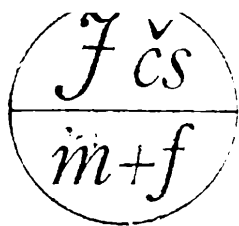


rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

1

ROČNÍK 58, 1979-1980, ZÁŘÍ



ROČNÍK 58
ZÁŘÍ 1979

1

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

OBSAH

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT, Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1979.

Prof. E. Kraemer: Jednota československých matematiků a fyziků a Rozhledy matematicko-fyzikální . . .	1
J. Kratochvíl: Řešení jedné diofantovské rovnice pomocí indukce . . .	3
Prof. E. Kraemer: Mocnost v teorii kuželoseček	5
Dr. J. Sedláček, CSc.: Největší známé prvočíslo	12
Ing. J. Kús, ing. J. Myslík, CSc.: Zobecněný proudový Kirchhoffův zákon a jeho použití	14
Dr. R. Hudec: Novinky z Venuše	22
Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Prof. PhDr. Jan Vojtěch	24
J. Kotyk: Hrst vzpomínek	26
Informace o soutěži ve školním 1979/80	29
Výsledky loňské soutěže Rozhledů	29
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	30
Pro volnou chvíli	38
Olympiády	39
S. Horák: Ze zahraničních časopisů	40
jm: O českém názvu pro televizi	41
jm: Podíl českých a slovenských techniků na vývoji parních turbin	42
Recenze	43
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český 3. a 4. str. obálky	

Jednota československých matematiků a fyziků a Rozhledy matematicko-fyzikální

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Na počátku října roku 1978 se konaly v Popradu sjezdy Jednoty čs. matematiků a fyziků (JČSMF) a Jednoty slovenských matematiků a fyziků (JSMF), tj. vědeckých společností sdružujících české a slovenské pracovníky z oboru matematicko-fyzikálních věd. Protože tyto společnosti jsou spjaté s naším časopisem, je snad vhodné připomenout na prahu jeho 58. ročníku historii JČSMF a zásluhy této společnosti o Rozhledy matematicko-fyzikální.

V roce 1862 založili mladí studenti filosofické fakulty pražské univerzity *Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky* (*Verein für freie Vorträge aus der Mathematik und Physik*), jehož členy byli Češi i Němci. V roce 1869 byl tento spolek reorganizován a zároveň dostal nový název *Jednota českých matematiků* (JČM). V této Jednotě, která se od roku 1912 nazývala *Jednota českých matematiků a fyziků* (JČMF), se soustřeďovali téměř všichni čeští pedagogičtí a vědečtí pracovníci z oboru matematiky a fyziky. Po vzniku Československé republiky se tato společnost přeměnila na *Jednotu československých matematiků a fyziků*. V článku 14 jejích stanov z r. 1921 čteme: „Veškeré jednání spolkové děje se česky nebo slovensky.“ Konečně v roce 1969 se organizace Jednoty upravila ve smyslu federálně uspořádané ČSSR.

Brzy po svém založení vydávala Jednota českých matematiků středoškolské učebnice a v roce 1872 začala vydávat *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, v němž od r. 1892 vycházela *Příloha*, určená hlavně středoškolským studentům. Obsahovala odborné články elementárního rázu a kromě toho úlohy z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky; úspěšní řešitelé těchto úloh z řad žáků středních škol byli odměňováni cenami. Příloha byla velmi oblíbená a vycházela až do roku 1921. Od školního roku 1921/22 začala Jednota místo Přílohy vydávat samostatný časopis s názvem *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*. Podařilo se jí udržet vydávání těchto Rozhledů celých 30 let, tj. až do konce školního roku 1950/51. V dalších několika letech se změnil Rozhledy na populárně vědecký časopis určený široké veřejnosti. Avšak tato změna se neosvědčila, a proto se Rozhledy počátkem roku 1957 vrátily ke svému původnímu poslání; zároveň dostaly výstižnější název *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Vydává je ministerstvo školství ve Státním pedago-

gickém nakladatelství (SPN) v Praze; Jednotě čs. matematiků a fyziků je však svěřena péče o jejich odbornou úroveň.

Počet odběratelů *Rozhledů* matematicko-přírodovědeckých v letech 1921 až 1950 kolísal zpravidla mezi jedním a dvěma tisíci. Jejich propa-
gátory mezi studenty byli středoškolští profesori matematiky, deskrip-
tivní geometrie a fyziky, kteří také tlumočili výboru Jednoty občasné
stesky žáků na časopis. Jak píše profesor *František Veselý* ve své knize
„*Sto let Jednoty československých matematiků a fyziků*“ (vydalo SPN
v Praze v r. 1962), vytýkalo se někdy článkům v *Rozhledech*, že jsou
málo zajímavé a často nepřiměřené vědomostem a chápavosti středoškol-
ských studentů. Tyto stížnosti se objevují i dnes, jak se ukázalo na
sjezdech JČSMF a JSMF roku 1978. K tomu ve své výše citované knize
profesor Veselý připomíná toto (str. 82): „K psaní článků pro středoškol-
ské žáky zajímavých a jejich chápavosti přiměřených je totiž potřebí
jistého mistrovství autorů, jejichž počet nikdy nebyl a asi nebude nikdy
dost velký.“

I když dlouholeté zkušenosti potvrzují správnost citované připomínky
profesora Veselého, je třeba se snažit o zlepšení a zpestření obsahu příš-
tích ročníků *Rozhledů* a aspoň do značné míry uspokojit jejich několi-
katisícovou čtenářskou obec. Při plnění tohoto obtížného úkolu přijme
redakční rada našeho časopisu s povděkem pomoc JČSMF, k níž ji za-
vazuje jeden z bodů jejího programu schváleného na sjezdu 7. října 1978.

Poslání *Rozhledů* matematicko-fyzikálních se ani dnes nemění. Jejich
úkolem je rozvíjet a prohlubovat zájem středoškolských studentů
(k nimž patří i žáci středních odborných učilišť s maturitou) o matema-
ticko-fyzikální vědy a jejich aplikace, zejména pokud jde o technické
obory. Proto kromě článků, které doplňují a rozšiřují středoškolské
učivo, budou *Rozhledy* otiskovat také informace o rozvoji matematic-
ko-fyzikálních věd a pracovišť i o významných pracovnících těchto
oborů, zejména těch, kteří působí ve státech socialistického společenství.
Do obsahu *Rozhledů* budou i nadále patřit články z historie matematiky
a fyziky, úlohy z matematické i fyzikální olympiády, tradiční Naše
soutěž, drobné zajímavosti a úlohy i recenze publikací, jejichž studium
lze doporučit středoškolským studentům.

Redakční rada věří, že i ve svém 58. ročníku budou *Rozhledy* plnit
své tradiční poslání a podle svých možností přispívat k plnění úkolů,
které jsou shrnuty v dokumentu *Další rozvoj československé výchovně
vzdělávací soustavy*, schváleném v roce 1976 předsednictvem ÚV KSČ
i ústředními vládními orgány naší republiky.

matematika

Řešení jedné diofantovské rovnice pomocí indukce

JAN KRATOCHVÍL, Pardubice

Redakce uveřejňuje výtah z příspěvku, který zaslal autor jako student gymnázia. Jde o vítěze soutěže Matematická olympiáda v letech 1976/77 a 1977/78. V současné době studuje na MFF UK v Praze.

Při řešení jednoho problému jsem potřeboval dokázat, že rovnice $a^2 + b^2 - 4ab + 2 = 0$ má nekonečně mnoho řešení v množině všech přirozených čísel. Po delším hledání jsem téměř nečekaně našel rekurentní předpis, který umožňuje sestavit posloupnost uspořádaných dvojic (a, b) , jejíž členy představují všechna řešení rovnice.

Výraz $a^2 + b^2 - 4ab + 2$ je symetrický vzhledem k a, b , tj. pro dvojice (a, b) , (b, a) nabývá stejné hodnoty, proto jsou při $a \neq b$ řešením dané rovnice buď obě dvojice nebo žádná z nich.

Při $a = b$ dostáváme zvláštní případ řešení rovnice, a to

$$2 - 2a^2 = 0,$$

ten vede k dvojici $(1, 1)$ přirozených čísel, která je mezi dvojicemi typu (a, a) jediným řešením dané rovnice.

Ve svých dalších úvahách se můžeme omezit na dvojice (a, b) , kde platí $a \leq b$, při $b > 1$ dokonce $a < b$.

Řešením dané rovnice v $\mathbb{N}$ jako rovnice kvadratické s neznámou b a s parametrem $a \in \mathbb{N}$ získáme

$$(b - 2a)^2 = 3a^2 - 2.$$

Přirozené číslo $a \geq 1$ zajišťuje kladnost diskriminantu $3a^2 - 2$ kvadratické rovnice; existující reálné kořeny

$$b = 2a - \sqrt{3a^2 - 2}, \quad b = 2a + \sqrt{3a^2 - 2}$$

však nejsou přirozenými čísly při všech hodnotách $a \in \mathbb{N}$. Dohodnutá nerovnost $a < b$ je splněna jen druhým kořenem.

Řešením dané rovnice v $\mathbb{N}$ jako kvadratické rovnice s neznámou a , s parametrem $b \in \mathbb{N}$ získáme po obdobné úvaze její kořen

$$a = 2b - \sqrt{3b^2 - 2}$$

Nesnáze se zajištěním racionálnosti čísel $\sqrt{3a^2 - 2}$, $\sqrt{3b^2 - 2}$ mne

vedly ke snaze využít jedné racionální odmocniny tohoto typu ve dvou za sebou následujících dvojicích (a_n, b_n) , (a_{n+1}, b_{n+1}) .

Jestliže (a_n, b_n) je řešením dané rovnice, platí $a_n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{N}$, přitom

$$a_n = 2b_n - \sqrt{3b_n^2 - 2},$$

$$b_n = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$$

a tedy také $\sqrt{3b_n^2 - 2}$, $\sqrt{3a_n^2 - 2}$ jsou přirozená čísla.

Zvolíme-li $a_{n+1} = b_n$ a položíme-li

$$b_{n+1} = 2a_{n+1} + \sqrt{3a_{n+1}^2 - 2} = 2b_n + \sqrt{3b_n^2 - 2},$$

je b_{n+1} zaručeně též přirozené číslo.

Nepohodlný výraz s odmocninou můžeme vyloučit, sečteme-li

$$\begin{array}{r} a_n = 2b_n - \sqrt{3b_n^2 - 2} \\ b_{n+1} = 2b_n + \sqrt{3b_n^2 - 2} \\ \hline a_n + b_{n+1} = 4b_n. \end{array}$$

Tímto způsobem jsem našel rekurentní určení posloupnosti:

$$1. (a_1, b_1) = (1, 1)$$

$$2. (a_{n+1}, b_{n+1}) \text{ přiřadíme } (a_n, b_n) \text{ tak, že } a_{n+1} = b_n, b_{n+1} = 4b_n - a_n.$$

Několik členů posloupnosti tvoří tyto dvojice:

$$(\overline{1}, 1), (1, 3), (3, 11), (11, 41), (41, 153), (153, 571), \dots$$

Dokážeme, že členy posloupnosti jsou řešeními dané rovnice,

Použijeme matematické indukce:

$$1. \text{ První člen } (1, 1) \text{ posloupnosti splňuje danou rovnici, protože}$$

$$1^2 + 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 = 0.$$

$$2. \text{ Předpokládejme, že } (a_n, b_n) \text{ splňuje danou rovnici, tj. že platí}$$

$$a_n^2 + b_n^2 - 4a_nb_n + 2 = 0.$$

Potom pro (a_{n+1}, b_{n+1}) platí:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 - 4a_{n+1}b_{n+1} + 2 &= b_n^2 + (4b_n - a_n)^2 - 4b_n(4b_n - a_n) + 2 = \\ &= b_n^2 + 16b_n^2 - 8a_nb_n + a_n^2 - 16b_n^2 + 4a_nb_n + 2 = \\ &= b_n^2 + a_n^2 - 4a_nb_n + 2, \end{aligned}$$

a tedy i dvojice (a_{n+1}, b_{n+1}) splňuje danou rovnici.

Tím jsme dokázali, že všechny členy posloupnosti jsou řešeními dané rovnice.

Objevení posloupnosti ještě nezaručuje existenci nekonečně mnoha řešení dané rovnice. Posloupnost by totiž mohla být periodická a navývat jen konečně mnoha hodnot. Avšak poznatek, že platí

$$a_n < b_n \text{ pro všechna } n > 1 \text{ a } a_{n+1} = b_n$$

zaručuje platnost této konjunkce:

$$a_1 = a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < \dots a_n < a_{n+1} <$$

Tím je zajištěna existence nekonečně mnoha navzájem různých uspořádaných dvojic (a_n, b_n) , které jsou řešením úlohy.

Lze dokázat, že členy posloupnosti, kterou jsme sestavili, jsou jedinými řešeními dané rovnice.

Cvičení

Dokažte, že každá rovnice typu $a^2 + b^2 - 2k \cdot ab + 2k - 2 = 0$ s neznámými $a, b \in \mathbb{N}$ a s parametrem $k \in \mathbb{N}$ má nekonečně mnoho řešení v množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

Mocnost v teorii kuželoseček

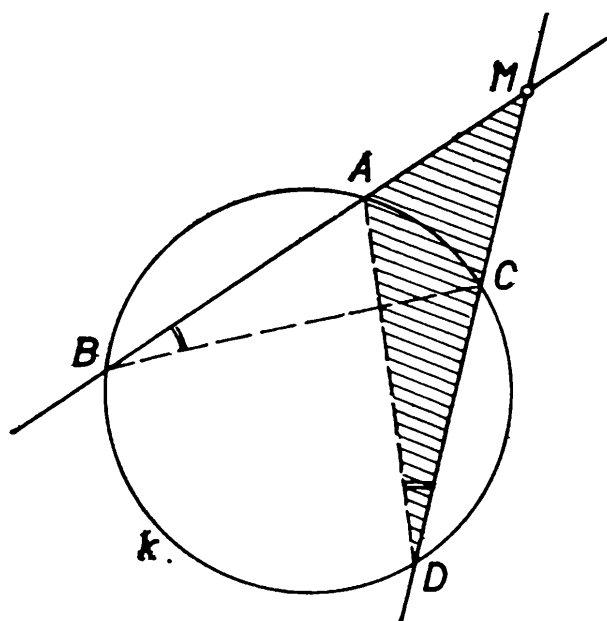
Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V učebnicích geometrie se uvádí jedna vlastnost bodu vzhledem ke kružnici, která tímto bodem neprochází. Je-li M takový bod a procházejí-li jím dvě různé sečny kružnice k , z nichž jedna ji protíná v bodech A, B a druhá v bodech C, D (obr. 1, 2), potom platí:

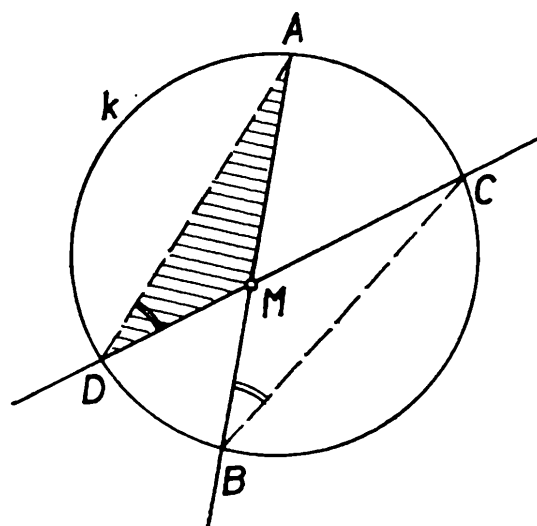
$$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|. \quad (1)$$

Čtenář tuto rovnost snadno dokáže z podobnosti trojúhelníků MAD, MCB ; shodné obvodové úhly při vrcholech B, D jsou na obr. 1, 2 označeny obloučky. Rovnost (1) říká, že součin $|MA| \cdot |MB|$ nezávisí na volbě sečny vedené ke kružnici k bodem M ; tento součin nazýváme *mocností bodu M vzhledem ke kružnici k* .

Jde nyní o to, zda platí nějaká vlastnost obdobná mocnosti bodu vzhledem ke kružnici pro každou kuželosečku, tj. i pro elipsu, hyperbolu a parabolu. Odpověď je kladná a nalezneme ji zčásti již u *Archimeda* (žil v Syrakusách asi v letech 287 až 212 před n. l.), zejména však ve třetí knize osmidílného spisu o kuželosečkách, jehož autorem je řecký matematik *Apollonios z Pergy* (žil asi v letech 260 až 170). V moderní podobě najdeme Apolloniův výklad v anglickém *Heathově* překladu spisu o kuželosečkách vydaném r. 1896. Jednoduše lze však větu o mocnosti v teorii kuželoseček dokázat užitím metody souřadnic.



Obr. 1



Obr. 2

Budiž M pevně zvolený bod přímky p a $\mathbf{u}$ nenulový vektor s ní rovnoběžný (směrový vektor přímky p). Potom pro každý bod X přímky p a jenom pro body přímky p je vektor

$$\mathbf{MX} = t\mathbf{u}. \quad (2)$$

Číslo t probíhá interval $(-\infty, +\infty)$; přitom je $|\mathbf{MX}| = |t| \cdot |\mathbf{u}|$. Zvolíme-li ortonormální soustavu souřadnic, v níž je $M[x_0, y_0]$, $\mathbf{u}(\cos \varphi, \sin \varphi)$ pro $0 \leq \varphi < \pi$, $X[x, y]$, dostaneme z vektorové rovnice (2) přímky p její rovnice parametrické

$$x = x_0 + t \cos \varphi, \quad y = y_0 + t \sin \varphi. \quad (3)$$

Protože je $|\mathbf{u}|^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, je $|\mathbf{u}| = 1$ čili

$$|t| = |\mathbf{MX}|. \quad (4)$$

Množinu všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou p , nazýváme *směrem*; říkáme, že tento směr je určen přímkou p .

Věta 1. Budiž dána kuželosečka k a dva různé směry. Je-li kuželosečka k hyperbolou, není žádný z těchto směrů určen její asymptotou; je-li kuželosečka k parabolou, není žádný z daných směrů určen její osou. Nechť přímky p_1, p_2 , z nichž každá určuje jeden daný směr, mají společný bod M ; přitom přímka p_1 má s kuželosečkou k společné body A, B (různé nebo splývající) a přímka p_2 má s kuželosečkou k společné body C, D (různé nebo splývající). Potom číslo

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|MC| \cdot |MD|}$$

nezávisí na volbě bodu M .

Důkaz provedeme pro každou kuželosečku zvlášť; přitom zvolíme ortonormální soustavu souřadnic vždy tak, aby její osa x splývala

s hlavní osou elipsy nebo hyperboly, resp. s osou paraboly. Jde-li o kuželosečku středovou s poloosami a (hlavní), b (vedlejší), volíme počátek soustavy souřadnic v jejím středu; jde-li o parabolu, volíme počátek v jejím vrcholu a kladnou část osy x tak, aby jejím bodem bylo ohnisko $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ paraboly.

a) Ve zvolené soustavě souřadnic má elipsa rovnici

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Pro její společný bod $X[x, y]$ s přímkou (3) platí rovnice

$$b^2(x_0 + t \cos \varphi)^2 + a^2(y_0 + t \sin \varphi)^2 = a^2b^2,$$

kterou lze upravit na tento tvar:

$$(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)t^2 + 2(b^2x_0 \cos \varphi + a^2y_0 \sin \varphi)t + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Protože je

$$b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi > 0, \quad (5)$$

je to rovnice kvadratická. Je-li její diskriminant nezáporný, má dva (různé nebo splývající) reálné kořeny t, t' ; každému z nich odpovídá společný bod přímky (3) a elipsy. Podle vlastností kořenů kvadratické rovnice je

$$tt' = \frac{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}. \quad (6)$$

Protože bod $M[x_0, y_0]$ není bodem elipsy, není číselník posledně uvedeného zlomku roven nule; zároveň platí (5), takže je $tt' \neq 0$. Jde-li o přímku p_1 , je $\varphi = \varphi_1$, $t = t_1$, $t' = t_1'$; podle (4) je zároveň $|t_1| = |MA|$, $|t_1'| = |MB|$. Z toho podle (6) plyne, že je

$$|MA| \cdot |MB| = |t_1 t_1'| = \frac{|b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2|}{b^2 \cos^2 \varphi_1 + a^2 \sin^2 \varphi_1}. \quad (7)$$

Jde-li o přímku p_2 , je $\varphi = \varphi_2$, $t = t_2$, $t' = t_2'$; podle (4) je zároveň $|t_2| = |MC|$, $|t_2'| = |MD|$. Z toho podle (6) plyne, že je

$$|MC| \cdot |MD| = |t_2 t_2'| = \frac{|b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2|}{b^2 \cos^2 \varphi_2 + a^2 \sin^2 \varphi_2}. \quad (8)$$

Ze (7) a (8) plyne, že je

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|MC| \cdot |MD|} = \frac{b^2 \cos^2 \varphi_2 + a^2 \sin^2 \varphi_2}{b^2 \cos^2 \varphi_1 + a^2 \sin^2 \varphi_1}. \quad (9)$$

Na pravé straně rovnosti (9) se nevyskytují souřadnice x_0, y_0 bodu M ;

z toho plyne, že levá strana v (9) nezávisí na volbě bodu M . Závisí jedině (při dané elipse) na číslech φ_1, φ_2 , tj. na volbě směrů určených přímkami p_1, p_2 .

b) Ve zvolené soustavě souřadnic má hyperbola rovnici

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Při hledání jejích společných bodů s přímkou (3) dospějeme k rovnici

$$(b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi)t^2 + 2(b^2x_0 \cos \varphi - a^2y_0 \sin \varphi)t + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Je-li $b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi \neq 0$, není přímka (3) rovnoběžná s žádnou asymptotou hyperboly (podrobnější výklad viz v učebnici matematiky pro SVVŠ z let 1967 až 1977) a rovnice, k níž jsme došli, je kvadratická. Je-li její diskriminant nezáporný, má dva (různé nebo splývající) reálné kořeny t, t' , pro něž obdobně jako v případě a) je

$$tt' = \frac{b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2}{b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi} \neq 0$$

Z toho plyne zcela obdobně jako v případě a), že je

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|MC| \cdot |MD|} = \left| \frac{b^2 \cos^2 \varphi_2 - a^2 \sin^2 \varphi_2}{b^2 \cos^2 \varphi_1 - a^2 \sin^2 \varphi_1} \right|. \quad (10)$$

Z pravé strany rovnosti (10) je patrné, že její levá strana nezávisí na volbě bodu M ; závisí jen na volbě směrů určených přímkami p_1, p_2 .

c) Ve zvolené soustavě souřadnic má parabola rovnici

$$y^2 = 2px.$$

Při hledání jejích společných bodů s přímkou (3) dostaneme rovnici

$$t^2 \sin^2 \varphi + 2(y_0 \sin \varphi - p \cos \varphi)t + y_0^2 - 2px_0 = 0.$$

Je-li $0 < \varphi < \pi$, tj. není-li přímka (3) rovnoběžná s osou paraboly, je tato rovnice kvadratická. Je-li její diskriminant nezáporný, má dva (různé nebo splývající) reálné kořeny t, t' , pro něž platí:

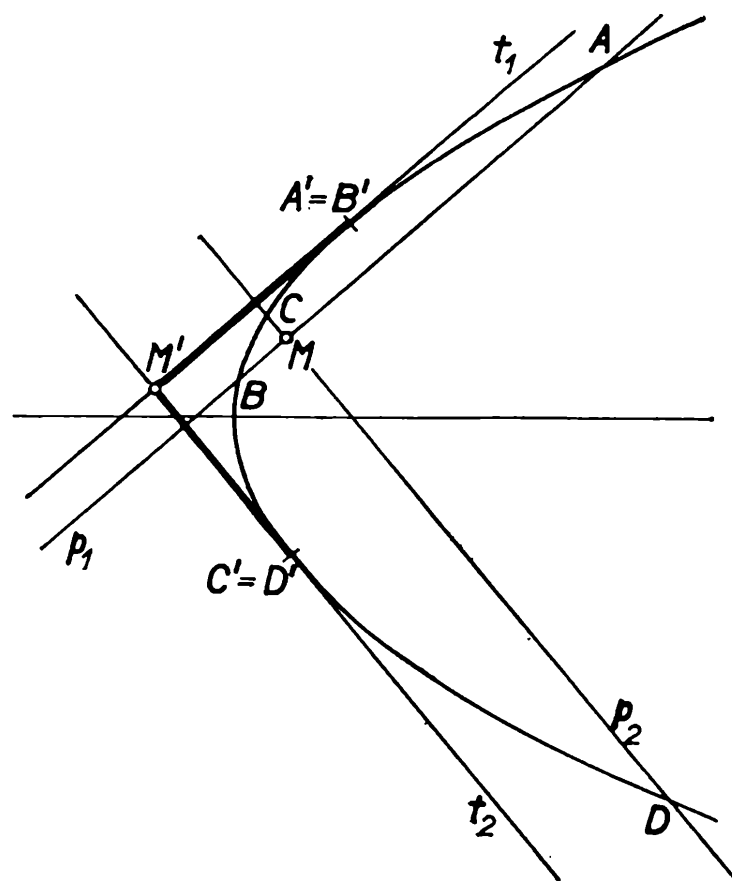
$$tt' = \frac{y_0^2 - 2px_0}{\sin^2 \varphi} \neq 0.$$

Zcela obdobně jako v případech a), b) je potom

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|MC| \cdot |MD|} = \frac{\sin^2 \varphi_2}{\sin^2 \varphi_1}. \quad (11)$$

Z pravé strany rovnosti (11) je patrné, že její levá strana nezávisí na volbě bodu M ; závisí jen na volbě směrů určených přímkami p_1, p_2 .

Poznámky. 1. Jestliže kuželosečka k má tečny $t_1 \parallel MA, t_2 \parallel MC$



Obr. 3

s dotykovými body $A' = B'$, $C' = D'$ a s průsečíkem M' (obr. 3), je podle věty 1

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|MC| \cdot |MD|} = \frac{|M'A'|^2}{|M'C'|^2}. \quad (12)$$

2. Je-li kuželosečka k elipsou se středem S a jsou-li přímky $A'B' \parallel MA$, $C'D' \parallel MC$ jejími průměry (obr. 4), je podle věty 1

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|MC| \cdot |MD|} = \frac{|SA'|^2}{|SC'|^2}. \quad (13)$$

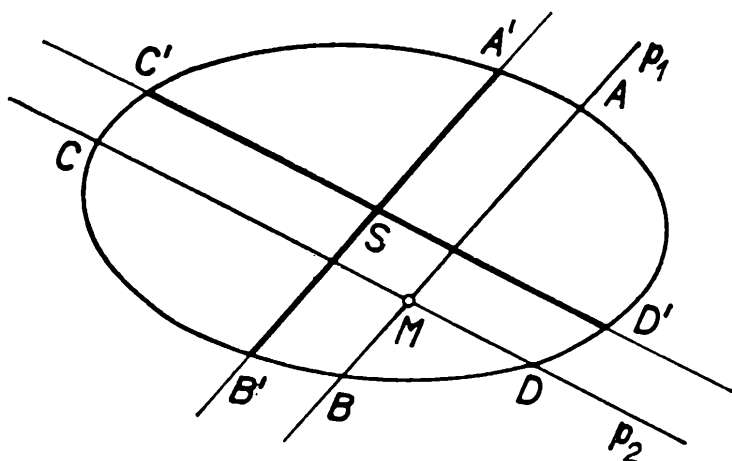
3. Protože rovnici kružnice dostaneme z rovnice elipsy pro $b = a = r$, platí část a) důkazu věty 1 i pro kružnici, tj. věta 1 platí také pro kružnici. Podle (9) nebo podle (13) je potom

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|MC| \cdot |MD|} = 1, \quad (14)$$

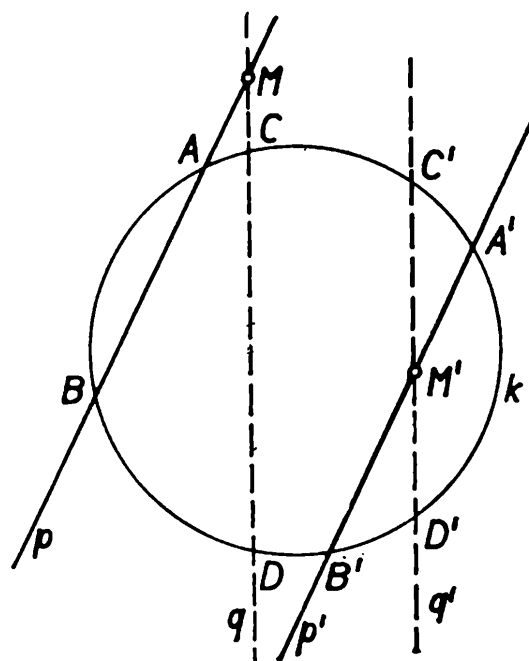
tj. platí rovnost (1). Věta o mocnosti bodu M vzhledem ke kružnici je tedy jenom zvláštním případem věty 1; podle (7) platí pro kružnici ($b = a = r$) tato rovnost:

$$|MA| \cdot |MB| = |x_0^2 + y_0^2 - r^2|.$$

Je-li přímka MC tečnou kružnice (tj. je-li $D = C$), je podle (14)



Obr. 4



Obr. 5

$$|MA| \cdot |MB| = |MC|^2. \quad (15)$$

Věta 2. Budiž dána kuželosečka k , mimo ni dva různé body M, M' a rovnoběžky p, p' , z nichž první prochází bodem M a druhá bodem M' . Je-li kuželosečka k hyperbolou, nejsou přímky p, p' rovnoběžné s její asymptotou; je-li kuželosečka k parabolou, nejsou přímky p, p' rovnoběžné s její osou. Necht přímka p má s kuželosečkou k společné body A, B (různé nebo splývající) a přímka p' má s kuželosečkou k společné body A', B' (různé nebo splývající). Potom číslo

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|M'A'| \cdot |M'B'|}$$

nezávisí na volbě směru určeného přímkou p .

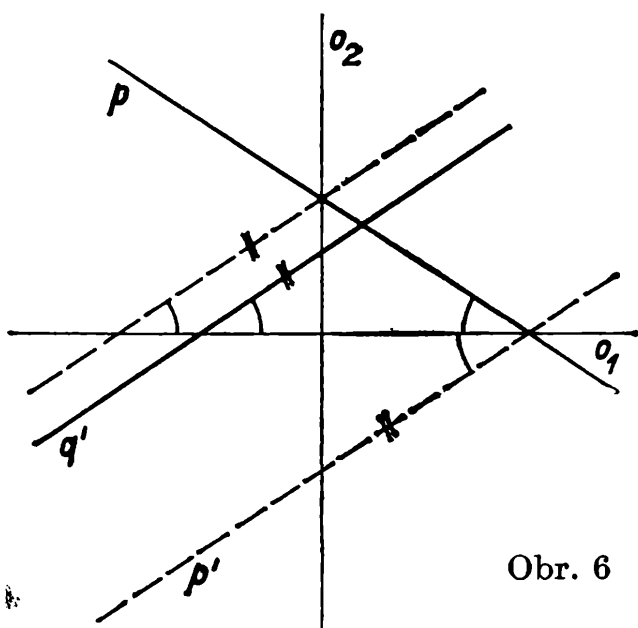
Důkaz. Vedme body M, M' (obr. 5) po řadě přímky $q \neq p, q' \parallel q$ tak, aby kuželosečka k měla s přímkou q společné body C, D a s přímkou q' společné body C', D' ; přitom může být $C = D, C' = D'$. Přímku q volíme tak, aby splňovala předpoklady uvedené v textu věty 2. Potom podle věty 1 je

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|MC| \cdot |MD|} = \frac{|M'A'| \cdot |M'B'|}{|M'C'| \cdot |M'D'|};$$

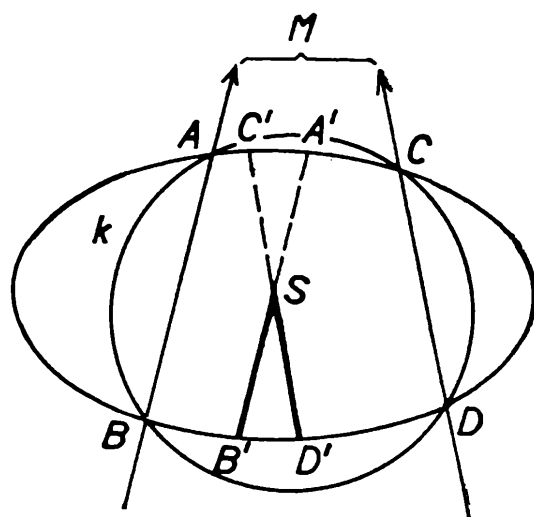
platí tedy také rovnost

$$\frac{|MA| \cdot |MB|}{|M'A'| \cdot |M'B'|} = \frac{|MC| \cdot |MD|}{|M'C'| \cdot |M'D'|}. \quad (16)$$

To však znamená, že levá strana rovnosti (16) nezávisí na volbě směru, k němuž patří dané přímky p, p' .



Obr. 6



Obr. 7

Užití věty 1 ukážeme na jedné úloze; k jejímu řešení však potřebujeme ještě větu, kterou nyní uvedeme.

Věta 3. Necht jsou dány dvě různoběžky p, q s průsečíkem M . Na přímce p jsou dány dva různé body $A \neq M, B \neq M$ a na přímce q dva různé body $C \neq M, D \neq M$; přitom bod M je vnitřním bodem úsečky AB i úsečky CD nebo není vnitřním bodem žádné z nich. Jestliže platí rovnost (1), potom body A, B, C, D jsou body téže kružnice.

Důkaz jenom naznačíme. Body A, B, C neleží v přímce; proto jimi prochází právě jedna kružnice k . Tato kružnice má s přímkou MC společný bod C . Je-li M vnitřním bodem úsečky AB , není přímka MC tečnou kružnice k ; není-li M vnitřním bodem úsečky AB , pak z (15) a (1) plyne, že přímka MC rovněž není tečnou kružnice k . Přímka MC má tedy s kružnicí k ještě společný bod $E \neq C$. Podle věty o mocnosti bodu vzhledem ke kružnici k se dokáže, že je $|ME| = |MD|$. Z polohy bodů D, E na přímce MC vzhledem k bodu M pak plyne, že je $E = D$.

Je-li dána přímka o a přímky $p \neq o, p'$ souměrně sdružené podle přímky (osy) o , pak každou přímku $q' \parallel p'$ nazýváme *antiparalelní k přímce p vzhledem k ose o* . Je-li přímka p s přímkou o rovnoběžná nebo je-li k ní kolmá, je každá přímka $q' \parallel p$ antiparalelní k přímce p vzhledem k ose o . Jsou-li přímky o_1, o_2 vzájemně kolmé a jsou-li přímky p, q' antiparalelní vzhledem k jedné z přímek o_1, o_2 , jsou antiparalelní i vzhledem ke druhé; důkaz je patrný z obr. 6. Proto u elipsy mluvíme o přímkách antiparalelních vzhledem k jejím osám.

Jsou-li A, B, C, D čtyři různé body elipsy, pak žádné tři z nich neleží v přímce; říkáme, že tvoří *úplný čtyřroh $ABCD$* . Dvojice přímek AB a CD, AC a BD, AD a BC nazýváme *protějšími stranami čtyřrohu $ABCD$* .

Úloha. Necht A, B, C, D jsou čtyři různé body elipsy. Dokažte, že platí tyto věty: a) Jsou-li přímky jedné dvojice protějších stran úplného čtyřrohu $ABCD$ antiparalelní vzhledem k osám elipsy, leží body A, B, C, D na kružnici. b) Jsou-li A, B, C, D body kružnice, jsou každé dvě protější strany úplného čtyřrohu $ABCD$ antiparalelní vzhledem k osám elipsy.

Řešení. Aspoň v jedné ze tří trojic protějších stran úplného čtyřrohu $ABCD$ jde vždy o různoběžky. Volme označení daných čtyř bodů tak, že to jsou přímky AB, CD ; jejich průsečík označme M (obr. 7). Středem S elipsy vedme s přímkami AB, CD rovnoběžky a jejich průsečíky s elipsou označme po řadě A', B' a C', D' . Podle poznámky 2. k větě 1 platí potom (13).

a) Jsou-li dvě protější strany úplného čtyřrohu $ABCD$ rovnoběžné s některou osou elipsy (a tedy antiparalelní vzhledem k osám elipsy), je čtyřroh souměrný podle druhé osy elipsy; proto každé dvě jeho protější strany jsou antiparalelní vzhledem k osám elipsy. Přitom aspoň jedna z dvojic protějších stran jsou různoběžky. Stačí tedy provést důkaz pro případ, kdy přímky AB, CD jsou různoběžné. Potom průměry $A'B' \parallel AB, C'D' \parallel CD$ elipsy jsou souměrně sdruženy podle každé její osy, a tedy jsou shodné. Podle (13) potom platí (1); přitom poloha bodu M vzhledem k úsečkám AB, CD splňuje předpoklad věty 3. Podle této věty leží tedy body A, B, C, D na kružnici.

b) Necht body A, B, C, D elipsy leží na kružnici k . Jsou-li přímky AB, CD různoběžky s průsečíkem M , pak podle věty o mocnosti bodu vzhledem ke kružnici platí (1). Podle (13) je potom $|SA'| = |SC'|$, takže přímky $A'B', C'D'$ jsou souměrně sdruženy podle každé osy elipsy (jinak nemohu být průměry $A'B', C'D'$ shodné). Přímky $AB \parallel A'B', CD \parallel C'D'$ jsou tedy antiparalelní vzhledem k osám elipsy. Jsou-li přímky AB, CD rovnoběžné, jsou body A a B, C a D souměrně sdruženy podle jednoho průměru kružnice k , na níž leží. Podle známé vlastnosti elipsy je to zároveň průměr elipsy sdružený k průměru rovnoběžnému s přímkami AB, CD . Protože je tento průměr k přímkám AB, CD kolmý, je osou elipsy. Přímky AB, CD jsou tedy rovnoběžné s jednou osou elipsy, a proto jsou vzhledem k osám elipsy antiparalelní.

Největší známé prvočíslo

Curt Noll a Laura Nickelová (USA) posunuli v říjnu 1978 zase o kousek dál bádání o velkých prvočíslech. Ukázali totiž, že

je prvočíslo, a tím obohatili rodinu dosud známých *Mersenneových prvočísel* o dalšího člena. K výpočtu použili počítače CDC 174, na němž speciálně upravený Lucasův a Lehmerův test prvočíselnosti trval 7 h 8 min 20,023 s. Jak známo, test Lucasův a Lehmerův se opírá o větu, která zní takto:

Číslo $2^p - 1$, kde p je prvočíslo větší než 2, je právě tehdy prvočíslem, jestliže $2^p - 1$ dělí $(p - 1)$ člen posloupnosti $s_1, s_2, s_3, \dots$ dané vzorci

$$s_1 = 4, s_k = s_{k-1}^2 - 2 \text{ pro } k = 2, 3, 4, \dots$$

M. Mersenne (1588–1648), který se jako první zabýval prvočísly typu $2^p - 1$, sotva tušil, kam až se dostane bádání, které započal. Víme, že $2^p - 1$ může být prvočíslem jen v případě, že p je prvočíslem, ale že to není podmínka postačující. Číslo, jež odpovídá exponentu 21 701, je tedy dnes největším známým prvočíslem. Při obvyklém zápise v desítkové soustavě má 6533 číslic a dovedete si jistě představit, kolik místa by v časopise zabralo, kdybychom otiskli všechny jeho číslice. Zde je proto jen několik jeho počátečních a koncových cifer:

44867916611904 . . . 28353511882751 .

Předcházející Mersenneovo prvočíslo

$$2^{19937} - 1$$

bylo objeveno roku 1971 (*B. Tuckerman, M. Speciner a R. Schroepel*). Pro úplnost připomínáme, že je dnes známo celkem 25 Mersenneových prvočísel $2^p - 1$, a to pro tyto hodnoty exponentu p :

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 617, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11 213, 19 937, 21 701.

Neví se však, zda je Mersenneových prvočísel konečně nebo nekonečně mnoho.

Jiří Sedláček

Zobecněný proudový Kirchhoffův zákon a jeho použití

Ing. JOSEF KÚS a Ing. JIŘÍ MYSLÍK, CSc., Vysoká škola strojní a elektrotechnická Plzeň

1. Úvod

Všechny běžně používané metody analýzy elektrických obvodů jsou založeny na použití Kirchhoffových zákonů. Někdy se aplikují oba zákony (proudový, označovaný jako 1., i napěťový, označovaný jako 2.) přímo (tzv. metoda přímé aplikace Kirchhoffových zákonů), jindy se jeden zákon použije „zjevně“, druhý „skrytě“. Například metoda smyčkových proudů zavádí smyčkové proudy tak, aby každý z nich splňoval 1. Kirchhoffův zákon, zatímco 2. Kirchhoffův zákon se použije zjevně při sestavování rovnic pro smyčky.

Metoda uzlových napětí aplikuje zjevně 1. a skrytě 2. Kirchhoffův zákon. Účelným zobecněním metody uzlových napětí je *metoda J-křivek* založená na zobecněném 1. Kirchhoffovu zákonu. Cílem příspěvku je přiblížit čtenářům tuto poslední méně známou metodu.

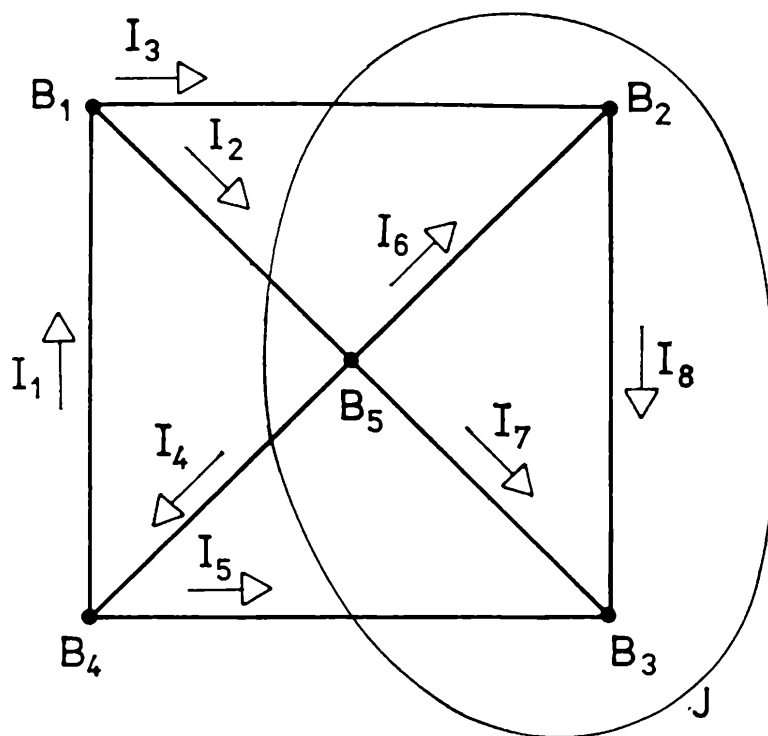
Pro účely článku postačí, budeme-li všechna tvrzení ilustrovat lineárními stejnosměrnými elektrickými obvody. Předpokládáme, že čtenáři jsou z výuky fyziky známy elementární pojmy z teorie elektrických obvodů jako např. uzel, větev, smyčka ap.

V dalším jsou pro úsporu místa Kirchhoffovy zákony označovány zkratkami 1. K. z., 2. K. z.

2. Zobecněný 1. Kirchhoffův zákon

Protože se jedná o obecnější pohled na 1. K. z., zopakujme nejdříve jeho znění. Pro libovolný uzel obvodu platí: Součet proudů vytékajících z uzlu a proudů vtékajících do uzlu je roven nule (přitom proudy vytékající z uzlu uvažuje jako kladné, proudy vtékající do uzlu jako záporné).

Pro formulování zobecněného 1. K. z. budeme potřebovat pro mnohé z vás asi nový topologický pojem *Jordanova křivka*. stručněji *J-křivka*. Bez nároku na vyčerpávající přesnost uveďme, že *J-křivka* je spojitá, jednoduše uzavřená křivka, která se do grafu (obvodu) zavádí tak, aby protínala alespoň jednu jeho větev (a to nejvýše jedenkrát) a přitom neprocházela žádným uzlem grafu. *J-křivka* zřejmě rozděluje rovinu,



Obr. 1

v níž leží, na dvě oblasti: vnitřní (tzv. interiér J-křivky) a vnější (exteriér).

Nyní můžeme přistoupit k formulování zobecněného 1. K. z. Pro libovolnou J-křivku obvodu platí: *Součet proudů vytékajících z interiéru do exteriéru J-křivky a proudů vytékajících z exteriéru do interiéru J-křivky je roven nule* (přitom proudy vytékající z interiéru uvažujeme jako kladné, proudy vtékající do interiéru jako záporné).

Ověřme zobecněný 1. K. z. pro obvod nakreslený na obr. 1 (pro větší přehlednost nejsou ve větvích obvodu zakresleny žádné prvky). Napišme pro každý uzel ležící v interiéru J-křivky 1. K. z.:

$$B_2: -I_3 - I_6 + I_8 = 0$$

$$B_3: -I_5 - I_7 - I_8 = 0$$

$$B_5: -I_2 + I_4 + I_6 + I_7 = 0.$$

Z této soustavy rovnic dostáváme

$$-I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0.$$

3. Přehled metod analýzy obvodů

Dříve, než přistoupíme k výkladu metody J-křivek, zopakujme si a rámcově porovnejme na konkrétním obvodu tři nejužívanější a z výuky fyziky známé metody analýzy.

Naznačíme postup řešení obvodu na obr. 2 ($R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $U_{01} = 10 \text{ V}$, $U_{02} = 20 \text{ V}$) metodou přímé aplikace Kirchhoffových zákonů, metodou smyčkových proudů a metodou uzlových napětí.

a) *Metoda přímé aplikace Kirchhoffových zákonů*

Podstata metody spočívá v tom, že na nezávislé uzly obvodu aplikujeme 1. K. z. a na nezávislé smyčky obvodu 2. K. z., přičemž úbytky napětí na pasívních prvcích vyjádříme pomocí větvových proudů.

Pro 6 hledaných větvových proudů I_1 až I_6 obdržíme aplikací 1. K. z. na nezávislé uzly obvodu B_1 , B_2 a B_3 3 rovnice a aplikací 2. K. z. na nezávislé smyčky obvodu s_1 , s_2 a s_3 rovněž 3 rovnice. Dostáváme tak soustavu obsahující právě 6 lineárně nezávislých algebraických rovnic, ze kterých lze vypočítat proudy I_1 až I_6 :

$$B_1: I_1 + I_3 + I_5 = 0$$

$$B_2: I_2 + I_4 - I_5 = 0$$

$$B_3: -I_1 - I_2 + I_6 = 0$$

$$s_1: -R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_{01}$$

$$s_2: R_3 I_3 - R_4 I_4 = -U_{01}$$

$$s_3: -R_2 I_2 + R_4 I_4 = U_{02}.$$

Výpočet větvových proudů z této soustavy je poměrně zdlouhavý, a proto ho na tomto místě nebudeme provádět. Jak poznáme, dále popsané metody a zejména metoda J-křivek nám umožní vypočítat hledané proudy podstatně jednodušeji a rychleji.

b) *Metoda smyčkových proudů*

Podstata metody spočívá v tom, že na nezávislé smyčky obvodu aplikujeme 2. K. z., přičemž úbytky napětí na pasívních prvcích vyjádříme pomocí smyčkových proudů (jsou to fiktivní proudy, protékající větvemi tvořícími nezávislé smyčky). Protože každý smyčkový proud splňuje v kterémkoliv uzlu obvodu 1. K. z. (pokud smyčka s uzlem inciduje, pak smyčkový proud jednou větví smyčky do uzlu přitéká, druhou větví smyčky vytéká), postačí aplikace 2. K. z.

Zavedeme-li do smyček s_1 , s_2 , s_3 smyčkové proudy I_{s_1} , I_{s_2} , I_{s_3} (orientované shodně jako odpovídající smyčky), dostáváme soustavu 3 rovnic:

$$s_1: R_1 I_{s_1} + R_2 (I_{s_1} - I_{s_2}) = U_{01}$$

$$s_2: R_3 I_{s_2} + R_4 (I_{s_2} - I_{s_3}) = -U_{01}$$

$$s_3: R_2 (I_{s_3} - I_{s_1}) + R_4 (I_{s_3} - I_{s_2}) = U_{02}.$$

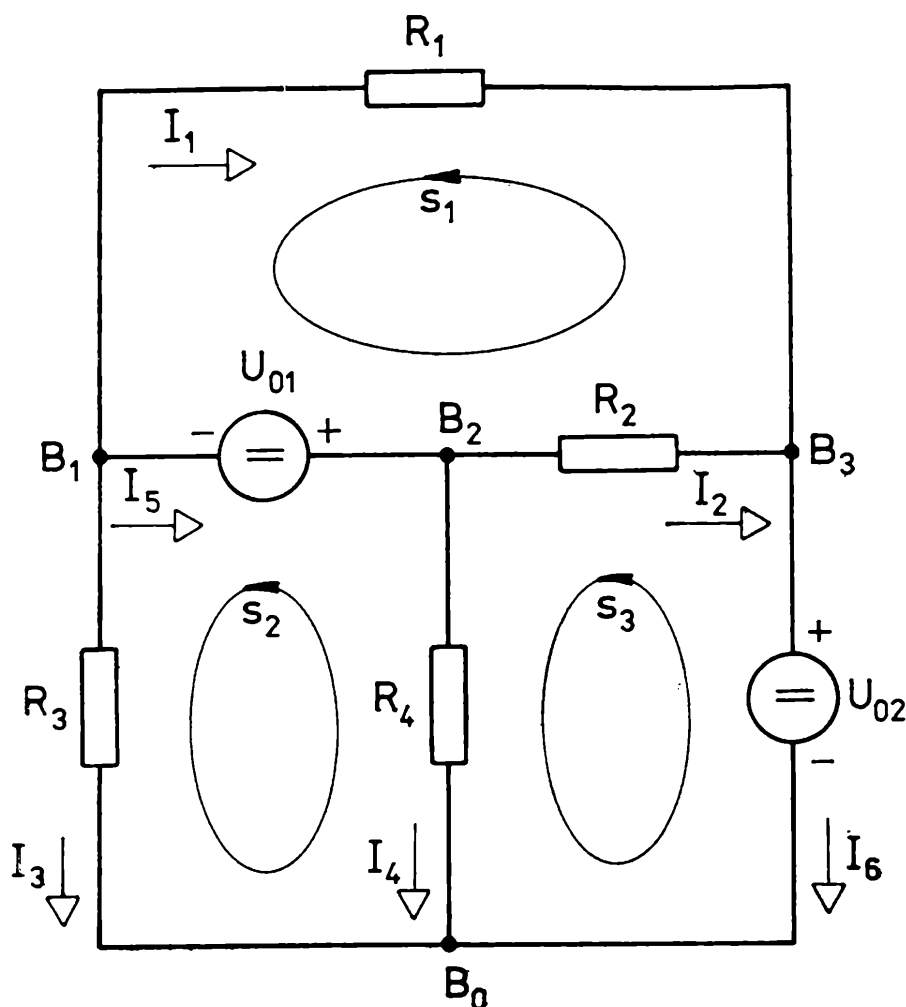
Z této soustavy vypočteme hodnoty smyčkových proudů

$$I_{s_1} = 9,2 \text{ A}; \quad I_{s_2} = 3,6 \text{ A}; \quad I_{s_3} = 8,8 \text{ A}.$$

Větvové proudy I_1 až I_6 jsou lineární kombinací smyčkových proudů. Ponecháme-li orientaci větvových proudů podle obr. 2, pak

$$I_1 = -I_{s_1} = -9,2 \text{ A}; \quad I_2 = I_{s_1} - I_{s_2} = 0,4 \text{ A}; \quad I_3 = I_{s_2} = 3,6 \text{ A};$$

$$I_4 = I_{s_2} - I_{s_3} = 5,2 \text{ A}; \quad I_5 = I_{s_1} - I_{s_2} = 5,6 \text{ A}; \quad I_6 = -I_{s_3} = -8,8 \text{ A}.$$



Obr. 2

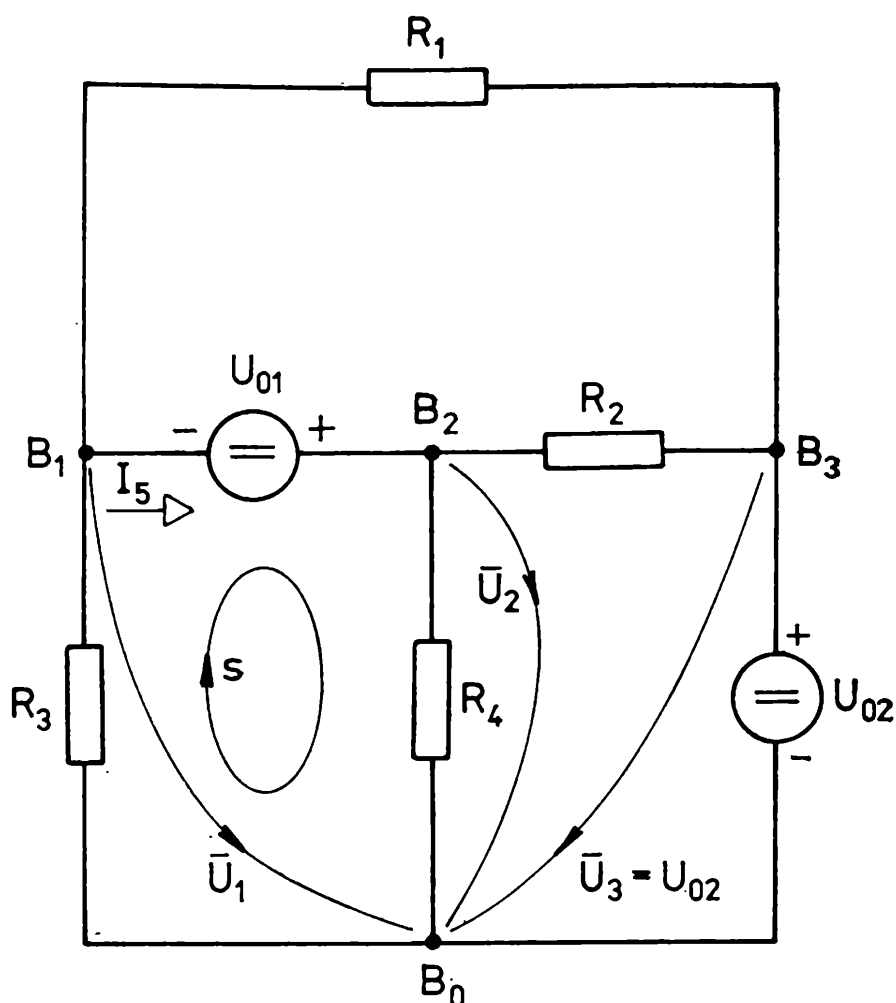
Záporné znaménko u hodnoty proudů I_1 a I_6 svědčí o tom, že tyto proudy protékají větvemi obvodu v opačném směru, než je vyznačeno proudovými čítacími šipkami na obr. 2.

c) Metoda uzlových napětí

Podstata metody spočívá v tom, že na nezávislé uzly obvodu aplikujeme 1. K. z., přičemž proudy ve větvích s pasívními prvky vyjádříme pomocí uzlových napětí (jsou to skutečná napětí mezi nezávislými uzly a referenčním uzlem).¹⁾

Referenční uzel B_0 volíme tak, aby incidoval s co největším počtem větví se zdroji napětí (sníží se tím zřejmě počet neznámých uzlových napětí, a tedy i počet rovnic v soustavě, kterou je třeba řešit). Zdroje napětí ve větvích, které neincidují s referenčním uzlem, působí komplikace: při aplikaci 1. K. z. nelze pomocí uzlových napětí vyjádřit proud tekoucí zdrojem napětí, tento proud je třeba zavést jako další neznámou

¹⁾ Poznamenejme, že metoda uzlových napětí se stává formálně komplikovanou a těžkopádnou pro analýzu obvodů se vzájemnými indukčnostmi. Vyjádření proudů induktivně vázaných větví pomocí uzlových napětí je (zejména při větším počtu induktivních vazeb) velmi zdlouhavé, a proto se na takové obvody aplikuje nejčastěji metoda smyčkových proudů.



Obr. 3

veličinu $\bar{I}_5$ rovnice získané aplikací 1. K. z. doplnit potřebným počtem dalších rovnic s užitím 2. K. z., jak ukážeme na příkladu.

Pro obvod na obr. 2 zavedeme referenční uzel B_0 , uzlová napětí $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, $\bar{U}_3$ a proud I_5 tekoucí větví se zdrojem napětí U_{01} např. podle obr. 3. Poněvadž $\bar{U}_3 = U_{02}$, nesestavuje se rovnice pro uzel B_3 , takže dostáváme

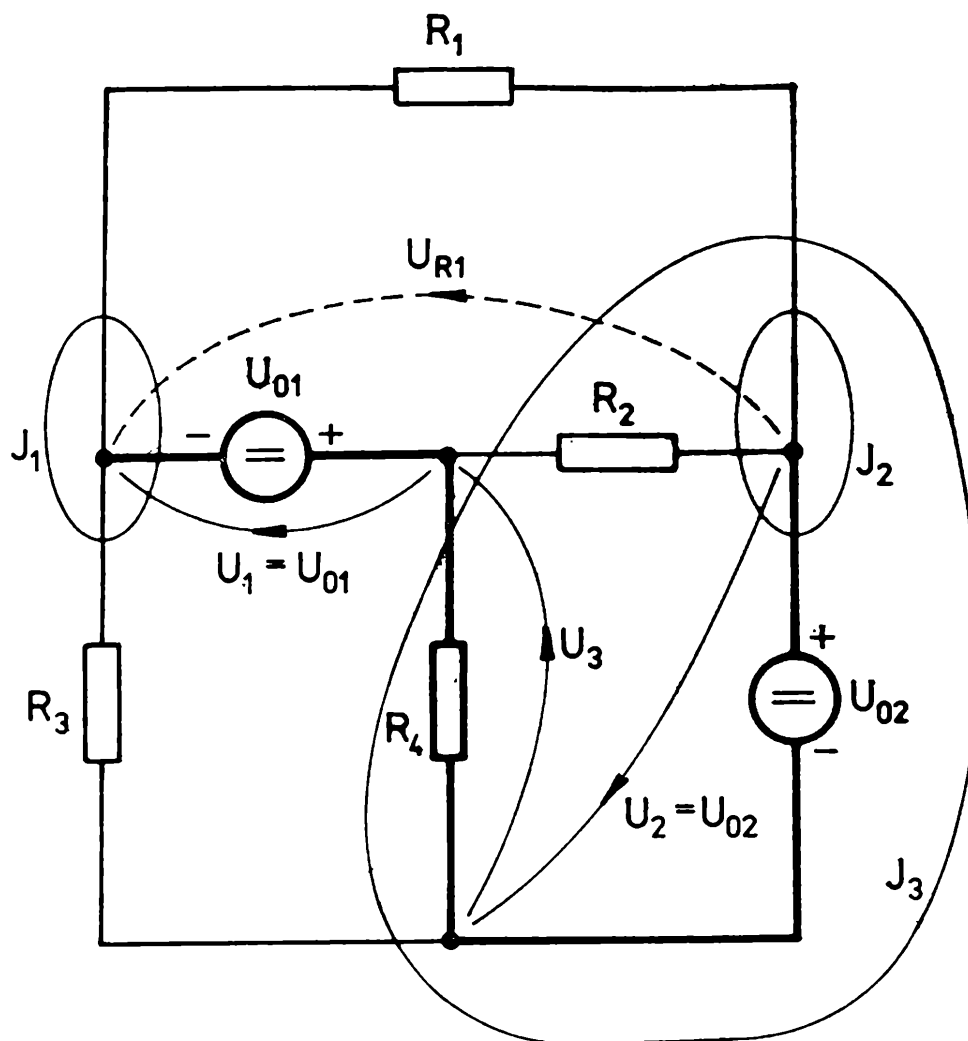
$$\begin{aligned} B_1: I_5 + \frac{\bar{U}_1}{R_3} + \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_{02}}{R_1} &= 0, \\ B_2: -I_5 + \frac{\bar{U}_2}{R_4} + \frac{\bar{U}_2 - \bar{U}_{02}}{R_2} &= 0. \end{aligned}$$

V této soustavě dvou rovnic jsou tři neznámé ($\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, I_5); doplníme ji proto třetí rovnicí, kterou získáme aplikací 2 K. z. na smyčku s .

$$s: -\bar{U}_1 + \bar{U}_2 = U_{01}$$

Řešením doplněné soustavy dostaneme

$$\bar{U}_1 = 10,8 \text{ V}; \quad \bar{U}_2 = 20,8 \text{ V}; \quad I_5 = 5,6 \text{ A}.$$



Obr. 4

Ostatní proudy ve větvích analyzovaného obvodu jsou

$$I_1 = \frac{\bar{U}_1 - U_{02}}{R_1} = -9,2 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{\bar{U}_2 - U_{02}}{R_2} = 0,4 \text{ A};$$

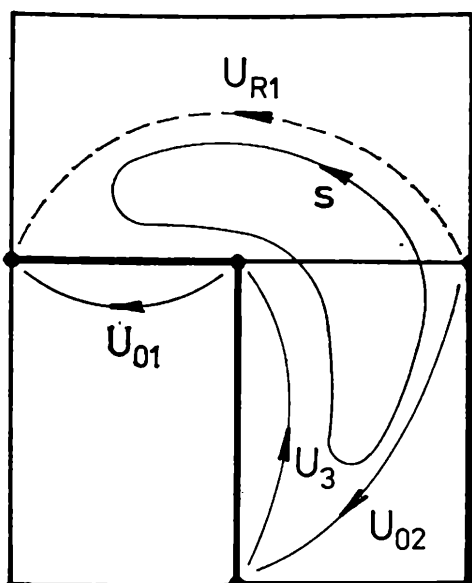
$$I_3 = \frac{\bar{U}_1}{R_3} = 3,6 \text{ A}; \quad I_4 = \frac{\bar{U}_2}{R_4} = 5,2 \text{ A}; \quad I_6 = I_1 + I_2 = -8,8 \text{ A}.$$

4. Metoda J-křivek

Podstata metody je v tom, že na J-křivky zavedené tak, aby každá z nich protínala jedinou větev stromu obvodu, aplikujeme zobecněný 1. K. z., přičemž proudy ve větvích s pasívními prvky vyjádříme pomocí úbytků napětí na větvích stromu.²⁾

Strom lze pro skutečné obvody vždy zvolit tak, aby obsahoval všechny větve se zdroji napětí. Ve srovnání s metodou uzlových napětí je tedy metoda J-křivek výhodnější, neboť ke snížení počtu neznámých lze využít všech větví se zdroji napětí.

²⁾ O nevhodnosti použití metody J-křivek pro analýzu obvodů s indukčními vazbami platí totéž, co bylo uvedeno v souvislosti s metodou uzlových napětí.



Obr. 5

Ve schématu obvodu na obr. 4 (hodnoty prvků, označení a orientace větvových proudů je stejná jako na obr. 2) je jeden z možných stromů obsahujících obě větve se zdroji napětí vyznačen silnými čarami. Každá J-křivka protíná jedinou větev stromu a dále jen nezávislé větve. Poněvadž $U_1 = U_{01}$, $U_2 = U_{02}$, postačí aplikace zobecněného 1. K. z. na křivku J_3 .

$$J_3: \frac{U_3}{R_4} + \frac{U_{02} + U_3}{R_2} + \frac{U_{02} + U_3 + U_{01}}{R_1} + \frac{U_3 + U_{01}}{R_3} = 0. \quad (*)$$

2. K. z. je v této rovnici použit při vyjadřování úbytků napětí na nezávislých větvích pomocí napětí větví stromu. Tak např. úbytek napětí U_{R1} na větvi s odporem R_1 (v obr. 4 je úbytek U_{R1} vyznačen čárkovaně) vyplývá z 2. K. z. pro smyčku s , obr. 5 (pro jednoduchost jsou vynechány prvky ve větvích)

$$s: U_{R1} - U_{01} - U_3 - U_{02} = 0,$$

odkud

$$U_{R1} = U_{02} + U_3 + U_{01}.$$

Obdobně se v rovnici (*) dospělo k úbytkům napětí na zbývajících nezávislých větvích.

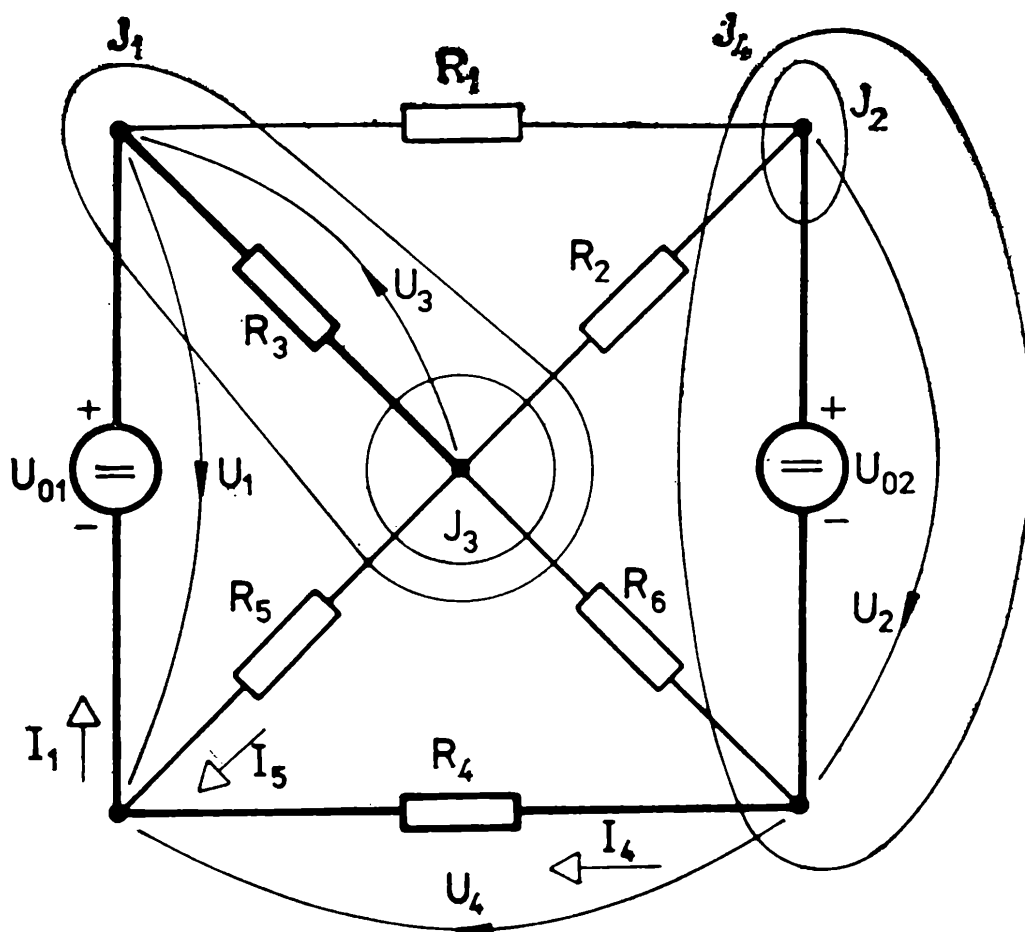
Řešením rovnice (*) dostáváme

$$U_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) U_{01} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_{02}.$$

Po dosazení číselných hodnot a výpočtu je

$$U_3 = -20,8 \text{ V}$$

Nyní lze vyčíslit proudy ve větvích:



Obr. 6

$$I_1 = \frac{-U_{R1}}{R_1} = -\frac{U_{02} + U_3 + U_{01}}{R_1} = -9,2 \text{ A};$$

$$I_2 = -\frac{U_{02} + U_3}{R_2} = 0,4 \text{ A}; \quad I_3 = -\frac{U_{01} + U_3}{R_3} = 3,6 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{-U_3}{R_4} = 5,2 \text{ A}; \quad I_5 = -I_1 - I_3 = 5,6 \text{ A};$$

$$I_6 = I_1 + I_2 = -8,8 \text{ A}.$$

Všimněte si, že při analýze obvodu nakresleného na obr. 2 přímou aplikací K. z. jsme stáli před úkolem řešit soustavu 6 rovnic, metodou smyčkových proudů jsme obdrželi soustavu 3 rovnic, s užitím metody uzlových napětí soustavu 3 rovnic, kdežto při použití metody J-křivek bylo třeba řešit pouze jedinou rovnici. I když všechny metody vedou ke stejným výsledkům, je zřejmě z hlediska pracnosti (i přesnosti) výpočtů v daném případě nejvýhodnější metoda J-křivek.

Pro procvičení metody J-křivek analyzujme ještě obvod, jehož schéma zapojení je nakresleno na obr. 6 (zvolený strom obsahující obě větve se zdroji napětí je vyznačen silnými čarami). Protože $U_1 = U_{01}$ a $U_2 = U_{02}$, píšeme zobecněný 1. K. z. pouze pro křivky J_3 a J_4 .

$$J_3: \frac{U_3}{R_3} + \frac{U_3 + U_1}{R_5} + \frac{U_3 + U_1 - U_4}{R_6} + \frac{U_3 + U_1 - U_4 - U_2}{R_2} = 0,$$

$$J_4: \frac{U_4}{R_4} + \frac{U_4 - U_1 - U_3}{R_6} + \frac{U_2 + U_4 - U_1 - U_3}{R_2} + \\ + \frac{U_2 + U_4 - U_1}{R_1} = 0.$$

Po výpočtu U_3 a U_4 lze opět určit libovolná větвовá napětí či proudy. Tak např.

$$I_5 = \frac{U_{R_5}}{R_5} = \frac{U_3 + U_{01}}{R_5}; \quad I_4 = \frac{U_4}{R_4}; \quad I_1 = I_4 + I_5 \quad \text{atd.}$$

Ověřte sami, že pro analýzu uvažovaného obvodu je z hlediska počtu rovnic soustavy, kterou je třeba řešit, opět nejvýhodnější metoda J-křivky.

astronomie

Novinky z Venuše

RNDr. RENÉ HUDEC, Praha

Sovětští vědci zpřístupnili první předběžné výsledky letu sond Veněra 11 a Veněra 12, které ve dnech 12. 12. a 25. 12. 1978 přistály na povrchu Venuše.

Přistávací části sond se oddělily od mateřských stanic, které zkoumaly planetu z průletové dráhy ve vzdálenosti 40 000 km, a po průchodu hustým ovzduším Venuše měkce přistály na jejím povrchu. Přistávací moduly Veněry 11 a Veněry 12 měly tři hlavní úkoly, a to přesný chemický rozbor atmosféry planety, výzkum jejích oblaků a výzkum tepelné rovnováhy ovzduší. Do souboru jejich přístrojového vybavení patřil hmotový spektrometr, plynový chromatograf, optický spektrometr a fotometr, rentgenový fluorescenční spektrometr a přístroje studující aerosoly a výboje v atmosféře. Navíc sondy průběžně měřily tlak, teplotu a aerodynamické přetížení.

Podívejme se blíže na hlavní zajímavosti v předběžných výsledcích posledních Veněr. Pomocí hmotového spektrometru, který pracoval od výšky 24 km nad Venušíným povrchem až do přistání, se podařilo získat 200 hmotových spekter celkem 22 vzorků ovzduší, které se odebíraly každé tři minuty. Kromě kysličníku uhličitého, tvořícího převážnou část atmosféry, podařilo se v ovzduší Venuše prokázat i zhruba 5 % dusíku a dále stopy vodní páry, chlóru a síry. Další přístroj, plynový chromatograf, provedl 9 analýz vzorků ovzduší a kromě kysličníku uhličitého zaregistroval i zhruba 2 % dusíku, $0,4 \cdot 10^{-2}$ % argonu, $1 \cdot 10^{-2}$ % kysličníku siřičitého a stopy dalších sloučenin síry. Optický spektrofotometr snímal spektrum denního nebe na Venuši při sestupu každých 10 sekund v oboru vlnových délek 450–1200 nm. Celkem bylo získáno asi 500 spekter se zřetelnými pásy kysličníku uhličitého a vodní páry. Od otevření padáku až do přistání se intenzita rozptýleného slunečního světla v ovzduší planety snížila desetkrát. Největší změna nastala v oblacích, kde intenzita světla poklesla na jednu polovinu. Některé dřívější názory, že na povrchu Venuše panuje úplná tma, se tedy ukázaly jako zcela mylné. Spodní hranice hustých mračen byla určena na 48 až 50 km.

Zajímavé výsledky přinesl přístroj pro studium drobných částecek v ovzduší — aerosolů, který zaregistroval ve spodní vrstvě mračen a v podoblačných vrstvách částčky síry. Kromě mračen je zvýšená koncentrace aerosolových částic také ve vrstvách ve výškách 14–17 km a 5–10 km nad povrchem planety. Rovněž zařízení pro sledování elektrické aktivity Venušiny atmosféry přineslo pozoruhodné výsledky. Byla objevena elektromagnetická pole impulsního charakteru, spojená s procesy připomínajícími pozemské bouře. Přístroj měl také akustický kanál, který během sestupu sondy zachycoval aerodynamický šum 88 decibelů. Po dosednutí stanice na povrch Venuše tento šum ustal a kanál registroval již jen oddělené nárazové zvuky, spojené s prací přístrojů. Přístroj na Veněře 11 však asi 32 minut po přistání zachytil zvuk o úrovni 82 decibelů neznámého původu.

Na palubě přistávacího modulu Veněry 12 byl poprvé uskutečněn pokus o rentgenovou fluorescenční analýzu k určení elementárního složení aerosolových částecek. Zařízení pracovalo ve výškách mezi 45 a 60 km nad povrchem a získalo dvě spektra v energetických oborech 1–7,5 keV a 1,5–15 keV. Jejich předběžné vyhodnocení ukazuje na obsah chlóru a sloučenin síry.

Na částech sond prolétávajících kolem Venuše byly umístěny více-kanálové difrakční ultrafialové spektrometry, pracující v 10 kanálech mezi 30 a 166 nm. Přístroj byl v činnosti po dobu asi 2 hodin při průletu.

Uvedené výsledky jsou předběžné, na konečné vyhodnocení dat získaných posledními sovětskými sondami k Venuši si ještě budeme muset počkat. Již nyní je však zřejmé, že umístění nových přístrojů na sondách k Venuši přineslo celou řadu nových údajů o této planetě.

Z dějin exaktních věd



Prof. PhDr. Jan Vojtěch

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc.,
ČVUT, Praha

V letošním roce uplynulo sto let od narození význačného pracovníka v oboru geometrie, řádného profesora (tehdejší) Vysoké školy inženýrského stavitelství ČVUT (nyní stavební fakulty) PhDr. Jana Vojtěcha.

Prof. Jan Vojtěch se narodil 5. srpna 1879 v Kyjově na Moravě. Po maturitě na českém klasickém gymnasiu v Uherském Hradišti studoval na filosofické fakultě university Karlovy v Praze. V roce 1902/03 vykonával předepsané rigorosní zkoušky a byl prohlášen doktorem filosofie, když předtím získal aprobaci pro učitelství na středních školách. Je zajímavé, že jeho disertační práce, vedená v archivu filosofické fakulty pod poř. číslem 262, není z geometrie, tj. z oboru, ve kterém později téměř výhradně pracoval.

Již od tohoto škol. roku 1902/03 byl Jan Vojtěch profesorem na reálných školách na Moravě, zvláště pak na II. české reálce v Brně. Stejně jako později při své práci vysokoškolského učitele byl již tehdy skutečně příkladným vzorem vynikajícího pedagoga a dobrého vychovatele mládeže.

Dne 30. srpna 1909 se prof. Vojtěch habilitoval pro obor matematiky na české vysoké technické škole v Brně, kde také byl jmenován profesorem, a to postupně nejdříve titulárním mimořádným 24. října 1915, mimořádným 25. února 1918 a řádným pak 12. ledna 1920. Po smrti

prof. *Matěje Norberta Vaněčka* byl Jan Vojtěch jmenován řádným profesorem matematiky na Vysoké škole inženýrského stavitelství ČVUT v Praze a zároveň se stal přednostou II. ústavu matematiky této vysoké školy. V přednáškách pro 1. a 2. ročník na Vysoké škole inženýrského stavitelství se střídal s prof. *Josefem Kloboučkem*. Vedle těchto přednášek měl ještě v učební povinnosti výuku matematiky v 1. ročníku na Vysoké škole speciálních nauk — odbor zeměměřický (když ve 2. ročníku byla až do škol. roku 1931/32, do kdy také byl uvedený učební příkaz v platnosti v celém rozsahu, matematika jen doporučena). Také v těchto přednáškách se střídal s prof. Kloboučkem. Od škol. roku 1932/33 zůstala povinnost výuky pouze v 1. ročníku, ve 2. ročníku byla pak již matematika také povinná a převzal ji tam prof. *Karel Dušl*.

Prof. Vojtěch působil na Vysoké škole inženýrského stavitelství až do svého odchodu do výslužby koncem škol. roku 1948/49, s přerušením v době okupace, kdy byl společně se všemi ostatními vysokoškolskými profesory dán dnem 1. srpna 1940 na tzv. dovolenou s čekatelným. Tím se rozuměla nucená výslužba, přičemž se na tyto osoby nevztahovaly žádné pozdější platové úpravy. Zemřel 19. ledna 1953 v Praze.

Prof. Vojtěch již jako středoškolský profesor vykonal velmi mnoho pro výuku geometrie na tehdejších reálkách a gymnasiích napsáním nových učebnic. Tyto učebnice geometrie jsou založeny důsledně na jednotícím grupovém hledisku a odpovídají tedy reformním snahám doby svého vzniku. Učebnice pro čtyři nejvyšší třídy středních škol vyšly v mnoha vydáních počínaje rokem 1910 a byly později přepracovány ve spolupráci s dalším vynikajícím pedagogem a profesorem matematiky Univerzity Karlovy *Bohumilem Bydžovským*. V nich je vhodně spojen induktivní výklad se systematickým vědeckým pohledem a jistě také jejich zásluhou je mnoho jimi odchovaných pracovníků v geometrii, neboť celkové pojetí výkladu přímo nutilo k samostatné práci. Společně s prof. Bydžovským vydal k těmto učebnicím též *Sbírku úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol* (1. vydání v roce 1912). Tato sbírka úloh je založena na týchž zásadách jako uvedené učebnice geometrie a sehrála svou kladnou úlohu při výuce matematiky na středních školách. Je v ní důsledně dodržen požadavek postupu od jednoduchých příkladů přes složitější až k nejtěžším, které kladou již větší námahu na matematické myšlení studentů.

Své vědecké práce uveřejnil prof. Vojtěch v období let 1902 až 1937. Jsou věnovány teorii geometrických konstrukcí, geometrickým transformacím a jejich aplikacím v teorii křivek. Práce, které se zabývaly projektivní geometrií, převzal pak do učebnice „*Geometrie projektivní*“ Sborník JČMF čís. XIX, 1932, 880 stran. V této učebnici je obsaženo snad vše, co do této doby bylo známo z projektivní geometrie, a to ve velmi přehledném uspořádání. Podstatné a důležité jsou však všechny literární poznámky a citace prací z vykládané části projektivní geome-

trie. Tyto poznámky jsou umístěny přímo v textu, jak to také vyžaduje pojetí Vojtěchovy učebnice a nikoliv, jak dnes bývá zvykem, jako samostatná bibliografická součást knihy či učebnice.

Prof. Vojtěch se také věnoval drobné popularizující práci z geometrie jako autor mnoha článků a hesel v naučných slovnících. Také velmi intenzívně pracoval v terminologické komisi zřízené při Jednotě československých matematiků a fysiků.

Vedle této své činnosti připravil pro tisk v Královské české společnosti nauk Bolzanova geometrická pojednání (Praha 1948), když se pracemi tohoto matematika zabýval již dříve (viz např. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 1935 (64) a 4. mezinárodní sjezd pro dějiny věd reálných v Praze 1937).

Nejzáslušnější prací pro rozvoj technického školství je sepsání dvoudílné učebnice „*Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických*“ (Knihovna spisů matematických a fysikálních, 2. a 7. svazek, celkem v sedmi vydáních). Tato učebnice má značně široký rozsah od základů analýzy přes algebru a rovinou, příp. prostorovou analytickou geometrii až k diferenciální geometrii a diferenciálním rovnicím. Výklad je velmi názorný a srozumitelný, takže výběrem látky, mnoha příklady k samostatnému procvičování a celkově vyváženým pojetím je tato učebnice vzorem i pro dnešní autory učebnic vysokoškolské matematiky pro technické školství.

Tuto učebnici doplnil prof. Vojtěch v roce 1926 knihou „*Přehled vyšší matematiky*“ (Olomouc). Ani tato kniha však není pouhou sbírkou vzorců a matematických pouček, ale obsahuje i krátké výklady metodických postupů v matematice.

Veškerou svou prací získal si prof. Vojtěch významné zásluhy o teoretické základy a výchovu stavebních inženýrů, pro rozvoj Jednoty čs. matematiků a fysiků, která jej také zvolila za svého čestného člena, takže dnes na všechno jeho působení vzpomínáme s velkým uznáním.

Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

K přesvědčení, že vysvětlení přírodních úkazů je třeba opřít o zkušenost, dospěla fyzika v 1. pol. 17. století. Jen zkušenost je řešitelkou všech pochyb, rádkyní ve všech obtížích a jedinou učitelkou pravdy (Guericke asi r. 1650). Správnost tohoto výroku byla záhy potvrzena zjištěním nepřímé úměrnosti tlaku uzavřeného

množství plynu a jeho objemu při stálé teplotě. Tuto závislost uvedených veličin stanovil v r. 1660 anglický fyzik *Robert Boyle* a roku 1679 — právě před 300 lety — znovu a samostatně francouzský fyzik *Edme Mariotte*. Zákon Boyleův — Mariotteův patří k nejdůležitějším zákonům mechaniky.

Význam fyziky pro rozvoj techniky a v souvislosti s ním experimentální charakter fyziky zdůrazňovali také někteří badatelé, jejichž výročí si letos rovněž připomínáme, skotský fyzik *James Watt*, zesnulý před 160 lety roku 1819, a německý vynálezce *Friedrich von Hefner-Alteneck*, zesnulý před 75 lety v roce 1904.

Wattův centrifugální (odstředivý) regulátor, Wattův šoupátkový rozvod páry střídavě na obě strany pístu, zavedení kondensátoru, vynalezení indikátoru aj. vedlo k sestrojení parního stroje, jímž se Watt velmi proslavil. Wattův parní stroj (r. 1765) zahajuje období, jemuž zpravidla říkáme století páry. K Wattově počtě byla jednotka výkonu nazvána jeho jménem: $1\text{ W} = 1\text{ watt}$.

O století elektřiny neméně zasloužilý *Friedrich von Hefner-Alteneck*, inženýr v závodech Siemens-Halske, zdokonalil mnoho strojů v elektrotechnickém oboru. V roce 1873 vynalezl bubnovou armaturu (kotvu) generátorů stejnosměrného proudu, v níž lze vinutí využít mnohem lépe než v prstencové kotvě Pacinotti-Grammeově¹⁾; drát vedl po plášti válce a po jeho podstavách, není tu tedy neúčinných vnitřních částí závitů; bez účinku zbývají jen části postranní. Armatura Hefner-Alteneckova (s elektromagnety) má při téže výkonnosti kromě toho menší rozměry než prstencová.

Když anglický fyzik *Humphrey Davy*, zesnulý před 150 lety v roce 1829, objevil roku 1812 elektrický oblouk, pozoroval, že uhlíky se nestejně rychle zkracují, jejich konce se zvolna od sebe vzdalují, až oblouk zhasne a proud se přeruší. Obloukové světlo vyžaduje tedy regulace. Účinnou regulaci vynalezl roku 1879 — právě před 100 lety — Hefner-Alteneck. Elektrický proud rozdělil ve dvě větve: v jedné je elektromagnet s malým počtem závitů a elektrický oblouk, ve druhé jen elektromagnet s četnými závity a velkým odporem; oba elektromagnety působí proti sobě na společné železné jádro, připevněné na konci páky, jejíž druhé rameno nese uhlík. Působením elektromagnetů reguluje proud lampu tak, aby měla stále týž odpor a svítila stále stejně. Hefnerovu obloukovou lampu zdokonalil český technik *František Křížík* (1847—1941); zavedením dvojkuželovitého jádra v elektromagnetech dosáhl samočinné a neobyčejně přesné regulace; jeho vynález nabyl světového významu.

¹⁾ Sestrojili ji v letech 1859 až 1869 — také významná letošní výročí — nezávisle na sobě *Antonio Pacinotti*, profesor university v Pise, a francouzský vynálezce belgického původu *Zénobe Théophile Gramme*.

Jedním z nejúspěšnějších fyziků nové doby byl též *William Crookes*, zesnulý před 60 lety v roce 1919. Zabýval se zejména studiem úkazů scintilace, velmi krátkých světelných záblesků, jež vznikají v některých látkách při průletu nabitých částic. K pozorování dosud užívaný spinthariskop Crookesův je opatřen fluorescenčním stínítkem, na které dopadá korpuskulární záření z radioaktivní látky umístěné uvnitř přístroje, a lupou. Nejmohutnější scintilaci budí paprsky α . K dosažení silné scintilace je nejvhodnější fluorescenční látkou sirník zinečnatý.

Zvláště důkladně studoval Crookes elektrické výboje ve zředěných plynech. Shledal, že při tlaku asi 400 Pa se výboj stává zvrstveným; mezi světlem doutnavým a katodou vzniká zároveň tmavý prostor, který se s tlakem klesajícím pod 133,3 Pa prodlužuje, až vyplní celou trubici (tzv. Crookesovu trubici); říkáme mu tmavý prostor Crookesův. Věnoval se také studiu vlastností paprsků katodových; prokázal zejména jejich mechanický účinek, když jim postavil v uzavřeném prostoru do cesty lehké slídové kolečko s lopatkami — mlýnek se roztočil.

Podobně prokázal Crookes také účinek tepelného záření na lehký otáčivý systém uzavřený v baňce, z níž byl vzduch částečně vyčerpán. Byl jím větrníček, opřený skleněným kloboučkem o jemný hrot. Tvořila jej čtyři zkřížená drátěná ramena, vodorovně rozložená, která nesla na koncích svisle postavené lehounké slídové lístky, na jedné straně v téměř smyslu začerněné. Dopadajícím tepelným zářením se černé strany lístků více zahřívají než lesklé. Molekuly vzduchu, jež se od nich odrážejí, se proto rovněž více oteplují a nabývají větší rychlosti zpětné i větší kinetické energie než molekuly, které se odrážejí o stěny lesklé. Rozdíl obou účinků způsobuje, že se větrníček roztočí.

K tomu ještě tato vzpomínka: Do školy přišli žáci jednou velmi vzrušení. Cestou (pořádný kluk se učí fyzice na každém kroku) uviděli — perpetuum mobile! V jedné výkladní skříni se prý točil zvláštní čtyřkřídlý mlýnek „sám od sebe“ Učitel fyziky přijal toto hlášení s úsměvem a vyzval žáky, aby sledovali zajímavý děj pozorněji. V nejbližším zájmovém kroužku měli již výše popsany kouzelný mlýnek, radiometr Crookesův, na stole. Tajemství jeho pohybu spočívalo v tom, že mu energii k otáčení dodávaly žárovky nebo tepelné záření sluneční. S údivem však žáci pozorovali, že jejich učitel, sedí-li poblíže přístroje a je-li vhodně oblečen, umí jako kouzelník — asi psychickou energií své osobnosti — přivodit zpomalování až zastavení pohybu větrníčku; byli pak poněkud rozčarováni jeho klidným vysvětlením, že tu dochází zcela přirozeně k distorzi radiačního pole působením třetího tělesa.

NAŠE SOUTĚŽ

Informace o soutěži ve školním roce 1979/80

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím vypíše i letos soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, konstrukční geometrie a fyziky. Na rozdíl od matematické a fyzikální olympiády se mohou soutěže Rozhledů účastnit i dvojčlenné nebo trojčlenné kolektivy z téže třídy. Soutěž vyhlásíme v říjnu a soutěžní úlohy naleznete v říjnovém a listopadovém čísle.

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve školním roce 1978/79 se účastnilo soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních celkem 14 jednotlivců a 4 kolektivy. Proti loňsku, kdy soutěžilo 26 jednotlivců a jeden kolektiv, je to opět pokles. Tento pokles začal ve školním roce 1976/77 a stále pokračuje. Letos se proti loňsku sice zvýšil počet soutěžících v matematice (ze 6 na 14), ale zato poklesl počet řešitelů úloh fyzikálních (z loňských 19 na letošních 8). Úlohy z konstrukční geometrie řešil jenom jeden student, a to Aleš Toufar, který zároveň řešil všechny úlohy z matematiky a pět úloh z fyziky. Jenom čtyři studenti zaslali řešení úloh z matematiky i z fyziky, avšak jenom jeden z nich řešil všechny úlohy z matematiky a pět úloh z fyziky; ostatní řešili z jednoho předmětu vždy jenom jednu úlohu.

Vítězem v soutěži v řešení úloh z matematiky, z fyziky i z konstrukční geometrie je

Aleš Toufar, 4.A G v Opavě. Další nejúspěšnější řešitelé jsou tito studenti:

Matematika :

1. Kolektiv G v Liberci (Zdenek Krtouš a Aleš Nekvinda).
2. Stanislav Vaněček, 3.D G W. Piecka v Praze 2.

Fyzika :

1. Janusz Drózd, 3. tř. G s polským vyučovacím jazykem v Českém Těšíně.
2. Jozef Géze, 4. B G v Dubnici nad Váhom.

Nakonec připojujeme abecední seznam všech úspěšných řešitelů; u každého uvádíme, zda řešil úlohy z matematiky (M), fyziky (F) nebo z konstrukční geometrie (G). Za jménem řešitele uvádíme ústav, na němž řešitel studoval.

Ondřej Čadek, (F), G kpt. Jaroše Brno; *Janusz Drózd* (F), G pol. Český Těšín; *Michal Fečkan* (M), G Nové Zámky; *Jozef Géze* (F), G Dubnica nad Váhom; *Ladislav Mečíř* (M), G Prievidza; *Miroslav Přibáň* (F), G Liberec; *Zdeněk Somr* (M), G Sedlčany; *Petr Šinágl* (M, F), G Praha 3, Sladkovského; *Robin Thomas* (M, F), G W. Piecka, Praha 2; *Aleš Toufar* (M, F, G), G Opava; *David Trunec* (M; F), SPŠ slévárenská Brno; *Stanislav Vaněček* (M), G W. Piecka, Praha 2; *Petr Veselka* (M), G Karlovy Vary; *Ondřej Zýka* (M), G Praha 3, Sladkovského; *Zdeněk Krtouš s Alešem Nekvindou* (M), G Liberec; *Jaroslav Guričan s Lubomírem Svítkem* (M), G A. Markuša Bratislava; *Štefan Lovac s Tiborem Szépem* (M), SPŠS maďarské oddělení, Komárno; *Vojtech Liskay se Štefanem Nagym* (M), SPŠS maďarské oddělení Komárno.

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních děkuje všem řešitelům za projevený zájem, vítězům blahopřeje a nejúspěšnějším z nich zašle z prostředků SPN v Praze věcné výhry.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

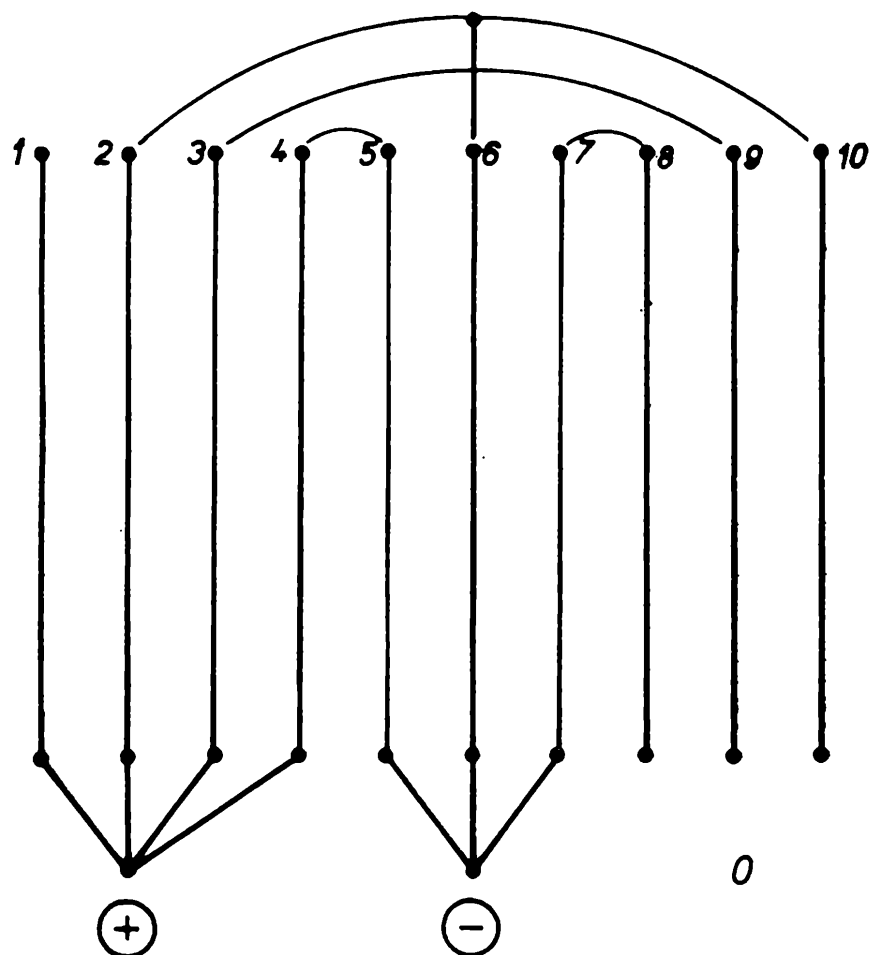
1. Města A , B jsou spojena kabelem s 10 vodiči, které nelze od sebe odlišit. Udejte metodou, kterou se označí v každém z obou konců kabelu odpovídající si vodiče 1, 2, ..., 10. K dispozici je v městě A nepřenosný zdroj elektrického proudu, dále přemístitelný přístroj, který umožňuje zjistit, zda proud prochází nebo neprochází; přitom se požaduje, aby pracovník, který má kabely označit, se pouze jednou přemístil z města A do města B a zpět.

(Došlo 10 řešení)

Miroslav Fiedler

Řešil *David Trunec*, II. B SPŠ slévárenská Brno:

Pracovník v městě A připojí vodiče ke zdroji takto: Čtyři vodiče k jedné svorce zdroje (v obr. 1 označené $+$), tři vodiče k druhé svorce (označené $-$), zbylé tři nezapojí 0. Pak odjede do města B . Tam pomocí přístroje rozliší jednotlivé skupiny vodičů ($+$, $-$, 0). Skupinu $+$ odliší od skupiny $-$ podle počtu vodičů. Potom vodiče po řadě očísluje podle obrázku. Nyní propojí vodiče jednotlivých skupin mezi sebou podle



Obr. 1

obr. 1. Vráťí se zpět do města *A*. Odpojí vodiče od zdroje a začne zkoušet, který vodič je s kterým mezi jednotlivými skupinami propojen. Tak rozliší jednotlivé vodiče.

2. V trojúhelníku *ABC* označme obvyklým způsobem délky stran *a*, *b*, *c* a velikost obsahu *S*. Dokažte, že platí:

$$ab + bc + ca - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) < 6S < ab + bc + ca.$$

(Došlo 7 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Stanislav Vaněček, II. D G W. Piecka Praha

Dokážeme nerovnost vpravo. Platí

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma,$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha,$$

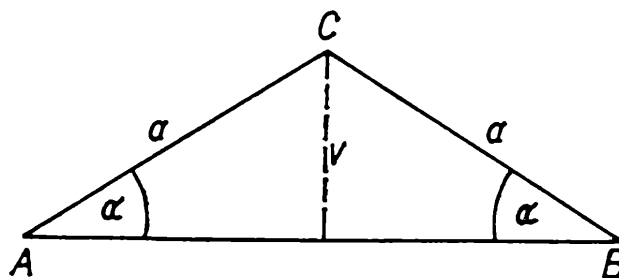
$$S = \frac{1}{2}ca \sin \beta.$$

Sečtením

$$3S = \frac{1}{2} (ab \sin \gamma + bc \sin \alpha + ca \sin \beta) ,$$

$$6S = ab \sin \gamma + bc \sin \alpha + ca \sin \beta < ab + bc + ca .$$

Tím je nerovnost vpravo dokázána.



Obr. 2

Nerovnost vlevo neplatí pro všechny trojúhelníky. Platí zcela určitě pro rovnostranný trojúhelník. Neplatí však např. pro trojúhelník, v němž $a = b = 1$, $\alpha = 1^\circ$. Potom totiž (obr.2) $c = 2 \cos \alpha$.

Levá strana dané nerovnosti je

$$L = 2c + 1 - \frac{1}{2} (2 + c^2) = 2c - \frac{1}{2} c^2 = 2 \cos \alpha (2 - \cos \alpha) .$$

Dále platí

$$S = \frac{1}{2} cv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$$

Daná nerovnost je

$$2 \cos \alpha (2 - \cos \alpha) < 6 \sin \alpha \cos \alpha ,$$

$$2 - \cos \alpha < 3 \sin \alpha .$$

Položíme-li nyní $\alpha = 1^\circ$, snadno zjistíme, že napsaná nerovnost neplatí.

Shrňme: V dané nerovnosti platí jen nerovnost vpravo, nerovnost vlevo neplatí.

3. V trojúhelníku ABC označme velikosti výšek v_a , v_b , v_c , obvod $2s$ a poloměr vepsané kružnice ρ . Dokažte, že platí

$$6\rho < v_a + v_b + v_c < 2s .$$

(Došlo 10 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Aleš Toufar, IV. A G Opava :

Nejprve dokážeme nerovnost stojící vpravo. Zřejmě platí $a \geq v_b$, kde rovnost platí, právě když jde o pravoúhlý trojúhelník a a je délka jedné jeho odvěsny.

$b \geq v_c$, rovnost právě jen když jde o pravoúhlý trojúhelník a b je délka jedné jeho odvěsny.

$c \geq v_a$, rovnost právě jen když jde o pravoúhlý trojúhelník a c je délka jedné jeho odvěsny.

Sečtením všech tří nerovností dostaneme jedinou

$$v_a + v_b + v_c < a + b + c = 2s .$$

Zde je již ostrá nerovnost, neboť všechny tři strany pravoúhlého trojúhelníka nemohou být jeho odvěsnami. Tím jsme dokázali jednu nerovnost.

Zbývá důkaz nerovnosti vlevo. Vyjdeme ze základní trojúhelníkové nerovnosti

$$a + b > c \Rightarrow 2s > 2c .$$

Analogicky dostaneme další dvě nerovnosti: $2s > 2a$, $2s > 2b$. Z těchto tří nerovností dostaneme nové tři:

$$2sv_a > 2av_a = 4S ,$$

$$2sv_b > 2bv_b = 4S ,$$

$$2sv_c > 2cv_c = 4S$$

Sečtením:

$$12S < 2s(v_a + v_b + v_c)$$

Odtud

$$\frac{6S}{s} = 6\rho < v_a + v_b + v_c$$

a tím jsme dokázali i druhou nerovnost.

4. Nad úsečkou AB jako průměrem je sestrojena polokružnice k a na ní dva různé body $C \neq A$, $C \neq B$, $D \neq A$, $D \neq B$ tak, že body B , C jsou odděleny přímkou AD . Tětivy AC , CD , DB mají po řadě velikosti x , y , z . Pro kterou polohu bodů C , D je součin xyz největší?

(Došlo 11 řešení)

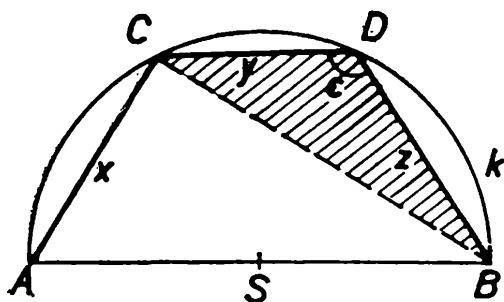
Emil Kraemer

Upravené řešení Stanislava Vaněčka, III. D G W. Piecka v Praze 2 :

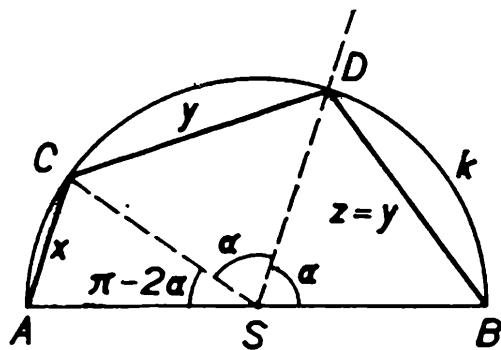
Předpokládejme nejprve, že bod C je pevně zvolen. Potom součin xyz bude největší právě tehdy, bude-li maximální součin yz . Budiž ε velikost úhlu $\sphericalangle BDC$ a v výška ke straně BC trojúhelníku BCD (obr. 3). Pro obsah P tohoto trojúhelníku potom platí tyto dva vzorce:

$$P = \frac{1}{2} yz \sin \varepsilon , \tag{1}$$

$$P = \frac{1}{2} |BC| \cdot v . \tag{2}$$



Obr. 3



Obr. 4

Velikost ε obvodového úhlu $\sphericalangle BDC$ nad obloukem BAC nezávisí na volbě bodu D uvnitř oblouku BC . Podle (1) je proto součin xyz největší právě tehdy, je-li maximální obsah P . Podle (2) to nastane právě tehdy, je-li maximální v , tj. je-li D bodem osy úsečky BC , tj. právě tehdy, je-li $z = y$ (obr. 4).

Při pevně zvoleném bodu C , tj. při pevně zvoleném x , bude součin xyz největší právě tehdy, bude-li $z = y$. V tomto případě prochází osa úsečky BC středem S polokružnice k a úhly $\sphericalangle BSD$, $\sphericalangle CSD$ jsou shodné; velikost každého z nich budiž α (obr. 4). Protože je $0 < 2\alpha < \pi$, je

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Velikost úhlu $\sphericalangle ASC$ je potom $\pi - 2\alpha$; poloměr polokružnice k budiž r . Jde nyní o to, pro které x je potom součin xyz největší. Z rovnoramenných trojúhelníků SBD , SAC plyne, že je

$$z = y = 2r \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (4)$$

$$x = 2r \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2r \cos \alpha. \quad (5)$$

Podle (4) a (5) je

$$xyz = 8r^3 \cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$xyz = 4r^3 \cos \alpha (1 - \cos \alpha). \quad (6)$$

Podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru je

$$\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \leq \frac{\cos \alpha + (1 - \cos \alpha)}{2},$$

$$\cos \alpha (1 - \cos \alpha) \leq \frac{1}{4}. \quad (7)$$

Rovnost nastane právě tehdy, je-li $\cos \alpha = 1 - \cos \alpha$, tj. podle (3) právě tehdy, je-li $\alpha = 60^\circ$; potom je též $\pi - 2\alpha = 60^\circ$. Podle (6) a (7) je tedy

$$xyz \leq r^3 ;$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x = y = z = r$.

5. Elipsa má poloosy a, b ($a > b$) a poloměry křivosti ve vrcholech ϱ_1 (v hlavním vrcholu), ϱ_2 (ve vrcholu vedlejší osy). Na elipse jsou dány dva různé pevné body A, B a libovolný bod $T \neq A, T \neq B$. Nejsou-li body T, A ani T, B souměrně sdruženy podle hlavní osy elipsy, protínají osy úseček AT, BT tuto hlavní osu v bodech M, N . Nejsou-li body T, A ani T, B souměrně sdruženy podle vedlejší osy elipsy, protínají osy úseček AT, BT tuto vedlejší osu v bodech P, Q . Dokažte, že platí:

a) Velikosti $|MN|, |PQ|$ úseček MN, PQ nezávisí na volbě bodu T ;

b) $0 \leq |MN| \leq a - \varrho_1, 0 \leq |PQ| \leq \varrho_2 - b$.

Pro kterou polohu bodů A, B platí v b) rovnosti?

(Došlo 5 řešení)

Emil Kraemer

Upravené řešení Aleše Toufara, 4. A G Opava :

a) Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, aby její osa x splývala s hlavní osou elipsy a její počátek splýnul se středem elipsy. Potom má elipsa rovnici

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 ,$$

z níž plyne, že je

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad (1)$$

Nechť ve zvolené soustavě souřadnic mají body A, B, T elipsy tyto souřadnice:

$$A [x_1, y_1], \quad B [x_2, y_2], \quad T [x, y]. \quad (2)$$

Protože body A, T nejsou souměrně sdruženy podle osy x , je $x \neq x_1$ čili

$$x_1 - x \neq 0 . \quad (3)$$

Podle (1) je

$$y_1^2 - y^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - x^2) \quad (4)$$

Protože body M, N leží na ose x , je

$$M [m, 0], \quad N [n, 0]. \quad (5)$$

Protože je $MT = MA$, je podle (2) a podle (5)

$$\begin{aligned} (x - m)^2 + y^2 &= (x_1 - m)^2 + y_1^2 , \\ x^2 - 2mx + y^2 &= x_1^2 - 2mx_1 + y_1^2 \end{aligned}$$

Podle (4) je tedy

$$2m(x_1 - x) = x_1^2 - x^2 - \frac{b^2}{a^2} (x_1^2 - x^2) ;$$

podle (3) je potom

$$\begin{aligned} 2m &= (x_1 + x) \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right), \\ m &= \frac{a^2 - b^2}{2a^2} (x_1 + x) . \end{aligned} \quad (6)$$

Zcela obdobně vypočteme

$$n = \frac{a^2 - b^2}{2a^2} (x_2 + x) . \quad (7)$$

Protože body P, Q leží na ose y , je

$$P [0, p], \quad Q [0, q].$$

Obdobně jako dříve zjistíme, že je

$$p = - \frac{a^2 - b^2}{2b^2} (y_1 + y) , \quad (8)$$

$$q = - \frac{a^2 - b^2}{2b^2} (y_2 + y) . \quad (9)$$

Podle (6) a (7) je

$$|MN| = |m - n| = \frac{a^2 - b^2}{2a^2} |x_1 + x - x_2 - x| ,$$

$$|MN| = \frac{a^2 - b^2}{2a^2} |x_1 - x_2| \quad (10)$$

Z pravé strany v (10) je patrné, že $|MN|$ nezávisí na volbě bodu T . Podle (8) a (9) obdobně zjistíme, že je

$$|PQ| = \frac{a^2 - b^2}{2b^2} |y_1 - y_2| ; \quad (11)$$

z toho je opět zřejmé, že $|PQ|$ nezávisí na volbě bodu T .

b) Protože je

$$0 \leq |x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq 2a , \quad (12)$$

je podle (10)

$$0 \leq |MN| \leq \frac{a^2 - b^2}{a} . \quad (13)$$

Rovnost na levé straně ve (13) nastane podle (10) právě tehdy, je-li $x_1 = x_2$, tj. jsou-li body A, B souměrně sdruženy podle hlavní osy elipsy. Rovnost na pravé straně ve (13) je podle (12) právě tehdy, je-li $|x_1| = |x_2| = a$ a $x_1 = x_2$, tj. pro body A, B splývající s vrcholy hlavní osy elipsy.

Obdobně dokážeme, že je

$$0 \leq |PQ| \leq \frac{a^2 - b^2}{b}. \quad (14)$$

Rovnost na levé straně nastane podle (11) právě tehdy, jsou-li body A, B souměrně sdruženy podle vedlejší osy elipsy. Rovnost na pravé straně ve (14) je právě tehdy, jestliže body A, B splynou s vrcholy vedlejší osy elipsy.

Protože $\frac{b^2}{a} = \varrho_1$, $\frac{a^2}{b} = \varrho_2$ jsou (jak známo) poloměry kružnic křivosti ve vrcholech elipsy, je tím tvrzení b) dokázáno.

6. V rovině charakterizujte všechny možné polohy čtyř bodů A_1, A_2, A_3, A_4 , jež mají tuto vlastnost: Libovolné tři vybrané body A_i, A_j, A_k tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníka.

(Došlo 11 řešení)

Jiří Sedláček

Řešení autorovo :

Rozlišujeme dva případy:

a) Nechť body A_1, A_2, A_3 tvoří vrcholy (rovnoramenného) trojúhelníka a bod A_4 leží uvnitř trojúhelníka. Nechť A_1A_2, A_1A_3 jsou ramena trojúhelníka $A_1A_2A_3$. Je-li úhel $A_2A_1A_3$ nejvýše roven 60° , pak úsečka A_1A_2 , resp. A_1A_3 je největší z možných, jež se vejdu do trojúhelníka $A_1A_2A_3$. Proto $A_1A_2A_4, A_1A_3A_4$ a $A_2A_3A_4$ jsou rovnoramenné trojúhelníky s hlavním vrcholem A_4 . Je tedy bod A_4 střed kružnice opsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Je-li úhel $A_2A_1A_3$ větší než 60° a menší než 90° , pak A_2A_3 je největší úsečka, jež se do trojúhelníka $A_1A_2A_3$ vejde. Tedy A_4 je hlavním vrcholem rovnoramenného trojúhelníka $A_2A_3A_4$ a A_4 leží tedy na ose o_{23} úsečky A_2A_3 . Kdyby trojúhelník $A_1A_2A_4$ měl hlavní vrchol A_4 , byl by ten bod zase střed opsané kružnice. Ne-li, musí A_4 ležet na kružnici k se středem A_2 a poloměrem A_1A_2 . Avšak k, o_{23} se neprotínají uvnitř $A_1A_2A_3$. Příklad pravoúhlého a tupoúhlého trojúhelníka $A_1A_2A_3$ je nutno zamítnout.

b) Nechť body A_1, A_2, A_3, A_4 tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníka $A_1A_2A_3A_4$. Velikosti stran čtyřúhelníka při obíhání jeho hranice označme malými písmeny, přičemž začneme stranou A_1A_2 a nechť různým písmenům odpovídají různá čísla.

Posloupnost $abcd$ nepřichází v úvahu, neboť A_1A_3 by muselo mít délku a nebo b . Oba případy však vedou k nerovnoramennému trojúhelníku $A_1A_3A_4$.

$abac$: pro A_1A_3 máme buď a nebo b . Druhá možnost nevyhovuje vzhledem k trojúhelníku $A_1A_3A_4$. Tedy $A_1A_3 = a$ a ze stejného důvodu $A_2A_4 = a$. „Zkřížený“ čtyřúhelník $A_1A_2A_4A_3$ však neexistuje.

$abab$: to značí kosodélník (speciálně obdélník) — nutno zamítnout.

$aabc$: $A_1A_3 = b$, $A_2A_4 = a$, to však je spor (splynou A_2 , A_3).

$aabb$: to značí speciální deltoid s hlavní úhlopříčkou a (resp. b), druhá úhlopříčka je libovolná. Situace se dá vyjádřit též tak, že jde o vrcholy rovnoramenného tupoúhlého trojúhelníka a střed kružnice opsané.

$aaab$: na úhlopříčky připadají a , b . Písmena nemohou být různá (splynutí) ani typu aa . Tedy úhlopříčky jsou b , b . Vychází speciální rovnoramenný lichoběžník, jehož vrcholy vzniknou, vypustíme-li z pravidelného pětiúhelníka jeden vrchol.

Konečně posloupnost $aaaa$ představuje kosočtverec (speciálně čtverec). Nepokládáme-li rovnostranný trojúhelník za zvláštní případ trojúhelníka rovnoramenného, musíme vyloučit kosočtverec, jehož jeden vnitřní úhel má velikost 60° .

Shrnutí. Vyhovují tyto případy:

I. vrcholy ostroúhlého nebo tupoúhlého rovnoramenného trojúhelníka a střed kružnice opsané;

II. čtyři z vrcholů pravidelného pětiúhelníka;

III. vrcholy kosočtverce (speciálně čtverce).

Poznámka. Bylo by zajímavé řešit obdobnou úlohu také pro pět bodů $A_1, A_2, \dots, A_5$ nebo pro větší počet bodů. Přenecháváme to čtenářům.

pro volnou chvíli

Jedna úloha pro čtenáře

Předpokládejme, že v rovině je dán kruh k a dále je dáno přirozené číslo n větší než 1. Dokažte, že je možno pravítkem a kružítkem rozdělit kruh k na n oblastí tak, že všechny oblasti mají stejný obsah a současně všechny oblasti mají stejný obvod.

Snad vás bude tato úloha zajímat a byli bychom rádi, kdybyste nám poslali své řešení. Pište na adresu naší redakce, M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1. Nejlepší příspěvek rádi otiskneme.

J. S.

Číselná krížovka

	1	2	3	4	5
A	H				
B					
C					
D					
E	M				!

Do každého z 22 voľných políčok krížovky vpíšte kladné celé číslo. Tieto čísla musia narastať zľava doprava a zhora nadol.

Vodorovne: A - Prvočísla.

B - Absolútna hodnota rozdielu čísel v susedných políčkach je 6.

C - Čísla deliteľné 3.

D - Párne čísla.

E - Násobky 5.

Zvisle: 1 - Jednociferné čísla.

2 - Čísla, ktorých ciferný súčet nie je väčší ako 3.

3 - Čísla, o ktoré sa zväčšujú hodnoty v tomto stĺpci, tvoria štvoricu „za sebou idúcich“ prvočísel.

4 - Súčet všetkých čísel je 197.

5 - Sedemnásobky jednociferných čísel.

Úlohou zostávajúcich 3 políčok je povzbudiť riešiteľa. Hm!

(jv)

olympiády

.....

Trnava hostila matematickou olympiádu

Už osmadvacet ročníků MO je za námi. Celostátní kolo XXVIII. ročníku kategorie A se konalo v Trnavě 28. až 30. dubna 1979 a bylo na ně podle obvyklých zásad pozváno osmdesát nejlepších olympioniků z celé republiky, z toho osm dívek (dvě české účastnice a šest slovenských).

Z pražského gymnázia v ulici W. Piecka se do celostátního kola dostalo dvanáct studentů, gymnázium v Bílovci vyslalo deset a bratislavské gymnázium v ulici Červenej armády mělo v Trnavě šest soutěžících. Ostatní zúčastněné školy přispěly jedním nebo dvěma řešiteli.

Studenti přijeli do Trnavy, i když vzhledem k přesunu pracovní doby museli tentokrát soutěži věnovat své volné dny. Přijeli, i když bezprostředně před celostátním kolem MO konala v Brně fyzikální olympiáda své celostátní kolo a asi čtvrtina řešitelů byla společná. Ti tedy museli po náročné brněnské soutěži hned cestovat do Trnavy, aby se tu cele věnovali nelehkým matematickým úkolům. Západoslovenský kraj se na matematickou olympiádu pečlivě připravil a chystal ji původně do Nitry. Když jsme se několik dní před soutěží dověděli, že se pro náhlé infekční onemocnění v Nitře musí akce přeložit do Trnavy, nedoufali jsme, že se všechno obejde bez potíží. Nevím, jak to krajský výbor MO dokázal, ale všechno v Trnavě klapalo bezvadně.

Celostátní kolo bylo slavnostně zahájeno v sobotu 28. dubna odpoledne na pedagogické fakultě Univerzity Komenského v Trnavě a vlastní soutěž se konala v neděli a v pondělí dopoledne v budově fakulty. Ve stejnou dobu zasedal také ústřední výbor MO. Organizátoři zvolili pro tento účel doškolovací středisko krajského pedagogického ústavu v neďalekých Budmericích a ukázalo se, že volba byla velmi dobrá. Zasedání ÚVMO řídil jeho předseda *doc. dr. J. Moravčík, CSc.* V neděli odpoledne měli olympionikové kulturní program a členové ústředního výboru si zatím prohlédli Piešťany.

Děkujeme organizátorům v Západoslovenském kraji za tři pěkné dny, které řešitelé i členové ústředního výboru MO naplnili prací. Rozhledy přinesou seznam vítězů celostátního kola v říjnovém čísle.

J. S.

Ze zahraničních časopisů

V belgickém matematickém časopisu *Mathesis* byla v roce 1898 uveřejněna tato úloha:

Najděte všechny dvojice x, y nezáporných celých čísel, které splňují rovnici

$$2^{x+1} + 2^x + 1 = y^2. \quad (1)$$

Řešení této úlohy, které bylo uveřejněno ve zmíněném časopise, rozvedu, aby bylo přístupnější mladým čtenářům *Rozhledů*.

1. Nejprve si všimneme případu, kdy $x = 0$. Potom $y = 2$, a tak jsme došli k první dvojici celých nezáporných řešení $(0; 2)$.

2. V dalším budeme předpokládat, že $x \neq 0$ nebo ještě lépe $x > 0$. Daná rovnice je ekvivalentní s rovnicemi

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^x + 2^x + 1 &= y^2, \\ 3 \cdot 2^x &= (y - 1)(y + 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Levá strana rovnice (2) je dělitelná číslem 3, a proto tímto číslem musí být dělitelná i pravá strana rovnice. To však znamená, že buď a) $y - 1 = 3m$ nebo b) $y + 1 = 3m$, kde v obou případech číslo m je přirozené.

Každý případ probereme zvlášť.

a) $y - 1 = 3m$, jinak $y = 1 + 3m$.

Po dosazení do rovnice (2) a po kratší úpravě dostaneme

$$2^x = m(3m + 2). \quad (3)$$

Čísla m a $3m + 2$ jsou zřejmě přirozená čísla, jež jsou mocninami čísla 2. Položme $m = 2^t$, kde t je nezáporné celé číslo. Potom z (3) plyne

$$2^x = 2^t (3 \cdot 2^t + 2) = 2^{t+1} \cdot (3 \cdot 2^{t-1} + 1).$$

Pro $t > 1$ je číslo $(3 \cdot 2^{t-1} + 1)$ liché a větší než 1. Pro číslo t jsou tedy právě dvě možnosti: $t = 0$ nebo $t = 1$.

α) Nechť $t = 0$. Pak $2^x = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} + 1\right) = 5$. Takové nezáporné celé číslo x neexistuje.

β) Nechť $t = 1$. Pak $2^x = 2^2 \cdot (3 + 1)$, tj. $x = 4$, $y = 7$.

b) $y = 3m - 1$. Stejným způsobem jako v odst. a) dostaneme řešení $x = 3$, $y = 5$.

Úplné řešení dané rovnice v oboru nezáporných celých čísel jsou tyto tři dvojice: $(0; 2)$, $(4; 7)$, $(3; 5)$.

Stanislav Horák

různé

0 českém názvu pro televizi

Před 26 lety bylo v Československu zahájeno pravidelné televizní vysílání. Praktické pokusy s přenosem obrazů na dálku začaly u nás z iniciativy několika nadšenců již v roce 1935. Tehdy se utvořil při Čes-

koslovenském radiosvazu, sdružujícím radioamatéry, televizní kroužek, který vedl *dr. Jaroslav Šafránek*. Tato skupina sestavila fungující televizní aparaturu, která se pak předváděla po celé republice na přednáškách popularizujících televizi.

Vedle otázek rázu technického a finančního se již ve třicátých letech objevil problém českého názvu pro televizi. V této době se již běžně užívalo slova rozhlas. Málokdo už ví, že pro televizi byly navrhovány obdobně tvořené názvy rozjev a rozvid. O tom, který je vhodnější, se vedly diskuse, lepší se zdálo být jméno rozjev, avšak neujalo se stejně jako rozvid. Užíváme tedy v češtině slova televize. Původně se psalo televise, tvar televize se užívá od roku 1958, kdy vyšla nově zpracovaná Pravidla českého pravopisu.

Záležitost se slovy rozjev a rozvid se nám dnes může zdát malichernou a dokonce připomínat jazykový purismus (brusičství), tj. přehnanou péči o jazyk, jak ji známe z doby národního obrození. V názvech rozjev a rozvid však šlo o víc, totiž lépe vystihnout, že televize umožňuje jen omezené vidění na dálku. Televizní divák si přece nemůže říci: Nyní se podívám do Krkonoš, zda tam svítí slunce. Může se dívat jen na události, děje apod., které se vysílají, tj. jejichž obraz je „rozšiřován“. Dokonce ani u přenášeného děje nevidíme mnohdy právě to, na co bychom se dívali, kdybychom byli při tom.

jm

Podíl českých a slovenských techniků na vývoji parních turbín

V pravém slova smyslu průkopníkem parních turbín byl slovenský technik *Aurel Boleslav Stodola* (1859—1942), rodák z Liptovského Mikuláše a později slavný profesor Spolkové vysoké školy technické v Curychu. V roce 1903 publikoval teoretickou knihu o parních a plynových turbínách, která byla přeložena do všech světových jazyků a dodnes se cituje jako základní dílo tohoto oboru.

Profesora A. Stodolu připomnělo bratislavské televizní studio v pondělí 6. srpna 1979 zdařilou televizní hrou I. Stodoly *Moment kritického zatížení*. Scénář připravil J. Vopálenský a režisérem byl O. Katuša. Prof. A. Stodolu ve velkém časovém rozpětí jeho života věrohodně zpodobnil I. Mistrík. Jestliže naše televize tuto hru znovu uvede, nezapomeňte se na ni podívat.

Úspěšným konstruktérem parních motorů byl *Jan Zvoníček* (1865 až 1926), profesor techniky v Brně a v Praze, jenž zkonstruoval v roce

1908 turbínu nového typu (tzv. radiální), v níž pára proudila kolmo ke hřídeli.

Ani plzeňská *Škodovka*, jejíž 120. výročí si letos připomínáme, nezůstala stát stranou. Před 75 lety v roce 1904 ve Škodovce vyrobili svou první parní turbínu, která měla výkon asi 400 kW. (Tehdy se uvádělo 550 koní.) Spolupracovali přitom se zkušeným francouzským odborníkem *Augustem Rateauem* (1863—1930). Od roku 1904 se v Plzni vyrobilo více než 1600 turbín o celkovém výkonu 24 175 MW. Přitom převážná většina parních turbín opustila brány Škodovky po roce 1945. Bylo jich více než tisíc s výkonem 22 822 MW.

jm

recenze

NOVÉ VYDÁNÍ SBÍRKY ÚLOH Z FYZIKY

Již po čtvrté vydalo pražské Státní pedagogické nakladatelství osvědčenou příručku *Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol*, jejímž autorem je *Miroslav Kružík*. Uspořádání úloh se shoduje s tématy učebnic fyziky pro gymnázia. Na počátku každého tématu je stručný přehled základních pojmů a zákonitostí, který je doplněn aspoň jedním řešeným příkladem. Výjimku činí pouze poslední kapitola věnovaná astronomii, kde však lze využít poznatků z úvodních částí k ostatním tématům. Kniha má 336 stran a obsahuje celkem 1607 úloh. Pro neřešené úlohy jsou uvedeny výsledky. Ministerstvo školství ČSR sbírku schválilo jako pomocnou knihu pro žáky středních škol. Cena je 18 Kčs.

V. N. Tutubalin:

TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

SN TL, 1978, 216 stran, 15 obrázků; vázaný výtisk 36 Kčs, brožovaný výtisk 27 Kčs.

Kniha ukazuje Tutubalinovo pojetí moderního a přitom stručného (jednosemestrového) výkladu teorie pravděpodobnosti pro ty posluchače, kteří jsou seznámeni se základy vyšší matematiky. Autor

věnuje velkou pozornost tomu, aby udržel exaktní matematickou úroveň výkladu. Současně se snaží ukázat širokou aplikabilitu výsledků, přičemž systematicky varuje před chybným použitím jednotlivých metod.

Publikace je rozdělena do dvou částí. Nejprve je uveden vlastní učební text pro studenty (138 stran). Druhá část obsahuje metodický komentář k výkladu a je

určena hlavně pro učitele. Kniha začíná popisem diskrétního prostoru elementárních jevů. Pak se zabývá podmíněnou pravděpodobností a zavedením náhodných veličin. Následuje Čebyševova nerovnost se zákonem velkých čísel a popis Bernoulliho schématu. Další kapitoly jsou věnovány statistickému testování hypotéz, Kolmogorově axiomatické soustavě, centrální limitní větě a jejímu použití. Závěr textu je orientován více na statistiku a obsahuje pojednání o odhadu parametrů, o lineárním modelu a o použití metody nejmenších čtverců.

Tutubalin píše nezvykle svěžím stylem. Čitelnost knihy dále podporují četné poznámky pod čarou, které připojili překladatelé. Také volba příkladů v textu odpovídá době, v níž žijeme. Problematika bezporuchového chodu složitých přístrojů, ověřování obecné teorie relativity a lékařská diagnostika, to je rozhodně dnešnímu čtenáři bližší než dříve uváděné pokusy s házením několika hracích kostek.

Na druhé straně je však třeba zdůraznit, že autorův postoj k možnostem aplikací je mimořádně opatrný. Žádný matematický model nemůže být dokonalou kopií reálného děje, ale přesto je pro lidskou společnost užitečné tyto modely používat. Dalším určitým nedostatkem je to, že k jednotlivým kapitolám nejsou připojena vůbec žádná cvičení.

Kniha je dobrou příručkou pro výuku teorie pravděpodobnosti na vysoké škole. Je určena zejména přírodovědcům a technikům, ale

nepochybně bude velmi užitečná i při výuce středoškolských učitelů matematiky. Nemůže ovšem zcela nahradit výklad přednášejícího, který má větší možnost upozornit na pomocný charakter některých matematických tvrzení a důkazů a naopak zdůraznit vlastní cíle výkladu s poukazem na jejich další použití.

Doc. dr. J. Anděl, CSc.

Jiří Nečas:

GRAFY A JEJICH POUŽITÍ

Vydalo SNTL — Nakladatelství technické literatury, Praha 1978. Kniha vyšla v Polytechnické knižnici jako 90. svazek II. řady, příručky. Má 192 strany, 100 obrázků a 8 tabulek. Cena brožovaného výtisku 18 Kčs.

Mnozí matematikové zastávají názor že matematika je věda, která může studovat cokoli. Opatrně k tomu dodávají: Říkáme-li cokoli, neznamená to kdykoliv.

Totéž, jenže v menším měřítku, platí i o jedné z nejmladších matematických disciplín — teorii grafů, neboť problematika, kterou se zabývá, tvoří svěží a velmi pestrou mozaiku.

Na jedné straně jsou to úlohy zařadované někdy do oblasti rekreační a zábavné matematiky. Ze známých uveďme například úlohy o třech domech a třech studních, o převozníkovi, vlku, koze a zelí, úlohy přelévání vody nestejnými nádobami, o bloudění v labyrintu a podobně.

Na zcela opačné straně jsou problémy, které před matematiky klade sama praxe. Například ekonomové a dopravní požadují řešit různé dopravní problémy (mezi nejznámější a zároveň nejstarší patří tzv. problém obchodního cestujícího). Chemiky zajímají různé možnosti strukturních vzorců některých sloučenin (např. izoméry uhlovodíků). Fyzikové přicházejí s různou problematikou elektrických sítí, sociologové hledají matematické metody pro studium nejrozumnějších vztahů mezi lidmi. Jazykovědci studují stavbu přirozených i umělých jazyků. A od jazykovědců je zase jen malý krok k moderní výpočetní technice a kybernetice.

Právě s řadou těchto problémů a příslušnou matematickou teorií, kterou představuje teorie grafů, se mohou čtenáři seznámit přístupnou a zajímavou formou v Nečasově knížce: *Grafy a jejich použití*.

Pro jednotlivé problémy jsou udány algoritmy, umožňující jejich jednoduché řešení. Algoritmy jsou popsány písemně a pomocí vývojových diagramů. (Není však jasné, proč některé vývojové diagramy jsou zařazeny do vlastního textu a jiné až do doplňků.) Výklad je doplněn cvičeními a jejich výsledky.

Knížka je vybavena výkladovým slovníčkem zavedených pojmů, termínů a hesel. Celkem zbytečným se zdá zařazení čtyřjazyčného slovníčku (česko-rusko-anglicko-německý) některých termínů z výkladového slovníku. Výběr cizích ekvivalentů k českým ter-

mínům je vzhledem k značné terminologické nejednotnosti v zahraniční literatuře místy neúplný a neobsahuje některé často užívané termíny. Abecední řazení podle českých termínů není pro případné studium cizojazyčné literatury nejvhodnější.

Knížku lze doporučit především studujícím středních škol a vysokých škol technických. Technické veřejnosti, zabývající se hlouběji o aplikace teorie grafů, může posloužit jako základní informace.

dr. M. Koman, CSc.

M. Hartmanová — V. Trnovcová: **IONOVÉ KRYŠTÁLY**

Vydavatelstvo Alfa n. p. Bratislava 1978, 255 stran textu, 323 citací a stručný rejstřík.

Vydání knihy s tematikou iontových krystalů lze jen uvítat, neboť na našem knižním trhu domácí kniha podobného obsahu chybí přes velkou tradici studia těchto látek po druhé světové válce v Praze. Vedle několika překladů většinou učebnic z fyziky polovodičů (s menším či větším podílem věnovaným iontovým krystalům), překladu Stasiwovy knihy z roku 1963 a jedné vysokoškolských skript z roku 1960, učebnice fyziky iontových krystalů v Československu chybí, a je proto třeba vydavatelství Alfa v tomto směru pochválit. Na druhé straně kniha svým obsahem je silně nevyvážená, na skutečně výborné úrovni podává vedle úvodní

partie transportní jevy v iontových krystalech (zřejmě oblast vlastní vědecké aktivity obou autorek), naproti tomu optické a mechanické vlastnosti iontových krystalů jsou neúměrně zkráceny, další důležité partie fyziky iontových krystalů jsou prakticky pomínuty (fotochemické vlastnosti, teorie ligandového pole) či dokonce chybí (magnetické vlastnosti, nelineární optické vlastnosti); nejslabším článkem knihy je přehled technických aplikací iontových krystalů, podaný na 15 stránkách (snaha po stručnosti vede k nepřesnostem a zkreslením). V záložce knihy se konstatuje, že Encyklopedie moderní fyziky má podávat nejnovější výsledky studia; tomu ovšem neodpovídá seznam citací, které spadají převážně do období před rokem 1970 a ve své většině pomíjejí práce Bohunovy školy.

Jestliže podle přání autorek má kniha sloužit vědeckým pracovníkům, posluchačům fyziky na vysokých školách a učitelům středních škol, je, podle mého názoru, tento cíl již ve své podstatě nesplnitelný — každý z uvedené kategorie potenciálních zájemců bude v knize hledat a postrádat něco jiného.

Závěrem lze snad konstatovat, že kniha Iónové kryštály je hlavně zaměřena na transportní jevy v iontových krystalech a pro tuto problematiku bude dobrou pomůckou pro zájemce z řad vysokoškolských studentů a vědeckých pracovníků z oblasti technických a nefyzikálních oborů.

Prof. dr. K. Vacek, DrSc.

HVĚZDÁŘSKÁ ROČENKA 1979

Sestavili: Vl. Guth, B. Onderlička, P. Příhoda, Jar. Ruprecht a kol. Vydala Academia, Praha 1979. Svazek 1 — Tabulky efemerid, 142 str., 19 Kčs; svazek 2 — Přehled pokroků v astronomii, 130 str., 17 Kčs, oba svazky brožovány.

Letoční ročník Hvězdářské ročenky vychází ve dvou nezávislých a jednotlivě prodávaných svazcích. Obsah obou svazků, jež dohromady jediný loňský svazek převyšují o 15 stránek, odpovídá co do členění i zpracování svazku loňskému.

Prvý svazek kromě části dané názvem *tabulky efemerid* obsahuje jako vstupní část kalendářní data a jako závěrečnou část podává přehled časových signálů. Pro výběr školních číselných příkladů (Keplerovy zákony, gravitační pole) poslouží tabulky charakterizující planety (str. 41) a jejich měsíce (str. 42) co do tvaru dráhy i těles samotných. Vlastníci malých dalekohledů budou patrně často nahlížet do grafů poloh mediceských družic (str. 56—67) a do návazných (str. 68—71) číselných údajů zatmění, zákrytů a přechodů měsíců i jejich stínů Jupiterovým terčem. Pro nacvičení odhadu zorných úhlů v rozsahu 5—50 obloukových vteřin při různých zvětšeníh dalekohledu poslouží údaje vizuálních rozsahů Saturnových prstenců (str. 75). Zájemci o sledování zákrytů hvězd Měsícem najdou tabulkový materiál (str. 89

až 95) včetně užitečného upozornění na možnost získat na krajské hvězdárně ve Valašském Meziříčí pokyny k odbornému pozorování.

Většinou amatérských obdivovatelů hvězdné oblohy bude asi opět nejčastěji užíván kalendář úkazů (str. 96—107), orientující průběžně podle dat o jednotlivých jevech na hvězdném nebi. Pozorovatelé proměnných hvězd najdou užitečné údaje na str. 124—136, kde se také dovědí o možnosti získání mapek a seznamu vhodných srovnávacích hvězd. Úvod závěrečné části informuje o Mezinárodním časovém ústředí a o novém projektu systému 24 aktivních družic, zabezpečujících pro pozemní stanice trvalý současný dohled alespoň šesti družic vysílajících signály s přesností větší než ± 30 ns.

Druhý svazek — nehledě k úpravě názvů dvou částí (11 a 15) se od loňského ročníku liší připojením závěrečného odstavce (17) věnovaného kosmologii.

V úvodní části (*astrometrie*) potěší čtenáře zpráva o určení pólu zemského elipsoidu setrvačností českým pracovníkem *M. Buršou* a v části věnované *nebeské mechanice* najde jméno téhož autora,

jemuž byla za práce s využitím umělých družic v geodézii udělena státní cena K. G. Zůstaneme při této jediné připomínce úspěchů naší vědy. Výčet pracovních úspěchů spojených s našimi dalšími 25 pracovníky připomenutými v ročence by předloženou recensi značně rozšířil.

Ve statí věnované *Slunci* upoutají potíže spojené s předpověďmi sluneční činnosti a studium rekurentní variace geomagnetického pole. Část *Měsíc a planety* připomíná pražský kongres Mezinárodní astronautické federace informací o programu CETI, výsledky získané meziplanetárními sondami a teoretické práce o gravitačních polích planet. Z dalších článků uvádíme orientačně alespoň názvy: Kométy (článek, stejně jako následný, je psán slovensky), Meteory, Hvězdy a dvojhvězdy, Hvězdokupy a hvězdné asociace, Mezhvězdná látka, Rádiové pulsary, Rentgenové zdroje a záření gama, Galaxie, Extragalaktické objekty, Kvasary, Kupy galaxií, Vznik a vývoj hvězd, Kosmologie. Závěr ročenky je již tradičně tvořen soupisem umělých družic a kosmických sond vypuštěných v roce 1977.

dr. K. Mišoň, CSc.

Oznámení

Tiskové středisko JČSMF upozorňuje na doprodej zbytků starších učebních textů určených k modernizaci vyučování matematice a fyzice a některých publikací Jednoty. Jsou to tyto publikace:

Hruša: Návrhy modernizace 1., 2. a 3. r. (Kčs 5,40, 5,40, 8,—)

Hruša: Pracovní listy pro 1., 2. a 3. r. (Kčs 15,80, 19,20, 22,—)

- Vyšín: Matematika 6. r. 2. díl (20,80)
 Vyšín: Nezáporná racionální čísla (14,20)
 Rohlíčková: Matematika 8. r. (44,—)
 Vyšín: Geometrické struktury I. a II. (23,—, 21,—)
 Šedivý: Matematika pro gymnázia II. díl (14,30)
 Vyšín: Metoda souřadnic (14,40)
 Vyšín: Zobrazení, funkce a operace (12,20)
 Jodas: Komplexní čísla (12,80)
 Chytilová: Fyzika pro 7. roč. část A, B, C, (13,30, 9,10, 2,—)
 Chytilová: Fyzika pro 8. roč. část A, B, C (19,90, 13,50, 1,60)
 Chytilová: Fyzika pro 9. roč. část A, B, C (21,40, 11,90, 2,80)
 Říha: Základy teorie her (23,—)
 Volf: Metodika řešení fyzikálních úloh (27,—)
 Žouželka: Moderní fyzikální pomůcky pro demonstrační a laboratorní pokusy (40,—)
 Fenclová-Maršák: Výuka fyziky a vzdělávání učitelů ve škol. systémech socialistických zemí (Vyšlo v r. 1979) (52,—)
 Žádáme zájemce, aby své objednávky co nejrychleji adresovali JČSMF, Husova 5, Praha 1.
 Dále upozorňujeme, že v prodejně technické literatury SNTL ve Spálené ulici 50 v Praze 1 jsou dosud v prodeji tyto publikace Jednoty:
 Mott-Davis: Elektronové procesy v nekrytalických látkách (54,—)
 Fučík: Spectral Analysis of Nonlinear Operators (60,—)
 Česnak: Využitie supravodivosti vo vede a v technike (6,—)

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

escludere	vyloučiti
esclusione ž	vyloučení
eseguire	provést, vykonati
esempio m	příklad
esercizio m	cvičení
esistenza ž	existence
esistere	existovati
esotermico	exotermní
espansione ž	roztažení
esplicabile	vyložitelný
esplicito	explicitní
esponente m	exponent, mocnitel
esponenziale	exponenciální
espressione ž	výraz
esprimere	vyjádřiti
essenziale	podstatný
estensione ž	rozšíření
esterno	vnější
estrapolazione ž	extrapolace
estrarre (radice)	odmocňovati
estrazione di radice ž	odmocňování
— quadrata	— dvěma
— cuba	— třemi
estremali ž (curve)	extremály (ve variačním počtu)
estremità ž	konec, kraj; extrém
estremo superiore m	suprémum
— inferiore m	infimum
etto, ettogrammo m	sto gramů, 0,1 kg
evaporazione ž	vypařování
— degli elettroni	emise elektronů
evidente	evidentní, očividný
evidentemente	očividně

exinscritto

připsaný

F

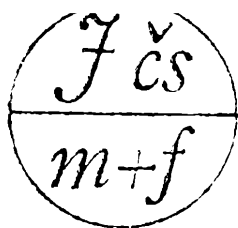
faccia ž	stěna (tělesa); povrch; plocha
facile	snadný
facoltà ž	faktoriál
falsificare	dokázati nepravdivost; padělati
falsificazione ž	důkaz nepravdivosti
falsità ž	nepravdivost, omyl
falso	nepravdivý, chybný
falso m	omyl
farad m	farad (jednotka)
fascio m	svazek
— di piani	— rovin
— di rette	— přímek
fase ž	fáze
fattore m	činitel, koeficient
— primo	prvočinitel
fattoriale m	faktoriál
fiamma ž	plamen
fiamme solari	protuberance
figura ž (geometrica)	obrazec nebo těleso
filtro m	filtr
finito	konečný
fissione nucleare ž	štěpení atomového jádra
fisso	pevný, stálý, samodružný
flessione ž	křivost (první); flexe
flip-flop	klopný obvod
fluorescenza ž	fluorescence
focale	ohniskový
focalizzazione ž	zaostření obrazu
fondamentale	základní
fondamento m	základ
fondersi	splynouti
forma ž	forma, tvar; homogenní mnohočlen
— indeterminata	neurčitý výraz
— lineare	forma lineární
— quadratica	— kvadratická

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

2

ROČNÍK 58, 1979-1980, ŘÍJEN



ROČNÍK 58
ŘÍJEN 1979

2

rozhledy

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT, Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigová 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1979.

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Obsah

M. Jelínek: Studenti a JČSMF .	49
Dr. E. Calda: Několik náročnějších úloh o posloupnostech .	50
J. S.: Nové obří prvočíslo .	54
Dr. J. Chrapan, CSc.: Radiouhlík v archeologii	55
R. Rejl: Ještě jednou brouk a guma .	61
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Astronomické souřadnice I.	62
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Staré české délkové jednotky	68
Úlohy k řešení	77
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	79
Doc. J. Vyšín, CSc.: O soutěžní úloze 12 z minulého ročníku Rozhledů	86
Dr. J. Šedivý: Řešení jednoho výzkumného úkolu	89
Ing. J. Vavří Tři úlohy o elektrických zdrojích	90
Olympiády	92
Dr. S. Horák: Nejmladším čtenářům .	93
Recenze	94
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky

Studenti a JČSMF

MILOŠ JELÍNEK, Praha

Jednota československých matematiků a fyziků je jedna z našich nejstarších vědeckých společností. Byla založena v r. 1862 s názvem *Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky*. Od r. 1870 se činnost Jednoty postupně rozšiřovala. Začala organizovat sjezdy (první byl sjezd profesorů fyziky a matematiky v r. 1870), vydávat časopisy (v r. 1872 začíná vydávat *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*) a od r. 1873 začala vydávat středoškolské učebnice matematiky a fyziky a vědecké monografie z těchto oborů. Vydavatelská činnost se zvláště rozšířila po r. 1919, kdy Jednota zřídila svou vlastní tiskárnu.

Po vzniku Československé akademie věd byla Jednota v r. 1955 přiřčena k této instituci jako jedna z jejích vědeckých společností a postupně se reorganizovala do současné podoby. V bývalých krajských městech vznikly pobočky a postupně se uvedly v činnost vědecké a pedagogické sekce pro matematiku a fyziku. Na Slovensku vznikl nejprve tzv. Slovenský výbor a později vznikla samostatná *Jednota slovenských matematiků a fyziků*, která těsně spolupracuje s JČSMF.

JČSMF sdružuje vědecké a odborné pracovníky v matematice a fyzice a učitele těchto předmětů všech typů škol. Svými konferencemi, semináři, letními školami a přednáškami podporuje rozvoj těchto vědeckých oborů a po celou dobu svého trvání podporuje snahy zkvalitňovat výuku matematiky a fyziky. Sdružuje vědecké a odborné pracovníky v didaktice matematiky a fyziky, zkušené učitele a posluchače učitelství obou předmětů na vysokých školách. Těsně spolupracuje s ministerstvem školství, s výzkumnými ústavy pedagogickými, s orgány školské správy, zvláště s krajskými pedagogickými ústavy, jakož i se Státním pedagogickým nakladatelstvím.

Členové JČSMF se účastní na realizaci projektu dalšího rozvoje čsl. výchovně vzdělávací soustavy jako autoři a recenzenti učebnic a metodických příruček i jako školitelé učitelů.

Je v tradici Jednoty starat se o terminologii školské matematiky a fyziky, která se čas od času reviduje, a vydávají se příslušné odborné příručky.

Jeden z předních úkolů Jednoty je vyhledávat nadané žáky pro matematiku a fyziku a pečovat o jejich růst. Děje se tak různými způsoby, především matematickou a fyzikální olympiádou, ale i letními školami a tábory, dalšími soutěžemi, přednáškami atd. Jednota je spolu s ministerstvem školství spolupořadatelem matematické olympiády (od r. 1951) a fyzikální olympiády (od r. 1959).

Jednota vydává svůj členský časopis *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* a založila řadu časopisů, které později převzaly jiné instituce, jako je např. *Matematika a fyzika ve škole*, kterou začala vydávat v r. 1948 a *Rozhledy matematicko-fyzikální*, které počala vydávat již v r. 1922.

Student vysoké školy nebo žák střední školy starší 16 let, který projevuje vážný zájem o matematiku nebo fyziku, se může stát mimořádným členem JČSMF, na Slovensku JSMF. Zájemce si vyžádá v sekretariátě nebo v příslušné pobočce přihlášku, kterou vyplní a odešle své pobočce k projednání. Nový člen je o přijetí informován a je mu zaslána legitimace a složenka na zaplacení členského příspěvku. Mimořádný člen platí 20,— Kčs ročně a dostává za to členský časopis *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Může se zúčastnit všech akcí Jednoty stejně jako člen řádný.

Student, který má zájem stát se členem Jednoty, se může informovat u svého učitele matematiky či fyziky, kde je sídlo příslušné pobočky, anebo může napsat přímo o přihlášku do sekretariátu na adresu: Jednota čs. matematiků a fyziků, Husova 5, 110 00 Praha 1 a na Slovensku na adresu Jednota slovenských matematiků a fyziků, 800 00 Bratislava, Gorkého 13.

matematika

Několik náročnějších úloh o posloupnostech

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

Při řešení následujících úloh vystačíte s těmi znalostmi o aritmetických a geometrických posloupnostech, jež se probírají na střední škole. Stačí vám v podstatě vzorce pro součet prvních n členů těchto posloupností:

$$s_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} \text{ pro aritmetickou posloupnost}$$

a

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ pro posloupnost geometrickou s kvocientem } q \neq 1.$$

Ve 4. úloze použijeme kromě toho vzorce pro součet druhých mocnin prvních n přirozených čísel, s nímž jste se rovněž už jistě setkali:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} (n + 1)(2n + 1).$$

Úlohy mohou pro mnohé z vás představovat problémy, protože se jedná o typy příkladů, které jste ve škole neřešili. Proto je řešení každé úlohy v článku poměrně podrobně popsáno; má vám pomoci nejen k tomu, abyste se podobné příklady naučili řešit, ale i k tomu, abyste si uvědomili, že se svými znalostmi se můžete odvážet i na úlohy obtížnější. Prospějete sami sobě, jestliže se úlohu v každém příkladu pokusíte vyřešit nejprve samostatně.

Příklad 1. Určete součet s_n prvních n členů posloupnosti 1, 11, 111, ..., tj. posloupnosti, jejímž k -tým členem je pro všechna přirozená k číslo $a_k = \underbrace{11\dots 1}_k$.

Uvědomíme-li si, že k -tý člen této posloupnosti lze vyjádřit ve tvaru $a_k = 1 \cdot 10^{k-1} + 1 \cdot 10^{k-2} + \dots + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$, dostáváme na základě vzorce pro součet prvních k členů geometrické posloupnosti (je jednodušší vzít $a_1 = 1$ a $q = 10$ než $a_1 = 10^{k-1}$ a $q = 1/10$):

$$a_k = \frac{1}{9} (10^k - 1).$$

Pro součet s_n prvních n členů dané posloupnosti tak máme

$$\begin{aligned} s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \frac{1}{9} (10^1 - 1) + \frac{1}{9} (10^2 - 1) + \dots + \\ &+ \frac{1}{9} (10^n - 1) = \frac{1}{9} [(10^1 + 10^2 + \dots + 10^n) - n]. \end{aligned}$$

Určíme-li součet v okrouhlé závorce, dostáváme po jednoduché úpravě konečný výsledek:

$$s_n = \frac{1}{81} (10^{n+1} - 9n - 10).$$

Na závěr nezapomeneme provést namátkovou zkoušku pro zvolené n ; např. pro $n = 3$ dostáváme jednak $s_3 = 1 + 11 + 111 = 123$, jednak $s_3 = \frac{1}{81} (10^4 - 27 - 10) = \frac{1}{81} \cdot 9963 = 123$. Nebude na škodu, když si takovouto kontrolu provedete i u dalších úloh; tato zkouška sice není z matematického hlediska nutná, její provedení však může pomoci odhalit případnou chybu ve výpočtu.

Příklad 2. Ukažte, že pro každé přirozené n je číslo

$$a_n = \underbrace{99 \dots 9700 \dots 0299 \dots 9}_{n-1} \underbrace{}_{n-1} \underbrace{}_n$$

třetí mocninou jistého přirozeného čísla.

Dané číslo a_n lze zřejmě pro každé přirozené n vyjádřit ve tvaru

$$a_n = (9 \cdot 10^{3n-1} + 9 \cdot 10^{3n-2} + \dots + 9 \cdot 10^{2n+1}) + 7 \cdot 10^{2n} + 2 \cdot 10^n + \\ + (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \dots + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0).$$

Po sečtení $n - 1$ sčítanců v první závorce a n sčítanců ve druhé závorce dostáváme

$$a_n = 9 \cdot 10^{2n+1} \frac{10^{n-1} - 1}{9} + 7 \cdot 10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 9 \frac{10^n - 1}{9},$$

což po snadných úpravách dává

$$a_n = 10^{3n} - 10^{2n+1} + 7 \cdot 10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 10^n - 1 = 10^{3n} - \\ - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1 = (10^n - 1)^3.$$

Vzhledem k tomu, že pro každé přirozené n je i $10^n - 1$ číslo přirozené, je tím tvrzení o čísle a_n dokázáno.

Příklad 3. Posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \dots$ všech zlomků s kladným čitatelem a jmenovatelem je utvořena tak, že pro každé její dva členy $a_k = \frac{r_1}{s_1}$, $a_m = \frac{r_2}{s_2}$ platí:

$$k < m \Leftrightarrow [r_1 + s_1 < r_2 + s_2 \vee (r_1 + s_1 = r_2 + s_2 \wedge r_1 > r_2)].$$

(Jinak řečeno: ze dvou zlomků $\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}$ „jde“ v naší posloupnosti „dříve“ ten, který má menší součet čitatele a jmenovatele; je-li pro oba zlomky tento součet stejný, „jde dříve“ ten zlomek, který má většího čitatele.)

Určíme, kolikátým členem této posloupnosti je zlomek $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou daná přirozená čísla.

V dané posloupnosti utvoříme pomocí závorek takové skupiny za sebou následujících členů, které se skládají ze všech zlomků se stejným součtem čitatele a jmenovatele:

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}\right), \dots$$

Snadno zdůvodníte, že čísel prvního zlomku v každé takto utvořené skupině udává jednak počet jejích členů, jednak pořadové číslo této skupiny; k -tá skupina v dané posloupnosti je tedy skupina

$$\left(\frac{k}{1}, \frac{k-1}{2}, \frac{k-2}{3}, \dots, \frac{2}{k-1}, \frac{1}{k}\right).$$

Napišme si skupinu, která obsahuje zlomek $\frac{p}{q}$, jehož pořadové číslo v dané posloupnosti chceme určit:

$$\left(\frac{p+q-1}{1}, \frac{p+q-2}{2}, \dots, \frac{p+1}{q-1}, \frac{p}{q}, \frac{p-1}{q+1}, \dots, \frac{1}{p+q-1} \right).$$

Počet členů naší posloupnosti před zlomkem $\frac{p+q-1}{1}$ je roven součtu počtu členů ve všech skupinách, které skupině obsahující zlomek $\frac{p+q-1}{1}$ předcházejí; protože počet členů každé skupiny je roven pořadovému číslu této skupiny, a to je rovno čitateli prvního zlomku v této skupině, platí, že před zlomkem $\frac{p+q-1}{1}$ je

$$1 + 2 + 3 + \dots + (p+q-2) = \frac{p+q-2}{2} (p+q-1)$$

členů dané posloupnosti. Vzhledem k tomu, že zlomek $\frac{p}{q}$ je ve své skupině na q -tém místě, je tento zlomek $\left(\frac{p+q-2}{2} (p+q-1) + q \right)$ -tým členem dané posloupnosti.

Všimněte si na závěr ještě toho, že naše posloupnost „probíhá“ všechna kladná racionální čísla a že se v ní každé toto číslo vyskytuje nekonečně mnohokrát; např. číslo 1 se v této posloupnosti vyskytuje ve tvaru zlomků $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4},$

Příklad 4. Vezměme posloupnost $[\sqrt{1}], [\sqrt{2}], [\sqrt{3}], [\sqrt{4}], \dots$, tj. posloupnost, jejíž n -tý člen je pro všechna přirozená n roven celé části čísla $\sqrt{n}$. (Připomeňme si, že celá část reálného čísla x — značíme ji $[x]$ — je to celé číslo, které je největší ze všech celých čísel, jež jsou nejvýše rovna x ; např. $[\pi] = 3$, $[\sqrt{3}] = 1$, $[2] = 2$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $\left[-\frac{5}{2}\right] = -3$ apod.) Určíme součet

$$s_{n^2} = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{n^2}]$$

prvních n^2 členů této posloupnosti:

Jistě jste si uvědomili, že v dané posloupnosti existují skupiny po sobě jdoucích členů, které se sobě rovnají; v 1. skupině, tj. ve skupině $([\sqrt{1}], [\sqrt{2}], [\sqrt{3}])$, je každý člen roven jedné, ve 2. skupině, tj. ve skupině

$([\sqrt{4}], [\sqrt{5}], [\sqrt{6}], [\sqrt{7}], [\sqrt{8}])$, je každý člen roven dvěma, ve 3. skupině, tj. ve skupině $([\sqrt{9}], [\sqrt{10}], \dots, [\sqrt{15}])$, je každý člen roven třem atd. Umíte určit, ze kterých členů se skládá k -tá skupina? Pokuste se je určit, nejprve sami a teprve pak si ověřte, že je to skupina $([\sqrt{k^2}], [\sqrt{k^2 + 1}], [\sqrt{k^2 + 2}], \dots, [\sqrt{(k+1)^2 - 1}])$.

Počet členů k -té skupiny pro všechna přirozená k je $(k+1)^2 - 1 - k^2 + 1 = 2k + 1$ a každý z nich je přitom roven číslu k ; je tedy součet členů k -té skupiny roven $k(2k + 1) = 2k^2 + k$.

Napišeme-li prvních n^2 členů dané posloupnosti

$$([\sqrt{1}], [\sqrt{2}], [\sqrt{3}]), ([\sqrt{4}], \dots, [\sqrt{8}]), \\ ([\sqrt{(n-1)^2}], [\sqrt{(n-1)^2 + 1}], \dots, [\sqrt{n^2 - 1}]), [\sqrt{n^2}],$$

kde jsme prvních $n^2 - 1$ členů uzavorkovali do uvedených skupin, vidíme, že těchto skupin je $n - 1$. Vzhledem k tomu, že součet čísel v k -té skupině je pro všechna přirozená k roven $2k^2 + k$, dostaneme postupným dosazováním $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, že pro s_n platí:

$$s_n = (2 \cdot 1^2 + 1) + (2 \cdot 2^2 + 2) + (2 \cdot 3^2 + 3) + \dots + \\ + (2(n-1)^2 + (n-1)) + n.$$

Užitím vzorce

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n-1}{6} n (2n-1)$$

docházíme ke konečnému výsledku

$$s_n = 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ = \frac{n-1}{3} n (2n-1) + \frac{n}{2} (n+1) = \frac{n}{6} (4n^2 - 3n + 5).$$

Nové obří prvočíslo

V prvním čísle letošního ročníku jsme psali, že v říjnu 1978 bylo zjištěno nové prvočíslo

$$2^{21701} - 1$$

patřící mezi tzv. Mersenneova prvočísla. Nyní se dovídáme, že *H. Nelson* a *D. Slowinski* našli v únoru 1979 prvočíslo ještě větší, mající 13 395 číslic. Zprávu čerpáme z anglického denního tisku. Noviny jsou sice rychlejší a pohotovější než vědecké sdělovací prostředky, ale informace

je málo podrobná, a tak nám o novém prvočíselnom obryso chýbi jakékoli ďalší údaje. Dá sa samozrejme usoudiť, že i toto nové číslo patrí medzi prvočísla Mersenneova.

Až sa dovíme viac ze spoľahlivých prameňov, budeme zase referovať.
J. S.

fyzika

Radiouhlík v archeológii

RNDr. JÁN CHRAPAN, CSc., UK Bratislava

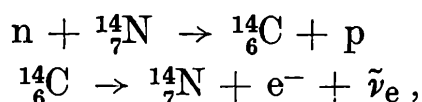
1. Radiouhlík

Čo znamená archeológia a za akým účelom ju človek študuje? To je názov jednej kapitoly známej Ceramovej knihy *Prvý Američan*. Nehodláme študovať archeológiu, a preto nebudeme hľadať odpoveď na túto otázku. Ostaneme však pri citáte zo spomínanej knihy: „Archeológia — to sú vykopávky, zbieranie a vysvetľovanie zaniknutých kultúr, cez historické obdobie späť až do prehistórie.“ K naplneniu tohto citátu treba viesť usporiadať poznatky v ich časovej následnosti; takto sa zistia príčinné súvislosti študovaných udalostí. Na to stačí relatívna chronológia, ktorá sa zostaví na základe známeho faktu, že nález, vykopaný v hlbších vrstvách, je obvykle starší ako nález, ktorý sa nachádzal nad ním. Podobne: dokonalejší výrobok svedčí o vyspelejšej kultúre, a teda o neskoršej dobe. Ako však osadiť takúto relatívnu chronológiu do širokých, všeludských súvislostí? Problém sa stane neriešiteľným, ak sa nepodari nájsť spoločné prvky jednotlivých, popri sebe žijúcich, teritoriálne vzdialených kultúr; to je vtedy, keď medzi nimi neexistoval dostatočne čulý obchodný ruch. Vtedy sa stane prvoradou otázka absolútneho datovania. Absolutné datovanie, teda určenie časového intervalu, ktorý uplynul od datovanej udalosti po dnešok, umožňujú fyzikálne metódy datovania.

Spoločným rysom fyzikálnych metód datovania alebo, ako ich nefyzici radi označujú: absolutných metód datovania, je skutočnosť, že niektoré fyzikálne vlastnosti vykopaných predmetov, majúcich vzťah k archeológmi študovaným udalostiam, sa časom menia. Ak je zákonitosť tejto zmeny fyzikom známa, teda ak je známa časová závislosť niektorej fyzikálnej vlastnosti datovaného objektu, potom stačí poznať

jej stav v určitom čase a jej stav v dobe študovanej udalosti. Zmeraním pomerne presne určenej zmeny tohto stavu možno usúdiť na časový interval, ktorý uplynul medzi daným dátumom a študovanou udalosťou.

Dnes je známych viac takýchto fyzikálnych charakteristík, ktorých časová zmena sa môže podľa okolností použiť na datovanie. Ďalej budeme hovoriť len o aktivite rádioaktívnych látok ako o charakteristike, ktorej časovú závislosť poznáme, a preto môže slúžiť na určenie veku objektov, ktoré tieto rádioaktívne látky po celú dobu svojho stárnutia udržiavali, ale nedopĺňali si ich. Najznámejším predstaviteľom tejto skupiny fyzikálnych metód je tzv. rádiouhlíková metóda datovania. Rádiouhlík, izotop uhlíka s hmotnostným číslom 14, teda ^{14}C , je v živej prírode primiešaný k uhlíku tak, že asi na 10^{12} atómov stabilného izotopu uhlíka ^{12}C pripadá jeden atóm nestabilného uhlíka ^{14}C . Na celej zemi je asi 60 ton rádiouhlíka. Pri tomto rovnovážnom množstve sa prirodzenou premenou rozpadne práve toľko atómov rádiouhlíka, koľko ich vznikne zachytním neutrónov atmosferickým dusíkom. Rádiouhlík vzniká a zaniká podľa rovníc:



teda zachytením neutrónu jadrom atómu dusíka vznikne rádiouhlík a protón. Rádiouhlík sa potom premení na dusík, elektrón a elektrónové antineutríno. Je to známa premena beta a prebieha s polčasom $5730 \pm \pm 40$ rokov.

Živý organizmus prijíma rádiouhlík v molekule CO_2 napríklad dýchaním a počas svojho života ho udržiava vo svojom tele v stálom pomere k ostatnému uhlíku. Merania ukazujú, že gram uhlíka zo živého organizmu obsahuje asi $5 \cdot 10^{10}$ atómov rádiouhlíka, z ktorých priemerne každé štyri sekundy sa jeden premení. Pritom uvoľnený elektrón si odnáša asi 160 keV energie.

Tieto skutočnosti si uvedomil a experimentálne ich overil ešte v roku 1942 americký chemik *Willard F. Libby*, ktorý v tomto vojnovom čase pracoval na jadrovom výskume. Po vojne sa Libby stal profesorom na Chicagskej univerzite; tu rozvíjal svoje bývalé myšlienky, kladúc tak základ novým možnostiam datovania. To mu vynieslo svetové uznanie; dostal Nobelovu cenu za chémiu pre rok 1960.

2. Libbyho metóda

Dnes po tridsiatich rokoch existencie má Libbyho rádiouhlíková metóda trvalé miesto v archeológii a kvartérnej geológii. Je už tak povediac klasickou metódou, rozpracovanou do najmenších podrobností. Výsledky, ktoré sa ňou dosiahli, majú veľký vedecký význam. Postupne sa pre datovanie touto metódou vybudovali samostatné laboratória, rozmiestnené po celom svete. Ročne sa na svete datuje niekoľko tisíc vzoriek. Všetky

získané údaje sa systematicky zhromažďujú na diernych štítkoch a od roku 1959 vychádzajú v ročenke Radiocarbon, ktorá vznikla pri časopise *American Journal of Science*.

Aby sa dostala krátka informácia o vzorke a suchý vekový údaj na stránky Radiocarbonu, treba veľa odbornej práce napriek tomu, že rádiouhlíkové datovanie je v zavedených laboratóriách rutinnou záležitosťou. Na skúmanej lokalite odoberú odborníci vhodné zvyšky organických látok. Sú to zvyšky predmetov, ktoré majú ku skúmanej problematike lokality úzky vzťah a určenie ich veku poskytne údaj o dobe, ktorá uplynula od nejakej pre bádatela významnej udalosti. Tu si však treba uvedomiť, že napríklad datovanie zvyšku dreveného nástroja neudá dátum, kedy s nástrojom pracovali, ale udá dobu, ktorá uplynula od okamihu, keď drevo, použité na nástroj, vyrúbali. Nevieme totiž určiť obsah rádiouhlíka v spomínanom dreve v ľubovoľnom čase, ale vieme, koľko ho tam bolo v čase, keď drevo vyrúbali. Fyzikálne meranie nič nepovie o tom, koľko času uplynulo od vyrúbania dreva po vyhotovenie nástroja a jeho opustenie na mieste, kde ho bádateľ pri vykopávkach našiel. Na lokalite odobraná a mechanicky očistená vzorka sa v datovacom laboratóriu chemicky očistí a usuší. Potom sa spáli. Preto sa môže na datovanie rádiouhlíkovou metódou vyčleniť len taký nález alebo jeho časť, o ktorý môžu nálezcovia prísť. Spálením vytvorený kyslíčnik uhličitý obsahuje v každom trilióne molekúl menej ako tisíc atómov rádiouhlíka. A to čím staršia bola vzorka, tým je podiel rádiouhlíka menší. Ďalej vzniká čiste fyzikálny problém: Ako určiť zastúpenie rádiouhlíka v získanom CO_2 ? Tento problém je v odborných kruhoch známy ako meranie nízkych aktivít.

3. Meranie nízkych aktivít

O rádioaktívnom preparáte, v ktorom sa každú sekundu premení menej ako 3 či 4 nestabilné jadrá, hovoríme, že má nízku aktivitu. Teda aktivita niekoľko becquerel sa považuje za nízku aktivitu. Zvýšením počtu nestabilných atómov v preparáte môžeme zvýšiť jeho aktivitu. Počet nestabilných atómov môžeme zvýšiť zahustením preparátu. Prečo nemôžeme jednoducho merať ľubovoľne malú aktivitu? Predovšetkým preto, lebo meracie zariadenia vždy registrujú kozmické žiarenie. Na jeho pozadí sa potom strácajú príspevky od rádioaktívnych preparátov s nízkou aktivitou. Preto sa nízke aktivity merajú v špeciálnych krytoch, kam prenikne menej kozmického žiarenia. Prenikavé kozmické žiarenie, ktoré vnikne aj do takýchto krytov, sa zvlášť registruje a často sa automaticky odčítava od výsledkov merania. Dnes sa darí znížiť pozadie, škodlivé pre meranie nízkych aktivít, až na 1 %.

Dobre vieme, že rádioaktívna premena atómových jadier je štatistický úkaz. Vyhlásenie, že napríklad každú sekundu sa premení 10 atómov určitej rádioaktívnej látky, je tým pravdivejšie, čím viac atómov

táto rádioaktívna látka obsahuje. Aktivita rádioaktívneho preparátu je počet premien jeho nestabilných atómov za časovú jednotku, a tak aktivitu určíme tým presnejšie, čím viac premien zaregistrujeme. Ak je za časovú jednotku málo premien, potom musíme merať dlho. Pri preparátoch s nízkou aktivitou veru musíme pre spoľahlivé určenie ich aktivity ako priemerného počtu premien, pripadajúcich na časovú jednotku, merať veľmi dlho. Takéto meranie často trvá niekoľko dní. Vtedy sa naráža na technický problém, ako udržať zložité elektronické zariadenia v dostatočne stabilnej činnosti po dosť dlhú dobu. Pri meraniach nízkych aktivít sa využívajú rôzne detekčné zariadenia, vhodné na registráciu ionizujúceho žiarenia.

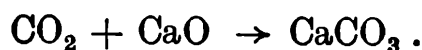
4. Niektoré výsledky, dosiahnuté Libbyho metódou u nás

U nás je medzinárodne registrované laboratórium ^{14}C , ktorého výsledky publikuje Radiocarbon, na Katedre jadrovej fyziky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave. Toto laboratórium sa buďovalo od roku 1965. V roku 1967 sa ako prvé publikovali výsledky datovania dvoch pôd. Datovanie pôd je veľmi náročné predovšetkým preto, že pôda nevznikne okamžite, ale vytvára sa postupne v dlhom čase ukladaním organických zvyškov z rôznych období. Navyiac trvá veľmi dlho, kým takáto pôdna vrstva stratí kontakt s okolím, teda kým sa prekryje dostatočne hrubou vrstvou zeminy tak, že prestane výmena organických látok. Infiltrovaná dažďová voda ešte dlho vnáša z povrchu mladšie organické látky. Preto sa netreba diviť, že aj prvé vzorky, datované v Bratislave, boli podľa obsahu rádiouhlíka trochu mladšie, ako očakávali kvartérni geológovia. Jedna vzorka bola zo sprašového komplexu terasy Dunaja z okolia Jurského Chľmu a druhá zo sprašového komplexu ľavého brehu Váhu z Moravan pri Piešťanoch. Oba sprašové komplexy vznikali súčasne. Skutočne, merania obsahu rádiouhlíka v nich ukázali, že obe datované pôdy vznikali v období pred 20 až 25 tisíc rokmi. Laboratórium neostalo pri pôdach. V roku 1970 sa v časopise *Slovenský kras* opisujú výskumy verejnosti neprístupnej jaskyne v Slovenskom raji. Táto jaskyňa, zvaná Medvedia jaskyňa, upútava náleziskom medvedích kostí. Objavitelia nazvali jednu jej časť „Cintorinom medvedov“. Do tejto pomerne nízko položenej časti jaskyne boli kosti splavované z celého okolia príležitostnými záplavami, nie žeby zvlášť sem boli po tisícročia chodili medvede skonávať. Kostí sa nachádzajú v naplaveninách a sú chaoticky rozhádzané tak, ako ich tam voda zanechala. Jaskynný medveď, ktorému patrila datovaná čeľusť, skončil pred viac ako 15 tisíc rokmi.

Významným dokumentom z prvopočiatkov mestského osídlenia dnešného bratislavského podhradia na ľavom brehu Dunaja je zrúcanina tzv. Vodnej veže, patriacej do systému obranných pevností, ktoré dal pozdĺž toku stredného Dunaja pred tatárskym vpádom roku 1241 budovať

kráľ *Ondrej II.*, obnovujú tak v určitom zmysle starý „limes románus“. V písomných prameňoch sa Vodná veža spomína v darovacej listine Uhorského kráľa *Bélu IV* z roku 1254. Veža stála pri vtedajšom dunajskom brode na križovatke dvoch významných obchodných ciest, tzv. podunajskej, ktorá spájala východ so západom, a jantárovej, po ktorej šiel obchod medzi Jadranom a Baltickým morom. Počas svojej existencie bola Vodná veža v správe viacerých majiteľov, ktorí vyberali mýto. Často bola opravovaná a prestavovaná. Keď sa v roku 1620 pokúšal Bratislavu dobyť *Ferdinand II.*, jeho generál *Henrich Duval Dampier* dal na jeseň toho roku Vodnú vežu vyhodiť do povetria. Nálož uložili pod juhovýchodný múr, takže celá veža sa nedemolovala. Pevné kamenné murivo bolo príčinou, že ho pri neskoršej zástavbe neodstránili, ale včlenili ho do novších budov. Táto novšia zástavba spôsobila, že Vodná veža upadla do zabudnutia a napriek bohatému písomnému materiálu ju nebolo možné presne lokalizovať. Až po roku 1974 v súvislosti s rozsiahlymi terénnymi a stavebnými úpravami južnej časti bratislavského podhradja sa obnažili zvyšky bývalej Vodnej veže. V juhovýchodnej časti areálu veže sa pod stredovekou zástavbou objavilo riadkové murivo z veľkých opracovaných kamenných kvádrov. Našla sa vstupná brána a dlažba z kamenných dlaždíc. Tieto zvyšky svedčili o väčšom komplexe, ktorý bol na mieste stredovekej Vodnej veže už dávno zabudnutý v čase jej založenia. Základy Vodnej veže sú totiž asi 20 cm nad týmto murivom, ktorého vysoká technická úroveň je doteraz známa len u významných stavieb v centrálnych oblastiach rímskych provincií a v samotnom Taliansku. Pri vykopávkach sa však nenašli žiadne predmety, ktoré by dovolili určiť obdobie, v ktorom bola táto stavba používaná. Podľa stavebného materiálu, spôsobu založenia a výstavby archeológovia usudzujú, že môže ísť o antickú stavbu asi z 2. storočia nášho letopočtu. Aby sa vyvrátili možné pochybnosti o pôvode spodných vrstiev Vodnej veže a aby sa mohol určiť ich vek, použila sa rádiouhlíková metóda. V hĺbke 3 m sa našiel úlomok dreva, ktorý patril podľa polohy do obdobia, kedy bola Vodná veža obohnaná vodnou priekopcu, teda podľa písomností do 13. až 14. storočia. Merania obsahu rádiouhlíka v tomto dreve ukazujú, že ho vyrúbali v období medzi rokmi 1231 až 1351, teda asi sto rokov pred zasypaním priekopy, a tak niet divu, že sa v nej našlo. Horšie je to už s ďalším kusom dreva, ktorý sa našiel v rovnakej hĺbke vo východnej časti stavby. Obsah rádiouhlíka v tomto úlomku dreva, meraný s vyššou presnosťou poukazuje na to, že pochádza zo stromu, ktorý zahynul v období rokov 1600 až 1660 nášho letopočtu. Že by to boli zvyšky koreňov stromu, ktorý zničili minéri generála Dampiera na jeseň roku 1620? Alebo to bol kus dreveného interiéru, ktorý zhotovili krátko pred osudnou jeseňou a ktorý sa dostal pri ničivom výbuchu hlboko do rozvalín až na úroveň základov stredovekej stavby? Skutočný osud tohto dreva sa už nedozvieme. Zhorelo pri datovacích prácach a len atómy uhlíka,

ktoré boli pôvodne v jeho molekulách, sú dnes v zatavenej sklenenej ampulke ako súčasť molekúl CaCO_3 , kam ich naviazali po meraní podľa rovnice



V takmer sedem metrovej hĺbke, už v antických vrstvách, sa hneď pri spomínanej vstupnej bráne našli zvyšky dreva, ktoré pochádza z obdobia rokov 230 až 370 n. l. Takmer o meter hlbšie, v úrovni antickej dlažby sa našli zuholnatelé zvyšky dreva, o ktorom obsah rádiouhlíka prezradil, že pochádza z rokov 72 až 192 n. l. Našlo sa však len tak málo tohto dreva, že sa ani pri meraní, trvajúcom niekoľko dní nedalo presnejšie určiť, kedy strom, z ktorého drevo pochádza, vyrúbali. Kedy sa dostalo na antickú dlažbu, to sa pomocou rádiouhlíkového datovania nedá zistiť.

