

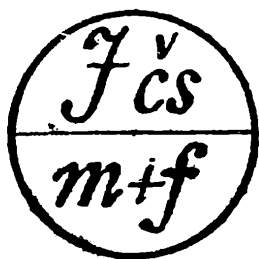
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(1)

**ROČNÍK 61, 1982/83
ZÁŘÍ**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

E. Kraemer: Do dalšího desetiletí Roz- hledů	1
J. Kotyk: Ze vzpomínek na naše Rozhledy	1
L. Vaňatová: Jak na úlohy o prvočíslech	2
J. Barták - V. Mráz: O zaokrouhlovací chybě	6
L. Drs: Křivka — imitátor	10
J. Troják: Nejlevnější dopravní síť	14
J. Bednář: Ukázka modelování vlivu zne- čištění atmosféry na klimatické podmínky	19
J. Formánek - M. Suk: 60 let profesora Ivana Úlehly	25
J. Mička: Matematici na známkách I	27
J. Mída: K výročí českého vydání Euklei- dových Základů	31
E. Kraemer: Několik zajímavostí pro čte- náře Rozhledů	33
Úlohy pro 1. kolo XXIV. ročníku FO (do- končení)	37
Pohledy do dějin	3. str. obálky
Slovník matematických terminů	příloha

Do dalšího desetiletí Rozhledů

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Letos v červnu uzavřely Rozhledy matematicko-fyzikální desátým číslem svůj šedesátý ročník; jejich historii jsem vylíčil před rokem v úvodním článku jubilejního ročníku 1981/82. V závěru jsem připomněl, že tradičním úkolem Rozhledů je probouzet, rozvíjet a prohlubovat zájem žáků všech druhů středních škol o matematicko-fyzikální obory a jejich aplikace. Zároveň jsem uvedl, že převážnou část článků v Rozhledech otištěných mohou s porozuměním číst také ti zájemci o matematiku a fyziku, kteří nejsou studenty středních škol, pokud mají aspoň takové znalosti, jaké má mít absolvent naší nynější základní školy.

V letošním roce je vhodné zdůraznit, že naše Rozhledy jsou těsně spjaty s *Jednotou československých matematiků a fyziků* (JČSMF), která je založila a sama 30 let vydávala. I dnes, kdy náš časopis vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, je odborná péče o Rozhledy svěřena JČSMF, která letos oslavila 120 let své existence. Vznikla v roce 1862, kdy s koncem Bachova absolutismu padly překážky rozvoje národního života a společenské aktivity. Rozvíjela se nejprve v českých zemích a po roce 1918 rozšířila svou působnost na celé území nynější ČSSR. Ze spolku, který v prvním desetiletí svého trvání neměl více než 40 členů, je dnes vědecká společnost s téměř 6000 členy složená z JČSMF a z Jednoty slovenských matematiků a fyziků.

Redakční rada Rozhledů, s níž soustavně spolupracuje odborná skupina pracovníků Jednoty, bude i v dalších letech své činnosti usilovat o to, aby časopis úspěšně pokračoval ve své ověřené tradici a dobře plnil úkoly, které mu dnes naše socialistická společnost ukládá.

Ze vzpomínek na naše Rozhledy

JOSEF KOTYK, Pardubice

Uplynulo již více než šedesát let od chvíle, kdy se do rukou našich studentů dostalo první číslo „ROZHLEDŮ“, nového časopisu, jemuž mnozí zůstali věrni po celý život.

Byl jsem tehdy ještě žákem střední školy. Naši učitelé matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie nám do té doby půjčovali Přílohu

k Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky, vydávanému Jednotou českých matematiků a fyziků (v dalším stručně JČMF), jejímiž byli členy. Příloha jako zvláštní složka Časopisu určená studujícím středních škol vycházela od školního roku 1892/93, náležela tedy již po tři desetiletí k oblíbené četbě žáků; zabývali se řešením soutěžních úloh, které přinášela, sledovali v ní ukázky maturitních témat, četli životopisy matematiků a fyziků i články odborné, jež navazovaly na výklady učebnic a doplňovaly běžné učivo střední školy. Na nové číslo Přílohy se proto vždy těšili a dychtivě je očekávali. Proto byli velmi překvapeni, když jim jejich učitelé koncem školního roku 1920/21 oznámili, že oblíbená Příloha přestane vycházet. Avšak o hlavních prázdninách se dozvěděli od starších kolegů — vysokoškoláků, kteří byli členy JČMF, že všechny úkoly, které dosud plnila Příloha Časopisu, převezme nový časopis, který se JČMF rozhodla vydávat.

Počátkem školního roku 1921/22 spatřilo skutečně světlo světa první číslo ROZHLEDŮ MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÝCH. Na jejich dobré a osvědčené poslání navázaly od roku 1957 ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ, vydávané ministerstvem školství za odborné péče JČSMF dodnes. ROZHLEDY se mi osvědčily jako vydatný pomocník zprvu při studiu, později však i jako učitel matematiky a fyziky. Staly se mi tedy dobrým průvodcem po celý život. Od roku 1942 jsem jejich přispívatelem. Věrnost i vděčnost, kterou jim čtenáři zachovávají, si plně zaslouží za služby, jež jim již šedesát let prokazují.

Poznámka. Mnohé dobré zkušenosti, jež autor článku s ROZHLEDY učinil, vylíčil v článcích ROZHLEDY POMÁHAJÍ ŠKOLE, uveřejněných v ročnících 41, 45, 50 a 54 našeho časopisu.

MATEMATIKA

Jak na úlohy o prvočíslech?

Doc. Ing. Dr. LADA VAŇATOVÁ, PeF České Budějovice

K nejvděčnějším tématům úloh MO patřily v minulosti úlohy požadující zjistit nebo dokázat o daném přirozeném čísle, zda je prvočíslem nebo číslem složeným. S touto problematikou se opět setkávají řešitelé kategorie B v 32. ročníku MO. Ukážeme si proto některé přístupy k úlohám tohoto typu.

Nejprve si připomeňme základní používané pojmy. Symbolem N budeme označovat množinu všech přirozených čísel. Číslo $n \in N$, $n > 1$ nazýváme prvočíslem, jestliže množina všech jeho dělitelů je dvojprvková: $\{1, n\}$. Existují-li čísla $a, b \in N$, $a > 1$, $b > 1$ tak, že $n = a \cdot b$, potom n je číslo složené.

U některých úloh uvažovaného typu vystačíme s metodou založenou na větě, jejíž důkaz najde čtenář na str. 82 knížky [1]:

Věta 1. Není-li číslo $n \in N$, $n > 1$ dělitelné žádným prvočíslem $p \leq \sqrt{n}$, potom n je prvočíslo.

Příklad 1. Rozhodněte, zda číslo 2437, je prvočíslo.

Řešení. Snadno zjistíme, že $\sqrt{2437} \doteq 49,3 < 50$. Užitím známých vět o dělitelnosti, které známe ze školy, nebo přímým výpočtem se přesvědčíme, že dané číslo není dělitelné žádným z prvočísel menších nebo rovných $\sqrt{2437}$, tj. prvočísla: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Dle věty 1 je proto číslo 2437 prvočíslo.

Při řešení úloh, v nichž je dané či hledané přirozené číslo vyjádřeno jako mnohočlen proměnné $n \in N$, se často osvědčuje metoda rozkladu kombinovaná např. s tabulkovou metodou.

Příklad 2. Určete všechna čísla $n \in N$, pro která je číslo

$$A_n = \sqrt{2n^2 - n - 36}$$

prvočíslem.

Řešení. Úloze může zřejmě vyhovovat jen takové n , pro které je $2n^2 - n - 36$ druhou mocninou nějakého prvočísla p . Rozložme tento kvadratický trojčlen na součin kořenových činitelů:

$$2n^2 - n - 36 = 2\left(n - \frac{9}{2}\right)(n + 4) = (2n - 9)(n + 4).$$

Aby číslo A_n bylo prvočíslem, musí zřejmě platit $n \geq 5$ (aby byla definována druhá odmocnina) a musí existovat prvočíslo p tak, aby platilo:

$$(2n - 9)(n + 4) = p^2.$$

Případy, které mohou nastat, vyšetříme v tabulce na str. 4.

Číslo A_n je tedy prvočíslem jen pro $n = 5$ a $n = 13$. Úloha má právě dvě řešení.

Je-li dané číslo vyjádřeno jako součet nebo rozdíl mocnin přirozených čísel se stejným exponentem, lze často s úspěchem použít následujících tvrzení:

Věta 2. a) Nechť $a, b, m \in N$, $a > b$, $m > 1$. Potom existuje číslo $k \in N$ tak, že platí

$2n - 9$	$n + 4$		n	$A_n = p$
1	p^2	$2n = 10$	5	3
p	p	$p^2 = 9$	13	17
p^2	1	$2n - 9 =$ $= n + 4 = p$	—	—
		$n + 4 = 1$ $n = -3$		

$$(1) \quad a^m - b^m = (a - b) k.$$

b) Nechť $a, b, m \in N$, $m > 1$ je liché, potom existuje $q \in N$ tak, že platí

$$(2) \quad a^m + b^m = (a + b) q.$$

Správnost vztahů (1), (2) vyplývá ze vzorců, které čtenář zná ze základní školy:

$$a^m - b^m = (a - b) (a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}),$$

$$a^m + b^m = (a + b) (a^{m-1} - a^{m-2}b + \dots - ab^{m-2} + b^{m-1})$$

a které platí dokonce pro libovolná reálná čísla a, b .

Příklad 3. Dokažte, že číslo $19^{80} + 80^{19}$ není prvočíslo.

Řešení: Naším cílem je ukázat, že dané číslo lze vyjádřit jako součin alespoň dvou přirozených čísel větších než jedna. Využijeme toho, že $1^m = 1$ pro každé $m \in N$, a daný součet upravíme takto:

$$19^{80} + 80^{19} = 19^{80} - 1 + 80^{19} + 1 = 19^{80} - 1^{80} + 80^{19} + 1^{19}.$$

Nyní použijeme tvrzení věty 2 a vyjádříme první sčítanec posledního součtu dle (1) a druhý sčítanec dle (2). Dostaneme:

$$19^{80} + 80^{19} = (19 - 1)k + (80 + 1)q, \text{ kde } k, q \in N.$$

Proto platí:

$$19^{80} + 80^{19} = 18k + 81q = 9 \cdot (2k + 9q),$$

což znamená, že dané číslo je součinem čísla 9 a přirozeného čísla $2k + 9q > 1$. Je tedy složeným číslem, jak jsme měli dokázat.

Při řešení některých úloh je užitečné kombinovat užití věty 2 a následující věty 3, jejíž tvrzení vyplývá ze známé binomické věty pro umocňování dvojčlenu. (Jestliže jste dosud binomickou větu neprobí-

rali, proveďte roznásobení m stejných dvojčlenů $a + b$. Sloučíte-li stejnojmenné členy, získáte $m + 1$ členů, z nichž m členů tvoří násobky čísla a , lze z nich a vytknout a jeden člen je b^m . Zkuste pro $m = 3$.)

Věta 3. a) Nechť $a, b, m \in N, a > b, m > 1$. Potom existuje číslo $r \in N$ tak, že platí

$$(3) \quad (a - b)^m = ar + (-1)^m b^m.$$

b) Nechť $a, b, m \in N, m > 1$. Potom existuje $s \in N$ tak, že platí

$$(4) \quad (a + b)^m = as + b^m.$$

Příklad 4. Zjistěte, které z čísel a) $2^{81} + 3^{82}$, b) $80^{80} - 19^{19}$ je prvočíslo.

Řešení: a) Protože $3^{82} = 9^{41}$ a $9 = 11 - 2$, můžeme číslo 3^{82} užitím vztahu (3) vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} 3^{82} &= (11 - 2)^{41} = 11r - 2^{41}, \text{ kde } r \in N. \text{ Potom však platí } 2^{81} + 3^{82} = \\ &= 2^{81} - 2^{41} + 11r = 2^{41}(2^{40} - 1) + 11r = 2^{41}[(2^{10})^4 - 1] + 11r = \\ &= 2^{41}(1024^4 - 1) + 11r. \end{aligned}$$

Číslo $1024^4 - 1$ lze dle (1) vyjádřit ve tvaru

$$1024^4 - 1 = (1024 - 1)k = 1023k = 11 \cdot 93 \cdot k,$$

kde $k \in N$. Platí proto

$$2^{81} + 3^{82} = 2^{41} \cdot 11 \cdot 93k + 11r = 11[2^{41} \cdot 93 \cdot k + r],$$

což znamená, že dané číslo není prvočíslem.

b) Číslo 80 a 19 jsou nesoudělná, ale lze je vyjádřit pomocí soudělných čísel takto: $80 = 81 - 1$, $19 = 18 + 1$. Potom platí

$$\begin{aligned} 80^{80} - 19^{19} &= (81 - 1)^{80} - (18 + 1)^{19} = 81r + (-1)^{80} 1^{80} - 18s - \\ &- 1^{19} = 81r - 18s = 9(9r - 2s), \end{aligned}$$

kde $r, s \in N$; zřejmě $9r - 2s > 1$, poněvadž $80^{80} > 19^{19}$. Při úpravě daného čísla jsme použili vztahy (3), (4) a zjistili jsme, že i v tomto případě jde o číslo složené.

Další podobné úlohy najde čtenář v brožurkách [1], [2], které vyšly v edici *Škola mladých matematiků* v nakladatelství Mladá fronta.

Literatura :

- [1] F. Veselý: O dělitelnosti čísel celých
- [2] J. Sedláček: Co víme o přirozených číslech

0 zaokrouhlovací chybě

Dr. JAROSLAV BARTÁK, CSc., doc. dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Někdy i prosté technické úlohy skýtají překvapení, jehož vysvětlení vyžaduje hlubší matematickou úvahu. Např. v článku [1] je takové překvapení skryto v poznámce 3 pod čarou na str. 245, která říká, že tabelované hodnoty goniometrických funkcí $\operatorname{tg} \alpha$ a $\sin \alpha$ pro malé úhly α se v pětimístných matematických tabulkách¹⁾ definitivně rozcházejí až od úhlu $\alpha = 1^{\circ}31'$. Říkáme definitivně, neboť tabulkové hodnoty se rozcházejí (tj. $\sin \alpha \neq \operatorname{tg} \alpha$) i pro úhly menší než $1^{\circ}31'$, potom se však opět sejdou (tj. $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$). Teprve pro úhly $\alpha \in < 1^{\circ}31', 90^{\circ}$ je v tabulkách definitivně $\sin \alpha \neq \operatorname{tg} \alpha$. Takovéto chování funkcí tg a $\sin$ pro úhly $\alpha \in \in < 0, 1^{\circ}31'$ však odporuje tomu, že funkce

$$y(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha$$

je rostoucí na intervalu $< 0^{\circ}, 90^{\circ}$), tj., že platí

(R) Je-li $0^{\circ} \leq \alpha_1 < 90^{\circ}, 0^{\circ} \leq \alpha_2 < 90^{\circ}, \alpha_1 < \alpha_2$, je $y(\alpha_1) < y(\alpha_2)$.

Cílem tohoto článku bude vysvětlit popsanou nesrovnalost.

Dokažme nejprve, že funkce y má vlastnost (R). Pro $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ je $0 < \cos \alpha < 1$, tedy $0 < \cos^3 \alpha < 1$ a tedy $\cos \alpha < \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. Proto pro

derivaci $\frac{dy}{d\alpha}$ funkce y platí $\frac{dy}{d\alpha}(\alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \cos \alpha > 0$ pro $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$,

a tedy podle [2] (věta 135 str. 247) má funkce y vlastnost (R) — je rostoucí na intervalu $< 0^{\circ}, 90^{\circ}$).

V pětimístných tabulkách [3] však najdeme

α	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$y(\alpha)$
0°	0,00000	0,00000	0,00000
$10'$	0,00291	0,00291	0,00000
$20'$	0,00582	0,00582	0,00000
$30'$	0,00873	0,00873	0,00000
$40'$	0,01164	0,01164	0,00000
$50'$	0,01454	0,01455	0,00001
1°	0,01745	0,01746	0,00001
$1^{\circ}10'$	0,02036	0,02036	0,00000
$1^{\circ}20'$	0,02327	0,02328	0,00001
$1^{\circ}30'$	0,02618	0,02619	0,00001
$1^{\circ}40'$	0,02908	0,02910	0,00002

Vidíme, že podle této tabulky je funkce y konstantní (nulová), potom vzroste na hodnotu 0,00001, dále klesne zpět na nulu a opět vzroste na 0,00001 a 0,00002. To je však ve sporu s výše dokázanou vlastností (R). Pokusíme se najít příčinu tohoto sporu. Dříve se však podívejme ještě do přesnějších tabulek [4].

α	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$y(\alpha)$
0°	0,000000	0,000000	0,000000
10′	0,002909	0,002909	0,000000
20′	0,005818	0,005818	0,000000
30′	0,008727	0,008727	0,000000
40′	0,011635	0,011636	0,000001
50′	0,014544	0,014546	0,000002
1°	0,017452	0,017455	0,000003
1°10′	0,020361	0,020365	0,000004
1°20′	0,023269	0,023276	0,000007
1°30′	0,026177	0,026186	0,000009
1°40′	0,029085	0,029097	0,000012

Zdálo by se, že vyšší přesnost tabulek odstranila závady předchozí tabulky až na to, že funkce y je pro α mezi 0° a 30′ konstantní (nulová), zatímco má být rostoucí. Již ale nedochází k tomu, že by klesala jako v předchozí tabulce při přechodu od hodnoty $\alpha = 1^\circ$ k hodnotě $\alpha = 1^\circ 10'$. Podle druhé tabulky je funkce y od úhlu $\alpha = 30'$ již rostoucí, jak má být.

Nyní již nám mnohé napoví porovnání obou tabulek. Podívejme se na řádek pro $\alpha = 50'$ z první tabulky, tj.

$$50' \quad 0,01454 \quad 0,01455 \quad 0,00001$$

a pokusme se ho odvodit příslušným zaokrouhlením z druhé tabulky. Dostaneme

$$\sin 50' = 0,014544 \doteq 0,01454$$

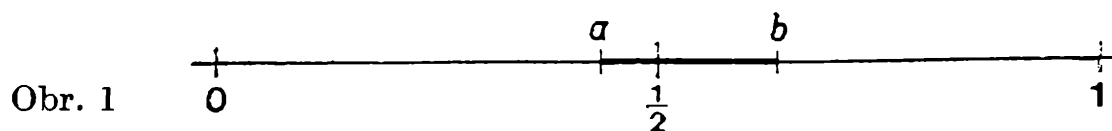
$$\operatorname{tg} 50' = 0,014546 \doteq 0,01455.$$

Použijeme-li tyto zaokrouhlené hodnoty pro výpočet hodnoty $y(50')$, dostaneme $y(50') = 0,00001$. Vezměme nyní hodnoty $\sin 50'$ a $\operatorname{tg} 50'$ přímo ze druhé (přesnější) tabulky a zaokrouhleme rozdíl $y(50') = \operatorname{tg} 50' - \sin 50'$. Tím dostaneme

$$y(50') = 0,014546 - 0,014544 = 0,000002 \doteq 0,00000.$$

¹⁾ Bylo použito tabulek A. Vacek: Technické početní tabulky, Práce, Praha 1952. V této práci používáme tabulky [3], které jsou snad čtenáři dostupnější. Tyto tabulky se poněkud liší způsobem zaokrouhlování.

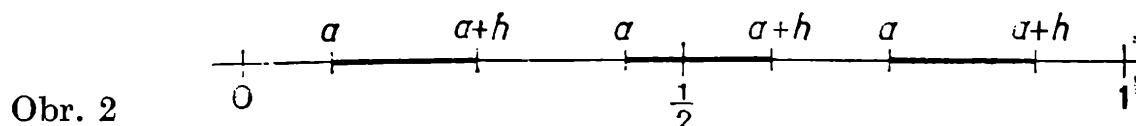
Při výpočtu $y(50')$ podle první tabulky došlo k nepříjemné náhodě. Ukážeme si její podstatu na následující abstraktní úvaze. Čísla mezi 0 a 1 budeme zaokrouhlovat tak, že čísla z intervalu $<0, 1/2>$ zaokrouhlíme na 0, čísla z intervalu $<1/2, 1>$ na 1. Mějme nyní dvě čísla a, b taková, že $a \in <0, 1/2>$, $b \in (1/2, 1>$ a jejich rozdíl $b - a$ je velmi malý (např. menší než $1/2$). To je znázorněno na obrázku č. 1. Budeme-li značit



zaokrouhlení nějakého čísla x symbolem $Z(x)$, bude zřejmě $Z(a) = 0$, $Z(b) = 1$, takže rozdíl zaokrouhlených hodnot $Z(b) - Z(a) = 1$, zatímco $Z(b - a) = 0$, neboť předpokládáme, že $b - a < 1/2$. Z obrázku je zřejmé, že bude-li se číslo a „přibližovat“ k $1/2$ zdola a číslo b shora, bude rozdíl $b - a$ libovolně malý, tj. $Z(b - a) = 0$, zatímco $Z(b) - Z(a) = 1 - 0 = 1$. Ukázali jsme tedy, že obecně neplatí rovnost

$$Z(b - a) = Z(b) - Z(a).$$

Tuto úvahu můžeme interpretovat rovněž takto. Zvolme pevně číslo $h > 0$ dosti malé (tak, aby $Z(h) = 0$, tj. $h < 1/2$). Představme si interval $<a, a + h> \subset <0, 1>$, „pohybující se“ v intervalu $<0, 1>$. Je-li $<a, a + h> \subset <0, 1/2>$, je $Z(h) = 0$ a současně $Z(a + h) - Z(a) = 0 - 0 = 0$. Když posuneme interval doprava tak, aby obsahoval ve svém vnitřku bod $1/2$ (tj. $a < 1/2 < a + h$), bude opět $Z(h) = 0$ (neboť délka intervalu zůstává konstantní), ale $Z(a + h) - Z(a) = 1 - 0 = 1$. Po dalším posunutí do polohy, kdy $<a, a + h> \subset <1/2, 1>$, bude $Z(h) = 0$ a $Z(a + h) - Z(a) = 1 - 1 = 0$. Tři různé polohy intervalu $<a, a + h>$ jsou znázorněny na obrázku č. 2.



Vrátíme-li se nyní k případu, kdy jsme počítali $y(50')$, vidíme, že „proti sobě jdoucí“ zaokrouhlování ($\sin 50'$ jsme zaokrouhlili dolů, zatímco $\operatorname{tg} 50'$ nahoru) nám relativně malou hodnotu funkce $y(50') = 0,000002 \pm 0,00000$ zvětšilo na hodnotu $0,00001$. Podobná situace nastává pro $\alpha = 1^\circ$, kdy opět

$$Z(y(1^\circ)) = Z(\operatorname{tg} 1^\circ - \sin 1^\circ) = Z(0,000003) = 0,00000$$

zatímco

$$Z(\operatorname{tg} 1^\circ) - Z(\sin 1^\circ) = 0,01746 - 0,01745 = 0,00001.$$

Tím tedy došlo k tomu, že funkce y v bodech $\alpha = 50'$ a $\alpha = 1^\circ$, ač prakticky nulová, je v první tabulce tabelována jako 0,00001, což také vysvětluje její růst a později pokles, který je asi nejvíce zarážející. To, že hodnoty funkce y jsou (podle obou tabulek) stejné pro několik různých hodnot argumentu, je již méně překvapující. Zaokrouhlujeme-li totiž čísla mezi 0 a 1 tak, jak jsme uvedli v předchozím, mají všechna čísla z intervalu $<0, 1/2)$ po zaokrouhlení tutéž hodnotu — nulu. Podle dvanáctimístných tabulek [5] bude funkce y (tabelovaná po $10'$) rostoucí i pro $\alpha \leq 40'$. To ukazuje následující tabulka.

α	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$y(\alpha)$
$0'$	0,000000000000	0,000000000000	0,000000000000
$10'$	0,002908877984	0,002908890291	0,000000012307
$20'$	0,005817731355	0,005817829811	0,000000098456
$30'$	0,008726535498	0,008726867791	0,000000332293
$40'$	0,011635265801	0,011636053469	0,000000787668

Z výše provedených úvah je vidět, že výpočet funkční hodnoty pomocí tabulek jiných funkcí není vždy nejlepší možností. To je nutno si uvědomit i při algoritmizaci podobných úloh pro počítač.

Vraťme se ještě k funkci $y(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha$. Naskytá se otázka, zda dostatečným zvýšením přesnosti (tj. zvýšením počtu míst tabulek $\sin$ a tg) lze dosáhnout toho, že funkce y nebude nikde klesající (či dokonce bude pouze rostoucí). Částečnou odpověď nalezneme v následující tabulce, která byla získána zaokrouhlením na 7 desetinných míst hodnot z tabulek [5].

α	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$y(\alpha)$
$12'$	0,0034907	0,0034907	0,0000000
$13'$	0,0037815	0,0037816	0,0000001
$14'$	0,0040724	0,0040725	0,0000001
$15'$	0,0043633	0,0043634	0,0000001
$16'$	0,0046542	0,0046542	0,0000000

Funkce y opět nejprve vzroste, potom je konstantní a dále klesá. Zde jsme však zjemnili krok v argumentu α (postupovali jsme po $1'$, zatímco dříve byl krok $10'$). Rozmyslete si, jak souvisí chování funkce y s velikostí kroku v α , a na základě toho si odpovězte na výše položenou otázku.

Literatura

- [1] V. Mráz: Měření libelou, *Rozhledy matematicko-fyzikální*, ročník 60, č. 6, 1981/82, 241 — 246.
- [2] V. Jarník: *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
- [3] M. Valouch: *Pětimístné logaritmické tabulky čísel a goniometrických funkcí s dalšími matematickými tabulkami a tabulky konstant fyzikálních, chemických, astronomických a jiných*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1962.
- [4] M. Warmus: *Tablice funkcji elementarnych*, Państwowe wydawnictwo naukowe, Varšava 1960.
- [5] J. Křovák: *Dvanáctimístné tabulky trigonometrických funkcí*. Vydáno ministerstvem financí v Praze 1928.

Křivka - imitátor

Doc. ing. dr. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT Praha

Tvar některé křivky je zcela typický, nezaměnitelný. Elipsu si nespoleteme se sinusoidou. Existují však křivky, jejichž části dokonale imitují oblouky jiných křivek. Můžeme tedy nahradit různé křivky s dostatečnou přesností jedinou imitační křivkou. Je-li náhradní křivka jednodušší, získáme i výhody početní. Rychlý výpočet bodů křivky je aktuální v počítačové grafice. Má-li se křivka kreslit na obrazovce, je žádoucí, aby se vytvořila co nejrychleji. Počítače provádějí nejrychleji aritmetické operace sčítání a násobení. Proto se nejrychleji generují křivky, v jejichž rovnicích se vyskytují jen mnohočleny.

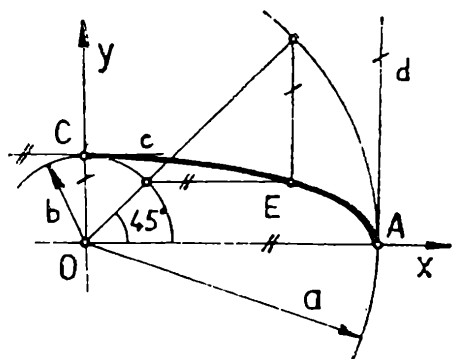
V článku „Pravítko a kružítko počítače“ (*Rozhledy* r. 59, březen 1981, č. 7, str. 297 — 300) jsme jednu takovou křivku poznali. Byla to kubika a nahrazovala čtvrtkružnici s relativní chybou menší než 3×10^{-4} , takže se např. neliší od čtvrtkružnice s poloměrem 1 m o víc než 0,3 mm.

Kubikou však můžeme nahradit i oblouky mnoha dalších křivek.

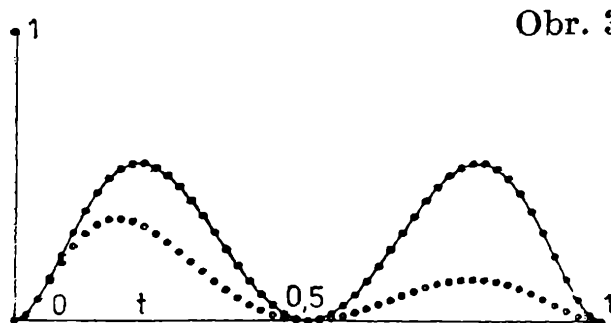
1. Elipsa

Budiž dána elipsa s poloosami a , b a vrcholy A , C . Sestrojíme trojúhelníkovou konstrukci podle obr. 1 další její bod E . Kubika, která prochází body A , E , C a dotýká se ve vrcholech A , C vrcholových tečen d , c elipsy, má parametrické rovnice

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= a(0,343146t^3 - 1,343146t^2 + 1), \\ y &= b(-0,343146t^2 - 0,313707t + 1,656854)t, \end{aligned}$$



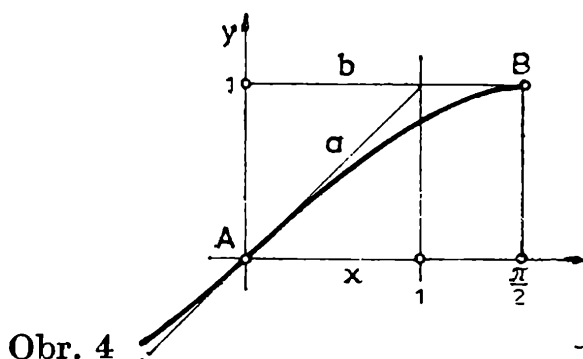
Obr. 1



Obr. 3



Obr. 2



Obr. 4

v nichž parametr nabývá hodnot mezi 0 a 1. Bod A je určen parametrem 0, bod E parametrem 0,5 a bod C parametrem 1.

Srovnajte rovnice (1) s rovnicemi kubiky, která nahrazuje kružnici ve zmíněném článku!

Z obr. 2 můžeme posoudit, jak dobře kubika elipsu nahrazuje. Je nakreslena čtvrtelipsa a kroužky označují body náhradní kubiky.

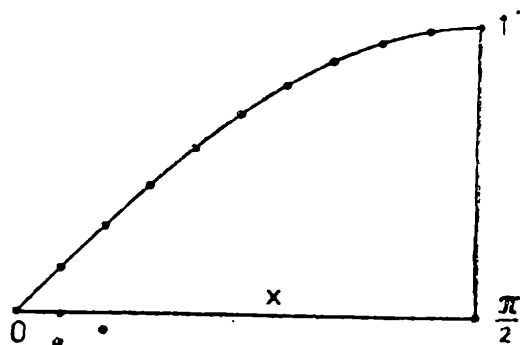
Na obr. 3 je vyznačen nespojenými kroužky průběh chyb pro elipsu s poloosami $a = 2$, $b = 0,5$. Parametr roste rovnoměrně od nuly po 0,02 do jedné a nanáší se na vodorovnou osu. Na svislou osu nanášíme tisíckrát zvětšenou chybu. Maximální chyba je v blízkosti vrcholu hlavní osy. Nulová chyba je samozřejmě pro parametry 0, 1/2, 1, tj. v bodech A , E , C .

Analogicky je vyznačen průběh chyb pro kružnici $a = b = r = 2$ spojenými kroužky. Maximální chyba je asi 0,56 a to souhlasí s údajem pro chybu v již zmíněném článku, podle něhož by chyba měla být menší než $3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 2 = 0,6$.

Cvičení. Zvolte $a = 5$ cm, $b = 2$ cm. Určete kalkulačkou souřadnice bodů kubiky (1) pro $t = 0; 0,1; \dots; 0,9; 1$ a využijte těchto jedenáct bodů a souměrnosti podle os x a y k načrtnutí „elipsy“.

2. Sinusoida

Sinusoida podle obr. 4 má v okolí bodu $A(0; 0)$ zvláštní průběh: křivka přechází z jedné strany své tečny a v bodě A na druhou stranu. Tečna se nazývá *tečnou obratu* (inflexní tečnou) a bod A nazýváme *bodem obratu* (inflexním bodem). I na kubice existuje bod s touto vlastností.



Obr. 5

Oblouk sinusoidy od bodu A po vrchol B lze nahradit kubikou s inflexním bodem A , inflexní tečnou a a dalším bodem B s tečnou $b \parallel x$. Parametrické rovnice této kubiky jsou

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= 0,070796t^3 + 1,5t, \\ y &= -0,5t^3 + 1,5t. \end{aligned}$$

Parametr nabývá hodnot mezi 0 (pro bod A) a 1 (pro bod B).

Na obr. 5 je nakreslen oblouk sinusoidy a několik bodů náhradní kubiky (2) je označeno kroužky. V dolejší části obr. 5 jsou tisícinásobky rozdílů souřadnic y obou křivek naneseny kolmo pod osu x .

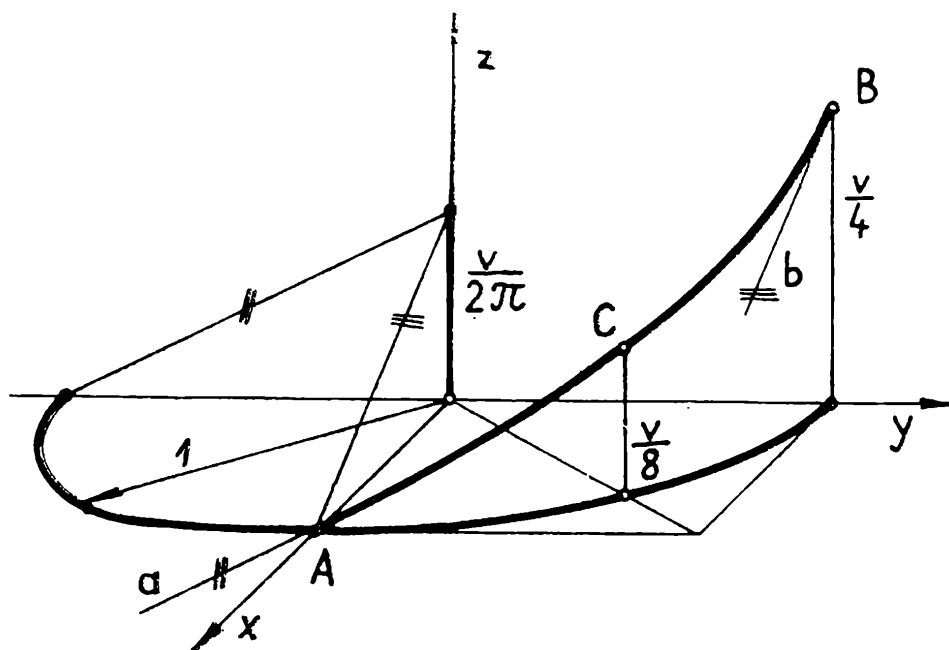
Cvičení. Určete kalkulačkou body kubiky (2) pro $t = 0; 0,1; \dots; 0,9; 1$ a použijte je k načtrnutí jedné vlny sinusoidy. Za jednotku měření zvolte alespoň 5 cm.

3. Šroubovice

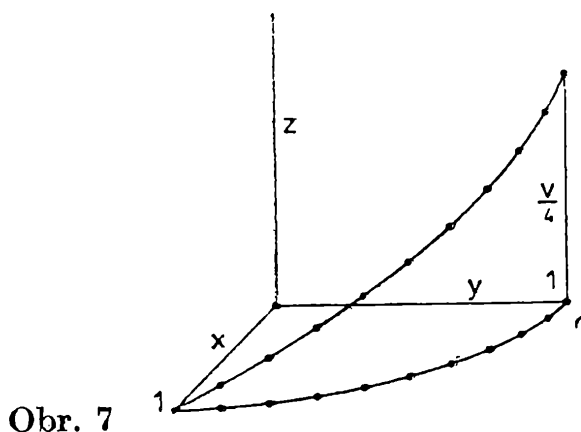
Na předchozích příkladech jsme viděli, že kubikou lze nahradit různé rovinné křivky. Kubika však dokáže imitovat i prostorové křivky, např. šroubovici. Na obr. 6 je nakreslena čtvrtina závitu šroubovice AB na plášti rotačního válce, jehož osou je souřadnicová osa z a poloměr r je jednotkový. Výška závitu stoupání šroubovice je označena v . Všechny potřebné údaje k načtrnutí průmětu tohoto oblouku jsou na obr. 6 naznačeny, zejména konstrukce bodů B a C a tečen a, b v bodech A, B . Kubika, která prochází body A, C a B a dotýká se v bodech A a B přímk a, b , má parametrické rovnice

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= 0,343146 t^3 - 1,343146 t^2 + 1, \\ y &= (-0,343146 t^2 - 0,313707 t + 1,656854) t, \\ z &= v(0,027393 t^2 - 0,041089 t + 0,263696) t, \end{aligned}$$

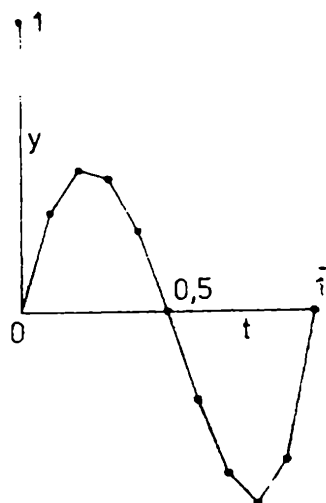
v nichž parametr t nabývá hodnot mezi 0 (pro bod A) a 1 (pro bod B).



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

Srovnajte první dvě rovnice z (3) s rovnicemi (1)!

Na obr. 7 je v kosoúhlém promítání nakreslena čtvrtina závitu šroubovice s jejím půdorysem a několik průmětů bodů náhradní kubiky (3) a jejího půdorysu je naznačeno kroužky.

Na obr. 8 jsou nanášeny ve směru osy y stonásobky rozdílů souřadnic z obou křivek. Nulové chyby jsou samozřejmě pro parametry $0,1/2,1$, tj. v bodech A, C, B .

Ccičení. Určete kalkulačkou body kubiky (3) pro $t = 0; 0,1; \dots; 0,9; 1$ a použijte je k nakreslení půdorysu a nárysu jednoho závitu „šroubovice“. Jednotku poloměru zvolte 3 cm a výšku závitu 10 cm.

Jistě vás při čtení napadla otázka, jak se určí rovnice (1) — (3) náhradních kubik. Teorie, podle níž byste si rovnice sami odvodili, není však tak jednoduchá, aby mohla být vysvětlena na stránkách Rozhledů.

Obrázky 2, 3, 5, 7 a 8 byly určeny počítačem a nakresleny na automatickém kreslicím stole DIGIGRAF.

Nejlevnější dopravní síť

RNDr. JAN TROJÁK, CSc., UK Praha

Jeden z nejjednodušších dopravních problémů řešených pomocí teorie grafů bychom mohli výstižně nazvat problémem nejlevnější dopravní sítě. Představme si situaci, ve které má být určitý počet míst dané oblasti spojen dopravními cestami (pro dopravu osob, nákladů, ale i zpráv nebo energie). Předpokládejme, že byly vypočteny náklady na výstavbu spojů mezi jednotlivými místy, že do mapy dané oblasti byly zakresleny všechny ty spoje, jejichž náklady jsou (z hlediska investora) únosné, a že graf, který takto vznikl, je souvislý.

Předpokládejme dále, že uvažovaná situace je takového druhu, že náklady na vlastní provoz dopravního systému jsou zanedbatelně nízké ve srovnání s náklady na stavbu dopravních spojů (např. telefonní kabelizace, vedení vysokého napětí, plynovody) a že tedy kritériem pro realizaci projektu uvažované dopravní sítě je požadavek, aby náklady na výstavbu byly co nejmenší.

Označme $G(U, H)$ graf, jehož uzly znázorňují n míst uvažované oblasti označených písmeny $u_1, u_2, \dots, u_n$ a jehož hrany h_{ij}^k jsou „únosné“ spoje mezi uzly u_i a u_j , přičemž $h_{ij}^k = h_{ji}^k$, h_{ij}^k je k -tá hrana spojující uzly u_i a u_j a $h_{ii} = h_{ii}^1$ v případě, že uzly u_i a u_j spojuje jediná hrana. Hrany h_{ii} nazýváme *smýčkami* a budeme předpokládat, že graf G takové hrany nemá, protože nereprezentují žádný dopravní spoj uvažovaného systému. V souladu s požadavky řešeného problému je graf G souvislý.

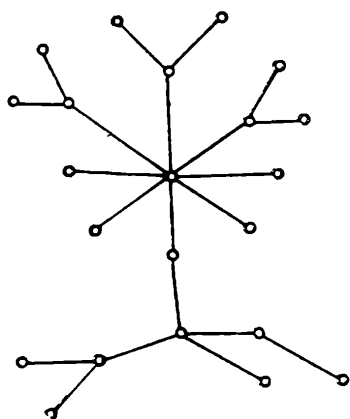
Ve srovnání s grafy z předchozích článků má však tento graf ještě jednu důležitou vlastnost navíc: ke každé jeho hraně h_{ij}^k je přiřazeno reálné kladné číslo $c_{ij}^k = c(h_{ij}^k)$ vyjadřující náklady na výstavbu spoje reprezentovaného hranou h_{ij}^k . Takový graf G nazveme *hranově ohodnoceným grafem*.

Řešením našeho problému bude zřejmě podgraf $G'(U', H')$, jehož vlastnosti se pokusíme nejprve formulovat v jazyce teorie grafů a potom sestavíme algoritmus na vyhledání takového podgrafu G' v daném grafu $G(U, H)$.

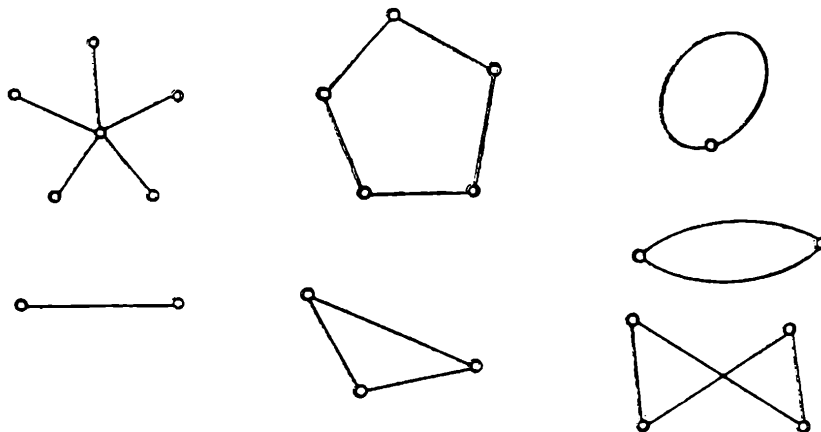
Vzhledem k tomu, že požadovaný dopravní systém zajišťuje spojení libovolných dvou míst oblasti, jsou libovolné dva uzly grafu G spojeny cestou v grafu G' , tj.

- (1) $U' = U$,
- (2) G' je souvislý graf.

Bude užitečné říci si na tomto místě, že pro podgraf $G'(U', H')$ grafu $G(U, H)$, ve kterém $U' = U$, užíváme zvláštní název — faktor grafu G , i když bychom se bez tohoto termínu v našem článku obešli.



Obr. 1



Obr. 2

Požadavek nejmenších nákladů na dopravní systém nás vede k následujícím dvěma požadavkům na graf G' :

(3) Každé dva uzly grafu G' jsou spojeny právě jednou cestou.

(4) Součet $S(G')$ hodnot $c_{ij}^k = c(h_{ij}^k)$ pro všechny hrany h_{ij}^k grafu G' je nejmenší ze všech součtů přiřazených podgrafům grafu G splňujícím podmínky (1), (2) a (3).

Následující dva nové pojmy nám umožní stručnější popis dalších úvah. Jsou to velmi důležité pojmy teorie grafů a jejich zavedení se v našem článku přímo nabízí.

Strom je název grafu bez smyček, splňujícího podmínku (3), a strom, který je faktorem grafu G , nazýváme *kostrou grafu G* . Příklady stromů vidíme na obr. 1.

Z podmínek (1), (2), (3) plyne, že hledaný graf G' je kostrou grafu G . Podmínka (4) požaduje vybrat ze všech koster grafu G tu „nejlevnější“. Budeme jí říkat *minimální kostra* (hranově ohodnoceného) grafu.

K formulaci algoritmu pro vyhledání minimální kostry grafu G definujeme ještě pojem *kružnice*. Pod tímto pojmem budeme rozumět každou uzavřenou cestu, která obsahuje alespoň jednu hranu. Příklady kružnic vidíme na obrázku 2. Čtenář si dosti snadno sám ověří, že platí následující lemma.

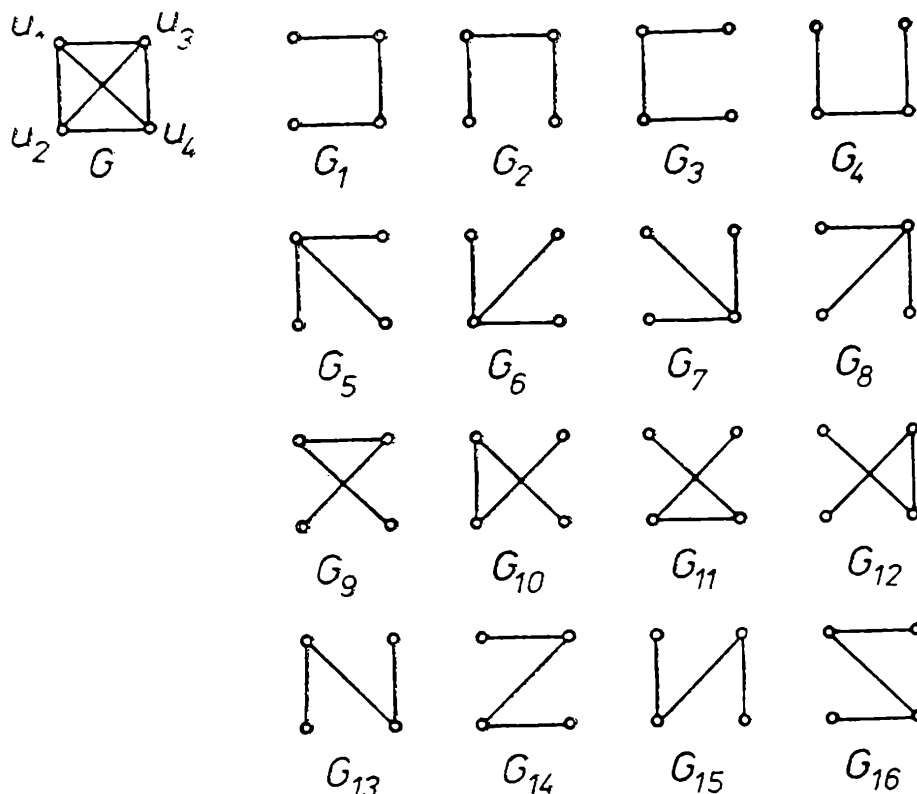
Lemma: Buď $G(U, H)$ graf bez smyček. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

L_1 : G je strom, tj. každé jeho dva uzly jsou spojeny právě jednou cestou.

L_2 : G je souvislý graf bez kružnic.

L_3 : Graf G je souvislý a $|U| = |H| + 1$.

Důkaz této věty nebudeme provádět. Prozkoumáním několika vhodných příkladů čtenář nabude důvěry v pravdivost uvedeného lemmatu. Někteří čtenáři se možná k němu vrátí po přečtení celého článku a samostatně vymyslí i exaktní důkaz. Ostatním nedůvěřivým (to je ovšem pro matematika vlastnost, kterou by si měl pěstovat) prozradíme, že dů-



Obr. 3

kaz naleznou téměř v každé knížce o teorii grafů (a také v č. 10, roč. 50 Rozhledů matematicko-fyzikálních).

Z toho, co bylo řečeno, vysvítá, že bude celkem jednoduché formulovat algoritmus k nalezení (nějaké) kostry daného souvislého grafu G :

(i) Hledejme kružnici v grafu G ;

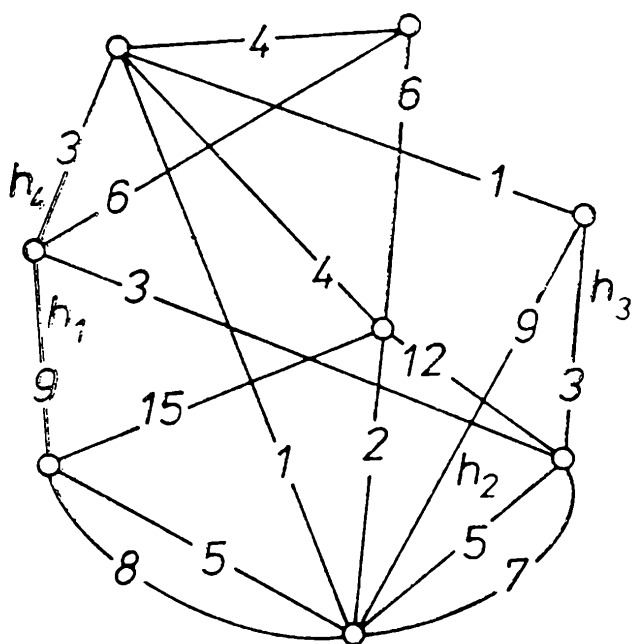
případ a) v grafu G žádná kružnice neexistuje, pak G je stromem a tím i svou kostrou,

případ b) v grafu G existuje kružnice; odeberme z této kružnice jednu (libovolnou) hranu a označme ji e_1 . Výsledný graf označme $G_1 = G - \{e_1\}$.

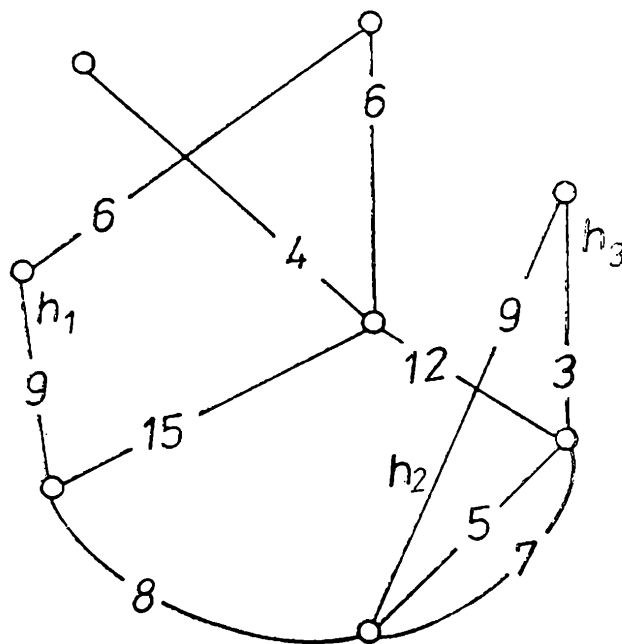
(ii) Opakujme krok (i) pro graf G_1 , potom $G_2 = G_1 - \{e_2\}, \dots, G_j = G_{j-1} - \{e_j\}, \dots$ dokud pro nějaký graf $G_k = G - \{e_1, \dots, e_k\}$ nenastane případ a).

Pro daný graf G může náš algoritmus končit různou výslednou kostrou grafu G . Značná volnost ve výběru hrany e_i , kterou z grafu vypouštíme v průběhu algoritmu, má za následek, že výsledný graf není jednoznačně určen. Tak například, bude-li G graf se čtyřmi uzly, budou všechny možné kostry tohoto grafu takové, jak ukazuje obrázek 3.

Jestliže termínem *úplný graf* označíme graf K_n s n uzly bez smyček, ve kterém každé dva různé uzly spojuje právě jedna hrana (K_4 je graf G z obrázku 3), můžeme říci, že v úplném grafu K_n existuje právě n^{n-2} různých koster. (Důkaz najde zvědavý čtenář např. v [1].) I minimálních koster může však být stejný počet — v případě, že všechny hrany grafu K_n jsou stejně ohodnoceny. V libovolném (nikoli nutně úplném) grafu



Obr. 4



Obr. 5

G můžeme zřejmě očekávat výskyt více než jedné minimální kostry. Existenci alespoň jedné minimální kostry grafu G , popsaného v úvodu našeho článku, zaručuje následující algoritmus.

Algoritmus MK: Buď dán souvislý, hranově ohodnocený graf $G(U, H)$ bez smyček, $|U| = n$ a $H \neq \emptyset$. Minimální kostru grafu G určíme následujícím způsobem:

(1) Označme $G = G_0$. V grafu $G_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ hledejme hranu, která není mostem v grafu G_i ;

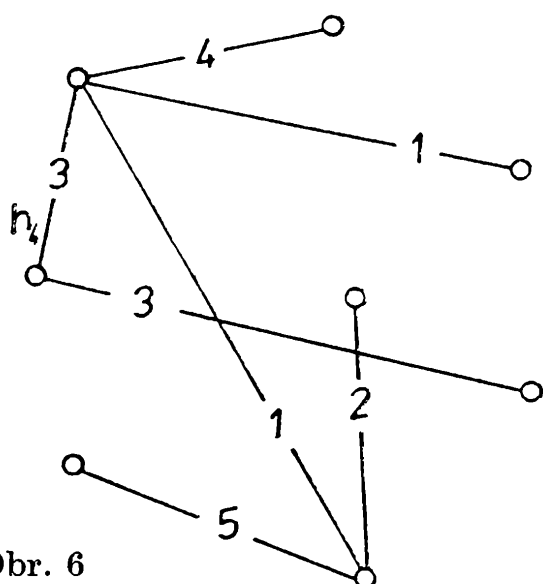
případ a) graf G_i obsahuje jenom hrany, které jsou mosty, pak $G_i = F$ je hledaná minimální kostra grafu G ,

případ b) graf G_i obsahuje hrany, které nejsou mosty v G_i . Pak mezi hranami grafu G_i , které nejsou mosty tohoto grafu, zvolme jednu z těch hran, jejichž ohodnocení je největší, a označme ji e_{i+1} . Označme $G_{i+1} = G_i - \{e_{i+1}\}$.

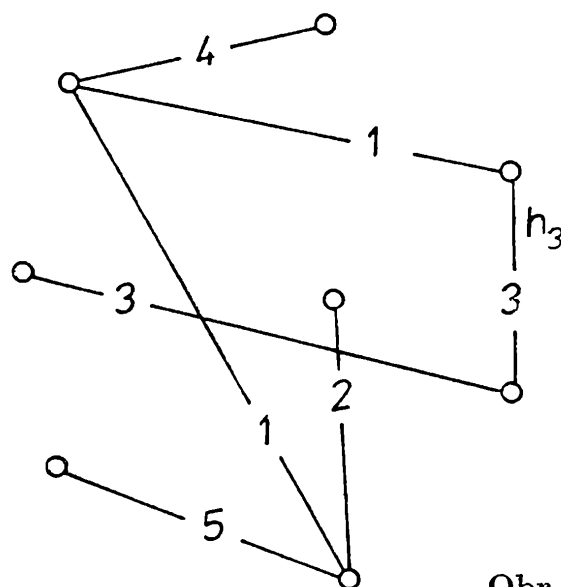
(2) Opakujeme krok (1), dokud nenastane případ a).

Pokusme se objasnit správnost našeho algoritmu MK. Zapochybujme na chvíli, že $F (= G_k, k \in \mathbb{N})$ je opravdu minimální kostrou grafu G , a předpokládejme, že jsme našli jinou kostru $\bar{G}$ grafu G takovou, že $S(\bar{G}) < S(F)$. Hrany vypuštěné z grafu G při konstrukci kostry $\bar{G}$ označme tak, že $\bar{G} = G - \{u_1, \dots, u_k\}$ a $c(u_1) \geq c(u_2) \geq \dots \geq c(u_k)$.

Předpokládejme dále, že $u_1 = e_1, u_2 = e_2, \dots, u_{j-1} = e_{j-1}$ a že hrana u_j je první v uvažované posloupnosti hran, která je hranou grafu $F = G_k$ a která není v $\bar{G}$. Hrana u_j nemůže být mostem v grafu $G_{j-1} = G - \{e_1, \dots, e_{j-1}\}$, jinak by $\bar{G}$ nebyl souvislý graf. $G_k - \{u_j\}$ je nespojitý graf o dvou komponentách a existuje hrana $e_m, j \leq m \leq k$ taková, že $G^1 = G_k - \{u_j\} \cup \{e_m\}$ je souvislý graf a $c(e_m) \leq c(u_j)$, jinak



Obr. 6



Obr. 7

by místo hrany e_m byla algoritmem vypuštěna hrana u_j ; hrana u_j je nejnižší ohodnocená hrana ze všech hran kružnic v G , které tuto hranu obsahují. Zřejmě je tedy $S(G^1) \geq S(G_k)$.

Podobně odstraňujeme z grafu $F = G_k$ postupně všechny hrany u_i ($j < i \leq k$) v něm obsažené a nahrazujeme je dříve vypuštěnými hranami e_r ($j \leq r \leq k$) tak, aby vzniklé grafy $G^1, G^2, \dots, G^s$ byly souvislými, a to tak dlouho, až $\bar{G} = G^s$. Pak bude $S(G^s) \geq S(G^{s-1}) \geq \dots \geq S(G^2) \geq S(G^1) \geq S(G_k)$, a tedy $S(\bar{G}) \geq S(G_k)$ je ve sporu s předpokladem.

Ještě si vyzkoušejme náš algoritmus MK na příkladě grafu G zobrazeného na obrázku 4.

Užitím algoritmu vypustíme hrany $e_1, \dots, e_{11}$ tak, že $c(e_1) = 15 \geq c(e_2) = 12 \geq c(e_3) = 9 \geq \dots \geq c(e_{11}) = 3$. Vypuštěním všech těchto hran (jsou zobrazeny na obr. 5) obdržíme minimální graf F (obr. 6) tak, že $S(F) = 19$ je minimální součet ohodnocení hran všech možných koster grafu G .

V případě, že v j -tém kroku algoritmu existuje v grafu G_{j-1} mezi hranami, které nejsou mosty, více než jedna hrana, jejíž ohodnocení je maximální, musíme se rozhodnout pro vypuštění jedné z nich. Platnost algoritmu MK má za následek nezávislost čísla $S(F)$ na našem rozhodování. Je však zřejmé, že minimální kostra F může být naším rozhodnutím podstatně ovlivněna. Tak již ve třetím kroku algoritmu aplikovaného na náš graf G z obrázku 4 můžeme zvolit $e_3 = h_1$ nebo $e_3 = h_2$, neboť $c(h_1) = c(h_2) = 9$. Rozhodneme-li se pro $e_3 = h_1$, přinutí nás použitý algoritmus označit $e_4 = h_2$. Důsledkem toho je G_4 stejný v obou možných případech našeho rozhodování.

Naproti tomu v jedenáctém kroku volba $e_{11} = h_3$ vede k minimálnímu grafu na obrázku 6, zatímco označíme-li $e_{11} = h_4$, obdržíme minimální graf z obrázku 7.

Cvičení :

1. Existují ještě jiné minimální kostry grafu z obrázku 4 ?
2. Doplňte algoritmus pro nalezení kostry grafu tak, aby poskytoval minimální kostru.
3. Pokuste se zformulovat algoritmus pro konstrukci minimální kostry hranově ohodnoceného grafu, který by na rozdíl od našeho algoritmu vybíral hrany nejnižší ohodnocené!
4. Na základě zjištěných vzdáleností navrhnete nejlevnější síť vysokého napětí spojující nejdůležitější průmyslová, zemědělská a urbanistická centra vašeho okresu nebo kraje.

Literatura :

- [1] *Jiří Sedláček*: Kombinatorika v teorii a praxi, 1964, ČSAV
- [2] *Jar. Šedivý a kol.*: Metody řešení matematických úloh II., 1978, SPN
- [3] *Robin J. Wilson*: Introduction to graph theory, 1972, Oliver & Boyd, Edinburgh

FYZIKA

Ukázka modelování vlivu znečištění atmosféry na klimatické podmínky

RNDr. JAN BEDNÁŘ, CSc. MFF-UK, Praha

Mezi faktory, které významnou měrou ovlivňují životní prostředí člověka, patří bezesporu klimatické podmínky. V tomto ohledu se během poslední doby objevují četné úvahy o tom, že lidská činnost by v budoucnosti mohla nechtěně a pravděpodobně nežádoucím způsobem působit na zemské klima. Uvažuje se zejména o růstu množství CO_2 v ovzduší, který je působen produkcí tohoto plynu umělými spalovacími procesy, dále o vlivu uvolňování odpadního tepla do atmosféry a v neposlední řadě může hrát roli i znečišťování zemského ovzduší různými pevnými částicemi, které se po svém rozptýlení ve vzduchu stávají součástí atmosférického *aerosolu*. Zatímco zvětšování obsahu CO_2 a uvolňování odpadního tepla by zřejmě mělo jednoznačně působit tendence k oteplování atmosféry a zemského povrchu, vliv aerosolů v ovzduší není tak jednoznačný, a proto se jím budeme v tomto článku podrobněji zabývat. Použijeme při tom názorného, avšak vzhledem k reálné situaci

velice zjednodušeného modelu, který nám současně poskytne metodicky vhodnou ukázkou použití kvadratické funkce a kvadratické rovnice.

Atmosférické aerosoly částečně odrážejí a absorbují sluneční záření procházející ovzduším, čímž působí změny v tepelné bilanci atmosféry i zemského povrchu. Přítomnost aerosolových částic v ovzduší se projevuje zejména těmito důsledky:

1. Dochází ke zvýšení teploty ve znečištěných vrstvách vzduchu, které je způsobeno absorbováním slunečního záření aerosolovými částicemi. Teplo, jež takto získá vertikální sloupec vzduchu o jednotkovém horizontálním průřezu, si označme ΔQ_A .

2. Pokles slunečního záření dopadajícího na zemský povrch, který vzniká následkem absorpce a odrazu na aerosolových částicích, se projevuje deficitem tepla spotřebovávaného na ohřívání zemského povrchu (tzv. *zjevné teplo*). Hodnotu tohoto deficitu připadající na jednotkový plošný obsah zemského povrchu si označme ΔQ_S .

3. Zeslabení dopadajícího slunečního záření dále působí zmenšení vypařování vody z vodních ploch i z půdy, neboť dochází i k deficitu tepla spotřebovávaného na tento fyzikální proces (tzv. *latentní teplo*). Deficit latentního tepla opět vztažený k jednotkovému plošnému obsahu označme ΔQ_L .

Pro názorný, i když podstatně zjednodušený popis vlivu atmosférických aerosolů na tepelnou bilanci v atmosféře a na zemském povrchu nyní použijeme modelu publikovaného zhruba před deseti lety v odborné literatuře, který je založen na následujících zjednodušujících předpokladech:

a) Slunce je stále v zenitu.

b) Aerosolové částice jsou přítomny pouze v jisté vrstvě ležící těsně u zemského povrchu nebo v určité výši nad ním a mimo tuto vrstvu se předpokládá, že atmosféra neabsorbuje ani neodráží sluneční záření.

c) Zemský povrch je rovinný.

Zeslabení slunečního záření při průchodu aerosolovou vrstvou lze vyjádřit podle tzv. *Beerova zákona* vztahem

$$I = I_0 e^{-(\alpha + \beta)h} \quad (1)$$

v němž I_0 značí intenzitu slunečního záření (intenzita záření — energie záření procházející za jednotku času jednotkou plošného obsahu orientovanou kolmo na směr šíření záření) na horní hranici zmíněné aerosolové vrstvy, I tutéž intenzitu na dolní hranici aerosolové vrstvy, h tloušťku této vrstvy, e je základ přirozených logaritmů a α , resp. β představuje koeficient odrazu, resp. koeficient absorpce, což jsou fyzikální veličiny vyjadřující míru schopnosti daného prostředí odrážet a absorbovat sluneční záření.

Pro zjednodušení zápisu si zavedme označení $\alpha h = a$, $\beta h = b$ a přepišme (1) do tvaru

$$I = I_0 e^{-(a+b)}. \quad (2)$$

V matematické analýze lze odvodit, že funkci e^x můžeme rozložit v nekonečnou řadu (tzv. *Taylorův rozvoj*)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad (3)$$

když v našem případě $x = -(a+b)$. Protože hodnoty a, b odpovídající reálným podmínkám v atmosféře jsou řádově menší vzhledem k jedné, lze v (3) ponechat pouze první dva členy na pravé straně a ostatní zanedbat. Tímto způsobem dostaneme z (2)

$$I \doteq I_0(1 - a - b), \quad (4)$$

což představuje přibližné vyjádření slunečního záření prošlého za jednotku času vertikálním sloupcem (o jednotkovém horizontálním průřezu) aerosolové vrstvy. Analogicky vyjádříme intenzitu záření odraženého vzhůru, resp. absorbovaného v témže sloupci jako

$$I_0 a, \text{ resp. } I_0 b. \quad (5)$$

Při uvedených zjednodušujících předpokladech a) — c) dopadá na zemský povrch sluneční záření o intenzitě I , z čehož je $I(1 - A)$ absorbováno (A značí *albedo* zemského povrchu, které představuje veličinu charakterizující schopnost odrazet sluneční záření a je definováno jako poměr záření odraženého a dopadajícího) a

$$I A \doteq I_0 A(1 - a - b) \quad (6)$$

se odráží vzhůru. Ze záření odraženého na zemském povrchu se po dalším odrazu tentokrát na aerosolové vrstvě znovu vrátí k zemi

$$I A a$$

a z toho se zde dodatečně absorbuje

$$(1 - A) I A a,$$

což s přihlédnutím k (4) vyjádříme jako

$$(1 - A) A I_0(1 - a - b) a.$$

Zanedbáme-li zpravidla málo významné další toky záření, které vznikají tím, že určitá část ze záření odraženého aerosolem dolů je na zemském povrchu znovu odrazena vzhůru a po novém odrazu na aerosolové vrstvě se opět zčásti vrátí dolů atd., můžeme celkové záření Q_{S+L} absorbované zemským povrchem (a tím přeměněné v teplo) za jednotku času vyjádřit vzorcem

$$Q_{S+L} = I_0(1 - a - b)(1 - A) + I_0(1 - a - b)a(1 - A)A. \quad (7)$$

Prv ý člen na pravé straně (7) představuje teplo získané za jednotku času jednotkou plošného obsahu zemského povrchu při primárním dopadu slunečního záření a druhý člen reprezentuje teplo vzniklé absorbováním záření odraženého zprvu na zemském povrchu vzhůru a posléze odraženého na aerosolové vrstvě směrem dolů.

Část tepla Q_{S+L} , kterou budeme značit Q_S , se projeví ohřátím zemského povrchu (zjevné teplo), zatímco druhá část Q_L se spotřebuje na vypařování vody (latentní teplo). Pišme tedy

$$Q_{S+L} = Q_S + Q_L$$

a dále zavedme konstantu C prostřednictvím vztahu

$$C = B/(B + 1),$$

když B značí tzv. *Bowenův poměr*, který je definován jako

$$B = Q_S/Q_L$$

a představuje meteorologickou charakteristiku schopnosti zemského povrchu odpařovat vodu. Odtud snadno odvodíme, že

$$Q_S = C Q_{S+L},$$

$$Q_L = (1 - C) Q_{S+L}.$$

Uvažujeme-li dále, že v aerosolové vrstvě se absorbuje jak přímé sluneční záření, tak sluneční záření odražené zemským povrchem vzhůru, dospějeme na základě (5) a (6) snadno k závěru, že za jednotku času získá vertikální sloupec o jednotkovém horizontálním průřezu sahající od dolní hranice k horní hranici aerosolové vrstvy teplo Q_A dané vztahem

$$Q_A = I_0 b + I_0 A(1 - a - b)b, \quad (8)$$

kde prv ý člen na pravé straně představuje teplo získané absorbováním přímého slunečního záření a druhý člen reprezentuje příspěvek absorpce slunečního záření odraženého na zemském povrchu vzhůru.

Kdyby v našem modelu neexistovala uvažovaná aerosolová vrstva, získávala by (za platnosti zjednodušujících předpokladů a) — c) jednotka plošného obsahu zemského povrchu za jednotku času teplo ekvivalentní $I_0(1 - A)$ a Q_A by bylo identicky rovno nule. Vztáhneme-li nyní veličiny ΔQ_A , ΔQ_S , ΔQ_L definované na počátku k jednotce času, můžeme zřejmě psát

$$\Delta Q_A = Q_A,$$

$$\Delta Q_S = C Q_{S+L} - I_0(1 - A)C, \quad (9)$$

$$\Delta Q_L = (1 - C) Q_{S+L} - I_0(1 - A)(1 - C),$$

SLOVNÍK

matematických termínů s přihlédnutím k jejich latinskému či řeckému slovnímu základu

Slovník nebude obsahovat definice matematických pojmů, ale ukáže řecké a latinské slovní základy termínů. V zájmu stručnosti uvedeme jen u některých hesel termíny užívané v jiných oborech a odvozené z téhož slovního základu, které čtenáři ulehčí pochopení významu matematického termínu. Upustíme však od citace zprostředkujících vlivů z dalších cizích jazyků, které sice byly pro vývoj a vznik slova důležité, ale ubíraly by slovníku na přehlednosti. Termíny byly vybrány tak, aby pokryly středoškolské učivo z matematiky, základů logiky a z deskriptivní geometrie.

Jako filolog jsem s povděkem přijal pomoc předmětové komise matematiky a fyziky na našem gymnáziu, která mi pomohla termíny vybrat a objasňovala mi jejich přesný význam. Srdečně děkuji zejména prof. K. Benešové a řediteli dr. J. Šídlovi. Redakci Rozhledů patří můj dík za podnět k sepsání slovníku a za trpělivou práci s úpravou rukopisu pro tisk.

Jiří Pech,
gymnázium Praha 3
Sladkovského nám.

- 2 A — ¹⁾ (z lat. *a-*, varianty předložky *ab = od*) — předpona s významem „od, vzdalování“; např. averze — „odvracení se“ (lat. *verto*, *-ere = točit, obracet*)
- A — ²⁾ (z lat. *ad = k, u*) — předpona s významem „k, směrem k, u, při, v blízkosti“; např. adice — „přidávání“, sčítání (lat. *do, dare = dávat*)
- A — ³⁾ (z řec. tzv. *alfa privativum = alfa zbavující*) — předpona s významem „zápor, opak, bez“, volněji též „ztráta, nemožnost“; např. acyklický — bez cyklů, atom — „nerozdělitelný“ (řec. *temnó = řezat*)
- AB — (z lat. *ab = od*) — předpona s významem „od, vzdalování“; např. absolvent — ten, který se vzdaluje, uvolňuje od školní docházky (lat. *solvo, -ere = rozvázat, uvolnit*)
- ABAK — (z řec. *abax, abakos = deska, stolní deska*; početní deska s rovnoběžnými rýhami, s kaménky a matematickými značkami) — 1) antické počítadlo pro čtyři základní početní úkony; 2) grafická pomůcka — tabulka
- ABNORMÁLNÍ (od lat. *ab = od + norma = úhelnice, měřidlo, pravidlo*) — „vzdálený pravidlu, běžné podobě“, neobvyklý, mimořádný
- ABS — (z lat. *abs-*, varianty předpony *ab- = od*) — předpona s významem „od, vzdalování“; např. abstrakce — odtaživost (lat. *traho, -ere = táhnout*)
- ABSCISSA (od lat. *ab = od + scindo, -ere = štípat, krájet*) — „odštípnutá, useknutá“; úsečka na první ose souřadnic, přeneseně první souřadnice
- ABSOLUTNÍ (od lat. *ab = od + solvo, -ere = rozvázat, uvolnit*) — „odvázaný“, oproštěný, prostý; protiklad k „relativní“; např. absolutní hodnota čísla, absolutní chyba
- ABSTRAKCE (od lat. *abs = od + trahe, -ere = táhnout*) — odtaživost, oproštění, pomyslnost
- ABSURDUM (u lat. *ab = od + surdus = hluchý*) = „to, co je řečeno hluchými (od hluchých)“, nepřiměřené, podivné, nesmyslné; ad absurdum — až do krajnosti, do nesmyslu, do nepravdy (lat. *ad = k, směrem k*)
- AD — (z lat. *ad = k, směrem k*) — předpona s významem „k, u“; např. adjunkce = připojení (lat. *iungo, -ere = spojovat*)
- ADIČNÍ (od lat. *a-² = k, u + do, dare = dávat*) — „přidávací“ sčítací
- ADITIVNÍ (od lat. *a-² = k, u + do, dare = dávat*) — „týkající se přidávání“, součtový, vyjádřitelný součtem
- ADJUNKCE (od lat. *ad = k, u + iungo, -ere = spojovat*) — připojení
- AFINITA (od lat. *a-² = k, u + finis = konec, mez, hranice*) — „co je u hranic, v sousedství, a tedy příbuzné“, příbuznost (geometrická)
- AKADEMIE (z řec. *Akadémeia — posvátný háj zasvěcený bohu Akadémovi*; vyučoval v něm filozof Platón) — odtud název školy Platón-

nových žáků a následovníků; dnes pak jednak název školských, vědeckých, uměleckých a osvětových zařízení a společností, zvláště vrcholné vědecké instituce, jednak veřejné vystoupení s uměleckým a kulturním pořadem

ALGEBRA (z latinizovaného arabského *al-džabr* — západoarabská výslovnost „gabr“ = doplnění) — Celý titul arabské učebnice zněl *Hisab al-džabr val-muqabala* (*muqabala* = vyrovnání, protiklad) — „věda o doplnění a vyrovnání, tj. obou stran rovnice“. „Al-džabr“ — „algebra“ se tak stala až do poloviny minulého století synonymem pro „nauku o rovnicích“

ALGEBROGRAM (od latinizovaného *algebra* — v. t. + řec. *grafó* = rýt, psát — kódovaný zápis početního výkonu, kde písmena zastupují číslce

ALGOL (zkratkové slovo z *Algorithmic Language*) — algoritmický jazyk

ALGORITMUS (z latinizovaného arabského *al-Chvárizmí* — přízvisko matematika *Muhammada ibn Músá al-Chvárizmího*). Latinizovaný tvar se objevil v titulu překladu jeho učebnice *Algorithmi de numero Indorum* — „al-Chvárizmího (kniha) o počtářství Indů“ a stal se názvem nové aritmetiky. Později se termínu „algorismus“ začalo používat ve významu postupu, který udává řešení určité třídy úloh konečným počtem kroků

ALIKVOTNÍ (z lat. *aliquot* = několik) — 1) v matematice: alikvotní číslo — to, které dostaneme z jiného čísla dělením beze zbytku; podíl beze zbytku („několik takových čísel tvoří beze zbytku celek“); 2) obvykle: poměrný, úměrný velikosti části vzhledem k celku

ALTERNATIVA od lat. *alternare*, -are = jedno po druhém dělat, střídát) — možnost užít jednoho nebo druhého způsobu; v logice: spojení dvou výroků v jeden spojkou „nebo“;

ALTERNACE — střídání (např. znaménka plus, minus u členů některých posloupností alternují)

AMPLITUDA (od lat. *amplus* = prostorný, rozsáhlý, rozlehlý, velký) — „vyjádření rozsáhlosti“; vzdálenost, rozkmit, rozkyv (výrazy z dřívější matematické a fyzikální terminologie, které jsou dnes vyhrazeny pro vzdálenost mezi krajními polohami); v dnešní terminologii: výkmit, výkyv, tj. výchylka z rovnovážné polohy

AN — ¹⁾ (z varianty řec. *alfa privativum* — *alfa zbavující*) — předpona s významem „zápor, opak, bez“; např. anorganický — neorganický
AN — ²⁾, **ANA** — (z řec. *ana-* — mnohovýznamová předpona a předložka) — předpona s významem:

1) „podle, dle (o způsobu); opět, znova, zpět, proti“; např. analogie — obdoba (řec. *logos* = řeč, slovo)

2) „směr od sebe, roz-“; např. analýza — „rozbírání“, rozbor (řec. *lyó* = rozpojovat, uvolňovat)

- 3) „směr nahoru, vzhůru“; anabaze — „chůze vzhůru“, dlouhý a námahevý pochod (řec. *bainó* = *kráčet*)
- ANALOGIE (od řec. *ana* = *opět, znova* + *logos* = *slovo, řeč*) — „slovo opět, tj. podobně pronesené“, obdoba
- ANALYTICKÝ (z řec. *analytikos k analyó* = *rozlučovat*) — spočívající v rozboru, např. analytická chemie hledá složky sloučenin; ANALYTICKÁ GEOMETRIE — část matematiky zkoumající geometrické útvary rozбором algebraických rovnic a nerovnic
- ANALÝZA (od řec. *ana* — *směr od sebe* + *lyó* = *rozpojovat, uvolňovat*) — rozbor; v logice: rozložení pojmu na složky (protiklad: syntéza); v matematice: souhrnný název pro teorie, které vznikly z diferenciálního a integrálního počtu (studia funkcí rozбором jejich rovnic)
- ANTI-, ANT — (z řec. *anti* = *proti*) — předpona s významem:
- 1) „odpor, nepřátelství, boj proti něčemu“; např. antifašismus, antialkoholický, antikorózní
 - 2) v matematice: „opačná krajnost nastávající pro všechny objekty“, ne pouhá negace; např. antikomutativní — není komutativní pro žádnou dvojici prvků, kdežto „nekomutativní“ — není komutativní pro alespoň jednu dvojici prvků
- ANTIKOMUTATIVNÍ (od řec. *anti* = *proti* + lat. *con* = *s, spolu* + lat. *muto, -are* = *měnit*) — nezaměnitelný pro žádnou dvojici prvků; antikomutativní operace dává různé výsledky pro všechny dvojice lišící se pořadím prvků
- ANTINOMIE (od řec. *anti* = *proti* + *nomos* = *způsob, řád*) — to, co je proti řádu, co řádu odporuje, rozpor, nesrovnalost
- ANTIPARALELNÍ (z řec. *anti* = *proti* + *parallélos* = *vedle sebe kladený, vzájemně přirovnávaný, rovnoběžný*); v matematice: antiparalelní roviny, např. kruhové řezy nerotačního kužele leží ve dvou různých svazcích rovnoběžných (paralelních) rovin, přitom se dvojice rovin z různých svazků nazývají antiparalelní
- ANTIREFLEXIVNÍ (od řec. *anti* = *proti* + lat. *re-* = *zpět* + lat. *flecto, -ere* = *ohýbat, obracet*) — „zabraňující obrácení nazpět“, zabraňující odrazu (např. světelných paprsků); v matematice: anti-reflexivní — není reflexivní pro žádný prvek, kdežto nereflexivní (ireflexivní) není reflexivní pro aspoň jeden prvek
- ANTISYMETRICKÝ (od řec. *anti* = *proti* + *symmetros* = *souměrný* — slož. ze *syn* = *s, spolu* + *metron* = *měřidlo, míra*) — „nesouměrný“, v protikladu k souměrnosti v matematice: antisymetrický — není symetrický pro žádnou dvojici prvků, kdežto asymetrický (nesymetrický) — není symetrický pro aspoň jednu dvojici prvků
- ANUITA (od lat. *annus* = *rok*) pravidelná roční splátka
- ANULOVAT (od lat. $a^{-2} = k$, *u, do* + *nullus* = *žádný*) — „přivést k nule“, položit rovným nule; upravit rovnici tak, že jedna její strana se rovná nule

což po dosazení za Q_{S+L} pomocí (7) snadno upravíme do tvaru

$$\begin{aligned}\Delta Q_A &= I_0 b(1 + A), \\ \Delta Q_S &= -I_0 C(1 - A)(a + b - Aa), \\ \Delta Q_L &= -I_0(1 - C)(1 - A)(a + b - Aa),\end{aligned}\tag{10}$$

když pro vyjádření O_A používáme (8) a vesměs zanedbáváme členy druhého stupně v a , b , neboť tyto členy jsou ve srovnání s ostatními řádově menší. (Uvedli jsme, že hodnoty a , b jsou řádově menší jedné.)

Chceme-li zodpovědět otázku, jak se přítomnost aerosolové vrstvy projeví na teplotě zemského povrchu, musíme počítat s tím, že vedle deficitu zjevného tepla ΔQ_S může zemský povrch naopak teplo získávat prostřednictvím atmosférické výměny (podmíněné zejména vertikálními turbulentními pohyby ve vzduchu) od zahřáté aerosolové vrstvy. Obvykle se předpokládá, že celkovou změnu bilance zjevného tepla u zemského povrchu ΔQ , způsobenou přítomností aerosolové vrstvy, lze schematicky vyjádřit vztahem

$$\Delta Q = \Delta Q_S + D \cdot \Delta Q_A,\tag{11}$$

kde $D = 1$ pro případ, že aerosolová vrstva leží těsně u zemského povrchu a $0 \leq D < 1$ v ostatních případech. Je-li $\Delta Q < 0$, je zemský povrch přítomností aerosolu ochlazován a v případě $\Delta Q > 0$ má aerosolová vrstva naopak oteplovací vliv. Mezní případ $\Delta Q = 0$ pak odpovídá situaci, za které aerosol nepůsobí na přízemní teplotu.

Podmínky, za nichž se znečištění atmosféry aerosolovými částicemi projevuje v blízkosti zemského povrchu buď oteplením nebo ochlazením, můžeme názorně vyjádřit tímto způsobem:

Vraťme se nejprve ke vztahu (11) a dosadíme do něj za ΔQ_S a ΔQ_A podle (10), čímž dostaneme

$$\Delta Q = -I_0 C(1 - A)(a + b - Aa) + I_0 D b(1 + A).\tag{12}$$

Položíme-li dále $\Delta Q = 0$ a roznásobíme-li výrazy na pravé straně (12), obdržíme po malé úpravě

$$-A^2 C a + A(Db + 2Ca + Cb) + Db - Ca - Cb = 0.\tag{13}$$

Tuto rovnici nejprve vynásobíme převrácenou hodnotou a ; a zavedeme-li potom substituci $b/a = p$, přejde (13) okamžitě do tvaru

$$-A^2 C + A(Dp + 2C + Cp) + Dp - C - Cp = 0.\tag{14}$$

Na (14) lze v případě pevně zadaných hodnot D , C , p hledět jako na kvadratickou rovnici pro výpočet určité kritické hodnoty albeda zemského povrchu A . Při této kritické hodnotě přítomnost atmosférického aerosolu (jehož radiační vlastnosti, resp. způsob rozložení v ovzduší jsou popsány pomocí veličiny p , resp. D) nepůsobí na teplotu v blízkosti zemského

povrchu, který má danou schopnost odpařovat vodu, což popisuje veličina C . Řešení této kvadratické rovnice píšeme ve tvaru (15)

$$A_{1,2} = \frac{-(Dp + 2C + Cp) \pm \sqrt{(Dp + 2C + Cp)^2 + 4C(Dp - Cp - C)}}{-2C}$$

a pro názornou ilustraci si nyní uvedeme příklad:

Uvažujeme přízemní aerosol (tj. $D = 1$) a předpokládejme $p = 1$ ($\alpha = b$, tzn., že absorpce má na zeslabení slunečního záření aerosolovými částicemi stejný podíl jako odraz směrem vzhůru), $C = 1$ (zemský povrch je dokonale suchý, neexistuje z něj vypařování vody.). Dosažením právě uvedených hodnot D , p , C do (15) dostáváme pro tento případ $A_1 = 3,73$, $A_2 = 0,27$. Hledíme-li na levou stranu (14) jako na kvadratickou funkci nezávisle proměnné A , potom grafem této funkce je, jak známo, parabola. Vzhledem k tomu, že C má podle uvedené definice nezápornou hodnotu (Krajní případ, kdy $C = 0$ zatím neuvažujeme, ale vrátíme se k němu později.), musí být faktor $(-C)$ stojící v (14) u A^2 záporný. Zmíněná parabola je proto v případě, kdy hodnoty A , resp. ΔQ vynášíme na vodorovnou, resp. na svislou osu, otevřená směrem dolů. Jsou-li hledané kořeny kvadratické rovnice (14) reálné, potom tato parabola protíná vodorovnou osu v bodech A_1 a A_2 , jejichž souřadnice se rovnají hodnotám těchto kořenů. Fyzikální význam pro nás samozřejmě budou mít jenom hodnoty A z intervalu $< 0, 1 >$, neboť jiná formální řešení (15) neodpovídají fyzikální definici albeda. Pro náš případ $D = 1$, $p = 1$, $C = 1$ představuje hodnota albeda zemského povrchu $A_2 = 0,27$ kritickou hodnotu, při níž se přítomnost aerosolu neprojeví na teplotě v bezprostřední blízkosti zemského povrchu. Je-li skutečné albedo zemského povrchu menší (větší) než tato kritická hodnota, má levá strana (14), která představuje ΔQ , zápornou (kladnou) hodnotu a přítomnost aerosolu ochlazuje (otepluje) zemský povrch.

Uvažujme ještě zmíněný krajní případ, kdy $C = 0$, tzn., že veškeré sluneční záření absorbované zemským povrchem se spotřebovává na vypařování vody. V tomto případě se (12) zjednoduší na tvar

$$\Delta Q = I_0 D(1 + A) b$$

a přítomnost jakýchkoli absorbujících aerosolových částic ($b > 0$) ve vrstvě atmosféry bezprostředně přiléhající k zemskému povrchu ($D = 1$) potom působí oteplení ($\Delta Q > 0$).

Jestliže má kvadratická rovnice (14) imaginární kořeny, potom celá parabola popisující při daných hodnotách p , D , $C > 0$ průběh kvadratické funkce, vyskytující se na levé straně (14), leží v oblasti záporných hodnot ΔQ a aerosol tedy snižuje přízemní teplotu při jakékoli hodnotě albeda zemského povrchu.

Z uvedeného je zřejmé, že přítomnost znečišťujících aerosolů v atmosféře se může podle různých okolností projevovat v blízkosti zemského

povrchu buď ochlazením nebo oteplením, přičemž konečný výsledek závisí nejen na vlastnostech samotných aerosolových částic a na způsobu jejich rozložení v ovzduší, ale i na kvalitě zemského povrchu (zejména na jeho albedu a schopnosti odpařovat vodu). Studium klimatického významu atmosférických aerosolů proto představuje složitý komplex problémů, avšak na základě dosud provedených studií se zdá pravděpodobné, že z dlouhodobého hlediska a v globálním měřítku zemského klimatu budou podmínky, za nichž aerosoly snižují přízemní teplotu, splněny častěji než podmínky opačné, které se však též mohou někdy uplatňovat, a to zejména ve vysokých zeměpisných šířkách, kde obvykle existuje značné albedo zemského povrchu (zalednění, sněhová pokrývka po většinu roku).

Lze se domnívat, že vzrůst aerosolového znečištění ovzduší by se mohl celkově projevit určitou tendencí k ochlazení zemského klimatu a potenciálně tak působit proti vlivu rostoucího obsahu CO_2 a uvolňování odpadního tepla do atmosféry. Na základě současného stavu našich znalostí však ještě nemůžeme jednoznačně určit po kvantitativní stránce konečný výsledek.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

60 let profesora Ivana Úlehly

Významný československý odborník v moderní fyzice a současně specialista na otázky filozofie přírodních věd prof. RNDr. *Ivan Úlehla*, DrSc., se v plném životním elánu a uprostřed činnorodé práce vloni dožil šedesáti let.

Narodil se 17. října 1921 ve Skalici, okres Senica. Prvních 17 let svého života prožil na Slovensku. Jeho rodina se v r. 1938 přestěhovala do Prahy, kde o dva roky později ukončil reálné gymnázium. Pokračoval ve studiu a v r. 1942 absolvoval abiturientský kurs vyšší průmyslové školy strojní. Po skončení druhé světové války vstoupil na přírodovědeckou fakultu Univerzity Karlovy v Praze. Zde studoval nejen teoretickou fyziku a matematiku, ale navštěvoval také přednášky z jiných přírodovědných oborů — chemie, biologie a fyziologie. Současně absolvoval první dvouletí na fakultě všeobecného lékařství Univerzity Karlovy. Během studií se také intenzivně zajímal o otázky filozofické, zejména pak o problematiku filozofie přírodních věd. Doktorátem z teoretické

fyziky ukončil v r. 1949 univerzitní studium, hodnosti kandidáta fyzikálně matematických věd dosáhl v r. 1956, vědecké hodnosti doktora fyzikálně matematických věd v roce 1977.

Odborná dráha Dr. I. Úlehly začíná na přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy v Praze; v r. 1951 odtud odchází na přírodovědeckou fakultu do Bratislavy. Od roku 1954 do r. 1960 pracuje jako vědecký pracovník, člen ústavní rady Ústavu jaderného výzkumu ČSAV v Řeži. V tomto období také několikrát zastával funkci vědeckého tajemníka OSN a zúčastnil se jako zvláštní asistent generálního sekretáře přípravy I. a II. ženevské konference o mírovém využití atomové energie. Působil také jako expert při přípravných jednáních o statutu mezinárodní atomové agentury.

V roce 1960 přechází opět na vysokou školu, na fakultu technické a jaderné fyziky ČVUT v Praze jako docent a v r. 1963 byl na téže fakultě jmenován profesorem.

V období 1964—1967 zastával funkci náměstka ředitele Spojeného ústavu jaderných výzkumů v Dubně (SSSR). Od r. 1967 působí na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze jako vedoucí katedry teoretické fyziky II. a od r. 1975 vede Nukleární centrum této fakulty.

Během své úspěšné dráhy vědce a pedagoga se profesor Úlehla zabýval problematikou moderní fyziky. Dosáhl na tomto poli mnohých původních výsledků zejména v oblasti kvantové teorie, teorie elementárních částic, teorie atomového jádra a fyziky reaktorů. Do současné doby neztratily svou aktuálnost například výpočty základních charakteristik jader helia, berylia, uhlíku a kyslíku v rámci mikroskopické teorie mnoha částic, které získal se svými spolupracovníky, a anomální rovnice pro relativistické částice se spinem $1/2$, jejímž zvláštním případem je známá Úlehlova-Petrášova rovnice.

V posledním období se soustředil na problematiku popisu nukleon-nukleonových interakcí, zejména na nalezení realistických potenciálů a jejich aplikace. Výsledky své práce shrnul ve více než 70 původních vědeckých publikacích. Velkou péči věnoval svým žákům — našim i zahraničním diplomantům a aspirantům. Výsledky jeho práce jsou oceňovány častými pozvánkami ke spolupráci s významnými zahraničními vědeckými centry.

Prof. Úlehla je též dobře znám svou činností v oboru filozofie přírodních věd. I v této oblasti je autorem původních výsledků a knihy, v naší odborné literatuře ojedinělé.

Mimo činnost badatelskou a pedagogickou věnuje mnoho své energie práci organizační ve prospěch rozvoje jaderné fyziky a v poslední době zejména fyziky vysokých energií. Aktivně se též účastnil veřejného

života, pracoval v rade funkcií. V posledním období byl zvolen předsedou Jednoty československých matematiků a fyziků.

Za význačné pracovní výsledky, za úspěšnou pedagogicko-výchovnou činnost byl profesor Ulehlovi k jeho životnímu jubileu propůjčen Řád práce.

J. Formánek, M. Suk

Matematici na známkách I

JÁN MIČKA, Trnava

Federálne ministerstvo spojov ČSSR vydalo v roku 1981 v emisii Významné osobnosti okrem iných aj dve poštové známky, z ktorých aspoň jedna musela zaujať každého, čo sa hoci len malou mierou zaujíma o matematiku. Touto známkou bol nesporne portrét nášho matematika akademika *Jura Hronca* (1881—1959), autora vyše dvoch desiatok pôvodných prác zameraných takmer výlučne na lineárne diferenciálne rovnice tzv. Fuchsovho typu. Znáмка vyšla pri príležitosti 100. výročia narodenia J. Hronca.

Druhá známka pripomenula 200. výročie narodenia *Bernarda Bolzana* (1781—1848), osobnosti svetového mena a prenikavého mysliteľa 19. storočia v matematike a logike. Jeho vlastný výklad logiky v diele *Wissenschaftslehre* z r. 1837 bol predzvestou novej doby vo vývoji logiky, lebo sa v ňom po prvý raz vyskytli niektoré základné pojmy a princípy úvah, teraz používané v matematickej logike. Ešte skôr, r. 1817, podal Bolzano dôkaz nutnej a postačujúcej podmienky pre konvergenciu postupnosti, a to o 4 roky skôr než francúzsky matematik *A. L. Cauchy*. Bolzano svojimi dielami značne predbehol dobu, v ktorej žil; ukázal sa ako priekopník moderných metód matematickej analýzy a teórie množín ešte pred *G. Cantorom*.

Bolzanovo výročie si pripomenul celý kultúrny svet a bolo zaradené do kalendára UNESCO.

Je možné, že druhá spomínaná známka mohla ujsť pozornosti našej verejnosti, pretože ju dostali iba organizovaní filatelisti prostredníctvom novinkovej služby Pofis, prípadne si ju záujemci mohli kúpiť spoločne s ostatnými známkami emisie v predajniach Pofis. V bežnom predaji pri poštových prihradkách nebola.

Počín tvorcov uvedených známok (prvú podľa návrhu akad. maliara J. Baláža ryl J. Herčík a druhú podľa návrhu národného umelca prof.



Obr. 1

K. Svolinského ryl B. Housa) treba oceniť tým skôr, že vydávanie poštových známok s matematickým námetom nie je každodennou udalosťou ani u poštových správ v iných štátoch, pretože významných matematikov je predsa len podstatne menej ako napr. maliarov, spisovateľov alebo hudobných skladateľov, ktorí sa na známkach vyskytujú častejšie.

Preto radi zaznamenávame, že v československej známkovej tvorbe napr. v roku 1957 z príležitosti 250 rokov inžinierskych škôl v Prahe bola vydaná séria 4 známok a na dvoch z nich boli matematici: *František Jozef Gerstner*, riaditeľ matematickofyzikálnych štúdií pražskej univerzity, a *Rudolf Skuherský*, ktorý ako prvý profesor Královského polytechnického zemského ústavu v Prahe začal v roku 1861 prednášať deskriptívnu geometriu v českom jazyku a jeho príklad nasledovali zakrátko aj iní profesori polytechniky.

Aj 100. výročie založenia Jednoty československých matematikov a fyzikov, ktoré pripadlo na rok 1962, našlo odraz na poštových známkach: podľa návrhu M. Švabinského vyryl J. Schmidt portréty predsedu JČM *Františka Závíška* a *Karla Petra*, profesora matematiky pražskej univerzity, známeho autora vysokoškolských učebníc diferenciálneho a integrálneho počtu. Karel Petr bol najsilnejším pilierom našej matematickej vedy celej prvej polovice 20. storočia a najmä jeho zásluhou začala vzrastať úroveň odborného vzdelania profesorov matematiky a deskriptívnej geometrie a výchovy nových vedeckých pracovníkov.

Na druhej známke je *Miloslav Valouch*, riaditeľ JČMF do svojej smrti v roku 1952, ktorý je najmä študentom matematiky a fyziky na stredných a vysokých školách známy predovšetkým ako autor matematických



Obr. 2



Obr. 3

fyzikálnych, astronomických a logaritmických tabuliek. Spoločne s M. Valouchem je na známke i prof. J. Hronec, prvý predseda Slovenského výboru JČMF.

Ján Andrej Segner, bratislavský rodák, je známy ako objaviteľ jednoduchého vodného motora, nazvaného jeho menom. Bol profesorom matematiky a fyziky na univerzite v Halle, Jene a Göttingene, bol členom viacerých akadémií vied — petrohradskej, ruskej a berlínskej. Na jeho počesť v roku 1974, pri príležitosti 270. výročia narodenia vyšla maďarská známka.

JČM r. 1874 menovala svojim čestným členom Jozefa Maxmiliána Petzvala, známeho objaviteľa fotografického objektívu s veľkou svetelnosťou. Prednášal matematiku vo Viedni a Budapešti, bol členom mnohých vedeckých spoločností. Na rakúskej známke, vydané v roku 1973 nie je síce J. Petzval, ale jeho objektív a hlavné životopisné údaje, ktoré dostatočne pripomínajú dielo nášho významného učenca.

V ďalšom sa pozrieme, ako známková tvorba v iných krajinách poskytuje našim učiteľom matematiky možnosť priblížiť žiakom osobnosť, prácu, život i dielo význačných matematikov a tak hlbšie načrieť



Obr. 4

do histórie matematiky, učiť sa z nej a tým aj takou formou prispieť k zvýšeniu záujmu o matematiku ako vyučovací predmet.

Začať od Adama značí v matematike spomenúť zásluhy gréckych filozofov a matematikov, ktorí z počiatkových poznatkov aritmetického, geometrického a algebraického charakteru vytvorili matematiku ako vedecký systém. Boli to predovšetkým *Tales z Miletu* (624—548 pr. n. l.) a *Pytagoras* (580—501 pr. n. l.), ktorý na ostrove Samos založil školu, kde sa jeho žiaci zaoberali najmä náukou o číslach, číselných postupnostiach a úmerách. K 2500. výročiu založenia Pytagorskej školy vyšli r. 1955 tri grécke známky. Jedna z nich predstavuje slávneho učenca, na druhej je zobrazený ostrov Samos a na tretej je grafické znázornenie vety o vzťahu obsahov štvorcov nad stranami pravouhlého trojuholníka, ktorá asi navždy zostane spojená s Pytagorovým menom.

V roku 1978 vydalo Grécko a Cyprus známky s portrétom najväčšieho starogréckeho filozofa *Aristotela* (385—322 pr. n. l.), ktorý vytvoril prvý logický systém a dal podnet na zaznamenanie historického vývoja matematiky. Aristotelovým žiakom zas vďačíme za to, že pojem matematika nadobudol terajší význam.

Zlatú dobu gréckej matematiky reprezentuje (aj v známkovej tvorbe) *Euklides*, ktorého *Základy* na tisícročie ovplyvnili vývoj geometrie. Na kupóne poľskej známky vydané roku 1971 sú faksimile Euklidových *Základov*, prepísaných v Krakove v roku 1444, ktoré neskôr počas štúdií na tamojšej univerzite používal slávny poľský astronóm *Mikuláš Koperník*.

K najväčším matematikom všetkých čias patrí bezpochyby *Archimedes*, žijúci v Syrakúzach na Sicílii v rokoch 287—212 pr. n. l. Použitím exhaustívnej metódy ako prvý odvodil objem valca, kužeľa a gule a okrem toho pomocou pravidelných 96-uholníkov vpísaných a opísaných danej kružnici určil s dostatočnou presnosťou pomer dĺžky

kružnice k jej priemeru, označovaného neskôr písmenom π , na hodnotu známú dnes každému žiakovi.

Známku s Archimedovým portrétom vydala roku 1963 španielska poštová správa.

Zakladateľom gréckej astronómie a sférickej trigonometrie je *Hipparchos z Nikaey*, žijúci v 2. storočí pr. n. l. Štúdium geometrie na guľi ho priviedlo k objavu stereografickej projekcie. Vypočítal pomerne presne veľkosť Mesiaca i jeho vzdialenosť od Zeme. Na jeho počesť vydali v Grécku v rokoch 1965 a 1980 známky s jeho portrétom a obrázkom astrolábu, ktorý pri svojich meraniach používal.

Posledným starovekým matematikom, ktorého spomenieme, je *Aristarchos zo Samu*. Podobne ako Hipparchos sa pokúsil o stanovenie vzdialenosti Zem – Mesiac. Bol zástancom hypotézy, že Slnko je stredobodom pohybu planét, za čo je často nazývaný Koperníkom staroveku.

Dve známky, znázorňujúce jeho heliocentrický systém, vyšli v Grécku v roku 1981.

Pokrok, ktorý do vývoja matematiky vložili arabskí matematici, možno ilustrovať pakistanskou známkou, pripomínajúcou dielo matematika a fyzika *Alhazena*, známeho aj pod menom *Ibn al-Hasan Haitham*, žijúceho na prelome 10. a 11. storočia. Alhazen rozriešil problém, požadujúci z dvoch bodov ležiacich v rovine danej kružnice viesť priamky pretínajúce sa tak, aby s normálou tohto bodu zvierali zhodné uhly. Pri výpočte objemov telies, vznikajúcich rotáciou paraboly okolo priemeru alebo osi používal exhaustívnu metódu.

K výročí českého vydání Eukleidových Základů

dr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

Jen malému počtu myslitelů, filozofů a vědců se podařilo ovlivnit způsob lidského myšlení tak silně, aby to bylo patrné ještě po několika stoletích. Zcela výjimečné postavení má řecký matematik *Eukleides*, který žil kolem roku 300 před naším letopočtem. Dodnes se s jeho jménem setkáváme v učebnicích matematiky, a to nikoliv pouze v historických poznámkách. V latinském přepisu jeho jméno zní *Euclides*, odkud je též odvozena někdy užívaná česká podoba *Euklid*.

Eukleides napsal řadu spisů. Zabýval se v nich převážně matematikou, psal však také o astronomii, optice a hudební teorii. Jeho hlavní dílo, jež má trvalou hodnotu, se nazývá *Základy* (řecky *Stoicheia*). Jde o roz-

sáhlý spis, který je rozdělen na 13 částí, jež jsou označeny jako knihy. Prvních šest knih se zabývá planimetrií, další čtyři knihy se věnují aritmetice a teorii čísel, v posledních třech knihách se píše o stereometrii.

Při psaní Základů Eukleides vyšel z matematických poznatků jemu dostupných, které zpřesnil a doplnil. Vytvořil přitom vědecký systém, který vynikal logickým uspořádáním. Pro svůj deduktivní charakter byly pak Základy po staletí obdivovány a staly se vzorem i pro badatele v jiných vědních oborech.

Původní text Základů je samozřejmě v řečtině. Základy byly v 8. století přeloženy do arabštiny a ve 12. století z arabštiny do latiny. V latině též Základy poprvé vyšly tiskem, stalo se tak v Benátkách v roce 1482. Přímý překlad Základů z řečtiny do latiny byl však pořízen až v roce 1505.

Do češtiny přeložil Základy *František Servít* a překlad postupně publikoval v letech 1903 až 1907 ve výročních zprávách pražského vinohradského gymnázia. Před 75 lety v roce 1907 pak jeho český překlad Základů vyšel knižně nákladem tehdejší Jednoty českých matematiků. Servítův překlad byl sice uvítán českou matematickou veřejností, jak o tom svědčí recenze v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky (roč. 1907/8), avšak Základy už nemohly být používány jako skutečná učebnice; překlad byl spíše poctou českého národa Eukleidovi.

Dostane-li se vám Servítův překlad do rukou, neodkládejte jej pouze proto, že se vám jeho jazyk bude zdát zastaralý. Zkuste v něm např. najít slavný Eukleidův pátý postulát, jenž je ekvivalentní s axiomatickým rovnoběžností, podle kterého lze daným bodem vést právě jednu rovnoběžku s danou přímkou. K tomu je třeba poznamenat, že F. Servít postuláty nazval ve svém překladu prvotními úkoly. Při troše trpělivosti naleznete v Základech i Pythagorovu větu. V deváté knize si můžete přecíst větu, která říká, že prvočísel je nekonečně mnoho. Při prostudování jejího důkazu zjistíte, že myšlenky, kterou použil Eukleides, se používá k důkazu této věty i v současných učebnicích.

Na závěr několik slov o překladateli. František Servít se narodil v roce 1848 v Modlíkově u Přibyslavi. Po studiích na pražské univerzitě byl profesorem latiny a řečtiny na gymnáziích v Jičíně a v Praze na Vinohradech. Zemřel v roce 1923.

Několik zajímavostí pro čtenáře Rozhledů

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Z různých pramenů jsme získali několik matematických drobností, které snad zaujmou naše čtenáře; skoro všechny budou moci s porozuměním sledovat i nejmladší čtenáři.

1. Chceme-li zjistit, které ze dvou kladných čísel x, y je větší, vypočteme jejich rozdíl nebo jejich podíl; je to tedy velmi jednoduché. Řešit však tuto úlohu pro čísla

$$x = \frac{278\,000\,007}{751\,000\,007}, \quad y = \frac{278\,000\,000}{751\,000\,000}$$

by nebylo příliš příjemné, kdybychom na řešení „nešli od lesa“. Podíváme-li se pozorně na oba uvedené zlomky, vidíme, že čísla x, y můžeme napsat takto:

$$x = \frac{a+7}{b+7}, \quad y = \frac{a}{b}, \quad b > a > 0.$$

Potom je

$$x - y = \frac{ab + 7b - ab - 7a}{b(b+7)} = \frac{7(b-a)}{b(b+7)} > 0, \quad (1)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a+7}{b+7} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab+7b}{ab+7a} > 1; \quad (2)$$

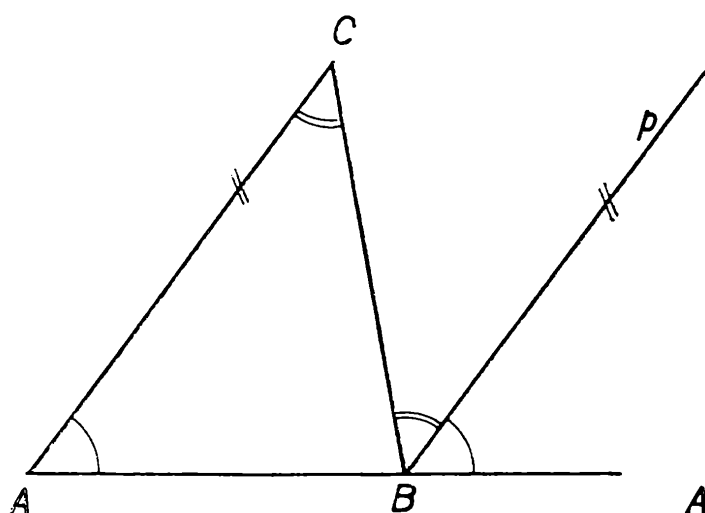
při odhadu jsme použili toho, že je $b > a > 0$. Z (1) i z (2) plyne, že je $x > y$.

2. Sledujte, jak žák, který rychle řešil danou rovnici, došel k výsledku $7 = 13$; potom uveďte správný postup řešení.

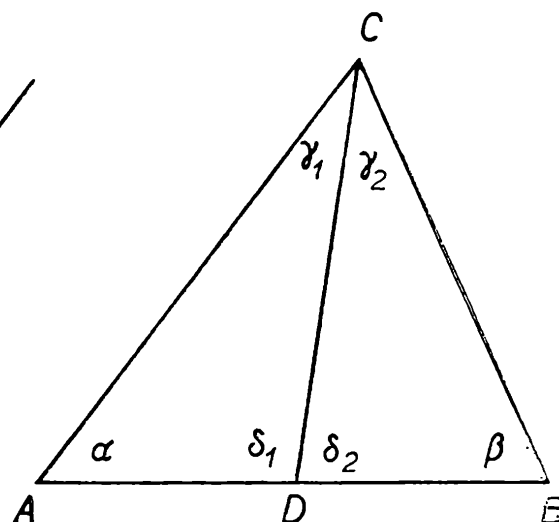
$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x} \quad (3)$$

$$\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}$$

$$13-x = 7-x, \text{ tj. } 13 = 7.$$



Obr. 1



Obr. 2

3. Je dána rovnice

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{2}{x},$$

v níž a je libovolné reálné číslo. Jeden student postupoval při jejím řešení takto:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 - a^2} &= \frac{2}{x} \\ 2x^2 &= 2x^2 - 2a^2 \\ a^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Došel tak k závěru, že libovolné reálné číslo je rovno nule. Kde udělal chybu?

4. V učebnicích geometrie se dokazuje, že součet velikostí vnitřních úhlů každého trojúhelníku je rovný 180° . Důkaz plyne z obr. 1 ($p \parallel AC$) na základě toho, že úhly vyznačené jedním obloučkem jsou shodné a rovněž úhly vyznačené dvěma obloučky jsou shodné.

Přemýšlivý žák provedl však důkaz takto (obr. 2): Uvnitř strany AB trojúhelníku ABC zvolil bod D a sestrojil úsečku CD . Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků ADC , DBC označil jako na obr. 2; přitom je zřejmé

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma = |\sphericalangle ACB|. \tag{5}$$

Je-li x součet velikostí vnitřních úhlů v každém trojúhelníku, pak z trojúhelníku ADC , DBC plyne, že je

$$\begin{aligned} \alpha + \delta_1 + \gamma_1 &= x, \\ \delta_2 + \beta + \gamma_2 &= x. \end{aligned}$$

Sečtením těchto dvou rovností dostaneme rovnost

$$\alpha + \beta + \delta_1 + \delta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 2x.$$

Podle (5) a na základě toho, že je $\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ$, je tedy

$$\alpha + \beta + \gamma + 180^\circ = 2x.$$

Protože je také $\alpha + \beta + \gamma = x$, je $x = 180^\circ$. Je tento důkaz správný?

5. Goniometrické rovnice řešíme zpravidla tak, že používáme různé goniometrické vzorce. Avšak rovnici

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1 \quad (6)$$

můžeme rozřešit jednoduše jinak. Víme, že

$$\text{pro } x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \text{ je } |\sin x| = 1, \cos x = 0,$$

$$[\text{pro } x = k\pi \quad |\sin x| = 0, |\cos x| = 1;$$

přitom k je libovolné celé číslo. Z toho plyne, že kořeny rovnice (6) jsou čísla

$$x = k \frac{\pi}{2}, k \text{ číslo celé}; \quad (7)$$

jde o to, zda má tato rovnice ještě jiné kořeny.

Víme, že pro $0 < a < 1$ a pro $n > 0$ celé je $a^n < a$. Je-li $x \neq k \frac{\pi}{2}$, je $|\sin x| < 1$, $|\cos x| < 1$, a tedy je $\sin^2 x < 1$, $\cos^2 x < 1$; proto je

$$\sin^{10} x = (\sin^2 x)^5 < \sin^2 x$$

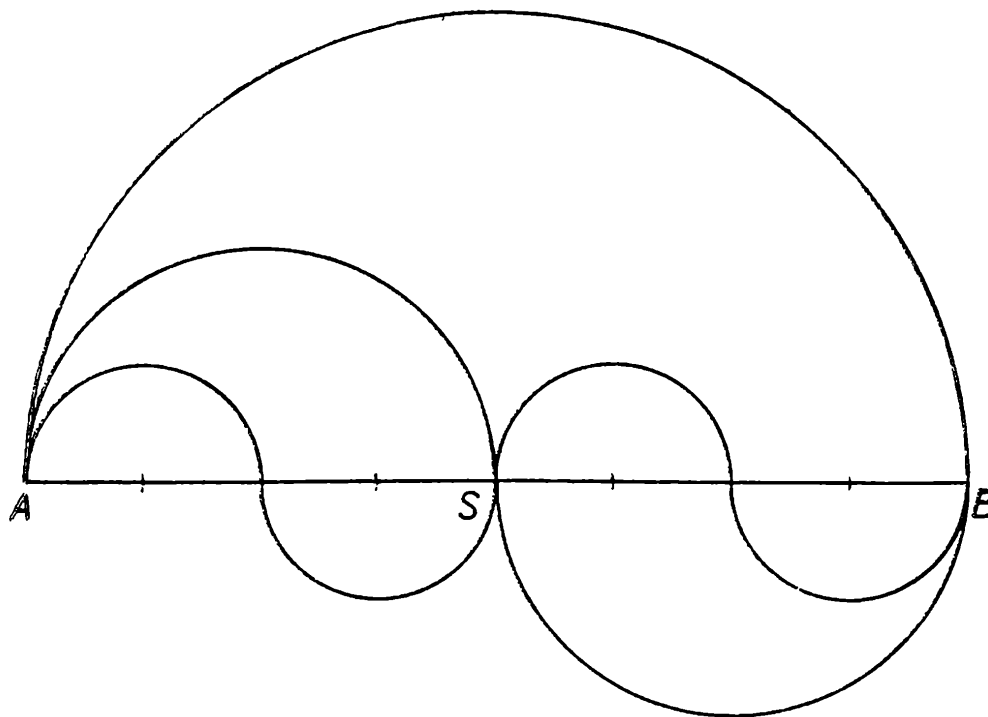
$$\cos^{10} x = (\cos^2 x)^5 < \cos^2 x.$$

Z toho plyne, že pro $x \neq k \frac{\pi}{2}$ (k celé) je

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x < 1;$$

všechna řešení rovnice (6) jsou tedy udána na řádku (7).

6. Na obr. 3 je narysována polokružnice o středu S a průměru AB , jehož délka je $2r$; víme, že délka této polokružnice je πr . Žák Zmatlík přitom přišel na myšlenku, jak jednoduše vypočíst číslo π . Sestrojil polokružnici nad průměrem AS a polokružnici nad průměrem SB tak, že z nich vznikla „vlnovka“ ASB (obr. 3). Každá z těchto polokružnic má poloměr $\frac{r}{2}$; proto délka celé vlnovky ASB je $2\pi \frac{r}{2} = \pi r$. Potom sestrojil dvě shodné polokružnice tak, že grafický součet jejich průměrů je úsečka AS a že tvoří opět „vlnovku“. Totéž provedl nad úsečkou SB ,



Obr. 3

takže vznikla vlnovitá křivka složená ze čtyř shodných polokružnic; její délka je opět πr . Usoudil, že tak může pokračovat až do nekonečna; přitom se polokružnice stále zmenšují, takže nakonec „vlnovka“ přejde v úsečku AB o délce $2r$. Protože délka každé vlnovité křivky AB je πr , plyne z toho, že je $\pi r = 2r$, čili $\pi = 2$. Je tato úvaha správná?

7. Každému je jasné, že platí rovnost

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots, \quad (8)$$

i když na její pravé straně je nekonečně mnoho členů $(1 - 1)$. Vynecháme-li závorky, dostáváme rovnost

$$0 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (9)$$

jejíž pravou stranu můžeme napsat takto:

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots \quad (10)$$

což je zřejmě rovno 1. Z této úvahy plyne, že je $0 = 1$. Jak je to možné?

Odpovědi na otázky.

2. Snadno se přesvědčíme, že číslo $x = 10$ je kořenem dané rovnice (3); je tedy $4x - 40 = 0$. Proto nemůžeme číslem $4x - 40$ dělit. Při správném postupu převedeme oba členy uvedené ve druhém řádku rovnice (3) na jednu stranu a vytkneme z nich číslo $4x - 40$. Tak dostaneme nakonec rovnici

$$(4x - 40)(13 - x - 7 + x) = 0,$$

z níž plyne, že je $4x - 40 = 0$ čili $x = 10$.

3. Z rovnice (4) plyne po převedení obou členů obsahujících neznámou na jednu stranu rovnice, že je

$$0 \cdot x^2 = a^2.$$

Je-li $a = 0$, je každé reálné číslo x kořenem rovnice; je-li $a \neq 0$, nemá rovnice žádný kořen.

4. Při důkazu se předpokládá, že součet velikostí vnitřních úhlů je v *každém* trojúhelníku vždy stejný; protože to však není dokázáno, není důkaz správný.

6. Úvaha není správná. Ať pokračujeme se sestrojováním stále menších polokružnic jakkoli dlouho, dostaneme vždy „vlnovku“ o délce πr . Zmatlíka svedl k ukvapenému závěru názor, podle něhož *se zdá*, že vlnovka nakonec přejde v úsečku AB .

7. Problém patří do teorie nekonečných řad, které se dělí do dvou skupin. U řad jedné skupiny (jimiž říkáme konvergentní) má smysl mluvit o jejich součtu, kdežto u řad druhé skupiny (zvaných divergentní) nikoli. Řady (8) a (10) patří do první skupiny, avšak řada (9) patří do druhé skupiny. Sečteme-li její první dva členy, dostaneme číslo $s_2 = 0$; sečteme-li její tři první členy, dostaneme číslo $s_3 = 1$. Pokračujeme-li takto dále, dostáváme $s_4 = 0$, $s_5 = 1$, $s_6 = 0, \dots$; už z toho vidíme, že rovnost (9) nemá zřejmě rozumný smysl.

Paradox, který jsme uvedli v 7. odstavci, je jeden z mnoha jiných. Než byla vybudována vědecky zdůvodněná teorie nekonečných řad (což se stalo až v 19. století), byli vědci nad těmito paradoxy dost bezradní. Je však zajímavé, že skutečně vynikající matematikové se těmito paradoxům takřka instinktivně vyhýbali. Zato méně zdatní vyvozovali z nich leckdy smělé spekulace. Tak např. *Guido Grandi*, který žil v 18. století, se domníval, že výše uvedeným „výpočtem“, kterým se z nuly stalo číslo jedna, je matematicky odkázáno, že bylo možno stvořit svět z ničeho!

OLYMPIÁDY

Úlohy pro 1. kolo XXIV. ročníku FO

Kategorie C

1. Dvě tělesa tvaru kváдру o hmotnostech m_1 , m_2 , $m_2 > m_1$ jsou svázána vláknem a položena na nakloněnou rovinu tak, že vlákno je rovnoběžné se spádníci nakloněné roviny. Nakloněná rovina svírá s vodo-

rovnou rovinou úhel β . Součinitel smykového tření mezi prvním tělesem a podložkou je f_1 , mezi druhým tělesem a podložkou je f_2 , $f_2 > f_1$. Jakou silou je napínáno vlákno v těchto případech:

- Soustava těles se pohybuje po nehybné nakloněné rovině jen působením tíhového pole.
- Soustava je tažena po nakloněné rovině vzhůru rovnoměrným pohybem.

V každém případě je těleso o hmotnosti m_2 nejprve umístěno na nakloněné rovině výše než těleso o hmotnosti m_1 , potom obráceně.

Proveďte diskusi všech případů úlohy a) i b). Ke každému z nich nakreslete náčrtek a popište pohyb soustavy. Po diskusi řešte úlohu pro hodnoty: $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 8 \text{ kg}$, $\beta = 30^\circ$, $f_1 = 0,1$, $f_2 = 0,2$.

2. Na povrchu Země v místě s tíhovým zrychlením $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ byla změřena tíha F závaží A na siloměru se stupnicí v newtonech. Siloměr a závaží A vzal s sebou kosmonaut na cestu na planetu P. Po přistání na planetě P našel na jejím povrchu takový kámen B, že po jeho zavěšení na siloměr naměřil opět sílu F . Pak provedl tento pokus: Na jeden konec vlákna upevnil těleso A, na druhý konec těleso B a vlákno vedl žlábkem pevné kladky. Zjistil, že těleso B klesá se zrychlením a .

- Jak z výsledku pokusu stanovil kosmonaut zrychlení volného pádu g_p v místě pokusu na planetě?

Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty $F = 9,81 \text{ N}$, $a = 1,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

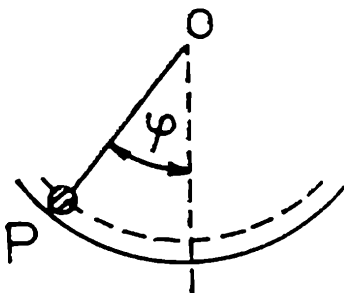
Hmotnost vlákna, pevné kladky ani pasivní odpory při pohybu kladky neuvažujte.

- Kosmonaut měl k dispozici osobní automatickou pružinovou váhu s rovnoměrnou stupnicí (pro měření na povrchu Země v kilogramech) a věděl, že jeho hmotnost je asi 80 kg. Když se postavil na váhu, ustálil se index na dílku 55 stupnice. Jak z těchto informací ověřil správnost výsledku řešení úlohy a)?

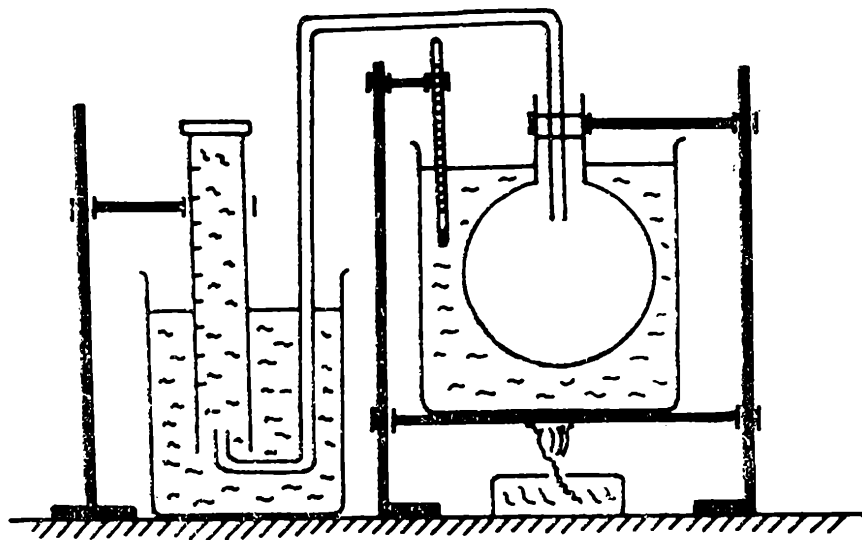
- Jaká je hmotnost tělesa B?

3. Při teplotě 0°C má zinková válcová tyč délku $l_1 = 200 \text{ mm}$ a měděná válcová tyč délku $l_2 = 201 \text{ mm}$.

- Mohou mít tyče při některé teplotě $t \neq 0^\circ \text{C}$ stejnou délku? Teplotní součinitel délkové roztažnosti zinku $\alpha_1 = 26,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, mědi $\alpha_2 = 16,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.
- Při teplotě 0°C je každá tyč těsně zasazena mezi dvě nehybné zarážky, jejichž roviny jsou kolmé k podélné ose tyče. Která tyč působí na zarážky větší tlakovou silou, jestliže se teplota tyčí zvětší o 100°C ? Předpokládáme, že deformace tyčí je pružná. Dále předpokládáme, že při teplotě 0°C je poměr poloměrů tyčí $r_1 : r_2 = l_1 : l_2$. Modul



Obr. 1



Obr. 2

pružnosti v tahu zinku $E_1 = 9,0 \cdot 10^{-10}$ Pa, mědi $E_2 = 12,3 \cdot 10^{-10}$ Pa.

- c) Které fyzikální předpoklady činíme o veličinách α_1 , α_2 , E_1 , E_2 ? Jakým předpokladem zjednodušíme matematické řešení úlohy b)?

4. V dutém rotačním válci se svislou osou rotace je uzavřen vzduch pístem o hmotnosti m . Je-li h vzdálenost dna válce od dolní podstavy pístu, je píst v rovnovážné poloze. Atmosférický tlak je p_a . Obsah podstavy pístu je S .

Posuneme-li píst po krátké dráze y dolů a uvolníme, koná píst kmitavý pohyb.

- Dokažte, že kmity pístu jsou harmonické, považujeme-li vzduch za ideální plyn, jehož teplota je stálá, a pohybuje-li se píst ve válci bez tření. Jaký by byl pohyb pístu, jestliže některý z uvedených předpokladů není splněn?
- Určete periodu harmonických kmitů pístu.
- Jak se změní perioda harmonických kmitů, jestliže za jinak stejných podmínek položíme na horní podstavu pístu závaží o hmotnosti m_0 ?

Poznámka: Uvažte, že při izotermickém ději je $pV = \text{konst}$, a proto $\Delta(pV) = 0$ nebo $V \Delta p + p \Delta V = 0$.

5. Po vnitřní straně válcové plochy o poloměru R upevněné na vodorovné podložce koná stejnorodý válec o poloměru r , $r < R$, bez smyku valivý pohyb (obr. 1).

- a) Určete kinetickou energii válce v poloze určené úhlem φ podle obr. 1. Moment setrvačnosti stejnorodého válce vzhledem k ose rotace je

$$I = \frac{1}{2} m r^2, \text{ kde } m \text{ je hmotnost válce.}$$

- b) Valivý pohyb válce začíná v poloze dané úhlem $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad ve stejno-

rodém tíhovém poli. Určete rychlost v posuvného pohybu a úhlovou rychlost ω otáčivého pohybu při průchodu válce rovnovážnou polohou, je-li $R = 1 \text{ m}$, $r = 0,01 \text{ m}$.

6. Ověření platnosti stavové rovnice s použitím pokusu sestaveného podle obr. 2.

Přípravné otázky

1. V baňce spojené s odměrným válcem zahříváme vzduch. Které stavové veličiny vzduchového tělesa se při tom mění a kterou lze považovat za konstantní?
2. Který zvláštní případ stavové rovnice pro vzduchové těleso můžete pokusem ověřit? Zapište příslušný vztah.
3. Zapište pro odměrný válec jednotku stupnice, objem odpovídající nejmenšímu dílku stupnice a měřicí rozsah válce. Zapište pro teploměr jednotku stupnice a měřicí rozsah.
4. Jak změříte vnitřní objem V_0 baňky od zátky ke dnu a vnitřní objem spojovací trubice s válcem?
5. Vysvětlete, jak změříte odměrným válcem změnu ΔV objemu vzduchového tělesa při určité teplotě tělesa.

Sestavte pokus a proveďte měření

1. Sestavte pokus podle obr. 2. Odměrný válec je zcela naplněn vodou. Po vyrovnání teploty mezi vodní lázní a baňkou se vzduchem změřte počáteční teplotu t_0 vodní lázně.
2. Malým plamenem zahřívajte vodní lázeň tak, abychom mohli předpokládat, že vzduch v baňce a vodní lázeň mají v každém okamžiku stejnou teplotu.
3. Proveďte aspoň pět měření teploty t vodní lázně a příslušné změny ΔV objemu vzduchu a zapište naměřené veličiny do tabulky. První měření v tabulce je $t = t_0$, $\Delta V = 0 \text{ cm}^3$.

Zpracování měření

1. Každou dvojici naměřených veličin doplňte do tabulky těmito údaji: teplota T vyjádřená v kelvinech,

$$V = V_0 + \Delta V, \frac{V}{T}.$$

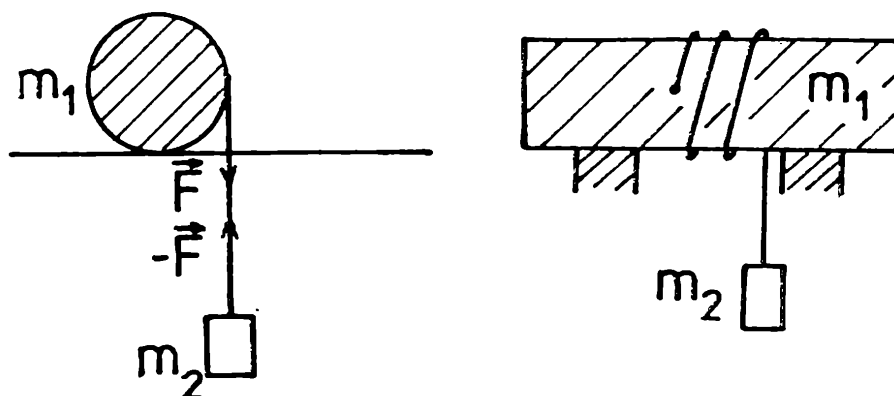
2. Porovnejte číselné hodnoty veličiny $\frac{V}{T}$ v posledním sloupci tabulky.
3. Podle tabulky narýsujte na milimetrový papír graf funkce $V = f(T)$.

Závěr a zhodnocení řešení úlohy

Souhlasí výsledky pokusu se vztahem $\frac{V}{T} = \text{konst}$? Pokuste se vysvětlit případné odchylky.

7. Na dvou vodorovných kolejnicích koná valivý pohyb stejnorodý

Obr. 3



rotační válec o poloměru r a hmotnosti m_1 . Na válci je navinuto vlákno, na jehož volném konci je upevněno závaží o hmotnosti m_2 (obr. 3).

- Určete zrychlení a posuvného pohybu válce, na který působí odvíjející se vlákno tahovou silou F (obr.).
- Při které nejmenší hodnotě součinitele smykového tření mezi válcem a kolejnicemi koná válec valivý pohyb bez smyku?

- Pro $f = 0,15$ stanovte nejmenší hodnotu poměru $p = \frac{m_1}{m_2}$ tak, aby válec konal valivý pohyb bez smyku.

Moment setrvačnosti stejnorodého rotačního válce vzhledem k ose je

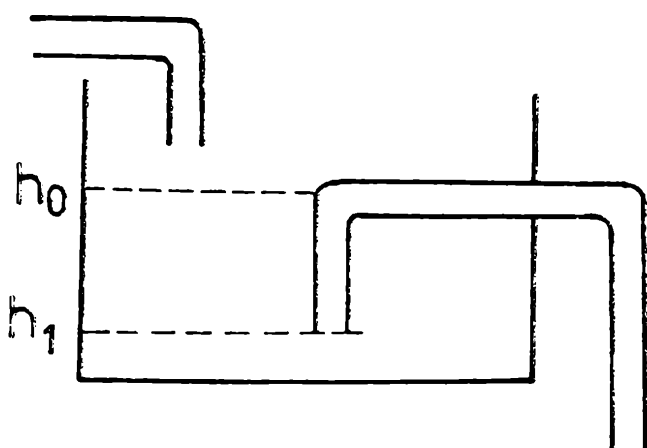
$$I_0 = \frac{1}{2} m r^2.$$

Kategorie D

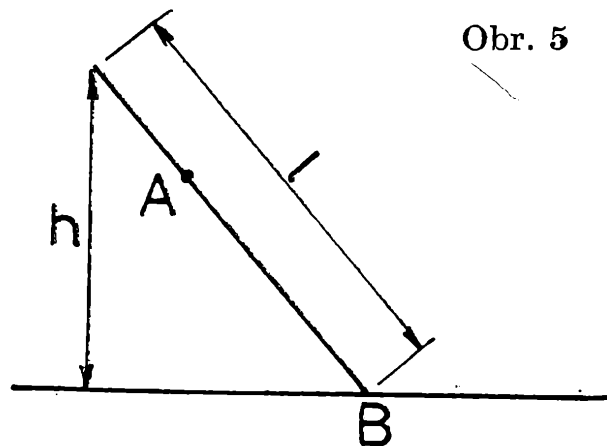
1. Vlak délky $l = 300$ m jede po vodorovné přímé trati stálou rychlostí $v_1 = 54$ km $\cdot$ h $^{-1}$. Souběžně s tratí vede silnice, která se s tratí křížuje na přejezdu řízeném světelnými signály. Přejezd je automaticky uvolňován vždy za dobu $t_0 = 5,0$ s po projetí konce vlaku. Po silnici se pohybuje automobil rychlostí $v_1 = 54$ km $\cdot$ h $^{-1}$ tak, že je na úrovni posledního vagónu. Přes přejezd může řidič jet rychlostí $v_2 = 36$ km $\cdot$ h $^{-1}$.

- V jaké vzdálenosti od přejezdu musí řidič vyřadit rychlostní stupeň a automobil jet bez tahové síly motoru, aby mohl přejet přejezdem plynule bez zastavení? Automobil se při tom pohybuje se zrychlením $a_1 = -0,4$ m $\cdot$ s $^{-2}$.
- Po přjetí přejezdu se začne automobil pohybovat se stálým zrychlením $a_2 = 1,0$ m $\cdot$ s $^{-2}$ do času, než dosáhne největší povolené rychlosti $v_3 = 90$ km $\cdot$ h $^{-1}$. V jaké vzdálenosti od přejezdu automobil dohoní a v jaké vzdálenosti předhoní vlak?
- Je úloha a) řešitelná i v případě, že automobil bude na úrovni lokomotivy? Vysvětlete.

2. Do nádrže (obr. 4) přitéká voda potrubím tak, že objemový průtok vody je $Q_{V1} = 20$ l $\cdot$ min $^{-1}$. Z nádrže může voda odtékat potrubím, dosáhne-li výšky $h_0 = 30$ cm. Průměrný objemový průtok odtékající vo-



Obr. 4



Obr. 5

dy je $Q_{V_2} = 3,01 \cdot s^{-1}$. Voda začne vytékat, je-li v nádrži voda o objemu $V_1 = 15 \text{ l}$, přestane vytékat, zbude-li v nádrži voda o objemu $V_2 = 3,0 \text{ l}$. Předpokládáme, že objemové průtoky jsou v obou případech stálé.

- Vysvětlete princip činnosti zařízení.
- Nakreslete graf změn výšky volného povrchu vody v nádrži jako funkce času. Vysvětlete též, proč tento graf není zcela přesný.
- Řešte úlohu b) do téhož grafu i pro případ $Q_{V_1} = 5 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1}$.

3. Kopec se sklonem $p = \frac{h}{l} = 0,30$ přechází v dolní části do vodorovné roviny (obr. 5). V místě A stojí lyžař Karel, který pojede s kopce vyjetou stopou, na níž odporová síla proti pohybu $F_1 = 120 \text{ N}$. Lyžař Tomáš pojede z téhož místa nevyjetou stopou, na níž na něj působí odporová síla proti pohybu $F_2 = 200 \text{ N}$. Délka trasy AB je $s = 50 \text{ m}$. Na vodorovné rovině působí čerstvý sníh na lyžaře odporovou silou proti pohybu $F_3 = 400 \text{ N}$. Hmotnost každého z obou lyžařů je $m = 80 \text{ kg}$.

- Jakou rychlostí dojde Karel do bodu B? V jaké vzdálenosti od bodu B zastaví na vodorovné části trasy?
- Jakou rychlostí dojde Tomáš do bodu B a v jaké vzdálenosti od bodu B zastaví na vodorovné části trasy?
- Z kterého místa na kopci by musel vyjet Tomáš, aby po nevyjeté stopě získal na úpatí kopce v bodě B touž rychlost jako Karel? V jaké vzdálenosti od bodu B by Tomáš zastavil na vodorovné části trasy? Jaké rychlosti dosáhne Tomáš v bodě A?

Výsledky jednotlivých údajů porovnejte.

4. Expresní autobus Praha-Brno musí projet z autobusového nádraží Praha-Florenc městem po trase délky $s_1 = 9,5 \text{ km}$, potom jede po dálnici po trase délky $s_2 = 189 \text{ km}$ a z výjezdu z dálnice na autobusové nádraží v Brně projede městem trasu délky $s_3 = 7,5 \text{ km}$. Podle jízdního řádu

musí expresní autobus projet celou trasu za dobu $t = 165$ min, přičemž městem Brno projíždí zpravidla za dobu $t_3 = 14$ min.

- Jaká je průměrná rychlost autobusu na celé trase?
- Jestliže Prahou projede autobus za dobu $t_1 = 13$ min, jaká je průměrná rychlost autobusu v jednotlivých úsecích?
- V období dopravní špičky projede autobus městským úsekem v Praze za dobu $t'_1 = 26$ min. Určete, jaká musí být průměrná rychlost autobusu po dálnici, aby do Brna přijel podle jízdního řádu.

5. Vozík o hmotnosti m_1 stojí na vodorovné podložce, po níž se může pohybovat bez tření. Na plošině vozíku leží krabice o hmotnosti m_2 . Součinitel klidového tření mezi krabicí a plošinou je f_0 , součinitel smykového tření je f . Na vozík působíme vodorovnou silou F .

- Určete síly, které působí na tělesa, a zrychlení těles, jestliže se krabice po plošině nepohybuje a jestliže se pohybuje.
- Stanovte podmínku pro sílu F , aby se krabice nedala do pohybu vzhledem k plošině vozíku.
- Jestliže se krabice pohybuje po plošině vozíku délky l , určete dobu, za kterou krabice opustí plošinu.

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 48$ kg, $m_2 = 2,0$ kg, $f_0 = 0,25$, $f = 0,20$, $F = 124$ N, $l = 1,2$ m.

6. Zjišťování síly potřebné k přetržení vlákna.

Úvod

Pevnost vlákna je charakterizovaná silou F_0 působící v jeho směru, při níž se vlákno právě přetrhne. V technické praxi slouží k měření této síly speciální trhací stroje. K orientačnímu zjišťování může u tenkých vláken posloužit i siloměr.

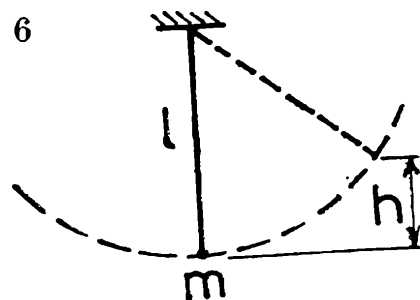
Vášim úkolem je určit sílu F_0 potřebnou k přetržení vlákna metodou založenou na současném působení tíhové a setrvačné odstředivé síly na těleso zavěšené na zkoušeném vláknu. Princip metody je zřejmý z obr. 6. Hmotný střed tělesa hmotnosti m zavěšeného na vláknu délky l (měřené od závěsu k hmotnému středu tělesa) vychylujeme postupně do různých výšek h , $h < l$ nad rovnovážnou polohu a pokusem stanovíme výšku h_0 pro případ, že při průchodu rovnovážnou polohou se vlákno právě přetrhne.

Síla, která působí na vlákno při průchodu tělesa rovnovážnou polohou, má velikost

$$F = m g \left(1 + \frac{2h}{l} \right), \quad (1)$$

přičemž hmotnost vlákna zanedbáváme ve srovnání s hmotností m tělesa.

Obr. 6



Pomůcky

Stativ, délkové měřítko, dvakrát po šesti vláknech dvou různých druhů (např. rezná nebo jiná nit a bavlnka), dvě tělesa známé hmotnosti (např. závaží o hmotnosti 1 kg pro reznou nit, závaží o hmotnosti 0,5 kg pro bavlnku), tlumicí podložka (molitan, tlustší plst' apod.), siloměr s měřicím rozsahem asi do 20 N.

Úkoly

1. Pomocí informací z učebnice fyziky a Doplnku pro 1. ročník odvoďte vztah (1).
2. Těleso o známé hmotnosti zavěste na vlákno určitého druhu (např. rezná nit) a změřte vzdálenost l od místa závěsu k odhadnutému hmotnému středu tělesa. Délku l volte v rozmezí kolem 1 metru. Těleso zavěste tak, aby v rovnovážné poloze bylo nízko nad podlahou (několik centimetrů) a položte pod ně tlumicí podložku.
3. Postupně zvedejte těleso (při napnutém vláknu) tak, aby se jeho hmotný střed dostával do výšek 5 cm, 10 cm atd. nad rovnovážnou polohu.
Pokusem nalezněte výšku h' , při níž se vlákno ještě nepřetrhne, a výšku h'' , při níž se již přetrhne ($h'' - h' = 5$ cm).
4. V intervalu $h' < h < h''$ opakujte měření při zvětšování výšky h vždy jen o 1 centimetr a stanovte tak s dobrou přibližností výšku h_0 , při níž se vlákno právě přetrhne. Pokus proveďte pětkrát, výsledky zapisujte do tabulky, kde síla F_0 potřebná k přetržení vlákna je dána vztahem (1) pro $h = h_0$.

$m = \dots\dots\dots$ kg

č.	$l(m)$	$h_0(m)$	$F_0(N)$
1			
2			

Vypočítejte aritmetický průměr síly F_0 .

5. Úkoly 3. a 4. proveďte ještě pro vlákno jiného druhu.
6. Výsledky svého měření ověřte pomocí siloměru. Porovnejte výsledky získané oběma způsoby.
7. Nádobka je vyrobena z plechu o hustotě $\rho_1 = 7700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, má hmotnost $m_1 = 0,50 \text{ kg}$ a vnitřní objem $V_1 = 10 \text{ l}$. Položíme ji na volný povrch vody.
 - a) Kolik vody je možno nalít do nádoby, aby se celá neponořila?
 - b) Kolik lihu o hustotě $\rho_2 = 8800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je možno nalít do nádoby, aby se celá neponořila?
 - c) Uvažte, jak by bylo možno použít této nádoby ke zjišťování hustoty kapalin.

Věstonická vrubovka

Dne 19. srpna 1936 našel prof. Absolon při vykopávkách ve Věstonicích 18 cm dlouhou vřetenní kost mladého vlka s mnoha zářezy (vruby). Datoval ji do 10.—30. tisíciletí před n. l. Je to jeden z nejstarších nečíslíkových záznamů množství, v historické literatuře známý pod názvem věstonická vrubovka.

Obrázek ukazuje jeden pohled na tento unikátní nález, na kterém je celkem 55 zářezů, od dvou dlou-

čilo tam, kde je menší počet zářezů; zbývající zářezy (v našem případě pět) už bylo možné zvládnout třeba počítáním na prstech.

Obdobných vrubovek se už našlo mnoho na různých místech světa; v 60. letech byla v Zairu objevena vrubovka se třemi sloupci zářezů ve výrazných skupinách, její stáří se odhaduje na 11 až 8 tisíc let. Sovětský badatel B. A. Frolov publikoval sibiřské nálezy, jeho kniha „Číslo v grafice pa-



hých vrubů poblíž středu kosti na jednu stranu je jich 25, na druhé 30. Prof. Absolon v nich spatřoval skupiny po pěti zářezech, ale takové skupiny nejsou výrazné. Spíše se soudí, že jde o záznamy dvou množství; každá jednotka nějakého množství předmětů byla vyznačena jedním vrubem a posouváním palců po zářezech bylo možné přiřazovat dvě množství předmětů (předpokládá se pohyb palců od dlouhých vrubů ke koncům kosti). Přiřazování skon-

leolita“ (Novosibirsk, 1974) obsahuje 61 tabulek s vyobrazeními vrubovek, je to první krok ke srovnávacím studiím.

Vrubovky v dřevěném provedení se však udržely až do minulého století jako záznam daní nebo dluhů; u nás je najdete v muzeích, např. v Olomouci. „Vrub“ ve významu „dluh“ znáte i vy z hovorového jazyka; „mít u někoho vroubek“ je další posun významu slova, který provází zářezy (vruby) až do dnešní doby.

J. Foltá

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle §6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

SNTL - Nakladatelství technické literatury vydalo

TECHNICKÝ[NAUČNÝ SLOVNÍK, I. DÍL (A – D)

Slovník vychází ve druhém, revidovaném a doplněném vydání. Je určen pro informaci ve všech technických a příbuzných oborech. I. díl obsahuje na 5300 hesel a 740 obrázků. Cena vázaného výtisku 120 Kčs.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12 Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kašková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. Praha 1982.

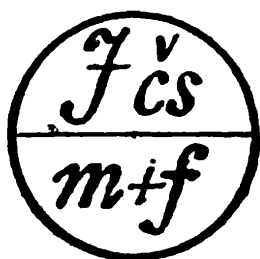
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(2)

**ROČNÍK 61, 1982/83
ŘÍJEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

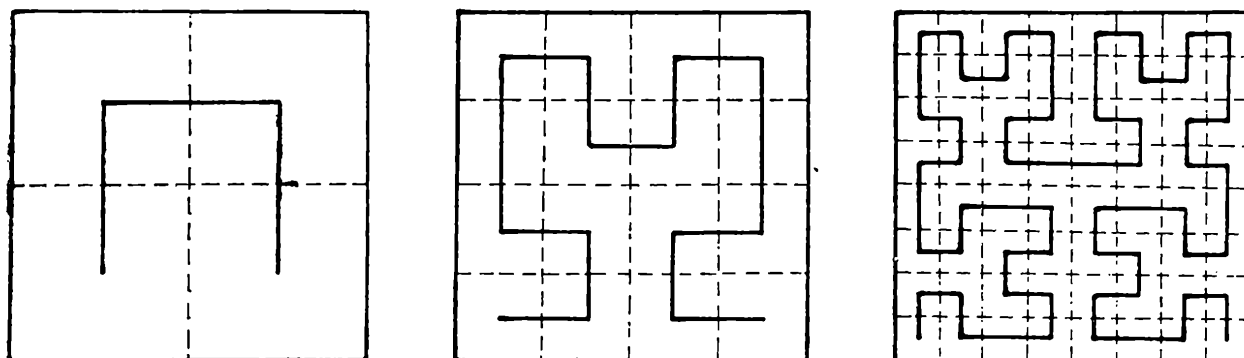
A. Šarounová: Neobvyklé křivky	45
E. Calda: Profesor Ypsilon a krychle nad přeponou	47
J. Houska: Eulerova věta a pravidelné mnohostěny	49
M. Simerský: Symbolická metoda řeše- ní obvodů harmonického elektrického proudu I.	53
J. Chrapan: Uhlík ¹⁴ C už 35 rokov pre- zrádza vek organických látok	59
J. Sedlák: Současné představy o struktuře hmoty	62
D. Jedinák: Anno restituto MDLXXXII	67
Z. Janout - S. Pospíšil: Paul Adrien Mau- rice Direc osmdesátiletý .	68
J. Mička: Matematik na známkách II. .	70
M. Hejný - L. Hrdina: Rovnice a šipkové diagramy	76.
V. Malíšek: Kouzelné karty	81
Naše soutěž .	84
Olympiády	88
Z nových knih	91
Pohledy do dějin	3. str. obálky

Neobvyklé křivky

PhDr. ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF UK Praha

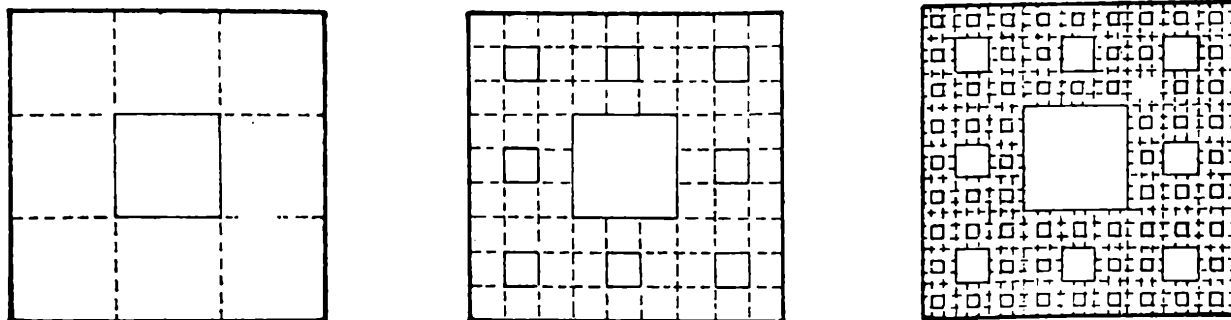
Jména dvou letošních jubilantů — *W. Sierpiňského* a *G. Peana* (o obou vědcích přinesly Rozhledy články dr. J. Šedivého v č. 8 a 10 minulého ročníku), se objevují v matematické literatuře v kapitolách, které pojednávají o zobecnování pojmu křivka. Podívejme se, jakými výkony se proslavili jmenovaní matematici.

Peanova křivka je spíše „lomenice“, protože se k ní dojde postupným zhušťováním lomených čar vepsaných do vnitřku čtverce. Na obr. 1



Obr. 1

vidíte první tři z té posloupnosti lomených čar, která vede k Peanově křivce po nekonečně mnoha krocích; říkáme, že jde o limitní případ či o limitu posloupnosti lomených čar. Tři zobrazené čáry jsou souměrné podle svislé střední příčky čtverce, tuto vlastnost má i Peanova křivka. K zakreslování lomených čar slouží čtvercové sítě, kterými pokrýváme výchozí čtverec; při přechodu k další čáře rozčtvrtíme čtverce dosavadní. Jak vidíte, lomená čára „navštíví“ každý dílčí čtverec své sítě; o limitní čáře dokázal G. Peano, že prochází každým bodem čtverce. To bylo opravdu senzační zjištění na počátku 90. let minulého století — souvislá čára, která zcela vyplňuje čtverec. Jiní autoři vymysleli pak další příklady takových čar, všechny se zpravidla nazývají Peanovy křivky.



Obr. 2

Sierpiňského koberec je výstižný název pro množinu bodů, která vzniká z výchozího čtverce (obr. 2) „vykrajováním“ prostředních čtverců. Z těch devíti čtverců, na něž rozdělíme každý dosud nedotčený čtverec, odstraníme prostřední. Sledujte tuto proceduru na obr. 2 a pokuste se představit si další obrázky. Limitní případ této posloupnosti bodových množin je slavný Sierpiňského koberec z počátku 20. století, který se řadí mezi tzv. *Cantorovy křivky* a má určité význačné vlastnosti v teorii těchto množin bodů.

Spokojili jsme se jen názorným popisem „křivek“; z velkého počtu možných úloh o nich si vyřešte aspoň ty, které jsou uvedeny ve cvičeních. Napadnou vás i další?

Cvičení

1. Najděte vyjádření n -tého členu posloupnosti $\{p_n\}$, která udává délky lomených čar na obrázku 1 a všech dalších.
(Všimněte si, jak dlouhé úseky čar leží v jednotlivých pomocných čtvercích získaných z jednotkového výchozího čtverce.)
2. Vypočítejte obsah všech čtverečků odebíraných z jednotkového čtverce na obr. 2 a dalších obdobných obrázcích.
(Může se dojít k součtu nekonečné geometrické řady.)

Výsledky: 1. $p_n = 2^{n-1} - 2^{1-n}$ pro $n = 2, 3, \dots$

2. Koeficient $q = 8 : 9$, $a_1 = 1 : 9$, součet $s = 1$.

Profesor Ypsilon a krychle nad přeponou

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

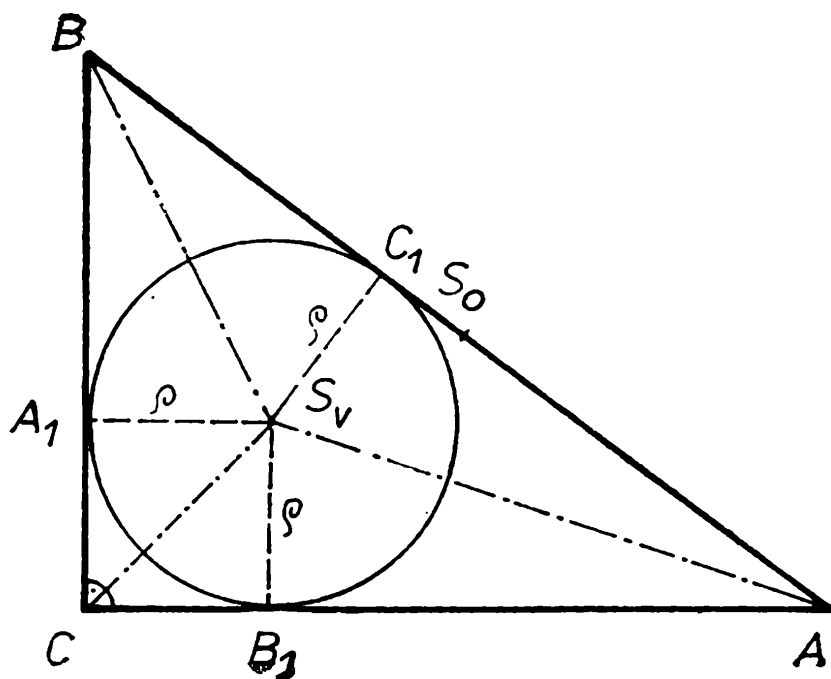
U příležitosti nedožitého 2562. výročí narození Pythagory ze Samu (asi 580 př. n. l. — asi 500 př. n. l.), po němž je nazvána známá věta o pravoúhlém trojúhelníku, předložil profesor Ypsilon svým žákům tento problém:

Mějme dán libovolný pravoúhlý trojúhelník s přeponou o velikosti c a s odvěsnami o velikostech a, b . Z Pythagorovy věty vyplývá, že ve vztahu

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

pro tento trojúhelník je $d_2 = 0$. Určete d_1, d_3 tak, aby v tomto trojúhelníku platily analogické vztahy

$$a + b = c + d_1, \quad a^3 + b^3 = c^3 + d_3.$$



Obr. 1

Určíme nejprve číslo d_1 , a to pomocí pravoúhlého trojúhelníku ABC na obr. 1, v němž je sestrojena i kružnice tomuto trojúhelníku vepsaná; má střed S_v a dotýká se stran BC , CA , AB pořadě v bodech A_1 , B_1 , C_1 . Velikost jejího poloměru označíme ρ . Pro součet velikostí obou odvěsen platí

$$a + b = |BA_1| + |A_1C| + |CB_1| + |B_1A|.$$

Uvědomíme-li si, že rovnoběžník $A_1CB_1S_v$ je čtverec, máme $\varrho = |A_1C| = |S_vB_1| = |CB_1| = |S_vA_1|$, dále též $|BA_1| = |BC_1|$, $|B_1A| = |C_1A|$.

Dosazením dostaneme

$$a + b = |BC_1| + |C_1A| + |S_vB_1| + |S_vA_1| = c + 2\rho.$$

Je tedy

$$d_1 = 2\rho.$$

Vzhledem k tomu, že v pravoúhlém trojúhelníku je střed S_o kružnice opsané středem přepony, platí pro poloměr r kružnice opsané: $c = 2r$; máme též

$$a + b = 2r + 2\rho,$$

což znamená: V každém pravoúhlém trojúhelníku je součet velikostí odvěsen roven součtu průměru kružnice opsané a průměru kružnice vepsané.

K určení čísla d_3 použijeme známé rovnosti výrazů

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

do níž dosadíme

$$a + b = c + 2\rho, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad ab = 2S,$$

kde S je obsah daného pravoúhlého trojúhelníku.

Dostaneme tak

$$a^3 + b^3 = (c + 2\rho)(c^2 - 2S).$$

Z obr. 1 snadno zjistíme, že obsah S trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků CAS_v , CBS_v a ABS_v , jež všechny mají výšku ρ ; je tedy

$$S = \frac{a + b + c}{2} \cdot \rho = \frac{2\rho + 2c}{2} \cdot \rho = (\rho + c)\rho.$$

Dosazením za S do předchozího vztahu získáme

$$a^3 + b^3 = (c + 2\rho)[c^2 - 2(\rho + c)\rho],$$

což po jednoduché úpravě dává

$$a^3 + b^3 = c^3 - 2\rho^2(3c + 2\rho).$$

Vyjádríme-li ještě výraz $3c$ pomocí poloměrů kružnice opsané, dostaneme

$$a^3 + b^3 = c^3 - 4\rho^2(3r + \rho),$$

takže

$$d_3 = -4\rho^2(3r + \rho).$$

Získaný výsledek je obsahem věty, kterou vděční studenti nazvali větou Ypsilonovou:

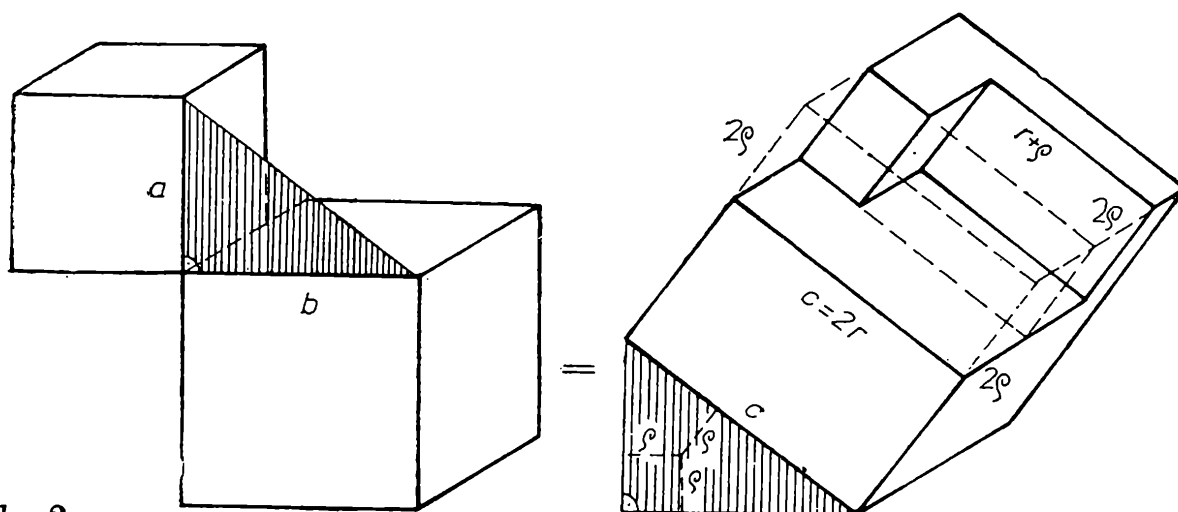
Součet objemů krychlí nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku je roven objemu krychle nad přeponou zmenšenému o objem pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou 2ρ a výškou $3r + \rho$, kde ρ a r

jsou pořadě poloměry kružnice vepsané a opsané tomuto pravoúhlému trojúhelníku.

Sám profesor Ypsilon však použil při grafickém znázornění tuto variantu odvozené rovnosti

$$a^3 + b^3 = c^3 - 4\rho^2 \cdot 2r - 4\rho^2 \cdot (r + \rho).$$

Na obr. 2 tuto novou rovnost vyjádřil rovností objemů zobrazených těles; z krychle nad přeponou jsou vyříznuty dva kvádry, jejichž rozměry lze z obrázku přečíst.



Obr 2.

Na závěr upozornil studenty na pozoruhodnou věc, kterou odvodili:

V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami o velikostech a , b a s přeponou o velikosti c platí:

$$a + b > c, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a^3 + b^3 < c^3.$$

Eulerova věta a pravidelné mnohostěny

JAN HOUSKA, CSc., VÚP Praha

Pro konvexní mnohostěny, tj. mnohostěny „bez dutin a děr“, platí vztah

$$v + s = h + 2, \quad (1)$$

kde v je počet vrcholů, s je počet stěn a h je počet hran mnohostěnu. Ověřme tento vzorec pro kvádr a čtyřstěn. Pro kvádr máme

$$v = 8, s = 6, h = 12,$$

takže pro kvádr vztah (1) platí. Pro čtyřstěn je

$$v = 4, s = 4, h = 6,$$

takže vztah (1) v tomto případě také platí.

Vztah daný vzorcem (1) se nazývá *Eulerovou* (čti *ojlerovou*) *větou o mnohostěnech* podle významného matematika švýcarského původu *Leonarda Eulera* (1707–1783), který většinu svého života pracoval v petrohradské (dnešní leningradské) akademii věd.

Eulerovu větu o mnohostěnech nebudeme dokazovat, ale ověříme ji ještě na dvou známých tělesech. Je to n -boký hranol a n -boký jehlan. Pro n -boký hranol je

$$v = 2n, s = n + 2, h = 3n,$$

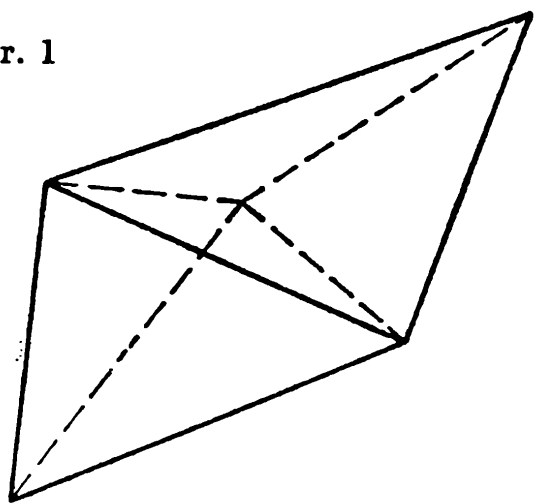
takže vztah (1) je splněn. Pro n -boký jehlan je

$$v = n + 1, s = n + 1, h = 2n,$$

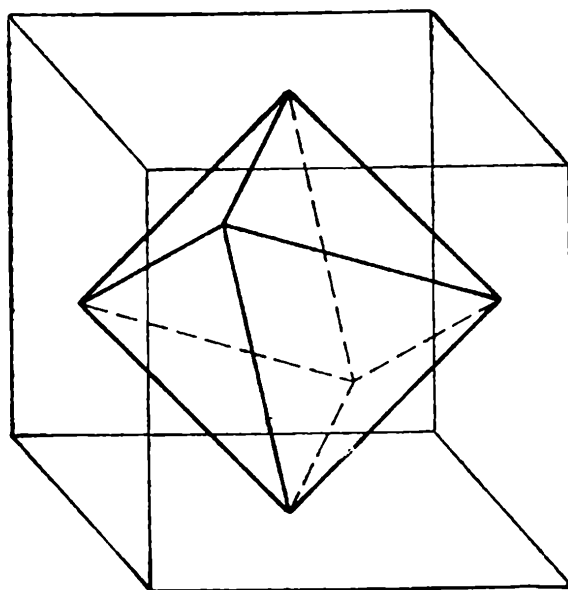
takže vztah (1) opět platí.

Eulerovu větu lze využít k zjištění, kolik existuje pravidelných mnohostěňů. *Pravidelným mnohostěnem* rozumíme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a z jehož každého vrcholu vychází stejný počet hran. Takovým pravidelným mnohostěnem je např. krychle nebo pravidelný čtyřstěn. V uvedené definici pravidelného mnohostěnu je podstatná podmínka o počtu hran vycházejících z každého vrcholu, jak nahlédneme, představíme-li si šestistěn složený ze dvou pravidelných čtyřstěňů podle obr. 1, který pravidelným mnohostěnem není. Vztah (1) pro toto těleso ovšem platí, neboť je to těleso konvexní. Vedle krychle a pravidelného čtyřstěnu je dalším pravidelným mnohostěnem pravidelný osmistěn, který můžeme sestavit tak, že jeho vrcholy budou středy stěn krychle (obr. 2). Jeho stěnami jsou rovnostranné trojúhelníky.

Obr. 1



Obr. 2



Vzniká otázka, které pravidelné mnohostěny ještě existují a které pravidelné mnohoúhelníky mohou být jejich stěnami. Na první pohled by se mohlo zdát, že existují pravidelné mnohostěny o libovolném počtu stěn obdobně, jak je tomu v rovině s pravidelnými mnohoúhelníky, které existují pro libovolný počet stran.

Odpověď získáme užitím vztahu (1). Předpokládáme-li, že stěnou pravidelného mnohostěnu je n -úhelník a že každým jeho vrcholem prochází právě m hran, platí vztahy

$$v \quad m = 2h, \quad s \cdot n = 2h. \quad (2)$$

Vypočítáme-li ze vztahu (2) v a s a dosadíme-li do vztahu (1), dostaneme

$$\frac{2h}{m} + \frac{2h}{n} = h + 2. \quad (3)$$

Vynásobme nyní vztah (3) číslem $\frac{1}{2}$ a odečtěme od obou stran rovnosti

(3) člen $\frac{h}{2}$. Vytkneme-li na levé straně h , obdržíme

$$h \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right) = 1. \quad (4)$$

Jelikož čísla h, m, n jsou čísla přirozená, je podle vztahu (4) nutno, aby

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}, \quad (5)$$

přičemž vzhledem k významu čísel m a n musí být $m \geq 3, n \geq 3$. Snadno zjistíme, že existuje pět řešení nerovnice (5) a to:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $n = 3, m = 3$ | d) $n = 3, m = 5$ |
| b) $n = 4, m = 3$ | e) $n = 5, m = 3$ |
| c) $n = 3, m = 4$ | |

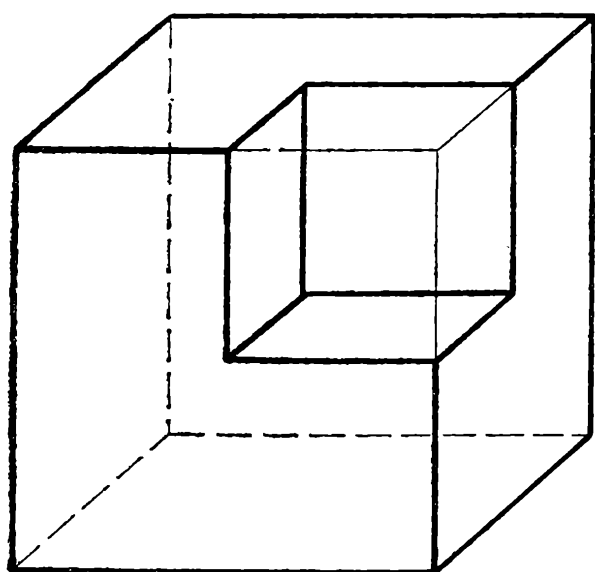
Kdybychom dosadili do vztahu (5) za m a n takovou dvojici čísel, že některé z čísel m a n je větší než 5, např. $m = 3, n = 6$ nebo $m = 3, n = 7$, vztah (5) platit nebude. Je tedy patrné, že nerovnice (5) za uvedených podmínek žádná jiná řešení nemá. Pomocí vztahů (4) a (2) vypočítáme hodnoty h, v, s pro jednotlivá řešení:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| a) $h = 6, v = 4, s = 4$ | d) $h = 30, v = 12, s = 20$ |
| b) $h = 12, v = 8, s = 6$ | e) $h = 30, v = 20, s = 12$ |
| c) $h = 12, v = 6, s = 8$ | |

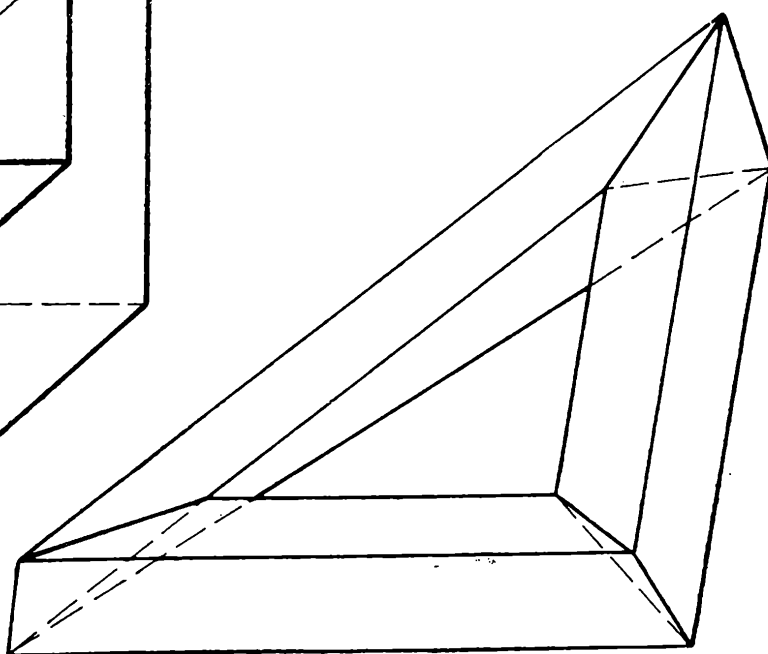
V případech a), b), c) dostáváme již zmíněná tělesa, totiž po řadě pravidelný čtyřstěn, krychli a pravidelný osmistěn. Případy d) a e) ukazují, že by měl ještě existovat pravidelný dvacetistěn s trojúhelníkovými stě-

nami a pravidelný dvanáctistěn, jehož stěny jsou pravidelné pětiúhelníky. I tato dvě tělesa lze sestavit, takže vskutku existuje pět pravidelných mnohostěnů podle případů a) až e). (Ověřte si, že vztah (1) pro pravidelný osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn platí.)

Pravidelné mnohostěny byly známy již ve starověkém Řecku. Filozof *Platón* (429—348 před n. l.) je symbolicky připisoval čtyřem základním živlům: ohni pravidelný čtyřstěn, vzduchu pravidelný osmistěn, zemi krychli, vodě pravidelný dvacetistěn a celému vesmíru pravidelný dvanáctistěn. Podle Platóna se nazývají pravidelné mnohostěny někdy platónovskými tělesy. Také ve středověku byl těmto tělesům připisován mystický význam.



Obr. 3



Obr. 4

Vztah (1) znal před Eulerem již francouzský filozof a matematik *René Descartes* (1596—1650) a před ním snad už *Archimédes* (287—212 před n. l.), který vyšetřoval tzv. poloprávidelné mnohostěny. Eulerova věta však platí i pro některé mnohostěny, které nejsou konvexní, např. pro mnohostěn na obr. 3, neboť $v = 14$, $s = 9$, $h = 21$.

Avšak vztah (1) neplatí třeba pro krychli s uzavřenou dutinou opět tvaru krychle ($v = 16$, $s = 12$, $h = 24$) nebo pro těleso znázorněné na obr. 4 ($v = 9$, $s = 9$, $h = 18$).

Připomeňme ještě, že vztah (1) a jeho zobecnění pro nekonvexní tělesa hraje důležitou roli v moderní matematice, např. v topologii nebo v teorii grafů.

Symbolická metoda řešení obvodů harmonického elektrického proudu I.

MOJMÍR SIMERSKÝ, Rožnov pod Radhoštěm

1. Exponenciální tvar zápisu komplexního čísla

Imaginární jednotku budeme značit j , tedy $j^2 = -1$.

Má-li komplexní číslo z reálnou část a a imaginární b můžeme je zapsat ve tvaru $z = a + b j$, popř. pro $z \neq 0$ ve tvaru

$$z = |z| (\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad (1)$$

$$\text{kde } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \sin \varphi = \frac{b}{|z|}.$$

Komplexní čísla znázorňujeme jako body v Gaussově rovině tak, že obrazem čísla z je bod o souřadnicích (a, b) . Obrazem čísla z může však být i polohový vektor vycházející z počátku, jehož koncový bod má souřadnice (a, b) . Vektor má délku $|z|$ (absolutní hodnota) a s osou reálných čísel svírá orientovaný úhel φ (argument).

K úpravě goniometrického tvaru (1) použijeme analytické definice nejjednodušších transcendentních funkcí komplexní proměnné ξ :

$$\cos \xi = 1 - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - \frac{\xi^6}{6!} + \dots \quad (2)$$

$$\sin \xi = \frac{\xi}{1!} - \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!} - \dots \quad (3)$$

$$\exp \xi = 1 + \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^4}{4!} + \dots \quad (4)$$

Lze dokázat, že tyto řady jsou pro jakékoli hodnoty ξ absolutně konvergentní, tj. že jsou konvergentní i obdobné řady s argumentem $|\xi|$. To znamená, že s nimi můžeme zacházet obdobně jako s konečnými součty, pro něž platí zákon asociativní a zákon komutativní.

Jestliže v (2) a (3) položíme $\xi = \varphi$, kde φ je reálný argument, a v (4) položíme $\xi = j \varphi$, nalezneme

$$\exp j \varphi = \cos \varphi + j \sin \varphi,$$

takže (1) můžeme zapsat ve tvaru

$$z = |z| \exp j \varphi, \quad (5)$$

což je exponenciální tvar zápisu komplexního čísla.

Pomocí (5) snadno nalezneme užitečné vzorce pro součin a podíl komplexních čísel $z_1 = |z_1| \exp j \varphi_1$, $z_2 = |z_2| \exp j \varphi_2$. Součin

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \exp j (\varphi_1 + \varphi_2)$$

a když $z_2 \neq 0$, pak

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \exp j (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Absolutní hodnota součinu komplexních čísel je tedy rovna součinu absolutních hodnot činitelů, argument je součtem argumentů. Absolutní hodnota podílu je rovna absolutní hodnotě čitatele dělené absolutní hodnotou jmenovatele a argument je roven argumentu čitatele zmenšenému o argument jmenovatele. Můžeme podle toho snadno graficky násobit a dělit komplexní čísla znázorněná v Gaussově rovině jejich polohovými vektory.

2. Komplexní jednotky — verzory

Povšimneme si nyní komplexního čísla

$$J_\varphi = \cos \varphi + j \sin \varphi = \exp j \varphi. \quad (6)$$

Jeho absolutní hodnota je rovna jedné, proto taková čísla označíme jako *komplexní jednotky*. Jejich obrazy v Gaussově rovině jsou polohové vektory, jejichž koncové body leží na jednotkové kružnici.

Zvláštní případy jsou tyto:

$$J_0 = 1, J_{\pi/2} = j, J_\pi = J_{-\pi} = -1, J_{3\pi/2} = J_{-\pi/2} = -j.$$

Jestliže komplexní číslo $z = |z| \exp j \varphi_0$ znásobíme komplexní jednotkou (6), dostaneme číslo téže absolutní hodnoty $|z|$ s argumentem $\varphi_0 + \varphi$. V Gaussově rovině to znamená, že vektor čísla z se otočí v kladném smyslu o úhel φ s ohledem na jeho orientaci. Při dělení komplexní jednotkou se otočí v záporném smyslu. Z tohoto důvodu se komplexní jednotky (6) označují jako *operátory otočení* neboli *verzory*.

3. Verzory s lineárně proměnným argumentem

Argument φ v (6) může být přímo úměrný času, tedy $\varphi = \omega t$, kde ω je konstanta s fyzikálním rozměrem $[s^{-1}]$. Násobíme-li číslo z takovým verzorem, dostaneme

$$\tilde{z} = |z| \exp j (\omega t + \varphi_0), \quad (7)$$

kde φ_0 je argument čísla $\bar{z}$ v čase $t = 0$ s. V Gaussově rovině jde o polohový vektor délky $|z|$, který se rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí ω .

Ze vztahu (7) je zřejmé, že $\bar{z}$ je funkcí času. Proto můžeme uvažovat derivaci

$$\bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{dt} = j \omega |z| \exp j (\omega t + \varphi_0) = j \omega \bar{z}.$$

To znamená, že derivace $\bar{z}'$ je zobrazena polohovým vektorem délky $\omega |z|$, který se rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí stejnou jako vektor $\bar{z}$ a předbíhá před vektorem $\bar{z}$ o čtvrt periody.

4. Znázornění harmonické veličiny fázorem

V další úvaze budeme uvažovat harmonický elektrický proud

$$i = I_m \cos (\omega t + \varphi), \quad (8)$$

kde I_m je amplituda, $\omega = 2\pi f$ úhlový kmitočet, φ počáteční fáze. Učiníme-li dohodu, že ve vyjádření komplexní veličiny budeme uvažovat jen její reálnou část, můžeme (8) zapsat ve tvaru

$$i = I_m \exp j (\omega t + \varphi) = \bar{I}_m,$$

a budeme-li uvažovat efektivní proud, pak

$$\bar{I} = I \exp j (\omega t + \varphi).$$

Veličinu $\bar{I}$ označíme jako *fázor* proudu, znázorněný v Gaussově rovině vektorem délky I , který se rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí ω v kladném smyslu a v čase $t = 0$ s svírá s reálnou osou úhel φ .

Podobně ovšem můžeme uvažovat fázor $\bar{U}$ harmonického napětí a popř. další fázory. Na této představě je založeno řešení obvodů harmonického proudu pomocí fázorových diagramů.

Ve středoškolském učivu se předpokládá, že fázory veličin stejného druhu a stejného kmitočtu lze skládat podle rovnoběžníkového pravidla, tedy stejně jako skutečné fyzikální vektory. *Avšak fázor není vektor!* Proto si nyní oprávněnost zmíněného předpokladu dokážeme analyticky.

Budeme uvažovat dva harmonické proudy téhož kmitočtu. Počáteční fázi jednoho z nich můžeme, bez újmy na obecnosti, považovat za nulovou. Půjde tedy o proudy

$$i_1 = I_{1m} \cos \omega t, \quad i_2 = I_{2m} \cos (\omega t + \varphi).$$

Součet obou proudů

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = I_{1m} \cos \omega t + I_{2m} \cos (\omega t + \varphi) = \\ &= (I_{1m} + I_{2m} \cos \varphi) \cos \omega t - I_{2m} \sin \varphi \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9)$$

Zavedeme veličiny I_m a ψ podle vztahů

$$I_m \cos \psi = I_{1m} + I_{2m} \cos \varphi, \quad I_m \sin \psi = I_{2m} \sin \varphi. \quad (10)$$

Dosazením do (9)

$$i = I_m(\cos \omega t \cos \psi - \sin \omega t \sin \psi) = I_m \cos(\omega t + \psi).$$

Součtový proud i je tedy opět harmonický, má též úhlový kmitočet ω a počáteční fázi ψ . Je třeba ještě stanovit I_m a ψ . Když rovnice (10) umocníme dvěma a sečteme, dostaneme

$$I_m^2 = I_{1m}^2 + I_{2m}^2 - 2 I_{1m} I_{2m} \cos(\pi - \varphi). \quad (11)$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_{2m} \sin \varphi}{I_{1m} + I_{2m} \cos \varphi}$$

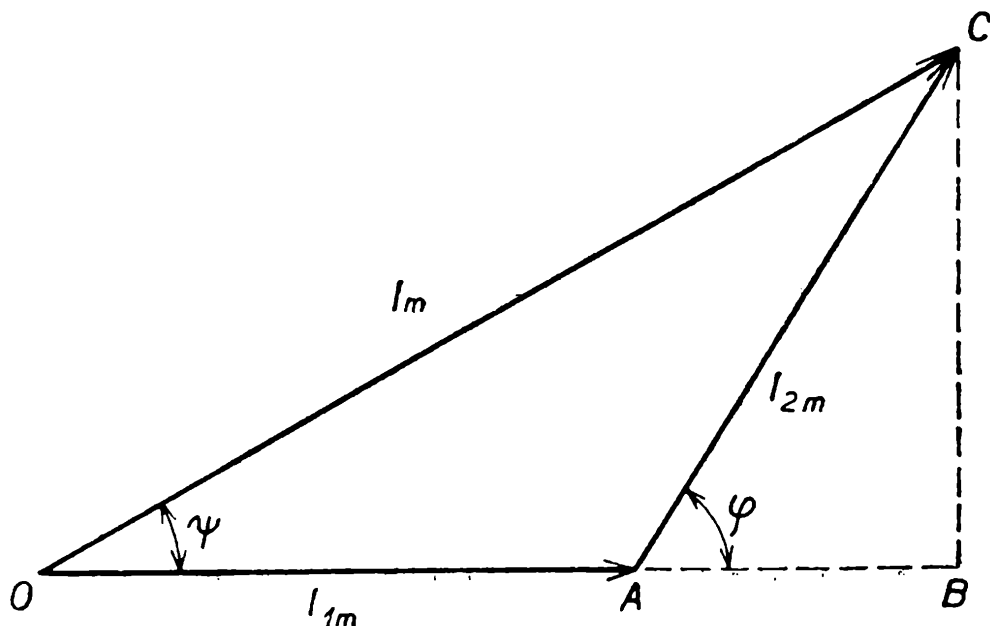
Oběma těmito vztahům vyhovuje situace podle obr. 1, neboť podle kosinové věty je splněn vztah (11), ale také

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{OA + AB} = \frac{I_{2m} \sin \varphi}{I_{1m} + I_{2m} \cos \varphi}.$$

Řešení úloh o harmonických proudech a napětích může tedy vycházet z fázorových diagramů. Ty jsou přehledné a názorné, jde jen o zjištění velikostí jednotlivých fázorů a fázových poměrů mezi nimi, takže k jejich rovnoměrnému otáčení touž úhlovou rychlostí se nepřehlídí — popř. můžeme jejich otáčení jaksí „zastavit“, tj. představit si, že Gaussova rovina se otáčí touž úhlovou rychlostí v opačném smyslu. Fázory pak kreslíme pro čas $t = 0$ s.

