i jeho izolaci v kovovém stavu.

Vysoká humánnost jejího pohledu na život se plně projevila v době I. světové války. S velkou dávkou hrdinství organizovala rentgenologické a radiové stanice v polních nemocnicích a lazaretech pro diagnostiku postižených.

V meziválečném období publikuje další výsledky své práce. K hlavním jejím dílům patří *La Radiologie et la guerre* (1921), *Radioactivité et phénomènes connexes* (1923), *L'isotopie et les éléments isotopes* (1924) a *Radioactivité* (1935). Za badatelskou práci jí bylo uděleno 19 čestných doktorátů a řada čestných členství ve vědeckých společnostech. Připomeňme, že byla mj. čestnou členkou Jednoty českých matematiků a fyziků i Československé chemické společnosti. V roce 1925 navštívila naši republiku: pobyla v Praze, v Jáchymově a sfářala i do Dolu Svornost.

Setkala se také se svým žákem *Františkem Běhounkem*, pozdějším akademikem, špičkovým radiologem, který u ní studoval v letech 1920–22.

Nikdy také nezapomněla na svou vlast. Když ji roku 1912 navštívila v Paříži polská delegace v čele s H. Sienkiewiczem, neopustila sice nedokončenou práci, ale poslala do Polska své nejlepší žáky *Danysze* a *Wartensteina*. Na dálku řídila práci radiologického pracoviště ve Varšavě.

Život Marie Curieové vymezený daty 7. listopadu 1867 a 4. července 1934 byl životem pro vědu a pokrok. Práce její i práce ostatních členů rodiny Curieových byly rozhodující pro zkoumání později objevených elementárních částic hmoty.

Nobelovy ceny za fyziku 1983 astrofyzikům

RNDr. MARTIN ŠOLC, CSc, UK Praha

Není bez zajímavosti sledovat fyzikální obory, v nichž byla v posledních letech udělena Nobelova cena, neboť rozhodnutí výboru Nobelovy nadace (na základě průzkumu mínění předních světových fyziků) odráží do značné míry hlavní směry rozvoje fyziky. Mezi laureáty figurují teoretičtí fyzikové, kteří se zasloužili o vytvoření teorie, která společně popisuje elektromagnetickou a slabou interakci, *A. Salam*, *S. L. Glashow*, *S. Weinberg*. Hlavně poslední z nich se zabýval také kosmologickými důsledky sjednocené teorie a je také u nás známý jako autor knihy „První tři minuty“ (Mladá fronta 1983). V minulém roce však byli Nobelovou cenou poctěni astrofyzik *S. Chandrasekhar* a fyzik *W. A. Fowler*, který se značnou část života věnoval též astrofyzice. Oba již přesáhli sedmdesát let, takže se jedná o ocenění celoživotní práce.

Subrahmanyan Chandrasekhar se narodil 19. 10. 1910 v Indii, v Lahore (nyní Pákistán). Absolvoval universitu v Madrasu, poté studoval na universitě v Cambridge v Anglii a po skončení se tam stal členem Trinity College. Od roku 1936 působí ve Spojených státech, nejprve na Harvardově universitě, pak na Yerkesově observatoři university v Chicagu, kde byl až donedávna profesorem teoretické astrofyziky.

Chandrasekharova vědecká práce zasahuje skoro do všech oblastí astrofyziky. Ve třicátých letech se věnoval hlavně otázkám vnitřní stavby hvězd a odhalil přitom zajímavé vlastnosti hvězd zvaných bílí trpaslíci. Pak se zabýval statistickými metodami v astronomii, dynamikou Galaxie a hvězdných systémů. Pak přišly na řadu problémy přenosu záření, fyzika plazmatu a nakonec relativistická astrofyzika. Své téměř

polyhistorické znalosti v astrofyzice uplatnil nejlépe jako výkonný redaktor předního světového odborného časopisu „*The Astrophysical Journal*“. Tuto funkci vykonával čtvrt století (do r. 1971) a dlužno dodat, že přísně. Již pouhý pohled na hřbety svazků časopisu v knihovně dokazuje, že s Chandrasekharovým odchodem narostla tloušťka ročníků. Vtipálkové z blízkých astrofyzikálních kruhů přitom tvrdili, že úroveň časopisu se nezměnila, jestliže by byla definována jako součin kvality a stránkového rozsahu článků.

Druhý loňský laureát Nobelovy ceny je jaderný fyzik *William A. Fowler*. Narodil se 9. 8. 1921 v Pittsburgu v Pensylvanii. Pracoval ve Spojených státech, posledně jako profesor na Kalifornském technologickém institutu. Spolu s dalšími fyziky a astrofyziky vysvětlil původ chemických prvků ve vesmíru, tedy vznik jader atomů z elementárních částic (protonů, neutronů) a lehčích atomových jader. K tzv. nukleogenezi hélia a lehkých prvků došlo na počátku rozpínání vesmíru při „velkém třesku“, další prvky vznikají průběžně v nitrech hvězd při jaderných reakcích, které kryjí energii vyzářenou hvězdami. Nejtěžší prvky vznikají při takových procesech ve hvězdách, kdy je v okolí dostatek volných neutronů. K tomu dochází zejména při explozích supernov.