5. Slovo na záver

Fyzika a archeológia, veda o zákonitostiach vývoja v neživej prírode a veda o zákonitostiach pradávného vývoja ľudstva, vedy na prvý pohľad tak vzdialené, si predsa majú čo povedať. Fyzika získava riešením otázok archeológie (a nielen archeológie) a archeológia (a nielen ona) získava ich rozriešením.

Metóda rádiouhlíka je náročná a preto pomerne drahá. Datovanie jednej vzorky stojí asi 3000 Kčs. Napriek tomu sa poznaniu minulosti venuje u nás taká pozornosť, že jedno pracovisko, schopné metódu rádiouhlíka aplikovať, nestačí, a preto sa pripravujú podmienky pre vznik ďalších takýchto laboratórií na našom území.

Jedna starobylá úloha

Maximos Planudes z Nikomedie, ktorý žil v letech 1260 až 1310 a byl v roce 1296 vyslancem byzantského císaře Andronika II. v Benátkách, uvádí v jednom ze svých spisů věnovaných aritmetice, úlohu:

Umírající otec rozdělil peníze stejným dílem mezi své syny; prvnímu dal jednu minci a $\frac{1}{7}$ zbývajících peněz, druhému dvě mince a $\frac{1}{7}$ zbytku, třetímu tři mince a $\frac{1}{7}$ zbytku atd., ale náhle zemřel. Určete, kolik měl synů a kolik mincí.

Jistě budete většinou souhlasit s tím, že staletí neubrala úloze na zajímavosti.

(Převzato z knihy A. P. Juškeviče *Dějiny matematiky ve středověku*; Academia, Praha 1977.)

Ještě jednou brouk a guma

RADISLAV REJL, gymnázium Rumburk

Tento článek přináší další možné řešení úlohy o broukovi a gumě (Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 57, str. 405).

Zopakujme si nejprve text úlohy:

Brouk sedící na skobě začne lézt po napnuté gumě dlouhé 1 km rychlostí $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ právě ve chvíli, kdy se volný konec nepřípevněný ke skobě začne pohybovat rychlostí $1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Doleze někdy brouk na volný konec gumy?

Úlohu budeme řešit takto:

Celou situaci budeme zmenšovat s časem tak, že délka gumy bude konstantní a rovná 1 km. Na výsledek toto zmenšování nebude mít žádný vliv.

Pro rychlost brouka pak zřejmě platí

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{ut}{s_0}},$$

kde v_0 je velikost rychlosti brouka v čase $t = 0$ ($v_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), u je velikost skutečné rychlosti volného konce gumy ($u = 1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$) a s_0 je délka gumy ($s_0 = 1 \text{ km}$).

Za čas t urazí brouk vzhledem ke skobě vzdálenost

$$s = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{ut}{s_0}} dt = v_0 \frac{s_0}{u} \cdot \ln \left(1 + \frac{u}{s_0} t \right).$$

Položíme-li $s = s_0$ dostáváme

$$v_0 \frac{s_0}{u} \cdot \ln \left(1 + \frac{u}{s_0} t \right) = s_0.$$

Vyjádříme t , tedy dobu, za kterou brouk dohoní volný konec gumy.

$$t = \left(e^{\frac{u}{v_0}} - 1 \right) \cdot \frac{s_0}{u}.$$

Pro zadané hodnoty

$$t \doteq 1,97 \cdot 10^{434} \text{ s}.$$

Brouk na konec gumy doleze.

astronomie

Astronomické souřadnice - I.

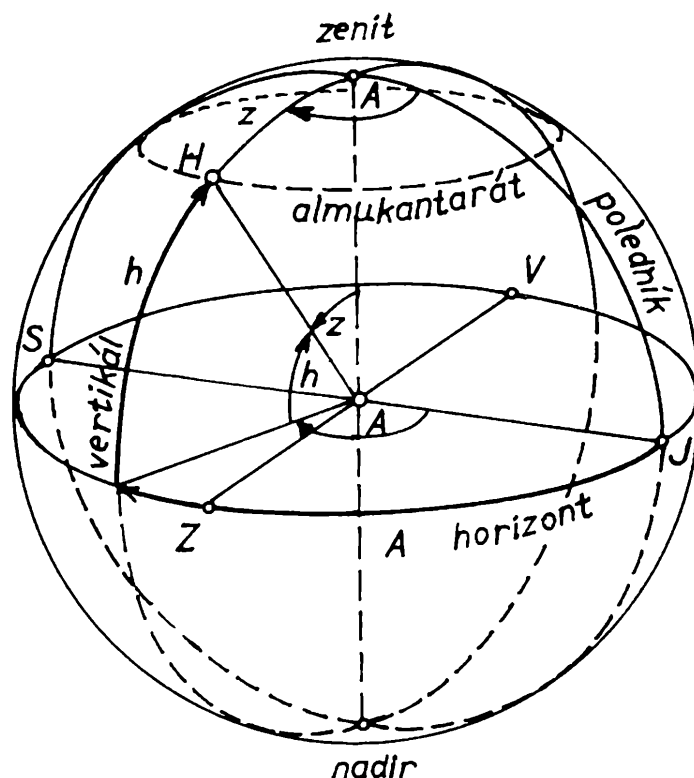
RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, UP Olomouc

Poloha bodu v prostoru je určena třemi souřadnicemi. Nejběžnější je systém pravoúhlých prostorových souřadnic, těch se však v astronomii používá jen zřídka. Systémy astronomických souřadnic vycházejí z prostorových polárních souřadnic, kde je poloha bodu určena vzdáleností bodu od počátku souřadnic (pólu) a dvěma úhly, které svírá spojnice bodu a počátku souřadnic se dvěma základními směry. Jde-li o určení polohy kosmického objektu na sféře, pak předpokládáme, že všechny objekty jsou na povrchu sféry a pro určení polohy vystačíme se dvěma souřadnicemi — dvěma úhly. Podle potřeby volíme jako základ astronomických souřadnic různé roviny a směry a používáme různých systémů sférických souřadnic. Nejčastěji používané jsou souřadnice obzorníkové, rovníkové, ekliptikální a galaktické. Všimneme si postupně těchto čtyř soustav astronomických souřadnic.

Obzorníkové souřadnice

Základem obzorníkové soustavy souřadnic je především rovina horizontu, tj. vodorovná rovina, procházející pozorovacím místem, a dále rovina místního poledníku, tj. svislá rovina, procházející zenitem, nadírem, severním a jižním bodem (a také severním a jižním světovým pólem). Obzorníkové souřadnice jsou *výška* h a *azimut* A .

Vzhledem k rovině horizontu určujeme výšku h hvězdy nebo jiného objektu: je to úhel, který svírá spojnice hvězdy a pozorovacího místa (středu sféry) s rovinou horizontu (obr. 1.). Kružnice, procházející zenitem, nadírem a daným objektem H na sféře, se nazývá *vertikál*; všechny vertikály jsou kolmé k horizontu. Výšku h objektu měříme tedy od horizontu podél vertikálu. Výška h nabývá hodnot od $+90^\circ$ do -90° , přičemž výšky nad obzorem označujeme kladným znaménkem, výšky pod obzorem záporným znaménkem. Výška zenitu je tedy $+90^\circ$, výška nadiru -90° , všechny body na horizontu mají výšku $h = 0^\circ$. Místo výšky lze použít jako souřadnici také úhel z , který svírá spojnice objektu a pozorovacího místa se svislým směrem, tj. se směrem k zenitu. Tento úhel se nazývá *zenitová vzdálenost*. Mezi výškou h a zenitovou vzdáleností z platí vztah $h + z = 90^\circ$. Zenitová vzdálenost zenitu je 0° , zenitová



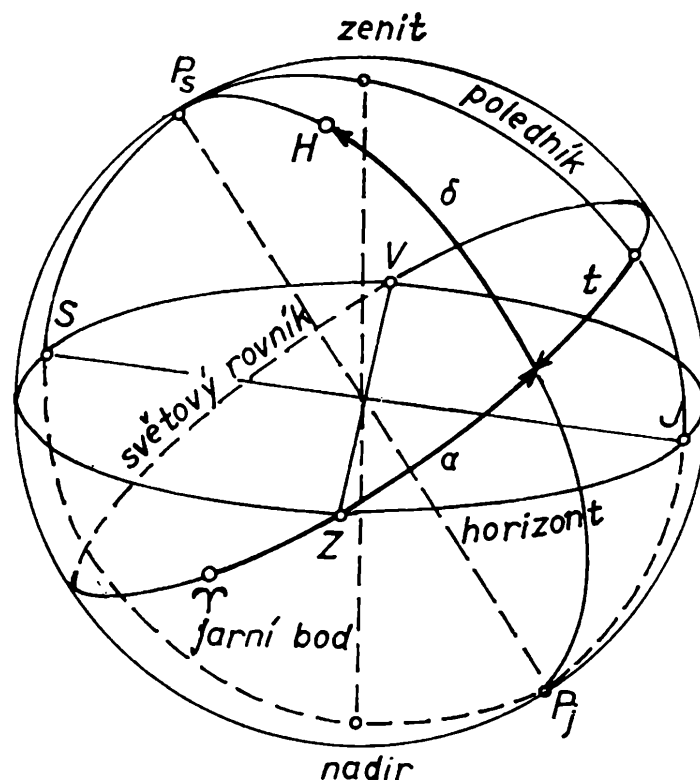
Obr. 1. Obzorníkové souřadnice

vzdálenost bodů na horizontu je $z = 90^\circ$, zenitová vzdálenost nadiru je 180° . Proložíme-li daným objektem rovinu rovnoběžnou s rovinou horizontu, protne tato rovina sféru v kružnici, zvané *almukantarát*. Všechny body almukantarátu mají tutéž výšku h a ovšem také tutéž zenitovou vzdálenost z .

Druhou obzorníkovou souřadnicí je azimut A . Azimut je úhel, který svírá vertikál, procházející daným objektem, s místním poledníkem. Místní poledník lze definovat jako vertikál, procházející severním a jižním bodem horizontu. Azimut v astronomii měříme v rovině horizontu od jižního bodu ve směru otáčení hodinových ručiček, tedy od jihu přes západ, sever a východ.*) Azimut A nabývá hodnot od 0° do 360° ; jižní bod J má azimut 0° , západní Z 90° , severní S 180° a východní V 270° .

Při zdánlivém otáčení sféry kolem světové osy se obzorníkové souřadnice všech objektů na sféře neustále mění; výjimku tvoří jen světové póly. Obzorníkové souřadnice jsou tedy závislé na čase. Při východu objektu je jeho výška 0° , maximální hodnoty nabývá při horní kulminaci neboli při průchodu místním poledníkem, pak se zmenšuje, při západu je výška opět 0° , pod obzorem je výška objektu záporná a maximální záporné hodnoty nabude opět při průchodu místním poledníkem při dolní kulminaci. Během dne se mění i azimut objektu. Obzorníkové sou-

*) V topografii se však azimut měří od severního bodu.



Obr. 2. Rovníkové souřadnice

řadnice však nezávisí jen na čase, ale také na zeměpisné poloze pozorovacího místa, na jeho zeměpisné šířce i délce.

Závislost obzorníkových souřadnic na čase a na poloze pozorovacího místa je pro určování poloh hvězd značně nevýhodná, proto se používá nejčastěji jiných systémů, které tuto nevýhodu nemají.

Rovníkové souřadnice

Systém rovníkových souřadnic je znázorněn na obr. 2. Základní rovinou rovníkových souřadnic je rovina světového rovníku. Jednou z rovníkových souřadnic je *deklinace* δ , která udává úhlovou vzdálenost objektu od roviny světového rovníku (podobně jako výška hvězdy udávala její úhlovou vzdálenost od roviny horizontu). Kružnice na sféře, proložená pozorovaným objektem, severním a jižním světovým pólem, se nazývá deklinační kružnice. Deklinaci měříme podél deklinační kružnice od rovníku směrem k pólu. Jednou z deklinačních kružnic je také *místní poledník*; je to deklinační kružnice, procházející severním a jižním bodem horizontu a ovšem také zenitem. Kružnice rovnoběžné se světovým rovníkem se nazývají *paralely*. Srovnáme-li rovníkový systém souřadnic se systémem obzorníkovým, pak deklinačním kružnicím odpovídají vertikály, paralelám almukantaráty. Všechny body na téže paralele mají tutéž deklinaci. Místo deklinace můžeme použít jako souřadnici *pólovou vzdálenost* p ; je to úhlová vzdálenost objektu od severního světového pólu. Mezi deklinací a pólovou vzdáleností platí vztah

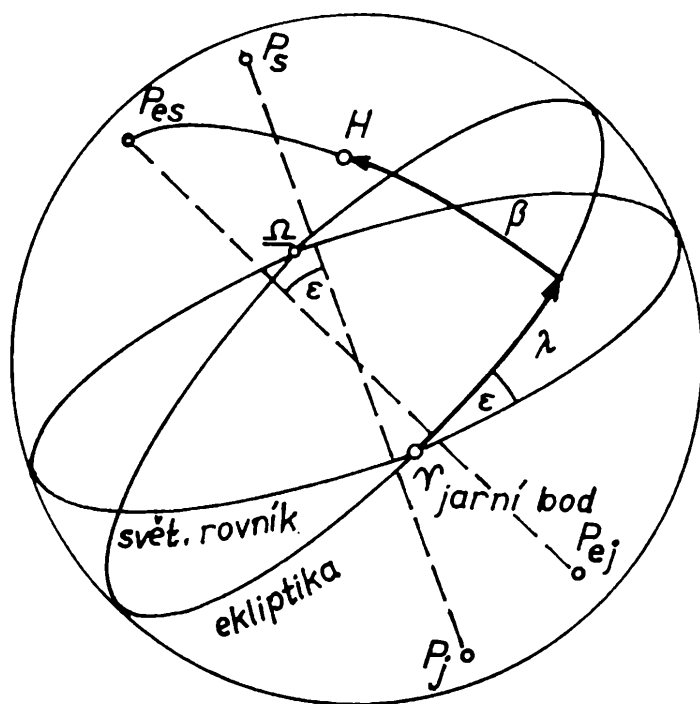
$\delta + p = 90^\circ$. Při denním otáčení sféry se deklinace a pólová vzdálenost objektu nemění, nezávisí také na zeměpisné poloze pozorovacího místa.

Pokud jde o druhou souřadnici, určující polohu objektu, dělí se rovníkové souřadnice na souřadnice 1. druhu a 2. druhu. Druhou souřadnicí rovníkových souřadnic prvního druhu je *hodinový úhel* t . Je to úhel, který svírá rovina deklinační kružnice, proložené daným objektem, s rovinou místního poledníku. Hodinový úhel se měří ve směru denního otáčení sféry. Na rozdíl od deklinace závisí hodinový úhel t na čase. Objekt procházející místním poledníkem má hodinový úhel $t = 0^\circ$. Protože se sféra otáčí a za 24 hodin hvězdného času se otočí o 360° , roste hodinový úhel rovnoměrně s časem tak, že za 1 hodinu vzroste o 15° . Hodinový úhel se udává buď v časové míře nebo v míře obloukové, přičemž platí převodní vztahy $1 \text{ h} = 15^\circ$, $1 \text{ min} = 15'$, $1 \text{ s} = 15''$. Časem se zde rozumí *hvězdný čas*, jehož základem je *hvězdný den* — doba, za kterou se Země otočí o 360° vzhledem ke hvězdám. Hvězdný den dělíme na hodiny a minuty podobně jako sluneční den. Rovníkové souřadnice prvního druhu jsou tedy deklinace δ a hodinový úhel t , přičemž hodinový úhel je závislý na čase; závisí rovněž na zeměpisné délce pozorovacího místa, ale na zeměpisné šířce nezávisí.

Rovníkové souřadnice druhého druhu mají již obě souřadnice nezávislé na denním otáčení sféry i na zeměpisné poloze. Jednu souřadnici tvoří opět deklinace, druhou pak *rektascenze* α . Základem pro určení rektascenze je jarní bod (průsečík rovníku a ekliptiky). Rektascenze α je úhel, který svírá rovina deklinační kružnice, proložená jarním bodem, s rovinou deklinační kružnice, procházející daným objektem. Deklinaci měříme podél světového rovníku od jarního bodu proti směru denního otáčení sféry. Protože se jarní bod otáčí spolu se sférou, nezávisí rektascenze objektu na denním otáčení sféry.

Hodinový úhel jarního bodu je hvězdný čas Θ . V okamžiku horní kulminace jarního bodu je hvězdný čas $0^{\text{h}} 0^{\text{min}} 0^{\text{s}}$, v 6 hodin hvězdného času jarní bod zapadá, ve 12 hodin je v dolní kulminaci a v 18 hodin vychází. Mezi hvězdným časem Θ , rektascenzí α určitého objektu a jeho hodinovým úhlem t platí vztah $\Theta = \alpha + t$. Tohoto vztahu používáme buď k určení hvězdného času ze známé polohy objektu nebo k určení rektascenze objektu ze známého času.

Rovníkové souřadnice druhého druhu, rektascenze a deklinace, nezávisí na denním otáčení sféry, to však neznamená, že se s časem naprosto nemění. U hvězd jsou změny velmi pomalé; jsou způsobeny jednak vlastním pohybem hvězd, jednak změnou polohy jarního bodu, vznikající vlivem precese zemské osy; projevují se u nich také periodické změny s periodou jednoho roku, způsobené aberací světla, u blízkých objektů pak paralaktické změny. Vcelku však můžeme rovníkové souřadnice druhého druhu považovat u hvězd za konstantní po dobu až několika desítek roků. Dlouhodobé změny, působené precesí zemské osy, se berou



Obr. 3. Ekliptikální souřadnice

v úvahu při udávání souřadnic v katalogích hvězd a při sestrojování hvězdných map a atlasů. Souřadnice se přepočítávají vždy k určitému času, zvanému *ekvinokcium*. Za ekvinokcium se obvykle volí buď začátek nebo polovina století, tj. ekvinokcium 1900,0, 1950,0, 2000,0, ale také buď čtvrtina nebo tři čtvrtiny století. Tak např. světoznámý Atlas coeli od dr. Antonína Bečváře je pro ekvinokcium 1950,0, hvězdný atlas, který pod názvem Sternatlas vydali dr. S. Marx a dr. W. Pfau v NDR, je pro ekvinokcium 1975,0.

U Slunce, planet a jiných poměrně blízkých objektů se tyto souřadnice mění podstatně rychleji — perioda změn závisí na oběžné době Země kolem Slunce a na oběžné době daného objektu.

Podstatný rozdíl mezi obzorníkovými a rovníkovými souřadnicemi nespočívá jen v jejich odlišné závislosti na čase, ale také v tom, že rovníkové souřadnice nezávisí na zeměpisné poloze pozorovacího místa; deklinace i rektascenze daného objektu mají pro všechna místa na povrchu Země tutéž hodnotu (předpokládáme zde, že rozměry Země jsou vzhledem ke vzdálenosti objektu zanedbatelné).

Ekliptikální souřadnice

Rovina zemské dráhy protíná sféru v kružnici, zvané *ekliptika*. Po ekliptice se během roku zdánlivě pohybuje Slunce mezi hvězdami. Roviny drah planet sluneční soustavy svírají s rovinou ekliptiky jen malé úhly, rovněž rovina dráhy Měsíce se od roviny ekliptiky příliš neliší,

a proto se tato tělesa zdánlivě promítají na sféru do poměrně úzkého pásu podél ekliptiky.

Pro stanovení poloh těchto těles je proto výhodné vzít za základní rovinu *rovinu ekliptiky*. Takto definované souřadnice se nazývají ekliptikální a tvoří je *astronomická délka* λ a *astronomická šířka* β (obr. 3). Astronomická šířka β je úhlová vzdálenost daného objektu od ekliptiky, přičemž na sever od ekliptiky (směrem k severnímu pólu ekliptiky) se měří kladně, na jih od ekliptiky záporně. Astronomická šířka nabývá hodnot od $+90^\circ$ (severní pól ekliptiky) do -90° (jižní pól ekliptiky). Astronomická délka λ se měří podél ekliptiky od jarního bodu proti směru denního otáčení sféry a nabývá hodnot od 0° do 360° . Připomeňme zde, že se ekliptika promítá na obloze do 12 souhvězdí, která dostala název *zvířetníková souhvězdí*. Podle těchto souhvězdí byla ekliptika rozdělena na 12 úseků po 30° a již v dávných dobách byly jednotlivým souhvězdím přiřazeny značky, tzv. *znamení*. Vlivem precese zemské osy se však pozvolna mění poloha jarního bodu, takže v současné době nesouhlasí poloha příslušných souhvězdí s polohou „znamení“. Dnes je jarní bod, tj. symbol znamení Berana, v souhvězdí Ryb a podzimní bod, tj. znamení Vah, v souhvězdí Panny atd. Rozdělení ekliptiky na jednotlivá „znamení“ po 30° se však dosud používá; tak např. začátek jara nastává v okamžiku, kdy Slunce vstupuje do znamení Berana, tj. dosáhne astronomické délky 0° , začátek léta je určen vstupem Slunce do znamení Raka (astronomická délka 90°), začátek podzimu je určen vstupem Slunce do znamení Vah (astronomická délka 180°) a začátek zimy vstupem Slunce do znamení Kozorožce (astronomická délka 270°). Okamžiky vstupu Slunce do jednotlivých znamení zvěrokruhu jsou uváděny ve Hvězdářské ročence.

Rovina ekliptiky svírá s rovinou světového rovníku úhel přibližně $23,5^\circ$. Na odpovídajících zeměpisných šířkách jsou na Zemi *obratník Raka* (na severní polokouli) a *obratník Kozorožce* (na jižní polokouli).

Galaktické souřadnice

Slunce spolu se všemi hvězdami, viditelnými na obloze, tvoří obrovskou soustavu, nazvanou *Galaxie*. Velmi vzdálené hvězdy tvoří na obloze svítící pás, nazvaný již v dávných dobách *Mléčná dráha*; součástí Galaxie jsou nejen hvězdy, ale také hvězdokupy, plynné a prachové mlhoviny, mezihvězdná látka atd. Galaxie má přibližně tvar spojky o průměru asi 30 kpc a tloušťce asi 10 kpc; struktura Galaxie je poměrně složitá a není dosud přesně známa, bylo však zjištěno, že některé útvary se koncentrují ke středu Galaxie a tvoří *kulový subsystém* (např. kulové hvězdokupy a hvězdy typu RR Lyrae), jiné se koncentrují k rovině Galaxie a tvoří *plochý subsystém* (např. mezihvězdná látka). Pro studium rozložení jednotlivých útvarů, tvořících Galaxii, příliš nevyhovují ani rovníkové ani ekliptikální souřadnice, byly proto definovány souřadnice,

vztahující se k rovině Galaxie, podobně jako ekliptikální souřadnice se vztahují k rovině ekliptiky. Galaktická rovina není ovšem tak zřejmá, jako rovina ekliptiky, bylo třeba ji stanovit na základě složitých statistických výpočtů a její poloha byla opravena na základě nových radioastronomických pozorovacích metod. Stanovíme-li rovinu Galaxie, pak její průsečík se sférou tvoří galaktický rovník, kolmice k rovině Galaxie vedená středem sféry protne sféru v severním a v jižním galaktickém pólu. Galaktické souřadnice jsou *galaktická šířka b* , udávající úhlovou vzdálenost objektu od roviny Galaxie, a *galaktická délka l* , která se počítá od středu Galaxie ve směru zvětšující se rektascenze. Galaktická šířka nabývá hodnot od $+90^\circ$ do -90° , galaktická délka od 0° do 360° . Galaktickými souřadnicemi se podrobněji nebudeme zabývat; uvedme jen, že severní galaktický pól leží v souhvězdí Vlasu Bereniky, jižní pól v souhvězdí Sochaře, průsečík galaktického rovníku se světovým rovníkem v souhvězdí Orla, střed Galaxie v souhvězdí Střelce. Galaktický rovník svírá se světovým rovníkem úhel asi 60° .

Ve druhé části tohoto článku se budeme zabývat vzájemnou souvislostí obzorníkových a rovníkových souřadnic.

Z dějin exaktních věd

Staré české délkové jednotky

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., Praha

Staročeské délkové míry — jednotky byly v průběhu staletí velmi rozmanité a významné jednak pro potřeby obchodu (zčásti též řemeslné výroby), jednak pro zvolna se vyvíjející zeměměřičství. Jejich vývoj byl značně ovlivňován nejen obchodem se vzdálenými místy, ale zejména politickým a ekonomickým děním na území našeho státu a jeho historií.

Z nejstarších dob pochází, jako jedna z hlavních délkových měr loket, vyskytující se ve velmi rozmanitých obměnách. Tato míra byla rozšířena prakticky ve všech zemích Evropy. Je dobrým příkladem toho, jak jednotka téhož jména se lišila svou hodnotou regionálně i časově. Bylo to zaviněno také nepřesně formulovanou definicí této míry. Některé příklady si dále uvedeme. Kromě toho lze na této jednotce dokumentovat definiční nejednotnost jejího odvozování z rozměrů lidského těla. Tak u Římanů značil loket „délku spodního rámě od lokte dolů“, kdežto

u nás příslušela jednotce téhož názvu definice: „délka rámě od podpaží dolů“, což je jistě patrný rozdíl. Ve starém Řecku měl loket (pachys) délku asi 0,46 m. Pro starořímský loket (cubitus) je udávána velikost asi 0,444 m. Starý anglický loket (english ell) měl hodnotu proti našemu loktu zhruba dvojnásobnou (1,1143 m), byl tedy jakýmsi „dvouloktem“. Pozdější yard (0,914 m) také patřil k jednotkám příbuzným loktu. Podle Sedláčka je v bibli uvedena vazba *lokte* také na *rozměry ječného zrna*, pocházející od Židů. Podle výkladu starých rabínů rovnal se hebrejský loket (ammah) 144 „ječným zrnům“ položeným vedle sebe. Hebrejskému lokti příslušela tak hodnota asi 0,484 m a jednomu ječnému zrně délka asi 3,4 mm. U nás byla délka ječného zrna brána asi za 5 mm. Na délku jednoho českého lokte by pak přišlo zhruba 120 zrn.

První význačné sjednocení délkových i ostatních měr u nás, které je doloženo, bylo uskutečněno v r. 1268 za Přemysla Otakara II. Tehdy byl za hlavní jednotku délky zvolen a stanoven tzv. *pražský* (též *český*) *loket*. Podle Hájka z Hájku rovnal se tento loket 3 pídím po 10 prstech (vedle sebe), přičemž 1 prst značil „šířkost“ čtyř zrn ječmene položených vedle sebe. O poddělení i násobcích některých měr budeme podrobněji hovořit dále.

Sedláček uvádí, že „kázal král Přemysl Otakar obnoviti váhy a míry a znamenati znamením svým, čehož předtím nebyvalo“. Ve Vokaunově kronice se dodává, že se tak stalo proto, že chudým bývalo křivděno; pro tu novotu prý páni a měšťani reptali, ale sedláci a chudobní krále oslavovali.

Sedláček uvádí, že *pražský loket*, jako jednotka běžně používaná se připomíná již ve 12. století. Od doby obnovení měr Přemyslem Otakarem II. v r. 1268 byl *pražský loket* *královskou mírou*, tj. závaznou pro veškerá měření v celém českém království. Podobný význam, případně v regionálně menší oblasti, měla *zemská míra*.

I při druhé doložené a známé měrové „renesanci“ za Ferdinanda II. (kolem r. 1620) připomíná Šimon Podolský z Podolí *pražský* (přesněji staroměstský) *loket* jako hlavní délkovou míru. Oficiálně přestává být *pražský loket* uznávanou mírou až v době Marie Terezie, kdy byla českému království vnucena *rakouská míra*. Patent o všech změnách v mírách a vahách byl vydán v německé řeči v roce 1764. Od té doby se u nás oficiálně používal loket vídeňský.

Podle Sedláčka činil v převodu na metrickou míru

$$\text{pražský loket} \doteq 0,591\,40\text{ m.}$$

Tato hodnota byla získána měřením, které provedl v r. 1915 prof. Fr. Novotný v Geodetickém ústavu tehdejší České techniky v Praze na míře zazděné ve věži Novoměstské radnice. V Sedláčkově monografii „Paměti a doklady o staročeských mírách a vahách“ je uveden celý příslušný atest o měření, doplněný nákresem realizace lokte. Ke stejné hodnotě došel v témže roce inž. Fr. Zimmerhagl u lokte v Mělníce.

Přitom je nutno upozornit na to, že měřené míry (koncového charakteru) byly poněkud opotřebovány někdejším používáním a ovšem také poškozeny korosními vlivy.

Jsou také uváděny málo rozdílné hodnoty této míry. Lze to připsat nepřesnosti přenosu míry a porovnávání, chybám používaných metod (např. teplotním změnám, k nimž se dříve nepřihlíželo) i chybám měřících osob.

Tak např. Štěpán Schmidt, profesor matematiky na pražské universitě, v 18. století uvádí hodnotu, z níž vyplývá, že pražský loket činil 0,592 43 m. J. Stepling S. J., slavný hvězdář a profesor na pražské universitě, udává hodnotu, podle níž měl loket 0,5927 m apod.

Je možno ještě poznamenat, že Š. Schmidt připravil již v r. 1750 (ještě před vydáním patentu) „popsání té (tj. nové, rozumí se rakouské) míry a srovnání její s českou mírou“. Spisek byl vydán v roce 1760. Podobný spisek sepsal také J. Stepling S. J.

Na Moravě byl znám také loket jiné hodnoty (delší oproti pražskému), převzatý pravděpodobně z Rakouska. Rovnal se totiž *moravský loket* svou hodnotou loktu vídeňskému.

Loket se používal také na Slovensku pod názvem *rýf* (z maďarského rőf = loket). Rýf se rovnal polovině sáhu. Rýf je podle Sedláčka zaznamenán také v českých zemích, např. podle dokladu ze 14. stol. o vybírání poplatků v Týnském dvoře.

Patentem z r. 1764 zavedená nová míra měla za základ

$$\text{vídeňský loket} = 0,777\,558\text{ m.}$$

Části lokte byly *střevíc*, *píd'*, *dlaň*, případně také *pěst*, *prst* (resp. *palec*).

Střevíc byl polovinou pražského lokte. Tato míra se častěji nazývala *stopa*. Hodnota této míry činila

$$(\text{pražská})\text{ stopa} = 0,2957\text{ m.}$$

Pro tutéž míru udává patent z r. 1764 hodnotu příslušející 0,2982 m, Stepling 0,2963 m; Schmidt hodnotu neuvádí. Podle Klauserova spisku z r. 1705 měl střevíc délku 60 ječných zrn a rovnal se 12 palcům. Sedláček uvádí také *brněnskou stopu* rovnou údajně 0,2959 m (prakticky shodnou s obdobnou mírou pražskou, tedy také českou (protože pražská míra, přesně „míra starého města pražského“, byla zemskou mírou v Čechách nebo i mírou královskou).

Stopa je vedle loktu jednou z nejstarších měr vůbec (je známa z realizace na soše Gudey z Lagaše — ze starého Sumeru — uchovávané v Louvru. Měřila asi 0,2645 .). Nejdéle přežívá v britsko-americké soustavě jednotek, která je však v současné době nahrazována vesměs jednotkami SI. Anglická stopa (foot) činí asi 0,305 m.

Při stanovování hodnoty stopy se prý již ve staré době ojediněle aplikovaly metody, které bychom dnes nazvali statistickými. Na nějakém veřejném shromáždění bylo náhodně vybráno x lidí, ti se postavili za

sebe tak, že špička jedné nohy se dotýkala opatku před ním stojícího jedince, druhá noha aby se dotýkala špičkou opatku vlastní první nohy atd. Celkově naměřenou hodnotu bylo pak nutno dělit $2x$.

Patentem z r. 1764 byly zavedeny nové míry, mezi nimi

$$\text{vídeňská stopa} = 0,316\ 081\ \text{m},$$

která se rovnala šestině vídeňského sáhu.

Původně byla míra definována jako délka stopy (zpravidla) obuté nohy (odtud též název střevíc).

Třetinou pražského lokte byla píd', rovněž míra velmi starého původu (řeckého, římského nebo hebrejského). Velikost této míry činila:

$$(\text{pražská})\ \text{píd}' = 0,1973\ \text{m}.$$

Tato píd' se rovná 10 prstům (nebo 8 palcům) po 4 (resp. po 5) ječných zrnech.

Píd' je míra rovná vzdálenosti mezi okrajem palce a prostředníkem měřená napříč dlaně při rozevřených (roztažených) prstech.

Vedle uvedené hodnoty míry zmiňuje se na Lounsku také *malá píd'*, rovnající se čtvrtině lokte.

Patnáctinou délky dvou pražských loktů byla míra zvaná *dlaň* (méně běžně také *ruka*). Odpovídá jí hodnota 0,078 85 m. O dlani se hovoří také jako o zmenšené šířce ruky, když se měří šířka 4 prstů vedle sebe položených kromě palce. V prvním případě by šířka dlaně odpovídala 16 ječným zrnům (protože pražský loket odpovídal 120 zrnům), rovněž tak ve druhém případě (jednomu prstu příslušela 4 zrna).

Šestinou délky pražského lokte byla *pěst*. Ta se rovnala 4 palcům (jednomu palci odpovídalo 5 ječných zrn), tedy 20 zrnům. To odpovídá metrické hodnotě 0,098 56 m. V Kottově slovníku byla pěst uváděna jako míra k měření koňské výšky.

Pěst představovala míru danou vzdáleností kolínka palce až po vnější okraj posledního prstu sevřené ruky.

Patentem z r. 1764 byla zavedena míra, kterou uvádí Thaa:

$$\text{vídeňská pěst} = 0,010\ 536\ 02\ \text{m}.$$

Třicetinou délky pražského lokte byl prst. Je připomínán již v dobách Přemysla Otakara II. Odpovídal šířce 4 ječných zrn (podle Hájka). Hodnota odpovídající zmíněným vztahům se rovná 0,019 71 m.

Čtyřiadvacetinou délky pražského lokte byl *palec*. Odpovídá šířce 5 ječných zrn, takže mu přísluší metrizedovaná hodnota 0,024 64 m. Na území Čech byla tato míra (podle Sedláčka) převzata z měr rakouských. Lidově se nazývala také *coul* nebo *col*, z německého der Zoll. Dodnes se tato míra používá v britsko-americké soustavě jednotek (inch). Tam má přesnou hodnotu 25,4 mm.

Jednou z nejmenších přirozených délkových měr bylo již vícekrát zmíněné *ječné zрно*. Připomíná se u Hebrejců. Lze se však domnívat,

že je to míra svým původem mnohem starší. Podle Klausera lze usuzovat spíše na hodnotu 4,8 mm. Metrická hodnota hebrejského zrna činí podle Albertiho a Sedláčka asi 3,4 mm.

Malou délkovou mírou byla *čárka*. Jméno pochází od značek používaných pro dílčí jednotky (viz též dále). Byla rovna dvanáctině (po dekadizování desetině) palce. To by odpovídalo 1,710 mm (resp. 2,464 mm).

Poddělením čárky byla *tečka*, rovná dvanáctině (po dekadizování desetině) čárky. To by odpovídalo 0,1710 mm (resp. 0,2464 mm).

Pro dílčí jednotky lokte se uvádí často tato stupňovitost: 1 (pražský loket = 2 (pražské) stopy, 1 stopa = 1''' = 12 palců = 12'' = 144 čárek = 144' = 1728 teček = 1728.

Nyní se krátce dotkneme větších násobných jednotek, používaných povětšinou pro účely zeměměřičské nebo speciální.

Trojnásobkem pražského lokte byl *pražský sáh* (nazývaný také staročeský). Ve starších dobách se tato míra nazývala také *sáha*. Metrická hodnota této míry činí

$$\text{pražský sáh} = 1,7742 \text{ m.}$$

Pražský sáh se měl v 18. století ke starému vídeňskému sáhu v poměru 15 : 16. Je to stará míra, připomínaná již ve starém Řecku. Tam se jmenovala *orgyia* a rovnala se asi 1,85 m. U nás se však před 16. stoletím připomíná jen zřídka. Mnohem běžnější a základní mírou byl loket.

Sáh představuje vzdálenost mezi konci prostředních prstů obou rozpažených rukou u člověka (střední postavy). Tato přírodní míra, jež závisí na velikosti člověka, je zhruba rovna jeho výšce.

Po zavedení nových měr v Čechách (pocházejících z Dolnorakouska) patentem v r. 1764 byl základní délkovou mírou:

$$\text{vídeňský sáh} = 1,896\,484 \text{ m.}$$

Byl šestinásobkem vídeňské stopy.

Sáh byl mírou používanou v měřičství. Jak si dále uvedeme, bylo podobných měr více druhů. Pokud zde hovoříme o sáhu, je nutné se zmínit, že v důlním měřičství byl používán v Čechách (resp. v českých zemích a také na Slovensku) tzv. *freiberský sáh*, odpovídající délce 1,961 m a *uherský* též *štiavnický sáh* s hodnotou zhruba 2,0258 m. O těchto obou mírách se zmiňuje Karel Neset ve své monografii o důlním měřičství (SNTL, 1966).

Další starou, v Čechách zdomácnělou mírou používanou v hornictví bylo *látro*. Podle Sedláčka se připomíná ve starých hornických právech ze 13. stol. Název je odvozován z obdobné německé míry (*die Lachter*). Regionálně i časově měla tato míra (jako ostatně i celá řada ostatních měr) dosti rozmanité hodnoty. V městských právech ze 16. stol. se uvádí, že látro se rovná 4 pražským loktům, což v metrizované hodnotě obnáší 2,3656 m. Pro kutnohorské doly se z téže doby uvádí hodnota 2,1438 m.

Podolský píše, že látro je míra přirozená a že se rovná výšce, kam až člověk střední postavy od země nad sebe může vysáhnout. Kincl uvádí, že látro se rovnalo jedné třetině prutu (o této jednotce si řekneme dále).

Spíše pro hrubá měření vzdáleností a délek v zeměměřičství se používal *krok* nebo také *kročej* (což značilo *dvoukrok*). Je to velmi stará míra, používaná již ve starověku (např. u Římanů, kteří jednoduchý krok nazývali gradus a dvoukrok passus). Dvoukrok byl přírodní mírou, rovnající se vzdálenosti konce opatku při kráčení až k místu, kdy se týmž opatkem (po jednom dvoukroku) opět našláplo na zem.

Zatímco se římský dvoukrok rovnal 5 stopám, byl *staročeský kročej* poněkud kratší, byl počítán v 15. století za dva lokte (tedy za 4 stopy), což činilo asi 1,183 m.

Staročeský měřicí krok (vlastně dvoukrok) odpovídal římskému. Činil 5 pražských stop, což odpovídá metrické hodnotě 1,4785 m (vycházelo-li se ze stop vídeňských, pak činila jeho hodnota 1,5768 m).

Přestože staročeský jednoduchý krok by se měl rovnat polovině dvoukroku, setkáváme se (jak tvrdí Sedláček) velmi často s hodnotou odpovídající asi 0,77 m.

Staročeskou zeměměřičskou mírou byl také *prut*. Název této jednotky pochází asi ze západních zemí. Znamená letorost, roční výhonek nebo tenkou hůlku. V době Karla IV. se podle Kincla rovnal prut 8 pražským loktům, což by činilo hodnotu odpovídající 4,7312 m. Prut se rovnal polovině provazce (viz dále). Později (v 16. stol.) se vážala tato míra na sáh (rovnala se 2 sáhům, resp. 12 stopám), což u pražské míry obnášelo 3,5484 m. Kincl udává poněkud větší hodnotu (3,78 m). Až do zavedení metrického systému u nás byl prut používán k měření délek cest; přitom byl brán jako desetinásobek stopy (v tomto případě již vídeňské), což odpovídá hodnotě 3,16 m.

Kromě uvedených měr se v průběhu věků používaly kromě již zmíněných také některé míry cizí. Tak např. ve 14. stol. se v Čechách používal *bavorský prut*, rovný 2,9186 m.

Jako jiné jednotky (např. stopa = foot, palec = inch aj.), přežívá také tato míra dodnes v soustavě britsko-americké. Jmenuje se perch a má hodnotu asi 5 m.

V 18. století začíná u nás tzv. *dekadizace* dílčích a násobných jednotek. Tam, kde se dříve používalo třeba poddělení na dvanáctiny, patnáctiny apod., zavádělo se nově poddělení (někdy i stupňovité) na desetiny. Podobně i u násobků. Tak se v případě *poddělení prutu* setkáváme s touto dekadizací ve druhém paragrafu spisu Václava Veselého, zemského mlynáře a geometra z počátku 18. století:

prut 1/1, střevis 1/10, coul 1/100, 1 grán 1/1000, šířka vlasu neb škrup 1/10 000, druhý škrup 1/100 000, třetí škrup 1/1000 000 a čtvrtý škrup 1/10 000 000.

Je jistě s podivem, jak malé dílčí jednotky toto poddělení představuje,

protože vycházíme-li z vídeňského střevíce (stopy), jejíž hodnota je zhruba $0,316 \text{ m} = 316 \text{ mm}$, odpovídal by čtvrtý škrup metrické hodnotě $0,000\,316 \text{ m} = 316 \text{ nm}$ (nanometrů). Vzhledem ke značně malé hodnotě této míry (i z hlediska dnešní délkové metrologie v průmyslu) je otázkou, k vyjadřování jakých rozměrů se svého času (t. j. v 18. stol.) používala.

Starou českou polní mírou délkovou byl *provazec*, staročesky se nazýval *povraz*. Pochází asi ze západních zemí, kde se míry tohoto názvu používá také k měření hloubky moře. Podle Kincla byl provazec v době Přemysla Otakara II. roven 42 pražským loktům (to by odpovídalo hodnotě 24,84 m), po roce 1541 byl stanoven nový převod tak, že se 1 provazec rovnal 52 pražským loktům (což by činilo v metrickém převodu hodnotu asi 30,75).

Existovala také zvláštní *rybníkářská míra*. Podle Hájka měl tzv. *provazec rybníkářův* zděli 22 loket, tj. asi 13 m.

Jako *viniční míra* je připomínán *viniční provazec*, údajně rovný 64 loktům (což by odpovídalo 37,85 m). Sedláček uvádí také *lesní provazec* rovný 54 loktům (tj. asi 31,94 m).

Zimmerer uvádí zajímavou přibližnou shodu mezi provazcem (rovným 52 loktům) a částí pařížského poledníku, odpovídající 1 úhlové vteřině.

Při měření v provazcích se přidával k naměřené hodnotě *příměrek* neboli „*naděl Bůh*“, pravděpodobně proto, aby se korigovaly chyby učiněné při natahování provazce, jakási náhrada za to, co by se uškodilo nedostatečným měřením.

V době Přemysla Otakara II. se připomíná další délková míra zvaná *hon*, případně také *honec*. Sedláček se podle různých starých dokladů domnívá, že hon byl původně nepřesnou mírou, jež značila odhad, kolik zdravý člověk uběhl „v jednom neodpočívaje“ a činila asi nejvýše 154 m. Je-li uváděn hon s hodnotou větší, jde údajně vlastně o stadium (jako staročeskou míru), které k nám proniklo v humanismu a bylo snad počesťováno místním názvem.

Podle desk zemských (pamětí) rovnal se hon 5 provazcům, což by odpovídalo asi 153,8 m. Tamtéž je také uvedeno, že kolečko „*plužné*“, které je „*pravé*“ (správné), se má v jednom honu 60-krát otočit. Kdybychom vycházeli z prvé uvedené hodnoty honu, musel by být obvod kolečka pluhu asi 2,56 m a průměr 0,8 m, což je přílišné. Opačně, kdybychom vzali poloměr kolečka asi 0,33 m, což zhruba odpovídá skutečnosti, vyšla by jako šedesátinásobek vypočteného obvodu pro hon hodnota 125 m. Je možné, že byla u honu také dlouhá a krátká míra, přesto se zdá zmíněný rozdíl dosti značný. Sedláček se domnívá, že menší z obou uvedených hodnot (tj. 125 m) příslušela *honci*, hodnota větší *honu*. To by ovšem předpokládalo, že hon a honec byly dvě poněkud rozdílné míry, což je ovšem pouhá domněnka.

Kincl také uvádí, že 60 honů tvořilo jednu míli (to vede ovšem k hodnotě 7,5 km).

Největší starou českou délkovou mírou, používanou v různých oblastech lidské činnosti, byla *míle*. Český název, jako v řadě jiných jazyků, je odvozován z latinského názvu obdobné jednotky (1 mille passuum, krátce 1 millia, což představovalo 1000 kročejů). Míle byla používána při vyměřování země, při měření délek cest, při stanovování dosahu výrobních či jiných monopolů. I u nás existovalo tzv. *právo míle*, např. na Žatecku; zde tato míra obnášela asi 7 km. Toto právo míle bylo právo várečnou výsadou. Tato hodnota je blízká tzv. *nové zeměpisné míře* (rovné 4 námořním mílím), která podle Abertiho měla hodnotu 7420,4385 m. Toto je ovšem již míle novější, z 18. století.

Staročeská míle je velmi rozmanitá. Sedláček ve svém spise uvádí pro míli užívanou u nás hodnotu 1479,50 m, pokud byla odvozována jako násobek kročeje. Velmi rozdílnou hodnotu má však míle používaná v 15. stol. na jižní Moravě u Znojma, činící asi 12,2 km. Jiná staročeská míra, ve 14. stol. používaná údajně na Čáslavsku, obnášela asi 9,2 km. Podle jiného měření provedeného v 15. stol. u Českých Budějovic měla míle 365 provazců (po 52 pražských loktech), což by odpovídalo asi 11,225 km.

Poslední česká míle měla prý 12 600 loktů. Měřeno starým pražským loktem by to odpovídalo hodnotě 7,451 64 km, což by bylo méně, nežli měla rakouská poštovní míle. Kincl uvádí míli používanou v době Přemysla Otakara II., a to s hodnotou asi 7,484 km.

Až do zavedení metrického systému byla na našem území používána
rakouská (poštovní) míle = 7,585 936 km.

Tuto míru uvádí G. Thaa ve svém spise základního měrového významu (1900).

Rozmanitost této míry co do hodnoty, ukazuje na to, že se bral tisícinásobek z jiných hodnot nežli z kročejů, nebo že se název formálně použil pro míru vytvářenou jinak, dnes již těžko zjištělným způsobem.

Míle se používá dodnes, ovšem v zahraničí anebo v některých mezinárodních organizacích. Zejména v britské a americké soustavě jednotek. Dosud platí v mezinárodním styku v námořní a letecké dopravě. Dnešní tzv. námořní míle se rovná 1852 m (přesně).

Na závěr odstavce o délkových jednotkách si uvedeme krátký přehled starých délkových měr — jednotek a některých dalších měr používaných na našem území (podle velikosti) s vybranými metrickými hodnotami, případně s běžnějšími násobky a díly.

1 míle rakouská poštovní	= 7585,936 m
1 míle česká = 60 honů = 300 provazců = = 12 600 pražských loktů	= 7451,640 m
1 hon = 5 provazců = 210 pražských loktů	= 124,194 m

1 provazec = 52 pražských loktů	= 30,753 m
1 prut = 6 pražských loktů	= 3,5484 m
1 prut vídeňský = 10 stop vídeňských	= 3,161 m
1 látro = 4 pražské lokty	= 2,3656 m
1 sáh vídeňský	= 1,8965 m
1 sáh pražský = 3 pražské lokty	= 1,7742 m
1 kročej (dvoukrok) = 2 pražské lokty	= 1,1828 m
1 loket vídeňský	= 0,7776 m
1 krok = 1 loket pražský	= 0,5915 m
1 loket pražský	= 0,5915 m
	= 591,5 mm
1 stopa vídeňská	= 316,1 mm
1 stopa pražská (střevíc) = 1/2 pražského lokte	= 295,7 mm
1 píd' pražská = 2/3 pražské stopy = 1/3 pražského lokte	= 197,3 mm
1 pěst = 4 palce = 1/3 pražské stopy = 1/6 pražského lokte	= 98,56 mm
1 dlaň (ruka) = 4 prsty = 4/15 pražské stopy = 2/15 pražského lokte	= 78,84 mm
1 coul = 1/100 vídeňského prutu	= 31,61 mm
1 palec = 5 ječných zrn = 1/4 pěsti = 1/12 pražské stopy = 1/24 pražského lokte	= 24,64 mm
1 prst = 4 ječná zrna = 1/4 dlaně = 1/15 pražské stopy = 1/30 pražského lokte	= 19,71 mm
1 ječné zrno = 1/5 palce = 1/4 prstu = 1/60 pražské stopy = 1/120 pražského lokte	= 4,928 mm
1 grán = 1/1000 vídeňského prutu	= 3,161 mm
1 čárka = 1/12 palce = 1/144 pražské stopy = 1/288 pražského lokte	= 2,053 mm
1 škrup (šířka vlasu) = 1/10000 prutu	= 0,3161 mm
1 tečka = 1/12 čárky = 1/144 palce = 1/1728 pražské stopy = 1/3456 pražského lokte	= 0,1710 mm
1 druhý škrup = 1/10 škrupu = 1/100 000 prutu	= 0,03161 mm
1 třetí škrup = 1/100 škrupu = 1/1000 000 prutu	= 0,003161 mm
1 čtvrtý škrup = 1/1000 škrupu = 1/10 000 000 prutu	= 0,0003161 mm

Poznámka: V přehledu jsou uvedeny vazby na další jednotky a příslušné hodnoty platné v době před r. 1956. Není ve všech případech přihlédnuto k dekadizaci a metrizaci jednotek, prováděných zpravidla později. Některé další, zpravidla méně běžné jednotky, jsou uvedeny v textu.

NAŠE SOUTĚŽ

Také letos vypisuje redakce Rozhledů spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím v Praze soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Této soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Při případném umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

V tomto čísle otiskujeme zatím jenom část příkladů z matematiky a z fyziky. Jejich řešení pošlete *nejpozději do 15. ledna 1980* na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla Rozhledů. Další příklady Naší soutěže otiskneme v příštím čísle našeho časopisu.

Pokyny řešitelům

Řešení každého příkladu pište čitelně (nejlépe strojem) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec svou bytovou adresu. Kolektivy uvedou tyto údaje pro každého svého člena.

Nejdříve napište text příkladu a potom pište přehledně jeho řešení. Toto řešení formulujte výstižně, stručně, ale jasně. Přitom užívejte platné terminologie a symboliky. Připojujete-li k řešení některého příkladu obrázek, narýsujte jej pečlivě a řádně popište.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Určete reálná čísla m , n tak, aby rovnice

$$x^4 + 3x^3 + mx^2 - 28x + n = 0$$

měla trojnásobný reálný kořen.

Jan Fráňa

2. Dva shodné obdélníky o rozměrech a , b jsou na sebe položeny tak, že se kryjí. Jeden z nich otočíme kolem jejich společného středu tak, že po tomto otočení je jejich průnikem rovnoběžník. Kromě tohoto průniku zbývají potom z každého obdélníku ještě dvě jeho části. Jak velký je úhel otočení, jestliže každá z těchto částí má týž obsah jako průnik obou obdélníků? Zjistěte nutnou a postačující podmínku pro to, aby úloha měla řešení.

Stanislav Horák

3. V pravoúhlém trojúhelníku POC s přeponou PC jsou uvnitř odvěsny OC sestrojeny body A, B tak, že bod A je mezi body O, B ; přitom úhly $\sphericalangle OPA, \sphericalangle APB, \sphericalangle BPC$ jsou shodné. Víme, že je $|OA| = a, |AB| = b$; vypočítejte $c = |BC|$, velikost α výše uvedených shodných úhlů a dokažte, že je $a < b < 2a, b < c$.

Emil Kraemer

4. Je dána elipsa (resp. hyperbola) s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b . Jejím ohniskem vedeme přímku p tak, aby protínala tečny elipsy (resp. hyperboly) sestrojené ve vrcholech hlavní osy v bodech A_1, A_2 , a sestrojíme kružnici k o průměru A_1A_2 . Pro které přímky p má každá kružnice k s elipsou (resp. s hyperbolou) aspoň jeden společný bod? Jaká je vzájemná poloha takové kružnice k a dané elipsy (resp. hyperboly)? Existuje mezi kružnicemi majícími s danou elipsou (resp. hyperbolou) aspoň jeden společný bod taková, která má ze všech těchto kružnic největší průměr?

Emil Kraemer

5. Je dán kvádr $ABCD A'B'C'D'$; středy jeho hran AB, CD jsou po řadě E, F . Nalezněte množinu těžišť všech trojúhelníků EFG , jejichž vrchol G je bodem stěny $A'B'C'D'$ a pro jejichž strany EG, FG platí:

$$|EG| : |FG| = 2 : 3.$$

Proveďte diskusi vzhledem k rozměrům daného kváдру.

Jiří Mída

6. Nechť M je n -prvková množina uspořádaných dvojic reálných čísel; přitom je $n \geq 2$, celé. Dokažte, že množinu M lze uspořádat ve tvaru

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$$

tak, že nerovnost

$$\min(a_i, b_j) \leq \min(a_j, b_i)$$

platí vždy, jakmile je $i < j, \{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

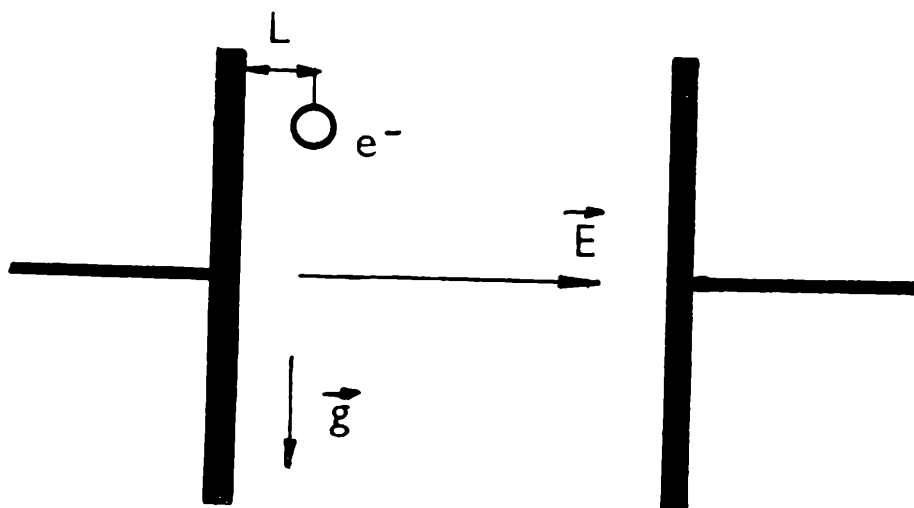
Jaroslav Morávek

Fyzika

1. Vypočítejte zrychlení a dobu, za kterou sjede těžké těleso po nakloněné rovině svírající úhel při základně $\alpha = 45^\circ$, bylo-li vypuštěno z výšky $h = 2$ m. Při výpočtu vezměte v úvahu, že mezní úhel, při kterém je těleso na této rovině ještě v klidu, je $\beta = 30^\circ$. Příklad řešte nejprve obecně a potom číselně.

Zdeněk Janouš

2. K elektrodám deskového kondenzátoru, umístěného vertikálně



Obr. 1

(obr. 1) v homogenním gravitačním poli, je přiloženo střídavé napětí vytvářející elektrické pole o intenzitě $E = A \cos \omega t$.

- Najděte rovnici, která popisuje dráhu elektronu pohybujícího se mezi deskami kondenzátoru se započtením tíže.
- Sestrojte graf této dráhy.

Při výpočtu předpokládejte, že na počátku je elektron v klidu a je ve vzdálenosti L od nejbližší deskové elektrody, přičemž je L natolik veliké, že v libovolném časovém okamžiku elektron nedosáhne deskových elektrod. Hmotnost elektronu je m , náboj e .

Zdeněk Janout

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

7. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ na množině

$$\left\{ (x, y): x \neq 0, y \neq 0, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \right\}.$$

(Došlo 12 řešení.)

Jaroslav Šedivý

Řešil Ladislav Mečíř, IV. B, gymnázium Prievidza :

Uvažujeme len případ $a \neq 0$. Označme si hodnotu funkcie písmenem z , dostaneme

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{y} = z - \frac{1}{x};$$

čiže pre každú dvojicu (x, y) patriacu do uvažovanej množiny, platí:

$$\frac{1}{x^2} + \left(z - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{a^2}.$$

Po úpravách zistíme, že

$$2\left(\frac{1}{x} - \frac{z}{2}\right)^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{z^2}{2},$$

z čoho vyplýva, že

$$\frac{1}{a^2} - \frac{z^2}{2} \geq 0,$$

čiže

$$z^2 \leq \frac{2}{a^2},$$

$$|z| \leq \frac{\sqrt{2}}{|a|}.$$

Túto nerovnosť môžeme prepísať v ekvivalentnom tvare

$$z \in \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{|a|}, \frac{\sqrt{2}}{|a|} \right\rangle.$$

Pri volbe $x = y = |a| \cdot \sqrt{2}$ naozaj máme $z = \frac{\sqrt{2}}{|a|}$, pri volbe $x = y = -|a| \cdot \sqrt{2}$ máme $z = -\frac{\sqrt{2}}{|a|}$. Číslo $\frac{\sqrt{2}}{|a|}$ je najväčšou hodnotou danej funkcie, číslo $-\frac{\sqrt{2}}{|a|}$ je najmenšou hodnotou danej funkcie.

8. Rovinný konvexní n -úhelník ($n \geq 3$) má obvod o a obsah P . Dokažte, že platí:

$$(2n - 5)o > 4\sqrt{P} \quad (1)$$

(Došlo 8 řešení)

Jaroslav Štěpánek

Při důkazu nerovnosti (1) všichni úspěšní řešitelé rozlišovali dva případy. Dokazovali ji jednak pro trojúhelníky, jednak pro konvexní n -úhelníky, kde $n \geq 4$. Redakce proto vybrala nejlepší řešení každého z těchto dvou případů.

a) *Pro trojúhelník dokázal nerovnost (1) Aleš Toufar, 4. A G v Opavě takto:*

Zvolme libovolný trojúhelník, označme velikosti jeho stran a, b, c

a položíme $s = \frac{1}{2}o$. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro čísla $s, s - a, s - b, s - c$ je

$$\frac{1}{4} [s + (s - a) + (s - b) + (s - c)] > \sqrt[4]{s(s - a)(s - b)(s - c)}; \quad (2)$$

rovnost nemůže nastat, protože neplatí $s = s - a = s - b = s - c$. Z nerovnosti (2) a Heronova vzorce plyne, že je

$$4s - (a + b + c) > 4\sqrt{P},$$

$$o > 4\sqrt{P},$$

což je dokazovaná nerovnost (1) pro $n = 3$.

b) *Nerovnost (1) pro $n \geq 4$ dokázal velmi jednoduše Stanislav Vaněček, 3. D G v Praze 2, W. Piecka 2 takto:*

Nechť M je libovolný konvexní n -úhelník, kde $n \geq 4$. Je-li bod V jeho libovolný vrchol, pak každý bod n -úhelníku má od bodu V vzdálenost menší než $\frac{1}{2}o$. Dále existuje (uzavřená) polorovina, jejíž hraniční přímka prochází bodem V a v níž leží všechny body n -úhelníku M . Proto n -úhelník M leží v půlkruhu o středu V a poloměru $\frac{1}{2}o$; platí tedy nerovnost

$$P \leq \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{o}{2}\right)^2$$

tj. nerovnost

$$P \leq \frac{1}{8} \pi o^2. \quad (3)$$

Nerovnost (1) pro $n \geq 4$ dokážeme, jestliže dokážeme platnost nerovnosti

$$(2n - 5)o > 4 \sqrt{\frac{1}{8} \pi o^2}. \quad (4)$$

Tato nerovnost je splněna, právě když je

$$2n - 5 > 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

tj. právě, když je

$$n > 2,5 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad (5)$$

to však pro $n \geq 4$ platí, neboť je

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} < \sqrt{2} < 1,5$$

Z nerovnosti (5) plyne nerovnost (4) a z ní podle (3) dokazovaná nerovnost (1).

9. Z bodu A po polopřímce A_C a z bodu B po polopřímce B_C se pohybují rovnoměrně dva body kladnými rychlostmi v_a , respektive v_b . Určete bez použití metod diferenciálního počtu jejich nejmenší vzdálenost a okamžik, kdy to nastane.

(Došlo 10 řešení)

Přemysl Vihan

Autorovo řešení :

V okamžiku průchodu oběma body A, B , zvolme $t = 0$; $t > 0$ na polopřímkách A_C, B_C ; $t < 0$ na opačných polopřímkách. Vzdálenost bodů A, C označme a , bodů B, C označme b . V okamžiku t jsou oba body pohybující se z A , respektive B vzdáleny od bodu C o $|a - v_a t|$, resp. $|b - v_b t|$. Označíme-li A', B' jejich polohu v okamžiku t a γ' úhel $A'CB'$, je podle kosinové věty čtverec jejich vzdálenosti

$$d^2(t) = (a - v_a t)^2 + (b - v_b t)^2 - 2|a - v_a t| |b - v_b t| \cos \gamma'$$

Označíme-li $\gamma \sphericalangle ACB$, je

$$d^2(t) = (a - v_a t)^2 + (b - v_b t)^2 - 2(a - v_a t) \cdot (b - v_b t) \cdot \cos \gamma$$

(nakreslete si obrázek).

Po úpravě dostanete

$$\begin{aligned} d^2(t) &= (v_a^2 + v_b^2 - 2v_a v_b \cos \gamma) \cdot t^2 - \\ &\quad - 2(av_a + bv_b - (av_b + bv_a) \cdot \cos \gamma) \cdot t + a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = \\ &= D \cdot t^2 - 2E \cdot t + F \end{aligned}$$

$$D = v_a^2 + v_b^2 - 2v_a v_b \cos \gamma,$$

$$E = av_a + bv_b - (av_b + bv_a) \cos \gamma,$$

$$F = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Především je $D \geq 0$, neboť D je podle kosinové věty čtverec vzdálenosti jakýchkoli dvou bodů, a $D = 0$, právě když $v_a = v_b$ a $\gamma = 0$, neboť

$$v_a^2 + v_b^2 - 2v_a v_b \cos \gamma = (v_a - v_b)^2 + 2v_a v_b (1 - \cos \gamma).$$

Je-li $D = 0$, pohybují se oba body po jedné polopřímce stejnými rychlostmi a jejich vzdálenost je konstantní, $d(t) = |a - b|$. Předpokládejme tedy v dalším, že $D > 0$. Potom je

$$d^2(t) = Dt^2 - 2Et + F = D \cdot \left(t^2 - 2 \frac{E}{D} t + \frac{F}{D} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= D \cdot \left(\left(t - \frac{E}{D} \right)^2 - \left(\frac{E}{D} \right)^2 + \frac{F}{D} \right) \geq \\
&\geq D \cdot \left(- \left(\frac{E}{D} \right)^2 + \frac{F}{D} \right) = F - \frac{E^2}{D} = d^2 \left(\frac{E}{D} \right).
\end{aligned}$$

Čtverec vzdálenosti obou pohybujících se bodů, a tedy také jejich vzdálenost (která je nezáporná), je nejmenší v okamžiku

$$t = \frac{av_a + bv_b - (bv_a + av_b) \cos \gamma}{v_a^2 + v_b^2 - 2v_av_b \cdot \cos \gamma}, \quad (1)$$

pokud je $t > 0$ (podle zadání), a je rovna v tomto případě

$$d \left(\frac{E}{D} \right) = \sqrt{F - \frac{E^2}{D}} = \frac{|av_b - bv_a| \cdot \sin \gamma}{\sqrt{v_a^2 + v_b^2 - 2v_av_b \cdot \cos \gamma}}.$$

Pohybující se body dosáhnou minima v čase $t = \frac{E}{D}$, který je kladný pro

$$\begin{aligned}
&\cos \gamma < \frac{av_a + bv_b}{bv_a + av_b}, \text{ a v tom a jenom v tom případě platí (1). Je-li} \\
&\frac{av_a + bv_b}{bv_a + av_b} < 1 \text{ a } \cos \gamma \geq \frac{av_a + bv_b}{bv_a + av_b}, \text{ má úloha minimum pro} \\
&t = 0
\end{aligned} \quad (2)$$

a nejmenší vzdálenost je $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$. Příklad (2) může nastat, jen pokud $a < b$ a $v_a > v_b$ nebo $a > b$ a $v_a < v_b$, kdy je totiž $\frac{av_a + bv_b}{bv_a + av_b} < 1$. Je-li však $a \geq b$ a $v_a \geq v_b$ nebo $a \leq b$ a $v_a \leq v_b$,

což je právě když $\frac{av_a + bv_b}{bv_a + av_b} \geq 1$, je $t > 0$ a platí (1).

Shrneme-li tyto poznatky a označíme-li $G = \frac{av_a + bv_b}{bv_a + av_b}$,

(1) platí, právě když $a \geq b$ a $v_a \geq v_b$ nebo
 $a \leq b$ a $v_a \leq v_b$ nebo
 $a > b$ a $v_a < v_b$ a $\pi \geq \gamma > \arccos G$,
 $a < b$ a $v_a > v_b$ a $\pi \geq \gamma > \arccos G$,

(2) platí, právě když $a > b$ a $v_a < v_b$ a $0 \leq \gamma \leq \arccos G$,
 $a < b$ a $v_a > v_b$ a $0 \leq \gamma \leq \arccos G$.

10. V roce 1978 připadl Nový rok na neděli. Kolikrát se to stalo v letech 1904 až 1912?

(Došlo 11 řešení)

Antonín Vrba

Řešil Petr Veselka, IV. B G Karlovy Vary :

Od roku 1904 do roku 1978 uběhlo 74 let, z toho 19 přestupných. Protože normální rok má $365 = 7 \cdot 52 + 1$ dní a přestupný má $366 = 7 \cdot 52 + 2$ dní, uběhl od 1. ledna 1904 do 1. ledna 1978 celý počet týdnů a $19 \cdot 2 + 55 \cdot 1 = 93$ dnů, tj. celý počet týdnů a 2 dny. V roce 1904 připadl tedy Nový rok na pátek, v roce 1905 na neděli, v roce 1906 na pondělí, v roce 1907 na úterý, v roce 1908 na středu, v roce 1909 na pátek, v roce 1910 na sobotu, v roce 1911 na neděli a v roce 1912 na pondělí (roky 1904, 1908, 1912 byly přestupné). Nový rok byl tedy v těchto letech v neděli dvakrát, a to v roce 1905 a v roce 1911.

Poznámka. Autorovi úlohy šlo hlavně o provedení úvahy, která vede k řešení úlohy. Tomuto požadavku neodpovídá ovšem použití běžně dostupného věčného kalendáře, nehledě k tomu, že není jisté, zda lze této pomůcce stoprocentně důvěřovat. Tato námitka se týká i použití kalkulátoru, který obsahuje program určující, na který den v týdnu připadne zadané datum.

11. Sestrojte trojúhelník, je-li (při obvyklém označení) dáno v_c , $a + b$, γ .

(Došlo 6 řešení)

Antonín Vrba

Upravené řešení Aleše Toufara, IV. A G Opava :

Podarí-li se najít velikost c strany AB trojúhelníku ABC , převede se úloha na konstrukci trojúhelníku, ve kterém známe c , $a + b$, γ . Při rozboru této úlohy sestrojíme trojúhelník ABB' , jehož vrchol B' leží na prodloužení strany AC za vrchol C tak, že je $CB' = CB$; je tedy $|AB'| = a + b$. Z rovnoramenného trojúhelníku $BB'C$ se základnou BB' plyne, že úhel $\sphericalangle BB'A$ má velikost $\gamma/2$ (obr. 1). V trojúhelníku ABB' známe tedy dvě strany (AB , AB') a úhel $\sphericalangle BB'A$ proti menší z nich (neboť je $c < a + b$). Bod C je bodem osy úsečky BB' . Jádrem konstrukce trojúhelníku ABC je potom nalezení společného bodu polopřímky $B'P$ (kde $|\sphericalangle AB'P| = \gamma/2$) s kružnicí opsanou kolem bodu A poloměrem $c < a + b$. Je-li x vzdálenost vrcholu A od přímky BB' , má úloha dvě nebo jedno nebo žádné řešení podle toho, je-li $c > x$ nebo $c = x$ nebo $c < x$.

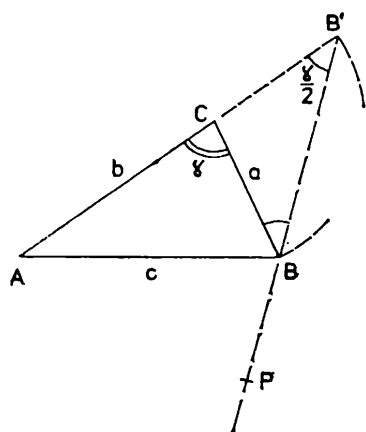
Jde tedy jenom o výpočet velikosti c strany AB trojúhelníku ABC . Při obvyklém označení je podle kosinové věty

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma ,$$

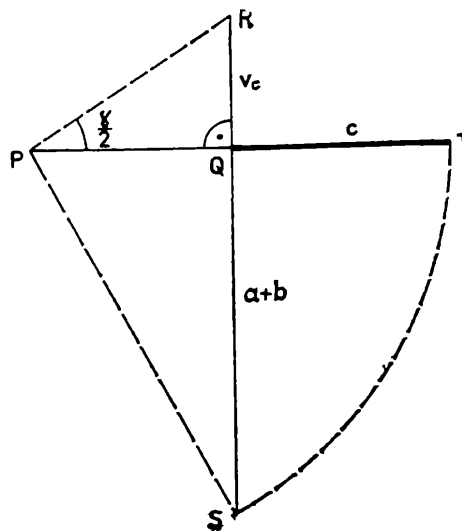
$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab(1 + \cos \gamma) . \quad 1)$$

Pro dvojnásobný obsah hledaného trojúhelníku je

$$ab \sin \gamma = cv_c ,$$



Obr. 1



Obr. 2

takže podle (1) je

$$c^2 = (a + b)^2 - 2 \frac{v_c(1 + \cos \gamma)}{\sin \gamma} c. \quad (2)$$

Protože je $0 < \gamma < \pi$, je

$$\frac{1 + \cos \gamma}{\sin \gamma} = \cotg \frac{\gamma}{2};$$

podle (2) je tedy

$$c^2 + 2cv_c \cotg \frac{\gamma}{2} - (a + b)^2 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice pro c má právě jeden kladný kořen

$$c = \sqrt{v_c^2 \cotg^2 \frac{\gamma}{2} + (a + b)^2} - v_c \cotg \frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

Konstrukce úsečky o velikosti c udané vzorcem (3) je patrna z obr. 2, ve kterém přímky PQ , RS jsou vzájemně kolmé a kde je

$$|QR| = v_c, \quad |\sphericalangle QPR| = \frac{\gamma}{2}, \quad |QS| = a + b, \quad |PT| = |PS|;$$

potom je $c = |QT|$. Nalezené c je menší než $a + b$.

Vzdálenost x bodu A od přímky $B'B$ je

$$x = (a + b) \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (4)$$

Podle výkladu uvedeného na počátku řešení závisí počet řešení na tom, zda je $c > x$ nebo $c = x$ nebo $c < x$. Podle (3) a (4) dojdeme k tomuto výsledku:

Pro $(a + b) \cos \frac{\gamma}{2} > 2v_c$ má úloha dvě řešení,

pro $(a + b) \cos \frac{\gamma}{2} = 2v_c$ má úloha jedno řešení,

pro $(a + b) \cos \frac{\gamma}{2} < 2v_c$ nemá úloha žádné řešení.

12. Trojúhelníkový šestistěn (stručně zvaný dvojjeňlan) je těleso vzniklé sjednocením dvou čtyřstěnů, které mají společnou podstavu p a leží v opačných poloprostorech určených rovinou podstavy p . Označme $\mathbf{M}$ množinu všech dvojjeňlanů $ABCDE$ (společná podstava čtyřstěnů je ABC), které mají tu vlastnost, že aspoň čtyři stěny jsou rovnostranné trojúhelníky o straně délky 1. Vyhledejte ten dvojjeňlan z množiny $\mathbf{M}$, který má maximální objem, popište jeho konstrukci a vypočtěte jeho objem.

(Došlo 8 řešení)

Jan Vyšín

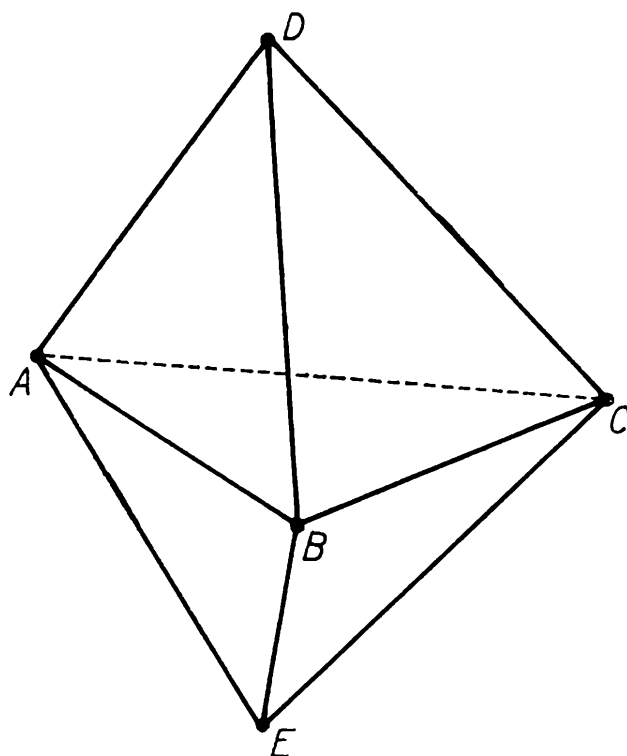
Nejlepší řešení, i když není zcela úplné, podali *Aleš Nekvinda* a *Zdeněk Krtouš*, oba z gymnazia v Liberci. Místo řešení úlohy 12 otiskujeme článek doc. Jana Vyšína, CSc., který upozorňuje na chyby, jichž se různí řešitelé úlohy dopustili.

0 soutěžní úloze 12 z minulého ročníku Rozhledů

Doc. JAN VYŠÍN, CSc. Praha

Je to stereometrická úloha týkající se dvojjeňlanu, tj. tělesa složeného ze dvou čtyřstěnů o společné podstavě, jehož aspoň čtyři ze šesti stěn jsou rovnostranné trojúhelníky o straně délky 1. V této množině se mělo vyhledat těleso maximálního objemu. Sešlo se jen osm řešení, z nichž dvě jsou klasifikována A a B, zbývajících šest je klasifikováno C. Je to zarážející, protože výsledek je většinou správný; ovšem v postupu řešení jsou chyby nebo závažné nedostatky. Protože vyskytující se chyby jsou velmi poučné, předvedeme je stručně čtenářům.

Na prvním místě jsou *chyby v třídění*. Čtenáři správně poznali, že je třeba rozlišovat několik případů, ale nedošli k nim dichotomickým tříděním a jasně je neformulovali; proto se vyskytly v klasifikaci chyby. Asi nejlépe je použít obrázku se standardním označením. Dvojjeňlan $ABCDE$ (obr. 1) se skládá ze dvou čtyřstěnů $ABCD$ a $ABCE$. Buď jsou všechny stěny ABE , BCE , CAE rovnostranné trojúhelníky o straně



Obr. 1

délky 1 [PŘÍPAD 1] — předpokládáme vhodnou volbu označení — nebo každý ze čtyřstěnů $ABCD$, $ABCE$ má za dvě stěny rovnostranné trojúhelníky [PŘÍPAD 2]. Tento druhý případ vyžaduje další dichotomické třídění, jak nám ukazuje názor. Buď jsou rovnostranné trojúhelníky stěny ABE , BCE , ABD , ACD [PŘÍPAD 21] nebo to jsou trojúhelníky ABE , BCE , ABD , BCD [PŘÍPAD 22]; zápis případů se ovšem opírá o vhodnou volbu označení.

Nyní řešitelé správně hledali v každé z těchto kategorií těleso maximálního objemu. V případě 1 našli dvojjechlan o objemu

$$V_1 = \frac{1}{24} (2\sqrt{2} + 3) \doteq \frac{1}{24} \cdot 5,828.$$

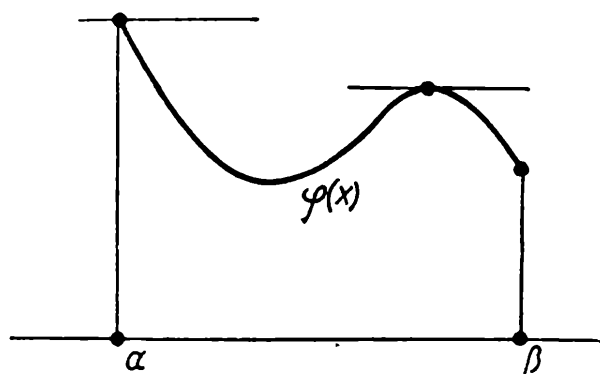
V případě 21 se zjistí, že jde o dvojjechlan, jehož všech 9 hran má délku 1, je to tedy těleso složené ze dvou pravidelných čtyřstěnů a náleží do případu 1; pro příslušný objem platí

$$V_{21} < V_1.$$

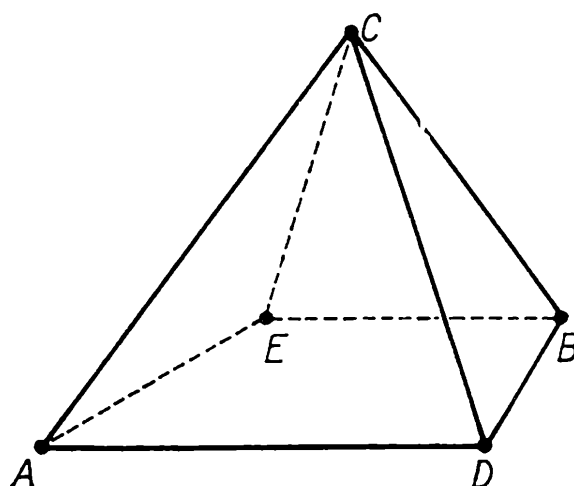
V případě 22 se řešitelé většinou (až na jeden případ) pustili do hledání maximálního dvojjechlanu výpočtem; vyšlo jim správně

$$V_{22} = \frac{1}{4} = \frac{6}{24},$$

ale v postupu bylo nejvíce chyb. Označíme-li proměnnou délku hrany AC písmenem $2x$, je objem dvojjechlanu V_x funkcí $f(x)$ v oboru proměnnosti



Obr. 2



Obr. 3

$\langle 0, 1 \rangle$ (to ukazuje trojúhelníková nerovnost v $\triangle ABC$). Odvodíme vyjádření V z $f(x)$, dostaneme

$$V_x = f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{3-4x^2}$$

Tím se zúží obor proměnnosti x na interval $\langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$. Hledáme-li globální maximum funkce f v tomto intervalu, musíme

I. rozhodnout, zda to není hodnota funkce v krajním bodě intervalu (to ovšem nezjistíme derivací),

II. vyšetřit lokální maxima funkce f v intervalu $\langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$ (to zjistíme pomocí derivací).

Všichni řešitelé vynechali krok I.; to je hrubá chyba, která se vyskytuje např. i v matematické olympiádě a svědčí o nesprávném probírání průběhu funkce. Více než dlouhé výklady poví obr. 2, který znázorňuje průběh funkce φ v intervalech $\langle \alpha, \beta \rangle$; jak zde zjistíme maximum funkce φ v $\langle \alpha, \beta \rangle$? Derivací?

Hned na tomto místě zdůrazněme, že použití derivace při řešení naší úlohy bylo sice možné, ale zbytečné a zkomplikovalo celý postup. V případě 22 se mohlo postupovat tak jako v případě 1, totiž vybrat např. mezi čtyřstěny $ABCD$ ten, kde platí $ABD \perp BCD$; tento nápad se vyskytl v řešení Aleše Nekvindy a Zdenka Krtouše.

Poslední ze závažných chyb, které se vyskytly, je tato: Úloha se řešila rozdělením dvojjeblanu na dva čtyřstěny $ABCD$ a $ABCE$; našly se čtyřstěny maximálního objemu a z nich se složil „maximální“ dvojjeblan. Je ovšem ryze geometrická otázka, zda složené těleso je opravdu dvojjeblan, zda neleží některé čtyři vrcholy v rovině. Představte si pravidelný čtyřboký jeblan, jehož všech 8 hran má délku 1 (obr. 3).

Ten je přece také složen ze dvou čtyřstěnů $ABCD$, $ABCE$, z nichž každý má za dvě stěny rovnostranné trojúhelníky, ale *není to dvojjehlán* (vrcholy A , B , D , E leží v rovině). Je to obdobná situace, jako když trojúhelník „degeneruje“ v bod (všechny jeho vrcholy splynou v bod). To se týká zejména také řešení případu 22.

Teprve když zjistíme, že reprezentanti množin 1, 22 jsou opravdu dvojjehlany, můžeme z nerovnosti

$$V_1 < V_{22}$$

usoudit, který jehlan má maximální objem. Byla vypočtena i délka hrany AC ; $AC = \frac{1}{2} \sqrt{6}$ (správně vychází $x = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{4} \sqrt{6} < \frac{1}{2} \sqrt{3}$).

Pro volnou chvíli

Řešení jednoho výzkumného úkolu...

V 1. čísle minulého ročníku jsme uveřejnili příspěvek **Výzkumné úkoly motivované rovností měr útvarů**. Úkoly zněly takto:

- A. Existují rovinné útvary, které mají obsah h cm² a obvod h cm? Lze nějak výstižně charakterizovat mnohoúhelníky s touto vlastností?
- B. Existují tělesa, která mají objem h cm³ a povrch h cm²? Lze nějak charakterizovat mnohoúhelníky s touto vlastností?

Dílčí úkoly vás v obou případech vedly k samostatným objevům, mohli byste například najít tato řešení problému A:

Kruh, který má poloměr $r = 2$ cm. Čtverec se stranou 4 cm opsaný kružnicí s poloměrem $r = 2$ cm, libovolný trojúhelník opsaný takové kružnici atd. Každý konvexní mnohoúhelník, který je opsán kružnicí s poloměrem $r = 2$ cm, má vlastnost uvedenou v problému A.

V problému B hraje obdobnou roli kulová plocha s poloměrem $r = 3$ cm; všechny konvexní mnohostěny jí opsané mají požadovanou vlastnost. Splňují ji i rotační válce a kužele opsané této kulové ploše.

... a další úkol pro badatele

Nový úkol navazuje na předešlý a zaslal jej redakci dr. Ludovít Hrdina:

Určete velikosti hran všech kvádrov, které mají povrch vyjádřený tím istým číslem ako objem a ich rozmery sú prirodzené čísla.

Promyslete si řešení tohoto úkolu, v některém dalším čísle Rozhledů uveřejníme výsledek.

Jaroslav Šedivý

Tři úlohy o elektrických zdrojích

Ing. J I Ř Í VAV Ř Í N, Praha

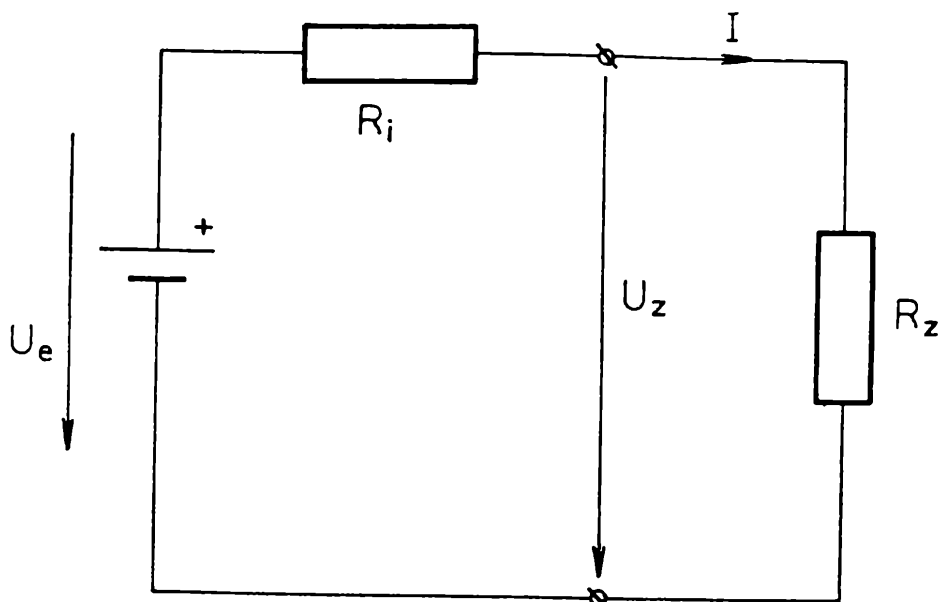
Elektrický zdroj stejnosměrného napětí je charakterizován elektromotorickým napětím U_e a vnitřním odporem R_i podle obr. 1. Připojíme-li k němu vnější odpor zátěže R_z , teče proud $I = U_e / (R_i + R_z)$ a napětí na zátěži (tzv. svorkové napětí zdroje) je rovno $U_z = IR_z = U_e R_z / (R_i + R_z)$. U střídavých zdrojů k tomu přistupuje ještě vliv indukčností, příp. i kapacit uvnitř zdroje.

Vnitřní odpor R_i stejnosměrného zdroje napětí má být co nejmenší, u ideálního zdroje napětí je nulový. Několik takových ideálních zdrojů napětí lze však zapojovat jen do série, nikoliv paralelně, protože pak při trochu různých elektromotorických napětích by mezi nimi kolovaly nepřipustně velké vyrovnávací proudy.

Zvětšujeme-li naopak vnitřní odpor zdroje R_i při současném zvětšování elektromotorického napětí U_e , stává se výstupní proud méně závislým na velikosti odporu zátěže R_z . Z takového zdroje se pak stává v hraničním případě zdroj proudu, vnucující vnějšímu obvodu svůj proud. Několik takových proudových zdrojů už nemůžeme řadit do série, ale naopak paralelně, přičemž se jejich výstupní proudy sečítají (podobně jako se sečítají napětí několika do série vřazených napěťových zdrojů).

Obvykle však máme střední případ zdroje s elektromotorickým napětím U_e a s vnitřním odporem R_i . Takové zdroje lze spojovat do série i paralelně. Několik do série zapojených stejných zdrojů lze přitom zřejmě nahradit jedním zdrojem s elektromotorickým napětím rovným součtu elektromotorických napětí všech zdrojů a s vnitřním odporem, rovným součtu všech vnitřních odporů.

Naproti tomu několik paralelně zapojených stejných zdrojů lze nahradit, jak se můžete přesvědčit výpočtem, jedním zdrojem s elektromotorickým napětím, rovným elektromotorickému napětí jednoho zdroje a s vnitřním odporem rovným vnitřnímu odporu jednoho zdroje, lomenému počtem zdrojů.



Obr. 1

Pokuste se nyní vyřešit následující tři úlohy o elektrických zdrojích:

1. První známá úloha zní: Jakou hodnotu má mít při jednom zdroji s elektromotorickým napětím U_e a vnitřním odporem R_i vnější odpor R_z , abychom na něm dosáhli co největšího výkonu?

2. Druhá úloha je složitější: Máme dva zdroje stejného elektromotorického napětí U_e a se stejným vnitřním odporem R_i , které mají pracovat do jednoho daného vnějšího odporu R_z . Zdroje můžeme zapojit do série nebo paralelně. Rozhodněte, kdy dosáhneme většího výkonu na odporu R_z při sériovém zapojení zdrojů a kdy naopak při zapojení paralelním?

3. Konečně třetí úloha je kombinací prvních dvou: Máme k zdrojů o elektromotorickém napětí U_e a vnitřním odporu R_i , z nichž zařadíme l zdrojů do série a $m = k - l$ zdrojů paralelně. Výsledek pracuje do daného vnějšího odporu R_z . Jak mají být zdroje zapojeny, aby na vnějším odporu R_z byl co největší výkon, a jaký je pak výsledný vnitřní odpor R_{ic} všech zdrojů?

Řešení úloh bude otištěno v pátém čísle Rozhledů.

Nepřehlédněte!

UPOZORNĚNÍ ŘEŠITELŮM MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY A UČITELŮM MATEMATIKY

Úspěšnými řešiteli I. kola MO v kategoriích A, B, C se stanou účastníci, kteří budou mít řešení alespoň čtyř úloh ohodnocena jako výborná nebo dobrá. V letáku XXIX. ročníku MO je nesprávně uvedeno, že stačí tři úlohy. (Pro kategorii Z platí údaj z letáku, tj. tři úlohy.) ÚV MO

olympiády

Vítězové III. kola kategorie A 28. ročníku M0 ve školním roce 1978/79

1.	Josef Tkadlec,	4. roč.	G. M. Koperníka, Bílovec
2.	Jan Nekovář,	2. roč.	G Praha 2, W. Piecka
3.—5.	Jozef Jirásek, Ladislav Kubini, Otto Riter,	4. roč.	G Košice, Šmeralova ul.
6.—7.	Jaroslav Hančl, Radan Kučera,	3. roč.	G Bardejov
8.—10.	Vladimír Burjan, Miroslav Chlebík, Ladislav Mečíř,	4. roč.	G Praha 2, W. Piecka
11.—13.	Jiří Kuřina, Aleš Nekvinda, Aleš Toufar,	4. roč.	G M. Koperníka, Bílovec
14.	Peter Poláček,	4. roč.	G Brno, Koněvova ul.
15.—17.	Petr Couf, Petr Savický, Tomáš Vlasák,	4. roč.	G A. Markuša, Bratislava
18.—19.	Jiří Pech, Robin Thomas,	4. roč.	G Čadca
		4. roč.	G Prievidza
		4. roč.	G J. K. Tyla, Hradec Králové
		3. roč.	G Liberec
		4. roč.	G Opava
		4. roč.	G A. Markuša, Bratislava
		1. roč.	G Praha 2, W. Piecka
		4. roč.	G Praha 2, W. Piecka
		4. roč.	G Pardubice
		4. roč.	G Praha 9, Litoměřická
		3. roč.	G Praha 2, W. Piecka

Vítězové III. kola kategorie A 20. ročníku F0 ve školním roce 1978-1979

1.	Vladimír Matěna	G Trutnov
2.—3.	Marián Mravec	G B. Štiavnica
	Pavol Kalinay	G Bratislava, Vazovova
4.—5.	Josef Tkadlec	G Bílovec
	Jan Volhejn	G Dobruška
6.	Vladislav Pištora	G Hradec Králové
7.—8.	Michal Kurz	G Praha, Ohradní
	Ladislav Mečíř	G Prievidza

9.	Pavel Heřman	G Dobruška
10.	Stanislav Hledík }	G Ostrava, Šmeralova
11.—14.	Stanislav Džuban	G Bratislava, Vazovova
	Miroslav Holeček	G Frýdek-Místek
	Jan Nekovář	G Praha 2, W. Piecka
	Jan Sýkora	G N. Mesto nad Váhom
15.	František Kott	SPŠE Praha, Ječná
16.	Tomáš Souček	G Praha 2, W. Piecka
17.—18.	Tomáš Halenka	G Praha, Sladkovského
	Pavel Töpfer	G Ml. Boleslav
19.—20.	Ondrej Földeš	G B. Štiavnica
	Oskar Křenek	G Bílovec

Všech 20 uvedených vítězů, s výjimkou Jana Nekováře (který byl ve 2. ročníku), bylo studenty čtvrtých ročníků uvedených škol.

nejmladším členům

1. Doplňte zbývající cifry:

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad \begin{array}{r} 5348 \\ + \left\{ \begin{array}{r} 218 \\ 4783 \\ 78031 \end{array} \right. \\ \hline 1906 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b)} \quad \begin{array}{r} 73140 \\ - \left\{ \begin{array}{r} 48709 \\ 9587 \end{array} \right. \\ \hline 716 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c)} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 4 \\ 27 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$1 = 37$$

2. V I. čtvrtletí minulého roku navštívilo městskou knihovnu 5544 lidí. Ve II. čtvrtletí jich přišlo 11 krát více než ve III. čtvrtletí, ale ve III. čtvrtletí jich bylo 56 krát méně než v I. čtvrtletí. Zato ve IV. čtvrtletí množství půjčujících si bylo $5\frac{2}{3}$ krát větší než ve II. čtvrtletí.

Kolik lidí bylo celkem v minulém roce v knihovně?

3. Oddíly kopané tělovýchovných jednot Baník, Slavoj, Tatran, Lokomotiva a Viktorie se v podzimní soutěži umístily před ostatními oddíly

na prvních pěti místech. Víme o nich toto: Tatran byl před Baníkem, Lokomotiva za Slavojem, Tatran za Lokomotivou a Baník před Viktorií. Z toho se dá už určit pořadí těchto pěti klubů. Dokážete to?

4. Určete pětímístné číslo, které končí cifrou 3. Jestli je znásobíme dvěma a zvětšíme o 39, bude pětkrát větší než číslo vzniklé z hledaného pětímístného čísla tak, že cifru 3 z posledního místa přemístíme na první místo.

5. Vyhledejte všechna přirozená čísla r , s , pro která jsou splněny tyto požadavky:

a) jejich součin je 24 krát větší než jejich rozdíl;

b) jejich rozdíl je 2 krát menší než jejich součet.

Výsledky.

1a) Součet je 201 906; b) rozdíl je 147 716; podíl je 437, dělitel je 6011. —
2. 12 903. — 3. Slavoj — Lokomotiva — Tatran — Baník — Viktorie. —
4. 99 973. — 5. {48; 16}.

Dr. Stanislav Horák

recenze

D. S. Mitrinović, M. S. Popadić:

INEQUALITIES IN NUMBER THEORY

(Nerovnosti v teorii čísel). Vydala fakulta elektroniky Univerzity v Niši (Jugoslávie), redakce: Naučni Podmladak, Niš 1978, str. 184.

Teorie čísel patří mezi nejstarší matematické disciplíny. Například vlastnosti prvočísel studovali již staří Řekové. Je známo tzv. Eratosthenovo síto (*Eratosthénés*, 276—194 př. n. l.), kterým se dokazuje, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Teorie čísel má oproti některým jiným matematickým disciplínám jednu výhodu. Její problémy i výsledky se dají jednoduše a srozumitelně formulovat, takže jsou pochopitelné i bez hlubší znalosti teorie. Na druhé straně jsou její pracovní metody a postupy velmi obtížné a složité. Důkazy bývají nezřídka značně dlouhé a komplikované. Právě v kontrastu mezi jednoduchostí problémů a výsledků a složitostí vlastního řešení problémů vidí někteří matematikové krásu teorie čísel. Snad právě i díky tomu je o teorii čísel v širokém okruhu, nejen matematiků, ale často i laiků značný zájem.

Proto jistě všechny zájemce o teorii čísel potěší — pokud se jim dostane do ruky — Mitrinovičova a Popadičova publikace: Nerovnosti v teorii čísel. Knížka by se mohla docela dobře jmenovat — 687 zajímavostí z teorie čísel. Právě tolik je v ní obsaženo klasických, ale i nejnovějších výsledků z teorie čísel i s odkazy na literaturu, v níž jsou odvozeny.

Na ukázkou uvedeme několik nejzajímavějších výsledků:

(1) Pro libovolné reálné číslo x a přirozené n platí

$$[nx] \geq [x] + \frac{1}{2} [2x] + \dots + \frac{1}{n} [nx].$$

(2) Pro libovolné složené číslo $n \neq 6$ platí

$$\sqrt{n} \leq \varphi(n) \leq n - \sqrt{n}.$$

Přitom rovnost na pravé straně nastane, právě když n je druhou mocninou prvočísla. ($\varphi(n)$ je tzv. Eulerova funkce udávající počet přirozených čísel nesoudělných s číslem n a menších než n .)

(3) Pro každé přirozené číslo n je

$$\tau(n) \leq 2\sqrt{n},$$

kde $\tau(n)$ značí počet kladných dělitelů čísla n .

(4) Pro libovolné přirozené číslo $n \geq 118$ existuje vždy prvočísla p , pro které platí

$$n < p \leq \frac{14}{13} n.$$

(5) Pro každé n je n -té prvočísla p_n nejvýše rovno

$$(n^2 + 3n + 4) / 4.$$

(6) Pro každé přirozené číslo n , $1 < n \neq 113$ je

$$\pi(n) < \frac{5}{4} \cdot \frac{n}{\log n},$$

kde $\pi(n)$ značí počet prvočísel menších nebo rovných n .

(7) Pro všechna přirozená čísla x, y, z je

$$x^4 \pm y^4 \neq z^2.$$

Na závěr se můžeme jen připojit k přání autorů vysloveném v úvodu publikace: „Doufáme, že tento přehled může být užitečný pro každého, kdo se zajímá o teorii čísel a může posloužit jako inspirace k bádání.“

M. Koman

Lubomír Cyhelský, Jiří Hustopecký, Prokop Závodský:

PŘÍKLADY K TEORII STATISTIKY

Vydalo SNTL Praha jako společné vydání s nakl. ALFA Bratislava, 1978, 1. vydání, 392 stran, 56 obrázků, 295 tabulek, cena váz, výt. 25 Kčs.

Sbírka příkladů k teorii statistiky vydaná pro posluchače vysokých škol a technickohospodářské pracovníky v praxi je pomůckou ke studiu základního kursu statistiky a k procvičování statistických pojmů a postupů v konkrétních situacích hospodářské a technické praxe.

Kniha má dvě části (I. Zadání úloh, II. Řešení úloh), z nichž každá obsahuje 21 kapitol (základní statistické pojmy, sběr a zpracování statistických údajů, popis jednorozměrných rozdělení četností kvantity a momenty, charakteristiky úrovně, variability, šikmosti a špičatosti, přehled popisu jednorozměrných souborů, popis

dvourozměrných rozdělení četností, jednoduchá regrese, jednoduchá korelace, asociace a kontengence, mnohonásobná regrese a korelace, poměrná čísla, individuální indexy, souhrnné indexy množství a úrovně, rozklad některých indexů, časové řady, náhodný výběr, bodové a intervalové odhady, testování hypotéz, případ jednoho, dvou a více nezávislých výběrů, výběry z vícerozměrných souborů, složitější uspořádání výběru aj.). Každá kapitola obsahuje stručný úvod do problematiky příslušných statistických postupů s hlavními vzorci, které jsou potřebné k řešení následujících příkladů. Většina úloh je sestavena tak, aby nebyla příliš náročná na výpočty, ale zařazeny jsou i numericky náročnější úlohy, vycházející z údajů převzatých z výrobní praxe. Řešení části příkladů předpokládá znalosti základů teorie pravděpodobnosti. Kniha je doplněna statistickými tabulkami, seznamem naší a zahraniční knižní literatury a rejstříkem.

B. Tesařík

redakce hovoří

Znovu upozorňujeme, že redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních má od loňského roku novou adresu. Je na 2. straně obálky.

Směrnice pro autory (pokyny pro úpravu rukopisů) byly naposledy uveřejněny v 5. čísle 57. ročníku Rozhledů. Rukopisy je třeba zasílat s jednou kopií.

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

formula ž
— di Erone
— di Eulero
formule di Prostaferesi

forza ž
fosforescenza ž
fotoelettricità ž
fotogramma m
fotogrammetria ž
fotometro m
fotone
franco
franco m
frangia ž
frange di Frauenhofer
frazione ž
— apparente
— continua
— decimale
— impropria
— irriducibile
— propria
frequenza
frontale
frontale ž (retta)
frontiera ž
fuga ž
funzionale

vzorec
— Heronův
— Eulerův
vzorce převádějící součet a rozdíl
goniom. funkcí na součin
síla
fosforescence
jev fotoelektrický
fotogram
fotogrammetrie
fotometr
foton
volný
frank (jednotka měny)
třepení, třáseň; spektrální čára
Frauenhoferovy čáry
zlomek
— nevlastní
— řetězový
— desetinný
— nepravý
— v základním tvaru
— pravý
frekvence, četnost
čelní, průčelní
hlavní přímka k nárysň
hranice
útěk
funkcionální, funkční

funzione ž

- algebrica
- analitica
- armonica
- ciclotrica
- circolare
- composta
- continua
- derivabile
- di Bessel
- di Hamilton
- di variabile complessa
- di variabile reale
- dispari
- discontinua
- ellitica
- esponenziale
- implicita
- integrabile
- integrale
- inversa
- iperbolica
- irrazionale
- limitata
- lineare
- logaritmica
- meromorfa
- monotona
- omogenea
- pari
- periodica
- primitiva
- razionale
- reale
- simmetrica
- trascendente
- trigonometrica

funzioni ortogonali

fuoco m

funkce

- algebraická
- analytická
- harmonická
- cyklometrická
- goniometrická
- složená
- spojitá
- mající derivaci
- Besselova
- Hamiltonova
- komplexní proměnné
- reálné proměnné
- lichá
- nespojitá
- eliptická
- exponenciální
- implicitní
- integrovatelná
- primitivní
- inverzní
- hyperbolická
- iracionální
- omezená, ohraničená
- lineární
- logaritmická
- meromorfní
- monotonní
- homogenní
- sudá
- periodická
- primitivní
- racionální
- reálná
- symetrická
- transcendentní
- goniometrická

funkce ortogonální

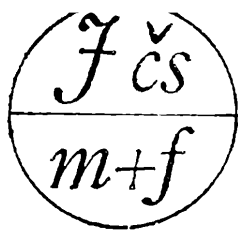
ohnisko

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

3

ROČNÍK 58, 1979-1980, LISTOPAD



ROČNÍK 58
LISTOPAD 1979

3

rozhledy

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., UNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novín. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1979.

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Obsah

Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Již čtyřicáté výročí 17. listopadu 1939	97
Doc. dr. B. Riečan, CSc.: Pravděpodobnost v istote, istota v pravděpodobnosti	98
Dr. J. Srovnal: O některých vlastnostech paraboly a jejich konstruktivním užití .	101
Dr. ing. J. Pospíšil, CSc.: Nelineární optika	111
Dr. ing. J. Pospíšil, CSc.: Astronomické souřadnice . II. .	119
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Staročeské plošné míry	126
Naše soutěž	131
Úlohy k řešení .	132
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů .	135
Olympiády	139
J. Kotyk: Beseda čtenářů k 100. výročí narození Alberta Einsteina .	141
J. S.: Ještě o problému čtyř barev .	143
Recenze	144
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český .	3. a 4. strana obálky

Již čtyřicáté výročí 17. listopadu 1939!

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT Praha

Při pražských demonstracích 28. října proti okupaci Československa, jejichž rozsah a význam potvrzuje zpráva velitele okupační bezpečnostní policie a které našly široký ohlas ve všech zemích světa, spojených v boji proti fašistickému Německu nebo s nimi sympatizujícími, byl v odpoledních hodinách smrtelně postřelen student lékařské fakulty *Jan Opletal*. Přes veškerou péči svému zranění 11. listopadu 1939 podlehl. Pohřeb 15. listopadu 1939, který připravila svému studentu Hlávkova kolej, byl zprvu důstojnou a klidnou manifestací, po zásahu české policie na křižovatce ulice Vyšehradské s Benátskou, ale zejména na Národní třídě přešel znovu do demonstrací proti nacistické okupaci. Události tohoto dne se staly 17. listopadu 1939 důvodem pro uzavření českých vysokých škol na tři roky, pro zastřelení bez soudu, a tedy bez rozsudku devíti funkcionářů Svazu vysokoškolského studentstva a odvezení téměř 1200 studentů z Prahy, Brna a Příbramě do koncentračního tábora Sachsenhausen-Oranienburg (severně od Berlína). Krutou ironií osudu a důkazem zrůdnosti nacismu je, že až na jednoho ze zastřelených funkcionářů byli ostatní orientováni pravicově a mnozí z nich otevřeně vystupovali pro spolupráci s Němci. Z německé strany šlo tedy o hromadnou policejní vraždu, která byla provedena v ranních hodinách v ruzyňských kasárnách, nebylo však dodnes zjištěno, zda tam byli popraveni všichni.

Akce 17. listopad 1939, která byla oznámena červenou německo-českou vyhláškou v Praze téhož dne odpoledne a krátce nato opět odstraněna, byla především namířena proti tomu, čeho si každý národ váží: proti inteligenci a proti vysokým školám, které ji připravují pro život. Národ bez této možnosti je nutně odsouzen k porobě a postupnému zániku; proto také nedošlo po třech letech k jejich znovuotevření. Ze zachovaných dokumentů je známo, že odnárodnění a postupná likvidace českého národa, stejně jako ostatních slovanských národů po předpokládaném vítězství fašismu, byla přijata v tzv. konečném řešení české otázky.

Do koncentračního tábora Sachsenhausen odvezli 18. listopadu 1939 Němci jednotlivce, za dobu věznění se však z nás stala pevná součást

voje proti fašismu a válce, která za daných možností učinila vše pro sebe jako celek, ale což je důležitější, také pro ostatní české i jiné politické běžně. Velmi jsme si vážili a s úctou vzpomínáme zvláště *Antonína Zápotockého, Ivana Sekaniny, Pavla Prokopa* aj. Poslední dva, kteří nepřežili, byli prvními učiteli na naší Vysoké škole života a díky jim místo počáteční hluboce pesimistické nálady nastoupil realistický pohled na situaci v táboře i na frontách. Antonín Zápotocký znamenal velice mnoho svými životními zkušenostmi z období mezi oběma světovými válkami, zejména pak po porážce Francie a napadení Sovětského svazu v červnu 1941 německou válečnou mašinerií.

Výsledek „Akce 17. listopad“ nesplnil záměry okupační fašistické moci. Právě naopak, všechny události s tímto dnem spojené se staly pojmem ukazujícím zvůli a zločinnost, kterou plodí fašismus. Dnes při pohledu kolem sebe však vidíme, že nejsou ještě vymýceny snahy o fašizaci v některých zemích, dokonce že jsou dosud země ovládané fašismem. Proto nelze pohlížet na náš 17. listopad jako na něco, co patří už historii; jeho odkaz je stále živý, neboť dokud bude kdekoliv na světě fašismus, je třeba proti němu bojovat. Jednou z forem tohoto boje je pro vás, naše následovníky na středních a vysokých školách, stejně jako pro nás, vaše učitele, naše práce s cílem dosáhnout nejlepších výsledků a těch užít pro další budování naší krásné vlasti, socialistického Československa.

matematika

Pravdepodobnosť v istote, istota v pravdepodobnosti

Doc. RNDr. BELOSLAV RIEČAN, CSc., KU Bratislava

Pravdepodobnosť, s ktorou sa stretávame v škole, nezvykne v nás vzbudzovať dojem niečoho obzvlášť praktického. Možno je to v tom, že v nej predsa len prevládajú príklady typu: Aká je pravdepodobnosť toho, že na pravidelnej kocke padne stena so šiestimi bodkami? Ako by nebolo dôležitejšej úlohy ako hrať Človeče, nehnevaj sa!

Odpusťme to školskej matematike, robí tak preto (a nielen v tomto prípade), aby nás niečo naučila, veď najprv treba začať s ľahšími úlo-

hami. Napokon aj my budeme náš problém vysvetľovať na tej kocke. Preto toľké ospravedlňovanie.

V prípade kocky máme celkom šesť možností, pretože kocka má šesť stien. Priaznivá nám je len jedna (pokiaľ je kocka očíslovaná tak, ako sa patrí, teda od jednej do šiestich). Preto je pravdepodobnosť padnutia šestky $1/6$. Takto to aspoň zaviedol v 18. storočí francúzsky matematik *Laplace*. Výpočet nebýva vždy až taký jednoduchý, niekedy treba pri ňom ovládať kombinácie či variácie, ale podstata je rovnaká: pri výpočte pravdepodobnosti je v menovateli počet všetkých možností, v čitateli počet všetkých tých, ktoré sú priaznivé.

Takto dostaneme, tak povediac od zeleného stola, nejaké čísla. Zatým alebo predtým urobíme experiment, napríklad hodíme si kockou. Ale viackrát, povedzme stokrát. Ak tá kocka nie je falošná, tak asi v $1/6$ hodov padne šestka. V čom to je, že experiment tak skvele súhlasí s teóriou?

Ale možno klásť aj iné otázky. Naozaj experiment tak dobre súhlasí s teoretickými výpočtami? Aké je kritérium súhlasu? A ak aj súhlasí teória s praxou, hoci aj celkom presne, pri našich 100 hodoch, čo my vieme, čo bude robiť pri 200, 500, či 1000 hodoch? A vôbec, čo to je za matematika? Kde tu je exaktné myslenie, keď všetko je len približné a pravdepodobné?

Skeptik má pravdu. Ak chceme niečo tvrdiť, musíme si ujasniť základné pojmy. V tomto prípade pojem nezávislého opakovania daného pokusu (hádzania kockou).

Jednorázové hádzanie kockou popíšeme ľahko; je to množina pozostávajúca zo šiestich prvkov, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Čo je to dvojnásobné opakovanie pokusu? To je množina všetkých dvojíc $(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)$; táto množina má 36 prvkov. V dnešnej matematike sa zvykne označovať znakom $E \times E$ a nazývať karteziánskym súčinom — podľa ďalšieho francúzskeho matematika *Descartesa*. Takto je popísaná aj nezávislosť opakovania. Iné by bolo, keby sa niektorý prvok nemohol vyskytovať pri oboch pokusoch. (Tak je to napr. v Športke. Ak prvé vytiahnuté číslo bola sedmička, druhé môže byť akékoľvek len nie sedmička, preto dvojica $(7, 7)$ by v športkovom modeli nevystupovala.)

Aká je pravdepodobnosť toho, že šestka padne oba razy? Priaznivá je jediná možnosť $(6, 6)$, všetkých možností je 36. Preto pravdepodobnosť dvojnásobného padnutia šestky je $1/36 = (1/6)(1/6)$. To nie je náhoda. Pri nezávislom opakovaní sa pravdepodobnosti násobia. Napr. pravdepodobnosť toho, že pri prvom hode padne šestka, ale pri druhom nepadne, je $(1/6) \cdot (5/6) = 5/36$, pravdepodobnosť toho, že šestka nepadne ani pri prvom ani pri druhom hode, je $(5/6) \cdot (5/6) = 25/36$. O tom sa možno presvedčiť bezprostredne vypísaním príslušných dvojíc a zrátaním ich počtu.

Aby sme sa dostali ďalej, predstavme si fontánu, z ktorej vyteká voda dvoma otvormi: z ľavého vyteká šestina objemu, z pravého 5/6. (Šestina preto, aby nám to hralo s našou kockou.) Pod každý otvor podložíme tak isto asymetrickú nádobu. Z ľavej bude vytekať vľavo šestina zo šestiny, teda 1/36 pôvodného objemu, vpravo 5/6 z 1/6, teda 5/36. Zaujímavé, že to isté množstvo bude vytekať z ľavého otvoru pravej nádoby, totiž 1/6 z 5/6, čo je opäť 5/36. Ak pod tieto dve nádoby podložíme tri tak, že do strednej bude stekať voda z dvoch vnútorných otvorov, tak do nich stečie:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}, \quad \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

V ďalšom riadku, zloženom zo štyroch nádob, by sa voda rozdelila takto:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6}, \quad 3 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2, \quad \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

To sú zároveň pravdepodobnosti toho, že pri trojnásobnom hode kockou šestka padne práve trikrát, práve dvakrát, práve raz a ani raz (t. j. práve nulakrát). Zákonitosť udrie do očí každému, zvlášť, ak si vytvorí schému

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

tzv. *Pascalov trojuholník*, v ktorom napr. $3 = 1 + 2$, $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$ a pod. Ako je známe, čísla z Pascalovho trojuholníka možno vypočítavať aj priamo, napr.

$$4 = \frac{4}{1} = \binom{4}{1}, \quad 6 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \binom{4}{2}, \quad 4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{4}{3},$$

takže napr. v ôsmom riadku by boli

$$1, \quad \binom{8}{1} = 8, \quad \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28, \quad \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ atď.}$$

Čo my pri experimentoch vlastne počítame? Pri 100 hodoch namiesto pravdepodobnosti $p = 1/6$ tzv. relatívnu početnosť $k/100$, kde k je počet tých vrhov, v ktorých padla šestka. Hádzme najprv len štyrikrát a počítajme $k/4$. Aká je pravdepodobnosť toho, že sa táto početnosť bude líšiť od pravdepodobnosti $p = 1/6$ o menej ako 0,1?

$$P\left(\frac{k}{4} - 0,1 < p < \frac{k}{4} + 0,1\right) = ?$$

Vidíme, že to bude práve vtedy, keď $k = 1$, teda keď šestka padne v sérii štyroch pokusov práve raz. Ale pravdepodobnosť toho je

$$\binom{4}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,38.$$

Pri 8 pokusoch (ôsmy riadok Pascalovho trojuholníka) je pravdepodobnosť toho, že pravdepodobnosť sa líši od početnosti o menej ako 0,1,

$$\binom{8}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^7 + \binom{8}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,63,$$

pri 12 pokusoch (kde vystupujú $k = 1, k = 2, k = 3$) to bude 0,77.

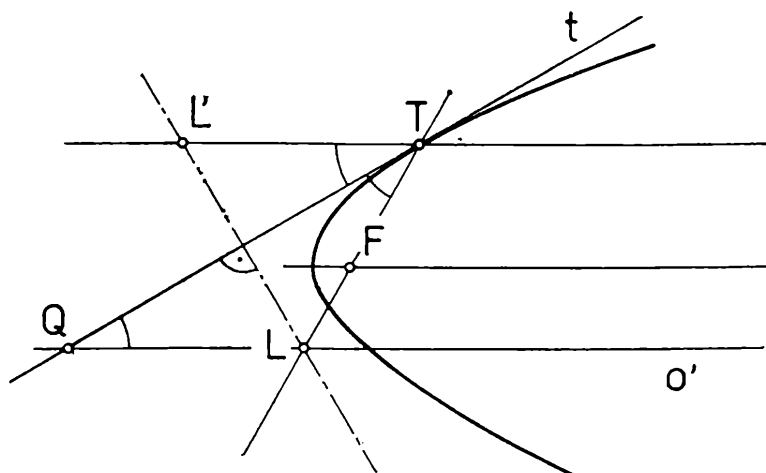
V bežnej literatúre sa nájde odhad $P\left(\frac{k}{n} - 0,1 < p < \frac{k}{n} + 0,1\right) \geq \geq 1 - 1/(n \cdot 0,1^2)$, ale existujú aj odhady oveľa lepšie (napr. *Rényi, Teorie pravděpodobnosti*, Academia Praha 1972, str. 325–329). V každom prípade vidíme, že skutočnosť, že početnosť sa od pravdepodobnosti málo líši, nie je náhodná. To je naša istota v pravdepodobnosti, aj keď je v tejto istote opäť len pravdepodobnosť.

Už tu uvedené elementárne výpočty majú veľký praktický význam pri odhade neznámej pravdepodobnosti pomocou relatívnej početnosti. Ale to je už iná história.

O některých vlastnostech paraboly a jejich konstruktivním užití

RNDr. JOSEF SROVNAL, UP Olomouc

V 9. čísle roč. 56 Rozhledů matematicko fyzikálních vyšel článek *prof. E. Kraemera* „Základní určení paraboly“, kde se autor zabývá konstrukcí paraboly, určené dvěma tečnami s body dotyku. Řešení uvedené v tomto článku je zajímavé a odlišné od řešení běžně užívaného v praxi, které je založeno zpravidla na ohniskových vlastnostech, případně odvozeno z konstrukcí založených na invariantech rovnoběžného promítání.



Obr. 1

V tomto článku uvedu některá další řešení této úlohy, která jsou konstruktivně velmi pěkná, jednoduchá a účelná. Dále pak odvodím některé zajímavé vlastnosti paraboly, kterých lze rovněž dobře konstruktivně využít v elementárních úlohách o parabole. Přitom předpokládám základní znalosti z analytické geometrie v rovině, probírané nyní na gymnasiích.

Věta 1. Nechť t je tečna paraboly v bodě T , který není vrcholem paraboly; $Q \neq T$ budiž libovolný bod tečny t a o' přímka vedená bodem Q rovnoběžně s osou paraboly. Potom průsečík L přímky o' s osou úsečky TQ je bodem přímky, která prochází bodem T a ohniskem paraboly.

Důkaz. Vedme bodem T rovnoběžku s osou paraboly a sestrojme její průsečík L' s osou úsečky TQ . Předpokládejme nejprve, že bod Q leží uvnitř poloroviny, která má hraniční přímku TL' a vnitřní bod F (obr. 1). Potom úhly $\sphericalangle L'TQ$, $\sphericalangle LQT$ jsou střídavé úhly a přímky TL' , QL jsou rovnoběžné; proto je

$$|\sphericalangle LQT| = |\sphericalangle L'TQ| \quad (1)$$

Podle známé věty o tečně paraboly (TL' , TF jsou průvodiče bodu T) je polopřímka TQ osou úhlu $\sphericalangle LTL'$, takže je

$$|\sphericalangle L'TQ| = |\sphericalangle LTQ|. \quad (2)$$

Podle (1) a (2) jsou tedy úhly $\sphericalangle LQT$, $\sphericalangle LTQ$ shodné. Trojúhelník TQL je tedy rovnoramenný se základnou TQ ; proto jeho vrchol L leží na ose úsečky TQ .

Čtenář si snadno tento důkaz upraví pro případ, kdy bod Q je vnitřním bodem poloroviny opačné k polorovině $TL'F$.

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic Pxy v rovině tak, aby její počátek P splynul s vrcholem paraboly a osa x s osou paraboly; za kladnou část osy x zvolíme polopřímku PF , kde F je ohnisko paraboly.

Potom má parabola rovnici $y^2 = 2px$ a ohnisko má souřadnice $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$; řídící přímka paraboly má pak rovnici

$$x = -\frac{p}{2}. \quad (3)$$

Parabola má v každém bodě $T[x_1, y_1]$ právě jednu tečnu, která má rovnici

$$y_1 y = p(x + x_1), \quad (4)$$

z níž je patrné, že pro $y_1 \neq 0$ má tato tečna směrnici

$$k = \frac{p}{y_1}. \quad (5)$$

Zvolme na parabole dva různé body $T_1[x_1, y_1]$, $T_2[x_2, y_2]$. Z rovnice paraboly plyne, že je

$$T_1\left[\frac{y_1^2}{2p}; y_1\right], \quad T_2\left[\frac{y_2^2}{2p}; y_2\right], \quad y_1 \neq y_2. \quad (6)$$

Souřadnice středu S úsečky $T_1 T_2$ jsou aritmetickým průměrem příslušných souřadnic bodů T_1, T_2 ; je tedy

$$S\left[\frac{y_1^2 + y_2^2}{4p}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right]. \quad (7)$$

Věta 2. Necht T_1, T_2 jsou dva různé body paraboly a S je středem úsečky $T_1 T_2$; potom platí:

- Tečny t_1, t_2 k parabole, sestrojené v bodech T_1, T_2 , se protínají v bodě $Q \neq S$;
- přímka QS je rovnoběžná s osou paraboly;
- střed T úsečky QS je bodem paraboly;
- tečna v bodě T je rovnoběžná s přímkou $T_1 T_2$.

Důkaz. Podle (4) a (6) jsou rovnice tečen t_1, t_2 tyto:

$$px - y_1 y + \frac{y_1^2}{2} = 0,$$

$$px - y_2 y + \frac{y_2^2}{2} = 0.$$

Řešením této soustavy dostaneme souřadnice průsečíku $Q = t_1 \cap t_2$. Vyloučíme-li y , dostaneme rovnici

$$2px(y_2 - y_1) + y_1 y_2 (y_1 - y_2) = 0;$$

podle (6) je $y_2 \neq y_1$, takže dostaneme

$$x = \frac{y_1 y_2}{2p}.$$

Dosazením do první rovnice dostaneme rovnici

$$y_1 y_2 - 2y_1 y + y_1^2 = 0;$$

pro $y_1 \neq 0$ je tedy

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (8)$$

Musíme ještě zjistit, zda tento výsledek platí i pro $y_1 = 0$, tj. pro případ, že bod T_1 je vrcholem paraboly, tj. pro $T_1 [0, 0]$. Tečna t_2 protne potom tečnu t_1 v bodě, jehož souřadnice $x = 0$. Z rovnice tečny t_2 (kde je $y_2 \neq 0$) pak plyne, že souřadnice y bodu $Q = t_1 \cap t_2$ je

$$y = \frac{y_2}{2} = \frac{0 + y_2}{2};$$

vzorec (8) platí tedy i v tomto případě. Přímký t_1, t_2 jsou tedy vždy různoběžky s průsečíkem

$$Q \left[\frac{y_1 y_2}{2p}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right]. \quad (9)$$

Ze (7) a (9) plyne, že je $Q \neq S$, neboť $Q = S$ nastane právě tehdy, je-li $y_1 = y_2$, ale podle (6) je vždy $y_1 \neq y_2$. Zároveň ze (7) a (9) plyne, že přímka QS je rovnoběžná s osou paraboly.

Střed T úsečky QS má souřadnice rovné aritmetickému průměru příslušných souřadnic bodů Q, S ; podle (7) a (9) je tedy

$$T \left[\frac{(y_1 + y_2)^2}{8p}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right]. \quad (10)$$

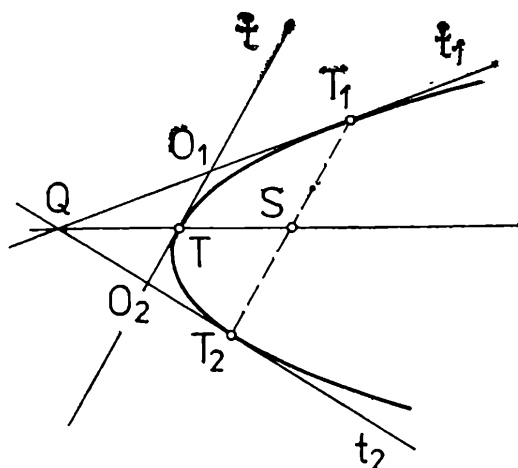
Pro souřadnice x, y tohoto bodu platí:

$$2px = 2p \frac{(y_1 + y_2)^2}{8p} = \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 = y^2;$$

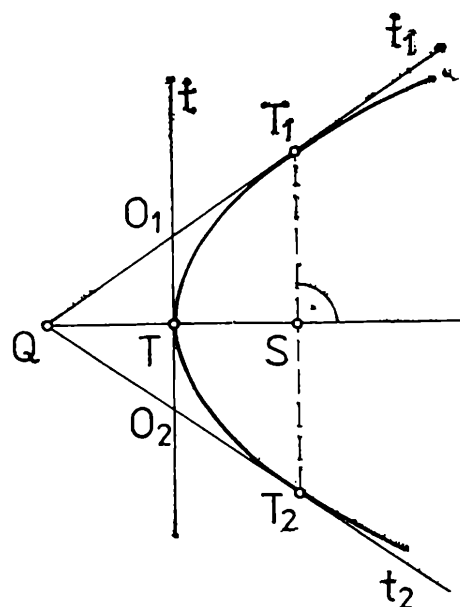
to však znamená, že bod T je bodem paraboly.

Není-li přímka $T_1 T_2$ kolmá k ose paraboly (obr. 2), má směrnici; zároveň je $x_2 \neq x_1$ a z rovnice paraboly plyne, že je též $y_2^2 \neq y_1^2$, čili $y_2 \neq y_1$ (to je vždy) nebo $y_2 \neq -y_1$. V tomto případě je podle (6) směrnice přímky $T_1 T_2$

$$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (y_2 - y_1) \frac{2p}{y_2^2 - y_1^2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}.$$



Obr. 2



Obr. 3

Podle (5) a (10) má tečna v bodě T směrnici

$$k_2 = p \frac{2}{y_1 + y_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2};$$

je tedy $k_2 = k_1$, takže tečna v bodě T je rovnoběžná s přímkou T_1T_2 .

Je-li přímka T_1T_2 kolmá k ose paraboly (obr. 3), je $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$, takže podle (10) má bod T souřadnice $x = y = 0$, čili je vrcholem paraboly; tečna v něm je kolmá na osu paraboly, čili je opět rovnoběžná s přímkou T_1T_2 .

Poznámka. Tečna t paraboly v jejím bodě T , který pólí úsečku QS , je tedy střední příčkou v trojúhelníku QST_1 i v trojúhelníku QST_2 ; proto prochází středy O_1, O_2 úseček QT_1, QT_2 (obr. 2, 3).

Právě dokázané věty 2 lze užít ke snadné konstrukci dalších bodů paraboly s tečnami v nich, vycházíme-li ze základního určení paraboly dvěma tečnami t_1, t_2 s body dotyku T_1, T_2 . Postup spočívá v tom, že nejprve sestojíme tečnu t s bodem dotyku T a pak opakováním této konstrukce např. pro dvojici tečen t_1, t s body dotyku T_1, T si opatříme další tečnu t_3 s bodem dotyku T_3 . Tím máme pro narýsování paraboly k dispozici již celkem čtyři tečny s body dotyku, z nichž můžeme opět vybírat vhodné dvojice a pro ně konstrukci opakovat.

Věta 3. Nechť t_1 je tečna paraboly s bodem dotyku T_1 , $Q \neq T_1$ její libovolný bod a $t_2 \neq t_1$ další tečna paraboly procházející bodem Q . Potom kolmice k tečně t_1 vedená bodem Q protíná kolmici k tečně t_2 vedenou bodem T_1 v bodě řídící přímky paraboly.

Důkaz. Mají-li dvě přímky směrnice k_1, k_2 , pak jsou vzájemně kolmé právě tehdy, je-li $k_1 k_2 = -1$. Není-li tečna paraboly tečnou vrcholovou ($y_1 \neq 0$), má směrnici udanou vzorcem (5); přímka k ní kolmá má tedy směrnici

$$k' = -\frac{y_1}{p}. \quad (11)$$

Vrcholová tečna paraboly nemá směrnici, avšak přímka k ní kolmá má směrnici $k' = 0$; pro tuto směrnici platí tedy též (11), neboť bod dotyku vrcholové tečny má souřadnici $y_1 = 0$.

Podle vzorce pro rovnici přímky určené bodem a směrnici a podle (9) a (11) má kolmice k tečně t_1 vedená bodem Q rovnici

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{y_1}{p} \left(x - \frac{y_1 y_2}{2p} \right); \quad (12)$$

obdobně kolmice k tečně t_2 vedená bodem T_1 má rovnici

$$y - y_1 = -\frac{y_2}{p} \left(x - \frac{y_1^2}{2p} \right). \quad (13)$$

Vyloučením y z těchto dvou rovnic dostaneme rovnici

$$\frac{y_1 - y_2}{2} = \frac{y_2 - y_1}{p} x + \frac{y_1^2 y_2 - y_2 y_1^2}{2p^2}.$$

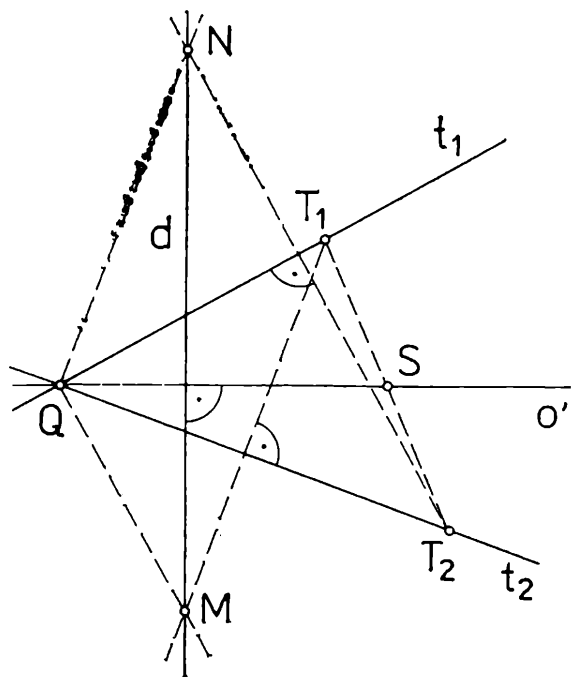
Podle (6) tedy platí rovnice

$$\frac{1}{2} = -\frac{x}{p} \quad \text{čili} \quad x = -\frac{p}{2};$$

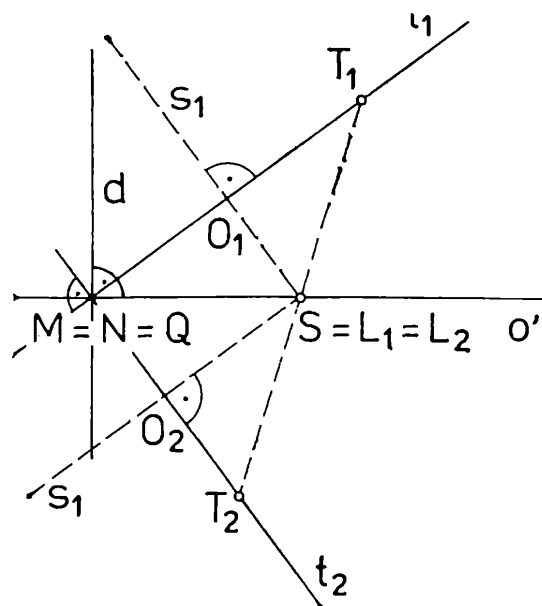
to však znamená, že přímky (12) a (13) se protínají v bodě, který je bodem řídící přímky paraboly, mající rovnici (3).

Věta 4. Nechtě t_1, t_2 jsou dvě různé tečny paraboly, mající body dotyku T_1, T_2 ; průsečík tečen t_1, t_2 budiž bod Q . Potom kolmice k přímce $T_1 T_2$ vedená bodem T_1 (resp. T_2) protíná osu úsečky QT_1 (resp. QT_2) v bodě řídící přímky paraboly.

Důkaz. Sestrojíme střed S úsečky $T_1 T_2$, střed T úsečky QS a bodem T přímku $t \parallel T_1 T_2$ (obr. 2, 3). Podle věty 2 je T bodem paraboly a t její tečnou v bodě T ; přitom tečna t protíná úsečku QT_1 v jejím středu O_1 , jímž prochází též osa s_1 úsečky QT_1 . Kolmice k_1 k přímce $T_1 T_2$, vedená bodem T_1 , je též kolmicí k tečně $t \parallel T_1 T_2$ a přímka s_1 je kolmicí vedenou bodem $O_1 = t \cap t_1$ k tečně t_1 . Podle věty 3 se přímky s_1, k_1 protínají v bodě řídící přímky paraboly.



Obr. 4

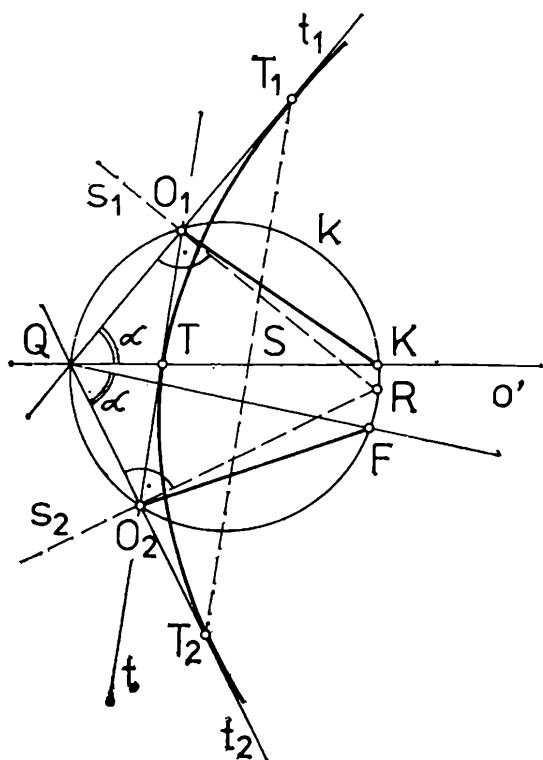


Obr. 5

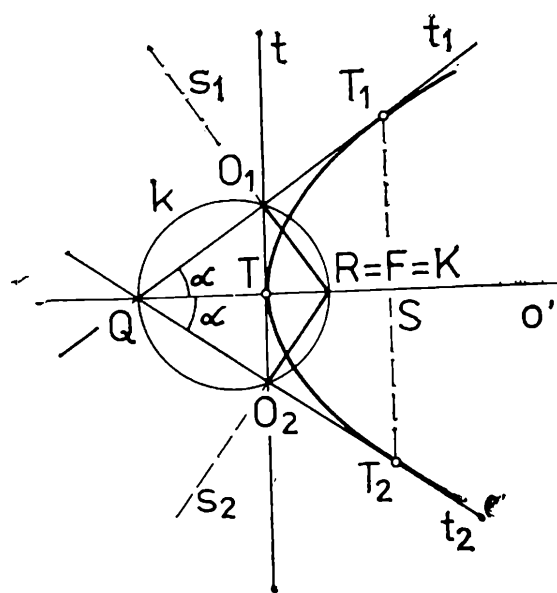
Nejsou-li tečny t_1, t_2 paraboly vzájemně kolmé, dostaneme konstrukci popsanou ve větě 3 dva různé body M, N řídící přímky d paraboly (obr. 4). Jsou-li však tečny t_1, t_2 vzájemně kolmé, pak body M, N splynou s průsečíkem Q tečen t_1, t_2 ; to znamená, že bod Q je bodem řídící přímky d paraboly (obr. 5). V tomto případě je trojúhelník T_1T_2Q pravoúhlý s přeponou T_1T_2 mající střed S . Jsou-li O_1, O_2 středy úseček QT_1, QT_2 , jsou úsečky O_1S, O_2S středními příčkami pravoúhlého trojúhelníku T_1T_2Q . To znamená, že osy s_1, s_2 úseček QT_1, QT_2 protínají přímku $o' = QS$ v bodě S . Podle věty 1 z toho plyne, že přímka T_1T_2 prochází ohniskem paraboly; platí tedy tato věta:

Věta 5. Jestliže tečny t_1, t_2 paraboly s dotykovými body T_1, T_2 jsou vzájemně kolmé, pak jejich průsečík Q je bodem řídící přímky paraboly a přímka T_1T_2 prochází jejím ohniskem.

Vět 1, 2, 3, 4 a 5 lze užít při sestrojování paraboly určené dvěma tečnami t_1, t_2 s dotykovými body T_1, T_2 a s průsečíkem Q . Sestrojíme střed S úsečky T_1T_2 a potom $o' = QS$; podle věty 2 je potom přímka o' rovnoběžná s osou paraboly, takže je kolmá k řídící přímce d paraboly. K sestrojení přímky d stačí tedy nalézt jen jeden její bod; to můžeme provést podle věty 3 nebo podle věty 4. K sestrojení ohniska F paraboly lze užít věty 1; jsou-li však tečny t_1, t_2 vzájemně kolmé, víme jen, že ohnisko je bodem přímky T_1T_2 . K jeho sestrojení lze užít např. toho, že vzdálenost bodu T_1 od ohniska je rovna vzdálenosti bodu T_1 od řídící přímky d paraboly.



Obr. 6



Obr. 7

Věta 6. Necht t_1, t_2 jsou dvě různé tečny paraboly, mající body dotyku T_1, T_2 ; průsečík tečen t_1, t_2 budiž bod Q , středy úseček T_1T_2, QT_1, QT_2 označme po řadě S, O_1, O_2 . Potom kružnice opsaná trojúhelníku QO_1O_2 protíná přímku QS ještě v bodě $K \neq Q$ a prochází ohniskem F paraboly; zároveň je $O_1K = O_2F, O_1F = O_2K$ (obr. 6, 7).

Důkaz. Přímka $t = O_1O_2$ je rovnoběžná s přímkou T_1T_2 (neboť O_1O_2 je střední příčka trojúhelníku QT_1T_2) a protíná přímku $o' = QS$ v bodě T , který je středem úsečky QS . Podle věty 2 je přímka t tečnou paraboly. Body Q, O_1, O_2 jsou tedy vrcholy trojúhelníku, který je omezen tečnami paraboly; podle známé věty prochází kružnice k opsaná tomuto trojúhelníku ohniskem F paraboly (viz např. článek *prof. Kraemera* v 7. čísle 56. roč. *Rozhledů* „Některé metrické vlastnosti paraboly“).

Přímka QS prochází středem T tětiny O_1O_2 kružnice k . Bod T je vnitřním bodem kruhu omezeného kružnicí k ; proto přímka QS je sečnou kružnice k a protíná ji ještě v bodě $K \neq Q$. Podle druhé věty Ponceletovy (viz výše citovaný článek ze 7. čísla 56. ročníku *Rozhledů*) jsou úhly $\sphericalangle SQT_1, \sphericalangle FQT_2$ shodné. Avšak úhel $\sphericalangle SQT_1$, tj. úhel $\sphericalangle KQO_1$ a úhel $\sphericalangle FQT_2$, tj. úhel $\sphericalangle FQO_2$ jsou obvodové úhly v kružnici k nad tětinami O_1K, O_2F . Protože jsou tyto úhly shodné, jsou i úsečky O_1K, O_2F shodné. Zcela stejně se dokáže shodnost úseček O_1F, O_2K .

Poznamenejme ještě, že větu 6 lze dokázat bez znalosti obou vět, použitých při důkazu, pomocí metody souřadnic. Osy s_1, s_2 úseček $QT_1,$

QT_2 procházejí po řadě body O_1, O_2 a protínají se v bodě R ; přitom může být $R = O_1$ nebo $R = O_2$. V každém případě prochází kružnice k sestavená nad průměrem QR body O_1, O_2 (podle věty Thaletovy). Máme dokázat, že prochází též ohniskem F . Protože $R = s_1 \cap s_2$, vyhovují jeho souřadnice rovnicím přímk s_1, s_2 , procházejících body O_1, O_2 kolmo k přímkám QT_1, QT_2 .

$$O_1 \left[\frac{y_1(y_1 + y_2)}{4p}; \frac{3y_1 + y_2}{4} \right],$$

$$O_2 \left[\frac{y_2(y_1 + y_2)}{4p}; \frac{y_1 + 3y_2}{4} \right].$$

Rovnice přímk s_1, s_2 napíšeme obdobně jako v důkazu věty 3; jsou to tyto rovnice:

$$y - \frac{3y_1 + y_2}{4} = -\frac{y_1}{p} \left(x - \frac{y_1(y_1 + y_2)}{4p} \right),$$

$$y - \frac{y_1 + 3y_2}{4} = -\frac{y_2}{p} \left(x - \frac{y_2(y_1 + y_2)}{4p} \right).$$
(14)

Vyloučením y dostaneme po úpravě rovnici

$$2p^2(y_2 - y_1) = 4p(y_2 - y_1)x - (y_1 + y_2)(y_2^2 - y_1^2),$$

kteřou podle (6) můžeme dělit číslem $y_2 - y_1$; tak dostaneme rovnici

$$2p^2 = 4px - (y_1 + y_2)^2,$$

z níž plyne

$$x = \frac{2p^2 + (y_1 + y_2)^2}{4p}.$$

Dosazením do (14) vypočteme y ; tak dostaneme

$$y = \frac{(p^2 - y_1 y_2)(y_1 + y_2)}{4p^2}.$$

Je tedy

$$R \left[\frac{2p^2 + (y_1 + y_2)^2}{4p}; \frac{(p^2 - y_1 y_2)(y_1 + y_2)}{4p^2} \right].$$
(15)

Ptáme se, zda může bod R splynout s ohniskem F paraboly, tj. s bodem o souřadnicích $x = \frac{p}{2}; y = 0$. To nastane jen tehdy, je-li

$$\frac{p}{2} + \frac{(y_1 + y_2)^2}{4p} = \frac{p}{2},$$

tj. je-li

$$y_2 = -y_1; \quad (16)$$

potom je též souřadnice y bodu R rovna nule, takže je skutečně $R = F$. V tomto případě jsou podle (16) body T_1, T_2 souměrně sdruženy podle osy paraboly (obr. 7); ohnisko $F = R$ je tedy bodem kružnice k opsané trojúhelníku QO_1O_2 .

Je-li $y_2 \neq -y_1$, je $R \neq F$. K důkazu toho, že bod F je bodem kružnice k , stačí dokázat, že úhel $\sphericalangle QFR$ je pravý (věta Thaletova). To lze jednoduše provést pomocí vektorů $\mathbf{FQ}, \mathbf{FR}$. Jak známo, je $\mathbf{FQ} = Q - F$, $\mathbf{FR} = R - F$, kde Q, F, R zastupují souřadnice těchto bodů; je tedy

$$\mathbf{FQ} = \left(\frac{y_1 y_2 - p^2}{2p}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right),$$

$$\mathbf{FR} = \left(\frac{(y_1 + y_2)^2}{4p}; \frac{(y_1 + y_2)(p^2 - y_1 y_2)}{4p^2} \right).$$

Skalární součin těchto vektorů je

$$\mathbf{FQ} \cdot \mathbf{FR} = \frac{(y_1 + y_2)^2 (y_1 y_2 - p^2)}{8p^2} - \frac{(y_1 + y_2)^2 (y_1 y_2 - p^2)}{8p^2} = 0;$$

to však znamená, že přímky FQ, FR jsou vzájemně kolmé, takže bod F leží na kružnici sestrojené nad průměrem QR .

Zbývá dokázat, že je $O_1 K = O_2 F$, $O_1 F = O_2 K$, kde K je průsečík kružnice k s přímkou $o' = QS$. Podle věty Thaletovy je úhel $\sphericalangle QKR$ pravý, takže přímka KR je kolmá k přímce o' , a tedy i k ose paraboly; to však znamená, že bod K má touž souřadnici x jako bod R . Protože přímka $o' = QK$ je rovnoběžná s osou paraboly, má bod K stejnou souřadnici y jako bod Q . Je tedy podle (15) a (9)

$$K \left[\frac{2p^2 + (y_1 + y_2)^2}{4p}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right].$$

Potom je $K = F$ právě tehdy, je-li souřadnice x bodu K rovna $\frac{p}{2}$ a souřadnice $y = 0$; to nastane právě tehdy, platí-li (16). V tomto případě jsou body T_1, T_2 souměrně sdruženy podle osy paraboly a je $K = F = R$ (obr. 7). Ze souměrnosti paraboly podle osy plyne, že je též $O_1 K = O_2 F$ čili $O_1 F = O_2 K$.

Je-li $K \neq F$, což nastane právě tehdy, je-li $y_2 \neq -y_1$, pak stačí dokázat, že přímka KF je rovnoběžná s přímkou T_1T_2 , tj. i s přímkou O_1O_2 . Potom body O_1, O_2 i body K, F jsou souměrně sdruženy podle průměru kružnice kolmého k přímce O_1O_2 ; z toho plyne, že je $O_1K = O_2F, O_1F = O_2K$. Vypočteme tedy souřadnice vektorů $\mathbf{FK}, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$; tak dostaneme

$$\mathbf{FK} = \left(\frac{(y_1 + y_2)^2}{4p}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \left(\frac{y_1 + y_2}{2p}; 1 \right),$$

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \left(\frac{y_2^2 - y_1^2}{2p}; y_2 - y_1 \right) = (y_2 - y_1) \cdot \left(\frac{y_1 + y_2}{2p}; 1 \right).$$

Je tedy $\mathbf{FK} = k_1\mathbf{u}, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = k_2\mathbf{u}$, a tedy přímky FK, T_1T_2 jsou rovnoběžné.

fyzika

Nelineární optika

RNDr. Ing. JAROSLAV POSPÍŠIL, CSc., UP Olomouc

1. Úvod

Nelineární optika zkoumá ty optické jevy, které závisí na intenzitě optického záření procházejícího látkou (optické záření v sobě zahrnuje ultrafialové, viditelné neboli světelné a infračervené záření). Tím se liší od tzv. *lineární optiky*, která předpokládá, že intenzita optického záření procházejícího látkou nemá vliv na optické jevy. Optické jevy závislé na intenzitě látkou procházejícího optického záření (optického pole) se nazývají *nelineárními optickými jevy*.

Nelineární optika bývá někdy nazývána *optikou silných (intenzivních) optických polí*, neboť nelineární optické jevy v pravém smyslu (tzv. *dipólové nelineární optické jevy*) se výrazněji projevují až při využití silných (intenzivních) optických záření (polí) o intenzitách nezanedbatelných v porovnání s hodnotami $10^{12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ až $10^{14} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (viz část 2. tohoto článku). Je moderní disciplínou fyziky (optiky) a vznikla v šedesátých letech našeho století po objevení intenzivního zdroje optického záření — laseru.

Nelineární optika (optika silných optických polí) na rozdíl od lineární optiky (optiky slabých optických polí) poskytuje možnost značně rozšířit hranice představ o vzájemném působení optického záření a látky. Umožňuje získat další informace o optických vlastnostech látek v kritických podmínkách silných optických polí.

2. Silné optické pole a jeho vliv na polarizaci látky

O tom, zda na optický elektron atomu látky (na elektron obalu jádra, který při přechodu z vyššího energetického stavu do nižšího vysílá optické záření) působí silné nebo slabé optické pole, rozhoduje velikost jeho elektrické složky $E = E(r, t)$ ve srovnání s intenzitou elektrického pole E_0 uvnitř atomu, zvaného *vnitřní elektrické pole* (r je velikost polohového vektoru uvažovaného bodu látky a t je čas). Pole E_0 je mírou vzájemného působení optického elektronu s atomovým jádrem a jeho hodnotu pro vodíkový atom lze zjistit z Coulombova zákona pro sílu, kterou působí elektron o elektrickém náboji e na jednotkový elektrický náboj:

$$E_0 = \frac{F_0}{e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r_0^2},$$

kde r_0 je poloměr kruhové dráhy elektronu a ϵ_0 je permitivita vakua. Dosadíme-li hodnoty

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad r_0 \approx 10^{-10} \text{ m} \quad \text{a} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{F}},$$

dostaneme

$$E_0 \approx 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

U celé řady látek, zejména u polovodičů, je $E_0 \approx 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ až $E_0 \approx 10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Optické záření klasických zdrojů optického záření (tepelných, výbojových a luminiscenčních) s intenzitou $I \approx 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ až $I \approx 10^5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ umožňuje získat optické pole o intenzitě elektrického pole $E \approx 10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ až $E \approx 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Při takových intenzitách lze zanedbat nelineárnost (disharmoničnost) atomového oscilátoru (kmitů optického elektronu). V silných (laserových) optických polích s intenzitou $I \approx 10^{12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ až $I \approx 10^{14} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ má intenzita elektrického pole optického záření hodnoty $E \approx 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ až $E \approx 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, které již nelze vzhledem k hodnotě $E_0 \approx 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ zanedbat.

Velikost E_0 slouží jako míra pro zjištění, zda je optické pole o elektrické intenzitě E silné nebo slabé. *Slabá optická pole* splňují nerovnost

$$E \ll E_0. \quad (1)$$

V slabých optických polích optický elektron kmitá v důsledku působení budící optické vlny jako lineární (harmonický) oscilátor a mezi

vektorem polarizace $\mathbf{P}$ látky (dielektrika) a intenzitou $\mathbf{E}$ elektrického pole optického záření platí lineární vztah

$$\mathbf{P} = \eta_1 \mathbf{E}, \quad (2)$$

kde konstantu úměrnosti η_1 lze nazvat dielektrickou susceptibilitou látky (prostředí, kterým optické záření prochází). V tomto případě vlastnosti optických jevů nezávisí na intenzitě optického záření, jak to je běžné v lineární optice. Při harmonickém působení optické vlny se zachovává tvar harmonické vlny v prostředí a platí princip superpozice pro vlny.

Blíží-li se elektrická intenzita E budícího optického záření hodnotě E_0 , pak se projevuje závislost optických jevů na intenzitě I optického pole a jde o *silné optické pole*. Na optický elektron je třeba v tomto případě hledět jako na neharmonický (nelineární) oscilátor a vztah mezi vektorem polarizace $\mathbf{P}$ a intenzitou $\mathbf{E}$ elektrického pole budícího optického záření je nelineární a dá se vystihnout ve zjednodušeném skalárním přiblížení koeficientů úměrnosti η_1, η_2 , atd., takto:

$$\mathbf{P} = \eta_1 \mathbf{E} + \eta_2 \mathbf{E}^2 + \eta_3 \mathbf{E}^3 + \quad (3)$$

kde $\mathbf{P}_1 = \eta_1 \mathbf{E}$ je vektor lineární polarizace a $\mathbf{P}_{n1}, = \eta_2 \mathbf{E}^2, \mathbf{P}_{n1}, = \eta_3 \mathbf{E}^3$, atd., jsou vektory nelineární polarizace druhého, třetího, atd., řádu (η_1 je lineární susceptibilita a η_2 a η_3 , atd., představují nelineární susceptibility druhého a vyšších řádů).

Protože nelineární optické jevy vyšších řádů jsou slabé ve srovnání s nelineárními optickými jevy nižších řádů a všechny nelineární jevy jsou malé vzhledem k lineárním jevům, stačí obvykle při řešení konkrétních nelineárních optických jevů omezit se na nelineární člen, který dotyčný jev popisuje, a zanedbat další členy vyšších řádů.

Nelineární optické jevy lze rozdělit podle toho, který člen řady (3) musíme uvažovat, abychom popsali určitý nelineární jev. Jevy popsané členem $\mathbf{P}_{n1}$, nazýváme kvadratickými jevy, jevy řídicí se členem $\mathbf{P}_{n1}$, jsou kubickými jevy atd.

V dalším jsou popsány jen některé základní nelineární dipólové optické jevy, a to optická detekce, generace optického záření s vyšším harmonickým kmitočtem a parametrická generace optického záření.

3. Některé dipólové nelineární optické jevy

Jsou to nelineární jevy, které jsou důsledkem silných optických polí, způsobujících nelineární polarizaci látky. Jako všechny nelineární jevy se vyznačují tím, že reakce prostředí (látky) na silné harmonické optické pole není harmonická (je nelineární). Sekundární vlny, které vysílají optické elektrony látky, neodpovídají tvarem primární optické vlně a neplatí princip superpozice.

3.1 Optická detekce

Vstupuje-li do nelineárního prostředí harmonická optická vlna o vlnové délce λ , šířící se ve směru souřadné osy x v čase t a mající úhlovou frekvenci $\omega = 2\pi\nu$ (ν je prostá frekvence) a úhlový vlnový počet $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, pak ji lze analyticky v skalárním tvaru vyjádřit takto

$$E = A \cos(\omega t - kx) \quad (4)$$

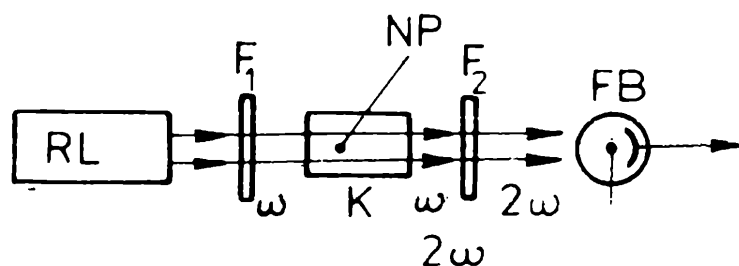
Po průchodu této vlny nelineárním prostředím je vlna deformovaná a v souladu se vztahem (3) bude obsahovat kromě harmonické složky o úhlové frekvenci ω ještě vyšší harmonické složky o úhlových frekvencích 2ω , 3ω atd. Nelineární polarizace (a tedy i optické pole) související s druhým členem řady (3) obsahuje vedle druhé harmonické složky i konstantní složku:

$$\eta_2 E^2 = \eta_2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) = \frac{\eta_2 A^2}{2} + \frac{\eta_2 A^2}{2} \cos 2(\omega t - kx) \quad (5)$$

Člen $\frac{\eta_2 A^2}{2}$ odpovídá stejnosměrné složce polarizace v poli intenzivní harmonické optické vlny. V důsledku tohoto členu dochází k tzv. *optické detekci* (k optickému usměrňování). Na rozdíl od usměrnění elektrických signálů v elektrotechnice jde nyní o usměrnění optického (elektromagnetického) pole: střídavé optické pole vyvolává kromě střídavé polarizace i stejnosměrnou (konstantní) polarizaci, a tedy i stejnosměrné elektrické pole.

3.2 Generace optického záření s vyšším harmonickým kmitočtem

Druhý člen vztahu (5) popisuje sekundární optické pole vysílané optickým elektronem, jehož kmitočet odpovídá druhému harmonickému kmitočtu dopadajícího optického záření. Hovoříme o *generaci druhé harmonické frekvence*, kterou poprvé pozoroval v roce 1961 P. A. Franken, který zjistil, že při průchodu intenzivního záření rubínového laseru o dominantní vlnové délce 694,3 nm křemenem vzniká ultrafialové záření o dominantní vlnové délce 347 nm (viz obr. 1, na němž RL je rubínový laser, z něhož vychází intenzivní optické záření o úhlové frekvenci ω , které po průchodu červeným filtrem F_1 prochází destičkou K vybroušenou z křemenného krystalu, která tvoří nelineární prostředí NP, v němž dochází ke vzniku druhé harmonické úhlové frekvence 2ω . Z krystalu K vychází jednak záření o původní frekvenci ω a jednak nové optické záření o frekvenci 2ω . Základní frekvence ω je odfiltrována ultrafialovým filtrem F_2 a na fotobuňce FB můžeme měřit velikost nově vzniklého ultrafialového záření o úhlové frekvenci 2ω).



Obr. 1

Nelinearita, která souvisí s třetím členem $\eta_3 \mathbf{E}^3$ ve vztahu (3), způsobuje vznik vlnění s třetím harmonickým kmitočtem dopadající optické vlny:

$$\begin{aligned} \eta_3 E^3 &= \eta_3 A^3 \cos^3(\omega t - kx) = \\ &= \frac{3\eta_3 A^3}{4} \cos(\omega t - kx) + \frac{\eta_3 A^3}{4} \cos 3(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (6)$$

Hovoříme o kubických nelineárních optických jevech. Lze je pozorovat především u izotropních kapalin, amorfních struktur pevných látek a u krystalických struktur, které postrádají střed symetrie.

Generace třetí harmonické frekvence v kubickém nelineárním prostředí je, obdobně jako generace druhé harmonické frekvence v kvadratickém nelineárním prostředí, pouze zvláštním případem generace součtových nebo rozdílových harmonických frekvencí. Studium tohoto jevu je však značně složitější, neboť v důsledku kubické nelineární polarizace prostředí vzniká kromě třetí harmonické frekvence ještě obecně i druhá harmonická frekvence.

Vznik optického záření s třetím harmonickým kmitočtem poprvé pozorovala v roce 1962 skupina fyziků vedená R. W. Terhunem v krystalu vápence (CaCO_3), na který dopadalo optické záření rubínového laseru ($\lambda = 694,3 \text{ nm}$). Na výstupu krystalu zaznamenali optické záření s dominantní vlnovou délkou $231,3 \text{ nm}$, která je třikrát menší, než je dominantní vlnová délka záření rubínového laseru. Toto záření má menší intenzitu než záření druhého harmonického kmitočtu, což odpovídá vzájemnému vztahu členů rovnice (3). Pokus lze též provést s intenzivním laserovým zářením, procházejícím křemenem. Výhodnější je použít krystalu KDP (dihydrofosforečnan draselný). Na výstupu krystalu se kromě laserového záření o vlnové délce $694,3 \text{ nm}$ objeví i ultrafialové záření s poloviční vlnovou délkou $347,1 \text{ nm}$. V tomto případě se tedy červené laserové světlo mění na ultrafialové záření, které lidské oko nevidí.

Rozšíříme-li vztah (3) o další členy vyššího stupně, pak získáme tvary pro vlnění se čtvrtým a vyššími harmonickými kmitočty dopadajícího optického záření.

3.3 Parametrická generace optického záření

Nelineární optické jevy v látkách (krystalech) umožňují nejen přetvářet záření laseru na záření jiných konstantních frekvencí (*optického násobiče kmitočtu*), ale i na optické záření, jehož frekvenci je možno měnit spojitě. To znamená, že nelineární optika pomáhá současným laserům pokrýt pásmo optických frekvencí, protože poskytuje způsob generace koherentního optického záření prakticky na kterékoli vlnové délce. Princip takové transformace (*parametrické generace optického záření*) je tento: Nechť na nelineární prostředí, jehož vektor polarizace $\mathbf{P}$ závisí na čtverci intenzity elektrického pole $\mathbf{E}^2$, dopadá intenzivní optická vlna o úhlové frekvenci ω_c (to je tzv. vlna čerpání neboli excitační vlna čili budicí vlna):

$$E_c = A_c \cos(\omega_c t - k_c x) \quad (7)$$

a současně nechť na toto prostředí působí dvě slabé optické vlny

$$E_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x), \quad E_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (8)$$

o úhlových frekvencích ω_1 a ω_2 , pro které platí

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_c. \quad (9)$$

Splňuje-li vektor polarizace $\mathbf{P}$ vztah

$$\mathbf{P} = \eta_1 \mathbf{E} + \eta_2 \mathbf{E}^2, \quad (10)$$

pak pro velikosti vektorů nelineární polarizace platí:

$$P_{nl}(\omega_1) = \frac{\eta_2 A_c A_2}{2} \cos[\omega_1 t - (k_c - k_2)x], \quad (11)$$

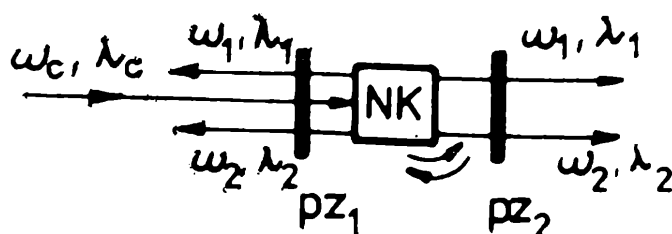
$$P_{nl}(\omega_2) = \frac{\eta_2 A_c A_1}{2} \cos[\omega_2 t - (k_c - k_1)x]. \quad (12)$$

To znamená, že v důsledku vzájemného působení optických vln s úhlovými frekvencemi ω_c a ω_2 vzniká optické záření s úhlovou frekvencí ω_1 a v důsledku vzájemného působení optických vln s úhlovými frekvencemi ω_c a ω_1 vzniká optické záření s úhlovou frekvencí ω_2 . Vzájemné působení optické vlny nelineární polarizace $P_{nl}(\omega_1)$ a optické vlny s úhlovou frekvencí ω_1 bude maximální, když se bude fázový rozdíl obou těchto vln na dost velkých vzdálenostech zachovávat. Podle relace (11) je fázový rozdíl stejný pro jakoukoli hodnotu x tehdy, když platí podmínka

$$k_c - k_2 = k_1 \quad (13)$$

Podobnými úvahami lze dospět k podmínce

$$k_c - k_1 = k_2. \quad (14)$$



Obr. 2

Lehce se přesvědčíme, že podmínky (13) a (14) jsou totožné. Obvykle je píšeme ve tvaru

$$k_1 + k_2 = k_c . \quad (15)$$

Podmínka (15) se nazývá *podmínkou synchronizace*. Je-li tato podmínka splněna, odevzdává budicí (čerpací) optické záření svoji energii optickým vlnám s úhlovými frekvencemi ω_1 a ω_2 a ty se v nelineárním prostředí zesilují. Proto, když nelineární krystal, na který dopadá optické čerpací záření, vložíme do optického rezonátoru (tj. mezi dvě kvalitní rovnoběžná zrcadla, která odrážejí optické vlny s úhlovými frekvencemi ω_1 a ω_2), pak při dostatečně velkých odraznostech zrcadel a velké intenzitě čerpacího záření vznikají v tomto rezonátoru optická vlnění s úhlovými frekvencemi ω_1 a ω_2 . Počáteční (přechodné) nepříznivé optické signály vznikají jen v důsledku vlastních fluktuací částic, ke kterým v krystalu neustále dochází.

Frekvence, pro které je splněna podmínka synchronizace v nelineárním krystalu, jsou určeny směrem šíření vzájemně působících optických vln, tak jako při generaci optických vln s harmonickými kmitočty. Když v optickém rezonátoru otáčíme nelineární krystal NK, můžeme při konstantní frekvenci ω_c čerpacího optického záření (které obvykle získáme z laseru) obdržet spojitě regulovatelné úhlové frekvence ω_1 a ω_2 , jak to je schematicky znázorněno na obr. 2. Když do optického rezonátoru tvořeného rovinnými polopropustnými zrcadly pz_1 a pz_2 , mezi nimiž je krystal NK druhu KDP, dopadá budicí intenzivní optická vlna čerpání o vlnové délce λ_c , pak — když je čerpání dost intenzivní — vznikají optická vlnění s vlnovými délkami λ_1 a λ_2 , jejichž velikosti závisí na orientaci krystalu. Například při optickém záření o vlnové délce $\lambda_c = 530$ nm (zelená spektrální čára, která odpovídá druhému harmonickému kmitočtu laseru, v němž pracovním prostředím je neodýmové sklo) vznikají v krystalu KDP vlnění o vlnových délkách λ_1 a λ_2 infračervené oblasti.

Takovým tzv. *parametrickým generátorem optického záření* dostává optika k dispozici zdroj koherentního optického záření, jehož vlnovou délku lze spojitě nastavovat. Takové generátory jsou již pro některé oblasti viditelného a infračerveného spektra v praxi realizovány.

Je vidět, že princip parametrického generátoru optického záření je podobný principu parametrického buzení kmitů v radiotechnice. Účinnost takových parametrických generátorů optického záření, definovaná jako poměr výkonu parametricky vybuzeného optického záření k výkonu čerpání, dosahuje hodnot několika procent. Počáteční výkon je přitom několik desítek až stovek kW.

4. Závěr

Nelineární optika je poměrně mladá vědní disciplína a její význam je velký. Přispívá k obohacení poznatků o mikrostruktuře látek, struktuře optického záření, poznatků nelineární optiky je využíváno ke konstrukci moderních kvantových generátorů optického záření s volitelnou frekvencí atd.

Uvedený článek je jen úvodem do poměrně složité a rozsáhlé problematiky nelineární optiky, neboť v něm jsou uvedeny jen některé základní dipólové nelineární optické jevy se zjednodušeným výkladem, založeným na skalární vlnové reprezentaci harmonických vlnění (optických záření) a koeficientů úměrnosti mezi intenzitou elektrické složky optického (elektromagnetického) záření a vektorem polarizace látky, jíž záření prochází. Detailnější informace o nelineární optice lze nalézt například v knize Bloembergen N.: *Nelinejnaja optika*. Izdat. Mir Moskva, 1966 a též například v článku Chmela P.: *Nelineární optika — atraktivní aplikace laserů*, uvedeném v časopisu Jemná mechanika a optika, roč. XXIII (1978), č. 7, str. 185 až 192.

V rubrice Nejmladším čtenářům byly otištěny v 5. čísle 57. ročníku Rozhledů zápisy čísla 100 užitím devíti stejných číslic a jednoduchých početních výkonů. Josef Jířů posluchač MFF UK v Praze, zaslal redakci dopis, v němž uvádí zápis, který v uvedeném článku chybí. Pomocí devíti nul lze číslo 100 zapsat takto;

$$(0! + 0! + 0! + 0!) \quad [(0! + 0! + 0! + 0!)! + 0!]$$

Je ovšem třeba vědět, že $0! = 1$ a že $4! = 1.2.3.4$.

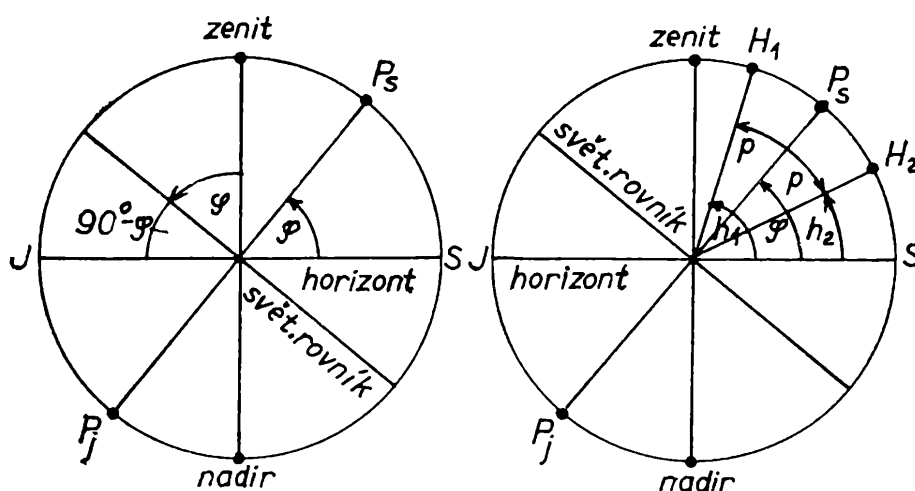
astronomie

Astronomické souřadnice - II.

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ – RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

V první části tohoto článku jsme definovali některé z nejpoužívanějších systémů astronomických souřadnic. Nyní se budeme zabývat vzájemnou souvislostí obzorníkových a rovníkových souřadnic a závislostí obzorníkových souřadnic na zeměpisné poloze pozorovacího místa.

Na zeměpisné šířce φ pozorovacího místa závisí především výška světového pólu nad horizontem — je rovna zeměpisné šířce. Maximální výška světového rovníku nad horizontem je pak $90^\circ - \varphi$ (obr. 1).

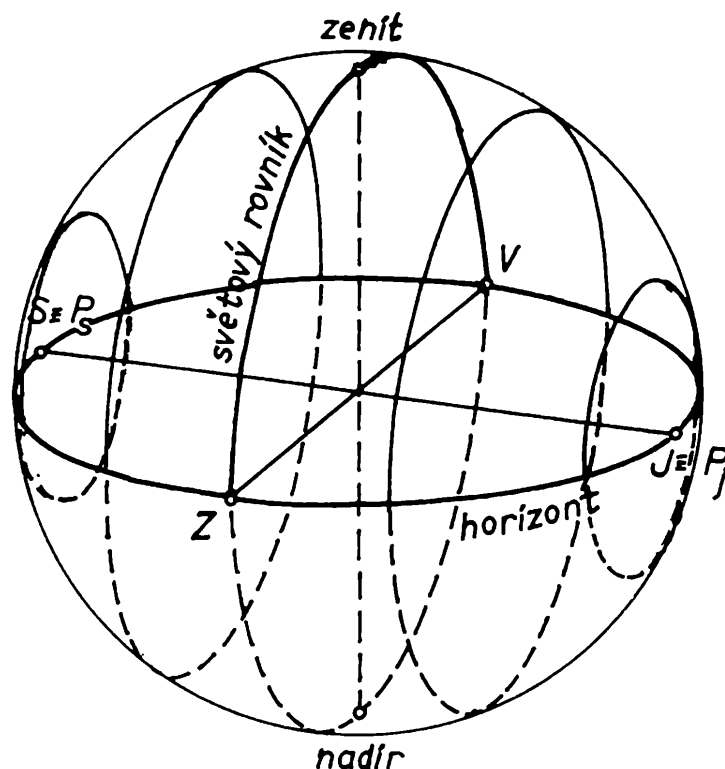


Obr. 1. Výška světového pólu a rovníku nad horizontem.

Obr. 2. Určení zeměpisné šířky pomocí cirkumpolární hvězdy.

V místech, jejichž zeměpisná šířka je 50° , je severní světový pól ve výšce 50° a světový rovník prochází nad jižním bodem ve výšce $h = 40^\circ$; v této výšce kulminují hvězdy, ležící na světovém rovníku (přibližně δ Orionis, α Aquarii) a ve dnech jarní a podzimní rovnodennosti v ní kulminuje Slunce.

Výšku světového pólu, a tedy i zeměpisnou šířku pozorovacího místa můžeme změřit pomocí některé cirkumpolární hvězdy, a to tak, že změříme výšku h_1 hvězdy při horní kulminaci a výšku h_2 při dolní kulminaci; hvězda opisuje kolem světového pólu kruhovou dráhu, přičemž její pólová vzdálenost p je konstantní. Z obr. 2 je zřejmé, že výška pólu $\varphi = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$.

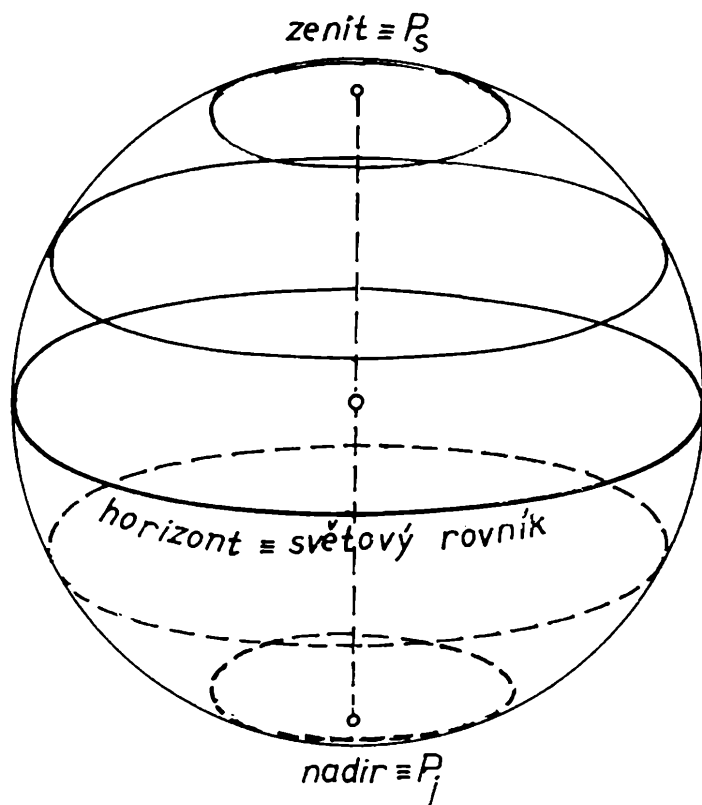


Obr. 3. Zdánlivé denní dráhy hvězd na zemském rovníku.

Se zeměpisnou šířkou pozorovacího místa, a tedy s výškou pólu nad obzorem souvisí poloha zdánlivých denních drah kosmických objektů. Uvažujme nejprve dva krajní případy — pozorovací místa na rovníku a na zemském pólu.