Tento postup je někdy zdoluhavý a složitý, poněvadž početní řešení je založeno na trigonometrii. Obvykle vede rychleji k cíli symbolická

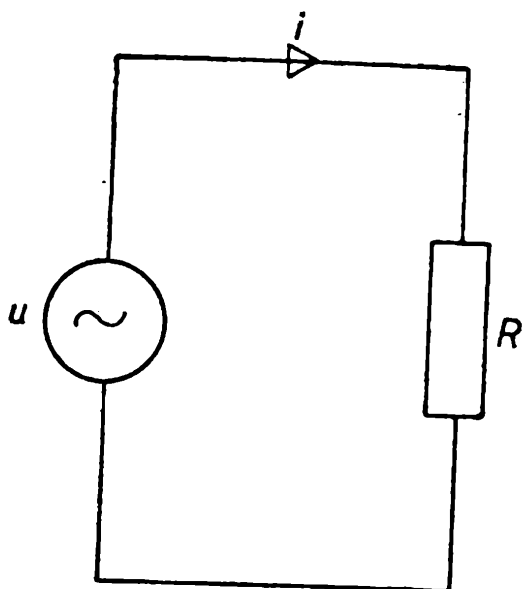
Obr. 1



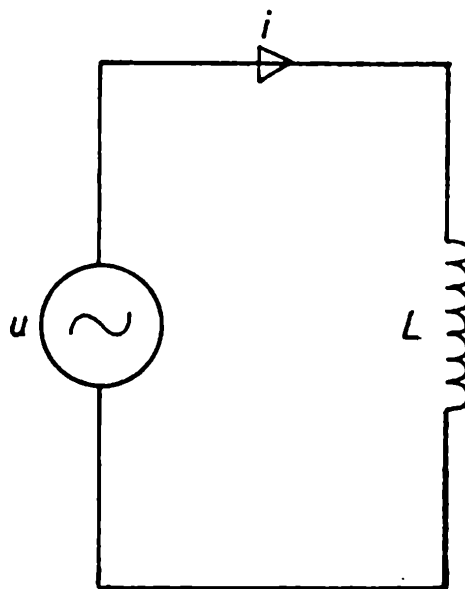
metoda založená na důsledném vyjadřování fázorů pomocí komplexních čísel.

5. Nejjednodušší obvody jako příklad symbolické metody

Nejjednodušší obvod harmonického proudu obsahuje jen zdroj harmonického napětí, jediný spotřebič (rezistor, cívku, kondenzátor) a spojovací vodiče. Přitom u rezistoru zanedbáváme jeho indukčnost a kapacitu, uvažujeme jen odpor. Podobně u cívky uvažujeme jen indukčnost a u kondenzátoru kapacitu. Ve skutečnosti jsou poměry složitější: každá elektrotechnická součástka má odpor, indukčnost i kapacitu, takže vlastně jde o rezonanční obvod. K tomu se v praxi musí přihlížet, jde-li o práci při velmi vysokých kmitočtech. Spojovací vodiče budeme považovat za ideální, přestože ani to neodpovídá skutečnosti.



Obr. 2



Obr. 3

Obvod s rezistorem je na obr. 2. Ohmův zákon platí všeobecně, tedy i pro okamžité hodnoty proudu i a napětí u , tj. $u = R i$. Jestliže $i = I_m \exp j \omega t = \bar{I}_m$, pak

$$u = R I_m \exp j \omega t = U_m \exp j \omega t, \quad \bar{U}_m = R \bar{I}_m, \quad \bar{U} = R \bar{I}.$$

Poněvadž R (rezistance) je reálná kladná veličina, má napětí $\bar{U}$ fázi souhlasnou s proudem $\bar{I}$.

Obvod s cívkou je na obr. 3. Vyjdeme ze vztahu

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Jestliže $i = \bar{I}_m = I_m \exp j \omega t$, potom

$$u = L I_m j \omega \exp j \omega t = j \omega L \bar{I}_m = \bar{U}_m$$

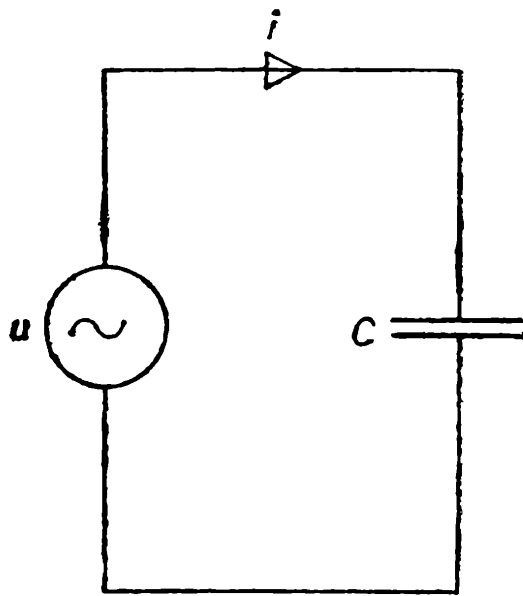
a pro efektivní hodnoty

$$\bar{U} = j \omega L \bar{I}. \quad (12)$$

Ryze imaginární veličinu $\bar{X}_L = j \omega L$ označíme jako *indukční reaktanci* (induktanci). Vztah (12) můžeme zapsat

$$\bar{U} = \bar{X}_L \bar{I},$$

což je vyjádření zákona Ohmova v symbolickém tvaru pro indukčnost. Z (12) je zřejmé, že napětí $\bar{U}$ předbíhá proudem $\bar{I}$ o čtvrt periody.



Obr. 4

Obvod s kondenzátorem je na obr. 4. Označíme q okamžitý náboj kondenzátoru, u okamžitou hodnotu jeho napětí. Potom $q = C u$ a derivováním podle času

$$\frac{dq}{dt} = i = C \frac{du}{dt}.$$

Jestliže $u = \bar{U}_m = U_m \exp j \omega t$, pak

$$i = C U_m j \omega \exp j \omega t = j \omega C \bar{U}_m = \bar{I}_m$$

a v efektivních hodnotách

$$\bar{U} = - \frac{j}{\omega C} \bar{I}. \quad (13)$$

Ryze imaginární veličinu $\bar{X}_C = - \frac{j}{\omega C}$ označíme jako *kapacitní reaktanci* (kapacitanci). Vztah (13) můžeme zapsat

$$\bar{U} = \bar{X}_C \bar{I},$$

což je vyjádření Ohmova zákona pro kapacitu v symbolickém tvaru.

Z (13) je zřejmé, že napětí na kapacitě je za proudem ve fázi opožděno o čtvrt periody.

Ohmův zákon můžeme v symbolickém tvaru, pro naše uvažované případy, zapsat také ve tvaru

$$\bar{I} = G \bar{U}, \text{ popř. } I = \bar{B} \bar{U},$$

kde $G = \frac{1}{R}$ je *konduktance* rezistoru, popř. $\bar{B}_L = -\frac{j}{\omega L}$ je *indukční susceptance* cívky a $\bar{B}_C = j \omega C$ je *kapacitní susceptance* kondenzátoru.

V druhé části uvedeme další typické příklady použití symbolické metody: Jednoduché sériové a paralelní obvody a technický paralelní rezonanční obvod.

Uhlík ^{14}C už 35 rokov prezrádza vek organických látok

Doc. RNDr. JÁN CHRAPAN, UK, Bratislava

„Dajte mi pevný bod a pohnem zemou!“ povedal *Archimedes*, keď zostrojil kladkostroj. „Povedzte mi počet chýbajúcich atómov rádiouhlíka vo vzorke, ktorú vykopal archeológ, a ja vám poviem, kedy vznikla.“ Tak akosi by sme mohli vysloviť *Libbyho* myšlienku o datovaní rádiouhlíkom. No Libby šiel ďalej. Vymyslel a vyskúšal aj spôsob, ako určiť množstvo chýbajúcich atómov ^{14}C . Použil pritom zákon rádioaktívnej premeny, známy už od roku 1903. Tento zákon hovorí, že tým viac atómov určitej rádioaktívnej látky sa rozpadne (tým väčší počet ΔN ich ubudne), čím menej stabilné sú tieto atómy (čím je väčšia ich rozpadová konštanta λ) a čím je ich viac (čím väčší je ich počet N). Prirodzene, tým viac atómov sa rozpadne, čím dlhšie rozpad jadier sledujeme (čím je dlhší interval Δt). Platí teda

$$-\Delta N = \lambda N \Delta t$$

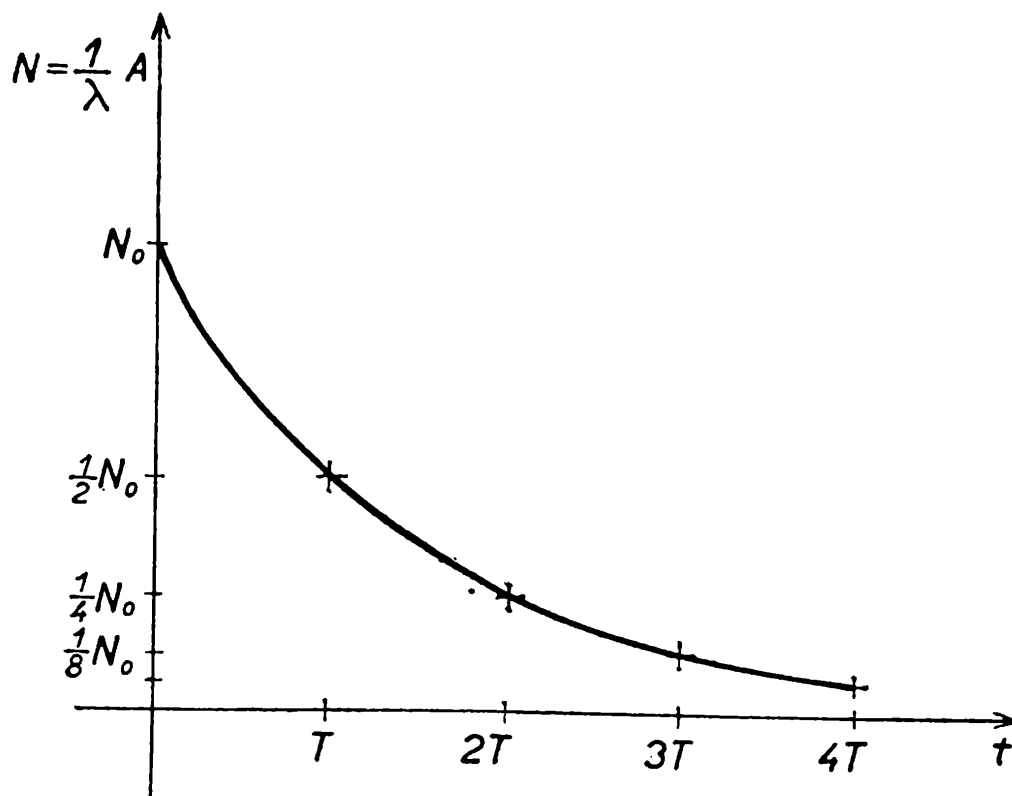
Aby vedci vystihli rýchlosť, ktorou ubúdajú nestabilné atómy nejakého prvku, zaviedli pojem aktivity (A) rádioaktívneho prvku. Rýchlosť, ktorou ideme z Košíc do Bratislavy, bude tým väčšia, čím viac vzdialeností, ktorá nás delí od Bratislavy, ubudne za zvolenú časovú jednotku; napríklad za sekundu alebo hodinu. Podobne, aktivita rádioaktívnej látky bude tým väčšia, čím viac látky sa za časovú jednotku premení. Čím viac bolo na počiatku nestabilných atómov, tým viac sa ich za čas Δt premení, tým väčšia bude tedy aktivita súboru týchto atómov (rádioaktívnej látky).

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}, \text{ alebo } A = \lambda N$$

Libby zistil, že jeden gram uhlíka, získaného z práve odumrelého organizmu, má 36 tisíc miliónov ($36 \cdot 10^9$) atómov rádiouhlíka. Na každý z týchto nestabilných atómov uhlíka pripadá $1,4 \cdot 10^{12}$ stabilných atómov uhlíka (izotopu 12). Množstvo 36 tisíc miliónov atómov rádiouhlíka predstavuje preparát, ktorého aktivita je 0,25 premien za sekundu. Tak, ako klesá premenou počet rádioaktívnych atómov, tak klesá aj aktivita ich súboru. Zistilo sa, že v každom grame uhlíka 5730 rokov mrtvej organickej látky ostane len 18 tisíc miliónov atómov rádiouhlíka. Za túto dobu sa ho totiž polovica rozpadla. Preto sa aj znížila aktivita gramu organického uhlíka a z pôvodných 0,25 premien za sekundu na polovicu, teda na 0,125 premien za sekundu. Keby sme uschovali náš gram organického uhlíka a počkali ďalších 5730 rokov, obsahoval by už len 9 tisíc miliónov atómov rádiouhlíka a mal by aktivitu 0,0625 Bq. (Aktivite 1 becquerel (1 Bq) odpovedá 1 premena za sekundu.)

Keď v roku 1903 objavili dvaja anglickí fyzici *Rutherford* a *Soddy* zákon rádioaktívnej premeny, zistili, že za rovnaký čas ubudne vždy rovnaká časť rádioaktívnych jadier, nie však ich rovnaké množstvo. Aký veľký je tento úbytok, to určuje nestabilita. Z nestabilnejších atómov sa rozpadne tá istá časť (napríklad jedna tretina) za kratší čas ako z atómov stabilnejších. Aby sa mohla porovnať nestabilita jednotlivých rádioaktívnych látok, udáva sa čas, za ktorý sa premení polovica atómových jadier porovnávaných látok. Tento čas sa odborne volá *polčas premeny*. (Pre ^{14}C už polčas premeny poznáme, predstavuje 5730 rokov, pre nestabilné atómy iných prvkov je polčas premeny iný.)

Nakreslime, ako klesá počet nestabilných jadier nejakej vzorky s časom. Dostaneme nasledujúci obrázok.



Na vodorovnú os x sme nanášali polčas premeny. Na zvislej osi y sa vždy po uplynutí polčasu premeny zmenšil počet jadier na polovicu. Keď spojíme takto získané body, dostaneme grafické znázornenie zákona rádioaktívnej premeny

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

S počtom jadier vzorky rovnako klesá aj jej aktivita, preto naša krivka znázorňuje pokles aktivity rádioaktívneho preparátu, ktorého polčas premeny predstavuje jeden diel na osi x . Z tejto krivky možno určiť čas, ktorý uplynul od okamihu, keď mala vzorka aktivitu A_0 , odpovedajúcu pôvodnému počtu jej atómov N_0 .

Meraním určíme aktivitu jedného gramu uhlíka organickej vzorky, ktorej vek chceme určiť. Hodnotu tejto aktivity potom nájdeme na osi y a zistíme, ktorý bod na krivke jej odpovedá. Stačí určiť, aký časový údaj na osi x prislúcha tomuto bodu krivky a máme vek vzorky, daný Libbyho rádiouhlíkovou metódou.

Metóda ^{14}C podstúpila prvú previerku na archeologickej pôde Egypta. Zo starých papyrusov sa vedelo s presnosťou na 75 rokov, že egyptskí faraóni *Džóser* a *Snofrev* sú mŕtvi 4660 a 4590 rokov. Archeológovia dali fyzikom kúsok dreva z hrobiek týchto faraónov, aby v nich určili obsah rádiouhlíka.

Ak je metóda ^{14}C správna, musia fyzici v kúskoch dreva z hrobiek *Džósera* a *Snofreva* namerať aktivitu trochu väčšiu, ako je polovica aktivity rovnakého množstva dreva z práve vyrúbaných stromov. Výpočty ukazovali, že aktivita jedného gramu uhlíka z dreva hrobiek má byť 0,133 premien za sekundu. Hneď prvé merania dali hodnotu 0,140 Bq. Čln faraóna *Sesostrisa*, o ktorom boli archeológovia presvedčení, že je o osem storočí mladší ako hrobky spomínaných faraónov, mal skutočne aktívnejšie drevo. Nameralo sa 0,166 premien za sekundu. Boli to dobré začiatky.

Neskôr, v roku 1955, zostavil Libby na základe meraní rádioaktivity vzoriek z predmetov, ktorých vek bol dobre známy, kontrolnú krivku. Jej priebeh uspokojil aj tých, ktorí nie celkom Libbymu verili.

Libbyho práca, ktorá vyúsťovala práve pred 35 rokmi do konkrétnej metódy rádiouhlíka, mu vyniesla Nobelovu cenu za chémiu (rok 1960) a ľudstvu dala jeden zo základných pilierov radiačnej chronológie.

„Fyzikální zákony by měly mít matematickou krásu“

P. A. M. Dirac

Současné představy o struktuře hmoty

Ing. JAROSLAV SEDLÁK, CSc.,
Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Člověka odedávna zajímaly procesy, které probíhají v přírodě a snažil se zjistit, jaká je jejich podstata. Starořeční filosofové si představovali, že průběh těchto procesů je určen vnitřní strukturou hmoty a věřili, že stačí určit jakési základní prvky, stavební kameny, z nichž sestávají obklopující nás předměty, abychom mohli vysvětlit všechny různorodé věci a jevy v přírodě. Po uplynutí mnoha staletí se tato představa stala základem bouřlivého rozvoje přírodovědy, k němuž došlo v první třetině našeho století. Studium struktury atomu a atomového jádra přivedlo k řadě objevů, které principiálně změnily tvářnost základních oborů přírodovědy, jako je fyzika, matematika, chemie, biologie aj. Skončilo klasické období vědy a začala etapa, určovaná rozvojem a využitím znalostí o atomové struktuře hmoty, rozvojem a využitím kvantových představ. Kvantová mechanika a kvantová elektrodynamika byly schopny popsat vlastnosti a vzájemné působení mikročástic, které je zcela odlišné od toho, které popisovala klasická fyzika. S pomocí kvantové fyziky se podařilo vysvětlit a pochopit vlastnosti jednotlivých atomů a molekul a také kondenzovaných látek.

Počet „elementárních“ konstituentů hmoty postupně vzrůstal. Ke třem elementárním částicím, známým počátkem třicátých let (*elektron, proton, neutron*), přibyl ještě *pozitron* (elektron s kladným elektrickým nábojem) a při řešení problému jaderných sil, poutajících navzájem nukleony v jádře atomu, byl objeven těžký analog elektronu, *mion*, dvěstěkrát těžší než elektron. Ve čtyřicátých letech byly v kosmickém záření objeveny *piony* (mesony pí), které jsou skutečnými nositeli jaderných sil.

V padesátých letech byly uvedeny do provozu urychlovače, urychlující protony do energií řádu 10^{10} elektronvoltů, která je dostatečně vysoká, aby při ní mohly vznikat nové subnukleární částice. A skutečně, brzy bylo objeveno několik desítek nových částic, *mesonů, hyperonů* aj., včetně jejich antičástic, v intervalu hmotností $10^8 - 10^9$ eV, které se všechny zúčastňují tzv. silné interakce. V současné době jich známe okolo dvou set (1).

Existence tak velkého počtu silně interagujících částic (hadronů) byla v rozporu s představou, že jsou to jednoduché, „elementární“ částice a navozovala myšlenku, že se jedná o částice se složitou vnitřní strukturou. Situace vyžadovala pochopení a vysvětlení, které dali v roce 1963 nezávisle G. Zweig a M. Gell-Mann. Ukázali, že všechny známé hadrony lze formálně sestavit kombinací tří druhů ještě „elementárněj-

šlech“ částic, které nazvali „*kvarky*“. Zavedli původně tři druhy kvarků, označené *u*, *d*, *s* (protonový, neutronový a podivný, jehož je zapotřebí ke konstrukci „podivných“ částic, tj. *kaonů* a *hyperonů*), nesoucí ne-celočíselný elektrický náboj a charakterizované dalšími kvantovými čísly (viz tab. 1). Kromě kvarků byly zavedeny také jejich antičástice, *antikvarky*.

Tabulka 1.

kvark	el. náboj	spin	barynové číslo	kvantová čísla		
				s	c	b
u_i	$2/3$	$1/2$	$1/3$	0	0	0
d_i	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	0	0	0
s_i	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	1	0	0
c_i	$2/3$	$1/2$	$1/3$	0	1	0
b_i	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	0	0	1
$t_i(?)$		$1/2$	$1/3$			

Index *i* ukazuje na existenci vnitřní kvantové charakteristiky (kvantového čísla) kvarku, zvaného „barva“, a nabývá tří hodnot:

žlutá
i = červená
 modrá

Mesony pak lze sestavit jako kombinaci kvarku a antikvarku a *baryony* sestávají ze tří kvarků (viz tab. 2). Existují však baryony, sestávající ze tří zcela stejných kvarků, což odporuje Pauliho principu (kvarky

Tabulka 2.

Kvarková struktura mesonů a baryonů.

Meson	Složení	Baryon	Složení
π^+	$u \bar{d}$	proton	$u \quad u \quad d$
π^-	$\bar{u} d$	neutron	$u \quad d \quad d$
π^0	$1/\sqrt{2}(u \bar{u} - d \bar{d})$	Λ^0	$u \quad d \quad s$
K^+	$u \bar{s}$	Σ^+	$u \quad u \quad s$
K^0	$d \bar{s}$	Σ^0	$u \quad d \quad s$
K^-	$\bar{u} s$	Σ^-	$d \quad d \quad s$
$\bar{K}^0$	$\bar{d} s$	Ξ^0	$u \quad s \quad s$
		Ξ^-	$d \quad s \quad s$
		Δ^{++}	$u \quad u \quad u$
		Ω^-	$s \quad s \quad s$

Pozn.:

Pruh nad značkou znamená, že se jedná o antičástici (antikvark).

jsou totiž *fermiony*, tj. mají poločíselný *spin*), podle něhož se dvě totožné částice s poločíselným spinem nemohou nacházet ve stejném kvantovém stavu. Východisko bylo nalezeno zavedením dalšího kvantového čísla u kvarků, nazvaného „barva“. Každý druh kvarků tedy existuje ve třech „barevných“ modifikacích, „žluté“, „modré“ a „červené“. „Barva“ je vnitřní charakteristikou kvarku a navenek se neprojevuje. To znamená, že hadrony, sestávající z barevných kvarků, samy barevné nejsou. Říkáme, že hadrony jsou „bezbarvé“, nebo „bílé“.

Experimenty s rozptylem elektronů o energii 20 GeV na nukleonech v nepohyblivém terči, uskutečněné v r. 1970 ve Stanfordu, přivedly ke zjištění, že uvnitř protonu existují entity, jejichž velikost nepřesahuje 1/50 rozměru protonu (průměr protonu je řádu 10^{-13} cm), které byly nazvány *partony*. Vznikla přirozeně snaha ztotožnit je s kvarky. Vnitřní struktura nukleonů i dalších hadronů byla postupně potvrzena i v jiných experimentech. Kvarkový model se stal všeobecně uznávaným.

Pro vysvětlení vlastnosti částice J/ψ , objevené v roce 1974, bylo zapotřebí zavést další kvark, označený c („charm“). Částice, které tento kvark obsahují, nazýváme někdy „půvabnými“. Částice Y (ypsilon), k jejímž objevu došlo v r. 1978, je spojována s existencí pátého kvarku, b . Teorie připouští existenci šestého kvarku, t , který však dosud nebyl experimentálně potvrzen. Vzniká přirozeně otázka, zda při přechodu k vyšším energiím můžeme očekávat zvýšení počtu kvarků. Odpověď na ni však může dát pouze experiment.

Existence kvarků byla prokázána pouze nepřímo, neboť volné kvarky se dosud nepodařilo objevit. Pro vysvětlení tohoto experimentálního faktu poskytuje teorie několik hypotéz. Jedna z nich předpokládá, že hmotnost kvarků je tak velká, že energie dosavadních urychlovačů nedostačuje k jejich uvolnění z hadronů. Jiná hypotéza předpokládá, že síly, jimiž jsou kvarky v hadronu navzájem poutány, se se vzdáleností zvětšují (na rozdíl od jiných známých sil, elektromagnetických a gravitačních, které se se vzdáleností zmenšují). To vede k tomu, že chceme-li kvark uvolnit ze soustavy, kterou vytváří, zvětšuje se její energie natolik, že může vzniknout nový kvark, nebo dokonce několik kvarků, které spolu vytvoří novou soustavu (nový hadron) a teprve ta původní soustavu opustí.

Zde se nabízí analogie s permanentním magnetem: u něho se také nepodaří oddělit severní a jižní pól, ale vždy budeme mít celou soustavu, tj. kompletní magnet se severním i jižním pólem.

Kromě kvarků je ještě jedna skupina částic, u nichž nebyla prokázána vnitřní struktura. Jsou to *leptony*, k nimž patří elektron, mion, elektronové a mionové neutrino (a příslušné antičástice). Tyto částice jsou lehké: hmotnost elektronu je $m_e = 0,511$ MeV, hmotnost mionu je $m_\mu = 105,66$ MeV, hmotnost neutrin je buď rovna nule, nebo je velmi malá. Měření hmotnosti neutrin vede k hodnotě $m\nu_e \leq (10 + 40)$ eV.

Mezi leptony patří také těžká částice, lepton τ , o hmotnosti $m_\tau = 1872$ MeV, objevený v r. 1975 v interakcích elektronů s pozitrony. Při jeho rozpadu vzniká neutrino ν_τ , takže celkový počet leptonů je šest. Dlužno poznamenat, že existence ν_τ nebyla dosud experimentálně prokázána.

Až do objevu τ — leptonu se předpokládalo, že jednoduchost leptonů je spojena s jejich malou hmotností (leptony e, μ, ν , jsou lehčí, než nejlehčí hadron π^0 , jehož hmotnost je $m_{\pi^0} = 135$ MeV. Existence leptonu τ tedy definitivně ruší názor, že „elementárnost částice“ souvisí s její hmotností.

Kvarky a leptony obvykle rozdělujeme podle podobnosti jejich kvantových čísel do tří pokolení, která jeví specifickou symetrii mezi oběma druhy částic a vytvářejí jakousi uzavřenou soustavu:

$$\begin{array}{ccc} \text{leptony} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\nu_e} \\ e \end{array} \right. & \begin{array}{c} \overline{\nu_\mu} \\ \mu \end{array} & \begin{array}{c} \overline{\nu_\tau} \\ \tau \end{array} \\ \text{kvarky} \left\{ \begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right. & \begin{array}{c} c \\ s \end{array} & \begin{array}{c} t \\ b \end{array} \\ 1. & 2. & 3. \end{array}$$

Mnozí fyzikové, zkoumající elementární částice, se domnívají, že tato uzavřená soustava by mohla tvořit fundamentální základ struktury hmoty. Podobné uzavřené soustavy měly vždy ve fyzice prvořadý poznávací význam. Např. periodickou soustavu prvků se podařilo vysvětlit jako posloupnost atomů, které se liší navzájem počtem a kombinací elektronů, obíhajících kolem jádra, a jádra jako kombinacemi nukleonů (protonů a neutronů).

Jaká je úloha kvarků a leptonů v přírodě? Ta je jasná pouze u první skupiny, u prvního pokolení částic: tvoří stavební materiál, z něhož je vybudován svět, který nás obklopuje. Z kvarků u a d sestávají nukleony, tvořící jádra atomů, elektrony vytvářejí elektronové obaly kolem jader. Elektronové neutrino je účastníkem termojaderných reakcí, které způsobují, že svítí Slunce a hvězdy. Úloha dalších pokolení leptonů a kvarků se zdá být zanedbatelná. Teprve nyní se začínáme domýšlet, že tyto částice hrály důležitou úlohu v prvních okamžicích vzniku Vesmíru.

Přesto, že existují dobré teoretické důvody pro to, aby počet leptonů a kvarků byl stejný, hlubší pochopení této symetrie dosud nalezeno nebylo.

Poznání struktury hmoty, hledání jejích elementárních konstituentů souvisí s dalším problémem, který fyzika vysokých energií řeší. Je jím sjednocení sil (interakcí), existujících v přírodě: silných, elektromagnetických, slabých a gravitačních. Takové sjednocení již má historickou analogii, která nám pomůže ilustrovat jeho význam.

Koncem minulého století se nezávisle zkoumaly elektrické a magnetické jevy. *Maxwell* ukázal, že obojí jsou projevem existence jediného

elektromagnetického pole. Na základě této jednoty elektrických a magnetických jevů byla vybudována teorie elektromagnetických interakcí, kvantová elektrodynamika, která je přesnou a dokonale prověřenou teorií, popisující působení mezi elektricky nabitými částicemi jako proces, při němž si integrující částice vyměňují foton — částici s klidovou hmotností rovnou nule.

Tyto představy byly rozšířeny také na slabou interakci, která je odpovědná za množství fyzikálních procesů: beta rozpad jader, početné rozpady elementárních částic, reakce neutrin, nezachování parity v gama-rozpaděch jader apod. Představujeme si, že slabá interakce je zprostředkována výměnou tzv. intermediálních *bozonů* (částice s celočíselnou hodnotou spinu), které mohou být v závislosti na typu interakce buď elektricky nabité ($W_{\pm}$), nebo neutrální (Z^0). Jejich hmotnost je řádu 90 GeV. Tyto představy jsou základem jednotné teorie elektromagnetických a slabých interakcí (tzv. teorie elektroslabých interakcí). Experimentální zjištění intermediálních bozonů bude současně potvrzením této teorie.

Analogicky je budována také teorie, popisující vzájemné působení mezi kvarky — kvantová chromodynamika (kvarky jsou „barevné“, vystupují ve třech „barvách“). Podle ní je silná interakce zprostředkována výměnou hypotetických částic — *gluonů* (od anglického „glue“, lepidlo).

Rozdíl mezi elektromagnetismem a silnými interakcemi plyne v zásadě z rozdílu mezi fotonem a gluony. Existuje pouze jediný druh fotonů (v závislosti na energii se fotony projevují jako záření gama, rentgenovo záření, viditelné světlo, tepelné záření apod.), zatímco gluonů je osm druhů. Foton zprostředkuje interakci mezi elektricky nabitými částicemi, ale sám elektrický náboj nepřenáší. Proto částice při emisi nebo absorpci fotonu nemění svůj elektrický náboj. Gluony však jsou „barevné“ částice, tj. mají stejnou vnitřní charakteristiku, „barvu“, jako kvarky, a proto při absorpci nebo emisi gluonu kvark mění svůj vnitřní kvantový stav, svoji „barvu“.

Většina experimentálních faktů je v dobré shodě s předpověďmi kvantové chromodynamiky, avšak do jejího ověření s takovou důkladností a přesností, jako je tomu v případě kvantové elektrodynamiky, je ještě velmi daleko. Je mnoho otevřených problémů, které čekají na experimentální potvrzení. Bude zapotřebí mnoha experimentů při mnohem vyšších energiích interagujících částic, abychom v poznání fundamentálních zákonů přírody a v budování jednotné teorie sil postoupili o další krok kupředu.

Literatura :

- [1] Janout, Z.: Elementární částice a interakce mezi nimi, Rozhledy mat.-fyz., 55, č. 5 (1976—77), 221.

Anno restituto MDLXXXII

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topolčany

Čo znamená ten nadpis? ROK ÚPRAVY 1582 — po latinsky. A čo nám pripomína? Zmenu juliánskeho kalendára na kalendár gregoriánsky. Odvtedy je práve v tomto roku už 400 rokov. A teraz po poriadku:

V starovekom Ríme bolo zvykom splácať dlžobu vždy v prvé dni mesiaca. Dlžobná kniha sa nazývala „Calendarium“ a prvé dni v mesiaci boli Calendae — kalendy. Z toho nám zostal Kalendár.

Podstatou každého kalendára sú pravidelne sa opakujúce astronomické javy: striedanie dňa a noci, perióda mesačných fází, striedanie ročných období. Základom dnešného kalendára je *tropický rok* — časový interval medzi dvomi po sebe nasledujúcimi prechodmi stredu Slnka bodom jarnej rovnodennosti. Pre všetky kalendárne výpočty môžeme dnes používať údaj, že tropický rok má 365,24220 dňa.

V roku 46 pred našim letopočtom (p. n. l.) zaviedol rímsky vojvodca *Július Caesar* poriadok do vtedajšieho kalendára. Jeho astronóm *Sosigenes* určil dĺžku tropického roku na 365,25 dňa, i keď mohol vedieť, že *Hipparchos* vypočítal, že rok je o trochu kratší. Nový kalendár, nazývaný *juliánsky*, začal platiť od 1. januára roku 45 p. n. l. Nepochopením sa však stalo, že priestupný deň pridávali už každý tretí rok namiesto každého štvrtého. Na chybu sa prišlo v roku 8 p. n. l. za vlády cisára *Augusta*. Ten chybu napravil. Odvtedy sa počítalo s priestupným rokom každý štvrtý rok, počet dní v mesiacoch bol taký ako v dnešnom kalendári.

V skutočnosti je juliánsky rok o 11 minút a 14 sekúnd dlhší ako tropický rok. Z tohoto rozdielu je za 128 rokov presne jeden deň. Začiatkom 14. storočia už všetci zainteresovaní dobre vedeli, že rozdiel medzi kalendárovou jarnou rovnodennosťou a skutočnou astronomickou rovnodennosťou je príliš veľký. V druhej polovici 16. storočia to bolo už 10 dní.

Pápež *Gregor XIII.* (1572—1585, vl. menom *Hugo Boncamagni*) ustanovil v roku 1582 zvláštnu komisiu odborníkov pre návrh na úpravu kalendára. Návrh skupiny hvezdárov a matematikov formuloval *Luigi Lilius*, profesor perudžskej univerzity. Priestupnými rokmi sa stali z rokov storočí iba tie, ktorých prvé dve cifry vytvárajú číslo deliteľné štyrmi (tak rok 1700, 1800, 1900, 2100 nie sú priestupné).

Gregor XIII. vydal 24. II. 1582 bullu „Inter Gravissimum“ a tak na-riadil platnosť nového kalendára v krajinách svojej moci. Za štvrtkom 4. októbra nasledoval piatok 15. októbra 1582. Tým sa naraz odstránila vzniknutá nepresnosť a jarná rovnodennosť sa vrátila na 21. marec. Hodnota dĺžky roku po gregoriánskej úprave 365, 2425 dňa je taká, že odchylka jedného dňa nastane až za 3280 rokov. Pri príležitosti zmeny kalendára v roku 1582 sa razili medaile s pápežovým portrétom. Na ich druhej strane bol nápis ANNO RESTITUTO MDLXXXII.

Nový kalendár sa uplatňoval postupne. Hneď sa zaviedol v Taliansku, Portugalsku, Španielsku, Poľsku a pod. Na Slovensku vyšiel prvý oficiálny gregoriánsky kalendár pre rok 1583 v Trnave. Patril medzi prvé v strednej Európe. V Anglicku bol nový kalendár zavedený až v roku 1752, v Sovietskom zväze v roku 1918, v Egypte v roku 1928. Niektoré náboženské skupiny i celé štáty používajú aj teraz iné kalendáre. Napríklad mohamedáni majú rok 1403, budhisti 2525 a židia 5742. V Afganistane a Iráne je rok 1361 (slnečná hidžra).

Ak vás problematika kalendára a merania času zaujíma, nezabudnite si pozrieť výbornú knižku *S. I. Selešnikova* „Člověk a čas“, ktorá vyšla v nakladateľstve Práce v Prahe roku 1974. Nájdete v nej veľa zaujímavého poučenia z histórie i perspektívy v hľadaní ideálneho celosvetového kalendára.

Čas odvíjaný v dňoch, mesiacoch i rokoch bez ohľadu na rôzne skladanie do kalendárov je príležitosťou pre nezadržateľné úsilie obyvateľov tejto planéty o pravdivé poznanie zákonitostí vesmíru, v ktorom žijeme. Každá sekunda sa stáva vyzvaním k spolupráci na rozvoji celého ľudstva.

Paul Adrien Maurice Dirac osmdesátiletý

ZDENĚK JANOUT, STANISLAV POSPÍŠIL, fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
ČVUT v Praze

Dne 8. srpna 1982 se dožil osmdesáti let jeden z největších teoretických fyziků našeho století *P. A. M. Dirac*, syn Švýčarky a Angličana. Narodil se v Bristolu. Studoval na univerzitách v Bristolu a Cambridgi. V 28 letech se stal členem Londýnské královské společnosti, ve třiceti letech byl jmenován profesorem na universitě v Cambridgi a v 31 letech mu byla udělena Nobelova cena za fyziku, konkrétně za objev nových produktivních forem kvantové teorie.

V knize *Roberta Junga*: „Jasnější než tisíc sluncí“ (Mladá fronta, Praha 1963) se dočteme, že v mládí byl Dirac velice mlčenlivý a ani zasvěcenci nedokázali plně sledovat postup jeho myšlenek. „Při jeho

pobytu v Göttingen ho bylo často vidět, jak pracuje v některé ze seminárních místností druhého göttingenského fyzikálního ústavu. Jako ve snu tam rozprávěl sám se sebou — ale beze slov, jen řadami křídových znaků na černé tabuli. Ani v přítomnosti jiných nevysvětloval Dirac téměř nic ze svých matematických důkazů slovy. Proto se mezi fyziky říkalo, že velký mlčenlivec Dirac dokáže vypravit ze sebe souvislou větu jen jednou za světelný rok.“

V době jeho pobytu v Göttingen pobýval zde i mladý americký fyzik *Robert Oppenheimer* (1904—1967), budoucí „otec“ atomové pumy, který zde nejen studoval fyziku, ale věnoval se i svým filosofickým, filologickým a literárním zálibám. „Jednou večer si vzal Angličan Dirac přítele Oppenheimera stranou a řekl mu trochu vyčítavě: Slyším, že nejen studujete fyziku, nýbrž píšete i básně. Jak jen můžete dělat to i ono? Ve vědě se pokoušíme říci něco, co ještě nikdo neví, takovým způsobem, aby tomu každý rozuměl. Kdežto poezie dělá pravý opak!“ (Tamtéž, str. 29).

Vědecké práce Diraca mají vztah ke kvantové mechanice a kvantové elektrodynamice, teorii pole a elementárních částic, teorii gravitace. Dirac rozpracoval (1926—1927) matematický aparát kvantové mechaniky, navrhl (1927) metodu kvantování soustav s proměnným počtem částic (metoda druhého kvantování). V roce 1927 použil principy kvantové teorie k elektromagnetickému poli a získal první model kvantovaného pole. Položil základy kvantové teorie záření, předpověděl identičnost fotonu vynuceného záření s fotonem primárního záření, což dnes tvoří základ kvantové elektroniky. V roce 1926 nezávisle na italském fyzikovi *E. Fermim* (1901—1954) rozpracoval statistiku částic s poločíselným spinem (statistika Fermi-Diraca). V roce 1931 Dirac vyslovil hypotézu o symetrii kvantové elektrodynamiky, založenou na existenci magnetických nábojů. Podle této hypotézy by měly v přírodě existovat stabilní částice s jedním magnetickým pólem — magnetické monopóly. Tyto částice — nazývané též monopóly Diraca — fyzikové zatím bez úspěchu nepřetržitě hledají.

V letech 1928—31 Dirac vybudoval relativistickou teorii elektronu, která harmonicky sjednotila teorii relativity, představu kvant a spin elektronu. U rovnice, kterou sestavil, zjistil, že má dvojí řešení. Jedno řešení popisovalo záporně nabitý elektron, zatímco druhé řešení popisovalo kladně nabitý elektron, tedy antičástici k záporně nabitému elektronu. Skvělého potvrzení Diracovy teorie se dostalo v roce 1932, kdy americký fyzik *C. D. Anderson* (nar. 1905) objevil v kosmickém záření antičástice k elektronu — pozitron. V roce 1933 vyslovil Dirac hypotézu o existenci antihmoty, dále předpověděl tvorbu a anihilaci elektron — pozitronových párů a postuloval efekt polarizace vakua. V témže roce byla tvorba elektron — pozitronových párů experimentálně pozorována manželi *Irenou a Fredericem Joliot-Curieovými*. V pozdějších

letech (1937) vyslovil hypotézu o zmene gravitace s časem, v roce 1962 rozpracoval teorii mionu. V posledních letech Dirac pracuje na problému hamiltonovské formulace teorie gravitace s cílem kvantovat gravitační pole.

Paul Adrien Maurice Dirac patří mezi nejvýznamnější postavy světové vědy ve dvacátém století.

Matematici na známkach II

JÁN MIČKA, Trnava

Nastupujúci novovek možno dokumentovať veľkým počtom známok s poľským astronómom *M. Koperníkom* (1473—1543), vydaných z príležitosti 500-ročnice jeho narodenia. Ako je známe, jeho hlavným dielom je kniha *O pohyboch nebeských telies*, v ktorej uviedol i stručný úvod do trigonometrie.

Vynález kníhtlače *Johannom Gutenbergom* v prvej polovici 15. storočia podnietil i rozširovanie matematickej literatúry, najmä počtovníc pre potreby remeselníkov a obchodníkov. Najobľúbenejšie počtovnice v Nemecku vydával *Adam Riese*, žijúci v Annabergu v rokoch 1492—1559, kde do jeho počtárskej školy dochádzali aj žiaci z Čiech.

Známku s portrétom A. Riesa z príležitosti 400. výročia jeho smrti vydala NSR v roku 1959.



Holandský matematik a inžinier *Simon Stevin* (1548—1620) v práci *La disme* zaviedol desatinné zlomky ako súčasť návrhu na zjednotenie systému mier, váh a peňažníctva. Stevinovi je venovaná jedna belgická známka zo série významných osobností.

V roku 1564 sa narodil slávny učenec *Galileo Galilei*, v ktorého dielach je harmonicky spojená teória i experiment, pričom však kladie dôraz na matematické spracovanie problému. V diele *Discorsi* rozvinul Galilei

matematické skúmanie pohybu a vzťahov medzi dráhou, rýchlosťou a zrýchlením. Galileiho myšlienky v oblasti čistej matematiky rozpracovali jeho žiaci *B. Cavalieri* (1598—1647) a *E. Torricelli* (1608—1647) v infinitezimálny počet.

G. Galileiho môžeme vidieť napr. na sovietskej alebo maďarskej známke z roku 1964. Obe boli vydané pri príležitosti 400. výročia narodenia tohto veľkého prírodovedca. Známkou s E. Torricellim vydali tiež v ZSSR a v Taliansku v r. 1958 pri príležitosti 350 rokov od jeho narodenia.

Jedným z najvýznamnejších matematikov 17. storočia bol francúzsky matematik a filozof *René Descartes* (1596—1650). Zaviedol do matematiky pojem funkcie, premennej veličiny a symboliku algebry tak, ako ju poznáme dnes. Vytvorením metódy pravouhlých súradníc sa stal zakladateľom analytickej geometrie. Jeho hlavný prínos v matematike spočíva v tom, že na klasickú geometriu systematicky aplikoval algebru, a tak zaistil veľké rozšírenie jej použiteľnosti.

K 300. výročiu vydania jeho hlavného diela *Diskusie o metóde* vydalo Francúzsko r. 1937 jednu známku.



Blaise Pascal (1623—1662) je známy ako konštruktér počítacieho stroja a objaviteľ poučky o šesťuholníku, vpísanom do kužeľosečky a spolu s P. de Fermatom je zakladateľom počtu pravdepodobností. Pascalovým menom je nazvaný aj trojuholník na určenie binomických koeficientov.

Pri príležitosti 300. výročia úmrtia B. Pascala r. 1962 vydalo Francúzsko a roku 1973 pri príležitosti 350. výročia narodenia aj Monaco.

Iba tri roky v dátumoch narodenia delia od seba dvoch velikánov matematickej vedy: *Isaac Newton* (1643—1727) a *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646—1716) sú navzájom na sebe nezávislými objaviteľmi diferenciálneho a integrálneho počtu. Newton ďalej študoval nekonečné rady, v geometrii klasifikáciu kriviek 3. stupňa a v algebre teóriu symetrických funkcií. Leibniz sa zaoberal kombináciami, permutáciami

a symbolickou logikou. Bol aj tvorcom nových matematických symbolov: zaviedol znaky pre diferenciál a integrál funkcie dx , dy , $\int$, znak rovnosti $=$ a bodku. ako znak násobenia.

Maďarská známka z roku 1977, vydaná pri príležitosti 250. výročia smrti I. Newtona, približuje jeho základné dielo *Principia mathematica*. Ďalšie známky na jeho počesť vyšli v Poľsku a Francúzsku. G. W. Leibnizovi vyšlo niekoľko známok v oboch nemeckých štátoch, naposledy v NSR v roku 1980.

Mimoriadne rozsiahle vedecké dielo, obsahujúce vyše 800 prác, zanechal po sebe švajčiarsky matematik *Leonhard Euler* (1707—1783), ktorého objavy významne prispeli k rozvoju všetkých odvetví matematiky 18. storočia: k analýze, algebre, k teórii čísel, ku trigonometrii aj k algebraickej geometrii kriviek a plôch. Vynašiel spôsoby vyčíslenia určitých integrálov, podal riešenie neurčitých rovníc, objavil vzťah medzi exponenciálnou a goniometrickou funkciou, venoval sa diferenciálnym rovniciam a variačnému počtu, prispel k úprave matematickej symboliky a k vytvoreniu matematického aparátu vtedajšej fyziky. Najlepším zhodnotením Eulerovho diela je tvrdenie nemenej slávneho matematika K. Gaussa: „Štúdium Eulerovho diela zostane najlepšou školou pre najrozličnejšie oblasti matematiky a nemôže ich nic nahradiť.“

K 250. výročiu narodenia L. Eulera, ktoré bolo v roku 1957, vydali príležitostné známky v Sovietskom zväze, vo Švajčiarsku a v NDR.



Do päťice matematikov, ktorí si medzi sebou rozdelili svet, ktorého existenciu odhalil Newton (ako sa vyjadril Arago) [3], patrili ku Clairautovi a Eulerovi *Jean Baptiste d'Alembert*, *Joseph Louis Lagrange* a *Pierre Simon Laplace*.

D'Alembert v slávnej francúzskej Encyklopédii načrtol vývoj vedeckého poznania a klasifikáciu vied. Jeho prínos do matematiky bol značný i napriek tomu, že bol odporcom objektívneho poňatia záporných čísel. Zaviedol pojem limity a založil teóriu parciálnych diferenciálnych rovníc.

D'Alembertove zásluhy o rozvoj matematiky si uctilo Francúzsko r. 1959 vydaním príležitostnej známky.

J. L. Lagrange (1736—1813) svojimi prácami v teórii infinitezimálneho počtu a jeho aplikácií v mechanike sa významne podieľal na ďalšom rozvoji matematiky 18. storočia. Na sklonku svojho života napísal dve knihy o funkciách, ktorými sa pokúsil dať infinitezimálnemu počtu pevné základy tým, že sa redukoval na algebru. Odmietnutím Newtonovho geometrického prístupu sa Lagrange prejavil ako prvý dôsledný analytik.

Na jeho počesť vydalo známku Francúzsko r. 1958.

Prvým moderným matematikom, právom si zasluhujúcim pomenovanie geometra, sa stal *Gaspard Monge* (1746—1818). Rozvinul deskriptívnu geometriu ako zvláštne odvetvie geometrie a jeho dokonalé zvládnutie aplikácie algebraických a analytických metód na krivky a plochy podstatne ovplyvnilo vývoj analytickej a diferenciálnej geometrie.

135 rokov po jeho smrti, v roku 1953, vydali v jeho vlasti známku s jeho portrétom.

Matematiku 18. storočia završujú práce francúzskeho matematika *P. S. Laplacea* *Nebeská mechanika* a *Analytická teória pravdepodobnosti*, ktoré poukazujú na nesmierny význam a možnosti infinitezimálneho počtu v astronómii a dávajú možnosť vzniku teórie pravdepodobnosti a operátorového počtu.

Na známke bol Laplace zobrazený vo Francúzsku r. 1955.

Prelom medzi matematikou 18. a 19. storočia tvorí dielo *Karla Fridricha Gausa* (1777—1855). O jeho genialite svedčí, že už ako 18-ročný objavil v teórii čísel (nezávisle na Eulerovi) kvadratický zákon reciprocity a podal celkom tri dôkazy základnej vety algebry (z toho prvý ako 24-ročný) t. j. že každá algebraická rovnica s reálnymi koeficientmi má aspoň jeden komplexný koreň, a preto má n koreňov. Rovnako ho neuspokojil ani prvý úplný dôkaz vety o kvadratických zvyškoch, a preto postupne uverejňuje 5 ďalších dôkazov. Gauss sa zaoberal teóriou funkcií komplexnej premennej, matematickou analýzou, diferenciálnou geometriou, teóriou pozorovacích chýb atď.



Gaussov portrét môžeme nájsť napr. na známkach NDR vydaných pri príležitosti 200. výročia narodenia tohto významného matematika, fyzika a astronóma.

100. výročie úmrtia belgického matematika *L. A. J. Queteleta* (1796—1874), známeho svojimi prácami z geometrie kriviek a plôch a z ma-

tematickej štatistiky, si pripomenuli v jeho vlasti r. 1974 príležitostnou známku.

Veľkú pozornosť venuje významným matematikom známková tvorba v ZSSR. Na známkach vyšiel r. 1956 *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij* (1792—1856), ktorý sa prácou O načaloch geometrii z rokov 1829—30 stal zakladateľom novej, neeuklidovskej geometrie. Veľký ruský matematik *Michail Vasilievič Ostrogradskij* (1801—1862), pracujúci v matematickej analýze, teoretickej mechanike, matematickej fyzike, v teórii čísel, algebre a v teórii pravdepodobnosti, bol zobrazený na známke vydannej k 150. výročiu jeho narodenia. V roku 1946 vyšiel na známkach aj *Pafnutij Lvovič Čebyšev* (1821—1894), ktorý bol zakladateľom petrohradskej matematickej školy a medzi iným sa zaoberal aj teóriou počítacích mechanizmov.

Sovietski tvorcovia známok nezabudli ani na slávnu matematičku v oblasti diferenciálnych rovníc a integrálneho počtu, *Sofiu Vasilievnu Kovalevskú* (1853—1891). Znamka na jej počesť vyšla v roku 1951. O 6 rokov neskôr bola v ZSSR vydaná známka z príležitosti 100. výročia narodenia *Alexandra Michajloviča Ljapunova* (1857—1918), ruského matematika, zaoberajúceho sa teóriou diferenciálnych rovníc a pravdepodobnosti.

Rok 1960 priniesol 2 príležitostné známky s portrétom významného maďarského matematika *Jánaša Bolyaia* (1802—1860), ktorý sa v práci z roku 1832 podujal vyložiť geometriu nezávislú na euklidovskom axióme o rovnobežkách. Tým sa stal nezávisle na Lobačevskom spoluzakladateľom neeuklidovskej geometrie. Tieto známky vydalo Maďarsko a Rumunsko v sérii významných osobností.



Významný objav urobil v roku 1832 mladý nórsky matematik *Niels Henrik Abel* (1802—1829). Dokázal, že neexistuje obecná formula pre riešenie algebraickej rovnice vyššieho ako 4. stupňa, ktorá by okrem racionálnych operácií obsahovala iba odmocniny. N. Abel tiež napísal niekoľko prác o konvergencii radov, o integrálnych a eliptických funkciách. Jeho menom boli nazvané komutatívne grupy ako abelovské.

Séria štyroch známok s jeho portrétom vyšla v Nórsku r. 1929 pri 100. výročí jeho úmrtia.

150 rokov po narodení nemeckého matematika *Richarda Dedekinda* (1831—1916) vydali v NDR známku, ktorá pripomenula jeho zásluhy pri riešení problému iracionálnych čísel a vytvorenie presnej teórie iracionalít.

Francúzsky matematik *Jules Henri Poincaré* (1854—1912) bol známy riešením širokej oblasti problémov: uverejnil práce o diferenciálnych rovniciach, o topológii, študoval divergentné rady, integrálne invarianty a pod. Štyridsiate výročie jeho smrti si uctilo Francúzsko vydaním známky s obrazom tohoto slávneho matematika.



Našu malú prehliadku zakončíme pohľadom na niekoľko skromných známok, venovaných tvorcom matematického časopisu (rumunská známka z r. 1945), učiteľom matematiky (sovietska známka z r. 1961) alebo celkom prosto, na záver — MATEMATIKE (fínska známka z r. 1978).

Literatúra :

- [1] Veselý, F.: 100 let Jednoty československých matematiků a fyziků, SPN Praha, 1962.
- [2] Balada, F.: Z dějin elementární matematiky. SPN Praha, 1959.
- [3] Struik, D. J.: Dějiny matematiky. Orbis Praha, 1963.
- [4] Bober, J.: Malá encyklopédia bádateľov a vynálezcov, Obzor, Bratislava, 1973.
- [5] Zumstein Briefmarken-Katalog, Zumstein and Cie, Bern 1981.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

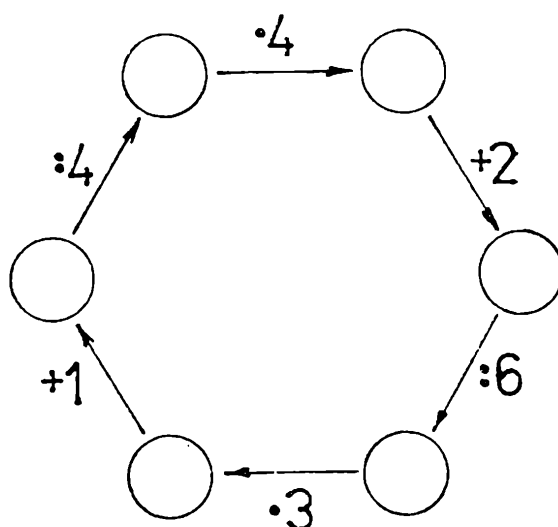
Redakce

Rovnice a šípkové diagramy

Doc. RNDr. MILAN HEJNÝ, CSc., RNDr. LUDOVÍT HRDINA, CSc.,
Bratislava

V rubrike *Kvant dla mladších školnikov* časopisu Kvant 1981, č. 4, str. 33 je uvedený príklad:

Príklad 1. Do koliesok v obrázku 1 vpíšte čísla tak, aby sa každé nasledujúce v smere šípiek získalo z predchádzajúceho vykonaním tej operácie, ktorá je napísaná pri šípke.



Obr. 1

Príklad je možné vyriešiť bez ťažkostí pomocou rovnice. Najsamprv prepíšeme úlohu z jazyka šípkového diagramu do zvyčajnej symboliky. Do jedného krúžku na obr. 1 — napríklad ľavého horného — napíšeme x a potom postupne doplníme ďalších 5 krúžkov.

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{\cdot 4} 4x \xrightarrow{+2} 4x + 2 \xrightarrow{:6} (4x + 2) : 6 \xrightarrow{\cdot 3} [(4x + 2) : 6] \cdot 3 \xrightarrow{+1} \\ &[(4x + 2) : 6] \cdot 3 + 1 \xrightarrow{:4} \{[(4x + 2) : 6] \cdot 3 + 1\} : 4 \end{aligned}$$

Podľa zadania príkladu, posledný výraz musí byť rovný pôvodnému číslu x , teda musí platiť

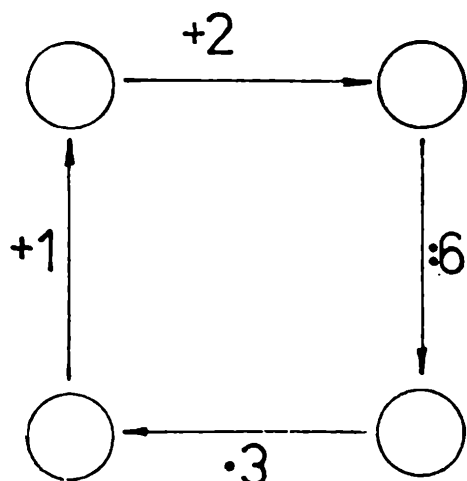
$$\{[(4x + 2) : 6] \cdot 3 + 1\} : 4 = x \quad (1)$$

Rovnicu (1) vyriešime štandardným kalkuľom: $x = 1$. Potom ľahko napíšeme čísla do jednotlivých koliesok:

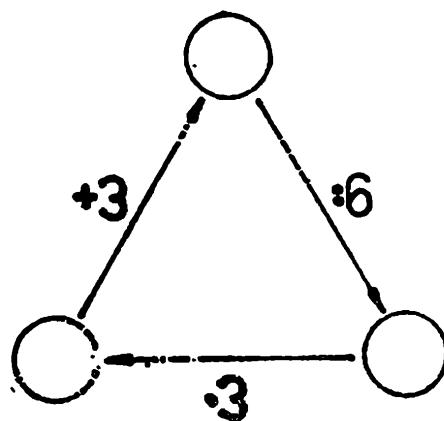
1, 4, 6, 1, 3, 4

Ukážeme iný spôsob riešenia príkladu 1. Všimnime si, že na obr. 1 po šípke s označením $(:4)$ nasleduje šípka $(.4)$. Akékoľvek číslo y vydelené číslom 4 a potom vynásobené číslom 4 dá opäť y , lebo $(y : 4) \cdot 4 = y$. Preto oba tieto šípky môžeme vynechať a šípkový šesťuholník môžeme zjednodušiť na šípkový štvoruholník, ako je to vidieť na obr. 2. V novom diagrame sú dve po sebe idúce šípky $(+1)$ a $(+2)$. Zrejme tieto môžeme nahradiť jedinou šípkou $(+3)$, lebo $(y + 1) + 2 = y + 3$. Tak po zjednodušení šípkový štvoruholník zmeníme na šípkový trojuholník (obr. 3). V tomto diagrame si všimnime šípku $(:6)$ a šípku $(.3)$. Vydeliť číslom 6 a potom vynásobiť číslom 3 je to isté, ako vydeliť číslom 2, lebo $(y : 6) \cdot 3 = y : 2$. Tak sa šípkový diagram zjednoduší na „dvoj-uholník“, ako je to na obr. 4. Riešiť tento diagram znamená nájsť čísla a, b tak, že $a + 3 = b$ a $b : 2 = a$. Zrejme $a = 3, b = 6$. Keď sa teraz pozrieme na pôvodný diagram na obr. 1, zistíme, že koliesko „a“ je v pôvodnom šípkovom šesťuholníku spodné ľavé a koliesko „b“ pravé stredné. Potom už ľahko doplníme čísla aj vo zvyšných kolieskach pôvodného šípkového šesťuholníka.

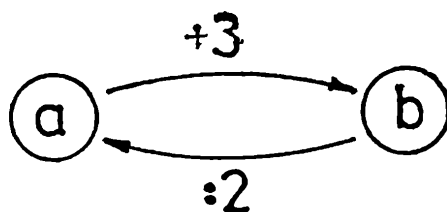
Ukážeme, ako je možné naznačený spôsob riešenia úloh so šípkovými diagramami zmeniť na metódu. Spočíva na postupnom zjednodušovaní



Obr. 2

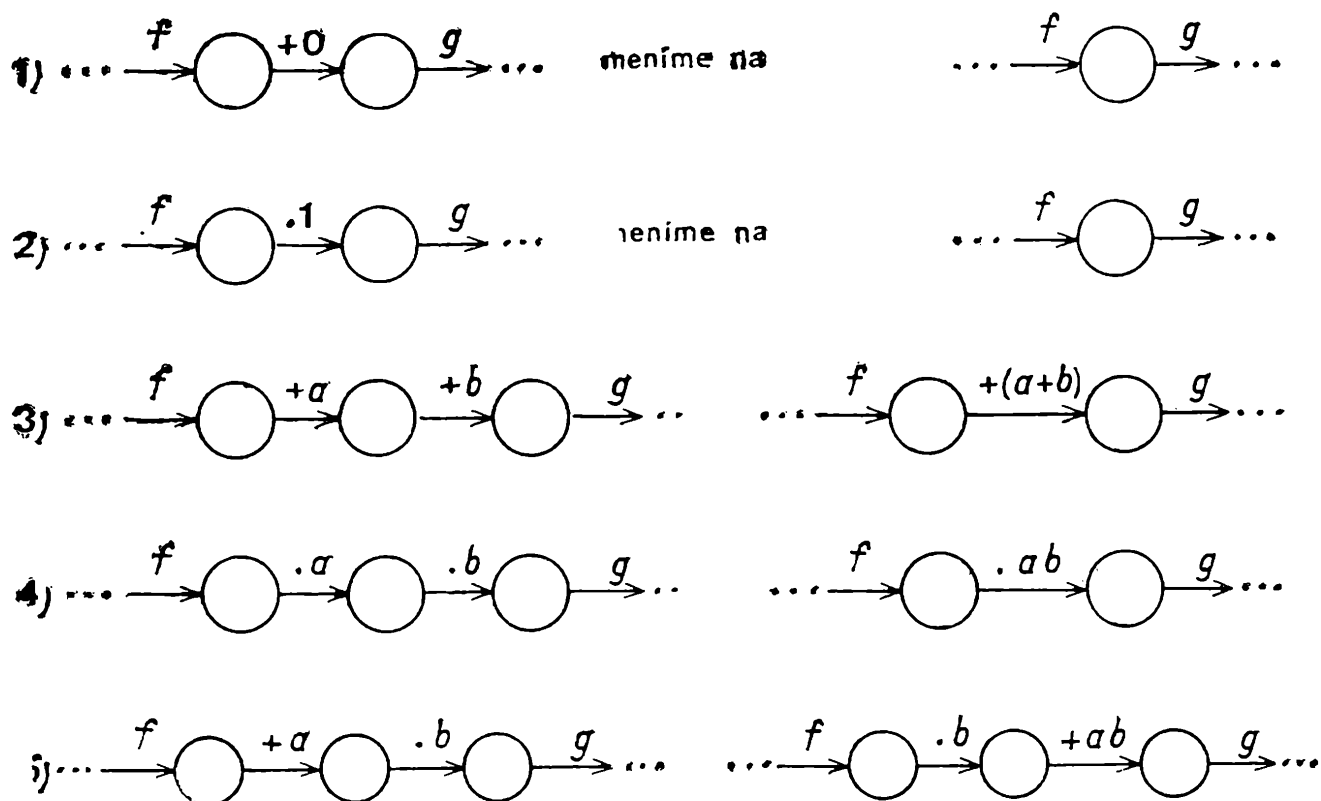


Obr. 3

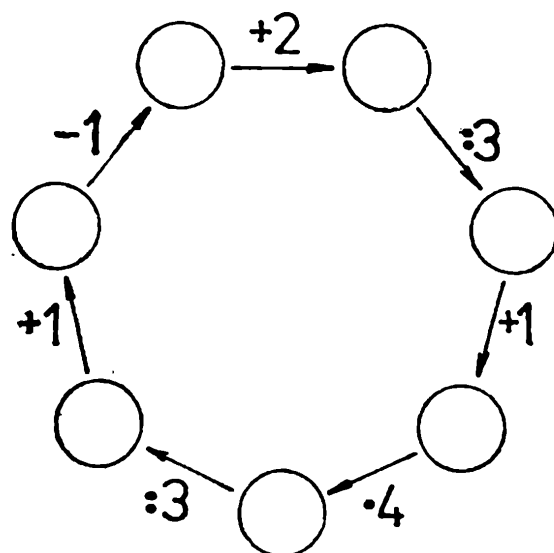


Obr. 4

zložitejšieho diagramu na jednoduchší, pričom každé zjednodušenie je jedným krokom v úprave. Upresníme, že v úlohách budeme pracovať so šípkami štyroch typov: pričítania, odčítania, vynásobenia a vydeľenia. Nakoľko však „odčítať m “ znamená to isté ako „pričítať $-m$ “, môžeme šípky odčítania zmeniť na pričítanie. Podobne môžeme šípku „vydeliť n “ nahradiť šípkou „vynásobiť $\frac{1}{n}$ “, kde $n \neq 0$. Tak sa štyri operácie: $+$, $-$, $\cdot$, $:$ redukujú na dve. Potom šípkový diagram upravujeme podľa týchto 5 krokov (tabuľka):



Použitím uvedených krokov môžeme šípkový diagram zjednodušiť na „dvojuholník“. Ukážeme to najskôr na príklade.



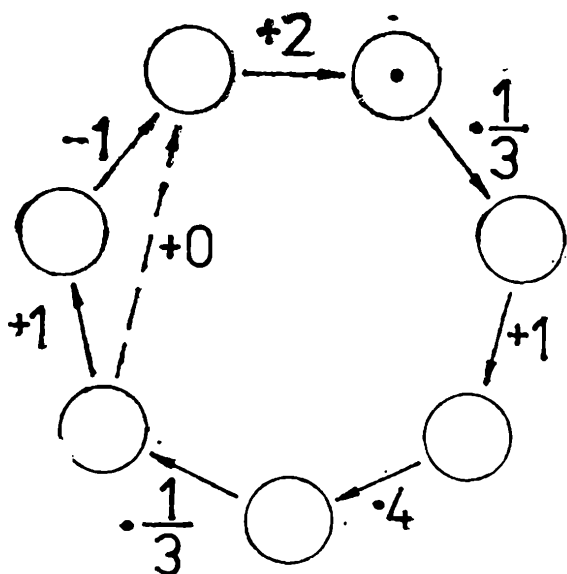
Obr. 5

Príklad 2. Riešte šípkový diagram z obr. 5.

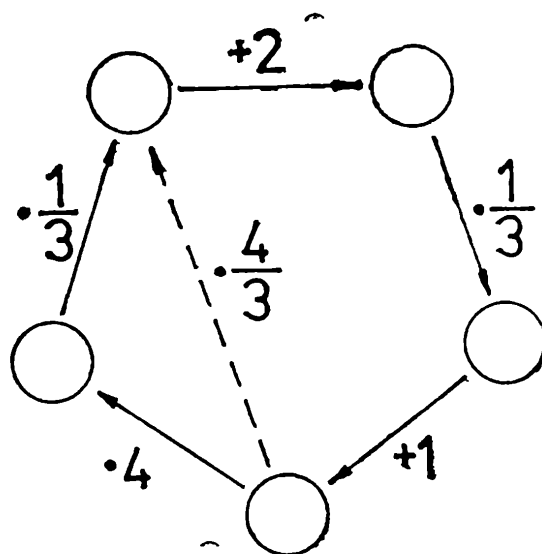
Riešenie. Postupne redukovujeme šípkový sedemuholník na dvojuholník. Z obrázku 6f vyplýva, že $a + \frac{10}{3} = b$, $\frac{4}{9}b = a$, z čoho $a = \frac{8}{3}$, $b = 6$.

Pri návrate späť až k diagramu 6a najdeme koliesko, kde $b = 6$ (je označené bodkov vo vnútri kolieska). Tak dostávame riešenie pôvodného diagramu:

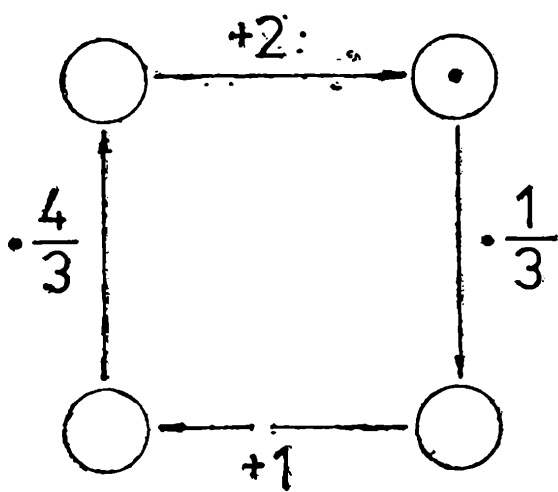
$$6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 4$$



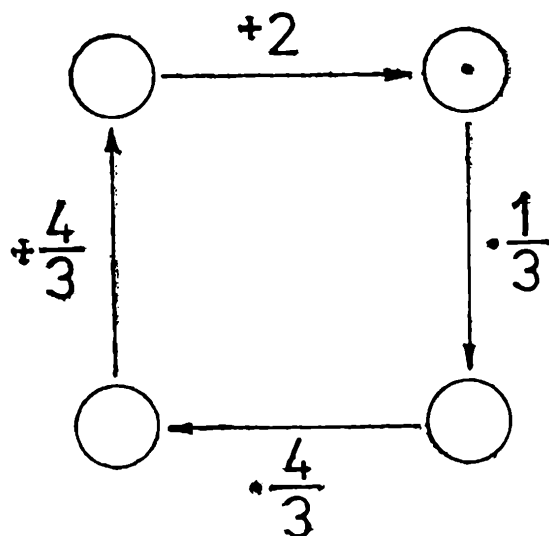
Obr. 6a



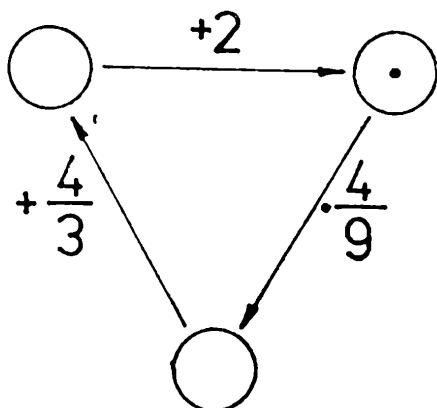
Obr. 6b



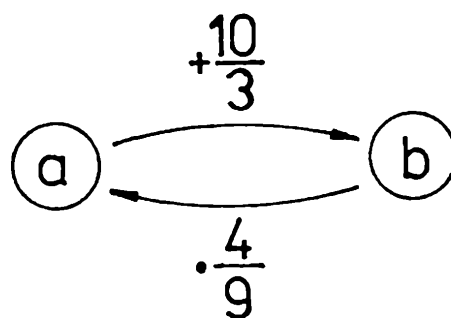
Obr. 6c



Obr. 6d

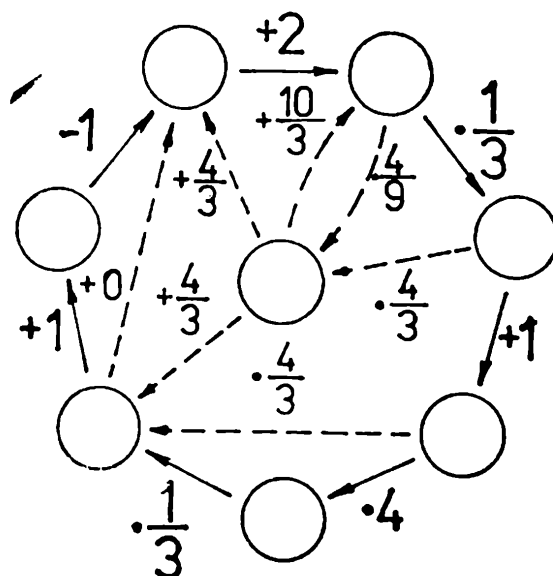


Obr. 6e



Obr. 6f

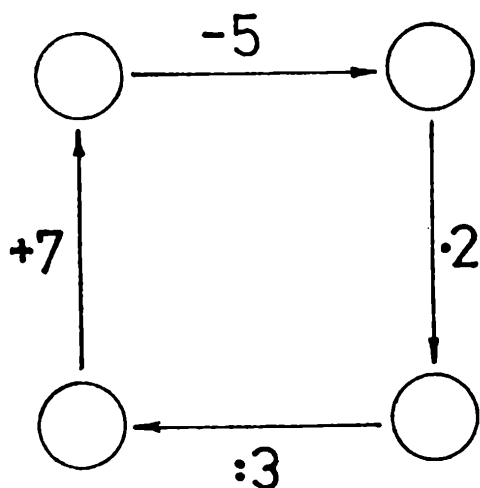
Celý proces riešenia príkladu možno „nahustiť“ do jedného obrázku (obr. 7). Koliesko vo vnútri sedemuholníka znamená pomocnú premennú, ktorá umožnila prechod od diagramu 6e po diagram 6f.



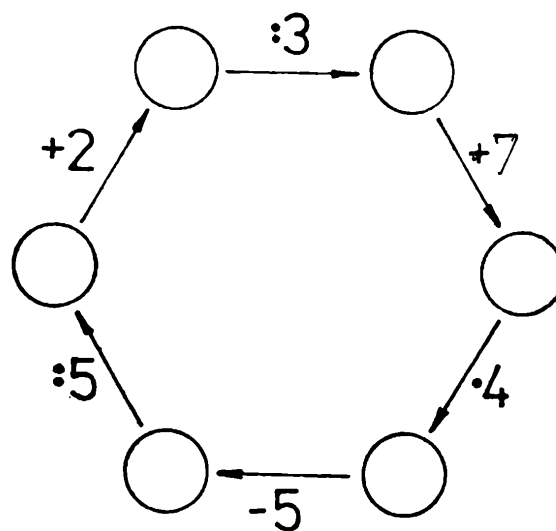
Obr. 7

Cvičenie :

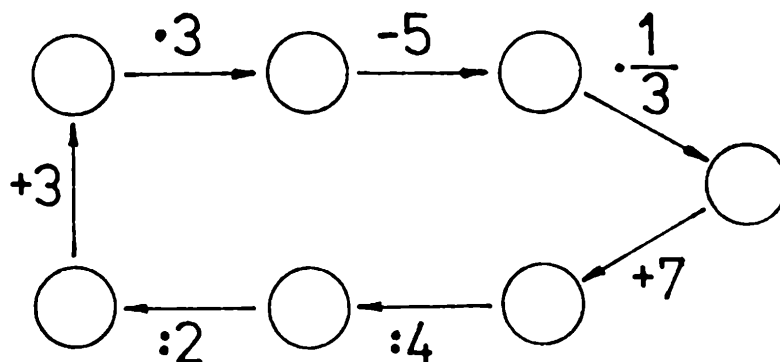
1. Riešte šípkové diagramy „šípkovou“ metódou.



Obr. 8a



Obr. 8b



Obr. 8c

2. Každý diagram úlohy 1. prepíšte do jazyka algebry a riešte. Koľko rozličných spôsobov takého prepisu existuje v prípade a), b), c) ?

3. Rovnice prepíšte do tvaru šípkového diagramu a riešte:

a) $\left(\frac{x}{7} + 2\right) \cdot \frac{1}{3} + 6 = x$ b) $\{[(x - 11) \cdot 11 - 9] \cdot 7 - 11\} \cdot 4 = x$

4. Rovnice prepíšte do tvaru šípkového diagramu a potom riešte:

a) $\left(\frac{x}{2} + 7\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{x + 4}{3}$ b) $\frac{x + 1}{4} + 2 = \left(\frac{x + 2}{3} + 5\right) : 2$

Kouzelné karty

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., UP Olomouc

Za druhé světové války, kdy se muselo úzkostlivě šetřit surovinami i pracovními silami a kdy bylo výrobní úsilí orientováno hlavně „k vítězství Říše na všech frontách pro Evropu“, nebylo téměř ani hraček — neboť toto odvětví zřejmě nemohlo nijak výrazně přispět k „budování nového pořádku v Evropě“, jak pravila oficiální terminologie. Vtipná hračka byla tedy vzácností. Dodnes si vzpomínám, že se mi přesto podařilo z úspor žáčka národní školy pořídit vkusně upravenou hračku nazvanou „Kouzelný počtář“, sestávající ze sedmi karet, jejichž rekonstrukce se mi ještě po letech podařila a jejíž idea mě kdysi nanejvýš udivila. Na jednotlivých kartách jsou vtištěny následující množiny čísel:

0															
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63
65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95
97	99														

1																
2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31	34
35	38	39	42	43	46	47	50	51	54	55	58	59	62	63	66	67
70	71	74	75	78	79	82	83	86	87	90	91	94	95	98	99	

2																
4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31	
36	37	38	39	44	45	46	47	52	53	54	55	60	61	62	63	
68	69	70	71	76	77	78	79	84	85	86	87	92	93	94	95	100

3																
8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31	
40	41	42	43	44	45	46	47	56	57	58	59	60	61	62	63	
72	73	74	75	76	77	78	79	88	89	90	91	92	93	94	95	

4																
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	

5																
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	
96	97	98	99	100												

6																
64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
98	99	100														

Pomocí těchto karet můžeme např. uhodnout, které z čísel od 1 do 100 si někdo myslí. Stačí, aby nám řekl, na kterých kartách je obsaženo myšlené číslo — nám pak stačí sečíst první čísla na jím označených kartách. Například myslí-li si číslo 31, uvede, že je toto číslo obsaženo na kartách označených v záhlaví čísly 0, 1, 2, 3 a 4; na prvním místě příslušných karet jsou čísla 1, 2, 4, 8 a 16, jejichž součet je skutečně roven 31. Podobně číslo 100 najde na kartách s počátečními čísly 4, 32 a 64, jejichž součet je roven 100. Karty předkládáme postupně, v duchu již provádíme součty z pozitivních karet, takže výsledek můžeme říci takřka okamžitě po odložení poslední karty.

Všimněme si, jak jsou čísla na kartách seskupena, čili jaký je jejich výtvarný zákon, podle něhož bychom hru mohli rozšířit na libovolně velká čísla. Na počátku každé karty stojí mocnina dvou, na kartě 0 to je 2^0 , čili 1, na kartě 1 to je $2^1 = 2$, na kartě 2 to je $2^2 = 4$ atd. Za prvním číslem následuje nejprve skupina čísel v přirozeném pořadí obsahující tolik čísel, jakým číslem karta začíná; poté je stejně velká mezera v přirozené posloupnosti, následuje stejně velká skupina čísel na kartách atd. Toto však je pouhý popis číselných množin obsažených na kartách; matematika však zajímá především to, odkud vyplývá ona podivuhodná vlastnost těchto skupin čísel.

Karty nepředstavují ve skutečnosti nic jiného, než tabulky umožňující rychlý převod čísel ze soustavy desítkové do soustavy dvojkové a naopak. Přitom každé číslo přirozené lze zapsat jak ve dvojkové, tak v desítkové soustavě. Například číslo

$$(31)_{10} = 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

je vyjádřeno ve dvojkové soustavě jako

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = (11111)_2.$$

Podobně $(100)_{10} = (1100100)_2$. Tučná čísla v záhlaví karet nám skutečně ukazují, že stovka zapsaná ve dvojkové soustavě má jedničky na místech řádu 2, 5 a 6, na všech ostatních místech má nuly. Převědeme-li všechna přirozená čísla menší než sto do soustavy dvojkové, shledáme, že všechna čísla uvedená v tabulce se záhlavím 0, 1, 2, 3, ... mají ve dvojkové soustavě jednotku na místě řádu 0, 1, 2, 3 atd. Záhlaví „pozitivních“ karet, tj. karet, na nichž je obsaženo myšlené číslo, nám tedy ukazuje, „který řád je obsazen jedničkami“ ve dvojkové soustavě.

Pro zajímavost ještě poznamenejme, že ne jeden primitivní národ počítal ve dvojkové soustavě. Přiřadí-li se např. palci, ukazováčku, prostředníku, ... číslo $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, ... , shledáme, že pomocí prstů jedné ruky lze vyjádřit jakékoli přirozené číslo od 1 do 31; prsty obou rukou by nám vystačily až do 1023. Indiáni na trhu prý dodnes drží v jedné ruce zavazadlo a druhou, volnou, počítají do 31, pokud ovšem již nepřešli k počítačům.

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve školním roce 1981/82 se účastnilo soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních celkem 68 jednotlivců a 4 dvojčlenné kolektivy; všech řešitelů bylo 76. Proti loňsku se podstatně zvětšil počet řešitelů-jednotlivců (z 37 na 68), avšak poklesl počet řešení kolektivních (z 19 na 4). Úlohy z matematiky řešilo celkem 36 studujících, úlohy fyzikální 47 studentů a úlohy z konstrukční geometrie 6 účastníků soutěže. Přitom 3 studenti řešili úlohy z matematiky, fyziky i konstrukční geometrie, 9 řešilo úlohy z matematiky i z fyziky a jeden řešil úlohy fyzikální a úlohy z konstrukční geometrie. Nejúspěšnějšími řešiteli byli tito studující:

Jiří Erhart, 3.C G M. Koperníka v Bílovci, který řešil úlohy z matematiky, fyziky i z konstrukční geometrie; úlohy z matematiky řešil se svým spolužákem Vítězslavem Doubravou.

Matematika :

1. Petr Lisoněk, 4.D G v Olomouci-Hejčíně;
2. Ignác Tereščák, 2.B G P. Horova v Michalovicích;
3. Petr Eisler, 4.C G v Havlíčkově Brodě.

Fyzika :

Jan Chrastina, 3.B G v Brně, Koněvova ulice.

Konstrukční geometrie :

Ján Dudáš, 3.C G J. Kráľa ve Zlatých Moravcích.

Z dalších řešitelů byli ještě velmi úspěšní tito studující: Petr Tichavský (MF), Jaroslav Smejkal (MF), Aurel Danysz a Ivan Marták (M), Dušan Mocko (F), Petr Schiller (F), Márta Csepy (KG) a Friderika Hrabošová (KG).

Nakonec připojujeme abecední seznamy všech řešitelů, nejprve úloh matematických, potom úloh fyzikálních a na závěr úloh z konstrukční geometrie. Za jménem každého řešitele uvádíme školu, na níž řešitel

studoval; v seznamu řešitelů úloh z matematiky otiskujeme nejprve jednotlivce a potom řešitelské kolektivy.

Řešitelé úloh z matematiky :

Vojtech Bóna, G maď. Komárno, Mária Darnay, SPŠS maď. Komárno, Ján Dudáš, G J. Kráľa, Zlaté Moravce, Ildiko Eder, G maď. Komárno, Attila Edes, G maď. Komárno, Petr Eisler, G Havlíčkův Brod, Móricz Géza, G maď. Komárno, Šárka Hořejšová, G Tábor, György Kacz, G maď. Komárno, Katalin Koncser, G maď. Komárno, Martin Kuřil, G Kyjov, Petr Lisoněk, G Olomouc-Hejčín, Andrea Melcsóková, G maď. Komárno, György Nágel, G maď. Komárno, Ladislav Novák, G Tábor, György Orbán, SPŠS Komárno, Martin Orel, G Jihlava, Zoltán Pálfy, G maď. Komárno, Ferenc Pálinkás, G maď. Komárno, Jaroslav Smejkal, G Velké Meziříčí, Jiří Sobotka, SPŠS Brno, Kotlářská ul., Ignác Tereščák, G P. Horova Michalovce, Petr Tichavský, G M. Koperníka Bílovec, Alexandr Tomášek, SPŠS maď. Komárno, Katalin Tóth, G maď. Komárno, Stanislav Varga, G Topolčany, František Vencel, G Česká Třebová, Zoltán Vörös, G maď. Komárno.

Aurel Danysz a Ivan Marták, G J. Hronca Bratislava, Vítězslav Doubrava a Jiří Erhart, G M. Koperníka Bílovec, János Hevő a Jozef Varga, SPŠS maď. Komárno, Andrea Lakatos a Eva Zalaba, SPŠS maď. Komárno.

Řešitelé úlohy z fyziky :

Milan Andryšek, G M. Koperníka Bílovec, Tomáš Barták, G Hlučín, Vojtech Bóna, G maď. Komárno, Juraj Csintalan, G maď. Komárno, Csaba Czésinger, G maď. Komárno, Monika Cziborová, G maď. Komárno, Zuzana Čabanová, G. W. Piecka Praha 2, Miloš Dolejší, G Jihlava, Vítězslav Doubrava, G M. Koperníka Bílovec, Ján Dudáš, G J. Kráľa Zlaté Moravce, Attila Edes, G maď. Komárno, Jiří Erhart, G M. Koperníka Bílovec, Móricz Géza, G maď. Komárno, Tichomír Gyarmati, G maď. Komárno, Pavel Hlavín, G Příbram, Šárka Hořejšová, G Tábor, Kateřina Hyniová, G Jihlava, Jan Chrastina, G Brno, Kotlářská ul., Katarína Jackuliaková, G Žilina, Michal Jaščur, G Bardejov, Eva Józsová, G maď. Komárno, Petr Kolář, G Brno, Tábořská ul., Martin Kuřil, G Kyjov, Vincent Lami, G maď. Komárno, Tibor Lovász, G maď. Komárno.

Janka Markóová, G maď. Komárno, Lucjan Mazur, G polské Český Těšín, Dušan Mocko, G Nové Mesto n/Váhom, Erika Nagy, G maď. Komárno, Martin Orel, G Jihlava, Peter Orlón, G J. Kráľa Zlaté Moravce, Zoltán Pálfy, G maď. Komárno, Silvia Paluskaová, G maď. Komárno, Tibor Papp, G maď. Komárno, Juraj Riška, G M. Nešpora Skalica, Michal

Řehula, G. Brno, tř. kpt. Jaroše, Petr Schiller, G M. Koperníka Bílovec, Jaroslav Smejkal, G Velké Meziříčí, Marta Szekeresová, G maď. Komárno, Ladislav Takács, G maď. Komárno, Petr Tichavský, G M. Koperníka Bílovec, Ján Trenčík, G maď. Komárno, Erika Tücsöková, G maď. Komárno, Jiří Verner, G Brno, Koněvova ul., Branislav Zachrdla, G Valašské Meziříčí, Josef Zeman, G Jihlava, Ivan Žuža, G maď. Komárno.

Řešitelé úloh z konstrukční geometrie :

Márta Csepy, SPŠS maď. Komárno, Miloš Dolejší, G Jihlava, Ján Dudáš, G J. Kráľa Zlaté Moravce, Jiří Erhart, G M. Koperníka Bílovec, Šárka Hořejšová, G Tábor, Friderika Hrabošová, SPŠS Komárno.

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních děkuje všem řešitelům za projevený zájem o řešení úloh, vítězům blahopřeje a nejúspěšnějším z nich zašle z prostředků Státního pedagogického nakladatelství a ministerstva školství ČSR věcné výhry.

NAŠE SOUTĚŽ, ROČNÍK 1982-83

Také letos vypisuje redakce Rozhledů spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze soutěž o ceny v řešení úloh z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Této soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Při případném umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Všeobecné pokyny řešitelům

Řešení každé úlohy pište *čitelně* (nejlépe strojem) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec svou bytovou adresu i se směrovacím číslem. Každý kolektiv uveďte tyto údaje pro každého svého člena.

Nejdříve napište text dané úlohy a potom pište přehledně její řešení. Toto řešení pište výstižně, stručně, ale jasně; neužívejte zbytečně různé symboly! Dbejte na platnou terminologii a symboliku. Připojujete-li k řešení některé úlohy obrázky, narýsujte je pečlivě a čitelně je popište.

Úlohy k řešení

Matematika

V tomto čísle otiskujeme 6 úloh z matematiky; zbývajících 6 úloh otiskneme v příštím čísle. Řešení všech šesti úloh zašlete nejpozději do 15. února 1983 na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla Rozhledů.

1. Pro velikosti a, b, c stran trojúhelníku platí:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &= 30, \\a^4 + b^4 + c^4 &= 362, \\a^6 + b^6 + c^6 &= 4\,950.\end{aligned}$$

Vypočtěte a, b, c a obsah trojúhelníku.

Jan Fráňa

2. Jisté číslo napsané v desítkové soustavě obsahuje pouze cifry 2 a 5, které se v zápisu čísla pravidelně střídají; číslo začíná číslicí 2. Jde tedy o číslo 252525. Může být takové číslo dělitelné jedenácti? Jestliže taková čísla existují, vyhledejte mezi nimi dvě nejmenší.

Stanislav Horák

3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Nad jeho stranou AB jako průměrem je v polorovině ABC sestrojena půlkružnice k , která protíná stranu BC v bodu D a stranu AC v bodu E . Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby obsah čtyřúhelníku $ABDE$ byl rovný polovině obsahu daného trojúhelníku ABC .

Stanislav Horák

4. (Problém zpožděných vlaků.) Na nádraží přijíždí postupně n vlaků ($n \geq 2$). Dva z nich měly zpoždění; nevíme však jaké. Označte $P_2(n)$ počet možných pořadí příjezdu všech vlaků. Řešte tyto úlohy:

- a) Určete $P_2(n)$ pro $n \leq 6$;
- b) najděte rekurentní formuli pro $P_2(n)$;
- c) určete $P_2(n)$ jako mnohočlen.

Milan Koman

5. (Hra s mincemi.) Na stole je položeno $2n$ mincí lícem nahoru. Je dáno přirozené číslo $a < 2n$ ($a > 0$). Při každém tahu zvolíme a mincí, které obrátíme. Dokažte, že po konečném počtu tahů můžeme dosáhnout postavení, při kterém mají všechny mince nahoře rub.

Milan Koman

6. Do dané kružnice $k = (S, r)$ vepíšme libovolný trojúhelník ABC . Průsečíky přímk AS, BS, CS s přímkami BC, CA, AB (pokud existují) budtež A_1, B_1, C_1 . Řešte tyto úlohy:

- a) Stanovte nutnou a postačující podmínku pro to, kdy bod A_1 (resp. B_1 , resp. C_1) neexistuje.
 b) Je možné, aby současně neexistovaly dva (tři) z bodů A_1, B_1, C_1 ?
 c) Jestliže body A_1, B_1, C_1 existují, potom platí:

$$\frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|BB_1|} + \frac{1}{|CC_1|} = \frac{2}{r}.$$

Dokažte!

Emil Kraemer

OLYMPIÁDY

Závěr 31. ročníku matematické olympiády

Ve dnech 6.—9. května 1982 se konalo celostátní kolo 31. ročníku MO v podtatranském městě *Poprad*. Zúčastnilo se ho všech 80 pozvaných žáků, nejlepších řešitelů krajského kola MO kategorie A. Po slavnostním zahájení 6. května večer následovaly dva soutěžní dny a stejně jako při jubilejním 30. ročníku MO byly hned další den, tedy 9. května vyhlášeny výsledky. Vítězi 31. ročníku matematické olympiády se stali:

1.— 3.	<i>Petr Couf</i>	Gymnázium W. Piecka, Praha
	<i>Igor Kříž</i>	Gymnázium W. Piecka, Praha
	<i>Jiří Sgall</i>	Gymnázium W. Piecka, Praha
4.— 5.	<i>Miroslav Engliš</i>	Gymnázium W. Piecka, Praha
	<i>Vladan Pecha</i>	Gymnázium M. Koperníka, Bílovec
6.	<i>Vladimír Lieberzeit</i>	Gymnázium W. Piecka, Praha
7.	<i>Luboš Kouba</i>	Gymnázium W. Piecka, Praha
8.	<i>Petr Tichavský</i>	Gymnázium M. Koperníka, Bílovec
9.	<i>Pavel Jůza</i>	Gymnázium W. Piecka, Praha
10.—11.	<i>Milan Kratka</i>	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
	<i>Petr Lisoněk</i>	Gymnázium Olomouc-Hejčín
12.—14.	<i>Xaver Gubáš</i>	Gymnázium A. Markuša, Bratislava
	<i>Milan Kuchta</i>	Gymnázium A. Markuša, Bratislava
	<i>Martin Zemek</i>	Gymnázium M. Koperníka, Bílovec
15.—17.	<i>Ján Hric</i>	Gymnázium Prešov, Konštantinova
	<i>Štěpán Kvapilík</i>	Gymnázium W. Piecka, Praha
	<i>Ignác Tereščák, 2. roč.,</i>	Gymnázium Michalovce

Dříve než vás seznámíme s úlohami letošního celostátního kola MO, musíme poděkovat všem, kteří se postarali nejen o zdárný průběh sa-

motné soutěže, ale i o bohatý společenskokulturní program, jmenovitě s. *Augustínu Kuchárovi*, řediteli gymnázia v Popradě, s. *Anně Pribišové*, pracovníci Ústředního domu pionýrů a mládeže Klementa Gottwalda v Bratislavě, a *dr. Martinu Gavalcovi*, CSc., předsedovi KV MO v Košicích.

A nyní se pokuste vyřešit alespoň některou úlohu, kterou řešili soutěžící v Popradě:

1. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a uvnitř čtyřstěnu body K, L, M, N , které neleží v rovině. Předpokládejme, že také těžiště P, Q, R, S čtyřstěnů $KBCD, ALCD, ABMD, ABCN$ neleží v rovině, a označme T těžiště čtyřstěnu $ABCD$, T_0 těžiště čtyřstěnu $PQRS$ a T_1 těžiště čtyřstěnu $KLMN$. a) Dokažte, že body T, T_0, T_1 leží na jedné přímce.

b) Určete poměr $|T_0T| : |T_0T_1|$.

2. Jsou dána reálná čísla $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Označme M maximum jejich absolutních hodnot. Dokažte, že platí

$$|x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 - x_3x_4| \leq 4M^2.$$

3. V rovině se souřadnicemi x, y najděte příklad konvexní množiny M , která obsahuje nekonečně mnoho mřížových bodů, tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi, ale přitom na každé přímce v té rovině leží jen konečně mnoho mřížových bodů z M .

4. V kruhu o poloměru 1 je zvoleno 64 navzájem různých bodů. Dokažte, že z nich lze vybrat 10 navzájem různých bodů, které leží v některém kruhu o poloměru $1/2$.

5. Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $a_n \neq a_m$ pro $n \neq m$. Dále je dáno přirozené číslo k . Sestrojte prosté zobrazení P množiny $\{1, 2, \dots, 20k\}$ do množiny přirozených čísel tak, aby platilo

$$\begin{aligned} a_{P(1)} &< a_{P(2)} < &< a_{P(10)}, \\ a_{P(10)} &> a_{P(11)} > &> a_{P(20)}, \\ a_{P(20)} &< a_{P(21)} < &< a_{P(30)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{P(20k-10)} &> &> a_{P(20k)}, \\ a_{P(10)} &> a_{P(30)} > &> a_{P(20k-10)}, \\ a_{P(1)} &< a_{P(20)} < \dots < a_{P(20k)}. \end{aligned}$$

6. Nechť n, k jsou dána přirozená čísla. Určete všechny uspořádané n -tice nezáporných reálných čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, které splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k &= 1, \\ (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) &= 2. \end{aligned}$$

RNDr. Leo Boček, CSc., ÚV MO

Celostátní kolo 23. ročníku fyzikální olympiády

Třetí kolo 23. ročníku fyzikální olympiády v kategorii A proběhlo ve dnech 25.—28. dubna 1982 v rekreačním středisku Třineckých železáren VŘSR *Řeka u Českého Těšína*. Ubytování, stravování i řešení úloh proběhlo letos v jednom objektu; organizačně zajišťoval průběh celostátního kola krajský výbor fyzikální olympiády Severomoravského kraje pod vedením doc. *F. Kamenčáka*, CSc. Soutěže se zúčastnilo 80 soutěžících ze všech krajů ČSSR. V pondělí 26. 4. dopoledne řešili účastníci čtyři teoretické úlohy (mechanika + magnetismus, pohyby v planetární soustavě, termodynamika, optika), v úterý dopoledne úlohu praktickou (měření přenosových charakteristik souměrného stejnosměrného přenosového článku). Nejhezčí a současně nejobtížnější úlohou pro všechny účastníky byla problémová úloha z optiky, při níž se měl sestavit obraz polopřímky, vytvořený postupně rovinným zrcadlem, dutým kulovým zrcadlem, tenkou spojkou a tenkou rozptylkou, přičemž v každém případě polopřímka směřovala od předmětu do velké vzdálenosti.

Součástí celostátního kola bylo jarní zasedání ÚVFO; opravující z řad členů ÚVFO řešení úloh ohodnotili a na závěrečném zasedání byly vyhlášeny výsledky celostátního kola. Každý z účastníků obdržel též výsledkovou listinu. Dvacet nejlepších účastníků bylo prohlášeno vítězi celostátního kola fyzikální olympiády, dalších 30 účastníků se stalo úspěšnými řešiteli třetího kola. Nejlepší účastník získal ze 60 možných bodů v hodnocení 54 bodů. Protože bylo použito kritérií z mezinárodních fyzikálních olympiád, byl za úspěšného řešitele prohlášen každý účastník, který získal 27 a více bodů. Celkem 30 účastníků bylo v soutěži neúspěšných. Po několika letech se mezi vítězi objevila dívka — je jí *Marta Lopraisová* ze 4. ročníku gymnázia M. Koperníka v Bílovci.

Vítězi celostátního kola 23. ročníku FO byli vyhlášeni:

- 1.— 2. *Jiří Bajer*, Gymnázium P. Bezruče, Frýdek-Místek
Miroslav Kolesík, Gymnázium, Trnava
3. *Roman Marteňák*, Gymnázium, Žilina
- 4.— 5. *Roman Šášik*, Gymnázium, Nitra, Párovská ul.
Miloš Drutarovský, SPŠE, Prešov
6. *Vladimír Lieberzeit*, Gymnázium W. Piecka, Praha 2
- 7.— 9. *Michal Vojtek*, Gymnázium W. Piecka, Praha 2
Marta Lopraisová, Gymnázium M. Koperníka, Bílovec
Peter Tarina, Gymnázium, Topolčany
- 10.—11. *Daniel Kluvanec*, Gymnázium, Nitra, Párovská ul.
Petr Tichavský, Gymnázium M. Koperníka, Bílovec

- 12.—13. *Pavel Jelínek*, Gymnázium, Brno, Koněvova ul.
Ján Hric, Gymnázium, Prešov, Konštantinova ul.
14. *Richard Hudec*, Gymnázium P. Bezruče, Frýdek-Místek
15.—17. *Ivo Koreň*, Gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové
Vladimír Mužík, Gymnázium, Nitra, Párovská ul.
Michal Obuch, Gymnázium E. Guderu, Nitra
18.—19. *Jiří Podolský*, Gymnázium, Mladá Boleslav
Richard Hlubina, Gymnázium, Bratislava, Vazovova ul.
20. *Miroslav Engliš*, Gymnázium W. Piecka, Praha 2

Všem vítězům blahopřejeme a přejeme jim mnoho úspěchů v dokončení střední školy i v dalším studiu.

RNDr. Ivo Volf, ÚVFO

Z NOVÝCH KNIH

Křižalkovič, K. - Cuninka, A. - Šedivý, O.:

RIEŠENÉ ÚLOHY Z MODERNEJ MATEMATIKY, 2. ČASŤ

Vydala Alfa, n. p., Bratislava, v roku 1981, 432 strán, 95 obr., viaz., Kčs 21,—

Knižka *Riešené úlohy z modernej matematiky 2* je pokračovaním prvej časti, s tým istým názvom a od tých istých autorov, ktorá vyšla v nakladateľstve Alfa v Bratislave v roku 1974 a obsahovala v podstate úlohy z učiva matematiky 1. a 2. ročníka gymnázií (napr. úvod do výrokovej logiky a teórie množín, binárne relácie, zobrazenia, funkcie, reálne čísla, úvod do planimetrie, zhodné a podobné zobrazenia v rovine, vektorová algebra, polohové a metrické vlastnosti lineárnych útvarov). Druhá časť obsahuje riešené

úlohy rozdelené do týchto 11 kapitol: Elementárna teória čísel, Rovnice a nerovnice s parametrom, Lineárne programovanie, Kombinatorika — úvod do počtu pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, Postupnosti a rady reálnych čísel, Úvod do diferenciálneho a integrálneho počtu, Trigonometria, Komplexné čísla, Operácie a algebrické štruktúry, Analytická geometria kvadratických útvarov, Geometrické transformácie. Obsah pokrýva rozsah učiva matematiky na gymnáziách v 3. a 4. ročníku. Rozšírením sú základné vlastnosti kongruencií, diofantické rovnice, použitie matíc pri riešení systémov rovníc.

Každá kapitola knižky má v úvode stručné základné poznatky — definície, vety, vzťahy, vzorce. Potom nasledujú riešené úlohy priemernej ťažnosti. Zá-

verom kapitoly je niekoľko cvičení, ktorých výsledky sú uvedené na konci knižky. Mnohé úlohy sú z platných učebníc a zbierok úloh

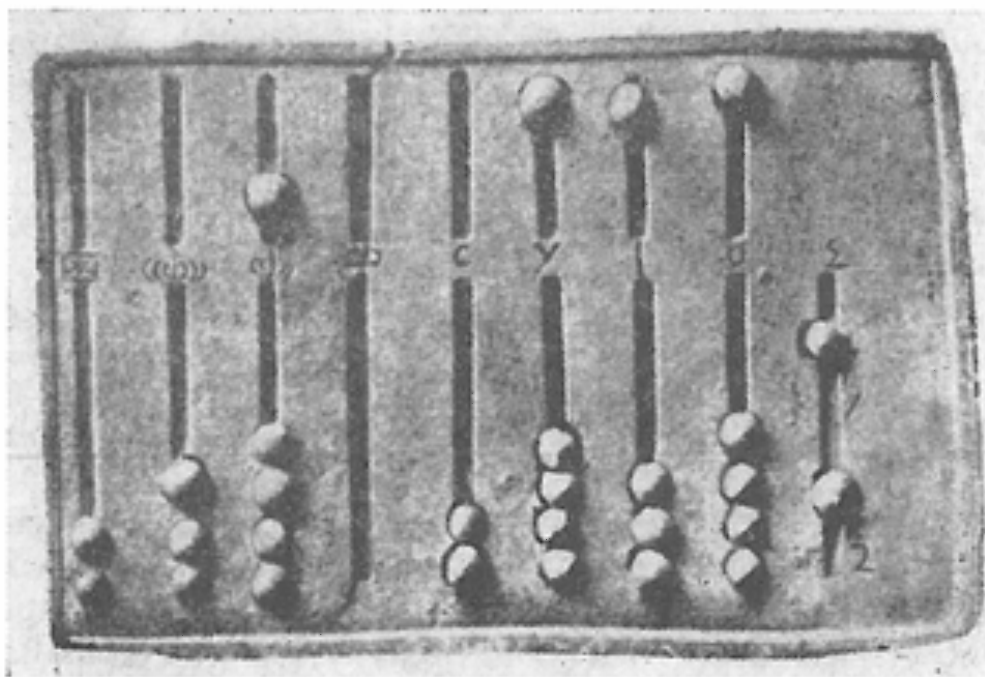
a tak sú študentom konkrétnou pomocou pri domácej príprave na hodiny matematiky.

Dušan Jedinák

Zemřel profesor Ladislav Zachoval

Dne 25. dubna 1982 zemřel v Praze ve věku 76 let profesor RNDr. Ladislav Zachoval, člen korespondent ČSAV. Mnoho let působil na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Byl významným fyzikem, velmi aktivním pracovníkem různých pedagogických a vědeckých institucí, zejména Jednoty čs. matematiků a fyziků. Našim čtenářům je znám jako autor dvou zajímavých článků, které byly otištěny v 60. ročníku Rozhledů.

Redakce



Obr. k textu na 3. straně obálky.

POHLEDY DO DĚJIN

Abakus — počítací deska

V původním slova smyslu znamenal abakus desku pokrytou jemným prachem, takže se na ní daly snadno některé údaje zaznamenávat a také vymazávat. Návodů k řešení úloh např. v egyptských matematických papyrech připouští možnost, že zde bylo podobné počítadlo delší dobu známo. V té formě, která se dochovala z antického Řecka nebo Říma, předpokládá však použití abaku rozvinutou desítkovou číselnou soustavu tak, aby bylo možné v rámci každého řádu počítat jen s hodnotami 1 až 9 a dokončené desítky převádět do následujícího řádu. Je otázka, do jaké míry právě toto počítadlo — známé mimo jiné i na Dálném východě jako *suan-pan* nebo *sarobjan* — ovlivnilo vznik poziční desítkové soustavy.

Abakus na obrázku je mladší a také dokonalejší typ, pocházející z Říma a dnes je uložen v pařížském Louvru. V drážkách se při počítání posunovaly kuličky z kousků vápence — odtud pochází i termín *calculus* = kamínek,

oblázek a *calculare* = posouvat kaménky. Souvislost s dnes v jiném smyslu používanými našimi termíny kalkulovat a kalkulačka je zřejmá. Mimochodem i v Římě už byly používány minikalkulačky. Jedna z nich měla rozměry 42×35 mm a 19 drážek s 45 početními známkami.

Každá drážka abaku je určena pro jinou hodnotu početních známek. Na našem obrázku zprava první drážka je určena semiuncím, druhá uncím a teprve třetí jednotkám a další jsou už uspořádány v posloupnosti desítkových řádů. Menší část žlábků, v níž se pohybovala jediná známka, označovala pětinasobek daného řádu a je oddělena od větší spodní části, v níž jsou umístěny čtyři početní známky, zaznamenávající jednotky řádu vždy tím, že se kaménky posunuly směrem k přerušení. Zkuste si, jak by se na takovém abaku zaznamenalo třeba číslo 76 a přičtěte k němu číslo 37!

Jaroslav Folta

Bratislavské nakladatelství technické a ekonomické literatury ALFA vydává knižnici EPSILON, jež je určena studentům a učitelům matematiky všech druhů středních škol i širší veřejnosti zájímající se o matematiku. Zvláštní pozornost se věnuje aplikacím matematiky v přírodních, technických a společenských vědách. Vydávané knížky popularizují novější výsledky matematického výzkumu.

Připravované svazky:

J. Čižmár: Grupy geometrických transformací
 M. Hejný — I. Kulich — J. Tvarožek: Čo je to topológia
 J. Hvorecký — J. Kelemen: Algoritmizácia
 F. Bublík: Základy pravdepodobnosti a štatistiky
 I. Vajda: Teória informácie a štatistického rozhodovania

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kašková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1982.

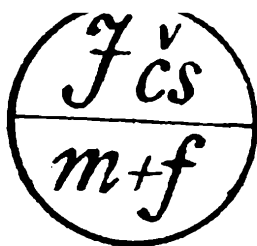
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(3)

**ROČNÍK 61, 1982/83
LISTOPAD**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Vladimír
Majerník, DrSc., PF Nitra, doc. dr.
Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Hubal: Co jsou obrazcová čísla .	93
F. Janeček: Řešení nerovnic obsahujících součin nebo podíl lineárních a kvad- ratických mnohočlenů	96
M. Simerský: Symbolická metoda řešení obvodů harmonického proudu II	102
P. Vondruška: Nicolas Oresme (1323 až 1382)	115
J. Baštinec, J. Diblík: Hra se zápalkami	116
J. Svoboda: Černá a bílá	119
J. Gatiaľ, M. Hejný: Profesor Jozef Filip zomrel	121
Naše soutěž	122
M. Volfová, I. Volf: Fyzikální fakulta Lo- monosovy univerzity v Moskvě .	134
Pohled do dějin	. 3. str. obálky
Slovník matematických termínů (5 – 8) příloha	

Co jsou obrazcová čísla?

JAROMÍR HUBAL, gymnázium Litoměřice

Pokusme se řešit úlohu: Kolik koulí stejného průměru použijeme k tomu, abychom sestavili dvě pyramidy, jedna má spodní vrstvu ve tvaru čtverce a druhá ve tvaru rovnostranného trojúhelníka. Obě pyramidy mají stejný počet vrstev, obě 50. Abychom dali odpověď na otázku, musíme se seznámit s posloupností tzv. *obrazcových čísel*. Tento pojem vznikl v 5.—4. století před n. l.

Nejdříve se podívejme na takové posloupnosti, u nichž rozdíl mezi každými dvěma sousedními čísly se rovná jedné nebo dvěma.

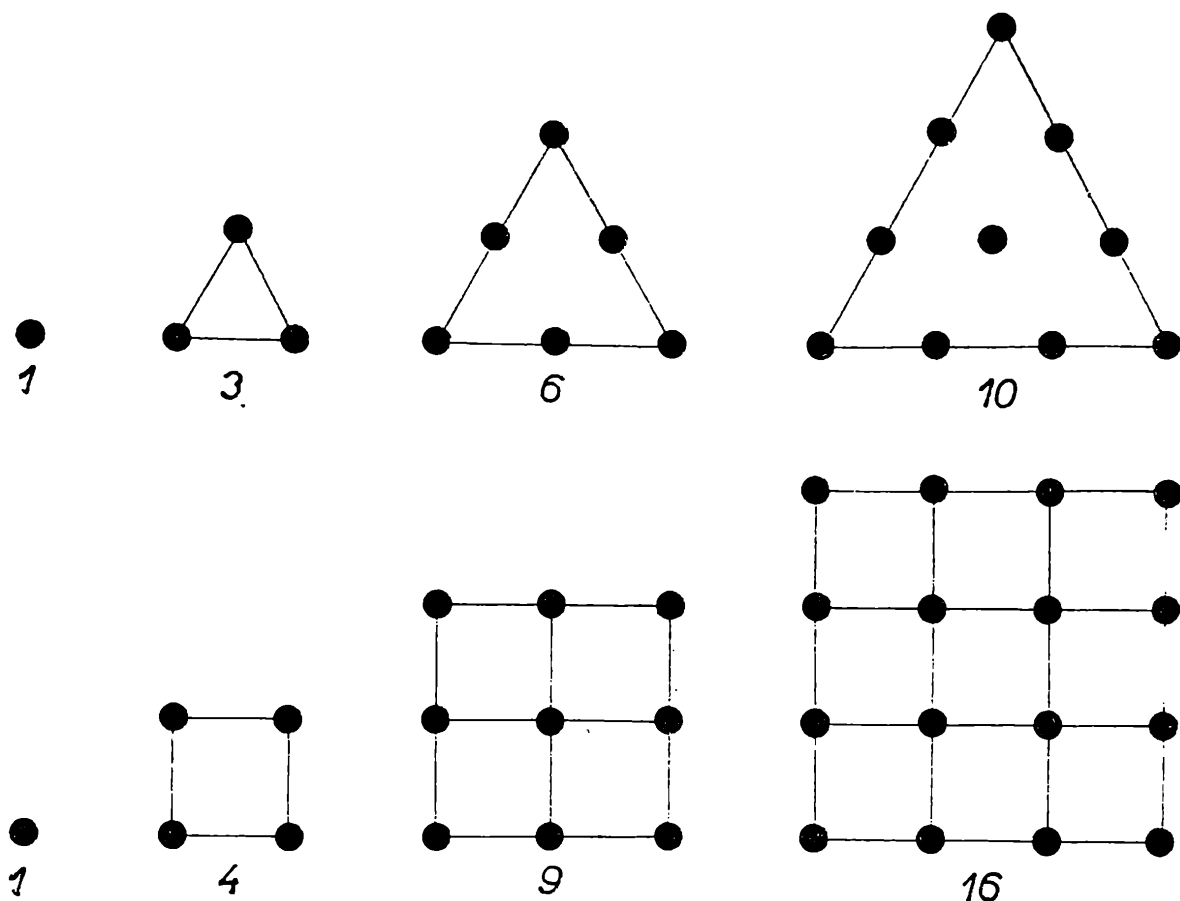
$$1, 2, 3, 4, 5, \quad (\text{rozdíl } d = 1),$$

$$1, 3, 5, 7, 9, \quad (\text{rozdíl } d = 2).$$

Prvkům takových posloupností říkáme *obrazcová čísla prvního stupně*. Jestliže z první posloupnosti utvoříme novou posloupnost součtů $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, $S_4 = 10$, ... čili 1, 3, 6, 10, ..., pak takovým číslům říkáme *čísla trojúhelníková*. Druhá posloupnost obrazcových čísel 1, 3, 5, 7, 9, ... dává tuto posloupnost součtů 1, 4, 9, 16, 25, ..., tato čísla nazýváme *čtvercová*. Všechna čísla posloupností součtů se nazývají *obrazcová čísla druhého stupně* nebo také *plošná obrazcová čísla*. Čísla obou druhů jsou zapsána v tabulce 1 a jsou znázorněna na obr. 1.

Tabulka 1

d	Obrazec	Čísla					
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_n
1	trojúhelník	1	3	6	10	15	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	čtverec	1	4	9	16	25	n^2



Obr. 1

Mezi přirozenými čísly a plošnými obrazcovými čísly existuje mnoho zajímavých vztahů. Tak např. *Pierre Fermat* (1601—1665) zjistil, že každé přirozené číslo je trojúhelníkové nebo součet dvou nebo tří trojúhelníkových čísel. Nebo každé přirozené číslo je čtvercové, nebo součet dvou, tří nebo čtyř čtvercových čísel. Vezměte libovolné přirozené číslo a můžete soutěžit v tom, kdo dříve toto číslo rozloží na součet nejvýše tří trojúhelníkových čísel nebo součet nejvýše čtyř čtvercových čísel.

Řecký matematik *Diofantos* našel zajímavý vztah mezi trojúhelníkovými čísly T a čtvercovými C : $8T + 1 = C$. Diofantův vzorec si předvedeme názorně na trojúhelníkovém čísle 10 a čtvercovém 81 ($8 \cdot 10 + 1 = 81$, obr. 2).

Vypočítáme-li součty z obrazcových čísel druhého stupně, dostaneme *obrazcová čísla třetího stupně* nebo také *prostorová obrazcová čísla*. Tak např. z posloupnosti 1, 3, 6, 10, 15, ... dostaneme 1, 4, 10, 20, 35, ... Název prostorová obrazcová čísla je odvozen z faktu, že můžeme utvořit pyramidu tak, že položíme jednu kouli na jiné tři koule, ty na dalších šest koulí, vrstvu o šesti koulích na jinou vrstvu o deseti koulích atd. Podobně můžeme utvořit pyramidu, která má za podstavu vrstvu z koulí uspořádaných do tvaru čtverce.

○	+	+	+	+	○	○	○	○
○	○	+	+	+	○	○	○	+
○	○	○	+	+	○	○	+	+
○	○	○	○	+	○	+	+	+
+	+	+	+		+	+	+	+
+	+	+	○	+	○	○	○	○
+	+	○	○	+	+	○	○	○
+	○	○	○	+	+	+	○	○
○	○	○	○	+	+	+	+	○

Obr. 2

Obrazcová čísla třetího stupně si uspořádáme do tabulky 2.

Tabulka 2

d	Těleso	Čísla					
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_n
1	trojúhelníková pyramida	1	4	10	20	35	$\frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$
2	čtvercová pyramida	1	5	14	30	55	$\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Pro odvození vzorce pro obecný člen V_n je zapotřebí určitých znalostí z kombinatoriky. Hlubavější čtenáři najdou důkazy obou vzorců v knize B. A. Korděmskij: *Matematické prostocviky*, Mladá fronta 1966.

Vraťme se k úloze ze začátku článku. Sečtením obou výrazů pro V_n u trojúhelníkové a čtvercové pyramidy dostaneme nový vzorec

$$T_n = \frac{1}{2} n(n+1)^2,$$

kde T_n je počet koulí v obou pyramidách a n je počet vrstev. Dosadíme

za n číslo 50, dostaneme $T_{50} = 25 \cdot 51^2 = 65\,025$, a to je odpověď na naši otázku. Navíc můžeme dosazením do vzorců pro V_n za $n = 50$ vypočítat, že v trojúhelníkové pyramidě bylo 22 100 a ve čtvercové 42 925 koulí.

V článku jsme se zabývali jen těmi obrazcovými čísly, která jsme potřebovali k řešení úlohy. Je třeba podotknout, že existují i obrazcová čísla pětiúhelníková, šestiúhelníková atd. a také obrazcová čísla vyššího stupně než třetího. Čtenář, který se o tato čísla zajímá, může se o nich dočíst v uvedené literatuře.

Poznámka. Tento článek doporučujeme k přečtení zejména řešitelům MO, kategorie C.

Řešení nerovnic obsahujících součin nebo podíl lineárních a kvadratických mnohočlenů

FRANTIŠEK JANEČEK, gymnázium Holice

Nejdříve si připomeneme základní pojmy týkající se polynomů (tj. mnohočlenů) a polynomických funkcí o jedné proměnné.

Je známo, že každý polynom n -tého stupně nebo také polynomická funkce se dá vyjádřit funkční rovnicí

$$f: y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R},$$

kde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou reálná čísla, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Reálné číslo x_0 , pro které platí $f(x_0) = 0$, nazýváme *kořen polynomu* f nebo *nulový bod polynomu* f v množině $\mathbb{R}$. Je zřejmé, že graf polynomu protíná osu x v bodech, jejichž x -ová souřadnice se rovná některému kořenu tohoto polynomu. Dvojčlen $x - x_0$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$ je kořen polynomu $f(x)$, nazýváme kořenový činitel polynomu f .

V algebře se pak dokazuje věta:

Každý polynom $f(x)$ stupně $n \geq 1$ je v $\mathbb{R}$ jednoznačně rozložitelný v součin koeficientu a_n , reálných kořenových činitelů $x - x_0$ a reálných kvadratických trojčlenů $x^2 + px + q$ se záporným diskriminantem $D = p^2 - 4q < 0$ (tedy nerozložitelných v reálné činitele), tj.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_k) (x^2 + p_1 x + q_1) \dots (x^2 + p_m x + q_m),$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_k$ jsou reálné kořeny daného polynomu, $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ jsou reálná čísla a platí $k + 2m = n$. V tomto rozkladu se mohou někteří kořenoví činitelé a některé kvadratické trojčleny vyskytnout vícekrát, takže rozklad může nabýt tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_j)^{k_j} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}. \quad (1)$$

Přitom $k_1, k_2, \dots, k_j, l_1, \dots, l_s$ jsou přirozená čísla s vlastností $n = k_1 + k_2 + \dots + k_j + 2l_1 + \dots + 2l_s$. Ke každému reálnému kořenu x_i polynomu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ přísluší tedy právě jedno přirozené číslo k_i , které nazýváme *násobností kořene x_i* . Říkáme, že x_1 je k_1 -násobným kořenem, x_2 k_2 -násobným kořenem atd. Je-li k_i liché (sudé), říkáme, že kořen x_i má lichou (sudou) násobnost. Kořeny, jejichž násobnost je rovna 1, nazýváme *jednoduché*.

Příklady. a) Polynom $4x^3 - 24x^2 + 32x = 4x(x^2 - 6x + 8) = 4x(x - 2)(x - 4)$; má tedy reálné kořeny $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4$ (s lichou násobností).

b) Polynom $x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)(x^2 + 1)$ má dvojnásobný reálný kořen $x_1 = 0$ a jednoduchý kořen $x_2 = -2$, jiné reálné kořeny nemá.

c) Polynom $x^3 + 1$ rozložíme v oboru reálných čísel v součin $(x + 1)(x^2 - x + 1)$; má tedy jediný reálný jednoduchý kořen $x = -1$.

V následujících odstavcích se budeme zabývat řešením nerovnic v množině $\mathbf{R}$, jejichž stranami jsou polynomy nebo podíly polynomů, přičemž je znám rozklad těchto polynomů ve tvaru (1), tj. na nerozložitelné činitele prvního a druhého stupně. Půjde tedy o nerovnice typu

$$(a_1 x + b_1)^{k_1} (a_2 x + b_2)^{k_2} \dots (c_1 x^2 + d_1 x + e_1)^{l_1} (c_2 x^2 + d_2 x + e_2)^{l_2} \dots \mathbf{N} 0, \quad (2)$$

případně typu

$$\frac{(a_1 x + b_1)^{k_1} (a_2 x + b_2)^{k_2} \dots (c_1 x^2 + d_1 x + e_1)^{l_1} (c_2 x^2 + d_2 x + e_2)^{l_2} \dots}{(f_1 x + g_1)^{r_1} (f_2 x + g_2)^{r_2} \dots (h_1 x^2 + k_1 x + m_1)^{s_1} (h_2 x^2 + k_2 x + m_2)^{s_2} \dots} \mathbf{N} 0, \quad (3)$$

kde kvadratické trojčleny jsou v $\mathbf{R}$ nerozložitelné a počet činitelů je konečný, $\mathbf{N}$ značí některý ze znaků $< . > . \leq . \geq$. Přitom — jak známo — řešit nerovnici s jednou neznámou x v množině $\mathbf{R}$ znamená určit množinu všech $x_0 \in \mathbf{R}$, pro která je daná nerovnice splněna neboli najít její obor pravdivosti. V dalším jej budeme značit $\mathbf{P}$; může to být buď množina prázdná nebo se skládá z intervalů a jednobodových množin.

Vzhledem k tomu, že kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$ v případě $D = p^2 - 4q < 0$ nabývá pro každé $x \in \mathbf{R}$ buď jen hodnot kladných nebo jen hodnot záporných a dvojčlen $(ax + b)^k$ pro všechna k sudá jen hodnot nezáporných, budou nás v dalších úvahách zajímat pouze reálné kořeny s lichou násobností. Jak je hledat, ukážeme v následujícím příkladě:

Určeme všechny reálné kořeny s lichou násobností těchto polynomů:
a) $x^2 - 14x + 33$, b) $2x^3 + 8x^2 + 8x$, c) $x^2 + 1$.

Řešení: a) Rozložme $x^2 - 14x + 33 = (x - 11)(x - 3)$, což můžeme zapsat takto:

$$x^2 - 14x + 33 = (x - 11)^1 \cdot (x - 3)^1.$$

Tedy $x_1 = 11$ je reálný kořen s lichou násobností,

$x_2 = 3$ je reálný kořen s lichou násobností.

b) Rozložme: $2x^3 + 8x^2 + 8x = 2x(x^2 + 4x + 4) = 2(x - 0)^1 (x + 2)^2$.

Potom $x_1 = -2$ je sice reálný kořen, ale jeho násobnost je rovna 2; tedy jediným reálným kořenem s lichou násobností je $x_2 = 0$.

c) Polynom $x^2 + 1$ nemá reálné kořeny, tím méně reálné kořeny s lichou násobností.

Při hledání množiny všech řešení nerovnice (2) uijeme následující věty o „znamení polynomu“:

Věta 1. Nechť $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ je množina všech reálných kořenů s lichou násobností polynomu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Uspořádejme tyto kořeny podle velikosti (tj. $x_1 < x_2 < \dots < x_k$). Pak platí:

1) V každém z intervalů $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_k; \infty)$ nabývá polynom $f(x)$ hodnot buď stále nezáporných, nebo stále nekladných.

2) Jestliže funkce $f(x)$ nabývá v nějakém z těchto intervalů nezáporných (nekladných) hodnot, pak v sousedním intervalu nabývá nekladných (nezáporných) hodnot.

Poznámka. Vlastnost 1) lze stručně vyjádřit takto: Na každém z intervalů $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_k; \infty)$ má funkce $f(x)$ stále totéž znaménko.

Vlastnost 2) lze stručně formulovat: V sousedních intervalech se znaménka funkce $f(x)$ střídají.

Důkaz věty 1. zde provádět nebudeme; je založen na užití *Bolzanovy-Cauchyovy věty o spojitých funkcích*. Tvrzení věty budeme ilustrovat na příkladě.

Určeme znamení polynomu

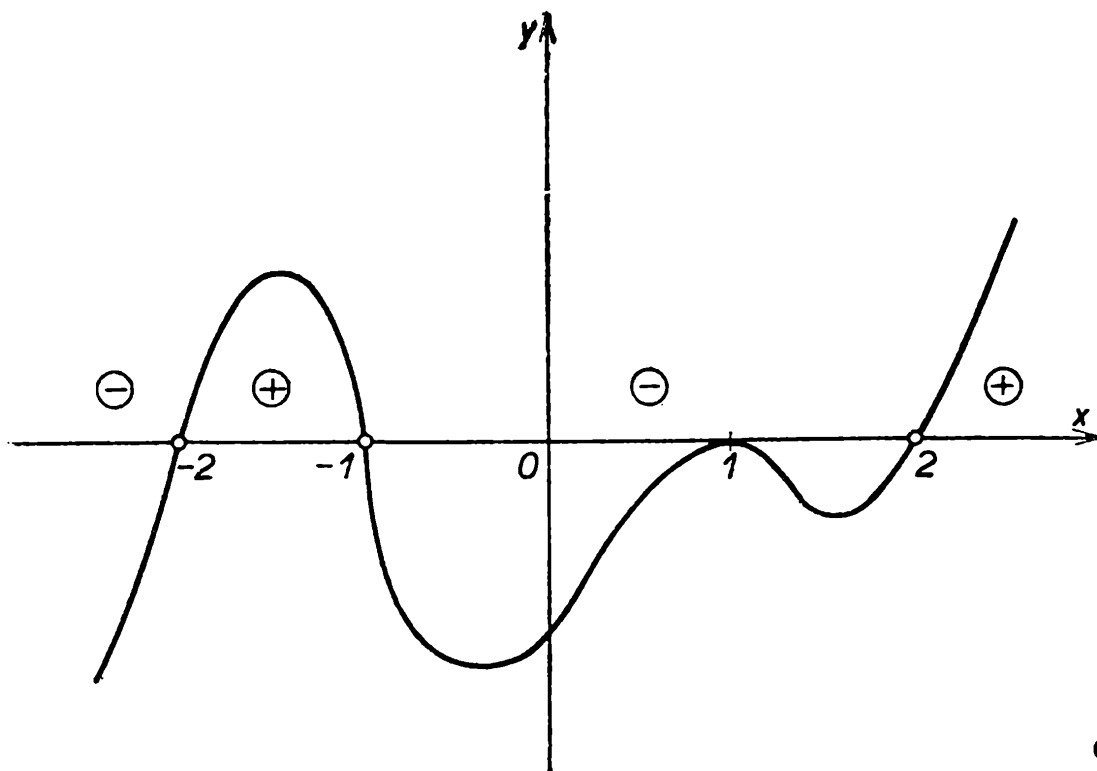
$$f(x) = (x + 2)^3 (x + 1) (x - 1)^2 (x - 2) (x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Nejprve najdeme reálné kořeny liché násobnosti; jsou to čísla -2 , -1 , 2 . Funkce f pak nemění znaménka v intervalech $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; \infty)$, na něž se rozpadá číselná osa. Stanovíme znamení polynomu v libovolném bodě některého z uvedených intervalů.

Zvolíme-li např. $x_0 = 0 \in (-1; 2)$, dostaneme $f(x_0) < 0$. (Nemá ovšem smysl volit za x_0 bod, který je kořenem polynomu $f(x)$.) Pro všechny $x \in (-1; 2)$ je pak $f(x) < 0$. V sousedních intervalech se pak znaménka střídají (viz obr. 1 s náčrtem grafu funkce $y = f(x)$). V našem případě je

$f(x) < 0$ pro $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (1; 2)$;

$f(x) > 0$ pro $x \in (-2; -1) \cup (2; \infty)$;



Obr. 1

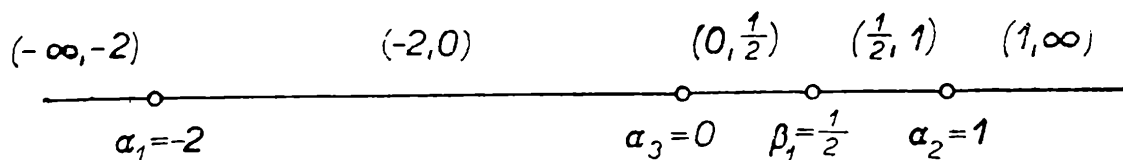
$f(x) \leq 0$ pro $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$;
 $f(x) \geq 0$ pro $x \in (-2; -1) \cup \{1\} \cup (2; \infty)$.

Vzhledem k tomu, že znamení součinu $a(x) \cdot b(x)$ je pro všechna x , pro něž je $b(x) \neq 0$, rovno znamení podílu $\frac{a(x)}{b(x)}$, můžeme bez důkazu uvést další větu „o znamení racionální lomené funkce“:

Věta 2. Necht $f(x)$ je racionální lomená funkce (tj. $f(x)$ je rovna podílu dvou polynomů) daná rovnicí

$$f: y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}.$$

Necht $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ je množina reálných kořenů s lichou násobností polynomu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, přičemž $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Necht $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\}$ je množina reálných kořenů s lichou násobností polynomu $b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$, přičemž $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_l$. Reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ vytvoří na číselné ose systém intervalů. (Například čísla $a_1 = -2, a_2 = 1, a_3 = 0, \beta_1 = \frac{1}{2}$ vytvářejí tento systém intervalů na číselné ose: $(-\infty; a_1), (a_1; a_3), (a_3; \beta_1), (\beta_1; a_2), (a_2; \infty)$ (viz obr. 2).



Obr. 2

Potom funkce $f(x)$ na každém intervalu (který byl zkonstruován popsanou metodou) nabývá buď hodnot stále nezáporných nebo stále nekladných a v sousedních intervalech mění znamení.

Nechť je dána racionální lomená funkce

$$f: y = \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-2)(x+1)^2}.$$

Najdeme reálné kořeny s lichou násobností: $\alpha_1 = 3$ (z čitatele), $\beta_1 = 2$ (ze jmenovatele). Tím dostaneme systém intervalů $(-\infty; 2)$ $(2; 3)$, $(3; \infty)$. Vybereme jeden z nich, např. $(-\infty; 2)$ a zjistíme znaménko v bodě 0. Dostaneme

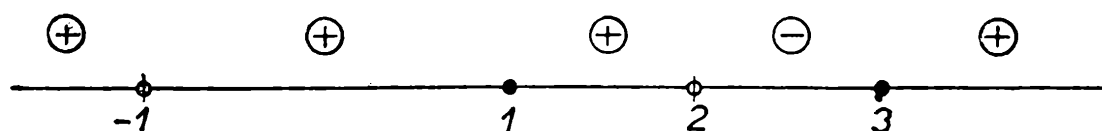
$$f(0) = \frac{(0-1)^2(0-3)}{(0-2)(0+1)^2} = \frac{3}{2} > 0$$

Funkce $f(x)$ je v intervalu $(-\infty; 2)$ nezáporná,

v intervalu $(2; 3)$ nekladná,

v intervalu $(3; \infty)$ nezáporná.

Schematicky vyznačme tento výsledek na číselné ose (viz obr. 3).



Obr. 3

Věty 1 a 2 umožňují velmi rychlé a úsporné řešení nerovnic typu (2) a (3) a nerovnic, které se dají úpravami na tyto typy převést. Je-li dána polynomická nebo racionální lomená funkce $f(x)$, najdeme reálné kořeny s lichou násobností (uspořádáme je podle velikosti) a vyznačíme je na číselné ose, a to plnými kolečky, pokud nerovnici splňují a prázdnými kolečky, pokud nerovnici nesplňují. Tím zkonstruujeme na číselné ose systém intervalů. Zjistíme znaménko funkce $f(x)$ v nějakém vhodném bodě, který není krajním bodem některého ze získaných intervalů; pak v celém intervalu, do něhož tento bod patří, má $f(x)$ totéž znaménko jako vypočtená hodnota. Interval, kde je nerovnice splněna, pak snadno určíme tak, že intervaly, kde je nerovnice splněna, se střídají s intervaly, kde nerovnice splněna není.

Poznámky: 1. V případě nerovnice (2), když znak N zastupuje znaky ≥ 0 , ≤ 0 splňují nerovnici všechny kořeny polynomu (tj. i kořeny se sudou násobností).

2. V případě nerovnice (3), když znak N zastupuje znaky ≥ 0 , ≤ 0 splňují nerovnici všechny kořeny polynomu z čitatele, ale kořeny polynomu ze jmenovatele tuto nerovnici nesplňují.

3. O tom, zda určitý interval vyhovuje nebo nevyhovuje dané nerovnici, rozhodneme dosazením kteréhokoliv čísla $x = x_0$ z vnitřku toho-

to intervalu do dané nerovnice. Přitom říkáme, že provádíme pokus pro $x = x_0$. (Výhodné je provést pokus pro $x = 0$ pokud tento bod není krajním bodem intervalu.) Dostaneme-li po dosazení nerovnost souhlasnou s danou nerovnicí, pak zvolený interval vyhovuje dané nerovnici, tj. je podmnožinou jejího oboru pravdivosti. Dostaneme-li po dosazení nesouhlasnou nerovnost k dané nerovnici, pak zvolený interval dané nerovnici nevyhovuje, tj. není podmnožinou jejího oboru pravdivosti. Do jejího oboru pravdivosti pak patří oba jeho sousední intervaly (pokud ovšem existují). V reálné ose se pak stále střídá vyhovující a nevyhovující interval. Všechna čísla ze sjednocení všech vyhovujících intervalů tvoří množinu všech kořenů dané nerovnice, tj. její obor pravdivosti. Praktický postup ukážeme nyní v řešených příkladech.

Příklad 1. Řešme nerovnici

$$\frac{(x+2)^3(x-3)^5(x-5)^4}{(x+1)(x-1)^2} \leq 0, x \in \mathbf{R}.$$

Řešení. Rovnost v dané nerovnici nastane, jestliže některý činitel v čitateli je roven nule, tj. pro $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. Můžeme tedy dále vyšetřovat nerovnici, kterou z dané dostaneme vynecháním znaménka $=$. Reálné kořeny s lichou násobností jsou -2 , -1 , 3 . Provedeme-li pokus např. pro $x = 0$, zjistíme, že oborem pravdivosti dané nerovnice je množina

$$P = (-\infty; -2) \cup (-1; 3) \cup 5\}.$$

Příklad 2. Řešme nerovnici

$$\frac{x^2(x-1)(3x-9-x^2)^5}{2+x} \leq 0, x \in \mathbf{R}.$$

Řešení. Reálné kořeny s lichou násobností jsou -2 , 1 (výraz $3x - 9 - x^2$ je v $\mathbf{R}$ nerozložitelný, neboť $D = 9 - 36 = -27 < 0$). Pokusem např. pro $x = 5$ zjistíme, že interval $(1; \infty)$ dané nerovnici vyhovuje. Druhý vyhovující interval je $(-\infty; -2)$. Číslo 0 je též kořenem dané nerovnice, takže oborem pravdivosti je množina

$$P = (-\infty; -2) \cup \{0\} \cup (-1; \infty).$$

Symbolická metoda řešení obvodů harmonického proudu

II. část

MOJMÍR SIMERSKÝ, Rožnov pod Radhoštěm

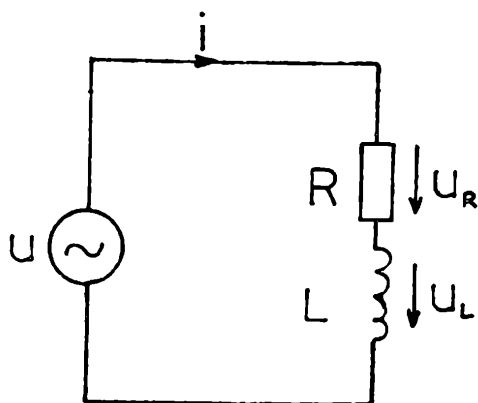
V první části tohoto článku (Rozhledy č. 2, roč. 61) jsme se seznámili s exponenciálním tvarem zápisu komplexního čísla a komplexními jednotkami — *verzory*. Mluvili jsme o verzorech s lineárně proměnnými argumentem a naučili jsme se znázorňovat harmonické veličiny *fázorem*. Posléze jsme probrali nejjednodušší obvody jako příklady symbolické metody.

Symbolická metoda nachází i širší uplatnění, jehož některé případy zde uvádíme.

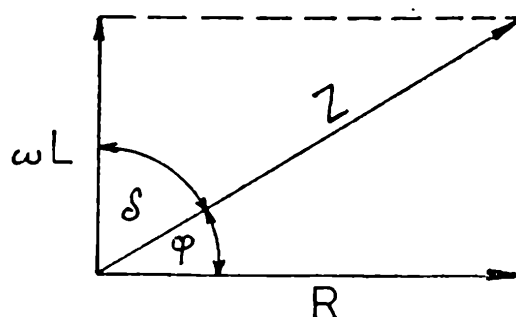
1. Jednoduché sériové obvody

Ideální spotřebiče v obvodu harmonického proudu mohou být trojího druhu: rezistory, cívky, kondenzátory. Je možné z nich vytvořit následující kombinace: RL , RC , LC , RLC . V následujícím výkladu vynecháme případ LC , který v praxi neexistuje; jakostní kondenzátor má téměř charakter ideálního kondenzátoru, ale nelze nikdy zanedbat odpor cívky. Případ LC je ostatně totožný s případem RLC pro $R = 0$.

Obvod RL je na obr. 1. Pro okamžité hodnoty platí



Obr. 1



Obr. 2

$$u = u_R + u_L = R i + L \frac{di}{dt};$$

když $u = \bar{U}_m = U_m \exp j \omega t$, pak

$$U_m \exp j \omega t = R I_m \exp j \omega t + j \omega L I_m \exp j \omega t$$

a pro efektivní hodnoty

$$\bar{U} = (R + \bar{X}_L) \bar{I} = \bar{Z} \bar{I},$$

což je opět vyjádření *Ohmova zákona* v symbolickém tvaru. Komplexní veličina

$$\bar{Z} = R + \bar{X}_L = R + j \omega L \quad (1)$$

je impedance obvodu. Veličina $\bar{Z}$ podle (1) má argument φ , pro který platí

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\omega L}{Z}.$$

Argument $\varphi < \frac{\pi}{2}$ komplexní impedance $\bar{Z}$ je úhel, o který napětí $\bar{U}$ ve fázi předbíhá před proudem $\bar{I}$ (obr. 2).

Obvod podle obr. 1 můžeme považovat také za zjednodušený ekvivalentní obvod skutečné cívky (zanedbáváme kapacitu) o indukčnosti L a odporu R . V praxi musíme však uvážit, že odpor R při vyšších kmitočtech roste, a to jednak následkem vyzařování elektromagnetické energie, jednak následkem povrchového jevu (skinefektu). Vyzařování elektromagnetické energie se projevuje tak, jako kdyby se odpor cívky zvětšil o tzv. odpor vyzařovací; je to pomyslný odpor, v jehož vnitřní energii (ohřevem) by se přeměňoval výkon takový, jaký se ve skutečnosti vyzařuje. Vysokofrekvenční proudy dále protékají jen v povrchových vrstvách vodiče, přičemž tyto vrstvy jsou čím tenčí, čím vyšší je kmitočet proudu; odpor vodiče není tedy určen obsahem jeho průřezu, nýbrž jen obsahem povrchové vrstvy.

Povšimneme si blíže vztahu (1), který lze různě upravit:

$$Z = R \left(1 + j \frac{\omega L}{R} \right) = R(1 + jQ) = R \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_m} \right) = R \left(1 + j \frac{f}{f_m} \right) = R(1 + j \omega \tau),$$

kde $Q = \frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg} \varphi$ (obr. 2) je *činitel jakosti obvodu*, popř. *činitel jakosti cívky*, která má indukčnost L a odpor R , při úhlovém kmitočtu ω ; $\omega_m = \frac{R}{L}$ je tzv. mezní úhlový kmitočet, pro který je imaginární část

impedance rovna části reálné, $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

$$\tau = \frac{1}{\omega_m} = \frac{L}{R} \text{ je časová konstanta obvodu (popř. cívky).}$$

Při zvyšování kmitočtu od 0 Hz do f_m roste impedance obvodu z hodnoty R na hodnotu $R\sqrt{2}$, při dalším zvyšování kmitočtu pak roste velmi rychle. Pro $f \gg f_m$ je $Z \approx \frac{f}{f_m} R$, tj. při zvýšení kmitočtu na dvojnásobek naroste Z také na dvojnásobek.

Z impedance vychylovacích cívek televizoru, vyjádřené pomocí mezního kmitočtu, můžeme vysvětlit některé důležité vlastnosti těchto cívek. Pro $f \ll f_m$ převládá reálná část, tj. cívka se chová téměř jako ideální rezistor. Pro vzbuzení pilovitého proudu je proto třeba přivést na svorky cívky pilovité napětí (pro vertikální rozklad je $f = 50$ Hz). Pro $f \gg f_m$ má cívka charakter téměř ideální cívky a pro vzbuzení pilovitého proudu je třeba na svorky cívky přivádět napětí s časovým průběhem jiným, přibližně obdélníkovým (pro řádkový rozklad je $f = 15\,625$ Hz).

Název „činitel jakosti“ se používá proto, poněvadž z technického hlediska je cívka tím jakostnější, čím více se její charakter blíží charakteru ryzí indukčnosti.

$$\text{Činitel ztrát je definován jako } \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{Q} \text{ (obr. 2).}$$

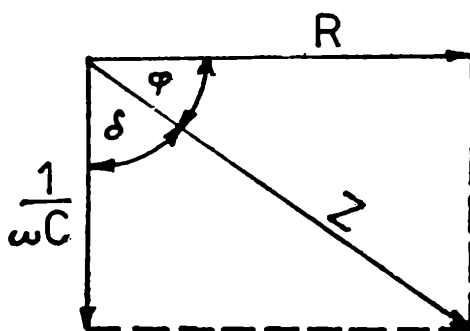
Obdobným způsobem vyjádříme komplexní impedanci Z sériového obvodu RC (obr. 3):

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= R - j \frac{1}{\omega C} = R \left(1 - \frac{j}{\omega RC} \right) = R(1 - jQ) = R \left(1 - j \frac{f_m}{f} \right) = \\ &= R \left(1 - j \frac{1}{\omega \tau} \right), \end{aligned}$$

kde $Q = \frac{1}{\omega RC} = \operatorname{tg} \varphi$ (obr. 4) je *činitel jakosti*, $\omega_m = \frac{1}{RC}$ mezní úhlový kmitočet, $\tau = RC$ časová konstanta. Činitel ztrát je $\operatorname{tg} \delta = \omega RC$.



Obr. 3

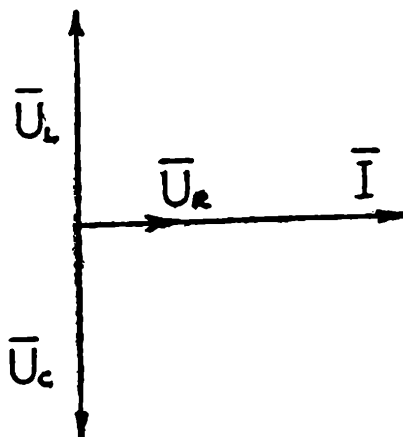


Obr. 4

Obvody podle obr. 3 se sestavují z rezistorů a kondenzátorů. Takový obvod se obvykle nepovažuje za ekvivalentní obvod technického kondenzátoru, poněvadž je daleko výhodnější charakterizovat ztráty odporem paralelním — bude o tom pojednáno v článku 2.



Obr. 5



Obr. 6

Sériový obvod RLC (obr. 5) má komplexní impedanci

$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad (2)$$

která je závislá na kmitočtu. Označme $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ kmitočet *Thomsonův*.

Pak můžeme (2) zapsat ve tvaru

$$\bar{Z} = R + j\omega L\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \quad (3)$$

Pro $\omega > \omega_0$ je imaginární část v (3) kladná, obvod lze nahradit odporem R a sériovou indukčností L^* , pro kterou platí

$$L^* = L\left(1 - \frac{f_0^2}{f^2}\right) = L \frac{f^2 - f_0^2}{f^2}.$$

Pro $\omega < \omega_0$ prepíšeme (2) do tvaru

$$\bar{Z} = R - \frac{j}{\omega C} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right);$$

lze tedy obvod nahradit odporem R a sériovou kapacitou C^* , pro kterou platí

$$C^* = C \frac{f_0^2}{f_0^2 - f^2}.$$

V případě $\omega = \omega_0$ je imaginární část v (2) nulová, obvod se chová jako pouhá rezistance R . Jde o významný případ *sériové* (napětové) *rezonance*. Typický fázorový diagram je na obr. 6, v němž $U_L = U_C$, takže fázor

výsledného napětí je $\overline{U}_R$. Prozatím ovšem nevíme nic o stejných velikostech fázorů $\overline{U}_L$, $\overline{U}_C$. Zjistíme to pomocí činitele jakosti obvodu při rezonančním kmitočtu:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}, \text{ neboť } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}.$$

Protéká-li obvodem proud I , je na obvodu napětí

$$U = U_R = I R,$$

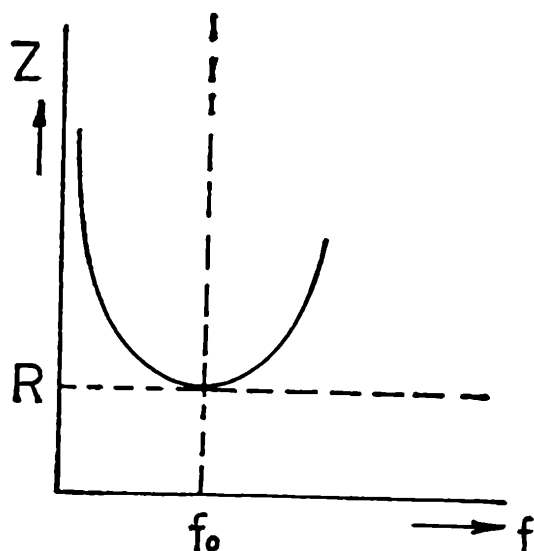
na indukčnosti je napětí $U_L = \omega_0 L I$, na kapacitě je napětí stejně velké. Z těchto vztahů plyne

$$U_L = U_C = \frac{\omega_0 L}{R} U = QU$$

Napětí U_L a U_C jsou tedy Q -krát větší než napětí na celém obvodu. Na této skutečnosti je založena činnost měřičů jakosti cívek (Q -metrů).

Jestliže např. $U = 100$ V, $Q = 100$, pak při rezonanci platí $U_L = U_C = 10$ kV; toto napětí musí cívka, a hlavně kondenzátor, bezpečně vydržet.

Rezonanční charakteristiku (křivku) obvodu můžeme definovat různě, ale pro účely radiotechniky je vhodné ji definovat jako graf funkce $Z = F(f)$. Její rovnice je v podstatě dána vztahem (2) a její typický průběh je na obr. 7.



Obr. 7

Křivka je zřejmě nesouměrná, protože pro $f \in (0, f_0)$ je $Z \in (\infty, R)$, ale interval (R, ∞) probíhá Z v nekonečném oboru (f_0, ∞) .

V praxi nás však často zajímá jen průběh křivky v blízkém okolí rezonančního kmitočtu, kde se můžeme spokojit s dobře vyhovujícím a jednoduchým přibližným vyjádřením.

Vztah (2) upravíme takto:

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= R + j\omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega\omega_0 LC} \right) = R + j\omega_0 L \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) = \\ &= R + j\omega_0 L \frac{(f + f_0)(f - f_0)}{f_0 f}.\end{aligned}$$

Jestliže kmitočet f je jen málo odlišný od f_0 , můžeme součet $f + f_0$ aproximovat hodnotou $2f$. Potom

$$\bar{Z} = R + 2j\omega_0 L \frac{f - f_0}{f_0}.$$

Zavedeme nyní veličinu x , kterou označíme jako dvojnásobné *poměrné rozladění*:

$$\frac{x}{2} = \frac{f - f_0}{f_0}; \quad (4)$$

veličina $\frac{x}{2}$ je zřejmě podíl *absolutního rozladění* $f - f_0$ a rezonančního kmitočtu f_0 . Nyní je

$$\bar{Z} = R + j\omega_0 L x$$

a po zavedení činitele jakosti

$$\bar{Z} = R(1 + jQx), \quad Z = R\sqrt{1 + (Qx)^2}. \quad (5)$$

Křivka daná vztahem (5) je souměrná, protože veličina x je zde ve druhé mocnině.

Pro *mezne kmitočty* (imaginární část je rovna části reálné, impedance při nich má velikost $R\sqrt{2}$) platí $x^2 Q^2 = 1$ a tyto kmitočty jsou tedy dva: dolní f_d a horní f_h . Pro dolní je $x_1 = -\frac{1}{Q}$, pro horní $x_2 = \frac{1}{Q}$. Pomocí (4) nalezneme

$$f_d = f_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right), \quad f_h = f_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right)$$

a kmitočtové pásmo má mezi nimi šířku

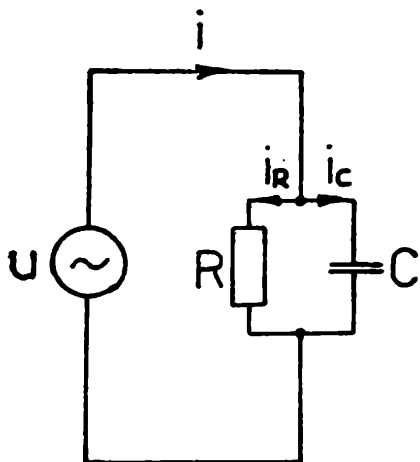
$$a = f_h - f_d = \frac{f_0}{Q}.$$

Šířka tohoto pásma charakterizuje tzv. *selektivitu obvodu*. Obvod je tím selektivnější, čím je pásmo a užší, tj. čím větší je, při témž rezonančním kmitočtu, jeho činitel jakosti. Rezonanční křivka selektivnějšího obvodu je užší a má strmější boky.

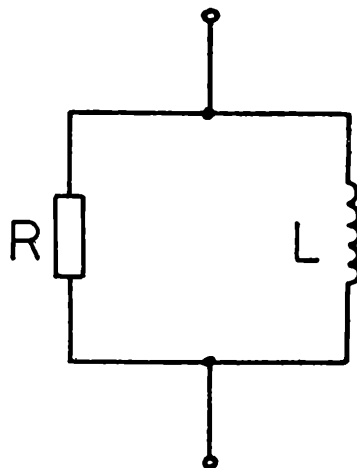
Pro ideální obvod ($R = 0 \Omega$) by platilo $\omega \rightarrow \infty$ a šířka pásma by byla nulová.

2. Jednoduché paralelní obvody

Obdobně jako u obvodů sériových jsou myslitelné nejjednodušší kombinace: RC , RL , LC , RLC . Vynecháme opět případ LC , který je technicky neuskutečnitelný, a jde o případ RLC pro $R \rightarrow \infty$.



Obr. 8



Obr. 9

Počneme obvodem RC (obr. 8), který je významný tím, že jej můžeme považovat za ekvivalentní obvod technického kondenzátoru kapacity C , jehož dielektrikum má svodový odpor R .

Pro okamžité hodnoty proudů a napětí platí *Kichhoffův zákon*

$$i = i_R + i_C = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}.$$

Jestliže

$$u = \bar{U} = U \exp j \omega t,$$

pak

$$i = U \exp j \omega t \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right).$$

Z toho je zřejmé, že celkový proud je rovněž fázor $\bar{I} = I \exp j \omega t$, a proto

$$\bar{I} = \bar{U} \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right); \quad (6)$$

tento vztah je vyjádřením *Ohmova zákona* v symbolickém tvaru.

Komplexní veličina

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = G + j B_C \quad (7)$$

je *admittance* obvodu a podle (6)

$$\bar{I} = \bar{Y} \bar{U} \text{ neboli } \bar{U} = \frac{1}{\bar{Y}} \bar{I},$$

kde $\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}}$ je komplexní impedance obvodu.

Komplexní admitance $\bar{Y}$ je, jak je zřejmé z (7), součtem konduktance odporové větve a susceptance kapacitní větve. Argument φ komplexní admitance, $\operatorname{tg} \varphi = \omega R C = Q$, představuje úhel, o který proud $\bar{I}$ ve fázi předbíhá před napětím $\bar{U}$.

Vztah (7) můžeme upravit takto:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R}(1 + j \omega R C) = \frac{1}{R} \left(1 + j \frac{f}{f_m} \right) = \frac{1}{R}(1 + j \omega \tau),$$

kde $f_m = \frac{1}{2\pi RC}$ je mezný kmitočet, $\omega_m = \frac{1}{RC}$ mezný úhlový kmitočet, $\tau = RC$ časová konstanta.

Při zvyšování kmitočtu od 0 Hz do f_m roste admitance Y od $\frac{1}{R}$ do $\frac{1}{R}\sqrt{2}$, při dalším zvyšování kmitočtu roste postupně nad všechny meze.

Považujeme-li obvod podle obr. 8 za ekvivalentní obvod technického kondenzátoru, má v technické praxi velký význam jeho *činitel ztrát* $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega RC}$. Je určen pouze vlastnostmi dielektrika a kmitočtem.

Představíme si deskový kondenzátor, jehož elektrody mají obsah S a vzájemnou vzdálenost d . Dielektrikum má měrný odpor ϱ a relativní permitivitu ϵ_r . Odpor dielektrika $R = \varrho \frac{d}{S}$ a kapacita kondenzátoru

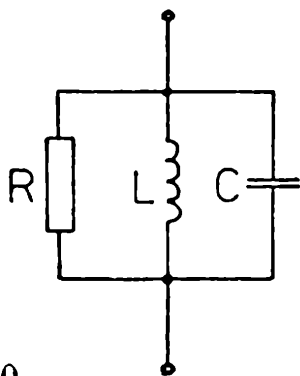
$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$, takže součin RC je nezávislý na rozměrech kondenzátoru.

V praxi však je svodový odpor R dielektrika značně a dosti složitě závislý na kmitočtu proudu, který kondenzátorem protéká; příčinou je řada rozmanitých polarizačních jevů v dielektriku. Proto se v technických údajích dielektrických látek uvádí hodnota $\operatorname{tg} \delta$ spolu s údajem kmitočtu, při němž byl činitel ztrát měřen. V nepříliš velkých oborech kmitočtů se při zvyšování kmitočtu zmenšuje svodový odpor R skoro v témž poměru, takže činitel ztrát je jen málo na kmitočtu závislý. Pro širší obory kmitočtů to ale neplatí.

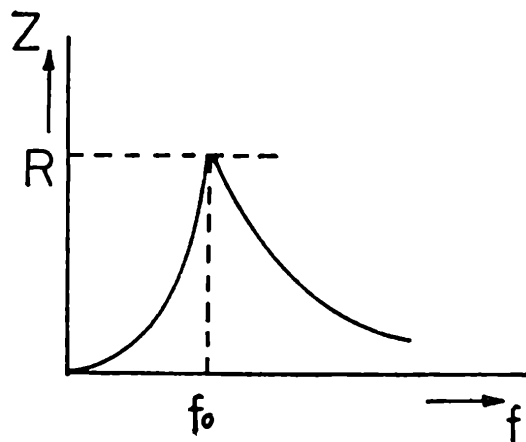
Poněvadž pro jakostní dielektrika je činitel ztrát velmi malý a pro malé úhly platí $\operatorname{tg} \delta \approx \sin \delta = \cos \varphi$, označuje se někdy (hlavně ve francouzské literatuře) činitel ztrát jako „účinník“ (*facteur de puissance*).

Obdobným způsobem nalezneme komplexní admitanci paralelního obvodu RL (obr. 9):

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{R} \left(1 - j \frac{R}{\omega L} \right) = \frac{1}{R} (1 - jQ) = \frac{1}{R} \left(1 - j \frac{f_m}{f} \right) = \\ &= \frac{1}{R} \left(1 - j \frac{1}{\omega \tau} \right), \quad \text{kde } Q = \frac{R}{\omega L}, \quad \omega_m = \frac{R}{L}, \quad \tau = \frac{L}{R}. \end{aligned}$$



Obr. 10



Obr. 11

Vyšetříme nyní poměry v paralelním obvodu RLC podle obr. 10. Jeho komplexní admitance

$$\overline{Y} = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \quad (8)$$

Označíme $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Thomsonův úhlový kmitočet druhé a třetí větve.

Úpravou dostaneme

$$\overline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C \frac{f^2 - f_0^2}{f^2}.$$

Pro $f < f_0$ je imaginární část záporná, obvod má charakter indukční, a lze jej tedy nahradit paralelní kombinací rezistoru o odporu R a indukčnosti L^* , pro kterou platí

$$\frac{1}{\omega L^*} = \omega C \frac{f_0^2 - f^2}{f^2}, \text{ odtud } L^* = L \frac{f^2}{f_0^2 - f^2}.$$

Pro $f > f_0$ je imaginární část kladná, obvod má charakter kapacitní a lze jej nahradit paralelní kombinací odporu R a kapacity C^* , pro kterou platí

$$C^* = C \frac{f^2 - f_0^2}{f^2}$$

Zvlášť důležitý je případ $f = f_0$. Jde o paralelní (proudovou) rezonanci, při níž je susceptance nulová, tj. reaktance nekonečně velká. Impedance obvodu je nyní $Z_0 = R$.

Označme U napětí na svorkách obvodu. Při rezonanci protéká obvodem proud $I_0 = \frac{U}{R}$. Indukční větví protéká proud $I_L = U \omega_0 L$ a poměr obou proudů

$$p = \frac{I_L}{I} = \frac{R}{\omega_0 L} I = QI,$$

kde $Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 R C$ je činitel jakosti obvodu.

Stejně velký proud protéká kapacitní větví. Reaktančními větvemi tedy protéká proud Q -krát větší než celým obvodem. Např. pro $I = 10$ A, $Q = 100$ je $I_L = I_C = 1000$ A; tento proud musí bezpečně vydržet cívka i kondenzátor.

Rezonanční charakteristiku (křivku) budeme definovat stejně jako prve, tj. jako graf funkce $Z = F(f)$. Její rovnice je v podstatě dána vztahem (8) a její typický průběh je na obr. 11.

Křivka je nesouměrná a její rovnice je dosti složitá. Omezíme-li se však na blízké okolí rezonance, můžeme použít přibližný způsob vyjádření, podobně jako u sériového obvodu RLC . Vztah (8) upravíme

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j\omega_0 C \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right),$$

$$\bar{Z} = \frac{R}{1 + jQx}, \quad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (Qx)^2}}.$$

Mezní kmitočty, při nichž impedance klesne z maximální hodnoty R při rezonanci na hodnotu $\frac{R}{\sqrt{2}}$, rovněž stanovíme obdobně jako u obvodu sériového a pro šířku pásma, která charakterizuje selektivitu obvodu, dostaneme výsledek stejný.

Obvod, který jsme zkoumali, se nedá technicky uskutečnit. Dobrý kondenzátor sice můžeme považovat téměř za součástku, která má pouze kapacitu, ale u cívky musíme vždy přihlížet k jejímu odporu. Přesto však je tento obvod technicky významný, jak vyplýne ze závěrečného článku 3.

Pokud jde o rezonanci, platí obecně:

Při sériové rezonanci je reaktance obvodu nulová (susceptance nekonečně velká). Při paralelní rezonanci je susceptance obvodu nulová (reaktance nekonečně velká).

3. Technický paralelní rezonanční obvod

Obvod tohoto typu je sestaven z cívky o indukčnosti L a odporu r a z kondenzátoru o kapacitě C , který budeme považovat za ideální (činitele jakosti dobrých kondenzátorů jsou o několik řádů větší než činitele jakosti cívek). Takový obvod je schematicky znázorněn na obr. 12. Jeho admitance je

$$\bar{Y} = j\omega C + \frac{1}{r + j\omega L} = \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} + j\omega \left(C - \frac{L}{r^2 + (\omega L)^2} \right). \quad (9)$$

Rezonanční úhlový kmitočet ω_r nalezneme anulováním imaginární části.

Vyloučíme-li řešení $\omega_r = 0 \text{ s}^{-1}$, dostaneme

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{L}\right)^2} < \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (10)$$

Tento kmitočet existuje (tj. obvod může jevit paralelní rezonanci), je-li splněna podmínka

$$L > r^2 C.$$

Rezonanční vodivost G je konduktance obvodu při rezonančním kmitočtu ω_r podle (10). Dosazením do reálné části (9) (imaginární část je nulová) dostaneme

$$G = \frac{rC}{L}.$$

Reciproká hodnota je *rezonanční (dynamický) odpor*

$$R = \frac{L}{rC}. \quad (11)$$

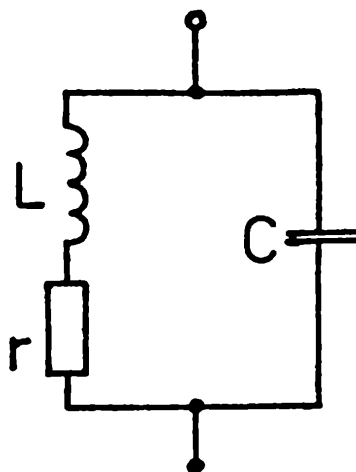
Chceme-li tedy docílit velký rezonanční odpor (při požadovaném rezonančním kmitočtu, který je v podstatě dán parametry L , C), volíme velkou indukčnost a malou paralelní kapacitu. Cívka ovšem musí mít malý účinný odpor — proto se cívky v rozhlasových přijímačích vinou ze sprádaného lanka, což omezuje nepříznivý vliv povrchového jevu. Naopak zase (týká se televizních přijímačů a přijímačů pro VKV) má-li obvod příliš velkou jakost, tj. přenáší příliš úzké pásmo, zatlumíme jej připojením paralelní rezistance.

Často se do vztahu (11) zavádí činitel jakosti obvodu. Je to činitel jakosti cívky při Thomsonově kmitočtu, tedy $Q = \frac{\omega_0 L}{r}$. Dostaneme potom $R = \omega_0 LQ$.

To znamená např. že hradící účinek tlumivky (o reaktanci $\omega_0 L$) se zvětší Q -krát, vyladíme-li tlumivku do rezonance s protékajícím proudem pomocí paralelního kondenzátoru.

Jakostní obvod můžeme s dobrou přibližností nahradit obvodem podle obr. 10. Oba obvody mají totiž velmi přibližně též rezonanční kmitočet, pokud $L \gg r^2 C$ a při rezonanci se chovají jako odpor R , takže i jejich chování v blízkém okolí rezonance je nepříliš odlišné. Proto např. při rezonanci protéká každou z obou větví obvodu podle obr. 12 proud Q -krát větší než celým obvodem.

Rezonanční křivku technického paralelního rezonančního obvodu v blízkém okolí rezonančního kmitočtu nahrazujeme aproximovanou rezonanční křivkou obvodu podle obr. 11. To se týká i stanovení mezních kmitočetů a šířky pásma.



Obr. 12

Admitance při zvyšování kmitočtu klesá z nekonečné hodnoty pro $f = 0$ Hz na hodnotu $\frac{1}{R}\sqrt{2}$ pro $f = f_m$, pak klesá na $\frac{1}{R}$ pro $f \rightarrow \infty$.

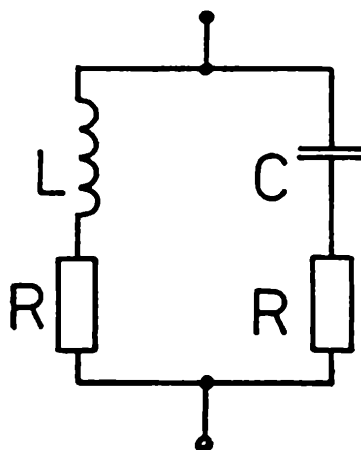
Podle předchozího jsme poznali, že komplexní impedance nebo admitance obvodů můžeme počítat zcela obdobně jako při řešení obvodů stejnosměrného proudu, ale musíme důsledně používat symbolický způsob zápisu, tj. pracovat s komplexními impedancemi a admitancemi, s reálnými rezistancemi a konduktancemi a ryze imaginárními reaktancemi. Ve výsledku snadno zjistíme absolutní hodnotu a argument stanovené komplexní impedance nebo admitance. To právě je podstatou symbolické metody.

Každou soustavu rezistorů, jak víme z řešení obvodů stejnosměrného proudu, můžeme, postupným zjednodušováním, nahradit jednou rezistancí. V obvodech harmonického proudu můžeme každou soustavu rezistancí, indukčností a kapacit nahradit jednou rezistancí a jednou sériovou nebo paralelní reaktancí, která může být buď kladná (charakter indukční), nebo záporná (charakter kapacitní). Tyto reaktance jsou ovšem závislé na kmitočtu a ve zvláštních případech mohou být v sériové kombinaci nulové nebo v paralelní nekonečně velké, takže soustava může mít při některém kmitočtu (nebo několika kmitočtech) charakter pouhé rezistance.

Úlohy k procvičení

1. Do téhož obrázku znázorněte grafy funkcí $Z_1 = F_1\left(\frac{f}{f_m}\right)$, $Z_2 = F_2\left(\frac{f}{f_m}\right)$, kde Z_1 je impedance sériového obvodu RC , Z_2 impedance paralelního obvodu RC . Stupnici pro kmitočty volte logaritmickou, body křivek zakreslujte pro hodnoty $\frac{f}{f_m} = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$. Pro znázornění odporu R volte úsečku vhodné délky.

2. Komplexní impedanci $Z = R + j \omega L$ sériového obvodu RL lze znázornit bodem v Gaussově rovině.
 - a) Jaká je množina těchto bodů pro dané hodnoty R, L a pro všechny hodnoty od $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$ do $\omega \rightarrow \infty$? Zakreslete její obraz. Vyznačte na něm mezný kmitočet ω_m a jeho násobky.
 - b) Jaká je množina bodů znázorňujících admitanci $\bar{Y}$ téhož obvodu? Nalezněte matematickým výpočtem (parametrické rovnice čáry) a zakreslete.
3. Normovaná rezonanční křivka sériového obvodu RLC (v přibližném vyjádření pro okolí rezonančního kmitočtu) je graf funkce $y = F(\xi)$, kde $y = \frac{Z}{R}$, $\xi = Q x$. Stanovte její rovnici a zakreslete její průběh. Nalezněte na ní body odpovídající mezným kmitočtům.
4. Totéž pro obdobně definovanou normovanou rezonanční křivku paralelního obvodu RLC podle obr. 10.
5. Navrhněte způsob, jímž ze změřené rezonanční křivky sériového obvodu RLC lze graficky stanovit jeho činitele jakosti.
6. Totéž pro paralelní obvod RLC .



Obr. 13

7. a) Stanovte komplexní impedanci obvodu znázorněného na obr. 13.
- b) Podle výsledku nalezněte podmínky pro případ, že obvod má povahu rezistance. Proveďte diskusi výsledku.
- c) Jeden z diskutovaných případů představuje podmínku skutečné paralelní rezonance. Pro tento případ stanovte rezonanční kmitočet a rezonanční odpor obvodu.
[Jsou tři případy: $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$, odpor R ; $L = R^2 C$, impedance je reálná pro všechny kmitočty; $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, což je skutečná rezonance, rezonanční odpor

$$R' = \frac{1}{2} \left(R + \frac{L}{RC} \right).$$

Poznámka. Tento článek doporučujeme k prostudování zejména řešitelům FO, kategorie A.

APLIKACE (od lat. a^{-2}) = *k, u, do + plico, -are = vinout*) — „přivnutí, připletení“, přenesení a použití poznatků, zkušeností někde jinde, v jiném oboru atd.

APROXIMACE (od lat. a^{-2}) = *k, u, do + proximus = nejbližší*) — „přibližování se“; v matematice: postup směřující k získání přibližné hodnoty, též přibližná hodnota neznámé

AR (od lat. *area = volné prostranství*) — za Velké francouzské revoluce uměle vytvořený termín pro čtverec se stranou 10 m dlouhou

ARGUMENT (z lat. *argumentum k arguo, -ere = leštit, vyjasňovat, dokázat, prokázat*) — důvod, důkaz; v logice: důvod; v matematice: nezávisle proměnná, na níž závisí hodnota funkce

ARITMETIKA (z řec. aritmetiké *techné* = počtářské umění od *arithmos* = řada, počet, číslo) — nauka o číslech a operacích s nimi

ARKUS z (lat. *arcus* = luk, oblouk, klenba) — velikost oblouku jednotkové kružnice příslušného středovému úhlu

ASFÉRICKÝ (od řec. a^{-3}) s významem záporu + *sfaira* = koule) — nekulový

ASOCIACE (od lat. a^{-2}) = *u, k, do + socius = druh, přítel, společník*) — „přidružování, spolčení“; **ASOCIATIVNÍ** — sdružovací; **ASOCIATIVITA** — sdružování prvků; v matematice: vlastnost operací spočívající v tom, že výsledek operace je týž pro různě sdružované prvky

ASTEROIDA (z řec. *astér* = hvězda + latinizovaného — *oideus* = podobající se) — „křivka podobající se hvězdě“

ASYMETRICKÝ (od řec. a^{-3}) s významem záporu + *sym* = sou-, s, spolu + *metron* = míra) — nesouměrný

ASYMPTOTA (od řec. a^{-3}) s významem záporu + *sym* = sou-, s, spolu, společně + *piptó* = padat) — přímka, která „nespadne, nezapadne“ ke křivce, ač se k ní přibližuje, např. asymptota hyperboly se k hyperbole blíží, ale nikdy se jí nedotkne

AXIÁLNÍ (od lat. *axis* = osa) — osový

AXIÓM (od řec. *axioó* = uznávat za platné, schvalovat, mít za to) — tvrzení, které je uznáno za platné bez zdůvodnění

AXONOMETRIE (od řec. *axón, axonos* = osa + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — měření „pomocí os“, zobrazovací metoda, ve které hrají důležitou roli průměty stupnic na osách

AZIMUT (od latinizovaného arabského *as-simút* = cesta slunce) — velikost úhlu, který s rovinou poledníku svírá svislá rovina procházející nebeským tělesem

BÁZE (z řec. *basis* = krok, chůze; místo, kam se došlápne; podstavec) — základ, základní část, základna, východisko;

BAZÁLNÍ — k základně patřící, základní

- 6 BI-(z lat. *bis* = dvakrát) — počáteční část složených slov, mající význam „dvojitost, dvou-, dvoj-“
- BIFOKÁLNÍ (od lat. *bis* = dvakrát + *focus* = ohnisko) — mající dvě ohniska, dvojohniskový
- BIJEKCE (od lat. *bis* = dvakrát + *iacio*, *-ere* = házet, vrhat) — „dvakrát vrhající“, zobrazení promítající, resp. přiřazující z obou stran (navzájem jednoznačně)
- BILINEÁRNÍ (od lat. *bis* = dvakrát + *linea* = lněná nit, čára, přímka) = „dvoupřímkový“, s dvěma významnými přímkami; v matematice též lineární = 1. stupně (výraz, mnohočlen, forma, funkce); bilineární = lineární vzhledem k dvěma proměnným
- BINÁRNÍ (od lat. *bini* = po dvou, dva a dva) — podvojný, skládající se ze dvou složek
- BINOM (od lat. *bis* = dvakrát + řec. *nomos* = zvláštnost, zvláštní způsob, řád) — dvojčlenný; BINOMICKÝ — dvojčlenný
- BIPARTITNÍ (od lat. *bis* = dvakrát + *pars*, *partis* = díl, část, strana) — skládající se ze dvou částí
- BRACHYSTOCHRONA (z 3. stupně řec. *brachys* = krátký + *chronos* = čas, doba) — křivka, po níž urazí hmotný bod vzdálenost mezi dvěma body v gravitačním poli v nejkratším čase
- CENT (z lat. *centum* = sto) — 100 kg; metrický cent (zastaralá jednotka)
- CENTI- (od lat. *centum* = sto) — počáteční část názvů jednotek mající význam „setina měrné jednotky“, např. centimetr
- CENTRUM (z řec. *kentron* = ostrý konec, bodec, bod ve středu kruhu) — střed, středisko, ústředí; CENTRÁLA — v matematice: přímka, na níž leží středy zkoumaných kružnic; CENTRÁLNÍ — umístěný ve středu, střední, vztahující se k centru, z centra vycházející, ústřední; CENTRICKÝ — středem probíhající, středový, středově souměrný, soustředný; CENTROVAT — umisťovat do středu, upravovat do středové polohy
- CIFRA (od latinizovaného arabského *as-syfr*, což bylo původně označení jen pro nulu) — ve významu číslice se objevuje až od 14. století
- CYKLO- (z řec. *kyklos* = kolo, kruh, kružnice) — počáteční část složených slov vyjadřující nějaký vztah ke kolu, kruhu či kružnici; CYKLOGRAFIE (řec. *grafó* = rýt, psát) — „psaní kružnicí“, promítání pomocí kružnic; CYKLOIDA (latinizované *-oideus* = podobající se) — „křivka podobající se kružnici“, křivka vytvořená bodem pevně spojeným s kružnicí, která se kotálí po pevné přímce nebo kružnici; CYKLOMATICKÝ (analogicky podle „matematický“) — cyklo-matické číslo grafu = počet kružnic v grafu; CYKLOMETRIE (řec. *metron* = měřítko, měřidlo, míra) — nauka o velikostech kružnicových oblouků, o funkcích definovaných tímto způsobem

CYKLUS (z řec. *kyklos* = kolo, kruh, kružnice) — okruh; sled dějů opakujících se pravidelně jakoby v uzavřeném kruhu, soubor výtvorů téhož typu tvořících určitý celek; CYKlický — kruhový, probíhající po kružnici, pravidelně se opakující

CYLINDR (z řec. *kylindros* od *kylindó* = koulet, valit) — válec, těleso válcovitého tvaru; CYLINDRICKÝ — válcovitý, válcový

DE- (z lat. *de* — mnohovýznamová předpona a předložka) — předpona s významem:

1/ „směr shora dolů“, např. defenestrace (lat. *fenestra* = okno) — svržení z okna dolů; deprimovat (lat. *premo*, -ere = tlačit, tisknout) — „duševně tlačit dolů“

2/ „vzdalování, odstraňování“, např. deformovat (lat. *forma* = vnější tvar, podoba) — zbavovat původní podoby

3/ „úplné dokončení“, např. devastace (lat. *vastus* = pustý, prázdný) — zpusťování

4/ „vztah k něčemu, vzhledem k...“, např. demonstrace (lat. *monstro*, -are = ukazovat) — „veřejné ukazování“, veřejně ukázání názoru, veřejně prováděný pokus

DECI- (od lat. *decem* = deset) — počáteční část názvů jednotek mající význam „desetina měrné jednotky“, např. decimetr

DEDUKCE (od lat. *de* = od + *duco*, -ere = vést) — „odvádění“, „vedení shora dolů“, odvozování; myšlenkový postup, při kterém jsme od obecného („vyššího“) tvrzení „svedení dolů“ k výrokům o jednotlivých věcech, (opak indukce)

DEFINICE (od lat. *de* = o + *finio*, -ire = ohraničovat, končit) — „vymezení, ohraničení“, vymezení pojmu; DEFINIČNÍ, DEFINOVAT

DEFORMACE (od lat. *de* = od + *forma* = vnější tvar, podoba) — zbavení původní podoby, změna tvaru

DEKA- (z řec. *deka* = deset) — počáteční část názvů jednotek mající význam „desetinásobek měrné jednotky“, např. dekagram

DEKÁDA (z řec. *dekas*, *dekados* = desítka) — deset údobí, zpravidla dní; DEKADICKÝ — desítkový; DEKADIZACE — zavádění desítkové soustavy

DEKÓDOVAT (od lat. *de* = od + *codex* = kniha, seznam) — odkódovat, tj. uvést zprávu do stavu, jaký měla před kódováním

DELTOID (od řec. *delta* = velké D v řec. abecedě + latinizované -oideus = podobající se) — obrazec podobající se dvěma deltám se společnou základnou

DERIVACE (od lat. *de* = od + *rivus* = tok, proud, potok) — „odvádění toku jinam“, odvozování; v matematice: funkce odvozená z původní, resp. hodnota této odvozené funkce. (Děje vyjadřované

- 8 dnes funkcemi byly ve středověku popisovány „tekoucími body“, ještě Newton užíval termín *fluenta* = „tekoucí veličina“ místo funkce.)
- DERIVOVAT** — určovat derivaci funkce, tj. odvozovat novou funkci, která umožňuje zkoumat „změny toku“, tj. průběh původní funkce
- DESIGNÁT** (od lat. *de* = od + *signo*, *-are* = znamením opatřovat, označovat) — „předmět, který byl označen, dostal název
- DESKRIPTIVNÍ** (od lat. *de* = o + *scribo*, *-ere* = psát) — popisný; deskriptivní geometrie útvary „popisuje“ — zobrazuje; deskriptivní statistika rovněž soubory „popisuje“ — udává jejich základní charakteristiky
- DETERMINANT** (od lat. *de* = od + *terminus* = mezník, hranice) — „vymezuující“; determinant soustavy rovnic pomáhá k „vymezení“, určení i k diskusi o počtu řešení soustavy; **DETERMINOVAT** — vymezovat, stanovovat hranice, předurčovat
- DI⁻¹** (z řec. *di-* = dvou-, dvoj-) — předpona téhož významu, např. dioda, dipól, dimetrie
- DI⁻²** (z lat. *dis-* — předpona s významem „rozluka, opak, zápor“) — předpona přeložitelná zpravidla jako „roz-“; např. dimenze (lat. *metior*, *-iri* = měřit) — rozměr
- DIA-** (z řec. *dia-* = skrz, na druhou stranu) — předpona téhož významu; např. diaprojektor (lat. *pro* = vpřed, dopředu + *iacio*, *-ere* = vrhat) — přístroj, který „skrz sklíčka vrhá vpřed světelné paprsky“
- DIAGONÁLA** (z řec. *dia* = skrz, na druhou stranu + řec. *gony* koleno, úhel) — úsečka vedená v mnohoúhelníku z vrcholu jednoho úhlu do vrcholu protějšího úhlu, úhlopříčka
- DIAGRAM** (z řec. *dia* = skrz + řec. *grafó* = rýt, psát) — „vyjádření pomocí narýsovaného“, náskres, výrazné grafické znázornění
- DIFERENCE** (od lat. *dis-* = roz- + *fero*, *ferre* = nést) — „roznesení na opačné strany“, rozlišení, v matematice: rozdíl; **DIFERENCIACE** — rozlišování, vytváření rozdílů; **DIFERENCIÁL** — v matematice: funkce vyjadřující „nekonečně malé rozdíly“ hodnot funkcí, přírůstky funkcí; ve fyzice: zařízení umožňující rozdílný počet otáček dvou kol; **DIFERENCIÁLNÍ POČET**
- DICHOTOMIE** (od řec. *dicha* = na dvě + *temnó* = řezat) — „rozřezání“, rozdělení na dvě části, **DICHOTOMICKÝ** — spočívající v dělení na dvě části
- DILATACE** (od lat. *dis-* = roz- + *latus* = široký) — rozšíření, roztažení, v matematice: zvětšení poloměrů kružnic
- DIMENZE** (od lat. *dis-* = roz- + *metior*, *-iri* = měřit) — rozměr; **DIMENZIONÁLNÍ** — rozměrový
- DIMETRIE** (od řec. *di-* = dvou-, dvoj- + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — druh axonometrie, v níž měřítka na dvou ze tří os jsou shodná (jde tedy o „dvojí měření“); srov. izometrie, trimetrie

Nicolas Oresme (1323 - 1382)

PAVEL VONDRUŠKA, VS VKD Kladno

Letos uplynulo 600 let od úmrtí vynikajícího středověkého francouzského matematika. *Nicolas Oresme* se narodil kolem roku 1323, studoval na pařížské univerzitě, kde dosáhl hodnosti magistra umění a později i sám přednášel. Po skončení svého působení v Paříži se odstěhoval do Rouenu. Od roku 1377 byl biskupem v Lisieux v Normandii.