Cesta k dnešní představě o vzniku prvků ve vesmíru nebyla zdaleka přímočará. Když v r. 1946 uveřejnil *G. Gamov* hypotézu o začátku rozpínání vesmíru při „velkém třesku“, měl na mysli především vysvětlení nukleosyntézy jader různých prvků v počáteční superhusté látce vesmíru. Protože se brzy ukázalo, že takto vznik těžkých prvků vysvětlit nelze, stala se pozorovaná přítomnost těžkých prvků ve hvězdách „důkazem“ konkurenční kosmologické teorie, která však vyžadovala průběžné tvoření hmoty ve vesmíru (tzv. „steady state“ teorie). V padesátých letech bylo známo již několik jaderných reakcí, při nichž ve hvězdách mohou vznikat těžší prvky. Fowler se též podílel na jejich rozpracování. Nakrátko převládla domněnka, že snad všechny těžší prvky (tedy kromě vodíku) se tvoří ve hvězdách. V případě hélia jde ovšem o zřejmý nesouhlas, poněvadž jeho zastoupení ve vesmíru představuje asi 25 % až 30 % hmotnosti veškeré látky (přesněji řečeno, zbytek až na 1 %—2 % tvoří vodík). Takové množství hélia by mohlo ve hvězdách vzniknout termojadernou syntézou vodíku teprve za mnohem delší dobu, než je nynější stáří vesmíru. Je proto velkou zásluhou *Fowlera*, *F. Hoylea*, *R. Wagonera* a dalších, kteří v šedesátých a sedmdesátých letech podrobně rozpracovali původní Gamovovu myšlenku o vzniku prvků při „velkém třesku“ a objasnili věrohodně jak pozorované množství hélia, tak i nepatrná množství dalších lehkých prvků, které se během několika prvních minut rozpínání vesmíru mohly vytvořit. W. A. Fowlera proto můžeme považovat za jednoho z tvůrců moderního obrazu o vývoji chemického složení hmoty ve vesmíru.

Pojedete o prázdninách do Postupimi?

Snad žádný návštěvník tohoto města neopomene navštívit zámek *Cecilienhof*, v němž v roce 1945 proběhla konference tří vítězných velmocí o řešení poválečných problémů.

Půjdete-li k Cecilienhofu parkem ze stanice elektrické dráhy, jež se nazývá *Neuer Garten*, pak si možná všimnete na jednom cihlovém neomítnutém domku tabule, která oznamuje, že v něm sídlí *Astronomisches Zentrum „Bruno H. Bürgel“*.

Bruno Hans Bürgel poznal během svého života obě světové války. Narodil se v roce 1875 a zemřel roku 1948. V Německé demokratické republice je znám jako nadšený popularizátor astronomie. Napsal celkem 22 knih, které vyšly v celkovém nákladu 2 milióny výtisků. Některé z nich vyšly v překladu v dalších devíti jazycích. Do češtiny byla přeložena v roce 1940 knížka *Aus fernen Welten*. Dále B. H. Bürgel napsal asi 3000 časopiseckých a novinových článků a přednášel asi ve 350 městech. Těchto jeho přednášek se uskutečnilo asi dva tisíce. Nepsal však jen o astronomii, ale i o dalších přírodovědných oborech a o problémech a otázkách filozofie, historie a výchovy. O jeho postoji k nacistickému režimu hovoří zničení mnohých výsledků jeho práce cenzurou gestapa.

Součástí Astronomického centra B. H. Bürgela je i jemu věnovaná muzejní expozice. V ní je zvláště zajímavá jeho pracovna.

Centrum B. H. Bürgela vyvíjí obdobnou činnost jako naše lidové hvězdárny. Umožňuje zájemcům pozorování hvězdné oblohy a pořádá populární přednášky. V centru je též planetárium.

Zpracováno podle materiálů, které pro redakci *Rozhledů* připravil *Arnold Zenkert*, vedoucí Astronomického centra B. H. Bürgela.



PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Profesor Ypsilon patamatematizuje reálnou situaci

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

„Patamatematizace je jeden ze způsobů“, vysvětloval profesor Ypsilon sklíčeným pacientům očekávajícím lékařský zákrok v čekárně dentistově, „jak překlenout situace, které hrozí frustrací, tj. porušením stavu psychické rovnováhy. K patamatematizaci se obvykle uchylujeme v případech, kdy je nám s postupem času stále patrnější, že situace, ve které se nacházíme, hodlá vyvrcholit způsobem katastrofickým. Podstata metody spočívá v tom, že dané reálné situaci umožníme, aby se vyřešila sama, bez nás. Dosáhneme toho tak, že provedeme tzv. patamatematický autotransfér čili samopřenos — přeneseme se do situace, kterou si sami rychle vytvoříme tak, aby její řešitelnost byla nadějnější než u situace původní.“

Jakým způsobem provedl profesor Ypsilon patamatematizaci reálné situace z čekárny zubního lékaře? Vyzval přítomné, aby provedli autotransfér do světa matematiky a pokusili se vyřešit problém, v němž sice lidský chrup opět hraje podstatnou roli, není už ale činitelem frustračním:

Existují aspoň dva obyvatelé hlavního města Prahy, kteří mají stejný chrup?

Uvědomme si, že lidský chrup obsahuje nejvýše 32 zubů, a domluvme se na tom, že slovy „dvě osoby mají stejný chrup“ budeme rozumět to, že jejich chrupy se shodují nejen v počtu, ale i v rozmístění jednotlivých zubů; přitom nám půjde pouze o zuby, které nejsou umělé. Pro úplnost se ještě umluvme, že v případě, kdy nebude jasné, zda to, co se v ústní dutině dané osoby nachází, zub je či není, bude rozhodovat stomatolog, kterého předem vybereme. Při této příležitosti si připomeňme, že zubní lékařství přiřazuje jednotlivým zubům čísla podle následujícího schématu:

8 7 6 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 6 7 8

8 7 6 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 6 7 8

zuby se stejnými čísly se přitom odlišují udáním polohy vpravo nebo vlevo a nahore nebo dole. Zuby s čísly 1 a 2 se nazývají řezáky, s číslem 3 špičáky, s čísly 4, 5 zuby třenové a konečně zuby s čísly 6, 7, 8 se nazývají stoličky.