Pro pozorovací místo na rovníku leží světová osa v rovině horizontu, severní i jižní světový pól jsou na horizontu a splývají se severním a jižním bodem. Světový rovník je k horizontu kolmý a prochází zenitem, je tedy totožný s místním poledníkem. Protože se sféra zdánlivě otáčí kolem světové osy, jsou zdánlivé denní dráhy všech hvězd kolmé k horizontu (obr. 3), hvězdy vycházejí kolmo k horizontu a kolmo k horizontu také zapadají. Rovina horizontu dělí zdánlivé dráhy hvězd na dvě stejné části, což znamená, že všechny objekty jsou právě 12 hodin hvězdného času nad obzorem a 12 hodin pod obzorem. Cirkumpolární hvězdy, tj. hvězdy, které nezapadají, pro pozorovací místa na zemském rovníku neexistují.

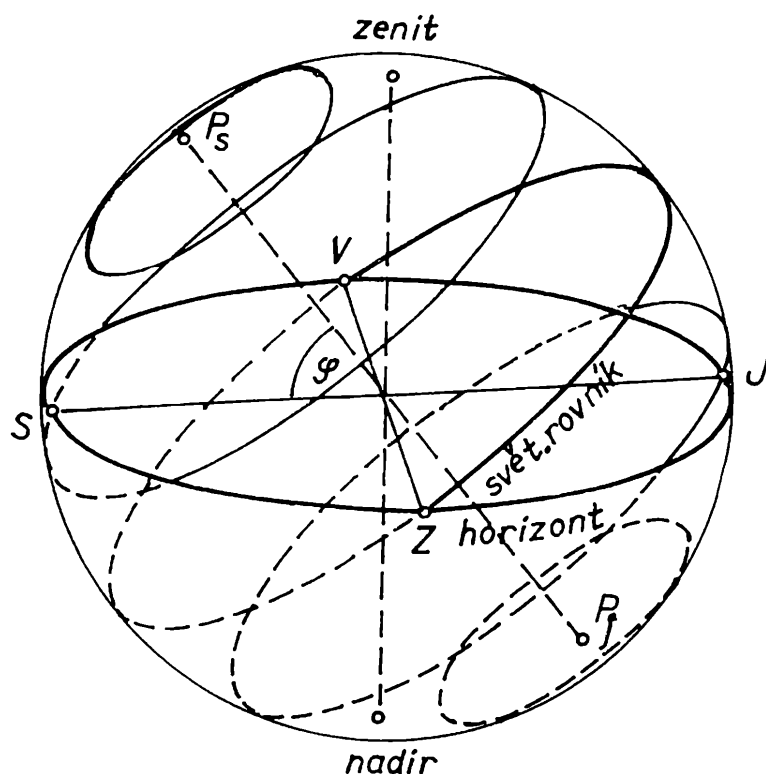
Pro pozorovací místo na pólu — pro konkrétnost uvažujme severní zemský pól — je výška světového pólu 90° , což znamená, že severní světový pól je v zenitu, jižní světový pól splývá s nadírem, světový rovník je totožný s horizontem. Mizí tam pojem poledníku i světových stran. Severní světový pól je trvale v zenitu a kolem něj se zdánlivě otáčí sféra (obr. 4). Výška kosmických objektů nad obzorem se nemění, hvězdy opisují kruhové dráhy rovnoběžné s horizontem, a každý objekt se tedy pohybuje po almukantarátu, který je zde totožný s paralelou.



Obr. 4. Zdánlivé denní dráhy hvězd na severním zemském pólu.

Objekty nevycházejí ani nezapadají, všechny hvězdy, které mají kladnou deklinaci (tj. leží na sever od světového rovníku), jsou trvale nad obzorem a jsou tedy cirkumpolární; všechny hvězdy se zápornou deklinací nikdy nevycházejí nad obzor.

Pro ostatní místa na zemském povrchu opisují objekty na sféře kruhové dráhy, rovnoběžné se světovým rovníkem. Světový rovník svírá s horizontem úhel $90^\circ - \varphi$ a tentýž úhel svírají s horizontem zdánlivé dráhy všech objektů na sféře. Zdánlivé dráhy jsou pro pozorovací místo na severní polokouli znázorněny na obr. 5. Doba, po kterou jsou objekty nad obzorem, závisí na deklinaci objektu neboli na jeho pólové vzdálenosti. U hvězd na světovém rovníku leží právě polovina zdánlivé dráhy nad obzorem a polovina pod obzorem, u hvězd s kladnou deklinací je větší část dráhy nad obzorem. Hvězda, jejíž vzdálenost od severního světového pólu je právě rovna zeměpisné šířce pozorovacího místa (deklinace $\delta = 90^\circ - \varphi$), je při dolní kulminaci právě na obzoru (má nulovou výšku), hvězdy s touto nebo větší deklinací tedy nezapadají a tvoří cirkumpolární hvězdy. U hvězd se zápornou deklinací je nad obzorem jen menší část zdánlivé denní dráhy a hvězdy, jejichž vzdálenost od jižního světového pólu je menší než zeměpisná šířka φ pozorovacího místa, tj. hvězdy, které mají deklinaci od $-(90^\circ - \varphi)$ do -90° , nikdy nevycházejí nad obzor a jsou na dané zeměpisné šířce nepozorovatelné. U nás patří mezi cirkumpolární všechny hvězdy s deklinací



Obr. 5. Zdánlivé denní dráhy hvězd na severní zeměpisné šířce φ .

větší než 40° , hvězdy se zápornou deklinací větší než -40° nevycházejí nad obzor.

Souvislost rovníkových a obzorníkových souřadnic

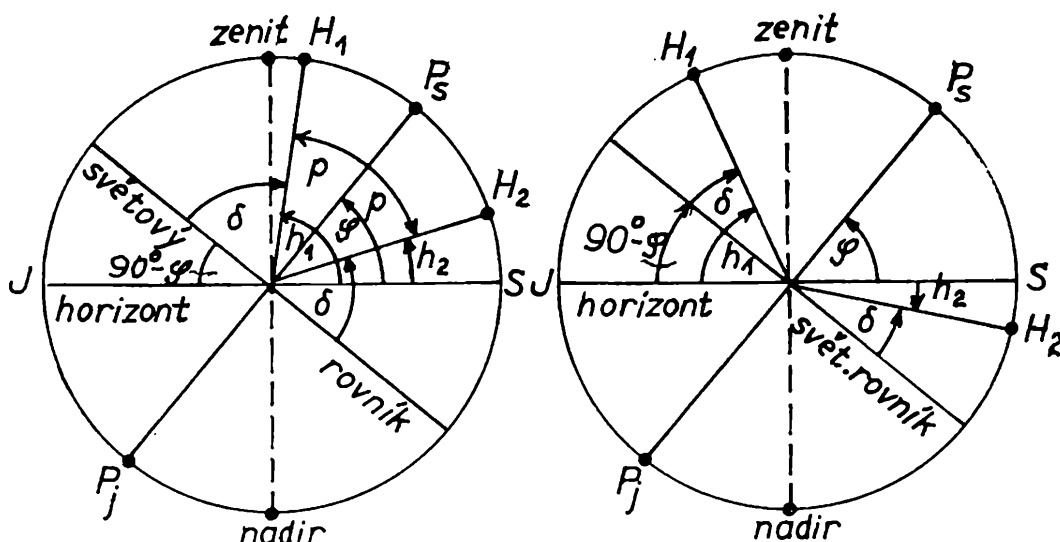
Poměrně snadno můžeme pomocí známé deklinace hvězdy určit její výšku při kulminaci a naopak. Je-li hvězda při horní kulminaci mezi světovým pólem a zenitem (obr. 6), je její výška $h_1 = \varphi + p$, kde $p = 90^\circ - \delta$ je pólová vzdálenost; platí tedy $h_1 = 90^\circ + \varphi - \delta$. Tátáž hvězda je při dolní kulminaci ve výšce $h_2 = \varphi - p$, platí tedy $h_2 = \varphi + \delta - 90^\circ$. Je-li hvězda při horní kulminaci mezi zenitem a světovým rovníkem (obr. 7), je její výška při horní kulminaci $h_1 = 90^\circ - \varphi + \delta$, výška při dolní kulminaci je opět $h_2 = \varphi + \delta - 90^\circ$. Tyto úvahy jsou velmi jednoduché; je samozřejmé, že pomocí rovníkových souřadnic lze vypočíst nejen výšku objektu při kulminaci, ale i jeho výšku v libovolném okamžiku a také azimut. Ze sférické trigonometrie plynou pro výpočet obzorníkových souřadnic z rovníkových vztahy

$$\sin A \cos h = \cos \delta \sin t, \quad (1)$$

$$\cos A \cos h = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t, \quad (2)$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t, \quad (3)$$

kde φ je zeměpisná šířka pozorovacího místa. Hodinový úhel t můžeme určit pomocí vztahu $t = \Theta_M - \alpha$, kde Θ_M je místní hvězdný čas, α rek-



Obr. 6. Výška hvězdy při kulminaci. Obr. 7. Výška hvězdy při kulminaci.

tascenze daného objektu. Pomocí těchto rovnic můžeme ověřit platnost vztahů pro výšku objektu při kulminaci; připomínáme, že azimut jižního bodu $A = 0^\circ$, severního bodu $A = 180^\circ$, hodinový úhel při horní kulminaci $t = 0^h = 0^\circ$, při dolní kulminaci $t = 12^h = 180^\circ$. Pro výpočet rovníkových souřadnic z obzorníkových platí obdobné vztahy

$$\sin t \cos \delta = \cos h \sin A ,$$

$$\cos t \cos \delta = \cos \varphi \sin h + \sin \varphi \cos h \cos A ,$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A .$$

Rovníkové a obzorníkové souřadnice Slunce

Vlivem oběhu Země kolem Slunce se rovníkové souřadnice Slunce mění s roční periodou. Rektascenze je nulová při průchodu Slunce jarním bodem, během roku téměř lineárně roste a za rok vzroste o 360° neboli 24 hodin (je tedy opět nulová). Deklinace Slunce se mění v mezích, daných sklonem ekliptiky vzhledem ke světovému rovníku, tj. od $+23,5^\circ$ (letní slunovrat) do $-23,5^\circ$ (zimní slunovrat). Ve dnech jarní a podzimní rovnodennosti je rovna nule — Slunce je na světovém rovníku. Rovníkové souřadnice Slunce lze velmi přesně dopředu vypočítat; jsou tabulovány pro každý den v roce ve Hvězdářské ročence, a to i s ohledem na okamžitou polohu jarního bodu a změny působené nutací zemské osy.

Uvažujme nyní, jak změny rovníkových souřadnic Slunce ovlivňují jeho souřadnice obzorníkové. Všimneme si nejprve maximální výšky Slunce nad horizontem, tj. výšky při horní kulminaci, a maximální hloubky pod obzorem, tj. výšky při dolní kulminaci. Pro výšku při horní kulminaci jsme odvodili vztah $h_1 = 90^\circ - \varphi + \delta$, pro výšku při dolní kulminaci $h_2 = \varphi + \delta - 90^\circ$. Je zřejmé, že výška Slunce při kulminaci

závisí jednak na zeměpisné šířce pozorovacího místa, jednak na okamžité deklinaci Slunce.

Pro severní zeměpisnou šířku $\varphi = 50^\circ$ je ve dnech rovnodennosti, kdy deklinace Slunce $\delta = 0$, výška Slunce při horní kulminaci $h_1 = 40^\circ$ (Slunce je na světovém rovníku), při dolní kulminaci pak $h_2 = -40^\circ$. Zdánlivá denní dráha Slunce je v tyto dny rozdělena horizontem na dvě stejné části. Slunce vychází přesně na východě a zapadá na západě, je právě 12 hodin nad obzorem a 12 hodin pod obzorem. V den letního slunovratu (21. června) má Slunce maximální kladnou deklinaci $\delta = +23,5^\circ$. Jeho výška při horní kulminaci $h_1 = 90^\circ - 50^\circ + 23,5^\circ = 63,5^\circ$, výška při dolní kulminaci $h_2 = 50^\circ + 23,5^\circ - 90^\circ = -16,5^\circ$. Větší část zdánlivé denní dráhy Slunce je nad horizontem. Bod, v němž Slunce vychází, se posunul směrem k severovýchodu, bod, v němž Slunce zapadá, směrem k severozápadu — Slunce je nad horizontem podstatně delší dobu než pod horizontem. Připomeňme zde, že tzv. *astronomický soumrak* je definován jako doba, po kterou je Slunce méně než 18° pod horizontem. V době kolem letního slunovratu u nás astronomický soumrak trvá po celou noc (*občanský soumrak* je definován jako doba, po kterou je Slunce méně než 6° pod horizontem). V den zimního slunovratu má deklinace Slunce maximální zápornou hodnotu $\delta = -23,5^\circ$. Snadno vypočteme, že Slunce ten den je při horní kulminaci jen ve výšce $16,5^\circ$, při dolní kulminaci je jeho hloubka pod obzorem $63,5^\circ$. Podstatně větší část dráhy Slunce leží pod obzorem, Slunce vychází na jihovýchodě a zapadá na jihozápadě, nad obzorem je mnohem kratší dobu než pod obzorem.

Změny výšky Slunce při kulminaci a změny délky dne a noci jsou v naší zeměpisné šířce dosti nápadné, mnohem nápadnější jsou však v místech, položených severněji. Tak např. v Leningradě, který leží na 60° severní zeměpisné šířky, klesá Slunce v den letního slunovratu jen $6,5^\circ$ pod obzor a po celou noc je poměrně světlo. Tato situace je dobře známá pod pojmem „bílá noc“. Výška Slunce při horní kulminaci je tam ovšem menší než u nás; Slunce kulminuje ve výšce $53,5^\circ$ v den letního slunovratu, ve výšce 30° ve dnech rovnodennosti a ve výšce jen $6,5^\circ$ v den zimního slunovratu.

Na severním polárním kruhu, který má zeměpisnou šířku $66,5^\circ$, Slunce v den letního slunovratu vůbec nezapadá: o půlnoci projde severním bodem na horizontu a pak se jeho výška opět zvětšuje; v poledne Slunce kulminuje ve výšce 47° . V den zimního slunovratu naopak na severním polárním kruhu Slunce nevychází: v poledne se objeví na jižním bodě horizontu a klesá opět pod obzor do maximální hloubky 47° .

Na zemských pólech je Slunce polovinu roku nad obzorem a polovinu roku pod obzorem. Na severním světovém pólu je v den jarní rovnodennosti Slunce právě na horizontu a během dne podél něho opíše kruhovou dráhu. Nastává „polární den“, který trvá půl roku. Výška Slunce nad

horizontem se postupně zvyšuje, v den letního slunovratu opíše Slunce kruhovou dráhu ve výšce $23,5^\circ$ nad horizontem a pak se výška Slunce opět snižuje. V den podzimní rovnodennosti je opět na horizontu — nastává „polární noc“. Slunce postupně klesá pod horizont a v den zimního slunovratu je v maximální hloubce $23,5^\circ$.

Všimněme si nyní, jaká je situace pro místa, položená na jih od 50. rovnoběžky. Postupujeme-li k jihu, kulminuje Slunce v létě i v zimě ve větší výšce než u nás, rozdíly mezi trváním dne a noci se však zmenšují. Obratník Raka má zeměpisnou šířku $23,5^\circ$. V den letního slunovratu tam tedy Slunce dosahuje při horní kulminaci výšky 90° — kulminuje v zenitu, při rovnodennostech kulminuje ve výšce $66,5^\circ$ a v den zimního slunovratu ve výšce 43° . Pro místa položená ještě jižněji přechází Slunce v době kolem letního slunovratu na severní oblohu, kulminuje nad severním bodem.

Na rovníku kulminuje Slunce ve dnech rovnodennosti právě v zenitu, neboť zenitem tam prochází světový rovník. V létě kulminuje Slunce na rovníku nad severním bodem, přičemž v den letního slunovratu je ve výšce $63,5^\circ$, pak se výška při kulminaci zvětšuje, dosáhne zenitu v den podzimní rovnodennosti a pak Slunce přechází na jih od světového rovníku — kulminuje nad jižním bodem. Maximální výšky $63,5^\circ$ při kulminaci dosáhne v den zimního slunovratu. Zajímavá na denní dráze Slunce na rovníku je skutečnost, že kulminuje v zenitu při rovnodennostech, zatímco při slunovratech dosahuje výšky o $23,5^\circ$ menší; další zajímavostí je, že po celý rok jsou dny i noci stejně dlouhé — zdánlivá denní dráha je kolmá k horizontu, den tedy trvá 12 hodin a noc rovněž 12 hodin. V oblasti kolem rovníku se po západu Slunce velmi rychle stmívá, neboť Slunce klesá kolmo k horizontu.

Ukážeme nyní, jak lze pomocí rovnic pro přepočet rovníkových souřadnic na obzorníkové určit dobu, po kterou je Slunce nad obzorem, a také azimut východu a západu Slunce. Provedeme jen přibližné výpočty, při nichž nebudeme přihlížet k lomu paprsků v atmosféře, k úhlovému průměru Slunce ani ke změnám souřadnic Slunce během dne.

Dobu, po kterou je Slunce nad obzorem, vypočteme z rovnice (3). V okamžiku východu a západu Slunce je jeho výška $h = 0^\circ$, je tedy $\sin 0^\circ = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t = 0$ a odtud $\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$. Z této rovnice vypočteme hodinový úhel v okamžiku východu Slunce (t je záporné) a v okamžiku západu Slunce (t je kladné); při průchodu Slunce místním poledníkem je jeho hodinový úhel rovný nule, můžeme tedy určit okamžik východu i západu Slunce a tím i dobu, po kterou je nad obzorem. Uvažujme místo na 50° severní zeměpisné šířky a den zimního slunovratu, kdy je deklinace Slunce $\delta = -23,5^\circ$. Dosadíme-li tyto číselné hodnoty, je $t = \pm 58,8^\circ = \pm 3^{\text{h}} 55^{\text{min}}$. Slunce tedy vychází 3 hodiny 55 minut před polednem, tj. v $8^{\text{h}} 05^{\text{min}}$, zapadá v $15^{\text{h}} 55^{\text{min}}$. Doba, po kterou je Slunce nad obzorem, je 7 hodin 50 minut. Porov-

náme-li tyto přibližné hodnoty s údaji ve Hvězdářské ročence, vidíme, že shoda je poměrně dobrá.

Azimut východu a západu Slunce vypočteme z rovnic (1) a (2), do nichž dosadíme $\varphi = 50^\circ$, $\delta = -23,5^\circ$, $h = 0^\circ$, $t = -58,8^\circ (= 301,2^\circ)$ pro východ Slunce a $t = 58,8^\circ$ pro západ Slunce. Pro východ Slunce má $\sin A$ zápornou hodnotu, $\cos A$ kladnou, azimut je ve 4. kvadrantu a má velikost $A = 308^\circ$, pro západ Slunce jsou $\sin A$ i $\cos A$ kladné a azimut je $A = 52^\circ$.

Provedeme-li tentýž výpočet pro místo na 60° severní zeměpisné šířky a pro tentýž den v roce, tj. opět pro $\delta = -23,5^\circ$, dostaneme $t = \pm 41,1^\circ$, tj. 2 hodiny 45 minut. Slunce zde vychází v den zimního slunovratu v $9^h 15^{\text{min}}$, zapadá ve $14^h 45^{\text{min}}$, je tedy nad obzorem jen 5 hodin 30 minut. Pro azimut východu Slunce vypočteme $A = 323^\circ$, pro azimut západu $A = 37^\circ$. Pro místa položená o 10° severněji od nás je tedy v den zimního slunovratu den kratší o téměř dvě a půl hodiny než u nás a Slunce vychází a zapadá asi o 15° blíže k jižnímu bodu ($A = 0^\circ$).

Podobný výpočet si můžete provést sami pro libovolný den v roce (deklinaci Slunce najdete ve Hvězdářské ročence, kterou každoročně vydává nakladatelství Academia v Praze) a pro libovolnou zeměpisnou šířku. Závislost délky dne na zeměpisné šířce je pro dny slunovratu velmi výrazná; rozdíly zjistíme i pro místa v naší republice. Za předpokladu, že nejsevernější oblast republiky je na 51° severní zeměpisné šířky a nejjižnější na 48° , dostaneme při slunovratu rozdíl v délce dne asi půl hodiny.

Z dějin exaktních věd

Staročeské plošné míry

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

Plošné míry používané v minulých stoletích na našem území vykazují spolu s délkou a objemem největší rozmanitost. Ve starých dobách bylo ovšem veličin, jejichž měření bylo běžné, velmi omezený počet. Vedle tří uvedených byla to ještě hmotnost (dř. váha), jež spolu s nimi byla

měřena všude a často. Byly sice měřeny i veličiny další, ale jen v úzkých vědních kruzích, jako např. od nejstarších dob v astronomii (čas, rovinný úhel) nebo značně později v lékařství (teplota). Běžnější měření právě uváděných veličin, zejména při vyšších nárocích na přesnost, se objevuje až v minulých stoletích.

Každá z měřených veličin sloužila určitému hospodářskému odvětví. Tak délka se uplatňovala jednak v obchodě (zejména u textilu), jednak v řemeslné výrobě. Kromě toho měla význam geografický a vojenský (měření vzdálenosti). Plošné míry měly převážně význam v zemědělství, v lesnictví, v rybníkářství apod. Objem sloužil jednak v zemědělství (násevek), jednak v obchodě (transportní a obalové nádoby, nádoby na pití). Měření hmotnosti, tedy vážení, sloužilo v největší míře obchodu, v menší míře lékárenství (resp. alchymii coby předchůdkyni chemie) a oblasti drahých kovů.

Hranaté míry, jak se někdy plošným mírám říkalo, byly určeny plochami tvaru obdélníků a čtverců (kvadratur). Znalosti správného měření velikostí ploch bylo však dlouho výsadou omezeného počtu jedinců, v dnešním slova smyslu zeměměřičů. Běžní lidé se dopouštěli při měření plošných obsahů často značných chyb, zejména když se někdy plocha co do velikosti vyjadřovala svým obvodem.

Kvadratura délkových měr se sice vyskytuje i ve starých zápisech (např. podle Sedláčka), běžněji se s ní však setkáváme až na přelomu 16. a 17. století. V dalším používáme pro kvadratury nové terminologie.

Jednou z nejstarších měr byl *čtverečný krok* s hodnotou odpovídající asi dnešnímu $0,5 \text{ m}^2$ a *čtverečný pražský loket* (rovný asi $0,35 \text{ m}^2$). Pro plochy větších velikostí byl určen *čtverečný provazec* (rovný $42^2 = 1764$ čtverečných pražských loktů $\doteq 617 \text{ m}^2$). Od počátku 17. století byl zaveden větší *čtverečný zemský provazec* (rovný $52^2 = 2704$ čtverečných pražských loktů $\doteq 946 \text{ m}^2$).

Jsou doklady také o *čtverečném honu* (s nestejnými hodnotami, z kvadratury délkové míry vyplývá hodnota $1,575 \text{ ha}$, jsou však udávány i hodnoty menší, např. $0,6 \text{ ha}$). Sporadicky se objevuje také *čtverečný prut* (odpovídající asi $14,2 \text{ m}^2$), používaný však spíše v Německu a ve Švýcarsku.

Pro účely myslivosti se používaly následující míry, brané jako násobky čtverečného pražského lokte:

přílišná leč (1000 „loket do čtverce“, což odpovídá asi 350 m^2),
velmi malá leč (400 až 500 čtverečných loktů, tj. asi 140 až 175 m^2) a
zemská leč (720 čtverečných loktů, tj. asi 252 m^2).

Leče se někdy dělily na *tenata*, jichž připadalo na leč 12 až 30 .

Z plošných měr, stanovených svými hodnotami patentem z r. 1764 a používaných do zavedení jednotek metrických, si uvedeme

čtverečnou (vídeňskou) stopu, odpovídající asi $0,1 \text{ m}^2$;

čtverečný (vídeňský) sáh, odpovídající asi $3,6 \text{ m}^2$. U této míry si můžeme dobře dokumentovat velkou setrvačnost, s níž se můžeme setkat. Přestože byla tato míra zavedením metrických jednotek v r. 1871 zrušena, lze se s ní v běžné mluvě se staršími pamětníky setkat dodnes. Před lety byla používána pro kvantifikaci menších pozemků velmi běžně. Kromě toho se používal zpravidla nevhodně zjednodušený název „sáh“, ačkoliv mohlo snadno dojít k záměně s jednotkou délky.

Po zavedení metrických jednotek byly používány některé dnes nesprávné míry metrického charakteru, jako např. čtverečný myriametr (značený q-mrm, □mrm nebo □μm), rovný 10^8 m^2 .

Speciálně pro *svrškovou kůži* se používal asi před 200 lety kvadrát (značený □), s hodnotou odpovídající asi $0,1 \text{ m}^2$. Byl patrně totožný se čtverečnou (vídeňskou) stopou. Starý rakouský měrový zákon rozeznával kromě běžných plošných měr také zvláštní míry pro řemeny (kůže). Tato míra se nazývala řemenová míra. Výchozí byl přitom řemenový sáh, rovný svou velikostí čtverečnému (vídeňskému) sáhu. Poddělení bylo toto:

1 řemenový sáh = 6 řemenových stop = 6.12 řemenových palců = $= 6.12.12$ řemenových čárek = $6.12.12.12$ řemenových teček. Tato řemenová míra je zajímavá tím, že součinitelé dílčích jednotek jsou vzhledem k obdobným jednotkám délky lineární a nikoliv kvadratičtí (kdy by u prvního převodu mělo být namísto 6 logičtěji $6^2 = 36$ atd.).

V důlním měříčství se na našem území používal vedle vídeňského čtverečného sáhu také *freiberský čtverečný sáh* (rovný asi $3,85 \text{ m}^2$) a *uher-ský (čili štiavnický) čtverečný sáh* (rovný asi $4,1 \text{ m}^2$).

Nyní přejdeme k jiným mírám plošným nežli „hranatým“.

Jak již jsme řekli, na počátku sloužila převážná část plošných měr k vyměřování ploch v zemědělství a obdobných odvětvích. Byly nazývány sumárně také *polní mírou*. I dříve uvedené „hrnaté“ míry měly převážně toto určení. Míry uváděné dále měly ovšem samostatný název.

Jednou z nejvýznamnějších měr této skupiny byl lán. Lán byl asi původně pokládán za pozemek takové velikosti, který je možno obdělávat jediným (koňským) potahem za celý čas orby. Setkáme se také s poddělením lánu, např. *polouláním*, *čtvrtí lánu*, *poloučtvrtí* apod. Lán je ve starých zápisech připomínán asi od 11. stol., kdy se místně přecházelo od otrokářského řádu ve feudální. Tehdy se objevovali drobní zemědělci, jimž byla půda propůjčována k obdělávání (za určitých podmínek). Je domněnka, že název lán je z němčiny, podobně jako „léno“ (das Lohen).

Jsou zmiňovány také různé druhy lánu, podle toho, o jakého vlastníka pole se jednalo. Rozdíly v dále uváděných hodnotách se zdály nasvědčovat na jakési „přídavky“ na zvýšenou životní režii. Tak existoval *královský orný lán* (asi 28 ha), *kněžský lán* (asi 26 ha), *panský (zemanský,*

svobodný) *lán* asi (23 ha) a *selský lán* (asi 19 ha). Pozdější sjednocený *zemský lán* obnášel asi 18 ha.

Předtím, než se zavedl lán, byly používány starší míry, některé i neurčité nebo nejednotné hodnoty. Byla to např. *dědina* (lat. hereditas = dědův statek), jejíž hodnota se rovnala asi (4 až 18) ha. Původně měrný význam dědiny se ovšem postupně ztrácel. Měrový význam měla původně snad i *země* (vyskytují se údaje v jednotkách: *polouzemě*), hodnotu dnes již přesně neznáme, domníváme se, že byla brána jako půl dědiny nebo jako popluží. Popluží původně značilo velikost polní plochy, kterou jediný člověk stačil oborat (nikoliv zorat). Toto popluží se připomíná v listině z r. 1198 v Praze „Na bojišti“, kde odpovídala asi 60 ha. Do 14. století se udržoval tradicí údaj, že Přemyslovo popluží ve Stadicích mělo velikost 3 lánů. Jiné doklady uvádějí pro popluží hodnoty nejednotné, v mezích zhruba 1 až 3,5 lánu, sporadicky i více (až 9 lánů). Původně se pro popluží používal název latinský (*aratrum*), český až od 14. století.

Jinými archaickými mírami je *sedliště* (zvané také *dvořiště*), rovné podle jednoho dokladu z 15. stol. asi 10,6 ha. V jižních Čechách se vyskytovaly také míry zvané *dvory* a *nivy* (tyto poslední měly snad hodnotu odpovídající 7 ha).

Z dob Přemysla Otakara II. se připomíná menší polní míra zvaná *záhon*, který se dělil na *brázdy* (těch bylo na 1 záhon 7 až 8). Jeden záhon se rovnal asi dnešním 390 m²; brázda asi 52 m². Název záhon (připomínaný asi od 15. stol.) pochází prý od slovesa „honiti“, jako míra hon. Jsou dokladovány také *kopy záhonů*, zmiňují se také *dlouhé a krátké záhony* (se vzájemnou relací 2 : 1).

Ve 14. stol. je připomínána *role*, snad rovná polovině lánu. V 17. stol. je uváděna hodnota menší, asi 6100 m².

Z dob Velkomoravské říše pocházela archaická polní míra *lícha* (nebo *lécha*, též *léha*) s nejednotnou hodnotou (udává se, že je rovna polovině záhonu, ale také 12 brázdám). Z téže doby se připomíná míra *radlo dědiny* nebo *pluh*.

Dosud uváděné míry se používaly převážně na rozlohu polí. Pro některé jiné rozlohy byly určeny zvláštní jednotky. Na louky a lesy to bylo *meslo* (*městlo*), pro mokřiny *hať*. Zvláštní míry se používaly též k vyměřování ploch lesa určeného k vykácení, vyklučení a ke kultivaci na pole (např. *jiterní role*, *klučenina* aj.). Odpovídající hodnoty těchto měr dnes neznáme.

Vraťme se k polní míře, která se udržela až do zavedení metrického systému. První takovou význačnou mírou tohoto druhu bylo

$$\text{jitro} = 3085,13 \text{ m}^2,$$

připomínané již v dobách Přemysla Otakara II.

Později, po zavedení rakouské míry u nás, používalo se více

$$\text{vídeňské jitro} = 5754,64 \text{ m}^2,$$

jak je uvedeno v Josefínském katastru z r. 1785 (tam je toto jitro definováno jako 1585 čtverečných vídeňských sáhů).

Původně bylo jitro definováno jako pozemek takové velikosti, který bylo možno jedním potahem obdělat za 1 celý den (počínaje jitem).

Zdá se, že jitro souvisí s délkovou mírou provazcem, protože v některých dokladech je definováno plošným obsahem obdélníka o stranách 5 provazců, 1 provazec. *Čtverečný provazec* se takto rovnal $1/5$ jitra.

Pro zajímavost připomínáme, že v okolí Písku se dlouho udržovala paměť na to, že pole odpovídající 1 korci výsevu (viz dále) se zoralo od rána do večera a měřilo se na *výpřeže*.

Jinou starou polní mírou, která dosud žije v povědomí starších pamětníků, byl *korec*, nazývaný též *strych*. Na rozdíl od jitra, které bylo pouze mírou plošnou, byl korec *mírou obojakou*, sloužil jak k výměře ploch, tak i objemu. Tato obojakost byla svým způsobem praktická, zvláště pro *násevek*. Měl-li někdo *korec polí*, potřeboval k jeho nasetí *korec (výsevu) příslušného druhu obilí*. Pro jiné účely měření objemu se taková míra však zpravidla neužívala. Co do velikosti byl korec polovinou jitra, což by činilo asi 2850 m^2 , kdyby se vycházelo z vídeňského jitra. Setkáme se však i s jinými hodnotami, např. s hodnotou $2877,32 \text{ m}^2$, jak udává prof. Teyssla ve svém známém Technickém slovníku. Jako objemovou míru uvedeme si korec u měr objemových. Zde jen pro úplnost si řekněme, že 1 korec = 48 pint = 4 věrtele, jeho hodnota se tak blížila dnešním 100 l. Název korce (též kořce) se odvozoval z různých českých slov (např. kůra, korka aj.), je též úvaha, že souvisí se starou hebrejskou mírou zvanou *kor* nebo *chomer*. To byla míra objemu, odpovídající asi dnešním 200 litrům. Korec se také rovnal 1,5 měrice, jež je uváděna jako významná plošná míra v Josefínském katastru, již několikrát zmíněném. Měřice byla, podobně jako korec, mírou obojakou (existovala tedy plošná měrice a měrice výsevu). Podle zmíněného katastru se rovnalo

1 *měrice* = 528 čtverečných (vídeňských) sáhů, což odpovídá metrické hodnotě asi 1900 m^2 . Jinak platilo, jak jsme se již zmínili, že

$$1 \text{ měrice} = 1/3 \text{ jitra} = 2/3 \text{ korce}.$$

Na závěr našeho krátkého pojednání uvedeme si *krátký přehled* starých plošných měr užívaných na našem území:

čtverečný pražský loket $\doteq 0,3498 \text{ m}^2$

čtverečný krok $\doteq 0,5 \text{ m}^2$

čtverečný (vídeňský) sáh (od konce 18. stol.) $\doteq 3,5967 \text{ m}^2$

čtverečný provazec (do 17. stol.) $\doteq 617 \text{ m}^2$
čtverečný zemský provazec (od 17. stol.) $\doteq 946 \text{ m}^2$
čtverečný hon asi $15\,750 \text{ m}^2$
sedliště (dvořiště) asi 10 ha
měrice $\doteq 1918,2 \text{ m}^2$
korec (strych) $\doteq 2877,32 \text{ m}^2$
jitro české $= 3085,13 \text{ m}^2$
jitro vídeňské $= 5754,64 \text{ m}^2$
lán zemský asi 18 ha
popluží v mezích (18 až 63) ha

naše soutěž

Ve druhém čísle letošního ročníku Rozhledů jsme otiskli prvních šest soutěžních příkladů z matematiky. Nyní otiskujeme zbývajících šest příkladů a všechny soutěžní úlohy z fyziky a z konstrukční geometrie. Jejich řešení pošlete *nejpozději do 31. března 1980* na adresu Rozhledů matematicko-fyzikálních, která je uvedena na druhé straně obálky každého čísla Rozhledů.

Pokyny řešitelům

Řešení každého příkladu pište čitelně (nejlépe strojem) na zvláštní list formátu A4, a to vždy po jedné straně. Nahoře vlevo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu i školu, kde studujete, a nakonec svou bytovou adresu. Kolektivy uvedou tyto údaje pro každého svého člena.

Nejdříve napište text příkladu a potom pište přehledně jeho řešení. Toto řešení formulujte výstižně, stručně, ale jasně. Přitom užívejte platné terminologie a symboliky. Připojujete-li k řešení některého příkladu obrázek, narýsujte jej pečlivě a řádně popište.

Úlohy k řešení

Matematika

7. Sedem miest $A_1, \dots, A_7$ je pospájaných 11 úsekmi diaľnic tak, že z mesta A_i ide diaľnica priamo do miesta A_{i+1} a priamo do miesta A_{i+2} (a teda aj naopak) pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$ a z mesta A_6 ide úsek diaľnice do A_7 . Živelná pohroma zničila niektoré úseky diaľnic. Vieme však, že medzi mestami A_5, A_6, A_7 bol prerušený najviac jeden úsek. Vodič — prieskumník má odísť z mesta A_1 , zistiť, či existuje spojenie po diaľniciach z A_1 do A_7 také, aby každým mestom sa prechádzalo práve jedenkrát, a má sa vrátiť do mesta A_1 . Ak nájde na diaľnici prekážku, otočí sa a vráti. Ako má tento vodič postupovať pri plnení úlohy, aby počet otáčaní bol minimálny?

Lev Bukovský

8. Konvexní mnohoúhelník je sjednocením konečného počtu nepřekrývajících se rovnoběžníků právě tehdy, je-li středově souměrný. Dokažte.

Miroslav Fiedler

9. Je dána přímka p a bod P , který není bodem přímky p . Na přímce p jsou libovolně zvoleny tři navzájem různé body P_1, P_2, P_3 . Potom osy o_1, o_2, o_3 úseček PP_1, PP_2, PP_3 omezují trojúhelník; kružnice opsaná tomuto trojúhelníku prochází bodem P . Dokažte.

Emil Kraemer

10. Dokažte, že pro každou dvojici celých čísel j, q , pro něž je $0 \leq j < q - 1$, platí:

$$\binom{q-1}{j} = \binom{q}{j} - \binom{q-1}{j-1} + \binom{q-2}{j-2} + \dots + (-1)^j \binom{q}{0}.$$

Vlastimil Pták

11. Ke každému přirozenému číslu n existuje aspoň jedna dvojice přirozených čísel x, y tak, že platí

$$x^y = y^{x-ny}$$

Dokažte.

Jiří Sedláček

12. V rovině jsou dány dvě různé nenulové úsečky o velikostech a, b ; přitom je $a \geq b$. Na jedné z těchto úseček zvolme bod A a na druhé bod B tak, aby vzdálenost $|AB|$ bodů A, B byla co největší. Dokažte, že potom je $|AB| \geq \frac{a-b}{2}$.

Jaroslav Zemánek

3. Z výšky h_0 je volně spuštěn tenisový míček. Dopadne na vodorovnou pevnou desku, odrazí se od ní a dále poskakuje ve svislé přímce (odpor prostředí zanedbáme). Při každém dopadu na desku se změní $p\%$ jeho kinetické energie v energii tepelnou.

- Najděte vztah pro výšku n -tého výskoku a pro rychlost n -tého dopadu míčku na desku.
- Zjistěte, jakou zákonitost splňují časové intervaly mezi dvěma následujícími dopady míčku na desku.

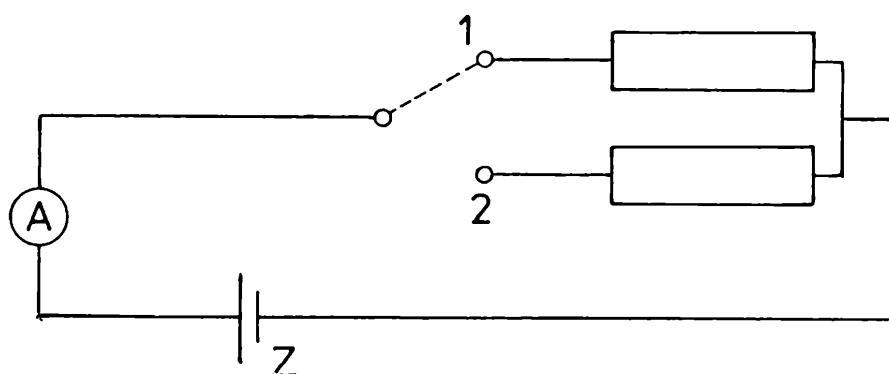
Josef Novák

4. V nádobě je vrstva kapaliny o hustotě ρ_1 a nad ní je vrstva jiné kapaliny, která se s první nemísí, chemicky s ní nereaguje a má hustotu ρ_2 . Na rozhraní obou kapalin plave krychle ze stejnorodé látky; hrana krychle má délku a . Dolní vodorovná podstava krychle je v hloubce $\frac{a}{4}$ pod rozhraním kapalin, horní podstava je v hloubce a pod volným povrchem kapaliny o hustotě ρ_2 .

- Určete tlakovou sílu F_1 , která působí na dolní podstavu krychle, a tlakovou sílu F_2 , která působí na horní podstavu krychle.
- Určete hustotu ρ materiálu, z něhož je krychle zhotovena.
- Ponoří se krychle hlouběji do dolní kapaliny, jestliže zvětšíme tloušťku vrstvy horní kapaliny? Zdůvodněte!

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_2 = 0,80 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $a = 10 \text{ cm}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Josef Novák



Obr. 1

5. Do obvodu zdroje Z o konstantním elektromotorickém napětí U_e a ampérmetru A je možno přepínačem připojit rezistor s neznámým odporem R_1 nebo rezistor se známým odporem R_2 . Součet vnitřního

odporu zdroje, vnitřního odporu ampérmetru a odporu spojovacích vodičů je R . Dáme-li přepínač do polohy 1, ampérmetrem prochází proud I_1 . Dáme-li přepínač do polohy 2, ampérmetrem prochází proud I_2 (obr. 1).

a) Určete odpor R_1 pomocí I_1 , I_2 , R_2 a R .

b) Označme $R'_1 = \frac{I_2}{I_1} R_2$. Odůvodněte, proč je odpor rezistoru přesněji určen hodnotou R_1 než hodnotou R'_1 .

Vypočítejte rozdíl $R = |R_1 - R'_1|$.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $I_1 = 5,00 \text{ mA}$, $I_2 = 20,0 \text{ mA}$, $R_2 = 100 \Omega$, $R = 8,00 \Omega$.

Josef Novák

Konstrukční geometrie

1. Podstavou čtyřbokého jehlanu $VABCD$ je konvexní různoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v bodě M ; bod S je středem úsečky VM . Proložte bodem S rovinu protínající jehlanovou plochu $VABCD$ v rovnoběžníku. Kdy je tento rovnoběžník kosočtvercem? Zobraďte ve volném rovnoběžném zobrazení.

František Hradecký

2. V rovině ρ je dán rovnostranný trojúhelník KLM . Sestrojte krychli, která má tu vlastnost, že body K , L , M jsou středy jejích tří sousedních stěn.

František Hradecký

3. Nechť ABC , $A'B'C'$ jsou trojúhelníky ležící v různých rovinách tak, že žádný vrchol jednoho z nich nesplývá se žádným vrcholem druhého a že žádná z přímek AB , AC , BC nesplývá se žádnou z přímek $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$.

Jestliže přímky AA' , BB' , CC' jsou vzájemně rovnoběžné nebo procházejí tímž bodem S , který nesplývá se žádným vrcholem kteréhokoliv daného trojúhelníku, potom pro dvojice přímek AB a $A'B'$, AC a $A'C'$, BC a $B'C'$ nastane právě jeden z těchto tří případů:

a) Přímky každé dvojice jsou různoběžky; jejich průsečíky $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$, $R = BC \cap B'C'$ jsou navzájem různé a leží v téže přímce. Tato přímka neprochází žádným vrcholem kteréhokoliv z daných trojúhelníků.

b) Přímky jedné dvojice (např. AB a $A'B'$) jsou navzájem rovnoběžné, přímky v každé další dvojici jsou různoběžky s různými průsečíky (např. $Q = AC \cap A'C'$, $R = BC \cap B'C'$, $Q \neq R$) ležícími na přímce p .

rovnoběžné s přímkami první dvojice. Tato přímka neprochází žádným vrcholem kteréhokoliv z daných trojúhelníků.

c) V každé dvojici jsou rovnoběžky ($AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$).

Dokažte právě uvedenou větu, která se nazývá *větou Desarguesovou* (čti Dezargovou).

Emil Kraemer

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Fyzika

1. Při určité hodnotě brzdícího napětí U_0 se přeruší fotoproud I elektronů uvolňovaných z povrchu lithia světlem o vlnové délce λ_0 . Zvětšíme-li délku vlny světla 1,5 krát, je zapotřebí k přerušení fotoproudu zvětšit brzdící napětí 2 krát. Vypočítejte vlnovou délku λ_0 použitého světla a hodnotu napětí U_0 , víte-li, že výstupní práce A elektronu z povrchu lithia je rovna 2,39 eV.

(Došlo 6 řešení)

Zdeněk Jancut

Poznámka autora: V zadání příkladu došlo při přepisu k chybě, místo zvětšení vlnové délky má správně být zmenšení vlnové délky světla, na což upozornila většina řešitelů. Uvádíme proto dvě řešení — obě pokládám za správná — první je od studenta Čadka, který ukázal, že původní zadání příkladu vede ke sporu; druhé je od studenta Gézy, který si opravil chybu a dostal fyzikální výsledek.

a) Řešil Ondřej Čadek, IVa, gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše:

Energie dopadajícího světelného kvanta o frekvenci ν je

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0},$$

kde h je Planckova konstanta a c je rychlost světla ve vakuu. Tato energie se přemění ve výstupní práci A a kinetickou energii elektronu W_k . Platí tedy

$$W = A + W_k$$

Dosadíme-li za W a W_k , dostaneme:

$$\frac{hc}{\lambda_0} = A + \frac{1}{2} m_e v^2, \quad (1)$$

kde m_e a v jsou hmotnost a rychlost elektronu. Aby došlo k přerušení, musí elektrické pole o brzdícím napětí U_0 vykonat práci

$$eU_0 = \frac{1}{2} m_e v^2, \quad (2)$$

kde e je náboj elektronu. Dosazením (2) do (1) dostaneme vztah

$$\frac{hc}{\lambda_0} = A + eU_0. \quad (3)$$

Změní-li se vlnová délka světla n_1 -krát, musí se napětí změnit n_2 -krát. Dostaneme pak vztah

$$\frac{hc}{n_1 \lambda_0} = A + n_2 eU_0. \quad (4)$$

Z rovnic (3) a (4) vyjádříme U_0 a λ_0 :

$$U_0 = \frac{A}{e} \frac{1 - n_1}{n_1 n_2 - 1},$$

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A} \frac{n_1 n_2 - 1}{n_1 (n_2 - 1)}.$$

Energie světelného záření je nepřímo úměrná vlnové délce světla. Zvětšíme-li vlnovou délku, klesne energie dopadajícího záření, a tedy poklesne i rychlost elektronů, které vyletují z kovu. Proud elektronů je pak možno přerušit i při nižším brzdícím napětí, než bylo původní napětí. Musí být tedy splněna následující podmínka

$$n_1 > 1 \text{ odtud } n_2 < 1.$$

Zadané hodnoty ($n_1 = 1,5$; $n_2 = 2$) však tuto podmínku nesplňují. Příklad, popsáný v úloze, nemohl v praxi nastat.

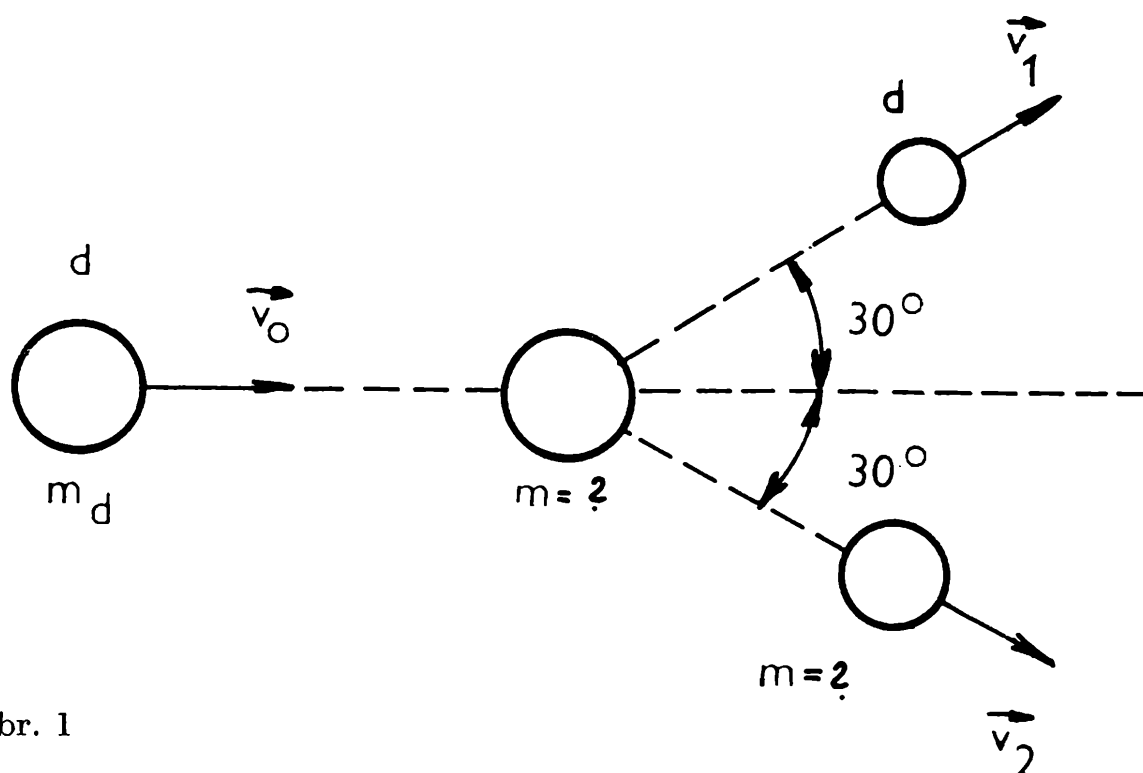
b) *Řešil Jozef Géza, gymnázium Dubnica n. Váhom :*

V zadání je zřejmě chyba, pretože podľa Einsteinovej rovnice

$$\frac{hc}{\lambda_0} = A + \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (1)$$

sa pri zväčšení vlnovej dĺžky svetla zmenší energie dodaná elektronu. Budeme teda počítať s tým, že dĺžka vlny svetla sa 1,5 krát zmenšila a nie zväčšila. K prerušeniu fotoprúdu dôjde práve vtedy, keď sa kinetická energia $W = \frac{1}{2} m_e v^2$ rovná polohovej energii elektrického poľa

$$W_p = eU_0. \quad (2)$$



Obr. 1

Dosadením (2) do (1) dostávame:

$$\frac{hc}{\lambda_0} = A + eU_0. \quad (3)$$

Po zmenšení vlnovej dĺžky svetla 1,5 krát je treba 2 krát zväčšiť U_0 , teda platí:

$$1,5 \frac{hc}{\lambda_0} = A + 2eU_0 \quad (4)$$

Riešime sústavu rovníc (3) a (4), dostávame:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{2A} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 2,39 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ m},$$

$$U_0 = \frac{A}{e} = \frac{2,39 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 2,39 \text{ V}$$

Záver: Vlnová dĺžka použitého svetla je $2,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ a napätie je $U_0 = 2,39 \text{ V}$.

2. Nerelativistický deuteron (jádro vodíku s protonem a neutronem) vykonal pružnou srážku s jádrom neznámého atomu, ktoré bolo pôvodne v klidu, a odchyľil se od pôvodního směru o úhel 30° . Neznámé jádro se po srážce odchyľilo rovněž o úhel 30° (obr. 1). Určete, jakému atomu přísluší toto jádro.

(Došlo 6 řešení)

Zdeněk Janout

Řešil Aleš Toufar, 4. A, gymnázium Opava :

Při řešení použijeme zákony zachování energie a hybnosti. Užitím zákona zachování energie dostáváme:

$$\frac{1}{2} m_d v_0^2 = \frac{1}{2} m_d v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2, \quad (1)$$

kde v_0 je rychlost deuteronu před srážkou, v_1 rychlost deuteronu po srážce a v_2 rychlost neznámého jádra po srážce. Ze zákona zachování hybnosti dostaneme druhý vztah:

$$m_d \mathbf{v}_0 = m_d \mathbf{v}_1 + m \mathbf{v}_2,$$

který prepíšeme do dvou složek:

1. ve směru rychlosti v_0

$$m_d v_0 = m_d v_1 \cos \alpha + m v_2 \cos \alpha, \quad (2)$$

2. ve směru kolmém k rychlosti v_0

$$m_d v_1 \sin \alpha - m v_2 \sin \alpha = 0. \quad (3)$$

Ze vztahu (3) plyne:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m}{m_d}. \quad (4)$$

Vztahy (1) a (2) upravíme tak, že první násobíme faktorem $\frac{2}{v_2^2}$, druhý faktorem $\frac{1}{v_2}$. Dostáváme:

$$m_d \left(\frac{v_0}{v_2} \right)^2 = m_d \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 + m, \quad (5)$$

$$m_d \frac{v_0}{v_2} = m_d \frac{v_1}{v_2} \cos \alpha + m \cos \alpha. \quad (6)$$

Užitím vztahů (4) až (6) dostaneme hledaný vztah pro neznámou hmotnost

$$m = \frac{m_d}{4 \cos^2 \alpha - 1}. \quad (7)$$

Dosadíme-li do vztahu (7) za kosinus jeho číselnou hodnotu, dostaneme

$$m = \frac{m_d}{4 \cdot \frac{3}{4} - 1} = \frac{1}{2} m_d$$

Závěr: Jádro atomu, s kterým vykonal deuteron srážku, přísluší atomu vodíku.

olympiády

XXI. MMO

Jedenadvacátá mezinárodní matematická olympiáda se konala ve dnech 28. června — 9. července 1979 ve *Velké Británii*. Soutěžilo na ní 166 žáků ze 23 zemí: Belgie, Brazílie, Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Izraele, Jugoslávie, Kuby, Lucemburska, Maďarska, NDR, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Řecka, SSSR, Švédsko, USA, Velké Británie a Vietnamu. Přítomen byl též pozorovatel z Austrálie, která projevila zájem o účast na příštích MMO.

Po přípravách provedených v *Bristolu* proběhla vlastní soutěž MMO na *Westfield College* v *Londýně*. Žáci řešili jako obvykle šest soutěžních úloh, po třech ve dvou půldnech 2. a 3. července. (Texty úloh přinese-me v příštím čísle). Po skončení soutěže navštívili účastníci MMO ve dnech 7. a 8. července univerzitní město Oxford.

Československo vyslalo na XXI. MMO osmičlenné družstvo žáků gymnázií v Praze, Brně, Bílovci, Čadci, Bardějově a Košicích, vesměs vítězů celostátního kola naší domácí MO. Z nich nejlepšího výsledku na MMO dosáhl Jan NEKOVÁŘ z Prahy, který v soutěži neztratil ani bod a získal tak jednu z osmi udělených prvních cen. Další čtyři naši žáci — Josef TKADLEC, Josef JIRÁSEK, Radan KUČERA a Miroslav CHLEBÍK — byli odměněni třetími cenami. Jako celek obsadilo čs. družstvo v neoficiální klasifikaci sedmé místo se 178 body; nejvíce bodů dokázali nashromáždit členové družstva SSSR (267 bodů), dále Rumunska (240 b.) a NSR (235 b.). Velmi pěkný výkon podali též vietnamští žáci (134 body, avšak jen se čtyřmi soutěžícími).

Doufejme, že letošní úspěch čs. reprezentantů na MMO povzbudí účastníky právě začínajícího 29. ročníku naší MO a přispěje k rozšíření zájmu o MO a matematiku vůbec mezi naší školskou mládeží.

F. Z.

Anketa řešitelů matematické olympiády

Ústřední výbor matematické olympiády by byl rád, kdyby řešitelé úloh MO zodpověděli předložené otázky a pomohli tak zlepšit práci v této soutěži.

1. Vypracoval jste přípravné úlohy? Pomohlo Vám jejich vyřešení při úlohách soutěžních? Vrátili Vám Vaše opravené přípravné úlohy a rozebral s Vámi někdo případné chyby?
2. Pracoval jste na soutěžních úlohách I. kola delší dobu nebo až před termínem odevzdání? Radil jste se s někým, s kým? Seznámil Vás někdo s klasifikací, správným řešením a Vašimi chybami? Jak hodnotíte počet, náročnost a zajímavost úloh I. kola?
3. Seznámil Vás někdo s klasifikací, správným řešením a Vašimi chybami u úloh II. kola? Jaké máte připomínky k organizaci II. kola MO?
4. Jak jsou u Vás na škole žáci informováni o MO a jak jsou získáváni pro účast v MO? Je u Vás na škole účast v MO nutnou nebo postačující podmínkou pro lepší známku z matematiky? Máte možnost navštěvovat nějaký matematický kroužek? Co se tam dělá, jak se Vám líbí jeho činnost?
5. Máte možnost půjčovat si ze školy brožury ze Školy mladých matematiků, ročenky MO apod.? Čtete Rozhledy nebo sovětský časopis Kvant?
6. Které předměty Vás baví, které ne a proč? Máte dost času na sport, četbu, MO apod., nebo jste časově přetěžován?
7. Zúčastnil jste se některého soustředění MO? Co se Vám líbilo a nelíbilo na těchto soustředěních? Jaký byl přínos soustředění pro Vaši další účast v MO?
8. Zúčastnil jste se korespondenčního semináře MO? Jak hodnotíte úlohy, jejich opravování a vůbec organizaci korespondenčního semináře v roce 1978/79?

Své odpovědi, které nemusíte podpisovat a za něž děkujeme, zašlete co nejdříve na adresu

Ústřední výbor matematické olympiády
115 67 Praha 1, Žitná 25.

Upozornění řešitelům matematické olympiády a učitelům matematiky

Úspěšnými řešiteli I. kola MO v kategoriích A, B, C, se stanou účastníci, kteří budou mít řešení alespoň čtyř úloh ohodnocena jako výborná nebo dobrá. V letáku XXIX. ročníku MO je nesprávně uvedeno, že stačí tři úlohy. (Pro kategorii Z platí údaj z letáku, tj. tři úlohy).

různé

Beseda členářů k 100. výročí narození Alberta Einsteina

JOSEF KOTYK, Pardubice

*Fyzika je proniknuta filosofií
jako oceán solí.*

Učitel: „Bez solidního filosofického základu není žádné přírodovědy,“ napsal *Lenin*. Filosofické nesnáze moderní fyziky řešil velmi originálním a duchaplným způsobem *ALBERT EINSTEIN* (14. 3. 1879 až 18. 4. 1955), jeden z největších myslitelů všech dob. *Lenin* jej nazval velkým přetvořitelem přírodních věd.

Ema: Einsteinovou zásluhou prodělalo lidstvo zejména v problematice prostoru a času velikou změnu názorů.

Jan: Zajímavým tématem naší besedy by mohl proto být vývoj těchto názorů.

Ida: Ano. Víím, že římský básník *Lucretius Titus Carus* (asi 98 až 55 př. n. l.) ve svém velkolepém filosofickém eposu „*De rerum natura*“ (O podstatě věcí) chápe čas již téměř einsteinovsky. Tvrdí: „Čas neexistuje o sobě, nýbrž jedině věcmi smysly vnímatelnými; z nich vyplývá pojem minulosti, přítomnosti a budoucnosti.“

Ota: Správně! Středověku zůstala však studnice starověké moudrosti téměř nedostupnou.

Ida: Nad branami středověkého školství psáno jest:¹⁾ „Mládež... čítáním spisovatelů pohanských se příliš nezaneprázdňuje!“

Eda: Od *Aristotela* (384 až 322 př. n. l.) až po naše časy zůstává tak prostor nádržkou světového dění a čas něčím, co „plyne samo o sobě a nezávisle na jakémkoli vnějším předmětu rovnoměrně“, jak to zřetelně vyjádřil zakladatel klasické mechaniky *Isaac Newton* (*Principia*, 1687).

Ivo: Německý filosof *Immanuel Kant* (1724 až 1804) spatřoval v pojmech prostoru a času ryzí výtvořiny lidského rozumu (*der reinen Vernunft* = čistého rozumu), apriorní formy našeho nazírání, které pocházejí z nás a jsou světu cizí. Apriorní (= prvotní) je však hmotný svět;

¹⁾ Cituji ze zakládací listiny Rožmberského vyššího učení v Soběslavi, založeného panem Petrem Vokem, posledním Rožmberkem († 1611). (Viz *Václav Beneš Třebízský*: V podvečer pětileté růže, díl třetí, VIII.)

formy lidského myšlení jsou jen nepřesným, stále se zdokonalujícím jeho obrazem.

Ema: Novou cestu pokroku razil svým géniem, svými inspirujícími idejemi teprve Einstein, autor jednotné teorie prostoru, času a gravitace. Jeho teorie relativity, publikovaná roku 1905 ve spise „Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen“ (O principu relativity a důsledcích z něho vyvozovaných), znamená první zásadní průlom do newtonovských představ o světě.

Učitel: „Fyzikové, přinuceni fakty,“ prohlásil Einstein, „musí snést pojmy prostoru a času s Olympu apriornosti, aby je vyspravili a uvedli zase do použitelného stavu.“

Ida: K objasnění jednoho z největších problémů fyziky — materiálnosti času a prostoru — přispěla také vědecká materialistická filosofie.

Ema: Ano. Lze říci, že bez hmoty není prostoru ani času. Bez hmoty nemůžeme konat měření délková ani časová. Spojení prostoru a času s hmotou je úplné. Hmota existuje v prostoru a v čase, které jako by si sama „vytvářela“. Prostor a čas jsou objektivně existující rysy hmoty.

Ida: *Engels* vyjádřil tuto okolnost slovy: „Čas i prostor jsou formy existence hmoty.“²⁾

Eva: Plyne čas i v mezihvězdném prostoru? Má i vakuum (= prázdnota) svou prostorovou rozlohu?

Ema: Ovšem. Má!

Eva: To se však nesrovnává s Engelsovým tvrzením, že prostor i čas jsou formy existence hmoty. Může hmota mít formy existence tam, kde vůbec není?

Zmatlík: Podle *Hérakleita Temného z Efesu* (asi 530 až 480 př. n. l.) všechno je — a také není. S jeho učením i s mými názory³⁾ se tedy srovnává, že hmota může existovat i tam, kde neexistuje.

Ema: Einsteinovy převratné závěry —

Zmatlík: Hérakleitovy, Einsteinovy i moje!

Ema: Tyto převratné závěry otřásly do základů vžitými představami o prostoru a času. Vesmír je tvořen hmotným nekonečně rozsáhlým polem, jež si v každém svém bodě vytváří objektivní rysy prostorové a časové; ty vnímáme jako rozlehlost prostoru a plynutí času.

Učitel: Ano. Kvantová teorie hmotného pole učí, že celý světový prostor je hmotný; nikde — ani v tzv. mezihvězdném vakuu — není žádná prázdnota, všude naopak pohybující se hmotné pole. Nikoli tedy

²⁾ *Bedřich Engels*: Dialektika přírody. Praha 1952. Cit. str. 200.

³⁾ Své názory doložil žák Zmatlík také v Rozhledech tvrzením, že každá dvě — i nestejná — čísla jsou stejná. Viz článek „Zmatlíkova poučka“ v roč. 50, čís. 6, str. 284 a 285.

izolovaná tělesa v prázdnotě, ale hmota ve formě polí je zdrojem a nositelem vlastností těles. Hmota, pohyb, prostor a čas jsou navzájem organicky spojeny; tato jednotka je podmíněna materiální jednotou světa, světa věčně se pohybující hmoty.

Fyzika je proniknuta filosofií jako oceán solí. Filosofie pomohla fyzice zbavit se nevědeckých nánosů, které byly brzdou jejího rozvoje.

Literatura :

G. A. Kursanov: Voprosy filosofii č. 3 (1950).

V. I. Lenin: Materialismus a empiriokriticismus, Praha 1952.

Ještě o problému čtyř barev

Když v roce 1976 oznámili *K. Appel* a *W. Haken*, že rozřešili problém čtyř barev, byla to senzace i pro nematematický svět. V mnoha časopisech vyšla o tom zpráva a také *Rozhledy* o tom tehdy psaly. Problém vznikl uprostřed minulého století a od té doby se mnozí pokoušeli dokázat, že čtyři barvy stačí k obarvení každé mapy (v rovině či na kouli), má-li se každý stát obarvit jednou barvou a každé dva státy, jež mají společnou hraniční čáru, mají být obarveny různě.

Zajímavou postavou v historii problému čtyř barev byl *C. S. Peirce* (1835—1914). *J. W. Dauben* o něm nedávno napsal zajímavý článek, v němž Peirce označuje za významnou postavu americké matematiky minulého století a cituje jeho práce z teorie množin a logiky. S domněnkou o čtyřech barvách neměl však Peirce štěstí. Domníval se, že důkaz našel a přednášel o něm kolem roku 1860 v semináři v Harvardu. Dovedeme si představit, že důkaz nebyl správný, i když Peirce jej nepublikoval a nemůžeme jej proto posoudit v autentickém znění. Peirce uvádí, že se o problému dověděl z poznámky v časopise *Athenaeum* kolem roku 1860, nebyl však schopen udat přesný pramen. V nedávné době šli po této stopě tři matematikové — *N. L. Biggs*, *E. K. Lloyd* a *R. J. Wilson* — a museli se zřejmě prokousávat starými ročníky zmíněného časopisu. Podařilo se jim zjistit, že v Peirceově případě šlo zřejmě o nepodepsanou knižní recenzi, jejímž autorem byl známý matematik minulého století *A. de Morgan*. Tato recenze je pravděpodobně první tištěnou zprávou o problému čtyř barev a ještě o devatenáct let později se o ní zmiňuje též *A. Cayley*, aniž udává přesnou citaci. Biggs, Lloyd a Wilson svůj náález publikovali v časopise *Historia Mathematica* roku 1978.

V historii problému čtyř barev je ještě celá řada nejasností a temných míst. Doufejme, že se najdou schopní badatelé, kteří nám je objasní. Toto byl jeden příklad takového úspěšného objevu.

J. S.

recenze

Zdeněk Horský:

MNOŽINY A MATEMATICKÉ STRUKTURY

Matematika pro vysoké školy technické, sešit I, vydalo SNTL — nakladatelství technické literatury, Praha 1979, 47 str., 10 obr., cena 3 Kčs.

Publikace je úvodním textem sešitového souboru určeného pro posluchače vysokých škol technických. Jednotlivé sešity mají postupně obsáhnout všechny matematické disciplíny potřebné pro budoucí inženýry.

První sešit má šest kapitol, které se jmenují: Množiny, Zobrazení, Struktury, Přirozená čísla, Reálná čísla, Komplexní čísla. Za každou kapitolou s výjimkou první nalezne čtenář cvičení. Výsledky některých z nich jsou uvedeny na konci brožury.

Čtenář si při studiu tohoto sešitu zreviduje, upřesní a doplní své znalosti ze středoškolské matematiky. Brožura je opatřena podrobným rejstříkem, a proto ji lze užívat i jako malou encyklopedii.

Knížka byla napsána pro posluchače vysokých škol technických. Je však vhodná i pro studenty nejvyšších ročníků středních škol a přivítají ji jistě i další zájemci o matematiku.

Jiří Mída

Směrnice pro autory (pokyny pro úpravu rukopisů) byly naposledy uveřejněny v 5. čísle 57. ročníku Rozhledů. Rukopisy je třeba zasílat s jednou kopií.

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

G

gabbia di Faraday ž
galvanometro m
gas m
— ideale, perfetto
generale
in generale
generalizzare
generalizzazione ž
generatore m
generatrice ž (retta)
generazione ž
— proiettiva di coniche
genere m
geometria ž
— analitica
— descrittiva
— differenziale
— elementare
— non euclidea
— proiettiva
geometricamente
geometrico
giacitura ž
gioco m
giorno m
— siderale
— solare apparente
— solare medio
girare
girazione ž

Faradayova klec
galvanometr
plyn
ideální plyn
obecný, všeobecný
obecně, všeobecně
zobecňovati, zobecniti
zobecnění
generátor
vytvářející přímka
vytváření
projektivní vytváření kuželoseček
druh, rod
geometrie
— analytická
— deskriptivní
— diferenciální
— elementární
— neeuclidovská
— projektivní
geometricky
geometrický
nevlastní přímka
hra
den
— hvězdný
— sluneční skutečný
— sluneční střední
otáčeti (se)
otáčení

giro m	otočení (jedno), obrátka
giusto	správný
goniometria ž	goniometrie
goniometrico	goniometrický
goniometro m	úhломěr
gradi di libertà m	stupně volnosti
gradiente m	gradient
grado m	stupeň
graduato	kalibrovaný, opatřený stupnicí
grafico	grafický
grafo m	graf
grammo m	gram
grande	veliký, velký
grandezza ž	velikost
gravità ž	tíže, tíha
gravitazione ž	gravitace
gruppo m	grupa
— abeliano	— Abelova (komutativní)
— additivo	— aditivní
— alterno	— alternující
— ciclico	— cyklická
— di sostituzioni	— substitucí
— di trasformazioni	— transformací
— finito	— konečná
— infinito	— nekonečná
— semplice	— jednoduchá
— simmetrico	— symetrická
gruppo armonico dei punti	harmonická čtveřice bodů

H

henry	henry (jednotka)
-------	------------------

I

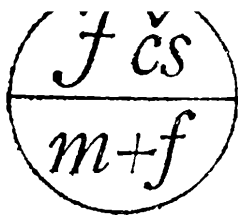
icosaedro m	dvacetistěn
— regolare	— pravidelný
ideale m	ideál (jako podokruh)

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

4

ROČNÍK 58, 1979-1980, PROSINEC



ROČNÍK 58
PROSINEC 1979

4

rozhledy

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (moximěsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1979.

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Obsah

Doc. dr. V. Mráz, CSc.: Prvočísla a čísla Fermatova	145
Doc. dr. P. Kršňák, CSc.: O niektorých aplikáciách stredu úsečky pomocou vektorov	148
Dr. J. Mida: O maticích	154
Ing. J. Kús, ing. J. Myslik, CSc.: Maticový tvar Kirchhoffových zákonů	161
Dr. R. Hudec: Nový pohled na Jupiter	167
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Staročeské miry duté a suté	168
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	175
Dr. L. Boček, CSc., dr. A. Vrba, CSc.: Úlohy III. kola MO kategorie A v roce 1979	184
Texty úloh XXI. MMO	191
Pro volnou chvíli	192
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky

matematika

Prvočísla a čísla Fermatova

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ..., jak známo, nazýváme přirozená čísla nebo též čísla celá kladná. Pokud neuvedeme jinak, budeme čísla rozumět čísla přirozená. Nejmenší z nich je číslo 1 a největší přirozené číslo neexistuje; tomu je třeba rozumět tak, že ať zvolíme sebevětší číslo, vždy dokážeme udat číslo ještě větší, např. přičtením čísla 1.

Ta z přirozených čísel, jež nejsou rovna 1, ale jsou beze zbytku dělitelná právě jen číslem 1 a sebou samým, nazýváme prvočísla; ve starší literatuře se jim říká čísla kmenná. Prvních patnáct nejmenších prvočísel je

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47.

Vedle prvočísel jsou čísla složená, z nichž každé je možno rozložit na tzv. kanonický součin prvočísel. Tento rozklad prvních šesti nejmenších složených čísel je: $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$. Kanonický součin prvočísel je jednoznačný, neuvažujeme-li pořadí prvočísel v součinu; např. platí: $308 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 11 \cdot 7 = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 11 =$ (celkem 12 součinů). Číslo 1 má zvláštní postavení, nepočítáme ho ani k prvočísłům, ani k číslům složeným.

K rozkladu větších složených čísel poslouží prvočísla, která bývají uvedena v matematických tabulkách. Nejrozsáhlejší tabulky z roku 1959 uvádějí posloupnost všech prvočísel p_n pro $n < 6 \cdot 10^6$; uvedeme některá z nich: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, ..., $p_{100} = 541$, ..., $p_{1000} = 7919$, ..., $p_{5999999} = 104\,395\,301$. V našem článku poznáme ještě větší prvočísla.

Na otázku, kolik je všech prvočísel, byla dána odpověď již v Eukleidových *Základech* kolem roku 300 př. n. l. Sledujme tento prostý důkaz sporem, který zaručuje existenci libovolně velkého prvočísla. Předpokládejme, že všech prvočísel je konečný počet, z nichž p je největší. Označme n_p součin všech těchto prvočísel zvětšený o 1:

$$n_p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot p + 1$$

Zřejmě číslo n_p dává při dělení prvočísla 2, 3, 5, 7, 11, ..., p vždy zbytek

1, a není tedy žádným z nich dělitelno. Proto je n_p buď samo prvočíslo, anebo je dělitelno prvočíslem větším než p . V obou případech docházíme ke sporu s předpokladem, že p je největší prvočíslo. Uzavíráme tedy, že všech prvočísel není konečný počet — je jich nekonečně mnoho.

Umíme stanovit konečné intervaly přirozených čísel, v nichž leží alespoň jedno prvočíslo. Je-li p přirozené číslo, pak nerovnost

$$p + 1 < q \leq 2.3.5.7.11. \dots p + 1$$

splňuje alespoň jedno prvočíslo q . Např. pro $p = 5$ platí nerovnost $6 < q \leq 31$, kterou splňuje dokonce osm prvočísel $q = 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$.

Můžeme také udat libovolně dlouhou konečnou posloupnost po sobě následujících čísel, z nichž ani jedno není prvočíslo, ale jsou to vesměs čísla složená. K číslu $n > 1$ lze stanovit těchto $n - 1$ po sobě bezprostředně jdoucích složených čísel:

$$n! + 2, n! + 3, n! + 4, n! + 5, \dots, n! + n.$$

První z těchto čísel je dělitelno dvěma, druhé třemi, další čtyřmi atd., až n -té je dělitelno číslem n . Např. pro $n = 6$ získáme těchto pět složených čísel: $6! + 2 = 722$, $6! + 3 = 723$, $6! + 4 = 724$, $6! + 5 = 725$, $6! + 6 = 726$. První, třetí a páté číslo je dělitelno dvěma, druhé třemi a čtvrté je dělitelno pěti. Připomínáme, že $n!$ se čte *n faktoriál* a platí $n! = 1.2.3.4.5. \dots (n - 1)n$, např. $6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$. Při hledání „úzkých“ intervalů, do kterých prvočísla nenáleží, použijeme tabelovaný přehled prvočísel, v němž jsme také vyhledali následující intervaly pětice po sobě jdoucích složených čísel menších než číslo 60: $\langle 24; 28 \rangle$, $\langle 32; 36 \rangle$, $\langle 48; 52 \rangle$, $\langle 54; 58 \rangle$.

O prvočíslech víme mnohem více, avšak zdaleka přece ne všechno. Neznáme vzorec, podle kterého by bylo možno všechna prvočísla vypočítat. Známý je vzorec petrohradského akademika *Leonarda Eulera* (1707—1783) $p_n = n^2 + n + 41$, který pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 38, 39$ udává různá prvočísla: $p_0 = 41$, $p_1 = 43$, $p_2 = 47$, $p_3 = 53$, $\dots$, $p_{39} = 1601$; p_{40} a p_{41} jsou složená čísla, p_{42} , p_{43} jsou prvočísla, $p_{44} = 43.47$ atd. Nevíme však, zda počet prvočísel tvaru p_n je nekonečný. Také nevíme, zda existuje polynom v proměnné n vyššího než prvního stupně, který vede k nekonečnému počtu prvočísel pro čísla n . Víme to však o dvojčlenech $2n + 1$, $4n + 1$, $4n + 3$, $6n + 1$, $6n + 5$.

Dodnes není dokázána hypotéza, že každé sudé číslo $n > 2$ lze vyjádřit jako součet dvou prvočísel i přesto, že o sudých číslech až do sta milionů to platí. Např. $1922 = 883 + 1039 = 181 + 1741 =$ atd. Existuje třicet různých součtů dvou prvočísel, které jsou rovny číslu 1922.

Sovětský matematik *I. M. Vinogradov* (nar. 1891) v nedávné době dokázal, že každé liché číslo větší než 5 lze vyjádřit jako součet tří prvo-

čísel. Např. $23 = 5 + 7 + 11 = 3 + 7 + 13$; $357 = 3 + 7 + 347 = 71 + 137 + 149 = 73 + 127 + 157$ atd.

Prvočíselnými dvojčaty rozumíme dvě prvočísla, jejichž rozdíl je 2. Uvedeme některá z nich: 3; 5, 5; 7, 11; 13, 17; 19, 29; 31, 41; 43, 59; 61, 71; 73, 101; 103, ..., 1931; 1933, 1949; 1951, Neví se, jestli existuje konečný počet prvočíselných dvojčat.

K známým větám z teorie čísel, která se zabývá prvočíslly, patří tzv. malá věta Fermatova. Vyslovil ji v roce 1640 francouzský matematik *Pierre de Fermat* (1601–1665), ale dokázal ji až v roce 1736 *L. Euler* a zní takto: Je-li n libovolné celé číslo a p prvočísllo, pak $n^p - n$ je dělitelné p . Někdy se tato věta uvádí takto: Pro každé celé číslo n nesoudělné s prvočíslem p je p dělitelem čísla $n^{p-1} - 1$. Všimněme si, že platí $(n^p - n) : n = n^{p-1} - 1$. Že např. číslo 5 dělí číslo $6^{5-1} - 1$ se stručně píše $5 \mid 6^{5-1} - 1$; obdobně se používá znak $\nmid$, který se čte *nedělí*, např. $7 \nmid 23$. Pro $n = 12$, $p = 2$ skutečně $2 \mid 12^2 - 12$ a pro $n = 25$, $p = 3$ rovněž $3 \mid 25^{3-1} - 1$.

Fermat se mylně domníval, že všechna čísla tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$, která nazýváme *Fermatova čísla*, jsou prvočísla. Skutečně $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$ jsou prvočísla. O čísle $F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ Euler zjistil, že je číslem složeným, rovná se součinu $641 \cdot 6\,700\,417$. Od roku 1880 také víme, že Fermatovo číslo F_6 je číslem složeným. Roku 1879 dokázal *Václav Šimerka* (1819–1887), že F_{12} je dělitelné číslem $7 \cdot 2^{14} + 1$ a F_{23} je dělitelné číslem $5 \cdot 2^{25} + 1$. Od roku 1886 je známo, že F_{36} má prvočíselného dělitele $5 \cdot 2^{38} + 1 = 2\,748\,779\,069\,441$. Novodobé počítače velmi usnadňují výpočty a jejich zásluhou dnes známe 46 složených Fermatových čísel. Největší z nich je F_{1945} , k jehož zápisu v desítkové číselné soustavě je zapotřebí více než 10^{582} číslic — je to číslo těžko představitelné. O čísle F_{1945} víme, že jeho nejmenším prvočíselným dělitelem je číslo $5 \cdot 2^{1947} + 1$. O čísle F_{17} a ovšem o řadě dalších Fermatových číslech dosud nevíme, zda jsou prvočíslly či čísly složenými. Také nevíme, jestli je Fermatových čísel, jež jsou prvočíslly, konečný počet.

Vpředu jsme se seznámili s malou Fermatovou větou. Čtenář si asi položí otázku, zda existuje a co říká velká Fermatova věta. Vlastně jde jen o Fermatem vyslovenou hypotézu, která dosud nebyla dokázána a zní: Pro žádné přirozené číslo $n > 2$ neexistují taková tři přirozená čísla x, y, z , aby platilo $x^n + y^n = z^n$. Zatím je dokázáno, že věta platí pro n , pro které platí nerovnosti $2 < n \leq 4002$. Obecný důkaz však podán nebyl. Pro $n = 2$ dostáváme rovnost $x^2 + y^2 = z^2$, která je splňována řadou trojic přirozených čísel, např. trojici 6, 8, 10. Čtenář asi ví, že pravoúhlé trojúhelníky, jejichž strany mají velikosti rovné celým číslům, jež vyhovují rovnosti $x^2 + y^2 = z^2$, se nazývají *trojúhelníky pythagorejské* (starořecký matematik a filosof *Pythagoras* žil v 6. století př. n. l.). Mezi pythagorejské trojúhelníky patří pravoúhlé troj-

úhelníky, jejichž strany mají velikosti 3, 4, 5 nebo 5, 12, 13 nebo 7, 24, 25 atd.

Čtenáři, který se chce dovědět více o prvočíslech, o Fermatových číslech a o mnohém jiném, doporučujeme, aby si prostudoval tyto dvě knížky, které vyšly v edici Škola mladých matematiků: č. 2 od Jiřího Sedláčka *Co víme o přirozených číslech* (vydáno v r. 1961, 1965 a 1977), č. 14 od Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých* (vydáno v r. 1966) a popř. č. 21 od Aloise Apfelbecka *Kongruence* (vydáno r. 1968).

O niektorých aplikáciách stredu úsečky pomocou vektorov

Doc. RNDr. PAVEL KRŠŇÁK, CSc., Pedagogická fakulta Banská Bystrica

V článku budeme vychádzať z pojmu stred úsečky, ktorý budeme definovať pomocou vektorov. Tým poukážeme na účelnosť použitia vektorov v niektorých vybraných statiach elementárnej geometrie.

Najskôr uvidíme prehľad niektorých základných vlastností vektorov, s ktorými budeme pracovať. Ďalej budeme predpokladať znalosť parametrického vyjadrenia priamky, úsečky a dvoch rovnobežných priamok. Pre rovinu a trojrozmerný priestor použijeme spoločné označenie π_n .

Usporiadanú dvojicu $[A, B]$ bodov $A, B \in \pi_n$ nazývame umiestením vektora $\mathbf{a}$ práve vtedy, keď platí $A + \mathbf{a} = B$. Ak $[A, B]$ je umiestením vektora $\mathbf{a}$, budeme písať $\mathbf{a} = B - A$.

Bez dôkazu uvidíme nasledovné vlastnosti:

- a) $\forall A, B \in \pi_n; \quad A + (B - A) = B$
- b) Ak $\mathbf{a} = B - A$, potom $-\mathbf{a} = -(B - A) = A - B$
- c) $\forall A, B, C \in \pi_n; \quad B - A = (B - C) + (C - A)$.

Pristúpime k menej zaužitej definícii stredu úsečky. Nech AB je úsečka. Bod S nazývame stred úsečky AB práve vtedy, keď

$$S - A = -(S - B) \quad (1)$$

Poznámka 1. Ak $A = B$, potom úsečka AB je nulová a pre jej stred S platí

$$S - A = -(S - A), \text{ čiže } S - A = \mathbf{0}, \text{ a teda } S = A.$$

V ďalšom budeme predpokladať, že úsečka AB je nenulová, čiže $A \neq B$. V tomto prípade je vždy $S \neq A$ a $S \neq B$.

Z parametrického vyjadrenia úsečky AB vyplýva, že ak S je jej stred, tak existuje číslo $t \in \mathbb{R}$, o ktorom platí

$$S = A + t(B - A), \quad 0 < t < 1 \quad (2)$$

Vypočítame číslo t .

(2) môžeme upraviť do tvaru

$$S - A = t[(B - S) + (S - A)]$$

alebo

$$(S - A)(1 - t) = t(B - S),$$

čiže

$$S - A = \frac{t}{t - 1} (S - B). \quad (3)$$

Porovnaním (1) a (3) dostaneme

$$\frac{t}{t - 1} = -1,$$

z čoho vyplýva $t = \frac{1}{2}$, čiže pre stred úsečky AB platí

$$S = A + \frac{1}{2} (B - A)$$

Obrátene, nech $S = A + \frac{1}{2} (B - A)$, potom

$$S - A = \frac{1}{2} [(B - S) + (S - A)],$$

čiže

$$S - A = \frac{1}{2} (B - S) + \frac{1}{2} (S - A), \text{ a teda } \frac{1}{2} (S - A) = -\frac{1}{2} (S - B)$$

alebo $S - A = -(S - B)$, preto S je podľa definície (1) stred úsečky AB . Z úvahy vyplýva:

Veta 1. Každá úsečka AB má práve jeden stred S , pre ktorý platí

$$S = A + \frac{1}{2} (B - A) \quad (4)$$

V článku použijeme tiež vlastnosť, ktorú uvedieme v nasledovnej vete.

Veta 2. Nech ABC je trojuholník, A_1 stred strany BC , potom

$$A_1 - A = \frac{1}{2} [(B - A) + (C - A)]$$

Dôkaz. (Obr. 1) Podľa definície súčtu vektorov (vlastnosť c)) platí

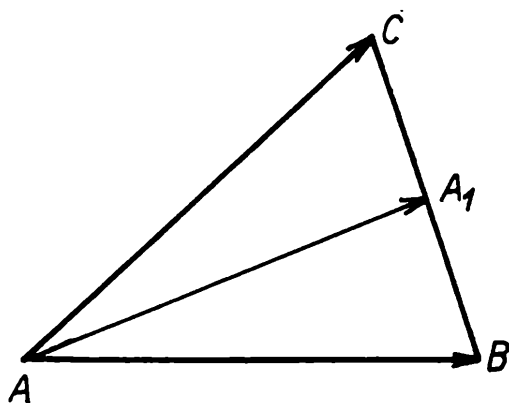
$$A_1 - A = (B - A) + (A_1 - B) \quad (5)$$
a pre stred A_1 úsečky BC

$$A_1 = B + \frac{1}{2}(C - B). \quad (6)$$

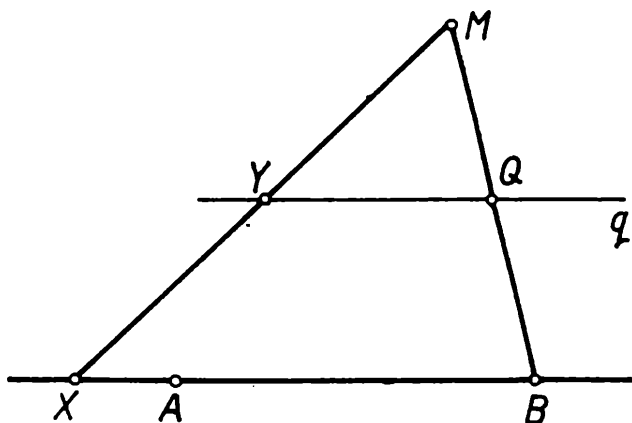
Ak dosadíme (6) do (5), dostaneme

$$\begin{aligned} A_1 - A &= (B - A) + \frac{1}{2}(C - B) = (B - A) + \frac{1}{2}[(C - A) + (A - B)] = \\ &= \frac{1}{2}[(B - A) + (C - A)], \text{ čo bolo treba dokázať.} \end{aligned}$$

Vyjadrenie stredú úsečky v tvare (4) môžeme použiť na vyšetovanie niektorých množín bodov danej vlastnosti alebo pri dôkaze, že dve úsečky (alebo viacej) majú spoločný stred a pod. Ukážeme príklady.



Obr. 1



Obr. 2

Príklad 1. V rovine je daná priamka AB a bod M , ktorý jej nepatrí. Vyšetrite množinu všetkých stredov Y úsečiek MX , kde X je ľubovoľný bod priamky AB .

Riešenie. (Obr. 2)

a) Nech Y je stred úsečky MX , kde $X \in AB$, potom podľa vety 1 platí

$$Y = M + \frac{1}{2}(X - M). \quad (7)$$

Pre každý bod $X \in AB$ platí

$$X = A + t(B - A), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Ak dosadíme (8) do (7), dostaneme

$$Y = M + \frac{1}{2}[A + t(B - A) - M]$$

alebo

$$\begin{aligned} Y &= M + \frac{1}{2} [(A - B) + (B - M) + t(B - A)] = \\ &= M + \frac{1}{2} (B - M) + \frac{1}{2} (t - 1)(B - A) \end{aligned}$$

Označme $M + \frac{1}{2} (B - M) = Q$ (podľa vety 1. je Q stred úsečky MB),

potom

$$Y = Q + \frac{1}{2} (t - 1)(B - A). \quad (9)$$

(9) je parametrické vyjadrenie priamky, ktorú označíme q . Je zrejmé, že $q \parallel AB$ (majú rovné smerové vektory) a prechádza stredom Q úsečky MB .

b) Nech $Y' \in q$, potom sa dá vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} Y' &= Q + \frac{1}{2} (t - 1)(B - A) = M + \frac{1}{2} (B - M) + \frac{1}{2} (t - 1)(B - A) = \\ &= M + \frac{1}{2} [(B - M) + t(B - A) + (A - B)] = \\ &= M + \frac{1}{2} [A + t(B - A) - M] = M + \frac{1}{2} (X - M), \end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že Y' je stred úsečky MX .

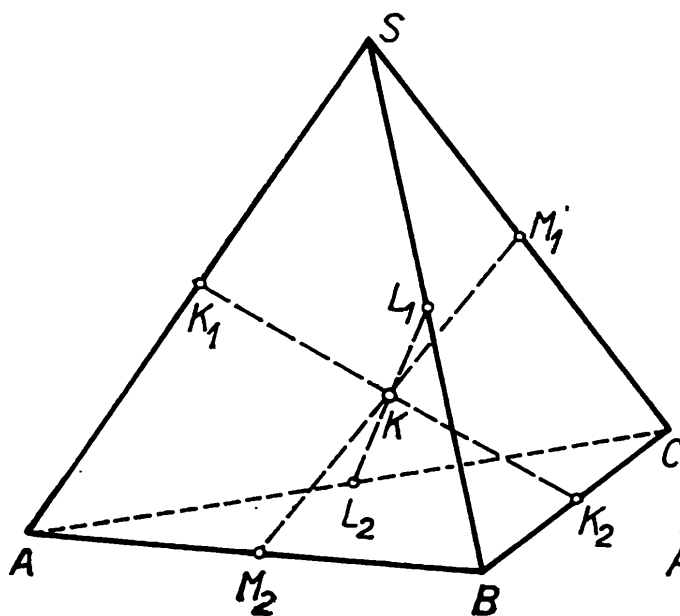
Záver: Množina stredov všetkých úsečiek MX , kde $X \in AB$, je priamka q prechádzajúca stredom Q úsečky MB a je rovnobežná s priamkou AB .

Príklad 2. Dokážte, že úsečky spájajúce stredy protilahlých hrán štvorstena $ABCS$ sa navzájom rozpoľujú.

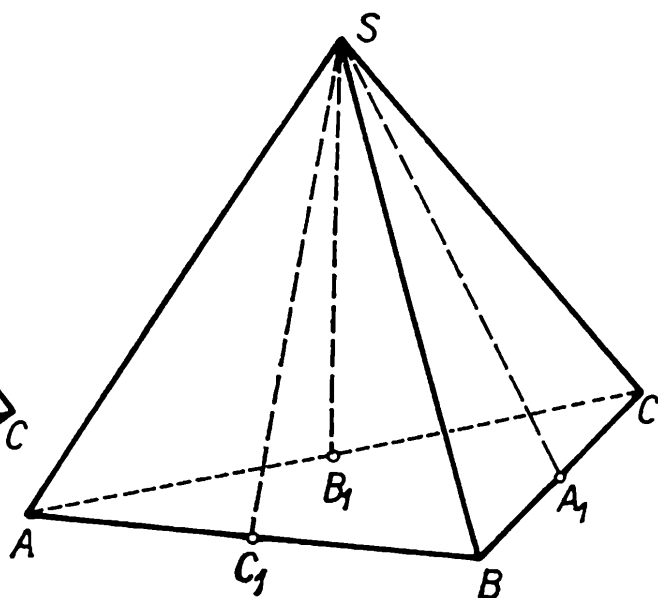
Dôkaz. (Obr. 3) Nech K_1K_2 , L_1L_2 , M_1M_2 sú úsečky spájajúce stredy protilahlých hrán štvorstena $ABCS$. Pre dokázanie uvedenej vlastnosti štvorstena stačí, ak dokážeme, že stredy K , L , M úsečiek K_1K_2 , L_1L_2 , M_1M_2 sú splývajúce body.

Pretože K_1 , K_2 , resp. L_1 , L_2 , resp. M_1 , M_2 sú stredy protilahlých hrán AS , BC , resp. BS , AC , resp. CS , AB , dajú sa podľa vety 1. vyjadriť v tvare

$$K_1 = S + \frac{1}{2} (A - S), \quad K_2 = B + \frac{1}{2} (C - B), \quad (10)$$



Obr. 3



Obr. 4

$$L_1 = S + \frac{1}{2}(B - S), \quad L_2 = C + \frac{1}{2}(A - C), \quad (11)$$

$$M_1 = S + \frac{1}{2}(C - S), \quad M_2 = A + \frac{1}{2}(B - A) \quad (12)$$

Podľa vety 1. tiež pre stred K úsečky K_1K_2 platí

$$K = K_1 + \frac{1}{2}(K_2 - K_1). \quad (13)$$

Dosadením (10) do (13) dostaneme

$$\begin{aligned} K &= S + \frac{1}{2}(A - S) + \frac{1}{2}[(B - S) + \frac{1}{2}(C - B) - \frac{1}{2}(A - S)] = \\ &= S + \frac{1}{4}(A - S) + \frac{1}{2}(B - S) + \frac{1}{4}[(C - S) + (S - B)] \end{aligned}$$

a po úprave

$$K = S + \frac{1}{4}[(A - S) + (B - S) + (C - S)]. \quad (14)$$

Pre stred L úsečky L_1L_2 platí

$$L = L_1 + \frac{1}{2}(L_2 - L_1). \quad (15)$$

Dosadením (11) do (15) a po úprave dostaneme

$$L = S + \frac{1}{4}[(A - S) + (B - S) + (C - S)]. \quad (16)$$

Skorej uvedeným spôsobom zistíme, že pre stred M úsečky M_1M_2 platí

$$M = S + \frac{1}{4}[(A - S) + (B - S) + (C - S)]. \quad (17)$$

Z vyjadrení (14), (16) a (17) je zrejmé, že $K = L = M$.

Poznámka 2. Ak štvorsten $ABCS$ doplníme na štvorboký hranol s hranami SA, SB, SC , potom jeho telesová uhlopriečka prechádzajúca vrcholom S obsahuje bod K — priesečník spojnic stredov protilahlých hrán štvorstena $ABCS$. Koncový bod vektora $4(K - S) = (A - S) + (B - S) + (C - S)$ je protilahlý vrchol k vrcholu S uvažovaného štvorbokého hranola.

[Tvrdenie vyplýva z nasledovného: Ak $ABCD A'B'C'D'$ je hranol, v ktorom $B - A = \mathbf{a}$, $D - A = \mathbf{b}$, $A' - A = \mathbf{c}$, potom $C' - A = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.]

V nasledujúcom príklade ukážeme použitie vety 2.

Príklad 3. Nech $ABCS$ je štvorsten a A_1, B_1, C_1 sú postupne stredy hrán BC, AC, AB . Nech $\mathbf{H}$ je štvorboký hranol s hranami SA, SB, SC a $\mathbf{H}_1$ štvorboký hranol s hranami SA_1, SB_1, SC_1 , potom ich protilahlé vrcholy V, V_1 k vrcholu S sú splývajúce body. Dokážte!

Dôkaz. (Obr. 4) Pre väčšiu prehľadnosť označme vektory $A - S = \mathbf{a}$, $B - S = \mathbf{b}$, $C - S = \mathbf{c}$. Podľa vety 2. môžeme vektory $A_1 - S$, $B_1 - S$, $C_1 - S$ vyjadriť v tvare

$$A_1 - S = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad B_1 - S = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \quad C_1 - S = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Pre vektory $V - S$, $V_1 - S$ platí:

$$\begin{aligned} V - S &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \\ V_1 - S &= (A_1 - S) + (B_1 - S) + (C_1 - S) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \end{aligned}$$

čiže $V - S = V_1 - S$, a preto $V = V_1$.

Je zrejmé, že problematika uvedená vo všetkých troch príkladoch sa dá riešiť aj inými metódami. Zámerne bola pri uvedených príkladoch použitá metóda riešenia pomocou vektorov, čím sa tieto stali jednoduchšie a prehľadnejšie.

0 maticích

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

V tomto čísle Rozhledů je uveřejněn článek *Maticový tvar Kirchhoffových zákonů*. Těžko jej však mohou studovat čtenáři, kterým se při vyslovení slova matice vybaví pouze představa běžné strojní součástky nebo instituce (např. dodnes existující Matice slovenské v Martině). Ani jeden z těchto významů se ke Kirchhoffovým zákonům příliš nehodí. Musí tedy existovat ještě nějaký další význam slova matice. Právě jím, tj. matematickým pojmem matice, se budeme v tomto článku zabývat.

Běžně známý pojem je uspořádaná n -tice čísel*), kde n je přirozené číslo. Způsoby zápisu takových skupin čísel také jistě znáte. Např. uspořádanou čtveřici čísel 1, 7, -2, 0 zapisujeme

$$[1, 7, -2, 0] \quad \text{nebo} \quad (1, 7, -2, 0)$$

Zřídka se užívá sloupcového zápisu

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Snadné je zobecnění, při němž docházíme k uspořádaným n -ticím, jejichž prvky nejsou pouze čísla. Mohou jimi být např. i uspořádané skupiny čísel.

Mějme např. tři uspořádané pětice čísel

$$[1, 3, 7, -1, 8], [6, 1, \sqrt{2}, 4, 0], [0, 0, \pi, -3, 4] \quad (1)$$

Jestliže uspořádanou trojici těchto petic napíšeme sloupcově, pak dostáváme zápis

$$\begin{bmatrix} [1, & 3, & 7, & -1, & 8] \\ [6, & 1, & \sqrt{2}, & 4, & 0] \\ [0, & 0, & \pi, & -3, & 4] \end{bmatrix}.$$

Vynecháme-li zbytečné závorky, získáme pravoúhelníkovou tabulku

$$\begin{bmatrix} 1, & 3, & 7, & -1, & 8 \\ 6, & 1, & \sqrt{2}, & 4, & 0 \\ 0, & 0, & \pi, & -3, & 4 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

*) V celém článku budeme číslem rozumět výhradně reálné číslo.

v níž jsou čísla uspořádána nejen v řádcích, ale také ve sloupcích. Tabulky tohoto typu se nazývají *maticemi*. Při zápisu matic se užívá nejen hranatých závorek; zápis matice (2) by mohl mít též tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & -1 & 8 \\ 6 & 1 & \sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 7 & -1 & 8 \\ 6 & 1 & \sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & -3 & 4 \end{array} \right\|$$

V dalším budeme užívat posledního způsobu zápisu.

Jsou-li v matici desetinná čísla, pak je případně oddělujeme středníky. Nehrozí-li však nedorozumění, pak čárky ani středníky mezi čísly nepíšeme. Matice se někdy zapisují i složitěji, tak je tomu např. v článku o Kirchhoffových zákonech.

Kdybychom zapsali pětice (1) sloupcově, tj.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

potom bychom řádkovým zápisem jejich uspořádané trojice došli k matici

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & \sqrt{2} & \pi \\ -1 & 4 & -3 \\ 8 & 0 & 4 \end{array} \right\|. \quad (3)$$

Porovnáme-li matice (2) a (3) vidíme, že řádky matice (2) jsou sloupce matice (3). Obdobně řádky matice (3) jsou sloupce v matici (2). Přitom uvažujeme-li pořadí řádek shora dolů a sloupců zleva doprava, pak v maticích (2) a (3) mají navzájem si odpovídající řádky a sloupce stejná pořadová čísla, např. 1. řádek matice (2) je 1. sloupcem matice (3), 4. sloupec matice (2) je 4. řádkem matice (3) apod. O maticích, které mají tyto vlastnosti, říkáme, že jsou navzájem *transponované*. Postup, kterým k dané matici nalezneme transponovanou matici, je snad zřejmý. Dvě navzájem transponované matice nemusí být různé, např. transponováním matice

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 7 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \end{array} \right\| \quad (4)$$

dostaneme tutéž matici. Taková *matice* se nazývá *symetrická*. O jakou symetrii jde, každý snadno objeví. Za povšimnutí stojí, že každá *symetrická matice* je *čtvercová*, tj. má týž počet řádků jako sloupců. Ovšem každá *čtvercová matice* nemusí být *symetrická*; o tom se lze přesvědčit, když např. v matici (4) nahradíme jednu nulu třeba číslem 8.

Má-li matice k řádků a n sloupců, říkáme, že matice je typu (k, n) . Zřejmě obsahuje $k \cdot n$ prvků. Každý prvek náleží právě do jednoho řádku a jednoho sloupce; pořadovými čísly tohoto řádku (počítáno shora dolů) a příslušného sloupce (počítáno zleva doprava) je tedy jeho poloha v matici jednoznačně určena. Abychom v obecných úvahách nepotřebovali velké množství různých písmen, užívá se dvou indexů.

Např. matici typu (k, n) můžeme zapsat takto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{kn} \end{vmatrix}.$$

První *index* se nazývá *řádkový*, druhý *sloupcový*. Oba indexy se čtou tak, jako by byly odděleny čárkou, tj. a_{11} čteme: „ a jedna jedna“; a_{12} čteme: „ a jedna dvě“ atd. Čárka mezi indexy se píše jen tehdy, hrozí-li nebezpečí nesprávného čtení, např. píšeme $a_{k-2, 3}$ a nikoli a_{k-23} .

Řádkové a sloupcové zápisy uspořádaných n -tic, které jsme uvedli na začátku článku, lze také považovat za matice. Jsou typu $(1, n)$ resp. $(n, 1)$. Z úvah se nevyklučují ani matice typu $(1, 1)$.

Transponovaná matice k matici typu (k, n) je zřejmě matice typu (n, k) .

Matice se užívají při řešení problémů nejen v matematice, ale i ve fyzice, technice, ekonomii a dalších oborech. Je to způsobeno tím, že matice nejsou pouze jakési tabulky, do nichž se zapisují údaje získané třeba měřením. S maticemi lze totiž počítat obdobně jako s čísly. V tomto článku se seznámíme se sčítáním matic, s násobením matice číslem a s násobením matice maticí. Zatím se nebudeme zabývat funkcemi, jejichž definiční obory jsou množiny matic.

Dříve než začneme hovořit o početních operacích s maticemi, je třeba se dohodnout, jaké matice budeme považovat za sobě rovné. Definice *rovnosti matic* je velmi jednoduchá. Stručně lze říci: Dvě matice se sobě rovnají tehdy a jen tehdy, jsou-li zcela stejné. Tato stručnost má ovšem úskalí. Význam slova „stejný“ je totiž dost neurčitý. Proto raději nebudeme skoupiť na slovo a vyslovíme definici rovnosti matic obšírněji a ovšem přesněji.

Matice

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{hm} \end{array} \right\| \quad \mathbf{a} \quad \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{kn} \end{array} \right\|$$

se sobě rovnají, což píšeme

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{hm} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{kn} \end{array} \right\|,$$

právě když jsou téhož typu (tj. $h = k$ a $m = n$) a pro každou dvojici indexů $i = 1, 2, \dots, h$ a $j = 1, 2, \dots, m$ platí

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Psaní matice bývá pracné. Je tedy výhodné pro ni užívat jediný znak. Matice se obvykle označují velkými tiskacími latinkovými písmeny; v tištěném textu polotučnými, např. **A**, **B** apod. Někdy se též užívá zápisů (a_{ij}) , (b_{rs}) apod.

Jednu operaci s maticemi jsme již poznali, a to transponování matic. Transponovaná matice k matici **A** se označuje **A'**, popř. ${}^t\mathbf{A}$ nebo $\mathbf{A}^T$. Zřejmě platí

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A};$$

přesvědčte se o tom.

Nyní vyslovíme definice dalších operací s maticemi.

Sčítání matic se zavádí jen pro matice téhož typu. Použijeme-li pro tuto operaci obvyklý znak $+$, pak platí

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2k} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nk} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & b_{12} & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2k} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nk} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12}, & a_{1k} + b_{1k} \\ a_{21} + b_{21}, & a_{22} + b_{22}, & a_{2k} + b_{2k} \\ a_{n1} + b_{n1}, & a_{n2} + b_{n2}, & a_{nk} + b_{nk} \end{array} \right\|.$$

Velmi snadno se zjistí, že sčítání matic je komutativní a asociativní. Lze najít i matice, které se — pokud příslušný součet existuje — chovají

jako nula při sčítání čísel. Jsou to tzv. *nulové matice*, v nichž jsou všechny prvky rovny nule. Např. platí

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Lze hovořit i o *matici opačné* k dané matici, což si čtenář jistě sám rozmyslí.

Další operací je *násobení matice číslem*. Tato operace se definuje takto:

$$c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2k} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{1k} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{2k} \\ ca_{n1} & ca_{n2} & ca_{nk} \end{vmatrix}.$$

I zde lze nalézt a dokázat vlastnosti analogické vlastnostem násobení čísel. Ovšem je tu zásadní rozdíl v tom, že oba činitele nejsou rovnocenné — první je číslo a druhý je matice. Snadno lze dokázat, že pro každá dvě čísla c, d a každé dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ téhož typu platí:

$$\begin{aligned} c \cdot (d \cdot \mathbf{A}) &= (cd) \cdot \mathbf{A}, \\ c \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c \cdot \mathbf{A} + c \cdot \mathbf{B}, \\ (c + d) \cdot \mathbf{A} &= c \cdot \mathbf{A} + d \cdot \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Dále se snadno ukáže, že opačnou maticí k matici $\mathbf{A}$ je matice $(-1) \cdot \mathbf{A}$.

Násobení matic (tj. násobení matice maticí) je dost komplikované, a proto si je před vyslovením definice vysvětlíme na příkladě. (Čtenář, který si chce hned přecíst definici násobení, nechť přeskočí následující čtyři odstavce.)

Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, jež chceme znásobit, si nemůžeme volit zcela libovolně. Chceme-li je násobit v pořadí $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, pak matice $\mathbf{A}$ musí mít v každém řádku též počet prvků, jako matice $\mathbf{B}$ v každém sloupci, tj. jinak řečeno matice $\mathbf{A}$ musí mít též počet sloupců jako matice $\mathbf{B}$ řádků. Tuto vlastnost mají např. matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & -3 & 3 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Užijeme-li obvyklé symboliky, pak jejich součin můžeme psát $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Nechť je jím matice $\mathbf{C}$. Prvek c_{11} této matice je určen prvky 1. řádku matice $\mathbf{A}$ a prvky 1. sloupce matice $\mathbf{B}$. Při výpočtu postupujeme takto:

$$c_{11} = (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 1 = -11$$

(Tomu, kdo zná vektorovou algebru, to jistě připomíná výpočet skalárního součinu vektorů $(-3, 4)$ a $(5, 1)$ při ortonormální čili kartézské bázi.)

K výpočtu prvku c_{12} použijeme prvků 1. řádku matice **A** a prvků 2. sloupce matice **B**. Obdobně jako výše dostáváme:

$$c_{12} = (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot 8 = 38.$$

Před dalším počítáním podrobněji popišme postup, kterým se nalezne prvek c_{ij} matice **C** = **A** · **B**. Z matice **A** se bere řádka a z matice **B** sloupec. Řádkový index prvku c_{ij} , tj. index i , určuje, který řádek matice **A** máme použít, a sloupcový index prvku c_{ij} , tj. index j , říká, který sloupec máme vzít v matici **B**. Prvek c_{ij} vypočteme jako součet všech součinů dvou činitelů, z nichž jeden je z vybrané řádky a druhý z vybraného sloupce, přičemž oba mají v příslušném řádku i sloupci totéž pořadové číslo (počítané v řádku zleva doprava a ve sloupci shora dolů).

V našem případě může tedy být řádkový index prvku c_{ij} nejvýše tři a sloupcový index nejvýše čtyři. Matice **C** bude typu $(3, 4)$. Po vypočtení všech prvků c_{ij} dostáváme:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -11 & 38 & -12 & -6 \\ 11 & 4 & -3 & 15 \\ 7 & 56 & -21 & 21 \end{vmatrix}.$$

Nyní už snadno vyslovíme definici součinu matic. Nechť **A** a **B** jsou dvě libovolné matice, které jsou po řadě typů (n, k) a (k, m) , a nechť

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ik} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nk} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} & b_{2m} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{kj} & b_{km} \end{vmatrix}.$$

Pak *součinem* těchto matic v pořadí **A**, **B** nazýváme matici

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2m} \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{nm} \end{vmatrix},$$

která je typu (n, m) a pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj},$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$ a $j = 1, 2, \dots, m$. Užíváme zápisu **C** = **A** · **B**, popř. **C** = **AB**.

Z definice násobení matic je zřejmé, že z existence součinu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ neplyne existence součinu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Např. pro matice (5) součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existuje, avšak součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ nikoli. I když pro nějaké matice oba součiny existují, nemusí být sobě rovny, např.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Násobení matic tedy není komutativní. To však neznamena, že by pro žádné dvě matice $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ nemohlo platit $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$. Přesvědčte se o tom znásobením matic

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$

v obou možných pořadích. *Nutnou podmínkou pro rovnost $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$ zřejmě je, aby matice $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ byly čtvercové téhož typu. Tato podmínka však není postačující; vhodný příklad, který to potvrzuje, jistě čtenář sám nalezne.*

Až na komutativnost má násobení matic další běžné vlastnosti, které odpovídají vlastnostem násobení v oboru reálných čísel. Mají-li pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ smysl příslušné operace, pak např. platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}, \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \\ (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \mathbf{A} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Násobení je tedy asociativní a distributivní zleva i zprava vzhledem ke sčítání.

Na závěr článku ukážeme jedno z použití matic. Bude jím *maticový zápis soustavy lineárních rovnic*. Máme-li např. soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= -6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &+ 5x_4 = -13 \end{aligned}$$

s neznámými x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , pak ji můžeme napsat pomocí matic jako jedinou rovnici

$$\begin{vmatrix} 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 \\ x_1 - 2x_2 \quad \quad + 5x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 \\ 7 \\ -13 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Tento zápis však není zajímavý ani přehledný. Takovým se stane až po užití násobení matic. Prohlédneme-li si prvky matice na levé straně rovnice (6), pak vidíme, že rovnice (6) je ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 \\ 7 \\ -13 \end{vmatrix}.$$

Právě takových maticových zápisů soustav lineárních rovnic se užívá v článku o Kirchhoffových zákonech. Matice vlevo je sestavena koeficientů levých stran rovnic dané soustavy a nazývá se *maticí soustavy*.

Čtenáři, v nichž tento článek vzbudil zájem o matice, naleznou další poučení např. v knížkách:

Jelínek M.: Matice, Praha, SPN 1976,

Kemeny-Snell-Thompson: Úvod do finitní matematiky, Praha, SNTL 1971 (překlad z angličtiny),

Chudý J.: Determinanty a matice, Praha SNTL 1971,

Schmidtmayer J.: Maticový počet a jeho použití v technice, Praha, SNTL 1974.

fyzika

.....

Maticový tvar Kirchhoffových zákonů

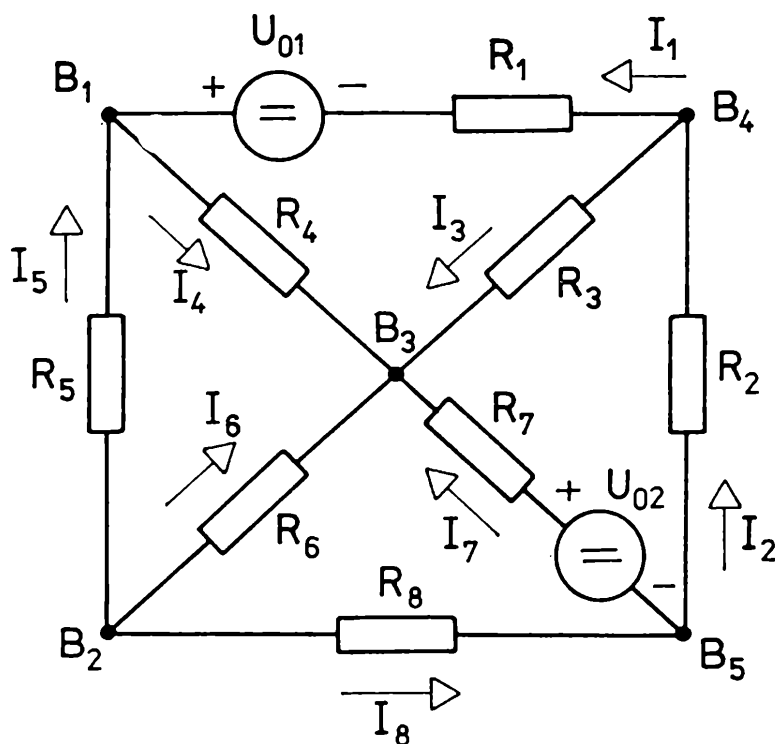
Ing. JOSEF KŮS — Ing. JIŘÍ MYSLÍK, CSc.

Čtenáři jsou jistě dobře známy Kirchhoffovy zákony. V tomto článku ukážeme, jak tyto zákony vyjádřit v maticovém tvaru. Toto vyjádření Kirchhoffových zákonů je potřebné například při odvozování algoritmů pro analýzu elektrických obvodů samočinným počítačem. Omezíme se nejprve na stejnosměrné obvody; na závěr článku pak výsledky zobecníme.

Zabývejme se jednoduchým obvodem nakresleným na obr. 1. V obvodu jsou očíslovány všechny *uzly*, ve kterých se stýkají více než dvě

větve¹⁾. Větve jsou orientovány čítacími šipkami proudů a očíslovány. Na pořadí číslování uzlů a větví a na způsob orientace větví neklademe zatím žádné požadavky.

Nyní vyjádříme zapojení obvodu pomocí tzv. incidenční matice větví a uzlů, kterou označíme $\mathbf{A}'$ a její prvky a'_{ij} . Nejprve však zavedeme dohodu: Jestliže větev v_i bude incidovat s uzlem B_j a bude orientována



Obr. 1

ven z uzlu (tj. uzel B_j bude počátečním uzlem větve v_i), položíme příslušný prvek matice $\mathbf{A}'$ roven 1. Bude-li větev v_i incidovat s uzlem B_j a bude orientována do tohoto uzlu (tj. uzel B_j bude koncovým uzlem větve v_i), položíme příslušný prvek matice $\mathbf{A}'$ roven -1 . Konečně v případě, kdy větev v_i s uzlem B_j incidovat nebude, položíme příslušný prvek matice $\mathbf{A}'$ roven nule. Protože v matici $\mathbf{A}'$ bude zřejmě mnoho nulových prvků, rozšířme naši dohodu dále o to, že nulové prvky psát nebudeme. Zdůrazněme, že jsme mohli zavést i jinou dohodu o prvcích matice $\mathbf{A}'$. Zavedená dohoda nám však poskytne řadu výhod.

Nyní již snadno napíšeme matici $\mathbf{A}'$ pro obvod nakreslený na obr. 1. Dodržme přitom zásadu, že 1. řádek přiřadíme 1. větvi, 2. řádek 2. větvi atd. Podobně 1. sloupec přiřadíme 1. uzlu, 2. sloupec 2. uzlu atd.

¹⁾ Uvažujeme tedy pouze uzly vyššího než druhého stupně. Důvod je zřejmý, protože aplikací 1. K. z. na uzel 2. stupně dostáváme samozřejmý závěr, že stejný proud, který do uzlu jednou větví vtéká, druhou opět vytéká.

$\mathbf{A}' =$						$\mathbf{A} =$					$\mathbf{I} =$	
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		B_1	B_2	B_3	B_4		
V_1	-1			1		V_1	-1			1	V_1	I_1
V_2				-1	1	V_2				-1	V_2	I_2
V_3			-1	1		V_3			-1	1	V_3	I_3
V_4	1		-1			V_4	1		-1		V_4	I_4
V_5	-1	1				V_5	-1	1			V_5	I_5
V_6		1	-1			V_6		1	-1		V_6	I_6
V_7			-1		1	V_7			-1		V_7	I_7
V_8		1			-1	V_8		1			V_8	I_8

Všimněte si, že v každém řádku matice $\mathbf{A}'$ jsou pouze dva nenulové prvky, a to vždy 1 a -1 . Lze dokázat, že tato skutečnost platí pro matici $\mathbf{A}'$ libovolného elektrického obvodu. Dále bez důkazu uvedme, že přiřazení matice $\mathbf{A}'$ — obvod je vzájemně jednoznačné.

Vraťme se však k poznatku, že v každém řádku matice $\mathbf{A}'$ jsou vždy pouze dva nenulové prvky, a to 1 a -1 . Můžeme tedy vynechat libovolný sloupec matice $\mathbf{A}'$, protože jsme schopni tento sloupec kdykoliv doplnit. Vynechme například sloupec příslušející uzlu B_5 . Uzel, pro který jsme sloupec vynechali, nazveme referenční, ostatní uzly pak nezávislé. Původ těchto názvů ukážeme dále. Vzniklou matici označme $\mathbf{A}$ a nazvěme ji incidenční matice větví a nezávislých uzlů.

Nyní napíšme pro jednotlivé nezávislé uzly 1. K. z. (připomeňme, že dodržíme dohodu o znaménku proudů, která byla zavedena v článku otištěném v RMF č. 1, roč. 58).

$$\begin{aligned}
 B_1: & -I_1 + I_4 - I_5 = 0, \\
 B_2: & I_5 + I_6 + I_8 = 0, \\
 B_3: & -I_3 - I_4 - I_6 - I_7 = 0, \\
 B_4: & I_1 - I_2 + I_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Kdybychom formulovali 1. K. z. i pro referenční uzel B_5 , dostali bychom rovnici, která by byla lineární kombinací rovnic předchozích,

jak se může čtenář sám přesvědčit. Obecně platí, že nezávislé uzly obvodu jsou takové uzly, pro které dostaneme aplikací 1. K. z. soustavu lineárně nezávislých rovnic.

Nyní zavedme tzv. matici větvových proudů **I**. Tato matice je sloupcová, počet jejích řádků je roven počtu větví a její prvky jsou rovny větvovým proudům. Pro obvod z obr. 1 je tato matice na str. 163.

Zapišme výše uvedenou soustavu rovnic v maticovém tvaru

-1			1	-1			
				1	1		1
		-1	-1		-1	-1	
1	-1	1					

I_1
I_2
I_3
I_4
I_5
I_6
I_7
I_8

 $= \mathbf{0}.$

Prohlédneme-li si blíže matici soustavy, vidíme, že je to transponovaná incidenční matice větví a nezávislých uzlů, tj. ${}^t\mathbf{A}$. Nejen pro elektrický obvod námi uvažovaný, ale jak lze dokázat pro libovolný obvod, můžeme zapsat 1. K. z. maticově ve tvaru

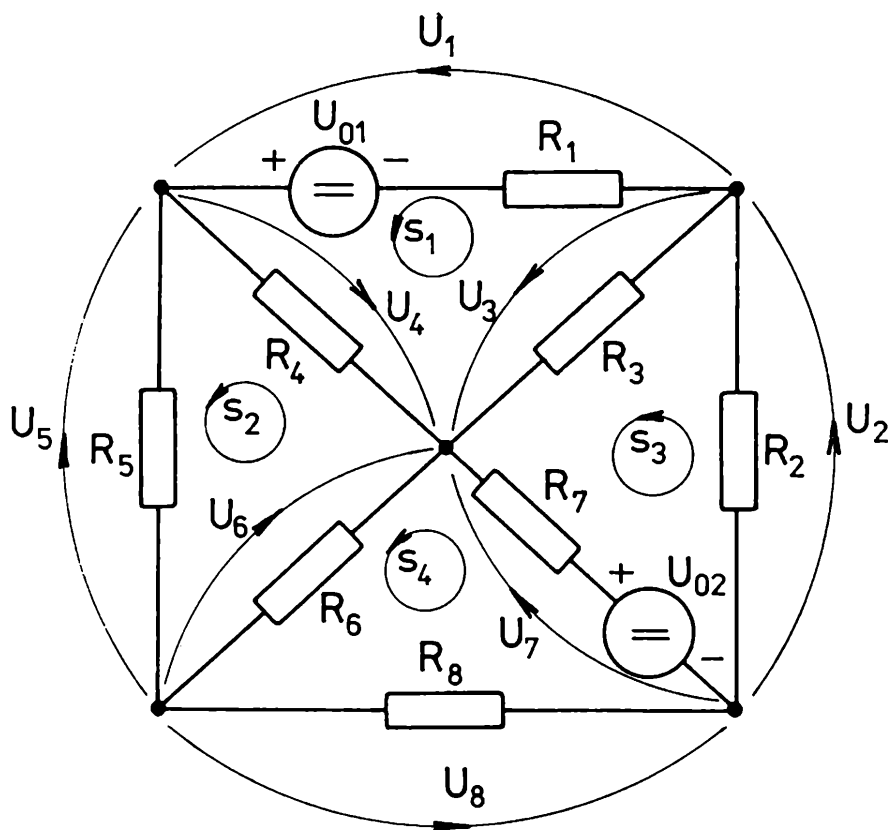
$${}^t\mathbf{AI} = \mathbf{0}.$$

Dále ukážeme maticový tvar 2. K. z. Budeme se opět zabývat stejným obvodem, ale tentokrát bude výhodnější orientovat a očíslovat jeho větve pomocí větvových úbytků napětí, jak je nakresleno na obr. 2.

V obvodu zavedeme soustavu nezávislých smyček např. tak, jak je nakresleno na obr. 2. Nezávislé smyčky jsou takové smyčky, pro které aplikací 2. K. z. dostaneme soustavu lineárně nezávislých rovnic. Připomeňme, že jejich počet se rovná počtu nezávislých větví, tj. větví, které nejsou součástí stromu obvodu. Strom obvodu je část obvodu, která je tvořena všemi uzly propojenými větvemi tak, že nevznikne žádná smyčka. Lze vyslovit obecné pravidlo pro zavedení nezávislých smyček, ovšem v tomto článku ponecháme celou záležitost čtenářově intuici. Rovněž pro orientaci a očíslování smyček nebudeme zavádět žádný předpis. Budeme je orientovat a číslovat libovolně, např. tak, jak je uvedeno na obr. 2.

Zavedeme incidenční matici **B**, která nás bude informovat o incidenci větví a nezávislých smyček. Počet řádků této matice bude roven počtu větví, počet sloupců pak počtu nezávislých smyček. Opět přiřadíme

1. řádek 1. větvi atd., 1. sloupec 1. smyčky atd. Incidenci větví a smyček vyjádříme takto: Bude-li větev v_i součástí smyčky s_j a orientace větve bude souhlasná s orientací smyčky, položíme příslušný prvek matice **B** roven 1, bude-li orientace opačná, -1 . Nebude-li větev v_i se smyčkou s_j incidovat, položíme příslušný prvek matice **B** roven 0 a podobně jako u matice **A** nulové prvky zapisovat nebudeme. Pro obvod nakreslený na obr. 2 dostáváme matici **B**, jež je na str. 166. (Doplňte si $b_{74} = 1$.)



Obr. 2

Přesvědčte se sami, že platí vztahy ${}^t\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ a ${}^t\mathbf{BA} = \mathbf{0}$. Lze dokázat, že tyto vztahy mezi maticemi **A** a **B** platí pro libovolné obvody.

Bez důkazu dále uvedme, že přiřazení obvod — matice **B** je vždy jednoznačné, avšak přiřazení matice **B** — obvod jednoznačné není.

Zapišme nyní pro nezávislé smyčky obvodu na obr.2 2. K. z.:

$$s_1: U_1 - U_3 + U_4 = 0,$$

$$s_2: -U_4 - U_5 + U_6 = 0,$$

$$s_3: U_2 + U_3 - U_7 = 0,$$

$$s_4: -U_6 + U_7 + U_8 = 0.$$

Zavedme matici větvových úbytků napětí **U** analogicky jako matici větvových proudů **I**. Pro obvod z obr. 2 je na následující stránce.

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \begin{array}{c|c|c|c} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline -1 & & 1 & \\ \hline 1 & -1 & & \\ \hline & -1 & & \\ \hline & 1 & & -1 \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{U} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \begin{array}{c|c} U_1 \\ \hline U_2 \\ \hline U_3 \\ \hline U_4 \\ \hline U_5 \\ \hline U_6 \\ \hline U_7 \\ \hline U_8 \end{array}$$

Soustavu rovnic získanou aplikací 2. K. z. na nezávislé smyčky obvodu nakresleného na obr. 2 snadno upravíme na tvar

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & & -1 & 1 & & & & \\ \hline & & & -1 & -1 & 1 & & \\ \hline & 1 & 1 & & & & -1 & \\ \hline & & & & & -1 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c|c} U_1 \\ \hline U_2 \\ \hline U_3 \\ \hline U_4 \\ \hline U_5 \\ \hline U_6 \\ \hline U_7 \\ \hline U_8 \end{array} = 0.$$

Nejen pro námi uvažovaný obvod, ale obecně lze zapsat 2. K. z. maticově ve tvaru

$${}^t\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{0}.$$

Připomeňme, že K. z. platí pro napětí a proudy vyjádřené okamžitými hodnotami (tedy i pro obvody střídavé) a komplexními efektivními nebo komplexními maximálními hodnotami. K. z. lze samozřejmě pro tyto hodnoty maticově vyjádřit formálně stejně, jak bylo dříve uvedeno.

Maticově lze vyjádřit i zobecněný 1. K. z. (viz RMF č. 1, roč. 58). Ponecháme čtenáři, aby se o to pokusil sám. Bude k tomu potřebovat incidenční matici větví a J křivek.

V úvodu jsme se zmínili o tom, že maticové vyjádření K. z. je potřebné například pro odvození univerzálních algoritmů pro analýzu elektrických obvodů samočinným počítačem. Toto odvození je principiálně velmi jednoduché a názorné. Protože analogicky lze odvodit algoritmy i pro analýzu jiných fyzikálních systémů (např. mechanických), uvedeme ho v některém z dalších článků.

astronomie

Nový pohled na Jupiter

RNDr. RENÉ HUDEC, Praha

Při průletu sondy Voyager 1 kolem největší planety naší sluneční soustavy, Jupitera, byly získány nové zajímavosti. První předběžné výsledky byly již zveřejněny, zmiňme se proto alespoň o těch nejdůležitějších. Zpracování údajů z paluby Voyageru 1 však stále ještě pokračuje, a můžeme tedy očekávat další podrobnosti.

Sonda se k Jupiteru nejvíce přiblížila dne 5. 3. 1979, a to až na vzdálenost 280 000 km. Snímky pořízené z této blízkosti mají rozlišení okolo 6 km. Stanice rovněž snímkovala Jupiterovy měsíce Io, Europa, Ganiméd a Callisto. Nejvíce se se Voyager 1 přiblížil k měsíčku Io — na vzdálenost pouhých 25 000 km, takže na snímcích bylo možno rozlišit podrobnosti větší než asi 500 m. A právě měsíček Io poskytl jedno z největších překvapení — na jeho povrchu totiž bylo nalezeno minimálně pět oblastí, v nichž se vyskytují činné sopky. Je to první aktivní vulkanická činnost mimo Zemi — dříve jsme se již setkali se sopkami např. na Marsu, ale ty byly již vyhaslé. Měření v infračerveném oboru z paluby sondy ukazují, že vulkanické oblasti na měsíčku Io jsou zhruba kruhové o průměru 200 km a že jejich průměrná teplota je asi o 200 stupňů vyšší než teplota okolí. Ale vraťme se k samotnému Jupiteru, i on nám připravil nečekané překvapení. Na snímku pořízeném ze vzdálenosti 1,2 miliónu km od planety byl totiž nalezen prstenec tenčí než 30 km a sahající až do vzdálenosti 128 300 km od Jupitera. Na základě údajů z Voyageru 1 byl nyní objev Jupiterova prstence ověřen i pozemními pozorováními získanými na teleskopu o průměru 224 cm observatoře Mauna Kea na Havaji v infračerveném oboru. Bylo tak nalezeno i záření ionizovaného kyslíku, koncentrovaného v rovině Jupiterova magnetického

rovníku poblíž dráhy měsíčku Io. Zatímco tedy ještě před dvěma roky byl pokládán Saturn se svou soustavou prstenců za výjimečnou planetu, dnes již víme, že přítomnost prstence kolem velké planety není žádnou zvláštností. Vždyť prstence byly již nalezeny i u Uranu a Jupitera a připravují se již pozorování vybraných zákrytů hvězd Neptunem, která by mohla vést k objevu případného prstence kolem této planety.

Po průletu kolem Jupitera míří nyní Voyager 1 k Saturnu, k němuž se přiblíží dne 12. 11. 1980 až na 130 000 km. O den dříve sonda prolétne kolem Saturnova měsíčku Titan ve vzdálenosti 4000 km. Na cestě k obřím planetám je ještě jedna sonda, Voyager 2, který se 13. 7. 1979 přiblížil k Jupiteru na vzdálenost 640 000 km a prozkoumal přitom i jeho měsíčky Callisto, Ganyméd, Europa a Amalthea. Nejvíce se druhý Voyager přiblížil k měsíčku Ganyméd — na pouhých 55 000 km, takže na fotografiích pořízených z této blízkosti bude možno rozlišit kilometrové detaily na jeho povrchu. I Voyager 2 zamířil poté k Saturnu, k němuž má dorazit dne 27. 8. 1981 a přiblížit se k jeho povrchu na 100 000 km. Pokud budou přístroje a palubní systémy druhého Voyageru i poté normálně pracovat, uvažuje se o nasměrování stanice k dalšímu letu, při němž by jako první sonda vyslaná lidmi navštívila v lednu 1986 Uran a v září 1989 Neptun.

Z dějin exaktních věd

Staročeské míry duté a suté

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., ÚNM Praha

V dnešní terminologii se jedná o *jednotky objemu*.

Kromě závaží jsou duté a suté míry nejrozmanitější. *Dutými mírami* se rozuměly zpravidla míry na kapaliny (řidké látky); *suté* (též *ssuté*) *míry* byly určeny pro suté látky, tj. pro pevné látky zrnitého charakteru (sypké látky). Hlavní rozdíl mezi těmito oběma druhy měr byl v jejich provedení, méně již v jejich hodnotách a pojmenováních. Některé míry byly ovšem speciálně toho nebo onoho typu (např. uzavřený sud mohl sloužit toliko pro kapaliny, nikoliv pro sypké látky).

Nejdříve si probereme objemové míry odvozované kubaturou z měr délkových.

Zákonem z r. 1871 byl stanoven převod starších objemových měr na krychlový metr. Je uváděn

$$\text{krychlový sáh} = 6,820\,992\text{ m}^3$$

a

$$\text{krychlová stopa} = 0,031\,578\,67\text{ m}^3$$

Obě jednotky se rozumějí vídeňské.

Adjektivum „krychlový“ je novější. Dříve se takové míry nazývaly *tělesné* nebo *kubické*.

Staré objemové míry tvořené kubaturou některé míry délkové se objevují až v 18. a zejména v 19. stol. Dříve se užívaly míry se samostatnými názvy.

Staročeskou mírou, u které dnes známe pouze pojmenování, byla *bečka*. Latinsky se nazývala „*vas*“, stejně jako sud (odtud něm. *Fass*). Byla to odměrná nádoba na kapaliny, podobná údajně soudku. Od 16. stol. se *bečka* připomíná také jako míra *sutin*, zvláště často jako míra *solí*.

Staročeskou mírou na *sutiny* byl také *kbel* (*kbelec*, *kbelík*). Název odvozen z něm. *Kübel*. Podle Sedláčka měl hodnotu 71,53 litru, někdy i snad větší. Býval brán za 5 větelů. V jižních Čechách se vyskytuje jako dutá míra *čber*. Název údajně ze starohornoněmeckého *Zwibar*, což původně znamenalo velký dřevěný sud na koupání nebo na uchovávání vína. U nás to však pravděpodobně neznačilo zvláště velkou nádobu, i když přesná hodnota této míry je nejistá. Tak *milevský čber* měl něco málo přes 53 litry, *prachatický čber* 64 litry, *třeboňský čber* ležel svou hodnotou v mezích 66 až 79 litrů, *budějovický čber* měl asi 74,4 litru. Sedláček uvádí podle starých zápisů, že *čber* se používal také jako míra *sutá*. Tak *vrchovatý třeboňský čber* měl asi 79 litrů, zatímco *sehnaný třeboňský čber* měl hodnotu pouze asi 65 nebo 66 litrů.

Sehnanou mírou se rozuměla (*sutá*) míra nasypaná a přes okraj rovným (přímým) nožem seříznutá, čímž se odstranil *vrch* (*navršení*). Tento dvojí postup při odměřování vedl ovšem často k rozdílné míře.

Některé míry jsou zmiňovány v různých dokumentech již ve starých dobách, jejich měrné hodnoty se však nedochovaly. O jednom takovém případě byla již řeč. To, že se nedochovaly, bylo způsobeno pravděpodobně nepřilíživým rozšířením míry a také časově omezeným používáním. Takovou mírou byl také *koflík* (připomínaný od 14. stol.), nádoba protáhlého (troubovitého) tvaru, používaný snad také jako heraldické znamení. Snad je *koflík* co do své měrné hodnoty shodný s *ústicí*, rovněž objemovou mírou, protože pro obě byl používán společný latinský název „*ciphus*“ I když měrná hodnota *koflíku* není nikde přímo udávána, lze na ni usuzovat z dalšího latinského názvu, kterým byl *koflík* překládán, a to „*picarium*“ To však značí současně také *číši* (*číšku*, dř. *češku*), o níž Sedláček hovoří jako o polovině *řepice* (viz dále). To by ovšem

značeno, že by koflík mohl představovat (stejně jako číše) objem asi 1,45 litru. Svým tvarem by koflík (a ještě spíše číše) naznačoval, že ho je možno používat jak na kapaliny, tak i pro sutiny. Pro funkci pouhé suté míry by naproti tomu hovořila měrová příbuznost s řepicí, která byla pouze sutou mírou.

Řepice (sutá míra) se zvala latinsky „crater“ (protože svým tvarem sopečný kráter připomínala). Podle Hájka byla řepice polovinou čtvrtce; její hodnota činila asi 2,91 litru. Polovinou řepice byla již zmiňovaná *číška* (češka) s hodnotou asi 1,45 litru. Číška měla v latině dosti rozmanité pojmenování. Vedle již uvedeného „vas“ a „picarium“ také ještě „calix“ a „syphus“. Nejednotnost v překladech lze vysvětlit neustálenou terminologií a tím, že nepřekládali zpravidla „měřiči“, tj. dnešní metrologové, ale lingvisté.

Mezi starými sutými mírami, jejichž hodnotu již dnes neznáme, lze citovat také *víko* (*vieko*, na Moravě *věko*). Název snad od krytu příslušné odměrné nádoby. Jinou takovou mírou byl také *vor*, což značilo také plachtu přes vůz, do které se sype obilí namísto do pytlů. Podle některých pramenů značí *vor* zhruba totéž co pytel. Jinak se také na *pytle* a *měchy* měřilo. To je obvyklé i dodnes, zaměňuje se tak někdy objem obalu za míru. Jako míra soli se ve 14. stol. vyskytoval *čeřenec*. Z Německa k nám přišla míra zvaná *košík*.

Místně se používala jako míra *hrnec*, který měl hodnotu snad 1,23 litru.

Lahvice (také *flaška*) se mnohde uvádí jako míra, ale měla spíše, jako je tomu i dnes, určitý nominální vnitřní objem a sloužila jako obal. Sedláček hovoří o objemu lahvice rovném 3 pintám nebo 12 žejdlíkům, což by obnášelo asi 5,8 litru. Tím by se lahvice shodovala svým vnitřním objemem se čtvrtcem, a tak mohla být pinta, resp. žejdlík také mírou pro suté obilí. Je ovšem pochopitelné, že o tom, která míra byla vyloženě určena pro kapaliny a která byla případně také sutá, nebo byla jen sutá, rozhodoval jistě často i tvar realizované míry. Např. lahvici si lze těžko představit jako sutou míru. Naproti tomu velké měrné nádoby s rozměrnými „vstupními otvory“ nemohly sloužit zpravidla jako míry pro kapaliny pro možnost odpařování z velké volné hladiny.

Místně za míru byla používána také *konev* (*konvice*) s hodnotou v mezích 0,9 až 1,9 litru.

Pinta je starou mírou používanou v řadě zemí. Prakticky dodnes existuje ještě v soustavě jednotek v USA, ve Velké Británii a zemích, kde se britská soustava aplikovala. Je asi románského původu (z lat. *pincta*). Poprvé se u nás uvádí pinta v době Jana Lucemburského. Pinta byla sice především mírou na kapaliny, používala se však také jako sutá míra (na násevek). Její hodnota je dosti rozmanitá. Tak ve Francii měla ve středověku hodnotu asi 1 litr, jinde byly pinty menší. Původní česká

pinta (před koncem 16. stol.) měla hodnotu pravděpodobně odpovídající hodnotě 0,956 litru, počítáme-li ji za dvojnásobek starého českého žejdlíku. Naproti tomu pinta odvozovaná jako dvojnásobek starého rakouského žejdlíku (viz dále) činila podle Kincla 0,707 litrů. Kromě těchto dvou hodnot uvádějí některé prameny podstatně rozdílnou hodnotu 1,91 litru (resp. 1,94 litru), což by nasvědčovalo spíše nějaké běžné záměně této míry s mázem.

Máz byl staročeskou mírou pro kapaliny, název z něm. Mass = míra. *Český máz* rovný 2 pintám = 4 žejdlíkům = $1/32$ vědra odpovídal by 1,91 litru. Tato hodnota je počítána jako čtyřnásobek hodnoty příslušející starému českému žejdlíku. Je také uváděna druhá hodnota českého mázu, činící 1,415 litru, což by odpovídalo dvojnásobku „menší“ pinty (původem z Rakouska). Stejnou hodnotu má zřejmě i *vídeňský máz* (rovný 2 holbám).

U nás se také používala míra běžná v Německu, zvaná *holba* (z něm. Halbe), odpovídala hodnotě 0,707 litru. Hodnotou by se pak holba shodovala s „menší“ pintou.

Žejdlík byl starou českou i rakouskou mírou (z něm. Seidel). Hodnota je uváděna v pramenech dosti rozmanitá místně i časově. Kincl uvádí pro *český žejdlík* hodnotu 0,478 litru, ale současně alternativně také 0,358 litru. Tato druhá hodnota asi pocházela z Rakouska. Žejdlík se dělil na 4 *čtvrtky* (neboli *kvarty*), o kterémžto množství kapaliny se prý říkalo, že je takové, aby se mohlo do jedné ruky (hrsti) nalít. *Čtvrťka* obnášela asi 0,12 litru.

Také se používala *půlka*, rovná polovině žejdlíku. Příslušela jí hodnota asi 0,24 litru. Pít „na půlku“ znamenalo připít na něčí poctu tak, že se příslušná nádoba (s tímto objemem) vypila naráz.

Podobných názvů měr, odvozovaných ze „zlomků“ měr větších, z nichž se při tvorbě násobků nebo dílů vycházelo, bylo více. Původně se asi hovořilo přesněji, např. o *půlce žejdlíku*. Byla-li však míra již dostatečně známa, vynechala se v názvu výchozí jednotka a hovořilo se např. o půlce.

Naproti tomu bychom čekali u míry zvané *osmina* (též *achtel*, z něm.) poměrně malou hodnotu. V tomto případě nás překvapí, že zmíněná osmina se rovnala 2 soudkům nebo 12 pintám nebo 48 žejdlíkům, což by dnes odpovídalo asi 23,25 litru. Tato míra pocházela z Německa (ze Saska), kde se užívala k měření vína. Čeho byla tato míra vlastně osminou, to dnes již není známo.

Láka (z latinského lagena) byla staročeská míra na kapaliny, doložená od 14. stol. Podle Hájka se rovnala láka 36 pintám. Tato hodnota nebyla však u této míry jediná. Někdy byla kladena rovnou 40 i více pintám.

Významnou sutou mírou byl *věrtel*, rovný čtvrtině korce. Název zčeš-

těný z německého názvu Viertel = čtvrtina; latinsky se míra nazývala quartale. Sedláček uvádí hodnotu věrtele na 23,25 litru. Tato hodnota byla získána přeměřením staré míry ze sbírek píseckého muzea. Místně se věrtelu říkalo také *čtvrť* nebo *čtvrtně*. Věrtel se dělil na čtyři díly (*čtvrťce* nebo též *čtvrtníky*) nebo také *třetiny*.

Věrtel se používal také pro kapaliny. Jak plyne z názvu, byl čtvrtinou nějaké větší míry. Mohla to být míra zvaná *žitavský* (rozumí se sud). Podle Hájka se rovnal žitavský 128 pintám.

Ani „žitavský“ nebyl ovšem všude stejný.

Na věrtele se měřily někdy i sudy, případně určené k uskladňování mouky. Věrtel na kapaliny se kromě čtvrtinového poddělení dělil někdy také třetinově, jak již bylo řečeno. Třetina věrtele se nazývala *čberník*.

Větší odměrnou nádobou byl *týnský* (původ pojmenování není znám, pochází asi z pražského týna). Podle Z. Wintra se rovnal 64 pintám (po dvou žejdlících).

Mnohem menší byl *soudek* rovný asi 2 lahvicím nebo 6 pintám, což by odpovídalo asi 11,63 litru. Odměřoval se jím olej a med.

Mírou na pivo se stal také jeho obál: *svídnický* (tj. sud), kterým se dováželo dobré pivo ze Svídnice. Stal se tak známý, že zevšeobecnil jako míra. Tadeáš Hájek z Hájku uvádí, že se svídnický rovnal dvěma věrtelům.

Jak již bylo řečeno, byl *sud* původně obalem a neměl žádnou jednoznačnou měrnou hodnotu. Výjimkou byly sudy pro dopravu z dále dovážených piv (již uvedený svídnický, žitavský apod.) a vín. Po zavedení rakouské míry stalo se zvykem, že pivní sudy byly o 4 věrtelích, vinné sudy měly 10 věder.

Toto *vědro* bylo podle Sedláčka také starou českou mírou. Vědro se rovnalo 40 mázům nebo 1/4 sudu. Uvádí se odpovídající hodnota údajně 56,6 litru. Podle Kincla se uvádí poddělení na 32 pinty nebo na 128 žejdlíků, s hodnotou odpovídající zhruba 61,15 litru.

Jak je z popsanych měř a také z uvedených převodních hodnot patrné, existuje dnes jistá neurčitost převodních ekvivalentů především u objemových měř. To se týká zejména pinty a také vědra. Podle Teysslera nemá se rozlišovat pinta od mázu. Pinta je údajně objemová míra používaná převážně ve Francii a v Itálii a odtud též u nás převzatá, shodná co do velikosti s mázem, mírou rakouského (německého) původu, rovněž u nás zdomácnělou. Původní německý máz se rovnal 2 holbám nebo 4 žejdlíkům a měl prý hodnotu 1,415 litru. Český máz se dělil na 3 žejdlíky. Teyssler dále uvádí závislost velikosti měř téhož názvu podle měřené látky. Tak u piva se 40 mázů rovnalo 1 vědru piva, což údajně činilo 56,6 litru, u vína se rovnalo 30 mázů vinných jednomu vědru vína, což obnášelo rovněž zhruba 56 litrů. Podle Teysslera činila francouzská pinta 1,369 litru.

Speciálně na sůl uvádí Sedláček některé zvláštní míry. Tak již ve 12. stol. připomínanou *krosnu*. Z Německa dovážená sůl se měřila ve 14. stol. mírou, jejíž stonásobek se zval *soch*. Z Německa také pochází míra soli zvaná *šedel* (asi podle kusů soli ve tvaru lebky), jinou podobnou mírou, ze které se platil stejný ungelt jako ze šedelu, byla míra zvaná *scranna* (neznámého původu). V 17. stol. se na Litoměřicku prodávala sůl na mírku zvanou *cznicz* (později vysvětlovanou jako čerenec).

Od 15. stol. se vyskytovaly dvě hlavní solné míry v Čechách, a to již dříve uvedená *bečka*, a dále *prostice* (místně s názvem *sloup* podle kuželového tvaru, ve kterém se dobývaná sůl prodávala). Malé prostici se říkalo *špízek*. Pokud jde o měrové hodnoty, známe jen některé, a to ještě ne vždy přesně. Tak *prostice* se snad rovnala 87 litrů. *Bečku* známe co do hodnot *prachatickou*, ta měla údajně 69,7 litru a dělila se na 4 věrtel. Jeden věrtel se tam rovnal 14 *mírkám* (asi po 1,27 litru). Prachatice byly co do solních měr velmi známé, protože byly nejdůležitější stanicí na solné cestě z Rakous.

Ze Solnohrad se vozila sůl také v „kobylich hlavách“ a „corkách“. Jaké to byly údaje, není dnes známo. Uvádí se také *záměr*. Podle Jungmannova slovníku je *záměr* (*záměra*) sutá míra rovnající se někde 3 žejdlíkům (což by dnes odpovídalo 1,06 litru), jinde 8 žejdlíkům (pak by se tato míra rovnala mejtníku). *Mejtník* (nebo *metník*), který rovněž uvádí Jungmannův slovník, měl hodnotu odpovídající asi 2,82 litru.

Vraťme se nyní opět k mírám na kapaliny. Větší mírou na kapaliny byl *drajlink* (z něm.), který se rovnal 10 týnským, což by odpovídalo 640 pintám. Podle Sedláčka je mírou také *vůz* s měrnou hodnotou asi 1652 litrů, *polouvozí* (asi 826 litrů), kterému se říkalo také *kauf*, a *poloudrajlink* (asi 620 litrů).

Mezi prastaré míry „řídkých věcí“ patřil také *okov* (též *ok* nebo *vok*), připomínaný již v 11. stol. Užíval se také na Slovensku. Hodnotu dnes neznáme.

Z doby Karla IV. se připomíná *škopek* (rovný 8 pintám). Neznámého etymologického původu je *grosband*, rovný 42 pintám, a *kleinband*, rovný 36 až 37 pintám. Údajně byly obě míry používány pro sladká vína.

Pro objem obilovin (pro násevek) se používala sutá míra zvaná *korec* (případně *kořec*). O této dvojaké míře se již hovořilo u plošných měr. Pouze v českých zemích byl pro tuto míru používán místně také název *strych* (strich) — podobný anglické míře strike (rovné asi 73 litrům). *Starý český korec* se rovnal 4 věrtelům nebo 16 mírám obilí nebo 48 pintám nebo 192 žejdlíkům. Odpovídal svou hodnotou asi 93 litrům. *Míra obilí* se nazývala také *čtvrtce*. Sedláček udává hodnotu jedné korcové míry nalezené na půdě prácheňské radnice, uložené dnes v píseckém muzeu. Podle měření tehdejšími cejchovním úřadem vyplynula hodnota asi 93 litrů.

Starý rakouský korec činil asi 59,5 litru. Název „korec“ je prý odvozován z hebrejského názvu míry *kor* (zvané také *chomer*). Tato míra měla však asi 201 litrů. Možná však, že český název je odvozován ze slova kůra, koráb apod. Český název míry korec se překládá do latiny jako *corus*.

Při žních se počítalo, že korec obilí se vymlátí z jedné kopy, sestávající z 50 hrstí nebo snopků. *Kopa* (též *kupa*) značila původně hromadu obilí ve snopcích. Protože se snopky dělaly malé, aby dobře proschly, vešlo se jich do kopy 60. Proto se prý stal tento název i označením čísla 60. Ovšem tato číselná hodnota není náhodná, protože patří jako základ k šedesátkové číselné soustavě (stejně jako je tomu u jednotek času a úhlu). Za Kosmy měla však kopa 50 hrstí. Roku 1745 připadalo na kopu 60 snopů, na mandel 16. *Mandel* značil asi 15 až 18 snopků.

Dřevěné uhlí se v drobném prodávalo v *měších*. Pro potřeby kutnohorských dolů se užívalo *odměrných truhel*. Obě míry mají dnes neznámé hodnoty.

Zmíníme se ještě o jedné míře, která se používala jak pro plochu (plošný obsah), tak i pro objem (obilí), tedy o míře „obojaké“. Byla to *měřice*. Česká *měřice* odpovídala 61,5 litru (rovnala se údajně měřici vídeňské), *moravská měřice* činila asi 53,6 litru, což plyne z přepočtu vídeňských měřic na moravské.

Míry mohou sloužit také jako obraz vyspělosti společnosti, která je používala. Z mnohých měř plynou velmi moudré aplikační možnosti, jiné splňují požadavek poměrně rychlé dosažitelnosti měř a jejich přirozené vazby na přírodní objekty. Tak se určovaly např. malé objemy *odměřováním ve skořápkách* vaječných nebo ořechových apod.

Dodnes se některé takové prosté způsoby určování množství (to znamená objemu, ale také hmotnosti, na niž se pojem „množství“ někdy přednostně vztahuje) zachovaly a aplikují, zvláště v domácnostech. Např. kapka, malá nebo velká lžíce, „špička“ nože, špetka apod.

Měrový zákon z r. 1871 bývalého Rakouska uvádí hodnoty některých starších měř, které byly za vlády Marie Terezie zavedeny na našem území. Přitom rozlišuje také *objemové míry* a *duté míry* (mezi něž řadí i *suté míry*). Z dutých měř uvádí

vídeňskou měřicí = 61,487 litru (pro sušiny),

vídeňské vědro = 56,589 litru (pro kapaliny),

vídeňský máz = 1,414 7 litru (pro kapaliny).

Na závěr, podobně jako u předchozích měř, uvedeme si přehled nej-používanějších objemových měř s přibližnými metrickými hodnotami.

1 krychlová vídeňská stopa $\doteq$ 31,6 litru

1 krychlový vídeňský sáh $\doteq$ 6,821 m³ = 6821 litrů

1 český žejdlík = 2 půlky = 4 čtvrtky (kvarty) = 1/4 pinty $\doteq$ 0,48 litru (resp. 0,36 litru)

1 holba = 0,707 litru
 1 pinta $\doteq$ 0,96 litru (resp. též 0,707 litru) (před 16. stol.)
 $\doteq$ 1,91 litru (po 16. stol., prakticky shodná s mázem)
 1 český máz $\doteq$ 1,91 litru (resp. též 1,515 litru)
 1 věrtel = 12 pint = 4 čtvrtce (čtvrtníky) = 3 třetiny = $\frac{1}{4}$ korce $\doteq$
 $\doteq$ 23,25 litru
 1 vědro = 32 pint = 128 žejdlíků
 1 bečka = 48 pint = 4 věrtle
 1 korec (též strych) = 48 pint = 192 žejdlíků = 16 měr obilí = 4 věrtle.

naše soutěž

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Fyzika

3. Dva automobily jedou po přímých navzájem kolmých silnicích ke křižovatce. Rychlost prvního auta je v_1 , rychlost druhého je v_2 . První automobil má od křižovatky vzdálenost l_1 , druhý vzdálenost l_2 . Vypočtete:

a) nejkratší vzdálenost obou aut;

b) dobu, za kterou budou auta od sebe nejméně vzdálena.

Řešte obecně a potom pro $v_1 = 54$ km/h, $v_2 = 72$ km/h, $l_1 = 2,7$ km, $l_2 = 4,8$ km.

(Došlo 8 řešení)

Josef Novák

Upravené řešení Janusze Drózda, III. roč. G s polským vyučovacím jazykem v Českém Těšíně:

Zvolíme soustavu souřadnic podle obr. 1. Pro polohu prvního auta platí

$$x_1 = -l_1 + v_1 t, \quad y_1 = 0,$$

pro druhé auto je

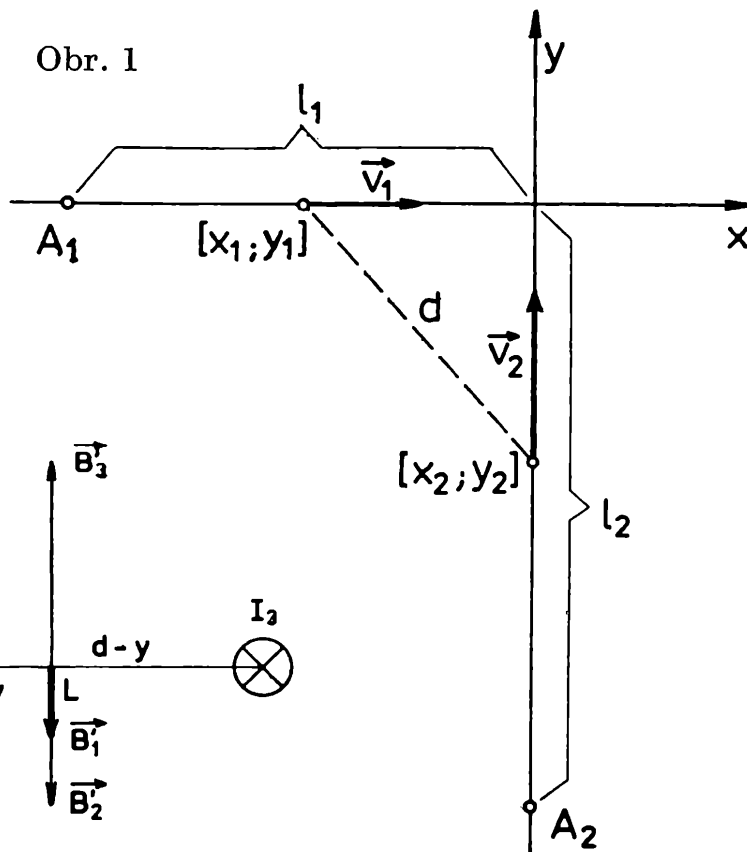
$$x_2 = 0, \quad y_2 = -l_2 + v_2 t.$$

Je-li jejich vzájemná vzdálenost d , pak je

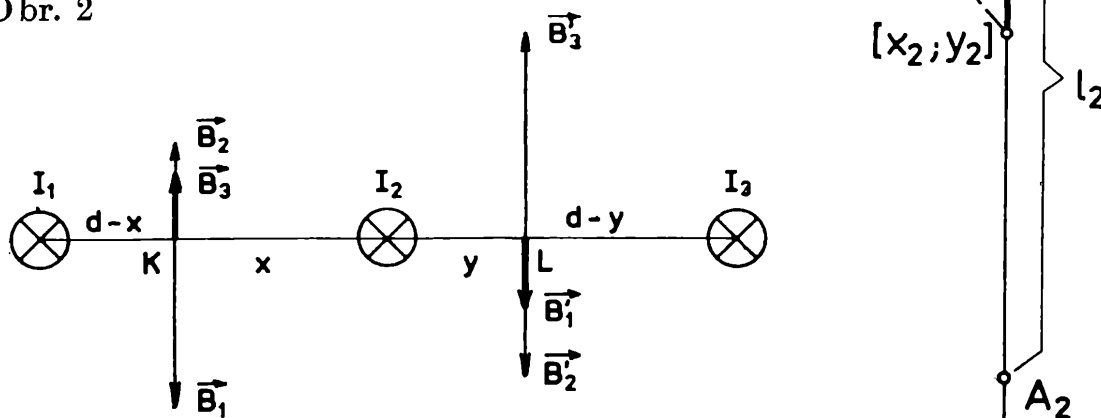
$$d^2 = x_1^2 + y_2^2 = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(l_1 v_1 + l_2 v_2)t + l_1^2 + l_2^2 = f(t). \quad (1)$$

Funkce $f(t)$ je kvadratická a nabývá nejmenší hodnoty pro

Obr. 1



Obr. 2



$$T = \frac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}. \quad (2)$$

Dosadíme do (1) a po úpravě zjistíme, že nejkratší vzdálenost obou aut je

$$d_1 = \frac{|l_1 v_2 - l_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \quad (3)$$

Za dobu T určenou vzorcem (2) dosáhnou auta své nejkratší vzdálenosti d_1 určené vztahem (3). Pro dané hodnoty plyne ze vzorců (2) a (3), že je $T = 218,4$ s, $d_1 = 720$ m.

4. Napětí a proud v obvodu střídavého proudu jsou dány pomocí komplexních čísel:

$\mathbf{U} = (110 + 190j)\text{V}$, $\mathbf{I} = (1,73 + j)\text{A}$, kde j je imaginární jednotka. Určete vztahy pro okamžité hodnoty napětí a proudu.

(Došlo 5 řešení)

Josef Novák

Autorovo řešení:

Pro okamžité hodnoty napětí a proudu platí

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad i = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi), \quad (1)$$

kde U_m a I_m jsou amplitudy napětí a proudu, ω je úhlová frekvence, φ a ψ jsou počáteční fáze napětí a proudu.

Jsou-li U a I efektivní hodnoty napětí a proudu, pak vztahy (1) lze psát takto:

$$u = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi), \quad i = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) \quad (2)$$

Z hodnot uvedených v textu vypočteme:

$$U = \sqrt{110^2 + 190^2} \text{ V} = 220 \text{ V}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{190}{110} = 1,73, \quad \text{tj. } \varphi \doteq \frac{\pi}{3} \text{ rad};$$

$$I = \sqrt{1,73^2 + 1} \text{ A} = 2 \text{ A}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{1}{1,73} \doteq 0,578, \quad \text{tj. } \psi \doteq \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

Dosadíme-li do (2), dostaneme

$$u \doteq 220 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ V} \quad i \doteq 2 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ A}$$

5. Třemi dlouhými, přímými a vzájemně rovnoběžnými vodiči ve vakuu v rovině, vzdálenými od sebe o d , teče proud $I_1 = I_2$, $I_3 = I_1 + I_2$. Určete polohu a tvar křivky, v jejímž každém bodě je velikost magnetické indukce rovna nule. — Řešte obecně a potom pro $d = 3 \text{ cm}$.

(Došlo 5 řešení)

Josef Novák

Řešení:

Text úlohy je formulován velmi volně, takže uvážíme-li uspořádání vodičů a souhlasnost resp. nesouhlasnost proudů, které v nich tečou, docházíme celkem k sedmi úlohám. Kdybychom předpokládali, že vodiče jsou vedle sebe v pořadí podle očíslování proudů, byly by možnosti čtyři.

Úlohu budeme řešit pro případ, že všechny tři proudy protékají souhlasně a že vodič s proudem I_2 je prostřední.

Ze struktury magnetického pole přímého vodiče plyne, že body, v nichž je v našem případě velikost magnetické indukce rovna nule, mohou ležet jedině v rovině obsahující vodiče. Vedme v této rovině přímku kolmou na vodiče (obr. 2) a hledejme na ní body, v nichž je magnetická indukce nulová. Křížky v průřezích vodičů značí, že proudy protékají ve směru od čtenáře. Z pravidla pravé ruky plyne, že bod, v němž je magnetická indukce nulová, může ležet jedině mezi prvním a druhým vodičem nebo mezi druhým a třetím vodičem. Nechť K je takový bod. Jeho vzdálenost od druhého vodiče označme x . (Zřejmě $0 < x < d$.) Pak platí

$$B_1 = B_2 + B_3,$$

tj.

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d-x)} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_3}{2\pi(d+x)}.$$

Odtud po dosazení $I_2 = I_1$, $I_3 = 2I_2$ a po úpravě dostáváme rovnici

$$4x^2 - dx - d^2 = 0 ,$$

která má kořeny $x_{1,2} = \frac{d}{8} (1 \pm \sqrt{17})$. Význam má pouze kladný kořen $\frac{d}{8} (1 + \sqrt{17})$.

Stejný výpočet provedme pro bod L . Jeho vzdálenost od druhého vodiče označme y . (Zřejmě $0 < y < d$.) Předpokládejme, že pro bod L platí:

$$B'_1 + B'_2 = B'_3 ,$$

tj.

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+y)} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} = \frac{2\mu_0 I_1}{2\pi(d-y)} .$$

Po úpravě obdržíme rovnici

$$4y^2 + dy - d^2 = 0 ,$$

jež má kořeny $y_{1,2} = \frac{d}{8} (-1 \pm \sqrt{17})$. Význam má jen kladný kořen $\frac{d}{8} (-1 + \sqrt{17})$.

V případě, který jsme řešili, je množina všech bodů, v nichž je magnetická indukce nulová, sjednocení dvou přímk rovinných s vodiči; jedna z nich prochází bodem K a druhá bodem L . Pro $d = 3$ cm jsou body K a L od druhého vodiče vzdáleny 1,9 cm a 1,2 cm.

6. V uzavřené nádobě je plyný kyslíčník uhličitý CO_2 . Nádoba je umístěna ve vakuu. Vadným uzávěrem uniká z nádoby za dobu t_0 průměrně N_0 molekul CO_2 . Které údaje je třeba znát pro určení doby t_1 , za niž uniknou z nádoby všechny molekuly CO_2 ? Diskutujte možné případy.

(Došlo 5 řešení.)

Emanuel Svoboda

Autorovo řešení:

Vyjdeme z předpokladu, že plyný kyslíčník uhličitý tvoří ideální plyn, který za čas t_1 unikne z nádoby. Počáteční stav plynu popíšeme takovými veličinami, které lze experimentálně určit, např. hmotností m , objemem V , tlakem p a termodynamickou teplotou T .

Je-li N počet molekul CO_2 v nádobě na počátku děje a uniká-li z nádoby průměrně za dobu t_0 počet N_0 molekul, pak doba t_1 je dána vztahem

$$t_1 = \frac{N}{N_0} \cdot t_0 . \quad (1)$$

a) *Známe hmotnost m plynu. Z definice látkového množství n a molární hmotnosti M_m postupně dostáváme:*

$$n = \frac{N}{N_A}; \quad M_m = \frac{m}{n}; \quad N = nN_A = \frac{mN_A}{M_m},$$

kde N_A je Avogadrova konstanta.

Dobu t_1 pak vypočítáme ze vztahu (1) dosazením za N :

$$t_1 = \frac{mN_A}{N_0 M_m} \cdot t_0. \quad (2)$$

Pro veličinu M_m platí vztah $M_m = M_r \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, kde M_r je relativní molekulová hmotnost CO_2 , kterou určíme za pomoci tabulek ($M_r \doteq 44$).

b) *Známe objem V plynu. Pak ale nelze užít bezprostředně vztahu $n = \frac{V}{V_m}$, neboť molární objem V_m neznáme. Je tedy nutno vyhledat vztahy, ze kterých V_m určíme. Ze stavové rovnice pro ideální plyn o látkovém množství 1 mol vyplývá, že*

$$V_m = \frac{R_m T}{p},$$

kde R_m je molární plynová konstanta. To však znamená, že kromě objemu V musíme znát také tlak p a teplotu T . Za těchto předpokladů postupně dostáváme:

$$n = \frac{V}{V_m} = \frac{pV}{R_m T}; \quad N = nN_A = \frac{pV}{R_m T} N_A = \frac{pV}{kT};$$

$$t_1 = \frac{pV}{N_0 kT} \cdot t_0, \quad (3)$$

kde $k = \frac{R_m}{N_A}$ je Boltzmanova konstanta.

c) *Známe objem V , tlak p a teplotu T plynu. V tomto případě vypočítáme N ze stavové rovnice ideálního plynu $pV = NkT$, takže dostáváme pro t_1 opět vztah (3).*

Poznámka: Uvedená úloha může také být využita pro vytvoření představy o obrovském počtu molekul, které tvoří plyn, a to právě tím, že vypočítáme čas t_1 . Zvolíme-li např. $t_0 = 1 \text{ s}$, $N_0 = 10^{22}$ a $m = 4,40 \text{ kg}$, dostaneme pomocí vztahu (2):

$$t_1 \doteq \frac{4,40 \text{ kg} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{10^{22} \cdot 44 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}} \cdot 1 \text{ s} \doteq 6,02 \cdot 10^3 \text{ s} \doteq 1,67 \text{ h}.$$

1. Je dána přímka a , na ní body A , $V \neq A$ a mimo přímku a je dán bod B . Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká přímky a v bodě A , prochází bodem B a má tuto vlastnost: Kuželová plocha opsaná z bodu V této kulové ploše má ve svém osovém řezu úhel o velikosti α ($0 < \alpha < \pi$).

(Došlo 1 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Aleš Toufar, IV A G Opava :

Střed hledané kulové plochy leží v rovině ϱ jdoucí bodem A kolmo na přímku a , neboť rovina ϱ je množina středů všech kulových ploch, které se dotýkají přímky a v bodě A ; bod A do této množiny nepočítáme. — Střed kulové plochy leží též v rovině ω souměrnosti úsečky AB , neboť tato rovina je množina středů všech kulových ploch, které procházejí body A , B . — Osa o kuželové plochy, opsané z bodu V hledané kulové ploše, prochází vrcholem V a s přímkou a svírá úhel $\frac{1}{2}\alpha$. Množina všech přímek, které procházejí bodem V a s přímkou a svírají úhel $\frac{1}{2}\alpha$, je rotační kuželová plocha κ s vrcholem V a osou v přímce a . Na této kuželové ploše leží střed hledané kulové plochy.

Z této úvahy docházíme k této *konstrukci* :

Sestrojíme roviny ϱ , ω a přímku $q = \varrho \cap \omega$. Tato přímka vždy existuje, neboť $\varrho \not\parallel \omega$. Kdyby bylo $\varrho \parallel \omega$, pak by bod B byl bodem přímky a , což odporuje předpokladu. Sestrojíme kuželovou plochu κ a průnik $S = q \cap \kappa$. Výsledkem je kulová plocha o středu S a poloměru $|SA| = |SB|$. Tato plocha zřejmě vyhovuje všem podmínkám úlohy.

Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky q a kuželové plochy κ . Největší počet řešení je 2. Jestliže však přímka q se plochy κ dotýká, existuje jediné řešení. Jestliže průnik $q \cap \kappa$ je prázdný, neexistuje žádné řešení.

2. V rovině σ je dán ostroúhlý trojúhelník s vrcholy X , Y , Z ; kromě toho je dáno číslo $\varrho > 0$. Sestrojte pravidelný osmistěn, jemuž lze vepsat kulovou plochu o poloměru ϱ a jehož úhlopříčky (osy) procházejí body X , Y , Z .

(Došlo 1 řešení)

František Hradecký

Upravené řešení Aleše Toulara, IV A G Opava :

a) Tělesové úhlopříčky pravidelného osmistěnu jsou po dvou vzájemně kolmé a protínají se ve středu S tohoto tělesa. Proto každý

z úhlů $\sphericalangle XSY$, $\sphericalangle XSZ$, $\sphericalangle YSZ$ je pravý. Podle věty Thaletovy je tedy bod S společným bodem tří kulových ploch; jejich průměry jsou XY , YZ , XZ . Naneseme-li na polopřímky SX , SY , SZ od bodu S úsečky téže délky, dostaneme vrcholy osmistěnu, který je k hledanému osmistěnu stejnolehý podle středu S . Koeficient stejnolehlosti je

$$|SK'| = \varrho,$$

kde $|SK'|$ je vzdálenost bodu S od některé stěny pomocného osmistěnu.

b) Z provedeného rozboru plyne tato *konstrukce*: Sestrojíme kulové plochy nad průměry XY , YZ , XZ . Plochy s průměry XY , YZ mají společnou kružnici k ; plochy s průměry XY , XZ mají společnou kružnici l . Společný bod S kružnic k a l (ležících na kulové ploše s průměrem XY) je středem hledaného osmistěnu. Na polopřímky SX , SY , SZ nanese úsečky téže délky; tak dostaneme body A' , B' , C' určující rovinu ω' . Sestrojíme bodem S kolmici na rovinu ω' a její průsečík K' s rovinou ω' ; na polopřímce SK' sestrojíme bod K tak, aby bylo $|SK| = \varrho$. Bodem K vedeme rovinu $\omega \parallel \omega'$ a sestrojíme její průsečíky A , B , C s danými osami osmistěnu. K bodům A , B , C sestrojíme body E , F , G souměrně sdružené podle středu S . Body A , B , C , E , F , G jsou vrcholy hledaného osmistěnu.

c) Z konstrukce plyne, že sestrojený osmistěn splňuje všechny podmínky dané úlohy.

d) Kružnice k , l mají právě dva společné body, které jsou souměrně sdruženy podle roviny σ . Z toho plyne, že úloha má vždy právě dvě řešení.

Autorovo řešení:

Zvolíme-li rovinu σ za průmětnu, jsou pravoúhlé průměty os pravidelného osmistěnu do této roviny výškami trojúhelníku XYZ , takže bod S se promítá do průsečíku S_1 výšek trojúhelníku XYZ . Protože tento trojúhelník je ostroúhlý, je S_1 jeho vnitřním bodem. Bod S leží v rovině τ , která prochází některou z výšek trojúhelníku XYZ kolmo k rovině σ , a to tak, že je bodem kružnice ležící v rovině τ a mající průměr v uvedené výšce trojúhelníku XYZ . Kromě toho je $SS_1 \perp \sigma$. Je-li A vrcholem našeho osmistěnu a je-li P středem jeho hrany, která neprotíná přímku SA , pak ϱ je výškou pravoúhlého trojúhelníku ASP s přeponou AP . Z tohoto trojúhelníku pak plyne, že je $|SA| = \varrho\sqrt{3}$. Konstrukce plynoucí z právě provedeného rozboru je zřejmá.

3. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p , q ležící v rovině π a číslo $\varrho > 0$. Kromě toho je dán a) bod A , b) přímka m neležící v rovině π . Sestrojte kulovou plochu, která má poloměr ϱ , dotýká se přímek p , q a a) prochází bodem A , b) dotýká se přímky m .

(Došlo 1 řešení)

František Hradecký

Řešil Aleš Toufar, IV A G Opava :

Přímky p, q se dotýkají hledané kulové plochy; proto střed S této plochy má od každé z přímek p, q vzdálenost ϱ . Množinou všech bodů S majících od přímky p vzdálenost ϱ je rotační válcová plocha s osou p a poloměrem ϱ . Množinou všech bodů S majících od přímky q vzdálenost ϱ je rotační válcová plocha s osou q a poloměrem ϱ . Leží-li bod A na kulové ploše se středem S , je $|SA| = \varrho$. Množinou všech bodů S při daném bodu A je kulová plocha o středu A a poloměru ϱ . Z uvedeného rozboru plynou tyto *konstrukce* :

a) Sestrojíme rotační válcovou plochu s osou p a poloměrem ϱ . Sestrojíme rotační válcovou plochu s osou q a poloměrem ϱ . Průnikem těchto dvou ploch jsou dvě přímky nebo jedna přímka nebo je tento průnik prázdný. Sestrojíme kulovou plochu $\kappa = (A; \varrho)$. Průnik této plochy s průnikem dvou dříve uvedených válcových ploch je střed S hledané plochy. Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímek p, q , bodu A a na čísle ϱ . Úloha může mít 4 nebo 3 nebo 2 nebo 1 nebo žádné řešení.

b) Sestrojíme tři rotační válcové plochy o téměř poloměru ϱ ; jedna má osu p , druhá má osu q a třetí má osu m . Potom sestrojíme průnik prvních dvou válcových ploch a průnik tohoto průniku s třetí válcovou plochou. Úloha může mít 4 nebo 3 nebo 2 nebo 1 nebo žádné řešení.

4. Je dána elipsa (s vedlejší poloosou b a excentricitou e) a kružnice, která se této elipsy dotýká ve dvou různých bodech T, T' souměrně sdružených podle vedlejší osy elipsy; střed této kružnice označme O . Budiž $X \neq T, X \neq T', X \neq O$ (pokud bod O je bodem elipsy) libovolný bod dané elipsy; jeho vzdálenost od přímky TT' budiž d . Bodem X vedme kolmici k přímce XO . Na této kolmici je tětiva dané kružnice; polovina její délky budiž t . Potom je $t \cdot d = e \cdot b$. Dokažte toto tvrzení metodou deskriptivní geometrie.