Nicolas Oresme se zabýval též matematikou, astronomií a fyzikou. Jeho nejznámější dílo „*Algoritmus poměrů*“ (*Algorismus proportionum*) ovlivnilo vývoj tehdejší aritmetiky a algebry. Oresme v této práci rozpracoval počítání s mocninami, které mají lomené exponenty. Mezi čtená pravidla, která jsou v práci složitě formulována, patří například ta, která dnes zapisujeme:

$$a^{n/m} = (a^n)^{1/m}, a^{1/n} b^{1/n} = (ab)^{1/n}, a^{1/n} b^{1/m} = (a^m b^n)^{1/nm}, (a^m)^{p/q} = (a^{mp})^{1/q} = a^{(mp/n)} \quad (1/(q/n)).$$

Nejzajímavější pasáží této práce je ta část, kde se Oresme již přiblížil k pojmu iracionálního mocnitele. Definoval jej jako exponent, který lze sevřít mezi „dostatečně blízké“ celočíselné nebo lomené exponenty.

Druhou významnou oblastí, které se též Nicolas Oresme věnoval, byla pozoruhodná část středověké matematiky — teorie forem. Jeden z vrcholů této teorie tvoří právě dílo Nicola Oresma, které dokončil před rokem 1371. Zachovalo se v mnoha opisech a pod různými názvy (např. O konfiguraci kvalit, O rovnoměrných a nerovnoměrných intenzitách, Traktát o šířkách forem apod.).

V této práci zavedl Nicolas Oresme geometrické vyjadřování veličin charakterizujících pohyby (rychlosti, dráhy). Navrhl dokonce použití pravoúhlých prostorových souřadnic a definoval pojem, který lze interpretovat jako funkci dvou proměnných. Studoval pohyb rovnoměrně zrychlený a 250 let před Galileem vystihl graficky závislost dráhy na rychlosti a čase. Všechny tyto a mnohé další úvahy jsou však vyjádřeny v jazyce, který je pro nás málo srozumitelný.

Teorie forem ustrnula a nerozvíjela se. Chyběl jí kontakt s fyzikou, hlavně však nebyl pro ni dostatečně rozvinut vhodný matematický aparát. Oresmovy myšlenky ovlivnily až o 250 let později vznik důležité oblasti matematiky — studium proměnných veličin, studium funkcí.

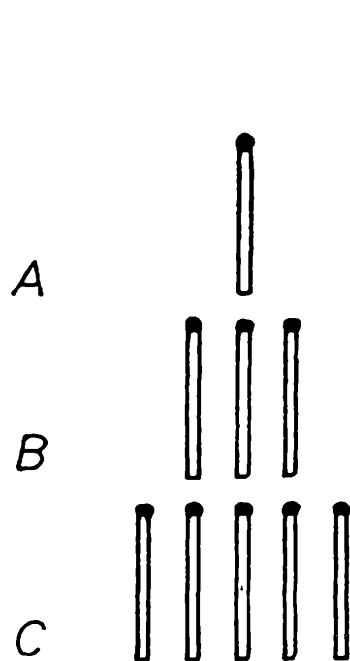
Hra se zápalkami

RNDr. JAROMÍR BAŠTINEC, JOSEF DIBLÍK, CSc., VUT Brno

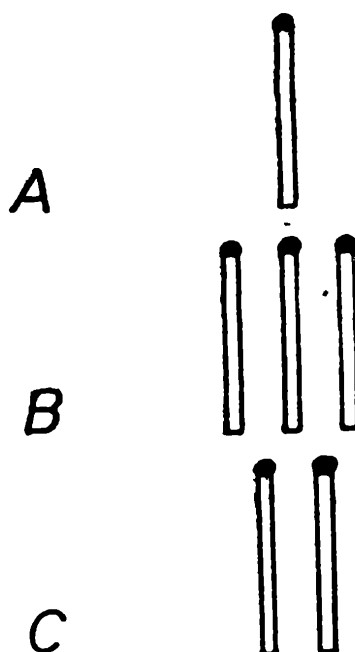
Asi jste se už setkali se zajímavou hrou se zápalkami, jejíž základní postavení je na obr. 1. Každý ze dvou soupeřících hráčů po řadě odebírá z jedné libovolné řady (A, B nebo C) libovolný kladný počet zápalek. Prohrává hráč, který musí odebrat poslední zápalku.

Zahrajeme si pro ilustraci tuto hru. Hráče, který začíná hru, označíme písmenem *Z*, jeho soupeře písmenem *S*. Předpokládejme, že hráč *Z* odebral z řady C tři zápalky (označme jeho tah jako C3). Vznikla pozice znázorněná na obr. 2. Dále budeme označovat každou herní situaci uspořádanou trojicí čísel; symbol (1, 3, 2) bude tedy označovat herní situaci z obr. 2. Hráč *S* odpovídá tahem B2 a vzniká pozice (1, 1, 2). Hráč *Z* hraje C1, dosahuje tedy pozice (1, 1, 1); tím vyhrává, poněvadž hráč *S* libovolným svým tahem vytvoří buď pozici (0, 1, 1) nebo (1, 0, 1) nebo (1, 1, 0). Hráč *Z* odebere libovolnou zápalku a hráč *S* musí vzít poslední.

V našem článku se pokusíme o rozbor této hry. Budeme ovšem vycházet z obecnější výchozí pozice — (1, m , n), kde písmena m , n označují počty zápalek v řadách B a C. Předpokládejme, že $m \leq n$. (Tento předpoklad nebude náš rozbor nijak ovlivňovat.) Jestliže během hry vznikne postavení (1, m_1 , n_1), kde $m_1 > n_1$, pak ho zaměníme tam, kde to budeme



Obr. 1



Obr. 2

potřebovat, postavením $(1, n_1, m_1)$. Touto úmluvou jen zjednodušíme diskusi, ne výsledek hry.

Rozebereme některé základní pozice K_1 až K_4 :

K_1 — *postavení* $(1, 1, 1)$.

Tuto hru jsme poznali v závěru úvodního příkladu, tentokrát ji vyhrává hráč S .

K_2 — *postavení* $(1, 1, 2)$.

Hru vyhrává hráč Z , pokud tahem $C1$ převede hru k pozici K_1 .

K_3 — *postavení* $(1, m, n)$, kde $m > 1$.

Hráč Z může vyhrát; ukážeme, jak. Nechť zahraje $A1$, vznikne pozice $(0, m, n)$. Hráč S odpovídá tahem Bp , kde $1 \leq p \leq m$; vzniká pozice $(0, p_1, n)$, kde $p_1 + p = m$.

Jestliže $p_1 > 1$, pak Z hraje Cp a vzniká analogické postavení jako bylo před tahem hráče S , jenže s menším počtem zápalek v řadách B a C .

Jestliže $p_1 = 1$, potom Z odebírá všechny zápalky v řadě C , čímž vyhrává.

Jestliže $p_1 = 0$, hráč Z ponechá v řadě C jednu zápalku a vyhrává.

K_4 — *postavení* $(1, 2, 3)$.

Hru vyhrává hráč S . Rozebereme všechny možnosti:

1) Na tah $A1$ hráče Z odpoví hráč S tahem $C1$. Tím vzniká pozice $(0, 2, 2)$, kterou jsme v obecnějším tvaru rozebírali při pozici K_3 .

2) Na tah $B1$ hráče Z je odpověď $C2$; dále viz K_1 .

3) Na tah $B2$ hráče Z je odpověď $C3$.

4) Po tahu $C1$ hráče Z vzniká postavení $(1, 2, 2)$. Hráč S vyhraje, jestliže dále postupuje analogicky jako hráč Z v pozici K_3 .

5) Po tahu $C2$ hráče Z dostaneme pozici $(1, 2, 1)$, kterou S zvládne jako $(1, 1, 2)$ podle K_2 .

6) Na tah $C3$ hráče Z je odpověď $B2$.

Věta 1. a) Každá pozice $(1, 2k-1, 2k)$, $k = 1, 2, \dots$, je výherní pro hráče Z .

b) Každá pozice $(1, 2k, 2k+1)$, $k = 1, 2, \dots$, je výherní pro hráče S .

Důkaz provedeme metodou matematické indukce.

Pro $k = 1$ věta platí — vzniklé herní situace $(1, 1, 2)$ a $(1, 2, 3)$ jsme už rozebírali (viz K_2 a K_4).

Nechť věta platí pro všechna $k \leq n$, kde $n > 1$. Dokážeme, že potom věta platí i pro $k = n+1$. Nejprve dokážeme, že pozice $(1, 2n+1, 2n+2)$ je výherní pro hráče Z . Skutečně, tahem $C2$ hráče Z dospíváme k pozici

$(1, 2n+1, 2n)$ zaměnitelné s $(1, 2n, 2n+1)$,

která je podle indukčního předpokladu prohraná pro hráče, který je na tahu (v tomto případě je to hráč S). Trochu těžší bude důkaz toho, že hra $(1, 2n+2, 2n+3)$ je vyhraná pro hráče S . Rozebereme všechny možné situace. Nebudeme uvádět důkaz úplně, protože pozice vzniklé

po úvodních tazích už snadno rozeberete do konce sami. Sestavíme tabulku:

Tah hráče Z	Odpověď hráče S
1) $A1$	$C1$, vzniká výherní pozice $(0, 2n + 2, 2n + 2)$ podle K_3 ,
2) Bp — vznikne pozice $(1, p_1, 2n + 3)$, kde předpokládá, že p_1 je liché číslo větší než 1	upraví hru na tvar $(1, p_1, p_1 - 1)$ a vyhraje (podle indukčního předpokladu)
3) Bp — vznikne pozice $(1, p_1, 2n + 3)$, kde předpokládáme, že p_1 je sudé číslo větší než 1	upraví hru na tvar $(1, p_1, p_1 + 1)$ a vyhraje (podle indukčního předpokladu)
4) Bp , kde $p = 2n + 1$	hraje Cr , kde $r = 2n + 2$, vyhraje (viz K_1)
5) Bp , kde $p = 2n + 2$	hraje Cr , kde $r = 2n + 3$, vyhraje
6) $C1$	$A1$ a vyhraje — vznikne pozice $(0, 2n + 2, 2n + 2)$, kterou jsme rozebírali v K_3
7) Cp , kde $p > 1$	postupuje analogicky jako v situacích 2) — 5).

Pomocí věty 1 nyní dokážeme hlavní větu tohoto článku.

Věta 2. Hra $(1, m, n)$, kde $n - m > 1$, je vyhraná pro hráče Z .

Důkaz: Je-li m číslo sudé, tj. tvaru $m = 2k$, kde $k > 0$, potom hráč Z upraví svým tahem hru na tvar $(1, 2k, 2k + 1)$.

Je-li m liché číslo tvaru $m = 2k + 1$, kde $k > 0$, potom Z upraví hru na tvar $(1, 2k + 1, 2k)$. V obou případech podle věty 1 vyhrává.

Jestliže $m = 0$, pak Z vyhraje tahem Cn a v případě $m = 1$ hraje Cr , $r = n - 1$ a taktéž vyhrává (viz K_1).

Nakonec rozebereme zbylé možnosti, které nezahrnuje věta 2. Příklad $n - m = 1$ je objasněn ve větě 1, a případ $n - m = 0$ pro $n = 1$ a $n > 1$ jsme rozebírali na začátku (viz K_1 a K_3).

Pozice znázorněná na obr. 1 je tedy podle věty 2 výherní pro hráče Z . Z rozboru také vyplývá, že tah vedoucí k výhře je $C3$.

Pokuste se sami dále tuto hru zobecnit a rozpracovat pro ni odpovídající teorii, analogickou naší. Například je možné začít z výchozí pozice $(2, m, n)$, nebo se zabývat hrou se čtyřmi řadami $(1, 1, m, n)$ atd. Zájemcům o tuto problematiku doporučujeme knihu *J. Sedláčka „Nebojte se matematiky“*.

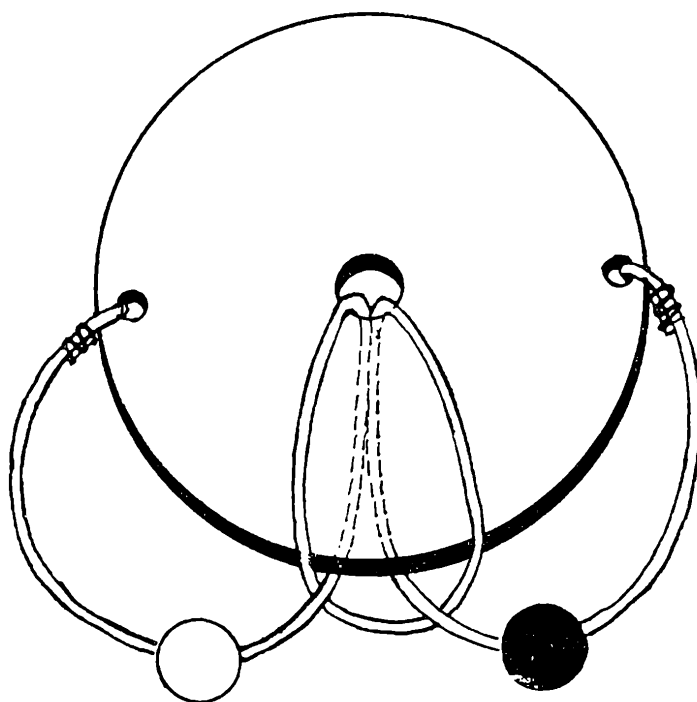
Černá a bílá

Dnes přicházíme s hlavolamem, jehož výroba je sice lehká, ale řešení poněkud složitější. Úspěšnému řešiteli však přinese tím více potěšení a zábavy. I tomuto hlavolamu bychom mohli vtělit jiný tvar, než který vidíte na obr. 1. Vyobrazený hlavolam je zhotoven z plexiskla, takže vidíme i vlákna na zadní straně (přerušovaná čára).

K zhotovení hlavolamu potřebujeme destičku z jakéhokoliv materiálu, bužírku, jejíž délka by měla odpovídat 5—6 průměrům kruhu a dva různobarevné korále, které musí být tak velké, aby je nebylo možno protáhnout středním otvorem kruhu. Při výrobě musíme zachovat způsob navlečení bužírky i korálů přesně podle obrázku.

Úkolem řešitele bude dostat černou a bílou kuličku na stejnou smyčku vedle sebe a opačným způsobem zpět na původní místo.

J. Svoboda



Obr. 1

Řešení hlavolamu černá a bílá

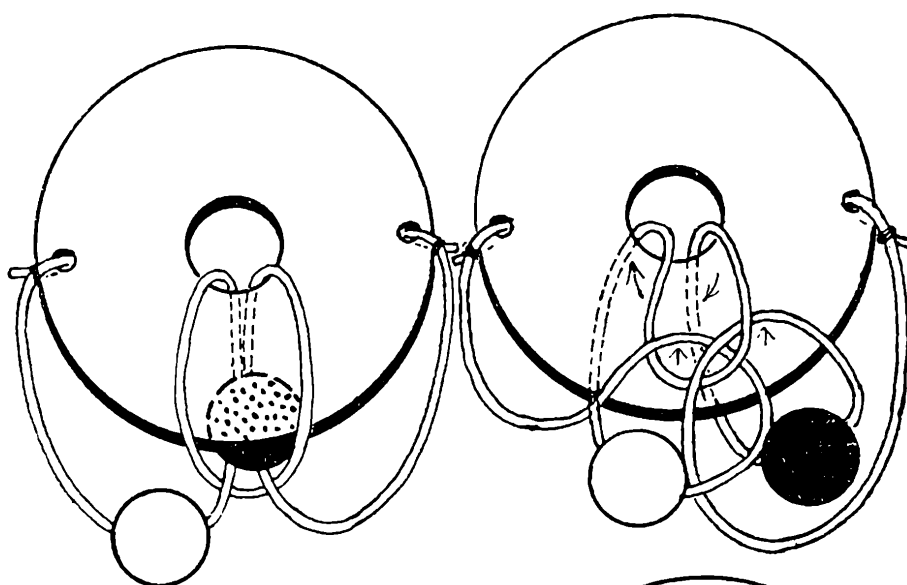
K obrázku je třeba podotknout, že první, druhé a čtvrté vyobrazení ukazuje pohled na čelní stranu kruhu (černá kulička je vpravo), třetí vyobrazení ukazuje pohled na jeho zadní stranu (černá kulička je vlevo).

1. úkon (obr.1): černou kuličku posuneme na smyčce tak, aby byla za kruhem.
2. úkon (obr. 2): uchopíme obě vlákna bužírky na zadní straně kruhu (jsou označena horními šipkami) a táhneme tak, abychom smyčky, na nichž jsou navlečeny obě kuličky (na obrázku jsou označeny dolními

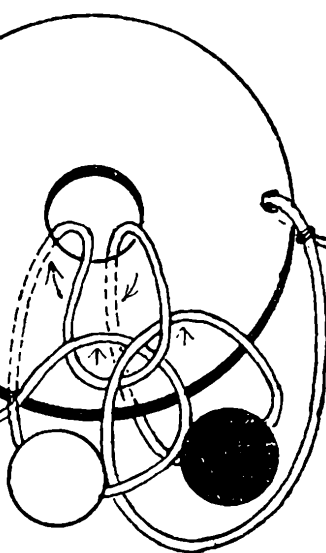
šipkami) protáhli středním otvorem v kruhu. Když se nám to podaří, kruh otočíme zadní stranou k sobě.

3. úkon (obr. 3): Nyní máme černou kuličku vlevo. Tuto kuličku posunujeme směrem vpravo, provlékneme oběma smyčkami na místo, kam ukazují šipky. Potom obě smyčky protáhneme středním otvorem kruhu zpět na původní místo a kruh obrátíme opět čelní stranou k sobě. Když si prohlédneme nastalou situaci, poznáme, že je možno snadno černou kuličku posunout na místo vedle bílé kuličky (obr. 4). Tím je hlavolam vyřešen. Opačným postupem vrátíme kuličku na původní místo.

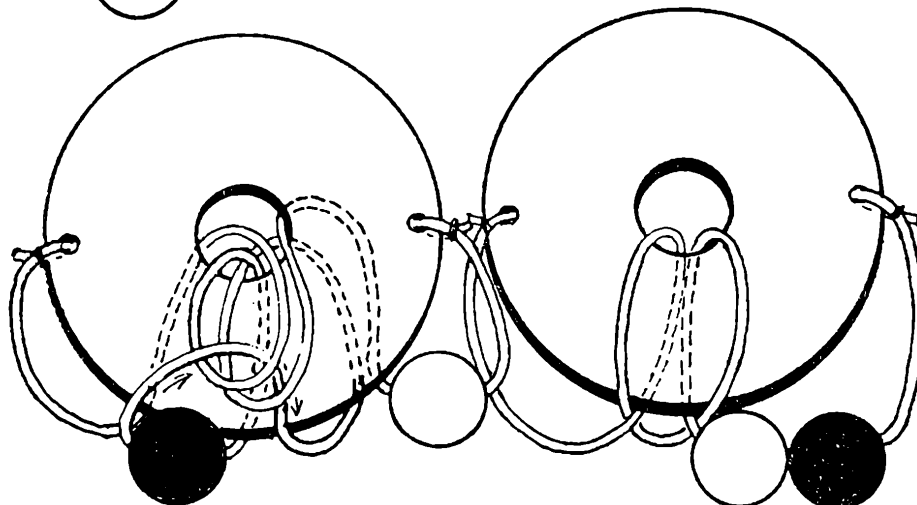
Obr. 1



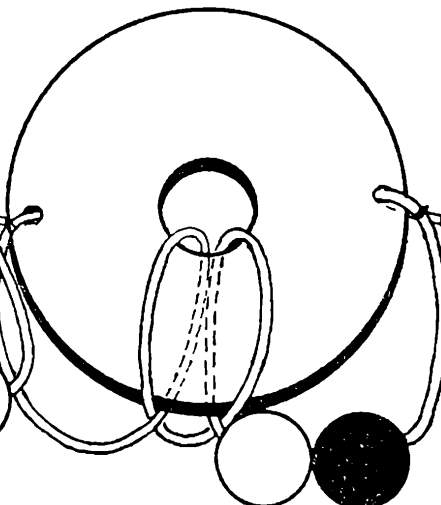
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Profesor Jozef Filip zomrel

Prof. Jozef Filip, jeden z najstarších členov JSMF sa narodil v Rybnej nad Zdobnicou (okres Žamberk) dňa 2. 8. 1900. Vysokoškolské štúdium na Karlovej universite v Prahe ukončil 18. 5. 1923 a nastúpil ako profesor matematiky a deskriptívnej geometrie na gymnázium v Martine. Tu pôsobil až do r. 1955, kedy odchádza na katedru deskriptívnej geometrie SVŠT v Bratislave. Odtiaľ v roku 1974 odchádza do dôchodku. Uprostred mája, presne 59 rokov odo dňa ukončenia vysokej školy nás prof. Filip opúšťa.

Čitateľ Rozhľadov pozná prof. Filipa ako autora 11 článkov uverejnených v časopise a ako autora viacerých veľmi dôkladne prepracovaných učebníc, príručiek či zbierok príkladov z geometrie. Študenti, posluchači a kolegovia zosnulého budú vždy s láskou vzpomínať na rýdzi charakter svojho skromného, priateľského a nezvyčajne usilovného učiteľa a spolupracovníka.

Ján Gatiaľ, Milan Hejný

Tri úlohy z pozostalosti prof. Jozefa Filipa

1. Na polpriamke DC je daný bod $V \neq D$. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB , výškou $CD \perp AB$ a ortocentrom V .
2. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC ($\gamma = 90^\circ$) s výškou CD , keď poznáte dĺžku odvesny AC a dĺžku osi CE uhla DCB .
3. Daný je trojuholník ABC . Na jeho stranách AC a BC zostrojte body X a Y tak, aby bolo $XY \parallel AB$ a $|AX| + |BY| = |AB|$.

Podstatné myšlienky riešení uvedených úloh:

1. Z podobnosti trojuholníkov ADV a CDA vyplýva $|AD| \cdot |DV| = |CD| \cdot |DA|$, čiže $|DA|^2 = |DV| \cdot |DC|$. Zostrojíme ľubovoľnú kružnicu k idúcu bodmi C, V (prípade $C = V$ je ľahký); nech T je dotykový bod dotýčnice vedenej z D ku k . Z mocnosti bodu D ku kružnici k vyplýva $|AD| = |DT|$.
2. Trojuholník AEC je rovnoramenný, lebo $\sphericalangle AEC = \frac{\alpha}{2} + \beta = \sphericalangle ACE$. Poznáme všetky tri strany trojuholníka AEC .
3. Nech S je stred tej kružnice pripísanej trojuholníku ABC , pre ktorú priamka SC pretne úsečku AB vo vnútornom bode Z . Nech XYZ je trojuholník rovnolahlý s trojuholníkom ABC podľa stredu C (koeficient rovnolahlosti je $|CS| : |CZ|$). Potom $XY \parallel AB$ a navyše $|AX| = |AZ|$, $|BY| = |BZ|$, lebo $\sphericalangle AXZ = \sphericalangle PAS = \sphericalangle SAZ = \sphericalangle AZX$.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Trojúhelník T rozdělíme na tři trojúhelníky T_1, T_2, T_3 takým způsobem, že trojúhelník T rozpoltíme pozdĺž těžnice na dvě části a jednu z částí opět rozpoltíme pozdĺž jej těžnice. Aký má byť trojúhelník T , aby jeden z trojúhelníkov T_1, T_2, T_3 bol rovnostranný so stranou dĺžky 1?

(Došlo 17 řešení)

Martin Gavalec

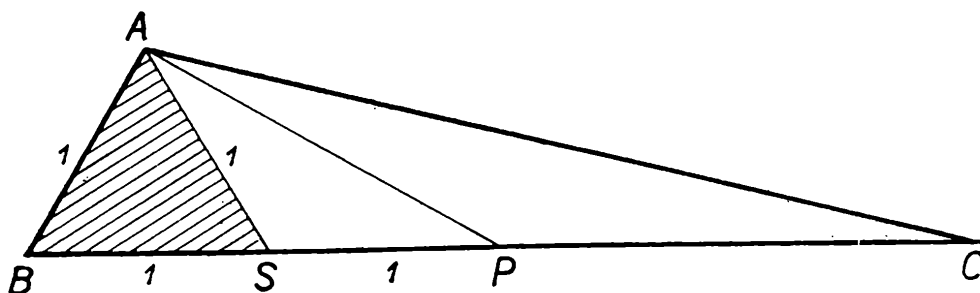
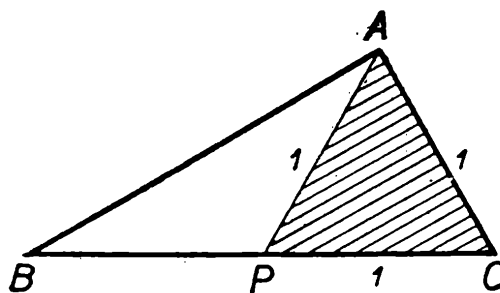
Řešení Petra Eislera, 4. C G Havlíčkův Brod:

Těžnice AP rozdělí daný trojúhelník ABC na dvě části. Jedna z nich, např. ABP má těžnice AS, BQ, PR . Každá z těchto těžnic rozděluje trojúhelník ABP na dva trojúhelníky. Hledáme trojúhelník ABC , který má tu vlastnost, že jeden ze sedmi trojúhelníků

$APC, ASB, ASP, BQA, BQP, PRA, PRB$

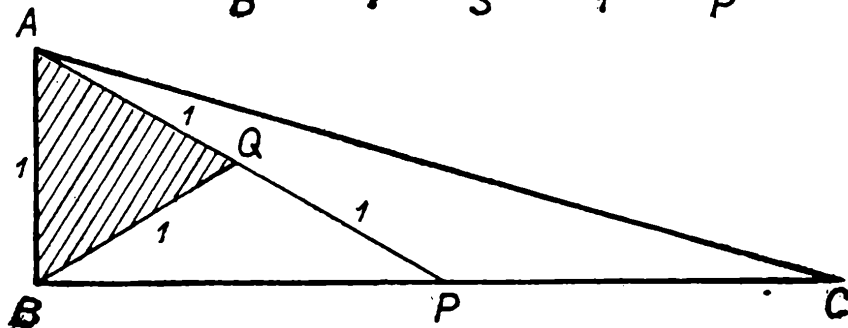
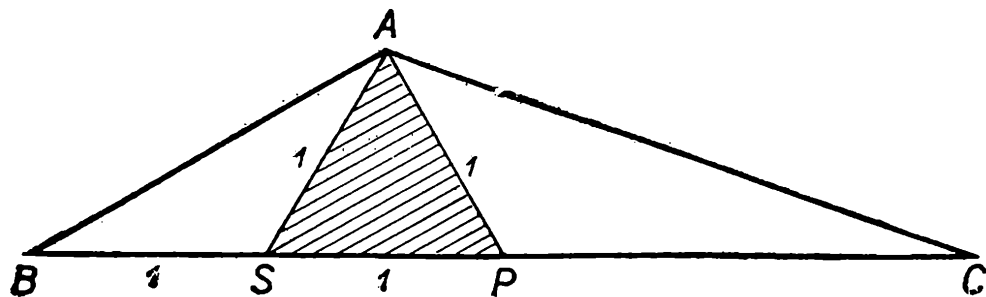
je rovnostranný o straně délky 1. Kdybychom rozdělili daný trojúhelník ABC v souladu s podmínkami úlohy jinak, dostali bychom shodné, pouze jinak označené situace.

Obr. 1

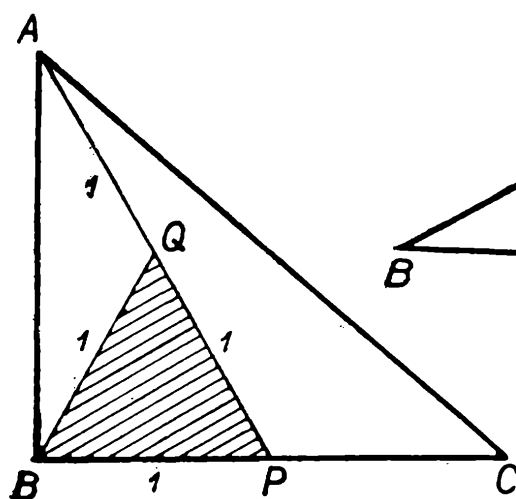


Obr. 2

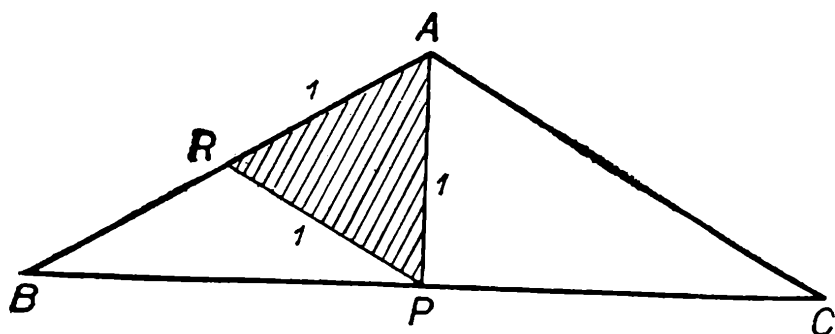
Obr. 3



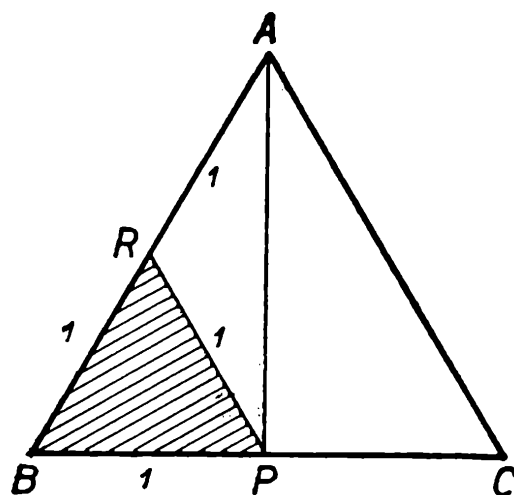
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Jednotlivé možné případy jsou znázorněny na obr. 1 až 7. V každém z nich vypočteme délky stran hledaného trojúhelníku ABC podle kosinové, resp. Pythagorovy věty. Úloze vyhovuje 7 různých trojúhelníků ABC , jejichž strany BC , CA , AB mají tyto velikosti:

$(2, 1, \sqrt{3})$, $(4, \sqrt{13}, 1)$, $(4, \sqrt{7}, \sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}, \sqrt{13}, 1)$, $(2, \sqrt{7}, \sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}, 2, 2)$,
 $(2, 2, 2)$.

2. V trojúhelníku ABC , jehož strany mají velikosti $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, jsou sestaveny osy jeho vnitřních úhlů. Průsečík E

osy úhlu CAB se stranou BC a vrchol A omezují úsečku AE , jejíž velikost je w_a ; velikosti obdobně definovaných úseček BF , CG ležících po řadě na osách úhlů ABC , BCA jsou w_b , w_c . Výšky ke stranám BC , CA , AB mají po řadě velikosti v_a , v_b , v_c . Dokažte, že je

$$\frac{v_a}{bw_b} + \frac{v_b}{cw_c} + \frac{v_c}{aw_a} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \quad (1)$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, jestliže trojúhelník ABC je rovnostranný.

(Došlo 17 řešení)

Stanislav Horák

Upravené řešení Petra Eislera, A. C. G. Havlíčkův Brod:

Osa úhlu CAB trojúhelníku ABC splývá s výškou tohoto trojúhelníku ke straně BC právě tehdy, je-li $|AC| = |AB|$; jediné v tomto případě je $v_a = w_a$, kdežto jinak je $v_a < w_a$. Je tedy vždy

$$v_a \leq w_a, v_b \leq w_b, v_c \leq w_c;$$

všechny tři rovnosti platí právě tehdy, je-li trojúhelník ABC rovnostranný. Z toho plyne, že je

$$\frac{1}{v_b} \geq \frac{1}{w_b}, \frac{1}{v_c} \geq \frac{1}{w_c}, \frac{1}{v_a} \geq \frac{1}{w_a}; \quad (2)$$

všechny tři rovnosti platí právě tehdy, je-li trojúhelník ABC rovnostranný. Obsah trojúhelníku ABC je

$$P = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c;$$

z toho plyne, že je vždy

$$\frac{1}{a} = \frac{v_a}{bw_b}, \frac{1}{b} = \frac{v_b}{cw_c}, \frac{1}{c} = \frac{v_c}{aw_a}. \quad (3)$$

Z (3) a (2) vyplývá, že je

$$\frac{1}{a} \geq \frac{v_a}{bw_b}, \frac{1}{b} \geq \frac{v_b}{cw_c}, \frac{1}{c} \geq \frac{v_c}{aw_a}; \quad (4)$$

všechny tři rovnosti platí právě tehdy, je-li trojúhelník ABC rovnostranný. Ze (4) plyne (1).

3. Přirozené číslo má vlastnost T_z , jestliže jeho zápis v soustavě o základu $z > 1$ začíná a končí stejnou skupinou číslic. (Takové číslo můžeme schematicky zapsat ve tvaru ABA , kde B může být i prázdná skupina číslic; např. čísla 12471, 2 340 123, 221 221 mají vlastnost T_{10} .) Dokažte,

že pro každé $z > 1$ existuje číslo, z něhož vznikne číslo s vlastností T_z , jestliže na konci jeho zápisu doplníme a) libovolnou číslici; b) libovolnou skupinu k číslic; c) libovolnou skupinu složenou nejvýše z k číslic.
(Došlo 9 řešení)

Milan Koman

Podle došlých řešení zpracoval autor tento výklad :

Úkoly a), b), c) tvořily stoupající „kaskádu“ úloh. Řešení jejího posledního stupně, tj. úlohy c), je zároveň řešením úloh a), b), které byly jen pomocné; jejich úkolem bylo ulehčit čtenářům řešení úlohy c). Proto stačilo řešit jen tuto úlohu; takové řešení poslali *P. Tichavský* a *I. Tereščák*.

Všichni úspěšní účastníci soutěže řešili úlohu pomocí některé ze tří konstrukcí, které uvedeme.

Označme $C_1, C_2, \dots, C_m$ všechny jedno až k -členné uspořádané skupiny číslic v soustavě o základu z (jednociferné skupiny jsou číslice dané soustavy). Dokážeme toto tvrzení:

Pro každé $t = 1, 2, \dots, m$ můžeme sestrojit číslo A_t , z něhož vznikne číslo vlastnosti T_z , jestliže na jeho konec připojíme kteroukoli skupinu číslic $C_1, C_2, \dots, C_t$. Pro $n = 1$ je $A_1 = C_1$. Nechť je sestrojeno číslo A_t ($1 \leq t < m$); potom číslo A_{t+1} můžeme sestrojit kteroukoli z těchto konstrukcí:

Konstrukce 1. — Užili ji nebo její varianty *P. Tichavský, J. Sobotka, J. Smejkal, F. Vencl, I. Tereščák*.

$$A_{t+1} = A_t C_{t+1} A_t.$$

Konstrukce 2. — Užili *P. Eisler, P. Lisoněk*:
Nechť je $A_t = abcd \dots n$; potom je

$$A_{t+1} = C_{t+1} a C_{t+1} b C_{t+1} \dots C_{t+1} n C_{t+1}.$$

Konstrukce 3. — Užili ve společném řešení *A. Danysz* a *P. Marták*:

$$A_{t+1} = A_t C_{t+1} A_{t-1} C_t A_{t-2} \dots A_2 C_3 A_1 C_2 A_1.$$

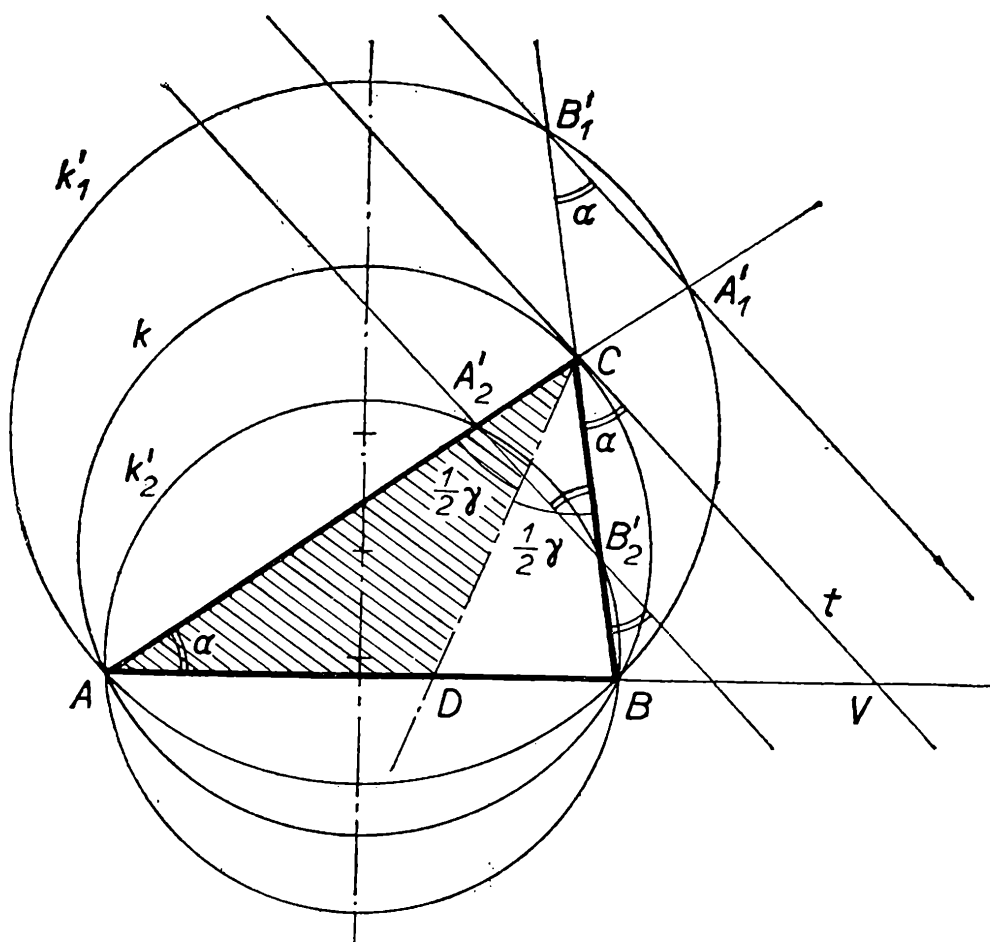
Čtenář si již snadno dokáže, že číslo A_{t+1} má vlastnost T_z . Nejlépe je to vidět z první konstrukce. Z toho plyne správnost uvedeného tvrzení matematickou indukcí.

4. Nechť ABC je trojúhelník, jehož strany AC, BC nejsou shodné; kružnice k , která je tomuto trojúhelníku opsána, má v bodě C tečnu t . Nechť libovolná kružnice k' prochází body A, B , ale neprochází bodem C ; její společné body s přímkami AC, BC jsou body A', B' . Přitom $A' = A$ právě tehdy, jestliže přímka AC je tečnou kružnice k' a $B' = B$ právě tehdy, jestliže přímka BC je tečnou kružnice k' . Dokažte, že platí:

- Emil Kraemer*

*Upravené řešení Vítězslava Doubravy a Jiřího Erharia, III. C G M. Ko-
perníka, Bílovec :*

- $$|\sphericalangle BAC| = \alpha < 90^\circ. \quad (1)$$



Obr. 8

$$|\nabla ACD| = |\nabla BCD| = \frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Úhel BCV je úsekový nad obloukem BC , k němuž náleží obvodový úhel BAC ; je tedy podle (1)

$$|\sphericalangle BCV| = |\sphericalangle BAC| = \alpha. \quad (3)$$

Podle (3) a (2) je tedy

$$|\sphericalangle VCD| = |\sphericalangle BCV| + |\sphericalangle BCD| = \alpha + \frac{\gamma}{2}. \quad (4)$$

Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku užití na trojúhelník ACD , je

$$|\sphericalangle VDC| = \alpha + \frac{\gamma}{2}. \quad (5)$$

Ze (4) a (5) plyne, že trojúhelník VCD je rovnoramenný se základnou CD . Proto osa úhlu CVD je kolmá k přímkce CD .

b) Pokud jde o kružnici k' , která prochází body A, B tak, že neprochází bodem C , mohou nastat (pro $AC > BC$) tyto případy:

1. Bod A' leží na prodloužení úsečky AC za bod C (který tedy je vnitřním bodem kruhu omezeného kružnicí k') a bod B' leží na prodloužení úsečky BC za bod C .
2. Bod A' leží mezi body A, C a bod B' mezi body B, C .
3. Bod A' leží mezi body A, C a bod $B' = B$ (BC je tečnou kružnice k').
4. Bod A' leží mezi body A, C a bod B' leží na prodloužení úsečky BC za bod B .
5. Bod $A' = A$ (AC je tečnou kružnice k') a bod B' leží na prodloužení úsečky BC za bod B .
6. Bod A' leží na prodloužení úsečky AC za bod A a bod B' leží na prodloužení úsečky BC za bod B .

Na obr. 8 je znázorněn případ první (kružnice k'_1) a druhý (kružnice k'_2).

1. Úhly $A'_1B'_1B, A'_1AB$ jsou v kružnici k'_1 obvodové nad týmž obloukem A'_1B a proto shodné; podle (1) je tedy

$$|\sphericalangle A'_1B'_1B| = |\sphericalangle A'_1AB| = \alpha.$$

Protože podle (3) je také $|\sphericalangle BCV| = \alpha$, jsou přímky $A'_1B'_1, t$ rovnoběžné.

2. Čtyřúhelník $ABB'_2A'_2$ je tětiový, takže je

$$|\sphericalangle BB'_2A'_2| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC| = 180^\circ - \alpha;$$

proto úhly vedlejší k úhlu $BB'_2A'_2$ mají velikost α . Podle (3) z toho plyne, že přímky $A'_2B'_2, t$ jsou rovnoběžné.

V ostatních případech je důkaz zcela obdobný.

Fyzika

1. Deskový kondenzátor je nabit na napětí U . Desky kondenzátoru jsou umístěny ve svislé poloze a jejich vzdálenost je d . Kondenzátor je

v tíhovém poli Země ($g \doteq 9,81 \text{ ms}^{-2}$). Doprostřed mezi desky vložíme malé tělísko (kuličku) o hmotnosti m , nabité nábojem Q a pustíme. Určete tvar dráhy tělíska a spočítejte, o kolik „spadne“ kulička (tj. jakou vzdálenost ve svislém směru urazí), než narazí na desku kondenzátoru. Pole uvnitř kondenzátoru předpokládejte jako homogenní a dále předpokládejte, že mezi deskami je vakuum. Řešte nejprve obecně a pak konkrétně za předpokladu, že tělískem je elektron, přičemž je $d = 1 \text{ m}$, $U = 1 \text{ V}$.

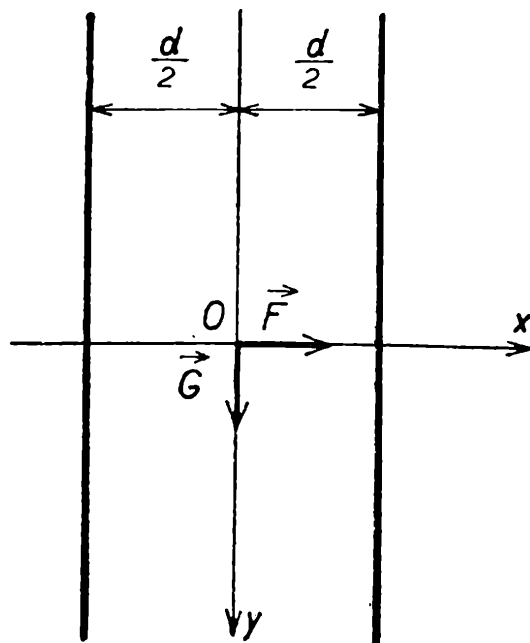
Leoš Dvořák

(Došlo 45 řešení)

Řešení Jiřího Erharta, 3. C G M. Koperníka, Bílovec :

Zvolme soustavu souřadnic podle obr. 1; její počátek je v bodu, kam jsme vložili kuličku. Její pohyb způsobují dvě síly, a to tíhová síla $G = mg$ a elektrická síla

$$F = EQ, \quad (1)$$



Obr. 1

kde E je intenzita homogenního elektrického pole mezi deskami kondenzátoru; přitom je

$$E = \frac{U}{d}. \quad (2)$$

Síly F a G mají směr os x , y . Pohyb kuličky je charakterizován rovnicemi

$$x = \frac{1}{2} at^2, y = \frac{1}{2} gt^2; \quad (3)$$

přitom a je zrychlení udělené silou F . Zde využíváme faktu, že v čase $t = 0$ je kulička v klidu.

Podle druhého pohybového zákona je zrychlení a přímo úměrné síle a nepřímo úměrné hmotnosti, tj. podle (1) a (2)

$$a = \frac{F}{m} = \frac{EQ}{m} = \frac{UQ}{md}.$$

Z toho podle (3) plyne, že je

$$x = \frac{1}{2} \frac{UQ}{dm} t^2, \quad y = \frac{1}{2} g t^2;$$

je tedy

$$\frac{1}{2} t^2 = \frac{dmx}{UQ} = \frac{y}{g}.$$

Z toho plyne, že je

$$y = \frac{gdm}{UQ} x;$$

funkce $y = y(x)$ je tedy lineární čili trajektorii kuličky je přímka. Pro

$$x = \frac{d}{2} \text{ je } y = \frac{gd^2m}{2UQ},$$

takže pro $m_e \doteq 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $Q = e \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $d = 1 \text{ m}$, $U = 1 \text{ V}$ je

$$y \doteq 2,8 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Elektron v konkrétním případě „spadne“ o $y \doteq 2,8 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

2. Na vrcholu dokonale hladké koule o poloměru R leží malé těleso (hmotný bod). Těleso začne klouzat dolů pod účinkem gravitační síly (předpokládejme homogenní gravitační pole o gravitačním zrychlení g). V určité výšce a nad spodním okrajem koule se těleso oddělí od povrchu koule (a bude dále volně padat podle zákonů šikmého vrhu). Určete výšku a .

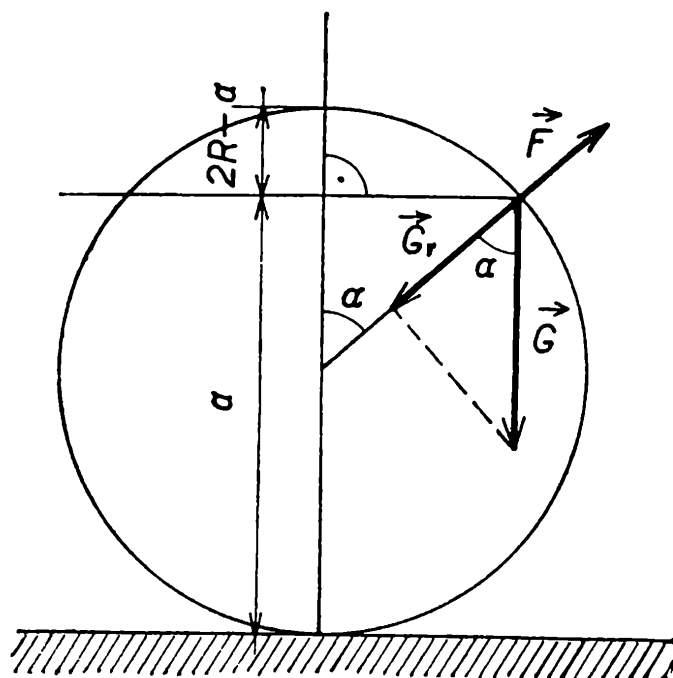
Leoš Dvořák

(Došlo 44 řešení)

Řešení Petra Koláře, 2. A G Brno, Tábořská:

Toto řešení je provedeno v neinerciální soustavě souřadnic (kde uvažujeme odstředivou sílu). Označme m hmotnost tělesa. Při klouzání po povrchu koule působí na těleso tyto dvě síly: síla gravitační $\mathbf{G}$ a síla odstředivá $\mathbf{F}$ (směry a orientace viz obr. 2). Těleso bude setrvávat na povrchu koule, pokud tam bude „přitlačováno“, tj. pokud složka G_r gravitační síly $\mathbf{G}$ do radiálního směru (spojnice tělesa se středem koule) bude větší než odstředivá síla $\mathbf{F}$. Těleso se odtrhne od povrchu koule právě když bude $G_r = F$. Podle obr. 2 je

$$G_r = G \cos \alpha = mg \cos \alpha;$$



Obr. 2

pro odstředivou sílu je

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

kde v je okamžitá rychlost tělesa.

Pro $G_r = F$ je tedy

$$\begin{aligned} mg \cos \alpha &= \frac{mv^2}{R}, \\ \cos \alpha &= \frac{v^2}{Rg}; \end{aligned} \quad (1)$$

z obr. 2 plyne, že je

$$\cos \alpha = \frac{R - (2R - a)}{R} = \frac{a - R}{R}. \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne, že je

$$\begin{aligned} \frac{a - R}{R} &= \frac{v^2}{Rg} \\ v^2 &= g(a - R). \end{aligned} \quad (3)$$

Ze zákona zachování energie vyplývá, že je

$$\begin{aligned} mg(2R - a) &= \frac{mv^2}{2} \\ v^2 &= 2g(2R - a). \end{aligned} \quad (4)$$

Podle (3) a (4) je tedy

$$g(a - R) = 2g(2R - a)$$

$$a = \frac{5}{3} R.$$

Těleso tedy opustí povrch koule ve vzdálenosti $\frac{5}{3}R$ nad spodním okrajem koule.

Úlohy k řešení

V tomto čísle otiskujeme zbývající úlohy z matematiky a všechny úlohy z fyziky i z konstrukční geometrie; první část úloh byla uveřejněna v čísle 2. Soutěže se mohou účastnit jednotlivci i kolektivy z téže třídy, nejvýše však trojčlenné; při případném umístění má však kolektiv nárok na jedinou cenu.

Řešení každé úlohy pište čitelně na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu *uvedte velmi čitelně své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec svou bytovou adresu i se směrovacím číslem*. Každý kolektiv uvede tyto údaje pro každého svého člena. Pište čitelně, přehledně a jasně; obrázky, které připojíte k řešení úlohy, narýsujte pečlivě a čitelně je popište.

Řešení všech úloh zašlete nejpozději do 15. dubna 1983 na adresu redakce Rozhledů, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla. Na obálku svého dopisu připište *Naše soutěž*.

Matematika

7. V rovině rovnostranného trojúhelníka ABC leží bod P , který má od vrcholů A , B , C po řadě vzdálenosti 3 cm, 5 cm, 8 cm. Řešte postupně tyto úlohy:

- Dokažte, že bod P neleží na žádné z přímek AB , BC , CA .
- Udejte otevřený interval (p, q) , do kterého patří velikost a strany trojúhelníku ABC .
- Zjistěte polohu bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC .
- Sestrojte trojúhelník ABC a potom vypočtěte velikost a jeho strany.
- Dokažte, že bod P je bodem kružnice, která je opsána trojúhelníku ABC .

Emil Kraemer

8. Představte si, že máte krychli o hraně délky a cm, kde a je přirozené číslo. Tuto krychli rozřežeme na krychle, z nichž každá má hranu o délce 1 cm. Zjistěte, pro která čísla a se podaří ze získaných jednotkových krychlí slepit krychli, která má hranu délky $2a$ cm a má uvnitř dutinu, jež však nemusí mít tvar krychle.

Jiří Mída

9. Je dán konvexní úhel BAC , který není nulový ani přímý; Q budiž jeho daný vnitřní bod. Sestrojte trojúhelník KLM tak, aby bod K byl bodem polopřímky AB , aby středy O_1, O_2 stran KM, LM náležely přímce AC , aby bylo $|KL| = |AK|$ a bod Q byl těžištěm trojúhelníku KLM .

Jiří Mída

10. Je dáno přirozené číslo p a konečná neprázdná množina M uzavřených ohraničených intervalů na reálné ose, přičemž žádná $(p + 1)$ -tice navzájem různých intervalů z M neobsahuje společný bod. Dokažte, že množinu M lze rozložit na méně než $p + 1$ disjunktních částí tak, že žádné dva navzájem různé intervaly z jedné a téže části rozkladu neobsahují společný bod.

Poznámka: Uzavřeným ohraničeným intervalem rozumíme množinu tvaru $\{x \in R, a \leq x \leq b\}$, kde $a \leq b$ jsou daná reálná čísla.

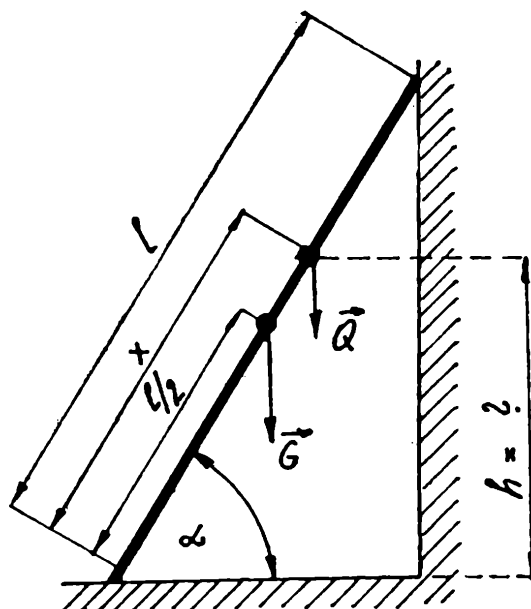
Jaroslav Morávek

11. Je dána množina $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, kde $n > 3$ je celé číslo. Určete, kolika způsoby je možno z množiny M_n vybrat prvky a, b, c, d tak, aby platilo $a < b < c < d, a + d = b + c$.

Jiří Sedláček

12. Jsou dány dva různé body A, B , které leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou p . Sestrojte na přímce p bod X tak, aby velikost konvexního úhlu AXB byla co největší.

Jaroslav Švrček



Obr. 1

Fyzika

1. Žebřík o tíze G a délce l je přistaven ke stěně (obr. 1). Úhel mezi žebříkem a podlahou má velikost α ; koeficient tření mezi žebříkem a pod-

lahou je k_1 , mezi žebříkem a stěnou je k_2 . Na jakou maximální výšku h může vystoupit člověk tíhy Q ?

Zdeněk Janout

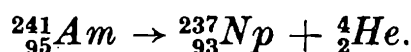
2. Na koncích nitě vedené přes pevnou kladku jsou zavěšena závaží hmotnosti $m_1 = m_2$, která se nepohybují. Jakou hmotnost m musí mít přivažek k jednomu z obou závaží, má-li každé závaží urazit za dobu t dráhu s ? — Řešte obecně a potom pro $m_1 = m_2 = 240$ g, $t = 4$ s, $s = 160$ cm.

Stanislav Nový

3. V uzavřené trubici délky $h = 150$ cm jsou olověné broky. Trubicí převrátíme ze svislého směru o 180° celkem $n = 40$ krát. Vypočtete změnu teploty broků za předpokladu, že z celkové změny vnitřní energie soustavy připadá $\eta = 60$ % na změnu vnitřní energie broků. Měrné teplo olova je $c = 0,13$ kJ $\cdot$ kg $^{-1}$ $\cdot$ K $^{-1}$, tíhové zrychlení volte $g \doteq 10$ m $\cdot$ s $^{-2}$. Řešte nejprve obecně a potom numericky pro zadané hodnoty.

Stanislav Nový

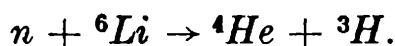
4. Radioaktivní jádro $^{241}_{95}\text{Am}$ se rozpadá takto



Energie rozpadu $Q = 5,48$ MeV. Jakou kinetickou energii bude mít vzniklá alfa částice, bylo-li mateřské jádro před rozpadem v klidu?

Stanislav Pospíšil

5. Velmi pomalý neutron ($T_n = 0,025$ eV) byl zachycen jádrem ^6Li a vyvolal jadernou reakci



Energie této reakce je $Q = 4,8$ MeV. Jaké budou kinetické energie T_α , T_T vzniklých částic alfa a tricia? — *Poznámka:* Energie reakce $Q = (m_n + m_{\text{Li}} - m_\alpha - m_T) c^2$.

Stanislav Pospíšil

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány dvě různoběžné roviny ρ , σ a bod E , který neleží v žádné z nich. Sestrojte krychli $ABCDEFGH$, která má stěnu $ABCD$ v dané rovině ρ a vrchol G (protilehlý k vrcholu A) v rovině σ .

Stanislav Horák

2. Dokažte, že existuje čtyřstěn, jehož všechny stěny jsou shodné rovnoramenné (ne rovnostranné) trojúhelníky. Sestrojte tento čtyřstěn, jestliže jeho dvě protější hrany leží na daných mimoběžkách p , q , které nejsou prostorově kolmé.

Emil Kraemer

3. V průmětně je dán rovnoběžník $A'C'E'G'$, jehož vrcholy jsou rovnoběžnými průměty nesousedních vrcholů A, C, E, G pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$. Narýsujte průmět $A'B'C'D'E'F'G'H'$ tohoto osmiúhelníku.

Emil Kraemer

INFORMACE

Fyzikální fakulta Lomonosovovy univerzity v Moskvě

Dr. MARTA VOLFOVÁ, CSc. — Dr. IVO VOLF, Hradec Králové

Snem mnoha mladých lidí nejen v Sovětském svazu, ale i u nás je studovat fyziku na jedné z největších univerzit světa — na Moskevské státní Lomonosovově univerzitě. Tato vysoká škola byla založena před 225 lety z popudu M. V. Lomonosova. Díky stálé pomoci a pozornosti ÚV KSSS a sovětské vlády dosáhla největšího rozvoje právě během posledních let.

Dnes představuje MGU celkem 16 fakult, na nichž studuje více než 28 tisíc studentů. Mezi učiteli MGU je více než 2,5 tisíce doktorů a kandidátů věd, 126 akademiků a členů-korespondentů AV SSSR, 23 nositelů titulu Hrdina socialistické práce. Univerzita má řadu budov (především na Leninských horách a na Marxově prospektu), v nichž jsou posluchárny, laboratoře, specializované kabinety a pracovny učitelů. Největší vysokoškolská vědecká knihovna v SSSR při MGU obsahuje 7 miliónů titulů, z čehož přes 2 milióny jsou cizojazyčné publikace, fondy dále obsahují periodika a disertace. Posluchači mají k dispozici 53 čítáren a studoven, v nichž je 2750 míst a jež jsou rozmístěny v budovách jednotlivých fakult. Pro studenty byly vybudovány pohodlné koleje, mensy, palác kultury, sportoviště a další zařízení. Na univerzitě jsou fakulty: historie, filozofická, ekonomická, filologická, žurnalistiky, psychologie, právnická, institut pro studium zemí Asie a Afriky, mechanicko-matematická, výpočetní techniky a kybernetiky, fyzikální, chemická, biologická, zemědělská, geologická, geografická.

Rozvoj studia fyziky je spojen se jmény významných vědců *A. G. Stoletova, P. N. Lebeděva*, kteří ve druhé polovině minulého století vytvořili školu moskevských fyziků. V r. 1933 byla založena fyzikální fakulta MGU, na níž pracovali *S. I. Vavilov, L. I. Mandelštam, V. K. Arkadjev* aj.

Dnes je na fyzikální fakultě 34 kateder, které jsou seskupeny do několika oddělení podle zaměření studia. Oddělení experimentální a teoretické fyziky obsahuje katedry: teoretické fyziky, molekulové fyziky a mechaniky, matematiky, obecné fyziky pro fyzikální fakultu MGU, obecné fyziky pro chemickou fakultu, biofyziky, cizích jazyků. Oddělení fyziky pevné fáze se skládá z kateder: fyziky pevné fáze, fyziky polovodičů, fyziky krystalů, magnetismu, fyziky nízkých teplot, obecné fyziky pro přírodovědné fakulty MGU, kvantové teorie. Oddělení jaderné fyziky se skládá z 8 kateder a má dvě filiálky (jedna je při Spojeném ústavu jaderného výzkumu v Dubně, druhá v Institutu fyziky vysokých energií AV SSSR v Protvinu, blízko Serpuchova). Toto oddělení používá laboratoří a vědeckého zařízení Vědeckovýzkumného ústavu jaderné fyziky při MGU. Oddělení se skládá z kateder: atomové fyziky a elektronových jevů, kvantové statistiky a fyziky Vesmíru, vzájemného jaderného působení a urychlovačů, elementárních částic, experimentální jaderné fyziky, fyziky vysokých energií. Oddělení radiofyziky a elektroniky se skládá z kateder: fyziky kmitů, akustiky, radiofyziky vysokých frekvencí, kvantové radiofyziky, elektroniky, obecné fyziky a vlnových jevů. Oddělení geofyziky má katedry: fyziky Země, fyziky atmosféry, fyziky moře a vod na souši. Oddělení astronomie používá zařízení státního astronomického institutu, obsahuje katedry hvězdné astronomie a astrometrie, nebeské mechaniky a gravimetrie, astrofyziky.

Na fakultě pracují 4 nositelé titulu Hrdina socialistické práce, 12 laureátů Leninových a státních cen, 12 akademiků, 7 členů-korespondentů AV SSSR, mezi nimiž poznáváme některé jména známá z učebnic a vědeckých publikací: *Zeldovič*, *Keldyš*, *Lifšic*, *Pontekorvo*, *Frank*, *Šklovskij*; dále je na fakultě 60 vysokoškolských profesorů.

Studenti po absolvování fyzikální fakulty odcházejí pracovat do institutů Akademie věd SSSR, jako aspiranti nebo asistenti na jednotlivé vysoké školy SSSR, do oborových vědeckovýzkumných ústavů i do laboratoří různých závodů. Doba studia pro všechny obory je jednotná — 5,5 roku. V rámci postgraduálního studia mohou vysokoškolsky vzdělané osoby studovat kursy Fyzika a technika magnetických pamětí, Teorie a technika laserového spojení (délka 18 měsíců bez přerušování zaměstnání).

Podmínkou přijetí ke studiu na fyzikální fakultu je úspěšné vykonání přijímací zkoušky, která se koná: z matematiky písemně i ústně, z fyziky je ústní zkouška, z ruského jazyka a literatury je slohová práce.

Slohová práce obsahuje většinou výklad na dané téma, přičemž student má nejen prokázat dobrou znalost gramatiky a stylistickou obratnost, ale hodnotí se i míra znalosti literárního učiva.

Z matematiky se jednak řeší úlohy v písemné části zkoušky, jednak zájemce o studium musí absolvovat ústní část. Studentům jsou předem přesně vymezeny matematické pojmy a fakta, základní věty a dovednosti, jež musejí znát ze středoškolské matematiky.

Z fyziky je třeba, aby studenti pochopili podstatu vybraných fyzikálních dějů, dovedli řešit úlohy, používat jednotek soustavy SI. Opět jsou přesně vymezeny tematické celky, jež jsou obsahem zkoušky.

Uvedeme texty dvou variant písemné přijímací zkoušky z matematiky na fyzikální fakultě. Varianty pocházejí z r. 1979.

I. varianta :

1. Řešte rovnici $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$.
2. Určete úhel vektorů: $\mathbf{a} = (6, -2, -3)$, $\mathbf{b} = (5, 0, 0)$.
3. Řešte soustavu rovnic $3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}$, $y - x = 2$.
4. Určete souřadnice průsečíků tečen grafu funkce $y = \frac{x+1}{x-3}$ s osou x ; tečny svírají s osou x úhel 135° .
5. Do kosočtverce $ABCD$, pro který je $|AB| = a$, $|\sphericalangle BAD| = a$, je vepsána kružnice. Tečna k této kružnici protíná stranu AB v bodě M , stranu AD v bodě N . Je známo, že $|MN| = 2a$. Určete velikost úseček MB , ND .
6. V rovině τ je dán rovnoramenný trojúhelník ABC ; $|AB| = |BC| = d$, $|AC| = 2a$. Koule o poloměru r se dotýká roviny τ v bodě B . Dvě mimoběžné přímky procházejí body A , C a dotýkají se koule. Úhel každé z nich s rovinou τ je α . Určete vzdálenost mimoběžek.

II. varianta :

1. Řešte rovnici $\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{2} = 1$.
2. Určete úhel vektorů $\mathbf{b} = (2, -4, 5)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 0)$.
3. Řešte soustavu rovnic $\frac{2}{5^x} = 200$, $x + y = 1$.
4. Určete souřadnice průsečíků souřadnicových os s tečnami grafu funkce $y = \frac{2x-3}{x+3}$, pro něž směrnice je rovna 9.
5. Je dán rovnoramenný trojúhelník KLM , v němž platí $|KL| = |LM| = d$, velikost úhlu KLM označíme β . Kružnice se středem na straně KM se dotýká stran KL a LM . Tečna k této kružnici protíná stranu KL v bodě P , stranu LM v bodě Q . Je známo, že obsah trojúhelníka PLQ je roven S . Určete velikost úsečky PQ .
6. Střed O koule o poloměru r je v rovině τ . V této rovině zvolíme body M , N ($|OM| = |ON| = m > r$, $|MN| = 2b$, $b \neq m$). Body M , N vedeme dvě přímky, které se dotýkají koule, ale neleží v téže rovině. Body dotyku leží v jednom poloprostoru, vymezeném rovinou τ . Úhel každé z těchto přímek s rovinou τ je β . Určete vzdálenost těchto mimoběžek.



Počítání na linách

Z počítání na abaku se později vyvinulo počítání na linách, nazvané tak podle svého základního plánu, jímž byl systém řádků (*lin*) odpovídajících desítkovým řádům. I tuto početní praktiku tzv. abacistů postupně vytlačovalo písemné počítání s indickoarabskými číslicemi, které se v Evropě začalo rozšiřovat od 13. století a nazývalo se algoritmickým počítáním. Až do 16. století však zůstávaly spory mezi abacisty a algoritmiky, konaly se také četné soutěže v rychlosti počítání.

Jednu takovou soutěž ukazuje náš obrázek, který je otištěn v díle „The Grovnd of Artes“ anglického matematika *R. Record*a (1510—1558), jež bylo velmi populární a zahrnovalo, jak bylo v 16. století zvykem, počítání s indickoarabskými číslicemi i na linách. Ostatně i první česky psaná a tištěná početnice z r. 1530, jejímž autorem byl *Ondřej Šimkovic* zvaný *Klatovský* (1504—1551), se nazývá „Nové knížky vo počtech na cifry a na liny, přitom některé velmi užitečné regule a exempla, mince rozličné podle běhu kupeckého krátce a užitečně sebraná“.

Při počítání na linách jsou hodnoty lin uspořádány směrem od počtáře se vzrůstajícími desítkovými řády, přitom pás mezi linami má hodnotu pětinasobku své spodní liny. To znamená, že dvě početní známky na lině řádu deset vyznačují dvacet; přidáme-li do pásu nad nimi ještě jednu známku, pak celý záznam vyjadřuje sedmdesát. Počítání spočívalo v přidávání, ubírání a přesouvání početních známek. Dochovaly se celé stoly, na jejichž desce byla soustava lin, a také ubrusy, na nichž byla síť lin vytkána i s označeními hodnot řádů.

Z pripravovaných kníh

Je dobré vedieť, aká knižka z oblasti matematického záujmu stredoškolačka sa objaví na knižnom trhu v ďalšom období. Klub čtenářů technické literatury je možnosťou aj pre záujemcov sveta matematického. Posúďte sami, či vás vybrané tituly roku 1982 nezaujmu:

Adámek J.: Matematické struktúry a kategorie
 Bizám, G. — Herczeg, J.: Zaujímavá logika
 Horák, P. — Niepel, L.: Prehľad matematiky
 Vajda, I.: O informácii a štatistike
 Bečvář, J.: Seznamujeme se s množinami
 Csákány, A.: Co umí kapesní kalkulátor

Obráťte sa na expedičné predajne KČTL, o ktorých sa dozviete v predajniach Kniha, n. p. a Slovenská kniha, n. p.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kaškova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1981.

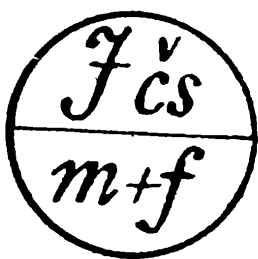
ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

(4)

ROČNÍK 61, 1982/83
PROSINEC

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, doc. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondrej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

J. Kadleček - J. Troják: Znázornění bi- nárních operací .	137
E. Calda: Od gravitačního kolapsu k pravoúhlým trojúhelníkům	142
E. Veselá: Dovoluje nám moderní fyzika vše?	145
J. Kotyk: Leonardo da Vinci .	152
J. Šedivý: Sto let od důkazu transcen- dentnosti čísla π	154
K. Krausová: O zákonitostech cesty k velkým fyzikálním objevům .	157
V. Malíšek: Několik jubileí velkých fyziků	162
Přemýšlíme, řešíme	164
Naše soutěž	166
Olympiády a SOČ	181
Z nových knih .	184
Pohledy do dějin .	3. str. obálky

Znázornění binárních operací

RNDr. JIŘÍ KADLEČEK, CSc., RNDr. JAN TROJÁK, CSc., MFF UK Praha

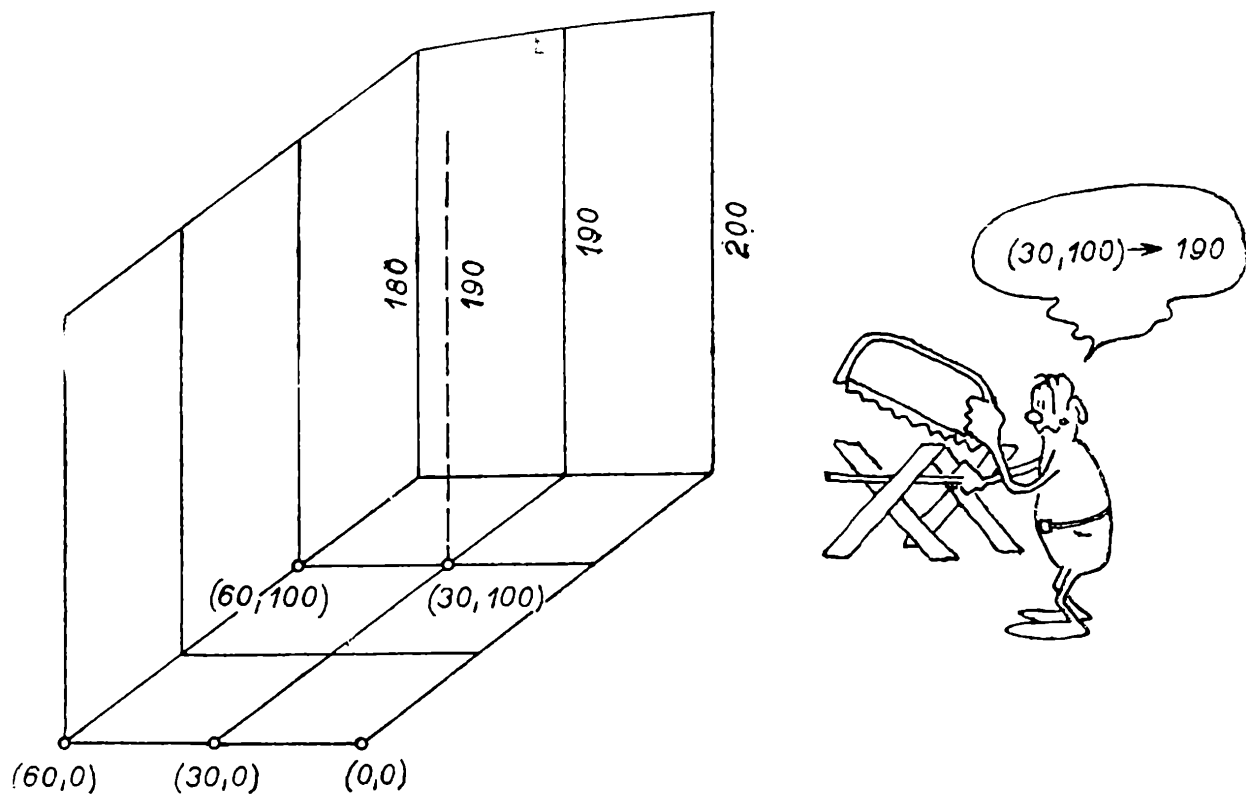
Co je operace? Špatně položená otázka vyvolá v někom obraz chirurgů (možná přímo dr. Štrosmajera), v jiném zatrnutí s představou války a zbytečného utrpení, eventuálně navodí krimi či sci-fi atmosféru, leč my máme na mysli operaci v matematice. Teď jistě každého napadnou příklady nejznámějších operací, tedy patrně sčítání, odčítání, násobení nebo dělení. Všechny uvedené operace mají jedno společné: uspořádané dvojici vhodných prvků přiřazují prvek třetí. Protože předpona bi- obvykle upozorňuje na přítomnost dvou elementů, nazýváme takové operace binární. Obecněji můžeme říci, že je-li F libovolná množina, pak binární operace v množině F je každé zobrazení z kartézského součinu $F \times F$ do F ; je-li navíc operace definována pro každou uspořádanou dvojici z $F \times F$, hovoříme o binární operaci na množině F . Příkladem takové operace je sčítání na množině reálných čísel; je to zobrazení $R \times R$ na R , které každé uspořádané dvojici reálných čísel přiřadí jejich součet. Zatímco v tomto případě lze slovo „uspořádané“ vynechat (pro sčítání reálných čísel platí komutativní zákon), nelze je opomenout již v případě odčítání na R , neboť jistě $7 - 2 \neq 2 - 7$, tj. v symbolice uspořádaných dvojic je $(7, 2) \neq (2, 7)$. Dělení je příkladem binární operace v R , která není operací na R , neboť obraz uspořádané dvojice $(t, 0)$, tj. výraz $t : 0$, není definován.

Příklad 1. Zvolme nyní množinu $F = \{0, 1, 2\}$ a vytvořme příklad binární operace na této konečné množině. Přehledný je zápis pomocí tabulky: označíme-li operaci kolečkem $\circ$, pak $x \circ y = z$ znamená, že uspořádané dvojici $(x, y) \in F \times F$ je přiřazen prvek $z \in F$, který nalezneme jako průsečík řádku označeného x se sloupcem nadepsaným y :

	0	1	2
0	0	2	1
1	1	2	0
2	2	1	2

tedy např. $1 \circ 2 = 0$, $2 \circ 1 = 1$.

Pokusíme se nyní o geometrickou interpretaci pojmu binární operace. Jeden způsob vychází ze znalosti (kartézské) soustavy souřadnic v troj-



Obr. 1

rozměrném (euklidovském) prostoru — skutečnost, že $(x, y) \rightarrow z$ zobrazíme bodem $[x, y, z]$; obrazem binární operace je pak množina bodů v trojrozměrném prostoru (prostorový graf). Tato interpretace binární operace je takřka součástí každodenního života, např.

0	0	50	100	150
0	200	200	200	200
30	190	190	190	190
60	180	180	180	180

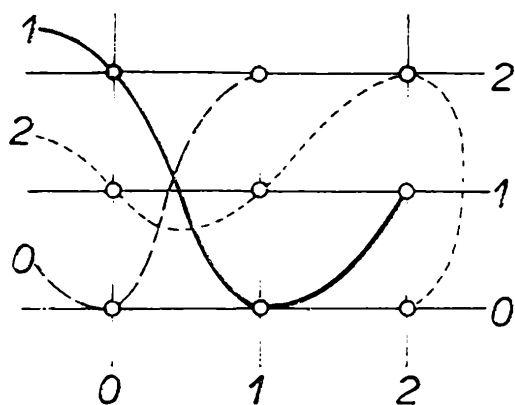
je nejen tabulka binární operace v množině kladných reálných čísel, ale i součást návodu na stavbu králíkárný (obr. 1).

Analogická, i když trochu složitější, je binární relace užívaná např. při stavbě dálničního uzlu, kde každému bodu $[x, y]$ ve vhodné základní rovině přiřadíme výšku nad touto pomyslnou rovinou.

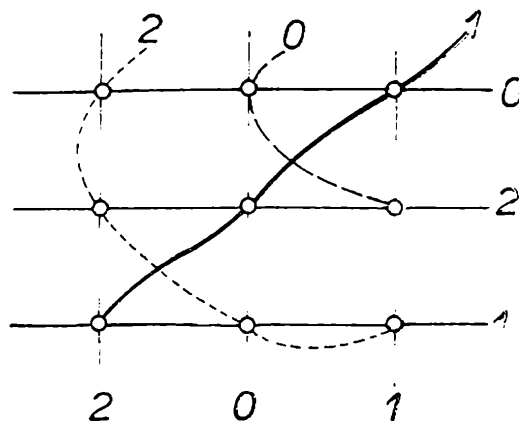
Úplně jiný geometrický model binární operace na množině F dostaneme, přiřadíme-li v (euklidovské) rovině každému prvku z množiny F jednak právě jednu svislou přímku, a jednak právě jednu z vodorovných přímek. Binární operaci na F zobrazíme pro všechna $x, y, z \in F$ takto:

$$x \circ y = z$$

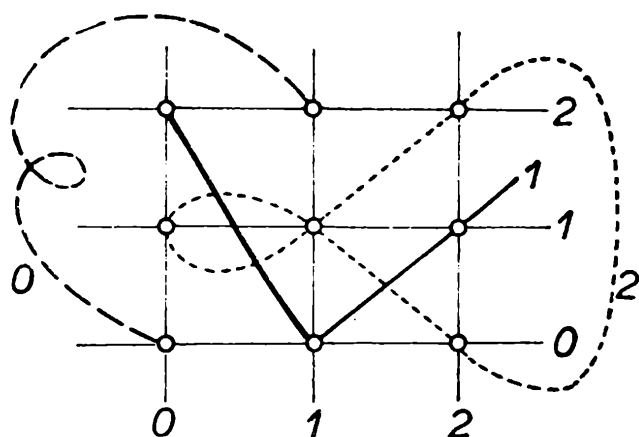
znamená, že průsečíkem svislé přímky označené x a vodorovné přímky, které je přiřazen prvek y , prochází čára, přiřazená prvku z a to tak, aby taková označená čára byla pro každý prvek $z \in F$ právě jedna. Protože ostatní body roviny nemají v našem modelu žádný význam, rozumíme



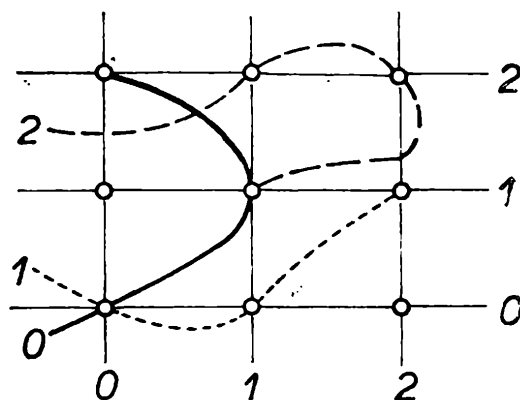
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

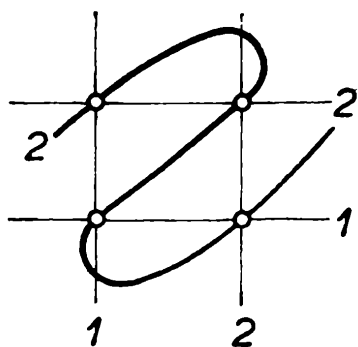


Obr. 5

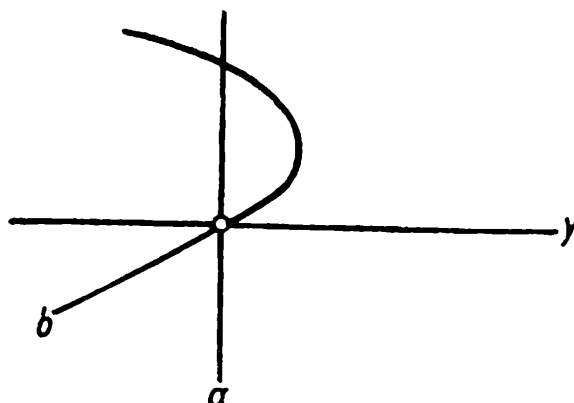
pod pojmem bod resp. průsečík v dalším textu vždy jen průsečík označených přímek.

Zobrazme uvedeným způsobem příklad 1, popsany tabulkou, např. obrázkem 2. Jednotlivé čáry jsou pro zvýraznění kresleny různým způsobem; takové zobrazení není samozřejmě jediné, neboť volba přímek k prvkům množiny a do značné míry i tvar čar závisí na naší libovůli. Jiné zobrazení téhož příkladu je na obrázcích 3 a 4. Protože každým z průsečíků prochází některá z označených čar, zobrazují předchozí obrázky binární operaci na množině F . Naopak obrázek 5 není modelem žádné binární operace, protože např. k průsečíku přímek $(1, 1)$ tj. k výrazu $1 \circ 1$, jsou přiřazeny dvě různé hodnoty z , a to $1 \circ 1 = 0$ i $1 \circ 1 = 2$. Naproti tomu obrázek 6 je modelem binární operace na množině $\{1, 2\}$ a to takové, že platí $x \circ y = 2$ pro všechna $x, y \in \{1, 2\}$.^{1/}

^{1/} Uvedený model připomíná vám známé znázornění např. nadmořské výšky vrstevnicemi: „Spojte čarou označenou číslem 3 všechny body o nadmořské výšce 3 m!“ Analogie vynikne, je-li F nekonečná, např. dokážete zobrazit část sčítání na množině reálných čísel?



Obr. 6



Obr. 7

Přes všechnu libovůli vypovídá uvedený geometrický model dosti obšírně o dané binární operaci. Jde-li o binární operaci na množině, potom na každé svislé i vodorovné označené přímce je též počet průsečíků a každým průsečíkem zvolených přímek prochází právě jedna označená čára, viz obr. 2, 3, 4, 6; alespoň jedna kvůli předložce na, nejvýše jedna, protože binární operace je zobrazení.

Úloha 1. Formulujte poslední odstavec pro binární operaci v množině!

Pokusme se pomocí modelu odpovědět na otázku, zda a kdy existuje řešení rovnice

$$(*) \quad a \circ y = b.$$

Z obrázku 7 je zřejmé, že řešení existuje právě tehdy, když čára b protne svislou přímku a v alespoň jednom průsečíku; označení vodorovné přímky, procházející tímto průsečíkem, je hledaným řešením. To v tabulce znamená, že číslo b se vyskytuje alespoň jednou v řádku označeném číslem a . V příkladě 1 nemá proto řešení rovnice $2 \circ y = 0$, jak se snadno přesvědčíte; v operaci z obrázku 6 nemá řešení žádná rovnice $(*)$ s pravou stranou 1.

Úloha 2. Vyřešte v příkladě 1 rovnici $1 \circ y = 2$!

Úloha 3. Jak poznáme, že existuje právě jedno řešení uvedené rovnice $a \circ y = b$?

Úloha 4. Nalezněte v příkladě 1 řešení rovnice $2 \circ y = 2$!

Víme-li, že rovnice $a \circ y = b$ má v dané binární operaci třeba i jediné řešení, nevyplývá z toho pro existenci řešení rovnice $x \circ a = b$ téměř nic. Rovnice $x \circ a = b$ má samozřejmě řešení právě tehdy, když čára b protne vodorovnou přímku a alespoň v jednom bodě — označení tudý procházející svislé přímky je pak řešením; je-li tento bod jediný, je i řešení jediné.

Úloha 5. Nalezněte příklad binární operace, ve které má rovnice $a \circ y = b$ pro každou dvojici prvků $a, b \in F$ právě jedno řešení, ale rovnice $x \circ c = d$

- a) má pro některá $c, d \in F$ více řešení,
b) nemá pro některé $c, d \in F$ žádné řešení.

Pokud vás téma zaujalo, nahlédněte do knížky *J. Šedivý: O modernizaci školské matematiky*, SPN Praha 1969, str. 199—209, kde se dozvíte více o binárních operacích, a do knihy *V. D. Bělousov: Algebraičeskije seti i kvazigrupy (rusky)*, Kišiněv 1971, kde naleznete obecnější geometrický pohled.

Řešení úloh:

1. Z celého odstavce zůstane v platnosti jen tvrzení, že každým průsečíkem prochází nejvýše jedna přímka.
2. $y = 1$.
3. Čára b musí protnout svislou přímku a v právě jednom průsečíku, tj. číslo b se vyskytne v řádku a právě jednou.
4. Existují dvě řešení, a to $y = 0$ a $y = 2$ (čára 2 protne svislou přímku 2 ve dvou místech).
5. a) Například binární operace na množině $F = \{1, 2\}$ daná tabulkou

0	1	2
1	1	2
2	1	2

má pro $x \circ 2 = 2$ dvě řešení.

5. b) V binární operaci v množině $F = \{1, 2, 3\}$ definované tabulkou

0	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2

nemá např. rovnice $x \circ 2 = 3$ žádné řešení.

Nakreslete si obrázky!

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle §6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Od gravitačního kolapsu k pravoúhlým trojúhelníkům

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

Nezřídka se stává, že během řešení jednoho problému je objeven a vyřešen problém zcela jiný. K podobné situaci došlo v nedávných dnech ve fyzikální laboratoři profesora Ypsilonu, když členové jeho zájmového kroužku experimentálně určovali Schwarzschildův poloměr černých děr, vzniklých gravitačním kolapsem velmi tenkých desek tvaru pravoúhlého trojúhelníka s celočíselnými rozměry. Velikosti a , b odvěsen i velikost c přepony těchto pravoúhlých trojúhelníků jsou uvedeny v následující přehledné tabulce:

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	5	12	13	7	24	25	3	40	41
8	15	17	11	60	61	12	35	37	20	21	29

Profesor Ypsilon vyzval přítomné experimentátory k tomu, aby si povšimli, které vlastnosti jsou společné všem těmto trojicím přirozených čísel, a pokusili se rozhodnout, zda nalezené vlastnosti mají všechny trojice přirozených čísel udávajících velikosti stran pravoúhlého trojúhelníka. (Chcete-li si ověřit, zda byste mohli být v kroužku profesora Ypsilonu, nečtěte dále, dokud alespoň dvě takovéto vlastnosti neobjevíte!)

Hypotéza žáka Pěnkavy, který z uvedených osmi trojic usoudil, že neexistuje pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými rozměry, jehož velikosti odvěsen jsou sudá čísla, byla přítomnými vyvrácena okamžitě: stačí vynásobit každý člen libovolné trojice kladným sudým číslem a dostaneme pravoúhlý trojúhelník, jehož velikosti odvěsen jsou sudá čísla; je to např. trojúhelník s odvěsnami $a = 6$, $b = 8$ a přeponou $c = 10$ nebo trojúhelník se stranami $a = 20$, $b = 48$, $c = 52$ atd.

Nepodařilo se naproti tomu vyvrátit protipříkladem hypotézu Slavíkovu: neexistuje pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými rozměry, jehož velikosti odvěsen jsou čísla lichá. Podaří se nám ji dokázat?

Předpokládejme, že existuje pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými rozměry, jehož velikosti a , b odvěsen jsou lichá čísla:

$$a = 2k + 1, b = 2m + 1, \text{ kde } k, m \in \mathbb{N}.$$

Pro součet druhých mocnin velikostí odvěsen tohoto trojúhelníka dostáváme

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4(k^2 + m^2 + k + m) + 2,$$

což znamená, že při dělení čísla $a^2 + b^2$ čtyřmi je nejmenší nezáporný zbytek rovný číslu 2. Stejný zbytek by měla dávat i druhá mocnina velikosti c přepony tohoto trojúhelníka, neboť je $c^2 = a^2 + b^2$. Dělíme-li však čtyřmi druhou mocninu libovolného přirozeného čísla, je nejmenší nezáporný zbytek r buď roven nule nebo jedné, jak je patrné z následujících úprav, v nichž je k libovolné přirozené číslo:

je-li $c = 2k$, je $c^2 = 4k^2$, takže $r = 0$;

je-li $c = 2k + 1$, je $c^2 = 4(k^2 + k) + 1$, takže $r = 1$.

Odvodili jsme tak spor, neboť číslo c^2 nemůže při dělení čtyřmi dát nejmenší nezáporný zbytek rovný číslu dvě a zároveň nula nebo jedna. Slavíkova hypotéza tedy platí.

Sloučení dalších hypotéz představuje tzv. věta Zetova, kterou vyslovil Ypsilonův nejnadanější žák A. Zet těsně předtím, než omylem překročil hranici Schwarzschildova poloměru jedné ze získaných černých děr a nenávratně zmizel v prostoročasu zhroucené desky. Jeho případ znovu dokazuje, jak je důležité dbát na bezpečnostní předpisy i při práci v laboratoři!

Větou Zetovou se nazývá toto tvrzení: V každém pravoúhlém trojúhelníku s celočíselnými rozměry je velikost aspoň jedné strany dělitelná třemi, velikost aspoň jedné strany dělitelná čtyřmi a velikost aspoň jedné strany dělitelná pěti.

Pro důkaz této věty předpokládejme, že existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož velikosti a , b odvěsen i velikost c přepony jsou přirozená čísla taková, že žádné z nich není dělitelné ani třemi, ani čtyřmi, ani pěti.

Ukážeme nejprve, že vede ke sporu předpoklad, že žádné z čísel a , b , c není dělitelné třemi. Všimněme si, že druhá mocnina každého přirozeného čísla d , které není násobkem tří, dává při dělení třemi nejmenší nezáporný zbytek rovný jedné:

je-li $d = 3k + 1$, je $d^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, $k \in N$;

je-li $d = 3k + 2$, je $d^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, $k \in N$.

Je tedy nejmenší nezáporný zbytek vzniklý při dělení čísla $a^2 + b^2$ číslem tři roven dvěma, zatímco při dělení čísla c^2 je tento zbytek roven jedné. Vzhledem k tomu, že je $c^2 = a^2 + b^2$, dostáváme tak spor s naším předpokladem, takže aspoň jedno z čísel a , b , c je dělitelné třemi.

Ukážeme dále, že vede ke sporu i předpoklad, že žádné z čísel a , b , c není dělitelné pěti. Uvědomme si, že druhá mocnina každého přirozeného čísla d , které není násobkem pěti, dává při dělení pěti nejmenší nezá-

porný zbytek rovný jedné nebo čtyřem, jak je patrné z následujících úprav, v nichž je $k, m \in N$:

$$\text{je-li } d = 5k + 1, \text{ je } d^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5m + 1;$$

$$\text{je-li } d = 5k + 2, \text{ je } d^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5m + 4;$$

$$\text{je-li } d = 5k + 3, \text{ je } d^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5m + 4;$$

$$\text{je-li } d = 5k + 4, \text{ je } d^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5m + 1.$$

Při dělení čísla $a^2 + b^2$ pěti tedy dostáváme nejmenší nezáporný zbytek buď rovný dvěma (je-li např. $a^2 = 5m + 1, b^2 = 5n + 1$) nebo rovný třem (je-li např. $a^2 = 5m + 4, b^2 = 5n + 4$) nebo rovný nule (je-li např. $a^2 = 5m + 4, b^2 = 5n + 1$). Protože však při dělení čísla c^2 pěti je tento zbytek rovný buď jedné nebo čtyřem a protože je $c^2 = a^2 + b^2$, máme opět spor, takže aspoň jedno z čísel a, b, c je dělitelné pěti.

Ukážeme závěrem, že i předpoklad, že žádné z čísel a, b, c není dělitelné čtyřmi, vede ke sporu. Protože neexistuje pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými rozměry, jehož velikosti odvěsen a, b jsou lichá čísla (viz výše dokázanou hypotézu Slavíkovu), máme pro tato čísla právě dvě možnosti: buď jsou obě sudá nebo je sudé právě jedno z nich.

Nechť jsou nejprve obě sudá (a nejsou přitom násobkem čtyř), tj. $a = 4k + 2, b = 4m + 2$, kde $k, m \in N$. Je tedy sudé i číslo $a^2 + b^2 = c^2$, což znamená, že je sudé i číslo c , tj. $c = 2n, n \in N$. Dostáváme tak:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (4k + 2)^2 + (4m + 2)^2 = 8(2k^2 + 2m^2 + 2k + 2m + 1) = 4n^2,$$

takže je $n^2 = 2(2k^2 + 2m^2 + 2k + 2m + 1)$.

To však znamená, že číslo n^2 a tedy i číslo n je sudé, a odtud vyplývá, že číslo $c = 2n$ je dělitelné čtyřmi. Odvodili jsme tak spor s předpokladem, že žádné z čísel a, b, c není dělitelné čtyřmi.

Nechť jedno z čísel a, b je sudé a jedno liché, třeba $a = 2k, b = 2m + 1$, kde $k, m \in N$. Je tedy liché i číslo $c^2 = a^2 + b^2$, takže i c je liché číslo, tj. $c = 2n + 1, n \in N$. Dostáváme tak:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b) = 4(m + n + 1)(n - m) = 8k',$$

$$k' \in N,$$

neboť aspoň jedno z čísel $m + n + 1, n - m$ je sudé. Z rovností

$$a^2 = 4k^2 = 8k'$$

vyplývá, že k^2 je sudé číslo, takže i k je číslo sudé. Odtud však plyne, že číslo $a = 2k$ je dělitelné čtyřmi. Tímto posledním krokem je věta Zetova dokázána. Jistě jste si povšimli nezanedbatelného přínosu této věty k aplikacím látky o dělitelnosti i k procvičení důkazu sporem.

Úplně na závěr si můžete zdůvodnit, že Zetovu větu lze též formulovat takto: Jsou-li velikosti a, b, c stran libovolného pravoúhlého trojúhelníka přirozená čísla, pak součin abc je dělitelný číslem šedesát.

Dovoluje nám moderní fyzika vše?

Ing. EVA VESELÁ, ČVUT — FSI

Nejdříve si musíme objasnit, co se vlastně touto otázkou rozumí. Již z její formulace vyplývá, že všechno asi dovoleno není, že zřejmě existují určitá omezení.

Pochopitelně budeme uvažovat pouze taková omezení, která nevyplývají z platnosti žádného zákona klasické fyziky, tj. ze zákonů, které se na středních školách učíte. Ty případy a taková omezení, která by byla v rozporu s těmito zákony, které byly nesčíslněkrát v běžném životě ověřeny, nás jistě nebudou zajímat, těch bychom mohli vymyslet velice mnoho. Tak například voda v řece nikdy nepoteče sama obráceným směrem, do kopce; tepelná energie nikdy samovolně nepřejde z chladnějšího tělesa na těleso teplejší, které by se ještě více na úkor energie chladnějšího tělesa ohřálo; účinnost žádného zařízení nikdy nebude rovna nebo větší než 100 %; částice nabité stejným elektrickým nábojem se nikdy nebudou přitahovat, ale vždy se budou odpuzovat atd.

Samozřejmě neuvažujeme také ty případy, které sice neodporují žádným zákonům fyziky, ale zatím nejsou technicky nebo technologicky zvládnutelné (ještě se například nepodařilo uskutečnit řízenou termonukleární reakci k získání energie). Nezabýváme se také takovými případy, které by sice bylo pravděpodobně možno vyřešit, ale nikdo nemá zájem na jejich realizaci z důvodů příliš vysokých finančních nákladů (uměle připravit zlato by bylo mnohokrát dražší než jeho těžba).

Začátek tohoto století znamenal i začátek nových směrů ve fyzice a nástup toho, co dnes nazýváme moderní fyzikou. 14. prosince 1900 vystoupil známý německý fyzik *Max Planck* s kvantovou teorií elektromagnetického záření. Tato teorie dala základ novému směru ve fyzice, který trvá až do dnešních dnů — kvantové fyzice. A roku 1905 uveřejnil další význačný německý fyzik *Albert Einstein* speciální teorii relativity. Oba tyto směry přinesly změnu některých názorů na základní fyzikální otázky. Umožnily zjistit nové zákonitosti, přesnější představy o některých jevech, jejich hlubší porozumění a objevení nových souvislostí. Na druhé straně však znamenaly i poznání jistých omezení, které ze žádných zákonů klasické fyziky nevyplývaly, a nebylo je tedy možno ani předvídat, ani očekávat.

Případy, kdy jsme zákony moderní fyziky omezováni, si můžeme rozdělit do tří skupin:

I. *Některé fyzikální veličiny mají limitní velikost* (tzn. nejvyšší či nejnižší možnou hodnotu). Této limitní velikosti se může příslušná veličina pouze přiblížit, ve zvláštním případě jí dosáhnout, ale nikdy ji není možné jakýmkoliv způsobem překročit.

Do této skupiny patří omezení velikosti rychlosti všech hmotných těles, částic a polí a nemožnost dosáhnout absolutní nulové teploty.

Omezení velikosti rychlosti můžeme vyjádřit takto:

Rychlost světla ve vakuu $c = (299\,722\,462 \pm 18) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je maximální možnou rychlostí, kterou se v prostoru může pohybovat jakákoliv částice (s nulovou klidovou hmotností) nebo šířit jakýkoliv signál nebo informace a ke které se může pouze přiblížit jakékoliv těleso.

O tom, že rychlost světla není nekonečně veliká (jak se například domnívalo ještě mnoho fyziků i na začátku 17. století), již nikdo nemohl pochybovat od roku 1675, kdy *O. Römer* určil z astronomických měření velikost rychlosti světla (pochopitelně ji nemohl zjistit tak přesně, jako je uvedená hodnota — měření velikosti rychlosti světla patří k nejpřesnějším měřením ve fyzice vůbec, jeho chyba je pouhých 0,000 006 % !). Ale to, že rychleji než světlo se nemůže pohybovat vůbec nic, vyplývá až ze speciální teorie relativity. Podle zákonů klasické fyziky víte, že síla působící na jakékoliv volné těleso uděluje tomuto tělesu zrychlení, které je přímo úměrné velikosti této síly (2. Newtonův pohybový zákon). Kdybychom působili silou dostatečně dlouho, pak podle tohoto zákona tělesu vůbec nic nebrání v tom, aby jeho rychlost neustále rostla a mohla dosáhnout libovolně velké hodnoty. Podle speciální teorie relativity se však s rychlostí tělesa zvyšuje jeho hmotnost, která pro rychlost rovnou rychlosti světla ve vakuu by byla nekonečně veliká. K urychlení takto hmotného tělesa bychom ale potřebovali mít k dispozici sílu, jejíž velikost by také rostla nade všechny meze. Takovou sílu však nemáme (a není ani nikde v celém vesmíru), a proto je jisté, že žádné hmotné těleso se takto rychle nikdy pohybovat nemůže.

Nejrychleji, rychlostí rovnou právě rychlosti světla ve vakuu, se šíří pouze elektromagnetické pole, jehož nositeli jsou částice nazývané *fotony*, a pole gravitační, jehož nositeli jsou tzv. *gravitony* (existence těchto částic nebyla zatím experimentálně potvrzena, ale fyzikové po nich usilovně pátrají). Všechny ostatní částice mají nenulovou klidovou hmotnost (tj. hmotnost vztaženou k soustavě, v níž je částice v klidu), a tak velikost jejich rychlosti se nikdy nemůže přesně rovnat rychlosti světla ve vakuu. Až do nedávna se fyzikové domnívali, že klidová hmotnost nejvíce zastoupených částic ve vesmíru, neutrin, je nulová a že se neutrina pohybují právě rychlostí světla. Nejnovější měření sovětských a amerických vědců však prokázala, že ani neutrina nemají klidovou hmotnost přesně rovnou nule, ale asi $3 \cdot 10^{-35} \text{ kg}$, a proto se prostorem musí pohybovat o něco pomaleji.

Druhé omezení, patřící do této skupiny, se týká nedosažitelnosti absolutní nulové teploty. Roku 1911 je vyslovil *Max Planck* takto:

Žádnou látku není možno žádným konečným fyzikálním pochodem ochladit až na absolutní nulovou teplotu 0 K (tzv. třetí hlavní věta termodynamická).

Až do té doby neexistoval žádný skutečný fyzikální důvod (zákon), který by popíral možnost dosáhnout absolutní nuly, popřípadě ještě i nižší teploty. Mohlo se proto zdát, že otázky týkající se nízkých teplot jsou pouze technickou záležitostí. Na základě hlubšího poznání struktury hmoty bylo zjištěno, že teplota je projevem pohybu malých částic látek, atomů a molekul. Čím rychleji se tyto částičky pohybují (čím větší je jejich pohybová energie), tím je látka teplejší. Teplota, při které ustává pohyb molekul (můžeme si představit, že jsou „zamrzlé“), je právě zmíněná nedostupná hranice — absolutní nula, tj. — 273,15 °C.

Nejblíže k této nedosažitelné mezi se zatím poprvé podařilo přiblížit v roce 1968 američanovi *Spohrovi*, který dosáhl teploty 0,000 000 2 K.

II. *Některé veličiny se nemohou měnit spojitě* (tzn. nemohou mít libovolně velikou hodnotu), *ale jsou nespojitě (diskrétní)* a mohou nabýt pouze určitých hodnot.

Pro porozumění pojmu spojitosti a nespojitosti si uveďme malý příklad. Spojitou veličinou je například vzdálenost dvou bodů, kterou si můžeme zcela libovolně posunutím jednoho nebo obou bodů měnit. Příklad nespojitě veličiny (i když nefyzikální) je krabice se žárovkami. Žárovky sice můžeme dělit na menší a menší skupiny, ale jen potud, pokud by zůstaly celé. Kdybychom chtěli pokračovat a dělit jednotlivé žárovky na menší díly, tak sice můžeme, ale např. polovina žárovky je něco úplně jiného, než žárovka celá, a obráceně, přiložíme-li k sobě dvě poloviny žárovky, nikdy to už nebude svítit, tedy to nebude žárovka v pravém významu tohoto slova.

Již před dávnými roky vedli vědci a filozofové diskuse o tom, je-li hmota veličina spojitá nebo nespojitá. Pozorujeme-li např. vodu v řece, řekneme, že je to veličina spojitá, i když víme, že je složena z molekul, a ty se skládají z ještě menších atomů, které jsou vytvořeny z podstatně menších částic — protonů, neutronů a elektronů; tedy hmota má charakter diskrétní veličiny. Jistě však především záleží na tom, z jakého pohledu a jaké jevy na příslušné fyzikální veličině sledujeme. Z tohoto hlediska se musíme dívat i na oba případy dalších omezení moderní fyziky.

Až do začátku tohoto století nebyl žádný důvod se domnívat, že energie elektromagnetického záření a velikost elektrického náboje nepatří do skupiny spojitých (kontinuálních) veličin, ale že to jsou veličiny diskrétní. Vždyť pro elektromagnetické záření byla k dispozici Maxwellova teorie, která zahrnovala do celé škály tohoto vlnění i světlo a která

dokonalou matematickou formou popisovala veškeré zákonitosti tak, že byly v souhlase s experimenty, a podle které bylo toto záření spojité. Důvod, proč se tato teorie, podle které například *H. Hertz* objevil radiové vlny a podle které dodnes funguje jak rozhlas, tak i televize, musila doplnit, byl fotoelektrický jev. Ten sice Maxwellova teorie kvalitativně vysvětlit uměla — záření dopadající na povrch některých kovů předalo svou energii elektronům v atomových obalech těchto látek, a když byla tato energie tak veliká, že dovolila elektronu opustit atom, mohli jsme zjistit elektrický proud. Ale jakmile byla prováděna kvantitativní měření, docházelo k zásadnímu rozporu s elektromagnetickou teorií světla. Elektrony totiž ihned po ozáření kovu jeho povrch opustily a jejich energie vůbec nezávisela na intenzitě použitého světla (a ta je úměrná energii), ale pouze na kmitočtu, na kterém podle Maxwellovy teorie vůbec záležet nemělo!

Tento rozpor vyřešila teorie *N. Bohra* o kvantech záření ^{1/}, která jsou zdrojem emitována (vysílána), a kterou pak roku 1905 zobecnil *A. Einstein* tak, že záření není pouze zdrojem emitováno ve formě kvant, ale že světelná energie se prostorem šíří po těchto kvantech, které nazval fotony. Na tomto základě se Einsteinovi podařilo vyložit fotoelektrický jev tak, že byl v naprostém souhlase s experimentálními měřeními. Poznatek, že zářivá energie je kvantována, můžeme vyjádřit takto:

Vyzařování a pohlcování zářivé energie je možné pouze po celočíselných násobcích dále nedělitelného energetického kvanta o velikosti $h \cdot \nu$, kde $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s je tzv. Planckova konstanta a ν je frekvence záření.

Musíme si však uvědomit, že kvantová teorie záření nezobecňuje Maxwellovu teorii elektromagnetického pole, ale je s ní v příkrém rozporu. Jaká je tedy skutečná podstata světla? Některé optické jevy je možno vysvětlit pouze na základě platnosti elektromagnetické teorie, tedy že světlo je vlna (ohyb světla, jeho skládání a rozklad), jiné, například fotoefekt, pouze za připsání kvantové teorie světla, tedy představy světla jako proudu rychle letících fotonů.

I když jsme zvyklí vyžadovat uzavřené soudy, zde moderní fyzika nedává jednoznačnou odpověď na otázku, co je to světlo. Musíme se smířit s tím, že jednou se světlo (elektromagnetické vlnění) projevuje jako vlna a jindy má zase charakter částicový. Ovšem nikdy nemůžeme pozorovat obě tyto jeho vlastnosti zároveň.

Poznatek, že nemůžeme mít libovolnou velikost elektrického náboje, patří také až do tohoto století. Toto omezení můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

^{1/} Kvantum je název pro dále nedělitelnou veličinu.

Velikost elektrického náboje nemá libovolnou hodnotu, ale je dána celočíselným násobkem dále nedělitelného tzv. elementárního náboje o velikosti $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ coulombů.

Částice nazvaná *elektron* byla objevena již roku 1874 *G. J. Stoneyem* a později byla stanovena i velikost náboje, který elektron nese, tj. právě uvedenou hodnotu e . Ale to, že elektron je skutečně elementární částice, kterou není možno jakkoliv dále dělit, zjistila až moderní fyzika. Elektrický náboj není možno žádným způsobem z jakékoliv hmoty osamostatnit, a tak musí mít ten náboj, který nese již dále nedělitelná částice, právě tu nejmenší možnou velikost. Jediné dvě elektricky nabitě částice, které jsou stálé (tzn. po určité, většinou velice krátké době se samy nerozpadají a nemění se v částice jiné) jsou elektron a proton. Podle Diracovy teorie má každá částice svůj „protějšek“ nazývaný antičástice, který se od částice liší některými svými vlastnostmi. Antičástice elektronu, kladný elektron (pozitron) má stejnou hmotnost jako elektron, stejně veliký, ale opačný — kladný — náboj. Antičástice protonu, antiproton, má stejně velkou hmotnost jako proton, ale je nabita opačně, tedy nese náboj $-e$.

Protony, elektrony a jejich antičástice jsou elementární, dále nedělitelné, a proto ani jejich náboj není možno dělit dále.

Podle dnes již velice důkladně propracované a všeobecně přijímané kvarkové teorie částic jsou *hadrony*^{2/} vytvořeny z tzv. *kvarků*, které mají $1/3$ nebo $2/3$ elementární elektrický náboj. Podle dnešních představ ale není možné tyto kvarky žádným způsobem z hadronu izolovat, a tak představa o faktické nedělitelnosti elementárního náboje zůstává zachována.

III. *Ve světě elementárních částic existují stavy těchto částic*, které jsou zcela nemožné, nebo mohou být zjištěny pouze s určitou pravděpodobností, ale nemůžeme o nich říci, že nastanou, nebo že budou mít právě takovou a takovou velikost. Do této skupiny patří relace neurčitosti a Pauliho vylučovací princip.

Relace neurčitosti (někdy také nazývané Heisenbergův princip neurčitosti) již neoperují s určitými veličinami. Statistika a teorie pravděpodobnosti, které byly zprvu jen ryze matematické záležitosti, se staly nástrojem fyziky až později. Koncem minulého století *L. Boltzmann* a *R. Clausius* aplikovali zákonitosti těchto matematických disciplín na termodynamické děje, a tak se pravděpodobnost dostala do fyzikálního myšlení. K použití tohoto pojmu jako jediné možnosti pro popis některých jevů, které se vyskytují zejména v rozměrech atomu, byla však ještě dlouhá cesta. Zde již nemůžeme vyšetřovat zákonitosti z hlediska

^{2/} Hadrony je souhrnné označení pro všechny částice, jež se zúčastňují tzv. silné interakce.

tzv. deterministického přístupu, který se vžil již od Newtonovy doby, kde stejná příčina vyvolává za stejných podmínek vždy stejný a jednoznačný následek. Klasická deterministická fyzika zjišťovala zákonitosti, které popisovaly chování vyšetřovaného objektu, a ty umožňovaly přesně popsat minulost i budoucnost tohoto objektu na základě známého stanovení současnosti.

Roku 1927 vyslovil významný německý fyzik *W Heisenberg* svůj princip neurčitosti, který říká:

Čím přesněji určíme polohu částice, tím méně přesně můžeme stanovit její hybnost a obráceně. Součin neurčitosti polohy částice Δx a neurčitosti její hybnosti Δp v témže časovém okamžiku je roven nebo větší než Planckova konstanta h , tedy

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h,$$

kde neurčitostí nějaké veličiny rozumíme interval, ve kterém může tato veličina ležet, a h je již zmíněná Planckova konstanta.

Známe-li například v určitém časovém okamžiku polohu a rychlost všech částic vyšetřovaného systému a všechny působící síly, pak klasická fyzika užitím pohybových zákonů umožňuje přesně stanovit celou minulost systému i jeho budoucí chování. Je jisté, že existuje určité omezení našich znalostí, které bude dáno experimentální chybou, které se nikdy nemůžeme vyhnout. Mohli bychom se však domnívat, že se zdokonalováním našich měřicích přístrojů a měřicích metod se bude tato chyba zmenšovat tak, že příliš neovlivní naše výpočty. Ovšem principy kvantové mechaniky jsou v příkrém rozporu s tímto deterministickým názorem. Vždyť podle kvantové mechaniky nikdo nemůže mít zároveň zcela přesnou informaci o poloze částice a o její hybnosti. Naopak, čím více toho víme o jedné z těchto veličin, tím méně toho můžeme vědět o veličině druhé.

Kvantitativním rozbořem relace neurčitosti zjišťujeme, že se uplatní pouze v mikrosvětě (Planckova konstanta je řádu 10^{-34}). Můžeme tedy dostatečně přesně stanovit dráhy i rychlosti planet na mnoho let dopředu, ale nemůžeme říci, kde bude a jak se bude pohybovat elektron ani za zlomek sekundy. Nemůžeme-li mít přesnou informaci jak o poloze, tak i o hybnosti hmotné částice, pak předpověď chování této částice (systému) není jistota, ale pouze určitý stupeň pravděpodobnosti. A toto omezení nevyplývá ze žádných experimentálních chyb, ale přímo ze zákonitostí kvantové mechaniky.

Bylo zjištěno, že nerovnosti podobného typu platí i pro další dvojice fyzikálních veličin. Můžeme například přesně stanovit energii částice, ale pak nemůžeme vůbec říci, ve kterém časovém okamžiku částice tuto energii měla, a naopak. Tuto relaci neurčitosti zapíšeme ve tvaru:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h,$$

kde ΔE je neurčitost energie a Δt je neurčitost času, ve kterém měla částice tuto energii.

Pak ale ani zákon zachování energie (a hmotnosti^{3/}) neplatí zcela přesně, ale energie mezi dvěma měřeními provedenými za časový interval Δt se zachovává pouze s přesností $h/\Delta t$.

Známý německý fyzik *W. Pauli* objevil roku 1925 základní princip, kterým se řídí elektrony v atomech. Tento Pauliho vylučovací princip nám říká:

V jednom atomu nemohou být zároveň žádné dva elektrony ve stejném kvantovém stavu (elektrony musí mít různou konfiguraci svých kvantových čísel).

Kvantová čísla jsou čísla, která přiřazujeme různým velikostem těchto veličin: energii, které může elektron ve stabilním atomu nabývat (hlavní kvantové číslo); velikosti momentu hybnosti elektronu (vedlejší kvantové číslo); směru tohoto momentu hybnosti — přesněji jen jedné složky momentu hybnosti, protože i tady platí relace neurčitosti (magnetické kvantové číslo); momentu hybnosti samotného elektronu (spinové kvantové číslo).

To, proč se elektrony v atomu jakékoliv látky řídí Pauliho vylučovacím principem, nevíme. Jisté však je, že tento princip odhaluje základní zákonitosti konstrukce atomů^{4/}. Zjišťujeme, že ani jeden elektron v atomu není „stejný“ s elektronem jiným. Ve stabilním (časově stálém) atomu se podle kvantové mechaniky mohou elektrony vyskytovat pouze v tzv. kvantových drahách (slupkách). Každé takové dráze odpovídá určitá velikost energie elektronu, proto se někdy označují jako energetické hladiny. Má-li elektron vyšší energii, než jaká odpovídá příslušné energetické hladině, pak ji vyzáří ve formě energetického kvanta — fotonu. Atom je nejstabilnější právě tehdy, když je ve stavu s minimální energií. Elektrony proto obsazují nejprve nejnižší energetické hladiny, které jsou nejbližší k jádru. Počet elektronů v každé energetické hladině

^{3/} Podle Einsteinova principu energie je mezi pojmem hmotnost a energie rovnost, vyjádřená vztahem $E = m \cdot c^2$, kde E je energie částice (tělesa) o hmotnosti m a c je rychlost světla ve vakuu.

^{4/} Neutrální atom jakékoliv látky si můžeme představit jako systém, který je složen z hmotného jádra, které obsahuje téměř veškerou hmotnost atomu (je složeno z kladně nabitých protonů a neutrálních neutronů) a z elektronového obalu. Elektrony se kolem tohoto jádra pohybují po zhruba kruhových drahách (eliptických s malou výstředností).

^{5/} Maximální možný počet elektronů v jedné slupce mající velikost hlavního kvantového čísla n je $2 \cdot n^2$. Z toho vyplývá, že v první slupce, pro kterou je $n = 1$, mohou být nejvýše dva elektrony (liší se svým spinovým kvantovým číslem), ve druhé slupce pak nejvýše $2 \cdot 2^2 = 8$ elektronů, ve třetí $2 \cdot 2^3 = 16$ elektronů, ve čtvrté slupce pak maximálně $2 \cdot 2^4 = 32$ elektronů atd.

zjistíme podle Pauliho vylučovacího principu. Jakmile je příslušná hladina plně obsazena elektrony, musí se další elektrony umístit ve vyšší energetické hladině a tam je jejich počet opět určen vylučovacím principem⁽⁵⁾ na str. 151).

Bylo zjištěno, že Pauliho vylučovací princip neplatí pouze pro elektrony, ale i pro další částice, mezi které patří i protony a neutrony.

Na závěr bych chtěla zdůraznit, že i když z poznatků moderní fyziky vyplývají určitá „omezení“, pak to, že o nich víme, nám umožňuje lépe poznat fyzikální realitu světa. Některé představy kvantové mechaniky možná jaksi otřesou vaší vírou v řád a pořádek světa. Ale obdobně, jako se lidé musili kdysi vyrovnat s myšlenkou, že oni spolu se Zemí nejsou středem vesmíru, musíme si i my zvyknout na tyto nové skutečnosti.

Literatura

Beiser A., Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975

Horák Z., Krupka F., Fyzika, SNTL, Praha 1981

Blochincev D. I., Základní otázky kvantové mechaniky, Academia, Praha 1971

Bondi H., Otnositelnost i zdravý smysl, Izd. Mir, Moskva 1967

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Leonardo da Vinci

JOSEF KOTYK, Pardubice

První fáze vědecké revoluce, jež postupně měnila středověký svět, nastala v italské renesanci. Významným, typicky všestranným jejím představitelem je Leonardo da Vinci.

Leonardo da Vinci se narodil roku 1452 — před 530 lety — ve Vinci u Florencie, kde nabyl vedle všeobecného vzdělání i výcviku v malířství a v hudbě. Jako hudebník byl již ve svých 30 letech doporučen na vévodský dvůr v Miláně. V tamějším velice příznivém ovzduší vyrostl také v malíře a sochaře, jednoho z nejslavnějších představitelů renesančního výtvarného umění. Patří k tragice velkých myslitelů a tvůrčích génů, že doba, které unikají vzletem svého tvořivého ducha, nemá pro ně a jejich činnost pochopení. Také Leonardo velmi trpěl, když musel

své nadání často přímo mařit ve službách svých chlebodárců, v posledních letech svého života na dvoře francouzského krále *Františka I.* Zemřel ve Francii roku 1519.

Leonardo da Vinci burcoval svou dobu ze sterilního scholasticismu. Jediným zdrojem všeho vědění je mu příroda. Hlásal proto návrat od *Aristotela*, od vzdělanosti knižní a dosavadního rozumování k přírodě. Docházejí k svým poznatkům o tvorbě uměleckých děl rovněž na základě přímého pozorování přírody a přesvědčen o souvislosti umění a vědění, učil, že „vědy, jejichž počátek, střed i konec neprochází jedním ze smyslů, jsou prázdné.“ Vědění, které se nerodí ze zkušenosti, je podle něho püsté a plno chyb. Pravou vědou je pro Leonarda jen věda empirická, neboť se opírá o zkušenost. Nerozlučnou součástí badatelského úsilí je mu proto experiment (pokus). Revolučnost renesančního bádání záležela v příklonu k empirickému (smyslovému) poznání. V těchto zásadách se již objevují známky zralé vědecké metody, která je v rozvoji lidského myšlení jevem zcela novým. Svět tím stanul u zrodu vědy, u její kolébky. Leonardo da Vinci je průkopníkem nové doby.

Pln tvůrčí dychtivosti a radosti z nového poznávání chápal se Leonardo všeho, co příroda skýtala. Je příznačné, že s sebou stále nosil zápisník, do něhož ukládal vše, co ho zaujalo. Prováděje pokusy, poznal, že volný pád těles je pohyb zrychlený, další podrobnosti se mu však ještě nepodařilo vyšetřit. Zabýval se také pohybem na nakloněné rovině a různými mechanismy, jednoduchými stroji zevrubněji než *Archimédes*. U sil působících na páku dospěl např. také již k pojmu moment (otáčení) síly. V úvahách o tření rozlišuje již tření vlečné a valivé; dochází také k poznatku, že tření je síla a že nezávisí na velikosti troucích se ploch. Ve svých pracích rozlišoval velmi přesně pojmy síly, práce a energie. Perpetuum mobile pokládal za nemožné.

Jako neobyčejný jev pozoroval Leonardo vzlínavost, stoupání kapalin ve velmi tenkých trubicích. Zvuk považoval za vlnivý pohyb vzduchu a z naslouchání ozvěně usuzoval, jakou rychlostí se zvuk šíří. Věděl také, že vzduch se skládá z dvou složek, z nichž jedna udržuje hoření; když se spotřebuje, hoření ustane; také žádný živočich nemůže pak již, jak se přesvědčil, v takovém vzduchu žít. Zahřátého vzduchu malé hustoty navrhoval použít jako lehké náplně balonů, myšlenka ta došla však svého uskutečnění až v letech 1782 a 1783 při pokusech bratří *Montgolfierů*. Konal také stálá pozorování pohybů nebeských těles. Málo je známo, že v Leonardových zápiscích nalézáme také již větu, jež září jako drahokam: „Slunce se nepohybuje.“ Jisté jest, že objev heliocentrické soustavy byl renesanční filosofií a astronomií připravován. Visel ve vzduchu...

V Leonardově díle zní také již vítězná píseň techniky, která po staletích, plně opřena o vědu, změnila svět. Velmi úzká byla od počátku souvislost mezi rodícím se vědeckým poznáním a potřebami výroby.

Své pevné přesvědčení o jednotě vědy a praxe vyjádřil Leonardo slovy: „Věda-plukovník, praxe-vojáci.“ Dokládají je m. j. také Leonardovy návrhy na nové textilní stroje, geniální náčrty konstrukce napínacích, spřádacích a postrihacích strojů, které — poháněny dokonce již vodou — měly nahradit namáhavou práci rukodělnou a vést k zvětšení rozsahu výroby i jejímu zkvalitnění. Vynálezy, jež veliký tvůrce zanechal ve svých tajemných zápisnicích, udivují dodnes svou smělostí a geniální promyšleností: konstrukce křídla letounu, horizontálního letadla i vrtulníku, padáku, ponorky, mechanického exkavátoru, výstroje potápěčů — v kolika oborech předstihl Leonardo dobu, jež podle známých slov *Engelsových*^{*)} „potřebovala a zrodila obry, obry silou mysli, vášnivostí a charakterem, všestranností a učeností.“ Leonardo da Vinci byl jedním z nich.

Sto let od důkazu transcendentnosti čísla π

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc, MFF UK Praha

Jediná obrazová ilustrace k tomuto článku reprodukuje část plakátu, kterým dne 26. 11. 1882 vyzdobili studenti univerzity ve Freiburgu jednu z poslucháren. V této místnosti jim mladý profesor *Ferdinand Lindemann* (1852—1939) vyložil hlavní ideu svého důkazu, že číslo π je transcendentní. Proč zakreslili písmeno π v kruhu překrytém čtvercem a od písmene π vyslali blesk?

Čtverec na kruhu připomínal starodávnou úlohu o kvadratuře kruhu, tj. požadavek sestrojit pravítkem a kružítkem stranu čtverce, který má stejný obsah jako daný kruh. Řešením úlohy se zabývaly tisíce matematiků a amatérů po 25 století; všechna ohlašovaná řešení byla vždy po čase odmítnuta. Řešitelé kvadratury kruhu se nazývali kvadraturisté a onen blesk od písmene π mířil do opačného kouta plakátu, kde byl houf zkarikovaných lidiček a nad ním nápis

Běda kvadraturistům!

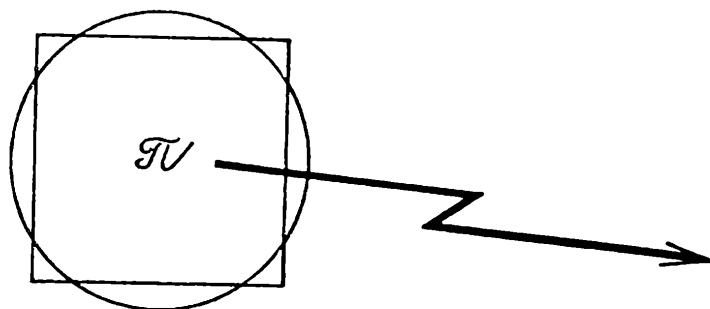
Objev profesora Lindemanna totiž znamenal *konec nadějí, že úlohu o kvadratuře kruhu lze vyřešit kružítkem a pravítkem.*

Objasněme si stručně historii této úlohy a důkazu její neřešitelnosti, založeného na transcendentnosti čísla π .

Čtverec a kruh, hranice čtverce a kruhu, to byly geometrické tvary, které svou pravidelností poutaly pozornost starověkých lidí už v po-

^{*)} Viz *B. Engels: Dialektika přírody*. (Praha 1952). Cit. str. 25.

čátcích jejich geometrické tvořivosti. Poměry obsahů, resp. délek těchto dvojic útvarů byly prakticky potřebné, ale zároveň pro praxi stačila jen přibližná vyjádření těchto poměrů. Poměr délky kružnice k jejímu průměru, resp. poměr obsahu kruhu k obsahu čtverce nad jeho poloměrem se vyjadřoval buď jen číslem 3, nebo $3 + (7 : 60) + (30 : 3600)$, nebo $256 : 81$, nebo $\sqrt{10}$, později podílem $22 : 7$, který našel *Archimédes*. [Bohatší rejstřík hodnot obsahuje článek J. Maláče v č. 6 loňského ročníku.]



Kritický duch řecké filozofie a matematiky vedl k objevu iracionálnosti (nepoměrovosti) čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a řady dalších. Vědělo se, že úsečky s takovými velikostmi lze sestavit kružítkem a pravítkem, ačkoliv tyto velikosti nelze vyjádřit zlomkem s celočíselným čitatelem a jmenovatelem. Už kolem r. 500 před n. l. zformulovali řečtí učenci úlohy o zdvojení krychle, roztřetí úhlu a kvadratuře kruhu. [V 10. čísle loňského ročníku jste mohli číst článek prof. E. Kraemera *Trisekce úhlu pravítkem a kružítkem* se zmínkou o dalších úlohách.] Mnozí antičtí matematici pohotově našli řešení uvedených úloh pomocí umně sestavených přístrojů, které rýsovaly podivuhodné křivky. [O jedné z nich, křivce kvadratrix, přinesly *Rozhledy* článek v 1. čísle ročníku 1978—79.] Strážci logické a matematické přesnosti, kteří udávali tón v tehdejší vědě, však odmítali taková řešení pomocí mechanismů a trvali na omezení konstrukčních prostředků na pravítko a kružítko. Velkou měrou k tomu přispělo Euklidovo dílo *Základy*, které získalo autoritu; termín euklidovská konstrukce označuje právě ty konstrukce, ve kterých se užívá jen pravítka a kružítko. Tak se vcelku uměle zrodil problém kvadratury kruhu pomocí pravítka a kružítko.

Ve středověku byl problém v očích mnoha matematiků mylně pokládán za snadno řešitelný, protože považovali Archimedovu přibližnou hodnotu $22 : 7$ za přesnou hodnotu čísla π . Později, po přijetí desetinných čísel, sehrávalo podobnou úlohu číslo 3,14; konstrukce úseček o velikosti $\sqrt{3,14} \cdot r$ se považovaly za řešení kvadratury kruhu o poloměru r . Epidemiemi „zaručených“ kvadratur kruhu trpěla matematická literatura v 16.—18. století, kdy vášnivé vypočítávání stále většího počtu desetinných míst čísla π sloužilo k vyvracení navr-

hovaných konstrukcí kvadratury kruhu. Mezi neúspěšné kvadraturisty 17. století patřil *Gregoire de Saint-Vincent* (přednášel matematiku i v Praze) a *Thomas Hobbes* (anglický filozof, amatér v matematice), kterým se snažili jejich chyby objasnit např. *Ch. Huygens* a *J. Wallis*. Úsilí kvadraturistů podněcovaly i některé lákavé ceny vypsane pro úspěšné rozřešení kvadratury kruhu; až v r. 1775 pařížská akademie odmítla přijímat a posuzovat takové práce.

Konečné slovo k problému, zda je kvadratura kruhu možná či ne, musela přinést algebra. Kolem r. 1840 bylo známo, že kružítkem a pravítkem lze z dané jednotkové úsečky sestrojít jen takové úsečky, jejichž velikosti jsou kořeny algebraických rovnic 1. nebo 2. stupně nebo některých rovnic stupně čtvrtého, osmého atd. s racionálními koeficienty. *J. Wantzel* dokázal v té době neřešitelnost zdvojení krychle a třetění úhlu kružítkem a pravítkem; k rozhodnutí o kvadratuře však nedošel, protože nikdo nevěděl, zda číslo π je kořenem některé takové rovnice či ne. [Přesnější a podrobnější výklad o neřešitelnosti zmíněných úloh kružítkem a pravítkem obsahuje článek, který otiskly *Rozhledy* v č. 8 a 9 ročníku 1977—78.]

Znalosti o čísle π se pozvolna rozrůstaly, v r. 1767 dokázal *J. Lambert*, že je to číslo iracionální, v r. 1794 podal *A. M. Legendre* další přesný důkaz tohoto poznatku. Až v r. 1844 ukázal *J. Liouville*, že existují iracionální čísla, která nejsou kořeny žádné algebraické (polynomické) rovnice s racionálními koeficienty, nazval je *transcendentními čísly*. Bylo jasné (ve srovnání s výsledky *J. Wantzela*), že z jednotkové úsečky nelze kružítkem a pravítkem sestrojít úsečku, jejíž velikost je vyjádřena transcendentním číslem. Protože při kvadratuře kruhu jde o konstrukci úsečky o velikosti $\sqrt{\pi} \cdot r$, znamená transcendentnost π , že kvadraturu kruhu nelze provést pravítkem a kružítkem.

L. Euler se zasloužil o ustálené užívání tří písmen pro čísla, která považoval za zvlášť významná:

$$e, \pi, i$$

(e — základ přirozených logaritmů, π — Ludolfovo číslo, i — imaginární jednotka v oboru komplexních čísel). Už v r. 1743 publikoval pozoruhodný vztah

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ a jeho důsledek } e^{i\pi} = -1.$$

Poslední rovnici lze napsat ve tvaru $e^{i\pi} + e^0 = 0$, který připomíná zápisy polynomických rovnic s přirozenými mocninami x .

V r. 1873 našel *Ch. Hermite* důkaz, že v žádné rovnici

$$a_0 e^{z_0} + a_1 e^{z_1} + \dots + a_n e^{z_n} = 0$$

nemohou být všechna čísla $a_0, a_1, \dots, a_n, z_0, z_1, \dots, z_n$ celá. To znamenalo, že číslo e je transcendentní. V úvodu vzpomenutý profesor Lindemann

zobecnil v r. 1882 Hermitův poznatek tak, že v uvedené rovnici nemohou být všechna čísla $a_0, \dots, a_n, z_0, \dots, z_n$ *algebraická*, tj. kořeny algebraických polynomických rovnic s racionálními koeficienty. Protože v Eulerově rovnici $e^{i\pi} + e^0 = 0$ jde o čísla 1, 1, $i\pi$, 0, z nichž tři algebraická jsou, musí být čtvrté — číslo π — nealgebraické, tedy transcendentní.

Právem tedy: Běda kvadraturistům! Jejich snahy jsou marné, pomocí kružítko a pravítka lze podat jen přibližné konstrukce, nikoliv euklidovskou konstrukci strany čtverce, jehož obsah se rovná obsahu daného kruhu.

Zájemci o tuto problematiku si mohou v knihovnách s matematickými spisy vypůjčit ruský překlad práce rumunského autora Cimpana; hledejte titul *Kympan*: Istorija čísla π .

O zákonitostech cesty k velkým fyzikálním objevům

KATEŘINA KRAUSOVÁ, Gymnázium v Praze [9] — Prosek [1]

Na počátku byla prostá otázka: Jak se rodí velké objevy, které nesou jména slavných fyziků? Odpověď nebylo nijak jednoduché. Z jednoho otazníku vznikala řada dalších. Řídí se vědecká činnost nějakými zákony nebo je zcela svobodná? Jakou úlohu hraje ve tvůrčí vědecké práci obrazotvornost a náhoda? Mohou se objevy naplánovat? Pokusme se najít odpovědi na konkrétním příkladě, který nám nabízí jeden z největších úspěchů fyziky tohoto století — proslulý Laueův pokus, jímž byla před 70 lety dokázána zároveň vlnová podstata rentgenového záření i existence krystalové mřížky.

Laueův pokus měl stejně jako každý velký objev své předchůdce. Počátkem historie tohoto významného mezníku ve vývoji moderní fyziky mohou být léta 1675—1676, kdy si prý astronom *Jean Picard* všiml, že při přenášení barometru se vakuová část trubice nad rtutí čas od času rozsvěcuje. Neobyčejnost jevu, pozorovaného i jinými učiteli té doby, zaujala zvláště švýcarského matematika *Johanna Bernoulliho* (1667—1748). Jeho výzkumy vyvrcholily sestrojením „přístroje“, který se rychle rozšířil po celé Evropě a vyvolal nadšení i úžas vědeckého světa i široké veřejnosti. Tvořila jej evakuovaná trubice naplněná částečně rtutí. Jestliže se ve tmě trubicí zatřáslo, začala tajemným způsobem svítit jako by byla „plná ohně“. Tento efekt připomínal Bernoullimu svícení fosforu, a proto světlo nazval fosforovým.

V roce 1705 začal fosforové světlo zkoumat anglický experimentátor *Francis Hauksbee*. Podařilo se mu ukázat, že stejný jev vzniká i při dotyku rukou otáčející se skleněné evakuované koule. Kouli později nahradil profesor university v Lipsku *Johann Winkler* trubicí; místo rukou se skla dotýkaly kožené polštářky s kartáčky z koňských žíní. Přístroj dával tak silné jiskry, že byly schopny zapálit éther.

Hauksbeeovy pokusy můžeme považovat za počátek výzkumu elektrického výboje v plynech. Podmínky pro jeho systematické studium vytvořili však až v první polovině minulého století *Faraday* - objevitel elektrické indukce, která umožnila získat vysoká napětí, a *Geissler* — vynálezce rtuťové vakuové lampy, s níž lze dosáhnout dobrého vakua.

Vidíme, že úroveň poznání je určena nejen přirozenými a individuálními schopnostmi lidí, ale i technickými možnostmi a společenskými podmínkami. Protože poznání má svou určitou samostatnost, může pokračovat přímé požadavky praxe, předvídat nové jevy a tím působit na výrobu a jiné oblasti lidského života. Výboje v plynech byly např. zkoumány mnohem dříve, než si společnost uvědoměle kladla cíl jejich praktického využití.

Studium jevů ve výbojových trubicích — skleněných trubicích se zatavenými elektrodami (katodou a anodou) — zaměstnávalo před stolety většinu světových fyzikálních laboratoří. Bylo prokázáno, že světelné efekty se při určitém napětí na elektrodách mění v závislosti na tlaku a druhu plynové náplně. Při velkém zředění světelné úkazy uvnitř trubice vymizí, skleněné stěny však samy zeleně fluoreskují — nejintenzivněji v místech proti katodě. Zpočátku byly paprsky vycházející kolmo z povrchu negativní elektrody nazývány katodové a mnoho významných fyziků minulého století, mezi nimi *Wiedemann*, *Hertz* a *Lenard* jim přisuzovalo vlnovou povahu jako má viditelné světlo.

V historii fyziky bývá běžné, že obhájci protichůdných vědeckých teorií se rozdělují podle národností. Přitom vůbec nemusí jít o projev nacionalismu. Tento fakt lze vysvětlit jednoduše vědeckými vazbami, osobními vztahy, používáním podobného přístrojového vybavení a v neposlední řadě i společným jazykem. Proto není divné, že i *Wilhelm Conrad Röntgen* — po otci Němec, po matce Holanďan — stejně jako všichni němečtí fyzikové konce minulého století předpokládal vlnovou povahu katodových paprsků. Röntgen byl velmi důkladný experimentátor, a proto sám nejdříve zopakoval všechny pokusy popsané Lenardem a jinými fyziky. Přitom pozoroval, že fotografické desky, umístěné v blízkosti výbojové trubice a chráněné běžným způsobem před účinky světla, bývají často osvětlené. O působení katodových paprsků zde jít nemohlo, neboť používaná katodová trubice byla celá skleněná, a paprsky proto nepropouštěla.

8. listopadu 1895 pozdě večer, když Röntgen prováděl v zatemněné laboratoři své pokusy, obklopil výbojovou trubicí, kterou používal jako

zdroj katodových paprsků, obalem z tenké černé lepenky, aby nebyl při pozorování rušen světlem z trubice. Při kontrole, zda obal skutečně žádné světlo nepropouští, si povšiml, že několik poblíž ležících krystalů platinokyanidu baria jasně fluoreskuje. V tom, že nedaleko trubice ležely právě tyto krystaly, není nic výjimečného. Platinokyanid baria byl známý díky své fluorescenci v ultrafialových paprscích a nechyběl tehdy téměř v žádné fyzikální laboratoři. Pozorovaný úkaz nebyl popsán v žádné práci, kterou Röntgen znal, a proto ho podnítil k velmi důkladnému zkoumání. Dlouho se obával uvěřit, že jde o nový druh paprsků vystupujících z trubice a procházejících lepenkovým obalem. Přesvědčilo ho o tom teprve zčernání emulze, když krystaly nahradil fotografickou deskou.

Většina vědců by takový objev co nejrychleji opublikovala. Röntgen se však rozhodl nejdříve získat maximum faktů a původu nově objevených paprsků, které pro jejich záhadnost nazval „paprsky X“. Prožil šest týdnů tak zaujat svou prací, že ani v noci neopouštěl laboratoř. Podařilo se mu dokázat, že paprsky vycházely skutečně z trubice a nikoliv z jiné části aparatury. Většina materiálů byla pro nové záření průhledná, některé více, jiné méně. Kniha o 1000 stranách toto záření téměř pohlcovala, sklo obsahující olovo je pohlcovalo více než sklo obyčejné, platina více než stříbro nebo měď. Bylo možné říci, že průhlednost klesá s růstem hustoty látky a její tloušťkou. Dále zjistil, že paprsky nemají žádné tepelné účinky a nelze pozorovat ani jejich působení na oční sítnici, přestože přikládal oko těsně až k výbojové trubici. Dnes, kdy známe škodlivé účinky těchto paprsků na živou tkáň, trneme nad takovým pokusem hrůzou.

Paprsky X vznikaly v místě, kam na sklo trubice dopadalo katodové záření; stejný jev byl však brzy pozorován i ve výbojové trubici z hliníku. Podobně jako katodové záření způsobovaly paprsky X fluorescenci, šířily se přímočaře, a vyvolávaly tedy stíny. Na rozdíl od katodových paprsků se však neodchylovaly magnetickým polem. Jsou snad téhož původu jako ultrafialové záření? Pak se však měly znatelně odrážet, lomit a polarizovat. K další důležité vlastnosti tajemného záření náleží zjištění, že zeлектроvaná tělesa se jejich účinkem vybíjejí. Ve skutečnosti se ovšem vybíjejí účinkem iontů, vznikajících ve vzduchu, kterým paprsky procházejí.

Paprsky X dostaly jméno po svém objeviteli již 23. ledna 1896 při zasedání würzburgské Fyzikální lékařské společnosti, kde Röntgen předvedl řadu jevů vyvolaných novým zářením. Objevení rentgenových paprsků mělo neobyčejné důsledky jak v oblasti vědeckých výzkumů, tak i v praktických aplikacích — v lékařství i v průmyslu. Dá se bez nadsázky říci, že tímto vynálezem začíná historie nové — moderní fyziky. Röntgen podporoval všestranné uplatnění svého objevu s příkladnou nezištností. Vzdal se všech výhod, které z něho mohl mít.

Nejeden objev ve vědě nebo vynález v technice byl uskutečněn díky příznivé shodě nahodilých okolností. Ani v případě rentgenových paprsků nelze faktor náhodnosti zcela vyloučit; ať svoje činy plánujeme jakkoliv, vždy je v nich místo pro náhodu. Rozhodující podíl měla ovšem zákonitost — systematickosti, s níž Röntgen pokračoval ve studiu katodových paprsků, pozornost při sledování zdánlivě vedlejších jevů a důslednost při zjišťování jejich příčin. Náhoda přála mnoha Röntgenovým předchůdcům, neboť i jim černaly fotografické desky při experimentování s katodovými paprsky. Nikdo z nich však tomuto efektu nevěnoval potřebnou pozornost.

Poznání věcí začíná od jejich určitých a přímých projevů. To však neznamená, že věc je souhrnem určitých vlastností. Ty jsou jen projevem něčeho, co věc charakterizuje — projevem její kvality. Je proto zcela přirozené, že s rozšiřováním oblasti využití rentgenových paprsků se stával stále nezbytnější výzkum jejich vzniku a podstaty. Vysvětlení vzniku záření, dané samotným Röntgenem, bylo brzy přijato jako zcela uspokojivé: rentgenové paprsky vznikají při srážce katodového záření, tj. elektronů s tělesy. Jaká je však jejich podstata? Elektromagnetická teorie učí, že náhlá změna rychlosti nabitého tělesa vyvolá elektromagnetické záření. Je-li příčinou vzniku rentgenových paprsků prudké zabrzdění rychle letících elektronů, musí mít záření vlnovou povahu. Jak ale vysvětlit, že se u rentgenového záření nedařilo pozorovat běžné optické jevy jako odraz, lom, polarizaci a difrakci na mřížce nebo šterbinně?

Odpůrci vlnové teorie se dále opírali o výsledky pozorování ionizačních účinků záření, které při tehdejšímu stavu znalostí nebylo možno vysvětlit jinak než předpokladem, že rentgenové paprsky jsou hmotné částice — korpuskule.

Všechny věci, jevy a procesy obsahují vnitřní rozpory, protikladné stránky a tendence, které jsou ve vzájemném vztahu a vzájemné negaci. Boj protikladů je vnitřní silou vývoje, vede k narůstání rozporů a k jejich řešení zánikem starého a vznikem nového. Pro rozvoj vědy je charakteristické odmítání různých tvrzení, která si činila nárok na absolutnost a přitom byla pravdou pouze ve své době. Skutečná vědecká teorie obsahuje velmi často prvky, jejichž nepravdivost zjistíme teprve při dalším poznávání, praxi. Praxe je kritériem, které spolehlivě dokazuje pravdivost nejrozumnějších fyzikálních představ. Např. využívání rentgenového záření v mnoha oblastech vědy a techniky je důsledkem správnosti fyzikálních představ o stavbě atomu.

Dlouholetý spor o povaze rentgenového záření rozhodl v roce 1912 pokus, který je příkladem toho, oč efektivnější může být vzájemná spolupráce talentů než prostý součet úspěšnosti každého z nich. Potvrdilo se rovněž, že zatímco nakupování informací o určitém jevu pro-

bíhá nepřetržitě a postupně, ke kvalitativním změnám ve vývoji vědeckých oborů dochází naráz.

Myšlenka slavného pokusu vzešla z diskuse mezi teoretickými fyziky *Maxem von Laue* a *P. P. Ewaldem*. Tehdy Laueho napadlo, že u rentgenového záření nebyly interferenční jevy pozorovány zřejmě proto, jelikož libovolný umělý difrakční systém je příliš hrubý. Mají-li však krystaly takovou stavbu, jak se v té době již předpokládalo, tj. jsou-li vytvořeny z množství stejných těsně se dotýkajících rovnoběžnostěnů obsazených atomy, pak by se měly chovat jako difrakční mřížka. Laueovu hypotézu úspěšně realizovali na jaře roku 1912 v Mnichově fyzikové *Friedrich* a *Knipping*: po průchodu úzkého svazku rentgenových paprsků destičkou krystalu síranu měďnatého byla na fotografické desce umístěné za krystalem pozorována soustava pravidelně uspořádaných skvrn zobrazujících souměrnost krystalu.

Přestože výsledky Laueova pokusu svědčily jednoznačně ve prospěch vlnové teorie, diskuse o povaze rentgenových paprsků ještě nějaký čas pokračovaly. Bylo třeba např. vyvrátit domněnku obhájců korpuskulární teorie, kteří namítali, že získané skvrny na rentgenogramech mohou být způsobeny částicemi procházejícími „tunely“ ve struktuře krystalu.

Laueův pokus ilustruje obecnou zákonitost, že kvalitativní změna v procesu vývoje je možná jen jako negace starého stavu. Tím se však vývoj nezastavuje, ale vede naopak k druhé negaci, která některé charakteristiky výchozího stavu opět obnovuje. Při zkoumání podstaty rentgenového záření byl zpočátku přijímán názor, že jde o proud částic. Pak vznikla protikladná vlnová teorie potvrzená Laueovým pokusem. Ani jeden z těchto dvou obrazů skutečnosti však nebyl schopen vysvětlit zcela úplně všechny pozorované jevy. Rozpor dvou jednostranně protikladných teorií byl později vyřešen kvantovou mechanikou, která chápe rentgenové paprsky i každé jiné elektromagnetické záření jako jednotu korpuskulárních a vlnových vlastností.

Povšimněme si závěrem ještě některých dalších forem, zákonitostí a principů vědeckého poznání, jejichž platnost bylo možno na historii Laueova objevu sledovat. Vědecké zkoumání začíná vytyčením problému, splnění tohoto úkolu vyžaduje znalost fakt — objektivně pravdivých informací. Jejich hromadění je nejdůležitější součástí vědeckého zkoumání. Pak teprve přicházejí na řadu domněnky, hypotézy a vědecké teorie. Při zrodu domněnky, tj. předpokladu, jehož logické ani empirické základy nejsou dostatečně prozkoumány, hraje důležitou roli intuice, obrazotvornost. Podaří-li se domněnku dostatečně vědecky zdůvodnit, mění se v hypotézu. Již dávno před pokusy Friedricha a Knippinga nechala celá řada fyziků rentgenové paprsky procházet krystaly. Omezovali se však jen na pozorování paprsků přímo prošlých a o těch nemohli říci nic jiného, než že došlo k jejich zeslabení. Odchýlené paprsky unikly pozornosti pro značně menší intenzitu. Teprve hypotéza o prosto-

rové mřížce vyvolala myšlenku, že je nutno studovat právě tyto odkloněné paprsky. Provedením Laueova pokusu, tj. ověřením praxí, byla hypotéza mřížkové stavby krystalů potvrzena a stala se teorií.

Historie Laueova objevu ukazuje, jakou úlohu má ve výzkumné práci zákonitost a nahodilost, svědčí o souvislosti mezi jevy, jejich časové podmíněnosti, je názorným příkladem, jak se v přírodních vědách uplatňují zákony dialektiky.

Několik jubileí velkých fyziků

VLADIMÍR MALÍŠEK, přírodovědecká fakulta UP Olomouc

Na rok 1982 připadlo několik jubileí fyziků, kteří významným způsobem ovlivnili rozvoj světové vědy.

Patří k nim jeden z desíti slavných švýcarských Bernoulliů, *Daniel Bernoulli* (8/2 1700 Groningen v Holandsku — 17/3 1782 Basilej), který zemřel před 200 lety. Jako všichni Bernoulliové nebyl profesionálně fyzikem či matematikem, ale lékařem; ve své *Hydrodynamice* (1738) založil tuto vědu, formuloval rovnici po něm nazvanou a v dodatku položil základy kinetické teorie. Z představy, že teplo je dáno pohybem molekul, odvodil zákon Boyleův, což byl první případ, kdy byla z mikroskopických představ odvozena makroskopická rovnice. Formuloval rovněž věty o frekvenci tónů píšťal a již v roce 1760 dospěl pomocí elektroskopu vlastní konstrukce k závěru, že přitažlivé síly mezi náboji jsou nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti, čili objevil Coulombův zákon před Coulombem (obdobně jako Cavendish).

150. výročí úmrtí má v letošním roce Carnot a Volta. Mladý francouzský inženýr *Nicolas Léonard Sadi Carnot* (1/6 1796 Paříž — 24/8 1832 Paříž) vycházející z mylné fluidové teorie tepla odvodil přesto nanejvýš významné a správné výsledky v termodynamice, totiž vzorec pro účinnost ideálního tepelného stroje, jehož zobecněním je druhá věta termodynamiky. Jeho práce vešly ve známost teprve dva roky po jeho smrti, když na ně navázal jiný francouzský fyzik Clapeyron.

Slavný italský fyzik *Count Allesandro Guiseppe Antonio Anastasio Volta* (18/2 1745 Como — 5/3 1827 Como), přítel Napoleonův a senátor, patří k objevitelům stálých zdrojů elektrického proudu (Voltův sloup), konstruktérům elektroskopu, je dále objevitelem elektroforu a methanu. Zavedl pojem napětí, a proto je po něm nazvána jednotka této veličiny.

100. výročí narození mají fyzikové Franck, Bridgman a Eddington. *James Franck* (26/8 1882 Hamburk — 21/5 1964 Göttingen) pracoval v atomové fyzice (s G. Hertzem dokázal Bohrovu hypotézu o elektro-

nových hladinách v atomu na základě interakcí atomů s elektronovými svazky), ve fyzice atomového jádra (zúčastnil se konstrukce americké atomové pumy) a molekulové spektroskopii (formuloval princip Frankův-Condonův). Ač zaujímal v Německu přední postavení, odešel za nacistického režimu v době pronásledování občanů narijského původu do USA.

Americký fyzik *Percy Williams Bridgman* (americké Cambridge 21/4 1882 — Randolph 20/8 1961) je zakladatelem fyziky velmi vysokých tlaků, objevitelem různých fází látek (např. černého fosforu), konstruktérem piezometru po něm nazvaného, ale i filozofem fyziky a zakladatelem operacionalismu. Jeho práce vedly k vytvoření umělých diamantů (1955). Byl vyznamenán Nobelovou cenou, šťasten však nebyl (spáchal sebevraždu).

Anglický astrofyzik *Sir Arthur Stanley Eddington* (28/12 1882 Kendal — 22/11 1944 Cambridge) založil fyziku hvězdného nitra, vypočítal teplotu uvnitř Slunce a vypracoval teorii hvězd na základě rovnováhy dostředivých sil gravitačních a odstředivého tlaku záření. Objasn timer podstatu bílých trpaslíků a jako první pozoroval odklon světelných paprsků hvězd vlivem gravitačního pole Slunce, čímž podal jeden z důkazů platnosti obecné teorie relativity. Jako první objasn timer původ hvězdné energie v syntéze vodíku v helium a objevil závislost svítivosti na hmotnosti hvězd.

Letos je také 90. výročí narození amerického fyzika *Arthura Holly Comptona* (10/9 1892 Wooster — 15/3 1962 Berkeley), který objevil a prozkoumal jev po něm nazvaný (rozptyl rentgenového záření na elektronu, přičemž se mění nejen směr, ale i frekvence tohoto záření).

80. výročí slavil největší žijící fyzik P. A. M. Dirac a stejně starý byl dnes již zesnulý sovětský fyzik Kurčatov. *Paul Adrien Maurice Dirac* (8/8 1902 Bristol) jako první úspěšně spojil teorii relativity s kvantovou teorií a na tomto základě formuloval správnou pohybovou rovnici elektronu, jež dnes nese jeho jméno; důsledkem této rovnice byla i jeho předpověď existence pozitronu (1928 a 1930), a tedy možnosti existence antihmoty.

Igor Vasiljevič Kurčatov (12/1 1903 Sim — 7/2 1960 Moskva) pracoval ve fyzice atomového jádra (objevil s Rusinovem jadernou izomerii uměle radioaktivních jader, prozkoumal proces dělení těžkých jader aj.) a organizoval jaderný výzkum SSSR. Vedl výzkumy, jež vyústily v konstrukci sovětské uranové bomby (1949) a vodíkové bomby (1953), jež byly vyzkoušeny r. 1954 a jako první vedl stavbu první jaderné elektrárny.

60 let se dožívá jeden z objevitelů laseru a laureát Nobelovy ceny sovětský fyzik *Nikolaj Gennadijevič Basov* (14/12 1922 Voroněž); v současné době se zabývá problémem iniciace termonukleární syntézy pomocí soustavy laserů.

Před 50 lety zemřel fyzikální chemik *Wilhelm Ostwald* (2/9 1853 Riga — 4/4 1932 Grossbothen u Lipska). Je zakladatelem moderní fyzikální

chemie, v níž vypracoval teorii elektrolytické disociace, chemickou kinetiku, teorii katalýzy a nauku o barvách. Dlouho však neuznával diskrétní (atomární) složení hmoty, byl zastáncem energetismu, za což byl kritizován jak fyziky, tak Leninem v díle *Materialismus a empirio-kriticismus*. Konečně pod tlakem experimentálních faktů v r. 1908 svoje stanovisko změnil. Působil v Rize a poté v Lipsku a významně se zasloužil o organizaci německé vědy a založil a vedl mezinárodní časopis i proslulou sérii monografií „Klasikové vědy“.

Čtvrt století uplynulo také od smrti německého fyzika *Walthera Bothe* (8/1 1891 Oranienburg — 8/2 1957 Heidelberg); vypracoval metodu koincencí pro zkoumání kosmického záření a založil metodu pro získávání neutronového záření (po ozáření berylia částicemi alfa); je zajímavé, že neidentifikoval toto záření (učinil tak objevitel neutronu anglický fyzik James Chadwick). Později opět se ujal „světového vedení“ v oblasti neutronové fyziky.

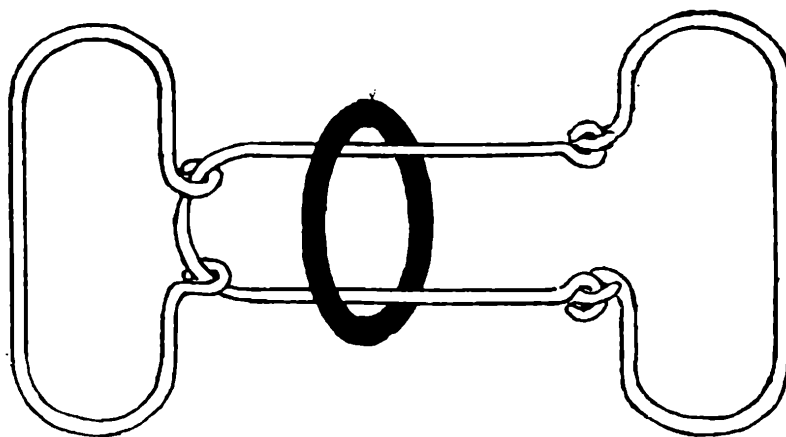
Před 15 lety zemřel nejvýznamnější český fyzikální chemik a náš jediný laureát Nobelovy ceny *Jaroslav Heyrovský* (20/12 1890 Praha — 27/3 1967 Praha). Za objev polarografie a jejího zpracování byl odměněn touto nejvyšší cenou r. 1959.

Před deseti lety zemřela jedna z mála laureátek Nobelovy ceny za fyziku *Marie Goeppertová-Mayerová* (28/6 1906 Katovice — 20/2 1972). Tato německá fyzička se narodila v Polsku a pracovala v USA. Předpověděla dvojitý beta rozpad atomových jader, zavedla pojem spin-orbitální vazby a zejména vypracovala slupkový model atomového jádra, za nějž byla také spolu s Wignerem a Jensenem odměněna Nobelovou cenou.

PŘEMÝŠLÍME ŘEŠÍME...

Kroužek v pasti

Dnes přicházíme s hlavolamem jiného druhu, než byly předchozí. Jde o hlavolam drátěný, vyrobený z nerezavějícího ocelového drátu. K jeho výrobě se nejlépe hodí špice ke kolu (co nejdelší). Protože se tento drát poměrně těžko ohýbá, budeme k jeho výrobě potřebovat určitou zručnost i trpělivost. Ke štípání drátu na potřebnou délku se nejlépe hodí obyčejné štípací kleště, k ohýbání malé kleště se zakulacenými čelistmi. Kroužek může být kovový nebo z umělé hmoty (od záclon).



Obr. 1

Nyní k rozměrům hlavolamu (obr. 1). Při určování jeho rozměru se řídíme velikostí kroužku, který máme k dispozici. Délka ramene středního oblouku, na který jsou připevněny další dva oblouky — jeden posuvný, druhý neposuvný — by se měla rovnat přibližně dvěma vnějším průměrům kruhu, jehož šířka musí být o málo menší, než je vnitřní průměr kruhu (taková, aby nebylo možno přetáhnout kroužek přes oblouky). Rozměry obou připevněných oblouků jsou přibližně tytéž jako u vnitřního oblouku.

Úkolem hlavolamu bude vyjmout kroužek „z pasti“ a zpět ho navléci.

Josef Svoboda

Slavná kostka

Davové poblouznění, které vyvolává maďarská magická krychle, se šíří a její vynálezce *Ernö Rubik* si může blahopřát k této neobvyklé popularitě. K nám se kostka dostala v polovině sedmdesátých let a nyní vchází ve známost už i v zámorí. Tak na konferenci o kombinatorické matematice, která se konala v srpnu 1980 na Deakinově univerzitě v australském Geelongu, přednášel *C. A. Rowley* o matematické teorii tohoto oblíbeného hlavolamu. *D. Singmaster* vydal pro anglickou jazykovou oblast příručku s názvem *Notes on Rubik's Magic Cube* a sepsal o ní i několik článků, z nichž jeden byl přeložen i do češtiny (*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 26 (1981), 86—88).

Listujeme několika čísly časopisu *Scientific American* z minulého roku a také tam se setkáváme s maďarskou krychlí. Firma *Texas Instruments*, která se zabývá počítačovou technikou, jejího obrázku dokonce začala užívat na svých inzerátech.

Jiří Sedláček

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

5. Je dána kružnice k o středu S a poloměru $r = 1$; uvnitř kruhu omezeného kružnicí k jsou dány dva různé body A, B souměrně sdružené podle středu S . Sestrojme trojúhelník BCD , jehož strana CD prochází bodem A a jehož vrcholy C, D jsou body kružnice k . Který z takto sestrojených trojúhelníků má největší obsah? Pokuste se řešit úlohu nejprve bez použití diferenciálního počtu.

Emil Kraemer

(Došlo 11 řešení)

Upravené řešení Petra Eislera, 4. C G Havlíčkův Brod:

Budiž φ velikost konvexního úhlu BAC . Můžeme se omezit jen na případy, v nichž je

$$0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

neboť pro φ z intervalu $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ dostaneme trojúhelník, který je souměrně sdružen k některému trojúhelníku (a tedy s ním shodný), pro který platí (1). Podle předpokladu je $|SA| = |SB| = p < 1$, takže $|AB| = 2p$. Budiž ještě v výška ke straně CD trojúhelníku BCD . Podle obr. 1 je pro

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$v = |AB| \sin \varphi = 2p \sin \varphi; \quad (2)$$

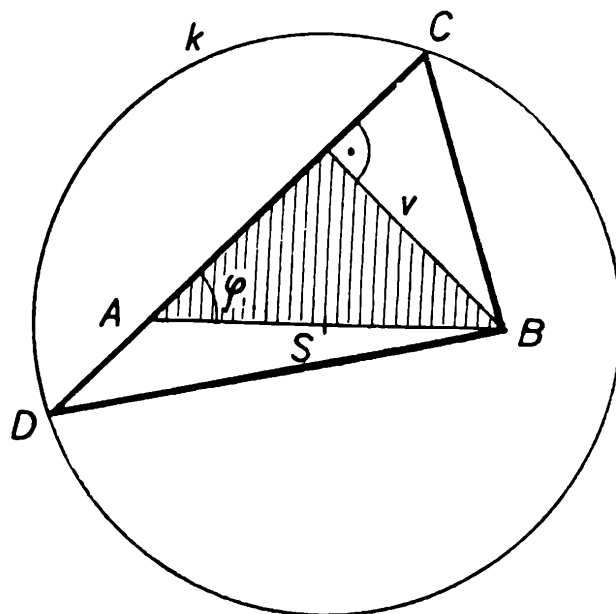
avšak to platí i pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$, neboť potom výška v splývá s úsečkou AB .

Podle (2) platí pro obsah P trojúhelníku BCD vzorec

$$P = \frac{1}{2}|CD| \cdot v = |CD| p \sin \varphi. \quad (3)$$

Avšak $|CD| = |AC| + |AD|$; přitom $|AC|$, resp. $|AD|$ lze vypočítat podle kosinové věty užití na trojúhelníky ASC , resp. ASD takto:

$$|SC|^2 = |AC|^2 + |SA|^2 - 2|AC| |SA| \cos \varphi,$$



Obr. 1

$$|SD|^2 = |AD|^2 + |SA|^2 - 2|AD||SA|\cos(2R - \varphi).$$

Protože je $|SC| = |SD| = 1$, $|SA| = p$, dostáváme pro $|AC|$, resp. $|AD|$ kvadratické rovnice

$$|AC|^2 - 2|AC|p\cos\varphi + (p^2 - 1) = 0,$$

$$|AD|^2 + 2|AD|p\cos\varphi + (p^2 - 1) = 0$$

s týmž diskriminantem

$$D = p^2 \cos^2 \varphi - p^2 + 1 = 1 - p^2 \sin^2 \varphi > 0$$

(neboť je $p < 1$). Snadno se přesvědčíme, že je

$$\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} > p \cos \varphi;$$

proto ze dvou kořenů každé z obou rovnic má význam jen jeden, a to

$$|AC| = p \cos \varphi + \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi},$$

$$|AD| = -p \cos \varphi + \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}.$$

Proto je

$$|CD| = |AC| + |AD| = 2\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi},$$

takže podle (3) je

$$P = 2p \sin \varphi \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} = 2\sqrt{p^2 \sin^2 \varphi (1 - p^2 \sin^2 \varphi)}. \quad (4)$$

Podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru je

$$\sqrt{p^2 \sin^2 \varphi (1 - p^2 \sin^2 \varphi)} \leq \frac{p^2 \sin^2 \varphi + 1 - p^2 \sin^2 \varphi}{2} = \frac{1}{2}, \quad (5)$$

takže podle (4) je

$$P \leq 1. \quad (6)$$

Přitom v (5), a tedy i v (6) nastane rovnost právě tehdy, je-li

$$p^2 \sin^2 \varphi = 1 - p^2 \sin^2 \varphi,$$

tj. podle (1) právě tehdy, je-li

$$\sin \varphi = \frac{1}{p\sqrt{2}} \quad (7)$$

Protože je $\sin \varphi \leq 1$, má (7) význam právě tehdy, je-li $p\sqrt{2} \geq 1$, čili ještě

$$p \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pro $p > \frac{\sqrt{2}}{2}$ je $\sin \varphi < 1$ (čili $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), takže maximální obsah P mají právě dva shodné trojúhelníky souměrně sdružené podle přímky AB . Pro $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ je $\sin \varphi = 1$ (čili $\varphi = \frac{\pi}{2}$) a maximální obsah P má jediný trojúhelník BCD , jehož strana CD je kolmá k přímce AB . V obou případech je maximální obsah $P = 1$.

Dokážeme, že pro $p < \frac{\sqrt{2}}{2}$ nastane pro obsah P maximum právě tehdy, je-li $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tj. dokážeme, že v tomto případě je podle (4)

$$P = 2p \sin \varphi \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} \leq 2p \sqrt{1 - p^2}.$$

To znamená, že v tomto případě je pro $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\sin \varphi \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} < \sqrt{1 - p^2}. \quad (8)$$

Avšak (8) nastane právě tehdy, je-li postupně

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi - p^2 \sin^4 \varphi &< 1 - p^2, \\ p^2(1 - \sin^4 \varphi) &< 1 - \sin^2 \varphi, \\ p^2(1 + \sin^2 \varphi) &< 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Protože podle předpokladu je $p < \frac{\sqrt{2}}{2}$, je $p^2 < \frac{1}{2}$, a tedy platí (9), neboť $1 + \sin^2 \varphi < 2$.

Pro $p < \frac{\sqrt{2}}{2}$ má maximální obsah P jediný trojúhelník BCD , jehož strana CD je kolmá k přímce AB ; tento maximální obsah je

$$P = 2p \sqrt{1 - p^2}.$$

Tento vzorec platí i pro $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$, neboť potom je $P = 1$, tj. též výsledek, jako jsme dostali dříve.

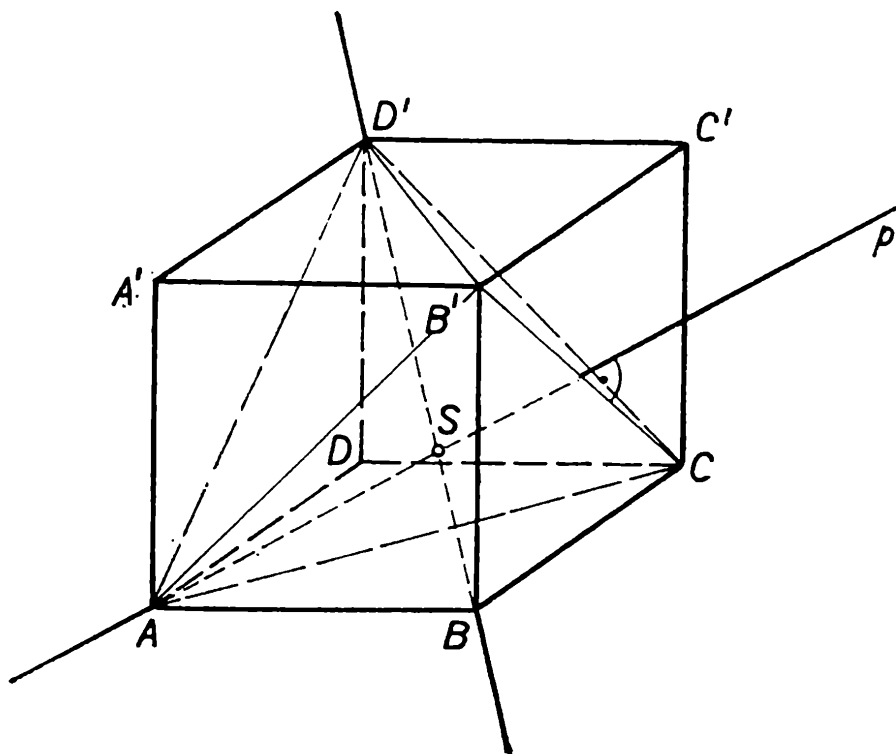
6. Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$; označme p přímkou, která prochází vrcholem A , protíná stěnovou úhlopříčku $B' C$ a je na ni kolmá. Zjistěte vzájemnou polohu přímky p a tělesové úhlopříčky $B D'$ a určete jejich odchylku.

Jiří Mída

(Došlo 17 řešení)

Upravené řešení Ignáce Teresčáka, 2. B G P. Horova, Michalovce :

Přímka p leží (obr. 2) v rovině ACB' . Trojúhelník ACB' je rovnostranný, neboť jeho strany jsou stěnovými úhlopříčkami dané krychle. Tedy na přímce p leží střed S trojúhelníku ACB' .



Obr. 2

Trojúhelník ACB' je podstavou dvou pravidelných jehlanů: pravidelného čtyřstěnu $ACB'D'$, jehož všechny hrany jsou stěnovými úhlopříčkami dané krychle, a trojbokého jehlanu $ACB'B$, kterého všechny boční hrany jsou hranami dané krychle. Tělesové výšky těchto dvou pra-

videlných jehlanů na podstavu ACB' mají společnou patu; je jí bod S . Bodem S však prochází jediná přímka kolmá k rovině ACB' , takže bod S leží na přímce BD' , jež je kolmá na rovinu ACB' .

Ze závěrů prvního a druhého odstavce plyne, že přímky p a BD' jsou různoběžné a že jejich odchylka je 90° .

Poznámka. Všechna zaslaná řešení byla zcela dobře nebo jen s nepatrnými chybami. Většina řešitelů užila metody souřadnic.

7. Je dána rovnice

$$x^6 - 14x^4 + 49x^2 + p = 0, \quad (1)$$

kde x je neznámá a p parametr. Nalezněte číslo p , které má tuto vlastnost: Ze šesti kořenů dané rovnice je možno vybrat tři tak, aby jeden z nich byl aritmetickým průměrem ostatních dvou; přitom ve vybrané trojici může být totéž číslo dvakrát (tříkrát), jen je-li aspoň dvojnásobným (trojnásobným) kořenem dané rovnice.

Jiří Mída

(Došlo 11 řešení)

Všechna došla řešení, která jsou zcela dobře nebo jen s nepatrnými chybami, mají příliš velký rozsah. Uveřejňujeme řešení, které vzniklo použitím úvah z řešení *Petra Eislera* ze 4. C gymnázia v Havlíčkově Brodě a z řešení kolektivu složeného z *Aurela Danysze* a *Ivana Martáka* z gymnázia J. Hronce v Bratislavě.

Řešení:

I. Nechť $p = 0$. Pak lze danou rovnici upravit na tvar

$$x^2 \cdot (x^2 - 7)^2 = 0.$$

Odtud je vidět, že pro $p = 0$ má rovnice (1) tři dvojnásobné kořeny

$$x_{1,2} = 0, \quad x_{3,4} = \sqrt[3]{7}, \quad x_{5,6} = -\sqrt[3]{7}.$$

Podmínku úlohy splňuje trojice kořenů $\sqrt[3]{7}, -\sqrt[3]{7}, 0$.

II. Nechť $p \neq 0$. Rovnici (1) upravíme na tvar

$$(x^3 - 7x)^2 + p = 0. \quad (2)$$

Označme a takové komplexní číslo, pro které platí

$$-a^2 = p. \quad (3)$$

(Pro každé $p \neq 0$ existují dokonce dvě taková čísla a .) Rovnici (2) lze pak dát tvar

$$(x^3 - 7x - a)(x^3 - 7x + a) = 0,$$

odkud plyne, že množina všech kořenů dané rovnice (1) se rovná sjednocení množiny všech kořenů rovnice

$$x^3 - 7x - a = 0 \quad (4)$$

a množiny všech kořenů rovnice

$$x^3 - 7x + a = 0. \quad (5)$$

Snadno se dokáže tvrzení: Jestliže číslo r je kořenem rovnice (4), pak číslo $-r$ je řešením rovnice (5). Platí však také obráceně: Je-li číslo s kořenem rovnice (5), pak číslo $-s$ je kořenem rovnice (4). Má-li tedy rovnice (4) kořeny x_1, x_2, x_3 , pak rovnice (5) má kořeny $-x_1, -x_2, -x_3$.

Podle Viètovy vèty o kořenech algebraické rovnice pro kořeny rovnic (4) a (5) platí:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad (6)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7, \quad (7)$$

$$x_1x_2x_3 = a,$$

Z poslední rovnosti dostáváme:

$$p = -a^2 = -x_1^2x_2^2x_3^2. \quad (8)$$

Při vybírání trojic ze šesti kořenů $x_1, x_2, x_3, -x_1, -x_2, -x_3$ se lze omezit jen na šest případů.

1. Všechny tři uvažované kořeny jsou řešením rovnice (4) a necht' např. $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Pak však z rovnosti (6) dostaneme, že $x_3 = 0$. Podle (8) a (3) pak dospějeme ke sporu s předpokladem, neboť zjistíme, že $p = 0$.

2. Ve vybrané trojici jsou dva kořeny rovnice (4), např. x_1, x_2 a třetí kořen, jenž je jejich průměrem, je kořenem rovnice (5). Uvážíme-li možnost přecíslování kořenů, jsou vlastně jen dva případy:

$$\text{a) } \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -x_1,$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -x_2.$$

V případě a) pomocí rovností (6), (7) a (8) vypočteme, že

$$|x_1| = 1, \quad |x_2| = 3, \quad |x_3| = 2, \quad p = -36;$$

v případě b) zjistíme z rovnosti (6), že $x_3 = 0$, což není možné. Snadno se lze přesvědčit, že pro $p = -36$ vyhovuje trojice kořenů 1, -1 , 3.

3. Ve vybrané trojici jsou dva kořeny rovnice (4) a jeden kořen rovnice (5). Průměr se počítá z jednoho kořene rovnice (4) a z jednoho kořene rovnice (5). Jestliže uvážíme možnost přecíslování kořenů, existují vlastně jen tři možnosti:

$$\text{a) } \frac{1}{2} [x_1 + (-x_1)] = x_2,$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} [x_1 + (-x_2)] = x_2,$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} [x_1 + (-x_3)] = x_2.$$

V případě a) dostáváme, že $x_2 = 0$, což nevyhovuje. Možnost b) vede při použití rovností (6), (7) a (8) k závěru:

$$|x_1| = 3 \sqrt{\frac{7}{13}}, |x_2| = \sqrt{\frac{7}{13}}, |x_3| = 4 \sqrt{\frac{7}{13}}, p = -\frac{49\,392}{2\,197}.$$

V tomto případě vyhovuje trojice kořenů $3 \sqrt{\frac{7}{13}}, \sqrt{\frac{7}{13}}, -\sqrt{\frac{7}{13}}$.

Při vyšetřování případu c) dospějeme k obdobnému závěru jako v případě 1. a).

Závěr: Úloha má právě tři řešení; jsou jimi čísla 0, -36 , $-\frac{49\,392}{2\,197}$.

8. Nechť Q je množina všech uspořádaných čtveřic reálných čísel (x_1, x_2, x_3, x_4) splňujících podmínku

$$x_i \neq x_j, \text{ jestliže } i \neq j.$$

Množinu S některých podmnožin $S \subset Q$ nazveme přípustnou, jestliže splňuje tyto podmínky:

(1) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in Q \mid x_i < x_j\} \in S$
pro všechna $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(2) Jestliže $S_1 \in S$ a $S_2 \in S$, pak $S_1 \cup S_2 \in S$.

(3) Jestliže $S_1 \in S$ a $S_2 \in S$, pak $S_1 \cap S_2 \in S$.

A) Ukažte, že existují nekonečné i konečné přípustné množiny.

B) Určete nejmenší možný počet prvků přípustné množiny.

Jaroslav Morávek

(Došlo 6 řešení)

Řešení autora úlohy:

Podmínka (1), jejíž přesné pochopení patrně činilo některým řešitelům jisté potíže, vyjadřuje toto: Množina množin (systém množin) S obsahuje tyto prvky (tj. podmnožiny množiny Q):

1) Prázdnou množinu $M_0 = \emptyset$ (Tu dostáváme např. pro $i = j = 1$.)

2) Množiny $M_1 = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q \mid x_1 < x_2\}$ a $M_2 = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q \mid x_2 < x_1\}$

- 3) $M_3 = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_1 < x_3\}$ a $M_4 = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_3 < x_1\}$
 4) $M_5 = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_1 < x_4\}$ a $M_6 = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_4 < x_1\}$
 5) $M_7 = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_2 < x_3\}$ a $M_8 = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_3 < x_2\}$
 6) $M_9 = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_2 < x_4\}$ a $M_{10} = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_4 < x_2\}$
 7) $M_{11} = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_3 < x_4\}$ a $M_{12} = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_4 < x_3\}$.

Kromě třinácti množin $M_0, M_1, \dots, M_{12}$ musí S obsahovat i libovolnou množinu, která vznikne z množin $M_1, M_2, \dots, M_{12}$ pomocí množinových operací sjednocení a průnik.

Věnujme se nyní řešení otázky sub A): Symbolem S^* označme množinu (systém) všech podmnožin množiny Q . Množina S^* obsahuje speciálně všechny množiny $M_0, M_1, \dots, M_{12}$ a splňuje tedy podmínku (1). Jsou-li S_1 a S_2 libovolné dvě podmnožiny množiny Q , jsou rovněž i $S_1 \cup S_2$ a $S_1 \cap S_2$ podmnožinami množiny Q . Množina S^* splňuje tedy i podmínky (2) a (3). Protože je S^* nekonečná (Q je nekonečná množina), máme příklad nekonečné přípustné množiny.

Poněkud pracnější je setrojit příklad konečné přípustné množiny. Uvažujme libovolné pořadí (permutaci)

$$(k(1), k(2), k(3), k(4))$$

indexů 1, 2, 3, 4 (počet všech takových pořadí je $4! = 24$) a položme $P(k(1), k(2), k(3), k(4)) = \{(x_1, \dots, x_4) \in Q | x_{k(1)} < x_{k(2)} < x_{k(3)} < x_{k(4)}\}$. Množiny $P(k(1), k(2), k(3), k(4))$ jsou neprázdné, tvoří disjunktní rozklad množiny Q a jejich počet je přesně 24.

Symbolem S_* označme množinu všech podmnožin množiny Q , obsahující právě tyto prvky:

- 1) prázdnou množinu $\emptyset$
- 2) všech 24 množin $P(k(1), \dots, k(4))$
- 3) všechny množiny, které lze získat sjednocením libovolného konečného počtu množin $P(k(1), \dots, k(4))$.

Z definice S_* je patrné, že existuje prosté zobrazení f množiny S_* na množinu všech podmnožin množiny všech $4! = 24$ pořadí $(k(1), \dots, k(4))$ čtyř indexů 1, 2, 3, 4. Množina S_* je tedy konečná; obsahuje 2^{24} prvků.

Čtenář snadno ověří, že množina S_* vyhovuje podmínkám (1), (2), (3) z textu úlohy; máme tedy příklad konečné přípustné množiny.

Věnujme se dále řešení otázky sub B). Ukážeme, že právě sestavená množina S_* je přípustnou množinou s nejmenším možným počtem prvků. K tomu však stačí ukázat, že pro libovolnou přípustnou množinu S platí $S_* \subset S$.