Pro naše potřeby si však zuby v úplném chrupu budeme myslet očíslo-

vány pořadě čísla 1 až 32 třeba tak, že v uvedeném schematu začneme s číslováním vlevo nahore, projdeme horní řádek a podobně očíslovujeme i zuby v řádku dolním. Toto označení by pro zubolékařskou praxi nebylo příliš výhodné — tak např. pro špičáky bychom měli čtyři různá čísla, a to 6, 11, 22 a 27. Tento způsob nám však umožní vzájemně jednoznačně přiřadit chrupu libovolné osoby uspořádanou 32-tici složenou z jedniček a nul podle toho, zda na odpovídajících místech daného chrupu zub je či není. Tak např. chrupu, v němž chybějí pouze zuby s čísly 2, 3, 16, 20 a 31 přiřadíme uspořádanou 32-tici

[100111111111111101110111111111101],

zatímco uspořádané 32-tici

[011000000000000010001000000000010]

je přiřazen chrup, který obsahuje pouze zuby s čísly 2, 3, 16, 20 a 31. Podobně jsou na sebe zobrazeny bezzubý chrup s uspořádanou 32-ticí skládající se ze samých nul a úplný chrup s uspořádanou 32-ticí obsahující pouze jedničky.

Z existence tohoto prostého zobrazení množiny všech chrupů na množinu všech uspořádaných 32-tic složených z nul nebo jedniček vyplývá, že obě množiny mají stejný počet prvků. K určení počtu všech lidských hrupů lišících se počtem zubů nebo jejich rozmístěním tedy stačí určit počet všech uspořádaných 32-tic obsahujících pouze nuly nebo jedničky. Tento počet však určíme snadno: protože pro každý člen uspořádané 32-tice máme právě dvě možnosti — buď 0 anebo 1 —, je celkový počet uvedených uspořádaných 32-tic roven

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2}_{32\text{-krát}} = 2^{32}$$

Z tohoto výsledku vyplývá, že počet 2^{32} osob ještě neskýtá záruku, že jsou mezi nimi aspoň dvě se stejným chrupem; abychom měli jistotu, že v jisté skupině aspoň dvě takovéto osoby existují, musela by obsahovat alespoň $2^{32} + 1$ jedinců.

K tomu, abychom mohli odpovědět na problém profesora Ypsilonu, musíme ještě porovnat současný počet obyvatel Prahy s číslem 2^{32} . Vzhledem k tomu, že platí

$$2^{32} = 4 \cdot 2^{30} = 4 \cdot (2^{10})^3 = 4 \cdot 1024^3 > 4 \cdot 1000^3 = 4 \cdot 10^9$$

a že stávající počet obyvatel Prahy je menší než čtyři miliardy, dostáváme tento výsledek:

Současný počet obyvatel Prahy není dostačující k tomu, abychom měli jistotu, že aspoň dva z nich mají stejný chrup.

Většině z vás je nepochybně známo, že v závěrečné fázi tohoto řešení byl použit *Dirichletův princip* (zvaný též principem přihrádkovým), který říká:

Rozmístíme-li $n + 1$ předmětů do n přihrádek, pak aspoň v jedné přihrádce budou aspoň dva předměty.

Skutečně, připravíme-li si 2^{32} přihrádek pro všechny možné druhy chrupů a rozmístujeme-li do nich $2^{32} + 1$ osob podle složení jejich zubů, pak aspoň v jedné přihrádce budou aspoň dvě osoby, a to právě ty, které mají stejný chrup.

Porovnejme získaný výsledek s výsledkem jiného příkladu, se kterým se už někteří z vás — patrně v rámci užití Dirichletova principu — také jistě setkali. Jde o to, zda existují aspoň dva obyvatelé Prahy, kteří mají stejný počet vlasů; přitom je známo, že žádný člověk jich nemá více než 500 000.

Utvoříme-li si 500 001 přihrádek pro osoby, které mají postupně 0, 1, 2, 3, ..., 499 999, 500 000 vlasů, potom při rozmístění 500 002 nebo více osob budou aspoň v jedné přihrádce aspoň dvě osoby. A protože počet obyvatel Prahy splňuje podmínku, že je větší než 500 001, je pravda, že aspoň dva Pražané se stejným počtem vlasů existují.

Srovnáním výsledků obou příkladů docházíme k závěru, který je na první pohled překvapivý:

Zatímco existence aspoň dvou Pražanů s tímž počtem vlasů je zaručena, dva obyvatelé Prahy se stejným chrupem existovat nemusí!

Všimněte si závěrem, že nemusí existovat ani dva českoslovenští občané se stejným chrupem, a dokonce ani takoví dva obyvatelé Číny, nejlidnatější země světa! Ještě v roce 1978, kdy počet obyvatel světa činil 4 188 miliónů (viz Ilustrovaný encyklopedický slovník, heslo „obyvatelstvo“), bylo možné, že žádní dva lidé na světě nemají stejný chrup, neboť je $4\,188 \cdot 10^6 < 2^{32}$. Jistotu, že alespoň dva pozemšťané jsou stejného chrupu, máme teprve od roku 1979, kdy počet obyvatel zeměkoule překročil hranici danou číslem 2^{32} . Přesto však vám profesor Ypsilon doporučuje, abyste svému chrupu věnovali náležitou péči; získané výsledky totiž nevylučují, že jde o unikát, že stejný chrup už na celém světě neexistuje!