(Došlo 1 řešení)

Emil Kraemer

Upravené řešení Aleše Toufara, IV A G Opava (obr. 1)

Patu kolmice vedené bodem X k přímce TT' označme P ; potom je

$$|PX| = d \quad (1)$$

Jeden krajní bod tětivy kružnice kolmé k přímce OX označme X' . Bodem X vedme rovnoběžku s přímkou TT' a sestrojme na ní bod X'' tak, aby bylo

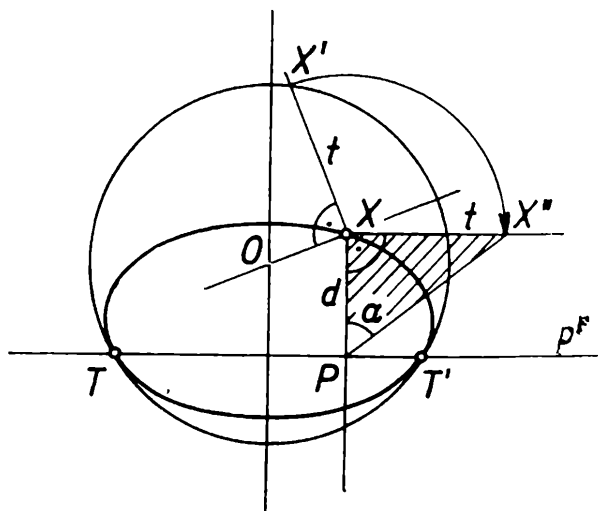
$$|XX''| = |XX'| = t \quad (2)$$

Danou kružnici můžeme pokládat za hlavní kružnici kulové plochy κ mající střed v bodě O . Potom daná elipsa je pravoúhlým průmětem kružnice k , která je řezem kulové plochy κ s rovinou ϱ procházející přím-

kou $p^e = TT'$ tak, že má od roviny elipsy (průmětny π) odchylku α , pro niž je

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}; \quad (3)$$

přítom a je poloměr kružnice k a zároveň hlavní poloosa dané elipsy.



Obr. 1

Rovina τ proložená přímkou OX kolmo k průmětně π protne kulovou plochu κ v hlavní kružnici, která prochází bodem $\bar{X}$, jehož pravoúhlým průmětem do roviny π je bod X . Sklopíme-li rovinu τ do průmětny π , sklopí se bod $\bar{X}$ do bodu X' , takže $|XX'| = t$ je vzdálenost bodu $\bar{X}$ od průmětny. Přímka $PX \perp TT'$ je průmětem spádové přímky roviny ϱ a velikost úhlu $\sphericalangle XPX''$ je odchylkou α roviny ϱ od průmětny. Z pravoúhlého trojúhelníku XPX'' plyne, že je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|XX'|}{|PX|};$$

podle toho a podle (1) a (2) je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{d}. \quad (4)$$

Podle (3) je $b = a \cos \alpha$, takže excentricita elipsy je

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = a \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = a \sin \alpha \quad (5)$$

Podle (5) a (3) je tedy

$$\frac{e}{b} = \frac{a \sin \alpha}{a \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad (6)$$

Ze (6) a (4) plyne, že je

$$\frac{e}{b} = \frac{t}{d}.$$

Úlohy III. kola MO kategorie A v roce 1979

RNDr. LEO BOČEK, CSc. — RNDr. ANTONÍN VRBA, CSc., Praha

Ve dnech 28.—30. dubna 1979 se konalo v *Trnavě* celostátní kolo 28. ročníku matematické olympiády. V tomto článku vás chceme seznámit nejen se zněním úloh, ale také s jejich řešeními. Domníváme se, že budou zajímat zvláště letošní účastníky MO v kategorii A.

A - III - 1

Nechť n je dané přirozené číslo. Určete počet všech uspořádaných trojic (x, y, z) nezáporných celých čísel x, y, z , která vyhovují rovnici

$$x + 2y + 5z = 10n.$$

Řešení: Daná rovnice má v oboru nezáporných celých čísel právě tolik řešení jako nerovnice

$$2y + 5z \leq 10n. \quad (1)$$

Je-li (y, z) řešení této nerovnice, je

$$0 \leq z \leq 2n \quad (2)$$

Ke každému z , pro které platí (2), existuje právě

$$\left[\frac{10n - 5z}{2} \right] + 1 = 5n + 1 + \left[-\frac{5z}{2} \right]$$

čísel y tak, že dvojice (y, z) splňuje (1) — jsou to $y = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{10n - 5z}{2} \right]$. (Hranaté závorky označují celou část čísla, které obsahují.) Celkový počet řešení nerovnice (1), a tedy i dané rovnice, je

$$\sum_{z=0}^{2n} \left(5n + 1 + \left[-\frac{5z}{2} \right] \right) = (2n + 1)(5n + 1) + \sum_{z=0}^{2n} \left[-\frac{5z}{2} \right].$$

Sčítáme-li přes sudá a lichá z zvlášť, dostaneme

$$\sum_{z=0}^{2n} \left[-\frac{5z}{2} \right] = \sum_{k=1}^n (-5k) + \sum_{k=1}^n (-5k + 2) = -5n(n + 1) + 2n.$$

Celkem dostaneme právě $5n^2 + 4n + 1$ řešení.

Jiné řešení: Je-li $z = 0$, redukuje se daná rovnice na

$$x + 2y = 10n$$

a má $5n + 1$ řešení. Je-li $z = 1$, redukuje se rovnice na

$$x + 2y = 10n - 5$$

a má $5n - 2$ řešení. Je-li $z \geq 2$, položme $t = z - 2$.

Označíme-li $P(n)$ počet řešení dané rovnice, má rovnice

$$x + 2y + 5t = 10(n - 1)$$

v oboru nezáporných čísel právě $P(n - 1)$ řešení a přitom má právě tolik řešení jako daná rovnice v oboru celých čísel $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 2$. Je tedy

$$P(n) = 5n + 1 + 5n - 2 + P(n - 1) = P(n - 1) + 10n - 1$$

Protože $P(0) = 1$, je

$$\begin{aligned} P(n) &= 1 + \sum_{k=1}^n (10k - 1) = 1 - n + 10 \cdot (1 + 2 + \dots + n) = \\ &= 5n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

A - III - 2

Je dán kvádr $\mathbf{Q}$ o rozměrech a, b, c , $a < b < c$. Najděte velikost hrany krychle $\mathbf{K}$, která má s daným kvádrem rovnoběžné stěny a společný střed tak, aby objem rozdílu množin $\mathbf{Q} \cup \mathbf{K}$ a $\mathbf{Q} \cap \mathbf{K}$ byl minimální.

Řešení: Označme x neznámou velikost hrany krychle a $V(x)$ objem rozdílu těles $\mathbf{Q} \cup \mathbf{K}$ a $\mathbf{Q} \cap \mathbf{K}$. Tento rozdíl je složen z bodů, které jsou v $\mathbf{Q}$, ale nejsou v $\mathbf{K}$, a z bodů, které jsou v $\mathbf{K}$, ale nejsou v $\mathbf{Q}$.

Je-li $x > c$, lze $V(x)$ zmenšit zmenšením x , je-li $x < a$, lze $V(x)$ zmenšit zvětšením x . Stačí se tedy omezit na případ, že $a \leq x \leq c$. Budeme rozlišovat dva případy:

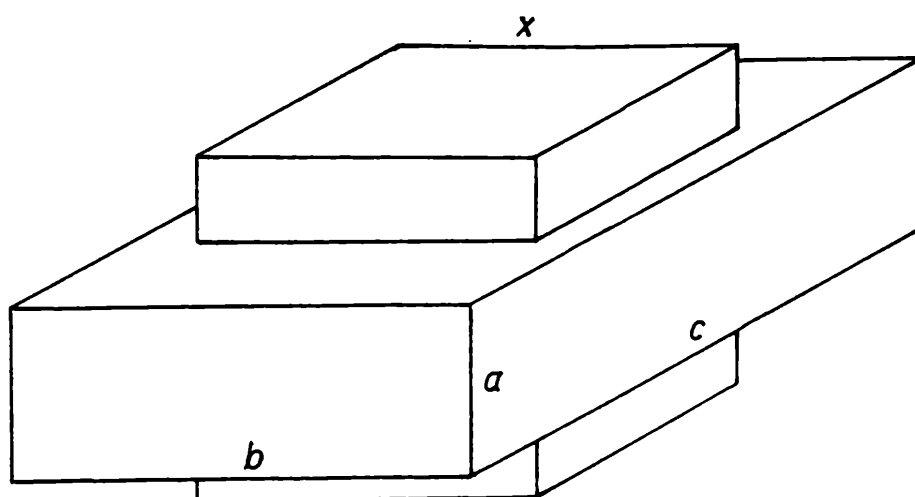
A) $a \leq x \leq b$. Pak je (obr. 1) objem $V(x)$ roven součtu objemu $a(bc - x^2)$ vnějšího prstence a objemu $x^2(x - a)$ dvou kvádrů, takže $V(x) = x^3 - 2ax^2 + abc$.

B) $b \leq x \leq c$. Pak je (obr. 2) objem $V(x)$ roven součtu objemu $(x^2 - ab)x$ prstence a objemu $ab(c - x)$, takže $V(x) = x^3 - 2abx + abc$.

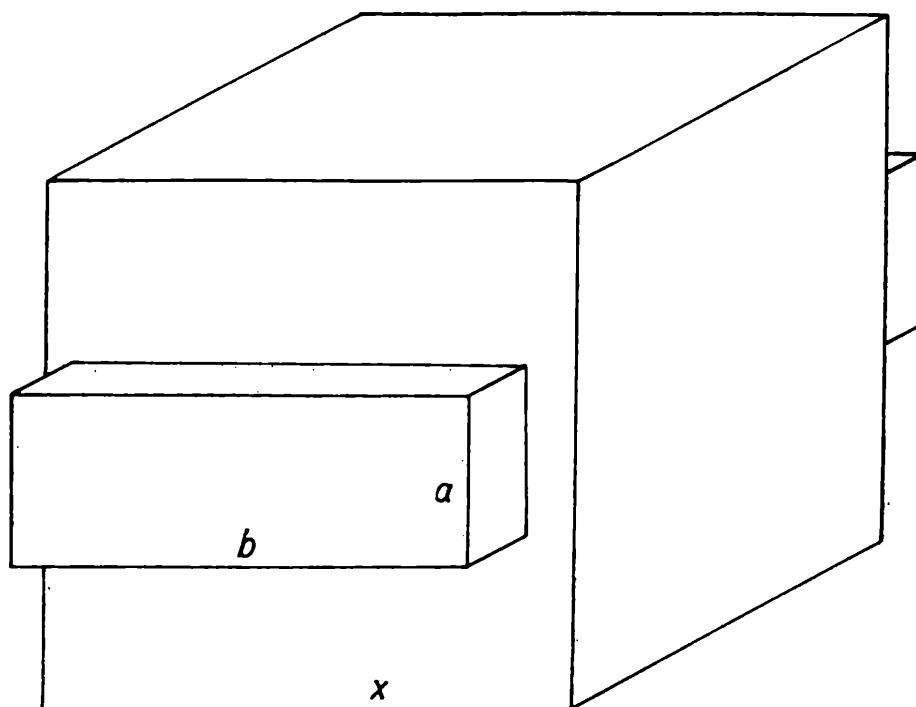
Protože derivace funkce $V(x)$ v intervalu (b, c) je $V'(x) = 3x^2 - 2ab > 0$, může v tomto intervalu nastat minimum jen pro $x = b$.

V intervalu (a, b) je derivace funkce $V(x)$ rovna $V'(x) = 3x^2 - 4ax$.

Pokud $\frac{4}{3}a < b$, je záporná pro $a < x < \frac{4}{3}a$, kladná pro $\frac{4}{3}a < x < b$



Obr. 1



Obr. 2

a rovna nule pro $x = \frac{4}{3}a$. Je-li $\frac{4}{3}a \geq b$, je derivace pro $a < x < b$ záporná.

Závěr Hledaná hrana krychle má velikost $\frac{4}{3}a$, je-li $b > \frac{4}{3}a$, a má velikost b , je-li $b \leq \frac{4}{3}a$.

Jestliže ve čtyřúhelníku $ABCD$, jehož vrcholy leží na kružnici o poloměru 1, platí $|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \geq 4$, potom $ABCD$ je čtverec. Dokažte. (Můžete užít Ptolemaiova vzorce $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$.)

Řešení: Protože AC , BD jsou tětivy kružnice o poloměru 1, je $|AC| \leq 2$, $|BD| \leq 2$. Zkombinujeme-li ještě nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem s Ptolemaiovým vzorcem, dostáváme

$$\begin{aligned} 4 \leq |AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| &\leq \frac{(|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|)^2}{4} = \\ &= \frac{|AC|^2 \cdot |BD|^2}{4} \leq 4 \end{aligned}$$

Všude tedy nastává rovnost. Je proto $|AC| = 2$, $|BD| = 2$ a (z rovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem) $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$.

Tětivy AC , BD jsou tedy průměry kružnice, a proto $|AB| = |CD| = \sqrt{2}$, $|BC| = |AD| = \sqrt{2}$. Body A , B , C , D jsou vrcholy čtverce.

Připomeňme ještě, že Ptolemaiův vzorec se snadno odvodí pomocí kosinové věty — viz např. 16. svazek Školy mladých matematiků *S. Horák: Kružnice*.

Mezi řešeními účastníků III. kola MO byl také tento důkaz, při kterém se nepoužije Ptolemaiova vzorce: Jestliže v čtyřúhelníku $ABCD$ nejsou všechny strany stejně veliké, pak existují dvě sousední strany nestejně veliké, nechť to jsou například strany AB , BC . Zvolme na tom oblouku AC kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$, který obsahuje bod B , bod B' tak, aby $|AB'| = |B'C|$. Pak je obsah trojúhelníka ABC menší než obsah trojúhelníka $AB'C$, a protože je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AB'C$, je $|AB| \cdot |BC| < |AB'| \cdot |B'C|$, a tedy $|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| < |AB'| \cdot |B'C| \cdot |CD| \cdot |DA|$. Není-li tudíž čtyřúhelník $ABCD$ rovnostranný, lze najít čtyřúhelník s větším součinem velikostí stran, který je též vepsaný kružnici o poloměru 1. Na druhé straně rovnostranný čtyřúhelník vepsaný kružnici je nutně čtverec, protože kosočtverci nelze opsat kružnici. Z toho autor důkazu odvozuje, že součin velikostí stran čtyřúhelníka vepsaného kružnici o poloměru 1 je maximální pouze pro čtverec a pro ten se rovná 4. Je tudíž vždy $|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \leq 4$ a rovnost nastává pouze pro čtverec.

Tento důkaz není zcela korektní, mlčky se totiž předpokládá, že mezi všemi uvažovanými čtyřúhelníky existuje jeden, pro který je součin velikostí jeho stran maximální. Protože jiný čtyřúhelník než čtverec to nemůže být (jak bylo správně dokázáno), musí pak být součin $|AB| \cdot |BC|$.

$|CD| \cdot |DA|$ maximální jen pro čtverec. Chybí však existenční část důkazu. Uvedme pro srovnání tuto úlohu: máme najít největší číslo v množině $\mathbf{M} = \left\{a; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots\right\}$, která obsahuje všechna čísla tvaru $\frac{n}{n+1}$, kde n je přirozené, a jisté reálné číslo a . Pro žádné n nemůže být číslo $\frac{n}{n+1}$ největším číslem v $\mathbf{M}$, protože číslo $\frac{n+1}{(n+1)+1}$ je větší. Můžeme tedy tvrdit, že v $\mathbf{M}$ je největší číslo a ? Jistě ne. Můžeme pouze tvrdit, že pokud existuje v $\mathbf{M}$ číslo největší, pak je to číslo a . Pokud bychom chtěli ukázat, že největším číslem v $\mathbf{M}$ je číslo a , aniž bychom věděli o existenci největšího čísla v $\mathbf{M}$, museli bychom ukázat, že $\frac{n}{n+1} < a$ pro každé přirozené n . Stejně tak ve výchozí úloze měl autor ještě ukázat, že pro čtyřúhelník $ABCD$, který je vepsán kružnici o poloměru 1 a který není čtvercem, platí $|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| < 4$. A to by se mu snadno podařilo, kdyby konstrukci uvedenou na začátku důkazu použil ještě třikrát.

A - III - 4

Nechť n je libovolné přirozené číslo. Najděte všechny n -tice reálných čísel $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, pro které platí

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i x_{n-i+1}$$

Řešení: Nejprve ukážeme (což se provádělo v úloze A - P - 1, viz Rozhledy m.-f., roč. 57, č. 8, str. 367), že platí pomocná věta:

Nechť $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ jsou reálná čísla. Potom

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

a rovnost nastane, právě když buď $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ nebo $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Pomocnou větu dostaneme sečtením nerovností

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$$

pro všechny dvojice indexů $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Použijeme-li ji na n -tice

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad -x_n \leq -x_{n-1} \leq \dots \leq -x_1,$$

dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n -x_{n-i+1}\right) \leq n \sum_{i=1}^n (-x_i \cdot x_{n-i+1}),$$

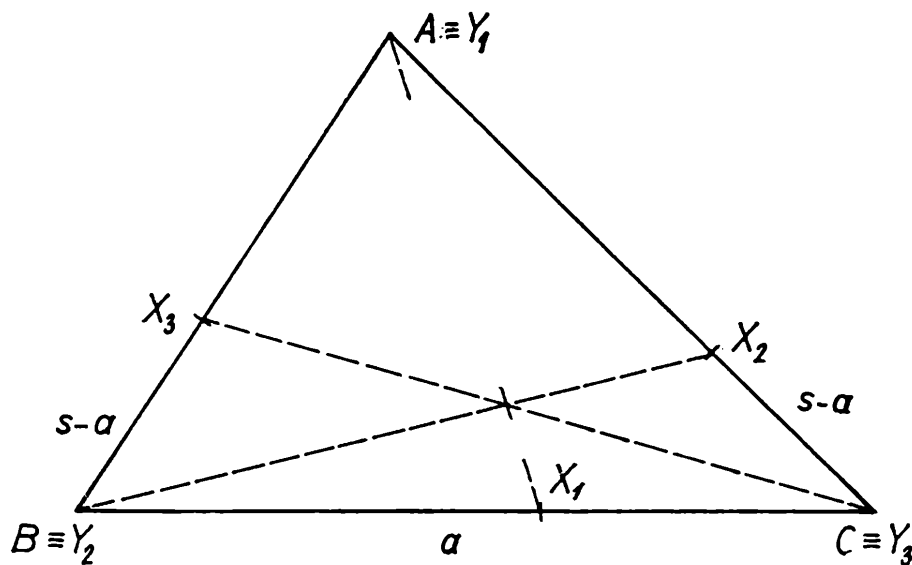
čili

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \geq n \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{n-i+1}$$

Nerovnost z textu úlohy tedy platí, právě když platí rovnost, tj. právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

A - III - 5

Je dán trojúhelník ABC s velikostmi stran $a \geq b \geq c$. Mezi všemi dvojicemi bodů X, Y na hranici trojúhelníka ABC , které tuto hranici dělí na dvě části stejné délky, najděte všechny takové, pro něž je vzdálenost XY maximální.



Obr. 3

Řešení : Předpokládejme, že se bod X pohybuje rovnoměrně po hranici trojúhelníka ABC . Potom se bod Y , který spolu s X pólí obvod trojúhelníka, pohybuje také rovnoměrně, a to stejnou rychlostí jako bod X . Pokud žádný z bodů X, Y není ve vrcholu trojúhelníka, jsou oba tyto body na různých stranách trojúhelníka, tedy na ramenech úhlu. Uvažujme nyní konvexní úhel φ s vrcholem V , na jednom jeho rameni body R_1, R_2 a na druhém S_1, S_2 tak, že $|VR_1| = |VS_1| = u$, $|VR_2| = u + v$, $|VS_2| = u - v$ ($u \geq v \geq 0$). Podle kosinové věty je

$$|R_2S_2|^2 = 2u^2(1 - \cos \varphi) + 2v^2(1 + \cos \varphi),$$

a tedy $|R_2S_2|$ je maximální při $v = u$, tj. $S_2 \equiv V$. To však znamená pro naši úlohu, že největší vzdálenost mohou mít body X a Y jen v případě, že jeden z bodů X nebo Y bude ve vrcholu trojúhelníka. Porovnejme proto tyto tři vzdálenosti (obr. 3): Je-li bod Y_2 ve vrcholu B , je bod X_2 na straně AC , a to ve vzdálenosti $s-a$ od bodu C , kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ je poloviční obvod trojúhelníka ABC (je totiž $Y_2C + CX_2 = s$). Ze stejného důvodu je pro $Y_3 = C$ bod X_3 ve vzdálenosti $s-a$ od bodu B na straně AB .

Podle kosinové věty je $|X_2Y_2|^2 = a^2 + (s-a)^2 - 2a(s-a)\cos\gamma$, $|X_3Y_3|^2 = a^2 + (s-a)^2 - 2a(s-a)\cos\beta$. Protože podle předpokladu $a \geq b \geq c$ je také $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, tj. $\cos\beta \leq \cos\gamma$, platí

$$|X_2Y_2|^2 \leq |X_3Y_3|^2 \quad (1)$$

Porovnáme-li stejným způsobem pro $Y_1 = A$ vzdálenosti $|X_2Y_2|$ a $|X_1Y_1|$, dostaneme, že

$$|X_1Y_1|^2 \leq |X_2Y_2|^2. \quad (2)$$

Přitom v (1) nastává rovnost, právě když $\beta = \gamma$ a v (2) nastává rovnost, právě když $\alpha = \beta$. Proto vzdálenost je vždy maximální pro dvojici X_3Y_3 , tj. je-li jeden z bodů X, Y ve vrcholu C . Je-li $c = b$, je vzdálenost maximální i v případě, je-li jeden z bodů X, Y ve vrcholu B ; je-li $a = b = c$, je vzdálenost maximální, kdykoliv jeden z bodů X, Y je ve vrcholu (rovnostředného) trojúhelníka.

A - III - 6

Najděte všechna přirozená čísla n , $n < 10^7$, pro která platí: Je-li přirozené číslo m , $1 < m < n$, nesoudělné s číslem n , pak je m prvočíslo.

Řešení: Nechť n je přirozené číslo, pro které platí tvrzení úlohy. Jestliže pro prvočíslo p platí $p^2 < n$, pak n je dělitelné číslem p . Skutečně, kdyby p nedělilo n , $p^2 < n$, potom p^2, n by byla nesoudělná čísla, ale p^2 není prvočíslo.

Snadno zjistíme, že čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30 vyhovují úloze. Žádné jiné číslo menší než 30 nemá vlastnost v úloze popsanou. Předpokládejme, že n má tuto vlastnost, $n > 30$. Protože $2^2 < 30$, $3^2 < 30$, $5^2 < 30$, je n dělitelné dvěma, třemi i pěti, a tedy $n = 30k \geq 60$. Protože $7^2 < 60$, je $n \geq 7 \cdot 60 = 420$. Potom $11^2 < 420$, $13^2 < 420$, $17^2 < 420$, $19^2 < 420$, a tedy $n \geq 420 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 > 10^7$. Žádná další čísla $n < 10^7$ s požadovanou vlastností tedy neexistují. (Lze dokonce ukázat, že neexistují už ani žádná taková $n \geq 10^7$.)

Texty úloh XXI. MMO

Stručnou zprávu o XXI. mezinárodní matematické olympiádě jsme otiskli v listopadovém čísle. Nyní uveřejňujeme texty úloh této soutěže.

1. Nechť p a q jsou přirozená čísla taková, že

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Dokažte, že p je dělitelné číslem 1979.

2. Je dán pětiboký hranol se základnami $A_1A_2A_3A_4A_5$ a $B_1B_2B_3B_4B_5$. Všechny hrany obou základů a všechny úsečky A_jB_k , $1 \leq j \leq 5$, $1 \leq k \leq 5$, obarvíme červenou nebo zelenou barvou tak, aby v každém trojúhelníku, jehož vrcholy jsou vrcholy hranolu a jehož všechny strany byly obarveny, existovala dvojice stran různých barev. Dokažte, že všech deset hran obou základů musí mít stejnou barvu.
3. V rovině jsou dány dvě protínající se kružnice k_1 a k_2 . Označme A jeden z jejich průsečíků. Po kružnici k_1 , resp. k_2 se pohybují body B_1 , resp. B_2 ve stejném smyslu konstantní rychlostí tak, že při každém oběhu se setkávají v bodě A .

Dokažte, že v rovině existuje pevný bod P , pro který v každém okamžiku platí $PB_1 = PB_2$.

4. Je dána rovina π , bod $P \in \pi$ a bod $Q \in \pi$. Najděte všechny body $R \in \pi$, pro něž je podíl

$$\frac{PQ + PR}{QR}$$

maximální.

5. Nalezněte všechna reálná čísla b , pro něž existují nezáporná reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 taková, že platí

$$\sum_{k=1}^5 k x_k = b, \quad \sum_{k=1}^5 k^3 x_k = b^2, \quad \sum_{k=1}^5 k^5 x_k = b^3$$

6. Po vrcholech pravidelného osmiúhelníka $ABCDEFGH$ skáče klokan. Každým skokem se přemísťuje z jednoho vrcholu do některého z obou sousedních; začíná v A a zastaví se, jakmile se poprvé dostane do E .

Označme a_n počet všech různých cest z A do E složených z právě n skoků. Dokažte, že pro všechna $k = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{k-1} - y^{k-1}),$$

kde

$$x = 2 + \sqrt{2}, \quad y = 2 - \sqrt{2}.$$

Poznámka. Cestou z A do E složenou z právě n skoků rozumíme posloupnost $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ vrcholů osmiúhelníka s těmito vlastnostmi:

- (i) $P_0 = A, P_n = E$;
- (ii) pro všechna $j = 1, 2, \dots, n-1$ je $P_j \neq E$;
- (iii) pro každé $j = 0, 1, \dots, n-1$ jsou P_j a P_{j+1} dva sousední vrcholy osmiúhelníka.

F. Z.

pro volnou chvíli

Úloha nejen štědrovečerní

Štědrý den bývá pro většinu z nás jedním z nejhezčích dnů v roce. Jeho příprava však přináší mnoho starostí. Problémem se může stát i otázka, jak rozesadit členy rodiny, příbuzné a případně další hosty ke slavnostní večeři. Jejich promyšlené rozmístění může totiž značně přispět ke sváteční pohodě.

V minulosti se o Štědrém večeru v některých rodinách dodržovala zásada, že počet osob u stolu musí být sudé číslo. To vedlo případně k tomu, že se pozval ještě někdo, s nímž se původně nepočítalo, anebo se na někoho úmyslně zapomnělo. Druhý postup byl velmi problematický, neboť z něho pramenily mnohé rozepře. Při určování míst u stolu se přihlíží k řadě společenských i ryze praktických hledisek, např. kdo má sedět v čele stolu, kdo má mít nejblíže do kuchyně apod.

V předchozím odstavci jsme naznačili jistý námět pro kombinatorické úlohy, které se ovšem nemusí týkat jen Štědrého dne. Na ukázkou si uveďme aspoň jednu takovou úlohu:

Kolem kulatého stolu si má sednout na židle pravidelně předem rozmístěné sedm osob; označme je A, B, C, D, E, F a G . Přitom místo pro osobu A je pevně určeno, osoby B a C mají být sousedy a osoba D nemá sedět vedle osoby A . Kolika způsoby lze osoby rozesadit kolem stolu?

[144]

Sestavte a řešte obdobnou úlohu pro situaci o Štědrém večeru u vás doma. Úlohu lze samozřejmě formulovat i pro stůl, který není kulatý. Ovšem pak je problém složitější, např. při lichém počtu přítomných nemohou na každých dvou protějších stranách stolu sedět stejné počty osob. Zamyslete se i nad tím, zda může dojít k situaci, že všem předem stanoveným podmínkám, kdo, kde a jak má sedět, nelze zároveň vyhovět.

jm

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)



identicamente	identicky
identico	identický
identificare	identifikovati, ztotožniti
idrolisi ž	hydrolýza
igrometro m	hygrometr, vlhkoměr
illimitato	neomezený, neohraničený
illuminamento m	osvětlení
illuminare	osvětliti
illuminazione ž	osvětlení
illustrare	ilustrovati
illustrazione ž	ilustrace
immaginario	imaginární
immagine ž	obraz
immergere	vnořiti
immobile	nehybný
impari	lichý
impedanza ž	impedance, zdánlivý odpor
implicare	implikovati
implicazione ž	implikace
implicito	implicitní
impossibile	nemožný
improprio (integrale)	nevlastní (integrál)
impulso m	impuls
inaccessibile	nepřístupný
inchiudere	zahrnovati
inchiuso, incluso	zahrnutý, obsažený
incidente	incidentní
incidenza ž	incidence
inclusione ž	inkluse (množinová)
incognita ž	neznámá

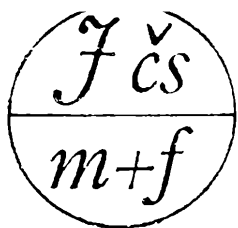
incommensurabile	nesouměřitelný
incomparabile	nesrovnatelný
incompatibile	neslučitelný
inconoscibile	nepoznatelný
inconosciuto	nepoznaný, neznámý
incremento m	přírůstek
indecomponibile	nerozložitelný
indefinito	neurčitý
indeterminato	neurčený
indice m	index
— di rifrazione	— lomu
— di un sottogruppo	— podgrupy
indipendente	nezávislý
indipendentemente	nezávisle
indipendenza ž	nezávislost
indotto	indukční
indotto m	induktor
induttanza ž	samoindukčnost
induttore m	induktor
induzione ž	indukce, indukčnost
— elettrostatica	— elektrostatická
— elettromagnetica	— elektromagnetická
— magnetica	— magnetická
— matematica	— matematická (úplná)
ineguale	nerovný, nestejný
ineguaglianza, inegualità ž	nerovnost
inerzia ž	setrvačnost
inferiore	dolní, spodní
infinitesimo, infinitesimale	infinitesimální
infinito	nekonečný
informazione ž	informace
infrarosso	infračervený
infrasuono m	infrazvuk
ingrandimento m	zvětšení (optické)
ingrandire	zvětšiti
iniettivo	injektivní, prostý (zobrazení)
iniziale	počáteční
iscritto	vepsaný
inscrivere	vepsati

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

5

ROČNÍK 58, 1979-1980, LEDEN



ROČNÍK 58
LEDEN 1980

5

rozhledy

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VYKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petráněk, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1980.

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

Obsah

Dr. J. Novák, CSc.: Národní cena za fyziku v roce 1979	193
Doc. dr. V. Mráz, CSc.: Mersennova čísla a čísla dokonalá	194
Dr. O. Petráněk: Diferenciální rovnice v oboru polynomů	198
Z. Půlpán: O schodištním vypínači a žárovce	204
F. Janeček: Několik úloh na maxima a minima skupin reálných čísel	209
Dr. J. Mida: Další vzorec pro velikost pravoúhlého průmětu úhlu	210
Doc. dr. ing. L. Drs, CSc.: Fotografie a geometrie	213
Dr. M. Odehnal, CSc.: Makroskopické kvantové jevy – supravodivost a supra-tekutost	217
J. Mička: 110 roků od vydání Zochovej Physiky	224
R. Rebstöck: Sto let elektrického světla	229
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Staré české „váhy“	231
Pro volnou chvíli	233
Ing. J. Vavřin: Řešení úloh o elektrických zdrojích z druhého čísla	234
Recenze	237
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky

Národní cena za fyziku v roce 1979



V roce 1979 byla udělena Národní cena ČSR prof. RNDr. Karlu Vackovi, DrSc., děkanovi matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy (MFF UK) v Praze, který je též vedoucím katedry chemické fyziky na téže fakultě.

Prof. Karel Vacek se narodil 4. 8. 1930 v Havlíčkově Brodě. Studium na MFF UK úspěšně ukončil jako fyzik v roce 1953. V letech 1953–1955 byl asistentem na přírodovědecké fakultě UK v Praze. Od roku 1956 pracuje nejdříve jako odborný asistent, později jako vědecký pracovník, docent a profesor na MFF UK. Docentem experimentální fyziky byl jmenován 1. března 1964, profesorem experimentální fyziky 1. ledna 1976. Je členem Francouzské fyzikální společnosti a Evropské fyzikální společnosti. Je mezinárodně uznávaným odborníkem v oboru luminiscence pevných látek, zvláště pak luminiscence iontových krystalů v nerovnovážných podmínkách. Jako vedoucí kolektivu pracovníků katedry chemické fyziky MFF UK rozhodující měrou přispěl k vyřešení nejdůležitějších otázek a problémů při studiu zářivých pochodů v krystalech AgCl. Národní cena ČSR mu byla udělena zejména za objasnění podstaty luminiscenčních center a zářivých přechodů v krystalech AgCl v nerovnovážných podmínkách.

Soubor prací, které vznikly pod vedením profesora K. Vacka, se týká otázky přeměny různých forem energie na energii světelnou v krystalech AgCl v nerovnovážných podmínkách (vysoký tlak, buzení laserem, velmi nízké teploty). Pomocí teorie lokalizovaného excitonu resp. elektron-děrových zářivých interakcí a elektrických vlastností dislokací byla objasněna podstata center, na nichž dochází k přeměně energie na energii světelnou (ve formě fluorescence) a mechanismus přechodů, které se při

této přeměně uplatňují. Získané výsledky mají praktickou aplikaci ve fotografickém procesu a nových modelech světelných zdrojů resp. fotochemických zdrojů energie.

Výsledky, ke kterým došel profesor Karel Vacek s kolektivem katedry chemické fyziky MFF UK během téměř 25 let usilovné vědeckovýzkumné práce, mají světovou prioritu v základním výzkumu. V ČSSR se v praxi začaly tyto výsledky uplatňovat například při spolupráci s Ústavem teoretické a aplikované mechaniky ČSAV při přípravě polykrystalických destiček AgCl pro modelová fotoelasticimetrická měření a při spolupráci na vývoji čs. fotochromních skel na bázi stříbrných a mědných halogenidů s n. p. Sklo Union Teplice. Dále se výsledků prací profesora K. Vacka využívá při vývoji zvýšení citlivosti čs. rentgenografických materiálů ve spolupráci s n. p. Fotochema Hradec Králové a při studiu a snižování mechanodegradace čs. technických polymerů ve spolupráci s Výzkumným ústavem plastické a gumárenské technologie v Gottwaldově.

Dne 4. srpna 1980 se prof. RNDr. K. Vacek, DrSc. dožije významného životního jubilea 50 let. Do další plodné a záslužné práce v oboru experimentální fyziky mu přejeme jménem redakce mnoho úspěchů i ocenění.

RNDr. Josef Novák, CSc., UK Praha

matematika

Mersennova čísla a čísla dokonalá

Doc. dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

O největším dosud známém prvočísle, které bylo vypočteno na počítači v říjnu roku 1978, jsme se dověděli z článku *dr. Jiřího Sedláčka, CSc.*, otištěného v čísle 1 letošního ročníku Rozhledů. Je jím jedno z Mersennových čísel, a to číslo $2^{21\,701} - 1 = 4486\dots751$ (číslo má 6533 číslic při zápisu v desítkové číselné soustavě).

Mersennova čísla, která označujeme M_n , mají tvar

$$M_n = 2^n - 1, \text{ kde } n \geq 1, \text{ celé,} \quad (1)$$

takže jejich posloupnost je

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, \dots \quad (2)$$

Mersennova čísla lze také chápat jako součty prvních n -členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = 2$. Ze střední školy jsou známy vzorce pro výpočet n -tého členu geometrické posloupnosti a pro součet počátečních n členů této posloupnosti. Podle těchto vzorců je

$$a_n = 2^{n-1} \quad (3)$$

$$s_n = 2^n - 1 \quad (4)$$

Několik počátečních členů naší geometrické posloupnosti je

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, \dots \quad (3')$$

Součty prvních n -členů posloupnosti (3') dávají posloupnost

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, \dots \quad (4')$$

Zjišťujeme, že posloupnost Mersennových čísel (2) a posloupnost součtů (4) jsou stejné. To snadno nahlédneme, porovnáme-li vzorce (1) a (4).

Někdy se Mersennovým číslem rozumí číslo tvaru $M_p = 2^p - 1$, kde p je prvočíslo. Pro nejmenší prvočísla p jsme čísla M_p uspořádali do tabulky:

p	2	3	5	7	11	13	17	19	
M_p	3	7	31	127	2047	8191	131 071	524 287	

Některá z těchto čísel M_p jsou prvočísla, jiná jsou čísla složená, např. $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$.

Zatím je známo jen 25 Mersennových prvočísel, a to pro $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 617, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11\,213, 19\,937$ a $21\,701$. Není dokázána domněnka, že mezi Mersennovými čísly M_p , kde p je prvočíslo, existuje nekonečně mnoho složených čísel, ani není známo, existuje-li nekonečně mnoho Mersennových prvočísel.

Dokažme, že číslo $M_n = 2^n - 1$ je složené, když index n čísla M_n je číslo složené. Nechť tedy $n = a \cdot b$, kde je $a > 1$ a $b > 1$. Je $2^a - 1 > 1$ a dále $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$ je dělitelné číslem $2^a - 1$, takže číslo $2^n - 1$ je vskutku číslo složené.

Rovněž platí: Jestliže je M_n prvočíslo, pak je i n prvočíslo. Neplatí to však obráceně, jak jsme zjistili, že např. $M_{11} = 2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

Uvedeme větu, která umožnila dokázat, že některá „velká“ Mersennova čísla s prvočíselným indexem p , tedy čísla M_p , jsou složená. Jestliže q je prvočíslo tvaru $8k + 7$ (k je celé nezáporné číslo), pak číslo $M_{(q-1):2}$ je dělitelné číslem q . Např. pro $k = 0, 2, 3, 5, \dots$ je $q = 7, 23, 31, 47, \dots$

a příslušné číslo je $M_3 = 7$, $M_{11} = 2047$, $M_{15} = 32\,767$, $M_{23} = 8\,388\,607$, ..., takže $7 \mid 7$, $23 \mid 2047$, $31 \mid 32\,767$, $47 \mid 8\,388\,607$, ...*).

Název čísel, kterým věnujeme pozornost, byl zvolen podle francouzského matematika, který se jmenoval *Marin Mersenne* (1588–1648) a zabýval se vlastnostmi čísel tvaru $2^n - 1$. Mersenne vyslovil některé domněnky o číslech M_n , které byly později dokázány, ale také některé z nich byly vyvráceny. K Mersennovým zásluhám patří i to, že v době, kdy neexistovaly vědecké matematické časopisy, soustavně zprostředkovával výměnu informací dopisováním s evropskými matematiky.

První čtyři Mersennova prvočísla byla známa již starým Řekům. V osmnáctém století bylo známo osm těchto prvočísel, z nichž největší $M_{31} = 2^{31} - 1$ objevil *Leonard Euler* (1707–1783) v roce 1772. Ruský matematik *I. M. Pervušin* v roce 1883 dokázal, že Mersennovo číslo $M_{61} = 2^{61} - 1$, které má při zápisu v desítkové číselné soustavě 19 číslic, je prvočíslo. Brzy pak byla nalezena prvočísla M_{89} a M_{107} . Od roku 1914 je známo, že číslo M_{127} je rovněž prvočíslo.

Použití počítačů od poloviny tohoto století umožnilo nalézt Mersennova prvočísla M_{521} , M_{617} , M_{1279} , M_{2203} , M_{2281} , M_{3217} . V šedesátých letech byla objevena prvočísla M_{4253} , M_{4423} , M_{9689} , M_{9941} , $M_{11\,213}$ a z let 1971 a 1978 známe prvočísla $M_{19\,937}$ a $M_{21\,701}$.

Mersennova prvočísla tvaru $2^p - 1$ vedou k nalezení některých *sudých dokonalých čísel*. Dokonalým (perfektním) číslem se rozumí takové přirozené číslo, jehož součet všech kladných dělitelů menších, než je číslo samo, je roven tomuto číslu.

Nejmenším dokonalým číslem je číslo 6; součet jeho dělitelů menších než 6 je $1 + 2 + 3 = 6$. Také dělitelé čísla 28 dávají součet $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, pročez číslo 28 je číslem dokonalým. O dalších dokonalých číslech se zmíníme dále. Přirozená čísla, jejichž součet uvedených dělitelů je menší, než je toto číslo, se nazývají *čísla deficitní*; přirozená čísla, jejichž součet dělitelů menších, než je číslo samo, je větší než toto číslo, se nazývají *čísla abundantní*. Deficitním číslem je např. číslo 10, protože $1 + 2 + 5 = 8 < 10$, abundantním číslem je např. číslo 12, protože $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$.

Ač není dokázáno, že dokonalých čísel je nekonečně mnoho, přece o nich můžeme něco říci, což souvisí s Mersennovými prvočísly. Platí totiž věta (5):

(5) Sudé číslo D_n je číslem dokonalým tehdy a jen tehdy, má-li tvar $D_n = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$, přičemž činitel $(2^n - 1)$ je prvočíslo.

V součinu $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ z věty (5) je zřejmé, že činitel 2^{n-1} je číslo sudé a činitel $(2^n - 1)$ je Mersennovo prvočíslo. Tato věta umožňuje

*) Připomeňme, že např. $47 \mid 8\,388\,607$ značí, že číslo 47 je dělitelem čísla 8 388 607.

určit právě tolik sudých dokonalých čísel, kolik známe Mersennových prvočísel, a to je 25. K shora uvedeným prvočísłům $M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}, \dots, M_{11\,213}, M_{19\,937}, M_{21\,701}$, tj. Mersennovým prvočísłům pro $n = 2, 3, 5, 7, 13, \dots, 11\,213, 19\,937$ a $21\,701$ jsou dokonalými číslý $2 \cdot 3 = 6, 4 \cdot 7 = 28, 16 \cdot 31 = 496, 64 \cdot 127 = 8128, 4096 \cdot 8191 = 33\,550\,336, \dots, 2^{19\,936} \cdot (2^{19\,937} - 1)$ a $2^{21\,700} \cdot (2^{21\,701} - 1)$. Dodejme ještě, že všechna dosud známá dokonalá čísla jsou čísla sudá a neví se, zda existuje také dokonalé číslo liché.

První čtyři dokonalá čísla 6, 28, 496 a 8128 znal již *Eukleides* (3. až 4. století př. n. l.). Ve svých *Základech* podává návod k jejich sestrojení. Rozděil posloupnost (3) počínajíc číslem 4 na dvojice

$$(4; 8), (16; 32), (64; 128), (256; 512), (1024; 2048),$$

Věděl, že když vynásobí první člen druhým členem dvojice zmenšeným o číslo 1, dostane sudé dokonalé číslo, pokud toto zmenšené číslo je prvočíslem. Opravdu $4 \cdot (8 - 1) = 28, 16 \cdot (32 - 1) = 496, 64 \cdot (128 - 1) = 8128$, avšak $256 \cdot (512 - 1) = 130\,816$ již není dokonalé číslo, protože číslo $511 = 7 \cdot 73$ není prvočíslo. Eukleides ukázal, že ve větě (5) uvedená podmínka pro dokonalé číslo D_p je postačující, ale teprve *L. Euler* dokázal, že tato podmínka je i nutná.

Má-li čtenář k dispozici kapesní počítač, může si vyhledat všechny dělitele např. čísla $D_{13} = 2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 33\,550\,336$. Po sečtení těchto dělitelů (menších než D_{13}) dostane dokonalé číslo D_{13} . Skutečně $33\,550\,336 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 + 4096 + 8191 + 16\,382 + 32\,764 + 65\,528 + 131\,056 + 262\,112 + 524\,224 + 1\,048\,448 + 2\,096\,896 + 4\,193\,792 + 8\,387\,584 + 16\,775\,168$.

Podrobněji se náš čtenář s probíranou tematikou může seznámit v některé z knížek uvedených v závěru mého článku *Prvočíslo a číslo Fermatova* a dále v knížce *Tibora Šaláta Dokonalé a spřátelené čísla* (Škola mladých matematiků č. 22), Mladá fronta, 1969, 52 stran a v knížce *Wacław Sierpińského Co víme a co nevíme o prvočíslech*, SPN, Praha, 1966, 108 stran.

Řešení úloh ze str. 232

1. 1980. 2.

4	1
7	3

 3.

2	8	3
4	6	7
1	3	9

,

4	6	1
5	0	3
7	1	9

.

Diferenciální rovnice v oboru polynomů

RNDr. OLDŘICH PETRÁNEK, SPŠE Praha

Problematika řešení diferenciálních rovnic v oboru polynomů je zajímavá v tom, že je možno obejít se bez pojmu integrálu a vlastně i bez pojmu derivace, neboť pro polynomy lze zavést derivaci zcela formálně algebraickým předpisem. Otázka určování řešení dané diferenciální rovnice se převede na problém řešit soustavu algebraických rovnic.

Touto problematikou se budeme zabývat v následující sérii tří článků. V prvním příspěvku se zaměříme na objasnění základních vlastností polynomů, které jsou nezbytné při řešení diferenciálních rovnic v oboru polynomů. Ve druhém příspěvku se seznámíme s pojmem diferenciální rovnice a ve třetím příspěvku budeme řešit některé diferenciální rovnice v oboru polynomů.

Předpokládejme, že dostatečně známe pojmy rovnice a funkce. V dalších úvahách se budeme zabývat pouze zvláštními případy funkcí, tzv. polynomy (mnohočleny). Protože budou základním pojmem, se kterým budeme pracovat, vyslovme znovu, co budeme přesně tímto pojmem rozumět.

Polynomem a nebo *mnohočlenem* (přesněji polynomem v jedné proměnné) budeme nazývat každou funkci, kterou lze vyjádřit předpisem tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

kde n je jisté celé nezáporné číslo, $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou reálná čísla.

Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazýváme *koefficienty* polynomu. Přitom jednotlivé sčítance v (1) nazýváme *členy* polynomu.

Při zapisování polynomů budeme užívat těchto úmluv:

- a) místo „ $1 \cdot x^i$ “ budeme psát pouze „ x^i “
- b) místo „ $+(-a)x^i$ “ budeme psát pouze „ $-ax^i$ “
- c) člen tvaru $0 \cdot x^i$ budeme někdy vynechávat.

Polynomy budeme zpravidla značit velkými (latinskými) písmeny, např. P, Q, R , po případě s indexy (anebo budeme-li chtít zdůraznit, o jakou proměnnou jde, $P(x), Q(x)$ apod.).

Je zřejmé, že pro libovolný polynom P , např. pro $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a pro libovolné reálné číslo b je $P(b)$ jednoznačně určené reálné číslo. Definiční obor libovolného polynomu je množina všech reálných čísel.

Mezi polynomy patří i funkce, která každému reálnému číslu přiřazuje číslo 0. Nazveme ji *nulový polynom*. Že jde skutečně o polynom, vyplývá z toho, že ji lze vyjádřit ve tvaru (1). Je možno např. zvolit $n = 2$, $a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Příslušný předpis $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$ má zřejmě poža-

dovanou vlastnost. Pro tuto funkci lze ovšem nalézt i jiné vyjádření. Např. $0 \cdot x + 0$.

Vzhledem k tomu, že s proměnnými lze počítat obdobně jako s čísly, je možno snadno nahlédnout, že součet i rozdíl polynomů je opět polynom.

Poněkud složitějších úprav musíme použít, chceme-li ukázat, že také součin polynomů je polynom. Musíme několikrát užít distributivního a komutativního zákona a pravidla pro sčítání týchž mocnin proměnné.

Příklad 1. Určeme součet a součin polynomů $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = x + 2$.

Řešení. $P(x) + Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 + x + 2 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (a_1 + 1) \cdot x + (a_0 + 2)$
 $P(x) \cdot Q(x) = a_n x^{n+1} + a_{n-1} x^n + \dots + a_1 x^2 + a_0 x + 2a_n x^n + 2a_{n-1} x^{n-1} + \dots + 2a_1 x + 2a_0 = a_n x^{n+1} + (a_{n-1} + 2a_n) x^n + \dots + (a_0 + 2a_1) x + 2a_0$

Při sčítání i násobení polynomů dostáváme obvykle výsledky, jež nejsou ve tvaru (1). Vždy se však dají na tento tvar upravit.

Zápisu polynomu, ve kterém se každý člen s x^i vyskytuje nejvýše jednou, budeme říkat *zápis polynomu v normálním tvaru*.

Je-li polynom zapsán v normálním tvaru a je-li i nejvyšší mocnina proměnné s nenulovým koeficientem, nazývá se i stupeň polynomu. (Tedy stupeň polynomu je celé nezáporné číslo.) Je ihned vidět, že když P je polynom stupně k (kde tedy k je libovolné celé nezáporné číslo), lze P zapsat v normálním tvaru tímto způsobem: $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Poznamenejme, že při zjišťování stupně polynomu je velmi důležité mít jej zapsán v normálním tvaru.

Příklad 2. Určeme stupně následujících polynomů.

a) $4x^5 - 3x^2 - 1$, b) $0 \cdot x^4 - 0 \cdot x^3 + 2x - 5\sqrt{3}$, c) 0

Řešení. a) polynom 5. stupně, neboť $a_5 = 4$ a zároveň každé a_n , kde $n > 5$, je rovno 0.

b) polynom 1. stupně, neboť $a_1 = 2$ a zároveň každé a_n , kde $n > 1$, je rovno 0.

c) nulový polynom.

Z toho, jak byl zaveden stupeň polynomu, je vidět, že chceme-li určit stupeň daného polynomu, musí být v jeho zápise v normálním tvaru alespoň jeden koeficient nenulový. Tedy k polynomu nulovému nelze stupeň určit.

Dále nás bude zajímat otázka, v jakém vztahu je stupeň polynomu $P \cdot Q$, známe-li stupně polynomů P a Q . Předpokládejme, že polynom P má stupeň n a polynom Q stupeň m . Pak můžeme psát

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0.$$

Potom nejvyšší mocnina proměnné v polynomu $P \cdot Q$ je zřejmě $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ a koeficient u ní je $a_n \cdot b_m$.

Protože $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, je též $a_n \cdot b_m \neq 0$. Tedy polynom $P \cdot Q$ má stupeň $n + m$. Ukázali jsme tedy, že platí následující věta.

Věta 1. Součin polynomů stupně n a m je polynom stupně $n + m$ (neboli stupeň součinu nenulových polynomů je roven součtu stupňů těchto polynomů).

¶ Řekli jsme, že polynom je zvláštní případ funkce, jejíž definiční obor je množina všech reálných čísel. Někdy nás budou zajímat ta čísla, jimž polynom přiřazuje číslo nula. Těmto číslům budeme říkat *kořeny* daného polynomu. Je-li uvažovaný polynom nulový, je zřejmě každé reálné číslo jeho kořenem. Nenulové polynomy mohou mít též kořeny. Např.

polynom $2x + 1$ má zřejmě kořen $-\frac{1}{2}$ (neboť $2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$), poly-

nom $5x^2 - 7x$ má kořeny $0, \frac{7}{5}$. Ukážeme, že nenulový polynom nemůže však mít kořenů „příliš mnoho“.

Věta 2. Polynom stupně n má nejvýše n různých (reálných) kořenů.

Důkaz. Mějme polynom P stupně 0, tj. $P(x) = a_0$, kde $a_0 \neq 0$. Je zřejmé, že pro každé reálné číslo a je $P(a) = a_0 \neq 0$, takže náš polynom stupně 0 nemá ve shodě s tvrzením žádný kořen.

Předpokládejme dále, že máme celé číslo $n > 0$ a že naše tvrzení platí pro všechny polynomy stupně $n - 1$.

Nechť je dán polynom stupně n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Nemá-li P žádný kořen, je věta dokázána. Má-li P alespoň jeden kořen, označme libovolný z nich u .

$$\text{Potom je } P(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0 = 0.$$

Tedy platí $P(x) - P(u) = P(x)$.

$$P(x) = P(x) - P(u) = (a_n x^n + \dots + a_0) - (a_n u^n + \dots + a_0)$$

$$P(x) = a_n (x^n - u^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - u^{n-1}) + \dots + a_1 (x - u).$$

Podle známého vzorce pro libovolná reálná čísla r, s a libovolné přirozené číslo k platí:

$$r^k - s^k = (r - s) (r^{k-1} + r^{k-2}s + r^{k-3}s^2 + \dots + rs^{k-2} + s^{k-1}) \quad (2)$$

O platnosti tohoto vzorce se můžeme snadno přesvědčit provedením součinu na pravé straně.

Užijeme nyní tohoto vzorce pro výrazy $x^n - u^n$, $x^{n-1} - u^{n-1}$ atd. Je vidět, že potom z výrazu $P(x) - P(u)$ lze vytknout polynom $x - u$. Můžeme tedy psát

$$P(x) - P(u) = (x - u) Q(x),$$

kde $Q(x)$ je polynom stupně $n - 1$. To, že $Q(x)$ má stupeň $n - 1$, vyplývá jednak ze vzorce (2), jednak z věty o stupni součinu polynomů.

Podle našeho předpokladu má tedy polynom $Q(x)$ nejvýše $n - 1$ různých kořenů, takže polynom $P(x) = (x - u) \cdot Q(x)$ má nejvýše n různých kořenů. (Pokud u je různé od všech kořenů polynomu Q , má P o jeden kořen více než Q . Je-li u rovno některému z kořenů polynomu Q , potom polynomy P a Q mají stejný počet kořenů.)

Tím jsme matematickou indukcí dokázali, že každý polynom stupně n má nejvýše n různých kořenů.

Vraťme se nyní k otázce rovnosti polynomů. Nechť jsou dány polynomy $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Protože polynomy jsou funkce, jsou si rovny právě tehdy, mají-li též definiční obor a platí-li pro každé (reálné) číslo a $P(a) = Q(a)$. To, že oba polynomy mají též definiční obor, je splněno vždy, neboť definičním oborem každého polynomu je množina všech reálných čísel. Utvořme rozdíl $R(x) = P(x) - Q(x)$. Protože $P(a) = Q(a)$, je pro každé (reálné) číslo a $R(a) = 0$, neboli každé číslo a je kořenem polynomu R . Kdyby R nebyl nulový polynom, tj. kdyby všechny jeho koeficienty při zápisu v normálním tvaru nebyly rovné 0, měl by R nějaký stupeň, označme ho $k \neq 0$. Podle předcházejícího tvrzení o počtu kořenů polynomů může mít R nejvýše k různých (reálných) kořenů. A to je spor, neboť pro každé reálné číslo a je $R(a) = 0$. Proto musí být všechny koeficienty polynomu $R(x) = P(x) - Q(x)$ rovny nule. To však znamená, že musí být $n = m$, $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}$, ..., $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$.

Obráceně: mají-li dva polynomy v normálním tvaru sobě rovné koeficienty u těchž mocnin proměnné, jsou si rovny, neboť pak oba přiřazují každému reálnému číslu touž funkční hodnotu. Tím jsme dokázali následující větu:

Věta 3. Dva libovolné polynomy v normálním tvaru se sobě rovnají právě tehdy, mají-li sobě rovné koeficienty u těchž mocnin proměnné.

Příklad 3. Určeme a, b, c tak, aby se polynomy $P(x) = 2ax^2 + 4x - x^2 + 5b$, $Q(x) = 8x^2 + 2cx + 7 - x$ sobě rovnaly.

Řešení. Nejprve oba polynomy převedeme do normálního tvaru.

$$P(x) = (2a - 1)x^2 + 4x + 5b, \quad Q(x) = 8x^2 + (2c - 1)x + 7.$$

Podle předchozí věty musí platit

$$2a - 1 = 8, \quad 4 = 2c - 1, \quad 5b = 7$$

$$a = \frac{9}{2}, \quad c = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{7}{5}.$$

Předpokládáme, že s pojmem derivace funkce jste se již seznámili.

Nejprve jste si zavedli derivaci funkce v daném bodě (jejího definičního oboru), již byla, pokud existovala, limita jistého výrazu. Od pojmu derivace funkce v bodě jste pak přešli k pojmu derivace funkce v nějaké množině reálných čísel, např. v intervalu.

Protože polynomy jsou zvláštním případem funkcí, bylo by možné při zavedení derivace polynomu postupovat zcela obdobně. Pouze bychom se museli přesvědčit, že derivací funkce, která je polynomem, bude vždy opět polynom. Protože však polynomy jsou jednoduché funkce, můžeme při zavedení jejich derivace postupovat způsobem mnohem jednodušším. Pojem limity se zde vůbec nemusí vyskytovat.

Je-li $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ libovolný polynom, pak polynom

$$n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 \quad (3)$$

nazveme jeho *derivací* a označíme ho $P'(x)$.

Při definici derivace nemusíme nic předpokládat o nenulovosti koeficientů daného polynomu $P(x)$. (Jestliže píšeme např. $0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + \dots + 2x - 3$ místo $2x - 3$, je derivace v obou případech též polynom, tj. 2.) Nemusíme dále ani předpokládat, že polynom $P(x)$ je zapsán v normálním tvaru. (Je-li např. $P(x)$ zapsán ve tvaru $2x^2 + 5x + 2x^2 - 2x + 7$, vyjde nám derivace ve tvaru $2 \cdot 2x + 5 + 2 \cdot 2x - 2$, což převedeno do normálního tvaru je $8x + 3$. Stejný výsledek bychom dostali derivováním polynomu $P(x)$ v normálním tvaru.)

Máme-li ovšem daný polynom $P(x)$ zapsán v normálním tvaru, obdržíme zřejmě podle (3) jeho derivaci rovněž v normálním tvaru.

Je-li polynom $P(x)$ stupně $n \geq 1$, tj. má-li v normálním tvaru zápis $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, má jeho derivace stupeň $n - 1$, neboť podle předcházející poznámky dostáváme derivaci v normálním tvaru a z předpokladu o $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ plyne $n \cdot a_n' \neq 0$.

Polynom $P(x)$ stupně 0, tj. $P(x) = a_0$, kde $a_0 \neq 0$, má za derivaci nulový polynom. (Můžeme např. psát $P(x) = 0 \cdot x + a_0$ a potom podle definice $P'(x) = 0$.)

Je-li $P(x)$ nulový polynom, je jeho derivací opět nulový polynom. ($P(x)$ můžeme psát např. ve tvaru $0 \cdot x + 0$, pak jeho derivace $P'(x) = 0$.)

Je vidět, že derivace polynomů je zavedena tak, že je v souladu s definicí derivace funkce. Proto interpretace derivace funkce zůstává v platnosti i v případě polynomů.

Jak jsme již ukázali, je součet, rozdíl i součin polynomů opět polynom. Musí tedy platit vzorce pro derivace součtu, rozdílu a součinu polynomů ve stejném tvaru jako pro libovolné funkce, tj.

$$(P(x) + Q(x))' = P'(x) + Q'(x),$$

$$(P(x) - Q(x))' = P'(x) - Q'(x),$$

$$(P(x) \cdot Q(x))' = P'(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x)$$

Tyto vzorce bychom též mohli odvodit přímo z toho, jak byla zavedena derivace polynomů.

Příklad 4. Jsou dány polynomy $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $Q(x) = b_1x + b_0$. Ověřme platnost vzorce pro derivaci součinu $P(x) \cdot Q(x)$.

Řešení. Označme součin daných polynomů $R(x)$.

$$R(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0) \cdot (b_1x + b_0) = a_2b_1x^3 + (a_2b_0 + a_1b_1)x^2 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + a_0b_0.$$

Podle definice derivace polynomu je

$$R'(x) = 3a_2b_1x^2 + 2(a_2b_0 + a_1b_1)x + (a_1b_0 + a_0b_1)$$

Vypočteme výraz $S'(x) = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x)$.

$$\begin{aligned} S'(x) &= (2a_2x + a_1) \cdot (b_1x + b_0) + (a_2x^2 + a_1x + a_0) \cdot (b_1) = \\ &= 2a_2b_1x^2 + 2a_2b_0x + a_1b_1x + a_1b_0 + a_2b_1x^2 + a_1b_1x + a_0b_1 = \\ &= 3a_2b_1x^2 + 2(a_2b_0 + a_1b_1)x + (a_1b_0 + a_0b_1). \end{aligned}$$

Tedy skutečně $S'(x) = R'(x)$.

Protože nenulové reálné číslo můžeme chápat též jako polynom, totiž polynom nultého stupně, dává nám vzorec pro derivaci součinu polynomů tento vzorec:

$$(aQ(x))' = aQ'(x)$$

(Stačí si uvědomit, že derivace polynomu stupně nula je polynom nulový.)

Protože pro $a = 0$ dostáváme na levé i pravé straně nulový polynom, platí vzorec i pro $a = 0$.

Je-li $P(x)$ libovolný polynom, je jeho derivace $P'(x)$ opět polynom. Umíme tedy nalézt jeho derivaci $(P'(x))'$. Tento polynom nazveme druhou derivací polynomu $P(x)$ — anebo také derivací druhého řádu — a budeme ho značit též $P''(x)$. V tomto smyslu budeme pak polynomu $P'(x)$ říkat též někdy první derivace polynomu $P(x)$.

Je-li $P(x)$ polynom tvaru (1), pak podle (3) platí $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$, takže opět podle (3) platí $(P'(x))' = P''(x) = n(n-1)a_nx^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \dots + 3 \cdot 2a_3x + 2a_2$

Protože druhá derivace daného polynomu je také polynom, můžeme ho opět derivovat a dospět tak k pojmu třetí derivace polynomu $P(x)$, kterou označíme $P'''(x)$ anebo také $P^{(3)}(x)$. Poněvadž každým derivováním polynomu dostáváme polynom, umíme jej vždy znovu derivovat, a tak dospějeme k pojmu k -té derivace polynomu $P(x)$ pro libovolné přirozené číslo k , kterou značíme $P^{(k)}(x)$.

Příklad 5. Určeme první, druhou, třetí, pátou, devátou derivaci polynomu

$$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 8x + 2.$$

$$\text{Řešení. } P'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 4x + 8 = 9x^2 - 8x + 8$$

$$P''(x) = (P'(x))' = 18x - 8$$

$$P'''(x) = (P''(x))' = 18$$

$$P^{(5)}(x) = P^{(9)}(x) = 0$$

0 schodištním vypínači a žárovce

ZDENĚK PŮLPÁN, Ped. fakulta Hradec Králové

Popisujeme-li jakýkoliv děj, využíváme jazykových prostředků, které pokládáme z určitého hlediska za nejvhodnější a které na dostatečné úrovni ovládáme. Máte-li zájem, sledujte s námi jednoduchý pokus, ve kterém si vyzkoušíme, jak podrobně jsme schopni pomocí našich elementárních znalostí jazyka teorie pravděpodobnosti popsat činnost elektrického obvodu, umístěného možná i na chodbě domu, ve kterém bydlíte. Tlačítkem vypínače se v něm ovládá pouze zapojení žárovky. Vypnutí žárovky se po určité době uskutečňuje automaticky.

Elektrické zařízení, obsahující (schodištní) vypínač a žárovku, nazveme systémem. Vypínač systému má dvě možné polohy, které si označíme znaky 0 a 1 (tj. vypnuto a zapnuto). Stiskem se může převést vypínač z polohy 0 do polohy 1. Po uplynutí 1 minuty se však vrací vypínač z polohy 1 do polohy 0 pouze automaticky. Žárovka může být rovněž ve dvou stavech, které si označíme opět znaky 0 a 1 (tj. nesvítlí a svítí). Činnost systému zobrazíme pomocí uspořádaných dvojic $[x, y]$. Dvojice $[x, y]$ označuje, že vypínač je ve stavu x a žárovka je ve stavu y . Funkce systému může být podle naší zkušenosti buď zobrazena množinou $\mathbf{R}_1$, kde

$$\mathbf{R}_1 = \{[1, 1], [0, 0]\}$$

nebo $\mathbf{R}_2$, kde

$$\mathbf{R}_2 = \{[1, 1], [0, 0], [1, 0]\}$$

Ve druhém případě jsme se navíc seznámili s faktem, že vypínač byl ve stavu 1, ale žárovka ve stavu 0.

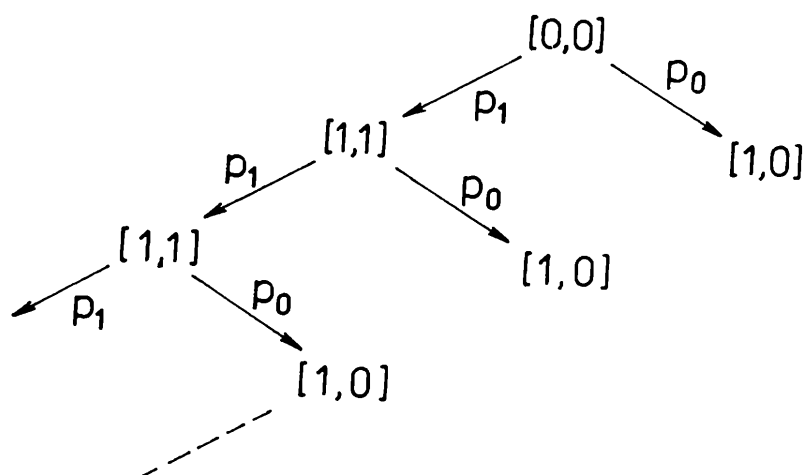
Poznámka: Relaci $\mathbf{R}_1$ si můžeme představit jako vyjádření ekvivalence výroku „žárovka svítí“ s výrokiem „vypínač je v poloze zapnuto“. Relace $\mathbf{R}_2$ nám vyjadřuje implikaci „žárovka svítí“ $\rightarrow$ „vypínač je v poloze zapnuto“

Dejme si nyní otázku: „V jakém stavu bude žárovka v případě, že vypínač nastavíme do polohy 1?“. Odpovídají-li naše znalosti o systému „vypínač—žárovka“ relaci $\mathbf{R}_1$, je odpověď jednoduchá, žárovka se rozsvítí. V druhém případě, který zobrazuje relace $\mathbf{R}_2$, však žárovka podle naší zkušenosti svítit může a nemusí. Zde jednoznačnou odpověď dát nemůžeme a musíme vyjít z většího počtu pozorování, které bude uskutečňováno za nezměněných podmínek (tj. např. když budeme používat stejného typu žárovky, vyrobeného stejnou technologií ze stejných druhů materiálů atd.). Budeme zaznamenávat počet po sobě jdoucích změn polohy vypínače z 0 na 1, při kterých se vyskytuje u žárovky stav 1. U každé žárovky měříme tzv. „dobu života“ Naše zkušenost totiž říká, že je-li systém ve stavu $[1, 0]$, bude i v tomto stavu v dalších pokusech nastavování vypínače do polohy 1. Tím pokus s jednou žárovkou skončí a musíme použít další žárovku atd. (Všimněte si, že předpokládáme, že vypínač pracuje spolehlivě zrovna tak, jako je spolehlivá existence napětí před vypínačem a žárovka se opotřebovává pouze zapnutím.) Z pokusu s k žárovkami dostáváme k posloupností $\{a_i^j\}_{i=1}^{x_j}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) skládajících se z x_j jedniček. Jedničky odpovídají po sobě jdoucím stavům $[1, a_i^j = 1]$ ($i = 1, 2, \dots, x_j$) v časových intervalech delších než 1 minuta systému s j -tou žárovkou, které jsou zakončeny stavem $[1, 0]$. Např. z pokusů s 1. žárovkou jsme sestavili posloupnost sedmi jedniček 1,1,1, 1, 1, 1, 1, která byla obrazem toho, že jsme sedmkrát po sobě stiskli vypínač a žárovka se rozsvítila a právě v okamžiku osmého stisknutí vypínače se žárovka nerozsvítila (bylo tedy $x_j = 7$).

Ze záznamů k takových posloupností o x_j jedničkách (pro $j = 1, 2, \dots, k$) si můžeme definovat „střední dobu života žárovky“ $\bar{x}$ jako výraz

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k x_j}{k}.$$

Chceme-li mít aspoň hrubou představu o tom, jak blízko k hodnotě $\bar{x}$ jsou hodnoty x_j , kdy žárovky „ukončí svůj život“, vypočteme si z našich pozorování veličinu s vztahem



Obr. 1

$$s^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^2$$

Čím je totiž s větší, tím více některé žárovky „ukončí svůj život“ dál od $\bar{x}$.

Průběh činnosti našeho systému při stejné žárovce si popíšeme stromovým grafem (obr. 1). Jednotlivé uzly představují stavy systému, které mohou následovat za sebou v časových intervalech delších než 1 minuta po stisku vypínače. Předpokládejme, že počáteční stav je $[0, 0]$ vždy s pravděpodobností 1.

Z výsledků našeho pokusu s k žárovkami můžeme odhadnout pravděpodobnosti přechodu systému z jednoho stavu do druhého. Předpokládejme pro zjednodušení, že pravděpodobnosti přechodu nezávisí na tom, jakým sledem stavů se systém do výchozího stavu dostal. Pak ovšem si můžeme označit pravděpodobnost přechodu systému do stavu $[1, 1]$ resp. do stavu $[1, 0]$ jako p_1 resp. p_0 . Určeme si nyní pravděpodobnosti $P[x = n]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) toho, že počet x po sobě jdoucích stavů $[1, 1]$ v časových intervalech delších než 1 minuta je právě roven n .

Podmínka $x = n$ ($n \geq 1$) je ekvivalentní konjunkci následujících $(n + 1)$ výroků:

„systém přešel ze stavu $[0, 0]$ do stavu $[1, 1]$ “

„systém přešel ze stavu $[1, 1]$ po druhé do stavu $[1, 1]$ “

„systém přešel ze stavu $[1, 1]$ po n -té do stavu $[1, 1]$ “

„systém přešel ze stavu $[1, 1]$ do stavu $[1, 0]$ “.

Zopakujme si, že pravděpodobnost výroku, který je konjunkcí dvou

nezávislých výroků A a B , je rovna součinu pravděpodobností výroku A a výroku B :

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B) .$$

Tato vlastnost se dá rozšířit pro pravděpodobnost konjunkce tří výroků $(A \wedge B \wedge C)$, když např. předpokládáme, že nejprve výrok $A \wedge B$ je nezávislý na C , a pak, že výrok A je nezávislý na B :

$$P(A \wedge B \wedge C) = P(A \wedge B) \cdot P(C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) .$$

Podobně se postupuje při určování pravděpodobnosti konjunkce libovolného konečného počtu výroků. Využijeme to hned v následujícím odstavci.

Podíváme-li se na předchozí graf, pak ze zjednodušujících podmínek naší úlohy vyplývá, že

$$P[x = 0] = p_0 ,$$

$$P[x = 1] = p_1 \cdot p_0 ,$$

$$P[x = 2] = p_1^2 \cdot p_0 ,$$

$$P[x = n] = p_1^n \cdot p_0 .$$

Z předchozích hodnot pravděpodobností můžeme spočítat pravděpodobnost P_n ($n = 1, 2, \dots$), že nejméně do n -tého stlačení vypínače náhodně vybraná žárovka stejného druhu bude svítit.

Protože konjunkci výroků $x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge \dots \wedge x \neq n$ odpovídá negace disjunkce výroků $x = 0 \vee x = 1 \vee \dots \vee x = n$, můžeme psát

$$\begin{aligned} P_n &= P[x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge \dots \wedge x \neq n] = \\ &= 1 - P[x = 0 \vee x = 1 \vee \dots \vee x = n] . \end{aligned}$$

Výrokům $x = 0$, $x = 1$, $x = n$ odpovídají navzájem neslučitelné náhodné jevy, a proto

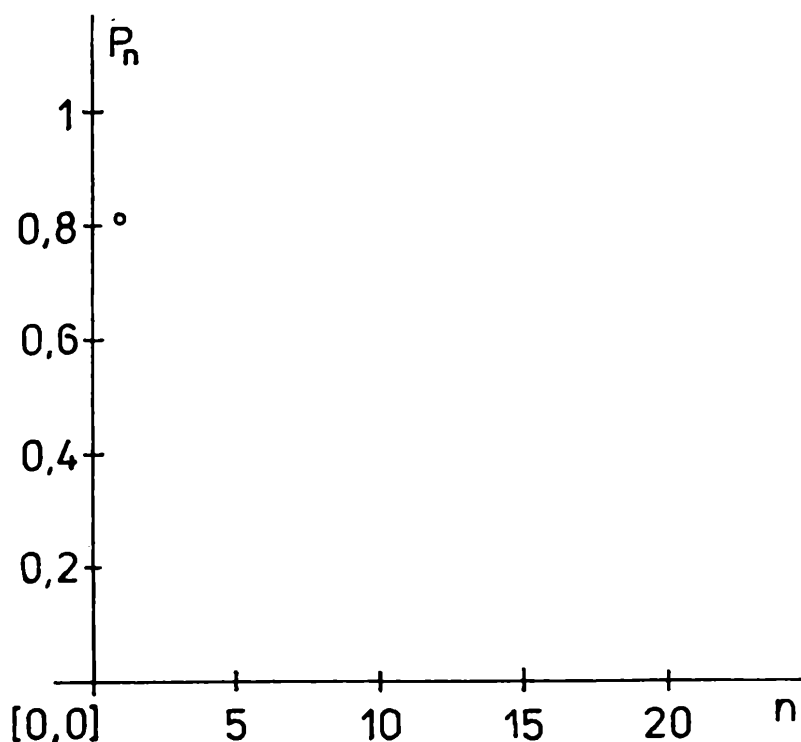
$$P_n = 1 - \sum_{i=0}^n P[x = i] .$$

(Jestliže pro dva výroky A , B platí

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) ,$$

pak výroky — resp. v interpretaci jazyka pravděpodobnosti říkáme jevy — A , B nazýváme neslučitelné.)

Ilustrujme naše řešení ještě numericky. Předpokládejme, že byly odhadnuty pravděpodobnosti p_0 a $p_1 = 1 - p_0$ hodnotami 0,1 a 0,9 (tj. předpokládáme, že na deset stisknutí vypínače připadá průměrně jedna porucha žárovky nezávisle na tom, kdy jsme počet stisknutí začali počítat) a spočteme hodnoty P_n ($n = 1, 2, \dots 20$). Výsledky zapí-



šeme do následující tabulky a pro přehlednost ještě vyjádříme v grafu (obr. 2).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	0,81	0,73	0,66	0,60	0,53	0,48	0,43	0,39	0,35	0,31
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_n	0,28	0,25	0,23	0,21	0,18	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11

Pomocí této tabulky budeme umět odpovědět pro některá n na otázku, zda po n -tém stisknutí vypínače se žárovka rozsvítí. Odpověď však nemůžeme formulovat tak jednoznačně, jako v případě našich znalostí, zobrazených relací R_1 , ale s jistou pravděpodobností: „S pravděpodobností P_n se po n -tém stisknutí vypínače žárovka rozsvítí.“

Na druhé straně, jestliže by se nám podařilo sestavit předcházející tabulku přímo z pozorování dostatečně rozsáhlého souboru žárovek (a stanovit pro některá n příslušné P_n odhadem z relativních četností), pak bychom mohli ověřit oprávněnost našich zjednodušujících předpokladů. Z empiricky určené tabulky by za předpokladu správnosti zjednodušujících předpokladů bylo možné odhadnout p_0 resp. p_1 .

V případě, že bychom s naším modelem systému „vypínač—žárovka“ nevystačili, museli bychom zavést podrobnější zkoumání i např. s použitím vícečlenných relací (v úvahu vezmeme možnost poruchy vypínače nebo poruchy přítomnosti elektrického napětí před vypínačem) a před-

pokládat, že pravděpodobnost stavu $[1, 0]$ závisí např. na počtu předcházejících stavů $[1, 1]$ atd.

K uklidnění čtenáře, který dočetl až sem, se přiznávám, že numerické hodnoty pro p_0 resp. p_1 nemám žádnou osobní zkušeností potvrzeny (líto mně bylo času, který bych potřeboval k mnohonásobnému rozsvěcování několika žárovek na chodbě až do doby jejich opotřebování). Křivka „umírání“ žárovek na chodbách domů proto bude mít asi jiný tvar. Jaký?

Několik úloh na maxima a minima skupin reálných čísel

FRANTIŠEK JANEČEK, gymnázium Holice

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou reálná čísla.

Pak alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ (označme je písmenem M) má tuto vlastnost:

$$M \geq a_1, \quad M \geq a_2, \quad M \geq a_n.$$

Podobně alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ (označme je písmenem m) má následující vlastnost:

$$m \leq a_1, \quad m \leq a_2, \quad m \leq a_n.$$

Číslo M se potom nazývá *maximem* čísel $a_1, \dots, a_n$ a značí se $M = \max(a_1, \dots, a_n)$, číslo m se nazývá *minimem* čísel $a_1, \dots, a_n$ a značí se $m = \min(a_1, \dots, a_n)$.

Úlohy k řešení:

1. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, \dots, a_n$ platí pro jejich aritmetický průměr $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ následující nerovnice:

$$\min(a_1, \dots, a_n) \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \max(a_1, \dots, a_n).$$

2. Dokažte, že zlomek

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n}, \quad \text{kde } b_1 > 0, b_2 > 0, \dots, b_n > 0,$$

splňuje následující nerovnice:

$$\min \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right) \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} \leq \max \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right).$$

3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ platí následující nerovnice:

$$|x_i| \leq \sqrt[n]{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt[n]{n} \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$.

4. Dokažte, že pro absolutní hodnotu čísla x platí:

$$|x| = \max(x, -x)$$

5. Na základě rovnosti $|x| = \max(x, -x)$ ověřte, že platí:

a) $x \leq |x|$

b) $-x \leq |x|$

c) $|-x| = |x|$

d) $|x + y| \leq |x| + |y|$

6. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x_1, x_2, y_1, y_2 platí nerovnost:

$$\max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|) \leq \max(|x_1|, |x_2|) + \max(|y_1|, |y_2|)$$

7. Dokažte, že existují čtveřice reálných čísel x_1, x_2, y_1, y_2 takových, že platí:

$$\max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|) < \max(|x_1|, |x_2|) + \max(|y_1|, |y_2|)$$

Nalezněte aspoň jednu takovou čtveřici.

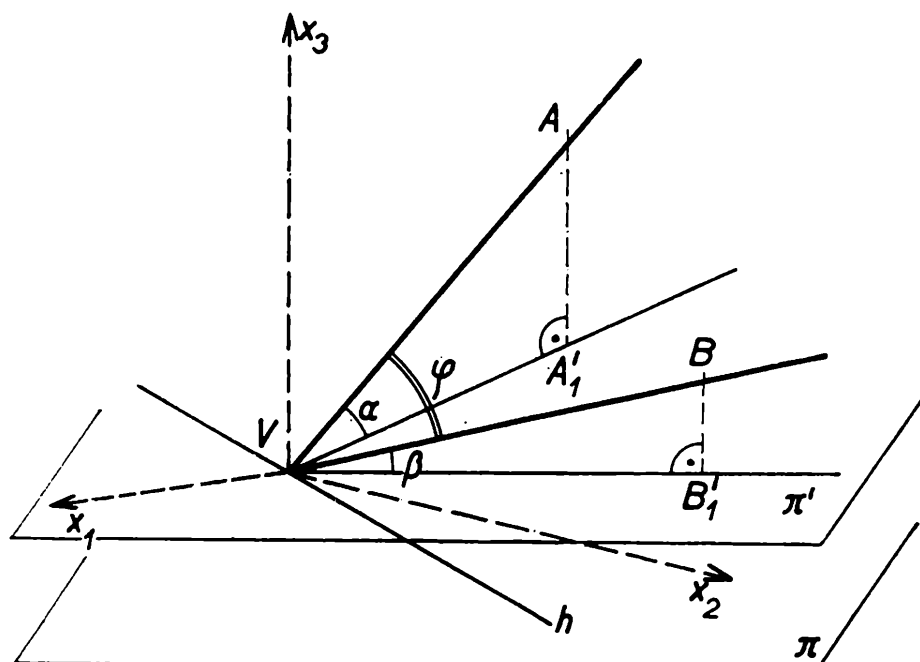
Další vzorec pro velikost pravoúhlého průmětu úhlu

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

Ve 3. a 4. čísle Rozhledů v roč. 56 je v článku *prof. E. Kraemera* „Výpočet velikosti pravoúhlého průmětu úhlu“ odvozen vzorec pro velikost pravoúhlého průmětu konvexního úhlu ležícího v rovině, která není kolmá k průmětně. K výpočtu je třeba znát velikost promítaného úhlu $\sphericalangle AVB$, odchylku roviny AVB od průmětny a odchylku přímky, v níž leží osa úhlu AVB , od spádové přímky roviny AVB .

V tomto článku budeme hledat vzorec pro výpočet velikosti pravoúhlého průmětu konvexního úhlu AVB pro případ, že známe velikost φ

Obr. 1



úhlu AVB a odchylky přímek AV a BV od průmětny π . Označme po řadě tyto odchylky α a β . Předpokládejme, že rovina AVB není k průmětně π kolmá.

Označme π' rovinu (obr. 1), která je rovnoběžná s průmětnou π a prochází bodem V . Zvolme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě V a s osou x_3 kolmou k rovině π' . Osy x_1 a x_2 tedy leží v rovině π' . Nechť vzhledem k této soustavě souřadnic je

$$A = [a_1, a_2, a_3], \quad B = [b_1, b_2, b_3]$$

Body

$$A'_1 = [a_1, a_2, 0], \quad B'_1 = [b_1, b_2, 0]$$

jsou zřejmě pravoúhlé průměty bodů A, B do roviny π' . Je-li φ_1 velikost pravoúhlého průmětu $\sphericalangle AVB$ do roviny π , potom

$$|\sphericalangle A'_1VB'_1| = \varphi_1$$

Položíme-li

$$|AV| = a, \quad |BV| = b,$$

pak pro skalární součiny vektorů $A - V, B - V$ a $A'_1 - V, B'_1 - V$ platí

$$(A - V) \cdot (B - V) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = ab \cos \varphi, \quad (1)$$

$$(A'_1 - V) \cdot (B'_1 - V) = a_1b_1 + a_2b_2 = (a \cos \alpha) \cdot (b \cos \beta) \cdot \cos \varphi_1 \quad (2)$$

Protože je

$$|a_3| = a \sin \alpha, \quad |b_3| = b \sin \beta,$$

můžeme psát

$$a_3b_3 = \varepsilon \cdot ab \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad (3)$$

kde $\varepsilon = 1$, právě když body A, B leží v témž (uzavřeném) poloprostoru určeném rovinou π' . Jinak $\varepsilon = -1$.

Dosadíme-li do pravé rovnosti (1) podle rovností (2) a (3), dostáváme:

$$ab \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_1 + \varepsilon \cdot ab \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = ab \cos \varphi,$$

tj.

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_1 = \cos \varphi - \varepsilon \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Podle předpokladu není rovina AVB kolmá k průmětně π , takže $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

a $\beta \neq \frac{\pi}{2}$. Z poslední rovnosti tedy plyne hledaný vzorec:

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (4)$$

K parametrům φ, α, β , o nichž jsme původně předpokládali, že stačí pro výpočet velikosti pravoúhlého průmětu $\angle AVB$, nám tedy přibyl ještě parametr ε . Jeho hodnotu lze určit také podle toho, zda průsečnice h rovin π' a AVB prochází vnitřkem $\angle AVB$. Je-li tomu tak, pak $\varepsilon = -1$; jinak $\varepsilon = 1$. Přímka h je zřejmě hlavní přímkou roviny AVB , jež prochází bodem V .

Problém, jímž jsme se v tomto článku zabývali, je řešen také v knížce *doc. J. Kůsta* „Sférická trigonometrie“ (SPN, Praha 1964) na str. 147 až 150. Používá se však přitom prostředků sférické trigonometrie.

Cvičení

1. Dokažte známou větu: Pravoúhlý průmět pravého úhlu je pravý úhel, právě když neleží v rovině kolmé k průmětně a aspoň jedno jeho rameno je rovnoběžné s průmětnou.

2. Vyšetřete, jaké vztahy platí mezi velikostí úhlu AVB a odchylkami α, β přímk AV, BV od průmětny v případě, že rovina AVB je kolmá k průmětně.

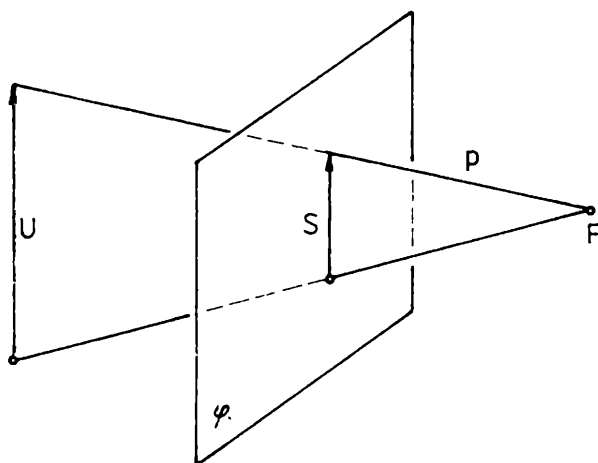
3. Jsou dány roviny ρ a π , které nejsou navzájem kolmé. V rovině ρ leží $\triangle ABC$, jehož strany mají při obvyklém značení velikosti a, b, c . Odchylky přímk AB a AC s rovinou π jsou po řadě φ a ψ . Pomocí čísel a, b, c, φ, ψ a parametru ε , kterému dejte obdobný význam jako ve vzorci (4), vypočtete obsah pravoúhlého průmětu $\triangle ABC$ do roviny π .

4. Jsou dány roviny ρ a π , které nejsou navzájem kolmé. V rovině ρ leží $\triangle ABC$, přičemž $|\angle ACB| = \varphi$ a odchylky přímk AC a BC s rovinou π jsou po řadě α a β . Pomocí čísel φ, α, β a parametru ε , kterému dejte obdobný význam jako ve vzorci (4), určete odchylku daných rovin.

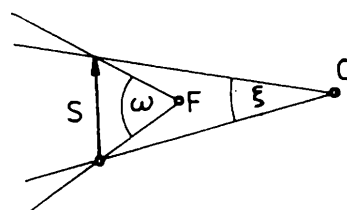
Fotografie a geometrie

Doc. dr. ing. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT Praha

Obvyklé fotografické snímky jsou velmi přirozeným věrným a názorně působícím zobrazením. Proto se nám při prohlížení fotografií a diapozitivů tak snadno vybavují polozapomenuté zážitky. Kromě těchto „dokumentárních“ fotografií jste však jistě viděli snímky působící nepřirozeně, na nichž vypadají zobrazené předměty jinak, než jsme zvyklí je vidět. Například svislice se na fotografii sbíhají, snímky úseček jsou oblouky. Pokusíme se vystihnout geometrický základ těchto zvláštních fotografických metod. Normální fotografický snímek je středovým průmětem části prostoru, která leží v *obrazovém poli* fotoaparátu. Středem



Obr. 1

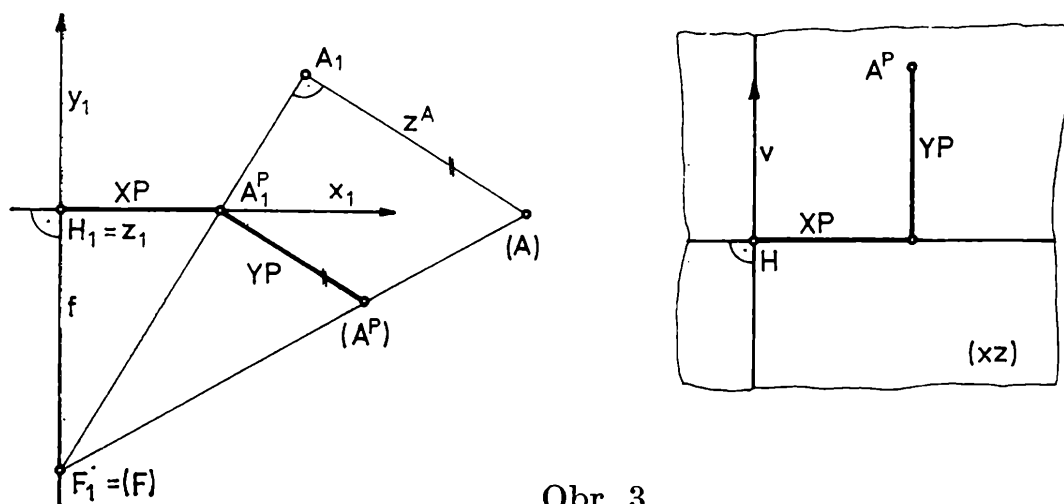


Obr. 2

promítání je střed F objektivu, průmětnou φ je rovina filmového pásu. Rovina snímku je svislá, osa objektivu, tj. kolmice jdoucí středem objektivu k rovině snímku je vodorovná. Snímky svislic prostoru jsou proto rovnoběžné s podélnými stranami snímku. Obr. 1 naznačuje snímek S útvaru U reprezentovaného úsečkou.

Pozorujeme-li fotografii S okem O umístěným v bodě F , vznikne geometricky stejný vjem jako pozorováním předmětu P , neboť oko přijímá stejné *zorné paprsky* p od snímku S jako od originálu U (obr. 1). Skutečný vjem je ovšem bohatší než geometrický, oko vnímá kromě polohy bodu na snímku i jeho barevnou intenzitu nebo intenzitu jeho šedi. Obojí slouží k vytvoření názorného prostorového dojmu.

Vzdálenost $f = F\varphi$ je *ohnisková vzdálenost* fotoaparátu. Tato vzdálenost je přibližně rovna úhlopříčce u negativu. Pro kinofilm (24×36 mm, $u = 43$ mm) je obvykle $f = 50$ mm, pro formát 60×60 mm ($u = 85$ mm) je většinou $f = 75$ mm. Vlivem této konstrukce fotoaparátu je *obrazový úhel* fotoaparátu, tj. vrcholový úhel rotační kuželové plochy s osou



Obr. 3

v ose objektivu omezující obrazové pole fotoaparátu, přibližně 50° . Fyziologická měření ukázala, že přibližně týž úhel je vrcholovým úhlem *zorné kuželové plochy*, tj. plochy omezující část prostoru, kterou dokáže lidské oko při strnulém pohledu ostře vnímat.

Fotografické snímky nepozorujeme většinou ze vzdálenosti f , ale ze vzdálenosti d několikrát větší (alespoň 20 cm, při menší vzdálenosti nedokáže oko zaostřit). Oko O není na rozdíl od obr. 1 totožné s bodem F (obr. 2). Při pozorování fotografického snímku S z bodu $O \neq F$, $d > f$, je zorný úhel ξ menší než obrazový úhel ω snímku, proto se prohlížením fotografie vytváří fyziologicky správný vjem.

Geometrickým základem fotografického snímku je *lineární perspektiva*. Střed F promítání je *střed perspektivy*, rovina φ je *průmětnou*, délka f se nazývá *distancí perspektivy*. Osa objektivu je *hlavní zorný paprsek*. Pata H této kolmice na rovinu φ (tj. střed snímku) je *hlavní bod perspektivy*. Svislá přímka v jdoucí v rovině φ snímku bodem H je *vertikála snímku*. V perspektivním promítání se analogická přímka nazývá *hlavní vertikála*.

Zvolme promítání podle obr. 3, v němž je kolmý průmět útvaru U označen U_1 a sklopený útvar (U).

Význam označení v obr. 3:

$A(x^A, y^A, z^A)$ — bod, který se promítá

f — distance perspektivy (> 0)

$F(0, -f, 0)$ — střed perspektivy

xz — perspektivní průmětna

H — hlavní bod perspektivy

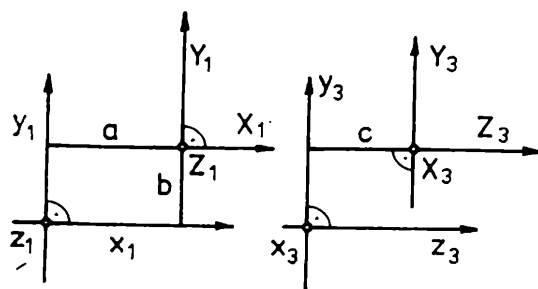
v — hlavní vertikála perspektivy

$A^P(XP, YP)$ — perspektiva bodu A .

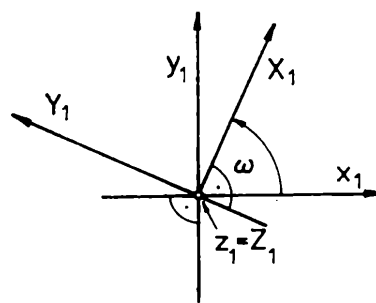
Snadno se z obr. 3 zjistí, že *rovnice zobrazení* $A(x^A, y^A, z^A) \rightarrow A^P(XP, YP)$ jsou

$$XP = k \cdot x^A, \quad (1)$$

$$YP = k \cdot z^A, \quad (2)$$



Obr. 4



Obr. 5

kde jsme označili

$$k = f/(y^A + f)$$

Vypočteme ještě úhel α hlavního zorného paprsku (osa y) se zorným paprskem bodu A :

$$\cos \alpha = f/\sqrt{f^2 + XP^2 + YP^2}$$

Má-li přímka FA ležet uvnitř zorné kuželové plochy s vrcholovým úhlem $< 50^\circ$, musí být

$$\cos \alpha = f/\sqrt{f^2 + XP^2 + YP^2} > 0,9, \text{ neboť } \cos 25^\circ \doteq 0,9$$

Rovnice (1), (2) spolu s podmínkou

$$f/\sqrt{f^2 + XP^2 + YP^2} > 0,9 \quad (3)$$

definují tedy lineární perspektivu.

Útvar, jehož perspektiva se má pořádit, se většinou skládá z velkého počtu bodů (budovy s okny, dveřmi apod.). Konstrukce metodami deskriptivní geometrie (odpovídající rovnicím (1), (2), (3)) jsou pracné, a proto se dnes určení perspektiv provádí na počítači, s nímž je spojeno výstupní grafické zařízení (*plotter*), které tyto perspektivy kreslí automaticky.

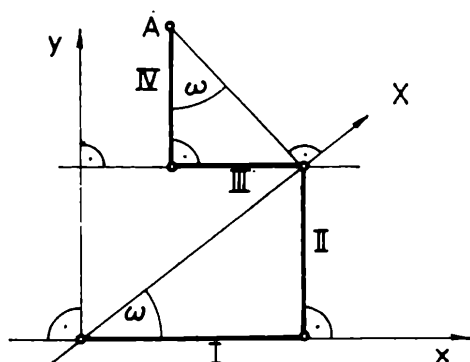
Popíšeme stručně způsob řešení. Útvar, jehož perspektivu chceme určit, vztáhneme k referenční souřadnicové soustavě (X, Y, Z) , která vznikne ze souřadnicové soustavy (x, y, z) pohybem. Tento pohyb vyjádříme transformačními rovnicemi. Pomocí nich přepočteme (stále stejné) referenční souřadnice bodů útvaru do souřadnic soustavy (x, y, z) .

Používáme tyto transformace:

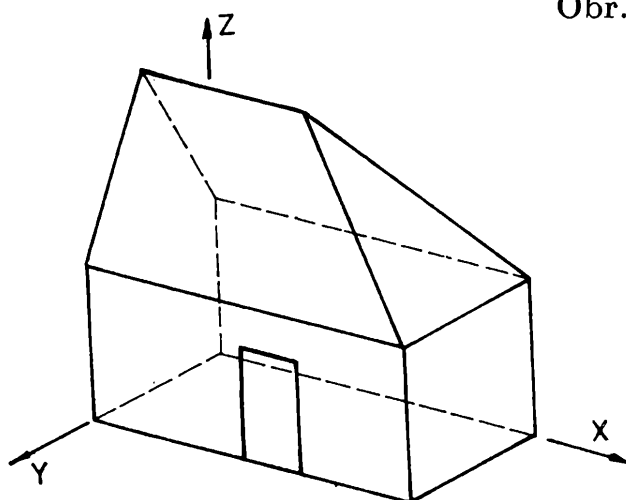
a) posunutí o délky a, b, c ve směrech x, y, z (obr. 4). Transformační rovnice jsou

$$\begin{aligned} x &= X + a \\ y &= Y + b \\ z &= Z + c \end{aligned} \quad (p)$$

b) otočení o úhel ω kolem osy z (obr. 5). Transformační rovnice jsou (obr. 6)



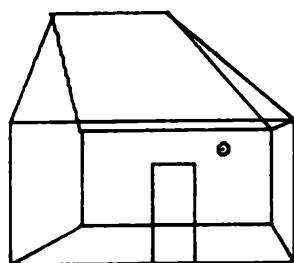
Obr. 6



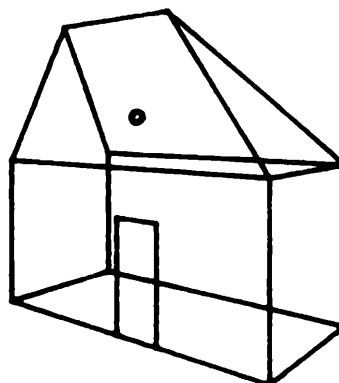
Obr. 7

$$\begin{aligned} x &= X \cdot \cos \omega - Y \cdot \sin \omega \\ y &= X \cdot \sin \omega + Y \cdot \cos \omega \end{aligned} \quad (o)$$

Zvolme jednoduchý objekt znázorněný na obr. 7. Použijeme-li pro určení jeho perspektivy pouze transformaci (p), vznikne tzv. *průčelná (jednouběžníková) perspektiva*. Název pochází od toho, že perspektivy rovnoběžek s osou Y se sbíhají v úběžníku H . Tato perspektiva se používá nejčastěji pro interiéry, při fotografování s osou aparátu kolmou na průčelnou stěnu.



Obr. 8



Obr. 9

Použijeme-li transformaci (o) nebo kombinaci (p) a (o), vznikne tzv. *nárožní (dvojúběžníková) perspektiva*. Perspektivy rovnoběžek s osami X a Y se sbíhají v úběžnících. Tato perspektiva se při fotografování používá nejčastěji.

Perspektivy objektu z obr. 7 jsou nakresleny automaticky na obr. 8 (kreslil válcový plotter CIL 2000) a 9 (kreslil stůl DIGIGRAF) spolu s hlavním bodem perspektiv. Na obr. 9 můžete zjistit oba úběžníky jako společné body perspektiv přímk, na nichž leží vodorovné, navzájem rovnoběžné hrany objektu.

Stopa roviny procházející středem promítání rovnoběžně se souřadnicovou rovinou (X, Y) se nazývá *horizont* perspektivy. Horizont prochází na obr. 8 úběžníkem H rovnoběžně s podélnými stranami snímku. Na obr. 9 je horizont spojnicí obou úběžníků.

Cvičení. Zvolte krychli s hranami na osách $+X, +Y, +Z$. Zvolte distanci d rovnou alespoň dvojnásobku hrany. Vypočtete postupně transformované souřadnice vrcholů této krychle po posunutí (zvolte délky a, b, c a použijte rovnice (p)) a otočení (zvolte úhel ω a použijte rovnice (o)). Transformované souřadnice dosadte do rovnic perspektivy (1) a (2), z výsledných souřadnic perspektiv vrcholů této krychle narýsujte její perspektivu a přesvědčte se prodloužením příslušných hran, že rovnoběžky se zobrazily jako přímky svazku. Středem svazku je příslušný úběžník. Výpočty je vhodné provádět na kapesní kalkulačce.

fyzika

Makroskopické kvantové jevy — supravodivost a supratekutost

RNDr. MILAN ODEHNAL, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Velmi často je vedena ostrá dělicí čára mezi tzv. klasickou fyzikou a kvantovou fyzikou. Kvantová fyzika je vyhrazována pro popis jevů v mikrosvětě (molekuly, atomy, elementární částice atd.), v němž hraje zásadní roli tzv. *Planckova konstanta* $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J.s. Při popisu pohybu makroskopických těles v klasické fyzice (která je limitním případem kvantové fyziky) se formálně tato konstanta blíží nule. Tato konstanta určuje v podstatě stupeň „kvantovosti“ soustavy. Je-li fyzikálně významná veličina téhož rozměru jako h srovnatelná s velikostí hodnoty h , pak jde o kvantové jevy. Přechod od kvantového popisu ke klasickému odpovídá analogicky přechodu od vlnové optiky k optice geometrické.

Stav částice je v kvantové mechanice popisován obecně komplexní vlnovou funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$ (tuto funkci zavedl Schrödinger). Hodnota $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r}$ představuje pravděpodobnost, že v čase t najdeme částici v objemu $d^3\mathbf{r} = dx dy dz$ kolem bodu $\mathbf{r}$.

Jsou však možné i kvantové jevy, které se projevují i na makroskopických vzdálenostech, tj. na vzdálenostech o mnoho řádů větších, než jsou např. rozměry atomu. Tyto jevy jsou předmětem zájmu moderní fyziky - především pro svou neobvyklost, pro svou rozmanitost, pro svou teoretickou závažnost a v případě supravodivosti i pro veliké možnosti praktických aplikací. Takovými makroskopickými kvantovými jevy jsou supravodivost (objevena v roce 1911 *Kamerlinghem Onnesem*) a supratekutost (objevena v roce 1938 *Kapicou*). Za objevení obou jevů byly uděleny Nobelovy ceny.

Cožpak není pro fyzika na první pohled nepochopitelné, že supravodič (kov, slitina), při teplotě nižší, než je určitá, tzv. kritická teplota T_c (obvykle nižší než 23 kelvinů),

1. neklade žádný odpor stejnosměrnému proudu (elektrický odpor se rovná nule),

2. „vytlačí“ ze svého vnitřku intensitu elektrického pole ($\mathbf{E} = 0$) a magnetickou indukci ($\mathbf{B} = 0$) (v supravodičích tzv. I. druhu existují pouze povrchové elektrické proudy a magnetická indukce vniká do takového supravodiče jen na velmi malou hloubku)?

A jak pochopit, že v prostoru obklopeném makroskopickým supravodivým prstencem (dutý válec) může mít magnetický tok Φ ($\Phi = B_n S$, kde B_n je složka magnetické indukce kolmá na plochu S) procházející „dírou“ válce pouze hodnotu, která je číselným násobkem tzv. elementárního kvanta (fluxonu) magnetického toku

$$\Phi_0 = h/2e \doteq 2 \times 10^{-15} \text{ Wb} \doteq 2 \times 10^{-11} \text{ T} \cdot \text{cm}^2; \quad \Phi = n\Phi_0,$$

$n = 0, 1, 2, 3$, kde e je elementární náboj elektronu?

Nebo není záhadné, proč supratekutá kapalina (např. kapalné ^4He při teplotě nižší než 2,17 K) má

1. nekonečnou tepelnou vodivost (je to „tepelný supravodič“, neexistuje v něm teplotní gradient, bouřlivý var atd.),

2. nulovou viskozitu (neexistuje v něm tření částic kapaliny mezi sebou ani o stěny nádoby)?

A jak pochopit, že kapalné ^4He zůstává při atmosférickém tlaku kapalné až do $T = 0 \text{ K}$?

Jak vysvětlit fyzikálně tak neobvyklé jevy? Klasická fyzika je naprosto bezradná. Je tedy třeba využít pojmů kvantové fyziky. Pokusíme se jen přibližně naznačit výklad těchto jevů a naznačit, s jakými novými pojmy se při jejich výkladu můžeme střetnout.

Kvantová fyzika přijala za své dualistický charakter pohybu částic. Pohyb hmotné částice má i vlnový charakter. Korpuskulární parametry částice, tj. energie E a hybnost $\mathbf{p}$, jsou spojeny v kvantové mechanice s parametry čistě vlnovými, tj. s kruhovou frekvencí ω a s vlnovým vektorem $\mathbf{k}$, těmito základními vztahy:

$$(1) \quad E = \hbar\omega \quad (\text{Planck}),$$

$$(2) \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (\text{Einstein}),$$

$$(3) \quad \lambda_B = 2\pi\hbar/|\mathbf{p}|, \quad |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda_B \quad (\text{de Broglie}),$$

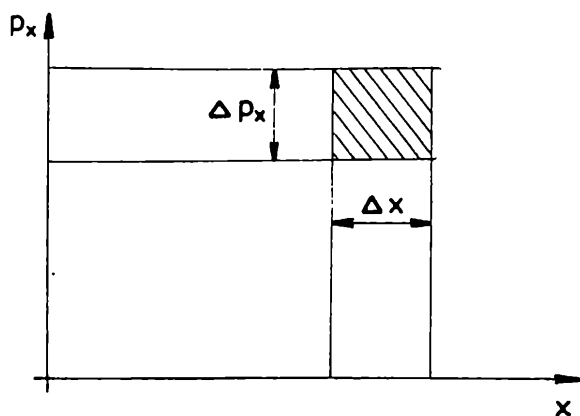
λ_B je vlnová délka tzv. *de Broglieovy* (čti *de brojovy*) vlny, $\hbar = h/2\pi^*$. Pohybující se hmotné částici s hybností $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, kde m je hmotnost částice a $\mathbf{v}$ její rychlost, přiřazuje kvantová mechanika de Broglieovu vlnu o vlnové délce λ_B (je-li částice nabitá, např. elektron v supravodiči, a je-li v elektromagnetickém poli, pak je zobecněná hybnost $\mathbf{p} = 2m\mathbf{v} - 2e\mathbf{A}$, kde e je elementární náboj elektronu a $\mathbf{A}$ je elektromagnetický potenciál). Tento dualismus vlna částice bude pro nás podstatný. Víme, že klasická fyzika nedovede vysvětlit, proč elektron, obíhající kolem atomu na stacionární dráze, nevyzařuje energii (při kruhovém oběhu má elektron zrychlení a podle klasických představ by musel vyzařovat, tedy ztrácet energii a postupně skončit v jádře). Kvantová mechanika předpokládá, že stacionární dráhy, na nichž elektron nevyzařuje, jsou dráhy, které mají např. na obvodu kruhové dráhy o poloměru r , tj. na délce $2\pi r$, uložen celistvý počet de Broglieových vln: $2\pi r = n\lambda_B$, kde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (tj. tzv. *Bohrovo-Sommerfeldovo* pravidlo kvantování, které je známo z teorie Bohrova modelu atomu). Číslo n hraje důležitou roli kvantového čísla, kterým číslujeme energetické hladiny v atomu. Toto pravidlo také ihned vysvětluje celou řadu makroskopických kvantových jevů v supravodičích nebo v supratekutých soustavách. Například shora zmíněné kvantování magnetického toku supravodivým prstencem. Tento prstenec si tak můžeme analogicky představit jako „magnetický“ Bohrov model atomu s „magnetickými“ hladinami odpovídajícími různým hodnotám magnetického toku: $\Phi = n\Phi_0$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

V kvantové mechanice existují tzv. konjugované veličiny (např. souřadnice a hybnost, energie a čas, počet částic a fáze atd.), které jsou navzájem spojeny velmi důležitými vztahy, tzv. vztahy neurčitosti. Tak např. platí, že (pro jednoduchost uvažujeme pouze jednorozměrný případ)

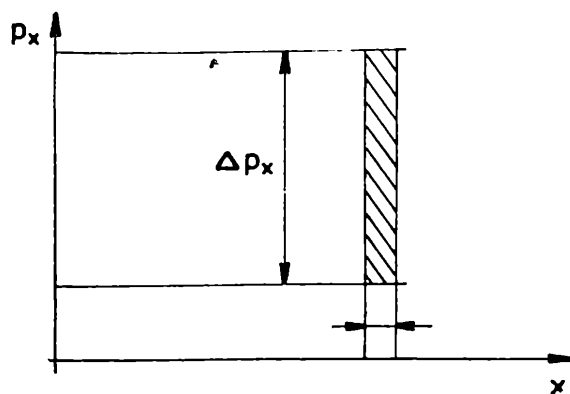
$$(4) \quad \Delta p_x \cdot \Delta x > \hbar \quad (\text{Heisenbergův vztah}),$$

kde Δp_x je neurčitost v určení hybnosti ve směru x a Δx je neurčitost v určení souřadnice pohybující se částice. Tyto vztahy jsou jedny z nejdůležitějších v kvantové mechanice. Zhruba řečeno nám říkají, že nemůžeme znát současně přesnou polohu částice ($\Delta x = 0$) a její hybnost ($\Delta p_x = 0$). Součin těchto neurčitostí musí být stále větší než $\hbar$!

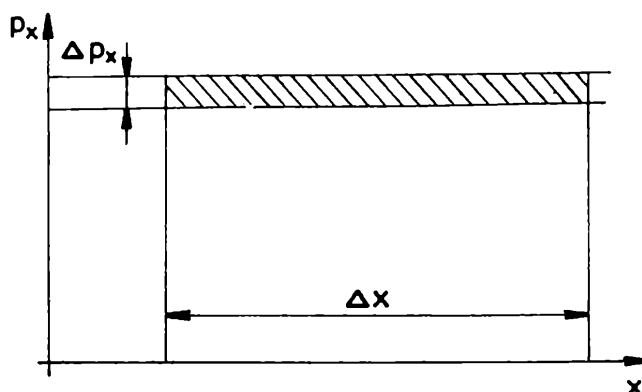
*) Tato konstanta se obvykle značí písmenem h , jehož horní část je přeškrtnuta.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Pro jednoduchost si znázorníme tento vztah v tzv. fázovém prostoru (prostor souřadnic a hybností) — viz obr. 1.

Z obrázku vidíme, že v tomto fázovém prostoru je $\Delta p_x \cdot \Delta x$ dáno vždy minimálně plochou, která musí být větší než $\hbar$. V klasické fyzice by byl stav částice dán určitou polohou a určitou hybností a ve fázovém prostoru na obr. 1 by byl tento stav vyznačen jediným bodem.

U většího souboru částic můžeme nyní rozlišit dva typy seřazení neboli „pořádku“. Na obr. 2 je znázorněn případ, kdy známe relativně dobře polohu částic ($\Delta x \approx 0$), ale neurčitost Δp_x je veliká. Takový pořádek může odpovídat např. uspořádané krystalické mříži. Je to pořádek, na který jsme kolem sebe nejčastěji zvyklí a který klasická fyzika velmi dobře popisuje a vysvětluje.

Existuje však ještě jiný druh pořádku, který bychom mohli nazvat pořádkem „pohybovým“. Mohou totiž vzniknout situace, kdy v souboru částic máme velmi dobře definovanou hybnost částic ($\Delta p_x \approx 0$) a podle vztahů neurčitosti relativně neurčitou polohu každé částice — viz obr. 3. Dojde-li k nahromadění velkého (makroskopického) počtu částic do stavu s určitým $\mathbf{p}$, $\mathbf{k}$ či λ_B — viz rov. (2), (3) (obvykle je to stav odpovídající nejnižší možné energii soustavy), mluvíme o tzv. *kondenzaci částic* nebo o *kondenzátu*. Takový soubor částic se stejným vektorem $\mathbf{p}$ se chová jako koherentní (zfázovaný, synchronizovaný) soubor částic.

Musíme ještě říci, že k takovému druhu kondenzace jsou „náchylny“ pouze částice s celočíselnou hodnotou spinu s , $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ (číslo s charakterizuje hodnoty vnitřního momentu hybnosti částice; tento moment nemá klasickou analogii), tzv. bozóny (např. atom ^4He). Mluvíme pak o tzv. Boseově-Einsteinově kondenzaci. *Fermióny*, tj. částice s polovinovým spinem s ($s = 1/2, 3/2, \dots$; např. elektron, atom ^3He), jsou naopak částice velmi „individualistické“ a v jednom kvantovém stavu mohou být pouze dva fermióny a musí se lišit ještě hodnotou projekce spinu (tzv. *Pauliův princip*).

Aby došlo k takové kondenzaci fermiónů, musí nejdříve dojít k tzv. párování fermiónů do dvojic, které se už budou chovat jako bozóny (to je důvod, proč je ve výrazu pro elementární kvantum magn. toku $2e$). Tyto páry fermiónů se nazývají *Cooperovými páry* podle amerického fyzika, který je poprvé zavedl při studiu přitahování elektronů pomocí vibračních kvant krystalové mříže (fononů), které je v supravodičích větší než jejich stíněné elektrostatické odpuzování. Tyto Cooperovy páry jsou důležitou součástí výkladu elektronové supravodivosti kovů a slitin a atomární supratekutosti atomů hélia ^3He .

Dojde-li v soustavě fermiónů či bozónů k *Boseově-Einsteinově kondenzaci*, dojde v soustavě částic k fázovému přechodu do nového stavu, který vykazuje kvantový charakter i v makroskopickém měřítku. Vlnové funkce těchto fermionových párů se v kondenzátu velmi silně navzájem překrývají a vytvářejí téměř „tuhou“ soustavu, kterou nemůže při $T < T_c$ narušit tepelný pohyb mřížky. Energie tepelného pohybu mřížky (rovná kT , kde k je *Boltzmannova konstanta*) je pod teplotou T_c menší (při $T = 1\text{ K}$ je tato energie zhruba $8,6 \times 10^{-5}\text{ eV}$) než energie vazby Cooperových párů (řádově $\approx 10^{-3}$ elektronvoltů) a nemůže narušit existenci tohoto kondenzátu. V energetickém spektru vzniká tak mezi energií částic v kondenzátu a energií volných nespárovaných částic tzv. energetická mezera 2Δ , tj. zakázaná oblast energií. Pokud vnější excitace nemá energii alespoň rovnou energii této mezery, nemůže dojít k interakci s tímto kondenzátem. Podobnými, poněkud však složitějšími důvody můžeme kvalitativně vysvětlit i existenci podivuhodné supratekuté složky kapalného ^4He .

Tomuto korelovanému synchronnímu pohybu kondenzátu můžeme přiřadit jedinou makroskopickou de Broglieovu vlnu. Máme-li např. normální vodič, pak musíme přiložit relativně veliké napětí, abychom „mřížkou“ kovu vzhledem k velkému rozptylu jednotlivých elektronů (jejich de Broglieova vlna je srovnatelná s rozměry meziatomových vzdáleností) „protlačili“ určitý proud. V supravodiči, kde existuje kondenzát elektronových párů, které nyní nejsou rozptylovány mřížkou (elektrický odpor se rovná nule) postačí, když se bude těžiště této korelované soustavy pohybovat rychlostí o mnoho řádů menší, než je rychlost jednotlivých elektronů, abychom dosáhli stejné hodnoty proudu. Podle

rovnice (3) bude tedy délka de Broglieovy vlny mnohem větší, než jsou meziatomové rozměry v krystalové mříži, a rozptyl takové vlny bude tedy zanedbatelný. To je další zjednodušené vysvětlení jevů supravodivosti i supratekutosti.

Supratekuté a supravodivé soustavy jsou tedy soustavy:

1. s makroskopickým počtem částic (bozónů, fermionových párů) v jediném kvantovém stavu (*kondenzát Boseův-Einsteinův*; výklad supratekutosti je poněkud složitější, protože měřená hodnota počtu částic v tomto kondenzátu bozónů v ^4He dosahuje, i při teplotě absolutní nuly, pouze 3 % (po extrapolaci měření) z celkového počtu částic),

2. s korelovaným (těžišťovým) pohybem tohoto kondenzátu,

3. s makroskopickou de Broglieovou vlnou spojenou s tímto těžišťovým pohybem kondenzátu.

Tedy kromě „nepohyblivé“, „zamrzlé“ krásy například krystalových struktur v souřadnicovém prostoru může existovat v přírodě i podivuhodný pořádek částic v prostoru hybností, vyznačující se korelovaným pohybem velkého (makroskopického) počtu částic. Takový „pořádek“ se vyskytuje u supratekutých a supravodivých soustav a nedá se vysvětlit v rámci klasické fyziky.

Existuje kolem nás v přírodě alespoň nějaká analogie takového korelovaného pohybu většího počtu jedinců? Snad můžeme připomenout podzimní tahy většího počtu ptáků (analogie kondenzátu), kdy celá letka, která viditelně nemá v prostoru souřadnic periodickou strukturu, velmi rychle a synchronně mění směr, výšku i rychlost pohybu jako jediný celek. Princip synchronizace mezi jednotlivými jedinci v tomto kolektivu, pokud je mi známo, není objasněn. Celý soubor těchto jedinců má stále stejnou hybnost, jsou ve stejném „pohybovém“ stavu. Také v jezírkách je možné často pozorovat u břehů malá hejna rybiček, která se rovněž pohybují synchronně, téměř jako „tuhá“ soustava. Myslím, že každého, kdo pozoroval trochu blíž tyto příklady, jistě fascinovala krása tohoto korelovaného pohybu většího počtu jedinců.

Takový pohybový pořádek, spojený s existencí makroskopické de Broglieovy vlny (supravodivé a supratekuté soustavy můžeme považovat za vlnovody těchto vln) se také ve fyzice nazývá *fázovým pořádkem*. Můžeme si totiž představovat, že všechny částice v kondenzátu kmitají synfázně (se stejnou fází) a vytvářejí tak „pohybové“ či fázově synchronizovaný soubor.

Tyto kvantové soustavy můžeme popsat jakousi makroskopickou vlnovou funkcí (tento popis byl objeven teprve nedávno)

$$(5) \quad \psi_M = |\psi_M|^{\frac{1}{2}} \exp(i\varphi),$$

kde $|\psi_M|^2$ je úměrná počtu částic v kondenzátu a φ je makroskopická fáze tohoto kondenzátu. Tato fáze nebo lépe řečeno její rozdíly a gradienty

(protože absolutní hodnota fáze je nepozorovatelná), mají rozhodující význam pro vysvětlení kvantových jevů u supravodivých a supratekutých soustav. Tato fáze je vlastně v první aproximaci „hnací silou“ pohybu těchto soustav a její periodicitu a jednoznačnost je příčinou makroskopických kvantových jevů.

Důležitou zvláštností kvantové mechaniky je možnost vzít lineární kombinaci dvou (či více) vlnových funkcí (princip superpozice). Absolutní hodnota vlnové funkce takového kombinovaného stavu závisí pak na rozdílu fází obou stavů. Ve velkém souboru částic však jsou tyto fázové rozdíly středovány v důsledku chaotických tepelných pohybů částic, a tak nedávají v kvantové mechanice žádné pozorovatelné jevy. V supravodivých a supratekutých soustavách jde o korelovaný pohyb velkého počtu částic. Tento pohyb není narušován tepelným pohybem, jehož energie nestačí k rozrušení kondenzátu. Fáze makroskopické vlnové funkce tedy není středována a má nenulovou hodnotu na makroskopických vzdálenostech. Hybnost kondenzátu je například snadno odvoditelná z výrazu pro makroskopickou vlnovou funkci (5), srovnáme-li ji s výrazem pro rovinnou vlnu ($\exp i\mathbf{k}\mathbf{r} = \exp i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar$), a je rovna

$$(6) \quad \mathbf{p} = \hbar \operatorname{grad} \varphi !$$

To je zcela neobvyklý výraz, úměrný Planckově konstantě a gradientu makroskopické fáze φ . Tento gradient fáze φ tedy vlastně „způsobuje“ pohyb kondenzátu. Fáze φ se tak do kvantové fyziky vrátila — jak se říká — oknem. Ale o tom všem si povíme třeba až příště.

Shrnutí základních pojmů, s nimiž jsme se setkali:

Kvantová mechanika:

$$E = \hbar\omega \quad (\text{Planck})$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (\text{Einstein})$$

$$\lambda_B = h/|m\mathbf{v}| = h/|\mathbf{p}| \quad (\text{de Broglie})$$

$$2\pi r = n\lambda_B; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Bohrova-Sommerfeldova podmínka kvantování})$$

$$\Delta x \Delta p_x > \hbar \quad (\text{Heisenbergovy vztahy neurčitosti})$$

Makroskopické kvantové jevy — supravodivost a supratekutost

bozón — částice se spinem $s = 0, 1, 2, \dots$

fermión — částice se spinem $s = 1/2, 3/2, \dots$

Boseova-Einsteinova kondenzace — nahromadění velkého počtu ($N \gg 1$) částic v jednom kvantovém stavu

kondenzát — soubor velkého počtu ($N \gg 1$) částic v jediném stavu

Cooperův pár — spárovaná dvojice elektronů s opačnými vlnovými vektory $\mathbf{k}$ a spiny $\mathbf{s}$ ($\mathbf{k}, \mathbf{s}; -\mathbf{k}, -\mathbf{s}$)

kT — tepelná energia

energetická mezeru 2Δ (u supravodiče rádově $\approx 10^{-3}$ eV)

makroskopická de Broglieova vlna λ_B

fázový pořádek

makroskopická vlnová funkce: $\psi_M = |\psi_M|^{\frac{1}{2}} \exp(i\varphi)$

φ — makroskopická fáze kondenzátu

$|\psi_M|^2$ je úměrná počtu částic v kondenzátu

hybnost kondenzátu $\mathbf{p} = \hbar \text{grad } \varphi$

$\Phi = n\Phi_0$ — podmínka kvantování magnetického toku supravodivým prstencem; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\Phi_0 = h/2e$ — elementární kvantum magnetického toku — *fluxon*:
 $\Phi_0 \doteq 2 \cdot 10^{-15}$ Wb

Z dějin exaktních věd

110 rokov od vydania Zochovej Physiky

JÁN MIČKA, Trnava

Pri jednej návšteve trnavského Antikvariátu ma v regáli zaujala ne-nápadná knižka v jednoduchej väzbe tmavohnedej farby. Zalistoval som v nej a po zaplatení nevelkého obnosu, neprevyšujúceho príliš ceny ostatných kníh, som sa stal jej majiteľom.

Nesporná zaujímavosť (a vlastne aj historická hodnota) onej knižky bola v tom, že vo väzbe sa skrývala

„PHYSIKA

čili

SILOZPYT

pre

slovenské gymnáziá, reálky a domáce poučenie“, ktorú

„dla

najnovšieho stavu vedy vzdelal

Dr. Ivan Branislav Zoch

v Skalici

1869“

Ako píše autor v predhovore, „ide o prvý, s veľkým nákladom spojený pokus slovenskej fyziky“, k čomu upotrebil diela svojich bývalých profesorov *A. Kunzeka, R. Ettingshausena, W. Beetza* a všetky československé dosiaľ vyšlé spisy oboru tohto, „vynasnažujúc sa byť jadrným a zreteľným, tak aby dielo nad mier nezhrublo a nezdraželo“ (Tieto požiadavky dodnes nestratili na svojej aktuálnosti.)

*

Ivan Branislav Zoch sa narodil 24. júna 1843 v oravskej dedinke Jasenová, kde prežil svoje detstvo a získal základné vzdelanie. Gymnaziálne štúdium začal v Banskej Bystrici, odkiaľ prešiel študovať do Tešína, neskôr do Šoprone a Levoče, kde aj zmaturoval. Vysokoškolské štúdiá začal v roku 1862 ako 19-ročný vo Viedni na Technickej vysokej škole a ukončil na filozofickej fakulte Univerzity v Erlangene r. 1866. V poslednom roku štúdií 23-ročný Zoch publikoval v známych Poggendorffs *Annalen der Physik und Chemie* (č. 6) svoju prácu *Príspevok k poznaniu chemickej harmoniky. (Preskúmané vo fyzikálnom laboratóriu Univerzity v Erlangen pod vedením pána prof. dr. W. Beetza.)* a v č. 8 dizertačnú prácu *O novom spôsobe merania rýchlosti zvuku v plynach*, za ktorú po úspešnej obhajobe získal doktorát. Táto práca vyšla v tom istom roku v Berlíne aj ako samostatné vedecké dielo a o rok neskôr bola vystavená v Paríži na 4. svetovej výstave spolu s prístrojom k preukázaniu vln zvukových, interferencie zvuku atď. skúsenosti pána doktora Zocha, čo bol pre mladého učenca (už profesora slovenského gymnázia v Revúcej) nevídaný úspech. Okrem toho Zoch vystavoval aj na svetovej výstave vo Viedni model kachiel na poveterné kúrenie a kávový mlynček, ktorý istá viedenská firma začala vyrábať.

Revúcke gymnázium, v tom čase jediné slovenské v Uhorsku, nemalo najpriaznivejšie podmienky pre svoju činnosť. Zbierky v kabinetoch boli veľmi skromné, učebnicová literatúra prakticky nejstvovala a priestorové podmienky tiež neboli najsúcejšie. Túto situáciu riešili nadšení profesori získavaním pomôcok darmi a ich svojpomocným zhotovovaním (dr. Zoch napr. zostrojil Atwoodov pádostroj, model telegrafu, leydenskú fľašu, spektroskop a mnoho ďalších). Nedostatok učebníc bolo možné riešiť vcelku jednoducho — napísať ich. Tak sa stal Zoch autorom nielen spomínanej *Fyziky*, ale aj ďalších učebníc: napísal *Krátky návod k vyučovaniu v telocviku, najmä pre národné školy* a *Počiatky názornej merby pre nižšie gymnázium a semeniská*. Obidve učebnice vyšli v roku 1873.

Vylepšeniu priestorových podmienok mala napomôcť výstavba novej budovy gymnázia v roku 1871. Za týmto účelom sa uskutočnila širokoorganizovaná zbierka, do ktorej prispel čiastkou 2000 zlatých aj *František Palacký*. Už predtým poskytl českí národovci *Fr. Palacký, J. Frič*,

J. E. Purkyně, Fr. L. Rieger a ďalší v prospech gymnázia v roku 1866 634 zlatých a v školskom roku 1868/69 sumu 133 zlatých.

Okrem toho prišlo z Čiech aj mnoho kníh, časopisov a máp, ktoré zaslala gymnáziu v Revúcej Matica česká.

Pri získavaní finančných a materiálnych prostriedkov na stavbu zohral dr. Zoch poprednú úlohu. Aj jeho osobným pričinením bola prvá časť novej budovy o dva roky otvorená, ale rozkvet gymnázia nemal dlhé trvanie, pretože po trojdennom vyšetrovaní maďarskými úradmi od 15. do 18. mája 1874 bolo koncom prázdnin zrušené.

Po rozpustení profesorského zboru sa Zoch dva roky nevenoval svojmu učiteľskému povolaniu. Až v roku 1876 odchádza na reálne gymnázium v chorvátskom Osijeku (dnešná Juhoslávia), kde pôsobí celkom 9 rokov (medzitým bol 3 roky riaditeľom gymnázia v Sarajeve). Z Osijeku odchádza za riaditeľa gymnázia do Petrinje pri Záhrebe, kde pracuje až do svojho odchodu na dôchodok.

Aj tu, ďaleko od svojho domova, je mimoriadne literárne a vedecky činný. V Osijeku v rokoch 1885—90 vydáva vyše 600-stranovú Hrvatsku enciklopediu I. a II. (Chorvátsku encyklopediu), ktorá je jeho najväčším dielom.

Už doma sa zaujíma o meteorológiu. Píše články: *Strašlivá prietrž mračien* (1867), *Meteorologické poznámky z Veľkej Revúcej* (1869), *Pamätné úkazy meteorologické* (1869) a iné. V Petrinji zariadil meteorologickú stanicu a pre verejnosť predpovedal počasie. Naďalej pokračuje v písaní populárnych článkov o meteorológii, o najnovších elektrických a magnetických objavoch a o chorvátskej matematicko-fyzikálnej terminológii. Venuje sa aj astronómii, o čom svedčí napr. jeho článok o fotografovaní hviezdnej oblohy.

Spolu prežil Zoch medzi južnými Slovanmi takmer tretinu storočia. Až v roku 1908 sa vrátil späť do vlasti, aby tu strávil zvyšok svojho plodného života. Zomrel 27. decembra 1921 v Modre.

*

Vráťme sa však k Zochovej *Physike*. Okrem predslovu má úvod a 8 oddielov, rozčlenených na 146 článkov, z ktorých väčšina má vlastný názov. Niektoré články sú označené iba číslom a paragrafom. Z uvedeného prehľadu možno získať lepšiu predstavu o rozsahu diela. (V knihe nie je obsah. Názvy článkov sú pôvodné. Pozn. J. M.):

I. Všeobecné vlastnosti telies (Rozprostrannenosť. Neprestupnosť. Sotrváčnosť. Porovatosť. Rozťažiteľnosť a stlačiteľnosť. Ťarcha).

II. Úkazy síl molekulárnych (Spojivosť. Skupenstvo. Tvrdosť. Krehkosť. Pružnosť. Ťažnosť, kujnosť. Pevnosť. Prilnavosť. Presiakavosť. Pohlcovanie. Botnanie. Roztok. Miešanie. Hltenie.)

III. Úkazy rovnováhy a pohybu (O silách vôbec. Skladanie síl. O rovnováhe. Rovnováha pevných telies. Ťažište, rovnováha v polohe. Stroje.

Stroje sochorové. Hriadeľ. Škripec, čiga. Kolená a odvis. Naklonená rovina. Klín. Šrôba. Rovnováha tekutých telies. Zákon rovnosti tlaku. Rovnováha tekutín, keď len ľarcha na ne účinkuje. Spojité nádoby. Zákon Archimedov. Plávanie. Určovanie objemu nepravidelných telies a špecifickej váhy na základe zákona Archimedovho pomocou hydrostatických vážok. Hustomery. Rovnováha telies plyných. Odvislosť rozprostranivosti. Tlak povetria. Výveva. Váha vzduchu. Pomerná váha plynov. Upotrebenie rozťažlivosti a tlaku povetria. O parách. Parostroj. Vlhkosť povetria. O pohybu. Pohyb telies pevných. Zákony pohybu rovnomerného. Zákony pohybu rovnomerne zrýchleného. Volný pád. Atwoodov pádostroj. Pád na naklonenej rovine. Pohyb telies hodených. Pohyb stredobežný. Kyvadlo. Strk a odraz. Prekážky v pohybu. Pohyb telies tekutých. Zákon Torricelliho. Vodnia sila. Vlnenie vody. Pohyb telies plyných. Zákony výtoky plynov. Vietor.)

IV O zvuku. (Vlnenie. Zvuk. Diatonická stupnica. Otrasy strún a pružných prútov. Odraz zvuku. Ucho.)

V. O svetle. (Pôvod svetla. Postup a rýchlosť svetla. Svetlosť. Odraz svetla. Zrkadlá. Lom svetla. Lom svetla v hranolu trojstennom. Rozklad svetla. Barvy telies. Frauenhoferove čiary a rozbor vidmový. Lom svetla v čočkách. Vady čočiek. Oko a nástroje optické. Temnica. Drobnohľady. Ďalekohľady. Kríženie a ohyb svetla. Polarisacia a dvojlom. Fluorescencia a phosphorencia. Chemické účinky svetla.)

VI. O teple. (Theoria tepla. Rozvádzanie tepla. Sálanie tepla. Prameň tepla. Účinky tepla. Premena stavu skupenstva teplom. Topenie čili tanie. Výpar a var. Kvapka Leidenfrostova. Určovanie množstva tepla. Rovnomocnina tepla.)

VII. O mlune. (Mluno vzbudené trením. Mluno vzbudené rozkladom. Ďalšie úkazy. Rýchlosť mluna. Hydroelektrika. Mluno v povetrí. Pyroelektricitá. Mluno vzbudené dotýkaním. Jednoduchá reťaz. Odpor vodičov. Účinky prúdu galvanického. Galvanotvarie. Lučebný dej vo vatrene. Vzájomné účinkovanie prúdov na seba. Odchyl ihlice magnetickej prúdom. Elektromagnetické prístroje. Mluno navedené. Mluno vzbudené teplom. Mluno živočíšne.)

VIII. Úkazy vo všehomíre. (Úvod. Základné pojmy hvezdárske. O zemi a jej pohyboch. Mesiac. Obežnice. Zatmenie. Vlasatice, povetro-ne, čistenie hviezd. Sústava svetová.)

Pri písaní učebnice mal Zoch pochopiteľné terminologické problémy. Odborné názvy preberal jednak z nemčiny a češtiny, alebo ich tvoril sám, ako možno poznať aj z názvov uvedených článkov. Pre porovnanie popri nich uvádzal aj názvy nemecké, české, alebo latinské. Zochovo úsilie v tomto smere možno prirovnať k počínaniu českých buditeľov o vytvorenie vlastného technického názvoslovía.

Je zrejmé, že Zoch niektoré termíny prevzal, napr. mluno pre elektrinu. Tento pojem sa nachádzal už v *Trávníčkovom* Slovníku jazyka českého, podobne ako i v *Jungmannovom* slovníku z r. 1835 a v *Amerlingovom* diele *Orbis pictus* čili svět v obrazech z roku 1852.

V tom čase sa na rakúskych gymnáziách a reálkach najviac používala *Fysika* viedenského profesora dr. *F. J. Pisku*, ktorá sa používala i na väčšine českých škôl. Jej voľný preklad do češtiny urobil *Josef Klika*, profesor reálky v Pardubiciach ako *Fysiku pro gymnasia a realné školy*, ktorá vyšla v Prahe jeden rok po vydaní Zochovej *Physiky*, tj. v roku 1870.

Je oprávnený predpoklad, že sa Zoch pri písaní svojej učebnice fyziky pridržal Piskovej *Fysiky*, čo možno tvrdiť z porovnania členenia jednotlivých kapitol i obsahu príslušných článkov. Je tiež možné, že sa Klika neskôr zoznámil aj so Zochovou *Physikou*.

S úsmevom i pochopením dnes pozeráme na pojmy drobnomer (mikrometer), nedrob (atóm), paprúd (sekundárny prúd), prúdozmeň (komutátor), samokyv (prerušovač), svetlopisectvo (fotografovanie), čigostroj (kladkostroj), vatrena (batéria), prázdna (vákuum), vidmo (spektrum) a mnoho ďalších, ktoré Zoch používal, ale do odborného jazyka neprešli.

Pri hodnotení Zochovej *Physiky* treba zdôrazniť skutočnosť, že šlo o prvú slovenskú učebnicu fyziky pre stredné školy. Presiahla nielen rámec revúckeho gymnázia, keďže sa používala i na gymnáziách v Martine a v Kláštore pod Znievom, čo boli jediné slovenské gymnáziá z celkového počtu 176 stredných škôl v Uhorsku, ale zaradením niektorých kapitol a článkov (napr. z magnetizmu a akustiky) a ich moderným poňatím *Physika* značne predstihla dobu, v ktorej vznikla.

Literatúra :

Zoch, I. B. : *Physika*. Skalica 1869.

Hlaváč, A. : Dr. I. Branislav Zoch a jeho storočná *Physika*. SPN Bratislava, 1972.

Sto rokov revúckeho gymnázia. (Zborník). SPN Bratislava, 1965.

Gutwirth, V. : *Z dětství naší elektrotechniky*. SNTL Praha, 1953.

Řešení úlohy ze str. 237. Nepřeteče. Led je lehčí než voda, jeho hustota činí 0,9 hustoty vody, takže led vyčnívá jednou desetinou nad hladinu vody. Roztaje-li led, bude hmotnost vzniklé vody stejná jako ledu, ale objem vzniklé vody bude o jednu desetinu menší původního objemu ledu, a bude tedy roven té části objemu ledu, která byla ponořena ve vodě. Tedy vzniklá voda z ledu vyplní právě tu část objemu, kterou byl led ponořen. Odtud vyplývá, že po roztátí ledu voda nádobu nepřeteče.

Sto let elektrického světla

RADOVAN REBSTÖCK, ZDŠ Plánice

Elektrickému světlu bylo v roce 1979 právě sto let, sto let uplynulo od úspěšného dovršení pokusů. Připomeňme si alespoň v krátkosti nejdůležitější okamžiky dlouhé objevné cesty.

První pokusy s elektrickým osvětlením se datují prakticky od konce 18. století a jsou těsně spjaty se jmény anglického fyzika *Humphry Davyho* (1778—1829) a ruského fyzika *Vasilije Vladimiroviče Petrova* (1761—1834). Jediným tehdy známým zdrojem elektrického proudu byla Voltova galvanická baterie. S ní vykonal Davy své pokusy a objevil, že spojí-li její póly tyčinkami dřevěného uhlí, utvoří se v mezeře mezi nimi zářivý oblouk. Tento objev, datující se rokem 1813, zůstal po dlouhou dobu pouze zajímavým fyzikálním pokusem. Roku 1844 nahradil francouzský fyzik *Léon Foucault* (1819—1868), dřevěné uhlí retortovými uhlíky. Celé zařízení zdokonaloval až do roku 1848, kdy bylo možno říci, že je na světě první oblouková lampa. Jí bylo na zkoušku osvětleno jedno pařížské náměstí, ovšem ekonomická stránka toto progresivní osvětlení odsoudila ke stagnaci.

Ve stejnou dobu se začíná vývoj elektrického světla ubírat i druhým směrem. Je to rovněž Davy, který při své práci roku 1802 zjišťuje, že světelné záření nevysílá pouze elektrický oblouk, ale i kovy a uhlík, zahřáté na vysokou teplotu průchodem elektrického proudu. První úspěchy s elektrickou žárovkou je pak nutno přiznat Francouzu *De la Ruemu*, který použil platinový drát ve své žárovce roku 1820 a Němci *Goebelovi*, jenž zhotovil žárovku s uhlíkovým vláknem v zatavené vzduchoprázdné baňce. Touto žárovkou osvětloval roku 1854 svůj hodinářský krám v New Yorku. Svítla však jen velice krátkou dobu a nemohla mít tedy podstatnější význam.

V sedmdesátých letech minulého století byla konečně vyřešena otázka levné výroby elektrické energie po objevech elektromagnetické indukce a následné konstrukci dynama. Tím je umožněno, aby se elektrická energie stala prakticky široce využitelnou. V této souvislosti začíná také nová etapa vývoje elektrického světla.

Obloukovou lampu skutečně použitelnou konstruuje ruský elektrotechnik *Pavel Nikolajevič Jabločkov* (1847—1894). Originálním způsobem řeší systém regulace uhlíků, a tak lampa budí senzaci na pařížské světové výstavě roku 1878. Výstavu navštívil také mladý český elektrotechnik *František Křižík* (1847—1941) a světlo obloukovky ho zaujalo natolik, že se po svém návratu zabývá zdokonalením Jabločkovovy lampy. Svou konstrukci, využívající diferenciálního principu dvou cívek,

si dává na podzim roku 1879 v Rakousku-Uhersku patentovat. Další varianty jsou již tak úspěšné, že od roku 1880 žádá o patenty postupně ve všech státech Evropy i ve Spojených státech amerických.

Elektrickou žárovkou se souběžně zabývá anglický fyzik *Joseph Wilson Swan* (1828—1914), který rovněž používá uhlíkové vlákno, ale ani on nedosahuje úspěchu, který by znamenal podstatný krok kupředu. Až roku 1872 ruský vynálezce *Alexandr Nikolajevič Lodygin* (1847—1923) konstruuje žárovku s uhlíkovým roubíkem zataveným v baňce a spojeným s přívody platinovými dráty. Těmito žárovkami byla roku 1873 osvětlena Oděská ulice v Petrohradě. Lodygin získal na svou žárovku patent v řadě zemí, nepodařilo se mu však prosadit její průmyslovou výrobu.

Poslední portrét v galerii tvůrců elektrického světla patří *Thomasi Alvi Edisonovi* (1847—1931), autoru více než tisíce významných patentů. Ten před rokem 1875 sdružuje početný kolektiv spolupracovníků pro výzkumnou práci, což do té doby bylo zcela neznámé. Se svým výzkumným týmem se doslova bez oddechu po třináct měsíců zabývá problémem žárovky široce použitelné a ekonomicky dostupné pro nejširší sociální vrstvy. Při svých experimentech nevynechal žádný dostupný materiál, počet pokusů se čítal na tisíce. Jako nejvýhodnější — alespoň v těchto okamžicích — se ukázalo zuhelnatělé vlákno bavlny. To zatavil Edison do baňky, v níž pomocí účinných vývěv vytvořil velice dokonalé vakuum. Tato žárovka byla dokončena 21. října 1879 a svítila plných 40 hodin. Následující varianty dosáhly doby životnosti už několika stovek hodin a dávaly konečně předpoklady ke kýženému všeobecnému rozšíření elektrického světla.

Edison s Křižíkem, ač vrstevníci, se nikdy nesetkali. Setkaly se však plody jejich neúnavné práce, a to již na Mezinárodní elektrotechnické výstavě v Paříži roku 1881, kde společně osvětlovaly hlavní schodiště výstavního paláce. To byl počátek moderní osvětlovací praxe, jejíž vliv na technický i kulturní rozvoj lidstva je nade všechny pochybnosti.

Literatura: Jílek, F., Jílková, J., Kuba, F., — Světové vynálezy v datech, MF Praha, 1977

Křižík, F., — Paměti, Tech.-vědecké vydavatelství, Praha, 1952

Směrnice pro autory (pokyny pro úpravu rukopisů) byly naposledy uveřejněny v 5. čísle 57. ročníku *Rozhledů*. Rukopisy je třeba zasílat s jednou kopií. Redakce se těší na vaše příspěvky.

Staré české „váhy“

Ing. dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., ÚNM Praha

Dosud jsme se věnovali „mírám“ délky, velikosti plochy a objemu. To byly tři veličiny běžně používané. K nim ovšem nutně patřila i hmotnost (dříve váha ve smyslu hmotnosti), u níž se však nehovořilo o „mírách“, ačkoliv dnes bychom tento starý pojem vztahovali na libovolné veličiny, nýbrž o „váhách“. Podle toho se do názvu některých metrologických pracovišť nebo institucí, které se zabývají úkoly etalonáže nebo se o tuto doménu primárně zajímají, vkládají slovo „vah a měř“ nebo „pro míry a váhy“. Např. Spolkový úřad pro míry a váhy ve Švýcarsku (*Eidgenössisches Amt für Mass und Gewicht* se zkratkou EAMG) nebo známé Generální konference pro váhy a míry (*Conférence Générale des Poids et Mesures*), kde je ovšem opačné pořadí obou hlavních pojmů. I u nás byl do roku 1958 samostatný Státní úřad pro míry, váhy a drahé kovy v témže roce sloučený s Úřadem pro normalizaci na dnešní *Úřad pro normalizaci a měření*.

Nyní však k vlastním staročeským váhám — závažím. Podle známého českého historika *Augustina Sedláčka*, který se při svých studiích historie zajímal o všechna odvětví lidské činnosti zcela komplexně, a tedy i o otázky měř a vah, je z oblasti vah (dnešních závaží) mnohem méně dokladů, nežli tomu je u měř (jiných veličin).

V tomto odstavci se nejprve zmíníme o centu, který, ač je vahou větší, lze použít pro odvození libry. Sedláček pojednává o dvou exemplářích staročeského centu (*centnéře*). Jeden je ze zvonoviny a je uložen v Kutné Hoře. Má tvar ručního zavazadla, dlouhý je 32 cm, vysoký 18 cm a má železné obloukovité držadlo. Je na něm nápis: „toto je 1 centnéř“. Na boční ploše bylo 12 × vyrytých hlubokými řezy do této plochy. Zahlubováním zářezů se asi provádělo justování. Dále je na boku nápis: „dává se znáti, že se tu naváží 120 liber“. Závaží pochází asi ze 16. století. Po převážení provedeném na jiném podobném závaží v někdejším Německém Brodě v roce 1917 na žádost A. Sedláčka vyšla hodnota tohoto centnéře na 61,650 kg. Podle vzájemného vztahu mezi vídeňským a pražským centem (nebo podle vztahu mezi obdobnými librami uváděného v různých patentech a spisech z 18. stol.) se zdá, že centu příslušela hodnota 61,72 kg.

Cent má pojmenování převzaté z latiny (*centum* = sto, *centenarius* = věc obsahující 100 kusů), a přesto se často vedle *poddělení na 100 liber* setkáváme (např. podle Hájka) s *poddělením též na 120 liber nebo 6 kamenů*. Uvedený exemplář centu je rovněž dokladem tohoto druhého způsobu.

Kámen se rovnal zpravidla 20 librám, což by dnes odpovídalo asi 10,275 kg.

Z domácích pramenů se dozvídáme o *libře* jen velmi málo. Jak již bylo řečeno, hodnota příslušející libře a odvozená z centu činí 0,513 75 kg,

Na vážení zlata a stříbra se používala dříve *hřivna*. Je to pojmenování staroslovanské a znamenalo původně údajně drahocennou ozdobu hrdla. Byla to tedy asi „váha“ nějakého drahocenného náhrdelníku. Latinsky se hřivna nazývá *marca* (*marka*). Protože se leckde toto závaží zlehčovalo, razila se na něj značka: marka (odtud pravděpodobně pojmenování).

Česká hřivna se připomíná již od roku 1074. Hřivna byla polovinou libry, takže jí příslušela hodnota asi 0,257 kg. Ze hřivny se vybíjelo (razilo) 60 grošů (1 kopa).

Lot má své pojmenování z latinského středověkého slova lotonus. U nás se tato jednotka připomíná asi od r. 1316. Hájek píše, že je lot tolik, kolik bys pepře mohl v hrsti nabrat a že to je 16. díl hřivny nebo 32. díl libry. Podle toho vážil český lot zhruba 16 g. Osm lotů (tj. asi 128,5 g) se nazývalo *čtvrtí* (též podle lat. festo nebo podle něm. věrdunk). Od 16. století se na tuto míru postupně zapomínalo.

Lot se dělil na 4 *kvintlíky*. Jeden měl asi 4,01 g. Od 16. století se kvintlík dělil (u drahých kovů) na 4 *denáry* nebo *peníze*.

V některých místech (např. na Litoměřicku ve 14. stol.) se používala váha zvaná *last* (*velká váha*; z něm.), v níž se vážily některé kovy. Dnes přesnou hodnotu této jednotky neznáme. V Německu měl last uhlí 60 centů; v Rakousku měl last rýže, železa, mědi nebo olova 40 centů, u koření a peří 20 centů.

Podle použití vah se často hovořovalo o *váze librové* (tj. při vážení běžného zboží) a *váze hřivnové* (při vážení drahých kovů).

Některé váhy se užívaly jen pro některé zboží i při běžném vážení. Tak maso se vážilo na centy a kameny. Ale vyskytla se váha zvaná *šrot* (přišla asi z Německa), která se rovnala asi 1/9 libry. Také byl *velký šrot* (připomínaný v Mostě), který měl pravděpodobně větší hodnotu.

U železa a rud se mluvilo o jakési „*váze*“, jejíž definici neznáme a jejíž hodnota se údajně pohybovala od 20 do 156 liber. Např. v Rokycanech měla „váha“ asi 30 českých liber.

V Hájkově kronice je obsažen také měřický spis „Míry zemské a lesní i dědinné“, v jehož třetím oddílu se pojednává o *váhách kramářských*: „co by mohl v hrst nabrati pepře, to aby slulo lot“, dále je uváděna *čtvrt* (rovná 8 lotům), *půl váhy* (16 lotů), *celá váha* neboli *libra* (32 lotů); *půl kamene váženého* a *celý kámen* (20 liber; 640 lotů); *centněř* (120 liber; 3840 lotů).

Ve čtvrtém oddílu se pojednává o *váze na zlato a stříbro a jiné kovy*. Je to zejména *hřivna* („ať váží 16 lotů váhy kramářské“).

Přehled staročeských vah :

cent (centněř) = 100 liber = 5 kamenů
= 120 liber = 6 kamenů = 3840 lotů = 61,650 kg
(resp. 61,72 kg),

kámen = 20 liber = 10,275 kg,

půl kamene (váženého) = 10 liber = 5,137 kg,

libra (též celá váha) = 0,514 kg,

česká hřivna = 0,257 kg,

půl váhy = 16 lotů = 0,257 kg,

čtvrt = 8 lotů = 128,5 g,

šrot = 1/9 libry = 57,1 g,

lot = 1/16 hřivny = 1/32 libry = 16 g,

kvintlík = 1/4 lotu = 4 g,

denár = 1/4 kvintlíku = 1/16 lotu = 1 g.

Z uvedeného přehledu je dobře patrné, že Sedláčkovu tvrzení o poměrné rozmanitosti staročeských „vah“ bylo plně oprávněné. Přitom většina „vah“ je velmi starých, sahajících svými počátky do starověku. Např. s lotem i kamenem se setkáme v Mojžíšových knihách v bibli, libra byla starořímská váha, stejně jako cent. U některých závaží došlo v minulém století napřed k dekadizaci (cent měl namísto 120 liber pouze 100 liber), pak k metrizační (vznikl metrický cent rovný 100 g), byla metrizační hodnota libry na 0,5 kg apod.

Pro volnou chvíli

Tři úlohy

1. Tajemství deseti jedniček:

$$\frac{(1 + 1) \cdot 11!}{[(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1)]!} = ?$$

2. Do čtyř polí čtverce o straně 2 vepište různé číslice tak, aby vznikla dvojciferná čísla čtená ve sloupcích shora dolů a v řádcích i úhlopříčkách zleva doprava byla vesměs prvočísla.

3. Totéž pro 9 polí čtverce o straně 3 s tím, že jen jedna cifra se smí jednou opakovat.

(Řešení naleznete na str. 197.)

Doc. O. Setzer

Řešení úloh o elektrických zdrojích z druhého čísla

Ing. JIŘÍ VAVŘÍN, Praha

1. Jakou hodnotu má mít při jednom zdroji s elektromotorickým napětím U_e a vnitřním odporem R_i vnější odpor R_z , má-li se na něm dosáhnout co největšího výkonu?

Řešení: Protože výkon na zátěži je

$$P_z = R_z I^2 = R_z \frac{U_e^2}{(R_i + R_z)^2} = \frac{U_e^2}{R_i} \cdot \frac{\frac{R_z}{R_i}}{\left(1 + \frac{R_z}{R_i}\right)^2} = \frac{U_e^2}{R_i} \cdot \frac{x}{(1+x)^2},$$

kde

$$x = \frac{R_z}{R_i},$$

hledáme maximum funkce

$$Y = K \frac{x}{(1+x)^2};$$

zlomek na pravé straně platí pro všechny zdroje. Výpočtem maxima pomocí diferenciálního počtu lze lehce zjistit, že je

$$Y_{\max} = P_{z\max} = \frac{U_e^2}{R_i} \cdot \frac{1}{4} \quad \text{při } x = \frac{R_z}{R_i} = 1$$

Maximum výkonu nastane tedy při rovnosti vnějšího a vnitřního odporu. To je známý zákon z elektrotechniky, používaný hlavně u koncových výkonových stupňů nízkofrekvenčních zesilovačů.

2. Máme dva zdroje stejného elektromotorického napětí U_e se stejným vnitřním odporem R_i , které mají pracovat do jednoho daného vnějšího odporu R_z . Zdroje můžeme zapojit do série nebo paralelně. Kdy dosáhneme většího výkonu na odporu R_z při sériovém zapojení zdrojů a kdy naopak při zapojení paralelním?

Řešení: Větší výkon do stejného odporu znamená i větší proud. Při sériovém zapojení zdrojů teče proud

$$I_s = \frac{2U_e}{(2R_i + R_z)},$$

kdežto při zapojení paralelním proud

$$I_p = \frac{U_e}{\left(\frac{R_i}{2} + R_z\right)} = \frac{2U_e}{(R_i + 2R_z)}.$$

Pro $I_s > I_p$ musí být i

$$\frac{2U_e}{2R_i + R_z} > \frac{2U_e}{R_i + 2R_z};$$

z toho plyne, že je $R_i < R_z$.

Při $R_i < R_z$ dostaneme tedy větší výkon na R_z při sériovém zapojení obou zdrojů nežli při zapojení paralelním; při $R_i > R_z$ je tomu obráceně. Lze říci, že při $R_i < R_z$ mají oba zdroje charakter zdrojů napěťových, které se s výhodou zapojují do série, kdežto při $R_i > R_z$ mají charakter zdrojů proudových, které se zapojují paralelně.

3. Máme k zdrojů o elektromotorickém napětí U_e a vnitřním odporu R_i . Z nich vytvoříme $m = \frac{k}{l}$ skupin po l sériově spojených zdrojích.

Tyto skupiny spojíme spolu paralelně. Výsledek pracuje do daného vnějšího odporu R_z . Jak mají být zdroje zapojeny, má-li být na vnějším odporu R_z co největší výkon? Jaký je pak výsledný vnitřní odpor R_{ic} všech zdrojů?

Řešení: Zde opět potřebujeme co největší proud do konstantního odporu R_z . Proud I je

$$I = \frac{lU_e}{R_i \frac{l}{m} + R_z}; \quad m = \frac{k}{l};$$

$$I = U_e \frac{l}{R_i \frac{l^2}{k} + R_z} = U_e \frac{k}{R_i} \cdot \frac{l}{l^2 + \frac{R_z k}{R_i}} = Q \frac{l}{l^2 + A},$$

kde Q, A jsou konstanty.

Výpočtem maxima funkce $I = f(l)$ zjistíme, že maximum proudu I nastane pro

$$l = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{kR_z}{R_i}} \quad m = \frac{k}{l}.$$

Celkový vnitřní odpor zdrojů při tomto optimálním zapojení je roven

$$R_{ic} = \frac{R_i l}{m} = \frac{R_i l^2}{k} = \frac{R_i}{k} \cdot \frac{kR_z}{R_i} = R_z,$$

a je tedy zase roven odporu vnějšímu. To neplyne z výsledku první úlohy, ale z úlohy druhé. Kdyby totiž bylo při nějakém zapojení zdrojů $R_{ic} < R_z$, bylo by výhodnější přesunout část zdrojů z paralelního zapojení do sériového; při $R_{ic} > R_z$ by bylo výhodnější přesunout některé zdroje ze sériového zapojení do paralelního. Proto optimum je při $R_{ic} = R_z$.

V případě, že při výpočtu maxima nevychází celé l a m , je nutno zvolit nejbližší celé l a m , při nichž se ovšem současně poměr $\frac{R_{ic}}{R_z}$ resp. $\frac{R_z}{R_{ic}}$ nejvíce blíží k jedničce. Např. pro $U_e = 4,5 \text{ V}$; $R_i = 3 \Omega$; $k = 6$; $R_z = 3,5 \Omega$ dostaneme

$$l = \left\lceil \sqrt{\frac{kR_z}{R_i}} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{\frac{6 \cdot 3,5}{3}} \right\rceil = \lceil \sqrt{7} \rceil = 2,642$$

Zde zvolíme raději $l = 3$, $m = 2$, kdy $R_{ic} = R_i \frac{l}{m} = 3 \cdot \frac{3}{2} = 4,5 \Omega$, nežli $l = 2$; $m = 3$; kde $R_{ic} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \Omega$.

V prvním případě máme

$$\frac{R_{ic}}{R_z} = \frac{4,5 \Omega}{3,5 \Omega} = 1,286 ,$$

ve druhém případě je

$$\frac{R_z}{R_{ic}} = \frac{3,5 \Omega}{2 \Omega} = 1,75$$

Výsledný proud zátěží je v prvním případě

$$I = U_e \frac{k}{R_i} \cdot \frac{l}{l^2 + \frac{R_z k}{R_i}} = 4,5 \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{3}{9 + \frac{3,5 \cdot 6}{3}} = 1,688 \text{ A} ,$$

ve druhém případě

$$I = 4,5 \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{2}{4 + \frac{3,5 \cdot 6}{3}} = 1,635 \text{ A} ,$$

tedy skutečně méně.

Při $l = 6$, $m = 1$, resp. $l = 1$, $m = 6$ by proud I byl roven již jenom 1,256 A, resp. 1,125 A.

Úloha o ledu a vodě

Nádoba je naplněna vodou tak, že po vložení kusu ledu stoupne hladina vody až k jejímu okraji. Část ledu, který v nádobě plave, vyčnívá nad hladinu vody. Po chvíli celý led roztaje. Přeteče voda nádobu?

(Řešení naleznete na str. 228.)

Zdeněk Janout

recenze

Karel Drábek, František Harant, Ota Setzer:

Deskriptivní geometrie I. a II. díl

SNTL Praha — ALFA Bratislava, 1978 a 1979. První díl 206 str. a 265 obr., druhý díl 282 str. a 274 obr. Cena prvního dílu váz. 18,— Kčs, cena druhého dílu váz. 24,— Kčs.

Tato kniha je učebnicí určenou studentům prvního ročníku stavebních fakult, zejména oborů architektura a pozemní stavitelství. První díl obsahuje výklad o geometrických zobrazeních v rovině, o kuželosečkách a jejich konstrukcích, o lineárních promítacích metodách (Mongeova projekce, axonometrie pravouhlá a kosoúhlá, promítání kótované a středové), o zobrazování, řezech a průnicích jednoduchých geometrických ploch a těles v různých dříve vyložených projekcích a o užití kótovaného promítání ve stavební praxi. Druhý díl začíná obsáhlou kapitolou věnovanou lineární perspektivě, cyklorámě, re-

liéfu a konstruktivní fotogrammetrii. Potom následuje dost podrobný výklad o elementárních vlastnostech rovinných křivek a stručný výklad o křivkách prostorových. Nejobsáhlejší je kapitola o plochách, z nichž jsou postupně probírány plochy kvadratické, rotační, rozvinutelné, zborcené a šroubové. V kapitole o teorii osvětlení je věnována zvláštní pozornost tzv. osvětlení technickému. Poslední kapitola učebnice se zabývá základy kartografického zobrazování; obsahuje podrobný výklad o perspektivních projekcích a stručné poučení o zobrazeních válcových a kuželových.

Výklad je jasný, i když velmi stručný; je doprovázen vzorně narýsovanými obrázky. V každé kapitole je řada řešených úloh a značný počet úloh (většinou kótovaných) pro samostatnou práci studentů. Jedině kapitola „Užití středového promítání pro stavební praxi“ neobsahuje ani jednu úlohu, kterou by si mohl čtenář samostatně vyřešit.

První díl učebnice mohou s porozuměním číst studenti nejvyšších tříd škol druhého cyklu, i když se neučili deskriptivní geometrii. Lépe se však bude tento díl studovat těm, kteří už znají základy deskriptivní geometrie probírané na střední škole. Takové znalosti autoři zřejmě předpokládají, jak ukazuje např. to, že nikde nevysvětlují význam zápisů

$t(-6, 4)$, $\varrho(6; 5; 7)$ či $\varrho(\infty; 4, 5)$ nebo to, že neuvádějí explicitně větu Quételetovu-Dandelinovu, i když jí používají (str. 146—147 prvního dílu). K hlubšímu pochopení některých částí druhého dílu (zejména obecného výkladu o křivkách a plochách) je třeba znát aspoň něco z prostorové analytické geometrie a z diferenciálního počtu funkcí jedné i více proměnných.

Učebnice je napsána autory, kteří mají mnohaleté zkušenosti ze svého učitelského působení na stavební fakultě ČVUT v Praze; proto bude jistě dobře plnit své poslání. Lze ji však doporučit všem zájemcům o deskriptivní geometrii, zejména učitelům tohoto předmětu, působícím na našich školách druhého cyklu.

Emil Kraemer

Jiří Jarník:

Posloupnosti a řady

Škola mladých matematiků, sv. 43, vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, Praha 1979, 138 stran, cena 9 Kčs.

Jednou z nejčastějších otázek, kterými se zabývá matematika, je konvergence. Problémů tohoto druhu je celá škála na různých úrovních obecnosti. K nejjednodušším patří zkoumání limit posloupností a součtů nekonečných řad. To je klasická látka, která má stále základní důležitost pro studium různých matematických oborů, hlavně pro matematickou analýzu, aplikovanou matematiku a pro numerické metody. Nauka o posloupnostech a řadách tvoří stěžejní část úvodních přednášek z matematiky na vysokých školách. Se základními pojmy se letmo seznámí i studenti středních škol. Těm zvědavějším často vrtají hlavou různé záhady spojené s „blížením se k nekonečnu“ a se „sčítáním nekonečně mnoha nekonečně malých veličin“. Právě jim je určena tato nová knížka z edice Škola mladých matematiků.

V soutěžích matematické olympiády jsou ovšem úlohy tohoto oboru poměrně vzácné. Problémy, kterými se matematická analýza zabývá, se většinou nedají formulovat ani řešit tak elementárně jako v některých jiných oblastech matematiky. Jejich výklad se zdá příliš technický a suchopárný. Je to způsobeno dlouhým a složitým vývojem, který vedl od původních názorných a jednoduchých, ale nepřesných a nedorozuměním hrozících představ až k dnešnímu formálně dokonalému, ale na druhé straně na první pohled složitěmu vyjádření. Naučit se rozumět tomuto jazyku, kterému se někdy

říká „epsilonština“ podle „libovolně malého ε “, které se v něm na každém kroku objevuje, znamená zdokonalit logické myšlení a uvědomit si podstatu, která se za formalismem skrývá. A takový cíl má recenzovaná knížka.

Knížka má pět kapitol. V první jsou probrány různé způsoby zavedení posloupností a jejich základní vlastnosti. Druhá kapitola vysvětluje pojem limity posloupnosti, jehož dokonalé pochopení je klíčem k dalšímu výkladu. Jsou tu také uvedena základní kritéria, podle kterých se pozná, zda posloupnost konverguje. Třetí kapitola je věnována základním poznatkům o nekonečných řadách, speciálně pak o řadách s nezápornými členy. Ty mají totiž význačné postavení mezi řadami — jejich teorie je jednoduchá a dá se využít i při studiu řad s obecnými členy. Zvláště zajímavá je souvislost chování dané řady s řadou, která vznikne nahrazením členů jejich absolutními hodnotami. Těmito již dost složitými otázkami se ve zkratce zabývá čtvrtá kapitola. Pátá kapitola je pak věnována posloupnostem a řadám, jejichž členy jsou funkce.

Od středoškolského čtenáře bude četba vyžadovat větší soustředění a trpělivost. Přečte-li knížku s porozuměním, nebude se muset bát, že bude mít později principiální potíže při studiu podrobnějších učebnic matematické analýzy.

Antonín Vrba

J. Vyšín — P. Fabinger — J. Mída — J. Moravčík — F. Zítek:

DVACÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1979, edice Pomocné knihy pro žáky, stran 135, obr. 30, cena brožovaného výtisku 7 Kčs.

Když ve školním roce 1975—76 slavila matematická olympiáda čtvrt století svého trvání, byla o ní napsána řada článků v odborných a populárních časopisech a nakladatelství Mladá fronta vydalo i jubilejní publikaci s názvem *Dvacet pět let matematické olympiády v Československu*. Na zevrubnou zprávu o pětadvacátém ročníku MO jsme si ovšem museli trochu počkat, přišla na trh až v jarních měsících roku 1979. Struktura ročníkové brožury je známá všem, kdo sledují soutěž.

První kapitola popisuje organizaci soutěže, je tu složení ústředního výboru MO a informace o jeho zasedáních a stručně se charakterizují jednotlivá kola olympiády. I ve zmíněném ročníku probíhal korespondenční seminář a několik typů celostátních soustředění. Dozvíme se, že první jubilejní akcí, jež měla širší veřejnosti připomenout naši soutěž, byla tisková konference v pražském Klubu novinářů 12. září 1975. *Škola mladých matematiků* nezahálela a připravila olympionikům během jubilejního roku čtyři svazky (autoři J. Černý, B. Riečan a Z. Riečanová, J. Bosák, A. Kufner). Bý-

valé řešitele bude asi nejvíc zajímat seznam vítězů a úspěšných řešitelů celostátního kola kategorie A, které se konalo v květnu 1976 v Bratislavě, a pořadí úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích A, B a C pro jednotlivé kraje.

Jak známo, za přípravné úlohy MO se nyní převážně volí příklady zadané už v předcházejících ročnících soutěže. Druhá kapitola, která je má komentovat, se proto soustředí jen na ty, jež jsou v MO uloženy poprvé. Jde o úlohy všech čtyř kategorií.

Třetí kapitola přináší soutěžní úlohy prvního kola kategorie A, B, C a Z vždy s podrobným komentářem a obdobné poslání má i kapitola čtvrtá, která se zase soustředí na úlohy druhého kola pro všechny tyto kategorie, a kapitola pátá věnovaná úlohám třetího kola kategorie A. Úloha A-III-6 je tu uváděna s řešením, které podal *Ilja Turek* z Hradce Králové a získal tím cenu Matematického ústavu ČSAV, jež se udě-

luje za nejlepší řešení soutěžní úlohy celostátního kola.

Šestá kapitola brožury nás informuje, jak probíhal korespondenční seminář MO. Ve zmíněném ročníku se semináře účastnilo 43 řešitelů, kteří dostali úlohy z pěti tematických okruhů (číselná teorie, geometrie, funkce a mnohočleny, kombinatorika, rovnice a soustavy rovnic). Najdou se tu i texty všech zadaných úloh.

Mezinárodní matematická olympiáda se v červenci 1976 konala v Rakousku a byl to už její osmáctý ročník. Zúčastnilo se 19 zemí, mezi nimi i Československo. Kdo si chce připomenout, jak jsme v Rakousku dopadli a jaké byly úlohy, najde to s mnoha podrobnostmi v kapitole sedmé, již také knížka končí.

Knížku jistě nemusíme příliš doporučovat. Kdo ji chce mít, musí si pospíšit s koupí. Malý náklad, který se dostává na knižní trh, bude určitě brzy rozebrán.

Jiřina Sedláčková

Dne 2. listopadu 1979 zemřel po těžké nemoci bývalý středoškolský profesor a později odborný asistent matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze

FRANTIŠEK HRADECKÝ

Byl autorem mnoha článků a úloh otiskovaných v našich Rozhledech. Uctívajíc jeho památku, s povděkem vzpomínáme na mnohaletou práci, kterou pro Rozhledy matematicko-fyzikální vykonal.

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

insieme m

- continuo
- denso
- finito
- infinito
- numerabile
- ordinato
- vuoto

insiematico

istantaneo

integrafo m

integrale m

integrale curvilineo, di linea

- definito
- di Fourier
- di Legendre
- di Riemann
- ellittico
- generale
- generalizzato, improprio
- indefinito
- particolare
- singolare
- superficiale
- doppio
- triplo

integrazione ž

- finita
- per parti
- per serie
- per sostituzione

intensità ž

množina

- spojitá
- hustá
- konečná
- nekonečná
- spočetná
- uspořádaná
- prázdná

množinový

okamžitý

integraf

integrál

integrál křivkový

- určitý
- Fourierův
- Legendreův
- Riemannův
- eliptický
- obecný
- nevlastní
- neurčitý
- partikulární
- singulární
- plošný
- dvojný, dvojnásobný
- trojný, trojnásobný

integrace

- v konečném tvaru
- per partes
- řadou
- substitucí

intensita

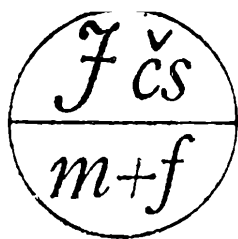
intercalare	vložit, vsunout
interferenza ž	interference
interferometro m	interferometr
— di Michelson	— Michelsonův
interiore, interno	vnitřní
intero	celý
intero m (numero)	celé číslo
interpolazione ž	interpolace
interruttore m	přerušovač
intersecare	protínati
intersecarsi	protínati se
intersezione ž	průsečík, průsečnice
intersezione di insiemi	průnik množin
intervallo m	interval
— aperto	— otevřený
— chiuso	— uzavřený
intorno	kolem
intorno m	okolí
inversione ž	inverse
inverso	inversní
inverso m	opak
invertere, invertire	obrátit
invertibilità ž	záměnnost
— dei cammini ottici	— optických drah
inviluppo m (di curve)	obálka (čar)
involuzione ž	involute
ione m	ion
ionizzazione ž	ionizace
ionosfera ž	ionosféra
iperbole ž	hyperbola
iperbolico	hyperbolický
iperboloide m	hyperboloid
— a due falde	— dvojdílný
— ad una falda	— jednodílný
iperpiano m	nadrovina
ipersfera ž	nadkoule
ipocicloide ž (curva)	hypocykloida
ipotesi ž	hypotéza, domněnka

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

6

ROČNÍK 58, 1979-1980, ÚNOR



ROČNÍK 58
ÚNOR 1980

6

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Míša, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

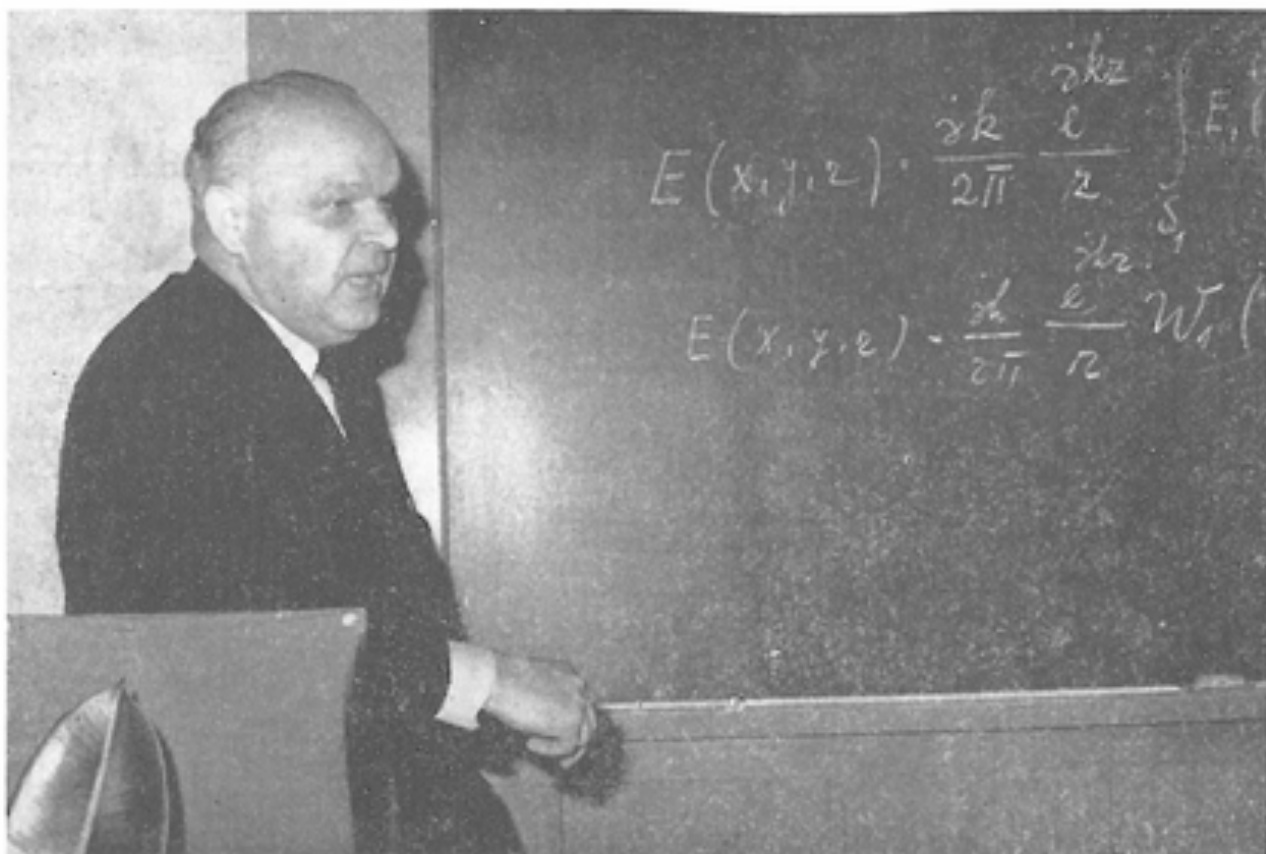
REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1980.