Nechť tedy S je libovolná přípustná množina a $(k(1), \dots, k(4))$ libo-

volné pořadí indexů 1, 2, 3, 4. Z podmínky (1) úlohy vyplývá platnost vztahu

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q} \mid (x_{k(i)} < x_{k(i+1)})\} \in S$$

pro $i = 1, 2, 3$, odkud na základě podmínky (3) dostáváme

$$\begin{aligned} P(k(1), k(2), k(3), k(4)) &= \\ &= \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{Q} \mid x_{k(1)} < x_{k(2)} < x_{k(3)} < x_{k(4)}\} = \\ &= \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{Q} \mid x_{k(1)} < x_{k(2)}\} \cap \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{Q} \mid x_{k(2)} < x_{k(3)}\} \cap \{(x_1, \\ &\dots, x_4) \in \mathbb{Q} \mid x_{k(3)} < x_{k(4)}\} \in S. \end{aligned}$$

Platí tedy:

$\{P(k(1), \dots, k(4)) \mid (k(1), \dots, k(4)) \text{ probíhá množinu všech 24 pořadí}\} \subset S$,
odtud však dostáváme na základě podmínky (2) z textu úlohy

$$S_\star \subset S,$$

což jsme měli dokázat.

Závěr: A) $S^\star$ je příkladem nekonečné přípustné množiny, $S_\star$ je příkladem konečné přípustné množiny.

B) Nejmenší možný počet prvků přípustné množiny je $2^{24} = 16\,777\,216$.

Poznámka: Jak správně uvádí Petr Tichavský ze IV. C gymnázia M. Koperníka v Bílovci, úloha dovoluje zobecnění pro n -tice, kde n je dané přirozené číslo. Nejmenší možný počet prvků „zobecněné“ přípustné množiny je 2^n !

Fyzika

3. Střela z minometu má počáteční rychlost $v_0 = 100$ m/s. Řešte tyto dvě úlohy (odpor vzduchu neuvažujte):

a) Nalezněte dva elevační úhly, pod kterými je nutno vystřelit granát z minometu tak, aby zasáhl cíl ležící ve vzdálenosti $L = 866$ m na stejné úrovni jako minomet.

b) Nalezněte maximální výšku každé dráhy a dobu letu.

Zdeněk Janout

(Došlo 43 řešení)

Řešení Tichomíra Gyarmati, III. B G Komárno:

Pohyb granátu je šikmý vrh, takže můžeme napísat následovné rovnice:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (2)$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (3)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2. \quad (4)$$

a) Dobu letu T granátu určíme z podmienky $y = 0$; potom z (4) plynie

$$0 = v_0 T \sin \alpha - \frac{1}{2} g T^2,$$

odtiaľ

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g},$$

Z rovnice (2) určíme diaľku letu

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

odtiaľ

$$\sin 2\alpha = \frac{gL}{v_0^2}. \quad (5)$$

Riešením goniometrickej rovnice (5) dostávame

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{Lg}{v_0^2}; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{Lg}{v_0^2},$$

a keď vypočítame uhly pomocou daných veličín, dostaneme, že

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

b) Maximálnu výšku dosiahne granát vtedy, keď zvislá zložka jeho rýchlosti bude nulová, $v_y = 0$; potom z (3) plynie

$$0 = v_0 \sin \alpha - g t_m, \text{ odtiaľ } t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Dosadením do rovnice (4) dostaneme vzťah pre maximálnu výšku

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

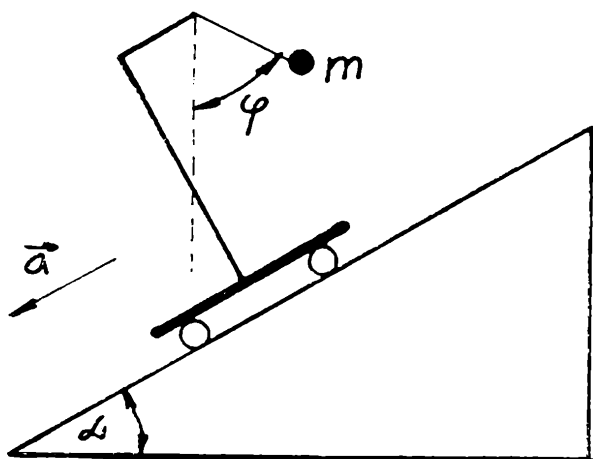
Pri elevačnom uhle

$$T_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha_1}{g} = 17,3 \text{ s}, \quad H_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_1}{2g} = 375 \text{ m}$$

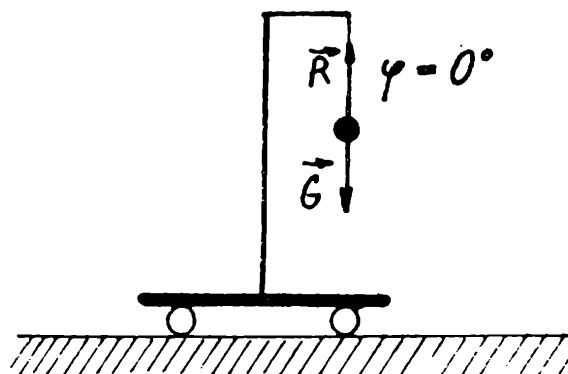
a pri druhom elevačnom uhle

$$T_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha_2}{g} = 10 \text{ s}, \quad H_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_2}{2g} = 125 \text{ m}.$$

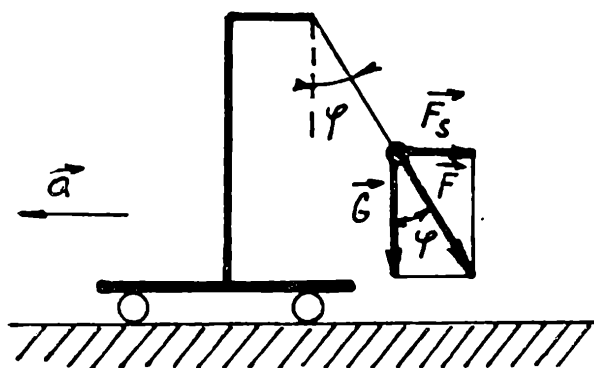
4. Kyvadlo o hmotnosti m je zavěšeno na stojanu, který je upevněn na vozíku. Určete:



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

a) směr vlákna kyvadla zadaný úhlem (o velikosti φ), který udává odchylku vlákna od svislého směru;

b) namáhání vlákna T ,

a to v těchto pěti případech:

1. Vozík se pohybuje rovnoměrně přímočaře po vodorovné rovině;
2. vozík se pohybuje přímočaře se zrychlením a po vodorovné rovině;
3. vozík volně sjíždí po nakloněné rovině;
4. vozík stoupá se zrychlením a po nakloněné rovině;
5. vozík se zrychlením a sjíždí po nakloněné rovině (obr. 1).

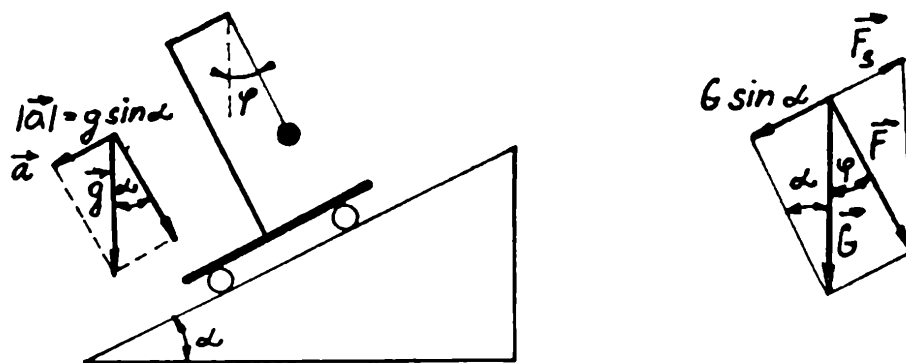
Zdeněk Janout

(Došlo 34 řešení)

Řešení Jaroslava Smejkal, III. A G Velké Maziříč:

1. Vozík se pohybuje rovnoměrně přímočaře po vodorovné rovině. Spojíme-li vztažnou soustavu s vozíkem, jde o inerciální vztažný systém. Na kyvadlo působí pouze tíha G , touto tíhou působí kulička na vlákno a to působí na kuličku stejně velkou reakcí R . Součet sil působících na kuličku je roven nulovému vektoru (obr. 2). Vlákno je namáháno silou G , je tedy svislé ($\varphi = 0^\circ$), $T = G = mg$. Tedy:

$$\varphi = 0^\circ, T = mg.$$



Obr. 4

2. Vozík se pohybuje přímočaře se zrychlením $\mathbf{a}$ po vodorovné rovině. Nyní už nejde o inerciální vztažný systém — na kuličku ve vztažném systému spojeném s vozíkem působí setrvačná síla $\mathbf{F}_s$ o velikosti $|\mathbf{F}_s| = ma$. Tato síla se skládá s tíhou $\mathbf{G}$ ve výslednou sílu $\mathbf{F}$ působící na kuličku. Stejně velkou silou působí i kulička na vlákno, tedy $T = F$. Vlákno zaujme tedy směr síly $\mathbf{F}$, svírá se svislým směrem úhel φ stejně jako $\mathbf{F}$. Pro úhel φ platí (viz obr. 3)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_s}{G} = \frac{a}{g}, \text{ tedy } \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{g}.$$

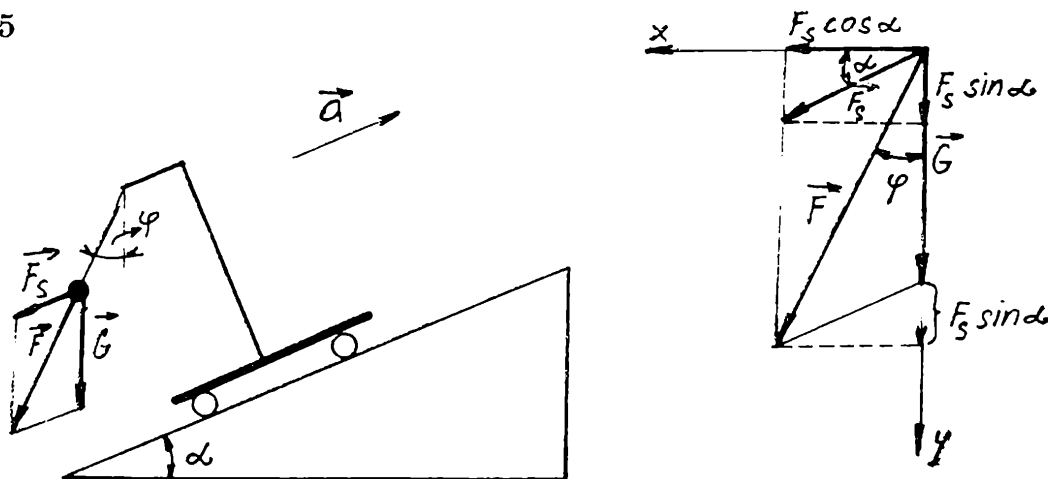
Pro sílu $\mathbf{F}$ platí z Pythagorovy věty:

$$F = \sqrt{F_s^2 + G^2} = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}.$$

Protože $T = F$, dostáváme $T = m\sqrt{g^2 + a^2}$.

Pro odchylku vlákna od svislého směru φ platí $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{g}$, pro namáhání vlákna T platí $T = m\sqrt{a^2 + g^2}$.

3. Vozík působením tíhy volně sjíždí po nakloněné rovině (není brzděn žádným třením). Tíha $\mathbf{G}$ celého vozíku se rozkládá na složku kolmou na nakloněnou rovinu a na složku s ní rovnoběžnou. Složka rovnoběžná způsobuje pohyb po nakloněné rovině směrem dolů — pohyb rovnoměrně zrychlený. Tato složka má velikost $G \sin \alpha$. Zrychlení soustavy má potom velikost $a = g \sin \alpha$. Soustava souřadná spojená s vozíčkem tedy není inerciální — na kuličku působí setrvačná síla $\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}$. Pokud bychom si tíhu $\mathbf{G}$ kuličky rozložili na složku rovnoběžnou s nakloněnou rovinou $\mathbf{G}_1$ a složku kolmou $\mathbf{G}_2$, platilo by $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$. Platí $G_1 = G \sin \alpha$, ale také $|\mathbf{F}_s| = |-m\mathbf{a}| = +mg \sin \alpha$. Vidíme tedy, že $\mathbf{F}_s = -\mathbf{G}_1$. Na kuličku působí síly $\mathbf{F}_s$, $\mathbf{G}$, jejich složením dostaneme výslednou sílu $\mathbf{F}$. Stejně velkou a stejně orientovanou silou namáhá kulička vlákno. Vlákno tedy bude mít směr síly $\mathbf{F}$. Platí (viz obr. 4):



$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_s,$$

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{G}_1, \text{ odtud } \mathbf{F} = \mathbf{G} - \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2.$$

Zjistili jsme, že výsledná síla je stejně velká a má stejnou orientaci jako $\mathbf{G}_2$ – složka tíhy $\mathbf{G}$ kolmá na nakloněnou rovinu. Směr této síly svírá se svislým směrem úhel α , její velikost je $G \cos \alpha$, odtud

$$\varphi = \alpha, \quad T = mg \cos \alpha.$$

Chápeme-li „volné sjíždění“ jako ničím nebráněné sjíždění po nakloněné rovině působením tíhy, pak odchylka φ vlákna od svislého směru je stejně velká jako úhel α , který svírá nakloněná rovina s vodorovným směrem. Pro namáhání vlákna potom platí $T = mg \cos \alpha$.

4. Vozík stoupá se zrychlením $\mathbf{a}$ po nakloněné rovině. Opět nejde o inerciální vztažný systém – na kuličku ve vztažném systému spojeném s vozíkem působí setrvačná síla $\mathbf{F}_s$, $\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}$. Tato síla se skládá s tíhou $\mathbf{G}$ ve výslednou sílu $\mathbf{F}$ působící na kuličku. Stejně velkou silou působí i kulička na vlákno, tedy $T = F$. Vlákno zaujme směr síly $\mathbf{F}$, svírá se svislým směrem úhel φ stejně jako $\mathbf{F}$. Sílu $\mathbf{F}_s$ si rozložíme na vodorovnou a svislou složku (viz obr. 5). Potom z Pythagorovy věty dostaneme

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{(G + F_s \sin \alpha)^2 + (F_s \cos \alpha)^2} = \sqrt{G^2 + 2GF_s \sin \alpha + F_s^2}.$$

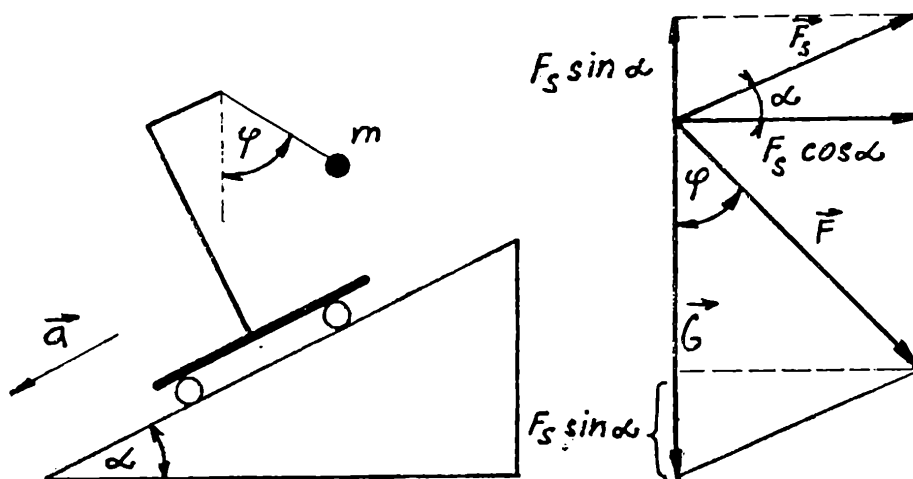
Dosadíme-li do tohoto vztahu za $G = mg$ a $F_s = ma$, dostaneme

$$|\mathbf{F}| = m\sqrt{g^2 + a^2 + 2ga \sin \alpha}.$$

Jelikož $T = |\mathbf{F}|$, odtud $T = m\sqrt{g^2 + a^2 + 2ga \sin \alpha}$.

Pro úhel φ platí (viz obr. 5):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_s \cos \alpha}{G + F_s \sin \alpha} = \frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha}.$$



Stoupá-li vozík se zrychlením a po nakloněné rovině, svírá vlákno se svislým směrem úhel φ , pro nějž platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha}.$$

Pro namáhání vlákna T platí vztah $T = m\sqrt{g^2 + a^2 + 2ga \sin \alpha}$.

5. Vozík se zrychlením a sjíždí po nakloněné rovině (viz obr. 6). Situace je v podstatě stejná jako v případě 4., pouze zrychlení, a tedy i setrvačná síla jsou orientovány opačně (viz obr. 6). Pro velikost síly F dostáváme z Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &= \sqrt{(G - F_s \sin \alpha)^2 + (F_s \cos \alpha)^2} = \sqrt{G^2 - 2G F_s \sin \alpha + F_s^2} = \\ &= m\sqrt{g^2 + a^2 - 2ga \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Jelikož platí $T = |\mathbf{F}|$, dostáváme pro namáhání vlákna vztah

$$T = m\sqrt{g^2 + a^2 - 2ga \sin \alpha}.$$

Pro úhel φ platí (viz obr. 6):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_s \cos \alpha}{G - F_s \sin \alpha} = \frac{a \cos \alpha}{g - a \sin \alpha}.$$

Sjíždí-li vozík se zrychlením a po nakloněné rovině, svírá vlákno se svislým směrem úhel φ , pro nějž platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \cos \alpha}{g - a \sin \alpha}.$$

Pro namáhání vlákna T platí vztah $T = m\sqrt{g^2 + a^2 - 2ga \sin \alpha}$.

Poznámka řešitele: Všechny případy se dají zapsat jedním způsobem, například vztahy odvozenými v pátém případě:

$$T = m\sqrt{g^2 + a^2 - 2ga \sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a \cos \alpha}{g - a \sin \alpha}.$$

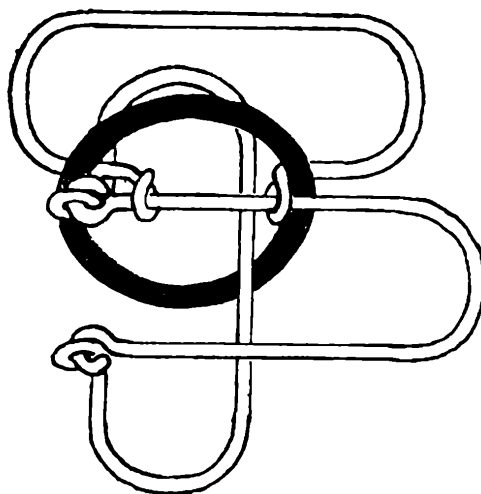
Potom řešení prvního případu dostaneme pro $\alpha = 0^\circ$, $a = 0 \text{ ms}^{-1}$, druhého případu pro $\alpha = 0^\circ$, $a \neq 0$; třetího případu pro $\alpha \neq 0$, $a = g \sin \alpha$ a čtvrtého případu pro $\alpha \neq 0$, $a < 0$.

Poznámka autora: Největší počet řešitelů byl z gymnázia Komárno, ul. kpt. Jaroše 5.

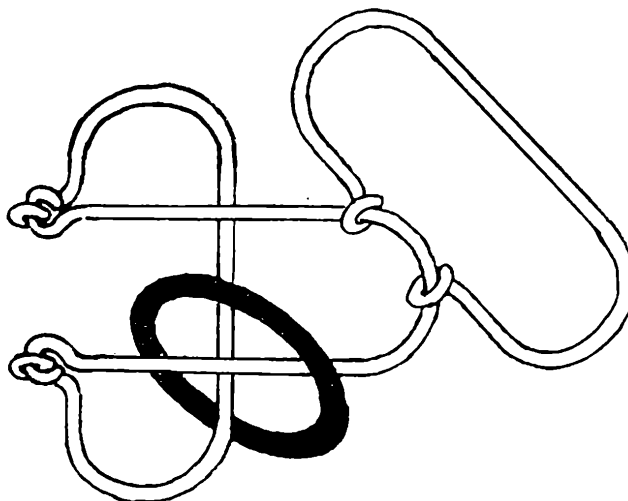
Řešení hlavolamu Kroužek v pasti ze str. 164

Kroužek posuneme na pohyblivý oblouk a spolu s ním se přiblížíme co nejvíce k místu, kde je připevněn druhý nepohyblivý oblouk, který jsme předtím sklopili (obr. 1). Nyní kroužkem obejdeme toto místo (spojení) a kroužek vyvlékneme z vnitřního oblouku (obr. 2).

Obr. 1



Obr. 2



Mezinárodní matematická olympiáda 1982

Ve dnech 5.—13. července 1982 se konala v Budapešti již 23. mezinárodní matematická olympiáda. Družstvo Československa tvořili čtyři žáci gymnázia W. Piecka v Praze — *Petr Couf*, *Miroslav Engliš*, *Igor Kříž* a *Jiří Sgall*. Do Budapešti se sjelo celkem 30 družstev, tedy 120 žáků z celého světa, aby ve dvou dnech řešili 6 matematických úloh, které vybrala mezinárodní jury. Na závěrečném slavnostním shromáždění bylo uděleno deset prvních, dvacet druhých a 31 třetích cen. Z našich účastníků získali J. Sgall a I. Kříž druhé ceny a P. Couf a M. Engliš třetí ceny. V neoficiálním pořadí družstev obsadili 7. místo po NSR, SSSR, NDR, USA, Vietnamu a Maďarsku, což je jistě pěkný výsledek. Nemyslíte? Tak si zkuste vyřešit úlohu, která dělala našim chlapcům (a nejen jim) největší potíže: Je dán nerovnoramenný trojúhelník $A_1A_2A_3$ se stranami a_1, a_2, a_3 (a_i je strana protilehlá k vrcholu A_i). Pro $i = 1, 2, 3$ nechť je M_i střed strany a_i a T_i bod dotyku kružnice trojúhelníku vepsané se stranou a_i . Souměrnost podle osy vnitřního úhlu trojúhelníku s vrcholem A_i zobrazuje bod T_i na bod S_i . Dokažte, že přímky M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 procházejí jedním bodem.

Nebo si vyřešte úlohu, která byla asi z šestice úloh nejlehčí: Úhlopříčky AC a CE pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou vnitřními body M, N rozděleny tak, že

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = r$$

Vypočtete r , jestliže body B, M a N leží na jedné přímce.

L. Boček, Praha

Z krajského kola SOČ — oboru matematika

„Jsem už téměř pamětníkem“, řekl předseda poroty *doc. dr. Erich Barvínek, CSc.*, po skončení krajského kola SOČ Jihomoravského kraje v sekci matematiky, „vždyť v krajské porotě pracuji od jejího vzniku. Mohu tedy odpovědně prohlásit, že si tato soutěž udržuje velmi solidní úroveň, celková úroveň letošního ročníku byla zase o něco vyšší než loni.“

Co jsme si tedy mohli poslechnout 13. května 1982 na krajské přehlídce prací SOČ?

Vlastníte-li kalkulátor TI 58 nebo TI 59, jistě by Vás zaujaly hned tři příspěvky, které se programovým vybavením těchto kalkulátorů zabývaly. A dozvěděli byste se zajímavé věci, které výrobce „přísně tají“. Nejlepší z nich, práce *R. Fryse* z gymnázia v Prostějově, postoupila na celostátní přehlídku do Trenčína.

Několik prací z programování řešilo úlohy nadmíru aktuální — uplatnění výpočetní techniky při řešení konkrétních problémů v průmyslu a zemědělství. Ani příznivci „čisté“ matematiky nepřišli zkrátka. Připomeňme alespoň názvy několika prací: Minimalizace booleovských výrazů, Fibonacciho čísla, Ideál okruhu.

První místo přiřkla porota práci „Dirichletův princip“, kterou napsal *Jiří Klaška*, student III. ročníku gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše.

Ve své první části obsahovala vítězná práce několik ekvivalentních formulací Dirichletova principu s důkazy ekvivalence. Nejjednodušší znění principu asi znáte: Je-li více než k předmětů rozděleno do k skupin, existuje alespoň jedna skupina, v níž jsou alespoň dva předměty.“ Těžiště práce spočívalo v její druhé části, kde autor princip aplikoval při řešení různých zajímavých úloh, především k důkazům existence objektů, jejichž efektivní konstrukci nelze snadno popsat. Uvedme jednu úlohu z práce, kterou lze pomocí Dirichletova principu elegantně vyřešit:

Je dáno 72 přirozených čísel. Dokažte, že mezi nimi existují alespoň dvě taková, že jejich rozdíl je dělitelný číslem 71.

Na závěr dejme ještě jednou slovo doc. Barvínkovi z katedry matematické analýzy na přírodovědecké fakultě UJEP: „Myslím si, že za těch pár let své existence prokázala SOČka svou životaschopnost a stává se vedle olympiády významným pomocníkem při objevování matematických talentů. A problémy? Největším problémem do budoucna bude zřejmě výběr vhodných témat. Myšlenkový potenciál středoškolských studentů je rozsáhlý a je velká škoda, je-li někdy vyčerpán řešením nešťastně zvolených problémů...“

dr. J. Herman, Brno

Čtvrtá celostátní přehlídka SOČ

Ve dnech 24. a 26. června 1982 se konala v Trenčíně IV. celostátní přehlídka SOČ. Odborné poroty, složené z pracovníků vysokých škol, středních škol a vědeckých ústavů, posuzovaly a hodnotily téměř čtyři stovky prací z oblasti techniky, přírodovědy a společenských věd. Do celostátního kola postoupily vždy první dvě vítězné práce z krajských kol obou našich republik. Soutěžilo se celkem v 18 oborech a tradičně vysokou úroveň měly práce v oboru matematika a fyzika.

Výsledné umístění soutěžních prací z matematiky

1. *Igor Kříž*, G W. Piecka, Praha: Parketovatelnost pomocí polymin
2. *Peter Borovanský*, *Michal Winczer*, G J. Hronca, Bratislava: Rychlost usměrnění konečných automatů
3. *Miroslav Engliš*, *Marek Hybna*, G W. Piecka, Praha: Fermatův problém nad kvadratickými tělesy
4. *Daniel Jenne*, G Jírovcova, České Budějovice: GROSSASSEMBLER 18080
5. *Aba Teleki*, G E. Gudernu, Nitra: Ekviradiálny uhol
6. *Milan Smolík*, G J. Hronca, Bratislava: Operační systém pro kalkulátor EMG
7. *Milan Andrášek*, *Vítězslav Doubrava*, G M. Koperníka, Bílovec: Nerovnosti dokazované matematickou indukcí
8. *Rostislav Frys*, G J. Wolkra, Prostějov: Neobvyklé pracovní postupy na programovatelných kalkulátorech TEXAS INSTRUMENTS
9. *Štefan Bires*, *Dušan Parobek*, *Vladimír Stulajter*, SPŠS Brezno: Grafické pracovisko
10. *Vladimír Mihál*, SPŠE Prešov: Prekladač BF COMPILER

Zvláštní cena ČSVTS

Daniel Jenne, G Jírovcova, České Budějovice: GROSSASSEMBLER 18080

Výsledné umístění soutěžních prací z fyziky

1. *Andrej Popovič*, G L. Novomeského, Bratislava: Meranie nízkych aktivít proporcionálnym počítačom
2. *Libor Juha*, *Miroslav Sviták*, *Ladislav Šmíd*, *Vladimír Vesecký*, G Vlašim: Stanovení světelného výkonu Ar laseru a druhé harmonické Nd:YAG laseru roztokovým chemickým aktinometrem
3. *Peter Link*, *Peter Kožuško*, *Jaroslav Záruba*, G Košice: Elektronické prístroje pre školské pokusy z fyziky a elektrotechniky
4. *Vojtěch Petráček*, G Nad Štolou, Praha: Projekt amatérského počítače s mikroprocesorem 8080
5. *Richard Kasal*, G Rokycany: Zpracování snímků jemné struktury slunečních skvrn metodou sabattierových ekvidenzit
6. *Martin Čierny*, *Milan Jeluš*, G Nitra: Demonštrácia stojatého vlnenia na priamke a v rovine
7. *Vladimír Lieberzeit*, *Zbyněk Herynek*, *Petr Couf*, G Praha 2: Absorbční spektrum molekuly jodu
8. *Peter Lipcsey*, G Bratislava: Stavba pojazdnej vývevy
9. *Jiří Mertl*, G Uherské Hradiště: Měření spekter radioaktivních zářičů

10. *Pavel Žák, Martin Koutný*, G Šumperk: Akustická úprava jazykové učebny

Zvláštní cena ČSVTS

Vojtěch Petráček, G Nad Štolou, Praha: Projekt amatérského počítače s mikroprocesorem 8080

J. Pomazalová, Brno

Z NOVÝCH KNIH

Pekelis, V.:

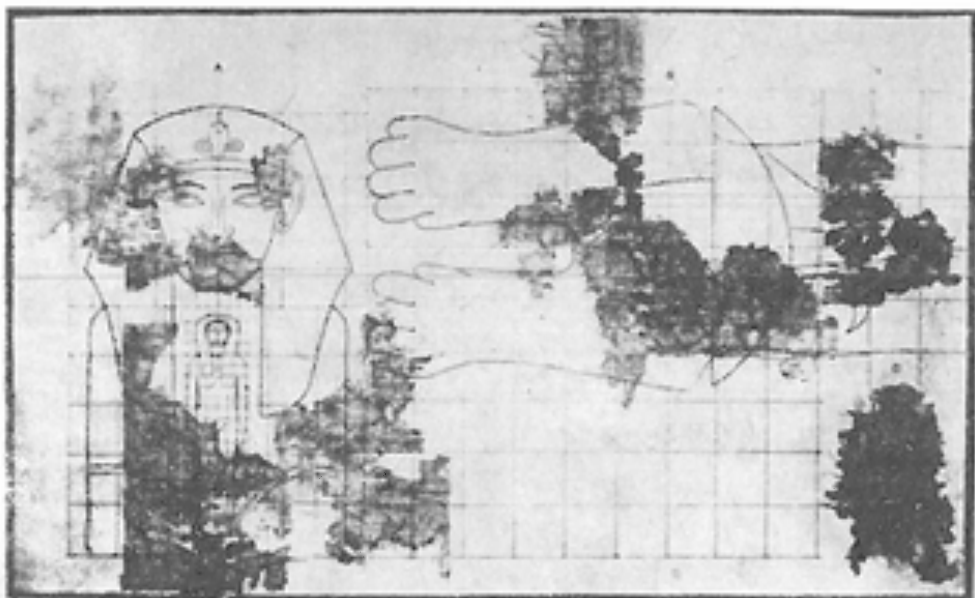
MALÁ ENCYKLOPÉDIA KYBERNETIKY

Vydali Mladé letá, slovenské vydavateľstvo kníh pre mládež, n. p., Bratislava, v roku 1981, preklad z ruštiny, strán 312, ilustrované, viaz., Kčs 52,—

Malá encyklopédia kybernetiky je výberom krátkych príspevkov o nových pojmoch, ktoré nezadržateľne vstupujú do nášho života: algoritmus, automat, samočinný počítač, heuristika, informatika, kybernetika, modelovanie, programovanie, robotika a pod. Dozviete sa o využívaní biolo-

gických procesov a metód pri riešení inžinierskych úloh, o skúmaní pracovných procesov s cieľom vytvárať optimálne podmienky i o teórii veľkých systémov. Získate presnejšiu predstavu o zápise čísel v počítači, o zostavovaní a cieľoch programov, o kapacite pamätí, o jazyku počítačov. Budete si môcť urobiť prvý obraz o kódovaní, šifrovaní, teórii hier, numerickej matematike i matematickej logike, pretože vedecké riadenie spoločnosti je neuskutočniteľné bez využitia matematických metód.

Dušan Jedinák



Obr. k textu
na 3.str.obálky

Pravoúhlé průměty sfing

Sfingy byly předmětem staroegyptského sochařství již od poloviny 3. tisíciletí před n. l. Jak se vytesávaly z kamenných kvádrů?

Velikost monumentální sfingy znemožňovala práci na soše jako celku, proto ji vytesávala řada kameníků podle určitého přesného plánu. Berlínský papyrus č. 11775 je sice z doby mnohem mladší (bývá datován do období těsně před počátkem n. l.), ale naznačuje technologii zhotovování sfing. Na obrázku vidíte průměty sfingy vkreslené do pravidelné čtvercové sítě.

Čtvercová síť mohla být využita i ke zvětšování obrysů kresby, když každému čtverci byla přiřazena stěna jednoho dílčího kvádrů či krychle. Tyto díly mohly pak být opracovávány samostatně, až v konečné fázi usazovány na svá místa v těle sochy. Tato metoda připomíná způsob tzv. kamenorezu, který používaly kamenické hutě při stavbě gotických chrámů. Jejich praxe byla jedním

z pramenů prvních myšlenek deskriptivní geometrie, např. v díle francouzského inženýra *Frézier*a (1682—1773). Metoda egyptských sochařů skrývá i myšlenku pravoúhlé souřadnicové sítě, protože body obrysu sfingy byly poměrně přesně určovány polohou v příslušném čtverci.

Jiné nálezy nedokončených kamenických děl z egyptského starověku ukazují, že narýsování pravoúhlých průmětů obrysů sfingy na přední a boční stěnu kamenného kvádrů bylo skutečně účinnou pomůckou pro kameníky, kteří tento průmět pak „protesali“ kvádrem kolmo ke stěně. Průnik vytvořený dvojím uplatněním této metody stačilo pak již umělecky dopracovat.

Metody kamenické a sochařské práce byly asi už ve starověku uchovávány v tajnosti a předávány jen od mistra tovaryšům jeho kamenické hutě. Asi i proto čekaly na geometrické zobecnění až do 18. století.

J. Foltá

Odborná skupina pro deskriptivní geometrii, počítačovou geometrii a technické kreslení při matematické pedagogické sekci JČSMF

Pro zvýšení účinnosti práce členů v JČSMF jsou v posledních letech zřizovány odborné skupiny při pedagogických i vědeckých sekcích Jednoty. Před dvěma lety byla ustavena odborná skupina pro DG, PG a TK. Tato skupina sdružuje odborníky v těchto disciplínách, učitele i vědecké pracovníky. Pořádá semináře, na nichž se projednávají metodické, didaktické a modernizační problémy těchto oborů. Příští seminář se bude konat v roce 1983 a bude celý zaměřen na problematiku obsahu výuky těmito předměty na středních i vysokých školách.

Noví zájemci o práci v této skupině, zejména středoškolští učitelé, jsou vítáni a mohou se přihlásit na adresu

Odb. as. Oldřich Roubek,
128 03 Praha 2, Horská 4

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kašpova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1981.

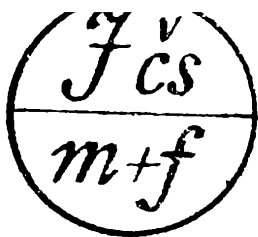
ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 61, 1982/83
LEDEN

(5)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava,
Stanislav Horák, ČVUT Praha,
doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava,
doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha,
doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Hana Kořínková, CSc., ÚÚVPP Praha,
doc. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Ota Setzer, ČVUT Praha,
dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra,
ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

L. Faktorová: Životní jubileum soudruha Gustáva Husáka	185
M. Hejný: Antichordála	186
J. Kadleček, J. Troják: Sítě a binární operace	189
E. Calda: Ypsilonovské trojúhelníky .	194
M. Chytilová: Valivý pohyb tělesa po vodorovné i po nakloněné rovině I .	198
V. Ullmann: Gravitace a evoluce hvězd	203
V. Malíšek: Fyzika před 10, 100 a 1000 roky	208
E. Jáchim: Před 200 lety objevil W. Her- schel pohyb slunce vesmírem	210
Z. Janout, S. Pospíšil: Tuřčinského sbír- ka kvalitativních úloh z fyziky .	212
S. Horák: Ze zahraničních časopisů	214
Naše soutěž	219
Z nových knih .	227
Pohledy do dějin .	3. str. obálky
Slovník matematických termínů (9–12) příloha	

Životní jubileum soudruha Gustáva Husáka

10. ledna 1983 se dožívá sedmdesáti let generální tajemník ÚV KSČ a prezident republiky soudruh Gustáv Husák.

Celý život soudruha Husáka, jeho pracovitost, politické postoje, angažovanost, internacionální citění, odpovědnost a statečnost mohou být vzorem naší mladé generaci.

Soudruh Husák pracoval politicky od mládí, už jako šestnáctiletý středoškolský student vstoupil do Komunistického svazu mládeže a angažoval se výrazně v mládežnickém revolučním hnutí.

Jako vysokoškolský student a od roku 1933 komunista, stal se funkcionářem Spolku socialistických akademiků a zasloužil se o vytvoření antifašistického svazu slovenské mládeže.

V době okupace Československa stál jako člen vedení komunistické strany v čele osvobozenického zápasu, podílel se na ustavení Slovenské národní rady a na přípravách ozbrojeného povstání lidu proti fašismu.

Ve Slovenském národním povstání vystupoval soudruh Husák již jako zkušený revolucionář vyzbrojený hlubokými znalostmi marxismu-leninismu i schopnostmi uvádět je do konkrétních životních situací.

Komunistické přesvědčení, internacionální postoje i velké politické i životní zkušenosti soudruha Husáka se projevily v krizových letech a zejména při přípravě programu dalšího rozvoje socialistického Československa.

Soudruh Gustáv Husák projevuje mimořádný zájem o mladou generaci, věří v její sílu a schopnosti. Na XVI. sjezdu KSČ řekl: „Chceme, aby život mládeže byl bohatý a šťastný, aby v něm bylo dostatek místa pro zábavu, ale aby byl zároveň naplněn činy užitečnými socialismu. Zdravý růst mladého pokolení zůstane i do budoucna v popředí pozornosti komunistů, stranických a společenských orgánů a organizací celého našeho státu. Musí nám jít stále o to, aby si mládež byla vědoma své odpovědnosti před budoucností, aby svou lásku k rodné zemi vyjadřovala prospěšnou prací pro socialismus, aby spojovala hluboké city socialistického vlastenectví s proletářským internacionalismem, aby byla připravena k budování a obraně socialistické vlasti.“

Doc. dr. Ladislava F a k t o r o v á, CSc.,
UK Praha

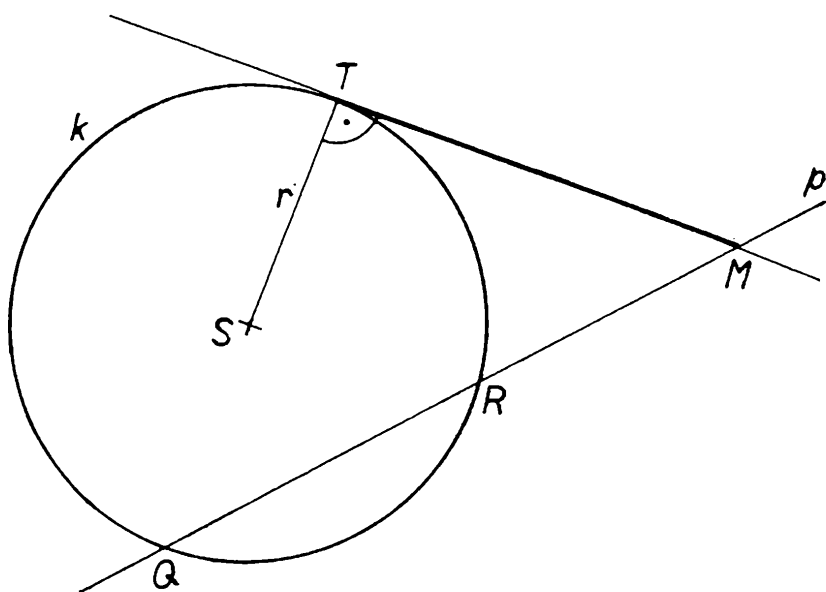
Antichordála

Doc. RNDr. MILAN HEJNÝ, CSc., UK Bratislava

Dobré teórie nevznikajú z teoretizovania, ale z túžby vyriešiť konkrétny problém. Cieľom nášho článku je ukázať, ako nás túžba rozriešiť jednu konštruktívnu úlohu doviedla k potrebe rozšíriť trošku teóriu chordál dvoch kružníc. Najprv pripomenieme známe veci.

Nech kružnica $k(S, r)$ je preťatá priamkou p idúcou bodom M v bodoch R, Q . Potom platí (pozri obr. 1.)

$$\varepsilon |MR| \cdot |MQ| = |MS|^2 - r^2, \quad (1)$$



Obr. 1

pričom $\varepsilon = +1$, ak M leží zvonka k , a $\varepsilon = -1$ v opačnom prípade. Číslo $|MS|^2 - r^2$ sa volá *mocnosť bodu M ku kružnici k* a značí sa $m(k; M)$. V prípade $\varepsilon = +1$ je $\sqrt{m(k; M)} = |MT|$ dotyčnicová vzdialenosť bodu M od kružnice k . Ak sú k_1, k_2 dve nesústredné kružnice, tak množina všetkých bodov X , ktoré majú k obom kružniciam rovnakú mocnosť, tvorí priamku. Táto priamka sa volá *chordála kružníc k_1, k_2* — budeme ju označovať $ch(k_1, k_2)$. Symbolicky je teda chordála daná podmienkou

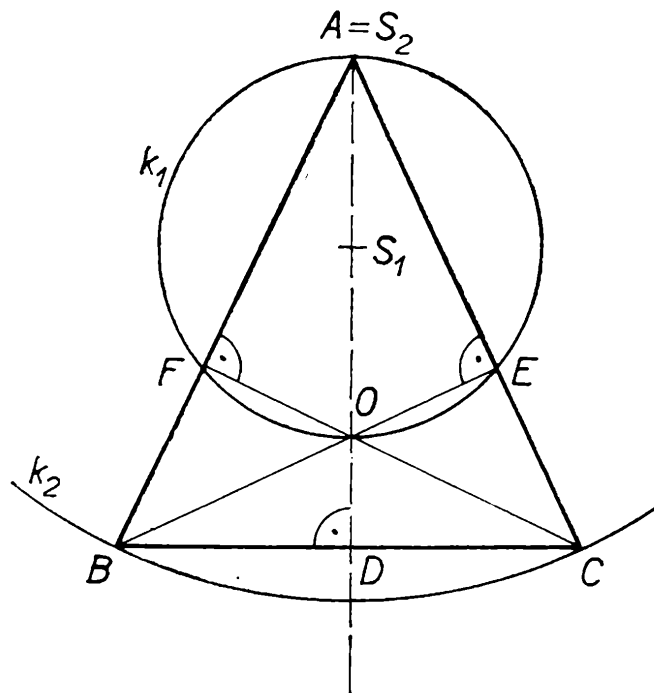
$$m(k_1; X) - m(k_2; X) = 0. \quad (2)$$

Úloha. Daná je úsečka OA a kladné číslo b . Zostrojte trojuholník ABC s ortocentrom O , pre ktorý $|AB| = |AC| = b$.

Analýza situácie. Predpokladajme, že úlohu sme rozriešili a nakreslime obrázok 2. Hľadáme v ňom väzby, ktoré by bolo možné využiť pre konštrukciu. Označme päty výšok z vrcholov A, B, C postupne D, E, F . Z podobnosti trojuholníkov $BDO \sim AEO \sim ADC \cong ADB$ vyplýva $|BD| \cdot |DO| = |AD| \cdot |DB|$, čiže

$$|BD|^2 = |DO| \cdot |DA|. \quad (3)$$

Vzťah (3) je užitočný poznatok, ale sám o sebe ešte nestačí. Treba skúmať ďalej. Zo zadania úlohy vyplýva, že body B, C ležia na kružnici



Obr. 2

$k_2 = k(A, b)$; z Tálesovej vety vyplýva, že body E, F ležia na kružnici k_1 zostrojenej nad úsečkou OA ako priemerom. Tým sme našli všetky časti riešenia. Ostáva nájsť spôsob, ako dať časti dokopy.

Kľúč k riešeniu. Je ním bod D , presnejšie jeho vzťah k obom zostrojeným kružniciam. Je totiž $m(k_2; D) = -|DB| \cdot |DC| = -|DB|^2$ a tiež $m(k_1; D) = -|DO| \cdot |DA|$. Podľa (3) potom platí

$$m(k_1; D) + m(k_2; D) = 0, \quad (4)$$

čo je podmienka blízka k podmienke chordály. Preto je dosť nádejné, pokúsiť sa zistiť, či podmienka (4) tiež nedáva daku dobre konštruovateľnú množinu, pomocou ktorej by bolo možné nájsť kľúčový bod D a úlohu vyriešiť. Pustíme sa teda do teoretického problému. V rovine sú dané dve kružnice k_1 a k_2 . Vyšetrite množinu $a(k_1, k_2)$ všetkých bodov D , ktoré vyhovujú podmienke (4).

Riešenie urobíme analyticky. Súradnicovú sústavu zvolíme tak, aby stred S_1 kružnice k_1 bol začiatkom a stred S_2 kružnice k_2 aby

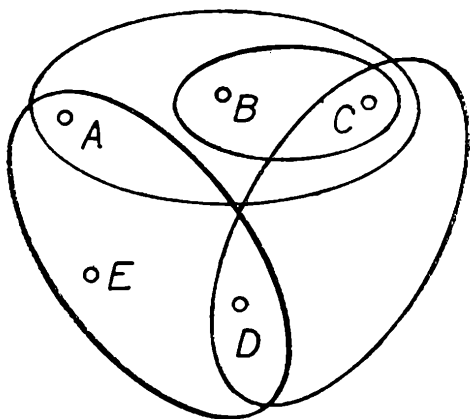
čili, niektoré dokonca vypustili (diskusiu). Čitateľ si ich môže dorobiť sám. Domnievame sa ale, že zaujímavejšou úlohou by bolo ďalšie rozpracovávanie „teórie antichordály“, ktoré by bolo možno doviesť až k práci SOČ. Vstupom do práce by mohli byť otázky:

- 1) Ako možno zostrojiť antichordálu vo všeobecnom prípade?
- 2) Koľko je vzájomných polôh trojice kružníc k_1 , k_2 a (k_1, k_2) ?
- 3) Dala by sa definovať antichordála troch či viacerých kružníc?
- 4) Je možné pojem antichordály zaviesť v priestore?

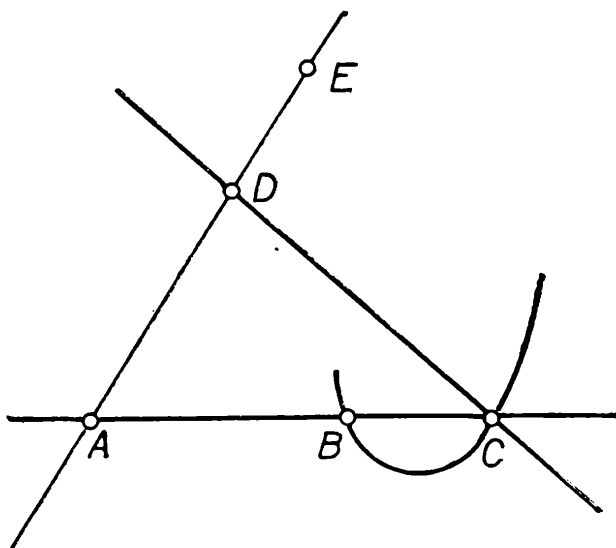
Sítě a binární operace

RNDr. JIŘÍ KADLEČEK, CSc., RNDr. JAN TROJÁK, CSc., MFF UK Praha

Kromě té veliké nekonečné euklidovské roviny, plné bodů a přímek, ve které umíte nádherně řešit spousty úloh, zajímá nás často geometrická struktura¹⁾, složená jen z několika bodů, kde slovem přímka označujeme vhodně zvolenou podmnožinu této množiny bodů. Začneme ilustrací.



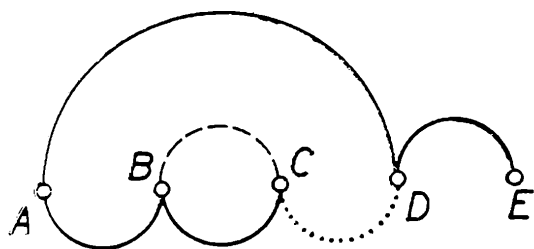
Obr. 1



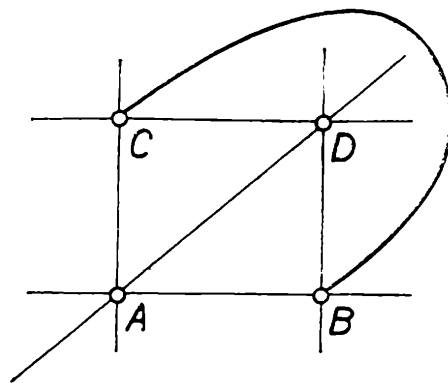
Obr. 2

Příklad 1. Geometrická struktura $\mathbf{G}$ nechť je tvořena množinou bodů $\mathbf{M} = \{A, B, C, D, E\}$ a množinou $\mathbf{N} = \{\{A, B, C\}, \{A, D, E\}, \{C, D\}, \{B, C\}\}$, jejíž prvky nazveme přímky. Při znázorňování takové struktury máme spoustu možností, z nichž některé jsou v obrázcích 1, 2 a 3.

¹⁾ Geometrickou strukturou budeme rozumět neprázdnou množinu, jejíž prvky nazveme body, spolu s určitými jejími podmnožinami, které nazveme přímky.



Obr. 3



Obr. 4

Tato libovůle plyne z toho, že zachycujeme pouze incidenční vlastnosti, tj. popisujeme, které body patří kterým podmnožinám — přímek. Pro přehlednost je oblíbené znázornění jako na obrázku 2.

Při slovním popisu užíváme obvyklých výrazů a značení, tedy označíme-li v našem příkladě $a = \{A, B, C\}$, $b = \{A, D, E\}$, $c = \{C, D\}$, $d = \{B, C\}$, pak bod A leží na přímkách a , b , přímky a , c , d procházejí bodem C atd. Všimněte si, že např. body B , E nejsou spojeny žádnou přímkou a naproti tomu body B , C jsou spojeny dvěma různými přímkami a , d . Nazvěme-li rovnoběžkami přímky, které se buď neprotnou, nebo jedna je podmnožinou druhé, pak d je rovnoběžná s b , ale také d je rovnoběžná s a (kdežto a není rovnoběžná s b). (Uvědomte si, že pojmy jako uspořádání bodů na přímce, vzdálenost, kolmost a pod. zde nezávádíme, a proto je nemůžeme užívat.)

Podobné konečné příklady, kromě toho, že mají veselé vlastnosti, jsou i užitečné. Pomáhají odhalit podstatu základních geometrických tvrzení a jejich vazby, vedou k řešení kombinatorických úloh a v neposlední řadě ukazují souvislosti geometrie a algebry. Protože výtečně znáte popis euklidovské roviny pomocí souřadnic bodů a rovnic přímek (což je popis geometrické struktury pomocí algebraických prostředků), zkusíme něco podobného pro konečný případ.

Nejprve se omezíme na ukázněnější geometrické struktury, nazývané sítě.

Sítí $\mathbf{S}$ nazveme každou geometrickou strukturu s neprázdnou množinou bodů, ve které platí:

- 1) každým bodem procházejí alespoň tři různé přímky,
- 2) daným bodem existuje k dané přímce právě jedna rovnoběžka,
- 3) každé dvě rovnoběžky se protnou v právě jednom bodě.

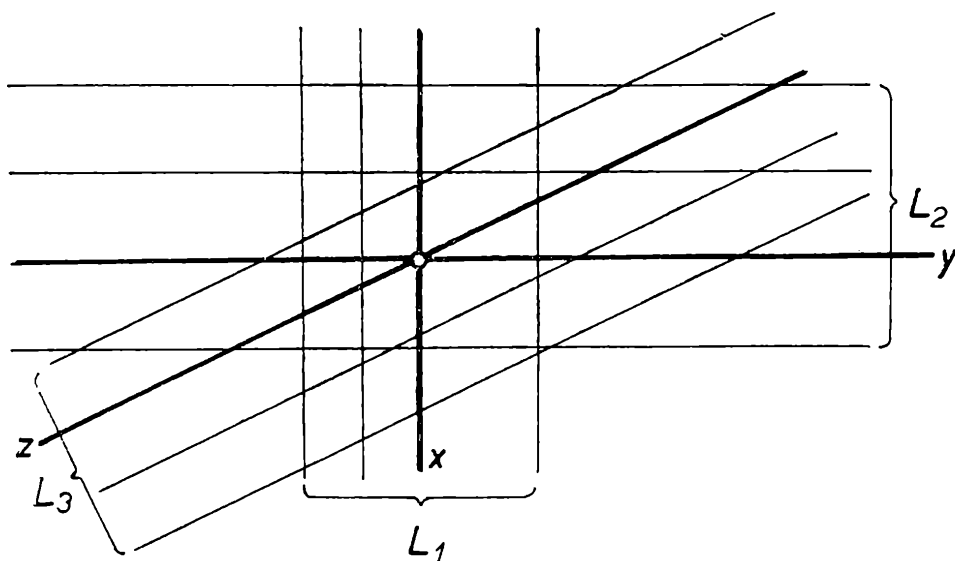
Euklidovská rovina tyto podmínky určitě splňuje, my se však budeme věnovat případům, kdy je množina bodů konečná. Příklad 1 sítě očividně není.

Příklad 2. Je-li množina bodů $\mathbf{M} = \{A, B, C, D\}$ a množina přímek $\mathbf{N} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$, pak $\mathbf{S} = (\mathbf{M}, \mathbf{N})$ je síť (obr. 4). Uvědomte si, že $\{A, C\}$ a $\{B, D\}$ jsou rovnoběžky.

Úloha 1. Nakreslete obrázek sítě $\mathbf{S} = (\mathbf{M}, \mathbf{N})$, jestliže množina bodů $\mathbf{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ a množina přímek $\mathbf{N} = \{ADG, BEH, CFI, ABC, DEF, GHI, AEI, BFG, CDH\}^2$.

Úloha 2. Doplněte do sítě z předchozího příkladu přímky AFH, HDI, CEG ! Dostanete příklad sítě, ve které jsou každé dva body spojeny přímkou.

Nyní vytvoříme slibovaný algebraický popis: Množinu všech navzájem rovnoběžných přímek nazveme *svazkem rovnoběžek*. Příkladem takových svazků rovnoběžek jsou čtyři svazky popsané v úloze 2: 1. ABC, DEF, GHI , 2. ADG, BEH, CFI , 3. CEG, BDI, AFH , 4. AEI, BFG, DHC . Podle podmínek 1) a 2) z definice sítě existují v každé síti alespoň tři různé svazky rovnoběžek a podle podmínek 2) a 3) je v každém svazku právě tolik rovnoběžek, kolik je bodů na libovolné přímce — pokud v síti obsahuje některá přímka právě n bodů, obsahuje každá přímka této sítě právě n bodů³⁾. Tak každá přímka sítě z úlohy 2 obsahuje tři body a stejný je i počet přímek v každém ze svazků rovnoběžných přímek sítě.

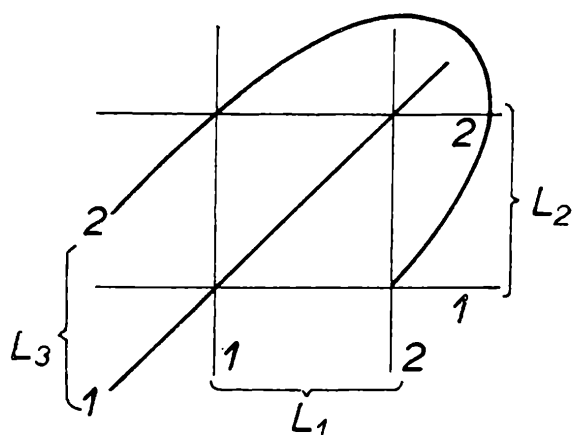


Obr. 5

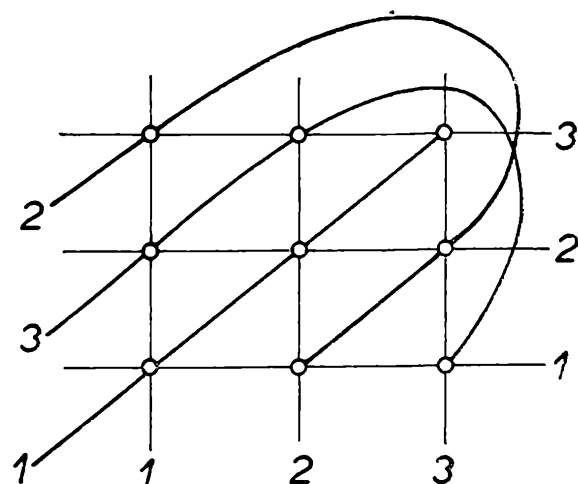
Předpokládejme nyní, že síť $\mathbf{S}$ obsahuje právě tři svazky rovnoběžek, označené $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$. Je-li n počet přímek ve svazku, zvolme si libovolnou množinu F , která obsahuje právě n prvků, např. $F = \{1, 2, \dots, n\}$. Každé z přímek svazku $\mathbf{L}_1$ přiřadíme pevně právě jeden prvek z F a podobně pro $\mathbf{L}_2$ a $\mathbf{L}_3$. Poté definujeme binární operaci $\odot$ na F takto: je-li x označení přímky z $\mathbf{L}_1$, y označení přímky z $\mathbf{L}_2$, pak definujeme

²⁾ Pro přehlednost značíme přímku ADG místo $\{A, D, G\}$ atd.

³⁾ Chcete-li si ověřit uvedená tvrzení dokažte tranzitivnost rovnoběžnosti v síti (sporem s 2) a užíjte vzájemně jednoznačného zobrazení množiny bodů na přímce na množinu rovnoběžek svazku procházejícího těmito body podle 2) a 3).



Obr. 6



Obr. 7

$$x \circ y = z$$

právě tehdy, když z je označení té přímky z L_3 , která prochází průsečíkem přímek x a y (obr. 5). Operaci $\circ$ můžeme zapsat tabulkou tak, že vztah $x \circ y = z$ popíšeme takto:

$\circ$	$\dots y \dots$
x	

konkrétně v příkladě 2, když označíme svazky a přímky podle obrázku 6 prvky množiny $F = \{1, 2\}$ dostaneme tabulku:

$\circ$	1	2
1	1	2
2	2	1

V příkladu z úlohy 1 volíme $F = \{1, 2, 3\}$ a při očíslování svazků rovnoběžek i přímek ve svazcích v pořadí, jak jsou zapsány ve znění úlohy, dostáváme tabulku:

$\circ$	1	2	3
1	1	3	2
2	2	1	3
3	3	2	1

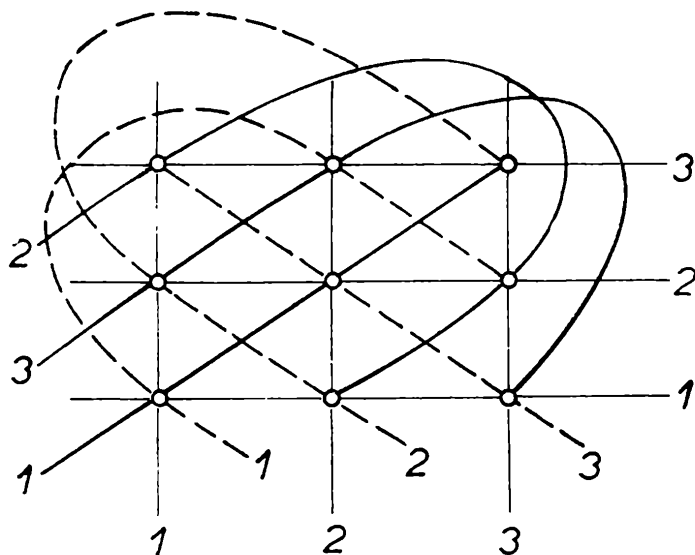
V úloze 2 ovšem přidáváme k síti ještě čtvrtý svazek rovnoběžek, označme jej L_4 . Opakujme naši úvahu pro svazky L_1 , L_2 a L_4 , tj. označme přímky z L_4 opět prvky z $F = \{1, 2, 3\}$, a definujme pro svazky L_1 , L_2 ,

L_4 novou operaci Δ , kde $x \Delta y = w$ právě tehdy, když průsečíkem přímky x ze svazku L_1 a přímky y ze svazku L_2 prochází přímka w ze svazku L_4 . Pro takto definovanou operaci Δ poskytuje úloha 2 tabulku:

Δ	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Pokud síť obsahuje svazky $L_1, L_2, L_3, \dots, L_k$ (kde k je přirozené číslo) rovnoběžek, postupujeme analogicky i pro trojice $L_1 L_2 L_5, L_1 L_2 L_6, \dots, L_1 L_2 L_k$, čímž dostaneme $k-2$ binárních operací definovaných pomocí dané sítě, a což je velmi důležité, zpětně tuto síť popisujících. Ukažme si tuto zpětnou cestu na sítích z úloh 1 a 2:

Na množině $F = \{1, 2, 3\}$ máme definovány dvě operace $\circ$ a Δ . Protože F je tříprvková, jsou v každém svazku rovnoběžek tři přímky —



Obr. 8

zakreslíme tedy libovolně dva svazky rovnoběžek s očíslováním (kvůli přehlednosti volíme obvykle „svislé“ a „vodorovné“, ale protože naším cílem není obrázek, ale zpětné nalezení podmnožin z úloh 1 a 2, je vidět, že na volbě obrázku a očíslování nezáleží). Nyní uijme operaci $\circ$: např. průsečíkem svislé přímky označené 2 s vodorovnou přímkou označenou 3 prochází podle tabulky přímka označená 3 atd. (obr. 7 je geometrickým modelem operace $\circ$). Konečně uijme operaci Δ ; výsledné přímky geometrického modelu operace Δ vyznačíme čárkování do obrázku 7, čímž vznikne obrázek 8. Výsledný obrázek je zároveň řešením úlohy 2 (chybí jen označení bodů písmeny), obrázek 7 řeší úlohu 1.

Úloha 3. Sestavte tabulku pro síť $S = ((M', N'))$, kde množina bodů $M' = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$, množina přímek

$N' = \{AEIM, BFJN, CGKO, DHLP, ABCD, AFGH, IJKL, MNOP, AFKP, EJOD, INCH, BGLM\}$.

Úloha 4. Obtížnější! Naleznete vlastnosti, které musí splňovat operace $\bigcirc$ a Δ , aby popisovaly síť.

Literatura: Kadleček J. — Troják J.: Znázornění binárních operací, Rozhledy m.-f., roč. 61, č. 4.

Řešení:

3. Při očíslování daných tří svazků a přímek v nich čísla 1, 2, 3, 4 v pořadí uvedeném ve znění úlohy dostáváme na množině $F = \{1, 2, 3, 4\}$ operaci danou tabulkou

$\bigcirc$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	1	2	3
3	3	4	1	2
4	2	3	4	1

4. Aby platila podmínka 3) z definice sítě pro každé tři svazky rovnoběžek, z nichž dva jsou základní tj. „svislé“ a „vodorovné“, musí mít právě jedno řešení každá rovnice tvaru $a * y = c$ i tvaru $x * b = d$ pro $*$ = $\bigcirc$ i pro $*$ = Δ . Aby platila podmínka 3) i pro přímký různých nikoli základních svazků, musí pro (každé) dvě různé operace $\bigcirc$, Δ určující síť existovat právě jedno řešení $(x, y) \in F \times F$ (každé) soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x \bigcirc y &= c, \\ x \Delta y &= d, \end{aligned}$$

d. $c \in F$. Pokud jste řešení úlohy nenašli, pokuste se je nyní ověřit.

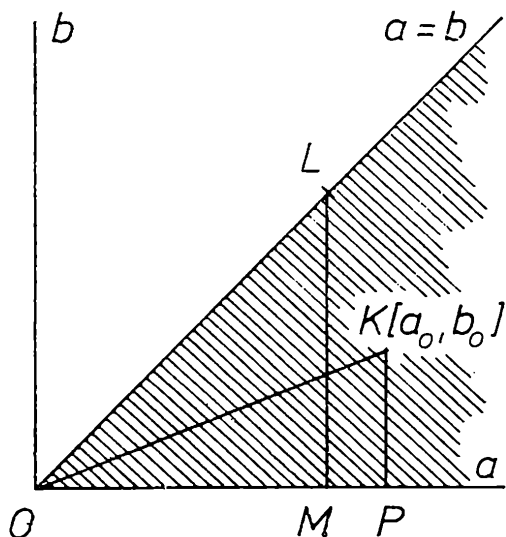
Ypsilonovské trojúhelníky

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

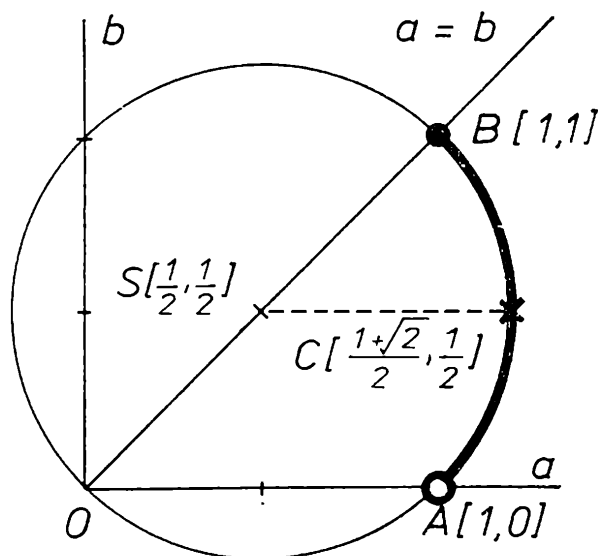
Jakže?! Nikdy jste o těchto trojúhelnících neslyšeli? Máte tedy jedinou možnost, nechcete-li zaostat: prostudovat tento článek, který je jediným zdrojem informací o těchto pozoruhodných geometrických útvech.

Ypsilonovským trojúhelníkem se nazývá každý pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o velikostech a , b , pro něž platí

$$a^2 + b^2 = a + b.$$



Obr. 1



Obr. 2

Nazývají se tak na počest profesora Ypsilonu, který jejich studiu věnoval značnou část svého plodného života, a to čtvrteční večer mezi 22. a 24. hodinou dne 31. 12. 1981.

Ypsilonovský je např. pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o velikostech $a = b = 1$, neboť platí:

$$a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = a + b.$$

Snadno se můžete přesvědčit, že i pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami o velikostech $a = 1,2$ a $b = 0,6$ či $a = \frac{20}{17}$ a $b = \frac{5}{17}$ jsou ypsilonovské.

Existují však i jiné ypsilonovské trojúhelníky? Je všech ypsilonovských trojúhelníků nekonečně mnoho nebo je jejich počet konečný? Na tyto otázky se pokusíme odpovědět; budeme přitom důsledně využívat možnosti, že označení a, b velikostí odvěsen každého pravoúhlého — a tedy i ypsilonovského — trojúhelníka lze vždy zvolit tak, aby bylo $a \geq b$.

Každý pravoúhlý trojúhelník je jednoznačně určen velikostmi a, b svých odvěsen, takže mu lze přiřadit jedinou uspořádanou dvojici $[a, b]$ čísel a, b , pro něž platí $a \geq b > 0$. Také obráceně, každá uspořádaná dvojice čísel a, b , pro něž je $a \geq b > 0$, určuje jediný pravoúhlý trojúhelník — jeho odvěsny mají velikosti a, b . Znázorníme-li množinu všech těchto uspořádaných dvojic ve zvolené kartézské soustavě souřadnic, dostaneme oblast, jejíž část je znázorněna šrafováním na obr. 1: hranice této oblasti jsou tvořeny polopřímkami OP a OL ; první z nich do této oblasti nepatří, zatímco každý bod polopřímky OL s výjimkou bodu O prvkem znázorněné množiny je. Z toho, co bylo řečeno o vzájemném přiřazení uspořádaných dvojic $[a, b]$, splňujících podmínku $a \geq b > 0$, a pravoúhlých trojúhelníků, vyplývá, že existuje vzájemně

jednoznačné zobrazení množiny všech bodů uvedené oblasti na množinu všech pravoúhlých trojúhelníků. Tak např. bodu L této oblasti odpovídá pravoúhlý trojúhelník OML ; pravoúhlému trojúhelníku OPK s odvěsnami o velikostech $a_0 \geq b_0 > 0$ odpovídá bod $K = [a_0, b_0]$ ležící v dané oblasti.

Které body vyznačené oblasti odpovídají ypsilonovským trojúhelníkům? Jsou to zřejmě právě ty body této oblasti, pro jejichž souřadnice a, b platí

$$a^2 + b^2 - a - b = 0.$$

Jednoduchou úpravou této rovnice na tvar

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

zjistíme, že se jedná o kružnici se středem v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a o poloměru $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ypsilonovským trojúhelníkům tedy odpovídají právě ty body

této kružnice, které leží ve vyšrafované oblasti; průnikem obou těchto množin bodů je silně vytažený oblouk na obr. 2, k němuž patří bod $B = [1, 1]$, nikoli však bod $A = [1, 0]$. Každý bod tohoto oblouku odpovídá jedinému ypsilonovskému trojúhelníku a obráceně. Např. bodu $C = \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]$ odpovídá pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, b = \frac{1}{2}$, který je ypsilonovský, neboť platí:

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = a + b.$$

Ypsilonovskému trojúhelníku s velikostmi odvěsen $a = b = 1$ odpovídá bod $B = [1, 1]$, který patří tomuto oblouku; všimněte si rovněž, že tento trojúhelník je jediným rovnoramenným ypsilonovským trojúhelníkem, který existuje!

Ypsilonovských trojúhelníků je tedy nekonečně mnoho; jak je patrné ze souřadnic bodů uvažovaného oblouku a z jejich vzdálenosti od bodu O , platí pro velikosti a, b ($a \geq b$) odvěsen a velikost c přepony každého ypsilonovského trojúhelníka tyto podmínky:

$$a \in \left\langle 1, \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right\rangle, b \in (0, 1), c \in (1, \sqrt{2}).$$

Všimněme si ještě toho, že ke každému $a \in <1, \frac{1 + \sqrt{2}}{2}>$, pro něj

je $a \neq 1$, $a \neq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$, existují právě dvě $b \in (0,1 >$ tak, že bod $[a, b]$ leží na uvažovaném oblouku. Znamená to, že ke každé velikosti a větší odvěsny $\left(a \neq 1, a \neq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)$ z uvedeného intervalu existují právě dva ypsilonovské trojúhelníky — velikosti b_1, b_2 jejich menších odvěsen jsou „souměrné podle čísla $\frac{1}{2}$ “, tj. platí pro ně $\frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{1}{2}$.

Tak např. kromě pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o velikostech $a = 1,2$ a $b = 0,6$ — o němž víme, že je ypsilonovský — musí existovat ještě jeden ypsilonovský trojúhelník s odvěsnou velikosti $a = 1,2$; velikost b_2 jeho druhé odvěsny můžeme určit ze vztahu $\frac{0,6 + b_2}{2} = \frac{1}{2}$, odkud je $b_2 = 0,4$. Vskutku platí:

$$a^2 + b_2^2 = 1,2^2 + 0,4^2 = 1,6 = 1,2 + 0,4 = a + b_2.$$

Naproti tomu velikostí $b \in (0,1 >$ své menší odvěsny je ypsilonovský trojúhelník určen jednoznačně, neboť — jak je patrné z obr. 2 — existuje k tomuto b jediné $a \in <1, \frac{1 + \sqrt{2}}{2}>$. Ypsilonovský trojúhelník je jednoznačně určen také velikostí $c \in (1, \sqrt{2} >$ své přepony. Můžeme tedy říci, že ypsilonovský trojúhelník s odvěsnami o velikostech $a_1 \geq b_1$ a přeponou o velikosti c_1 je shodný s ypsilonovským trojúhelníkem s velikostmi $a_2 \geq b_2$ odvěsen a c_2 přepony právě tehdy, když platí $b_1 = b_2$ nebo $c_1 = c_2$. Ke shodnosti obou trojúhelníků však nestačí rovnost $a_1 = a_2$.

Jak jste viděli, mají ypsilonovské trojúhelníky celou řadu zajímavých vlastností. Objevíte-li některé další, dejte laskavě profesorovi Ypsilonovi vědět.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle §6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Valivý pohyb tělesa po vodorovné a po nakloněné rovině I

RNDr. MARTA CHYTILOVÁ, CSc., Brno

Pro dobré porozumění textu doporučujeme čtenáři zopakovat články 48 a 55 z učebnice Fyzika pro 1. ročník gymnázia, SPN Praha 1977.

Budeme se zabývat otáčivým pohybem tuhých rotačních těles kolem nehybné osy v inerciální vztažné soustavě nebo kolem osy, která sama koná posuvný pohyb v inerciální vztažné soustavě. Takovým pohybem je např. valivý pohyb koule po vodorovné nebo po nakloněné rovině.

1. Úhlová rychlost a úhlové zrychlení otáčivého pohybu tuhého tělesa

Předpokládejme, že tuhé těleso se otáčí kolem nehybné osy o (obr. 1). Hmotné body tělesa, které leží v rovině kolmé k ose otáčení, obíhají kolem osy po soustředných kružnicích; poloměry těchto kružnic jsou tím větší, čím je hmotný bod více vzdálen od osy. Úhel $\Delta \varphi$ opsaný vektorem $\vec{OA}$ za dobu Δt je pro všechny hmotné body, které leží na vektorové přímce vektoru $\vec{OA}$, stejný.

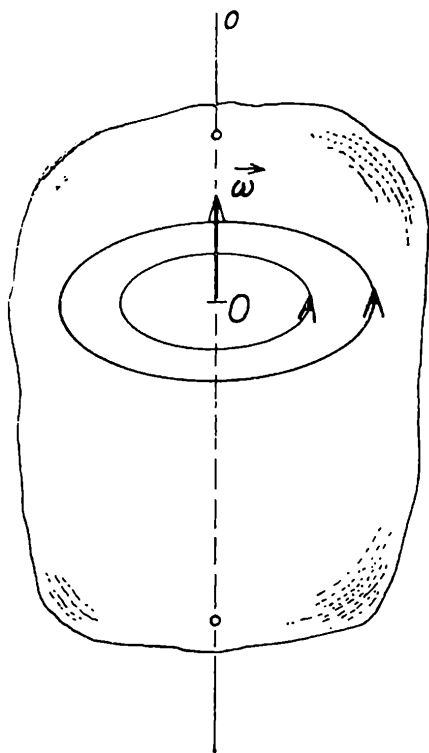
Tuhé těleso koná rovnoměrný otáčivý pohyb kolem nehybné osy, jestliže úhel $\Delta \varphi$ roste přímo úměrně s časem. Veličina $\omega_0 = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ je konstantní a nazývá se *úhlová rychlost rovnoměrného otáčivého pohybu tuhého tělesa*. Její jednotkou je radián za sekundu (rad s^{-1}).

Koná-li tuhé těleso nerovnoměrný otáčivý pohyb, vyjadřuje veličina $\omega_p = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ průměrnou úhlovou rychlost nerovnoměrného otáčivého pohybu v časovém intervalu Δt ; její velikost závisí na volbě časového intervalu Δt .

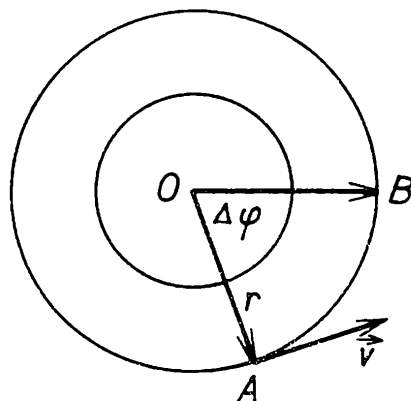
Okamžitá *úhlová rychlost otáčivého pohybu* $\vec{\omega}$ je vektor, jehož velikost je

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

vektorová přímka vektoru $\vec{\omega}$ je v ose otáčení tělesa, jeho směr závisí na smyslu otáčení tělesa kolem osy a určuje se podle pravidla pravé ruky (obr. 1).



Obr. 1a



Obr. 1b

Opíše-li hmotný bod za dobu Δt kruhový oblouk $AB = \Delta s$, je průměrná rychlost pohybu hmotného bodu

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t}.$$

Okamžitá rychlost hmotného bodu $\mathbf{v}$ je vektor, jehož velikost je

$$v = r \omega;$$

vektorová přímka vektoru $\mathbf{v}$ je totožná s tečnou kruhové dráhy hmotného bodu v daném okamžiku, jeho směr je určen smyslem otáčení tuhého tělesa kolem osy.

Pro rovnoměrný otáčivý pohyb tuhého tělesa je velikost úhlové rychlosti ω_0 stálá, její časová změna je nulová. Pro nerovnoměrný otáčivý pohyb tuhého tělesa se veličina $\alpha_p = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ nazývá průměrné úhlové zrychlení v časovém intervalu Δt . Její velikost závisí na volbě časového intervalu Δt . Jednotkou této veličiny je radián za sekundu na druhou ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$).

Okamžité úhlové zrychlení otáčivého pohybu $\vec{\alpha}$ má velikost

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

V dalším se budeme zabývat zvláštním případem nerovnoměrného otáčivého pohybu tuhého tělesa, který se nazývá rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb tuhého tělesa. Pro tento pohyb je úhlová rychlost přímo

úměrná času a úhlové zrychlení je konstantní. Pro velikost zrychlení hmotného bodu pak platí $a = r \alpha$.

V následující tabulce porovnáme odpovídající si veličiny posuvného a otáčivého pohybu tuhého tělesa:

Posuvný pohyb tuhého tělesa	Otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem nehybné osy
dráha s m	úhel φ rad
rychlost v m . s⁻¹	úhlová rychlost ω rad . s⁻¹
zrychlení a m . s⁻²	úhlové zrychlení α rad . s⁻²
rovnoměrný posuvný pohyb $s = v_0 t, v_0 = \text{konst}, a = 0$ m . s ⁻²	rovnoměrný otáčivý pohyb $\varphi = \omega_0 t, \omega_0 = \text{konst}, \alpha = 0$ rad . s ⁻²
rovnoměrně zrychlený posuvný pohyb $s = \frac{1}{2} a_0 t^2$ $v = a_0 t, a_0 = \text{konst}$	rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb $\varphi = \frac{1}{2} \alpha_0 t^2$ $\omega = \alpha_0 t, \alpha_0 = \text{konst}$

2. Pohybové rovnice posuvného a otáčivého pohybu tuhého tělesa

Předpokládejme, že se tuhé těleso skládá z mnoha hmotných bodů o hmotnostech $m_1, m_2, \dots$ hmotnost tělesa pak je $m = m_1 + m_2 + \dots$

Na každý z nich působí silami jednak vnější tělesa, jednak ostatní hmotné body tělesa. Označme výslednice vnějších sil, které působí na jednotlivé hmotné body tělesa, $F_1 + F_2, \dots$ a výslednice vnitřních sil, které působí na jednotlivé hmotné body tělesa, $F_{i1} + F_{i2}, \dots$. Tyto síly jsou silami vzájemného působení hmotných bodů tělesa. Podle 2. pohybového zákona Newtonova platí pro jednotlivé hmotné body tělesa:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = F_1 + F_{i1}, m_2 \mathbf{a}_2 = F_2 + F_{i2}, \dots$$

Po sečtení levých a pravých stran těchto rovnic dostaneme:

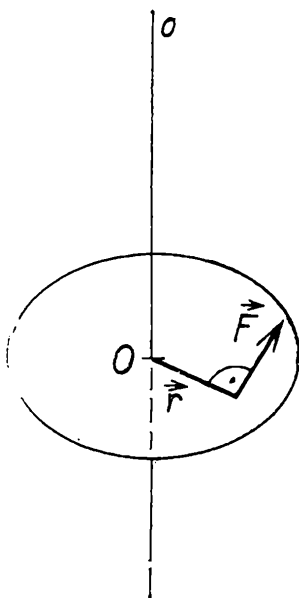
$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots = F_1 + F_2 + \dots + F_{i1} + F_{i2} + \dots \quad (1)$$

Na pravé straně rovnice (1) je jednak výslednice vnějších sil, kterou dovedeme z účinků vnějších sil na tuhé těleso určit, jednak součet vnitřních sil, který obsahuje páry sil vzájemného působení hmotných bodů tuhého tělesa. Síly v každém páru jsou stejně velké opačných směrů. Součet všech takových párů je tedy nulový vektor.

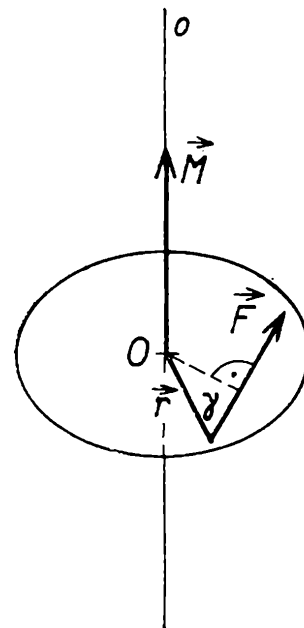
Levou stranu rovnice (1) upravíme takto:

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots = (m_1 + m_2 + \dots) \frac{m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = m \mathbf{a},$$

kde m je úhrnná hmotnost tuhého tělesa, $\mathbf{a}$ je zrychlení hmotného



Obr. 2



Obr. 3

středu tělesa. Hmotný střed tělesa se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna úhrnná hmotnost tělesa a jako by na něj působila výslednice všech vnějších sil. Vnitřní síly neovlivňují pohyb hmotného středu tělesa. Dostáváme tak *rovnici posuvného pohybu tuhého tělesa*.

Vnější síly však způsobují kromě posuvného pohybu tuhého tělesa ještě jeho otáčivý pohyb kolem osy, která prochází jeho hmotným středem.

Uvažujme nyní kotouč otáčivý kolem osy kolmé k rovině kotouče bez tření (obr. 2). Předpokládejme, že v rovině kotouče působí jediná vnější síla F stálé velikosti a že spojnice jejího působíště se středem kotouče je vždy kolmá k vektorové přímce síly F . Tuto spojnici označíme jako vektor r . Síla F uvede kotouč do rovnoměrně zrychleného otáčivého pohybu se stálým zrychlením α_0 .

Jakou práci vykoná síla F za dobu t od počátku pohybu?

Působíště síly F se posune ve směru síly po dráze $s = \varphi r$; síla vykoná tedy práci

$$W = F \varphi r = F \frac{\alpha_0 t^2}{2} r \quad (2)$$

Kotouč získá stejně velkou kinetickou energii. Jestliže byl kotouč na počátku časového intervalu t v klidu, získal za dobu t kinetickou energii $E_k = W$

Abychom kinetickou energii E_k kotouče určili, předpokládejme, že se kotouč skládá z hmotných bodů o hmotnostech $m_1, m_2, \dots$. Potom platí

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 +$$

Protože všechny hmotné body tuhého tělesa mají při otáčivém pohybu

kolem nehybné osy v daném okamžiku stejnou úhlovou rychlost ω , platí

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) = \frac{1}{2} \alpha_0^2 t^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots). \quad (3)$$

Z rovnosti $E_k = W$ plyne také rovnost výsledných výrazů ve (2) a (3). Odtud po úpravě dostaneme:

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \alpha_0 = r F. \quad (4)$$

Výraz $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$ se nazývá *moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k ose otáčení*. Je patrné, že tato veličina závisí na hmotnosti tělesa, na jeho tvaru a na poloze osy otáčení vzhledem k tělesu. Jednotkou této veličiny je kilogram metr na druhou ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

Pravá strana rovnice (4) vyjadřuje v našem případě velikost momentu síly vzhledem k ose otáčení: $M = r F$.

Po dosazení do rovnice (4) dostaneme

$$I \alpha_0 = M.$$

Tuto rovnici lze obecně vyjádřit jako vektorovou rovnici

$$I \vec{\alpha} = \mathbf{M}. \quad (5)$$

Je to *pohybová rovnice rotačního pohybu tuhého tělesa vzhledem k ose*.

Moment síly vzhledem k ose je obecně určen vektorovým součinem

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Velikost momentu síly vzhledem k ose je $M = r F \sin \gamma$, kde γ je úhel vektorů $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$ (obr. 3); vektorová přímka momentu síly vzhledem k ose je totožná s osou otáčení, směr vektoru určujeme podle pravidla pravé ruky.

Porovnáme další veličiny posuvného a otáčivého pohybu tuhého tělesa;

Posuvný pohyb	Otáčivý pohyb kolem nehybné osy
pohybová rovnice posuvného pohybu tuhého tělesa	pohybová rovnice otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem nehybné osy
$m \mathbf{a} = \mathbf{F}$	$I \vec{\alpha} = \mathbf{M}$
m hmotnost tělesa kg	I moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$\mathbf{F}$ síla N	$\mathbf{M}$ moment síly vzhledem k ose N
kinetická energie tělesa při posuvném pohybu	kinetická energie tělesa při otáčivém pohybu
$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

Příklady momentů setrvačnosti těles o hmotnosti m vzhledem k ose, která prochází hmotným středem tělesa:

pro stejnorodou plnou kouli o poloměru r : $I_0 = \frac{2}{5} m r^2$;

pro stejnorodou tenkostěnnou dutou kouli o poloměru r : $I_0 = \frac{2}{3} m r^2$;

pro stejnorodý plný válec (kotouč) o poloměru r vzhledem k podélné ose souměrnosti $I_0 = \frac{1}{2} m r^2$;

pro stejnorodý tenkostěnný dutý válec o poloměru r vzhledem k podélné ose souměrnosti: $I_0 = m r^2$.

Známe-li moment setrvačnosti I_0 tělesa vzhledem k ose, která prochází hmotným středem tělesa, určíme moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose, která je s touto osou rovnoběžná, podle *Steinerovy věty* (Horák, Krupka, Fyzika, SNTL Praha 1976, str. 155)

$$I = I_0 + m d^2; \quad (6)$$

m je hmotnost tělesa, d vzdálenost rovnoběžkových os otáčení.

Gravitace a evoluce hvězd

RNDr. VOJTĚCH ULLMANN, Radioisotopové oddělení KNSP Ostrava-Poruba

1. Úvod — základní vlastnosti gravitace

Všeobecná gravitace je jednou ze základních sil v přírodě a hraje rozhodující roli při vzniku a vývoji hvězd, planetárních a hvězdných systémů, galaxií i celého vesmíru. S gravitací se (ve formě zemské tíže) každý setkává po celý život a lidstvo od prvopočátků. Dlouho na ni panovaly zcestné názory a lze říci, že její vlastní podstata není úplně pochopena ani nyní. Zásadním pokrokem na cestě k jejímu pochopení byla Newtonova nauka o gravitaci, podle níž je gravitace vlastností všech těles, přičemž gravitační síla (vždy přitažlivá) ubývá se čtvercem jejich vzdálenosti.

Na počátku tohoto století po vytvoření Einsteinovy speciální teorie relativity bylo zřejmé, že Newtonova teorie gravitace má platnost pouze přibližnou a omezenou. Nebudeme se zde zmiňovat o některých modifikacích Newtonova gravitačního zákona a jiných víceméně umělých teoriích, ale budeme se opírat o všeobecně přijatou obecnou teorii relativity vytvořenou A. Einsteinem v roce 1916.

Základní vlastností, kterou se gravitace liší od všech ostatních druhů sil v přírodě, je *univerzálnost gravitačního působení*, a to ve dvojím smyslu:

a) „Již hotové“ gravitační pole vykazuje univerzální působení na veškerou hmotu (tedy látku i pole) — všechna tělesa padají v gravitačním poli se stejným zrychlením nezávisle na svém složení a hmotnosti, gravitační pole působí např. i na světlo (zakřivuje světelné paprsky, způsobuje gravitační spektrální posuv). Tato univerzálnost působení je vyjádřena v Einsteinově principu ekvivalence, podle kterého je přítomnost gravitačního pole v každém místě (a pro všechny fyzikální děje) lokálně ekvivalentní situaci, kdy není žádné gravitační pole, ale vztažná soustava v tomto místě se pohybuje s příslušným zrychlením (je neinerciální). Např. v kabině zrychlující se rakety pozorujeme pole „setrvačných sil“, které je sice pro vnějšího pozorovatele kinematického původu, avšak pro vnitřního pozorovatele má všechny vlastnosti gravitačního pole (univerzálnost působení) a je od „pravého“ gravitačního pole lokálně nerozeznatelné. V souvislosti se speciální teorií relativity pak v každém místě (nehomogenního) gravitačního pole jsou jiné prostorové relace a čas teče různou rychlostí; prostoročas již není rovinný eukleidovský, ale zakřivený riemannovský.

b) Gravitační pole (a tedy i křivost prostoročasu) je buzeno opět univerzálně veškerou hmotou bez ohledu na to, zda se jedná o běžná tělesa, plyn, shluk elementárních částic nebo třeba jen elektromagnetické pole ve vakuu. Kromě elektromagnetických vln (např. světla) vytvářejí globální gravitační pole dokonce i gravitační vlny. Einsteinovy rovnice gravitačního pole udávají, jak je gravitační pole (křivost prostoročasu) buzeno tzv. tenzorem energie a hybnosti látek i polí.

Dialektiku obecné teorie relativity je možno stručně shrnout slovy: „prostoročas určuje hmotě, jak se má pohybovat, a hmota určuje prostoročas, jak se má zakřivovat.“ Univerzálnost gravitace tak nejvíce vystihuje materiální jednotu světa.

Gravitační síly jsou nejslabší ze všech známých druhů interakcí. Pořadí interakcí podle intenzity je: silné interakce (jaderné), elektromagnetické, slabé interakce (způsobující např. radioaktivitu beta a gravitační interakce. Za určitých okolností (velké nahromadění hmoty) se však tyto nejslabší gravitační síly mohou stát dominantními právě díky své univerzálnosti a mohou být dokonce tak mohutné, že jim nedolá vůbec nic — to je též případ úplného gravitačního kolapsu, kterému je věnován tento článek.

2. Vývoj hvězd

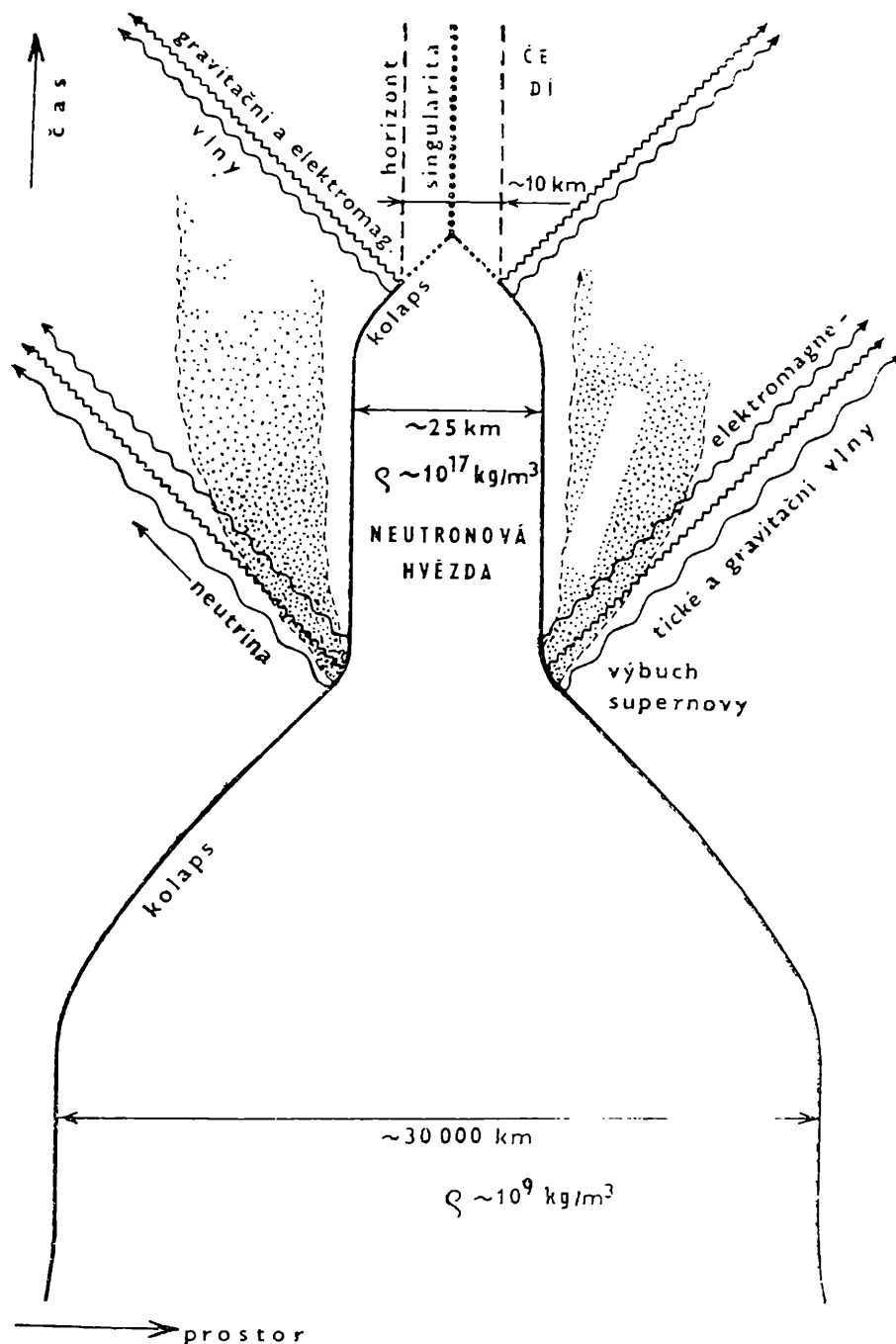
Podle představ astrofyziky hvězdy vznikají jakousi kondenzací z mezihvězdné látky. Zhruba řečeno, oblak mezihvězdného plynu a pra-

chu se začne vlivem vlastní gravitace smršťovat (v počáteční fázi hraje důležitou roli též tlak záření z okolí). Tím se v jeho nitru zvyšuje tlak a teplota až do hodnot, které stačí na zapálení prvních termonukleárních reakcí. Hvězda se pak na dlouhou dobu stane obrovským termonukleárním reaktorem, ve kterém je uvolňovaná energie spoutávána gravitací.

Předpokládejme zde zatím, že hvězda nerotuje. V normálních stabilních fázích života hvězdy je gravitační působení snažící se smršťovat hvězdu vyváжено tlakem způsobeným ohřevem a zářením při termonukleárních reakcích probíhajících v nitru hvězdy. Nebudeme se v tomto článku zabývat pestrými osudy hvězd během různých typů jaderných reakcí, doprovázených smršťováním, erupcemi, výbuchy a jinými nestabilitami, ale začneme až od toho okamžiku, kdy hvězda již spotřebovala všechno jaderné „palivo“, vyhasly všechny jaderné reakce a hvězda se dostala do nejnižšího energetického stavu (neuvažujeme-li gravitaci). Vlivem gravitačních sil je hvězda stlačena z původních několika set tisíc kilometrů do průměru několika tisíc kilometrů a hustoty řádu 10^9 kg/m^3 . Látka hvězdy je plně ionizována a gravitační síly jsou vyváženy Fermiho tlakem tzv. degenerovaného elektronového plynu. Hvězda v tomto stavu se nazývá *bílý trpaslík* (dokud září rozžhavena zbylým teplem, posléze se stává černým trpaslíkem).

Takový bílý trpaslík je však stabilní jen tehdy, když jeho hmotnost není větší než tzv. Chandrasekharova mez, která činí asi 1,25 hmoty Slunce. Jestliže je hmotnost bílého trpaslíku větší než tato hranice, není již tlak elektronového plynu schopen vyvážit tak velké gravitační síly, elektrony jsou vtlačovány do jader a jimi pohlcovány (slučují se tam s protony za vzniku neutronů a vylétajících neutrín). Dochází k prudkému smrštění (implozi) hvězdy, které se může zastavit až ve stadiu tzv. *neutronové hvězdy*, která má průměr jen několik desítek kilometrů a její hustota je řádu hustoty v atomových jádrech ($\sim 10^{17} \text{ kg/m}^3$). Gravitační síly jsou vyváženy Fermiho tlakem „neutronového plynu“, ze kterého je hvězda složena. Neutronová hvězda je jakýmsi gigantickým „jádreem“ složeným z neutronů a udržovaném pohromadě vlastní gravitací. Při implozi vedoucí ke vzniku neutronové hvězdy dochází k uvolnění velkého množství energie, která se jednak vyzáří ve formě elektromagnetických vln, jednak je odnášena neutriny a horními vrstvami hvězdy, které se prudce rozpínají do okolního prostoru a vytvářejí zářící mlhovinu — vznik neutronové hvězdy je doprovázen výbuchem supernovy (prostřední část obr. 1). Za rychle rotující neutronové hvězdy jsou nyní považovány tzv. pulsary.

Podobně jako bílý trpaslík i neutronová hvězda má shora omezenou hmotnost. Při dostatečně velkých hmotnostech (větších než asi dvě hmoty Slunce, tzv. Oppenheimer-Landauova mez) jsou gravitační síly již tak velké, že překonají Fermiho i jaderné síly mezi neutrony (jaderné síly mají krátký dosah — stav nasycení), katastrofální gravitační kolaps



Obr. 1

pokračuje dále (horní část obr. 1), až se hvězda dostane pod svůj tzv. *Schwarzschildův* (gravitační) poloměr, překročí horizont a vznikne černá díra (kolapsar). Gravitační poloměr Slunce by byl asi 3 km, Země jen 0,9 cm! Prostorčas kolem černé díry se tak zakřiví, že se uzavře „sám do sebe“ a přeruší se (ve smyslu příčinnosti) spojení s vnějším světem.

Kolaps v těchto stádiích je již zcela relativistický a jeví se úplně jinak pro pozorovatele na hvězdě než pro vzdáleného vnějšího pozorovatele. Pro vnějšího pozorovatele se kolaps od doby, kdy se dostane do relativistické oblasti, začne postupně zpomalovat vlivem zpomalování chodu času gravitačním polem a nikdy v konečném čase nedosáhne gravitačního poloměru — na horizontu se čas zastaví, kolaps „zamrzne“.

Pokles jasu hvězdy a narůstání gravitačního rudého posuvu vysílaného světla je však exponenciální a hvězda zhasne prakticky za zlomek sekundy od nástupu relativistických vlivů.

Pro pozorovatele na kolabující hvězdě (kdyby mohl zůstat naživu) není horizont žádnou překážkou a může jej v principu bez obtíží překonat — na horizontu není žádná skutečná singularita. Z podgravitačního poloměru však tento pozorovatel nemůže již poslat ven žádnou informaci, gravitace „nepustí“ ani např. světlo. Žádné jevy probíhající pod horizontem nemohou žádným způsobem ovlivnit vnější svět a nemohou z něho být nijak pozorovatelné. Horizont je jakási membrána propustná pouze ve směru dovnitř. Hluboké souvislosti mezi prostorem, časem a gravitací v obecné teorii relativity ukazují, že po dosažení Schwarzschildova poloměru se všechna tělesa budou pohybovat směrem ke středu $r = 0$ se stejnou osudovostí, s jakou čas běží od minulosti do budoucnosti (tzv. prostoročasové světelné kužely jsou zcela obráceny dovnitř). I kdyby byl pozorovatel v raketě, ani sebevětší síla motorů by jeho pádu ke středu nemohla zabránit. Jakmile je dosaženo gravitačního poloměru, nemůže již žádná známá (a snad vůbec žádná) síla gravitační kolaps zastavit, protože žádná síla nemůže čas obrátit nazpět. Kolaps pokračuje dále a po uplynutí konečného vlastního času dojde až do bodu $r = 0$, do tzv. *singularity* s nulovým objemem, nekonečnou hustotou a křivostí, s nekonečnými tlaky a gradienty gravitačních sil (aspoň podle klasické teorie pro nenabitou nerotující černou díru).

Takto tedy zhruba probíhá gravitační kolaps hvězd. Na obr. 1 jsou znázorněny všechny tři možnosti (bílý trpaslík, neutronová hvězda a černá díra) v řezu tzv. prostoročasným diagramem; na vodorovné ose je jeden rozměr prostorový (průměr), na svislé ose je čas. Všechny tři stádia se však ve skutečnosti nerealizují — při menších hmotnostech než příslušná mez se kolaps zastaví ve stadiu bílého trpaslíka nebo neutronové hvězdy, při velkých hmotnostech se tato stádia nestabilizují a vzniká hned černá díra.

3. Tři úrovně gravitačního kolapsu

V předchozím odstavci jsme zjednodušeně nastínili průběh gravitačního kolapsu hvězd. V kosmologii se ukazuje, že gravitační kolaps hvězdy je určitým vzdáleným analogem (někdy se dokonce říká „laboratorním vzorkem“) jevu ještě mnohem grandióznějšího — kolapsu celého vesmíru. Je-li totiž průměrná hustota hmoty ve vesmíru dostatečně vysoká, předpovídá relativistická kosmologie uzavřený vesmír — nynější rozšiřování se jednou zastaví a bude vystřídáno smršťováním (kolapsem). Z hlediska pozorovatele je mezi těmito dvěma druhy kolapsu principiální rozdíl. Při kolapsu hvězdy má pozorovatel v principu vždy možnost volby: buďto zůstane v bezpečné vzdálenosti a uvidí jen část kolapsu až po horizont, nebo se vrhne za kolabující hmotou a uvidí

sice celý průběh kolapsu až k singularitě, avšak žádným způsobem nebude moci sdělit své poznatky ven a bude neodvratně zničen (aspoň pokud se týče kolapsu nerotující hvězdy). Při kolapsu celého vesmíru pozorovatel již tuto možnost volby nemá — nijak se nemůže vyhnout osudu veškeré ostatní hmoty, kolaps vesmíru bude univerzální.

Třetí úroveň gravitačního kolapsu lze očekávat zase naopak v mikrosvětě. V tzv. kvantové geometrodynamice se předpokládá, že procesy obdobné gravitačnímu kolapsu (avšak vratné) probíhají všude a neustále v měřítcích řádu 10^{-35} m ve formě tzv. kvantových fluktuací geometrie a topologie prostoročasu — prostoročas má „pěnovitou“ neustále fluktuující mikrostrukturu.

Literatura

Kuchař K.: Základy obecné teorie relativity. Academie, Praha 1968.

Ullmann V.: Gravitační energie. PMFA 25, 250—299 (1980).

Grygar J., Horský Z., Mayer P.: Vesmír. MF, Praha 1979.

Zeldovič J. B., Novikov I. D.: Teorija tjažotenija i evolucija zvezd. Nauka, Moskva 1971.

Grygar J.: Gravitační kolaps čili poslední dnové masivních hvězd. Kosmické rozhledy 9, 41—45 (1971).

Ullmann V.: Gravitační kolaps a fyzika černých děr. Reprint KNSP, Ostrava 1978.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Fyzika před 10, 100 a 1000 roky

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., Přírodovědecká fakulta UP Olomouc

V roce 1973 byla vyrobena slitina s rekordně vysokou kritickou teplotou pro supravodivost (23,2 K). Tímto směrem se dnes ubírají snahy, jež by mohly vyvolat revoluci v elektrotechnice — kdyby ovšem byly sestrojeny supravodiče pro pokojové teploty, jež by představovaly takřka ideální, bezztrátový vodič. Je zajímavé, že právě rok předtím dostali *Bardeen*, *Cooper* a *Schrieffer* Nobelovu cenu za vypracování kvantové teorie supravodivosti. Dříve se vědělo, že mechanismus elektrického proudu je trojího druhu — 1. proud kondukční daný pohybem elektricky nabitých částic, zejména elektronů v kovu a iontů v elektrolytu; od něj se podstatně neliší 2. proud konvekční, který lze realizovat např. tak, že pohybujeme celým nabitým tělesem, čímž rovněž dochází

k přemísťování elektrického náboje; jiná představa se váže 3. s proudem posuvným objeveným Maxwellem, což není nic jiného než šířící se změny polarizace prostředí, jež ovšem nejsou možné u ustáleného stejnosměrného proudu. Novinkou a záhadou zůstávala supravodivost objevená r. 1911 *Kammerlinghem-Onnesem*, jež se náhle objevuje u některých kovů a slitin při velmi nízkých teplotách a v nulových (nebo ve slabých) magnetických polích. Jev lze vysvětlit jako důsledek pohybu celých elektronových párů krystalovou mříží; takovému páru odpovídá totiž poměrně velká vlnová délka de Broglieovy vlny (na rozdíl od „osamocených“ elektronů či iontů), jež se ohybem šíří v krystalu, aniž oproti ní nepatrné ionty představují nějakou překážku. Proud tedy může protékat supravodičem bez útlumu celé týdny. K dalším zajímavostem roku patřily (4. 12.) snímky americké sondy Pioneer 10, obsahující podrobné informace o povrchu Jupitera.

Před 50 lety (v r. 1933) zdomácněl ve fyzice přízračný pojem anti-hmoty předpověděné Diracem, když *Thibaud* a manželé *Joliotovi* dokázali existenci a anihilaci elektron-pozitronového páru (*Blackett* a *Occhialini* dokázali přítomnost těchto procesů i v kosmu) provázenou zářením gamma a když *Anderson* a jmenovaní již badatelé objevili také kreaci těchto párů pomocí kvant gamma. *Fermi* a *Perrin* dále zjistili, že foton není jedinou částicí s nulovou klidovou hmotností, ale že touto pozoruhodnou vlastností se vyznačuje i neutrino. Začalo se také intenzivně pracovat ve fyzice jádra: byly objeveny kategorie jaderných reakcí, vedoucí k silné produkci neutronů (*Lauritsen*), *Wigner* dokázal, že jaderné síly jsou silami krátkého dosahu, že však v této oblasti jsou o několik řádů silnější než elektromagnetické interakce a že gravitační interakce je proti nim zanedbatelná. *Mac Donald* získal těžkou vodu, *Stern* a *Estermann* změřili magnetický moment deuteronu, *Fermi* vypracoval teorii rozpadu beta jako důsledek existence nové kategorie sil v přírodě — tzv. slabé interakce; jako významní teoretikové vystoupili v těchto oblastech poprvé také *Oppenheimer*, *Gamow* a *Teller*. *Elsasser* zjistil vysokou stabilitu jader s atomovými čísly rovnými tzv. magickým číslům (2, 8, 20, 50, 82, 125), čili číslům, jež nemají již nic společného s obdobnými čísly, jež charakterizují vysoce stabilní elektro-nové obaly atomů.

Fyziky před 100 lety zaujaly zcela jiné, makroskopické problémy, z nichž nejpozoruhodnější výsledky se týkaly rozlišení laminárního a turbulentního proudění a *Reynoldsovy* výzkumy turbulence charakterizované číslem po něm nazvaném.

Jako největší přínos roku 1783 se uvádí *Lavoisierovo* a *Laplaceovo* zdokonalení kalorimetru; tito badatelé nejen změřili měrné teplo řady látek, ale dokonce zjistili, že tato veličina není konstatní, ale „poněkud“ závisí na teplotě. Řešení této záhady čekalo však až na Einsteina, který založil kvantovou teorii měrného tepla.

Ze starších dob stojí ještě za zmínku *Galileův* objev izochronismu kyvů kyvadla v roce 1583; na myšlenku, že kyvadla dané délky mají stejnou dobu kyvu, a to i při různých hmotnostech a rozkyvech, připadl prý při zdlouhavých obřadech v chrámu, když potají z dlouhé chvíle měřil dobu kyvu lamp pomocí vlastního tepu. Ve stáří chtěl zhotovit hodiny na tomto principu, síly ani zrak mu však již nestačily; odkázal svůj problém synovi, který však jako právník tak nevýnosnou problematikou pohrdl a záhy na ni zapomněl. Objev kyvadlových hodin tedy musel počkat až na Huygense.

Před tisíci roky vedou v exaktních vědách Arabové, kteří si však časové lokalizace objevů příliš nevšíмали, a v Evropě o exaktních vědách zatím nebylo téměř potuchy.

Před 200 lety objevil William Herschel pohyb Slunce vesmírem

FRANTIŠEK JÁCHIM, Vimperk

Když roku 1543 vydal Koperník své dílo *De revolutionibus orbium coelestium*, zdálo se, že je dosaženo dokonalého popisu pohybu vesmírných těles. Ukázalo se však, že to je teprve počátek objasnění kinematiky vesmíru. Teprve díla Keplerova a Newtonova rozpracovávají heliocentrický systém nejen po stránce kinematické, ale i dynamické. Sféra stálic zůstává však stranou zájmu předních astronomů i potom.

K prvnímu průzkumu hvězdného vesmíru dochází až v 18. století, a to díky rozvoji pozorovací techniky. Pozoruhodným objevem z té doby (poslední čtvrtletí 18. století) je Herschelův objev pohybu Slunce prostorem. Povězme si něco o životě autora tohoto objevu i o jeho činnosti.

William Friedrich Wilhelm Herschel se narodil 15. listopadu 1738; pocházel z německého města Hannoveru. V roce 1759 dezertoval z armády a přesídlil do anglického lázeňského města Bathu. Věnoval se nejprve vyučování hudbě a dirigování promenádních koncertů, avšak zároveň se zabýval svým koníčkem — astronomií. Koupil si dalekohled, věnoval mnoho času prohlížení oblohy a začal se zabývat uspořádáním vesmíru. Vyráběl si sám dalekohledy a vybrousil pro ně několik set zrcadel. Jedním z těchto dalekohledů (o průměru zrcadla 16 cm a ohniskové vzdálenosti 2,21 cm) objevil 13. března 1781 v souhvězdí Blíženců

pohybující se těleso, které pokládal za kometu. Německý astronom *J. E. Bode* však dokázal planetární povahu tělesa, jemuž dal jméno Uran; tak se počet tehdy známých planet rozšířil o dalšího člena. Herschel potom ještě objevil čtyři Uranovy měsíce a šestý i sedmý měsíc Saturnův. Také se zabýval studiem dvojhvězd.

Soustavné pozorování hvězdného vesmíru a sestavování katalogů hvězd přivedlo Herschela na myšlenku hledat pohyb Slunce prostorem. Roku 1718 ukázal *Halley*, že několik jasnějších hvězd změnilo od doby Claudia Ptolemaia svoji polohu. Ke stejným výsledkům dospěl i *Bessel*, když vytvářel katalog 3000 hvězd s polohami pro rok 1755 a užíval přitom všech dostupných pozorovacích výsledků z různých období. Na základě Besselových prací se ukázalo, že pohyb hvězd je spíše pravidlem než výjimkou, je to však pohyb těžko měřitelný i v dlouhých intervalech pozorování. Herschel celkem správně rozložil prostorový pohyb hvězdy na dvě složky — transverzální, pozorovatelnou ze Země a složku radiální nepozorovatelnou. Roku 1783 zkoumal pohyby sedmi jasných hvězd a zjistil, že Arktur (α v souhvězdí Pastýře) a Vega (α Lyrae) se od sebe vzdalují, Sirius (α Velkého Psa) a Aldebarán (α Býka) se k sobě přibližují. Na základě toho usoudil, že Slunce se ve světovém prostoru pohybuje a určil směr pohybu k hvězdě λ v souhvězdí Herkula. Rektascenze této hvězdy je přibližně 18 h 30 min, její deklinace 27° . Bod o uvedených souřadnicích je teoretickým místem, kam směřuje trajektorie Slunce — nazýváme jej *apex*.

Podívejme se na stanovení polohy apexu očima dnešní fyziky a astronomie. Herschel nemohl tušit, že mnohem spolehlivěji lze určit směr a rychlost Slunce prostorem na základě měření radiálních rychlostí vybraného vzorku hvězd ve sluečném okolí. Prakticky se to provádí tak, že se obloha rozdělí na řadu polí. V jednotlivých polích se proměřují rychlosti hvězd a vypočítá se jejich průměrná rychlost. Měření a výpočty ukazují, že rychlosti se liší nejen velikostí, ale také směry. Rychlost některých polí svědčí o jejich přibližování ke Slunci, rychlosti jiných svědčí o vzdalování hvězd od Slunce. Právě v této statistické metodě se ztrácejí jednotlivé a mnohdy různosměrné rychlosti jednotlivých hvězd a vystupuje obraz pohybu Slunce vůči těmto hvězdám.

Nejnovější prameny uvádějí polohu apexu v rovníkových souřadnicích takto: rektascenze 18 h, deklinace $+30^\circ$. Pro rychlost Slunce prostorem se uvádí hodnota $20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Zde je však třeba připomenout, že velmi záleží na tom, z jaké skupiny hvězd je rychlost stanovena. Podle skutečných pohybů hvězd (pohybů získaných složením pozorovaných pohybů a radiálních pohybů) lze rozdělit hvězdy do dvou skupin. Asi 60 % z nich se pohybuje k bodu o souřadnicích $\alpha = 6 \text{ h } 04 \text{ min}$, $\delta = 15^\circ$, kdežto 40 % hvězd se pohybuje k bodu o souřadnicích $\alpha = 19 \text{ h } 12 \text{ min}$, $\delta = -64^\circ$. Oba proudy byly objeveny roku 1904.

Vzhledem k centru Galaxie se Slunce pohybuje rychlostí asi 250 km.s^{-1} . Galaxie se pohybuje vzhledem k místní skupině galaxií rychlostí asi 100 km.s^{-1} a celá místní skupina se pohybuje ke kupě galaxií v souhvězdí Panny rychlostí kolem 1000 km.s^{-1} .

Z uvedeného je vidět, že problém pohybu těles ve vesmíru je velmi složitý a závisí na „rozměrech“ vesmíru, v jakém tento pohyb zkoumáme.

Literatura

Horský Z.—Plavec M.: Poznávání vesmíru, Praha 1962.

Link F.: Co víme o hvězdách, Praha 1957.

Kleczek J.: Slunce a člověk, Praha 1973

Vanýsek V.: Základy astronomie a astrofyziky, Praha 1980.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Tul'činského sbírka kvalitativních úloh z fyziky

Čtenáře časopisu „Rozhledy matematicko-fyzikální“ chceme upozornit na „Zbierku kvalitativných úloh z fyziky“ od sovětského autora *M. J. Tul'činského*, která byla přeložena do slovenštiny. Autorem překladu je teoretický fyzik, vědecký pracovník Fyzikálního ústavu SAV, *RNDr. Ivan Lukáč, CSc.* Sběrka vyšla v roce 1978 v edici teoretické literatury vydavatelství technické a ekonomické literatury „ALFA“ v Bratislavě v koedici s vydavatelstvím MIR v Moskvě. Sběrka má 293 stran, 391 obrázků, byla vydána nákladem 4200 výtisků. Cena sbírky je 31 Kčs.

Sběrka obsahuje 1721 kvalitativních úloh z fyziky. Jsou v ní zastoupeny obory: mechanika (kinematika, dynamika, rovnováha těles, zákony zachování v mechanice), tepelné jevy, molekulová fyzika, elektrodynamika, kmity a vlny, molekulová optika a fyzika atomového jádra. Sběrka je rozdělena na dvě části. V první jsou uvedeny texty úloh. V úvodní poznámce autor sbírky pojednává o metodice a způsobech řešení kvalitativních úloh.

Tato sbírka kvalitativních úloh z fyziky se svým charakterem podstatně odlišuje od tradičních sbírek příkladů z fyziky. Při řešení kvalitativní úlohy je nutno pochopit fyzikální podstatu konkrétního jevu, která často není evidentní, ačkoliv sám jev je všeobecně známý. Typické u těchto úloh je i to, že zpravidla není zapotřebí provádět mate-

DIOFANTOVSKÝ (podle řec. matematika *Diofanta* z Alexandrie) — diofantovské rovnice v oboru celých, resp. racionálních čísel

DIS- (z lat. *dis-* — předpona s významem „rozluka, opak, zápor“) — předpona s významem prostorového rozšíření, rozdělení, rozluky, roz- (opak předpony kon-), záporu, opaku

DISJUNKCE (z lat. *disiunctio* k *disiungo*, -ere, slož. z *dis-* = roz- + *iungo*, -ere = spojovat) — rozpojení, rozluka; v logice: ostrá disjunkce = složený výrok utvořený ze dvou výroků pomocí spojky „nebo“ ve vylučovacím významu „buď — nebo“ (vylučuje se, že platí oba výroky zároveň); **DISJUNKTNÍ** — rozlučovací, v matematice: „rozpojený“, bez společných prvků (např. množiny, útvary); **DISJUNKTNOST** — vlastnost „být rozloučen“, vztah „být bez společných prvků“

DISKRÉTNÍ (od lat. *dis-* = roz- + *cresco*, -ere = růst) — rozdělený, nespojitý („diskrétní“ ve významu „ohleduplný“ je od lat. *cerno*, -ere = rozeznávat)

DISKRIMINANT) (z lat. *discrimino*, -are = rozdělovat, rozlišovat, rozeznávat) — „rozlišovatel“; v matematice: výraz, jehož hodnoty rozliší různé počty kořenů rovnic

DISKUSE (z lat. *discussio* k *discutio*, -ere, slož. z *dis-* = roz- + *quatio*, -ere = třást) — „roztrásání“, „přetřásání“, výměna názorů; v matematice: získání přehledu o všech možnostech

DISTRIBUTIVITA (slož. z lat. *dis-* = roz- + *tribuo*, -ere = dělit, udělovat) — vlastnost operací, že součin čísla a součtu lze „rozdělit“ na součet součinů, $a(b + c) = ab + ac$; **DISTRIBUTIVNÍ**, **DISTRIBUTIVNOST**

DIVERGENTNÍ (od lat. *dis-* = roz- + *vergo*, -ere = chýlit se, nachýlovat se) — odchylující se, rozcházející se, nepřibližující se k určité hodnotě; **DIVERGENCE** — vlastnost být divergentní

DODEKAËDR (z řec. *dódeka* = dvanáct + *hedra* = sedadlo, základna) — dvanáctistěn

DUALITA (od lat. *duo* = dva) — podvojnost, dvojí druh; v matematice: „dvojí platnost“ — platnost dvojic vět, které mají stejnou stavbu a liší se jen zaměněními termíny; **DUÁLNÍ**

DYADICKÝ (z řec. *dyas*, *dyados* = dvojka, od *dyó* = dva) — dvojkový, např. dyadická soustava

E—, EX — (z lat. *ex* = z) — předpona s významem „směr z něčeho ven“ (opak předpony in-, im-), např. emigrovat (lat. *migro*, -are = stěhovat se) — vystěhovat se

EKVI — (z lat. *aequus* — rovný, stejný) — počáteční část složených slov vyjadřující stejnou vlastnost nebo stejné množství

EKVIDISTANCE (od lat. *aequus* = stejný + lat. *disto*, -are = být vzdálen) — stejná vzdálenost, **EKVIDISTANTNÍ**

- 10 EKVIPOLENCE (od lat. *aequus* = stejný + řec. *poleó* = obracet, otáčet se) — „stejné natočení“, vztah náležet do stejného směru, mít stejnou orientaci, EKVIPOLENTNÍ
- EKVIPOTENCE (od lat. *aequus* = stejný + lat. *possum, posse* = moci) — stejná schopnost, stejná mohutnost; stejná mocnost; EKVI-POTENTNÍ
- EKVIVALENCE (od lat. *aequus* = stejný + lat. *valeo, -ere* = mít sílu, platnost, význam, být zdrav) — stejná síla, stejná platnost, stejný význam, v logice: stejná pravdivostní hodnota výroků, též složený výrok, který vyjadřuje, že jeho složky mají stejnou pravdivostní hodnotu; v matematice: „stejná síla“ podmínek, vlastností, stejná mohutnost množin, EKVIVALENTNÍ
- ELACE (od lat. *ex* = z + *latus k fero, ferre* = nésti) — „vynesení (z původní polohy)“, nejčastěji v témž směru, též protažení v jednom směru, zešíkmení
- ELIMINACE (od lat. *elimino, -are* = z domu přes práh vzdálit; slož. z *ex* = z + *limen, liminis* = práh, příbytek) — vyloučení, postupné vylučování; ELIMINAČNÍ — vylučovací
- ELIPSA (z řec. *elleipsis* — vynechání, zmenšení, vypuštění, úbytek nedostatek) — v matematice: kuželosečka, která souřadnicemi x, y svých bodů splňuje rovnici $x^2 = py - py^2$, v níž se člen py na pravé straně zmenšuje odečtením dalšího členu, jde o „přirovnání s úbytkem“; ELIPSOGRAF (řec. grafó — rýt, psát) — přístroj rýsující elipsy; ELIPSOID (latinizované *-oideus* = podobající se) — plocha „podobající se elipse“, mající všechny rovinné řezy eliptické nebo kružnicové
- EPICYKL (od řec. *epi* = na, nad, při + *kyklos* = kolo, kruh) — kružnice, která se kotálí po jiné kružnici; EPICYKLOIDA (latinizované *-oideus* = podobající se) — „křivka podobající se epicyklu“; křivka vytvořená bodem pevně spojeným s kružnicí, která se kotálí po vnější straně pevné kružnice
- EPITROCHOIDA (od řec. *epi* = na, nad, při + řec. *trochos* = kolo + latinizované *-oideus* = podobající se) — „horní trochoida“; epicykloida vznikající kotálením kružnice vnější stranou po vnější („horní“) straně jiné kružnice; v. trochoida, srov. hypotrochoida
- EVIDENTNÍ (od lat. *ex* = z + *video, -ere* = vidět) — „z něhož je vidět“, jasný, zřejmý
- EVOLUTA (od lat. *ex* = z, od + *volutus* od *volvo, -ere* = valit) — „odvalovaná“ křivka; křivka, ze které odvíjíme; též křivka tvořená okamžitými středy otáčení při některém pohybu
- EVOLVENTA (od lat. *ex* = z, od + *volvo, -ere* = valit) — „odvalující se“ křivka; křivka, kterou vytváří konec vlákna odvíjeného z evoluty
- EX — (z lat. *ex* = z) — předpona s významem „směr z něčeho ven“ (opak předpony in-, im-), např. export (at. *porto, -are* = nosit, vozit, dopravovat) — vývoz

EXCENTRICITA (od lat. *ex* = z, od $\div$ řec. *kentron* = ostrý bodec, bod ve středu kruhu) — „vzdálenost od středu“, výstřednost; **EXCENTRICKÝ** — výstředný

EXHAUSTIVNÍ, EXHAUSTNÍ (od lat. *ex* = z, od $\div$ lat. *haurio, -ire* = čerpat) — „vyčerpávací“; v matematice: exhaustivní metoda — postup, kterým něco „vyčerpáváme“, například pomocí systému pravoúhelníků vyplňujeme obrazec s křivočarou hranicí, abychom vypočítali jeho obsah

EXISTENCE (od lat. *ex* = z, od $\div$ lat. *sisto, -ere* = postavit, pevně stát) — bytí, trvání, skutečnost; **EXISTENČNÍ VĚTA** — věta, která vyjadřuje, že existuje alespoň jeden objekt, který má příslušnou vlastnost

EXPLICITNÍ (od lat. *ex* = z, od $\div$ *plico, -are* = vinout, plést) — „rozpletený, odvinutý“; v matematice: explicitní vyjádření funkce — funkce „rozpletená“, symbol funkční hodnoty stojí osamocen na jedné straně rovnice, zatímco u implicitního vyjádření funkce jsou všechny proměnné „vpleteny vzájemně do sebe“, nejsou od sebe odděleny

EXPLIKACE (od lat. *ex* = z, od $\div$ lat. *plico, -are* = vinout) — „rozvinutí“, „rozpletení“, výklad, vysvětlení; **EXPLIKATIVNÍ** — vysvětlovací

EXPONENT (od lat. *ex* = z, od $\div$ lat. *pono, -ere* = klást, pokládat) — osoba, která se „klade do popředí“ jako mluvčí někoho jiného; zmocněnec; v matematice: mocnitel; **EXPONENCIÁLNÍ rovnice** — rovnice, kde neznámá je v exponentu, v mocniteli

EXPERIMENT (z lat. *experimentum k experior, -iri* = zkoušet) — zkouška, pokus

EXTERNÍ (z lat. *externus* = vnější) — vnější, zevní

EXTRAPOLACE (od lat. *extra* = na vnější straně, vně $\div$ *polio, -ire* = hladit, uhlazovat) — přibližný výpočet („uhlazení výpočtu“) hodnot funkce pro body ležící vně uvažovaného oboru; odhad průběhu funkce vně intervalu, kde její hodnoty známe

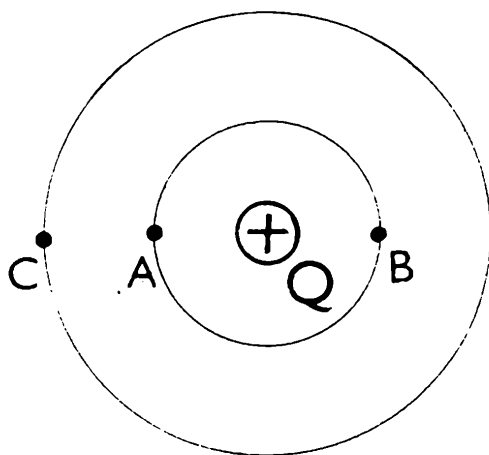
EXTRÉM (z lat. *extremus* = nejzazší, krajní) — krajnost, krajní mez; **EXTREMÁLNÍ úloha** — úloha požadující nalézt „krajní meze“, tj. maximum nebo minimum určité funkce

FAKTOR (od lat. *facio, -ere* = dělat) — činitel; **FAKTORIÁL** — výraz složený z faktorů, činitelů; součin několika činitelů určených podle nějakého pravidla

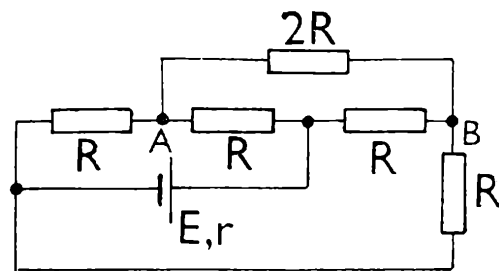
FAKULTA (z lat. *facultas* = možnost, schopnost) — část vysoké školy, která umožňuje studovat užší vědní obor; **FAKULTATIVNÍ** — možný, volitelný

FINITNÍ (od lat. *finio, -ire* = ohraničovat, končit) — „jsoucí v nějakém vztahu ke konci, k omezení, k vymezení“; finitní matematika — matematika konečných systémů

- 12 **FLUENTA** (od lat. *fluo*, -ere = plynout, téci) — „tekoucí“; středověký i Newtonův název pro spojitou funkci, která popisuje závislost délky dráhy pohybu na čase. Vycházelo se z představy, že veličiny se mění nepřetržitým tokem, „plynutím“
- FLUXE** (od lat. *fluxus k fluo*, -ere = plynout, téci) — „tok“; termín zavedený Newtonem pro rychlost, kterou roste („teče“) *fluenta*
- FOKUS** (z lat. *focus* = ohniště) — ohnisko; **FOKÁLNÍ** — ohniskový
- FORMA** (z lat. *forma* = vnější tvar, podoba, způsob) — tvar, vzhled, podoba; v matematice: název pro výrazy určitého typu, např. lineární forma, kvadratická forma; **FORMULE** (od lat. *formula* — zdrobnělina od „forma“) — „slovní tvar“; v logice a v matematice: výraz zapsaný pomocí dohodnutých symbolů a přijatých pravidel, „slovo“ v některém symbolickém jazyku
- FUNDAMENTÁLNÍ** (od lat. *fundamentum* = základ, podklad) — základní, hlavní, podstatný
- FUNKCE** (z lat. *functio* = vykonávání, úkon, k *fungor*, -i = být činný, vykonávat, „fungovat“) — činnost, úkon, účinnost; v matematice: druh relace, která vyjadřuje zobrazení („úkon přiřazování“)
- GENERÁTOR** (od lat. *genero*, -are = rodit, plodit) — „ploditel“; v matematice: generátory — prvky množiny, ze kterých lze určitou operací či několika operacemi získat všechny ostatní prvky množiny; v počítačové technice: zařízení pro vytváření hodnot funkcí
- GENNÍ** (od řec. *gignomai* = rodit se, stávat se) — koncová část složených slov, má význam „vznikající, tvořící, působící, mající původ, vzniklý“; např. homogenní (řec. *homos* = stejný, rovný) — stejnorodý, vzniklý ze stejného materiálu, vzniklý stejným způsobem
- GEOMETRIE** (od řec. *gé* = země + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — „zeměměřičství“; obor matematiky, který se vyvinul z vyměřování pozemků a staveb
- GONIOMETR** (od řec. *gónia* = úhel, kout + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — úhloměr; **GONIOMETRIE** = „měření úhlů“; **GONIOMETRICKÁ** funkce — „úhloměrná“ funkce, funkce míry úhlu
- GRAD** (z lat. *gradus* = krok, stupeň, schod) — jeden stupeň původní úhlové jednotky v desítkové soustavě, tj. jedna setina pravého úhlu
- GRADIENT** (od lat. *gradior*, -i = kráčet) — „kráčející“; matematické vyjádření, jak při změně jedné veličiny o jednotku se mění, pohybuje („kráčí“) veličina druhá, na první závislá
- GRAF** (od řec. *grafó* = rýt, psát) — „píšící“; písemné znázornění vzájemného vztahu určitých matematických a statistických údajů
- GRAF** (od řec. *grafó* = rýt, psát) — koncová část složených slov, vyjadřující, že někdo nebo něco píše to nebo tak, jak uvádí předchozí část složeného slova; např. kardiograf (řec. *kardia* = srdce) — přístroj zaznamenávající činnost srdce; telegraf (řec. *téle* = daleko) — přístroj „píšící na dálku“



Obr. 1

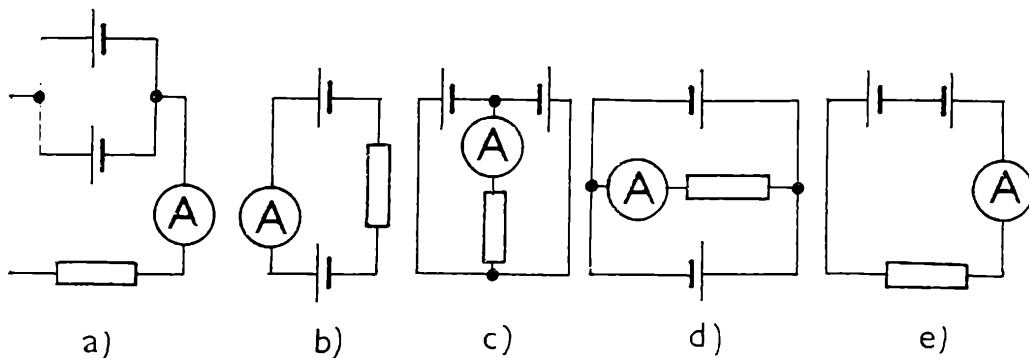


Obr. 2

matický výpočet, a tedy ani odpověď nemusí mít číselný charakter. Kvalitativní úlohy nutí analyzovat a logicky vysvětlovat přírodní jevy za použití fyzikálních principů a zákonů. Řešení kvalitativních úloh přispívá k prohloubení a k upevnění fyzikálních znalostí, k rozvinutí logického myšlení, důvtipu a k rozšíření fyzikálního rozhledu. O významu kvalitativních úloh pro rozvíjení fyzikálního myšlení byl uveřejněn v Rozhledech matematicko-fyzikálních článků od V. Černého a J. Pišúta (Rozhledy mat. - fyz. 57 (1978/9) 157).

V další části článku uvádíme pro čtenáře „Rozhledů...“ jako ilustraci tucet náhodně vybraných úloh ze slovenského překladu sbírky.

1. Aby sa zrýchlilo vylievanie kapaliny z fľaše, treba kvapalinu uviesť do rýchleho rotačného pohybu. Prečo?
2. Keď spadne kvapka vody na rozžeravenú platňu sporáka, skôr ako sa vyparí, skáče po nej. Prečo?
3. Prečo nemá pocit chladu kúpajúci, ktorý vychádza z vody počas teplého dažďa?
4. Prečo farbenie nevelkých predmetov striekaním je z ekonomického hľadiska výhodné a neškodí ani zdraviu robotníka, keď medzi striekacou pištoľou a predmetom vytvoríte vysokonapäťové elektrické pole?
5. Bodový náboj Q vytvára elektrické pole (obr. 1). Vypočítajte prácu, ktorá sa vykoná pri premiestnení určitého náboja z bodu A do bodu B . Porovnajte túto prácu s prácou, ktorú vykoná ten istý náboj pri premiestnení po úsečkách AC a BC .
6. Jedličková girlanda je urobená z malých žiaroviek na vreckovú baterku. Pri zapnutí tejto girlandy do siete na každú žiarovku pripadá napätie tri volty. Prečo je nebezpečné po vykrútení jednej žiarovky zasunúť do objímky prst?
7. Prečo má obraz predmetu vo vode vždy menší jas, ako je jas samotného predmetu?
8. Aký prúd prechádza odporom $2R$ na obr. 2?



Obr. 3

9. V elektrickom okruhu sú paralelne zapojené medené a oceľové vlákna s rovnakou dĺžkou a primerom. V ktorom z týchto vlákien sa uvoľňuje väčšie množstvo tepla za jednotku času?
10. Prečo sa elektrické žiarovky najčastejšie prepaľujú v momente zapínania prúdu a zriedkakedy pri vypínaní prúdu?
11. Porovnajte údaje ampérmetrov v okruhoch znázornených na obr. 3, keď sú zostavené z rovnakých prvkov.
12. Keď do siete zapnete elektrický spotrebič (žehličku, varič), intenzita svetla svietiacich žiaroviek náhle poklesne. Zvlášť viditeľne klesá táto intenzita v začiatočnom momente; potom sa intenzita trochu zväčší, napriek tomu však ostane menšia, ako bola pred zapnutím spotrebičov. Vysvetlite tento jav.

Odpovedi na tyto úlohy naleznete v tomto čísle Rozhledů na str. 217.

Sbírku kvalitativních úloh z fyziky M. J. Tulčinského lze doporučit studentům a učitelům středních škol. Sbírka by rovněž mohla být vhodnou příručkou pro přípravu uchazečů k přijímacím zkouškám na vysoké školy přírodovědného i technického směru.

Zdeněk Janout, Stanislav Pospíšil

Ze zahraničních časopisů

STANISLAV HORÁK, Praha

Příklady, jejichž řešení zde uvádíme, jsou převzaty z německého časopisu *Alpha*, který je převzal z nějakého blíže neurčeného sovětského časopisu.

1. Která dvojciferná přirozená čísla mají tu vlastnost, že jsou dělitelná svým ciferným součtem?

Řešení. Předpokládejme, že takové číslo existuje a že má tvar $10\alpha + \beta$, kde $0 \leq \alpha \leq 9$, $0 \leq \beta \leq 9$ jsou přirozená čísla. Podle úlohy pak platí

$$10\alpha + \beta = k(\alpha + \beta), \quad (1)$$

kde k je přirozené číslo různé od nuly. Rovnice (1) je ekvivalentní s rovnicí

$$(10 - k) \alpha = (k - 1) \beta$$

a odtud za předpokladu $\beta \neq 0$ plyne

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k - 1}{10 - k}.$$

Poněvadž $k - 1 > 0$, $10 - k > 0$, dostáváme

$$1 < k < 10.$$

Pro další postup je vhodné sestavit tabulku:

k	2	3	4				5
$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2} =$	$\frac{2}{4} =$	$\frac{3}{6} =$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{5}$
$10\alpha + \beta$	18	27	12	24	36	48	45

k	6					8	9
$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{1} =$	$\frac{4}{2} =$	$\frac{6}{3} =$	$\frac{8}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{1}$
$10\alpha + \beta$	54	21	42	63	84	72	81

V posledním řádku tabulky jsou hledaná čísla. Je jich 14.

Za pozornost stojí, že jsou všechna dělitelná třemi. K těmto řešením je potřeba připsat i řešení pro $\beta = 0$: 10, 20, 30, 40,

2. Dokažte, že

$$5^{10} + 6^{10} < 7^{10}.$$

Důkaz. Všimněme si, že

$$5^3 + 6^3 < 7^3$$

Odtud

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 < 1$$

Poněvadž $\frac{5}{7} < 1$, $\frac{6}{7} < 1$, je také

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{10} < \left(\frac{5}{7}\right)^3, \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < \left(\frac{6}{7}\right)^3,$$

a proto

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{10} + \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < 1,$$

z čehož

$$5^{10} + 6^{10} < 7^{10}.$$

3. Nechť zápisy ab , bc , ca , abc představují čísla napsaná v dekadické soustavě. Pro která a , b , c platí

$$ab + bc + ca = abc ?$$

Řešení. Pišme

$$\begin{aligned} ab &= 10a + b, \quad bc = 10b + c, \quad ca = 10c + a, \\ abc &= 100a + 10b + c. \end{aligned}$$

Podle úlohy platí

$$10a + b + 10b + c + 10c + a = 100a + 10b + c$$

Po zjednodušení dostaneme

$$b + 10c = 89a \tag{1}$$

Z této rovnice a z podmínek $0 < b \leq 9$, $0 < c \leq 9$ vyplývá $a = 1$. (Součet $b + 10c$ může nabýt nejvýše hodnoty 99.) Rovnici (1) lze dát tvar

$$c = 8 + \frac{9-b}{10}.$$

Číslo c je přirozené, a to nastane jen v případě $b = 9$. Tím docházíme k výsledku $a = 1$, $b = 9$, $c = 8$. Skutečně platí

$$19 + 98 + 81 = 198.$$

Cvičení

1. Bez použití tabulek dokažte, že $\sqrt[7]{5^3} < 2$. (Vyjděte z toho, že $2^{10} = 1024$, $10^3 = 1000$.)
2. Dokažte, že $10^9 + 11^9 < 15^9$. (Všimněte si, že $10^2 + 11^2 < 15^2$.)
3. Z trojčíslného čísla A dostaneme trojčíslné číslo A_1 tak, že vyměníme první cifru s poslední. Potom utvoříme rozdíl $|A - A_1|$. Pro která čísla A je tento rozdíl dělitelný sedmi? (Výsledek: $8\beta 1$, $9\beta 2$, kde $0 \leq \beta \leq 9$.)

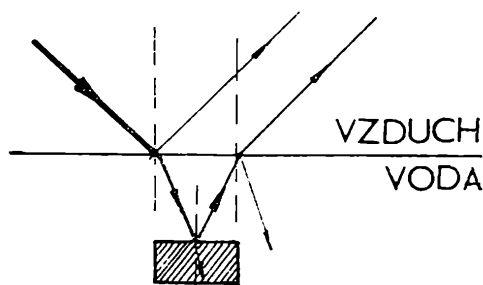
Odpovědi na úlohy zadané v článku

“Tul’činského sbírka kvalitativních úloh z fyziky”

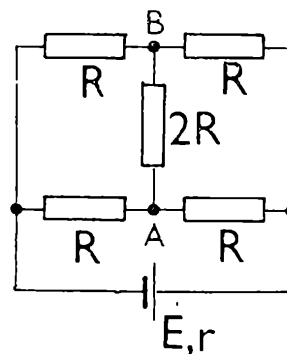
1. Při rotačním pohybu láhve se vytvoří podél její osy v kapalině kanálek, kterým prochází vzduch na místo kapaliny vytékající z láhve.

Poznámka: Toto proudění je rychlejší, nedochází při něm k protichůdnému neuspořádanému proudění vzduchu a kapaliny jako při vylévání bez rotace.

2. Rozžhavená plotna vede k prudkému zahřátí povrchu kapky. Vzhledem k poměrně malé tepelné vodivosti kapaliny se odpaří pouze kapalina z povrchu. Vzniklá pára izoluje kapku od plotny, vytváří „izolační polštářek“, na kterém kapka sedí a který brání dalšímu rychlému odpaření celé kapky. Porušení této izolace vede k prudkému odpaření další malé části kapaliny a tyto nárazy „parního pohonu“ vedou k tomu, že kapka na plotně poskakuje a po parním polštářku po plotně jezdí.
3. Při dešti je relativní vlhkost vzduchu blízká nebo rovna 100 %. Kapky vody, které ulpěly na kůži člověka, se nevypařují, není tedy ani odebráno z kůže skupenské teplo výparné, které za podmínek nižší relativní vlhkosti pocit chladu při vystoupení z vody způsobuje. (To platí i v případě, kdy nejde o teplý letní déšť. V případě chladného počasí je však pocit chladu způsobován samotnou nízkou teplotou ovzduší.)
4. Nabité částice barvy se nerozstříkují neuspořádaně na všechny strany, ale pod vlivem elektrického silového působení jsou usměrňovány na barvený předmět. To je ekonomické z těch důvodů, že nedochází ke ztrátám barvy. Současně pak není vzduch prosycený rozptýlenou barvou pracovníkem dýchán.
5. V prvním případě je práce nulová (potenciály bodů *A* a *B* jsou stejné). V druhém případě jsou vykonané práce stejné (jde o přemístění náboje mezi místy se stejným rozdílem potenciálů).
6. Odpor žárovky pro kapesní baterku je malý, několik ohmů. Odpor celé girlandy je roven několika stovkám ohmů. Odpor prstu je několik tisíc ohmů. Pokles napětí na jednotlivých úsecích je při sériovém zapojení úměrný odporům úseků. Proto když zasuneme prst do objímky, bude na prst připadat prakticky celé napětí obvodu. Objímka žárovky bude představovat vlastně zdroj elektromotorického napětí s vnitřním odporem několik set ohmů. To znamená, že je-li použito celkové napětí 220 V, bude napětí na objímce žárovky zhruba 200—220 V, což je životu nebezpečné (proud větší než 20 mA je smrtelně nebezpečný).



Obr. 1



Obr. 2

7. Na rozhraní prostředí vzduch — voda (voda — vzduch) se paprsky světla částečně odrážejí a částečně lámou (viz obr. 1). Následkem toho je intenzita odraženého paprsku (tedy i jas předmětu) menší než v případě, je-li předmět pouze na vzduchu.
8. Pro vyřešení úlohy je vhodnější upravené schéma na obr. 2. Ze symetrie zapojení je zřejmé, že potenciály v bodech *A* a *B* jsou stejné. Z toho vyplývá, že proud odporem $2R$ je nulový.
9. V měděném vlákně.
10. Odpor studeného vlákna žárovky je menší než odpor rozžhaveného vlákna. Proto bude výkon na vlákně žárovky (i proud žárovkou) největší při zapnutí.

Poznámka : K přepálení žárovky však dochází zpravidla až po delším užívání, kdy je vlákno žárovky v důsledku odpařování kovu tenké.

11. a) Zdroje jsou zapojeny paralelně, ampérmetrem proud teče.
 b) Zdroje jsou zapojeny v sérii proti sobě, proud ampérmetrem neteče;
 c) Zapojení je ekvivalentní zapojení a). Proud je stejný jako v případě a).
 d) Zapojení je ekvivalentní c) a tedy i a). Proud tekoucí ampérmetrem je tedy stejný jako v případech a) a c).
 e) Zdroje jsou v sérii proti sobě, zapojení je ekvivalentní zapojení b), proud ampérmetrem neteče.
12. Při zapnutí spotřebiče s malým odporem (výkonný spotřebič jako např. žehlička nebo vařič) jde o velký odběr proudu ze sítě. Při tomto odběru dochází k úbytku napětí na vnitřním odporu zdroje střídavého proudu a na odporu přívodních vodičů. Tento úbytek se projeví i na napětí ve světelném rozvodu, což má za následek pokles intenzity světla žárovek. Časem se zásluhou zahřívání odporové spirály spotřebiče odpor spotřebiče zvětšuje, úbytek síťového napětí se zmenšuje, což způsobuje částečné zvýšení intenzity světla žárovek.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

9. Nechť n je celé číslo větší než 2. Rozhodněte, zda existuje n navzájem různých celých kladných čísel s touto vlastností: každé z těchto čísel beze zbytku dělí součet všech zbývajících $n-1$ čísel.

Jiří Sedláček

(Došlo 11 řešení)

Řešení Petra Tichavského, 4. C G M. Koperníka, Bílovec :

Takových n čísel vždy existuje. Stačí zvolit např. konečnou posloupnost o n členech

$$1, 2, 3, 6, 12, 24, \dots, 3 \cdot 2^{n-3}$$

(od třetího členu je každý následující dvojnásobkem předcházejícího). Součet těchto čísel je $3 \cdot 2^{n-2}$, což je číslo beze zbytku dělitelné každým číslem ze sestrojené množiny. Z toho už plyne výše uvedené tvrzení, užijeme-li věty: Číslo x je dělitelné číslem y právě tehdy, je-li $x + y$ dělitelné číslem y .

10. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, jestliže jsou dány úsečky, které jsou shodné s jeho těžnicemi příslušnými k odvěsnám.

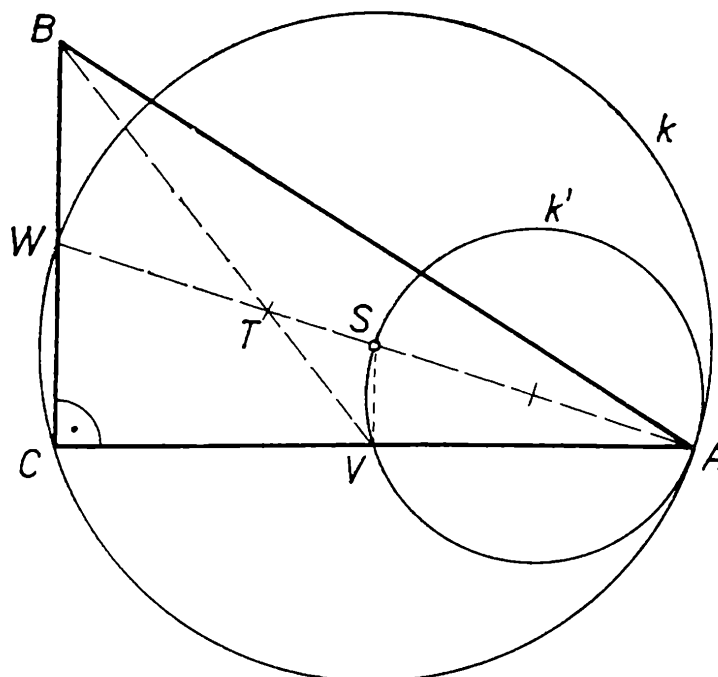
Ota Setzer

(Došlo 24 řešení)

Upravené řešení Petra Eislera, 4. C G Havlíčkův Brod :

Nechť pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB má středy odvěsen AC, BC v bodech V, W (obr. 1). Potom jeho vrchol C je bodem Thaletovy kružnice k sestrojené nad průměrem AW ; střed této kružnice budiž bod S . Kružnice k' sestrojená nad průměrem AS je stejnolehá ke kružnici k podle středu A v poměru $|AS| : |AW| = 1 : 2$; proto střed V odvěsny AC je bodem této kružnice k' . Z tohoto rozboru plyne tato konstrukce pravoúhlého trojúhelníku ABC , jehož těžnice AW, BV jsou shodné s danými úsečkami t_1, t_2 :

Zvolíme úsečku AW shodnou s úsečkou t_1 (obr. 2) a na ní sestrojíme bod T tak, aby bylo $|AT| = 2 \cdot |WT|$. Sestrojíme kružnici k mající průměr AW ; její střed budiž bod S . Potom sestrojíme kružnici k' opsanou nad úsečkou AS jako průměrem a kružnici v opsanou kolem bodu T poloměrem d rovným třetině dané úsečky t_2 . Je-li $V \neq S$ společný bod kružnic k', v a C společný bod kružnice k a polopřímky AV , pak je to



Obr. 1

vrchol hledaného trojúhelníku ABC s přeponou AB ; přitom bod B je průsečíkem polopřímky CW s přímkou TV .

Zbývá dokázat, že takto sestrojený trojúhelník ABC splňuje dané podmínky. Podle Thaletovy věty je úhel ACB pravý. Ze stejnolehlosti kružnic k, k' podle bodu A v poměru $|AS| : |AW| = 1 : 2$ plyne, že je $|AV| : |AC| = 1 : 2$. Bod V je tedy středem úsečky AC a úsečka BV je těžnicí trojúhelníku ABC ; zároveň je $CW \parallel VS$,

$$|CW| = 2 |VS|. \quad (1)$$

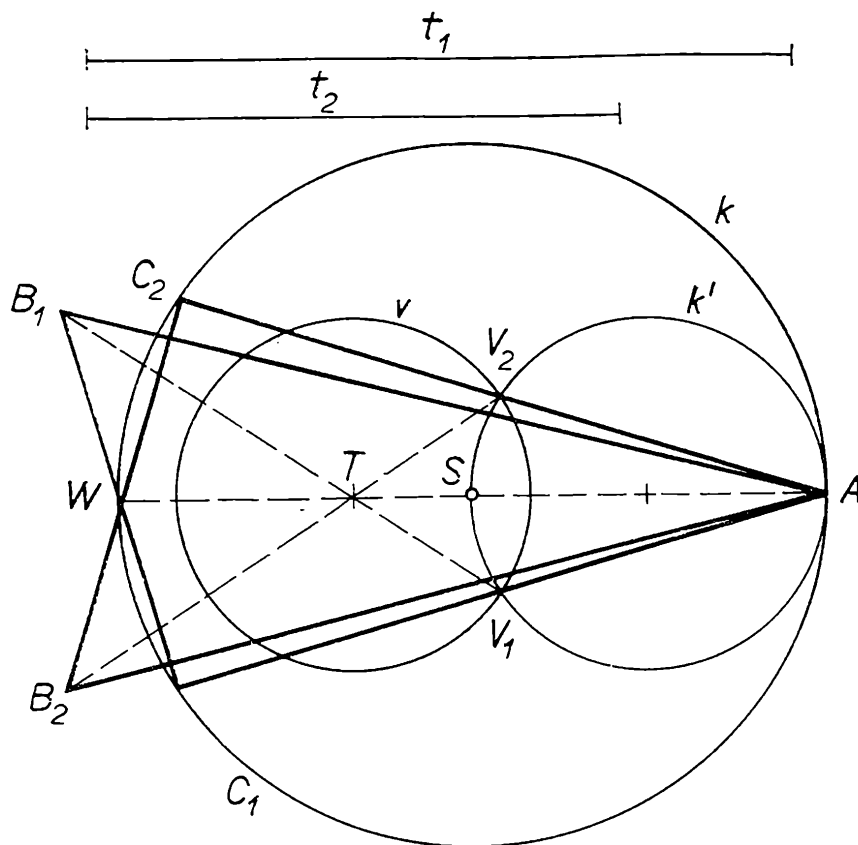
Stejnolehlost se středem T , která převádí bod S do bodu W , převádí bod V do bodu B . Protože je $|TS| : |TW| = 1 : 2$, je též $|VS| : |BW| = 1 : 2$, takže je

$$|BW| = 2 |VS|. \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne, že bod W je středem úsečky BC , takže úsečka AW je těžnicí trojúhelníku ABC . Průsečík T těžnic BV, AW je tedy těžištěm trojúhelníku ABC , takže $|BT| = 2 |TV|$. Protože TV je rovno třetině dané úsečky t_2 , je těžnice BV shodná s úsečkou t_2 .

Pravoúhlý trojúhelník ABC lze sestavit právě tehdy, jestliže kružnice k', v mají dva různé společné body. Ze známé podmínky pro takovou polohu těchto kružnic zjistíme, že to nastane právě tehdy, jestliže bude $|t_2| > \frac{|t_1|}{2}$. Potom má úloha právě dvě řešení (obr. 2).

11. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1; K, L buďtež po řadě vnitřními body jeho stran AB, BC . Určete množinu všech průsečíků úhlopříček všech čtyřúhelníků $KLMN$, jejichž vrcholy M, N jsou po řadě



Obr. 2

vnitřními body stran CD , AD a které mají tu vlastnost, že obsah každého z nich je $\frac{1}{2}$.

Jaroslav Švrček

(Došlo 11 řešení)

Řešení Petra Eislera, 4. C G Havlíčkův Brod:

Budiž $KLMN$ libovolný čtyřúhelník splňující požadované podmínky (obr. 3). Při označení podle obr. 3 jsou obsahy pravoúhlých trojúhelníků KBL , LCM , MDN , NAK rovny po řadě číslům

$$\frac{1}{2}pq, \frac{1}{2}(1-q)r, \frac{1}{2}(1-r)(1-s), \frac{1}{2}s(1-p);$$

jejich součet je roven

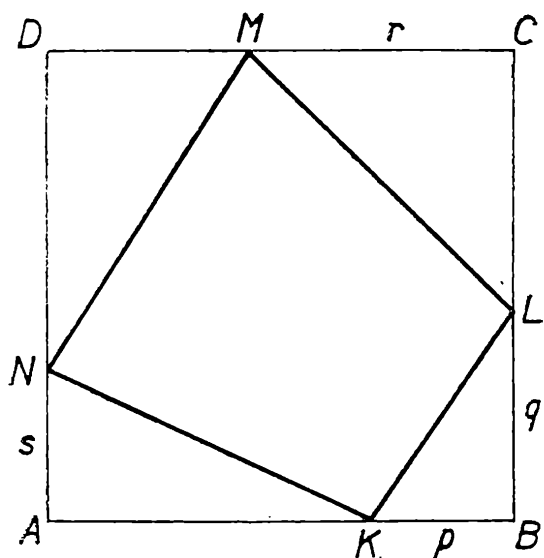
$$\frac{1}{2}(pq + r - rq + 1 - r - s + rs + s - ps).$$

Z toho podle dané podmínky plyne, že je tento výraz roven $\frac{1}{2}$; je tedy

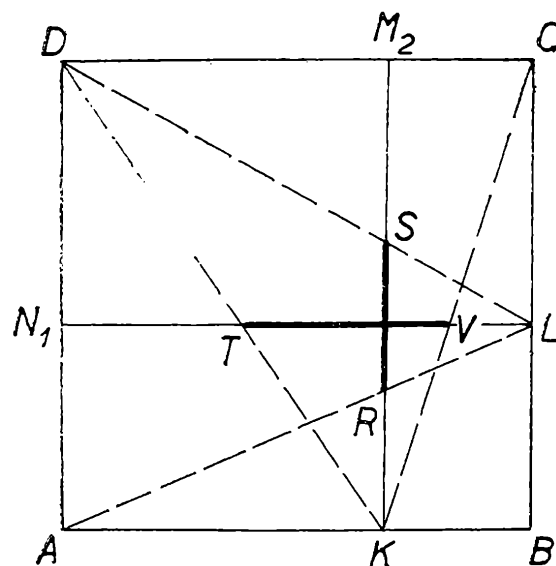
$$p(q-s) - r(q-s) = 0,$$

$$(q-s)(p-r) = 0.$$

To nastane právě tehdy, je-li $q = s$ nebo $r = p$.



br. 3



Obr. 4

a) Je-li $q = s$, je $LN \parallel AB$; dostáváme tak čtyřúhelník KLM_1N_1 , jehož úhlopříčka LN_1 je rovnoběžná s přímkou AB . Bod M_1 může být libovolným vnitřním bodem úsečky CD . Protože body K, L jsou dány, je průsečíkem úhlopříček LN_1, KM_1 libovolný vnitřní bod úsečky TV , jejíž krajní body T, V jsou průsečíky přímky LN_1 s přímkami KC, KD . Hledanou množinou bodů je tedy úsečka TV (ležící na přímce LN_1) bez krajních bodů T, V (obr. 4).

b) Je-li $p = r$; je $KM \parallel BC$; dostáváme tak čtyřúhelník KLM_2N_2 , jehož úhlopříčka KM_2 je rovnoběžná s přímkou BC . Bod N_2 může být libovolným vnitřním bodem úsečky AD . Obdobně jako v a) zjistíme, že hledanou množinou bodů je úsečka RS (ležící na přímce KM_1) bez krajních bodů R, S (obr. 4).

Závěr: Množina průsečíků úhlopříček všech čtyřúhelníků $KLMN$ splňujících dané podmínky se skládá z uvedených úseček RS, TV bez krajních bodů R, S, T, V

12. Je dána posloupnost čtverců $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$; dokažte, že průnikem těchto čtverců je bod nebo čtverec.

Jaroslav Zemánek

(Došlo 10 řešení)

Autorovo řešení: Označme c infimum průměrů daných čtverců. Je-li $c = 0$, je průnikem bod. Předpokládejme tedy, že $c > 0$.

Nechť $S_1, S_2, S_3, \dots$ jsou středy daných čtverců a S jejich limitní bod. (Vzhledem k uspořádání dané posloupnosti inkluzí je její průnik stejný jako průnik každé podposloupnosti.) Zvolme přímku p procházející bodem S (např. vodorovnou). Protože bod S náleží do všech čtverců K_i a poněvadž $c > 0$, musí každý čtverec (pro dostatečně velké i) mít aspoň jeden vrchol nad přímkou p . Označme A_i ten vrchol čtverce K_i , který leží nejvýše nad přímkou p (jsou-li dva takové, nechť A_i je

ten více vlevo). Další vrcholy čtverce K_i označíme po řadě B_i, C_i, D_i ve směru hodinových ručiček. Limity těchto posloupností vrcholů budtež po řadě A, B, C, D . Pak $AB = BC = CD = DA, SA = SB = SC = SD$. Každý z bodů A, B, C, D je obsažen v průniku daných čtverců, tedy celý čtverec $ABCD$ rovněž (průnik je konvexní množina). Na druhé straně žádný bod mimo čtverec $ABCD$ nemůže patřit do tohoto průniku, protože pro dostatečně velká i je A_i blízko A atd.

Poznámka. Užité infinitesimální pojmy jsou vyloženy elementárně např. v knížce *M. Fiedler-J. Zemánek, Vybrané úlohy z matematické olympiády, kateg. A + MMO, úloha 113.*

Fyzika

5. Napětí a proud v obvodu střídavého proudu jsou dány pomocí komplexních čísel, a to $U = (110 + 190j)V, I = (1,73 + j)A$, kde j je imaginární jednotka. Určete vztahy pro okamžité hodnoty napětí proudu.

Josef Novák

(Došlo 28 řešení)

Řešení Jana Chrastiny, III. B G Koněvova ul. Brno:

Pro okamžité hodnoty napětí a proudu můžeme psát

$$u = U_M \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \text{ a } i = I_M \cdot \sin(\omega t + \varphi_2), \text{ čili}$$

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi_1) \text{ a } i = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_2),$$

kde φ_1 a φ_2 jsou počáteční fázové úhly, U_M, I_M amplitudy napětí nebo proudu, ω úhlová frekvence a U, I efektivní hodnoty střídavého napětí nebo proudu.

Vypočítáme efektivní hodnoty U a I . Platí

$$U = \sqrt{110^2 + 190^2} \text{ V a } I = \sqrt{1,73^2 + 1^2} \text{ A},$$

a tedy $U \doteq 220 \text{ V}$ a $I \doteq 2 \text{ A}$. Dále vypočítáme fázové úhly φ_1 a φ_2 ; platí

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{190}{110} \text{ čili } \varphi_1 \doteq \frac{\pi}{3} \text{ rad a obdobně } \varphi_2 \doteq \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Pak můžeme psát

$$u = 220 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ V, } i = 2\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ A.}$$

1. Dvě dané roviny ρ, σ s průsečnicí p rozdělují prostor ve čtyři části zvané klíny; ke každému z nich patří příslušná polorovina roviny ρ a příslušná polorovina roviny σ s hraniční přímkou p . Kromě toho je dán bod R . Sestrojte krychli $ABCDEFGH$ tak, aby ležela v jednom z uvedených klínů a aby přitom a) stěna $ABCD$ byla částí roviny ρ , b) hrana EH ležela v rovině σ , c) bod R byl bodem přímky, která prochází středy stěn $ABCD, EFGH$.

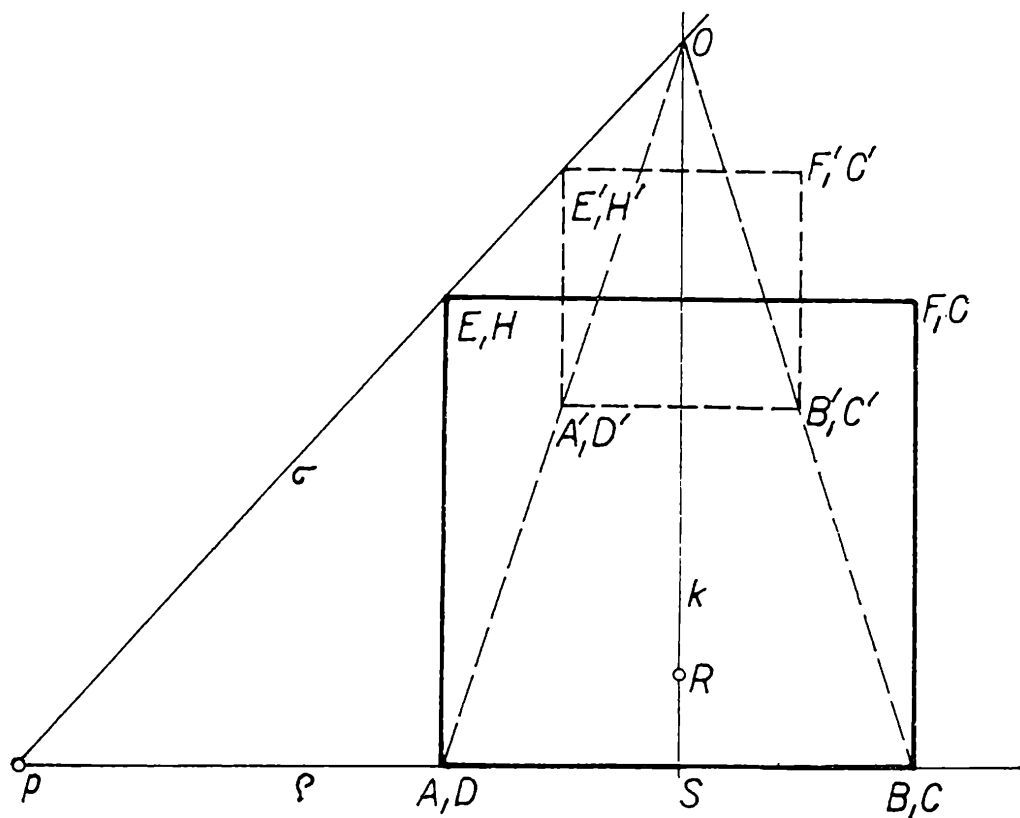
Stanislav Horák

(Došlo 5 řešení.)

Upravené řešení Jiřího Erharta, 3. C G M. Koperníka, Bílovec :

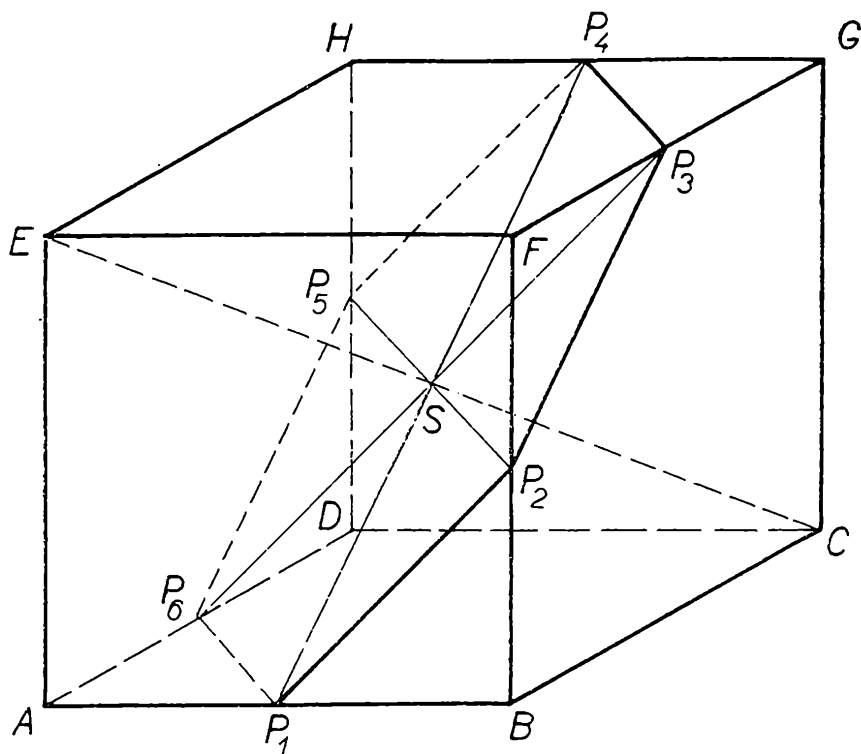
Jsou-li roviny ρ, σ vzájemně kolmé, je úloha triviální; nechť tedy roviny ρ, σ nejsou vzájemně kolmé. Tento případ je znázorněn na obr. 1, který představuje řez rovinou α procházející daným bodem R kolmo k průsečnici p rovin ρ, σ . Přímka $k \perp \rho$ proložená bodem R protíná rovinu ρ v bodu S , který je středem stěny $ABCD$ hledané krychle.

Obr. 1



Protože hrany AD, EH krychle ležící v rovinách ρ, σ jsou rovnoběžné, je nutně $AD \parallel EH \parallel p$. Potom každá krychle $A'B'C'D'E'F'G'H'$, která je stejnohlá k dané krychli podle středu stejnohllosti $O = k \cap \sigma$, má hranu $E'H' \parallel EH \parallel p$. Z toho plyne tato konstrukce:

Sestrojíme krychli $A'B'C'D'E'F'G'H'$ tak, aby její hrana $E'H'$ ležela v rovině σ a byla rovnoběžná s přímkou p a tak, aby přímka k procházela středy stěn $A'B'C'D', E'F'G'H'$ (na obr. 1 je sestaven pravoúhlý průmět



Obr. 2

této krychle na rovinu α). Potom sestrojíme průsečík A roviny ϱ s přímkou OA' ; středem $S = k \cap \varrho$ a bodem A je určena stěna $ABCD$ krychle ležící v rovině ϱ ; tím je hledaná krychle určena. Neleží-li bod S na přímce p , má úloha (ve zvoleném klínu) jedno řešení; leží-li bod S na přímce p , nemá úloha řešení.

2. Je dána krychle $ABCDEFGH$; přitom je $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$. Řešte tyto úlohy:

- ve volném rovnoběžném promítání zobrazte řez krychle s rovinou, která prochází středem S krychle kolmo k její tělesové úhlopříčce;
- dokažte, že tento řez je pravidelný šestiúhelník $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$;
- udejte konstrukci krychle, jestliže je dán tento řez $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$.

Emil Kraemer

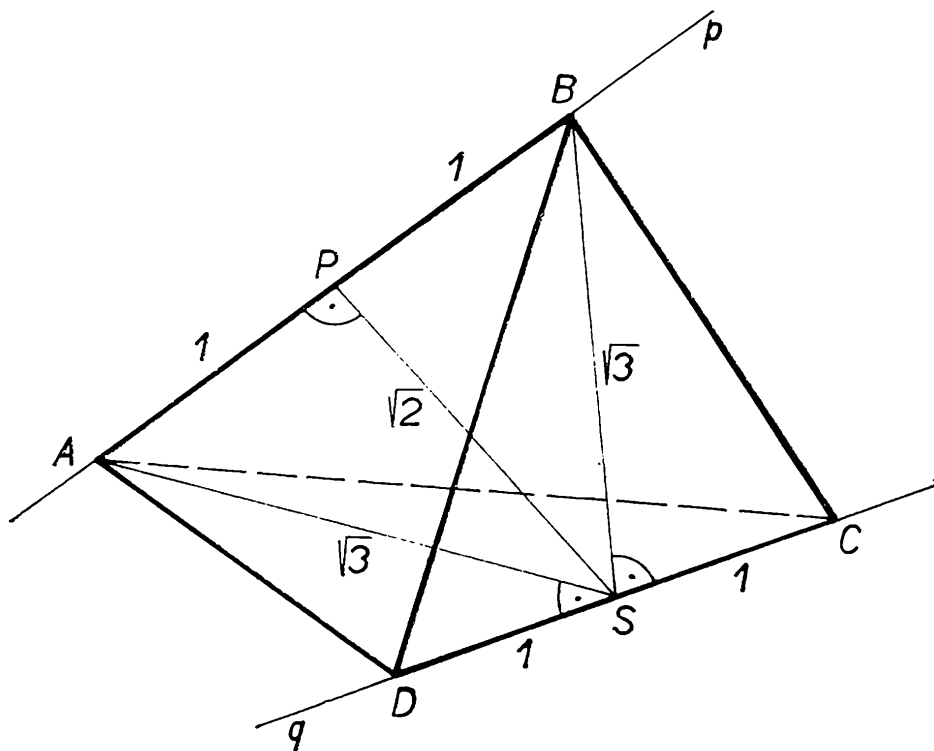
(Došlo 6 řešení)

Správné, avšak složité řešení podal Jiří Erhart, III. C G M. Koperníka, Bílovec. Proto otiskujeme autorovo řešení:

a) Každá přímka, která prochází bodem S kolmo k tělesové úhlopříčce CE krychle (obr. 2), leží v rovině $\varrho \perp CE$ procházející bodem S . Jednou z těchto přímek je přímka, která spojuje střed P_1 hrany AB se středem P_4 hrany GH krychle; obrazec EP_1CP_4 je totiž kosočtverec s úhlopříčkami CE , P_1P_4 , takže je $CE \perp P_1P_4$. Obdobně přímka spojující středy P_2 , P_5 hran BF , DH je kolmá k úhlopříčce CE a totéž platí pro přímku, která spojuje středy P_3 , P_6 hran FG , AD . Body P_1 až P_6 tedy leží v rovině $\varrho \perp CE$ procházející středem S krychle. Přímkami P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 , P_4P_5 , P_5P_6 , P_6P_1 jsou průsečnice roviny ϱ s rovinami stěn krychle; šestiúhelník $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ je tedy řezem roviny ϱ s krychlí.

b) Šestiúhelník $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ je středově souměrný podle středu S . Každý jeho vrchol má od bodu S vzdálenost rovnou velikosti stěnové úhlopříčky krychle; to je také velikost každé jeho strany. Je to tedy pravidelný šestiúhelník.

c) Nechť je v rovině ρ dán pravidelný šestiúhelník $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ jakožto řez krychle s rovinou ρ kolmou k její tělesové úhlopříčce; přitom střed S šestiúhelníku je zároveň středem krychle. Podle b) je stěnová úhlopříčka krychle shodná s úhlopříčkou daného šestiúhelníku procházející středem S . Lze tedy snadno sestavit úsečku shodnou s hranou hledané krychle a potom úsečku shodnou s její tělesovou úhlopříčkou. Potom vedeme bodem S přímku $k \perp \rho$ a na ní sestavíme body C, E tak, aby každá z úseček SC, SE byla shodná s polovinou tělesové úhlopříčky krychle. Tři stěny krychle leží potom v rovinách $CP_6P_1, CP_2P_3, CP_4P_5$; další tři leží v rovinách $EP_4P_3, EP_5P_6, EP_1P_2$. Čtenář si snadno dokáže, že takto sestavené těleso je skutečně krychle prořátá danou rovinou ρ v daném pravidelném šestiúhelníku. Za roviny stěn krychle lze volit také roviny $CP_1P_2, CP_3P_4, CP_5P_6$. Úloha má tedy dvě řešení.



Obr. 3

3. Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Řešte tyto úlohy:

- dokažte, že každé dvě hrany tohoto čtyřstěnu ležící na mimoběžných přímkách jsou prostorově kolmé.
- sestrojte pravidelný čtyřstěn $ABCD$, jestliže je dána přímka p , jejíž částí je hrana AB , a je-li dán střed S hrany CD .

Emil Kraemer

(Došlo 6 řešení)

Úpravené řešení Mártý Csepy, 3H SPŠS maď., Komárno:

a) Úsečky AS , BS jsou výškami rovnostranných trojúhelníků ACD , BCD (obr. 3); proto jsou přímky AS , BS kolmé k přímce CD . Přímka CD je kolmá ke dvěma různoběžkám roviny ABS , a proto je k této rovině kolmá; z toho plyne, že je kolmá i k přímce AB , která v této rovině leží.

b) Je-li P střed hrany AB , pak úsečka SP je výškou rovnoramenného trojúhelníka ABS se základnou AB . Má-li každá hrana čtyřstěnu $ABCD$ velikost 2, mají výšky AS , BS rovnostranných trojúhelníků ACD , BCD velikost $\sqrt{3}$; podle Pythagorovy věty užití na pravoúhlý trojúhelník SPA je potom $|SP| = \sqrt{2}$. Z toho a z a) plyne tato konstrukce:

Bodem S vedeme přímku q kolmou k rovině určené bodem S a přímkou p ; částí této přímky je hrana CD čtyřstěnu. V rovině Sp vedeme bodem S kolmici k přímce p ; její patu označíme P . Položíme-li $|SP| = \sqrt{2}$, pak každá odvěsna pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s přeponou shodnou s úsečkou SP má velikost 1. Na přímce p sestrojíme body A , B tak, aby bylo $|PA| = |PB| = 1$ a na přímce q sestrojíme body C , D tak, aby bylo $|SC| = |SD| = 1$. Potom $ABCD$ je hledaný čtyřstěn.

Z pravoúhlých trojúhelníků SPA , SPB s přeponami SA , SB totiž plyne, že je $|SA| = |SB| = \sqrt{3}$ a z pravoúhlých trojúhelníků ASD , BSD s přeponami AD , BD plyne, že je $|AD| = |BD| = 2$. Obdobně je $|BC| = 2$.

Úloha má jedno řešení.

Z NOVÝCH KNIH

Pittich, ě. - Kalmančok, D.:

OBLOHA NA DLANI

Vydalo Vydavateľstvo Obzor, n. p., Bratislava, v roku 1981, v edícii Obrázky z prírody, 392 strán, bohatá farebná a čiernobiela grafická úprava, viaz. Kčs 72,—

Medzi knižky, ktoré veľmi pútavo usporadúvajú základné vedo-

mosti o ďalekom i blízkom vo vesmíre, patrí publikácia Obloha na dlani. V prvej časti približuje základné poznatky o astronomických súradniciach, meraní času, pohybe telies po oblohe a pozorovaní oblohy. Druhá časť je venovaná slnečnej sústave, planétam, Slnku, medziplanetárnej hmote. Svet hviezd a galaxií sa otvára na ďalších päťdesiatich stránkach

knížky. Druhá polovicu knihy tvorí podrobný prehľad súhvezdí spolu s historickými exkurziami za pôvodom ich často mytologických názvov a súčasne významom pri orientácii vo vesmíre. Základné hviezdy každého súhvezdia sú pomenované, uvedené sú ich vzdialenosti, veľkosti, spektrálne triedy a ďalšie zaujímavosti. Užitočnou časťou knihy je tabuľkový záver, v ktorom sú prehľadne uvedené napr. zatmenia Slnka a Mesiaca do roku 2000, prehľadné údaje o planétach a ich mesiacoch, hlavné meteorické roje, hviezdne spektrá aj.

Knížka „Obloha na dlani“ je veľmi pôsobivá, graficky vzorne upravená, nabitá informáciami i vhodnými farebnými ilustráciami, fotografiami. Určite splní predstavu, ktorú vyjadruje jej názov.

Dušan Jedinák

Tibor Šalát: REÁLNÉ ČÍSLA

Vydala ALFA — vydavateľství technické a ekonomické literatury, vydání první, Bratislava 1982, 317 stran, 16 Kčs, knižnice Epsilon.

Knížka shrnuje základní poznatky o reálných číslech. Děje se tak v deseti kapitolách. Na konci každého článku, na něž se kapitoly dělí, čtenář nalezne cvičení, jejichž řešení mu umožní, aby si ověřil, jak probírané látky porozuměl.

Při studiu knihy se především seznámíme se třemi postupy, kterými lze zavést reálná čísla. Jako první je vyložena *Cantorova teorie reálných čísel*, v níž se užívá tzv. fundamentálních neboli cauchyovských posloupností. Další vykládaná teorie reálných čísel je také klasická a pochází od *R. Dedekinda*. K reálným číslům se dochází pomocí tzv. řezů v množině všech kladných racionálních čísel. Jako třetí je uvedena teorie reálných čísel, jež užívá pojmu filtr na množině všech racionálních čísel.

Po výkladu teorií, které umožňují konstrukci množiny všech reálných čísel, se čtenář seznámí se zavedením pojmů odmocnina, mocnina s reálným exponentem a logaritmus. V posledních třech kapitolách se podává hlubší pohled na reálná čísla z hlediska iracionálnosti a transcendentnosti a z hlediska nejčastěji užívaných rozvoje reálných čísel.

Studium knihy předpokládá znalost gymnaziálního učiva matematiky. Pouze na některých místech se potřebují hlubší poznatky z teorie množin a z diferenciálního a integrálního počtu.

Poznámka. Cantorově teorii reálných čísel je též věnována knížka *Reálná čísla*, již napsal *Pavel Vít* a jež vyšla v roce 1980 v pražském Státním pedagogickém nakladatelství.