Umíte řešit diofantovské lineární rovnice?

V prosincovém čísle tohoto ročníku Rozhledů jste si mohli přečíst článek *Lineární diofantovské rovnice*. Bylo v něm celkem třináct úloh. Nyní připojujeme dalších pět.

1. V sešitu jsou narysovány trojúhelníky a čtyřúhelníky. Mají celkem 19 vrcholů, přičemž žádný z nich není zároveň vrcholem dvou z těchto obrazců. Kolik je trojúhelníků a kolik čtyřúhelníků?

2. Máme dva druhy konzerv, jejichž hmotnosti v gramech jsou násobky sta. Menší je lehčí než 1 kg. Na rovnoramenných vahách se podařilo vyvážit 11 menších 6 většími a závažím 1 kg. Vypočtete hmotnosti obou druhů konzerv.

3. Karel si vymyslel hádanku: „Myslím si dvě celá kladná čísla. Když větší zdvojnásobím a přičtu k trojnásobku druhého, dostanu 86. Která čísla jsem si myslel?“

Byl však velmi zklamán, když zjistil, že na hádanku není správná pouze jedna odpověď. Kolik je možností?

4. Chlapec má stavebnici, která obsahuje pouze shodné krychlové kostky o hraně 1 cm. Ze všech kostek postavil kvádr, jehož dva rozměry byly 7 cm a 8 cm. Potom stavěl kvádr, jehož podstava měla rozměry 4 cm a 11 cm. Všechny kostky nepoužil, čtyři mu zbyly.

Určete, jaký nejmenší počet kostek musel chlapec mít.

5. Milena a Jana se seznámily na pionýrském táboře. Slíbily si, že si budou dopisovat. Na dotaz Mileny, kdy má Jana narozeniny, Jana odpověděla: „Když si čísla napíšeš datum svých narozenin a číslo dne vynásobíš třinácti a číslo měsíce vynásobíš šesti, pak součet těchto součinů Ti dá 252.“

Vypočtete, kterého dne a měsíce se Jana narodila.

Jiří Mída

Kniha

Věc tak samozřejmá, že ji definovat snad ani nelze. Leda tím, že bude vzata do dlaně a pozdvižena: Ejhle

Všichni víme, co je to kniha. Morfologicky: kapitoly a odstavce, z hlediska členění obsahu; listy a stránky, řádky a litery, z hlediska rozsahu. Také je tu formát, autorské archy, ilustrace — a hřbet a vazba. Kniha je způsob jak zachytit a konzervovat myšlenky a příběhy, vzorce a pocity, zásady a naléhavé výzvy. A jistě mnoho jiného. Především však informaci. Elementem, atomem schopným informaci zachytit, je místo vyhrazené liteře. Jediné liteře. V závislosti na druhu písma, řekněme 2×1 mm, má tohle místo asi 2 mm^2 . Na standardní stránce rukopisu o 30 řádcích je takových míst asi 1800. V prostředně velké knížce o deseti autorských arších asi 360 000, tedy něco mezi čtvrt a půl milionem. Má-li být kniha napsána latinkou, dá se na každé takové místo vytisknout právě jeden z řekněme 32 znaků, což mu zaručuje kapacitu $\log_2 32 = 5$ bitů informace. Pro naši knížku to představuje kolem 360 kilobytů informace (vezme-li se 5 bitů za jeden byte), což je — jen tak mimochodem — slušná kapacita operační paměti počítače, ale podstatně méně než je běžná kapacita přídatných pamětí.

Lze tedy možnosti knihy, tohoto klasického paměťového média, srovnávat — alespoň v jisté dimenzi — s možnostmi počítače, dítěte druhé poloviny dvacátého století.

Stránku standardního rukopisu lze popsat 32^{1800} způsoby. Je to neuvěřitelně mnoho — číslo, kde za jedničkou následuje 2709 nul. Jednou z těchto možností je i prázdná stránka, složená z 1800 mezer. Téměř všechny tyto stránky jsou úplně nesmyslné. Avšak v tom zbytku jsou všechny stránky, které kdy byly napsány a které kdy napsány budou.

A taky tenhle docela skromný fejeton.

RNDr. Stanislav Komenda, CSc.

OLYMPIÁDY A SOČ

Vzpomínka na jeden televizní seriál

Před deseti lety v roce 1974 vysílala Československá televize seriál „*Setkání s talenty*“, který měl ještě pokračování v letech 1976 a 1977. V tomto seriálu se představovali žáci středních škol, kteří prokázali své nadání a znalosti v celostátních předmětových olympiádách a odborných soutěžích. Nemohli zde samozřejmě chybět ani účastníci matematické olympiády. Celkem jsme je viděli ve třech pořadech seriálu. Pokaždé soutěžili čtyři studenti vybraní z vítězů 3. kola kategorie A posledního ukončeného ročníku matematické olympiády.

Uvedeme nyní tři nejzajímavější úlohy, které se v pořadech řešily.

V roce 1974 to byla varianta úlohy ze 6. mezinárodní matematické olympiády. Zkuste si ji sami vyřešit, v televizním studiu byste na to bývali měli 5 minut času.