Obsah

Doc. ing. I. Štoll, CSc.: K žedesátinám akademika Bohumila Kvasila . . .	241
J. S.: Národní cena za matematiku v roce 1979	244
Doc. dr. V. Mráz, CSc.: Co jsou spřízněná čísla?	245
J. S.: Čtyři nové dělitelé Fermatových čísel	247
Dr. O. Petránek: Diferenciální rovnice v oboru polynomů	248
J. Drexler: Stanovení počtu dní mezi dvěma daty a určení dne v týdnu . .	253
V. S.: Dosud největší prvočíslo	257
S. Horák: Z geometrie trojúhelníku	258
Prof. E. Kraemer: O jedné vlastnosti asymptot a tečen hyperboly	264
Doc. ing. dr. L. Drs, CSc.: Fotografie a geometrie . II.	268
Dr. M. Odehnal, CSc.: Supratekuté kapalné helium - kvantová kapalina . .	273
T. Svoboda: Astronautika v Mnichově	278
Dr. J. Sedláček, CSc.: Kdo byl F. P. Ramsey	279
Dr. V. Malíšek, CSc.: Fyzika před 10, 100 a 1000 roky	280
Pro volnou chvíli	281
Olympiády	283
Recenze	285
Pokyny autorům	287
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky



K šedesátinám akademika Bohumila Kvasila

Doc. ing. IVAN ŠTOLL, CSc., děkan FJFI ČVUT

Se jménem akademika Bohumila Kvasila jsem se poprvé setkal koncem padesátých let, když se mi dostala do ruky jeho kniha „*Theoretické základy techniky centimetrových vln*“. V české literatuře neexistovala tehdy učebnice nebo monografie, která by na dostatečném fyzikálně teoretickém základě seznamovala s touto novou oblastí radiotechniky. Kniha profesora Kvasila byla proto nejen průkopnickou vysokoškolskou učebnicí, ale sahali po ní stejně inženýři jako fyzikové ve výzkumných ústavech, laboratořích a průmyslu.

V době druhé světové války se prudce rozvinula radiolokační technika, zprvu v decimetrovém, pak i v centimetrovém vlnovém rozsahu, která dávala možnost určovat vzdálenosti a sledovat pohyb vodivých objektů, především letadel a lodí, za noci, v mlze, bez ohledu na povětrnostní podmínky. Její počátky sahají již do doby předválečné a je známo, že i český fyzik profesor A. Žáček k ní přispěl svým objevem netlumených krátkovlnných oscilací vznikajících v magnetronu.

Po válce se postupně odhalovala přísně střežená vojenská tajemství a ukazovaly se možnosti rozsáhlého použití mikrovlnné techniky v mírovém životě — ve vědeckém výzkumu, metrologii, letecké a vodní dopravě. A brzy potom vznikaly i první generátory mikrovln s vysokou stabilitou kmitočtu a mizivým vlastním šumem — generátory parametrické a kvantové. Od decimetrových a centimetrových vln se přecházelo k vlnám milimetrovým, vlnovody a rezonátory, které dříve zaplňovaly výzkumné laboratoře jako složitá rozvětvená potrubí, se postupně stávaly titěrnými hračkami na laboratorních stolech. V šedesátých letech pak konečně vypukla éra laserová, radiotechnika přeskočila přímo do nanometrové oblasti, otevřely se nové možnosti kosmických spojů a nové horizonty pro vědu i techniku.

Celý tento proud moderní fyziky a techniky je u nás těsně spjat se životem a dílem akademika Kvasila. Všimněme si, že kromě jiného je tu charakteristické i postupné sbližování fyziky a radiotechniky s tím, jak se zkracováním vlnové délky vystupovaly do popředí fyzikální vlastnosti elektromagnetických polí. Toto sbližování je charakteristické i pro odborný profil akademika Kvasila.

Narodil se v Plaňanech u Kolína 14. února 1920 a vystudoval fakultu strojíního a elektrotechnického inženýrství ČVUT. Jeho studia přerušila válka a mohl je ukončit až v roce 1947. Působil ve vojenském výzkumném ústavu a pak nastoupil jako učitel na České vysoké učení technické. S touto naší nejstarší vysokou technickou školou je spjat po celý svůj život. Důvěrně ji zná, rád vzpomíná na své učitele, na důkladnou přípravu, které se mu dostalo i v mnoha inženýrských disciplínách, třeba vzdálených jeho vlastnímu oboru. Dosáhl na této škole nejvyšších vědeckopedagogických a akademických hodností a více než jedno desetiletí byl jeho rektorem.

I když základem svého vzdělání je inženýr, projevoval akademik Kvasil vždy hluboký teoretický zájem o moderní fyzikální obory. Dovedl obě tyto stránky v sobě spojit a stát se tak představitelem nového typu vědeckého pracovníka, který obsáhl celou oblast od základního fyzikálního výzkumu až po inženýrskou realizaci jeho výsledků. Svými pracemi přispěl k rozvinutí mikrovlnné diagnostiky plazmatu, pod jeho vedením byl zkonstruován lineární urychlovač elektronů a systém laserového radaru, který přináší cenné výsledky mezinárodnímu programu Interkosmos. Svým vnitřním zájmem zůstává akademik Kvasil věren teorii elektromagnetického pole, již věnoval i řadu monografií a za niž mu byla udělena i *Státní cena Klementa Gottwalda*.

Když byla v roce 1955 založena fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT (tehdy jako fakulta technické a jaderné fyziky při Karlově univerzitě), stal se Bohumil Kvasil jedním z jejích zakladatelů a prvních děkanů. Vytvořil a vede zde dosud katedru fyzikální elektroniky, z níž se stalo jedno z našich předních pedagogických a vědeckovýzkumných

pracovišť. Zde jsem se také s akademikem Kvasilem blíže seznámil, naučil se oceňovat jeho lidské vlastnosti, neformální a věcný přístup k lidem a způsob řízení kolektivu a poznal i jeho pedagogickou činnost, z níž se všichni na katedře mnohemu naučili.

Profesor Kvasil přednáší ve vyšších ročnících vybrané partie z radiofyziky a radiotechniky a jeho přednášky, i když na totéž téma, přinášejí každý rok něco nového. Dovede vždy vystihnout to, co je podstatné, na čem budou moci mladí absolventi ve své práci dále budovat, najít správnou proporcii mezi formálně matematickou stránkou, hloubkou fyzikální teorie a inženýrskými aplikacemi. Ve studentech vidí vždy své možné mladší spolupracovníky, podněcuje jejich tvůrčí myšlení a hodnotí nikoli formální znalosti, ale to, jak student dovede získané poznatky využívat a samostatně s nimi pracovat.

Proto se stal profesor Kvasil průkopníkem nového způsobu výuky na fakultě a prosazuje těsné spojení výuky se samostatnou vědeckou prací. Po zvládnutí základů matematiky a fyziky přichází student do laboratoře a na katedru jako mladší člen výzkumného kolektivu, aby přispíval svou prací k řešení společensky závažných úkolů. Zúčastňuje se diskusí, provozních porad, plánování experimentu, seznamuje se s obtížemi při jeho přístrojovém, materiálním a organizačním zabezpečování a sleduje celou cestu od zrodu myšlenky až ke konečné realizaci. V tomto důsledném úsilí dovést dílo až do konce, k realizačnímu „výstupu“, jak se dnes často říká, je právě kus pravého inženýrství, jak mu akademik Kvasil vždy učí.

Jako zkušený organizátor a vědec se širokým záběrem byl akademik Kvasil v loňském roce povolán do funkce místopředsedy Československé akademie věd a stal se ředitelem reorganizovaného Fyzikálního ústavu ČSAV. Své škole a fakultě však zůstal věrný a pokračuje i ve svém úsilí co nejvíce sblížit práci vysokých škol s akademickým i resortním výzkumem a vychovávat mladé vědecké pracovníky aktivní tvůrčí společensky prospěšnou prací.

Bylo by možno hovořit i o veřejně politické práci akademika Kvasila, práci poslance Federálního shromáždění, jeho činnosti publikační, práci v mezinárodních organizacích, ale pro své spolupracovníky a žáky zůstává vždy především příkladem všestranného socialisticky myslícího a jednajícího vědeckého pracovníka a učitele. Za dlouholetou vědeckou a společenskou činnost mu byl v roce 1979 udělen titul hrdina socialistické práce. Do jeho odpovědné práce na předním místě československé fyziky a do dalších let mu přejeme mnoho úspěchů a pevné zdraví.

Národní cena za matematiku v roce 1979



Nemůžeme být bohužel tak rychlí a pohotoví jako denní tisk, a proto teprve nyní představujeme čtenářům loňského nositele národní ceny *RNDr. Karla Rektoryse, DrSc.*, profesora stavební fakulty ČVUT v Praze. Národní cenu dostal 3. května 1979 za dílo *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*.

Karel Rektorys se narodil roku 1923 v Písku, kde také chodil do reálky a maturoval roku 1941. Po válce studoval matematiku a fyziku na přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity v Praze a po absolvování nastoupil do teoretického výzkumu Škodových závodů v Plzni. Tam se po matematické stránce zabýval problematikou chladnutí velkých ocelových ingotů a z toho vznikla i jeho disertační práce k titulu RNDr. (roku 1951). Když přešel do Ústředního ústavu matematického (nynější Matematický ústav ČSAV), pracoval tam v oddělení prof. dr. F. Vyčichla na velkém výzkumném úkolu pro Orlickou přehradu. Po položení bloku se beton ohřívá a vznikají tepelná napětí často větší než napětí způsobená vahou přehrady. Rektorysovým úkolem bylo určit teplotu v přehradě během její výstavby. Úkol rozřešil výborně a z problematiky Orlické přehrady vznikla ještě řada jeho prací.

Jméno prof. Rektoryse je mezi studenty inženýrských směrů nejvíce známo ve spojení s knihou *Přehled užití matematiky* (1963), jejímž byl hlavním autorem a do níž napsal více než polovinu textu. Publikace vyšla už ve třech vydáních a byla přeložena i do angličtiny. Látka je vykládána tak, že četné partie může pochopit i čtenář se středoškolskou úrovní předběžných znalostí.

Knihu, která byla odměněna národní cenou, vydalo SNTL v Praze roku 1974 a světové veřejnosti ji zpřístupnil anglický překlad roku 1977. I přes krátkost doby, která od vydání uplynula, dostalo se jí už mnoha uznání u nás i v zahraničí. Tak na mezinárodním kongresu konaném roku 1978 v Plzni ji vysoce ocenil světoznámý odborník v numerických metodách *prof. L. Collatz*. Inženýři a technické se v ní přístupnou formou seznamují s účinnými matematickými metodami, jichž mohou použít při řešení obtížných problémů.

Pedagogická činnost *prof. Rektoryse* je též velmi rozsáhlá. Kolik studentů na pražské stavební fakultě prošlo už jeho přednáškami, kolik aspirantů začalo pod jeho vedením vědecky pracovat. V loňském nositeli národní ceny se vzácně spojuje vynikající vědecký pracovník a zkušený vysokoškolský učitel.

Rozhledy se připojují ke gratulantům a přejí našemu vynikajícímu matematikovi pevné zdraví, spokojenost v osobním životě a další úspěchy v práci.

J. S.

matematika

Co jsou spřízněná čísla?

Doc. dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Ač odpověď na otázku, kterou jsme nadepsali náš článek, není obtížná, přece dlouhá historie *spřízněných čísel* (jimž se také někdy říká *čísla spřátelená*) není dosud uzavřena. Ukážeme to v dnešním článku.

Spřízněná čísla jsou taková dvě různá přirozená (celá kladná) čísla A a B , která mají zároveň tyto dvě vlastnosti:

- (a) součet všech kladných dělitelů čísla A menších než A je roven číslu B ,¹⁾
- (b) součet všech kladných dělitelů čísla B menších než B je roven číslu A .¹⁾

¹⁾ Kdyby bylo $A = B$, pak by bylo A dokonalé číslo — viz autorův článek *Mersennova čísla a čísla dokonalá*, který byl uveřejněn v našem časopise č. 5, ročník 58.

Příkladem spřízněných čísel je dvojice čísel 220 a 284. Věnujme pozornost těmto číslům. Jejich rozklad na součin prvočísel snadno umožní určit všechny dělitele obou čísel. Příslušné rozklady jsou:

$$220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11, \quad 284 = 2 \cdot 2 \cdot 71$$

Kladní dělitelé čísla 220 menší než 220 jsou 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, kladní dělitelé čísla 284 menší než 284 jsou 1, 2, 4, 71, 142. Čtenář se přesvědčí, že součet uvedených dělitelů čísla 220 je 284 a součet uvedených dělitelů čísla 284 je 220. Právě o dvojici spřízněných čísel 220 a 284 je zmínka již v novopythagorejské literatuře,²⁾ avšak není uveden způsob jejich sestrojení.

Teprve v devátém století popsal Thábit íbn Qurra (830–901), jak je možno některá spřízněná čísla sestrojít. Jsou-li p, q, r prvočísla, o nichž platí

$$(1) \quad p = 3 \cdot 2^n - 1, \quad q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \quad r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1,$$

kde $n \geq 2$ (n je přirozené číslo), pak čísla A, B daná vzorcem (2) jsou spřízněná:

$$(2) \quad A = 2^n p q, \quad B = 2^n r.$$

Pro $n = 2$ je $p = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$, $q = 3 \cdot 2 - 1 = 5$, $r = 9 \cdot 2^3 - 1 = 71$ a přirozená čísla $A_2 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 220$, $B_2 = 2^2 \cdot 71 = 284$, což jsou ona dvě spřízněná čísla, známá téměř dva tisíce let. Dlouhou dobu byla jediným příkladem spřízněných čísel.

V tabulce na str. 247 jsou zapsány některé další páry spřízněných čísel, které uvádí *Pierre de Fermat* (1601–1665) a *René Descartes* (1596 až 1650). Jsou to dvojice (17 296; 18 416) a (9 363 584; 9 437 056), jimž odpovídají vztahy (1) a (2) pro $n = 4$ a $n = 7$. Jak je z tabulky vidět, pro $n = 3, 5, 6, 8, 9, 10$ není splněna podmínka, že příslušné trojice čísel p, q, r jsou prvočísla, takže jich nemůže být využito ke konstrukci spřízněných čísel A a B .

O spřízněných číslech napsal v roce 1749 *Leonard Euler* (1707–1783) celý spis, ve kterém uvádí 61 dvojic těchto čísel. Obecné pravidlo pro konstrukci spřízněných čísel však dosud nebylo nalezeno.

Pro představu o pracnosti výpočtů, jimiž ověřujeme, že dvě čísla jsou spřízněná čísla, vypisujeme součet dělitelů $d(A_7)$ čísla $A_7 = 9\,363\,584$ a dělitelů $d(B_7)$ čísla $B_7 = 9\,437\,056$.

$$\begin{aligned} d(A_7): & 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 191 + 382 + 383 + \\ & + 764 + 766 + 1528 + 1532 + 3056 + 3064 + 6112 + 6128 + \end{aligned}$$

²⁾ Novopythagorejské učení patří do pozdně antické doby, přibližně od počátku našeho letopočtu do konce druhého století.

n	p	q	r	A	B
2	11	5	71	220	284
3	23	11	288*)		
4	47	23	1 151	17 296	18 416
5	95*)				
6	191	95*)			
7	383	191	73 727	9 363 584	9 437 056
8	767*)				
9	1535*)				
10	3071	1535*)			

*) Není prvočíslo

$$+ 12\,224 + 12\,256 + 24\,448 + 24\,512 + 49\,024 + 73\,153 + \\ + 146\,306 + 292\,612 + 585\,224 + 1\,170\,448 + 2\,340\,896 + \\ + 4\,681\,792 = 9\,437\,056.$$

$$d(B_7): 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 73\,727 + 147\,454 + \\ + 294\,908 + 589\,816 + 1\,179\,632 + 2\,359\,264 + 4\,718\,528 = \\ = 9\,363\,584.$$

Má-li náš čtenář k dispozici kapesní počítač, může si ověřit, že dvojice čísel $A_4 = 17\,296$ a $B_4 = 18\,416$ jsou spřízněná čísla.

Čtyři nové dělitelé Fermatových čísel

O Fermatových číslech se už v našem časopise často psalo. Jak známo, Fermatova čísla jsou tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1,$$

kde n je vhodné přirozené číslo. Domněnku, kterou v XVII. století vyslovil *P. Fermat*, že všechna čísla F_n jsou prvočísla, vyvrátil už r. 1732

L. Euler, když ukázal, že F_5 je číslo složené. Je totiž dělitelné číslem 641. Dnes známe už celou řadu složených Fermatových čísel a výzkum pokračuje.

D. E. Shippee našel nedávno čtyři nové dělitele Fermatových čísel a uveřejnil je v časopise *Mathematics of Computation* [32 (1978), str. 941]. Jsou to čísla

$$297 \cdot 2^{64} + 1, \quad 7551 \cdot 2^{69} + 1, \\ 683 \cdot 2^{73} + 1, \quad 1421 \cdot 2^{93} + 1$$

První z nich dělí (beze zbytku) číslo F_{62} , druhé dělí F_{66} , třetí je dělitelem čísla F_{71} a konečně čtvrté číslo dělí F_{91} . Ověření těchto tvrzení by bylo bez počítače dosti obtížné, nemyslíte?

J. S.

Diferenciální rovnice v oboru polynomů (pokračování)

RNDr. OLDŘICH PETRÁNEK, SPŠE Praha

V předchozím článku, uvedeném v minulém čísle *Rozhledů* matematicko-fyzikálních, jsme se zabývali některými vlastnostmi polynomů jedné proměnné.

Máme-li polynom P jedné proměnné x , můžeme ho zapsat ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

kde $a_n, \dots, a_0$ jsou libovolná reálná čísla. Představme si, že už máme vytvořeny polynomy jedné proměnné — nazveme ji tentokrát y . Představme si dále, že koeficienty $a_n, \dots, a_0$ v daném polynomu P nahradíme konkrétními polynomy v proměnné y , tzn., že v zápise (1) píšeme místo a_n polynom $A_n(y)$, místo a_{n-1} polynom $A_{n-1}(y)$ atd. až místo a_0 polynom $A_0(y)$.

Ukažme si popisovanou situaci na příkladě. Mějme polynom $P(x)$ druhého stupně a nechť jsou dále dány tyto tři polynomy v proměnné y :

$$A_2(y) = y + 1 \quad A_1(y) = 3y^2 - y \quad A_0(y) = 2y - 3.$$

Dosazením těchto polynomů za koeficienty původního polynomu P obdržíme zápis tvaru

$$(y + 1) \cdot x^2 + (3y^2 - y) \cdot x + (2y - 3).$$

Protože x, y jsou proměnné, můžeme za ně dosazovat libovolná reálná čísla (za symbol x dosazujeme všude stejné číslo, např. a , za symbol y

dosazujeme všude stejné číslo, např. b). Přitom je možno zápis upravit podle pravidel, jež platí pro počítání s čísly, na tvar $x^2y + x^2 + 3xy^2 - xy + 2y - 3$. Zápisy tohoto tvaru budeme nazývat polynomy dvou proměnných x, y a označovat symboly $P(x, y)$, $R(x, y)$, $Q(x, y)$ apod.

V obecném případě můžeme říci, že polynom dvou proměnných x, y je součtem konečně mnoha sčítanců (polynomů) tvaru ax^iy^j , kde a je libovolné reálné číslo, i, j jsou celá nezáporná čísla. Polynom $x^2y + x^2 + 3xy^2 - xy + 2y - 3$ můžeme tedy přepsat na tvar

$$Q(x, y) = x^2y + x^2y^0 + [3xy^2 - xy + 2x^0y - 3x^0y^0].$$

Předpokládáme-li, že máme sestrojeny polynomy dvou proměnných y, z , můžeme v (1) nahradit koeficienty $a_0, \dots, a_n$ libovolně zvolenými polynomy $A_0(y, z), \dots, A_n(y, z)$. Výsledkem by byl polynom tří proměnných, který bychom mohli označit např. $R(x, y, z)$.

Je vidět, že uvedený postup bychom mohli vždy opakovat. Po n krocích bychom dospěli k polynomům n proměnných. Protože by bylo obtížné označovat tyto proměnné různými písmeny, rozlišíme je raději indexy, takže budeme hovořit o proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Polynomem n proměnných (značíme $P(x_1, \dots, x_n)$), rozumíme součet konečně mnoha sčítanců tvaru

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad (2)$$

kde a je libovolné reálné číslo a $k_1, \dots, k_n$ jsou celá nezáporná čísla.

Každý sčítanec tvaru (2), vyskytující se v zápise polynomu $P(x_1, \dots, x_n)$, se nazývá členem polynomu P , číslo a koeficientem a číslo $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ stupněm členu (2).

Budeme říkat, že polynom $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je zapsán v normálním tvaru právě tehdy, když v zápise polynomu P se nevyskytují dva členy s nenulovými koeficienty, jež by se shodovaly ve všech exponentech u těchž proměnných.

Máme-li nenulový polynom $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ zapsán v normálním tvaru, má tento polynom alespoň jeden člen s nenulovým koeficientem. Určíme stupně všech členů s nenulovými koeficienty. Největší z těchto čísel nazveme stupněm polynomu $P(x_1, \dots, x_n)$.

Příklad 1. Je dán polynom. Určeme jeho stupeň.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_5) = 3x_1^3x_2x_4^2 - 5x_2x_3x_4^2x_5^2 - 2 + 4x_1^2x_2 - \frac{3}{7}x_1x_2^2x_3x_5.$$

Řešení. Polynom je v normálním tvaru. Určíme stupně jednotlivých jeho členů. Jsou to po řadě čísla: 6, 6, 0, 3, 5. Největší z nich je číslo 6 (nezáleží na tom, že dva různé členy mají též stupeň 6), a tedy 6 je stupeň polynomu $P(x_1, \dots, x_5)$.

Někdy nás při určování stupně polynomu budou zajímat jen některé jeho proměnné. Pak postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě, pouze ty proměnné, o které se právě nezajímáme, budeme považovat za konstanty. Mluvíme pak o stupni polynomu $P(x_1, \dots, x_n)$ v určitých vybraných proměnných z proměnných $x_1, \dots, x_n$.

Příklad 2. Zjistíme stupeň polynomu $P(x_1, \dots, x_5)$ z příkladu 1 v proměnných

a) x_1, x_2, x_3
b) x_4, x_5

Řešení. a) Stupně jednotlivých členů jsou po řadě tato čísla: 4, 2, 0, 3, 4. Tedy stupeň polynomu v proměnných x_1, x_2, x_3 je 4.

b) Stupeň prvního členu je 2, druhého 4, třetího 0, čtvrtého 0, pátého 1. Tedy stupeň daného polynomu v proměnných x_4, x_5 je 4.

Jistě všichni víme, co znamená řešit danou rovnici. Připomeňme si proto jen stručně tuto otázku. Rovnice může být dána např. výrokovou formou $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je jistá funkce (např. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$). Řešit příslušnou rovnici $f(x) = 0$ (v našem případě rovnici $2x^2 + 5x - 3 = 0$) znamená nalézt všechna čísla, která dosazena za x do $f(x)$ dají výsledek rovný nule. Každé takové číslo se nazývá *kořenem* (řešením) dané rovnice. V našem případě, jak snadno zjistíte, jsou kořeny čísla $\frac{1}{2}$,

— 3. Někdy se z nejrůznějších důvodů při hledání kořenů dané rovnice omezujeme pouze na některá čísla (na čísla z nějaké předem dané množiny). Tedy u rovnice $2x^2 + 5x - 3 = 0$ bychom se mohli zajímat pouze o řešení celočíselná. Pak bychom za kořen rovnice považovali pouze číslo —3. Kdybychom se zajímali pouze o řešení kladná, pak by bylo kořenem pouze číslo $\frac{1}{2}$ atd. Můžeme tedy shrnout: řešit rovnici $f(x) = 0$,

kde $f(x)$ je nějaká funkce, znamená nalézt všechna čísla a (po případě pouze taková, jež leží v nějaké předem dané množině — oboru rovnice) pro něž platí $f(a) = 0$. Množina všech čísel a z oboru rovnice, pro něž je $f(a) = 0$, se nazývá *obor pravdivosti rovnice* $f(x) = 0$.

Úlohy, jimiž se nyní budeme zabývat, se do značné míry podobají řešení rovnic. Půjde při nich o to, nalézt ne čísla, ale funkce, které splňují jistou podmínku. Tato podmínka musí mít ovšem takový tvar, aby bylo možno funkce do ní dosazovat. Obvykle bude třeba dosazovat do ní i derivace těchto funkcí.

Mějme např. úlohu popsat (nalézt) všechny pohyby, pro něž poměr dráhy k rychlosti je danou funkcí času $g(t)$. Pro jednoduchost zvolíme $g(t) = t$. Přitom pohyb budeme považovat za určený, budeme-li schopni udat funkci $f(t)$, která každému času t přiřazuje číslo rovnající se délce dráhy, kterou pohybující se těleso urazilo za dobu od začátku měření

($t = 0$) do času t . Víme dále, že okamžitá rychlost pohybujícího se tělesa v čase t je dána derivací $f'(t)$. Proto podmínku danou úlohou můžeme zapsat ve tvaru $\frac{f(t)}{f'(t)} = t$, neboli

$$f(t) = t \cdot f'(t) \quad (3)$$

Musíme ovšem předpokládat, že pro všechna uvažovaná t , tj. pro každé $t \geq 0$, je rychlost nenulová. Naše úloha bude zřejmě vyřešena, nalezneme-li všechny funkce $f(t)$ (definované v intervalu $\langle 0, \infty \rangle$), které splňují podmínku (3). Dosadíme-li za $f(t)$ a současně jejich derivaci za $f'(t)$, musíme dostat na levé i pravé straně podmínky (3) funkce, které pro všechna $t \geq 0$ mají sobě rovné funkční hodnoty. Zatím se nebudeme zabývat otázkou, jak takové funkce nalézt. Ověříme si snadno dosaze-

ním, že např. funkce $f(t) = 5t$, $f(t) = 2 \cdot t \cdot \sqrt[3]{3}$, $f(t) = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{5}t$ podmínky (3) vyhovují. Vidíme, že skutečně všechny tři funkce jsou řešením dané úlohy. Později, až se naučíme řešit úlohy tohoto druhu, budeme umět ukázat, že každé řešení rovnice (3) má tvar $f(t) = at$, kde a je libovolné nenulové číslo. Dosazením snadno ověříme, že každá z funkcí $a \cdot t$ je řešením rovnice (3).

Odpověď na původně stanovenou otázku zní: Všechny pohyby, které splňují podmínky úlohy, jsou právě všechny pohyby rovnoměrné. Skutečně rychlost každého z uvedených pohybů je konstantní, rovná a .

$$f'(t) = (a \cdot t)' = a.$$

Jiným příkladem je tato úloha: mají se nalézt všechny funkce takové, že jejich grafy mají v každém bodě x směrnici tečny rovnou dané funkci (s proměnnou x), např. funkci x^2 . Protože směrnice tečny v bodě x je rovna derivaci příslušné funkce v tomto bodě, můžeme podmínku zachycující požadavek úlohy zapsat ve tvaru

$$f'(x) = x^2, \quad (4)$$

kde $f(x)$ je hledaná funkce. Můžeme se snadno přesvědčit, že danou podmínku splňují např. funkce $\frac{1}{3}x^3$ nebo $\frac{1}{3}x^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{5}$. Lze ukázat, jak se naučíme později, že právě všechny funkce tvaru $\frac{1}{3}x^3 + c$, kde c je libovolné číslo, splňují podmínku (4). Tím je i zodpovězeno, že řešením dané úlohy je každá funkce tvaru $\frac{1}{3}x^3 + c$.

Podmínky tvaru (3), (4), v nichž se vyskytuje neznámá funkce a některé její derivace, se nazývají *diferenciální rovnice*. Z uvedených příkladů je alespoň částečně vidět, že diferenciální rovnice nám dávají nový

a silný prostředek k zformulování matematické řeči (k matematizaci) a k řešení řady důležitých úkolů. Současně jsme viděli, že některé úlohy mají význam i tehdy, zajímáme-li se o řešení pouze v oblasti polynomů. Protože omezení na polynomy vede k značnému zjednodušení při vyhledávání řešení diferenciálních rovnic, budeme se v dalším zajímat pouze o diferenciální rovnice týkající se polynomů.

Pokusme se nyní přesněji vyslovit, co budeme (za našeho omezení) rozumět diferenciální rovnicí.

Mějme libovolné přirozené číslo n a libovolný polynom $n + 2$ proměnných $P(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$, který má alespoň v jedné z proměnných $y_1, y_2, \dots, y_n$ stupeň alespoň 1.

Pak zápis

$$P(x, Y, Y', Y'', \dots, Y^{(n)}) = 0 \quad (5)$$

nazýváme diferenciální rovnicí.

Řešením této diferenciální rovnice rozumíme úkol nalézt všechny polynomy Y jedné proměnné x , které po dosazení do polynomu na levé straně rovnice dají polynom nulový. (Pochopitelně, že musíme dosazovat tak, jak je předepsáno, tj. za Y' první, za Y'' druhou atd. derivaci nalezeného polynomu Y .) Každý takový polynom Y pak nazýváme kořenem (řešením) diferenciální rovnice (5).

Ukažme si, že dva uvedené příklady vedou skutečně k diferenciální rovnici v právě uvedeném smyslu. Podmínku (3) můžeme snadno upravit na tvar $f(t) - t \cdot f'(t) = 0$ a píšeme-li místo t proměnnou x , místo $f(t)$ proměnnou y_0 a místo $f'(t)$ proměnnou y_1 , dostáváme polynom $P(x, y_0, y_1) = y_0 - xy_1$, pro který je $n = 1$ a který má v proměnné y_1 stupeň 1. Splňuje tedy podmínky definice diferenciální rovnice, která má pak tvar

$$Y - x Y' = 0,$$

což je zřejmě jen jinak zapsaná podmínka (3), neboť nezáleží na tom, zda hledaný polynom označíme f anebo Y , ani nezáleží na označení nezávisle proměnné.

Podobně pro podmínku (4) můžeme nalézt polynom $P(x, y_0, y_1) = y_1 - x^2$ (opět $n = 1$), který má stupeň v proměnné y_1 rovný 1 (že má v proměnné y_0 stupeň 0 nevádí, neboť v definici se pro stupeň proměnné y_0 nic nepředpokládá). Odpovídající diferenciální rovnice má pak tvar

$$Y' - x^2 = 0,$$

což je podmínka (4) v jiném označení.

Např. polynom (pro $n = 2$) $P(x, y_0, y_1, y_2) = 2x - \cos 9 \frac{\pi}{2} \cdot y_1 - 3y_2^2 + xy_0^3 + 3y_2^2$ nevede k diferenciální rovnici, neboť má v obou proměnných y_1 a y_2 stupeň 0 (jak ihned vidíme po úpravě na tvar $2x + xy_0^3$).

Zápis $Y'' - Y \sin x + \log Y' = 0$ není podle naší definice diferenciální rovnice, neboť levou stranu nemůžeme získat dosazením do žádného polynomu. Odpovídající zápis by byl $y_2 - y_0 \sin x + \log y_1$, což není polynom.

Diferenciální rovnice budeme třídit dvojím způsobem. Jednak podle řádu, jednak podle stupně. Toto třídění je velmi důležité, neboť na tom, o jakou rovnici půjde, bude podstatně záviset obtížnost řešení.

Je-li v polynomu $P(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ k největší index takový, že P má v y_k nenulový stupeň, nazývá se odpovídající diferenciální rovnice $P(x, Y, Y', \dots, Y^{(n)}) = 0$ *rovnici k -tého řádu*.

Má-li polynom $P(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ v proměnných $y_0, y_1, \dots, y_n$ stupeň s , nazývá se odpovídající diferenciální rovnice $P(x, Y, Y', Y^{(n)}) = 0$ *rovnici s -tého stupně*.

Jak se snadno přesvědčíme, diferenciální rovnice z podmínek (3) a (4) jsou obě prvního řádu a prvního stupně. Místo rovnice prvního stupně budeme říkat rovnice lineární. Pro $s = 2$ budeme často užívat názvu rovnice kvadratické.

Stanovení počtu dní mezi dvěma daty a určení dne v týdnu

JAN DREXLER, Výzkumný a zkušební letecký ústav Praha

Mějme nejprve za úkol sestavit vzorec pro výpočet dní uplynulých mezi dvěma daty v gregoriánském kalendáři, který na základě reformy vyhlášené papežem Řehořem XIII. platí od 15. 10. 1582 včetně až do dnes. Budeme postupovat tak, že obě data vyjádřená ve dnech, měsících a rocích převedeme na dny a vytvoříme rozdíl. K odvození některých následujících vzorců je zapotřebí funkce „celá část racionálního čísla“, kterou k vyloučení možnosti záměny s hranatou závorkou zapisujeme symbolem CEL před příslušným číslem nebo algebraickým výrazem. Tak například: $CEL\ 0,7 = 0$, $CEL\ 5,1 = 5$, $CEL\ [(x + 1) - 4] = 6$ pro $x = 25$ atd. Označme písmeny r — číslo roku, m — číslo měsíce a d — číslo dne v měsíci m (například pro datum 23. 10. 1978 je $r = 1978$, $m = 10$, $d = 23$). Počet dnů, které jakoby uplynuly v gregoriánském kalendáři (kdyby existoval i před 15. říjnem 1582) od 31. prosince roku 2 př. n. let. do zadaného data, nazvěme datovou charakteristikou — DAT_G .

Pozn.: Je možné a zdánlivě výhodnější zvolit i jiné výchozí datum než 31. 12. 2 př. n. let., například první den 15. 10. 1582 gregoriánského

kalendáře. Tím bychom sice počítali namísto s řádově statisíčovými čísly, jak dále uvidíme, pouze s čísly o jeden řád menšími, odvozené vzorce pro datové charakteristiky by však použitím výrazů $r - 1582$, $r - 1500$, $r - 1200$ vyšly přibližně dvakrát delší a staly by se méně přehlednými. Pokud máme k dispozici i ten nejlevnější kapesní počítač, nečiní výpočet s těmito velkými čísly žádné obtíže.

V datové charakteristice DAT_G bude zřejmě několik součtových složek, a to:

- d — číslo dne v měsíci m
- $31(m - 1)$ — číslo aproximující počet dní za $m - 1$ měsíců
- $-f(m)$ — hodnota korekční funkce aproximačního čísla $31(m - 1)$
- $365 \cdot r$ — číslo aproximující počet dní za r roků
- $\text{CEL}(r - 4)$ — počet přestupných roků
- $\text{CEL}(r - 400) - \text{CEL}(r - 100)$ — počet přestupných roků, které odpadnou na přechodech století (podle definice gregoriánského kalendáře jsou roky beze zbytku dělitelné stem přestupné jedině tehdy, jsou-li současně celistvým násobkem čísla 400)

Z uvedených součtových složek DAT_G nás bude především zajímat korekční funkce $f(m)$, jejíž předpis musíme odvodit. V tab. 1 jsou přehledně uvedeny názvy měsíců, jejich pořadová čísla m , počty dnů za $m - 1$ měsíců aproximované hodnotou výrazu $31(m - 1)$, jakož i skutečné počty p dnů za $m - 1$ měsíců. Utvoříme-li v tab. 1 rozdíly $31(m - 1) - p$, obdržíme hodnoty korekční funkce $f(m)$, které je v DAT_G třeba odečíst od hodnoty aproximačního výrazu $31(m - 1)$, abychom dostali správný výsledek.

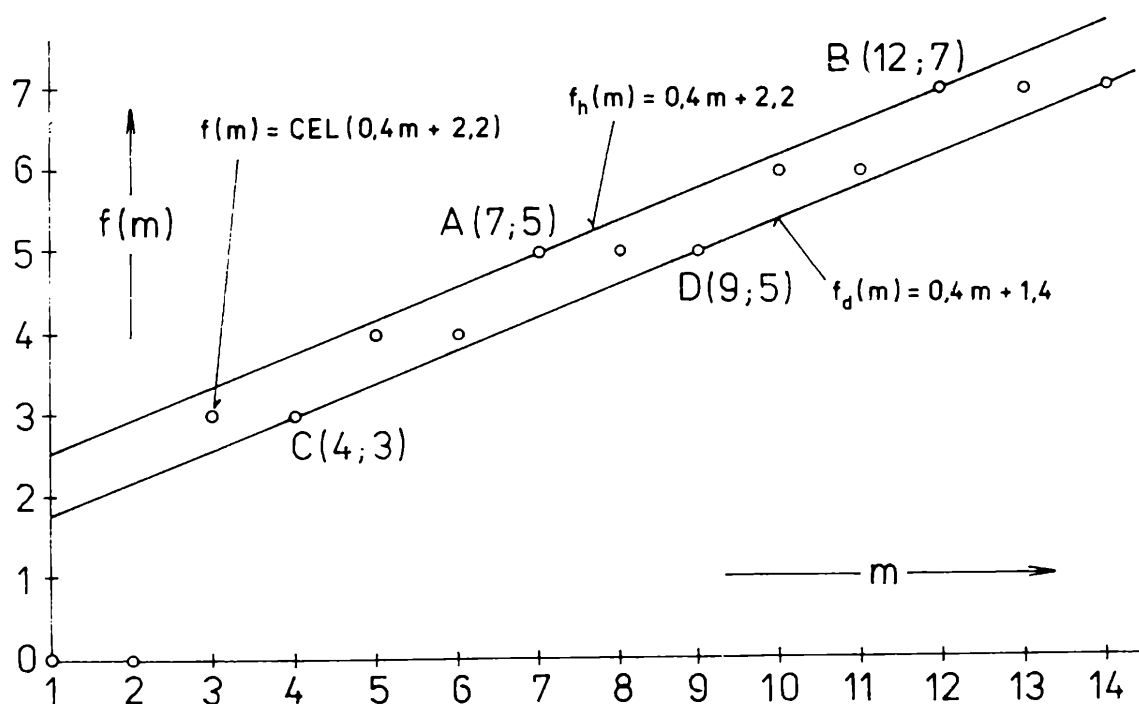
Vynesme funkční hodnoty $f(m)$ z tab. 1 v závislosti na m do grafu na obr. 1. Zatímco funkční hodnoty $f(m)$ pro $m \in \langle 3; 12 \rangle$ vykazují pozitivní korelaci, nelze totéž tvrdit o funkčních hodnotách $f(m)$, viz obr. 1, pro $m \in \langle 1; 2 \rangle$, kterému odpovídají měsíce leden a únor. Proto tyto dva měsíce zkusíme přesunout v tab. 1 za měsíc č. 12 (prosinec). Označíme je následnými pořadovými čísly 13, 14 a jako pro měsíce následujícího roku pro ně spočítáme hodnoty $31(m - 1)$, p , $f(m)$, přičemž hodnoty $f(m)$ přikreslíme do grafu na obr. 1. Vidíme, že hodnoty korekční funkce $f(m)$ pro $m \in \langle 3; 14 \rangle$ lze výhodně sevřít mezi dvě přímky. Horní přímka, viz obr. 1, prochází body $A(7; 5)$ a $B(12; 7)$, má tudíž po úpravě rovnici:

$$f_h(m) = 0,4m + 2,2 \quad (1)$$

TAB.1

název měsíce	m	$31(m - 1)$	skutečný počet dní p	f(m)
Leden	1	0	0	0
Únor	2	31	31	0
Březen	3	62	59	3
Duben	4	93	90	3
Květen	5	124	120	4
Červen	6	155	151	4
Červenec	7	186	181	5
Srpen	8	217	212	5
Září	9	248	243	5
Říjen	10	279	273	6
Listopad	11	310	304	6
Prosinec	12	341	334	7
Leden	13	372	365	7
Únor	14	403	396	7

Obr. 1



Dolní přímka prochází mj. body C (4; 3) a D (9; 5); její rovnice je:

$$f_d(m) = 0,4 m + 1,4 \quad (2)$$

Rozdíl absolutních členů z (1) a (2) činí 0,8; je tedy menší než 1. V tomto případě lze přímo ve spojení s (1) aplikovat funkci CEL, takže hledaná korekční funkce má tvar:

$$f(m) = \text{CEL}(0,4 m + 2,2) \quad (3)$$

O tom, že funkce (3) skutečně platí pro $m \in \langle 3; 14 \rangle$ se můžete přesvědčit dosazením a porovnáním výsledků s hodnotami $f(m)$ v tab. 1. Nyní již snadno zapíšeme vzorec pro výpočet datové charakteristiky DAT_G :

$$\begin{aligned} \text{DAT}_G = d + 31(m - 1) - \text{CEL}(0,4 m + 2,2) + 365 r + \\ + \text{CEL}(r - 4) - \text{CEL}(r - 100) + \text{CEL}(r - 400) \end{aligned} \quad (4)$$

Vztah (4) ještě upravíme do zkráceného tvaru tak, že v něm sloučíme druhý a třetí, čtvrtý a pátý, šestý a sedmý člen takto:

$$\begin{aligned} \text{DAT}_G = d + \text{CEL}(30,6 m - 32,3) + \text{CEL}(365,25 \cdot r) - \\ - \text{CEL}[0,75\text{CEL}(0,01 r + 1)] . \end{aligned} \quad (5)$$

Při slučování dvou výrazů s funkcemi CEL nelze jednoduše postupovat jako při slučování běžných algebraických výrazů; někdy je třeba provádět dosti umělé obraty nebo nejlépe vycházet z grafického vyjádření funkcí. Ponechávám na čtenáři, aby si například dosazením za d , m , r ($d \in \langle 1; 31 \rangle \wedge m \in \langle 3; 14 \rangle \wedge r \in \langle 1582; \infty \rangle \wedge d, m, r$ jsou celá) ověřil ekvivalenci (4) a (5). Vztah pro datovou charakteristiku DAT_J pro data z doby platnosti juliánského kalendáře se v podstatě bude shodovat se vztahem (5) až na vynechaný poslední člen (v juliánském kalendáři jsou totiž roky beze zbytku dělitelné stem vždy přestupné) a přidanou konstantu -2 , tedy:

$$\text{DAT}_J = d + \text{CEL}(30,6 m - 32,3) + \text{CEL}(365,25 \cdot r) - 2 \quad (6)$$

Konstanta -2 musí být v (6) použita vzhledem k neexistujícímu období 5. až 14. 10. 1582 (platí pro Francii, Itálii, Nizozemí, Polsko, Portugalsko a Španělsko), vyrovnávajícímu rozdíl 10 dnů, o které se juliánský kalendář v té době lišil od slunečních roků. Velikost konstanty je volena právě taková, aby rozdíl DAT_G (15. 10. 1482) a DAT_J (4. 10. 1582) byl 1 (den). Počet dnů mezi dvěma daty jednoduše stanovíme z rozdílu jejich datových charakteristik. Pro data z doby platnosti gregoriánského kalendáře platí vztah (5), pro data z doby platnosti kalendáře juliánského využijeme vztahu (6). Při numerickém vyčíslení (5), (6) nesmíme zapomenout, že $m = 13$ pro leden, 14 pro únor a u těchto dvou měsíců bereme za r číslo předcházejícího roku.

Číslo dne v týdnu — DT — určíme jako zbytek po dělení datové charakteristiky (5) nebo (6) číslem 7. Snadno lze zjistit, že zbytku 0 odpo-

vídá sobota, zbytku 1 neděle a tak dále, až zbytku 6 přísluší pátek. Pomocí funkce CEL můžeme vzorec pro výpočet DT zapsat takto:

$$DT = DAT - 7 \text{ CEL } (DAT \quad 7) \quad (7)$$

Je možné též vyjít ze vztahu (5) nebo (6), kde jednotlivé složky částečně vydělíme číslem 7, vzniklé zbytky sečteme a opět lomíme číslem 7, čímž se vyhneme počítání s velkými čísly. Naznačená úprava však není předmětem mého článku, který má mj. prostřednictvím vztahu (7) ukázat souvislost mezi číslem dne v týdnu a datovou charakteristikou.

Pro ilustraci odvozených vztahů (5) až (7) uveďme jednoduchý příklad. Kolik dnů uplynulo mezi objevením Ameriky (12. 10. 1492) a vznikem Československé republiky (28. 10. 1918) a které dny připadají na tato data?

Počítáme:

$$DAT_J = 12 + \text{CEL } (30,6 \quad 10 - 32,3) + \text{CEL } (365,25 \quad 1492) - 2 = \\ = 545236$$

$$DAT_G = 28 + \text{CEL } (30,6 \cdot 10 - 32,3) + \text{CEL } (365,25 \quad 1918) - \\ - \text{CEL } [0,75 \text{ CEL } (0,01 \cdot 1918 + 1)] = 700835$$

$$DAT_G - DAT_J = 700835 - 545236 = 155599$$

$$545236 \quad 7 = 77890, \text{ zbytek } 6 \quad \quad \quad 700835 \quad 7 = 100119, \text{ zbytek } 2$$

Výsledek: mezi pátkem dne 12. 10. 1492 a ponděním dne 28. 10. 1918 uplynulo 155599 dnů.

Závěrem připomeňme, že vztahy odvozené v článku zdaleka nejsou jediné; existuje jich celá řada a jsou v nich aplikovány např. funkce známé z programovatelných počítačů (celočíslné dělení, porovnávací testy apod.). Článek samozřejmě nemůže beze zbytku vyčerpat problematiku vytyčenou v nadpisu, je pouze jednoduchým úvodem do ní a má poskytnout čtenáři námět k řešení podobných otázek.

Dosud největší prvočíslo

Doplňujeme naši informaci z druhého čísla letošního ročníku o dosud největším nalezeném prvočísle dalšími údaji. Jde skutečně o tzv. Mersennovo prvočíslo

$$2^{44497} - 1,$$

pro jehož zápis by bylo třeba 13 395 desítkových číslic. Nalezli je v únoru 1979 Harry Nelson a David Slowinski, pracovníci Lawrence Livermore Laboratories ve Spojených státech. K výpočtu použili počítače CRAY-1, jenž je svými 80 milióny operacemi za sekundu v současné době nejrychlejší na světě.

V. S.

Z geometrie trojúhelníku

STANISLAV HORÁK, Praha

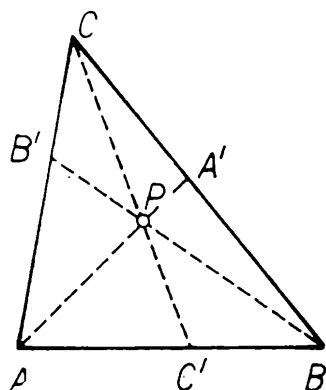
V tomto článku uvedeme dvě použití Cevovy (čti Čevovy) věty. O té psal prof. E. Kraemer (Rozhledy, roč. 55, str. 211 a 348). Druhý článek byl věnován jen aplikacím. Úvodem si Cevovu větu připomeneme.

Je dán trojúhelník ABC a přímky a, b, c ; přímka a prochází vrcholem A , přímka b vrcholem B a přímka c vrcholem C . Ještě označme: $a \cap BC = A'$, $b \cap CA = B'$, $c \cap AB = C'$, přičemž žádný z bodů A', B', C' nesplývá s některým vrcholem trojúhelníku ABC . Potom platí:

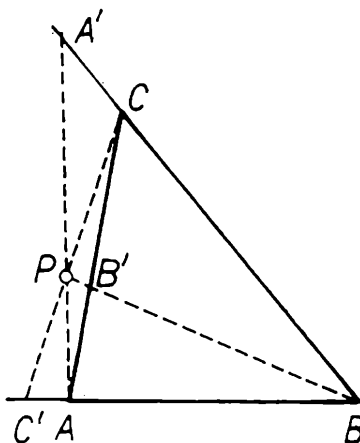
Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímky a, b, c procházely jedním bodem P nebo byly navzájem rovnoběžné, je

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1.$$

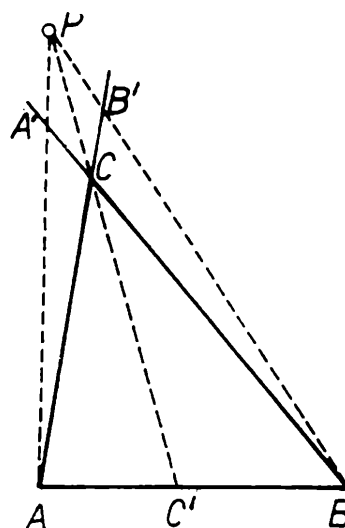
Na tomto místě je vhodné si připomenout, že body A', B', C' jsou buď vesměs vnitřními body stran trojúhelníku, nebo jeden je vnitřním bodem jedné strany a druhé dva leží na prodloužení druhých dvou stran (můžeme říci, že jsou vnějšími body těchto stran). Všechny možné případy jsou znázorněny na obr. 1a, b, c.



Obr. 1a



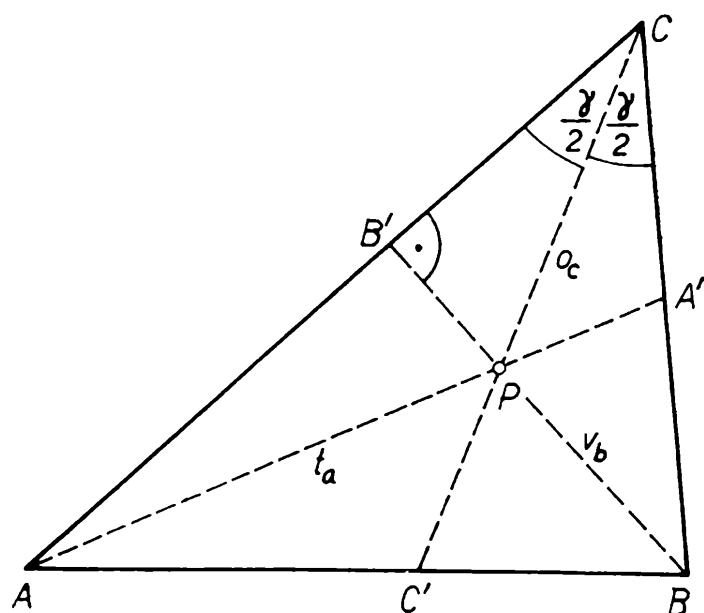
Obr. 1b



Obr. 1c

Po tomto úvodě k vlastnímu článku.

I. Je dán trojúhelník ABC , v němž těžnice t_a jdoucí vrcholem A , výška v_b jdoucí vrcholem B a osa o_c vnitřního úhlu $\gamma = \sphericalangle ACB$ procházejí bodem P . Jaký vztah platí mezi velikostmi stran daného trojúhelníku?



Obr. 2

Řešení (obr. 2). Bod P je nutně vnitřním bodem trojúhelníku ABC , neboť těžnice t_a a osa o_c se protínají ve vnitřním bodě trojúhelníku ABC . Označíme-li ještě $t_a \cap BC = A'$, $v_b \cap CA = B'$ a $o_c \cap AB = C'$, pak platí Cevova věta

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1. \quad (1)$$

Nyní budeme počítat hodnoty jednotlivých dělicích poměrů.

$$\begin{aligned} BA' : CA' &= 1, \\ AC' : BC' &= b : a, \end{aligned}$$

neboť z trojúhelníku ACC' plyne $AC' = CC' \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \alpha}$ a z trojúhelníku

BCC' plyne $BC' = CC' \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \beta}$. Dosadíme-li obě vypočtené hodnoty dělicích poměrů do (1), dostaneme

$$\frac{b}{a} \cdot 1 \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1, \quad \frac{CB'}{AB'} = \frac{a}{b}. \quad (2)$$

Dále platí

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \frac{CB'}{BC} = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{AB'}{a} = \\ &= a^2 + b^2 - 2a \cdot AB' \end{aligned}$$

Velikost úsečky AB' vypočítáme ze soustavy rovnic

$$AB' + CB' = b,$$

$$CB' : AB' = \frac{a}{b}.$$

Řešení m dojdeme k výsledku $AB' = \frac{b^2}{a+b}$. Tudíž

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab^2}{a+b}, \quad (3)$$

což je odpověď na otázku vyslovenou v textu úlohy.

Všimněme si, že trojúhelník žádaných vlastností nemůže mít při vrcholu C ani pravý, ani tupý úhel. Skutečně, pro pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem $\sphericalangle ACB$ platí

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

což dosazeno do (3) dá

$$0 = \frac{-2ab^2}{a+b},$$

a to není pravda. Pro trojúhelník s tupým úhlem při vrcholu C platí

$$a^2 + b^2 < c^2$$

a to spojeno s (3) dá

$$0 < \frac{-2ab^2}{a+b},$$

což také není pravda. Pro trojúhelník s ostrým úhlem při vrcholu C platí

$$a^2 + b^2 > c^2$$

a to spojeno s (3) dá pravdivé tvrzení

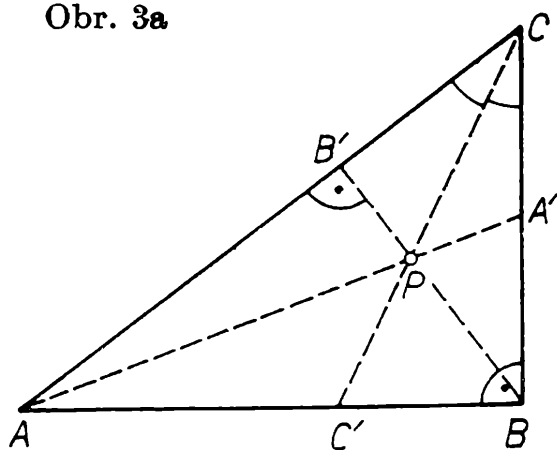
$$0 > \frac{-2ab^2}{a+b}.$$

To, že při vrcholu C nesmí být úhel $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$, ještě neznamená, že trojúhelník ABC nemůže být tupoúhlý nebo pravoúhlý. Obrázky 3a, b jasně ukazují, že vztah (3) může platit pro trojúhelníky s úhlem $\beta \geq \frac{\pi}{2}$.

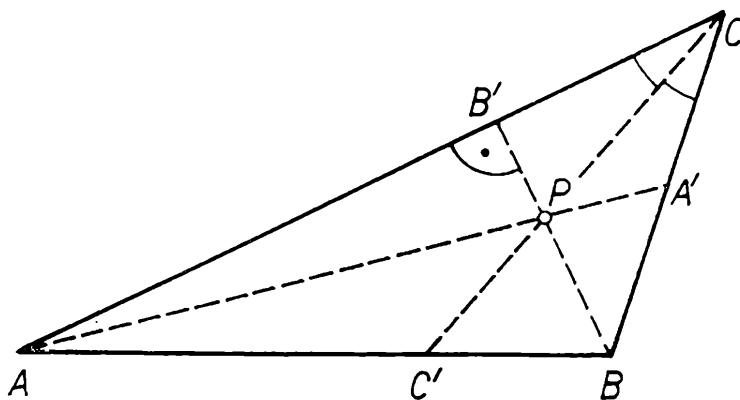
Úhel α však musí být vždy ostrý. Proč?

Jsou-li dány délky stran a, b , dá se snadno ze vztahu (3) sestavit délka třetí strany a pak i trojúhelník. Tento trojúhelník se dá skutečně sestro-

Obr. 3a



Obr. 3b



jit, neboť platí $c < a + b$, $c > |a - b|$. Důkaz těchto dvou tvrzení je tento:

$$\begin{aligned} \text{a) } c^2 &= a^2 + b^2 - \frac{2ab^2}{a+b} + 2ab - 2ab = \\ &= (a+b)^2 - \frac{2ab^2}{a+b} - 2ab < (a+b)^2, \end{aligned}$$

$$c < a + b,$$

$$\begin{aligned} \text{b) } c^2 &= a^2 + b^2 - \frac{2ab^2}{a+b} + 2ab - 2ab = \\ &= (a-b)^2 + \frac{2a^2b + 2ab^2 - 2ab^2}{a+b} = \\ &= (a-b)^2 + \frac{2a^2b}{a+b} > (a-b)^2, \end{aligned}$$

$$c > |a - b|$$

a tím je naše tvrzení dokázáno. Zároveň jsme dokázali, že trojúhelník požadovaných vlastností existuje.

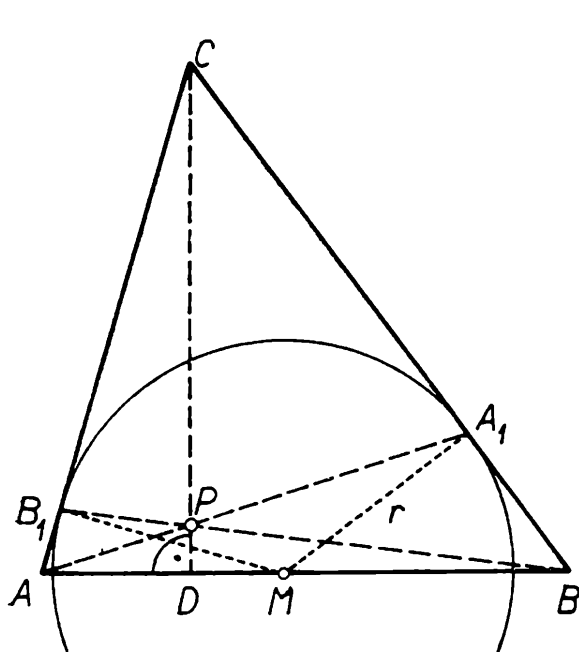
Platí však více: Jestliže o velikostech stran trojúhelníku ABC , jehož úhel ACB je ostrý, platí vztah (3), potom těžnice vedená vrcholem A , výška z vrcholu B a osa úhlu ACB procházejí jedním bodem.

Důkaz. Nechť platí (3). Porovnáme-li tuto rovnici s kosinovou větou pro stranu c , dostaneme

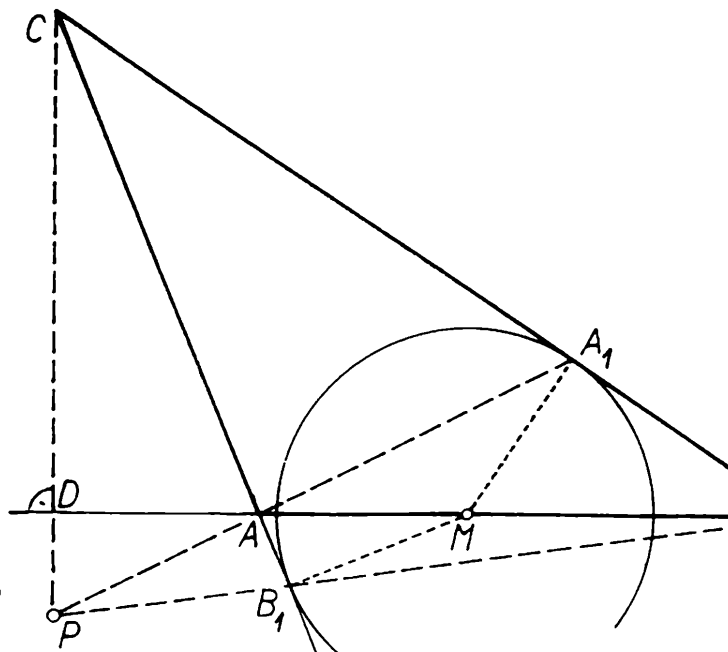
$$\cos \gamma = \frac{b}{a+b},$$

z čehož

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{a}{2(a+b)}}$$



Obr. 4a



Obr. 4b

Z trojúhelníku ACC' dostaneme $AC' = o_c \sin \frac{\gamma}{2} : \sin \alpha$ a z trojúhelníku BCC' : $BC' = o_c \sin \frac{\gamma}{2} : \sin \beta$. Potom $AC' : BC' = \sin \beta : \sin \alpha = b : a$.

Dále víme, že

$$BA' : CA' = 1,$$

$$a \quad CB' : AB' = a \cos \gamma : (b - a \cos \gamma) = \frac{ab}{a + b} : \frac{b^2}{a + b} = \frac{a}{b}.$$

Tudíž

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = \frac{b}{a} \cdot 1 \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

Cevova věta je splněna a uvedené tři přímky procházejí jedním bodem. Tím jsme s důkazem hotovi.

II. Je dán trojúhelník ABC , jehož úhly při vrcholech A, B nejsou pravé, a kružnice k , která má střed $M \in AB$ a dotýká se přímk BC, AC po řadě v bodech A_1, B_1 . Dokažte, že přímky AA_1, BB_1 se protínají na výšce CD daného trojúhelníku. (Výškou rozumíme i přímku CD .)

Řešení. Rozlišíme dva případy.

a) Úhly při vrcholech A, B jsou ostré (obr. 4a). V tomto případě jsou body A_1, B_1, D vnitřními body stran daného trojúhelníku. Všimněme si, že tu máme tři přímky, z nichž každá prochází právě jedním vrcholem trojúhelníku, a tudíž tu jde o důkaz vztahu (Cevova věta)

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1 \quad (1)$$

Jestliže velikosti stran a úhlů označíme obvyklým způsobem, můžeme psát

$$AD = b \cos \alpha, \quad BD = a \cos \beta,$$

$$AD : BD = b \cos \alpha : a \cos \beta = \operatorname{tg} \beta \cotg \alpha.$$

Označíme-li r velikost poloměru kružnice k , pak je

$$BA_1 = r \cotg \beta, \quad CA_1 = r \cotg \frac{\gamma}{2},$$

$$BA_1 : CA_1 = \cotg \beta : \cotg \frac{\gamma}{2}$$

a dále

$$CB_1 = r \cotg \frac{\gamma}{2}, \quad AB_1 = r \cotg \alpha,$$

$$CB_1 : AB_1 = \cotg \frac{\gamma}{2} : \cotg \alpha.$$

Dosazením do rovnice (1) se přesvědčíme, že tento vztah je splněn a že v tomto případě je tvrzení pravdivé.

b) Jestliže trojúhelník ABC je tupouhlý s tupým úhlem při vrcholu A (obr. 4b), potom výška CD má s obvodem trojúhelníku pouze vrchol C . Bod D leží na přímce AB vně strany AB . Dále bod A_1 leží uvnitř strany BC , ale bod B_1 je na prodloužení strany CA za bod A . Toto tvrzení vyplývá z pravoúhlého trojúhelníku MAB_1 . Jde tudíž o případ z obr. 1c.

Poněvadž důkaz se provádí úplně stejně jako v případě a), přenecháváme tuto práci čtenářům.

Cvičení.

1. Je dán trojúhelník ABC . Na straně AB je sestrojen vnitřní bod C' tak, že $AC' : BC' = 4$, na straně BC je sestrojen bod A' tak, že $BA' : CA' = 0,25$. Označme $P = AA' \cap CC'$. V jakém poměru dělí přímka BP stranu AC ? — Zobecněte.

2. Je dán trojúhelník ABC . Každým jeho vrcholem je proložena přímka, která pólí obvod daného trojúhelníku. Dokažte, že tyto tři přímky procházejí jedním bodem.

3. Jedna z kružnic vně vepsaných trojúhelníku ABC se dotýká přímek AB , BC , CA po řadě v bodech C' , A' , B' , přičemž bod C' leží uvnitř strany AB . Dokažte, že přímky AA' , BB' , CC' procházejí jedním bodem.

O jedné vlastnosti asymptot a tečen hyperboly

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Kuželosečky mají mnoho vlastností; některé se uvádějí i ve středoškolských učebnicích, některé se však připomínají málokdy. Na jednu takovou vlastnost hyperboly upozornil profesor *Hohenberg* v časopisu *Elemente der Mathematik*, svazek 33 (1978), str. 138 až 141. Nejde ovšem o vlastnost neznámou; v podstatě ji najdeme již ve spisu o kuželosečkách, jehož autorem je starořecký geometr *Apollonios z Pergy* (žil v letech 260 až 170). Její důkaz je elementární a zajímavý; proto s ním seznámíme i čtenáře našich Rozhledů. Nejprve však uvedeme základní vlastnosti hyperboly, o něž se důkaz opírá.

Část hyperboly je narýsována na obr. 1. Různoběžky p, q jsou její asymptoty; osy úhlů sevřených asymptotami leží na dvou přímkách x, y , jimž říkáme osy hyperboly. Podle nich je hyperbola souměrná; proto je souměrná i podle jejich průsečíku S , jemuž říkáme střed hyperboly. Přímkou x , která protíná hyperbolu v bodech A, B , nazýváme hlavní osou hyperboly; přímkou y , která nemá s hyperbolou žádný společný bod, nazýváme vedlejší osou hyperboly. Na obr. 1 vidíme, že hyperbola se skládá ze dvou od sebe oddělených částí (větví), které leží uvnitř těch dvou vrcholových úhlů sevřených asymptotami, v nichž leží zároveň hlavní osa hyperboly.

Pro vzájemnou polohu hyperboly a přímky, která leží v její rovině, platí tato věta (viz učebnici matematiky pro přírodovědnou větev SVVŠ z roku 1967, str. 105):

a) Asymptota hyperboly nemá s hyperbolou žádný společný bod. Přímka, která je rovnoběžná s asymptotou a nesplývá s ní, má s hyperbolou právě jeden společný bod.

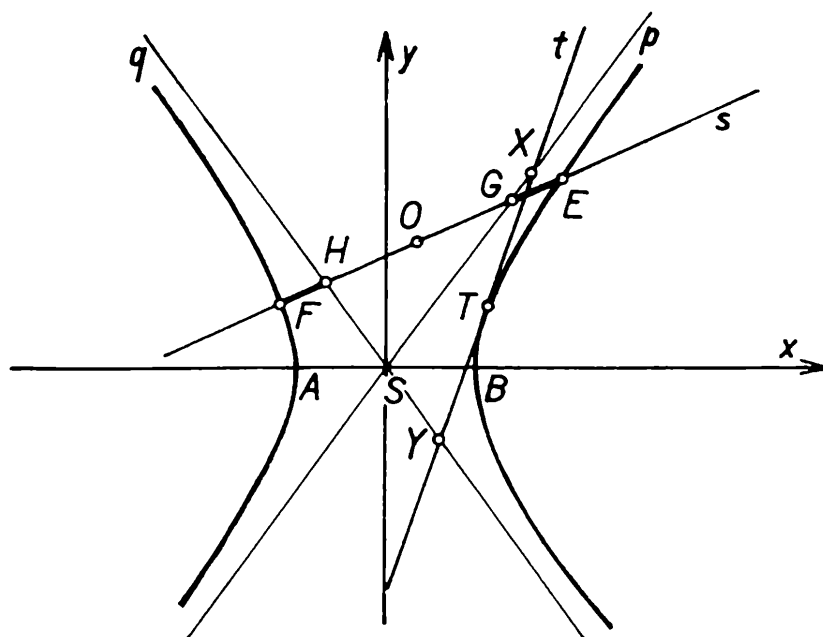
b) Přímka, která není rovnoběžná s asymptotou hyperboly, má s hyperbolou dva různé body společné (sečna), nebo jeden společný bod (tečna), nebo s ní nemá žádný společný bod.

Jedna tečna t hyperboly je narýsována na obr. 1; její jediný společný bod T s hyperbolou nazýváme *bodem dotyku* tečny t s hyperbolou.

V dalším výkladu použijeme tři věty o hyperbole, které nyní vyslovíme.

Věta 1. Každým bodem asymptoty hyperboly, který není středem hyperboly, prochází právě jedna tečna hyperboly. Středem hyperboly neprochází žádná její tečna.

Věta 2. Jsou-li X, Y průsečíky tečny t hyperboly s jejími asymptotami, pak střed úsečky XY splývá s dotykovým bodem T tečny s hyperbolou (obr. 1).



Obr. 1

Věta 3. Protíná-li přímka hyperbolu ve dvou různých bodech E, F , pak protíná její asymptoty v bodech G, H (různých nebo splývajících se středem hyperboly), a to tak, že úsečky EF, GH mají týž střed (obr. 1).

Zná-li čtenář analytickou geometrii v rovině (např. v rozsahu uvedeném ve výše citované učebnici), může věty 1 až 3 snadno dokázat. Nejjednodušší je důkaz věty 2. Z této věty plyne důkaz prvního tvrzení věty 1; druhé tvrzení je zřejmé z rovnice tečny hyperboly. Ze souměrnosti hyperboly a jejích asymptot podle os hyperboly plyne, že věta 3 platí pro přímky kolmé k osám hyperboly. Není-li přímka kolmá k hlavní ose hyperboly, kterou volíme za osu x ortonormální (kartézské) soustavy souřadnic, pak má rovnici

$$y = kx + q;$$

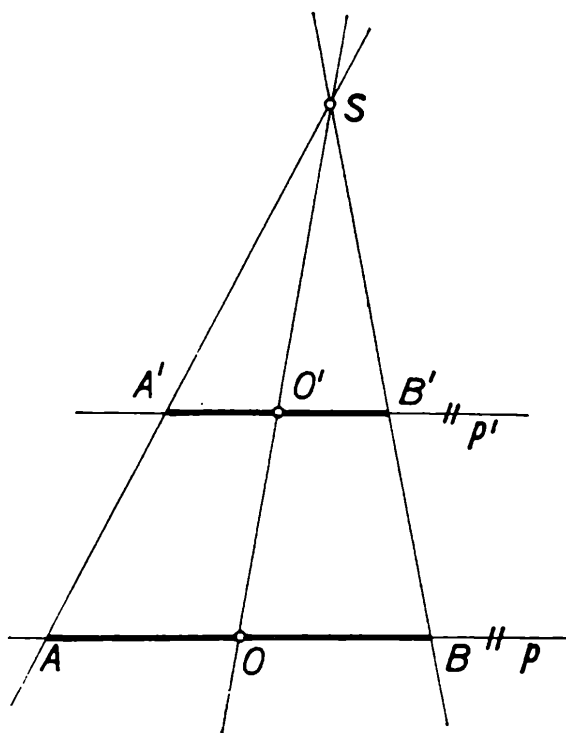
není-li rovnoběžná s žádnou asymptotou, je

$$k \neq \pm \frac{b}{a}.$$

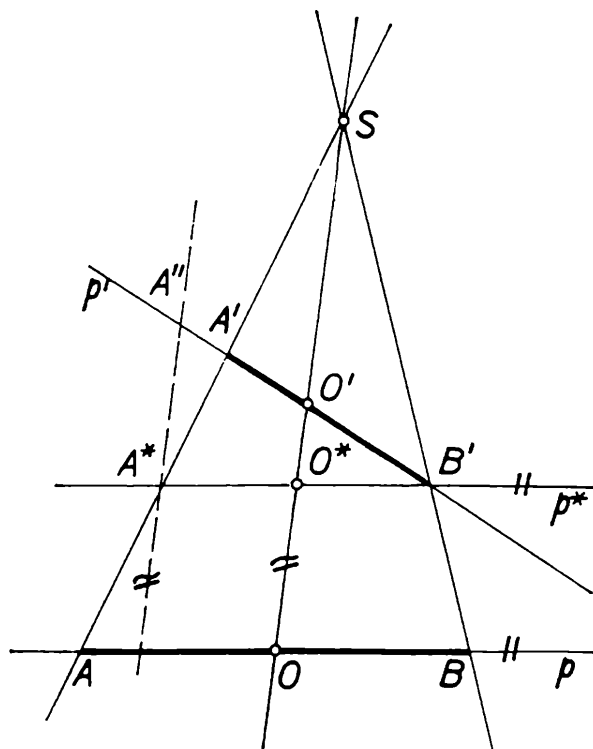
Snadno vypočteme souřadnice průsečíků E, F této přímky s hyperbolou i průsečíků G, H s jejími asymptotami a zjistíme, že středy úseček EF, GH splývají.

Zvolme v rovině přímku p' , mimo ni bod S a libovolný bod $A \neq S$ (obr. 2, 3). Jestliže přímka AS protíná přímku p' v bodě A' , pak tomuto bodu říkáme *středový průmět* bodu A na přímku p' ; bod S nazýváme *středem promítání*. Je-li A bodem přímky p' , je $A' = A$. Nyní dokážeme ještě jednu větu, které použijeme v dalším výkladu.

Věta 4. V rovině budiž dán střed promítání S a dvě různé přímky p, p' , z nichž žádná neprochází bodem S . Nechť AB je nenulová úsečka, která je částí přímky p a má střed O ; středové průměty bodů A, B, O na přímku



Obr. 2



Obr. 3

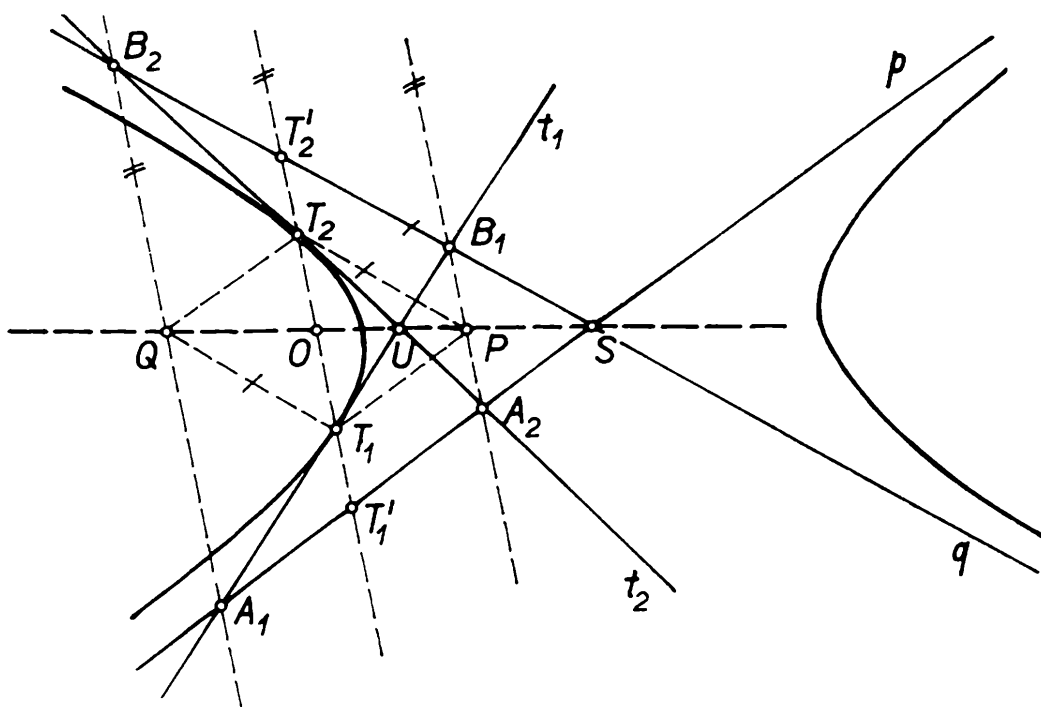
p' budtež po řadě A', B', O' . Potom bod O' je středem úsečky $A'B'$ právě tehdy, jestliže přímky p, p' jsou rovnoběžné.

Důkaz. a) Jsou-li přímky p, p' rovnoběžné (obr. 2), pak stejnolehlost se středem S , která převádí bod A do bodu A' , převádí úsečku AB do úsečky $A'B'$ a střed O úsečky AB do středu O' úsečky $A'B'$.

b) Nechť přímky p, p' nejsou rovnoběžné. Vedme bodem B' přímku $p^* \parallel p$. Je-li $B' \neq B$, je $p^* \neq p$ (obr. 3); je-li $B' = B$, je $p^* = p$. Sestrojme středové průměty bodů A, B, O na přímku p^* ; tak dostaneme po řadě body A^*, B', O^* . Podle a) je bod O^* středem úsečky $A'B'$. Vedme bodem A^* rovnoběžku s přímkou SO a sestrojme její průsečík A'' s přímkou p' ; potom je $A'' \neq A'$. Protože bod O^* je středem úsečky $A'B'$ a přímky O^*O', A^*A'' jsou rovnoběžné, je úsečka O^*O' střední příčkou trojúhelníku $A^*B'A''$; bod O' je tedy středem úsečky $A''B'$. Protože je $A' \neq A''$, není bod O' středem úsečky $A'B'$.

Věta 5. Nechť p, q jsou asymptoty hyperboly a t_1, t_2 její různoběžné tečny s průsečíkem U ; dotykové body tečen t_1, t_2 s hyperbolou budtež T_1, T_2 . Nechť asymptoty p, q protínají tečnu t_1 v bodech A_1, B_1 a tečnu t_2 v bodech A_2, B_2 . Potom platí:

- středy P, Q úseček A_2B_1, A_1B_2 jsou vrcholy rovnoběžníku T_1PT_2Q , jehož strany jsou rovnoběžné s asymptotami p, q ;
- přímky A_2B_1, A_1B_2 jsou rovnoběžné s přímkou T_1T_2 ;
- přímka PQ prochází středem S hyperboly, středem O úsečky T_1T_2 a průsečíkem U tečen t_1, t_2 .



Obr. 4

Důkaz. Na obr. 4 je znázorněn obsah věty 5 pro případ, kdy body T_1 , T_2 patří téže větvi hyperboly; důkaz však probíhá úplně stejně i v případě, kdy každý z bodů T_1 , T_2 je bodem jiné větve hyperboly.

a) Z věty 1 plyne, že A_1 , B_1 , A_2 , B_2 jsou čtyři navzájem různé body. Úsečky A_2B_1 , A_1B_2 jsou tedy nenulové; jejich středy jsou body P , Q . Podle věty 2 je bod T_1 středem úsečky A_1B_1 a bod T_2 středem úsečky A_2B_2 . Úsečka PT_1 je střední příčkou trojúhelníku $A_1A_2B_1$; proto je $PT_1 \parallel A_1A_2$, tj. $PT_1 \parallel p$. Z trojúhelníku $A_1B_1B_2$ opět plyne, že je $QT_1 \parallel B_1B_2$, tj. $QT_1 \parallel q$. Zcela obdobně dokážeme, že je $PT_2 \parallel q$, $QT_2 \parallel p$. Obrazec T_1PT_2Q je tedy rovnoběžník, jehož strany jsou rovnoběžné s asymptotami p , q hyperboly.

b) Sečna T_1T_2 hyperboly protíná její asymptoty p , q v bodech T'_1 , T'_2 ; podle věty 3 mají úsečky T_1T_2 , $T'_1T'_2$ též střed O . Protože tečny t_1 , t_2 jsou různoběžné, neprochází přímka T_1T_2 středem S hyperboly (kdyby tomu tak bylo, bylo by $t_1 \parallel t_2$). Je tedy $O \neq S$.

Zvolme bod O za střed stejnolehlosti, v níž je bod T_1 obrazem bodu T'_1 ; potom obrazem bodu T'_2 je bod T_2 . Obrazem asymptoty p je přímka s ní rovnoběžná procházející bodem T_1 , tj. přímka T_1P ; obdobně je obrazem asymptoty q přímka T_2P . Proto obrazem průsečíku S asymptot p , q je bod P , takže

$$\text{body } O, P, S \text{ leží v téže přímce.} \quad (1)$$

Zvolme bod S za střed promítání; potom body A_2 , B_1 , P jsou středovými průměty bodů T'_1 , T'_2 , O na přímku A_2B_1 . Bod O je středem úsečky

$T_1'T_2'$ a bod P je středem úsečky A_2B_1 . Podle věty 4 jsou tedy přímky A_2B_1 , $T_1'T_2'$ rovnoběžné, tj.

$$A_2B_1 \parallel T_1T_2.$$

Zvolíme-li bod O za střed stejnolehlosti, v níž obrazem bodu T_1' je bod T_2 , je obrazem bodu T_2' bod T_1 . Obdobně jako v předešlém případě pak dokážeme, že

$$\text{body } O, Q, S \text{ leží v téže přímce} \quad (2)$$

a že je

$$A_1B_2 \parallel T_1T_2.$$

Zvolme průsečík U tečen t_1, t_2 za střed promítání. Potom body A_2, B_1 jsou středovými průměty bodů T_2, T_1 na přímku $A_2B_1 \parallel T_1T_2$. Podle věty 4 je tedy středovým průmětem středu O úsečky T_1T_2 na přímku A_2B_1 střed P úsečky A_2B_1 ; to však znamená, že

$$\text{body } O, P, U \text{ leží v téže přímce.} \quad (3)$$

Podle (1), (2) a (3) leží tedy body O, P, Q, S, U v téže přímce.

Poznámka. Je-li $t_1 \parallel t_2$, pak přímka T_1T_2 prochází středem S hyperboly, takže je $O = S$. Obrazec $A_1B_1A_2B_2$ je potom rovnoběžníkem. Věta 5 platí stejně s tím rozdílem, že přímka PQ je rovnoběžná s tečnami t_1, t_2 .

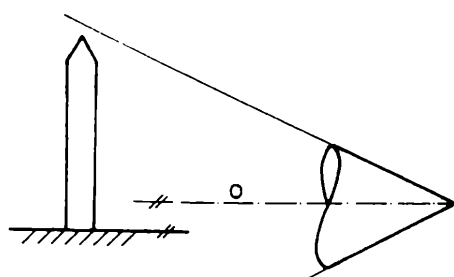
Cvičení. Jsou dány různoběžky t_1, t_2 s průsečíkem U ; na přímce t_1 je dán bod $T_1 \neq U$, na přímce t_2 bod $T_2 \neq U$. Kromě toho je dána přímka s , která není rovnoběžná se žádnou z přímek t_1, t_2, T_1T_2 ani s přímkou, která prochází bodem U a středem O úsečky T_1T_2 . Sestrojte hyperbolu, která má tečny t_1, t_2 s body dotyku T_1, T_2 a jejíž jedna asymptota je rovnoběžná s přímkou s .

Fotografie a geometrie - II.

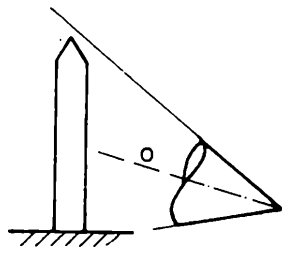
(Fotografie vysokých objektů)

Doc. ing. dr. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT Praha

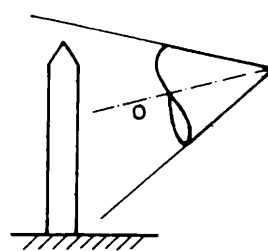
V článku Fotografie a geometrie I (Rozhledy roč. č. 5, dále jen FI) jsme poznali průčelnou a nárožní perspektivu jako geometrický základ obvyklých fotografických snímků. Mají-li se však fotografovat velmi rozsáhlé objekty, je nutno použít velký odstup od objektu, aby bylo možno jej umístit do obrazového pole fotoaparátu, a na takovém snímku jsou pak nezřetelné detaily. Tato situace nastane při fotografování vysokých objektů (jako jsou věže apod.), nebo širokých objektů (ulice, náměstí



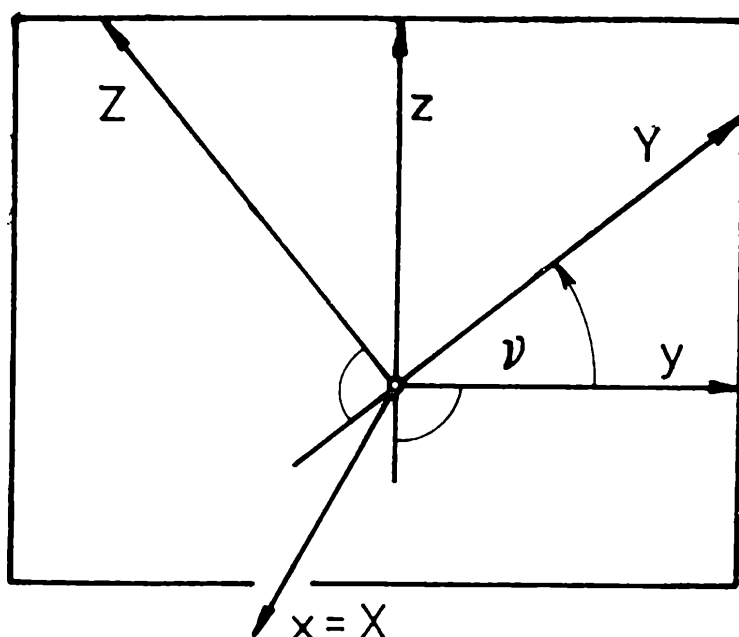
Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 1c



Obr. 2

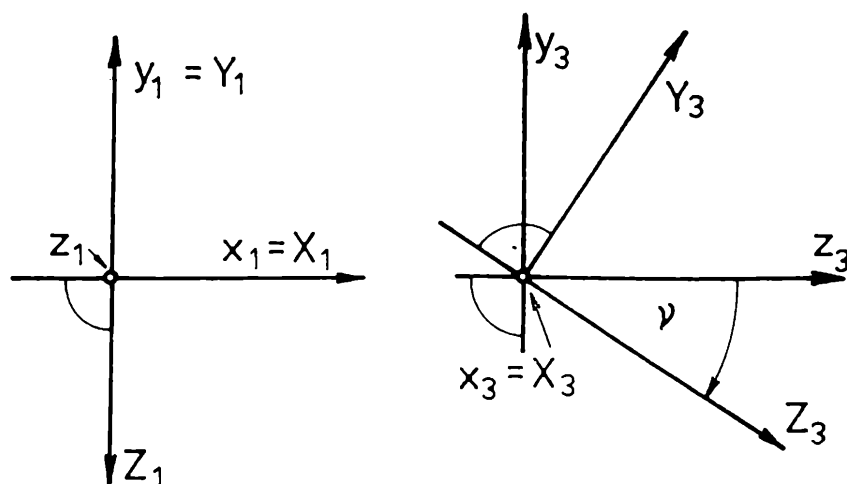
apod.). Proto je někdy fotografujeme speciálními fotografickými technikami.

Předměty, jejichž výška je několikrát větší než ostatní dva rozměry (obr. 1a), se umístí do obrazového kužele tak, že se vykloní osa o fotoaparátu. Na obr. 1b je patrný menší odstup nutný pro fotografování věže V, nakloníme-li fotoaparát vzhůru. Podobně je podle obr. 1c možný menší odstup při fotografování z protějšího domu, skloníme-li osu fotoaparátu dolů.

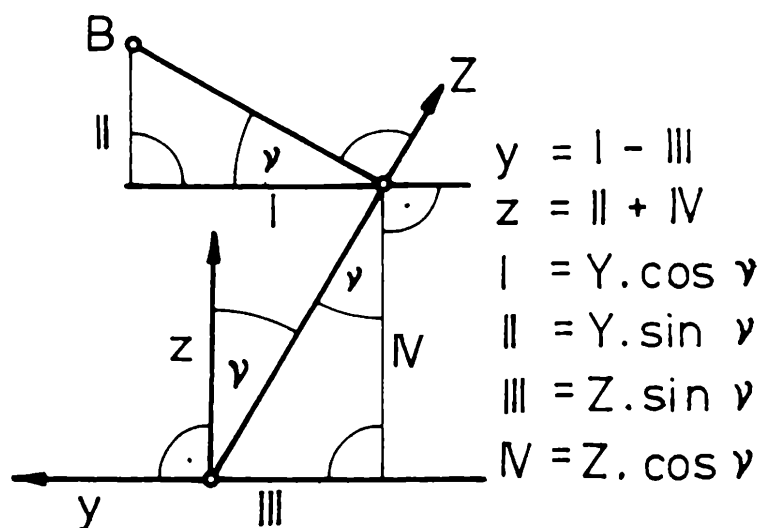
Perspektivní zobrazení odpovídající fotografiím tohoto druhu získáme transformací souřadnicové soustavy $[x, y, z]$ otočením okolo osy x o úhel naklonění ν (náznorný obr. 2 a obr. 3, v němž je otočení soustavy $[x, y, z]$ kolem osy x o úhel ν do soustavy $[X, Y, Z]$ zobrazeno nárysem a bokorysem). Transformační rovnice jsou, viz obr. 4,

$$\begin{aligned} x &= X \\ y &= Y \cos \nu - Z \sin \nu \\ z &= Y \sin \nu + Z \cos \nu. \end{aligned} \quad (n)$$

Naklonění fotoaparátu dolů (vzhůru) o úhel ν je totéž co otočení (n) o kladný (záporný) úhel ν .



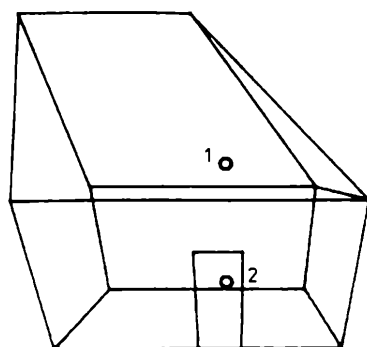
Obr. 4



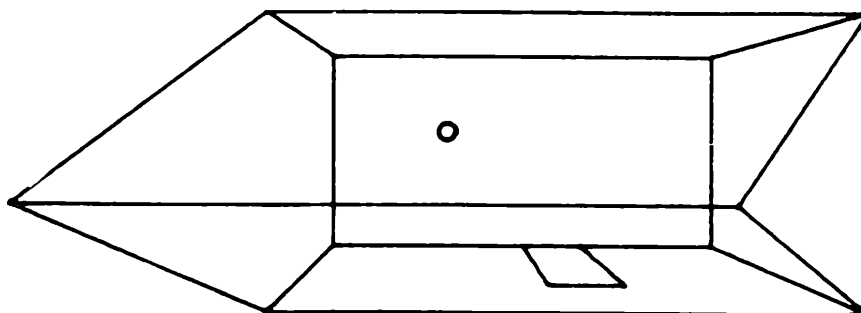
Zvolme objekt podle obr. 7 z FI. Použijeme-li k jeho zobrazení transformaci (n) a rovnice perspektivy z FI, vznikne perspektiva, na níž se obrazy svislic sbíhají. Perspektiva tohoto objektu na obr. 5 byla získána po transformacích posunutím (p) (je uvedeno v FI) a (n). Perspektivy průčelných hran (rovnoběžných s osou X) jsou rovnoběžné s podélnou stranou negativu. Je to *průčelná dvojúběžníková perspektiva*. Dva úběžníky, v nichž se sbíhají obrazy přímek rovnoběžných s osami Y a Z , leží na ose příčných stran negativu, která se nazývá *hlavní vertikálou perspektivy*.

Úběžník přímek rovnoběžných s osou Y je na obr. 5 vyznačen jako bod 1. Úběžník svislic můžete určit prodloužením perspektiv svislých hran objektu. Hlavní bod perspektivy je na obr. 5 vyznačen jako bod 2. Je bodem hlavní vertikály.

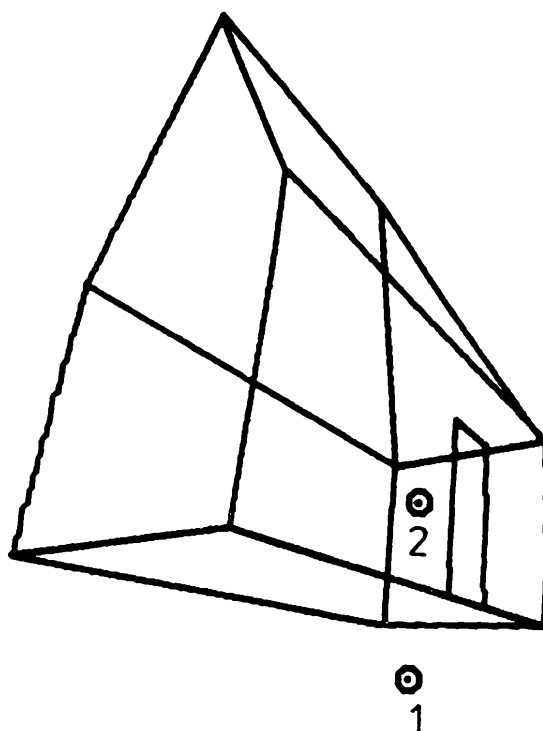
Horizont perspektivy je stopa roviny, procházející středem promítání rovnoběžně se souřadnicovou rovinou (X, Y). Prochází tedy bodem 1 rovnoběžně s perspektivami průčelných hran. Je opět jako v FI kolmý k hlavní vertikále. Na rozdíl od perspektiv uvedených v FI neleží na horizontu hlavní bod perspektivy.



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Průčelné dvojúběžníkové perspektivy dělíme na dva typy:

1. *žabí perspektivy* odpovídají fotografiím se zdviženou osou, obr. 1b,
2. *ptačí perspektivy* jsou podstatou fotografií se skloněnou osou podle obr. 1c.

Perspektivy svislic se v žabí (ptačí) perspektivě sbíhají nahoře (dole). Obr. 5 je tedy ptačí perspektivou.

Je-li v extrémním případě osa aparátu svislá, je geometrickým zákla-

dem těchto snímků tzv. *nástropní perspektiva*, fotografujeme-li vzhůru, nebo *letecká perspektiva*, fotografujeme-li směrem dolů.

Perspektiva na obr. 6 je leteckou perspektivou objektu z obr. 7 z FI. Pro určení této perspektivy bylo použito posunutí (p) a naklonění (n) s úhlem $\nu = \frac{\pi}{2}$.

Letecká a nástropní perspektiva patří mezi jednoúběžníkové perspektivy. Úběžník je na obr. 6 označen kroužkem a lze ho určit prodloužením sbíhajících se perspektiv svislic.

Perspektiva na obr. 7 byla určena po transformacích (p), (o) (transformační rovnice jsou uvedeny v FI) a (n). Vznikla tříúběžníková perspektiva s úběžníkem svislic na hlavní vertikále a se dvěma úběžníky přímek rovnoběžných s osami X a Y na horizontu perspektivy. Průsečík horizontu a hlavní vertikály je vyznačen jako bod 1, horizont je rovnoběžný s podélnou stranou negativu. Hlavní bod perspektivy je označen 2 a na horizontu neleží.

Též tříúběžníkové perspektivy dělíme na žabí a ptačí, podle toho, zda bylo fotografováno (resp. promítáno) podle obr. 1b nebo 1c.

Perspektivy svislic se na obr. 7 sbíhají nahoře, je to žabí perspektiva.

Prodloužením sbíhajících se perspektiv rovnoběžných hran můžete určit úběžníky této perspektivy a zkontrolovat, zda úběžníky svislic leží na přímce 12 a zbývající dva úběžníky na kolmici k přímce 12 bodem 1.

Jednoúběžníková perspektiva průčelná, nástropní a letecká, nárožní perspektiva, průčelná dvojúběžníková perspektiva a tříúběžníková perspektiva patří mezi tzv. *lineární perspektivy* (linea = přímka). Ty zobrazují přímky (neprocházející středem promítání) do přímek.

Obr. 5, 6 byly kresleny na automatickém kreslicím stole DIGIGRAF, obr. 7 na plottru CIL 3000.

Cvičení. Zvolte krychli s hranami na osách $+X$, $+Y$, $+Z$. Zvolte distanci d rovnou alespoň dvojnásobku hrany krychle. Vypočtete postupně transformované souřadnice vrcholů této krychle po posunutí (zvolte délky a , b , c a použijte rovnice (p)), otočení (zvolte úhel ω a použijte rovnice (o)) a naklonění (zvolte úhel ν a použijte rovnice (n)). Transformované souřadnice dosadte do rovnic (1), (2) perspektivy, uvedených v FI, z výsledných souřadnic perspektiv vrcholů této krychle narýsujte její perspektivu a přesvědčte se prodloužením příslušných hran, že rovnoběžky se zobrazily jako přímky svazku. Středem svazku je příslušný úběžník. Výpočty je vhodné provádět na kapesním počítači.

Supratekuté kapalné hélium - kvantová kapalina

RNDr. MILAN ODEHNAL, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Již v minulém století se fyzikům podařilo zkapalnit prakticky všechny známé plyny. Po dlouhou dobu však zůstával přes všechny pokusy nezkapalněn jediný přírodní plyn hélium (^4He ; vynecháme z našich úvah izotop ^3He). Teprve v roce 1908 se podařilo holandskému fyzikovi *Kamerlinghovi Onnesovi* zkapalnit i tento plyn. Na tento historický experiment (10. června 1908), který trval od 6 hodin ráno až do 22 hodin, byli pozváni speciálně fyzikové z několika zemí. Tehdy poprvé na světě uviděli fyzikové kapalně hélium (podařilo se zkapalnit zhruba 60 cm^3). Sám Kamerlingh Onnes byl tak vyčerpan přípravou a napětím při experimentu, že pak po řadu měsíců nemohl v práci v laboratoři vůbec pokračovat.

Snad je symbolické i to, že v těchto letech byly vlastně položeny pracemi *Planckovými* (záření černého tělesa) a *Einsteinovými* (fotoefekt) základy kvantové fyziky (diskretnost energetických kvant). Tehdy ovšem ještě nikdo nemohl ani tušit, že tato nově vznikající fyzika bude jediná schopna vysvětlit i zcela neobvyklé vlastnosti kvantových kapalin (^4He , volné elektrony v kovech).

Při atmosférickém tlaku vře kapalně ^4He při teplotě $4,2\text{ K}$ (zhruba $-269\text{ }^\circ\text{C}$), tedy jen několik stupňů nad hodnotou absolutní nuly. Tento výrok je ovšem relativní, protože k absolutní nule je stále nekonečně daleko. Při takových termodynamických úvahách jsou důležité nikoli rozdíly teplot, ale jejich poměry. Tak tedy stonásobné snížení teploty z hodnoty 273 K (tj. zhruba $0\text{ }^\circ\text{C}$) na hodnotu $2,73\text{ K}$ je ekvivalentní snížení teploty z $2,73\text{ K}$ na $2,73 \cdot 10^{-2}\text{ K}$. Dnešní fyzika nízkých teplot umožňuje dosahování teplot až kolem 10^{-7} K !

Zkapalnění ^4He však bylo počátkem celé řady naprosto neobvyklých objevů — objevení supratekutosti ^4He a supravodivosti některých kovů a slitin.

Proč má ^4He oproti ostatním kapalinám tak nízký bod varu? Protože přitažlivé síly mezi héliovými atomy, odpovídající za převedení plynu do kapalně fáze, jsou velmi slabé. Těmto silám se říká tzv. *Van der Waalsovy síly*. Héliový atom má uzavřenou elektronovou slupku a je chemicky inertní. Atom hélia má také velmi malou hmotnost (jádro má

pouze čtyři nukleony) a to je, jak uvidíme později, velmi důležité. Snižujeme-li tlak nad kapalným ${}^4\text{He}$, snižuje se i teplota kapaliny a při teplotě 2,17 K dojde k dramatické změně charakteru kapalného ${}^4\text{He}$. Objeví se úplně nové vlastnosti, které klasická fyzika nemůže objasnit.

Při této teplotě $T_\lambda = 2,17\text{ K}$ dojde v kapalném ${}^4\text{He}$ k fázovému přechodu, analogickému např. známému fázovému přechodu paramagnetika ve feromagnetikum. Kapalně ${}^4\text{He}$ nad teplotou T_λ je normální kapalinou a chová se jako běžná klasická kapalina. Má nenulovou viskozitu, vře vroulivým varem v objemu celé kapaliny, při rotaci nádoby s kapalným ${}^4\text{He}$ se vytváří na jejím povrchu charakteristický parabolický meniskus, neprotéká velmi úzkými kapilárami v důsledku viskózního tření o stěny atd. Pouze jeho hustota je nápadně nízká. Všechny shora vyjmenované vlastnosti však kapalně ${}^4\text{He}$ ztrácí pod teplotou tzv. přechodu lambda v okolí $T_\lambda = 2,17\text{ K}$. Tento výsledek, navíc pozorovaný v makrosvětě, tj. na vzdálenostech a v objemech mnohem větších než jsou meziatomové vzdálenosti či objem atomu, v němž si klasická fyzika osobovala právo na výklad fyzikálních jevů, otrásl představami fyziků.

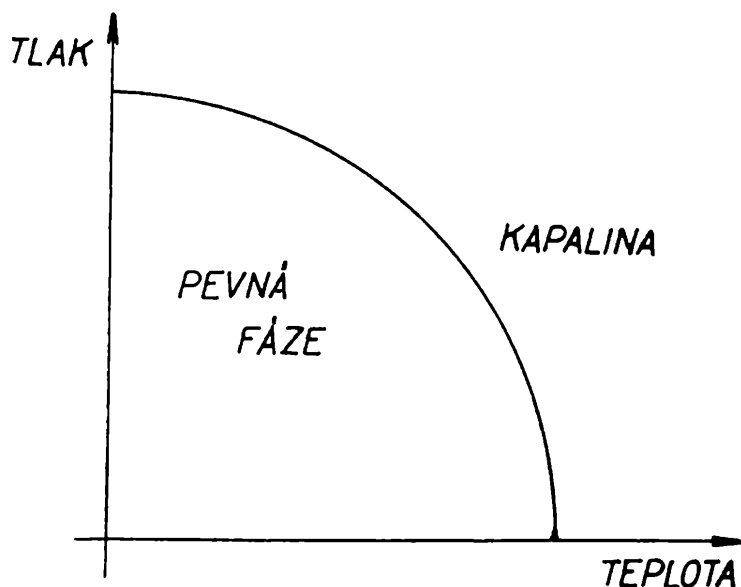
Tento jev supratekutosti ${}^4\text{He}$ byl objeven v roce 1938 velmi chytrými a přesvědčivými pokusy sovětského fyzika *Kapicy*. Za tento objev mu byla v roce 1978 udělena Nobelova cena za fyziku.

Především se však pokusme odpovědět na otázku, proč zůstává ${}^4\text{He}$ kapalně i při absolutní nule. Už Kamerlingh Onnes chtěl odčerpáváním par nad kapalným ${}^4\text{He}$ dosáhnout ztužení hélia, tak jak je tomu u všech ostatních kapalin. Ještě těsně před koncem života v roce 1922 snížil soustavou nových dvanácti sprážených vývěv teplotu kapalného hélia až na 0,83 K, což byl tehdy rekord nejnižší teploty vůbec. Dosáhl tak vlastně i supratekutého stavu v kapalině ${}^4\text{He}$, ale protože hledal hélium pevné, připravil se tak o další Nobelovu cenu. Hélium však zůstalo kapalně. Dnes už víme, že ani při absolutní nule nedojde ke ztužení kapalného ${}^4\text{He}$.

Ale proč tak tomu je? U normálních kapalin dochází při snižování teploty ke zvětšování viskozity, ke zmenšování chaotického tepelného pohybu částic až nakonec převládnou meziatomové přitažlivé síly a kapalina přejde při určité teplotě do pevné fáze.

Víme, že diagram fázového přechodu všech kapalin vypadá zhruba tak, jak je znázorněno na obr. 1. Jedině u kapalného hélia vypadá tak, jak je znázorněno na obr. 2.

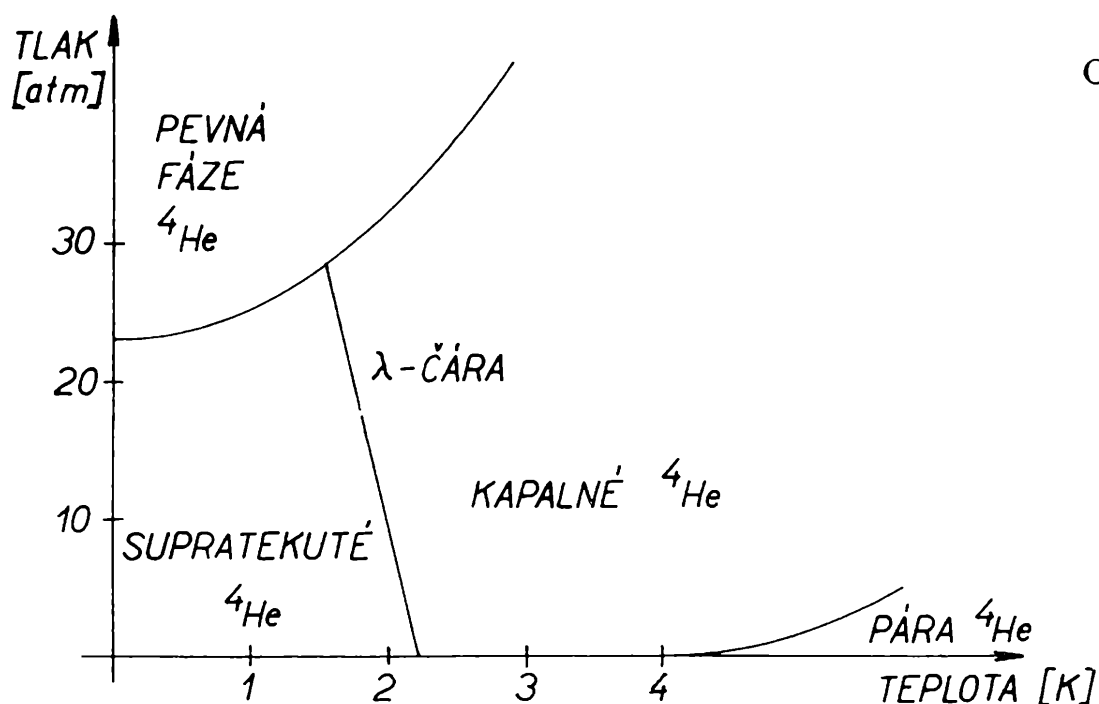
Kamerlingh Onnes si již v prvních experimentech všiml, že hustota kapalného ${}^4\text{He}$ je zhruba 8krát menší než u vody! To ale znamená, že lehké atomy hélia jsou relativně daleko od sebe a mají velkou kinetickou energii, která je schopna „rozrušit“ každou vznikající strukturu pevného stavu. Tedy héliové atomy i při $T = 0\text{ K}$ jsou vlastně v pohybu! To samo o sobě je již v rozporu s klasickou fyzikou a s jejím výkladem o te-



Obr. 1

plné energii kT (k je tzv. Boltzmannova konstanta, T je absolutní teplota). Odkud však berou atomy hélia svou kinetickou energii?

Uvidíme, že jsou to právě zákony kvantové fyziky a energie tzv. „nulového“ pohybu, které způsobují tento „neklid“ i při absolutní nule.



Obr. 2

Výklad spočívá v základním principu kvantové mechaniky, v tzv. vztazích neurčitosti. Kvantová fyzika na rozdíl od klasické fyziky ukazuje, že není možné měřit současně polohu částice (x) a hybnost částice (p). Obě veličiny můžeme změřit jen s určitou nepřesností Δx , Δp a jejich součin je omezen základním tzv. *Heisenbergovým vztahem* neurčitosti

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar. \quad (1)$$

Chceme-li tedy částici lokalizovat do určitého objemu (Δx má být malé), např. na určitou polohu v krystalové mříži, pak čím bude tento objem menší, tím více bude vzrůstat neurčitost v hybnosti částice (Δp velké) a tím také i tzv. kinetická energie tohoto tzv. „nulového“ pohybu: $(\Delta p)^2/2m$, kde m je hmotnost částice. Tato energie vykonává pak jakýsi „tlak“ na sousední atomy. Každý atom ${}^4\text{He}$ si tak vytvoří kolem sebe jakýsi prostor, „bublinu“, jejíž průměr je pak dán rovnováhou mezi tímto „nulovým“ kvantově mechanickým tlakem a povrchovým napětím této „bubliny“. V kapalném ${}^4\text{He}$ je průměr této bubliny až 4 Å, což je naprosto neobvyklé (obvykle jsou meziatomové vzdálenosti okolo $\approx 1,5$ Å). Kapalně ${}^4\text{He}$ je tedy vlastně kvantově mechanicky „nafouknutá“ kapalina. „Nulový“ tlak, který si vynutí kvantově mechanický princip neurčitosti, tedy zabraňuje přechodu kapaliny ${}^4\text{He}$ i při $T = 0$ K do pevného stavu a způsobuje i malou hustotu kapalného hélia. Díky malé hmotnosti samotného atomu hélia a jeho chemické inertnosti se nemohou uplatnit jiné síly, které by mohly částice hélia lokalizovat do mřížkových poloh. Situace je ještě markantnější, když se do této podivné kapaliny zavedou volné elektrony. V důsledku ještě menší hmoty a tedy ještě větší „nulové“ energie než u atomu ${}^4\text{He}$ si elektron vynutí kolem sebe „bublinu“ o průměru až 40 Å!

Tedy slabé meziatomové síly a zákony kvantové mechaniky nám objasňují existenci kapalného hélia i při absolutní nule.

Studium kapalného ${}^4\text{He}$ však přivedlo fyziky ještě k pozoruhodnějšímu objevu — objevu supratekutosti. Pod teplotou $T = 2,17$ K ztrácí ${}^4\text{He}$ svoji viskozitu. Zmizí tedy tření mezi částicemi a také mezi kapalinou a stěnami nádoby. Takové kapalně ${}^4\text{He}$ protéká i těmi nejjemnějšími kapilárami bez jakéhokoli odporu. Necháme-li např. takové supratekuté hélium v devarce, pak nám za určitých vhodných okolností „vyleze“ postupně z nádoby ven. Po stěnách nádoby vzlíná bez tření supratekutý film ${}^4\text{He}$ a odnáší kapalinu z devarky vně nádoby. Ponoříme-li např. pouze konec takové prázdné devarky (nikoli její okraj) do kapalného supratekutého ${}^4\text{He}$, naplní se nám za chvíli nádoba kapalným héliem atd. Tedy jevy, které žádná normální kapalina nevykazuje.

Supratekuté ${}^4\text{He}$ má také nekonečně velikou tepelnou vodivost (říkáme, že je to „tepelný“ supravodič). Při překročení tzv. λ -čáry, kdy přechází normální hélium do supratekutého stavu (viz obr. 2), změní se například okamžitě bouřlivý var v celém objemu kapaliny na naprosto klidně se odpařující kapalinu. Existuje celá řada dalších jevů, se kterými si opět klasická fyzika neví rady.

Výklad těchto jevů je třeba zase hledat v kvantové fyzice a v dualismu vlna-částice. V normální kapalině se každý atom pohybuje řekněme nezávisle na ostatních. Tepelná energie kT obvykle dostačuje k tomu, aby jakékoli uspořádání (pořádek) rozrušila. To se jí snadno podaří, protože pohyb jednotlivých částic není korelovaný.

V supratekuté kapalině však dojde k nahromadění (tzv. *Boseova-Einsteinova kondenzace*) velkého počtu částic ($N \gg 1$) do jednoho pohybového stavu, v němž mají všechny částice stejnou hybnost (souboru takových částic říkáme *kondenzát*). V soustavě vznikne jakýsi korelovaný synchronizovaný stav mnoha částic, který představuje téměř „tuhou“ soustavu. Tepelná energie kT nyní musí vést „destruktivní činnost“ proti spojenému „nepříteli“ — kondenzátu velkého počtu částic v jediném pohybovém stavu. Ale za nízkých teplot je hodnota tepelné energie kT už tak malá, že nestačí k rozrušení takového kondenzátu. V tomto kondenzátu vznikají pouze „kolektivní vlnění“ mnoha částic — např. fonony (podobně jako vibrace v pevném krystalu). Jedině zvýšení teploty anebo určitá kritická rychlost proudění kondenzátu mohou tento korelovaný kondenzát rozrušit. Existují tedy kritická teplota a kritická rychlost, po jejichž překročení dochází k rozrušení kondenzátu znova na soubor nekorelovaných částic. Vysvětlení je silně zjednodušeno a náš cíl byl jen poukázat na některé pojmy, s nimiž se při výkladu těchto jevů setkáváme.

Ve své Nobelovské přednášce v roce 1913 mluví Kamerlingh Onnes krásně o tom, že nízké teploty nám vlastně jaksi obrazně zvedly závoj, nebo chcete-li mlhu, přes něž jsme nebyli schopni pozorovat bohatý vnitřní svět atomů a elektronů. Když se nám podařilo snížit energii tepelného pohybu kT na hodnotu menší než jsou různé vazebné meziatomové síly nebo síly mezi elektrony, magnetickými momenty, pak se nám tyto síly projeví v makroskopických rozměrech jako síly schopné udržet velké soubory částic v korelovaném stavu či pohybu.

Za touto „tepelnou oponou“ se nám tak otevřelo divadlo netušených makroskopických kvantových jevů. A teprve pak si fyzikové uvědomili, že podobné koherentní jevy v souboru většího počtu částic mohou být možná podkladem i pro vysvětlení celé řady jiných jevů (supratekutost atomových jader, supratekutost neutronových hvězd, supravodivé modely elementárních částic složených z kvarků, koherentní pole fotonů (lasery), supravodivost biologických makromolekul atd.). Studium těchto makroskopických kvantových soustav bez narušujícího vlivu tepelného pohybu nám tedy otevírá možnosti pochopení celé řady fyzikálních, chemických a biologických jevů.

Astronautika v Mnichově

TOMÁŠ SVOBODA, posluchač MFF UK v Praze

Ve dnech 16. až 22. září 1979 se konal v Mnichově kongres Mezinárodní astronautické federace. Účastnilo se ho 900 delegátů ze všech zemí světa. Mezi nimi bylo také šest kosmonautů ze socialistických zemí a americký kosmonaut A. Bean (třetí člověk vysazený na Měsíci), který se nyní připravuje k letům na palubě kosmického raketoplánu.

V rámci kongresu se konala také studentská vědecká konference, na níž byly předneseny soutěžní referáty, doporučené členskými organizacemi Mezinárodní astronautické federace a schválené v užším výběru Mezinárodním komitétem pro studentskou činnost v astronautice. Z toho byly tři referáty z Československa.

Skupina studentů z pražského Planetária, jejímiž členy jsou T. Svítek, J. Vackář, M. Urban, J. Bárta, M. Kirschner, K. Vítek a autor tohoto článku, připravila pod vedením ing. M. Grüna projekt orbitální stanice blízké budoucnosti nazvané Perun. Název této stanice byl zvolen podle slovanského boha hromu a současně je také slovem vytvořeným z počátečních písmen slov PERmanentní a UNiverzální, což jsou hlavní vlastnosti navrhované stanice. Stanice Perun je určena pro pobyt osmičlenné posádky a má být zásobována raketoplánem.

Dalším československým referátem byl příspěvek studenta ČVUT V. Poulka pojednávající o nové koncepci silových servomotorů pro kosmické použití. Základní koncepcí referátu je využití tzv. tvarové paměti látek k získání silových momentů pro řízení mechaniky kosmických těles.

Autorem třetího čs. referátu byl D. Odstrčil z Komenského univerzity v Bratislavě, který se zabýval matematickou simulací procesů probíhající v plazmovém raketovém motoru.

Československá účast na studentské konferenci byla velmi úspěšná nejen počtem referátů, ale také jejich umístěním v soutěži. Práce Perun získala první cenu spojenou se stříbrnou medailí Hermanna Obertha, německého průkopníka raketové techniky. V Poulek obdržel za svůj příspěvek třetí cenu.

Organizaci celého kongresu zajišťovaly západoněmecké zájmové astronautické společnosti. Jednání se konala v prostorách Německého mu-

zea, jehož bohaté sbírky byly účastníkům volně přístupné. Kongres proběhl úspěšně a byl velkým přínosem jak pro jednotlivé účastníky, tak i pro vývoj světové astronautiky.

Z dějin exaktních věd

Kdo byl F. P. Ramsey

V moderní kombinatorice a v teorii grafů se to jméno často vyskytuje, ačkoli v době, kdy *Frank Plumpton Ramsey* žil, teorie grafů jako samostatný vědní obor ještě neexistovala. Ta vznikla až ve třicátých letech a mohutně se rozvíjí teprve v posledních dvou třech desetiletích.

Ramsey se narodil 22. února 1903 a zemřel 19. ledna 1930, takže letos uplývá od jeho smrti už půl století. Nedožil se tedy ani sedmadvaceti let a podobá se v tom legendárnímu norskému matematikovi *N. H. Abelovi* (1802—1829), jemuž byla vyměřena také tak krátká životní pouť. Svůj život spojil Ramsey s Cambridge a s tamní věhlasnou universitou, která je vedle oxfordské nejdůležitější ve Velké Británii. V Cambridge studoval a později tam i přednášel matematiku. Zabýval se kromě matematiky také logikou, ekonomikou a filosofií, jeho dílo vyšlo posmrtně v Londýně už roku 1931 v jednom svazku s názvem *The foundations of mathematics and other logical essays* a s malou úpravou se objevilo znovu roku 1978. Reedicé má čtyři úvody (D. H. Mellor, L. Mirsky, T. J. Smiley a R. Stone), neboť náplň svazku je tak různorodá. Je vidět, že Ramseyovo dílo žije ještě padesát let po jeho skonu, nezdá se, že by upadalo do zapomnění a ramseyovská problematika se pěstuje i u nás (J. Nešetřil — V. Rödl).

Ukažte, že ve skupině šesti osob vždycky existují tři, které se navzájem znají, nebo tři, které jsou si navzájem cizí. Tato známá hříčka je speciálním případem jedné věty, kterou F. P. Ramsey dokázal roku 1928. Ti, kdo sledují mezinárodní matematické olympiády, vzpomenou si na jednu jinou ramseyovskou variantu, jež se tam před léty vyskytla. V ní si dopisovalo 17 žáků o třech tématech, každý dva o jednom z nich. Mělo se dokázat, že existují tři žáci, kteří si dopisují všichni na společné téma. Nahradíme-li 17 číslem 16, nelze už tvrzení dokázat.

Jiří Sedláček

Fyzika před 10, 100 a 1000 roky

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., UP Olomouc

Na několika „kulatých výročích“ se pokusíme ilustrovat stále se zrychlující tempo rozvoje fyziky a připomenout některá významná výročí z dějin fyziky.

V roce 1970 padla stará poučka, že atomové jádro je útvar s kladným elektrickým nábojem, když totiž v Dubně *Ju. D. Prokoškin* „syntetizoval“ antihelium, jež nese negativní náboj podmíněný přítomností antiprotonu. Zároveň ovšem vyvstala možnost sestrojit pumu z antihmoty, jež by svým výkonem o několik řádů převýšila „efektivnost“ vodíkové pumy. V oblasti jaderné fyziky dále zasluhuje zmínky příprava 105. prvku ozařováním americia ionty neonu (*G. N. Flerov*), důkaz možnosti „připravovat“ antiprotonové a hyperonové atomy (*J. Bakenstoss*); v oblasti subnukleární fyziky byl zaveden hypernáboj Y jako další kvantové číslo charakterizující „elementární částice“. V mezihvězdném prostoru byl zjištěn kysličník uhličitý.

V roce 1880 vrcholí klasická fyzika a nejrychleji se rozvíjí elektrodynamika. Dánský fyzik *Ludvík Valentin Lorentz* a nezávisle holandský fyzik a zakladatel elektronové teorie *Hendrik Antoon Lorentz* objevují vztah mezi hustotou látky a indexem lomu, německý fyzik *Emil Gabriel Warburg* zavádí pojem hystereze a bratři *Pierre a Jean Curie* objevují piezoelektrický jev.

V roce 1780 zkoumá *Coulomb* tření, pro něž se mu následujícího roku podařilo formulovat základní zákony; jeho zákon pro elektrostatickou interakci nábojů ještě není znám (zná jej jen *Cavendish*, který jej však nepublikoval), *Volta* se snaží zdokonalit stéblový elektroskop, což bylo následujícího roku korunováno úspěchem. V roce 1680 *Denis Papin* objevil závislost teploty varu vody na tlaku, čili „otevřel problém“ formulovat vztah mezi tlakem a teplotou rovnovážných stavů látek, který není dodnes dořešen. Mimoto téhož roku sestrojil dvojčinnou vývěvu. V roce 1580 objevil *Robert Norman* magnetickou inklinaci. Intenzivně se pracuje na přípravě reformy kalendáře, neboť juliánský kalendář se již markantně rozchází s „fázemi slunečního roku“; o řešení problému se zasloužili zejména bratři *Liliové*. V roce 1480 pracuje jako ojedinelý experimentátor *Leonardo da Vinci* a Evropa má ovšem jiné starosti — na Balkán pronikají Turci, ve Španělsku zase padá jedna maurská pevnost za druhou.

Před 1000 lety pěstují exaktní vědy jen Arabové; *Albatani* provádí pečlivá astronomická pozorování a měření a určuje s velkou přesností délku roku.

Roku 80 zůstává po *Pliniovi Starším* největší encyklopedie přírodovědeckého vědění (a ovšem i fantazie) starověku; z dob ještě starších nelze již k žádnému letopočtu končícímu osmdesátkou přiřadit žádnou významnou událost z hlediska fyziky.

Pro volnou chvíli

0 jednom „řešení“ dvou výzkumných úkolů

Ve 2. čísle tohoto ročníku RMF byl uveřejněn článek „Řešení jednoho výzkumného úkolu...“, který se zabýval těmito problémy:

- A. Existují rovinné útvary, které mají obsah $h \text{ cm}^2$ a obvod $h \text{ cm}$? Lze nějak výstižně charakterizovat mnohoúhelníky s touto vlastností?
- B. Existují tělesa, která mají objem $h \text{ cm}^3$ a povrch $h \text{ cm}^2$? Lze nějak charakterizovat tělesa s touto vlastností?

Všimněme si problému A. V článku autor uvádí „řešení“:

Kruh, který má poloměr $r = 2 \text{ cm}$. Čtverec se stranou 4 cm opsaný kružnici s poloměrem $r = 2 \text{ cm}$, libovolný trojúhelník opsaný takové kružnici atd. Každý konvexní mnohoúhelník, který je opsán kružnici s poloměrem $r = 2 \text{ cm}$, má vlastnost uvedenou v problému A.

Ačkoliv je toto tvrzení samo o sobě správné, není (úplným) řešením problému A, ale jen jeho částečným řešením. Pravda je, že je charakterizována poměrně velká třída mnohoúhelníků, které mají danou vlastnost, ale tato třída neobsahuje všechny mnohoúhelníky dané vlastnosti.

Například do této třídy nepatří obdélník s celočíselnými rozměry 3 cm a 6 cm .

Řešením problému A je věta, kterou jistě sami snadno dokážete:

Věta: Pro každý rovinný útvar U s obsahem S a obvodem o ($S \neq 0$, $o \neq 0$) existuje s ním podobný útvar U' , pro jehož obsah S' a obvod o' platí

$$S' = h \text{ cm}^2, \quad o' = h \text{ cm}$$

(útvar U' má tedy obsah i obvod vyjádřen v odpovídajících si jednotkách týmž reálným číslem h).

Podobnou větu lze vyslovit i pro problém B.

Milan Koman

Kdy začne jaro?

(Úloha o kalendáři)

Již jako malí školáci jsme se učili, že jaro začíná 21. března, léto 21. června, podzim 23. září a zima 21. prosince. Astronomové však dove-
dou určit začátek jednotlivých ročních období v každém roce nejen na
dny, ale i na hodiny, minuty a dokonce i sekundy. My se spokojíme pro
rok 1980 s údaji uvedenými v tabulce:

Začátek ročního období	Jaro	Léto	Podzim	Zima
Den	20. 3.	21. 6.	22. 9.	21. 12.
Hodina	12.11	6.45	20.06	17.59

(Časové údaje jsou ve středoevropském čase.)

Astronomické údaje se mohou v jednotlivých letech od běžně udáva-
ných údajů lišit o jeden, někdy i o dva dny. Pro rok 1980 se tento rozdíl
projevuje například v začátku astronomického jara a podzimu. Podsta-
tou tohoto jevu je střídání přestupných a nepřestupných roků. Od za-
vedení našeho kalendáře v roce 1582 platí pro střídání přestupných
roků pravidla:

Pravidlo 1. (Pro letopočty nekončící dvěma nulami.) Kalendářní
rok, jehož letopočet nekončí dvěma (a více) nulami, tj. není násobek sta,
je přestupný, právě když je tento letopočet násobek čtyř.

Pravidlo 2. (Pro letopočty končící dvěma nulami.) Kalendářní rok,
jehož letopočet končí dvěma nulami — je násobek sta — je přestupný,
právě když je tento letopočet násobkem 400. (Např. roky 1900, 2100
nejsou přestupné, ale rok 2000 bude přestupný.)

Tato pravidla byla stanovena na základě skutečnosti, že jeden tro-
pický rok (tj. doba jednoho oběhu Země kolem Slunce) trvá

$$365 \text{ dní } 5 \text{ hodin } 48 \frac{3}{4} \text{ minuty}$$

Na základě těchto údajů řešte úlohy:

Úloha 1. Který den a v kolik hodin začne jaro v roce 1981 a podobně,
kdy začalo jaro v roce 1979?

Úloha 2. V kterém roce v období 1900 až 2100 bude nebo byl začátek
jara nejdříve a nejpozději?

Milan Koman, Praha

Problém z tenisové soutěže

Tenisové soutěže se účastní celkem 8 družstev. Soutěž je organizována tak, že každá dvě družstva hrají mezi sebou právě jedno utkání. Za vítězství na hřišti i za vítězství kontumační získává družstvo dva body, při porážce na hřišti získává jeden bod a při kontumační prohře nezískává žádný bod. Remíza v utkání není možná. Konečné pořadí družstev v tabulce se stanoví podle počtu dosažených bodů, při shodném počtu bodů rozhoduje o pořadí vzájemné utkání a nelze-li rozhodnout takto, rozhoduje skóre jednotlivých zápasů.

Družstvo X prohrálo první dvě utkání kontumačně. Může se dostat v konečném pořadí na první místo tabulky, jestliže žádné jiné utkání v soutěži již neskončí kontumačním výsledkem?

Poznámka: Tento případ se skutečně stal v krajském přeboru v Jiho-moravském kraji.

Řešení: Nemůže. Kdyby totiž družstvo X vyhrálo všechna zbývající utkání, získalo by tak deset bodů. Celkem se v soutěži odehraje 28 utkání. V každém z 26 utkání, která neskončila kontumačním výsledkem se rozdělí oběma družstvům dohromady tři body (vítěz získá dva body, poražený jeden bod). V každém ze dvou utkání s kontumačním výsledkem se rozdělí dva body (vítěz dostává dva body, družstvo X nedostalo žádný bod). Celkem se rozdělí $3 \cdot 26 + 2 \cdot 2 = 82$ bodů, tedy aspoň jedno z osmi družstev musí dosáhnout více než deseti bodů, a umístí se tedy před družstvem X .

Ing. Pavel Brada

olympiády

.....

Mezistátní utkání v matematice

Matematika není sice sportovní disciplínou, ale soutěže v řešení matematických úloh mají dosti dlouhou tradici. Vždyť už ve středověku se před korunovanými hlavami utkávali nejen rytíři v brnění, ale občas i matematici vyzbrojení důvtipem v řešení úloh. A matematické olympiády jsou skutečností naší doby už přes čtvrt století, mezinárodní matematická olympiáda má za sebou už 21 ročníků. Znáte také pythagoriády, různé školní soutěže, korespondenční soutěže pořádané redakce-

mi časopisů (třeba Rozhledy). Mezistátní utkání v matematice je však novou formou, povězte si tedy něco o duelu Polsko-Rakousko, konaném poprvé v r. 1978. *) Možná, že v jeho náplni najdete inspiraci i pro utkání mezi vašimi třídami, školami, městy, okresy či kraji atd.

Utkání, o kterém hovoříme, se zúčastnila šestičlenná družstva obou zemí; soutěže trvaly tři dny. V prvním a druhém dni šlo o *soutěže jednotlivců*, pokaždé řešili všichni tři úlohy, umožňující zisk maximálně 24 bodů. Ve třetím dnu *soutěžila družstva jako kolektivy*, za vyřešení tří úloh bylo opět možno získat 24 bodů. Na volbě úloh se dohodli vedoucí delegací na základě návrhů obou stran. „První rakousko-polské matematické závody“ (oficiální název soutěže) proběhly v polském Kolo-břehu na baltském pobřeží; v jednotlivcích byli úspěšnější polští studenti, v družstvech rakouští. Družstva se skládala z maturantů středních škol a vybraly je výbory národních olympiád.

Na ukázkou aspoň tři úlohy s různou náplní:

- *Do pravidelného šestiúhelníku je vepsán rovnoběžník tak, že oba útvary mají společný střed souměrnosti. Dokažte, že obsah rovnoběžníku není větší než dvě třetiny obsahu šestiúhelníku.*
- *Je dáno 1978 množin, z nichž každá obsahuje 40 prvků. Každé dvě z těchto množin mají právě jeden společný prvek. Dokažte, že existuje prvek náležející do všech 1978 množin.*
- *V konvexním mnohoúhelníku M jsou zakresleny některé úhlopříčky, a to tak, že se žádné dvě neprotínají uvnitř M . Dokažte, že aspoň dva vrcholy mnohoúhelníku M neleží na žádné z vyznačených úhlopříček.*

Mnoho zdaru v řešení úloh! A přemýšlejte, zda byste přece jen nenašli příležitost k podobným závodům, třeba s družební školou. Zařadte utkání v matematice vedle sportovních soutěží, obohatíte tím program družebního zájezdu. Organizaci závodů přizpůsobte časovým možnostem, ale soutěž kolektivů si nenechte ujít, je to vzrušující činnost „dávat hlavy dohromady“ nad společnými problémy.

Jaroslav Šedivý

*) Informace jsou převzaty ze zprávy otištěné v polském časopise *Matematyka*, č. 3 (1979), jejím autorem je W. Mnich.

recenze

Arthur Beiser:

Úvod do moderní fyziky

Vydala Academia, Praha 1978, vydání druhé, 630 stran, 289 obrázků, vázaný výtisk 46 Kčs.

Stručnou recenzi prvního vydání této vynikající učebnice jsme přinesli na str. 192 ročníku 54. Okolnost, že po třech letech dochází k dalšímu vydání v nákladu 7000 výtisků (oproti prvnímu vydání v 5000 výtiscích), svědčí s dostatek o užitečnosti díla. S ohledem na závaznost jednotek SI ve smyslu normy ČSN 01 1300 byly v novém (jinak nezměněném) vydání provedeny některé úpravy. Vzhledem k významu knihy připojujeme znovu tehdejší recenzi:

Knih je — jak české přetlumočení původního titulu *Perspectives of Modern Physics* říká — úvodním pohledem do moderní fyziky. Středoškolský zájemce získá ve vstupní části knihy (přístupně a obsírně vyložené) rozšíření znalostí z Fukovy (SPN 1973) knížky o relativitě. Navazující kapitoly podávají základní pohled na dualitu vln a částic s podrobným výkladem principu neurčitosti. Přes Bohrov atom se dospívá ke kvantové mechanice s instruktivním výkladem chemických vazeb a molekulárních struktur. Další kapitoly uvádějí do vysokoškolského studia moderní fyziky. Mnohé z knihy je bez obtíží přístupné

středoškolákům, leccos rámec středoškolských osnov matematiky přesahuje.

K. Mišcň

J. Fuka—B. Havelka:

ELEKTŘINA A MAGNETISMUS

SPN Praha, 1979, 656 strán, cena viazaného výtlačku 46 Kčs.

Publikácia je vysokoškolskou učebnicou a je tretím upraveným vydaním učebnice s pôvodným názvom Elektromagnetické pole. Vzhľadom k predchádzajúcim vydaniam autori vykonali niektoré významnejšie úpravy: vynechanie technických podrobností, logickejšie usporiadanie výkladu a rozvrhnutie obsahu a konečne zjednotenie, prípadne nepopisovanie niektorých pokusov.

Učebnica je rozdelená do štyroch oddielov: A Statické elektrické pole, B Stacionárny elektrické a magnetické pole, C Nestacionárny elektromagnetické pole, D Dodatky (jednotky elektrických a magnetických veličín; prehľad základných veličín, rovníc a konštánt; základy vektorového počtu; základné pojmy špeciálnej teórie relativity; elektromagnetické pole nestacionárneho dipólu). Každý z oddielov A, B, C obsahuje niekoľko logicky členených kapitol (je ich 12), v ktorých sa nachádzajú riešené jednoduché a tiež zložité

príklady priamo v texte. Za každou kapitolou je uvedené veľké množstvo neriešených úloh s výsledkami, uvedenými v závere učebnice.

Hoci publikácia má charakter vysokoškolskej učebnice, čím pochopiteľne prevyšuje rámec stredoškolského štúdia, možno ju jednoznačne doporučiť aj čitateľom, ktorým je predovšetkým určený náš časopis Rozhledy matematicko-fyzikální. Domnievam sa, že mnoho mladých študentov, prejavujúcich seriózny záujem o fyziku, nájde v tejto knihe príležitosť rozšíriť obzor svojich vedomostí a získať ešte podrobnejšie a hlbšie poznatky o elektromagnetizme.

M. Marčok

Karel Vrchovecký:

LEHČÍ NEŽ VZDUCH

Vydalo nakladatelství Panorama, Praha 1979. Kniha vyšla v edici Stopy-fakta-svědectví. 240 stran, 24 stran čb. přílohy, 2 mapky a 13 ilustrací v textu, brožovaný výtisk 20 Kčs.

Obálku knihy zdobí dvě rytiny. Na jedné vidíme balón, který je zatím ještě připoután, ale z ruchu kolem se lze domnívat, že již brzy budou uvolněna lana a velká koule se majestátně vznese. Na druhém obrázku je vzducholoď s vrtulí a kormidlem. Obsah knihy shrnují nápisy na obálce: Dobývatele vzdušných výšin. Od vakuového balonu k zepelínům. Dramatické cesty k pólu a kolem světa. Aeronautika dnes.

Zájemce o tuto knihu lze rozdělit do tří skupin. Ovšem je možné, že někdo bude patřit do dvou anebo dokonce do všech tří skupin.

První skupinu je možno nazvat skupinou romantiků. Patří sem všichni ti, jež okouzila četba románů Julese Verna, dále ti, kteří umění o balónech nadšeně vyprávět, a pokud žádný balón dosud na vlastní oči neviděli, pak je to jejich velká touha. Mají ovšem štěstí, neboť jejich sen je splnitelný. S balóny se lze setkat při příležitosti různých společenských akcí, např. v roce 1978 vzlétly balóny při Světové výstavě poštovních známek Praga 1978 a jeden balón startoval z náměstí v Českých Budějovicích při zahájení Mistrovství světa v letecké akrobacii.

Druhou skupinu tvoří milovníci dějin techniky. Seznámí se zde s těžkou cestou k úspěchům, za něž se platilo mnohdy zdravím i životem. Hovoří se zde i o vojenském zneužití balónů a vzducholodí, když z nich byly vrhány pumy nejen na bojiště, ale i na nic netušící města. I v době raket je zajímavé si přečíst o cestách balónů do stratosféry. Popisy těchto cest si v ničem nezadají s dobrodružnými povídkami.

Třetí skupina, tj. skupina zájemců o současnost vzduchoplavby, si se zájmem přečte poslední dvě kapitoly, věnované dnešnímu i budoucímu praktickému užití balónů a vzducholodí. V poslední kapitole je mnoho zajímavého o sportovní aeronautice.

J. Mída

redakce hovoří

Pokyny autorům

Rozhledy matematicko-fyzikální mohou otisknout jenom ty články, které byly zaslány redakci s jednou kopií a s úplným autorovým jménem, jeho akademickými a vědeckými tituly, s udáním pracoviště a bytové adresy autora. O otištění rozhoduje redakční rada nebo vedoucí redaktor po vyjádření recenzenta. *Nevyžádané rukopisy se nevracejí.*

Obsah: Rozhledy matematicko-fyzikální jsou určeny především studentům středních škol a středních odborných učilišť s maturitou. Jejich obsah i způsob podání má proto odpovídat tomuto poslání. Otištěné články musí být psány srozumitelně, pokud možno zajímavě a nemají být příliš dlouhé. Autoři se musí řídit pravidly českého nebo slovenského pravopisu, musí respektovat přijaté názvy a značky a (ve fyzice) zákonem stanovené jednotky a označení.

Úprava rukopisu: Nejprve je třeba uvést titul příspěvku (krátce a výstižně), potom jméno a působiště autora. Text je nutno psát na stroji (nikoliv však perličkou), černou páskou, ob řádek, a to po jedné straně bílého papíru formátu A4. Na každé stránce má být nejvýše 30 řádek, z nichž každý obsahuje 60 úhozů. Nadpisy nebo zdůrazněná slova textu podtrhujte jenom obyčejnou (ne propisovací) tužkou. Poznámky pod čarou — pokud možno v minimálním počtu — je třeba v textu vyznačit postupně číslicemi v exponentu a psát je hned za řádek rukopisu, k němuž patří; od ostatního textu se oddělí vodorovnými čarami. Obrázky se nikdy nekreslí do textu článků!

Matematické výrazy a vzorce se v textu doplňují ručně (velmi čitelně!) nkoustem, tuší nebo propisovací tužkou; zvláštní pozornost je třeba věnovat přepisování indexů a exponentů. Vzorce se číslují v oblých závorkách na pravé straně, a to jenom tehdy, jestliže se na ně odvoláváme v dalším textu.

V odkazech na literaturu uvádíme (a to střídmě) jenom publikace dostupné čtenářům Rozhledů, tj. především literaturu psanou v českém nebo slovenském jazyce. Uvádějí-li se odkazy na zahraniční literaturu, pak jenom na publikace knižní, nikoli na specializované vědecké časopisy. Odkazy je třeba v textu průběžně číslovat; číslice se píší do hrana-

tých závorek. Odkaz obsahuje jméno autora, název knihy nebo článku (u časopisu ročník a stránku), vydavatele, místo a rok vydání.

Obrázky se rýsují tuší na pauzovací papír a popisují se normalizovaným písmem šablonou 5 mm; čáry musí být ostré a nerozpité. Očíslované texty k obrázkům se přikládají na konec rukopisu. Je třeba pamatovat na to, že se obrázky pro tisk zmenšují v poměru 1 : 2. Fotografie musí být ostré, kvalitní a zhotovené na lesklém bílém papíru. Autor může také zaslat redakci jenom obrázky narýsované tužkou; redakce dá takové obrázky pro tisk narýsovat. I v tomto případě je třeba dodat obrázky pečlivě narýsované a čitelně popsané.

Dne 30. prosince 1979 zemřel ve věku 73 let dlouholetý člen redakční rady *Rozhledů* matematicko-fyzikálních, zasloužilý učitel

docent RNDr. Josef Dibelka.

Působil řadu let na středních školách a od r. 1956 na jaderné a fyzikálně inženýrské fakultě ČVUT v Praze. Uctívajíce jeho památku, vzpomínáme s povděkem na práci, kterou pro náš časopis vykonal.

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

irrazionale
irriducibile
isobare ž
isobari m
isogonale
isolante
isolante, isolatore m
isomeria ž
isomorfismo m
isomorfo
isoscele
isoterme ž
isotopia ž
isotopo m
isotropia ž
isteresi magnetica ž
iterazione ž

iracionální
ireducibilní, nerozložitelný
isobary (meteorologické)
isobary (atomové)
izogonální, rovnoúhlý
isolační
isolátor
izomerie
izomorfismus
izomorfní
rovnoramenný
izotermy (meteorologické)
izotopie
izotop
izotropie
magnetická hysterese
iterace

J

jacobiano m (determinante)
joule

jakobián
joule (jednotka)

L

lampada ž
— di Nernst
laplaciano m
larghezza ž
largo
laterale
— superficie ž
latitudine ž

lampa
— Nernstova
Laplacův operátor
šíře, šířka
široký
boční, postranní
plášť
šířka (zeměpisná)

lavoro m

legame m

— covalente

— elettrostatico

legge ž

— dei grandi numeri

— della dinamica di Newton

— di Boyle-Mariotte

— di Gay-Lussac

— di gravitazione di Newton

— di Hooke

— di Joule

— di Lavoisier

— di Lenz

— di Malus

— di Moseley

— di Neumann

— di Ohm

— di Proust

— di Planck

— di Snellius

— di Stefan

— di Weber

— di Wien

leggi di Kepler

— di Kirchhoff

— logiche

lemma m

lente ž

— concava

— convessa

— sottile

librazione ž

limitare

limitato

limite m

— destro e sinistro

— massimo

— minimo

práce

vazba

— kovalentní

— elektrostatická

zákon

— velkých čísel

Newtonův pohybový zákon síly

zákon Boyleův-Mariottův (plynu)

— Gay-Lussacův

gravitační zákon Newtonův

zákon Hookův

— Joulův

— zachování hmotnosti

— indukovaných proudů

— Malusův (optický)

— Moseleyův (atomový)

— elektromagnetické indukce

— Ohmův (proudu)

— Proustův (poměrů sluč.)

— Planckův (vyzařovací)

— Snellův (optický)

— Stefanův (zářivosti)

— Weberův (vnímání intenzity)

— Wienův (zářivosti)

zákony Keplerovy (pohybu planet)

— Kirchhoffovy (rozvět. proudu)

— logiky

lemma, pomocná věta

čočka (optická)

— dutá

— vypuklá

— tenká

librace (Měsíce)

omeziti, ohraničiti

omezený, ohraničený

limita, hranice

— zprava a zleva

limes superior

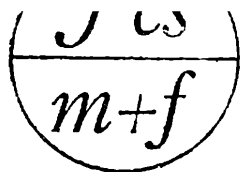
— inferior

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

7

ROČNÍK 58, 1979-1980, BŘEZEN



ROČNÍK 58
BŘEZEN 1980

7

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

Obsah

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS - ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1980.

Prof. F. Kubiček: Vzpomínka na prof. Brejchu . . .	289
Doc. dr. L. Bican, CSc.: Algebraické kódování - I.	290
Dr. O. Petránek: Diferenciální rovnice v oboru polynomů	296
J. Doboš: Trojúhelníková nerovnost	300
J. S.: Prvočíselná dvojčata	306
Doc. ing. dr. L. Drs, CSc.: Jak se kreslily perspektivy v době Albrechta Dürera	307
Dr. M. Odehnal, CSc.: Supravodivost - kolektivní kvantový jev	310
Doc. ing. Z. Janout, CSc.: Měření v mikrosvětě	316
Dr. J. Široký, dr. I. Volf: Ověřte si, co znáte z astronomie	320
Dr. M. Zima: Cesta Martina Pačobuta-Odlénického ke hvězdám	324
Doc. dr. M. Hejný, CSc.: Trlenka	326
Doc. dr. Z. Maršák, CSc.: Přijímací zkoušky na fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou v Praze	329
jm: Malé cvičení představivosti	336
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český 3. a 4. str. obálky	

Vzpomínka na prof. Brejchu



Naši čtenáři a řešitelé soutěžních úloh si jistě pamatují, že často četli v Rozhledech jméno autora — prof. dr. Josef Brejcha, CSc.; tento autor zajímavých článků a úloh před rokem zemřel.

Zalistujete-li v minulých ročnících Rozhledů, zjistíte, že velmi často matematické úlohy začínaly úlohou Brejchovou — úlohy bývají řaděny podle jmen autorů — a že těch úloh bylo za 40 let asi 50. I článků bylo asi 20. Tématem všech těchto prací byla elementární matematika, zvláště geometrie, lze však říci, že z vyššího hlediska. Bývaly to úlohy o trojúhelníku a jeho význačných bodech, o mnohoúhelnících apod., které vedly často na konvergentní posloupnosti. Asi před třiceti léty uvedl v Rozhledech zajímavou metodu grafického řešení kvadratických rovnic, která byla pak hodnocena jako nejlepší mezi několika způsoby jiných autorů. Často to byly též úlohy konstruktivní i nabádavý článek z dlouholeté učitelské praxe o chybách, které studenti „páchají“ při přijímacích pohovorech na vysoké školy.

Prof. Brejcha pocházel z jižních Čech, narodil se 28. července 1907. Jeho otec, děd a praděd byli učitelé a on rodinnou tradici neporušil. Studoval na reálném gymnáziu v Sušici a na přírodovědecké fakultě Karlovy university, kde v roce 1931 dosáhl aprobace z matematiky a fyziky. První učitelské zkušenosti získal na měšťanských školách, když tehdy místa na gymnáziích nebyla. Pak působil na gymnáziích v Opavě a v Brně, a tehdy už pravidelně přispíval do Rozhledů. Po roce 1945 přestoupil na pedagogickou fakultu university v Brně, kde také získal jako první v naší republice doktorát pedagogických věd. Následovala

hodnost doktora přírodních věd a kandidáta věd, vše na základě vědeckých prací z matematiky.

V roce 1950 přestoupil na brněnskou techniku — dnes Vysoké učení technické, kde působil až do své smrti 9. března 1979. Byl vedoucím katedry matematiky strojní fakulty VUT. Jeho četné vědecké práce se týkaly elementární matematiky, diferenciálních rovnic a projektivní diferenciální geometrie; publikoval je v našich i zahraničních časopisech. Podílel se výrazně na rozvoji strojní fakulty VUT a její katedry matematiky a na budování Laboratoře počítačích strojů, tehdy první v ČSSR.

Prof. Brejcha byl zkušeným, svědomitým a velmi oblíbeným učitelem, na něhož vděčně vzpomínají stovky inženýrů. Napsal pro studenty řadu skript a zpracoval velkou část nového vydání Matematiky v Technickém průvodci.

Jeho práce pro školu a vědu byla oceněna státním vyznamenáním Za zásluhy o výstavbu a na sjezdu v roce 1978 byl zvolen čestným členem Jednoty čs. matematiků a fyziků.

F. Kubíček, VUT, Brno

matematika

Algebraické kódování - I.

Doc. RNDr. LADISLAV BICAN, CSc., UK Praha

Algebraická teorie kódování je partie moderní aplikované algebry, která se v posledních 10—15 letech bouřlivě rozvíjí a nachází široké uplatnění v celé řadě odvětví lidské činnosti. Uvedu jeden příklad za všechny. Při řízení kosmické lodi je nutné dávat určitým způsobem zakódované instrukce řídicímu systému lodi. Přitom je zřejmé, že řídicí systém provede jen takové instrukce, které má uloženy ve své paměti. Při přenosu těchto signálů nelze ovšem zcela vyloučit, že např. vlivem vysílačího či přijímačího zařízení nebo působením nejrůznějších kosmických vlivů na cestě mezi vysílačem a přijímačem může dojít k jistému zkomolení vysílaného textu. Důsledkem toho ovšem je, že řídicí systém zprávu správně nerozšifruje a tudíž instrukci buď neuposlechne nebo, což by mohlo mít katastrofální následky, provede jiný úkon. Vzhledem k tomu, že můžeme oprávněně předpokládat, že ke zkomolení předávané

zprávy dojde relativně zřídka, je nutné hledat takové způsoby zakódování dané zprávy a takové metody jejich dešifrování, které by umožňovaly opravit malá množství chyb a předat tak zprávu ve správném tvaru. Jedním z úkolů algebraické teorie kódování je právě hledání takovýchto kódů.

V tomto článku si ukážeme jednoduchý příklad kódu, který je schopen opravovat až tři chyby. Jak sami uvidíte, bude poměrně snadné opravit jednu, dvě nebo tři chyby vzniklé při přenosu zprávy. Přitom bude zřejmé, že tuto metodu není prakticky možno použít při kódech větších rozměrů. Proto si v příštím čísle na tomtéž příkladě ukážeme, jakým způsobem je možno obdrženou zprávu dešifrovat použitím algebraického aparátu. I když v daném konkrétním příkladě bude jistě jednodušší metoda první, bude zcela zřejmé, že při zpracování na samočinném počítači a při použití rozsáhlejších kódů se pomocí druhé metody podstatně zrychlí a zjednoduší dekodování.

Uvažme 32 patnáctičlenných posloupností složených z prvků 0, 1, které jsou napsány v následující tabulce:

Tab. 1

a	1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0	7
b	0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0	7
c	1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0	8
d	0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0	7
e	1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0	8
f	0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0	8
g	1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0	7
h	0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0	7
i	1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0	8
j	0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0	8
k	1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0	7
l	0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0	8
m	1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0	7
n	0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0	7
o	1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0	8
p	0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1	7
q	1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1	8
r	0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1	8
s	1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1	7
t	0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1	8
	1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1	7
v	0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1	7
x	1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1	8
y	0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1	8

z	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15
mez	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	7
	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	8
	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	7
	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	8
	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	8
	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Každý řádek této tabulky, tj. každá patnáctičlenná posloupnost složená z čísel 0, 1, která je napsaná v této tabulce, se nazývá *kódové slovo*. Vůbec každá patnáctičlenná posloupnost čísel 0, 1 se nazývá *slovo*. *Kód* je pak množina kódových slov a počet symbolů 0, 1 v každém slově se nazývá *délka kódu* (v našem případě jde tedy o kód délky 15). V levém sloupci tabulky 1 jsou napsaná písmena abecedy a některá interpunkční znaménka. Zkratka *mez* značí mezeru. Tím je vlastně dáno vzájemně jednoznačné přiřazení mezi písmeny abecedy (a interpunkčními znaménky) a kódovými slovy. Čísla uvedená v pravém sloupci tabulky udávají počet jedniček v jednotlivých kódových slovech. Počet jedniček v libovolném slově se nazývá *váha slova*.

Aby kód měl potřebné rozumné vlastnosti, nemohou být kódová slova vybrána náhodně. Zavedeme-li na množině $\{0, 1\}$ operaci sčítání $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$ a na množině slov sčítání po složkách (jako u vektorů), ověříme snadno, že součet dvou kódových slov je opět kódové slovo. Tak např. je $d + m = i$, $r + x = e$, $mez + ? = d$, $x + ! = h$, $+ , = g$. Kód, ve kterém je součet dvou kódových slov opět kódové slovo, se nazývá *lineární* (nebo *grupový*). *Vzdáleností dvou slov* (ne nutně kódových) rozumíme váhu jejich součtu. Protože součet každých dvou kódovaných slov z našeho příkladu je opět kódové slovo, je vzdálenost každých dvou různých slov našeho kódu alespoň 7, jak je patrné z pravého sloupce tabulky 1. Změníme-li nyní kódové slovo α nejvýše ve třech místech, je vzdálenost takto vzniklého slova ρ od kódového slova α nejvýše rovna 3. Abychom z kódového slova α dostali jiné kódové slovo β , museli bychom jej změnit nejméně na sedmi místech, neboť vzdálenost dvou kódových slov je alespoň 7. To znamená, že z kódového slova $\beta \neq \alpha$ můžeme dostat slovo ρ , jestliže slovo β změníme nejméně na čtyřech místech. Odtud tedy dostáváme následující pravidlo pro dekódování: Jestliže v přijatém slově jsou nejvýše tři chyby, nalezneme správné kódové slovo tak, že vezmeme kódové slovo, jehož vzdálenost od přijatého slova je nejvyšší rovna třem. Osvětleme si to blíže na konkrétním příkladě:

Předpokládejme, že jsme přijali zprávu, jejíž slova jsou tvořena řádky tabulky 2:

Tab. 2

0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1

Pomocí tabulky 1 a výše uvedeného pravidla přijatou zprávu snadno dešifrujeme (ovšem za předpokladu, že při přenosu zprávy nevznikly v žádném kódovém slově více než tři chyby). Z tabulky 1 vidíme, že prvnímu řádku odpovídá kódové slovo *p*, druhému řádku kódové slovo *r*, třetímu řádku *i*, atd. Osmému řádku tabulky 2 neodpovídá žádné kódové slovo a podobně neodpovídá žádné kódové slovo řádkům 10, 13, 18 a 21. Nahradíme-li nerozšifrované řádky symbolem +, dostaneme následující text

prijd v+n+ce+am,k+re+.

Nyní musíme spočítat vzdálenosti nerozluštěných slov od jednotlivých kódových slov. Tak zjistíme, že slovo *v* osmém řádku má od slova *e* vzdálenost 2, přičemž k chybě došlo na 7. a 13. místě. Podobně je vzdálenost slova *v* 10. řádku od kódového slova *!* rovna 3, chyby vznikly na 1., 3. a 12. místě, vzdálenost 13. slova od *k* je 1, chyba na 8. místě, vzdálenost 18. slova od *a* je 2, chyby na 4. a 9. místě a vzdálenost 21. slova od *l* je 3, chyby na 2., 5. a 11. místě. Vyslaný text tedy byl

prijd ven!cekam, karel.

neboli Přijď ven!Čekám,Karel.

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 1 + 1 = 0.0 = 0.1 = 1.0 = 0 \\ 1 + 0 &= 0 + 1 = 1.1 = 1. \end{aligned}$$
$$\begin{array}{r}
 (x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + \\
 \phantom{(x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 +} + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\
 x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} \\
 \hline
 x^{10} + x^9 + x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 \\
 \hline
 x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 \\
 \hline
 x^2 + x + 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = \\
 = x^{11} + x^6 + x^3
 \end{array}$$

111111001111111 a 11111. Při dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$ musíme nejprve polynom $x^{11}g(x)$ přičíst (= odečíst) k polynomu $f(x)$, tj.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \end{array}$$

294

Diferenciální rovnice v oboru polynomů

(dokončení)

RNDr. OLDŘICH PETRÁNEK, SPŠE Praha

Pokusme se nejprve zapsat, jaký tvar musí mít libovolná lineární diferenciální rovnice prvního řádu v oboru polynomů. Musí zřejmě obsahovat člen s Y' , jehož koeficient je libovolný nenulový polynom $Q(x)$, tedy musí obsahovat člen tvaru $Q(x) \cdot Y'$. Dále obsahuje člen tvaru $R(x) \cdot Y$, kde $R(x)$ je libovolný polynom, a absolutní člen (samozřejmě z hlediska proměnných Y a Y'), tj. libovolný polynom $S(x)$. (Polynomy $R(x)$, $S(x)$ mohou být též nulové). Dále víme, že nemůže obsahovat žádný člen s mocninou Y a nebo Y' vyšší než 1 ani žádný člen tvaru $Y^k \cdot (Y')^s$, kde k, s jsou přirozená čísla.

Libovolná lineární diferenciální rovnice prvního řádu v oboru polynomů je dána výrokovou formou

$$Q(x) \cdot Y' + R(x) \cdot Y + S(x) = 0, \quad (1)$$

kde $Q(x)$ je nenulový polynom a $R(x)$, $S(x)$ libovolné polynomy v proměnné x .

Obecným řešením rovnice (1) se v tomto článku zabývat nebudeme. Uvedeme však zde několik konkrétních příkladů na řešení lineárních diferenciálních rovnic v oboru polynomů.

Příklad 1. Řešme rovnici $Y' = 4x^2 - 2x + 5$.

Řešení. Víme, že derivace polynomu stupně $n \geq 1$ je polynom stupně $n - 1$. Z věty o rovnosti polynomů pak plyne, že hledaný polynom Y musí mít takový stupeň, aby $n - 1 = 2$, tedy $n = 3$. (Na pravé straně rovnice je polynom druhého stupně.) Hledaný polynom Y bude mít tvar $Y(x) = u_3 x^3 + u_2 x^2 + u_1 x + u_0$, kde u_0, u_1, u_2, u_3 jsou jistá reálná čísla, přičemž $u_3 \neq 0$.

Vypočítejme derivaci $Y'(x)$ hledaného polynomu a dosadíme do dané rovnice:

$$Y'(x) = 3u_3 x^2 + 2u_2 x + u_1,$$

$$3u_3 x^2 + 2u_2 x + u_1 = 4x^2 - 2x + 5$$

Z věty o rovnosti polynomů plyne:

$$3u_3 = 4, \quad 2u_2 = -2, \quad u_1 = 5.$$

Odtud dostáváme: $u_3 = \frac{4}{3}$, $u_2 = -1$, $u_1 = 5$, u_0 je libovolné reálné

číslo, které obvykle zapisujeme do tvaru $u_0 = c$. Daná rovnice má nekonečně mnoho kořenů tvaru

$$Y(x) = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 5x + c.$$

Zkouškou se snadno přesvědčíte o správnosti výpočtu.

Příklad 2. Řešme rovnici $Y' = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $a_k \neq 0$.

Řešení. Hledejme kořen ve tvaru

$$Y(x) = u_n x^n + u_{n-1} x^{n-1} + \dots + u_1 x + u_0, \quad u_n \neq 0.$$

Podle věty o rovnosti polynomů a z vlastnosti derivace polynomu stupně n dojdeme k podmínce $n - 1 = k$, neboli $n = k + 1$.

Polynom $Y(x)$ (pokud existuje) musí mít tedy tvar

$$Y(x) = u_{k+1} x^{k+1} + u_k x^k + \dots + u_2 x^2 + u_1 x + u_0, \quad \text{potom}$$

$$Y'(x) = (k+1) u_{k+1} x^k + k u_k x^{k-1} + \dots + 2u_2 x + u_1$$

Dosazením do dané rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} (k+1) u_{k+1} x^k + k u_k x^{k-1} + \dots + 2u_2 x + u_1 &= \\ &= a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

Podle věty o rovnosti polynomů dostaneme tyto podmínky pro hledané koeficienty u_{k+1} , u_k , u_1 , u_0 :

$$(k+1) u_{k+1} = a_k \Rightarrow u_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$$

$$k u_k = a_{k-1} \Rightarrow u_k = \frac{a_{k-1}}{k}$$

$$2u_2 = a_1 \Rightarrow u_2 = \frac{a_1}{2}$$

$$u_1 = a_0$$

$$u_0 = c \text{ (libovolné reálné číslo).}$$

Daná rovnice má nekonečně mnoho kořenů tvaru

$$Y(x) = \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \frac{a_{k-1}}{k} x^k + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c.$$

Zkoušku proveďte sami.

Příklad 3. Řešme diferenciální rovnici $2x^2 Y' - 3Y = 5$.

Řešení. Položme $Y = u_n x^n + \dots + u_1 x + u_0$, pak je
 $Y' = nu_n x^{n-1} + \dots + 2u_2 x + u_1$

Po dosazení do dané rovnice dostaneme:

$$\begin{aligned} 2x^2 \cdot [nu_n x^{n-1} + (n-1)u_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2u_2 x + u_1] - \\ - 3(u_n x^n + \dots + u_1 x + u_0) = 5, \\ 2nu_n x^{n+1} + [2(n-1)u_{n-1} - 3u_n]x^n + [2(n-2)u_{n-2} - 3u_{n-1}]x^{n-1} + \\ + \dots + (4u_2 - 3u_3)x^3 + (2u_1 - 3u_2)x^2 - 3u_1 x - 3u_0 = 5. \end{aligned}$$

Z věty o rovnosti polynomů plyne:

$$\left. \begin{aligned} 2nu_n = 0 \Rightarrow u_n = 0 \\ 2(n-1)u_{n-1} - 3u_n = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_{n-1} = 0,$$

$$\begin{aligned} 4u_2 - 3u_3 &= 0, \\ u_2 &= 0, \\ -3u_1 &= 0, \\ u_1 &= 0, \\ -3u_0 &= 5 \Rightarrow u_0 = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Daná rovnice má jediný kořen $Y(x) = -\frac{5}{3}$. (Provedte zkoušku.)

Poznámka. Při řešení příkladu 3 se můžeme přímo omezit na polynom stupně 0 (plyne z věty o rovnosti polynomů a z vlastnosti derivace polynomů).

Příklad 4. Určeme reálné číslo a tak, aby rovnice

$$2x^2 \cdot Y' - 3 \cdot Y = 3x^2 + ax + 1$$

měla řešení v oboru polynomů.

Řešení. Z věty o rovnosti polynomů a z vlastnosti derivace je zřejmé, že se můžeme omezit na polynom prvního stupně (na pravé straně rovnice je polynom druhého stupně, proto stačí volit Y tak, abychom po dosazení do levé strany rovnice dostali také polynom druhého stupně). Položme

$$Y = u_1 x + u_0, \quad \text{tj.} \quad Y' = u_1$$

Po dosazení do dané rovnice dostaneme:

$$\begin{aligned} 2x^2 \cdot u_1 - 3(u_1 x + u_0) &= 3x^2 + ax + 1, \\ 2u_1 x^2 - 3u_1 x - 3u_0 &= 3x^2 + ax + 1 \end{aligned}$$

Z věty o rovnosti polynomů plyne:

$$\left. \begin{aligned} 2u_1 &= 3 \Rightarrow u_1 = \frac{3}{2} \\ -3u_1 &= a, \\ -3u_0 &= 1, \\ u_0 &= -\frac{1}{3}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -\frac{9}{2},$$

$$Y(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}, \quad a = -\frac{9}{2}. \quad (\text{Proveďte zkoušku.})$$

Příklad 5. Řešme rovnici $5x^2 \cdot Y' - 2Y = 2x^2 + x + 1$.

Řešení. Kořenem dané rovnice bude zřejmě polynom prvního stupně. Položme

$$Y = u_1x + u_0, \quad \text{pak} \quad Y' = u_1$$

Po dosazení do dané rovnice dostáváme

$$5x^2 \cdot u_1 - 2(u_1x + u_0) = 2x^2 + x + 1,$$

$$5u_1x^2 - 2u_1x - 2u_0 = 2x^2 + x + 1,$$

$$\left. \begin{aligned} 5u_1 &= 2 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{2} \\ -2u_1 &= 1 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{ s p o r !}$$

$$u_0 = -\frac{1}{2}.$$

Rovnice nemá řešení v oboru polynomů.

Cvičení.

Řešte diferenciální rovnice v oboru polynomů.

1. $Y' = a$
2. $(x+1) \cdot Y' + 2x \cdot Y = x^3 + a$
3. $Y' = 3x$
4. $(2x+1) \cdot Y' - 3Y = C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0$
5. $xY' - 3Y = x^2$
6. $(x+1) \cdot Y' - 2Y = ax + b$

Výsledky cvičení.

1. $Y = ax + C$.
2. $Y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, a = -\frac{1}{2}$.
3. $Y = \frac{3}{2}x^2 + C$.

$$4. Y = \frac{1}{3} C_3 x^3 + (C_2 - C_3)x^2 + (2C_2 - 2C_3 - C_1)x + \frac{2}{3}C_2 - \frac{2}{3}C_3 - \\ - \frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_0. \quad 5. Y = Cx^3 - x^2. \quad 6. Y = Cx^2 + (2C - a)x + C - \\ - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}.$$

Trojuholníková nerovnosť

JOZEF DOBOŠ, poslucháč PF UK Bratislava

Pod trojuholníkovou nerovnosťou sa bežne rozumie tento vzťah medzi dĺžkami ľubovoľného trojuholníka:

Dĺžka každej strany je menšia alebo rovná súčtu dĺžok ostatných strán. Vo formálnom zápise:

$$(1) \quad d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C),$$

kde A, B, C sú vrcholy daného trojuholníka a $d(A, C)$ je vzdialenosť bodu A od bodu C , teda dĺžka strany určenej bodmi A, C [$d(A, B)$, $d(B, C)$ analogicky]. Tento vzťah je nám intuitívne zrejmý (nakreslite si obrázok!). Všimnime si niektoré ďalšie vlastnosti vzdialenosti. Predovšetkým vzdialenosť bodu U od bodu V [značíme $d(U, V)$] je rovná nule práve vtedy, keď sú oba body totožné:

$$(2) \quad d(U, V) = 0 \Leftrightarrow U = V$$

Ďalej je vzdialenosť bodu U od bodu V rovnaká ako vzdialenosť bodu V od bodu U :

$$(3) \quad d(U, V) = d(V, U).$$

S predstavou o vzdialenosti dvoch bodov ako dĺžke úsečky nimi určenej v bežnom praktickom živote nevystačíme. Napríklad v železničnej doprave merať vzdialenosť dvoch miest (žel. staníc) podľa takejto predstavy o vzdialenosti, t. j. „letecky“, nemá praktický význam. Pritom aj v matematike sa ukazuje, že vlastnosti (1) až (3) majú aj iné „vzdialenosti“. Položme napr. $d(X, Y) = 0$ pre $X = Y$, $d(X, Y) = 1$ pre $X \neq Y$. Potom d má skutočne vlastnosti (1) až (3) (overte to!).

Zaujímavý príklad je uvedený v sovietskom časopise *Kvant* (ktorý mnohí z vás určite poznajú) v čísle 1 z roku 1979 (v podobnej rubrike, ako je „Naše súťaž“):

Príklad 1. Nech

$$\varrho(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + y^2}}.$$

Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, c).$$

Vidíme, že treba overiť trojuholníkovú nerovnosť [overte vlastnosti (2) a (3)!]. Že to až tak jednoduché nie je, zistíme po počiatočných neúspechoch. Najskôr si všimnime, že pre všetky $\delta \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) platí:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \delta = \frac{1}{\cos^2 \delta}.$$

Skutočne, $1 + \operatorname{tg}^2 \delta = 1 + \frac{\sin^2 \delta}{\cos^2 \delta} = \frac{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta}{\cos^2 \delta} = \frac{1}{\cos^2 \delta}$, pričom sme

využili známy vzťah $\cos^2 \delta + \sin^2 \delta = 1$.

Nech x, y sú ľubovoľné reálne čísla. Pretože funkcia tangens nadobúda ako svoje hodnoty všetky reálne čísla, potom existujú čísla α, β také, že $x = \operatorname{tg} \alpha, y = \operatorname{tg} \beta$ (pozrite si graf funkcie tangens!). Po dosadení do vzťahu

$$\varrho(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + y^2}}$$

dostávame

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &= \frac{|\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{|\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta|}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \beta}}} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha} \cdot \sqrt{\cos^2 \beta} \cdot |\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta| = |\cos \alpha| \cdot |\cos \beta| \left| \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right| = \\ &= \left| \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) \right| = |\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta| = |\sin(\alpha - \beta)|. \end{aligned}$$

Pritom sme využili známy vzťah $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta}$ pre $\delta \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

vlastnosti absolútnej hodnoty

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

a súčtový vzorec pre sínus $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Teda platí

$$(4) \quad \varrho(x, y) = |\sin(\alpha - \beta)|,$$

kde $x = \operatorname{tg} \alpha, y = \operatorname{tg} \beta$. Teraz sme už dostatočne vyzbrojení na riešenie

našej úlohy. Nech a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla. Potom existujú čísla α, β, γ také, že $a = \operatorname{tg} \alpha, b = \operatorname{tg} \beta, c = \operatorname{tg} \gamma$. Teda $\varrho(a, c) = |\sin(\alpha - \gamma)| = |\sin[(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)]| = |\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\beta - \gamma)| \leq |\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\beta - \gamma)| + |\cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\beta - \gamma)| = |\sin(\alpha - \beta)| \cdot |\cos(\beta - \gamma)| + |\cos(\alpha - \beta)| \cdot |\sin(\beta - \gamma)| \leq |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| = \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$, čiže $\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$. Pritom sme využili súčtový vzorec pre sínus [$\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$], vlastnosti absolútnej hodnoty ($|x + y| \leq |x| + |y|, |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$) a vlastnosť funkcie kosínus ($|\cos \delta| \leq 1$). Tým sme príklad vyriešili.

Na základe predošlých úvah môžeme zaviesť pojem metriky.

Nech $\mathbf{M}$ je ľubovoľná množina. Hovoríme, že na množine $\mathbf{M}$ je definovaná *metrika* ϱ práve vtedy, keď každej usporiadanej dvojici prvkov x, y z množiny $\mathbf{M}$ je priradené nezáporné číslo, ktoré označíme $\varrho(x, y)$ a ktoré má tieto vlastnosti:

- (i) $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
- (iii) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$,

pre všetky prvky x, y, z z množiny $\mathbf{M}$.

Množinu $\mathbf{M}$, na ktorej je definovaná metrika ϱ , nazveme *metrickým priestorom*. Tento metrický priestor označíme symbolom $(\mathbf{M}, \varrho)$.

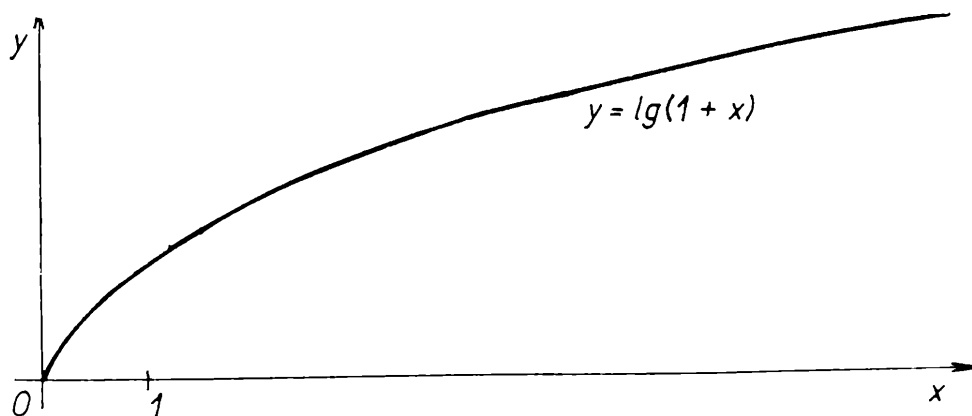
V ďalšom zovšeobecníme postup použitý v príklade 1.

Veta 1. Nech $a < b$ sú reálne čísla a $d(x, y) = |x - y|$ pre x, y z intervalu (a, b) (overte, že d je metrika!). Nech zobrazenie f zobrazuje množinu $\mathbf{R}$ do množiny $\langle 0, \infty \rangle$. Nech pre každé x, y z intervalu $(a - b, b - a)$ platí

- (a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (b) $f(-x) = f(x)$,
- (c) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

Potom zobrazenie ϱ definované predpisom $\varrho(x, y) = f(d(x, y))$ je metrika na intervale (a, b) .

Dôkaz. Vlastnosti (i) a (ii) vyplývajú z toho, že d je metrika a platí (a). Ukážeme vlastnosť (iii). Nech x, y, z sú ľubovoľné čísla z intervalu (a, b) . Pre určitosť predpokladajme, že napr. $x \leq z \leq y$. Potom $d(x, y) = |x - y| = y - x = (y - z) + (z - x) = |y - z| + |x - z| = d(y, z) + d(x, z)$, teda $d(x, z) = d(x, y) + (-d(y, z))$ a podľa (b) a (c) platí $\varrho(x, z) = f(d(x, z)) = f(d(x, y) + (-d(y, z))) \leq f(d(x, y)) + f(-d(y, z)) = f(d(x, y)) + f(d(y, z)) = \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. Teda ϱ je metrika na (a, b) . Teraz uvedieme jednu veľmi jednoduchú metódu, ktorá nám umožní definovať na množine $\mathbf{M}$ s danou metrikou d ďalšie metriky.



Obr. 1

Veta 2. Nech $\mathbf{M}$ je množina a d metrika na $\mathbf{M}$. Nech f je zobrazenie s definičným oborom $\langle 0, \infty \rangle$ a s oborom hodnôt $\mathbb{R}$. Nech pre všetky reálne čísla x, y z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ platí:

$$(5) \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(6) \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

$$(7) \quad f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Každý usporiadanej dvojici prvkov x, y z množiny $\mathbf{M}$ priradíme číslo $\varrho(x, y) = f(d(x, y))$. Potom ϱ je metrika na množine $\mathbf{M}$.

Dôkaz. Ukážeme, že ϱ má vlastnosť (i):

Nech $\varrho(x, y) = 0$. Potom $f(d(x, y)) = 0$, teda $d(x, y) = 0$ podľa (5). Pretože d je metrika, platí $x = y$.

Nech naopak $x = y$. Pretože d je metrika, platí $d(x, y) = 0$, teda $\varrho(x, y) = f(d(x, y)) = 0$ podľa (5).

Ukážeme, že ϱ má vlastnosť (ii):

Pretože d je metrika, platí $\varrho(x, y) = f(d(x, y)) = f(d(y, x)) = \varrho(y, x)$.

