

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

1

ROČNÍK 57, 1978-1979, ZÁŘÍ

rozhledy

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr.
Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák,
ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bra-
tislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc.
ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Mi-
lan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišon,
CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr.
Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., ČSAV Praha, doc. O. Setzer, ČVUT
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr.
Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav
Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.
Vydává ministerstvo školství ve Státním peda-
gogickém nakladatelství v Praze za odborné
péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.
Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné
20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého
čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár.
podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2.
Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace
o předplatném podá a objednávky přijímá
každá pošta i doručovatel. Objednávky do za-
hraní vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice
tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1.
Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze 1978.

ROČNÍK 57
ZÁŘÍ 1978

1

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

Prof. E. Kraemer: K zahájení 57. ročníku Rozhledů	1
Dr. J. Chajda: Určování objemu těles po- moci Cavalieriho principu	2
Dr. J. Šedivý: Kvadratrix	7
Dr. F. Matyášek: Některé vlastnosti podob- ných trojúhelníků	10
P. Fejtková, dr. M. Malík: Datové typy	20
F. Hradecký: K rovinným řezům na rotační kuželové ploše	26
Ing. J. Hylán, CSc.: Konstrukce parabolic- ké dráhy šikmého vrhu	30
Naše soutěž	37
J. Kotyk: Hrst vzpomínek	44
Dr. J. Mrázek, CSc.: Elektronické hračky pro děti	45
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	47
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky

K zahájení 57. ročníku Rozhledů

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Naše Rozhledy matematicko-fyzikální, které jsou ve střední Evropě nejstarším odborným časopisem určeným středoškolské mládeži, začínají tímto číslem již 57. ročník svého života. V úvodníku otištěném v prvním čísle loňského ročníku jsem stručně připomněl jejich historii i jména našich vědeckých a odborných pracovníků, kteří se vystřídali ve vedení Rozhledů. Mnohem obtížnější by bylo zjistit nebo aspoň odhadnout počet těch, kteří během 56 let tento časopis odebírali a četli. Jenom jména mnohých řešitelů úloh otiskovaných každým rokem v Rozhledech prozrazují, že mezi čtenáři Rozhledů byla řada studentů, kteří ve svém dalším životě vynikli jako pracovníci v oboru věd matematicko-fyzikálních nebo technických.

Redakční rada Rozhledů matematicko-fyzikálních se bude snažit pokračovat v dobré tradici časopisu, přizpůsobené požadavkům dnešní doby. Proto zůstanou těžištěm Rozhledů vhodně vybrané a přístupně napsané články z oboru matematiky, fyziky i astronomie. Jejich doplňkem budou statě z historie matematicko-fyzikálních věd, životopisy významných pracovníků těchto oborů i články ukazující význam matematiky a fyziky pro dnešní život. Některé články budou prohlubovat a doplňovat látku školské matematiky i fyziky, jiné upozorní na různé zajímavosti, hříčky apod. Kromě toho budou Rozhledy pomáhat matematické a fyzikální olympiádě, pokračovat ve své tradiční soutěži a otisknou také recenze knižních publikací, které svým obsahem a způsobem zpracování jsou přístupné středoškolským studentům. Novinkou letošního ročníku je odborný italsko-český slovníček, který bude otiskován na posledních dvou stránkách obálky každého čísla.

Je přáním redakční rady i Jednoty československých matematiků a fyziků, která o náš časopis odborně pečuje, aby Rozhledy při zachování svého tradičního již poslání také přispívaly podle svých možností k plnění náročných úkolů, které nám ukládá vyspělá socialistická společnost.

Určování objemů těles pomocí Cavalieriho principu

RNDr. IVAN CHAJDA, Přerov

Výpočet objemů rotačních těles se zpravidla provádí integrací. Princip integrální metody je studentům posledního ročníku středních škol již znám, dovedou také snadno určit vzorec pro výpočet objemu válce a kužele (neboť dovedou integrovat lineární a kvadratickou funkci), avšak výpočet objemů složitějších těles vyžaduje dobré znalosti integrování, přesahující středoškolské znalosti. V tomto článku je ukázána metoda, tzv. *Cavalieriho princip*,*) která je sice založena na integrálním principu, avšak nevyžaduje znalost integrování. Ukážeme, jak je možné pomocí Cavalieriho principu odvodit vzorce pro objemy i složitějších těles, vycházejíce pouze ze znalosti vzorců pro objem válce a kužele.

1.

Cavalieriho princip je obecně formulován pro libovolná geometrická tělesa. Nechť T je nějaké geometrické těleso umístěné v trojrozměrném eukleidovském prostoru. Osy tohoto prostoru označme x, y, z , prostor označme $E(x, y, z)$. Výškou tělesa T pak nazveme kolmou vzdálenost (ve směru osy z) mezi nejvyšším a nejnižším bodem tělesa T . Každá rovina kolmá k ose z buď neprotíná těleso T , nebo má s tělesem T neprázdný průnik; plošný obsah tohoto průniku označme P . Cavalieriho princip lze pro dvě geometrická tělesa nyní formulovat takto:

Nechť T_1, T_2 jsou dvě geometrická tělesa v prostoru $E(x, y, z)$, která mají shodnou výšku v a průniky P_1, P_2 libovolnou rovinou ρ kolmou k ose z mají shodné obsahy. Pak tato tělesa T_1, T_2 mají shodný objem (viz obr. 1).

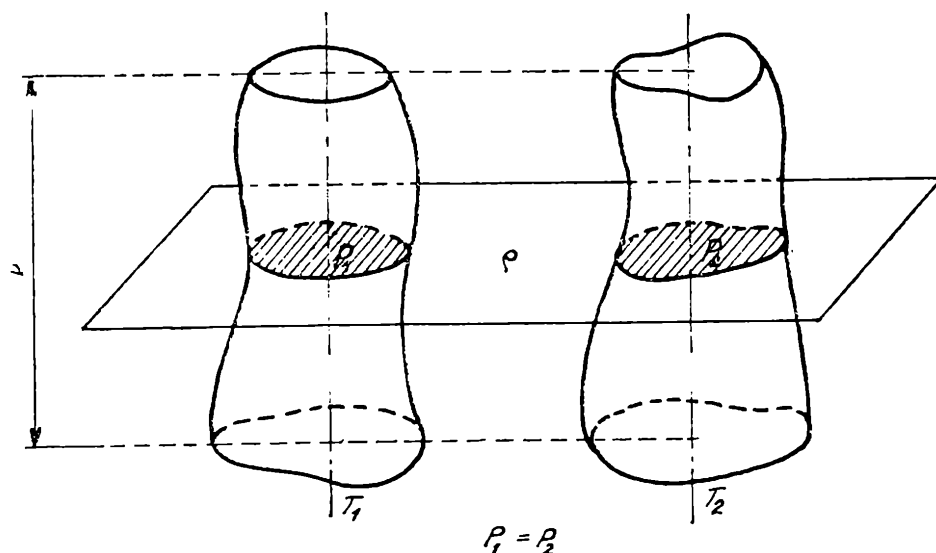
Důkaz platnosti tohoto principu lze snadno provést na základě integrální metody, což však přesahuje rámec elementární prostorové geometrie, a proto je vynechán.

Známe-li tedy objem tělesa T_1 a splňuje-li těleso T_2 předpoklady Cavalieriho principu, pak dovedeme určit i objem tělesa T_2 . Praktické použití této metody pro odvozování obecných vzorců bude ilustrováno na následujících příkladech.

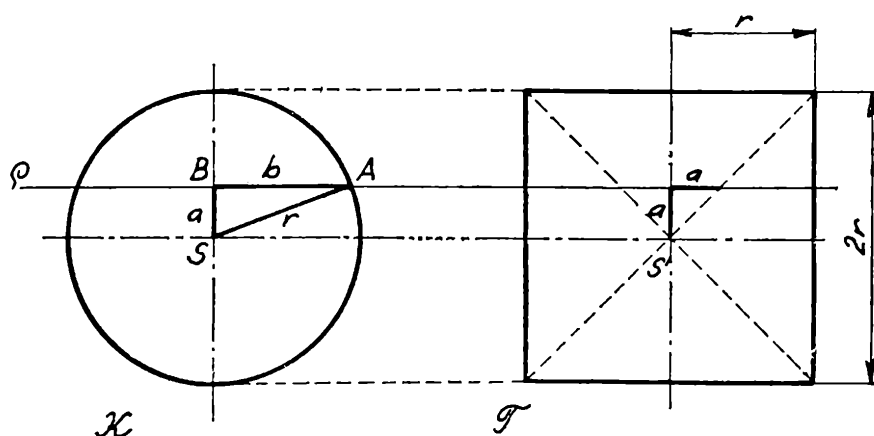
*) Bonaventura Cavalieri, 1598—1647, italský matematik, žák Galileia Galilei

2.

Výpočet objemu koule. Nechť je dána koule **K** o poloměru r a rotační těleso **T**, které vzniklo z rotačního válce o výšce $2r$ a poloměru r s osou rovnoběžnou s osou z vyříznutím dvou kuželů, jejichž podstavy jsou shodné s podstavami válce, každý má výšku rovnou r , jak je znázorněno na obr. 2.



Obr. 1



Obr. 2

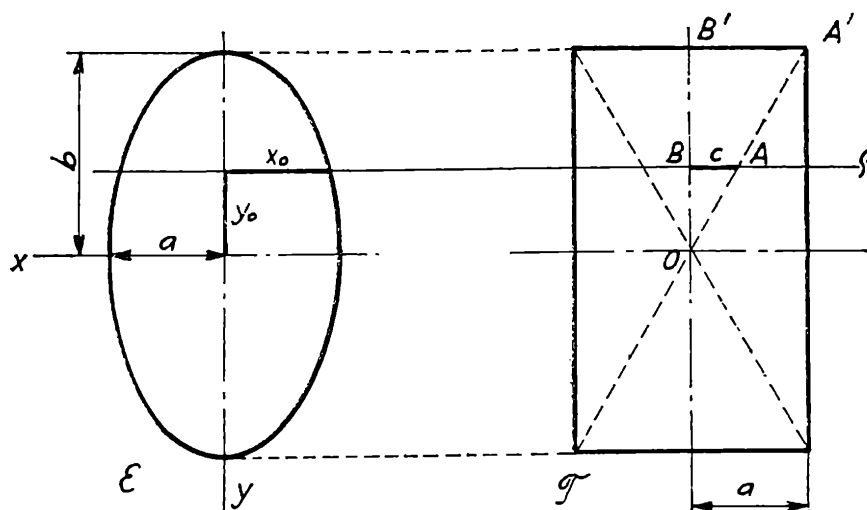
Obě tělesa mají shodnou výšku $2r$. Protneme nyní tato tělesa rovinou ρ kolmou k ose z v libovolné vzdálenosti a od středu S (kde $a \leq r$), viz obr. 2. Pak rovina ρ vytne na kouli **K** kruh o poloměru b , jehož obsah je $P_k = \pi b^2 = \pi(r^2 - a^2)$, jak je patrné z obrázku. Dále je zřejmé, že rovina ρ protne těleso **T** v mezikruží, jehož obsah je $P_t = \pi r^2 - \pi a^2 = \pi(r^2 - a^2)$, tedy $P_t = P_k$ pro libovolnou rovinu kolmou k ose z . Podle Cavalieriho principu je pak objem koule **K** roven objemu tělesa **T**. Avšak objem tělesa **T** umíme snadno určit, je totiž roven objemu daného válce po odečtení objemů dvou daných kuželů, tedy:

$$V_t = 2r \cdot \pi r^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} r \cdot \pi r^2 = \frac{4}{3} \pi r^3 = V_k,$$

kde V_k je objem koule. Takto jsme odvodili známý vzorec pro objem koule pouze elementárními prostředky.

3.

Analogicky lze odvodit vzorec pro objem rotačního elipsoidu ϵ , rotujícího kolem svislé osy (označené y , viz obr. 3). Opět uvažujme těleso T , vzniklé z rotačního válce o výšce $2b$ a o poloměru podstavy a vyjmutím dvou kuželů (viz obr. 3), kde a, b jsou poloosy elipsoidu. Rovina kolmá ke svislé ose ve vzdálenosti y_0 od středu elipsoidu (kde $0 \leq y_0 \leq b$) vytne



Obr. 3

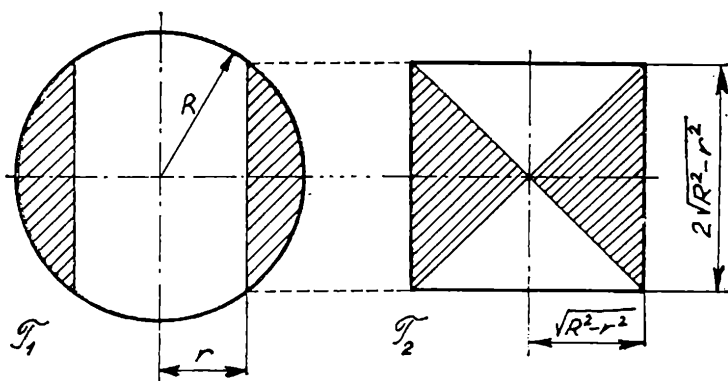
na elipsoidu kruh o obsahu $P_e = \pi x_0^2$. Z rovnice elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ odvodíme $x_0^2 = a^2 \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right)$, tedy $P_e = \pi a^2 \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right)$. Na tělese T vytne rovina ρ mezikruží o obsahu $P_t = \pi a^2 - \pi c^2$, kde $\frac{c}{y_0} = \frac{a}{b}$, jak odvodíme z podobnosti trojúhelníků $OAB, OA'B'$, tedy $P_t = \pi \left(a^2 - y_0^2 \frac{a^2}{b^2}\right) = P_e$. Odtud již snadno odvodí čtenář vzorec pro objem rotačního elipsoidu pomocí vzorce pro objem tělesa T , t. j. $V_e = V_t = 2b\pi a^2 - \frac{2}{3}b\pi a^2 = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Snadno se dá ukázat, že je-li elipsoid nerotační, ale tzv. trojosý o poloosách a, b, c , pak za těleso T volíme eliptický válec a vyjmem z něj eliptické kužele. Odvodíme tak známý vzorec $V_e = \frac{4}{3}\pi abc$.

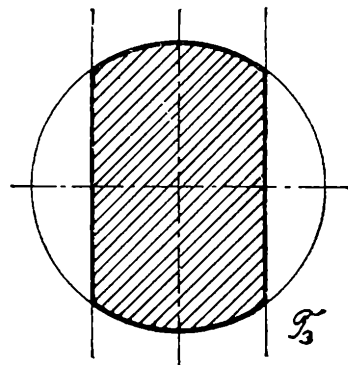
4.

Pomocí Cavalieriho principu lze elementárními prostředky také odvodit vzorec pro objem rotačního tělesa, vzniklého z koule o poloměru R vyjmutím rotačního válce o poloměru podstavy r , jehož osa prochází

středem koule a platí $0 < r \leq R$. Na obr. 4 je znázorněn průřez tohoto tělesa T_1 ve svislé osově rovině a také průřez rotačního tělesa T_2 , splňujícího podmínky Cavalieriho principu (jak se čtenář snadno přesvědčí sám). Označíme-li V_1 objem tělesa T_1 , V_2 objem tělesa T_2 , pak zřejmě platí $V_1 = V_2 = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{R^2 - r^2})^3$



Obr. 4



Obr. 5

Snadno také určíme objem V_3 tělesa T_3 , vzniklého průnikem koule a válce s osou procházející středem koule, jak je znázorněno na obr. 5, neboť součet $V_3 + V_1$ je roven objemu koule o poloměru R , tedy $V_3 = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi (\sqrt{R^2 - r^2})^3 = \frac{4}{3} \pi (R^3 - (\sqrt{R^2 - r^2})^3)$.

5.

Na závěr ještě odvodíme pomocí Cavalieriho principu vzorec pro výpočet objemu sudu, vzniklého z rotačního elipsoidu. Nechť je dán rotační elipsoid o poloosách a, b , rotující kolem b , omezený vodorovnými rovinami ϱ_1, ϱ_2 ve vzdálenostech v_1, v_2 od středu elipsoidu (viz obr. 6).

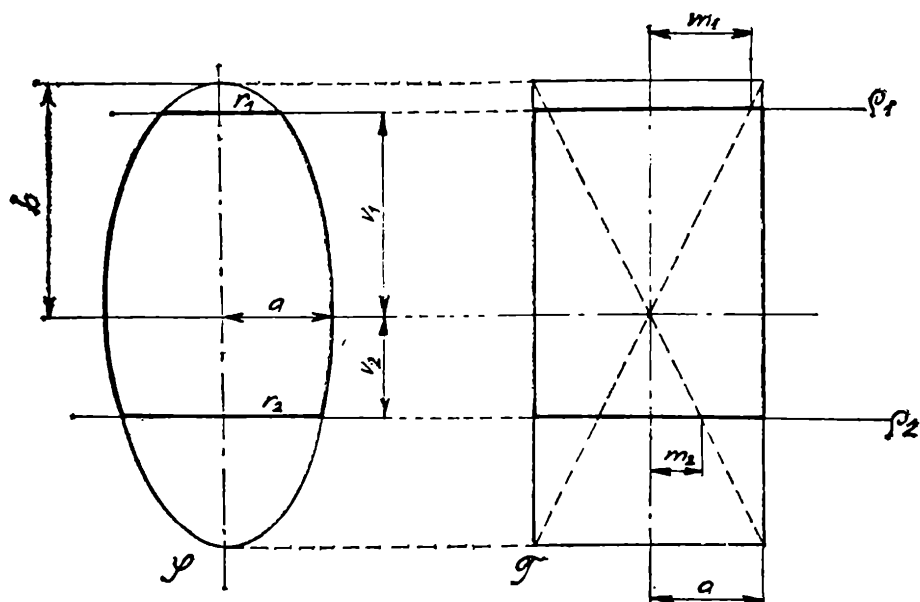
Čtenář snadno dokáže sám, že tělesa S, T splňují předpoklady Cavalieriho principu. Avšak objem tělesa T lze snadno vypočítat elementárními prostředky. Vypočteme zvlášť V_1, V_2 — objemy tělesa nahoře a dole od roviny procházející středem elipsoidu. Pak objem V_s tělesa S je roven objemu V_t tělesa T , tedy $V_t = V_1 + V_2$. Použijeme-li označení z obr. 6,

snadno odvodíme $V_1 = \pi a^2 v_1 - \frac{1}{3} \pi m_1^2 \cdot v_1$, ale $\frac{m_1}{v_1} = \frac{a}{b}$, tedy $V_1 = \pi a^2 v_1 \left(1 - \frac{v_1^2}{3b^2}\right)$, analogicky $V_2 = \pi a^2 v_2 \left(1 - \frac{v_2^2}{3b^2}\right)$, tedy

$$V_s = \pi a^2 \left(v_1 + v_2 - \frac{v_1^3}{3b^2} - \frac{v_2^3}{3b^2} \right).$$

Ze vztahu $\frac{r^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ odvodíme

$$b = \frac{v_1 a}{\sqrt{a^2 - r_1^2}}, \quad b = \frac{v_2 a}{\sqrt{a^2 - r_2^2}},$$



Obr. 6

tedy

$$\begin{aligned} V_s &= \pi a^2 (v_1 + v_2) - \frac{\pi}{3} (v_1 (a^2 - r_1^2) + v_2 (a^2 - r_2^2)) = \\ &= \frac{2}{3} \pi a^2 (v_1 + v_2) + \frac{\pi}{3} (v_1 r_1^2 + v_2 r_2^2), \end{aligned}$$

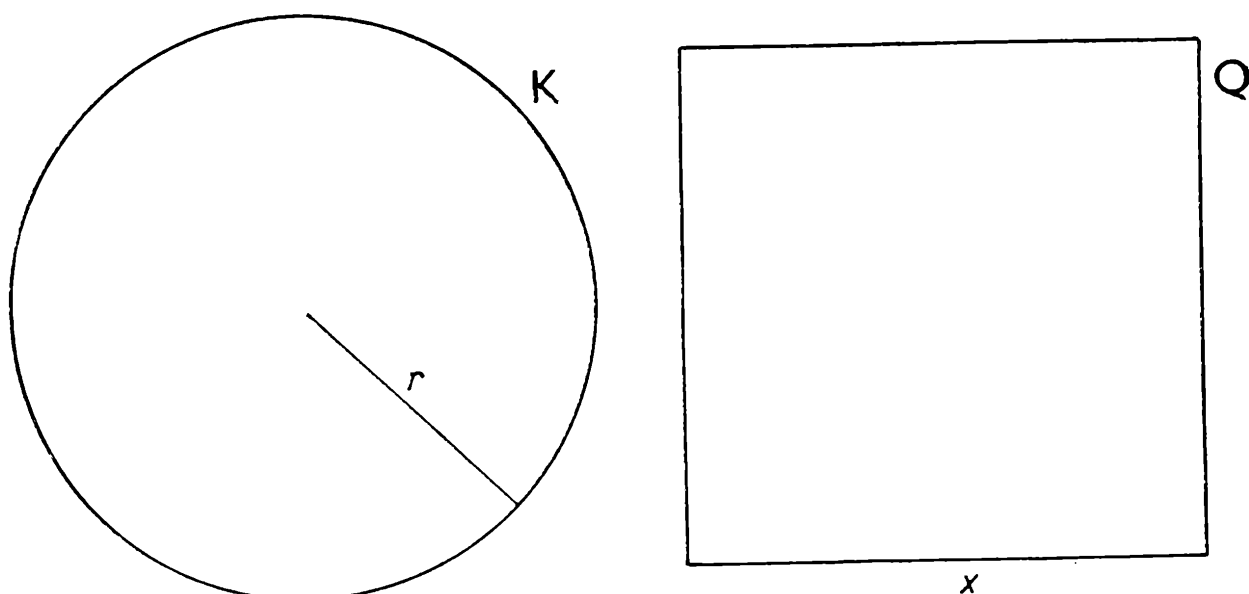
kde a je poloměr sudu S v nejširším místě, r_1, r_2 jsou poloměry horní a dolní podstavky, v_1, v_2 jsou výšky od nejširšího místa sudu k horní a dolní podstavě. Pro sud obvykle předpokládáme, že platí $v_1 = v_2 = \frac{v}{2}$, pak $r_1 = r_2 = r$, tedy obdržíme vzorec $V = \frac{1}{3} \pi v (2a^2 + r^2)$.

Kvadratrix

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

V článku *Co nelze sestrojit kružítkem a pravítkem* jste se mohli dozvědět o marnosti hledání takových konstrukcí, které by daly třetinu úhlu 60° , hranu krychle s objemem rovným dvěma a řadu dalších geometrických objektů. K nepoddajným úlohám o trisekci úhlu a duplikaci krychle se již ve starověku pojila tato úloha nazývaná kvadratura kruhu:

Je dán kruh **K**, sestrojte čtverec **Q**, který má stejný obsah jako kruh **K** (obr. 1).

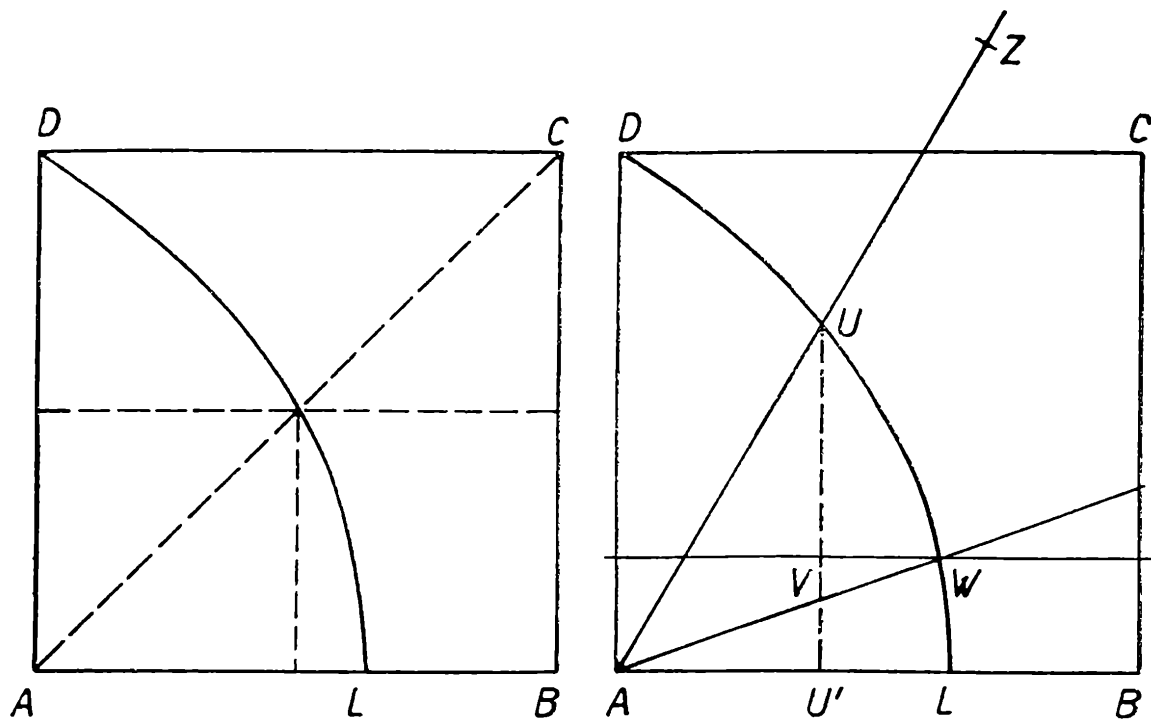


Obr. 8

Označíme-li písmenem x délku strany hledaného čtverce, máme pro jednotkový kruh rovnici $x^2 = \pi \cdot 1^2$, tj. $x^2 - \pi = 0$. Sestrojení hledané úsečky x nestojí v cestě stupeň rovnice, ale její koeficient π . Úsečka, která má velikost π , je vlastně „napřímená“ půlkružnice s jednotkovým poloměrem. Napřímení (rektifikace) kružnice bylo však konstrukční úlohou, která odolávala úsilí o své rozřešení kružítkem a pravítkem.

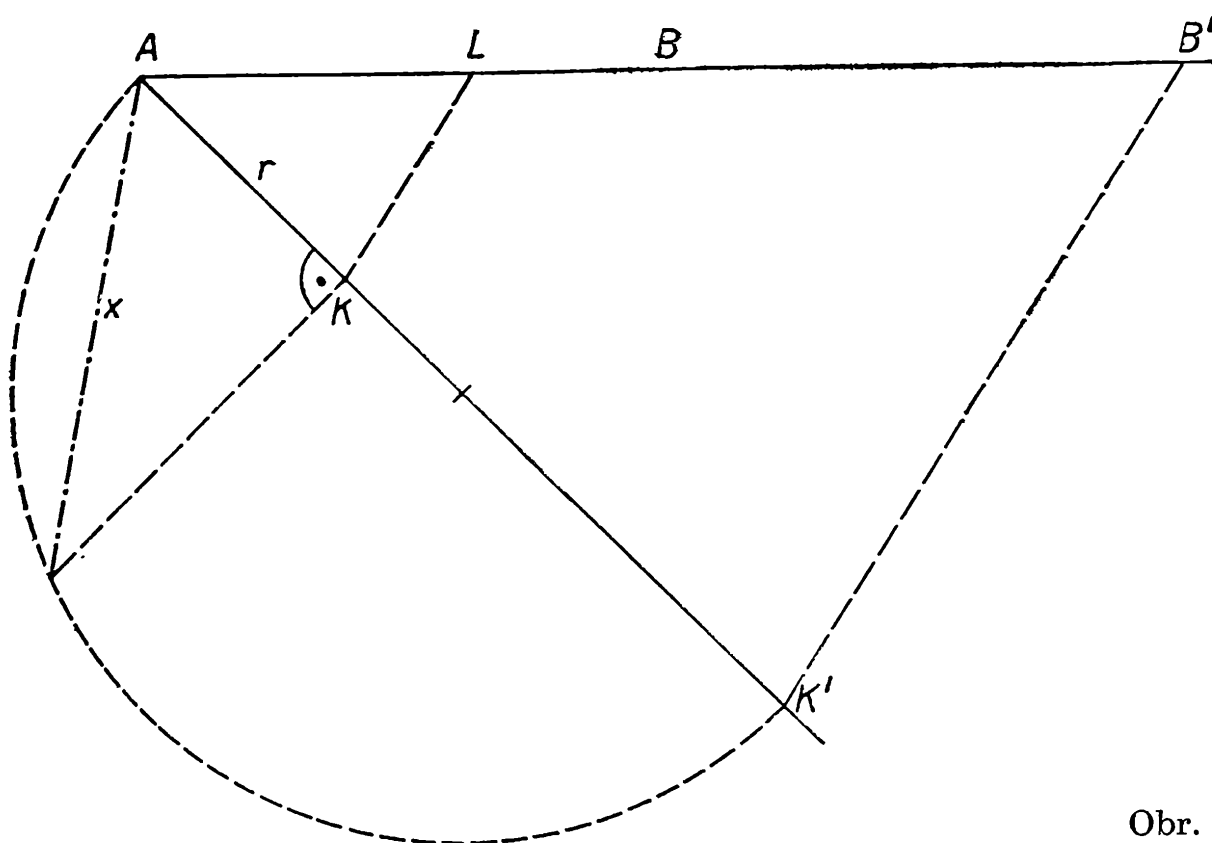
Kvadrátoři kruhu byli matematici i laičtí nadšenci, kteří se v mnoha generacích po dobu delší než 2000 let bezúspěšně pokoušeli provést kvadraturu kruhu pravítkem a kružítkem. Avšak dříve než se antická řecká geometrie omezila na konstrukce pravítkem a kružítkem, vymyslela velmi důvtipnou křivku, kterou vidíte na obr. 2a. Je to množina všech bodů ve čtverci $ABCD$, ve kterých se protínají dva současně se pohybující útvary:

a) vodorovná úsečka, která z polohy DC rovnoměrně klesá k poloze AB ,



Obr. 2a

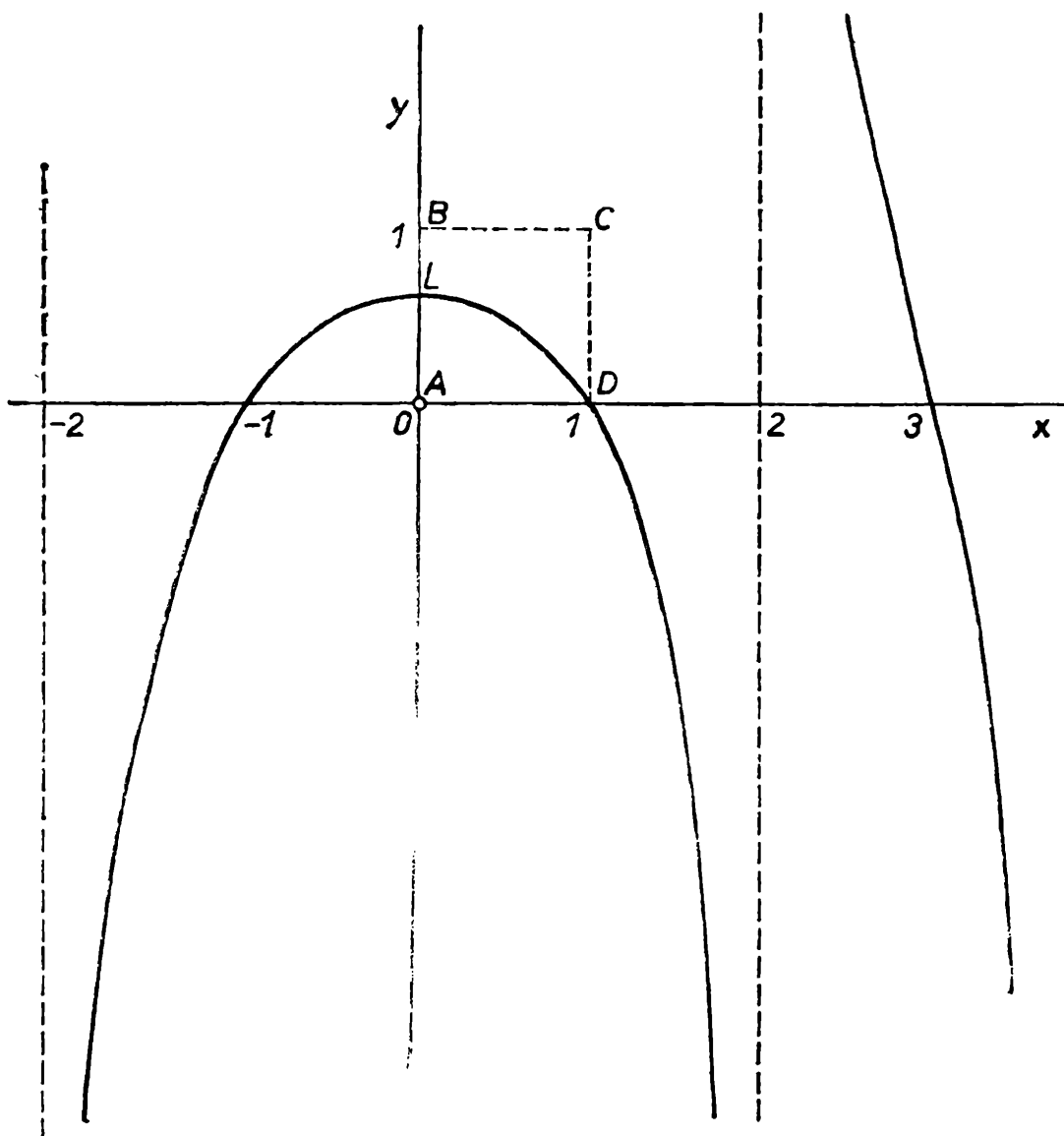
Obr. 2b



Obr. 3

b) polopřímka s počátkem A , která se z polohy AD rovnoměrně otáčí k poloze AB ; přitom jejich pohyb začíná i končí v témž okamžiku.

Snadno si představíte, že křivka začíná v bodě D , obloukem nad úhlopříčkou DB se snáší do středu čtverce a pak prudce „padá“ k zá-



Obr. 4

kladně AB . Její bod na AB nedostaneme jako jasný průsečík, pouze jako limitní polohu průsečíku; je to bod L (obr. 2), pro který platí

$$AL = \frac{2}{\pi} \cdot AB \doteq 0,63 AB.$$

Umíte-li již počítat limity funkcí, můžete vypočítat limitu $x(t)$ při $t \rightarrow 1$; přitom $y(t) = 1 - t$ pro vodorovnou úsečku, $y(t) = x(t) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (1 - t)$ pro otáčející se polopřímku.

Vraťme se však k pohledné křivce na obr. 2, kterou navrhl *Hippias* z *Elidy* v 5. století př. n. l. jako nástroj k trisekci úhlů (křivka byla skutečně vytvářena mechanickým zařízením). Obr. 2b ukazuje třetění úhlu BAZ ; rameno AZ protne křivku v bodě U , na jeho pořadnici UU' vyznačíme bod V , pro který platí $U'V = \frac{1}{3} U'U$. Vodorovná úsečka vedená

bodem V protne křivku v bodě W , pro který platí $\sphericalangle BAW = \frac{1}{3} \sphericalangle BAZ$.

Je zřejmé, že se využívá skutečnosti, že třetině úhlu otočení odpovídá třetina úsečky posunutí.

Už ve 4. století před n. l. *Dinostratos* objevil, že křivka může sloužit ke kvadratuře kruhu. Dokázal poznatek, který v dnešní symbolice zapisujeme $2 \cdot AB = \pi \cdot AL$ a ukázal, jak lze napřímít půlkružnici. Na obr. 3 je užito pomocné polopřímky AK při $AK = r$ (poloměru kruhu); protože $AB' = 2 \cdot AB$, dostáváme $AK' = \pi \cdot r$. Eukleidova věta o odvěsně dovoluje konstrukci úsečky x , která splňuje rovnici

$$x^2 = AK \cdot AK', \text{ tj. } x^2 = r \cdot \pi r = \pi r^2.$$

Popsaný postup není citován z *Dinostratova* díla, sleduje však jeho ideu. V 17. století *G. W. Leibniz* nazval naši křivku z obr. 2 jménem kvadratrix (doslova kvadrátorka); nejde ovšem o křivku sestrojitelnou kružítkem a pravítkem „v celku“, můžeme tak sestroit jen konečný počet jejích bodů. Proto nedošla žádného uznání u kvadrátorů, kteří právě v 17. století vyvolali velikou vřavu mezi sebou i se svými odpůrci. Takové spory a marná hledání kvadratury kruhu pokračovaly až do r. 1882, kdy *F. Lindemann* dokázal (na základě prací *Ch. Hermitea*), že číslo π není kořenem vůbec žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty. Proto úsečka s délkou π nemůže být sestrojena z jednotkové úsečky jen kružítkem a pravítkem, všechny publikované konstrukce těmito prostředky jsou jen přibližné.

Sličná kvadratrix je částí grafu funkce $y = x \cdot \cotg \frac{\pi}{2} x$, jak ukazuje obr. 4 s převráceným jednotkovým čtvercem $ABCD$. Vytvořte větší počet bodů grafu a vyšetřete průběh této funkce, zejména směrnice tečen v těch bodech grafu, které leží v uvedeném čtverci.

Některé vlastnosti podobných trojúhelníků

RNDr. FRANTIŠEK MATYÁŠEK, Olomouc

Relaci podobnosti geometrických útvarů, zejména trojúhelníků, známe ze školy. Víme, že dva podobné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ mají shodné úhly, které jsou v podobnosti sobě přiřazeny a poměr velikostí sobě odpovídajících stran obou trojúhelníků je konstantní:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = k$$

a je rovní kladnému reálnému číslu k , které se nazývá poměr podobnosti obou trojúhelníků. Jsou-li trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ dány v téže rovině ϱ , jak v dalším budeme vždy předpokládat, můžeme v této rovině definovat zobrazení f takto:

$$\text{je-li } X \in \varrho, \text{ pak } f(X) = X' \Leftrightarrow \frac{|A'X'|}{|AX|} = \frac{|B'X'|}{|BX|} = \frac{|C'X'|}{|CX|} = k.$$

Tímto požadavkem je, jak se snadno přesvědčíme, každý bod X roviny ϱ zobrazen právě na jeden bod X' téže roviny ϱ . Zároveň se můžeme přesvědčit, že zobrazení f nám každou úsečku XY změní v poměru k ; je-li $f(X) = X'$, $f(Y) = Y'$, je $\frac{|X'Y'|}{|XY|} = k$.

Tuto základní vlastnost podobného zobrazení, jak se zobrazení f nazývá, zde dokazovat nebudeme, je možno ji snadno dokázat postupně užitím vět o podobnosti trojúhelníků.

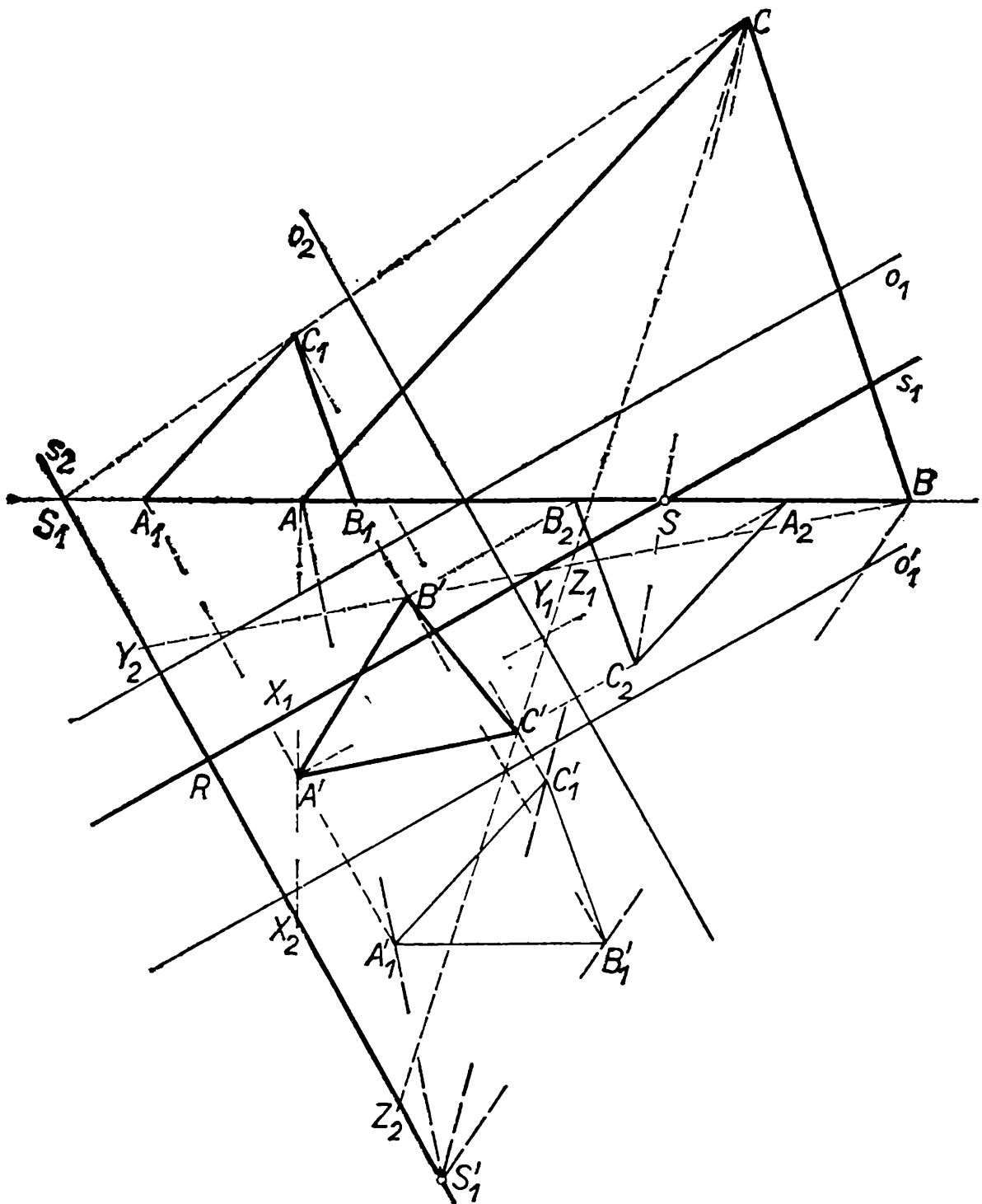
Známým příkladem podobného zobrazení je stejnoolehlost h , která má vždy jediný samodružný bod S (tj. bod, pro nějž platí $h(S) = S$) a jestliže pro $A \neq S$ je $h(A) = A'$, pak $A \neq A'$, $S \in AA'$ a je $\frac{|SA'|}{|SA|} = k$.

Ze školy víme, že pro $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ je $AB \parallel A'B'$, tj. že *obrazem přímky ve stejnoolehlosti je přímka s ní rovnoběžná*, takže dva trojúhelníky, ležící v téže rovině, jsou právě tehdy stejnolehlé, jestliže jsou rovnoběžné přímky, v nichž leží sobě odpovídající strany obou trojúhelníků (nejsou-li ovšem oba trojúhelníky shodné). V tomto případě bod $S = AA' \cap BB' \cap CC'$ je středem stejnoolehlosti, která jeden trojúhelník zobrazí na druhý.

V tomto článku si všimneme některých zajímavých *vlastností podobných trojúhelníků*.

Máme-li v rovině ϱ dány dva podobné trojúhelníky ABC , $A'B'C'$, pak tyto trojúhelníky mohou být podobné buď přímo, jestliže postup značení sobě odpovídajících vrcholů u obou trojúhelníků zachovává tentýž smysl, nebo nepřímo, jestliže označení vrcholů trojúhelníka ABC postupuje v opačném smyslu než označení odpovídajících vrcholů trojúhelníka $A'B'C'$.

Nejdříve si zvolíme dva nepřímo podobné trojúhelníky ABC , $A'B'C'$. Dá se snadno dokázat, že když sestrojíme trojúhelník $A_1B_1C_1$, souměrný k trojúhelníku $A'B'C'$ podle některé z os úhlu přímk AB , $A'B'$ nebo podle některé z přímk s těmito osami rovnoběžných, je trojúhelník $A_1B_1C_1$ stejnolehlý s trojúhelníkem ABC . Položme si otázku, jaký geometrický útvar bude množinou všech středů stejnoolehlostí, které získáme tímto způsobem. Označme si v obr. 1 $o_1 \perp o_2$ osy úhlů přímk AB , $A'B'$, $A_1B_1C_1$ trojúhelník souměrný s trojúhelníkem $A'B'C'$ podle osy o_1 , S_1 střed stejnolehlosti trojúhelníků ABC , $A_1B_1C_1$, $o'_1 \parallel o_1$ libovolnou další osu souměrnosti, $A'_1B'_1C'_1$ trojúhelník souměrný k trojúhelníku ABC podle přímky o'_1 , S'_1 střed stejnolehlosti trojúhelníků ABC , $A'_1B'_1C'_1$.



Obr. 1

Protože je $A'A_1 \perp o_1$, $A'A'_1 \perp o'_1$, je také $A'A'_1 \perp o_1$, a proto i $A_1A'_1 \perp o_1$, z čehož plyne $A_1A'_1 \parallel o_2$. Podobně je i $B_1B'_1 \parallel o_2$ a $C_1C'_1 \parallel o_2$. Dokážeme si nyní tuto pomocnou větu:

Pomocná věta 1. Mějme dvě stejnoolehlosti h_1 , h_2 s tímtež koeficientem stejnoolehlosti k . Stejnoolehlost h_1 má střed v bodě S_1 , stejnoolehlost h_2 má střed v bodě $S_2 \neq S_1$. Je-li $A \neq S_1$, $A \neq S_2$, $h_1(A) = A_1$, $h_2(A) = A_2$, pak $S_1S_2 \parallel A_1A_2$.

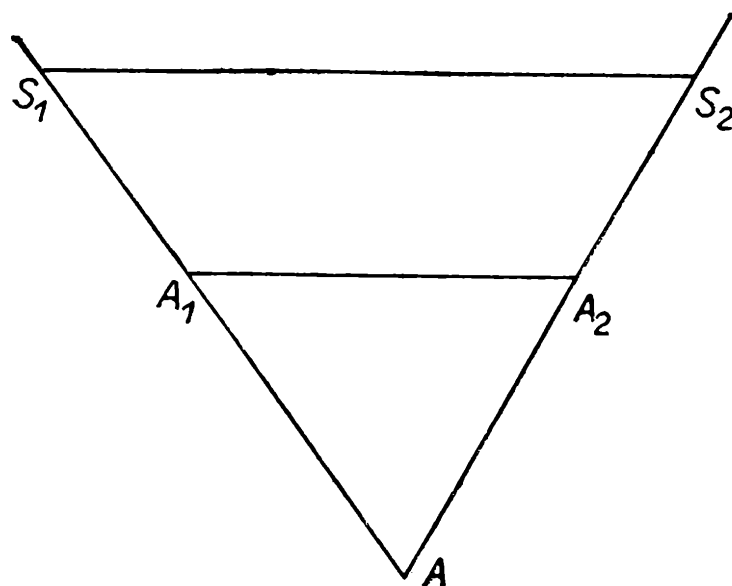
Důkaz (viz obr. 2):

Je $k = \frac{|S_1A_1|}{|S_1A|} = \frac{|S_2A_2|}{|S_2A|}$. Odtud plyne postupně

$$1 - \frac{|S_1A_1|}{|S_1A|} = 1 - \frac{|S_2A_2|}{|S_2A|},$$

$$\frac{|S_1A| - |S_1A_1|}{|S_1A|} = \frac{|S_2A| - |S_2A_2|}{|S_2A|},$$

$$\frac{|AA_1|}{|S_1A|} = \frac{|AA_2|}{|S_2A|},$$



Obr. 2

takže $\triangle AA_1A_2 \sim \triangle AS_1S_2$ a tedy $S_1S_2 \parallel A_1A_2$. Tím je pomocná věta dokázána.

Z pomocné věty 1. můžeme usoudit (viz opět obr. 1), že $S_1S'_1 \parallel A_1A'_1$, takže $S_1S'_1 \parallel o_2$. Protože o'_1 byla libovolná osa souměrnosti, rovnoběžná s přímkou o_1 , jsme oprávněni se domnívat, že množinou středů stejno-
lehlostí trojúhelníku ABC a trojúhelníků souměrných k $A'B'C'$ podle
přímek rovnoběžných s přímkou o_1 je přímka $s_2 \parallel o_2$. Úvahami zcela
obdobnými předchozím úvahám a týkajícími se osy o_2 , dojdeme k hypo-
téze, že množinou středů stejnolehlostí trojúhelníku ABC a všech troj-
úhelníků, souměrných k $A'B'C'$ podle přímek rovnoběžných s přímkou
 o_2 , je přímka $s_1 \parallel o_1$. Je ovšem ještě nutno dokázat, že libovolný bod
 $S \in s_1 \cup s_2$ je středem stejnolehlosti trojúhelníku ABC a trojúhelníku,
který je souměrný k $A'B'C'$ buď podle některé přímky rovnoběžné s o_1 ,
nebo podle některé přímky rovnoběžné s o_2 . Především bychom se však
měli dovědět něco bližšího o přímkách s_1, s_2 . Zatím o nich víme, že
 $s_1 \perp s_2$, $s_1 \parallel o_1$, $s_2 \parallel o_2$. Pokusíme se najít nějaký jednoduchý způsob

sestrojení obou přímek. Za tím účelem označme $Y_1 = s_1 \cap BB'$. Protože $s_1 \parallel B'B_2$, jsou trojúhelníky BY_1S_2 a $BB'B_2$ podobné, takže

$$\frac{|BB_2|}{|BS_2|} = \frac{|BB'|}{|BY_1|}. \quad (1)$$

V obr. 1 vidíme, že $|BB_2| = |BS_2| + |S_2B_2|$, $|BB'| = |BY_1| + |Y_1B'|$. Po dosazení do (1) dostaneme postupně:

$$\frac{|BS_2| + |S_2B_2|}{BS_2} = \frac{|BY_1| + |Y_1B'|}{BY_1},$$

$$1 + \frac{|S_2B_2|}{|BS_2|} = 1 + \frac{|Y_1B'|}{|Y_1B|},$$

$$\frac{|S_2B_2|}{|BS_2|} = \frac{|Y_1B'|}{|Y_1B|}.$$

Protože $\frac{|S_2B_2|}{|BS_2|} = k$, je také $\frac{|Y_1B'|}{|Y_1B|} = k$.

Podobným způsobem můžeme dokázat pro $X_1 = s_1 \cap AA'$, $X_2 = s_2 \cap AA'$, $Y_2 = s_2 \cap BB'$, $Z_1 = s_1 \cap CC'$, $Z_2 = s_2 \cap CC'$:

$$k = \frac{|X_1A'|}{|X_1A|} = \frac{|X_2A'|}{|X_2A|} = \frac{|Y_1B'|}{|Y_1B|} = \frac{|Y_2B'|}{|Y_2B|} = \frac{|Z_1C'|}{|Z_1C|} = \frac{|Z_2C'|}{|Z_2C|}. \quad (2)$$

Tato vlastnost přímek s_1, s_2 nám umožňuje jejich poměrně jednoduchou konstrukci, spočívající v sestrojení bodů $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$, které mají vlastnost (2). Stačí samozřejmě sestrojit tři z těchto šesti bodů, které neleží na téže přímce.

Nyní si ještě dokážeme tuto pomocnou větu:

Pomocná věta 2.

Mějme dán bod A , přímku p , neprocházející bodem A a reálné číslo $k > 0$. Množinou všech bodů X , které leží v rovině určené přímkou p a bodem A a mají vlastnost

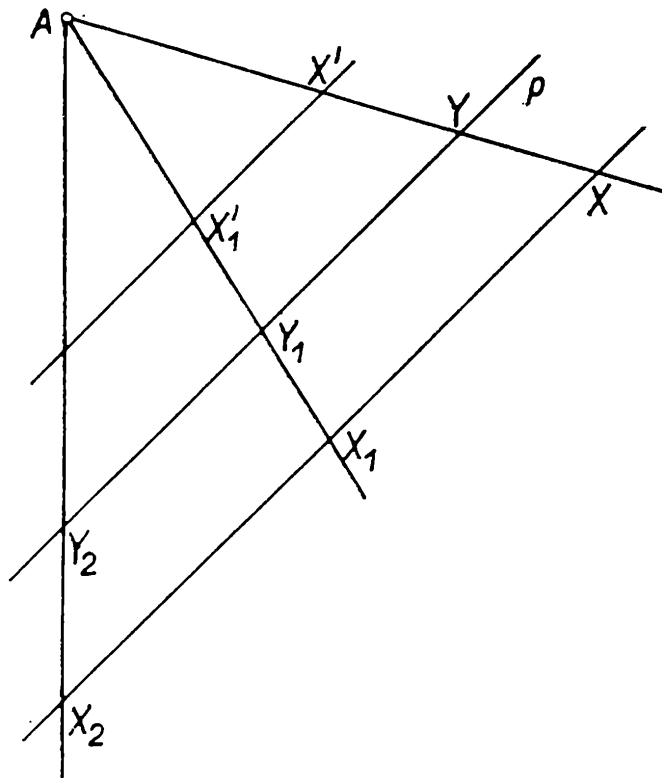
$$(V): \quad Y = AX \cap p \Rightarrow \frac{|XY|}{|AY|} = k,$$

jsou dvě přímky ležící v rovině (p, A) a rovnoběžné s přímkou p .
Důkaz (viz obr. 3):

Je-li X_1 bod, který má vlastnost (V), tj. pro $Y_1 = AX_1 \cap p$ je $\frac{|X_1Y_1|}{|AY_1|} = k$, pak vlastnost (V) musí mít i bod $X'_1 \in AX_1$, souměrný k X_1 podle bodu Y_1 , protože pro něj je $|X'_1Y_1| = |X_1Y_1|$. Bod X'_1 musí ovšem být bodem poloroviny opačné k polorovině pX_1 . Obecnost našich úvah

neporušíme, budeme-li předpokládat, že bod X'_1 je bodem poloroviny pA , takže bod X_1 je bodem poloroviny opačné k polorovině pA .