Představte si, že 10 podniků zahraničního obchodu v různých státech spolu koresponduje každý s každým. Ustálil a se praxe, že určité dva podniky si dopisují vždy pouze v jednom ze světových jazyků: v ruštině nebo v angličtině. Kdosi se domnívá, že mezi těmito 10 podniky musí být určité tři takové, z nichž každé dva si dopisují v téže jazyce.

Zdůvodněte tuto domněnku.

Dále si uvedeme dvě úlohy z pořadu v roce 1977, jež byly zadávány ve formě scének. Obě byly z atraktivního prostředí.

Vraťme se do dob alchymistů a řešme úlohu:

K výrobě kouzelného nápoje potřebujeme kotlík, zahradnickou žabku, pramenitou vodu a tyto suroviny: 2 ametysty, 6 řep-cukrovek, 4 srdce včelích

dělnic, 7 datlí, 9 akátových trnů, 15 lesních jahod, 3 zmijí tlamy a 1 větev cesmíny useknutou zlatým srpem.

Kotlík se naplní vodou a suroviny se v něm vaří podle těchto pravidel:

1. ametysty se musí vařit alespoň tři dny před datlemi, akátovými trny a lesními jahodami;
2. lesní jahody se musí vařit alespoň 7 dní, zmijí tlamy alespoň 4 dny, větev cesmíny alespoň 3 dny;
3. před vařením zmijích tlam se musí vařit cukrové řepy alespoň 6 dní a datle alespoň 4 dny;
4. před vařením cesmíny se musí vařit srdce včelích dělnic i akátové trny alespoň 2 dny.

Jaká je nejkratší doba výroby kouzelného nápoje?

Další úloha byla z prostředí policejní stanice kdesi v Anglii ve dvacátých letech tohoto století. Zde je text scénky:

Vyšetřovatel k pomocníkovi: „Co jste našel, Chalmersi, v naší kartotéce?“

Pomocník: „Podle výpovědi svědků je lupič ve věku asi 30 až 40 let, vysoký kolem šesti stop, s černými vlasy. Svědkové se ovšem mohli v něčem mýlit, vlasy si zločinec mohl nabarvit apod. Vybral jsem z kartotéky recidivisty, kteří mají alespoň jeden z uvedených znaků. Je jich celkem 311.“

Vyšetřovatel: „Kolik máme v kartotéce lupičů-recidivistů v uvedeném věku?“

Pomocník: „173. Z nich je černovlasých o 86 méně než všech černovlasých recidivistů v kartotéce. Těch, co jsou vysocí od 5,5, do 6,5, stopy, ale nejsou ve věku od 30 do 40 let, je 70.“

Vyšetřovatel: „To jsou všechno dost velká čísla. Kolik lupičů v kartotéce je černovlasých a zároveň vysokých od 5,5 do 6,5, stopy?“

Pomocník: „19.“

Vyšetřovatel: „To už zní lépe.“

(*Vyšetřovatel chvíli počítá.*)

Vyšetřovatel: „Je-li pachatel v naší kartotéce a má-li všechny tři znaky podle výpovědi svědků, nebude již těžké ho vyhledat.“

Scénka byla doplněna otázkou: Kolik recidivistů v kartotéce má všechny tři uvedené znaky?

V seriálu se sice soutěžilo, avšak pořady měly převážně zábavný charakter. Na závěr se vyhlašovalo pořadí, avšak ceny dostali vlastně všichni stejné, buď knížku nebo gramofonovou desku. Jedině první získal něco navíc, např. předplatné Mladého světa.

Matematicky nadaným žákům byly v seriálu věnovány celkem tři pořady. Autorkou prvního scénáře byla H. Pecharová, dalších dvou dr. J. Vinárek. Oba scénáristé vždy konzultovali s doc. J. Vyšínem, CSc. Režisérem byl Josef Vondráček.

Na „Setkání s talenty“ vzpomínal Jiří Mída

Z NOVÝCH KNIH

**Doc. RNDr. Josef Škrášek -
Ing. Zdeněk Tichý:**

ZÁKLADY APLIKOVANÉ MATEMATIKY I

Vydalo SNTL — Nakladatelství technické literatury, n. p., Praha 1 v r. 1983; publikace má 880 stran, 307 obrázků a 49 tabulek; náklad 4200 výtisků, cena váz. výt. Kčs 75.

Tato kniha (1. díl) obsahuje matematickou logiku, množiny, základy algebry, analytickou geometrii, diferenciální počet, numerické a grafické metody. Uvedený obsah je rozdělen do deseti částí mimo předmluvu, úvod do studia matematiky a v závěru jsou v dodatku uvedeny přehledy základních vzorců z jednotlivých témat. V přehledu literatury jsou zařazena význačnější díla a některé články, které pojednávají o tématech v jednotlivých částech knihy, celkem 590 titulů seřazených vždy podle jmen autorů. Mimo rejstřík znaků a symbolů je v knize zařazen jmenný a věcný rejstřík, což velmi usnadní orientaci v tak objemném svazku.