Jiří Mída

Váhy a vážení

Vážení bylo původně záležitostí obchodní a právní, kde o výsledku jednou rozhodovala vladařská autorita (a nikoli fyzikální metody). Vidíme to na obrázku, který se zachoval na míse z Naukratis ze 6. stol. před n. l. a je nejstarším řeckým obrazem vah. Nápadně vystrojený kníže Arkesilas tam pod baldachýnem rozhoduje „z moci úřední“ o rovnosti vážených hmot.

Vážívalo se nejen zboží, ale i mince, z nichž se běžně odlamovaly kousky kovu, neboť ještě nebyly vynalezeny „drobné“. Nejstarší zachovaný staroegyptský obraz vah znázorňuje dokonce vážení „skutků zemřelých“; pochází asi z r. 2000 před n. l.; naznačuje však, že vážení muselo být úkonem ještě starším a souviselo patrně se samými počátky obchodu. Novodobá fyzika ovšem učinila z vážení exaktní záležitost a stanovila kritéria správnosti, citlivosti a přesnosti vážení. Je zajímavé, že již starověk intuitivně uhodl, že správné jsou jen váhy rovníramenné a že jsou tím citlivější, čím je hmotnost vahadla menší a čím jsou ramena delší.

Avšak i nerovnoramenných pákových vah lze dobře využít. Již kolem r. 1400 před n. l. se objevil v Egyptě anonymně (jako



v Orientě vždy) přezmen čili *mincír*, později hojně používaný Římany. Decimální a můstkové váhy vynalezli štrasburský mechanik Quintenz (1821) a anglický tesař J. Wyatt (1744). Pružinové váhy navrhl J. Leupold (1726) a jejich modifikace A. Siebe (1819) a G. Salter (1838).

Vážením měříme tíhovou hmotnost těles danou gravitačním zákonem; již Archimedes přišel na to, že je při vážení třeba respektovat nadlehčování hmot (zboží i závaží), a to, jak dnes víme, nejen ve vodě, ale i na vzduchu. Je tedy např. 1 kg zlata při vážení na vzduchu těžší než 1 kg železa. Při přesném vážení se dnes dosti napočítáme.

V. Malíšek

Nakladatelství Mladá fronta vydalo**Émile Namer: Příklad Galilei**

Kniha dokumentuje na základě faktů jednu z pozoruhodných událostí v dějinách moderního myšlení a vědy, totiž zápas o uznání nového pojetí vesmíru.

Přeložil a doslov napsal P. Horák. Edice Prameny, 200 stran, brož. 15 Kčs.

Státní pedagogické nakladatelství vydalo:**J. Vyšín, V. Macháček, J. Mída: Vybrané úlohy z matematické olympiády |kategorie Z**

Příručka vyšla v roce 1982 ve druhém vydání, jež vzniklo po důkladném přepracování původního, některé úlohy byly vypuštěny a sbírka byla doplněna nejzajímavějšími úlohami z posledních ročníků MO kategorie Z. Obsahuje celkem 168 řešených úloh ze 3. až 30. ročníku MO. 1. a 2. ročník není zastoupen, neboť v nich ještě nebyla kategorie určená pro žáky základních škol. Řešení úloh jsou podrobně vysvětlena, mnoho z nich je doplněno tabulkami a obrázky. Brož. 14 Kčs.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12. Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1982.

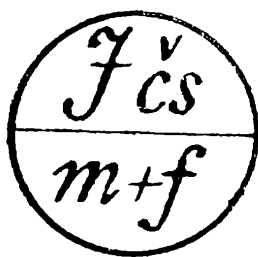
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(6)

**ROČNÍK 61, 1982/83
ÚNOR**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Míša, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný CSc., UK Bratislava,
Stanislav Horák, ČVUT Praha,
doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava,
doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha,
doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Hana Kořínková, CSc., ÚÚVPP Praha,
doc. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Míša, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petrán, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha,
dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra,
ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.

Telefon 29 87 50 (meximěsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

J. Maláč: O Pythagorově větě	229
L. Vaňatová: Jak postupovat při důkazech nerovnosti	230
J. Zavadská: Rodokmeň ako úloha o reáliách	235
J. Kadleček: Geometrické struktury dimenze dvě	240
J. Kúst: Morleyova veta	243
L. Drs: Ovál a izometrie kružnice .	247
K. Hrkota: Výkon zdroja elektromotorického napätia	250
M. Chytilová: Valivý pohyb těles po vodorovné a nakloněné rovině - II	253
R. Hudec: Vesmír v záření gama	262
J. Hrivňák: Jakub Filip Kulík, milovník čísel	264
F. Jáchim: Uplynulo 100 let od objevu tepelné emise elektronů	266
T. Candráková, T. Guraj: Nositel Nobelovej ceny - rodák z Bratislavy	267
S. Horák: Thales jako astronom .	269
Přemýšlíme, řešíme	270
Olympiády a SOČ	271
Z nových knih	272
Pohledy do dějin	. 3. str. obálky
Slovník matematických termínů (13-16)	příloha

0 Pythagorově větě

RNDr. JAROMÍR MALÁČ, Brno

Ve všech starých civilizacích (Egyptě, Babylonii, Indii, Číně) objevili učenci nezávisle na sobě vztahy mezi délkami stran některých pravoúhlých trojúhelníků. V Egyptě byl např. znám pravoúhlý trojúhelník, jehož strany mají délky 3, 4, 5; užíval se pro sestrojení pravého úhlu, např. při vytyčování půdorysů chrámů, pyramid apod. Babyloňané znali kromě toho ještě pravoúhlý trojúhelník, jehož strany mají délky 5, 12, 13. Další pravoúhlé trojúhelníky o stranách, jejichž délky jsou udány přirozenými čísly, objevili Indové. Ve spisu *Pravidla provazce*, který pochází ze sedmého až pátého století před naším letopočtem, uvádějí pět takových trojúhelníků; délky jejich stran jsou (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37).

Zásadní význam však měl teprve objev matematiků pythagorejské školy (Pythagoras žil v letech 480 až 410 př. n. l.). Dokázali, že součet obsahů čtverců sestrojených nad odvěsnami každého pravoúhlého trojúhelníku je rovný obsahu čtverce sestrojeného nad jeho přeponou. Důkaz této věty, který lze provést různými způsoby, najdete v učebnicích školské geometrie. Všimněme si však několika zajímavostí souvisejících s Pythagorovou větou.

Pravoúhlé trojúhelníky, jejichž všechny tři strany mají délky vyjádřené přirozenými čísly, nazýváme *pythagorejské*. Problém nalézt všechny takové pravoúhlé trojúhelníky je ekvivalentní s problémem najít všechna celočíselná kladná řešení rovnice

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Každá trojice přirozených čísel a, b, c , která splňuje rovnici (1), se nazývá *pythagorejskou číselnou trojicí*. Je zřejmé, že z každé takové trojice (a, b, c) můžeme dostat nekonečně mnoho dalších pythagorejských trojic, a to (sa, sb, sc) , kde s je libovolné přirozené číslo. Všechny takové trojice odpovídají vzájemně podobným trojúhelníkům. Jestliže v pythagorejské číselné trojici (a, b, c) nemají čísla a, b, c žádného společného dělitele, většího než jedna, pak tuto trojici nazýváme *primitivní pythagorejskou číselnou trojicí*.

Dá se dokázat, že všechny primitivní pythagorejské číselné trojice (a, b, c) jsou tyto:

$$a = v^2 - u^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2;$$

čísla $u, v > u$ jsou libovolná přirozená čísla, která nemají žádného společného dělitele (kromě 1) a nejsou obě lichá.

Všechny významné poznatky, které se vztahují k problematice pythagorejských trojúhelníků, shrnul vynikající polský matematik *Wacław Sierpiński* v knížce „*Trójkaty pithagorejskie*“ vydané v roce 1954. Kromě dříve známých poznatků obsahuje tato knížka i řadu zajímavých poznatků dalších, které objevil její autor. Uvedme aspoň některé z nich:

1. Pythagorejské trojúhelníky o stejném obvodu: 15, 20, 25; 10, 24, 26.
2. Pythagorejské trojúhelníky o stejném obsahu:
21, 20, 29; 35, 12, 37; $P = 210$
15, 112, 113; 42, 40, 58; 70, 24, 74; $P = 840$
3. Prvých deset pythagorejských trojúhelníků, jejichž dvě strany jsou po sobě jdoucí přirozená čísla:
3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25; 9, 40, 41; 11, 60, 61; 13, 84, 85; 15, 112, 113;
17, 144, 145; 19, 180, 181; 21, 220, 221.
4. Pythagorejské trojúhelníky, jejichž jedna odvěsna a přepona jsou prvočísla, např.
3, 4, 5; 5, 12, 13; 11, 60, 61; 19, 180, 181; 61, 1860, 1861; 71, 2520, 2521;
79, 3120, 3121.

Jak postupovat při důkazech nerovností

Doc. Ing. dr. LADA VAŇATOVÁ, PF České Budějovice

Úlohy typu „Dokažte, že daná nerovnost platí pro všechna reálná čísla (kladná reálná čísla, reálná čísla z množiny M)“ se objevují každoročně v Matematické olympiádě, ale i v dalších soutěžích. Zamysleme se proto nad tím, jak si lze s důkazy některých vět o nerovnostech (stručně: s důkazy nerovností) poradit.

I. *Je užitečné znát některé obecné věty o nerovnostech*; ukážeme si jednu, kterou znáte ze školy, pak doplníme její průhledné varianty:

(0) Pro každé reálné x platí: $x^2 \geq 0$, přičemž $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vhodným dosazením za x a jednoduchými úpravami získáme řadu vět o libovolných dvou reálných číslech a, b [v závorce uvedeme úpravu]:

(1) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ [dosadili jsme $x = a - b$],

(2) $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ [přičetli jsme $a^2 + b^2$],

$$(3) \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{|a + b|}{2} \quad [\text{dělili jsme čtyřmi a odmocnili};]$$

ve všech třech případech platí rovnost jen pro $a = b$.

Pro libovolná dvě *kladná* reálná čísla máme možnost odmocňovat a výsledek odmocnění zapsat bez absolutní hodnoty. Nebude vám vadit, když obrátíme znak nerovnosti?

Pro každá dvě kladná reálná čísla a, b platí:

$$(4) \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad [\text{vynechali jsme znak absolutní hodnoty}]$$

$$(5) 2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad [\text{v (1) jsme dělili součinem } ab],$$

$$(6) 2\sqrt{ab} \leq a + b \quad [\text{do (0) jsme dosadili } x = \sqrt{a} - \sqrt{b}],$$

$$(7) \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \quad [\text{dělili jsme v (6) dvěma}],$$

$$(8) \frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab} \quad [\text{dosadili jsme } x = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ do (0)}];$$

také v těchto pěti případech platí rovnost jen pro $a = b > 0$.

II. Je užitečné znát uspořádání „průměrů“ různého druhu; pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí:

$$(9) \min(a, b) \leq \frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \max(a, b)$$

Mezi menším z čísel a, b a větším z nich jsou zařazeny hodnoty těchto výrazů:

$$\frac{2ab}{a + b} \quad \text{harmonický průměr čísel } a, b,$$

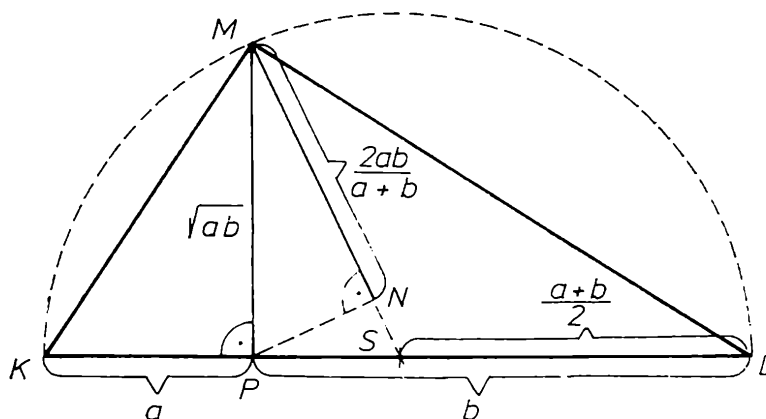
$$\sqrt{ab} \quad \text{geometrický průměr čísel } a, b,$$

$$\frac{a + b}{2} \quad \text{aritmetický průměr čísel } a, b,$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad \text{kvadratický průměr čísel } a, b.$$

Jistě vidíte, že věty (4), (7) a (8) udávají pořadí průměrů podle velikosti; jejich vztah k $\min(a, b)$ a $\max(a, b)$ snadno zdůvodníte, jakmile zvolíte $a \leq b$. Při $a = b$ platí v (9) vesměs rovnosti; při $a < b$ lze (9) znázornit geometricky pomocí pravoúhlých trojúhelníků. Trojúhelník KLM na obr. 1 má přeponu $a + b$, výšku k ní kolmou $\sqrt{ab}$ atd; nerovnosti mezi velikostmi úseček $MN, MP, MS = LS, LP$ jsou výrazně patrné.

Obr. 1



Věta (9) má snadno zapamatovatelnou obdobu pro tři kladná reálná čísla:

$$(10) \min(a, b, c) \leq \frac{3abc}{ab + bc + ca} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} \leq \\ \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \leq \max(a, b, c)$$

To jsou základní vědomosti o nerovnostech pro dvě či tři reálná čísla, které napomáhají ke zvládnutí mnoha dalších.

III. Je užitečné položit si otázky, zda lze těchto základních znalostí využít; ukážeme si tři z nich:

1. Lze danou nerovnici anulovat a jednu stranu upravit na součet nezáporných sčítanců? Pokud ano, máme vyhráno, součet bude též nezáporný.

Příklad 1. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla a, b platí

$$a^2 - ab + b^2 - a + b + 1 > 0.$$

Řešení. Nezáporné sčítance lze vytvořit mocninami dvojčlenů:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, (a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1, (b + 1)^2 = \\ = b^2 + 2b + 1.$$

Sečteme-li je, získáme neostré nerovnice:

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \geq 0, \\ 2(a^2 - ab + b^2 - a + b + 1) \geq 0, \\ a^2 - ab + b^2 - a + b + 1 \geq 0.$$

Rovnost nastává jen když současně platí

$$a = b, a = 1, b = -1.$$

To však není možné; proto platí dokazovaný vztah s *ostrou* nerovností.

2. Připomínají výrazy vystupující v zápisu dané nerovnosti některé

„průměry“ (aritmetický, geometrický, harmonický, kvadratický)? Pokud se nám podaří upravit její strany tak, že na každé se vyskytne jeden z uvedených „průměrů“, odvoláme se jen na větu (9) nebo (10).

Příklad 2. Dokažte, že pro každá tři kladná reálná čísla a, b, c platí:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Řešení. Po dělení třemi získáme na levé straně aritmetický průměr tří kladných čísel; jejich geometrický průměr se rovná 1, což je číslo, které po dělení třemi dostaneme na pravé straně. Podle věty (10) daná nerovnost platí.

3. Zůstávají obě strany nerovnice stejné při cyklické záměně proměnných a, b, c ? Pak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \leq b \leq c$, resp. $a \geq b \geq c$; mnohdy to usnadní úpravy stran nerovnice, zejména těch, které obsahují absolutní hodnoty.

Příklad 3. Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla menší než jedna platí

$$(A) \quad |a - b| \leq \frac{|\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}|}{\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)}}$$

Vyšetřete případy, kdy platí nerovnost.

Řešení. Záměnou písmen a, b neovlivníme hodnoty výrazů na stranách nerovnice, proto můžeme považovat b za menší z čísel a, b . Při úpravách nerovnice uplatníme tento dodatečný předpoklad, tj. $0 < b \leq a < 1$; potom máme:

$$a - b \geq 0, \quad 1 - b \geq 1 - a > 0, \quad \sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)} > 0, \\ |a - b| = a - b, \quad a(1-b) \geq b(1-a) > 0, \quad \sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)} \geq 0.$$

Můžeme odstranit absolutní hodnoty a dostaneme nerovnici:

$$(B) \quad a - b \leq \frac{\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}}{\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)}}$$

Jmenovatel zlomku nabývá jen kladných hodnot, ale čitatel se může rovnat nule.

I. Když $a = b$, pravá i levá strana nerovnice se rovná nule; nerovnice platí.

II. Zbývá podat důkaz pro případ, kdy $a > b$, $a - b > 0$, $\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)} > 0$.

Rozšíříme zlomek a novým jmenovatelem $a - b > 0$ vynásobíme nerovnici

$$a - b \leq \frac{[\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}]^2}{a(1-b) - b(1-a)},$$

$$(a - b)^2 \leq (\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)})^2$$

Další úpravy jsou cílevědomé, i když trochu překvapující:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &\leq a(1-b) + b(1-a) - 2\sqrt{ab(1-a)(1-b)}, \\ 0 &\leq a - a^2 + b - b^2 - 2\sqrt{ab(1-a)(1-b)}, \\ 0 &\leq a(1-a) - 2\sqrt{a(1-a) \cdot b(1-b)} + b(1-b), \\ 0 &\leq (\sqrt{a(1-a)} - \sqrt{b(1-b)})^2 \end{aligned}$$

Tato nerovnice platí pro každá dvě reálná čísla a, b , která splňují podmínku $0 < b < a < 1$; pro tato čísla lze postup obrátit a dokázat platnost dané nerovnice.

Rovnost platí v poslední nerovnici buď v případě, kdy $a = 1 - b$, $b = 1 - a$ nebo $a = b$, $1 - a = 1 - b$; druhá možnost je sice vyloučena v úvaze (II), ale uplatněna v úvaze (I). Dosazením do nerovnice (B) můžeme ověřit, že rovnost platí jak pro $a = b$, tak pro $a + b = 1$.

Kromě nerovnosti (B) jsme dokázali i obecnější nerovnost (A); „chybějící“ případ $a < b$ bychom totiž zvládli zcela obdobným postupem — úvahu II bychom přepsali se zaměněnými písmeny a, b . A to jsme si ušetřili.

Popsané postupy samozřejmě nevyčerpávají všechny možné způsoby důkazů vět o nerovnostech, patří spíše k „základní výbavě“ úspěšných řešitelů. Procvičte se v jejich uplatňování, příště si ukážeme, jak lze využít diskriminanty kvadratických trojčlenů.

Cvičení

1. Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a, b platí:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{8ab} &\leq (a+b)\sqrt{2}, & \text{b) } 8ab &\leq (a+b)\sqrt{a^2+b^2}, \\ \text{c) } \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} &\leq \sqrt{\frac{a+b}{2}} & \text{d) } \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &\leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4} \end{aligned}$$

2. Dokažte, že pro každá tři kladná reálná čísla a, b, c platí:

$$\begin{aligned} \text{a) } 3abc &\leq a^3 + b^3 + c^3 & \text{b) } (a+b+c)^3 &\leq 9(a^3+b^3+c^3), \\ \text{c) } 9abc &\leq (a+b+c)(ab+ & \text{d) } 81abc &\leq (ab+bc+ca) \\ &+ bc + ca) & & \cdot \sqrt[3]{a^3+b^3+c^3} \end{aligned}$$

3. Dokažte, že pro každá tři reálná čísla a, b, c platí:

$$\begin{aligned} \text{a) } a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ca & \text{b) } a^2(a^2 + 1) + b^2(b^2 + 1) &\geq \\ & & \geq 2ab(ab + 1), & \\ \text{c) } 3 + (a^2 + b^2 + c^2) &\geq 2(a + & \text{d) } a^2 + b^2 + c^2 &\geq 2(a + 2b + 3c - \\ &+ b + c) & - 7). & \end{aligned}$$

Kdy platí rovnost?

4. Sestrojte v obr. 1 úsečku, která má velikost kvadratického průměru čísel a, b .

Rodokmeň ako úloha o reláciách

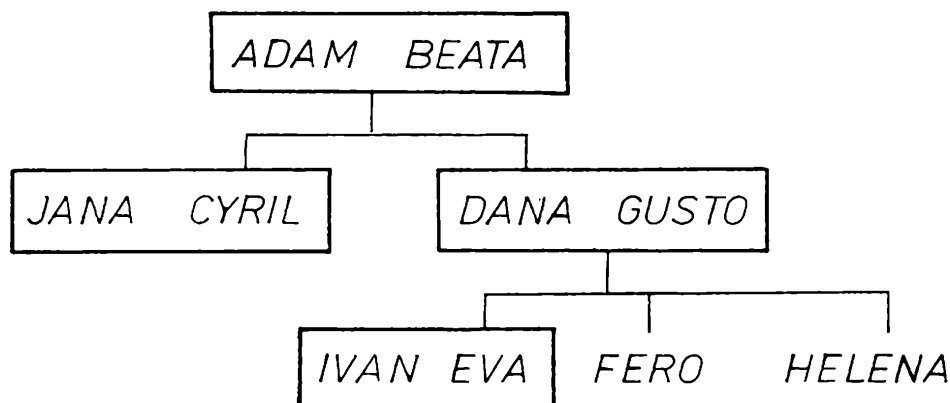
JANA ZÁVADSKÁ, Bratislava

Každý z nás dobre pozná príbuzenské vzťahy medzi ľuďmi. Najprv v rámci svojej vlastnej rodiny poznávame matku, otca, starých rodičov, súrodencov, neskôr tety, strýkov, švagrovcov ap. Tieto nám dobre známe vzťahy sa dajú použiť na „výrobu“ zaujímavých úloh.

Na obr. 1 máme nakreslený graf rodokmeňa, v ktorom na označenie osôb sú použité len krstné mená. Každé meno sa v grafe vyskytne najviac raz. V ďalšom texte budeme jednotlivé mená nahrádzať len ich začiatočnými písmenami.

Rodokmeň na obr. 1 čítame nasledovným spôsobom: A a B sú manželskí partneri, majú 2 deti — C a D. Ich dcéra D je manželkou G a títo majú 3 deti — E, F a H. Syn C manželov A a B je ženatý, jeho manželkou je J, ale toto manželstvo je zatiaľ bezdetné. Vnučka E manželov A a B je vydatá, jej manželom je I a toto manželstvo je tiež zatiaľ bezdetné.

Na grafe rodokmeňa vidíme ešte zložitejšie vzťahy, napr. vzťahy švagrovstva. V bežnom živote sa slová švagrína, švagor nepoužívajú jednoznačne. My tieto pojmy upresníme takto: Švagor je buď manžel sestry alebo brat manželky. Podobne švagrína je manželka brata alebo sestra manžela. Teda na obr. 1 je J švagrínou D, G je švagrom C, ale vzťah medzi J a G nepovažujeme za švagrovský.



Obr. 1

V úlohách, ktoré budeme riešiť, použijeme 9 príbuzenských vzťahov; tabuľka obsahuje ich prehľad a symboly:

matka	<i>m</i>	dieťa	<i>di</i>
otec	<i>o</i>	manž. partner	<i>mž</i>
rodič	<i>r</i>	súrodeneц	<i>sr</i>
dcéra	<i>d</i>	švagr. partner	<i>šg</i>
syn	<i>s</i>	muž	♂
		žena	♀

Spôsob používania symbolov z tabuľky ilustrujeme na príkladoch:

$m(E) = \{D\}$	značí, že matka E je D
$di(A) = \{C, D\}$	značí, že deti A sú C a D, tj. množina Adamových detí je dvojprvková — skladá sa z C a D
$mž(F) = \emptyset$	značí, že F nemá manželku, tj. množina Ferových manželiek je prázdna
$E \in di(G)$	značí, že E je dieta G, tj. E je prvkom množiny Gustových detí

Náš zoznam príbuzenských vzťahov nie je vyčerpávajúci. Existujú slová označujúce príbuzenské vzťahy, ktoré sa v našej tabuľke nevyskytujú, napr. vnuk, ujčína, ... Tieto vzťahy sa dajú zapísať zložením symbolov, tj. opisom daného vzťahu pomocou zavedených symbolov.

Skladanie budeme symbolicky zapisovať znakom „o“. Napr.
 $(oom)(E) = o(m(E)) = \{A\}$ značí, že Adam je otec Evinej matky,
 $(dior)(D) = di(r(D)) = \{C, D\}$ značí, že deti Daniných rodičov sú D a C
V tejto symbolike je možné $sg(X)$ písať v tvare:

$$sg(X) = (mžosr)(X) \cup (sromž)(X),$$

pričom sg môže byť muž-švagor alebo žena-švagriná. Podľa toho potom chápeme aj symboly $mž$ a sr , tj. či ide o manželku alebo manžela, sestru alebo brata. Označenie pohlavia môžeme upresniť symbolmi σ a φ $sg \sigma$ pre „švagor“, alebo $sg \varphi$ pre „švagrinú“. Symboly používame aj pri riešení úlohy, keď nevieme meno niektorej osoby, ale vieme určiť jej pohlavie (obr. 3, 4). Za existujúce považujeme len tie osoby a tie vzťahy, ktoré sú v grafe rodokmeňa naznačené. Napr. na obr. 1 platí: $m(G) = \emptyset$, t. j. Gusto nemá matku, jeho matka neexistuje, hoci v reálnom živote Gusto určite matku má, resp. mal.

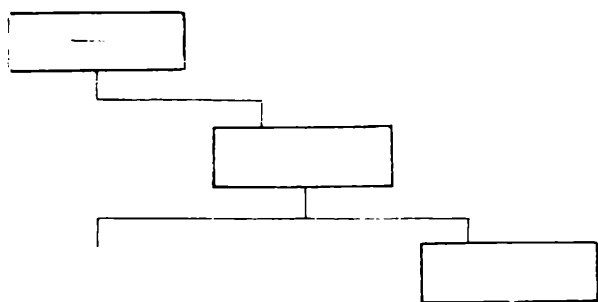
Treba ešte upozorniť, že všetky väzby, ktoré v našich úlohách uvažujeme, sú „čisté“ Neuvažujeme slobodné matky, nevlastné deti, bigamiu ap.

Na príklade sme si vysvetlili formalizáciu rodokmeňových vzťahov a teraz už môžeme pristúpiť k vlastnému riešeniu úloh. Dôležité je si uvedomiť, že každá osoba, ktorá sa v podmienkach zadania úlohy vyskytne, musí mať na zozname osôb rezervované meno.

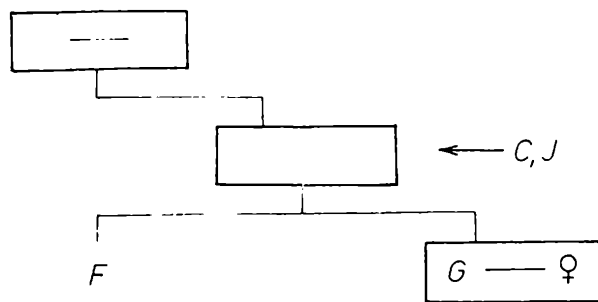
Úloha 1: Vyplňte rodokmeň na obr. 2 pre mená A, B, C, D, E, F, G, J tak, aby boli splnené podmienky:

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1) $s(C) = \{F, G\}$ | 3) $mž(F) = \emptyset$ |
| 2) $s(B) = \{C\}$ | 4) $mž(C) = \{J\}$ |

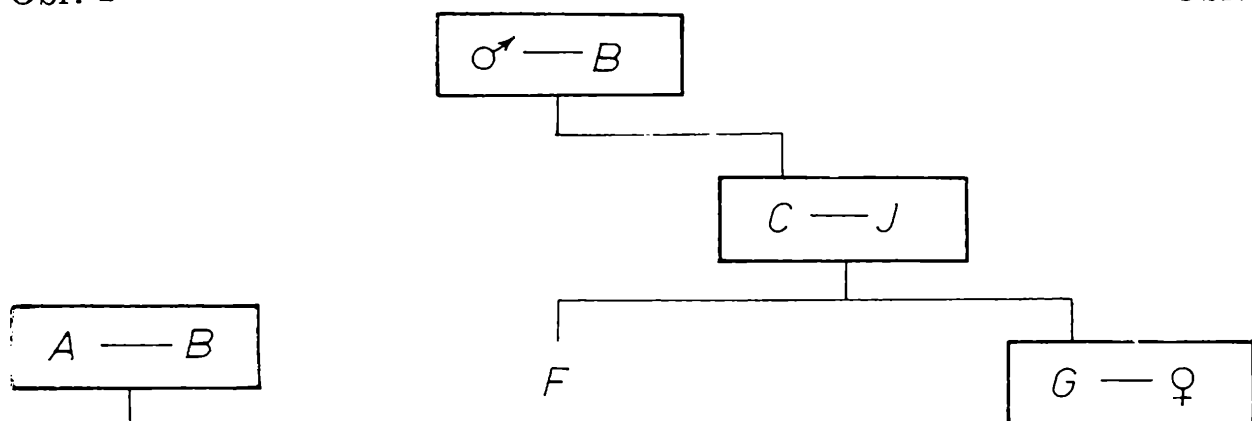
Riešenie: Z podmienky 3) vyplýva, že Fero nemá manželku, čím je jeho miesto dané jednoznačne. Z podmienky 1) a 4) vyplýva, že C a J budú rodičmi F a G, teda budú umiestnení v „prostrednom“ okienku.



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Ďalej vieme, že manželský partner G musí byť žena, teda vieme to, čo ukazuje obr. 3. Z podmienky 2) je jednoznačne určená poloha C . Pokiaľ ide o B , vieme, že bude v „najvyššom“ okienku. Obe možnosti jej umiestnenia sú rovnocenné a môžeme teda písať to, čo vidíme na obr. 4. Použili sme už 5 mien zo zoznamu osôb vyskytujúcich sa v rodokmeni, zostali nám voľné 2 mená — A , D a 2 miesta v grafe. Jednoznačne priradíme muža A na miesto manžela B a ženu D na miesto manželky G . Výsledný graf je na obr. 5.

Ďalšie úlohy už bude riešiť čitateľ samostatne. Svoje výsledky si môže porovnať s našimi, ktoré nájde na str.

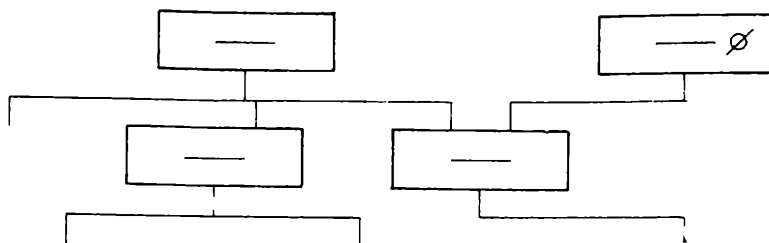
Úloha 2: Vyplňte rodokmeň na obr. 2 menami A , B , C , D , E , G , J tak, aby boli splnené podmienky:

- 1) $di(C) = \{F, G\}$, 2) $s(B) = \{C\}$, 3) $mž(F) = \emptyset$.

Nájdite všetky riešenia úlohy!

Rodokmeňová úloha môže mať viacero riešení, prípadne sa môže stať aj to, že nemá žiadne riešenie. Napr. podmienky

- 1) $o(A) = o(B)$, 2) $(oosr)(B) = \{A\}$



Obr. 6

nemôžu nastať súčasne, teda každý príklad, ktorý je obsahuje, je ne-
riešiteľný bez ohľadu na ďalšie podmienky a osoby.

Ťažšou variantou tohoto typu úloh je samostatné nakreslenie správne-
ho grafu rodokmeňa len na základe daných podmienok a zoznamu mien,
ktoré sa v ňom majú vyskytovať.

Úloha 3: Nakreslite rodokmeň pre mená A, B, C, D, E, F, ak platí:

- 1) $mž(B) = o(E)$, 2) $m(F) = mž(C)$, 3) $mž(F) = \{E\}$.

Náročné sú úlohy, v ktorých sa vyskytujú švagrovské vzťahy. Tieto
robia dosť veľké problémy vzhľadom na značnú variabilitu polôh jed-
notlivých osôb.

Úloha 4: Nakreslite rodokmeň pre mená A, B, C, D, E, F, ak platí:

- 1) $šg(D) = \{E, F\}$, 2) $o(E) = o(F)$, 3) $m(C) = (mžoo)(E)$.

Zrejme nie je ľahké vymyslieť podobné úlohy tohoto typu tak, aby
mali práve jedno riešenie a boli dostatočne náročné. A ani ich riešenie
nie je potom jednoduché a rýchle. Napríklad vyriešenie nasledujúcej
úlohy mi trvalo viac ako 1/4 hodiny.

Úloha 5: Vyplňte graf rodokmeňa na obr. 6 menami A, B, C, D, E, F,
G, H, I, J, K (= Katka) tak, aby boli splnené podmienky:

- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| 1) $(di od) (F) = \{J, D\}$ | 4) $mž(K) = \emptyset$ |
| 2) $šg(C) = \{A, E\}$ | 5) $mž(I) = \{E\}$ |
| 3) $šg(H) = m(G)$ | |

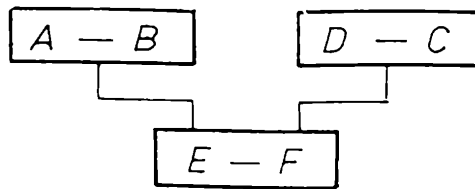
Čo vy na to? Skúste to! Budete rýchlejší?

Upozorňujeme, že toto ešte nie je najťažší príklad, aký sa dá v tejto
oblasti vymyslieť. Existujú náročnejšie, zložitejšie príklady, „zabijáky“,
nad riešením ktorých si musíme dobre polámať hlavu.

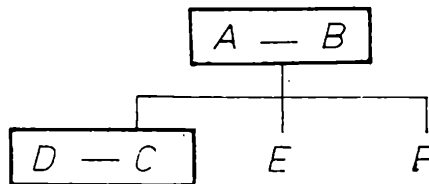
Takýto príklad vymysleli napr. žiaci II. D triedy gymnázia na No-
vohradskej ulici v Bratislave. Tu je:

Úloha 6: Nakreslite rodokmeň pre mená A, B, C, D, E, F, G, H, I, J,
ak platí:

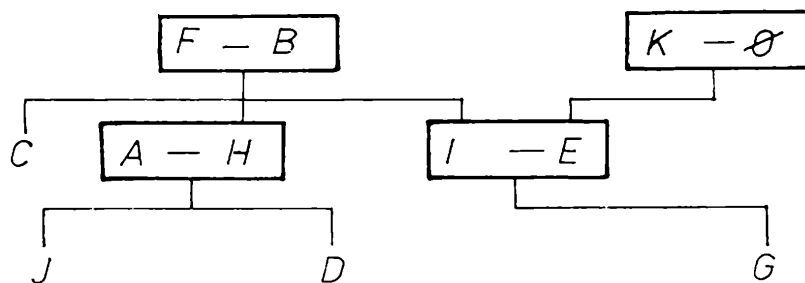
- | | |
|---|--|
| 1) $(šgom) (D) \subset di(A) = di(B)$ | 4) $\{J\} = šg(E) \cap šg(F) \cap šg(C)$ |
| 2) $šg(E) \supset (sromž) (I) \neq \emptyset$ | 5) $mž(G) = \{E\}$ |
| 3) $(sroo) (D) \supset \{C, E\}$ | |



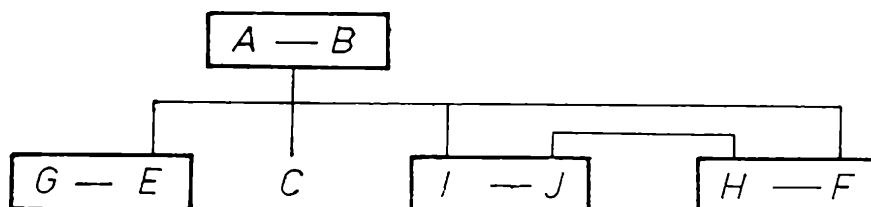
Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

Skúste ho vyriešiť za čo najkratší čas! Dokážte vymyslieť ťažší alebo rovnako náročný príklad?

Riešenie úloh o rodokmeňoch

Úloha 2 je rovnaká ako úloha 1 až na absenciu podmienky 4; pretože D a J nie sú viazané žiadnou podmienkou, môžu si vymeniť svoje miesta. Úloha 2 má teda dve riešenia, jedno je znázornené na obr. 5 v článku.

Úloha 3 má riešenie na obr. 7, úloha 4 na obr. 8, úloha 5 na obr. 9. Úloha 6 má čiastočne riešenie znázornené na obr. 10; chýba D, ktorá môže byť dcerou I alebo F.

Geometrické struktury dimenze dvě

RNDr. JIŘÍ KADLEČEK, CSc., FMF UK Praha

Předkládané téma sice neřeší otázky zásadního významu, ale v matematických třídách na Gymnaziu W Piecka v Praze, kde se objevuje jako součást náplně jednoho z matematických seminářů, způsobí vždy zřetelné „oživení v sále“. Vymýšlení nečekaných příkladů, uplatnění rozpoutané fantazie a vzápětí nutnost co nejpřesnější formulace nápadu, to vše upozorňuje na možnosti a problémy při matematizaci reálných situací. Já děkuji žákům IV D. jmenovaného gymnazia za spolupráci a vy se zkuste pobavit s jednoduchými strukturami.

Nejprve se dohodneme, čemu budeme říkat (rovinná) geometrická struktura.

Geometrickou strukturou G budeme nazývat každou dvojici $G = (B, P)$ kde B je libovolná neprázdná množina, jejíž prvky nazveme body, a P je nějaký systém podmnožin množiny B , které nazveme přímkami.

Body budeme značit velkými, přímky malými písmeny latinské abecedy; vztah $A \in q$ budeme též číst „bod A leží na přímce q “ či „přímka q prochází bodem A “, podobně budeme užívat obvyklých výrazů „průsečík“, „spojnice“, atd.

Ověřte, které z následujících příkladů jsou geometrické struktury:

1. Necht $B = \{1, 2, 3\}$, $P = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.
2. $B = \{A\}$, $P = \emptyset$.
3. $B = \emptyset$, $P = \{q\}$.
4. $B = \{1, 2\}$, $P = \{\{K, 1\}, \{L, 2\}\}$.
5. B je množina všech reálných čísel, P je systém všech podmnožin množiny přirozených čísel.

V dalším textu budeme v příkladech předpokládat, že víme z planimetrie a stereometrie, co je rovina a prostor; tyto známé objekty budeme nazývat euklidovská rovina E_2 a euklidovský prostor E_3 ,

6. B je množina bodů E_2 , P množina všech přímek v E_2 .
7. B je množina všech rovin v E_3 , P množina všech přímek v E_3 .
8. Buď B množina všech prvočísel, P množina všech telefonních čísel.

Geometrickou strukturu jsme mohli definovat také obecněji, jak ukážeme v následující úvaze:

Zobecněnou geometrickou strukturou budeme nazývat každou trojici (M, N, I) , kde M je libovolná neprázdná množina, jejíž prvky nazveme body, N je libovolná množina, jejíž prvky nazveme přímky, a I je relace mezi prvky množiny M a prvky množiny N , kterou nazveme incidence; tedy $I \subset M \times N$.

Jestliže $A \in \mathbf{M}$, $q \in \mathbf{N}$, pak AIq resp. qIA označuje incidenci mezi bodem A a přímkou q .

Zřejmě všechny příklady, které byly geometrickými strukturami podle definice 1., jsou též zobecněnými geometrickými strukturami podle definice 2., jestliže položíme $\mathbf{M} = \mathbf{B}$, $\mathbf{N} = \mathbf{P}$ a pro každý bod R a každou přímku q definujeme $RIq \Leftrightarrow R \in q$.

9. Doplňte 4. příklad: $\mathbf{M} = \{1, 2\}$, $\mathbf{N} = \{\{K, 1\}, \{L, 2\}\}$ a incidence nechť je dána např. takto: $1 I \{L, 2\}$, $2 I \{K, 1\}$. Pak $(\mathbf{M}, \mathbf{N}, I)$ je zobecněná geometrická struktura.
10. Doplňte i v ostatních příkladech, které nejsou geometrickými strukturami podle definice 1, incidenci tak, aby příklad byl zobecněnou geometrickou strukturou podle definice 2! Nalezněte více způsobů doplnění!

Pokud sledujeme pouze otázky incidence, tj. zajímá-li nás jen, jaké body incidují s přímkou, které přímky incidují zároveň s týmž bodem a pod., pak lze každou zobecněnou geometrickou strukturu nahradit geometrickou strukturou z definice 1, která má vzhledem k incidenci tytéž vlastnosti, takto: trojici $(\mathbf{M}, \mathbf{N}, I)$ přiřadíme dvojici $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$, kde $\mathbf{B} = \mathbf{M}$ a nová množina $\mathbf{P}$ přímek obsahuje místo každé přímky $q \in \mathbf{N}$ jako přímku množinu

$$\bar{q} = \{X \in \mathbf{B}; X I q\}.$$

11. Jestliže $\mathbf{M} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{N} = \{a = \{1, 2\}, b = \{1, 2, 4\}, c = \{2, 3, 7\}\}$ a $I = \in$ (tj. bod inciduje s přímkou právě tehdy, je-li prvkem množiny tvořící přímku) nalezněte odpovídající geometrickou strukturu $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ popsanou v předchozím odstavci.

Vraťme se nyní od zobecněné geometrické struktury zpět ke geometrické struktuře z definice 1 a všimněme si vzájemné polohy přímek; úvodem, pro snazší vyjadřování, definujme rovnoběžky. Buď $G = (\mathbf{B}, \mathbf{P})$ geometrická struktura. Dvě přímky $a, b \in \mathbf{P}$ nazveme rovnoběžkami (označíme $a \parallel b$) právě tehdy, když buď $a \cap b = \emptyset$, nebo $a \subset b$, nebo $b \subset a$.

Přímky a, b které nejsou rovnoběžkami, nazveme různoběžkami (označíme $a \nparallel b$).

12. Nalezněte všechny dvojice rovnoběžek v geometrické struktuře, kde $\mathbf{B} = \{X, Y, Z, V, W\}$, $\mathbf{P} = \{a = \{X, Y, Z\}, b = \{X, Y\}, c = \{X, Y, W\}, d = \{V, W\}\}$.

Zřejmě v příkladě 1. se každé dvě různé přímky protnou v právě jednom bodě, kdežto v příkladě 5. naleznete přímky, které nemají společný bod stejně snadno, jako přímky, které se protnou v právě v bodech pro libovolné přirozené číslo k . Ověřte!

13. Je-li $\mathbf{B}$ množina bodů E_3 , $\mathbf{P}$ množina všech přímek v E_3 (kde přímka

je množina bodů), pak rozhodněte, kolik lze k dané přímce q vést pevně zvoleným bodem $K \notin q$ rovnoběžek!

14. Nalezněte příklad geometrické struktury, ve které platí, že každé dvě různé přímky se protnou v právě dvou bodech.
15. Ukažte příklad geometrické struktury, ve které některá přímka obsahuje právě jeden bod.
16. Nalezněte příklad geometrické struktury, ve které rovnoběžnost není tranzitivní, tj. ve které existují přímky a, b, c takové, že $a \parallel b, b \parallel c$ ale $a \nparallel c$.
17. A závěrečný úkol pro odvážnější — upravte definici rovnoběžnosti pro případ zobecněné geometrické struktury.

Řešení úloh: 1. Ano. 2. Ano. 3. Ne, B není neprázdná. 4. Ne, přímky nejsou podmnožinami B . 5. Ano, přirozená čísla jsou podmnožinou reálných čísel. 6. Ano, pokud chápeme přímky jako množiny bodů. 7. Takto ne, leda pokud bychom chápali přímku jako množinu všech rovin, které ji obsahují. 8. Ne, moje telefonní číslo není prvočíslo. 10. Příklad 3 nemůže být ani zobecněnou geometrickou strukturou. Výsledek ostatních příkladů závisí na rozběhu vaší fantazie. Příklad 7 lze doplnit např. takto: rovina inciduje s přímkou právě tehdy, když tuto přímku obsahuje. Jiná možnost: rovina inciduje s přímkou právě tehdy, když je k této přímce kolmá. Pro příklad 8 mě napadly tyto možnosti: Je-li A prvočíslo, q telefonní číslo, pak $A \mid q$ právě tehdy, když

- a) A je součástí zápisu q (např. $A = 281$ inciduje s $q = 528143$),
- b) A je ciferný součet q , nebo
- c) A je věk poslední osoby, která vytočila číslo q vloni.

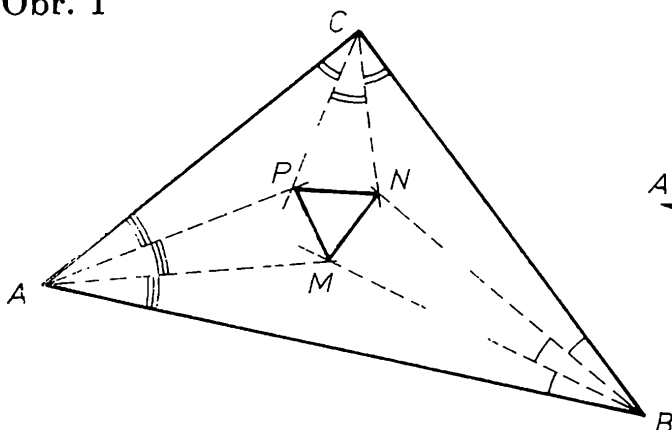
Věřím, že vaše nápady předčily moje. 11. $B = M, \bar{a} = \bar{b} = \{1, 2\}, \bar{c} = \{2, 3\}$, proto $P = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Z hlediska vzájemné polohy bodů a přímek nemá původní rozlišení přímek a, b žádný smysl. 12. $a \parallel b, a \parallel d, b \parallel d, b \parallel c$. 13. Z našeho hlediska moc, neboť přímky v E_3 mimoběžné jsou pro nás podle definice 3 rovnoběžné; proto q je rovnoběžná s každou přímkou procházející bodem K a neležící v rovině (K, q) (a navíc i s rovnoběžkou v E_3). 14. Např. $B = \{1, 2, 3, 4\}, P = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$, ale také, když např. B je množina všech bodů kulové plochy a P množina všech hlavních kružnic. 15. Třeba příklad 2. 16. Přímky a, b, c z příkladu 12, též přímka q a dvě různé přímky bodem K v příkladě 13. 17. V zobecněné geometrické struktuře (M, N, I) nazveme dvě přímky a, b rovnoběžkami právě tehdy, když $\{X \in M; X \mid a\} \cap \{X \in M; X \mid b\} = \emptyset \vee \{X \in M; X \mid a\} \subset \{X \in M; X \mid b\} \vee \{X \in M; X \mid b\} \subset \{X \in M; X \mid a\}$.

Morleyova věta

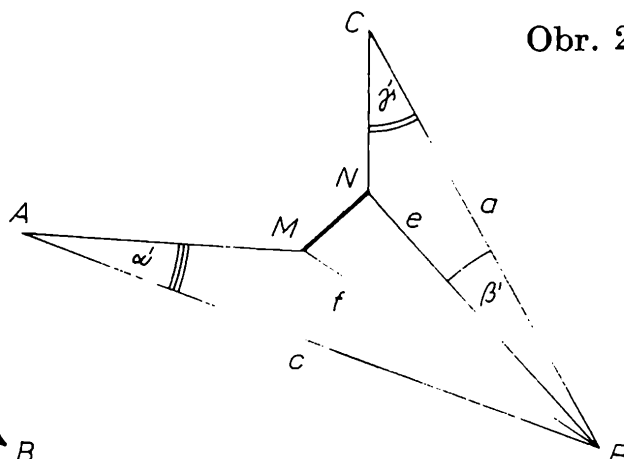
Prof. RNDr. JIŘÍ KŮST, Plzeň

Konstrukce na obr. 1 ukazuje rovnostranný trojúhelník MNP , jehož vrcholy byly sestrojeny pomocí polopřímek, které rozdělují vnitřní úhly trojúhelníku ABC na třetiny. To, že rovnostranný trojúhelník vyjde pro každý trojúhelník ABC , objevil v r. 1899 *F. Morley*; od té doby byly publikovány rozmanité důkazy tak překvapivého zjištění — Morleyovy věty.

Obr. 1



Obr. 2



Ukažme si trigonometrický důkaz, který se opírá o řadu známých i méně známých vět o vztazích mezi hodnotami goniometrických funkcí a velikostmi stran, průměrem $2r$ opsané kružnice apod. Má-li trojúhelník vnitřní úhly α, β, γ platí:

$$\begin{aligned} \text{I } a &= 2r \sin \alpha, & \text{II } \sin^2 \alpha &= \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha, \\ b &= 2r \sin \beta, & \sin^2 \beta &= \sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha - 2 \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta, \\ c &= 2r \sin \gamma, & \sin^2 \gamma &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

(Rovnosti II se získají po dosazení za a, b, c z I do trojího vyjádření kosinové věty a po zkrácení koeficientu $4r^2$ u všech členů.)

Další rovnosti platí pro libovolný úhel φ :

$$\begin{aligned} \text{III } \sin 3\varphi &= 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi, \\ \text{IV } \sin 3\varphi &= 4 \sin \varphi \sin (60^\circ + \varphi) \sin (60^\circ - \varphi). \end{aligned}$$

(Rovnost III se získá z vyjádření $\sin (\varphi + 2\varphi)$ pomocí běžných vzorců; obdobně se dá upravit pravá strana rovnosti IV.)

Hlavním výsledkem našich výpočtů bude vyjádření velikostí úseček MN, NP, PM pomocí údajů $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. K tomu bude směřovat označení velikostí úseček na obr. 2, kde navíc

$$\alpha' = \frac{1}{3}\alpha, \quad \beta' = \frac{1}{3}\beta, \quad \gamma' = \frac{1}{3}\gamma.$$

Nejdříve budeme pracovat s trojúhelníkem BCN , jehož vnitřní úhel BNC má velikost

$$180^\circ - (\beta' + \gamma') = 180^\circ - \frac{1}{3}(\beta + \gamma) = 180^\circ - \frac{1}{3}(180^\circ - \alpha) = \\ = 180^\circ - (60^\circ - \alpha').$$

Sinová věta pro trojúhelník BCN dává podíl

$$\frac{e}{a} = \frac{\sin \gamma'}{\sin [180^\circ - (60^\circ - \alpha')]} = \frac{\sin \gamma'}{\sin(60^\circ - \alpha')}$$

Odtud a z rovností I vyjádříme

$$e = \frac{a \sin \gamma'}{\sin(60^\circ - \alpha')} = \frac{2r \sin \alpha \sin \gamma'}{\sin(60^\circ - \alpha')} = \frac{2r \sin 3\alpha' \sin \gamma'}{\sin(60^\circ - \alpha')};$$

v čitateli posledního zlomku aplikujeme rovnost IV a získáme

$$e = 2r \sin \gamma' \frac{4 \sin \alpha' \sin(60^\circ + \alpha') \sin(60^\circ - \alpha')}{\sin(60^\circ - \alpha')} = \\ = 8r \sin \alpha' \sin \gamma' \sin(60^\circ + \alpha').$$

Krácení je možné, protože platí $0 < \alpha < 180^\circ$, a tedy $0 < \alpha' < 60^\circ$, $\sin(60^\circ - \alpha') \neq 0$.

Obdobným postupem pro trojúhelník ABM (postačí zaměnit e za f ; γ' za α') vypočítáme velikost

$$f = 8r \sin \alpha' \sin \gamma' \sin(60^\circ + \gamma').$$

A nyní uplatníme kosinovou větu v trojúhelníku BMN :

$$|MN|^2 = p^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos \beta',$$

dosadíme za e, f a vytkneme:

$$p^2 = 64r^2 \sin^2 \alpha' \sin^2 \gamma' [\sin^2(60^\circ + \alpha') + \sin^2(60^\circ + \gamma') - 2 \sin(60^\circ + \\ + \alpha') \sin(60^\circ + \gamma') \cos \beta'].$$

Pro velikosti úhlů $60^\circ + \alpha', 60^\circ + \gamma', \beta'$ platí rovnost

$$60^\circ + \alpha' + 60^\circ + \gamma' + \beta' = 120^\circ + (\alpha' + \beta' + \gamma') = 120^\circ + \frac{1}{3}(\alpha + \\ + \beta + \gamma) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ, \text{ proto můžeme použít větu II a celou } \\ \text{závorku nahradit } \sin^2 \beta'; \text{ máme}$$

$$p^2 = 64 r^2 \cdot \sin^2 \alpha' \sin^2 \gamma' \cdot \sin^2 \beta'$$

Protože p, r a všechny tři siny jsou kladná čísla, odmocníme takto:

$$p = 8r \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'$$

Vtip trigonometrického důkazu je v tom, že získaný výraz pro p obsahuje α', β', γ' v „rovnocenném postavení“; cyklickými záměnami se hodnota výrazu nezmění, ačkoliv jimi vyjádříme velikosti úseček NP , PM v obr. 1. Proto platí

$$|MN| = |NP| = |PM|,$$

Morleyův trojúhelník MNP je rovnostranný, věta je dokázána.

Položme si nyní otázku: *Který trojúhelník ze všech vepsaných do kružnice o poloměru r má největší Morleyův trojúhelník?*

Zřejmě jde o stanovení největší hodnoty výrazu $8r \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'$, v případech, kdy $\alpha' + \beta' + \gamma' = 60^\circ$. Lze odhadnout, že řešením bude trojice sobě rovných velikostí α', β', γ' ; důkaz správnosti odhadu můžeme podat takto:

- (a) Zvolme různé dvojice (x, y) reálných čísel z intervalu $(0, \pi)$, které mají konstantní součet $s \in (0, \pi)$. Potom

$$\sin x \cdot \sin y \leq \sin^2 \frac{1}{2}s$$

Důkaz tohoto tvrzení není obtížný, známe-li vzorec

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{1}{2}(x - y) - \cos \frac{1}{2}(x + y) \right]$$

Protože $\cos \frac{1}{2}(x + y) = \cos \frac{1}{2}s$ je konstanta, má výraz na pravé straně největší hodnotu pro tu dvojici (x, y) , kdy $\cos \frac{1}{2}(x - y) = 1$, tj. pro $x - y = 0, x = y = \frac{1}{2}s$.

- (b) Uvažujme o dvojicích $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ kladných reálných čísel, která mají součet $s = x_1 + y_1 = x_2 + y_2, s \in (0, \pi)$. Platí: je-li $|x_1 - y_1| < |x_2 - y_2| < \pi$, pak $\sin x_1 \cdot \sin y_1 > \sin x_2 \cdot \sin y_2$.

Také tuto pomocnou větu odvodíme z rovnosti

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{1}{2}(x - y) - \cos \frac{1}{2}(x + y) \right]$$

a z vlastností kosinu, že $\cos \frac{1}{2}|x_1 - y_1| = \cos \frac{1}{2}(x_1 - y_1)$,

$\cos \frac{1}{2}|x_2 - y_2| = \cos \frac{1}{2}(x_2 - y_2)$. Protože kosinus je klesající funkcí

v intervalu $(0, \pi)$, máme:

$$|x_1 - y_1| < |x_2 - y_2| < \pi \Rightarrow \cos \frac{1}{2}(x_1 - y_1) > \cos \frac{1}{2}(x_2 - y_2),$$

$$\frac{1}{2} \left[\cos \frac{1}{2}(x_1 - y_1) - \cos \frac{1}{2}s \right] > \frac{1}{2} \left[\cos(x_2 - y_2) - \cos \frac{1}{2}s \right],$$

$$\sin x_1 \cdot \sin y_1 > \sin x_2 \cdot \sin y_2.$$

(c) Vezměme libovolnou trojici (x, y, z) kladných reálných čísel, pro která platí $x + y + z = \frac{\pi}{3}$ a z nichž aspoň dvě jsou různá. Považujme x za největší a y za nejmenší z trojice x, y, z ; snadno zdůvodníme, že musí platit

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} < x, y < \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3}, \text{ a tedy } 0 < y < \frac{\pi}{9} < x.$$

V naší úvaze sehraje zásadní roli číslo $k = x + y - \frac{\pi}{9}$; o něm dokážeme,

že $|k - \frac{\pi}{9}| < |x - y|$, a to úpravami:

$$y < \frac{\pi}{9}, \quad \frac{\pi}{9} < x,$$

$$2y < \frac{2\pi}{9}, \quad \frac{2\pi}{9} < 2x,$$

$$x + y - \frac{2\pi}{9} < x - y, \quad \frac{2\pi}{9} - (x + y) < x - y,$$

$$k - \frac{\pi}{9} < x - y, \quad \frac{\pi}{9} - k < x - y.$$

Poslední řádky umožňují zápis $|k - \frac{\pi}{9}| < |x - y|$, přitom $k + \frac{\pi}{9} = x + y$; podle pomocné věty (b) platí

$$\sin k \cdot \sin \frac{\pi}{9} > \sin x \cdot \sin y.$$

Vynásobíme obě strany kladným číslem $\sin z$ a napíšeme

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z < \sin \frac{\pi}{9} (\sin k \cdot \sin z).$$

Máme však $k + z = (x + y - \frac{\pi}{9}) + z = (x + y + z) - \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$, podle pomocné věty (a) platí

$$\sin k \cdot \sin z \leq \sin^2 \frac{\pi}{9}.$$

Celkově tedy dostáváme

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z < \sin^3 \frac{\pi}{9}$$

pro každá tři kladná reálná čísla x, y, z , kde $x + y + z = \frac{\pi}{3}$ a aspoň dvě z nich jsou různá.

Případ, kdy $x = y = z = \frac{\pi}{9}$, tedy všechna tři čísla jsou si rovna, dává

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = \sin^3 \frac{\pi}{9},$$

proto výraz $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ nabývá maximální hodnoty $\sin^3 \frac{\pi}{9}$.

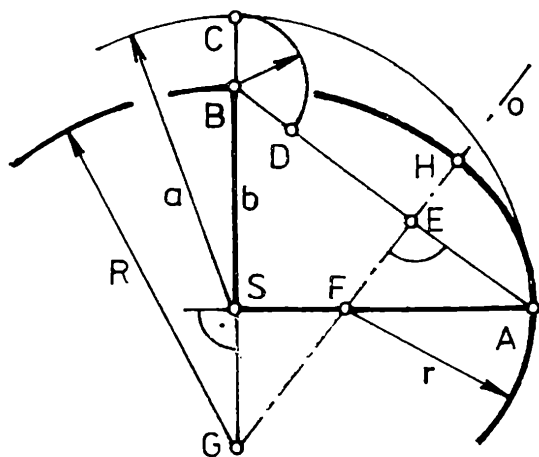
V původní geometrické situaci to potvrzuje odhad, že ze všech trojúhelníků vepsaných do kružnice má rovnostranný trojúhelník největší stranu Morleyova trojúhelníku; její velikost je $8r \cdot \sin^3 20^\circ$.

Ovál a izometrie kružnice

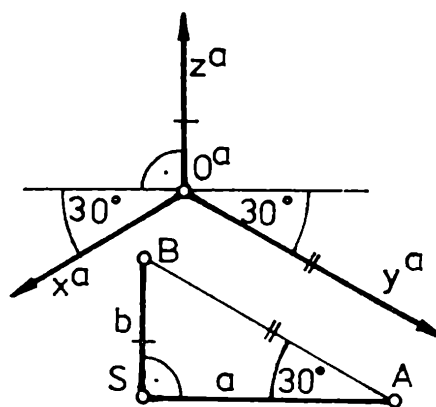
Doc. dr. ing. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT Praha

Rýsování elipsy je poměrně obtížné. Pokud nemáme k dispozici elipsograf, doporučuje se konstrukce oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy. Z vhodných oblouků těchto kružnic a z oblouků křivítka pak narýsujeme elipsu, přesněji řečeno náhradní křivku, která se od elipsy příliš neliší.

Podstatně jednodušší je použít jako náhradní křivku *ovál*, který elipsu nahradí oblouky čtyř kružnic. Konstrukce jednoho z mnoha možných oválů tohoto druhu je na obr. 1. Jsou tu sestrojeny středy F, G dvou z těchto čtyř kružnic. Elipsa je určena poloosami SA, SB , $|SA| = a$, $|SB| = b$, $SA \perp SB$. Na spojnici AB určíme bod D tak, že $|BD| = a - b$. Osa o úsečky AD protne osy elipsy v bodech F, G . Část oválu je na obr. narýsována. Oblouky kružnic ($F, r = |FA|$), ($G, R = |GB|$) se dotýkají v bodě H na přímce o . Další dva středy F', G' zbývajících dvou kružnic oválu jsou na osách SA, SB elipsy souměrně sdruženy s body F, G vzhledem ke středu S a na obr. nejsou narýsovány.



Obr. 1



Obr. 2

Vypočteme poloměry r a R . Označme

$$p = \sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

Z konstrukce vyplývá (je-li E průsečík přímek o a AB)

$$|AE| = (p - a + b)/2 = d.$$

Z podobnosti trojúhelníků SAB , EAF , EGB získáme úměry

$$\begin{aligned} r/d &= p/a \\ R/(p - d) &= p/b. \end{aligned}$$

Dosadíme za d a obdržíme vztahy pro poloměry

$$r = p(p - a + b)/(2a) \quad (1)$$

$$R = p(p + a - b)/(2b). \quad (2)$$

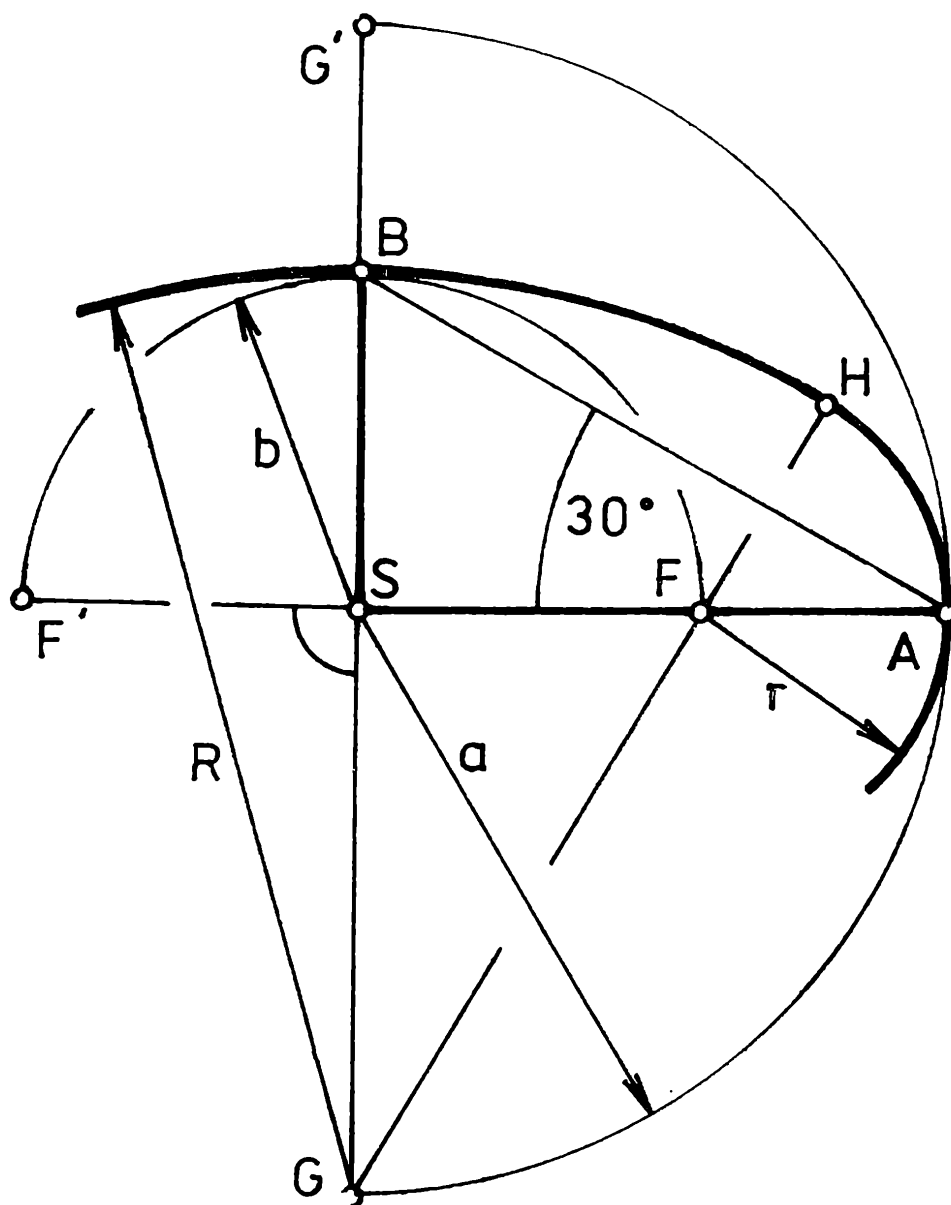
Výrazy (1) a (2) použijeme pro velmi jednoduchou konstrukci oválů, kterým nahradíme izometrický eliptický průmět kružnice, která leží v hlavní rovině, tj. buď v souřadnicové rovině, nebo v rovině s ní rovnoběžné. Kružnice v této poloze se vyskytují nejčastěji, např. jako podstavy válců a kuželů.

Izometrii dáváme přednost před obecně zvolenou kolmou axonometrií, zejména v technické praxi*, neboť mnohé konstrukce se v izometrii zjednoduší, např. zkrácení souřadnic je ve směrech všech tří os stejné.

Na obr. 2 je určen osový kříž izometrie:

$\sphericalangle x^a y^a = \sphericalangle x^a z^a = \sphericalangle y^a z^a = 120^\circ$. Izometrie kružnice ležící např. v souřadnicové rovině xy a mající střed S a poloměr a je elipsa s hlavní osou sestrojenou bodem S^a kolmo k ose z^a . Vrchol A hlavní osy je určen

* Ing. Gregora, „Normy strojnického kreslení“, Práce 1968: Je-li třeba pro jisté účely, např. pro postupové výkresy, návody pro obsluhu strojů, seznamy součástí, schémata zejména potrubí apod., názornějšího zobrazení, doporučuje se používat... izometrické promítání... (str. 32).



poloměrem a , $|S^a A| = a$. Vedeme-li vrcholem A rovnoběžku s osou y^a určíme na vedlejší ose, procházející bodem S^a rovnoběžně s přímkou z^a vedlejší vrchol B . Vedlejší poloosa má proto délku

$$b = a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = a/\sqrt{3}.$$

Dosadme za b do (1) a (2). Vyjde

$$r = a - a/\sqrt{3}$$

$$R = a + a/\sqrt{3},$$

tj. poloměr. r příp. R je roven rozdílu, příp. součtu obou poloos. Z toho plyne (obr. 3):

Kružnice $(S, |SB|)$ určí na hlavní ose středy F, F' a kružnice $(S, |SA|)$ určí na vedlejší ose středy G, G' kružnic oválu, nahrazujícího eliptický průmět hlavní kružnice.

Na obr. je nakreslena jen část oválu s použitím kružnic se středy F, G . Oblouky se dotýkají v bodě H na přímce FG .

Průsečíky přímek, vedených středy F, F', G, G' s oválem a s elipsou určují úsečky, z nichž největší lze definovat jako chybu grafu. Výpočtem lze zjistit, že tato chyba je např. pro hlavní osu délky 10 cm přibližně 1 mm, tedy velmi malá. Pravděpodobně bychom neudělali menší ani při obvyklém rýsování náhradní křivky s použitím oskulačních kružnic. Úspora v rychlosti a jednoduchosti při rýsování je však značná.

FYZIKA

Výkon zdroja elektromotorického napätia

KLEMENT HRKOTA, Vojenské učilište Podjavorinských partizánov, Nové Mesto nad Váhom

V učive fyziky strednej školy sa oboznamujeme s pojmom výkon elektrického prúdu. Ľahko sa nahliadne, že ak vodičom, na koncoch ktorého je stále napätie U , preteká ustálený prúd I , je výkon vo vodiči daný vzťahom $P = U \cdot I$. Tento výkon vo vodiči (spotrebiči) je teda zároveň príkonom spotrebiča.

Výkon zdroja elektromotorického napätia (ďalej len EMN) E v jednoduchom uzavretom obvode (obr. 1) je daný výkonom elektrického prúdu v celom obvode, t. j. i na vnútornom odpore zdroja. Jeho veľkosť je $P = E I$. Konštantami zdroja sú EMN E a vnútorný odpor zdroja r , pričom určujúcou charakteristikou je vnútorný odpor. Ak je vnútorný odpor zdroja veľký, hovoríme, že zdroj je mäkký a možno z neho odobrať len malý prúd, ak je vnútorný odpor zdroja malý, hovoríme, že zdroj je tvrdý a možno z neho odobrať väčší prúd, pričom prúdové pomery v obvode sú medzi dvomi krajnými prípadmi.

a) Chod naprázdno — obvod je prerušený, $I = 0$.

b) Chod nakrátko (skrat) — zaťažovací odpor je zanedbateľný voči vnútornému odporu zdroja ($R = 0$), prúd dosahuje maxima $I_s = \frac{E}{r}$ (I_s — skratový prúd). Pri tvrdom zdroji je skratový prúd tak veľký, že hrozí poškodenie, resp. zničenie zdroja.

-GRAFIE (od řec. *grafó* = rýt, psát) — koncová část složených slov, která označují obor vědy nebo praxe, který využívá grafických záznamů určitého druhu, např. nomografie je obor matematiky studující nomogramy

GRAM (z řec. *gramma* = písmeno, od *grafó* = rýt, psát) — „napsané“; od Velké franc. revoluce v přeneseném významu: základní váhová jednotka (jak bylo „stanoveno a zapsáno“)

-GRAM¹) (v. gram) — koncová část složených slov vyjadřující, že něco je napsáno o tom, nebo tak, jak uvádí předchozí část složeného slova; např. kardiogram (řec. *kardia* = srdce) — zápis o činnosti srdce; telegram (řec. *téle* = daleko) — zápis „provedený na dálku“

-GRAM²) (v. gram) — koncová část složených slov vyjadřující, že jde o základní váhovou jednotku v počtu, jak uvádí předchozí část složeného slova; např. kilogram (řec. *chilici* = tisíc) — tisíc gramů

HEKTAR (od řec. *hekaton* = sto + lat. *area* = volné prostranství) — za Velké francouzské revoluce uměle vytvořený název pro výměru 100 arů

HEKTO- (od řec. *hekaton* = sto) — počáteční část složených slov mající význam „stonásobek měrné jednotky“ vyjádřené v následující části složeného slova; např. hektolitr — 100 litrů

HEMISFÉRA (z řec. *hemi-* = polo-, půl, napolo + *sfaira* = koule) — polokoule

HEURISTIKA (od řec. *heuriskó* — slídit, hledat) — „hledací metoda“ · studium metod, jak objevovat nové poznatky; HEURISTICKÝ

HEXAEDR (od řec. *hex* = šest + *hedra* = stolice, sedění) — šestistěn; těleso mající šest „posazení“, šest stěn, na něž je můžeme postupně „posazovat“

HISTOGRAM (z řec. *histos* — stěžeň, stožár; tkalcovský stav vztyčený vzhůru, osnova, tkanina — od *histémi* = stavět, postavit + *grafó* = rýt, psát; v. -gram) — zápis „pomocí vztyčené osnovy“, sloupkový diagram

HOMEOMORFNÍ (od řec. *homoios* = rovnému, stejnému příslušný; rovný, stejný + *morfé* = postava, podoba, podstata) — mající stejnou podobu

HOMO- (z řec. *homos* = stejný, rovný) — počáteční část složených slov, vyjadřující „stejnost“, „rovnost“; HOMOGENNÍ (řec. *gignomai* = rodit se, stávat se) — stejnorodý, vzniklý ze stejného materiálu, stejným způsobem

HOMOTETIE (z řec. *homos* = stejný + řec. *tithémi* = klást, stavět) — „stejně položení“, stejnolehlost

HORIZONT (od řec. *horidzó* = hraničit, omezovat) — „myšlená čára ohraničující obzor“; HORIZONTÁLA — vodorovná čára (opak: vertikála); HORIZONTÁLNÍ — vodorovný (myšlená čára horizontu je vždy vodorovná)

- 14 **HYPER-** (z řec. *hyper* = nad, přes) — předpona s významem „nadbytek, zveličení, vzrůst, nadměrnost, přepjatost“; např. hypermoderní
- HYPERBOLA** (z řec. *hyper* = nad, přes + řec. *balló* = házet, vrhat) — nadsázka; „přiřazení s přebytkem“; v matematice: kuželosečka, vyjádřená rovnicí $x^2 = py + \frac{p}{d} y^2$, v níž se člen py zvětšuje přičtením dalšího členu; jde o „přirovnání s nadbytkem“; **HYPERBOLOID** (v. hyperbola + latinizované — *oideus* = podobající se) — „těleso podobající se hyperbole“; těleso, jehož některé rovinné řezy jsou hyperboly
- HYPEROSKULACE** (z řec. *hyper* = nad, přes + lat. *osculum* = ústa, rty, polibek) — „velmi těsný dotyk“, v matematice: vyšší řád dotyku křivek než oskulace křivek ve společném bodě; **HYPEROSKULAČNÍ** kružnice
- HYPO-** (z řec. *hypo* = pod) — předpona s významem „pod, nižší stupeň; snížený, spodní, dolejší; malý; menší, než je obvyklé; nedostačující, podřaděnost“
- HYPOCYKLOIDA** (z řec. *hypo* = pod + řec. *kyklos* = kolo, kruh + latinizované — *oideus* = podobající se) — „spodní cykloida“; křivka vytvořená bodem pevně spjatým s kružnicí, která se kotálí po vnitřní („spodní“) straně pevné kružnice (v. cykloida)
- HYPOTÉZA** (z řec. *hypo* = pod + řec. *tithémi* = klást, stavět) — „podklad“; vědecký předpoklad, domněnka (slabší než téze = tvrzení ověřené), „podklad“ dalšího zkoumání
- HYPOTROCHOIDA** (z řec. *hypo* = pod + řec. *trochos* = kolo + latinizované — *oideus* = podobající se) — „spodní trochoida“; epicykloida, vznikající kotálením kružnice po vnitřní („spodní“) straně jiné kružnice; (v. trochoida)
- CHORDÁLA** (od řec. *chordé* = struna) — přímka, která tvoří jakousi „páteř“, „hřbetní strunu“ dvou nesoustředných kružnic (z každého bodu chordály buď lze sestavit stejně dlouhé tečny k oběma kružnicím nebo nelze sestavit žádné)
- I-¹)** (z lat. *in* = v, na, do, dovnitř) — předpona s významem místa, směru, způsobu: do, na, v“ (opak „e-“); např. *imigrovat* (lat. *migro*, -are = stěhovat se) — nastěhovat se, emigrovat — vystěhovat se
- I-²)** (z lat. *in-* = ne-, záporová předpona) — předpona s významem „zápor, opak, ne-“; např. *ilegální* (lat. *lex*, *legis* = zákon) — nelegální, nezákonný; *iracionální* (lat. *ratio*, -onis = rozum, poměr) — „nepoměrový“
- IDEÁLNÍ** (od řec. *idea* = podoba, jak se jeví zraku) — „mající podobu dokonalosti“, dokonalý, mající nejvyšší hodnoty, (někdy též) nedosažitelný, neskutečný, získaný jen rozumovou konstrukcí; **IDEÁL** — vzor, v matematice: jeden z pojmů moderní algebry

IDEMPOTENTNÍ (od lat. *idem* — tentýž + *potens* = mocný, schopný, od *possum*, *posse* = moci, být schopen) — v matematice: tentýž ve všech mocninách (prvek a , pro který platí $a = a^2 = a^3 = \dots = a^n = \dots$)

IDENTICKÝ (od lat. *idem* — tentýž) — totožný, stejný; **IDENTIFIKOVAT** (lat. *fascio*, *-ere* = dělat, činit) — zjišťovat totožnost, určit totožnost, určit; **IDENTITA** — totožnost; v matematice: zobrazení, ve kterém obraz každého prvku je totožný se vzorem

IKOSAEDR (od řec. *eikosi* = 20 + *hedra* = stoly, sedění) — dvacetistěn; těleso mající dvacet „posazení“, dvacet ploch, na něž je můžeme postupně „posazovat“

IM-¹) (z lat. *in* = v, na, do, dovnitř) — předpona s významem místa, směru, způsobu „do, na, v“ (opak „ex-“); např. importovat (lat. *porto*, *-are* = nést, vést, dopravovat) — dovážet, exportovat — vyvážet; v. t. implikace — explikace

IM-²) (z lat. *in-* = ne-, záporová předpona) — předpona s významem „zápor, opak, ne-“; např. impotentní (lat. *possum*, *posse* = moci, být schopen) — neschopný

IMAGINÁRNÍ (od lat. *imago*, *-inis* = obraz, vidina, představa) — obrazný, vymyšlený, pomyslný, zdánlivý, neskutečný; matematický termín „imaginární čísla“ pochází z doby, kdy je matematici považovali za pomyslná (neskutečná, nereálná) čísla

IMPLICITNÍ (od lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *plico*, *-are* = vinout, plést) — „zavinutý do něčeho“; v něčem obsažený, ale výslovně nevyjádřený (opak: explicitní); v matematice: implicitní vyjádření funkce — zápis, ve kterém proměnné a symbol funkční hodnoty „jsou vzájemně do sebe vpleteny“, nejsou od sebe odděleny, zatímco u explicitního vyjádření funkce je symbol hodnoty funkce „vypleten“, stojí osamoceně na jedné straně rovnice

IMPLIKACE (od lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *plico*, *-are* = vinout, plést) — „vpletení“, „zavinutí“; logický vztah mezi výroky, z nichž jeden je důsledkem druhého (jsou „do sebe vpleteny, zapleteny“)

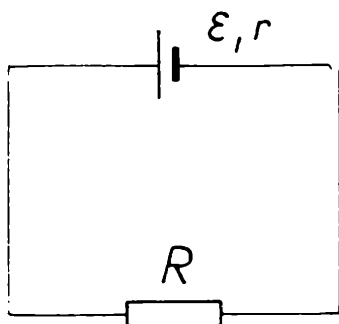
IN-¹) (z lat. *in* = v, na, do, dovnitř) — předpona s významem místa, směru, způsobu „do, na, v“ (opak: ex-); v. incidence, indukce, inflexe, informovat, injekce, inkluze, intuice, invertor, inverze, involuce

IN-²) (z lat. *in-* = ne-, záporová předpona) — předpona s významem „zápor, opak, ne-“; např. indiskretní — nediskretní; v. infinitesimální, invarianta

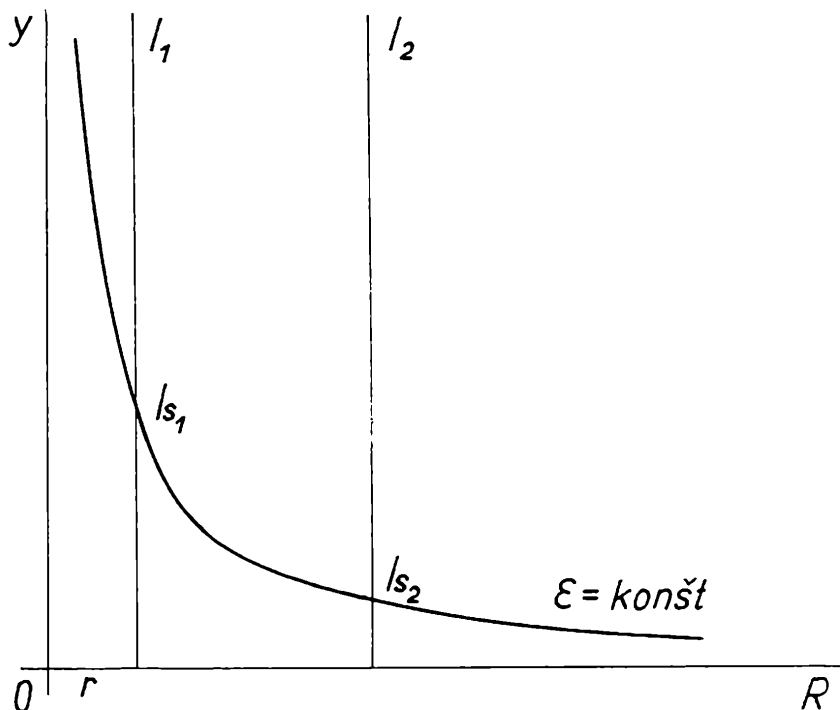
INCIDENCE (od lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *cado*, *-ere* = padat) — případ, kdy např. bod „dopadl na přímku“ nebo „přímka dopadla do roviny“, tj. leží na přímce, v rovině; **INCIDENTNÍ** bod — „bod dopadnuvší na přímku“, ležící na přímce

INDEX (od lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *dico*, *-ere* = řečí ukazovat, stanovit, mluvit) — „ukazatel“, seznam, přehled; v matematice:

- 16 přídatný symbol, zpravidla číslice či písmeno psané vpravo dole k původnímu symbolu, např. a_1 , c_1 .
- INDUKCE (od /lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *duco*, -ere = táhnout, vést) — „vedení k něčemu“; „přiváděcí metoda“, při které nás jednotlivé výroky „přivedou“ k obecnému závěru (opak: dedukce);- v matematice: způsob důkazu, při kterém prokazujeme, že platnost věty pro přirozené číslo k „vede“ k platnosti věty pro $k + 1$
- INFERIOR (z lat. *inferior* = nižší, níže položený) —: *limes inferior* (lat. *limes*, *limitis* = příčná cesta, mez, hranice) — dolní hranice, dolní hranice, dolní mez; nejmenší hromadná hodnota posloupnosti
- INFIMUM (z lat. *infimus* — nejnižší, nejspodnější); v matematice: infimum množiny čísel je největší číslo, které množinu „zespoda“ ohraničuje
- INFINITEZIMÁLNÍ (od lat. *infinitus* = neomezený, bez mezí, nekonečný, bez konce; slož. z *in-* s významem záporu + *finis* = mez, hranice, konec) — „vztahující se ke stavu, který nemá hranic“; v matematice: termín dnes už málo používaný pro nekonečně malé veličiny
- INFLEXE (od lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *flecto*, -ere = ohýbat, obracet) — ohyb, ohnutí; INFLEXNÍ bod — bod křivky, ve kterém se křivka „začne ohýbat, stáčet na druhou stranu“ své tečny
- INFORMOVAT (z lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *formo*, -are = dávat tvar, utvářet) — „dodávat podobu“, „utvářet (mínění)“, dodávat zprávu
- INJEKCE (od lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *iacio*, -ere = házet, vrhat) — „vhození“; v matematice: INJEKTIVNÍ zobrazení — prosté zobrazení, tj. zobrazení, ve kterém jsou každé dva různé prvky jedné množiny zobrazeny („vrženy“) na dva různé prvky druhé množiny
- INKLUZE (od lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *claudo*, -ere = zavírat) — „uzavření“; v matematice: vztah mezi množinami, kdy množina A je podmnožinou B, protože „je v ní uzavřena“
- INTEGROVAT (z lat. *integro*, -are = uvést v bývalý stav; a to od *integer* = netknutý, úplný, nezmenšený, neporušený; slož. z *in-* s významem záporu + *tange*, -ere = dotýkat se) — vytvořit celek; v matematice: původně: počítat míru celého útvaru sečtením („sce-lením“) měr nekonečně mnoha jeho částí; INTEGRACE — scelení, sjednocení; v matematice: výpočet integrálu; INTEGRÁL (z *calculus integralis* = počet integrální) — původně „číslo vyjadřující celek“; také systém funkcí se stejnou derivací; INTEGRAND — integrovaná funkce
- INTER- (z lat. *inter* = mezi, navzájem) — počáteční část složených slov vyjadřující místní nebo časové umístění mezi dvěma hodnotami, vzájemný vztah, umístění uvnitř, INTERAKCE (lat. *ago*, -ere = = jednat) — vzájemné působení několika činitelů



Obr 1



Obr. 2

Obr. 1 Jednoduchý uzavretý obvod

Obr. 2 Prúdová charakteristika zdroja EMN

I_1 — os prúdu mäkkého zdroja

I_{s1} — skratový prúd mäkkého zdroja

I_2 — os prúdu tvrdého zdroja

I_{s2} — skratový prúd tvrdého zdroja

Podľa 2. Kirchhoffovho zákona je prúd v jednoduchom uzavretom obvode

$$I = \frac{E}{r + R} . \quad (1)$$

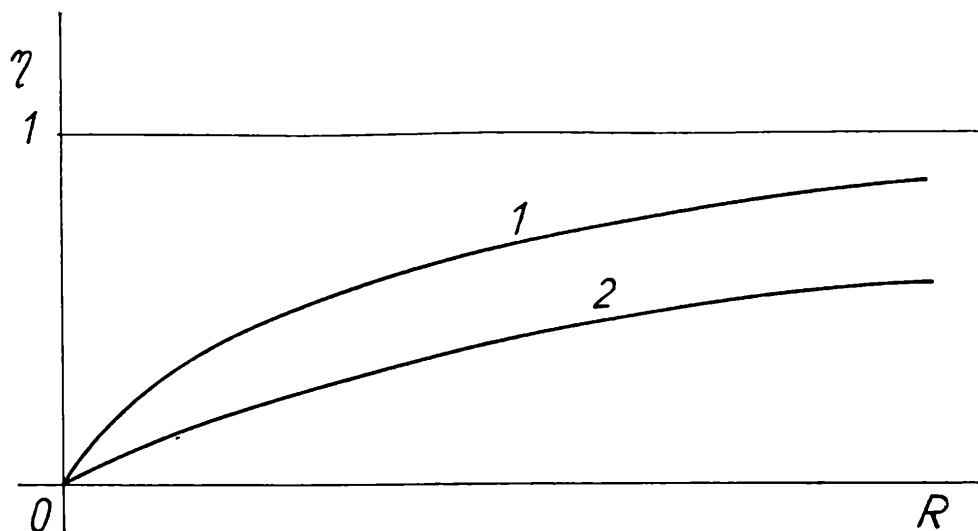
Graf $I = I(R)$ bude pri $\varepsilon = \text{konšt.}$ časťou grafu nepriamej úmery. Os závisle premennej — prúdu bude od počiatku súradnej sústavy posunutá o r vpravo, a to tým ďalej, čím je zdroj mäkkší obr. 2.

Ďalšou charakteristikou zdroja EMN v uzavretom obvode je účinnosť zdroja η daná podielom príkonu spotrebiča a výkonu zdroja $\eta = \frac{P_p}{P}$.

Pre účinnosť zdroja platí tiež

$$\eta = \frac{U}{E} = \frac{R}{R + r} = \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} = 1 - \frac{r}{r + R} .$$

Účinnosť konkrétneho zdroja je teda závislá len na veľkosti zaťažovacieho odporu a graf $\eta = \eta(R)$ je časťou grafu nepriamej úmery obr. 3.



Obr. 3 (1) účinnosť mäkkého zdroja
(2) účinnosť tvrdého zdroja

Pri chode nakrátko je účinnosť zdroja nulová, pri chode naprázdno je $\eta = 1$. V obidvoch krajných prípadoch je však príkon spotrebiča nulový, takže maximálnu účinnosť nemožno prakticky dosiahnuť. Ak sa má účinnosť zdroja zväčšovať, musí rásť zaťažovací odpor R , čo ovšem vedie k poklesu príkonu spotrebiča, takže sa tu stretávajú dve protichodné požiadavky. Účinnosť zdroja možno chápať aj ako normované svorkové napätie, a preto priebeh účinnosti charakterizuje zároveň aj priebeh svorkového napätia zdroja v závislosti na jeho zaťažení. Svorkové napätie tvrdého zdroja sa v pomerne širokom intervale mení len nepatrne, kým u mäkkého zdroja je tento pokles znateľný (obr. 3.)

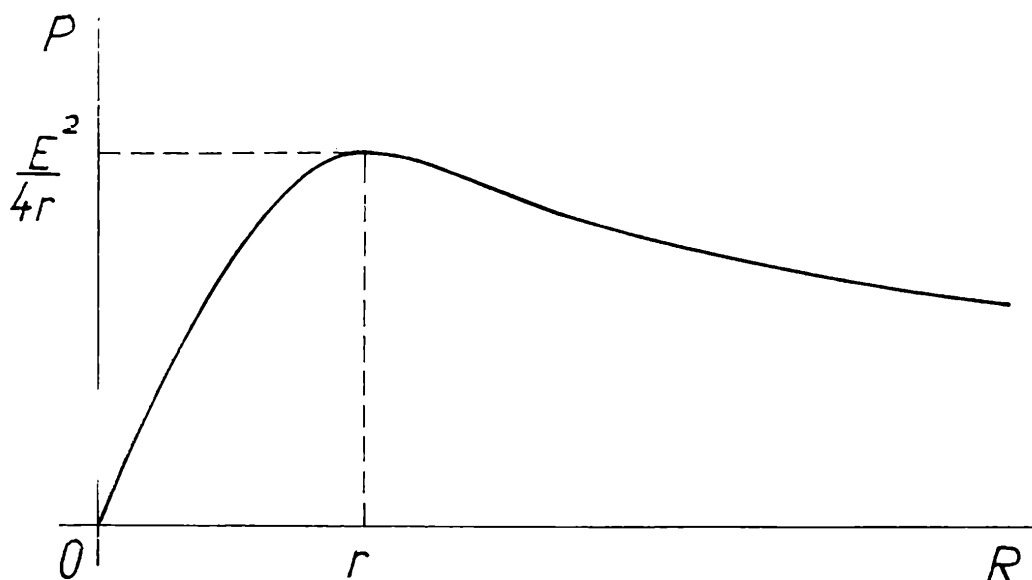
Skúmajme v ďalšom, za akých podmienok je príkon spotrebiča maximálny a aká účinnosť zdroja tomu odpovedá. Potrebujeme k tomu poznať závislosť príkonu od veľkosti zaťažovacieho odporu $P = P(R)$. Platí $P = UI = RI^2$. Ak dosadíme podľa (1), dostaneme

$$P = E^2 \frac{R}{(r + R)^2}.$$

Graf tejto závislosti (obr. 4) má maximum pri $R = r$.¹⁾

Príkon spotrebiča je teda maximálny vtedy, ak sa zaťažovací odpor rovná vnútornému odporu zdroja. Pre výkon vtedy platí

¹⁾ Žiaci, ktorí ovládajú základy diferenciálneho počtu, môžu toto zistenie overiť z podmienky $\frac{dP}{dR} = 0$.



Obr. 4 Graf závislosti $P = P(R)$

$$P = \frac{E^2}{4r} = \frac{\left(\frac{E}{2}\right)^2}{r} = r \cdot \left(\frac{E}{2r}\right)^2$$

Je zřejmé, že maximální výkon se dosáhne při svorkovém napětí

$$U = \frac{E}{2} \text{ a při prúde } I = \frac{E}{2r} = \frac{I_s}{2};$$

účinnost zdroje je vtedy $\eta = \frac{1}{2}$.

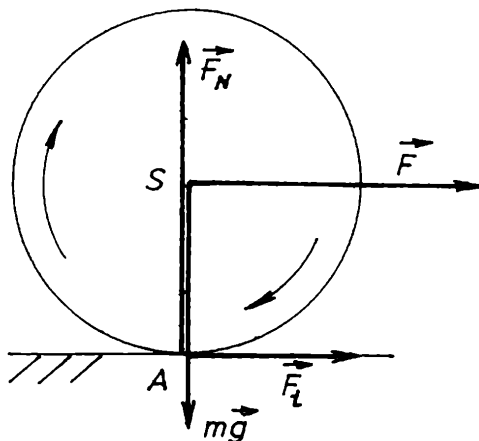
Valivý pohyb tělesa po vodorovné a nakloněné rovině - II

RNDr. MARTA CHYTILOVÁ, CSc., Brno

1. Valivý pohyb tuhého tělesa po vodorovné rovině

Valivý pohyb tuhého tělesa po vodorovné rovině budeme studovat v těchto konkrétních podmínkách:

Tuhé stejnorodé rotační těleso má hmotnost m ; vodorovná osa otáčení je totožná s osou souměrnosti tělesa; těleso koná valivý pohyb bez smyku.



Obr. 1

Na těleso působí tíhová síla F_G , $F_G = m g$, a tlaková síla F_N podložky: obě síly jsou v rovnováze. Kromě toho působí na těleso tahová síla F , jejíž vektorová přímka prochází hmotným středem S tělesa a má vodorovný směr (obr. 1).

Označme $\mathbf{v}$ rychlost pohybu hmotného středu S tělesa, $\mathbf{v}_A$ rychlost bodu A , ve kterém se těleso dotýká podložky; $\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, kde $\boldsymbol{\omega}$ je úhlová rychlost otáčivého pohybu tělesa. Poněvadž těleso koná valivý pohyb bez smyku, je rychlost $\mathbf{v}_A$ v každém okamžiku nulová. Platí tedy $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Třecí síla F_t je potom klidová třecí síla, $F_t = f_0 F_N$, kde f_0 je součinitel klidového tření. Valivý odpor v dalším neuvažujeme.

Úlohy vyplývající z této situace můžeme řešit dvěma postupy:

Postup 1: Pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb vyjádříme užitím momentu síly vzhledem k okamžité ose otáčení procházející bodem A rovnoběžně s osou souměrnosti. Platí rovnice:

$$I_A \alpha = F r, \quad (1)$$

kde I_A je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející bodem A , α je velikost úhlového zrychlení, $F r$ je velikost momentu síly F vzhledem k okamžité ose otáčení procházející bodem A . V daných podmínkách je moment síly F_t vzhledem k této ose nulový. Velikost zrychlení pohybu hmotného středu tělesa

$$a = \alpha r = \frac{F r^2}{I_A}. \quad (2)$$

Podle (6) z I. části tohoto článku, jenž byl otištěn v Rozhledech v č. 5 roč. 61, platí:

$$I_A = I_0 + m r^2,$$

kde I_0 je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející hmotným středem S tělesa. Potom podle (2) platí

$$a = \frac{F r^2}{I_0 + m r^2} = \frac{F}{m + \frac{I_0}{r^2}}. \quad (3)$$

Postup 2: Pohybovou rovnici tělesa ve skalárním tvaru vyjádříme pomocí momentů sil vzhledem k ose procházející hmotným středem S tělesa

$$I_0 \alpha = F_t r. \quad (4)$$

Moment síly F vzhledem ke zvolené ose je nulový. Pro zrychlení hmotného středu tělesa pak platí

$$a = \alpha r = \frac{F_t r^2}{I_0}. \quad (5)$$

Podle (5) a (3) určíme velikost třecí síly

$$F_t = \frac{F}{1 + \frac{m r^2}{I_0}}. \quad (6)$$

Příklad 1. Stejnorodá koule o poloměru r koná po vodorovné rovině valivý pohyb bez smyku působením stálé síly F , jejíž vektorová přímka prochází hmotným středem koule. Určete velikost zrychlení hmotného středu koule a velikost síly klidového tření v případech:

a) koule je plná ($I_0 = \frac{2}{5} m r^2$);

b) koule je dutá, tenkostěnná ($I_0 = \frac{2}{3} m r^2$).

Řešení: a) Podle (3) je velikost zrychlení plné koule

$$a_p = \frac{5 F}{7 m};$$

podle (6) je velikost síly klidového tření plné koule

$$F_{tp} = \frac{2 F}{7}.$$

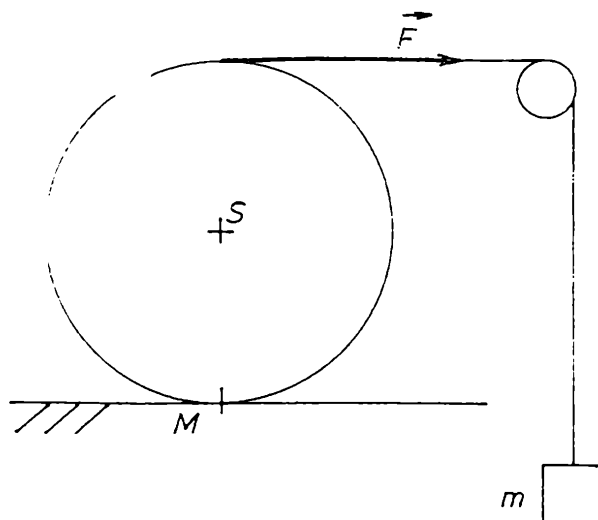
b) Podle (3) je velikost zrychlení duté koule

$$a_d = \frac{3 F}{5 m};$$

podle (6) je velikost síly klidového tření duté koule

$$F_{td} = \frac{2 F}{5}.$$

Z výsledků řešení vyplývá: $\frac{a_p}{a_d} = \frac{25}{21}$; $\frac{F_{tp}}{F_{td}} = \frac{5}{7}$. Platí tedy $a_p > a_d$; $F_{tp} < F_{td}$.



Obr. 2

Příklad 2. Stejnorodá plná koule o poloměru r a o hmotnosti m je na vodorovné podložce v klidu. Na kouli začne působit stálá síla F_1 , jejíž vektorová přímka je vodorovná a prochází hmotným středem koule. Působením síly F_1 se koule uvede do valivého pohybu po podložce bez smyku. a) Určete úhrnnou kinetickou energii E_k , kterou získá těleso za dobu t_1 od počátku pohybu vzhledem k podložce. b) Kinetická energie E_k má dvě složky: kinetickou energii E_{k1} posuvného pohybu koule po podložce a kinetickou energii E_{k2} otáčivého pohybu koule. Stanovte jejich poměr.

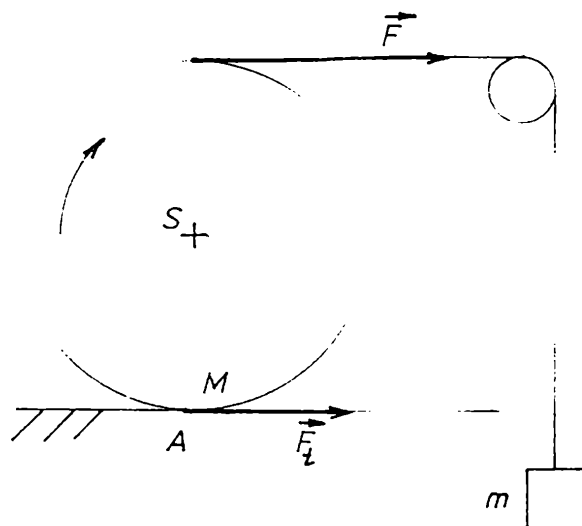
Řešení: a) Koule koná rovnoměrně zrychlený pohyb posuvný se zrychlením a a současně rovnoměrně zrychlený pohyb otáčivý s úhlovým zrychlením α ; protože se pohyb děje bez smyku, platí $\alpha = \frac{a}{r}$.

Za dobu t_1 od počátku pohybu získá hmotný střed tělesa rychlost $v_1 = a t_1 = \frac{F_1}{m} t_1$. To je zároveň rychlost posuvného pohybu tělesa. Za stejnou dobu t_1 získá koule úhlovou rychlost $\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{F_1}{m r} t_1$. Za dobu t_1 získá koule úhrnnou kinetickou energii E_k vzhledem k podložce

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2} = \frac{7}{10} \cdot \frac{F_1^2 t_1^2}{m},$$

$$\text{b) } \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{m v_1^2}{I_0 \omega_1^2} = \frac{5}{2}.$$

Příklad 3. Stejnorodý plný válec o hmotnosti M a o poloměru r leží na vodorovné podložce. Na obvodu válce je navinuto vlákno, které je ve vodorovném směru vedeno přes pevnou kladku; na volném konci vlákna je zavěšeno závaží o hmotnosti m (obr. 2). Působením tíhy závaží



Obr. 3

se uvede válec do valivého pohybu bez smyku. Určete zrychlení a hmotného středu válce. Hmotnost nití a kladky je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti válce.

Řešení: Na soustavu o hmotnosti $M + m$ působí stálé síly F a F_t vodorovného směru (obr. 3), $F = m g$. Pohybovou rovnici pro posuvný pohyb napíšeme ve skalárním tvaru

$$(M + m) a = m g + F_t. \quad (7)$$

Na válec působí vzhledem k vodorovné ose procházející hmotným středem S momenty sil, které mají velikosti $m g r$ a $F_t r$ a mají opačný směr. Moment setrvačnosti válce vzhledem k vodorovné ose procházející hmotným středem S je $I_0 = M \frac{r^2}{2}$. Válec koná rovnoměrně zrychlený

valivý pohyb po vodorovné podložce bez smyku, platí tedy $\alpha = \frac{a}{r}$.

Pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb válce napíšeme ve skalárním tvaru

$$\frac{M r^2}{2} \cdot \frac{a}{r} = mgr - F_t r. \quad (8)$$

Řešením soustavy rovnic (7) a (8) vyloučíme F_t a po úpravě určíme

$$a = \frac{4m g}{2m + 3M}$$

Příklad 4. Stejnorodá plná koule koná valivý pohyb bez smyku po vodorovné podložce. Její úhrnná kinetická energie je $E_k = 14$ J. Určete kinetickou energii E_{k1} posuvného pohybu a kinetickou energii E_{k2} otáčivého pohybu koule.

$$\text{Řešení: } E_{k1} = \frac{1}{2} m v^2; E_{k2} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{5} m v^2.$$

Odtud určíme

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{5}{2}; E_{k1} + E_{k2} = E_k,$$

$$E_{k1} = \frac{5}{7} E_k = 10 \text{ J}; E_{k2} = \frac{2}{7} E_k = 4 \text{ J}.$$

Cvičení

1. Řešte příklad 1 pro stejnorodý válec a) plný ($I_0 = \frac{m r^2}{2}$), b) dutý tenkostěnný ($I_0 = m r^2$). Porovnejte s výsledky příkladu 1.
2. Řešte příklad 2 pro stejnorodý válec a) plný, b) dutý tenkostěnný. Porovnejte s výsledky příkladu 2.
3. Stejnorodý prstenec a stejnorodý plný válec o stejné hmotnosti m konají valivý pohyb bez smyku po vodorovné podložce stejnou rychlostí v posuvného pohybu. Určete úhrnnou kinetickou energii prvního a druhého tělesa. Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty $m = 2 \text{ kg}$, $v = 5 \text{ m.s}^{-1}$. [50 J; 40 J]

2. Valivý pohyb tuhého tělesa po nakloněné rovině

Valivý pohyb tuhého tělesa po nakloněné rovině budeme studovat v těchto konkrétních podmínkách:

Tuhé, stejnorodé rotační těleso má hmotnost m ; vodorovná osa otáčení je totožná s osou souměrnosti tělesa; nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel β ; těleso koná po nakloněné rovině valivý pohyb bez smyku.

Na těleso působí tíhová síla F_G , $F_G = m g$, a tlaková síla F_N podložky, která je kolmá k nakloněné rovině, $F_N = m g \cos \beta$ (obr. 4). Výslednice F obou sil je rovnoběžná s nakloněnou rovinou, $F = m g \sin \beta$. Kromě toho působí na těleso klidová třecí síla F_t (viz čl. 1). Valivý odpor v dalším neuvažujeme.

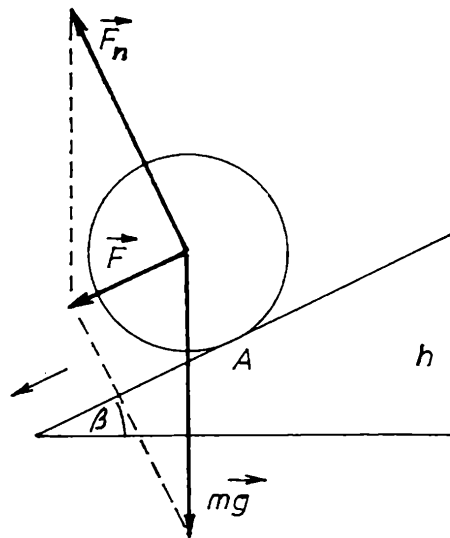
Těleso koná rovnoměrně zrychlený pohyb posuvný po nakloněné rovině dolů se zrychlením a , totožným se zrychlením hmotného středu tělesa, a současně rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb kolem osy souměrnosti s úhlovým zrychlením α . Protože se pohyb děje bez smyku, platí v každém okamžiku: $v = \omega r$, $a = \alpha r$.

Úlohy vyplývající z této situace můžeme řešit třemi postupy:

Postup 1 odpovídá prvnímu postupu ve čl. 1.

Napíšeme pohybovou rovnici pro momenty sil vzhledem k okamžité ose otáčení procházející bodem A ve skalárním tvaru:

$$r m g \sin \beta = I_A \frac{a}{r}. \quad (9)$$



Obr. 4

Moment síly F_t vzhledem ke zvolené ose otáčení je nulový.

Z rovnice (9) určíme

$$a = \frac{r^2 m g \sin \beta}{I_A} = \frac{g \sin \beta}{1 + \frac{I_0}{m r^2}}. \quad (10)$$

Postup 2 odpovídá druhému postupu ve čl. 2.

Napišeme pohybovou rovnici pro momenty sil vzhledem k ose souměrnosti tělesa ve skalárním tvaru:

$$r F_t = I_0 \frac{a}{r}. \quad (11)$$

Moment síly F vzhledem k ose souměrnosti je nulový.

Z rovnice (11) určíme

$$F_t = I_0 \frac{a}{r^2}.$$

Odtud použitím rovnice (10) určíme

$$F_t = \frac{m g \sin \beta}{1 + \frac{m r^2}{I_0}}. \quad (12)$$

Postup 3: Užijeme zákon zachování energie pro děje mechanické, třebaže zde vystupuje třecí síla F_t . Odůvodníme to takto: Pohyb tělesa se děje bez smyku a třecí síla F_t působí na těleso v bodech okamžité osy otáčení, která prochází bodem A (obr. 4); okamžitá rychlost tělesa v bodech osy otáčení je nulová, a proto třecí síla nekoná práci a neovlivňuje kinetickou energii otáčejícího se tělesa.

Ve výšce h nad vodorovnou rovinou (obr. 4) je těleso v klidové poloze; jeho kinetická energie $E_{k1} = 0$ J. Potenciální energie tíhová tělesa

vzhledem k vodorovné rovině je $E_{p1} = m g h$. V nejnižším bodě nakloněné roviny je potenciální energie tíhová tělesa vzhledem k vodorovné rovině $E_{p2} = 0$ J. Kinetická energie tělesa v tomto bodě se rovná součtu kinetické energie posuvného pohybu tělesa při rychlosti $\mathbf{v}$ a otáčivého pohybu tělesa vzhledem k okamžité ose otáčení procházející bodem A ; $\omega = \frac{v}{r}$; $E_{k2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{I_A}{2} \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{v^2}{2r^2} (I_0 + m r^2)$.

Podle zákona zachování energie platí

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2},$$

$$m g h = \frac{v^2}{2r^2} (I_0 + m r^2).$$

Odtud určíme konečnou rychlost posuvného pohybu tělesa

$$v = \sqrt{\frac{2 g h}{1 + \frac{I_0}{m r^2}}} \quad (13)$$

Zrychlení α rovnoměrně zrychleného posuvného pohybu tělesa určíme ze vztahu $a = \frac{v^2}{2 d}$, kde $d = \frac{h}{\sin \beta}$ je délka nakloněné roviny;

$$a = \frac{v^2 \sin \beta}{2 h}$$

Použijeme-li vztah (13), dostaneme pro zrychlení výraz totožný se vztahem (10).

Příklad 5. Na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel β , je ve výšce h stejnorodý plný válec v klidu. Po uvolnění koná valivý pohyb bez smyku. a) Určete rychlost v_1 posuvného pohybu válce a úhlovou rychlost ω_1 otáčivého pohybu válce v nejnižším bodě nakloněné roviny. b) Určete velikost klidové třecí síly F_t a vyjádřete podmínku valivého pohybu válce bez smyku, je-li součinitel klidového tření f_0 .

Řešení: a) $I_0 = \frac{m r^2}{2}$; podle (10) určíme

$$a = \frac{2 g \sin \beta}{3}, \alpha = \frac{2 g \sin \beta}{3 r}.$$

Těleso se pohybuje po dobu t_1 po dráze $d = \frac{a t_1^2}{2} = \frac{h}{\sin \beta}$. Odtud určíme

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a \sin \beta}} = \sqrt{\frac{3h}{g \sin^2 \beta}}$$

Rychlost hmotného středu válce na konci dráhy d je potom $v_1 = a t_1 =$
 $= 2 \sqrt{\frac{g h}{3}}$ úhlová rychlost $\omega = \frac{v}{r} = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{g h}{3}}$

$$\text{b) Podle (12) } F_t = \frac{m g \sin \beta}{3}.$$

Síla F_t zajišťuje valivý pohyb válce bez smyku, pokud není větší než síla klidového tření $F_{t_0} = f_0 m g \cos \beta$. Platí tedy $F_t \leq F_{t_0}$ nebo také

$$\frac{m g \sin \beta}{3} \leq f_0 m g \cos \beta; \text{ pro } 0^\circ < \beta < 90^\circ \text{ je } \cos \beta > 0;$$

$$\operatorname{tg} \beta \leq 3 f_0. \quad (14)$$

Tento vztah vyjadřuje podmínku pro valivý pohyb válce bez smyku po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel β . Kdyby platil vztah $\operatorname{tg} \beta > 3 f_0$, nastal by smyk.

Poznámka. Po přechodu válce z nakloněné roviny na vodorovnou rovinu je $a = 0 \text{ m s}^{-2}$, $\alpha = 0 \text{ rad. s}^{-2}$. Válec se pohybuje dále po vodorovné rovině rovnoměrným valivým pohybem bez smyku. Ve skutečnosti se však jeho pohyb zpomaluje. Toto zpomalování je způsobeno silou valivého odporu; moment této síly způsobuje zmenšení úhlové rychlosti otáčivého pohybu a síla sama způsobuje odpovídající zpomalení hmotného středu tělesa. Nerovnost (14) je splněna, nedochází tedy ke smyku. Síla valivého odporu koná zápornou práci, proto se zmenšuje kinetická energie tělesa. Při rozboru valivého pohybu tělesa po nakloněné rovině jsme sílu valivého odporu neuvažovali.

Cvičení

- Řešte příklad 5 pro a) stejnorodou plnou kouli, b) stejnorodý prstenec. Porovnejte výsledky s výsledky příkladu 5 a vyslovte obecné závěry.
- Na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel β , se pohybuje z klidové polohy stejnorodá plná koule dolů valivým pohybem bez smyku. Určete rychlost hmotného středu koule za dobu t_1 od počátku pohybu. Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty $\beta = 30^\circ$, $t_1 = 1,5 \text{ s}$. [$5,3 \text{ m s}^{-1}$]
- Na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel β , se pohybuje dolů stejnorodý prstenec 1. smykem, 2. valivým pohybem bez smyku z klidové polohy v téže výšce h nad vodorovnou rovinou.
 - Ve kterém z obou případů je rychlost hmotného středu tělesa na konci nakloněné roviny větší? Odpověď odůvodněte.
 - Ve kterém z obou případů se těleso pohybuje do nejnižší polohy na nakloněné rovině po kratší dobu? Odpověď odůvodněte.
 - Určete poměr obou rychlostí a poměr obou dob.

Vesmír v záření gama

RNDr. RENÉ HUDEC, ČSAV Ondřejov

Elektromagnetické spektrum směrem od viditelného světla ke kratším vlnovým délkám se skládá ze tří druhů záření — ultrafialového, rentgenového a záření gama. Všechny tři tyto spektrální obory zpřístupnila astronomům teprve kosmická technika, protože zemské ovzduší je pro ně neprůhledné.

Všimněme si dnes alespoň stručně nejnovějších poznatků z oblasti *gama astronomie*, která zahrnuje oblast nejkratších vlnových délek (pod 0.01 nm), a tedy i největších energií. V oblasti záření gama se tudíž projeví ty nejenergetičtější procesy ve vesmíru — není proto divu, že v poslední době tato oblast přitahuje stále větší pozornost řady astronomů i fyziků. Vysoce energetické záření gama vzniká i při procesech charakteristických pro kosmické (částicové) záření, takže lze takto studovat i vznik záření kosmického. To není zanedbatelné, neboť fotony záření gama na rozdíl od záření kosmického nenesou náboj a z místa vzniku se tedy šíří přímočaře — nejsou odkláněny žádnými magnetickými poli, jak tomu je často v případě nabitých částic. V poslední době se zájem o gama astronomii zvýšil i díky tomu, že značná část záření gama dopadajícího na naši Zemi vzniká v naší Galaxii. Rovněž byla nalezena celá řada 25 izolovaných zdrojů tohoto záření.

I když omezený průzkum kosmického gama záření lze provádět i z výškových balónů, hlavní rozvoj gama astronomie umožnila teprve kosmonautika. První pokusy, tehdy ještě velmi primitivní, se uskutečňovaly od počátku 60. let, na hodnotnější úrovni se však provádějí teprve asi 10 let — tato etapa byla zahájena v roce 1972 experimentem S-133 na družici TD-1 a v témže roce i první speciální družici pro gama měření SAS-2. Ale největší část dnešních poznatků byla získána v oboru 70 — 5000 miliónů eV družicí COS-B, vypuštěnou v roce 1975 a stále ještě pracující.

Měření záření gama je velmi složitý úkol. Protože má velmi krátkou vlnovou délku, nelze je totiž detekovat běžnými metodami jiných vlnových oborů. Proto je zapotřebí určovat charakteristiky záření gama z reakcí při jeho průchodu hmotou a jeho energii z toho, kolik energie se ve hmotě ztrácí. Ve srovnání s jinými obory astronomie je proto měření detektorů záření gama mnohem hrubší. Zatímco například v ultrafialovém oboru můžeme určit polohu objektu s přesností na 1 obloukovou vteřinu, v gama oblasti to zatím neumíme lépe než na 1 až 2 stupně. To pochopitelně velmi komplikuje ztotožňování zdrojů záření gama s již známými astronomickými objekty — na ploše několika čtverečních stupňů totiž může být vhodných kandidátů velké množství

a nelze pak snadno rozhodnout, který z nich je současně zdrojem záření gama. Ani určení energie není příliš přesné — jen s přesností okolo 50 %, zatímco např. u ultrafialového dalekohledu to je méně než 0,1 %.

Přesto však dnes máme o kosmických zdrojích záření gama k dispozici již celou řadu informací. Především — většina záření gama, které pozorujeme, vzniká v naší vlastní galaxii, v soustavě Mléčné dráhy. Usuzujeme tak z toho, že většina záření přichází ze směrů s galaktickou šířkou blízkou nule, a nejintenzivnější záření z tohoto úzkého pruhu, širokého jen asi 1° , přichází ze směru od středu naší galaxie. Většina pozorovaného záření gama přitom vzniká ve vzdálenostech asi 15 000 až 20 000 světelných let od Slunce. Připomeňme, že naše Slunce je vzdáleno 30 000 světelných let od středu Galaxie. Úzký zářící pruh je překryt širším pásem emise, který je víceméně pozorovatelný ve všech galaktických délkách a který je jasně asymetrický. Přitom tyto asymetrické jevy dobře korelují s hypotézou, že v naší Galaxii vzniká velká část gama záření ve dvou oblastech, které prostorově odpovídají tzv. *Gouldovu* a *Dolidzeovu prstenci* tvořenému hvězdami, plynem a prachem. Tyto pásy obklopují náš sluneční systém ve vzdálenosti mezi 500 a 1500 světelnými roky. Nalezená korelace dokazuje již dříve vyslovenou domněnku, že velká část záření gama vzniká interakcí protonů a elektronů kosmického záření s materiálem blízkých mezihvězdných mračen.

Kromě těchto rozlehlých struktur bylo dosud nalezeno i 25 izolovaných bodových zdrojů záření gama. Ale velmi překvapivé je to, že jen pět z nich lze ztotožnit s astronomickými objekty známými z jiných spektrálních oborů. Jde o pulsary Vela a Krabí mlhovina, o molekulární oblak kolem hvězdy ρ Ophiuchi, o rentgenový zdroj Cyg X-3 a o kvazar 3C273. Zajímavé je, že zmíněný kvazar je zřejmě jediný z nalezených zdrojů, který leží vně naší Galaxie. Již dříve byl pozorován v řadě jiných spektrálních oborů a je zajímavé, že jeho svítivost (míra celkové vyzařované energie) je v gama oboru vyšší než v kterékoliv jiné oblasti. Jako mimogalaktický zdroj je kvazar 3C273 nejvzdálenějším známým zdrojem záření gama — leží asi 2,5 miliardy světelných let daleko. Zajímavý je i zdroj ρ Ophiuchi — molekulární oblast kolem této hvězdy je příkladem toho, jak i bodový zdroj může vzniknout interakcí kosmického záření s hmotou.

Protože záření gama sousedí se zářením rentgenovým, mohli bychom očekávat, že některé ze zdrojů záření gama budou vydávat i záření rentgenové. Ale kromě obou uvedených pulsarů — a to ještě v případě Vely je rentgenové záření alespoň čtyřikrát slabší, než by odpovídalo teorii — však takový zdroj známe jen jeden, Cyg X-3. Ve většině případů jsme tedy svědky mechanismu, který produkuje záření gama, ale jen zanedbatelné množství záření rentgenového. Lze říci, že žádný neidentifikovaný zdroj záření gama nemá rentgenovou svítivost větší než malý zlomek své svítivosti v gama oboru.

V několika případech zdrojů mimořádně jasných vůči pozadí bylo možno určit i energetické toky v jednotlivých spektrálních pásmech a sestavit tak tvar energetického spektra zdroje. Pozoruhodné je, že se tato spektra navzájem liší, i když alespoň dva ze zkoumaných zdrojů — pulsary Krab a Vela — si jsou fyzikálně podobné.

Nové a často překvapující poznatky o záření gama vyžadují další, složitější experimenty. Dva jsou již v přípravě — sovětští a francouzští vědci připravují na rok 1983 experiment GAMA 1, který by měl pomocí zcela nové techniky lokalizovat zdroje gama s podstatně větší přesností, než tomu bylo dosud, a tím i lépe umožnit jejich identifikaci. Americký kosmický úřad NASA zase připravuje na rok 1987 start observatoře pro gama astronomii s vysokým úhlovým i spektrálním rozlišením, která oblast pozorování rozšíří k nižším energiím, hraničícím s rentgenovou oblastí.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Jakub Filip Kulik, milovník čísel

JIŘÍ HRIVŇÁK, Libčice nad Vltavou

Zanedlouho uplyne 120 let ode dne, kdy v Praze zemřel profesor pražské univerzity, ukrajinský vzdělanec *J. Kulik*, kterého nazval *I. J. Děpman* „největším slovan-ským milovníkem čísel“. Připomeňme si životní dráhu tohoto učenice.



J. Kulik se narodil 1. května 1793 ve Lvově; rodina mu umožnila velmi dobré vzdělání doma, které si pak doplnil na klasickém gymnáziu. Na naléhavé přání rodičů se zapsal na právnickou fakultu, ale tajně i na filozofickou fakultu lvovské univerzity. Díky své pili a fenomenální paměti skládal všechny zkoušky na obou fakultách s vyznamenáním.

Po ukončení studia na univerzitě v r. 1814 se ucházel o asistenturu na některé katedře, protože chtěl vědecky pracovat. Ve Lvově se uni-

verzitním učitelem nemohl stát, dostal však od svých profesorů radu, aby se přihlásil na konkurs vypsaný olomouckým lyceem. Šlo o místo učitele matematiky a fyziky; Kulík je získal a ještě během roku se stal řádným profesorem. Po dvou letech byl přeložen na lyceum do Štýrského Hradce, které mělo rozsáhlou knihovnu a umožnilo mu vědeckou práci.

J. Kulík napsal v r. 1822 práci „O jevu duhy“, na jejímž základě získal titul doktora filozofie. Vydal též další knihy — matematické tabulky, tabulky přirozených logaritmů, tabulky pro řetězovku (křivku, kterou vytváří zavěšený řetěz či lano), tabulky všech dělitelů přirozených čísel do miliónu atd.

Když v r. 1826 vypsal pražská univerzita konkurs na obsazení katedry vyšší matematiky, Kulík se okamžitě přihlásil. Praha ho lákala, působila zde i řada jeho bývalých kolegů z Olomouce. Už na podzim r. 1826 přesídlil Kulík do Prahy a zapojil se do vědeckého života. Stal se členem Královské české společnosti nauk, v r. 1835 jejím předsedou; od r. 1837 přijal funkci knihovníka KČSN a vykonal v ní neobyčejně záslužnou práci. Zavedl signatury knih a pořídil kartotéku, dále získal mnoho cenných svazků, navázal výměnné styky atd. Jazykové znalosti mu umožňovaly rozsáhlou recenzní činnost a předávání informací dalším pracovníkům.

Profesor Kulík vystupoval skromně, vlídně k ostatním; na univerzitě se snažil vytvořit přátelskou atmosféru. Nejvíce se sblížil s ředitelem pražské hvězdárny prof. *Davidem* (proseděl s ním mnoho nocí při pozorování oblohy); mezi jeho přátele patřil i *B. Bolzano* po svém návratu do Prahy. Naproti tomu s prof. *Doplerem* vedl polemiky i na stránkách tisku.

Jako pedagog byl J. Kulík velmi oblíben, napsal také celou řadu učebnic matematiky a mechaniky pro univerzitní posluchače. Populární se stala Kulíkova záliba ve vytrvalém vypočítávání tabulek hodnot různých funkcí používaných v praxi; na žádost vinařských společností vydal tabulky pro určování objemu sudů různého tvaru, pro stavební firmy sestavoval tabulky hodnot funkcí potřebných při stavbě mostů atd. V letech 1825 až 1840 začal sestavovat tabulky nejmenších dělitelů přirozených čísel až do čísla 100 330 201; neúplné tabulky byly napsány na 4212 stranách (po vynechání všech násobků 2, 3 a 5, po zkráceném záznamu čísel). Německý matematik *K. G. Jacobi* napsal své manželce o Kulíkově práci: „Našel jsem zde člověka, který nejen s nadšením, ale s fanatickou trpělivostí dělá nejstrašnější práci, ze které i při pouhém pomyslení na ni vstávají vlasy na hlavě.“

Znalost takřka všech slovanských a románských jazyků, němčiny, angličtiny, latiny a řečtiny umožňovala Kulíkovi posuzovat odborné práce psané různými autory v těchto jazycích. Zahraniční akademie věd i další instituce se často na něho obracely se žádostmi o recenze vědeckých prací.

J. Kulik byl velmi štědrý a vždy ochoten pomoci; po požáru ve Lvovské vědecké knihovně v r. 1848 tam odeslal výpomoc 1000 vědeckých knih. Když v r. 1842 vydal (vlastním nákladem) 40 000 plakátů své „Praktické školy kreslení pro střední školy“, rozeslal je zadarmo školám v Čechách a v Haliči.

Profesor Kulik zemřel 28. 2. 1863 a byl pohřben na Olšanských hřbitovech v Praze; později byly jeho ostatky přeneseny do rodinné hrobky na Vyšehradě. Před smrtí odkázal velkou část své knihovny právě založenému studentskému Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky. Sluší se poznamenat, že byl Spolku nakloněn už od okamžiku, když ho studenti seznámili se svým záměrem; snahy zakladatelů výrazně podpořil na jaře r. 1862 při projednávání stanov u děkana fakulty. Jak známo, ze Spoku postupně vznikla dnešní Jednota čsl. matematiků a fyziků.

Uplynulo 100 let od objevu tepelné emise elektronů

FRANTIŠEK JÁCHIM, Vimperk

Roku 1879 sestrojil po vyčerpávající práci své i spolupracovníků Thomas Alva Edison první žárovku s uhlíkovým vláknem. Při nejrůznějších pokusech s novou žárovkou přišel na zajímavý jev. Jestliže vložil do baňky kromě žhavicího vlákna další vodič a spojil jej s kladným pólem, zjistil, že mezi žhavou elektrodou a přidanou elektrodou prochází elektrický proud. Ve škole ukazujeme tzv. Edisonův pokus, při němž baňku žárovky spojíme s kladně nabitým elektroskopem a pozorujeme při rozsvícení jeho vybití. Příčinou jsou elektrony emitované z rozžhaveného vlákna, jež přenášíme na elektroskop.

Edison, který neměl žádné fyzikální ani matematické vzdělání, nedovedl tento jev vysvětlit. Fyzikálně byl jev poprvé studován *Owenem Williamsem Richardsonem* v roce 1901; proto se také nazývá Richardsonův jev. Richardson předpokládal, že zvyšováním teploty vodivé látky se zvyšuje energie elektronů v této látce. Dosáhne-li energie jisté hranice, mohou elektrony látku opouštět a vytvářejí kolem ní elektronový mrak. Předpokládal rovněž, že elektrony se chovají jako molekuly v plynu a rozdělení jejich rychlostí a tím i energií je dáno zákonem Maxwell — Boltzmanovým. Vycházeje z těchto předpokladů, odvodil pro proudovou hustotu na povrchu elektrody vztah

$$i = B \sqrt{T} e - \frac{eU}{kT}, \quad (1)$$

kde B je konstanta, T teplota elektrody, e náboj elektronu, U rozdíl potenciálů elektrod a k Boltzmanova konstanta. Vcelku správně usoudil, že k tomu, aby elektron opustil „mateřskou látku“, přispívá také intenzita pole mezi elektrodami.

Dopustil se však závažné chyby — v předpokladu. Elektrony jako částice nerozlišitelné, podléhající Pauliho principu, se neřídí rozdělením Maxwell — Boltzmanovým, nýbrž statistikou Fermi — Diracovou, známou z kvantové fyziky. S použitím Fermi — Diracovy statistiky odvodil S. Dushman pro proudovou hustotu elektronů opouštějících vodič vztah

$$i = A T^2 e - \frac{eU}{kT}, \quad (2)$$

v němž A je konstanta. Výraz eU značí výstupní práci elektronu. Proti vztahu (1) je zde výrazná změna ve funkční závislosti na teplotě elektrody. S vyšší teplotou elektrody je větší pravděpodobnost, že větší část elektronů bude mít energii, vyšší než je výstupní práce, a vylétne z kovu. Pokusy ukázaly, že výstupní práce velmi klesá, je-li na povrchu elektrody tenká vrstva thoria, barya nebo cesia, resp. jejich kyslíčků. Na příklad cesiová katoda je velmi účinná již při 700 °C.

V roce 1904 přišel sir *John Ambrose Fleming*, žák Maxwellův, na konstrukci diody a využil jí k usměrňování vysokofrekvenčních kmitů. Elektronku zdokonaluje o dva roky později americký technik *Lee de Forest* přidáním třetí elektrody — mřížky, dostává tak detekční a zesilovací elektronku.

Nositel Nobelovej ceny — rodák z Bratislavy

TATJANA CANDRÁKOVÁ a TIBOR GURAJ, Gymnázium na ul. I. Horvátha
Bratislava

Tohto roku si pripomíname 120. výročie narodenia Philippa Eduarda Antona von Lenarda. Jeho meno nie je neznáme, ale málokto vie, že Philipp Lenard pochádza z Bratislavy.

Narodil sa 7. júna 1862. Študoval na univerzitách v Budapešti, Viedni, v Berlíne u *Helmholtza* a v Heidelbergu u *Bunsena*. Pretože sa po ukončení štúdií nemohol uplatniť doma, zostal natrvalo v cudzine. Po obhajobe doktorskej dizertácie v Heidelbergu sa stal asistentom na

univerzite v Bonne. Pracoval tu osem rokov pod vedením *Henricha Hertza*, ktorý mal veľký vplyv na jeho vedecké názory. Roku 1894 prešiel z Bonnu do Wroclawi a krátky čas účinkoval na univerzite v Aix-la-Chapelle. Od roku 1898 prednášal na univerzite v prístavnom meste Kiel experimentálnu fyziku. V roku 1907 sa vrátil už ako nositeľ Nobelovej ceny za fyziku do Heidelbergu, kde prevzadal katedru po *Quinckovi*. V roku 1919 sa ujal vedenia novozriadeného Rádiologického ústavu v Heidelbergu. Zomiera v Messelhausene 20. mája 1947.

Lenard pokračoval v Hertzových výskumoch katódového žiarenia. Urobil základne objavy v oblasti fosforescencie. Zistil, že vyžarovanie svetla je vyvolané vonkajším pôsobením, pod vplyvom ktorého elektróny opúšťajú svoju pôvodnú polohu, prijali teda energiu, pričom pri ich návrate na pôvodné miesto sa táto energia vyžiarila ako svetlo. Tým vznikla základná myšlienka emisie svetla, to jest, že prívod energie zvonka a jej vyžarovanie sú dva oddelené deje.

Lenardovmu veľkému experimentátorstvu v ďalšom období ďakujeme za získané základné poznatky o vonkajšom fotoelektrickom efekte. Pri fotoelektrických pokusoch sa mu podarilo dokázať, že pri ožarovaní predmetu ultrafialovými lúčmi vyžaruje elektróny. Merania prúdových a napäťových charakteristík a ich analýzy ho priviedli k pojmu „počiatočná rýchlosť“ elektrónov (rýchlosť, ktorou elektróny vyletujú z ožarovaného predmetu) a k poznaniu, že nezávisí od intenzity pôsobiaceho svetla. Poukázal na závislosť počiatočnej rýchlosti od vlnovej dĺžky žiarenia a (pri rovnakom druhu žiarenia) od ožarovanej látky. Pri skúmaní závislosti množstva vyžiarených elektrónov od intenzity pôsobiaceho žiarenia pri zachovaní jeho vlnovej dĺžky zistil úmernosť medzi oboma hodnotami. Roku 1899 dokázal Lenard, nezávisle od *Thomsona*, z vychýlenia katódového žiarenia získaného ultrafialovým svetlom a zo známeho pomeru m , že záporné častice katódového žiarenia sú zhodné s elektrónmi. K otázke priestorového náboja treba podotknúť, že Lenard hovoril o pôsobení elektrostatických síl, ktorými súčasne v priestore pôsobia na seba elektróny medzi katódou a anódou, teda o pôsobení, ktoré sa dnes nazýva pôsobenie priestorového náboja.

Lenardove práce vytvorili experimentálne predpoklady pre vznik kvantovej teórie, významne prispeli k rozvoju elektrotechniky, rádiových techník, televíznej techniky a ultramikroskopie. Neskôr sa pomocou experimentálnej techniky, ktorú Lenard vypracoval, presne zmerala hodnota Planckovej konštanty (h).

Za mnohostrannú vedeckú činnosť dostal Lenard viaceré medzinárodné ocenenia. R. 1896 mu bola zapožičaná Baumgärtnerova cena Viedenskej akadémie, v roku 1897 Rumfordova medaila Royal Society a Mattencciho medaila. Akadémia vied v Londýne, Paríži a Berlíne ho vyznamenali čestným členstvom. Najvyššieho uznania sa mu dostalo roku 1905 Nobelovou cenou.

Neslávne známym sa Lenard stal svojimi nedobrými charakterovými vlastnosťami. V honbe za slávou sa niekedy snažil privlastňovať si aj objavy, ktoré urobili iní. Medzi iným si robil nárok na prvoautorstvo röntgenového žiarenia. Smutnou stránkou Lenardovej činnosti bola politická aktivita v prospech nacistov. Vystupoval verejne s predstavami o árijskej vede (napísal štvorsväzkové dielo „Nemecká fyzika“), bojoval proti Einsteinovej teórii relativity, bol stúpencom rasizmu. Za to, že sa v hitlerovskom Nemecku ako jeden z mála fyzikov pridal k nacistickej ideológii, zaplatil izoláciou vo vedeckom svete.

Carl Ramsauer, ktorý bol viac ako trinásť rokov Lenardovým spolupracovníkom, dospel k záveru, že napriek tomu všetkému si Lenard zaslúži súcit: „Lenard bola jedna tragická osobnosť, muž svojrázny vo svojich nedostatkoch a prednostiach, ale bezpochyby veľký hľadač pravdy a bádateľ v najhlbšom slova zmysle. Ako vedec vykonal veľa pre rozvoj fyziky, a predsa jeho meno nie je úzko späté so žiadnym základným kameňom fyzikálneho rozvoja. Ako učiteľ so svojimi veľkými vedomosťami, skúsenosťami a plánovaním vždy znova zaujal svojich žiakov, a predsa sa mu nikdy nepodarilo založiť školu v pravom slova zmysle. Ako človek chcel to najlepšie, no dal sa zlákať prízrakom.“

Thales jako astronom

STANISLAV HORÁK, Praha

Jistě všichni znáte Thaletovu větu (Thaletovu kružnici) a ve své mysli máte jistě Thaleta zaneseného jako matematika. Ale Thales vynikl i v astronomii a uplatnil se i jako prozíravý politik.

Thales pocházel z města *Milétos* v Malé Asii. (*Milétos* leží při pobřeží Malé Asie asi tak na stejné rovnoběžce jako Athény.) Žil již v 1. roce 39. olympiády (tj. v r. 624 př. n. l.) a žil ještě v 1. roce 58. olympiády (r. 548 př. n. l.). Byl jedním z řeckých mudrců. Mudrcem byl člověk, který ovládal tehdejší vědecké znalosti, byl to kromě toho i zákonodárce, politik a moralista. Všechno to splňoval Thales. Původně to byl obchodník s olejem a solí. Na svých obchodních cestách se seznámil s matematickými vědomostmi Egyptanů a Babyloňanů. U těchto národů to však již byly mrtvé vědomosti; znali vzorce, znali věty, ale cestu k jejich nalezení, tj. důkazy, již neznali. Je velikou Thaletovou zásluhou, že důkazy vyslovených vět prováděl, a to následující matematické generace v Řecku velmi kladně oceňovaly. Ale chceme si něco říci o Thaletovi jako astronomovi.

Řeční mořeplavci se v tehdejší době v noci na moři řídili podle souhvězdí Malého Vozu; Thales jim doporučoval, aby se řídili podle Velkého Vozu, jako to činili féničtí plavci. Chceme-li se však zmínit o jeho největším astronomickém úspěchu, který mu přinesl velkou slávu, řekneme si předtím něco o politických dějinách Malé Asie.

Bylo to r. 585 př. n. l. a v Malé Asii na řece Halys se střetla dvě vojska; Lydové s najatými řeckými žoldnéři se tu utkali s Médy. Během bitvy došlo k zatmění Slunce. To na obě vojska zapůsobilo tak skličujícím dojmem, že složila zbraně a odmítla bojovat. Panovníci byli tak donuceni uzavřít mír.

Proč tato epizoda stojí za naši zmínku? Inu proto, že toto zatmění předpověděl Thales. Ale schopnost předpovídat zatmění Slunce či Měsíce může jen ten, kdo má zaznamenáno pozorování Slunce či Měsíce za delší dobu. Jeden lidský život na to rozhodně nestačí. Z toho soudíme, že Thales skutečně v Babylonii byl (tam totiž předpovídali zatmění Slunce) a odtamtud si přinesl výsledky astronomických pozorování do své vlasti. Předpovědi své spoluobčany nesmírně udivil. Již předtím získal na vážnosti jako prozíravý politik a nyní se jeho sláva a proslulost ještě zvýšila. Víme, že od obce dostával doživotní rentu, čímž byl hmotně zajištěn, a že zemřel jako velmi vážený občan.

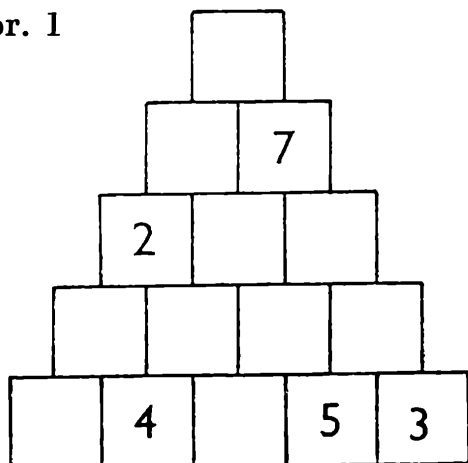
PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Dvě úlohy

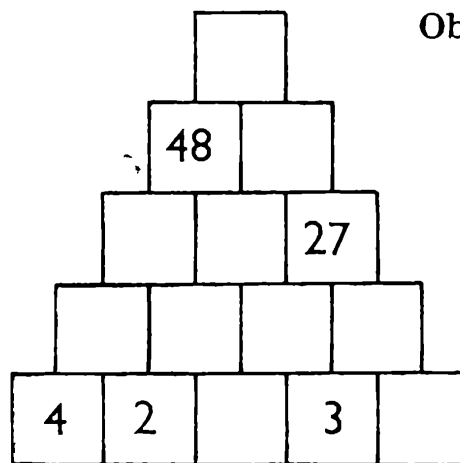
Do prázdných čtverečků vepište čísla, pro která platí tato podmínka: součet dvou sousedních čísel zmenšený o 3 je roven číslu ve čtverečku nad nimi. Vepsaná čísla je nutno respektovat. (Obr. 1.)

Řešení: Dolní řada je 1, 4, 2, 5, 3.

Obr. 1



Obr. 2



Do prázdných políček vepište čísla, pro která platí tato podmínka: poloviční součin dvou sousedních čísel (ve stejném řádku) je roven číslu v políčku nad nimi. Vepsaná čísla je nutno respektovat. (Obr. 2.)

Řešení: Dolní řada je 4, 2, 4, 3, 6.

Stanislav Horák

OLYMPIÁDY A SOČ

Malá matematická olympiáda

Ve školním roce 1982/83 probíhá ve Slovenské socialistické republice třetí ročník matematické soutěže určené pro žáky 5. až 7. ročníku kladných škol. Tato soutěž se jmenuje Malá matematická olympiáda.

Žáci soutěží ve třech kategoriích podle toho, zda navštěvují 5., 6. nebo 7. ročník. Soutěž má dvě kola. Úlohy I. kola, jichž je v každé kategorii celkem osm, řeší účastníci doma a odevzdávají ve stanovených termínech svému učiteli matematiky. II. kolo organizují okresní výbory MO. Má formu klauzurní zkoušky, při níž vybraní nejlepší řešitelé I. kola řeší v určeném čase samostatně tři až čtyři úlohy. Soutěžící, kteří získají předepsaný počet bodů, se stávají úspěšnými řešiteli II. kola a nejlepší z nich jsou odměněni.

Soutěžní úlohy jsou náročnější než úlohy ze školních učebnic a sbírek. Na ukázkou otiskujeme z letošního I. kola tři úlohy, první z nich je pro žáky 5. roč., druhá pro žáky 6. roč. a třetí pro žáky 7. roč. základních škol.

Kolko štvorciferných čísel, ktoré majú číslicu 7 na mieste desiatok a číslicu 9 na mieste stoviek, dáva pri delení číslom 45 ako podiel prirodzené číslo? Nájdite ich.

Koľkými rôznymi spôsobmi sa dá z tabuľky

K	O	T	R	M
O	T	R	M	E
T	R	M	E	L
R	M	E	L	E
M	E	L	E	C

prečítať slovo KOTRMELEC, ak čítame cez susedné políčka buď zľava doprava alebo zhora nadol?

Janko, Anička a Peter sú súrodenci. V tomto roku má Anička dvakrát toľko rokov ako Janko. O tri roky bude mať Janko polovicu Petrovho veku a pred tromi rokmi mal Peter dvakrát toľko rokov ako Anička. Určte vek každého z nich.

jm

Z NOVÝCH KNIH

E. Namer:

PŘÍPAD GALILEI

Mladá fronta, Praha 1982
200 stran, 15 Kčs

Především zájemcům o historii fyziky a astronomie je určena kniha o jedné z nejvýznamnějších osobností období renesance. Publikaci můžeme zařadit mezi literaturu faktu, neboť je tvořena převážně citacemi autentických textů volně spojenými autorovým komentářem. Kromě životopisu se čtenář seznámí se základními fyzikálními výsledky uvedenými v dílech *Rozpravy o dvou vědách* (1638) a *Hvězdný posel* (1610). Mnohé významné objevy a výsledky Galileiovy práce jsou však často poprvé zachyceny ve vědcově korespondenci; dokazují to výňatky

adresované kolegům, přátelům i nejvyšším představitelům církve.

Publikace obsahuje také dokumenty týkající se procesů, jež byly proti Galileiovi vedeny. Dokázal totiž platnost Koperníkova systému na základě pozorování. Jeho pozorování Měsíce, Slunce i Mléčné dráhy zasazovala těžké rány církevní kosmologii. Svá astronomická pozorování chtěl Galilei shrnout ve dvou dílech, avšak zhoršující se zdravotní stav, zvláště pak slepota, mu znemožnily práci dokončit. Od roku 1639 měl u sebe mladého studenta Vivianiho, který se stal jeho nejslavnějším životopiscem.

Galileiho dílo je velmi pěkně zhodnoceno v doslovu P. Horáka. Publikace je vhodná pro studenty všech typů středních škol.

František Jáchim

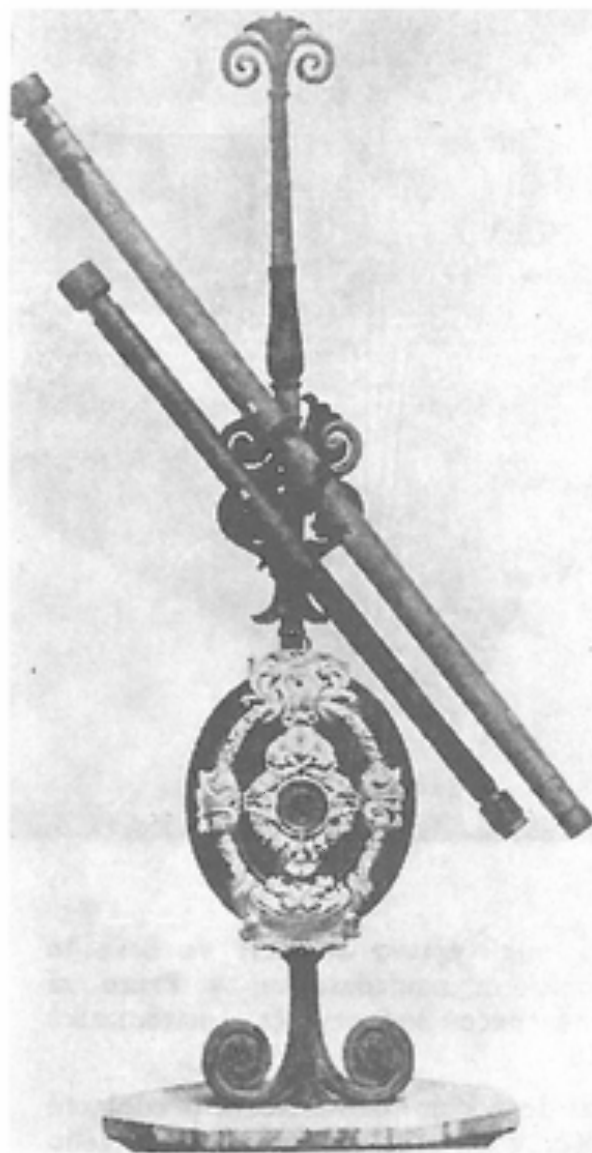
POHLEDY DO DĚJIN

Galileiho dvojitý dalekohled

První zmínka o možnosti sestavit optický přístroj, jímž by bylo možno „viděti věci v dálce lépe a blíže“ pochází sice od *Rogera Bacona* (1250), ale první konstruktér dalekohledu žil asi v 90. letech 16. století v Itálii a je dnes neznámý. Prý jen o málo později a snad nezávisle sestrojili dalekohled holandští skláři *Lippershey*, *Metius* a *Janssen*. Je zajímavé, že vojenské úřady v Holandsku se snažily na jedné straně vynález utajit (pro jeho nesmírné výhody v námořních bojích), ale na druhé straně váhaly r. 1604 udělit patent *Janssenovi* a r. 1608 *Lippersheyovi*, jako by už nešlo o věc dosud zcela neznámou.

Zpráva o existenci „přibližujícího optického přístroje“ se donesla r. 1609 *Galileimu*, který brzy sám sestrojil svůj dalekohled s rozptylným objektivem — a aby bylo možno pozorovat oběma očima, spojil dva stejné přístroje, jak vidíte na obrázku. Jako první jej použil k pozorování astronomickém. Objevil čtyři měsíce Jupiterovy, fáze Venuše, hory na Měsíci, skvrny na Slunci a spatřil to, co pouze tušil Bruno, že totiž Mléčná dráha je systém tvořený nesmírným množstvím hvězd téhož řádu jako Slunce.

Pro astronomická pozorování



navrhl *Kepler* (1611) opticky daleko vhodnější, leč převracející dalekohled astronomický, avšak nesestrojil jej. Tzv. Keplerův dalekohled sestrojil dříve jeho rival *Ch. Scheiner* (1613). Nitkový kříž zavedl do dalekohledu r. 1667 *A. Anzout*, čímž se mohl dalekohled stát z přístroje pozorovacího přístrojem měřícím a zaměřovacím; je zajímavé, že teprve tím padly námitky některých astronomů té doby, že astronomická pozorování (a měření) jsou přesnější bez dalekohledu než s ním.

V. Malíšek

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálů k publikaci v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podl. § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kačková 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1982.

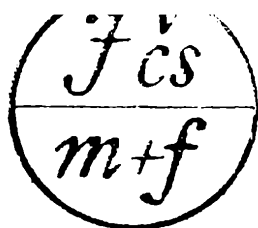
ROZHLEDY

matematicko – fyzikální

ROČNÍK 61, 1982/83
BŘEZEN

(7)

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, doc. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šinde-lář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.

Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

E. Kraemer: Zajímavá úloha z učiva zá- kladní školy	273
L. Vaňatová: Jak využít diskriminanty k důkazům	277
J. Než Zamyšlení nad dělitelností faktoriálu	280
L. Drs: Průmět obecným směrem	282
E. Veselá: Co je to kybernetika?	285
J. Kotyk: Počátky hudební akustiky	288
M. Ohera: Radioaktivita kolem nás	290
J. Sedlák: Urychlovače pro studium struk- tury hmoty	297
R. Hudec: Venuše v novém světle	305
J. Kotyk: Albert Einstein a Praha	308
Přemýšlíme, řešíme	310
Z nových knih	316
Pohledy do dějin	3. str. obálky
J. Pech: Slovník matematických termínů (17-20)	příloha

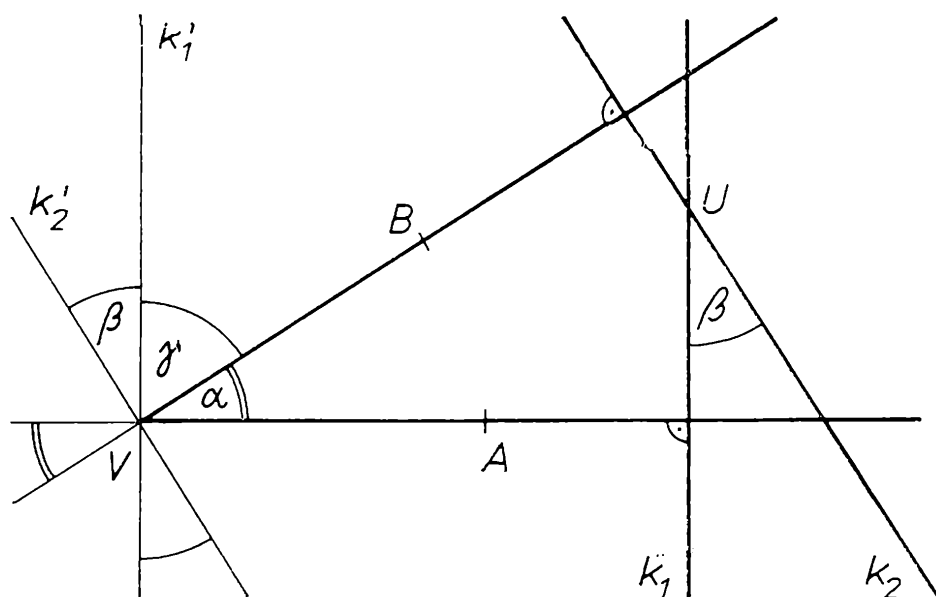
Zajímavá úloha z učiva základní školy

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Při čtení tohoto článku vystačíme se znalostmi geometrie vyučované na základní škole. Především snadno dokážeme tuto větu:

Dva ostré nebo dva tupé úhly, jejichž ramena jsou vzájemně kolmá, jsou shodné.

Na obr. 1 je zobrazen ostrý úhel AVB o velikosti α a libovolný bod U , jímž jsou vedeny přímky $k_1 \perp VA$, $k_2 \perp VB$. Přímky k_1 , k_2 svírají dva shodné (vrcholové) ostré úhly; velikost každého z nich budiž β . Posuneme-li přímky k_1 , k_2 tak, aby bod U splynul s bodem V , přejdou tyto



Obr. 1

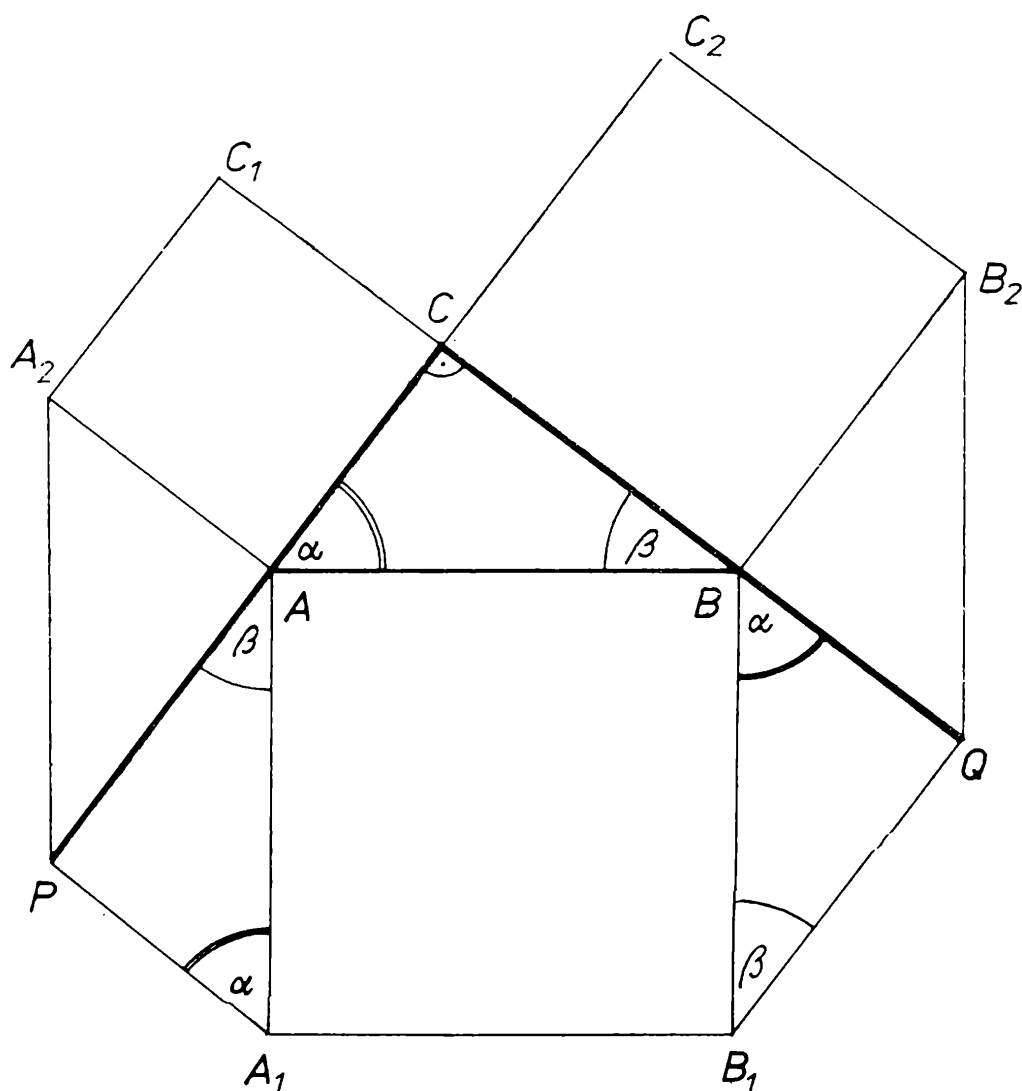
přímky do přímek $k_1' \perp VA$, $k_2' \perp VB$, které svírají ostré úhly o velikosti β . Je-li γ velikost ostrého úhlu přímek VB , k_1' , je zřejmé

$$\alpha + \gamma = 90^\circ, \quad \beta + \gamma = 90^\circ,$$

a tedy je $\alpha = \beta$. Z toho plyne, že jsou shodné také tupé úhly sevřené přímkami VA , VB , resp. přímkami k_1 , k_2 .

Na obr. 2 je pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Nad každou jeho stranou je sestaven čtverec tak, aby jeho průnik s trojúhelníkem ABC byla právě strana tohoto trojúhelníku; jsou to čtverce ABB_1A_1 ,

Obr. 2



BCC_2B_2 , CAA_2C_1 . Konečně jsou sestrojeny rovnoběžníky A_2AA_1P , B_2BB_1Q . Je-li přesně rýsováno, leží body C , A , P v přímce a rovněž body C , B , Q leží v přímce; úhel PCQ je tedy pravý. Zároveň jsou úsečky CP , CQ shodné. Snadno dokážeme, že tento výsledek platí pro každý pravoúhlý trojúhelník ABC .

Protože úhel ACB je pravý, jsou úhly BAC , CBA o velikostech α , β ostré; zároveň je

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (1)$$

Z toho a z konstrukce čtverců CAA_2C_1 , BCC_2B_2 plyne, že body A_2 , B_2 leží uvnitř poloroviny ABC ; proto úhly A_2AA_1 , B_2BB_1 jsou tupé. Z rovnoběžníků A_2AA_1P , B_2BB_1Q potom plyne, že úhly AA_1P , BB_1Q jsou ostré.

Úhly AA_1P , BAC jsou ostré a jejich ramena jsou vzájemně kolmá; podle výše dokázané věty je tedy

$$|\sphericalangle AA_1P| = |\sphericalangle BAC| = \alpha. \quad (2)$$

Z konstrukce čtverců ABB_1A_1 , CAA_2C_1 a rovnoběžníku A_2AA_1P plyne, že je

$$|AA_1|' = |AB|, \quad (3)$$

$$|A_1P| = |AA_2| = |AC| \quad (4)$$

Z (2), (3) a (4) plyne, že je

$$\triangle A_1AP \cong \triangle ABC \text{ (sus)}; \quad (5)$$

obdobně dokážeme, že je

$$\triangle BB_1Q \cong \triangle ABC \text{ (sus)} \quad (6)$$

Z (5), resp. z (6) plyne, že je

$$|AP| = |BC|, \quad |AC| = |BQ|, \quad (7)$$

$$|\sphericalangle A_1AP| = |\sphericalangle ABC| = \beta, \quad (8)$$

$$|\sphericalangle B_1BQ| = |\sphericalangle BAC| = \alpha. \quad (9)$$

Z konstrukce plyne, že bod P je vnitřním bodem poloroviny opačné k polorovině A_1AB . Grafickým součtem úhlů BAC , A_1AB , A_1AP o velikostech α , 90° , β je úhel CAP . Z (1) plyne, že je $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, takže úhel CAP je přímý, tj. body C , A , P leží v přímce. Zcela obdobně zjistíme, že body C , B , Q leží v přímce. Z toho podle (7) plyne, že je

$$|CP| = |AC| + |AP| = |AC| + |BC|$$

$$|CQ| = |BC| + |BQ| = |BC| + |AC|;$$

úsečky CP , CQ jsou tedy shodné.

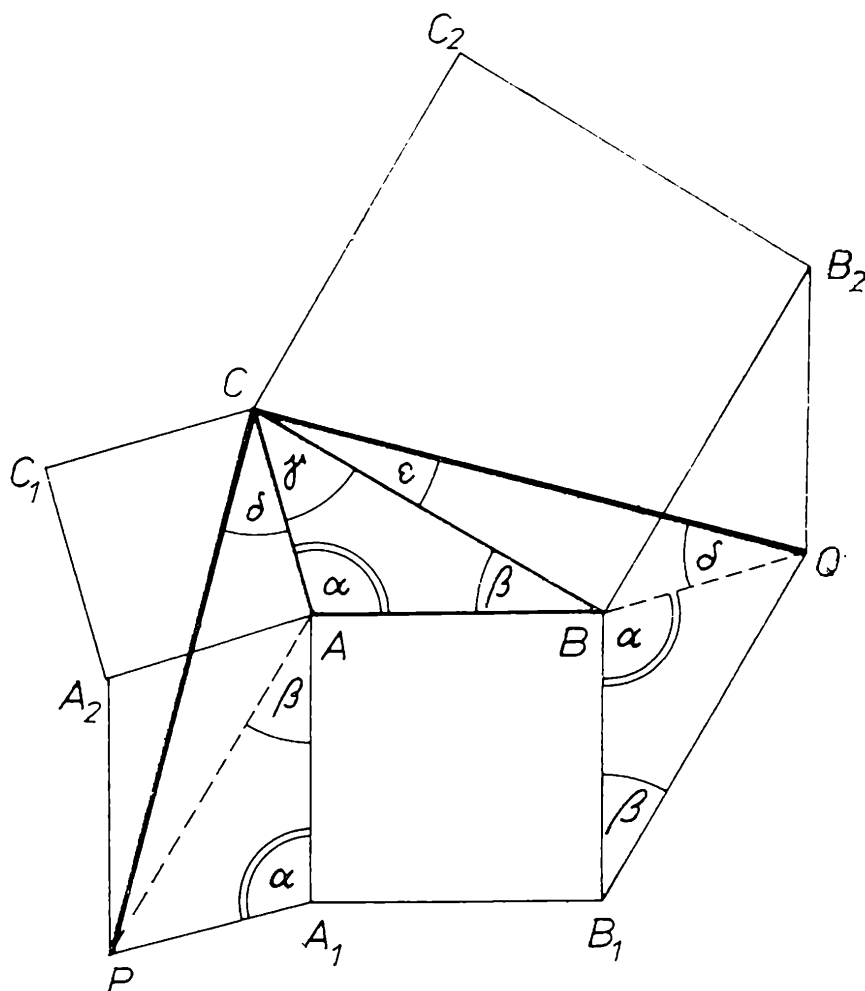
Je zajímavé, že výsledek výše popsané konstrukce bodů P , Q je týž, i když úhel ACB není pravý; to znamená, že i v tomto případě je $|CP| = |CQ|$ a úhel PCQ je pravý. Dokážeme to nyní pro případ, kdy úhel ACB o velikosti γ je ostrý; potom je

$$\alpha + \beta > 90^\circ. \quad (10)$$

V tomto případě může být trojúhelník ABC tupouhlý, pravoúhlý nebo ostroúhlý; pravý nebo tupý úhel může ovšem být jen při některém z vrcholů A , B . Důkaz provedeme pro případ, kdy úhel BAC je tupý; důkaz je však v podstatě týž i když úhel BAC je pravý nebo ostrý. Obrázky pro oba tyto případy si čtenář nakreslí sám.

Je-li úhel BAC tupý (obr. 3), leží bod A_2 uvnitř poloroviny opačné k polorovině ABC ; proto úhel A_2AA_1 je ostrý a úhel AA_1P je tupý. Úhly AA_1P , BAC jsou tupé a jejich ramena jsou vzájemně kolmá; podle věty dokázané na počátku článku jsou tedy tyto úhly shodné. Platí tedy opět (2); z konstrukce plyne, že platí také (3) a (4). Z (2), (3), (4) plyne (5); zcela obdobně dokážeme, že platí také (6). Z (5) a (6) potom plyne, že platí (7), (8), (9).

Obr. 3



Z konstrukce plyne, že bod P je vnitřním bodem poloroviny opačné k polorovině A_1AB . Grafickým součtem úhlů BAC , A_1AB , A_1AP o velikostech α , 90° , β je úhel CAP . Protože platí (10), je $\alpha + \beta + 90^\circ > 180^\circ$; uvedený úhel CAP není tedy konvexní. Zároveň je patrné, že pro velikost konvexního úhlu CAP platí:

$$|\sphericalangle CAP| = 360^\circ - (\alpha + \beta + 90^\circ).$$

Zcela obdobně zjistíme, že je

$$|\sphericalangle QBC| = 360^\circ - (\alpha + \beta + 90^\circ). \quad (11)$$

Konvexní úhly CAP , QBC jsou tedy shodné; z toho a ze (7) plyne, že je

$$\triangle CAP \cong \triangle QBC \text{ (sus);} \quad (12)$$

proto je $|CP| = |CQ|$. Zbývá dokázat, že úhel PCQ je pravý.

Bod P je vnitřním bodem ostrého úhlu A_2AA_1 , který je částí tupého úhlu CAA_1 ; proto je bod P vnitřním bodem tupého úhlu CAA_1 , a tedy vnitřním bodem poloroviny CAA_2 . Polopřímka CA proto rozděluje úhel PCB . Protože je

$$|B_2Q| = |BB_1| = |AB| < |BC|$$

(neboť je $\gamma < \alpha$), je $|B_2Q| < |BB_2| = |BC|$; proto bod Q je vnitřním

bodem poloroviny BCB_2 . Z toho plyne, že polopřímka CB rozděluje úhel ACQ . Úhel PCQ je tedy grafickým součtem úhlů PCA , ACB , BCQ o velikostech δ , γ , ε . Z (12) plyne, že je

$$\delta = |\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle BQC|;$$

z trojúhelníku QBC plyne, že je

$$\delta + \varepsilon = 180^\circ - |\sphericalangle QBC|$$

Z toho podle (11) plyne, že je

$$\delta + \varepsilon = 180^\circ - 360^\circ + (\alpha + \beta + 90^\circ) = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

Protože je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, je

$$|\sphericalangle PCQ| = \gamma + \delta + \varepsilon = \gamma + \alpha + \beta - 90^\circ = 90^\circ.$$

Zbývá dokázat, že úsečky CP , CQ jsou shodné a úhel PCQ je pravý i tehdy, jestliže úhel ACB je tupý. Důkaz je však jen obdobou právě provedeného důkazu. Rozdíl je v tom, že je $\alpha + \beta < 90^\circ$, takže velikost každého z konvexních úhlů CAP , CBQ je $\alpha + \beta + 90^\circ$; úhel PCQ je částí tupého úhlu ACB a má velikost rovnou $\gamma - (\delta + \varepsilon)$. Přitom $\delta + \varepsilon = 180^\circ - (\alpha + \beta + 90^\circ) = 90^\circ - (\alpha + \beta)$.

Jak využít diskriminanty k důkazům

Doc. Ing. dr. LADA VAŇATOVÁ, PF České Budějovice

Pokračujeme ještě v tématu, jak postupovat při důkazech nerovností (Rozhledy, č. 6). Tentokrát ze školských znalostí připomeneme jen diskriminant kvadratických trojčlenů; častěji se nazývá diskriminantem kvadratických rovnic, ale my ho výhodně využijeme pro nerovnice.

Všichni už z 1. ročníku středních škol víte, že o hodnotách kvadratických trojčlenů $ax^2 + bx + c$ lze dokázat:

(1) Při $a > 0$ platí

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ pro všechna reálná } x, \text{ právě když } b^2 - 4ac < 0.$$

Vtip naší nové metody spočívá v tom, že budeme dokazovat nerovnost vlevo pomocí té vpravo nebo obráceně. Případy, kdy je dána neostrá nerovnost vlevo, vedou k neostré nerovnosti pro diskriminant vpravo.

Příklad 1. Dokažte, že pro všechna reálná čísla x , y platí

$$x^2 - xy + y^2 - x + y + 1 > 0.$$

Řešení. Proměnnou y zvolíme za parametr a výraz vlevo zapíšeme jako kvadratický trojčlen s proměnnou x :

$$x^2 - (y + 1)x + (y^2 + y + 1) > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Diskriminant } D &= (y+1)^2 - 4(y^2+y+1) = y^2 + 2y + 1 - 4y^2 - 4y - 4 = \\ &= -3y^2 - 2y - 3 = -3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + 1\right) = \\ &= -3\left[\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}\right] \end{aligned}$$

Platí tedy, že $D < 0$ a koeficient u x^2 je kladný, proto podle věty (1) pro všechna reálná x, y platí

$$x^2 - (y + 1)x + (y^2 + y + 1) > 0.$$

A tím je dokázána i daná nerovnost.

Příklad 2. Dokažte, že pro každé dvě dvojice $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ reálných čísel platí

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Řešení. Tentokrát přidáme proměnnou x a budeme hledat kvadratický trojčlen $Ax^2 + Bx + C$, jehož záporný diskriminant $B^2 - 4AC$ bude vyjádřen pomocí výrazů zastoupených v dané nerovnici:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

K tvaru $B^2 - 4AC$ už mnoho nechybí; stačí násobit čtyřmi:

$$4(a_1b_1 + a_2b_2)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Položíme tedy $A = a_1^2 + a_2^2$, $B = 2(a_1b_1 + a_2b_2)$, $C = b_1^2 + b_2^2$, zapíšeme trojčlen s parametry a_1, a_2, b_1, b_2 :

$$(a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)x + (b_1^2 + b_2^2)$$

a budeme diskutovat.

a) Je-li $a_1^2 + a_2^2 = 0$, trojčlen není kvadratický a věty (1) nemůžeme využít. Ale z $a_1^2 + a_2^2 = 0$ plyne, že $a_1 = a_2 = 0$, daná nerovnice je splněna, obě strany se rovnají nule.

b) Je-li $a_1^2 + a_2^2 > 0$, pokračujeme v úpravě trojčlenu:

$$\begin{aligned} (a_1^2x^2 + 2a_1b_1x + b_1^2) + (a_2^2x^2 + 2a_2b_2x + b_2^2) = \\ = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Poslední součet dvou nezáporných čísel svědčí o tom, že diskutovaný trojčlen nabývá jen nezáporných hodnot, podle věty (1) má nekladný diskriminant:

$$4(a_1b_1 + a_2b_2)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \leq 0$$

A odtud snadno zdůvodníme původně danou nerovnost.

Postup uplatněný v příkladě 2 lze zcela obdobně použít k důkazu obecné věty o tzv. *Cauchyho nerovnosti*:

Pro každé dvě n -tice reálných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ platí:

$$(2) \quad (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Ti z vás, kteří už znají skalární součin a velikost vektorů daných souřadnicemi, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, si mohou zapamatovat vektorové vyjádření (2') věty (2), resp. z něho odvozenou nerovnost (3):

$$(2') \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2,$$

$$(3) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

Také tyto nerovnosti zařadte do arsenálu svých prostředků k důkazům vět o nerovnostech.

Příklad 3. Dokažte, že pro každá tři kladná reálná čísla a, b, c platí:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

Řešení. Lze uplatnit postup z příkladu 2, ale kratší je aplikovat větu (2), resp. (3). Obě strany nerovnice vynásobíme kladným číslem abc , vyjde

$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

Pro uspořádané trojice čísel $(bc, ac, ab), (ac, ab, bc)$ dostaneme z věty (2):

$$(abc^2 + a^2bc + ab^2c)^2 \leq (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)(a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2)$$

Až na pořadí sčítanců jsou v závorkách vpravo stejné výrazy, proto i tam lze zapsat druhou mocninu a odmocnit

$$|a^2bc + ab^2c + abc^2| \leq |b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2|.$$

Výrazy v absolutní hodnotě na obou stranách jsou nezáporné, znaky absolutní hodnoty můžeme vynechat; dostaneme

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2.$$

To už je nerovnice, kterou jsme získali jako ekvivalentní s danou (dělíme-li ji abc , vyjde daná nerovnice).

Viděli jste, že diskriminanty kvadratických trojčlenů lze využít vcelku pozoruhodnými způsoby k důkazům některým nerovnostím.

Cvičení

1. Postup z příkladu 1 použijte k důkazu nerovností platných pro každá tři reálná čísla a, b, c :

$$a) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \quad b) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a + b + c) - 3.$$

2. Nerovnici danou v příkladě 3 dělte abc , a pak uplatněte vektorové vyjádření Cauchyho nerovnosti.
3. Zvolte vhodné způsoby pro důkazy nerovností platných pro každá tři kladná reálná čísla x, y, z :
a) $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$, b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
4. Vyjádřete trojúhelníkovou nerovnost $|AB| + |BC| > |AC|$ v souřadnicích a algebraicky ji dokažte v rovině i v prostoru.

Zamyšlení nad dělitelností faktoriálu

RNDr. JIŘÍ NEČAS, Praha

Ve svých úvahách nebudeme považovat nulu za přirozené číslo. Zjednoduší se tak vyjadřování vět o dělitelnosti přirozených čísel. Všechny proměnné budou označovat přirozená čísla.

Z definice $n! = n(n - 1) \dots 1$. 3.2.1 je hned patrné, že číslo $n!$ je dělitelné všemi přirozenými čísly menšími nebo rovnými n . Položme si nyní otázku, zda je vůbec někdy číslo $n!$ dělitelné i číslem $n + 1$, případně i otázku, pro která čísla n je $n!$ dělitelné číslem $n + 1$.

Při hledání odpovědi na takovéto otázky bývá vhodné nejprve najít odpověď pro některá přirozená čísla. Odtud pak často lze vypožorovat určitou zákonitost a tu ve formě hypotézy (domněnky) zobecnit na množinu všech přirozených čísel. Má-li se hypotéza stát matematickou větou, je ovšem třeba ji dokázat.

V našem případě poslouží k formulaci hypotézy tabulka, která obsahuje údaje pro čísla $n = 1, 2, \dots, 12$. Po prohlédnutí tabulky vyslovíme hypotézu:

(A) *Jestliže číslo $n!$ je dělitelné číslem $n + 1$, pak $n + 1$ je složené číslo.* Z tabulky také vidíme, že obrácená hypotéza platit nemůže. Číslo $4 = 3 + 1$ je složené, avšak číslo $3! = 6$ jím není dělitelné. Pro ostatní složená čísla $n + 1$, která jsou v tabulce 1 uvedena, však již platí, že $n + 1$ je dělitelem čísla $n!$. Vyslovme proto hypotézu:

(B) *Je-li $n + 1$ složené číslo větší než 4, pak číslo $n!$ je dělitelné číslem $n + 1$.*

Obě vyslovené hypotézy dokážeme. Víme, že každé přirozené číslo $m > 1$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad (1)$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla,

Tabulka 1

n	$n!$	$n + 1$	zbytek při dělení čísla $n!$ číslem $n + 1$	je $n!$ dělitelný číslem $n + 1$?
1	1	2	1	ne
2	2	3	2	ne
3	6	4	2	ne
4	24	5	4	ne
5	120	6	0	ano
6	720	7	6	ne
7	5 040	8	0	ano
8	40 320	9	0	ano
9	363 880	10	0	ano
10	3 628 800	11	10	ne
11	39 916 800	12	0	ano
12	479 001 600	13	12	ne

$p_1 < p_2 < \dots < p_k$ a $a_1, a_2, \dots, a_k$ jsou přirozená čísla. Vyjádření čísla m ve tvaru (1) říkáme *prvočíselný rozklad čísla m* .

Důsledkem jednoznačnosti prvočíselného rozkladu čísla m je několik tvrzení o dělitelích čísla m ; vyslovíme je jako pomocné věty:

Pomocná věta 1: Jestliže přirozené číslo m lze vyjádřit jako součin přirozených čísel

$$m = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_r, \quad (2)$$

pak každé prvočíslo $p_1, p_2, \dots, p_k$ v rozkladu (1) čísla m je menší nebo se rovná největšímu z čísel $b_1, b_2, \dots, b_r$.

Pomocná věta 2: Nechť přirozené číslo m lze vyjádřit ve tvaru součinu (2). Pak každý dělitel čísla m , který je větší než kterýkoli z čísel $b_1, b_2, \dots, b_r$, je složené číslo.

Podle definice je $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Protože $n + 1 > n$, plyne z pomocné věty 2 tvrzení, které jsme zformulovali jako hypotézu A. Platnost hypotézy A je tedy dokázána.

Abychom ověřili, že i hypotéza B platí, použijeme další pomocnou větu.

Pomocná věta 3. Každé složené číslo m lze vyjádřit jako součin dvou různých činitelů c_1, c_2 takových, že $1 < c_1 < m$, $1 < c_2 < m$, právě když m není druhou mocninou prvočísla. Je-li $n + 1$ složené číslo, které není druhou mocninou prvočísla, je $n + 1 = c_1 \cdot c_2$ a mezi činiteli v součinu $n! = n(n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ se nutně vyskytuje jak c_1 , tak c_2 . Číslo $n!$ je tedy dělitelné číslem $c_1 \cdot c_2 = n + 1$. Jestliže $n + 1$ je druhou mocninou prvočísla p , tj. $n + 1 = p^2$, rozlišme $p = 2$ a $p > 2$.

Případ, kdy $p = 2$, jsme vyloučili. Pro $p > 2$ jsou čísla p a $2p$ navzájem

různá přirozená čísla, která jsou menší než n a vystupují tedy jako činitelé v součinu $n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$. Číslo $n!$ je dělitelné jejich součinem $2p^2$. Protože $2p^2 = 2(n+1)$, je $n!$ dělitelné i číslem $n+1$.

Můžeme tedy vyslovit větu:

Nechť n je přirozené číslo, $n > 3$. Pak číslo $n!$ je dělitelné číslem $n+1$, právě když $n+1$ je složené číslo.

Tabulka nás může vést k vyslovení ještě jedné zajímavé hypotézy:
(C) *Nechť $n+1$ je prvočíslo. Pak zbytek při dělení čísla $n!$ číslem $n+1$ je roven číslu n .*

Tuto hypotézu můžeme vyslovit v přehlednějším tvaru:

(C') *Nechť $n+1$ je prvočíslo. Pak číslo $n! + 1$ je dělitelné číslem $n+1$.*
Prostředky teorie algebraických struktur lze obě hypotézy dokázat snadno a přehledně; důkaz elementárními metodami by byl poměrně zdlouhavý, a proto jej zde nebudeme uvádět. Čtenáři s hlubším zájmem o algebru se o něj mohou pokusit sami.

Průmět obecným směrem

Doc. dr. ing. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT Praha

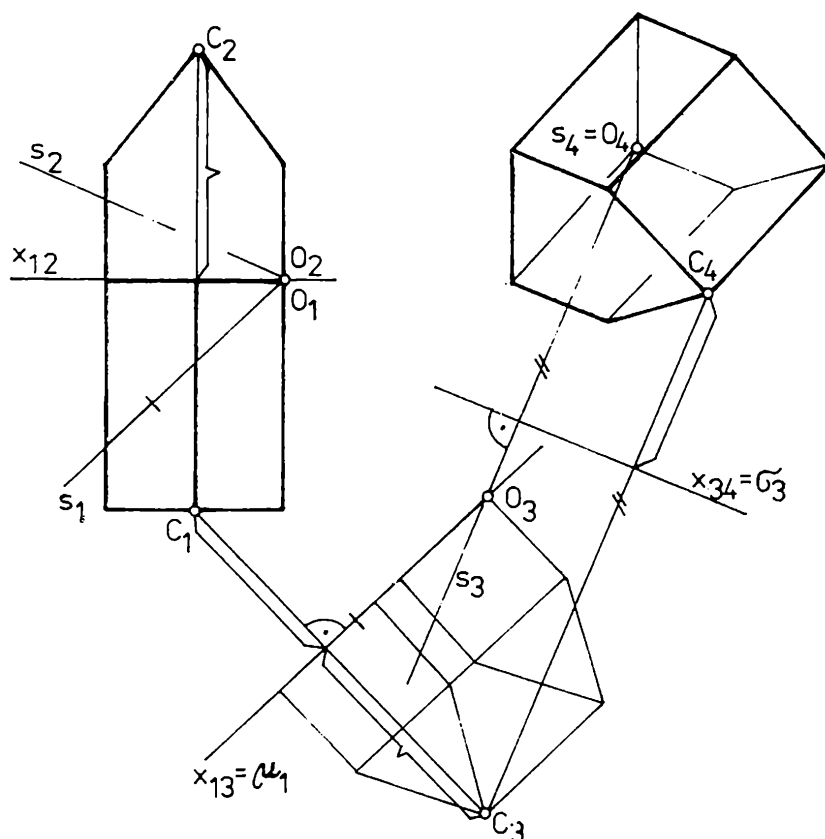
Geometrické objekty zobrazujeme obvykle tak, aby jejich průmět byl co nejjednodušší, zejména v technickém kreslení. Tak je na obr. 1 vlevo zobrazena v Mongeově promítání schematicky zjednodušená budova. Půdorys je průmět ve směru svislých hran budovy, takže se čtyři svislé stěny promítají do úseček. Podobně se zjednodušuje nárys, čtyři hrany budovy a hřeben sedlové střechy se promítají do bodů.

Pro některé účely je však nutno promítat útvar obecným směrem, obr. 1 vlevo. Je to zejména tehdy, když vyžadujeme, aby průmět působil názorně. Jiný důvod je uveden v článku „Udělejte si nemožné“ Rozhledy roč 60, č. 9, str. 418—420.

Deskriptivní geometrie má několik možností, jak takový průmět sestavit.

1. Dvojnásobná transformace.

Zvolíme pomocnou průmětnu μ rovnoběžnou s přímkou s a kolmou k půdorysně. Její přímkový půdorys μ_1 , základnice x_{13} , je rovnoběžný s přímkou s_1 . Pomocný třetí průmět budovy a přímky s sestojíme známým způsobem, obr. 1 vpravo. Na obr. je naznačena pouze konstrukce bodu C_3 . Další základnici x_{34} zvolíme kolmo k přímce s_3 . Tato základnice je průmětem σ_3 další čtvrté průmětny σ kolmé k rovině μ . Čtvrtý průmět



mět budovy sestrojíme podobně jako třetí. Na obr. 1 vpravo je opět naznačena pouze konstrukce bodu C_4 . Čtvrtý průmět s_4 přímky s je bod, a protože přímka s prochází bodem O , je $s_4 = O_4$. Čtvrtý průmět je proto kolmý průmět směrem s do průmětny σ .