Je-li X_2 bod s vlastností (V) v rovině (p, A) , $X_2 \neq A$, X_1, X'_1 , pak $X_2 \notin AY_1$. Protože je $\frac{|X_2 Y_2|}{|A Y_2|} = k$, je $X_2 \neq Y_2$, takže $X_2 \notin p$, neboť $Y_2 = AX_2 \cap p$.



Obr. 3

Jsou tedy 2 možnosti:

a) X_2 je bodem poloroviny pX_1 . Pak je $|AX_2| = |AY_2| + |Y_2X_2|$ a $|AX_1| = |AY_1| + |Y_1X_1|$. Jsou tedy správné tyto rovnosti:

$$\frac{|AX_1|}{|AY_1|} = \frac{|AY_1| + |Y_1X_1|}{|AY_1|} = 1 + \frac{|Y_1X_1|}{|AY_1|} = 1 + k,$$

$$\frac{|AX_2|}{|AY_2|} = \frac{|AY_2| + |Y_2X_2|}{|AY_2|} = 1 + \frac{|Y_2X_2|}{|AY_2|} = 1 + k,$$

z nichž plyne

$$\frac{|AX_1|}{|AY_1|} = \frac{|AX_2|}{|AY_2|},$$

takže trojúhelníky AX_1X_2 a AY_1Y_2 jsou podobné. Odtud plyne $X_1X_2 \parallel Y_1Y_2 = p$.

b) Je-li X_2 bodem poloroviny pX'_1 , pak podobným způsobem dokážeme podobnost trojúhelníků AX'_1X_2 a AY_1Y_2 a rovnoběžnost přímek X_1X_2 a p .

Jestliže $X \in X_1X_2$, $Y = AX \cap p$, $X' \in AX$, $X'X'_1 \parallel p$, pak je $\triangle AX_1X \sim \triangle AY_1Y$, takže

$$\frac{|AX_1|}{|AY_1|} = \frac{|AX|}{|AY|}.$$

Odtud dostaneme postupně

$$\frac{|AY_1| + |Y_1X_1|}{|AY_1|} = \frac{|AY| + |YX|}{|AY|},$$

$$1 + \frac{|Y_1X_1|}{|AY_1|} = 1 + \frac{|YX|}{|AY|},$$

$$\frac{|YX|}{|AY|} = \frac{|Y_1X_1|}{|AY_1|} = k.$$

Bod X má tedy vlastnost (V). Totéž můžeme dokázat pro bod X' . Důkaz pomocné věty 2 je ukončen.

Vraťme se opět k obrázku 1. Je-li $S \in s_1$ libovolný bod, $B_3 \in BS$ (je-li $B \in s_1$, pak místo bodu B můžeme vzít bod A nebo C), $\frac{|B_3S|}{|BS|} = k$ (z obou možných bodů B_3 , které mají tyto vlastnosti, zvolme ten, který je bodem poloroviny s_1B'), vyplývá z pomocné věty 2 a z $\frac{|B'Y_1|}{|BY_1|} = k$, že $B'B_3 \parallel s_1$, takže osa souměrnosti úsečky $B'B_3$ je rovnoběžná s o_2 . Trojúhelník $A_3B_3C_3$ (na obr. 1 již není zakreslen), souměrný k $A'B'C'$ podle této osy, je stejnohlý s trojúhelníkem ABC podle středu stejnohllosti S . Podobnou úvahu můžeme provést, zvolíme-li $S \in s_2$.

Nyní již můžeme vyslovit větu, kterou jsme právě dokázali:

Věta 1

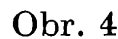
Jsou-li ABC , $A'B'C'$ dva nepřímě podobné trojúhelníky, ležící v téže rovině, pak 6 bodů $X_1, X_2 \in AA'$, $Y_1, Y_2 \in BB'$, $Z_1, Z_2 \in CC'$, pro něž je

$$\frac{|A'X_1|}{|AX_1|} = \frac{|A'X_2|}{|AX_2|} = \frac{|B'Y_1|}{|BY_1|} = \frac{|B'Y_2|}{|BY_2|} = \frac{|C'Z_1|}{|CZ_1|} = \frac{|C'Z_2|}{|CZ_2|} = k,$$

kde reálné číslo $k > 0$ je poměrem podobnosti obou daných trojúhelníků, leží po třech na dvou k sobě kolmých přímkách s_1, s_2 , které jsou rovnoběžné s osami úhlů přímek AB a $A'B'$, AC a $A'C'$, BC a $B'C'$ a jejichž sjednocení je množinou středů všech stejnohllostí, které dostaneme, sestrojíme-li k jednomu z daných trojúhelníků trojúhelník souměrný podle osy tak, aby vzniklý trojúhelník byl stejnohlý s druhým z daných trojúhelníků.

Z obrázku 4 je patrné, že k sestrojení přímek s_1, s_2 stačí, známe-li pouze body A, B a jejich obrazy A', B' v nepřímém podobném zobrazení.

roženější bude pokusit se zjistit hodnotu poměru $\frac{|RA'|}{|RA|}$. Za tím



účelem označme A_1 (A_2) patu kolmice z bodu A k přímce s_1 (s_2), A'_1 (A'_2) patu kolmice z bodu A' k přímce s_1 (s_2). Nyní je $\triangle X_1AA_1 \sim \triangle X_1A'A'_1$, takže

$$\frac{|A'A'_1|}{|AA_1|} = \frac{|A'X_1|}{|AX_1|} = k, \quad (3)$$

kde $k = \frac{|A'B'|}{|AB|}$. Podobně je $\triangle AA_2X_2 \sim \triangle A'A'_2X_2$,

odkud plyne

$$\frac{|A'A_2'|}{|AA_2|} = \frac{|A'X_2|}{|AX_2|} = k \quad (4)$$

Protože je $|AA_2| = |RA_1|$, $|A'A'_2| = |RA'_1|$, dostaneme ze (4)

$$\frac{|RA'_1|}{|RA_1|} = k. \quad (5)$$

Z (3) a (5) můžeme usoudit, že $\triangle RA'A'_1 \sim \triangle RAA_1$, takže je jednak

$$\frac{|RA'|}{|RA|} = k, \quad (6)$$

jednak $\angle A'RA'_1 = \angle ARA_1$. Označíme-li $\bar{A} = RA \cap A'A'_1$, plyne odtud $\triangle RA'A'_1 \cong \triangle R\bar{A}A'_1$, takže $|A'R| = |R\bar{A}|$, $|A'A'_1| = |\bar{A}A'_1|$. Kromě toho je $A'\bar{A} \perp s_1$, takže body A' , $\bar{A}$ jsou souměrně sdruženy podle přímky s_1 . Z (6) pak plyne

$$\frac{|R\bar{A}|}{|RA|} = k,$$

takže body A , $\bar{A}$ jsou stejnohlé se středem stejnolehlosti v bodě R a koeficientem stejnolehlosti k . Označíme-li dále $\bar{\bar{A}} = A'A'_2 \cap RA$, pak snadno dokážeme ze shodných trojúhelníků $RA'A'_2$ a $R\bar{\bar{A}}A'_2$, že body A' , $\bar{\bar{A}}$ jsou souměrné podle přímky s_2 a že body A' , $\bar{\bar{A}}$ jsou stejnohlé podle středu stejnolehlosti R s koeficientem stejnolehlosti $-k$. Přirozeně že totéž, co jsme dokázali pro body A , A' , lze dokázat i pro body B , B' a další dvojice odpovídajících si bodů nepřímé podobnosti. Než shrneme výsledky, k nimž jsme dospěli, do věty, nazveme ještě přímky s_1 , s_2 osami nepřímé podobnosti.

Věta 2.

Jsou-li ABC , $A'B'C'$ dva nepřímo podobné trojúhelníky, ležící v téže rovině ϱ a je-li R průsečík os s_1 , s_2 jejich podobnosti, je

$$\frac{|RA'|}{|RA|} = \frac{|RB'|}{|RB|} = \frac{|RC'|}{|RC|} = k$$

a bod R je středem stejnolehlosti trojúhelníka ABC a obou trojúhelníků, souměrných k trojúhelníku $A'B'C'$ podle přímek s_1 , s_2 .

Pokuste se užitím věty 2 vyřešit tyto úlohy:

Úloha 1.

V rovině ϱ jsou dány dvě úsečky AB , $A'B'$ a bod C , který neleží na přímce AB . Užitím os nepřímé podobnosti s_1 , s_2 sestrojte bod C' tak, aby trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ byly nepřímo podobné.

Úloha 2.

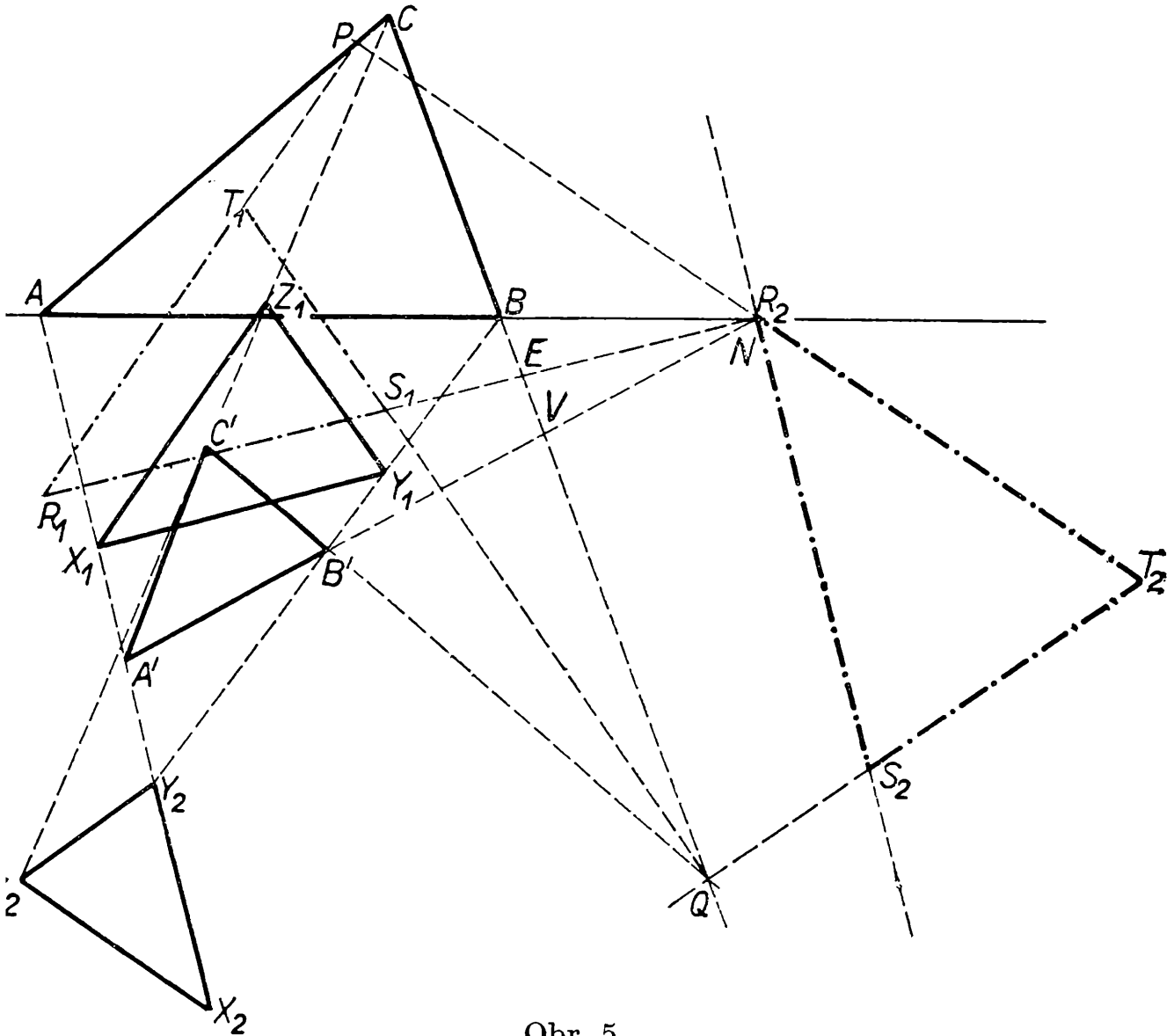
V rovině ϱ jsou dány body A , A' , přímka s_1 a body B , C . Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ nepřímo podobný trojúhelníku ABC tak, aby jednou z os nepřímé podobnosti byla přímka s_1 .

Úloha 3.

V rovině ϱ jsou dány osy s_1 , s_2 nepřímé podobnosti s daným poměrem podobnosti k ($= 3/4$). K danému trojúhelníku ABC sestrojte nepřímo podobný trojúhelník $A'B'C'$ (Úloha má dvě řešení!)

Podívejme se ještě, co dostaneme, provedeme-li podobné konstrukce u přímo podobných trojúhelníků. Zvolme si tedy v rovině ρ dva přímo podobné trojúhelníky ABC , $A'B'C'$, které nejsou stejnolehle a sestrojme body $X_1, X_2 \in AA'$, $Y_1, Y_2 \in BB'$, $Z_1, Z_2 \in CC'$ tak, aby platilo

$$\frac{|A'X_1|}{|AX_1|} = \frac{|A'X_2|}{|AX_2|} = \frac{|B'Y_1|}{|BY_1|} = \frac{|B'Y_2|}{|BY_2|} = \frac{|C'Z_1|}{|CZ_1|} = \frac{|C'Z_2|}{|CZ_2|} = k,$$



Obr. 5

kde k je poměr podobnosti trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ (viz obr. 5). Z věty 1 plyne: $X_1Y_1 \perp X_2Y_2$, $X_1Z_1 \perp X_2Z_2$, $Y_1Z_1 \perp Y_2Z_2$. Protože dva úhly, jejichž ramena jsou navzájem na sebe kolmá, jsou shodné, plyne odtud: $\sphericalangle X_1Y_1Z_1 \cong \sphericalangle X_2Y_2Z_2$, $\sphericalangle Y_1Z_1X_1 \cong \sphericalangle Y_2Z_2X_2$, $\sphericalangle Z_1X_1Y_1 \cong \sphericalangle Z_2X_2Y_2$, takže $\triangle X_1Y_1Z_1 \sim \triangle X_2Y_2Z_2$. Zbývá ještě rozřešit otázku, zda oba tyto trojúhelníky jsou podobné s trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Stačí vyšetřit, jsou-li podobné trojúhelníky $X_1Y_1Z_1$ a ABC . Protože podle věty 1 jsou přímky X_1Y_1 , X_1Z_1 , Y_1Z_1 rovnoběžné

s osami úhlů přímek AB a $A'B'$, AC a $A'C'$, BC a $B'C'$, musí být trojúhelník $R_1S_1T_1$, určený těmito osami úhlů, podobný s trojúhelníkem $X_1Y_1Z_1$. Můžeme se tedy pokusit zjistit, zda budou podobné trojúhelníky ABC a RST . Označme: $P = AC \cap A'C'$, $Q = BC \cap B'C'$, $N = AB \cap A'B'$, $M = AB \cap A'C'$. Pak je $\triangle AMP \sim \triangle A'MN$, z čehož plyne $\sphericalangle APM \cong \sphericalangle A'NM$. Je-li tedy $U = PR \cap AB$, je také $\sphericalangle APU \cong \sphericalangle UNR$. Proto je $\triangle APU \sim \triangle RNU$, z čehož plyne $\sphericalangle PAU \cong \sphericalangle URN$, a tedy také $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle TRS$. Označíme-li $V = A'B' \cap BC$, je $\sphericalangle VB'Q \cong \sphericalangle C'B'A' \cong \sphericalangle CBA \cong \sphericalangle NBV$. Proto je $\triangle NBV \sim \triangle QB'V$, takže $\sphericalangle BNV \cong \sphericalangle B'QV$. Je-li $E = NS \cap BC$, je také $\sphericalangle BNE \cong \sphericalangle EQS$, takže $\triangle BNE \sim \triangle SQE$. Z toho vyplývá správnost výroků $\sphericalangle TSR \cong \sphericalangle ESQ \cong \sphericalangle EBN \cong \sphericalangle ABC$, takže $\triangle ABC \sim \triangle RST$.

Poznatky, k nimž jsme dospěli, si nakonec shrneme do této věty:

Věta 3.

Jsou-li ABC a $A'B'C'$ dva přímo podobné trojúhelníky, které leží v téže rovině ρ , pak platí:

a) osy úhlů přímek AB a $A'B'$, AC a $A'C'$, BC a $B'C'$ určují dva trojúhelníky $R_1S_1T_1$ a $R_2S_2T_2$, které jsou podobné trojúhelníkům ABC a $A'B'C'$

b) Jsou-li $X_1, X_2 \in AA'$, $Y_1, Y_2 \in BB'$, $Z_1, Z_2 \in CC'$ body, pro něž platí

$$\frac{|A'X_1|}{|AX_1|} = \frac{|A'X_2|}{|AX_2|} = \frac{|B'Y_1|}{|BY_1|} = \frac{|B'Y_2|}{|BY_2|} = \frac{|C'Z_1|}{|CZ_1|} = \frac{|C'Z_2|}{|CZ_2|} = k,$$

kde k je poměr podobnosti trojúhelníků ABC , $A'B'C'$, je $\triangle X_1Y_1Z_1 \sim \triangle X_2Y_2Z_2 \sim \triangle ABC$.

Daťové typy

PAVLA FEJTKOVÁ, dr. MAREK MALÍK, MFF UK Praha

V praxi kolem sebe nacházíme často případy, kdy chceme objekty či situace reálného světa určitým způsobem zkoumat a pro tento účel je potřebujeme nějak popsat. Tyto objekty nebo situace mohou být velmi rozmanitého charakteru.

Z některých popisů objektů vychází klasická matematika — například jsme zvyklí určovat bod v rovině (v analytické geometrii) uspořádanou dvojicí reálných čísel. To znamená, že pak místo o bodu v rovině hovoříme o takové dvojici. Na první pohled se nám patrně bude zdát dosti neobvyklým, budeme-li chtít podobně (např. opět uspořádanou dvojicí

reálných čísel) popsat i objekty, které nejsou z „obvyklého matematického světa“. Ovšem takový popis může být velmi přirozený a často jej používáme zcela neuvědomněle.

Představme si situaci, že máme provádět statistické šetření na žácích jedné třídy, při kterém nás na každém žákovi nezajímá nic jiného než jeho výška a váha. Pak jistě bude vhodné a praktické nehovořit přímo o jednotlivých žácích, ale místo každého z nich uvažovat dvojici reálných čísel (jedno číslo představuje výšku a druhé váhu právě toho žáka, kterému tato dvojice odpovídá). Můžeme si tedy zapsat, že žáka znázorňujeme ve tvaru $\langle \text{reálné číslo; reálné číslo} \rangle$. Při provádění uvedeného šetření je pro nás totiž postačující informace, že ve třídě se nachází „žák“ např. $\langle 170.5; 59.2 \rangle$, zatímco konkrétní jméno, adresa, prospěch atp. nás (pro účely uvažovaného šetření) vůbec nezajímají.

Vidíme tedy, že uspořádaná dvojice $\langle \text{reálné číslo; reálné číslo} \rangle$ může znamenat popis různých objektů. Může reprezentovat bod v rovině, komplexní číslo, čitatele a jmenovatele zlomku, a může též znamenat váhu a výšku žáka v nějakém statistickém šetření. Takových významů může být samozřejmě velmi mnoho (uvedte si nějaké další!).

Matematika se obvykle zabývá tím, jak s takovýmto popisem dále pracovat. Můžeme samozřejmě vybudovat aparát a teorii pro práci s dvojicemi reálných čísel, aniž se budeme zabývat tím, co tato dvojice vlastně představuje. Na rozdíl od tohoto přístupu velké části klasické matematiky nás nyní bude zajímat zcela opačný pohled: Jak mohou vypadat konkrétní objekty zkoumání a zejména pak, jak takové objekty vhodně popisovat.

Vraťme se nyní k uvedené dvojici $\langle \text{reálné číslo; reálné číslo} \rangle$, kterou popisujeme nějaký objekt. Zamysleme se, co v tomto zápise znamenají slova „reálné číslo“. Celý zápis udává, že popisované objekty charakterizujeme dvěma údaji a slova „reálné číslo“ znamenají, že příslušný údaj v celém popisu je právě reálné číslo (to znamená, že konkrétní bod v rovině o souřadnicích 1,5 a 6,28 bude popsán dvojicí $\langle 1.5; 6.28 \rangle$).

Takovýmto konkrétním údajům (tj. např. dvojici $\langle 1.5; 6.28 \rangle$), které v dané situaci postačujícím způsobem popisují nějaký objekt, říkáme data.

Připomeňme si, že musíme přesně a důsledně rozlišovat mezi konkrétními daty a typem dat, který vlastně udává, z jaké množiny budou konkrétní data. (Tj. typem dat je např. $\langle \text{reálné číslo; reálné číslo} \rangle$.)

Doposud jsme hovořili jen o takových typech dat, kde konkrétní hodnoty složek jsou reálná čísla. Dále se seznámíme s některými dalšími datovými typy, které nám usnadní popisovat další objekty.

Zcela běžné pro nás bude zřejmě použití celých čísel. Protože celá čísla popisují obvykle (jak dále mimo jiné uvidíme) poněkud jiné vlastnosti než čísla reálná, nebudeme je chápat jako součást čísel reálných, i když

by to samozřejmě bylo možné. Tedy typ dat celých čísel budeme od typu dat reálných čísel odlišovat. Budeme-li například provádět statistické šetření o výšce a váze žáků základních škol v celé republice, bude nás zřejmě kromě zkoumané výšky a váhy žáka zajímat též jeho rok narození. Můžeme tedy výše používaný typ dat $\langle \text{reálné číslo; reálné číslo} \rangle$ rozšířit na typ dat $\langle \text{celé číslo; reálné číslo; reálné číslo} \rangle$, kde první datová složka trojice znamená rok narození (tedy konkrétní datový údaj tohoto typu může být například $\langle 1965; 141.5; 38.9 \rangle$).

Pro zjednodušení si ještě uvedme označení jednotlivých typů, které se v této oblasti používá mezinárodně. Místo zápisu celé číslo budeme používat slova *integer*, místo reálné číslo slova *real*. Typ dat z předcházejícího odstavce zapíšeme tedy $\langle \text{integer; real; real} \rangle$.

Určitý typ dat představuje tedy jakýsi prototyp, podle kterého jsou utvářena konkrétní data. To znamená, že typ dat určuje, jakou má vnitřní strukturu příslušný konkrétní datový údaj (tj. jedno „dato“). Například tedy typ dat $\langle \text{integer; real; integer} \rangle$ určuje, že každý jemu odpovídající datový údaj je složen ze tří čísel, přičemž první a třetí jsou čísla celá a druhé je číslo reálné (tedy např. $\langle -4; 8.256; 195 \rangle$). Zde je třeba si uvědomit, že typem dat je třeba i *real* samo o sobě (přesnější zápis $\langle \text{real} \rangle$ zde zkracujeme jenom na *real*): data takového typu jsou tvořena reálnými čísly — podrobněji řečeno, každý datový údaj typu *real* je tvořen právě jedním reálným číslem.

V případě reálných i celých čísel jsme zvyklí uvažovat nějaké proměnné. Používáme-li ve svých úvahách např. proměnnou pro reálná čísla, rozumíme pod tímto pojmem nějakou veličinu, která může podle potřeby nabývat určité hodnoty a které můžeme podle potřeby určité hodnoty — tj. konkrétní reálná čísla — přiřazovat. Podobně proměnná pro komplexní čísla je proměnná veličina, která nabývá hodnot z oboru komplexních čísel. Máme-li však (jak je zcela obvyklé) zavedena komplexní čísla jako uspořádané dvojice čísel reálných, nabývá vlastně proměnná komplexní veličina konkrétních hodnot z „oboru uspořádaných dvojic reálných čísel“. Jistě nás tedy napadne, že by bylo možné uvažovat o proměnné veličině u každého datového typu.

Pod proměnnou datového typu rozumíme veličinu, která může nabývat hodnot z oboru datových údajů stejného typu.

Například proměnná typu $\langle \text{integer; real} \rangle$ může za své hodnoty nabývat např. $\langle 3; 17.6 \rangle$ nebo $\langle -8; 0.0003 \rangle$ nebo $\langle 1423389; 4.0111 \rangle$ a podobně. (Zcela analogicky jako proměnná typu *real* může nabývat hodnoty 17.6 nebo 0.0003 nebo 4.0111 a podobně.)

Vraťme se nyní k našemu příkladu, kdy jsme za účelem statistického šetření popisovali žáky ve škole daty typu $\langle \text{integer; real; real} \rangle$. Každému žákovi jsme tedy přiřadili konkrétní datový údaj tohoto typu.

Představme si nyní poněkud komplikovanější situaci, kdy nás bude u každého žáka navíc zajímat, zda se stravuje ve školní jídelně či nikoliv. U každého žáka je na takovou otázku možná pouze odpověď ano nebo ne. K zapsání takové informace nejsou příliš vhodná ani reálná ani celá čísla. Bude proto zřejmě užitečné zavést pro takovou informaci speciální datový typ. Jedná se o typ, jehož konkrétní data (tj. konkrétní datové údaje) jsou z dvouprvkové množiny {ano, ne}. Taková data nazýváme logická a jejich typ označujeme slovem **Boolean**. Samotné hodnoty dat tohoto typu označujeme slovy: **true** (pravda) a **false** (nepravda). Proměnná typu **Boolean** může tedy nabývat pouze dvou hodnot: buď **true** nebo **false**. V námi uvažovaném případě můžeme žáky ve škole popisovat daty typu $\langle \text{integer}; \text{real}; \text{real}; \text{Boolean} \rangle$. To znamená, že žákovi, který se narodil v roce 1961, měří 179,5 cm, váží 69,2 kg a ve školní jídelně se nestravuje, odpovídá datový údaj $\langle 1961; 179.5; 69.2; \text{false} \rangle$.

Na začátku článku jsme si z analytické geometrie připomněli, že body v rovině můžeme popisovat daty typu $\langle \text{real}; \text{real} \rangle$. Zcela analogicky můžeme body v prostoru popisovat daty typu $\langle \text{real}; \text{real}; \text{real} \rangle$. Představme si nyní, že máme několik uvažovaných bodů reprezentováno pro názornost kuličkami upevněnými nějakým způsobem v prostoru. Pak ovšem bude mít smysl zajímat se o barvu toho kterého bodu (totiž o barvu jemu odpovídající kuličky). Omezíme-li se na situaci, kdy kuličky mohou být třeba jen modré, červené a zelené, můžeme si vypomoci tak, že popisující data rozšíříme na data typu $\langle \text{real}; \text{real}; \text{real}; \text{integer} \rangle$, kde poslední celočíselná složka bude nabývat hodnot pouze z množiny $\{1, 2, 3\}$ a sice 1 pro barvu modrou, 2 pro barvu červenou a 3 pro barvu zelenou. (Např. „zelenému“ bodu v počátku souřadné soustavy odpovídá datový údaj $\langle 0.0; 0.0; 0.0; 3 \rangle$.) Takovéto zapsání informace o barvě kuličky není ale nejvýhodnější — zejména ne proto, že není dostatečně názorné. V případě tří barev jsme sice ještě schopni s uvedeným číselným zakódováním pracovat, ale v případě více barev nám asi práce s takovým zakódováním bude činit potíže. O hodně výhodnější by bylo zřejmě zapisovat informaci o barvě bodu ne nějakým číslem, ale nějakým písmenem (např. Č pro červenou, O pro oranžovou, Ž pro žlutou, Z pro zelenou, M pro modrou a F pro fialovou a případně podobně dále). K takovému účelu potřebujeme datový typ, jehož data by byla z množiny písmen (nebo obecněji z množiny nějakých znaků). Takový typ nazýváme **character** a jemu příslušná data jsou z množiny „normálně používaných znaků“ — tj. písmen, číslic, interpunkčních znamének, základních matematických značek atp. Daty typu **character** jsou tedy například A, Y, 6, :, /, +, = a podobně. Poznamenejme ještě, že mezi konkrétní hodnoty typu **character** patří též např. 5 (jako psaný znak — tedy „pětka“ — číslovka), na rozdíl od konkrétní hodnoty typu **integer** 5 (jako vyjádření čísla — tedy „pět“ — konkrétní číselná hodnota). Abychom v takovýchto a podobných situacích snadno rozpoznali, kde jde o zápis hodnoty

typu **character** a kde nikoliv, píšeme konkrétní charakterové hodnoty mezi apostrofy. Tedy např. '5', 'A', 'Y', '/', '+', '=', ';', ',', ' ' a podobně. Data popisující barevné body v prostoru mohou být tedy typu **<real; real; character>**. „Zelenému“ počátku souřadné soustavy tedy odpovídá: **<0.0; 0.0; 0.0; 'Z'>**.

Nyní se vrátíme opět k případu, kdy nějakými daty popisujeme žáky jedné školy — u každého žáka nás nyní bude zajímat jeho jméno, příjmení a třída, do které chodí. Třidu, do které žák chodí, můžeme snadno popsat daty typu **<integer; character>** — např. třídě čtvrté A bude odpovídat datový údaj **<4; 'A'>**. Dosud ale nemáme prostředky jak popsat jméno a příjmení žáka. K tomuto účelu nám bude sloužit další datový typ: **text**. Typ **text** určuje, že jemu příslušná konkrétní data jsou z množiny různých nápisů (přesněji řečeno z množiny právě všech konečných posloupností charakterů). Daty typu **text** jsou tedy například: „ROZHLEDY“, „MATEMATIKA“, ale i „MA TEMATIKA“, „PYVO“, „3.14“ nebo „-; //X“ a podobně (analogicky jako konkrétní charakterové hodnoty píšeme mezi dvěma apostrofy, píšeme konkrétní hodnoty dat typu **text** v uvozovkách).

Zopakujme si zde, že proměnnou typu **text** chápeme veličinu, která může podle potřeby znamenat různé nápisy — tj. veličinu, která nabývá hodnot z množiny konkrétních dat typu **text**.

Připomeňme si ještě, že podobně jako v případě charakterů je podstatný rozdíl mezi hodnotou typu **real**: 3.14 a hodnotou typu **text**: „3.14“. Hodnotu typu **real** chápeme jako skutečné vyjádření číselné velikosti, naopak uvedenou hodnotu typu **text** chápeme pouze jako konkrétní nápis složený ze čtyř znaků: z trojky, tečky, jedničky a čtyřky.

Využijeme-li typ **text**, můžeme žáky ve škole popisovat daty typu **<text; text; integer; character>**. Například žáku Františku Malému, který chodí do třídy třetí B, bude odpovídat datový údaj: **<„FRANTIŠEK“; „MALÝ“; 3; 'B'>**.

Tímto jsme se seznámili se všemi základními typy. Předchozí část článku můžeme tedy shrnout do následující definice:

Definice:

Základními (resp. standardními) datovými typy nazýváme typy: **real, integer, Boolean, character, text**.

Všechny ostatní datové typy nazýváme složené.

Složenými datovými typy jsou tedy například již uvedené typy:

<real; real>, **<integer; character>**,
<text; text; integer; character> a podobně další.

Datové typy se využívají zejména v moderních aplikacích výpočetní techniky. Pro názornost si uvedeme ve zjednodušení jeden z klasických případů použití:

Ve velkém výrobním závodě se zpracovává pomocí samočinného po-

čítače agenda zaměstnanců. Je proto potřeba uchovávat nějakým způsobem informaci o jednotlivých zaměstnancích. K tomu, aby nám takový systém informace dobře sloužil, musíme informaci o zaměstnancích nějak unifikovat, neboli musíme uchovávat tuto informaci v pevném — předem zvoleném — tvaru. Pro zavedení takového pevného tvaru nám mohou velice dobře posloužit datové typy. Zvolíme si totiž nějaký vhodný složený typ dat — a informaci o každém zaměstnanci budeme uchovávat v počítači (jak se to přesně zařídí, řekneme si v některém z příštích článků) ve formě dat (přesněji řečeno ve formě konkrétního datového údaje) tohoto typu. Použitý typ může vypadat třeba následovně:

`<text; text; integer; integer; integer; Boolean; text; integer; character; real; integer; character>`,

kde jednotlivé složky budou mít následující význam:

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1. složka text | jméno pracovníka |
| 2. složka text | příjmení pracovníka |
| 3.—5. složka integer | den, měsíc a rok narození |
| 6. složka Boolean | pohlaví
(zde učiníme úmluvu, že např. mužům přiřadíme v této složce hodnotu true a ženám false) |
| 7. složka text | adresa bydliště |
| 8. složka integer | telefon |
| 9. složka character | úsek pracoviště |
| 10. složka real | průměrná mzda |
| 11. složka integer | počet vyživovaných osob |
| 12. složka character | kvalifikační skupina |

Konkrétní datový údaj odpovídající jistému pracovníku pak může vypadat následovně:

`<„JAN“; „KRÁL“; 22; 5; 1942; true; „PRAHA 10 JABLOŇOVÁ 8“; 733216; 'E'; 2126.24; 4; 'A'>`.

Probírání jednotlivých dat odpovídajících skutečným zaměstnancům nám pak snadno umožňuje zjistit rozbořem příslušných položek například:

- nejstaršího zaměstnance na závodě,
- součet průměrných platů všech zaměstnanců,
- průměrný věk všech zaměstnaných žen,
- procentuální zastoupení pracovníků určité kvalifikační skupiny a podobně.

Pozoruhodné na tom je, že pro všechna tato zjištění nám stačí již jednou provedené popsání všech pracovníků daty zvoleného typu.

Cvičení:

1. Navrhněte typ dat pro popis žáků ve škole, ze kterého by bylo možno vyčíst velmi podrobnou informaci. Pokuste se zakódovat daty takového typu několik osob.

2. Podobný typ dat navrhněte pro zápis informace o různých obyvatelích vašeho domu.

konstruktivní geometrie

K rovinným řezům na rotační kuželové ploše

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

V článku *St. Horáka*: „Řezy rotační válcové plochy“ (Rozhledy matem.-fyzikální, roč. 56, 1977, str. 15) byla stanovena množina všech ohnisek řezů na rotační válcové ploše, které leží v rovinách svazku rovin procházejících přímkou protínající kolmo osu rotační válcové plochy. Touto množinou je tzv. *kappa křivka*, ležící v osově rovině válcové plochy, která je kolmá na osu svazku rovin.

V tomto článku se budeme zabývat podobnou úlohou pro rotační kuželovou plochu. Přitom budeme vycházet z vlastnosti, kterou vyjadřuje věta *Quételetova-Dandelinova*: *Vepíšeme-li do rotační kuželové nebo válcové plochy kulové plochy tak, aby se dotýkaly roviny řezu, jsou jejich dotykové body ohnisky řezu.*

Zvolme rovinu ν procházející osou o rotační kuželové plochy za průmětnu, osu o za osu y , osu $x \perp o$ procházející bodem $O \in o$ za osy pravoúhlé soustavy souřadnicové. Bod $V \neq O$ je vrchol kuželové plochy a délka úsečky $OV = v$; úhel ω , který svírají přímky p, q s osou o je $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

Svazek rovin kolmých k průmětně ν a procházejících bodem O protíná rovinu ν v přímkách m_i , jež jsou pravoúhlými průměty rovin svazku. Pro jednoduchost nebudeme průmětové indexy označovat, neboť výsledná křivka je rovinná a leží v průmětně ν (obr. 1).

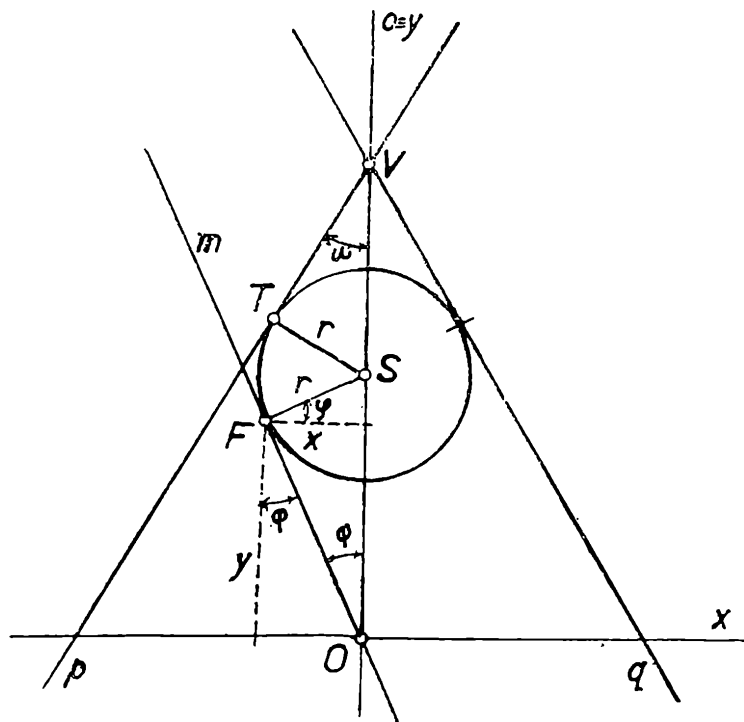
Do rotační kuželové plochy vepíšeme množinu kulových ploch κ_i , jejichž obrysové kružnice v průmětně označme $k_i(S, r)$. Z bodu O vedme ke kružnici k tečnu m a její dotykový bod označme F ; jeho souřadnice

v zavedené soustavě souřadnic jsou $F(x, y)$. Tečna m svírá s osou o úhel φ .

Z pravoúhlého $\triangle OFS$ určíme

$$OF = \frac{y}{\cos \varphi} \quad \text{a} \quad OS = \frac{OF}{\cos \varphi} = \frac{y}{\cos^2 \varphi};$$

$$r = OS \cdot \sin \varphi = y \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi}. \quad (1)$$



Obr. 1

Z pravoúhlého $\triangle VTS$ určíme

$$VS = \frac{r}{\sin \omega} = \frac{y \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi \cdot \sin \omega}. \quad (2)$$

Z rovnosti $VS + SO = v$ dostaneme

$$y(\sin \varphi + \sin \omega) = v \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \omega. \quad (3)$$

Poněvadž $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{y}$, je $\sin \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\cos \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Po dosazení do (3) dostaneme po jednoduché úpravě

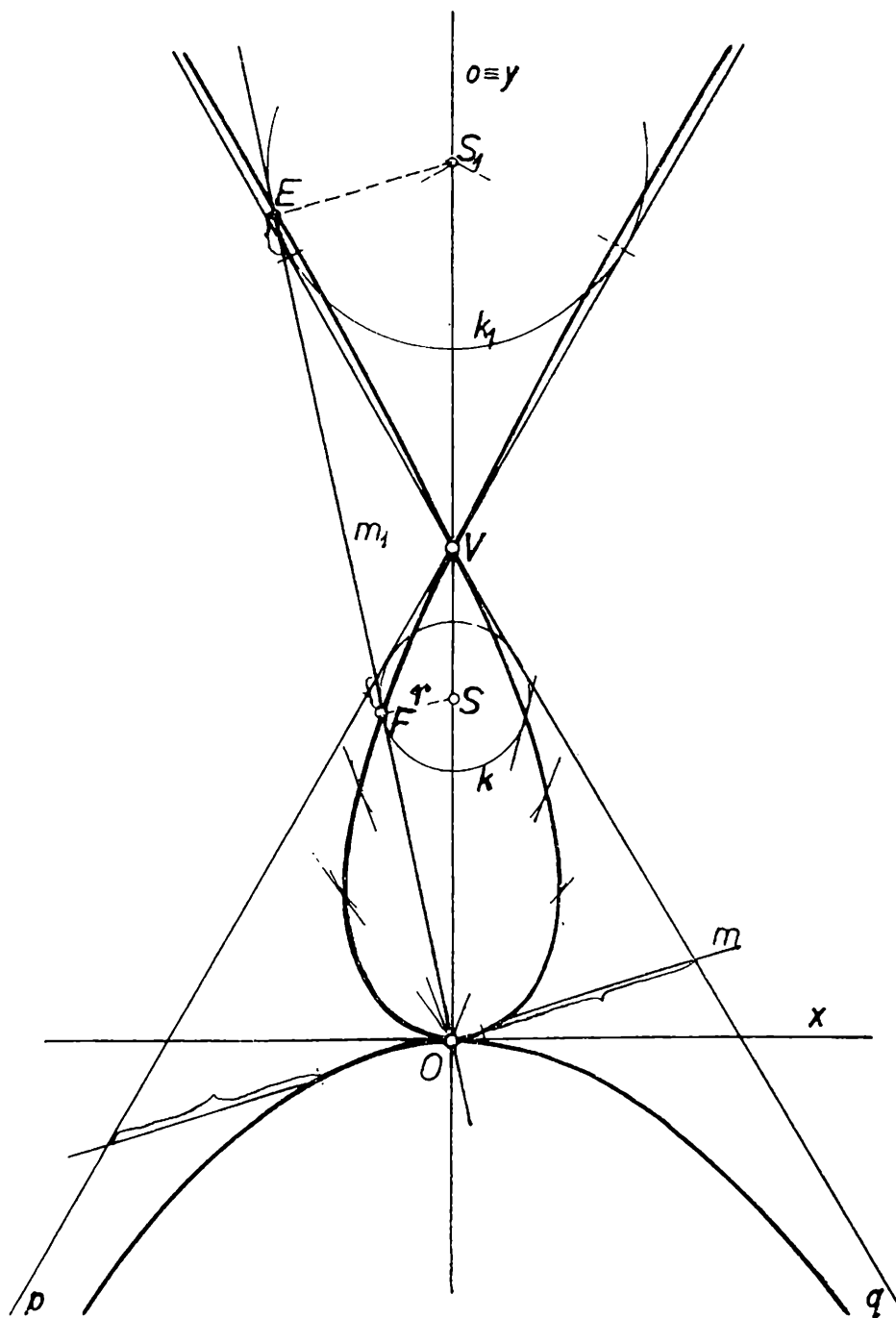
$$x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = [vy - (x^2 + y^2)] \cdot \sin \omega$$

a po umocnění obou stran rovnice dvěma konečný tvar rovnice křivky

$$x^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - vy)^2 \cdot \sin^2 \omega = 0. \quad (4)$$

Ke stejné rovnici dojdeme i v ostatních případech.

Rozborem této rovnice získáme nejdůležitější vlastnosti této křivky, která vyjadřuje množinu všech ohnisek řezů, které splňují podmínky uvedené v předcházejícím textu. Poněvadž tato křivka nemá jméno, nazveme ji *k-křivkou* (obr. 2).



Obr. 2

Z rovnice (4) plyne, že křivka je *čtvrtého stupně* a je *souměrná podle osy y*. Pro $x = 0$ dostaneme $[y(y - v)]^2 = 0$ a odtud $y^2 = 0$, což značí, že bod $O(0, 0)$ je *dvojnásobným bodem křivky*. Pro $y = 0$ dostaneme $x^4(1 - \sin^2\omega) = x^4 \cdot \cos^2\omega = 0 \Rightarrow x^4 = 0$, to značí, že bod O je *bodem sebedotyku*

obou větví křivky. Rovina π procházející osou x a kolmá k průmětně ν protíná kuželovou plochu v kružnici, v jejímž středu O obě ohniska splývají.

Abychom vyšetřili *polohu křivky a nevlastní přímky její roviny*, dosadíme do rovnice (4) $x = \frac{x'}{z}$, $y = \frac{y'}{z}$ a položíme $z = 0$. Zjistíme tak společné body křivky a nevlastní přímky její roviny.

Dostaneme (po vynechání čárek při proměnných x' , y') z rovnice

$$x^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - vyz)^2 \sin^2 \omega = 0 \quad (4')$$

pro $z = 0$ podmínku $(x^2 + y^2)(x^2 \cos^2 \omega + y^2 \sin^2 \omega) = 0$.

Odtud pak a) $y = \pm x \cotg \omega$, b) $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x + iy)(x - iy) = 0$. Případ a) určuje *směry asymptot křivky*, což jsou směry obrysových přímek kuželové plochy p , q v rovině ν , případ b) značí, že křivka náleží mezi tzv. *cirkulární křivky* (podobně jako *křivka kappa*), tj. *prochází nevlastními imaginárními kružnicovými body*, které jsou společné všem kružnicím v rovině ν .

Dosadíme-li

$$y = \pm x \cdot \cotg \omega + vz \quad (5)$$

do rovnice (4'), což přenechávám k jednoduchému výpočtu čtenáři, dostaneme po úpravě $v^2 x^2 z^2 = 0$ a odtud $x^2 = 0$, $y = v$, to značí, že bod V je *jednoduchým dvojnásobným uzlovým bodem křivky* a pro $z = 0$ dostaneme z (5) $y = \pm x \cotg \omega$; tím jsou určeny *nevlastní body asymptot*. Bod V *nenáleží hledané množině ohnisek*, neboť bod nepovažujeme za kulovou plochu.

Zvolíme-li na k -křivce libovolný bod (kromě vrcholu V), snadno sestrojíme rovinu řezu s ohniskem F .

Z vlastnosti rovinných řezů na rotační kuželové ploše pak plyne, že *úsečky mezi k -křivkou a jejími asymptotami*, což jsou obrysové přímky kuželové plochy, *vytáté přímkami m , jsou stejně dlouhé*, což umožňuje přesnější sestrojení křivky.

Jestliže bod O neleží na ose o a je vnitřním bodem kuželového prostoru na ose x a užijeme téhož postupu, dostaneme křivku nesouměrnou podle osy y . Je-li bod O bodem některé přímky plochy, např. p , je *křivkou kosá strofoida*. (Viz článek autora tohoto článku v Rozhledech, roč. 56, str. 114.)

Konstrukce parabolické dráhy šikmého vrhu

Ing. JAROSLAV HYLÁN, CSc., Vysoká škola dopravná Žilina

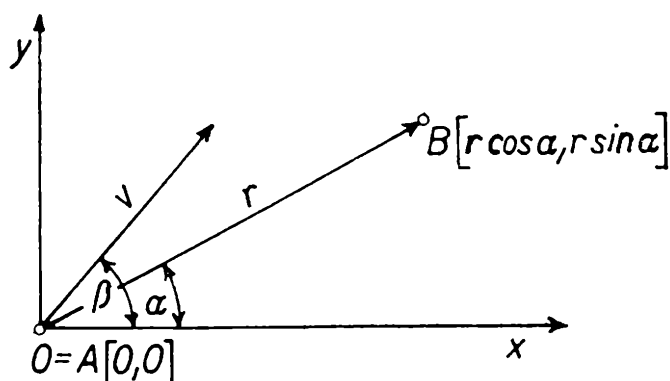
V tomto článku se budeme zabývat matematickou a konstrukční stránkou tohoto problému:

„Jsou dány dva body A a B ve vakuu, přičemž bod A leží blíže k vodorovné rovině než bod B . Máme stanovit

a) minimální velikost počáteční rychlosti střely z bodu A , při které střela zasáhne bod B ,

b) velikost úhlu β , který dráha takové střely svírá v bodě A s vodorovnou rovinou,

c) sestavit ohnisko, řídící přímku a vrchol paraboly, jejíž oblouk AB je dráhou střely.



Obr. 1

Vesvislé rovině, kde bude probíhat popsáný pohyb, zavedeme pravoúhlý souřadnicový systém (x, y) . Ve vodorovné rovině bude ležet bod $A(0, 0)$, který umístíme do počátku tohoto souřadnicového systému. Vzdálenost bodů A, B označme r . Nechť α je velikost úhlu, který svírá polopřímka AB s kladným smyslem osy x , zvoleným tak, aby platilo $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. To znamená, že bod B má souřadnice $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$. (Obr. 1.) Jak je známo z fyziky, parametrické rovnice parabolické dráhy střely jsou

$$x = vt \cos \beta$$

$$y = vt \sin \beta - \frac{1}{2}gt^2, \quad (1)$$

kde je v velikost počáteční rychlosti střely, t je velikost času, g je velikost gravitačního zrychlení a β je velikost úhlu, pod kterým je střela vyslána z bodu A ; v matematickém popisu fyzikální jednotky neuvádíme.

Je zřejmé, že souřadnice bodu A vyhovují rovnicím (1) pro čas $t = 0$. Pro nějakou hodnotu τ proměnné t budou souřadnice bodu B též vyhovovat rovnicím (1). Dosadíme-li, dostáváme

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= v\tau \cos \beta, \\ r \sin \alpha &= v\tau \sin \beta - \frac{1}{2} g\tau^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Převědeme výrazy $-\frac{1}{2} g\tau^2$ v druhé rovnici (2) na levou stranu, umocníme obě rovnice na druhou a sečteme; tím obdržíme

$$r^2 \cos^2 \alpha + \left(r \sin \alpha + \frac{1}{2} g\tau^2 \right)^2 = v^2 \tau^2. \quad (3)$$

Ze vztahu (3) po úpravě plyne

$$v^2 = \frac{1}{4} g^2 \tau^2 + \frac{r^2}{\tau^2} + rg \sin \alpha. \quad (4)$$

Vztah (4) vyjadřuje, jak velikost počáteční rychlosti v závisí na čase τ , za který střela dosáhne bodu B . Doplněním na úplný čtverec získáme

$$v^2 = \left(\frac{1}{2} g\tau - \frac{r}{\tau} \right)^2 + rg (1 + \sin \alpha). \quad (5)$$

Aby hodnota proměnné v byla minimální, musí nabýt výraz $\left(\frac{1}{2} g\tau - \frac{r}{\tau} \right)^2$ nejmenší hodnoty, a to nastane v tom případě, když

$$\frac{1}{2} g\tau - \frac{r}{\tau} = 0, \text{ neboli } \tau^2 = \frac{2r}{g} \text{ a } \tau = \sqrt{\frac{2r}{g}} \quad (6)$$

Tomu času odpovídá minimální velikost rychlosti

$$v_{\min} = \sqrt{rg (1 + \sin \alpha)} \quad (7)$$

při níž lze ještě zasáhnout bod B střelou z bodu A .

Dále určíme úhel β , pod kterým je nutno vyslat střelu z bodu A zjištěnou minimální rychlostí. Vyjdeme z první rovnice (2), do které dosadíme za v hodnotu $v_{\min}$ ze vztahu (7) a za τ hodnotu ze vztahu (6)

$$r \cos \alpha = \sqrt{rg(1 + \sin \alpha)} \cdot \cos \beta \quad \sqrt{\frac{2r}{g}} \quad \text{z čehož}$$

$$\cos^2 \alpha = (1 + \sin \alpha) 2 \cos^2 \beta,$$

$$\frac{1 - \sin \alpha}{2} = \cos^2 \beta,$$

$$\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2} = \cos^2 \beta,$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}; \quad (8)$$

(8) nám udává závislost úhlu β na úhlu α .

Při $\alpha = 0$ dostáváme $\beta = \frac{\pi}{4}$, což odpovídá poznatku, že bod B ležící v téže vodorovné rovině jako bod A lze zasáhnout střelou z A vypuštěnou pod úhlem $\frac{\pi}{4}$; v takovém případě postačí jí udělit nejmenší rychlost. Dráhou střely je oblouk paraboly, který je souměrný podle osy úsečky AB .

Při $\alpha = \frac{\pi}{2}$ vychází také $\beta = \frac{\pi}{2}$, což odpovídá situaci, kdy bod B leží svisle nad bodem A , jde potom o svislý vrh vzhůru. Při $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

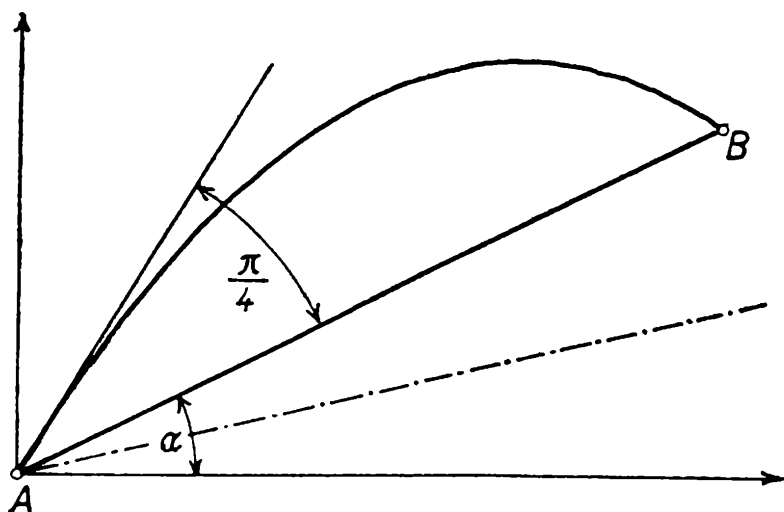
získáváme úhel β splňující nerovnost $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$; dráhou střely je oblouk paraboly (obr. 2).

Prozkoumejme nyní geometrické vlastnosti tohoto oblouku.

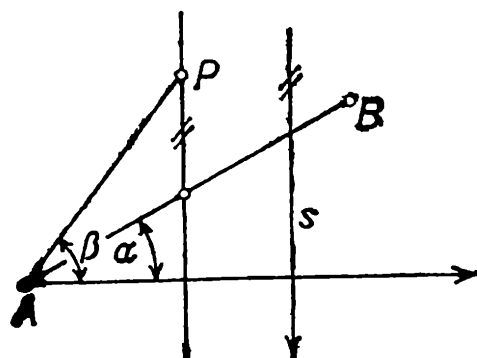
Položme si otázku:

Můžeme sestavit parabolu požadované dráhy už na základě daných bodů A , B , vodorovné přímky h v bodě A a tečny v bodě A , která udává směr střely?

V obr. 3 máme vyznačeno zadání úlohy, přímka s ukazuje směr osy paraboly. Tečny paraboly v bodech A , B se protínají v bodě P na té přímce směru s , která prochází středem tětivy AB (připomeňte si tuto větu).