Každá z deseti částí tohoto prvního dílu je dále dělena na kapitoly výrazně očíslované a oddělené odstavci, které obsahují přehledně zapsané definice, graficky oddělené čarami, věty i s důkazy, dostatek příkladů s řešením,

poznámky a některá upozornění na zvláštnosti. Ke konci každé části je historická poznámka, v níž autoři uvádějí jména i s časovými údaji filozofů a matematiků, kteří se uvedenou tematikou zabývali. Tyto poznámky jsou velmi vhodným zdrojem poučení o historii i současnosti matematiky, uvážíme-li, že takovýchto příležitostí máme poskrovnu. Závěrem každé části je uvedeno cvičení s mnoha příklady, jejichž výsledky jsou na konci shrnuty. Celý text je proložen četnými ilustrujícími obrázky a základní formule jsou v rámečku. Celková pěkná grafická úprava současně s vhodnou a jasnou formulací a jednotnou symbolikou usnadňuje čtenáři zvládnout základy vyšší matematiky.

V naší původní nebo překladové literatuře máme poměrně dostatek hluboce teoreticky fundovaných monografií z různých matematických oborů, ale postrádáme takovou matematickou příručku, která by z jednotného hlediska seznamovala čtenáře s důležitými metodami základních oborů aplikované matematiky a zároveň obsahovala všechny potřebné úvodní pojmy a poznatky, jak uvádějí autoři této knihy v jejím úvodu. Nelze se totiž domnívat, že potřebné matematické metody se technik, vysokoškolský posluchač,

inženýr nebo vědecký pracovník může bez předchozího studia naučit z rozsáhlých teoreticky náročných monografií. Tato studijní příručka má proto vyplnit zmíněnou mezeru a stát se úvodem k podrobnějšímu studiu matematiky.

Úvodní díl Základy aplikované matematiky I je určen zejména technikům a inženýrům, kterým umožní získat potřebné matematické znalosti, ale určitě poslouží i vysokoškolákům technických oborů, neboť způsob zpracování je vhodný i pro samostatné studium.

Jaroslav Bayer

XXX. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Za přispění spolupracovníků zpracovali J. Moravčík - L. Boček - L. Bukovský - A. Vrba - F. Zítek

Vydalo SPN, Praha 1983, 168 stran, brož. 8,— Kčs.

Koncem roku 1983 se zájemcům o matematickou olympiádu dostala do rukou už třicátá ročenka MO. Tyto ročenky získaly za třicet let charakter periodika. V každé z nich je vždy zpráva o příslušném ročníku MO, seznamy nejúspěšnějších řešitelů a texty všech soutěžních úloh a jejich vzorová řešení. V pořadí třicátá ročenka se odlišuje tím, že v její úvodní části jsou dva projevy ze slavnostního zahájení celostátního 3. kola kategorie A. První z těchto projevů přednesl

ministr školství ČSR *doc. dr. Milan Vondruška* a na něj svým projevem navázal tehdejší předseda ÚV MO *prof. dr. Jozef Moravčík, CSc.* Oba hovořili o vzniku československé matematické olympiády a o jejím třicetiletém vlivu na mladou generaci. Byly připomenuty i zásluhy těch, kteří pracovali v matematické olympiádě a věnovali této činnosti mnoho svého volného času. Vymýšleli soutěžní úkoly, opravovali žákovská řešení, přednášeli pro soutěžící, věnovali se organizační činnosti apod. Prof. Moravčík vzpomněl těch, kteří pracovali v ÚV MO a třicátého ročníku se bohužel nedožili. Jsou to *Rudolf Zelinka, prof. dr. František Vyčichlo, akademik Jur Hronec, prof. dr. Karel Hruša, František Hradecký, František Veselý, František Vejsada a Petr Fabinger.*

V závěrečné části ročenky je zpráva o 22. mezinárodní matematické olympiádě, jež se konala v USA. Nikdo z československých účastníků se tehdy nevrátil domů bez ocenění, celkem získali jednu první, tři druhé a jednu třetí cenu.

Jiří Mída

Heinig Karl a kol.:

ŽIVOTOPISY VELKÝCH CHEMIKOV

(Biografii velikich chimikov. Vydal MIR, Moskva 1981, 388 strán, nečíslované obrázky, viazané, Kčs 19,—)

V priebehu roku 1982 sa do predajní zahraničnej literatúry Sovietska kniha dostala knižka ko-

lektívu autorov NDR Životopisy veľkých chemikov ako ruský preklad 4. nemeckého vydania nakladateľstva Volk und Wissen Volkseigner, Verlag Berlin 1977.

Knižka nie je iba tým, čo je uvedené v jej názve. Okrem toho, že je zborníkom životopisov slávnych chemikov, je i svojráznou históriou chémie. Každá životopisná črta obsahuje informácie aj o iných vedcoch — súčasníkoch hlavných hrdinov jednotlivých príbehov. Čitateľ tak získa lepšiu charakteristiku o chémiu určitého obdobia i súvislosti tejto disciplíny s ostatnými prírodnými vedami, najmä s fyzikou.

A to sú dôvody, prečo ju možno odporúčať do pozornosti mladým čitateľom Rozhľadov.

Väzba chémie s fyzikou, v minulosti nesporne oveľa tesnejšia než je tak tomu v súčasnosti, sa v publikácii prejavuje najviac v kapitolách Výstavba chemickej vedy, ktorá obsahuje životopisy *Roberta Boylea*, *Michaila Vasilieviča Lomonosova*, *Henry Cavendisha* a *Antoinea Lavoisiera*, Kvantitatívne zákony chémie, v ktorej sú

zaradené životopisy *Johna Daltona*, *Louis Josepha Gay-Lussaca*, *Amadea Avogadra* a *Michaela Faradaya*. V kapitole Systematizácia prvkov sú životopisy *Wilhelma Ostwalda*, *Svante Arheniusa* a v kapitole Stavba hmoty okrem iných sú životopisy *Marie Curie-Skłodowskej*, *Pierre Curieho*, *Ernesta Rutherforda* a *Nielsa Bohra*.