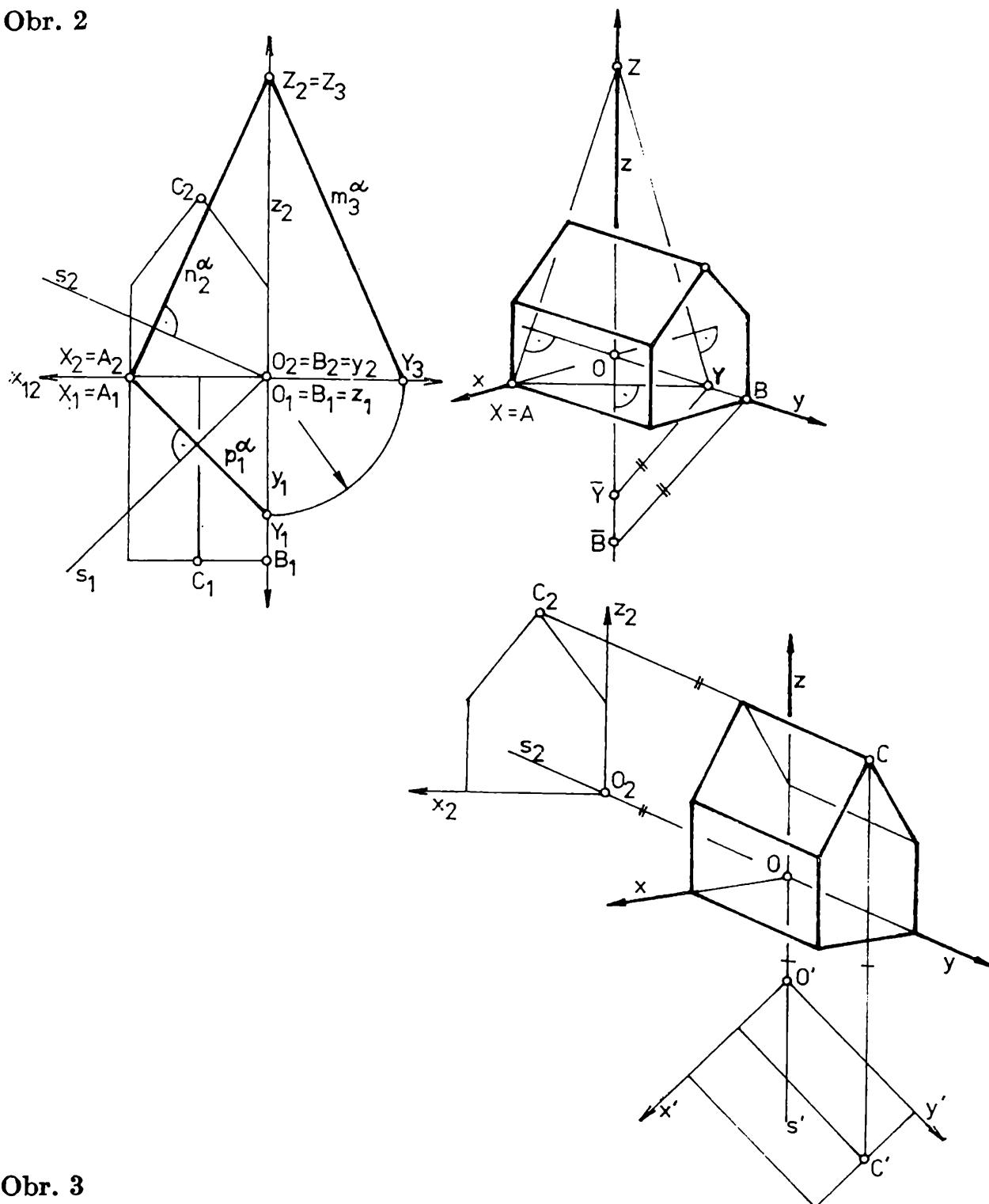
Nevýhodou této metody je pracnost. Nepříznivě působí i šikmé průměty svislých hran budovy.

2. Kolmá axonometrie

Za axonometrickou průmětnu zvolíme rovinu α bodem A kolmou k přímce s , takže průměty stop p_1^α, n_2^α jsou kolmé k průmětům s_1 a s_2 , obr. 2 vlevo. Souřadnicovou soustavu zvolíme podle obr. Průsečíky $X = p^\alpha \cdot x, Y = p^\alpha \cdot y, Z = n^\alpha \cdot z$ jsou vrcholy axonometrického trojúhelníka XYZ , v němž axonometrická průmětna α protíná souřadnicové roviny xy, xz a yz . Délky stran XY a XZ jsou $\overline{X_1Y_1}$ a $\overline{X_2Z_2}$. Délku strany XZ určíme ze stranorysu, $\overline{YZ} = \overline{Y_3Z_3}$. Na obr. 2 vpravo je z těchto délek sestrojen axonometrický trojúhelník tak, že strana XY je rovnoběžná s podélnou stranou nákresny. Výšky v axonometrickém trojúhelníku tvoří osový kříž ($O^a x^a y^a z^a$), v němž je osa z^a rovnoběžná s příčnou stranou nákresny. Na obr. jsou indexy a vynechány. V takto určené axonometrii lze známým způsobem zobrazit objekt z obr. 1.

I tato konstrukce je poměrně komplikovaná, i když lze obejít konstrukci axonometrických jednotek tím, že použijeme větu o zachování dělicího poměru promítáním. Tak je např. $(O_1B_1Y_1) = (O^aB^aY^a)$ atd.

Obr. 2



Obr. 3

Proto, sestrojíme-li na ose z^a body $\bar{Y}$ a $\bar{B}$ tak, aby $\overline{O\bar{Y}} = \overline{O_1Y_1}$, $\overline{O\bar{B}} = \overline{O_1B_1}$, určí rovnoběžka s přímkou $Y\bar{Y}$ bodem $\bar{B}$ na y^a bod B^a .

Axonometrický průmět je stejný jako čtvrtý průmět z obr. 1, ale svislé hrany budovy mají již průmět ve vhodné poloze.

3. Obecná axonometrie

Podstatně jednodušší než předchozí dvě metody je konstrukce průmětu směrem s průsečnou metodou. Touto metodou získáme obecnou axonometrii, tj. průmětna již nemusí být kolmá ke směru promítání.

Konstrukci provedeme takto:

Půdorys oddělíme od nárysu a umístíme do nákresny tak, aby přemístěná přímka s_1 , označíme ji s' (a podobně označíme i další přemístěné útvary), byla rovnoběžná s příčným okrajem nákresny, obr. 3. Vedeme-li bodem C' přímku směru s' a bodem C_2 přímku směru s_2 , protnou se v axonometrii C^a bodu C (index a opět na obr. vynecháváme). Analogicky určíme další vrcholy. Přímka s se přitom zřejmě zobrazí do bodu O , průsečnou metodou proto vznikne průmět směrem s . Získáme opět názorné zobrazení budovy (i když jiné, než v obr. 2, protože průmětna již není kolmá ke směru s) s vhodně zobrazenými svislými hranami.

Co je to kybernetika?

Ing. EVA VESELÁ, ČVUT - fakulta strojní

I když slovo kybernetika se již dnes dostalo do běžného slovníku většiny lidí, jeho přesný obsah není těm, kdo se touto vědní disciplínou přímo nezabývají, tak úplně jasný. Pokusím se proto význam tohoto pojmu zde trochu přiblížit a vysvětlit.

Kybernetika patří mezi nejmladší technické obory. Celosvětově se rozvíjí až od druhé poloviny tohoto století. Její zakladatel, americký matematik *Norbert Wiener*, charakterizoval kybernetiku jako vědu, která se zabývá analogiemi mezi procesy řízení ve strojích, živých organismech a ve společnosti.

Jestliže chceme popisovat a hodnotit činnost jakéhokoliv systému, pak si nejprve musíme tento systém zcela přesně definovat. *Systémem* rozumíme soustavu všech tzv. činných prvků a vztahů mezi nimi. *Činný* je každý takový materiální předmět, který je spojen vazbou nejméně s jedním dalším prvkem patřícím do téže soustavy, který tedy působí na některý z ostatních prvků téže soustavy, a naopak, alespoň jeden z ostatních prvků soustavy působí na něj. Naproti tomu tzv. *izolovaný* prvek tyto vazby nemá, a proto nepatří do systému (není jeho prvkem). *Strukturou systému* označujeme soubor všech vztahů mezi jednotlivými prvky a jejich časových závislostí.

Z tohoto hlediska můžeme kybernetiku charakterizovat jako vědeckou disciplínu, která se zabývá uspořádáním všech prvků systému, popisem jejich vzájemných vztahů a jejich kauzálními (příčinnými) souvislostmi. Kybernetika tak zkoumá strukturu systémů a klade důraz na to, že důležité nejsou jenom prvky (věci), ale především vztahy mezi nimi.

Jestliže systém podrobíme kybernetickému vyšetřování, pak jeho výsledkem je sestavení *matematického modelu systému*, tedy určení matematické závislosti mezi příčinně následnými procesy v uvažované soustavě. Rozbory struktur systémů bylo zjištěno, že i velice odlišné soustavy mohou mít shodný matematický popis, tedy stejný matematický model. Kybernetika tak pomáhá nalézt souvislosti a analogie mezi různými obory lidského bádání. K popisu struktur vyšetřovaných soustav používá kybernetika převážně maticovou formu zápisu.

Kybernetika tedy znamená jistý formalismus, který je možné použít při vyšetřování vlastností soustav z nejrůznějších oblastí. To však zároveň určuje nejen možnosti jejího rozvoje a uplatnění, ale i hranice jejího použití. Jazyk kybernetiky jako každý obecnější matematický aparát, dává jednodušším úlohám komplikovanější tvar, ale při řešení složitějších případů situaci zjednodušuje a navíc umožňuje pochopení nových a dosud neznámých souvislostí a zákonitostí.

Vhodnost použití matematického aparátu kybernetiky při vyšetřování systémů si můžeme ukázat na analogii s užitím závěrů speciální teorie relativity. Nemá jistě žádný praktický význam a znamenalo by jen komplikace, kdybychom uvažovali změnu délky nebo hmotnosti tělesa v závislosti na jeho rychlosti vzhledem k pozorovateli, jestliže je tato rychlost malá vzhledem k velikosti rychlosti světla ve vakuu. Avšak v tom případě, kdy se těleso takto rychle pohybuje, nemůžeme již použít matematický aparát a závěry klasické Newtonovy mechaniky, ale abychom mohli správně určit fyzikální realitu, musíme počítat podle mnohem složitějších a matematicky náročnějších vztahů Einsteinovy speciální teorie relativity. Stejně tak je na jednoduché systémy zbytečné užití celého matematického aparátu a metod, které má kybernetika k dispozici.

Zásadní význam kybernetiky je v tom, že její matematický formalismus pomohl najít obecné zákonitosti a souvislosti v naprosto odlišných vědních oborech — technice, biologii a sociologii. Tyto zákonitosti popisuje kybernetika pomocí formálně matematicky shodných schémat, protože vzájemné vazby a působení mezi jednotlivými prvky, ze kterých jsou tyto systémy složeny, jsou ve své podstatě totožné a systémy mají shodnou strukturu. Je to právě zavedený kybernetický formalismus, který umožňuje a usnadňuje vyšetřování odlišných systémů a jejich struktur. Kybernetika tak dokázala nalézt analogii mezi stejným způsobem činnosti různých soustav a tím se stala obecnou teorií systémů.

Kybernetiku je pak možno definovat jako obecnou teorii systémů, která vyšetřuje statické a dynamické vazby mezi prvky těchto systémů, tedy jejich strukturu, včetně příčinnosti jejich chování. Výsledky udává ve formě zobecňujících matematických modelů systémů. Závěry, které vyplývají z tohoto popisu, je možno použít k řízení vyšetřovaného objektu i k předpovědi jeho budoucího chování.

Použití metod kybernetiky je zvláště vhodné při vyšetřování těchto případů:

a) Činnost systémů směřuje k žádanému cíli bez vnějšího ovlivnění (takový systém nazýváme izolovaný). Výsledná činnost izolovaného systému je složena z dlouhého řetězce příčin a následků a jeho prvky jsou spolu vázány jak staticky, tak i dynamicky. Matematický model umožní kybernetice přesně popsat všechny procesy, které v tomto řetězci probíhají. Jestliže pak chceme řídit takovýto proces, pak prostředky řízení jsou ovlivňovány pouze informacemi ze samotného systému.

b) Chování vyšetřovaného systému je ovlivňováno vnějšími podmínkami, které mohou na něj působit a tím měnit jak okamžitý stav tohoto systému, tak i jeho strukturu. Abychom dosáhli určitý žádaný výstup tohoto systému, musíme průběžně měnit i prostředky řízení tak, aby respektovaly měnící se okolní vlivy. Vzniká tak posloupnost: cíl — okolní podmínky — prostředky řízení — změna vnějších podmínek — nové prostředky řízení — ... —. Nutným předpokladem pro řízení takového systému jsou trvalé nebo alespoň pravidelné a dostatečně rychlé a přesné informace o změnách vnějších podmínek, které nastávají během činnosti systému. Průběžně je nutno přizpůsobovat prostředky řízení těmto novým podmínkám, a to s dostatečnou rychlostí. Činnost takového druhu se nazývá *adaptibilita*.

Systémy, jejichž vlastnostmi se zabývá fyzika a technika, patří do oboru tzv. technické kybernetiky. I v této oblasti existuje množství nejrozličnějších kybernetických systémů, které se vzájemně liší svou strukturou. Tomu pak odpovídá veliké množství variant při popisu těchto systémů matematickými modely.¹ Z toho důvodu je nutno vyšetřovat každý systém individuálně a s nejvyšší možnou přesností popisu vazeb mezi jeho prvky. Matematický model chování systému má, pokud je to možné, popisovat všechny zjištěné vlastnosti bez předběžného zjednodušování. Velmi často totiž vede zanedbání zdánlivě nepodstatných vlastností vyšetřovaného systému k formulaci takového matematického modelu, který v důsledku těchto zjednodušení má zcela odlišné vlastnosti než skutečný objekt, a tak je pro další úvahy zcela bezcenný.

Veškerá zjednodušení, která umožňují snazší řešitelnost rovnic popisujících daný systém, jsou přípustná pouze tehdy, jestliže zjistíme vlastnosti systému jako celku, a to nejen pokud jde o závislost jednotlivých výstupů systému na vstupu, ale zejména jestliže se jedná i o dynamiku jeho vnitřní struktury.

Popsaný přístup k vyšetřování systémů je samozřejmě neobyčejně pracný a před nástupem výpočetní techniky byl u většiny zkoumaných systémů prakticky neuskutečnitelný.

Předchůdce technické kybernetiky — teorie řízení — užívala právě z toho důvodu až do padesátých let výlučně pouze popis vnějších vlastností systémů (tj. vzájemný vztah mezi výstupem a vstupem daného

systému) bez uvažování jeho struktury. Z této doby také pochází pojem „černé skříňky“, tj. představy soustavy jako neznámé a nezajímavé krabice, ve které nezáleží na tom, co je a co se děje uvnitř, ale důležité jsou pouze vztahy mezi vstupními a výstupními veličinami. U modelů jednoduchých kybernetických systémů se pojem černé skříňky udržel i dnes.

Pokud by se někdo z vás chtěl věnovat studiu technické kybernetiky, pak v naší republice existuje množství vysokých škol, ve kterých jsou specializace kybernetika. Jsou to tyto vysoké školy: všechny vysoké školy strojní a elektrotechnické, tj. fakulta strojní, fakulta elektrotechnická a fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská na ČVUT Praha, strojní a elektrotechnická fakulta Plzeň, Vysoká škola strojní a elektrotechnická Liberec, Vojenská akademie A. Zápotockého Brno, Vysoké učení technické Brno, Vysoká škola báňská Ostrava, Vysoká vojenská letecká škola Košice, Technika Košice, strojní fakulta SVŠT Bratislava, elektrotechnická fakulta SVŠT Bratislava, dále matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy Praha, Universita Komenského Bratislava, Universita Palackého Brno. Kybernetika je též přednášena na všech vysokých školách ekonomických. Absolvent specializace kybernetika najde uplatnění nejen v příslušném technickém oboru, ale i v aplikacích, jako např. v biologii, medicíně a podobně.

FYZIKA

Počátky hudební akustiky

JOSEF KOTYK, Pardubice

Ke zpracování a pochopení počátků hudební akustiky může přispět také fyzika.

Ze starých církevních stupnic, jejichž původ sahá až do dob antických Řeků, se vyvinuly dvě *diatonické stupnice*: tvrdá (dur) a měkká (moll). K oběma se můžeme ve fyzice propracovat pokusy se Seebeckovou sirénou.¹⁾

¹⁾ Viz autorův článek „Seebeckova siréna“ v Rozhledech, roč. 60, čís. 8, str. 356 až 358.

Tóny jedné oktávy *stupnice tvrdé* mají tyto vlastnosti:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
relativní výšky:	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
intervaly:	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15	

Výsledky *pro stupnici měkkou*:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
relativní výšky:	1	9/8	6/5	4/3	3/2	8/5	9/5	2
intervaly:	9/8	16/15	10/9	9/8	16/15	9/8	10/9	

Shledáváme, že v obou stupnicích se vyskytují jen intervaly trojího druhu: 9/8, 10/9 a 16/15. Mají tyto názvy: 9/8 je *velký celý tón*, 10/9 *malý celý tón*, 16/15 *velký půltón*. Intervaly 9/8 a 10/9 rozezná od sebe jen sluch hudebně vycvičený; v hudbě se někdy nerozlišují a mívají společný název *celý tón*. Označíme-li jej 1 a půltón 1/2, zní jejich pořadí ve stupnici tvrdé 1 1 1/2 1 1 1 1/2, ve stupnici měkké 1 1/2 1 1 1/2 1 1. Uvedené pořadí intervalů je pro příslušnou stupnici charakteristické.

Další srovnávání nás vede k poznání, že tóny I, II, IV, V a VIII jsou společné stupnicím dur a moll, počínajícím týmž tónem. Obě se liší toliko tóny III, VI a VII, tj. terciemi, sextami a septimami. Interval obou tercií III_d a III_m, obou sext VI_d a VI_m i obou septim VII_d a VII_m je však stejný, tzv. *malý půltón*, neboť

$$\begin{array}{lcl} \text{III}_d & \text{III}_m & = \quad 5/4 \quad 6/5 = 25/24 \\ \text{VI}_d & \text{VI}_m & = \quad 5/3 \quad 8/5 = 25/24 \\ \text{VII}_d & \text{VII}_m & = 15/8 \quad 9/5 = 25/24. \end{array}$$

Měkká stupnice vznikne tedy z tvrdé snížením tercie, sexty a septimy o malý půltón.

Tento rozdíl mezi oběma stupnicemi vyjadřují hudebníci stručně slovy: V tvrdé stupnici je velká tercie, velká sexta a velká septima, v měkké stupnici však malá tercie, malá sexta a malá septima.

Snadno se přesvědčíme, že $25/24 = 10/9 \cdot 16/15$, tj. interval malého půltónu je stanoven poměrem (intervalů) malého celého tónu a velkého půltónu.

Tóny stupnic se v hudbě označují též písmeny.²⁾ Např. pro základní stupnici tvrdou C dur toto označení zní C, D, E, F, G, A, H, c. Oktávu stupnice lze však založit i na jiném tónu, nikoli jen na tónu C. Je-li třeba stupnici dur např. začít tónem D, postupujeme takto: K žádoucí řadě osmi tónů přepíšeme nahoru intervaly, které mezi jejími členy skutečně jsou, a dolů intervaly, jaké by mezi nimi měly být. Dostáváme:

²⁾ *Quido z Arezza* (1026) odvodil ze starobylého chorálu také označování tónů slabikami do, re, mi, fa, sol, la, si, do.

	1		1/2		1		1		1		1/2		1
D		E		F		G		A		H		c	d
	1		1		1/2		1		1		1		1/2

Shledáváme, že tóny F a c bude třeba zvýšit. Oč? Srovnávejme: Mezi tóny E, F byl původně velký půltón $16/15$. Jestliže má přejít v malý celý tón $10/9$, je třeba tón F zvýšit o interval $10/9 : 16/15 = 25/24$, tedy o malý půltón. Protože mezi tóny F, G byl původně celý tón, zmenší se popsáním zvýšením tónu nižšího současně na půltón, jak má být. U tónu c je tomu obdobně. Zvýšení tónů F a c o malý půltón označujeme připojením koncovky -is. *Stupnice D dur* zní tedy D, E, Fis, G, A, H, cis d. *Stupnice A dur* zní obdobně A, H, cis, d, e, fis, gis, a, *stupnice F dur* však F, G, A, Hes, c, d, e, f, neboť tón H bylo třeba o malý půltón snížit; toto snížení vyznačujeme připojením koncovky -es; hudebníci užívají však místo Hes spíše historicky odůvodněného názvu B.

Základní stupnice měkká je A moll; zní A, H, c, d, e, f, g, a. *Stupnice C moll* má však tóny E, A, H sníženy, takže zní C, D, Es, F, G, As, B, c. Podobně se tvoří další stupnice.

Cvičení

1. Tři tóny mají absolutní výšky 240 Hz, 288 Hz a 384 Hz. Určete je!

(III_m, IV a VI_m)

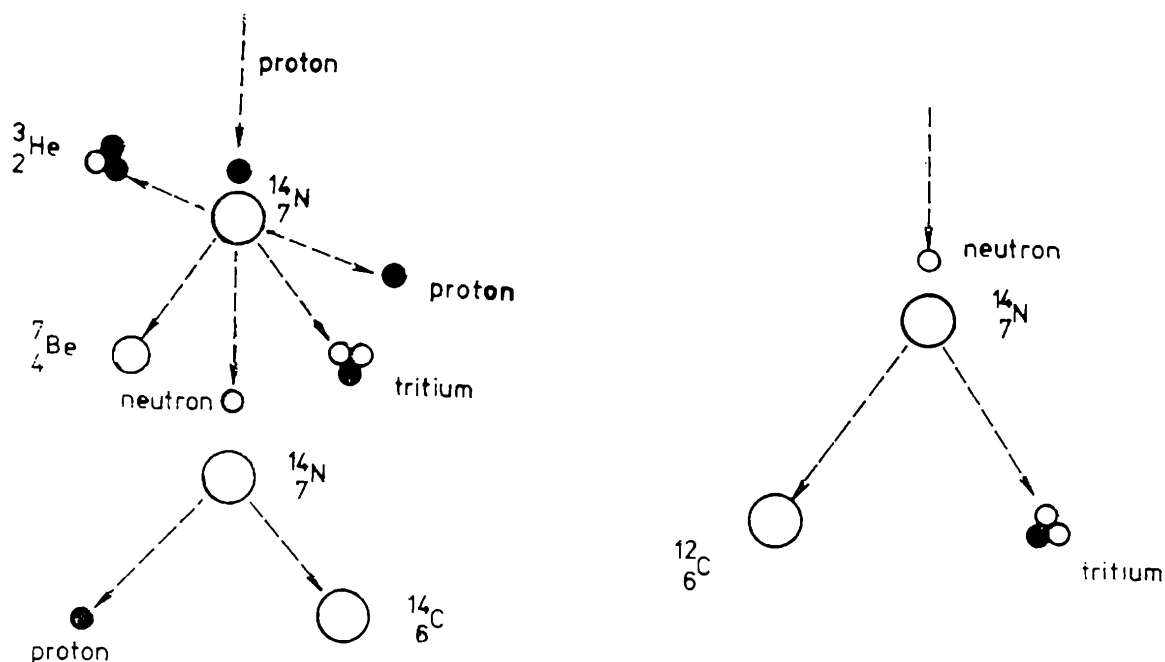
2. Zaznívají-li tóny I, III_d, V současně, vzniká známý *trojzvuk* význačný svou konsonancí (libozvučností). Příslušné pohyby se skládají v jediné výsledné kmitání periodické, jehož perioda se rovná 4-násobné periodě primy. Přesvědčte se o tom graficky!

(Poměr výšek I III_d V = 4 5 6)

Radioaktivita kolem nás

RNDr. MARCEL OHERA, Brno

Jistě každý již byl někdy na odborném lékařském vyšetření, kdy ke stanovení diagnózy bylo nutno použít rentgenových paprsků, popřípadě jiného speciálního vyšetření s využitím radioizotopů, které vyzařují ionizující záření. Rovněž každý asi ví, že toto záření je pro lidský organismus škodlivé i přes své diagnostické a terapeutické použití ve zdravotnictví. O velikosti dávky ionizujícího záření při těchto vyšetřeních rozhoduje lékař a je stanovena tak, aby nemohla mít následky zdravotní újmy na lidském organismu. Je zde mnoho lidí, kteří i při běžném rentge-



Obr. 1

novém vyšetření mají obavy z tohoto záření. Ale můžeme se vyhnout ionizujícímu záření úplně? Nikoliv, všichni obyvatelé naší planety jsou neustále vystaveni velmi slabým účinkům radioaktivního záření.

Zdroje tohoto ionizujícího záření existují od vzniku Země nezávisle na objevech a využívání radioaktivity člověkem od začátku 20. století. Ve srovnání s lékařskými aplikacemi ionizujícího záření jsou uvažované hodnoty přírodního „pozadí“ nesrovnatelně menší a dlouhou dobu byly tyto hodnoty celkem nezajímavé. Středem zájmu se staly po řadě nukleárních pokusů, kdy se začalo studovat, jakým způsobem ovlivňují tyto pokusy životní prostředí a jak zvyšují úroveň přírodní radiace.

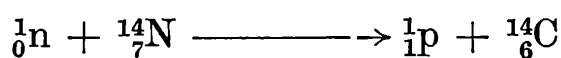
V létech 1923 až 1926 americký fyzik *R. Millikan* studoval jev stálé ionizace plynů v ionizačních komůrkách, které nezabránila ani tlustá ochranná vrstva olova, a přisoudil tento jev kosmickému záření, což je proud nabitých částic s ohromnou energií, které přicházejí z vesmíru. Zdrojem těchto částic jsou termonukleární reakce jak na velmi vzdálených hvězdách, tak i na našem Slunci. Tyto částice se pohybují vysokou rychlostí, která se blíží rychlosti světla. Pozdější pokusy ukázaly, že kosmické záření se skládá z atomových jader, jejichž zastoupení je přibližně úměrné výskytu těchto prvků ve vesmíru. Proto je v *primárním* kosmickém záření (záření, které dopadá na horní vrstvy atmosféry z kosmického prostoru) převaha protonů a α částic. Energetické spektrum primárních částic je poněkud závislé na zeměpisné šířce, protože zemské magnetické pole odklání nízkoenergetické částice (hlavně v oblasti rovníku). Nejvíce je v kosmickém záření obsaženo jader vodíku (45 %) a α částic (40 %) a kromě nich zde můžeme najít v určitém procentuálním

Tabulka č. 1. Radioizotopy vznikající v atmosféře vlivem kosmického záření

Izotop	Poločas přeměny	Typ přeměny	Izotop	Poločas přeměny	Typ přeměny
^{129}I	$1,6 \cdot 10^7$ let	β	^7Be	53,0 d	záchyt elektronu
^{10}Be	$2,5 \cdot 10^6$ let	β	^{37}Ar	35,1 d	záchyt elektronu
^{26}Al	$7,4 \cdot 10^6$ let	záchyt pozitronu	^{33}P	25,0 d	β
^{81}Kr	$2,1 \cdot 10^5$ let	záchyt elektronu	^{32}P	14,3 d	β
^{36}Cl	$3,1 \cdot 10^5$ let	β	^{28}Mg	21,2 h	β
^{14}C	5568 let	β	^{24}Na	15,0 h	β
^3H	12,3 let	β	^{38}S	2,9 h	β
^{22}Na	2,6 let	β	^{31}Si	2,6 h	β
^{35}S	87 dní	β	^{38}Cl	37,3 min	β

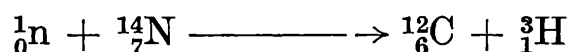
zastoupení ostatní prvky z Mendělejevova periodického systému až po uran.

Toto záření se na své cestě vesmírem setkává s horními vrstvami atmosféry naší Země. Atmosféra se skládá převážně z molekul dusíku (hmotnostně 75,53 %), kyslíku (23,14 %) a dále argonu, kysličníku uhlíčitýho a ostatních vzácných plynů. Primární kosmické záření reaguje s jádry molekul atmosféry. Nejzajímavější a typické jsou reakce protonů s jádry izotopu dusíku $^{14}_7\text{N}$ (v přírodní směsi je 99,6 % izotopu $^{14}_7\text{N}$) (obr. č. 1). Při primární srážce protonu s jádrem dusíku $^{14}_7\text{N}$ dojde k rozštěpení jádra dusíku na řadu fragmentů, kdy vzniká jádro hélia, tritium, jádro berylia. Vzniklý neutron je pak zachycen jiným jádrem dusíku $^{14}_7\text{N}$, kdy dojde k reakci



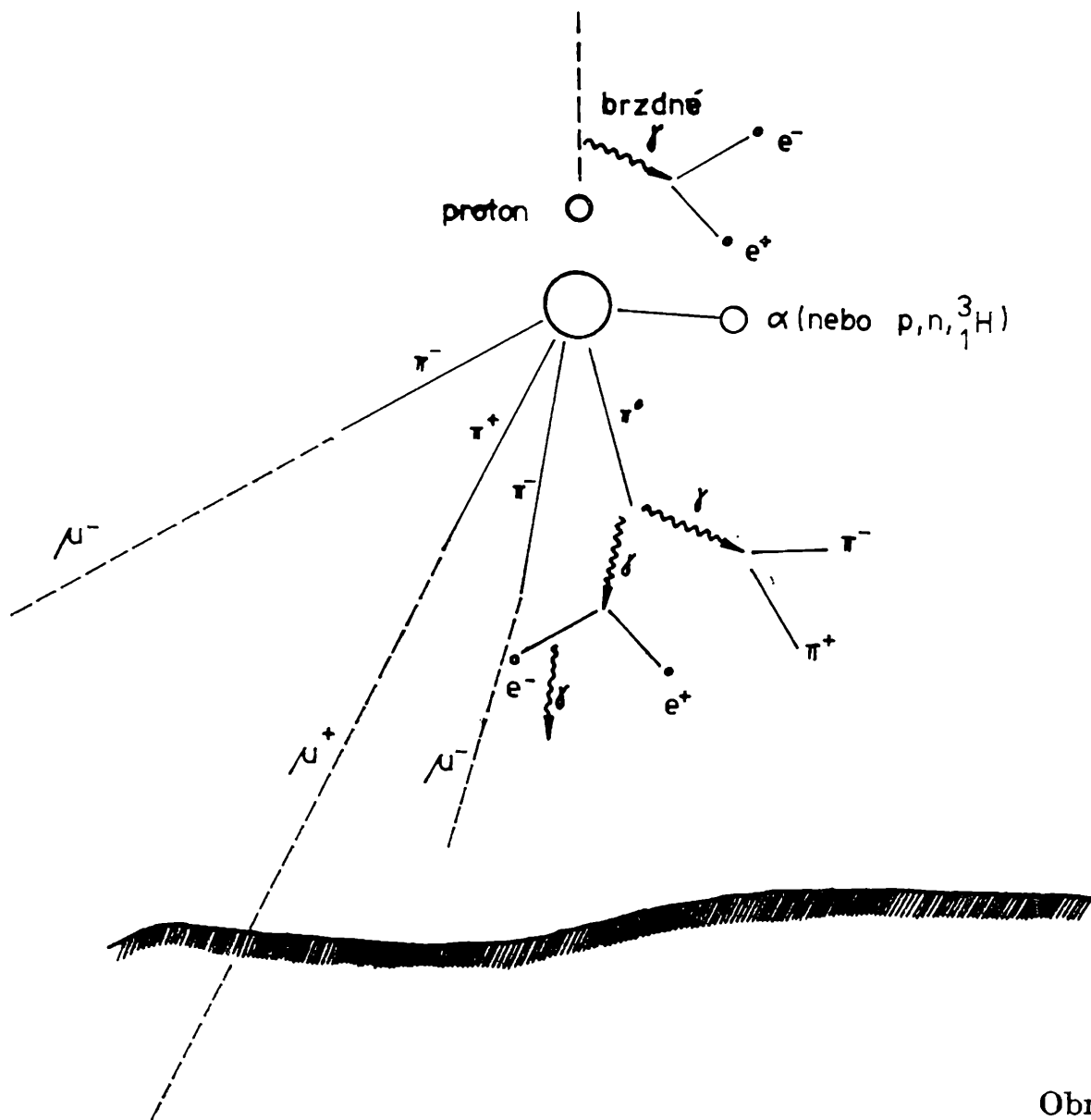
a vzniká tak izotop uhlíku $^{14}_6\text{C}$ s poločasem přeměny 5568 let.

Dalším důležitým izotopem je tritium, které vzniká (obr. č. 1) jadernou reakcí neutronu s izotopem dusíku $^{14}_7\text{N}$



Poločas přeměny vzniklého tritia je 12,3 let. Na Zemi existuje kolem 1 kg přirozeného tritia.

Uvedené jaderné reakce nejsou jedinými reakcemi, které probíhají následkem interakce kosmického záření s atmosférou. V atmosféře vzniká celá řada radionuklidů převážně reakcemi protonů typu (p, n) (proton p naráží do jádra nějakého atomu, kdy vznikne jiné přeměněné jádro a uvolňuje se neutron n), reakcemi neutronů typu (n, α) , (n, γ) , (n, p)



Obr. 2

(neutron n naráží do jádra nějakého atomu, kdy vznikne jiné přeměněné jádro a uvolňuje se buď α částice, γ foton nebo proton p). Takto vznikají v atmosféře dále izotopy ${}^{129}\text{I}$, ${}^{10}\text{Be}$, ${}^{26}\text{Al}$, ${}^{81}\text{Kr}$, ${}^{22}\text{Na}$, ${}^{35}\text{S}$ a jiné. V tabulce číslo 1 jsou tyto izotopy seřazeny podle délky poločasu přeměny. Atmosféra se tak stává zásobárnou radionuklidů, z nichž postupně se řada dostává na zemský povrch. Nemalou mírou ke zvětšení koncentrace radionuklidů přispěly především nukleární pokusy, které zvýšily procentuální obsah stroncia ${}^{90}\text{Sr}$ a ${}^{137}\text{Cs}$. V roce 1958 (pět let před zákazem nukleárních pokusů v ovzduší) bylo stanoveno celkem 65 kg stroncia ${}^{90}\text{Sr}$ a kolem 60 kg ${}^{137}\text{Cs}$ v atmosféře.

V obr. č. 2 je uvedeno schéma jaderných reakcí primárního kosmického záření a vznik elementárních částic sekundárního kosmického záření, které dopadá na zemský povrch. Sekundární složka kosmického záření se skládá z několika částí:

1) jsou to sekundární piony (π^+ , π^- , π^0) a nukleony, které mají dosta-

Tabulka č. 2. Dávková rychlost jednotlivých složek přírodního pozadí

Zdroj	Dávková rychlost ve výšce 1 m za rok [μGy]
Kosmické záření	283,5
Terestriální složka	430
Vzdušná radioaktivita	10
Vnitřní ozáření:	
^3H	0,01
^{14}C	7
^{40}K	190
^{87}Rb	3
^{210}Po	6
^{220}Rn	0,03
^{222}Rn	0,7
^{226}Ra	0,2
^{228}Ra	0,3
^{238}U	0,3
Celková průměrná roční zátěž	cca 930,0

tečnou energii a interagují s dalšími jádry (piony jsou elementární částice — mezony π^+ , π^- , π^0 , jejichž hmotnost je asi 270krát větší než hmotnost elektronu a mají kladný nebo záporný elementární náboj — mezon π^0 náboj nemá);

- 2) pomalé protony (energie $< 1 \text{ GeV}$), které ztrácejí energii ionizací;
- 3) pomalé neutrony, které jsou vesměs absorbovány jádry dusíku ^{14}N podle již uvedené reakce;
- 4) velké množství mezonů π^+ , π^- , které se za letu rozpadají na miony μ^+ , μ^- , které pronikají i hluboko pod povrch Země, mají-li dostatečnou energii. Téměř 80 % nabitých částic při hladině moře tvoří miony (jsou 207krát těžší než elektron a nesou kladný nebo záporný elementární náboj [1]).

V interakcích kosmického záření vzniká velké množství mezonů π^0 , které se v letu rozpadnou na dva fotony γ s vysokou energií. Foton často vytvoří pár elektron — positron (interakce elementárních částic jsou dobře popsány v [1]). Tyto částice pak brzděním zářením vytvářejí opět fotony. Při velkých počátečních energiích se tento proces opakuje. Na zemském povrchu jsme schopni tok těchto částic registrovat speciálními přístroji. Mírou toku částic je dávková rychlost s vhodnou jednotkou $\mu\text{Gy/rok}$ [2]. Příspěvek dávkové rychlosti od těchto částic je uveden v tabulce č. 2. Sekundární kosmické záření přispívá asi 28 % celkové zátěže.

INTERPOLACE (od lat. *inter* = mezi, navzájem + *polio*, -ire = hladit, uhlazovat) — v matematice: „přihlazení výpočtu“; jednoduchý výpočet přibližné hodnoty funkce pro body ležící uvnitř uvažovaného oboru (graf funkce v daném intervalu „přihladíme“ na přímkou nebo na známou křivku); opak: extrapolace

INTERPRETACE (od lat. *inter* = mezi, navzájem + *interpretor*, -ari = vykládat, vysvětlovat, překládat) — výklad, vysvětlení, tlumočení (svým pojetím), v matematice: výklad významu matematického výsledku v reálné situaci, též výklad významu základních pojmů teorie (vytvoření modelu teorie)

INTERVAL (z lat. *inter* = mezi, navzájem + lat. *vallus* = kůl, ohrada z kůlů) — „prostor mezi dvěma kůly v opevnění“; mezera, vzdálenost; úsek mezi dvěma mezemi, časový úsek, v matematice: původně množina reálných čísel „mezi“ dvěma danými čísly

INTUICE (od lat. *in* = v, na, dovnitř + *tueor*, -eri = hledět) — „pohled dovnitř“; bezprostřední pochopení něčeho bez delší úvahy, analýzy, bez důkazu; **INTUITIVNÍ**

INVARIANT(A) (od lat. *in-* s významem záporu + *varius* = rozmanitý, různý, proměnlivý) — neproměnná hodnota výrazu, neměnný vztah; **INVARIANTNÍ** — neměnný, „neměnicí se“; **INVARIANCE** — neměnnost, stálost hodnot výrazů, zachovávání vztahů při nějakých změnách, např. vztah mezi vzory se zachová i mezi obrazy

INVERZE (od lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *verto*, -ere = točit, obracet) — obrácení, převrácení, změna běžného stavu v opačný; v algebře: převrácené pořadí prvků v nějaké skupině, v geometrii: některá zobrazení, pro něž je typická záměna vzoru a obrazu (viz též involuce), **INVERZNÍ** — otočený zpět, v opačném (obráceném) směru; inverzní funkce — „obrácená“ funkce, získaná např. záměnou proměnných; inverzní relace k dané — relace vytvořená z uspořádaných dvojic získaných záměnou prvních a druhých složek těch dvojic, které tvoří danou relaci; inverzní vektor — „opačný“ vektor

INVOLUCE (od lat. *in* = v, na, do, dovnitř + *volvo*, -ere = valit) — „zavíjení“ (opak: „rozvíjení“ — evoluce), zpětný vývoj, zanikání; v matematice: „zánik změny“, zobrazení, které při svém druhém uplatnění (tj. složeno samo se sebou) dá identitu; zobrazení, které vyměňuje prvky množiny ve dvojicích vzoru a obrazu; **INVOLUTURNÍ** zobrazení

IRACIONÁLNÍ (od lat. *in-* s významem záporu + mnohovýznamové *ratio*, -onis, jehož nejčastější významy jsou „rozum“, „poměr“, „číslo“)

18 — Zatímco ve spojeních „racionální postup, racionalismus“ má lat. „ratio“ význam „rozum“ (rozumový, rozumný postup — vědecký nebo výtvarný směr, který vše podřizuje nikoliv citům, ale rozumu), v matematickém termínu „racionální číslo“ jde o význam „poměr“. Racionální číslo („číslo poměrové“) se vyjadřuje „poměrem“, zlomkem, podílem celých čísel, naproti tomu „iracionální číslo“ („nepoměrové“) se tak vyjádřit nemůže

ITERACE (z lat. *iterum* = podruhé, ještě jednou, zase) — opakování; v matematice — výpočetní metoda spočívající v postupném přibližování se k požadovanému výsledku opakováním téhož početního úkonu

IZO- (z řec. *isos* = rovný, stejný) — počáteční část složených slov vyjadřující stejnou vlastnost

IZOMETRIE (od řec. *isos* = rovný, stejný + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — axonometrie, kde měřítka na všech třech osách jsou shodná; srov. dimetrie, trimetrie; IZOMETRICKÝ — „mající stejnou míru“

IZOMORFNÍ (od řec. *isos* = rovný, stejný + *morfé* = postava, podoba; podstata) — mající stejný tvar, v matematice: izomorfní zobrazení struktur, izomorfní modely apod.

IZOPERIMETRICKÝ (od řec. *isos* = rovný, stejný + *peri* = okolo, vůkol, *ob* + *metron* = měřidlo, měřítko, míra) — o stejném obvodu (v. perimetr)

KALKUL (z lat. *calculus* = kamínek, vápencový kamínek na počítadle, od *calx*, *calcis* = vápenec, vápno) — počet, výpočet, počítání (na počítadle se počítalo pomocí vápencových kuliček); KALKULOVAT — počítat s něčím, rozpočtovat, uvažovat; KALKULÁTOR — zařízení, které provádí výpočet

KANONICKÝ (od řec. *kanón*, *kanonos* — pevný prut, pravítko, pravidlo) — v matematice: jsoucí podle pravidel, podle zásad, podle vzoru, vzorný; kanonická rovnice ploch 2. stupně — „vzorné“ analytické vyjádření ploch, které jsou „vzorové“ umístěny vzhledem k systému souřadnic

KAPPA—KŘIVKA — křivka 4. stupně nazvaná pro podobnost s řec. písmenem kappa (znak pro naši hlásku „k“)

KARDINÁLNÍ (od lat. *cardo*, *-inis* — dveřní čep, točna, osa; stěžejní bod, „kol něhož se vše otáčí,“) — stěžejní, hlavní, podstatný, rozhodující

jíci; v matematice: kardinální číslo — číslo udávající mohutnost množiny (má pro množinu základní význam)

KARDIOIDA (od řec. *kardia* = srdce + latinizované — *oideus* = podobající se — v. -oid) — křivka srdčitého tvaru; Pascalova závitnice, která se podobá srdci; srdcovka

KARTOGRAFIE (od lat. *charta* = papír + řec. *grafó* = rýt, psát) — „psaní na papír, rytí do papíru“; zhotovování map, nauka o mapách

KATEGORIE (z řec. *katégoria* = nařčení, obvinění, výpověď o něčem; od *katégoreó* = mluvit proti něčemu, vypovídat; slož. z *kata* = dolů + *agoreuó* = veřejně mluvit, řečnit na náměstí) — „jasná a přesná výpověď o něčem“; skupina, třída, druh, velmi obecný pojem; v matematice: jeden z vysoce abstraktních pojmů matematiky, předmět teorie kategorií

KILO- (z řec. *chilioi* = tisíc) — počáteční část složených slov mající význam „tisícinásobek měrné jednotky“ vyjádřené v následující části složeného slova; např. kilogram, kilometr

KO⁻¹ (z lat. *cum* = s, spolu, dohromady) — předpona s významem „s, spolu, dohromady, spojení

KO⁻² (zkráceno z 2. pádu lat. *complementum* = prostředek, jímž se něco doplňuje) — počáteční část termínů pro goniometrické funkce, jejichž názvy vznikly z představy funkce zbývajícího úhlu do 90° („doplňku do 90°“); nejprve vznikl termín „kosinus“ (v. t.), pak pro funkce ostatní, posléze i název souhrnný — „kofunkce“

KOEFICIENT (od lat. *cum* = s, spolu + *efficio*, -ere = způsobit, vykonat) — „spolupůsobící“, součinitel

KOFUNKCE (od lat. *complementum* = doplněk + termín funkce) — „doplňková funkce“, termín utvořený dodatečně jako zobecnění termínů kosinus, kotangens, kosekans, viz KO²)

KOINCIDENCE (od lat. *cum* = s, spolu + *incido*, -ere = spadnout na něco, vpadnout do něčeho; slož. z *in* = v, do, na + *cado*, -ere = padat) — „společné, současné zapadání do sebe“; časový nebo prostorový souběh událostí, současné působení; v geometrii: koincidence bodů — „sounáležitost“ bodů k jednomu útvaru (situace, kdy body náležejí společně témuž útvaru)

KOLINEACE (od lat. *cum* = s, spolu + *linea* = lněná nit, šňůra, čára) — „společná poloha na téže čáře“; vzájemné jednoznačné zobrazení

20 v rovině či prostoru, v němž se každé tři body jedné přímky zobrazují na tři body ležící na jedné přímce

KOM- (z lat. *cum* = s, spolu) — předpona s významem „s, spolu, dohromady, spojení“

KOMBINACE (od lat. *cum* = s, spolu + *bini* = po dvou, dva a dva) — „různé spojování po dvou“, tvoření dvojic všemi možnými způsoby; časem došlo k rozšíření významu pojmu ze „dvou“ na „libovolný počet“. V matematice: skupina prvků vybraných z daného většího souhrnu, v níž nezáleží na pořadí; podmnožina dané množiny. (Tzv. kombinace s opakováním jsou dalším rozšířením významu slova.)

KOMBINATORIKA — nauka o možnostech sestavovat skupiny objektů z daného souhrnu, vlastnosti skupin se týkají opakování prvků a jejich pořadí

KOMPLANACE (od lat. *cum* = s, spolu + *planus* = rovný, plochý) — vypočtení zakřivené plochy rozložením („zploštěním“) do roviny;

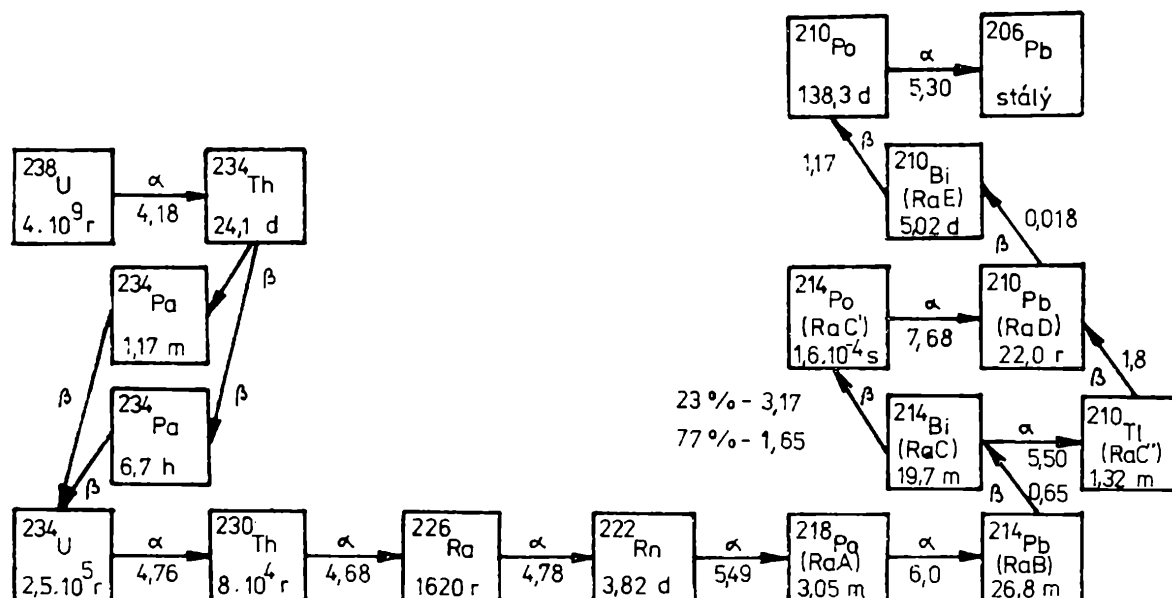
KOMPLANÁRNÍ — ležící v téže rovině, náležející téže rovině;

KOMPLANÁRNOST přímek — situace v geometrii, kdy přímky leží v téže rovině

KOMPLEMENTÁRNÍ (od lat. *cum* = s, spolu + *pleo*, *-ere* = plnit, *compleo*, *-ere* = doplňovat) — doplňkový; např. dva úhly, které se doplňují do 90°

KOMPLETNÍ (od lat. *cum* = s, spolu + *pleo*, *-ere* = plnit) — naplněný (nic v něm nechybí), úplný

KOMPLEXNÍ (od lat. *cum* = s, spolu + *plecto*, *-ere* = plést) — „do sebe zapletený“, „vše dohromady objímající, zahrnující“; souhrnný, souborný; komplexní číslo — číslo zahrnující složku reálnou i imaginární



Obr. 3

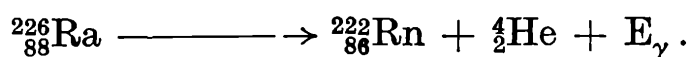
Na zemském povrchu (v horninách, půdě, vodách), kde kosmické záření nemá téměř žádný vliv na vznik radioizotopů, probíhá jiný mechanismus. Přírodní radioaktivita obsažená v zemské kůře je převážně způsobena izotopy s velmi dlouhým poločasem rozpadu, které existují na Zemi od jejího vzniku. Základní podíl na přírodní radioaktivitě (tato část se nazývá terestriální složka) mají izotopy uranu $^{238}_{92}\text{U}$ (poločas přeměny 4.10^9 let), thorium $^{232}_{90}\text{Th}$ (10^{10} let) a draslík $^{40}_{19}\text{K}$ ($1,2.10^9$ let). Uran a thorium se přeměňují a vytvářejí dceřiné produkty, které jsou rovněž radioaktivní. Izotop draslíku $^{40}_{19}\text{K}$ se vyskytuje prakticky všude, kde je obsažen přírodní draslík, neboť v přirozené izotopické směsi je 0,0119 % tohoto izotopu. Přeměňuje se beta přeměnou, vzniká stabilní izotop vápníku



Maximální energie elektronu je 1,35 MeV a energie fotonu je 1,46 MeV. Draslík je obsažen v půdě, v rostlinách, v lidském organismu a jeho přítomnost silně ovlivňuje měření nízkých úrovní radioaktivity.

Neméně významnou roli má $^{238}_{92}\text{U}$, který vytváří radioaktivní uranovou řadu, která je uvedena v obr. č. 3 se způsoby přeměn (α , β , γ), energií záření v MeV a poločasy přeměn, které se pohybují od desetin milisekundy (RaC') do 10^9 let. Výsledným produktem uranové řady je olovo $^{206}_{82}\text{Pb}$, které je stabilní a dále se již nepřeměňuje. Nejzajímavější částí této řady je radium $^{226}_{88}\text{Ra}$ a jeho rozpadové produkty. Radium je zdroj α a γ záření s relativně dlouhým poločasem přeměny 1620 let.

Každý kubický metr půdy obsahuje přibližně $2,4 \mu\text{g}$ radia, které se přeměňuje v radon $^{222}_{86}\text{Rn}$



Radon je plyn, který difunduje horninami nebo půdou a dostává se do ovzduší (vzdušná radioaktivita), a tak se může dostat dýchacími cestami do plic, kde se usazuje. V tomto případě jde skutečně o velmi nepatrné množství a riziko zdravotní újmy je nulové již vzhledem k tomu, že lidský organismus si na tato množství radonu přivykl.

Obdobně tak thorium $^{232}_{90}\text{Th}$ vytváří thoriovou řadu, kde výsledným produktem je olovo $^{208}_{82}\text{Pb}$.

Příspěvek terestriální složky a vzdušné radioaktivity k celkové dávkové rychlosti je uveden v tab. č. 2.

Posledním zdrojem záření v tomto výčtu je vlastní lidský organismus. Lidské tělo, resp. tkáň se převážně skládá z atomů C, H, O, N a v malém množství se zde objevují i jiné prvky. Jedním z nich je např. zmíněný draslík, jehož izotop $^{40}_{19}\text{K}$, který je součástí přirozené směsi, přispívá nejvíce k tzv. vnitřnímu ozáření. Významně rovněž přispívá izotop uhlíku $^{14}_6\text{C}$ svou přeměnou β s maximální energií elektronu $0,158 \text{ MeV}$. Ostatní prvky uvedené v tab. č. 2 mají podstatně menší přínos k celkové zátěži.

Každá z uvedených složek přírodní radioaktivity má svůj specifický význam v celkové zátěži. Nejvíce se podílí terestriální složka 50 %, dále kosmické záření 28 %, vzdušná radioaktivita 1 % a vnitřní ozáření 21 %. Tento poměr ani absolutní hodnoty dávkové rychlosti nejsou stálé a mění se podle zeměpisné polohy dost významně, a musí se proto v jednotlivých místech experimentálně stanovovat. Např. na většině území ČSSR se hodnota dávkové rychlosti pohybuje kolem $930 \mu\text{Gy/rok}$, avšak v oblasti Třebíčska je tato hodnota až $2300 \mu\text{Gy/rok}$ (2–2,5 krát větší) vlivem geologického podloží. V Indii je oblast, kde je tato hodnota zvýšena až 30krát rovněž terestriální složkou.

Takže — aniž jsme si to doposud uvědomovali — jsme neustále vystaveni ionizujícímu záření, i když tato hodnota je nesrovnatelná s lékařskými expozicemi. Je však velmi citlivými přístroji měřitelná a proto ji musíme dobře znát z hlediska dalšího využívání jaderné energie, kdy hodnota přírodního pozadí je zásahem lidské činnosti mírně zvyšována.

Literatura

[1] Pernegr J., Plajer Z.: Atomový věk, SNTL, Praha 1966

[2] Ohera M.: Interakce jaderného záření s hmotou, Rozhledy mat.-fyz. 60 (1981–2), 4, str. 161–169

Urychlovače pro studium struktury hmoty

Ing. JAROSLAV SEDLÁK, CSc., Fyzikální ústav ČSAV Praha

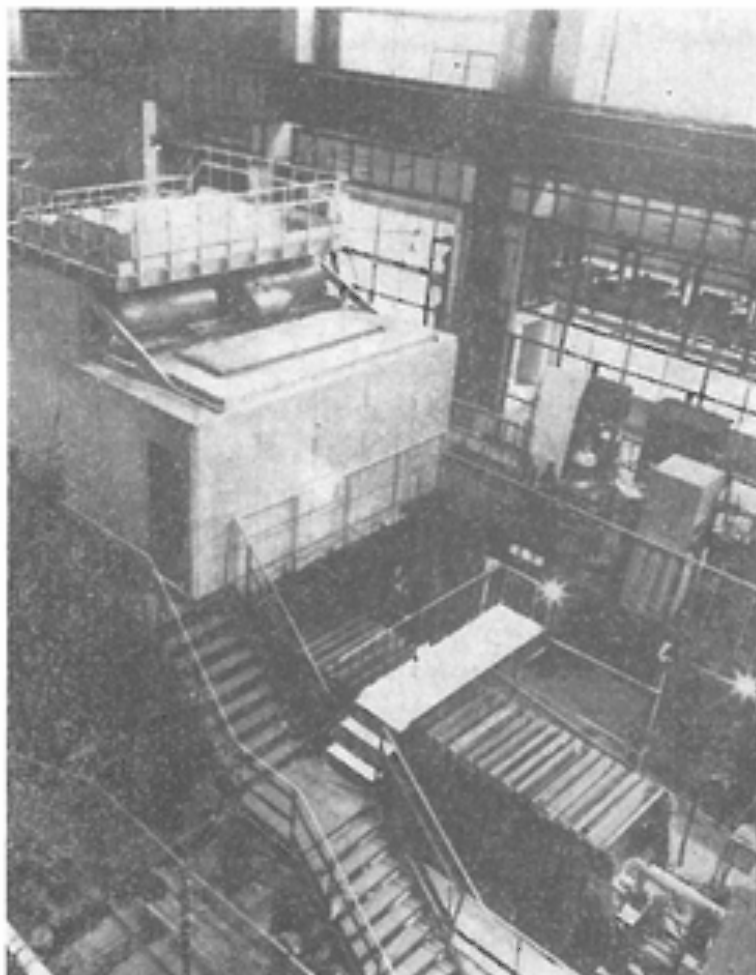
Naše znalosti o struktuře hmoty a jejích základních stavebních prvcích se během posledních zhruba dvaceti let neobyčejně rozšířily a prohloubily. Objev nových částic, jichž nyní známe kolem dvou set, studium jejich vlastností a vzájemných vztahů umožnily vybudovat jednotnou teorii elektromagnetických a slabých interakcí a značně pokročit v budování teorie silných interakcí. Ukázalo se však, že většina nově objevených částic má složitou vnitřní strukturu. Na základě současných znalostí se zdá, že existují pouze dva druhy základních stavebních prvků hmoty, které jsou opravdu „elementární“, tj. jsou bezstrukturní. Jsou to *leptony* a *kvarky*.*) Studium jejich vlastností a vzájemných vztahů bude tvořit obsah fyziky elementárních částic v příštích desetiletích.

Ukažme si alespoň některé z otázek, na něž je nutno hledat odpověď. Je nutno vyjasnit, kolik „rodin“ leptonů a kvarků existuje. Dosud známe tři rodiny, ale je to opravdu všechno? Dosud není objeven kvark t , jehož existenci teorie předpokládá. Jsou kvarky opravdu uvězněny, nelze je pozorovat volné? Nevíme, zda lepton τ otevírá novou řadu těžkých leptonů, nebo je to poslední člen v řadě? Dosavadní experimenty nepřivedly k objevu dalšího těžkého leptonu. Brzo bychom měli znát odpověď na otázku, zda existují intermediální bozony $W^\pm$ a Z^0 a jaké jsou jejich vlastnosti. Je zapotřebí zjistit, zda neutrino mají nenulovou klidovou hmotnost a jestliže ano, pak stanovit, jak je malá. Je proton opravdu stabilní částice? Neexistují nové síly (nové interakce), které by převáděly kvarky v leptony a naopak? Je třeba vyjasnit, odkud se bere hmotnost částic, proč částice mají právě tu hmotnost, kterou pozorujeme?

To je několik závažných otázek, které před fyzikou elementárních částic stojí v současné době. Některé z nich, např. otázku doby života protonu, lze rozřešit bez urychlovačů, jiné lze řešit pomocí existujících urychlovačů, ale pro řešení většiny z nich bude zapotřebí urychlovačů na mnohem vyšší energie. Jaké urychlovače to mají být a o jaké energie se jedná?

Vlastnosti leptonů a kvarků a zákonitosti, jimiž se jejich vzájemné působení řídí, můžeme studovat pouze prostřednictvím dějů, k nimž dochází při vzájemných srážkách těchto částic. V zásadě máme tři možnosti: především srážky kvarku s kvarkem (q, q) za druhé srážku leptonu s kvarkem (l, q), a za třetí srážku leptonu s leptonem (l, l) ($l = e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu$) a samozřejmě analogické varianty s účastí antikvarků ($\bar{q}$) a anti-

*) Viz J. Sedláček, *Rozhledy v matematice-fyzice*, roč. 61, str. 62–66.

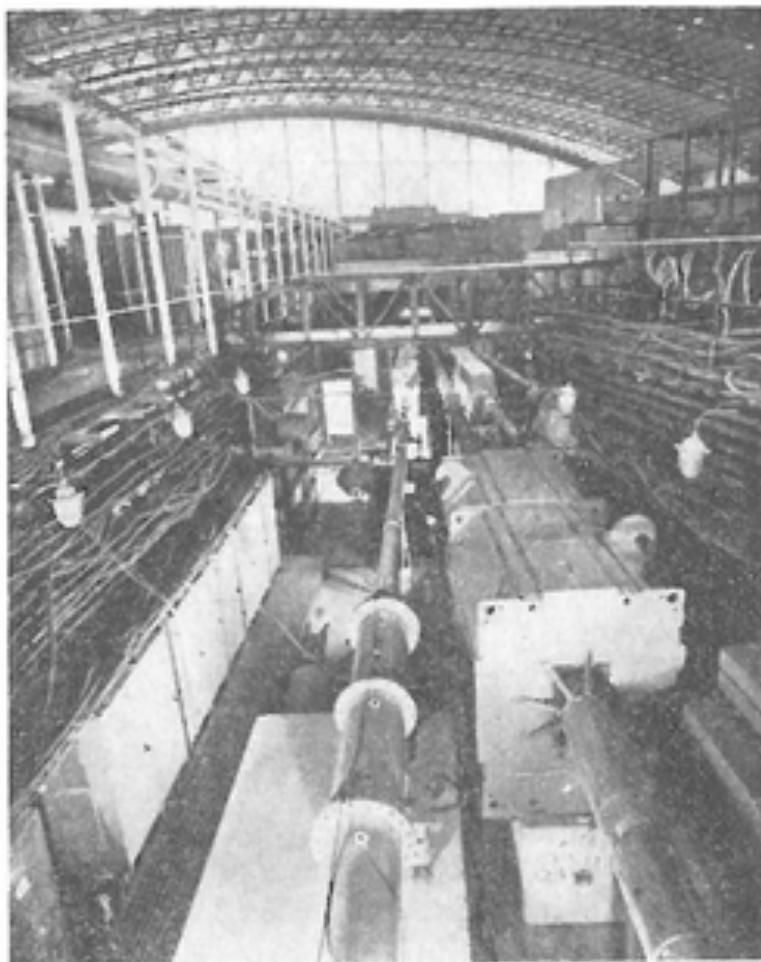


Obr. 1. Celkový pohled na magnetický jiskrový spektrometr (MIS)

leptonů ($\bar{l}$), ($\bar{l} = e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$). Prvé dvě možnosti můžeme realizovat buď pomocí interakcí urychlených protonů nebo elektronů v pevném (nepohyblivém) terči a v tom případě hovoříme o uspořádání s pevným terčem, nebo pomocí interakcí urychlených protonů s protony nebo elektronů s protony ve vstřícných svazcích. Třetí možnost lze realizovat pomocí vstřícných svazků elektronů. (Je to uspořádání, kdy interagující částice jsou urychleny tak, že jejich hybnosti jsou si rovny co do velikosti, jsou však namířeny proti sobě. Při praktické realizaci se svazky interagujících částic protínají pod nevelkým úhlem $\sim 15^\circ$.)

Je tedy zapotřebí urychlovačů, které by umožnily realizovat všechny tři uvedené možnosti. Výstavba i projekty nových urychlovačů tomu odpovídají.

Každé z obou zmíněných uspořádání má svoje výhody, které se navzájem doplňují. Při uspořádání s pevným terčem se pro vznik nových částic využije pouze část energie dopadající částice, tzv. *efektivní energie*, E_{ef} , daná aproximativním vztahem $E_{ef} \sim \sqrt{2m E_{inc}}$, kde E_{inc} je energie dopadající částice a m je klidová hmotnost nukleonu (protonu), $m = 0,94$ GeV. Zato však poskytuje možnost formovat svazky různých



Obr. 2. Rozvod svazku na urychlovači U-70

částic o přesně stanovené energii. Tyto separované (tj. „homogenizované“ co do hmotnosti a energie) svazky částic jsou směřovány k detekčním zařízením, kde jsou využity ke konkrétním experimentům.

Při uspořádání se vstřícnými svazky máme sice pro vznik nových částic k dispozici celkovou energii obou interagujících částic, tj. efektivní energie E_{ef} je v tomto případě rovna součtu energií obou částic, $E_{ef} = E_1 + E_2$, ale zato nelze formovat svazky sekundárních částic.

Je snaha, aby efektivní energie interakce byla co nejvyšší. Současné synchrotrony, které jsou nejvhodnějším typem urychlovačů pro oblast supervysokých energií, urychlují protony do energií řádu stovek miliard elektronvoltů a elektrony do energií řádu desítek miliard elektronvoltů (10^9 eV = 1 GeV). Konstruuji se ve tvaru oddělených bloků magnetů, střídajících se s přímočarými úseky. Prstenec magnetu tedy představuje periodickou strukturu z jednotlivých prvků, zahrnujících magnet, ohýbající dráhu částice, rovný úsek, v němž jsou umístěny fokusující magnety (kvadrupolové magnetické čočky). V této struktuře je umístěn také radiofrekvenční urychlovací systém.

Urychlované částice se pohybují ve vakuové komoře, jejíž průřez je

potřebí učinit co nejmenší, aby bylo možno dosáhnout co nejnižší tíhy magnetu, zakřivujícího dráhu částic. Vyhovující je průřez 4 cm krát 6 cm a dociluje se ho použitím principu tzv. *silné fokusace částic*, která je u současných synchrotronů obvyklá. Obecně je výběr průřezu vakuové komory technicko-ekonomickou záležitostí.

Přední laboratoře, pracující ve fyzice vysokých energií, plánují na nejbližší roky výstavbu synchrotronů, které by poskytly svazky částic o energiích řádu TeV ($1 \text{ TeV} = 10^3 \text{ GeV} = 10^{12} \text{ eV}$), nebo budují urychlovače se vstřícnými svazky elektronů i protonů, v nichž efektivní energie uvedenou hodnotu vysoko překračuje. Tak např. v *Evropském středisku pro jaderný výzkum v Ženevě* (CERN) je v provozu synchrotron, urychlující protony do energie 450 GeV, budují se vstřícné svazky protonů a antiprotonů o energii 280 GeV každý. Kromě toho se v CERN plánuje výstavba urychlovače se vstřícnými svazky elektronů a pozitronů o energii $\sim 100 \text{ GeV}$ v každém svazku (projekt LEP). V *Batavii (USA)* je v provozu protonový synchrotron na energii 400 GeV. Jeho obyčejné (železné) magnety mají být v budoucnu zaměněny supravodivými, což umožní zvýšit energii urychlovaných protonů do hodnoty 1000 GeV ($= 1 \text{ TeV}$). V tab. 1 je uveden přehled největších současných urychlovačů.

Také v SSSR se rozvoji urychlovací techniky a výstavbě nových urychlovačů věnuje velká pozornost. V roce 1980 rozhodla vláda SSSR o výstavbě velkého urychlovacího komplexu UNK (*Uskoritělnno-Nakopiteľnyj-Komplex*) v *Ústavu fyziky vysokých energií v Protvino u Serpuchova*, kde je nyní v provozu protonový synchrotron (U-70) na energii 76 GeV. Plánovaný urychlovací a akumulární komplex UNK bude urychlovat protony do energie 3 TeV ($= 3000 \text{ GeV}$) při intenzitě svazku $6 \cdot 10^{14}$ protonů v urychlovacím cyklu. Protože toto zařízení má řadu konstrukčních i funkčních zvláštností a po dobudování kolem r. 1990 bude jedním z největších urychlovačů vůbec, popíšeme jeho vlastnosti podrobněji. Základní parametry UNK jsou uvedeny v tab. 2, viz též obr. 1 až 3.

Budovaný urychlovací a akumulární komplex bude mít dva stupně: první urychlovací stupeň bude synchrotron s obyčejnými (železnými) magnety a druhý urychlovací stupeň bude synchrotron se supravodivými magnety. Použití supravodivých magnetů je nezbytné, protože v procesu urychlování je nutno zvětšovat magnetické pole úměrně energii urychlovaných protonů, aby se pohybovaly stále po kruhové dráze zadaného poloměru. V železných magnetech lze docílit polí v rozmezí 1,0 až 2,0 T a v supravodivých magnetech až 5,0 T, takže poloměr zakřivení dráhy protonů lze udržet v přijatelných mezích (při energii UNK to je $\approx 3 \text{ km}$). Oba urychlovací stupně, pracující v režimu silné fokusace, budou umístěny ve společném tunelu ve tvaru kružnice o délce obvodu téměř 20 km a o průřezu $5 \times 3 \text{ m}^2$. Výstavba UNK má být ukončena před rokem 1990. Ve vzdálenější perspektivě se předpokládá, že v tomtéž tunelu bude



Obr. 3. Pohled na část trasy vývodu svazku částic ke spektrometru HYPERON

umístěn ještě jeden prstenec se supravodivými magnety, v němž se budou akumulovat protony (nebo antiprotony) o energii 3 TeV a budou použity pro organizaci vstřícných svazků proton—proton, nebo antiproton—proton.

Jako injektor pro první urychlovací stupeň bude použit dosavadní synchrotron U-70, jehož intenzita svazku bude zvýšena do 5×10^{13} protonů v cyklu (délka urychlovacího cyklu U-70 je ≈ 7 s). První urychlovací stupeň UNK bude na počátku pracovního cyklu pracovat jako akumulátor protonů a teprve po dosažení potřebného počtu protonů ve svazku (6×10^{14}), k čemuž bude zapotřebí přibližně dvanácti cyklů injektoru, započne vlastní fáze urychlování, během níž protony dosáhnou energie 400 GeV a pak budou naráz (během jediné otáčky svazku) převedeny do druhého urychlovacího stupně, v němž se budou urychlovat po dobu 20 s a dosáhnou plánované energie 3 TeV.

Řešení se dvěma urychlovacími stupni je zvoleno proto, aby bylo možno urychlovat současně co nejvíce částic ve svazku. To je relativně snadno řešitelné, pokud poměr konečné energie urychlovaných protonů k jejich energii na počátku urychlování (při injekci) není příliš velký, tj. nepřesahuje-li hodnotu ≈ 10 . Při jednostupňovém urychlování by tento poměr byl $E_{kon}/E_{poč} \approx 3000/70 \approx 40$, a bylo by tedy technicky velmi

Tabulka 1.

Přehled existujících a plánovaných urychlovačů

1. Protonové synchrotrony:

Laboratoř	Urychlovač	Energie (GeV)	V provozu od
ÚFVE Protvino	U-70	76	1967
FNAL Batavia	Doubler Tevatron	450 1000 1000 + 1000 *)	1972 1982 1985 (?)
CERN Ženeva	SPS ISR PP	450 31 + 31 *) 300 + 300 *)	1967 1971 1982
Brookhaven	Isabelle	350 + 350 *)	1986
ÚFVE Protvino	UNK	3000 3000 + 3000 *)	1990 po r. 1990

2. Elektronové synchrotrony:

ÚJF Novosibirsk	VEPP-3 VEPP-4	2 + 2 *) 7 + 7 *)	1975 1979
DESY Hamburg	PETRA	18 + 18 *)	1978
CERN Ženeva	LEP	80 + 80 *)	1988

*) — vstřícné svazky

obtížné docílit vysoké intenzity urychlovaného svazku. Při dvoustupňovém řešení je situace mnohem příznivější: v prvním urychlovacím stupni dosáhnou protony energii 400 GeV, tj. $E_{kon}/E_{poč} \approx 400/70 \approx 6$ a ve druhém urychlovacím stupni bude tento poměr $3000/400 \approx 7$.

Tabulka 2.

*Základní parametry urychlovacího a akumulárního komplexu (UNK) v ÚFVE
Protvino (Serpuchov)*

	1. stupeň	2. stupeň
Celková délka prstence	19 288 m	19 288 m
Magnet	železný	supravodivý
Energie injekce	70 GeV	400 GeV
Max. energie protonů na výstupu	400 GeV	3000 GeV
Počet protonů, urychlovaných v jednom pracovním cyklu	6×10^{14}	6×10^{14}
Průměrná intenzita urychleného svazku (protonů za sek).	$7,8 \times 10^{12}$	$7,8 \times 10^{12}$
Délka urychlovacího cyklu	78 s	78 s
Magnetické pole (max.)	0,7 T	5,0 T
Počet železných dipólových magnetů	2160	—
Počet supravodivých dipólových mag.	—	2160
Počet železných kvadrupólových mag.	408	—
Počet supravodivých kvadруп. mag.	—	408
Délka dipólu	5,8 m	5,8 m
Délka kvadrupólu	4,0 m	4,0 m
Celková hmotnost železného magnetu	22 000 t	—
Celková hmotnost supravodivého mag.	—	15 000 t
Vakuum	$4,0 \times 10^{-5}$ Pa	$2,7 \times 10^{-7}$ Pa
Průměrný příkon	114 MW	

Základní sekundární svazky částic: protony, antiprotony, hyperony,
miony, neutrina, fotony.

Během urychlování částic se bude intenzita magnetického pole v supravodivém magnetu zvětšovat od hodnoty, při níž se uskuteční injekce protonů z prvního urychlovacího stupně, až do maximální hodnoty, která se bude udržovat po dobu téměř 40 s konstantní, protony budou volně cirkulovat v prstenci a budou postupně vyváděny na pevný terč. Po vyvedení protonů se bude magnetické pole po dobu ≈ 20 s snižovat až do hodnoty, při níž dochází k injekci protonů z prvního urychlovacího stupně. Celý pracovní cyklus UNK tedy bude přibližně 80 s.

Projekt také počítá s možností akumulovat v prvním urychlovacím stupni elektrony a formovat vstříčné svazky elektron—proton (energie elektronů bude ≈ 20 GeV).

Vyvedení svazku protonů na pevný terč umožní formovat sekundární svazky různých částic a antičástic, včetně svazků neutrin, fotonů a také „exotických“ svazků hyperonů v širokém oboru energií. To otevírá pro experimentální fyziku zcela mimořádné možnosti.

Aby nedocházelo ke ztrátám intenzity urychlovaného svazku v důsledku jeho srážek se zbytky plynu v urychlovací komoře, je nutno v ní vytvořit vakuum alespoň 10^{-9} Pa. Nelze dopustit, aby svazek dopadal na stěny komory, protože to by mohlo vést k zahřívání supravodivého magnetu. To vyžaduje pečlivou kontrolu geometrie svazku a jeho pohybu v komoře a operativní ovlivňování jeho charakteristik. K tomu účelu bude použito různých automatizačních systémů a výkonná výpočetní technika. Tato kybernetizace urychlovače umožní docílit stabilního a spolehlivého provozu a zmenšit rozměry vakuové komory.

Vysoké nároky jsou kladeny na přesnost jednotlivých uzlů urychlovače a na charakteristiky svazku. Např. poloměr zakřivení drah urychlovaných protonů při jeho absolutní hodnotě 3000 m musí být dodržen s přesností zlomků milimetru. Požadovaná přesnost nastavení magnetů vzhledem ke geodetickým značkám je řádu 0,1 mm, rozptyl hodnoty intenzity magnetického pole v jednotlivých magnetech nesmí překročit 0,05 %.

Složitá bude kryogenní soustava UNK. Supravodivé magnety, jichž bude podél obvodu urychlovače umístěno 2500, budou chlazeny tekutým héliem ($T = 4$ K). Jeho výrobu bude zajišťovat 6 zkapalňovačů o celkovém chladicím výkonu 6000 litrů kapalného hélia za hodinu, které budou zásobovat 24 satelitních refrigerátorů o celkovém chladicím výkonu 50 kW při teplotní hladině 4 K.

Podobně složité a technicky náročné budou i další uzly urychlovače, např. radiofrekvenční urychlovací systém, vakuový systém apod. Realizace projektu UNK bude vyžadovat řešení řady náročných problémů z oboru supravodivosti, kryogenní techniky, radiotechniky apod. a bude tedy stimulovat rozvoj nejpokrokovějších technologií.

Vybudování urychlovacího a akumulárního komplexu umožní realizovat závažné výzkumy v oblasti struktury hadronů a studovat problematiku sjednocení sil v přírodě.

Vláda SSSR nabídla všem socialistickým státům, aby se podílely na výstavbě UNK i na fyzikálních experimentech, které na něm budou realizovány.

Venuše v novém světle

RNDr. RENÉ HUDEC, Ondřejov

Na počátku března 1982 přistály na Venuši dvě sovětské sondy — *Veněra 13* a *Veněra 14*, nejsložitější stanice, jaké se dosud k této planetě vydaly. Již předběžné výsledky, s nimiž máme možnost se jen několik měsíců po přistání seznámit, podstatně rozšiřují naše znalosti o nejbližší planetě. Komplexy 13 vědeckých přístrojů na palubách posledních Veněr totiž provedly detailní výzkum Venuše v 6 směrech: studovaly strukturu a dynamiku atmosféry, chemické a izotopické složení atmosférických plynů, fyzikální charakteristiku a složení mračen, složení horniny, geologické a fyzikální charakteristiky povrchu a vnitřní stavbu planety.

Nové vědecké výsledky byly získány jak za sestupu sond ovzduším planety, tak i přímo na povrchu. Místům přistání sond věnovali sovětské vědci velkou pozornost. Po pečlivých úvahách vybrali pro *Veněru 13* místo v oblasti pahorkaté vyvýšeniny, tedy oblasti představující asi 65 % povrchu Venuše. Druhá sonda přistála naopak v oblasti rovinaté nížiny, pokrývající asi 27 % Venušina povrchu. Data z obou sond jsou tedy reprezentativní pro více než 90 % povrchu planety, výjimku tvoří jen horské oblasti pokrývající asi 8 %. Zatímco *Veněra 14* vysílala z povrchu 57 minut za podmínek teploty 743 K a tlaku 9,3 MPa, překonala *Veněra 13* všechny dosavadní rekordy — z rozžhaveného povrchu vysílala plné 2 hodiny a 7 minut za podmínek 738 K a 8,9 MPa.

Podívejme se nyní blíže na nejzajímavější výsledky některých experimentů. Plynové chromatografy Sigma 2 měřily chemické složení atmosférických plynů ve výškách mezi 58 a 3 km. Oproti předchozím experimentům v minulosti prodělaly přístroje řadu zdokonalení — výsledkem bylo zvýšení selektivity analýzy a zvýšení úrovně citlivosti. Celkem bylo získáno 9 analýz, předběžné výsledky udávají obsah molekul H_2O na $2,5 \cdot 10^{-3}\%$, O_2 na $1,8 \cdot 10^{-3}\%$ a H_2O na $7 \cdot 10^{-2}\%$. Zaregistrována byla i malá množství Kr, H_2S , COS a SF_6 . Molekuly H_2 , H_2S a COS byly na Venuši nalezeny poprvé.

Spektrofotometr IOAV-2 měřil spektrální a úhlové charakteristiky slunečního záření rozptýleného v atmosféře. Měřilo se v oboru vlnových délek 0,45 až $1,2 \mu\text{m}$ v 6 různých směrech, a to ve výškách od 62 km až po povrch. Při sestupu bylo získáno asi 6000 spekter, přímo na povrchu pak ještě dalších 100. Ukazuje se, že v červeném světle je zeslabení slunečního záření podstatně menší než v modrém. Barva oblohy na nižší úrovni mračen je modrá, ale při povrchu je již oranžová. Osvětlení povrchu dosahuje v místech přistání sond 5 až 7 klx. Albedo povrchu je v obou přistávacích místech 0,25, tedy asi dvakrát více než v místech předcházejících sond. Několik sekund po přistání *Veněry 13* bylo zazna-

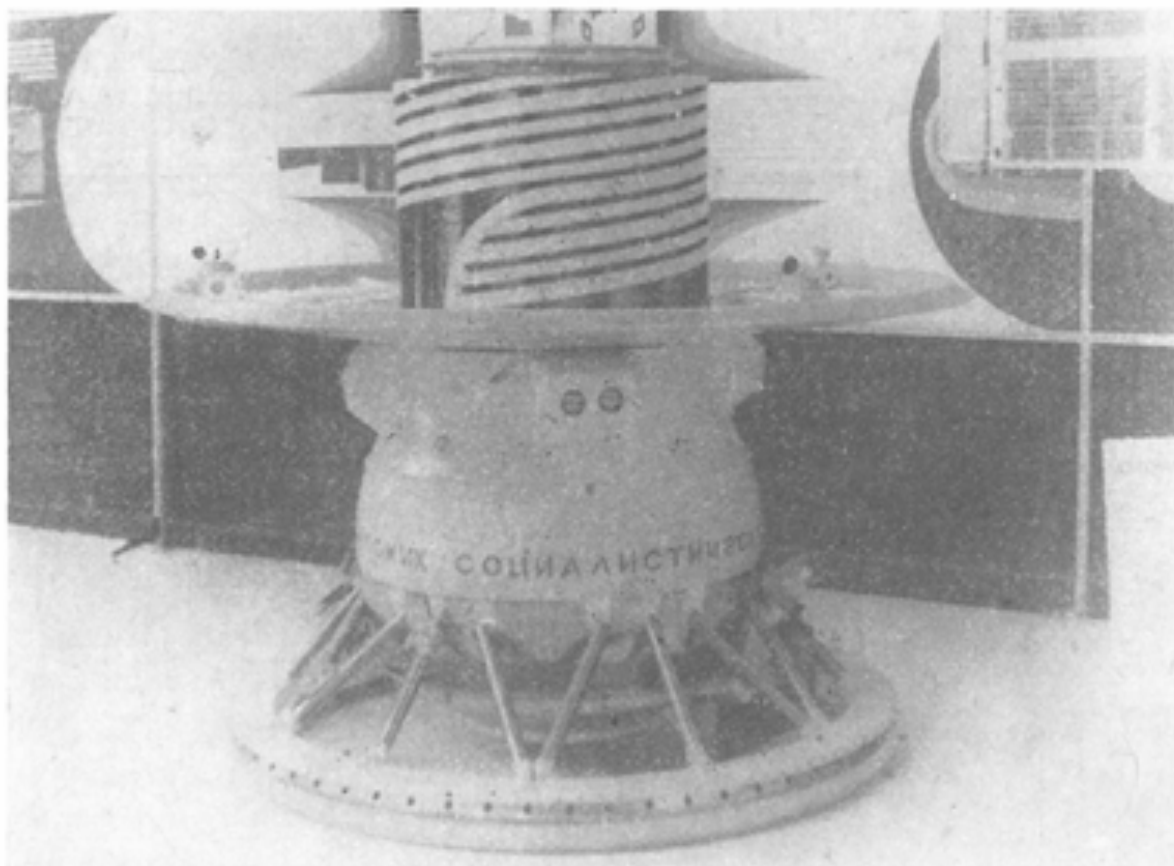
menáno zeslabení osvětlení po dobu asi 10 s, zřejmě způsobené zastíněním místa oblakem prachu zvířeného při přistání.

Analyzátor vlhkosti VM-3R měřil ve výškách 50 až 46 km. Objemový podíl vodní páry v těchto výškách byl stanoven na 0,2 %. Obsah vody se určoval již dříve spektroskopicky ze Země i z kosmických sond, ale s velkým rozptylem výsledků mezi 1 a 0,001 % podle výšky měření a použité metody.

Dopplerovský analyzátor nosné frekvence měřil rychlost větru ve výškách od 60 km až po povrch. Získáno bylo asi 20 600 měření. Ukazuje se, že ve všech výškách vane vítr směrem k západu, a to ve větších výškách rychleji než při povrchu. Nad výškou 10 km to je až 50 m/s, u povrchu již jen maximálně 1 až 2 m/s. Ve výškách mezi 50 a 60 km existuje na Venuši atmosférická turbulence.

Rychlost větru v místech přistání byla určena i pomocí přístroje *Groza 2*, měřícího elektrické výboje a akustické jevy v atmosféře. Podle výsledků akustických měření byla rychlost větru na povrchu určena na 0,3 až 0,6 m/s. Stejným přístrojem byly zaznamenány i elektrické výboje v atmosféře — jejich zdroj je s největší pravděpodobností ve výšce mezi 10 a 20 km a jeho původ je zatím nejasný. Pravděpodobně jde o stejné výboje, jaké zničily řadu detektorů na všech přistávacích pouzdrech americké sondy Pioneer-Venus. Jak soudí sovětští vědci, je podobnost s pozemními bouřkami možná jen náhodná — původ může být zcela jiný, třeba vulkanický. Hledání optických světelných záblesků na noční straně planety, které by souvisely s elektrickými výboji, dosud nevedl k žádnému pozitivnímu výsledku.

K nejzajímavějším výsledkům patří fotografie povrchu Venuše, pořízená dvěma televizními kamerami. Každá z nich měla zorné pole 37° krát 180°, takže zabezpečily sejmutí celého obzoru. Na Venuši je díky silnému rozptylu světla v husté atmosféře dohlednost menší než 1 km. Snímky z Veněry 13 ukazují světlé kamenité desky o průměru až několika metrů, mezi nimiž je tmavší hornina s úlomky kamenů. Desky vyčnívají o několik cm — zřejmě se jedná o výstup podložních hornin. Půda mezi deskami je kyprá, jemně zrnitá a její vrstva je silná několik desítek cm. Naproti tomu na snímcích z Veněry 14 kyprá hornina prakticky zcela schází — vidět je pouze vrstevnatá plochá skalní rovina. Skála je vrstevnatá — místy je až 12 vrstev silných 1 až 2 cm. Každá vrstva se přitom dělí ještě na další jemnější, které se často liší i albedem — střídají se tu světlé a tmavé pruhy. Část snímků byla poprvé v historii pořízena přes barevné filtry. První barevné snímky prozradily, že na Venuši prakticky neexistuje modrá barva. V místě Veněry 13 je půda hnědá až zelená, v místě přistání Veněry 14 je naopak odstín načervenalý. Zajímavé je, že odstín barev je poněkud závislý na úhlu pozorování. Horniny na Venuši vznikly pravděpodobně sedimentací v klidném neturbulentním prostředí — možná v husté atmosféře planety (mohlo by jít o sedimentaci



Obr. 1. Přistávací část sovětských sond Veněra 13 a 14.

materiálu uvolněného sopečnými procesy nebo impakty meteoritů), možná ve vodě (případném praoceánu na Venuši). Sovětští vědci se kloní k vulkanismu, protože jsou horniny blízké pozemním bazaltům.

Poprvé v historii byla na Venuši provedena chemická analýza povrchu, a to rentgenovým fluorescenčním spektrometrem *Arachis*. Vzorek (asi 1 cm³ horniny) byl odebrán z hloubky 3 cm, soustavou přechodových komor vložen do hermetické části stanice. Fluorescenční rentgenové záření se měřilo po ozáření izotopy ²³⁸Pu a ⁵⁵Fe. Veněra 13 dodala 38 spekter, Veněra 14 dalších 20. Chemicky se hornina podobá pozemským bazaltům — nalezeno bylo v místě přistání Veněry 13 45 % SiO₂ (v místě Veněry 14 49 %), 16 % Al₂O₃ (18 %), 13 % MgO (8 %), 7 % CaO (10 %), 4 % K₂O (0,2 %), 9 % FeO (9 %), 1,6 % TiO₂ (1,3 %) a 0,2 % MnO (0,2 %).

Jednoosý seismometr umožňoval měření vertikálních změn Venušina povrchu, větších než 10⁻⁶ cm. Pro seismické jevy je 1 až 2 hodiny práce přístroje málo, přesto však byly zaregistrovány 2 mikroseismy v době, kdy nepracovaly mechanické systémy stanice a náraz větru byl nepravděpodobný. Z analogie se seismikou Země vyplývá, že epicentrum bylo bližší než 3000 km, což by odpovídalo aktivním vulkanickým oblastem Venuše.

To jsou tedy některé z řady výsledků, které — prozatím stále ještě předběžná — analýza dat z Veněry 13 a Veněry 14 přinesla. O Venuši dnes víme o hodně více než před několika lety. Přesto však je tato planeta stále ještě zakryta řadou záhad. Na Venuši je 10 000 až 100 000krát méně vody než na Zemi — má pravdu hypotéza tvrdící, že voda na Venuši byla, ale zmizela? Kam? Nevypařil se prapůvodní oceán Venuše do ovzduší, neunikl vodík do kosmického prostoru a nesloučil se kyslík s dalšími prvky do hornin planety? Tomu by nasvědčoval i zvýšený (asi 200krát vyšší než na Zemi) podíl deutéria (těžkého vodíku) k vodíku — zatímco vodík unikl pryč do vesmíru, deutérium na planetě zůstalo. Více však přinesou teprve další experimenty, které se již dnes připravují — již za 2 roky se k Venuši vydají další 2 sovětské sondy, aby opět o kousek po-
odhalily její tajemství.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Albert Einstein a Praha

JOSEF KOTYK, Pardubice

V letech 1911 a 1912 působil v Praze jeden z nejslavnějších fyziků všech dob *Albert Einstein* (1879—1955). Výročí, jež si tím připomínáme, i okolnost, že Einsteinův pobyt v Praze je našim čtenářům poměrně málo znám, je podnětem k napsání tohoto článku.

Aby se zvýšila vědecká úroveň německé univerzity v Praze, byl na ní v lednu 1911 zřízen ústav teoretické fyziky. Z kandidátů, přicházejících v úvahu na zodpovědné místo jeho vedoucího pracovníka, byl vědeckou komisí navržen Albert Einstein, mimořádný profesor univerzity v Curychu, jenž již v roce 1905, tehdy technický expert Patentního úřadu v Bernu, upozornil na sebe slavnou prací *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (K elektrodynamice pohybujících se těles); v ní odvážně kritizoval Newtonovy představy o prostoru i čase a formuloval základy své speciální teorie relativnosti. *Max Planck* (1858—1947), profesor univerzity v Berlíně, nejznámější teoretický fyzik té doby, zakladatel kvantové mechaniky, ve svém doporučení o Einsteinovi napsal: „Jakmile se dokáže, že Einsteinova teorie je správná, a to očekávám, bude z Einsteina

Koperník XX. století.“¹⁾ To rozhodlo. Ač cizinec, jenž neměl ani státní příslušnost Rakousko-Uherské monarchie (o ni musel ovšem ihned požádat), byl mladý, sotva 32letý Einstein s platností od 1. dubna 1911 skutečně jmenován. Vzácná kariéra!

Einstein byl v Praze očekáván s napětím. Poněvadž ho předcházela pověst neobyčejně geniálního fyzika, všichni věřili, že jeho působení dodá německé univerzitě v Praze většího lesku a přiblíží její úroveň univerzitě ve Vídni. Na jeho první přednášce se proto shromáždila všechna pražská inteligence a zaplnila největší posluchárnu, jaká na filozofické



fakultě byla. Einstein nezklamal očekávání. Hovořil prostě, přirozeně, jasně a svou neobyčejnou skromností si získal ihned srdce všech. Také jeho další univerzitní přednášky byly pro svou zajímavost hojně navštěvovány netoliko studujícími německé, nýbrž i české univerzity.

Za písemnou přípravu k přednášce sloužily Einsteinovi poznámky velikosti navštívenky. Einstein tvořil přednášku přímo z hlavy; posluchači byli tak svědky jeho způsobu myšlení. Hovořil živě a s určitou dávkou humoru. Posluchači směli jeho přednášku kdykoli přerušit dotazem. Také o přestávkách setrval Einstein s posluchači v diskusích. Dokonce i s posluhujícím personálem rozmlouval rád a stejně srdečně jako s učenými kolegy.

Za svého působení v Praze bydlel Einstein na Smíchově v Lesnické ulici č. 7; na tomto domě byla dne 13. března 1979, v předvečer 100. výročí jeho narození, odhalena pamětní deska s bustou, dílem akademického sochaře *M. Bendy* a ing. arch. *I. Hněvkovského*. Přednášky konal v Kle-

¹⁾ Friedrich Herneck: Albert Einstein. Slovenský překlad z němčiny. (Smena 1969.) Cit. str. 78.

²⁾ Friedrich Herneck, l. c., str. 78.

³⁾ Albert Einstein: Teorie relativity speciální i obecná. (Překlad z němčiny. Praha 1923.) Cit. str. 9.

⁴⁾ Prakticky byla konstatována a přímým měřením také spolehlivě potvrzena dne 29. května 1919 a přesněji 21. září 1922.

mentinu a cvičení v tehdejší Přírodovědeckém ústavu německé univerzity (dnešním Zoologickém ústavu Karlovy univerzity) na Novém Městě ve Viničné ul. „Ústav je pěkný a má bohatou knihovnu,“ napsal Einstein roku 1911²). „V jeho tichých místnostech,“ doznal jinde³), „nalezl jsem soustředění nutné k tomu, abych základní myšlenku obecné teorie relativity, kterou jsem pojal již v roce 1908, poznenáhlu přiodíval určitější formou. Zde jsem také objevil některé důsledky vyplývající z mé teorie, odchylku světelných paprsků v blízkosti Slunce v míře pozorovatelné⁴), posun spektrálních čar k červenému konci spektra, zákon fotoelektrického jevu aj.“

Přesto, že se mu v Praze vedlo dobře, Einstein záhy z Prahy odešel. Lítost, s kterou opouštěl Švýcarsko, kde měl řadu blízkých přátel, odráží se v jeho slovech: „Život v Praze není tak příjemný jako ve Švýcarsku. Jsme tu cizinci...“ Již v srpnu 1912 vrátil se proto do Curychu.

Léta plynula. V roce 1916 dospěl Einstein k obecné teorii relativity. V roce 1921 objevil se náhle — aniž se předem ohlásil — opět v Praze, v českém Fyzikálním ústavu Karlovy univerzity na Novém Městě, Ke Karlovu. V pracovně profesorů teoretické fyziky dr. Františka Závíšky a dr. Viktora Trkala (oba náleželi k přesvědčeným stoupencům a horlivým šířitelům Einsteinových názorů) spatřil na stěně — svůj obraz. Oba se přímo vylekali, když náhlý host, ukazuje na obraz, uvedl se způsobem neobyčejně svérázným a humorným slovy: „Tady mě máte — živého!“

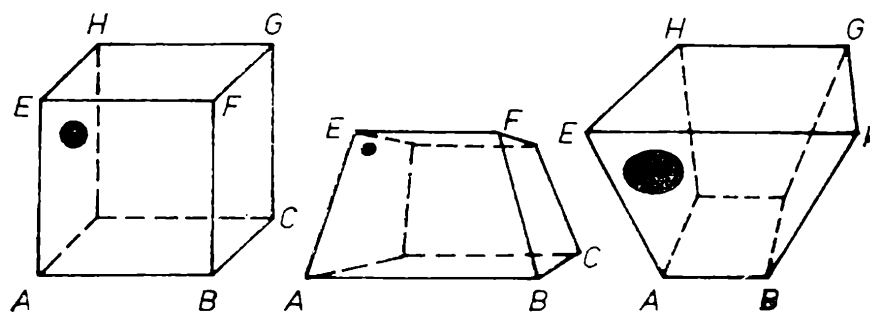
Vzpomínám často, jak oba profesori po léta rádi líčili posluchačům dojmy, jimiž na ně Einstein kouzlem své osobnosti tehdy tak mocně zapůsobil. Svou návštěvou Prahy chtěl v počátcích naší státní samostatnosti prý osvědčit také své sympatie a složit svůj hold mladé Československé republice.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

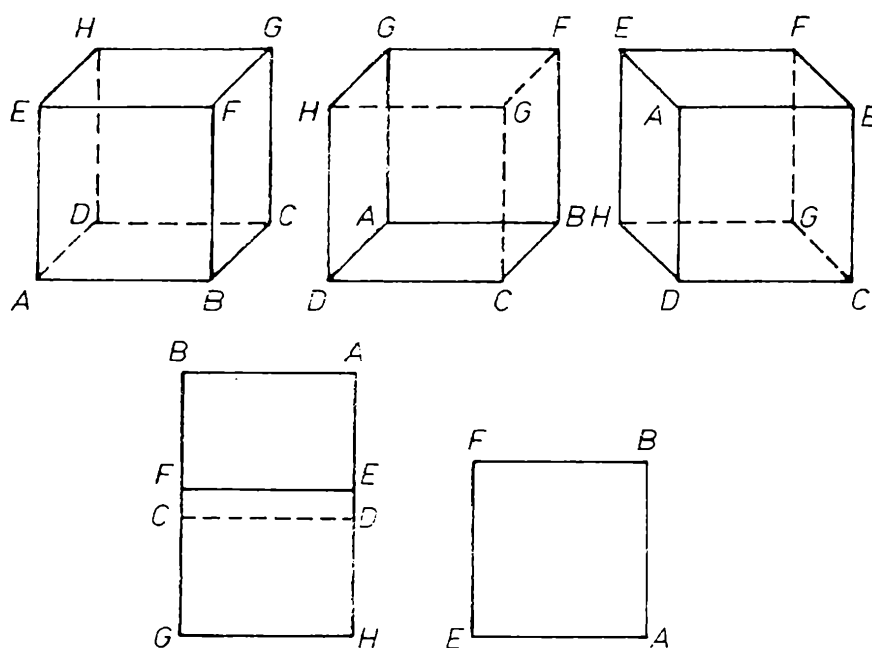
Kostky nejen Rubikovy

Dr. ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF UK Praha

Všichni jistě znáte *Rubikovu kostku*. Mnozí z vás si ověřili „na vlastní kůži“, že její složení vyžaduje značnou dávku prostorové představivosti. Jak to s vaší představivostí vypadá, to můžete vyzkoušet pomocí velmi jednoduchých pomůcek. Na těchto stránkách budou postupně uváděny hříčky s krychlemi. K jejich vyřešení nepotřebujete nic než dobrou geo-



Obr. 1



Obr. 2

metrickou představivost. Pokud ji nemáte, nezoufejte. Ještě se může mnohé zlepšit, budete-li ji pravidelně cvičit. Možností máte dost; jednou z nich je řešení našich úloh. Předpokládá to však samostatnou práci; „opisování“ nemá smysl. To byste ošidili jen sami sebe.

Jaké pomůcky budete potřebovat? Pro některé z příštích úloh čtverečkový papír, průsvitku, barevné tužky a dvě krychle s umývatelnými stěnami, abyste je podle potřeby mohli popisovat. A pak — samozřejmě — chuť do práce.

1. Učme se dívat.

Dobře víte, že týž předmět vypadá z různých stran různě. Chce-li výtvarník popsat vzájemnou polohu sebe (jako pozorovatele) a pozorovaného předmětu, mluví o podhledu nebo nadhledu, o pohledu zleva či zprava. Možná, že jste slyšeli i o „žabí“ a „ptačí“ perspektivě. Na obr. 1 vidíte nejprve krychli stojící na zemi (nadhled zprava), dále obraz téže krychle při pozorování z úrovně země (žába) a konečně při pohledu z velké výšky (pták). V geometrii se těchto extrémních pozorovacích míst většinou neužívá. Přece však se pokuste rozhodnout, odkud musíte pozorovat krychli $ABCDEFGH$, jejíž dolní stěna $ABCD$ je neustále ve vodorovné rovině, abyste ji viděli právě tak, jak je nakreslena na jednotlivých částech obr. 2.

Že to nebylo nic obtížného? Pokračujeme tedy dále. Krychli $ABCDEF$ GH vybarvíme, a to tak, že každá stěna bude jednobarevná zevně i zevnitř krychle téže barvy. Stěna $BCGF$ je zelená, stěna $CGHD$ žlutá, stěna $DAEH$ modrá, stěna $ABCD$ hnědá, stěna $EFGH$ červená. Stěnu $ABFE$ necháme zcela bezbarvou, průhlednou. Touto stěnou se tedy můžeme dívat dovnitř „krychlové krabice“, která je na obr. 2. nakreslena v pěti různých polohách.

Barvili jste správně? Jestliže ano, použili jste zelenou, žlutou a modrou pastelku vždy na třech obrázcích, hnědou a červenou na čtyřech. Zkontrolujte!

Několik úloh pro nejmladší čtenáře

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Ze zahraničních časopisů, zejména z holandského časopisu *Pythagoras*, uvádím několik zajímavých příkladů, které může rozřešit studující prvního ročníku střední školy.

1. Všimněte si těchto zvláštních výsledků při výpočtu odmocnin:

$$\sqrt[3]{3 + \frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 3}{8}} = 3 \sqrt[3]{\frac{3}{8}}$$

$$\sqrt[3]{2 + \frac{2}{7}} = \sqrt[3]{\frac{16}{7}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 2}{7}} = 2 \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$$

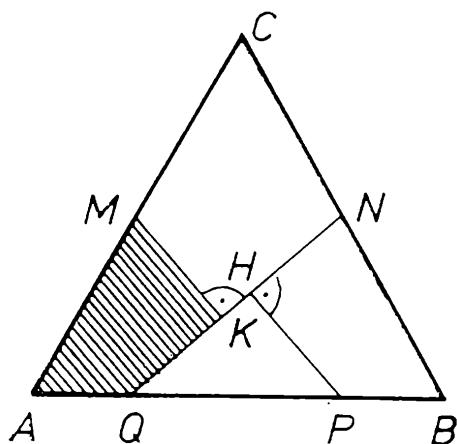
$$\sqrt[4]{4 + \frac{4}{255}} = \sqrt[4]{\frac{1024}{255}} = \sqrt[4]{\frac{256 \cdot 4}{255}} = 4 \sqrt[4]{\frac{4}{255}},$$

$$\sqrt[7]{2 + \frac{2}{127}} = \sqrt[7]{\frac{256}{127}} = \sqrt[7]{\frac{128 \cdot 2}{127}} = 2 \sqrt[7]{\frac{2}{127}}.$$

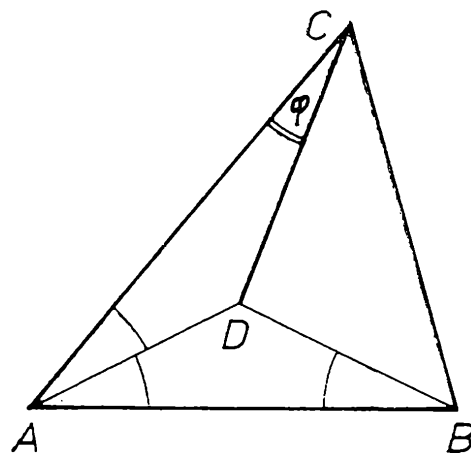
Pokuste se nalézt vzorec pro tyto případy odmocnin; není to nikterak obtížné.

2. Vypočtete:

a) $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}};$



Obr. 1



Obr. 2

b)
$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

3. V obdélníku $ABCD$ je dán jeho vnitřní bod P tak, že má od vrcholů A, B, C po řadě vzdálenosti 3, 4, 5. Vypočtete vzdálenost bodu P od vrcholu D .

4. Na obr. 1 je narysován rovnostranný trojúhelník ABC ; body M, N jsou středy jeho stran AC, BC . Každý z bodů P, Q má od bližšího vrcholu strany AB vzdálenost rovnou čtvrtině velikosti této strany. Trojúhelník ABC je na obrázku rozdělen na čtyři nepřekrývající se obrazce. Přesvědčte se, že z těchto čtyř obrazů lze sestavit obdélník tak, že se opět žádné dva obrazce nepřekrývají.

5. Na obr. 2 je narysován rovnoramenný trojúhelník ABD se základnou AB a trojúhelník ABC . Polopřímka AD je osou úhlu BAC , polopřímka BD rozděluje úhel ABC ve dva úhly tak, že úhel CBD je dvojnásobkem úhlu DBA . Jestliže je $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABD| = 10^\circ$, pak lze snadno vypočíst (bez užití trigonometrie) velikost úhlu ACD ; pokuste se o to.

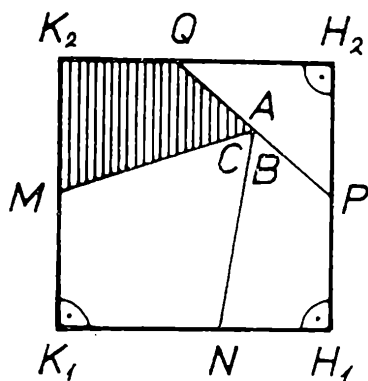
Řešení několika úloh pro nejmladší čtenáře

1. Ve všech uvedených případech platí rovnost

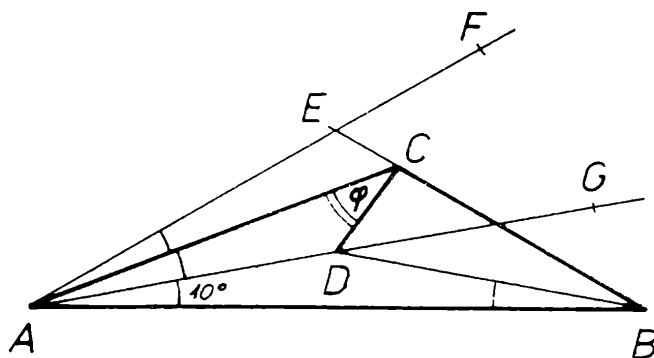
$$\sqrt[p]{k + \frac{k}{n}} = k \sqrt[p]{\frac{k}{n}},$$

kde $k > 1, n > k, p > 1$ jsou čísla celá. Tato rovnost platí právě tehdy, je-li postupně

$$k + \frac{k}{n} = k^p \frac{k}{n}$$



Obr. 3



Obr. 4

$$\begin{aligned} n + 1 &= k^p \\ n &= k^p - 1 \end{aligned}$$

2. Je-li $n \geq 1$ celé, je

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Provedeme-li tuto úpravu pro každý z daných zlomků, dostaneme v případě a) tento výsledek:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) = -1 + 2 = 1.$$

Obdobně dostaneme v případě b), že součet všech daných zlomků je roven číslu 9.

3. Nechť a, b, c, d jsou vzdálenosti bodu P od přímek DA, AB, BC, CD (obrázek si každý čtenář sám nakreslí); potom podle Pythagorovy věty dostaneme tyto tři rovnosti:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 9, \\ b^2 + c^2 &= 16, \\ c^2 + d^2 &= 25. \end{aligned}$$

Znásobíme-li druhou rovnost číslem -1 a všechny tři rovnosti potom sečteme, dostaneme tento výsledek:

$$a^2 + d^2 = 18.$$

Avšak $\sqrt{a^2 + d^2} = 3\sqrt{2}$ je vzdálenost bodu P od vrcholu D .

4. Řešení vidíte na obr. 3. Pravé úhly při vrcholech obdélníku $H_1H_2K_2K_1$ jsou obrazy pravých úhlů s vrcholy H, K , které vidíte na obr. 1. Úsečky H_1P, H_2P na obr. 3 jsou shodné s úsečkou HP z obr. 1, úsečky K_1M, K_2M na obr. 3 jsou shodné s úsečkou KM z obr. 1. Obdobně to platí pro další úsečky, jejichž krajní body jsou na obr. 3 označeny týmiž písmeny jako krajní body úseček na obr. 1. Ze shodnosti pravo-

úhlých trojúhelníků PHN , MKQ (jejichž přepony nejsou na obr. 1 narýsovány) plyne, že je

$$HN = KQ, HP = KM$$

z toho pak plyne, že je

$$HQ = KN$$

Proto úsečky H_1H_2 , K_1K_2 na obr. 3 jsou shodné a rovněž úsečky H_2K_2 , H_1K_1 jsou shodné. Obrazec $H_1H_2K_2K_1$ je tedy obdélník nebo čtverec. Snadno však dokážeme, že sousední strany obrazce $H_1H_2K_2K_1$ nejsou shodné; je to tedy obdélník.

Důkaz provedeme na základě toho, že je

$$|H_1H_2| = 2|HP|,$$

$$|H_1K_1| = |H_1N| + |K_1N| = |HN| + |KN| = |HN| + |HQ| = |NQ|.$$

Stačí tedy dokázat, že v obr. 1 je

$$2|HP| \neq |NQ|$$

Důkaz se provede podle Eukleidových vět užitých na pravoúhlý trojúhelník NPQ , v němž úsečka MP je výškou k přeponě NQ . Je-li a velikost strany rovnostranného trojúhelníku ABC , je

$$|PQ| = \frac{a}{2}, |NP| = \frac{v}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{3};$$

výpočet zjednodušíme, položíme-li $a = 4$. Potom je $|NQ| = \sqrt{7}$, $|HQ| = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $|HN| = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $|HP|^2 = \frac{12}{7}$; je tedy

$$4|HP|^2 = \frac{48}{7}, |NQ|^2 = 7 = \frac{49}{7},$$

tj. $|NQ| > 2|HP|$

5. V polorovině ABC sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABE , jehož rameno BE je částí polopřímky BC (obr. 4). Každý jeho vnitřní úhel při základně AB má velikost 30° a bod D je vnitřním bodem jeho výšky k základně AB . Protože je $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$, $|\sphericalangle BAC| = 20^\circ$, je $|AC| > |BC|$; bod C je tedy vnitřním bodem poloroviny DEB . Z trojúhelníku ABE plyne, že je

$$|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle BED| = 60^\circ,$$

takže také úhel BEF , který je vedlejší k úhlu AEB o velikosti 120° , má velikost 60° . Bod C ležící uvnitř poloroviny DEB je tedy bodem osy EB úhlu DEF ; zároveň je také bodem osy úhlu DAE . Proto je středem kružnice, která leží v polorovině DEB a je vně vepsána trojúhelníku

ADE. Z toho plyne, že bod *C* je také vnitřním bodem osy úhlu *EDG*, který je vedlejší k úhlu *EDA*.

Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku použité na trojúhelník *ADE* je

$$|\sphericalangle EDG| = |\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle AED| = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$$

protože polopřímka *DC* je osou úhlu *EDG*, je

$$|\sphericalangle CDG| = 40^\circ$$

Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku aplikované na trojúhelník *ADC* je

$$40^\circ = |\sphericalangle CDG| = |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle ACD| = 10^\circ + |\sphericalangle ACD|;$$

z toho plyne, že je $\varphi = |\sphericalangle ACD| = 30^\circ$.

Z NOVÝCH KNIH

Lála, P., Vitek, A.:

MALÁ ENCYKLOPEDIE KOSMONAUTIKY

Vydala Mladá fronta, Praha 1982,
1. vydanie, 392 strán, obrázky, ta-
bulky, prehľady, viaz. Kčs 30,—.

Malá encyklopédia kozmonautiky je sympatickým upozornením na „veľkosť a dôležitosť“ tohoto odboru ľudskej činnosti. V jedenástich kapitolách naznačuje predpoklady i výsledky kozmického úsilia. Prehľadne charakterizuje dosiahnuté technické parametre, vedecké úspechy i ľudský podiel na týchto výsledkoch. V encyklopédii je 64 tabuliek a prehľadov o rôznych okolnostiach kozmického výskumu. Napríklad: optimálne drá-

hy k planétam, kozmodrómy, nosné rakety, prehľad družíc rôzneho zamerania a určenia, prehľad sond k Mesiacu a planétam, chronológia pilotovaných kozmických letov, prehľad biografických údajov kozmonautov, vedcov i konštruktérov.

Informačne cenné sú prehľady z histórie kozmonautiky, zoznamy so základnými údajmi o nosných raketách, rôznych typoch družíc a sond i perspektívy medzinárodnej spolupráce. V závere je uvedená doporučená literatúra pre ďalšie štúdium.

Publikácia určite nájde svojich čitateľov a používateľov. Poslúži ako užitočný súbor informácií každému záujemcovi o kozmonautiku.

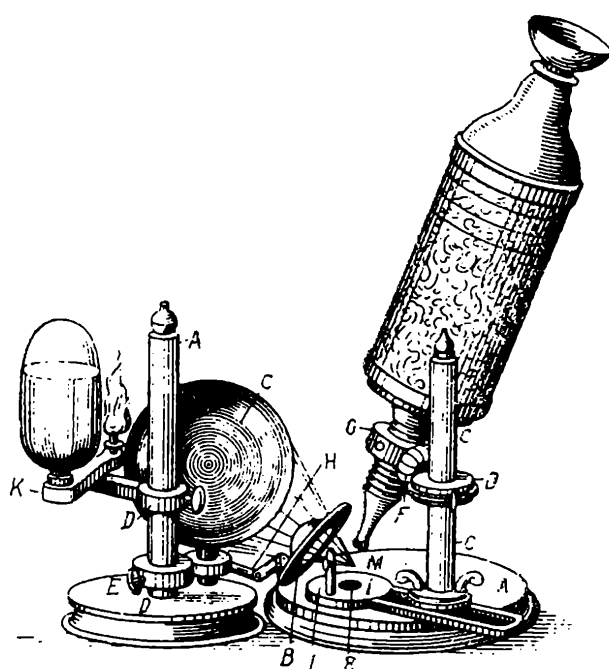
Dušan Jedinák

Hookův mikroskop

Vynález mikroskopu a dalekohledu na konci 16. století nejen znásobil lidské vědění jako žádný jiný přístroj, ale signalizoval zároveň novou éru dějin přírodovědy. Od nepaměti bylo sice známo, že spojná čočka zvětšuje pozorovaný předmět, avšak teprve italský lékař *Fracastoro* píše r. 1538, že dají-li se nad sebe dvě čočky, lze vidět věci zvětšeny. Avšak první pevný mikroskop sestrojil r. 1590 holandský sklář *Janssen*.

Robert Hooke (1635—1703) přišel na to, že je třeba na pozorovaný objekt soustředit světlo kondenzorem, což byla, jak vidíme na obrázku, velká skleněná koule (případně nádoba kulového tvaru naplněná vodou) osvětlovaná plamenem knotu neustále napájeného olejem. Vidíme rovněž, že Hooke omezil jak osvětlující světelný svazek, tak paprsky vstupující do objektivu, a to velmi úzkým otvorem *M* vybírajícím z celého svazku jen osovou část.

Je zajímavé, že ještě v 17. století tomuto principu drobnohledu dovedl úspěšně konkurovat „drob-



nohled“ tvořený soustavou malinkých kuliček prostě přiložených k pozorovanému předmětu. Tímto způsobem dokonce objevil Holanďan *Leeuwenhoek* mikroorganismy a položil tak základ mikrobiologie. Idea skleněných kuliček ovšem záhy zanikla a zvítězil drobnohled „našeho typu“, který na základě své teorie optického zobrazení podstatně zdokonalil německý fyzik *Abbe* (1873), přítel výrobce optických přístrojů v Jeně *Karla Zeisse*.

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

František Veselý: O NEROVNOSTECH A NEROVNICÍCH

Základní metody řešení lineárních a kvadratických nerovností a soustav lineárních nerovnic. Příklady z praxe. 88 stran, kart. 5 Kčs

Pavel Vít: ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Systematický výklad teorie řetězových zlomků s ukázkami zajímavých aplikací této teorie. 160 stran, kart. 7 Kčs

Adam Płocki: O NÁHODĚ A PRAVDĚPODOBNOSTI

Metody teorie pravděpodobnosti, aplikované v různých oblastech, objasnění pojmů, jako je pravděpodobnost jevu, náhodná hra metoda Monte Carlo aj. 176 stran, kart. 9 Kčs

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kašpova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1982.

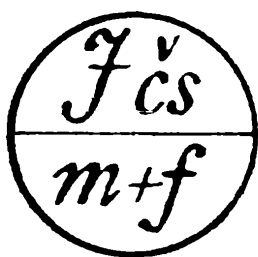
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(8)

**ROČNÍK 61, 1982/83
DUBEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, doc. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

M. Hejný: Zaujímavý aritmetický priemer	317
F. Janeček: Vlastnosti Pascalova troj- úhelníku	320
J. Benešová, V. Mráz: Frekvence otáčení a pilový diagram	328
E. Veselá, B. Božek, P. Zvolský: Fyzikál- ně kybernetický přístup ke vzniku a podstatě biorytmů .	334
V. Patrovský: Luminiscenční analýza .	341
F. Jáchim: Halleyova kometa nalezena	347
P. Ferko: Základné fyzikálne formy ma- térie v historickom vývoji	349
Přemýšlíme, řešíme	354
Z nových knih	358
Pohledy do dějin	. 3. str. obálky
J. Pech: Slovník matematických termínů (21–24)	příloha

Zaujímavý aritmetický priemer

Doc. dr. MILAN HEJNÝ, CSc., MFF UK Bratislava

Aritmetický priemer reálnych čísel a, b budeme označovať symbolom $a * b$. Teda $*$ je binárna operácia na množine $\mathbf{R}$ všetkých reálnych čísel daná predpisom

$$a * b = \frac{a + b}{2}$$

Zdánlivo jednoduchá operácia môže byť pôvodcom viacerých zaujímavých a vonkoncom nie jednoduchých úloh. Cieľom článku je ukázať čitateľovi niektoré z takých úloh. Rozdelíme ich do troch častí, troch tém.

I. Vyjadrovanie čísel

Určite ste sa už stretli s úlohami, v ktorých bolo treba napr. napísať číslo 10 pomocou štyroch cifier 3. Všimnite si rovnosti:

$$0 * 1 = 0,5, 1 * 0 = 0,5, 1 * (0 * 1) = 0,75, (1 * (0 * 1)) * 1 = \frac{7}{8}.$$

Čísla 0,5, 0,75 a $\frac{7}{8}$ sú tu zapísané iba pomocou symbolov

$$0, 1, *, (,). \quad (1)$$

Úloha 1. Iba pomocou symbolov (1) zapíšte čísla a) 0,25; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{5}{8}$; d) $\frac{9}{16}$; e) $\frac{5}{4}$; f) $-0,5$; g) $\sqrt{2} - 1$; h) $\frac{1}{3}$; i) $\frac{1}{6}$.

Úloha 2. Nájdite pravidlo, ktoré hovorí, ako sa iba pomocou symbolov (1) dajú zapísať čísla a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}$.

Úloha 3. Symbolom $\mathbf{D}_n$ označme množinu všetkých tých reálnych čísel, ktoré sa dajú zapísať iba pomocou symbolov (1), pričom sa symbol $*$ použije práve n -krát. Vypíšte všetky prvky množín $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3 \dots$. Pokúste sa situáciu zaznačiť graficky.

Úloha 4. Zistite, koľko prvkov má množina $\mathbf{D}_n$.

Úloha 5. Množina $\mathbf{D}$, ktorá vznikne zjednotením všetkých množín

$D_0, D_1, D_2, D_3, \dots$, sa volá *množina diadických čísel*. Zistite, ktoré z nasledujúcich čísel sú diadické (t. j. patria do D):

a) $\frac{11}{32}$, b) $\frac{11}{24}$; c) $\frac{11}{22}$; d) $\frac{1}{5}$; e) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Úloha 6. Nájdite takú definíciu množiny D , aby sa pomocou nej dalo „okamžite“ rozhodnúť, či dané racionálne číslo $\frac{p}{q}$ patrí, alebo nepatrí do D . Tu p, q sú celé nesúdeliteľné.

Úloha 7. Nájdite predpis, pomocou ktorého sa každé číslo $x \in D$ (tentoraz vychádzame z definície množiny D , získanej riešením úlohy 6.), dá zapísať pomocou iba symbolov (1).

Úloha 8. V množine D nájdite číslo najbližšie ku číslu $\frac{1}{3}$; presnejšie: nájdite $d \in D$ tak, aby pre každé $x \in D$ bolo $\left| d - \frac{1}{3} \right| \leq \left| x - \frac{1}{3} \right|$. Rovnakú úlohu riešte pre číslo $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{5}$.

II. Rovnice

V časti I. sme videli, že pomocou symbolov (1) možno zapísať iba niektoré reálne čísla. Napríklad čísla väčšie ako 1 alebo záporné čísla sa takto zapísať nedajú. Tieto čísla však niekedy možno vyjadriť pomocou rovníc. Tak napríklad číslo 2 môžeme písať ako koreň rovnice $x * 0 = 1$ a číslo -5 ako koreň rovnice $1 * (0 * (1 * x)) = 0$. Múdro zapísané

$$\{2\} = \{x \in \mathbf{R}; x * 0 = 1\}, \{-5\} = \{x \in \mathbf{R}; 1 * (0 * (1 * x)) = 0\}.$$

Pretože operácia $*$ nie je asociatívna, treba pri dlhších zápisoch veľký počet zátvoriek, čím sa symbol stáva neprehľadným. Preto bude užitočné zjednodušiť symboliku tak, že zavedieme:

Dohovor. Výraz $a_1 * a_2 * (a_3 * (\dots a_{n-1} * a_n) \dots))$ budeme značiť stručnejšie $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$.

Napríklad $\langle 0, 0, 1, x \rangle = (0 * (0 * (1 * x)))$.

Odteraz až do konca časti II. budeme pod pojmom rovnica rozumieť takú rovnicu, v ktorej sa vyskytujú iba symboly (1) a pochopiteľne symbol neznámej x a symbol rovnítko „ $=$ “. O rovnici $f = g$ povieme, že je rovnicou čísla x_0 , práve keď číslo x_0 je jediným koreňom danej rovnice. Samotné číslo x_0 potom nazveme *rovnícové číslo*. Množinu všetkých rovnícových čísel označíme A (latinsky: aequatio = rovnosť).

Úloha 1. Riešte rovnicu a) $\langle 0, 1, x \rangle = 1$; b) $x = \langle 0, 1, x \rangle$; c)

$\langle x, 1, x \rangle = \langle 1, 0, x \rangle$; d) $\langle x, 1 \rangle = \langle 0, 0, 1 \rangle$; e) $\langle 1, x, 0 \rangle = \langle 1, 0, x \rangle$; f) $\langle 0, x, 1 \rangle = \langle 1, 1, x \rangle$.

Úloha 2. Zistite, ktoré z nasledujúcich celých čísel je rovníkové:
a) 5; b) 9; c) 47; d) -10 ; e) -20 ; f) -130 .

Úloha 3. Dokážte, že množina všetkých celých čísel $\mathbf{Z}$ je podmnožinou množiny $\mathbf{A}$; t. j. nájdite predpis, ako ku každému celému číslu možno nájsť jeho rovnicu.

Úloha 4. Ktoré z nasledujúcich racionálnych čísel je číslo rovníkové
a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{2}{7}$; d) $\frac{3}{7}$; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{2}{5}$; g) $\frac{4}{5}$?

Úloha 5. K čomu najväčšiemu počtu racionálnych čísel nájdite ich rovnice. Platí inklúzia $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A}$?

Úloha 6. Sú čísla a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2} - 1$; c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ rovníkové? Platí inklúzia $\mathbf{A} \subset \mathbf{Q}$?

III. Operátory na $\mathbf{Z}$.

Aritmetickým priemerom celých čísel nemusí byť celé číslo. V tejto tretej časti sa však obmedzíme na celé čísla, na množinu $\mathbf{Z}$. Nebudeme preto vyšetrovať operáciu $*$, ale pomocou nej definované zobrazenia-operátory.

Nech n je nepárne číslo. Potom zobrazenie

$$f_n: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, x \rightarrow \begin{cases} x * 0, & \text{ak } x \text{ je párne,} \\ x * n, & \text{ak } x \text{ je nepárne,} \end{cases}$$

nazveme operátor čísla n .

Napríklad $f_1(2) = 1$, $f_1(3) = 2$, $f_1(6) = 3$, $f_1(37) = 19$, $f_3(5) = 4$, $f_3(-8) = -4$, $f_3(-11) = -4$, $f_{11}(93) = 52$.

Úloha 1. Nech $x \in \mathbf{Z}$ je dané číslo. Vytvorme postupnosť čísel $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ takto: $x_0 = x$, $x_1 = f_1(x_0)$, $x_2 = f_1(x_1)$, $x_3 = f_1(x_2), \dots$. Postupnosť je zadaná rekurentne vzťahom $x_{i+1} = f_1(x_i)$. Vyšetrite, ako uvedená postupnosť vyzerá pre a) $x = 19$; b) $x = 190$; c) $x = 10^{100}$; d) $x = -20$; e) $x = 10^{100}$.

Úloha 2. Zistite, ako vyzerá postupnosť $x, f_3(x), f_3^2(x), f_3^3(x), f_3^4(x), \dots$ pre každé x z množiny $\{-10, -9, -8, \dots, 13, 14, 15\}$.

Úloha 3. Vypočítajte $f_1^{100}(x)$ a $f_3^{100}(x)$ pre a) $x = 4$; b) $x = -50$; c) $x = 999$; d) $x = 1000$.

Úloha 4. Nájdite všetky korene rovnice a) $f_1(x) = x$; b) $f_3(x) = x$; c) $f_5(x) = x$; d) $f_7(x) = x$; e) $f_3^2(x) = x$; f) $f_3^3(x) = x$; g) $f_5^4(x) = x$; h) $f_7^3(x) = x$.

Úloha 5. Nájďte všetky korene rovnice $f_9^n(x) = x$ pre a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 5$; f) $n = 6$.

Úloha 6. Vyšetrite rovnicu $f_{15}^n(x) = x$, t. j. nájdite všetky dvojice $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, ktoré sú jej riešením. To isté pre rovnicu $f_{21}^n(x) = x$.

Vlastnosti Pascalova trojúhelníku

FRANTIŠEK JANEČEK, gymnázium Holice

Pripomeňme si najprve definíciu kombinačného čísla $\binom{n}{k}$ (čteme „ n nad k “), známou ze školy.

Budtež n, k přirozená čísla, přičemž $k \leq n$. Potom

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}, \quad (1)$$

čili

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad (1a)$$

(tj. v čitateli i ve jmenovateli je právě k činitelů, které se postupně zmenšují o jedničku).

Definice kombinačného čísla se rozširuje i pro $k = 0$; definujeme

$$\binom{n}{0} = 1 \quad (2)$$

pro každé přirozené n .

Pro $n = 0, k = 0$ je

$$\binom{0}{0} = 1 \quad (3)$$

1. Na pravé straně vzorce (1) je pro $k = 1$ v čitateli i ve jmenovateli jenom jeden člen; aby věty měly obecnou platnost, řekněme mu součin o jednom činiteli. Pro $k = 1$ je tedy

$$\binom{n}{1} = n$$

Pro $k = n$ je $\binom{n}{n} = 1$

2. Výpočet hodnoty kombinačního čísla usnadňuje známý vzorec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}, \quad (4)$$

který platí pro $n \geq 0$ celé, $0 \leq k \leq n$ celé.

3. Pro libovolná nezáporná celá čísla n, k , kde $n \geq k$, je $\binom{n}{k}$ celé číslo.

4. Pro úplnost se definuje někdy kombinační číslo i pro přirozená čísla n, k , pro něž platí $n < k$. Potom klademe

$$\binom{n}{k} = 0.$$

5. Pro případ, že některé (nebo obě) z čísel n, k je záporné, číslo $\binom{n}{k}$ nedefinujeme.

6. Kombinační čísla $\binom{n}{k}$ se nazývají též *binomické koeficienty*. Jsou to totiž koeficienty jednotlivých členů binomického rozvoje z tzv. binomické věty, která je čtenáři známa ze střední školy.

Je-li n přirozené číslo, pak pro libovolná čísla a, b platí

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (5)$$

tj.

$$\begin{aligned} (a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \\ + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n, \end{aligned}$$

neboť koeficienty při a^n a b^n jsou po řadě $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$.

Kombinační čísla mají některé užitečné a zajímavé vlastnosti. Při počítání s nimi se uplatňují tyto jejich důležité vlastnosti

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}, \quad (6)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (7)$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad (8)$$

které platí pro libovolná dvě celá čísla n, k , splňující vztah $0 \leq k \leq n$.

Dokážeme ještě další vztahy, které v dalším výkladu použijeme.
Pomocná věta 1. Jsou-li k, n, p přirozená čísla, pak platí

$$\sum_{k=n}^{n+p} \binom{k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}, \quad (9)$$

tj.

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Důkaz: Do vzorce (8) dosadíme $k = n$ a za n dosazujeme postupně $n+1, n+2, n+3, \dots, n+p$. Dostaneme tyto rovnice:

$$\binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+2}{n+1},$$

$$\binom{n+2}{n} + \binom{n+2}{n+1} = \binom{n+3}{n+1},$$

$$\binom{n+p}{n} + \binom{n+p}{n+1} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} & \left[\binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} \right] + \\ & + \left[\binom{n+1}{n+1} + \binom{n+2}{n+1} + \dots + \binom{n+p}{n+1} \right] = \\ & = \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+3}{n+1} + \dots + \binom{n+p}{n+1} + \binom{n+p+1}{n+1} \end{aligned}$$

Protože $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$, můžeme poslední rovnost upravit takto:

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} + \\ & + \left[\binom{n+2}{n+1} + \binom{n+3}{n+1} + \dots + \binom{n+p}{n+1} \right] = \\ & = \left[\binom{n+2}{n+1} + \binom{n+3}{n+1} + \dots + \binom{n+p}{n+1} \right] + \binom{n+p+1}{n+1} \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že se výrazy v lomených závorkách na obou stranách ruší, plyne odtud okamžitě tvrzení dokazované věty.

Pomocná věta 2. Jsou-li m , n a r přirozená čísla, pak platí

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}, \quad (10)$$

tj.

$$\begin{aligned} & \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{r-2} + \dots + \\ & + \binom{m}{r-1} \binom{n}{1} + \binom{m}{r} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{r} \end{aligned}$$

Důkaz: Nechť jsou splněny předpoklady věty. Potom pro každé reálné číslo x platí

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n.$$

Provedme umocnění na obou stranách rovnice podle binomické věty:

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Provedeme-li násobení naznačené na pravé straně této rovnice, vyjde

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{m+n} s_k x^k, \quad (a)$$

kde

$$s_{m+n} = \binom{m}{m} \binom{n}{n} = 1, \quad s_0 = \binom{m}{0} \binom{n}{0} = 1$$

a pro $r = 1, 2, \dots, m+n-1$

$$s_r = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \dots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}, \quad (b)$$

neboť člen $s_r x^r$ na pravé straně rovnice (a) dostaneme, když v součinu

$$\begin{aligned} & \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \dots + \binom{m}{m} x^m \right] \\ & \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n \right] \end{aligned}$$

násobíme první člen v prvním činiteli, tj. $\binom{m}{0}$, členem $\binom{n}{r} x^r$ druhého činitele, k tomuto součinu připočteme součin

$$\binom{m}{1} x \binom{n}{r-1} x^{r-1} = \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} x^r$$

atd.

Jestliže např. $r > m$ nebo $r > n$ nebo současně $r > m$ a $r > n$, platí rovněž vztah (b), neboť

$$\binom{m}{m+1} = \binom{m}{m+2} = \dots = \binom{m}{r} = 0,$$

resp.

$$\binom{n}{n+1} = \binom{n}{n+2} = \dots = \binom{n}{r} = 0.$$

Jestliže $r > m + n$, je zřejmě $s_r = 0$.

Poněvadž vztah (a) platí pro každou hodnotu proměnné x , je podle věty o neurčitých součinitelích (z rovnosti dvou mnohočlenů plyne rovnost koeficientů u týchž mocnin x) pro $r = 1, 2, \dots, m + n - 1$

$$\binom{m+n}{r} = s_r. \quad (c)$$

Porovnáním vztahů (b) a (c) plyne vztah (10).

Důsledek pomocné věty 2. Dosadíme-li do vztahu (10) $m = r = n$, obdržíme

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Poněvadž $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, plyne odtud

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \quad (11)$$

čili

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Ze školy víme, že se kombinační čísla dají snadno vypočítat pomocí schématu zvaného Pascalovo schéma nebo také *Pascalův trojúhelník*. Dostaneme jej, napíšeme-li kombinační čísla do tabulky, jejíž každý vodorovný řádek obsahuje všechna kombinační čísla pro totéž n . $(n+1)$ ní vodorovný řádek tohoto trojúhelníka obsahuje tedy tato čísla

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n},$$

tj. $n + 1$ čísel $\binom{n}{k}$ tvořených z čísla n pro $k = 0, 1, \dots, n$.

Schéma s číselnými hodnotami symbolů $\binom{n}{k}$, např. pro $0 \leq n \leq 6$,

je toto

$n = 0, k = 0$										1							
$n = 1, k = 0, 1$										1				1			
$n = 2, k = 0, 1, 2$										1		2		1			
$n = 3, k = 0, 1, 2, 3$										1	3		3		1		
$n = 4, k = 0, \dots, 4$										1	4		6		4		1
$n = 5, k = 0, \dots, 5$										1	5	10		10		5	1
$n = 6, k = 0, \dots, 6$										1	6	15	20		15	6	1

První vodorovný řádek tabulky obsahuje číslo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, druhý řádek čísla $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$, v třetím řádku jsou čísla

$$\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1, \text{ atd.}$$

Zvolme přirozené číslo m a v každém vodorovném řádku počínaje $(m + 1)$ -ním vybereme $(m + 1)$ -ní číslo řádku. Dostaneme čísla

$$\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \dots, \binom{m+p}{m},$$

Budeme říkat, že tato kombinační čísla tvoří $(m+1)$ -ní šikmý řádek Pascalova trojúhelníku.

Např. čtvrtý šikmý řádek Pascalova trojúhelníku ($m = 3$) obsahuje čísla $\binom{3}{3} = 1$, $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{6}{3} = 20$, $\binom{7}{3} = 35$, $\binom{8}{3} = 56$, $\binom{9}{3} = 84$,

Historická poznámka. Pascalův trojúhelník v podstatě poznali Číňané už v 14. století n. l. a jistě jim byla známa též binomická věta. V Evropě použil Pascalova trojúhelníku poprvé *Apianus*, učitel Karla V. a binomické věty pravděpodobně *Michal Stifel* (1486—1597). Své jméno má trojúhelník od francouzského matematika *Blaise Pascala* (1623—1662), který je znám nejen jako matematik, ale i jako vynikající fyzik a filozof.

Pascalův trojúhelník má řadu zajímavých vlastností, z nichž některé si nyní uvedeme.

Věta 1. Každý vodorovný řádek Pascalova trojúhelníku začíná a končí číslem 1.

Důkaz tohoto tvrzení je triviální; stačí si uvědomit, že na začátku $(n + 1)$ -ního vodorovného řádku je číslo $\binom{n}{0} = 1$ a na konci $(n + 1)$ -ního vodorovného řádku je číslo $\binom{n}{n} = 1$.

Věta 2. Počínajíc druhým vodorovným řádkem mezi dvěma čísly leží v následujícím vodorovném řádku jejich součet.

Důkaz: Tato vlastnost Pascalova trojúhelníku je důsledkem vztahu (8). Jestliže $n > 1$ a k jsou přirozená čísla taková, že $k < n$, potom na $(k + 1)$ -vém místě $(n + 1)$ -vého vodorovného řádku je číslo $\binom{n}{k}$, které se nachází mezi k -tým a $(k + 1)$ -vým číslem n -tého vodorovného řádku. Platí pak podle (8)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pomocí této vlastnosti lze snadno Pascalův trojúhelník sestavit a tím rychle vypočítat kombinační čísla: Kterýkoli řádek Pascalova trojúhelníku (počínaje třetím) obdržíme, když mezi čísla předcházejícího vodorovného řádku vypisujeme jejich součet, na začátek a na konec řádku pak napíšeme jedničky.

Věta 3. Pascalův trojúhelník je souměrný podle svislé přímky p procházející jeho „vrcholem“

Jinak: Každý vodorovný řádek Pascalova trojúhelníku zůstane nezměněn, napíšeme-li jeho čísla v obráceném pořádku.

Důkaz: Tato vlastnost je důsledkem vztahu (7). Plyne to z následující úvahy: Ve zmíněné přímce p jsou čísla $\binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \binom{8}{4}, \binom{10}{5}, \dots, \binom{2n}{n}$, což jsou čísla lichých vodorovných řádků, kdežto v sudých vodorovných řádcích na přímce p nejsou žádná čísla. Je tedy ve $(2n + 1)$ -vém vodorovném řádku na přímce p číslo $\binom{2n}{n}$. Na k -tém místě vlevo od tohoto čísla je číslo $\binom{2n}{n-k}$, na k -tém místě vpravo od čísla $\binom{2n}{n}$ je pak číslo $\binom{2n}{n+k}$. Podle (7) je

$$\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{2n-(n+k)} = \binom{2n}{n-k}$$

z čehož je patrné, že $(2n + 1)$ -vý vodorovný řádek je souměrný podle přímky p .

Ve $2n$ -tém vodorovném řádku pak je na k -tém místě vlevo od přímky p číslo $\binom{2n-1}{n-k}$, na k -tém místě vpravo od přímky p je číslo $\binom{2n-1}{n+k-1}$, neboť číslo $\binom{2n-1}{n}$ je již vpravo od přímky p . Platí pak

$$\binom{2n-1}{n+k-1} = \binom{2n-1}{2n-1-(n+k-1)} = \binom{2n-1}{n-k}$$

z čehož je patrné, že $2n$ -tý vodorovný řádek Pascalova trojúhelníku je souměrný podle přímký p .

Lze snadno ukázat, že kombinační číslo $\binom{n}{k}$ při lichém n je největší, jestliže $k = \frac{n-1}{2}$; pro toto číslo k platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ při sudém n je největší, jestliže $k = \frac{n}{2}$.

Věta 4. Součet kombinačních čísel $(n+1)$ -vého vodorovného řádku Pascalova trojúhelníku je roven 2^n .

Důkaz: Větu dokážeme užitím speciální binomické věty; obdržíme

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k},$$

tj.

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

čili

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

jak bylo dokázat.

Věta 5. Sečteme-li v Pascalově trojúhelníku všechna čísla, která leží v témže šikmém řádku až do n -tého vodorovného řádku včetně, obdržíme jako součet číslo, které leží v $(n+1)$ -vém vodorovném řádku nejbližší napravo od posledního sčítance.

Důkaz: Čtenář se snadno přesvědčí, že tvrzení věty je důsledkem pomocné věty 1. Zvolíme-li $(m+1)$ -vý šikmý řádek Pascalova trojúhelníku, leží v něm čísla

$$\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \dots, \binom{m+p}{m},$$

Podle (9) je

$$\sum_{k=m}^{m+p} \binom{k}{m} = \binom{m+p+1}{m+1}.$$

Toto číslo leží šikmo vpravo nejbližší pod posledním sčítancem $\binom{m+p}{m}$.

Např. sčítáme-li čísla ve třetím šikmém řádku v tabulce na str. 325 až do pátého vodorovného řádku, dostaneme

$$1 + 3 + 6 = 10,$$

což je první číslo následujícího, tj. šestého vodorovného řádku, které je vpravo od čísla 6. Dále je

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

atd.

Prvý součet je totiž

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} = \binom{5}{3},$$

druhý součet pak

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}.$$

Věta 6. Součet druhých mocnin kombinačních čísel $(n + 1)$ -vého vodorovného řádku Pascalova trojúhelníku je roven kombinačnímu číslu $\binom{2n}{n}$.

Důkaz byl již proveden jako důsledek pomocné věty 2 (vzorec (11)).

Jak plyne z úvahy, provedené v důkaze věty 3, leží číslo $\binom{2n}{n}$ vždy na svislé přímce p , která prochází „vrcholem“ Pascalova trojúhelníku.

Např. součet druhých mocnin kombinačních čísel čtvrtého vodorovného řádku Pascalova trojúhelníku je

$$\binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2 = 20 = \binom{6}{3}.$$

Frekvence otáčení a pilový diagram

JANA BENEŠOVÁ, SOU Bohemia Poděbrady, Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc.,
UK Praha

Téměř u všech strojů, přístrojů a strojních zařízení se setkáváme s částmi, které se otáčejí. Nejčastěji to jsou hřídele nebo čepy. Jejich rovnoměrnou rotaci kolem osy můžeme charakterizovat veličinou, která se nazývá *frekvence otáčení*. Její název, jež jsme právě uvedli, se zatím příliš neužívá a hovoří se o otáčkách. Příručky [1] a [2] však preferují termín *frekvence otáčení* před názvem *otáčky*.

Frekvenci otáčení udáváme pouze pro tělesa, která rovnoměrně rotují kolem osy. Vykoná-li takové těleso za dobu t celkem a plných otočení (tj. otočení o 360°), pak frekvence otáčení tohoto tělesa je

$$n = \frac{a}{t}.$$

Hlavní jednotkou frekvence otáčení v soustavě SI je reciproká sekunda, tj. 1 s^{-1} , což je 1 Hz . S frekvencí otáčení rovnou 1 s^{-1} rotuje těleso, které se za 1 sekundu otočí kolem své osy právě jedenkrát. Značka jednotky je sice 1 s^{-1} , avšak můžeme ji číst „1 otáčka za 1 sekundu“.

Vedlejší jednotky v soustavě SI jsou např.

$$1 \text{ otáčka za 1 minutu} = 1 \text{ min}^{-1} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1},$$

$$1 \text{ otáčka za 1 hodinu} = 1 \text{ h}^{-1} = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1},$$

$$1 \text{ otáčka za 1 den} = 1 \text{ d}^{-1} = 1,157 \overline{407} \text{ s}^{-1}.$$

S první z těchto vedlejších jednotek se setkáváme v technické praxi nejčastěji.

V některých úlohách z technické praxe se mluví o obvodové rychlosti, např. u kola automobilu nebo při obrábění brusným kotoučem. Rozumí se tím rychlost bodu na obvodu rotujícího kola nebo kotouče. Obdobně se mluví o řezné rychlosti při strojním obrábění na soustruhu, na frézce, na vrtačce apod. Uvedeme příklad. Obrábí-li se ocelový válec o průměru $d = 340 \text{ mm}$ na soustruhu, jehož vřeten o má frekvenci otáčení $n = 120 \text{ min}^{-1}$, pak řezná rychlost se vypočte ze vzorce

$$v = \pi d n. \quad (1)$$

V našem případě je $v = 3,142 \cdot 0,340 \cdot 120 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1} = 128,2 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$. Skutečně za jednu otáčku obráběného válce o průměru d se z jeho obvodu odvine tříska délky πd a za n otáček se odvine délka třísky $\pi d n$.

Úloha. Při broušení skla i strojních součástí se např. požaduje, aby obvodová rychlost brusného kotouče byla $v = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Má-li brusný kotouč průměr $d = 130 \text{ mm}$, pak jeho otáčky vypočteme ze vzorce (1).

Dostáváme

$$n = \frac{v}{\pi d}. \quad (2)$$

Budeme-li chtít dosazovat přímo dané číselné hodnoty veličin a budeme-li požadovat, abychom vypočetli číselnou hodnotu frekvence otáčení pro jednotku min^{-1} , pak je třeba vzorci (2) dát tvar

$$n = \frac{60\,000 v}{\pi d}. \quad (2')$$

V našem případě

$$n \doteq \frac{60\,000 \cdot 25}{3,142 \cdot 130} \text{ min}^{-1} \doteq 3674 \text{ min}^{-1} \doteq 61,23 \text{ s}^{-1}.$$

Obdobné jsou úlohy o navíjení izolovaného drátu na elektrotechnické cívký, o rychlosti dopravníkového pásu, o obvodové rychlosti řemenu při pohonu pracovního stroje, lana na bubnu výtahu atd.

V dalším se přidržíme úloh o *řezné (obvodové) rychlosti* při strojním obrábění, jak jsme se o nich už zmínili. Volba řezné (obvodové) rychlosti bývá dána obráběným materiálem, druhem obráběcího nástroje a také způsobem obrábění (hrubováním nebo obráběním na čisto apod.), což bývá uvedeno v technických příručkách. K dispozici máme několik stupňů otáček vřetene, např. soustruhu, frézy nebo brusného kotouče. Na vřeteníku každého obráběcího stroje jsou zpravidla stupně otáček $n \text{ min}^{-1}$ vřetene uvedeny; např. je uvedeno těchto deset stupňů otáček: $n = 92, 133, 184, 264, 381, 523, 752, 1090, 1500, 2160$. Podle velikosti průměru d soustruženého předmětu a nejvyšší přípustné řezné rychlosti v je třeba volit nejvyšší počet otáček $n_i (i = 1, 2, 3, \dots, 9, 10)$ tak, aby nejvyšší přípustná řezná rychlost v nebyla překročena. Musí tedy platit nerovnost

$$v \leq \pi d n. \quad (1')$$

Soustruží-li se během krátké doby celá řada různě velkých průměrů d z rozličných materiálů, pak to ovšem vyžaduje měnit frekvenci otáčení n vřetene tak, aby se obrábělo při žádoucí řezné rychlosti. Aby se frekvence otáčení nemusela vždy počítat, lze sestrojit tzv. *pilový diagram*, což je grafická pomůcka, které budeme věnovat pozornost. Pilového diagramu může použít pracující na obráběcím stroji i technik v technologii, který v pracovním postupu předpisuje otáčky vřetene obráběcího stroje.

Sestrojíme pilový diagram pro soustruh, jehož vřeteno má deset stupňů otáček, které jsme shora uvedli. Diagram uvádí závislost řezné rychlosti v na průměru d soustružené součásti pro dané frekvence otáček $n_i (i = 1, 2, 3, \dots, 9, 10)$. Upravíme-li výraz (1) na tvar

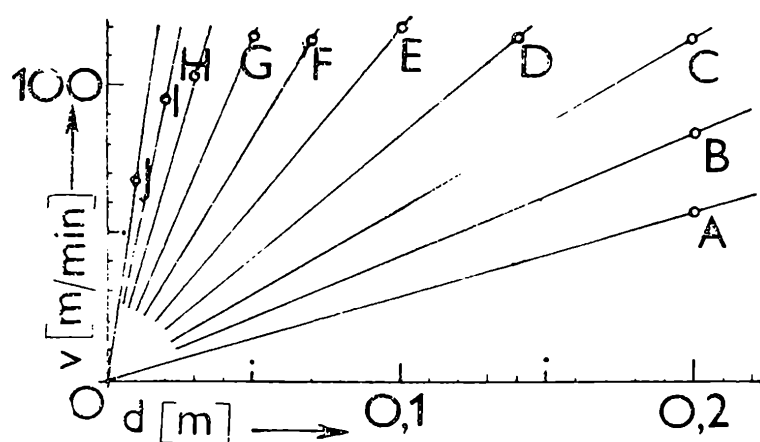
$$v = \pi n_i \cdot d, \quad (1'')$$

pak vzorec (1'') vlastně zastupuje deset rovnic. Těchto deset rovnic odpovídajících příslušným otáčkám $n_i \text{ min}^{-1}$ z prvního řádku tabulky I je uvedeno v jejím druhém (výrazněji orámovaném řádku). Ve čtvrtém řádku tabulky jsou hodnoty řezné rychlosti $v \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ příslušné k hodnotám průměru $d \text{ m}$ z třetího řádku tabulky. Jak uvidíme, je volba hodnot d, v pro sestrojení diagramu vcelku libovolná, avšak taková, aby jejich číselné hodnoty bylo možno vynést do grafu v obr. 1. Na pátém řádku tabulky je označení bodů o souřadnicích $[d, v]$, jak jsou v grafu uvedeny. V grafu na obr. 1 je na vodorovnou osu vynesena rovnoměrná

Tabulka 1

$n_1 = 92$	$n_2 = 133$	$n_3 = 184$	$n_4 = 264$	$n_5 = 381$
$v = 289 d$	$= 418 d$	$v = 578 d$	$v = 829 d$	$v = 1194 d$
$d = 0,20$	$d = 0,20$	$d = 0,20$	$d = 0,14$	$d = 0,10$
$v = 57,8$	$v = 83,6$	$v = 115,6$	$v = 116,1$	$v = 119,7$
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>

$n_6 = 523$	$n_7 = 752$	$n_8 = 1090$	$n_9 = 1500$	$n_{10} = 2160$
$v = 1643 d$	$v = 2362 d$	$v = 3424 d$	$v = 4712 d$	$v = 6786 d$
$d = 0,07$	$d = 0,05$	$d = 0,03$	$d = 0,02$	$d = 0,01$
$v = 115,0$	$v = 118,1$	$v = 102,7$	$v = 94,2$	$v = 67,9$
<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>

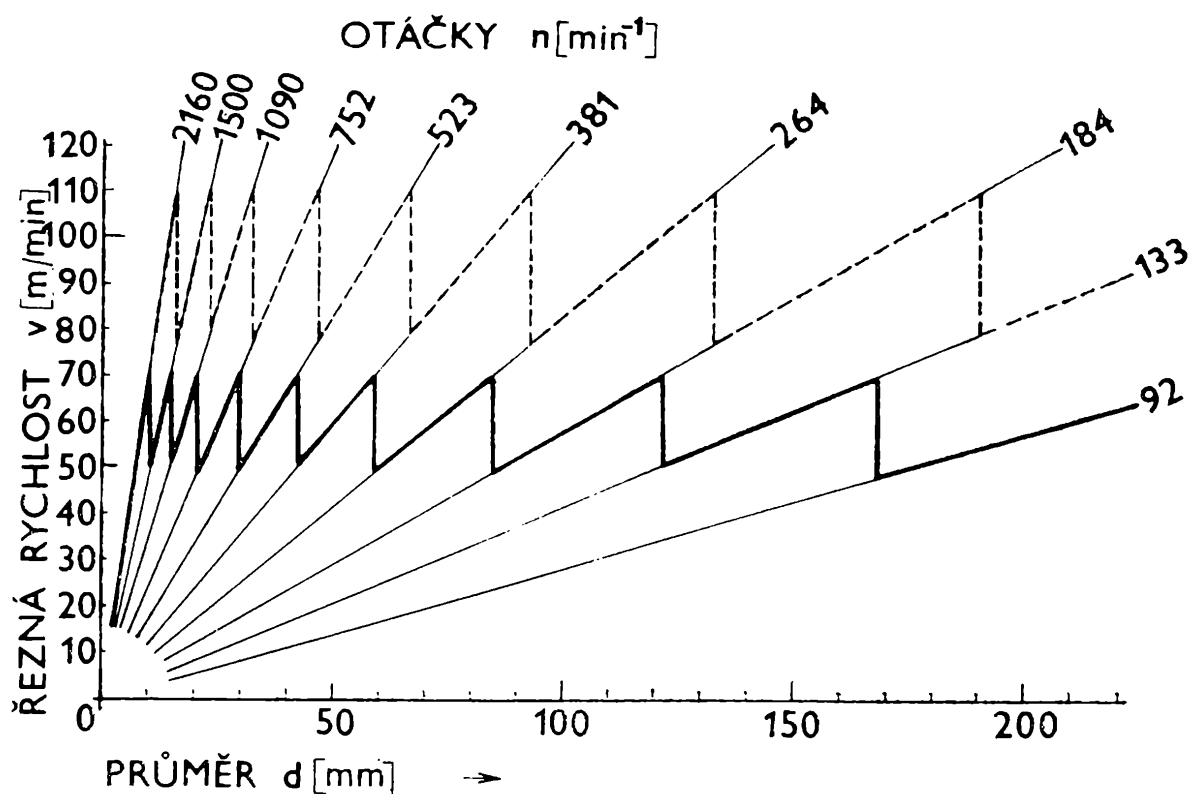


Obr. 1

stupnice pro průměry d m a na svislou osu rovněž rovnoměrná stupnice pro řeznou rychlost v m . min⁻¹. Body *A* až *J* určují polopřímky procházející uvedeným bodem a počátkem souřadnic. Skutečně polopřímky *OA*, *OB*, *OC*, ..., *OJ* mají rovnice tvaru (1'') z druhého řádku tabulky. Je zřejmé, že jde o lineární rovnice $y = kx$, jež jsou ve směrnicovém tvaru. V našem případě je ovšem v místo y a d místo x . Dále si můžeme zvolit rychlost třeba $v = 110$ m . min⁻¹ a vypočítat u všech deseti stupňů otáček vřetene průměr d podle vzorce

$$d_i = \frac{v}{\pi n_i},$$

PILOVÝ DIAGRAM



Obr. 2

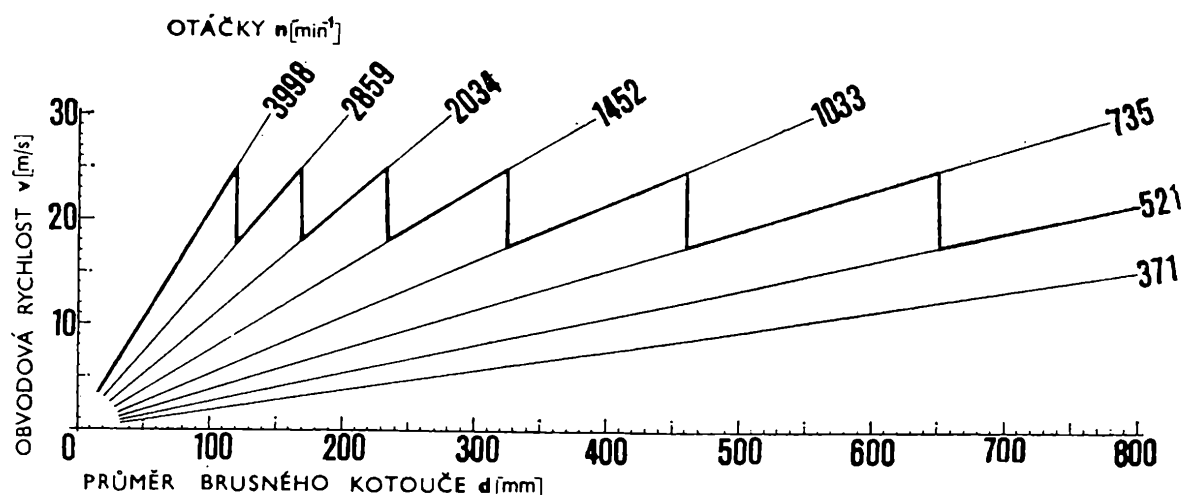
který vznikl úpravou vzorce (1). Pak by v bodech o souřadnicích $[d_i, v]$ byly přímo „hroty zubů“ pilového diagramu pro $v_{\max} = 110 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$. To ponecháme čtenáři za cvičení. Připojujeme výpočty ve zkrácené tabulce 2 pro všech deset stupňů otáček.

Na obr. 2 je příslušný pilový diagram, jehož základ spatřujeme na obr. 1. Podrobnější síť grafu ovšem umožňuje i podrobnější (přesnější) čtení grafu.

Užití pilového diagramu nám přiblíží tato úloha. Stanovte frekvenci otáčení n_i vřetene soustruhu, aby při obrábění daného průměru d nebyla překročena řezná rychlost $v = 70 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$. Při řešení úlohy si všimneme výrazněji vytažené lomené čáry připomínající tvar zubů pily, jejíž horní část dosahuje hodnot $v = 70 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$. Vidíme, že např. při

Zkrácená tabulka 2:

$n_i \text{ min}^{-1}$	92	133	184	264	381	523	752	1090	1500	2160
$v \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$	110	110	110	110	110	110	110	110	110	110
$d \text{ mm}$	380,6	263,3	190,3	132,6	91,9	66,9	46,6	32,1	23,3	16,2



Obr. 3

soustružení průměru d od 121 mm do 167 mm nastavíme otáčky vřetene $n_9 = 133 \text{ min}^{-1}$. Pro $d > 167 \text{ mm}$ je třeba již zvolit otáčky $n_{10} = 92 \text{ min}^{-1}$ i přesto, že řzná rychlost $v < 70 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$. Stručně řečeno, průsečík hodnot d a v , který určuje volené otáčky n_i , musí v pilovém diagramu padnout nejbližší pod lomenou čáru nebo na tuto čáru.

Pro cvičení jsme v pilovém diagramu sestrojili ještě jednu (horní) lomenou čáru, která umožňuje nastavit otáčky n_i pro soustružení daného průměru d tak, aby řzná rychlost $v \leq 110 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$. Zjišťujeme, že při průměrech $d = 45 \text{ mm}$, 80 mm , 100 mm a při volbě otáček po řadě $n = 752 \text{ min}^{-1}$, 381 min^{-1} , 264 min^{-1} nebude překročena řzná rychlost $v = 110 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$. Diagram ovšem umožňuje stanovit konkrétní dosažené rychlosti; v uvedeném případě jsou po řadě $v = 106 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$, $96 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ a $83 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$.

Ještě připojujeme další pilový diagram pro vybrušování skla na brousicím stroji, který má osm stupňů otáček vřetene, na něž se upevňuje brusný kotouč o průměru d . Uvedený pilový diagram je na obr. 3 a nebudeme ho již blíže komentovat, jen připomeneme, že na tomto diagramu je zakreslena lomená čára pro maximální řznou rychlost $v = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Lomené čáry („zuby“) pro jednotlivé řzné rychlosti ovšem nemusí být na diagramu zakresleny. My jsme ji uvedli spíše z důvodů didaktických a také pro zdůvodnění názvu „pilový diagram“.

Zvídavému čtenáři ještě řekneme, že konstruktér obráběcího stroje se snaží přiblížit tomu, aby stupně otáček tvořily geometrickou posloupnost. U vřetene soustruhu, k němuž jsme sestrojili pilový diagram na obr. 2, jde o geometrickou posloupnost stupňů minutových otáček vřetene s prvním členem $n_1 = 92$ a příslušným kvocientem $q \doteq 1,42$. Kvocient geometrické posloupnosti, kterou tvoří osm stupňů otáček brousicího stroje z obr. 3, je $q \doteq 1,4044$ ($\doteq \sqrt[7]{10,77628}$). Stupně otáček n_1 obráběcích stro-

jů ovšem netvoří zcela přesně geometrickou posloupnost, neboť počty zubů ozubených kol v rychlostních skříních obráběcích strojů mohou být jedine přirozená čísla. Plyne to však i z dalších konstrukčních důvodů. O tom pojednáme někdy jindy.

Literatura :

- [1] Názvy a značky školské fyziky, 3. změněné vydání, SPN Praha 1977
- [2] V. Šindelář, L. Smrž: Nová soustava jednotek, 2. upravené vydání, SPN Praha 1977

FYZIKA

Fyzikálně kybernetický přístup ke vzniku a podstatě biorytmů

Ing. EVA VESELÁ, Doc. Ing. BRUNO BOŠEK ČVUT — fakulta strojní, Dr. PETR ZVOLSKÝ CSc., Psychiatrická klinika UK

1. Historický pohled

Již odedávna si lidé na základě svých pozorování uvědomovali, že živočichové i rostliny vykazují jisté pravidelně se opakující zákonitosti. Příkladem jsou denní cykly spánku a bdění, zimní spánek a rozmnožovací cykly některých zvířat atd.

Zhruba před 30 lety studoval německý vědec *Gustav Kramer* navigaci ptáků. Zjistil, že ptáci nejen řídí směr svého letu podle Slunce, ale že mají i jistý vnitřní mechanismus určující dobu tahu, který může být přirovnán k hodinám. Proto ho Kramer nazval „biologické (živé) hodiny“. Dnes jsou také často označovány jako biorytmy. Podobné periodické zákonitosti byly pak zjištěny i u jiných druhů živočichů a rostlin.

Dosavadní koncepce biologických hodin předpokládá, že organismus je vybaven jistým zařízením, které dokáže čas měřit, určovat, a pak se podle něj řídit. Za tohoto předpokladu si musíme položit několik základních otázek, jako: kde jsou tyto hodiny v organismu umístěny, na jakém principu pracují a jaký význam pro organismus vlastně mají.

Známý biolog pracující v tomto oboru, *J. L. Cloudsley-Thomson* rozděluje biorytmy do následujících tří skupin: biorytmy vrozené, naučené a závislé na reaktivitě na kosmické podněty.

Názory vědeckých kapacit 60. let našeho století jsou zřejmé z publikace *F. A. Browna*, kde uvádí: „O tom, co udílí časoměrné signály pro záhadné a proti teplotě odolné délky period (biologických) hodin, byly v historii rozvíjeny dvě domněnky. Jedna z nich tvrdí, že organismy vyvinuly pomocí přírodního výběru zděděný komplex vnitřních, biologicky oscilujících systémů, které probíhají zcela souběžně se všemi přírodními geofyzikálními periodami v prostředí organismu. Podle druhé domněnky organismus, i když je zbaven všech zřejmých faktorů prostředí, jako je světlo a teplota, osciluje dále se všemi přírodními geofyzikálními frekvencemi, a to v důsledku odpovědí na rytmické změny v pronikavých silách prostředí, a tyto navozené oscilace znamenají základní časomíru. A bylo dnes skutečně dokázáno, že živoucí systémy jsou překvapivě citlivé na slabá pole statického magnetismu, pole elektrostatické a snad i na slabá pole radiových frekvencí. Tato citlivost je dostatečná pro reakce na přirozené zemská pole.“ (Viz [1]).

2. Nová teorie

Zde uvedená koncepce vzniku a podstaty biorytmů je v zásadě odlišná od všech dosavadních. Předpokládáme, že živý systém je složen z dílčích subsystémů. Ty reagují na určité podněty, ať už vnější nebo vnitřní, a jejich odezva je v tom případě, že vstupní signály jsou periodické, také periodická.

Uvedená vlastnost je základní vlastností takovýchto subsystémů, které ovšem nejsou izolované, ale vzájemně se ovlivňují. Přesné matematické vyšetřování jejich zákonitostí je pak velice obtížné, a to zvláště tehdy, jedná-li se o subsystémy zpětnovazební. Při stanovení jistého dominantního zdroje vstupní veličiny je možno některé podřadnější vlivy zanedbat a pak oprávněně docházíme k jistým závěrům, které platí i pro složité organismy, ve kterých je ohromné množství vzájemně se ovlivňujících subsystémů.

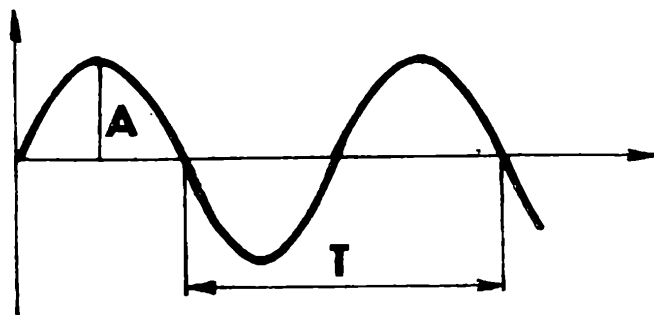
3. Fyzikálně-kybernetický přístup

Vycházíme z předpokladu, že živé organismy jsou složeny z jednotlivých dílčích subsystémů, které na sebe vzájemně působí svými výstupy. Jestliže víme, že odezva subsystému je periodická, pak jsou tyto subsystémy analogií kmitavé soustavy v mechanice.

Připomeňme si všechny podstatné vlastnosti kmitavých soustav, tj. soustav, které mohou kmitat (např. píst ve válci, kulička zavěšená na pružině, loď na vodní hladině, struna houslí).

Kmitavé soustavy mohou vykazovat periodickou změnu nějaké veličiny v závislosti na čase (např. změnu tlaku plynu ve válci, změnu výchylky, atd.).

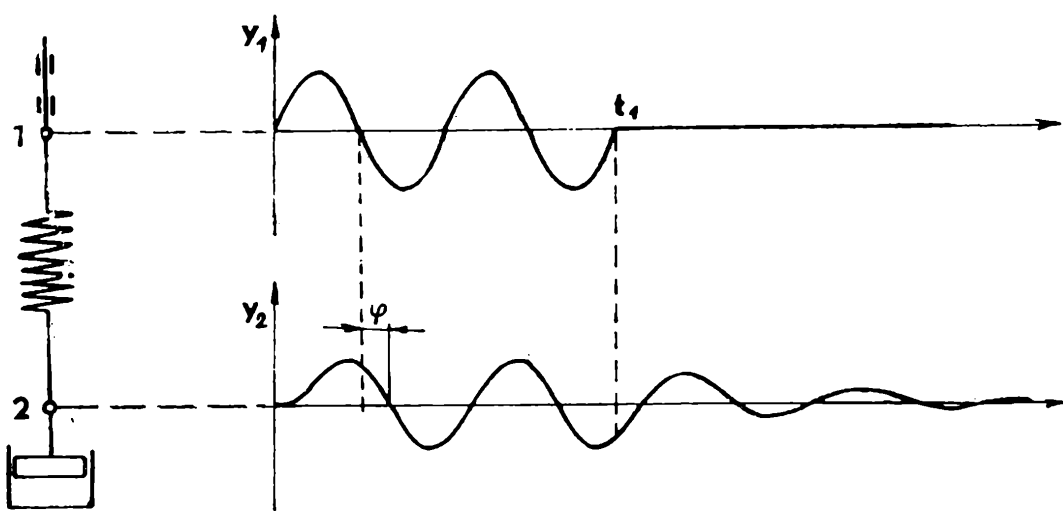
Periodický pohyb je každý takový pohyb, který se za jistou dobu,



Obr. 1. Příklad na periodický průběh

A ... amplituda (maximální výchylka)

T ... perioda (doba kmitu), tj. doba, za kterou se děj opakuje



Obr. 2. Vynucené kmity mechanického systému

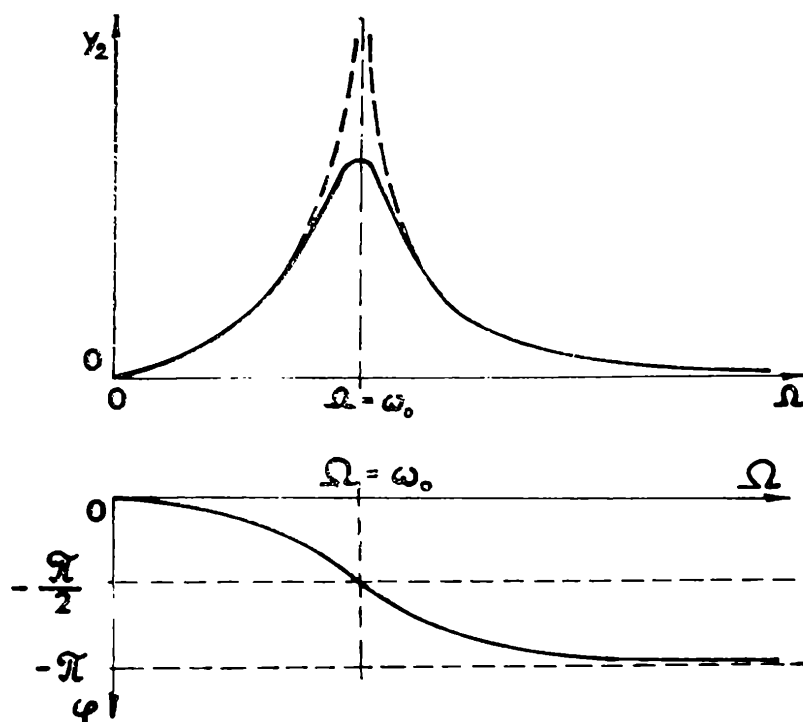
tzv. periodu, opakuje. Nejjednodušším periodickým pohybem je pohyb harmonický, jehož grafickým znázorněním je sinusovka (viz obr. 1).

Rovnovážná poloha systému je ta poloha, ve které je výslednice všech sil působících na systém rovna nule. V této poloze je systém v klidu.

Volné kmity soustavy jsou ty kmity, které vzniknou po vychýlení soustavy z rovnovážné polohy bez dalšího vnějšího působení.

Vlastní frekvence ω_0 je frekvence volných kmitů soustavy. Její velikost závisí pouze na vnitřních parametrech soustavy (např. u struny na její délce, tvaru, hmotnosti a na jejím předpětí). To, že vlastní frekvence závisí pouze na vlastnostech příslušné soustavy, si můžete snadno ověřit sami — tón struny přece nezávisí na její počáteční výchylce a nemění se ani při doznívání.

Na jednoduché mechanické soustavě, která je znázorněna na obr. 2 — pístu ve válci spojeném s pružinou, si ukážeme základní vlastnosti kmitavých soustav. Výchylka bodu 1 je harmonicky proměnná. Jak bude vypadat výchylka bodu 2, je zřejmé ze spodní části obr. 2. Kmity bodu 2 nazýváme vynucenými a kmity, které na soustavu přivádíme, kmity bo-



Obr. 3. Závislost amplitudy a fázového posuvu vynucených kmitů na vstupní frekvenci

du 1 nazýváme budicími. Z obr. 2 je zřejmé, že vynucené kmity soustavy mají shodnou frekvenci s frekvencí budicích kmitů, jsou však časově opožděny. Časové opoždění nazýváme fázovým posuvem φ . Jestliže je časový průběh budicích kmitů popsán rovnicí $y_1 = A_1 \sin \Omega t$, pak vynucené kmity jsou určeny rovnicí $y_2 = A_2 \sin(\Omega t + \varphi)$.

Z obr. 2 je zřejmé, že přestane-li v okamžiku t_1 budicí síla působit, pak vynucené kmity nesledují průběh budicích kmitů, ale ještě po jistou dobu „doznívají“. Délka tohoto doznívání závisí na tlumení systému, a to jak vnějším (např. o vzduch), nebo vnitřním (veškerá deformační energie se nemusí vždy přeměnit v energii pohybovou, ale buď v trvalé deformace nebo v teplo).

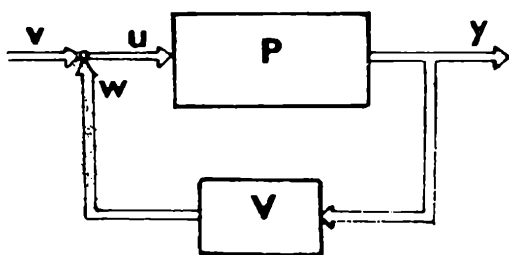
Velikost amplitudy pohybu vynucených kmitů a velikost fázového posuvu závisí na velikosti budicí frekvence Ω tak, jak je to zřejmé z grafů na obr. 3.

Co z tohoto obrázku vyplývá? Nulový fázový posuv nastává pouze pro $\Omega = 0$, tedy při kmitavém pohybu vždy nějaký nastává. Pro frekvenci budicích kmitů právě rovnou frekvenci vlastní má fázový posuv velikost $-\pi/2$ a vynucené kmity mají největší možnou amplitudu, která by se při nulovém tlumení systému blížila nekonečnu. Tomuto případu říkáme rezonance.

Kyberneticky označujeme soustavu na obr. 2 jako *otevřený obvod*, který znázorňujeme schématem uvedeným na obr. 4.



Obr. 4. Systém v otevřeném obvodu
 u ... vstupní veličiny do systému P
 y ... veličiny výstupní



Obr. 5. Zpětnovazební subsystém
 V ... zpětná vazba
 v ... veličiny působící na zpětnovazební subsystém
 u ... vstupní veličiny subsystému P , platí $u = v \pm w$

Co se však stane, jestliže vybavíme tento systém tzv. zpětnou vazbou, tj. vazbou, která přenáší zpět výstupní veličinu systému na jeho vstup?

Zásadní rozdíl mezi chováním a vlastnostmi systému v zapojení na obr. 4 a zpětnovazebním zapojení na obr. 5 je v tom, že v otevřeném obvodu se mohou vytvářet periodické odezvy systému pouze po dobu trvání periodického působení vstupní veličiny (při jejím odpojení odezva pomalu zaniká), ale ve zpětnovazebním zapojení může nastat ten případ, kdy i po odpojení zdroje vnějšího působení se trvale udržuje periodicky proměnný výstup ze systému.

Dynamicke vlastnosti zpětnovazebních systémů jsou podrobně popsány v mnoha speciálních publikacích kybernetiky. Jejich základní vlastnost, která má význam pro klasifikaci biorytmů, je však zřejmá z následující úvahy.

Jestliže přivedeme na vstup systému podle obr. 5 periodicky proměnné působení, pak vzniká podobně jako u systému v otevřeném obvodu periodická odezva. Tento výstupní průběh snímá a zpět na vstup přivádí zpětnovazební smyčka, jejíž výstup se superponuje k původnímu vstupnímu signálu, a na systém P pak působí jejich součet, popř. rozdíl (podle znaménka zpětné vazby). Za jistých okolností, při jistém zesílení zpětné vazby a při jejím zcela určitém zpoždění, může nastat ten případ, kdy bude totožná amplituda i fáze těchto zpětně přiváděných kmitů. Jestliže však nyní odpojíme zdroj vnějšího periodického působení, pak zpětnovazební signál sám postačí k tomu, aby udržoval tytéž oscilace, které vznikaly vlivem působení budící síly. Takovýto druh oscilací nazýváme ve fyzice *samobuzenými kmity* a v kybernetice jej označujeme jako *mez stability zpětnovazebního systému*.

Uvedené mechanické soustavy mají analogické vlastnosti s předpokládanými subsystémy v organismu, a proto jsme biorytmy rozdělili do následujících tří skupin: pseudobiorytmy, rezonanční biorytmy a biorytmy vlastní.