Obr. 2



Obr. 3

Souřadnice bodu P určíme velmi snadno:

$$x_P = \frac{1}{2} r \cos \alpha, \quad y_P = x_P \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} r \cos \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Vektor $P-A$ má souřadnice $\left(\frac{1}{2} r \cos \alpha, \frac{1}{2} r \cos \alpha \operatorname{tg} \beta\right)$, vektor $P-B$ má souřadnice $\left(-\frac{1}{2} r \cos \alpha, \frac{1}{2} r \cos \alpha \operatorname{tg} \beta - r \sin \alpha\right)$.

Skalární součin těchto vektorů je roven

$$-\frac{1}{4} r^2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} r^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{1}{2} r^2 \cos \alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4} r^2 \cdot C,$$

$$\begin{aligned} \text{kde} \quad C &= -\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - 2 \cos \alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \beta = \\ &= -\cos^2 \alpha + (\cos \alpha \operatorname{tg} \beta - \sin \alpha)^2 - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha \operatorname{tg} \beta - \sin \alpha)^2 - 1. \end{aligned}$$

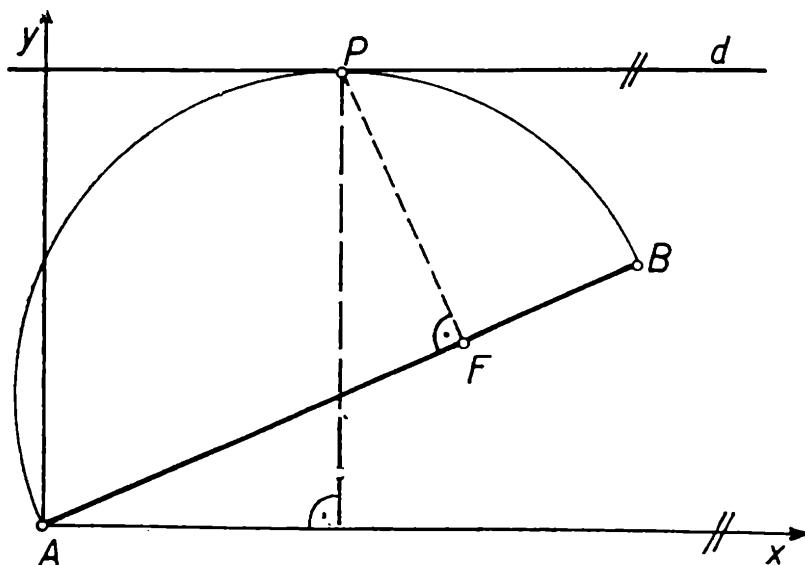
Protože $\beta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$, je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}. \end{aligned}$$

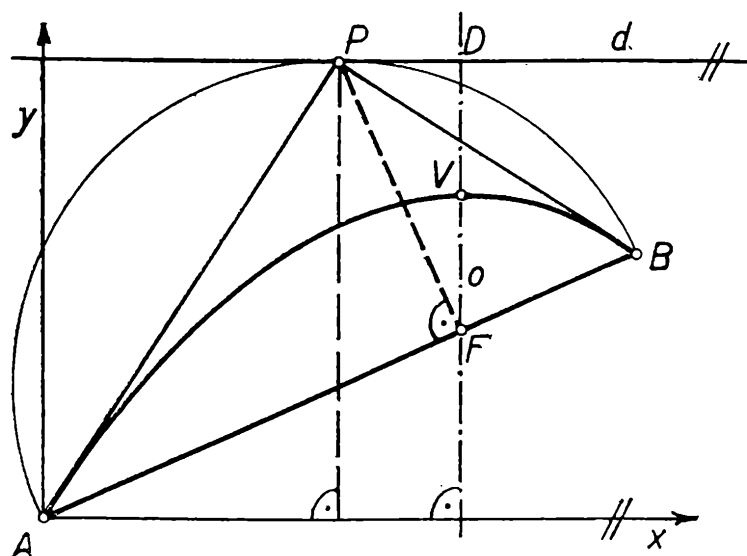
Tedy

$$C = \left(\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} - \sin \alpha \right)^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Proto i skalární součin $(P-A) \cdot (P-B)$ je roven nule a vektory $P-A$, $P-B$ jsou kolmé. Toto zjištění má důležité důsledky (obr. 4a):



Obr. 4a



Obr. 4b

a) Tečny hledané paraboly v bodech A , B jsou navzájem kolmé a protínají se v bodě P na svislé přímce procházející středem úsečky AB .

b) Řídící přímka paraboly prochází bodem P a je vodorovná.

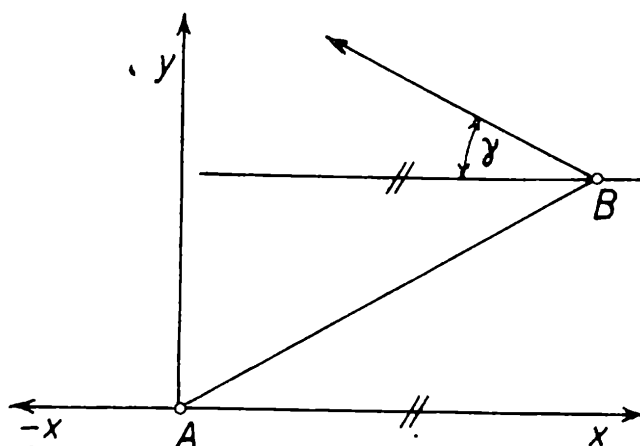
c) Ohnisko paraboly je patou kolmice z bodu P na přímku AB .

Tvrzení a) jsme dokázali; tvrzení b) je důsledkem toho, že jen z bodů řídící přímky lze vést vzájemně kolmé tečny k parabole. Tvrzení c) vyplývá z toho, že kružnice se středy A , B , které se dotýkají řídící přímky, pro-

cházejí ohniskem paraboly a navzájem se v něm dotýkají. (Viz článek dr. Šarounové v čísle 2 Rozhledů, roč. 57.)

Uvedené poznatky umožňují konstrukci ohniska a řídící přímky paraboly, která svým obloukem AB řeší náš původní problém (obr. 4b).

1. Sestrojíme střed úsečky AB a vedeme jím rovnoběžku s osou y .
2. Sestrojíme Thaletovu kružnici s průměrem AB a její průsečík P s právě sestrojenou přímkou.
3. Bodem P vedeme přímku d kolmou k ose y a kolmicí k přímce AB , její pata je ohniskem F paraboly.
4. Osou paraboly je kolmice z F na d , vrchol V je středem úsečky FD , kde D je patou kolmice z F na d .



Obr. 5

Je jistě zřejmé, že bod V je nejvyšší bod parabolické dráhy střely a že je výše než bod B . To znamená, že dráha střely při minimální velikosti její počáteční rychlosti nedosahuje v B svého nejvyššího bodu, jak by se mohlo zdát na první pohled.

Zabývejme se ještě ve stručnosti případem, kdy vystřelíme střelu z bodu B minimální rychlostí, při které zasáhne bod A .

Předpokládejme, že dráha střely svírá s horizontální rovinou úhel γ . Ve svislé rovině, kde probíhá daný pohyb a kde je zaveden pravouhlý souřadnicový systém (x, y) , to bude úhel, který svírá směr dráhy střely s polopřímku jdoucí bodem B souhlasně rovnoběžnou se zápornou poloosou x (obr. 5).

Parametrické rovnice dráhy střely budou

$$x = r \cos \alpha - vt \cos \gamma$$

$$y = r \sin \alpha + vt \sin \gamma - \frac{1}{2}gt^2.$$

Obdobným způsobem jako v prvním případě stanovíme

$$\bar{v}_{\min} = \sqrt{rg(1 - \sin \alpha)} \quad (9)$$

Mezi úhly α a γ platí vztah

$$\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}. \quad (10)$$

Dále lze stanovit poměr velikostí minimálních rychlostí $v_{\min}$ a $\bar{v}_{\min}$, který je

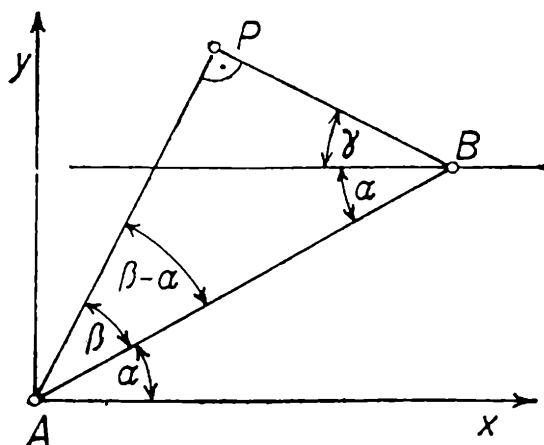
$$\frac{v_{\min}}{\bar{v}_{\min}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right). \quad (11)$$

Podrobné odvození vztahů (9), (10) a (11) přenecháme čtenáři. Z (8) a (10) dostáváme

$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Na základě tohoto poznatku lze též odvodit, že tečny v A a B k parabole, která je dráhou střel z bodu A do bodu B a z bodu B do bodu A vystřelených minimálními rychlostmi tak, aby zasáhly cílové body, se protínají v bodě P pod pravým úhlem, jak již bylo před tím odvozeno.

Tvrzení vyplývá z velikosti součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku ABP (obr. 6).



Obr. 6

Na závěr lze poznamenat, že daný problém, popisující matematicky jistý fyzikální jev za zjednodušujících podmínek, by možná mohl mít i praktické využití. Posouzení této možnosti však nutno přenechat patřičným odborníkům.

NAŠE SOUTĚŽ

Také letos vypisuje naše redakce spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie — nezávisle na matematické a fyzikální olympiádě. Této soutěži se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Při případném umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Pokyny řešitelům

Řešení každého příkladu pište čitelně (nejlépe strojem) na zvláštní list papíru formátu A4, a to vždy po jedné straně. Dole vpravo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu, školu a své bydliště. Jména členů kolektivu a jejich adresy napište na druhou (nepopsanou) stránku každého listu. Nečitelná nebo nedbale popsaná řešení ze soutěže vyřazujeme.

Text řešení každého příkladu formulujte výstižně, stručně, ale jasně. Přitom užívejte platné terminologie a symboliky. Připojujete-li k řešení některého příkladu obrázek, dbejte o to, aby byl pečlivě narýsován a jasně popsán.

Řešení soutěžních příkladů zašlete nejpozději do 15. února 1979 na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních s označením: Naše soutěž.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Města A , B jsou spojena kabelem s 10 vodiči, které nelze od sebe odlišit. Udejte metodu, kterou se označí v každém z obou konců kabelu odpovídající si vodiče čísla 1, 2, ..., 10. K dispozici je v městě A nepřemístitelný zdroj elektrického proudu, dále přemístitelný přístroj, který umožňuje zjistit, zda proud prochází nebo neprochází; přitom se požaduje, aby pracovník, který má kabely označit, se pouze jednou přemístil z města A do města B a zpět.

Miroslav Fiedler

2. V trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem délky stran a , b , c , velikosti výšek v_a , v_b , v_c a obsah S . Dokažte, že platí:

$$ab + bc + ca - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) < 6S < ab + bc + ca.$$

Stanislav Horák

3. V trojúhelníku ABC označme velikosti výšek v_a, v_b, v_c , obvod $2s$ a poloměr vepsané kružnice ϱ . Dokažte, že platí:

$$6\varrho < v_a + v_b + v_c < 2s.$$

Stanislav Horák

4. Nad úsečkou AB jako průměrem je sestrojena polokružnice k a na ní dva různé body $C \neq A, C \neq B, D \neq A, D \neq B$ tak, že body B, C jsou odděleny přímkou AD . Tětivy AC, CD, DB mají po řadě velikosti x, y, z . Pro kterou polohu bodů C, D je součin xyz největší?

Emil Kraemer

5. Elipsa má poloosy a, b ($a > b$) a poloměry křivosti ve vrcholech ϱ_1 (v hlavním vrcholu), ϱ_2 (ve vrcholu vedlejší osy). Na elipse jsou dány dva různé pevné body A, B a libovolný bod $T \neq A, T \neq B$. Nejsou-li body T, A ani body T, B souměrně sdruženy podle hlavní osy elipsy, protínají osy úseček AT, BT tuto hlavní osu v bodech M, N . Nejsou-li body T, A ani T, B souměrně sdruženy podle vedlejší osy elipsy, protínají osy úseček AT, BT tuto vedlejší osu v bodech P, Q . Dokažte, že platí:

a) Velikosti $|MN|, |PQ|$ úseček MN, PQ nezávisí na volbě bodu T ;

b) $0 \leq |MN| \leq a - \varrho_1, \quad 0 \leq |PQ| \leq \varrho_2 - b$

Pro kterou polohu bodů A, B platí v b) rovnosti?

Emil Kraemer

6. V rovině charakterizujte všechny možné polohy čtyř bodů A_1, A_2, A_3, A_4 , jež mají tuto vlastnost: Libovolné tři z těchto bodů A_i, A_j, A_k jsou vrcholy rovnoramenného trojúhelníka.

Jiří Sedláček

7. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ na množině $\left\{ (x, y) : x \neq 0, y \neq 0, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \right\}$.

Jaroslav Šedivý

8. Rovinný konvexní n -úhelník ($n \geq 3$) má obvod o a obsah P . Dokažte, že platí:

$$(2n - 5) o > 4\sqrt{P}$$

Jaroslav Štěpánek

9. V rovině jsou dány tři různé body A, B, C . Z bodu A se po polopřímce AC pohybuje rovnoměrně bod rychlostí $v_a > 0$; z bodu B se po polopřímce BC pohybuje rovnoměrně bod rychlostí $v_b > 0$. Přitom oba body se začnou pohybovat současně. V kterém okamžiku bude vzdálenost obou

pohybujících se bodů nejmenší? Vypočtete tuto nejmenší vzdálenost. Řešte bez použití metod diferenciálního počtu.

Přemysl Vihan

10. V roce 1978 připadl Nový rok na neděli. Kolikrát se to stalo v letech 1904 až 1912?

Antonín Vrba

11. Sestrojte trojúhelník, je-li (při obvyklém označení) dáno v_c , $a + b$, γ .

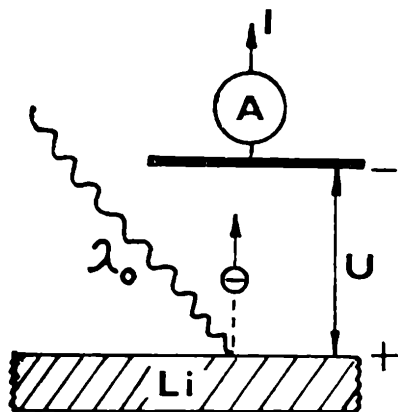
Antonín Vrba

12. Trojúhelníkový šestistěn (stručně zvaný dvojjeňlan) je těleso vzniklé sjednocením dvou čtyřstěnů, které mají společnou podstavu p a leží v opačných poloprostorech určených rovinou podstavy p . Označme $\mathbf{M}$ množinu všech dvojjeňlanů $ABCDE$ (společná podstava čtyřstěnů je ABC), které mají tu vlastnost, že aspoň čtyři stěny jsou rovnostranné trojúhelníky o straně délky 1. Vyhledejte ten dvojjeňlan z množiny $\mathbf{M}$, který má maximální objem, popište jeho konstrukci a vypočtete jeho objem.

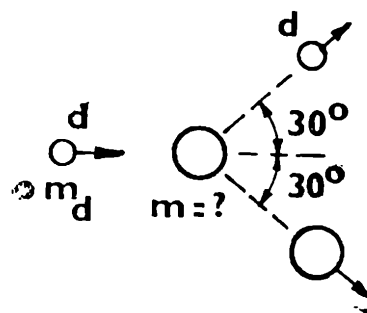
Jan Vyšín

Fyzika

1. Při určité hodnotě brzdícího napětí U_0 se přeruší fotoproud I elektronů uvolňovaných z povrchu lithia světlem o vlnové délce λ_0 (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

Zvětšíme-li délku vlny světla 1,5krát, je třeba k přerušení fotoproudu zvětšit brzdící napětí dvakrát. Vypočítejte vlnovou délku λ_0 použitého světla a hodnotu napětí U_0 , víte-li, že výstupní práce A elektronu z povrchu lithia je rovna 2,39 eV.

Zdeněk Janout

2. Nerelativistický deuteron (jádro vodíku s protonem a neutronem) vykonal pružnou srážku (ráz) s jádrem neznámého atomu, které bylo původně v klidu, a odchýlil se od původního směru o úhel 30° . Neznámé jádro se po srážce odchýlilo rovněž o úhel 30° (obr. 2). Určete atom, jemuž toto jádro přísluší.

Zdeněk Janout

3. Dva automobily jedou po navzájem kolmých silnicích ke křižovatce. Rychlost prvního auta je v_1 , rychlost druhého je v_2 . První automobil má od křižovatky vzdálenost l_1 , druhý vzdálenost l_2 . Vypočtěte: a) nejkratší vzdálenost obou aut; b) dobu, za kterou budou auta od sebe nejméně vzdálena. — Řešte obecně a potom pro $v_1 = 54$ km/h, $v_2 = 72$ km/h, $l_1 = 2,7$ km, $l_2 = 4,8$ km.

Josef Novák

4. Napětí a proud v obvodu střídavého proudu jsou dány pomocí komplexních čísel: $U = (110 + 190j)$ V, $I = (1,73 + j)$ A, kde j je imaginární jednotka. Určete vztahy pro okamžité hodnoty napětí a proudu.

Josef Novák

5. Třemi dlouhými, přímými a vzájemně rovnoběžnými vodiči ve vakuu v rovině, vzdálenými od sebe o d , teče proud $I_1 = I_2$, $I_3 = I_1 + I_2$. Určete polohu a tvar křivky, v jejímž každém bodě je velikost magnetické indukce rovna nule. — Řešte obecně a potom pro $d = 3$ cm.

Josef Novák

6. V uzavřené nádobě je plynný kysličník uhličitý CO_2 ; nádoba je umístěna ve vakuu. Vadným uzávěrem uniká z nádoby za dobu t_0 průměrně N_0 molekul CO_2 . Které údaje je třeba znát pro určení doby t , za niž uniknou z nádoby všechny molekuly CO_2 ? Diskutujte možné případy.

Emanuel Svoboda

Konstrukční geometrie

1. Je dána přímka a , na ní body A , $V \neq A$ a mimo přímku a je dán bod B . Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká přímky a v bodě A , prochází bodem B a má tuto vlastnost: Kuželová plocha opsaná z bodu V této kulové ploše má ve svém osovém řezu úhel o velikosti α ($0 < \alpha < \pi$).

Stanislav Horák

2. V rovině σ je dán ostroúhlý trojúhelník s vrcholy X , Y , Z ; kromě toho je dáno číslo $\varrho > 0$. Sestrojte pravidelný osmistěn, jemuž lze vepsat kouli o poloměru ϱ a jehož tělesové úhlopříčky procházejí body X , Y , Z .

František Hradecký

3. Je dána rovina ρ , bod M mimo ni ležící a přímka p , která neprochází bodem M , neleží v rovině ρ a není k rovině ρ kolmá. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká roviny ρ , prochází bodem M a má střed na přímce p .

František Hradecký

4. Je dána elipsa (s vedlejší poloosou b a excentricitou e) a kružnice, která se této elipsy dotýká ve dvou různých bodech T, T' souměrně sdružených podle vedlejší osy elipsy; střed této kružnice označme O . Budiž $X \neq T, X \neq T', X \neq O$ (pokud bod O je bodem elipsy) libovolný bod dané elipsy; jeho vzdálenost od přímky TT' budiž d . Bodem X vedme kolmici k přímce XO . Tato kolmice je tětivou dané kružnice; polovina její délky budiž t . Potom je $t : d = e : b$. Dokažte toto tvrzení metodou deskriptivní geometrie.

Emil Kraemer

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstrukční geometrie

Jsou dány dva různé body A, B a rovina ρ . Určete množinu K všech bodů X , které mají tu vlastnost, že body X' s nimi souměrně sdružené podle roviny ρ tvoří spolu s body A, B rovnostranný trojúhelník. — Proveďte graficky pro tento případ: $A (-5,5; 4,5; 4)$, $B (-3; 2; 7)$, $\rho (-2; 90^\circ; 70^\circ)$.

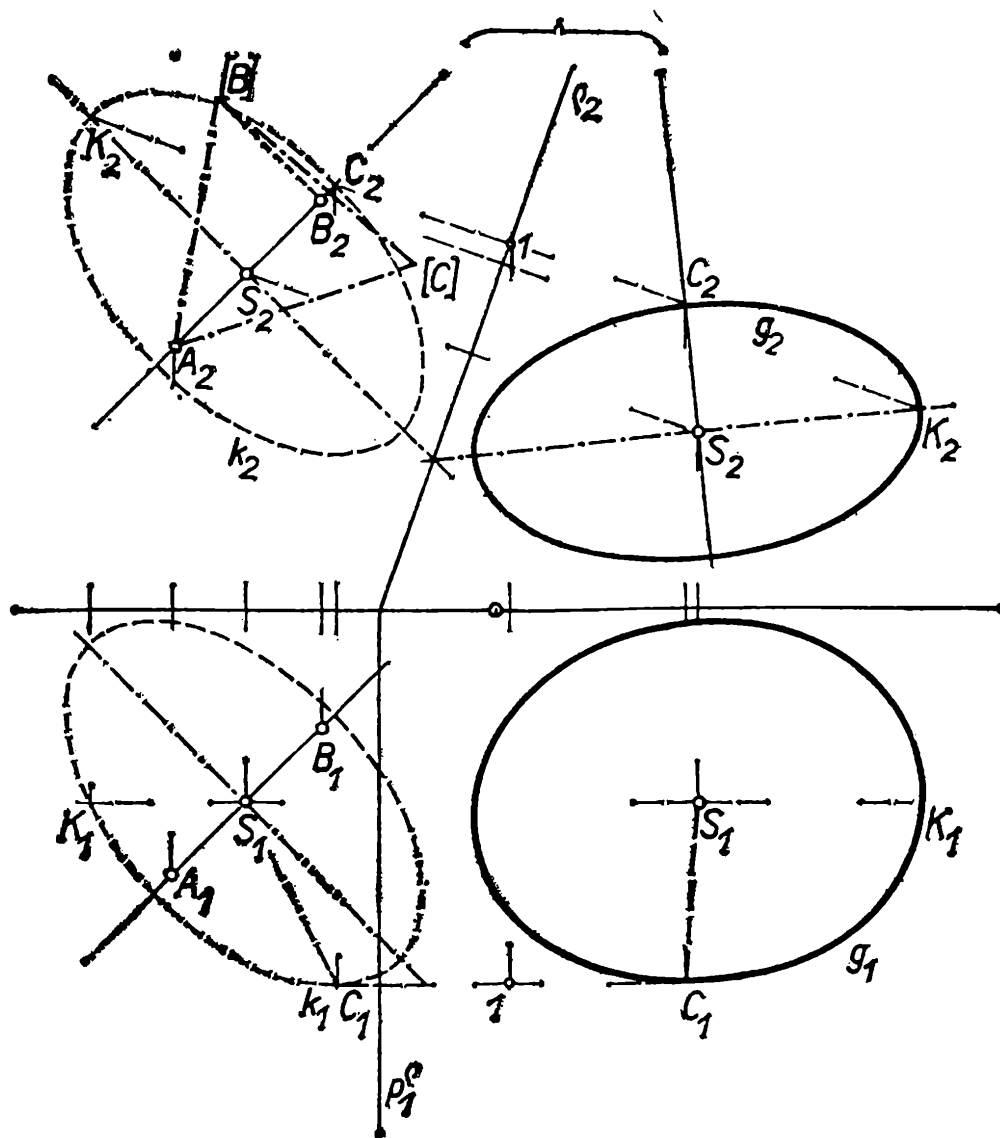
Stanislav Horák

(Došla 3 řešení)

Řešil Zdeněk Somr, III. B G Sedlčany :

Jestliže bod X' tvoří s body A, B rovnostranný trojúhelník, pak je $AX' = BX' = AB$. Množina všech bodů X' je tedy průnikem dvou kulových ploch $\kappa_1 = (A; AB)$, $\kappa_2 = (B; AB)$. Označíme-li S' střed úsečky AB , pak $\kappa_1 \cap \kappa_2$ je kružnice $k = \left(S'; \frac{1}{2} AB\sqrt{3}\right)$. Kružnice k leží v rovině ρ' procházející bodem S' kolmo k úsečce AB (viz obr. 1).

Kružnice g , která je souměrně sdružená s kružnicí k podle roviny ρ , je hledaná množina K . Kružnice g leží v rovině σ , která je souměrně sdružená s rovinou ρ' podle roviny ρ . Úloha je vždy řešitelná. Kdyby se stalo, že $\rho = \rho'$, pak by bylo $g = k'$.



Obr. 1

2. Je dána rovina π , bod A mimo ni ležící a přímka p , která neleží v rovině π a neprochází bodem A . Sestrojte kulovou plochu, která prochází bodem A , dotýká se roviny π a má střed na dané přímce p .

František Hradecký

(Došla 4 řešení)

Upravené řešení J. Kurky, IV C AG Praha 1, Štěpánská :

a) Provedeme nejdříve *rozbor*. Je-li O střed hledané kulové plochy a T její dotkový bod s rovinou π , pak je přímka OT kolmá k rovině π . Kulová plocha a její vnitřek leží v témže poloprostoru s hraniční rovinou π .

Je-li $p \perp \pi$, je $p = OT$ čili $T = p \cap \pi$. Střed O leží v rovině (Ap) na ose úsečky AT .

Není-li $p \perp \pi$, je pravoúhlým průmětem přímky p do roviny π přímka p_1 procházející bodem T ; rovinu přímek p, p_1 označme ρ . Rovina σ vedená bodem A kolmo k přímce p protíná kulovou plochu v kružnici k ,

jejíž střed S leží na přímce p . Protože je $p \perp \sigma$, je přímka p_1 kolmá na průsečnici q roviny σ s rovinou π a protíná tuto průsečnici v bodě P , který je tedy průsečíkem přímky p_1 s rovinou σ . Přímka PS protíná kružnici k v bodech B, C tak, že je

$$SB = SC = SA; \quad (1)$$

označení bodů B, C volme tak, aby bylo $|PB| < |PC|$. Rovina $\varrho = (pp_1)$ protíná kulovou plochu v kružnici h , která prochází body B, C a dotýká se přímky p_1 v bodě T . Mocnost bodu P ke kružnici h je

$$|PT|^2 = |PB| \cdot |PC|. \quad (2)$$

To platí i v tom případě, kdy bod P splyne s bodem T , takže je $P = T = B$.

b) Z rozboru plyne tato *konstrukce* :

Je-li $p \perp \pi$, sestrojíme bod $T = p \cap \pi$ a v rovině (Ap) sestrojíme osu úsečky AT ; její průsečík O s přímkou p je středem O hledané kulové plochy.

Není-li $p \perp \pi$, pak postupujeme takto:

1. Sestrojíme pravoúhlý průmět p_1 přímky p do roviny π .
2. Bodem A vedeme rovinu $\sigma \perp p$.
3. Sestrojíme body $S = p \cap \sigma$, $P = p_1 \cap \sigma$.
4. Na přímce PS sestrojíme body B, C tak, aby bylo $SB = SC = SA$.
5. Na přímce p_1 sestrojíme bod T tak, aby platilo (2).
6. V rovině $\varrho = (pp_1)$ sestrojíme průsečík O přímky p s přímkou vedenou bodem T kolmo k rovině π . Poloměr kulové plochy $= OT$.

c) *Dokážeme*, že kulová plocha se středem O a poloměrem OT (pokud ovšem existuje) splňuje podmínky naší úlohy.

Je-li $p \perp \pi$, pak kulová plocha existuje; důkaz toho, že splňuje dané podmínky, plyne z konstrukce bezprostředně.

Není-li $p \perp \pi$, pak sestrojená kulová plocha se skutečně dotýká roviny π a má střed na dané přímce p . Zbývá dokázat, že prochází bodem A . Je-li $O \neq S$, je $|\sphericalangle OSA| = |\sphericalangle OSB| = |\sphericalangle OSC| = \frac{\pi}{2}$, takže trojúhelníky OSA, OSB, OSC jsou shodné (věta *sus*); je tedy

$$OA = OB = OC \quad (3)$$

Je-li $O = S$, pak (3) platí podle (1). Stačí tedy dokázat, že kulová plocha prochází body B, C . Existuje ovšem jenom tehdy, jestliže body A, S, O leží uvnitř téhož poloprostoru s hraniční rovinou π ; pro body B, C musí platit totéž, nebo je $B = P = T$ bodem roviny π . Potom body S, O, C leží uvnitř téže poloroviny vyřazené v rovině $\varrho = (pp_1)$ přímkou p_1 ; bod B leží uvnitř téže poloroviny nebo splývá s bodem $P = T$. Potom podle (2) existuje v rovině ϱ právě jedna kružnice h , která prochází body B, C a do-

týká se přímky p_1 , v bodě T . Tato kružnice má střed na přímce p (která je v rovině ϱ osou úsečky BC) a na přímce $k \perp p_1$ vedené v rovině ϱ bodem T . Protože je $\varrho \perp \pi$, je $k \perp \pi$, takže střed kružnice h splývá se středem O dříve sestrojené kulové plochy. Protože je $OB = OC = OT$ a podle (3) též $OA = OB$, prochází tato plocha také bodem A .

d) Je-li $p \perp \pi$, má úloha jedno řešení. Není-li $p \perp \pi$, pak počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky $q \perp p_1$ (vedené v rovině π bodem P) a kružnice k opsané v rovině σ kolem bodu $S = p \cap \sigma$ poloměrem SA . Je-li $PS > SA$, má úloha dvě řešení; je-li $PS = SA$, má úloha jedno řešení a pro $PS < SA$ nemá úloha žádné řešení.

různé

Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

Dne 25. srpna t. r. jsme vzpomínali 70. výročí úmrtí francouzského badatele *Becquerela*; jeho jméno zůstane navždy spojeno s objevem přirozené radioaktivity.¹⁾

Henri André Becquerel byl jmenován v roce 1895 profesorem na polytechnice v Paříži. Zkoumal, zda luminiscence (světélkování látek) je vždy doprovázena vznikem paprsků X, právě tehdy (dne 8. listopadu 1895) objevených Röntgenem. Mezi zkoumanými látkami byla také uranová sůl. Becquerel ji položil na fotografickou desku zabalenou do černého papíru a vystavil pak na několik hodin slunečnímu záření; po vyvolání se objevila na desce silueta fluoreskující soli. Výsledek svého pozorování oznámil dne 24. února 1896 Francouzské akademii věd. Avšak již dne 2. března 1896 oznámil, že popsáný jev lze pozorovat i tehdy, když uranová sůl není vystavena slunečnímu světlu. Podrobným studiem dokázal, že všechny uranové soli působí na fotografickou desku a vyvolávají ionizaci vzduchu i jiných plynů. Zjistil také, že intenzita paprsků nezávisí na teplotě látky, která je vyzařuje. Tak objevil nové

¹⁾ Název radioaktivita dala novému jevu však teprve později *Marie Curieová* roz. *Skłodowská*, Polka. Roku 1898 — právě před 80 lety — objevila s manželem polonium a radium.

záření, které má ještě větší schopnost pronikat látkami než paprsky Röntgenovy. Na počest svého objevitele bylo zpočátku nazýváno *zářením Becquerelovým*.

Svým objevem přirozené radioaktivity zahájil *Becquerel* novou etapu ve vývoji fyziky, éru atomového věku. Za tyto zásluhy byla mu v roce 1903, právě před 75 lety, udělena — spolu s *Pierrem Curie* a *Marií Curieovou-Sklodowskou*, kteří se o výzkum Becquerelova záření mimořádně zasloužili — Nobelova cena. Manželé Curieovi — a nezávisle na nich *Ernest Rutherford* — zjistili dvě složky Becquerelova záření: záření alfa a beta. Jednu z nich, pronikavější paprsky beta, důkladně prozkoumal sám *Becquerel*; potvrdil, že jeho podstatu tvoří proud rychle letících elektronů. Zjištění podstaty paprsků alfa trvalo delší dobu; teprve roku 1903 při studiu jejich úchylnosti ve vnějším magnetickém a elektrickém poli shledal *Rutherford*, že částice alfa jsou jádra atomů helia, nesoucí dva kladné elementární náboje He^{++} . Památný experiment, jímž to spektroskopicky dokázal, popsal ve slavnostní řeči, když v roce 1908, právě před 70 lety, převzal Nobelovu cenu — za chemii. Své „přeražení“ mezi chemiky přijal *Rutherford*, „ušlechtilý divoch“, ovšem s humorem . .

Atomu jako hrozby, atomové pumy, se *Rutherford* nedožil.²⁾ Již v roce 1915, uprostřed hrůz světové války, vyslovil však naději, že jadernou energii nikdo neovládne, aniž by se dříve nenaučil žít se svými sousedy v míru. Nad branami k silám atomu čteme památná slova: „Zde nebudí rádce strach. Zde nutno zachovat si pevného ducha.“ Pronesl je revolucionář *Karel Marx*. Od jeho narození dne 5. května 1818 uplynulo letos 160 let; i jemu, zakladateli vědeckého socialismu a tvůrci filozofie dialektického a historického materialismu, patří proto jedna z této hrsti našich vzpomínek.

Elektronické hračky pro děti

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., ČSAV Praha

Některé z nich známe z našich obchodů — různé víceúčelové elektrické či optické stavebnice nebo soupravy navzájem propojitelných elektrických dílů, ze kterých lze sestavit nejen jednoduchý rádiový přijímač, ale i zesilovač, blinkr či detektor vlhkosti. K nim se však nyní úspěšně řadí i hračky na bázi kapesních kalkulátorů.

²⁾ Sir *Ernest Rutherford* lord of Nelson zemřel dne 19. října 1937 na následky zranění, jež utrpěl na zahradě.

Tak firma Texas Instruments uvedla před časem na trh přístroj, nesoucí název „*Little Professor*“ (vyskytl se i v našem Tuzexu). Je určen k procvičování a přezkušování různých elementárních příkladů, které z celkového počtu více než 16 000 vybírá generátor náhodných čísel ve čtyřech stupních obtížnosti (ty odpovídají zhruba prvním čtyřem školním ročníkům). Jakmile nastavíme stupeň obtížnosti a algebraickou operaci, která má být přezkušována, nelze již tyto parametry měnit; přístroj automaticky zadá deset příkladů a žák dopíše za rovnítko výsledek; je-li tento výsledek správný, zadá se automaticky další z deseti příkladů; v opačném případě je špatně vyřešený příklad ještě dvakrát opakován, načež — nepodařilo-li se jej správně vyřešit — přístroj ukáže sám výsledek a zastaví se, aby poskytl čas analyzovat příčinu neúspěchu. Po deseti příkladech oznámí, kolik příkladů se podařilo rozřešit hned napoprvé.

Součástí tohoto zajímavého přístroje je sbírka společenských her, v nichž „kalkulátor“ hraje pozitivní úlohu. Při hře si účastníci ani neuvědomují, že vlastně musí řešit různé příklady a že se navíc seznamují s používáním elektronického zařízení. To jim později přijde k dobru, až se dostanou ke skutečným kalkulátorům.

Přístroj má však již svého následovníka; jmenuje se *DATAMAN* a má poněkud nezvyklý, jakoby „kosmonautický“ tvar. Umí totéž co *Little Professor* a ještě mnoho věcí navíc; je totiž obdařen nejen generátorem náhodných čísel, nýbrž i měřítkem času v sekundách. Jeho paměť může pojmout až deset aritmetických příkladů, které může postupně řešit několik žáků. Každému přístroj nakonec ukáže, kolik jich vyřešil správně hned napoprvé a jaká byla celková doba řešení. Stejně dobře však lze zadávat příklady jednotlivě nebo přístroj přepnout tak, aby s žákem procvičoval třebaš násobilku. Navíc je vnitřně naprogramováno několik matematických her, v nichž jde nejen o správnost výsledku a reakci na předkládané dotazy, nýbrž i o čas, který se přitom spotřebuje. Na displeji se vyskytují nejrůznější světelné efekty vyznačující pochvalu, nesouhlas či přerušení další korespondence. Také k tomuto přístroji je dodáván seznam dalších her, v nichž hraje důležitou úlohu řešení různých náhodných příkladů.

Velký zájem o podobné přístroje na zahraničních (ale i našich) trzích nasvědčuje tomu, že „kalkulátorové“ hračky pronikají mezi nejmenší školáky. Sehrají v této věkové skupině nesporně pozitivní úlohu, jak to aspoň tvrdí práce různých zahraničních psychologů a pedagogů. K některým výsledkům těchto studií se vrátíme v některém příštím čísle našich Rozhledů.

Ze zahraničních časopisů

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Ze sovětského časopisu „Kvant“:

1. Najděte všechna čísla $a > 0$, pro něž

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2) dx \leq a.$$

2. Řešte nerovnici

$$2(x + 1) > x + 4.$$

3. Řešte rovnici

$$\sqrt[3]{4 + 2x - x^2} = x - 2.$$

4. Sečtěte

$$a) \frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2 \cdot 1977 + 1}{1977^2 \cdot 1978^2};$$

$$b) \arctg \frac{a}{a^2 + 1 \cdot 2} + \arctg \frac{a}{a^2 + 2 \cdot 3} + \dots + \arctg \frac{a}{a^2 + 1977 \cdot 1978}.$$

Z bulharského časopisu „Matematika“:

Značíme-li trojciferné číslo $100x + 10y + z$ znakem $\overline{xyz}$, řešte rovnice:

$$5. (x + y)^2 = \overline{xy},$$

$$6. (\overline{xy})^2 = \overline{(x + 2)(x + 2)y},$$

$$7. (\overline{xy})^2 = \overline{(y - 1)xy},$$

$$8. x^y = 2 \cdot \overline{(x - 1)(y - 1)},$$

$$9. x^5 = \overline{yyyx},$$

$$10. x^3 = \overline{(x - 2)(x - 7)x}.$$

11. Řešte rovnici

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{4}{x + \frac{1}{2}}.$$

12. Řešte rovnici

$$x^3 \cdot (x^2 - 7)^2 - 36x = 0.$$

13. Mezi čísla 50 a 100 najděte všechna celá čísla x , aby pro ně platilo, že $x + 4$ je dělitelné třemi, že $x - 4$ dělitelné pěti a $x - 3$ dělitelné sedmi.

14. Upravte výraz

$$\left[4 \cdot (a + 1) + \left(\frac{\sqrt[6]{ab^2} + \sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[6]{a} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Výsledky: 1. $a = 1$. 2. $x < -2$, $x > 2$. 3. 3. 4. a) $\frac{1977 \cdot 1979}{1978^2}$, b)

$\arctg \frac{1977a}{a^2 + 1978}$. 5. 8, 1. 6. 2, 1. 7. 7, 6. 8. 4, 3. 9. 6, 7. 10. 9.

11. $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{2})$. 12. 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 . 13. 59. 14. $2 + 2\sqrt{a}$

redakce hovoří

Upozorňujeme čtenáře na změnu adresy redakce. Nová adresa zní:

Redakce časopisu

ROZHLEDY MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ

Pedagogická fakulta UK

M. D. Rettigové 4

116 39 Praha 1 - Nové Město

telefon 29 87 50 (meziměsto),

29 87 51 až 9

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ

Výslovnost italštiny na rozdíl od některých jiných jazyků (například francouzštiny nebo zvláště angličtiny) je velmi jednoduchá a pravidelná. Proto bude užitečné se s ní aspoň zhruba obeznámit ještě před přikročením k italské matematické a fyzikální terminologii. Všechno se čte tak, jak se píše, jen těmito výjimkami:

Písmeno *e* se čte *k*, jen před samohláskami *e* i se čte *č*. Má-li se i tam vyslovovat *k*, vkládá se mezi ně a samohlásku *k*, takže *ehe* a *chi* se čte *ke* a *ki*. Má-li *e* naopak před jinou samohláskou vyslovovat *č*, vkládá se mezi ně a samohlásku *i*, které se nečte; tedy *cia*, *no*, *em* se čte *ča*, *čo*, *ču*. Pokud se e následujícím *e* se čte dohromady jako *š*, tedy *scia*, *scie*, *sei*, *scio*, *si* se vyslovuje *sa*, *še*, *ši*, *šo*, *šu*.

Obdobná pravidla platí pro výslovnost písmene *g*, jež se všude vyslovuje *g*, vyjma, když před samohláskami *e*, kde se vyslovuje *dž*. Má-li se i před *e* vyslovovat *g*, vkládá se *h*, které se nečte; tedy *ghe* a *ghi* se čte *ge* a *gi*. Má-li naopak před jinou samohláskou číst *dž*, vkládá se *i*, které se nečte; tedy *gia*, *gio*, *giu* se čte *dža*, *džo*, *džu*.

Skupina *gli* se čte *li* v ústředním slov, zatímco před samohláskami se skupina píše *gli* a čte jako *li* a někdy *ni* (známým z mluvnice nebo ze slovenštiny).

Písmeno *h* se nikde nečte; všude je němé.

Písmeno *z* se mezi dvěma samohláskami dosti často vyslovuje jako *zi* rovněž jako *z* se písmeno *v* vyslovuje před každou z těchto samohlásek, tedy před *e*, *i*, *o*, *u*, *a*, *o*, *u*, *i*, *e*, *o*, *u*.

Konečně písmeno *z* se čte jako *c* nebo zněle jako *dž*.

Přízvuk má většina italských slov na předposlední slabice, jejíž samohláska se pak prodlužuje. Krátká zůstává jen při zdvojenou souhlásku, která se vždy a všude vyslovuje jako zdvojená. Malá část italských slov má přízvuk na poslední slabice, jejíž samohláska je pak opatřena tupým přízvukem (*accento grave*). Rovněž malá část italských slov má přízvuk na třetí (popřípadě i na čtvrté až i na páté) slabice od konce slova, ale ten v psaném textu není nikdy označován.

abbaco cartesiano m
 abbassare una perpendicolare
 aberrazione z
 acceleratore lineare m
 (macchina acceleratrice z)
 accelerazione z

— angolare
 — di gravità
 accumulatore m
 — al piombo

acuità visiva z
 acustica z
 acutangolo (triangolo)
 acuto

addendo m

addizione z

adiacente

aeriforme

afelio m

affinità z

algebra z

algebraico, algebrico

algoritmo m

— euclideo

allungare

alternatore m

altezza z

alternare

alternato, alterno, alternativo

ambiguo

ammettere

amorfo

amperometro m

amperora z

ampiezza z

ampiezza di un insieme

amplificatore m

— a controreazione

amplificazione z

A

anomogram

apustiti kolmier

aberrace

urychlovač

zrychlení

— uhlové

— tíhové

akumulator

— cívkový

ostrost zraku

akustika

ostrouhly (trojúhelník)

ostrý

sčítanec

sčítání

přílehlý

plynný

afelní

afinita (geometrická i chemická)

algebra

algebraický

algoritmus

Euklidův

prodloužiti

alternator

výška

střídání

střídavý

dvoznačný

připustiti

amorfní

ampermetr

amperhodina

amplituda, rozkmit

pečet prvků množiny

zesilovač

regulator

zesilování

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

2

ROČNÍK 57, 1978-1979, ŘÍJEN

ROČNÍK 57
ŘÍJEN 1978

2

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. O. Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1978.

Obsah

F. Hradecký: Užití analogie v algebře .	49
P. Fejtoková, dr. M. Malík: Třídy .	58
Ing. M. Volf: O jednom zajímavém zobrazení	64
S. Horák: O čtyřtěnu .	67
S. Horák: Nejmladším matematikům .	69
Dr. J. Šedivý: Výzkumné úkoly motivované rovností měr útvarů	72
Dr. A. Šarounová: Vzájemně kolmé tečny paraboly	74
Výsledky loňské soutěže Rozhledů .	76
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	77
J. S.: Vzpomínka na loňskou MO .	90
Výsledky 3. kola MO 1978 .	91
F. Z.: XX. mezinárodní matematická olympiáda	92
Dr. J. Mrázek, CSc.: K používání kapesních kalkulačků ve škole .	93
Recenze	94
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. strana obálky

Užití analogie v algebře

FRANTIŠEK HRADECKÝ. Praha

V loňském ročníku Rozhledů se čtenáři seznámili v článcích s užitím analogie v geometrii (č. 2, str. 63, č. 4, str. 164). V tomto příspěvku chceme podobným způsobem seznámit čtenáře s užitím analogií v algebře.

Předem znovu upozorňujeme, že získání nových poznatků užitím analogie *není matematickým důkazem*, který musí vždy vycházet ze správně tvořených deduktivních úsudků. Analogie nás mohou vést jen k novým *pravděpodobným poznatkům, domněnkám*, jejichž správnost je nutno dokázat a není-li to možné, zamítnout je. Usuzování „per analogiam“ má však značnou cenu objevitelskou, neboť podněcuje k tvořivé práci a hledání nových cest. Přejít od jednoho objektu k druhému vyžaduje *induktivní postup*, zkoumání vlastností obou, tj. podrobnou *analýzu*. Každá analogie je však také úzce spjata s *dedukcí*, formulováním nově získaných a dokázaných poznatků, tj. *syntézou*.

Nové poznatky získané touto cestou nemusí být vždy plně analogické, jak se mohli čtenáři přesvědčit v některých uvedených příkladech v geometrii. Často tak docházíme k získání nových, někdy i překvapujících poznatků srovnávaných objektů. Srovnávání vlastností analogických vztahů vede k hlubšímu poznávání struktury objektů a také k snadnějšímu zapamatování jejich vlastností. Vztahy mezi poloměry dvou kružnic a délky jejich středné jsou plně analogické vztahům mezi poloměry a délkou středné dvou kulových ploch.

Již v nižších třídách poznali žáci, že mnohé tzv. slovní úlohy se řeší analogickým způsobem (úlohy o společné práci, plnění vodojemu různými přítoky vody apod.). Jisté analogie najde čtenář mezi početními operacemi sčítáním a násobením, mezi operacemi s mocninami a logaritmováním aj. To nechť si laskavě čtenář sám podrobně promyslí. Také žáci jistě poznali, že mnohé početní operace analogické nejsou; např. platí

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, \quad c \neq 0), \quad \text{ale} \quad \frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b};$$

platí $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = |a| \cdot |b|$, ale $\sqrt{a^2 + b^2} \neq |a| + |b|$, pro $a \neq 0, b \neq 0$, aj.

Francouzský matematik *Pierre Fermat* (1601—1665) vyslovil domněnku, že všechna čísla tvaru $2^{2^n} + 1$ jsou vesměs prvočísla. Skutečně čísla

$2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65\,537$ jsou vesměs prvočísla. Ale již r. 1732 *Leonard Euler* (1707—1783) dokázal, že číslo $2^{2^5} + 1 = 6\,416\,700\,417$ je číslem složeným, a tak uvedená domněnka se ukázala nesprávnou; ale tím byl získán nový poznatek.

Opakované užití analogických postupů může vést často nakonec k úplnému zobecnění. Některé z dalších příkladů bylo by možné řešit též různými způsoby, např. *matematickou indukci*. To však nebylo cílem tohoto článku.

Máme-li řešit příklad složitější, postupujeme často tak, že si zvolíme příklad analogický, který je jednodušší. Najdeme-li cestu k řešení, pokusíme se analogickým postupem rozřešit příklad složitější. To ukážeme na několika příkladech v dalším textu.

1. Máme řešit soustavu n rovnic s neznámými $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, čísla a, b, p jsou vesměs různá od nuly.

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_2 + x_3 + \frac{x_n}{x_1}} = \frac{1}{a},$$

$$\frac{x_1 x_2 x_3 \cdot x_n}{x_1 + x_3 + \frac{x_n}{x_2}} = \frac{1}{b},$$

$$\frac{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}{x_1 + x_2 + \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \frac{1}{p}.$$

Napřed rozřešíme tuto soustavu v případě, že $n = 3$

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_2 + x_3} = \frac{1}{a}, \quad (1)$$

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 + x_3} = \frac{1}{b}, \quad (2)$$

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 + x_2} = \frac{1}{c}. \quad (3)$$

Z rovnic (1) — (3) dostaneme

$$\frac{x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = a, \quad (1')$$

$$\frac{x_1 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = b, \quad (2')$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2 x_3} = c. \quad (3')$$

Sečtením těchto rovnic a dělením dvěma dostaneme

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{a + b + c}{2} = s. \quad (4)$$

Postupným odčítáním levých a pravých stran rovnic (1') (3') od rovnice (4) dostaneme

$$\frac{x_1}{x_1 x_2 x_3} = s - a, \quad \frac{x_2}{x_1 x_2 x_3} = s - b, \quad \frac{x_3}{x_1 x_2 x_3} = s - c \quad (5)$$

Vynásobením rovnic (5) dostaneme po zjednodušení

$$\left(\frac{1}{x_1 x_2 x_3} \right)^2 = (s - a)(s - b)(s - c),$$

$$\frac{1}{x_1 x_2 x_3} = \pm \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)} = \pm S \quad (6)$$

Dosazením (6) do rovnic (5) dostaneme konečné řešení:

$$x_1 = \frac{s - a}{\pm S}, \quad x_2 = \frac{s - b}{\pm S}, \quad x_3 = \frac{s - c}{\pm S}.$$

Je zřejmé, že řešení dané soustavy je zcela analogické řešení, které jsme právě provedli. Toto řešení nechť si provede čtenář sám.

2. Máme určit součty řad

$$\text{a) } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2,$$

$$\text{b) } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Předpokládáme, že součet $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ je čtenáři znám.

Řešení př. 2a:

Podle vzorce $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ platí rovnosti:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = (1 + 1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 = (2 + 1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$\underline{(n + 1)^3 = \dots = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1}$$

Po odečtení součtu prvních členů pravé strany od součtu členů levé strany a užitím vzorce pro součet n členů řady přirozených čísel od 1 do n , dostaneme

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

a odtud vypočítáme

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \right] = \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Příklad 2b řešíme analogickým postupem:

Podle vzorce $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ platí:

$$1^4 = 1$$

$$2^4 = (1+1)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

$$3^4 = (2+1)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$

$$(n+1)^4 = n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1$$

Po odečtení součtu prvních členů pravé strany od součtu členů levé strany, dostaneme:

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \\ &\quad + 4(1 + 2 + \dots + n) + n + 1 \end{aligned}$$

Po dosazení výsledku z př. 2a a vzorce pro součet $1 + 2 + \dots + n$ dostaneme

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \\ &= \frac{1}{4} \left[(n+1)^4 - (n+1) - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} \right] \end{aligned}$$

a po zjednodušení

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4} (n+1) [n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n^2 - n - 2n] = \\ &= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

Vlastnosti aritmetického a geometrického průměru čísel uijeme v následujících příkladech.

Správnost nerovnosti $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ plyne přímo ze správné nerovnosti $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$.

3. Máme dokázat správnost nerovnosti

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

pro libovolné n a pro $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Nerovnost pro $n = 2^k$, ($k = 1, 2, \dots$) snadno dokážeme, klademe-li postupně $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$, $b = \frac{a_3 + a_4}{2}$, takže dostaneme $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq$

$$\geq \sqrt[4]{a_1 a_2 \cdot a_3 a_4} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

a postupně analogicky zvětšujeme počet členů nerovnosti. Budeme tudíž předpokládat, že nerovnost platí pro $n = 2, 4, 8, 16 \dots$, tj. $n = 2^k$. Důkaz pro libovolné n provedeme tzv. *zpětným krokem*, což nejprve ukážeme na příkladě 3a:

3a. Máme dokázat správnost nerovnosti

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}, \quad a_i (i = 1, 2, 3) \text{ jsou kladná čísla.}$$

Položme $a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ a uijme nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro $n = 4$, dostaneme

$$\frac{1}{4} \left(a_1 + a_2 + a_3 + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right) \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)} \quad \text{a dal-}$$

$$\text{šími úpravami } \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^4 \geq a_1 a_2 a_3 \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

Analogickým postupem dokážeme nyní nerovnost 3 pro libovolné n .

Položíme $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{n+p} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, kde číslo p doplňuje číslo n na 2^k .

Platí pak

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + p \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}{n + p} \geq \\ & \geq \sqrt[n+p]{a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^p} \\ & \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n+p} \geq a_1 a_2 \dots a_n \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p}{n^p} \end{aligned}$$

a odtud po zjednodušení dostaneme

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

což jsme měli dokázat.

Jiný důkaz je uveden v článku *prof. E. Kraemera* (Rozhledy roč. 56, str. 252) a další důkazy najde čtenář v brožuře *dr. A. Kufnera* (viz literaturu na konci tohoto článku).

4. Máme dokázat správnost nerovnosti, v níž čísla $a_i > 0$, $b_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$)

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

která je známa jako *Cauchyova* nebo též *Buňakovského nerovnost*.

Napřed však dokážeme jednodušší nerovnost

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Po jednoduché úpravě dostaneme

$$0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

Pro zjednodušení důkazu Cauchyovy nerovnosti užijeme následujícího obratu:

Vyjdeme-li z nerovnosti

$$(a_1 + b_1 x)^2 + (a_2 + b_2 x)^2 \geq 0, \quad (1)$$

která platí pro libovolné x , pak diskriminant rovnice

$$x^2(b_1^2 + b_2^2) + 2x(a_1 b_1 + a_2 b_2) + a_1^2 + a_2^2 = 0,$$

je

$$\frac{D}{4} = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \leq 0,$$

což je dříve dokázaná nerovnost.

Tento postup nám umožní snadný důkaz nerovnosti 4 pro libovolné n . Ze správné nerovnosti

$$(a_1 + b_1 x)^2 + (a_2 + b_2 x)^2 + \dots + (a_n + b_n x)^2 \geq 0 \quad (2)$$

plyne, že diskriminant rovnice

$$x^2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) + 2x(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = 0$$

je

$$\frac{D}{4} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0.$$

Odtud pak plyne správnost dokazované nerovnosti.

Z nerovností (1) a (2) plyne, že rovnost nastane jedině pro

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \quad a_k > 0, \quad b_k > 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Nerovnost 4 můžeme úpravami převést též na tvar:

$$0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + \dots + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + \dots + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})^2.$$

Tyto úpravy jsou však podstatně složitější než postup, který jsme zde uvedli.