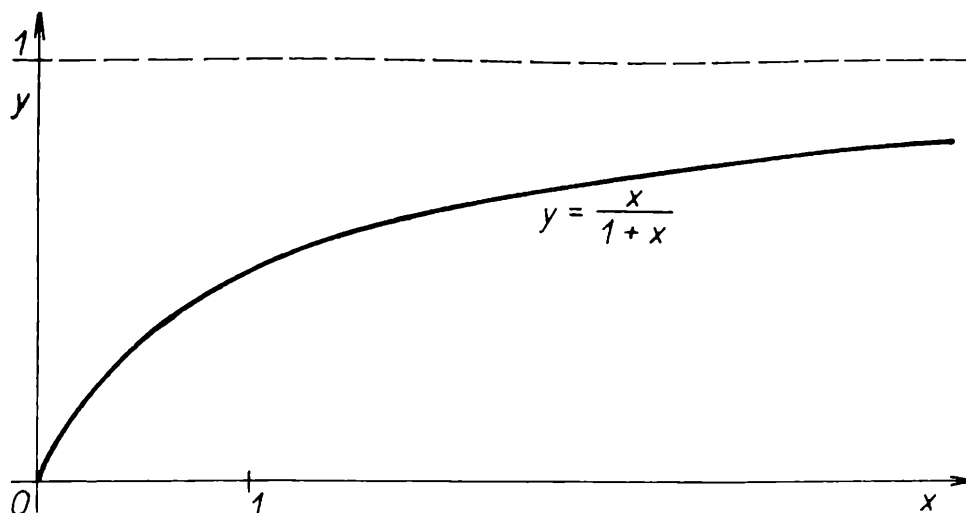
Ukážeme, že ϱ má vlastnosť (iii):

Pretože d je metrika, platí $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Podľa (6) a (7) teda platí $\varrho(x, z) = f(d(x, z)) \leq f(d(x, y) + d(y, z)) \leq f(d(x, y)) + f(d(y, z)) = \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. Teda ϱ je metrika.

Príklad 2. Ukážte, že zobrazenie f definované predpisom $f(x) = \lg(1 + x)$ pre každé x z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ (obr. 1.) vyhovuje podmienkam vety 2.

Pretože logaritmus je rastúca funkcia, pre každé $x > 0$ platí $f(x) = \lg(1 + x) > \lg 1 = 0$. Pretože $f(0) = \lg 1 = 0$, platí $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Teda platí vlastnosť (5).

Z rastúcosti logaritmu dostávame $f(x + y) = \lg(1 + x + y) \leq \lg(1 + x + y + xy) = \lg(1 + x)(1 + y) = \lg(1 + x) + \lg(1 + y) = f(x) + f(y)$. Teda $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Ak je teraz $(\mathbf{M}, d)$ ľubovoľný



Obr. 2

metrický priestor, potom pomocou zobrazenia f dostávame nový metrický priestor $(\mathbf{M}, \varrho)$ s metrikou $\varrho(x, y) = \log[1 + d(x, y)]$.

Príklad 3. Ukážte, že zobrazenie f definované predpisom $f(x) = x/(1+x)$ pre každé x z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ (obr. 2.) vyhovuje podmienkam vety 2.

Vlastnosti (5) a (6) sú zrejmé. Vlastnosť (7) dostávame takto:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \frac{u+v}{1+u+v} = \frac{u}{1+u+v} + \frac{v}{1+u+v} \leq \\ &\leq \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v} = f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Pre metriku ϱ máme teda $\varrho(x, y) = d(x, y)/[1 + d(x, y)]$.

Príklad 4. Ukážte, že zobrazenie f definované predpisom $f(x) = \min(1, x)$ (pričom pre ľubovoľné reálne čísla u, v je symbol $\min(u, v)$ definovaný predpisom $\min(u, v) = u$ ak $u \leq v$, $\min(u, v) = v$ ak $u > v$) vyhovuje podmienkam vety 2.

Overíme vlastnosť (7) (overte (5) a (6)!). Nech u, v sú ľubovoľné reálne čísla z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Ak je $u+v < 1$, platí $f(u+v) = \min(1, u+v) = u+v = \min(1, u) + \min(1, v) = f(u) + f(v)$. Ak je $u+v \geq 1$, je $f(u+v) = \min(1, u+v) = 1 \leq \min(2, u+v, 1+u, 1+v) \leq \min(1, u) + \min(1, v) = f(u) + f(v)$.

Pozrime sa teraz pozorne na obrázky 1 a 2. Ich spoločnou vlastnosťou je konkávnosť. Overte i pre $f(x) = \min(1, x)$. Pripomeňme si definíciu konkávnosti.

Hovoríme, že zobrazenie f definované na intervale I s hodnotami v množine reálnych čísel je *konkávne* práve vtedy, keď pre každé dva body u, v z intervalu I každý bod $M_z = [z; f(z)]$ grafu zobrazenia f , pre ktorý $u < z < v$, leží nad úsečkou spájajúcou body $M_u = [u; f(u)]$, $M_v = [v; f(v)]$. (Nakreslite si obrázok.)

Platí následujúca veta, ktorú uvedieme bez dôkazu.

Veta 3. Nech $\mathbf{M}$ je množina a d metrika na $\mathbf{M}$. Nech f je zobrazenie s definičným oborom $\langle 0, \infty)$ a s oborom hodnôt $\mathbf{R}$. Nech pre všetky $x, y \in \langle 0, \infty)$ platí:

$$(8) \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(9) \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

$$(10) \quad f \text{ je konkávne.}$$

Položme $\varrho(x, y) = f(d(x, y))$. Potom ϱ je metrika na $\mathbf{M}$.

Následujúca veta (ktorej jednoduchý dôkaz prenechávame čitateľovi) poukazuje na to, že neklesajúcosť zobrazenia f nie je nutnou podmienkou na to, aby $\varrho(x, y) = f(d(x, y))$ bola metrika na $\mathbf{M}$.

Veta 4. Nech $\mathbf{M}$ je množina a d metrika na $\mathbf{M}$. Nech f je zobrazenie s definičným oborom $\langle 0, \infty)$ a s oborom hodnôt $\mathbf{R}$. Nech platí

$$(11) \quad f(0) = 0,$$

$$(12) \quad \text{existuje také reálne číslo } a > 0, \text{ že pre každé } x \text{ z intervalu } (0, \infty) \text{ platí } a \leq f(x) \leq 2a.$$

Položme $\varrho(x, y) = f(d(x, y))$. Potom ϱ je metrika na množine $\mathbf{M}$.

Doteraz sme si ukazovali, ako možno pomocou vhodného zobrazenia f a metriky d na množine $\mathbf{M}$ definovať na tej istej množine $\mathbf{M}$ inú metriku. Teraz popíšeme inú metódu, ktorá nám umožní pomocou metriky d na množine $\mathbf{Q}$ a vhodného zobrazenia f množiny $\mathbf{P}$ do množiny $\mathbf{Q}$ definovať metriku ϱ na množine $\mathbf{P}$.

Hovoríme, že zobrazenie f množiny $\mathbf{P}$ do množiny $\mathbf{Q}$ je *prosté*, práve vtedy, keď pre každé $x, y \in \mathbf{P}$ platí

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Veta 5. Nech f je *prosté* zobrazenie množiny $\mathbf{P}$ do množiny $\mathbf{Q}$. Nech d je metrika na množine $\mathbf{Q}$. Každéj usporiadanej dvojici prvkov x, y z množiny $\mathbf{P}$ priradíme číslo $\varrho(x, y) = d(f(x), f(y))$. Potom ϱ je metrika na množine $\mathbf{P}$.

Dôkaz. Najskôr ukážeme vlastnosť (i). Nech $\varrho(x, y) = 0$. Potom $d(f(x), f(y)) = 0$. Pretože d je metrika, platí $f(x) = f(y)$. Pretože f je *prosté*, platí $x = y$.

Nech teraz $x = y$. Potom $f(x) = f(y)$. Pretože d je metrika, platí $\varrho(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0$.

Teraz ukážeme vlastnosť (ii). Pretože d je metrika, platí $\varrho(x, y) = d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) = \varrho(y, x)$.

Nakoniec ukážeme vlastnosť (iii). Pretože d je metrika, platí $\varrho(x, z) = d(f(x), f(z)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z)) = \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Teda ϱ je metrika na množine $\mathbf{P}$.

Cvičenia

1. Overte, že zobrazenie f definované predpisom $f(x) = 3x - 2 \cdot |x - 1| + |x - 2|$ pre každé x z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$, splňa podmienky (5), (6), (7), (8), (9), pritom však nie je konkávne.
2. Overte, že zobrazenie f definované predpisom $f(0) = 0$, $f(x) = |x - 1| - x + 3$ pre každé x z intervalu $(0, \infty)$, splňa podmienky (11), (12), ale nespĺňa (6).
3. Ukážte, že ϱ je metrika na množine reálnych čísel:
 - a) $\varrho(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|$
 - b) $\varrho(x, y) = [|x - y|] + 2$ pre $x \neq y$, $\varrho(x, x) = 0$
(symbol $[a]$ znamená celú časť čísla a)
 - c) $\varrho(x, x) = 0$,
 $\varrho(x, y) = 1$ ak $x \neq y$ a $x - y$ je racionálne číslo
 $\varrho(x, y) = 2$ ak $x \neq y$ a $x - y$ je iracionálne číslo
 - d) $\varrho(x, y) = \log \left(1 + \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + y^2}} \right)$.

Literatúra

- [1] P. Kostyrko — T. Šalát, Metrické priestory pre 3. ročník gymnázií s rozšíreným vyučovaním matematiky, SPN Bratislava 1976
- [2] A. Kufner, Co asi nevíte o vzdálenosti, MLADÁ FRONTA Praha 1974

Prvočíselná dvojčata

Je-li p prvočíslo a je-li $p + 2$ tiež prvočíslo, pak se čísla p , $p + 2$ nazývají prvočíselná dvojčata. Pokud tabulky prvočísel sahají, stále se s určitou nepravidelností prvočíselná dvojčata vyskytují, ale nevíme, zda je těchto dvojic nekonečně mnoho. Zde je několik příkladů prvočíselných dvojčat z oblasti malých prvočísel:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73),

Nejhlubší výsledek, který je o prvočíselných dvojčatech znám, je tzv. *Brunova věta*. Podle ní řada

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) +$$

kde se sčítá přes všechna dvojčata, má konečný součet. Jinými slovy vy-

jádřeno — prvočíselných dvojčat je buď konečně mnoho nebo jsou mezi přirozenými čísly rozmístěna tak „řídce“, že výše zmíněná nekonečná řada konverguje. Označme B součet oné řady. *D. Shanks* a *J. W. Wrench ml.* odhadli roku 1974 číslo B vztahem

$$B = 1,90218 \pm 2 \cdot 10^{-5},$$

přičemž se opírali o jednu domněnku *Hardyho* a *Littlewooda*.

Jak informuje časopis *Journal of Recreational Mathematics* v jednom svém čísle z roku 1979, největší dosud známá prvočíselná dvojčata našli *H. C. Williams* a *C. R. Zarnke*. Jsou to čísla

$$76 \cdot 3^{139} - 1, \quad 76 \cdot 3^{139} + 1$$

Opět jedna ukázka, jak se uplatňují počítače v číselné teorii.

J. S.

Jak se kreslily perspektivy v době Albrechta Dürera

Doc. ing. dr. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT Praha

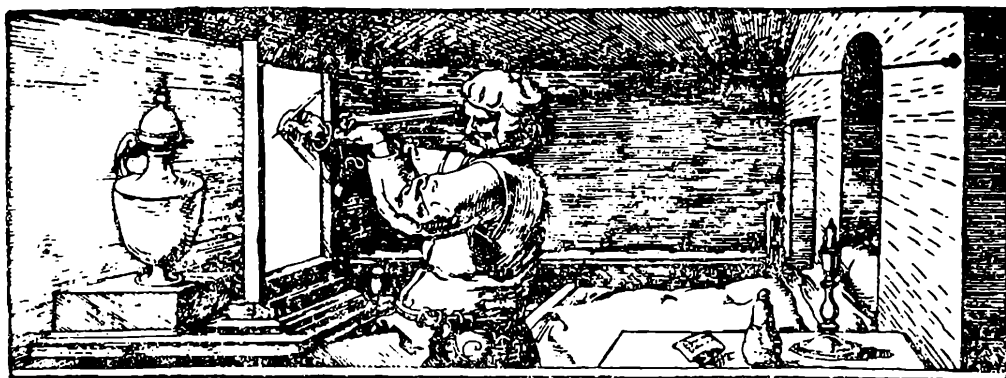
Obrazy z 15. až 19. století vynikají dokonalou realistickou kresbou. Malíři dokázali kreslit s fotografickou přesností nejen architektury, ale i neživou a živou přírodu, osoby a děje. Díky jejich umění víme, jak tehdy lidé bydleli, jak se oblékali, jak pracovali a jak se bavili. Byl podstatou umění těchto malířů talent, nebo řemeslná dovednost? Pravděpodobně spojení obojího, ale základem byla určitě malířská zručnost. Používalo se mnoho tradovaných předpisů, mnoho důmyslných jednoduchých i složitých pomůcek k vytváření perspektivně správné kresby. Předpisy jsou uchovány v teoretických spisech té doby, ale pomůcky upadly v zapomenutí, neboť dnešní malíři přenechávají věrné zobrazení fotografům.

Německý malíř *Albrecht Dürer* (1471–1528) v knize s dlouhým názvem začínajícím slovy „*Underweysung der Messung...*“ (Návod k měření....) z roku 1525 zobrazil prostředky, které se v jeho době používaly k sestrojování perspektiv (obr. 1–3). Když si je dobře prohlédnete, uvědomíte si, kolik píle a práce je skryto v obrazech té doby.

Malíř kreslí *ženský akt* (obr. 1). Vrchol jehlanu postaveného na stole zajišťuje neměnnou polohu oka. Odtud malíř pozoruje postavu přes čtvercovou síť, tvořenou vodorovnými a svislými nitěmi ve svislém



Obr. 1



Obr. 2

rámu. Rám je průmětnou a vrchol jehlanu středem perspektivního promítání. Průměty význačných bodů převádí malíř do bodů v odpovídajících čtvercích druhé sítě, předkreslené na plátně obrazu, které má před sebou na stole.

Podobnou metodu (tj. používání rámu se sítí) popisuje jiná dřevorežba Dürerova, kterou reprodukuje v brožuře o perspektivě prof. *Emil Kraemer**. Upozorňuji na tuto publikaci nejen pro onu kresbu, ale i proto, že podává stručný a jasný výklad o základech perspektivy.

Kresba vázy (obr. 2). Středem perspektivního promítání není tentokrát malířovo oko, ale konec motouzu, připevněného na zdi pracovny. Na provázku je navlečena trubička, která má na koncích průzorový otvor a „mušku“ (podobný systém se dosud používá pro zacílení pušek). Průsečík promítacího paprsku zobrazovaného bodu s rovinou obrazu (sklo ve svislém rámu) se určí tak, že se hrotem pera posune tak dlouho, až v průzoru, při napjatém provázku, splyne hrot pera se zobrazovaným bodem vázy.

Kresba hlavy (obr. 3). Tento dřevoryt znázorňuje zařízení, jímž lze nastavit polohu oka podle potřeby malíře. Otvor pro oko je na konci svislé tyče, kterou je možno jednak vysunovat vzhůru a jednak posunovat do stran pomocí šnekového a hřebenového ozubení. Opět se hrotem pera zaznamená v rovině okénka průmět zobrazovaného bodu.

Všechny tyto metody se týkají zobrazování bodů složitých ploch, případně portrétů. Pro perspektivní zobrazování architektur, tj. přímek,

* Emil Kraemer „Perspektiva“, Přírodovědecké vydavatelství 1951



Obr. 3

případně kružnic, existovaly už v Dürerově době geometrické konstrukce, využívající např. hlavní bod perspektivy. Do hlavního bodu se sbíhají perspektivy hloubkových přímek, tj. těch hran místností na obr. 1—3, které jdou kolmo na rovinu obrazu.

Možná, že tyto Dürerovy reprodukce budou inspirovat zájmové kroužky k zhotovení podobných pomůcek, které umožní kresbu perspektivy složitějších ploch tak, jak kreslivali staří mistři. (S žádostmi o obstarání modelů se však na nás neobracejte. Pozn. red.)

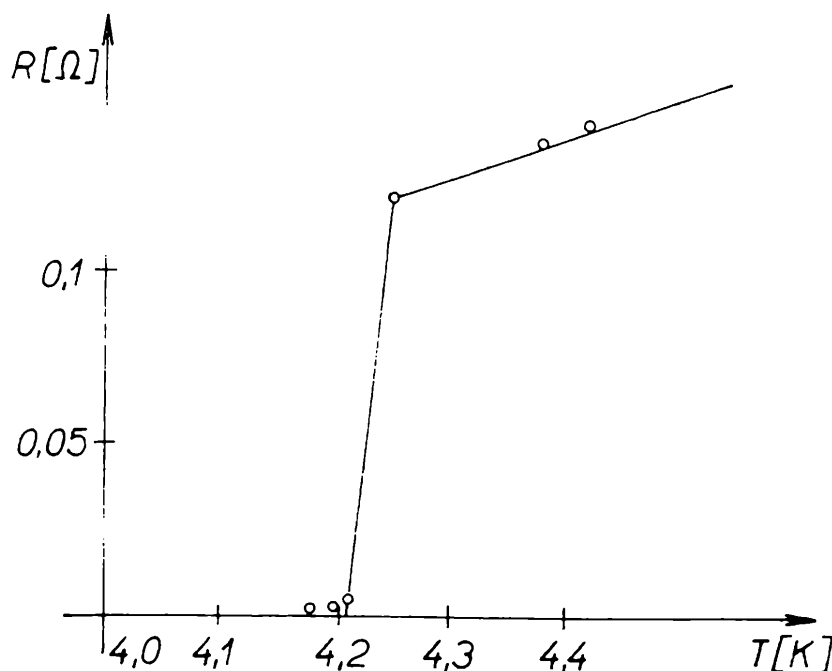
V roce 1981 budou oslavy 200. výročí narození Bernarda Bolzana

Československá akademie věd uspořádá mezinárodní konferenci a Matematická vědecká sekce Jednoty československých matematiků a fyziků konferenci českých matematiků. JČSMF vydá k Bolzanovu výročí publikaci.

Supravodivost – kolektivní kvantový jev

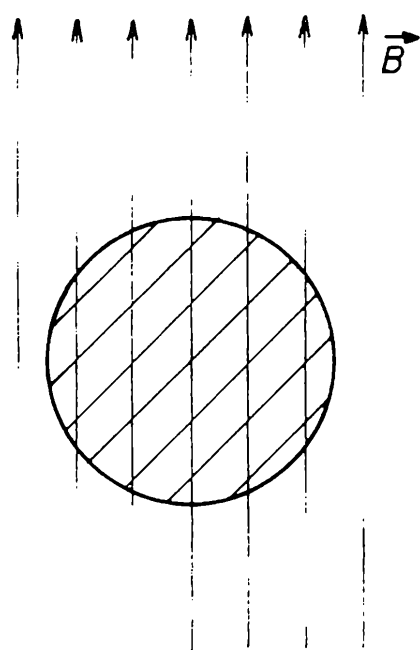
RNDr. MILAN ODEHNAL, CSc., Fyzikální ústav ČSAV, Praha

Jev supravodivosti kovů byl objeven poměrně dávno. V roce 1908 holandský fyzik *Kamerlingh Onnes* zkapalnil poprvé plynné hélium (izotop ^4He). Při atmosférickém tlaku vře tato bezbarvá kapalina při absolutní teplotě 4,2 K. Díky této ojedinělé možnosti experimentovat při tak nízkých teplotách objevil v roce 1911 *Kamerlingh Onnes* jev supravodivosti u kovové rtuti. Onnes začal proměřovat odpor některých materiálů při této nízké teplotě a zjistil, že u rtuti dochází při teplotě blízké 4,2 K prakticky k vymizení elektrického odporu. Na obr. 1 je znázorněna historická závislost odporu rtuti na teplotě.



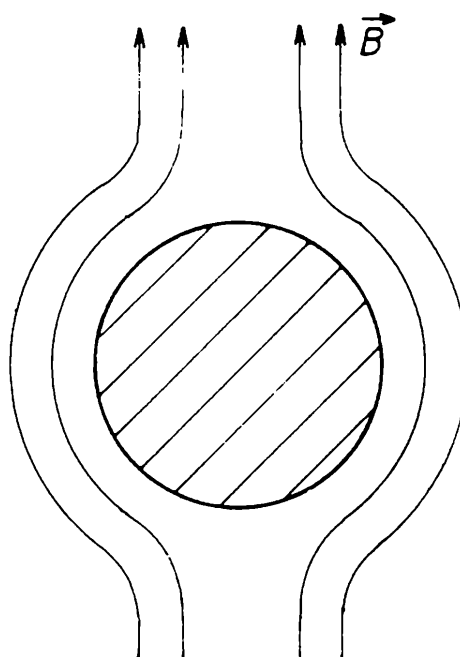
Obr. 1

Tento naprosto nový fyzikální jev byl pak nalezen u celé řady dalších kovů, slitin i organických materiálů (a je objevován dodnes — nedávno byla např. poprvé zjištěna supravodivost i u izotopu transuranového prvku americia). Nicméně mnoho úsilí fyziků a metalurgů je nyní věnováno nalezení materiálu, který by měl tzv. kritickou teplotu T_c , tj. teplotu, pod níž je materiál supravodivý, co nejvyšší. Dnes je známo



$$T > T_c$$

Obr. 2a



$$T < T_c$$

Obr. 2b

přes 1000 supravodivých prvků, slitin a sloučenin a jejich počet neustále roste. Nejvyšší kritická teplota známá v současné době je $T_c = 23,2$ K, byla nalezena u materiálu Nb_3Ge . Kdyby se totiž podařilo nalézt nebo uměle připravit technologicky vhodný materiál s kritickou teplotou při pokojových teplotách, znamenalo by to zcela určitě revoluci v elektrotechnice, elektronice a v technice vůbec. Veškerý přenos elektrické energie by se tak mohl uskutečňovat s minimálními tepelnými (Joulovými) ztrátami atd.

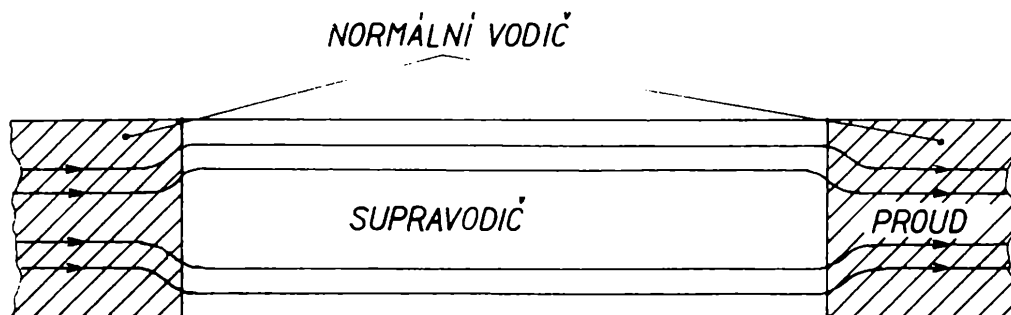
Proto se právem předpokládá, že supravodivost sehraje důležitou roli v technice budoucnosti. I přes současné technické komplikace s chlazením supravodivých materiálů kapalným héliem či kapalným vodíkem (teplota bodu varu kapalného vodíku při atmosférickém tlaku je zhruba 20 K), je už dnes v chodu celá řada experimentálních zařízení, používajících supravodiče (velké elektromagnety u urychlovačů elementárních částic, supravodivé urychlovače, experimentální magnety, supravodivé motory, magnetické separátory, magnetické akumulátory elektromagnetické energie, supravodivé rezonátory, elektronické obvody, počítačové prvky, supravodivé magnetometry atd.).

Ale proč má vlastně supravodič nulový elektrický odpor? Téměř 50 let fyzika nedovedla objasnit, proč tomu tak je, a nabízela pouze fenomenologický popis jevu a klasifikovala jeho vlastnosti. Klíč k mikroskopické teorii však chyběl až do roku 1957.

Všimněme si však ještě několika pozoruhodných vlastností supravodivého stavu.

V roce 1933 *Meissner* a *Ochsenfeld* objevili další, snad ještě důležitější a hlubší vlastnost supravodičů, než je nulový stejnosměrný odpor (pro střídavé proudy vykazuje supravodič nepatrný odpor rostoucí s kmitočtem). Zjistili totiž, že supravodiče vytlačují ze svého vnitřku magnetickou indukci $\mathbf{B}$ — viz obr. 2. Indukční čáry vektoru $\mathbf{B}$, které při teplotě $T > T_c$ pronikají celým objemem např. kovové koule — obr. 2a, jsou při jejím ochlazení na teplotu $T < T_c$ vytlačeny prakticky vně této supravodivé koule. Existuje ovšem určitá hodnota magnetické indukce B_c , tzv. kritická indukce, při níž dochází k rozrušení supravodivého stavu. U tzv. supravodičů I. typu je tato hodnota kritické indukce relativně nízká (řádově 0,1 tesla), ale u tzv. „tvrdých“ supravodičů II. typu existují dokonce dvě hodnoty této kritické indukce, a to B_{c1} a B_{c2} . Pro $B > B_{c1}$ začne do materiálu pronikat magnetická indukce postupně ve formě jakýchsi vírových vláken s naprosto přesně definovanou hodnotou magnetického toku Φ_0 (toto kvantum magnetického toku se nazývá fluxon a má hodnotu $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-15}$ Wb). Střed takového vírového vlákna je v „normálním“ stavu a procházejí jím magnetické siločáry. Kolem tohoto „normálního“ jádra v supravodivém materiálu pak tečou supravodivé stínící proudy.

Obr. 3

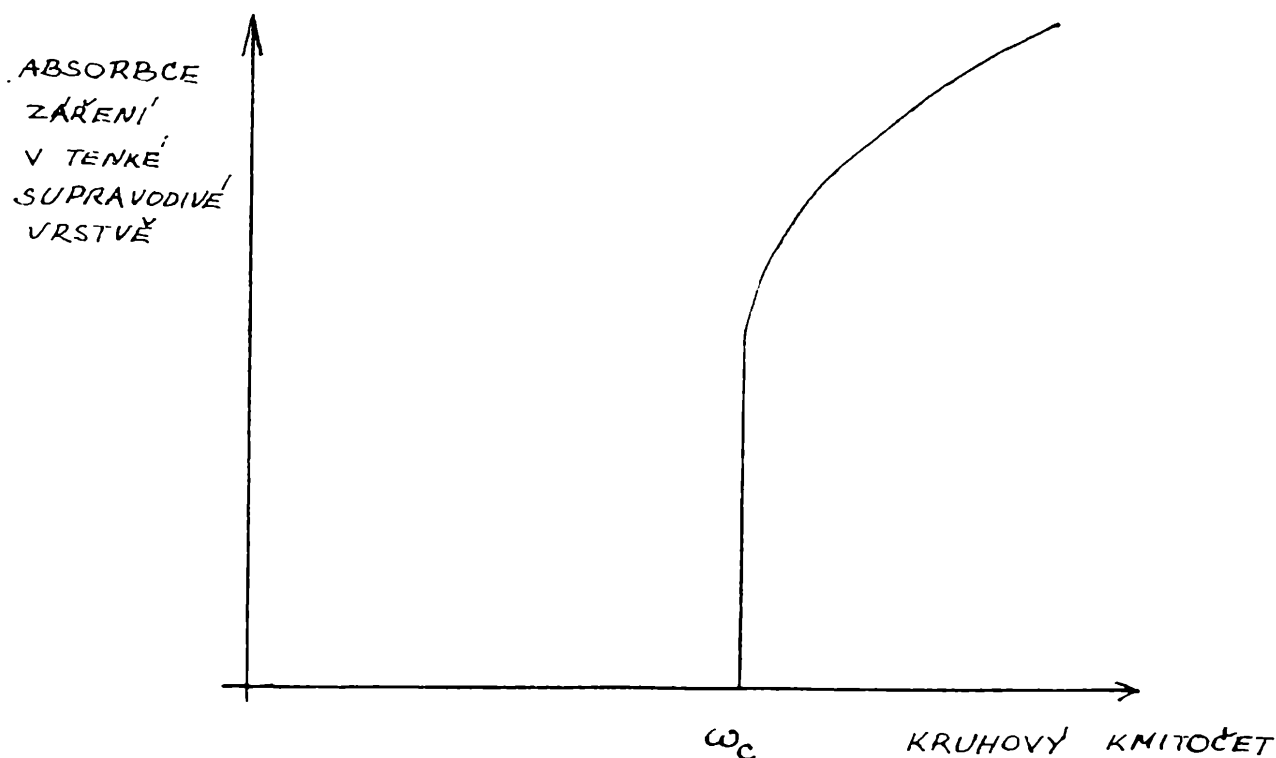


Pronikání magnetické indukce do tohoto supravodivého materiálu postupuje při zvyšování vnějšího magnetického pole a při hodnotách indukce rovné B_{c2} (řádově až několik desítek teslů) dojde teprve k rozrušení supravodivého stavu. Tyto materiály, které „vydrží“ veliké hodnoty magnetické indukce a také vysoké proudové hustoty, jsou v podstatě základem pro všechny aplikace supravodivosti v technické praxi.

Supravodivost můžeme tedy rozrušit teplotou ($T > T_c$) a magnetickým polem ($B > B_c$ či $B > B_{c2}$) nebo i vysokou proudovou hustotou j_c .

Magnetická indukce proniká do supravodičů I. typu jen do hloubky zhruba 10^{-5} cm (tzv. Londonova hloubka vniku). Také elektrické proudy jsou vedeny supravodičem pouze na povrchu a nepronikají do vnitřku masivního supravodiče (v normálním vodiči teče stejnosměrný proud celým průřezem vodiče) — viz obr. 3.

Další zvláštností je existence energetické mezery 2Δ v energetickém spektru elektronů supravodičů. Základní stav supravodiče je, podobně



Obr. 4

jako u polovodičů, oddělen od vodivostního pásu elektronů pásem zakázaných energií. Pokud např. dopadající elektromagnetické záření nemá energii dostatečnou k překonání této zakázané zóny, nedochází k absorpci elektromagnetického záření elektronovou soustavou supravodiče ($2\Delta \approx 10^{-3}$ eV a kritická frekvence $\omega_c \approx (10^9 + 10^{14})\text{Hz}$) — viz obr. 4.

Neméně podivnou a zcela kvantovou (tj. neklasickou) povahu projevuje uzavřený supravodivý prstenec. Plochou A , obemknutou takovým supravodivým prstencem, může pronikat pouze zcela určitý kvantovaný magnetický tok:

$$\Phi = B_n \cdot A = n\Phi_0 \quad \text{kde } n = 0, 1, 2, 3,$$

B_n je složka magnetické indukce kolmá na plochu A a $\Phi_0 = h/2e$ je nám už známý fluxon neboli elementární kvantum magnetického toku, dané poměrem dvou základních fyzikálních konstant — Planckovy konstanty h a náboje elektronu e . Vidíme znova, že magnetický tok, obemknutý supravodivým materiálem, může nabývat pouze kvantovaných hodnot, tj. celočíselných násobků elementárního kvanta Φ_0 . To je zcela překvapující, protože jinak víme, že magnetický tok nemá žádný důvod být kvantován a že může nabývat spojitě libovolných hodnot. Ve výrazu pro elementární kvantum magnetického toku se objevuje veličina $2e$ a nikoli e , což ukazuje na to, že supravodivost bude spojena s existencí elektronových párů a ne jednotlivých elektronů.

Celá plejáda teoretických fyziků, včetně takových geniálních teoretiků, jako byli *Einstein* a *Heisenberg*, se snažili objasnit záhadu supravodivosti, Einstein sám již v roce 1920 nebyl daleko od pravdy, když mluvil o analogii supravodivosti a feromagnetismu a o existenci jakýchsi kore-

lovaných elektronových „shluků“, které se mohou pohybovat v mřížce kovu bez „tření“. Přechod paramagnetické látky při snižování teploty do feromagnetického stavu stejně jako i přechod látky z normálního vodivého stavu do stavu supravodivého je fázovým přechodem tzv. druhého druhu. Ve feromagnetiku vede při $T < T_c$ kolektivní elektrostatická interakce k vytvoření makroskopické spontánní magnetizace, která se „nerozpadne“ působením dezorganizujícího tepelného pohybu. Podobně se i v supravodiči vytvoří pod $T < T_c$ jakýsi vnitřní pořádek v soustavě elektronového plynu (pořádek na makroskopických vzdálenostech, tj. mnohem větších než jsou meziatomové vzdálenosti), který bude charakterizován jakýmsi parametrem pořádku (je to v podstatě hodnota energetické mezery 2Δ , která je rovna nule při $T \geq T_c$, nebo tzv. makroskopická vlnová funkce), tak jako je tímto parametrem pořádku vektor magnetizace ve feromagnetiku.

Že mechanismus vodivosti v supravodiči a v normálním vodiči je úplně jiný, tušili fyzikové již dávno. Ukazovalo se totiž, že ty nejlepší vodiče elektrického proudu (Cu, Ag, Au atd.) nepřecházejí do supravodivého stavu, zatímco špatně vodivé materiály přecházejí do supravodivého stavu snadno a relativně při vysokých teplotách. Tak tedy například zatímco metry „špinavého“ oloveného drátu je možné už při teplotě kolem 7 K převést snadno do supravodivého stavu, nepodařilo se nám to dodnes u vzácných kovů ani při značně nižších teplotách. Jako by interakce elektronů s mříží iontů hrála pozitivní roli při přechodu do supravodivého stavu. A skutečně tento paradox je pravdou. Čím větší je tato interakce elektronů s elastickými vibracemi mřížky (tzv. fonony), tím vyšší je i kritická teplota supravodiče.

Tato přitažlivá interakce elektronů s mřížkou (s fonony) vede k vytváření párových elektronových dvojic — tzv. Cooperův jev. V supravodiči dochází tedy k zajímavému a na první pohled neobvyklému jevu. Známé coulombovské odpuzování stejnojmenných nábojů elektronů (stíněné mříží kladných iontů) je při $T < T_c$ menší než přitahování elektronů, způsobené interakcí elektronů s mřížkou. Tuto skutečnost, že elektrony se v supravodiči přitahují, si můžeme vysvětlit zhruba mechanickým modelem měkké matrace. Na tuto matraci položíme nejdříve jednu kuličku a ta svojí vahou deformuje kolem sebe materiál matrace. Další kulička už bude kladena na mírně deformovanou matraci a sama vytvoří kolem sebe podobnou lokální deformaci podložky. Stačí pak nepatrný pohyb, aby se obě kuličky „přitáhly“ a spadly do společného důlku.

V soustavě nabitých iontů a elektronového plynu si to můžeme představit tak, že záporně nabitý elektron při průchodu mřížkou trvale vychyluje podél své dráhy okolní kladné ionty. Říkáme, že se tento elektron „obléká“ do kladného náboje. Náboj takového „oblečeného“ elektronu může být i mírně — v určitém krátkém časovém okamžiku — kladný,

a může tedy přitahovat jiný elektron. Existence interakce elektronů a kolektivních vibrací mřížky (fononů) je tedy pro supravodivost podstatná.

V supravodiči pak vznikají určitým způsobem korelované elektronové dvojice (Cooperovy páry). Průměr takového elektronového páru je $\approx 10^{-4}$ cm! (Připomeňme si, že perioda mřížky je řádově 10^{-8} cm.) Elektrony takového páru jsou od sebe daleko a existuje mezi nimi interakce na dlouhou vzdálenost (zprostředkují ji kvanta vibrací mřížky—fonony). Toto přitahování elektronů vede k úplnému přebudování energetického spektra volných elektronů. Takové elektronové páry, na rozdíl od jednotlivých elektronů, mohou „kondenzovat“ ve větším počtu do jednoho energetického stavu (nejnižší základní stav). Takovému velkému počtu částic v jednom kvantovém stavu říkáme „kondenzát“. Ve spektru energií se nám objevuje energetická mezera — zakázaný pás energií. Obrovské „makromolekuly“ Cooperových párů jsou v tomto kondenzátu silně překryty a vytváří z elektronového plynu (podle Londona, jednoho z tvůrců fenomenologické teorie supravodivosti) téměř „tuhou“ soustavu, energeticky velmi soudržnou, kterou nenarušuje tepelný pohyb mřížky (podobně jako magnetizaci ve feromagnetiku), vnější magnetická pole, elektromagnetické fotony, procházející proud, atd., pokud nedosahují tzv. kritických hodnot (T_c , B_c , ω_c , j_c), po jejichž překročení dojde k rozrušení kondenzátu.

Takový kondenzát elektronových párů vykazuje také kvantové jevy v makroskopickém měřítku, protože jev supravodivosti je vlastně kvantový makroskopický jev a nedá se vysvětlit v pojmech klasické fyziky. Za mikroskopické objasnění jevu supravodivosti v roce 1957 dostali američtí fyzikové *Bardeen* (Bardeen dostal Nobelovu cenu již dříve za objev tranzistoru), *Cooper* a *Schrieffer* Nobelovu cenu za fyziku.

Shrnutí :

Některá experimentální fakta:

1. stejnosměrný odpor se rovná nule ($T < T_c$, $B < B_c$);
2. magnetická indukce $\mathbf{B}$ je uvnitř masivního supravodiče rovna nule;
3. v energetickém spektru existuje energetická mezera;
4. magnetický tok uzavřený supravodivým prstencem je kvantován.

Základní pojmy potřebné pro vysvětlení jevu supravodivosti:

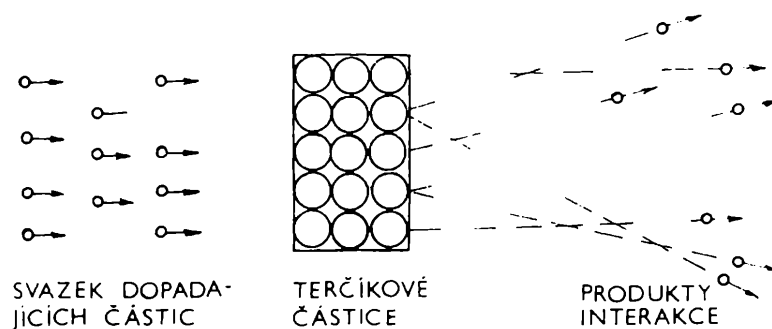
1. při $T < T_c$ převládá přitahování elektronů (zprostředkované fonony mřížky) nad coulombovským odpuzováním;
2. elektrony při $T < T_c$ vytvářejí páry (Cooperovy páry);
3. páry jsou silně překryty;
4. páry kondenzují do jediného základního stavu (tzv. Boseova-Einsteinova kondenzace v prostoru hybností) a vzniká tzv. kondenzát a energetická mezera ve spektru elektronových excitací;

5. poruchy a vnější vlivy, jejichž energie je menší, než je vazební energie elektronů a párů, nejsou schopny narušit kolektivní pohyb (těžišťový pohyb) kondenzátu (odtud plyne nulový elektrický odpor, Meissnerův jev atd.);
6. je to kvantový jev (a tedy projevuje se u něj silně vlnový charakter pohybu);
7. supravodivý prstenec s kvantovými hodnotami magnetického toku představuje jakýsi „magnetický“ Bohrov model atomu s kvantovanými drahami, na jejichž obvodu se musí uložit celistvý počet tzv. de Broglieových vln;
8. je to kvantový jev projevující se v makrosvětě a měřitelný tedy na fyzikálních makroskopických veličinách (proud, magnetické pole, magnetický tok atd.).

Měření v mikrosvětě

Doc. ing. ZDENĚK JANOUT, CSc., Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
ČVUT Praha

Člověk je bytost makroskopická. Rozlišovací schopnost jeho orgánů je o mnoho řádů nižší než ta, která je potřebná pro bezprostřední poznávání mikroobjektů, tj. molekul, atomů anebo ještě menších útvarů, jakými jsou atomová jádra a elementární částice. Proto jsou všechna pozorování událostí v mikrosvětě nepřímá. Jeden ze způsobů studia atomů, atomových jader, elementárních částic je jejich rozpad. Na základě druhu a charakteristik částic, vysílaných rozpadajícím se mikroobjektem, získáme informace o jeho struktuře. Nevýhodou tohoto způsobu je skutečnost, že je omezen pouze na nestabilní částice a atomová jádra. Tento způsob studia mikroobjektů připomíná do jisté míry situaci, se kterou se setkávají astronomové, kteří na základě analýzy paprsků přicházejících k nám z Vesmíru činí závěry o povrchu, struktuře a dějích probíhajících na nebeských tělesech. Kromě rozpadu existuje ještě jeden, univerzálnější způsob studia mikroobjektů. Jsou to srážkové procesy. Ty realizujeme tak, že svazkem částic bombardujeme terčik obsahující atomy, atomová jádra či elementární částice, jejichž strukturu studujeme, a po srážce registrujeme vyletující částice z terčíku na makroskopických vzdálenostech od místa srážky (obr. 1). Ze studia charakteristik částic vyletujících z místa srážky získáváme poznatky o struktuře mikroobjektu a o vzájemném působení mezi částicemi. Studium mikroobjektů pomocí srážkových procesů je náročný, složitý úkol. Částice — střely



Obr. 1

musí mít značnou kinetickou energii, aby pronikly do mikroobjektu. Například aby proton pronikl k nepohyblivému jádru olova na vzdálenost 10^{-13} m při přímém rázu (čelní srážce), musí mít kinetickou energii asi 1,2 MeV k tomu, aby překonal odpudivé coulombické síly mezi jádrem a protonem. Velikost této energie vynikne, vypočítáme-li si rychlost tohoto protonu, která vychází kolem 15 000 km/s, což je zhruba 1000krát větší rychlost, než je tzv. druhá kosmická rychlost (11,2 km/s), kterou musíme udělit raketě na povrchu Země, aby překonala zemskou přitažlivost a opustila tak definitivně naši Zemi. Částice — střely takovýchto rychlostí způsobují při srážkách porušení struktury mikroobjektu, což ztěžuje jeho studium. Situaci jaderných fyziků vystihuje zhruba následující analogie uvedená v knize „Jaderná fyzika“ od autorů Širokova a Judina. Představme si, že ve středu duté koule o rozměrech zeměkoule je umístěn velký počet předmětů, například radiopřijímačů stejné značky a my po nich střílíme z kulometu z jednoho místa, které leží na povrchu duté koule. Současně se střelbou provádíme na povrchu koule detekci úlomků a zjišťujeme jejich rychlosti, druh, místa dopadu. A nyní z těchto údajů se pokuste zrekonstruovat uspořádání radiopřijímačů uvnitř koule a popřípadě i strukturu daného typu radiopřijímače a jste v podobné situaci, v jaké jsou jaderní fyzikové při studiu mikroobjektů.

I když studium mikroobjektů prostřednictvím srážek je úkol velmi obtížný, přesto je to jediný způsob, který nám umožňuje nahlédnout do nitra atomu, atomového jádra, studovat interakce mezi elementárními částicemi apod. Jedni z prvních, kdo úspěšně použili tohoto způsobu, byli v roce 1910 *Rutherford*, *Marsden* a *Geiger*. Tito fyzikové studovali strukturu atomů stříbra, platiny, zlata tím, že pozorovali pružný rozptyl části alfa na atomech těchto prvků. Výsledkem jejich experimentů byl objev atomového jádra, čímž vlastně položili „základní kámen“ nového vědního oboru — jaderné fyziky.

K realizaci srážkových procesů je zapotřebí: 1. vytvořit svazky bombardujících částic, 2. připravit terčiky s atomy (jádry, částicemi), se kterými se bombardující částice srážejí (říkáme vzájemně interagují), 3. vytvořit detektory, s jejichž pomocí lze registrovat co největší možný počet vyletujících částic a jejich charakteristik. Popišme stručně, v uvedeném pořadí, jaké jsou současné experimentální možnosti jaderných fyziků.

1. Zdroje částic, které poskytují svazky bombardujících částic.

Historicky byly prvně používány preparáty obsahující přirozeně radioaktivní jádra, emitující částice alfa, beta a fotony záření gama. Tak například Rutherford, Marsden a Geiger používali radium ^{226}Ra emitující částice alfa s energií 7,7 MeV. Po objevu umělé radioaktivity (*Irena + Frederic Joliot-Curie* v roce 1934) se začaly používat preparáty s uměle vyrobenými radionuklidy. Širokého použití například dosáhly zářiče gama ^{60}Co , ^{137}Cs , ^{24}Na a další. Avšak zdroje s radioaktivními jádry poskytují částice s energiemi pouze do několika MeV, zatímco energie potřebné k vyvolání jaderných procesů s elementárními částicemi jsou daleko vyšší. Svazky nabitých částic s dostatečnou energií pro realizaci různých jaderných procesů získáváme v urychlovačích. Urychlovačem nazýváme zařízení, ve kterém se pod účinkem elektrických a magnetických polí vytváří svazek nabitých částic vysoké energie. V současné době existují urychlovače různých typů a jsou prakticky jedinými zdroji nabitých částic, používaných k uskutečnění jaderných reakcí a reakcí s elementárními částicemi. V urychlovačích se získávají svazky částic s energiemi od několika MeV do stovek GeV, přičemž horní hranice je dána ne principiálními těžkostmi, nýbrž existujícím stavem urychlovacích techniky. Podle hrubého odhadu technický pokrok umožňuje zvýšit o řád max. energii urychlovaných částic za desetiletí. V současné době pracují ve světě dva urychlovače urychlující protony na energii 500 GeV. Jeden stojí ve Fermiho laboratoři v Batavii (USA), průměr jeho prstencového magnetu činí 2 km, druhý stojí v Evropském středisku pro jaderný výzkum ležícím na hranicích Francie a Švýcarska a má průměr magnetu 2,2 km. V urychlovačích se bezprostředně urychlují pouze stabilní nabité částice, většinou protony a elektrony, používají se však i svazky deutronů a částic alfa. Existují také urychlovače těžkých iontů, v kterých jsou urychlovány mnohonásobně nabité ionty uhlíku, dusíku, kyslíku aj. Je rozřešena i úloha získávání dostatečně intenzivních svazků pozitronů. Svazky jiných částic, jak nabitých, tak i neutrálních, získáváme prostřednictvím reakcí v terčíku, který ostřelujeme primárním svazkem z urychlovače. Tímto způsobem lze na urychlovačích získávat sekundární svazky fotonů gama, neutronů, pionů, kaonů, antinukleonů a některých dalších částic. Užitím těchto svazků lze pak studovat reakce vyvolané novými částicemi při jejich srážkách s jádrem jiného terčíku. Miony a neutrina nevznikají přímo ani v primárních ani v sekundárních svazcích. Svazky těchto částic se získávají pomocí sekundárních pionových svazků tím, že nestabilní piony tvořící sekundární svazek se po jisté době rozpadem^[1] $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu$ přemění v mion-neutrinový svazek a ten pak dalším rozpadem mionů $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_\mu + \nu_e$ přejde v neutrinový svazek. K získávání neutronových svazků s energiemi do 10 MeV existují metody nevyžadující použití urychlovačů. Za prvé — silným zdrojem neutronů v této oblasti energií je jaderný reaktor. Za

druhé se v této oblasti energií používají jednoduché a široce dostupné zdroje neutronů, v kterých je směs berylia a radioizotopu emitujícího částice alfa. Následkem reakce $^4\text{He} + ^9\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{C} + n$ dochází ke vzniku neutronů. Mezi tyto zdroje patří například Ra—Be, Po—Be, Pu—Be, Am—Be. V tomto označení na prvním místě stojí chemická značka radioaktivního prvku, který je zdrojem částic alfa. Pro úplnost poznamenejme, že konstantním zdrojem různých částic v nejširším oboru energií (do $\sim 10^5$ GeV) jsou kosmické paprsky^[2]. Zejména při studiu kosmických paprsků se do začátku padesátých let objevovaly nové elementární částice (miony, piony, kaony). Avšak s růstem energie částic dosahované, na urychlovačích se studium srážek s kosmickými částicemi omezilo, ale ne zcela přerušilo. Kosmického záření se používá ke studiu jader a elementárních částic pouze v oblasti velmi vysokých energií, kterých se zatím nepodařilo dosáhnout na urychlovačích. Nevýhodou těchto experimentů je skutečnost, že srážky kosmických částic vysokých energií probíhají velmi zřídka a pouze ve velkých výškách. Souhrnně lze všechny existující typy zdrojů elementárních částic a jader rozdělit na (a) radionuklidové zdroje, preparáty, (b) urychlovače, (c) jaderné reaktory a (d) kosmické paprsky. Pro studium jaderných reakcí se nyní hlavně používají urychlovače a reaktory. V praktických aplikacích se široce používají radionuklidové zdroje.

2. Terčíky.

Za terčíky lze použít jádra a ty elementární částice, které žijí dostatečně dlouho a které jsou součástí struktury makroskopických těles. Sem lze zařadit všechna stabilní jádra a dostatečně dlouho žijící jádra (více než hodinu). Z elementárních částic pak proton a elektron.

3. Detektory.

Detektory jaderných částic jsou zařízení, dávající informaci o průchodu jednotlivých částic skrze určitou makroskopickou oblast prostoru. Základní potíží registrace spočívá v tom, že efekt vyvolaný působením jednotlivé částice v látce detektoru je z makroskopického hlediska krajně malý. Nejlépe pozorovatelný efekt je ionizace látky nabitou částicí. Proto většina používaných detektorů nabitých částic je založena na principu využívajícím ionizační schopnosti částic. Sem patří například ionizační komory, Geiger-Müllerovy počítače^[3] a další. U několika detektorů se využívá elektromagnetického záření, které budí nabitě částice při průchodu látkou. K těmto detektorům patří například Čerenkovovy detektory využívající Čerenkovovo záření buzené rychlou nabitou částicí. Působení neutrálních částic na látku je zanedbatelně malé k tomu, aby je bylo možno detekovat bezprostředně. Proto neutrální částice detekujeme nepřímou, a to prostřednictvím sekundárních procesů, v kterých vzni-

kají nabité částice, které se pak detekují podle jejich ionizačního účinku.

Závěrem ještě upozorňujeme, že pozorování prováděná v mikrosvětě jsou vždycky statistické povahy, což je následkem statistického charakteru procesů mikrosvětá. Například zaregistrováním pouze jediného rozpadu nestabilní částice se nic nedovíme o tom, jakou dobu bude žít druhá částice téhož druhu. Pouze z pozorování 10 000 rozpadů můžeme určit poločas rozpadu těchto částic s přesností jednoho procenta.

Experiment, v kterém byl studován pružný rozptyl protonů na protonech, bude popsán v některém z příštích čísel Rozhledů mat.-fyz.

Literatura :

- [1] Janout, Z.: „Elementární částice a interakce mezi nimi“, Rozhledy mat.-fyz. 55, č. 5 (1976/77), str. 221
- [2] Janout, Z.: „Kosmické záření“, Rozhledy mat.-fyz. 54, č. 4 (1975/76), str. 159
- [3] Tulak, R.: „Padesát let Geiger-Müllerova detektoru“, Rozhledy mat.-fyz. 57, č. 6 (1978/79), str. 272

astronomie

:

Ověřte si, co znáte z astronomie

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc — RNDr. IVO VOLF, Hradec Králové

Astronomie je v některých zemích samostatným vyučovacím předmětem, a to v posledním ročníku střední všeobecně vzdělávací školy. Ze socialistických států jmenujme především Sovětský svaz, dále Německou demokratickou republiku a Polskou lidovou republiku, v nichž je výuce astronomie věnována jedna vyučovací hodina týdně. Nedílnou součástí vyučovacího procesu je rovněž průběžná kontrola a hodnocení dosažených výsledků. Aby toto hodnocení bylo co možno nejvíce objektivní, hledají se různé metody a prostředky, které by tento požadavek co nejlépe splňovaly. Jednou z možností jsou soubory kontrolních otázek, které jsou k dispozici jak žákům, tak i učitelům. Nedávno vyšla v Moskvě publikace [1], která umožňuje žákům, aby si ověřili, jak učivo pochopili a jak dovedou řešit jednoduché i složitější problémy. Vybrali jsme z této knížky tři různé skupiny úloh (vždy v několika variantách), na nichž si můžete ověřit, co např. víte o pohybech těles v naší sluneční soustavě.

První skupina úloh :

- 1.1. Určete velikost velké poloosy oběžné dráhy Uranu, jestliže siderická doba oběžná této planety kolem Slunce je 84 roků.
- 1.2. Které planety můžeme pozorovat v opozici se Sluncem ? Které naopak nemůžeme pozorovat ?
- 2.1. Za jaký časový interval se opakují opozice Marsu, jestliže siderická doba oběžná Marsu kolem Slunce je 1,9 roku ?
- 2.2. Jak se mění velikost rychlosti pohybu planety při jejím přemístění od perihélia k aféliu ?
- 3.1. Určete siderickou dobu oběžnou Venuše kolem Slunce, jestliže se její horní konjunkce se Sluncem opakují za 1,6 roku.
- 3.2. Po jakých dráhách se mohou pohybovat tělesa vlivem gravitační síly ?
- 4.1. Siderická doba oběžná Jupitera kolem Slunce je 12 roků. Jaká je střední vzdálenost Jupitera od Slunce ?
- 4.2. Jestliže pozorujeme Venuši v ranních hodinách, je vzhledem ke Slunci posunuta na západ nebo na východ ?
- 5.1. Určete synodickou dobu oběžnou Merkura kolem Slunce, víte-li, že siderická doba oběžná je 0,24 roku.
- 5.2. Po jakých trajektoriích se pohybují kosmické výzkumné stanice k Měsíci nebo k planetám ?
- 6.1. Jaká je siderická doba oběžná vnější planety kolem Slunce, jestliže se její opozice opakují každého 1,5 roku ?
- 6.2. Které společné znaky mají vnější planety ?

Druhá skupina úloh :

- 1.1. Ze Země je možno rozlišit na Měsíci, který je ve vzdálenosti 380 000 km, neozbrojeným okem objekty o průměru asi 200 km. Určete, jak velké objekty může pozorovat kosmonaut na Marsu ze vzdálenosti 1 000 000 km bez dalekohledu.
- 1.2. Za jakých podmínek by se kosmická tělesa pohybovala přesně podle Keplerových zákonů ?
- 1.3. Proč byla Galileova pozorování dalekohledem potvrzením správnosti Koperníkových myšlenek ?
- 2.1. Kolikrát se změnil úhlový průměr Marsu, pozorovaný z povrchu Země, jestliže planeta přešla z opozice do konjunkce ? Dráhu Marsu pokládáme za kružnici o poloměru 1,5 UA.
- 2.2. Uvedte a vysvětlete některé metody k určení tvaru a rozměrů Země.
- 2.3. V čem spočívá rozdíl mezi Koperníkovou a Ptolemaiovou soustavou ?
- 3.1. Z jaké vzdálenosti uvidí kosmonaut Zemi pod stejným úhlem, jako je vidět z povrchu Země náš Měsíc ? Vzdálenost Země a Měsíce zvolíme 380 000 km, poloměr Měsíce je 1700 km, poloměr Země je 6400 km.

- 3.2. Uvedte způsoby určování vzdáleností těles ve sluneční soustavě a vysvětlete je.
- 3.3. V čem spočívá význam objevů, které učinil Galileo Galilei dalekohledem, pro rozvoj materialistických představ o světě?
- 4.1. Horizontální paralaxa Slunce je $8,8''$. Je Mars na téže straně od Slunce jako Země nebo na opačné, jestliže jeho horizontální paralaxa je $18''$?
- 4.2. Popište zákonitosti změn rychlostí pohybu planety kolem Slunce.
- 4.3. Uvedte, proč a v jakých konkrétních případech bojovala církev proti myšlence heliocentrismu.
- 5.1. Je známo, že pro pozemšťana je úhlový průměr Slunce roven $30'$. Určete úhlový poloměr Slunce při pozorování z oběžné dráhy Jupitera, jehož vzdálenost od Slunce je 5 UA.
- 5.2. Po jakých dráhách se mohou pohybovat kosmická tělesa vlivem gravitační síly?
- 5.3. Jaký je význam Koperníkových myšlenek pro rozvoj astronomie?
- 6.1. V jaké vzdálenosti od Země je Saturn (v astronomických jednotkách), je-li jeho horizontální paralaxa rovna $0,9''$? Horizontální paralaxa Slunce je $8,8''$.
- 6.2. Vysvětlete periodičnost přílivů a odlivů.
- 6.3. Vyjmenujte Koperníkovy následovníky a uveďte, jaký byl jejich přínos pro rozvoj a rozšíření jeho učení.

Třetí skupina úloh :

- 1.1. Jaká je vzdálenost Měsíce od Země, jestliže jeho horizontální paralaxa je rovna $54'$?
- 1.2. Vysvětlete příčinu přílivů a jejich význam při změnách rotace Země a jiných kosmických těles.
- 1.3. Za jak dlouho se opakují opozice planetky, je-li velká poloosa její dráhy rovna 2 UA?
- 2.1. Rozlišovací schopnost lidského oka je $2'$. Jaké objekty rozliší kosmonaut na povrchu Země z kosmické lodi, která se pohybuje ve výšce 240 km nad povrchem Země?
- 2.2. Jak by se musela změnit hmotnost Země, aby se Měsíc pohyboval v téže vzdálenosti, ale s větší dobou oběžnou? Zdůvodněte svou odpověď!
- 2.3. V jaké vzdálenosti od středu Země se musí pohybovat stacionární družice, která se pohybuje v rovině zemského rovníku s dobou oběžnou rovnou době rotace Země kolem osy?
- 3.1. Pod jakým úhlem se bude jevit Mars ze vzdálenosti 1 000 000 km?
- 3.2. V kterou denní dobu je možné pozorovat Mars a Venuši? Čím jsou určeny rozdíly v podmínkách viditelnosti těchto planet?
- 3.3. Kolikrát je hmotnost Saturna větší než hmotnost Země, jestliže jsou o jejich družicích známy tyto údaje: Dione (družice Saturna)

je od planety vzdálena 378 000 km, doba oběžná je 2,75 dne; Měsíc je vzdálen od Země 380 000 km, doba oběžná je 27,3 dne. Hmotnosti družic můžeme vzhledem k hmotnosti planet zanedbat.

- 4.1. Nakreslete obrázek, v němž ukážete, v jaké poloze je Mars vzhledem k Zemi a ke Slunci, je-li jeho horizontální paralaxa rovna $13,5''$.
- 4.2. Z jakých pozorování je možno stanovit, že dráha Země není kruhová?
- 4.3. Čemu je rovna doba oběhu umělé družice Země, jestliže velká poloosa oběžné dráhy je rovna 6900 km?

Čtenářům, kterým nejsou známy některé pojmy, doporučujeme sbírku úloh [2], která vyšla již ve třetím vydání v r. 1977 ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze. Obsahuje 300 příkladů (s výsledky) ze všech oborů astronomie, ale také stručný přehled důležitých definic, vzorců a konstant.

Řešení některých úloh:

První skupina úloh: 1.1. 19,2 UA. — 1.2. Vnější planety ano, vnitřní planety ne. — 2.1. 780 dní. — 2.2. Zmenšuje se; podle druhého Keplerova zákona je největší v perihéliu, nejmenší v aféliu. — 3. 1. 223 dny. — 3.2. Po kuželosečkách, v závislosti na počáteční rychlosti tělesa. — 4.1. 5 UA. — 4.2. Na západ od Slunce. — 5.1. 117 dní. — 5.2. Po elipsách. — 6.1. 3 roky. — 6.2. Jsou viditelné v různé úhlové vzdálenosti od Slunce; pomalu se pohybují mezi hvězdami.

Druhá skupina úloh: 1.1. 530 km. — 1.2. Při existenci pouze dvou vzájemně se přitahujících těles. — 2.1. Zmenšil by se $5\times$ (vzdálenost mezi Zemí a Marsem při opozici je 0,5 UA, v konjunkci 2,5 UA.) — 3.1. 1 400 000 kilometrů. — 4.1. Mars je k Zemi blíže než Slunce. — 4.2. Užijeme druhý Keplerův zákon. — 5.1. $6'$. — 5.2. Po kuželosečkách, v závislosti na rychlosti. — 6.1. 9,8 UA.

Třetí skupina úloh: 1.1. 400 000 km. — 1.3. 2,8 roku, 1,56 roku. — 2.1. 140 m. — 2.2. Hmotnost Země se musí zmenšit. — 2.3. 42 190 km. — 3.1. $11'20''$. — 3.2. Mars kdykoliv v noci, Venuši ráno či večer. — 3.3. $M_S \doteq 100 M_Z$. — 4.1. 0,65 UA, tj. Mars je v blízkosti opozice. — 4.2. Z pozorování úhlových rozměrů Slunce a jeho horizontální paralaxy. — 4.3. 1,6 hodiny.

Literatura:

- [1] Malachova, G. I. — Straut, J. K.: Didaktičeskij material po astronomii. Moskva, Prosveščeniye, 1979. 96 s.
- [2] Široký, J. — Široká, M.: Základy astronomie v příkladech. (3. vyd.) Praha, SPN, 1977. 158 s.

Z dějin exaktních věd

Cesta Martina Pačobuta - Odlěnického ke hvězdám

Dr. MILOSLAV ZIMA, Slovanská knihovna, Praha

Již 250 let uplynulo od narození velkého vědce Martina Pačobuta-Odlěnického, který žil na tom území dnešního Svazu sovětských socialistických republik, kde před 60 lety (1. 1. 1919) byla ustavena Běloruská sovětská socialistická republika a které za života M. Pačobuta bylo součástí Pospolitosti polsko-litevské.

Martin Pačobut-Odlěnický (bělorusky Marcin Pačobut-Adljanicki, polsky Marcin Paczobut-Odlenicki), známý zároveň jako radikální reformátor školství, spoluzakladatel lékařské fakulty při Hlavní škole Velikého knížectví Litevského, tj. při univerzitě, rektor Vilenské univerzity (od r. 1780), redaktor jedné z nejstarších novin v Bělorusku a Litvě („Gazeta Wileńska“), člověk jemného estetického vkusu a autor návrhu na zřízení Umělecké akademie ve Vilnu, se narodil r. 1728 ve vesnici Slamjanka v Hrodněnském okrese v šlechtické rodině. Po ukončení studií na Hrodněnském jezuitském kolegiu pracoval několik let jako učitel v Polocku a ve Vilně a potom si rozšířil své vzdělání, zejména v matematice a astronomii, studiem v západní Evropě.

Bylo to v době, kdy v Evropě probíhaly velké změny. U nás v Čechách to byla doba ranních červánků, doba slavného slavisty *Josefa Dobrovského* a vrstevníků Pačobutových, rovněž hvězdářů a matematiků *Josefa Steplinga* (1716—1778), *Antonína Strnada* (1749—1799), *Jana Tesánka* (1728—1788) a dalších (jako např. *J. Böhma*, *I. France*, *J. Kleina*, *J. Kresy*, *V. Stansela*, *St. Vydry*, *P. Chládko*), kteří měli obdobné osudy, když po zrušení řádu Tovaryšstva Ježíšova přešli do školství a na univerzitu a vynikli v matematice a fyzice.

V cizině se Pačobut seznámil s racionalistickými myšlenkami osvícenské filozofie 18. století. Přijal za své názory, že hlavním prostředkem pokroku, přetváření a rozvoje společnosti jsou vědecké poznatky, ideje dobra, spravedlnosti a jim podobné pozitivní jevy. Toto přesvědčení ho podnítilo po návratu do vlasti r. 1764 k aktivní činnosti na katedře matematiky a astronomie ve Vilenské akademii. Avšak uskutečňování jeho snah naráželo na konservatismus jezuitů. Teprve když byl tento řád

r. 1773 zrušen, mohla se plně rozvinout Pačobutova vědecká, pedagogická, veřejně politická a literární činnost.

Stává se především zakladatelem a prvním ředitelem hvězdárny ve Vilně. Věnuje tomu své úspory i prostředky, které pro tento účel získal od Výchovné komise, a v Anglii opatřuje nejmodernější zařízení, takže se jím budovaná hvězdárna vyrovnala hvězdárně v Greenwichi i v Paříži. Podobně to učinil v Praze *J. Stepling*, když při zakládání klementinské hvězdárny (r. 1751) věnoval na její vybavení většinu svého dědictví.

Na vilenské hvězdárně se Pačobut-Odlěnický věnoval intenzivnímu astronomickému pozorování, studoval pohyb Merkura, který byl v té době viditelný jen s obtížemi, zajímal se o egyptský zodiak, vypočítal zeměpisné souřadnice mnoha běloruských a litevských měst a určil polohu souhvězdí, které nazval „Býk Poniatowských“; toto souhvězdí bylo potvrzeno pařížskou akademií věd a zaneseno do hvězdných soupisů. Prováděl i pozorování meteorologická. Své práce psal v různých jazycích a vydával je doma i za hranicemi.

Pačobut byl svým současníkům znám nejen jako nadaný hvězdář a rektor-reformátor, ale i jako vynikající básník. Své básně skládal rusky, latinsky nebo polsky. Uvítací báseň na počest návštěvy cara Alexandra I. na Vilenské univerzitě složil původně latinsky, ale hned ji mistrně přebásnil do ruštiny.

Martin Pačobut-Odlěnický byl členem Královské astronomické společnosti v Londýně, dopisujícím členem pařížské Akademie věd i jiných evropských společností. Poslední král Polsko-litevské pospolitosti Stanislav August Poniatowský při návštěvě vilenské hvězdárny udělil Pačobutovi čestný titul královského hvězdáře a roku 1775 dal na jeho počest a v uznání jeho vědeckých zásluh razit medaili s Pačobutovou podobiznou a s nápisem: „*Sic itur ad astra*“ („Tak se kráčí ke hvězdám“).

Poznámka : Pospolitost polsko-litevská měla svůj počátek v personální unii mezi Královstvím polským a Velikým knížectvím litevským (r. 1385) s cílem ubránit se agresí řádu Německých rytířů. Roku 1569 byl Lublinskou unií vytvořen federativní svazek zvaný polsky *Rzecz pospolita*, litevsky *Unia* a bělorusky — (neboť tzv. Litva byla státem převážně běloruským a jen veliké kníže a část obyvatelstva byli Litevci) — *Reč paspalitaja*. Latinsky se sice jmenovala „*Res publica*“, ale nebyla republikou, nýbrž monarchií, opírající se o velkou šlechtu. Převaha polského prvku způsobila, že k třídnímu konservatismu přistoupil i útlak národnostní a náboženský. Složité problémy vyústily nakonec v krizi Polsko-litevské pospolitosti a v její trojí dělení: roku 1772, 1793 a 1795. Po třetím dělení zmizelo samostatné Polsko z mapy Evropy a litevská část Pospolitosti se zbytkem území běloruského a některými okresy ukrajinskými připadly Ruskému impériu.

Pro volnou chvíli

Trlenka

Doc. dr. MILAN HEJNÝ, CSc., Bratislava

Južne od Ružomberka leží dolina zvaná Trlenská; liptáci hovoria Trlenô. V júli 1979 sa tu konal pioniersky tábor mladých matematikov. Na tomto tábore bola po prvý raz hraná matematická hra, vymyslená pre účely tábora. Dali sme jej meno podľa krásnej zemepisnej lokality tábora. Cieľom tohto článku je naučiť čitateľa hrať Trlenku a pobaviť čitateľa.

Pravidlá hry. Trlenka sa hrá na šachovnici 4×4 . Hrajú dvaja hráči A (nička) a B (ohuš), ktorí sa pravidelne striedajú v ťahoch. Začína hráč A . V každom ťahu hráč položí jeden, dva, tri alebo štyri kamene na voľné polia niektorého riadku alebo stĺpca. Na každé pole môže hráč položiť najviac jeden kameň. Hráč, ktorý položí posledný, šestnásty kameň, prehrá.

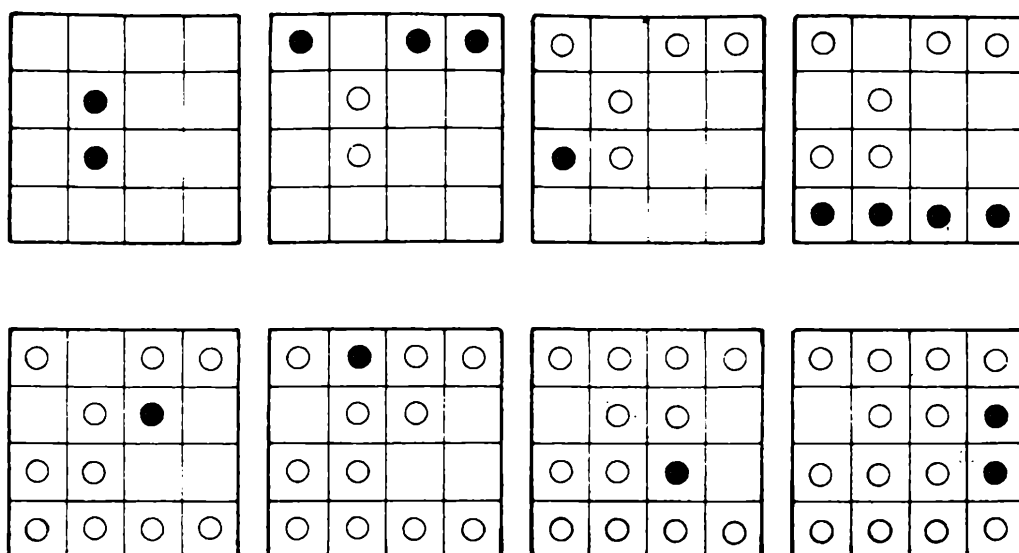
Pravidlá každej hry sa najlepšie pochopia priamo pri hre. Uvedme preto aj my aspoň jednu ukážkovú partiu.

Príklad partie. Priebeh partie je znázornený sériou ôsmych obrázkov (pozri obr. 1.), na ktorých položenie kameňa značíme bodkou. V prvom ťahu hráč A položil dva kamene do druhého stĺpca. Potom hráč B položil 3 kamene na polia prvého riadku. V treťom ťahu pokračoval hráč A — položil jediný kameň na pole prvého stĺpca a tretieho riadku. Hra pokračovala ďalej, ako je naznačené na obrázku. V sérii ťahov chýba posledný. V ňom hráč A bol nútený obsadiť posledné voľné pole; teda prehrá.

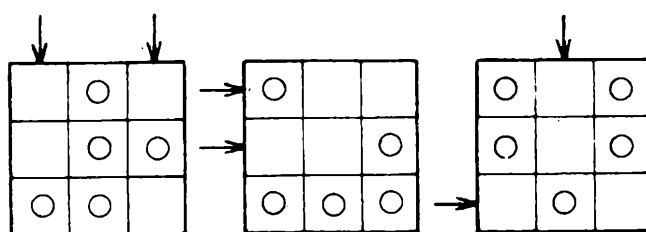
Zamyslite sa nad uvedenou partiou a pokúste sa odpovedať na tieto tri otázky:

1. Mohol zahrať hráč A v siedmom ťahu tak, aby po akejkolvek odpovedi hráča B partiu vyhral?
2. Predpokladajme, že hráč A v piatom ťahu partie položil kameň nie do tretieho, ale do prvého stĺpca. Ako by v tokam prípade mal odpovedať hráč B ?
3. Mohol hráč A v treťom ťahu partie zahrať lepšie?

Ak sa vám podarilo úspešne zodpovedať posledné tri otázky, skúste sa zamyslieť nad problémom: Môže hráč A partiu vyhrať? Presnejšie: nájdite návod pre hráča A , aby podľa toho návodu zvíťazil nad každým súperom!



Obr. 1



Obr. 2a

Obr. 2b

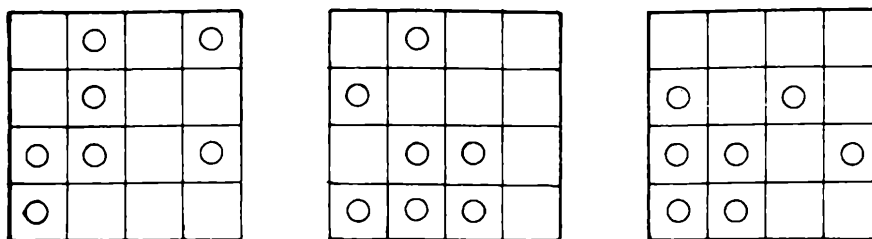
Obr. 2c

Posledný príkaz môže byť nesplniteľný. Požadovaný návod môže neexistovať. Naopak — môže existovať návod pre hráča *B*, podľa ktorého hráč *B* zaručene vyhrá každú partiu. Isté ale je, že pre jedného z hráčov (zatiaľ nevieme pre ktorého) taký návod na výhru existuje. Takýto návod voláme *stratégia hry*.

Potešenie z objavu stratégie hry Trlenka prenecháme čitateľovi. Ako ilustráciu hľadania stratégie uvidíme stratégiu jednoduchšej hry — Trlenky na šachovnici 3×3 . Túto zjednodušenú úpravu Trlenky nazveme (po liptácky) *Trlenôčka*.

Stratégia Trlenôčky. Spomedzi všetkých možných pozícií hry (koľko ich je?) vyznačíme niektoré dôležité — nazveme ich *kritické*. Sú to tie pozície, v ktorých hráč na ťahu nutne prehrá, ak jeho súper pozná návod na výhru. Trlenôčka má tieto 4 typy kritických pozícií (a žiadne iné):

1. obsadených je práve 8 polí (tj. jediné je voľné);
2. obsadených je práve 6 polí, pričom v každom riadku i každom stĺpci je práve jedno pole neobsadené;
3. obsadených je práve 5 polí a pre polohu 4 voľných polí nastáva jedna z troch možností: a) po dve ležia v dvoch stĺpcoch — obr. 2a, b) po dve ležia v dvoch riadkoch — obr. 2b, c) dve ležia v riadku a dve



Obr. 3

ležia v stĺpci, pričom ale spoločné pole uvedeného riadku a stĺpca je obsadené — obr. 2c;

4. obsadené je jediné pole.

Poznáme kritické pozície a tým poznáme i podstatu stratégie Trlenôčky. Vlastný návod je už teraz jednoduchý:

- a) v prvom ťahu položí hráč *A* jeden kameň — kdekoľvek;
- b) v treťom ťahu doplní hráč *A* počet položených kameňov na 5 tak, aby vznikla niektorá z pozícií opísaných v bode 3;
- c) v piatom ťahu zahrá hráč *A* tak, aby vznikla pozícia opísaná v bode 2. prípadne v bode 1.;
- d) ak v predchádzajúcom ťahu vznikla situácia opísaná v bode 2., tak v siedmom ťahu položí hráč *A* jeden kameň na ktorékoľvek z dvoch zvyšných voľných polí.

Skúste si podľa tohto návodu zahrať niekoľko partii Trlenôčky. Potom sa pustite do hľadania stratégie Trlenky. Na rozcevičku najprv odpovedzte na tieto dve otázky:

4. Koľko podstatne rôznych pozícií existuje v hre Trlenka, ak zo 16 polí šachovnice je práve 12 obsadených a 4 voľné?
5. To isté v prípade, že obsadených je práve 10 polí a voľných 6.

Vysvetlíme, čo rozumieme pod pojmom „podstatne rôzne pozície“. Najprv povieme, čo sú „pozície v podstate rovnaké“. Sú to také dve pozície, ktoré možno jednu do druhej previesť použitím (prípadne viacnásobným) týchto troch transformácií: prestaviť riadky, prestaviť stĺpce, preklopiť obrázok podľa diagonály. Napríklad všetky tri pozície na obrázku 3 sú v podstate rovnaké. Pozície, ktoré nie sú v podstate rovnaké, nazveme podstatne rôzne.

Záverečná poznámka. Hru Trlenka možno hrať na rôznych šachovniciach. Čím väčšia je šachovnica, tým zložitejšia bude príslušná stratégia. Autorovi článku nie je známa stratégia hry na šachovnici 5×5 a na každej väčšej šachovnici.

různé

Přijímací zkoušky na fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou v Praze

Doc. dr. ZLATKO MARŠÁK, CSc., FJFI ČVUT, Praha

Zatímco zájem o studium na vysokých školách univerzitního směru je daleko větší, než jsou plánované možnosti těchto škol, řada vysokých škol s technickým zaměřením nemůže již po řadu let plnit směrná čísla přijímaných posluchačů. Důvodů je několik. Uvedme alespoň ty hlavní. V poslední době absolvují naše střední školy populačně slabší ročníky. Skladba studentů na gymnáziích, která mají být hlavním zdrojem posluchačů pro vysoké školy, je v současné době taková, že značně převahuje procento dívek, které si technické obory volí jen zřídka. Jedním z důvodů nezájmu o technické obory ze strany absolventů gymnázií může být i malá informovanost o možnostech a podmínkách studia na vysokých školách s technickým zaměřením. Včasné a dostatečně konkrétní informace by jistě ovlivnily volbu a zaměření vysokoškolského studia u řady absolventů středních škol.

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská (se zkratkou FJFI), která je jednou z fakult Českého vysokého učení technického v Praze, zápasí již po několik let s disproporcí mezi plánovaným počtem tolik žádaných vysokoškolských studentů daného oboru a počtem skutečně přihlášených. Aby středoškolští studenti mohli dobře zvážit volbu vysokoškolského studia, pořádá fakulta různé náborové akce, při nichž zaměřuje pozornost na studenty třetích ročníků gymnázií a vybraných středních průmyslových škol. Těmto školám byly zaslány informační materiály o možnostech a podmínkách studia na naší fakultě a pravidelně dvakrát do roka pořádáme již tradiční „Dny otevřených dveří na FJFI“. Zájemci o studium na naší fakultě v těchto dnech vstupují do laboratoří a na další pracoviště, kde se mohou seznámit s náplní jak vědeckovýzkumné, tak i pedagogické činnosti na fakultě. Tyto „Dny otevřených dveří na FJFI“ lze považovat za nejlepší zdroj konkrétních informací pro uchazeče o vysokoškolské studium na FJFI. Je pochopitelné, že uchazeči kladou nejčastěji ty otázky, které se týkají přijímacího řízení.

Tento článek podává informace o organizaci a průběhu přijímacího řízení na FJFI v posledních letech. *Na FJFI dělají všichni uchazeči zkoušku z matematiky a fyziky.* Přijímací zkouška má část písemnou

a část ústní. Písemnou část přijímací zkoušky dělají všichni uchazeči. K tomuto rozhodnutí bylo přikročeno po zkušenostech, kdy se ukázalo, že klasifikace na různých školách je značně odlišná a není výjimkou, že chvalitebná známka na jedné škole odpovídá na škole druhé stupni hodnocení dostatečný. Písemná zkouška představuje vyřešení čtyř příkladů z fyziky a tří až čtyř příkladů z matematiky, na jejichž vypracování mají uchazeči 90 minut čistého času na každý z předmětů. Poté se posluchači podrobí ústnímu přijímacímu pohovoru, jehož hlavním úkolem je posoudit všeobecně politický přehled uchazeče. Cílem celého přijímacího řízení je objektivní prověrka vědomostí a dovedností a komplexní posouzení předpokladů každého uchazeče o studium na naší fakultě.

Při sestavování úkolů předkládaných uchazečům k řešení vycházíme z rozsahu a hloubky učiva obsaženého v gymnaziálních učebnicích matematiky a fyziky. Důraz je kladen víc na schopnosti samostatného logického myšlení a usuzování řešitele — na schopnost umět zacházet s danými základními pojmy — než na formální zvládnutí rozsáhlého komplexu pojmů. Vyžadované učivo by hloubkou mělo odpovídat průměrným a lepším studentům gymnázií. V žádném případě úkoly neobsahují „chytáky“. Těmto požadavkům odpovídá i hodnocení výsledků jednotlivých řešení. Hodnocení se provádí důsledně s utajením jména řešitele.

Vzhledem k tomu, že numerické výpočty jsou při řešení omezeny na minimum a ani netvoří vlastní podstatu řešení, ale informují pouze o intervalu hodnot, ve kterém se daná veličina může pohybovat, není dovoleno používat ani tabulek ani kapesních kalkulačků. Tím je zaručena každému uchazeči stejná šance, i když není vlastníkem kalkulačky. Není zvláštností, že při řešení úkolu je požadováno pouze obecné řešení příkladu. Obtížnost příkladů je volena tak, aby v daném souboru byl alespoň jeden s téměř triviálním řešením a jeden myšlenkově (nikoli početně) náročnější. To umožňuje při hodnocení provést diferenciaci uchazečů co do úrovně logického myšlení a zvládnutí předepsaného rozsahu vědomostí. Časová náročnost na řešení příkladů je volena tak, aby uchazeč s průměrnými vědomostmi měl časovou rezervu asi 15 minut na přečtení odevzdávaného textu. Texty příkladů dostávají uchazeči rozmnožené, takže nevznikají časové ztráty s diktováním či s opisováním a zaručuje to současně i autentičnost v zadání. Jestliže je nebezpečí, že by zadání mohlo být chápáno nejednoznačně, jsou na tuto eventualitu uchazeči upozorněni. Je samozřejmostí — a uchazeči jsou k tomu po zadání textů vyzváni — aby se na případné nejasnosti zeptali. Otázky jsou uchazečům individuálně zodpovězeny, nesmí se ovšem jednat o věcnou neznalost požadovaných vědomostí.

Aby bylo možno udělat si představu o obtížnosti zadávaných příkladů, uvedeme zde některé, které byly předloženy uchazečům při písemné zkoušce z fyziky na FJFI v roce 1979. Příklady uvedeme s řešením a po-

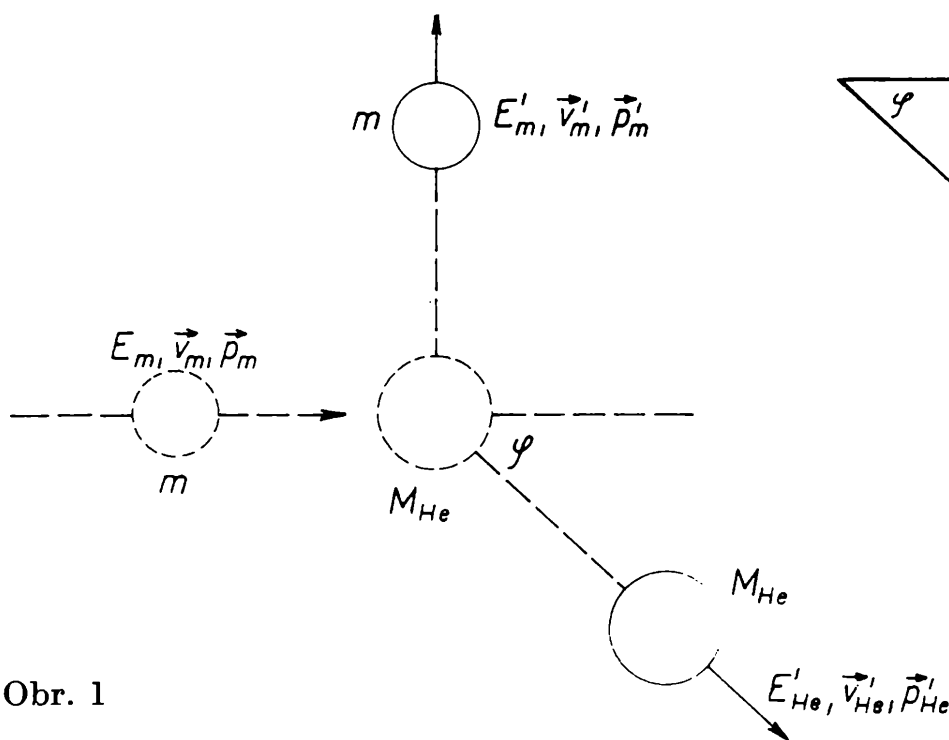
ukážeme na to, co je při řešení podstatné, a dále na ty chyby, které se objevují u řešení nejčastěji.

Příklad 1. Atomové jádro neznámé hmotnosti m s kinetickou energií $E_m = 5 \text{ MeV}$ se dokonale pružně srazí s jádrem helia a odchýlí se po srážce o 90° od původního směru. Jádro helia bylo před srážkou v klidu. a) Určete hmotnost neznámého jádra m a rozhodněte, kterému prvku toto jádro přísluší, víte-li, že kinetická energie tohoto jádra byla po srážce $E'_m = 3 \text{ MeV}$.

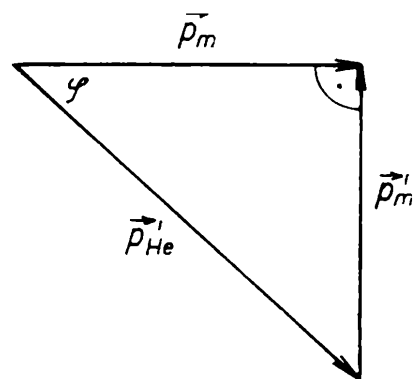
b) Vypočítejte úhel, pod kterým se odrazí jádro helia od směru nalétávajícího jádra.

Příklad řešte nejprve obecně, potom číselně.

Řešení: Hledáme úhel odrazu jádra helia φ a hmotnost dopadajícího jádra m (viz obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

Vyjdeme ze zákona zachování hybnosti soustavy částic před a po srážce, napsaném buď ve tvaru

$$m \cdot \mathbf{v}_m + M_{\text{He}} \mathbf{v}_{\text{He}} = m \cdot \mathbf{v}'_m + M_{\text{He}} \cdot \mathbf{v}'_{\text{He}}$$

nebo zkráceně

$$\mathbf{p}_m + \mathbf{p}_{\text{He}} = \mathbf{p}'_m + \mathbf{p}'_{\text{He}} \quad (1,1)$$

Podle zadání je hybnost jádra helia před srážkou $\mathbf{p}_{\text{He}} = \mathbf{0}$ a dále $\mathbf{p}'_m$ je kolmé na $\mathbf{p}_m$, takže můžeme nakreslit vektorový diagram hybností (viz obr. 2). Z něho vyplývá, že jednak

$$p_m^2 = p_{\text{He}}'^2 - p_m'^2, \quad (1,2)$$

jednak

$$\sin\varphi = \frac{p'_m}{p'_{\text{He}}}. \quad (1,3)$$

Rovnicí (1,3) je vyjádřen úhel φ pomocí velikosti hybností p'_m a p'_{He} , které neznáme. Zato známe kinetické energie srážejících se jader. Vztah mezi hybností a kinetickou energií je

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m},$$

takže

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{m E'_m}{M_{\text{He}} E'_{\text{He}}}} = \sqrt{\frac{m E'_m}{M_{\text{He}} (E_m - E'_m)}} \quad (1,4)$$

Rovnice obsahuje kromě φ ještě neznámé m a E'_{He} . Potřebujeme tedy ještě další rovnice pro hmotnost m a kinetickou energii E'_{He} . K tomu použijeme jednak rovnice (1,2), vyjádřené pomocí kinetické energie:

$$2mE_m = 2 M_{\text{He}} E'_{\text{He}} - 2mE'_m, \quad (1,2')$$

odkud vyjádříme hmotnost m

$$m = M_{\text{He}} \left(\frac{E'_{\text{He}}}{E_m + E'_m} \right). \quad (1,5)$$

Další rovnici pro kinetickou energii dostaneme z podmínky, že se jedná o dokonale pružnou srážku, a tedy platí současně se zákonem o zachování hybnosti i zákon zachování kinetické energie před srážkou a po ní, který zapíšeme symbolicky

$$E_m + E_{\text{He}} = E'_m + E'_{\text{He}}, \quad (1,6)$$

kde podle zadání $E_{\text{He}} = 0$. Odtud plyne $E'_{\text{He}} = E_m - E'_m$. Dosadíme-li to do rovnice (1,5), dostaneme

$$m = M_{\text{He}} \left(\frac{E_m - E'_m}{E_m + E'_m} \right),$$

kam můžeme dosadit hodnoty z textu a dostaneme

$$m = \frac{1}{4} M_{\text{He}}.$$

Dopadající jádro atomu má hmotnost $\frac{1}{4}$ hmotnosti jádra atomu helia a přísluší tedy jádru atomu vodíku.

Hmotnost m můžeme nyní dosadit do rovnice (1,4) pro výpočet úhlu φ :

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{E'_m}{4(E_m - E'_m)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Úhel, ve kterém se odrazí jádro atomu helia je $60^\circ > \varphi > 30^\circ$.

Poznámky k řešení :

Obecným řešením se zde nerozumí řešit úlohu v úplné obecnosti (s libovolným úhlem odrazu atd.), ale vyjádřit vztah pro hledané veličiny v obecných číslech. Protože se jedná o ráz těles (viz učebnici a doplněk pro gymnázia Fyzika I), musí platit zákon zachování hybnosti soustavy, tj. rovnice (1,1), která platí, ať se jedná o dokonale pružný či nepružný ráz. Hybnosti jsou vektorové veličiny, a proto je nutno tento vztah psát obecně ve vektorovém tvaru, a nikoli pouze ve skalárním, tj.

$$m v_m + M_{\text{He}} v_{\text{He}} = m v'_m + M_{\text{He}} v'_{\text{He}},$$

což je nejčastější chyba v řešení. Pouze v případě, že leží vektory $\mathbf{p}$ na jedné přímce, lze zákon zachování hybnosti psát ve skalárním tvaru, ale i tak je nutno dát pozor na orientaci jednotlivých vektorů. Výpočet velikostí jednotlivých hybností se provádí z vektorového diagramu na obr. 2 tak, jako se běžně řeší trojúhelník, a to i v tom případě, kdy se nejedná o trojúhelník pravoúhlý. Nutno podotknout, že se při řešení neuvažují relativistické rychlosti částic, neboť $\frac{v_m}{c} \ll 1$, a tedy hmotnosti pohybujících se částic jsou konstanty.

Zákona zachování kinetické energie můžeme zde použít z toho důvodu, že se jedná o *dokonale pružný ráz* těles. V případě, kdy se jedná o nepružný ráz — při kterém dochází k deformaci srážejících se těles a kdy se část kinetické energie těles spotřebovává na tuto deformační práci nebo na teplo — zákon zachování kinetické energie neplatí; platí ovšem zákon zachování *úhrnné energie* ve všech formách. Protože je v textu uvedeno, že atomové jádro o hmotnosti m se po rázu odchýlilo od původního směru, jde o *šikmý*, dokonale pružný ráz. (Poznámka: Příným rázem rozumíme takový ráz těles, kdy vektory rychlostí obou těles a normály ploch v bodě dotyku leží na společné přímce. Jestliže vektory rychlostí obou těles, která se srážejí, a normály ploch obou těles v bodě dotyku neleží na společné přímce, jedná se o šikmý ráz. Rozlišuje se též ráz středový — centrální, tj. takový, při kterém normály ploch v bodě dotyku obou těles a hmotné středy (těžiště) obou těles leží na společné přímce. Uvažte, o jaký ráz může jít při nárazu dvou hmotných bodů.)

Výpočet úhlu φ stačí v plné míře dovést k určení některé z goniometrických funkcí úhlu φ , ať už sinu, tangenty apod.

Příklad 2. Hustota vzduchu při teplotě $t_0 = 0^\circ\text{C}$ a tlaku $p_0 = 100\text{ kPa}$ je $\rho_0 = 1,293\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Jaká je hmotnost jednoho litru vzduchu při

teplotě 27,3 °C a tlaku $p_1 = 90$ kPa? Předpokládejte, že vzduch je ideální plyn.

Řešení: Řešení vyžaduje najít vztah mezi teplotou, tlakem a hmotností vzduchu. Takovým vztahem je stavová rovnice ideálního plynu, která při teplotě Θ_0 a tlaku p_0 má tvar

$$p_0 V_0 = n R \Theta_0, \quad (2,1)$$

kde n je počet kilomolů vzduchu, V_0 příslušný objem a R plynová konstanta.

Při teplotě Θ_1 a tlaku p_2 platí pro totéž množství vzduchu

$$p_1 V_1 = n R \Theta_1 \quad (2,2)$$

Objemy v rovnicích vyjádříme pomocí hustoty ϱ a hmotnosti m , o které předpokládáme, že se zahřátím a stlačením na objem $V_1 = 1$ litr nemění. Nemění se tedy ani počet kilomolů n . Dostáváme soustavu rovnic

$$p_0 \frac{m}{\varrho_0} = n R \Theta_0 \quad (2,3)$$

$$p_1 \frac{m}{\varrho_1} = n R \Theta_1,$$

kde $p_0, \varrho_0, \Theta_0, p_1, \Theta_1$ jsou známé: odtud můžeme vydělením a úpravou rovnic (2,3) vyjádřit

$$\varrho_1 = \frac{p_1 \Theta_0}{p_0 \Theta_1} \varrho_0.$$

Hmotnost m objemu V_1 je pak

$$m = \varrho_1 V_1 = \frac{p_1 \Theta_0 \varrho_0 V_1}{p_0 \Theta_1}, \quad (2,4)$$

což číselně dává

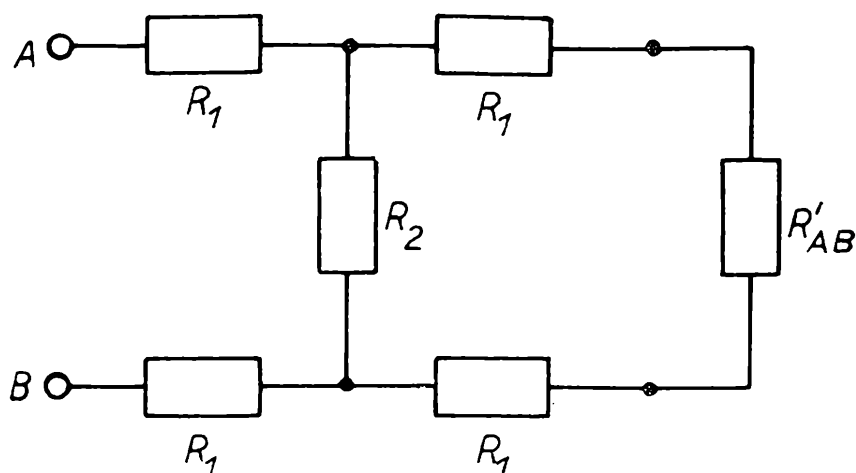
$$m = \frac{90 \cdot 273 \cdot 1,293 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 273 \cdot \frac{11}{10}} = 1,06 \cdot 10^{-3} \quad (2,5)$$

Hmotnost m objemu 1 litru vzduchu je 1,06 g.

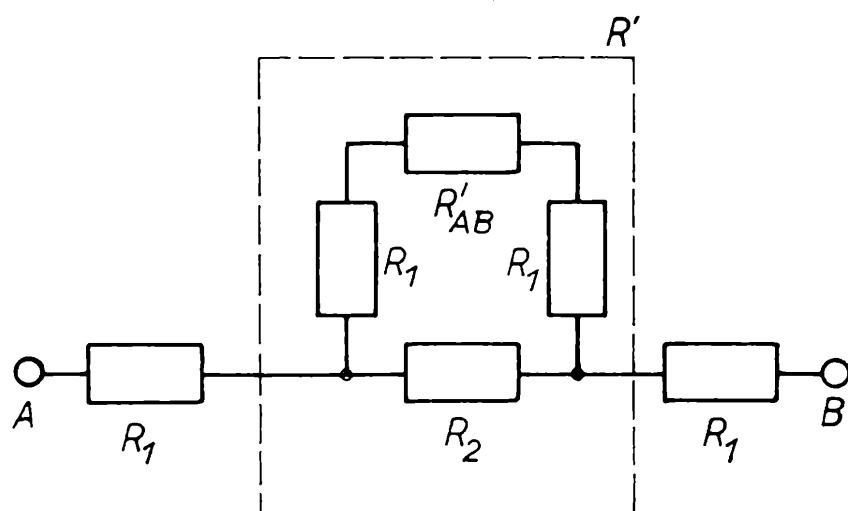
Poznámky k řešení:

Píšeme-li stavovou rovnici pro nějaké množství plynu, je nutno vždy uvádět na pravé straně rovnice (2,1) počet kilomolů n v dané soustavě obsažených (resp. přesněji látkové množství N v kilomolech).

Teplotu Θ je nutno do stavové rovnice (2,1) dosazovat v Kelvinech. Protože jde o přibližné číselné řešení, stačí použít pro přepočet stupňů rovnosti $0^\circ \text{C} = 273 \text{ K}$.



Obr. 3



Obr. 4

Příklad 3. Jaké musí být hodnoty odporů R_1 a R_2 (viz obr. 3), aby odpor měřený mezi svorkami A a B byl roven odporu R'_{AB} ?

Řešení: Můžeme nakreslit náhradní schéma zapojení odporů, jako je na obr. 4. Odpor mezi svorkami A a B označíme R_{AB} . Hledáme podmínku pro R_1 a R_2 , aby platilo $R_{AB} = R'_{AB}$.

Ze vztahů pro zapojení odporů za sebou (sériově), resp. vedle sebe (paralelně) vyplývá, že odpor R_{AB} , který je zapojením odporů R_1 , R' , a R_1 (viz obr. 4), platí

$$R_{AB} = 2 R_1 + R' \quad (3,1)$$

Odpor R' je výsledný odpor paralelně zapojených větví s odpory: v jedné větvi jsou sériově zapojeny odpory po řadě R_1 , R'_{AB} , R_1 , ve druhé větvi je jediný odpor R_2 . Pro výsledný odpor R' můžeme tedy napsat

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{2R_1 + R'_{AB}} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R' = \frac{R_2(2R_1 + R'_{AB})}{R_2 + 2R_1 + R'_{AB}}, \quad (3,2)$$

takže dosazeno do (3,1)

$$R_{AB} = 2 R_1 + \frac{R_2(2 R_1 + R'_{AB})}{R_2 + 2 R_1 + R'_{AB}}. \quad (3,3)$$

Aby platila podmínka $R_{AB} = R'_{AB}$, musí platit

$$R'_{AB} = 2 R_1 + \frac{R_2(2 R_1 + R'_{AB})}{R_2 + 2 R_1 + R'_{AB}},$$

odkud plyne

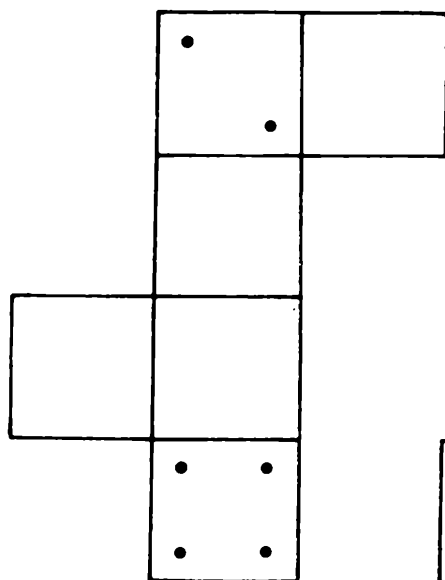
$$R'_{AB} = 2\sqrt{R_1 R_2 + R_1^2}$$

Poznámky k řešení :

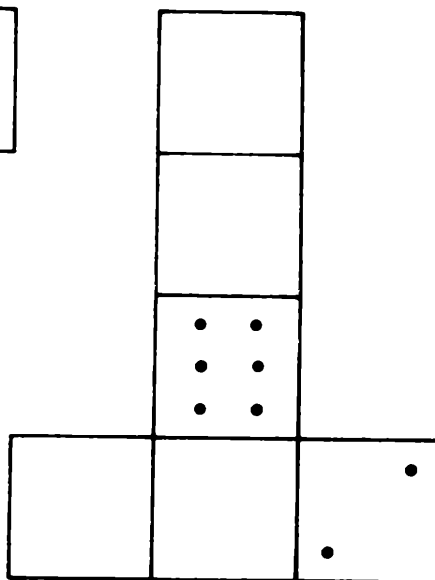
Řešení příkladu se opírá o víceméně formální použití vztahů pro zapojování odporů. Nejčastější chybou je záměna vztahů pro výpočet výsledného odporu sítě odporů se vztahy pro různé zapojení kondenzátorů.
(Dokončení v příštím čísle.)

Malé cvičení představivosti

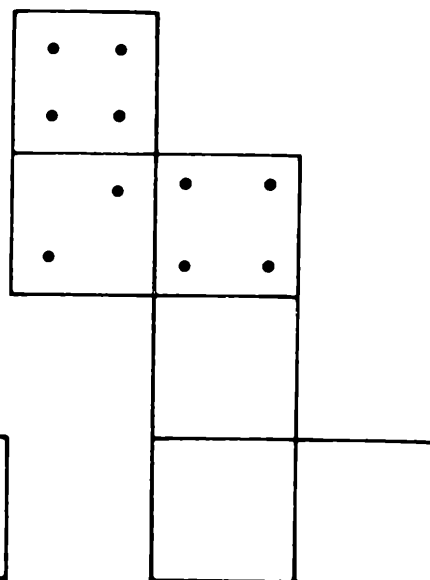
V sítích krychlí na obr. 1, 2 a 3 doplňte oka tak, aby příslušné krychle byly správnými hracími kostkami, tj. aby součet čísel znázorněných na protějších stěnách byl sedm. Přitom lze další oka přikreslit i na stěnách,



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

kde již jsou oka vyznačena, ovšem tak, aby vznikly charakteristické obrazce, jimiž se čísla na hrací kostce znázorňují. (Obrázky sítí si překreslete a nedoplňujte je v časopise. Řešení nemusí být jen jedno.)

im

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

linea ž

- algebrica
- cubica
- conica
- di terra
- elettrica
- gobba, sghemba
- isoipsa
- separatrice dell'ombra
- lineare
- trascendente

linee coordinate

- integrali

lineare

linguaggio m

liquido m

lira ž

- sterlina

liscio

litro m

livellare

livellazione ž

livello m

locale

logaritmo m

logaritmi decimali

- naturali, di Nepero

logica ž

longitudine ž

losanga ž

luce ž

lumen m

luminiscenza ž

čára

- algebraická
- kubická

kuželosečka

základnice

elektrické vedení

čára prostorová

vrstevnice

mez stínu

lineární čára

čára transcendentní

čáry souřadnicové

- integrální

lineární

jazyk (i programovací)

tekutina

lira (jednotka měny)

libra šterlinků (jed. měny)

hladký

litr

nivelovati

nivelace

výška, hladina, úroveň; vodováha

místní

logaritmus

logaritmy dekadické

- přirozené, Neperovy

logika

délka (zeměpisná)

kosočtverec

světlo; světlost

lumen (jednotka)

luminiscence

luminosità ž
luna (Luna) ž
lunghezza ž
lungo
luogo m
— geometrico

svítivost
měsíc (Měsíc)
délka; trvání
dlouhý
místo
geometrické místo, množina bodů

M

macchia lutea ž
macchie solari
macchina ž
— acceleratrice
— asincrona
— calcolatrice
— elettrostatica
— — ad influenza
— termica
maglia ž
magnetismo m
magnetofono m
magnetometro m
magnetron m
mancanza ž, manco m
maniera ž
di (in) maniera che
mantella ž, mantello m
mantissa ž
marca ž
marco m
mare ž
mascheramento m
massa ž
— critica
massimamente
massimo
massimo m
— assoluto
— relativo

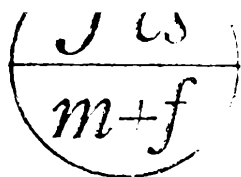
žlutá skvrna (oka)
sluneční skvrny
stroj, přístroj; automobil
urychlovač (částic)
asynchronní motor
počítač
elektrika
— influenční
tepelný stroj
oko (smyčka); elektrický obvod
magnetismus
magnetofon
magnetometr
magnetron
nedostatek
způsob
takže
plášť
mantisa (logaritmů)
znamení, značka
marka (jednotka měny)
moře
maskování
hmota, hmotnost
— kritická
nejvíce; obzvláště
největší
maximum
— absolutní
— lokální

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

8

ROČNÍK 58, 1979-1980, DUBEN



ROČNÍK 58

DUBEN 1980

8

rozhledy

ATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs, Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice s dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1980.

Obsah

Doc. dr. L. Bican, CSc.: Algebraické kódování . II.	337
Dr. A. Havlar: Použití zvyškových tříd při řešení lineárních diofantických rovnic	342
Dr. B. Zelinka, CSc.: Matematické paradoxy	345
Dr. S. Komenda: O umění rozhodovat se aneb Potíže s gramatikou	350
Doc. dr. V. Mráz, CSc.: Formáty papíru a matematika	358
Doc. ing. Z. Janout, CSc.: Experimentální způsob studia pružného rozptylu protonů na protonech	361
Dr. R. Hudec: Setkání se Saturnem	366
Prof. dr. K. Havlíček, CSc.: Vzácné jubileum	368
J. Kotyk: Hrst vzpomínek	371
I. Vrchotková: Česká odborná terminologie v době Karlově	373
Dr. A. Vrba, CSc.: Kružnice na čtverečkovém papíru	376
Pro volnou chvíli	380
Doc. dr. Z. Maršák, CSc.: Přijímací zkoušky na fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou v Praze	382
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček Ital.-sko-český	3. a 4. str. obálky

Algebraické kódování - II.

Doc. dr. LADISLAV BICAN, CSc., MFF UK, Praha

V minulém čísle jsme si ukázali příklad lineárního kódu, který má délku 15 a je schopen opravovat až tři chyby v každém kódovém slově. Jak jsme slíbili, popíšeme si v tomto článku algebraickou metodu dekódování, která vede k cíli rychle i při kódech větší délky a s více kódovými slovy. Výhoda této metody spočívá zejména v tom, že při opravování chyb nemusíme explicitně znát všechna kódová slova.

Vezměme nějaký prvek α , položíme $\alpha^4 = \alpha + 1$ a počítejme mocniny prvku α . Stejně jako v předcházejícím článku budeme i zde pracovat s polynomy s koeficienty 0, 1, přičemž $0 + 0 = 1 + 1 = 1.0 = 0.1 = 0.0 = 0$ a $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ $1 = 1$. Postupně dostáváme

$\alpha^4 = \alpha + 1$	$\alpha^{10} = \alpha^2 + \alpha + 1$
$\alpha^5 = \alpha^2 + \alpha$	$\alpha^{11} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$
$\alpha^6 = \alpha^3 + \alpha^2$	$\alpha^{12} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
$\alpha^7 = \alpha^3 + \alpha + 1$	$\alpha^{13} = \alpha^3 + \alpha^2 + 1$
$\alpha^8 = \alpha^2 + 1$	$\alpha^{14} = \alpha^3 + 1$
$\alpha^9 = \alpha^3 + \alpha$	$\alpha^{15} = 1.$

Tab. 4

Protože $\alpha^{15} = 1$, je $\alpha^{30} = (\alpha^{15})^2 = \alpha^{45} = (\alpha^{15})^3 = \dots = 1$, takže prvních patnáct mocnin prvku α nám dává už všechny jeho mocniny. Jest např. $\alpha^{68} = \alpha^{4 \cdot 15 + 8} = (\alpha^{15})^4 \alpha^8 = \alpha^8 = \alpha^2 + 1$, $\alpha^{222} = (\alpha^{15})^{14} \alpha^{12} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ apod. Tabulka 4 nám však umožňuje také sčítání mocnin prvku α . Každou mocninu prvku α můžeme totiž převést na polynom v proměnné α stupně nejvýše 3. Sečteme-li dva takovéto polynomy (nebo více), dostaneme buď nulový polynom nebo opět polynom stupně nejvýše 3, který odpovídá některé mocnině prvku α podle tabulky 4 (všimněte si totiž, že v tabulce 4 jsou kromě α , α^2 , α^3 právě všechny polynomy stupně nejvýše 3). Máme tedy např. $\alpha^5 + \alpha^8 + \alpha^{13} = \alpha^2 + \alpha + \alpha^2 + 1 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^{11}$ nebo $\alpha^7 + \alpha^9 + \alpha^{12} + \alpha^{14} + \alpha^{10} = \alpha^3 + \alpha + 1 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha^3 + 1 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

Uvažujme nyní polynom $g(x) = 1 + x + x^2 + x^4 + x^5 + x^8 + x^{10}$ stupně 10. Vynásobíme-li polynom $g(x)$ postupně všemi polynomy stupně nejvýše 4 (včetně nulového) v pořadí

$1, x, x + 1, x^2, x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1, x^3, x^3 + 1, x^3 + x, x^3 + x + 1, x^3 + x^2, x^3 + x^2 + 1, x^3 + x^2 + x, x^3 + x^2 + x + 1, x^4, x^4 + 1, x^4 + x, x^4 + x + 1, x^4 + x^2, x^4 + x^2 + 1, x^4 + x^2 + x, x^4 + x^2 + x + 1, x^4 + x^3, x^4 + x^3 + 1, x^4 + x^3 + x, x^4 + x^3 + x + 1, x^4 + x^3 + x^2, x^4 + x^3 + x^2 + 1, x^4 + x^3 + x^2 + x, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, 0$

Tab. 5

a napíšeme-li koeficienty takto vzniklých polynomů jako patnáctičlenné posloupnosti čísel 0, 1 v pořadí od absolutního členu ke koeficientu u x^{14} , dostaneme právě tabulku 1. V tomto případě říkáme, že polynom $g(x)$ generuje kód z tabulky 1. Přitom lze ukázat, že slovo délky 15 je kódové slovo, právě když příslušný polynom je dělitelný polynomem $g(x)$. Mimoto částečný podíl při tomto dělení (v tomto případě jde ovšem přímo o podíl, neboť zbytek je roven 0) určuje kódové slovo takto: Je-li podíl na k -tém místě tabulky 5, je příslušné slovo k -tým kódovým slovem v tabulce 1. Vezměme si např. kódové slovo s v tabulce 1. Dělením příslušného polynomu polynomem $g(x)$ dostaneme

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array} \quad (0)$$

0

Polynom $x^4 + x + 1$ je v tabulce 5 na 19. místě stejně jako prvek s v tabulce 1. Vidíme tedy, že dekódování správně přijatých slov je velmi snadné.

Vyložme si nyní postup dekódování v případě, že přijaté slovo obsahuje nejvýše tři chyby. Jak se snadno ověří, lze polynom $g(x)$ psát jako součin tří polynomů $g_1(x)$, $g_3(x)$, $g_5(x)$ ve tvaru $(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)$. Nechť přijaté slovo (s nejvýše třemi chybami) odpovídá polynomu $f(x)$. Spočteme-li zbytky $S_i(x)$ při dělení polynomu $f(x)$ polynomy $g_i(x)$ a dosadíme-li do $S_i(x)$ za prvek x prvek α^i , dostaneme nějaké mocniny prvku α (podle tabulky 4), které označíme S_i , $i = 1, 3, 5$. Nyní můžeme napsat rovnici

$$(S_1^3 + S_3)y^3 + (S_1^4 + S_1S_3)y^2 + (S_1^2S_3 + S_5)y + S_1^6 + S_1^3S_3 + S_1S_5 + S_3^2 = 0,$$

která se nazývá klíčová rovnice pro opravu chyb daného kódu. Jestliže $S_1^3 + S_3 \neq 0$, platí, že jsou-li α^i , α^j , α^k nenulové kořeny klíčové rovnice,

jsou chyby v přijatém slově právě na místech $i + 1, j + 1, k + 1$, tj. v koeficientech u x^i, x^j, x^k . Přirozeně, jestliže klíčová rovnice má méně než tři nenulové kořeny, je menší i počet chyb v přijatém slově, tj. počet chyb v přijatém slově je roven počtu kořenů klíčové rovnice. Kořeny klíčové rovnice přitom nalezneme postupným dosazováním mocnin $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{14}$. V případě, že $S_1^3 + S_3 = 0$ (a přijaté slovo není kódové), obsahuje přijaté slovo jedinou chybu, která je na místě odpovídajícím S_1 .

Ukažme si postup dekódování na přijaté zprávě z tabulky 2. Děleme tedy první přijaté slovo polynomem $g(x)$:

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad (4)$$

Podíl při dělení je polynom x^4 , který je na 16. místě tabulky 5 stejně jako písmeno p v tabulce 1. Podobně pro druhé přijaté slovo dostaneme podíl $x^4 + x$, který je na 18. místě tabulky 5 stejně jako písmeno r v tabulce 1 atd. První obtíž nastane u 8. přijatého slova. Zde vidíme, že přijaté slovo odpovídá polynomu $f(x)$ stupně 8, který není dělitelný polynomem $g(x)$, a přijaté slovo není tudíž kódové slovo. Děleme tedy polynom $f(x)$ polynomem $g_1(x)$,

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0 \end{array}$$

Dostaneme zbytek $S_1(x) = 1 + x$, takže $S_1 = S_1(\alpha) = 1 + \alpha = \alpha^4$. Podobně dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g_3(x)$ dává zbytek $S_3(x) = x + x^2$, takže $S_3 = \alpha^3 + \alpha^6 = \alpha^2$ a podobně $S_5(x) = 0$. Nyní $S_1^3 + S_3 = \alpha^{12} + \alpha^2 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha^2 = \alpha^3 + \alpha + 1 = \alpha^7$, $S_1^4 + S_1 S_3 = S_1(S_1^3 + S_3) = \alpha^4 \alpha^7 = \alpha^{11}$, $S_1^2 S_3 + S_5 = \alpha^{10}$, $S_1^6 + S_1^3 S_3 + S_1 S_5 + S_3^2 = 0$, takže klíčová rovnice je

$$\alpha^7 y^3 + \alpha^{11} y^2 + \alpha^{10} y = 0$$

Nenulové kořeny této rovnice jsou zřejmě kořeny rovnice (zkrátte y a vynásobte α^8) $y^2 + \alpha^4 y + \alpha^3 = 0$. Dosazujeme-li postupně mocniny $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{14}$, dostaneme pro α^6 rovnost $\alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^3 = 0$ a pro α^{12} rovnost $\alpha^9 + \alpha + \alpha^3 = 0$, takže klíčová rovnice má kořeny α^6 a α^{12} , chyby jsou na 7. a 13. místě a správně mělo být přijato slovo

1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0. Dělením příslušného polynomu polynomem $g(x)$ dostaneme

$$\begin{array}{r}
1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
\quad 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
\hline
1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
\hline
0
\end{array}
\begin{array}{l}
(2) \\
(0)
\end{array}$$

takže podíl je polynom $x^2 + 1$, který je v tabulce 5 na 5. místě a odpovídá mu tedy písmeno e v tabulce 1.

Podobně pro desáté přijaté slovo máme $S_1(x) = 1 + x + x^3$, $S_3(x) = 1 + x + x^2$, $S_5(x) = 1$, takže $S_1 = \alpha^7$, $S_3 = \alpha^8$, $S_5 = 1$ a klíčová rovnice má tvar $\alpha^{14}y^3 + \alpha^6y^2 + \alpha^9y + \alpha^{12} = 0$, neboli (po vynásobení α) $y^3 + \alpha^7y^2 + \alpha^{10}y + \alpha^{13} = 0$. Kořeny této rovnice jsou $1 = \alpha^0$, α^2 , α^{11} , takže chyby vznikly na 1., 3., a 12. místě, příslušné kódové slovo je $1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$, takže na 10. místě přijaté zprávy je !

Podobně se postupuje i v dalších případech. U třináctého přijatého slova je $S_1 = \alpha^7$, $S_3 = S_1^3 = \alpha^6$, takže přijaté slovo obsahuje jedinou chybu, a to na 8. místě (odpovídajícím $S_1 = \alpha^7$).

Porovnejme nyní obě dvě vyložené metody. Zatímco v prvním případě jsme museli přijaté slovo porovnávat (v nejhorším případě) s 31 kódovými slovy, tj. museli jsme provést 31 operací, provádíme ve druhém případě pouze tyto operace (opět v nejhorším případě): dělení polynomem $g(x)$, dělení polynomy $g_1(x)$, $g_3(x)$, $g_5(x)$, sestavení klíčové rovnice a nalezení jejího řešení, dělení opraveného slova polynomem $g(x)$. To dává celkem 24 operací. Je-li přitom přijaté slovo slovem kódovým, je rozdíl ještě markantnější. V tomto případě můžeme totiž při první metodě vyzkoušet 31 možností, zatímco při druhé metodě jsme hotovi po vydělení polynomem $g(x)$. Daleko podstatnější rozdíl je rovněž u kódů větší délky a s větším počtem kódových slov, kde při použití druhé metody nemusíme navíc explicitně znát všechna kódová slova.

Cvičení: V lineárním kódu délky 31 generovaném polynomem $g(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{10} + x^{13} + x^{17} + x^{18} + x^{20}$ nalezněte kódová slova k následujícím přijatým slovům:

- a) 1000010011001101001101010000100 ,
- b) 0101010011111000111001011010110 ,
- c) 0100101011100001110100100010111 ,
- d) 111000000000111111011010110010 ,
- e) 1101100101001111101100100110001
- f) 010001001000111111110001011010

Návod. Tento kód obsahuje $2^{11} = 2048$ kódových slov, přičemž je schopen opravovat až 5 chyb. Polynom $g(x)$ je součinem čtyř polynomů:

$g_1(x) = 1 + x^2 + x^5$, $g_3(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, $g_5(x) = g_9(x) = 1 + x + x^2 + x^4 + x^5$, $g_7(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^5$. Necht přijaté slovo odpovídá polynomu $f(x)$. Dělením polynomu $f(x)$ polynomy $g_i(x)$ spočtete zbytky $S_i(x)$ a položte $S_i = S_i(\alpha^i)$, $i = 1, 3, 5, 7, 9$. Přitom použijte prvek α , $\alpha^5 = \alpha^2 + 1$ (jest $\alpha^{31} = 1$). Označíte-li $D_3 = S_1^3 + S_3$, $D_5 = S_1^5 + S_5$, $D_7 = S_1^7 + S_7$, $D_9 = S_1^9 + S_9$, $\delta = S_1^2 D_3 + D_5$, $\Delta = \delta D_5 + D_3 D_7 + S_1 S_3 D_3^2$, nalezněte klíčovou rovnici ve tvaru $y^5 + \sigma_1 y^4 + \sigma_2 y^3 + \sigma_3 y^2 + \sigma_4 y + \sigma_5 = 0$, kde $\sigma_1 = S_1$ a

1. pro $D_3 \neq 0$ a

a) $\Delta \neq 0$ je $\sigma_2 = (1/\Delta)(D_5 D_7 + S_1 D_3^2 D_5 + S_1^2 D_5 + D_3 D_9 + D_3^4)$,

$$\sigma_4 = (1/D_3)(D_7 + S_1 D_3^2 + S_1^2 D_5 + \delta \sigma_2),$$

$$\sigma_5 = \delta + S_1 \sigma_4 + D_3 \sigma_2,$$

$$\sigma_3 = D_3 + S_1 \sigma_2,$$

b) $\Delta = 0$ a

$\alpha) \delta \neq 0$ je $\sigma_2 = (1/\delta)(D_7 + S_1 D_3^2 + S_1^2 D_5)$,

$$\sigma_4 = \sigma_5 = 0,$$

$$\sigma_3 = D_3 + S_1 \sigma_2,$$

$\beta) \delta = 0$ je $\sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$, $\sigma_3 = D_3$,

2. pro $D_3 = 0$ je $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$

Dílčí výsledky: a) $S_1(x) = x + x^3 + x^4$, $S_3(x) = 1 + x^2 + x^4$, $S_5(x) = S_9(x) = 1 + x^2$, $S_7(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$, $S_1 = \alpha^9$, $S_3 = \alpha^5$, $S_5 = \alpha^4$, $S_7 = \alpha^{30}$, $S_9 = \alpha$, klíčová rovnice $y^2 + \alpha^9 y + \alpha^3 = 0$ má kořeny α^8, α^{26} .

b) $S_1(x) = x + x^3$, $S_3(x) = 1 + x^2$, $S_5(x) = S_9(x) = x + x^3 + x^4$, $S_7(x) = x^2 + x^3$, $S_1 = \alpha^6$, $S_3 = \alpha^{27}$, $S_5 = \alpha^{28}$, $S_7 = \alpha^5$, $S_9 = \alpha^7$, klíčová rovnice $y^4 + \alpha^6 y^3 + \alpha^{30} y^2 + \alpha^8 y + \alpha^9 = 0$ má kořeny $\alpha^2, \alpha^6, \alpha^{10}, \alpha^{22}$.

c) $S_1(x) = 0$, $S_3(x) = x + x^4$, $S_5(x) = S_9(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$, $S_7(x) = x^2 + x^3 + x^4$, $S_1 = 0$, $S_3 = \alpha^{19}$, $S_5 = \alpha^{18}$, $S_7 = \alpha^{17}$, $S_9 = \alpha^{20}$, klíčová rovnice $y^3 + \alpha^{30} y + \alpha^{19} = 0$ má kořeny $\alpha^4, \alpha^6, \alpha^9$.

d) Přijaté slovo je kódové.

e) $S_1(x) = x + x^4$, $S_3(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$, $S_5(x) = S_9(x) = 1 + x + x^3 + x^4$, $S_7(x) = 1 + x + x^2 + x^4$, $S_1 = \alpha^{30}$, $S_3 = \alpha^{28}$, $S_5 = \alpha^{26}$, $S_7 = \alpha^{24}$, $S_9 = \alpha^{22}$, klíčová rovnice $y + \alpha^{30} = 0$ má kořen α^{30} .

f) $S_1(x) = x^4$, $S_3(x) = 0$, $S_5(x) = S_9(x) = x^2 + x^3 + x^4$, $S_7(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$, $S_1 = \alpha^4$, $S_3 = 0$, $S_5 = \alpha$, $S_7 = \alpha^{30}$, $S_9 = \alpha^8$, klíčová rovnice $y^5 + \alpha^4 y^4 + \alpha^{17} y^3 + \alpha^{28} y^2 + \alpha^2 y + 1 = 0$ má kořeny $\alpha^{12}, \alpha^{15}, \alpha^{19}, \alpha^{20}, \alpha^{27}$.

Řešení :

- a) 1000010011001101001101010010100 ,
- b) 0111011011011000111001111010110 ,
- c) 0100000010100001110100100010111 ,
- d) 1110000000001111111011010110010 ,
- e) 1101100101001111101100100110000 ,
- f) 0100010010000110111000001010010

Použitie zvyškových tried pri riešení lineárnych diofantických rovníc

RNDr. ALFONZ HAVIAR, PF v Banskej Bystrici

Rozvoj teórie množín značne ovplyvnil aj ďalší vývoj v algebre. Pojem operácia, ktorý sa pôvodne používal len v súvislosti so sčítaním resp. násobením čísel, bol zovšeobecnený a v algebre sa začali vyšetrovať operácie na rôznych aj nečíselných množinách. V prvej časti tohoto článku chceme čitateľa oboznámiť s operáciami sčítania a násobenia na tzv. množine (systéme) zvyškových tried.

Zvoľme si prirodzené číslo n ; nech napríklad $n = 5$. Symbolom **0** označíme množinu všetkých celých čísel deliteľných piatimi. Symbolom **1** označíme množinu všetkých celých čísel, ktoré keď vydělíme číslom 5, dostaneme zvyšok 1. Podobne **2** je množina všetkých tých celých čísel, ktoré keď vydělíme piatimi, dostaneme zvyšok 2 a analogicky význam majú symboly **3** a **4**. Ak označíme množinu všetkých celých čísel písmenom **Z**, môžeme uvedený dohovor zapísať symbolicky takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \{5k \quad ; k \in \mathbf{Z}\} = \{ \quad -10, -5, 0, 5, 10, \dots \} , \\ \mathbf{1} &= \{5k + 1; k \in \mathbf{Z}\} = \{ \dots, \quad -9, -4, 1, 6, 11, \dots \} , \\ \mathbf{2} &= \{5k + 2; k \in \mathbf{Z}\} = \{ \dots, \quad -8, -3, 2, 7, 12, \dots \} , \\ \mathbf{3} &= \{5k + 3; k \in \mathbf{Z}\} = \{ \dots, \quad -7, -2, 3, 8, 13, \dots \} , \\ \mathbf{4} &= \{5k + 4; k \in \mathbf{Z}\} = \{ \dots, \quad -6, -1, 4, 9, 14, \dots \} \end{aligned}$$

Uvedený systém množín celých čísel označíme **Z**₅ a budeme ho nazývať systém zvyškových tried modulo 5. Pretože do množiny **0** patria okrem čísla 0 aj čísla 5, 10, -5 atď., budeme ju v ďalšom tiež označovať

5, 10, -5 atď. Podobne budeme označovať aj ďalšie množiny. Preto napríklad platí $2 = 7 = -3$, $4 = 9 = -1$ a pod.

Na množine (systéme) $\mathbf{Z}_5$ môžeme definovať sčítanie $\oplus$ a násobenie $\odot$, ktoré s obvyklým sčítaním $+$ a násobením $\cdot$ bezprostredne súvisia. Pre ľubovoľné celé čísla a, b nech $a + b = s$, $a \cdot b = p$. Potom

$$a \oplus b = s, \quad a \odot b = p$$

Teda $a \oplus b$ je tá množina zo systému $\mathbf{Z}_5$, ktorá obsahuje číslo $a + b$. Napríklad $1 \oplus 3 = 4$, $2 \oplus 3 = 5 = 0$ a podobne pri násobení $2 \odot 3 = 6 = 1$, $4 \odot 2 = 8 = 3$ atď. Pretože každé celé číslo do niektorej z množín $0, 1, \dots, 4$ patrí, je súčet $a \oplus b$ aj súčin $a \odot b$ vždy definovaný (vždy vieme určiť výsledok). Ďalej možno ukázať (ale robiť to nebude-me), že súčet $a \oplus b$ aj súčin $a \odot b$ je vždy jednoznačne definovaný, t.j. ak $a = c$ a $b = d$, tak $a \odot b = c \odot d$. Súčty a súčiny prvkov systému $\mathbf{Z}_5$ si zapíšeme do nasledujúcich tabuliek:

Tab. 1						Tab. 2					
$\oplus$	0	1	2	3	4	$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0	1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	0	1	2	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2	3	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3	4	0	4	3	2	1

V nich je napríklad súčet $2 \oplus 3$ zapísaný v tab. 1 na mieste, ktoré je v riadku začínajúcom symbolom 2 a zároveň v stĺpci začínajúcom symbolom 3.

Poznámka. V algebre sa postupuje takto. Na množine $\mathbf{Z}$ sa definuje relácia $\equiv$ podmienkou

$a \equiv b$ práve vtedy, keď $a - b$ je deliteľné číslom 5. Ukáže sa, že $\equiv$ je tzv. kongruencia štruktúry $(\mathbf{Z}; +, \cdot)$ a $(\mathbf{Z}_5; \oplus, \odot)$ sa nazýva faktorová štruktúra daná kongruenciou $\equiv$.

Ak zvolíme $n = 6$, dostaneme analogickým spôsobom systém $\mathbf{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Treba si však uvedomiť, že v tomto prípade symbol 0 označuje množinu

$$0 = \{6k; k \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -12, -6, 0, 6, 12, \dots\},$$

t. j. ten istý symbol 0 môže označovať rôzne množiny celých čísel (ale z kontextu je vždy v konkrétnom prípade zrejmé, ktorú množinu ním označujeme). Podobne je to aj u ostatných symbolov 1, 2 atď. Napíšte si tabuľky pre sčítanie $\oplus$ a násobenie $\odot$ na množine (systéme) $\mathbf{Z}_6$.

Rôzne zákony, ktoré platia pre sčítanie a násobenie na množine všetkých celých čísel $\mathbf{Z}$, platia aj pre sčítanie $\oplus$ a násobenie $\odot$ na množine $\mathbf{Z}_n$ (kde n je prirodzené číslo). Vieme, že napríklad sčítanie celých čísel je asociatívne, t.j. pre ľubovoľné celé čísla a, b, c platí

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Z toho vyplýva, že pre ľubovoľné množiny $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ platí

$$(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c} = \mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}),$$

teda aj sčítanie $\oplus$ je asociatívne.

V ďalšej časti ukážeme, ako možno využiť uvedené poznatky pri riešení tzv. *lineárnych diofantických rovníc* (kde hľadáme celočíselné korene napr. jednej rovnice o dvoch neznámych). Všeobecnou teóriou sa zaoberať nebudeme, ale obmedzíme sa na 2 ukážky.

Príklad 1. Predavačka predávala jablká po 7 Kčs za kg (I. akosť) a po 5 Kčs za kg (II. akosť). Utržila 246 Kčs, ale pretože stratila dodací list, nevedela, koľko predala ktorých. Pamätá si však, že jablák I. akosti predala o niekoľko kilogramov viac. Vypočítajte, koľko kilogramov predala z I. akosti a koľko z II. akosti.

Riešenie. Úloha vedie k riešeniu rovnice

$$(1) \quad 7x + 5y = 246.$$

Riešenie sa zjednoduší, keď prejdeme k výpočtom na vhodnej množine zvyškových tried. Výhodne je zvoliť za modul n menší z koeficientov (presnejšie menšie číslo z absolutných hodnôt koeficientov) pri neznámych. Teda položíme $n = 5$. Keď x, y sú celé čísla, pre ktoré platí (1), potom tiež platí

$$(2) \quad 7 \odot x \oplus 5 \odot y = 246$$

Pre modul $n = 5$ je $5 = 0$, teda aj $5 \odot y = 0$ a ďalej $7 = 2$, $246 = 1$ (lebo ak delíme číslo 246 piatimi, dostaneme zvyšok 1). Preto rovnicu (2) môžeme prepísať na tvar

$$2 \odot x = 1$$

Z tabuľky 2 vidíme, že $2 \odot 3 = 1$, čiže $x = 3 = \{\dots, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$. Teda môže byť $x = -2$, alebo $x = 3$, alebo $x = 8$ atď. Záporné číslo zrejme nemôže byť riešením danej slovnej úlohy. Ak napríklad $x = 18$, tak z rovnice (1) dostaneme $y = 24$, ale pretože predala viac jablák I. akosti, toto riešenie úlohy nevyhovuje. Ak $x = 23$, tak z (1) dostaneme $y = 17$. Ak $x = 28(33)$, tak $y = 10(3)$.

Záver. Predala 23 kg jablák I. akosti a 17 kg jablák II. akosti.

Príklad 2. Študent Usilovný začal prázdniny brigádou na JRD, kde najskôr pri zbere jahôd zarábala denne priemerne 53 Kčs a potom pri

zbere ribezlí priemerne 46 Kčs. Po skončení brigády sa zotavoval u tety vo Vysokých Tatrách, kde utratil priemerne denne 40 Kčs. Na brigáde odpracoval dvakrát toľko dní, ako strávil u tety, a po návrate domov mu ešte zostalo zo zarobených peňazí 420 Kčs. Vypočítajte, koľko dní zbieral jahody a koľko dní oberal ribezle. (Medzi jeho príjmy a výdavky počítame len sumy uvedené v texte.)

Riešenie. Úloha vedie k riešeniu sústavy rovníc

$$53x + 46y - 40z = 420,$$

$$x + y = 2z.$$

Po dosadení za z do prvej rovnice dostávame

$$(3) \quad 33x + 26y = 420$$

Ďalej počítame na množine zvyškových tried modulo 26. Platí $26 = 0$, $33 = 7$, $420 = 4$ (pri delení čísla 420 číslom 26 dostaneme zvyšok 4), preto z rovnice (3) vyplýva

$$7 \circ x = 4 = \{\dots, -22, 4, 30, 56, \dots\}$$

Z čísel v zloženej zátvorke je deliteľné siedmimi číslo 56, platí $7 \circ 8 = 56$, preto aj

$$7 \circ 8 = 56 = 4,$$

odkiaľ vyplýva

$$x = 8 = \{\dots, -18, 8, 34, \dots\}$$

Pre $x = 8$ dostaneme z rovnice (3) $y = 6$. Pre $x = 34$, $x = 34 + 26$, atď. nedostaneme z (3) kladné y .

Záver. Usilovný zbieral 8 dní jahody a 6 dní ribezle.

Matematické paradoxy

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

Stáva se, že se setkáme s tvrzením, které je pravdivé, i když se zdá, že logickými úvahami můžeme dokázat jeho opak. Takovémuto tvrzení říkáme paradox. Ukážeme si zde tři takovéto paradoxy. Jsou velmi známé; možná, že jste se už s některým z nich setkali. Nebude však na škodu, když si je zde podrobně probereme.

1. *Paradox Krétanu.*

Ve starověkém Řecku měli Krétané pověst lhářů. I stalo se prý, že jistý Krétan jménem Epimenides prohlásil: „Všichni Krétané jsou lháři.“ Jak se máme dívat na tento jeho výrok? Je-li pravdivý, pak je lhářem i Epimenides, protože je Krétan. To ovšem znamená, že jeho výrok je lží a že tedy není pravda, že všichni Krétané jsou lháři.

Tato formulace paradoxu však není tak docela šťastná. Je-li někdo lhářem, neznámá to, že by nemohl aspoň někdy mluvit pravdu. A i kdybychom předpokládali, že lhář lže vždy, přece jen bychom mohli paradox snadno vysvětlit. Vyšli bychom z toho, že Epimenidovo tvrzení je lež; není tedy pravda, že všichni Krétané jsou lháři. To samozřejmě neznámá, že by všichni Krétané byli pravdomluvní; znamená to pouze, že alespoň jeden Krétan je pravdomluvný. Epimenides to není, ale může to být někdo jiný.

Existuje jiná formulace tohoto paradoxu, která má blízko k černému humoru. Přes řeku vedl most a u něho stála šibenice. Každého pocestného, který přecházel most směrem ke břehu, na němž tato šibenice stála, se zeptali, co se s ním stane po přejití mostu. Jestliže se jeho odpověď nesplnila, měl být oběšen. Jeden pocestný na otázku odpověděl: „Po přejití mostu budu oběšen.“ Co se s ním tedy má stát? Pokud bude oběšen, bude to znamenat, že mluvil pravdu, a tedy by neměl být oběšen. Pokud nebude oběšen, jeho odpověď se nesplní a měl by tedy být oběšen.

Zde zase můžeme připustit, že pocestný bude oběšen za něco jiného než za nesprávnou odpověď. Proto snad nejlepší formulací tohoto paradoxu v nematematické řeči je tzv. „paradox holiče“

Ve vesnici bydlí holič, který holí všechny muže z této vesnice, kteří se sami neholí, a kromě nich nikoho jiného. Holí se tento holič sám či nikoliv? Jestliže se sám holí, pak nepatří mezi muže z vesnice, kteří se sami neholí. Protože však neholí nikoho jiného než muže z vesnice, kteří se sami neholí, neholí tedy ani sám sebe. Jestliže se však sám neholí, pak je jedním z mužů z vesnice, kteří se sami neholí. Všechny takovéto muže holič holí; holí tedy i sám sebe.

Zatím jsme tu měli samé povídání o Krétanech, šibenicích a holičích, takže by se někdo mohl divit, co se to vlastně v tomto časopise píše. Aby bylo vidět, že to s matematikou opravdu souvisí, uvedeme si konečně matematickou formulaci tohoto paradoxu.

Cokoliv může být prvkem nějaké množiny; tedy i množina může být prvkem množiny. Existují tedy množiny, které jsou prvky sebe samé; je-li takováto množina označena A , můžeme psát $A \in A$. Nechť nyní M je množina všech množin, které jsou prvky sebe samé; můžeme to zapsat $M = \{A \mid A \in A\}$. Nechť N je množina všech množin, které nejsou prvky sebe samé, tedy $N = \{A \mid A \notin A\}$. Zřejmě každá množina je buď prvkem

množiny $\mathbf{M}$ nebo prvkem množiny $\mathbf{N}$ a nemůže být současně prvkem obou těchto množin. Tedy $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \emptyset$ a $\mathbf{M} \cup \mathbf{N}$ je množina všech množin.

Jak je to nyní s množinou $\mathbf{N}$? Předpokládejme, že $\mathbf{N} \in \mathbf{M}$, tedy $\mathbf{N} \notin \mathbf{N}$. Pak tedy $\mathbf{N}$ je prvkem sebe samé, tudíž $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$. A je-li $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$, pak $\mathbf{N}$ není prvkem sebe samé, to jest $\mathbf{N} \notin \mathbf{N}$.

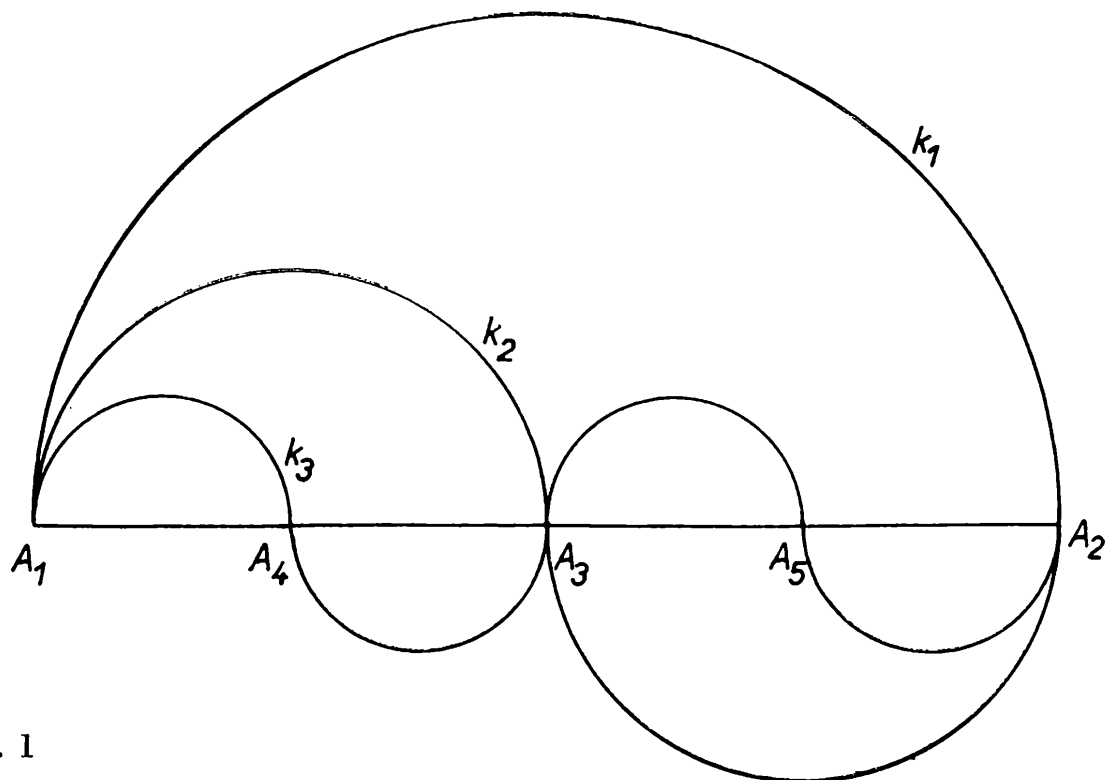
Znamená to tedy, že celá teorie množin je postavena na hlavu? Nikoliv; axiomatická teorie množin je vybudována tak, že prostě nepřipouští něco takového, jako je množina všech množin. Existuje v ní obecnější pojem než množina, a to třída. Každá množina je třídou, avšak ne každá třída je množinou. Neexistuje množina všech množin, nýbrž třída všech množin. Na druhé straně však můžeme mít například množinu všech podmnožin množiny reálných čísel. Veškeré úvahy o množinách totiž můžeme provádět pouze tehdy, máme-li předem dáno tzv. universum, to jest množinu $\mathbf{U}$ takovou, že všechny množiny, o nichž uvažujeme, jsou jejími podmnožinami. A o této množině $\mathbf{U}$ musíme mít jasnou představu, co všechno do ní patří. V našem paradoxu by $\mathbf{U}$ musela být množina všech možných pojmů, konkrétních i abstraktních, existujících i vybájených; něco takového si těžko dovedeme představit.

Podrobněji se do této problematiky nemůžeme pouštět; znamenalo by to podrobný výklad o axiomatice teorie množin. Doufám však, že je čtenáři intuitivně zřejmé, o co jde.

Vraťme se však k tomu holiči. Tam je to přece jen trochu jiné. Universum tu máme; je to množina všech mužů z vesnice a ta je dokonce konečná. Máme tedy jediné vysvětlení; výrok „Ve vesnici bydlí holič, který holí všechny muže z této vesnice, kteří se sami neholí, a kromě nich nikoho jiného“ je prostě nepravdivý. Dokažme si to matematicky. Označme písmenem $\mathbf{M}$ množinu všech mužů z vesnice a písmenem h holiče; zřejmě $h \in \mathbf{M}$. Nechť φ je zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do $\mathbf{M}$ takové, že pro každé $x \in \mathbf{M}$ je $\varphi(x)$ osoba, která holí osobu x . Nechť $\mathbf{N} = \{x \in \mathbf{M} \mid \varphi(x) = x\}$, $\mathbf{P} = \{x \in \mathbf{M} \mid \varphi(x) = h\}$. Uvedené tvrzení pak lze matematicky vyjádřit tak, že $\mathbf{N} \cap \mathbf{P} = \emptyset$ a $\mathbf{N} \cup \mathbf{P} = \mathbf{M}$. Z $\mathbf{N} \cup \mathbf{P} = \mathbf{M}$ plyne, že buď $h \in \mathbf{N}$ nebo $h \in \mathbf{P}$. Je-li $h \in \mathbf{N}$, pak $\varphi(h) = h$ a $h \in \mathbf{P}$. Je-li $h \in \mathbf{P}$, pak také $\varphi(h) = h$ a $h \in \mathbf{N}$. Z toho ovšem plyne $h \in \mathbf{N} \cap \mathbf{P}$, $\mathbf{N} \cap \mathbf{P} \neq \emptyset$. Docházíme ke sporu s předpokladem, že $\mathbf{N} \cap \mathbf{P} = \emptyset$. Tedy naše tvrzení o holiči nemůže být pravdivé, i když na první pohled se na něm nezdá být nic nemožného.

2. Délky křivek.

Mějme úsečku A_1A_2 délky 1. Sestrojme nad ní (jakožto nad průměrem) půlkružnici k_1 (obr. 1); ta má zřejmě délku $\frac{1}{2}\pi$. Nechť A_3 je střed úsečky A_1A_2 ; sestrojme podobnou půlkružnici nad každou z úseček



Obr. 1

A_1A_3 , A_3A_2 . Křivka k_2 , která je sjednocením těchto dvou půlkružnic, má opět délku $\frac{1}{2} \pi$. Vezmeme-li úsečky A_1A_4 , A_4A_3 , A_3A_5 , A_5A_2 , kde A_4 , A_5 jsou po řadě středy úseček A_1A_3 , A_3A_2 , a sestrojíme-li nad každou z nich půlkružnici, bude mít křivka k_3 , která je sjednocením těchto půlkružnic, opět délku $\frac{1}{2} \pi$. Takto můžeme pokračovat do nekonečna a dostaneme určitou posloupnost křivek $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, z nichž každá má délku $\frac{1}{2} \pi$.

Podobně jako pro nekonečnou posloupnost čísel můžeme i pro nekonečnou posloupnost bodů a pro nekonečnou posloupnost křivek definovat limitu. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonečná posloupnost bodů, pak řekneme, že její limitou je bod A právě tehdy, jestliže pro každé kladné číslo ε existuje kladné číslo n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ je vzdálenost bodů A_n a A menší než ε . Přesnou definici limity posloupnosti křivek zde uvádět nebudeme. Řekneme jen, že je-li křivka k limitou posloupnosti křivek $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak každý bod A křivky k je limitou posloupnosti bodů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že pro každé přirozené n bod A_n leží na křivce k_n .

Limitou naší posloupnosti křivek $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě úsečka A_1A_2 . Čekali bychom, že její délka bude limitou posloupnosti délek křivek k_n ; protože všechny tyto délky jsou rovny $\frac{1}{2} \pi$, měla by i úsečka A_1A_2 mít délku $\frac{1}{2} \pi$. Přitom však tato úsečka má délku 1. Jak je to možné?

Abychom si ujasnili, jak to je, budeme si muset říci něco o délkách křivek. Nevyhňeme se při tom derivacím a integrálům. Čtenář, který tyto pojmy nezná, nechť se nezalekne a čte klidně dál; vše, co bude nutné, bude vysvětleno i jemu.

Křivka se často určuje parametrickým vyjádřením. Při tomto vyjádření (v případě rovinné křivky) jsou dány dvě funkce $x(t)$ a $y(t)$ proměnné t , která probíhá určitý interval $\langle a, b \rangle$. Potom bod $[x_0, y_0]$ je bodem dané křivky právě tehdy, jestliže existuje číslo $t_0 \in \langle a, b \rangle$ takové, že $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$.

Jestliže funkce $x(t)$ a $y(t)$ mají skoro v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ konečnou derivaci a jestliže existuje integrál

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

kde $x'(t)$ a $y'(t)$ jsou po řadě derivace funkcí $x(t)$ a $y(t)$, je délka křivky rovna tomuto integrálu.

Nás na tom bude zajímat hlavně to, že délka křivky závisí na derivacích $x'(t)$ a $y'(t)$. Poznamenejme k tomu, že pro $t_0 \in \langle a, b \rangle$ podíl $y'(t_0)/x'(t_0)$ při $x'(t_0) \neq 0$ je roven směrnici tečny ke křivce v bodě $[x(t_0), y(t_0)]$; je-li $x'(t) = 0$, pak tato tečna je kolmá k ose x .

Podstatné na tom je, že délka křivky úzce souvisí se směry tečen v jednotlivých bodech. Jestliže každý bod A křivky k je limitou nějaké posloupnosti bodů $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ takové, že pro každé přirozené n bod A_n leží na křivce k_n , vůbec to nemusí znamenat, že by směrnice tečny ke křivce k v bodě A byla limitou směrnic tečen ke křivkám k_n v bodech A_n ; v našem případě to také tak není. Pak se ovšem nemůžeme divit, že se délka křivky k vůbec nemusí rovnat limitě posloupnosti délek křivek k_n .

3. *Paradox holohlavého.*

Jestliže člověku, který není holohlavý, vytrhneme jeden vlas, nestane se tím holohlavým. Z tohoto tvrzení pomocí matematické indukce můžeme dokázat, že člověk, který není holohlavý, se nestane holohlavým ani po vytržení libovolného počtu vlasů. To je zřejmý nesmysl. Kde je tedy chyba?

Abychom mohli provádět matematické úvahy o nějakém pojmu, musíme si jej nejprve přesně definovat. Jakého člověka nazveme holohlavým? Definujme si holohlavého jako člověka, který nemá vůbec žádné vlasy. Potom člověk, který má právě jeden vlas, holohlavý není, ale po vytržení jednoho vlasu se jím stane. Naše tvrzení tedy není pravdivé — jestliže člověku, který není holohlavý, vytrhneme jeden vlas, může se holohlavým stát. I kdybychom chtěli holohlavého definovat jinak, došli bychom ke stejnému výsledku. V každém případě bychom museli zvolit nějaké přirozené číslo n a prohlásit, že holohlavý je takový člověk, který

má nejvýše n vlasů. Potom člověk s $n + 1$ vlasy by nebyl holohlavý, ale po vytržení jednoho vlasu by se jím stal.

Uvedli jsme si tři paradoxy. Takových paradoxů existuje více a rozhodně to nejsou samoučelné hříčky, ale pomáhají člověku k tomu, aby se naučil správnému matematickému myšlení.

O umění rozhodovat se aneb Potíže s gramatikou

RNDr. STANISLAV KOMENDA, UP Olomouc

Předtím, než učiní závažné rozhodnutí, člověk obvykle zaváhá. Ostatně zdá se, že etymologie adjektiva „závažný“ a slovesa „váhati“ má společný základ: obojí zřejmě souvisí s vážením, oceňováním, posuzováním či hodnocením. Je to konec konců pochopitelné, uvědomíme-li si, že rozhodovat se znamená vlastně volit jednu z množiny možností, přičemž kritériem volby jsou důsledky, z rozhodnutí plynoucí. Váhání mezi alternativami volby je tak vyvoláno zvažováním relativních výhod a ztrát, které lze jako následek jednotlivých voleb očekávat.

Váháme, zda je lépe přihlásit se ke zkoušce dobrovolně anebo počkat, až na nás dojde řada; úspěch může být v případě prvního rozhodnutí psychologicky cennější, neúspěch však bude svědčit nejen o neznalostech, ale i o neschopnosti odhadnout vlastní síly. Jsme-li si vědomi, že stav našeho chrupu volá naléhavě po návštěvě zubního oddělení polikliniky, jsou ve hře hodnoty spíše nepříjemné, ale pořád se ještě můžeme rozhodovat mezi bezprostředním nástupem anebo odkladem. Důvodem váhání může být skutečnost, že je sice subjektivně příjemnější nepříjemné odsouvat, objektivně však víme, že zub času ohlodává náš chrup svědomitě dál a škody vzrůstají.

V procesu rozhodování užívají lidé často postupů velmi svérázných, začasné zahrnujících určité náhodné struktury.

Rozpačitý jinoch, utrhávající uprostřed rozkvetlé jarní stráně okvětní plátky kopretiny (*Chrysanthemum leucanthemum*) se slovy: „Má mne ráda, nemá mne ráda...“ vlastně podvědomě předpokládá, že počet okvětních plátků není určován biologickým zákonem, ale jakýmsi tajemným mechanismem, který se jemu jeví jako náhodný a o němž soudí, že by mohl mít vztah k názoru uvažované dívky na ničitele přírody. Nemá odvahu položit objektu svého zájmu přímou otázku anebo vymyslet nějaký rafinovanější test, který by mu poskytl hledanou informaci

o tématu, nad nímž přemítá. Raději spoléhá na náhodu, i když by určitě byl schopen o deset minut později přísahat, že ničemu takovému nevěří.

K náhodě se utíkáme pokaždé, když hledáme knoflík saka při zahlednutí kominíka; ten mohl totiž pro svou cestu do práce zvolit jinou ulici než tu, kterou chodíme my. A čím jiným je naše rozhodnutí odložit plánovanou akci, protože nám ráno přeběhla přes cestu černá kočka?

Že podobný způsob rozhodování nemusí vždy dobře dopadnout, dokazuje případ krále *Kroisa*, který vytáhl roku 585 před n. l. do boje proti králi *Kýrovi* na základě výroku delfské věštírny: „Překročíš-li řeku Halys, zničíš velikou říši.“ Kroisos byl optimista a Pýthiinu věštbu si vyložil ve svůj prospěch. Jak známo, dopadlo to právě naopak a přišel o všechno. Zjevně podcenil neurčitost získané informace a rizika, z rozhodnutí plynoucí.

V podobné situaci byl úspěšnější *Themistokles*. Když Pýthie Athénanům předpověděla, že se mohou ubránit Peršanům za dřevěnými hradbami, interpretoval její výrok jako pokyn dát přednost obraně na lodích před bojem na souši. V bitvě u Salaminy pak Peršany skutečně porazil.

Ovšem jediným, kdo měl v obou případech spolehlivě úspěch zaručen, byla delfská věštírna, neboť ta inkasovala svoje poplatky předem.

Rovněž *César* překračoval roku 49 před n. l. řeku Rubikon s jistými rozpaky. Ačkoliv se k tažení na Řím proti Pompeiovi rozhodl sám, neváhal své rozhodnutí zcela otevřeným poukazem na náhodný mechanismus tvrzením, že kostky byly vrženy.

Podobné spojování závažných rozhodnutí s náhodnými procesy lze doložit v historii poměrně často. Do této třídy situací patří nesporně hádání z letu ptáků, z konstelace hvězd a zvířecích vnitřností, jež bylo po staletí mnohde součástí oficiálních rozhodovacích rituálů. Jejich zbytky přežívají ve vánočních zvycích lití olova, rozkrajování jablka a házení obuvi přes rameno.

Uvedené skutečnosti se zdají naznačovat snahu člověka přesunovat alespoň část odpovědnosti za důsledky učiněného rozhodnutí na bedra někoho či něčeho jiného. Jakoby už dávno lidé vytušili, že náhoda k rozhodování jakýmsi — jistě dosti záhadným — způsobem patří. Tehdy ovšem ještě nemohli vědět, že jednou vytvoří jejich potomci teorii rozhodování na statistických principech, teorii, v jejíž konstrukci budou hrát elementy náhody klíčovou roli.

Základním principem statistické koncepce rozhodování je představa, že neznámá skutečnost, které se rozhodování týká, ovlivňuje pozorovatelná fakta (výsledky pozorování, experimentu či prostě informaci dostupnou tomu, kdo se rozhoduje) způsobem, který dokážeme popsat statistickými prostředky. Tato informace je pro dosažení jednoznačně nejlepšího rozhodnutí neúplná. Kvalita rozhodování je dána stupněm shody resp. nesouladu mezi učiněným rozhodnutím a neznámou skutečností; každá neshoda může mít nepříznivé následky. Obvykle se uvažují jenom

škody či ztráty, vznikající takovým rozhodnutím. Optimální rozhodování je pak takové, které dokáže riziko ztrát (tj. pravděpodobnost, že ke ztrátám dojde), event. velikost ztrát učinit co nejmenší. Statistická teorie rozhodování umožňuje tak kvantitativně vyšetřovat vlastnosti rozhodovacích strategií, tj. postupů, udávajících pravidla, jaká rozhodnutí mají být přijímána v případě toho kterého pozorování nebo informace.

Následující příklad ukazuje (nehledě na jeho určitou idealizaci), že statistická teorie rozhodování není ani zdaleka teorií výhradně akademickou a že je schopna řešit velice palčivé otázky denní životní praxe základní školy. Jeho řešení předpokládá znalost elementárních zákonů počtu pravděpodobnosti.

Žák *František*, statečně svádějící neúspěšné potyčky se záludnostmi „*i*“ a „*y*“ na poli diktátů gramatiky, rozhoduje se zařadit do své výzbroje také metody statistického rozhodování a s jejich pomocí se vydává hledat optimální bojovou strategii, schopnou změnit jeho dosud negativní klasifikační skóre. Následující řádky jsou stručným záznamem jeho hledání, nalézání a ztrát.

Seznámiv se s elementárními základy teorie rozhodování, usoudil František, že musí nezbytně učinit svou situaci přehlednější a trochu ji formalizovat. Nebylo pro něj obtížné si uvědomit, že gramatika, s níž vede svou válku o odhalení tajemství „*i*“ a „*y*“, mu prostě svoje dvě možnosti záhadným způsobem (dokonale utajeným v tzv. pravidlech gramatiky) předkládá a boj za vítězství je hledáním strategie, zaručující minimální klasifikační ztráty. Sestavil proto tabulku ztrát $l(g, r)$, udávajících stupeň klasifikační pohromy (tab. 1) pro možné kombinace požadavků gramatiky $g \in \{i, y\}$ a jeho vlastních rozhodnutí $r \in \{r_1, r_2\}$, $r_1 = \text{psát „i“}$, $r_2 = \text{psát „y“}$

Tab. 1.

Gramatika vyžaduje (<i>g</i>)	Žák se rozhoduje (<i>r</i>)	
	<i>r</i> ₁	<i>r</i> ₂
<i>i</i>	0	1
<i>y</i>	1	0

Každodenní střetání s drsnou školní skutečností už dávno poučilo Františka o významu informace. Nebylo pro něho proto žádným překvapením, že také teorie rozhodování předpokládá dostupnost pozorování nějakého jevu či veličiny, v nichž by se tajemná a přímo nepoznatelná skutečnost gramatiky alespoň částečně zrcadlila. Nabyt dojmu, že tako-

Tab. 2.

Gramatika vyžaduje (g)	Žák registruje (x)			Σ
	x_1	x_2	x_3	
i	0,90	0,00	0,10	1
y	0,25	0,40	0,35	1

Tab. 3.

Strategie žáka (s)	Žák registruje (x)		
	x_1	x_2	x_3
s_1	r_1	r_2	r_1
s_2	r_1	r_2	r_2
s_3	r_1	r_2	r_{12}
s_4	r_1	r_1	r_1
s_5	r_2	r_2	r_2

vým zrcadlem je způsob, jakým učitelka vyslovuje slabiky, při jejichž psaní je třeba se rozhodovat. Pečlivou evidencí tohoto znaku X identifikoval tři úrovně $x \in \{x_1, x_2, x_3\}$, x_1 = slyším samohlásku měkkou, x_2 = slyším samohlásku tvrdou, x_3 = tvrdost samohlásky nedokáži rozlišit.

Při dodatečně prováděných kontrolách dobytých a prohraných pozic, vytyčených červenou barvou na opravených stránkách sešitu, mu umožnily jeho fonetické záznamy vypočítat (tab. 2) podmíněné pravděpodobnosti $P(x | g)$. Zejména si přitom povšiml, že jednoznačnost vztahu mezi požadavkem gramatiky a jeho pozorováními je narušována především značnou neurčitostí reakce na „ y “

Ted' už František věděl, co potřebuje jako strategii: seznam tří rozhodnutí, udávající pro možná pozorování (x_1, x_2, x_3) návod, co psát. Následujících několik strategií, uvedených v tab. 3, se proto rozhodl prozkoumat. Strategie s_1 a s_2 se lišily jenom volbou rozhodnutí při pozorování x_3 . Obě poslední strategie s_4 a s_5 už předem sám považoval za

značně fatalistické a schopné proto vyvolat nežádoucí reakce ze strany pedagoga. Rozhodnutí r_{12} ve strategii s_3 vymezil takto: při pozorování x_3 bleskurychle hodí mincí; padne-li hlava, napíše „i“, padne-li lev, napíše „y“.

Aby ověřil vhodnost strategie s , provedl výpočet průměrných ztrát $L(g, s)$ pro každou z obou alternativ gramatiky (tab. 3):

$$\begin{aligned} L(i, s_1) &= l(i, r_1) P(x_1 | i) + l(i, r_2) P(x_2 | i) + l(i, r_1) P(x_3 | i) \\ &= 0.0,90 + 1.0 + 0.0,10 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(y, s_1) &= l(y, r_1) P(x_1 | y) + l(y, r_2) P(x_2 | y) + l(y, r_1) P(x_3 | y) \\ &= 1.0,25 + 0.0,40 + 1.0,35 = 0,60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(i, s_2) &= l(i, r_1) P(x_1 | i) + l(i, r_2) P(x_2 | i) + l(i, r_2) P(x_3 | i) \\ &= 0.0,90 + 1.0 + 1.0,10 = 0,10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(y, s_2) &= l(y, r_1) P(x_1 | y) + l(y, r_2) P(x_2 | y) + l(y, r_2) P(x_3 | y) \\ &= 1.0,25 + 0.0,40 + 0.0,35 = 0,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(i, s_3) &= l(i, r_1) P(x_1 | i) + l(i, r_2) P(x_2 | i) + \\ &\quad + \left\{ l(i, r_1) \frac{1}{2} + l(i, r_2) \frac{1}{2} \right\} P(x_3 | i) \\ &= 0.0,90 + 1.0 + \left\{ 0. \frac{1}{2} + 1. \frac{1}{2} \right\} 0,10 = 0,05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(y, s_3) &= l(y, r_1) P(x_1 | y) + l(y, r_2) P(x_2 | y) + \\ &\quad + \left\{ l(y, r_1) \frac{1}{2} + l(y, r_2) \frac{1}{2} \right\} P(x_3 | y) \\ &= 1.0,25 + 0.0,40 + \left\{ 1. \frac{1}{2} + 0. \frac{1}{2} \right\} 0,35 = 0,425 \end{aligned}$$

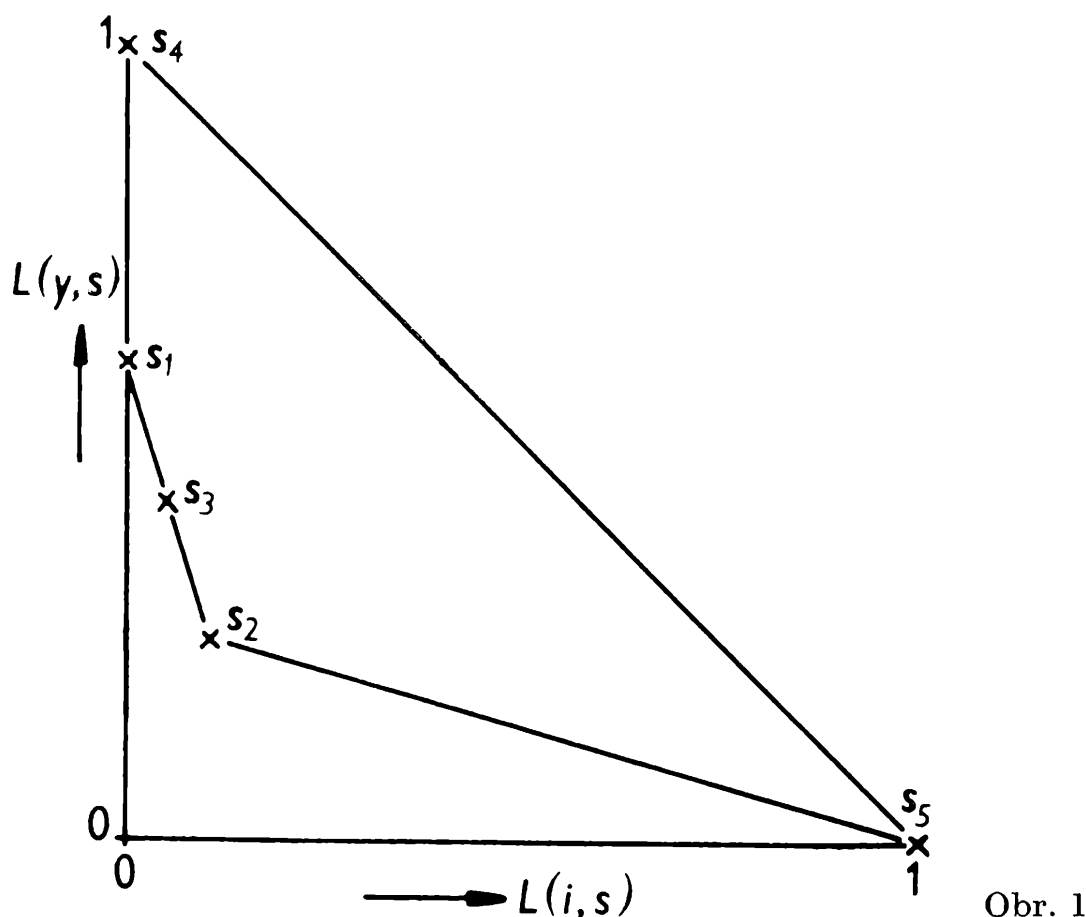
$$L(i, s_4) = l(i, r_1) = 0$$

$$L(y, s_4) = l(y, r_1) = 1$$

$$L(i, s_5) = l(i, r_2) = 1$$

$$L(y, s_5) = l(y, r_2) = 0$$

To umožnilo pro každou strategii s zakreslit průměrné ztráty $L(i, s)$, $L(y, s)$ jako bod do grafu (Obr. 1). Františkovi bylo zřejmé, že dobrá strategie by měla ležet co nejvíce vlevo a dole. Žádná z těch, které vyšetřoval, však tento požadavek nedokázala splnit úplně. Pak si vzpomněl, že existuje jakési kritérium optimální volby strategie, které se označuje záhadným názvem „metoda *minimaxu*“ a spočívá v tom, že se pro každou strategii uvažuje největší ztráta, k níž může (vinou gramatiky) dojít, a jako „minimaxová“ se zvolí strategie, pro kterou je ona nejvyšší ztráta nejnižší. Zapsal si proto pro každou strategii větší z obou možných ztrát:



Obr. 1

$$s_1 \quad 0,60 \quad s_2 \quad 0,25 \quad s_3 \quad 0,425 \quad s_4 \quad 1 \quad s_5 \quad 1 ;$$

toto maximum bylo minimální pro strategii s_2 .

Z obr. 1 sice vyčetl František možnost určitého vylepšení tím, že by se zvolila jako optimální jakási „směs“ strategií s_2 a s_5 , ale cítil se už unaven a navíc se mu kritérium minimaxu zdálo být svou zdůrazňovanou opatrností vůči úskokům gramatiky příliš pesimistické. Jal se proto shánět další informaci.

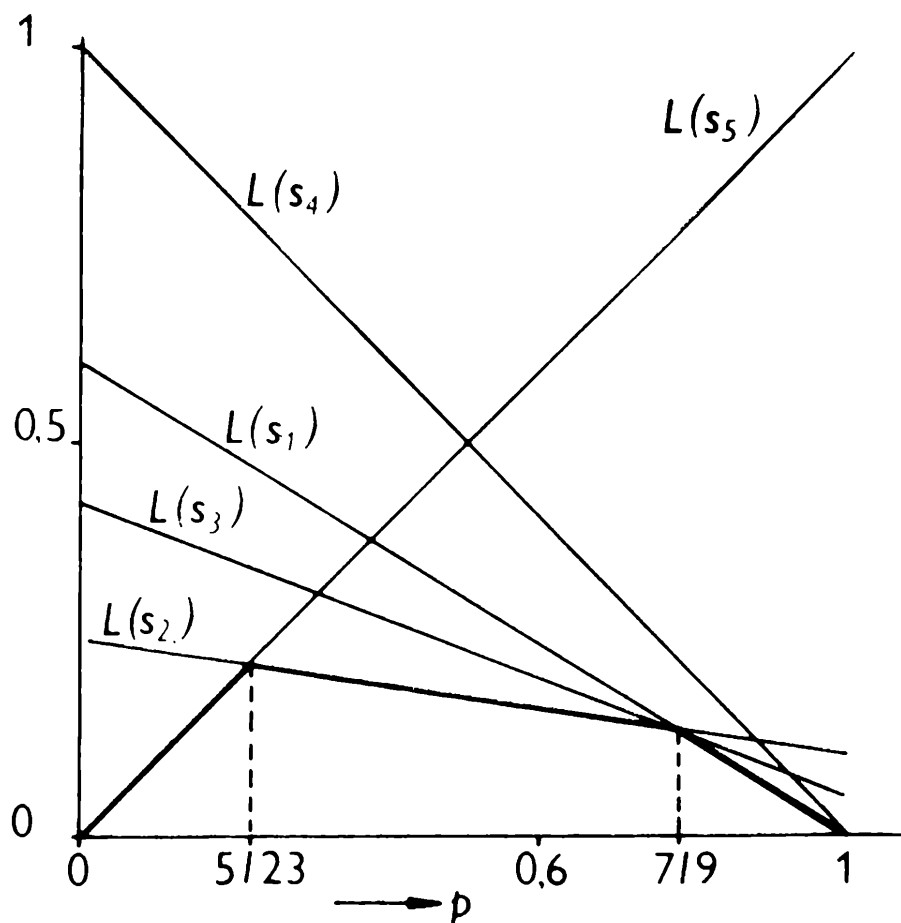
Pečlivým rozborem starých diktátů se mu podařilo odhalit, že gramatika rozsévá „ i “ a „ y “ v textech s pravděpodobnostmi (o nichž věděl, že se jim říká apriorní) $P(i) = p = 3/5$ a $P(y) = 1 - p = 2/5$. Teď mohl vypočítat průměrné ztráty $L(s)$ pro každou strategii s bez toho, že by se muselo uvažovat, co vlastně hodlá podniknout gramatika. Stačilo dosadit do vztahu

$$L(s) = p L(i, s) + (1 - p) L(y, s)$$

Výsledky, zanesené do grafu na obr. 2, umožnily Františkovi snadno rozhodnout o nejlepší z jeho pěti strategií nejen pro jím odhadnuté $p = 3/5$, ale zcela obecně, i pro případ, že by se četnost výskytu „ i “ v textech změnila.

V této situaci si však také uvědomil, že jeho pět strategií může znamenat jenom zlomek z daleko rozsáhlejší množiny strategií vůbec. Vzpo-

Obr. 2



mněl si na *Bayesův vzorec* a zkusil ze svých tabulek vypočítat aposteriorní pravděpodobnosti

$$P(g | x) = \frac{P(x | g) P(g)}{P(x)},$$

kde

$$P(x) = P(x | i) p + P(x | y) (1 - p)$$

Ty mu umožnily vypočítat pro každé pozorování x ztrátu $L(r | x)$ jednotlivých rozhodnutí r_1, r_2, r_{12}

$$L(r | x) = l(i, r) P(i | x) + l(y, r) P(y | x)$$

a najít tak Bayesovo rozhodnutí, které vede při daném pozorování x k nejmenší ztrátě. Odtud pak stačilo pomocí pravděpodobností $P(x)$ vypočítat pro toto rozhodnutí *střední (Bayesovu) ztrátu* či *riziko*

$$L = L(r_1 | x_1) P(x_1) + L(r_2 | x_2) P(x_2) + L(r_2 | x_3) P(x_3)$$

František chvíli zamyšleně hleděl na poslední řádek tab. 4, dokazující, že optimální strategie je shodná s jeho původní s_2 . Uvědomil si, že Bayesovo riziko $L = 0,16$ znamená v průměru 16 chyb na 100 „i“ nebo „y“ v diktátu a že tedy s nějakými šrámy v soubojích s gramatikou je třeba i v budoucnu počítat.

Tab. 4.

Gramatika vyžaduje (g)		x_1	x_2	x_3	$P(g)$
i	$P(x i) \quad p$	0,54	0,00	0,06	0,6
y	$P(x y) \quad (1 - p)$	0,10	0,16	0,14	0,4
$P(x)$		0,64	0,16	0,20	1,0
$P(i x)$		$\frac{0,54}{0,64}$	$\frac{0,00}{0,16}$	$\frac{0,06}{0,20}$	
$P(y x)$		$\frac{0,10}{0,64}$	$\frac{0,16}{0,16}$	$\frac{0,14}{0,20}$	
$L(r x)$		$r_1 \quad r_2 \quad r_{12}$ $\frac{0,10}{0,64} \quad \frac{0,54}{0,64} \quad \frac{1}{2}$	$r_1 \quad r_2 \quad r_{12}$ $\frac{0,16}{0,16} \quad \frac{0,00}{0,16} \quad \frac{1}{2}$	$r_1 \quad r_2 \quad r_{12}$ $\frac{0,14}{0,20} \quad \frac{0,06}{0,20} \quad \frac{1}{2}$	
Bayesovo rozhodnutí $r(x)$		r_1	r_2	r_2	
Beyesova ztráta (riziko)		$L =$ $= 0,64 \frac{0,10}{0,64} + 0,16 \frac{0,00}{0,16} + 0,20 \frac{0,06}{0,20} = 0,16$			

Pak mu svitlo, že přece jenom k jednomu zcela jednoznačnému výsledku jeho úsilí vedlo. Energicky zastrčil do kapsy korunovou minci, kterou už při diktátech potřebovat nebude, rozhodnut, že ji utratí v nejbližší cukrárně.

Literatura :

Černov, G., Mozes, L. E.: Elementarnaja teorija statističeskich rešenij. Moskva, 1962

Formáty papíru a matematika

Doc. PhDr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Podkladem racionalizace lidského konání je zkušenost a konvence, jež jsou zkoncentrovány do různých podnikových, státních a mezinárodních norem. Není divu, že se při tvorbě těchto norem vydatně používá matematiky. Sledujme to na normě, jež stanoví velikost obdélníkových formátů papíru, na který se píše, kreslí, rysuje, tiskne atd.

Např. formát sešitů našich Rozhledů se značí A5 a má mít rozměr $148 \text{ mm} \times 210 \text{ mm}$; rozevřený sešit Rozhledů má mít rozměr formátu A4, tj. $210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$.

Z uvedeného příkladu je zřejmý základní požadavek na normalizovaný formát papíru, aby půlením jeho delší strany vznikly dva menší formáty papíru, které rovněž odpovídají normě, a to bez jakéhokoliv odpadu. Tvar výchozího i menšího formátu papíru mají tedy tvar podobných obdélníků, jak to znázorňuje obr. 1; delší strana má rozměr y , kratší strana má rozměr x . Z obr. 2 je patrné, jak vznikají jednotlivé formáty papíru postupným jejich půlením.