KOMPLIKACE (od lat. *cum* = s, spolu + *plico*, *-are* = vinout) — „svinutí“, „spletení dohromady“, „zamotání“

KOMPONENT (A) (od lat. *cum* = s, spolu + *pono*, *-ere* = klást, pokládat) — „skládající se“, „jedna z částí, které se skládají v celek“; součást celku, složka

KOMUTATIVNÍ (od lat. *cum* = s, spolu + *mutō*, *-are* = měnit) — „vzájemně záměnný“; v matematice: vlastnost binárních operací, že záměna pořadí jednotlivých složek nemá vliv na výsledek; **KOMUTATIVNOST** — vzájemná zaměnitelnost

KON— (z lat. *cum* = s, spolu) — předpona s významem „s, spolu, dohromady, spojení“

KONGRUENCE (od lat. *congruo*, *-ere* = potkávat se, setkávat se, shodovat se, přiházet se v též čas) — souběh, shoda, shodnost; v matematice: shoda ve zbytcích (při dělení v oboru celých čísel); **KONGRUENTNÍ**

KÓNICKÝ (od řec. *kónos* = kužel, šiška) — kuželový, kuželovitý

KONJUGACE (od lat. *cum* = s, spolu + *iugo*, *-are* = spojit, svázat) — přiřazení („připojení“) sdruženého čísla k danému komplexnímu; **KONJUGOVANÝ** — sdružený

KONJUNKCE (od lat. *cum* = s, spolu + *iungo*, *-ere* = spojovat) — spojení; v logice: konjunkce výroků — složený výrok utvořený ze dvou či více výroků pomocí spojky „a“

KONKÁVNÍ (od lat. *cum* = s, spolu + *cavus* = dutý; *concavus* = okrouhle vyhloubený, vydutý) — vydutý; v matematice: konkávní funkce — funkce, jejíž graf tvoří „dutinou“, díváme-li se ve smyslu orientace osy *y*; **KONKÁVNOST** — vlastnost být konkávní

KONSTANTNÍ (od lat. *cum* = s, spolu + *sto*, *-are* = stát, zastavit se) — „stojící spolu s někým, s něčím“, „pohromadě stojící, pevně stojící“; pevný, stálý, trvalý, neměnný; **KONSTANTA** — stálá, neproměnná hodnota (veličiny), v matematice: pevně zvolené (neměnné) číslo

KONSTRUKCE (od lat. *cum* = s, spolu + *struo*, *-ere* = vrstvit, stavět) — sestavení, sestrojení; **KONSTRUKČNÍ** — „týkající se konstrukce“; **KONSTRUKTIVNÍ** — „mající vztah ke konstrukci“; tvořivý, tvůrčí, činorodý

22 KONTINUITA (od lat. *cum* = s, spolu + *teneo*, *-ere* = držet) — „držení pohromadě“, spojitost; KONTINUUM — v topologii: uzavřená souvislá množina („drží pohromadě; je v celku, nemá mezery“)

KONTRA— (z lat. *contra* = proti, naproti) — první část složených slov odstiňující význam „proti“ ve smyslu místa, směru, času, nepřátelství, neshody, nesouhlasu

KONTRADIKTORICKÝ (od lat. *contra* = proti + *dico*, *-ere* = řečí ukazovat, mluvit) — „protimluvný“, mluvící proti, odporující si, obsahující v sobě rozpor, rozporný, protikladný

KONTRAPONOVANÝ (od lat. *contra* = proti + *pono*, *-ere* = klást, pokládat) — „položený proti“; kontraponovaná implikace — implikace, při které se předpoklad i závěr převrátí ve své negace a ještě se navzájem zamění („položí proti sobě“)

KONVERGENTNÍ (od lat. *cum* = s, spolu + *vergo*, *-ere* = chýlit se, nachylovat se) — „k sobě se nachylující“, sbíhající se (opak: divergentní); konvergentní posloupnost — s rostoucím n členy posloupnosti $\{a_n\}$ „se sbíhají, přibližují“ k jedné pevné hodnotě; KONVERGENCE — vlastnost přibližovat se určité hodnotě; KONVERGOVAT — „blížit se“; KONVERGUJÍCÍ — „blížící se“

KONVERZE (od lat. *cum* = s, spolu + *verto*, *-ere* = točit, obracet) — „společné obracení“; v logice: KONVERZNÍ implikace — implikace, při které dojde k výměně předpokladu se závěrem („navzájem se spolu převrátí“); srov. inverzní

KONVEXNÍ (z lat. *convexus* = dohromady skloněný, klenutý, klenoucí se) — „klenutý“, vypuklý (opak: konkávní — dutý); konvexní útvar — „vypuklý“ útvar (spojnice kterýchkoli dvou jeho bodů leží celá v útvaru); konvexní funkce — funkce, jejíž graf tvoří „vypuklinu“, díváme-li se ve smyslu orientace osy y , kdežto graf konkávní funkce tvoří „dutinou“; KONVEXNOST, KONVEXITA — vlastnost být konvexní

KOREKCE (od lat. *cum* = s, spolu + *rego*, *-ere* = řídit) — seřízení, úprava, oprava; KORIGOVAT — seřídít, opravit

KORELACE (od lat. *cum* = spolu, s + *relatio* = nesení zpět, vztah, poměr) — souvztažnost, vzájemný vztah, závislost; v matematice: statistická závislost dvou nebo více jevů, též geometrické zobrazení

KORESPONDOVAT — (od lat. *cum* = s, spolu + *respondeo*, *-ere* = = navzájem slíbit, odpovídat, souhlasit, shodovat se) — navzájem si odpovídat, být ve vzájemném písemném styku; být ve vzájemném vztahu nebo závislosti, vzájemně se doplňovat, shodovat se

KOSEKANS (KO—²) + *sekans*) — „*sekans* doplňku“ daného úhlu do 90°

KOSINUS (KO—²) + *sinus*) — termín vznikl z představy sinu úhlu zbývajícího do 90°, tj. sinu doplňku do 90°. Po původním názvu „*sinus residui*“ (lat. *residuum* = zbytek), tedy „sinus zbytku“, se začalo říkat „*sinus complementi*“ (= sinus doplňku). Posléze se pořadí slov převrátilo, obě slova se spojila v jediné, přičemž se „*complementum*“ zkrátilo v „*co-*“. Analogicky pak utvořeno „kotangens, kosekans, kofunkce“; **KOSINUSOIDA** (latinizované — *oideus* = podobající se) — „podobající se kosinu“, „týkající se kosinu“; křivka, která je grafickým zobrazením funkce kosinus

KÓTA (od lat. *quotus* = kolikátý) — údaj v mapě udávající nadmořskou výšku bodu v terénu („na kolikáté je vrstevnici“); bod v terénu se známou nadmořskou výškou; v geometrii: údaj vzdálenosti bodu od průmětny

KOTANGENS (z KO—²) + *tangens*) — „*tangens* doplňku“ daného úhlu do 90°

KOVARIANCE (od lat. *cum* = s, spolu + *varius* = rozmanitý, různý, proměnlivý) — „spolu vázaná proměnlivost“ souřadnic, parametrů apod., ve statistice: míra těsnosti rozptylu napozorovaných dat kolem jisté funkce

KRITÉRIUM — (od řec. *krinó* — zkoumat, soudit) — hledisko, podle kterého někoho nebo něco posuzujeme; kritérium dělitelnosti — posouzení (aniž bychom předem dělili), zda dané celé kladné číslo je beze zbytku dělitelné některým kladným číslem, v logice: kritérium — postačující podmínka

KRITIKA (z řec. *kritiké techné* = umění posoudit; ke *krinó* = zkoumat, soudit) — odborné posouzení; **KRITICKÝ** — přísně posuzující, soudný, (srov. „kritický“ od „krize“)

KRIZE (z řec. *krisis* = rozhodnutí volbou z několika; ke *krinó* = zkoumat, soudit) — rozhodný okamžik; chvíle, která rozhoduje o dalším;

24 chvíle, kdy vrcholí rozpory; KRITICKÝ — rozhodující, rozhodný; velmi vážný (protože se bude rozhodovat o tom, co dále); jsoucí ve stavu, který je na samé hranici dvou možností, takže se rozhodne: buď — anebo (srov. „kritický“ od „kritika“)

KUBATURA (od řec. *kybos* = kostka) — vyjádření objemu tělesa v krychlových („kostkových“) jednotkách; KUBICKÝ — krychlový, objemový, trojrozměrný; kubická rovnice — rovnice 3. stupně; KUBIKA — čára, plocha, křivka 3. stupně

KUMULACE (od lat. *cumulus* = hromada, kupa) — hromadění, nahromadění, nakupení; KUMULOVAT — hromadit; KUMULOVANÝ — hromaděný; KUMULATIVNÍ — hromadný, nahromaděný; kumulativní četnost — statistický ukazatel, jehož jednu hodnotu v tabulce četností získáme „nakupením na sebe, nahromaděním“ všech četností předchozích

KVÁDR (od lat. *quadra* = čtyřhranný předmět; ke *quattuor* = čtyři) — — kolmý hranol, jehož podstavou je pravoúhlý čtyřúhelník

KVADRANT (od lat. *quadro*, *-are* = učiniti čtyřhranným, doplnit do čtverce; ke *quattuor* = čtyři) — čtvrtina kruhu, kružnice, roviny; KVADRÁT — „doplněný do čtverce“, čtverec, v algebře: druhá mocnina; KVADRATICKÝ (výraz, trojčlen, útvar) — trojčlen atd. druhého stupně; KVADRÁTNÍ — čtvereční, čtvercový; KVADRATRIX — křivka používaná při kvadratuře kruhu; KVADRATURA kruhu — úloha „udělat čtverec z kruhu“; sestrojení čtverce o obsahu rovném obsahu daného kruhu; KVADRATURA útvaru — výpočet obsahu útvaru (vyjádření jeho obsahu ve „čtverečných“ jednotkách); KVADRIKA — křivka nebo plocha analyticky vyjádřená rovnicí druhého stupně

KVADRILIÓN (od lat. *quartus* = čtvrtý + *mille* = tisíc) — uměle utvořeno pro označení čtvrté mocniny miliónu; tvaru „—lión“ použito analogicky (v. milión)

KVANTUM (z lat. *quantus* = jak mnohý, jak veliký, jaký) — množství, počet; KVANTITA (lat. *quantitas* ke *quantus*) — množství, početnost číselně vyjádřená; KVANTITATIVNÍ — týkající se kvantity; určující množství; vyjádřený v číslech nebo v množstvích; KVANTITATIVNÍ znak — v matematické statistice znak, jehož hodnota je vyjádřena reálnými čísly

4. Pseudobiorytmy

Pseudobiorytmy jsou biologickou analogií mechanické kmitavé soustavy v otevřeném obvodu, a tak vykazují všechny zákonitosti platící pro tyto systémy. Jedná se v podstatě o reakci organismu na vnější periodické vlivy, jež pochopitelně nenastává okamžitě a ani nekončí zároveň se zánikem vnějšího působení. Příkladem je rytmus spánku a bdění, který při změně časového pásma si ještě po jistou dobu zachovává původní fázi a jen zvolna se přizpůsobuje novému cyklickému působení. Tím vzniká mylný dojem o vlastním biorytmu nezávislém na změně tzv. cirkadiánních působeních při přemístění např. z Evropy do USA.

Souhrnně můžeme konstatovat, že pseudobiorytmy vznikají jako odezva příslušného subsystému organismu na periodické působení v otevřeném okruhu. Jsou to vlastně vynucené kmity tohoto subsystému, a proto mají i jejich fyzikální vlastnosti.

5. Rezonanční biorytmy

Rezonanční biorytmy jsou biorytmy, které vznikají při působení takového vstupního signálu, jehož frekvence je shodná s vlastní frekvencí příslušného subsystému v organismu.

Tyto biorytmy vykazují náhlé zvýšení amplitudy výstupní veličiny tak, jak je to zřejmé z obr. 3, a to může vést i k destrukci příslušného subsystému.

Příkladem tohoto typu biorytmů jsou např. reakce nemocných epilepsií na některé frekvence světelných signálů.

6. Vlastní biorytmy

Vlastní biorytmy jsou biorytmy vytvářené na základě vlastností zpětnovazebních biologických subsystémů, kterými je vybavena většina složitějších živých organismů. Tyto biorytmy jsou nezávislé na průběhu vstupní veličiny do tohoto zpětnovazebního subsystému. Teoreticky můžeme vlastnosti a chování vlastních biorytmů vyšetřovat pouze z hlediska kybernetiky.

Můžeme předpokládat, že hlavním zdrojem všech druhů biorytmů v živých organismech jsou právě ty subsystémy, které jsou vybaveny zpětnou vazbou. Z toho také vyplývá vnitřní původ vlastních biorytmů, neboť, jak bylo řečeno, vnějším působením je možné vyvolat pouze dočasné periodické odezvy, které po skončení tohoto působení po jisté době zanikají.

Vlastní biorytmy vzniklé na základě zpětnovazebního působení jsou však trvalé a vnějším působením jen velice obtížně ovlivnitelné (pokud nedokážeme měnit přímo podstatu jejich vzniku, jako např. zesilovací účinek jejich zpětné vazby).

Z kybernetického hlediska je nutné doplnění o to, že většina těchto zpětnovazebních působení je nelineární, a tak umožňuje vznik trvalých oscilací i v ustáleném stavu.

Dosavadní úvahy se týkaly pouze jediného izolovaného subsystému schematicky znázorněného na obr. 5. Živé organismy však obsahují většinou velký počet takovýchto zpětnovazebních jednotek, které jsou vzájemně vázány nejen funkčně, ale i svými vstupními a výstupními veličinami. To znamená, že nutně dochází k souhrnnému působení jednotlivých dílčích průběhů.

Pro onemocnění i pro léčebné metody jsou nejdůležitější právě vlastní biorytmy. A ty mohou vznikat pouze ve zpětnovazebních subsystémech.

Můžeme konstatovat, že čím je organismus složitější, tím se v něm vyskytuje více možností pro vlastní biorytmy, popř. pro biorytmy resonanční. To je způsobeno především tím, že ve složitějších organismech se vyskytuje větší počet jednotlivých subsystémů, a tím se zvyšuje i absolutní počet jejich vzájemných interakcí, který se zvětšuje s jejich počtem n a může dosáhnout až hodnoty $n!$. V jednodušších organismech se vyskytují především pseudobiorytmy.

Analytické rozbory chování zpětnovazebních subsystémů velice pěkně vykazují shodu u periodického střídání nálady přes manii, normu a depresi — tzv. primární afektivní poruchy. Tvar pozorovaných zákonitostí nebylo zatím možno vysvětlit na základě žádné dosud známé teorie biorytmů. Zde uvedená teorie je nejen poměrně snadno vysvětluje, ale předpovídá i další zákonitosti a tím i možnosti léčení.

7. Závěr

Je důležité si uvědomit, že na základě odlišných výchozích předpokladů při vysvětlení téhož pozorovaného jevu se změní i druh otázek, které si klademe. Teď se zcela jistě nebudeme zabývat umístěním „biologických hodin“ a nebudeme také hledat jejich „tajemné“ vlastnosti, neboť je nám známa jejich přirozená podstata. Každý subsystém vykazující periodické vlastnosti má svou fyzikální podstatu. Jeho fyzikální vlastnosti závisí vždy na konkrétním jednotlivém organismu, na jeho fyzikálních parametrech, jako na jeho hmotnosti, tvaru, parametrech zpětné vazby atd. Proto je potřebné zjišťovat a ptát se právě na tyto vlastnosti.

Zatím je zde uvedená teorie biorytmů pouhou hypotézou, kterou jako každou jinou může prověřit jen velké množství experimentů. Vznikla na základě spojení dvou vědních oborů — fyziky a biokybernetiky.

Literatura

[1] Ward, R. R., Živé hodiny, Praha 1980

Luminiscenční analýza

Ing. V. PATROVSKÝ, CSc., Praha

Luminiscence je, jak známo, studené světélkování pevných látek a roztoků, řidčeji i plynů a par vzniklé transformací jiné primární energie, většinou světelného záření o nižší vlnové délce (fotoluminiscence), ale také chemickými reakcemi (chemoluminiscence), tepelnou stimulací (méně přesné je označení termoluminiscence), mechanickým tlakem (triboluminiscence), elektrickým polem (elektroluminiscence) a některými dalšími způsoby. Pro analytické účely mají význam však jen první tři druhy luminiscence. Je také třeba připomenout, že analýzu dělíme na kvalitativní a kvantitativní. Při kvalitativní analýze nám jde jen o důkaz nějaké látky, iontu či prvku vhodnou reakcí (zde luminiscenční), při kvantitativní analýze určujeme množství této látky nebo prvku, v našem případě obvykle měřením intenzity luminiscence vhodným přístrojem (fluorimetrem) s vizuálním hodnocením nebo dnes nejčastěji s hodnocením fotoelektrickým. Po stránce fyzikální lze pak připomenout, že luminiscence je záření představující nadbytek záření nad úrovní normálního teplotního záření daného Planckovým vyzařovacím zákonem. Na rozdíl od tepelného záření, které je výsledkem kmitání molekul a atomových skupin, záření luminiscenční má subatomární původ v elektronových přechodech, o čemž se zájemce dozví více ve speciální literatuře (*Pátek, Neumanová, Luminiscence, SNTL 1962, Dvořák, Kupka, Fyzikální podstata luminiscence, SPN 1980*).

Zdroj primárního záření

Nejvhodnějším zdrojem pro vybuzení fotoluminiscence je rtuťová výbojka. Ta emituje ve viditelné oblasti spektra žluté čáry 0,577 a 0,579 μm , zelenou čáru 0,546 μm , modrou 0,435 μm a dvě fialové čáry 0,408 a 0,405 μm . Pro praktické využití mají význam jen čáry fialové, někdy i čára modrá, ale největší význam má ultrafialová čára při 0,366 μm a výjimečně i jinak nejsilnější čára při 0,254 μm (uplatňuje se např. v zářivkách). Protože viditelné světlo ruší pozorování poměrně slabého luminiscenčního záření, zadržuje se vhodným filtrem, který ovšem propouští naopak nejvýznamnější čáru 0,366 μm . Takovým tmavým filtrem je např. jenské sklo UG 1 nebo podobné sklo Woodovo; v podstatě je to tmavě fialové sklo s přibližným složením 50 % SiO_2 , 25 % BaO , 15 % K_2O , 9 % NiO a 1 % CuO . Náhradkou takového filtru může být i tmavé kobaltové sklo, 1% roztok manganistanu draselného nebo 0,1% roztok krystalové violeti. Protože však tato media propouštějí i částečně červenou oblast spektra, je vhodné je kombinovat

se světlem modrým (fotografickým) filtrem B 1. Také lze použít jako filtru roztoku, který obsahuje asi 10 % síranu kobaltnatého a 5 % síranu měďnatého.

Jako náhražky rtuťové výbojky lze použít i silnější elektrickou žárovku (od 60 W výše), kterou případně napájíme napětím o 5–10 % vyšším (z transformátoru). Je ovšem možné použít i 35W autožárovky 6 nebo 12 V. Taková žárovka ovšem produkuje mnoho tepla a červeného záření. Musí být tedy světlotěsně uzavřena, ale s dostatečným počtem větracích otvorů. Viditelné záření odfiltrujeme některým z výše uvedených filtrů, přičemž kombinace se světlem modrým filtrem je zde nezbytná. Kdysi se vyráběly žárovky, které měly přímo baňku z tmavého nikelnatého skla a záměrně byly elektricky přetížené. Podobné baňky se někdy montují i dnes na rtuťové výbojky. Pro vybudzení fotoluminiscence mnohdy stačí i světlo modrofialové. Ze světla rtuťové výbojky se pak izolují příslušné spektrální čáry opět vhodnými filtry nebo se použije kobaltnatého skla. Pamatujme si, že čím má luminiscenční záření větší délku vlny (žlutá až červená), tím větší délkou vlny je lze vybudit a vystačíme i s modrofialovým světlem, které příliš neruší, nebo je lze pro měření či pozorování odstínit žlutým filtrem. Pro luminiscenci fialovou až zelenou je však vhodná jediná blízká ultrafialová oblast.

Předběžné pokusy

Poslouží nám k demonstraci základních jevů a k ověření, že náš zdroj ultrafialového či alespoň fialového záření (zejména improvizovaný) je použitelný. Pokusy provádíme pochopitelně ve tmě, která nemusí být však dokonalá. Ovšem v naprosté tmě a asi po pětiminutovém přizpůsobení oka můžeme rozeznat i velmi slabou luminiscenci. Zkoušet můžeme mnoho běžných materiálů, jako jsou nálepky na krabičkách zápalek, bankovky, fluorescenční nátěry, reklamy, rostlinné i minerální oleje, tuky, skla a bižuterii, plastické hmoty, papíry a látky, organické látky, např. salicylan sodný, uranylové soli, ciferníky budíků a hodinek potřených svítící barvou apod. Slabě září i některé jiné anorganické soli a minerály.

Luminiscence minerálů a nerostných surovin

Luminiscence minerálů a nerostných surovin je značně závislá na jejich čistotě i znečištění (což je rozdíl). Byl to patrně první *Homborg* (1694), který poznal, že luminiscenci potlačuje železo, ale podporuje ji měď. Teprve za téměř 200 let ukázal *Verneuil* (r. 1886), že svítivost fialově zářící *Balmainovy* barvy je podmíněna obsahem nepatrného množství vizmutu. Kolem roku 1900 pak působnost různých kovových nečistot (aktivátorů) vyšetřili pro mnoho látek *Klatt*, *Lenard*, *Tomaschek* a další. Obecně lze udati tato pravidla:

1. Luminiscenci nejeví minerály kovového a polokovového vzhledu (kyzy, leštěnce), ani minerály tmavé (augit, turmalín), ani silně barevné a obsahující železo, nikl, kobalt, chrom a měď (i když tyto prvky někdy mohou být aktivátory).

2. Luminiscenci nejeví hmoty, které jsou sice světlé nebo bílé, ale velmi čisté. To mohou být některé vápence, křemeny, chlorid sodný aj.

3. Zelenou luminiscenci jeví však mnohé minerály uranu obsahující skupinu UO_2^{++} kromě minerálu torbrenitu (obsahuje mimo uran i měď) a karnotitu, který obsahuje vanad. Dále světélkují scheelity (CaWO_4) s obsahem molybdenu menším než 0,5 % modře, s vyšším obsahem bíle až žlutě. Willemit Zn_2SiO_4 svítí zeleně, zirkon obvykle oranžově. Pro ostatní minerály není luminiscence nijak typická, protože se její charakter může značně měnit, nebo nemusí nastat vůbec. Jde např. o minerály jako sádrovec, strontianit, leukofan, safír, vápenec, fluorit aj. Fluoreskují-li vápence oranžově, obsahují mangan, ty, které svítí zeleně až modře, obsahují stopy mědi. Teplem stimulovanou luminiscenci (termoluminiscenci) jeví nejlépe kazivec (fluorit CaF_2), což umožňuje jeho rozeznání v hornině. Stačí směs minerálů zahřát ve tmě na desce elektrického vařiče. Fluority (nikoliv všechny) se rozzáří fialově nebo zelenavě. Záření je patrně podmíněno předchozí aktivací dlouhým působením radioaktivního záření a obsahem stop vzácných zemin.

Vidíme, že uplatnění luminiscence v mineralogii je značně omezené a problematické a lze ji využít především k důkazu minerálů uranu (opět nikoliv všech) a k důkazu scheelitu. Ve většině ostatních případů slouží luminiscence jen k doplnění charakteristiky minerálu z určité lokality nebo pro zcela speciální případy, např. k detekci některých diamantů, zirkonů aj.

Použití luminiscence pro hodnocení zboží a materiálů

Do této skupiny lze zahrnout mnoho látek, materiálů včetně potravin; jejich popis by však zabral celou knihu. I kdyby to bylo možné, nebylo by to účelné, protože luminiscence zde závisí na mnoha faktorech. Lze udat např. její typické znaky jen pro určitou skupinu látek nebo určitý původ a podat jen obecné informace. Proto uvádím jen několik typických příkladů:

1. Látky, papíry, barviva: mnohé bílé látky a papíry se opticky vyjasňují přidávkou fialově fluoreskujících látek, které na denním světle kompenzují původní žlutavý odstín. Takto impregnované látky září v ultrafialovém světle obvykle modrobíle. Barevně září i látky vybarvené fluorescenčními barvivy.

2. Minerální a rostlinné oleje a tuky: Minerální oleje a tuky (tj. získané z ropy či dehtu) jeví silnou modrou až zelenou luminiscenci, naproti

tomu rostlinné oleje a tuky září jen velmi slabě. Tak lze obě skupiny tuků spolehlivě rozeznat i poznat, zda neznečišťují jiné kapaliny (alkohol, aceton, voda, benzin, benzen) či hmoty. Impregnujeme-li však minerálním olejem některé porézní hmoty, můžeme dobře v ultrafialovém světle zkoumat jejich povrchovou strukturu.

3. Odlišování padělků: některé bankovky, šeky, známky bývají označeny číslem nebo nějakým drobným detailem luminiscenčních vlastností, který slouží k identifikaci jejich pravosti. Podobně tomu může být i u pravých a uměle vyrobených polodrahokamů.

4. Potravinářství: čerstvé mléko a máslo má fluorescenci žlutou, později je modravá. U čerstvého vejce bílek nefluoreskuje, začne však modravě zářit stárnutím. Lůj i vepřové sádlo nezáří, umělé tuky září modravě, rostlinné tuky fialově šedě.

5. Organické sloučeniny a barviva: platí zde jedno zásadní, ale jednoduché pravidlo — fluoreskují pouze některé aromatické sloučeniny, tj. sloučeniny obsahující benzenové nebo naftalénové jádro, ovšem ve viditelné oblasti jen za přítomnosti některých atomových skupin. Nefluoreskují-li, jde o sloučeniny alifatické nebo některé jednodušší sloučeniny aromatické. Porovnejme např. fluorescenci antracenu, salicylanu sodného s cukrem nebo kyselinou vinnou.

6. Kontrola luminoforů: V dnešní době, kdy se spotřebuje velké množství luminoforů pro zářivky a televizní obrazovky, se tyto materiály pochopitelně hodnotí hned po přípravě.

Důkaz a stanovení anorganických a organických látek

Jak jsme viděli v předchozích odstavcích, lze luminiscencí dokazovat látky většinou jen ve speciálních případech a jen za jistých okolností.

Tak např. charakter atomů (iontů) železa, niklu, kobaltu, chromu taková stanovení vylučuje. Naopak fluorescenční stanovení berylia morinem je jednou z nejcitlivějších metod, umožňujících stanovení až 1 μg Be v 50 ml roztoku. V analytické chemii v luminiscenční analýze uplatňujeme dvě zásady:

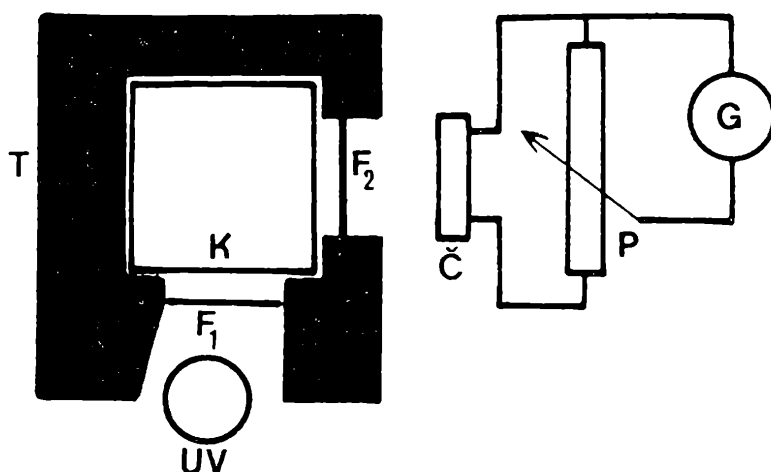
1. Stanovovaný prvek (iont) či látku nejprve izolujeme a koncentrujeme, zpravidla extrakcí organickým rozpustidlem, někdy i jinak, např. destilací. Tak např. petroléterem, benzinem apod. extrahujeme tuky, chlorofyl, karoteny aj. Extrakt lze často použít přímo k vyvolání fluorescence. U anorganických iontů můžeme např. oddělit stopy galia z prostředí 6 N HCl extrakcí iontu GaCl_4^- do éteru, odpařením extraktu a stanovením galia v odparku podle dalšího bodu.

2. Pokud izolovaná sloučenina sama nefluoreskuje, převádíme ji na sloučeninu fluoreskující, která je vhodná pro důkaz či stanovení. Tak pro anorganické ionty jsou vhodná tato činidla:

čínidlo	ionty, s nímž dává fluoreskující sloučeninu
morin	Be, Al, Ga, In, Zn, Th, Zr, Sb, Sn fluorescence v roztoku je zelená, optimální pH je pro Al, Ga a In 3, pro Zn pH 7, pro Sb, Sn, Zr, Th pH 0,5 až 3, pro Be pH 10.
8 hydroxy-chinolin	Al, Ga, In, Zr, Th, Zn, žlutózeleně fluoreskující sraženiny, rozpustné v chloroformu, opt. pH 2 až 4, pro Mg pH 9, jako čínidla lze použít i příslušné sulfokyseliny, vzniklý komplex je pak rozpustný ve vodě.

Využití chemiluminiscence

Chemiluminiscence se zásadně liší od fotoluminiscence tím, že záření zde vzniká jako částečný produkt chemické, zpravidla oxidační reakce. Proto také zde nepotřebujeme žádný primární budicí zdroj, ale jen vhodné reakční podmínky. V přírodě je chemiluminiscence hojně rozšířena jako světélkování hmyzu, bakterií, hub, hlubinných ryb, tlejícího dřeva apod. a označujeme ji zde jako bioluminiscenci. Světélkování bílého fosforu je pak typickou anorganickou chemiluminiscencí. Že skoro každá chemická reakce je provázena slabým zářením, prokázal již v polovině třicátých let u nás *O. Viktorin*. Avšak teprve když roku 1928 objevil *Albrecht* velmi silné chemiluminiscenční vlastnosti hydrazidu kyseliny aminoftalové — luminolu — mohlo být tohoto jevu využito v praxi, a to především k důkazu stop peroxidu vodíku a krve. V alkalickém prostředí, při pH kolem 11, jeví luminol za přítomnosti silných oxidačních činidel jako ozonu, chlornanu, kyanoželezitanu nebo manganistanu intenzivní, i když krátkodobou modrou luminiscenci roztoku. Peroxid vodíku dá však až hodinu trvající luminiscenci, ale jen za přítomnosti vhodného katalyzátoru. Nejlepším katalyzátorem je hemoglobin nebo jeho derivát hemin a samozřejmě i krev. Protože působí i starší, zaschlé stopy krve, bylo luminolu využito k jejímu důkazu např. v kriminalistice. Protože příprava hemoglobinu z krve je poměrně obtížná a použití samotné krve činí potíže (uchovávání krve), našel autor t. čl. plnou náhradu hemoglobinu v triethanolaminovém komplexu trojmocného kobaltu (Talanta 1976, str. 553). Tento katalyzátor se připraví rozpuštěním 0,5 g dusičnanu kobaltnatého a 2,5 ml triethanolaminu asi v 50 ml vody. Ponechá se stát za občasného protřepání na vzduchu asi dvě hodiny, pak se doplní vodou do 100 ml. Důkaz peroxidu ve vodě (např. v dešťové vodě, v chladicí vodě atomového reaktoru) se provede tak, že ke 100 ml vody se přidá 5 ml 0,05 % luminolu v 7 % NaOH a 0,2 ml roztok Co katalyzátoru. Protřepe se a pozoruje se ve tmě. Roztok luminolu musí být starý nejméně týden, čerstvý reaguje slabě. Další podrobnosti nalezne zájemce v článcích *dr. Kubala* (Chem. listy



Obr. 1

1968 str. 1478, 1970 str. 113). Vizuálně lze zjistit ještě asi 10^{-5} % peroxidu, fotonásobičem až 10^{-8} %.

Konstrukce fluorimetru pro školní potřeby

Podle obr. 1 lze poměrně snadno zhotovit fluorimetr z dostupných součástí. Základní těleso T je zhotoveno z tvrdého dřeva černě nabarveného a napuštěného parafinem či lakem. Lze ovšem použít i kov. Vnitřní prostor je tvarován podle použité kyvety K, kterou může být širší nízká zkumavka nebo užší kádinka, skleněná čtverhranná kyveta, případně slepená z umaplexu. UV je zdroj ultrafialového záření, F_1 příslušný filtr izolující záření v mezích (0,366 až 0,405) μm , F_2 je skleněný filtr pohlcující zbytky ultrafialového a fialového záření — zcela vyhoví fotografický žlutý nebo zelený filtr pro zelenou luminiscenci. Pro modrou luminiscenci použijeme jen slabý filtr žlutý, popř. ultrafialový. Č je světelné čidlo, v našem případě patrně nejlépe selenový fotočlánek připojený přes potenciometr P k citlivému zrcátkovému galvanometru. Použití fotoodporu nebo fotonásobiče vyžaduje elektronický zesilovač, jehož popis se vymyká poslání tohoto článku.

Práci s fluorimetrem můžeme demonstrovat pomocí 0,05 % roztoku fluoresceinu (Lachema) ve zředěném amoniaku. Roztok nalijeme do kyvety a citlivost nastavíme potenciometrem na maximální výchylku galvanometru. Roztok potom několikrát vždy zředíme stejným objemem zředěného amoniaku (asi 2%) a opět změříme výchylky galvanometru. Uvidíme, že při vysokých koncentracích fluoresceinu výchylka (a tedy i intenzita fluorescence) zůstává stejná a začne klesat až od určité koncentrace. Grafické vynesení závislosti výchylky galvanometru a koncentrace fluoresceinu dá potom křivku, kterou lze použít ke zjišťování neznámé koncentrace fluoresceinu. Jak se postupuje v jiných případech, dočte se zájemce v knize Z. Holzbechera *Luminiscenční analýza*, kterou lze vypůjčit v odborné knihovně.

Některé další aplikace luminiscence

I když dnes máme metody pro stanovení stopových prvků lepší, je vhodné se nakonec zmínit o důkazu některých prvků na základě jejich aktivační schopnosti v základním materiálu. Důkaz je značně citlivý, omezuje se však na čisté roztoky, jejich odparky a koncentráty. Je však snadno proveditelný. Patrně nejjednodušší je důkaz antimonu. Nepatrné množství antimonité soli rozetřeme v misce asi s 10 g chloridu draselného. Směs bez jakéhokoliv žíhání září v ultrafialovém světle žlutě. Někdy je nutno směs zahřát v sušárně. Důkaz manganu, antimonu a vizmutu (až 10^{-8} g) ve vodě lze provést tak, že v ní rozmícháme trochu uhličitanu vápenatého, suspensi vneseme do platinového očka a silně vyžeháme v plameni. Když po vychladnutí hmotu přiblížíme k dolní části plamene, potom vlivem pomalých elektronů se objeví v přítomnosti manganu luminiscence žlutá, v přítomnosti antimonu světle modrá. Vizmut dá barvu chrpově modrou, měď bělomodrou. Měď v destilované (i jiné) vodě lze dokázat provlhčením uhličitanu barnatého, vysušením, smísením asi s 0,2 dílu síry a vyžeháním v uzavřeném porcelánovém kelímku v elektrické pídce asi při 700°C po dobu 15 minut. Současně provádíme kontrolní pokus (bez provlhčení vodou) a po vychladnutí oba vzorky porovnáme pod UV světlem. Měď dá žlutou až oranžovou luminiscenci. Tak můžeme dokazovat měď i jiné kovy např. v popelu rostlin nebo v živočišném materiálu. Můžeme také použít čisté mořské lastury, skořápky našich škeblí nebo skořápky vajec. Ty napřed rozdrtíme, vyžeháme a znovu rozetřeme nyní za přídavku 1/3 dílu síry. Vyžeháme podobně jako nahoře a pozorujeme v UV světle. Mangan dá záření žluté, měď modrozelené, vizmut fialové, olovo žlutozelené. Výsledek ovšem může být i nulový. Uran je zase nejlépe dokazovat v perličce taveniny fluoridu sodného. Září žlutě.

Halleyova kometa nalezena

FRANTIŠEK JÁCHIM, Vimperk

Kolektivu pracovníků palomarské observatoře se podařilo 16. října 1982 nalézt pětmetrovým reflektorem přibližující se kometu P/Halley, označovanou také 1910 II, jejíž průchod perihéliem nastane 9. února 1986. Halleyova kometa patřila vždy k velmi atraktivním objektům na obloze. Ačkoli její oběžná doba je 76 let, je v historických pramenech zachyceno 29 jejích návratů ke Slunci. Dráhu komety vypočetl poprvé *Edmund Halley* (1656—1724), když porovnával dráhy komet z let 1682,

1607 a 1531 a dospěl k závěru, že jde o jedno a totéž těleso. Důkazem správnosti Halleyových výpočtů a úvah bylo vyplnění předpovědi návratu komety začátkem roku 1759. Halley zemřel roku 1724 a nedočkal se tedy potvrzení své předpovědi. Kometu však našel 24. prosince 1758 *Jan Jiří Palič* z Prohlis u Drážďan; od té doby byla sledována a perihéliem prošla 12. března 1759. Astronomové *Hind*, *Langier*, *Cowell* a *Crommelin* pak dali do souvislosti záznamy o pozorování komety až do roku 240 př. n. l. Není však vyloučeno, že poprvé byla Halleyova kometa pozorována již roku 1057 př. n. l. Z poměrně bohaté řady pozorování byla stanovena její dráha; připomeňme však, že tato dráha je do jisté míry deformována vlivem gravitačních polí velkých planet sluneční soustavy. Dráha je elipsa s hlavní poloosou velikosti 17,94 AU a s excentricitou $e = 0,9673$. Průměr jádra je 900 km, délka ohonu v blízkosti Slunce dosahuje až 0,20 AU. Slunci se přibližuje na vzdálenost 0,6 AU v perihelu.

Na příští léta je připraven bohatý program sledování komety pomocí sond vyslaných do její blízkosti. V SSSR je připraven projekt *Veněra — Galley*. Výzkum komety bude proveden pomocí sondy, která při svém letu bude provádět rovněž průzkum Venuše. K Halleyově kometě se má sonda přiblížit na vzdálenost 10 000 km. Druhá sonda má dosáhnout vzdálenosti 3000 km od jádra. Protože půjde o náročnou navigaci letu, je využito současného optického sledování komety k přesnému propočtu úseku dráhy, v němž dojde k přiblížení sond. Evropské sdružení pro výzkum kosmu připravuje let zvláštní sondy do blízkosti komety. Vlastní výzkum chystají také Japonci; jejich sonda proletí ve vzdálenosti 10 000 km od jádra.

Víte, co je AU?

Jde o značku jednotky délky, která se užívá v astronomii. Můžete se o tom přesvědčit např. v článku o Halleyově kometě. Tato jednotka se nazývá *astronomickou jednotkou* a někdy se též označuje UA. V soustavě astronomických konstant Mezinárodní astronomické unie byla přijata hodnota

$$1\text{AU} = 149\,600\,10^6\text{ m.}$$

Jak se právě na tuto hodnotu přišlo? Vznikla zaokrouhlením střední vzdálenosti Země od Slunce.

Větší jednotkou délky, kterou také užívají astronomové, je *parsek*. Není však dekadickým ani jiným jednoduchým násobkem astronomické jednotky. Byl stanoven takto:

1 parsek je vzdálenost, ze které je úsečka o délce 1 AU vidět pod zorným úhlem 1 vteřiny (tj. par secundum).

Pro parsek se užívá značky pc. Přibližně platí:

$$1 \text{ pc} \doteq 206\,265 \text{ AU} \doteq 30\,857 \cdot 10^{12} \text{ m.}$$

Kromě toho je mezi vedlejšími zákony jednotkami v ČSSR:

$$1 \text{ světelný rok} = 1 \text{ l.y.} \doteq 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m.}$$

Tato jednotka byla určena jako dráha, kterou urazí elektromagnetické vlnění ve vakuu za jeden rok. Značka l.y. pochází z anglického „light year“.

jm

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Základné fyzikálne formy matérie v historickom vývoji

Doc. dr. PAVOL FERKO, PF Banská Bystrica

Filozofický pojem matérie patrí k najvšeobecnejším pojmom v našom vedomí. Nemožno ju však stotožňovať, zamieňať s niektorou jej formou (látkou, polom), s niektorou konkrétnou fyzikálnou vlastnosťou (hmotnosťou, tiažou a pod.), s určitou, v danej dobe uznávanou štruktúrou (atómami, elementárnymi časticami). Lebo v stotožňovaní matérie s niektorou jej konkrétnou formou či vlastnosťou spočíva častá príčina idealistického prekrúcania fyzikálnych poznatkov.

1. Marxistická filozofia a fyzika

Fyzika a filozofia majú hodne spoločného v tom, ako sa pozerajú na svet, ako pristupujú ku skúmaniu hmoty a jej prejavov a k skúmaniu nejelementárnejších procesov, ktoré sa v prírode odohrávajú. Pri štúdiu sa nám objasní aj špecifická úloha filozofie a fyziky ako prírodnej vedy v procese poznávania a vysvetľovania sveta, aj ich jednota.

Fyzika skúma a vysvetľuje jednotlivú, ohraničenú oblasť prírody, sleduje jednotlivé druhy pohybov, odhaľuje jeho špecifické zákonitosti.

Marxistická filozofia ako najvšeobecnejšia veda skúma zákonitosti

sveta ako celku, t. j. najvšeobecnejšie zákony pohybu a vývoja prírody, spoločnosti a myslenia.

Spoločné základné črty marxistickej filozofie a fyziky sú v tom, že:

a) Skúmané javy a deje objektívne existujú — fyzika nikdy neskúma vymyslené javy, zázraky, či iné nejestvujúce výtvary, ale vždy skúma určitú časť materiálneho sveta, vlastnosti či vzťahy materiálnych objektov. Je pravdou, že jednotlivé javy v prírode, ktoré fyzika skúma, majú len relatívnu samostatnosť, lebo príroda vrátane spoločnosti tvorí jednotný súvislý celok.

b) Skúmané deje prebiehajú zákonite — vedecké poznanie sa začína tam, kde sa odhaľujú a vysvetľujú vnútorné súvislosti a zákony prírodného diania. Bez toho by vedecké fyzikálne poznanie nemohlo byť nástrojom praktického pretvárania sveta. Fyzika pri skúmaní objektívnych javov a procesov zisťuje, že zmeny, ktoré v nich prebiehajú, zákonite majú prirodzené príčiny, ktoré sú vlastne javom samostatným a ktoré sú poznateľné.

c) Svet a deje v ňom sú poznateľné — dokazuje to aj história fyziky. Okruh fyzikálneho poznania sa stále rozširuje. Fyzika prechádza od pozorovania a popisu javov k ich výkladu, vysvetľuje podmienky ich zrodu a zániku a ich možnú realizáciu. Zisťuje, že mnohé javy nie sú ešte dokonale vysvetlené, predpokladá však, že budú poznané. Pritom nepochybuje, že za nimi alebo v nich nájde mnoho vecí a javov ešte nepoznaných.

Všetky takto získané poznatky z fyziky svojimi argumentami sa podieľajú v nie malej miere na budovaní vedeckého svetového názoru. Vedecký svetový názor ako filozofická kategória umožňuje hlbšie pochopenie jednotlivých prírodných javov a procesov. To znamená, že materialistický svetonázor je obsiahnutý v samotných základoch fyziky. Fyzika na ňom stavia, prispieva k jeho rozvoju a potvrdzuje ho. Materialistické východisko fyziky prejavuje sa jednoznačne i pri vysvetľovaní poslania fyziky, jej úlohy v rozvoji spoločenskej praxe.

Fyzika zo všetkých prírodných vied má najvýznamnejšie poslanie pri budovaní vedeckého svetového názoru, pretože študuje štruktúru a vlastnosti konkrétnych foriem matérie (látka a pole), ako i ich zákonitosti. Fyzika patrí medzi najstaršie prírodné vedy a už v minulosti zohrala víťazný boj s cirkevným učením. Vplyv fyziky na technický pokrok sa prejavil najmä počnúc 19. storočím (*Carnot, Faraday, Maxwell, Hertz, Popov, Stoletov, Diviš*). Fyzika dosiahnutými úspechmi pri niesla svedectvo o nevyčerpatelných možnostiach ľudského poznania a schopnostiach človeka ovládať prírodu. Fyzika v súčasnosti zasahuje do všetkých oblastí materiálneho sveta, skúma procesy nielen v makrosvete, ale aj v mikrosvete a megasvete. Bola to práve fyzika, a i dnes je, v najužšej súvislosti s vývojom marxistickej filozofie.

2. Základné fyzikálne formy matérie

Pojem matérie je základným pojmom vedeckej filozofie, dialektického materializmu. Pojem matérie prekonal od čias starovekých učencov dodnes podstatné zmeny. Až do konca 19. storočia sa pojem matérie stotožňoval s pojmom látky. Rôzne formy matérie pokladali sa za rôzne kombinácie rôznych druhov látok. V podstate podobný bol i názor starovekých materialistických učencov. Prví grécki materialisti pokladali za základ sveta určitú konkrétnu látku (*Thales* — vodu, *Anaximenes* — vzduch, *Herakleitos* — oheň). Takzvaní atomisti (*Leukippos* a *Demokritos*, V.—VI. stor. p. n. l.) vyslovili myšlienku o atómoch. Tieto častice pokladali za nemenné, odlišujúce sa len veľkosťou, tvarom a tiažou. Tvrdili, že sa pohybujú v absolútne prázdnom priestore a ich spájaním a rozdeľovaním vznikajú materiálne telesá.

V materialistickej filozofii a tiež vo fyzike v 18.—19. storočí za matériu sa pokladalo to, čo sa skladá z častíc (atómov a molekúl), teda to, čo má zrnitú štruktúru. Všetkým materiálnym objektom sa pripisovali tieto vlastnosti: tiaž, zotrvačnosť, nepreniknuteľnosť. Iné, vteda už známe javy (elektrické, magnetické, svetelné) sa za materiálne nepokladali, lebo nemali uvedené vlastnosti. Aby sa napr. mohlo vysvetliť šírenie svetla, bola uvedená predstava atomistov o absolútne prázdnom priestore nahradená éterom — prostredím, ktoré malo šírenie svetla sprostredkovať. Tento nedokázateľný predpoklad éteru však neskoršie fyzika definitívne vyvrátila.

Objavy vo fyzike z konca 19. a začiatku 20. storočia potvrdili, že vo svete niet nemateriálnych objektov. *Lebedev* (1891) pokusmi o svetelnom tlaku ukázal, že aj elektromagnetické pole sa vyznačuje zotrvačnými účinkami. *Thomson* (1897) objavil elektrón, bola určená jeho hmotnosť, čím sa dokázalo, že aj elektrina, pokladaná dovtedy za čosi nemateriálne, je vlastnosťou materiálnych objektov — elektrónov. Manželia *Curie* (1898) objavili rádium, prvok, ktorý má schopnosť vysieľať prenikavé žiarenie. *Planck* (1900) dokázal, že energia žiarenia je vysielaná nespojite, a to v celonásobných, ďalej nedeliteľných dávkach — kvantách. *Einstein* (1905) svojou teóriou relativity priniesol dôkazy o formách matérie, ich prejave a existencii.

Neschopnosť prírodovedcov prejsť pohotove od metafyzického materializmu k materializmu dialektickému spôsobila krízu fyziky na prelome nášho storočia.

Lenin poznal, že kríza fyziky vedie k odmietaniu existencie objektívnej reality a tým k filozofickému idealizmu. Vystupoval proti mechanickému, metafyzickému a idealistickému poňatiu sveta a zastával dialektickú metódu vedeckej práce, založenú na materialistickom výklade. *Lenin* definuje matériu takto: „Matéria je filozofická kategória na označenie objektívnej reality, ktorá je daná človeku v jeho pocitoch, ktorú

kopírujú, fotografujú a odrážajú naše pocity, pričom jestvuje nezávisle od nich.“ (Lenin, V. I.: Spisy, sv. 14, Praha, SNPL 1958).

Z uvedenej definície plynie, že matérie (hmota) je objektívna realita, to znamená, že existuje nezávisle od nášho vedomia a je vo vzťahu k vedomiu prvotnou a určujúcou.

Potom teleso, molekula, atóm, elementárna častica, elektromagnetické pole a podobne sú materiálnymi objektami, lebo objektívne jestvujú, nezávisle od nášho vedomia.

Súčasná fyzika dokázala existenciu dvoch základných foriem matérie — látku a pole.

Látka je najznámejšou konkrétnou formou matérie. Predstavujú ju všetky nebeské telesá, predmety na povrchu zemskej, molekuly, atómy, elementárne častice. Jednotlivé telesá sa môžu od seba odlišovať geometrickými, fyzikálnymi, chemickými ako aj inými vlastnosťami. Všetky látky môžu za vhodných podmienok vystupovať v troch rôznych skupenstvách — tuhom, kvapalnom, plynnom.

Na objavoch z oblasti elementárnych častíc v poslednom desaťročí možno názorne ukázať, ako je materia čo do svojho zloženia, konkrétnych vlastností a vzťahov nevyčerpatelná.

Pole je menej známe a preskúmané ako látková forma matérie. Pod poľnú formu matérie zahrňujeme rozličné druhy polí, ako sú napr. gravitačné pole, elektrické pole a pod.

Výklad poľa ako formy matérie má veľký vedecko-filozofický význam. Vniesol jasnosť do chápania fyzikálnych procesov, ako je vzájomné pôsobenie poľa a látky, s inými časticami, vzájomná premena častíc látky a fotónov, a obohatil naše vedomosti o pohybe matérie.

Spôčiatku bol pojem poľa zavedený do fyziky ako pracovná hypotéza, pomocou ktorej bolo možné pochopiť a osvetliť vzájomné silové pôsobenie. Dnes už je objektívna existencia polí dokázaná.

Rôzne druhy polí majú spoločné všeobecné vlastnosti i sa navzájom kvalitatívne líšia. Spoločné pre všetky polia je ich silové pôsobenie.

V elektromagnetickom poli sa prejavuje dialektická jednota elektrického poľa a magnetického poľa, lebo akákoľvek zmena jedného z nich je podmienená a zároveň určuje zmenu druhého poľa. Magnetické a elektrické pole nemožno brať do úvahy ako samostatné formy matérie. Elektromagnetické pole je charakterizované súčasnou existenciou časovo premenlivého poľa elektrického a časovo premenlivého poľa magnetického, ktoré sú nerozlučne viazané.

3. Matéria a pohyb

Tak ako pojem matérie, aj pojem pohybu prekonal v dejinách filozofického a prírodovedeckého myslenia a pozorovania podstatné zmeny.

Starogrécki materialistickí učitelia uznávali nestvoriteľnosť a nezničiteľnosť matérie. Preto museli uznávať aj nestvoriteľnosť a nezničiteľ-

nost pohybu. Tieto názory v stredoveku odporovali učeniu cirkvi, ktorá ovládala stredoveké myslenie.

Stredoveká fyzika a filozofia riešila problém pohybu idealisticky. Základy pohybu vypracoval ešte starogrécky filozof *Aristoteles* (384—322 p. n. l.). Aristoteles tvrdí, že matéria sa zúčastňuje pohybu len pasívne, lebo pohyb je určovaný bohom. Pri pohybe rozlišuje pozemské telesá ako nedokonalé a nebeské telesá ako dokonalé. *Tomáš Akvinský* (1225—1274) uznávaný za hlavnú filozofickú autoritu katolicizmu, prevzal Aristotelovo učenie a prispôbil ho potrebám cirkevným. Proti uvedenému vysvetľovaniu podstaty pohybu sa svojím učením postavil *Koperník*, *Kepler* a najmä *Galilei* (1564—1642), ktorými začína tzv. klasická fyzika. Predstaviteľom klasickej mechaniky sa stal *Newton* (1643—1727). Do polovice 19. stor. sa o pohybe uvažovalo odtrhnute od matérie, ktorá sa pokladala za pasívnu. V tom čase sa všetky pohyby vysvetľovali zákonmi mechaniky.

Jeden z filozofických smerov, ktoré vznikali v 17.—19. stor., sa nazýva mechanický materializmus, ktorý bol svetonázorom prírodných vied až do konca 19. a začiatku 20. storočia. Jeho charakteristickou črtou bola metafyzická metóda myslenia, ktorá pokladala prírodu i poznatky v nej za statické, nemenné. Príroda sa sice pohybuje podľa zákonov mechanického pohybu (zákony mechaniky pripisovali ako jediné celej prírode, ktorá sa im javila ako zložitý mechanizmus), ale sa pritom kvalitatívne nemení, t.j. nevyvíja sa.

S redukovaním pohybu výlučne na mechanický pohyb definitívne skoncoval až dialektický materializmus. Dialektický materializmus pokladá pohyb za najzákladnejšiu vlastnosť matérie, a preto sa hovorí, že pohyb je spôsobený existenciou matérie. Ak hovoríme o matérii, rozumieme vždy aktívnu pohybujúcu sa matériu, ak hovoríme o pohybe, rozumieme vždy materiálny pohyb.

Pojem fyzikálny pohyb zahrňuje v sebe celý rad fyzikálnych pohybov, majúcich svoje kvalitatívne rozdiely. Z fyzikálnych foriem pohybu matérie spomenieme aspoň niektoré.

Mechanický pohyb je najjednoduchší len z hľadiska našich predstáv o makroobjektoch. Každý mechanický pohyb je relatívnym pohybom. V prírode niet telesa, ktoré by nebolo v mechanickom pohybe. Všetky telesá sa pohybujú a všetky tieto pohyby sú relatívne. Relatívnosť mechanického pohybu nepopiera jeho objektívnosť. Obraz dráhy u rôznych mechanických pohybov môže byť rôzny, no v každom prípade má dráha pohybu objektívny charakter. Aj rýchlosť, ktorou sa teleso pri mechanickom pohybe vyznačuje, má relatívny charakter. Je pravdou, že vzhľadom na rôzne vzťažné telesá je rýchlosť pohybujúceho sa telesa všeobecne rôzna, no každá z týchto rýchlostí objektívne existuje.

Molekulárny pohyb potvrdzujú také javy ako napr. difúzia látok, a to vo všetkých skupenstvách. Spomedzi javov, ktoré nepriamo do-

kazujú existenciu molekulárneho pohybu; zvlášť významné postavenie zaujíma *Brownov pohyb* (1827). Molekulárny pohyb nemožno redukovať na súhrn mechanických pohybů jednotlivých molekúl. Je to samotný druh materiálnych objektů látkovej formy so špecifickými vlastnosťami, ako je hromadnosť, masovosť a chaotičnosť, neusporiadanosť pohybu. Ani jeden smer pohybu nemá prednosť pred druhým, všetky sú rovnocenné a rovnako pravdepodobné. Tento pohyb je zložitejším druhom pohybu látky ako mechanický pohyb.

Zvláštnymi prípadmi fyzikálneho pohybu sú aj rozmanité pohyby jednotlivých druhů polnej formy matérie. O ich existencii nás presviedčajú energetické zmeny a premeny, ktoré pozorujeme pri štúdiu rôznych polí.

Okrem mechanického a molekulárneho pohybu, o ktorých sme hovorili, prislúcha materiálnym objektom látkovej formy rad ďalších druhů fyzikálneho pohybu, ktoré sa zahrňujú pod názvom subatomárny pohyb alebo mikropohyb. Ďalším prípadom je pohyb nukleónů v jadrách atómov. Podrobnejšie tieto pohyby skúma atómová fyzika.

V súvislosti s pohybom matérie treba si uvedomiť, že pohyb sa koná v priestore a čase. Priestor a čas sú objektívne reálnou formou existencie pohybujúcej sa matérie. Sú nerozlučne spojené s pohybom matérie, sú objektívne a existujú nezávisle na ľudskom vedomí.

Literatúra

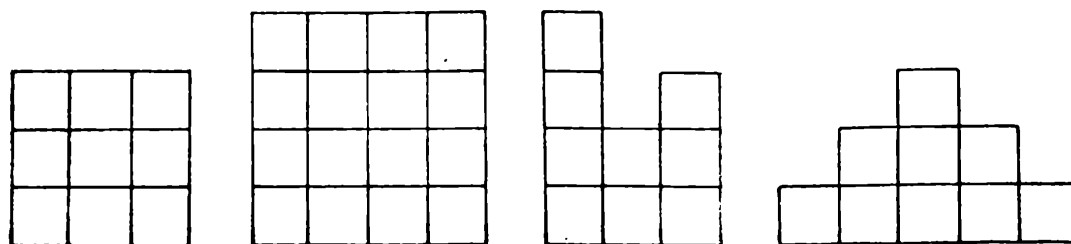
- [1] Cirbes, V. — Hajko, V.: Vyučovanie fyziky a vedecký svetonázor. Bratislava 1963

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

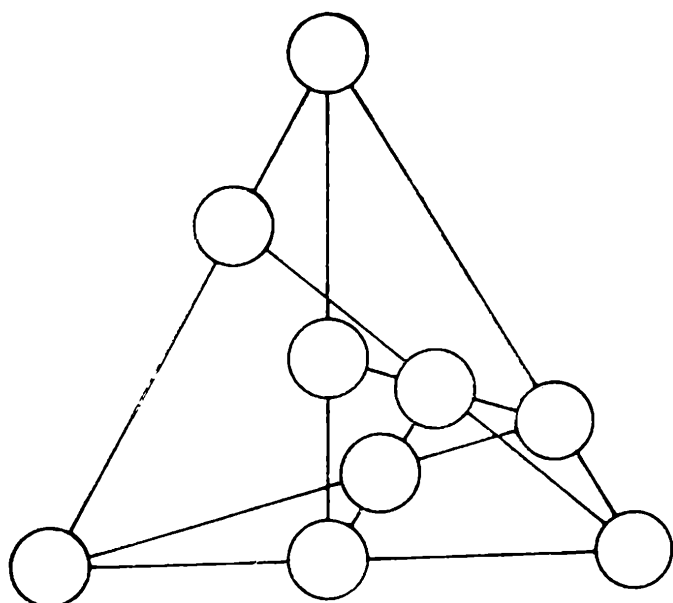
Znáte hru „Tic-Tac-Toe“?

Američtí učitelé matematiky mají svou Národní radu učitelů matematiky (NCTM). Toto sdružení vydává jednak časopisy pro učitele (např. *The Mathematics Teacher*), jednak informační zprávy pro členy. Jako novinku zařazuje do těchto zpráv čtyřikrát za rok přílohu „*Students Math Notes*“ (Matematické poznámky pro studenta), která obsahuje zajímavé materiály pro práci žáků středních škol. Ze zářijového čísla 1982 vybíráme jako ukázkou hru „Tic-Tac-Toe (čti tyk-tek-tou), trochu připomínající náš „Mlýnek“.^{×)}

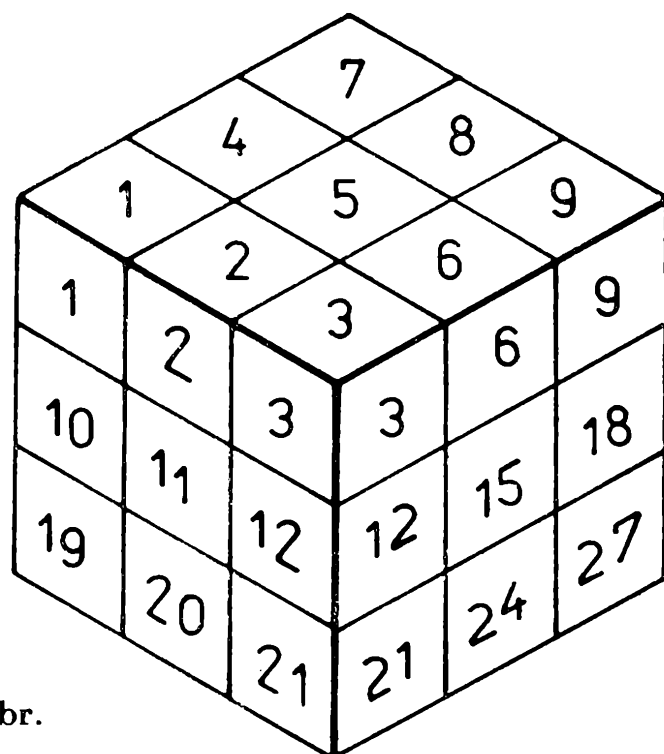
^{×)} Slovenští čtenáři mohou hru znát i z příručky pro matematické kroužky.



Obr. 1



Obr. 2



Obr.

Ke hře Tic-Tac Toe potřebujete partnera a hrací plochu na čtverečkovaném papíře, např. čtverec s 9 čtvercovými políčky (3×3). Do čtverečků píšete střídavě s partnerem své značky např. $\times$ a $\circ$; zvítězí ten, kdo první umístí své tři značky do tří sousedních polí (i úhlopříčně).

„Student Math Notes“ navrhuje obměny této hry, např. změnami hracího pole; máte je na obr. 1. a 2. Jinou změnou je změna pravidla: Kdo umístí tři své značky na tři sousední pole, prohrává. Na větším hracím poli je možno požadovat i čtyři (pět) značek vedle sebe apod.

Hru je možno hrát i na 27 krychlích ($3 \times 3 \times 3$); jen je potřeba krychle očíslovat jako na obr. 3, představovat si, které krychle leží v řadě a zapisovat čísla již označených krychlí. Ve všech případech je možno hledat, zda existuje či jaká je vítězná strategie, tedy postup, který vždy vede k vítězství.

Zahrajte si tuto hru. Nalezněte vítězné strategie pro tři značky na otištěných polích. Napište nám své výsledky, nejlepší příspěvky otiskneme.

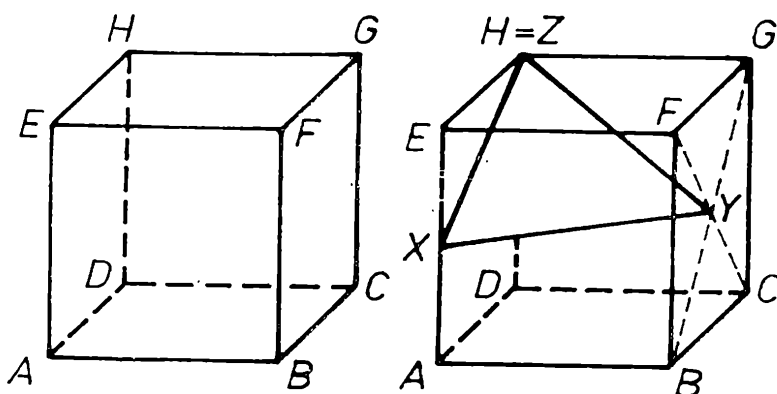
RNDr. Jiří Mikulčák, CSc.

Kostky nejen Rubikovy

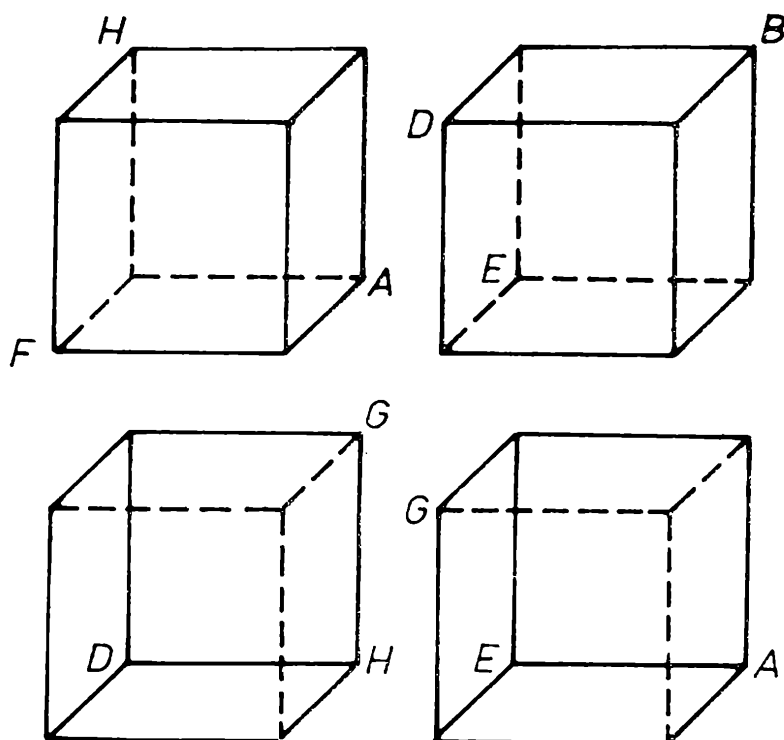
PhDr. ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF UK Praha

2. Otáčení krychle

Na obr. 1a je nakreslena krychle $ABCDEFGH$, na obr. 2 táž krychle ve čtyřech různých polohách. Jsou zde však popsány jen některé její vrcholy. Vaším úkolem je popsat neoznačené vrcholy krychle. Po splnění úkolu se přesvědčte, že jste se nedopustili chyb. Vezměte si do ruky skutečnou krychli, popište její vrcholy podle obr. 1 a natáčejte ji podle dalších obrázků. Pokud jste pracovali správně, musí ve všech případech souhlasit popis všech vrcholů na obrázku s popisem na vaší krychli.



Obr. 1a, b



Obr. 2

Na obr. 1b je do „průhledné“ krychle vložen trojúhelník XYZ . Bod Z splývá s vrcholem H , bod X je středem úsečky AE , bod Y je průsečíkem úhlopříček CF , BG stěny $BCGF$. Trojúhelník XYZ vybarvěte červeně; jeho druhá strana je žlutá. Vykreslete tento trojúhelník do krychlí na obr. 2 a vybarvěte ho!

Nejsou-li právě tři z těchto trojúhelníků žluté, je ve vašem postupu něco v nepořádku. (To ovšem neznamená, že ten, kdo má jeden trojúhelník červený, má zaručeně vše bez chyby!)

Sponka ve spirále

Sponka ve spirále je téměř klasický drátěný hlavolam, jehož zhotovení je pro každého zručnějšího kutila hračkou a jehož řešení není rovněž nikterak náročné.

Připravíme si tenčí ocelový drát (dobře poslouží delší drát ke kolu, který zakoupíme v železářství), obyčejné kleště a na ohýbání drátu



menší kleště s kulatými čelistmi. Dvěma připraveným drátům uštípeme na koncích závity a kloboučky a jeden z nich kleštěmi s kulatými čelistmi ohýbáme podle nákresu do tvaru spirály. Náročnější výrobci mohou spoj na konci zacínovat. Z druhého drátu vyrobíme podle nákresu sponku.

Úlohou je sponku ze spirály vyjmout.

Josef Svoboda

Z NOVÝCH KNIH

J. Bečvář a kolektiv :

SEZNAMUJEME SE S MNOŽINAMI

Polytechnická knižnice nakladatelství SNTL, 94. zvázok II. radu, Praha 1982, 176 strán, 90 obrázkov, 30 tabuliek, náklad 25 200 výtlačkov, cena 19 Kčs.

Popri bohatej pedagogicky orientovanej literatúre o množinách objavuje sa na trhu publikácia napísaná kolektívom vedeckých pracovníkov. Túto iniciatívu nakladateľstva SNTL treba jednoznačne privítať. Je to konkrétny počin na ceste spájania teórie s praxou.

Kniha je rozčlenená do 4 tematických okruhov: 1. základné pojmy (kap. 1. a 2.); 2. n -tice, relácie a zobrazenia (kap. 3.—5.); 3. aritmetika nekonečna (kap. 6 a 7.); 4. abstraktný nadhľad na teóriu množín (kap. 8. a 9.).

V úvode knihy sa píše, že autori chceli populárnym spôsobom podať výklad problematiky pre širšiu verejnosť. Domnievame sa, že čítanie knihy vyžaduje vyspelého čitateľa, ktorý je zvyklý čítať matematické texty. Výklad od začiatku predpokladá aktívnu čitateľovu spoluprácu, schopnosť premýšľať problematiku samostatne, vedieť „rozžúvať“ zovretú formu dôkazov. Vzhľadom na uvedený zámer bolo žiadúce venovať prvým kapitolám knihy viacej starostlivosti, metodickéjšie utriediť látku,

podrobnejšie komentovať návody k cvičeniam. Dlh, ktorý má knižka k čitateľovi v prvej časti, je plne splatený druhou časťou. Zložité a náročné myšlienky sú tu podané premysleným spôsobom, vyvážené a čisté. Čitateľ je prizvaný k spoločujavovaniu jemnej pavučiny nekonečných čísel. Cesta poznania je vzrušivá, poznanie hlboké, správdzané pocitom radosti. Prečítanie posledných 4 kapitol knihy možno vrelo doporučiť každému, kto skepticky hľadá na zmysel množín. Učiteľ matematiky tu nájde odpovede na viaceré otázky, ktoré si v duchu kladie, nájde tu aj motiváciu k úvahám o zmysle množín vo vyučovaní.

Milan Hejný

Landau L. D. — Lifšic J. M. :

ÚVOD DO TEORETICKEJ FYZIKY 2 KVANTOVÁ MECHANIKA

Vydala ALFA, Bratislava 1982, preklad z ruského originálu „Kratkij kurs teoretičeskoj fiziky 2 — Kvantovaja mechanika“, ktorý vydalo nakladateľství NAUKA v Moskvě 1972, preložil RNDr J. Šebesta, 357 stran, 21 obrázků, cena vázaného výtisku 31 Kčs.

Preložená kniha známých sovietskych autorů je druhým dílem z třídílného úvodu do teoretické fyziky (1. díl: Mechanika. Elektrodynamika; 2. díl: Kvantová mechanika; 3. díl: Makroskopická

fyzika), který vznikl zkrácením devítidílného kursu teoretické fyziky. Popud k napsání tohoto úvodu dal první z autorů (*L. D. Landau*, nositel Nobelovy a Leninovy ceny), druhý pak (*J. M. Lifšic*) realizoval tento návrh až po smrti *L. D. Landaua*. Autoři ve třech dílech shrnuli minimální objem poznatků, které by měl znát každý současný fyzik bez ohledu na svoji specializaci.

Popisovaný díl úvodu do teoretické fyziky obsahuje nerelativistickou a relativistickou kvantovou mechaniku. Nerelativistická kvantová mechanika je rozdělena na části: základní pojmy kvantové mechaniky, zákony zachování v kvantové mechanice, Schrödingera rovnice, poruchová teorie, spin, identičnost částic, atom, dvouatomová molekula, pružné srážky, nepružné srážky. Relativistická kvantová mechanika obsahuje následující části: foton, Diracova rovnice, částice a antičástice, elektron ve vnějším poli, záření, Feynmanovy diagramy. Jednotlivé části jsou doplněny příklady.

Kniha je napsána na vysoké odborné a metodické úrovni a předpokládá dobrou znalost algebry a vyšší matematiky. Knihu lze doporučit jako doplňující literaturu studentům matematicko-fyzikálních fakult a studentům fyzikálně inženýrských fakult. Kniha dobře poslouží i aspirantům, fyzikům pedagogům, profesionálním fyzikům a vědeckým pracovníkům z příbuzných oborů.

Zdeněk Janout

*RNDr. E. Pittich, CSc.,
so spolupracovníky:*

ASTRONOMICKÁ ROČENKA 1983

Vydalo Vydavateľstvo Obzor, n. p. Bratislava pre Krajskú hvezdáreň Hlohovec a Slovenskú astronomickú spoločnosť pri SAV. Publikácia má 270 strán, obsahuje obrázky, grafy, tabuľky.

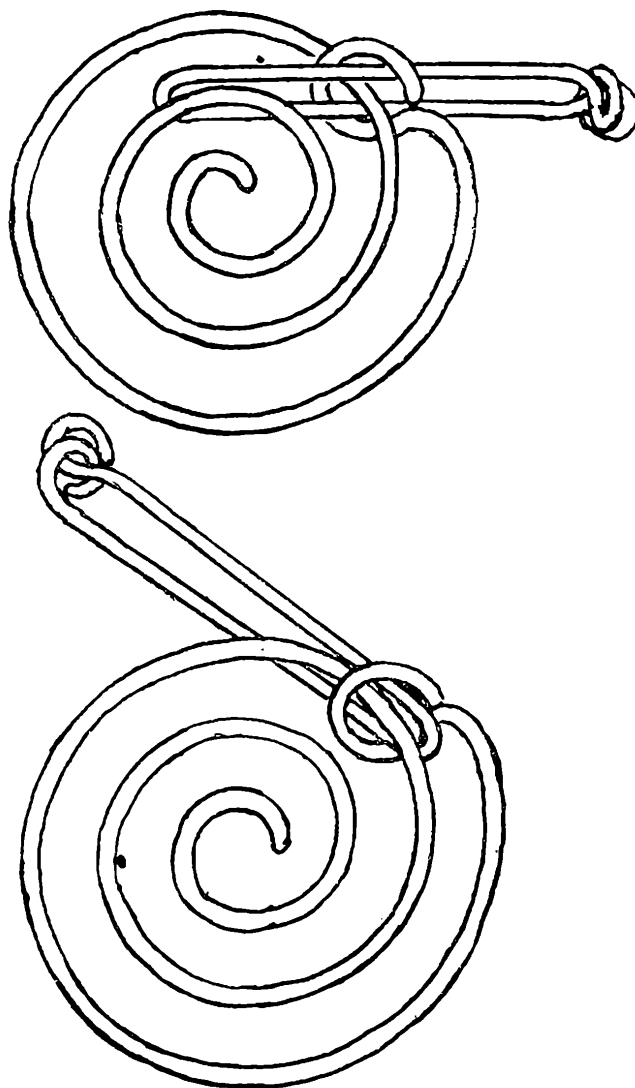
Hlavnou časťou ročenky — kalendára je prehľad Obloha v januári až v decembri — tabelované základné údaje o Slnku, Mesiaci a planétach, prehľadné mapy oblohy pre ročné obdobia, pohyby planét po oblohe apod. Ďalej sú uvedené príspevky: Meteorické roje, s prehľadom očakávanej aktivity pravidelných rojov, Kométy, Planétky s efemeridami planétky Ceres, Pallas, Juno a Vesta, Galileiho mesiace, Zatmenia Slnka a Mesiaca. Pre prácu astronomických krúžkov sú podnetné príspevky: Pozorovanie objektov ležiacich za hranicou Slnčnej sústavy a Využitie triedra pre astronomické pozorovania.

Súčasťou ročenky je Prehľad astronomických prác na Slovensku, Okrúhle výročia kozmonautiky 1983, Názvy súhvezdí, Zemepisné súradnice a nadmorská výška niektorých miest na Slovensku.

Vážnych záujemcov upozorňujem na adresu: Krajská hvezdáreň, 920 01 Hlohovec. Tam si môžete napísať o spomínanej publikácii.

Dušan Jedinák

Řešení hlavolamu ze str. 357



Vše je patrno z nákresu na obrázku. Sponku po spirále posuneme tak, abychom ji dostali do oka na konci spirály a mohli její střední částí obejít závit spirály a sponku vysunout. Opačným postupem sponku opět zasuneme.

Legenda o kružítku a úhelníku

Také v Číně vznikly první státní útvary v povodích velkých řek; počátky organizace společenského života jsou však opředeny legendami o mýtických bytostech a bájných panovnících, kteří naučili lid účelným činností. (Jako v legendách jiných národů se i zde mísí skutečné události s pozdějším zveličováním role jednotlivců, resp. se vsouváním nadpřirozených sil.) Na rozdíl od legend mezopotámských či indických pamatují čínské více na materiální stránku života a s ní spojenou matematiku.

Na obrázku vidíte zjednodušenou kresbu na stěně jednoho čínského chrámu z 5. stol. n. l.; zachycuje mýtické postavy *Fu-si* a *Nij-va*, napůl lidi, napůl plazy, kteří nesou lidstvu dary nebes — úhelník (vpravo) a kružítko (vlevo). *Fu-si* navíc naučil údajně lidi zacházet s ohněm (jako *Prometheus* v řeckých bájích), lovit ryby a ptáky, vyrábět housle a zapisovat znaky pro nebe, zemi, vodu, oheň, horu, hrom, vítr a bláto. *Nij-va* dala lidem kromě kružítko i píšťaly, zalepila roztrženou ne-

beskou klenbu - přitom ji nahnula k severozápadu, takže Země se nahnula k jihovýchodu, kam tečou všechny řeky. (Vidíte, jak se dá „vysvětlit“ sklon čínského území a tok řek spolu s polohou Polárky.)



Jiné legendy připisují panovníku *Chuang-ti* (Žlutému císaři, předku Žluté země) vládu kolem r. 2650 před n. l., jeho ministr prý zavedl devět číslic. Další postavou legend je *Si-a*, který „zkrotl řeky pomocí kružítko a pravítka“ (nepochybně jimi rýsoval plány hrází). Úhelník sloužil k vytyčování pravých úhlů při stavbách, byl tedy také trochu kouzelnickým nástrojem; proto asi se dostal mezi „dary nebes“.

J. Šedivý

Státní pedagogické nakladatelství vydalo:

J. Moravčík, L. Boček, L. Bukovský, A. Vrba, J. Vyšín, F. Zítek:

DVACÁTÝ DEVÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obsahuje řešené úlohy matematické olympiády, jež proběhla ve školním roce 1979/80. Čtenář zde nalezne i úlohy korespondenčního semináře MO. Z obvyklého obsahu však chybí zpráva o mezinárodní matematické olympiádě, neboť v roce 1980 se nenašla země, která by ji uspořádala. Toto přerušení tradice MMO však trvalo jen jeden rok.

V brožuře jsou i statistické údaje o XXIX. ročníku MO a seznamy nejúspěšnějších řešitelů v kategoriích A, B a C.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kašpova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1983.

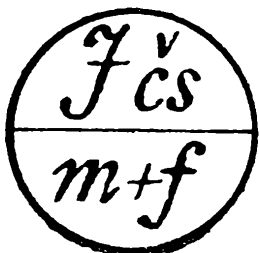
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(9)

**ROČNÍK 61, 1982/83
KVĚTEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání

Za zásluhy o výstavbu

VEDOUČÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olo-
mouc, doc. dr. Milan Hejný CSc., UK
Bratislava, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc.,
UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý,
ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout,
CSc., ČVUT Praha, doc. dr. Hana Ko-
řínková, CSc., ÚÚVPP Praha, doc. dr.
Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra,
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Pra-
ha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Oto Setzer, ČVUT Praha, dr.
Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF
Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc.,
ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové
Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51
až 9.

OBSAH

I. Fischer: Karel Marx a jeho Matema- tické rukopisy	361
O. Novotný: Důkaz Pythagorovy věty	365
V. Mráz: Jak se počítají převody	366
M. Florek: História a význam objavu neutrónu	371
J. Jirů: Ke 40. výročí úmrtí Davida Hilberta	380
Přemýšlíme, řešíme	383
Úlohy I. kola 33. ročníku matematické olympiády	389
Úlohy pro 1. kolo XXV. ročníku fyzikální olympiády	393
Pohledy do dějin . . .	. 3. str. obálky

Karel Marx a jeho Matematické rukopisy

IVAN FISCHER, CSc., UK Praha

V březnu tohoto roku jsme vzpomněli stého výročí od úmrtí jednoho z největších vědců a revolucionářů v lidských dějinách *Karla Marxe*. Jeho práce byly většinou přeloženy do všech světových jazyků. Méně je však známo, i když na to upozorňoval již *Bedřich Engels*, že v Marxově pozůstalosti jsou též rukopisy s matematickým obsahem. Engels se k jejich redakční úpravě pro vydání tiskem nedostal, a tak zůstaly po půl století pouze v rukopise. Ve třicátých letech byly prvně výňatky z těchto rukopisů otištěny v ruském překladu v časopise Pod znamenem marksizma (1933, č. 1, v pražské univerzitní knihovně je možné si jej půjčit). Až v roce 1968 vyšly knižně úplné Marxovy *Matematické rukopisy* v ruském překladu a současně i v původních jazycích, ve kterých Marx své rukopisy napsal. Části rukopisů byly napsány německy, jiné anglicky či francouzsky, přičemž Marx i v jednom odstavci tyto jazyky střídal. O deset let později, v roce 1978, se zásluhou akademika *Josefa Nováka* a kolektivu předkladatelů dostávají Matematické rukopisy do rukou českých matematiků, filozofů a dalších zájemců o toto pozoruhodné dílo.

Marxovy Matematické rukopisy vznikaly postupně, částečně při intenzivním studiu matematiky v době přípravy materiálů pro *Kapitál*, dále pak byly motivovány Marxovým vnitřním zájmem o matematiku a snahou postihnout a využít dialektické myšlení v matematice. Z velké části jsou rukopisy věnovány matematické analýze. Byla to matematická disciplína, která v Marxově době prodělávala bouřlivý vývoj, tvůrčím způsobem byla rozvíjena a neměla ještě precizovány své základy a metody, mnohé pojmy byly ještě jen mlhavě vymezeny. A to právě upoutávalo Marxovu i Engelsovu pozornost.

Matematické rukopisy jsou svědectvím z období vzniku a vývoje, z dialektického stádia rozvoje matematické analýzy. Právě ve funkčním myšlení, v limitách a derivacích viděli Marx a Engels uplatnění dialektiky v matematice ve srovnání s klasickou matematikou, pracující již v té době prostředky formální logiky.

V době svého vzniku a prvních stadií vývoje používala matematická analýza úvahy typu „blížití se k dané hodnotě“, „jít do nekonečna“ atd. Hodnota proměnné byla chápána hned jako číslo, hned jako ne-

konečně malý interval nenulové velikosti, jako nula a zároveň jako velice malé číslo od nuly však různé. Při zavedení derivace funkce se vycházelo (a stejně tak při motivačních úvahách při vyučování a na přednáškách se vychází i dnes) od sečny grafu funkce, kdy se jeden průsečík blíží k druhému, až se nám sečna grafu funkce změní v tečnu grafu funkce. Zmenšování kvantity, velikosti rozdílů dvou hodnot proměnné a v závislosti na nich příslušných funkčních hodnot, jejich dialektickým ztotožněním (jsou totožné a přitom různé) se dostáváme ke kvalitativně novému pojmu, k derivaci funkce. Obdobným způsobem úvah přicházíme k limitě funkce atd.

Marx v Matematických rukopisech uvažuje o derivování lineární funkce $y = ax$. Kdyby se ve výrazu $y_1 - y = a \cdot (x_1 - x)$ provedla diferenciální operace, tedy nechalo se x přiblížit „nekonečně blízko“ k x_1 , bylo by $x_1 - x = 0$. Ale současně by nutně bylo $y_1 - y = 0$ a výraz $y_1 - y = a \cdot (x_1 - x)$ by se změnil na $0 = 0$. „Provést nejprve diferencování a pak je znovu zrušit vede doslova k *ničemu*. Celá potíž v pochopení diferenciální operace (jako v pochopení *negace negace* vůbec) je právě v tom, vidět, jak se liší od takovéto jednoduché procedury a jak tudíž vede ke skutečným výsledkům.“ (Marx, Matematické rukopisy, Praha 1978, str. 37—38.) V následujícím textu a pak ještě mnohokrát ve svých matematických rukopisech (a obdobně i Engels v Dialektice přírody a v Anti-Dühringu) rozebírá, jak v mystickém diferenciálním počtu (tak Marx nazývá jeho první vývojové stadium) derivace, výraz $\frac{0}{0}$, obsahuje i cestu svého vzniku.

Matematická analýza se však dále vyvíjela. Již Marx v Matematických rukopisech se v duchu Lagrangeova algebraického derivování polynomů sám pokouší na základě Taylorovy a Maclaurinovy věty nalézt vysvětlení diferenciálního počtu na základě algebry. Ve svém důsledku by to bývalo znamenalo zformalizování předchozích dialekticky objevených metod a poznatků.

Vývoj matematické analýzy však šel ještě dále a k jejímu zformalizování (popsání prostředky formální logiky) skutečně došlo. Jestliže původně byla limita funkce $f(x)$ v bodě x_1 takové číslo A , ke kterému se blížily funkční hodnoty $f(x)$, pokud se x blížilo k x_1 (a to v kterémkoliv směru blížilo, zleva i zprava), potom v cauchyovských limitách pomocí delta a epsilon už žádný pohyb, žádnou změnu ani dialektiku nevidíme. Pojem „blížiti se“ přitom byl výrazně dialektický. x se blížilo k x_1 libovolně blízko, bylo s ním „ztotožněno“, ale přitom zůstávalo od x_1 různé. Dnes definujeme limitu podle Cauchyho. Limita $f(x)$ v bodě x_1 je takové číslo A , že pro každé kladné číslo epsilon existuje kladné číslo delta tak, že platí: x je různé od x_1 a zároveň x se od x_1 liší o méně než delta, potom se $f(x)$ liší od A o méně než epsilon. Symbolicky to zapisujeme:

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < |x - x_1| < \delta \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon)$$

V této podobě definice limity již matematika zcela abstrahovala od úvah typu „blížití se“, abstrahovala od změn, pohybu, od dialektických úvah, pomocí kterých byl pojem limity vytvořen. V Cauchyově definici vidíme jen matematické značky a symboly formální logiky. Pojem limity je vymezen naprosto přesně v návaznosti na předchozí matematické pojmy tak, jak o to Marx ve svých Matematických rukopisech usiloval (především u pojmu derivace, který je důsledkem pojmu limita). Přitom ovšem bez dialektických úvah „blížití se“ by pojem limity ani nevznikl, ani bychom ho nedovedli chápat, aplikovat, ani posléze zobecňovat. Dialektika mezi původními intuitivně, ale obsahově chápanými pojmy a jejich zcela přesným formálně logickým vyvozením i v současném používání pojmu limita nutně přetrvává.

Marx s Engelsem zdůrazňovali, že s pojmy proměnná a funkce se do matematiky dostala změna a pohyb. V závislosti na změně proměnné docházelo ke změnám funkčních hodnot (nezávisle proměnná, závisle proměnná). Ve svém vývoji matematika zobecnila a precizovala i samotný pojem funkce. V Bourbakistickém pojetí dnes definujeme funkci jako podmnožinu kartézského součinu, která splňuje jisté vlastnosti. (Utvoříme kartézský součin množiny všech hodnot proměnné a množiny všech funkčních hodnot. Kartézský součin tvoří všechny uspořádané dvojice, kde první složkou je proměnná, druhou složkou uspořádané dvojice je funkční hodnota. Každou takovou podmnožinu kartézského součinu, tedy všechny takové dvojice, že se příslušná hodnota proměnné vyskytuje právě v jedné uspořádané dvojici, nazýváme dnes funkcí.) V takovéto funkci jakožto podmnožině kartézského součinu již změny a pohyb vidět nejsou. Ale k matematickému vyjádření změn a pohybu ve fyzice, technice a snad ve všech vědních oborech používáme právě pojem funkce. Matematická analýza ve svém dnešním stadiu vývoje abstrahovala od změny a pohybu, aby tak mohla lépe a obecněji, přesněji odrazet změny a pohyb (při svých aplikacích).

Dialektické myšlení není totiž typické pro vyšší matematiku (matematická analýza) a formálně logické myšlení jen pro elementární matematiku, ale mnohem obecněji: dialektické myšlení se uplatňuje v každé rodící a vyvíjející se matematické disciplíně. Dokončená (relativně na daném stadiu vývoje) teorie mívá zpravidla podobu formálního kalkulu (počtu), formálně deduktivního systému (byť i se pak dialekticky, skoky mění, zobecňuje, vyvíjí). Tato formalizace umožňuje v matematice mnohem větší obecnost, aplikovatelnost, univerzálnost. Představuje další, vyšší stupeň abstrakce.

V matematice se dialektické myšlení neuplatňuje jen ve vývoji vědeckého poznání, v tvorbě nových teorií a systémů. Zcela shodně se

uplatňuje i při řešení složitějších matematických úloh a problémů. Ale i pro pochopení matematické látky je dialektické myšlení nezbytné. Jen zkusme někomu vysvětlit pojem limity jen pomocí delta a epsilon, bez zobecnění původních „mystických“ úvah typu blížiti se, být nekonečně malý atd.

Další otázkou v diferenciálním počtu, která Marxe zaujala, byl vztah formy a obsahu v matematické symbolice. Jestliže se v rodící matematické analýze častokrát opakovala určitá operace, často používal též pojem, jak Marx říkal, prováděl se často určitý „reálný proces“, zavedla se pro jeho vyjádření určitá značka, formální symbol. Tento symbol vyjadřoval a pomáhal chápat určitou strategii činnosti. Například pro derivaci funkce y podle x se použila značka $\frac{dy}{dx}$ podílu dvou diferenciálů,

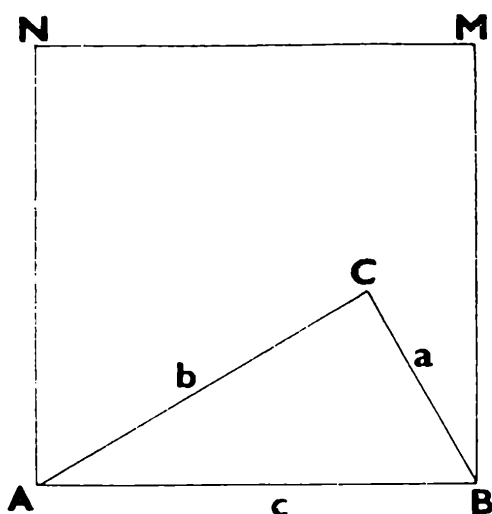
obdobně symboly pro druhé parciální derivace u funkcí více proměnných a podobně. Když se však postupně upustilo od nevyhovujícího významu symbolů, od reálného podílu diferenciálů funkcí, zůstaly pouze tyto formální symboly bez svého reálného významu. Tyto symboly se však zachovávaly, neboť s nimi uměla matematika zacházet, provádět operace, výpočty atd. Situace se změnila, „metoda se obracela“. Jestliže se dříve k reálné operaci hledal symbol, pak se při dalším vývoji matematiky k používanému symbolu (jehož původní reálný obsah byl překonán) hledal na novém stadiu vývoje nový odpovídající reálný význam. Tak dnes užíváme znaků integrálu, symboly dx atd. zavedené Leibnizem, i když jsou již příslušné pojmy definovány nově, moderně.

Marxovy Matematické rukopisy jsou pro nás zajímavým historickým svědectvím o způsobu matematických úvah v analýze před zavedením „delta a epsilon“. Především nám však rukopisy ukazují metodu, přístup k matematice, uvědomování si matematiky „z nadhledu“, v podstatných souvislostech, ve vývoji metod a pojmů, dialekticky. V tom jsou i dnes stále tyto rukopisy podnětné a aktuální.

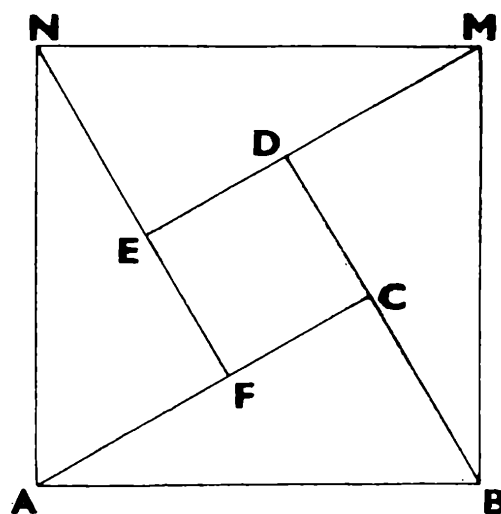
Důkaz Pythagorovy věty

RNDr. OLDŘICH NOVOTNÝ, CSc., MFF UK Praha

Pythagorova věta může být dokázána různými způsoby, ale nejčastější jsou ty důkazy, které nevyžadují složité matematické znalosti a které proto mohou být použity i na základních školách. Nejjednodušší důkazy jsou obvykle založeny na pomocných geometrických konstrukcích. Například v učebnici [1] se při důkazu konstruují jisté pomocné čtverce, v důkazu popsaném ve [2] se používá pomocný lichoběžník, ve [3] podobné pětiúhelníky. Důkazy v [1] a [3] jsou ryze geometrické. V důkazu ve [2] i v důkazu, uvedeném zde, se též používají jednoduché úpravy algebraických výrazů.



Obr. 1



Obr. 2

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC , délky jeho odvěsen označme a , b , délku přepony c . Čtverec nad přeponou se obvykle kreslí tak, aby ležel vně trojúhelníka ABC [1, 3]. Zde však nad přeponou zkonstruujeme čtverec $ABMN$ tak, aby trojúhelník ABC ležel uvnitř tohoto čtverce (obr. 1). Není obtížné rozmyslet, viz obr. 2, že čtverec $ABMN$ můžeme složit ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků ABC , BMD , MNE , NAF a čtverce $CDEF$. Délka strany čtverce $CDEF$ je rovna rozdílu délek delší a kratší odvěsny příslušných trojúhelníků, tj. $|a - b|$, jeho obsah je $(a - b)^2$. (Ve speciálním případě $a = b$ tento čtverec vymizí.)

Obsah každého z pravoúhlých trojúhelníků je roven $ab/2$. Protože obsah čtverce $ABMN$, rovný c^2 , je roven součtu obsahů čtyř zmíněných trojúhelníků a obsahu čtverce $CDEF$, musí platit

$$c^2 = 4 \frac{ab}{2} + (a - b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2.$$

Tím je Pythagorova věta dokázána.

Literatura :

- [1] V. Macháček, E. Kraemer, J. Pírek: Geometrie pro 8. ročník. SPN, Praha 1963.
- [2] E. Kraemer: Americký prezident a Pythagorova věta. Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 57, č. 8, 1978/79, 375—376.
- [3] M. Hejný: Důkaz Pythagorovy věty. Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 60, č. 9, 1981/82, 337.

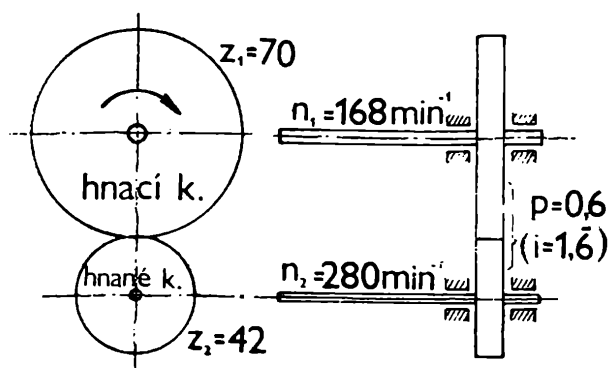
Jak se počítají převody

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Otáčivý pohyb se z jednoho hřídele na druhý převádí řemenem, lanem, řetězem dále třecím (frikčním) převodem, ozubeným nebo šnekovým soukolím. Poslední dva druhy převodů jsou nejpřesnější, neboť zachovávají frekvenci otáčení nebo ji přesně stanoveným způsobem mění. K výpočtům těchto převodů je třeba zlomků, jak je známe ze školy. Jednoduchý převod dvou kol si připomeneme na příkladě. Tento příklad a i další příklady složených převodů nás přivedou k úpravám obyčejných zlomků i k počítání s periodickými čísly, o nichž se na stránkách našeho časopisu již psalo¹⁾.

Příklad. Na obr. 1 je nárys a bokorys jednoduchého ozubeného soukolí. Hnací kolo je opatřeno šipkou udávající směr otáčení a jeho počet zubů $z_1 = 70$; otáčky tohoto kola $n_1 = 168 \text{ min}^{-1}$. S hnacím kolem je v záběru hnané kolo s počtem zubů $z_2 = 42$, jehož otáčky n_2 mají být

¹⁾ V článku „O číslech periodických“ v č. 10 ročníku 1980/81.



Obr. 1

vypočteny. Víme, že otáčky spolu zabírajících ozubených kol jsou nepřímo úměrné počtu zubů těchto kol. Vyjádřeno vzorcem:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad 2) \quad (1)$$

V technické praxi se velikost převodu p zpravidla udává desetinným číslem nebo periodickým číslem:

$$p = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{nebo též} \quad p = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2)$$

Vzorce (2) srovnaj s rovností (1). V našem případě je velikost převodu

$$p = \frac{168}{280} = 0,6.$$

Někdy se místo čísla p udává jeho převrácená (reciproká) hodnota

$$i = \frac{1}{p},$$

takže platí

$$i = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{nebo též} \quad i = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3)$$

Převod se udává číslem i třeba v případě, že p je periodické číslo. Někdy je ovšem převrácená hodnota periodického čísla opět periodické číslo. Pak se volí raději to z čísel p , i , které má kratší periodu. Je-li $p < 1$ (a tedy $i > 1$ jako v našem příkladě), mluvíme o převodu do rychla. Je-li $p > 1$ (a tedy $i < 1$), jedná se o převod do pomala. V případě, že $p = i = 1$ se ovšem velikost převodu nemění.

Ve shora uvedeném příkladě je $p = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Poslední číslo $\frac{3}{5}$

²⁾ Vzorec (1) byl vyvozen z podmínky, že obvodová rychlost spolu zabírajících ozubených kol je stejná — viz. článek „Geometrie ozubeného soukolí“ v č. 10 ročníku 1981/82 našeho časopisu. Tam je odvozen i vztah mezi průměry ozubených kol a jejich počty zubů $d_1 : d_2 = z_1 : z_2$.

je tzv. zlomek v základním tvaru. (Zlomek je v základním tvaru, jestliže čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla.) Vrátime-li se k našemu převodu $\frac{3}{5}$ a rozšíříme-li tento zlomek přirozenými čísly např. 10,

11, 12, 13, 14 dostáváme po řadě zlomky $\frac{30}{50}, \frac{33}{55}, \frac{36}{60}, \frac{39}{65}, \frac{42}{70}$, které určují možné volby počtů zubů z_2 a z_1 . U převodu na obr. 1 bylo užito zlomku $\frac{42}{70}$.

Abychom realizovali jednoduchý převod daný číslem $p = 0,4\overline{246}$, je třeba toto periodické číslo převést na obyčejný zlomek.³⁾ Uvedený výpočet připojujeme:

$$0,4\overline{246} = \frac{4246 - 4}{9990} = \frac{4242}{9990} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 101}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37} = \frac{707}{1665} \quad (4)$$

K uskutečnění jednoduchého převodu p užijeme ozubená kola s počty zubů $z_1 = 1665$, $z_2 = 707$. To jsou nejmenší počty zubů, které jednoduchý převod $p = 0,4\overline{246}$ uskuteční, neboť čísla 1665 a 707 jsou nesoudělná. Kdybychom místo čísla $p = 0,4\overline{246}$ uvedli jeho převrácenou hodnotu, dostali bychom číslo $i = 2,3\overline{55021216407}$, takže by se situace nezjednodušila.

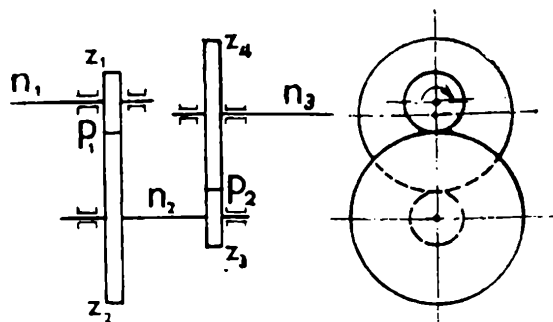
Někdy se místo jednoduchého převodu užije převodu složeného. Ukážeme ho na převodu $p = 0,4\overline{246}$, kterému jsme právě věnovali pozornost. Platí, že složený převod se rovná součinu jednoduchých převodů, z nichž se složený převod skládá. Vyjádřeno vzorcem:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n \quad (5)$$

Nahradíme-li převod $p = 0,4\overline{246} = \frac{707}{1665}$ jen dvěma převody p_1, p_2 , bude platit $p = p_1 \cdot p_2$ (obr. 2). Využijeme-li rozkladu čitatele 707 a jmenovatele 1665 na prvočísla, jak jsme již dříve provedli — viz (4), můžeme s použitím vztahu (5) pro $n = 2$ zapsat

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{35}{185} \cdot \frac{101}{45} = \frac{21}{185} \cdot \frac{101}{27} = \frac{14}{37} \cdot \frac{101}{90} = \text{atd.}$$

³⁾ Uvedené periodické číslo vlastně není desetinným číslem, protože při jeho zápisu obyčejným zlomkem není jmenovatel mocninou čísla 10. K převodu periodického čísla na obyčejný zlomek užijeme pravidla z článku „O číslech periodických“ (str. 439), na který jsme se již odvolali v poznámce¹⁾ pod čarou.



Obr. 2

Při použití třeba posledního součinu je $p = \frac{14}{37} = 0,378$, $p_2 = \frac{101}{90} = 1,12$, takže je složený převod $p = p_1 \cdot p_2 = 0,4246$.⁴⁾ Protože $p < 1$, jde o převod do rychla. Počty zubů ozubených kol složeného převodu jsou: $z_1 = 37$, $z_2 = 14$, $z_3 = 90$ a $z_4 = 101$. Schéma složeného převodu je znázorněno na obr. 2.

Zapojíme-li do výpočtu také frekvenci otáčení (otáčky), pak pro jednoduchý převod p_1 platí $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$ a pro p_2 platí $\frac{n_2}{n_3} = \frac{z_4}{z_3}$. Z první rovnosti je $n_2 = n_1 \frac{z_1}{z_2}$ a z druhé rovnosti je $n_2 = n_3 \frac{z_4}{z_3}$. Z rovnosti levých stran obou výrazů plyne i rovnost: $n_1 \frac{z_1}{z_2} = n_3 \frac{z_4}{z_3}$ čili $\frac{n_1}{n_3} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}$, kterou jsme již uvedli. V případě, že bychom použili rozkladu $0,4246 = \frac{21}{185} \cdot \frac{101}{27}$, pak by byl složený převod $p = 0,1135 \cdot 3,740$ a odpovídá mu volba počtů zubů ozubených kol $z_1 = 185$, $z_2 = 21$, $z_3 = 27$ a $z_4 = 101$.

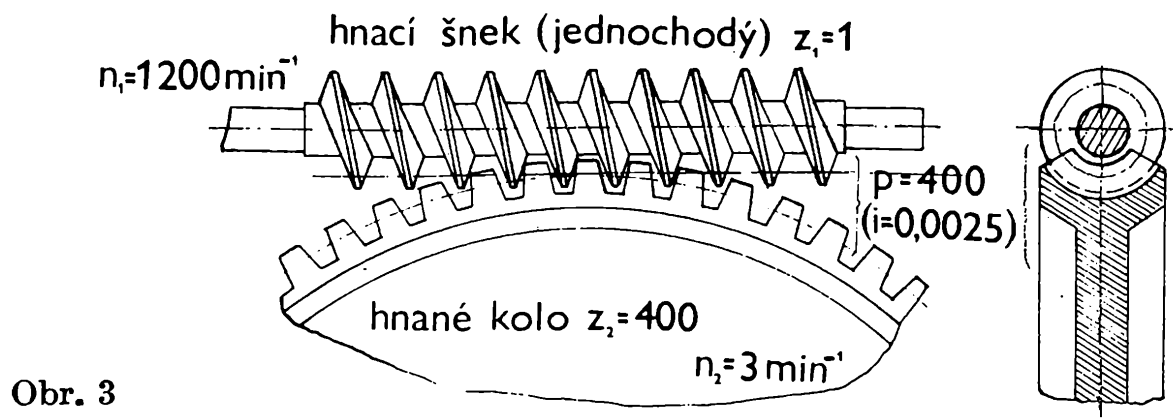
Kdybychom připustili jistou nepřesnost tím, že bychom nahradili $p = 0,4246$ číslem $p_n = 0,425$, pak by se výpočet a zejména technické provedení jednoduchého i složeného převodu zjednodušilo např. takto:

$$p_n = \frac{425}{10\,000} = \frac{25}{25} \cdot \frac{17}{400} = \frac{17}{400} = \frac{z_2}{z_1} \quad (\text{pro jednoduchý převod}),$$

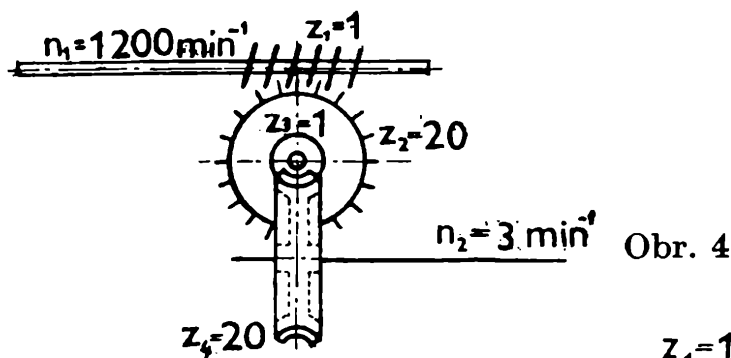
$$p_n = \frac{425}{10\,000} = \frac{17}{100} \cdot \frac{20}{80} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \quad (\text{pro složený převod}).$$

Velmi často je třeba značně velkého převodu p , např. u výtahu, kde se vysoké otáčky elektromotoru $n_1 = 1200 \text{ min}^{-1}$ musejí převodem zmenšit tak, aby buben, na nějž se navíjí lano se zavěšenou výtahovou kabinou,

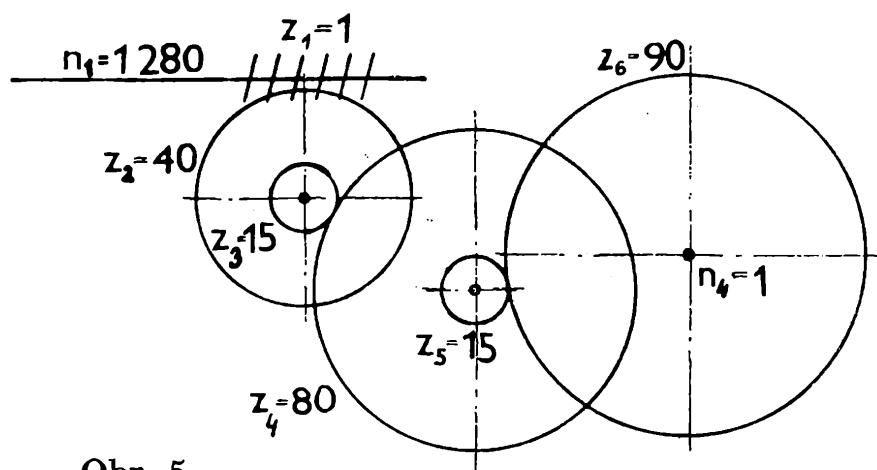
⁴⁾ Nechť se čtenář pokusí užít algoritmus pro násobení pro součin $0,378 \cdot 1,12$. Shledá, že k výsledku $0,4246$ nedojde. Je to jen malá ukázka toho, že užití kalkulačky není vždy na místě.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

konal jen např. $n_2 = 3 \text{ min}^{-1}$. Převod $p = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1200}{3} = 400$. V takovém případě se volí záběr šneku (třeba jednochodého) se šnekovým ozubeným kolem, které má 400 zubů (obr. 3). Protože se za 1 otáčku jednochodého šneku pootočí šnekové (ozubené) kolo právě o jeden zub, zastupuje tento šnek „ozubené kolo s jedním zubem“. Na obr. 4 je užito složeného převodu se dvěma šnekovými převody $p_1 = p_2 = 20$. Převod $p = p_1 \cdot p_2 = 20 \cdot 20 = 400$. Jsou i šneky vícechodé, např. dvojchodé, trojchodé, čtyřchodé, atd. Při výpočtu pak počítáme $r_1 = 2, 3, 4$ atd.

Běžně se setkáváme i se složeným převodem, kde se kombinuje šnekový převod s převodem ozubených kol jak je znázorněno na obr. 5. Výpočet tohoto převodu je následující:

$$p = \frac{n_1}{n_4} = \frac{90}{15} \cdot \frac{80}{15} \cdot \frac{40}{1} = 1280 \text{ (převod do pomala, } p > 1).$$

$$p = \frac{z_6}{z_5} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_2}{z_1} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 6 \cdot 5,3 \cdot 40 = 1280$$

Má-li šnek, jenž je upevněn na hřídeli elektromotoru frekvenci otáčení $n_1 = 1280 \text{ min}^{-1}$, pak hřídel, který vystupuje z rychlostní skříně koná jen jednu otáčku za minutu, tedy $n_4 = 1 \text{ min}^{-1}$.

Jiným příkladem značně velkého převodu p (do pomalu) je pohonné zařízení pro velký hvězdářský dalekohled, jenž se musí otáčet rovnoměrným pohybem jednou za 24 hodiny. V takovém případě lze použít i několika šnekových převodů. Provedení příslušných výpočtů převodů a náčrt příslušného obrázku ponecháváme čtenáři. Jsou dány otáčky elektromotoru $n_1 = 2200 \text{ min}^{-1}$ ($p = 2\,160\,000$, resp. $i = 46,296 \cdot 10^{-8}$). Jeden z možných výpočtů, podle něž čtenář může nakreslit obrázek je: $\frac{2200}{n_4} = \frac{180}{1} \cdot \frac{160}{1} \cdot \frac{150}{1}$; $\left(n_4 = 1 \text{ den}^{-1} = \frac{1}{24} \text{ hod}^{-1} = \frac{1}{24 \cdot 60} \text{ min}^{-1} \right)$.

FYZIKA

História a význam objavu neutrónu

(k 50. ročnému jubileu)

MATEJ FLOREK, MFF UK, Bratislava

Jedným z najvýznamnejších objavov v jadrovej fyzike je bezosporu objav neutrónu. Pred 50 rokmi v časopise *Nature* anglický fyzik *James Chadwick*, ktorý pracoval v slávnom Cavendishovom laboratóriu v Cambridge, publikoval článok: „Possible Existence of a Neutron“, v ktorom vysvetlil podstatu tzv. berýlieovej radiácie. Záhada berýlieovej radiácie vzrušovala fyzikov počas celého roku 1931. Na základe priamych experimentov Chadwick dokázal, že skúmané žiarenie môže pozostávať z neutrálnych častíc s hmotnosťou blízkou hmotnosti protónu. Tento svoj definitívny uzáver urobil 17. II. 1932.

Existenciu neutrónu predvídal ešte v r. 1920 *E. Rutherford*. Aby objasnil výsledky svojich známych pokusov s rozptylom častíc alfa,

predpokladal, že atómové jadrá obsahujú nielen kladne nabité častice protóny, ale aj častice s nulovým nábojom. Podľa jeho názoru takouto časticou by mohol byť nový typ vodíkového atómu, v ktorom je elektrón veľmi blízko jadra ($\sim 10^{-15}$ m) a podieľa sa na jeho stavbe. V r. 1921 J. Glasson sa bezúspešne pokúšal dokázať existenciu takýchto útvarov. Od r. 1929 sa týmto problémom zaoberal J. Chadwick. Obaja vedci boli blízki spolupracovníci Rutherforda.

V r. 1930 nemeckí fyzici W. Bothe a H. Becker zistili, že pri bombardovaní berýlia časticami alfa, z berýlia vychádza prenikavé žiarenie. Obyčajný list papiera má dostatočnú hrúbku, aby úplne pohltil žiarenie alfa, hliníkový plech o hrúbke 1 mm pohlcuje častice beta a niekoľko centimetrov hrubé olovo pohltí aj žiarenie gama. Žiarenie z Be prechádzalo 10–20 cm hrubou vrstvou olova.

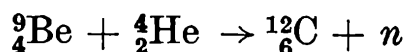
K rozriešeniu záhady okolo tzv. berýlievej radiácie sa najviac priblížili manželia I. Curie a F. Joliot. Podobne ako Bothe a Becker aj oni predpokladali, že berýlievá radiácia je žiarenie gama. Jeho základné charakteristiky je možné určiť z Comptonovho javu. Už vtedy bolo známe, že kvantum gama v zrážke s elektrónom môže poslednému odovzdať časť svojej energie. Kinematické vzťahy sa dajú odvodiť zo zákonov zachovania energie a hybnosti, ak predpokladáme, že kvantum gama je korpuskulárna častica s energiou E_γ a hybnosťou E_γ/c . Francúzski vedci ožarovali berýlievou radiáciou parafín vo Wilsonovej komore a pozorovali vyrazené jadrá vodíka — protóny. Podľa známej závislosti dobeh — energia zmerali energiu protónov a na základe Comptonovho vzorca určili aj energiu provokujúceho žiarenia. Zistili, že nielen energia provokujúcich kvánt gama je veľmi vysoká ($E = 50$ MeV), ale aj pravdepodobnosť interakcie prevyšuje vypočítanú hodnotu až o tri rády. Preto urobili uzáver, že existuje nový typ interakcie, intenzívne pôsobiace na jadrá vodíka a zaviedli pojem H-lúče. Uzáver, že žiarenie z berýlia má korpuskulárny charakter stačilo doplniť druhou podmienkou, že pozostáva z častíc s $m \neq 0$ a objav neutrónu by bol prisúdený týmto vynikajúcim vedcom.

J. Chadwickovi k správnej interpretácii podstaty žiarenia z berýlia pravdepodobne dopomohli dve okolnosti:

1. hľadal neutrálnu časticu s hmotnosťou blízkou hmotnosti protónu, akou sa aj ukázal v skutočnosti neutrón;
2. v tom čase J. Chadwick mal najcitlivejšiu aparatúru (prvý použil ionizačnú komoru so zosilňovačom a osciloskopom), ktorá mu dovolila urobiť rýchle a s vyhovujúcou presnosťou sériu meraní s látkami obsahujúcimi nielen vodík, ale aj iné ľahké prvky (Li, B, C, N). Pre každú látku meral maximálnu energiu odrazených jadier (zodpovedala maximálnej amplitúde impulzu na osciloskope), podľa ktorej určoval energiu primárneho žiarenia gama. Zistil paradoxný jav: podľa Comptonovho vzorca vypočítaná energia primárneho žiarenia gama vychádzala pri

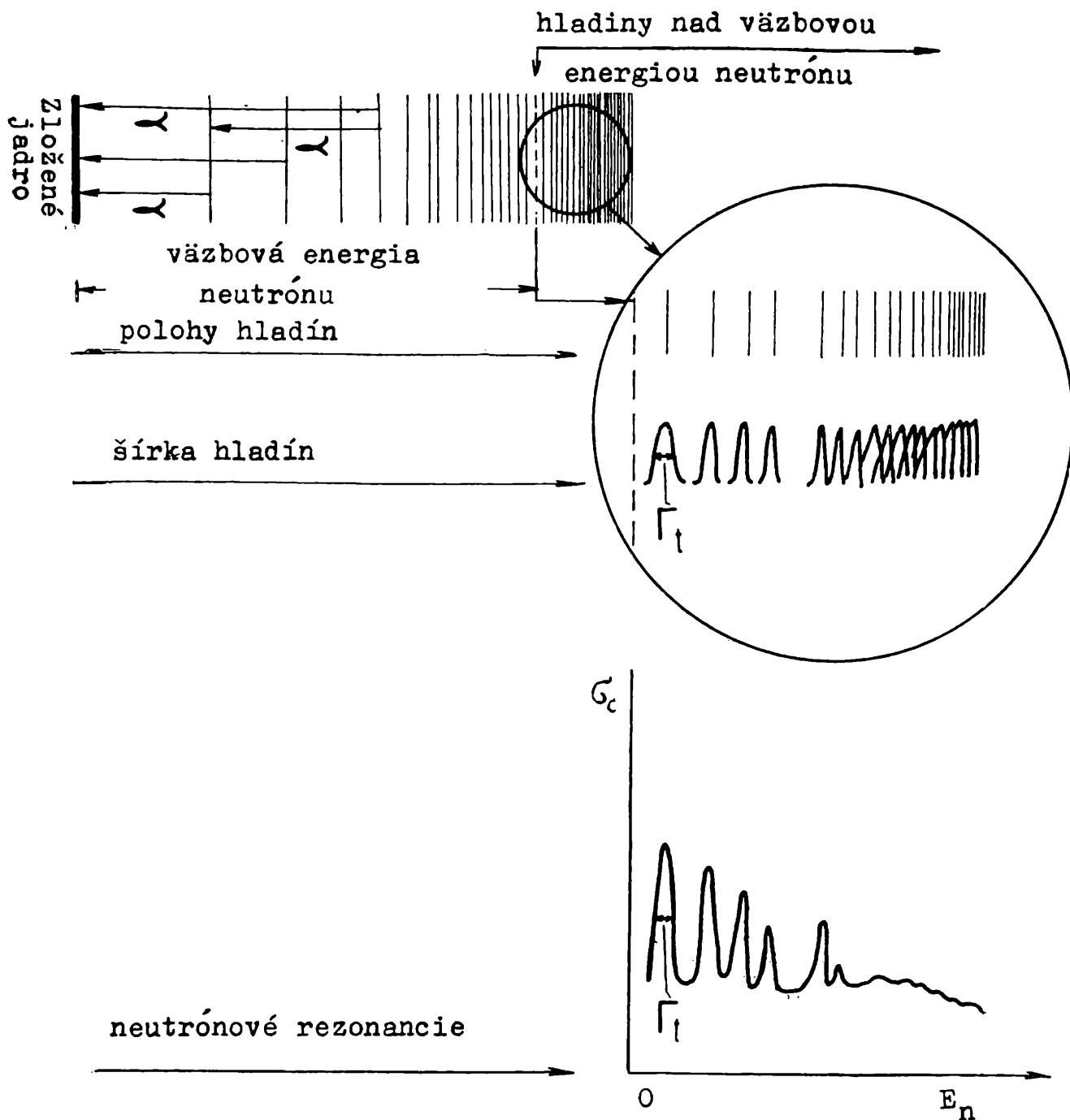
každom prvku iná. Experimentálne údaje boli vo vzájomnej zhode, keď sa predpokladalo, že berýliová radiácia je prúd častíc s $m \neq 0$. Ich veľká prenikavosť sa dala ľahko pochopiť, ak sa predpokladalo, že tieto častice sú bez náboja, takže neionizujú látkové prostredie. J. Chadwick nazval novú časticu *neutrón*.

J. Chadwick objasnil aj vznik berýliovej radiácie. Neutrón sa nachádza v jadre Be, odtiaľ je vyrazený, keď sa častica alfa zrazí s jadrom. Symbolicky to môžeme napísať nasledovne:



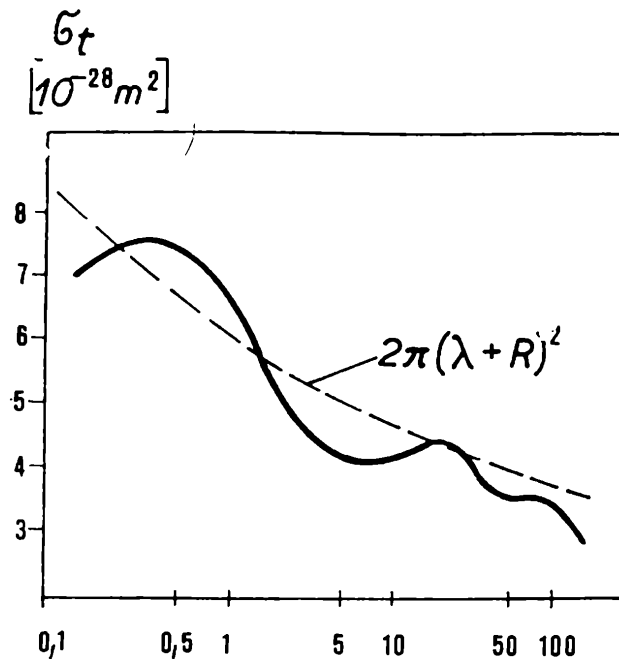
Jedným z najväžnejších dôsledkov objavu neutrónu bolo objasnenie stavby atómových jadier. Už vtedy bolo známe, že poradové číslo prvkov v Mendelejevovej tabuľke určuje náboj prvkov. Najpádnejšie dôkazy na takýto uzáver získal práve Chadwick v r. 1920, keď experimentálne určil náboj Cu, Ag a Pt. Aby sa objasnila hmotnosť atómových jadier, muselo sa predpokladať, že počet protónov v jadre je približne rovný atómovej hmotnosti, ale náboj časti protónov je kompenzovaný elektrónmi priamo v jadre. Aj Chadwick sa domnieval, že neutrón je zložená častica protón + elektrón. Koncepcia neutrálnych častíc zložených z protónu a elektrónu odporovala niektorým experimentálnym faktom, napr. jadro ${}^{14}_7\text{N}$ by muselo mať 14 protónov a 7 elektrónov. Spin uvedeného jadra by musel byť polčíselný, lebo každá z 21 častíc má spin $1/2$. V skutočnosti spin jadra ${}^{14}_7\text{N}$ mal celočíselnú hodnotu. Už v apríli roku 1932 mladý sovietsky vedec *D. D. Ivanenko* prvý vyslovil domnienku, že neutrón je elementárna častica so spinom $1/2$ (preto jadro dusíka obsahuje len 14 častíc) a že neutróny sú základným stavebným kameňom atómových jadier. Túto hypotézu ďalej rozvinul v júni roku 1932 *W. Heisenberg*.

Druhá dôležitá vlastnosť neutrónu vyplýva z toho, že neutrón ako neutrálna častica môže ľahko prenikať do atómového jadra a vyvolať najrozmanitejšie jadrové reakcie, lebo mu v tom nebráni coulombovská bariéra. Túto skutočnosť si prvý uvedomil *N. Feather*, keď pomocou neutrónu rozbil jadro dusíka. Najcennejšie výsledky však získal *E. Fermi* so spolupracovníkmi v Ríme. Od roku 1934 ožarovali neutrónmi takmer všetky dostupné prvky. Zistili, že po ožiarení väčšina prvkov získava umelú rádioaktivitu a po rozpade sa mení na izotop susediaceho prvku. Aktivita prvku neúmerne vzrastala, keď sa medzi zdroj neutrónov a skúmanou látkou umiestnil parafín. Tento jav *E. Fermi* správne interpretoval ako dôsledok spomaľovania neutrónov (zmenšovania ich rýchlosti v), kedy podľa de Broglieho vzťahu $\lambda = h/mv$ vzrastá vlnová dĺžka neutrónu (λ) a tým aj efektívna oblasť pôsobenia neutrónu na atómové jadro. Po záchyte neutrónu jadrom A vznikne zložené jadro $A + 1$, ktoré je vo vysokovzbudenom stave (obr. 1). Energia excitácie sa rovná sume

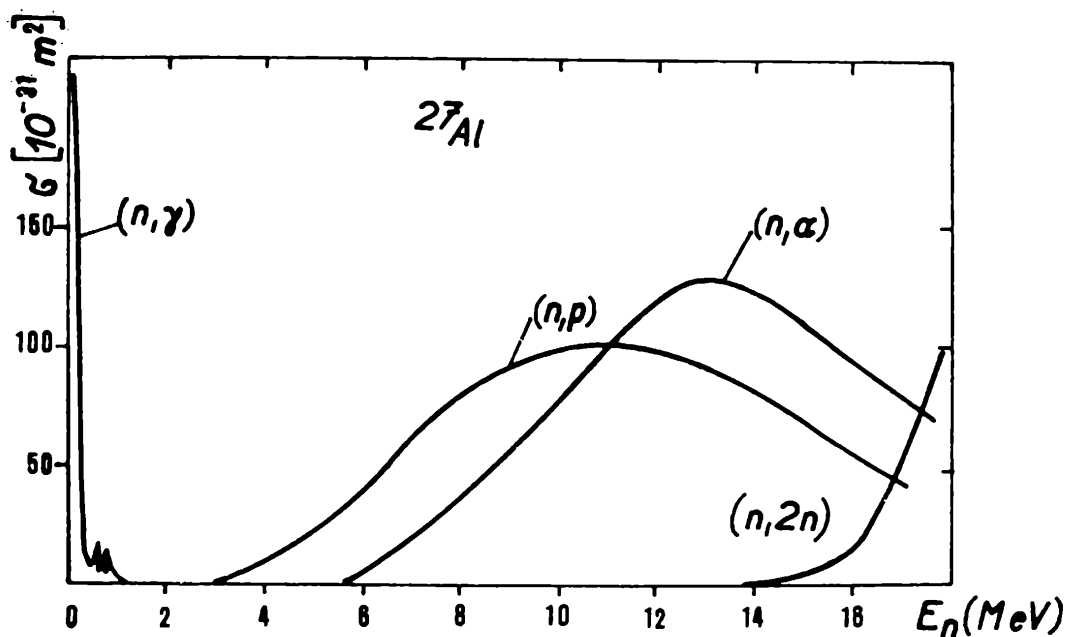


1. Schéma hladín v zloženom jadre. O hustote vysokopoložených hladín usudzujeme podľa hustoty neutrónových rezonancií, o systéme hladín pod väzbovou energiou neutrónu súdime podľa žiarenia gama z reakcie radiačného záchytu.

väzbovej energie neutrónu v jadre $A + 1$ a jeho kinetickej energii. Ak kinetická energia je malá ($E_n < 1000$ eV), pravdepodobnosť záchytu neutrónu jadrom bude závisieť od toho, či suma väzbovej a kinetickej energie neutrónu je blízka k niektorej hladine jadra $A + 1$. To sa prejaví v účinnom priereze záchytu neutrónu, ktorý bude mať rezonančný charakter. Jedine pomocou neutrónov môžeme preskúmať systém vysokopoložených hladín, vzdialenosť medzi hladinami bude rovná vzdia-

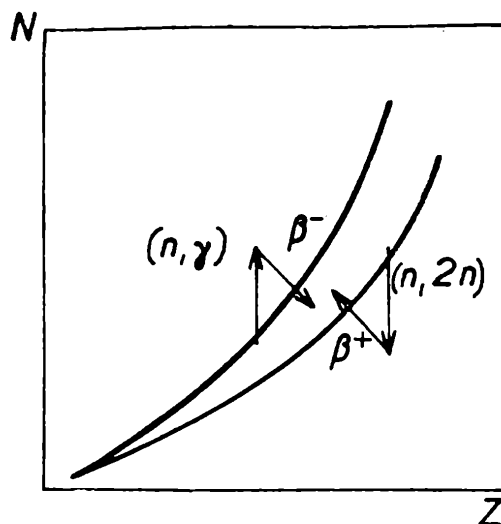


2. Neutrónový zväzok pri prechode cez tenkú vrstvu látky sa zoslabí úmerne tzv. totálnemu účinnému prierezu σ_t . Experimentálne zmeraná závislosť tohto zoslabenia od energie neutrónov poukazuje na optické vlastnosti atómových jadier.



3. Energetická závislosť účinného prierezu rôznych reakcií, ktoré vyvolávajú neutróny pri interakcii s nuklidom ^{27}Al . Pre pomalé neutróny je najpravdepodobnejšia reakcia (n, γ) , pre rýchle reakcie $(n, 2n)$.

lenosti medzi rezonanciami. Pri ďalšom zvyšovaní energie neutrónu zložené jadro $A + 1$ bude zostávať na vyššej a vyššej hladine, až sa ocitne v oblasti, kde je hustota hladín vysoká a hladiny sa vzájomne prekrývajú. Teraz sa nebudú pozorovať jednotlivé rezonancie. Stredná hodnota účinného prierezu zachytu a rozptylu neutrónu σ_t by mala byť



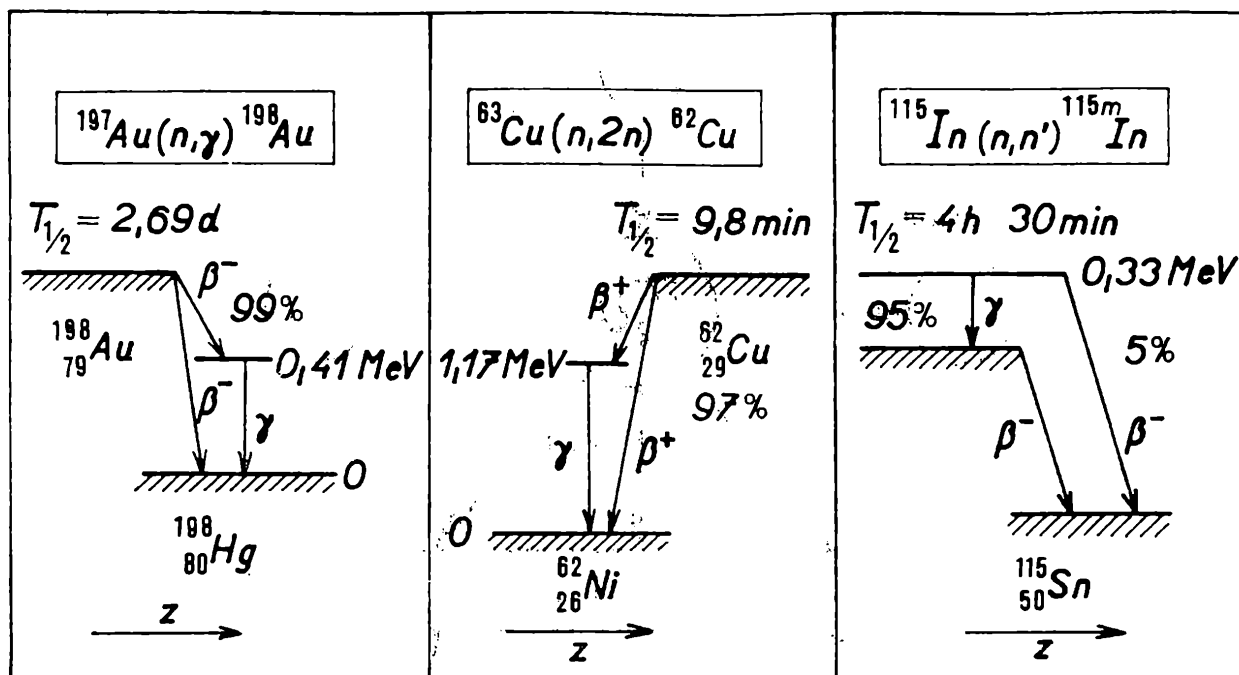
4. Stabilné nuklidy v diagrame N (neutrónové číslo) a Z (protónové číslo) vytvárajú úzky pás — zónu stability beta. Reakcie s neutrónmi môžu stabilnému nuklidu pridať alebo odobrať neutrón a vyviesť ho zo zóny stability.

úmerná $\pi(R + \lambda)^2$, kde R je polomer jadra a λ vlnová dĺžka neutrónu. Uvedený vzťah sa dá veľmi jednoducho odvodiť, ak jadro považujeme za nepriezračné tienitko. Experimentálne zmeraná závislosť σ_t od energie neutrónov (t. j. od λ) neklesla monotónne, (obr. 2), čo nútilo považovať atómové jadro za polopriezračný objekt a vypracovať optický model atómového jadra.

Zložené jadro sa najčastejšie vracia do svojho základného stavu tak, že emituje jedno alebo niekoľko kvánt gama (obr. 1). Reakciu nazývame radiačný záchyt a označujeme ju (n, γ) . Vyžiarením kvánt gama jadro prezradí čosi o svojej štruktúre a boli to práve reakcie s neutrónmi, ktoré v značnej miere umožnili zostaviť schému hladín jednotlivých jadier. Okrem reakcie (n, γ) môžu prebiehať aj iné reakcie, napr. (n, α) , (n, p) alebo $(n, 2n)$, ich pravdepodobnosť závisí hlavne od energie neutrónu, avšak so spomalenými neutrónmi je najpravdepodobnejšia (obr. 3) reakcia (n, γ) . Ak prebehla táto reakcia, zo stabilného nuklidu A vznikne nestabilný nuklid $A + 1$, lebo v porovnaní so stabilným nuklidom má o jeden neutrón viac, čím vyšiel z tzv. zóny stability β . Premenu β^- sa bude snažiť vrátiť sa späť (schématicky je to znázornené na obr. 4), takže takéto jadro bude emitovať žiarenie β^- , lebo len vtedy sa môže zmeniť pomer medzi počtom protónov a neutrónov v potrebnom smere

$$(Z, N) \rightarrow (Z + 1, N - 1) + e^- + \tilde{\nu}_e.$$

Ak prechod β ide na niektorú excitovanú hladinu dcérskeho jadra (obr. 5), bude vyžarované aj kvantum gama s rovnakým polčasom rozpadu ako premena β . Polčas rozpadu, maximálna energia žiarenia beta a energia kvánt gama sú charakteristickou veličinou každého rádionuklidu, čo sa využíva v najcitlivejšej analytickej metóde — neu-

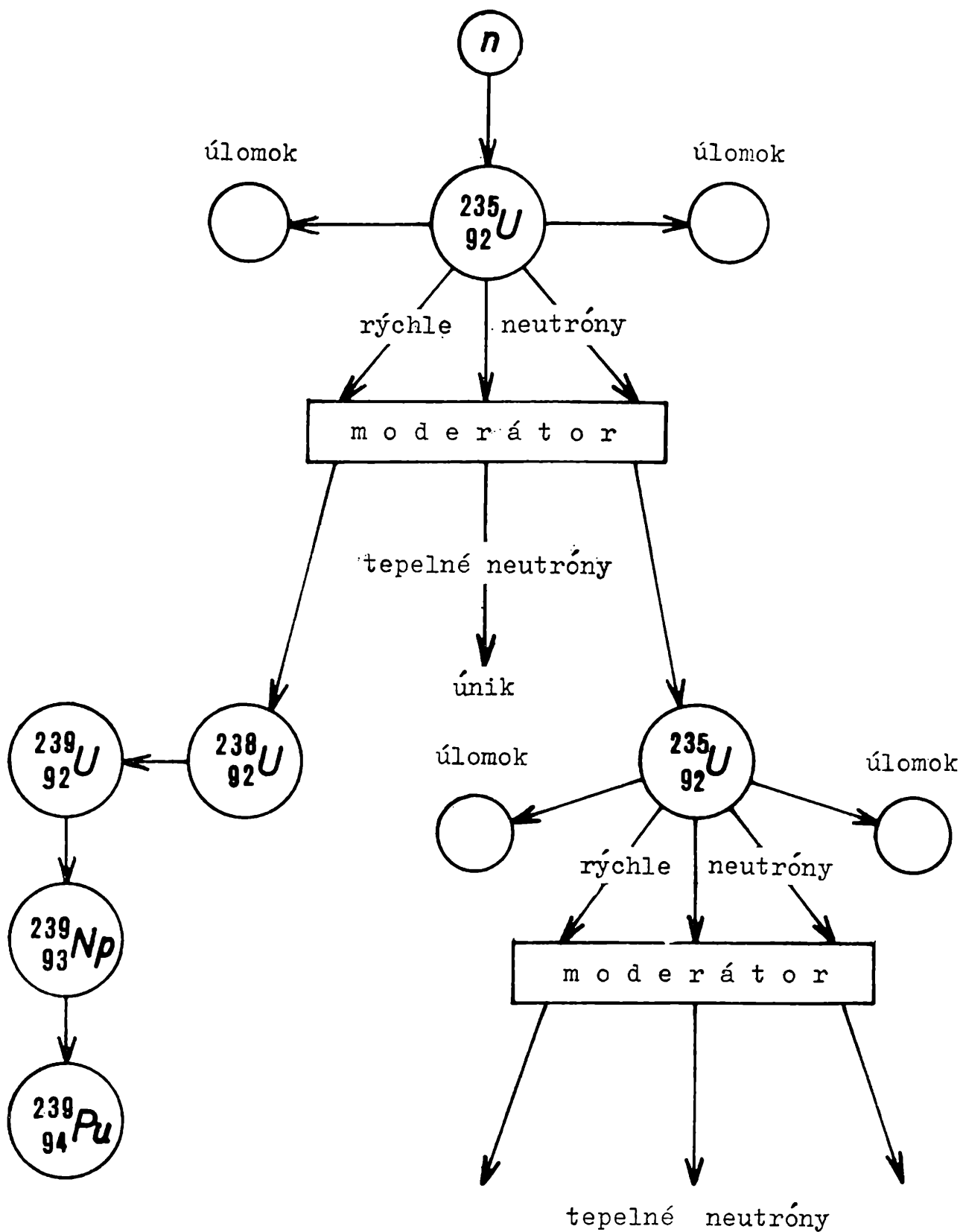


5. Schémy rozpadu niektorých rádionuklidov, vznikajúcich v reakciách s neutrónmi.

trónovej aktivačnej analýze. O citlivosti tejto metódy svedčí fakt, že dáva možnosť kvantitatívne určovať mikroskopické prímеси zlata v riečnej vode.

Druhý významný objav z r. 1934 E. Fermi nesprávne interpretoval. Keď ožaroval neutrónmi urán, pozoroval vznik zložitej zmesi rádioaktívnych prvkov, prechádzajúcich cez radu premien s vyžarovaním lúčov beta. Vychádzajúc z predchádzajúcich experimentov Fermi výsledky svojich pokusov interpretoval ako vznik transuránových prvkov. Táto interpretácia sa všeobecne prijala. Dnes vieme, že v uráne okrem produkcie transuránových prvkov prebieha aj štiepenie jadier ^{235}U (obr. 6). V prírodnom uráne vyvolávajú spomalené neutróny v 60 % prípadoch štiepny proces a v 40 % radiačný záchyt.

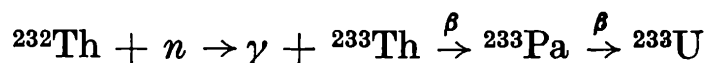
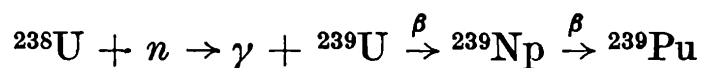
Pokiaľ sa predpokladala len produkcia transuránových prvkov a nebral sa do úvahy pravdepodobnejší štiepny proces, vznikali nezrovnalosti, do riešenia ktorých sa zapojili poprední rádiochemici toho obdobia O. Hahn spolu s L. Meitnerovou v Berlíne a I. Curie a P. Savith v Paríži. Medzi obidvoma skupinami existovala pochopiteľná rivalita. I. Curie stála opäť — ako v prípade objavu neutrónu — na prahu objavu štiepenia atómových jadier, ale prah neprekročila. V ožiarenom uráne zistila prítomnosť prvku lantánu, ktorý považovala za transuránový prvok s príbuznými chemickými vlastnosťami. Aj O. Hahn a F. Strasman (L. Meitnerová v r. 1938 musela z Nemecka emigrovať), keď zistili prítomnosť prvku Ba, susediaceho s La, koncom roku 1938 písali, že ako chemici musia tvrdiť, že nový prvok je bárium, ale ako fyzici sa nemôžu



6. Schematické znázornenie reťazovej reakcie v tepelnom jadrovom reaktore. Časť neutrónov rozštiepi jadrá ^{235}U , časť neutrónov zachytia jadrá ^{238}U a ďalšia časť unikne z aktívnej zóny.

odvážať na také tvrdenie. Mienka historikov sa rozchádza v tom, či správne objasnenie výsledkov chemických pokusov O. Hahna dala L. Meitnerová (boli v písomnom styku), alebo či sa k správnej interpretácii dopracoval sám. Z publikovanej korešpondencie O. Hahna a L. Meitnerovej vyplýva, že O. Hahn a F. Strassman boli prví, ktorí pochopili, že jadro uránu sa „roztrháva“ a fyzikálnu interpretáciu procesu štiepenia, tak ako ju poznáme dnes, podala L. Meitnerová s O. Frishom. N. Bohr s J. W. Wheelerom a nezávisle od nich J. Frenkel vypracovali teóriu štiepenia, ktorú v r. 1967 modifikoval V. M. Strubinski na mikro-makroskopickú teóriu štiepenia.

Snáď najvýznamnejšiu úlohu má neutrón v procese uvoľňovania jadrovej energie. Funkcia neutrónu v reťazovej štiepnej reakcii je všeobecne známa. Menej známa je skutočnosť, že v neutrónovom poli prebieha produkcia nového paliva podľa jednej zo schém:

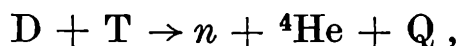


To znamená, že v jadrovom reaktore po rozštiepení určitého počtu jadier ^{235}U môže vzniknúť aj väčší počet jadier nového paliva (^{239}Pu , ^{233}U), lebo sa uvoľňujú 2–3 neutróny na každý akt štiepenia. Zatiaľ sa intenzívne rozpracovávajú inžiniersko-technologické problémy reprodukcie paliva podľa prvej schémy v tzv. rýchlych jadrových reaktoroch chladených sodíkom.

V neutrónovom poli sa bude získavať aj palivo pre termojadrové reaktory, spaľujúce deutérium (D) a trícium (T). V prírode je trícia mizivé množstvo a musí sa získavať umele z prvku Li:



V okolí termojadrového reaktora bude intenzívne pole neutrónov z reakcie fúzie:



takže z termojadrového reaktora, vybaveného lítiom, sa bude odvádzať nielen teplo, ale i nové palivo.

Pokiaľ hovoríme o pozitívnych stránkach objavu neutrónu, je potrebné zmieniť sa aj o neutrónovej optike. Spomalený neutrón ($E_n < 1$ eV) má vlnovú dĺžku λ okolo 10^{-10} m a rýchlosť $v \sim 10^4$ m/s, čo sú porovnateľné hodnoty so vzdialenosťou medzi atómami v pevných látkach a kvapalinách a s rýchlosťou kmitavého pohybu ich atómov. Preto neutrón je významným pomocníkom pri skúmaní štruktúry a dynamiky kryštálov. Napr. len pomocou neutrónov sa presne určila kryštalická štruktúra ľadu. Neutrónová štruktúrna analýza dopĺňa röntgenovú štruktúrnú analýzu najmä takých látok ako sú hybridy

kovov, lebo obsahujú prvky s veľmi rozdielnym Z. Existuje však jedna oblasť fyziky — skúmanie magnetickej štruktúry pevných látok — kde sú neutróny nezameniteľné. Na rozdiel od kvánt gama, neutróny majú magnetický dipólový moment, a preto môžu reagovať na magnetickú štruktúru látok. Len pomocou neutrónov sa dokázala existencia antiferomagnetík.

Prvá tretina nášho storočia sa právom považuje za zlatý vek fyziky. V tomto období vznikli nové idey tak ďalekosiahleho významu, že podobné druhé obdobie histórii vedy nepozná. Nové idey stimulovali nové experimenty. Završením tohto obdobia bol rok 1932, kedy bol objavený neutrón.

Objav neutrónu bol zároveň aj začiatkom druhého obdobia, obdobia praktického využívania výsledkov jadrovej fyziky. Vznikla neutrónová fyzika, ktorá zo všetkých odborov najviac obohatila naše fyzikálne poznatky.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Ke 40. výročí úmrtí Davida Hilberta

JOSEF JÍRŮ, gymnázium Pelhřimov

David Hilbert se narodil 23. ledna 1862 v Königsbergu, dnešním Kaliningradu, ve východním Prusku. Po absolvování základní školy vstoupil na tamní gymnázium. To však mělo zastaralý učební program a matematicky nadaný Hilbert se jen těžko smiřoval se skutečností, že jediným kritériem hodnocení byla často jen schopnost paměti. Přesto studia dokončil, aby pak roku 1880 nastoupil na univerzitu v rodném Königsbergu, která patřila v té době k nejlepším v Německu.

Zde plně realizoval své matematické nadání a ve vědeckém světě se o něm již začalo hovořit. Po ukončení univerzity roku 1885 se během několika let zařadil mezi největší matematiky té doby. Na pozvání profesora *Kleina* se roku 1895 dostal jako profesor na univerzitu v Göttingenu, kde působil až do roku 1934. V tomto dlouhém období Hilbert napsal své nejvýznamnější práce. Po nástupu fašismu v Německu ztratil kontakt s řadou vědců, kteří emigrovali do zahraničí. Zemřel v tichosti v Göttingenu 14. února 1943.

Hilbertovo matematické dílo je rozsáhlé a všestranné. Svou prací a vědeckým nadšením ovlivnil rozvoj matematických věd až do současné doby. Jeho práce se dá poměrně přesně rozdělit tematicky i časově. *Herman Weyl* ve své práci „David Hilbert and His Mathematical Work“ rozlišuje pět základních period:

1. Teorie invariantů (1885—1893)
2. Teorie algebraických číselných těles (1893—1898)
3. Základy a) geometrie (1898—1902)
b) matematiky všeobecně (1922—1930)
4. Integrální rovnice (1902—1912)
5. Fyzika (1910—1922).

Veliký význam má Hilbertova práce v geometrii. Do 19. století byla přesnost Eukleidovy axiomatické výstavby geometrie postačující, pomineme-li V. axiom vedoucí k objevu neeukleidovské geometrie. Eukleides uspořádal věty tak, aby se každá dala dokázat na základě vět předcházejících a na základě axiomů. Jeho axiomatika však byla neúplná, neboť se při některých důkazech musel opírat o vlastnosti geometrických útvarů, které z axiomů logicky nevyplývají. Proto během 19. a začátkem 20. století se úsilí matematiků zaměřilo na vybudování systému axiomů, z nichž by bylo možno odvodit všechny věty elementární geometrie bez jakýchkoliv názorných představ, tedy vytvořit úplný systém axiomů. S tímto úkolem se nejlépe vypořádal právě Hilbert ve svém díle „*Grundlagen der Geometrie*“ z roku 1899. Skupinu základních pojmů jeho axiomatického systému tvoří skupina základních objektů — bod, přímka, rovina — a skupina základních vztahů — incidence, shodnost, uspořádání. Tyto základní pojmy nejsou definovány, jejich vlastnosti jsou však jednoznačně určeny pomocí axiomů. Systém axiomů tvoří pět skupin: axiomy incidence, axiomy uspořádání, axiomy shodnosti, axiom o rovnoběžnosti a axiomy spojitosti. Velmi významné a původní je Hilbertovo zkoumání nezávislosti axiomů pomocí vhodných modelů a studium geometrií vypouštějící některé axiomy. Tak vznikly nearchimedovská, nepascalovská a další geometrie. Hilbertovi se dále podařilo převést vzájemně jednoznačným zobrazením geometrických vztahů na vztahy aritmetické bezespornost geometrie na bezespornost aritmetiky, ta však zůstala i nadále otevřenou otázkou.

Hilbert zformuloval úplný systém axiomů reálných čísel. Systém obsahuje některé axiomy nahraditelné jinými tak jako v systému geometrických axiomů. Z algebraického pohledu jsou nejdůležitější axiomy tělesa, komutativního i nekomutativního. Takovéto libovolné abstraktní číselné těleso může sloužit jako základ pro sestavení odpovídajících geometrií. Naopak je možné definovat čísla a operace nad nimi pomocí některého prostoru vyhovujícímu daným axiomům.

Uvedme pro zajímavost jeden zcela konkrétní problém, který Hilbert rozřešil. Roku 1782 vyslovil *E. Waring* bez důkazu následující hypotézu: Ke každému přirozenému číslu s existuje takové přirozené číslo k , že každé přirozené číslo a můžeme vyjádřit ve tvaru

$$a = a_1^s + a_2^s + a_3^s + \dots + a_k^s,$$

kde a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) jsou nezáporná celá čísla. Hilbert byl první, kdo tuto hypotézu dokázal (r. 1909).

V roce 1900 přednesl Hilbert hlavní referát na Mezinárodním matematickém kongresu v Paříži. Pokusil se v něm zachytit směry matematického bádání minulých desetiletí a načrtnout perspektivy tvůrčí práce. Předkládá svým posluchačům 23 problémů, které by měly být v nejbližší době rozřešeny. Jde ve stručnosti o tyto problémy: Existence kardinálního čísla mezi kardinálními čísly spočetných množin a kontinua, bezespornost aritmetických axiomů, formulace nejobecnějšího zákona reciprocit v teorii čísel, iracionalita nebo transcendentnost jistých čísel (např. ab pro a algebraické, b iracionální), důkaz Riemannovy domněnky o uzlových bodech zeta-funkce, studium topologie algebraických křivek a ploch, problém rozložení prostoru do kongruentních mnohostěnů, problémy základů geometrie, diferenciálních rovnic a variačního počtu. Dodnes z těchto problémů byly vyřešeny jen některé, ostatní ještě čekají na konečná vyřešení.

Činnost Hilberta asi tak od přelomu století je vyplněna úsilím o zvládnutí velkorysého programu, známého v dějinách moderní matematiky jako Hilbertův program. Vycházel z díla *Russellova* a *Whiteheadova*, logických základů moderní matematiky (systém *Principia mathematica*). Hilbert potřeboval oprostít základy matematiky od prvků intuice. Bylo třeba matematiku plně formalizovat, tj. vytvořit takové axiomatické soustavy základních matematických disciplín, aby v nich pomocí pevné množiny pravidel bylo možno vyvodit teorémy přibližně v rozsahu citovaných Principií. Tato formalizace nabývá takového stupně, že se bere pouze tvar a uspořádání symbolů a přitom není třeba ani znát jejich význam. Dále bylo třeba ukázat, že aplikace pravidel odvozování nepovedou k formálnímu sporu, tj. ke konjunkci typu *p et non-p*. K tomuto cíli byla vytvořena teorie důkazu, tzv. *metateorie*. Tato metateorie měla zaručit bezespornost matematických teorií, na něž se aplikovala. Během dalších let se ukázalo, že Hilbertův program nelze uskutečnit. Roku 1931 uveřejnil totiž *K. Gödel* práci, jejíž jedním z důsledků je následující teorém: „Mějme tvrzení přesně interpretovatelné jako tvrzení vyjadřující bezespornost nějakého bezesporného logického systému. Jestliže takový systém obsahuje aritmetiku, nelze v něm tvrzení o bezespornosti dokázat.“ Přesto Hilbertovo studium metateorie mělo velký význam, neboť umožnilo vyřešit řadu dílčích problémů moderní matematiky a matematické logiky.

Hilbert svůj život prožil v plném matematickém nadšení a optimismu a byl přesvědčen o budoucnosti nových objevů na poli matematiky i mimo ni, jež budou sloužit lidstvu. Krédo na Hilbertově náhrobním kameni toto přesvědčení dokumentuje:

Wir müssen wissen.

Wir werden Wissen.

Použitá literatura:

- [1] C. Reid: Hilbert (překlad z angličtiny), Moskva 1977.
- [2] H. Wussing, W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin 1975.
- [3] O. Zich: K třicátému výročí úmrtí Davida Hilberta. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 6 (1973), s. 301 — 305.
- [4] T. Šalát: Malá encyklopédia matematiky. Bratislava 1978.
- [5] D. J. Struik: Dějiny matematiky. Praha 1963.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Úlohy o orientačních číslech domů

Ve středověku se k označení domů, aby se odlišily, začalo užívat *domovních znamení*, na nichž byly vyobrazeny různé předměty, zvířata apod. S těmito znameními se můžeme setkat ještě dnes. Je jimi pověstná např. pražská Malá Strana.

V roce 1770 došlo v Praze při sčítání obyvatel k povinnému označení domů tzv. *popisnými čísly*. Dnes jsou popisnými čísla označeny domy ve všech našich obcích. Tato čísla byla v každém místě nejprve přidělena již stojícím domům. Další domy dostávaly čísla podle toho, jak se stavěly. Pro evidenci to jistě stačilo, ovšem pro orientaci zvláště ve větších obcích, kde jsou dlouhé ulice, nebylo takové číslování příliš přehledné. Dospělo se k tomu, že domy v každé ulici by měly mít vlastní očíslování. Vznikla tak *čísla orientační*. V obci, v níž se těchto čísel užívá, jsou v každé ulici označeny domy po jedné její straně po řadě čísla 1, 3, 5, ..., na druhé straně čísla 2, 4, 6, Samozřejmě vedle těchto čísel má každý dům i své číslo popisné.

V matematickém kroužku žáci řešili úlohu:

Kolik domů má ulice, jestliže na každé její straně je právě šest domů, jejichž orientační číslo obsahuje aspoň jednu číslici 4.

Potom se zabývali variantou této úlohy, v níž „čtyřkových“ domů na každé straně ulice bylo právě devět. Zde našli tři různá řešení.

Za týden se v matematickém kroužku pochlubil Karel, že podle situace u nich v ulici sestavil úlohu. Zněla takto:

Jestliže sečtu orientační čísla všech domů na straně ulice, kde bydlím, s výjimkou čísla našeho domu, pak dostanu součet 32. Určete orientační číslo domu, ve kterém bydlím.

Úloha se líbila, a tak se nelze divit, že další týden překvapila své spolužáky Jana úlohou, k níž ji inspirovala její ulice. Měla text:

Bydlím v ulici, kde jsou domy jen na jedné straně, na druhé je sportovní stadión. Domy mají lichá orientační čísla. Pro každé orientační číslo jsem vypočetla ciferný součet a všechny tyto ciferné součty jsem sečetla. Dostala jsem tak desetinásobek ciferného součtu největšího orientačního čísla. Kolik je v naší ulici domů?

Pak si členové kroužku ještě vypočetli, kolik domů by měla ulice, když se v Janině úloze pozmění text tak, že všechny domy mají sudá orientační čísla.

Výsledky: 1. 92; 98, 99, 100; 2. 10; 3. 13; 19.

Jiří Mída

Kostky nejen Rubikovy III. — Pozorování trojúhelníků

PhDr. ALENA ŠAROUNOVÁ, UK Praha

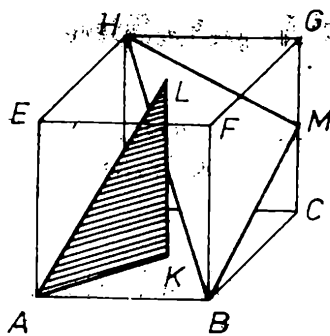
Prohlédněte si obr. 1! Je na něm nakreslená průhledná krychle $ABCDEFGH$ a dva neprůhledné trojúhelníky: $\triangle AKL$ a $\triangle BHM$. Pro jejich snadnější rozlišení v dalších obrázcích je $\triangle AKL$ vyšrafován.

Body K a L jsou středy čtverců $ABCD$ a $EFGH$, M je střed úsečky CG . Přímka KL je kolmá k rovině ABC a tedy $\triangle AKL$ je pravoúhlý. Trojúhelník BHM je rovnoramenný, protože úsečky HM , BM jsou shodné.

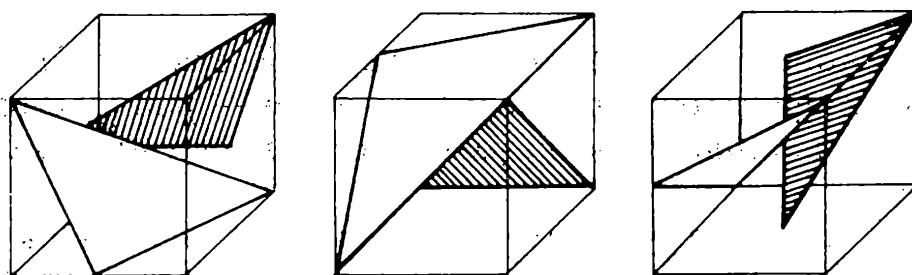
Na obr. 2 vidíte tři pohledy na naši krychli s oběma vloženými trojúhelníky. Chybí zde však popis vrcholů krychle a bodů K , L a M . Umíte tento nedostatek napravit?

Všimněte si, jak se od sebe liší různé pohledy na jednu skupinu geometrických útvarů!

A na závěr úloha pro vytrvalce:



Obr. 1



Obr. 2

Do obrázku 1 vkreslete trojúhelník KLM . Rozhodněte, má-li společné body s trojúhelníky AKL a BHM ! Zakreslete polohu trojúhelníka KLM i do obr. 2 a vyznačte ve všech případech viditelnost této trojice trojúhelníků. Všechny viditelné části trojúhelníka KLM vybarvěte např. červeně. Získali jste celkem 6 červených plošek? Jestliže ano, pak jste se pravděpodobně nedopustili chyb. Je-li váš výsledek jiný, zamyslete se znovu nad společnými body trojúhelníků BHM a KLM .

Úloha z dopisu čtenáře

V loňském 60. ročníku Rozhledů byla v Naší soutěži v čísle 3 na str. 136 zadána úloha:

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, jestliže jsou dány úsečky, které jsou shodné s jeho těžnicemi příslušnými k odvěsnám.

Do redakce jsme nyní dostali dopis čtenáře *Fabiána Hudce* z Křenovic u Slavkova, jenž citovanou úlohu nejen zobecnil, ale i tuto její obecnější verzi vyřešil. Jde o úlohu:

Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže při obvyklém označení jsou dány délky těžnic t_b, t_c a velikost úhlu α .

Řešení zatím neuvádíme, neboť se domníváme, že tato obecnější úloha zaujme mnohé čtenáře tak, že se pokusí o její samostatné řešení.

Pro zajímavost uvedme, že na mezinárodních matematických olympiádách se udělují zvláštní ceny za formulace a řešení zobecněných soutěžních úloh.

jm

Oprava písemné práce

RNDr. JIŘÍ KADLEČEK, CSc. — RNDr. VÁCLAV KUBÁT, CSc., MFF
UK Praha

Atmosféra ve třídě někdy dýchá pohodou. Učitel matematiky vykládá novou látku, žáci relaxují — někteří přemýšlejí o tom, co učitel vykládá, někteří o něčem jiném. Když hodina končí, odchází učitel unaven a žáci téměř osvěženi.

Při vyučování nastávají ale i chvíle opačné. Rozžhavení žáci jsou skloněni nad písemnou prací z matematiky a učitel — podle názoru žáků — nedělá nic (kromě toho, že svou pasívní přítomností brání žákům v kolektivní práci).

Málokterý student si plně uvědomuje, že část práce s písemkou má již učitel za sebou (musel vybrat úlohy, provést kontrolu výsledků atp.) a větší část práce ho teprve čeká. Oprava písemné práce je totiž namáhavá a také náročná na čas. Žáci si možná představují, že učitel jen zkontroluje výsledek a už píše známku. Ve skutečnosti však učitel musí v písemné práci zkontrolovat každý postup a najít všechny chyby, kterých se žák dopustí, aby mohl práci spravedlivě ohodnotit a aby mohl případným rozbořem těchto chyb se žáky napravit nedostatky v pochopení látky i v početní technice. A hledání chyb v písemných pracích z matematiky bývá někdy činnost až detektivní, jak vám předvedeme na poměrně lehkých příkladech.

Máte-li chuť, zkuste si nyní opravit písemnou práci, kterou právě odevzdal žák Nováček. Pro správnou představu si k tomu stopněte čas. Ještě vám prozradíme to, co učitel dávno ví, že Nováček je v matematice dosti slabý a že v práci pravděpodobně budou chyby.

Písemná práce

J. Nováček, II. A.

Úloha 1. V obou reálných čísel řešte nerovnici

$$\frac{x}{x-1} \geq \frac{x}{x+1}$$

Řešení:

$$x^2 + x \geq x^2 - x$$

$$x \geq -x$$

$$1 \geq -1$$

$$P = R$$

Úloha 2. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x.$$

Řešení:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2 \sin x \cos^2 x = \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$2 \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$1 = 0$$

$$P = \emptyset$$

Úloha 3. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{\log(3x - 5)}{\log(x - 1)} = 2.$$

Řešení: $\log [3x - 5 - (x - 1)] = \log 10^2$

$$2x - 4 = 2$$

$$2x = 6$$

$$x = 3.$$

Doufáme, že o nalezení chyb v „písemné práci“ se pokusili alespoň ti z mladých čtenářů, kteří si „brousí zuby“ na povolání učitele matematiky. Zkuste si ještě časový údaj, který jste získali, vynásobit třiceti a dostanete představu, jak dlouho asi trvá oprava písemných prací celé třídy — vezměte přitom v úvahu i to, že naše úlohy byly poměrně průhledné a vypracování psáno přehledně a čitelně, zatímco po Nováčkovi to ve skutečnosti nelze přechít.

Snad se neurazíte, když nyní provedeme rozbor jednotlivých chyb sami a předem uvedeme pro kontrolu správné výsledky úloh:

Úloha 1: $P = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Úloha 2: $x = k\pi$, k celé.

Úloha 3: $P = \{3\}$.

V úloze 1 žák Nováček nevyloučil hodnoty $x = 1$, $x = -1$, pro které nerovnice nemá smysl. Při počítání vynásobil celou nerovnici výrazem $(x - 1)(x + 1)$, aniž prodiskutoval, pro která x je tento výraz kladný

a pro která záporný — tím ovšem „poškodil znaménko“ následující nerovnosti. Nakonec ještě tvrdí, že nerovnici $x \geq -x$ řeší každé reálné číslo, což je omyl (tento omyl si Nováček potvrdil výpočtem — obě strany vydělil x a aniž opět zkoumal, jaké je x , ponechal znaménko nerovnosti beze změny). Nováčekův postup byl tedy chybný.

V úloze 2 Nováček opět neprozkoumal, pro která x má rovnice smysl. Při přechodu od 3. ke 4. řádku se dopustil hrubé chyby, „děлил nulou“, tj. rovnici vydělil výrazem $\sin x$ a zapomněl, že to smí jen tehdy, je-li $\sin x \neq 0$. Avšak zrovna ta x , pro která $\sin x = 0$, vyhovují naší rovnici, takže Nováček ochudil množinu řešení natolik, že z ní „nezbylo nic“. Nováček opět postupoval chybně.

Nováčkova úloha 3 je pro toho, kdo ji opravuje, pravou lahůdkou. Hodnota $x = 3$ je totiž jediným řešením dané rovnice a Nováčekův výsledek je tedy správný. To nás ovšem nezabavuje povinnosti řešení pročíst a přesvědčit se, zda k tomuto výsledku došel správným způsobem. A hle! Na začátku Nováček, jak je asi jeho zvykem, zapomněl napsat, že rovnice nemá smysl pro $x \leq 1$, kdy $\log(x - 1)$ není definován, a pro $x = 2$, kdy $\log(x - 1)$ je roven 0 a zlomek není definován. Při úpravě rovnice použil Nováček nesprávný „vzorec“, když

$$\frac{\log a}{\log b} \text{ položil rovno } \log(a - b).$$

Nakonec ještě Nováček zamýšlel vynechat na obou stranách rovnice symbol $\log$, ale omylem napravo místo 10^2 napsal pouze 2. Závěr: výsledek je dobře, řešení je špatně. Možná, že dá velkou práci to Nováčkovi vysvětlit.

Není divu, že si učitel po prostudování písemné práce žáka Nováčka povzdychne: „Nováčku, Nováčku, nepotěšil jste mne — ani já vás nepotěším!“

Dva kombinatorické příklady

1. Tri manželské páry chcú prejsť cez úzke dvere. Koľkými spôsobmi môžu prejsť, ak cez dvere môže prechádzať len jedna osoba a musí vždy prejsť najprv manželka a až potom manžel? Predpokladajme, že pri predchádzaní sa môžu manželské páry premiešať.

2. Cez úzke dvere chcú prejsť dve štvorčlenné rodiny a jedna osoba. Koľkými spôsobmi môžu prejsť, ak cez dvere môže prechádzať len jedna osoba a prechod jednej rodiny je nasledovný: mladšie dieťa, staršie dieťa, manželka a posledný manžel. Pri prechádzaní sa môžu rodiny premiešať.

Juraj Kubiš

Úlohy I. kola 33. ročníku matematické olympiády

Kategorie A

1. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje pro všechna kladná celá n rekurentnímu vztahu

$$a_{n+3} = 5 a_{n+2} - 9 a_{n+1} + 9 a_n.$$

Jestliže kromě toho pro každé kladné celé n platí

$$|a_n| \leq 2^n$$

pak tato posloupnost vyhovuje rovněž i rekurentnímu vztahu

$$a_{n+2} = 2 a_{n+1} - 3 a_n,$$

$n = 1, 2,$ Dokažte.

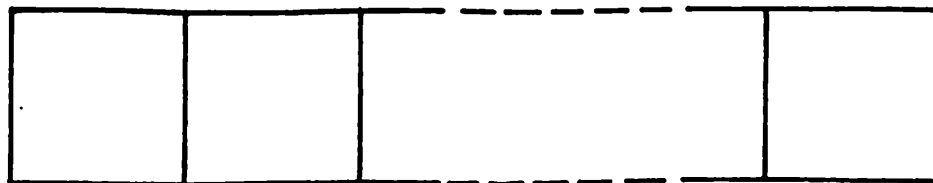
2. Najděte všechny reálné čísla x , pro které platí:

a) $\sin \pi x = \cos \frac{\pi}{x},$

b) $\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{x}.$

3. Nech $n > 1$ je dané přirozené číslo. Najděte všechny přirozené čísla m , pro které je číslo $\log_n m$ iracionální.
4. Určete největší přirozené číslo n s touto vlastností: Existuje konvexní n -úhelník, který lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu vzájemně se nepřekrývajících pravoúhlých trojúhelníků s ostrými úhly 30° a 60° .
5. V kouli s poloměrem 1 je zvoleno 73 navzájem různých bodů. Dokažte, že z těchto bodů lze vybrat 13 navzájem různých, které leží uvnitř některé koule s poloměrem $5/6$.
6. Na obr. 1 je znázorněn „žebřík“ skládající se z n navzájem shodných čtverců, kde n je dané kladné celé číslo. Stranou žebříku budeme rozumět stranu libovolného z uvažovaných čtverců.

Některé ze stran žebříku obarvíme červeně. Symbolem P_n označíme



Obr. 2

počet všech takových obarvení žebříku, při nichž má každý ze čtverců alespoň jednu stranu červenou.

- Určete nejmenší kladné celé číslo n , pro které platí $P_n > 10^6$.
- Dokažte, že pro všechna $n = 1, 2, \dots$ je P_n liché číslo.

Kategorie B

- Všechna obvodová pole šachovnice tvaru 497×497 jsou očíslována přirozenými čísly od 1 do 1984. Číslování začíná v levém horním rohu a pokračuje ve směru pohybu hodinových ručiček po obvodu šachovnice. Je dáno přirozené číslo k . Na očíslovaná pole klademe figurky tak, že první položíme na pole číslo 1 a další figurky pokládáme o k polí dále (tedy druhou na pole číslo $1 + k$, třetí na pole $1 + 2k$, atd.), ve směru číslování, dokud se nedostaneme na pole, které je už obsazené figurkou. V tom okamžiku pokládání figurek končí.
 - Na kterém poli skončí pokládání figurek?
 - Kolik obvodových polí šachovnice bude obsazeno figurkami?
- V rovině je dáno 6 navzájem různých bodů $A_1, A_2, \dots, A_6$, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Některými dvojicemi z těchto bodů jsme vedli přímku. Nechť s_k označuje počet všech těchto přímek, které procházejí bodem A_k ($k = 1, 2, \dots, 6$). Jestliže z každých tří různých bodů množiny $A_1, \dots, A_6$ lze vybrat dvojici bodů, jimiž byla vedena přímka, pak platí nerovnost

$$(2s_1 - 7)^2 + (2s_2 - 7)^2 + \dots + (2s_6 - 7)^2 \leq 54.$$

Dokažte.

- Nechť a, b jsou daná reálná čísla. Nalezněte všechny uspořádané dvojice reálných čísel x, y , vyhovující soustavě nerovnic

$$x^2 + y^2 \leq ax + by,$$

$$|a - b + y - x| \leq a + b - x - y,$$

$$|x - y| \leq -x - y.$$

Proveďte diskusi vzhledem k parametrům a, b .

- Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a . Vrchol A je spojen po povrchu krychle nejkratší čarou se středem stěny $BCGF$, respektive

$DCGH$. Tato lomená čára má s hranou BF , respektive DH společný bod K , resp. L . Určete obsah trojúhelníku AKL .

5. Je dán deltoid $ABCD$, jehož úhlopříčka BD délky f půlí úhlopříčku AC délky e . Označme postupně K, L, M, N středy vně sestrojených čtverců nad stranami AB, BC, CD, DA . Dokažte tato tvrzení:
 - a) Čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky KM a LN jsou k sobě kolmé a protínají se v témže bodě S , jako úhlopříčky daného deltoidu.
 - b) Obsah lichoběžníku $KLMN$ se rovná obsahu daného deltoidu zvětšenému o obsahy dvou čtverců se stranami délek $e/2, f/2$.
6. Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má všechny vrcholy na kružnici, jeho nejdelší strana má délku $\sqrt{2}$ a jeho třetí nejdelší strana má délku 1. Dokažte, že poloměr kružnice je nejvýše 1.

Kategorie C

1. Najděte všechny trojice a, b, c kladných reálných čísel, pro které platí

$$a + 2b^2 + 3c^3 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b^2} + \frac{3}{c^3} = 12.$$

2. Osy vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku procházejí jedním bodem nebo omezují čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici. Dokažte.
3. Určete všechna přirozená čísla n ($200 > n > 3$) s touto vlastností: Poslední dvojčíslí dekadického zápisu čísla $(n+1)^2$ se liší od posledního dvojčíslí dekadického zápisu čísla n^2 nejvýše pořadím cifer.
4. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$ o hraně délky a . Kulová plocha protíná stěnu $BCC'D'$ v kružnici vepsané čtverci $BCC'D'$ a prochází
 - a) bodem A ,
 - b) středem úsečky AB .
 V obou případech určete střed a poloměr kulové plochy.

5. Nechť a, b jsou nesoudělná přirozená čísla. Pak přirozená čísla x, y, z , kde $x = a(a+b)$, $y = b(a+b)$, $z = ab$ jsou nesoudělná a platí $1/x + 1/y = 1/z$. Dokažte.
 Nechť x, y, z jsou nesoudělná přirozená čísla, pro něž platí $1/x + 1/y = 1/z$. Zjistěte, zda pak existují přirozená čísla a, b taková, že $x = a(a+b)$, $y = b(a+b)$, $z = ab$.
6. Dané je přirozené číslo $n > 2$. Drevenu krychlu o hrane délky n natřeme na červeno a rozřežeme $3(n-1)$ rovinnými rezy na n^3 krychliček o hranách délky 1.

a) Koľko krychličiek bude mať jednu červenú stenu, koľko dve červené steny, koľko tri červené steny?

b) Možno z krychličiek zostaviť kvádor o rozmeroch $1, 4n - 8, 4n - 8$, tak, aby jedna štvorcová stena o rozmeroch $4n - 8, 4n - 8$ bola vyfarbena ako šachovnica?

Kategorie Z

1. Najdšte všechna pěticiferná čísla dělitelná číslem 84, která mají tuto vlastnost: první tři číslice tvoří číslo, které je třikrát větší než číslo ze zbývajících dvou číslic; přitom je pořadí číslic stejné jako v pěticiferném čísle.

2. Pro které prvočíslo p je číslo $2p + 1$ třetí mocninou nějakého přirozeného čísla?

3. Na tramvajové lince je doba jízdy mezi konečnými stanicemi 45 minut, na obou konečných stanicích čekají tramvaje po 5 minutách. Přidáním pěti vlaků na linku se interval mezi tramvajemi snížil o jednu minutu. Kolik souprav nyní jezdí na lince a v jakém intervalu? (Délka intervalu vyčíslená v minutách je přirozené číslo.)

4. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC , $|AC| = |BC|$. Na prodloužení strany CB za bod B zvolte bod D tak, aby $|BD| = |AB|$. Průsečíky os úhlů BAC a BAD s úsečkou CD označte E a F . Jak velký je úhel EAF , je-li $\angle CAB = \alpha$?

5. Je dán čtverec $KLMN$ o straně délky 6 cm. Sestrojte trojúhelník ABC , který má tyto čtyři vlastnosti:

- (1) vrchol A leží na přímce KL ,
- (2) vrchol C leží na přímce KN ,
- (3) bod M má od každého z bodů A a C vzdálenost 7 cm,
- (4) $|AB| : |BC| : |CA| = 1,5 : 2 : 1$.

Kolik má úloha řešení?

6. Je dán rovnostranný trojúhelník ABV , $|AB| = 8$ cm. Sestrojte obdélník $ABCD$, jehož strana CD prochází středem K úsečky AV . Dále sestrojte v polorovině s hraniční přímkou CD a vnitřním bodem A rovnostranný trojúhelník CDU . Vypočtete celkový obsah těch částí obdélníku $ABCD$, které leží vně trojúhelníku ABV i trojúhelníku CDU .

Úlohy pro 1. kolo XXV. ročníku FO

Kategorie A

1. Vnitřní prostor elektrónky má objem V , tlak plynu v elektrónce je p a teplota T .

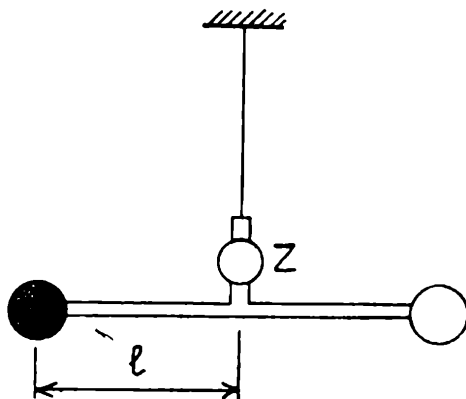
a) Určte počet n molekul plynu v elektrónce.

b) Určte koncentraci molekul plynu za normálního tlaku $p_n = 1,01 \cdot 10^5$ Pa a teploty $T_0 = 273$ K. Tato koncentrace je fyzikální konstanta, která se volá *Loschmidtovo číslo* N_L .

Plyn považujte za ideální.

Riešte všeobecně, potom pro $p = 5,00 \cdot 10^{-5}$ Pa, $V = 1,00 \cdot 10^{-5}$ m³, $T = 300$ K.

2. Na obr. A-1 je znázornené zariadenie, ktorým *Lebedev* meral tlak žiarenia. Na koncoch sklenenej tyčinky sú zavesené dva rovnaké kru-



Obr. A - 1

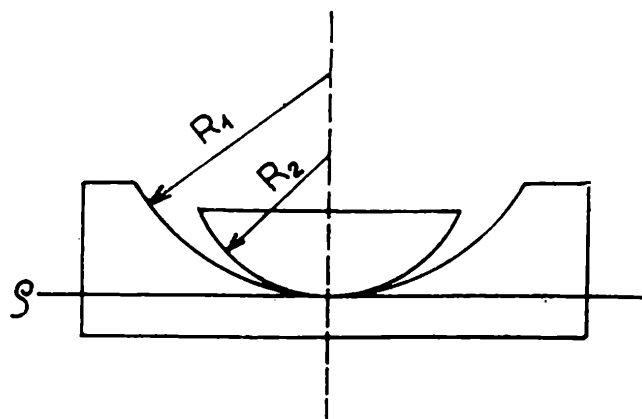
hové terčiky z platiny. Sklenená tyčinka je v strede zavesená na torznom vlákne. Tyčinka je vodorovná a spolu so závesom a kruhovými terčikmi leží v jednej zvislej rovine. Jeden terčik je čierny a dokonale pohlcuje žiarenie, druhý je svetlý a dokonale odráža žiarenie.

Terčiky ožiarieme zväzkom rovnobežných lúčov, ktoré dopadajú kolmo na ich roviny. Zrkadielko Z uchytené nad stredom tyčinky sa otočí o malý uhol. Stopu odrazeného lúča od zrkadielka registrujeme na stupnici, ktorá je v určitej vzdialenosti od zrkadielka.

a) Vysvetlite, ako pomocou tohto zariadenia meral *Lebedev* tlak žiarenia.

b) Určte tlak žiarenia p , ak terčiky majú polomer r , vzdialenosť stredov terčikov od stredu sklenenej tyčinky je l , vzdialenosť stupnice od zrkadielka je y , výchylka stopy odrazeného lúča na stupnici je x . Direkčný moment M vlákna je priamoúmerný uhlu otočenia, konštantou úmernosti je k .

Riešte všeobecně, potom pro $r = 5,0$ mm, $l = 92$ mm, $y = 1,2$ m, $x = 76$ mm, $k = 2,2 \cdot 10^{-10}$ N · m · rad⁻¹.



Obr. A - 2

c) Určte výkon P dopadajúceho žiarenia na tmavý terčik. Riešte všeobecne, potom pre hodnoty z úlohy b).

3. Častica s elektrickým nábojom e a energiou E_k vletí do homogénneho magnetického poľa s indukciou $\vec{B}$ tak, že jej rýchlosť $\vec{v} \perp \vec{B}$.

a) Charakterizujte pohyb častice v magnetickom poli a určte parametre jej trajektórie.

b) Úlohu riešte pre protón s energiou $E_k = 2,0 \text{ MeV}$, $B = 2,0 \text{ T}$.

c) Úlohu riešte pre elektrón s energiou $E_k = 2,0 \text{ MeV}$, $B = 2,0 \text{ T}$.

Úlohu riešte klasicky i relativisticky a rozhodnite, v ktorom prípade je nutné brať do úvahy relativistické efekty.

4. Na ploskodutú šošovku s polomerom krivosti R_1 položíme ploskovypuklú šošovku s polomerom krivosti R_2 , $R_1 > R_2$ (obr. A-2).

a) Šošovky osvetlíme zväzkom rovnobežných lúčov dopadajúcich kolmo na rovinu ϱ dotýkajúcu sa oboch šošoviek v ich vrcholoch. Vysvetlite interferenčný jav, ak použijete monochromatické svetlo.

b) Určte polomery svetlých a tmavých krúžkov, ktoré pozorujete pri použití monochromatického svetla s vlnovou dĺžkou λ .

c) Vypočítajte vzdialenosť medzi prvým a desiatým tmavým krúžkom pre svetlo s vlnovou dĺžkou λ . Úlohu riešte najskôr všeobecne, potom pre $\lambda = 550 \text{ nm}$, $R_1 = 6,00 \text{ m}$, $R_2 = 3,00 \text{ m}$.

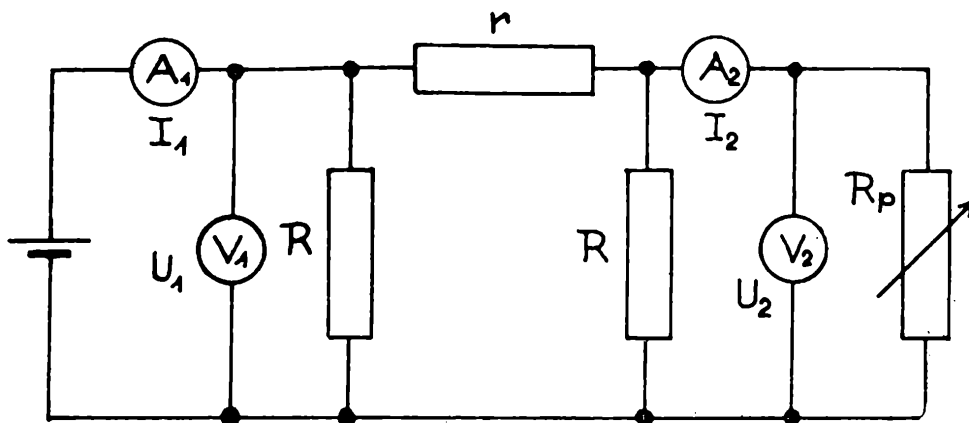
5. Dve zvislé steny akvária majú vzájomnú vzdialenosť s . V akvárii je voda s indexom lomu n_1 vzhľadom na vákuum, hrúbka sklenených sten akvária je l .

Úzky svetelný zväzok dopadá na jednu zo stien akvária pod uhlom α , prechádza akváriom a vystupuje z druhej steny akvária. Vzdialenosť rovnobežných priamok určených dopadajúcim a vystupujúcim lúčom je d .

Určte index lomu n skla sten akvária.

Riešte všeobecne, potom pre $s = 20 \text{ cm}$, $n_1 = 1,33$, $l = 0,50 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$, $d = 3,17 \text{ cm}$.

6. Měření stejnosměrných charakteristik přenosového článku typu „ π “.



Obr. A - 3

Úvod:

Souměrný přenosový článek typu „ π “ je sestaven ze dvou rezistorů o stejném odporu R a rezistoru o odporu r podle obr. A-3, v němž je znázorněn i stejnosměrný zdroj a reostat o proměnném odporu R_p , dva voltmetry a dva ampérmetry. Označíme U_1 napětí na vstupních svorkách článku, U_2 napětí na jeho výstupních svorkách, I_1 proud procházející mezi vstupními svorkami, I_2 proud procházející mezi výstupními svorkami. Dále označíme $R_1 = U_1/I_1$ odpor článku mezi vstupními svorkami, $P_1 = U_1 I_1$ příkon soustavy, $R_p = U_2/I_2$ odpor spotřebiče, $P_2 = U_2 I_2$ příkon spotřebiče. Z technického hlediska jsou významné tyto funkční závislosti, jejichž grafy označíme jako charakteristiky přenosového článku:

$$R_1 = f_1(R_p), P_2 = f_2(R_p), P_1 = f_3(R_p).$$

Úkoly:

- Experimentální zjištění uvedených funkčních závislostí, sestavení příslušných charakteristik a vyhodnocení grafů podle dalších pokynů.
- Zdůvodnění některých hodnot, zjištěných graficky, na základě teoretických výpočtů.

Pomůcky:

- Dva rezistory o stejných odporech R kolem 1000Ω . Pečlivě je vyberte, aby článek byl skutečně souměrný, popř. některý z nich doplňte sériově připojeným reostatem na správnou hodnotu odporu.
 - Rezistor o odporu r kolem 200Ω .
 - Plochá baterie o jmenovitém elektromotorickém napětí $4,5 \text{ V}$.
 - Dva stejnosměrné voltmetry a dva stejnosměrné ampérmetry s malou vlastní spotřebou.
 - Reostat (R_p).
 - Spojovací vodiče.
- A. Pokyny k provedení experimentálních úkolů
- Výstupní svorky zkratujte, měřte U_1 , I_1 a z těchto hodnot stanovte R_a , tj. R_1 pro $R_p = 0$.

2. Výstupní svorky rozpojte, měřte U_1 , I_1 a z těchto hodnot stanovte R_b , tj. R_1 pro $R_p \rightarrow \infty$.
3. K výstupním svorkám připojte reostat R_p a pomocí tohoto reostatu nastavujte napětí U_2 na hodnoty 3,77 V, 3,00 V, 2,70 V, 2,40 V, 2,10 V, 1,80 V, 1,50 V, 1,20 V, 1,00 V, 0,90 V, 0,60 V, 0,30 V, 0,00 V. Do tabulky запиšte příslušné hodnoty veličin U_1 , I_1 , I_2 , $R_1 = U_1/I_1$, $R_p = U_2/I_2$, $P_1 = U_1 I_1$, $P_2 = U_2 I_2$. Podle tabulky sestrojte grafy. Dole v tabulce uveďte změřené hodnoty R_a , R_b .
4. Z grafu funkce $R_1 = f_1(R_p)$ stanovte hodnotu odporu R_p (označte ji R'_p), pro kterou platí, že se rovná hodnotě vstupního odporu R_1 (tuto zjištěnou hodnotu označte R'_1), takže $R'_p = R'_1$.
5. Z grafu funkce $P_2 = f_2(R_p)$ stanovte, pro kterou hodnotu R_p (označte ji R_{p0}) má funkce lokální maximum, a graficky určete hodnotu tohoto lokálního maxima (označte ji $P_{2\max}$).
6. Z grafu funkce $P_1 = f_3(R_p)$ určete příkon P_1 (označte jej P_{10}) odpovídající hodnotě $R_p = R_{p0}$.