Bohatý menný register, zaberajúci 16 strán, obsahuje popri množstve učencov — filozofov, chemikov a technikov vyše stovky fyzikov, matematikov a astronómov s uvedením hlavných životopisných údajov i s krátkou charakteristikou vedeckých prác a miest, v ktorých pôsobili.

Medzi klady publikácie patrí veľké množstvo portrétov učencov s faximile ich diel a fotografiami prístrojov, používaných pri bádaniach.

Obsah knihy iste upúta nielen študentov stredných škôl so záujmom o prírodné vedy, ale aj ich učiteľov. Pomôže im pri vysvetľovaní základov vedeckých poznatkov prírodovedných disciplín.

J. Mička

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle §6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Tabula Pythagorica

Přehled malé násobilky, který vidíte na připojeném obrázku, byl otištěn v počtenici vydané v r. 1615 pod názvem „Arithmetyka, knížka počtův, přeložená do řeči moravské“. Její autor *Pavel Šram* uvádí v předmluvě, že knihu napsal zprvu německy na žádost pánů a měšťanů v markrabství moravském a nyní ji přeložil do řeči moravské a vytiskl vlastním nákladem. Učebnice se příliš neliší od knihy Brněnského [viz č. 7 Rozhledů], obsahuje však navíc i tzv. znaky dělitelnosti přirozených čísel dvěma, třemi, . . . , jedenácti, jež používá při krácení zlomků.

V záhlaví tabulky je dvojverší
(otištěné s tiskařskou chybou):

*Tu tabuli, chceš-li v počtu
úspěšný býti,
hleď především se z paměti
naučiti.*

Samotná Tabula vynechává jednonásobky (až na 1 krát 1), dvojnásobky začíná od 2 krát 2, trojnásobky od 3 krát 3, atd. Kdyby byla zapsána v skutečném tabulkovém uspořádání, měla by víceméně tvar trojúhelníku, ne čtverce. Práce se Šramovou tabulkou vyžadovala tedy uplatňování záměn činitelů, první ze dvou musel být menší nebo roven druhému.

[Od 4. čísla tohoto ročníku Rozhledů jsme v Pohledech do dějin nahlédli do pěti českých početnic vydaných v období 1530—1615.

Tabula Pythagorica.

En Tabuly Chyestli w v Poctu spěšný bñi.

Kter předewšym se z paměti naučiti

1 brat	1	gt	1		5		25
2 brat	2	gt	4	5 brat	6	3l	30
	3		6		7		35
	4		8		8		40
	5		10		9		45
	6		12		10		50
3 brat	7	gt	14	6 brat	6	gt	36
	8		16		7		42
	9		18		8		48
	10		20		9		54
4 brat	3	gt	9	7 brat	10	gt	60
	4		12		7		49
	5		15		8		56
	6		18		9		63
	7		21		10		70
5 brat	8	gt	24	8 brat	8	gt	64
	9		27		9		72
	10		30		10		80
	4		16		9 brat		9
5	20	10	90				
6	24	10 brat	10	gt		100	
7	28	10 brat	100	gt		1000	
8	32						
6 brat	9	gt	36				
	10		40				
	4		16				
7 brat	5	gt	20				
	6		24				
8 brat	7	gt	49				
	8		56				
9 brat	9	gt	81				
	10		90				
10 brat	10	gt	100				
10 brat	100	gt	1000				

Všechny měly zhruba stejný obsah, plně srovnatelný s obdobnými publikacemi v Německu, Itálii i jinde, jsou proto dokladem rozvoje vzdělanosti v našich zemích před třicetiletou válkou.]

Ivana Füzéková

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ v roce 1984 vydá:

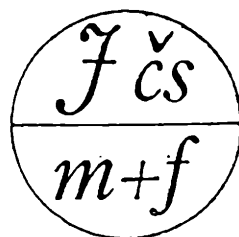
Jiří Mrázek: HRY S KALKULÁTORY

Knížka s pozůstalosti RNDr. Jiřího Mrázka, CSc., nadšeného propagátora a znalce kalkulátorů, najde jistě mnoho čtenářů mezi mládeží a dobře poslouží každému, kdo se chce s kalkulátorem naučit pracovat. Přináší řadu zajímavých informací, originálních nápadů, vtipných her a úloh především pro nejjednodušší kalkulátory. Autor ukazuje různé typy kalkulátorů, od jednoduchých se základními funkcemi až k složitým programovatelným, a poradí čtenáři, jaký typ kalkulátoru si koupit.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1984.



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu P

ROČNÍK 62, 1983-84

VEDOUCÍ REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER, UK PRAHA
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA: Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Kořínková, CSc., ÚÚVPP Praha, prof. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha, prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

Vydává ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

OBSAH

Úvodní články

Kotyk Josef: Ze vzpomínek	1
Mída Jiří: Půl století matematické olympiády v SSSR	321