Popsaný základní požadavek na poměr stran obdélníku normalizovaného formátu papíru z obr. 1 zachycuje rovnice (1)

$$y : x = x : \frac{y}{2} \quad \text{čili} \quad y = x\sqrt{2} \quad (1)$$

Pro strany tohoto obdélníka platí poměr $x : y = 1 : \sqrt{2}$. Obsahy výchozího formátu a formátu, který z něho vznikl půlením, jsou v poměru $2 : 1$.

Zbývá stanovit rozměry výchozího čili základního formátu, který se označuje A0 (čti „a nula“). Byl zvolen obdélník o obsahu 1 m^2 . Musí proto platit rovnice (2)

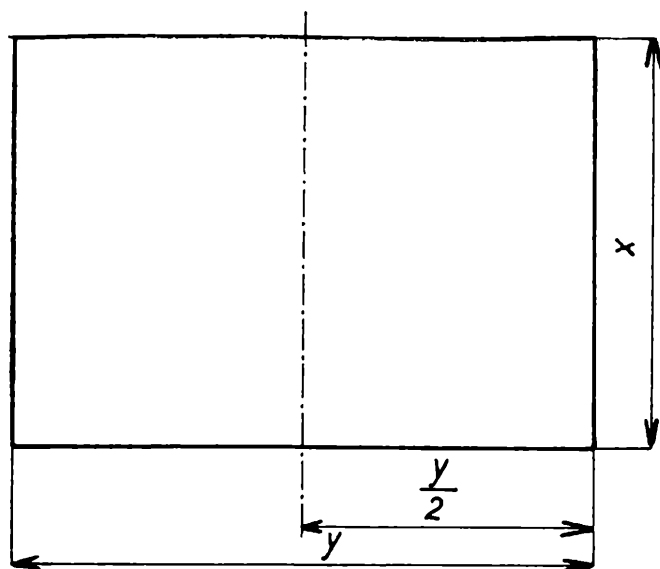
$$xy = 1. \quad (2)$$

Chápeme-li rovnice (1) a (2) jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, vychází délka kratší strany x formátu A0

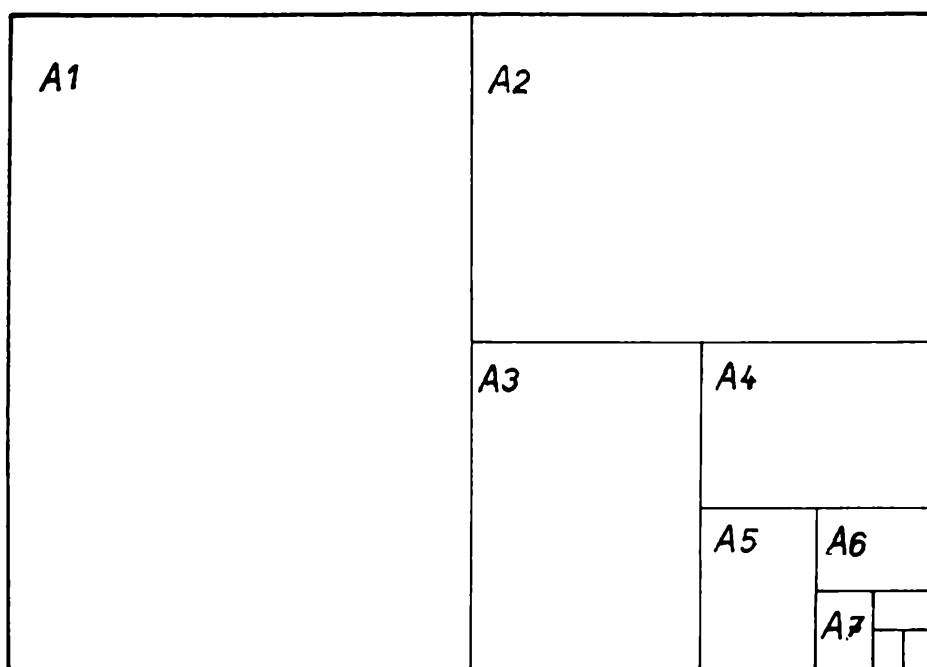
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70710678 \dots \text{ (metrů)}$$

a délka delší strany y formátu A0

$$y = \sqrt{2} = 1,41421356 \dots \text{ (metrů)}$$



Obr. 1



Obr. 2

Obě teoretické délky stran normalizovaného formátu papíru A0 jsou iracionální čísla, která se přibližně rovnají po zaokrouhlení na celé milimetry racionálním číslům $x = 841$ mm a $y = 1189$ mm.

Poměrné chyby obou normalizovaných rozměrů vzhledem k teoretickým hodnotám jsou nepatrné, zpravidla menší než 0,1 ‰.

Skutečně

$$p_x = \frac{0,5}{841} \cdot 100 \doteq 0,06 \text{ (‰)} ,$$

$$p_y = \frac{0,5}{1189} \cdot 100 \doteq 0,04 \text{ (}\% \text{)}$$

Rovněž poměrná chyba obsahu formátu A0 nepřesahuje $0,06 + 0,04 = 0,1 \text{ (}\% \text{)}$.

V tabulce jsou uvedeny jednak teoretické rozměry formátů řady A, jednak normalizované rozměry těchto formátů. Dodejme, že pro nejmenší technický výkres se nevolí menší formát papíru, než je formát A5. Další zvyklostí je, že všechny formáty řady A jsou ležaté s výjimkou formátu A4, který je stojatý.

Tabulka formátů papíru řady A

Formát řady A	Teoretické rozměry		Normalizované rozměry (mm)	Obsah (m ²)
	$x(\text{m})$	$y(\text{m})$		
A0	$1 \sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	841×1189	1
A1	$0,5 \sqrt[4]{2}$	$1 \sqrt[4]{2}$	594×841	1/2
A2	$0,5 \sqrt[4]{2}$	$0,5 \sqrt[4]{2}$	420×594	1/4
A3	$0,25 \sqrt[4]{2}$	$0,5 \sqrt[4]{2}$	297×420	1/8
A4	$0,25 \sqrt[4]{2}$	$0,25 \sqrt[4]{2}$	210×297	1/16
A5	$0,125 \sqrt[4]{2}$	$0,25 \sqrt[4]{2}$	148×210	1/32
A6	$0,125 \sqrt[4]{2}$	$0,125 \sqrt[4]{2}$	105×148	1/64
A7	$0,0625 \sqrt[4]{2}$	$0,125 \sqrt[4]{2}$	74×105	1/128

Experimentální způsob studia pružného rozptylu protonů na protonech

Doc. ing. ZDENĚK JANOUT, CSc.,
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT Praha

V článku „Měření v mikrosvětě“ uveřejněném v Rozhledech mat.-fyz. č. 7 bylo uvedeno, že hlavním zdrojem informací o silách působících mezi částicemi jsou srážkové procesy. Popíšme experiment, který je ukázkou toho, jak se prakticky studuje pružný rozptyl protonů na protonech při vysokých energiích, vyšších než 100 MeV. Dříve si však připomeňme několik poznatků z teorie pružných srážek dvou částic^[1]. Pružným rozptylem rozumíme proces, při kterém se zachovává celková kinetická energie soustavy, to znamená: Součet kinetických energií částic před srážkou je roven součtu kinetických energií částic po srážce. Při pružném rozptylu—srážce dochází pouze k přerozdělení celkové kinetické energie mezi srážejícími se částicemi. Dále — při nerelativistické pružné srážce dvou stejně hmotných částic svírají směry jejich letu po srážce úhel 90° . To znamená: pozorujeme-li rozptýlené protony pod úhlem rozptylu $\Theta = 30^\circ$ vzhledem ke směru dopadajících protonů, budou odražené protony, které byly původně v klidu, vyletovat pod úhlem odrazu $\Phi = 60^\circ$ (obr. 1). V případě relativistické pružné srážky, kam patří i níže popsáný experiment, svírají směry rozptýleného a odraženého protonu úhel menší než 90° . Pro náš konkrétní případ platí vztah:

$$\cotg\Theta - \cotg\Phi = 1 + \frac{T}{2mc^2}, \quad (1)$$

kde mc^2 a T jsou klidová energie a kinetická energie protonu. Užitím vztahu (1) zjistíme, že při zadaném úhlu rozptylu $\Theta = 45^\circ$ a energii dopadajících protonů $T = 660$ MeV bude $\Phi = 36,5^\circ$ a jejich součet $\Theta + \Phi = 81,5^\circ$. Pro zajímavost jsou v tabulce uvedeny hodnoty úhlu odrazu Φ i součet $\Theta + \Phi$ pro jiné energie dopadajících protonů a úhel $\Theta = 45^\circ$. Odklon součtu $\Theta + \Phi$ od 90° závisí na hodnotě členu $T/2mc^2$, vystupujícího v rovnici (1). Čím větší je kinetická energie dopadajících protonů T , tím větší je tento člen a tím větší je i odchylka součtu $\Theta + \Phi$

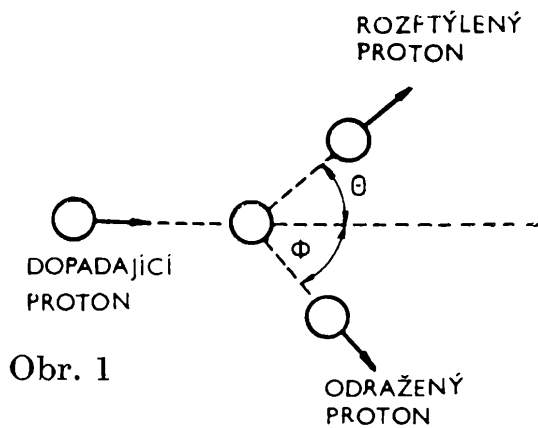
Tabulka

T [MeV]	Θ	Φ	$\Theta + \Phi$
<1	45°	$45,00^\circ$	$90,00^\circ$
1	45°	$44,98^\circ$	$89,98^\circ$
10	45°	$44,80^\circ$	$89,80^\circ$
300	45°	$40,80^\circ$	$85,80^\circ$
660	45°	$36,50^\circ$	$81,50^\circ$

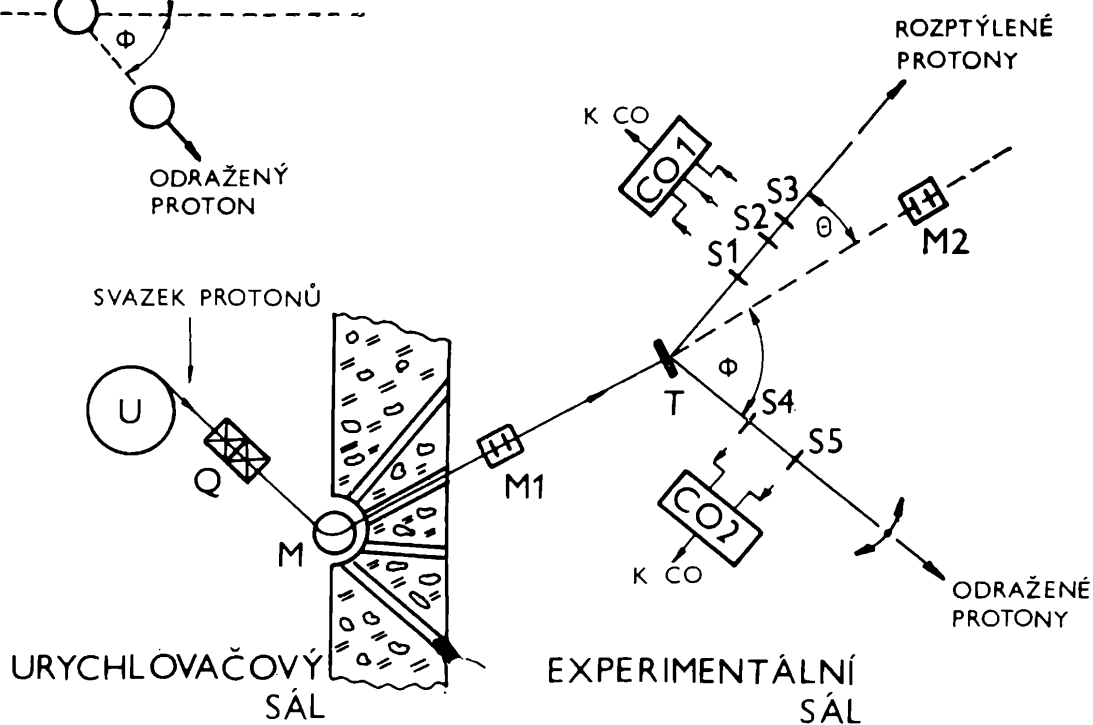
od 90° V nerelativistickém případě, kdy je $T \ll mc^2$, lze druhý člen na pravé straně rovnice (1) zanedbat a dostáváme goniometrickou rovnici

$$\cotg\Theta - \cotg\Phi = 1 ,$$

jejíž fyzikální řešení vede ke vztahu $\Theta + \Phi = 90^\circ$ Jednoznačná závislost mezi úhlem rozptylu Θ a úhlem odrazu Φ daná vztahem (1) se prakticky využívá k vydělení aktů pružného rozptylu na pozadí ostatních procesů (nepružný rozptyl, reakce) tím způsobem, že se současně s rozptýleným protonem detekuje jemu odpovídající odražený proton. Popíšme nyní experiment realizovaný ve Spojeném ústavu jaderných výzkumů v Dubně, jehož principiální schéma je ukázáno na obr. 2. Z urychlovače U je vyveden svazek protonů o energii 660 MeV Tento svazek je fokusován magnetickými čočkami Q proto, aby se zmenšila rozbíhavost (divergence) svazku. Pak je svazek odkloněn magnetem M do příslušného otvoru (kolimátoru) v třímetrové tlusté stěně oddělující urychlovačový sál od experimentálního sálu, ve kterém je vlastní uspořádání (terčík obsahující protony, detektory) experimentu. Vývod svazku je v experimentálním sále sledován podle dvou monitorů (ionizační komory) M1 a M2. První z nich je umístěn před ozařovaným terčíkem T, druhý za terčíkem. Terčíkové protony tvořila jádra kapalného vodíku. Protony svazku, které se rozptýlily v důsledku srážky s terčíkovými protony pod úhlem rozptylu Θ , byly detekovány třemi detektory S1, S2, S3, jejichž výstup byl připojen ke koincidenčnímu obvodu CO-1. Vlastností koincidenčního obvodu je, že na jeho výstupu se objeví impuls pouze v tom případě, když do koincidenčního obvodu přijdou současně impulsy od všech tří detektorů S1, S2, S3. Uspořádání detektorů za sebou je kvůli vydělení směru. Použití tří detektorů v koincidenčním zapojení dovolilo vyloučit pozadové případy, tj. takové případy, kdy částice prošla pouze jedním či dvěma detektory a její původ nebyl tedy v terčíku. Počet impulsů na výstupu koincidenčního obvodu CO-1 udával počet protonů rozptýlených terčíkovými protony o úhel Θ . Avšak tyto



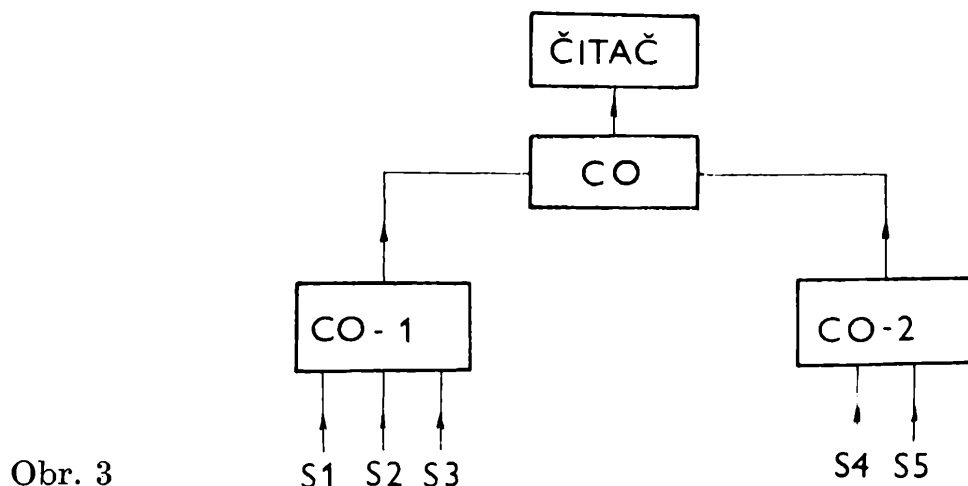
Obr. 1



Obr. 2

zaregistrované protony neodpovídají pouze případům pružného rozptylu. Detektory S1, S2, S3 jsou registrovány všechny protony letící od terčíku T, tedy i protony pocházející z jiných procesů (z nepružného rozptylu, reakcí), které probíhají současně s pružným rozptylem. K tomu, abychom vydělili pouze protony pocházející od pružného rozptylu, bylo použito dalších dvou detektorů S4 a S5, detekujících odražené terčíkové protony pod úhlem odrazu Φ , který je sdružený k úhlu rozptylu Θ . Tyto detektory byly rovněž zapojeny — z důvodu vyloučení pozadových případů — na koincidenční obvod CO-2. V takovémto geometrickém uspořádání detektorů S1 až S5 dostáváme současně na výstupech koincidenčních obvodů CO-1 a CO-2 impuls jen v případě pružného aktu rozptylu. V případě nepružného rozptylu anebo jiného procesu se neobjeví současně na výstupech obvodů CO-1 a CO-2 impuls. Zapojíme-li výstupy obvodů CO-1 a CO-2 na další koincidenční obvod CO (obr. 3), bude počet impulsů na výstupu obvodu CO odpovídat počtu pružně rozptýlených protonů. Popsaný způsob vydělování pružných aktů rozptylu od všech ostatních procesů — tj. že současně s rozptýleným protonem detekujeme na sdruženém úhlu jemu odpovídající odražený proton — nazýváme kinematickou selekční metodou.

Cílem popisovaného experimentu bylo měření závislosti počtu N pružně rozptýlených protonů na úhlu rozptylu Θ . Postup měření zá-



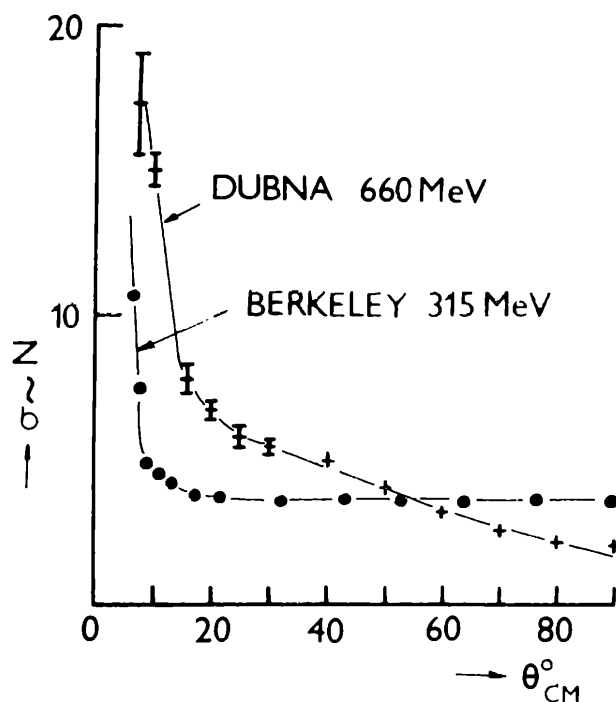
Obr. 3

vislosti $N = N(\Theta)$ je následující: Otočné rameno kolem terčíku T, na kterém jsou upevněny detektory S1, S2, S3, se přesně nastaví na předem zvolenou hodnotu úhlu Θ . Detektory S4, S5 jsou upevněny na druhém otočném rameni, jehož polohu přibližně nastavíme na hodnotu sdruženého úhlu Φ . Při této hodnotě Φ změříme za zvolenou časovou jednotku počet impulsů N na výstupu obvodu CO. Po měření mírně pootočíme ramenem s detektory S4, S5 a měříme opět za stejný čas počet impulsů N . Tento postup opakujeme tak dlouho, až dostaneme na výstupu CO maximální počet impulsů N , který odpovídá případu, kdy rameno s detektory S4, S5 přesně svírá úhel Φ . V tomto uspořádání pak uskutečníme vlastní měření četnosti N po dobu, kterou zvolíme podle požadované přesnosti. Například, požadujeme-li určení četnosti N s přesností 1 %, musíme měřit v ideálním případě (tj. bez pozadí) tak dlouho, dokud čítač impulsů (obr. 3) nezaregistruje 10 000 impulsů z obvodu CO. Po ukončení tohoto měření přejdeme na jinou hodnotu úhlu rozptylu Θ a celý postup měření zopakujeme. Tak postupujeme, až naměříme celou závislost $N = N(\Theta)$, která je ukázána na obr. 4 (DUBNA 660 MeV). V tomto obrázku je na ose x vynášen úhel rozptylu Θ_{CM} v tzv. těžišťové soustavě, který souvisí s laboratorním úhlem Θ vztahem:

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta_{CM}}{2} = \sqrt{1 + \frac{T}{2mc^2}} \operatorname{tg} \Theta$$

Na ose y je vynášena veličina σ , která je úměrná četnosti N .

Průběh úhlového rozdělení rozptýlených protonů úzce souvisí s typem interakcí mezi protony. Podle současných představ působí mezi dvěma protony čtyři typy interakcí: silné, elektromagnetické, slabé a gravitační^[2]. Nejintenzivnější síly — síly jaderné — vyvolávají silné interakce. Elektromagnetické interakce vyvolávají asi 100krát slabší coulombické síly. Zbylé dvě interakce vyvolávají slabé a gravitační síly, jejichž působení lze oproti jaderným a coulombickým silám zanedbat^[2]. Slabé síly jsou 10^{-14} krát, gravitační 10^{-36} krát slabší než síly jaderné.



Obr. 4

Z obr. 4 je vidět, že úhlovou závislost lze rozdělit na dvě oblasti. V první, od 0° asi do 20° , klesá prudce počet rozptýlených protonů s rostoucím úhlem rozptylu. V této oblasti probíhá pružný rozptyl protonů převážně následkem coulombického odpuzování mezi protony. V druhé, od 20° výše, klesá rozdělení rozptýlených protonů pomaleji. Zde převládá pružný rozptyl účinkem jaderných sil nad coulombickým rozptylem. V tomtéž obrázku je ukázáno i úhlové rozdělení protonů, naměřené v laboratoři v Berkeley (USA) při energii dopadajících protonů 315 MeV. V tomto případě je rozdělení rozptýlených protonů nad 20° téměř izotropní a připomíná nám případ rozptylu hmotných bodů na pevné tvrdé kouli. Tato analogie přivedla fyziky k myšlence o existenci tzv. odpudivého jádérka, které se projevuje pouze při vysokých energiích, kdy protony mají veliké rychlosti a mohou se k sobě přiblížit na velmi malou vzdálenost ($\sim 10^{-15}$ m).

Pro zajímavost poznamenejme, že urychlovačový i experimentální sál jsou během měření uzavřeny a fyzikům jsou nepřístupny z důvodu vysokého pozadí radioaktivního záření. Fyzikové i obsluha urychlovače jsou během měření pouze v měřicím sále (je oddělen tlustou zdí od experimentálního sálu), kde jsou umístěny všechny měřicí přístroje včetně koincidenčních obvodů, které jsou dlouhými koaxiálními kabely spojeny s detektory S1 až S5 v experimentálním sále.

Popsaný experiment je ukázkou toho, jak se získává experimentální informace o silovém působení v mikrosvětě.

Literatura :

- [1] Fyzika I, učebnice fyziky pro gymnázia a dodatky.
- [2] Janout, Z.: „Elementární částice a interakce mezi nimi“, Rozhledy mat.-fyz. 55, č. 5 (1976/77), str. 221.

Setkání se Saturnem

RNDr. RENÉ HUDEC, Praha

Saturn je s rovníkovým průměrem 120 000 km druhou největší planetou naší sluneční soustavy. Kolem Slunce oběhne vždy jednou za 29,5 let po eliptické dráze ve střední vzdálenosti 9,6 astronomických jednotek (1 astronomická jednotka je střední vzdálenost Země od Slunce, tj. přibližně 149,5 miliónu km). Při pohledu malým dalekohledem či triedrem se Saturn na první pohled liší od ostatních planet tím, že ho obepíná výrazný prstenec. Neobvyklý vzhled Saturna zaznamenal již *G. Galilei* v roce 1610, avšak jeho dalekohled ještě neměl dostatečné rozlišení, a tak k vlastnímu objevu prstence došlo až v roce 1655. Teprve o více než 300 let později byly nalezeny prstence i u dalších dvou planet, Uranu a Jupitera. Jsou mnohem méně nápadné, než tomu je u Saturna, a proto tak dlouho unikaly pozornosti pozemních pozorovatelů.

Pro velkou vzdálenost od Země byly až donedávna naše poznatky o Saturnu skromné. Teprve v září 1979 došlo ve výzkumu této planety k zásadnímu převratu. Po více než 6 letech letu dorazila k Saturnu první pozemská výzkumná sonda — *Pioneer 11*. Stanice se na tuto dlouhou kosmickou cestu vydala 5. dubna 1973 a 2. prosince 1974 prolétla ve vzdálenosti 42 760 km od Jupitera, největší planety naší sluneční soustavy, jejíž mohutné gravitační pole ji usměrnilo na další pouť. Dne 1. září 1979 se stanice setkala se Saturnem, bezpečně prolétla jeho vnějším prstencem E, pokračovala pak ve vzdálenosti 2000 až 10 000 km pod jeho vnitřními prstenci a přiblížila se k planetě až na vzdálenost 21 400 km. V nejbližším bodě přitom dosáhla rychlosti 114 100 km/h. Snímky pořízené sondou při přiblížení k Saturnu mají dvacet až třicetkrát lepší rozlišení než záběry pořízené největšími pozemními dalekohledy.

Z 12 vědeckých přístrojů na palubě *Pioneeru 11* jich po více než 6 letech pobytu v meziplanetárním prostoru pracovalo v době přiblížení k Saturnu 11. Přinesly celou řadu nových poznatků nejen o Saturnu a jeho prstencích, ale i o některých jeho měsících. Mezi nejdůležitější patří objev magnetického pole a radiačních pásů Saturna, měření hmotnosti planety a některých jejích měsíků, studium teplotního rozložení a složení oblačné vrstvy a atmosféry Saturna a Titana — největšího měsíce Saturna, který je s průměrem 5830 km největším z měsíců pla-

net naší sluneční soustavy a je přitom větší než planeta Merkur a jen o málo menší než planeta Mars, fotometrická a polarometrická měření dalších měsíců Saturna — Rhey, Dione, Japetuse a Tethyse a měření hmotnosti a struktury prstenců planety. Došlo přitom k objevu dvou dosud neznámých vnějších prstenců Saturna a pravděpodobně i k objevu dosud neznámého měsíčku.

Nyní tedy víme, že vnitřek Saturna je podobný vnitřku Jupitera a liší se od něho jen velikostí a rozsahem různých vrstev. Výsledky měření odpovídají modelu planety s centrálním jádrem z roztavených těžkých prvků, pravděpodobně zejména železa. Toto centrální jádro má přibližně rozměry naší Země, je však třikrát hmotnější. Centrální jádro obklopuje vnější jádro z vysoce stlačených horkých plynů — metanu, čpavku, vodní páry a dalších. Vnější jádro je asi devětkrát hmotnější než Země, avšak i ono představuje jen malou část celého Saturnu, který je tvořen především lehkými prvky, vodíkem a héliem, a je téměř stonásobně hmotnější než naše planeta. Protože v nitru Saturna panují vysoké tlaky, je vodík v kapalně kovové fázi. Nad touto kovovou vodíkovou obálkou je kapalný molekulární vodík a plynná atmosféra s mračky, která tvoří zbytek planety.

Elektrické proudy tekoucí uvnitř obálky kovového vodíku produkují Saturnovo magnetické pole, které bylo Pioneerem 11 objeveno. Navzdory velkým rozměrům Saturna je jeho magnetické pole nad vrstvou oblaků jen o málo slabší než magnetické pole na zemském povrchu. Společně s naší Zemí a Jupiterem se tak Saturn stává teprve třetí planetou, u níž bylo nalezeno silné magnetické pole. Další tři zblízka prozkoumané planety, Mars, Venuše a Merkur, mají stejně jako náš Měsíc jen slabé nebo žádné magnetické pole.

Infračervená pozorování nám při průletu poskytla informace o teplotách v atmosférách Saturnu a Titanu a v prstencích Saturna. Bylo zjištěno, že Saturn má teplotu asi 100 K a má tedy vnitřní zdroj tepla, který je dostatečně silný, aby planeta mohla vysílat asi 2,5násobně více energie, než kolik jí přijímá ve formě slunečního záření. Žlutavý rovníkový pás, viditelný na řadě snímků, je o několik stupňů chladnější než okolí. Pravděpodobně jde o zónu vysokých mračen, připomínající podobné oblasti na Jupiteru. Jak se očekávalo, jsou Saturnovy prstence extrémně chladné — při průletu sondy byla určena jejich teplota na pouhých 65 až 75 K. Teplotní rozdíly mezi osvětlenou a neosvětlenou stranou prstenců a rychlost chladnutí při vstupu částic prstence do stínu vedou k závěru, že částice v prstencích mají průměr alespoň několik cm a prstence samy jsou mnohonásobně silnější. Při průletu kolem Saturna zaregistroval detektor meteoroidů na palubě sondy dopad celkem 5 částic, každé o průměru asi 10 mikronů. Dva dopady nastaly před a tři po průletu sondy rovinou prstenců. Za vlastního průletu prstencem nebyl zaznamenán žádný dopad, ale pravděpodobně jde jen o následek

toho, že přístroj na Pioneeru 11 není schopný registrovat oddělené dopady částic, mezi nimiž uplynulo méně než 77 minut. Není také jasné, zda v případě zmíněných pěti dopadů jde o rozptýlené částice prstence či jen o částice meziplanetárního prostoru, zachycené mohutným gravitačním polem planety.

Nově objevený prstenec, označený jako prstenec F, je užší než asi 500 km, ale je přesto významný, neboť tvoří vnější hranici jasných prstenců A a B. Mezera mezi prstenci A a F byla pojmenována Pioneerovým dělením. Další nově objevený prstenec, prstenec G, je ještě dále od Saturnu ve vzdálenosti mezi 10 až 15 poloměry planety. Je difúzní povahy a byl objeven pomocí detektorů záření na palubě stanice. Prstenec G je odpovědný za zjištěnou absorpci nabitých částic poblíž rovníkové oblasti Saturnu.

Přístroje na Pioneeru 11 rovněž měřily ultrafialové záření, vznikající rozptylem slunečního záření na atomech vodíku. Obzvláště zajímavá je ultrafialová emise rozlehlých oblaků vodíku obklopujících Saturnovy prstence. Zdrojem tohoto vodíku jsou pravděpodobně samy prstence. Na disku planety jsou patrné vodíkové oblasti v polárních oblastech. Rozlehlý vodíkový oblak byl rovněž nalezen v blízkosti oběžné dráhy Saturnova měsíce Titanu.

Novinky, o nichž jsme hovořili, jsou výsledkem jen předběžného zpracování výsledků získaných Pioneerem 11. Početné týmy odborníků nyní vyhodnocují údaje ze všech experimentů na palubě sondy a můžeme tedy očekávat, že konečná forma přinese ještě další zajímavosti.

Z dějin exaktních věd

Vzácné jubileum

Prof. RNDr. KAREL HAVLÍČEK, CSc., MFF UK, Praha

Před sto lety, dne 14. března 1880, se v Duchcově narodil jeden z nejvýznačnějších českých matematiků dvacátého století, akademik a profesor Karlovy univerzity *PhDr. Bohumil Bydžovský*.

Řekněme si hned na začátku, že se dožil požehnaného věku přes 89 let (zemřel dne 6. května 1969 v Jindřichově Hradci) a že s vysokou

inteligencí pln energie pracoval až do vysokého věku; tak např. přednášky z algebraické geometrie na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy univerzity ukončil až v roce 1957, tedy během 78. roku svého věku, a poslední vědeckou práci o inflexních bodech jistých křivek 4. stupně vydal až v roce 1963, tedy v 83. roce svého věku. Připočteme-li k tomu ještě jeho rozsáhlou veřejnou činnost, poznáme, že v tomto krátkém článku nemůžeme ani zdaleka popsat všechnu jeho práci a celoživotní činnost, pro náš národní život tak velmi plodnou. Všimneme si tedy jen stručně nejvýznamnějších dat a výsledků jeho díla.

Akademik Bydžovský neměl život lehký. Matka mu zemřela ještě dříve, než začal chodit do obecné školy v Duchcově. Pak vystřídal více měst podle toho, kam povolání vedlo jeho otce inženýra. Nakonec maturoval s vyznamenáním na Akademickém gymnáziu v Praze roku 1898. Po studiu matematiky a fyziky na filozofické fakultě tehdejší Karlo-Ferdinandovy (dnes Karlovy) univerzity v Praze dosáhl doktorátu filozofie roku 1903. Po působení na středních školách v Praze i mimo Prahu přešel roku 1910 trvale na vysoké školy; v roce 1917 byl jmenován profesorem naší univerzity. Mezitím založil vlastní rodinu.

Po vědecké stránce nutno akademika Bydžovského pokládat za zakladatele naší algebraické geometrie. Vzorem mu byl jeho učitel, český vysokoškolský profesor *Eduard Weyr*, který vyšel z italské školy. Ale teprve Bydžovský zvládl celou tuto problematiku v plné šíři a vychoval v ní řadu svých žáků, z nichž mnohé přivedl k doktorátu i výše; zřejmě tu blahodárně působila i doba, kdy po vyhlášení československé samostatnosti v roce 1918 měli naši studenti příznivější podmínky ke studiu než dříve. Akademika Bydžovského zajímaly především algebraické křivky a v souvislosti s tím i kolineace a jiné transformace, zvláště Cremonovy. Výsledky svého bádání a pedagogické zkušenosti z tohoto oboru pak shrnul ve velmi objemné knize *Úvod do algebraické geometrie*, kterou vydal roku 1948; dodnes čerpáme podněty k práci z této knihy. Bylo to úctyhodné dílo, zvláště když uvážíme, že nesetrval na klasické látce, ale že vychoval žáky i v moderní algebraické geometrii, založené na nejnovější algebře vyvinuté až ve 20. století. Vedle toho tvořivě pracoval i v diferenciální geometrii.

Konečně u nás ojedinelý byl zájem akademika Bydžovského o geometrické konfigurace. Vydal tu už dávno řadu prací, které předčily tehdejší školu německou; i v tomto oboru vychoval žáky. Tím vytvořil u nás vlastně podmínky k bádání v tzv. konečných geometriích, které pro své mnohostranné užití v praxi jsou dnes v popředí světového zájmu řady odborníků. Akademik Bydžovský tu dovedl správně vyhmátnout směr pozdějšího vývoje.

Tento stručný přehled vědecké práce jasně ukazuje, že akademik Bydžovský patřil ke generaci, která u nás po rozpadu rakousko-uherské říše začínala téměř z ničeho. Tehdy nebylo u nás samostatných vědeckých

ústavů, jak je známe dnes; nebylo ani dorostu školeného pro takovou práci. On patřil bezesporu k pilířům této epochy, tedy k lidem, kteří připravili u nás půdu i pro dnešní kybernetický věk.

Ale tvořivé síly akademika Bydžovského se neuplatňovaly jenom ve vědecké práci, nýbrž i v organizaci práce a především v našem školství. Není možné se o tom blíže nezmínit.

O školské otázky se akademik Bydžovský živě zajímal už před první světovou válkou; tehdy také sepsal první svoje středoškolské učebnice a začal se zabývat myšlenkou o reformě našeho školství. Uplatnit tyto snahy se mu podařilo až v roce 1933. Nejdůležitější v této reformě, označované jeho jménem, byly dvě zásady: přizpůsobit školu věkovým zvláštnostem mládeže a nadanějším žákům usnadnit přechod z tehdejší měšťanské školy na školu střední. Znamenalo to už tehdy zlidovění naší školy. Přirozeným pokračováním toho po druhé světové válce bylo uzákonění naší jednotné školy, o jejíž zřízení se akademik Bydžovský velmi zasloužil.

K tomu dlužno připomenout, že sám byl vynikajícím učitelem. V té věci mi zvlášť utkvělo v paměti, jak jsem jako jeho asistent jednou za něho musel zkoušet, když onemocněl. Kladl mi na srdce: „U zkoušky musíte zjistit, co student umí, nikoli co neumí.“ Rázem jsem tehdy pochopil, že zjistit, co student neumí, dokáže každý břídit bez jakéhokoli pedagogického vzdělání. U zkoušek dovedl akademik Bydžovský skloubit spravedlnost s lidskostí, což ovšem neznamená, že by byl u něho nikdy nikdo nepropadl. Jeho sebeovládání ve styku s posluchači bylo příslowečné. Právě tak vynikající a vždycky jasně srozumitelné byly na fakultě jeho přednášky. Ve škole nebyl nikdy náladový, jak se na správného učitele sluší. Takový zůstal až do vysokého stáří, kdy už měl za sebou společné věznění se svou chotí v nacistickém koncentračním táboře u Kyjova na Moravě; i později ani nejtěžší jeho osobní starosti, jako bývají třeba vážné nemoci v rodině, nesměly nikdy zatěžovat studenty, ať při přednáškách či při zkouškách.

Za velké celoživotní pracovní úspěchy vděčil akademik Bydžovský do značné míry i svým mimořádným organizačním schopnostem. V Jednotě čs. matematiků a fyziků pracoval už od dob svých studentských let. Později tu byl hlavním redaktorem *Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky* a dva roky předsedou této Jednoty, která ho v roce 1928 zvolila dokonce i svým čestným členem. Pokud čas dovolil, pracoval podobně i v Mezinárodní matematické unii, kde důstojně reprezentoval celou naši matematiku a účastnil se řady zasedání a kongresů doma i v cizině na různých místech v Evropě či v zámoří.

Není možno zde vyjmenovat všechny jeho další funkce v různých našich kulturních institucích. Připomeňme jen, že byl dvakrát rektorem Karlovy univerzity a že právě v této funkci řídil v roce 1948 oslavy šestistého výročí založení této univerzity. Od roku 1924 byl členem

naší předválečné České akademie věd a umění a je přirozené, že po její reorganizaci v dnešní Československou akademii věd v roce 1952 byl ihned jmenován akademikem Sepsal na 60 původních vědeckých prací a vedle středoškolských učebnic již dříve zmíněných vydal i několik učebnic vysokoškolských.

Akademik Bydžovský mohl ve stáří spokojeně přehlížet svoji celoživotní práci. Dožil se také řady domácích i zahraničních poct a vyznamenání. Uvedme z nich aspoň nejdůležitější. Nejvyšším z nich byl zřejmě *Řád republiky* z roku 1955. Byl jedním z mála našich matematiků, kterému se dostalo pocty čestného doktorátu v cizině; ten mu udělila v roce 1948 univerzita ve Varšavě. Pak následoval roku 1965 čestný doktorát Karlovy univerzity v Praze a posléze v roce 1968 čestný doktorát Palackého univerzity v Olomouci. Za svoje vskutku bojové zásluhy v revoluci roku 1945 byl zvolen čestným občanem města Veselí nad Lužnicí, kde tehdy se svou rodinou bydlel.

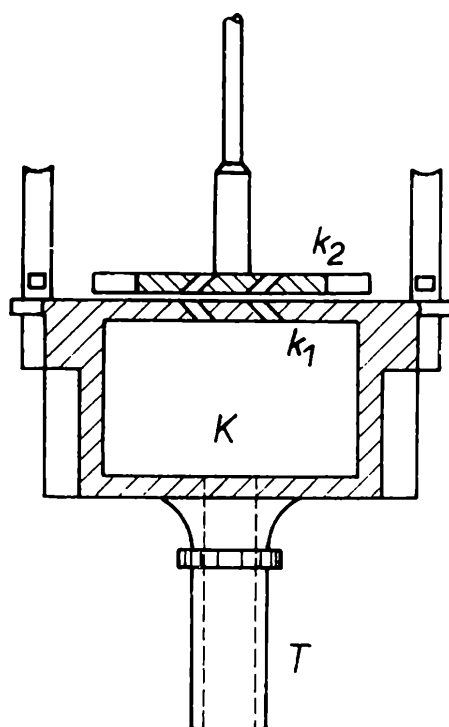
Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

V roce 1979 jsme si připomínali významná výročí několika badatelů, kteří se zasloužili o rozvoj akustiky.

Absolutní neboli prostou výšku tónu definujeme na základě kmitočtu zdroje. Souvislost mezi výškou tónu a kmitočtem pozoroval již *Galileo Galilei* (1564—1642). Absolutní výšku tónu můžeme určit sirénou, kterou sestrojil francouzský inženýr a člen Akademie věd v Paříži *Cagniard de la Tour* (1776—1859). První zprávu o ní podal před 161 lety roku 1819. Vzduchovou komoru K své sirény (viz obr. 1) uzavřel nahoře nehybným kotoučem k_1 , nad nímž umístil těsně otáčivý kotouč k_2 . Při obvodu každého kotouče je týž počet otvorů stejně vzdálených, avšak vyvrtaných šikmo k obvodu tak, že směr otvorů jednoho kotouče je kolmý ke směru otvorů druhého. Vháníme-li trubicí T do komory vzduch, uniká otvory v obou kotoučích a tím — podobně jako u turbin — roztočí kotouč k_2 . Pravidelnými vzduchovými nárazy vzniká tón. Při rychlejším otáčení je tón vyšší. K ose otáčivého kotouče bývá připojeno počítadlo otáček (na způsob tzv. nekonečného šroubu).

Příklad: Siréna Cagniard de la Tourova má 12 otvorů. Jestliže koná za minutu 2175 otáček, vydává tón absolutní výšky $12 \cdot \frac{2175}{60 \text{ s}} = 435 \text{ Hz}$.



Obr. 1

Tón této absolutní výšky byl označen podle ustanovení mezinárodní úmluvy ve Vídni z roku 1885 jako normální neboli komorní a.¹⁾

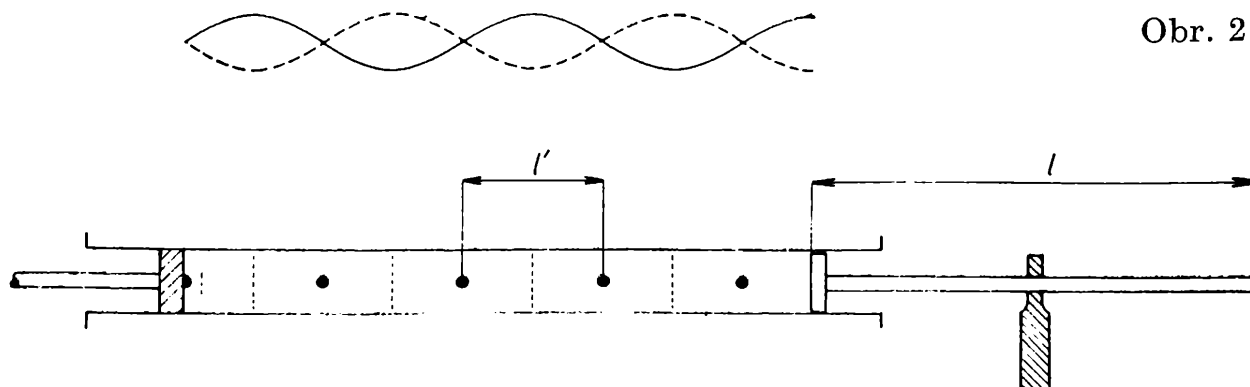
Málo se připomínají záslužné práce z termiky, v nichž se Cagniard de la Tour pokoušel rozhodnout, jaký je celkový průběh křivky nasycených par. Význam tzv. kritických poměrů vystihl teprve 10 let po jeho smrti v roce 1869 irský badatel *Thomas Andrews*, profesor na univerzitě v Belfastu.

Pracemi v akustice se také zabýval německý fyzik *Ludwig Seebeck* (1805—1849), profesor válečné školy v Berlíně, později ředitel Technického ústavu v Drážďanech. Ludwig Seebeck je znám našim čtenářům z učiva fyziky. Je konstruktérem sirény, která byla po něm nazvána Seebeckova siréna.²⁾

Velikého významu nabylo již v minulém století měření rychlosti zvuku v plynech metodou práškových obrazců, kterou navrhl německý fyzik *Augustin Kundt* (1839—1894), profesor na polytechnice v Curychu. Metody, označované dnes zpravidla jeho jménem, užil poprvé v letech 1866 až 1868. Zdrojem zvukového vlnění je skleněná tyč délky l (viz obr. 2), uprostřed upevněná, opatřená na konci korkovým nebo kartónovým kotoučkem k . Tyč zasahuje do široké skleněné trubice, do níž je stejnoměrně nasypáno trochu jemného korkového nebo plavuňového

¹⁾ Mezinárodní dohodou uzavřenou roku 1939 byl zaveden základní ladičí tón o absolutní výšce 440 Hz, označovaný a^1 .

²⁾ Jeho otec *Thomas Seebeck* (1770—1831), člen Akademie věd v Berlíně, objevil v roce 1821 tzv. termoelektrický proud.



Obr. 2

prášku. Jestliže tyč třeme sukem navlhčeným v octě, uvedeme ji v podélné chvění, jež kotouček přenáší na vzduchový sloupec v trubici. Abychom mohli měnit délku vzduchového sloupce, je druhý konec trubice uzavřen pohyblivou zátkou z . Zátka posouváme tak dlouho, až v trubici vznikne silné stojaté vlnění.³⁾ V kmitnách se prášek rozvíří a vytvoří příčné proužky, zatímco v uzlech zůstane v klidu na malých hromádkách. Vzdálenost dvou sousedních uzlů l' stanoví poloviční délku vlny $\frac{\lambda}{2}$. Rychlost zvuku c se pak vypočte jako součin kmitočtu f a délky vlny λ , tedy $c = 2fl'$.

Metodou Kundtovou lze měřit rychlost zvuku v různých plynech a při různých teplotách. K pokusům je ovšem třeba připravit trubici dobře vyčištěnou, vysušenou a dosti širokou (průměr asi 3 cm), poněvadž v úzkých trubicích se šíří zvuk poněkud menší rychlostí než ve volném vzduchu.

Česká odborná terminologie v době Karlově

IVANA VRCHOTKOVÁ, studující Matematicko-fyzikální fakulty UK

Na podzim roku 1978 připadlo 600. výročí úmrtí císaře *Karla IV.*, kterého si naše společnost připomněla řadou vzpomínkových akcí. Pro rozvoj věd v českých zemích mělo v jeho době zásadní význam založení pražské univerzity v roce 1348. Karel IV cílevědomě pečoval o rozvoj univerzity nadacemi, právními výsadami, knižními dary a v neposlední řadě výběrem vhodných profesorů. Do čela univerzity postavil huma-

³⁾ Podélné kmity jsou v obr. 2 pro názornost naznačeny kmity příčnými.

nistického právníka, prvního pražského arcibiskupa *Arnošta z Pardubic*. Kolem něho se ustavila vzdělanecká družina, která se důsledně zasazovala nejen o rozvoj pražského vysokého učení, ale soustavně pracovala i pro zvelebení obecné vzdělanosti v Čechách.

Jedním z členů této učené společnosti byl *Mistr Bartoloměj z Chlumce*, latinsky zvaný *Claretus de Solencia*, od jehož úmrtí uplynulo loni 600 let (zemřel 3. května 1379).

Tento učenec si získal nesmírné zásluhy o rozvoj české národní kultury a vzdělanosti, především však o rozvoj odborného jazyka. Vydal několik latinsko-českých slovníků, které jsou napsány tehdy oblíbenou formou veršovaných didaktických skladeb.

Klaretovým základním dílem byl *Vokabulář gramatický*, ve kterém zachytil velké množství výrazů z nejrůznějších oblastí tehdejšího vědění — z rétoriky, gramatiky, logiky, hudby, etiky, z aritmetiky, medicíny, astronomie a dalších. Uvádí v něm i jména řek, zemí, hor, nerostů, názvy číslovek atd. Dílo napsal pro adepty univerzitního studia jako pomůcku k osvojení základní latinské terminologie.

Druhým záslužným dílem Klaretovým byl tzv. *Bohemář*, který má osm částí a obsahuje bohatý soubor dvojic názvů latinských a českých, a to i z přírodovědy. Jsou v něm názvy vod a ryb, zvířat, ptactva, stromů, rostlin, živelů atd. Zahrnuje však i pojmy z oblasti společenského života, např. názvy řemesel. Největším a jistě i nejvýznamnějším slovníkářským dílem Mistra Bartoloměje z Chlumce je jeho *Glosář*, v němž shromáždil na 7000 dvojic slov v latinském a českém jazyce.

Význam Klaretova díla nejlépe pochopíme, jestliže nahlédneme do rozsáhlého bohatství jím shromážděného slovníkového materiálu. Mistr Klaret byl autorem mnoha termínů dnes běžně vžitých, které zdomácněly a udržely se proto, že je vytvořil v souladu s duchem českého jazyka. Některé termíny se bohužel neujaly, i když odpovídaly duchu jazyka; zanikly ovšem i novotvary neústrojené.

V Klaretových slovnících nalézáme také řadu výrazů z matematiky a fyziky. Jedna část je věnována aritmetice, kratší kapitola geometrii, jeden oddíl astronomii a jeden fyzice. Obsahují pochopitelně jen omezený počet výrazů, který vyplýval ze znalosti těchto věd ve 14. století. Uvedme aspoň některé z nich:

Početmiera (aritmetika), *súčet*, *ujímání* (odčítání), *dělení*, *rozdělení* (na polovinu), *dvojení*, *vytrhání* (vytknutí), *tvar*, *obraz*, *strana*, *hrana*, *vrstva*, *zemoměrna* (geometrie), *svisle*, *množství*, *stěna*, *středně*, *stupeň*, *svazek*, *vně*, *vnitř* (uvnitř), *vrstva*, *výška*, *dluhostěn* (kvádr).

Vokabulář obsahuje také podrobný přehled číslovek: *jeden*, *dva*, *tři*, *čtyři*, *pět*, ..., *deset*, *jedenáct*, *dvanáct*, *třináct*, *čtrnáct*, *patnáct*, ..., *devatenáct*, *dvacet*, ..., *devadesát*, *sto*, *dvě stě*, *šest set*, *devět set*, *tisíc*, *dvojí*, *trojí*, *šester* (šestý). Dodnes se používají mnohé výrazy, které ve slovnících

najdeme: *vlastnost*, *číslo*, *čtvrť*, *desetina*, *kružidlo*, *míra*, *mocnost*, *počet*, *rozdíl*, *sklon*, *počátek*. Jiné Klaretovy výrazy se neujaly a dnes už nechápeme jejich význam: *vtipněc* (matematik), *vtipovněra* (matematika), *přihledna* (teorie), *hubenka* (číslice), *rochovět* (jehlan), *trojekút* (trojúhelník), *kútek* (úhel).

Podobně je tomu i s výrazy z fyziky; dodnes se užívá: *světlost*, *hvězda*, *slunce*, *měsíc*, *noc*, *obloha*, *podnebí*, *síra*, *ruda*, *cín*, *stříbro*, *měď*, *zlato*, *rtuť*, *mosaz*, *železo*, *ocel*, *okamžik*, *paprsek*, *rok*, *den*, *hodina*, *čas*, *zvuk*, *teplo*, *váha*, *led*, *vosk*, *voda*, *síla*, *složení*, *stav*, *stroj*, *tvrdost*, *vápno*, *var*, *věc*, *záře*, *živel*, *povětrí*, *dutý*, *pára*. Neudržela nebo neujala se slova: *hvězdnost* (astrologie), *vrchohlav* (zenit), *zběrohvizd* (hvězdná soustava), *jednoden*, *volanka* (první den v měsíci), *drobina* (minuta), *bělosvět* (galaxie), *hvězdopad* (kometa), *sluncestav* (slunovrat), *nocirovnost* (rovnodennost), *Hladolet* (Saturn), *Kralemoc* (Jupiter), *Smrtonoš* (Mars), *Dobropán* (Merkur), *přirozena* (fyzika).

V Bohemáři jsou už také české názvy všech měsíců: *leden*, *únor*, *březen*, *duben*, *máj*, *červen*, *červenec*, *sirpen*, *září*, *říjen*, *listopad*, *prosinec*.

Ve všech slovnících najdeme také řadu výrazů ze školního prostředí: *křída*, *kalamář*, *pero*, *papír*, *knižnice* (knihovna), *věda*, *naučíš se*, *chytrost*, *moudrost*, *správce*, *mistr*, *posluchač*, *přeříkatel* (repetitor), *školník* (žák), *početník* (počtář), *zkusitel* (experimentátor), *mudromil* (filozof), *hvězdník* (hvězdář), *slovočtan* (jazykozpytec), *zpěvonan* (zpěvák), *oprava*, *úmluvník* (řečník), *písmona* (pisárna), *raditel* (poradce), *odpověď*, *písař*, *popisáč* (zapisovatel), *list*, *pouzdra*, *opisa* (text), *překlad*, *škuola* (škola), *třída*, *učedlník* (doktor), *uměti*.

Klaretovo dílo ze 14. století je přesvědčivým dokladem tehdejšího rozmachu české vzdělanosti, s níž souvisela tvorba české odborné terminologie nejen pro sedm svobodných umění, ale i pro mnohé obory praktické činnosti. České matematické a fyzikální termíny pro základní pojmy máme tedy už aspoň 600 let.

Einsteinovská výročí

Loňského roku 14. března se vzpomínalo sto let od narození Alberta Einsteina. Letos 18. dubna uplynulo 25 let ode dne, kdy se uzavřel jeho plodný život. Pro Alberta Einsteina byl velmi významný rok 1905. Tehdy uveřejnil své první vědecké práce. Zabýval se v nich Brownovým pohybem, fotoelektrickým jevem a speciální teorií relativity. Před 75 lety se stal Albert Einstein fyzikem světové pověsti. jm

Kružnice na čtverečkováném papíru

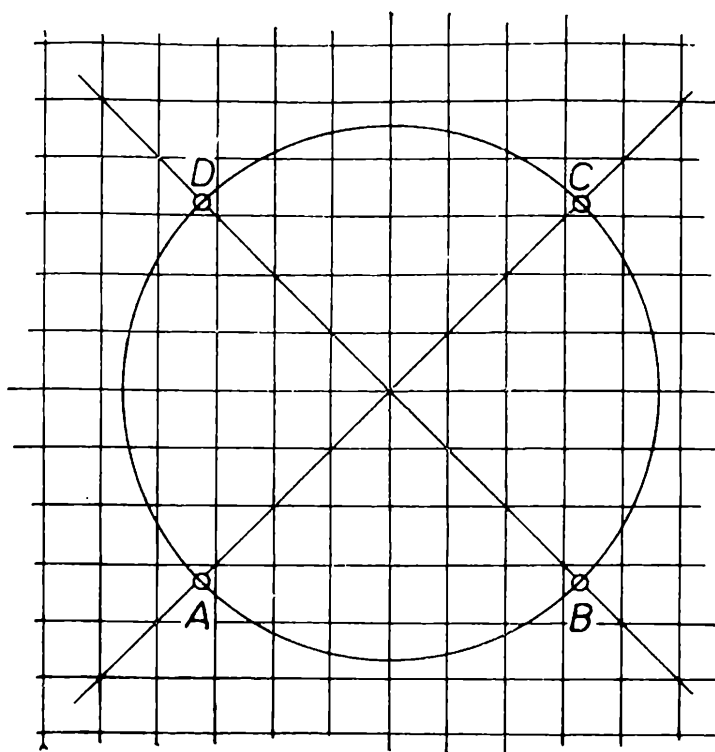
RNDr. ANTONÍN VRBA, CSc., MÚ ČSAV Praha

V tomto článku bych rád čtenářům připomněl jednu úlohu I. kola kategorie A z 28. ročníku Matematické olympiády. Pokládám ji totiž za jednu z nejzajímavějších úloh, která se v posledních letech v olympiádě vyskytla. Zajímavá je i historie jejího vzniku. Úloha vznikla v Matematickém ústavu ČSAV, kde se před časem pod vedením *prof. RNDr. Miroslava Fiedlera, DrSc.*, který je mimochodem zasloužilým olympiádním činitelem a autorem řady soutěžních úloh, zkoumaly určité otázky souvisící s řešením parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí. Jak se někdy stává, výzkum tehdy nedopadl příliš slavně a přinesl více nových problémů než odpovědí na původní otázky. Jedním z jeho vedlejších výsledků je vlastně i naše úloha, ke které byl kolega *P. Liebl* při práci na zmíněné problematice inspirován. Úloha byla zařazena do československé kolekce úloh pro mezinárodní matematickou olympiádu v r. 1977, a když pak nebyla pro soutěž vybrána, dostala se do naší olympiády. Prostřednictvím členů jury mezinárodní olympiády se dostala i do zahraničí — objevila se např. v sovětské olympiádě a byla také publikována v časopise *Kvant* (roč. 1978, č. 12). V naší olympiádě byla formulována trochu příliš učeně, uvedeme si ji v přirozenější formě:

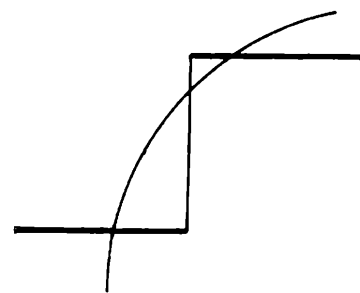
Na čtverečkováném papíru je narysována kružnice tak, aby neprocházela žádným průsečíkem linek. Její poloměr je větší nebo roven dvojnásobku délky strany čtverečku sítě. Vrchol čtverečku nazveme vnitřní okrajový bod, leží-li uvnitř kružnice, a některý jeho sousední vrchol leží vně. Analogicky zavedeme vnější okrajové body. Dokažte, že vnějších okrajových bodů je právě o 4 více než vnitřních.*)

Řešení: Označme A, B, C, D průsečíky dané kružnice s přímkami, které procházejí jejím středem a svírají s linkami čtverečkové sítě úhel 45° (obr. 1). Tyto body rozdělí kružnici na čtyři oblouky. Ke každému oblouku zahrneme i jeho oba krajní body. Čtverečkům, v nichž leží — třeba i jen na straně — některý z bodů A, B, C, D , budeme říkat *kritické*

*) Abychom nekomplikovali vyjadřování, užíváme zde názvů vnitřní bod kružnice a vnější bod kružnice, i když snad zcela neodpovídají terminologickým zásadám.

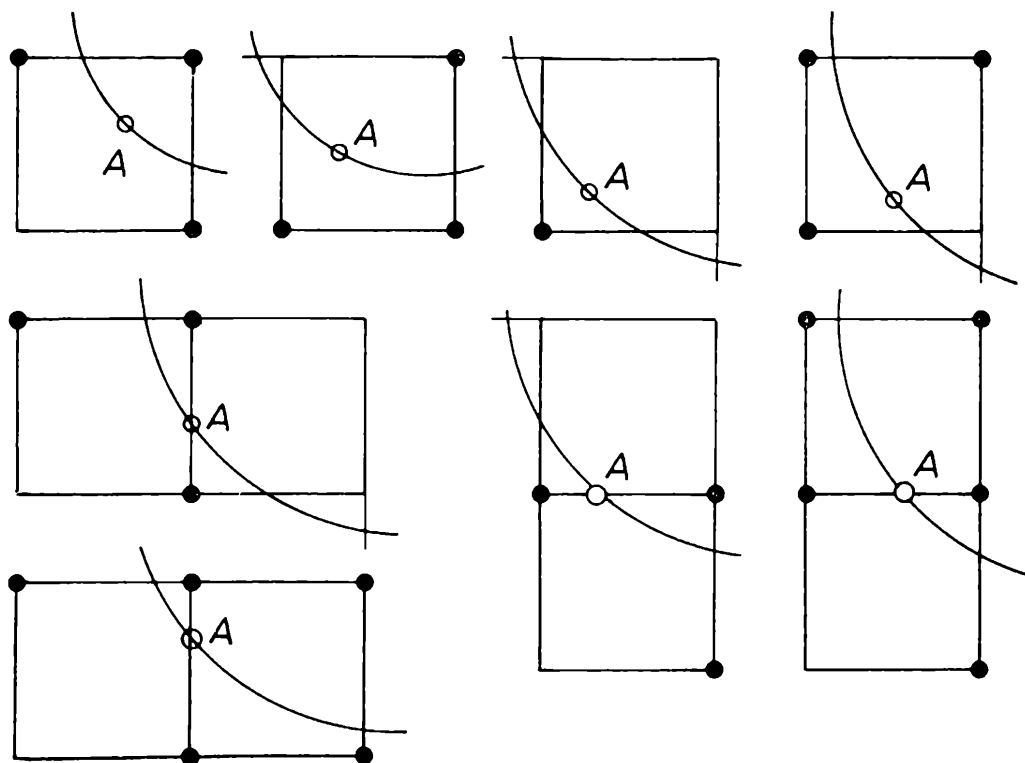


Obr. 1



Obr. 2

čtverečky. Vyznačme všechny vodorovné strany, které protínají oblouk AD nebo BC , a všechny svislé strany, které protínají oblouk AB nebo CD a nejsou přitom stranami kritických čtverečků (budeme mluvit o *vyznačených stranách*). Ukážeme, že všechny okrajové body, které nejsou vrcholy kritických čtverečků, jsou koncovými body vyznačených úseček: Vezměme si nějaký okrajový bod, který není vrcholem kritického čtverečku. Ten je podle definice okrajových bodů koncovým bodem nějaké strany — nechť je to např. svislá strana (pro vodorovnou stranu bychom uvažovali analogicky). Pokud tato svislá strana protíná oblouk AB nebo CD , je vyznačena. Protíná-li oblouk AD (u oblouku BC bychom uvažovali analogicky), leží oba její koncové body na vodorovných vyznačených stranách protínajících oblouk AD (obr. 2). To je způsobeno tím, že v oblouku AD se kružnice „ve svislém směru mění rychleji než ve vodorovném“. Přesněji: Nechť vodorovná a svislá přímka protínají oblouk AD v bodech V resp. S a jejich průsečík P nechť na oblouku neleží. Pak $PV < PS$. Všechny okrajové body, které nejsou vrcholy kritických čtverečků, tedy leží na vyznačených úsečkách. Mezi všemi koncovými body vyznačených úseček je stejný počet vnitřních i vnějších okrajových bodů, neboť každá vyznačená úsečka spojuje jeden vnitřní a jeden vnější okrajový bod a žádné dvě nemají společný bod. Zbývá vyšetřit kritické čtverečky. V okolí bodu A může nastat 8 situací znázorněných na obr. 3. Vidíme, že v každém případě je mezi vrcholy kritických čtverečků, které neleží na vyznačených úsečkách, právě o jeden vnější okrajový bod více než vnitřních okrajových bodů. Stejně je tomu



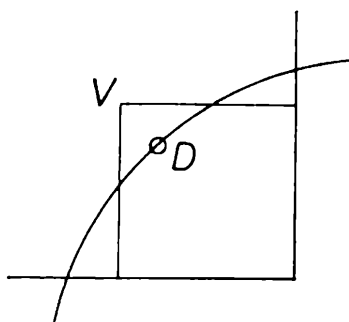
Obr. 3

i v okolí bodů B , C , D . Celkem je tedy vnějších okrajových bodů o 4 více než vnitřních.

Jiné řešení: Sestrojíme všechny strany čtverečků, které protínají danou kružnici a jejichž oba koncové body jsou okrajové body (dál jim budeme říkat jen *strany*). Vnější a vnitřní okrajové body budeme počítat takto: Zvolíme si některou ze stran jako výchozí a budeme postupovat po kružnici od průsečíku s výchozí stranou třeba ve směru otáčení hodinových ručiček. Jakmile dojdeme k průsečíku se stranou, připočteme jeden vnitřní a jeden vnější okrajový bod, pokud jsme některý z nich nepočítali už dříve. Oběhneme-li celou kružnici, spočteme tak všechny okrajové body. Setkáme se při tom se stranami vodorovnými a svislými. Pokud dojdeme ke straně, která je rovnoběžná se stranou bezprostředně předcházející, zvětší se počet vnějších i vnitřních okrajových bodů o 1. Pokud dojdeme ke straně kolmé ke straně bezprostředně předcházející, mají obě strany okrajový bod společný a započteme jen druhý okrajový bod. Vyjděme od vodorovné strany, která leží nejvíc vlevo (je-li jich víc, zvolíme libovolnou z nich). Popsaným způsobem postupujeme tak dlouho, až dojdeme ke svislé straně, která leží nejvíc nahoře (k libovolné z nich, je-li jich víc). Procházeli-li jsme tímto „kvadrantem“, dvojice sousedních na sebe kolmých stran se nutně vyskytly. Následovala-li po vodorovné straně strana svislá, přibyl 1 vnější okrajový bod, následovala-li po svislé straně strana vodorovná, přibyl jeden vnitřní okrajový bod. Projdeme-li tedy „kvadrantem“, napočítáme vnějších okrajových

bodů o jeden víc než vnitřních, neboť jsme vyšli od vodorovné strany a skončili u svislé. Podobně je tomu i u ostatních tří „kvadrantů“ a odtud je vidět, že vnějších okrajových bodů je o 4 víc než vnitřních.

Úloha je zajímavá především tím, že předkládá zcela přirozený a názorný problém. Přes jednoduchost zadání není řešení snadné a nepomohou při něm žádné osvědčené metody. Je prostě nutno vzít rozum do hrsti, situaci si jasně představit a uplatnit intuici. Přitom je však třeba mít se na pozoru a nenechat se názorem svést k tomu, abychom tvrdili něco, co nemusí být vždy pravda. To se stávalo mnoha řešitelům a dokonce i mistři tesaři z Kvantu se v návodu k řešení naší úlohy uťali.



Obr. 4

Tvrdili tam, že všechny okrajové body leží na vodorovných stranách protínajících oblouk AD nebo BC nebo na svislých stranách protínajících oblouk AB nebo CD . Na obr. 4 vidíte protipříklad — pro okrajový bod V to neplatí. Velké potíže dělala také řešitelům nutnost formulovat úvahy dostatečně přesně a přesvědčivě bez pomoci rovnic, vzorců nebo jiného vžitého aparátu. Často ani nebylo v silách opravovatelů všechny mezery, polopravdy a jiné nedostatky postřehnout a opravit. I když se z tohoto důvodu mnozí řešitelé neměli možnost poučit ze svých chyb a dodnes si myslí, že měli vše správně, čtenáři snad z řešení, které jsme právě uvedli, užitek mít budou. Doufám, že v něm není chyba.

Cvičení: Vysvětlete, kde bylo mlčky využito předpokladu o velikosti poloměru kružnice.

Nepřehlédněte!

Úlohy 1. kola MO a FO pro soutěž ve školním roce 1980—81 uveřejní Rozhledy v květnovém čísle.

Pro volnou chvíli

Řešení jedné úlohy o kruhu

V prvním čísle tohoto ročníku jsme na str. 38 přinesli jako úlohu pro čtenáře tento text:

Předpokládejme, že v rovině je dán kruh k a dále je dáno přirozené číslo n větší než 1. Dokažte, že je možno pravítkem a kružítkem rozdělit kruh k na n oblastí tak, že všechny oblasti mají stejný obsah a současně všechny oblasti mají stejný obvod.

Úloha se dostala na náš redakční stůl tak, že ji kdosi přinesl na zasedání ústředního výboru matematické olympiády v Budmericích v dubnu 1979. Zdálo se, že je to příklad, který může zajímat i čtenáře Rozhledů, a proto jsme ho uveřejnili. Když se nad otázkou zamyslíte, vidíte, že zapadá do klasické matematiky a svou příbuznou má např. ve známé úloze o tzv. *Hippokratových měsíčkách*. Dá se proto předpokládat, že problém bude v elementární matematice znám. Skutečně nás upozornil RNDr. Milan Koman, CSc., že je možno jej najít v knize W. Lietzmannova „Lustiges und merkwürdiges von Zahlen und Formen“ (vydání z roku 1943, str. 227–228).

Dozvěděli jsme se, že úlohy o kruhu použil také na podzim 1979 seminář matematické olympiády, který se koná na jednom pražském gymnáziu (řešili ji tam Igor Kříž a Jiří Sgall). Nyní přinášíme redakčně upravené řešení, které Rozhledům poslal Igor Kříž, studující I. D. gymnázia, Praha 2, ul. W. Piecka 2.

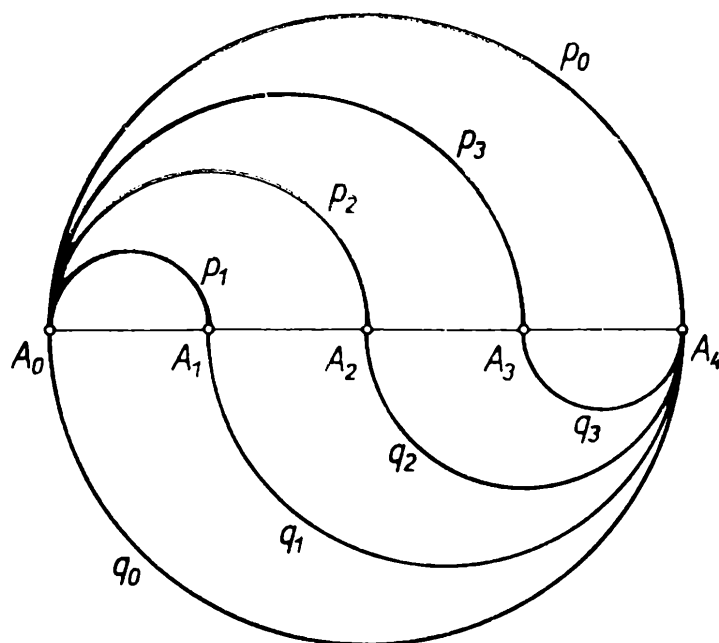
Řešení. Pro $n = 1$ je řešení triviální (kruh k totiž vůbec nemusíme dělit). Předpokládejme tedy $n > 1$. Zvolme libovolný průměr AB kruhu k . Úsečku AB nyní rozdělíme na n stejných dílů. To provedeme známou konstrukcí pravítkem a kružítkem. Získáme tak posloupnost bodů

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n,$$

přičemž

$$|A_0A_1| = |A_1A_2| = \dots = |A_{n-1}A_n|,$$
$$A_0 = A, \quad A_n = B$$

Přímka A_0A_n rozdělí rovinu na dvě poloroviny, které označíme α_1, α_2 . V polorovině α_1 sestrojíme polokružnice po řadě nad průměrem $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, \dots, A_0A_{n-1}$, které po řadě označíme $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. V polorovině α_2 sestrojíme polokružnice $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}$ po řadě nad průměrem $A_1A_n, A_2A_n, A_3A_n, \dots, A_{n-1}A_n$. Polokružnici tvořící hranici kruhu k a ležící v polorovině α_1 (resp. α_2) označme p_0 (resp. q_0). Vzniknou dvě oblasti, jejichž hranice se skládá ze tří polokružnic (jednak p_1, q_1, q_0 ,



Obr. 1

jednak p_{n-1}, q_{n-1}, p_0) a při $n > 2$ ještě dalších $n - 2$ oblastí, jejichž hranici tvoří vždy čtyři polokružnice:

$$p_1, p_2, q_1, q_2 ; p_2, p_3, q_2, q_3 ; \quad p_{n-2}, p_{n-1}, q_{n-2}, q_{n-1}$$

Případ $n = 4$ ilustruje obr. 1, který se stane názornějším, jestliže si jednotlivé oblasti barevně vyčárkujete.

Výpočtem se můžeme přesvědčit, že obsah každé oblasti je $\pi \frac{r^2}{n}$ a obvod každé z nich je $2\pi r$, kde r je poloměr kruhu.

Redakční poznámka. Kdybychom z textu úlohy vynechali podmínku, že se má pracovat jen pravítkem a kružítkem, byla by úloha triviální. Při $n > 2$ bychom do kruhu k se středem S vepsali pravidelný n -úhelník $P_1P_2P_3\dots P_n$ (což ovšem pravítkem a kružítkem není vždy možné). Úsečky $SP_1, SP_2, \dots, SP_n$ dělí kruh na n shodných výsečí.

Ještě poznamenejme, že řešení úlohy poslal též *Milan Hurtešák*, studující III. D gymnázia v Ružomberku. J. S.

Jedna z Napoleonových úloh

Se jménem některé významné osobnosti se někdy setkáme zcela nečekaně. Tak je tomu i v případě Napoleona Bonaparta. Jeho jméno můžeme nalézt ve sbírkách matematických úloh. Slavný vojevůdce zde však není citován v souvislosti se svými válečnickými nebo státnickými činy, ale jako tvůrce úloh.

Úlohy, připisované Napoleonovi, se uvádějí i ve známé knížce *Zábavná matematika*, kterou napsali Š. Novoveský, K. Křižalkovič a I. Lečko a jež vyšla v několika vydáních ve slovenštině i češtině. Jsou ve IV kapitole v odstavci označeném 4.34.

Uvedme si úlohu, za jejíhož autora je ve sbírce úloh V. D. Čistjakova *Starinnyje zadači po elementarnoj matematike* (Vyšejšaja škola, Minsk 1978) také označován Napoleon. V citované sbírce je na str. 49. Její text zní:

Na dané kružnici k s daným středem S sestrojte pouze pomocí kružítka čtyři body tak, aby ji dělily na čtyři shodné oblouky.

Tato úloha má tři snadno řešitelné varianty: Sestrojit jen pomocí kružítka na dané kružnici s daným středem šest bodů, které ji dělí na šest shodných oblouků, sestrojiti na ní tři body, které ji rozdělují na tři shodné oblouky, a sestrojiti dva body, které ji dělí na dvě půlkružnice.

Při řešení Napoleonovy úlohy je třeba si uvědomit, že sestrojíme-li na dané kružnici vrcholy některého jí vepsaného pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$, pak máme možnost vzít do kružítka vzdálenost rovnou poloměru $r = |AS|$ dané kružnice, dále $2r = |AD|$ a $r\sqrt{3} = |AC|$. Vzdálenost dvou sousedních bodů na dané kružnici, které ji s dalšími dvěma body dělí na čtyři shodné oblouky, je zřejmě $r\sqrt{2}$. Máme tedy řešit problém: Známe dvojice bodů, jejichž vzdálenosti jsou r , $2r$, $r\sqrt{3}$, a potřebujeme sestrojiti dvojici bodů, které jsou vzdáleny $r\sqrt{2}$. Řešení tohoto problému přenecháváme čtenářům. V Rozhledech se s ním bude možno seznámit v 9. čísle. jm

různé

Přijímací zkoušky na fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou v Praze

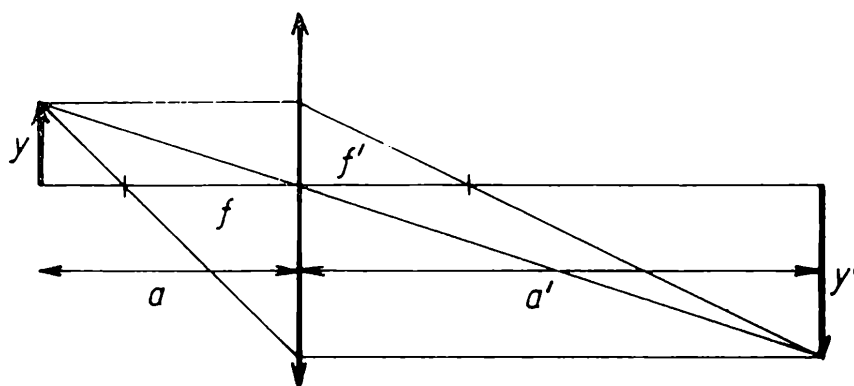
(dokončení)

Doc. dr. ZLATKO MARŠÁK, CSc., FJFI, Praha

Příklad 4. Do jaké vzdálenosti od projektoru s objektivem o ohniskové vzdálenosti $f = 100$ mm je nutno umístit projekční plátno o rozměrech $1,5 \times 1,5$ m, chceme-li promítat diapozitiv o velikosti 5×5 cm?

Řešení: Máme-li využít celé plochy plátna, zvětší se nám projekcí diapozitiv v poměru $|Z| = \frac{150}{5} = 30$, což je požadované zvětšení. Z obr. 5 je vidět, že pro Z platí vztahy

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a}, \quad (4,1)$$



Obr. 5

kde y a y' jsou příčné rozměry předmětu (diapozitivu), resp. jeho obrazu na plátně. Úkol zní najít vzdálenost a' . V rovnici (4,1) se vyskytují dvě neznámé a, a' . Je nutno najít ještě jednu rovnici pro vzdálenosti. Takovou rovnicí je zobrazovací rovnice čočky

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}, \quad (4,2)$$

odkud plyne

$$a = \frac{f a'}{a' - f}, \quad (4,3)$$

a tedy zvětšení Z

$$Z = -\frac{a'}{a} = \frac{f - a'}{f}. \quad (4,4)$$

Hledaná vzdálenost plátna od čočky (v tomto případě od projektoru) je

$$a' = f(1 - Z), \quad (4,5)$$

číselně

$$a' = 100 + 30 \cdot 100 = 3100.$$

Projekční plátno je nutno umístit do vzdálenosti 3,1 m od objektivu projektoru.

Poznámky k řešení: Jedná se zde o zobrazení tenkou čočkou. Při dosazování číselných hodnot do vztahů (4,1) až (4,5) je nutno dodržovat znaménkovou konvenci (viz gymnaziální učebnice Fyzika III).

Úsečky y a y' jsou orientované úsečky a je-li $y > 0$, $y' > 0$, leží předmět i jeho obraz v téže polorovině (předmět i obraz je vzpřímený), při nesouhlasných nerovnostech je předmět a obraz vzájemně převrácený.

Bylo uvedeno, že příklady mají úmyslně stanovený nestejný stupeň obtížnosti. V daném případě je první příklad hodnocen jako nejvíce obtížný z daného souboru, druhý středně obtížný, třetí je hodnocen jako lehký a stupeň obtížnosti čtvrtého příkladu je takový, že i nejslabší uchazeč by měl uvést alespoň základní vztahy potřebné pro řešení. Může se zdát, že pořadí obtížnosti třetího a čtvrtého příkladu je opačné, neboť u třetího příkladu se jedná o formální použití vztahů pro zapojování odporů, ale zkušenost ukazuje, že zobrazovací rovnici čočky umí formálně napsat drtivá většina uchazečů (snad proto, že se jedná o učivo z posledního roku studia) a řešení této čočkové rovnice činí uchazečům daleko menší potíže než výpočet výsledného odporu pro libovolně zadanou odporovou síť.

Je třeba říci, že předvedená řešení jsou pouze jedna z několika možných. Ukazuje se, že řada studentů, kteří se ucházejí o přijetí ke studiu na naši fakultu, přijde na zajímavější způsob řešení, než je zde uvedeno. A těm studentům, kterým se uvedené příklady líbily a kteří se rozhodují „kam po maturitě“, můžeme jen doporučit, aby přišli k nám na fakultu ať už jenom se podívat, či dokonce zkusit si spočítat podobné příklady při některém dalším běhu přijímacích zkoušek.

Jedna o Davidu Hilbertovi

Matematik je člověk jako každý jiný, má obvyklé chyby i běžné přednosti. Musí mít ovšem fantazii, představivost, a to ne fantazii bezbřehou, nýbrž podrobenou přesnému a přísnému řádu. Německý matematik David Hilbert žil v letech 1862 až 1943 a výrazně ovlivnil vývoj matematiky. Hilbert se jednou dozvěděl, že jeden z jeho bývalých žáků zběhl z matematiky a stal se spisovatelem. To vzbudilo v Göttingenu, kde tehdy Hilbert působil, značný rozruch a lidé se ptali: „Jak je to možné, že může někdo, kdo byl jednou matematikem, psát povídky?“ Hilbert to však vyložil velmi lapidárně: „Víte, to je jednoduché,“ řekl. „On neměl dost fantazie, dost obrazotvornosti, potřebné pro matematiku, ale měl jí dost pro psaní povídek.“

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

matematica ž
matematico
matematico m
materiale
materiale m
— fissionabile
matrice ž
— quadrata
— rettangolare
matriciale
meccanica ž
— ondulatoria
— quantistica
— relativistica
media ž
— aritmetica
— geometrica
— ponderabile
mediana ž
mediano
mediano m
mediante
medio
meditare
membro m
meno
meridiana ž
meridiano
meridiano m
mesone m
metà ž
metalinguaggio m

matematika
matematický
matematik
hmotný
látka, materiál
štěpný materiál
matice
— čtvercová
— obdélníková
maticový
mechanika
— vlnová
— kvantová
— relativistická
průměr (statistický)
— aritmetický
— geometrický
— vážený
těžnice (trojúhelníka)
střední
medián
pomocí
průměrný
uvažovati
člen
méně
sluneční hodiny
polední
poledník
mezon
polovina, polovice
metajazyk

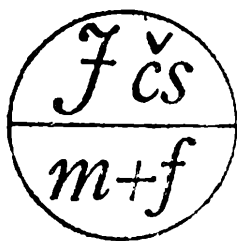
metallo m	kov
metalloide m	nekovový prvek
metallogica ž	metalogika
metamatematica ž	metamatematika
meteorite ž, meteorolito m	meteor
meteorologia ž	meteorologie
metodo m	metoda
— di Graeffe	— Lobačevského num. řešení rovnice
— di Newton	— Newtonova num. řešení rovnic
metodologia ž	metodologie
metodica ž	metodika
metrica ž	metrika
metrico	metrický
metro m	metr
metronomo m	metronom
mettere	položiti, postaviti, umístiti
— in (fra) parentesi	dáti do závorky
mezzo	půl, poloviční
mezzo m	polovina; střed
microfono m	mikrofon
micrometro m	mikrometr
microscopio m	mikroskop, drobnohled
migliaio m	přibližně tisíc
miglio m	míle
miliardo m	miliarda
milimetro m	milimetr
milione m	milión
milionesimo	milióntý
milionesimo m	milióntina
mille ž	tisíc
millennio m	tisíciletí
millesimo	tisící
millesimo m	tisícina
minimi quadrati m	nejmenší čtverce
minimo	nejmenší
minimo m	minimum
— assoluto	— absolutní
— relativo	— lokální

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

9

ROČNÍK 58, 1979-1980, KVĚTEN



ROČNÍK 58
KVĚTEN 1980

9

rozhledy

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., UNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigová 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin, závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS - ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1980.

Obsah

Dr. A. Hlaváč: Docent RNDr. Július Krmešský, predstaviteľ najstarších žijúcich slovenských fyzikov, osemdesiatročný	385
Doc. ing. I. Štoll, CSc., doc. ing. Z. Janout, CSc.: Zemřel docent Josef Dibelka	387
J. Dobož: Spojitosť	389
Prof. E. Kraemer: Konstrukce průsečíků kružnice s hyperbolou - I.	392
J. S.: Věta o čtyřech barvách znovu na scéně?	396
Dr. M. Řešátko: Vývoj mezinárodního metru	397
Úlohy I. kola 30. ročníku MO	400
Úlohy pro 1. kolo XXII. ročníku FO	404
Pro volnou chvíli	420
Nejmladším čtenářům	424
Ze zahraničních časopisů	425
Různé	429
Recenze	430
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky

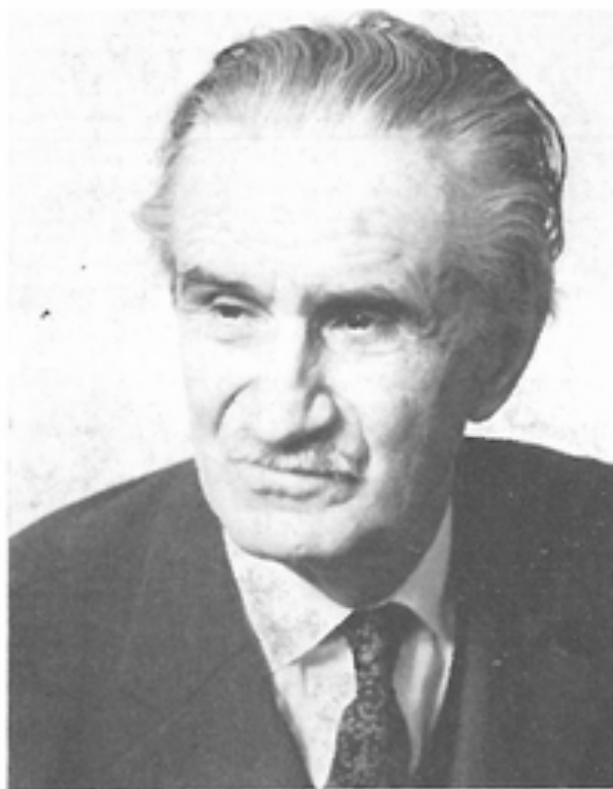
Docent RNDr. Július Krmešský, predstaviteľ najstarších žijúcich slovenských fyzikov, osemdesiatročný

RNDr. ALBERT HLAVÁČ, G. Bratislava

V roku 1980 v dobrej zdravotnej pohode a pri závideniahodnej chuti do tvorivej práce dožíva sa osemdesiatych narodenín zaslúžilý učiteľ doc. RNDr. Július Krmešský, známy medzi učiteľmi matematiky a fyziky škôl I. a II. cyklu najmä ako vysokoškolský učiteľ a ako popredný pracovník školského filmu na Slovensku.

Doc. Július Krmešský sa narodil 10. apríla 1900 v Ploštíne pri Liptovskom Mikuláši — kraji Jánošíka — kde jeho otec bol 30 rokov učiteľom. Svoje štúdiá začal v rodisku; meštiansku školu a gymnázium skončil v Liptovskom Mikuláši, kde v roku 1918 zložil skúšky dospelosti ako jeden z posledných maturantov maďarského gymnázia. V tom istom roku sa zapísal na Lekársku fakultu budapeštianskej univerzity, pretože profesia lekára v bývalom Uhorsku zaručovala Slovákom väčšiu voľnosť prejavu národného povedomia. Štátnym prevratom však pôvodná poľnútka prestala byť aktuálna a v roku 1919 odišiel do Prahy študovať na Elektrotechnickú fakultu Vysokého učenia technického. Tu sa prihlásil za člena Jednoty československých matematikov a fyzikov, ktorá mu zverila preklady českých fyzikálnych učebníc do slovenčiny. Touto svojou prácou podstatne prispel k tvorbe slovenskej fyzikálnej terminológie, ktorá bola v tom čase vo svojich začiatkoch. Veď po zatvorení gymnázia v Revúcej, Martine a v Kláštore pod Znievom uplynulo celých 44 rokov, čo Slováci nemali ani jedinej slovenskej strednej školy. Napokon fyzika ho zaujala natoľko, že posledné 3 semestre svojho štúdia dokončil na Prírodovedeckej fakulte Karlovej univerzity v Prahe, a to odbor matematika-fyzika.

Po absolvovaní vysokej školy v roku 1923 nastúpil ako profesor na Gymnázium v Prešove, kde v prvých rokoch pre nedostatok učiteľov slovenčiny v rámci svojho úväzku vyučoval i tento predmet a popri svojich vyučovacích povinnostiach sa zúčastňoval na osvetovej práci a kultúrnom živote. Na Gymnázium v Prešove založil Samovzdelávací krúžok Andreja Sládkoviča, ktorý i po jeho odchode pretrval a úspešne vykonával svoje poslanie medzi východoslovenským študentstvom viac ako dve desaťročia. Z jeho iniciatívy ako aj niekoľkých jeho priateľov



vzniklo Nakladateľstvo slovenských profesorov v Prešove, ktoré vydávalo učebnice a školské príručky. Tu vydal Čítanku pre prvú triedu stredných škôl a neskôr Malý pravopisný slovník.

V roku 1929 odchádza do Bratislavy, kde nastúpil ako profesor na gymnázium. V novom pôsobisku redigoval zošitovú edíciu *Abeceda všeobecného vzdelania*, v ktorej vyšlo 20 čísel. V rokoch 1936—1938 upravoval vzhľadom na odlišné potreby slovenských stredných škôl české učebnice fyziky pre vyššie triedy stredných škôl. Neskôr pôsobil na Cvičnom gymnázium v Bratislave, kde bol lektorom metodiky fyziky. V roku 1940 napísal *Čítanku pre II. triedu gymnázií*, ktorá vyšla neskôr v roku 1946 s malými zmenami v novom vydaní.

V roku 1942 bol poverený funkciou riaditeľa Ústavu pre školský a osvetový film. Za necelých 8 rokov vybudoval tento ústav a položil pevné základy rozvoja školského filmovníctva na Slovensku. Súčasne prednášal na Prírodovedeckej fakulte Slovenskej univerzity v Bratislave. Po reorganizácii Školfilmu pôsobil od roku 1950 na Štátnom ústave pedagogickom v Bratislave.

V roku 1953 bol pozvaný na Vysokú školu pedagogickú v Bratislave. Po osamostatnení Vyššej pedagogickej školy prevzal funkciu vedúceho katedry fyziky. Túto zastával neskôr i na Pedagogickom inštitúte a Pedagogickej fakulte UK v Trnave. V roku 1958 spravoval ako hlavný autor s kolektívom ďalších troch českých spoluautorov pokusnú učebnicu fyziky pre 10. ročník JSS (v ďalších vydaniach pre II. ročník stredných

všeobecno-vzdelávacích škôl), ktorá vychádzala súčasne pre školy s vyučovacím jazykom ukrajinským a maďarským. V roku 1961 bol menovaný docentom a v roku 1963 po štyridsiatich rokoch plodnej práce odišiel do dôchodku, pričom i naďalej vypomáhal na Pedagogickej fakulte UK v Trnave. V roku 1971 vyšla celoštátna učebnica *Fyzika pre pedagogické fakulty (I. diel)*, na ktorej sa zúčastnil ako spoluautor.

Docent Július Krmešský bol za svojho pôsobenia členom mnohých školských a kultúrnych ustanovizní ako aj početných komisií pre tvorbu učebníc a učebných osnov. Aktívne sa zúčastňoval na popularizácii astronómie ako spoluzakladateľ a popredný funkcionár astronomických spoločností. Neskôr bol členom hlavného výboru Slovenskej astronomickej spoločnosti pri SAV.

Doc. Krmešský spolupracoval na tvorbe 18 školských fyzikálnych filmov a na publikácii *Film a diafilm vo vyučovaní fyziky*.

V roku 1959 začal pracovať aj v novej oblasti svojich záujmov vo výskume fyzikálnych polí a žiarenia organizmov, pričom sa dopracoval pozoruhodných výsledkov, uznávaných i v zahraničí.

Za celoživotnú prácu okrem titulu „zaslúžilý učiteľ“ dostal odmeny v podobe čestných uznaní od Jednoty československých matematikov a fyzikov, Československej astronomickej spoločnosti pri ČSAV, poroty I. prehliadky školských filmov v Trenčianskych Tepliciach a pamätnej plakety od Rady Mestského národného výboru v Prešove.

O jeho duševnej sviežosti a pracovitosti svedčí aj skutočnosť, že začiatkom tohto roka napriek svojej osemdesiatke prihlásil na Úrad pre patenty a vynálezy v Prahe svoj objav Kvazimagnetické vektorové pole.

Do ďalších rokov života želáme mu predovšetkým duševnú sviežosť, pevné zdravie a pozitívne výsledky v práci.

Zemřel docent Josef Dibelka

Koncem loňského roku, dne 30. 12. 1979 zemřel náhle dlouholetý (od roku 1955) člen redakční rady našeho časopisu RNDr. Josef Dibelka, docent fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze.

Doc. dr. J. Dibelka se narodil 13. září 1906 v Řepově u Mladé Boleslavi v rodině učitele. Pokračoval v rodinné tradici a učitelskému povolání zůstal věrný po celý život. Lásky k mladým lidem, kterým předával své odborné znalosti a bohaté životní zkušenosti, se stala jeho osudem. Byl zasloužilým učitelem a tímto státním vyznamenáním byla také jeho celo-

životní práce po zásluze oceněna. Jako učitel působil doc. dr. J. Dibelka na různých školách v Kolíně, Bratislavě a Praze, ale také v ústředních a krajských školských institucích jako lektor, konzultant, metodik, autor celé řady učebních textů a nových učebních pomůcek v oblasti fyziky.

Fyzika byla druhou láskou doc. dr. J. Dibelky a dovedl tuto svou lásku a zájem přenášet na studenty. Studoval na přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity u našich předních fyziků, na něž rád vzpomínal — profesory Posejpala, Žáčka, Dolejška. Pod vedením prof. dr. J. Šafránka vypracoval v roce 1930 doktorskou disertaci „Závislost odporu vizmutu na teplotě v magnetických polích různé intenzity“ a stal se po jejím obhájení doktorem přírodních věd. Ve své odborné i pedagogické práci projevoval vždy doc. Dibelka experimentální cit a schopnost vystihnout fyzikální podstatu problému. Obětavě pracoval v Jednotě československých matematiků a fyziků a v letech 1964 až 1970 byl předsedou její pražské pobočky. Jeho práce v Jednotě byla oceněna řadou čestných uznání.

V roce 1956 byl doc. J. Dibelka jako zkušený pedagog povolán na nově zřízenou fakultu technické a jaderné fyziky v Praze (nyní FJFI ČVUT) a té již zůstal věren do konce svého života. Vybudoval zde fyzikální praktikum, řadu let přednášel úvodní kurs z fyziky a i dnes se podle jeho skript a návodů učí další generace posluchačů. Na fakultě zastával řadu funkcí. Působil jako člen vědecké rady fakulty, jako vedoucí katedry fyziky, proděkan, předseda ZV ROH aj. Dával fakultě všechny své síly, žádnému úkolu se nevyhýbal, byl příkladem svou pracovitostí a svědomitostí. V duchu pokrokových tradic našich učitelů se i doc. Dibelka živě zajímal o společenské dění, hájil vždy své pokrokové názory a v jejich duchu vychovával i mládež. České vysoké učení technické v uznání zásluh doc. Dibelky udělilo mu své nejvyšší vyznamenání — Felberovu medaili.

Doc. dr. J. Dibelka aktivně pracoval i jako člen redakční rady našeho časopisu. V Rozhledech publikoval řadu článků o moderních problémech současné fyziky jako: „Atomová baterie“, „Elektronová vodivost“, „Hallův jev“, „Kerrův jev“, „Proč jaderné elektrárny“, „Kalorimetrie“, „Fotoluminiscence“ aj. Přispíval i do rubriky „Naše soutěž“ jako autor fyzikálních příkladů. Během 25 let členství v redakční radě zrecenzoval desítky odborných článků a pojednání.

Úmrtím doc. dr. J. Dibelky ztratila naše společnost významného pedagoga s mimořádnými zkušenostmi jak ve středním, tak i vysokém školství, kolegové pak blízkého a laskavého spolupracovníka, přítele a rádce. Svým životem a prací zanechal trvalou stopu v srdcích mnoha a mnoha svých žáků, přátel a blízkých, kteří na něho budou vždy s láskou vzpomínat.

Ivan Štoll, Zdeněk Janout, FJFI ČVUT Praha

Spojitosť

JOZEF DOBOŠ, poslucháč PFUK Bratislava

Pri skúmaní funkcionálnych závislostí prichádzame k vydeleniu istých funkcií majúcich celý rad špeciálnych vlastností, ktoré z nich tvoria mohutný nástroj skúmania. Sú to tzv. spojité funkcie.

Najskôr si objasníme niektoré pojmy a označenia, ktoré budeme potrebovať k ďalšiemu výkladu.

Vzdialenosťou bodu $s \in \mathbb{R}$ od neprázdnej množiny $T \subset \mathbb{R}$ nazývame také reálne číslo a (označujeme ho $d(s, T)$), pre ktoré platí

$$(1) \quad \forall t \in T; \quad a \leq |s - t|$$

$$(2) \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad \forall t \in T; \quad v \leq |s - t| \Rightarrow v \leq a.$$

Teda $d(s, T)$ je také reálne číslo, ktoré je menšie alebo rovné ako vzdialenosť bodu s od ľubovoľného bodu t množiny T , pričom je najväčšie zo všetkých čísel, majúcich túto vlastnosť.

Poznámka. Ak $s \in T$, potom z definície vidíme, že

$$d(s, T) = 0$$

Príklad 1. Nech $T = \langle 1, \infty \rangle$. Potom pre $s \notin T$ platí $d(s, T) = |s - 1|$. Teda sme našli bod $t \in T$ ($t = 1$) taký, že $d(s, T) = |s - t|$.

Príklad 2. Nech $T = (-\infty, 2)$. Potom pre $s \notin T$ platí $d(s, T) = |s - 2|$. Teraz už nenájdeme taký bod $t \in T$, aby platilo $d(s, T) = |s - t|$.

Poznámka. Všimnime si, že ak množina T je jednoprvková, t. j. $T = \{t\}$, tak $d(s, T) = d(s, \{t\}) = |s - t|$, čo je vzdialenosť bodu s od bodu t .

Teraz ukážeme niektoré vlastnosti veličiny $d(s, T)$.

Veta 1. Nech $s \in \mathbb{R}$, $\emptyset \neq T \subset \mathbb{R}$. Potom platí

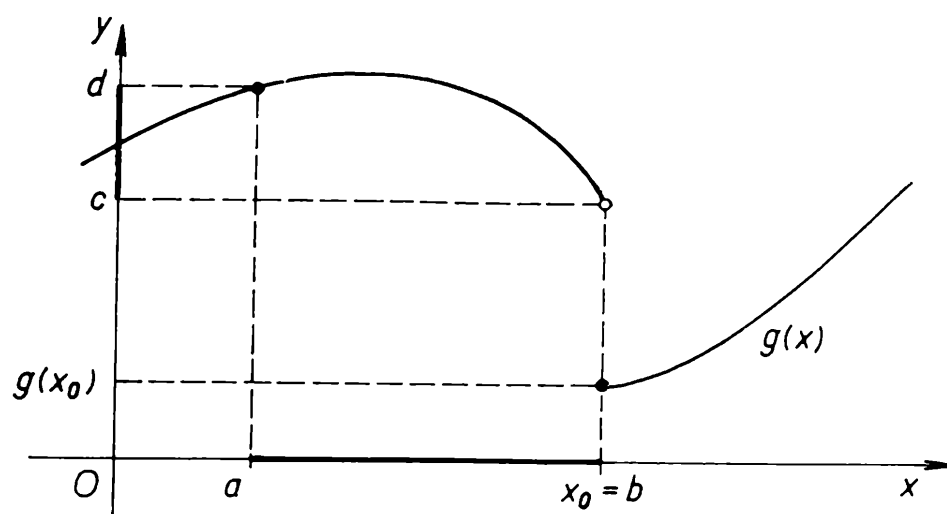
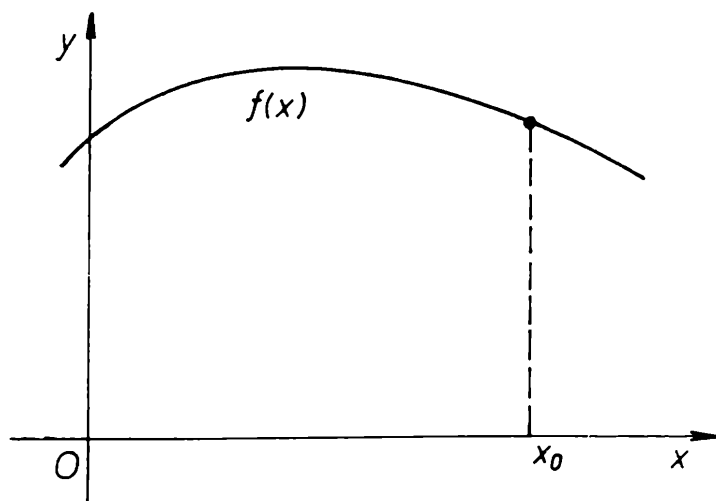
$$(3) \quad d(s, T) \geq 0,$$

$$(4) \quad d(s, T) = 0 \Rightarrow (\forall \delta > 0 \exists t \in T; |s - t| < \delta).$$

Dôkaz. Skutočne, $\forall t \in T; 0 \leq |s - t|$, teda podľa (2) platí $0 \leq d(s, T)$. Vlastnosť (4) ukážeme sporom: nech $\exists \delta > 0 \forall t \in T; |s - t| \geq \delta$. Potom podľa (2) je $0 < \delta \leq d(s, T) = 0$, čo je spor. Teda (4) platí.

Obrazom množiny $H \subset \mathbb{R}$ pri zobrazení $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame množinu

$$h[H] = \{h(x); x \in H\}$$



Obr. 2

Príklad 3. Nech $\mathbf{H} = \{-2, 3\}$, $h(x) = x^2$. Potom $h[\mathbf{H}] = \{4, 9\}$.

Poznámka. Všimnime si, že ak množina $\mathbf{H}$ je jednoprvková, t. j. $\mathbf{H} = \{u\}$, tak $h[\mathbf{H}] = h[\{u\}] = \{h(u)\}$, čo je jednoprvková množina.

Prezrime si pozorne grafy funkcií znázornených na obrázkoch 1 a 2. Intuitívne je nám jasné, že funkcia f je spojitá a g nie je. V ďalšom sa pokúsime o matematizáciu týchto predstáv. Ukážeme vhodnú vlastnosť vydeľujúcu funkcie, ktoré sú podľa nás nespojité. Potom spojité funkcie budú tie, ktoré túto vlastnosť nemajú. Všimnime si, že existuje taká množina $\mathbf{A} \neq \emptyset$ ($\mathbf{A} = (a, b)$), že $d(x_0, \mathbf{A}) = 0$, ale vzdialenosť bodu $g(x_0)$ od množiny $g[\mathbf{A}] = (c, d)$ už nie je rovná nule. Pritom funkcia f túto vlastnosť nemá. Ukazuje sa, že toto je charakteristickou vlastnosťou funkcií nespojitých v bode x_0 .

Charakterizáciu funkcie g nespojitej v bode x_0 dostávame v tvare

$$(5) \quad \exists \mathbf{A} \subset \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset, d(x_0, \mathbf{A}) = 0; d(g(x_0), g[\mathbf{A}]) \neq 0.$$

Potom charakterizáciu funkcie f spojitej v bode x_0 dostávame negáciou výroku (5):

$$(6) \quad \forall A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, d(x_0, A) = 0; d(f(x_0), f[A]) = 0,$$

t. j. funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď pre každú neprázdnu množinu A majúcu vzdialenosť od bodu x_0 rovnú nule má jej obraz $f[A]$ vzdialenosť od bodu $f(x_0)$ rovnú nule.

Na záver ukážeme ekvivalentnosť charakterizácie (6) s tzv. $\varepsilon - \delta$ definíciou (známou z učebnice):

$$(7) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dôkaz. Predpokladajme najskôr, že f má vlastnosť (7). Ukážeme, že potom má aj vlastnosť (6). Nech $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, d(x_0, A) = 0$. Potom $d(f(x_0), f[A]) = 0$. Skutočne, ak by totiž $d(f(x_0), f[A]) \neq 0$, podľa (3) môžeme položiť $\varepsilon = d(f(x_0), f[A]) > 0$. Podľa (7) platí

$$(8) \quad \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pretože $d(x_0, A) = 0$, podľa (4) platí $\exists t \in A; |x_0 - t| < \delta$.

Teda podľa (8) platí $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ a podľa (1) platí $d(f(x_0), f[A]) \leq |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon = d(f(x_0), f[A])$, čo je spor. Teda musí platiť $d(f(x_0), f[A]) = 0$. Tým sme ukázali, že f má vlastnosť (6).

Teraz predpokladajme, že f nemá vlastnosť (7), t. j. že

$$(9) \quad \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta; |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Ukážeme, že potom f má vlastnosť (5) (ktorá je negáciou vlastnosti (6)). Nech n je prirodzené číslo. Potom pre $\delta = 1/n$ podľa (9) platí

$$(10) \quad \exists x_n \in \mathbb{R}, |x_n - x_0| < 1/n; |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Označme $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ (kde $\mathbb{N}$ je množina všetkých prirodzených čísel). Potom $d(x_0, A) = 0$. Skutočne, ak by totiž $d(x_0, A) > 0$, tak by existovalo $n \in \mathbb{N}$ také, že $1/n \leq d(x_0, A)$, a potom podľa (1) by platilo $d(x_0, A) \leq |x_0 - x_n| < 1/n \leq d(x_0, A)$, čo je spor. Pritom však $d(f(x_0), f[A]) \neq 0$. Skutočne, pre každé $n \in \mathbb{N}$ podľa (10) platí

$$\varepsilon \leq |f(x_0) - f(x_n)|,$$

teda podľa (2) platí

$$0 < \varepsilon \leq d(f(x_0), f[A]).$$

Teda f má vlastnosť (5). Tým je ekvivalentnosť (6) a (7) dokázaná.

Konstrukce průsečíků kružnice s hyperbolou - I.

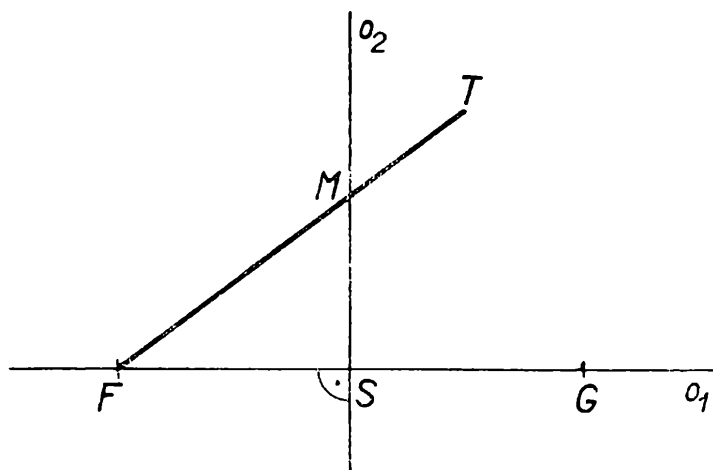
Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou různých (pevných) bodů F, G této roviny je rovna kladnému číslu $2a$ ($a > 0$). Body F, G nazýváme *ohniska* hyperboly. Z definice plyne, že hyperbola je souměrná podle přímky $o_1 = FG$ a podle osy o_2 úsečky FG ; je tedy souměrná i podle středu S úsečky FG , jemuž říkáme *střed* hyperboly. Přímku $o_1 = FG$ nazýváme *hlavní osou* a přímku o_2 *vedlejší osou* hyperboly. Hyperbola se skládá ze dvou neomezených částí (větví); jedna leží uvnitř poloroviny o_2F , druhá uvnitř poloroviny o_2G . Část hyperboly je narýsována na obr. 3. Přímka $o_1 = FG$ protíná hyperbolu ve dvou bodech A, B (*vrcholech* hyperboly) souměrně sdružených podle středu S tak, že je

$$|SA| = |SB| = a; \quad (1)$$

přitom je $2a = |AB| < |FG|$. Přímky a', b' vedené vrcholy A, B kolmo k hlavní ose $o_1 = FG$ nazýváme *vrcholovými tečnami* hyperboly.

Z názoru je patrné, že kružnice a hyperbola, které leží v téže rovině, mají nejvýše čtyři různé společné body. Eukleidovskou konstrukcí lze však tyto body sestavit jenom v některých případech. V jednom z nich jde o velmi jednoduchou konstrukci, k jejímuž odvození stačí znát definici hyperboly a tyto věty z učiva základní školy:

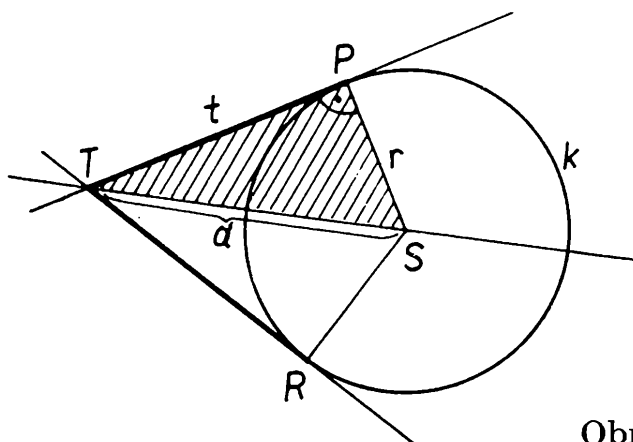


Obr. 1

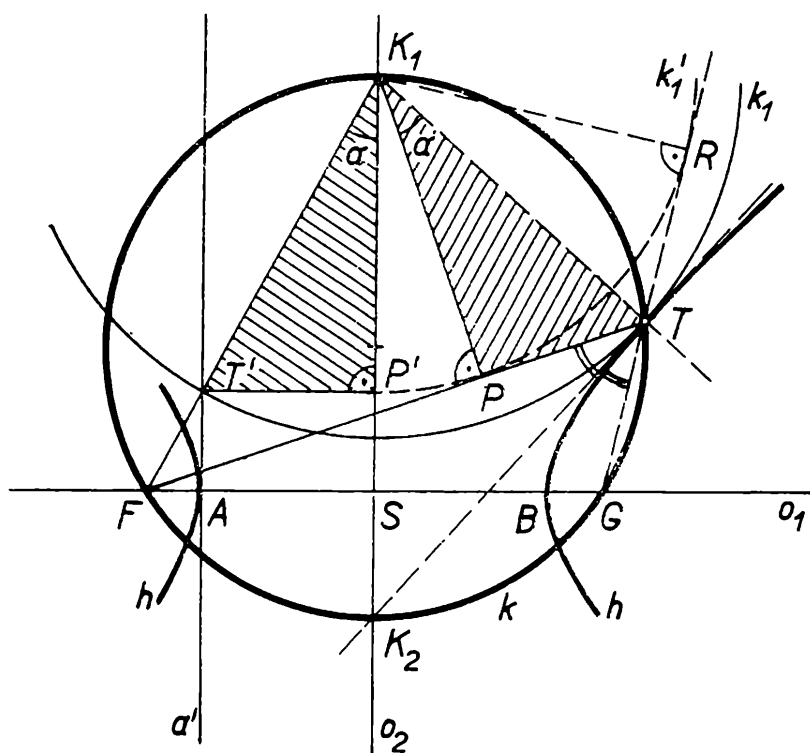
1. Nechť F, G jsou dva různé body roviny souměrně sdružené podle přímky o_2 a $T \neq G$ je vnitřní bod poloroviny o_2G (obr. 1); potom přímka o_2 protíná úsečku FT v jejím vnitřním bodu M .

2. Obvodové úhly, které patří v dané kružnici k ke shodným tětivám, jsou shodné. Tak např. na obr. 3 patří obvodové úhly FK_1K_2, FTK_2 k téže tětivě FK_2 , a proto jsou shodné.

3. Obvodové úhly, které patří v dané kružnici k k jejímu průměru, jsou pravé. Tak např. na obr. 3 patří obvodový úhel K_1TK_2 k průměru K_1K_2 , a proto je pravý.



Obr. 2



Obr. 3

4. Je-li v rovině kružnice $k = (S, r)$ dán bod T tak, že je $ST = d \succ r$, pak jím procházejí právě dvě tečny kružnice k (obr. 2). Jsou-li P, R jejich dotykové body, je

$$t = |TP| = |TR| = \sqrt{d^2 - r^2}$$

Z toho plyne, že pro každý bod T , který má od středu S kružnice k touž vzdálenost d , je číslo t stejné.

Zvolme na hyperbole h (obr. 3) bod T tak, aby ležel uvnitř poloroviny o_2G mimo přímkou o_1 . Kružnici opsanou trojúhelníku FGT označme k a provedme *rozbor*, z něhož vyplyne konstrukce společných bodů hyperboly s kružnicí k procházející ohnisky F, G hyperboly h .

Střed kružnice k je bodem osy o_2 úsečky FG . Průsečíky přímky o_2 s kružnicí k označme K_1, K_2 , a to tak, aby bod K_1 ležel uvnitř poloroviny o_1T ; potom bod K_2 je vnitřním bodem poloroviny opačné k polorovině o_1T . Podle odstavce 1 protíná přímka o_1 úsečku TK_2 v jejím vnitřním bodu, který je proto bodem vnitřní oblasti kružnice k , a tedy vnitřním bodem tětivy FG této kružnice. Z toho plyne, že polopřímka TK_2 leží (s výjimkou bodu T) uvnitř konvexního úhlu FTG . Ze souměrnosti bodů F, G podle přímky o_2 plyne, že úsečky FK_2, GK_2 jsou shodné; podle odstavce 2 jsou proto obvodové úhly FTK_2, GTK_2 shodné. Polopřímka TK_2 je tedy osou konvexního úhlu FTG . Obvodový úhel K_1TK_2 nad průměrem K_1K_2 kružnice k je pravý (viz odstavec 3); přímky TK_1, TK_2 jsou tedy vzájemně kolmé. Protože polopřímka TK_2 je osou úhlu FTG , je polopřímka TK_1 osou úhlu, který je vedlejší k úhlu FTG . Proto kružnice k'_1 opsaná kolem bodu K_1 tak, že se dotýká přímky TF , se dotýká také přímky TG . Jsou-li P, R dotykové body kružnice k'_1 s přímkami TF, TG , je podle odstavce 4

$$|TR| = |TP| \quad (2)$$

Úhel TK_1K_2 je ostrý a úhel K_1SG je pravý; proto se polopřímky K_1T, SG protínají v bodě, který je vnitřním bodem poloroviny o_2G . Protože žádný bod přímky TK_1 není vnitřním bodem konvexního úhlu FTG , leží průsečík polopřímek K_1T, SG na prodloužení úsečky FG za bod G . To znamená, že body F, G jsou vnitřními body poloroviny, která má hraniční přímku K_1T . Konvexní úhel K_1TF je částí pravého úhlu K_1TK_2 , čili je ostrý; obdobně úhel K_1FT je ostrý. Proto pata P kolmice vedené bodem K_1 k přímce TF je vnitřním bodem úsečky TF . Je tedy

$$|FT| = |FP| + |TP| \quad (3)$$

a bod P leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou K_1T jako body F, G . Ze souměrnosti úseček TP, TR podle přímky TK_1 plyne, že bod R je vnitřním bodem poloroviny opačné k polorovině K_1TG ; proto je

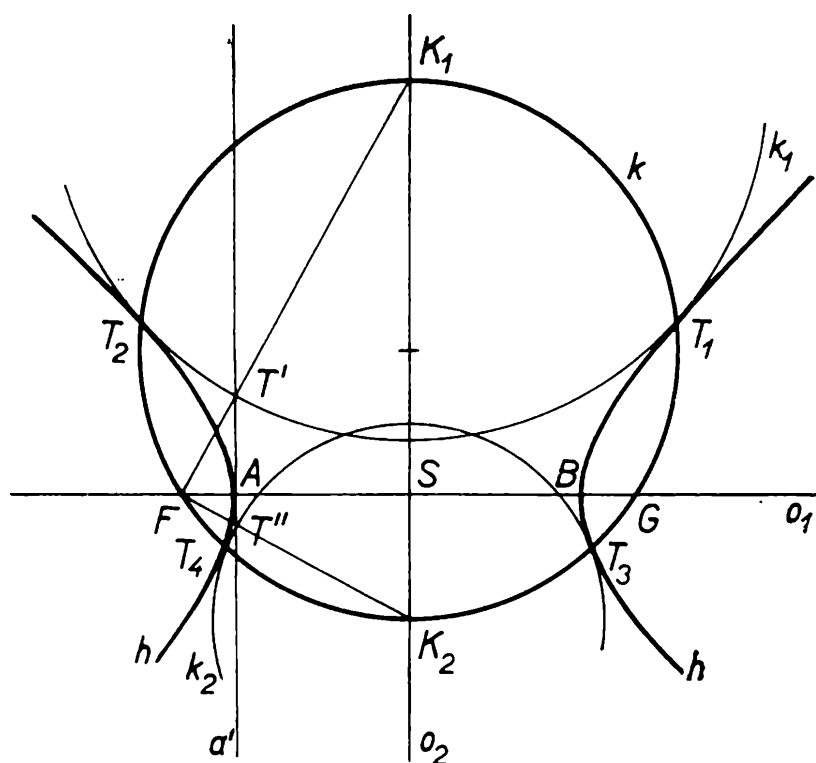
$$|GT| = |GR| - |TR| \quad (4)$$

Protože body F, G jsou stejně vzdáleny od středu K_1 kružnice k'_1 , je podle odstavce 4

$$|FP| = |GR| \quad (5)$$

Opišme kolem bodu K_1 kružnici k_1 tak, aby procházela bodem T , sestrojme její průsečík T' s polopřímkou K_1F a patu P' kolmice vedené bodem T' k přímce o_2 . Protože úhel FK_1K_2 je ostrý, je P' vnitřním bodem polopřímky K_1K_2 . Obvodové úhly FTK_2, FK_1K_2 (který je tožný s úhlem FK_1P') patří k téže tětivě FK_2 kružnice k , takže je (viz odstavec 3)

$$|\sphericalangle FTK_2| = |\sphericalangle FK_1K_2| = \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$



Obr. 4

Z pravoúhlého trojúhelníku K_1PT plyne, že ostrý úhel PK_1T je doplňkový k úhlu PTK_1 ; rovněž úhel FTK_2 je doplňkový k úhlu PTK_1 . Proto je $|\sphericalangle PK_1T| = |\sphericalangle FTK_2|$, a tedy podle (6) je $|\sphericalangle PK_1T| = |\sphericalangle FK_1K_2| = \alpha < \frac{\pi}{2}$. Pravoúhlé trojúhelníky $K_1P'T'$, K_1PT mají shodné přepony a shodné úhly; proto jsou shodné. Z toho plyne, že je

$$|TP| = |T'P'| \quad (7)$$

Dosavadní úvahy platí pro každý bod T ležící uvnitř pravého úhlu K_1SG . Je-li T bodem hyperboly, je podle její definice

$$|FT| - |GT| = 2a,$$

kde podle (1) je $a = |SA|$. Z toho podle (3) a (4) plyne, že je

$$2a = |FT| - |GT| = |FP| + |TP| - |GR| + |TR|;$$

z toho však podle (5) a (2) plyne, že je $2a = 2|TP|$, tj. $|TP| = a$. Podle (7) je tedy $|T'P'| = a = |SA|$; kromě toho je $T'P' \parallel SA$. Obrazec $ASP'T'$ je proto obdélník nebo čtverec, takže bod T' je také bodem přímky $a' \parallel o_2$ vedené bodem A , tj. bodem vrcholové tečny a' hyperboly. Bod T' lze tedy také sestavit jako průsečík přímky a' s přímkou K_1F .

Poznámka. Přímka TK_2 , jejíž částí je osa úhlu FTG , je tečnou hyperboly h v bodě T ; kružnice k_1 a hyperbola h mají tedy v bodě T společnou tečnu.

Z provedeného rozboru plyne (při výše uvedeném označení) tato konstrukce společných bodů hyperboly h a kružnice k procházející jejími ohnisky F, G (obr. 4):

1. Sestrojíme průsečíky T' a T'' vrcholové tečny a' hyperboly h s přímkami K_1F , K_2F .

2. Kolem bodu K_1 opíšeme kružnici k_1 procházející bodem T' a kolem bodu K_2 opíšeme kružnici k_2 procházející bodem T'' .

3. Sestrojíme průsečíky T_1, T_2, T_3, T_4 dané kružnice k s kružnicemi k_1 a k_2 .

Zbývá provést zkoušku, tj. dokázat, že nalezené body T_1, T_2, T_3, T_4 jsou skutečně body hyperboly h . Protože kružnice k a hyperbola h jsou souměrné podle přímky o_2 , stačí provést důkaz pro bod T_1 a pro bod T_3 . Omezíme se na bod T_1 , který je (jako bod T na obr. 3) společným vnitřním bodem polorovin o_1K_1, o_2G . Sestrojíme-li přímky TF, TG, TK_1, TK_2 , kružnici k'_1 a body P, R, P' , dostaneme obr. 3. Potom platí celá úvaha rozboru až k rovnosti (7). Z konstrukce bodu T' (obr. 4) plyne, že je $|T'P'| = |SA| = a$; podle (7) je tedy $|TP| = a$ čili podle (2) je $|TR| = |TP| = a$.

Potom podle (3) a (4) je

$$|FT| = |FP| + a, \quad |GT| = |GR| - a,$$

a tedy

$$|FT| - |GT| = |FP| - |GR| + 2a.$$

Z toho podle (5) plyne, že je

$$|FT| - |GT| = 2a;$$

to však znamená, že T je bodem hyperboly h .

Diskuse je jednoduchá: Přímky K_1F, a' se protnou v jediném bodu T' a přímky K_2F, a' v jediném bodu T'' . Protože bod A je mezi body F, S , je bod T' uvnitř úsečky K_1F a bod T'' uvnitř úsečky K_2F . Proto mají kružnice k a k_1 společné dva různé body T_1, T_2 a kružnice k a k_2 dva různé společné body T_3 a T_4 . Kružnice k má tedy s hyperbolou h právě čtyři různé společné body.

Věta o čtyřech barvách znova na scéně?

V tomto časopise se už psalo, že byl rozřešen problém čtyř barev, který od minulého století poutal zájem mnoha matematiků. Jde o to, zda každou mapu (v rovině či na kouli) je možno vybarvit, jsou-li po ruce čtyři barvy a mají-li být splněny tyto požadavky: Každý stát má být obarven jednou z oněch barev a žádné dva státy, jež mají společnou hraniční čáru, nesmějí být obarveny stejnou barvou. V grafové terminologii se to vyjadřuje též takto: Je pravda, že chromatické číslo rovinného grafu nemůže být větší než čtyři? Po dlouhém úsilí se důkaz podařil až

W. Hakenovi a *K. Appelovi* roku 1976. Ti dva autoři našli konečný (velmi velký) počet grafů, o nichž dokázali, že lze-li tyto grafy žadaným způsobem obarvit, je možno tak obarvit všechny rovinné grafy. Pak použili počítačů a ukázali, že všechny tyto pomocné grafy se dají obarvit.

Je to důkaz, jaký jsme v matematice ještě neměli, neboť podstatným prostředkem je tu počítač. Mnozí matematikové se proto na tento výsledek dívají skepticky a někteří jej dokonce odmítají. Věta o čtyřech barvách jistě neustoupí hned tak do matematických archivů a dá se předpokládat, že dosavadní důkaz se bude zjednodušovat. Na 7. konferenci o numerické matematice a počítačích, která se konala v kanadském Winnipegu roku 1977, referoval *F. Alleire* na téma „Jiný důkaz věty o čtyřech barvách“. Uveřejnil zatím první část svého výsledku (1978) a na zhodnocení jeho práce si tedy ještě počkáme.

J. S.

Z dějin exaktních věd

Vývoj mezinárodního metru

Dr. MILOŠ ŘEŠÁTKO, Komenium Praha

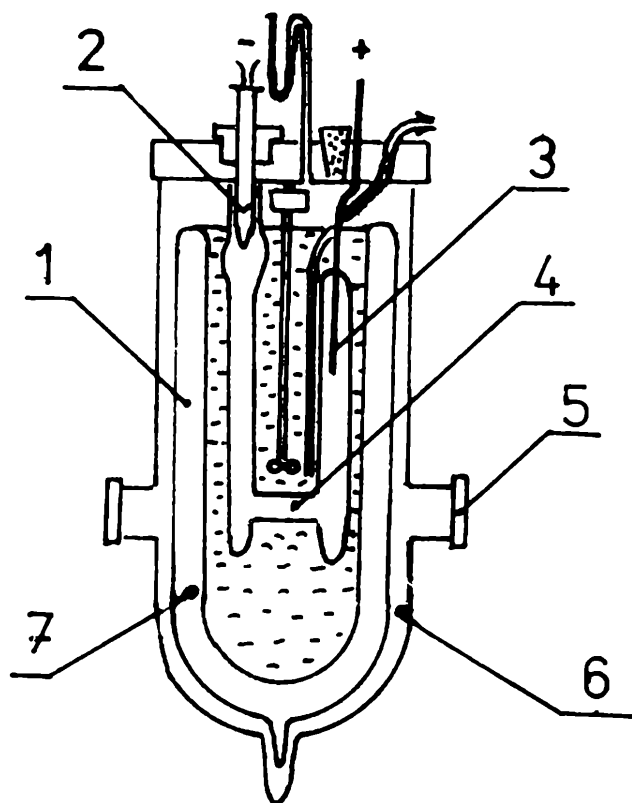
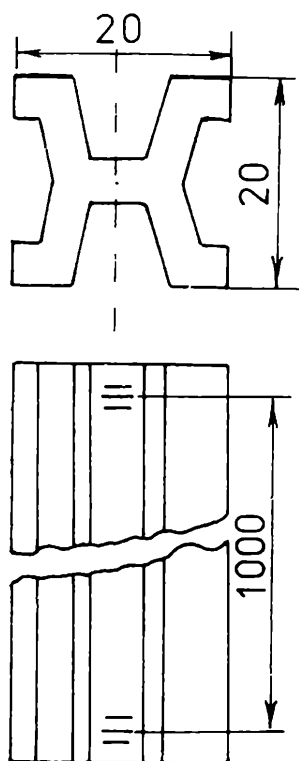
Běžně je známo, že metr měl být desetimilióntou částí zemského kvadrantu, tj. čtvrtiny poledníku. Podle usnesení Konventu nově zrozené Francouzské republiky byla zavedena metrická soustava měr. Podstatně usnadnila převody jednotek tím, že násobky a díly jednotek se tvoří násobením celočíselnou mocninou čísla 10. Předtím se menší a větší jednotky přepočítávaly složitými převodními vztahy.

K přesnému určení délky metru se na popud Francouzské akademie věd vypravily roku 1795 do okolí Paříže dvě výpravy zeměměřičů. Měření probíhala na 2° východní délky, ovšem nikoli hladce. Sedláci neměli pochopení pro měřiče a často nevybíravým způsobem přerušili měření a vyhnali geodety ze svých pozemků. Několikaletá měření byla však přece jen úspěšná a přispěla k tomu, že roku 1799 vznikl první, tzv. *archivní metr* (*archiometr*).

Méně se již ví, že archivní metr tvořilo platinové pravítko o šířce asi 25 mm a tloušťce přibližně 4 mm. Délka jednoho metru se měřila mezi konci pravítka.

V roce 1875 přistoupilo sedmnáct států na dohodu o jednotném měrovém systému, tj. k metrické konvenci. Od r. 1889 se také začaly scházet

Obr. 1



Obr. 2

Generální konference měř a vah. Hned první z nich zavedla novou definici metru. Jednak se již v té době ukázalo, že archivní metr je téměř o dvě desetiny milimetru kratší, než odpovídá desetimilióntině čtvrtopoledníku Země, a za druhé se délka mezi konci pravítka obtížně odečítala, takže měření byla zatížena velkými chybami.

Pro potřeby jednotlivých států, které přistoupily k metrické konvenci, bylo zhotoveno podle archivního metru 31 platiniridiových *etalonů*, tj. vzorů, podle kterých se v jednotlivých zemích upravovala délková měřidla. Tyto etalony měly tvar písmena X s rozměry uvedenými na obr. 1.

Jakmile se ukázalo, že archivní metr pro přesná měření nevyhovuje, byla jako prototyp zvolena platiniridiová tyč číslo 6, která se nejvíce shodovala s délkou archivního metru. První Generální konference pro míry a váhy v roce 1889 definovala metr jako vzdálenost dvou středních vrypů na této platiniridiové tyči uložené v *Sèvres* u Paříže v Mezinárodním úřadu pro míry a váhy.

Nová definice metru se tedy odpoutala od délky poledníku a vázala se na předmět — prototyp metru. Během druhé světové války byl mezinárodní metr několikrát ohrožen válečnými událostmi. Poukazovalo se zejména na to, že kdyby byl mezinárodní metr zničen, nedal by se obnovit. Nikdo totiž nedokáže udělat rysky v naprosto stejné vzdálenosti, jaká je vyznačena na mezinárodním metru. Je to patrné i na všech národních kopiích, které se od původního metru vždy nepatrně liší.

Jinou nevýhodou tyčového prototypu bylo to, že rysky na něm mají

tloušťku asi 10 μm , což znamená, že maximální přesnost měření je asi 0,1 μm . Pro současnou měřicí techniku je to již málo.

Hledala se tedy možnost sestavit takovou definici metru, která by se opět vázala na etalon, kdykoli znovu reprodukovatelný. Šlo tedy opět o pokus vrátit se k některé délce, která se dá kdykoli znovu vytvořit a změřit.

V roce 1960 přijala 11. generální konference pro míry a váhy tuto novou definici metru, která platí dodnes:

Metr je délka rovnající se 1 650 763,73 vlnových délek záření šířícího se ve vakuu, které odpovídá přechodu mezi hladinami $2p_{10}$ a $5d_5$ atomu kryptonu 86.

Definice využívá známého fyzikálního jevu, že z atomového obalu se při přeskoku elektronu z vyšší energetické hladiny na nižší vyžáří foton. Vzniklé záření má frekvenci

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{W_1 - W_2}{h},$$

kde $W_1 > W_2$, c je rychlost šíření světla, $W_1 - W_2$ je úbytek energie atomu při záření fotonu a h je Planckova konstanta. Záření se dá registrovat spektrometrem, kterým pozorujeme spektrální čáry v určitých vzdálenostech.

Jestliže se má měřit s dostatečnou přesností vzdálenost dvou spektrálních čar, musí být tyto čáry velmi ostré. Ukázalo se, že takovou čáru má krypton 86 (^{86}Kr), a to právě čáru, která odpovídá přechodu uvedenému v definici metru.

K měření podle uvedené definice se užívá zařízení, které je v řezu na obr. 2. Sestává z kryptonové výbojky, která má tvar neúplného písmena H. Do výbojky jsou zavedeny elektrody (2 a 3). V příčné kapiláře (4) s průměry 2 mm až 4 mm vzniká světelné záření, které odpovídá definici metru. Záření se vyvede otvorem (5), který je v ochranném obalu přístroje (6). Krypton musí mít alespoň 99 % čistotu a jeho teplota se udržuje na teplotě trojného bodu dusíku, tedy -210°C . Chlazení obstarává tekutý dusík v Dewarově nádobě (7). V kapilární trubici výbojky se udržuje proudová hustota $(3 \pm 1) \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$.

Při stanoveném pracovním režimu je vysílané záření koherentní. K měřicí soupravě patří kromě výše uvedeného zdroje ještě interferometr pro měření délek interferenční metodou a dále spektrální interferometr pro měření délek světelných vln.

Takto sestavená souprava umožňuje měřit asi o řád přesněji než dříve používaný platiniridiový normál, tedy s přesností $\pm 3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$.

V současné době se pracuje na přípravě nových měřicích metod, při kterých se využije laser. Předpokládá se, že lasery umožní ještě přesnější definici metru. Současná definice metru tedy zřejmě nebude platit tak dlouho jako předchozí.

olympiády

Úlohy I. kola 30. ročníku MO

Přípravné úlohy odevzdávají soutěžící ve všech kategoriích svému učiteli matematiky do 15. listopadu 1980. Termín odevzdání soutěžních úloh I. kola je 10. leden 1981 pro kategorie A a Z a 15. únor 1981 pro kategorie B, C.

KATEGORIE A

Přípravné úlohy

1. V rovině je dána síť rovnostranných trojúhelníků o straně a , vytvořená třemi soustavami rovnoběžných přímk. Dokažte, že uvnitř každého čtverce, který leží v rovině sítě a má stranu větší než a , leží alespoň jeden vrchol sítě.

2. Najděte všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

kde p je reálný parametr.

3. Jsou-li všechny výšky čtyřstěnu stejně velké, jsou všechny jeho stěny shodné trojúhelníky. Dokažte.

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník T s obsahem P .

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, který je obsažen v trojúhelníku T a má obsah větší nebo rovný $\frac{1}{3}P\sqrt{3}$

Soutěžní úlohy

1. Najděte nejmenšie prirodzené číslo n s touto vlastnosťou: Vo vnútri daného štvorca 6×6 je možné zvoliť n bodov tak, že vo vnútri každého štvorca 1×1 , ktorý leží celý v danom štvorci, sa nachádza aspoň jeden zo zvolených bodov.

2. Najděte všetky reálne čísla x , pre ktoré platí

$$\sqrt{2p + 1 - x^2} + \sqrt{3x + p + 4} = \sqrt{x^2 + 9x + 3p + 9}$$

kde p je reálny parameter.

3. Je dáno prirodzené číslo $n > 1$. Množina M uzavřených intervalů má tyto vlastnosti:

1. Pro každý interval $\langle u, v \rangle \in M$ platí, že u, v jsou přirozená čísla, $1 \leq u < v \leq n$.
2. Pro každé dva různé intervaly $I \in M, I' \in M$ je $I \subset I'$ nebo $I' \subset I$ nebo $I \cap I' = \emptyset$.
Určete největší možný počet prvků množiny M .
Poznámka: Uzavřený interval $\langle u, v \rangle$ je množina všech reálných čísel r , pro která platí $u \leq r \leq v$.
4. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož všechny vrcholy leží na kružnici o poloměru 1 a takový, že

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 > 8,999.$$
5. Je dán kruh K o průměru 1. V jeho rovině najděte množinu všech bodů ležících v pravoúhlých rovnoramenných trojúhelnících, které mají alespoň dva vrcholy v kruhu K .
6. Je dáno přirozené číslo n a čtyřstěn T těchto vlastností:
 - (a) Délky všech jeho hran jsou přirozená čísla nejvýše rovná n .
 - (b) Obvody všech stěn čtyřstěnu jsou si rovny.
 Dokažte, že pro $n \leq 5$ jsou stěny čtyřstěnu rovnoramenné trojúhelníky. Platí toto tvrzení i pro $n \geq 6$?

KATEGÓRIA B

Prípravné úlohy

1. Určte počet všetkých rôznych usporiadaných trojíc prirodzených čísel x, y, z , ktoré vyhovujú rovnici

$$x^{19}y^{97}z^9 = 19^{791} \cdot 97^9.$$

2. Pre každé prirodzené číslo n existujú navzájom rôzne prirodzené čísla r, s tak, že číslo

$$3^r - 3^s$$

je deliteľné číslom n . Dokážte.

3. Nech $ABCD$ je deltoid (vypuklý štvoruholník súmerný práve podľa jednej zo svojich uhlopriečok) s osou súmernosti AC . Nech S je priesečník priamok AC, BD a M, N, P, Q v uvedenom poradí sú jeho kolmé priemety na priamky AB, BC, CD, DA .

- a) V štvoruholníku $MNPQ$ platí $MQ \parallel NP$. Dokážte.
- b) Nech $\sphericalangle BAD = 2\alpha$, $\sphericalangle BCD = 2\gamma$. Vyjadrite veľkosti uhlov štvoruholníka $MNPQ$ pomocou uhlov α, γ .
- c) Rozhodnite, kedy je štvoruholník $MNPQ$ lichobežníkom a kedy rovnobežníkom.

4. Nech k je daný kruh s polomerom 1. Určte množinu vrcholov C všetkých rovnostranných trojuholníkov ABC , ktorých vrcholy A, B ležia vo vnútri alebo na hranici kruhu k .

Súťažné úlohy

1. Pre každé prirodzené číslo $n \leq 150$ existujú dva rôzne delitele d_1, d_2 čísla 9 000 000 také, že n delí rozdiel $d_1 - d_2$. Dokážte.

2. Nech a je prirodzené číslo tvaru $2p+1$, kde p je prvočíslo. Nájdite množinu všetkých prirodzených čísel x , pre ktoré platí, že ak z nich vynecháme prvú číslicu, dostaneme $\frac{x}{a}$.

3. Určte všetky hodnoty reálneho parametra m , pre ktoré má sústava rovníc

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4 \\(x + m)^2 + (y - m)^2 &= 1\end{aligned}$$

s neznámymi x, y práve jedno riešenie.

4. Nech $ABCD$ je vypuklý štvoruholník taký, že kolmé priemety priesečníka jeho uhlopriečok na jednotlivé strany ležia vo vnútri týchto strán.

Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby tieto priemety ležali na kružnici, je, aby uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$ boli na seba kolmé. Dokážte.

5. Pravouholník P nazveme opísaným pravidelnému šesťuholníku, ak každá z jeho strán obsahuje aspoň jeden vrchol šesťuholníka a žiaden bod šesťuholníka neleží mimo pravouholníka.

Je daný pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky 1.

Zostrojte aspoň jeden jemu opísaný pravouholník, ktorý:

- a) má čo najväčší obsah;
- b) má čo najmenší obsah.

V oboch prípadoch určte podiel obsahov šesťuholníka a pravouholníka.

6. Je daná guľa G s polomerom 1. Určte množinu vrcholov V všetkých pravidelných štvorstenov $ABCV$, ktorých vrcholy A, B, C ležia vo vnútri alebo na hranici gule G .

KATEGORIE C

Přípravné úlohy

1. Veslárovi trvá prejdienie istého úseku rieky na lodke proti prúdu s veslovaním a po prúde bez veslovania rovnaký čas. O koľkej sa musí otočiť, ak vyštartuje o 15. hodine, o 18. hodine má byť naspäť a rozhodol sa veslovať aj na spiatočnej ceste? (Predpokladáme, že rýchlosť prúdu rieky aj vlastná rýchlosť veslára je konštantná.)

2. Každá strana a každá uhlopriečka konvexného pätúhelníka je obarvena jednou ze dvoch barev tak, že žiadny trojuhelník (tvořený stranami

nebo celými úhlopříčkami pětiúhelníka) není jednobarevný. Dokažte, že z každého vrcholu pětiúhelníka vycházejí právě dvě úsečky každé barvy.

3. V ostroúhlém trojúhelníku ABC je dán bod P uvnitř strany AB . Sestrojte bod M uvnitř strany AC a bod N uvnitř strany BC tak, aby obvod trojúhelníka PMN byl minimální.

4. Je dán čtverec, jehož strana má velikost a . Z každého vrcholu jsou dovnitř čtverce opsány čtvrtkružnice s poloměrem a . Tak se čtverec rozdělí na devět částí. Vypočtete obsahy těchto částí.

Soutěžní úlohy

1. Kocka o hrane délky 5 je zložená z 125 jednotkových kociek. Určte najmenší a najväčší možný povrch telesa, ktoré z nej dostaneme odstránením troch hranolov, pozostávajúcich z piatich jednotkových kociek, keď žiadne dva z odstránených hranolov nemajú spoločný bod ani rovnaký smer.

2. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sa začínajú cifrou 7 a po jej odstránení sa zmenšia 36 ráz.

3. Dvaja veslári na dvoch člnoch vyštartovali o 14.55 z prístavišťa a veslovali proti prúdu rieky. K lesu došli spolu, potom jeden vesloval späť a vrátil sa o 17.55, druhý sa nechal doviezť späť prúdom a vrátil sa o 19.07. Koľko im trvala plavba z prístavišťa k lesu? (Predpokladáme, že po celý čas rýchlosť toku rieky aj vlastná rýchlosť veslovania boli konštantné.)

4. Do ostroúhlého trojúhelníka ABC je vepsán trojúhelník MNP tak, že $M \in AC$, $N \in BC$, $P \in AB$. Určete polohu bodů M , N , P tak, aby obvod trojúhelníka MNP byl minimální.

5. Je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Čtverce $ACEG$ a $BDFH$ se protínají také v pravidelném osmiúhelníku. Vypočtete poměr obsahů obou osmiúhelníků.

6. V rovnostranném trojúhelníku ABC o straně délky 1 se na straně AC pohybuje bod X a na straně BC bod Y tak, že obsah trojúhelníka XYC je stále polovina obsahu trojúhelníka ABC . Najděte, jakou funkci vzdálenosti $x = |CX|$ je vzdálenost $y = |CY|$, a určete definiční obor a obor hodnot této funkce.

KATEGORIE Z

Přípravné úlohy

1. Určete nejmenší přirozené číslo, jehož 1979-násobek končí čtyřčíslím 1980.

2. Ke každé hraně krychle je připsáno přirozené číslo tak, že součet tří čísel, připsaných hranám vycházejícím z jednoho vrcholu krychle, je pro všechny vrcholy stejný a rovná se S .

a) Jaký vztah platí mezi S a součtem všech dvanácti čísel, připsaných k hranám krychle?

b) Je možno hrany krychle očíslovat čísla 1, 2, ..., 12 tak, že součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany krychle vycházející z téhož vrcholu, je pro všechny vrcholy stejný?

3. Dvě dvojmístná přirozená čísla, která mají na místě desítek stejné cifry a na místě jednotek cifry doplňující se do deseti (například 87, 83) se mohou násobit tak, že číslo na místě desítek znásobíme číslem zvětšeným o jednu a k tomuto součinu přepíšeme dvojciferný součin jednotek ($8(8 + 1) = 72$, $7 \cdot 3 = 21$, $87 \cdot 83 = 7221$). Odůvodněte tento postup.

4. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Sestrojte pravoúhelník $KLMN$ tak, že úsečka AB je částí úsečky KL , úsečka ED je částí úsečky MN a body C, F leží po řadě uvnitř úseček LM a KN . Vypočítejte poměr obsahů pravoúhelníku $KLMN$ a daného šestiúhelníka.

Soutěžní úlohy

1. Určete všechna trojciferná čísla, jejichž 576-násobek končí trojčíslím 576.

2. Dokažte, že hrany pravidelného trojbokého jehlanu se nedají očíslovat čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6 tak, aby součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany jedné stěny, byl pro všechny čtyři stěny stejný (mezi stěny počítáme též podstavu).

3. Mějme dvojciferné číslo X . Číslo Y vznikne z čísla X přehozením cifer. Najděte všechna čísla X , pro která je $X - Y$ druhou mocninou přirozeného čísla.

4. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Trojúhelníky ACE a BDF se protínají opět v pravidelném šestiúhelníku. Dokažte, že jeho obsah se rovná třetině obsahu šestiúhelníka $ABCDEF$.

Úlohy pro 1. kolo XXII. ročníku FO

KATEGORIE A

1. Nádobu tvaru kvádru má obsah dna S . V ní je nalita kapalina o hustotě ρ_0 a objemu V . Stejnorodá krychle o hustotě ρ ($\rho < \rho_0$) a délce hrany a je ponořena do kapaliny tak, že její dolní podstava je v hloubce h pod volným povrchem kapaliny, $h \leq a$. Hloubka kapaliny v nádobě je větší než délka hrany a .

a) Stanovte celkovou mechanickou energii soustavy krychle a kapaliny v nádobě jako funkci hloubky h ponoru krychle.

b) Je-li krychle zcela volná, plove v kapalině tak, že její dolní podstava je v hloubce h_0 pod volným povrchem kapaliny. Působením vnější

síly se krychle posune z této rovnovážné polohy dolů tak, že její horní podstava splyne s volným povrchem kapaliny v nádobě.

Stanovte vykonanou práci využitím výsledku úlohy a) i použitím definičního vztahu pro mechanickou práci. Oba výsledky porovnejte.

c) Jak se změní výsledek úlohy b), jestliže je obsah podstavy krychle zanedbatelný vzhledem k obsahu S dna nádoby?

2. V beztížném stavu jsou ve vakuu dvě koule z téže kapaliny, jejíž hustota je ρ , měrné teplo c , povrchové napětí σ a teplotní součinitel délkové roztažnosti α . Poloměry koulí jsou r_1, r_2 . Obě koule mají stejnou teplotu.

Určete změnu teploty Δt kapaliny, jestliže se obě koule spojí v jediné těleso.

Při řešení použijte aproximaci $(1 + h)^n \approx 1 + n h$, jestliže $|h| \ll 1$.

Řešte nejprve obecně, potom pro rtuť a pro $r_1 = r_2 = 2,0 \text{ mm}$.

3. Na vozíku, který je vzhledem k vodorovné podložce v klidu, jsou upevněny dvě válcové nádoby o výšce h a průměru podstavy d . Osy obou nádob jsou svislé. Spojnice středů jejich podstav je rovnoběžná s kolejnicemi, po nichž se vozík může pohybovat. První nádoba je uzavřená a je do poloviny naplněna kapalinou o hustotě ρ . Tlak vzduchu nad kapalinou je roven atmosférickému tlaku p_0 . Druhá nádoba je otevřená a je s první nádobou těsně u dna spojena velmi krátkou trubicí s kohoutem.

a) Do jaké výšky h_1 vystoupí kapalina v druhé nádobě po otevření kohoutu a po ustálení volných povrchů kapaliny?

b) O jakou délku l a ve kterém směru se vozík posune po svých kolejnicích za dobu od otevření kohoutu do ustálení volných povrchů kapaliny?

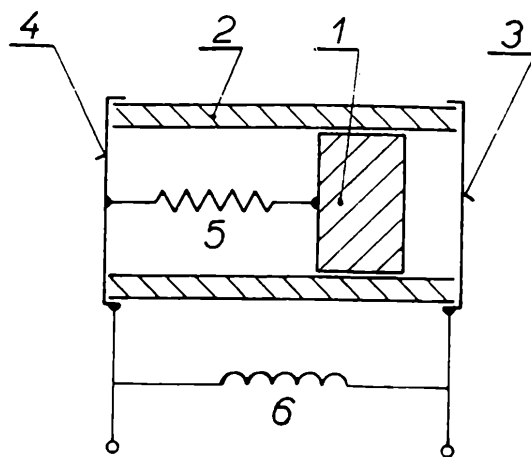
Hmotnost vozíku, trubice a nádob je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti kapaliny.

Vozík se po kolejnicích pohybuje bez tření.

4. K měření zrychlení vozidla je použitelné kapacitní čidlo podle obr. A-1. Kovový váleček 1 o hmotnosti m se může bez tření posouvat v trubce 2 vyrobené z izolantu. Kovové víko 3 je jednou elektrodou kondenzátoru a druhou jeho elektrodou je váleček 1. Váleček je spojen s druhým víkem 4 elektricky vodivou pružinou 5; její tuhost je k . Paralelně k uvažovanému kondenzátoru je připojena cívka 6.

Soustava cívky a kondenzátoru tvoří kmitavý obvod, jehož kmitočet lze přesně měřit.

Čidlo je uloženo tak, že osa kondenzátoru je rovnoběžná se směrem zrychlení a , které se má měřit. Je-li čidlo v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém, má víko 3 od podstavy válečku 1 vzdálenost d_0 a obvod má kmitočet f_0 .



Obr. A-1

Stanovte velikost zrychlení čidla, jestliže se kmitočet obvodu

a) zvětší o Δf ,

b) zmenší o Δf .

Řešte nejprve obecně, potom pro $m = 100 \text{ g}$, $k = 250 \text{ N.m}^{-1}$, $d_0 = 2,00 \text{ mm}$, $f_0 = 100 \text{ MHz}$, $\Delta f = 5,00 \text{ MHz}$.

5. Wolframové vlákno vakuové žárovky má kruhový průřez o poloměru r . Hustota wolframu je ρ , jeho měrné teplo c . Když žárovka svítí, má její vlákno teplotu T_1 .

Stanovte dobu τ od vypnutí proudu, za kterou teplota vlákna klesne na T_2 .

Řešte nejprve obecně, potom pro $T_1 = 2700 \text{ K}$, $T_2 = 600 \text{ K}$, $r = 25 \mu\text{m}$, $\rho = 19,3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $c = 0,134 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Poznámky k řešení:

1. Předpokládejte, že vlákno září jako černé těleso, takže podle zákona Stefanova-Boltzmannova platí

$$P = S\sigma T^4,$$

kde P je vyzařovaný výkon, S obsah zářícího povrchu, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ konstanta Stefanova-Boltzmannova, T teplota zářícího povrchu.

2. Měrné teplo, hustotu wolframu a průměr vlákna považujte v rozsahu změny teploty $\Delta T = T_1 - T_2$ za konstantní.

3. Nepřihlížejte k ohřívání vlákna pohlcováním zářivé energie z okolí.

6. Měření materiálových konstant termistoru NTC

Pomůcky:

tyčinkový termistor (vyhoví typ používaný v elektronkových televizních přijímačích pro proud 300 mA), větší nádoba (např. kádinka 1000 ml) s destilovanou vodou, teploměr, míchačka, elektrický vaříč, elektrický stejnosměrný zdroj, voltmetr a ampérmetr (popř. můstkové měřidlo Omega nebo jakékoli jiné pro přímé měření odporu), semilogaritmický papír (svislá stupnice je logaritmická, vodorovná lineární).

I. Teoretický úvod

Termistor NTC je polovodičová součástka bez přechodu PN se záporným teplotním součinitelem α elektrického odporu. Jeho odpor se v nepříliš širokém rozmezí teplot řídí vztahem

$$R = A \exp \frac{B}{T}, \quad (1)$$

kde A , B jsou materiálové konstanty termistoru, T jeho teplota; A je určeno v ohmech, B v kelvinech.

Logaritmováním vztahu (1) dostaneme

$$\log\{R\} = \log\{A\} + B \frac{\log e}{T}, \quad (2)$$

což znamená, že funkce $\log\{R\} = F\left(\frac{1}{T}\right)$ je lineární.

Změříme-li odpor R_1 , R_2 termistoru při dvou různých teplotách T_1 , T_2 , dostáváme s použitím (2)

$$B = \frac{\log\{R_1\} - \log\{R_2\}}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \log e} = \frac{2,30 (\log\{R_1\} - \log\{R_2\})}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}. \quad (3)$$

Derivováním vztahu (1) podle T a úpravou dostáváme pro teplotní součinitel α elektrického odporu termistoru

$$\alpha = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT} = - \frac{B}{T^2}; \quad (4)$$

jednotkou teplotního součinitele odporu je reciproký kelvin. Konstanta B tedy, podle (4), charakterizuje teplotní závislost teplotního součinitele odporu a podle (1) teplotní závislost odporu termistoru. Je dána, podobně jako konstanta A v (1) a (2), vlastnostmi polovodičové látky, z níž je termistor vyroben. Konstanta B má proto pro ten či onen termistor zásadní význam.

II. Úkoly

1. Experimentální určení konstanty B termistoru.
2. Početní určení konstanty A termistoru.
3. Grafické znázornění funkce $|\alpha| = f(t)$, kde t je teplota termistoru v $^{\circ}\text{C}$.

III. Provedení

1. Podle (3) by stačilo změřit odpor termistoru (libovolnou metodou) při dvou různých teplotách, T_1 , T_2 . Takové měření by však bylo značně nepřesné vzhledem k náhodným chybám, k nimž při měření nevyhnutelně dochází. Proto měříme řadu dvojic hodnot T , R , výsledky zapíšeme do tabulky podle následujícího vzoru:

$\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$	20	30	40	50	60	70	80	90
$\frac{T}{\text{K}}$								
$\frac{1/T}{\text{K}^{-1}}$								
$\frac{R}{\Omega}$								
$\log\{R\}$								

Dvojice hodnot z 3. a 5. řádku tabulky nakreslíme jako souřadnice bodů do semilogaritmického papíru. Sestrojíme přímku, kolem které se tyto body kumulují. Na ní zvolíme (co možná daleko od sebe) dva body (obr. A-2), přečteme příslušné souřadnice $\frac{1}{T}$, $\log\{R\}$, ty dosadíme do (3).

K vývodům termistoru připájíme přívody. Termistor pomocí stativového materiálu vložíme do destilované vody v nádobě (nesmí se dotýkat dna), do vody ponoříme teploměr. Nádobu velmi zvolna zahříváme elektrickým vařičem. Vodu v nádobě neustále promícháváme. Při teplotách 20 °C, 30 °C atd. měříme odpor termistoru. Měřit se musí velmi rychle, aby se teplota termistoru během měření znatelně neměnila.

Proud použitý při měření musí být tak malý, aby se jím termistor znatelně nepřehříval. Proto nejsou pro náš způsob měření vhodné termistory perličkové, které mají velmi malou hmotnost, a proto se elektrickým proudem velmi rychle přehřívají.

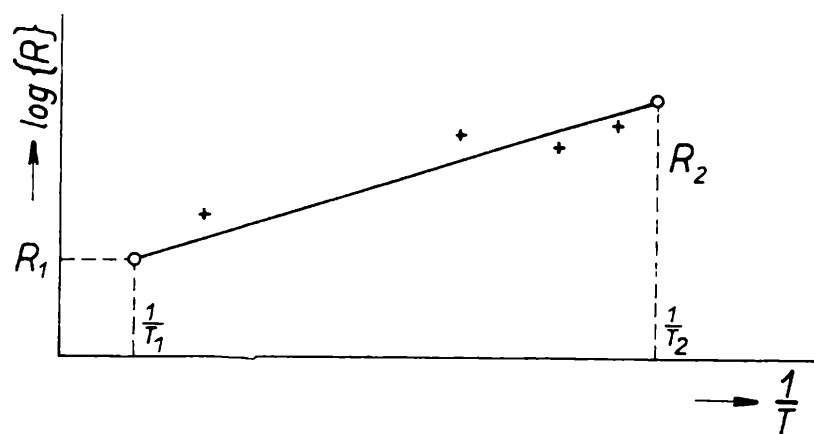
2. Zvolte několik dvojic hodnot $\frac{1}{T}$ a $\log\{R\}$ na přímkovém grafu a pomocí hodnoty konstanty B určené podle (3) stanovte podle (2) konstantu A , z výsledků určete aritmetický průměr.

3. Podle (4) a pomocí určené hodnoty konstanty B nakreslete graf funkce $|\alpha| = f(t)$, a to v rozsahu teplot, v němž jste měřili.

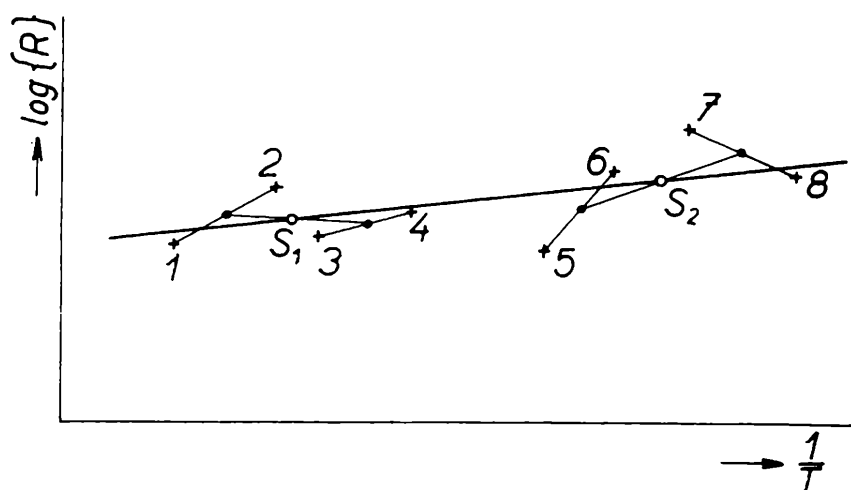
IV. Poznámky

1. Máte-li můstkové měřidlo Omega (popř. jakékoli jiné), můžete je výhodně použít k měření odporu termistoru.

2. Nemáte-li semilogaritmický papír, zhotovte si ho sami. Lineární stupnici $\left(\text{pro } \frac{1}{T}\right)$ volte v rozmezí formátu A4. Logaritmická stupnice



Obr. A-2



Obr. A-3

postačí v rozmezí 1 až 2 řádů. Lze ji okopírovat např. z kubické stupnice běžného logaritmického pravítka, jehož stupnice mají délku 25 cm.

3. K přesnějšímu sestrojení lineárního grafu je použitelný postup, jehož podstata je znázorněna pro 8 dvojic na obr. A-3. Potřebujeme sudý počet dvojic. Spojíme body 1, 2, nalezneme střed spojnice. Podobně pro body 3, 4. Středy spojníc spojíme a tuto spojnici rozpůlíme. Dostaneme bod S_1 . Podobně u dvojic 5, 6 a 7, 8; dostaneme bod S_2 . Spojnici bodů S_1 , S_2 považujeme za lineární graf.

7. Ze stacionární družice Marsu mají být po eliptických drahách vyslány postupně dvě kosmické lodě, které mají přistát na povrchu jeho měsíců Phobos a Deimos. Doba rotace Marsu je $T_M = 24,62$ h, doba oběhu Phobosu kolem Marsu je $T_F = 7,654$ h, doba oběhu Deimosu je $T_D = 30,93$ h. Hmotnost Marsu je $M_M = 6,424 \cdot 10^{23}$ kg.

- Popište pohyb obou měsíců i obou kosmických lodí a stacionární družice.
- Stanovte rychlost, kterou musí získat každá z kosmických lodí krátce po opuštění stanice (po krátkodobém manévru). Jakou rychlostí by dopadly lodě na oba měsíce?
- Určete dobu letu obou kosmických lodí, přičemž krátkou dobu potřebnou k manévrování neuvažujte.

- d) Popište pohyb obou kosmických lodí a obou měsíců od okamžiku navedení lodí na dráhu až do okamžiku přistání. Předpokládejte, že obě lodě jsou vypuštěny v témž okamžiku a že vzájemná poloha stacionární družice a měsíců Phobos a Deimos je optimální. Provedte příslušné výpočty a znázorněte polohu a dráhy všech uvažovaných těles graficky na milimetrový papír formátu A3 ($1\text{ cm} \hat{=} 2000\text{ km}$, poloměr Marsu $R_M = 3395\text{ km}$).

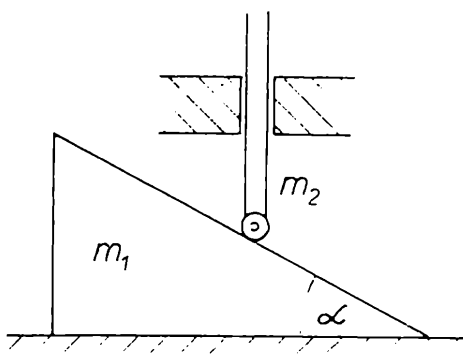
Úlohu řešte obecně i pro dané hodnoty. Další potřebné vztahy nebo údaje najdete ve studijním textu, kde si také můžete zkontrolovat některé částečné výpočty. Můžete též použít brožuru z knihovny ŠMF Volf I.: *Pohyb umělých družic*, SPN Praha 1974.

KATEGORIE B

1. Z výšky $h = 500\text{ m}$ bylo volně puštěno těleso hmotnosti $m = 50\text{ kg}$ a začalo padat k Zemi. Uvažujte následující případy:

- Zanedbáme odporovou sílu, jíž působí vzduch na těleso při pohybu.
- Odporová síla, jíž působí při pohybu vzduch na těleso, je konstantní a představuje $0,1$ tíhy tělesa; je orientována proti pohybu tělesa.
- Odporová síla je přímo úměrná rychlosti, $F = -k v$, kde k je vhodný součinitel ($k = 8,3\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$).

Ve všech případech popište charakter pohybu, stanovte zrychlení a koncovou rychlost tělesa při dopadu.



Obr. B-1

2. Tyč je umístěná v nehybném valci (obr. B-1) a může se pohybovat v zvislém směru jen ve vnútri valca, bez trenia. Hmotnosť tyče a kolieska na konci tyče je m_2 . Tyč sa kolieskom dotýka klinu uloženého na vodorovnej podložke. Stena klinu zvierá s vodorovnou podložkou uhol α . Hmotnosť klinu je m_1 . Súčiniteľ šmykového trenia medzi klinom a vodorovnou podložkou je f . Sila trenia v osi kolieska tyče ako aj sila trenia pri pohybe kolieska po povrchu klinu sú veľmi malé v porovnaní so silou trenia medzi klinom a vodorovnou podložkou.

- Určte zrýchlenie a_2 pohybu tyče a zrýchlenie a_1 pohybu klinu po vodorovnej podložke pôsobením tiažového poľa.

- b) Určte tlakovú silu $\mathbf{F}$ na tyč.
 c) Urobte diskusiu výsledkov úlohy a) a určte podmienku pohybu sústavy.

3. Dva ocelové valcové prstence majú tieto rozmery: prvý prstenec vnútorný polomer r_0 a hrúbku valcovej steny b_1 ; druhý prstenec vnútorný polomer $r_0 + b_1 + d$ a hrúbku steny b_2 , $d > 0$. Teplota prvého prstenca je t_1 , teplota druhého prstenca $t_2 > t_1$. Výška l oboch prstencov je rovnaká.

Prstence nasunieme na seba a necháme ich vychladnúť na teplotu t_1 . Teplotné zmeny sústavy prstencov sú také, že prvý prstenec sa dotkne vonkajšou stenou vnútornej steny druhého prstenca a v stykovej ploche oba prstence na seba pôsobia tlakovou silou.

Súčiniteľ statického trenia medzi prstencami je f_0 . Určte najmenšiu silu $\mathbf{F}_{\min}$, ktorá musí pôsobiť v osovom smere na jeden z prstencov, ak druhý je pevne uchytený, aby sa prstence oddelili.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty: $t_1 = 20,0^\circ\text{C}$, $t_2 = 520^\circ\text{C}$, $r_0 = 2,00\text{ cm}$, $b_1 = 2,00\text{ mm}$, $b_2 = 1,00\text{ mm}$, $d = 9,00 \cdot 10^{-2}\text{ mm}$, $l = 1,00\text{ cm}$, $f_0 = 0,160$, teplotný súčiniteľ dĺžkovej rozťažnosti ocele $\alpha = 1,20 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$, modul pružnosti v ťahu ocele $E = 2,00 \cdot 10^{11}\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$.

4. Dve kovové obdĺžnikové dosky s rozmermi a , b a zanedbateľnou hrúbkou sú umiestnené vertikálne, navzájom rovnobežne tak, že stranou dĺžky b sa dotýkajú dielektrickej kvapaliny vo veľkej nádobe, ktorej relatívna permitivita je ϵ_r . Vzdialenosť medzi doskami je d . Na dosky pripojíme na veľmi krátky čas jednosmerný zdroj elektromotorického napätia U_0 . Povrch kvapaliny medzi kovovými doskami sa zvýši o h v porovnaní s povrchom kvapaliny mimo dosiek.

a) Fyzikálne zdôvodnite uvedený dej.

b) Určte veličinu h .

Kapilárne javy pri riešení úlohy neuvažujte.

Úlohu b) riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $a = 5,0\text{ cm}$, $U_0 = 1000\text{ V}$, hustota kvapaliny $\rho = 800\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\epsilon_r = 2,1$, $d = 2,0\text{ mm}$.

5. Na malej guľôčke je náboj Q .

V ktorom mieste a v akej vzdialenosti od guľôčky je vodná kvapka, ak sily na ňu pôsobiace vo vákuu v tiažovom poli sú v rovnováhe?

Rozmery kvapky i guľôčky sú v porovnaní so vzdialenosťou medzi nimi veľmi malé.

6. Meranie rýchlosti rastu kryštálov:

Pomôcky:

školský mikroskop, stopky, nasýtený roztok kuchynskej soli, krycie sklíčko, sklená tyčka, milimetrový papier.

Princíp:

Ak nanesieme na krycie sklíčko kvapku nasýteného roztoku kuchynskej soli, začnú sa za krátky čas intenzívne vytvárať a rásť kryštály. Charakteristikou procesu rastu kryštálu môže byť napr. rýchlosť rastu niektorej jeho hrany.

Vedľa krycieho sklíčka mikroskopu položíme milimetrový papier tak, aby sme jedným okom pozorovali kryštál cez okulár mikroskopu a druhým okom milimetrový papier. Oba zrakové vnemy sa spoja a kryštály vidíme na pozadí milimetrového papiera, ktorý umiestníme tak, aby priamky papiera boli rovnobežné s niektorou hranou kryštálu. Ak odmeráme čas, za ktorý sa zväčší hrana kryštálu napr. o 1 mm, možno z toho určiť rýchlosť rastu kryštálu. Pri meraní dĺžok hrán kryštálu berieme však do úvahy, že skutočná dĺžka hrany je z -krát menšia v porovnaní s nameranou dĺžkou, kde z je zväčšenie mikroskopu: $z = z_1, z_2$, z_1 je zväčšenie okuláru, z_2 zväčšenie objektívu.

Postup:

1. Mikroskop, ktorého zväčšenie je z (napr. $z = 80$), pripravíme na pozorovanie rastu kryštálov. Mikroskop zaostríme na povrch krycieho sklíčka.
2. Vedľa plochy pre sklíčko položíme milimetrový papier a nanesieme na čisté sklíčko kvapku roztoku. Jedným okom sledujeme vznik a rast kryštálov a súčasne druhým okom milimetrový papier tak, že kryštály vidíme na pozadí stupnic papiera.
3. Sledujeme rast jedného kryštálu. Milimetrový papier umiestníme tak, aby jeho priamky boli rovnobežné s jednou z hrán pozorovaného kryštálu. Keď hrana kubického kryštálu soli narastie na dĺžku 1 mm alebo 2 mm, zapneme stopky. Postupne meráme čas, za ktorý sa hrana kryštálu zväčší o 1, 2, 3, 4 mm.
4. Nameraná dĺžka d' zodpovedá skutočnej dĺžke d hrany kryštálu:

$$d = \frac{d'}{z}.$$

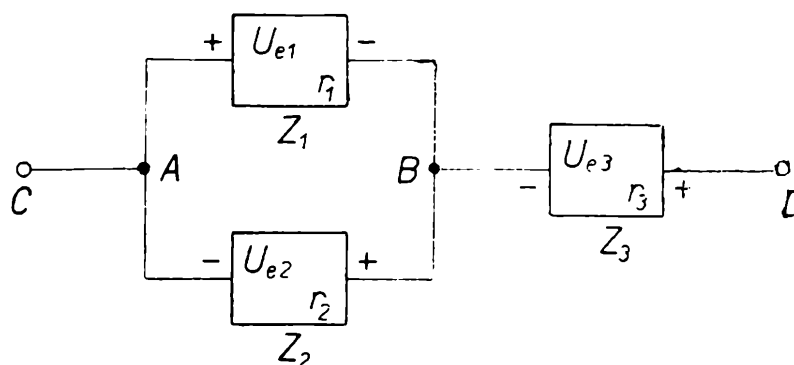
5. Vypočítame rýchlosti rastu kryštálu pri jeho postupnom zväčšovaní.

Otázky:

1. Prečo klesá rýchlosť rastu kryštálu s časom?
2. Prečo za normálnych podmienok v presýtenom roztoku vzniká mnoho malých kryštálov, a nie jeden veľký kryštál?

7. Tri jednosmerné zdroje elektromotorického napätia sú spojené podľa schémy na obr. B-2.

- a) Určte výsledné elektromotorické napätie U_e a výsledný vnútorný odpor r sústavy zdrojov.
- b) Určte prúdy, ktoré tečú jednotlivými zdrojmi sústavy.



Obr. B-2

- c) Určte napätie U_{AB} medzi bodmi A , B sústavy.
d) Určte účinnosť sústavy zdrojov, ak k svorkám C , D pripojíme spotrebič s odporom R .
Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $U_{e1} = 6,3 \text{ V}$, $r_1 = 1,0 \Omega$, $U_{e2} = 12 \text{ V}$, $r_2 = 0,50 \Omega$, $U_{e3} = 3,0 \text{ V}$, $r_3 = 0,50 \Omega$, $R = 8,0 \Omega$.

KATEGORIE C

1. Ke svislé stěně je přistaven žebřík AB o hmotnosti m ; s vodorovnou podlahou svírá úhel α ; hmotný střed žebříku je uprostřed jeho podélné osy. Součinitel klidového tření v opěrném místě žebříku a stěny je f_{0A} , v opěrném bodě žebříku a podlahy je f_{0B} .

- a) Určte tlakovou sílu $\mathbf{F}_A$, kterou působí stěna na žebřík, a tlakovou sílu $\mathbf{F}_B$, kterou působí podlaha na žebřík. Určte velikosti příslušných třecích sil.
b) Určte nejmenší úhel $\alpha_{\min}$, při kterém je žebřík v rovnovážné poloze v klidu.
c) Opěrná stěna je dokonale hladká, $f_{0B} = 0,50$, $m = 20 \text{ kg}$, $\alpha = 50^\circ$. Je v tomto případě žebřík v rovnovážné poloze v klidu? Určte síly $\mathbf{F}_A$ a $\mathbf{F}_B$. Stojí člověk o hmotnosti $m_1 = 80 \text{ kg}$ uprostřed žebříku v tomto případě bezpečně? Může vystoupit bezpečně z tohoto místa do místa C , jehož vzdálenost je $\frac{3}{4}$ délky žebříku od místa opory B na podlaze?

2. Rovnostranný trojúhelník ABC má délku strany r . Ve vrcholu A trojúhelníka je hmotný bod o hmotnosti m_1 , ve vrcholu B hmotný bod o hmotnosti m_2 .

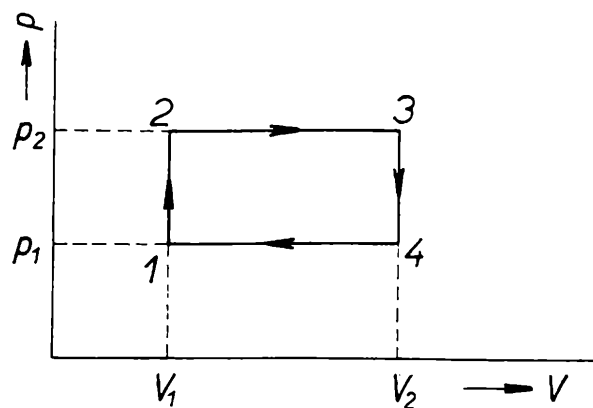
a) Určte intenzity $\mathbf{K}_g$ gravitačního pole v půlicím bodě D úsečky AB , ve vrcholu C trojúhelníka, ve středu O trojúhelníka.

b) Provedte diskusi vzhledem k $p = \frac{m_1}{m_2}$; uvažte případy $p < 1$,

$$p = 1, p > 1.$$

c) Narýsujte ve vhodném měřítku grafické řešení pro $p = 2$.

Obr. C-1



3. Na vodorovné hladké podložce leží nenapjatá pružina o tuhosti k . Ke koncovým bodům jsou upevněny malé kuličky o hmotnostech m_1 a m_2 . Hmotnost pružiny je zanedbatelná vzhledem k hmotnostem kuliček. Soustavu rozkmitáme tak, že pružinu natáhneme o malou délku x a uvolníme.

- Stanovte kmitočet f_1 kmitů kuličky o hmotnosti m_1 a kmitočet f_2 kmitů kuličky o hmotnosti m_2 .
- Stanovte maximální rychlost v_1 kuličky o hmotnosti m_1 a maximální rychlost v_2 kuličky o hmotnosti m_2 vzhledem k podložce.

4 Počáteční stav ideálního plynu je dán veličinami p_1 , V_1 , T_1 . V plynu probíhá cyklický děj podle obr. C-1, $V_2 = 3 V_1$, $p_2 = 2 p_1$.

- Nakreslete graf cyklu v soustavě $V-T$.
- Nakreslete graf cyklu v soustavě $p-T$.
- Vysvětlete, proč přímky, na kterých leží v grafu a) úseky 2—3 a 4—1 a v grafu b) úseky 1—2 a 3—4, se protínají v počátku os souřadnic.