B. Pokyny k teoretickým výpočtům

1. Pomocí hodnot R , r vypočítejte R_a , R_b , výsledky porovnejte s hodnotami určenými experimentálně, případné větší odchylky zdůvodněte.
2. V grafu $R_1 = f_1(R_p)$ podle bodu A. 4 experimentální části má platit $R'_1 = R'_p = \sqrt{R_a R_b}$. Dokažte výpočtem. Případné větší odchylky výsledku nalezeného experimentálně zdůvodněte.
3. V grafu $P_2 = f_2(R_p)$ podle bodu A. 5 experimentální části má platit $R_{p0} = R_a$. Dokažte výpočtem. Případné větší odchylky výsledku nalezeného experimentálně zdůvodněte.
4. Pro hodnotu maxima $P_{2\max}$ má platit

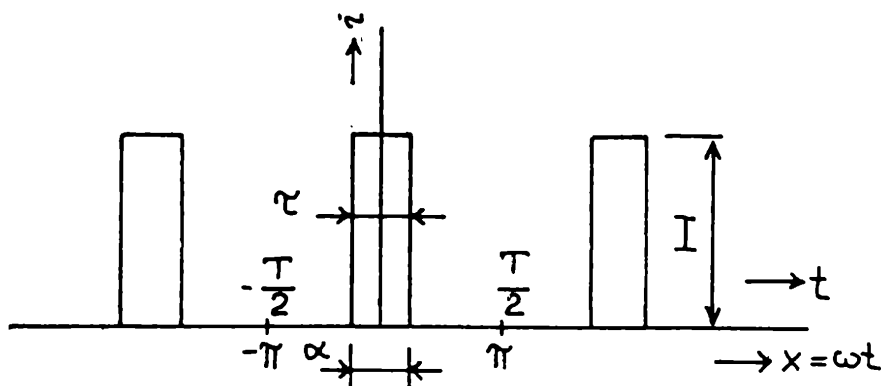
$$P_{2\max} = \frac{U_1^2 R}{4r(r + R)}$$

Dokažte výpočtem, případné větší odchylky od výsledku nalezeného experimentálně zdůvodněte.

Poznámka:

Úlohu lze řešit i s jedním ampérmetrem a jedním voltmetrem.

7. Periodický proud má časový průběh podle obr. A-4. V dobách od $-T/2$ do $-\tau/2$ a od $\tau/2$ do $T/2$ je nulový, v době od $-\tau/2$ do $\tau/2$ má konstantní hodnotu I .
 - a) Stanovte stejnosměrnou složku I_0 tohoto proudu i .
 - b) Stanovte amplitudu I_{km} harmonické složky k -tého řádu za předpokladu, že za dobu τ projde obvodem elementární náboj e .
 - c) Dokažte, že pro $\tau \rightarrow 0$ mají všechny tyto harmonické složky stejné amplitudy. Určete jejich velikost I_{0m} .



Obr. A - 4

- d) Stanovte počet n složek určených v bodě c) v kmitočtovém pásmu šířky $B[\text{Hz}]$.
- e) Stanovte efektivní hodnotu I_{eff} této soustavy složek.
- f) Stanovte počet z takových soustav, jestliže proud v době T je tvořen větším počtem obdélníkových impulsů, přičemž celkový proud jimi přenášený je I_s .
- g) Stanovte efektivní hodnotu I_{eff} všech těchto soustav složek.

Kategória B

1. Ocelové uzavreté kontajnery majú hrúbku steny d a v ich okolí je vákuum. Určte medzné hodnoty tlaku plynu v kontajneroch, aby nedošlo k ich mechanickému porušeniu. Prípustná medzná hodnota napätia ocele je σ_d .

Úlohu riešte pre dva prípady:

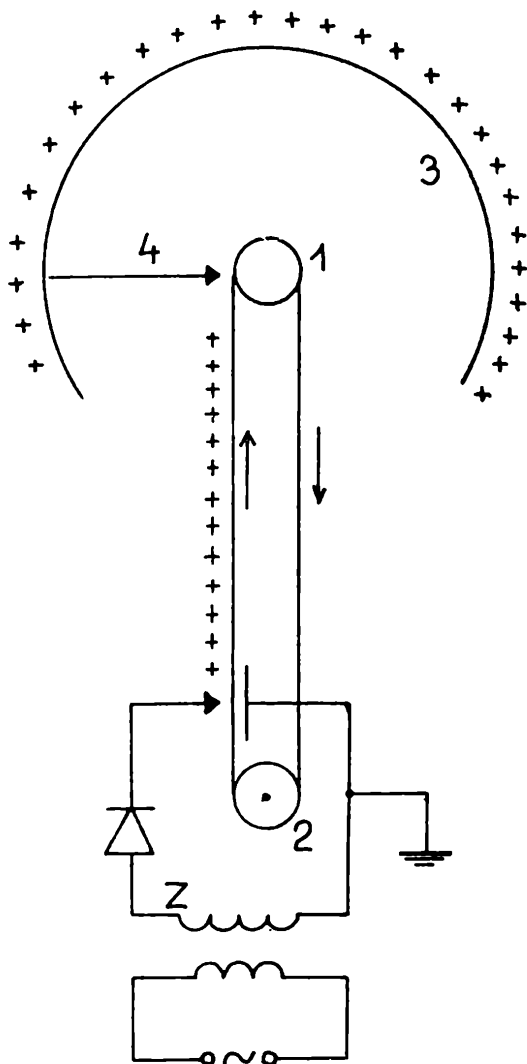
- a) Kontajner má tvar gule s vnútorným polomerom R .
- b) Kontajner má tvar valca s polomerom R .

V oboch prípadoch predpokladajte $R \gg d$. Dve bočné steny valcového kontajnera vydržia väčší tlak v porovnaní s plášťovou stenou valca.

Úlohu riešte pomocou rovnováhy síl pôsobiacich na element steny kontajnera.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $R = 0,80 \text{ m}$, $d = 4,0 \text{ mm}$, $\sigma_d = 6,1 \cdot 10^8 \text{ Pa}$.

2. Na obr. B-1 je model *van de Graaf*ovho generátora. Pomocou elektrického zdroja Z sa zelektruje dielektrický pás (guma, textil) pohybujúci sa vo vyznačenom smere na dvoch otáčajúcich sa valcoch 1, 2. Vysokonapäťová guľová elektróda 3 generátora sa zelektruje kladne pomocou sústavy kovových hrotov 4, ktoré sú s ňou vodive spojené. Polomer vysokonapäťovej elektródy generátora je R , rýchlosť posuvu dielektrického pásu v , šírka pásu d . Generátor sa nachádza vo vzduchu, kde intenzita elektrického poľa potrebná k vzniku prierazu vzduchu je E_p .



Obr. B - 1

- Vysvetlite vznik vysokého napätia medzi elektródou van de Graafovho generátora a zemou pomocou pohybu častíc s elektrickým nábojom od zdroja Z napätia až po vysokonapäťovú elektródu.
- Určte najväčší elektrický potenciál V_m vzhľadom na zem, ktorý môže získať vysokonapäťová elektróda generátora.
- Popíšte použitie van de Graafovho generátora ako zdroja prúdu.
- Určte najväčší ustálený prúd I_m , ktorý môžeme získať z generátora za uvedených podmienok.

Pred riešením úlohy sa zoznámte s konštrukciou a činnosťou školského van de Graafovho generátora.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $R = 1,0 \text{ m}$, $v = 15 \text{ m s}^{-1}$, $d = 0,80 \text{ m}$, $E_p = 3,0 \cdot 10^4 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

Intenzita E elektrického poľa rovinatej dosky s plošnou hustotou náboja σ je daná vzťahom $E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$, ϵ_0 je permitivita vákua.

3. Kondenzátor s kapacitou C je spojený do série s elektrickým zdrojom s napätím U_e a s rezistorom. Dosky kondenzátora k sebe približujeme na polovicu ich pôvodnej vzdialenosti.

- Popíšte a vysvetlite dej, ktorý sa uskutoční v tomto obvode, ak dosky kondenzátora približujeme k sebe pomaly, napr. za dobu niekoľkých minút. Určte teplo Q_1 , ktoré vznikne v rezistore pri tomto deji.
- Popíšte a vysvetlite dej, ktorý sa uskutoční v tomto obvode, ak dosky kondenzátora približujeme k sebe veľmi rýchlo, takmer okamžite. Určte teplo Q_2 , ktoré vznikne v rezistore.
- Porovnajte hodnoty Q_1 , Q_2 a výsledok zdôvodnite.
- Doba približovania dosiek je Δt , rezistor má odpor R . Určte podmienky pre vznik dejov v úlohách a), b).

- e) Určte, ktorý z dejov v úlohách a), b) sa uskutoční v obvode, ak $R = 200 \text{ M } \Omega$, $C = 100 \text{ nF}$, $\Delta t = 0,1 \text{ s}$.

4. Tuhé teleso s hmotnosťou m je uložené tak, že sa môže otáčať bez trenia okolo horizontálnej osi, ktorej vzdialenosť od ťažiska telesa je d . Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, rovnobežnú s osou otáčania telesa, je I_0 . Teleso vychýlime zo stálej rovnovážnej polohy o malý uhol φ . Potom teleso uvoľníme.

- a) Aký pohyb bude konať teleso po uvoľnení?
b) Napíšte základnú pohybovú rovnicu pre teleso, ktorá vyjadruje vzťah medzi uhlovým zrýchlením telesa a momentom vonkajších síl pôsobiacich na teleso.
c) Určte dobu kmitu T telesa, ak o veľkosti uhla φ môžeme predpokladať $\sin \varphi \doteq \varphi$.
d) Určte, v akej vzdialenosti d_1 má byť os otáčania telesa od ťažiska, aby perióda jeho harmonických kmitov bola najmenšia. Určte túto dobu kmitu T_1 .
e) Dokážte, že v tuhom telese jestvujú všeobecne najviac dve rôzne vzdialenosti d_1 , d_2 ťažiska od dvoch rovnobežných osí, pre ktoré má teleso, ako fyzikálne kyvadlo, rovnakú dobu kmitu T_0 . Vykonajte diskusiu výsledku.
f) Určte periódu T_0 jednoduchého kmitavého pohybu telesa ako funkciu vzdialeností d_1 , d_2 .

Odporúčaná študijná literatúra:

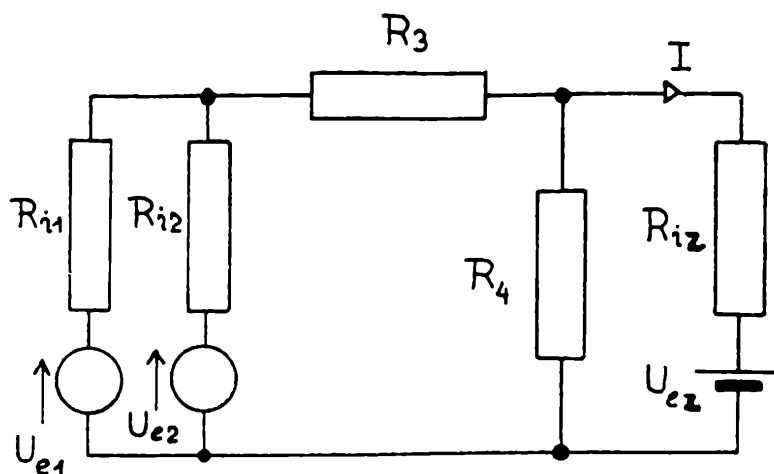
M. Chytilová: Zákon zachovania momentu hybnosti, študijní text pro kategorii C v XIX. ročníku FO, školní rok 1977/78, str. 69.

5. Na vodorovnom stole, ktorý sa otáča okolo zvislej osi prechádzajúcej jeho stredom, sú dve koľajničky, ktorých pozdĺžna os je radiálna. Po koľajničkách sa môže pohybovať vozíček s hmotnosťou m , ktorý je na jednej strane priviazaný na vlákno rovnobežne s koľajničkami. Vlákno prechádza na kladku uchytenú v strede stola. Na tejto kladke prechádza vlákno do zvislého smeru nad stôl. Voľný koniec držíme rukou.

Stôl sa otáča s uhlovou rýchlosťou ω_0 , začiatočná vzdialenosť vozíčka od osi otáčania je r_0 . Moment zotrvačnosti samotného stola vzhľadom na os jeho otáčania je I_0 . Rukou potiahneme niť tak, že vozík sa premiestni do novej polohy vo vzdialenosti r_1 od osi otáčania, $r_1 < r_0$.

- a) Určte uhlovú rýchlosť ω_1 sústavy pri novej polohe vozíčka.
b) Určte prácu A , ktorú vykoná sila ťahajúca niť pri pohybe vozíčka z pôvodnej do novej polohy.
c) Ak niť uvoľníme, vozík sa začne pohybovať po koľajničkách od osi otáčania. Určte rýchlosť v , ktorú vozíček nadobudne vo vzdialenosti r_0 od osi otáčania, vo vzťažnej sústave spojenjej so stolom.

Sily trenia pri otáčaní stola a pri pohybe vozíčka po koľajničkách sú



Obr. B - 2

zanedbatelné. Vozíček má rozmery daleko menšie v porovnaní s hodnotami r_0 , r_1 . Vlákno má stálu dĺžku.

6. Experimentálne určte závislosť $I = f(d)$ najmensej hodnoty I prúdu, pri ktorom nastáva tavenie valcového drôtu z daného materiálu, od priemeru d drôtu.

Pomôcky: Výkonnejší zdroj elektromotorického napätia s možnosťou regulácie napätia, sústava drôtov z určitého materiálu, napr. z medi, rôzneho priemeru, ampérmeter, mikrometer. Navrhnete postup merania a zapojenie elektrického obvodu. Pripravte si vhodné tabuľky. Vykonajte merania, zostrojte vhodný graf, určte matematický vzťah pre funkciu $I = f(d)$. Zistenú funkciu fyzikálne zdôvodnite.

7. Dva zdroje o elektromotorických napätích U_{e1} , U_{e2} a vnitřních odporech R_{i1} , R_{i2} jsou zapojeny v síti podle obr. B-2. V pravé větvi je zdroj (akumulátorová baterie) o elektromotorickém napětí U_{ez} a vnitřním odporu R_{iz} .

a) Stanovte proud I , který prochází touto větví. Výsledek vyjádřete pomocí zadaných veličin.

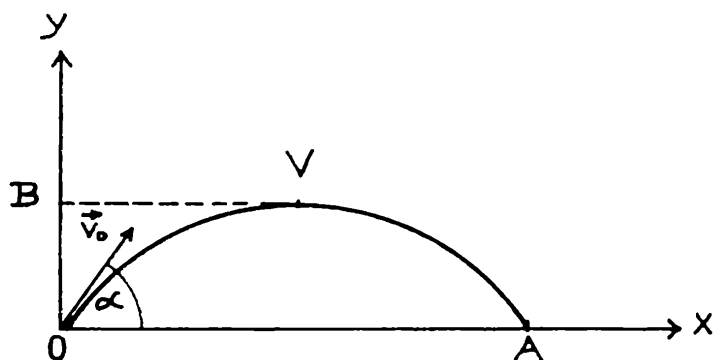
Poznámka: Při řešení použijte nejprve poučku *Millmanovu*, potom poučku *Théveninovu*.

Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty $U_{ez} = 12,0 \text{ V}$, $R_{iz} = 1,00 \Omega$, $R_{i1} = 2,00 \Omega$, $R_{i2} = 2,00 \Omega$, $R_3 = 1,00 \Omega$, $R_4 = 24,0 \Omega$, $U_{e1} = 15,0 \text{ V}$, $U_{e2} = 18,0 \text{ V}$.

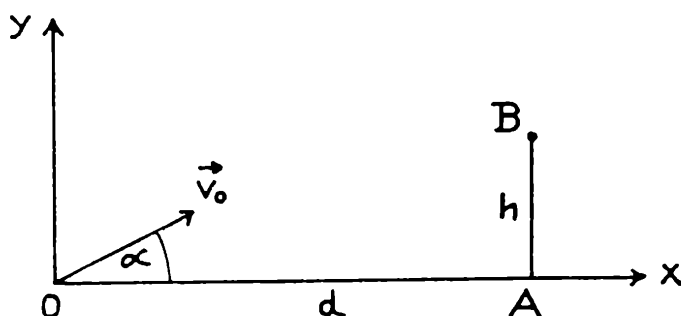
b) Pomocí diskuse obecného výsledku stanovte, za jakých podmínek prochází zdrojem o elektromotorickém napětí U_{ez} proud ve směru vyznačeném na obr. B-2.

c) Jak se změní výsledky úloh a), b), jestliže v síti není rezistor o odporu R_4 ?

d) Jak se změní výsledky úloh a), b), jestliže v síti není rezistor o odporu R_4 a odpor R_{iz} je zanedbatelný?



Obr. C - 1



Obr. C - 2

Kategorie C

1. Hmotný bod M je vržen ve vakuu z bodu O rychlostí $\vec{v}_0$ šikmo vzhůru. Rychlost $\vec{v}_0$ svírá s vodorovnou rovinou procházející bodem O elevační úhel α (obr. C-1).

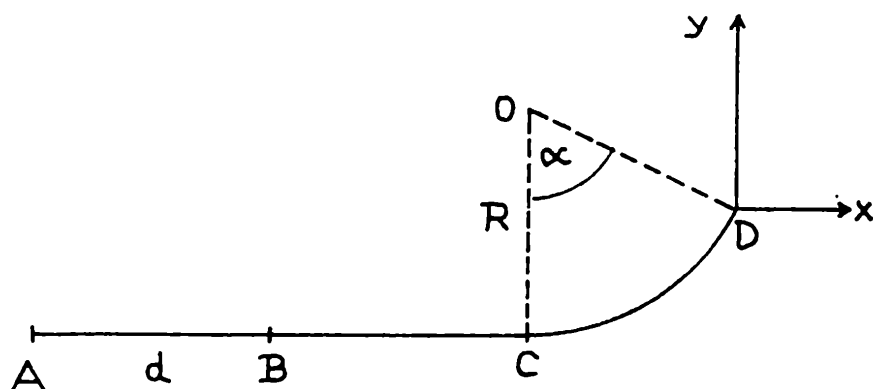
- Určete kolmé průměty vektoru $\vec{v}_0$ do osy x a do osy y .
- Z 1. ročníku víte, že hmotný bod M koná v daných podmínkách pohyb po parabole OVA (obr.). Popište pohyb kolmého průmětu hmotného bodu M do osy x . Napište vztah pro dráhu tohoto pohybu jako funkci času, $x = f_1(t)$, $x \leq OA$.
- Popište pohyb kolmého průmětu bodu M do osy y . Napište vztah pro dráhu tohoto pohybu jako funkci času, $y = f_2(t)$, $y \leq OB$.
- x a y v úlohách b), c) určují souřadnice hmotného bodu M v každém okamžiku jeho pohybu. Vyloučením parametru t z obou rovnic určete rovnici trajektorie hmotného bodu M v soustavě souřadnic (O, x, y) .
- Určete souřadnice vrcholu V a bodu A jako funkce velikosti počáteční rychlosti $|\vec{v}_0|$ a elevačního úhlu α .

Poznámka: V konečné úpravě použijte bez důkazu vztah

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2 \alpha.$$

- Při které minimální rychlosti $|\vec{v}_{0\min}|$ dopadne hmotný bod do bodu A ? Jaká je v tomto případě velikost úhlu α ? Řešte pro hodnoty: $OA = 20 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

2. Na vodorovném hřišti je míč v bodě O v klidu ve vzdálenosti $OA = d$ od svislé roviny branky AB , jejíž výška je h , obr. C-2. Fotba-



Obr. C - 3

lista vykopne míč v rovině kolmé k rovině branky rychlostí $\vec{v}_0$, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α . Míč považujte za hmotný bod. Odpor vzduchu neuvažujte.

- Napište rovnici trajektorie míče v soustavě souřadnic (O, x, y) s použitím parametrů $g, \alpha, |\vec{v}_0|$. Ve které vzdálenosti od branky dosáhne míč vrcholu trajektorie?
- Při které nejmenší počáteční rychlosti $|\vec{v}_{0\min}|$ vletí míč ještě do branky pro $h = 2,44$ m, $d = 25,0$ m, $\alpha = 30^\circ$?
- Jak se změní výsledek úlohy b), jestliže míč považujeme za nedokonalé pružné kulové těleso, pro které rozměry a odpor vzduchu nejsou zanedbatelné?

3. Kulička o hmotnosti m leží v klidu v bodě A vodorovného přímého úseku žlábků AD. Na kuličku začne působit stálá síla $\vec{F}$ a působí po úseku $AB = d$. V bodě C pak přejde kulička na kruhový oblouk CD o poloměru R ve svislé rovině (obr. C-3), úsečka OC je kolmá k AC, oblouku CD odpovídá středový úhel α .

- Určete minimální velikost $F_{\min}$ síly $\vec{F}$ tak, aby kulička měla v bodě D žlábků nulovou rychlost.
- Určete rychlost $\vec{v}_D$ kuličky v bodě D, je-li vržena po úseku AB stálou silou $\vec{F}_1$, $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_{\min}|$.

Napište rovnici trajektorie kuličky v soustavě souřadnic (D, x, y) . Stanovte maximální výšku kuličky nad vodorovnou rovinou procházející bodem C.

Třecí sílu a odpor vzduchu neuvažujte.

- Řešte pro hodnoty $d = 1,0$ m, $m = 0,50$ kg, $\alpha = 60^\circ$, $R = 1,0$ m $F_1 = 150$ N, $g = 10$ m $\cdot$ s $^{-2}$.

4. Zemi modelujeme jako homogenní kouli o poloměru $R_Z = 6,37 \cdot 10^6$ m, která koná rovnoměrný otáčivý pohyb kolem osy kolmé k rovině rovníku a procházející středem koule. Vzhledem k tomuto modelu uvažujeme geocentrickou vztažnou soustavu. V ní zvolíme soustavu souřadnic s počátkem ve středu Země a s osami, jejichž směr je nehybný vzhledem ke hvězdám. Umělá družice, kterou považujeme za hmotný bod, obíhá kolem Země v rovině rovníku po kruhové dráze ve výšce h

nad povrchem Země. Tíhové zrychlení na povrchu Země je $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- a) Určete rychlost v_h , periodu T_h a úhlovou rychlost ω_h umělé družice Země v této vztažné soustavě pro $h = 4,00 \cdot 10^5 \text{ m}$.
- b) Umělá družice se pohybuje ve směru k východu. Určete časový interval Δt mezi dvěma po sobě následujícími průchody družice nadhlavníkem určitého bodu na rovníku, víte-li, že úhlová rychlost pohybu Země kolem osy je $\omega_Z = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a že Země se otáčí směrem k východu.
- c) Geostacionární umělá družice obíhá kolem Země po kruhové trajektorii v rovině rovníku tak, že zůstává zdánlivě v nadhlavníku téhož bodu na rovníku. Určete v dané vztažné soustavě úhlovou rychlost ω_S a poloměr R_S dráhy takové družice.
- d) Vysvětlete, proč nemůže geostacionární družice obíhat po kruhové trajektorii kolem Země v jiné rovině než v rovině rovníku.

5. Soustava ideálního plynu má v počátečním stavu (1) parametry V_1, p_1, T_1 . Izotermickým dějem přejde do stavu (2) s parametry $V_2, p_2, T_2 < T_1$. Potom přejde izobarickým dějem do stavu (3) a konečně izochorickým dějem se vrací zpět do stavu (1).

- a) Načrtněte cyklus v soustavě souřadnic (O, V, p) — objem V je nezávisle proměnná, tlak p je závisle proměnná.
- b) Při kterém z uvedených dějů koná soustava práci? Je při některém ději práce nulová? Odpověď zdůvodněte.
- c) Při kterém z uvedených dějů nastane tepelná výměna mezi soustavou a okolím? Vyjádřete teplo přijaté nebo odevzdané soustavou.
- d) V náčrtku vyznačte práci, kterou vykoná soustava během jednoho cyklu.

6. Určení tepelné kapacity směšovacího kalorimetru

Příprava:

K určení tepelné kapacity směšovacího kalorimetru provedete pokus, který má tyto hlavní fáze:

- a) Nalejete horkou vodu do kalorimetru.
- b) Přidáte studenou vodu.
- c) Sledujete ustálení teploty vody v kalorimetru.

Zapište rovnici vyjadřující rovnovážný stav izolované soustavy kalorimetr — voda po ustálení tepelnou výměnou (c).

Vysvětlete všechny použité značky v zápise. Kterou tepelnou výměnou považujete přitom za zanedbatelnou?

Vyjádřete z rovnice tepelnou kapacitu K kalorimetru. Zapište jednotky všech veličin v tomto vztahu.

Provedení:

1. Nakreslete náčrtek pokusu k určení tepelné kapacity směšovacího

kalorimetru. Které pomůcky potřebujete k provedení pokusu? Které pomůcky považujete za součásti kalorimetru?

2. Zapište přehledně postup řešení úlohy podle fází uvedených v přípravě.
3. Uveďte veličiny, které musíte znát k řešení úlohy. Které z nich musíte změřit? Které měřicí přístroje k tomu potřebujete?
4. Popište měřicí přístroje. Teploměr: druh, popis stupnice, jednotka, měřicí rozsah, teplotní rozdíl odpovídající jednomu dílku stupnice, maximální odchylka při čtení na stupnici; váhy: druh; u automatických vah popis stupnice, citlivost; u rovnoramenných vah: popis sady závaží, měřicí rozsah vah, citlivost, odhad absolutní odchylky naměřené hmotnosti.
5. Zapište všechny naměřené veličiny s odhadem absolutní chyby.
6. Stanovte tepelnou kapacitu kalorimetru a její číselnou hodnotu správně zaokrouhlete.
7. Opakujte měření a určení veličiny K se stejnými přístroji, ale s jinými počátečními hmotnostmi a teplotami vody.

Zhodnocení:

Porovnejte výsledky určení veličiny K z obou pokusů. Na kolik platných číslic se shodují číselné hodnoty K určené z prvního a druhého pokusu? Které okolnosti provedení pokusu s týmiž pomůckami mohou zvětšit přesnost určení tepelné kapacity K kalorimetru?

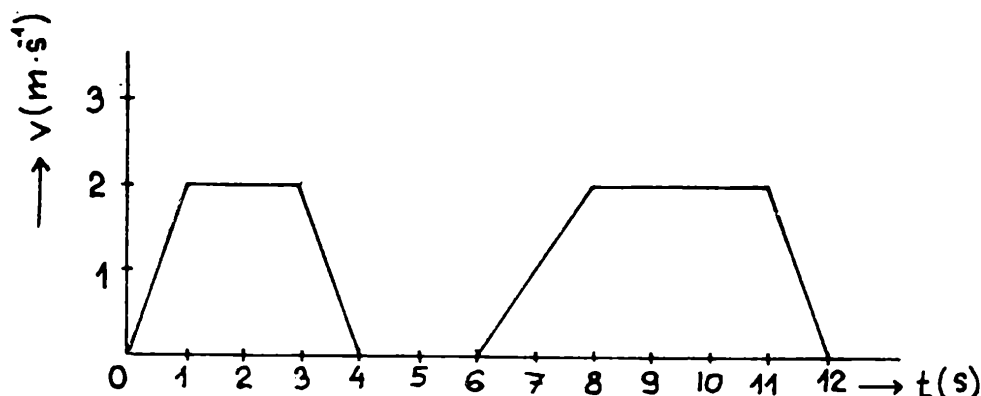
7. Letadlo letí přímočaře ve vodorovném směru rychlostí $\vec{v}$. Z letadla jsou vystřeleny dva náboje v časovém intervalu τ , za sebou ve vodorovném směru stejnou počáteční rychlostí $\vec{u}_0$, směry rychlostí $\vec{u}_0$ a $\vec{v}$ jsou totožné.

- a) Napište rovnici trajektorie prvního náboje vzhledem k povrchu Země jako vztažné soustavě. Počátek os souřadnic zvolte v bodě, ve kterém je hmotný střed letadla v okamžiku vystřelení prvního náboje. Nakreslete náčrtek.
- b) Napište rovnici trajektorie prvního náboje vzhledem k letadlu. Počátek souřadnic zvolte v hmotném středu letadla, který koná rovnoměrný přímočarý pohyb vzhledem k povrchu Země. Nakreslete náčrtek.
- c) Jak se mění poloha prvního náboje vzhledem ke druhému po druhém výstřelu? Počátek os souřadnic volte jako v úloze a). Při řešení úlohy považujte oba náboje za hmotné body; letadlo je totožné s hmotným středem.

Kategorie D

1. Po přímé vodorovné silnici se pohybuje automobil. Jeho kola mají vnější průměr pneumatik $d = 60$ cm.

- a) Automobil jede stálou rychlostí $v = 72$ km $\cdot$ h⁻¹. Určete frekvenci f otáčení kol automobilu.



- b) Automobil se rozjíždí se stálým zrychlením $a = 1,0 \text{ m s}^{-2}$. Určete frekvenci otáčení kol automobilu jako funkci času. Stanovte tuto frekvenci pro časy $t = 2 \text{ s}$, 4 s , 6 s , až do hodnoty, při které automobil dosáhne maximální povolené rychlosti. Nakreslete graf frekvence otáčení kol jako funkci času.
- c) Je možné využít výsledků úloh a), b) k vysvětlení funkce rychloměru automobilu?

2. Na obr. D-1 je nakreslen graf rychlosti tělesa jako funkce času.

- a) Stanovte velikosti rychlosti, zrychlení a dráhy pro jednotlivé časové intervaly.
- b) Nakreslete na milimetrový papír graf dráhy jako funkce času a graf zrychlení jako funkce času.

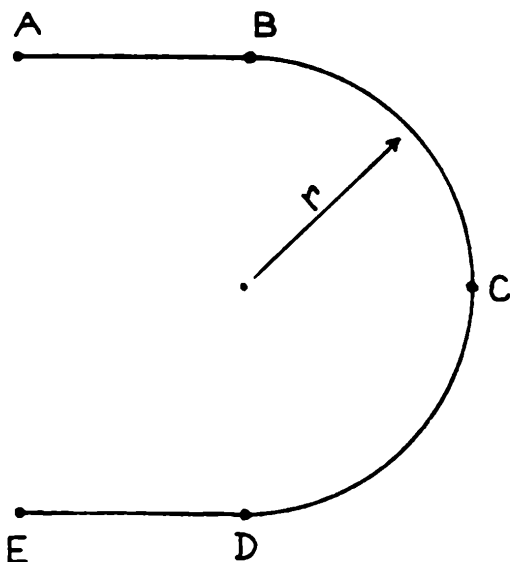
3. Vozík se pohyboval po přímé vodorovné dráze tak, že se stálým zrychlením urazil dva bezprostředně na sebe navazující úseky $s_1 = s_2 = 10,0 \text{ m}$. První úsek projel za dobu $t_1 = 1,20 \text{ s}$, druhý úsek za dobu $t_2 = 2,20 \text{ s}$.

- a) O jaký druh pohybu jde? Určete zrychlení vozíku.
- b) Určete rychlost vozíku na počátku úseku s_1 . Určete rychlost vozíku na začátku a na konci úseku s_2 .
- c) Určete úsek dráhy s_3 , na jehož konci se vozík zastavil.

4. Na balón o hmotnosti m působí ve vzduchu vztlačková aerostatická síla F_{vz} .

- a) Určete podmínku pro to, aby se balón začal pohybovat se zrychlením $\vec{a}$ ve svislém směru.
- b) Je možné, aby se balón pohyboval po určité době od začátku pohybu stálou rychlostí $\vec{v}_0$ ve svislém směru? Odpověď zdůvodněte.
- c) Rozhodněte, zda za daných podmínek balón ve vzduchu stoupá či klesá.
- d) Stanovte hmotnost m_1 zatěže, kterou je nutno přidat nebo ubrat, aby se balón pohyboval rychlostí $-\vec{v}_0$.

Ve všech případech považujte hustotu vzduchu a tíhové zrychlení za stálé. Úlohu řešte obecně, potom pro hodnoty $m = 680 \text{ kg}$, $F_{vz} = 6000 \text{ N}$.



Obr. D - 2

5. Automobil se pohybuje po vodorovné rovině po trase tvaru podle obr. D-2. Úseky AB , DE jsou přímé, úsek BCD má tvar půlkružnice. Úsek AB má délku $s_1 = 100$ m, úsek DE má délku $s_3 = 100$ m, plooměr kruhového oblouku $r = 100$ m.

Na úseku AB se automobil z klidu rozjede se stálým zrychlením, na konci úseku dosáhne rychlosti $v_B = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Potom začne brzdit, rychlosti ubývá lineárně s časem tak, že v bodě E je rychlost nulová.

Na zakřiveném úseku BCD trasy má automobil kromě dostředivého zrychlení $\vec{a}_d$ ještě zrychlení tečné $\vec{a}_t$ velikosti $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

- Určete velikost zrychlení $\vec{a}_1$ automobilu v úseku AB .
- Určete velikost zrychlení $\vec{a}_t$ automobilu v úseku BCD a velikost zrychlení $\vec{a}_3$ v úseku DE .
- Určete velikost rychlosti pohybu automobilu v bodech A , B , C , D , E .
- Do náčrtku znázorněte zrychlení automobilu v bodě C .

6. Stanovte závislost doby kyvu tělesa zavěšeného na pružině na hmotnosti tělesa.

K provedení experimentální úlohy použijete následující pomůcky: stojan s vodorovným ramenem, stopky, délkové měřítko (ocelový dvoumetr), alespoň dvě různé ocelové pružiny, váhy, tělesa různé hmotnosti opatřená háčky (nebo lehkou misku a závaží různé hmotnosti). Hmotnost pružiny musí být mnohem menší než hmotnost tělesa na pružinu zavěšeného.

- Každou pružinu charakterizuje veličina zvaná tuhost pružiny k .

Definujeme ji $k = \frac{F}{x}$, kde F je velikost vnější síly, která způsobila prodloužení x pružiny. Zjistěte hmotnost těles opatřených háčky, experimentálně určete alespoň 5 hodnot prodloužení x_i pro různé působící síly F_i , realizované tíhou těles. Určete tuhost pružiny k . Pokus opakujte pro další pružiny a určete jejich tuhost.

- Zavěste na stojan pružinu, na ni těleso a popište, jak se těleso pohybuje, když ho vychýlíme z rovnovážné polohy ve svislém směru a uvolníme. Tento pohyb se nazývá při dodržení jistých podmínek

pohybem kmitavým. Doba pohybu tělesa z rovnovážné polohy zpět do této polohy se nazývá doba kyvu t . Zjistěte dobu kyvu t_1 v případě, že na pružině je zavěšeno těleso o hmotnosti m_1 . Protože relativní chyba při měření doby kyvu je příliš velká, zjišťujeme experimentálně dobu 20 nebo 50 kyvů, tedy $20 t$ nebo $50 t$. Pokus opakujte pro další těleso o hmotnosti $m_2 \neq m_1$. Změnila se doba kyvu tělesa zavěšeného na pružině? Jaký závěr učiníte?

Těleso o hmotnosti m_1 zavěste postupně na druhou a další pružinu. Změnila se doba kyvu tělesa zavěšeného na pružině? Učiňte předběžný závěr z pokusu.

3. Ověříme nyní první hypotézu: doba kyvu tělesa zavěšeného na pružině závisí na hmotnosti tohoto tělesa. Na první pružinu postupně zavěsíme tělesa tak, abychom získali 8 až 10 měření. Při měření vystačíme s provedením 20 kyvů. Údaje zapíšeme do tabulky:

číslo měření	Hmotnost m_1 (kg)	Doba 20 kyvů $20 t$ (s)	Doba kyvu t (s)	a_t
1				
2				
8				

Stejnou tabulku použijte při zápisu měření s dalšími pružinami. Poslední sloupec doplníte až v bodě 5. Do souřadnicových os m , t sestrojte graf funkce $t = f(m)$. Jde o funkci lineární nebo nelineární?

4. Přistoupíme k matematickému zpracování získaných výsledků. Při tom je vhodné použít kapesní kalkulátor nebo jinou pomůcku zrychlující výpočty. Pro určitou pružinu s tuhostí k doplňte tabulku číselných hodnot:

č.	t	m	$t \cdot m$	$t^2 \cdot m$	$t \cdot m^2$	$\frac{t}{m}$	$\frac{t^2}{m}$	$\frac{t}{m^2}$

Sestrojte grafy funkcí $t = f(m^2)$, $t^2 = f(m)$.

5. Analýza výsledků matematického zpracování:

a) Který z grafů znázorňuje lineární funkci?

b) Z uvedených výrazů tabulky v bodě 4. vychází pro dvojice hodnot

$$m, t, \text{ že funkční závislost lze odhadnout } t \quad m = a_1, \quad t^2 \quad m = a_2, \\ t \quad m^2 = a_3, \quad \frac{t}{m} = a_4, \quad \frac{t^2}{m} = a_5, \quad \frac{t}{m^2} = a_6.$$

Vyberte vztah, který podle vašeho názoru nejlépe odpovídá experimentu. Doplňte tabulku v bodě 3.

c) Napište vztah mezi t , m . Konstantu úměrnosti označte a .

6. Zodpovězte následující otázky:

a) Je možno použít pružiny ke stanovení hmotnosti tělesa? Odpověď zdůvodněte a navrhnete postup práce.

b) Je možno použít pružiny ke stanovení hmotnosti tělesa v beztížném stavu? Odpověď zdůvodněte.

7. V tíhovém poli Země působíme na těleso o hmotnosti m silou $\vec{F}$ směrem svisle vzhůru, $F > m g$. Po uplynutí doby t_0 od začátku pohybu síla přestane působit.

a) Načrtněte graf výšky h tělesa nad jeho počáteční polohou jako funkce času t . Popište pohyb tělesa.

b) Zjistěte, jakou práci vykoná síla $\vec{F}$.

c) Určete, jak se mění potenciální energie tíhová E_p tělesa jako funkce času t . V počáteční poloze tělesa je jeho potenciální energie tíhová nulová.

d) Načrtněte graf E_p jako funkce času t .

Řešte obecně, potom pro hodnoty $m = 4,0 \text{ kg}$, $F = 50 \text{ N}$, $t_0 = 10 \text{ s}$.

UPOZORNĚNÍ AUTORŮM

Prosíme autory článků, námětů i fotografií, aby při zasílání materiálu k publikaci v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální uvedli přesnou adresu pracoviště a bydliště včetně směrovacího čísla a rodné číslo, bez něhož bychom nemohli po otištění příspěvku poukázat honorář (podle § 6 odst. 6 vyhl. č. 184/1968 Sb. k provedení zákona o dani z příjmů z literární a umělecké činnosti ve znění vyhl. č. 151/1980 Sb.).

Redakce

Číslice z říše Šangů

Na území Číny vznikl dobře organizovaný stát už kolem r. 2000 před n. l.; nazýval se *Jin* nebo častěji *říše Šangů*. Měl vrstvu státních úředníků, kteří řídili chod hospodářství, stavbu hrází a zavodňovacích kanálů, obranných zařízení a pod. Jiní měli za úkol zapisovat události v říši, další sledovali úkazy na obloze a dávali podklady pro úpravy kalendáře.

číslo. Znak pro 11, 12 až 15 se také čtou jako součty čísel zapsaných znakem pro 10 (dlouhou čarou, ať svislou či vodorovnou) a čárkami, také složené znaky pro 20, 30, 40 vyjadřují součty. Naproti tomu znaky pro 50, 60, 200, 300, 500, 2000, 4000, 5000 prozrazují násobky $5 \cdot 10$, $6 \cdot 10$, $2 \cdot 100$, $3 \cdot 100$, $5 \cdot 100$, $2 \cdot 1000$, $4 \cdot 1000$, $5 \cdot 1000$.

—	=	≡	≡	⌘	↑↑		┐	┐	┐	⌘
1	2	3	4	5	6	10	11	12	13	15
	∪	∪	∪	⌘	⌘	⌘	⌘	⌘	⌘	⌘
10	20	30	40	50	60	100	200	300	500	
↗	↗	↗	↗							
1000	2000	3000	5000							

Z této epochy se ze všech záznamů zachovaly jen ty, které byly na trvanlivých materiálech, např. keramice nebo bronzových předmětech. V bývalých chrámech či svatyních se našly i ploché kosti, které představují nejstarší písemné památky v zřetelně obrázkovém písmu. Číselné údaje jsou na nich zapisovány číslicemi, které vidíte na obrázku; všimněte si, že až do šesti udává počet čárek příslušné

Zřejmě šlo o určitý přechodný stav ve vývoji zápisů čísel; šangský systém se viditelně vyvíjel k numeraci, která vystačí jen s devíti číslicemi. Začaly se totiž už tehdy zapisovat (vkládat) znaky pro 100, 1000 atd., takže například 656 bylo reprezentováno sledem znaků

6 100 5 10 6, ve významu $6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$.

J. Šedivý

DALŠÍ SVAZKY ŠKOLY MLADÝCH MATEMATIKŮ

Edici ŠMM vydává v nakladatelství Mladá fronta ÚV matematické olympiády. V roce 1982 dosáhla knihnice již 50 titulů. Nedávno vyšly svazky:

Alois Kufner: SYMETRICKÉ FUNKCE

Příručka dává nahlédnout do pojmů a úvah algebry a matematické analýzy. 6500 výt., 120 stran, brož. 6,— Kčs

N. B. Vasiljev — V. L. Gutenmacher: PŘÍMKY A KŘIVKY

Knížka obsahuje asi 200 úloh, mnohé jsou uvedeny i s řešením nebo komentářem. Z ruštiny přeložil Leo Boček, ilustrovala Alena Šarounová, 5500 výt., 160 stran, brož. 8,— Kčs

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze 1983.

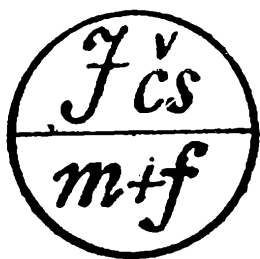
ROZHLEDY

**matematicko
– fyzikální**

(10)

**ROČNÍK 61, 1982/83
ČERVEN**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**



ROZHLEDY

matematicko - fyzikální

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy
o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, CSc., UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT
Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc,
doc. dr. Milan Hejný, CSc., UK Bratislava,
Stanislav Hejný, ČVUT Praha
doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava,
doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha,
doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha,
doc. dr. Hana Kořínková, CSc., ÚÚVPP Praha,
doc. dr. Vladimír Majerník, DrSc., PF Nitra
doc. dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha,
dr. Josef Novák, CSc., UK Praha,
dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha,
dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha,
doc. Ota Setzer, ČVUT Praha,
dr. Jaroslav Šedivý, CSc., UK Praha,
prof. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra,
ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Retigové 4, 116 39 Praha 1 - Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

OBSAH

M. Domanyová: Pyramídy a čo s nimi .	409
E. Calda: „Sudoliché“ funkce profesora Ypsilonu	413
J. Mída: O nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem dvou kladných čísel	416
V. Mráz: Ostří nože a dvojstupnice .	418
O. Houdek: Co je to viriál? .	423
J. Kotyk: Za prof. dr. Františkem Vyčichlem	430
J. Šedivý: Archimédův výpočet obvodu kruhu .	431
Přemýšlíme, řešíme	435
V. Dříza: Univerzální operace na Rubikově kostce	443
A. Nogová: Fyzikální ústav SAV v Bratislave	448
Z nových knih	450
Pohledy do dějin .	. 3. str. obálky

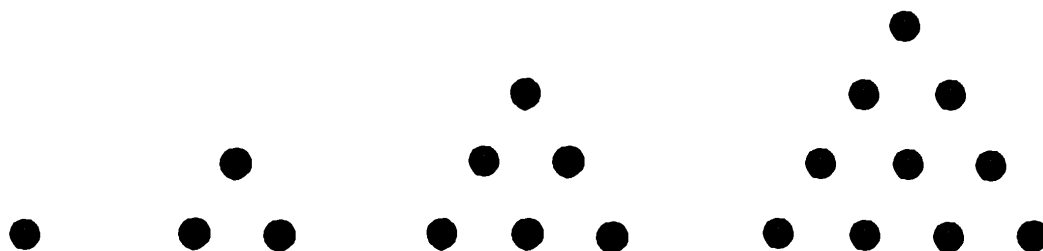
Pyramídy a čo s nimi

RNDr. MÁRIA DOMÁNYOVÁ, Gymnázium Pavla Horova Michalovce

S pyramídami zloženými z gúľ rovnakého priemeru ste sa na stránkach Rozhľadov už stretli (Rozhľady č. 3 tohto ročníka) a dočítali ste sa tiež, ako tieto pyramídy súvisia s tzv. *figurálnymi číslami*. O tom, že experimentovanie s nimi môže byť zaujímavé i poučné, vás chceme presvedčiť v nasledujúcom článku.

Označme $V_n^{(3)}$ počet gúľ v pyramíde, ktorá má v spodnej vrstve gule usporiadané do rovnostranného trojuholníka („trojuholníková“ pyramída). Pokúsme sa odvodiť, ako závisí $V_n^{(3)}$ od čísla n , ktoré označuje počet vrstiev v pyramíde. Na obr. 1 sú pre $n = 4$ znázornené jednotlivé

Obr. 1



vrstvy pyramídy rozložené vedľa seba v jednej rovine, pričom miesto gúľ sú pre jednoduchosť zakreslené iba plné krúžky. Je zrejmé, že platí

$$V_n^{(3)} = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + \dots + 3 + \dots + n). \quad (1)$$

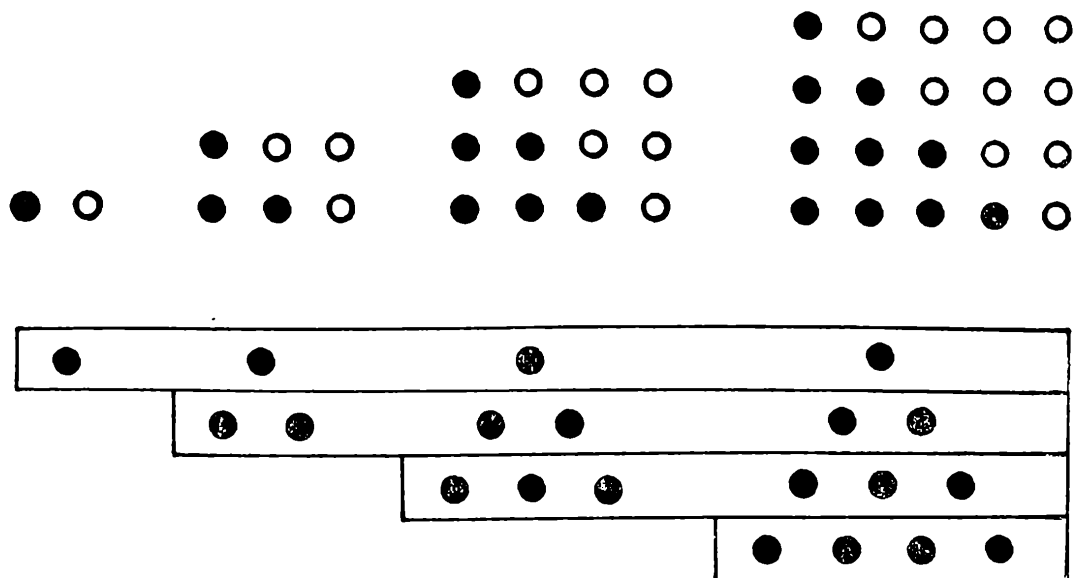
Nevýhodou tohoto vyjadrenia je, že počet sčítancov na pravej strane (ako aj počet sčítancov v jednotlivých zátvorkách) závisí od čísla n . Druhý z nedostatkov možno odstrániť použitím známeho vzťahu

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1),$$

pre súčty v jednotlivých zátvorkách, takže dostávame

$$V_n^{(3)} = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{n(n + 1)}{2}. \quad (2)$$

Obr. 2



Obr. 3

Tento výsledok možno názorne ilustrovať použitím dvoch trojuholníkových pyramíd („bielej“ a „čiernej“) s rovnakým počtom vrstiev. Ak jednotlivé gule vo vrstvách vhodne preskupíme a odpovedajúce si vrstvy pyramíd pripojíme k sebe (na obr. 2 je zakreslená situácia pre $n = 4$), potom je očividná platnosť vzťahu

$$2 V_n^{(3)} = 1 + 2 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1),$$

a teda aj platnosť vzťahu (2).

Vráťme sa ešte ku vzťahu (1) a všimnime si, že súčet na pravej strane možno prevádzať nielen „po vrstvách“ (obr. 1), ale aj podľa schémy, ktorá je načrtnutá (opäť pre $n = 4$) na obr. 3. Pri úpravách príslušného výrazu ide o asociatívnosť a komutatívnosť sčítania, takže platí

$$\begin{aligned} V_n^{(3)} &= 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ &= 1 + n + 2 + (n - 1) + 3 + (n - 2) + \dots + n + [n - (n - 1)]. \end{aligned}$$

Ďalšími úpravami dostávame

$$\begin{aligned} V_n^{(3)} &= (1 + n + 2 + n + 3 + n + \dots + n + n) + 2 + (-1) + 3 + (-2) + \\ &+ \dots + n + (- (n - 1)) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n - [1 + 2 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n]. \end{aligned}$$

Ak pripočítame k poslednému výrazu súčin $n + (n + 1)$ a súčasne ho odpočítame, môžeme písať

$$\begin{aligned} V_n^{(3)} &= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n - [1 + 2 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + \\ &+ n + n + (n + 1)] + n + (n + 1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n^2 (n + 1) \frac{1}{2} - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1)] + \\
&\quad + n \cdot (n + 1) = \\
&= \frac{1}{2} n \cdot (n + 1) (n + 2) - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1)].
\end{aligned}$$

Menšiteľa v poslednom rozdiely však môžeme podľa vzťahu (2) nahradiť $2V_n^{(3)}$, takže dostávame

$$V_n^{(3)} = \frac{1}{2} n (n + 1) (n + 2) - 2V_n^{(3)},$$

odtiaľ

$$3V_n^{(3)} = \frac{1}{2} n (n + 1) (n + 2),$$

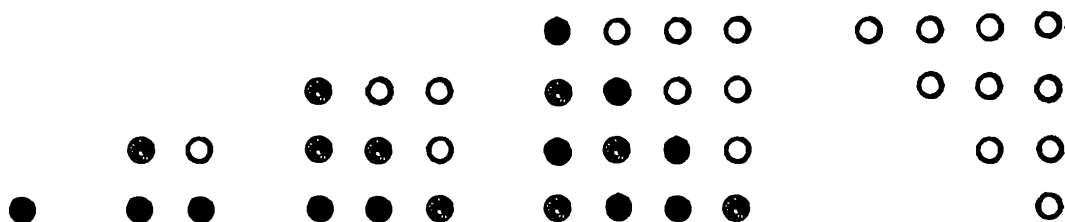
a teda platí

$$V_n^{(3)} = \frac{1}{6} n (n + 1) (n + 2), \quad (3)$$

čo je už hľadaný vzorec pre výpočet počtu gúľ v trojuholníkovej pyramíde zloženej z n vrstiev.

Urobme ešte jeden experiment. Situáciu na obr. 2 pozmeňme v tom zmysle, že pripojíme k sebe nie odpovedajúce si vrstvy jednotlivých pyramíd, ale sa pri pripájaní o jednu vrstvu posunieme, čiže prvú (hornú) vrstvu bielej pyramídy pripojíme k druhej vrstve čiernej pyramídy, druhej vrstvu bielej pyramídy k tretej vrstve čiernej pyramídy atď. Na obr. 4 je znázornená konfigurácia pre $n = 4$.

Obr. 4



Označme $V_n^{(4)}$ počet gúľ v pyramíde, ktorá má v spodnej vrstve gule usporiadané do štvorca („štvorcová“ pyramída). Je zrejmé, že platí

$$V_n^{(4)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2. \quad (4)$$

Všimnime si, že manipulovaním s vrstvami dvoch štvorvrstvových trojuholníkových pyramíd (obr. 4) sme dostali štyri vrstvy štvorcovej pyramídy, pričom „ešte zvýšili“ gule, tvoriace spodnú vrstvu jednej

z trojuholníkových pyramíd. Domnievame sa teda, že bude platiť vo všeobecnosti

$$2V_n^{(3)} = V_n^{(4)} + \frac{1}{2}n(n+1). \quad (5)$$

Skutočne, použitím vzťahu (2) a postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned} 2V_n^{(3)} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \\ &= 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \dots + n(n+1) = \\ &= (1+1+2+2+3+3+\dots+n+n) + (1+1+2+1+\dots+n+1) = \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1+2+3+\dots+n) = \\ &= V_n^{(4)} + \frac{1}{2}n(n+1). \end{aligned}$$

Vzťahy (3) a (5) nám však už umožnia pomerne jednoducho určiť, ako závisí $V_n^{(4)}$ od čísla n . Ich použitím totiž môžeme písať

$$\begin{aligned} V_n^{(4)} &= 2V_n^{(3)} - \frac{1}{2}n(n+1) = \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)[2(n+2) - 3] = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4-3), \end{aligned}$$

a teda

$$V_n^{(4)} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad (6)$$

čo je už vzorec pre výpočet počtu gúľ v štvorcovej pyramíde zloženej z n vrstiev.

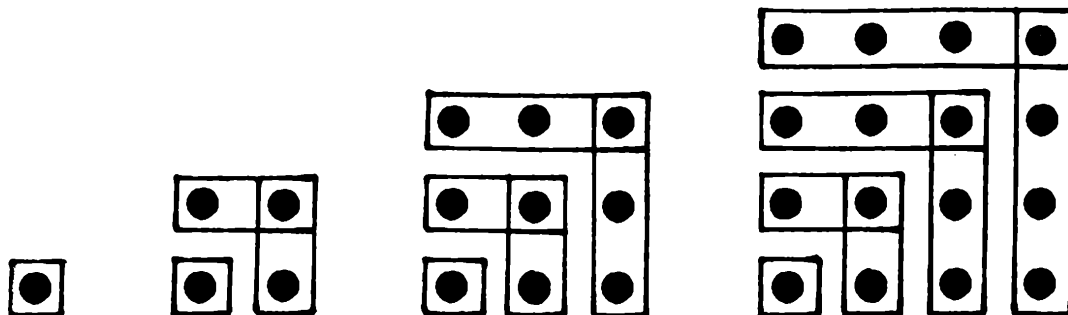
Podarilo sa nám teda odvodiť nielen vzťah (3) pre trojuholníkovú, ale aj vzťah (6) pre štvorcovú pyramídu. Pomohli sme si geometrickým experimentovaním, ktoré nám umožnilo niektoré súvislosti vytušiť; samotné algebraické odvodenie však nebolo závislé na týchto geometrických úvahách.

Na záver uveďme ešte niekoľko námetov.

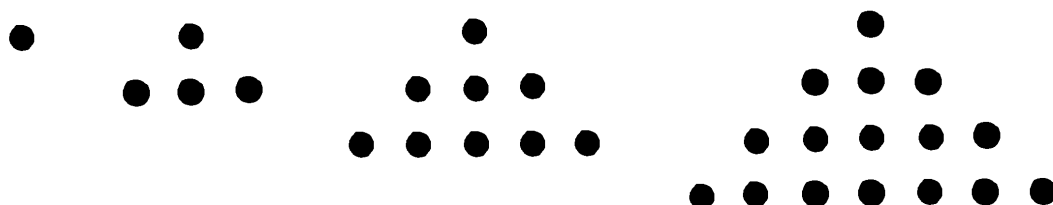
Pri čítaní článku vás možno napadla otázka, či je možné vzorec pre výpočet $V_n^{(4)}$ odvodiť „priamo“, bez použitia vzťahu (5) medzi počtom gúľ v trojuholníkovej a štvorcovej pyramíde. Ak máte chuť, môžete sa o to pokúsiť. Prezradíme vám ešte, že na základe známeho vzťahu

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Obr. 5



Obr. 6



platí

$$V_n^{(4)} = 1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \dots + [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)], \quad (7)$$

čo možno ilustrovať napr. tak, ako je uvedené na obr. 5. Na základe vzťahu (7) môžeme gule v jednotlivých vrstvách štvorcovej pyramídy usporiadať podľa obr. 6 a súčet na pravej strane tohto vzťahu prevádzať podľa obdobnej schémy, aká je načrtnutá pre trojuholníkovú pyramídu na obr. 3.

Pri experimentovaní s pyramídami možno objavíte aj ďalšie vzťahy a súvislosti, ktoré sme neuviedli. Želáme vám veľa úspechov pri riešení!

„Sudoliché“ funkce profesora Ypsilonu

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

„Z definice sudokopytníka a lichokopytníka vyplývá“, pravil profesor Ypsilon svým žákům krácejícím v zoologické zahradě od výběhu nosorožců (lichokopytníci) k ohradě antilop (sudokopytníci), „že průnik obou množin těchto zvířat je prázdná množina. Je však prázdný i průnik množiny všech sudých funkcí a množiny všech funkcí lichých? Dovedete určit některé prvky tohoto průniku, je-li neprázdný?“

Poodejděme poněkud stranou, abychom nebyli rušeni dusotem sudokopytníků ani klapotem kopyt lichokopytníků, a připomeňme si definice, jejichž znalost je k řešení úlohy profesora Ypsilonu zapotřebí.

Sudou funkcí se nazývá každá reálná funkce f reálné proměnné, která má tu vlastnost, že pro každé reálné číslo x platí:

$$x \in D(f) \Rightarrow [-x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x)],$$

kde $D(f)$ je definiční obor funkce f .

Lichou funkcí se nazývá každá reálná funkce g reálné proměnné, která má tu vlastnost, že pro každé reálné číslo x platí:

$$x \in D(g) \Rightarrow [-x \in D(g) \wedge g(-x) = -g(x)],$$

kde $D(g)$ je definiční obor funkce g .

Z uvedených definic lze snadno odvodit známý fakt, kterého se často využívá při sestavování grafů těchto funkcí: graf sudé funkce je souměrný podle osy y , graf funkce liché je souměrný podle počátku. Všimněte si i toho, že definiční obor sudé i liché funkce je sjednocením dvou množin: jedna obsahuje pouze nezáporná čísla, druhá pouze čísla záporná, k číslům první množiny opačná; definiční obor sudé i liché funkce je tedy při znázornění na reálné ose souměrný podle počátku. Na základě těchto definic se můžete přesvědčit, že funkce s hodnotami

$$\sin x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg} x, \quad x^3, \quad \frac{1}{x}, \quad 2x$$

jsou příklady funkcí lichých a že funkce s hodnotami

$$\cos x, \quad x^2, \quad |x|, \quad \log |x|, \quad \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \sqrt{|x|}, \quad x^4 - 1$$

jsou příklady sudých funkcí; přitom za definiční obor funkcí bereme množinu všech reálných čísel, pro něž má smysl výraz, kterým je každá z nich určena.

Snadno jistě najdete příklady funkcí, které nejsou ani sudé ani liché; jsou to např. tyto funkce, jejichž hodnoty jsou dány výrazy

$$\log x, \quad 2^x, \quad x + 1, \quad (x - 1)^2, \quad |x - 2|, \quad \sqrt{x}, \quad \frac{1}{x + 3}.$$

Nás však zajímají vlastnosti funkcí, které jsou sudé a liché zároveň, tj. vlastnosti funkcí, které profesor Ypsilon nazval „sudoliché“. I když se tohoto názvu běžně neužívá, budeme jej z důvodů stručného vyjadřování v tomto článku používat.

Předpokládejme, že funkce h je „sudolichá“, což znamená, že pro každé reálné číslo x platí jednak

$$x \in D(h) \Rightarrow -x \in D(h),$$

jednak

$$x \in D(h) \Rightarrow [h(-x) = h(x) \wedge h(-x) = -h(x)].$$

Z této poslední podmínky dostáváme, že pro každé $x \in D(h)$ je $h(x) = -h(x)$, tj. $h(x) = 0$.

Vzhledem k tomu, že z platnosti těchto dvou podmínek vyplývá také obráceně, že funkce h je sudá a lichá zároveň, platí věta:

Reálná funkce h reálné proměnné x je „sudolichá“ právě tehdy, kdy pro každé reálné číslo x platí:

$$x \in D(h) \Rightarrow [-x \in D(h) \wedge h(x) = 0],$$

kde $D(h)$ je definiční obor funkce h .

Uvědomte si, že neexistuje jen jedna „sudolichá“ funkce (která vás asi napadla hned po přečtení prvního odstavce tohoto článku): funkce identicky rovná nule s definičním oborem rovným množině všech reálných čísel. Každou „sudolichou“ funkci dostaneme tak, že za její definiční obor vezmeme jakoukoli neprázdnou podmnožinu množiny všech reálných čísel, která s každým číslem x obsahuje též číslo opačné $-x$, a za obor funkčních hodnot vezmeme množinu $\{0\}$; např.:

$$h_1(x) = 0, \quad D(h_1) = \left\{ -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3 \right\};$$

$$h_2(x) = 0, \quad D(h_2) = (-5; -3) \cup (3; 5);$$

$$h_3(x) = 0, \quad D(h_3) = (-\infty; -2) \cup \{-1; 0; 1\} \cup (2; +\infty).$$

„Sudolichých“ funkcí je zřejmě nekonečně mnoho. Všimněte si, že množina všech těchto funkcí je ekvivalentní s množinou všech neprázdných podmnožin množiny $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, kde $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Prvky obou množin lze totiž navzájem jednoznačně přiřadit takto: každé „sudoliché“ funkci h s definičním oborem $D(h)$ přiřadíme tu podmnožinu A množiny $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, pro niž je $A = \{x \in D(h); x \geq 0\}$, a každé neprázdné podmnožině A množiny $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ přiřadíme tu „sudolichou“ funkci, jejíž definiční obor je roven sjednocení množin A, B , kde B je množina všech reálných čísel opačných k číslům množiny A .

Můžete se ještě přesvědčit o tom, že následující funkce, jejichž definiční obor je roven množině všech reálných čísel, pro něž má příslušný výraz smysl, jsou funkce „sudoliché“:

$$h_4(x) = 1 - \frac{x}{x}, \quad h_5(x) = \frac{x-3}{x-3} + \frac{-x-3}{x+3}, \quad h_6(x) = \sqrt{-|1-|x||},$$

$$h_7(x) = \frac{2\sqrt{|x|-2}}{-\sqrt{|x|-2}} + 2, \quad h_8(x) = \frac{\sin^3 x}{\sin x} + \cos^2 x - 1.$$

A na závěr uvádíme odpověď profesora Ypsilon na zvědavý dotaz, proč se svými žáky navštěvuje zoologickou zahradu: „Dokud není zřízena zahrada logická, беру завдѣк alespoň zahradou zoologickou!“

O nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem dvou kladných čísel

RNDr. JIŘÍ MÍDA, CSc., UK Praha

Pro dvě kladná čísla a, b tato nerovnost zní

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (1)$$

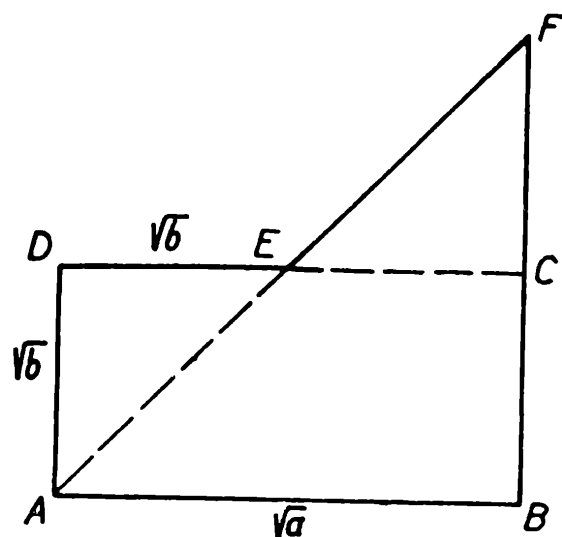
V článku [1] se nerovnost (1) geometricky znázorňuje v pravoúhlém trojúhelníku, v němž se porovnává délka jeho výšky na přeponu s poloměrem jemu opsané kružnice.

Nerovnost (1) však můžeme geometricky zobrazit i jinak (viz [2] str. 105). Neužijeme však délek úseček, nýbrž obsahů obrazců.

Nechť jsou dána dvě kladná čísla a, b , kde $a \geq b$. Sestrojíme (obr. 1) pravoúhelník $ABCD$ tak, že $|AB| = \sqrt{a}$ a $|BC| = \sqrt{b}$. Na úsečce CD nalezneme takový bod E , že $|DE| = \sqrt{b}$. Průsečík polopřímek AE a BC označme F . Pro $a = b$ je $E = C = F$. Je-li $a > b$, pak bod F leží na prodloužení úsečky BC za bod C . Zřejmě $|BF| = \sqrt{a}$.

Obsahy trojúhelníků AED a AFB jsou po řadě $\frac{1}{2}b$ a $\frac{1}{2}a$. Obsah pravoúhelníka $ABCD$ je roven číslu $\sqrt{ab}$.

Trojúhelníky AED a AFB se nepřekrývají. Pro jejich sjednocení mohou nastat dva případy.



Obr. 1

a) Jestliže $a = b$, pak sjednocením trojúhelníků AED a AFB je čtverec $ABCD$ a platí:

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \sqrt{ab},$$

tj.
$$\frac{a + b}{2} = \sqrt{ab}.$$

b) V případě $a > b$ je sjednocením trojúhelníků AED a AFB nekonvexní pětiúhelník $ABFED$, jehož částí je obdélník $ABCD$, takže pro obsahy platí:

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b > \sqrt{ab},$$

tj.
$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Literatura :

- [1] L. Vaňatová: Jak postupovat při důkazech nerovností, RMF, roč. 61, č. 6, str. 230—234
- [2] I. Ch. Sivašinskij: Neravenstva v zadačach, Nauka, Moskva 1967

ACADEMIA, nakladatelství Československé akademie věd vydalo závěrečný třetí díl encyklopedie nazvané

ILUSTROVANÝ ENCYKLOPEDICKÝ SLOVNÍK

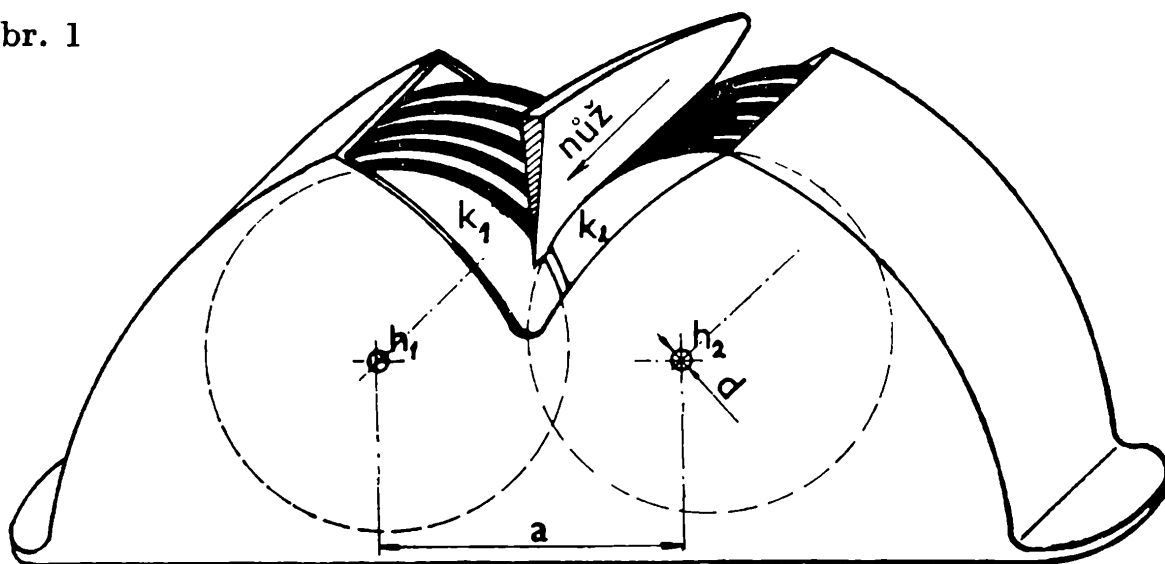
Obsahuje ve třech svazcích celkem 65 000 hesel a 5000 černobílých ilustrací. V každém jeho svazku je zařazena šestnáctistránková barevná ilustrační příloha. Na posledních dvanácti stránkách třetího dílu jsou k celému slovníku uvedeny dodatky a opravy. Cena každého dílu je 135 Kčs.

Ostří nože a dvojstupnice

Doc. dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Někdy i zcela jednoduché předměty denní potřeby mohou vzbudit zájem technika o matematiku. Máme na mysli např. nástroj na ostření třeba kapesního nebo kuchyňského nože, který se prodává v železářských obchodech. Na obr. 1 je takový ostříč nakreslen. Má dvě řady ocelových zakalených koleček k_1, k_2 tloušťky asi 1 mm, jež jsou po pěti volně nasunuta na dvou hřídelcích h_1, h_2 o průměru d . Kolečka — vlastně velmi nízké válečky — mají na obvodu svých podstav ostré hrany, mezi nimiž se nůž určený k naostření jednou nebo i vícekrát protáhne, čímž se naostří.

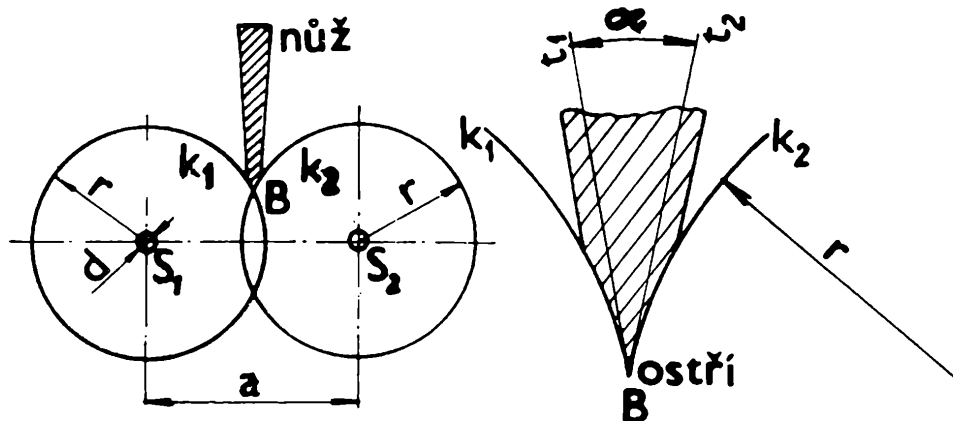
Obr. 1



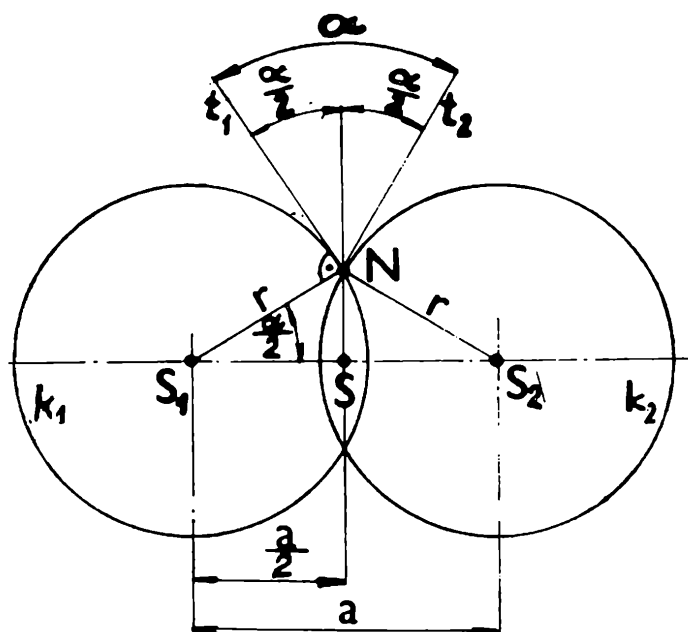
Na obr. 2 je naznačeno schéma ostříče i s průřezem ostřeného nože. V pravé části obrázku je zvětšený detail průřezu ostří nože a aktivní části ostříče tvořené hranami koleček k_1, k_2 , které jsou na obr. 2 znázorněny kružnicemi o poloměru r . Úhel α ostří nože je vytvořen tečnami t_1, t_2 sestrojenými ke kružnicím k_1, k_2 v jejich průsečíku B . Čtenář snadno nahlédne, že úhel α je tím menší, čím dále od sebe budou středy S_1, S_2 obou řad ocelových koleček. Označíme-li tuto vzdálenost a , pak pro ni platí nerovnost

$$r < a < 2r. \quad (1)$$

Ptejme se na velikost úhlu α ostří nože naostřeného popsaným zařízením, na němž jsme změřili $r = 9,8$ mm a vzdálenost os koleček $a = 18$ mm. Na obr. 3, jenž zobrazuje geometrii aktivní části ostříče,



Obr. 2



Obr. 3

zjišťujeme, že v pravoúhlém trojúhelníku SS_1N je $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} : r$,
čili

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2r}. \quad (2)$$

Dosadíme-li do vzorce (2) změřené hodnoty r a a , je

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{18}{2 \cdot 9,8} \doteq 0,9184, \quad \frac{\alpha}{2} \doteq 23^\circ 20' \quad \text{a} \quad \alpha = 46^\circ 40'$$

Změnou vzdálenosti $S_1S_2 = a$ by bylo možno nastavit různě velký úhel α , což lze realizovat přestavitelností hřídelíků, na nichž jsou ocelová kolečka nasunuta. Bude-li hodnota a z intervalu $(r, 2r)$, bude velikost úhlu α z intervalu $(0^\circ, 120^\circ)$. Skutečně při $a = 2r$ bude po dosazení do (2) $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$, a tedy $\frac{\alpha}{2} = 0^\circ$ a rovněž $\alpha = 0^\circ$. Při $a = r$ je $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$,

tj. $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$, a tedy $\alpha = 120^\circ$ My se přidržíme hodnot a podstatně větších než je r^*).

Věnujme pozornost takovému ostříči, jehož kolečka mají poloměr $r = 20$ mm a vzdálenost os $S_1 S_2 = a$ těchto koleček je přestavitelná. Požadujeme, aby největší úhel ostří nože byl $\alpha_{\max} = 51^\circ 40'$ a nejmenší vzdálenost os koleček ostříce vypočtená ze vzorce (2) je tudíž $a_{\min} \doteq \doteq 36,003$ mm**). Pro $r = 20$ nabývá vzorec (2) tvar

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{40}, \quad \text{resp.} \quad a = 40 \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (2')$$

Sestrojíme graf závislosti velikosti úhlu $\alpha \in \langle 0^\circ, 51^\circ 40' \rangle$ na vzdálenosti $a \in \langle 36,003; 40 \rangle$ podle vztahu (2'). Pro informaci čtenáře uvedeme jen výtah z tabulky udávající tuto závislost.

Tabulka (výťah)

α	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
a	40	39,962	39,848	39,658	39,392	39,052	38,637

α	35°	40°	45°	50°	$51^\circ 40'$
a	38,149	37,587	36,955	36,252	36,003

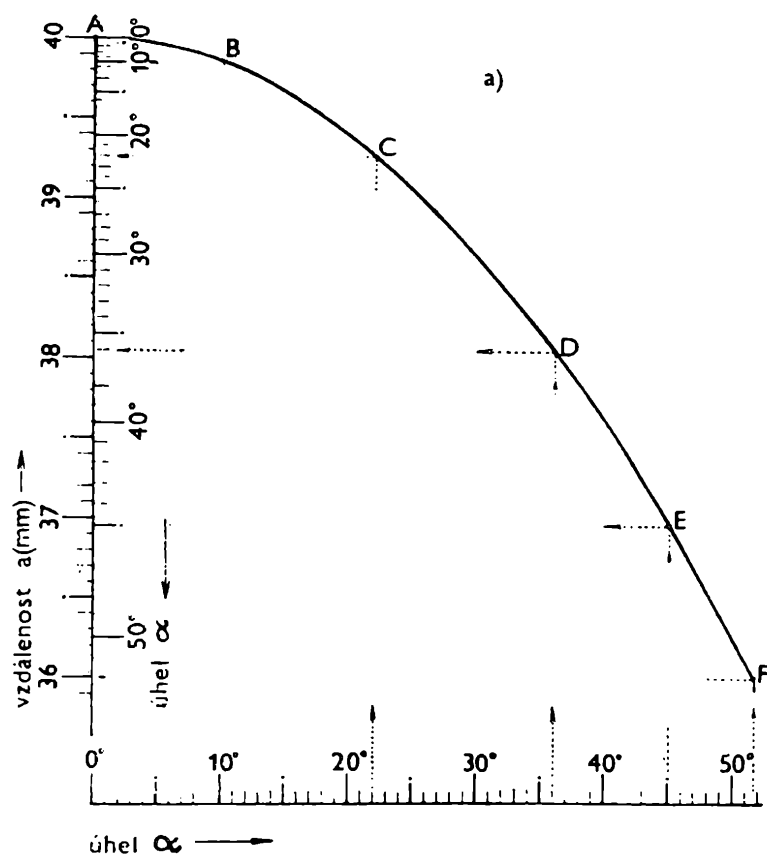
Chce-li si čtenář sestrojít graf uvedené závislosti na základě úplné tabulky, může postupovat podle připojeného výtahu z pomocné tabulky, který dále využijeme při konstrukci dvojstupnice.

Přistupme k sestrojení grafu. Zvolme jeho vodorovnou osu, na níž nanese rovnou stupnici podle tabulkových hodnot pro $\alpha \in \langle 0, 51^\circ 40' \rangle$. Na svislou osu grafu nanese rovnou stupnici podle tabulkových hodnot pro $a \in \langle 36,003; 40 \rangle$. Sestrojený graf udávající funkční závislost $a = f(\alpha)$ znázorňuje křivka $ABCDEF$ na obr. 4a (viz též pomocná tabulka). Kromě rovnoměrné stupnice a ,

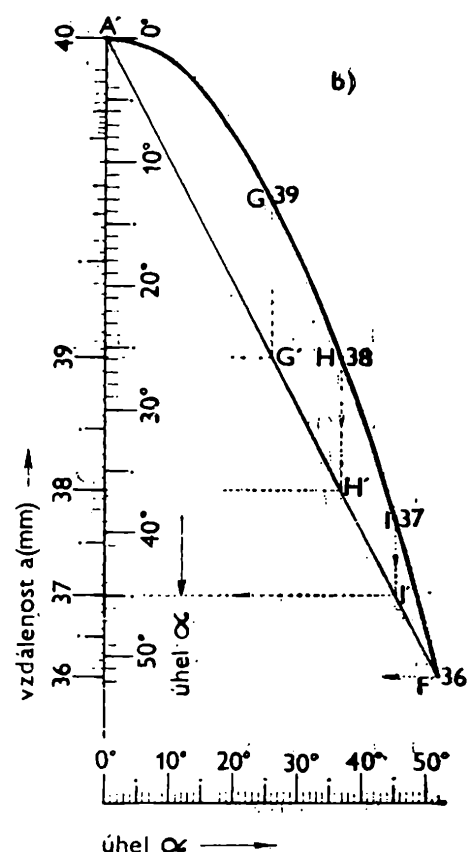
*) Ostatně průměr d obou hřídelíků by ani nedovolil nastavit $a = r$. Čtenář, snadno na základě obr. 2 dokáže, že nejkratší vzdálenost $a_{\min} = S_1 S_2$ při uvažování průměru d hřídelíku je dána rovností $a = r + 0,5 d$.

**) Dále se přidržíme technické praxe a nebudeme délkové rozměry v mm zpravidla uvádět.

DVOJSTUPNICE



DVOJSTUPNICE



Obr. 4

Pomocná tabulka (výťah)

α	$\alpha/2$	$\cos \alpha/2$	$a = 40 \cos \alpha/2$	bod na grafu
0°	0°	1,00000	40,000	A
10°	5°	0,99619	39,848	B
22°	11°	0,98163	39,265	C
36°	18°	0,95106	38,042	D
45°	$22^\circ 30'$	0,92388	36,955	E
$51^\circ 40'$	$26^\circ 50'$	0,90007	36,003	F

která je po levé straně svislé osy grafu, je ještě po pravé straně této osy nanesena nerovnoměrná stupnice α . Obě stupnice pro a i pro α , které jsou nakresleny na jedné nositelce (přímce), se nazývají *dvojstupnice*. Užitečnost dvojstupnice spočívá v tom, že dovoluje přímo stanovit vzdálenost a os ocelových koleček ostříče pro požadovaný úhel α a ovšem také umožňuje určit velikost úhlu α , zvolíme-li vzdálenost a .

Naznačíme, jak sestrojíme dvojstupnici v obr. 4a, jestliže jsme nakreslili obě rovnoměrné stupnice a graf (křivka $ABCDEF$). Nad délky vodorovné stupnice α vztyčíme kolmice, které protnou graf (křivku). Ve vzniklém průsečíku kolmice s křivkou vedeme rovnoběžku s vodorovnou osou, která protne svislou stupnici a . Např. k délce stupnice $\alpha = 10^\circ$ je uvedený průsečík s křivkou označen jako bod B a vodorovná rovnoběžka vytne na stupnici $a \doteq 39,848$ bod (délka), který označíme kótou 10° na pravé straně svislé osy (srovnej s tabulkou popř. s pomocnou tabulkou). Obdobně k délkám $\alpha = 22^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 51^\circ 40'$ získáme po řadě body C, D, E, F na křivce grafu, z nichž jsou vedeny rovnoběžky s vodorovnou stupnicí α , které vytnou na svislé stupnici body po řadě 39,265; 38,042; 36,955 a 36,003 udávající po řadě délky pro $\alpha = 22^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 51^\circ 40'$ na pravé straně svislé stupnice.

V technické praxi se zpravidla kreslí právě jen dvojstupnice, z níž lze příslušné hodnoty stanovit přímo a bez počítání. Spodní vodorovná stupnice, křivka $ABCDEF$ i další konstrukce jsou tedy jen pomocné. Nejčastěji se dvojstupnice kreslí vodorovně, ale v některých nomogramech se dvojstupnice umísťují podle potřeby i jinak.

Za cvičení čtenář může na dvojstupnicích v obr. 4 k úhlům $\alpha = 15^\circ, 38^\circ, 41^\circ$ určit příslušné vzdálenosti a a dále může k vzdálenostem $a = 37 \text{ mm}, 38,2 \text{ mm}$ stanovit odpovídající úhly α ($a \doteq 39,66 \text{ mm}, 37,8 \text{ mm}, 37,48 \text{ mm}; \alpha \doteq 44^\circ 40', 34^\circ 30'$).

Zatímco na dvojstupnici v obr. 4a je stupnice pro vzdálenosti a rovnoměrná a stupnice pro velikost úhlu α nerovnoměrná, na dvojstupnici v obr. 4b je tomu naopak. Výhodou této druhé dvojstupnice je přesnější určování vzdálenosti a pro malé úhly α , jak se čtenář může přesvědčit; např. k úhlu $\alpha = 3^\circ 30'$ je vzdálenost $a \doteq 39,98$, kteréžto hodnoty na dvojstupnici v obr. 4a neurčíme.

Ještě stručně popíšeme sestrojění dvojstupnice z obr. 4b. Opět vyjeme z rovnoměrné stupnice pro velikost úhlu α ; zde jsme volili jen poloviční délky dílků stupnice, takže jsme dostali křivku $A'GHIF'$. Na této křivce jsme označili body F', I, H, G, A' průsečíky vodorovných přímek vedených z dílků $a = 36, 37, 38, 39, 40$ v obr. 4a. Svislice vedené z těchto průsečíků protnou úsečku $A'F'$ v bodech I', H', G' a vodorovné přímky procházející těmito body vytnou na levé straně na dvojstupnici (obr. 4b) příslušné délky stupnice pro vzdálenosti a . Šipkami v bodech pro $\alpha = 21^\circ$ a $\alpha = 40^\circ$ jsme vyznačili příslušné délky na pravé straně dvojstupnice***).

***) Zobrazení křivkové stupnice $A'GHIF'$ na stupnici přímkovou $A'F'$ se nazývá od roku 1846 geometrická anamorfóza křivky v přímku.

Co je to viriál?

Dr. OLDŘICH HOUDEK, Jičín

Při studiu vlastností, chování a především stability různých soustav byla německým fyzikem *Clausiusem* (1808—1888) vyvozena a dokázána tzv. *věta o viriálu*, který má dnes široké použití v různých oborech fyziky. Matematicky lze větu o viriálu vyjádřit takto:

$$\overline{W}_k = -\frac{1}{2} \sum \overline{r \cdot F}, \quad (1)$$

kde $\overline{W}_k$ značí střední hodnotu kinetické energie, r vzdálenost od silového centra a F působící sílu. Na rozdíl od jiných teorémů mechaniky těles má věta o viriálu statistický charakter, tj. je nutno zde uvažovat časové střední hodnoty příslušných veličin. Veličina $-\frac{1}{2} \sum \overline{F \cdot r}$ se nazývá *virial sil* působících v soustavě. Název sám je odvozen z latinského slova *vis-vires* = síla-síly. Z rovnice (1) tedy plyne, že střední kinetická energie je rovna střední hodnotě viriálů působících sil, což je také obsahem věty o viriálu.

Jelikož součin $F \cdot r$ zde určuje práci jakožto míru změny potenciální energie soustavy, je možno větu o viriálu zapsat také ve tvaru

$$\overline{W}_k = -\frac{1}{2} \overline{W}_p, \quad (2)$$

vyjadřujícím tak, že střední hodnota kinetické energie je rovna polovině střední hodnoty potenciální energie se záporným znaménkem.

Pomocí věty o viriálu lze tedy určit vztahy mezi jednotlivými energetickými složkami soustavy. Mnohem významnější je však zde možnost vyjádření celkové energie soustavy jednou složkou a tak získat důležité informace jak o její geometrii a stabilitě, tak o jejím pohybovém stavu. K tomu poslouží rovnice (1) spolu s rovnicí (3), vyjadřující zákon zachování energie

$$\overline{W}_k + \overline{W}_p = W, \quad (3)$$

kdy po dosazení obdržíme

$$W - \overline{W}_p = -\frac{1}{2} \overline{W}_p,$$

$$W = +\frac{1}{2} \overline{W}_p. \quad (4)$$

Uvedený vztah umožňuje potom sledovat změnu geometrie soustavy a tím i její stabilitu prostřednictvím potenciální energie, tj. jako funkci vzájemné vzdálenosti interagujících složek, jak bude ukázáno dále.

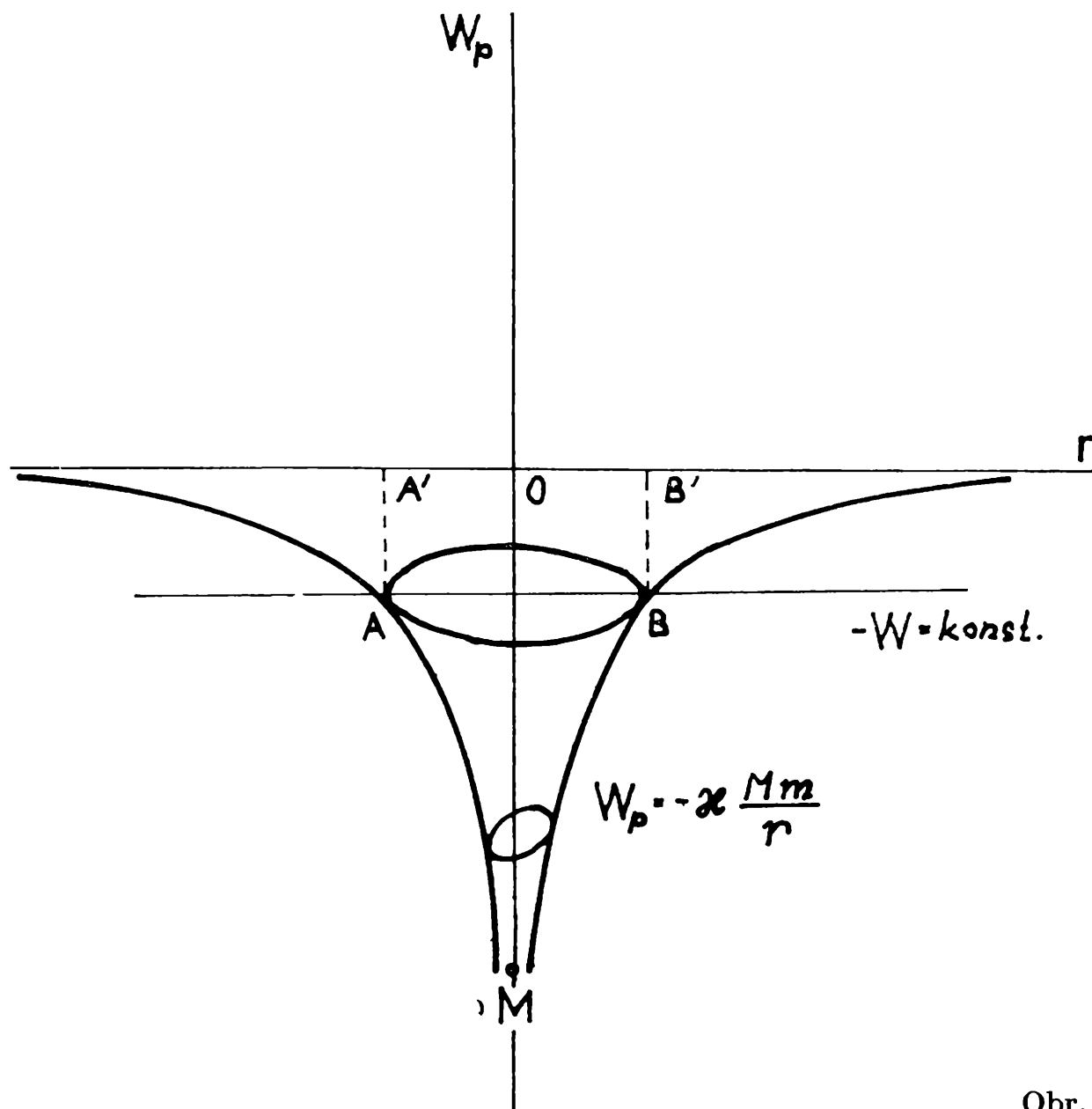
Dříve však ještě o významu záporného znaménka viriálu sil (1), resp. potenciální energie (2). Z fyzikálního hlediska zde znaménko minus vyjadřuje skutečnost, že síly působící v soustavě jsou síly přitažlivé. Účinkem těchto sil se interagující tělesa k sobě přibližují, důsledkem čehož je vznik vazby mezi nimi a růst stability vznikající tak soustavy. Jelikož potenciální energie je veličina relativní, je nutno zvolit její nulovou hladinu. Zde je vhodné volit ji v nekonečnu, tj. ve vzdálenosti, kde již mezi uvažovanými tělesy k interakci nedochází. Tehdy potenciální energie soustavy bude vždy záporná a se sbližováním těles, tj. s růstem pevnosti vazby, se bude zmenšovat. Maximum potenciální energie bude tedy odpovídat nekonečné vzdálenosti těles ($r \rightarrow \infty$, $W_p(\infty) = 0$) a minimum nejmenší vzdálenosti mezi nimi.

Kladné znaménko viriálu potom odpovídá případu, kdy interagující síly jsou odpudivé. Tehdy se budou tělesa od sebe vzdalovat a potenciální energie bude mít hodnoty kladné. V aplikaci bude prvému případu odpovídat např. interakce gravitační, druhému elektrostatická (mezi souhlasně nabitými částicemi). Věta o viriálu platí jak pro soustavy makroskopické, tak i mikroskopické. Z tohoto hlediska budou nyní uvedeny charakteristické příklady.

Jako první uvážíme kruhový pohyb družice v gravitačním poli Země, přičemž obě tělesa budou modelována hmotnými body. Nejprve je třeba podotknout, že při pohybu po kruhovém orbitu obě složky celkové energie jsou na čas nezávislé a větu o viriálu je možno zde použít ve tvaru vyjádřeném vztahem (2). Jak známo, je potenciální energie gravitační určena vztahem $W_p = -\kappa \frac{M}{r} m$. Dosazením do rovnice (4) pro celkovou energii obdržíme

$$W = -\frac{1}{2} \kappa \frac{M}{r} m = -\text{konst.} \cdot \frac{1}{r}. \quad (5)$$

Grafickým zobrazením závislosti energie soustavy na vzájemné vzdálenosti jejich interagujících složek budou tedy větve hyperboly (obr. 1). Sestrojíme přímkou protínající tuto křivku v bodech A a B , fyzikálně zobrazující celkovou energii, tj. $-W = \text{konst.}$. Potom průměty průsečíků do vorodovné osy A' a B' odpovídají bodům v prostoru, mezi



Obr. 1

nimiž se družice může pohybovat (obr. 1). Jinak řečeno, pohyb tělesa se zápornou celkovou energií je prostorově omezený v důsledku existence vazby mezi ním a silovým centrem. Výsledkem bude vždy pohyb po uzavřené křivce. Podmínku stability soustavy potom vyjadřuje vztah

$$|W_p| > W_k \text{ a } W < 0. \quad (6)$$

Křivka zobrazující závislost potenciální energie soustavy na vzájemné vzdálenosti jejich složek se nazývá *potenciální křivka*. Její rotací kol svislé osy lze vymežit prostor, ve kterém se může těleso nacházet. Odtud i její druhý název - *potenciální jáma*. Tím se obrazně vyjadřuje skutečnost, že tento prostor těleso bez účinku vnějších sil nemůže opustit.

Větu o viriálu možno využít dále k určení střední hodnoty rychlosti, neboť platí:

$$\begin{aligned}\overline{W}_k &= -\frac{1}{2} \overline{W}_p, \\ \frac{1}{2} \overline{mv}^2 &= +\frac{1}{2} \kappa \frac{M}{r} m, \\ v &= \sqrt{\kappa \frac{M}{r}},\end{aligned}\tag{7}$$

kteřá v případě kruhového pohybu je rovna první kosmické rychlosti. Významnější jsou tyto výpočty pro pohyb družice po eliptické dráze. Zde, jak bylo výše řečeno, nutno uvážit, že jde o střední časové hodnoty příslušných veličin. Potom věta o viriálu umožňuje určit vztah mezi celkovou energií a středními hodnotami jejích složek, tj. $\overline{W}_p$ a $\overline{W}_k$. Platí totiž

$$\overline{W}_k = -\frac{1}{2} \sum \overline{F \cdot r} = -\frac{1}{2} \overline{F \cdot r} = \kappa \frac{M}{2} \frac{m}{r} \left(\frac{1}{r} \right).\tag{8}$$

Porovnáním se vztahem (3) obdržíme:

$$\overline{W}_k + \overline{W}_p = 0,\tag{9}$$

tj. při pohybu po elipse je součet celkové a střední kinetické energie roven nule. Další informace získané pomocí teoremu o viriálu se týkají pohybového stavu tělesa, především jeho rychlosti. Zde pro rychlost družice v perigeu a apogeu je možno odvodit vztahy

$$v_P = \bar{v} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad \text{a} \quad v_A = \bar{v} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}},\tag{10}$$

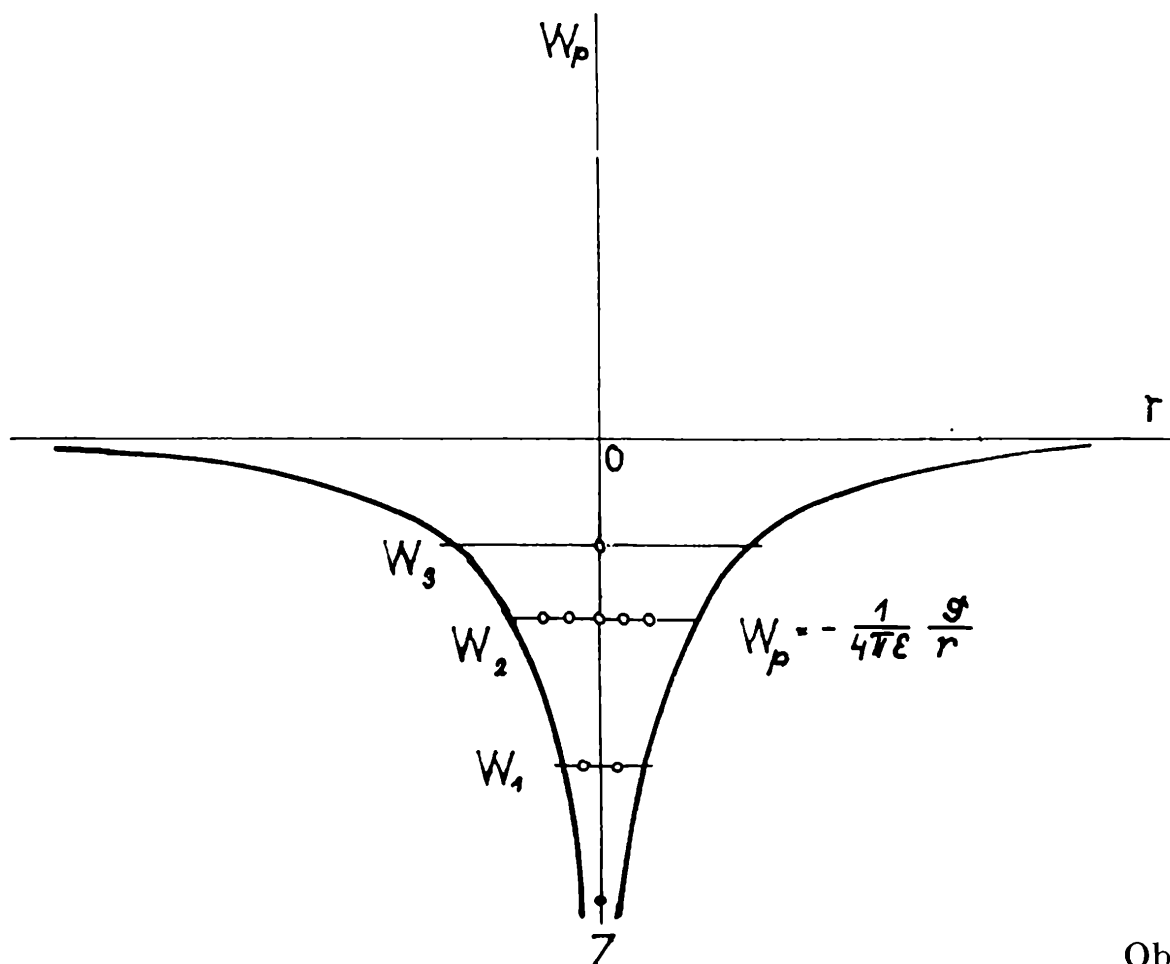
kde e je excentricita orbitu a $\bar{v}$ střední hodnota rychlosti na kruhové dráze. Tak je-li např. $\bar{v} = 7381 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $e = 0,0997$, potom $v_P = 8157 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $v_A = 6678 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, jak se může čtenář dosazením snadno přesvědčit.

Teorie viriálu je zvláště užitečná v případě mikrosoustav, kde neexistuje trajektorie mikročástice, ale pouze pravděpodobnost jejího výskytu v jisté části prostoru kol silového centra. Tehdy znalost středních hodnot má svůj význam.

Jako příklad mikrosoustavy může být uveden atom vodíku v základním stavu $1s$. Tehdy je střední hodnota potenciální energie určena vztahem

$$\overline{W}_p = -\frac{e^2}{r},\tag{11}$$

kde r určuje střední vzdálenost elektronu od jádra rovnou poloměru



Obr. 2

orbitu 1s ($r = 0,0529$ nm). Pomocí věty o viriálu lze určit jednak celkovou energii

$$W = \frac{1}{2} \overline{W_p} = - \frac{e^2}{2r}, \quad (12)$$

jednak střední hodnotu kinetické energie:

$$W_k = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r}, \quad (13)$$

přičemž platí, že

$$|W_p| > W_k,$$

což je podmínkou existence vazby a tím i stability soustavy. Jelikož i zde je energie nepřímo úměrná vzdálenosti mezi částicemi, bude obrazem této závislosti opět hyperbola a potenciální křivka bude mít analogický průběh jako v předchozím případě (obr. 2). Mezi oběma formálně totožnými modely je však především z energetického hlediska zásadní rozdíl. Zatímco v případě makrosoustavy může se těleso v potenciální jámě nacházet v libovolné vzdálenosti od silového centra, tj. na libovolné energetické hladině, v případě mikrosoustavy se částice může nacházet jen na zcela určitých hladinách, tj. energie je zde kvantována. Proto bude

energetické spektrum v tomto případě nespojitě na rozdíl od spojitého spektra makrosoustavy. Modelem atomu se tak stává potenciální jáma s vyznačenými energetickými hladinami obsazenými elektrony (obr. 2). Z teorému viriálu možno dále určit střední hodnotu rychlosti elektronu na orbitu 1s, neboť platí

$$\frac{1}{2} \overline{mv^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \quad (14)$$

Čtenář po dosazení příslušných číselných hodnot snadno zjistí, že tato rychlost má řádově hodnotu 10^6 m s^{-1} , tedy přibližně rovnou 1 % rychlosti světelné. U atomu s nábojem Z bude Z kráte větší. Proto u těžkých atomů bude rychlost jeho vnějších elektronů souměřitelná s rychlostí světla, což vyžaduje relativistickou korekci.

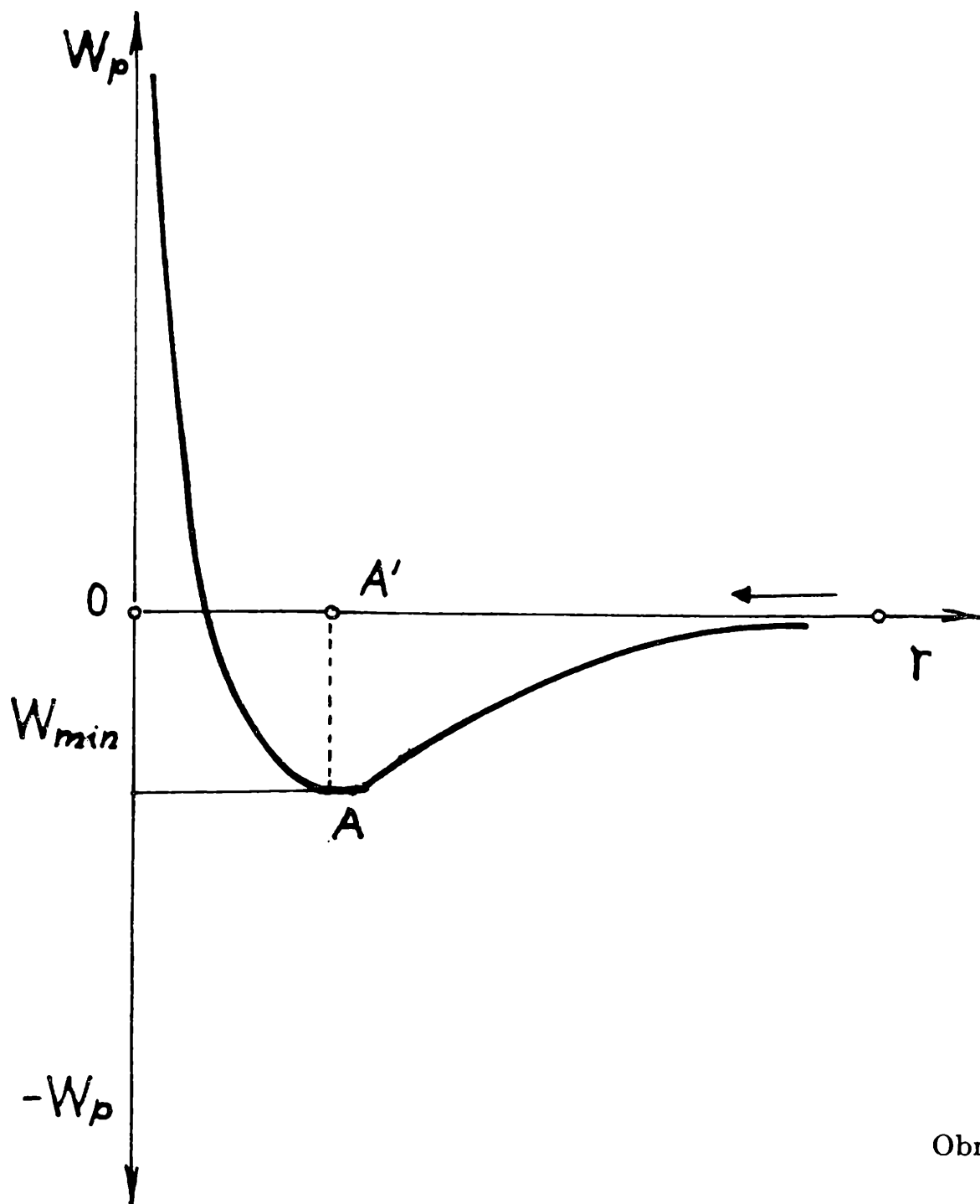
Konečně možno teorému o viriálu použít i k vysvětlení interakce dvou mikročástic (atomů) vedoucí ke vzniku molekuly. Podle (2) jejich energie před a po interakci bude rovna:

$$\begin{aligned} \overline{W}_{k1} &= -\frac{1}{2} \overline{W}_{p1}, \\ \overline{W}_{k2} &= -\frac{1}{2} \overline{W}_{p2}. \end{aligned}$$

Rozdíl energie mezi oběma stavy je roven $\Delta \overline{W}_k$ a $\Delta \overline{W}_p$ a podle zákona o zachování energie bude platit: $W = \Delta \overline{W}_k + \Delta \overline{W}_p$. Vyjádříme-li opět změnu celkové energie změnou potenciální, resp. kinetické energie, obdržíme

$$W = +\frac{1}{2} \Delta \overline{W}_p = -\Delta \overline{W}_k. \quad (15)$$

Z rovnice je patrné, že změna celkové energie při vzniku vazby musí probíhat vzhledem ke shodnému znaménku stejně jako změna potenciální energie soustavy, tj. jako funkce vzdálenosti interagujících mikročástic. Tedy ΔW může klesat, tj. vazba může vznikat jen tehdy, jestliže bude klesat $\Delta \overline{W}_p$. Jinak řečeno vazba bude vznikat jen tehdy, když při sblížování částic se bude zmenšovat i potenciální energie soustavy. Proto i zde potenciální křivka — jáma může sloužit jako názorný model průběhu této významné interakce. Z tohoto hlediska je možno potom definovat vzniklou molekulu jako fyzikálně stabilní soustavu, jejíž energetický stav charakterizuje příslušná potenciální křivka s minimem (obr. 3). Z obr. je patrné, že se zmenšováním vzdálenosti mezi částicemi potenciální energie neklesá trvale, nýbrž jen do vzdálenosti odpovídající nejnižšímu bodu potenciální křivky — „dnu potenciální jámy“. Jelikož minimum potenciální energie odpovídá stabilnímu uspořádání soustavy-



Obr. 3

-molekuly je možno z průběhu potenciální křivky určit pevnost (energii) vazby, jejíž velikost je úměrná „hloubce“ jámy. Skutečnost, že v této soustavě vedle síly přitažlivé současně působí i síla odpuzivá s citlivější závislostí na vzájemné vzdálenosti, vysvětluje asymetrii křivky i její charakteristický průběh.

V uvažovaných případech síla interakce byla nepřímo úměrná druhé mocnině a potenciální energie prvé mocnině vzdálenosti interagujících částic. Teorem viriálu možno však zobecnit i na případ, kdy potenciální energie je funkcí r^n . Tehdy lze jej vyjádřit vztahem:

$$\overline{W}_k = \frac{1}{2} n \cdot \overline{W}_p.$$

Tak v případě harmonického oscilátoru, kde potenciální energie ($W_p = 1/2 ky^2$) je kvadratickou funkcí ($n = +2$), jak se čtenář snadno přesvědčí, platí mezi středními hodnotami jeho složek energie vztah: $\overline{W_k} = \overline{W_p}$.

Použití viriálu umožňuje tedy jednak zkoumání makro- i mikrosoustav z energetického hlediska s možností názorného zobrazení, jednak určení jejich pohybových parametrů, především středních hodnot rychlostí. Důsledkem aplikace věty o viriálu je i důležitý poznatek, že ve stavu stabilní rovnováhy je soustava charakterizována minimální potenciální energií.

Závěrem můžeme podotknout, že teorém o viriálu lze aplikovat pouze na tzv. finitní pohyby, tj. pohyby po uzavřených křivkách, obecněji v případech, kdy mezi interagujícími složkami uvažovaných soustav existuje vazba, jak je konečně zřejmé i z tohoto článku.

Z DĚJIN EXAKTNÍCH VĚD

Za prof. dr. Františkem Vyčichlem

JOSEF KOTYK, Pardubice

Dne 6. ledna 1958, právě před 25 lety, zemřel po těžké chorobě a předčasně, v necelých 53 letech, významný vědecký a školský pracovník, redaktor našich „ROZHLEDŮ“, *prof. RNDr. František Vyčichlo, DrSc.* Svou všestrannou a úspěšnou činností si zaslouží naši trvalou vděčnost, úctu a stále vzpomínky.

František Vyčichlo se narodil dne 22. dubna 1905 v Pardubicích v rodině zaměstnance bývalé Dvořákovy strojírny. Ačkoli mu ve 14 letech zemřel otec a chlapec musel s matkou pečovat o tři mladší sourozence, jeho mimořádné nadání, touha po vzdělání a pilnost ho vedly ke studiu na státní reálce v Pardubicích a potom na tehdejší přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity v Praze. V roce 1929 poslouchal na universitě v Göttingenu přednášky slavného matematika *Davida Hilberta*. Po návratu do vlasti připravoval pro nakladatelství Jednoty čsl. matematiků a fyziků nové vydání učebnic aritmetiky *univ. prof. dr. Bohumila Bydžovského* pro IV i V až VII. třídu býv. středních škol a Sbírkou úloh z matematiky od *profesorů dr. Boh. Bydžovského a dr. Jana Vojtěcha* pro IV až VIII. třídu středních škol. V roce 1932 se stal redaktorem

tehdejších „ROZHLEDŮ MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÝCH“ a řídil je úspěšně — s výjimkou roku 1937, kdy studoval na universitě ve Florencii — až do roku 1946. Pečlivě se staral zejména o to, aby Jednota čs. matematiků a fyziků mohla vydávat „ROZHLEDY“ i v nejtěžších dobách světové války pětkrát ročně jako před nacistickou okupací; to se mu skutečně podařilo. Prof. dr. Fr. Vyčichlo patří mimo to k těm zasloužilým redaktorům a přispěvatelům ROZHLEDŮ, kteří formovali tvář našeho časopisu a podstatně ovlivnili jeho obsah; s nimi se stal hlavním tvůrcem dnešního profilu ROZHLEDŮ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍCH.

Vědecké podněty z jeho studijního pobytu v zahraničí přispěly k rozvinutí jeho badatelské činnosti tou měrou, že již v roce 1939 začal přednášet na českých vysokých školách v Praze. Ihned po osvobození se účastnil horlivě přípravných prací k bezodkladnému znovuootevření našich vysokých škol a byl pro své vědecké i pedagogické kvality záhy jmenován řádným profesorem Vysoké školy inženýrského stavitelství ČVUT. Podstatně se zasloužil také o vybudování Matematického ústavu ČSAV

K rozvoji československé vědy přispěl prof. dr. František Vyčichlo četnými pracemi z deskriptivní geometrie, hlavně však z oboru diferenciální geometrie křivek a ploch. Veliké jsou ovšem také jeho zásluhy o výchovu odborníků dobře připravených na řešení náročných úkolů socialistické výstavby našeho státu. Vzácného ocenění jeho vědecké práce i učitelské činnosti a vysokého uznání dostalo se mu udělením Řádu práce v roce 1956.

Nechť vzácný příklad prof. dr. Františka Vyčichla nalezne v řadách naší studující mládeže veliký počet následovníků. Dlouholetá dobrá tradice našeho časopisu posiluje naše naděje, že čtenáři „ROZHLEDŮ“ budou jistě mezi prvními.

Archimedův výpočet obvodu kruhu

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, CSc., MFF UK Praha

„Jak přišel Archimedes zrovna k těm 22 sedminám při vypočítávání konstanty, kterou dnes označujeme π ?“ Tato otázka několika našich čtenářů byla inspirována stručnými zmínkami o čísle π či Archimedových objevech, které jsou uvedeny v učebnicích nebo byly otištěny v našem časopise. Podívejme se tedy do Archimedovy „kuchyně“

Obvod každého kruhu se rovná trojnásobku jeho průměru se zbytkem,

který je menší než sedmina průměru a větší než jeho deset jedenasedmdesátin. Takto zní ve volném překladu věta III v Archimedově díle O měření kruhu; pro nás je snadné zapsat toto tvrzení pomocí zlomků a symbolu π , resp. prvními šesti desetinnými místy rozvoje uvedených racionálních čísel:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

$$3,140\,845 < \pi < 3,142\,857.$$

Archimedes však pracoval jen se slovními vyjádřeními poměrů velikostí úseček, proto se vyjadřoval složitým a zdoluhavým způsobem, raději vynechával výpočty a formuloval jen tvrzení s výsledky pomocných výpočtů. Místo překladu originálního textu naznačíme pomocí dnešní symboliky postup Archimedových úvah a jeho výsledky.

Základní ideu známe — hranici kruhu nahradíme hranicí mnohoúhelníku s 96 stranami; Archimedes začal mnohoúhelníkem opsaným kruhu a pak se zabýval mnohoúhelníkem vepsaným, v obou případech vyšel od šestiúhelníku a počty stran postupně zdvojnásoboval. Prvními čísla, která do svých úvah zavedl, byly dvě aproximace čísla $\sqrt{3}$:

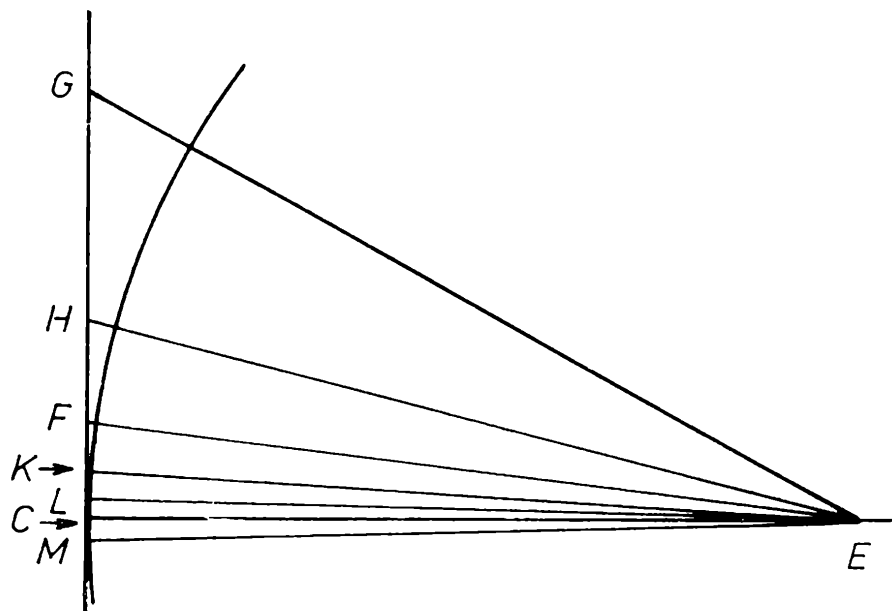
$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Přesvědčte se, že to nejsou ledajaké aproximace; všechna tři čísla se shodují na čtyřech desetinných místech svých rozvoji! Není známo, zda Archimedes tyto aproximace převzal či sám našel; v každém případě od čitatele a jmenovatele uvedených zlomků vede jeho cesta k oněm sedmím a jedenasedmdesátinám v aproximacích čísla π .

Na obr. 1 znázornil Archimedes kruh se středem E , poloměrem EC a tečnou CG v bodě C , zvolil přitom velikost úhlu GEC jako třetinu pravého úhlu, tedy 30° ve stupňové míře. [V originále byla místo latinských písmen řecká, chyběly znaky pro velikosti úseček.] Je jasné, že úsečka CG je polovinou strany pravidelného šestiúhelníku opsaného kruhu; z pravouhlého trojúhelníku GEC Archimedes použil tyto poměry:

$$|EC| : |GC| > 265 : 153, \quad |EG| : |GC| = 306 : 153.$$

Polopřímkami EH , EF , EK , EL pak postupně půlil úhly GEC , HEC , FEC , KEC a získával úsečky HC , FC , KC , LC jako poloviny stran pravidelných mnohoúhelníků s 12, 24, 48 a 96 stranami. Poslední sestavená polopřímka EM je souměrná s EL podle osy EC ; Archimedes tak vyznačil stranu LM pravidelného 96-úhelníku opsaného zvolenému kruhu.



Tento názorný geometrický postup doprovázel výpočty poměrů velikostí úseček; využil k tomu vztah

$$|GE| \cdot |EC| = |GH| \cdot |HC|,$$

který řečtí matematici dobře znali. [V každém trojúhelníku dělí osa vnitřního úhlu protější stranu na dvě části, které jsou v témž poměru jako k nim přilehlé strany.] Dostal tedy

$$|GE| \cdot |EC| = 306 \cdot 265 = |GH| \cdot |HC|;$$

dalšími tehdy běžně známými manipulacemi s poměry získal

$$(|GE| + |EC|) \cdot |EC| = (306 + 265) \cdot 265 = (|GH| + |HC|) \cdot |HC|$$

$$|EC| \cdot |HC| = (|GE| + |EC|) \cdot |GC|.$$

Poměr vpravo mohl už vyjádřit pomocí poměrů velikostí stran trojúhelníku GEC , které uvedl na začátku úvahy:

$$|EC| \cdot |HC| > (306 + 265) \cdot 153$$

$$|EC| \cdot |HC| > 571 \cdot 153$$

Archimedes však potřeboval poměr $|EH| \cdot |HC|$, který odpovídá pro opsaný 12-úhelník poměru $|EG| \cdot |GC|$ charakterizujícímu opsaný 6-úhelník. Tady využil Pythagorovu větu a pro druhé mocniny dostal

$$|EH|^2 \cdot |HC|^2 = (|EC|^2 + |HC|^2) \cdot |HC|^2.$$

Poměr zapsaný vpravo vyjádřil jeho dolní aproximací, odvážně přitom zanedbával a zaokrouhloval; míru jeho velkorysosti zjistíte numerickou kontrolou výpočtů:

$$(|EC|^2 + |HC|^2) \cdot |HC|^2 = (571^2 + 153^2) \cdot 153^2,$$

takže také $|EH|^2 - |HC|^2 = 349\,450 - 23\,409$

a po odmocnění $|EH| - |HC| = 591\frac{1}{8} - 153$.

Způsob, kterým došel od poměru $|EG| - |GC|$ k poměru $|EH| - |HC|$, zopakoval ještě třikrát (se stejnou velkorysostí vůči rovnostem a nerovnostem), dostával:

$$|EF| - |FC| > 1172\frac{1}{8} - 153,$$

$$|EK| - |KC| > 2339\frac{1}{4} - 153,$$

$$|EL| - |LC| > 4673\frac{1}{2} - 153.$$

V posledním vztahu nahradil úsečku EL úsečkou EC a napsal nerovnost mezi poloměrem kruhu a LC , ze které zdvojnásobením vyšlo

$$2|EC| - 2|LC| > 4673\frac{1}{2} - 153.$$

Dvojnásobek LC je však strana LM pravidelného 96-úhelníku, jak už víme, proto $96 - 2|LC|$ je obvod tohoto mnohoúhelníku, přitom $153 - 96 = 14\,688$. Archimedes už pak bez obtíží poměry převrátil a vyjádřil:

$$\text{obvod 96-úh.} - \text{průměr kruhu} < 14\,688 - 4673\frac{1}{2}.$$

Napravo zapsaný poměr nahradil poměrem $22 - 7$, který je o něco větší; nalevo zapsaný poměr nahradil o něco menším poměrem:

$$\text{obvod kruhu} - \text{průměr kruhu} < 22 - 7.$$

Číslo 7 se tedy objevilo v konečném výsledku jako vhodné malé číslo, které se nabídlo při krácení poměru napravo; platí totiž

$$14\,688 - 7 = 102\,816, \quad 4673,5 - 22 = 102\,817,$$

takže poměr $14\,688 - 4673,5$ je takřka roven $22 - 7$.

Na obr. 2 je opět kruh se středem E a poloměrem EC , velikost 30° má úhel BAC , úsečka BC je stranou pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kruhu. Archimedes vyjádřil

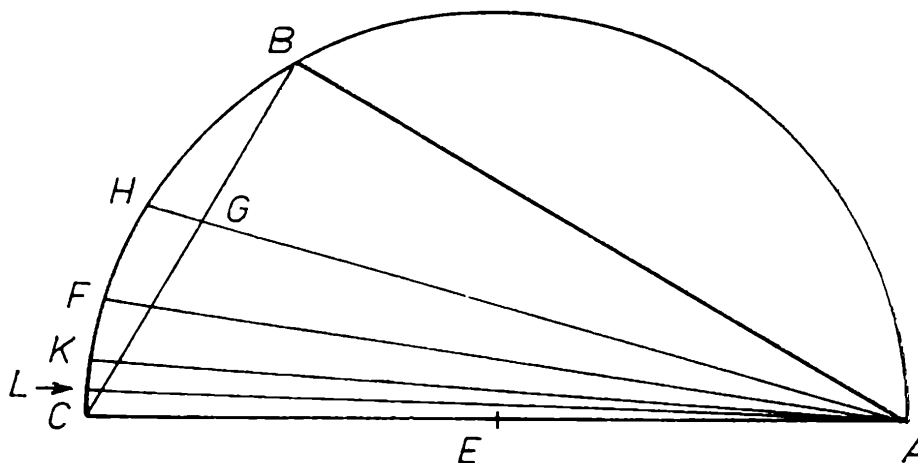
$$|AB| - |BC| < 1351 - 780, \quad |AC| - |CB| = 1560 - 780,$$

takže pro $\sqrt{3}$ použil horní aproximaci, kterou znal. Další postup spočíval v půlení úhlů s vrcholem A ; úsečky CH , CF , CK , CL jsou stranami pravidelných 12-, 24-, 48-, 96-úhelníků vepsaných do kruhu. Po dosažení dále uvedeného poměru pro $|CL|$ Archimedes opět poměr převrátil a vyjádřil poměr obvodu vepsaného 96-úhelníku k průměru kruhu:

$$|AC| - |CL| < 2017\frac{1}{4} - 66$$

$$96|CL| - |AC| > 6336 - 2017\frac{1}{4}$$

$$\text{obvod 96-úh.} - \text{průměr kruhu} > 6336 - 2017\frac{1}{4}.$$



Poměr nalevo lze *zvětšit* na poměr obvodu kruhu k průměru kruhu, poměr napravo lze nahradit *menším*, a to $231 \div 71$, takže platí

$$\text{obvod kruhu} : \text{průměr kruhu} > 223 \div 71.$$

Archimedes tak postupoval; jak ho napadlo zkrátit poměr vpravo na 71 tiny, neuvedl, ale nejspíše směřoval k 70 a shledal 71 jako lepší k aproximaci kráceného poměru.

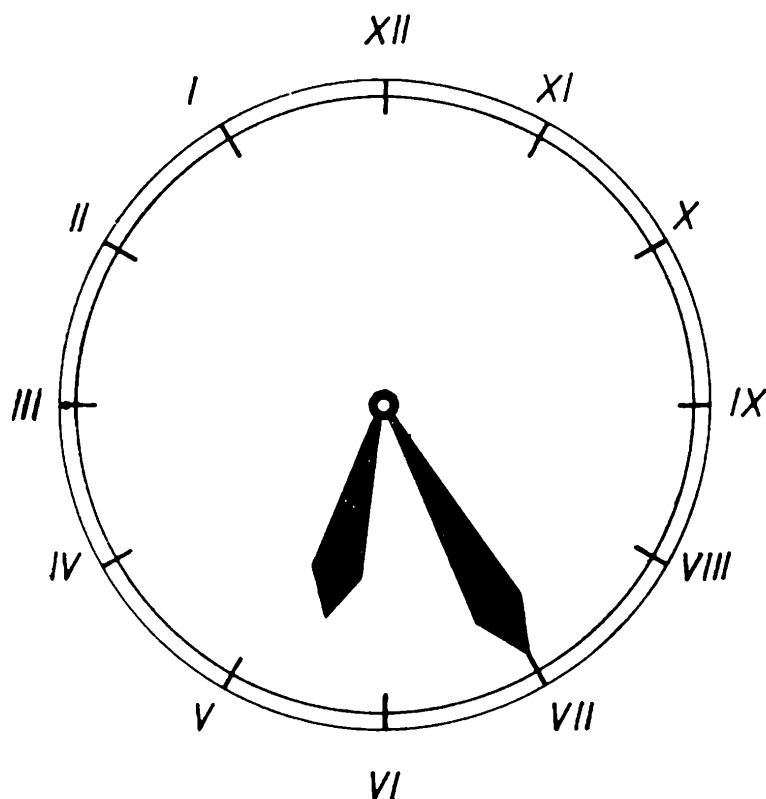
Pro úplnost si připomeňme, že velmi přesnou a logicky náročnou metodou dokázal Archimedes poučku o obsahu kruhu:

Každý kruh se rovná pravoúhlému trojúhelníku, přitom poloměr kruhu se rovná jedné ze stran přiléhajících k pravému úhlu a obvod je základnou trojúhelníku. Dnes bychom pomocí symbolů S , π , r zapsali tuto větu vzorcem $S = 0,5 \cdot r \cdot 2 \pi r$, jsme však zvyklí na $S = \pi r^2$. Moderní symbolika zjednodušuje vyjadřování i studium matematiky; Archimedes měl situaci obtížnější, jak jsme se mohli přesvědčit.

PŘEMÝŠLÍME, ŘEŠÍME...

Novinka z Kocourkova

Jednoho dne se v Kocourkově rozhodla městská rada svolat shromáždění všech občanů, aby se hlasováním rozhodlo o činu, který zajistí Kocourkovu světové prvenství. Vystoupil na něm autor průkopnické myšlenky kocourkovský hodinářský mistr Pankrác Kukačka, jenž všechny seznámil se svým návrhem, aby na radničních hodinách byl změněn směr pobytu hodinových ručiček a aby odpovídajícím způsobem byl přečíslován i jejich ciferník. Na velkou tabuli též načrtl, jak bude vypadat jejich nový vzhled (obr. 1). Mistr Kukačka dále prohlásil, že



Obr. 1

jméno Kocourkova pronikne do matematiky, neboť otáčení v kladném smyslu se již nebude charakterizovat jako otáčení proti pohybu hodinových ručiček, nýbrž se bude vysvětlovat, že je ve směru pohybu ručiček na radničních hodinách v Kocourkově.

Shromáždění návrh jednomyslně přijalo. Úprava hodin netrvala dlouho. Ovšem čtení na nich aspoň zpočátku vedlo k rozpakům a omylům. Někteří obyvatelé Kocourkova přišli na to, že normálním způsobem lze jejich údaj číst v zrcátku, ovšem musí se dávat pozor při čtení číslic; číslice IV a VI, IX a XI jsou dokonce zaměněny.

Kocourkovské hodiny přinášejí problém :

Představme si, že na jejich ciferníku nejsou napsány číslice. Nalezněte postup, jak z údaje, který na nich přečte člověk, jenž není s jejich zvlátností obeznámen, určíme, kolik je skutečný čas.

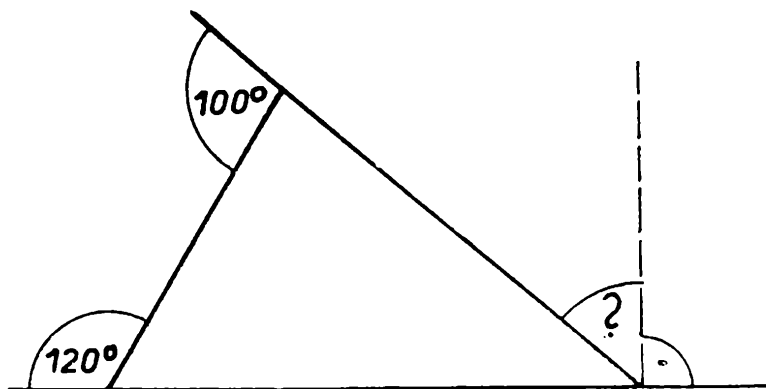
Řešení necháváme čtenářům na prázdniny a uveřejníme je v 1. čísle 62. ročníku.

Jiří Mída

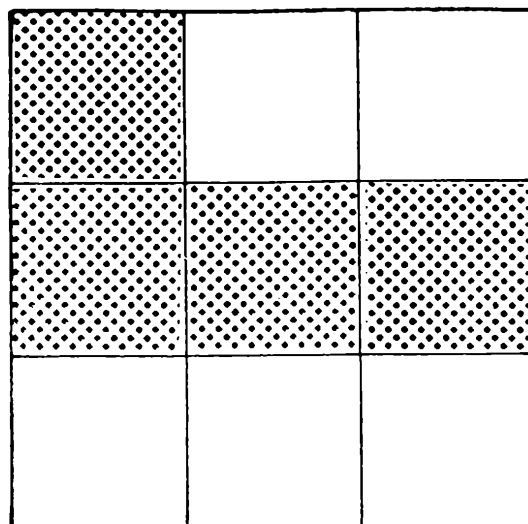
Nejmladším čtenářům

Pro nejmladší čtenáře předkládám několik příkladů z geometrie na procvičení vtipu i početní rutiny.

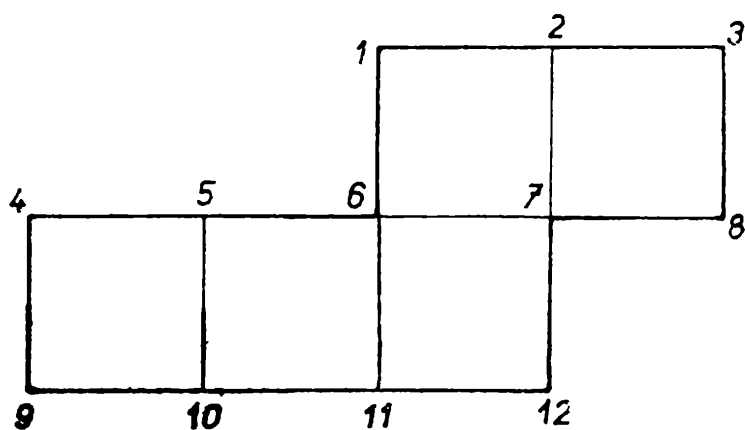
1. (Obr. 1.) Jak velký je úhel označený otazníkem ?
[50°]



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

2. (Obr. 2.) a) Tmavší plocha na obr. má obsah 36 cm^2 . Jak velký je její obvod?

[30 cm]

b) Tmavší plocha na obr. má obvod 20 cm. Jak velký má obsah?

[16 cm^2]

3. (Obr. 3.) K narýsovanému obrazci připojte ještě jeden čtvereček tak, aby vznikla síť krychle.

[Čtvereček se může připojit nad některou z těchto stran: 9, 10; 10, 11; 11, 12; 3, 8]

4. Kolik nejvýše může mít a) pětiúhelník úhlů velikosti 150° ? b) Totéž pro sedmiúhelník.

[a) 3, b) 5]

5. Lze uvnitř kruhu o poloměru r narýsovat čtverec o obsahu $\frac{7}{4} r^2$?

[Ne]

6. Je možno uvnitř kruhu o poloměru 3 cm narýsovat kružnici o délce 18 cm?

[Ano]

7. Je dána koule K_1 ($r = 1$ cm) a koule K_2 o objemu 4 cm^3 . Je možno kouli K_2 umístit celou do koule K_1 ? [Ano]

8. Je dána koule ($r = 1$ cm) a krychle o objemu $\frac{1}{2} \text{ cm}^3$. Je možno tuto krychli umístit do dané koule? [Ano]

Stanislav Horák

Umíte počítat?

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V posledních několika letech si stěžují učitelé fakult technických, přírodovědeckých, pedagogických a dokonce i učitelé matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, že absolventi středních škol, kteří přicházejí na tyto fakulty, nedovedou počítat. Všeobecně se konstatuje, že jim dělají potíže úpravy algebraických výrazů, počítání s mocninami a odmocninami i řešení rovnic a nerovnic. Přitom jde vesměs o skutečně základní učivo, jehož dobrá znalost je nutná nejen pro vysokoškolské studium matematiky, ale i pro studium fyziky, některých přírodních věd a většiny technických disciplín. Přesvědčte se na řešení úloh, které uvedu v tomto článku, zda výše uvedené stížnosti budou či nebudou platit také pro vás. Úlohy jsou vybrány z různých čísel dvou časopisů, a to bulharského *Matematika* a jugoslávského *Matematičko fizički list za učenika srednjih škola*; oba mají obdobné poslání jako naše Rozhledy matematicko-fyzikální.

Počítejte nejprve sami a teprve potom nahlédněte do poznámek, které uvádím v druhé části článku.

I

1. Zjistěte, čemu se rovná

$$a^{-1} \left(1 + \frac{1}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} (1 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

jestliže $a \neq 0$ je libovolné reálné číslo.

2. Budiž $a \neq 0$ reálné číslo a $n \geq 2$ celé; pro které číslo a je

$$\frac{(a^n + a^{n-1})^2}{a^{2n-1}}$$

rovno číslu $a + 1$?

3. Nechť x, y, z jsou reálná čísla, pro něž je $x + y + z = 0$, $xyz \neq 0$; dokažte, že potom je

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy} = 3.$$

4. Nechť a, b, c, x jsou reálná čísla, pro něž je

$$ax^3 + 2bx + c = 0;$$

dokažte, že potom je $acx \leq b^2$.

5. Budiž $a > b > 0$, $a^2 + b^2 = 6ab$; dokažte, že potom je

$$\frac{4ab}{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Řešte tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} (x - y) \left(\frac{1}{2} \right)^{y-x} &= 5 \cdot 2^{x-y} \\ (x - y)^{\frac{x+y}{7}} &= 125. \end{aligned}$$

7. Pro která reálná čísla x platí tyto rovnosti:

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 2x + 1 = x + 4;$

b) $3|4x + 3| + \sqrt{16x^2 + 24x + 9} - 5 = 16x + 7.$

8. Budiž $a \neq -2$, $a \neq 3$ reálné číslo; čemu se potom rovná

$$\frac{a|a - 3|}{a^2 - a - 6}?$$

9. Pro která reálná čísla k mají rovnice

$$x^2 + (k^2 - 5k + 6)x = 0,$$

$$x^2 + 2(k - 3)x + k^2 - 7k + 12 = 0$$

tytéž kořeny?

10. Nechť a, b jsou celá čísla; dokažte, že $a^2 - 7b^2 = 2ab$ právě tehdy, je-li $a = b = 0$.

11. Nechť a, b, c jsou reálná čísla; dokažte, že také kořeny rovnice

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

jsou reálná čísla.

12. Je dána rovnice

$$x^2 - 2x + k = 0;$$

pro které reálné číslo k je součet dvojmocí kořenů této rovnice rovný nule?

13. Pro která reálná čísla a má rovnice

$$(a + 1)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$$

kladné kořeny?

14. Pro která reálná čísla a mají kořeny x_1, x_2 rovnice

$$x^2 - 2(a + 1)x + \sqrt{a^2 + 2a - 3} = 0$$

tuto vlastnost:

$$4x_1^2 x_2^2 < x_1^2 + x_2^2.$$

15. Které z čísel $x = \log_{20} 80$, $y = \log_{80} 640$ je větší?

II

1. První úlohu můžeme řešit převedením druhého a třetího činitele součinu na odmocniny nebo bez tohoto převádění. Musíme si potom ovšem uvědomit, že vzorce

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}$$

platí pro každé reálné číslo $a \neq 0$ jen tehdy, jsou-li čísla r, s celá. Protože v našem případě je $a \neq 0$ libovolné reálné číslo, není

$$(a^2)^{\frac{1}{2}} = a, \tag{1}$$

nýbrž je

$$(a^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Rovnost (1) platí jen pro $a > 0$. Výsledek úlohy je

$$\frac{|a|}{a} = \begin{cases} 1 & \text{pro } a > 0 \\ -1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

2. Pro usnadnění výpočtu je vhodné užít toho, že je

$$a^n + a^{n-1} = a^{n-1}(a + 1);$$

výsledek je $a = -1$.

3. Z rovnosti $x + y + z = 0$ plyne, že je $x + y = -z$; tuto rovnost umocníme na třetí a potom užijeme toho, že je $3xy(x + y) = -3xyz$.

4. Danou rovnost násobíme číslem ax a potom na obou stranách rovnosti přičteme b^2 .

5. Vypočteme $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, užitíme dané rovnosti $a^2 + b^2 = 6ab$ a toho, že je $a+b > 0$, $a-b > 0$.

6. Protože je $\left(\frac{1}{2}\right)^{y-x} = 2^{x-y} > 0$,

můžeme první rovnici dělit číslem 2^{x-y} . Výsledek je $x = 13$, $y = 8$.

7. Užitíme toho, že je

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

$$\sqrt{16x^2 + 24x + 9} = \sqrt{(4x+3)^2} = |4x+3|.$$

V případě a) platí daná rovnost pro $x \leq 3$, v případě b) pro $x \geq -\frac{3}{4}$.

8. Výsledek je tento:

$$\frac{a}{a+2} \text{ pro } a > 3, \quad \frac{-a}{a+2} \text{ pro } a < 3, \quad a \neq -2.$$

9. První rovnice má jeden kořen $x_1 = 0$; má-li to být také kořen druhé rovnice musí být

$$k^2 - 7k + 12 = 0.$$

Z toho plyne, že je $k_1 = 3$, $k_2 = 4$. Pro $k = 3$ mají obě rovnice kořeny $x_1 = x_2 = 0$, pro $k = 4$ je $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

10. Je-li $a = 0$, je $b = 0$ a obráceně; rovnost potom platí. Je-li $b \neq 0$, pak z dané rovnice plyne, že je

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{b}\right) - 7 = 0.$$

To znamená, že racionální číslo $\frac{a}{b}$ je kořenem rovnice $x^2 - 2x - 7 = 0$, avšak ta má kořeny iracionální; proto nemůže být $b \neq 0$. Totéž platí pro číslo a .

11. Po vynásobení dostaneme rovnici:

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ac) = 0,$$

která má diskriminant

$$D = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ac).$$

Snadno zjistíme, že je

$$\frac{D}{2} = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2;$$

je tedy $D \geq 0$, takže daná rovnice má reálné kořeny.

12. Pro $k = 2$.

13. Je-li $a = -1$, jde o lineární rovnici, která má kořen $x = 1 > 0$. Je-li $a \neq -1$, jde o rovnici kvadratickou. Jestliže má kořeny $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, pak musí být její diskriminant nezáporný, musí být $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$. Z první podmínky plyne, že je

$$4a + 3 \leq 0 \quad \text{čili} \quad a \leq -\frac{3}{4};$$

z dalších dvou podmínek plynou tyto nerovnosti:

$$-\frac{2a}{a+1} > 0, \quad \frac{a+3}{a+1} > 0.$$

Výsledek: $-1 \leq a \leq -\frac{3}{4}$.

14. Aby odmocnina, která je v dané rovnici, měla smysl, musí být

$$a^2 + 2a - 3 \geq 0 \quad \text{čili} \quad (a+3)(a-1) \geq 0,$$

tj. $a \leq -3$ nebo $a \geq 1$. Dále uijeme toho, že je

$$x_1 + x_2 = 2(a+1), \quad x_1 x_2 = \sqrt{a^2 + 2a - 3} \quad (1)$$

Danou podmínku lze napsat takto:

$$4x_1^2 x_2^2 < (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2.$$

Po dosazení podle (1) dostaneme po úpravě, že je

$$a^2 + 2a - 67 < 0.$$

Z toho plyne, že je

$$-1 - \sqrt{68} < a < -1 + \sqrt{68};$$

protože je zároveň $a \leq -3$, $a \geq 1$, dostáváme, že je

$$a \in (-1 - \sqrt{68}, -3) \cup (1, -1 + \sqrt{68}).$$

15 Z daných údajů plyne, že je

$$20^x = 80, \quad 80^y = 640.$$

Zlogaritmuje-li tyto rovnosti při základu 10, dostaneme (po úpravě), že je

$$x = \frac{3 \log 2 + 1}{\log 2 + 1}, \quad y = \frac{6 \log 2 + 1}{3 \log 2 + 1}$$

Z toho po kratším výpočtu plyne, že je

$$x - y = \frac{\log 2(\log 8 - \log 10)}{(\log 2 + 1)(3 \log 2 + 1)} < 0,$$

neboť $\log 8 < \log 10$; je tedy $x < y$.

Univerzální operace na Rubikově kostce

VLADIMÍR DŘÍZAL, student PedF UK Praha

V šestém čísle loňského ročníku Rozhledů v článku „Kterak kroutit kostkou ku kýžené konfiguraci“ RNDr. Petr Simon, CSc., popsal algoritmus, který nás při skládání kostky bezpečně dovede k cíli. Jistě jeho užitím nelze dosahovat špičkových časů, ale je zajímavý tím, že k jeho zvládnutí je potřeba osvojit si pouze tři operace, z nichž jedna je sedmitahová, druhá osmitahová a třetí čtrnáctitahová.

Začal jsem se zajímat o to, zda počet operací lze ještě dále redukovat. Po delším snažení jsem skončil algoritmem, k jehož zvládnutí je postačující naučit se jednu sedmitahovou operaci ω a mít alespoň průměrnou prostorovou představivost. Podotýkám, že pro toho, jehož cílem je skládání kostky v co nejkratším čase, nemá tento algoritmus žádný význam. Spíše bych jej doporučil těm, kteří odmítají převzít cizí postup a zatím se marně snaží vytvořit algoritmus vlastní, neboť ten, kdo zvládne operaci ω , nemá zdaleka vyhráno a musí ještě vynaložit dosti důmyslu, aby kostku uvedl do žádoucí konfigurace.

Jednotlivé pohyby vrstvami budu značit podobně jako autor citovaného článku tak, jak je to naznačeno na obr. 1.

Pohyby inverzní budou T^{-1} , F^{-1} , R^{-1} , L^{-1} , S^{-1} .

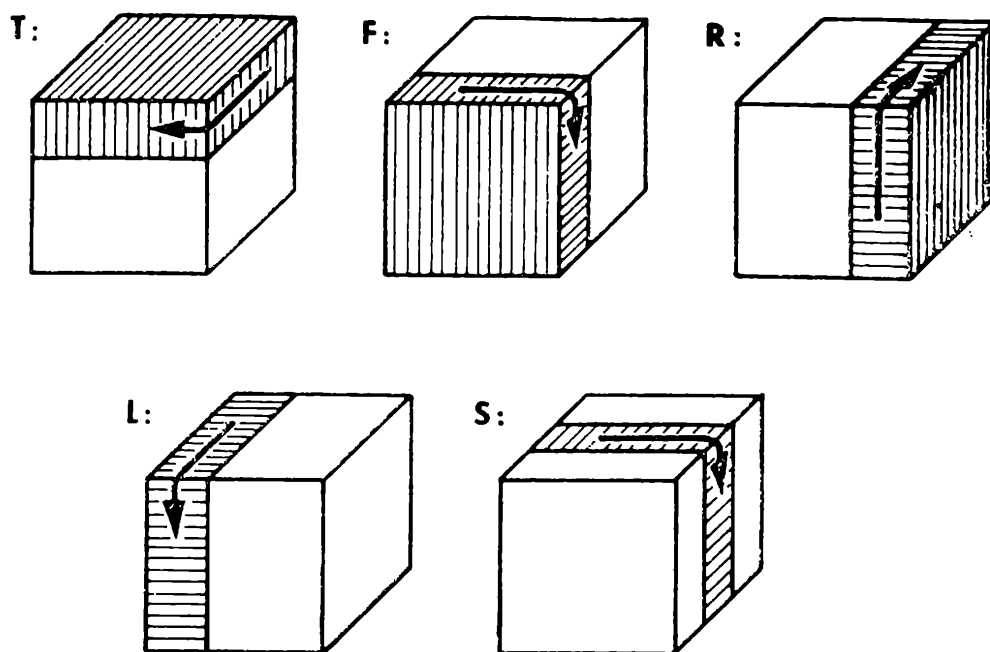
Operaci ω pomocí zavedené symboliky zapíšeme následovně:

$$\omega = T F R T R^{-1} T^{-1} F^{-1}.$$

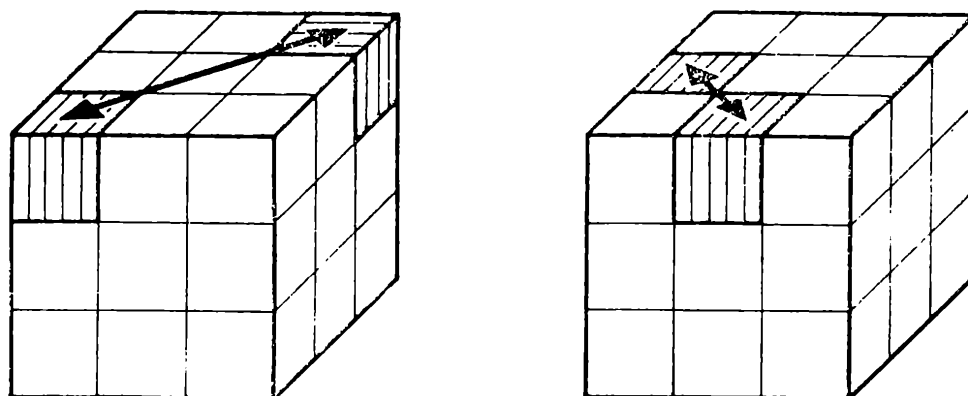
Celý algoritmus je pak možno rozdělit do těchto čtyř podúloh:

- a) umístit rohové krychličky na svá místa;
- b) umístit hranové krychličky na svá místa;
- c) zorientovat hranové krychličky;
- d) zorientovat rohové krychličky.

Všechny rohové krychličky umístíme na správná místa pomocí operace ω , která mezi sebou vyměňuje dvě rohové krychličky, jak je naznačeno na obr. 2a.



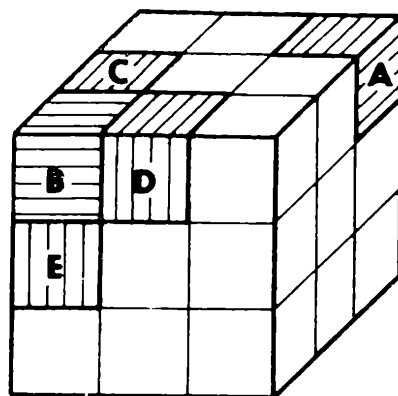
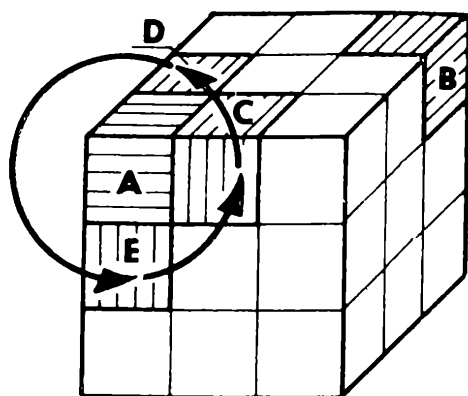
Obr. 1



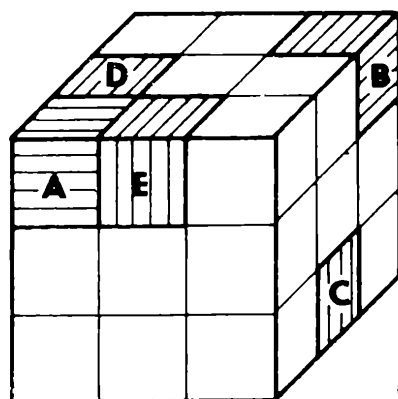
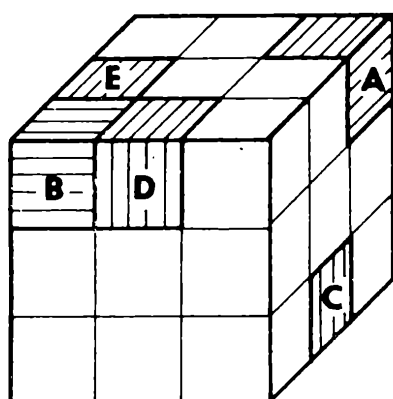
Obr. 2 ab

V druhém kroku, který je nejnáročnější, umístíme na správná místa hranové krychličky. Opět použijeme operace ω , která mezi sebou vyměňuje dvě hranové krychličky, vyznačené na obr. 2b. Potíž je nyní v tom, že po každém provedení operace ω se mezi sebou vymění i dvě rohové krychličky, vyznačené na obr. 2a, které jsme již v prvním kroku správně umístili.

Jak si s touto nesnází můžeme, poradit si ukážeme na příkladě. Představme si, že jsme v situaci, kdy všechny rohové krychličky jsou na svých místech a hranové krychličky potřebujeme přemístit tak, jak je naznačeno na obr. 3a. Z tohoto obrázku je patrné, že potřebujeme uskutečnit dvě výměny hranových krychliček; totiž krychličku C za krychličku D a pak krychličku D za krychličku E . Provedením operace ω se první požadovaná výměna uskuteční, ale k naší nelibosti se mezi sebou vymění i rohové krychličky A a B , takže získáme kostku v postavení zachyceném na obr. 3b.



Obr. 3 ab



Obr. 4 ab

Nyní tedy potřebujeme mezi sebou vyměnit hranové krychličky D a E , ale současně i rohové krychličky A a B . Musíme použít nějakou pomocnou operaci $\mathbf{0}$, která kostku převede do takového postavení, v němž po provedení operace ω dojde k požadovaným výměnám. V našem případě například vyhovuje tato pomocná operace:

$$\mathbf{0} = \mathbf{L} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{S}^2.$$

Pomocnou operací $\mathbf{0}$ převedeme kostku do situace zachycené na obr. 4a. Z obrázku je vidět, že nyní použitím operace ω dojde k potřebným výměnám, takže získáme kostku v postavení zachyceném na obr. 4b.

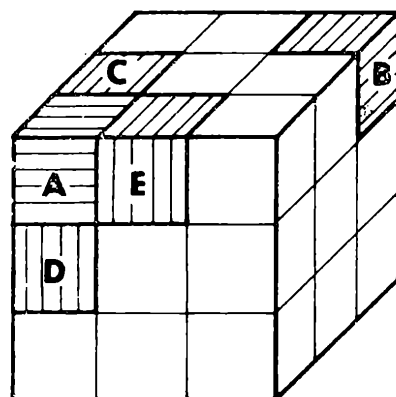
Použijeme-li nyní operaci

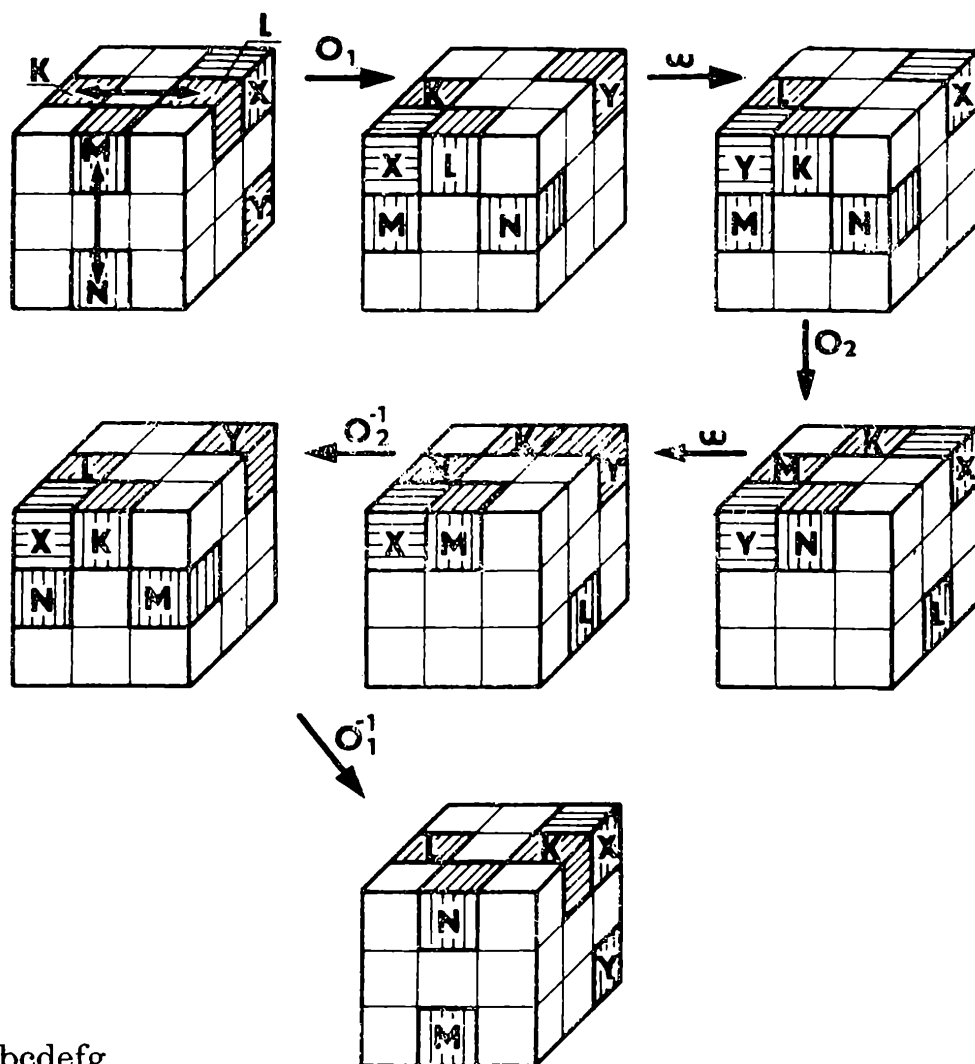
$$\mathbf{0}^{-1} = \mathbf{S}^2 \mathbf{L} \mathbf{S} \mathbf{L}^{-1},$$

Obr. 5

která je inverzní operací k operaci $\mathbf{0}$, převedeme kostku do postavení, které bylo v tomto příkladě cílem. Viz obr. 5.

Z příkladu, ikdyž zachycuje poměrně jednoduchou situaci, je patrné, jak je třeba při výměnách hranových krychliček postupovat. Stručně si ještě probereme nejobtížnější situaci, se kterou se při výměnách hra-





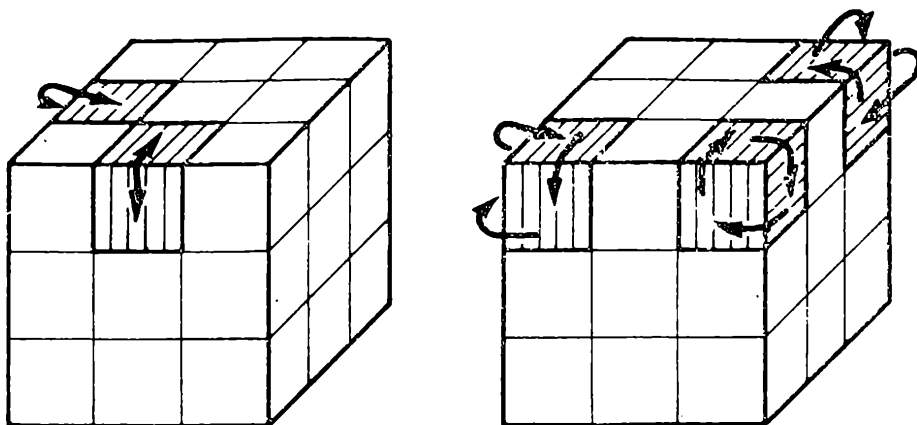
Obr. 6 abcdefg

nových krychlíček můžeme setkat. Určení konkrétních pomocných operací O_1 a O_2 v tomto příkladě již ponechávám čtenáři.

Jsme v situaci, kdy potřebujeme vyměnit hranové krychličky K s L a M s N a ani jedna z dvojic není v poloze, ve které by šlo přímo užít operace ω , (viz obr. 6a). Krychličky K a L do této polohy převedeme pomocnou operací O_1 (obr. 6b) a operací ω je mezi sebou vyměníme, přičemž se mezi sebou vymění i rohové krychličky X a Y (obr. 6. c). Nyní pomocnou operací O_2 převedeme na místa krychlíček K a L krychličky M a N , přičemž je důležité, aby operace O_2 ponechávala rohové krychličky X a Y na svých místech (obr. 6d). Operací ω vyměníme hranové krychličky M a N a zároveň i rohové krychličky X a Y (obr. 6e). Nyní operacemi O_2^{-1} a O_1^{-1} převedeme krychličky K , L , M , N , X , Y na svá místa (obr. 6f, 6g). Zapsáno symbolicky vypadá právě popsáný manévř takto:

$$O_1 \omega O_2 \omega O_2^{-1} O_1^{-1}.$$

Lze dokázat, že jsou-li všechny rohové krychličky na svých místech, pak k umístění hranových krychlíček je nutno provést sudý počet výměn. Pravdivost tohoto tvrzení je pro popisovaný algoritmus nezbytná,



Obr. 7 ab

neboť je zřejmé, že lichou výměnou dvou hranových krychliček se prohodí dvě již správně umístěné rohové krychličky a sudou výměnou se opět vrátí.

Podařilo-li se nám umístit všechny hranové i rohové krychličky na svá místa, máme vyhráno, neboť jejich správné zorientování není již tak obtížné.

Nejprve zorientujeme hranové krychličky pomocí operace ω^2 (tj. dvakrát za sebou provedené operace ω), která na místě převrací dvě hranové krychličky vyznačené na obr. 7a.

Nakonec přistoupíme k zorientování rohových krychliček, k čemuž použijeme operace ω^4 , která na místě otáčí tři rohové krychličky, tak jak je vyznačeno na obr. 7b, a vše ostatní nechává v původní poloze.

Při zorientování hranových i rohových krychliček opět můžeme využívat pomocné operace, ale není to již nezbytně nutné.

Budeme-li operaci ω^0 chápat jako identitu a za pomocné operace $\mathbf{0}_1$, $\mathbf{0}_2$ připustíme rovněž i identitu, můžeme závěrem říci, že z každého postavení lze kostku převést do postavení základního pomocí pohybů, které jsou vždy ve tvaru

$$\mathbf{0}_1 \omega^n \mathbf{0}_2 \omega^n \mathbf{0}_2^{-1} \mathbf{0}_1^{-1},$$

kde $n = 0, 1, 2, 4$. Podstatné je, že $\mathbf{0}_1$ a $\mathbf{0}_2$ jsou pomocné operace, které lze vždy i při průměrné prostorové představivosti v dané situaci určit.

Fyzikálny ústav Slovenskej akadémie vied v Bratislave

RNDr. ANNA NOGOVÁ, CSc., FÚ SAV Bratislava

Fyzikálny ústav Slovenskej akadémie vied v Bratislave si bude o dva roky pripomínať svoje tridsiate narodeniny. Hovorí sa, že pre fyzika-vedca býva obdobie okolo tridsiatky najtvorivejším. Ako je to však s „najvhodnejším“ vekom pre vedecké inštitúcie? Porovnanie asi nebude namieste, pretože vedecký ústav, na rozdiel od jednotlivca, si nemôže dovoliť starnúť, nároky na tvorivú aktivitu stále rastú. Popri vlastnej práci je potrebné neustále sledovať, čo je nové vo svete, využívať nové poznatky pri riešení úloh štátneho plánu a zároveň reagovať na požiadavky nášho národného hospodárstva.

Pozrime sa, ako Fyzikálny ústav začínal a ktoré úlohy v súčasnosti rieši. Prvé fyzikálne pracovisko Slovenskej akadémie vied začalo svoju činnosť v októbri 1955 v Bratislave. Vtedy vznikol na návrh Komisie pre matematiku a fyziku Kabinet fyziky SAV. Prvým riaditeľom bol *akademik Dionýz Ilkovič*, ktorý túto funkciu vykonával až do roku 1961. Pri reorganizácii r. 1957 bol Kabinet premenovaný na Laboratórium fyziky, z ktorého r. 1963 vznikol Fyzikálny ústav SAV. V prvých rokoch mali pracovníci k dispozícii iba niekoľko miestností v budove Predsedníctva akadémie v Bratislave. Počet pracovníkov však narastal, a tak sa ústav presťahoval r. 1962 na Patrónku do budovy Chemického ústavu SAV, ktorá je súčasťou areálu pracovísk SAV a kde sídli dodnes. Od r. 1981 je Fyzikálny ústav organizačne začlenený do Centra elektrofyzikálneho výskumu SAV, kam patrí aj Elektrotechnický ústav a Ústav teórie merania, ktorý dnes nesie názov Ústav merania a meracej techniky. Súčasťou tohoto komplexu je aj detašované Oddelenie fyzikálnej elektromiky s pôsobiskom v Piešťanoch.

Organizačné delenie ústavu je určené okruhom problémov, ktoré sa tu riešia. Vedecký výskum je sústredený v štyroch oddeleniach: Oddelenie fyziky tuhých látok, fyziky rozhraní, jadrovej fyziky a teoretickej fyziky. Laika asi najviac upúta názov Fyzika rozhraní, ktorý znie trochu nezvyčajne. Je to zároveň najmladšie oddelenie, jeho vznik si vynútil rozvoj

takých aktuálnych odborov, ako napríklad mikroelektronika a optoelektronika. Predmetom skúmania tohoto oddelenia sú fyzikálne javy, ktoré vznikajú na rozhraní dvoch materiálov — napr. polovodiča a dielektrika. Fyzikálne vlastnosti takýchto rozhraní sú aj pre teoretikov zaujímavým, ešte nedoriešeným problémom. Z praktického hľadiska je však dôležité to, že ide o javy súvisiace s činnosťou rôznych elektronických súčiastok.

Najväčším oddelením Fyzikálneho ústavu je oddelenie tuhých látok. Rieši spolu päť úloh štátneho plánu základného výskumu. Týkajú sa najmä vyšetrovania vlastností kryštalických a nekryštalických látok a vplyvu rôznych prímiesí na transportné a mechanické vlastnosti týchto látok. Veľká pozornosť sa venovala, resp. venuje moderným materiálom, ktoré majú perspektívu technického využitia. Sú to napríklad polovodičové sklá a niektoré amorfné kovové zliatiny. K najväčším úspechom nielen oddelenia, ale celého ústavu patrí vývoj aparatury na prípravu amorfných kovových materiálov. Získavajú sa tu tenké kovové pásiky s niektorými vynikajúcimi fyzikálnymi vlastnosťami požadovanými napríklad pri výrobe hlavíc pre magnetický záznam alebo jadier špeciálnych transformátorov.

Hlavnou úlohou Fyzikálneho ústavu však naďalej zostáva základný výskum — t.j. snaha o pochopenie a vysvetlenie fyzikálnych javov. K takémuto chápaniu vedy má blízko aj oddelenie teoretickej fyziky. Práca oddelenia sa orientuje v dvoch smeroch: teória tuhých látok a teória elementárnych častíc. Donedávna boli tieto dve vedné disciplíny dosť vzdialené, v posledných rokoch sa však našiel spoločný jazyk, ktorý vychádza zo základných princípov kvantovej teórie poľa.

Od fyziky elementárnych častíc nemá ďaleko ani jadrová fyzika, i keď na ústave je skôr orientovaná na riešenie vybraných experimentálnych problémov. Oddelenie jadrovej fyziky je druhým najväčším na ústave a aj problematika, ktorou sa zaoberá, je rozsiahla. Od teoreticky zameraného štúdia mechanizmov jadrových reakcií až po vývoj malých urýchľovačov používaných ako neutrónové generátory.

Práca ústavu sa však nedá charakterizovať len vymenovaním tém, na ktorých sa pracuje. Patrí sem aj celý rad ďalších činností, súvisiaci s úspešným chodom vedeckého pracoviska. Je to napríklad výchova mladých pracovníkov, spolupráca s podnikmi, vedecká spolupráca so zahraničnými ústavmi, vydávanie časopisu *Acta Physica Slovaca*, pravidelné organizovanie medzinárodných konferencií atď. O tom by najlepšie mohol rozprávať riaditeľ ústavu *RNDr. Mikuláš Blažek, DrSc.* A tak len zostáva konštatovať, že to svoje tvorivé obdobie si Fyzikálny ústav snaží udržiavať stále.

Z NOVÝCH KNIH

Bizám, G. — Herczeg, J.:

ZAÚJÍMAVÁ LOGIKA

Alfa, Bratislava 1982, preklad z maďarčiny, 424 strán, 362 obr., viaz. Kčs 27,—.

Volná chvíľa studentov vždy poteší. Formu využitia si môžu predsa sami zvoliť. Zdá sa mi, že tých s radosťou premýšľajúcich, poteší pekná logická úloha, hra či hlavolam.

Knižka „Zaujímavá logika“ je súborom 175 úloh usporiadaných do tematických sérií. V druhej časti sú uvedené vysvetlenia a podrobné riešenia k úlohám. Väčšina úloh je nositeľom nejakej matematickej myšlienky. Možno vytvárať matematický model situácie, zovšeobecňovať a abstrahovať. Využívať analógiu, logickú symetriu, indukciu, kombinatoriku, deliteľnosť čísel. Dozviete sa o „škátulovom princípe“, rekurzii, diofantických rovniciach. Na svoje si prídu žiaci základných škôl i stredoškôlaci. Napríklad: Koľkými spôsobmi možno výjsť po dvanástich schodoch, ak možno preskočiť pri každom kroku najviac jeden schod? Akú otázku položíte na rázcestí, aby ste poznali správny smer cesty, ak opýtaný môže odpovedať len ano—nie a dokonca môže aj klamať? Akým postupom si rozdelia traja zbojníci rôznorodý úlovok, ak chcú byť pri tomto rozdelení „spravodliví“?

Ak by vás riešenia zaujímavých úloh zaujalo, nezabudnite sa pozrieť aj do ďalších knižiek:

Bizám, G. — Herczeg, J. Hra a logika v 85 príkladoch. Bratislava, Alfa 1979.

Dynkin, J. B. a kol.: Matematické hlavolamy. Bratislava, Alfa 1979.

Kordemskij, B. A.: Hry, hlavolamy, triky. Bratislava, Obzor 1967.

Kowal, S.: Matematika pro volné chvíle. Praha, SNTL 1975.

Čas strávený nad nimi vás určite poteší, rozšíri myšlienkový obzor, spestrí spôsoby argumentácie. Pekná logická úloha a jej samostatné vyriešenie je dar pre ducha. Človek pookreje, povznesie sa a s chuťou vykročí za prekonávaním ďalších problémov. Skúste to.

Dušan Jedinák

Csákány, A.:

CO UMÍ KAPESNÍ KALKULÁTOR

Vydalo SNTL, Praha 1982, preklad z maďarčiny, 152 strán, 48 obrázkov, 11 tabuliek, viaz. Kčs 14,—

Konečne je tu, čo tu malo byť skôr. Jednoduchá a zaujímavá pomôcka pre efektívne využitie vreckových kalkulačiek. Určená širokému okruhu používateľov tohoto moderného výpočtového prostriedku. Predovšetkým žiakom základných škôl a študentom — stredoškólakom.

Čo všetko knižka poskytne?

Stručný a jednoduchý popis konštrukcie a činnosti kalkulačky. Upozornenie na typy, kategórie, funkčné schopnosti a údržbu kalkulačiek. Vysvetlenie základných vlastností vreckového kalkulátora — presnosť, chyby, nezobrazené číslce, číselný rozsah, vnútorná organizácia výpočtu, reťazenie operácií, pamäť. Návod na výpočet zložitých funkcií na jednoduchej kalkulačke. Ukážky hier s kalkulátormi. Prehľad označení tlačítok, ich význam. Zoznam ďalšej študijnej literatúry.

Na pochopenie obsahu knižky netreba zvlášťne vedomosti z elektroniky ani výpočtovej techniky. Najlepšia bude hneď pri čítaní práca s vlastnou či vypožičanou kalkulačkou. V knižke sú návody, ktoré môžete hneď vyskúšať. Stredoškólači si môžu preveriť niektoré iteračné metódy a rekurzívne vzorce pre výpočet hodnôt niektorých zaujímavých funkcií.

Stále častejšie sa v rôznych časopisoch (napr. Amatérske rádio, Technický magazín, Elektrón, VTM, ale aj Říše hvězd) objavujú návody na efektívne využitie kalkulačiek a prácu s programovateľnými kalkulátormi. „Matematické obzory“ zv. 18 a 19 (roč. 1982) priniesli „Niekoľko algoritmov pre kalkulačku“ V roku 1983 má výjsť publikácia Kopřiva, J. — Pokorný, Z.: Programování kapesních kalkulátorů. Objednať si ju môžete na adrese Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 118 46 Praha 1 — Petřín 205.

Nezabudnite, že do vašej knižnice patria aj publikácie o použití

modernej výpočtovej techniky. Prudký rast mikropočítačov i počítačových systémov na spracovanie informácií a stále sa rozširujúca oblasť ich použitia upozorňuje, že nesmiete zaváhať.

Dušan Jedinák

Vladimír Hajko, Ladislav Potocký, Anton Zentko :

MAGNETIZAČNÉ PROCESY

Vydala ALFA — vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, vydanie prvé, Bratislava 1982, 318 strán, 180 obrázkov, 11 tabuliek, cena 35,— Kčs.

Edícia Encyklopédia modernej fyziky (EMF) sa venuje aktuálnym a moderným problémom súčasnej fyziky. Tituly, ktoré v nej vychádzajú, sú vhodné pre učiteľov fyziky a odborníkov, ktorí nepracujú v danej oblasti, ale cítia potrebu nenáročným spôsobom si rozšíriť svoje vedomosti, alebo doplniť si ich v určitom smere. V roku 1982 vyšla v tejto edícii kniha popredných slovenských vysokoškolských pedagógov a odborníkov v otázkach magnetizmu: *Vladimíra Hajka, Ladislava Potockého a Antona Zentka* „Magnetizačné procesy“ Kniha má vysokú odbornú úroveň. Autori v nej vysvetľujú podstatu a charakter magnetizačných procesov, využívajúce výsledky vlastnej dlhoročnej odbornej a pedagogickej práce. Fyzikálne vzdelaného čitateľa zvlášť zaujmú moderné časti o magnetických rezonanciách, Mössbauerovom efekte a využití neu-

trónovej difrakcie pri štúdiu magnetických vlastností látok.

Autori vytvorili dielo, ktoré vhodne vyplnilo medzeru v našej odbornej literatúre. Kniha Magnetizačné procesy sa dôstojne radí medzi diela EMF a plniac ciele tejto edície, presahuje možnosti čitateľa — stredoškoláka. Čítaním Magnetizačných procesov zistujeme, že jednotné využitie sústavy SI má v magnetizme niektoré problémy. Sú miesta, kde sa kniha rozchádza s ustanoveniami platných noriem. Pre mladšieho čitateľa bude zaujímavé porovnanie niektorých historických jednotiek s jednotkami SI, najmä pri obrázkoch. Anachronizmus, ku ktorému sa autori odhodlali pri používaní jednotiek mimo sústavy SI, prináša výhody pre čitateľa, ktorý konfrontuje čítaný text so zahraničnou, zvlášť západnou, literatúrou.

Vydanie Magnetizačných procesov v roku 1982 je významným edičným činom Redakcie teoretickej literatúry nakladateľstva ALFA v Bratislave.

Ján Chrapan

K. Jörgens

LINEAR INTEGRAL OPERATORS

(vyšlo v radě Surveys and Reference Works in Mathematics, č. 7) Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne 1982, X + 379 str., v angličtině (překlad z němčiny).

Knihu zaslanou redakci Rozhledů je možno tematicky rozdělit na dvě části. Jádrem je druhá část,

obsahující vlastní teorii lineárních integrálních operátorů. První část, zhruba 140 stran, se soustřeďuje na přehled základních principů funkcionální analýzy dosti obecných nejen z hlediska potřeb druhé části knihy. V první části je vybudována teorie metrických a normovaných prostorů, speciálně Banachových prostorů a obecná teorie lineárních operátorů. Dále je zde studována spektrální teorie Banachových algeber ohraničených operátorů a ohraničených operátorů, jejichž transponovaný operátor je rovněž ohraničený. Druhá část je věnována vlastní teorii lineárních integrálních operátorů. Její nejrozsáhlejší kapitola se zabývá integrálními operátory se spojitým nebo polárním jádrem. Vybudovaná teorie je aplikována na problémy vlastních čísel a okrajových úloh pro obyčejné i parciální diferenciální rovnice. Závěrečná čtvrtá kapitola knihy je věnována integrálním operátorům v Lebesgueových prostorech a v prostorech omezených spojitých funkcí.

První tři kapitoly knihy jsou přístupné čtenářům, kteří se seznámili se základním kursem matematické analýzy běžným na většině typů našich vysokých škol, a to i v učitelském studiu matematiky. K jejich porozumění nejsou potřebné žádné předběžné znalosti funkcionální analýzy ani jiné speciální vědomosti. Závěrečná čtvrtá kapitola je poněkud obtížnější a její zvládnutí vyžaduje určité předchozí znalosti, hlavně z teorie míry a integrálu.

Jaroslav Barták

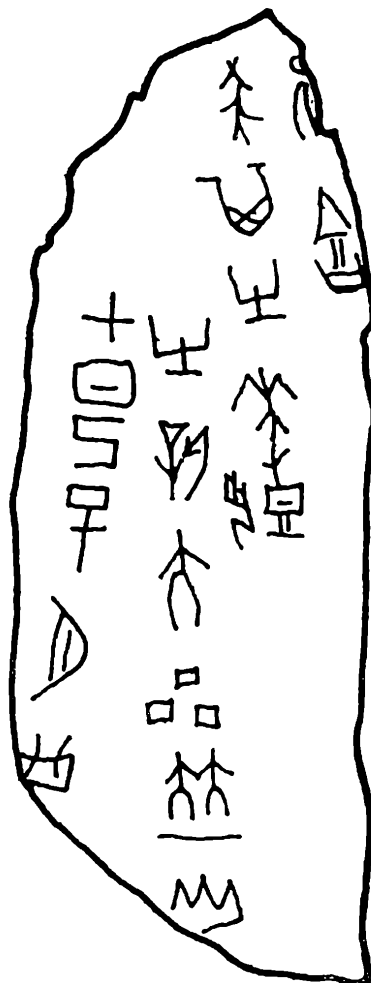
POHLEDY DO DĚJIN

Záznam o supernově ze 14. století před n. l.

Svislý obrázek, který si prohlížíte vedle textu, je kopií záznamu o výskytu supernovy ve 14. století před naším letopočtem. Supernova jako mimořádně jasná nově vzplanuvší hvězda nemohla ujít pozornosti astronomů v říši Šang; na jedné z kostí v nějakém chrámu je tento nápis, který ve dvou prostředních sloupcích (čti zprava doleva a shora dolů) říká: V sedmém dni měsíce, ve dni čí-šu, se objevila velká nová hvězda v blízkosti hvězdy *Antares*.

Jméno *Antares* dáváme dnes oné hvězdě v souhvězdí *Škorpióna*, o které se nápis zmiňuje; její tehdejší název samozřejmě neznáme. Je pozoruhodné, že se našla i kost s nápisem o dva dny mladším, který sděluje, že tato nova (nová hvězda) zhasla. Víme tedy, že se objevila supernova, která zářila dva dny, ale nevíme, ve kterém roce mezi letopočty 1339 a 1281 před n. l.

Obdobné záznamy z říše Šangů informují o zatměních Slunce (v letech 1353, 1307, 1302 a 1281 před n. l.), o velmi četných zatměních Měsíce, dále o výskytu komet. Popis zatmění Slunce a sluneční korony s protuberancemi je často podán obrazně: „Tři plameny pozřely Slunce a bylo vidět velkou



hvězdu.“ (Šlo asi o některou planetu, která byla patrná jen po dobu zatmění.) „Bylo vidět mrak jako hejno rudých vran létajících kolem Slunce.“

Nejstarší znak pro zatmění je týž jako pro slovo „jísti“, znázorňuje jídelní misku s víčkem; v představách tehdejších lidí při zatmění temné mocnosti pojídaly Slunce.

J. Šedivý

Obzornik za matematiko in fiziko

Časopis tohoto názvu vychází ve Slovinsku. Letos dovršuje 30. ročník. Vydává jej Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, což je vědecká společnost obdobná naší Jednotě československých matematiků a fyziků. Na první pohled to plyne i bez znalosti slovinštiny z jejího názvu. Před několika lety nám vydavatel Obzorniku nabídl výměnu svého časopisu za Rozhledy. Od té doby pravidelně dostáváme z Lublaně časopis, který je nejen nám, ale jistě i čtenářům Rozhledů, sympatický svým názvem.

redakce

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát ročně. Roční předplatné 20,— Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá administrace PNS, pošta a doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice a dovoz tisku Praha, závod 01, administrace vývozu tisku, Kafkova 19, 160 00 Praha 6. Jazyková úprava doc. dr. Marie Valešová, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1983