5. Máme dokázat, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\text{a) } \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{n} \qquad \text{b) } 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

a) Napíšeme správné nerovnosti pro $n \geq 3$ v opačném pořadí členů

$$n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 > n$$

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n > n$$

Vynásobíme-li stejnohlé členy v těchto součinech, dostaneme

$$n \cdot 1 = n,$$

$$(n-1) \cdot 2 > n,$$

$$(n-k+1)k = nk - k(k-1) = (k-1)(n-k) + n > n,$$

$$2 \cdot (n-1) > n,$$

$$1 \cdot n = n.$$

Vynásobením levých a pravých stran těchto nerovností a rovností, dostaneme $(n!)^2 \geq n^n$ a odtud $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{n}$. Rovnost platí pro $n=1$, $n=2$.

5b. Tuto úlohu řešíme jako úlohu 5a.

Ze správných nerovností a rovností plyne pro $n > 1$

$$n = n,$$

$$(n-1)n < n^2,$$

$$(n-2)(n-1)n < n^3,$$

$$(n-k+1) \cdot (n-1)n < n^k,$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n < n^n$$

Vynásobením levých a pravých stran dostaneme

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n < n^{1+2+3+\dots+n} = n^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

což jsme měli dokázat.

6. Máme dokázat správnost rovnosti

$$\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x +$$

$$\begin{aligned}
& + \log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_d x + \\
& + \log_a x \cdot \log_c x \cdot \log_d x + \\
& + \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_d x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_d x}{\log_a b c d x}.
\end{aligned}$$

Napřed rozřešíme tuto úlohu pro konkrétní čísla.

$$6a. \quad \log_2 7 \cdot \log_3 7 + \log_2 7 \cdot \log_5 7 + \log_3 7 \cdot \log_5 7 = \frac{\log_2 7 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 7}{\log_{30} 7}.$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
& \log_2 7 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 7 \left(\frac{1}{\log_5 7} + \frac{1}{\log_3 7} + \frac{1}{\log_2 7} \right) = \log_2 7 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 7 \cdot \\
& \cdot (\log_7 5 + \log_7 3 + \log_7 2) = \log_2 7 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 30 = \frac{\log_2 7 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 7}{\log_{30} 7},
\end{aligned}$$

neboť $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Příklad 6 upravujeme podobným způsobem:

$$\begin{aligned}
& \log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_d x \left(\frac{1}{\log_d x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_a x} \right) = \\
& = \log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_d x (\log_x a + \log_x b + \log_x c + \log_x d) = \\
& = \log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_d x \cdot \log_x a b c d = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_d x}{\log_a b c d x}.
\end{aligned}$$

Řešení soustav lineárních rovnic o větším počtu neznámých různými způsoby, např. metodou Gaussovou, pomocí determinantů nebo matic, se řeší analogicky jako soustavy lineárních rovnic o dvou nebo třech neznámých.

Také v jiných částech matematiky, v goniometrii, v počtu pravděpodobnosti aj. lze uvést dvojice úloh, které se řeší analogickým postupem.

Jako příklad uvedeme nakonec dvojici úloh z goniometrie:

7. Máme určit součty řad:

$$a) \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha;$$

$$b) \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha.$$

a) Označme $S = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha$ a znásobme obě strany rovnosti $2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$; tak dostaneme

$$2S \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 2\alpha + \dots + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin n\alpha.$$

Užitím vzorce $2 \sin p \cdot \sin q = \cos \frac{p-q}{2} - \cos \frac{p+q}{2}$ upravíme součet na pravé straně

$$\begin{aligned}
2 S \sin \frac{\alpha}{2} &= \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2} + \dots + \\
&+ \cos \frac{2n-1}{2} \alpha - \cos \frac{2n+1}{2} \alpha = \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} \alpha = \\
&= 2 \sin \frac{n\alpha}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)}{2} \alpha \\
S &= \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Analogicky určíme i součet řady v příkladě 7b. Provedení přenecháváme čtenářům.

Literatura :

1. Dr. A. Kufner: Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků, č. 39, 1975,
 2. Matěmatischeskoje prosveščeniye, č. 6, Moskva, 1961,
 3. P. M. Erdnijev: Srovnaniye i obobščeniye, Moskva 1960,
 4. K. U. Šachno: Sbornik zadač po matěmatike, Moskva 1954,
 5. K. S. Barybin i A. K. Isakov: Sbornik zadač po matěmatike, Moskva 1952.
- Mnohé z příkladů uvedených v textu i ve cvičení byly vybrány z uvedené literatury.

Cvičení:

1. Řešte soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
\text{a) } x + y + z &= 9, \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 29, \\
xyz &= 24;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } x + y + z &= a, \\
x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + 8, \\
x^3 + y^3 + z^3 &= a^3
\end{aligned}$$

2. Je-li $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_k}{b_k}$, $a_k > 0$, $b_k > 0$, dokažte, že platí:

$$\text{a) } \left(\frac{a_1}{b_1} \right)^n = \frac{c_1 a_1^n + c_2 a_2^n + \dots + c_k a_k^n}{c_1 b_1^n + c_2 b_2^n + \dots + c_k b_k^n},$$

kde $c_i (i = 1, 2, \dots, k)$ jsou libovolná čísla.

$$\begin{aligned}
\text{b) } \sqrt[n]{a_1 b_1} + \sqrt[n]{a_2 b_2} + \dots + \sqrt[n]{a_n b_n} &= \\
= \sqrt[n]{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) (b_1 + b_2 + \dots + b_n)}
\end{aligned}$$

3. Užitím výsledků v př. 2ab v textu určete součet

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5$$

4. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_i (i = 1, \dots, n)$ platí:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

5. Dokažte správnost nerovnosti:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2} + \sqrt[n]{a_1 a_3} + \dots + \sqrt[n]{a_{n-1} a_n} \leq \frac{(n-1)}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 3$ platí

$$n^{n+1} > (n+1)^n$$

7. Dokažte, že platí:

a)
$$\log_6 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 6} = \frac{\log_2 x}{1 + \log_2 3},$$

b)
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

c)
$$\log_{a b c d x} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_d x}}.$$

Třídy

PAVLA FEJTKOVÁ, dr. MAREK MALÍK, MFF UK Praha

V článku „Datové typy“ v minulém čísle jsme hovořili o základních a složených typech dat. Připomeňme si, že pod pojmem data rozumíme skupiny údajů, které popisují nějaké konkrétní objekty nebo situace. Typ dat určuje, jak vypadá každá z těchto skupin údajů (tedy jedno „dato“ — obvykle tuto skupinu nazýváme datový údaj) — určuje tedy typ dat například, že každý datový exemplář jemu příslušných dat je složen z pěti reálných a dvou celých čísel a podobně. Připomeňme ještě, že pod proměnnou příslušnou určitému datovému typu rozumíme nějakou veličinu, která může nabývat hodnot z množiny datových údajů tohoto datového typu. (Podobně jako reálná proměnná může nabývat jako svou hodnotu nějaké reálné číslo.)

V uvedeném článku jsme si zavedli pět základních (někdy říkáme též standartních) datových typů, ze kterých můžeme sestavovat tzv. typy složené. Tyto základní datové typy jsou následující:

1. real.

Typ real je typ dat, jejichž konkrétní hodnoty jsou reálná čísla. Tedy proměnná typu real může nabývat hodnoty z množiny právě všech reálných čísel.

2. integer.

Podobně typ integer je typ dat, jejichž konkrétní hodnoty jsou celá čísla.

3. Boolean.

Typ Boolean je typ pravdivostních hodnot. Data typu Boolean použijeme v případě, že chceme zakódovat informaci o tom, že nějaká podmínka je splněna nebo není. To znamená, že proměnná tohoto typu může nabývat pouze dvou hodnot: pravda (zapisujeme *true*) a nepravda (zapisujeme *false*).

4. character.

Proměnné typu character mohou nabývat hodnot z množiny určitých znaků (latinská abeceda, číslovky, interpunkční a základní matematická znaménka atp.). Používáme tedy dat typu character pro kódování určité informace, kterou lze popsat třeba jediným písmenem. Pro odlišení od ostatních dat píšeme konkrétní hodnoty typu character (t. j. datové údaje typu character) mezi dva apostrofy. Jsou tedy hodnotami charakterového typu například: 'A', 'S', '8', ';', '/', '?' atd.

5. text.

Data typu text jsou z množiny nějakých nápisů — přesněji z množiny právě všech konečných posloupností charakterů. Podobně jako charakterové hodnoty píšeme mezi dvěma apostrofy, budeme psát textové hodnoty v uvozovkách. Příklady datových údajů typu *text*: „PRAHA“ „SZSSZ“ „4ZR;A“ „!!!+/?%=" a podobně.

Seskupením základních typů můžeme vytvářet typy složené. Ve výše uvedeném článku jsme si například ukázali, že pro potřeby analytické geometrie můžeme body v prostoru popisovat daty složeného typu $\langle \text{real}; \text{real}; \text{real} \rangle$. To znamená, že každému uvažovanému bodu prostoru odpovídá datový údaj uvedeného typu. Chceme-li dále uvažovat nějakou proměnnou pro bod v prostoru (tj. nějakou veličinu, která by mohla podle potřeby označovat konkrétní body v prostoru) — můžeme tuto proměnnou chápat jako proměnnou popisujícího typu $\langle \text{real}; \text{real}; \text{real} \rangle$.

Všimněme si na příkladu bodu v prostoru, že jsme z analytické geometrie zvyklí hovořit o „složkách dat“ — totiž máme-li nějaký bod v prostoru označen symbolem X , bývá zvykem označovat jeho souřadnice symboly x_1, x_2, x_3 . Podobně, máme-li komplexní číslo Z , obvykle označujeme jeho reálnou část symbolem $\text{re}(Z)$ a imaginární část symbolem $\text{im}(Z)$ — a tak podobně dále.

V článku „Datové typy“ jsme hovořili o tom, že komplexní čísla můžeme popsat daty typu $\langle \text{real}; \text{real} \rangle$, ale že daty stejného typu můžeme popsat třeba i žáky ve třídě v případě, že nás zajímá pouze jejich výška a váha. Otázka nyní je následující: označme si nějakého žáka ve třídě symbolem A — jak potom označit jeho váhu a jak jeho výšku? K tomuto účelu je třeba pojmenovat jednotlivé části datových údajů. Protože pracujeme s velice různými objekty, zavedeme si prostředky pro označování přesně — označování pomocí identifikátorů.

Definice. *Identifikátor* je konečná posloupnost znaků složená pouze z písmen a číslic, jejíž první znak je písmeno.

Příklady identifikátorů:

PRAHA

P123

X5X6

Y2274MP

II

a podobně.

Uvedme si ještě několik nesprávně utvořených identifikátorů:

PRAHA-4 obsahuje znak, který není ani písmeno ani číslice

123P na prvním místě není písmeno

X₁ obsahuje index (není tedy posloupností znaků)

PE PA obsahuje mezeru

Protože používáme identifikátory též v programovacích jazycích, které slouží k dorozumívání člověka se samočinným počítačem, bývá zvykem používat k tvorbě identifikátorů pouze písmen z mezinárodní abecedy — to jest bez háček a bez čárek — tedy posloupnost znaků PEPÍK není správně utvořeným identifikátorem.

Pomocí identifikátorů budeme označovat nejenom složky datových údajů, ale též proměnné jednotlivých typů. Přiřazení základního typu proměnné bude potom velmi jednoduché. Chceme-li například vyjádřit, že proměnná označená identifikátorem XY22 může nabývat hodnot z množiny právě všech reálných čísel, zapíšeme toto:

real XY22;

(V klasické matematice by tomuto odpovídalo nejspíše:
„Symbolem xy_{22} označíme dále nějaké reálné číslo.)

Zcela analogicky můžeme psát:

integer IJ18;

Boolean PRAHA;

character S72;

text Y;

Vraťme se nyní k uvažovanému příkladu s popisem bodů v prostoru pomocí dat typu **<real; real; real>**. Vezmeme-li nyní pevný bod v prostoru a jemu odpovídající datový údaj, je tento údaj složen ze tří reálných čísel a samozřejmě prvé z nich odpovídá prvé souřadnici popísaného bodu, druhé číslo druhé souřadnici a třetí číslo třetí. Bylo by proto vhodné mít možnost, jak hovořit ne o celém datovém údaji, ale o jeho složkách. Můžeme samozřejmě hovořit o „prvé složce datového údaje“ a podobně, ale bylo by jistě vhodnější označit tyto složky vhodnými identifikátory. Například první složku našeho typu můžeme ozna-

čít identifikátorem SOUR1 atd. Označený typ dat pro popis bodů v prostoru může pak vypadat následovně:

<real SOUR1; real SOUR2; real SOUR3>.

Tento označený typ říká, že jednotlivé datové údaje jsou složeny ze tří reálných čísel, které jsou označeny SOUR1, SOUR2 a SOUR3. Ve zkrácenější formě můžeme takový typ zapsat

<real SOUR1, SOUR2, SOUR3>

— podobně jako říkáme: „budte a, b, c reálná čísla“ a ne „budte a reálné číslo, b reálné číslo a c reálné číslo“. (Ve výčtu identifikátorů stejného typu oddělujeme od sebe jednotlivé položky čárkami, jednotlivé takové výčty oddělujeme od sebe středníky.)

V článku „Datové typy“ jsme uvedli typ pro popis pracovníka závodu pro účely mzdové agendy. Po pojmenování jednotlivých složek může tento typ vypadat například následovně:

**<text JMENO,PRIJMENI,ADRESA;
integer DENNAR,MESNAR,ROKNAR,POCDETI,TELEF;
Boolean POHLAVI;
real MZDA;
character CECH,KVALIF>.**

Zdůrazněme na tomto místě, že samozřejmě vůbec nezáleží na tvaru použitých identifikátorů, ale pro lepší přehlednost je výhodné užívat identifikátory, které připomínají svým tvarem význam složky datového údaje. Například pro den narození je jistě vhodnější použít identifikátor DENNAR než XY248, i když by i tento byl možný.

Jak jsme si v článku „Datové typy“ uvedli, můžeme např. pomocí typu **<real; real>** popisovat velice různé objekty. Představme si, že chceme jednak takovým typem popisovat komplexní čísla — zavedeme si označený typ

<real RECAST,IMCAST>

— a dále chceme popisovat žáky ve třídě s ohledem pouze na jejich výšku a váhu — zavedeme si označený typ

<real VYSKA,VAHA>.

Dosud nemáme možnost, jak od sebe odlišit tyto dva typy (a jiné podobné). Z intuitivního názoru by ale bylo zřejmě vhodné považovat datový údaj, který popisuje komplexní číslo za něco zcela odlišného od datového údaje, který popisuje proporce žáka ve třídě — i když jsou oba údaje složeny ze dvou reálných čísel. Podobně proměnná pro žáka ve třídě by zřejmě neměla mít možnost nabývat své hodnoty z množiny komplexních čísel a naopak.

Rozlišení jednotlivých typů můžeme opět provést pomocí identifikátoru a to tím, že identifikátor přiřadíme samotnému typu.

Definice. Složený typ s přiřazeným identifikátorem nazýváme *třídou*.

To, že jsme nějakému typu přiřadili identifikátor, budeme zapisovat následovně: např.

```
class COMPLEX;  
  <real RECAST,IMCAST>
```

nebo

```
class ZAK;  
  <real VYSKA,VAHA>
```

či podobně

```
class BOD;  
  <real SOUR1,SOUR2,SOUR3>
```

Uvažujme nyní právě uvedenou třídu BOD. Označme si ještě identifikátorem *Y* proměnnou typu `<real; real; real>`. Chtěli bychom nyní vyjádřit skutečnost, že tuto proměnnou chápeme jako proměnnou právě pro třídu BOD — to znamená, že bude-li proměnná *Y* nabývat nějaké hodnoty — tj. konkrétního datového údaje — budeme složky tohoto údaje chápat právě jako souřadnice bodu v prostoru.

Analogicky jako v případě základních typů bychom to mohli zapsat:

bod *Y*;

Ukazuje se však, že je výhodné již v těchto zápisech přísně odlišovat třídy a základní datové typy (v některém z příštích článků uvidíme, že je toto odlišení plně opodstatněné). Protože proměnná *Y* má v sobě zahrnovat odkaz na třídu BOD, můžeme použít zápisu:

reference (BOD)*Y*;

což budeme často zkracovat jako:-

ref (BOD)*Y*;

Rozumíme tedy pod tímto zápisem že proměnná *Y* je proměnnou pro třídu BOD.

Takové přiřazení proměnné určité třídě nazýváme *kvalifikace proměnné*.

Je nutno si uvědomit, že máme-li proměnnou kvalifikovanou pro nějakou třídu, nemůžeme ji používat pro jinou třídu, i kdyby měla shodný datový typ. Vezměme například výše uvedené třídy COMPLEX a ZAK a uvažujme ještě proměnnou *AB* kvalifikovanou pro třídu ZAK, tedy

ref (ZAK) *AB*;

Potom každá hodnota proměnné *AB* — tj. dvojice reálných čísel — je chápána jako výška a váha nějakého žáka a nemůžeme proměnnou *AB* používat pro třídu COMPLEX, kde by bylo třeba tuto dvojici reál-

ných čísel nutně chápat jako reálnou a imaginární část nějakého komplexního čísla.

Poslední problém, kterým se chceme v tomto článku zabývat, je následující: Předpokládejme, že máme jako výše proměnnou AB kvalifikovanou pro třídu ZAK. Dosud máme možnost hovořit o této proměnné jako o celku. Nabývá-li tato proměnná nějaké hodnoty — to jest označuje nějakého žáka, nevíme, jak se ptát na jeho váhu — totiž nemáme zavedeny prostředky, jak se ptát na velikost onoho reálného čísla (z dvojice čísel, která je hodnotou proměnné AB), které označuje váhu příslušného žáka. Podle popisu třídy ZAK ovšem víme, že tato složka je v zavedení třídy označena identifikátorem VAHA. Je proto přirozené převést označení složek třídy na označení složek proměnných — můžeme pak hovořit o složce hodnoty proměnné AB označené VAHA a podobně o složce proměnné AB označené VYSKA.

Zapisovat budeme tyto složky následovně:

AB.VAHA

a podobně

AB.VYSKA .

Vraťme se nyní pro názornost k příkladu, kde jsme konstruovali typ pro popisování žáků ve škole, přičemž u každého žáka evidujeme jeho jméno, příjmení a třídu, do které chodí (tuto jako ročník a „písmeno“ třídy).

Příslušný typ můžeme nyní zapsat ve tvaru datové třídy takto:

```
class STUDENT;  
<text JMENO, PRIJMENI;  
integer ROCNIK;  
character TRIDA>.
```

Uvažujme ještě proměnnou STUD pro žáky ve škole (kvalifikovanou pro třídu STUDENT), t. j.

ref (STUDENT) STUD;

a uvažujme dále případ, kdy proměnná STUD nabývá nějaké hodnoty. Nechť je tato hodnota například:

```
<„JAN“; „PAVLIK“; 3; 'A'>  
(Žák Jan Pavlík chodí do třídy třetí A.)
```

Potom je:

STUD.PRIJMENI = „PAVLIK“

a podobně

STUD.ROCNIK = 3

či

STUD.TRIDA = 'A'.

Cvičení.

V článku „Datové typy“ bylo cvičení, kde se měla navrhnout rozsáhlejší datová struktura pro popis žáků ve škole.

Zapište takovou strukturu ve formě datové třídy, utvořte několik proměnných pro žáky ve škole a zapište jednotlivé složky jejich hodnot.

0 jednom zajímavém zobrazení

Ing. MILAN VOLF, Výzkumný ústav zušlechťovací, Dvůr Králové n. L.

V oblasti rekreační matematiky lze „objevit“ velký počet úloh, jejichž řešení je nám známo již mnoho let a jejichž význam si vždy bezprostředně ani neuvědomujeme a který se někdy dotýká i samotných základů algebry a teorie čísel. Takovou je též následující úloha:

Úloha:

Vzorcem
$$L\{x, y\} = \frac{(x + y - 1) \cdot (x + y - 2) + 2y}{2} \quad (1)$$

je definováno zobrazení L dvojice přirozených čísel $\{x, y\}$ na přirozené číslo $m = L\{x, y\}$. Dokažte, že toto zobrazení je zobrazení „na“ (tj., že každé přirozené číslo n je obrazem některé dvojice přirozených čísel $\{x, y\}$, a že dokonce toto zobrazení je vzájemně jednoznačné, tj. že existují inverzní zobrazení

$$L_1^{-1}\{m\} = x \quad \text{a} \quad L_2^{-1}\{m\} = y \quad (2)$$

obrazu na původní dvojici přirozených čísel. Najděte toto zobrazení!

Řešení: Pro jednoduchost vyjadřování budeme termín „dvojice přirozených čísel“ označovat v dalším názvem „prvek“

Všem prvkům přiřadíme předpisem (1) obraz $\rightarrow$ přirozené číslo.

Výsledek si lze znázornit v následující tabulce:

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	6	10	15	21	28
2	2	5	9	14	20	27	
3	4	8	13	19	26		
4	7	12	18	25			
5	11	17	24				
6	16	23					
7	22						

(3)

Vidíme, že obrazy prvků $\{x, y\}$ jsou v tabulce (3) postupně v diagonálách od levého horního rohu uspořádány vzestupně, vždy z dolního levého rohu do horního pravého rohu diagonály, v i -té diagonále jsou obrazy prvků

$$\{i, 1\}, \{i-1, 2\}, \dots, \{1, i\} \quad (4)$$

Obrazem k -tého prvku $\{i-k+1, k\}$ i -té diagonály je podle vzorce (1) číslo

$$t_k(i) = L\{i-k+1, k\} = \frac{i(i-1)}{2} + k, \quad 1 \leq k \leq i. \quad (5)$$

Abychom byli schopni určit inverzní zobrazení prvku $\{x, y\}$, musíme určit, ve které diagonále s indexem i tento prvek leží. Prvý a poslední prvek mají obrazy

$$t_1(i) = \frac{i(i-1)}{2} + 1 = \frac{i^2 - i + 2}{2}, \quad (6)$$

$$t_i(i) = \frac{i(i-1)}{2} + i = \frac{(i+1)i}{2}. \quad (7)$$

Dále platí

$$(i-1)^2 < 2(t_1(i) - 1) < i^2 < 2t_i(i) < (i+1)^2,$$

odkud dosazením z (5), (6) a (7) plyne

$$(i-1)^2 < 2(t_k(i) - k) < i^2 < 2(t_k(i) - k + i) < (i+1)^2 \quad (8)$$

Vzorec (8) ukazuje na zajímavý vztah mezi obrazem $t_k(i)$ prvku a indexem i diagonály tabulky, v níž tento prvek leží. Tento vztah formulujeme poněkud přesněji v následující větě:

Věta 1. Mějme prvek $\{i-k+1, k\}$, jehož obraz $t_k(i)$ leží v i -té diagonále tabulky (3).

Potom platí

$$i = \text{celá část } \{\sqrt{2t_k(i)} + 0,5\}. \quad (9)$$

(Jinými slovy: výsledek zaokrouhlení $\sqrt{2t_k(i)}$ je požadovaným pořadovým indexem diagonály příslušného prvku podle tabulky (3).)

Důkaz: Jelikož z (6) a (7)

$$2t_1(i) = i^2 - i + 2, \quad (10)$$

$$2t_i(i) = i^2 + i, \quad (11)$$

je

$$i^2 - 2t_k(i) \leq i^2 - 2t_1(i) = i - 2 < i + 1 = 2t_1(i) - (i-1)^2 \leq \\ \leq 2t_k(i) - (i-1)^2$$

a

$$2t_k(i) - i^2 \leq 2t_i(i) - i^2 = i < i + 1 = (i+1)^2 - 2t_i(i) \leq \\ \leq (i+1)^2 - 2t_k(i)$$

Tedy

$$i^2 - 2t_k(i) < 2t_k(i) - (i - 1)^2, \quad (12)$$

$$2t_k(i) - i^2 < (i + 1)^2 - 2t_k(i). \quad (13)$$

Nerovnosti (12) a (13) říkají, že nejbližší kvadrát přirozeného čísla k hodnotě $2t_k(i)$ je i^2 , tedy je tím dokázána platnost vzorce (9).

Hodnotu k určíme jednoduše ze vzorce (5):

$$k = t_k(i) - \frac{i(i - 1)}{2} \quad (14)$$

a hodnotu prvního čísla dvojice analogicky z rovnic (5) a (14):

$$i - k + 1 = i - t_k(i) + \frac{i(i - 1)}{2} + 1 = \frac{i(i + 1)}{2} - t_k(i) + 1. \quad (15)$$

Dosažené závěry formulujeme přehledně v následující větě:

Věta 2. Jestliže $L\{x, y\} = m$, existují jednoznačně inverzní zobrazení

$$x = L_1^{-1}\{m\} = \frac{n(n + 1)}{2} + 1 - m$$

a

$$y = L_2^{-1}\{m\} = m - \frac{n(n - 1)}{2};$$

kde

$$n = \text{celá část } \{\sqrt{2m} + 0,5\}.$$

Uvedený výsledek není pouhou matematickou hříčkou, ale má zásadní význam pro teorii čísel a algebru, kde nám např. dává vhodné prostředky pro důkazy spočetnosti racionálních a nespočetnosti reálných čísel a umožňuje provádět další závěry.

Navíc se tohoto principu dá s výhodou použít ke „kódování“ dvou nebo více přirozených čísel na jediné tak, že můžeme kdykoliv jednoduchými transformacemi obdržené číslo dekodovat zpět. Toho lze použít např. k šetření paměti samočinného počítače — odpovídá to tzv. „pakování“ čísel. To vše jsou však už náměty k jiným zajímavým problémům.

O čtyřstěnu

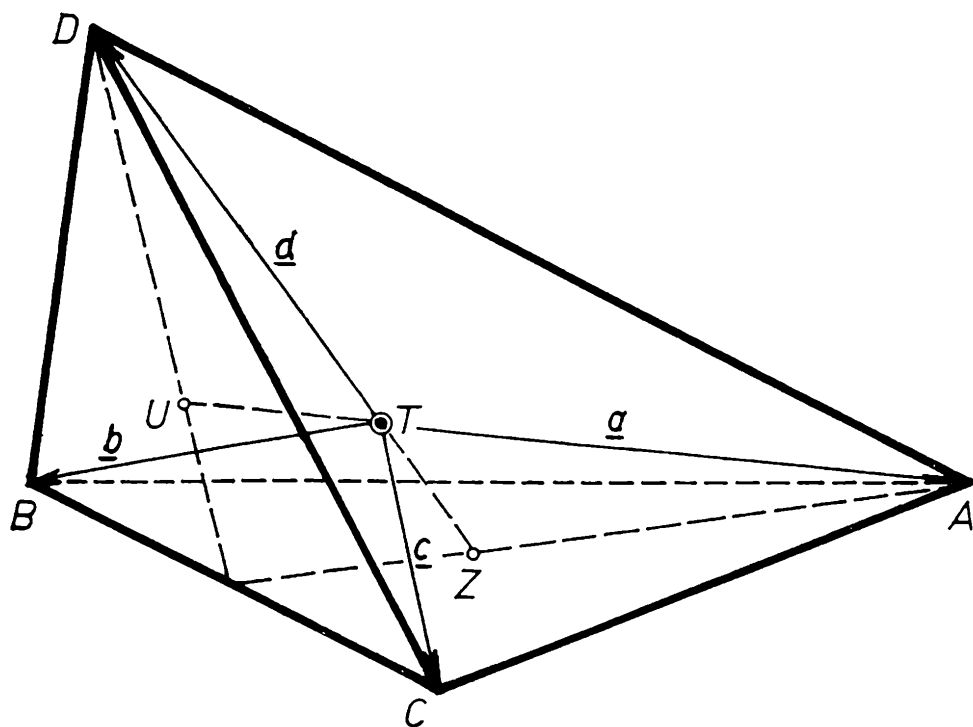
STANISLAV HORÁK, Praha

V předloženém článku si uvedeme tři věty o čtyřstěnu, které se vztahují k tělesovému těžišti čtyřstěnu. Tělesovou těžnicí čtyřstěnu rozumíme úsečku (někdy též přímku), jejíž krajní body jsou vrchol čtyřstěnu a těžiště protější stěny. Podle toho čtyřstěn má čtyři těžnice, a ty procházejí jedním bodem — (tělesovým) těžištěm. Těžiště dělí každou těžnici na dvě úsečky v poměru 1:3, při čemž delší úsek je při vrcholu.

Tolik na úvod. Hlubší poučení o čtyřstěnu najde čtenář v 27. svazku ŠMM, Mnohostěny. Ještě poznámka; místo tělesová těžnice budeme prostě říkat těžnice, místo tělesové těžiště jenom těžiště.

Věta I. Z vektorů těžnic každého čtyřstěnu se dá sestrojit prostorový (zborcený) čtyřúhelník.

Důkaz. V obr. 1 je znázorněn čtyřstěn $ABCD$; v něm je vyznačeno těžiště U stěny BCD a těžiště Z stěny ABC . Tělesové těžiště je T . Vek-



Obr. 1

tory $\mathbf{TA}$, $\mathbf{TB}$, $\mathbf{TC}$, $\mathbf{TD}$ označíme po řadě $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Těžiště T zvolme za počátek souřadnicové soustavy. Potom těžiště stěny ABC je $Z\left[\frac{1}{3}\mathbf{a}; \frac{1}{3}\mathbf{b}; \frac{1}{3}\mathbf{c}\right]$ a podle toho

$$\mathbf{ZT} = \frac{1}{3}\mathbf{d} = -\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\mathbf{d} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Teď je na první pohled vidět, že skutečně $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$

Geometricky to znamená, že z vektorů těžnic lze sestavit čtyřúhelník. Zatím ovšem nevíme, zda to není čtyřúhelník rovinný. Následující úvaha nám ukáže, že to rovinný čtyřúhelník opravdu není.

Předpokládejme, že čtyřúhelník sestavený z těžnic čtyřstěnu je rovinný. Potom vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou komplanární, a to znamená, že body A , B , C , T leží v jedné rovině. To však je nemožné, neboť těžnice AT obsahuje vesměs — až na bod A — vnitřní body čtyřstěnu. Proto vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nemohou být komplanární a uvedený čtyřúhelník je zborcený. — Tím důkaz věty je proveden.

Věta II. Těžiště čtyřstěnu $ABCD$ má shodné vzdálenosti od vrcholů A , B . Dokažte, že potom o velikosti hran platí

$$AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$$

Řešení. Těžiště opět zvolíme za počátek souřadnicové soustavy. Označení ponecháme tak, jak jsme je zavedli ve větě I. Platí tudíž vztah

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Z této rovnosti budeme potřebovat

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -(\mathbf{c} + \mathbf{d}) \quad (1a)$$

Podle textu úlohy je

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 \Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$$

Tento vztah s pomocí (1a) dá

$$(\mathbf{c} + \mathbf{d})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{ac} + \mathbf{ad} = \mathbf{bc} + \mathbf{bd} \quad (2)$$

Počítejme nyní s použitím vztahů (1) a (2) součet

$$\begin{aligned} \mathbf{AC}^2 + \mathbf{AD}^2 &= (\mathbf{c} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{d} - \mathbf{a})^2 = \\ &= 2\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 - 2(\mathbf{ac} + \mathbf{ad}) = \\ &= 2\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 - 2(\mathbf{bc} + \mathbf{bd}) = \\ &= (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{d})^2 = \mathbf{BC}^2 + \mathbf{BD}^2 \end{aligned}$$

Výsledek tedy je

$$AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$$

a tím je důkaz vysloveného tvrzení proveden.

Věta III. Mějme dva čtyřstěny $ABCD$, $KLMN$, které mají společné těžiště T . Potom součet čtverců

$$\begin{aligned} &\mathbf{AK}^2 + \mathbf{AL}^2 + \mathbf{AM}^2 + \mathbf{AN}^2 + \mathbf{BK}^2 + \mathbf{BL}^2 + \mathbf{BM}^2 + \mathbf{BN}^2 + \\ &+ \mathbf{CK}^2 + \mathbf{CL}^2 + \mathbf{CM}^2 + \mathbf{CN}^2 + \mathbf{DK}^2 + \mathbf{DL}^2 + \mathbf{DM}^2 + \mathbf{DN}^2 \end{aligned}$$

nezávisí na vzájemné poloze obou čtyřstěnů.

Důkaz. Společné těžiště obou čtyřstěnů zvolme opět za počátek souřadnicového systému. Pro stručnost označme

$$\begin{aligned} \mathbf{OA} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{OB} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{OC} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{OD} = \mathbf{d}; \\ \mathbf{OK} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{OL} = \mathbf{l}, \quad \mathbf{OM} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{ON} = \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Z předešlého víme, že platí

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} + \mathbf{n} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Potom:

$$\begin{aligned} \mathbf{AK} &= \mathbf{k} - \mathbf{a}, & \mathbf{AL} &= \mathbf{l} - \mathbf{a}, & \mathbf{AM} &= \mathbf{m} - \mathbf{a}, & \mathbf{AN} &= \mathbf{n} - \mathbf{a}, \\ \mathbf{BK} &= \mathbf{k} - \mathbf{b}, & \mathbf{BL} &= \mathbf{l} - \mathbf{b}, & \mathbf{BM} &= \mathbf{m} - \mathbf{b}, & \mathbf{BN} &= \mathbf{n} - \mathbf{b}, \\ \mathbf{CK} &= \mathbf{k} - \mathbf{c}, & \mathbf{CL} &= \mathbf{l} - \mathbf{c}, & \mathbf{CM} &= \mathbf{m} - \mathbf{c}, & \mathbf{CN} &= \mathbf{n} - \mathbf{c}, \\ \mathbf{DK} &= \mathbf{k} - \mathbf{d}, & \mathbf{DL} &= \mathbf{l} - \mathbf{d}, & \mathbf{DM} &= \mathbf{m} - \mathbf{d}, & \mathbf{DN} &= \mathbf{n} - \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Součet čtverců délek všech těchto šestnácti vektorů je roven

$$4(\mathbf{k}^2 + \mathbf{l}^2 + \mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2).$$

Výraz, který jsme dostali, závisí výhradně na velikosti vektorů těžnic daných čtyřstěnů a nikoliv na vzájemné poloze čtyřstěnů, čímž je důkaz vysloveného tvrzení proveden.

Nejmladším matematikům

STANISLAV HORÁK, Praha

Pro nejmladší matematiky zde uvedeme několik zajímavých příkladů ze zahraničních časopisů i s jejich řešením.

1. Na dvoře je 16 slepic; některé jsou bílé, jiné černé a jiné kropenaté. Kolik bylo kterých, jestliže bílých bylo sedmkrát více než kropenatých? (Předpokládáme, že každý druh slepic byl zastoupen aspoň jednou slepicí.)

Řešení. Označme: b počet bílých slepic,
 c počet černých slepic,
 k počet kropenatých slepic.

Čísla b, c, k jsou ovšem přirozená čísla. Potom platí

$$\begin{aligned} b + c + k &= 16 \\ b &= 7k. \end{aligned}$$

Vyloučením neznámé b z této soustavy rovnic dostaneme

$$c = 16 - 8k.$$

Avšak žádné z přirozených čísel b, c, k není větší než 15 a proto

$$0 < b < 16 \Rightarrow 0 < 7k < 16 \Rightarrow 0 < k \leq 2.$$

Podobně

$$\begin{aligned} 0 < c < 16 &\Rightarrow 0 < 16 - 8k < 16 \Rightarrow -16 < -8k < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < 8k < 16 \Rightarrow 0 < k < 2. \end{aligned}$$

Zde jsme dostali ještě ostřejší omezení pro číslo k než prve. Plyne z toho jediná možnost $k = 1$. Máme odpověď:

Bílých slepic je 7, černých 8 a kroupená je pouze 1.

Poznámka. Zajímavost této úlohy spočívala v tom, že jsme dostali pouze dvě rovnice pro tři neznámé. Třetí rovnice byla nahrazena podmínkou, že neznámé musí být přirozená čísla.

2. Najděte přirozená čísla x, y , která vyhovují rovnici

$$x^2 + x + 41 = y^2$$

Řešení. Obě strany rovnice znásobíme číslem 4 (a hned budeme rovnici dále upravovat):

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 164 &= 4y^2, \\ (4x^2 + 4x + 1) + 163 &= 4y^2, \\ (2x + 1)^2 + 163 &= 4y^2, \\ 4y^2 - (2x + 1)^2 &= 163. \end{aligned}$$

Na levé straně rovnice je rozdíl druhých mocnin dvou mnohočlenů a ten rozložíme:

$$(2y + 2x + 1)(2y - 2x - 1) = 163 \cdot 1$$

Čísla x, y musí být podle požadavku úlohy přirozená, a proto i trojčleny $2y + 2x + 1, 2y - 2x - 1$ musí být přirozená čísla. Číslo 163 na pravé straně rovnice je prvočíslo a z toho nutně následuje, že

$$\begin{aligned} 2y + 2x + 1 &= 163, \\ 2y - 2x - 1 &= 1 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

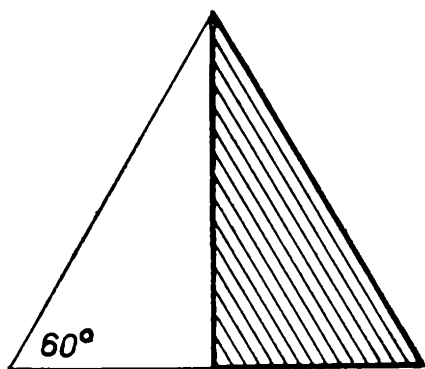
$$x = 40, \quad y = 41$$

Dosazením těchto hodnot do dané rovnice se přesvědčíme, že jsme dostali její řešení.

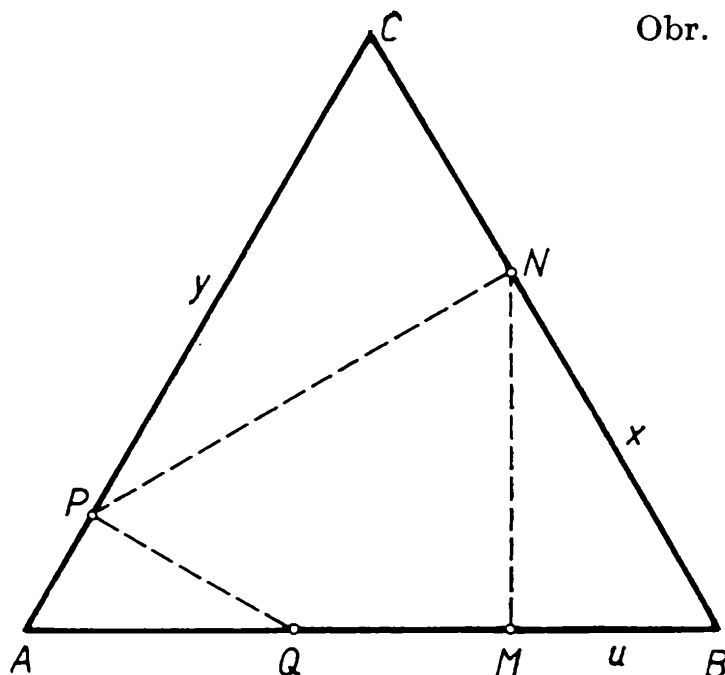
3. Zjistěte hodnotu výrazu

$$V = \frac{9,74 \, 325^3 - 7,74 \, 325^3 - 5,74 \, 325^3 + 3,74 \, 325^3}{9,74 \, 325^2 - 7,74 \, 325^2 - 5,74 \, 325^2 + 3,74 \, 325^2}.$$

Každý z mladých čtenářů jistě uzná, že takovýto příklad působí odpudivě aspoň na první pohled. Pracnost jeho řešení (prosím, bez kalkulač-



Obr. 2



Obr. 1

ky) bychom poznali, kdybychom chtěli provést všechny naznačené početní výkony. Půjdeme na to však trochu s vtipem. Položme

$$x = 9,74\ 325.$$

Nejprve budeme upravovat čitatele:

$$\check{c} = x^3 - (x - 2)^3 - (x - 4)^3 + (x - 6)^3 = 48 (x - 3),$$

jak vyplývá z jednoduché úpravy. Upravujme ještě jmenovatele:

$$\dot{j} = x^2 - (x - 2)^2 - (x - 4)^2 + (x - 6)^2 = 16.$$

Potom

$$V = 48 (x - 3) : 16 = 3(x - 3) = 3(9,74\ 325 - 3) = 20,22\ 975.$$

Uvedený postup netrval ani příliš dlouho a výpočet nebyl nijak pracný. Zároveň je z výsledku patrné, že čítec daného zlomku je více než 20krát větší než jmenovatel.

a) Vypočítejte tentýž příklad tak, že položíte $x = 6,74\ 325$.

b) Který ze zlomků $\frac{997\ 996}{997\ 997}$, $\frac{997\ 998}{997\ 999}$ je větší?

4. Mějme pravoúhlý trojúhelník, jehož jeden ostrý úhel má velikost 60° . Potom velikost přepony je rovna dvojnásobku velikosti kratší odvěsny.

Důkaz (obr. 1) je okamžitě patrný, když k pravoúhlému trojúhelníku sestrojíme souměrně sdružený podle delší odvěsny. Sjednocení obou těchto pravoúhlých trojúhelníků je rovnostranný trojúhelník. Dál už je vše jasné.

Znalost této věty nám dopomůže k řešení dalšího příkladu.

5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC . Na straně AB zvolme libovolný vnitřní bod M (blíže k vrcholu B). V něm vztyčíme kolmici na AB ; ta protne stranu BC v bodě N . V něm vztyčená kolmice na BC protne stranu AC v bodě P . Kolmice vztyčená v bodě P na AC protne AB v bodě Q . Jak musíme zvolit bod M , aby bod Q splynul s bodem M ?

Řešení (obr. 2). Pro stručnost označme

$$\begin{aligned} |AB| &= |BC| = |CA| = a, \\ |BM| &= u, |BN| = x, |CP| = y, \\ |CN| &= a - x, |AP| = a - y, |AM| = a - u. \end{aligned}$$

Je ihned patrné: aby popsaná konstrukce byla možná, musí platit $u < \frac{a}{2}$.

Podle předešlé věty v pravoúhlém trojúhelníku MNB platí, že $x = 2u$. Potom $|CN| = a - x = a - 2u$. V pravoúhlém trojúhelníku CNP opět platí $|CP| = y = 2(a - x) = 2a - 4u$. V trojúhelníku AQP je $|AP| = a - y = 4u - a$. Posléze v pravoúhlém trojúhelníku APQ platí $|AQ| = 8u - 2a$. To jsme stále využívali výsledku věty 4, neboť všechny trojúhelníky, o nichž byla řeč, byly pravoúhlé a jeden jejich úhel měl velikost 60° .

Mají-li body Q, M splynout, musí platit

$$|AQ| = a - |BM| \Rightarrow 8u - 2a = a - u$$

Odtud již máme

$$u = \frac{1}{3}a$$

Otázka: Jak musíme zvolit bod M , aby $QM = \frac{1}{4}a$ (obecně $QM = \frac{1}{n}a$) a aby pořadí bodů bylo A, Q, M, B ?

Výzkumné úkoly motivované rovností měr útvarů

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Matematika ve své hravější části, tzv. rekreační matematice, přináší někdy úlohy, které jsou svými náměty kuriózní, ale motivují vážnou a mnohdy značně náročnou matematickou činnost. Mezi takové úlohy patří ty, které uvádíme v článku se záměrem dát vám možnost objevů.

Znáte rozmanité rovinné útvary, kterým se přiřazují obsahy a obvody; znáte tělesa, kterým se přiřazují objemy a povrchy. Víte, že obsahy a po-

vrchy se měří ve stejných jednotkách (plošných), ale objemy v jiných, stejně jako obvody. Pripustíme, že zvolíme jednotky cm , cm^2 , cm^3 a *budeme porovnávat jen číselné údaje*. Položme si problém:

A. *Existují rovinné útvary, které mají obsah $h \text{ cm}^2$ a obvod $h \text{ cm}$? Lze nějak výstižně charakterizovat mnohoúhelníky s touto vlastností?*

Prozkoumejte třeba tyto zvláštní případy (útvary si rýsujte):

a) Jak dlouhý poloměr má kruh, který je řešením problému A?

b) Kterým číslem je vyjádřena délka strany čtverce představujícího řešení problému A? Jaký poloměr má kružnice jemu vepsaná?

c) Který rovnostranný trojúhelník řeší svými mírami problém A? Jak dlouhou má výšku? Jak dlouhý má poloměr kružnice vepsané (třetinu výšky)?

d) Který rovnoramenný trojúhelník je řešením problému A? Jak dlouhý poloměr má kružnice do něho vepsaná? [Hledejte vhodný způsob výpočtu poloměru ze vzorce pro obsah trojúhelníka.]

e) Jak dlouhý je poloměr kružnice, jíž je opsán pravidelný šestiúhelník, který řeší problém A?

Výsledky, které jste získali, zejména zjištěná velikost poloměru vepsaných kružnic, jsou pro vás asi překvapením. Umíte dokázat vzorec $P = \rho \cdot s$ pro obsah trojúhelníka, je-li s poloviční obvod a ρ poloměr vepsané kružnice? [Rozložte trojúhelník na tři trojúhelníky pomocí spojnic vrcholů se středem kružnice vepsané.] Je už zřejmé, jak lze charakterizovat trojúhelníky, které jsou řešením problému A? Vyslovte příslušnou větu a dokažte ji. Lze větu zobecnit pro pravidelné mnohoúhelníky opsané kružnicím?

Po úspěchu s prvním problémem si položíme obdobný problém s tělesy:

B. *Existují tělesa, která mají objem $h \text{ cm}^3$ a povrch $h \text{ cm}^2$? Lze nějak charakterizovat typ mnohostěnů s touto vlastností?*

Zkoumejte opět zvláštní případy, například:

a) Jak dlouhý poloměr má koule, která je řešením problému B?

b) Kterým číslem je vyjádřena délka hrany krychle představující řešení problému B? Jaký poloměr má koule vepsaná do této krychle?

c) Který pravidelný čtyřstěn řeší svými mírami problém B? Jak dlouhou má výšku? Jak dlouhý má poloměr vepsané koule [čtvrtinu výšky]?

d) Který rotační válec opsaný kouli je řešením problému B? Jak dlouhý je poloměr takové koule?

e) Který rotační kužel je řešením problému B? Jak dlouhý poloměr má koule do něho vepsaná? [Vyjádřete poloměr kružnice vepsané do jeho osového řezu (podle případu d k problému A), vepsaná koule má stejný poloměr.]

Opět jste získali pozoruhodné výsledky. Vyslovte větu charakterizující ta tělesa opsaná koulím, která jsou řešením problému B. Důkaz věty podáte jistě už snadno.

V některém z dalších čísel Rozhledů najdete stručné odpovědi na tyto výzkumné úkoly, pak si zkontrolujte své objevy. Nebojte se sami objevovat nové matematické poznatky.

konstrukční geometrie

Vzájemně kolmé tečny paraboly

PhDr. ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF UK Praha

V 7. čísle minulého ročníku Rozhledů byl otištěn příspěvek prof. E. Kraemera *Některé metrické vlastnosti paraboly*, ve kterém je popsána konstrukce ohniska a řídící přímky paraboly dané dvěma tečnami s body dotyku. Všimněme si nyní podstatného zjednodušení konstrukce v případě, kdy jsou dané tečny kolmé.

V citovaném článku jsou uvedeny poznatky:

I. *Kolmé tečny paraboly se protínají na její řídící přímce.*

II. *Tětiva spojující body dotyku kolmých tečen prochází ohniskem paraboly.*

Dokažme nyní silnější tvrzení pro tento případ vzájemné polohy tečen paraboly, které nám umožní velmi snadnou konstrukci ohniska:

III. *Patka kolmice vedené z průsečíku kolmých tečen paraboly na spojnicí bodů dotyku je ohniskem paraboly.*

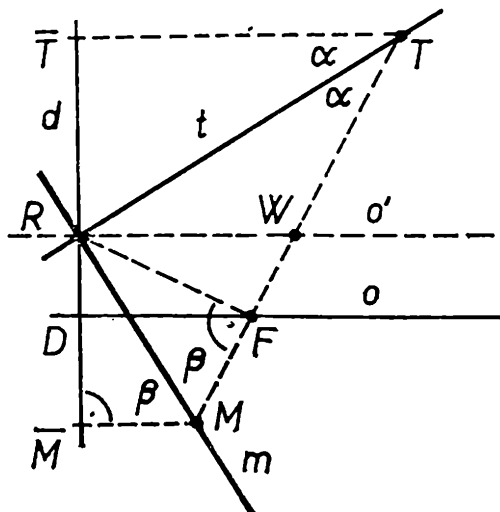
Důkaz. V obr. 1 je $\triangle RM\bar{M} \cong \triangle RMF$ podle věty *sus*, proto je úhel RFM pravý a bod F je patou zmíněné kolmice z bodu R na tětivu MT .

Úloha. Jsou dány kolmé tečny t , m paraboly s body dotyku T , M . Sestrojte ohnisko a řídící přímku paraboly.

Řešení: Směr osy paraboly je určen přímkou RW , kde R je průsečíkem tečen a W je středem tětivy MT (viz větu 4 v citovaném článku). Ohnisko F paraboly je patou kolmice z R na MT (podle III). Řídící přímka d je kolmicí vedenou bodem R (podle I) k přímce RW . Osu paraboly můžeme sestavit jako rovnoběžku vedenou bodem F s přímkou RW .

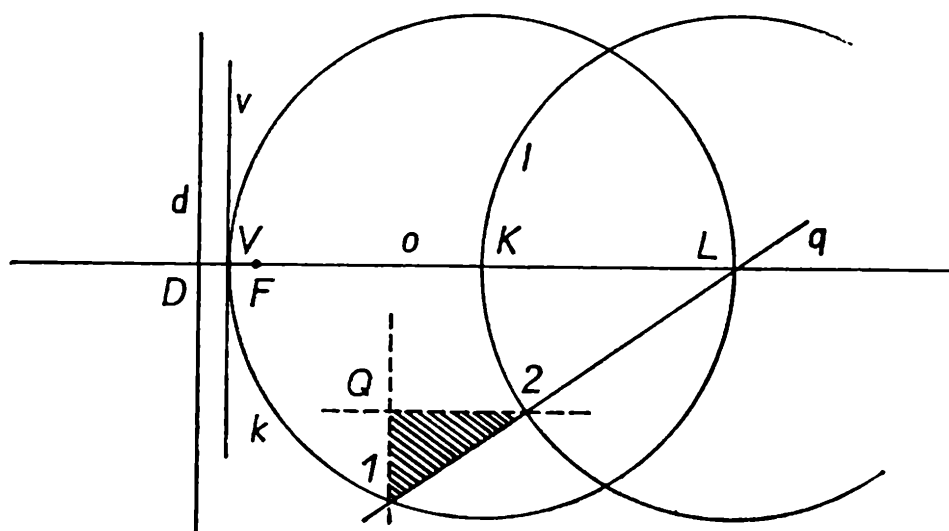
Znáte konstrukci jednotlivých bodů paraboly podle její definice. Ukažme si na závěr bez důkazu tzv. *trojúhelníkovou konstrukci bodů paraboly*, je-li známa její řídící přímka a ohnisko. (Důkaz správnosti konstrukce můžete podat analyticky.)

Na ose paraboly dané ohniskem F a řídící přímkou d (obr. 2) sestrojte body K , L tak, že $VK = KL = 4 \cdot FD$ a opište kružnice $k(K, KV)$



Obr. 1

$a(L, LK)$. Libovolná přímka q procházející bodem L protne kružnice k, l po řadě v bodech 1, 2. Vedte bodem 1 přímku a rovnoběžnou s řídící přímkou d , bodem 2 rovnoběžku b s osou paraboly. Průsečík přímek a, b — bod Q — je bodem paraboly. Volíme-li $q = o$, získáme vrchol paraboly.



Obr. 2

Zamyslete se nad tím, zda lze touto konstrukcí sestavit všechny body paraboly.

naše soutěž

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Loňské soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních se účastnilo 26 jednotlivců a jeden kolektiv. Proti loňsku, kdy soutěžilo 34 jednotlivců a jeden kolektiv, je to opět pokles (předloni bylo 47 jednotlivců a 7 kolektivů). Pozoruhodná je mimořádně malá účast řešitelů matematických příkladů; bylo jich pouze 6 (šest), z nichž 4 řešili také příklady z konstrukční geometrie. Kromě toho jedna studentka zaslala řešení jednoho příkladu z konstrukční geometrie. Další zajímavý zjev je, že se soutěžící rozdělili ve dvě disjunktní množiny: jednu tvoří celkem 7 studentů, řešících příklady z matematiky a z konstrukční geometrie, druhou 19 jednotlivců a jeden kolektiv, řešící jenom příklady z fyziky. Vzhledem k této skutečnosti jsme hodnocení soutěže provedli pro každou z těchto skupin zvlášť. Nejúspěšnějšími řešiteli (co do počtu a kvality řešení) byli tito studenti:

Matematika a konstrukční geometrie :

1. Jaroslav Hančl, G. Bílovec.
2. Jindřich Kurka, Akademické G, Praha 1, Štěpánská ul.

Fyzika :

1. Ondřej Čadek, G třída kpt. Jaroše, Brno.
2. Vladimír Hrabě, G Český Brod.
3. Pavel Kessler, G třída kpt. Jaroše, Brno.
4. Miloslav Křížek, G Nad štolou, Praha 7.
5. Kolektiv třídy 3C (S. Hledík a H. Krečmerová),
G Ostrava 1, ul. dr. Šmerala.

Nakonec připojujeme abecední seznam všech úspěšných řešitelů, a to ve dvou skupinách. V první skupině jsou uvedeni řešitelé úloh z matematiky a z konstrukční geometrie, ve druhé skupině jsou řešitelé úloh z fyziky. Za jménem řešitele uvádíme ústav, na němž řešitel studoval.