5. Ideální plyn, jehož látkové množství je 1 mol, změni svou teplotu z 0°C na 100°C .

- Určete změnu jeho vnitřní energie. Je nutno vědět, jak se přitom mění objem a tlak plynu?
- Předpokládejte, že změna proběhla při konstantním objemu. Jakou práci plyn vykonal? Jaké teplo přijal?
- Předpokládejte, že změna proběhla při konstantním tlaku. Jakou práci plyn vykonal? Jaké teplo přijal?
- Určete molární teplo C_{mV} při stálém objemu a C_{mP} při stálém tlaku.

Prostudujte brožurku knižnice ŠMF Bartuška, Svoboda: *Molekulová fyzika a termika*, SPN 1979, str. 88.

6. Ověření Boylova zákona.

Pomůcky:

byreta s kohoutem, stojan s držákem k upevnění byrety ve svislé poloze, vysoký skleněný válec, délkové měřidlo se stupnicí v milimetrech, stojan

s držákem k upevnění měřidla ve svislé poloze, posuvný ukazatel po měřidle, aneroid.

1. Sestavení pokusného zařízení:

Válec naplňte vodou. Do vody ponořte byretu otevřeným koncem; druhý konec byrety s kohoutem je nad povrchem vody ve válci, kohout je otevřen. V této poloze upevníte byretu ve svěráku na stojanu. Měřidlo upevníte ve svislé poloze do svěráku na druhém stojanu a přisunete je k válci tak, že ukazovatel se dotýká povrchu válce. Dolní konec měřidla se opírá o vodorovnou podložku, na které stojí válec. Nakreslete obrázek zařízení.

2. Popište stupnici byrety a stanovte velikost objemu, který odpovídá nejmenšímu dílku stupnice v daných objemových jednotkách. Zapište výsledek.

3. Prohlédněte si aneroid a popište jeho stupnici. Změřte atmosférický tlak p_1 a vyjádřete jej v pascálech. Výsledek zapište.

4. V sestavě podle bodu 1 posunujte byretou ve svislém směru dolů a pak nahoru. Pozorujte volné povrchy vody ve válci a v byretě, vysvětlete a zapište výsledek svého pozorování. Jaký je tlak vzduchu nad volným povrchem vody ve válci a nad volným povrchem vody v byretě?

5. Uzavřete kohout byrety, je-li byreta ponořena asi polovinou své délky ve vodě — nulová poloha byrety. Posuňte byretu ve svislém směru dolů a upevněte. Jak se změní volný povrch vody v byretě? Vysvětlete a zapište. Vraťte byretu do nulové polohy, z této polohy ji posuňte ve svislém směru vzhůru a upevněte ve svěráku. Vysvětlete změnu volného povrchu vody v byretě. Vyjádřete tlak p vzduchu uzavřeného nad volným povrchem vody v byretě v nulové poloze, potom při posunutí byrety dolů a při posunutí vzhůru. Vyjádřete jej vztahem $p = p_1 + p_2$. Jak nazýváme tlak p_2 ? Zapište vztah pro p_2 a vysvětlete jej.

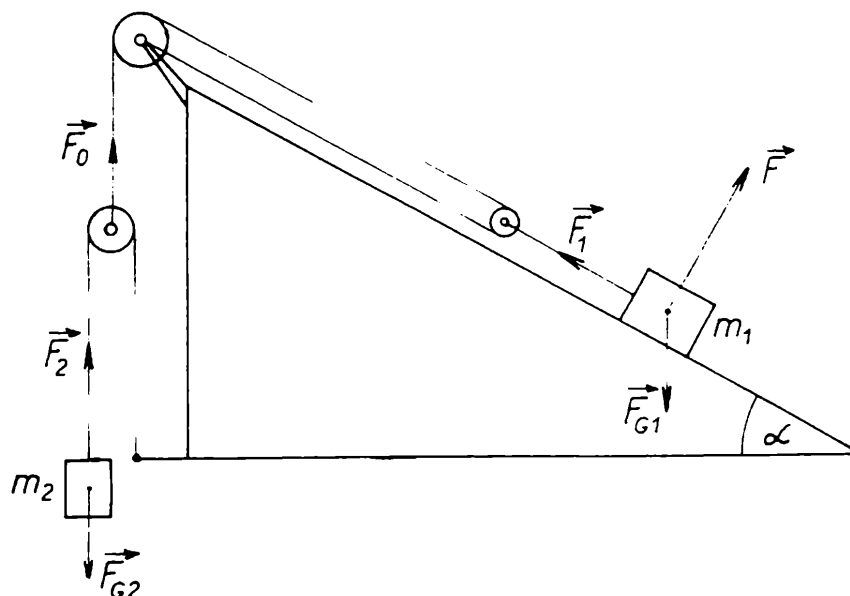
Co musíte změřit, abyste tento tlak určili?

6. Upevněte byretu v dolní krajní poloze podle bodu 5. Postupně posunujte byretu vzhůru přes nulovou polohu a v každé poloze ji upevněte ve svěráku. Změřte na délkovém měřidle výšku h_1 volného povrchu vody ve válci a výšku h_2 volného povrchu vody v byretě nad vodorovnou podložkou. Změřte odpovídající objem V vzduchu uzavřeného v byretě. Proveďte asi 6 měření a uspořádejte je do tabulky. Tabulku doplňte výpočty těchto veličin: $h = h_1 - h_2$, p_2 , p , p/V . Všechny veličiny vyjádřete v jednotkách SI.

7. Shrňte předpoklady měření a z posledního sloupce tabulky vyslovte závěr. Zhodnoťte postup řešení úlohy.

7. Na obr. C-2 je znázorněna soustava těles o hmotnostech m_1 a m_2 spojených vláknem. Těleso o hmotnosti m_1 koná posuvný pohyb po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α .

Obr. C-2



- Určete zrychlení $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ těles a síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ podle obrázku.
- Provedte diskusi výsledků pro různé hodnoty podílu $p = \frac{m_1}{m_2}$.

Předpokládáme, že vlákna mají stálou délku; tření, hmotnosti kladek a vláken neuvažujeme.

KATEGORIE D

1. Vzdálenost mezi městy A a B je 120 km. Z obou měst vyjely současně proti sobě dva automobily stálými rychlostmi $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Po vykonání dráhy 120 km se zastavily.

Vztažnou soustavu spojíme s pozorovatelem v místě C , přičemž $AC = BC$.

- Jaká doba uplyne mezi zastaveními obou automobilů?
- Jaká doba uplyne mezi průjezdy automobilů místem C ?
- V jaké vzdálenosti od místa C se automobily setkají?
- Nakreslete graf dráhy jako funkce času pro oba automobily a ověřte výsledky otázek a) až c).

2. Automobil Škoda 105 L se pohybuje po přímé vodorovné silnici stálou rychlostí $v_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. V čase $t = 0 \text{ s}$, kdy mījela škodovka automobil Ladu, dalo se toto vozidlo do pohybu týmž směrem se stálým zrychlením $a = 0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Po dosažení maximální dovolené rychlosti $v_m = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ se Lada pohybovala dále rovnoměrným pohybem.

- Nakreslete na milimetrový papír grafy funkcí rychlosti $v = f_1(t)$ a dráhy $s = f_2(t)$ pro oba automobily.
- Stanovte, jak se mění vzájemná vzdálenost Δs obou vozidel jako funkce času. Sestavte příslušnou tabulku a znázorněte graf funkce $\Delta s = f(t)$.

- c) Za jakou dobu t_1 od počátku svého pohybu předjede automobil Lada škodovku? Ve které vzdálenosti je toto místo od místa startu Lady?

3. Vozidlo dálkové dopravy TIR s vlekem má délku celkem 22 m. Jede po dvoupruhové přímé vodorovné silnici stálou rychlostí $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Když se předním nárazníkem přiblíží na vzdálenost 60 m k druhému stejnému vozidlu o stejné celkové délce, které jede stálou rychlostí $54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, přejede na levou část vozovky a začne toto vozidlo předjíždět. Předjíždění ukončí, když vzdálenost přední stěny druhého vozidla je 42 m od zadní stěny předjíždějícího vozidla.

- a) Určete dobu, po kterou je silnice neprůjezdná pro další vozidla jedoucí tímž směrem. Určete příslušnou délku vozovky.
b) V soustavě souřadnic (t, s) znázorněte na milimetrový papír grafy funkcí $s_1 = f_1(t)$; $s_2 = f_2(t)$ pro obě vozidla. Vysvětlete význam průsečíku A obou grafů.
c) Měřením úseček v grafech ověřte přibližně správnost řešení úlohy a).

Poznámky:

1. Popis pohybu vozidel nahradte popisem pohybů jejich předních nárazníků.
2. Vztažnou soustavu, ve které popisujete pohyb vozidel, spojte s předním nárazníkem vozidla s menší rychlostí.

4. Prkno má délku l . Jeho dolní konec je opřen o vodorovnou podložku a horní konec je ve výšce h nad ní. Na horní konec prkna postavíme vedle sebe malý voříček a hranolek téže hmotnosti. Obě tělesa uvolníme bez nárazu v témž okamžiku. Tření voříčku při pohybu je zanedbatelné, součinitel smykového tření hranolku je f .

- a) Určete zrychlení pohybů obou těles. Provedte diskusi výsledků a popište pohyby těles.
b) Rozhodněte, zda se obě tělesa dostanou současně k dolnímu konci prkna, nebo zda jedno z nich tam bude dříve.
c) Uvažte případ: $l = 195 \text{ cm}$, $h = 75 \text{ cm}$, $f = 0,20$. Uvede se hranolek položený v nejvyšším bodě nakloněné roviny bez nárazu do pohybu? Určete zrychlení obou těles a popište jejich pohyb. S jakým časovým rozdílem se tělesa dostanou k dolnímu konci prkna? Jak se změní výsledek, jestliže hmotnost voříčku je větší než hmotnost hranolku nebo jestliže hmotnost hranolku je větší než hmotnost voříčku?

5. Letadlo Agroletu má hmotnost 1000 kg a na konci rozjezdové dráhy délky 100 m má dosáhnout vzletové rychlosti $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Odporová síla proti pohybu je konstantní, $F_t = 1900 \text{ N}$. Stanovte, jaký musí být výkon motoru letadla při vzletu, aby byl zabezpečen vzlet na dané dráze rozjezdu. Pohyb po rozjezdové dráze považujeme za rovnoměrně zrychlený.

6. Určení polohy těžiště tenkých desek.

Pomůcky:

tlustší kartón nebo deska z umělé hmoty (z odpadu), nůžky, smirkový papír (na úpravu řezu), kružítko, špendlíky, nitě, olovnice (vyrobíme si sami z nitě a závěsného tělíska, např. šroubové matice), stativ s držákem, zátka.

Úvod

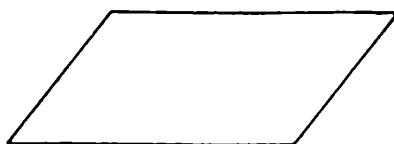
Těžiště znáte z 8. ročníku jako působíště tíhové síly působící na těleso. Těžiště tenkých homogenních desek nacházíme pomocí těžnic, přičemž používáme postup zavěšování desek na vhodné závěsy. U desek pravidelného geometrického tvaru se o správnosti přesvědčíme geometrickou konstrukcí. Jestliže můžeme desku rozložit (skutečně nebo aspoň myšlenkově) na desky jednoduššího tvaru, jejichž těžiště lze snadno stanovit nebo jeho polohu známe, pak těžiště určíme jako působíště výslednice jednotlivých tíhových sil, které působí na části desky.

Postup práce:

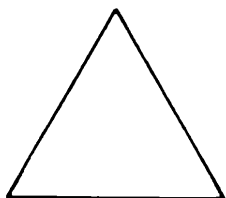
1. Z kartónu vystříhneme desky tvarů podle obr. D-1 a) až D-1 h).
2. Blízko kraje desky uděláme na několika místech malé otvory, které budou sloužit k provléknutí nitě. Zavěšením stanovte těžiště desek a) až e); geometrickou konstrukcí se přesvědčte o správnosti polohy těžiště.
3. Určete těžiště desek f) až h). Rozdělte desky f), g) na dvě desky jednoduššího tvaru, určete tíhy obou částí desky (pro homogenní desku je tíhová síla působící na desku přímo úměrná obsahu plochy, $G = kS$), a polohu těžiště stanovte výpočtem nebo geometrickou konstrukcí pro skládání rovnoběžných sil, souhlasně orientovaných, působících v různých bodech tělesa. Desku tvaru h) rozdělte dvěma způsoby na dva trojúhelníky, určete těžiště obou částí geometrickou konstrukcí. Spojte těžiště trojúhelníků vzniklých rozdělením obrazce (lichoběžníka) prvním způsobem; tato spojnice je jednou z těžnic obrazce. Podobně určete těžnici druhou při rozdělení obrazce druhým způsobem. Těžiště celého obrazce je v průsečíku těchto dvou těžnic. Zavěšením desek se přesvědčíte o správnosti polohy těžiště.
4. Poloha těžiště pro desku tvaru půlkruhu (obr. i) je dána vzdáleností od středu kruhu $x_T = \frac{4r}{3\pi}$. Určete polohu těžiště užitím uvedeného vztahu a o správnosti se přesvědčte pokusem.
5. Příímý drát délky asi 30 cm (obr. j) byl ohnut nejprve do tvaru k), potom do tvaru l). Ve všech případech určete polohu těžiště alespoň dvěma postupy.



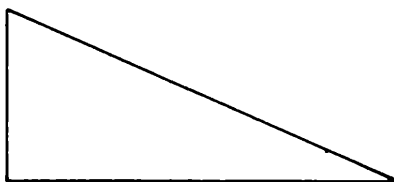
a)



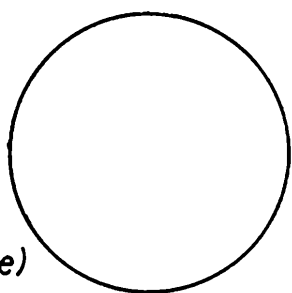
b)



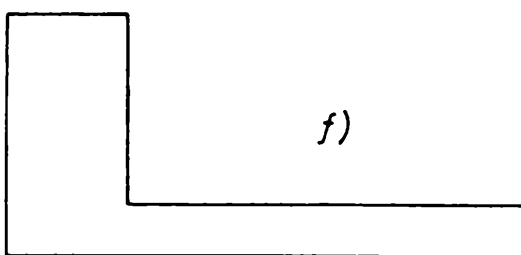
c)



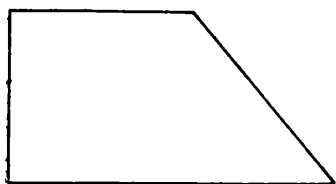
d)



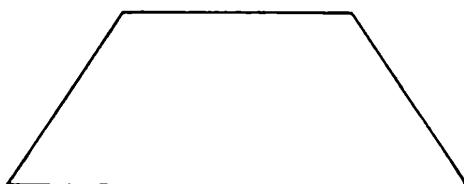
e)



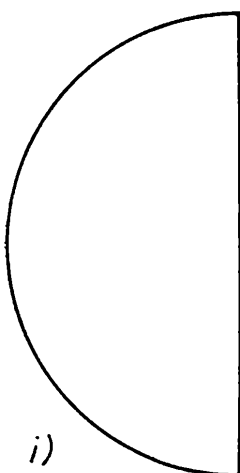
f)



g)



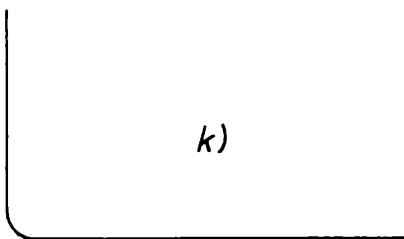
h)



i)



j)



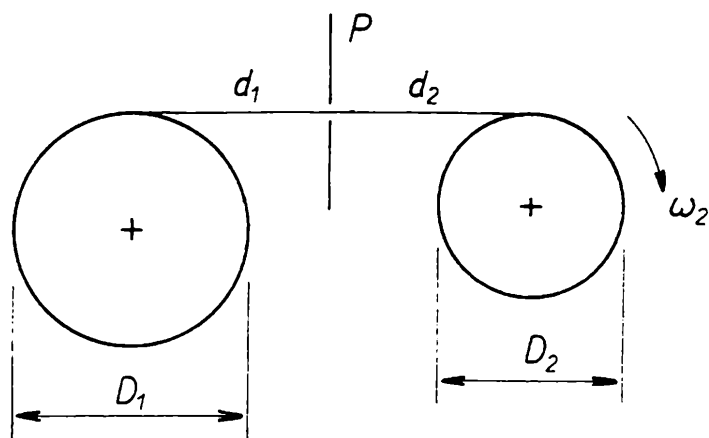
k)



l)

Obr. D-1

Obr. D-2



Poznámka:

Rozměry modelů vystřižených z kartónu volte tak, aby na každý obrazec postačil list formátu A5.

V závěru svého řešení shrňte postupy, jichž jste při určování polohy těžiště používali.

7. Na obr. D-2 je zjednodušené schéma stroje na tažení drátů. Drát o průměru d_1 se odvíjí z cívky o průměru D_1 , prochází průvlakem P , kde se jeho průměr zmenší na d_2 , načež se navíjí na cívku o průměru D_2 , která je poháněna motorem a otáčí se konstantní úhlovou rychlostí ω_2 .

Stanovte úhlovou rychlost ω_1 otáčení odvíjecí cívky. Hustota drátu se při tažení nemění, průměry obou cívek považujeme za konstantní.

Pro volnou chvíli

Nejmladším matematikům

STANISLAV HORÁK, Praha

Obsahem článku bude několik zajímavostí ze vztahů mezi přirozenými čísly.

I. Všimněme si identity

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 (= 365)$$

Je tu pět bezprostředně po sobě následujících přirozených čísel, která jsou rozdělena na dvě skupiny; v 1. skupině jsou tři menší čísla, v druhé zbývající dvě čísla. Součet dvojmocí čísel 1. skupiny je roven součtu dvojmocí 2. skupiny. Zvídavému čtenáři se jistě vnucuje otázka, zda tuto vlastnost nemá ještě nějaká jiná skupina přirozených čísel, která po sobě bezprostředně následují. Abychom tuto otázku zodpověděli, předpokládejme, že taková pětice čísel existuje. Prostředně velké číslo označme x a potom čísla 1. skupiny jsou

$$x - 2, \quad x - 1, \quad x.$$

Čísla 2. skupiny jsou

$$x + 1, \quad x + 2.$$

Potom platí

$$(x - 2)^2 + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2.$$

Upravíme-li tuto rovnici, dostaneme

$$x = 12.$$

Zjistili jsme, že prve uvedená pětice čísel je jediná, která má popsanou vlastnost.

II. Tato úloha se dá zobecnit. Hledejme sedm přirozených čísel, která po sobě bezprostředně následují a která lze rozdělit na dvě skupiny. V 1. skupině by byla čtyři menší čísla, v 2. skupině zbývající tři čísla, a to tak, že součet dvojmocí čísel 1. skupiny byl roven součtu dvojmocí čísel 2. skupiny.

Z předcházejícího už víme, jak tuto úlohu řešit. Prostředně velké číslo bude neznámá a označme ji x . Čísla 1. skupiny jsou

$$x - 3, \quad x - 2, \quad x - 1, \quad x$$

a čísla 2. skupiny

$$x + 1, \quad x + 2, \quad x + 3.$$

Podle požadavku úlohy má platit

$$(x - 3)^2 + (x - 2)^2 + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2.$$

Po zjednodušení

$$x = 24.$$

Skutečně také platí

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

Je to také jediná skupina přirozených čísel, která má uvedené vlastnosti.

Uvedené dva příklady vám, milí čtenáři, poslouží jistě k tomu, abyste našli podobnou skupinu devíti (jedenácti, ...) přirozených čísel stejných vlastností. Mohli byste najít i skupinu tří přirozených čísel.

Poznámka. Je dobře, když si všimneme, že též platí

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 6^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2,$$

nebo

$$1^2 + 2^2 + 6^2 + 9^2 = 3^2 + 7^2 + 8^2$$

Jaký je rozdíl mezi těmito skupinami sedmi přirozených čísel a mezi skupinou, kterou jsme prve získali výpočtem?

III. A ještě jednu zajímavost. Všimněte si, že platí

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24, \quad 24 \cdot 84 = 42 \cdot 48.$$

Z těchto dvou příkladů jistě čtenář pozná, jak se tvořili činitelé na pravé straně identit. Takovýchto součinů dvojciferných čísel je více a my si všechny najdeme. Nebudeme však uvažovat případy typu $12 \cdot 21 = 21 \cdot 12$.

Prvního činitele na levé straně identity označme $10x + y$ a druhého činitele $10\alpha + \beta$. Přitom předpokládáme, že $xy \neq 0$, $\alpha\beta \neq 0$, $x < y$. Dále nechť $x \neq \beta$ nebo $y \neq \alpha$.

Činitelé na pravé straně jsou $10y + x$, $10\beta + \alpha$. Potom platí

$$(10x + y)(10\alpha + \beta) = (10y + x)(10\beta + \alpha).$$

Po úpravě

$$100\alpha x + \beta y = 100\beta y + \alpha x$$

$$100(\alpha x - \beta y) - (\alpha x - \beta y) = 0$$

$$99(\alpha x - \beta y) = 0$$

$$\alpha x = \beta y$$

$$x \quad y = \beta \quad \alpha.$$

Tím jsme získali souvislost mezi jednocifernými čísly x, y na jedné straně a jednocifernými čísly α, β na druhé straně. Čísla vyhovující výše uvedeným podmínkám a poslední úměře uspořádáme do přehledné tabulky.

x	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	4
y	2	2	2	3	3	4	3	3	4	4	6	4	6	6
α	4	6	8	6	9	8	6	9	6	8	9	3	8	9
β	2	3	4	2	3	2	4	6	3	4	3	6	4	6

Všechny dvojice čísel, které vyhovují našim požadavkům, jsou

12	42 = 21	24	14	82 = 41	28	26	93 = 62	39
12	63 = 21	36	23	64 = 32	46	34	86 = 43	68
12	84 = 21	48	23	96 = 32	69	36	84 = 63	48
13	62 = 31	26	24	63 = 42	36	46	96 = 64	69
13	93 = 31	39	24	84 = 42	48			

Riešenie číselnej krížovky z 1. čísla Rozhľadov

	1	2	3	4	5
A	<i>H</i>	2	3	5	7
B	4	10	16	22	28
C	6	12	33	36	42
D	8	20	52	54	56
E	<i>M</i>	30	75	80	!

Poznámka. Úloha vedie na to isté riešenie aj pri „nepriaznivejšom“ výklade príkazu 3 (t.j. spomínaná štvorica môže vyjsť až po poprehadzovaní).
(jv)

Řešení Napoleonovy úlohy z 8. čísla Rozhledů

Nejprve si připomeňme znění úlohy:

Na dané kružnici k s daným středem S sestrojte pouze pomocí kružítka čtyři body tak, aby ji dělily na čtyři shodné oblouky.

Již v 8. čísle Rozhledů jsme došli k závěru, že úloha bude rozřešena, nalezneme-li dva body, jejichž vzdálenost je $r\sqrt{2}$, kde r je poloměr dané kružnice k .

Střed S kružnice k známe, a proto snadno na kružnici k sestrojíme kružátkem vrcholy některého jí vepsaného pravidelného šestiúhelníku

$ABCDEF$. Pak sestrojíme kružnice $h = (A, |AC|)$, $l = (D, |DB|)$. Tyto kružnice se protínají, neboť $|AC| = |DB|$ a

$$|AC| + |DB| = 2r\sqrt{3} > |AD|$$

Je-li bod G jeden z jejich průsečíků, pak trojúhelník ADG je rovno-ramenný a bod S je středem jeho základny. Tedy

$$|GS| = \sqrt{(r\sqrt{3})^2 - r^2} = r\sqrt{2}$$

Řešením úlohy jsou pak např. body A, K, D, L kružnice k , kde $K \neq L$ a $|AK| = |AL| = |GS|$.

jm

nejmladším čtenářům

V polském časopisu *Matematyka* (roč. XXX, seš. 1) byl uveřejněn příklad, který snad na první pohled trochu zarazí. Jeho text je tento:

Dokažte, že

$$(4^4 - 1)(4^4 + 2) - (4^4 + 1)4^4 = (6^6 - 1)(6^6 + 2) - (6^6 + 1)6^6.$$

Máme-li dokázat tuto identitu, jistě nebudeme vypočítávat 6^6 , $6^6 + 1$ atd. Zkušenější počtář bude místo 6^6 psát třebaš A .

Pravá strana identity je

$$P = (A - 1)(A + 2) - (A + 1)A = A^2 + A - 2 - A^2 - A = -2.$$

To jsme si všimli pravé strany. Výsledek by však byl týž, kdybychom na levé straně položili $4^4 = B$.

V obou případech zjistíme, že na čísla A nebo B vůbec nezáleží. Mohli bychom tedy místo 6^6 nebo 4^4 napsat cokoliv jiného, např. 100^{100} . Takovýchto „atraktivních“ příkladů si můžeme z každého výrazu nezávislého na proměnné sestavit libovolné množství. Např. mnohočlen

$$(n + 2)^2 - 2(n + 1)^2 + n^2 \tag{1}$$

má pro každou hodnotu čísla n tutéž hodnotu 2. Na základě toho můžeme napsat třebaš tuto identitu:

$$(77 + 2)^2 - 2(77 + 1)^2 + (77)^2 = (100 + 2)^2 - 2(100 + 1)^2 + 100^2$$

To jsme ve výrazu (1) místo n položili jednou 77 a podruhé 100.

Koho tato věc zajímá, ať se přesvědčí, že mnohočlen

a) $(n + 3)^3 - 3(n + 2)^3 + 3(n + 1)^3 - n^3,$

b) $(n + 4)^4 - 4(n + 3)^4 + 6(n + 2)^4 - 4(n + 1)^4 + n^4$

má pro všechna n tutéž hodnotu a) 6; b) 24. Na základě toho sestavte nějaké „překvapující“ identity. S. H.

Ze zahraničních časopisů

Tentokrát si uvedeme řešení jednoho zajímavého příkladu, který byl publikován v jednom starším ročníku francouzského časopisu Journal des mathématiques spéciales. Text příkladu zní:

Udejte základní vlastnosti posloupnosti čísel a_n dané rekurentním vzorcem

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} \quad \text{pro } a_1 > 0 \quad (1)$$

Studium posloupnosti pro případ $a_1 \neq 1$ rozdělíme na několik částí.

1. Z podmínky $a_1 > 0$ plyne

$$a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, \quad , a_n > 0,$$

což znamená, že předložená posloupnost je posloupnost kladných čísel.

2. Utvořme rozdíl

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n}$$

a odtud

$$a_{n+1} = 1 + \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n} > 1,$$

neboť $a_n \neq 1$ a jmenovatel $2a_n > 0$. To však znamená, že všechny členy dané posloupnosti pro $n > 1$ jsou větší než 1. Tím se doplňuje výsledek odst. 1.

3. Abychom zjistili, zda naše posloupnost je konvergentní, utvořme rozdíl

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} = \frac{a_n^2 - 1}{2a_n} > 0,$$

tj.

$$a_n > a_{n+1}$$

Tudíž

$$a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_n$$

a posloupnost je konvergentní.

4. Nyní dokážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Především si uvědomíme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$. Jestliže tuto limitu označíme M a jestliže budeme limitovat vzorec (1), dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n),$$
$$M = (M^2 + 1) - 2M$$

Poněvadž všechny členy naší posloupnosti jsou větší než 0, potom hodnota $M = -1$ nemá význam a platí $M = 1$, jak jsme měli dokázat.

Cvičení

1. Položte $a_1 = 1$ ($a_1 = 2$) a vypočítejte několik dalších členů naší posloupnosti. (Vyjádřete desetinným číslem).
2. Zvolte a) $a_1 = \frac{1}{2}$, b) $a_1 = \frac{1}{3}$ a vypočítejte několik členů dané posloupnosti. (Vyjádřete desetinným číslem.)
3. Překvapující je, že pro $a_1 = \frac{1}{2}$ a pro $a'_1 = 2$ jsme dostali posloupnosti, které pro $n \geq 2$ měly shodné členy. To není náhoda. Platí totiž věta: Nutná a postačující podmínka pro to, aby dvě posloupnosti, z nichž každá pro každé přirozené číslo n splňuje podmínky (1), měly všechny své členy shodné až na první člen, jest: první členy a_1, a'_1 jsou vázány vztahem $a_1 \cdot a'_1 = 1$. — Dokažte ji.
4. Přesvědčte se o správnosti tvrzení v příkl. 3 ve zvláštních případech:
a) $a_1 = \frac{1}{4}$, $a'_1 = 4$; b) $a_1 = 10$, $a'_1 = \frac{1}{10}$.
5. Dokažte, že řada

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

je divergentní.

S několika zajímavými příklady se vracíme opět k polskému časopisu *Matematyka*. Příklady jsou lehké a mohou je řešit i naši nejmladší čtenáři.

1. V oboru reálných čísel najděte řešení soustavy (x_i pro $i = 1, 2, 3, 4, 5$ jsou neznámé, c_i jsou parametry):

$$\begin{aligned}
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = c_1 \\
& x_1 \quad \quad + x_3 + x_4 + x_5 = c_2 \\
& x_1 + x_2 \quad \quad + x_4 + x_5 = c_3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \quad \quad + x_5 = c_4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad \quad = c_5.
\end{aligned}$$

2. Které z čísel

$$\frac{13^{1978} + 1}{13^{1979} + 1}, \frac{13^{1979} + 1}{13^{1980} + 1}$$

je větší?

3. Najděte všechny hodnoty x , pro něž platí

$$|(x-1)(x-1)(x+2)| \leq 0$$

4. Užitím Vennových diagramů znázorněte množiny **A**, **B**, **C**, o nichž platí: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{C}$.

5. Opět s použitím Vennových diagramů se přesvědčte, že o libovolných množinách **A**, **B**, **C**, **D** platí: $((\mathbf{A} \subset \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{C} \subset \mathbf{D})) \Rightarrow ((\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \subset (\mathbf{B} \cap \mathbf{D}))$.

Výsledky

1. $x_1 = \frac{1}{4}(-3c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$ a ostatní kořeny cyklickou záměnou.

2. První zlomek je větší.

3. Absolutní hodnota je vždy nezáporné číslo. Proto $x = 1, -2$.

Stanislav Horák

Z jugoslávského časopisu Matematicko-fizički list:

1. Pět čísel tvoří aritmetickou posloupnost, jejíž součet je 15 a součin 1155. Určete tato čísla.

2. V aritmetické i geometrické posloupnosti se rovnají první, druhý a čtvrtý člen; třetí člen aritmetické posloupnosti je o 18 menší než třetí člen geometrické posloupnosti. Určete obě posloupnosti.

3. Řešte rovnici

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

4. Tři lidé se mají dostat z místa *A* do místa *B*, vzdáleného d km. Mají k dispozici dvousedadlový motocykl, jedoucí rychlostí v km/hod. Rychlost chodce je c km/hod. Za jakou nejkratší dobu se všichni dostanou z *A* do *B*? (Spec. $d = 130$ km, $v = 50$ km/hod., $c = 5$ km/hod.)

5. Usměrněte zlomek

$$z = \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$$

Výsledky: 1. $-5, -1, 3, 7, 11$; 2. A: $2, -4, -10, -16$; G: $2, -4, 8, -16$;

3. $x = \frac{5 + 24k}{48} \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \quad ; 4. t = \frac{d(3v + c)}{v(v + 3c)} = 6,2 \text{ hod};$

5. $z = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$

Další tři úlohy:

1. Upravte výraz

$$V = \frac{\sqrt{(a+x) \cdot (x+b)} + \sqrt{(a-x) \cdot (x-b)}}{\sqrt{(a+x) \cdot (x+b)} - \sqrt{(a-x) \cdot (x-b)}},$$

jestliže $x = \sqrt{ab}, a > b > 0.$

2. Řešte rovnici

$$\frac{\log_2(3x-1)}{1 + \log_2(3x-1)} = \frac{2}{3 + \log_2(3x-1)}$$

3. Vypočtete

$$\sqrt[3]{3 \sqrt[5]{3 \sqrt[3]{5 \sqrt[5]{3}}}}$$

Výsledky:

1. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; 2. $x_1 = \frac{5}{12}, x_2 = 1$; 3. $\sqrt[3]{45}.$

naše soutěž

Vítězové soutěže, která proběhla v letošním školním roce, budou vyhlášeni v zářijovém čísle 59. ročníku Rozhledů. V říjnovém čísle bude uveřejněna první část úloh pro školní rok 1980/81.

různé

Padesát let od objevu planety Pluto

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

Nesrovnalosti v pohybu planety Uran vedly v roce 1846 k objevu planety Neptun. Historie se však opakovala. Neptunova dráha také plně neodpovídala výpočtům. Americký astronom *Percival Lowell* uveřejnil v roce 1915 elementy dráhy hypotetické planety, která měla ovlivňovat dráhu planety Neptun. Neznámá planeta byla potom soustavně hledána na Lowellově hvězdárně ve Flagstaffu v Arizoně. Úspěch se dostavil až 21. ledna 1930, kdy se ji podařilo nalézt asistentu této hvězdárny *Clydemu W. Tombaughovi*. Byla malá asi jako hvězda 15. velikosti. P. Lowell se objevu nedožil, zemřel v roce 1916. Nová planeta dostala jméno Pluto podle boha podsvětí z řecké mytologie.

Kdo byl Diofantos

Diofantos žil kolem roku 250 před n. l. v Alexandrii, významném kulturním středisku Středomoří, kde vzniklo mnoho matematických prací, např. Euklidovy Základy. Diofantovo dílo však nenavazuje na tuto tradici axiomatické výstavby matematiky, jeho spisy se jeví mezi ostatními rukopisy, jako by byly „z jiného světa“ babylonské či indické matematiky. Proto vzniklo podezření, že Diofantos pocházel z Mezopotámie a do Alexandrie se jen přistěhoval. Spíše je však pravda, že „přízemní“ výpočtářské a řešitelské umění zůstávalo v pozadí a jen v ojedinělých případech se prosadilo i v oficiální matematice té doby. Mezi taková díla lze počítat práce Archimedovy, Heronovy, Ptolemaiovy a Diofantovy.

*

Diofantos prý napsal 13 knih díla *Aritmetika*, z nichž se zachovalo šest, které tvoří sbírku 189 řešených úloh. Tyto úlohy jsou pečlivě

seřazeny tak, aby čtenář pochopil přesné metody řešení rovnic s racionálními koeficienty. Téměř neuvěřitelné se zdá to, že Diofantos běžně pracoval se zápornými čísly a užíval symboliky blízké té, kterou zavedli Bombelli, Viète a Fermat kolem r. 1600 (všichni podrobně studovali Diofantovo dílo). Diofantovskými rovnicemi se i dnes nazývají rovnice s celočíselnými koeficienty, jejichž řešení hledáme v oboru celých či racionálních čísel.

recenze

Bohdan Zelinka:

MATEMATIKA HROU I VÁŽNĚ

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, svazek 44, Praha 1979, stran 192, obrázků 87, cena brož. výtisku 11,— Kčs.

Školu mladých matematiků znáte a autora jejího nového svazku asi také. Napsal už pro tuto edici nedávno jednu knížku a jeho jméno se občas vyskytuje i na stránkách Rozhledů. Název Zelin-kova nového spisu už napovídá, oč půjde. Knižka chce čtenářům poskytnout rozptýlení a zároveň jim dát nahlédnout do moderní matematiky.

Matematika není jen počítání — to je podtitul, který čteme v úvodu. Středoškolák pokládá tuto vědu za hotový celek a neví obvykle nic z toho, co se nedostalo do jeho učebnic. Když pak přijde na školu

vysokou, je vyveden z míry už jen názvy matematických oborů, které tam má studovat. Nová knížka mu chce trochu pomoci a v sedmi kapitolách se věnuje různým oborům matematiky.

Dítě vychované modernizovanou matematikou jede s matkou vlakem. Náhle se podívá z okna a vykřikne: „Mami, tamhle je množina kraviček!“ Matka vyhlédne z okna a opáčí: „Vždyť tam žádné kravičky nejsou!“ Dítě se nedá zmást: „Ale ano, je tam prázdná množina kraviček!“

Tuto anekdotu najdete v první kapitole věnované teorii množin a matematické logice. Je tu také paradox holohlavého a řada zajímavých úloh (o Městě Mudrců, o Poctivcích a Lhářích, o třech královských dcerách, o panu Kaprovi a další).

Kapitola druhá stručně líčí, jak se algebra vyvinula z původní nauky o řešení rovnic až k současnému stavu. Samostatným oborem, který těsně souvisí s algebrou,

je teorie čísel a v ní nejpřitažlivější částí je studium prvočísel. Víme, že prvočísel je nekonečně mnoho a občas čteme v populárně vědeckém tisku, že někdo posunul znalost dosud objevených velkých prvočísel k novému mezníku. Toto bádání probíhá v oblasti tzv. Mersennových prvočísel $2^s - 1$. Největší dnes známá Mersennova prvočísla jsou

$$2^{21701} - 1, \quad 2^{44497} - 1,$$

ale ta se do Zelinkovy knížky ještě nedostala, neboť byla objevena teprve roku 1978 a 1979. Rozhledy o nich už referovaly v 1., 2. a 6. čísle tohoto ročníku. O dokonalých a sprátelených číslech Škola mladých matematiků přinesla samostatnou brožuru (*T. Šalát* 1969), a proto je zde o nich jen několik odstavců.

Ve třetí kapitole se dostává ke slovu matematická analýza a z těchto stránek vybíráme jednu anekdotu, která se prý vypráví mezi polskými matematiky:

Přednosta psychiatrické kliniky jde na vizitu. Jeden z pacientů ho upozorňuje na to, že na pokoji číslo osm jeden pacient druhého derivuje. Přednosta vstoupí do zmíněného pokoje a vidí, že jeden pacient leží na zemi, druhý na něm sedí a buší ho do zad. Zeptá se ležícího: „To se necháte takhle derivovat?“ Pacient odpoví: „Já si nic nedělám ze žádného derivování; já jsem e^x !“

Kapitola čtvrtá je nejrozsáhlejší z celé knížky, vždyť také jejím námetem je geometrie a topologie.

Místo podrobného líčení, o čem se dočtete v této kapitole, budiž zde jen několik titulků:

Pravidelné mnohostěny — Včely a geometrie — Orel a orlice — Euklidovské konstrukce — Více-rozměrné prostory — Neeuklidovská geometrie — Konečná projektivní geometrie — Moebiův list.

Teorie grafů a kombinatorika se dostaly do kapitoly páté. Stačí jít jen kousek do minulosti, kdy teorie grafů vznikala, a už se přímo nabízejí zajímavé úlohy a hříčky (o převozníku, vlku, koze a zelí, o sedmi mostech v Královci, o třech domech a třech studních, o bludišti). Díky teorii grafů je matematika zabydlena i živými organismy (strom, kaktus, had, housenka). Autor se věnuje též magickým čtvercům a čtvercům latinským, o nichž jsme — mimochodem — měli už i samostatný svazek od *J. Bosáka*.

Od kombinatoriky je jen krok k teorii pravděpodobnosti, kterou se zabývá kapitola šestá. Sportka a sazka zajímá u nás mnoho lidí a čtenář jistě nepohrdne ani tím, aby se dověděl něco matematického o ruletě, hazardní hře z Monte Carla. Buffonova úloha o jehle je zajímavá tím, že ukazuje, jak by se experimentálně dalo určit Ludolfovo číslo.

A kapitola poslední? Ta se zabývá informatikou, což je nový obor, pro nějž se i u nás dříve užívalo jen anglického názvu computer science (věda o počítačích). Sedmá kapitola má pět odstavců a zde jsou jejich titulky:

Teorie algoritmů — Jak se domluvit s počítačem — Konečné automaty — Bit — Teorie her.

Z tohoto letného prolistování je vidět, že o knížku, ktorá je psána pro olympijskou edici, bude jistě zájem i v širší veřejnosti. Předností nového svazku je dostatečně velký počet cvičení, jejichž řešení se uvádí vždycky v závěru každé kapitoly. Nedopatření je v knížce málo a čtenář si je jistě snadno opraví (chybný je např. obr. IV. 19 na str. 110).

Jiří Sedláček

Ginzburg, V. L.:

ASTROFYZIKA

Vydala ALFA, n. p., Bratislava v roku 1979, vydanie prvé, 280 strán, 45 obr., preklad z ruštiny, viaz. 19,— Kčs.

V roku 1974 udelili Nobelovu cenu za fyziku *M. Rylovi* za priekopnícke práce v astronómii a *A. Hewishovi* za objav pulzarov. V roku 1978 dostali Nobelovu cenu za fyziku spolu s *P. L. Kapicom* aj *Arno A. Penzias* a *Robert W. Wilson*. Obaja americkí radioastronómi ju dostali za objav reliktového žiarenia. Tento kozmologický objav považujú odborníci za veľmi silný argument pre teóriu „horúceho vesmíru“.

Čo sa to deje v astrofyzike? Na túto otázku odpovedá Vitalij Lazarevič Ginzburg vo svojej knížke.

Uvádza nové výsledky v rádio-astronómii, röntgenovej i neutrínovej astronómii. Upozorňuje na objav radiových galaxií, kvazarov i pulzarov, spolu s výskumom reliktového žiarenia a výsledkami štúdia nehomogénnosti hustoty medziplanetárnej plazmy.

Autor si položil otázku a odpovedal na ňu: „Aké základné problémy stoja pred modernou astrofyzikou?“ Druhá kapitola knížky je odpoveďou na problém „Ako je usporiadaný vesmír a ako sa vyvíja v čase“ V L. Ginzburg popisuje podstatu prvých kozmologických modelov, význam všeobecnej teórie relativity, podiel názorov *A. A. Friedmana*, *Hubbla*, *Lemaitra*. Predstavuje rádiové galaxie a kvazary ako svedkov ďalekej minulosti.

Zaujímavým momentom knížky je kapitola „Kozmológia a filozofia“. Je reakciou na principiálne a súčasne dokonale nejasné otázky, ktoré vznikajú v oblasti fundamentálnych problémov fyziky a astronómie na pomedzí filozofie a prírodných vied.

Tretia kapitola je výkladom astrofyziky kozmického žiarenia. „Rok pulzarov“ je názov kapitoly, po ktorej je zaradený príspevok *D. ter Haara* o pulzarocho.

Podnetná knížka V. L. Ginzburga bude dobrou pomôckou pre mladých záujemcov o moderné astronomické poznatky a impulzom pre prácu astronomických krúžkov.

Dušan Jedinák

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

minore
minore m
minuendo m
minuto m
— secondo
miope
misto
misura ž
misurabile
misurabilità ž
misurare
mobile
moda ž
modo m
modulazione ž
— d'ampiezza
— di frequenza
modulo m
molecola ž
molteplicità ž
moltiplicando m
moltiplicare
moltiplicativo
moltiplicatore m
— elettronico
moltiplicazione ž
momentaneo
momento m
monocromatico
monomio m

menší, mladší
minor
menšenec
minuta
sekunda, vteřina
krátkozraký
smíšený
míra; metrika; takt
měřitelný
měřitelnost
měřiti; hodnotiti
pohyblivý
móda
způsob
modulace (vlnění)
— amplitudová
— frekvenční
modul
molekula
(mnoho)násobnost
násobenec
násobiti
násobný, multiplikativní
násobitel
elektronový zesilovač
násobení
okamžitý
okamžik, moment
monochromatický
monom, jednočlen

moto m

- apparente delle stelle
- proprio delle stelle
- browniano
- centrale
- composto
- elicoidale
- oscillatorio
- retrogrado
- rettilineo armonico
- rettilineo uniforme
- rotatorio
- traslatorio

motore m

- a combustione
- a scoppio
- a quattro (due) tempi
- a corrente continua
- asincrono
- sincrono

movimento m

multiplo m

mutatore m

mutualmente

insiemi mutualmente esclusivi

mutuo

pohyb

- zdánlivý hvězd
- skutečný hvězd
- Brownův (molekulární)
- středový
- složený
- šroubový
- oscilační
- zpětný, obrácený
- přímočarý harmonický
- přímočarý rovnoměrný
- rotační
- translační

motor

- spalovací
- výbušný
- čtyřtákní (dvojtákní)
- na stejnosměrný proud
- asynchronní
- synchronní

pohyb

násobek

měnič, komutátor

navzájem

disjunktní množiny

vzájemný

N

navigazione ž

- lossodromica
- ortodromica

nebbia ž

necessario

negativo

negativo m

negazione ž

negligere (vyslovuje se gli)

neutrino m

neutrone m

plavba

- po loxodromě
- po hlavní kružnici

mlha

nutný, nezbytný

záporný

negativ

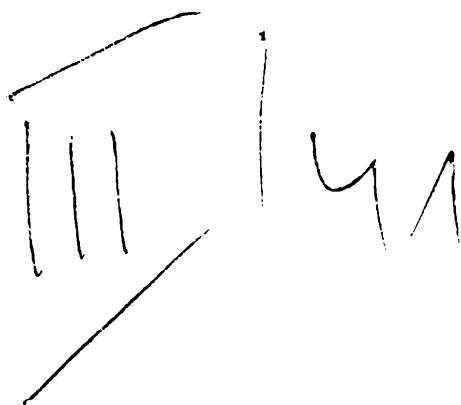
negace, popření

zanedbat

neutrino

neutron

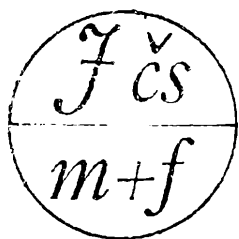
rozhledy



**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

10

ROČNÍK 58, 1979-1980, ČERVEN



rozhledy

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1980.

ROČNÍK 58
ČERVEN 1980

10

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

Dr. K. Kasal CSc.: Leninův přínos k rozvoji dialektické logiky	433
J. Kadlec: Binomická rovnice .	440
Dr. I. Chajda, CSc.: O jedné konstrukci trisekce úhlu .	446
Prof. E. Kraemer: Konstrukce průsečíků kružnice s hyperbolou – II.	449
Dr. R. Tulak: Gravitace a její důsledky .	455
Doc. dr. ing. D. Kluvanec, CSc.: Lineární ustálené elektrické sítě	459
Akademik O. Borůvka: Vzpomínka na akademika Eduarda Čecha .	466
Dr. L. Hrdina: Jedna úloha o kvádri .	468
S. Horák: Nejmladším čtenářům .	471
S. Horák: Ze zahraničních časopisů .	472
J. S.: Co píše Pythagoras	475
Recenze	475
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky

Leninův přínos k rozvoji dialektické logiky

PhDr. KAREL KASAL, CSc., UK Praha

Leninovi patří zvláštní zásluha o rozvíjení dialektické logiky. Lenin uvědoměle navázal na *Marxovo* a *Engelsovo* dílo v oblasti dialektické logiky. Zdůraznil zvláště, že *Marx* nám sice nezanechal logiku s velkým L, ale zanechal nám logiku svého *Kapitálu*.

Lenin věnoval velkou pozornost dialektickému způsobu myšlení v *Marxově Kapitálu*. Mnohokrát prokázal, že dialektický způsob myšlení, který *Marx* v *Kapitálu* aplikoval, odpovídá objektivním zákonitostem vývoje společnosti a umožňuje i hlubokou analýzu kapitalistické společensko-ekonomické formace. Prokázal, že i logika lidského myšlení je dialektická. Odtud rozvíjel myšlenku o jednotě logiky, dialektiky a teorie poznání.

Lenin nejen že objasnil vnitřní logiku *Marxova Kapitálu*, ale skvěle uplatnil dialektickou logiku při analýze posledního stadia kapitalismu, při analýze imperialismu. Na analýzu imperialismu navazuje Leninovo učení o možnosti prolomit řetěz imperialismu v nejslabším článku, o možnosti vítězství socialismu v jedné nebo několika zemích, o možnosti vybudování socialismu v kapitalistickém obklíčení. Správnost Leninovy analýzy potvrdila vítězná socialistická revoluce, vybudování socialismu v Sovětském svazu a celý současný vývoj světové socialistické soustavy.

Největším Leninovým přínosem v uplatnění dialektické logiky v přírodních vědách bylo Leninovo dílo *Materialismus a empiriokriticismus*. Lenin v něm dokázal, že metafyzický způsob myšlení zabránil empiriokritikům zobecnit poznatky přírodních věd a vyložit hlouběji hmotu v jejím pohybu. Empiriokriticismus byl pozitivistickým směrem, který popíral hmotu jako objektivní realitu. Lenin ve svém díle podal vědeckou definici hmoty. Dokázal, že je nesprávné ztotožňovat pojem hmoty s překonanými představami o hmotě; hmota je nevyčerpatelná a stále budeme objevovat nové formy její existence a pohybu. Zatímco nadaný fyzik *Mach* a *Avenarius* pod vlivem nesprávných idealistických představ popřeli objektivní existenci atomů a molekul, Lenin veden dialekticko-materialistickým názorem na objektivní realitu nejen že objektivní existenci atomů a molekul nepopřel, nýbrž navíc předpověděl nevyčerpatelnost elektronu.

V Materialismu a empiriokriticizmu je také hlubokým způsobem vyložen význam matematických symbolů v protikladu k jejich idealistickému významu. V tomto smyslu Lenin pokračoval v díle Marxových matematických rukopisů, i když v Leninově době nebyly ještě známy.

Lenin vyložil složitou dialektiku vývoje lidského myšlení na dějinách filozofie, vědy, techniky, zdůrazňoval i význam psychologie dítěte.

Dialektická logika se rozvinula v hranicích marxisticko-leninské teorie poznání. Když Lenin zdůrazňoval význam dialektické logiky v rámci marxisticko-leninské teorie poznání, nikdy nepřipouštěl možnost redukce dialektické logiky na logiku formální nebo naopak formální logiky na logiku dialektickou. Každá z nich — dialektická i formální logika — mají svůj vlastní předmět, vzájemně jsou nezastupitelné. Obě logiky se ztotožňují v živém procesu lidského poznání; ztotožňují se věcně, obsahově, při řešení společných problémů, nikoliv formálně.

Jádrem materialistické dialektiky je zájem jednoty a boje protikladů, protože nám odhaluje zdroj pohybu a vývoje. Rozdíl mezi formální a dialektickou logikou je možno proto v jádru objasnit na rozdílu mezi formálně logickým a dialektickým rozporem. Formálně logické rozpory se vzájemně vylučují; jedno tvrzení je pravdivé, druhé nepravdivé. Formální logika nepravdivé tvrzení odstraňuje z vědy. Dialektické protiklady se navzájem předpokládají, podmiňují, ale ani jeden z nich se z vědy odstranit nedá. Jestliže v hranicích formální logiky je možno za přesně určených, ale také omezených podmínek použít striktně hodnocení pravda — nepravda, v širších a komplikovanějších souvislostech to možné není. Tam musíme použít jiné kategorie — absolutní a relativní pravda. O zákonech Newtonovy fyziky není možno říci striktně: Zákony Newtonovy fyziky jsou pravdivé, nebo zákony Newtonovy fyziky jsou nepravdivé. Musíme dodat, že zákony Newtonovy fyziky jsou relativně pravdivé, že platí při poměrně malých rychlostech; při rychlostech blízcích se rychlosti světla platí zákony relativistické fyziky. Newtonovy zákony si ponechávají svoji relativní platnost; jsou mezním případem Einsteinovy teorie relativity. Jestliže bychom objektivní zákony Newtonovy fyziky, které jsou jen relativně platné, ale v daných podmínkách pravdivé, absolutizovali, přeměnily by se na tvrzení nepravdivá. Dialektická logika neruší tedy formálně logické hodnocení pravda — nepravda, ale ukazuje na širší objektivní podmínky pravdivosti. Zkoumá, zda a v jaké míře lidské poznání odráží objektivní realitu nezávislou od lidského vědomí, v jaké míře v sobě obsahuje moment absolutní pravdy.

V živém procesu poznání se může dialektický rozpor projevit jen formálně jako formálně logický rozpor. Dialektický rozpor, který se projevuje ve formě formálně logického rozporu, řeší vždy nějaký vědecký problém. Proto se rozpor, který má formálně logickou podobu, nedá odstranit jen tak, jak se odstraňují formálně logické spory — vy-

loučením jednoho z nepravdivých tvrzení. V dějinách fyziky existovaly dvě protikladné teorie: korpuskulární a undulační. Spor mezi nimi mohlo objasnit až hlubší poznání fyzikální povahy záření a objev korpuskulárně-vlnového dualismu.

Důležité je, aby se nesprávná formálně logická formulace problémů, která vede k chybným formálně logickým sporným tvrzením, nezaměňovala s dialektickým rozparem.

Jako příklad můžeme uvést věcně nesprávnou formulaci funkce elektrického zvonku, která vede k formálně logickému sporu. Mějme elektrický zvonek. Jestliže je okruh proudu uzavřen, uhoří kladívko do zvonku. Po úhozu je proud v okruhu přerušen. Potom mechanická vzpruha kladívko opět přitáhne, okruh se opět uzavírá. Proces se opakuje. Formálně logicky by mohl být proces zvonění vyjádřen jako formálně logický rozpor takto:

Jestliže je okruh uzavřen, tak je otevřen.

Jestliže je okruh otevřen, tak je uzavřen.

Vzniká formálně logická negace: A a negace A .

Ale formálně logické vyjádření funkce zvonění je nesprávné, protože abstrahuje od parametru času, tj. od následnosti změn ve stavu systému. Jestliže je okruh uzavřen v době t_1 , tak je otevřen v době t_2 , tak je uzavřen v době t_3 atd. Přitom $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$. Takový předpoklad už neobsahuje formálně logický rozpor.

Některá vědecká tvrzení mohou na první pohled vypadat jako formálně logický spor, ale ve skutečnosti, při bližším výkladu, vyjadřují logicky nerozporným způsobem objektivně existující rozpory. Jako příklad si můžeme vzít formulaci z Marxova Kapitálu.

Kapitál vzniká ve sféře oběhu.

Kapitál nevzniká ve sféře oběhu.

Při bližším výkladu vyplyne, že kapitál vzniká ve výrobě, ale za pomoci oběhu.

Speciálně vědecké teorie můžeme vždy formulovat jako logicky nerozporné, ovšem za určitých podmínek, i když objektivně rozpory z objektivní reality i samotného procesu poznání odstranit nelze. Vědecké pojmy vznikají v složitých procesech poznání, jako jsou ztotožnění, konstruktivizace, idealizace a absolutizace. Víme, že hranice všech objektů jsou neurčité. Ale v první aproximaci považujeme neurčité hranice za určité. Organismus při látkové výměně látky přijímá a vylučuje; hranice mezi ním a prostředím jsou neurčité, ale v procesu ztotožnění je považujeme v první aproximaci za určité. Vlastní a obecná jména, která dáváme předmětům, vytváříme na základě konstruktivizace. Eskymáci, pro něž měly řeky velký význam, vytvořili dvacet vlastních jmen pro různé dlouhé řeky. Ve vědě často tvoříme obecné jméno podle znaku společného pro celou třídu daných předmětů. Složený žaludek se stal základem pro vytvoření obecného jména — pře-

žvýkavci. V procesu idealizace vytváříme ideální objekty jako ideální plyn, absolutně tvrdé těleso, absolutně černé těleso apod. Určitým druhem idealizace je absolutizace, která se opírá o abstrakci. Například pojmem člověk označujeme živočicha, vyrábějícího nástroje. Ale to je absolutizace, neboť ne všichni lidé jsou schopni vyrábět nástroje.

Abstraktní myšlení je vždy určitým zhrubením a schematizací skutečnosti. Lidská praktická společensko-historická činnost jistou schematizaci vyžaduje. Jestliže je tato schematizace v hranicích přípustné tolerance a můžeme ji považovat za objektivní aproximaci skutečnosti, bude v jistých mezích pravdivou. Ale žádný vědecký poznatek, žádný zákon nelze přeměnit na absolutní pravdu. Vezměme *zákon Boyleův-Mariottův*: Říká: „Objem plynu je při stálé teplotě nepřímo úměrný tlaku, který na něj působí.“ Ale ani tento zákon neplatí absolutně za všech podmínek. Při vyšší teplotě než kritické se plyny stlačují méně, než připouští zákon Boyleův-Mariottův, při přiblížení se kritické teplotě se plyny stlačují nejdříve více, potom méně; při nižší teplotě, než je kritická, se plyny stlačují více, než připouští zákon Boyleův-Mariottův.

V důsledku tohoto zhrubení skutečnosti vznikají ostré hranice tam, kde existují souvislosti, a souvislosti tam, kde se setkáváme s jistou nesouvislostí.

Proto ve filozofii se často formulují objektivní rozpory jakoby ve formálně logických rozporech, i když při hlubší interpretaci se ukáže, že jde o dialektický a ne formálně logický rozpor.

Rozpory v procesu lidského poznání ukazuje i dialektická logika. Dialektická logika používá formálně logické procedury, ale podřizuje je strategickému cíli. Objevit vnitřní rozpory zkoumaného objektu, odhalit složité procesy jeho vývoje — realizace takového postupu ve vědě není jednoduchá. Příkladem uplatnění dialektických procedur ve speciální vědě nám může být Marxův *Kapitál* a Marxovy matematické rukopisy. Lenin poukázal na to, že Marx začíná analýzu *Kapitálu* analýzou zboží. Jestliže si uvědomíme, že zboží je buňkou kapitalistické společnosti, ale že k jeho pochopení potřebujeme celou řadu dalších kategorií, hodnoty, užitná hodnota, konkrétní práce, abstraktní práce atd., můžeme považovat kategorii zboží za kategorii po teoretické stránce abstraktní. Na druhé straně je zboží bezprostřední jevovou skutečností, s níž se za kapitalismu setkáváme každodenně.

Marx si zvolil za východisko kategorii zboží, která je z hlediska své předmětnosti smyslově konkrétní, ale z hlediska kapitalistického společenského řádu abstraktní. Právě takovou kategorii zvolil za východisko teoretické analýzy kapitalistické společensko-ekonomické formace. Kdyby analýza kapitalistické společnosti měla začít od obecných kategorií, jako je obyvatelstvo, třída, směna, atd., dospělo by se k chaotické představě o celku. Ze složitého ekonomického celku musí být tedy vyčleněny jednodušší kategorie.

Metodou Marxova Kapitálu je dialektická dedukce. Ta nejen že induktivní zjištění předpokládá, ale také se k nim neustále ve svém průběhu vrací. Dialektická dedukce je cestou od abstraktního ke konkrétnímu. S formálně logickou dedukcí se shoduje v tom, že vyvozuje jeden pojem z druhého. Marx začíná analýzu kapitalistické společensko-ekonomické formace analýzou zboží, a to nejprve z jevové fenomenální stránky. Dochází ke kategoriím užitná hodnota a hodnota. Ale podstata zboží vzniká ve výrobě, proto Marx analyzuje další kategorie; práci konkrétní a práci abstraktní; rozdíl mezi konkrétní a abstraktní prací mu umožňuje postihnout protiklad práce soukromé a společenské. Tím se Marx dostává k analýze rozporné povahy kapitálu. Kapitál vzniká ve výrobě, ale realizuje se prostřednictvím oběhu.

Východiskem další Marxovy analýzy musí už být kategorie kapitálu. Prostřednictvím celé řady dalších pojmů, technika, peníze atd. dospívá k charakteristice kapitálu jako nutné práce a nadpráce. Na základě rozporu mezi prací nutnou a nadprací vyvozuje Marx kategorie absolutní a relativní nadhodnoty a na tomto základě formuluje obecný zákon kapitalistické akumulace; odtud postupuje až k třídním protikladům proletariátu a buržoazie, k dialektice výrobních sil a výrobních vztahů až k sociální revoluci.

Marxův postup se tedy shoduje s formálně logickou dedukcí tím, že vyvozuje jeden pojem z druhého. Ale pojmy se nevyvozují podle nějakých striktně stanovených pravidel. Přechod od jedné kategorie k druhé vyžaduje vždy průběžný návrat k empirii, vždy nové ověření fakt a předpokladů na základě všech ostatních logických postupů, analýzy, syntézy, indukce, dedukce atd. Je tomu tak proto, že dialektická dedukce se musí řídit povahou samotného objektu, který konec konců určuje strategii celé analýzy. Všechny formálně logické postupy jsou této strategii podřízeny.

Proč je dialekticko-materialistická dedukce metodou Marxova Kapitálu? Jestliže postupujeme od konkrétního k abstraktnímu, postupujeme induktivní a neúplnou enumerací k abstraktnímu pojmu. Tato cesta bývá také cestou od empirického k teoretickému poznání. Jestliže však naopak postupujeme od abstraktního ke konkrétnímu, vycházíme z představy o celku a jeho zákonitostech; jednotlivá fakta a jevy jsou už potom projevem tohoto obecného celku, prosazováním obecné zákonitosti. Marx chápe kapitalistickou společensko-ekonomickou formaci jako celek a všechny ekonomické procesy jako projevy jeho vnitřní zákonitosti.

To však neznamená, že Marx se omezil z metodologického hlediska jen na dialektickou dedukci. Použil ji v Kapitálu jako hlavní metodu, protože mu šlo o analýzu kapitalistické společensko-ekonomické formace jako celku. Ale předpoklady pro použití této generální metody Kapitálu musely vytvořit všechny ostatní metody v dialektické jednotě a všechny se také na průběžné analýze kapitalistické formace podílely.

Dialektickou jednotu postupu od konkrétního k abstraktnímu a od abstraktního ke konkrétnímu analyzuje Marx na příkladě diferenciálního počtu. Nejdříve došli matematici k pojmu diferenciálu na základě algebraického rozdílu dvou čísel. Diferenciál byl tedy interpretován obsahově. To vedlo k četným paradoxům. Ale jakmile byl pojem diferenciálu zformulován, začal se používat jako symbol pro diferenciální operace, které měly být teprve nalezeny. Diferenciální počet byl sice vyvozen z algebry, ale v bodě, kdy se stal operacionálním symbolem, se stal na algebře relativně nezávislým. Skutečnost, že diferenciál mohl být vyjádřen algebraickými prostředky, se kterými se dá operovat nezávisle na obsahu, umožnila přeměnit diferenciální počet z předmětné operace na operaci ryze formální.

Zprvu se postupovalo od reálných procesů algebraického počtu k symbolu tohoto procesu, potom se pro symbol hledá nějaký ekvivalent, nějaké strategema činnosti, operace, která se má teprve provést. Diferenciál se mění ze symbolu, který označuje jistou operaci, na symbol, pro nějž se operace hledají. Diferenciální počet jako nová metoda vzniká na základě algebraického počtu. Předmětná funkce diferenciálu se zachovává dialekticky jako možnost najít operace k diferenciálnímu symbolu. Marx tedy dokazuje, že i v uvedeném případě se prosazuje dialektický zákon obratu metody. Postup od konkrétního k abstraktnímu se musí v jistém bodě nutně obrátit na postup od abstraktního ke konkrétnímu a opět naopak.

Proto metoda aplikovaná v Marxově Kapitálu je táž jako v jeho Matematicko-filozofických rukopisech.

„Marx, jenž si dal za úkol zdůvodnit diferenciální počet, začíná od toho nejjednoduššího, nejobecnějšího a nejmasovějšího, od běžné algebry, a přitom z prostého součtu a rozdílu dvou čísel objevuje v tomto nejjednodušším jevu... všechny protiklady (respektive zárodky všech protikladů) diferenciálního počtu. A navíc, sám výklad vývoje diferenciálu připomíná (sice jen v nejobecnějších rysech) obecný postup rozvíjení peněz v Kapitálu... Není divné, že tato metoda je aplikovatelná i ve vztahu k nejjednoduššímu matematickému pojmu, kvantitativnímu číslu, že dialektika vývoje pojmu čísla je dílčím případem dialektiky ve všeobecnosti.“

(*Janovskaja, S. A.*: Metodologičeskije problemy nauki, M 1972, str. 43—44.)

V čem se výklad funkce peněz jako prostředku obratu shoduje s výkladem diferenciálu? Název mince odpovídal nejdříve zlatému podkladu. Postupně dochází k tomu, že různé mince téhož názvu začínají mít různou váhu, a tedy i různou hodnotu. Postupně začínají peníze fungovat jako prostředek obratu nezávisle na své váze, a tedy hodnotě. Markantní je to u papírových peněz. Mají jen symbolický charakter, samy o sobě nemají jako zboží hodnotu, pouze ji označují.

Dialektický zákon obratu metody se vztahuje na nejobecnější formy poznání a na vztah indukce a dedukce, analýzy a syntézy, formy a obsahu, konkrétního a abstraktního, empirického a teoretického.

Dialektická logika prokazuje, že uvedené operace mají nejen formálně logickou, ale také gnoseologickou stránku, která může být plně postižena z hlediska dialektického vztahu objektu a subjektu v procesu společensko-historické praxe.

V I. Lenin při hodnocení významu Marxova Kapitálu zdůraznil nejen filozofický význam jeho materialismu, ale na roveň mu postavil i Marxovu metodu postupu od abstraktního ke konkrétnímu. Lenin sám tvořivě dialektickou logiku rozvinul ve svých *Filozofických sešitech* na analýze dějin filozofie. Mnohokrát poukázal na to, jak absolutistické a nehistorické používání forem myšlení vede k metafyzice a zabrzdění vědy. Lenin nesmírně oceňoval matematiku a formalizaci v přírodních a společenských vědách a zdůrazňoval vědecký a materialistický význam matematické a formálně logické symboliky. V tomto smyslu byl vždy rozhodným odpůrcem naivního materialismu, všech forem vulgárního a metafyzického materialismu, stejně jako všech forem idealismu a mysticismu. Věda nám umožňuje vzlet do říše abstrakce a fantazie, ale jenom proto, abychom mohli řešit reálné pozemské a dnes i kosmické problémy. Rozlet Leninova abstraktního myšlení, jeho střízlivost a schopnost tvořivě aplikovat teorii zůstane vzorem teoretické i praktické činnosti.

Doporučená literatura :

Dialektika naučnovo poznanija, Izdatelstvo „Nauka“, Moskva, 1978

Binomická rovnice

JAROSLAV KADLEC, gymnázium Tišnov

Binomická rovnice je výroková forma typu

$$z^n = a \quad (1)$$

v níž a je komplexní číslo, n je číslo přirozené a neznámá z je opět číslo komplexní. Stručně lze uvedené výchozí podmínky zapsat takto: $a \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, kde $\mathbb{C}$ je množina všech komplexních čísel a $\mathbb{N}$ množina všech čísel přirozených.

Za předpokladu, že $a \neq 0$, odvodíme vztahy pro obecný výpočet neznámé z následujícím způsobem: Rovnici (1) převedeme do goniometrického tvaru

$$z = |z|(\cos x + i \sin x), \quad a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

kde $|z|$ je absolutní hodnota komplexního čísla z , x jeho argument. Podobně $|a|$ je absolutní hodnota daného komplexního čísla a , α jeho argument. Užitím Moivreovy věty převedeme rovnici (1) na tvar:

$$|z|^n \cdot (\cos nx + i \sin nx) = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad (2)$$

Tato rovnice představuje zápis rovnosti dvou komplexních čísel, určených svými argumenty a absolutními hodnotami. Rovnost (2) je splněna tehdy, rovnají-li se současně absolutní hodnoty i argumenty obou komplexních čísel. Vzhledem k periodičnosti užitých goniometrických funkcí lze psát tyto dvě současně platící podmínky takto:

$|z|^n = |a|$, $nx_k = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je vhodné celé číslo. Argument neznámé z tedy nebude jednoznačný, protože závisí na k . Proto je také opatřen příslušným indexem.

Postupným řešením těchto dvou rovnic vychází:

$$|z| = \sqrt[n]{|a|}$$

$$x_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Zbývá určit počet řešení rovnice (2), což jinými slovy znamená stanovit, která čísla k stačí dosadit při výpočtu argumentů x_k do vztahu (3), abychom dostali všechna řešení. Argumenty α , x_k jsou úhly, omezené podmínkami:

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq x_k < 2\pi. \quad (4)$$

Z rovnice (3) vychází pro k :

$$k = \frac{nx_k - \alpha}{2\pi}. \quad (5)$$

Stanovme dále celá čísla k pro dosazování do vztahu (3): Vzhledem k podmínkám (4) a za použití vztahu (3) lze pro argumenty x_k psát: Je-li

$$k = n + m, \text{ kde } m \in \mathbb{N}, \text{ je}$$

$$x_k = \frac{\alpha}{n} + (n + m) \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi \frac{m}{n} + 2\pi = x_m + 2\pi.$$

Avšak 2π je perioda goniometrických funkcí sinus a kosinus, proto argumenty x_k a x_m přísluší témuž komplexnímu číslu. Argumenty různých komplexních čísel dostáváme pro $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$, což znamená, že binomická rovnice (2) má n různých kořenů.

Závěr:

Binomická rovnice $z^n = a$ [kde $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$] má n kořenů tvaru:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad (6)$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 1).$$

TVRZENÍ:

Nechť z_{j+1} , z_j jsou dva kořeny binomické rovnice $z^n = a$ pro dva po sobě následující indexy. Pak pro rozdíl jejich argumentů platí:

$$x_{j+1} - x_j = \frac{2\pi}{n}. \quad (7)$$

DŮKAZ:

Podle (6) vychází:

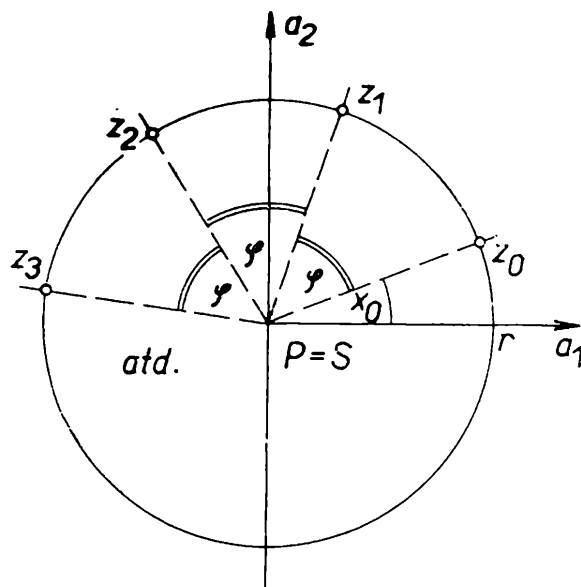
$$x_j = \frac{\alpha + 2j\pi}{n}, \quad x_{j+1} = \frac{\alpha + 2(j+1)\pi}{n}$$

$$x_{j+1} - x_j = \frac{\alpha + 2(j+1)\pi}{n} - \frac{\alpha + 2j\pi}{n} = \frac{2\pi}{n},$$

čímž je důkaz proveden.

Vzhledem ke tvaru kořenů binomické rovnice vytvářejí jejich obrazy vrcholy pravidelného n -úhelníku, které leží na kružnici o poloměru $r = \sqrt[n]{|a|}$ a jehož středové úhly mají velikosti $\frac{2\pi}{n}$. Úhel $x_0 = \frac{\alpha}{n}$, neboť

pro $k = 0$ je $x_0 = \frac{\alpha}{n}$.



Obr. 1

Celá situace je znázorněna na obr. 1.

Poznámky :

1. Při řešení konkrétní binomické rovnice můžeme postupovat takto: Komplexní číslo a , které je zadáno, převedeme do goniometrického tvaru, čímž získáme hodnoty $|a|$ a α . Jejich dosazováním spolu s příslušným celým číslem k určíme postupně všech n kořenů dané rovnice.
2. Postup při řešení může být také tento:
Opět — jako v předchozím případě — převedeme komplexní číslo a do goniometrického tvaru, ale dále určíme toliko

$$z_0 = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right).$$

Využijeme vztahu (7) tak, že u následujících kořenů postupně zvětšujeme argumenty o $\frac{2\pi}{n}$. Tento druhý způsob řešení je zvláště výhodný tehdy, máme-li určovat kořeny binomické rovnice graficky.

3. Pokud komplexní číslo a je reálné, pak lze určit jeho argument okamžitě: je-li $a > 0$, je $\alpha = 0$,
je-li $a < 0$, je $\alpha = \pi$.

Také v případě, že číslo a je ryze imaginární, lze jeho argument psát přímo: je-li $a = ki$, kde k je kladné reálné číslo, je $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{je-li } a = -ki, \text{ je } \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Příklady:

1. V množině komplexních čísel řešte danou binomickou rovnici a řešení znázorněte graficky:

$$z^4 = -8 + i 8 \sqrt{3}$$

Řešení:

V tomto případě je $n = 4$, $a = -8 + i 8 \sqrt{3}$. Komplexní číslo a převedeme nejprve do goniometrického tvaru:

$$|a| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}, \\ \sin \alpha &= \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned} \right\} \text{tedy } \alpha = \frac{2}{3} \pi,$$

$$\text{tedy } a = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Kořeny zadané rovnice určíme užitím vzorce (6):

Prvý kořen:

$$\begin{aligned} k = 0, \quad z_0 &= \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2}{3}\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2}{3}\pi}{4} \right) = \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i \end{aligned}$$

Další kořeny:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \left(\cos \frac{\frac{2}{3}\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2}{3}\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4} \right) = \\ &= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\frac{2}{3}\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2}{3}\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} \right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_3 = \dots = 1 - i\sqrt{3}$$

Zadané rovnici vyhovují čtyři kořeny:

$$z_0 = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i, \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}$$

Zkouška:

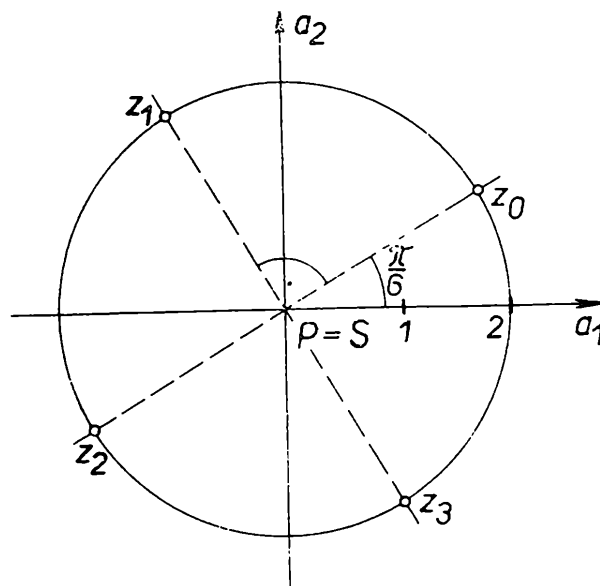
$$\begin{aligned} \text{Pro kořen } z_0: L(z_0) = z_0^4 = (\sqrt[4]{3} + i)^4 &= \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^4 = \\ &= 16 \left(\cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6} \right) = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= 16 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -8 + i 8\sqrt{3} = P, \end{aligned}$$

kde při umocňování bylo užito Moivrový věty. Zkouška pro zbývající tři kořeny se provede analogicky.

Znázornění kořenů:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[4]{16} = 2, \quad \varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \\ x_0 &= \frac{\frac{2\pi}{3}}{4} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Obrazy kořenů leží tedy na kružnici s poloměrem $r = 2$ a středem v počátku soustavy souřadnic. Vytvoří vrcholy čtverce $ABCD$, přičemž vrchol A má souřadnice $A = [\sqrt[4]{3}, 1]$, vrcholy B, C, D , mají postupně souřadnice určené reálnými a imaginárními složkami dalších kořenů. Celá situace je znázorněna na obr. 2.



Obr. 2

2. Určete souřadnice vrcholů pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$, jehož vrchol A má souřadnice $A = [3\sqrt[4]{2}, 3\sqrt[4]{2}]$ a jehož střed leží v počátku soustavy souřadnic.

Řešení:

Bod A geometricky reprezentuje jeden z kořenů binomické rovnice $z^6 = a$, určíme nejprve komplexní číslo a :

$$\begin{aligned} z_j &= (3\sqrt[3]{2} + i 3\sqrt[3]{2}), \text{ tedy } z_j^6 = (3\sqrt[3]{2} + i 3\sqrt[3]{2})^6 = \\ &= \left[6 \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2} + i \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \right) \right]^6 = 6^6 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^6 = \\ &= 6^6 \left(\cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} \right) = 6^6 \left(\cos \frac{3}{2} \pi + i \sin \frac{3}{2} \pi \right) = \\ &= 6^6(0 - i) = -i 6^6 \end{aligned}$$

Souřadnice zbývajících vrcholů budou mít x -ové a y -ové souřadnice rovny postupně reálným a imaginárním složkám kořenů binomické rovnice:

$$z^6 = -i 6^6$$

Například užitím poznámky 2 vychází:

$$|a| = 6^6,$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{0}{6^6} = 0, \\ \sin \alpha &= -\frac{6^6}{6^6} = -1, \end{aligned} \right\} \text{ tedy } \alpha = \frac{3}{2} \pi,$$

$$a = -i 6^6 = 6^6 \left(\cos \frac{3}{2} \pi + i \sin \frac{3}{2} \pi \right).$$

Výpočet kořenů:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[6]{6^6} \left(\cos \frac{\frac{3}{2} \pi}{6} + i \sin \frac{\frac{3}{2} \pi}{6} \right) = 6 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 3\sqrt[3]{2} + i 3\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Pro určení dalších kořenů zvětšujeme argumenty postupně o $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

$$z_1 = 6 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \right] = 6(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$$

Podobně dostaneme:

$$z_2 = 6(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ), \quad z_3 = 6(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = \\ = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2} - i 3\sqrt{2}$$

$$z_4 = 6(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ), \quad z_5 = 6(\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ).$$

Zbývající vrcholy šestiúhelníku budou tedy mít souřadnice:

$B = [6 \cos 105^\circ, 6 \sin 105^\circ]$, $C = [6 \cos 165^\circ, 6 \sin 165^\circ]$, $D = [-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}]$, $E = [6 \cos 285^\circ, 6 \sin 285^\circ]$, $F = [6 \cos 345^\circ, 6 \sin 345^\circ]$. Souřadnice vrcholů B, C, E, F lze vyjádřit reálnými čísly, pokud užitím tabulek určíme hodnoty goniometrických funkcí příslušných úhlů.

Příklady k procvičení:

1. Řešte v množině komplexních čísel následující binomické rovnice, jejich kořeny znázorněte graficky:

a) $z^3 - 27 = 0$, b) $z^7 = -1$, c) $z^4 = 16i$, d) $z^3 + i = 0$, e) $z^5 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$,

f) $z^6 = 64(\cos 1080^\circ + i \sin 1080^\circ)$.

2. Určete vrcholy pravidelného pětiúhelníku, jehož střed je v počátku soustavy souřadnic a jeden z vrcholů je obrazem ryze imaginárního čísla $-2i$.

3. Sestavte binomickou rovnici, jejíž kořeny jsou:

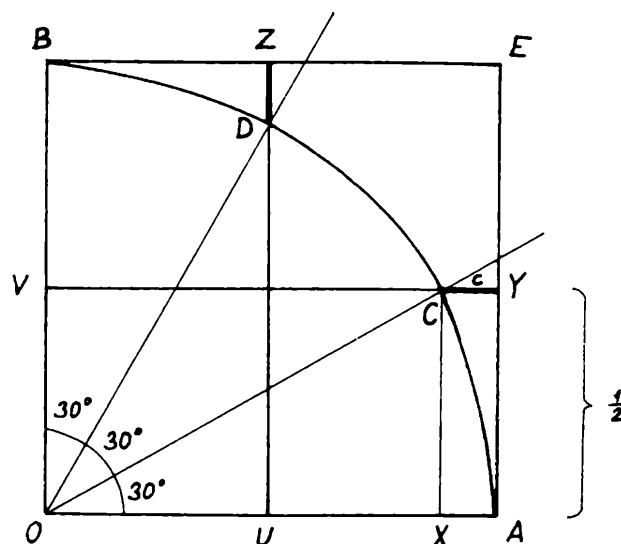
$$z_0 = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ, \quad z_1 = \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ, \quad z_2 = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ.$$

4. V množině komplexních čísel řešte rovnici: $z^2 + (i + 1)z - i = 0$. [Návod: Proveďte doplnění na druhou mocninu dvojčlenu a pak užití substituce $t = z + \frac{b}{2a}$.]

0 jedné konstrukci trisekce úhlu

RNDr. IVAN CHAJDA, CSc., Přerov

Konstrukce trisekce úhlu, tj. dělení úhlu na třetiny, patřila ke třem klasickým geometrickým úlohám (rektifikace kružnice, zdvojení krychle, trisekce úhlu). V antice i dlouho ve středověku bylo snahou geometrů nalézt pouze pomocí pravítka a kružítka konstruktivní řešení této úlohy.



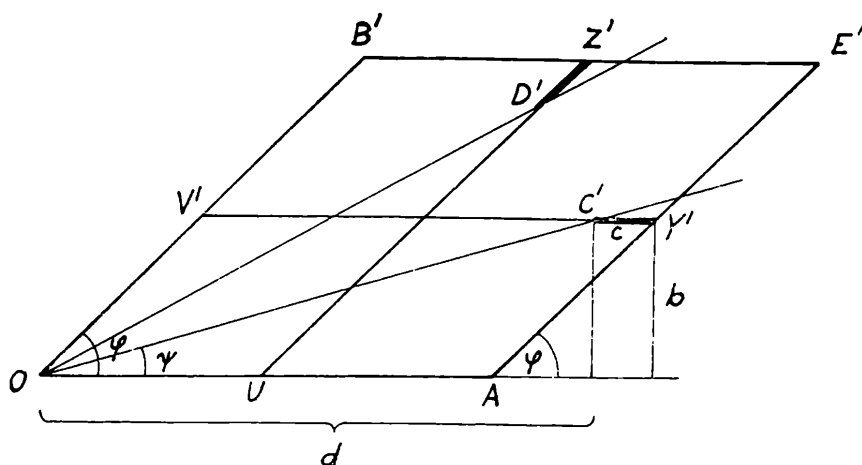
Obr. 1

Teprve použitím metod algebry byla dokázána nemožnost obecného řešení této úlohy (jakož i ostatních dvou klasických úloh) pouze pomocí pravítka a kružítko. Byla však odvozena celá řada konstrukcí přibližných (viz předchozí ročníky Rozhledů matem.-fyz.), jejichž přesnost je tak vysoká, že je prakticky nedosažitelná při běžném rýsování. Většina těchto metod je však příliš pracných a v praxi zcela neupotřebitelných. Také bývá zpravidla obtížné si některou z těchto konstrukcí zapamatovat. Cílem tohoto článku je odvodit jednoduchou úvahou velmi snadnou konstrukci, jejíž přesnost sice není vysoká, avšak pro běžné konstrukce pravítkem a kružítkem je celkem postačující a lze si ji velmi snadno zapamatovat.

Vycházejme ze situace, znázorněné na obr. 1. Je zde dán pravý úhel $\sphericalangle AOB$ a čtvrtina oblouku jednotkové kružnice (se středem v bodě O procházející body A, B , tedy $|OA| = |OB| = 1$). Je snadné rozdělit pomocí pravítka a kružítko pravý úhel na třetiny, tj. úhly $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOB$. Přitom úsečka $|CX| = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $|CY| = 1 - \cos 30^\circ = c$.

Analogicky platí $|DZ| = |CY| = c$.

Nechť je nyní dán obecně některý úhel φ (předpokládejme pro jednoduchost $0 < \varphi \leq 90^\circ$; jinak lze vždy odečíst celé násobky 90° , které umíme dělit na třetiny, a pak dělit jen zbylý ostrý úhel). Provedme takovou transformaci roviny, že body O a A zůstanou na svém místě, ale bod B přejde v B' , bod E v E' tak, že čtverec $OAEB$ se transformuje v kosočtverec $OAE'B'$, jehož všechny strany mají opět délku 1, ale $|\sphericalangle AOB'| = \varphi$ (nepřesně řečeno, došlo ke „zmáčknutí“ čtverce). Celá situace je pak znázorněna na obr. 2. Také střední příčky VY , UZ čtverce $OAEB$ jsou transformovány na střední příčky $V'Y'$, UZ' kosočtverce $OAE'B'$. Vzhledem k tomu, že tato transformace zachovává vzdálenosti na přímkách rovnoběžných s OA i OB' , je snadné sestrojit



Obr. 2

transformované body C' , D' , a to tak, že na úsečku $V'Y'$ nanese od bodu Y' vzdálenost $c = 1 - \cos 30^\circ$ a vytneme bod C' , na úsečce UZ' vytneme bod D' ve vzdálenosti c od bodu Z' (viz obr. 2). Dostáváme tak opět tři úhly, a to $\sphericalangle AOC'$, $\sphericalangle C'OD'$, $\sphericalangle D'OB'$. Tyto úhly sice netvoří přesné třetiny úhlu $\varphi = |\sphericalangle AOB'|$, avšak přibližně je lze za třetiny považovat. Praktická chyba při školském rýsování je totiž zpravidla na hranici chyby této konstrukce. Přesnou velikost zkonstruovaných úhlů lze zjistit snadným výpočtem. Provedeme tento výpočet např. pro úhel $\psi = |\sphericalangle AOC'|$. Zřejmě $|AY'| = \frac{1}{2}$, tedy $b = \frac{1}{2} \sin \varphi$.

Odtud

$$d = 1 + \left(\frac{\cos \varphi}{2} - c \right) = \frac{\cos \varphi}{2} + \cos 30^\circ,$$

a tedy
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{d} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + 2 \cos 30^\circ},$$

tj.
$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + 2 \cos 30^\circ}.$$

Dosažením např. pro $\varphi = 21^\circ$ dostaneme $\psi = 7^\circ 42'$, pro $\varphi = 30^\circ$ je $\psi = 10^\circ 54'$ atd.

Je tedy zřejmé, že celá konstrukce je velmi jednoduchá, spočívá pouze ve vytnutí úseček $c = 1 - \cos 30^\circ$ na příčky jednotkového lichoběžníku s úhlem $|\sphericalangle AOB'| = \varphi$ (kde úsečku délky c lze snadno zkonstruovat pomocí jednotkové kružnice tak, jak je ukázáno na obr. 1), přičemž přesnost není horší než v případě běžných školských konstrukcí pravítkem a kružítkem. Hlavní výhodou je však snadné zapamatování celé konstrukce, plynoucí z kinematické představivosti transformace čtverce na kosočtverec.

Konstrukce průsečíků kružnice s hyperbolou - II

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V článku otištěném v čísle 9 letošního ročníku Rozhledů jsme probrali jeden případ, kdy je možno sestrojít společné body kružnice a hyperboly eukleidovskou konstrukcí. Jako další případ vyložíme sestrojení společných bodů hyperboly s kružnicí, která má s ní společný střed.

Víme, že hyperbola je souměrná podle dvou vzájemně kolmých přímek o_1, o_2 (osy hyperboly) a podle jejich průsečíku S (střed hyperboly). Hlavní osa o_1 , která prochází ohnisky F, G hyperboly, protíná tuto křivku v jejích vrcholech A, B (obr. 1). Opišme kolem středu S kružnici tak, aby procházela ohnisky F, G . Protože je $SA < SF$, lze sestrojít obdélník nebo čtverec, který je této kružnici vepsán tak, že úsečka AB je jeho střední příčkou; druhá střední příčka CD je částí přímky o_2 . Přímky, které vzniknou prodloužením úhlopříček tohoto obdélníku (čtverce), se nazývají *asymptoty hyperboly*. Číslům $a = |SA| = |SB|$, $b = |SC| = |SD|$ říkáme poloosy hyperboly; a je *hlavní poloosa*, b je *vedlejší poloosa*. Je-li $|SF| = |SG| = e$, pak z konstrukce bodů C, D plyne, že je

$$a^2 + b^2 = e^2. \quad (\text{X})$$

Předpokládejme, že kružnice $k = (S, r)$ má s danou hyperbolou h společný bod T . Ze souměrností křivek h, k podle os o_1, o_2 a podle středu S plyne, že také body souměrně sdružené k bodu T podle přímky o_1 nebo o_2 nebo podle středu S jsou společnými body křivek h, k .

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, aby její osy x, y splynuly po řadě s přímkami o_1, o_2 ; za kladné části os x, y zvolme polopřímky SB, SC (obr. 1). Potom kružnice k má rovnici

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

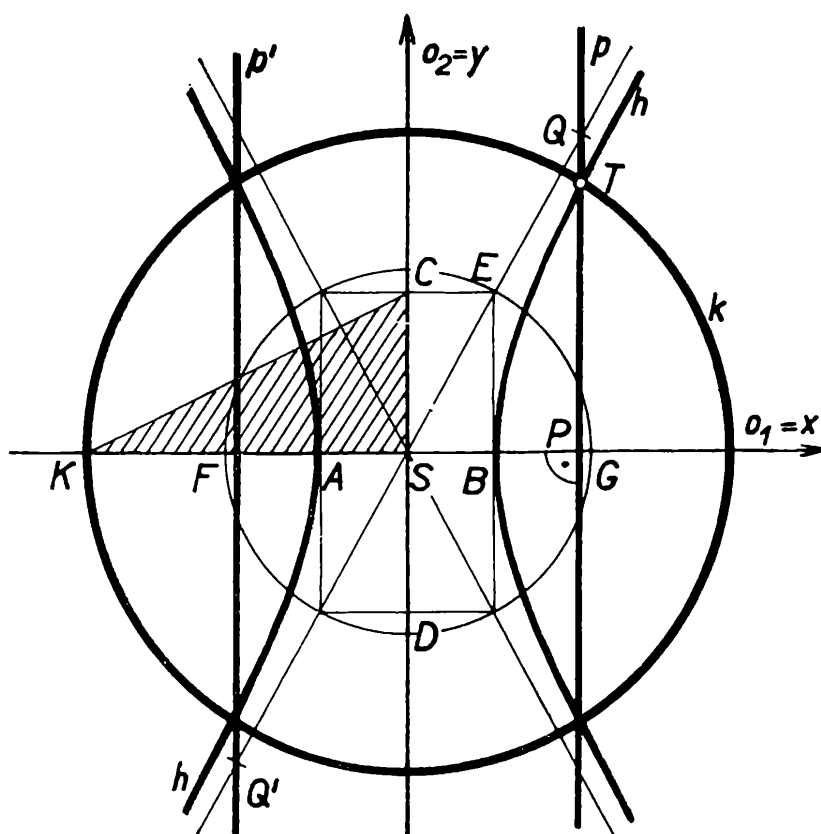
a hyperbola má rovnici

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (2)$$

Asymptota hyperboly, která prochází vrcholem E $[a, b]$ obdélníku se středními příčkami AB, CD má rovnici

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (3)$$

Nechť bod T $[x, y]$ je společným bodem křivek h, k ležícím v prvním kvadrantu, tj. v pravém úhlu CSB . Protože žádný bod hyperboly h není bodem přímky o_2 , je $x > 0$. Vedme bodem T přímkou $p \perp o_1$ a sestrojme po řadě její průsečíky P, Q s přímkou o_1 a s asymptotou SE . Protože Q



Obr. 1

je bodem asymptoty, platí pro jeho souřadnice rovnost (3); přitom jeho souřadnice x je stejná jako souřadnice x bodů P a T . Proto je

$$|SP| = x > 0, \quad |PQ| = \frac{b}{a} x > 0; \quad (4)$$

podle Pythagorovy věty použité pro trojúhelník SPQ je

$$|SQ|^2 = |SP|^2 + |PQ|^2. \quad (5)$$

Provedme nyní *rozbor*, z něhož vyplyne konstrukce společného bodu T křivek h , k . Jeho souřadnice x , y vyhovují rovnici (1) a rovnici (2), a tedy též rovnici, kterou dostaneme, jestliže rovnici (1) znásobíme a^2 a pak ji sečteme s rovnicí (2). Tak dostaneme rovnici

$$(a^2 + b^2)x^2 = a^2(b^2 + r^2),$$

z níž plyne, že je

$$x^2 = \frac{a^2(b^2 + r^2)}{a^2 + b^2}. \quad (6)$$

Podle (5) a (4) je

$$|SQ|^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2, \quad (7)$$

takže podle (6) je

$$|SQ|^2 = b^2 + r^2. \quad (8)$$

To znamená, že úsečka SQ má touž velikost jako přepona pravoúhlého trojúhelníku CSK (obr. 1) s odvěsnami SC , SK o velikostech $|SC| = b$, $|SK| = r$.

Z uvedeného rozboru plyne tato konstrukce společných bodů hyperboly h se soustřednou s ní kružnicí k :

1. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník CSK , jehož odvěsny SC , SK mají velikosti $|SC| = b$, $|SK| = r$.

2. Na asymptotě SE hyperboly sestrojíme body Q , Q' tak, aby bylo $|SQ| = |SQ'| = |CK|$.

3. Body Q , Q' vedeme přímky p , p' kolmé k hlavní ose o_1 hyperboly.

4. Sestrojíme společné body přímek p , p' s danou kružnicí k .

Ještě musíme provést *zkoušku*, tj. musíme dokázat, že společné body přímek p , p' s kružnicí k jsou také body dané hyperboly h . Ze souměrnosti křivek h , k a přímek p , p' podle osy o_2 plyne, že se můžeme omezit na případ, v němž je Q bodem polopřímky SE (obr. 1). Je-li $T[x, y]$ společný bod přímky $p \perp o_1$ (vedené sestrojeným bodem Q) s kružnicí k , je podle (1)

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad (9)$$

Průsečík přímky p s osou o_1 označme P ; potom platí (4) a (5), takže je

$$|SQ|^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2$$

Z toho podle 1. a 2. bodu konstrukce plyne, že je

$$b^2 + r^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2$$

Z toho pak plyne, že platí (6). Podle (9) a (6) je

$$y^2 = r^2 - x^2 = \frac{(a^2 + b^2)r^2 - a^2(b^2 + r^2)}{a^2 + b^2} = \frac{b^2(r^2 - a^2)}{a^2 + b^2},$$

proto je

$$a^2 y^2 = \frac{a^2 b^2 (r^2 - a^2)}{a^2 + b^2}. \quad (10)$$

Podle (6) je

$$b^2 x^2 = \frac{a^2 b^2 (b^2 + r^2)}{a^2 + b^2}, \quad (11)$$

takže podle (10) a (11) je

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = \frac{a^2 b^2 (b^2 + r^2 - r^2 + a^2)}{a^2 + b^2} = a^2 b^2$$

Souřadnice bodu $T [x, y]$ vyhovují tedy rovnici (2); průsečík T přímky p s kružnicí k je proto také bodem dané hyperboly.

Diskuse je jednoduchá. Z výsledků (6) a (10) pro souřadnice x, y společného bodu křivek h, k plyne, že tyto body existují právě tehdy, je-li

$$r^2 - a^2 \geq 0,$$

tj. právě tehdy, je-li $r \geq a$. K témuž výsledku dospějeme z podmínky, že poloměr r kružnice k nesmí být menší než vzdálenost x přímky p od středu S kružnice k ; přitom je třeba použít rovnosti (6). Pro $r > a$ má kružnice k s hyperbolou h čtyři různé společné body, pro $r = a$ dva různé body (vrcholy A, B hyperboly) a pro $r < a$ nemají křivky h, k žádný společný bod.

Všimněme si ještě případu, kdy kružnice k prochází vrcholy A, B hyperboly h ; potom má střed O na vedlejší ose o_2 hyperboly. Pro $O \neq S$ je tento případ na obr. 2. Ze souměrnosti křivek h, k podle přímky o_2 plyne, že jejich společné body jsou souměrně sdruženy podle přímky o_2 . Při stejné volbě soustavy souřadnic jako v předešlém případě je $O [0, n]$ a pro poloměr r kružnice k platí rovnost

$$r^2 = a^2 + n^2,$$

takže kružnice k má rovnici

$$\begin{aligned} x^2 + (y - n)^2 &= a^2 + n^2, \\ x^2 + y^2 - 2ny &= a^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Pro $n = 0$ je to kružnice soustředná s hyperbolou; předpokládejme tedy, že je $n \neq 0$, a hledejme společné body obou křivek. Pro souřadnice x, y společného bodu T křivek h, k platí rovnice (12) a (2), a tedy též rovnice, kterou dostaneme, jestliže rovnici (12) znásobíme $-b^2$ a potom ji sečteme s rovnicí (2). Tak dostaneme rovnici

$$(a^2 + b^2)y^2 - 2b^2ny = 0,$$

která má kromě kořene $y = 0$ ještě kořen

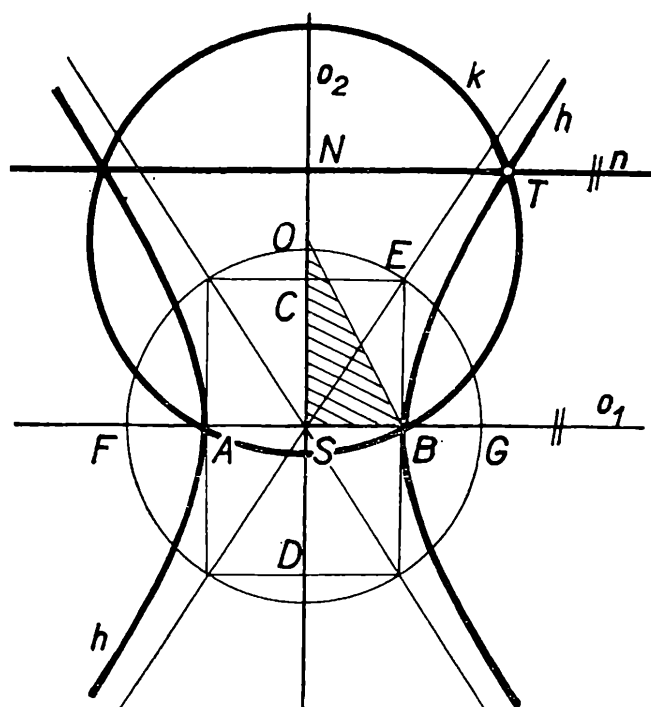
$$y = \frac{2b^2n}{a^2 + b^2}. \quad (13)$$

Společný bod $T \neq A, T \neq B$ křivek h, k je tedy bodem přímky $n \parallel o_1$ procházející bodem $N [0, y]$, kde pro y platí (13). Z toho plyne tato konstrukce průsečíků křivek h, k :

1. Na ose o_2 sestrojíme bod N ; eukleidovskou konstrukci úsečky SN uvádíme na konci článku v poznámce.

2. Bodem N vedeme přímku $n \parallel o_1$.

3. Sestrojíme společné body přímky n s kružnicí k .



Obr. 2

Je třeba provést ještě zkoušku, tj. dokázat, že nalezené body jsou také body dané hyperboly. Z rovnice (12), kde dosadíme za y ze (13), dostaneme

$$x^2 = a^2 + \frac{4b^2n^2}{a^2 + b^2} - \frac{4b^4n^2}{(a^2 + b^2)^2}. \quad (14)$$

Po kratším výpočtu plyne z (13) a (14), že je

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2;$$

to znamená, že průsečíky přímky n s kružnicí k jsou zároveň body dané hyperboly h .

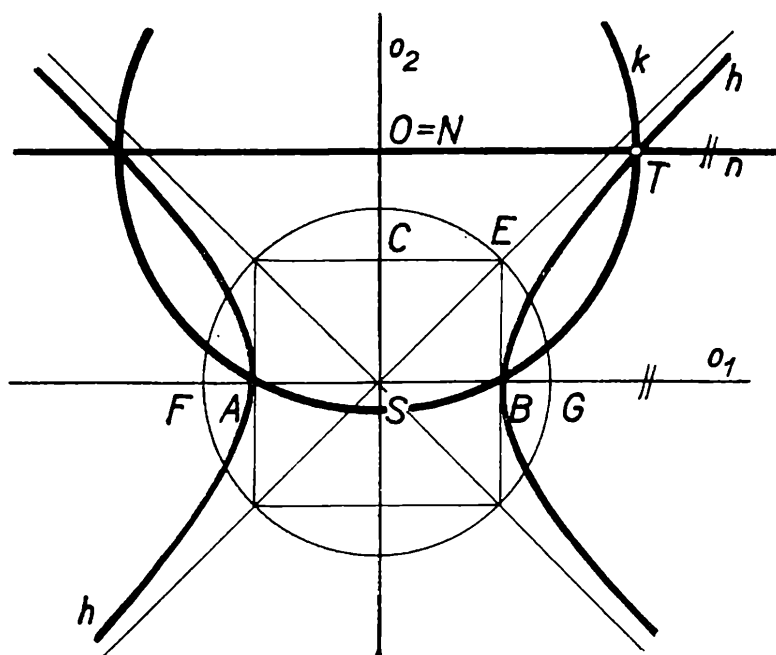
V *diskusi* se můžeme omezit na případ, kdy střed O kružnice k je uvnitř poloroviny o_1C , takže je $n > 0$. Potom je

$$0 < y = 2n \frac{b^2}{a^2 + b^2} < 2n; \quad (15)$$

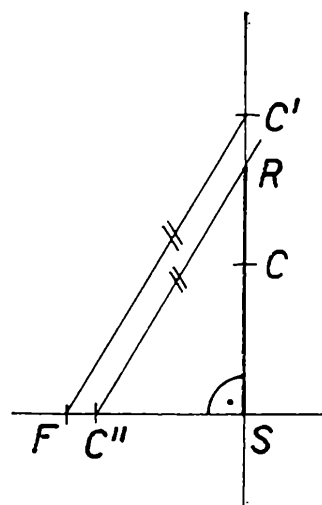
to znamená, že bod N leží mezi středem S hyperboly a bodem H $[0, 2n]$. Protože je $n < r$, je $2n < n + r$, takže bod H je vnitřním bodem kruhu omezeného kružnicí k ; tím spíše je takovým bodem i bod N . Proto přímka $n \parallel o_1$ procházející bodem N má vždy s kružnicí k dva různé body společné.

Je-li $a = b$, říká se hyperbole *rovnoosá*; její asymptoty jsou prodloužením úhlopříček čtverce se středními příčkami AB , CD (obr. 3) a jsou proto vzájemně kolmé. V tomto případě je podle (13)

$$y = n,$$



Obr. 3



Obr. 4

takže přímka n prochází středem O kružnice k . Toho lze použít k velmi jednoduché a přesné konstrukci bodů rovnoosé hyperboly (obr. 3).

Poznámka. Úsečku SN na obr. 2 můžeme sestrojít eukleidovskou konstrukcí. Je-li $n > 0$, je podle (13) také $y > 0$, a tedy

$$|SN| = y = \frac{2b^2n}{e^2},$$

neboť podle (X) je

$$a^2 + b^2 = e^2.$$

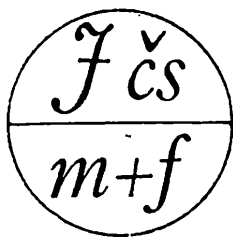
Z toho plyne, že je

$$y = \frac{tn}{e}, \quad (16)$$

kde je

$$t = \frac{2b \cdot b}{e}. \quad (17)$$

Sestrojíme nejprve úsečku o velikosti t a potom úsečku o velikosti y . Konstrukce první úsečky je provedena na obr. 4, v němž je $|SF| = e$, $|SC''| = |SC| = |CC'| = b$, $C''R \parallel FC'$; z podobnosti trojúhelníků SFC' , $SC''R$ plyne, že $|SR| = t$, kde t je udáno vzorcem (17). Obdobně lze potom sestrojít úsečku o velikosti y , která je určena vzorcem (16).



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 58, 1979-80

VEDOUČÍ REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA: Doc. dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, + doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

Vydává ministerstvo školství

**ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze
za odborné péče**

Jednoty československých matematiků a fyziků

OBSAH

Úvodní články

Drábek Karel: Již čtyřicáté výročí 17. listopadu 1939!	97
Hlaváč Albert: Docent RNDr. Július Krmešský, predstaviteľ najstarších žijúcich slovenských fyzikov, osemdesiatročný	385
Jelínek Miloš: Studenti a JČSMF	49
J. S.: Národní cena za matematiku v roce 1979	244
Kasal Karel: Leninův přínos k rozvoji dialektické logiky	433
Kraemer Emil: Jednota československých matematiků a fyziků a Rozhledy matematicko-fyzikální	1
Kubíček František: Vzpomínka na prof. Brejchu	289
Novák Josef: Národní cena za fyziku v roce 1979	193
Štoll Ivan: K šedesátinám akademika Bohumila Kvasila	241
Štoll Ivan, Janout Zdeněk: Zemřel docent Josef Dibelka	387

Matematika

Bican Ladislav: Algebraické kódování — I., II.	290, 337
Calda Emil: Několik náročnějších úloh o posloupnostech	50
Doboš Jozef: Trojuhelníková nerovnost	300
Spojitosť	389
Drexler Jan: Stanovení počtu dní mezi dvěma daty a určení dne v týdnu	253
Drs Ladislav: Fotografie a geometrie — I., II.	213, 268
Jak se kreslily perspektivy v době Albrechta Dürera	307
Haviar Alfonz: Použitie zvyškových tried pri riešení lineárnych diofantických rovníc	342
Horák Stanislav: Z geometrie trojúhelníku	258
Chajda Ivan: O jedné konstrukci trisekce úhlu	446
Janeček František: Několik úloh na maxima a minima skupin reálných čísel	209
J. S.: Nové obří prvočíslo	54
Čtyři noví dělitelé Fermatových čísel	247
Prvočíselná dvojčata	306
Věta o čtyřech barvách znova na scéně?	396
Kadlec Jaroslav: Binomická rovnice	440
Komenda Stanislav: O umění rozhodovat se aneb Potíže s gramatikou	350
Kraemer Emil: Mocnost v teorii kuželoseček	5

O jedné vlastnosti asymptot a tečen hyperboly	264
Konstrukce průsečíku kružnice s hyperbolou — I., II.	392, 449
Kratochvíl Jan: Řešení jedné diofantovské rovnice pomocí indukce	3
Kršňák Pavel: O niektorých aplikáciach stredu úsečky pomocou vektorov	148
Mída Jiří: O maticích	154
Další vzorec pro velikost pravoúhlého průmětu úhlu	210
Mráz Vlastimil: Prvočísla a čísla Fermatova	145
Mersennova čísla a čísla dokonalá	194
Co jsou spřízněná čísla?	245
Formáty papíru a matematika	358
Petránek Oldřich: Diferenciální rovnice v oboru polynomů	198, 248, 296
Půlpán Zdeněk: O schodištním vypínači a žárovce	204
Riečan Beloslav: Pravdepodobnosť v istote, istota v pravdepodobnosti	98
Sedláček Jiří: Největší známé prvočíslo	12
Srovnal Josef: O některých vlastnostech paraboly a jejich konstruktivním užití	101 101
V. S.: Dosud největší prvočíslo	257
Zelinka Bohdan: Matematické paradoxy	345

Fyzika

Chrapan Ján: Radiouhlík v archeológii	55
Janout Zdeněk: Měření v mikrosvětě	316
Experimentální způsob studia pružného rozptylu protonů na protonech	361
Klivanec Daniel: Lineárne ustálené elektrické siete	459
Kůs Josef, Myslík Jiří: Zobecněný proudový Kirchhoffův zákon a jeho použití	14
Maticový tvar Kirchhoffových zákonů	161
Odehnal Milan: Makroskopické kvantové jevy — supravodivost a supratekutost	217
Supratekuté kapalné helium — kvantová kapalina	273
Supravodivost — kolektivní kvantový jev	310
Pospíšil Jaroslav: Nelineární optika	111
Rejl Radislav: Ještě jednou brouk a guma	61
Tulak Rudolf: Gravitace a její důsledky	455

Astronomie

Hudec René: Novinky z Venuše	22
Nový pohled na Jupiter	167
Setkání se Saturnem	366
Svoboda Tomáš: Astronautika v Mnichově	278
Široká Miroslava, Široký Jaromír: Astronomické souřadnice - I., II.	62, 119
Široký Jaromír, Volf Ivo: Ověřte si, co znáte z astronomie	320

Z dějin exaktních věd

Borůvka Otakar: Vzpomínka na akademika Eduarda Čecha	466
Drábek Karel: Prof. PhDr. Jan Vojtěch	24
Havlíček Karel: Vzácné jubileum	368
Kotyk Josef: Hrst vzpomínek	26, 370
Malíšek Vladimír: Fyzika před 10, 100 a 1000 roky	280
Mička Ján: 110 rokov od vydania Zochovej Physiky	224
Rebstöck Radovan: Sto let elektrického světla	229
Řešátko Miloš: Vývoj mezinárodního metru	397
Sedláček Jiří: Kdo byl F. P. Ramsey	279
Šindelář Václav: Staré české délkové jednotky	68
Staročeské plošné míry	126
Staročeské míry duté a suté	168
Staré české „váhy“	231
Vrchotková Ivana: Česká odborná terminologie v době Karlově	373
Zima Miloslav: Cesta Martina Pačobuta-Odlěnického ke hvězdám	324

Naše soutěž

Výsledky loňské soutěže Rozhledů	29
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	30, 79, 135, 175
Úlohy k řešení	77, 132
Vyšín Jan: O soutěžní úloze 12 z minulého ročníku Rozhledů	86
Pro volnou chvíli	38, 89, 192, 233, 281, 336, 380, 423, 468
Hejný Milan: Trlenka	326
Horák Stanislav: Nejmladším matematikům	420

Olympiády

MO	39, 92, 139, 191, 283, 400
FO	92, 404
Boček Leo, Vrba Antonín: Úlohy III. kola MO kategorie A v roce 1979	184
Vrba Antonín: Kružnice na čtverečkovaném papíru	376

Nejmladším čtenářům	93, 424, 471
----------------------------	--------------

Ze zahraničních časopisů	40, 425, 472
---------------------------------	--------------

Různé

jm: O českém názvu pro televizi	41
Podíl českých a slovenských techniků na vývoji parních turbín	42
Padesát let od objevu planety Pluto	429
J. S.: Ještě o problému čtyř barev	143
Kotyk Josef: Beseda čtenářů k 100. výročí narození Alberta Einsteina .	141
Maršák Zlatko: Přijímací zkoušky na fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou v Praze	329, 382

Recenze	43, 94, 144, 237, 285, 430, 475
----------------	---------------------------------

Gravitace a její důsledky

RNDr. RUDOLF TULAK, VVVTŠ Martin

Otázka gravitace upoutávala lidského ducha ustavičně od starověku až podnes. Avšak o podstatě gravitace víme zatím pramálo. Hypotézy o jejím původu mají charakter náčrtu. Za to, co o gravitaci skutečně víme, děkujeme fyzikům, kteří se omezili na otázku: Jak působí gravitace?

Za první známe matematický fenomenologický *Newtonův zákon přitažlivosti*. Víme, že dvě libovolná tělesa se přitahují silou, která je přímo úměrná jejich hmotnostem a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti. Avšak tento zákon daný jev pouze popisuje a neodkrývá jeho podstatu, jeho příčinu.

Za druhé víme, že není možné těleso od přitažlivosti „odizolovat“ a že prostředí, na rozdíl od elektromagnetických polí, bez ohledu na své fyzikální a chemické vlastnosti, nepřekáží šíření gravitace ani je nepodporuje.

Za třetí víme, že původní hypotéza o působení hmoty silou do dálky (tzv. *actio in distans*) bez zprostředkujícího prostředí byla překonána. Z Einsteinovy gravitační teorie plyne, že gravitační rozruchy se šíří v slabých polích rychlostí konečnou, rychlostí světla. Ta je ve vakuu zároveň univerzální konstantou.

Za čtvrté víme, že na rozdíl od elektromagnetického pole se gravitační pole nekumulují a nedají se odčítat ani sčítat.

Z geometrické interpretace Einsteinových rovnic vyplývá, a to je pátý poznatek, přímá souvislost metriky prostoročasu s kosmickými objekty.

Za šesté víme, že otázka existence jakoby dvou různých fyzikálních veličin — hmoty setrvačné a gravitační — má toliko historický, případně didaktický význam. Setrvačné a gravitační síly mají stejnou fyzikální podstatu a platí pro ně stejné obecné zákony.

A nakonec víme, že místní projev gravitačního pole může být likvidován nebo zvětšen příslušným rotačním pohybem daného materiálního systému.

Všechny uvedené poznatky leží jakoby na povrchu gravitace, ale co je příčinou, jaká je její fyzikální podstata, to zatím nevíme. Podívejme se proto blíže na jednotlivé gravitační jevy naznačené v úvodu článku.

Pátráme-li po autorech zákona přitažlivosti, nazvaného zákonem Newtonovým, dovede nás historie k třem významným mužům, kteří musí být jmenováni. Za prvé je to *Tycho de Brahe*, kterému vděčíme za řadu přesných pozorování postavení planet. Z těchto údajů odvodil *Johannes Kepler* tři významné zákony, nazvané jeho jménem. A byl to především Kepler, který tušil, že síly ubývá se čtvercem vzdálenosti. Avšak *Isaac Newton* gravitační zákon matematicky formuloval a potvrdil ho kvalitativně pro zrychlení na zemském povrchu a pro zrychlení, jemuž podléhá Měsíc. Velikost Newtonovy exaktní formulace gravitačního zákona tkví v tom, že autor ji pojal jako výsledek interakcí mezi nejmenšími částicemi hmoty. To přímo vede k úměrnosti sil odpovídajícím hmotnostem těchto těles a konstanta úměrnosti vystupuje jako univerzální veličina pro všechny látky, nezávislá na prostředí obklopujícím gravitující tělesa a na přítomnosti jiných těles. Platnost takto formulovaného zákona Newton bezpečně prověřil jednak pozemskými pokusy s kyvadly, jednak vysvětlením pohybu planet, Měsíce i Jupiterových satelitů.

Gravitační síly se uplatňují především v kosmickém prostoru, ale v atomových rozměrech jsou zanedbatelné proti elektromagnetickým silám a v rozsahu atomových jader je zcela překrývají síly jaderné. Mezi dnes známými silovými interakcemi jsou pak síly gravitační nejslabší. Dvě závaží, každé o hmotnosti 1000 kg, se přitahují navzájem mizivě malou silou 0,0007 N na vzdálenost 1 m. Avšak velikost těchto sil zřetelně vynikne, uvědomíme-li si, že interakční síla mezi Měsícem a Zemí má hodnotu přibližně $2 \cdot 10^{20}$ N a mezi Zemí a Sluncem $3,6 \cdot 10^{22}$ N.

Odhadněme nyní, jak se změní intenzita tíhového pole Země během jednoho oběhu Měsíce kolem Země. Po dosazení číselných hodnot shledáme, že Měsícem vyvolané zrychlení má hodnotu řádově rovnu $0,0001 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$, což je asi desetimilióntina zemského gravitačního zrychlení. Tato, na první pohled zanedbatelná hodnota, má své známé důsledky na hladiny oceánů, které se „zvyšují“ až o 54 cm v místě k Měsíci nejbližším. V důsledku rotace Země kolem její osy se tato místa zvýšení a snížení oceánů ustavičně přemisťují. To je podstata slapových jevů — přílivu a odlivu.

Gravitační síla uděluje tělesům tíhové zrychlení. Přímé pozorování zdánlivě nepotvrzuje rovnost tíhového zrychlení pro všechna tělesa. Souvisí to s odporem vzduchu. Avšak byl to již *Aristoteles*, který se domníval, že ve vakuu by všechna tělesa padala stejně. Ze správné domněnky odvodil však paradoxní závěr: „Pád různých těles stejnou rychlostí je natolik absurdní, že není možná existence vakua.“ Teprve *Galilei* svými proslulými pokusy konanými na šikmé věži v Pise dokázal, že všechna tělesa padají na tomtéž místě Země se stejným zrychlením. Velikost tíhového zrychlení na stejné zeměpisné šířce a ve stejné nadmořské výšce mělo by být stejné. Přesná měření však velmi často ukazují na

odchylky od této normy čili na výskyt anomálií tíže, který bývá spojen také se změnou směru tíže. Příčinou anomálií je nerovnoměrné rozdělení hmoty v blízkosti místa měření. Změna tíhového zrychlení se stala významným pomocníkem geologů při průzkumu horní části zemské kůry.

Newtonovým gravitačním zákonem byla do fyziky zavedena akce zv. *actio in distans*, tj. představa, že hmota může působit silou přímo do dálky. Proti možnosti takového působení byly vznášeny námitky za všech dob. Sám autor se jim nikterak neuzavíral, avšak zásadně odmítal činit hypotézy o podstatě nebo o příčinách gravitace. Tato vlastnost gravitační interakce, dnes naprosto nepřijatelná, byla později přisuzována i silám elektrickým a teprve před sto lety vyloučena *Maxwellem* u sil elektromagnetických. Teorií relativity byla posléze nekonečná rychlost šíření všech polí omezena rychlostí světla. Naproti tomu Newtonův předpoklad nezávislosti gravitace na prostředí platí dodnes, a to i pro síly elektrické a magnetické, které se jeví závislými na prostředí jen formálně při obvyklém fenomenologickém popisu, vynuceném potřebami praxe.

Moderní fyzika, a to nejenom Einsteinova teorie, ale i jiné polní teorie gravitace, předpovídají existenci gravitačních vln. Byly zatím zavedeny složitou matematickou cestou, avšak experimentálně existence gravitačních vln dosud bezpečně prokázána nebyla.

V úvodu článku byla naznačena identita hmoty setrvačné a hmoty gravitační. Fyzikální veličina hmota vystupovala v klasické fyzice ve dvou základních na sobě nezávislých zákonech, a to v druhém zákoně Newtonově (z. síly) a v gravitačním zákoně. Takto vznikly během historického vývoje pojmy hmoty *setrvačné* a hmoty *gravitační*. Ještě sám Newton dokázal, že úměrnost mezi setrvačnou a gravitační hmotou je

splněna s přesností $\frac{1}{1000}$. *Bessel* prováděl pokusy s kyvadly z rozmani-

tých látek a dospěl k témuž výsledku s přesností $\frac{1}{60\,000}$. Protože tato rovnost má hlubší význam, hovoříme o identitě gravitační a setrvačné hmoty. Později byla ještě prokázána důmyslnými experimenty dynamickými, statickými a především na základě jevů astronomických.

Bylo již řečeno, že místní projev gravitačního pole může být měněn příslušným rotačním pohybem daného materiálního systému. Děje se tak v důmyslných centrifugách při výcviku pilotů a kosmonautů, kteří si krátkodobě zvykají na značná přetížení, kterým jsou vystaveni především při startu nadzvukových letounů a raket.

Na Zemi k analogickému jevu dochází v důsledku rotace Země. Odstředivé zrychlení příslušné tomuto pohybu má v různých místech povrchu Země různou hodnotu. Tak např. odstředivé zrychlení v Praze činí

$$a_n = 0,0026 \, g,$$

tj. více než $1/4 \%$ gravitačního zrychlení. Toto zrychlení se vektorově skládá s gravitačním zrychlením, tj. se zrychlením, které by v příslušném místě směřovalo do středu Země, kdyby se neotáčela, ve výsledné pozorované *tíhové zrychlení* g . Budeme proto důsledně rozlišovat *gravitační zrychlení*, jehož hodnota vyplývá z gravitačního zákona od *tíhového zrychlení*, které je výslednicí gravitačního zrychlení a odstředivého zrychlení. Různá velikost tíhového zrychlení na povrchu Země je tedy způsobena jednak různou vzdáleností od středu, jednak různým odstředivým zrychlením, způsobeným rotací Země kolem vlastní osy (činí maximálně $a_n = 0,0338 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Jako normální tíhové zrychlení se uvádí:

$$g_n = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ (přesně) }.$$

Význam normálního tíhového zrychlení je ten, že umožňuje jednoznačně definovat některé fyzikální jednotky a že se výsledky měření provedených při skutečném tíhovém zrychlení v příslušném místě dají redukcí na tuto normální hodnotu tíhového zrychlení uvést na společný základ.

V závěru článku pouze stručně nastíníme vliv gravitace na geometrii prostoročasu. Tento úkaz exaktně řeší obecná teorie relativity. Stručnost článku nedovoluje podat její přesný matematický popis ani přehled teorií gravitace, které lze považovat za životaschopné. Obecnou teorii relativity je ovšem možné stručně charakterizovat jako teorii prostoru, času a gravitace založenou na předpokladu, že všechny pohyby jsou relativní. V použití matematického aparátu je zde jistá analogie s teorií Maxwellovou, avšak rovnice gravitačního pole se liší od Maxwellových rovnic elektromagnetického pole svou nelineárností. Z geometrické interpretace Einsteinových rovnic vyplývá, že geometrie je experimentální vědou, na jejíž zákonitosti má vliv rozložení těles a polí v prostoru. V inerciálních soustavách platí v místech vzdálených od velkých těles velmi přibližně euklidovská geometrie, v níž je nejkratším spojením dvou bodů úsečka. Vlivem gravitačního pole se však změní euklidovský prostor v zakřivený prostor Riemannův, kde nejkratším spojením dvou bodů je oblouk geodetické křivky. Pohyb tělesa v gravitačním poli je invariantně zobrazen příslušnou světočárou ve čtyřrozměrném zakřiveném prostoročase. Pohybu částice, na kterou nepůsobí žádné jiné síly než gravitační, přísluší pak geodetická čára v prostoročase, jehož křivost je určena rozložením hmoty a potenciálu gravitačního pole v prostoru.

A právě kauzální souvislost metriky prostoročasu s kosmickými objekty, zakotvená v Einsteinově teorii jako základní revoluční myšlenka, je nejcenějším přínosem. Oproštuje fyziku od idealistického pojmu absolutního prostoru a vysvětluje setrvačnost jako gravitační účinek kosmických těles.

Použitá literatúra :

1. R. TULAK: Čtyři hlavní síly objevené studiem fyzikálního světa, Fyz. ve škole, 4/73, str. 310
2. J. KOTYK: Newtonův gravitační zákon, Rozhledy M-F, roč. 73—74, str. 44
3. J. KOTYK: Actio in distans, Rozhledy M-F, roč. 73—74, str. 89
4. V. F. JEFIMENKO: Fyzikální obraz světa, M a F ve škole, roč. 73—74, str. 520
5. ZD. HORÁK: Co je obecná teorie relativity, M a F ve škole, roč. 75—76, str. 265
6. J. PŘIKRYL: Fyzika a materiálnost světa, M a F ve škole, roč. 75—76, str. 671
7. M. CLIFFORD: Ostře sledovaný Einstein, Pokroky M-F, č. 5/73, str. 256
8. ZD. HORÁK: Sto let Machova principu, Pokroky M-F, č. 3/73, str. 123
9. B. VYBÍRAL: K problematice setrvačné a gravitační hmotnosti, Pokroky M-F, č. 5/74, str. 270
10. ZD. HORÁK: Fyzika, SNTL, Praha 1976

Lineárne ustálené elektrické siete

Doc. RNDr. Ing. DANIEL KLUVANEC, CSc., PF Nitra

V texte sa zoznámime s riešením takých elektrických sietí, ktoré obsahujú lineárne rezistory a ideálne zdroje jednosmerného elektromotorického napätia. Poukážeme na niektoré prostriedky a metódy, ktoré zjednodušujú a uľahčujú analýzu elektrických sietí v porovnaní so známou metódou riešenia, vyplývajúcou z priameho použitia Kirchhoffových zákonov.

1. Základné pojmy

Elektrické prvky v lineárnych sieťach sú zdroje elektromotorického napätia (ďalej len EMN), rezistory a spojovacie vodiče. O nich predpokladáme, že zdroj EMN má stále EMN U_e a stály vnútorný odpor r . Rezistory majú stálu hodnotu R odporu (ich voltampérové charakteristiky sú lineárne), spojovacie vodiče majú zanedbateľne malý odpor v porovnaní s ostatnými časťami siete. Rezistor je *pasívny* elektrický prvok (nemá vlastný zdroj EMN, podobne ako kondenzátor, cievka atď.), zdroj EMN je *aktívny* elektrický prvok (podobne ako fotodióda, termoelektrický článok atď.).

Elektrickú sieť vytvárajú pasívne a aktívne elektrické prvky navzájom pospájané rôznymi spôsobmi. Pri teoretických úvahách a analýzach sietí je účelné nahrádzať ich grafickými modelmi, tzv. *schémami*. Zobra-

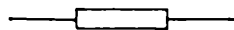
elektrický prvok

značka prvku

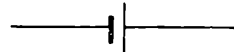
spojovací vodi



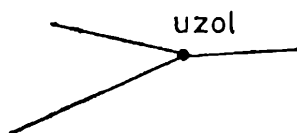
rezistor



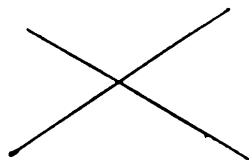
zdroj EMN



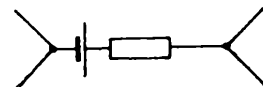
Obr. 1



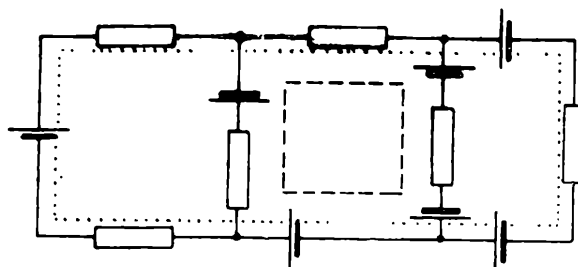
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

zovanie, kreslenie schém, je normalizované (všetky časti elektrických sietí majú svoje normalizované značky) a riadi sa ČSN (obr. 1).

Uzol elektrickej siete je vodivé spojenie najmenej troch vodičov (obr. 2). V schémach sa vyznačuje plnou bodkou. Schéma vodičov, ktoré sa navzájom križujú bez vodivého spojenia, neobsahuje v mieste prekríženia bodku (obr. 3).

Vetva je časť elektrickej siete medzi dvoma susednými uzlami (obr. 4).

Obvod elektrickej siete vytvárajú tie vetvy, ktoré predstavujú uzavretý celok. Ak si odmyslíme ostatnú časť siete, sú navzájom spojené do série (obr. 5). V schéme elektrickej siete každý obvod rozdeľuje sieť na dve časti: vnútornú, ktorú vytvárajú vetvy vo vnútri obvodu, a vonkajšiu s vetvami vo vonkajšej časti obvodu. *Jednoduchý obvod* je taký, ktorý neobsahuje vo vnútornej časti obvodu ani jednu vetvu. *Zložený obvod* má vo vnútornej časti obvodu aspoň jednu vetvu. Čiarkované v schéme na obr. 5 je vyznačený jednoduchý, bodkované zložený obvod. Tieto pojmy majú význam len pre schémy elektrických sietí. Ten istý obvod určitej elektrickej siete môže byť v jednej schéme siete zložený a v inej jednoduchý, čo je závislé od zobrazenia schém siete. Určitá elektrická sieť môže mať rôzne grafické modely — schémy, čo nijak neovplyvňuje teoretickú analýzu siete z hľadiska výsledkov.

Elektrickú sieť rovinnú je možné zobraziť schémou, ktorá neobsahuje žiadne nevodivé prekríženia vodičov. Každá schéma *priestorovej elektrickej siete* obsahuje nevodivé prekríženia vodičov.

Ak všetky vetvy schémy elektrickej siete nahradíme čiarami, dostaneme geometrický útvar, ktorý sa nazýva *kostra elektrickej siete*. Na obr. 6 je kostra elektrickej siete z obr. 5.

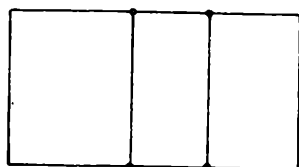
V ďalšom sa budeme zaujímať len o rovinné elektrické siete. Pre jednoduchosť vyjadrovania budeme pojmy elektrická sieť a jej schéma považovať za synonymné.

Každá elektrická sieť sa skladá z konečného počtu jednoduchých obvodov. Všetky vetvy, ktoré sú spoločné pre dvojice susedných jednoduchých obvodov, vytvárajú tzv. *úplný strom elektrickej siete*.

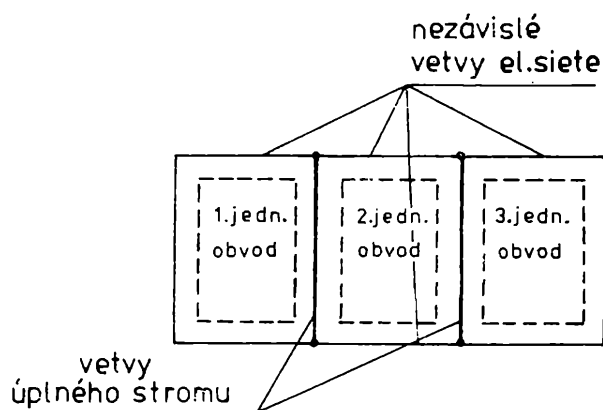
Ostatné vetvy, mimo vetiev úplného stromu, sa volajú *nezávislé vetvy siete* (alebo systém nezávislých vetiev) — obr. 7. Teóriou riešenia elektrických sietí sa zaoberá náuka, ktorú nazývame *topológia elektrických sietí*.

2. Niektoré princípy a metódy riešenia elektrických sietí

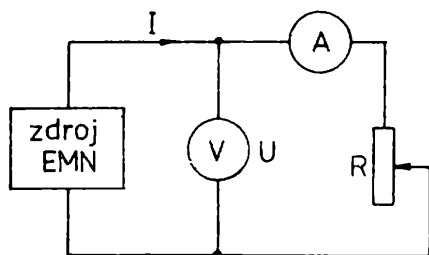
Úplná informácia o zdroji *EMN* je daná jeho voltampérovou charakteristikou, t.j. funkciou $U = f(I)$ napätia U zdroja a prúdu I , ktorý preteká zdrojom pri jeho zaťažení (obr. 8). Funkcia $U = f(I)$ môže byť



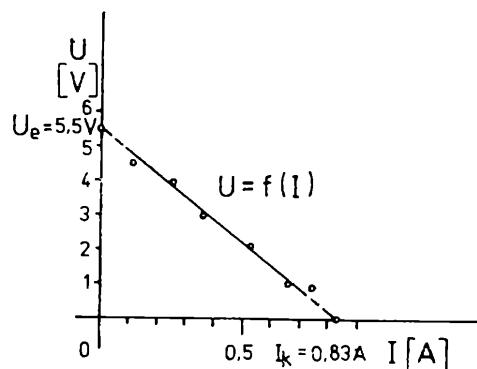
Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

zadaná tabuľkou alebo graficky (obr. 9). Reálny zdroj s VA — charakteristikou znázornenou na obr. 9 možno teoreticky nahradiť jedným ideálnym zdrojom o napätí U_e a jedným odporom r dvojakým spôsobom.

Priesečníky extrapolovaného grafu funkcie $U = f(I)$ s osami U a I súradnicového systému určujú charakteristické hodnoty zdroja, čo ukážeme pomocou nasledovnej úvahy. Pre funkciu $U = f(I)$ možno odvodiť analytickú rovnicu

$$U = kI + U_e = -\frac{U_e}{I_k} I + U_e. \quad (1)$$

Ak v rovnici (1) položíme $I = 0$, potom $U = U_e$, čo je v podstate známe: napätie U nezaťaženého zdroja je rovné EMN U_e zdroja. Ak $U = 0$, potom $I = I_k$, zdroj je spojený nakrátko. I_k sa volá prúd nakrátko. Podiel $\frac{U_e}{I_k}$ reprezentuje vnútorný odpor r zdroja. Z (1) totiž pre $U = 0$ platí

$$U_e = rI_k. \quad (2)$$

Ak pripojíme k zdroju spotrebič s odporom R , potom napätie U na spotrebiči je

$$U = RI = R \frac{U_e}{r + R}. \quad (3)$$

a) *Napätiová náhrada zdroja* pozostáva z ideálneho zdroja napätia U_e spojeného do série s odporom $r = \frac{U_e}{I_k}$, ako to priamo vyplýva z rovnosti (3).

b) *Prúdová náhrada zdroja*
Úpravou rovnice (3) máme

$$U = RI_k \frac{\frac{U_e}{I_k}}{r + R} = RI_k \frac{r}{r + R}. \quad (4)$$

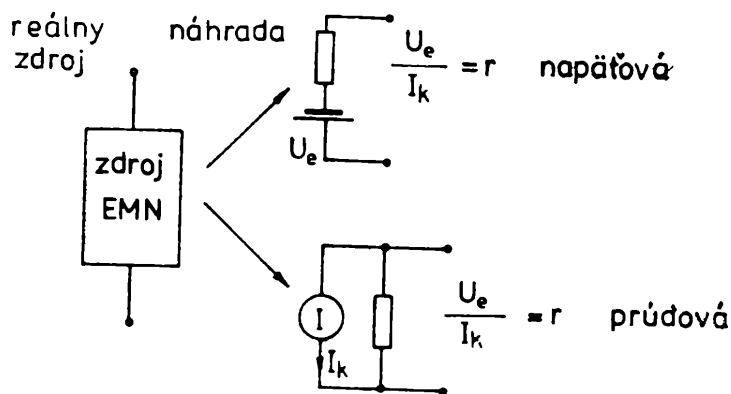
Zdroj možno teda nahradiť tzv. prúdovým zdrojom stáleho prúdu I_k , ku ktorému je paralelne pripojený odpor r .

Obe náhrady sú znázornené na obr. 10.

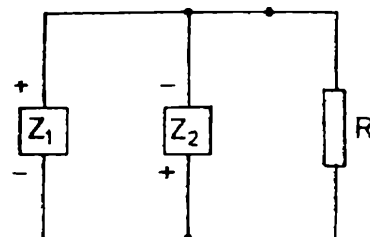
Napätovú náhradu zdrojov je vhodné použiť pri sériovom spojení, prúdovú pri paralelnom spojení viacerých zdrojov.

Príklad 1:

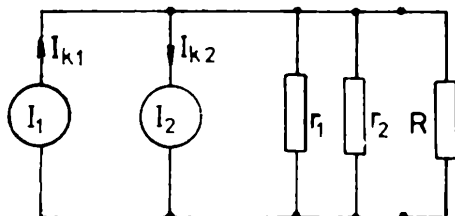
Dva antiparalelne spojené zdroje (obr. 11), ktorých EMN a vnútorné odpory sú známe ($U_{e1} = 6,3 \text{ V}$; $r_1 = 0,30 \Omega$; $U_{e2} = 8,0 \text{ V}$, $r_2 = 1,0 \Omega$), sú pripojené na spotrebič s odporom $R = 6,0 \Omega$. Určte napätie U na spotrebiči.



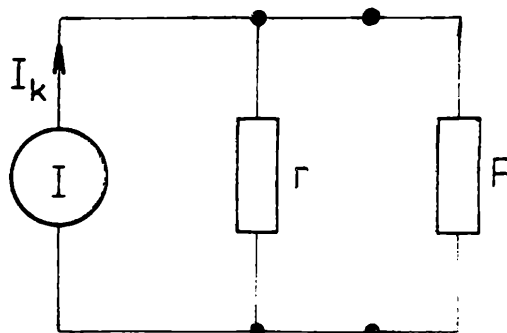
Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

Riešenie:

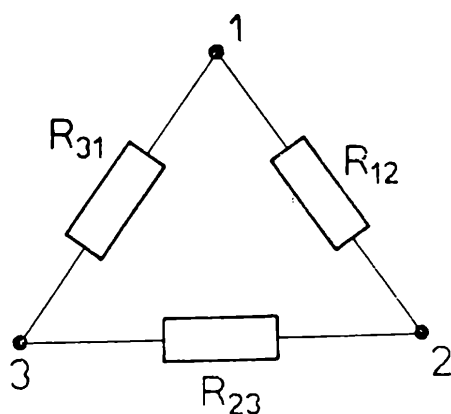
Najskôr určíme náhradný zdroj dvojice zdrojov Z_1, Z_2 . Platí $I_{k1} = 21 \text{ A}$, $I_{k2} = 8,0 \text{ A}$. Náhradná schéma siete z obr. 11 je na obr. 12. Po ďalšom zjednodušení siete platí

$$I_k = I_{k1} - I_{k2} \quad \text{a} \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

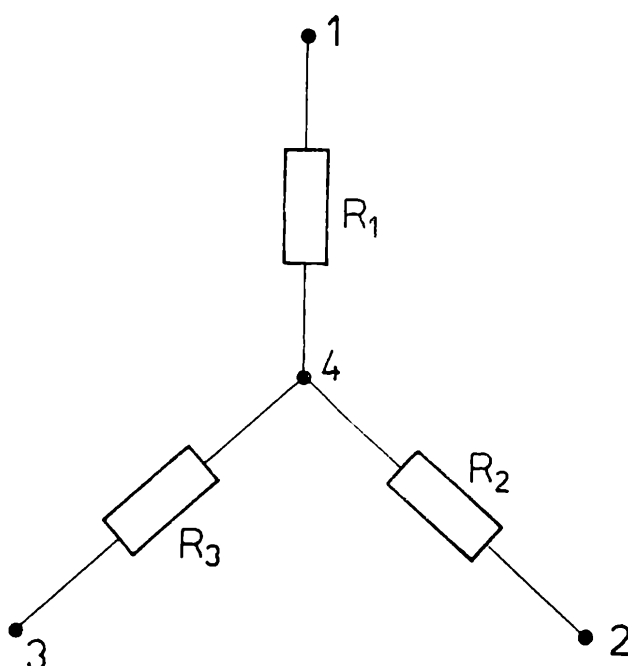
Číselne $I_k = 13 \text{ A}$, $r \doteq 0,23 \Omega$, schéma siete je na obr. 13. Napätie U na spotrebiči je

$$U = R I_k \frac{r}{R + r} \doteq 2,9 \text{ V}$$

Výsledný odpor skupín rezistorov, ktoré sú spojené sériovo, paralelne alebo sérioparalelne, ste sa naučili počítať na hodinách fyziky. Rezistory však môžu byť spojené v elektrickej sieti aj iným spôsobom, ktorý nepatrí medzi uvedené základné zapojenia. Ide o trojice rezistorov spojené do trojuholníka alebo do hviezdy (obr. 14, 15). Geometrické usporiadanie rezistorov v skutočnosti a ani v schéme nemusí vždy predstavovať trojuholník alebo hviezdu. Kritériom pre posúdenie zapojenia je, že trojica rezistorov je pripojená k bodom siete podľa schémy na obr. 14, 15. Elektrickú sieť, ktorá obsahuje takéto útvary, riešime tak, že ekvi-



Obr. 14



Obr. 15

valentne nahradzujeme trojuholníky hviezdami a opačne. Matematické vzťahy, vyjadrujúce závislosť odporov R_{ij} trojuholníka a odporov R_k hviezdy, sa volajú transfiguračné rovnosti.

Najjednoduchší spôsob ich odvodenia vyplýva z úvahy, že obe zapojenia sú elektricky ekvivalentné, ak celkové odpory medzi bodmi 12, 23, 31 sú v oboch zapojeniach rovnaké, t. j.:

Odpor medzi bodmi	$\triangle$	$\star$	
12	$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	$=$	$R_1 + R_2$
23	$\frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	$=$	$R_2 + R_3,$
31	$\frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	$=$	$R_3 + R_1.$

(4)

Z rovností (4) je možné určiť funkcie $R_k = f(R_{ij})$, alebo $R_{ij} = g(R_k)$. Priamo zo vzťahov (4) vyplýva

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R}, \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R}, \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R}, \quad (5)$$

kde $R = R_{12} + R_{23} + R_{31}$.

Pri opačnej transfigurácii vyjadríme z (5) napr.

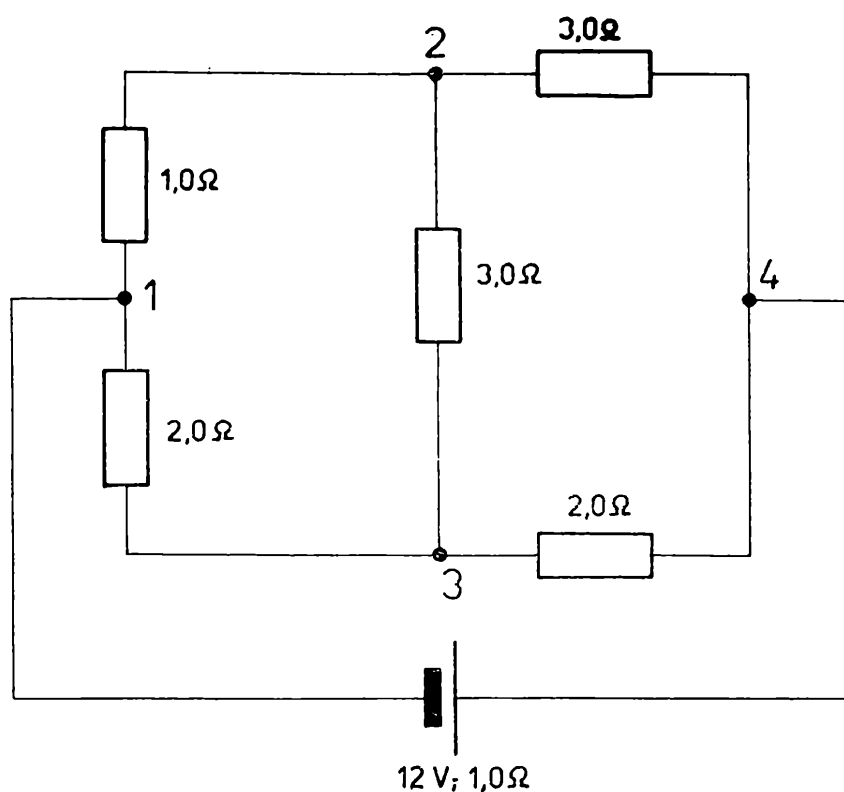
$$R_{23} = R_{12} \frac{R_3}{R_1}, \quad R_{31} = R_{12} \frac{R_3}{R_2}$$

a dosadíme do prvej z rovníc (4). Z nej potom vyjadríme R_{12} ; podobne postupujeme pri výpočte R_{23} a R_{31} . Dostaneme vzťahy

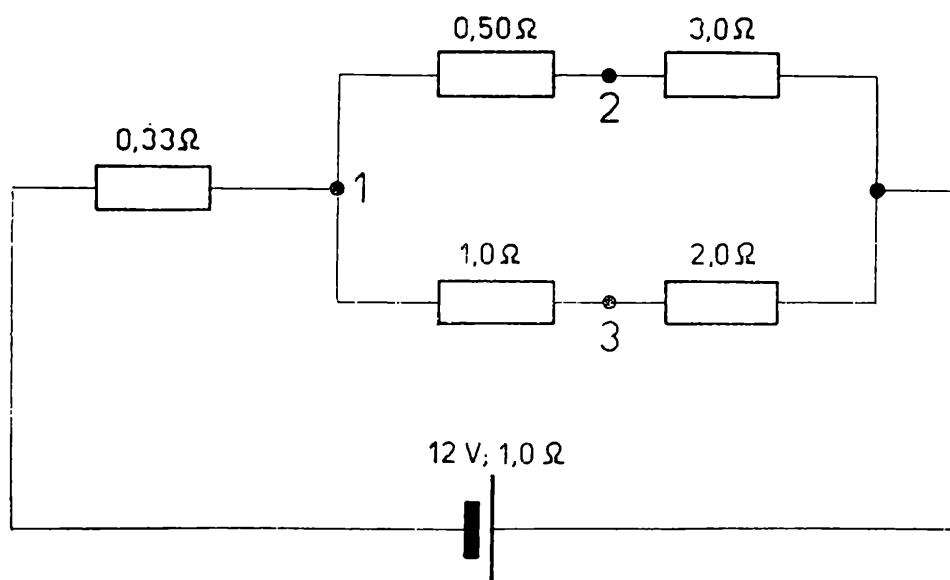
$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1},$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$
(6)

Vzhľadom na cykličnosť indexov, ktoré vo vzťahoch (5) a (6) vystupujú, sú tieto ľahko zapamätateľné.



Obr. 16



Obr. 17

Poznámka: Transfiguračné rovnosti (5), (6) možno odvodiť aj porovnaním príslušných napätí naprázdno a prúdov nakrátko v oboch zapojeniach ([1], [2]).

Príklad 2:

Určte príkon P dodávaný zo zdroja EMN do vonkajšieho obvodu, ktorého schéma je na obr. 16.

Riešenie:

Trojuholník 123 nahradíme hviezdou (obr. 17), kde $R_1 = \frac{1\Omega \cdot 2\Omega}{6\Omega} \doteq 0,33\Omega$, a podobne $R_2 = 0,50\Omega$, $R_3 = 1,0\Omega$. Obvod sa zjednodušil na sériovoparalelné zapojenie, ktorého riešením máme $P = R I^2 \doteq 32\text{ W}$.

Literatúra:

[1] Kneppo L., Benda O.: Teoretická elektrotechnika I. časť, SVŠT Bratislava 1970

2] Pinskiy A. A.: Zadači po fizike, Nauka Moskva 1977

Z dějin exaktních věd

Vzpomínka na akademika Eduarda Čecha

Akademik OTAKAR BORŮVKA

Mezi československé matematiky, kteří svým dílem podstatně přispěli k pokroku světové matematiky, patří v první řadě *Eduard Čech* (29. 6. 1893 — 15. 3. 1960).

Eduard Čech, rodák ze Stračova v severovýchodních Čechách, studoval matematiku na univerzitě v Praze v obtížných podmínkách první světové války a později (1921—22) v Turínu v Itálii u věhlasného profesora *G. Fubiniho*. Po krátkém působení na střední škole v Praze stal se v r. 1923 nástupcem profesora *Matyáše Lercha* na brněnské univerzitě, načež po skončení druhé světové války přešel v r. 1945 jako profesor na univerzitu do Prahy.

S příchodem Eduarda Čecha rozproudil se v Brně čilý matematický život. Eduard Čech především nesmírně oživil přednášky pro posluchače, které konal velmi přitažlivě a na nejrozmanitější témata. Vnesl vzruch do univerzitních zvyklostí svými promyšlenými organizačními náměty, zval do Brna vynikající zahraniční matematiky, sám konal časté přednáškové zájezdy do ciziny a o nich referoval. Oživil činnost JČSMF, na jejíchž schůzích velmi často přednášel a představoval svoje žáky a nesmírně příznivě působil na své spolupracovníky, jimž byl obětavým a laskavým učitelem a nedostižným vzorem pracovitého a pro matematiku nadšeného člověka.

Období mezi oběma válkami bylo pro vědeckou práci v matematice velmi příznivé. Tehdy teorie množin nastupovala svoji vítěznou cestu do moderní matematiky. Jejím vlivem vznikaly nové matematické obory (moderní algebra, topologie, funkcionální analýza aj.), ukazující nebývalé teoretické a aplikační možnosti v jiných vědách, zejména technických. Tento vývoj pokračoval po druhé světové válce ještě v širším rozsahu, kdy čerpal nové podněty v souvislosti s novou velkolepou počítačící technikou a kdy se do něj postupně zapojovali příslušníci národů osvobozených od koloniální nadvlády. Eduard Čech nebyl tímto vývojem unášen, ale ve směrech své vědecké práce jej spolutvořil od samých základů.

Za své činnosti na pražské univerzitě vyvinul Eduard Čech další velké úsilí o rozvoj československé matematiky a zejména o organizaci vědecké matematické práce v rámci Československé akademie věd, zřízené v r. 1952. Celková vědecká činnost Eduarda Čecha zahrnuje 94 vědeckých prací, devět vědeckých knih a 7 středoškolských učebnic.

Prof. Eduard Čech vychoval u nás mnoho vědeckých pracovníků v matematice, vytvořil vědecké školy světové pověsti v oborech diferenciální geometrie a topologie a podstatně přispěl k modernizaci vyučování matematice na našich středních školách, zejména v prvním období těchto snah. Četní matematici na celém světě byli ovlivněni jeho myšlenkami a navazovali a stále navazují na jeho vědecké práce.

Za vědecké a budovatelské zásluhy byly akademiku Eduardu Čechovi uděleny v našem státě vysoké pocty a rovněž zahraniční univerzity, akademie a vědecké společnosti jej poctily vysokými vyznamenáními.

Pro volnou chvíli

Jedna úloha o kvádri

RNDr. ĽUDOVÍT HRDINA, Bratislava

Krátky článok RNDr. J. Šedivého „Řešení jednoho výzkumného úkolu“ v 2. čísle tohoto ročníka obsahoval i text úlohy pre badateľov:

Určte veľkosti hrán všetkých kvádrov, ktoré majú povrch vyjadrený tým istým číslom ako objem a ich rozmery sú prirodzené čísla.

Uvediem teraz jej riešenie. Na prvý pohľad ide o geometrickú úlohu, no v podstate sa jedná o úlohu zameranú na využitie deliteľnosti prirodzených čísel.

Veľkosti hrán kvádra označme a , b , c . Keďže objem a povrch sú vyjadrené tým istým prirodzeným číslom, platí

$$abc = 2(ab + ac + bc). \quad (1)$$

Z rovnice (1) vyjadríme c ako činiteľa

$$c(ab - 2a - 2b) = 2ab. \quad (2)$$

Pretože $c > 0$, $2ab > 0$, je nutne aj

$$ab - 2a - 2b > 0, \text{ čiže } ab > 2a + 2b. \quad (3)$$

Vyjadrime c podielom

$$\begin{aligned} c &= \frac{2ab}{ab - 2a - 2b} = \frac{2(ab - 2a - 2b) + 4a + 4b}{ab - 2a - 2b} = \\ &= 2 + 4 \frac{a + b}{ab - 2a - 2b}. \end{aligned}$$

Je zrejmé, že zlomok v poslednom uvedenom vzťahu reprezentuje prirodzené číslo. Preto $c > 2$ a zároveň

$$\begin{aligned} 4 \frac{a + b}{ab - 2a - 2b} &\geq 1, \\ 4a + 4b &\geq ab - 2a - 2b, \\ 6a + 6b &\geq ab. \end{aligned} \quad (4)$$

Na základe nerovníc (3) a (4) dostávame

$$6a + 6b \geq ab > 2a + 2b. \quad (5)$$

Nerovnicu (5) budeme riešiť v množine $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísel, pritom budeme považovať a za parameter, b za neznámu.

- I. Pre $a = 1$ je $6 + 6b \geq b > 2 + 2b$,
čiže $6 + 5b \geq 0 > 2 + b$.

Pre b neexistuje riešenie v $\mathbb{N}$.

- II. Pre $a = 2$ je $12 + 6b \geq 2b > 4 + 2b$,
čiže $12 + 4b \geq 0 > 4$.

Pre b opäť neexistuje riešenie v $\mathbb{N}$.

- III. Pre $a = 3$ je $18 + 6b \geq 3b > 6 + 2b$,
čiže $18 + 4b \geq b > 6$.

Z rovnice (2) v tomto prípade plyní, že

$$c = \frac{6b}{3b - 6 - 2b} = \frac{6b}{b - 6} = 6 + \frac{36}{b - 6}. \quad (6)$$

Zlomok vo vzťahu (6) reprezentuje prirodzené číslo, preto b môže nadobúdať iba hodnoty 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42. Tieto hodnoty zapíšeme do tabuľky, pričom c určíme zo (6)

a	3	3	3	3	3	3	3	3	3
b	7	8	9	10	12	15	18	24	42
c	42	24	18	15	12	10	9	8	7

Usporiadané trojice (3, 7, 42), (3, 42, 7) sú vyjadrením zhodných kvádrov, preto treba brať do úvahy vždy iba jeden z nich. Týmto spôsobom získame práve päť kvádrov (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12).

- IV. Pre $a = 4$ je $24 + 6b \geq 4b > 8 + 2b$,
čiže $24 + 4b \geq 2b > 8$.

Z rovnice (2) je

$$c = 4 + \frac{16}{b - 4}. \quad (7)$$

Podobnou úvahou ako v III. najdeme hodnoty pre b , teda $b = 5, 6, 8, 12, 20$. Hodnoty pre c získame zo vzťahu (7), takže rozmery ďalších troch kvádrov sú (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8).

- V. Pre $a = 5$ je $30 + 6b \geq 5b > 10 + 2b$,
čiže $30 + 4b \geq 3b > 10$

Z rovnice (2) je

$$c = 3 + \frac{b + 30}{3b - 10}. \quad (8)$$

Ďalšia úvaha je však zložitejšia ako v prípadoch I. až IV. Ak zvažíme, že zlomok v (8) má mať čitateľa väčšieho alebo rovného menovateľa, platí

$$b + 30 \geq 3b - 10, \quad 2b \leq 40, \quad b \leq 20.$$

Dosadením za b , ako „cestu najmenšieho odporu“, získame spoľahlivo výsledky: $b = 4, 5, 10, 20$, ktoré vedú iba k jedinému novému kváдру $(5, 5, 10)$. (Overte!)

VI. Pre $a = 6$ je $36 + 6b \geq 6b > 12 + 2b$,
čiže $36 + 4b \geq 4b > 12$.

Z rovnice (2) dostávame

$$c = 3 + \frac{9}{b - 3}, \quad (9)$$

z čoho vyplýva, že $b = 4, 6, 12$. Uvedené hodnoty opäť vedú k jednému novému kváдру, presnejšie povedané ku kocke $(6, 6, 6)$.

VII. (Podľa návodu jedného z čitateľov Rozhľadov.) Pre $a > 6$ môžeme pokračovať podobným spôsobom ako doposiaľ. Budeme však hľadať iba tie kvádre, pre ktoré platí, že $b > 6$ a zároveň $c > 6$, lebo rozmery všetkých ostatných sme už zistili v prípadoch I. až VI. Predpokladajme teda, že $a > 6, b > 6, c > 6$.

Z rovnice (2)

$$c(ab - 2a - 2b) = 2ab$$

a zo vzťahu $c > 6$ vyplýva, že

$$\begin{aligned} 6(ab - 2a - 2b) &< 2ab, \\ 4ab - 12b &< 12a, \quad /:4 \\ b(a - 3) &< 3a. \end{aligned}$$

Ak využijeme, že $b > 6$, získame nerovnicu

$$\begin{aligned} 6(a - 3) &< 3a, \\ 3a &< 18, \\ a &< 6, \end{aligned}$$

čo vyvracia náš predpoklad, že $a > 6$. Máme teda potvrdené, že najmenej jeden z rozmerov kvádra musí byť menší alebo rovný šiestim.

Záver. Existuje spolu desať typov kvádrov, ktoré majú povrch vyjadrený tým istým číslom ako objem a ich rozmery sú prirodzené čísla. Sú to kvádre opísané trojicami rozmerov: $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(3, 12, 12)$, $(4, 5, 20)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(5, 5, 10)$, $(6, 6, 6)$.

Nejmladším čtenářům

.....

1. Ve sportovní rubrice denního tisku byla uvedena tato zpráva:

V 19. ročníku velmistrovského turnaje IBM v Amsterdamu zvítězil náš velmistr Vlastimil Hort s 9 body ze 13 partií (bez prohry).

Vaším úkolem, milí čtenáři, je zjistit, kolik partií Hort vyhrál a kolik remizoval.

2. Jiný den jsme četli, že jistý šachista získal 14 bodů ze 17 možných zápasů. — Zjistěte, kolik partií měl onen šachista vítězných, kolik jich prohrál a kolik remizoval.

3. V pionýrském táboře se sešli čtyři chlapci: Bohouš, Milan, Staník a Toník. Po vzájemném seznámení si povídali o svých zálibách. Přitom vyšlo najevo, že:

1° Staník neholduje sprintu.

2° Bohouš a Milan pěstují skoky do výšky i do dálky, ale naproti tomu Toník v nich žádnou zálibu nenašel.

3° Milan a Bohouš nevědí celkem nic o lukostřelbě, v níž exceluje Staník s Toníkem.

4° Toník se Staníkem se sice obdivují výkonům gymnastů, ale sami gymnastiku neprovozují.

5° Staník hraje šach právě tak jako Milan a Bohouš, kdežto Toník dává přednost halmě.

6° Bohouš s Milanem rádi hrají dámu, zatímco Staník s Toníkem hrají rádi lotu.

Najděte ty dva chlapce, kteří mají co nejvíc společných zájmů.

4. Žáci jedné třídy chodí do tří zájmových kroužků, které označíme K , L , M . Do kroužku K chodí 12 žáků a z toho 4 chodí též do kroužku L a 6 do kroužku M . Kroužek L má 14 účastníků a přitom 5 chodí i do M . Kroužek M navštěvuje 14 žáků. Ani jeden žák nechodí současně do všech tří kroužků. Každý však navštěvuje aspoň jeden. Kolik žáků je ve třídě?

Výsledky:

1. Hort 5 partií vyhrál a 8 remizoval.

2. Je více možností: (11; 6; 0), (12; 4; 1), (14; 0; 3), kde první číslo v závorce představuje počet vítězství, druhé počet remiz a třetí počet proher.

3. Bohouš s Milanem, neboť oba našli oblibu ve skocích a ve hře v šachy i v dāmě. Naproti tomu nijak je nenadchla lukostřelba a nedá se říci, že by měli odpor ke sprintu, gymnastice, halmě a lotu.

4. Ve třídě je 25 žáků.

Stanislav Horák

Ze zahraničních časopisů

Tento článek je zpracován podle dvou pramenů. Prvním pramenem je maďarský časopis *A Matematika Tanítása* (1. část článku) a druhým pramenem je polský časopis *Matematyka* (2. část článku). Budeme zde mluvit o zvláštních pythagorejských rovnicích a jejich řešení přirozenými čísly.

I. Dokažte, že neurčité rovnici

$$x^2 + (x + 1)^2 = y^2 \quad (1)$$

v množině přirozených čísel vyhovuje nekonečně mnoho dvojic čísel x, y .

Řešení je velmi zajímavé. Autor si nejprve zkusmo našel několik řešení, která si zapíšeme do tabulky.

x	0	3	20	119	
$x + 1$	1	4	21	120	
y	1	5	29	169	

A nyní si autor položil otázku: Není snad náhodou jedno řešení (to znamená čísla v jednom sloupci tabulky) lineárně závislé na řešení, které je bezprostředně předcházející (tj. řešení, které je v bezprostředně předcházejícím sloupci)? Zkusil to a ono to vyšlo. My se budeme ubírat toutéž cestou.

Obecné vzorce pro zmíněnou lineární závislost jsou

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + by_k + c, \\ y_{k+1} &= dx_k + ey_k + f \end{aligned} \quad (2)$$

Podle toho čísla x, y v 2. sloupci tabulky jsou lineárně závislá na číslech v 1. sloupci; čísla x, y v 3. sloupci jsou lineárně závislá na číslech v 2. sloupci atd. Stačí tedy do levých stran rovnic (2) dosadit čísla 2. sloupce a do pravých stran čísla 1. slouce tabulky. Dostaneme tak

$$3 = b + c, \quad (3)$$

$$5 = e + f \quad (3')$$

Obdobně dosadíme čísla z 3. a 2. sloupce:

$$20 = 3a + 5b + c, \quad (4)$$

$$29 = 3d + 5e + f \quad (4')$$

A ještě dosadíme čísla z 4. a 3. sloupce:

$$119 = 20a + 29b + c, \quad (5)$$

$$169 = 20d + 29e + f. \quad (5')$$

Řešením soustavy, která je složena z rovnic (3), (4), (5), dostaneme řešení

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c = 1$$

Řešením soustavy složené z rovnic (3'), (4'), (5') dostaneme

$$d = 4, \quad e = 3, \quad f = 2$$

Soustava (2) rekurentních vzorců má tvar

$$x_{k+1} = 3x_k + 2y_k + 1, \quad (6)$$

$$y_{k+1} = 4x_k + 3y_k + 2.$$

Teď je potřebí dokázat, že čísla x_{k+1} , y_{k+1} , která jsou určena rovnicemi (6), splňují rovnici (1). To provedeme matematickou indukcí.

Rovnice (1) je splněna pro $k = 1$, tj. pro $x_1 = 0$ a $y_1 = 1$. Předpokládejme tedy, že platí pro určité k a dokážeme, že platí i pro $(k + 1)$. To znamená, že platí

$$x_k^2 + (x_k + 1)^2 = y_k^2. \quad (7)$$

Máme dokázat, že též platí

$$x_{k+1}^2 + (x_{k+1} + 1)^2 = y_{k+1}^2$$

Dosaďme do této rovnice za x_{k+1} , y_{k+1} z rovnic (6). Po chvilce elementárního počítání se dopravujeme k rovnici

$$2x_k^2 + 1 + 2x_k = y_k^2,$$

která je ekvivalentní s rovnicí

$$x_k^2 + (x_k + 1)^2 = y_k^2,$$

což je rovnice (7), o níž jsme předpokládali, že platí.

Tím jsme dokázali: Platí-li rovnice (7) pro číslo k , platí i pro číslo $(k + 1)$. Ale rovnice (7) platí pro $k = 1$, a tudíž platí i pro $k = 2$. Jestliže platí pro $k = 2$, platí i pro $k = 3$ atd. Přitom je vždy $x_k < x_{k+1}$. To však znamená, že rovnice (7) — a tudíž i rovnice (1) — má nesčíslně mnoho řešení, a právě to jsme měli dokázat.

II. Náhodnou shodou okolností se o tomto problému zmiňuje v jednom svém článku polský časopis *Matematyka* (roč. XXXII, str. 359 a násl.). Je to článek, který se zabývá zvláštními pythagorejskými trojúhelníky. V něm autor uvádí větu, kterou vyslovil francouzský matematik Pierre Fermat*):

*) Fermat žil v letech 1601 až 1665. Zabýval se různými partiemi matematiky, ale nejpronikavěji zasáhl do teorie čísel. Čtenářům *Rozhledů* jsou asi známy malá a velká věta Fermatova a Fermatova čísla.

Jestliže trojice čísel $(x; (x + 1); y)$ je pythagorejská, je pythagorejská i trojice $(3x + 2y + 1; 3x + 2y + 2; 4x + 3y + 2)$. (Pythagorejská trojice čísel je trojice přirozených čísel, která vyhovují pythagorejské rovnici $x^2 + y^2 = z^2$.)

Pozorný čtenář pozná, že druhá trojice pythagorejských čísel představuje vlastně pravou stranu rekurentních vzorců (6). Tato věta nám zatím nedala nic nového. Autor článku se však s touto větou nespokojuje. Všiml si pythagorejské trojice čísel $(5; 12; 13)$ a ptá se, zda existují další pythagorejské trojice čísel tvaru $(x; y; y + 1)$. Ukazuje, že ano, že jich je nekonečně mnoho a příslušné rekurentní vzorce jsou

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + 2, \\y_{k+1} &= 2x_k + y_k + 2\end{aligned}\tag{8}$$

Ke konci článku pak autor uvádí dvě věty, které rozšiřují dvě věty nám známé.

a) Jestliže trojice $(x; x + e; y)$ je pythagorejská, pak je pythagorejská i trojice $(3x + 2y + 2e; 3x + 2y + e; 4x + 3y + 2e)$.

b) Jestliže trojice $(x; y; y + f)$ je pythagorejská, je pythagorejská i trojice $(x + 2f; 2x + y + 2f; 2x + y + 3f)$.

Cvičení:

1. Dokažte rekurentní vzorce (8).
2. Odvoďte rekurentní vzorce z vět a) a b).
3. V odst. I. jsme dokázali: Známe-li jedno řešení rovnice (1), pak z něho užitím vzorců (6) můžeme dostat další (většími čísly vyjádřené) řešení této rovnice. Dokažte, že obráceně každé řešení rovnice (1) lze dostat z bezprostředně následujícího.
4. Známe čtyři řešení Pellovy rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$, která jsou sestavena do tabulky:

x	1	3	17	99
y	0	2	12	70

Existují rekurentní vzorce obdobné vzorcům (6), pomocí nichž se dají vypočítat další řešení této rovnice?

Stanislav Horák

Co píše Pythagoras

Pythagoras je matematický časopis nizozemských středoškoláků, který vychází pětkrát za školní rok a pošta jej pravidelně doručuje i na náš redakční stůl. Nizozemští čtenáři se v něm dovídají o tamních matematických olympiádách i o olympiádách mezinárodních a otiskují se tu matematické články s obdobným zaměřením jako v našich Rozhledech.

V lednovém čísle 1980 píše Pythagoras o životě a díle *M. C. Eschera*, jehož význam přerostl hranice Nizozemska a autor se stal populární i ve Francii, NSR, Japonsku a USA. Escher se narodil 17. června 1898 v Leeuwardenu a zemřel 27. března 1972 v Larenu. I u nás jsou známé jeho obrazy, které v sobě spojují malířskou obrazotvornost s geometrií a optickým klamem. Jeho svět zabydlují živočichové podivných tvarů, do fantastických podob dovede zkreslit obyčejný svět, když se na něj podívá jakoby čočkou s optickou vadou, a v jeho tajemném hradě stoupáme stále vzhůru po schodišti, které několikrát zatačí a dovede nás posléze do místa, z něhož jsme vyšli. Escherovo dílo vyšlo před léty i knižně.

J. S.

recenze

Szabó, I.:

SLÁVNI PILOTI, KONŠTRUKTÉRI A KOZMONAUTI

Vydali Mladé letá, n. p., Bratislava v roku 1979. Prvé vydanie, ilustrované, 295 strán, viaz. 25,— Kčs.

Vydavateľstvo Mladé letá už dlhší čas vydáva edíciu „Slávni...“, ktorou chce mladých čitateľov upozorniť na významné osobnosti v rôznych odboroch vedy a techniky.

Koho by ešte aj teraz nevzrušovala túžba vzlietnuť? O ľuďoch, ktorí sa zapísali do histórie dobý-

vania vzdušného oceánu a otvárali cestu do kozmického priestoru, hovorí táto knižka. Stretneme sa tu so základnými údajmi o živote a práci Montgolfierovcov, Blancharda, Hensona, Možajského, Chanuta, Žukovského, Wrightovcov, Blériota, Piccarda, Tupoleva, Sikorského, Iljušina, Lindberga a ďalších. Dozvieme sa o našich priekopníkoch lietania — Kadeřávek, Bahýl, Banič, Kašpar, Čihák, Beneš. Od balónov a lietadiel sa dostaneme až ku konštruktérom prvých rakiet (Goddard, Oberth, Korolov) a prvým kozmonautom. Krátke postrehy a údaje o ich živote sú aspoň skromnou spo-

mienkou na ich prínos do veľkej knihy poznania a pôsobivým načrtnutím príkladov pre nasledovanie.

Súčastou knižky je malý prehľad typov lietadiel, kronika ČSA, prehľad dôležitých dát z histórie letectva a histórie kozmonautiky. Na záver je uvedený stručný letecký a kozmonautický slovník.

Publikácia vhodnou formou upozorňuje už čitateľov od 11 rokov na problematiku letectva a kozmonautiky. Zvýrazňuje úlohu techniky i podiel osobností v tejto modernej oblasti ľudskej činnosti.

Dušan Jedinák

V. Šmejkal:

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE I, II

pomocné texty pro dálkově studující na střední průmyslové škole stavební pro pracující v Praze

Deskriptivní geometrie se udržela na relativně uspokojivé výši pouze na stavebních průmyslových školách. Výuka probíhá v prvních dvou ročnících po dvou hodinách týdně, zatímco na strojních průmyslových školách je dotována jen dvaceti hodinami v druhém ročníku v rámci technického kreslení a na gymnáziích má neradostný výhled stát se pouze nepovinným předmětem.

Studium deskriptivní geometrie je náročné a obtížné, a proto je nutno zejména dálkově studujícím domácí přípravu usnadnit. To si klade za cíl učební text V. Šmejkal.

Každá z jedenadvaceti konsul-

tací je uvedena pokyny ke studiu, pak následuje výklad s velkým počtem řešených příkladů a na závěr je zadáno na procvičení 20—50 úloh.

Obsahem lekcí jsou základy Mongeova promítání, kosoúhlého promítání, pravoúhlé axonometrie a kótovaného promítání. Zobrazují se body, přímky, roviny a elementární tělesa s řezy a průniky. Speciální aplikace tvoří sítě těles, řešení střech a topografické plochy s komunikacemi. Mimořádně velká pozornost je věnována kótovanému promítání (8 lekcí).

Text je psán systematicky, výklad je jasný, obrázky jsou pečlivě volené a přehledné. Vyskytují se ovšem některá nedopatření. Např.: „průmět koule je kružnice“, pojem „kosý kužel“ není jasný, jeho středná je v obr. 236 nazvána osou. Mezi základní tělesa se počítají kosé kužele a válce, ale v teorii řezů se mlčky předpokládají jen rotační kužele a válce.

Na některých místech by mohl být text zmodernizován. V době kapesních počítačů není např. nutno popisovat rektifikaci kružnice tak, že délky tětiv nepatrně zvětšíme. Student by se měl také dozvědět něco o automatickém kreslení, vždyť se dnes např. návrhy a výkresy komunikací u velkých staveb jinak než automaticky nekreslí.

Škoda, že tyto texty vydala škola pouze pro vnitřní potřebu. Jistě by je rádi použili učitelé i studenti na dalších průmyslových školách i na gymnáziích.

Ladislav Drs

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

neve ž	sníh
nicol m	nikol (optický)
nodo m	uzel
— ascendente	jarní bod ekliptiky
— discendente	podzimní bod ekliptiky
nomografia ž	nomografie
nomogramma ž	nomogram
nonio m	nonius
nono	devátý
nono m	devítina
nord m	sever
norma ž	norma
— di un numero complesso	— komplexního čísla
normale	normální
normale ž (retta)	normála
nota ž	značka, známka, poznámka
notare	(o)značiti; všimnouti si
notazione ž	označení
noto	známý
notte ž	noc
novanta	devadesát
novantesimo	devadesátý
novantesimo m	devadesátina
nove	devět
nozione ž	pojem; poznatek
nucleo m	jádro
— magnetico	— elektromagnetu
nucleone m	neutron nebo proton
nulla	nic
nullo	nulový; nicotný
numerare	počítati; číslovati
numeratore m (di una frazione)	čitatel (zlomku)

numerazione ž

- binaria
- decimale

numerico**numero m**

- algebrico
 - atomico
 - cardinale
 - complesso
 - decimale
 - dispari
 - immaginario
 - intero
 - irrazionale
 - misto
 - naturale
 - negativo
 - ordinale
 - pari
 - periodico
 - positivo
 - primo
 - quantico
 - razionale
 - reale
 - transfinito
 - trascendente
- numeri contrari**
- coniugati
 - opposti
 - pitagorici
 - primi fra loro

nutazione ž**číslování, očíslování****dvojková číselná soustava****dekadická číselná soustava****číselný****číslo**

- algebraické
- atomové
- kardinální
- komplexní
- desetinné
- liché
- imaginární
- celé
- iracionální
- smíšené
- přirozené
- záporné
- ordinální (pořadové)
- sudé
- periodické (deset. zlomek)
- kladné

prvočíslo**číslo kvantové**

- racionální
- reálné
- transfinitní
- transcendentní

čísla opačná

- sdružená
- opačná
- pythagorejská
- nesoudělná

nutace**O****obiettivo m**

- acromatico
- anastigmatico
- apocromatico
- grandangolare

objektiv

- achromatický
- anastigmatický
- apochromatický
- širokoúhlý