Matematika

Bicanová Alena, Trch Milan: O komunikaci, kódování a krypto- grafii I., II.	369, 423
Boček Leo: Jedna Eulerova věta a jedna geometrická úloha	229
Eulerův vzorec pro vzdálenost středů kružnic trojúhelníku opsané a vepsané	280
Bušek Ivan: Určování maximálního členu binomického rozvoje	237
Krevní skupiny a kombinatorika	417
Calda Emil: Basketbal očima profesora Ypsilonu	2
Večerníček řeší problém profesora Ypsilonu	54
Profesor Ypsilon o zdravém rozumu	148
Dományová Mária: Ešte o pyramidách	419
Drexler Jan: Aritmetické operace v číselných soustavách snadno a rychle	137
Hejnal Tomáš: Exponenciální tvar komplexních čísel	282
Horák Stanislav: Ortogonálně opsané trojúhelníky	151
Napoleonovy trojúhelníky	373
Hričišáková Daniela: Kritéria delitelnosti prirodzených čísel čísly 19, 29, 39 atd.	89
Kraemer Emil: O jedné vlastnosti tečen paraboly	6
Parabola v polární soustavě souřadnic	232
Elipsa v polární soustavě souřadnic	327
Mazurová Iva: Výroková logika a akvárium	331
Mída Jiří: Lineární diofantovské rovnice	143
O jedné metodě důkazu nerovností	277
Mráz Vlastimil: Klempířská úloha	47
Brachystochrona a další cykloidy	186
Pět klasických logických spojek	377
Dvě neklasické spojky	428
Trch Milan: O kritériích dělitelnosti celých čísel některými prvočísly	181
Valent Pavol: Aj tak sa treba vedieť učiť	91
Vondruška Pavel: O zajímavé aplikaci teorie matic	45
Vyšín Jan: Rozklad konečné množiny bodů v rovině vyhovující daným podmínkám	322

Fyzika

Radomír Baďura: Měření teploty přechodu PN	434
Černý Vladimír: Dve opice na lane a myšlienkový experiment	99
Dvořák Leoš: Přepočítejte si sci-fi	343
Fischer Ivan: Logické obvody z polovodičů	194
Hudec René: Infračervený pohled do vesmíru	297
Jáchim František: Čerenkovovo záření	295
Kotyk Josef: O ladění	353
Kunovjánková Danuše, Macháček Vlastimil: Názorně o zdánlivém pohybu Slunce po obloze	60
Lepil Oldřich: Na dně vzdušného oceánu	15
O atmosféře planet	57
Pravděpodobná jistota	241
Neobvyklá kyvadla	289
Zrychlená kyvadla	339
Parametrické kmitání	384
Myslík Jiří, Kůs Josef: Maticová analýza elektrických obvodů	94
Šindelář Václav: Několik poznámek k publikaci „Malý slovník jednotek měření“	154
Několik novinek z oblasti měřicích jednotek	439

Z dějin exaktních věd

Ferko Pavol: Stručný pohľad na vývoj fyzikálneho obrazu sveta	258
Horák Stanislav: Akvadukt na ostrově Samos	103
Hrivňák Jiří: Matematik Jurij Vega	68
Chrapan Ján: Objav rádioaktivity	204
40 rokov vysokohorského observatória na Skalnatom plese	211
Jáchim František: Od vodního kola ke Kaplanově turbíně	24
Před 50 lety zemřela Marie Curieová Skłodovská	447
Jedinák Dušan: Blaise Pascal	158
Kraemer Emil: In memoriam profesora Zdeňka Pírka	214
Lada Stanislav: Z historie jízdního kola	302
Machalický Jiří: K pětadesátinám prof. RNDr. Zdeňka Horáka, DrSc.	254
Melichar Miroslav: Elektronový obal atomu a atomová spektra	206
Mída Jiří: O dvou symbolech Univerzity Karlovy	66
Pišút Ján, Zajac Rudolf: První atomisti	19
Prvé fyzikálne predstavy o omlekulách	69
Objav elektrónu	161
Šedivý Jaroslav: Boethius — učenec na předělu epoch	104
Indické rášiky	202

Leonhard Euler — vědec a učitel	247
Šindelář Karel: Před rokem odešel prof. RNDr. Karel Havlíček	445
Šindelář Václav: Metrická soustava a metrická konvence	20
Potíže s litrem	108
Šolc Martin: Nobelovy ceny za fyziku 1983 astrofyzikům	449
Zajac Rudolf: História Brownovho pohybu	106
Prvé modely atómu	256, 299
Franckov-Hertzov pokus	355
Objev vlnových vlastností elektrónu	389
Zenkert Arnold: Pojedete o prázdninách do Postupimi?	451
Přemýšlíme, řešíme ...	26, 71, 112, 162, 216, 264, 305, 357, 392, 452
Naše soutěž	
Výsledky loňské soutěže	73
Řešení úloh minulého ročníku	75, 120, 165, 218
Úlohy k řešení	83, 131
Olympiády a SOČ	
MO	30, 34, 313, 365, 394, 456
FO	85, 87, 175, 223, 267, 398
Informace	
Bayer Jaroslav, Zřídka veselý František: Chcete studovat na elektro-technické fakultě VUT v Brně	36
Bereková Helena, Hecht Tomáš: Prijímacie pohovory na MFF UK v Bratislave	177
Bittnerová Eva: O práci Stanice mladých přírodovedcov v Bratislave	133
Calda Emil: Příklady k přijímací zkoušce na MFF UK v Praze	272
Koubek Václav: Písomná prijímacia skúška z fyziky na Matematicko-fyzikálnej fakulte v Bratislave	225
Novák Josef: Požadavky z fyziky k přijímacím zkouškám na MFF UK v Praze	314
Z nových knih	43, 88, 135, 179, 275, 367, 415, 458
Pohledy do dějin	.3. str. obálek
Příloha	
Pech Jiří: Slovník matematických termínů s přihlédnutím k jejich latinskému či řeckému slovnímu základu	č. 1, 2, 4, 7