Jaroslav Hájek, G Bílovec; *Jaroslav Hančl*, G Bílovec; *Jindřich Kurka*, AG Praha 1; *Jiřina Rychtářová*, G Chomutov; *Zdeněk Somr*, G Sedlčany; *Jaroslav Štěpánek*, G Bílovec; *Josef Tkadlec*, G Bílovec.

David Brož, G Semily; *Ondřej Čadek*, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Jaroslav Číp*, G Karviná; *Vladimír Hrabě*, G Český Brod; *Zdeněk Hradil*, G Olomouc — Hejčín; *Pavel Kessler*, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Ivan Krakovský*, G Ružomberok; *Miroslav Krejčíř*, G Přerov; *Oskar Křenek*, G Bílovec; *Miloslav Křížek*, G Nad štolou, Praha 7; *Jan Kuchař*, G Jihlava; *Lubica*

Lacinová, G J. Hronca, Bratislava; Aleš Langr, G F. Hajdy, Ostrava; Peter Makroczy, G Kováčska, Košice; Tomáš Morcinek, G Karviná; Pavel Motloch, G P. Bezruč, Frýdek - Místek; Pavel Potoček, G Rychnov n/Kněžnou; Jaromír Špaček, G Kutná Hora; Vladimír Wagner, G Havířov; Kolektiv třídy 3c, G Ostrava 1.

Redakce Rozhledů děkuje všem řešitelům za projevený zájem, vítězům blahopřeje a nejúspěšnějším z nich zaslala z prostředků SPN v Praze věcné výhry.

Oprava textu 3. úlohy z konstrukční geometrie v Naší soutěži

V souvislosti s přesídlením redakce Rozhledů matematickofyzikálních došlo k omylu při zadávání 3. úlohy z konstrukční geometrie v letošní Naší soutěži (viz číslo 1 letošního ročníku). Místo úlohy tam uvedené měla být otištěna tato úloha:

3. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q ležící v rovině π a číslo $\varrho > 0$. Kromě toho je

a) dán bod A ;

b) dána přímka m neležící v rovině π

Sestrojte kulovou plochu, která má poloměr ϱ , dotýká se přímek p, q a a) prochází bodem A , b) dotýká se přímky m

František Hradecký

Redakce se omlouvá za toto nedopatření autorovi úlohy i čtenářům.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Platí-li pro reálná čísla $x_1, \dots, x_n$

$$(n-1)(x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq (x_1 + \dots + x_n)^2$$

a zároveň pro některé $k \leq n$

$$(k-1)(x_1^2 + \dots + x_k^2) \geq (x_1 + \dots + x_k)^2,$$

pak platí v obou nerovnostech rovnost. Dokažte a ukažte, že je-li $k < n$, je

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n.$$

(Došla 2 řešení)

Miroslav Fiedler

Upravené řešení Josefa Tkadlece, 3. C G v Bílovci:

Nejprve dokážeme lemma (pomocnou větu):

Lemma. Pro každé přirozené číslo k a všechna reálná $x_1, \dots, x_{k+1}$ platí implikace

$$\begin{aligned} (k-1)(x_1^2 + \dots + x_k^2) &\geq (x_1 + \dots + x_k)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow k(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2) &\geq (x_1 + \dots + x_{k+1})^2, \\ (k-1)(x_1^2 + \dots + x_k^2) &> (x_1 + \dots + x_k)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow k(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2) &> (x_1 + \dots + x_{k+1})^2. \end{aligned}$$

Důkaz. Pro $k=1$ je implikace správná. Nechť je $k > 1$. Nerovnost

$$(k-1)(x_1^2 + \dots + x_k^2) \geq (x_1 + \dots + x_k)^2 \quad (1)$$

můžeme upravit na tvar

$$-4(k-1)(x_1^2 + \dots + x_k^2) + 4(x_1 + \dots + x_k)^2 \leq 0.$$

Její levá strana je diskriminantem kvadratické rovnice v x_{k+1}

$$(k-1)x_{k+1}^2 - 2(x_1 + \dots + x_k)x_{k+1} + (x_1^2 + \dots + x_k^2) = 0.$$

Protože je $k-1 > 0$, platí pro každé (reálné) x_{k+1}

$$(k-1)x_{k+1}^2 - 2(x_1 + \dots + x_k)x_{k+1} + (x_1^2 + \dots + x_k^2) \geq 0. \quad (2)$$

Přitom rovnost v (2) nastane jen tehdy, je-li rovnost v (1).

Užitím (1) pak dostáváme

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_{k+1})^2 &= (x_1 + \dots + x_k)^2 + x_{k+1}^2 + 2x_{k+1}(x_1 + \dots + x_k) \leq \\ &\leq (k-1)(x_1^2 + \dots + x_k^2) + x_{k+1}^2 + 2x_{k+1}(x_1 + \dots + x_k) = \\ &= k(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2) - \\ &- [(k-1)x_{k+1}^2 - 2x_{k+1}(x_1 + \dots + x_k) + (x_1^2 + \dots + x_k^2)]. \end{aligned}$$

Podle (2) pak platí

$$(x_1 + \dots + x_{k+1})^2 \leq k(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2)$$

a přitom rovnost nastane jen tehdy, je-li ve (2), a tedy i v (1) rovnost. Tím je lemma dokázáno.

Z lemmatu plyne, že je-li pro nějaké $k \leq n$

$$(k-1)(x_1^2 + \dots + x_k^2) \geq (x_1 + \dots + x_k)^2, \quad (3)$$

je pak také

$$k(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2) \geq (x_1 + \dots + x_{k+1})^2,$$

$$(n-1)(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq (x_1 + \dots + x_n)^2. \quad (4)$$

Protože však podle předpokladu platí

$$(n-1)(x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq (x_1 + \dots + x_n)^2,$$

nastane ve (4) a podle lemmatu i ve (3) a ve všech krocích rovnost.

Pro $1 < k < n$ tedy platí

$$(k-1)(x_1^2 + \dots + x_k^2) = (x_1 + \dots + x_k)^2, \quad (5)$$

$$k(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2) = (x_1 + \dots + x_{k+1})^2. \quad (6)$$

Odečtením (5) od (6) dostaneme kvadratickou rovnici pro x_{k+1}

$$(k-1)x_{k+1}^2 - 2x_{k+1}(x_1 + \dots + x_k) + (x_1^2 + \dots + x_k^2) = 0, \quad (7)$$

jejíž diskriminant je podle (5) roven nule. Proto platí

$$x_{k+1} = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k-1}. \quad (8)$$

Pro $k = n-1$ je $x_{k+1} = x_n$. Pro $k < n-1$ dostáváme obdobně

$$x_{k+2} = \frac{x_1 + \dots + x_{k+1}}{k} = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k-1} = x_{k+1}$$

Stejným postupem vyplývá $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n$.

Pro $k=1$ plyne z (5) a (6) $x_1 = 0$. Každé reálné x_2 je pak řešením (7). Pro $x_3, \dots, x_n$ z (8) vyplývá $x_3 = x_2$ a obdobně $x_4 = x_2, \dots, x_n = x_2$. Výsledek proto platí i pro $k=1$.

2. Trojúhelník má obvod $2s = 54$, poloměr kružnice opsané $r = \frac{65}{6}$ a pro velikosti jeho těžnic platí

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{1515}{2}.$$

Vypočtete velikosti a, b, c jeho stran za předpokladu, že je $a < b < c$.
(Došlo 5 řešení) Jan Fráňa

Řešil Jindřich Kurka, 4. C G v Praze 1, Štěpánská 22:

Z algebry je známo, že pro kořeny a, b, c rovnice

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1)$$

platí tyto vzorce:

$$-A = a + b + c, \quad (2)$$

$$B = ab + ac + bc, \quad (3)$$

$$-C = abc. \quad (4)$$

Velikosti stran daného trojúhelníka můžeme tedy vypočíst jako kořeny

rovnice (1), jestliže se nám podaří vypočíst čísla A , B , C . Avšak podle předpokladu je $a + b + c = 2s = 54$, takže je

$$A = -54 \quad (5)$$

K výpočtu čísla B vyjdeme z těchto vzorců pro velikosti těžnic trojúhelníka (které lze odvodit pomocí kosinové věty):

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

$$4t_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2,$$

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2);$$

podle dané podmínky je tedy

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1010 \quad (6)$$

Umocníme-li na druhou rovnost $a + b + c = 54$, dostaneme rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 2916,$$

z níž podle (6) plyne, že je

$$B = ab + ac + bc = 953 \quad (7)$$

Zbývá tedy vypočíst $C = -abc$; k tomu užijeme vzorce

$$P = \frac{abc}{4r},$$

kde r je poloměr kružnice danému trojúhelníku opsané. Podle tohoto vzorce je pro dané r

$$abc = 4 \frac{65}{6} P$$

$$abc = \frac{130}{3} P \quad (8)$$

K výpočtu obsahu P použijeme Heronova vzorce, podle něhož je v našem případě

$$P = \sqrt{27(27-a)(27-b)(27-c)} \quad (9)$$

Avšak součin $(27-a)(27-b)(27-c)$ je rovný číslu

$$27^3 - 27^2(a+b+c) + 27(ab+ac+bc) - abc,$$

takže podle dané podmínky pro obvod trojúhelníku a podle (7) a (9) je

$$P^2 = 27(27^3 - 2 \cdot 27^3 + 27 \cdot 953 - abc)$$

Podle (8) je tedy

$$(abc)^2 = \frac{130^2}{9} 27(27 \cdot 953 - 27^3 - abc),$$

$$(abc)^2 = 3 \cdot 130^2 (6048 - abc)$$

tak dostáváme pro abc kvadratickou rovnici

$$(abc)^2 + 50700 abc - 3 \cdot 130^2 \cdot 6048 = 0$$

Protože je $abc > 0$, vyhovuje naší úloze jenom kořen

$$abc = 5460;$$

podle (4) je tedy

$$C = -5460 \quad (10)$$

Podle (5), (7) a (10) zní rovnice (1) takto:

$$x^3 - 54x^2 + 953x - 5460 = 0.$$

Použijeme-li substituce

$$x = y - \frac{A}{3} = y + 18, \quad (11)$$

dostaneme redukovanou kubickou rovnici

$$\begin{aligned} y^3 - 19y + 30 &= 0, \\ y^3 - 4y - 15y + 30 &= 0, \\ y(y^2 - 4) - 15(y - 2) &= 0, \\ (y - 2)(y^2 + 2y - 15) &= 0 \end{aligned}$$

Její kořeny jsou čísla $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = -5$. Podle (11) je tedy $x_1 = 20$, $x_2 = 21$, $x_3 = 13$. Strany daného trojúhelníku mají tedy velikosti $a = 13$, $b = 20$, $c = 21$.

3. Je dána množina všech elips, které mají společný hlavní vrchol A a v něm společnou hyperoskulační kružnici. Zjistěte množinu vedlejších vrcholů všech elips dané množiny.

Stanislav Horák

Upravené řešení Jindřicha Kurky, IV C G Praha 1

Pravoúhlou soustavu souřadnic zvolme tak, jak je vyznačeno na obr. 1. (Vrchol A leží v počátku, střed křivosti S_k na ose x . Tudiž $AS_k = r$.) Rovnice zvolené elipsy z dané množiny elips je

$$b^2(x - a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

Z podobnosti trojúhelníků AKS_k , SAC dostaneme (a , b jsou délky hlavní a vedlejší poloosy)

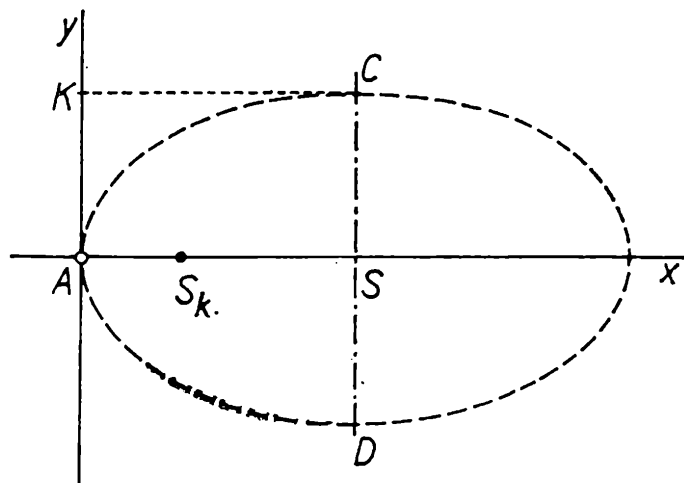
$$r = \frac{b^2}{a}, \text{ tj. } b^2 = ar.$$

Souřadnice vrcholu C označme ještě ξ , η a souřadnice vrcholu D jsou potom ξ , $-\eta$. (C , D jsou vedlejší vrcholy zvolené elipsy. Platí tedy

$$\xi = a, \eta = b = \sqrt{ar}$$

Rovnice

$$\xi = a, \eta = \sqrt{ar}$$



Obr. 1

jsou již parametrické rovnice množiny vedlejších vrcholů zvolené elipsy, kde parametr je číslo a . Jeho vyloučením dostaneme rovnici

$$\eta^2 = r\xi \quad (2)$$

Nejsme však ještě hotovi; vrchol C (nebo D) má být vedlejší vrchol, a proto $b < a$, tj.

$$\sqrt{ar} < a \Rightarrow r < a = \xi.$$

Rovnice (2) představuje parabolu. Množinou všech vedlejších vrcholů jsou podle toho dva shodné oblouky paraboly (2) s výjimkou počátečních bodů.

Poznámka autora. Až sem rozřešilo úlohu všech pět studentů takřka stejně, tj. považovali za pevné body vrchol A a střed S_k jeho oskulační kružnice. Avšak pevný byl jen vrchol A a číslo r . To znamená, že bod S_k se mohl zvolit kdekoli na kružnici $k = (A; r)$. Podle toho a podle získaného výsledku je množinou všech vedlejších vrcholů rovina s výjimkou kruhu $K = (A; r\sqrt{2})$.

4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ platí tato nerovnost:

$$|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3|. \quad \text{Josef Kotyk}$$

(Došlo 5 řešení.)

Řešil Jindřich Kurka, IV. C, AG Praha 1, Štěpánská 22:

V trojúhelníku s vrcholy $M \equiv [a_1, a_2, a_3]$, $N \equiv [b_1, b_2, b_3]$, $P \equiv [0, 0, 0]$ jest $|MP - NP| \leq MN$, neboli

$$|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}| \leq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Avšak

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} &\leq \\ &\leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3|, \end{aligned}$$

proto také

$$|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3|.$$

Rovnost nastává, jestliže $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$.

Poznámka autora. Nezávisle na geometrické interpretaci úlohy lze podat např. toto řešení:

Identicky je

$$(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}) \cdot (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}) = \\ = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

z čehož — pokud všechna uvažovaná čísla nejsou rovna nule —

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \\ = \frac{(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + (a_3^2 - b_3^2)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \\ = (a_1 - b_1) \cdot \frac{a_1 + b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} + \\ + (a_2 - b_2) \cdot \frac{a_2 + b_2}{\sqrt{} + \sqrt{}} + (a_3 - b_3) \cdot \frac{a_3 + b_3}{\sqrt{} + \sqrt{}}.$$

Avšak

$$\left| \frac{a_1 + b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{a_2 + b_2}{\sqrt{} + \sqrt{}} \right| \leq 1, \\ \frac{a_3 + b_3}{\sqrt{} + \sqrt{}} \leq 1,$$

je proto vždy (a to i v případě výše vyloučeném)

$$|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3|$$

Konstrukční geometrie

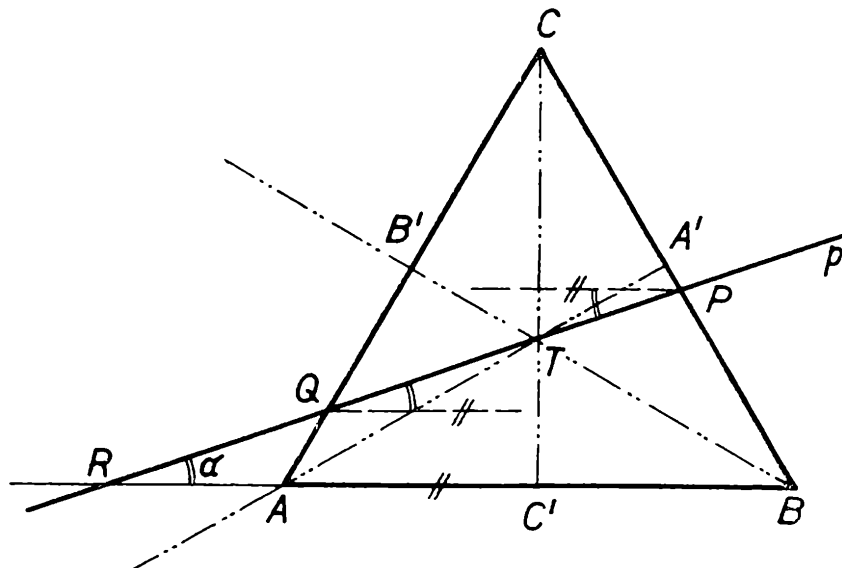
3. Těžištěm T trojúhelníku je vedena přímka, která protíná dvě jeho strany a prodloužení další strany v bodech P, Q, R . Je-li na této přímce zvolena soustava souřadnic s počátkem T , v níž mají body P, Q, R po řadě souřadnice p, q, r , potom je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0. \quad (1)$$

Dokažte toto tvrzení bez použití analytické geometrie.

Emil Kraemer

Obr. 1



Autorovo řešení :

Budiž dán libovolný trojúhelník ABC mající těžiště T ; rovinu, v níž trojúhelník leží, označme π . Zvolme rovinu $\sigma \neq \pi$ tak, aby procházela přímkou AB , a v této rovině sestrojme rovnostranný trojúhelník ABC' . Určíme-li rovnoběžné promítání přímkou CC' , je trojúhelník ABC rovnoběžným průmětem (nadále budeme říkat jen „průmět“) trojúhelníku ABC' ; přitom bod T je průmětem těžiště T' rovnostranného trojúhelníku ABC' . Libovolná přímka p , která leží v rovině π a prochází bodem T , je průmětem přímky p' ležící v rovině σ a procházející bodem T' ; přitom poloha přímky p vzhledem k bodům A, B, C je táž jako poloha přímky p' vzhledem k bodům A, B, C' . Je-li x' velikost libovolné nenulové úsečky $M'N'$ ležící na přímce p' , pak velikost x jejího průmětu MN na přímku p je $x = kx'$, kde $k > 0$ je konstanta nezávislá na volbě úsečky MN . Z uvedeného výkladu plyne, že rovnost (1) stačí dokázat pro trojúhelník rovnostranný.

Budiž tedy ABC rovnostranný trojúhelník; středy jeho stran AB, BC, CA označme po řadě C', A', B' (obr. 1). Přímka p , která prochází těžištěm T trojúhelníku ABC a neobsahuje žádný jeho vrchol, rozděluje oba ostré úhly sevřené dvěma výškami tohoto trojúhelníku; při označení vrcholů A, B, C na obr. 1 rozděluje přímka p úhly $\sphericalangle ATB', \sphericalangle BTA'$. Označení bodů P, Q, R zvolme tak, aby pořadí bodů na přímce p bylo P, T, Q, R ; potom na obr. 1 leží bod P uvnitř strany BC , bod Q uvnitř strany AC a bod R na prodloužení strany AB .

Zvolme na přímce p soustavu souřadnic tak, aby jejím počátkem byl bod T , jednotkou délky vzdálenost bodu T od stran trojúhelníku ABC a aby bod P měl souřadnici $p > 0$. Potom pro souřadnice p, q, r bodů P, Q, R platí:

$$p > 0, \quad q < 0, \quad r < 0$$

Velikost ostrého úhlu $\sphericalangle TRC'$ označme α ; potom velikosti ostrých úhlů $\sphericalangle TQB'$, $\sphericalangle TPA'$ jsou po řadě $60^\circ - \alpha$, $60^\circ + \alpha$. Z pravoúhlých trojúhelníků TRC' , TQB' , TPA' pak plyne, že je

$$\sin \alpha = \frac{1}{|TR|} = -\frac{1}{r}, \quad (2)$$

$$\sin (60^\circ - \alpha) = \frac{1}{|TQ|} = -\frac{1}{q}, \quad (3)$$

$$\sin (60^\circ + \alpha) = \frac{1}{|TP|} = \frac{1}{p}. \quad (4)$$

Snadno se přesvědčíme, že (2) až (4) platí i pro případ, že přímka p prochází vrcholem A ; potom je $P = A'$, $Q = R = A$, $\alpha = 30^\circ$. Podle (2) až (4) je tedy vždy

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &= \sin (60^\circ + \alpha) - \sin (60^\circ - \alpha) - \sin \alpha = \\ &= 2 \cos 60^\circ \sin \alpha - \sin \alpha = 0, \end{aligned}$$

neboť $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; přitom jsme použili známého vzorce pro $\sin \gamma - \sin \delta$.

4. a) Je dána rovina ϱ , která není k průmětně π kolmá a není s ní rovnoběžná; v rovině ϱ je dán dutý úhel s vrcholem V o velikosti $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Při které poloze tohoto úhlu vzhledem k hlavní a spádové přímce roviny ϱ procházející vrcholem V může být pravoúhlý průmět daného úhlu opět úhel o velikosti α ?

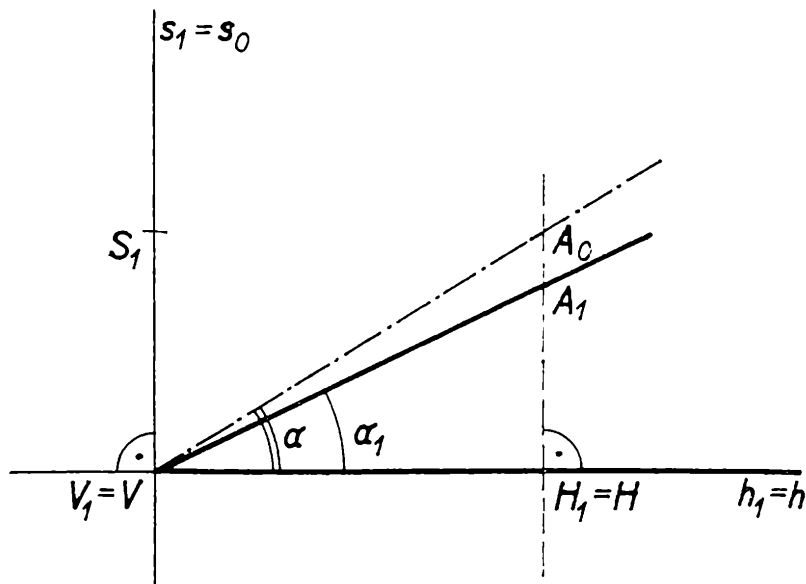
b) Rovina ϱ , která není k průmětně π kolmá, je dána svou stopou p^e a bodem V určeným pravoúhlým průmětem V_1 do roviny π a kótou $z \neq 0$. Umístěte do roviny ϱ dutý úhel o velikosti $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ tak, aby měl vrchol v bodu V a aby jeho pravoúhlý průmět do roviny π byl opět úhel o velikosti α .

Proveďte graficky: a) pro $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) pro $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Při řešení úlohy předpokládáme znalost této věty: „Leží-li pravý úhel v rovině ϱ , která není k průmětně π kolmá a není s ní rovnoběžná, tak, že jedno jeho rameno leží na hlavní přímce roviny ϱ , potom jeho pravoúhlý průmět do roviny π je opět úhel pravý.“

(Došla 2 řešení)

Emil Kraemer



Obr. 2

Upravené řešení Jaroslava Hančla, 3. C G v Bílovci:

a) Hlavní a spádovou přímkou roviny ϱ procházející vrcholem V daného úhlu označme po řadě h , s . Leží-li část přímky h (nebo s) uvnitř tohoto úhlu, říkáme, že přímka h (nebo s) úhel rozděluje nebo že je úhel touto přímkou rozdělen. Zvolme novou průmětnu $\pi' \parallel \pi$ tak, aby procházela přímkou h ; pravoúhlé průměty (nadále jenom „průměty“) do průmětny π' označme indexem 1. Protože je $s \perp h$, $h \parallel \pi'$, je také $s_1 \perp h_1$; přitom každý bod přímky h splývá se svým průmětem. Velikost daného úhlu je α , velikost jeho průmětu označme α_1 .

Předpokládejme nejprve, že daný úhel má velikost $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Potom pro jeho polohu v rovině ϱ vzhledem k přímkám h , s může nastat právě těchto pět případů:

1. Jedno rameno úhlu je částí přímky h ; potom tento úhel není rozdělen přímkou s .
2. Úhel je rozdělen přímkou h ; potom není rozdělen přímkou s .
3. Jedno rameno úhlu je částí přímky s ; potom tento úhel není rozdělen přímkou h .
4. Úhel je rozdělen přímkou s ; potom není rozdělen přímkou h .
5. Žádné rameno úhlu není částí přímky h ani přímky s a úhel není rozdělen žádnou z těchto dvou přímek.

V prvním případě zvolme na přímce h bod $H \neq V$ ležící na rameni daného úhlu a sestrojme v rovině ϱ průsečík A druhého ramene tohoto úhlu se spádovou přímkou roviny ϱ procházející bodem H ; potom je $A_1H_1 \perp h_1$ (obr. 2). Otočme rovinu ϱ kolem přímky h do průmětny π' tak, aby daný úhel $\sphericalangle AVH$ přešel do poloroviny hA_1 . Potom bod A_1 leží uvnitř úsečky H_1A_0 , takže polopřímka VA_1 rozděluje úhel $\sphericalangle A_0VH$; to znamená, že úhel $\sphericalangle A_1VH$ je menší než úhel $\sphericalangle A_0VH$, čili že je $\alpha_1 < \alpha$.

V druhém případě je daný úhel grafickým součtem dvou ostrých úhlů, jejichž společné rameno leží na přímce h ; podle předešlého případu je potom opět $\alpha_1 < \alpha$.

Ve třetím případě je daný úhel $\sphericalangle AVS$ částí pravého úhlu $\sphericalangle HVS$, jehož ramena VH , VS jsou částí přímek h , s . Průmět úhlu $\sphericalangle HVS$ je opět úhel pravý; podle prvního případu je přitom úhel $\sphericalangle A_1V_1H_1$ menší než úhel $\sphericalangle AVH$, čili úhel $\sphericalangle A_1V_1S_1$ je větší než úhel $\sphericalangle AVS$, tj. $\alpha_1 > \alpha$.

Ve čtvrtém případě je daný úhel rozdělen přímkou s ve dva ostré úhly, jejichž společné rameno leží na přímce s . Z toho podle třetího případu plyne, že je opět $\alpha_1 > \alpha$.

V uvedených čtyřech případech je tedy vždy $\alpha_1 \neq \alpha$, takže průmětem daného úhlu není úhel s touž velikostí jako úhel daný.

Předpokládejme nyní, že daný úhel $\sphericalangle AVB$ má velikost $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Je-li $B' \neq V$ bod na prodloužení polopřímky VB za bod V , je úhel $\sphericalangle AVB'$ vedlejší k úhlu $\sphericalangle AVB$, takže má velikost $\pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$. Průmětem vedlejších úhlů $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVB'$ jsou opět vedlejší úhly $\sphericalangle A_1V_1B_1$, $\sphericalangle A_1V_1B'_1$; jejich velikosti jsou tedy α_1 , $\pi - \alpha_1$. Pro ostrý úhel $\sphericalangle AVB'$ nastane právě pět dříve uvedených možností; přitom v prvních čtyřech je vždy $\pi - \alpha_1 \neq \pi - \alpha$, čili je též $\alpha_1 \neq \alpha$.

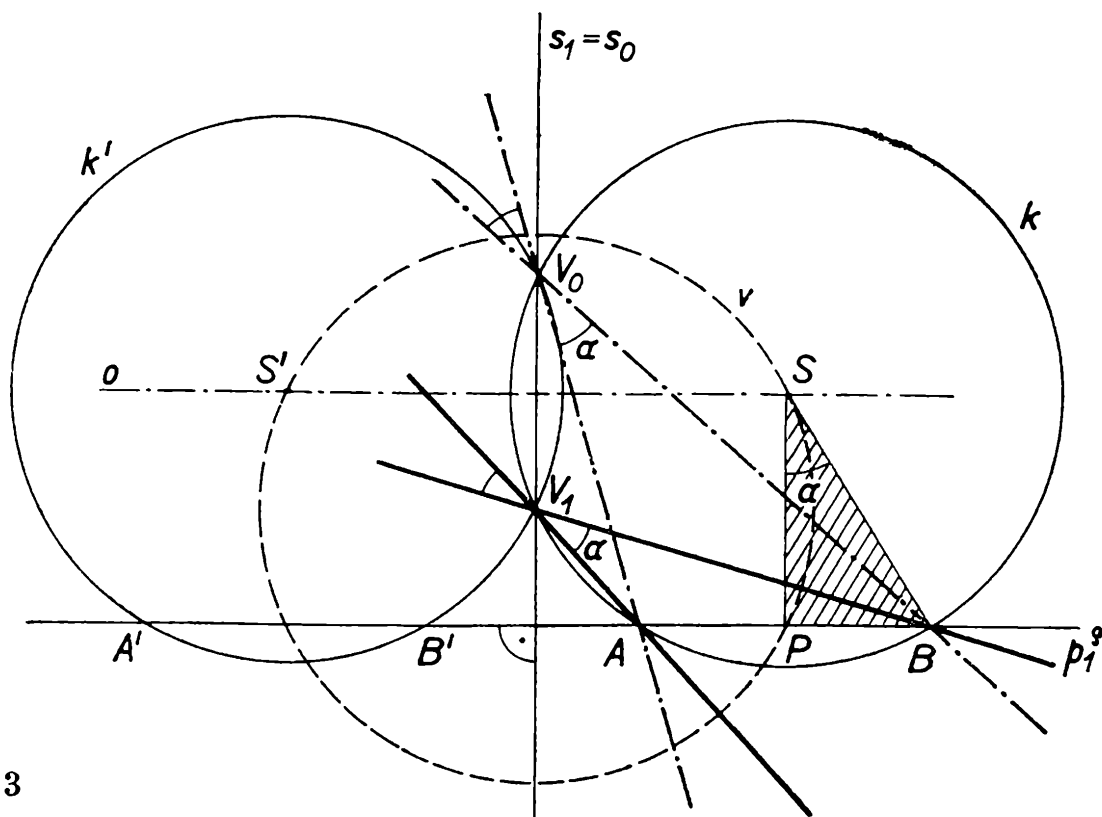
Velikost α_1 průmětu dutého úhlu $\sphericalangle AVB$ o velikosti $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ležícího v rovině ρ může tedy být rovna číslu α nanejvýše v těchto dvou případech:

$\alpha)$ Je-li $\alpha < \frac{\pi}{2}$, pak jde o případ, kdy žádné rameno daného úhlu není částí přímky h ani přímky s a úhel není rozdělen žádnou z těchto přímek.

$\beta)$ Je-li $\alpha > \frac{\pi}{2}$, pak jde o případ, kdy žádné rameno daného úhlu není částí přímky h ani přímky s a úhel je rozdělen přímkou h i přímkou s . Dokážeme, že v obou těchto případech tato možnost opravdu nastane. Důkaz provedeme tím, že najdeme polohu daného úhlu, pro kterou je $\alpha_1 = \alpha$.

b) Řešme úlohu nejprve pro případ, že daný úhel má velikost $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Podle a) má tento úhel polohu, která byla výše označena jako pátý případ. Při této poloze úhlu protínají obě jeho ramena nebo prodloužení obou ramen stopu p^e v bodech A , B , které leží (v rovině ρ) uvnitř téže



Obr. 3

poloroviny mající hraniční přímku ve spádové přímce s , která prochází vrcholem V úhlu. Otočíme-li rovinu ρ kolem stopy p^e do průmětny tak, aby vrchol V přešel do bodu V_0 ležícího uvnitř poloroviny $p^e V_1$, vznikne situace znázorněná na obr. 3. Protože úhly $\sphericalangle AV_1B$, $\sphericalangle AV_0B$ mají touž velikost $\alpha < \frac{\pi}{2}$, leží body V_1 , V_0 na oblouku kružnice k procházející body A , B . Střed S kružnice k leží tedy na ose úsečky V_1V_0 a na ose úsečky AB , jejíž střed označíme P ; přitom středový úhel $\sphericalangle ASB$ příslušný v kružnici k k obvodovým úhlům $\sphericalangle AV_1B$, $\sphericalangle AV_0B$ má velikost 2α . Poloměr r kružnice k je tedy přeponou pravoúhlého trojúhelníku SPB , jehož odvěsna SP má velikost rovnou vzdálenosti rovnoběžek p^e , o a jehož úhel $\sphericalangle BSP$ má velikost α .

Z uvedeného rozboru plyne tato *konstrukce*: 1. Otočíme daný bod V kolem přímky p^e do průmětny π do bodu V_0 ležícího uvnitř poloroviny $p^e V_1$. 2. Sestrojíme osu o úsečky V_1V_0 . 3. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník $S_1P_1B_1$, jehož odvěsna S_1P_1 má velikost rovnou vzdálenosti rovnoběžek p^e , o a úhel $\sphericalangle B_1S_1P_1$ má velikost α . 4. Kolem bodu V_1 (nebo V_0) opíšeme kružnici v poloměrem shodným s přeponou S_1B_1 trojúhelníku $S_1P_1B_1$ a sestrojíme její společný bod S s přímkou o . 5. Kolem bodu S opíšeme kružnici k shodnou s kružnicí v a sestrojíme její společné body A , B s přímkou p^e . 6. Hledaný úhel je úhel $\sphericalangle AVB$ a úhel k němu vrcholový.

Dokážeme, že sestrojený úhel $\sphericalangle AVB$ má skutečně velikost α . Označme P patu kolmice vedené k přímkce p^e bodem S . Potom je

$$\triangle SPB \cong \triangle S_1P_1B_1 \quad (Ssu),$$

neboť je $|SP| = |S_1P_1|$, $|SB| = |S_1B_1|$ a $|\sphericalangle SPB| = |\sphericalangle S_1P_1B_1| = \frac{\pi}{2}$;

proto je úhel $\sphericalangle BSP$ shodný s úhlem $\sphericalangle B_1S_1P_1$, který má velikost α . Středový úhel $\sphericalangle ASB$ v kružnici k má tedy velikost 2α , a proto každý z obvodových úhlů $\sphericalangle AV_1B$, $\sphericalangle AV_0B$ má velikost α .

Zbývá ještě provést *diskusi řešení*. V polorovině p^eV_1 existuje vždy právě jeden bod V_0 a je $V_0 \neq V_1$. Osa o úsečky V_1V_0 je právě jedna a pravoúhlý trojúhelník $S_1P_1B_1$ je (až na polohu) určen jednoznačně. Poloměr kružnice v je shodný s úsečkou S_1B_1 , která je větší než úsečka S_1P_1 , tj. větší než vzdálenost rovnoběžek p^e, o , a tedy též větší než polovina úsečky V_1V_0 . Proto kružnice v má s přímkou o vždy dva různé společné body S, S' . Kružnice k a k' opsané po řadě kolem bodů S, S' poloměrem rovným poloměru kružnice v mají tu vlastnost, že vzdálenost jejich středů od přímky p^e je menší než jejich poloměr. Proto každá z těchto kružnic protíná přímku p^e ve dvou různých bodech (A, B resp. A', B'). Tak dostáváme vždy celkem 4 řešení: úhel $\sphericalangle AVB$ a úhel k němu vrcholový a úhel $\sphericalangle A'VB'$ a úhel k němu vrcholový (poslední dvě řešení nejsou na obr. 3 vyznačena).

Má-li daný úhel velikost $\alpha > \frac{\pi}{2}$, sestrojíme úhel k němu vedlejší

o velikosti $\pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$ a pak sestrojíme v rovině ϱ tento úhel podle právě provedené konstrukce. Hledaný úhel je potom k němu vedlejší.

olympiády

Vzpomínka na loňskou MO

Máme už 28. ročník matematické olympiády, ale v těchto řádcích se ještě vrátíme ke školnímu roku 1977—78 a povíme si, jak probíhal loňský ročník soutěže. Zásady, podle nichž se olympiáda řídila, byly stejné jako v letech předešlých a jsou všem zájemcům známe. Začal své funkční období nový ústřední výbor MO, jehož předsedou je *doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.* a složení výboru je mírně pozměněno proti létům minulým. Studenti ovšem vidí jen výsledky práce této řídicí instituce a starají se hlavně o to, aby se zdarem rozřešili uložené příklady a postoupili tak do dalšího kola. K tomu jim pomáhají různé pomocné akce, korespondenční seminář a knižnice *Škola mladých matematiků*, o jejíchž svazcích se v Rozhledech často píše.

Vyvrcholením matematické olympiády je každoročně třetí (celostátní) kolo kategorie A, jehož uspořádání bylo v minulém ročníku svěřeno jihomoravskému kraji. Třetí kolo se konalo 4. až 6. května 1978 v Jihlavě a dostalo se do něho osmdesát nejlepších olympioniků, z toho dvě dívky. Praha tam vyslala 22 svých nejlepších řešitelů z několika gymnázií, gymnázium v Bílovci, jehož studenti se každoročně objevují v soutěži Rozhledů, bylo též pěkně zastoupeno a další kraje se rovněž snažily vyslat své nejlepší.

Ve čtvrtek 4. května v 17.30 hod. bylo celostátní kolo slavnostně zahájeno v zasedací síni MěstNV v Jihlavě a týž den ve 20 hod. zahájil ústřední výbor MO slavnostně své zasedání v jihlavském Domě kultury a techniky. Druhý den, pátek 5. května, měl už pracovní ráz. Studenti se sešli ráno v Domě kultury a techniky a měli řešit tři olympijské úlohy. Celé páteční dopoledne zasedal v téže budově ústřední výbor MO. Na programu byla příprava dalšího ročníku olympiády, příprava žákovských seminářů, ediční činnost a další body nezbytné pro hladký průběh soutěže. Po obědě se řešitelé i členové ústředního výboru MO rozjeli na malý výlet. Počasí se vydařilo, obě skupiny si prohlédly Telč a projely se malebnou Českomoravskou vysočinou. Představení Divadla na provázku zakončilo pro všechny, mladé i ty starší, druhý den pobytu v Jihlavě. V sobotu 6. května se dopoledne znovu soutěžilo, žáci řešili zbývající tři olympijské úlohy. Ústřední výbor MO dokončoval v téže době svá jednání. Oběd — a pak už přišlo loučení s Jihlavou, městem, které tak přátelsky přijalo matematickou olympiádu a připravilo všem ty nejlepší podmínky pro práci.

Všichni budeme vzpomínat na tři krásné květnové dny strávené v Ji-
hlavě. O tom, jak dopadli řešitelé celostátního kola 1978, přehledně
hovoří seznam vítězů a úspěšných řešitelů.

J. S.

Výsledky 3. kola M0 1978

Vítězové

- 1.— 3. *Kratochvíl Jan*, 4. roč. g., Pardubice
Turek Ilja, 4. roč. g., Hradec Králové
Vavřín Zdeněk, 4. roč. g., Štěpánská, Praha 2
4. *Filakovszky Peter*, 4. roč. g., Banská Štiavnica
5. *Nekovář Jan*, 1. roč. g., Arabská, Praha 6
6. *Matúš František*, 3. roč. g., Prešov
7. *Markl Martin*, 3. roč. g., Botičská, Praha 2
- 8.—10. *Navara Mirko*, 4. roč. g., W. Piecka, Praha 2
Urban Rostislav, 4. roč. g., Šmeralova, Ostrava 1
Veščíčík Milan, 4. roč. g. A. Markuša, Červenej armády, Bratislava
11. *Savický Petr*, 3. roč. g., W. Piecka, Praha 2
- 12.—13. *Kalousek Zdeněk*, 4. roč. g., Jablonec nad Nisou
Tas, Petr, 4. roč. g., Bílovec
- 14.—15. *Jirásek Jozef*, 3. roč. g., Šmeralova, Košice
Mizera Ivan, 4. roč. g. J. Hronca, Novohradská, Bratislava
16. *Tkadlec Josef*, 3. roč. g., Bílovec
- 17.—19. *Beniak Juraj*, 2. roč. g. A. Markuša, Červenej armády, Bratislava
Kučírek Petr, 4. roč. g., Koněvova, Brno
Vejvalka Jan, 3. roč. g., Na Zatlance, Praha 5

Ostatní úspěšní řešitelé

- 20.—24. *Guričan Jaroslav*, 3. roč. g. A. Markuša, Červenej armády, Bratislava
Hančl Jaroslav, 3. roč. g., Bílovec
Kučera Radan, 3. roč. g., Koněvova, Brno
Pyrih Pavel, 4. roč. g., Sušice
Suchánek Jaromír, 4. roč. g. A. Markuša, Červenej armády, Bratislava
25. *Svitek Lubomír*, 3. roč. g. A. Markuša, Červenej armády, Bratislava

- 26.—27. *Matěna Jaromír*, 4. roč. g. J. K. Tyla, Hradec Králové
Pišťora Vladislav, 3. roč. g. J. K. Tyla, Hradec Králové
28.—30. *Beránek Petr*, 4. roč. g., Litoměřická, Praha 9
Mejzlík Jiří, 2. roč. g., Bílovec
Šverák Vladimír, 4. roč. g., Lanškroun
31.—33. *Brož David*, 4. roč. g., Semily
Kotvalt Václav, 4. roč. g., W. Piecka, Praha 2
Šimko Eugen, 4. roč. g. slov., Komárno

XX. mezinárodní matematická olympiáda

Jubilejní dvacátá mezinárodní matematická olympiáda se konala ve dnech 1.—13. července 1978 v Bukurešti. Zúčastnila se jí žákovská družstva ze 17 zemí: Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Jugoslávie, Kuby, Mongolska, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Švédska, Turecka, USA, Velké Británie a Vietnamu; celkem 132 soutěžící.

Jako obvykle řešili žáci ve dvou dnech, 6. a 7. července, po třech úlohách; jejich znění otiskneme v některém z příštích čísel. Po opravě a koordinaci žákovských řešení udělila mezinárodní jury celkem 5 prvních, 20 druhých a 38 třetích cen; kromě toho ještě 4 ceny zvláštní.

Z Československa se XX. MMO zúčastnilo těchto osm gymnastů, vesměs úspěšných řešitelů naší MO: P. Filakovszky (Banská Štiavnica), Z. Kalousek (Jablonec nad Nisou), J. Kratochvíl (Pardubice), M. Navara (Praha 2), K. Nekovář (Praha 6), I. Turek (Hradec Králové), Z. Vavřín (Praha 1) a M. Veščíčík (Bratislava). Nejlépe si vedl nejmladší z nich, K. Nekovář, který získal 34 body ze 40 možných, což znamenalo jednu z druhých cen. Další druhou cenu dostal J. Kratochvíl a třetí ceny pak Z. Vavřín, M. Veščíčík a P. Filakovszky. Součet bodů celého družstva byl 195, což stačilo na pěkné páté místo v neoficiálním pořadí družstev, za Rumunskem, USA, Velkou Británií a Vietnamem.

Vcelku lze naši účast na XX. MMO považovat za úspěšnou.

F. Z.

K používání kapesních kalkulátorů ve škole

RNDr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., ČSAV Praha

Dostala se mi do ruky zahraniční publikace, věnovaná otázce používání kalkulátorů mládeží.*) Této široké problematice bylo již v roce 1977 věnováno u našich západních sousedů celé sympozium. Zvláště zajímavé materiály přinesl *dr. Hartwig Meissner*, řádný profesor matematiky a její didaktiky na vysoké škole pedagogické v Münsteru. Některým vysloveným myšlenkám je věnována tato úvaha.

Především je nutno konstatovat, že kapesní kalkulátory široce pronikají do nejširších lidových vrstev a řada výrobců se snaží na trh přinášet výrobky zvláště použitelné při školním vyučování. Nejdále je Texas Instruments díky „své“ logice AOS (počítej, jak je napsáno) a zejména díky nízkým cenám kalkulátorů i pouzdrům pro uchovávání přístrojů pro celou třídu (v těchto pouzdrech se baterie všech kalkulátorů v kabinetě společně nabíjejí).

I bez toho však již bylo dosaženo zajímavých výsledků: první kapesní kalkulátory se objevují dokonce již v předškolním věku a jejich počet s věkem zvolna vzrůstá do „nasyceného“ stavu, jehož je dosaženo zhruba v maturitním věku. Jakožto metodické pomůcky se kalkulátorů nejvíce na školách používá ve věku od šesti do deseti let, v pozdějších letech stupeň nasazení lineárně klesá, zato však od deseti let rychle vzrůstá počet kapesních kalkulátorů, používaných na školách jako výpočetní prostředek; zde se „nasyceného“ stavu dosáhne asi v šestnácti letech.

Programovatelné kalkulátory se do řad žáků dostávají poprvé rovněž zhruba v deseti letech; nejvíce se jich používá od šestnácti do devatenácti let, zatímco později — možná vlivem nastoupeného zaměstnání — dochází k poklesu asi na poloviční hodnotu.

Nejzajímavější jsou údaje, jak se kalkulátorů využívá přímo ve školním vyučování. Děje se tak ve dvou stupních, z nichž první vrcholí mezi desátým a patnáctým rokem, kdežto druhý mezi patnáctým a devatenáctým rokem. Zřejmě to souvisí s převážným používáním buďto jen čtyř aritmetických operací nebo později s nástupem vyšších matematických funkcí.

*) Pressekonferenz „Didacta 1977“. H. Meissner: Taschenrechner als Lehrmittel.

Prof. Meissner je přesvědčen o tom, že kapesní kalkulátory brzy vytlačí ze škol dosavadní výpočetní pomůcky (tabulky, logaritmická pravítka); pracují totiž rychleji, přesněji a v každém ohledu dokonaleji než tyto dosavadní pomůcky. Naproti tomu bude i nadále používáno tabule, nikoli ovšem k vlastním výpočtům, nýbrž při odvozování příslušných vzorců a algoritmů.

Je prý téměř neuvěřitelné, kolik se používáním kalkulátorů uspoří času, jež je pak možno věnovat dalšímu procvičování probírané látky. Již v nejnižších třídách se kalkulátory ukazují výhodné k získávání prvních zkušeností (násobení jakožto opakovaného sčítání atp.), avšak i v pozdějším věku slouží jako experimentální pomůcka k vyšetřování průběhu různých funkcí. Není tedy divu, že kapesní kalkulátory zřejmě brzy pevně zakotví i v osnovách matematiky. Pravděpodobně platí tento závěr i pro nás, až bude k dispozici odpovídající množství vhodných kalkulátorů.

recenze

M. De Wilde: *Closed graph theorems and webbed spaces*,

Research Notes in Mathematics 19, Pitman, London — San Francisco — Melbourne 1978, 158 stran, cena neuvedena.

Jedním ze základních matematických pojmů je spojitost. Názorně, ale nepřesně řečeno, zobrazení je spojité, když malá změna vzoru způsobí malou změnu obrazu. Se spojitostí se nejčastěji setkáváme u funkcí, ale má význam i pro zobrazení daleko obecnější, jen je třeba umět v příslušných množinách „měřit“. Spojitost není umělý pojem, má zásadní důležitost pro fyziku a přírodní vědy vůbec. Parametry, které ovlivňují nějaký děj, můžeme totiž zjistit s omezenou přesností a při zkoumání tohoto děje je třeba vědět, do jaké míry tato chyba ovlivní výsledek.

Otázkám spojitosti je věnována rozsáhlá část matematické literatury. Na redakční stůl Rozhledů se dostala recenzovaná knížka, která shrnuje problematiku tzv. vět o uzavřeném grafu, což jsou kritéria spojitosti zobrazení v abstraktním tvaru. Knižka je určena především specialistům. Čtenáře Rozhledů však bude zajímat, že základní význam pro tuto partii mají práce *prof. dr. V. Ptáka*, *DrSc.* z Matematického ústavu ČSAV, po němž byly dokonce jisté prostory pojmenovány, a který je v monografii několikrát citován.

P. Vrbová

V. J. Arsenin: **Matematická fyzika.**

Vydala Alfa, Bratislava 1977, 429 stran, vázaná 38 Kčs.

Publikace se skládá ze dvou částí. V první části jsou vysvětleny základní metody řešení hlavních úloh matematické fyziky. Dobré poznání těchto metod umožňuje všeobecnější přístup k problémům a dosažení lepších výsledků při řešení. Druhá část knihy se zabývá speciálními funkcemi a jejich použitím při řešení úloh matematické fyziky. Kniha se skládá ze 14 kapitol. Na konci každé z nich jsou uvedeny jednak vyřešené úlohy, jednak úlohy na procvičení.

Publikace je určena studentům fyzikálních a technických specializací. Přesto je zaměřená na praktické řešení úloh matematické fyziky, čtenář se v ní seznámí přístupnou formou i se základními poznatky této disciplíny.

A. Wohlmuthová

R. E. D. BISHOP: **Kmitání.**

SNL, 1978. 132 stran textu, 22 stran fotografických příloh; celoplátěná vazba Kčs 20, brožovaný výtisk Kčs 13.

Na knižní trh přichází pozoruhodná knížka předního pracovníka v oboru abstraktní teorie a technické praxe mechanických kmitů. Jde o zpracování sedmi a půlhodinového zcela populárního kursu, předneseného mládeži bez specifických požadavků na předchozí vzdělání. Podává se orientační, obsahově bohatý a vpravdě nahuštěný přehled, zaměřený na technické otázky jednak vyřešené, jednak dosud odolávající teoretickému objasnění. V těchto druhých případech ustupuje teoretická stránka jevu a nastupuje stanovisko technické; autor v tom smyslu na různých místech říká: „Technická dovednost záleží (alespoň zčásti) v tom, že technik ví, kdy má přestat uvažovat a „dát se do toho“ Pro techniky je vhodné, osvojí-li si poučku, že jasné přibližné teorie jsou obvykle užitečnější než složité, které jsou náročné na přesnost. Rychlý pokrok v kterémkoli odvětví techniky se uskuteční teprve tehdy, až výzkumní pracovníci zcela neumědoměle překročí neoprávněně kladenou hranici mezi čistou a aplikovanou vědu.“

Pro získání představy o tématice šíří autora přístupu připojujeme heslovitý výčet některých nastíněných pojmů. Nehledě k elementům lineárních harmonických kmitů, známých z hodin fyziky, a orientačnímu pohledu na harmonickou analýzu jsou v knížce prolétnuty: účinky kmitání na lidské tělo, odolnost kovů proti kmitání, vlastní kmitočty, tvary a útlum kmitů, obtékání lodi, kmitání rakety, gyroskopické kyvadlo. Při vynuceném kmitání se uvádí rezonance, turbíny, mostní katastrofy, ochrana proti rezonančním katastrofám, tlumiče klikových hřídelů, únavové trhliny v letectví a jejich nebezpečí pro přetlakové turbíny,

zemětřesné jevy, aseismické budovy, ochrana reaktorů, nalomení lodi vodními vlnami s rozlišením klopení a klonění. Samobuzené kmitání, „tančení vodičů rozvodných sítí“, chvění (v knížce se říká „třepetání“) v leteckých konstrukcích, kmitání ocelových komínů, kmitání boční a „dýchání“, vlny ve skladovacích nádržích, katastrofa takomského mostu (1940), tryskové motory, dosud neobjasněné kmitání hřidelů vyvolané vrstvou mazacího oleje, ale i prozaičtější případ rozkmitání gumového nástavce u vodního kohoutu a kolébání konvice na vařiči. Kmitání v rotorech elektrárenských strojů. Přechodové křivky dálnic, komíny v Nagasaki, buchary, ultrazvuk, netopýří „radar“, kavitace, přeprava velkých elektronek, suché tření, otřesy jízdního kola při zabrzdění, limitní cyklus.

Snadno přístupný výklad je doprovázen 56 instruktivními pérovkami a 20 fotografickými přílohami. Orientaci usnadňuje abecední rejstřík. Bohatý obsah podněcuje řadu možností, jak zpestřit mnohé z tradičních otázek maturitních zkoušek (kyvadlo, proudění, odraz vln, interference, zázněje, stojaté vlnění, reaktivní motory, tření, výška tónu, dynama, alternátory) zcela netradičními doplňky výrazně polytechnického zaměření. To bylo ostatně hlavním důvodem k napsání předložené recenze a k neobvykle bohatému výběru z náplně knížky.

K. Mišoň

redakce hovoří

OPRAVA

V textech úloh XXVIII. ročníku *matematické olympiády* otištěných v 10. čísle loňského ročníku *Rozhledů* jsou dvě tiskové chyby. Laskavě si opravte druhou rovnici ve 2. přípravné úloze kategorie B na tvar

$$x - 2y = \frac{1}{2} p^2.$$

Dále 4. soutěžní úloha kategorie Z není očíslována, tj. chybí před ní číslice 4.

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

analisi ž
— armonica
— elettrochimica
analisi matematica
analizzatore armonico m
analysis situs ž
anamorfosi ž
anello m
angolo m
— acuto
— alterno
— complementare
— concavo
— convesso
— del campo
— limite
— supplementare
angoloide m
anno m
— luce
— siderale
— tropico
annulare
annularsi
anodo m
ansa di panierà ž
antecedente m
anticatodo m
antinomia logica
aperto
apogeo m
apparecchio m

analýza
harmonická —
elektrolýza
matematická analýza
harmonický analyzátor
topologie
anamorfóza (v nomografii)
prsten, kruh; okruh
úhel
— ostrý
— střídavý
— doplňkový
— dutý
— konvexní
— zorný
— mezní (pro lom světla)
— výplňkový
mnohohran
rok
— světelný
— hvězdný
— tropický
anulovati
rušiti se
anoda
ovál
implikující člen
antikatoda
logická kontradikce
otevřený
apogeuum
přístroj, aparát

apparente	zdánlivý
appartenere	příslušet, náležet
appendice m	dodatek
applicazione ž	použití; zobrazení
approssimativo	přibližný
approssimazione ž	přiblížení, aproximace
arco m	oblouk
arcocoseno m	arkuskosinus
arcocotangente ž	arkuskotangens
arcoseno m	arkussinus
arcotangente ž	arkustangens
area ž	obsah (plošný), oblast
argomento m	argument
— di un numero complesso	úhel komplexního čísla
aritmetica ž	aritmetika
aritmetizzazione della logica ž	aritmetizace logiky
arrotondare	zaokrouhliti
ascendente, ascensivo	vzestupný, rostoucí
ascissa ž	úsečka (jako souřadnice)
asincrono	asynchronní
asintotico	asymptotický
asintoto m	asymptota
asse m	osa
— di rivoluzione	— rotace (ve vesmíru)
— di rotazione	— rotace (tělesa)
— immaginario	— imaginární
— polare	— polární
— reale	— reálná (nebo číselná)
assenza ž	nepřítomnost
asserzione ž	tvrzení
assi assonometrici	osy axonometrické
— cartesiani	— kartézské (soustavy souřadnic)
assioma m	axiom
assiomatico	axiomatický
associativo	asociativní
assoluto	absolutní
assonometria ž	axonometrie
— cavaliera	izometrie
— obliqua	axonometrie kosouhlá

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

3

ROČNÍK 57, 1978-1979, LISTOPAD

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. O. Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1978.

OBSAH

Doc. J. Vyšín, CSc.: Pravděpodobnostní hra I (Náhodné procházky) .	97
G. Delande: Pyramidální aritmetické posloupnosti .	110
P. Fejtková, dr. M. Malík: Pointry .	113
Dr. J. Mida: Devítkový doplněk .	121
Dr. S. Komenda: Co stojí naděje	123
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů .	126
J. M.: Úlohy XX. mezinárodní matematické olympiády	137
Dr. J. Mrázek, CSc.: Začal vás v létě zlobit televizor?	139
jm: Třicet let kybernetiky .	140
J. Kotyk: Beseda čtenářů k 430. výročí narození Giordana Bruna	141
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	142
Recenze	144
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český . 3. a 4. str. obálky	

matematika

Pravděpodobnostní hra I (Náhodné procházky)

Doc. JAN VYŠÍŇ, CSc., Praha

Milí čtenáři, předkládáme vám článek, napsaný v jiném stylu, než na jaký jste zvyklí: článek je vlastně dramatizovaná povídka o jisté matematické problémové situaci. Jsme přesvědčeni, že tato forma je vhodná, neboť *tvorivá matematika* je vždy jisté dobrodružství a dramatické zpracování umožňuje hlouběji nahlédnout do myšlenkových pochodů řešitele problému. S tématem tzv. náhodných procházek a jeho dramatickým zpracováním má trochu zkušeností Kabinet pro modernizaci vyučování matematice Matematického ústavu ČSAV, který je uvedl na svých pokusných školách. Téma je volně zpracováno podle zahraničních námětů do tří článků. Byli bychom rádi, kdybyste nám napsali, jak se vám tyto články líbily.

I

Venku přelo a děti v klubovně pionýrského tábora se nudily. „Uděláme si hodinu matematiky,“ prohlásil vedoucí Pavel. „Júúú,“ lekaly se děti, „to né, to raděj’ něco jiného“. Ale Pavel stál na svém: „Jen počkejte, bude se vám to určitě líbit.“ A vybral si šest dětí: Alenu, Borka, Cyrila, Dášu, Evu a Frantíka, které rozestavil podle obr. 1.

ALENA

BOREK

CYRIL

DÁŠA

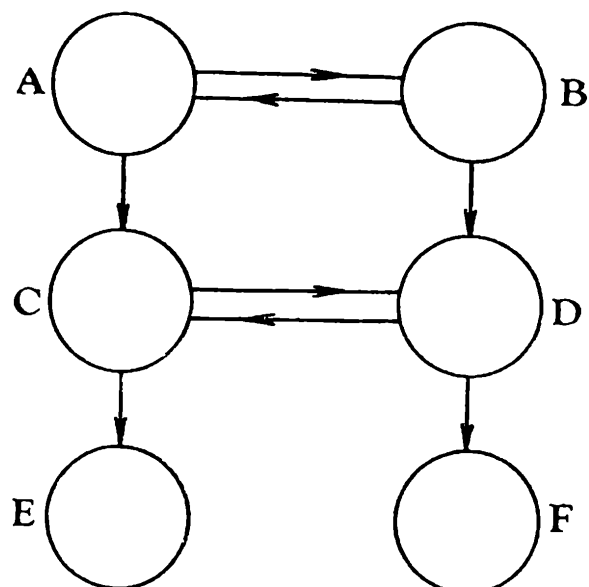
EVA

FRANTÍK

Obr. 1

Pak nakreslil na tabuli čáry s šipkami, jak to je na obr. 2. Na obr. 2 jsou děti naznačeny kroužky a místo jejich jmen jsou tam jen počáteční písmena.

„A teď dávejte pozor,“ řekl Pavel. „Já dám Alence 18 jablíček; všechna ta jablíčka se musí dostat podáváním od Alenky k Evě a Frantíkovi. Ale jsou tu určitá pravidla:

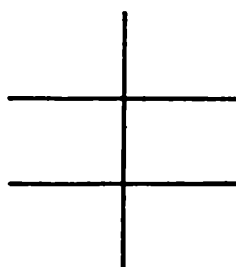


Obr. 2

- (I) Každý hráč (chlapec či děvče) smí podat podle obou šipek, které od něho vycházejí, jen stejný počet jablek.
- (II) Dva sousedi (tj. A, B nebo C, D) smějí podat podle obou svislých šipek, které od nich vycházejí, jen stejný počet jablek.
- (III) Během hry se nesmí žádné jablko dělit.

Nato dal Pavel Alence 18 jablíček a děti začaly zkoušet podávání podle pravidel. „To vůbec nejde,“ volaly za chvíli jedno přes druhé; jablka se vracela a děti narážely na zákaz dělit jablka.

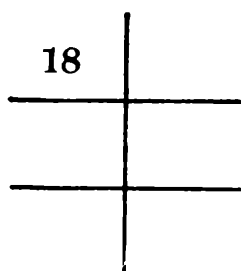
„Tak já vám ukáži, že to jde,“ řekl Pavel po chvíli marných pokusů. „Budu zapisovat stavy — kdo má kolik jablek — do takových přihrádek (žebříčku) jako na obr. 3;



Obr. 3

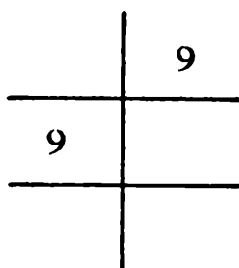
nalevo nahoře je Alenka, vedle ní Borek, pod ním Dáša atd.; šipky vynecháme.“

„Začalo to tak, že jsem dal 18 jablíček Alence — vrátíme se k tomuto stavu (obr. 4):



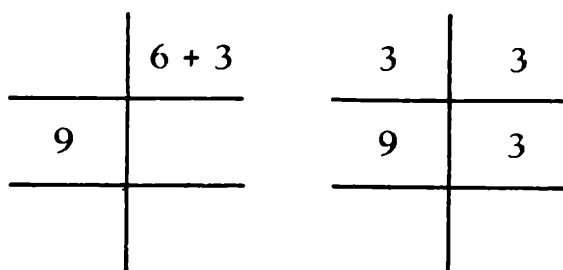
Obr. 4

ta rychle rozdělila podle pravidla (I) po 9 jablkách Borkovi a Cyrilovi (obr. 5):



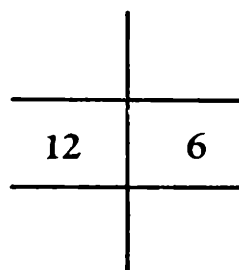
Obr. 5

Zastavte hru! Poslyšte, co vám poradím: Borek si dá 3 jablíčka stranou — to pravidla hry nezakazují — a zbývajících šest rozdělí podle pravidla (I) Alence a Dáše; z obr. 5 vzniknou obrázky 6:



Obr. 6

Podle pravidla (II) odevzdá tři jablka Alenka Cyrilovi a Borek Dáše. Tak vznikne stav z obr. 7.

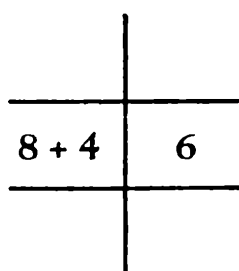


Obr. 7

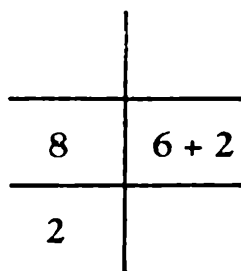
A teď si zase Cyril dá stranou 8 jablíček asi takto (obr. 8).

Zbývajících 4 rozdělí podle pravidla (I) (obr. 9).

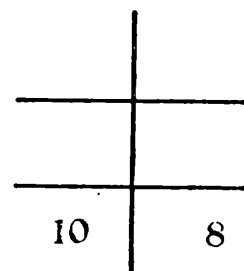
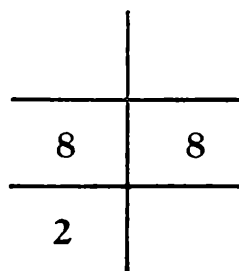
Jako před chvílí Alenka a Borek může teď odevzdat Cyril a Dáša podle pravidla (II) po 8 jablíčkách Evě a Frantíkovi (obr. 10).



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

A úloha je rozřešena!“

18			9		9
	6	9 + 3		12	
			3		3

3	3				
12	3	15	6	9 + 6	6
	3		3		3

9	6 + 3	9	9		
3	3	3	3	12	12

Obr. 11

18			9	3	3		
6		15		15	3	18	6

10 + 8	6	10	6 + 4	10	10		
		4		4		14	10

Obr. 12

Děti byly nadšeny a chtěly jinou úlohu. „Tak si to zopakujte pro 36 jablíček nebo pro 54 jablíček,“ navrhl Pavel. A děti úlohu bezvadně rozřešily. Už nepracovaly s jablky, ale jen zapisovaly průběh hry do „žebříč-

ků“ Pavel je však pokoušel otázkou: „Jak přišel Borek a Cyril na to, kolik jablíček si mají dát stranou?“ A Cyril i Borek správně odpověděli; dovedete to také?

A teď přišla těžší úloha: Alenka dostala 18 jablek a zároveň Dáša 6. Všechny těchto 24 jablek se mělo doručit podle pravidel hry Evě a Frantíkovi. Také tuto úlohu dokázaly děti správně rozřešit; prozradíme vám, že postup řešení zapsaly do žebříčků jako na obr. 11.

„A což kdyby místo Dáši byl dostal těch 6 jablíček Cyril?“ dal Pavel další úlohu. Po jejím řešení zůstal zápis jako na obr. 12.

V tom se ozval gong, který svolával tábor k svačině. „Zkuste sestavit samy nějakou takovou úlohu,“ končil hru Pavel.

II

Když se děti sešly po svačině, nepřestávalo pršet. Místa Alenky, Borka, Cyrila, Dáši, Evy a Frantíka zaujali jiní chlapci a dívky (budeme je zase označovat A, B, C, D, E, F). Chtěli hrát, ale neměli úlohu a Pavel se dosud nevrátil. „Zdalipak jste si všimly, děti,“ ozval se z kouta klubovny Pavlův přítel Petr, který už předtím mlčky přihlížel hře, „jaké číslo je výchozí počet jablek ve hrách, kdy jablka dostala jen Alenka?“

„Je to násobek devíti... a je sudé,“ volaly děti. „Výborně,“ pokračoval Petr, „tak to zkuste také s lichým násobkem; hrejte a já budu zapisovat na tabuli. Máme třeba 27 jablek...“ A na tabuli se objevil tento zápis v žebříčcích (obr. 13):

Obr. 13

27	

$18+9$	

9	9
9	

18	9

	18
9	

	$12+6$
9	

6	6
9	6

15	12

„Můžete si tuhle úlohu zopakovat ještě pro 9 jablek a 45 jablek,“ pravil Petr. „A všimněte si také, jak se ve všech dosavadních úlohách vypočtou počty jablek, která dojdou vaší poštou Evě a Frantíkovi,“ pokračoval.

„To já už dávno vím,“ přihlásil se přemýšlivý Cyril. „To se daný počet jablek dělí devíti a výsledek se násobí pěti a čtyřmi; např. $27:9 = 3$, $5 \cdot 3 = 15$, $4 \cdot 3 = 12$. Proto, má-li být konečný výsledek vyjádřený celým číslem, musí být daný počet jablek násobek devíti.“

„Výborně,“ prohlásil Petr, „to je učená přednáška jako na universitě. A teď bychom mohli zkusit nějaké číslo, které není násobek devíti. To ovšem budeme musit krájet jablka.“ „Ale to nám Pavel nedovolí,“ volaly děti.

„I dovolí,“ řekl přicházející Pavel, „ovšem pod podmínkou, že budete krájet nejvýše jedno jablko. Jak vidím, Petře, převzal jsi velení; to je dobré, můžeme pokračovat společně. Tak nejdříve si vezme Alenka — vlastně její náhradnice — 12 jablek a budeme hrát a opět zapisovat (obr. 14):

12	

	6
6	

2	2
6	2

8	4

	8
4	

4	
4	4

	2
6	4

1	
6	5

Obr. 14

„Jakou máme kontrolu, že počítáme správně?“, vpadl do toho Petr.
„Ano, součet čísel ve všech přihrádkách žebříčku musí být stále 12.“

„A teď to jablíčko, které musíme rozkrájet, má Cyril,“ poznamenal Pavel. „Rozkrájíme je na tři stejné díly, které zapíšeme $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ a dokončíme řešení úlohy (obr. 15).

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	
6	5

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$6 + \frac{1}{3}$	5

$6 + \frac{2}{3}$	$5 + \frac{1}{3}$

Obr. 15

„Výsledek $\left(6 + \frac{2}{3}, 5 + \frac{1}{3}\right)$ nás přesvědčuje,“ uzavřel Pavel, „že nelze najít řešení bez dělení jablek, neboť sám výsledek není vyjádřen celými čísly.“

„Když už jsme tak daleko, mohli bychom dětem ukázat postup s půjčováním jablek — jistě ho znáš,“ pravil Petr Pavlovi. „Ale předveď ho ty, když ses ujal velení,“ uhnul Pavel.

„Tak tedy, děti, vrátíme se k úloze s 18 jablky, která dostala Alenka,“ začal Petr. „Vypůjčila si 6 jablek, a měla tedy 24 jablek. Zapišeme to tak jako na obr. 16.“

$-6 + 24$	

Obr. 16

Jak vidíte, budou v tom záporná čísla, která znamenají výpůjčky, dluhy. Dále pokračujeme takto (obr. 17):

Obr. 17

-6	12	$-6 + 6$			
12		12	6	12	6

				$-8 + 20$	6

-8	$6 + 10$	-8	16	$8 - 8$	
10		10		10	8

Jak je vidět, vypůjčila si nejen Alenka, ale i Cyril; ale oba během řešení své dluhy (6 jablek a 8 jablek) poctivě splatili.“ „A na potvrzení si dejme ještě jednu úlohu, složitější,“ prohlásil Pavel. „Alenka dostala 12 jablek a Borek 15. Všechna ta jablka se mají dopravit podle pravidel hry Evě a Frantíkovi. Jedno možné řešení najdete samy.“ A děti našly toto řešení (obr. 18):

12	15		21	7	7
		6		6	7
13	14	1	2	2	
		12	12	12	13
	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
13	13	13	$13 + \frac{1}{3}$	$13 + \frac{1}{3}$	$13 + \frac{2}{3}$

Obr. 18

„Já to umím kratčěji,“ ozval se Cyril a zapsal toto řešení (obr. 19), což mu Petr i Pavel schválili.

12	15	12	$13 + 2$	13	13		
					1	13	14
$13 + \frac{1}{3}$	$13 + \frac{1}{3}$						
	$\frac{1}{3}$	$13 + \frac{1}{3}$	$13 + \frac{2}{3}$				

Obr. 19

Venku přestalo pršet a gong volal děti k podvečernímu cvičení. „Tak, mládeži, změna programu,“ volal Pavel. „Byla rozcvička mozků a teď bude rozcvička svalů.“ Děti vycházely z klubovny. „Je to pěkné, ale rád bych věděl, k čemu to všechno je,“ bručel si po cestě Cyril. Pavel ho zaslechl: „Neměj starost, Cyrile, že takováhle hra k ničemu není; až bude příště příležitost, ukážeme si, jak vznikla a k čemu slouží.“

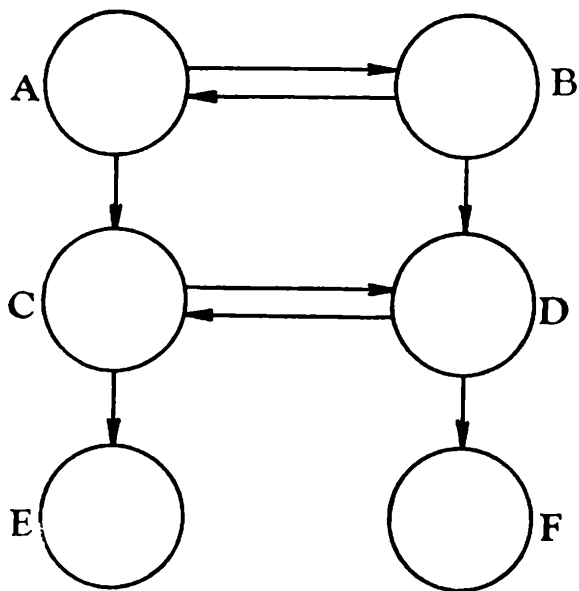
III

Starší pionýři se dověděli od mladších chlapců a děvčat o hře, kterou s nimi Pavel hrál, naučili se jejím pravidlům a přišli za Pavlem jednoho dne po večeři.

„Pavle, ty jsi slíbil jiskrák, že jim ještě něco povíš o té hře a že jim ukážeš nějaké složitější úlohy; nechtěl bys to udělat také pro nás?“

„Aha, vy myslíte tu hru o stěhování jablek? No, proč ne; ale vy už umíte něco o zlomcích a něco z algebry — tak na to půjdeme trochu jinak. Nejdříve se přesvědčíme, zdali opravdu znáte dobře pravidla hry. Já vám nakreslím těch 6 kroužků, které znamenají 6 dětí (A, B, C, D, E, F) a vy tam přikreslíte šipky a řeknete, co znamenají. S vámi už nebudu přemísťovat a krájet jablka, vy jste velcí, můžete to jen kreslit.“

Pavel nakreslil na tabuli 6 kroužků, označil je A, B, C, D, E, F , děti obrázek doplnily, takže vypadal takto (obr. 20):



Obr. 20

„A co znamenají ty šipky?“ zeptal se Pavel.

„To když některý hráč chce poslat jablka dál, musí je předat svým dvěma sousedům, ke kterým směřují šipky, a to každému z nich stejný počet jablek.“

„Anebo dva sousedi smějí předat stejný počet jablek podle šipek dolů!“

„Na začátku byl ještě zákaz dělit jablka, ale ten se potom opustil.“

„Výborně! A co je cíl hry?“

„Dopravit všechna jablka od hráče A k hráčům E, F .“

„To umíte, tak si zopakujeme úlohu. Od hráče A se má dopravit 9 jablek k E a F ; ale bez krájení! Zapisovat to budeme do žebříčku jako to dělaly jiskry. A nuly se nepíší!“

„Ale my už jsme zapomněli ta kouzla, co se při stěhování dělají.“

„Nevadí; ta kouzla jsou jednoduchá: je to vypůjčování jablek a předávání jablek dvěma hráči současně. Ostatně, já vám poradím,“ zakončil Pavel opakování. „A teď do toho!“

Na tabuli se objevily postupně tyto zápisy (obr. 21):

9		1	4	1	4
					2
		4		2	
3		3		3	
		2			1
	4				
2		2	2	3	2

Obr. 21

Pochopitelně, že chlapci při hře nemlčeli; dohadovali se o jednotlivých krocích, takže to byla doslovně práce kolektivní. Zapisoval Zbyněk, neboť měl úhledné písmo.

„Tak, a teď si nevíme rady; co s tou trojkou nahoře vlevo?“ zarazili se chlapci.

„Ať si vypůjčí jedno jablko a půjde to dál,“ poradil Pavel. A šlo to (obr. 22):

Obr. 22

4 - 1		-1	2	1 - 1			
		2	1	2	2		
	1						3
3	2	3	2	3	2	4	2

„Tu trojku vyřídí *D* jako vyřídil prve *A* trojku,“ prohlásili chlapei a pokračovali (obr. 23):

	4 - 1	2	-1
4	2	4	4

	1 - 1	5	4
5	4		

Obr. 23

„Sláva, už to je,“ radovali se hoši.

„No, budiž,“ schválil Pavel, ovšem ze zápisu

2	2
3	2

se mohl podle pravidla (II) dostat přímo výsledek. Ale dám vám ještě dvě otázky: Co znamená zápis $1 - 1$ např. u hráče *A* ?“

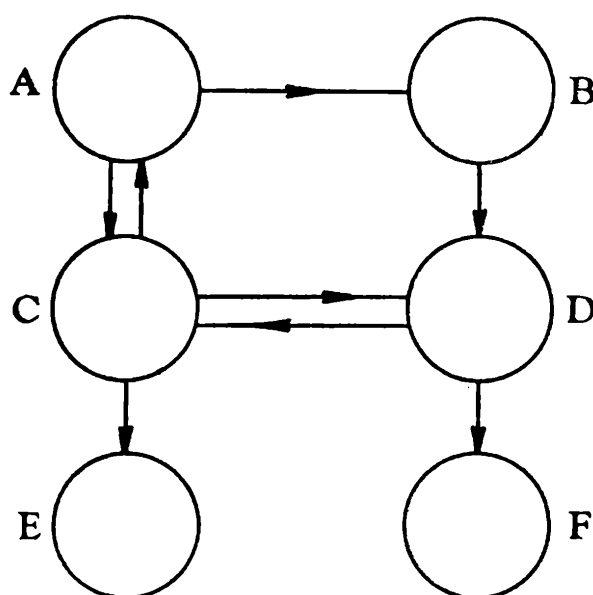
„To znamená, že *A* vrátil vypůjčené jablko.“

„Ano. A jakou máme kontrolu během výpočtu?“

„Součet všech čísel v žebříčku musí být roven stále 9; např. v zarámovaném žebříčku je $-1 + 2 + 2 + 1 + 3 + 2 = 9$.“

„Vidíte, jak jste úlohu rozřešili jen podle pravidel s nepatrným kouzlem vypůjčování; cesta ovšem není jediná, šlo by to i jinak, zkuste si to sami.“

„Ale my teď malinko změníme pravidla hry,“ pokračoval Pavel a nakreslil tento obrázek (obr. 24):



Obr. 24

„Čím se liší obrázek 24 od obrázku 20?“

„Je vynechána šipka BA a místo ní je připojena šipka CA .“

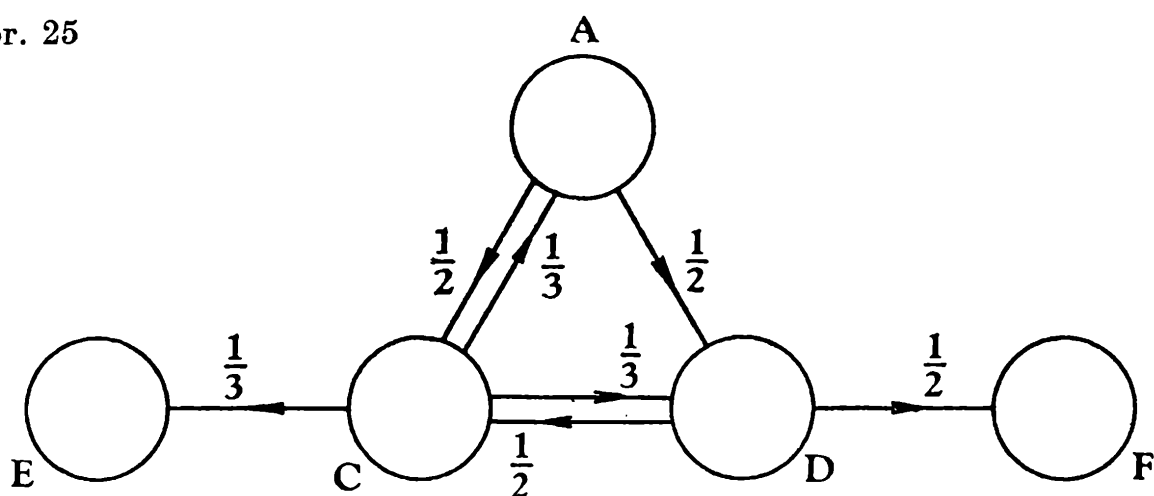
„Co myslíte, bude to mít nějaký podstatný vliv na průběh hry?“ zeptal se Pavel.

Chvilí bylo úplné ticho; pak se ozval přemýšlivý Michal: „No, ten hráč B je úplně zbytečný, protože jen podává jablka od A k D a to si mohou obstarat sami. A pak od hráče C vycházejí tři šipky, proto C musí rozdělovat stejný počet jablek třem hráčům, A , D a E .“

„To je fantastické,“ zaradoval se Pavel. „To bychom si asi mohli také trochu přizpůsobit diagram, nechceš něco navrhnout?“

Michal se přiloudal k tabuli a nakreslil tam diagram z obr. 25 a šipky ještě příkrášlil připsáním zlomků.

Obr. 25

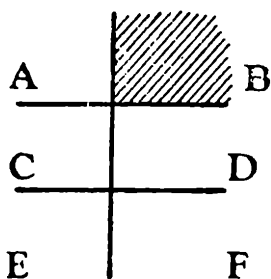


Hoši i děvčata žasli. „Co znamenají ty zlomky, Michale?“ zeptal se Pavel.

„To když chce některý hráč předávat několik jablek, musí postupovat podle šipek a na každou šipku připadne $\frac{1}{2}$ nebo $\frac{1}{3}$ z celého počtu předávaných jablek,“ vykládal učeně Michal.

„Tak, teď honem nějakou úlohu,“ volali chlapci.

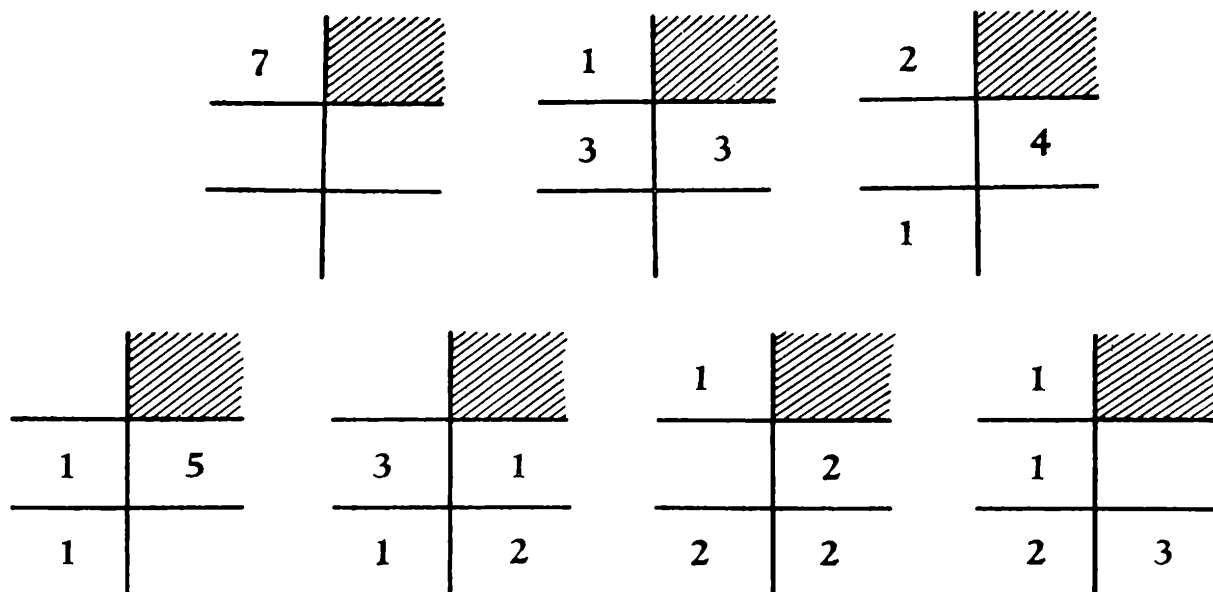
„Já radím 7 jablek,“ ozval se z kouta Petr, „aby to šlo bez krájení.“ „A mimo to bych radil pro zápisy místo obrázku 25 takový neúplný „žebříček“; pole B je vyšrafováno, protože je výjimečné — vynechává se.“ (Obr. 26)



Obr. 26

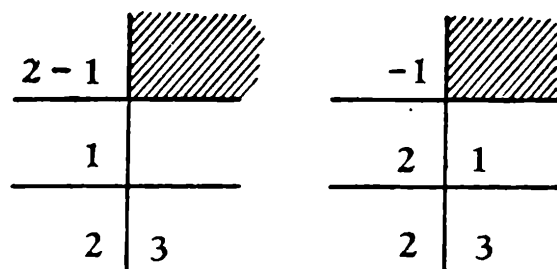
„To je dobře, Petře, že jsi tady,“ zaradoval se Pavel; „aspoň nám budeš pomáhat. Nebo máš připravené zase nějaké triky?“

„Ani ne tak triky jako algebru. Ale začněte řešit úlohu (obr. 27):



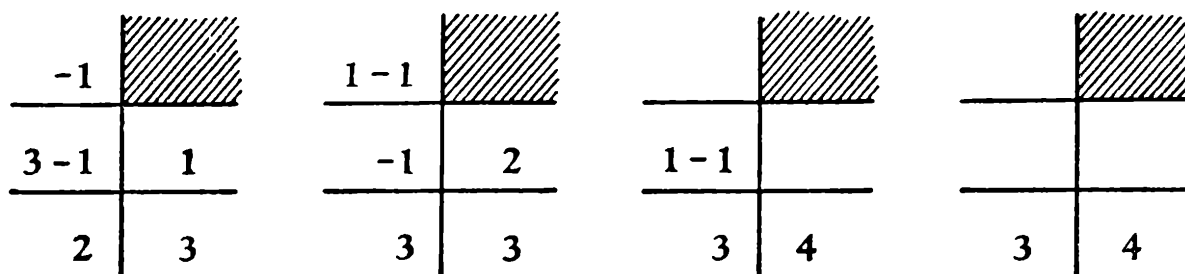
Obr. 27

Chlapci se zastavili. „Ať si vypůjčí,“ ozval se Petr. A šlo to dál, ale jen dva kroky (obr. 28):



Obr. 28

„Vypůjčí si C ,“ zabručel Michal. „Vida, máme už dva nápovědy a ne špatné,“ liboval si Pavel. A pokračovali (obr. 29):



Obr. 29

A úloha byla rozřešena. „Ale když já nechápu, proč radil Michal, aby si C vypůjčil,“ kvílela Hedvika. „No, přece proto, aby C měl tři jablka a mohl dělit bez krájení,“ poučoval ji Pavel.

„A co kdyby si byl vypůjčil D místo C ,“ zoufala si Hedvika.

„No, tak by se vůbec nic nestalo, bylo by to vyšlo stejně. Podívejte se, mládeži.“ (obr. 30):

Obr. 30

-1		
2	2 - 1	
	3	

-1		
3	-1	
2	4	

1 - 1		
	1 - 1	
3	4	

Ted' byli všichni spokojeni. „Pro dnešek dost,“ prohlásil Pavel. „A příště bude pokračovat Petr s algebrou.“

(Pokračování)

Pyramidální aritmetické posloupnosti

GEORGES DELANDE, Namur (Belgie)

Přinášíme příspěvek belgického autora, který hlouběji rozebírá řešení jedné úlohy tamní matematické olympiády. Pro Rozhledy článek připravil dr. J. Šedivý.

Jde o posloupnosti, které se vyskytovaly v první úloze finále belgické Matematické olympiády v r. 1976. Úloha zněla takto:

Pozorně zkoumejte dané rovnosti:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & = & 1 \\
 3 + 5 & = & 8 \\
 7 + 9 + 11 & = & 27 \\
 13 + 15 + 17 + 19 & = & 64 \\
 21 + 23 + 25 + 27 + 29 & = & 125
 \end{array}$$

Jakou obecnou vlastnost takových součtů naznačují?

Vyjádřete ji co nej přesněji a podejte důkaz.

Chci ukázat různé typy řešení, která vypracovali někteří z dvaceti finalistů, a provést jejich stručný rozbor. Byli jsme udiveni, s jakým úspěchem soutěžící zvládli úlohu. Zároveň jsme se směsí radosti a překvapení zjistili, že osm zcela přesných řešení postupuje odlišnými způsoby, a to velmi originálními. Uvedu některé z nich, ovšem po určité úpravě a zjednodušení původního textu.

1° Rychlá metoda založená na klasických vzorcích

Pro první sčítanec t_1 na n -tém řádku (při $n \in N$) platí:

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + 2 + 4 + 6 + \dots + (n-1) \cdot 2 = \\ &= 1 + [2 + 4 + \dots + 2(n-1)] = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1, \end{aligned}$$

protože výraz $2 + 4 + \dots + 2(n-1)$ je součtem členů aritmetické posloupnosti s diferencí 2.*)

Obecná hypotéza:

n -tý řádek tabulky je součtem n členů aritmetické posloupnosti s diferencí 2, jejíž první člen $t_1 = n^2 - n + 1$. Tento součet s_n se rovná n^3 .

Důkaz. Poslední člen na n -tém řádku je $t_n = t_1 + 2(n-1) = n^2 + n - 1$
Součet

$$s_n = \frac{1}{2} n (t_1 + t_n) = \frac{1}{2} n \cdot [(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)] = n^3.$$

2° Symbolický zápis

$$\sum_{n=0}^k [1 + k(k+1) + 2n] = (k+1)^3 \text{ pro každá dvě } k, n \in N$$

Důkaz. Po rozepsání součtu dostáváme

$$\begin{aligned} &[1 + k(k+1)] + [1 + k(k+1) + 2] + [1 + k(k+1) + 4] + \dots + \\ &+ [1 + k(k+1) + 2k] = (k+1) \cdot [1 + k(k+1)] + (2 + 4 + \dots + 2k) = \\ &= (k+1) \cdot [1 + k(k+1)] + k(k+1) = \\ &= (k+1) \cdot [1 + k(k+1) + k] = (k+1)^3 \end{aligned}$$

3° Jiné záznamy hypotézy

Pro každé $n \in N$ platí při $a = \frac{1}{2} n(n-1) + 1$, $b = \frac{1}{2} n(n+1)$

$$\sum_{i=a}^b (2i-1) = n^3$$

Důkaz lze podat, všimneme-li si toho, že součet n prvních lichých přirozených čísel je roven n^2 ,

$$S_n^* = \frac{1 + (2n-1)}{2} n = n^2$$

*)Jde o známý vzorec, že při $a_n = a_1 + (n-1)d$ platí $a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + 2d) + \dots + a_n = \frac{1}{2} n (a_1 + a_n)$

Odtud

$$\sum_{i=a}^b (2i-1) = S_b^* - S_{a-1}^* = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = n^3$$

4° Rozšíření úlohy do okruhu celých čísel

Řešitel zobecnil úlohu a vyřešil ji obdobně jako autor 3°.

5° Pohled, který využívá symetrie

Jeden z řešitelů zapsal dané rovnosti*) takto:

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow && x^2 \\ x = 2 &\Rightarrow & (x^2 - 1) & + & (x^2 + 1) \\ x = 3 &\Rightarrow & (x^2 - 2) & + & x^2 & + & (x^2 + 2) \\ x = 4 &\Rightarrow & (x^2 - 3) & + & (x^2 - 1) & + & (x^2 + 1) & + & (x^2 + 3), \end{aligned}$$

odtud je motivována hypotéza:

Pro každé $x \in N$ platí $\sum (x^2 + k) = x^3$, pokud k vzrůstá po dvou od $(-x+1)$ po $x-1$.

Důkaz je neobyčejně snadný. Protože v každém řádku je součet dvou členů souměrných podle svislé osy roven $2x^2$, je na x -tém řádku součet x tam zapsaných členů

$$\text{při sudém } x = 2r \text{ roven} \quad r \cdot 2x^2 = \frac{1}{2} x \cdot 2x^2 = x^3,$$

$$\text{při lichém } x = 2r + 1 \text{ roven} \quad r \cdot 2x^2 + x^2 = (2r + 1) \cdot x^2 = x^3.$$

6° Důkaz matematickou indukcí

První člen t_1 na n -tém řádku je roven $n^2 - n + 1$, jak je zdůvodněno už v prvním řešení. Sčítance na řádku můžeme pak zapsat

$$\begin{aligned} [n(n-1) + 1] + [n(n-1) + 3] + [n(n-1) + 5] + &+ \\ + [n(n-1) + 2(n-1) + 1] \end{aligned}$$

a vyslovit hypotézu, že pro každé $n \in N$ je tento součet roven n^3 .

Je zřejmé, že pro $n = 1$ hypotéza platí. Další postup spočívá v předpokladu, že rovnost platí pro určitou hodnotu n a v důkazu že pak platí i pro $n + 1$.

Součet (po záměně n výrazem $n + 1$ a připojení dalšího sčítance)

$$\begin{aligned} [n(n+1) + 1] + [n(n+1) + 3] + &+ \\ + [n(n+1) + 2(n-1) + 1] + [n(n+1) + 2n + 1] \end{aligned}$$

*) Přesvědčte se, že po dosazení uvedených hodnot x skutečně vznikne pyramida uvedená v původním textu úlohy.

lze zapsat

$$\begin{aligned} & [n(n-1) + 1 + 2n] + [n(n-1) + 3 + 2n] + \quad + \\ & + [n(n-1) + 2(n-1) + 1 + 2n] + [n(n+1) + 2n + 1] = \\ & = n^3 + 2n \cdot n + [n(n+1) + 2n + 1] = (n+1)^3 \end{aligned}$$

Toto řešení není nejrychlejší (hypotézu lze velmi snadno ověřit přímo); ukazujeme je proto, že naznačuje postup užitečný v jiných případech.

Popsané typy úvah ukazují bohatství představivosti našich mladých lidí, stejně jako širokou paletu strategií, které lze uplatnit při řešení jednoho problému. Nepochybně existují i další postupy, jak lze nalézt řešení úlohy, rádi bychom se o nich dozvěděli.

Poznámka. Najdou čtenáři Rozhledů nějaký další originální způsob řešení? Sdělte je redakci, která je předá autoru článku.

Pointry

PAVLA FEJTKOVÁ, dr. MAREK MALÍK, MFF UK Praha

Pro připomenutí si zopakujeme několik pojmů z článku „Třídy“ z minulého čísla.

Uvažujeme-li nějaký datový typ, je možné, že tímto typem (přesněji řečeno daty tohoto typu) lze za různých situací popisovat různé objekty. Například typem $\langle \text{real}; \text{real} \rangle$ lze popisovat komplexní čísla a současně s ním lze popisovat body v rovině (při předpokládané existenci nějaké pevné souřadné soustavy). Proměnné tohoto typu by potom bylo možno využívat jako proměnné pro všechny popisované objekty. Protože je však účelné rozlišovat body v rovině a komplexní čísla, bude vhodné zavést prostředky k označení, kdy datový exemplář — datový údaj (a tedy i datová proměnná) označují komplexní číslo a kdy bod v rovině. Takovými prostředky je například pojmenování typu identifikátorem. Pak již nebudeme hovořit o datových typech, ale o třídách.

V uvedeném článku jsme dále zavedli kvalifikaci datové proměnné pro nějakou třídu — čímž je možno rozlišovat, pro jaké objekty proměnnou používáme — a dále jsme zavedli označení složek datového typu identifikátory — což nám umožňuje pracovat v datovém údaji s jeho vnitřními elementy.

Uvažujme nyní datovou třídu pro poněkud podrobnější popis žáků ve škole:

```
class ZAK;  
  <text JMENO,PRIJMENI,ADRESA;  
  integer DENNAR,MESNAR,ROKNAR,ROCNIK;  
  Boolean POHLAVI;  
  character TRIDA> ,
```

kde pod DENNAR, MESNAR a ROKNAR rozumíme celá čísla kódující den, měsíc a rok narození příslušného žáka.

Zamysleme se nyní nad uvedenou třídou. Jistě si všimneme, že v jejích složkách existují skupiny složek, které „jsou si navzájem blízké“ Například textové složky JMENO a PRIJMENI určují jméno žáka tak, jak je obvykle chápeme (tj. dvě slova), podobně celočíselné složky DENNAR, MESNAR a ROKNAR označují datum narození atp.

Kdyby nás na žácích školy nezajímalo nic jiného než jejich jméno a příjmení, stačila by k popisu třída s pouze dvousložkovým typem:

```
class NAZEV;  
  <text KRESTNI,PRIJMENI>.
```

Uvažujme nyní proměnnou XY kvalifikovanou pro třídu NAZEV, tj.:

```
ref (NAZEV) XY;
```

Nabývá-li proměnná XY nějaké hodnoty, potom je její hodnota datový údaj sestávající ze dvou textových hodnot — totiž z textů

XY.KRESTNI a XY.PRIJMENI.

Uvažujme-li nyní dále proměnnou AB kvalifikovanou do třídy ZAK, t.j.:

```
ref (ZAK) AB; ,
```

bude v sobě každá hodnota proměnné AB obsahovat dva texty — totiž AB.JMENO a AB.PRIJMENI.

Tato úvaha nás přivádí k otázce, zda by textové hodnoty JMENO a PRIJMENI obsažené v datovém údaji třídy ZAK nebylo možno nahradit datovým údajem třídy NAZEV.

Obecněji je možno formulovat tuto otázku, zda by bylo možné vytvářet typ třídy nejenom jako soubor základních typů, ale i jako soubor typů jiných tříd.

To skutečně možné je. Datový údaj nějaké třídy se rozpadá na jiné datové údaje — například datový údaj třídy typu <real; real> se rozpadá na dva datové údaje typu <real>. Takto chápané složky nazýváme atributy datového údaje (a jim odpovídající složky třídy nazýváme atributy třídy). Jestliže nějaký atribut odpovídá základnímu typu (standartnímu typu), nazýváme jej standartní atribut. Naopak, jestliže nějaký atribut je datový údaj třídy, nazýváme tento atribut pointer.

Každý datový údaj uvedené třídy ZAK se rozpadá na devět standardních atributů. Nahradíme-li (jak jsme již výše uvažovali) textové standardní atributy třídy tohoto údaje: JMENO a PRIJMENI datovým údajem třídy NAZEV, nahradíme tyto dva standardní atributy jedním pointrem.

Nahrazení standardních atributů pointrem v typu třídy bude vypadat následovně:

```
class ZAK1;  
  <ref (NAZEV) POJMENOVANI;  
  text ADRESA;  
  integer DENNAR,MESNAR,ROKNAR,ROCNIK;  
  Boolean POHLAVI;  
  character TRIDA>.
```

Zcela podobně můžeme standardní atributy DENNAR.MESNAR a ROKNAR nahradit jediným pointrem, k čemuž použijeme třídu DATUM:

```
class DATUM;  
  <integer DEN,MESIC,ROK>
```

Totíž:

```
class ZAK2;  
  <ref (NAZEV) POJMENOVANI;  
  ref (DATUM) NAROZENI;  
  text ADRESA;  
  integer ROCNIK;  
  Boolean POHLAVI;  
  character TRIDA>.
```

Konečně můžeme dvojici standardních atributů ROCNIK a TRIDA, které označují třídu ve škole, do níž popisovaný žák chodí, nahradit jediným pointrem datové třídy, kterou použijeme pro zápis třídy ve škole. Např.:

```
class TRIDASKOLY;  
  <integer ROCNIK;  
  character OZNACENI>.
```

Pak můžeme třídu ZAK změnit na ještě jednodušší a přehlednější tvar:

```
class ZAK3;  
  <ref (NAZEV) POJMENOVANI;  
  ref (DATUM) NAROZENI;
```

ref (TRIDASKOLY) TR;
text ADRESA;
Boolean POHLAVI>.

Jak jsme si v článku „Třídy“ ukázali, máme prostředky, jak hovořit o jednotlivých složkách proměnné, která je kvalifikována pro určitou třídu.

Pro připomenutí: označme identifikátorem JOSEF proměnnou třídy ZAK, tj.

ref (ZAK) JOSEF; ,

pak zápisem JOSEF.JMENO rozumíme textovou hodnotu, která odpovídá složce JMENO v proměnné JOSEF¹⁾.

Zápis označující atributy datového údaje budeme používat nejenom pro případ standartních atributů třídy, ale i pro pointry.

Uvažujme tedy proměnnou třídy ZAK3, např.

ref (ZAK3) PEPA; ,

pak podobně, jako je zápisem PEPA.ADRESA označena textová hodnota odpovídající složce označené ADRESA, budeme pod zápisem PEPA.NAROZENI chápat datový údaj třídy DATUM, který odpovídá v datovém údaji PEPA pointru označenému NAROZENI. Protože je tento údaj datovým údajem třídy, jejíž typ má více složek, má cenu se ptát i na atributy datového údaje PEPA.NAROZENI. Má tedy smysl uvažovat:

PEPA.NAROZENI.DEN

nebo

PEPA.NAROZENI.ROK.

Analogicky má smysl třeba

PEPA.TR.ROCNIK

a tak podobně (obr. 1).

Takovýchto úrovní obsažených v datovém údaji může být samozřejmě víc. Pro ilustraci si uvedeme ještě jeden složitější příklad.

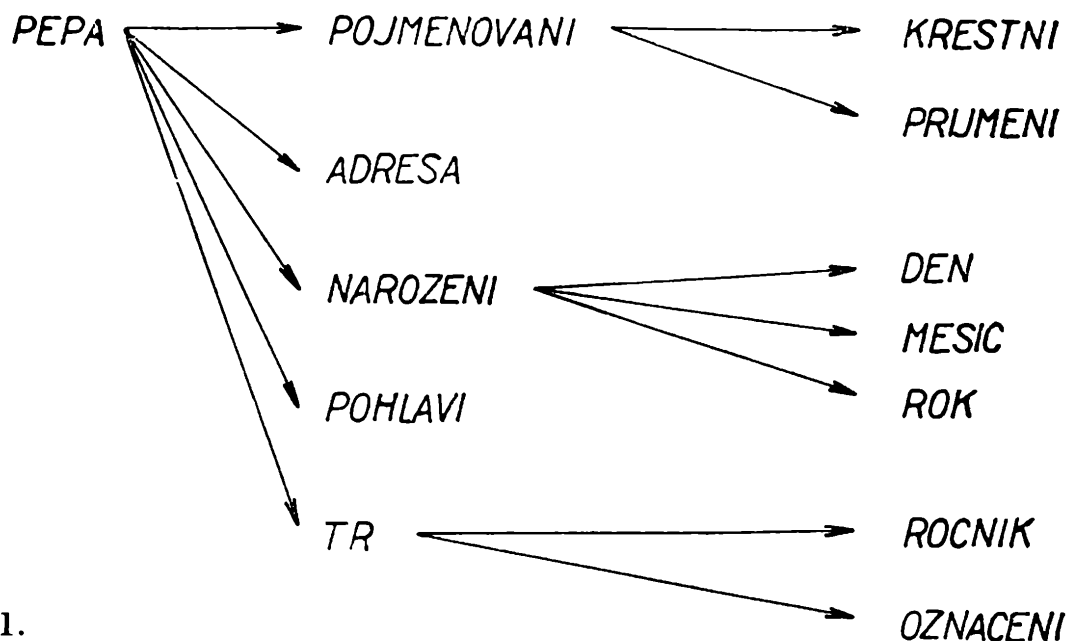
Máme vytvořit třídu pro zjednodušený popis automobilu, přičemž nás na každém automobilu zajímá jeho značka (textová proměnná)

¹⁾ Připomeňme ještě, že JOSEF je zde libovolně zvolený identifikátor, tj. proměnná JOSEF může nabývat různých hodnot a přímo z identifikátoru nelze nic o jejích konkrétních hodnotách vypovídat — podobně jako z faktu, že jsme nějaké komplexní číslo označili identifikátorem Z1, nemůžeme nic vyvozovat o skutečných velikostech jeho reálné a imaginární části. Může tedy být

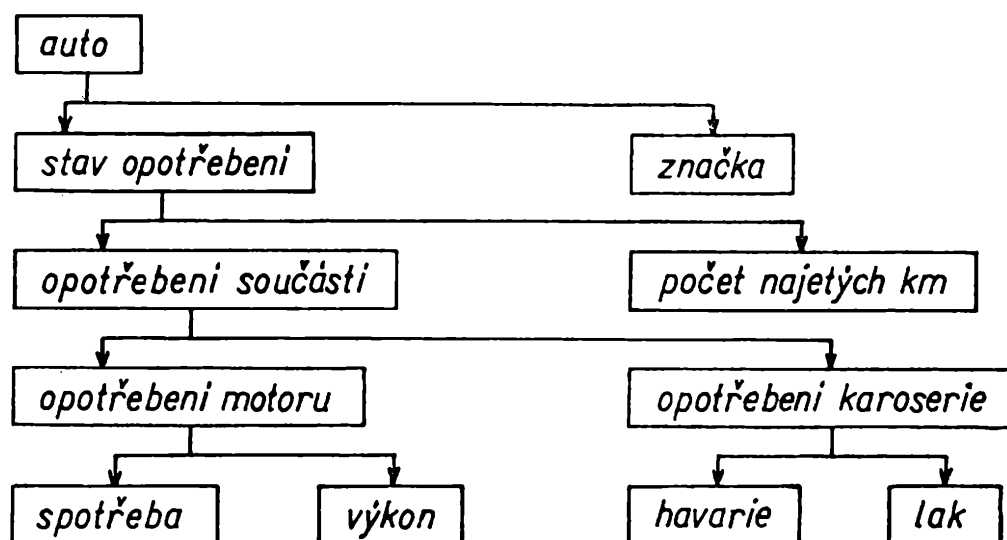
JOSEF.JMENO = „KAREL“

nebo

JOSEF.JMENO = „MONIKA“



Obr. 1.



Obr. 2.

a stav opotřebení. Stav opotřebení můžeme postihnout počtem najetých kilometrů a stavem opotřebení důležitých součástí — toto opotřebení důležitých součástí můžeme chápat jako opotřebení karoserie a opotřebení motoru. U karoserie nás bude zajímat například, zda byla někdy havarována a zda má poškozený lak (obojí jsou údaje typu **Boolean**) — u motoru nás zajímá zvýšení spotřeby a úbytek výkonu (například obojí v procentech — reálná čísla).

Celá situace zadání úlohy je schematicky znázorněna na obrázku 2.

Nyní budeme konstruovat celý soubor tříd pro tuto úlohu (sledujte na obrázku!!):

1. opotřebení karoserie:

```

class CAROS;
< Boolean HAVARIE, LAK >
  
```

2. opotřebení motoru:

```
class MOTOR;  
  <real SPOTREBA,VYKON>
```

3. opotřebení součástí:

```
class SOUCAST;  
  <ref (CAROS) CAR;  
  ref (MOTOR) MOT>
```

4. stav opotřebení:

```
class OPOTREB;  
  <integer KM;  
  ref (SOUCAST) SOUC>
```

A konečně třída pro popis celého auta:

```
class AUTO;  
  <text ZNACKA;  
  ref (OPOTREB) SPATNY>.
```

Budeme-li nyní mít proměnnou kvalifikovanou do třídy AUTO, např.

```
ref (AUTO) S110R;
```

můžeme snadno zapsat booleovskou proměnnou, která obsahuje informaci o tom, zda auto, jehož popisující datový údaj je hodnotou proměnné S110R, bylo někdy havarováno či nikoliv, totiž:

```
S110R.SPATNY.SOUC.CAR.HAVARIE.
```

Podobně procentuální úbytek výkonu tohoto auta je

```
S110R.SPATNY.SOUC.MOT.VYKON.
```

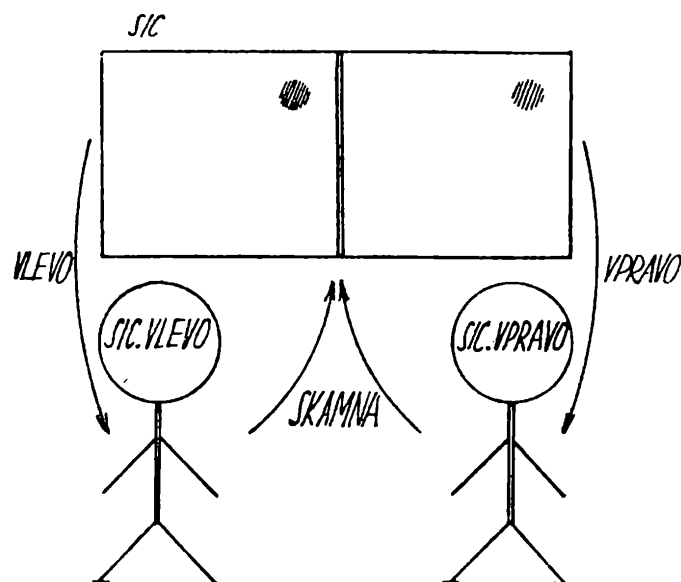
Z obrázku 2 by mohla vzniknout představa, že by bylo možné uspořádat jednotlivé třídy jakoby podle „složitosti“ — rozdělit je na více a méně „komplikované“

Taková představa by však byla mylná. Součástí datového údaje může být totiž i datový údaj příslušný téže třídě. Celou problematiku lépe vysvětlíme na příkladě.

Výše uvedenou třídu ZAK2 jsme připravili pro popisování žáků v celé škole; omezíme-li se nyní na popis žáků pouze z jedné třídy (z jedné třídy ve škole), nebudeme potřebovat popisující strukturu tak bohatou. Navíc nás však bude zajímat zasedací pořádek, a dodáme tedy do typu ještě pointr, který bude vypovídat o lavici, ve které žák sedí.

Třída pro popis žáka bude tedy vypadat následovně:

```
class STUDENT;  
  <ref (NAZEV) POJMENOVANI;  
  ref (DATUM) NAROZENI;  
  Boolean POHLAVI;  
  ref (LAVICE) SKAMNA>
```



Obr. 3

Abychom však mohli o datech této třídy rozumně hovořit, musíme ještě zavést třídu LAVICE. Předpokládejme, že nás na lavici samotné zajímá pouze její barva (charakterový údaj), ale protože se zajímáme o zasedací pořádek, přiřadíme každé lavici žáky, kteří v ní sedí (jeden vpravo, druhý vlevo) — neboli v typu třídy LAVICE zavedeme dva pointry, které budou vypovídat o žácích.

Napišeme tedy popis třídy LAVICE takto:

```
class LAVICE;
<character BARVA;
ref (STUDENT) VLEVO,VPRAVO>.
```

Předpokládejme, že nyní máme proměnnou SIC kvalifikovanou pro třídu LAVICE a že tato proměnná nabývá konkrétní hodnoty, kterou je popsána jistá lavice ve škole. Potom výrazy (datové údaje):

SIC.VLEVO a SIC.VPRAVO

označují právě ty žáky, kteří v příslušné lavici sedí, to znamená, že datové údaje

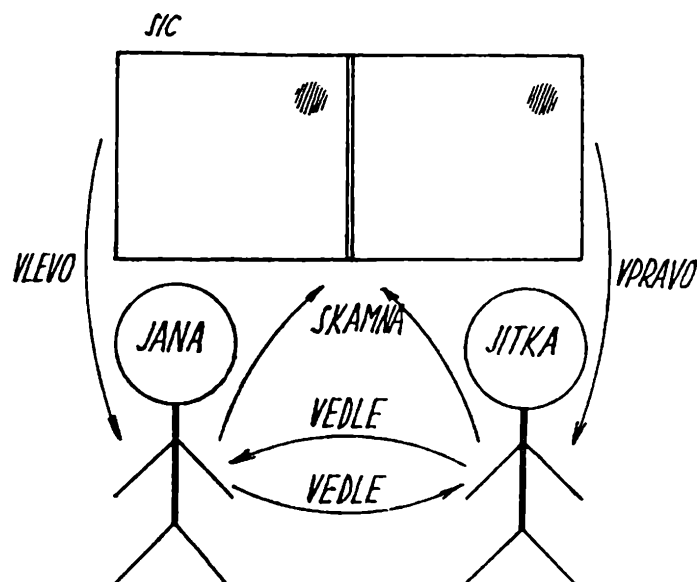
SIC.VLEVO.SKAMNA

a

SIC.VPRAVO.SKAMNA

označují stejnou lavici a sice právě tu, která je popsána hodnotou proměnné SIC (obr. 3).

Abychom si dokumentovali možnost pointru na datový údaj téže třídy, rozšíříme třídu STUDENT následovně: Pro důkladný popis zasedacího pořádku by bylo výhodné, kdyby každý student „mohl vypovídat“ o svém sousedu v lavici — neboli k typu třídy STUDENT přidáme pointrový atribut kvalifikovaný též pro třídu STUDENT,



Obr. 4

který bude „ukazovat na souseda“ — t.j. bude mít za hodnotu datový údaj popisující souseda.

Popis třídy STUDENT bude tedy vypadat následovně:

```
class STUDENT;
<ref (NAZEV) JMENO;
ref (DATUM) NAROZENI;
Boolean POHLAVI;
ref (LAVICE) SKAMNA;
ref (STUDENT) VEDLE>.
```

Uvažujme nyní dvě proměnné JANA a JITKA kvalifikované pro třídu STUDENT a proměnnou SIC kvalifikovanou pro třídu LAVICE.

Požadujme ještě, aby výraz SIC.VLEVO popisoval tentýž datový údaj jako výraz JANA — to zapisujeme (a budeme dále zapisovat) takto:

$SIC.VLEVO == JANA$

a podobně dále požadujeme, aby

$SIC.VPRAVO == JITKA$
 $JANA.VEDLE == JITKA$

a konečně

$JITKA.VEDLE == JANA^2$).

Odpovídají-li datové údaje označené identifikátory JANA, JITKA a SIC výše uvedeným požadavkům, pak platí též

²⁾ Ještě jednou upozorňujeme, že výraz $JANA.JMENO.KRESTNI$ může mít za hodnotu text „PETR“.

JANA.VEDLE.VEDLE = = JANA

JITKA.VEDLE.SKAMNA = = SIC

a též (podrobně si rozmyslete):

JITKA.VEDLE.VEDLE.VEDLE.SKAMNA.VLEVO.VEDLE = =
= = JITKA.

Podobných vztahů je možno nalézt velkou řadu (několik si jich rozmyslete a napište). Celou situaci znázorňuje obrázek 4.

Devítkový doplněk

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

Zmínka o devítkovém doplňku by jistě zpestřila hodiny matematiky už v nižších ročnících základní školy. Čtenáře snad o tom přesvědčíme následujícím příkladem.

Snadno si lze zkontrolovat, že platí:

$$\begin{array}{r} 2\ 851 \\ -\ 236 \\ \hline 2\ 615 \end{array} \quad (1)$$

Uvedený rozdíl však můžeme vypočítat např. i takto: Menšenec 2 851 je čtyřciferný, a proto menšitele 236 odečteme od čtyřciferného čísla 9 999. Dostáváme

$$9\ 999 - 236 = 9\ 763$$

Potom pokračujeme:

$$\begin{array}{r} 2\ 851 \\ +\ 9\ 763 \\ \hline 12\ 614 \\ \quad \downarrow \rightarrow 1 \\ \hline 2\ 615 \end{array} \quad (2)$$

Šipka značí operaci, která se nazývá *kruhový přenos*. Při ní se v desítkovém zápisu daného přirozeného čísla (pokud je aspoň dvojciferný) vynechá cifra nejvyššího řádu a k číslu takto vzniklému se přičte jedno-ciferné přirozené číslo zapsané vynechanou cifrou.

Výsledek výpočtu (2) je roven rozdílu (1). Dříve než dokážeme, že nejde jen o náhodu, vyslovíme definici devítkového doplňku.

Nechť přirozené číslo c je v desítkové soustavě k -ciferné ($k \geq 1$) a dále nechť m je přirozené číslo, pro které platí $m \geq k$. Potom číslo

$$d = \underbrace{99 \dots 9}_{m \text{ cifer}} - c$$

nazýváme *m -místným devítkovým doplňkem čísla c* .

Číslo 9 763 je tedy čtyřmístný devítkový doplněk čísla 236. Obráceně je zřejmě číslo 236 čtyřmístným devítkovým doplňkem čísla 9 763. Dále např. trojmístný devítkový doplněk čísla 236 je $999 - 236 = 763$.

Nyní se vrátíme k odčítání pomocí devítkového doplňku. Nechť a a b jsou taková dvě přirozená čísla, že $a > b$ a že zápis čísla a v desítkové soustavě je n -ciferný ($n \geq 1$). Platí tedy

$$b < a < 10^n. \quad (3)$$

Nejprve vypočteme n -místný devítkový doplněk čísla b . Je jím rozdíl

$$\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifer}} - b = (10^n - 1) - b.$$

Sečteme číslo a a devítkový doplněk čísla b . Dostáváme

$$a + [(10^n - 1) - b] \quad (4)$$

Jestliže chceme postupovat stejně jako při výpočtu (2), pak je třeba, aby číslo (4) bylo v desítkové soustavě $(n + 1)$ -ciferné a aby v jeho zápisu na prvním místě zleva byla číslice 1. Mělo by tedy platit:

$$10^n \leq a + [(10^n - 1) - b] < 2 \cdot 10^n. \quad (5)$$

Nerovnosti (5) jsou splněny, právě když je

$$b + 1 \leq a < 10^n + b + 1,$$

což podle předpokladu (3) platí.

Na číslo (4) aplikujeme kruhový přenos. Při něm se v našem případě odčítá číslo

$$\underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ nul}} = 10^n$$

a zároveň se přičte číslo 1. Z čísla (4) tak dostaneme číslo

$$a + [(10^n - 1) - b] - 10^n + 1 = a - b.$$

Odtud vyplývá, že výše popsany postup vždy vede k určení rozdílu daných čísel.

Převedení odčítání na přičtení devítkového doplňku menšitele, po němž následuje kruhový přenos, má praktický význam. Takto se totiž odčítá v některých počítačích.

Co stojí naděje

RNDr. STANISLAV KOMENDA, Universita Palackého, Olomouc

Mnoho slov bylo napsáno a mnoho vět prosloveno na téma „naděje“. Není známo, existuje-li definice tohoto pojmu, ale jeho vymezení by se jistě našlo... a nejedno.

Naděje je opakem beznaděje a ta je téměř synonymem zoufalství. Naděje souvisí s jistotou; je to pojem méně silný — stojí-li na jednom konci dialektického bipólu jistota a na pólu opačném nemožnost, patří naděje mezi ně. Naděje je přiznáním možnosti — a odtud je jenom krok k pokusu měřit ji.

Latinské přísloví „Dum spiro spero“ (Dokud dýchám, doufám) mluví o naději. Českému slovesu „doufati“ odpovídá totiž substantivum „naděje“, doufati = naději míti. Analogii latinského přísloví najdeme i v bohatství přísloví českých: „Naděje umírá naposled“, „Vždycky zbývá naděje“. V úsloví „Netřeba zoufat“ je možno rozpoznat, že negace slovesa „doufat“ má v českém jazyce výrazně osudový podtón.

Než nechme básníkům co jejich jest.

Toto povídání by mělo být totiž úvahou o tom, jak naději měřit a kvantifikovat. Chováme přitom naději (= doufáme), že nám nebude předhazován úmysl pocuchat jemné pavučiny křehkých a působných neurčitostí, které každý podobný pojem obklopují. Vždyť ani růže neztrácí nic ze své krásy, provede-li botanik její klasifikaci v taxonomické hierarchii.

Ve starší české literatuře o teorii pravděpodobnosti a matematické statistice se lze setkat s pojmem „*matematická naděje*“ jako synonymem nověji užívaného termínu „*střední hodnota*“. Rozumí se matematická naděje či střední hodnota náhodné veličiny. Lze přitom předpokládat, že pojem „matematická naděje“ byl odvozen z ekvivalentního pojmu anglického „*expectation*“ (který je běžně překládán jako „očekávání“) anebo francouzského „*espérance*“ (což je „naděje“). Podobné termíny lze najít i v ruštině („*о́жидани́е*“) nebo němčině („*Erwartungswert*“), což jsou právě jazyky, ve kterých byly odkojeny a kolébány prvé pojmy rodící se teorie pravděpodobnosti.

Pokusíme se nyní ukázat schopnost tohoto matematického pojmu stát se mírou velikosti naděje i v širší souvislosti. Pro tuto demonstraci použijeme situace, která je srdci mnohého z nás tak blízká... Ano, uhádli jste. Máme na mysli sázení ve Sportce.

Jednoduchá hra, jakou Sportka nesporně je, představuje situaci, v níž — pokud se hraje poctivě — je kolo osudu roztáčeno pouze silami náhody.

Pravidla hry jsou natolik známá, že by bylo zbytečné se jimi podrobněji zabývat. Stačí vědět, že hráč vsadí a očekává, že vyhraje. Sázka tedy je otcem i matkou naděje. Rozumí se naděje vyhrát.

Sázet je možno jediný vklad nebo několik stovek vkladů. Je tedy sázka dělitelná a kvantifikovatelná. Měla by být proto dělitelná a kvantifikovatelná i naděje. A navíc, měla by existovat i naděje elementární (i když relativně pro uvažovanou hru). V našem případě je takovým atomem naděje, zrozená z jediného tříkorunového vkladu.

Ano, můžete namítnout, že tohle všechno je jenom pouhá spekulace. Protože každý přece ví, že někomu může poskytnout velkou naději jediná nízká sázka, zatímco jiný sází vysoké částky třeba z pouhé nudy.

Pokusíme se i na toto odpovědět rozbořem uvedené situace.

Matematická naděje hry je matematickou nadějí nebo střední hodnotou výhry. Abychom ji určili číselně, musíme znát hodnotu jednotlivých možných výsledků hry, s nimiž lze při hře počítat, spolu s pravděpodobnostmi výskytu těchto výsledků.

Ve hře, o níž se zajímáme, je možno uvedené konkretizovat tak, že matematická naděje výhry =

= hodnota výhry v 1. pořadí $\times$ pravděpodobnost výhry v 1. pořadí +
+ hodnota výhry v 2. pořadí $\times$ pravděpodobnost výhry v 2. pořadí +
+ hodnota výhry ve 3. pořadí $\times$ pravděpodobnost výhry ve 3. pořadí +
+ hodnota výhry ve 4. pořadí $\times$ pravděpodobnost výhry ve 4. pořadí +
+ nulová výhra $\times$ pravděpodobnost nulové výhry
(poslední sčítanec je možno vynechat).

Pravděpodobnosti výhry v jednotlivých pořadích se snadno určí kombinatoricky, uvědomíme-li si, že v množině $\binom{49}{6}$ možných šestic čísel je právě jediná vedoucí k výhře v 1. pořadí, $\binom{6}{5} \binom{43}{1}$ šestic zaručuje výhru ve 2. pořadí, $\binom{6}{4} \binom{43}{2}$ šestic že zaručuje výhru v pořadí třetím a $\binom{6}{3} \binom{43}{3}$ šestic že zaručuje výhru v pořadí čtvrtém.

Matematickou nadějí výhry však není třeba počítat podle uvedené formule. Stačí totiž uvědomit si, že podle pravidel hry se na výhry rozděluje právě polovina (eventuálně zvýšená o zanedbatelnou jednu korunu) celkového vkladu, takže matematická naděje výhry elementární tříkorunové sázky se rovná jedné koruně a padesáti haléřům.

Tuto částku je možno považovat za objektivní velikost naděje. Vyjadřuje hodnotu naděje výhry z elementárního vkladu právě tak reálně jako údaj, tvrdící, že žárovka bude svítit 500 hodin, že motor chladničky vydrží deset let a že zakoupené auto ujede bez generální opravy 200.000 km. Všechny tyto údaje o hodnotě věcí jsou pokrevními příbuznými matematické naděje.

Na rozdíl od věcí má však uvedená hra ještě svou subjektivní stránku. Kdybychom její existenci nepředpokládali, nebylo by možno zdůvodnit onen rozdíl mezi cenou sázky a velikostí matematické naděje výhry. A tou je schopnost hry vyvolat v jejích účastnících vzrušení, podnítit jejich fantazii, aby si dokázali vykreslit v nejzářivějších barvách svou budoucnost výherce. A právě za to zaplatil hráč oním rozdílem mezi výší vkladu a matematickou nadějí výhry...

Konec konců, jisté prvky hry, rizika a nejistoty nepostrádá někdy ani koupě věcí. Bylo by snad však přehnané připisovat některým výrobcům snahu obohatit nenápadně zákazníka nadějí na fungující výrobek tam, kde mají poskytnout jistotu.

Pokud by někdo nebyl uvedenou představou o kvantifikovatelnosti subjektivní naděje dostatečně přesvědčen, může si provést malý pokus. Bez laboratoře, pouze ve své fantazii a představách. Což trochu upravit pravidla hry? Stačí změnit onen rozdíl mezi výší sázky a matematickou nadějí výhry. Bude-li rozdělováno více než 50 % celkového vkladu, zvýší se počet zájemců o hru. A naopak, bude-li se rozdělovat méně, klesne i počet účastníků hry.

A tím je dána možnost objektivní kvantifikace i této subjektivně prožívané stránky hry. Samozřejmě ne na jedinci, ale na souboru jedinců, na jejich populaci. Nemusím být ochoten koupit si svou hrst naděje za cenu právě nabídnutou. Ale bude-li mi nabídnuta dostatečná sleva, přestanu odmítat.

V této souvislosti je možno zmínit se o podstatně složitějších hrách, jaké hraje jedinec a společnost na jedné straně s osudem a lidským údělem na straně druhé. V této hře může být v sázce havarie, úraz, smrt nebo stárí — a její stupnice hodnot nekončí nulou. Má i své hodnoty záporné.

Hry s účastí náhody doprovázejí lidstvo už od pradávna. Existují archeologické nálezy, které se nepodařilo vysvětlit jinak, než povzdech „... asi něco na hraní“. Házení kostkami, vrhcáby a nejrůznější (ale ne všechny) karetní hry jsou z tohoto rodu. Stejně jako hrací automaty, zaplavující nás masově v posledních letech.

Taková úporná vytrvalost a lpění na jevu, racionálně — z hlediska dokonalého automatu — nevysvětlitelném, nemůže být něčím nahodilým. Soudíme proto, že člověk něco podobného, jako je hra a sázka, k životu potřebuje. Stejně jako jsou nutné a užitečné vitamíny pro chod tělesných funkcí, má člověk zřejmě zapotřebí ukájet jakýsi záhadný, v podvědomí zasutý hlad, vystavovat občas sebe sama riziku, nejistotě, napětí a očekávání. Což jsou všechno situace, kdy vystupuje druhou stranou jeviště naděje. Proč by se jinak muži opakovaně ženili?

A protože už dávno je nám nedostupné podstupovat riziko lovce před vyceněnými tesáky tygra (a při lovu zajíců je riziko výrazně jednostran-

ně na straně zájce, zatímco odvážný lovec riskuje s nenulovou pravděpodobností nejspíše rýmu), podstupujeme riziko podvrtnutých kotníků při lyžování s kopců, jejichž strmost vysoce překračuje míru našich dovedností, a usilujeme o získání přízně žen, jejíž realizace v nás vlastně vzbuzuje strach.

Anebo sázíme do Sportky.

Což má, koneckonců, i tu výhodu, že následky a ztráty z příslušného rizika plynoucí pomíjejí podstatně rychleji než rizika pádu na lyžích či rizika manželská.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

5. Narýsujte libovolný dutý úhel s vrcholem V , uvnitř jeho ramen zvolte body T_1, T_2 tak, aby bylo $VT_1 \geq VT_2$ a sestrojte střed S úsečky T_1T_2 . Potom sestrojte úhel $\sphericalangle T_2VQ$ shodný s úhlem $\sphericalangle T_1VS$ tak, aby ležel v polorovině VT_2T_1 a úhel $\sphericalangle VT_1Q'$, který je shodný s úhlem $\sphericalangle T_1VS$ a leží v polorovině VT_1T_2 . Dokažte tato tvrzení:

a) Polopřímky VQ, T_1Q' se protínají v bodu F , který leží uvnitř daného úhlu $\sphericalangle T_1VT_2$;

$$b) |VF|^2 = |FT_1| \cdot |FT_2|$$

$$c) |FT_1| \cdot |FT_2| = |VT_1|^2 \cdot |VT_2|^2.$$

(Došlo 1 řešení)

Emil Kraemer

Autorovo řešení:

a) Velikost shodných úhlů $\sphericalangle T_1VS, \sphericalangle T_2VQ, \sphericalangle VT_1Q'$ označme α ; je tedy

$$|\sphericalangle VT_1Q'| = |\sphericalangle T_2VQ| = |\sphericalangle T_1VS| = \alpha \quad (1)$$

Je-li $VT_1 > VT_2$ (obr. 1), pak z trojúhelníku o vrcholech V, T_2, T_1 a středu S snadno dokážeme, že úhel $\sphericalangle T_2VS$ je větší než úhel $\sphericalangle T_1VS$. Proto všechny vnitřní body polopřímky VQ jsou vnitřními body úhlu $\sphericalangle T_2VS$; velikost úhlu $\sphericalangle QVS$ označme β . Potom úhel $\sphericalangle T_1VQ$ je

a úhel $\sphericalangle VT_1F_1$ je shodný s úhlem $\sphericalangle VT_1F$, tj. s úhlem $\sphericalangle VT_1Q'$; podle (1) je tedy

$$|\sphericalangle VT_1F_1| = \alpha. \quad (4)$$

Střídavé úhly $\sphericalangle VT_1F_1$, $\sphericalangle T_1VS$ jsou tedy shodné; proto jsou přímky T_1F_1 , VS rovnoběžné. Sestrojíme bodem T_2 rovnoběžku s přímkou VS a určíme její průsečík F_2 s přímkou $d \perp VS$ vedenou bodem F_1 ; je tedy

$$F_1T_1 \parallel VS \parallel F_2T_2. \quad (5)$$

Protože bod S je středem úsečky T_1T_2 , je podle (5) průsečík O přímek VS , d středem úsečky F_1F_2 . Body F_1 , F_2 jsou tedy souměrně sdruženy podle přímky VS ; přitom platí (5). Proto je

$$VF_1 = VF_2, \quad (6)$$

$$\sphericalangle T_1F_1V = \sphericalangle VF_2T_2, \quad (7)$$

$$\sphericalangle SVF_1 = \sphericalangle SVF_2. \quad (8)$$

Avšak úhel $\sphericalangle SVF_1$ je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle T_1VS$, $\sphericalangle F_1VT_1$; přitom úhel $\sphericalangle F_1VT_1$ je shodný s úhlem $\sphericalangle FVT_1$ o velikosti $\alpha + \beta$. Podle toho a podle (8) je tedy

$$|\sphericalangle SVF_2| = |\sphericalangle T_1VS| + |\sphericalangle FVT_1| = \alpha + (\alpha + \beta) \quad (9)$$

Avšak úhel $\sphericalangle SVF_2$ je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle T_2VS$ (o velikosti $\alpha + \beta$) a úhlu $\sphericalangle T_2VF_2$; podle (9) z toho plyne že je

$$|\sphericalangle T_2VF_2| = \alpha. \quad (10)$$

Podle (4) a (10) jsou tedy úhly $\sphericalangle VT_1F_1$, $\sphericalangle T_2VF_2$ shodné; kromě toho platí ještě (7) Proto je

$$\triangle T_1F_1V \sim \triangle VF_2T_2 \quad (uu) \quad (11)$$

Podle (6) a (3) je $VF_2 = VF_1 = VF$; podle (10) a (1) jsou úhly $\sphericalangle T_2VF_2$, $\sphericalangle T_2VQ$ (čili $\sphericalangle T_2VF$) shodné. To znamená, že body F_2 , F jsou souměrně sdruženy podle přímky VT_2 , takže je

$$\triangle VF_2T_2 \cong \triangle VFT_2 \quad (12)$$

Z (3), (11) a (12) plyne (2).

Z (2) plyne, že je

$$\frac{|VF|}{|FT_1|} = \frac{|T_2F|}{|FT_2|},$$

čili

$$|VF|^2 = |FT_1| \cdot |FT_2|. \quad (13)$$

Dále z (2) plyne, že je

$$\frac{|VF|^2}{|VT_1|^2} = \frac{|FT_2|^2}{|VT_2|^2};$$

z toho podle (13) dostaneme

$$\frac{|FT_1|}{|VT_1|^2} = \frac{|FT_2|}{|VT_2|^2},$$

z čehož plyne výsledek

$$|FT_1| \cdot |FT_2| = |VT_1|^2 \cdot |VT_2|^2.$$

Poznámka: Řešitel úlohy Jaroslav Hančl z gymnázia v Bílovci řešil úlohu početně s použitím trigonometrie.

6. Je dána kružnice k o poloměru ρ . O každém trojúhelníku, jemuž je kružnice vepsána, říkáme, že je této kružnici opsán; shodné trojúhelníky pokládáme za různá umístění téhož trojúhelníku. Mezi všemi trojúhelníky, které jsou kružnici k opsány, je také trojúhelník rovnostranný. Bez použití počtu diferenciálního dokažte, že tento trojúhelník má ze všech trojúhelníků kružnici k opsaných nejmenší obvod i nejmenší obsah.

(Došlo 5 řešení)

Emil Kraemer

Upravené řešení Jaroslava Štěpánka, 2. C G Bílovec :

Budiž P obsah, s poloviční obvod trojúhelníku a ρ poloměr kružnice, která je tomuto trojúhelníku vepsána; potom je

$$P = \rho s \tag{1}$$

Z tohoto vzorce je patrné, že při pevném ρ bude obsah P minimální právě tehdy, bude-li minimální s , čili bude-li minimální obvod. Stačí tedy nalézt trojúhelník, který je opsán dané kružnici a má nejmenší obvod; potom má i nejmenší obsah.

Podle Heronova vzorce pro obsah P trojúhelníku je

$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \tag{2}$$

kde $2s = a + b + c$; přitom čísla $s - a$, $s - b$, $s - c$ jsou kladná (jak plyne z toho, že součet dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí). Podle (1) a (2) je

$$\rho^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}. \tag{3}$$

Podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru je

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s-a + s-b + s-c}{3} \right)^3 \tag{4}$$

rovnost nastane právě tehdy, je-li $s-a = s-b = s-c$, tj. je-li $a = b = c$. Protože $s-a + s-b + s-c = 3s - 2s = s$, je podle (3) a (4)

$$\varrho^2 \leq \frac{s^2}{27},$$

tj.

$$s^2 \geq 27\varrho^2,$$

$$2s \geq 6\varrho \sqrt{3};$$

přítom rovnost nastane právě tehdy, je-li $a = b = c$. Ze všech trojúhelníků opsaných dané kružnici o poloměru ϱ má tedy nejmenší obvod trojúhelník rovnostranný; tento obvod je $6\varrho \sqrt{3}$. Podle (1) je obsah tohoto trojúhelníku $P = 3\varrho^2 \sqrt{3}$.

7. Elipsa má vrcholy hlavní osy v bodech A, B a vrcholy vedlejší osy v bodech C, D ; T budiž libovolný bod elipsy. Je-li $T \neq A, T \neq B$, pak kolmice vedené bodem T k přímkám TA, TB protínají hlavní osu elipsy v bodech M, N . Je-li $T \neq C, T \neq D$, pak kolmice vedené bodem T k přímkám TC, TD protínají vedlejší osu elipsy v bodech P, Q . Dokažte tato tvrzení:

a) Úsečky MN, PQ jsou nenulové, nejsou shodné a jejich velikost nezávisí na volbě bodu T .

b) Obsah obdélníku, jehož strany jsou shodné s úsečkami MN, PQ , je roven obsahu obdélníku, jehož střední příčky jsou úsečky AB, CD .
(Došla 4 řešení) *Emil Kraemer*

Upravené řešení Jaroslava Hájka, 4. C G Bílovec:

a) Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, že její osa x splývá s přímkou AB a osa y s přímkou CD . Jsou-li a, b ($a > b$) poloosy elipsy, je

$$A = [-a; 0], \quad B = [a; 0], \quad C = [0; b], \quad D = [0; -b]$$

Souřadnice libovolného bodu T elipsy označme x, y ; potom pro ně platí rovnice

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

z níž plyne, že je

$$y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}. \quad (1)$$

Pro body M, N platí:

$$M = [m; 0], \quad N = [n; 0]$$

Snadno vypočteme souřadnice vektorů **AT, MT, BT, NT**:

$$\mathbf{AT} = (x + a; y), \quad \mathbf{MT} = (x - m; y),$$

$$\mathbf{BT} = (x - a; y), \quad \mathbf{NT} = (x - n; y)$$

Protože vektory **AT**, **MT** jsou vzájemně kolmé, je jejich skalární součin rovný nule, tj.

$$(x + a)(x - m) + y^2 = 0$$

obdobně je

$$(x - a)(x - n) + y^2 = 0$$

Z první rovnice dostaneme

$$x(x + a) - m(x + a) + y^2 = 0$$

$$m = x + \frac{y^2}{x + a}; \quad (2)$$

z druhé rovnice dostaneme obdobně

$$n = x + \frac{y^2}{x - a}. \quad (3)$$

Protože $T \neq A$, $T \neq B$ je bod elipsy, je $|x| < a$, takže je $x + a \neq 0$, $x - a \neq 0$; zároveň je

$$x^2 - a^2 < 0 \quad (4)$$

Podle (2) a (3) je

$$|MN| = |m - n| = \left| \frac{y^2}{x + a} - \frac{y^2}{x - a} \right| = y^2 \left| \frac{-2a}{x^2 - a^2} \right|.$$

Podle (4) je $|x^2 - a^2| = a^2 - x^2$, takže je

$$|MN| = \frac{2ay^2}{a^2 - x^2};$$

podle (1) konečně dostaneme

$$|MN| = \frac{2a}{a^2 - x^2} \cdot \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}$$

$$|MN| = \frac{2b^2}{a}. \quad (5)$$

Zcela obdobně vypočteme velikost úsečky PQ ; dostaneme výsledek

$$|PQ| = \frac{2a^2}{b}. \quad (6)$$

Je zřejmé, že je $|PQ| > |MN| > 0$; z (5) a (6) je zároveň patrné, že velikosti úseček MN , PQ nezávisí na volbě bodu T .

b) Obsah obdélníku, jehož strany jsou shodné s úsečkami MN , PQ , je

$$\frac{2b^2}{a} \cdot \frac{2a^2}{b} = 4ab;$$

týž obsah má obdélník se středními příčkami AB , CD .

Poznámka. Z (5) a (6) plyne, že velikost úsečky MN je rovna průměru hyperoskulační kružnice v hlavním vrcholu elipsy a velikost úsečky

PQ je rovna průměru hyperoskulační kružnice ve vedlejším vrcholu elipsy.

8. V rovině je dána konečná neprázdná množina $\mathbf{M}$ navzájem stejno-
lehlých čtverců a přirozené číslo $k \geq 1$. Předpokládejme, že žádných
 $k + 1$ různých čtverců z množiny $\mathbf{M}$ neobsahuje společný bod. Dokažte,
že množinu $\mathbf{M}$ lze rozdělit na nejvýše $4k - 3$ disjunktních tříd, přičemž
žádné dva čtverce z jedné a téže třídy neobsahují společný bod.

(Došlo 1 řešení)

Jaroslav Morávek

Autorovo řešení :

K řešení úlohy použijeme těchto dvou pomocných tvrzení (lemmat):
Lemma 1. Necht Q a Q' jsou dva navzájem stejno-
lehlé čtverce v rovině, přičemž $Q \cap Q' \neq \emptyset$. Jestliže délka strany Q je menší nebo rovna délce
strany Q' , pak Q' obsahuje alespoň jeden z vrcholů čtverce Q .

Lemma 2. Necht Q^* je libovolný čtverec z množiny $\mathbf{M}$ (splňující pod-
mínku úlohy), mající minimální délku strany. Pak v množině $\mathbf{M} - \{Q^*\}$
neexistuje $4k - 3$ navzájem různých čtverců, které mají s Q^* neprázdný
průnik.

Snadný důkaz lemmatu 1 přenecháváme čtenáři. (Lze je dokázat např.
vyšetřením několika případů vzájemné polohy Q a Q' .)

Lemma 2 dokážeme sporem. Pripusťme, že v $\mathbf{M} - \{Q^*\}$ existuje
 $4k - 3$ navzájem různých čtverců $Q_1, Q_2, \dots, Q_{4k-3}$ tak, že platí $Q_j \cap Q^* \neq \emptyset$
pro $j = 1, 2, \dots, 4k - 3$. Na základě lemmatu 1 obsahuje každý ze
čtverců $Q_1, Q_2, \dots, Q_{4k-3}$ alespoň jeden z vrcholů čtverce Q^* . Protože
počet čtverců Q_j ($j = 1, \dots, 4k - 3$) je $4k - 3 > 4(k - 1)$, musí existo-
vat alespoň jeden vrchol čtverce Q^* , který náleží k různým čtvercům
z množiny $Q_1, \dots, Q_{4k-3}$. Tento vrchol je tedy společným bodem čtverce Q
a dále k různých čtverců z $\mathbf{M} - \{Q^*\}$, tj. v $\mathbf{M}$ existuje $k + 1$ různých
čtverců majících neprázdný průnik. Získaný spor s předpokladem úlohy
dokazuje lemma 2.

Nyní podáme řešení úlohy. Podle jejího textu máme dokázat, že exis-
tuje rozklad $\mathbf{M}$ na disjunktní třídy, jejichž počet je nejvýše $4k - 3$,
a přitom žádné dva různé čtverce z jedné a téže třídy neobsahují společný
bod. Necht n označuje počet prvků množiny $\mathbf{M}$ — důkaz tvrzení prove-
deme úplnou indukcí podle parametru n .

Base indukce : Tvrzení zřejmě platí pro všechna přirozená čísla $n \leq 4k - 3$.
(V tomto případě zvolíme za třídy rozkladu jednoprvkové množiny.)

Indukční krok : Předpokládejme, že $n > 4k - 3$ a že tvrzení je dokázáno
pro přirozené číslo $n - 1$. Protože množina $\mathbf{M}$ je konečná, existují v ní

čtverce s nejmenší délkou strany. Zvolíme libovolně ale pevně jeden z těchto „nejmenších“ čtverců a označíme jej Q^* . Dále položíme

$$M^* = M - \{Q^*\}.$$

M^* je zřejmě neprázdná a konečná množina, která rovněž splňuje podmínku úlohy, ale přitom obsahuje $n - 1$ prvků. Na základě indukčního předpokladu existuje rozklad M^* na disjunkttní třídy $M_1^*, M_2^*, \dots, M_q^*$, kde $q \leq 4k - 3$, přičemž žádné dva různé čtverce z jedné a téže třídy M_j^* neobsahují společný bod.

Nyní sestojíme rozklad M podle požadavku úlohy. Rozlišíme tyto dva případy:

$$\text{A) } q < 4k - 3, \quad \text{B) } q = 4k - 3.$$

V případě A) tvoří systém množin $\{M_1^*, M_2^*, \dots, M_q^*, \{Q^*\}\}$ zřejmě rozklad požadovaných vlastností.

V případě B) použijeme lemmatu 2, podle kterého neexistuje v M^* $4k - 3$ navzájem různých čtverců, majících s Q^* neprázdný průnik. Protože však rozklad $\{M_1^*, \dots, M_{4k-3}^*\}$ množiny M^* má právě $4k - 3$ tříd, existuje $i_0 \in \{1, \dots, 4k - 3\}$ tak, že platí $Q \cap Q^* = \emptyset$ pro každé $Q \in M_{i_0}^*$.

Systém množin

$$\{M_1^*, \dots, M_{i_0-1}^*, M_{i_0}^* \cup \{Q^*\}, M_{i_0+1}^*, \dots, M_{4k-3}^*\}$$

je zřejmě rozklad množiny M , mající požadované vlastnosti.

V obou případech A) a B) jsme tedy sestrojili požadovaný rozklad, čímž je důkaz indukci dokončen.

Poznámka. Někteří řešitelé nesprávně pochopili text úlohy a pokoušeli se dokázat, že množinu M nelze rozdělit na více než $4k - 3$ disjunkttních tříd s požadovanými vlastnostmi. V takovém případě samozřejmě snadno dospěli ke sporu.

Fyzika

1. K určování stáří archeologických předmětů organického původu se používá metoda založená na měření množství radiouhlíku ^{14}C , který se do rostlin dostává ze vzduchu přijímáním CO_2 a do živočišného organismu pak rostlinou potravou. Během života organismu se sice radiouhlík rozpadá, ale je neustále potravou doplňován, takže je v každém organismu určitá rovnováha. Uhynutím organismu přestává příjem potravy (u rostlin příjem CO_2); zásoba ^{14}C se neobnovuje a nashromážděný radiouhlík se rozpadá. Jelikož zákon rozpadu radioaktivních látek je znám, lze určit dobu uplynulou od uhynutí organismu, tedy stáří předmětu organického původu, změříme-li jednak množství radiouhlíku v živém orga-

nismu (předpokládá se, že se během dlouhé historické doby nezměnilo) a jednak množství zbylého radiouhlíku v předmětu organického původu.

Určete stáří dřevěného předmětu, nalezeného v jedné z egyptských pyramid, u kterého bylo zjištěno, že jeho měrná aktivita radiouhlíku ^{14}C činí $3/5$ měrné aktivity téhož izotopu v právě pokácených stromech. Poločas rozpadu ^{14}C je roven 5570 let. (Měrnou aktivitou rozumíme aktivitu jednotkové hmotnosti látky).

(Došlo 20 řešení)

Zdeněk Janout

Řešil kolektiv (Stanislav Hledík, Hana Krečmerová) třídy 3. C, gym názium Ostrava, ul. dr. Šmerala.

Při řešení použijeme exponenciálního zákona, který udává závislost počtu nepřeměněných atomů daného prvku na čase:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

kde N_0 je počet atomů v čase $t = 0$ s, λ je rozpadová konstanta prvku, kterou vyjádříme pomocí poločasu rozpadu T , který známe. Poločas rozpadu je definován jako doba, za kterou se přemění právě polovina atomů, tj.

$$N(T) = \frac{1}{2} N_0$$

Dosadíme-li poslední vztah do rovnice (1), dostaneme

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \quad (2)$$

Aktivita A je definována jako počet atomů přeměněných za časovou jednotku, tj.

$$A = - \frac{dN}{dt}.$$

Použijeme-li vztah (1), dostaneme:

$$\begin{aligned} A &= \lambda N_0 e^{-\lambda t}, \\ A &= \lambda N \end{aligned} \quad (3)$$

Zanedbáme-li hmotu vyzářenou během rozpadu, je měrná aktivita

$$a = \frac{\lambda N}{m_0},$$

kde m_0 je počáteční hmotnost daného vzorku látky.

Označme stáří dřevěného předmětu t_0 a poměr aktivit $k = 3/5$.

Platí:

$$k = \frac{a(t_0)}{a(0)}.$$

Dosadíme-li do posledního vztahu (3), bude

$$\frac{\lambda N_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda N_0} = k$$

Logaritmováním a užitím vztahu (2) dostaneme hledaný vztah

$$t_0 = -T \frac{\ln k}{\ln 2}.$$

Dosazením $k = 3/5$; $T = 5570$ let získáme $t_0 \simeq 4100$ let.

Závěr: Stáří dřevěného předmětu je přibližně 4100 let.

2. Vypočítejte: a) hmotnostní úbytek (v jednotkách u) a vazbovou energii (v MeV) jádra izotopu uhlíku ^{12}C ,

b) energii (v MeV), kterou je zapotřebí dodat jádru ^{12}C , abychom je rozdělili na tři stejné částice.

Při výpočtu použijte následující hodnoty hmotností neutrálních atomů: uhlíku 12 000 000 u, vodíku 1,007 825 u, helia 4,002 604 u a neutronu 1,008 665 u. Jednotka u se nazývá atomovou hmotnostní jednotkou; platí $1\text{u} = 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Poznámka: Jelikož při výpočtech se odečítají dvě přibližně stejně velká čísla, je zapotřebí vzít hmotnosti se všemi platnými místy.

(Došlo 20 řešení)

Zdeněk Janout

Rešil Ondřej Čadek, 3. A, gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše:

a) Označíme-li m_p a m_n klidové hmotnosti protonu a neutronu, je hmotnostní úbytek B jádra s protonovým a nukleonovým číslem Z a A určen vztahem

$$B = Zm_p + (A - Z)m_n - m_j, \quad (1)$$

kde m_j je hmotnost jádra.

Přičteme-li k prvnímu pravému členu hmotnost Zm_e a odečteme-li ji od posledního členu, dostaneme

$$B = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - (m_j + Zm_e)$$

Můžeme tedy psát

$$B = Zm_H + (A - Z)m_n - m, \quad (2)$$

kde $m_H = m_p + m_e$ je hmotnost neutrálního atomu vodíku a

$m = m_j + Zm_e$ hmotnost neutrálního atomu příslušného nuklidu.

Značí-li $\alpha_H, \alpha_n, \alpha$ relativní atomové hmotnosti vodíku, neutronu a neutrálního atomu, lze hmotnostní úbytek B v jednotkách u vypočítat ze vztahu

$$B = [Z\alpha_H + (A - Z)\alpha_n - \alpha] \text{ u}.$$

Dosazením za α_H, α_n

$$B = [1,007825 Z + (A - Z)1,008665 - \alpha] \text{ u}. \quad (3)$$

Hmotnostní úbytek B_C jádra izotopu uhlíku ^{12}C je potom podle (3)

$$B_C = [6(1,007825 + 1,008665) - 12,000000] \text{ u} = 9,894 \cdot 10^{-2} \text{ u} .$$

Velikost vazbové energie plyne z Einsteinova vztahu

$$W = Bc^2 .$$

Pro energii v MeV pak platí

$$W = \left[\frac{8,9876 \cdot 10^{10} \cdot 1,6604 \cdot 10^{-27}}{1,602 \cdot 10^{-19}} B \right] \frac{\text{MeV}}{\text{u}} = (931,5 B) \frac{\text{MeV}}{\text{u}} .$$

Dosazením B_C za B dostaneme vazbovou energii W_C jádra uhlíku ^{12}C

$$W_C = 92,16 \text{ MeV} .$$

b) Jádro izotopu uhlíku ^{12}C se dodáním energie rozpadne na tři stejné částice, tzn. vzniknou tři atomy izotopu helia ^4He .

Energie, která způsobí rozbití vazeb mezi nukleony v jádře uhlíku ^{12}C , takže vzniknou tři atomy ^4He , je podle zákona zachování energie určena vztahem

$$E = W_C - 3W_{He} ,$$

kde W_{He} je vazbová energie izotopu helia ^4He ,

$$W_{He} = B_{He} \cdot c^2 ,$$

a tedy

$$E = (B_C - 3B_{He})c^2 = (3m_{He} - m_C)c^2 = 931,5 (3m_{He} - m_C)\text{MeV} \cdot \text{u}^{-1} ,$$

kde m_{He} , m_C jsou hmotnosti neutrálních atomů helia ^4He a uhlíku ^{12}C .

Dosazením za m_{He} a m_C dostáváme

$$E = 7,28 \text{ MeV}$$

Závěr: Hmotnostní úbytek izotopu uhlíku ^{12}C je $9,894 \cdot 10^{-2}\text{u}$, vazbová energie jádra uhlíku ^{12}C je 92,16 MeV. Energie, kterou je zapotřebí dodat jádru uhlíku ^{12}C , abychom je rozdělili na tři stejné částice, je 7,28 MeV.

Poznámka 1. Úlohu b) je možno řešit i na základě zákona zachování hmoty. Rozpadem uhlíku ^{12}C na tři atomy ^4He vznikne hmotnostní schodek M

$$M = 3 m_{He} - m_C .$$

Podle Einsteinova vztahu

$$E = Mc^2 ,$$

a tedy

$$E = (3 m_{He} - m_C) c^2 .$$

Poznámka 2. Při výpočtu vazbové energie jsem použil:

1 u = $1,6604 \cdot 10^{-27}$ kg, který je uveden v knize Krupka - Horák Fyzika (1966). Údaj uvedený ve Vašem časopisu, totiž, že 1u = $1,6060 \cdot 10^{-27}$ kg, je patrně tisková chyba.

Poznámka autora : Na tiskovou chybu v hodnotě hmotnostní jednotky poukázali i další řešitelé.

olympiády

Úlohy XX. mezinárodní matematické olympiády

Ve 2. čísle Rozhledů jsme informovali čtenáře o účasti československého družstva na XX. MMO. Soutěžící řešili celkem šest úloh, které z návrhů zúčastněných zemí vybrala mezinárodní jury. Texty úloh byly vedením každé delegace přeloženy do příslušného mateřského jazyka.

První den soutěže (6. 7. 1978)

1. Necht $m, n, 1 \leq m < n$ jsou taková přirozená čísla, že dekadické zápisy čísel 1978^m a 1978^n končí týmž trojčíslem.

Určete čísla m, n s touto vlastností, jejichž součet $m + n$ je minimální.

(Kuba, 6 bodů)

2. Je dána koule a uvnitř ní pevný bod P . Necht A, B, C jsou takové libovolné body ležící na povrchu koule, že úsečky PA, PB, PC jsou po dvou na sebe kolmé a PQ je tělesová úhlopříčka kváдру s hranami PA, PB, PC .

Určete množinu všech takových bodů Q .

(USA, 7 bodů)

3. Množina všech celých kladných čísel je sjednocením dvou disjunktních podmnožin

$\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}, \quad \{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\},$
přičemž

$$\begin{array}{lcl} f(1) < f(2) < & & < f(n) < \\ g(1) < g(2) < & & < g(n) < \end{array}$$

a

$$g(n) = f(f(n)) + 1$$

pro všechna přirozená čísla $n \geq 1$.

Určete $f(240)$.

(Velká Británie, 8 bodů)

Druhý den soutěže (7. 7. 1978)

4. V trojúhelníku ABC je $AB = AC$. Kružnice, která má vnitřní dotyk s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC , se dotýká úseček AB, AC v uvedeném pořadí v bodech P, Q .

Dokažte, že střed úsečky PQ je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC .

(USA, 5 bodů)

5. Nechť $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ je posloupnost navzájem různých kladných čísel. Potom pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ platí

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

dokažte.

(Francie, 6 bodů)

6. Členové mezinárodní společnosti jsou příslušníky 6 různých zemí. Seznam členů této společnosti obsahuje 1978 jmen očíslovaných 1, 2, ..., 1978.

Dokažte, že existuje aspoň jeden takový člen společnosti, jehož pořadové číslo v tomto seznamu se rovná buď součtu pořadových čísel dvou jiných členů z jeho země anebo dvojnásobku pořadového čísla jednoho člena společnosti z jeho země.

(Holandsko, 8 bodů)

V závorce za textem každé úlohy je uvedena země, která předložila návrh úlohy, a maximální počet bodů, jež mohl řešitel získat za její úplné řešení. Při soutěži však žáci tyto údaje neznali. Věděli pouze, že na řešení každé trojice soutěžních úloh mají čtyři hodiny čistého času. Na případné nejasnosti v textech úloh se mohl soutěžící písemně dotázat nejpozději do půl hodiny po obdržení textů. Každá otázka byla projednána v jury a žák vždy obdržel písemnou odpověď. Dotazů však bylo velmi málo.

S jednotlivými úlohami si nejlépe poradila tato družstva:

1. úloha: Rumunsko
2. úloha: ČSSR a Vietnam
3. úloha: USA
4. úloha: ČSSR, Jugoslávie, Rumunsko a Vietnam
5. úloha: Bulharsko, Polsko, Rumunsko, USA a Vietnam
6. úloha: Rumunsko

Pokud je družstev víc než jedno, pak dosáhla stejného počtu bodů.

Družstvo země, která úlohu navrhla, nebylo nikdy při jejím řešení nejúspěšnější. Svědčí to o korektnosti při přípravě žáků pro MMO v jednotlivých státech.

J. M.

Začal vás v létě zlobit televizor?

RNDr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., ČSAV Praha

Opakuje se to od května do poloviny srpna každoročně: díváte se v klidu na vysílání televize, když tu náhle na obrazovce vzniknou šikmé pruhy, jejichž intenzita se nepravidelně mění. Někdy se přitom do zvuku začnou míchat různé pazvuky. Všechny pokusy odstranit rušivý jev vyzní naprázdno. A pak přijde to hlavní překvapení: čáry se ustálí, strhnou na sebe synchronizaci obrazu a místo sledovaného pořadu vidíme obraz, vysílaný nějakým cizím vysílačem. Obvykle to bývá vysílání moskevské televize, někdy se k nám však dostane i obraz z Anglie, ba dokonce Portugalska či severní Afriky. Úchvatný jev trvá několik minut nebo i hodin a pak zase — většinou rychle — mizí.

Kdo byste během popisovaného úkazu sledovali pásmo rozhlasu na VKV, zachytili byste možná celou řadu vzdálených vysílačů — většinou ze Sovětského svazu či Bulharska. Stali byste se zkrátka svědky něčeho, co lze nazvat „mimořádné dálkové šíření metrových vln působením ionosférické vrstvy Es“.

Zkratka „Es“ znamená sporadickou či mimořádnou vrstvu E, která se někdy — u nás v letní době — silně vyskytuje nad Evropou ve výši asi 100 kilometrů nad zemským povrchem. Tato vrstva bývá značně tenká (někdy jen několik desítek či stovek metrů), ale gradient elektro- nové koncentrace je tak značný, že dochází téměř k dokonalým odrazům metrových vln na vzdálenosti od 600 do 2500 kilometrů. Mimořádná vrstva E se vyskytuje obvykle ve formě jakýchsi obláčků, jejichž rozměry se pohybují od několika málo kilometrů až po rozměry takové země, jako je např. Francie. Tyto obláčky se obvykle pohybují — hrány ionosférickým větrem — určitým směrem a vydatně odrážejí vlny o kmitočtech 20 až 80 (90 či vzácně i 100) MHz. Protože odrazy jsou téměř dokonalé, nedochází při nich k energetickým ztrátám a signály zůstávají i po překonání mnohasetkilometrových vzdáleností čitelné a silné.

Nad Evropou se mimořádná vrstva E vyskytuje zejména v období od poloviny května do poloviny srpna; pozoruhodné je, že její výskyt se opakuje po několik dnů, načež je opět několik dnů relativního klidu. K mimořádnému dálkovému šíření metrových vln, a tedy i televizních signálů dochází ponejvíce později dopoledne a později odpoledne až k večeru. Ve

zbývající části roku bývá výskyt mimořádné vrstvy E nad Evropou podstatně slabší a k uvedeným jevům prakticky nedochází.

Zbývá otázka, co je příčinou tohoto zajímavého jevu. Dnes je známa celá řada mechanismů, vedoucích k výskytu mimořádné vrstvy E — od ionizace při vniknutí meteorického prachu přes vliv tropických bouřek až po určité termické pochody, probíhající v určitém ročním období v nižší ionosféře. V našich krajinách jde hlavně o tuto třetí příčinu, avšak někdy v zimě lze prokázat i vliv prachu z některých meteorických rojů.

A tak až se vám bude kazit poslech domácího televizního programu, vzpomeňte si na tenkou, ale výraznou vrstvu elektronů, která sto kilometrů nad našimi hlavami odráží vlny, které by jinak odrážet neměla. Jde v podstatě o zajímavý přírodní jev, na který jsme chtěli touto formou upozornit.

Třicet let kybernetiky

Do roku 1948 slovo *kybernetika* nikomu nic neříkalo. Pouze ti, kdo uměli řecky, by bývali mohli podat vysvětlení, že asi souvisí s řeckým slovem *kybernetes*, tj. kormidelník. Před třiceti lety vyšlo dílo významného amerického matematika *Norberta Wienera* (1894—1964), nazvané *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine*. Tato kniha položila základ nové vědní disciplíny, kterou Wiener charakterizoval jako nauku o řízení a sdělování v živých organismech a ve strojích.

Slova kybernetika a kybernetický velmi rychle pronikla mezi širší veřejnost. Snad není nikoho, kdo by neměl aspoň neurčitou představu o nich a nespojoval je např. se samočinnými počítači, automatizovanými systémy řízení nebo kapesními kalkulačkami.

Kybernetika se po třicet let prudce vyvíjela. Dnešní kybernetiku tvoří rozsáhlý komplex matematických teorií. Patří do ní např. teorie informace, teorie automatické regulace, teorie strategických her, statistického rozhodování, teorie automatů atd. Kybernetika ovlivnila i školství. Objevily se např. nejrůznější typy vyučovacích strojů.

Wienerova kniha *Cybernetics* byla přeložena do češtiny a pod názvem *Kybernetika* ji vydalo v roce 1960 pražské Státní nakladatelství technické literatury.

jm

Beseda členářů k 430. výročí narození Giordana Bruna

JOSEF KOTYK, Pardubice

Kdo se snaží poučit, musí umět především pochybovat. Pochybnosti vedou k zjevení pravdy.

Aristoteles.

Učitel: Od Aristotela (384—322 před n. l.) až po Keplera (1571 až 1630) si učenci představovali, že stálice jsou připevněny na sféře (kulové ploše), která ohraničuje svět. Za touto domněle tenkou skořápkou nebylo podle nich už nic, zhoula nic. Podrobné studium řecké filosofie a představ Koperníkových podnítilo teprve *Giordana Bruna* (1548—1600), nejhlubšího myslitele období renesance, k pokusu o nový názor kosmický.

Eva: Co je základní ideou učení Giordana Bruna?

Učitel: Základní ideou jeho učení je *nekonečnost vesmíru*. Podle Giordana Bruna neexistuje sféra, která by ohraničovala svět. Uzavřený svět středověku nahradil Bruno nekonečným vesmírem, který nemá ani středu ani obvodu. Vesmír Giordana Bruna je podle duchaplných slov francouzského filosofa Blaise Pascala (1623—1662) „une sphère infinie, dont le centre est partout, la circonférence nulle part“, tj. sférou nekonečnou, jejíž střed je všude a obvod nikde...¹⁾ Za tuto svou pravdu položil Bruno dne 17. února 1600 na hranici v Římě život.

Jan: Zdá se však, že marně. Učíme se přece stále ještě o nebeské klenbě.

Ida: Cituji např. verše Nerudových „Písní kosmických“:

„Před žádnou, žádnou záhadou
své šíje neskloníme,
o nebes klenby nejzazší
svým duchem zazvoníme!“

Jan: Předpokládaná existence nebeské klenby odporuje učení Giordana Bruna. Ovšem: Básnění — studujících hlav mámení...

Iva: Nikoli. Obloha se nám jeví jako polokulovitá klenba na všech stranách k obzoru se sklánějící, vycházení a zapadání hvězd nás vede pak k tomu, že si ji doplňujeme druhou polovicí (pod obzorem) na celou kouli.

Ida: Představa světové koule je dílem subjektivity našich vjemů zrakových. Kosmickému názoru Giordana Bruna ani Pascalovým slo-

¹⁾ Viz Blaise Pascal: *Pensées* XVII., 1.

vům o nekonečné sféře, jejíž střed je všude a obvod nikde, to tedy neodporuje.

Ema: Při studiu vzájemných poloh hvězd, promítnutých na světovou kouli, užíváme proto sférických souřadnic. Zkušenost s užitím sférické trigonometrie ukázala, že tímto způsobem můžeme vystihnout zdánlivé pohyby hvězd přímo ideálně.

Učitel: Ve skutečnosti však se nám nejeví obloha jako polokoule, nýbrž jako velmi zploštělá bál, jejíž profilovou křivku lze znázorniti spíše obloukem hyperboly. Snadno se o tom přesvědčíte, jestliže si vyhledáte nějakou hvězdu, která podle vašeho odhadu pŕlí vzdálenost od zenitu (nadhlavníku) k obzoru, a určíte pak její výšku strojem; ukazuje se, že měří místo odhadnutých 45° jen asi 23°, je tedy mnohem menší.

Eva: Obdobně průměr Měsíce se nám jeví u obzoru asi pětikrát větší než v době, kdy toto těleso dosahuje své největší výšky nad obzorem.

Iva: Příčinou toho je snad refrakce, lom světla ovzduším.

Ema: Přičítat tyto jevy refrakci nelze; ta k jejich vysvětlení nestačí.

Jan: Giordano Bruno přinesl svůj život v oběť smělé představě o nekonečnosti vesmíru marně. Čtyři století po něm vedeme ještě spory o nebeské klenbě a jejím tvaru. Astronomie — žádné vědění, toliko smyslů mámení...

Eva: Psáno bylo proto již v pověstném zákoně byzantském: „Nikdo nechť nevchází v radu s věstcem nebo matematikem. Střezte se také fyziků a lidí jim podobných, čarodějů, kouzelníků i hvězdopравců...“

Jan: V záležitostech nebeských věřím ode dneška jen kosmonautům!

Literatura.

Podnětem k besedě našich čtenářů byly autorovy články v ROZHLEDECH „O vývoji heliocentrické soustavy“ (roč. 51, čís. 5, 6 a 7) a „Giordano Bruno“ (roč. 54 čís. 3).

Ze zahraničních časopisů

Ze sovětského časopisu *Kvant*:

Řešte rovnice:

$$1. \sqrt[3]{24+x} + \sqrt[3]{12-x} = 6,$$

$$2. x^2 + \sqrt{x+5} = 5,$$

$$3. \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1 - x,$$

$$4. 2 \log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1,$$

$$5. \log_2 \sin x - \log_2 \cos x - \log_2(1 - \operatorname{tg} x) - \log_2(1 + \operatorname{tg} x) = 1$$

6. Řešte soustavu rovnic:

$$\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2,$$

$$x + y = 12$$

7. Dokažte, že pro úhly α, β, γ trojúhelníku platí
 $\sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$

Z jugoslávského časopisu *Matematičko-fizički list*:

8. Napište tři po sobě jdoucí lichá přirozená čísla, jejichž součet čtverců je čtyřciferné číslo napsané stejnými číslicemi.

9. Které číslo vyhovuje rovnici: $(r + o + m + a)^4 = \bar{r} \bar{o} \bar{m} \bar{a}$?

10. Najděte přirozené číslo n , pro něž je výraz

$$n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 \quad \text{úplný čtverec.}$$

11. Přirozené číslo n dělené šesti dává zbytek 4 a dělené patnácti zbytek 7. Jaký je zbytek po dělení třiceti?

12. Tvoří-li čísla x, y, z aritmetickou posloupnost, potom i čísla $x^2 + xy + y^2, x^2 + xz + z^2, y^2 + yz + z^2$ tvoří aritmetickou posloupnost. Dokažte.

13. Řešte rovnici: $32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 = 0$.

14. Dokažte, že pro $a + b \geq 1$ platí $a^4 + b^4 \geq 0,125$.

15. Vypočtěte hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$$

Některé výsledky:

$$1. x = 3, \quad 2. x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \quad 3. x = 1, \quad 4. x = -17,$$

$$5. x = \arctg \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}, \quad 6. x = 5, y = 7, \quad 8. 41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555,$$

$$9. 2401, \quad 10. n = 3, \quad 11. 22, \quad 13. 1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \quad 15. 2abc(a+b+c)^3.$$

Doc. Ota Setzer

recenze

A. P. Juškevič:

Dějiny matematiky ve středověku.

Academia 1977, 448 stran, vázaný
výtisk Kčs 65.

Široce koncipovaná kniha zahrnuje rozvoj matematiky od 5. do 15. století s využitím prací sovětských historiků z padesátých let (originál knihy vyšel v Moskvě 1961). Autor sám je vedoucím pracovníkem Ústavu pro dějiny přírodních věd a techniky v SSSR. Prověrkou úspěchu knihy je skutečnost, že již vyšel její anglický, francouzský, japonský, německý a rumunský překlad.

Dílo je členěno do kapitol se zeměpisným rozdělením: I. Čína, II. Indie, III. Islámské země, IV. Evropa. Zaslíbený úvod orientuje čtenáře o starověké matematice s její těsnou návazností na společenskou strukturu a o vzájemném ovlivňování různých matematických disciplín. Vedle zvláštností rozvoje matematiky v jednotlivých zemích podává autor i jejich vzájemný vliv a hledá rámcovou charakteristiku středověké matematiky ve srovnání se starověkem a novověkem. Soupis 332 literárních pramenů (z nichž čtyři jsou od českých autorů) byl doplněn autorem (1975). K českému překladu je připojena zvláštní autorova předmluva. Obrácení znaménka zakresleného na str. 407 čtenář snadno postřehne. Vzorná úprava,

kterou nakladatelství svým publikacím věnuje, zvyšuje přitažlivost díla.

S ohledem na zpracované vývojové období nepřesahuje výklad (nehledíme-li na zcela ojedinělá srovnání se současnými metodami) myšlenkový rozsah středoškolské matematiky. Způsob podání s početnými nákresey a s faksimilními snímky z rozbíraných pramenů činí knihu pro zájemce seznámeného se středoškolskou látkou použitavým oddychovým čtením.

Nad nejednou reprodukcí exotických znaků si matematik — střetávající se průběžně s velmi omezenými možnostmi výběru symbolů z běžných abeced — maně posteskuje, že se běžně nesahá do symbolové zásoby starých textů! Leckde upoutá, jak nepřímá, pracná i pestře členitá cesta vedla k nalezení některých dnešních „triviálních samozřejmostí“ elementárního vzdělání. Některá chyba či nedostatek obecné myšlení někdejších nositelů matematického pokroku se může stát útěšnou sebeomluvou vlastních školských chyb.

Učiteli poskytuje kniha bohatou studnici nenáročných námětů k příležitostnému zpestření probírané látky. Závěrečný jmenný rejstřík usnadňuje hledání v knize; pro případné další vydání by neškodilo uvážít i doplnění rejstříkem věcným.

Karel Mišoň

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

assonometria ortogonale

assorbimento m

assurdo

assurdità z

asteroide m

asteroidi

astro m

atmosfera z

atomo m

attenuazione z

atto di moto m

attrazione z

— gravitazionale

aumentare

aumento m

ausiliare

automatismo m

avanti m

azimutale

azione z

baria

baricentro m

barograf m

barometro m

barra z

basse z

— inferiore

— superiore

axonometrie pravoúhlá

absorpee

nesmyslný absurdní

absurdnost

asteroid, planetka

asteroidy

hvězda

atmosfera

atom

tlumení (např. vlnění)

hybnost, impuls

přitažlivost

— gravitační

zvětšování

přístek

potravní

automorfismus

azimut

azimutální

akce působení

B

bar (jako měra tlaku)

těžisté

barograf

barometr, tlakoměr

tyč, prut, pruh (nad písmenem)

základ (mocniny, logaritmu, číselné

soustavy); základna, podstava

podstava dolní

— horní

batteria ž
battimento m
bel m
betatrone m
bilineare
binomio m
birapporto m
bifrangenza ž
bisettrice ž
bit m
biunivocità ž
biunivoco

bobina ž
— di induzione
— di induttanza
bussola ž

baterie (galvanických článků)
ráz (akustický)
bel (jako jednotka hlučnosti)
betatron
bilineární
binom, dvojčlen
dvojpoměr (čtyř bodů)
dvojlom (světla)
osa úhlu
bit (jako jednotka informace)
jednojednoznačnost
jednojednoznačný, vzájemně
jednoznačný
cívka
— indukční
— samoindukční
busola

C

calcolare
calcolatrice (macchina) ž
— analogica
— automatica
— elettronica
— ibrida
— numerica
calcolo m
— assiomatico
— delle variazioni
— differenziale
— grafico
— infinitesimale
— integrale
— meccanico
— numerico
calcolo combinatorio
calcolo logico

(vy)počítati
počítač, počítač stroj
— analogový
— samočinný
— elektronický
— hybridní
— číslicový
počet
— axiomatický
— variační
— diferenciální
— grafický
— infinitesimální
— integrální
— mechanický
— numerický
kombinatorika
výroková logika

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

4

ROČNÍK 57, 1978-1979, PROSINEC

ROČNÍK 57
PROSINEC 1978

4

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEL Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. O. Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., UNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1978.

OBSAH

Doc. J. Vyšín, CSc.: Pravděpodobnostní hra II	145
V. Černý, J. Pižút: O rozvíjení fyzikálního myšlení řešením úloh typu „Odhadněte“	157
Dr. R. Hudec: Nové blízké planety	163
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	164
S. H.: Nejmladším čtenářům	178
J. S.: Poprad 1978	179
S. Horák: Ze zahraničních časopisů	180
Dr. J. Mrázek, CSc.: Porucha není ve vašem přijímači	182
Dr. J. Mida: Kdy bude zase rok končit neděli	183
J. Kotyk: Beseda čtenářů k 430. výročí narození Giordana Bruna	185
P. Strossa: Sen	187
Recenze	189
Redakce hovoří	191
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. strana obálky

matematika

Pravděpodobnostní hra II (Pozvěme na pomoc algebru)

Doc. JAN VYŠÍN, CSc., Praha

I

„Jak víte, děti,“ začal druhého dne Petr učeně vykládat, „algebra — to je takové počítání s písmeny, kterým říkáme proměnné, někdy také neznámé. Když máme řešit nějakou úlohu pomocí algebry, je hrozně důležitá věc nápad — nápad, co budou naše neznámé. To máte tak: při hře jste si předávali jablka, zapisovali jste do okének žebříčku počty jablek, která měli hráči v rukou, sčítali jste je a odčítali. Ovšem, věc je dost složitá: některá jablka se vracela a prošla rukama jednoho hráče třeba několikrát. Představte si např. že hráč A dostal v poslední úloze 216 jablek. Z těch předal 108 jablek hráči C , ten z nich vrátil 36 hráči A , A z nich vrátil 18 hráči C , C z nich vrátil 6 hráči A , A z nich vrátil 3 hráči C a ten konečně vrátil 1 jablko j hráči A . Ale tím věc nekončila: neboť hráč A si mohl vypůjčit další jablka a s nimi mohlo jablko j putovat ještě dlouho od A k C a naopak.

Při určité partii hry se nedá mluvit jako o neznámé o počtu jablek, který má některý hráč v ruce (ten se počet mění), ale o počtu jablek, která prošla jeho rukama.*) A co je důležité: počet jablek, která prošla rukama hráče E (nebo F) je roven počtu jablek, která u něho zůstala. Proč?“

„Protože z E ani z F nevychází žádná šipka, a tedy se od E (nebo F) nemůže žádné jablko vrátit,“ vysvětloval Michal.

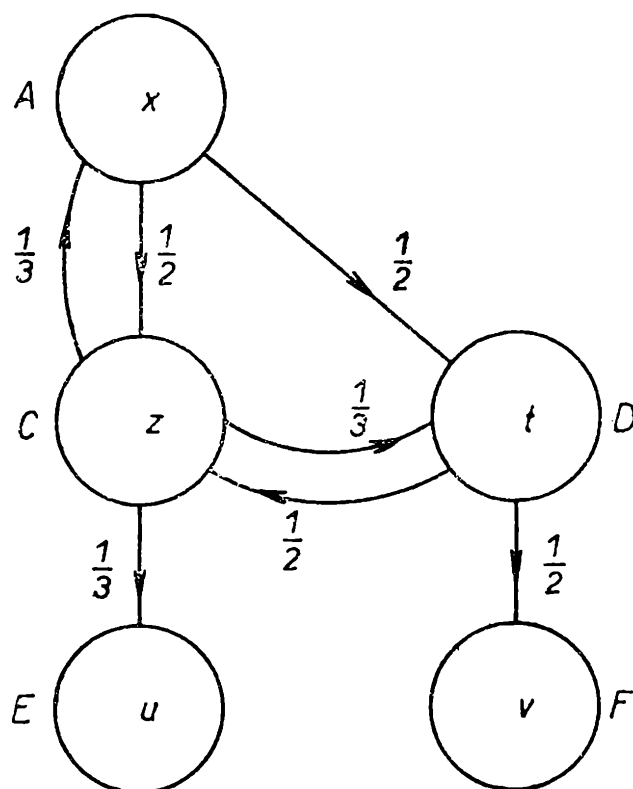
„Vida Michala,“ podotkl Pavel. „Z matiky má trojku, protože prý neumí numericky počítat, ale myslí znamenitě.“

„Tak,“ pokračoval Petr, „označíme si v poslední hře:

*) Přitom, když některé jablko prošlo rukama téhož hráče dvakrát, třikrát počítá se do počtu x nebo y nebo z ... dvakrát, třikrát.

$$\left. \begin{matrix} x \\ z \\ t \\ u \\ v \end{matrix} \right\} \quad \text{počet jablek, která prošla rukama hráče} \quad \left\{ \begin{matrix} A \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} \right.$$

Na diagramu to bude vypadat tak, jak to nakreslil Pavel (obr. 31):



Obr. 31.

„K diagramu jsou připsány podle Michalova návrhu z obr. 25 zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$. A teď budeme přepisovat pravidla hry do tvaru rovnic. A napíšeme první rovnici pro x a z .“

„Takovéhle počítání se jmenuje někdy matematizace reálných situací,“ bručel si Pavel.

„Rovnice zní:

$$x = 7 + \frac{1}{3}z \quad (1)$$

Proč? Rukama hráče A prošla jednak ta jablka, která dostal na začátku (tj. 7) a pak ta, která dostal v průběhu celé hry od C (tj. $\frac{1}{3}z$). Napište podobné rovnice pro z , t , u , v .“

Teď vystoupily děti nejdříve s rovnicemi

$$u = \frac{1}{3} z, \quad v = \frac{1}{2} t \quad (2)$$

a pak s rovnicemi

$$z = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} t, \quad (3)$$

$$t = \frac{1}{2} x + \frac{1}{3} z. \quad (4)$$

„Dobře,“ pravil Petr, „a teď uvažujme. Máme vypočítat u , v , ale to uděláme až na konci podle rovnice (2). Nikdo se nás neptá na x ; proto se x zbavíme tím, že za x dosadíme z (1) do (3) a (4). A teď se dejte, algebraické, do počítání.“

Chlapci hlásili postupně výsledky:

$$z = \frac{7}{2} + \frac{1}{6} z + \frac{1}{2} t, \quad t = \frac{5}{3} z - 7,$$

$$t = \frac{7}{2} + \frac{1}{6} z + \frac{1}{3} z, \quad t = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} z.$$

Michal hlásí, že pravé strany rovnic pro t jsou si rovny, platí tedy

$$\frac{5}{3} z - 7 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} z$$

a z toho se vypočte $z = 9$; z rovnice (1) vyjde $x = 10$ a z rovnice (4) vyjde $t = 8$.

Nakonec rovnice (2) dají $u = 3$, $v = 4$.

A Petr s Pavlem doplňují: „Kdybyste řešili stejnou úlohu pro a jablek místo 7 jablek, vyšlo by vám

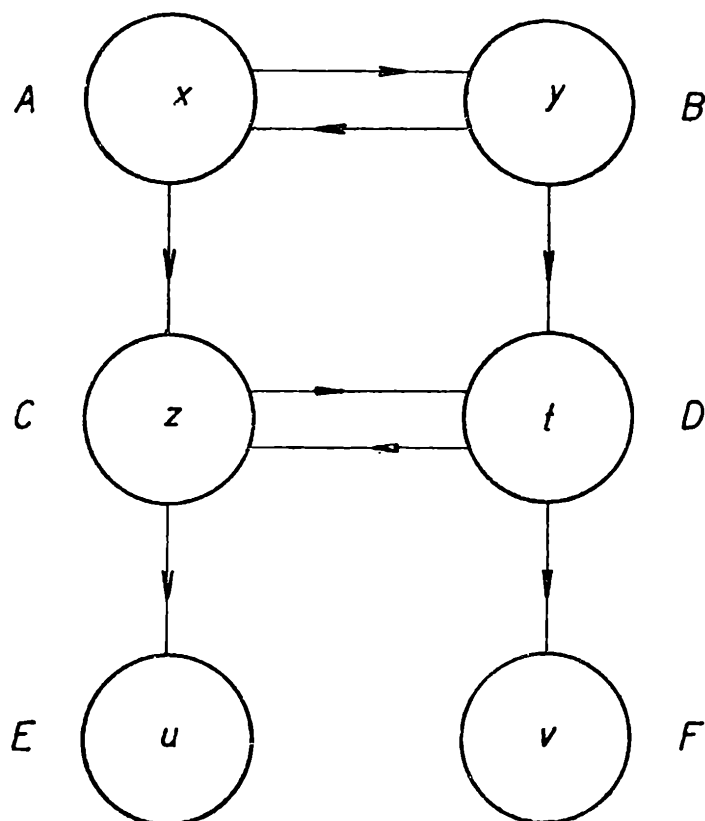
$$u = \frac{3}{7} a, \quad v = \frac{4}{7} a. \quad (5)$$

Vzorce (5) dostaneme také, když výsledky $u = 3$, $v = 4$ zvětšíme v poměru $a : 7$.“

„Ještě jedna maličkost,“ vzpomněl si Petr. „Kdyby bylo např. $a = 200$, vypočetli bychom...

$$u = 85 + \frac{5}{7}, \quad v = 114 + \frac{2}{7},$$

dohromady $u + v = 200$. Stačilo by rozdělit jedno jablko na sedminy.



Obr. 32.

Nebo také bychom řekli, že

$$u \doteq 86, \quad v \doteq 114;$$

znak $\doteq$ se čte, jak víte, *rovná se přibližně*. Pro velká a stačí udávat přibližné výsledky — na jednom jablku nezáleží.“

A teď necháme Pavla, aby si rozřešil rovnicemi svou původní úlohu. Nakreslí znovu diagram (obr. 32), v němž označí x, y, z, t, u, v počty jablek, která projdou po řadě rukama hráčů A, B, C, D, E, F ; a je počet jablek, která dostane na počátku hráč A . Z diagramu na obr. 32 pak vyčtou chlapci a děvčata sami rovnice:

$$x = a + \frac{1}{2}y, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}t, \quad t = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z; \quad (6)$$

$$u = \frac{1}{2}z, \quad v = \frac{1}{2}t. \quad (7)$$

Michal radí: vypočítat z prvních dvou rovnic (6)

$x = a + \frac{1}{4}x$, tj. $x = \frac{4}{3}a$, $y = \frac{2}{3}a$ a dosadit do druhých dvou rovnic (6); vyjde

$$z = \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}t, \quad t = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}z$$

a dále

$$z = \frac{2}{3}a + \frac{1}{6}a + \frac{1}{4}z, \quad z = \frac{10}{9}a, \quad t = \frac{1}{3}a + \frac{5}{9}a;$$

tj.

$$t = \frac{8}{9}a.$$

Podle (7) pak vyjde

$$u = \frac{5}{9}a, \quad v = \frac{4}{9}a, \quad u + v = a. \quad (8)$$

Konečný výsledek je

$$x = \frac{4}{3}a, \quad y = \frac{2}{3}a, \quad z = \frac{10}{9}a, \quad t = \frac{8}{9}a, \quad u = \frac{5}{9}a, \quad v = \frac{4}{9}a. \quad (V)$$

„A což kdybychom předchozí hru pozměnili takto: diagram by zůstal stejný, ale na začátku by dostal hráč *A* *a* jablek a hráč *B* *b* jablek,“ nadhodil Pavel.

Děti hned zjistily, že rovnice (7) se pak nezmění a z rovnic (6) se změní jen druhá; ta bude znít:

$$y = b + \frac{1}{2}x.$$

Jejím spojením s první rovnicí (6) dostaneme

$$x = a + \frac{b}{2} + \frac{x}{4},$$

tj.

$$x = \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}b, \quad y = \frac{2}{3}a + \frac{4}{3}b. \quad (9)$$

Za *x* a *y* dosadíme pak do třetí a čtvrté rovnice (6) a vypočteme *z* a *t*:

$$z = \frac{10}{9}a + \frac{8}{9}b, \quad t = \frac{8}{9}a + \frac{10}{9}b. \quad (10)$$

Nakonec z rovnic (7) vypočítáme

$$u = \frac{5}{9}a + \frac{4}{9}b, \quad v = \frac{4}{9}a + \frac{5}{9}b, \quad u + v = a + b. \quad (11)$$

Michal se domáhá slova. „Stačí vypočítat *x*, *z*, *u*; ostatní neznámé *y*, *t*, *v* z toho dostaneme výměnou *a*, *b*, protože celý diagram na obr. 32 je souměrný podle svislé osy.“

„Máš pravdu, Michale,“ potvrdil Pavel, „a uděláme si ještě jednu číselnou kontrolu. Zvolíme $a = 12$, $b = 15$ — to už jsme kdysi počítali. Podle vzorců (11) vyjde

$$u = \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = 13 + \frac{1}{3},$$

$$v = \frac{16}{3} + \frac{25}{3} = 13 + \frac{2}{3}.$$

A teď to ještě vypočteme „žebříčkem“, což mistrně provedl na tabuli opět Michal (obr. 33):

12	15		3	1	1
					1
		12	12	12	12
	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
13	13	13	$13 + \frac{1}{3}$	$13 + \frac{1}{3}$	$13 + \frac{2}{3}$

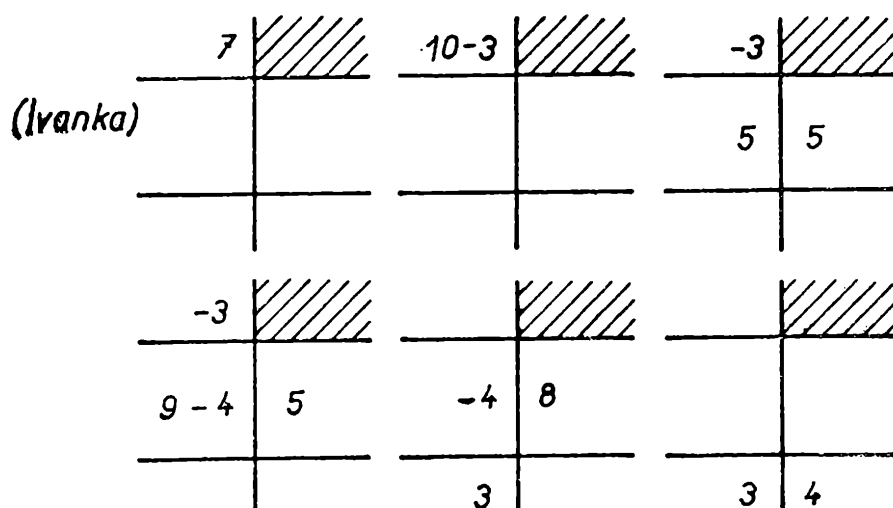
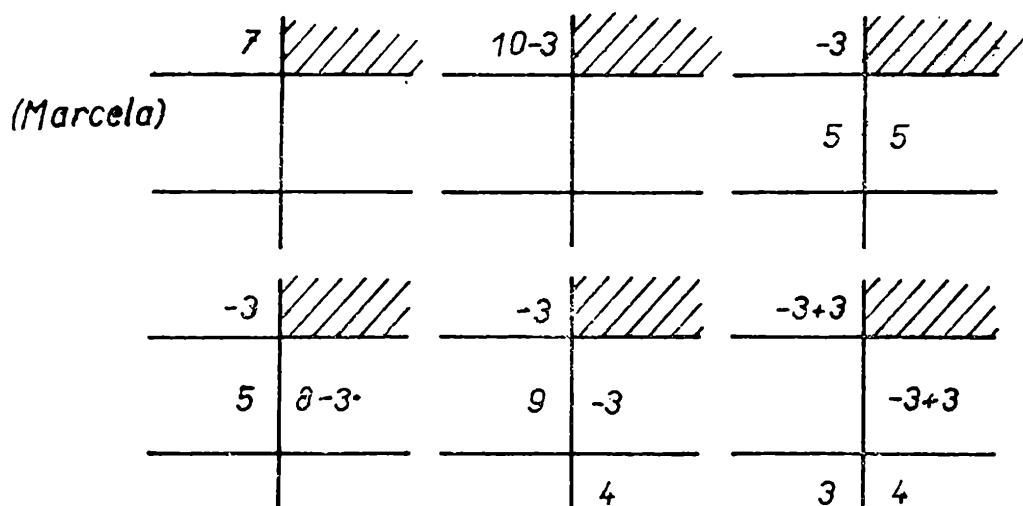
Obr. 33

Pro dnešek končíme a příští besedu věnujeme konečně vyprávění, jak taková hra vznikne a k čemu může být dobrá.“

II

Na pátou schůzku „matematických badoušů“ (tj. badatelů), jak se začalo říkat v táboře těmto shromážděním, sešlo se ještě více pionýrů než na předchozí čtyři. Řada chlapců a děvčat se nahrnula k tabuli a předváděli si své výpočty a kouzla s žebříčkovým schématem.

„Tak to ne, mládeži,“ mírnili je Petr i Pavel, „tohle už začíná být hračkaření. Připouštějí se jen takové výpočty, na kterých je něco zajímavého. Například tuhle Ivanka a Marcela mají krátké a vtipné výpočty úlohy:



Obr. 34

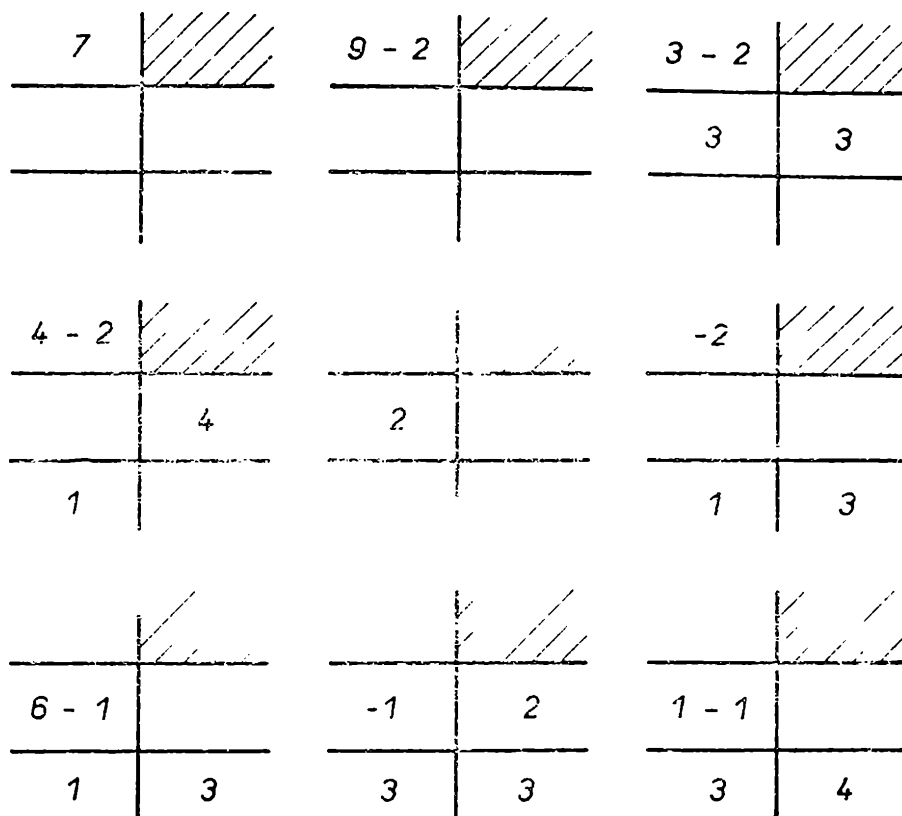
Nebo další výpočet Valentinův (obr. 35).

Ale nejvíc bychom cenili výpočet Michalův jedné dřívější úlohy (obr. 36) s žebříčkem o šesti polích.

A víte proč? Protože Michal použil poprvé rozkladu záporného čísla; podívejte se na obr. 37

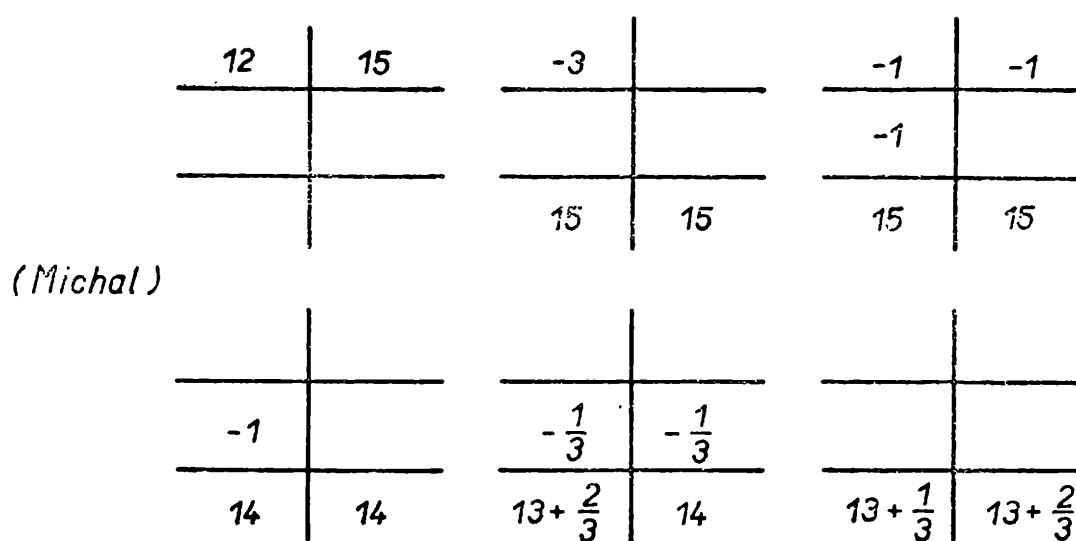
„Ale teď něco nového,“ ujal se slova Petr. „Nakresleme si ještě jednou původní diagramy našich dvou úloh (obr. 38).

A představte si, že by *A* byla vstupní hala obchodního domu, *B*, *C*, *D* prodejní haly a *E*, *F* výstupní haly — z nichž se např. přechází do dalšího patra. Cirkulace návštěvníků (tj. jejich procházení halami) by umožňovaly *jednosměrné* chodby, naznačené obloučky s šipkami. Přitom se počítá, že se návštěvníci vycházející z každé haly rozdělí stejnoměrně do všech průchodů, které z této haly vycházejí. Tak třeba na druhém obráz-



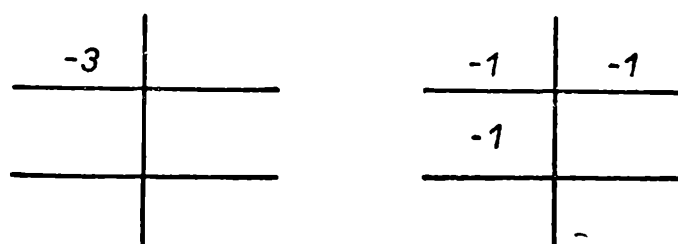
(Valentin)

Obr. 35

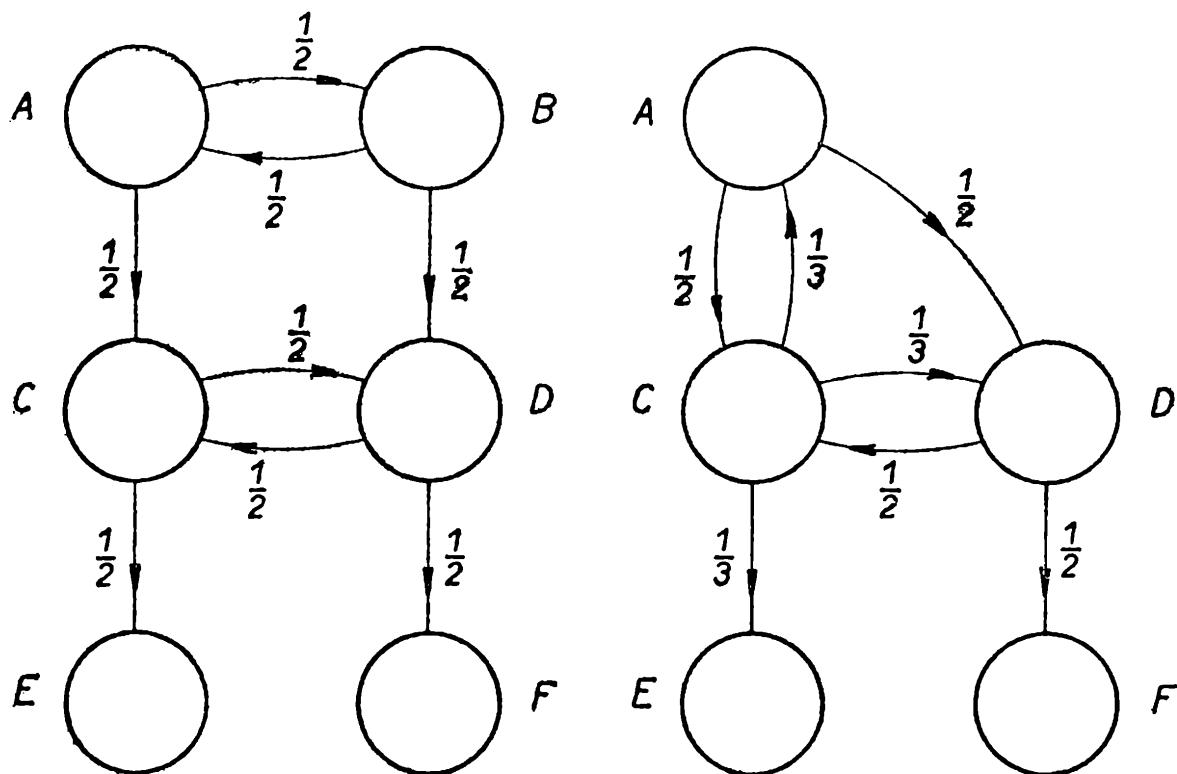


(Michal)

Obr. 36



Obr. 37



Obr. 38

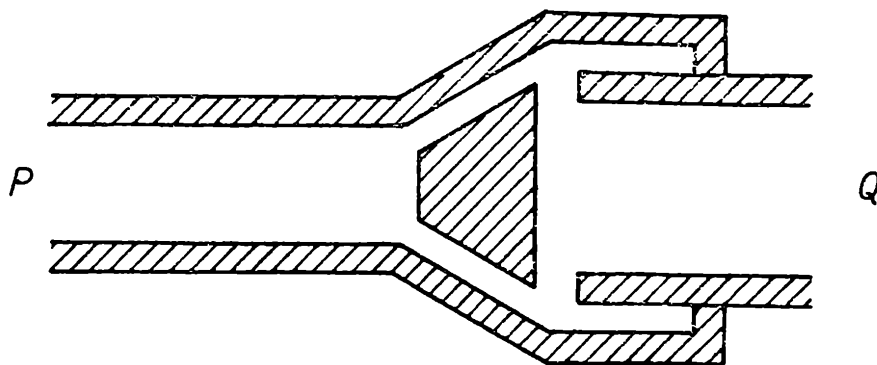
ku 38 budou návštěvníci vycházet z haly C třemi průchody **CA**, **CD**, **CE**, a to každým asi $\frac{1}{3}$ osob z C .

Otázka zní: Kolik přibližně osob projde výstupními halami E , F z a osob, které vstoupily do haly A ?

Pionýři volali jeden přes druhého: „To jsme přece už rozřešili, to jsou ty žebříčkové diagramy! Na prvním obrázku projde halou E $\frac{5}{9}$ návštěvníků, halou F $\frac{4}{9}$. Na druhém obrázku projdou halou E $\frac{3}{7}$ návštěvníků a halou F $\frac{4}{7}$.“

„Tak vidíte,“ ujal se slova zase Petr, „převážování jablek — mohli bychom si představit jakoukoli přepravu kusového zboží s překládkami nebo cirkulace osob v obchodním domě je matematicky znázorněna týmiž schématy na obr. 38. Můžeme říci, že tato schémata jsou *matematickým vyjádřením* (formulací) dvou různých situací ze života nebo obráceně, že tyto situace jsou *dva modely* téhož abstraktního schématu.“

„Já bych věděl ještě o jednom modelu,“ ozval se Pavel. „Představte si, že kruhy A , B , C , D , E , F na obr. 38 představují komory ve vodovodním potrubí; jsou spojeny vodovodním potrubím znázorněným šipkami.



Obr. 39

Šipky znamenají, že voda může téci jen jedním směrem; toho se dá snadno dosáhnout, namontuje-li se do potrubí uzávěr s ventilem, jaký je v průřezu na obr. 39.

Zde může voda protékat ve směru PQ , ale nikoli QP . Otázka zní: Kolik litrů z a litrů vody vypuštěné do A odteče do E a kolik do F ?”

„Takových modelů,“ pokračoval Pavel, „bychom si jistě mohli vymyslet mnoho. Ale nám teď jde o něco jiného. Taková schémata, jako jsou na obr. 38, nám dovolují do určité míry předpovídat budoucnost. Představte si, že by do vstupní haly A vešlo 700 návštěvníků. Podle toho, co víme, by vyšlo východem E asi 300 osob (díváme se na druhé schéma z obr. 38), východem F asi 400 osob. Místo těch 700 osob bych však mohl požádat jednoho návštěvníka, aby navštívil obchodní dům PRIOR 700krát. Pak mohu předpovědět, že asi 300krát vyjde východem E a 400krát východem F . Samozřejmě, budou-li jeho procházky docela náhodné — nebude-li myslet na to, kudy chce vyjít, a bude-li si všímat jen vystaveného zboží.

Vidíte — a máme tu termín (odborný název) z tzv. *teorie pravděpodobnosti*, která se takovýmito úlohami zabývá:

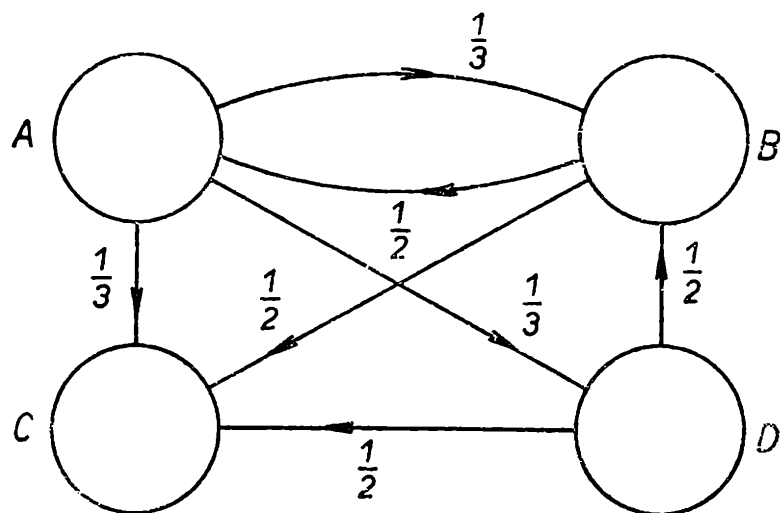
NÁHODNÉ PROCHÁZKY.“

„Nechme teď stranou modely,“ vmísil se nedočkavě Petr, „ty si vymyslíme dodatečně a vyjděme z nového abstraktního schématu. Já vám ho nakreslím starým způsobem (obr. 40).

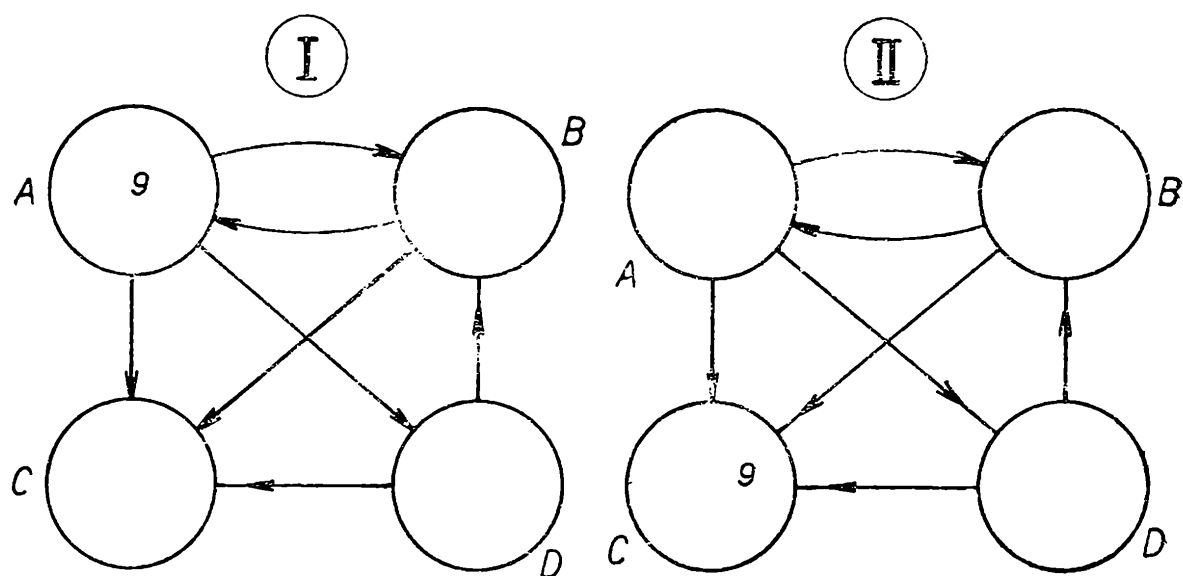
Myslím, že těm šipkám i zlomkům dobře rozumíte; všimněte si, že $\frac{1}{2}$ je připsána u těch šipek, které vycházejí z kruhu s 2 východy; $\frac{1}{3}$ je připsána u těch šipek, které vycházejí z kruhu s 3 východy.

A teď úloha zní: Do kruhu A vepíšu nějaké číslo, např. 9 a pokusíme se, zda je možné pomocí „šipkového diagramu“ přejít od schématu I ke schématu II (obr. 41).

Postup budeme zapisovat do „žebříčku“ o 4 polích...”



Obr. 40



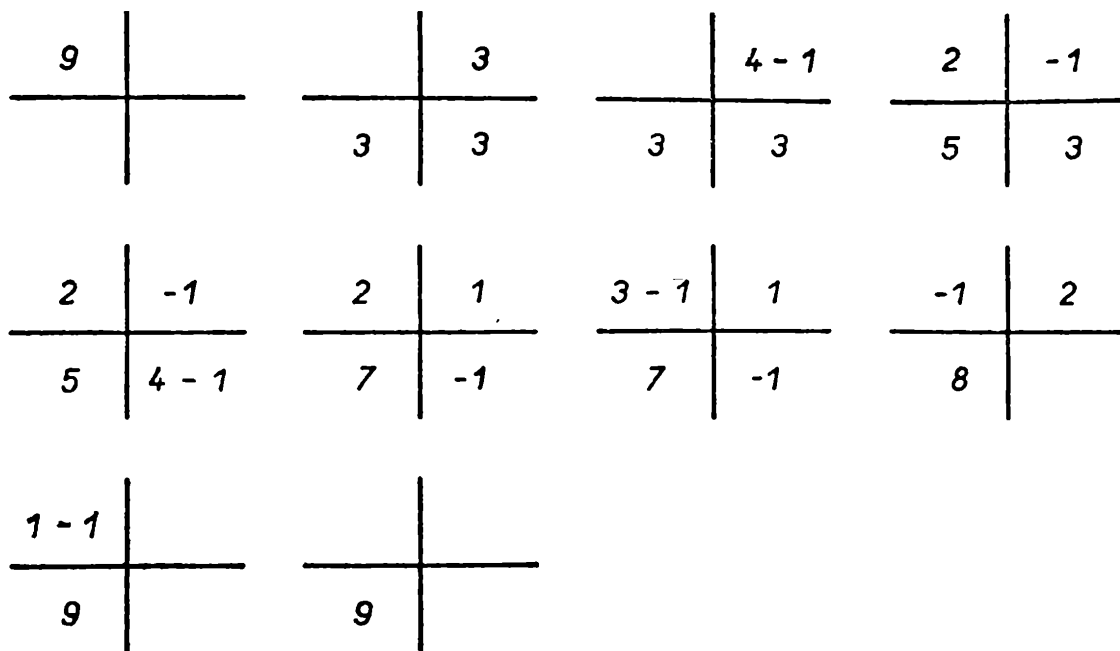
Obr. 41

Přerušil ho Michal, který se mlčky zvedl, šel k tabuli a napsal výpočet uvedený na obr. 42.

„Výborně, Michale, všech 9 se sejde u východu C,“ vpadl Pavel, „vlastně odpusťte, já už jsem zase v myšlenkách v tom obchodním domě, kde 9 lidí vešlo vchodem A Ale, Michale, měli bychom se přesvědčit, že tenhle konec bude mít každé putování návštěvníků, ať jich vejde vchodem A kolik chce...“

„Já bych to rozřešil rovnicemi,“ přihlásil se dovedný „algebraik“ Valentin. „Označím x , y , z , t , počty lidí, kteří projdou halami A , B , C , D a a počet lidí, kteří na začátku vstoupili do haly A . Pak dostaneme tyto rovnice

$$x = a + \frac{y}{2}, \quad y = \frac{x}{3} + \frac{t}{2}, \quad z = \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{t}{2}, \quad t = \frac{x}{3}, \quad (1)$$



Obr. 42

Z druhé a třetí rovnice dostaneme

$$z - y = \frac{y}{2},$$

a z toho vypočteme

$$z = \frac{3}{2} y. \quad (2)$$

Dosadíme-li za t ze čtvrté rovnice (1) do druhé, dostaneme $y = \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$, neboli

$$y = \frac{1}{2} x. \quad (3)$$

Dosadíme-li za y z (3) do (1), vyjde $x = a + \frac{1}{4} x$, čili

$$x = \frac{4}{3} a$$

a dále pomocí (3), (2) a (1)

$$y = \frac{2}{3} a, \quad z = a, \quad t = \frac{4}{9} a. \quad (4)$$

Protože vyšlo $z = a$ pro každé a a protože z C nemůže nikdo přejít do jiné haly, sejdou se všichni návštěvníci v hale C .“

Všichni zatleskali Valentinovi za jeho přednášku, ale Michal potřásl hlavou, nebyl spokojen. Pavel si toho všiml.

„Pro dnešek už dost, přetáhli jsme,“ prohlásil. „Příště nám vyloží Michal, s čím není spokojen.“

(Pokračování)

fyzika

0 rozvíjaní fyzikálneho myslenia riešením úloh typu „Odhadnite...“

VLADIMÍR ČERNÝ a JÁN PIŠÚT,
Prírodovedná fakulta Univerzity Komenského, Bratislava

1. Úvod

Istému fyzikovi sa pripisuje tvrdenie, podľa ktorého vraj každý tvorivo pracujúci fyzik má schopnosť „dostávať nápady“. Ťažkosť je však v tom, že drvivá väčšina takýchto nápadov sa časom ukáže ako neužitočná alebo chybná. Výnimočný pracovník sa vraj nevyznačuje tým, že by jeho „percento dobrých nápadov“ bolo väčšie, ale tým, že je schopný rýchlo rozpoznať a vylúčiť „zlé nápady“.

Úlohou tohto tvrdenia, ktoré istotne nemožno chápať celkom doslovne, je pravdepodobne naznačiť, že schopnosť rýchlej základnej orientácie pri riešení akéhokoľvek problému je vec mimoriadne užitočná. Platí to určite nielen vo fyzike, ale aj v mnohých ďalších odboroch a vôbec pri hociakej činnosti, pri ktorej treba niečo vylepšiť, vytvoriť alebo vymyslieť.

Jednou — a možno najefektívnejšou — cestou, ako takúto schopnosť rozvíjať, je riešiť veľa praktických príkladov. Mimochodom, Niels Bohr kedysi tvrdil, že odborníkom v danej oblasti je ten, kto v nej spravil najviac omylov. A počítanie príkladov je určite veľmi dobrou príležitosťou na robenie omylov.

Nechceme tu podrobne rozvádzať vo všeobecnej rovine dobre známy poznatok, že samostatné riešenie príkladov a problémov má tvoriť podstatnú časť výučby fyziky na ktorejkoľvek úrovni. Je tiež známe, že nie všetky príklady sú rovnako užitočné pri výchove žiakov, ale praktické dôsledky z tohto faktu sa vyvádzajú zriedkavejšie. Jednotvárne v ybe-

rané príklady — práve tak ako jednotvárna strava — sú síce užitočné, ale nudné a nestačia k správne mu rozvoju.

V tomto článku chceme krátko zdôrazniť užitočnosť riešenia jedného z možných typov úloh, o ktorom sa domnievame, že pomáha rozvíjať schopnosť dobrej fyzikálnej orientácie. Sú to príklady typu: „Odhadnite, ...“. V podstate sú to kvalitatívne úlohy, v ktorých sa vyžaduje nápad a veľmi približný, rádový odhad výsledku.

V nasledujúcom odstavci budeme hovoriť o úlohách typu „odhadnite...“, v rámci „praktickej fyziky“. Neskôr si všimneme niektoré spoločné znaky takýchto príkladov.

To, čo sa snažíme povedať, budeme vykladať najmä pomocou ukážkových príkladov.

2. Príklady typu „odhadnite...“ z praktického života

Hoci ukážkové úlohy budú mať zväčša elementárny charakter, nebudeme sa zameriavať na určitý špeciálny typ školenia. Pod pojmom „žiak“ budeme mať na mysli tak žiaka ako aj poslucháča a pod pojmom „učiteľ“ učiteľa na základnej, strednej aj vysokej škole. Domnievame sa totiž, že úlohy spomínaného typu môžu byť užitočné na ktoromkoľvek stupni výučby fyziky.

Úvodom na ilustráciu jednoduchý príklad:

Odhadnite tlak, ktorý je potrebné dosiahnuť v hydraulickom systéme vyklápacieho nákladného auta.

Rádový odhad je nenáročný. Potrebná sila, ktorú je nutné vyvinúť, je asi $10 \cdot 10^4$ N (náklad ~ 10 t) a obsah piestu zdviháka isto možno rádovo odhadnúť na 100 cm^2 . Potrebný tlak teda bude asi 10 MPa. Hrubý výpočet je založený na tom, že na základe praktickej skúsenosti dá sa predstaviť si také auto i príslušný hydraulický valec. Pri diskusii reálnosti výsledku by sme pravdepodobne dospeli k tomu, že pôjde o horný odhad tlaku a teda v skutočnosti možno očakávať tlak niekoľko pascalov.

Predovšetkým si treba všimnúť, že takýto príklad nemá tzv. úplné zadanie. Chýbajúce údaje si riešiteľ musí doplniť sám a to často nie iba vyhľadávaním vo vhodných tabuľkách, ale priamo skúsenostnou predstavou a na jej základe vykonaným odhadom.

Táto skutočnosť má dvojaký význam.

Po prvé, čiastočne sa tak obmedzí možnosť použiť niektoré nefyzikálne postupy pri riešení. Napríklad pri úplnom zadaní úlohy sa dá niektorý problém vyriešiť aj tak, že žiak namiesto fyzikálnej analýzy hľadá v pamäti vzorec, do ktorého by sa dali zadané veličiny dosadiť.

Po druhé (a to sa nám zdá podstatnejšie) to, že hodnoty veličín treba nájsť na prakticko-skúsenostnom základe, môže utvrdiť či zafixovať u žiaka predstavu, že fyzika je veda o reálnom svete a teda aj o veciach bezprostredne okolo nás.

Nepochybujeme o tom, že žiaci takúto predstavu majú. Sotva sa nájde žiak, ktorý by nevedel, že cesta rýchlikom z Bratislavy do Prahy trvá dlhšie ako do Brna, a že táto otázka spadá do problematiky skúmanej mechanikou. Napriek tomu sme sa už viackrát stretli so „vzorcom“ typu $s = v/t$, ktorý ukazuje, že u žiakov sa často stretávame so štylizáciou fyziky do úlohy Vedy o Vzorcach a Odvodzovaní.

Domnievame sa práve, že riešenie odhadových úloh môže pomôcť vypestovať „fyzikálnejší pohľad“ na formálne operácie so vzorcami, ktoré sú, pravda, vo fyzike často nevyhnutné.

Poznamenávame, že úlohy spomínaného typu majú veľmi blízko k tzv. problémovým úlohám, ktorým sa v ostatnom čase po práve udeľuje zvýšená pozornosť. Pri riešení problémových úloh sa však obvykle (možno, že proti pôvodnému záveru ich autorov) v praxi kvantitatívna stránka nepovažuje za súčasť riešenia. Napríklad klasická úloha: „Prečo sa pri spájaní koľajníc nechávajú po určitej dĺžke medzery?“ sa zvyčajne považuje za vyriešenú odpoveďou: „Lebo sa s rastúcou teplotou rozťahujú.“ Domnievame sa, že účinnejším by bolo vykonať i kvantitatívny odhad potrebnej medzery.

Cieľom by teda malo byť, aby žiak poznal nielen zákon $U = R \cdot I$, ale mal aj predstavu o typických hodnotách napätí, prúdov a odporov v praktických situáciách. Prípadne aby (na vyššej úrovni) poznal nielen Schrödingerovu rovnicu, ale aj vedel odhadnúť, aký je rozdiel medzi rotačným a vibračným spektrom molekuly.

Namiesto ďalších úvah uveďme ešte niekoľko nesystematicky vybraných príkladov spolu s náznakom ich riešenia:

1. Odhadnite, či kompresný pomer spaľovacieho motora v aute je (rádove) 1:2, 1:10, alebo 1:100.
2. Navrhujete vyrobiť trubky od vstrekovacieho čerpadla k valcom dieselového motora z mäkkej plastickej látky alebo z ocele?
3. Aký príkon ohrievacieho telesa navrhujete použiť v automatickej práčke?
4. Aké poistky sa pravdepodobne používajú v bytových rozvodoch prúdu 0,1 A, 10 A, 100 A?
5. Aké sú typické energie elektrónov v obale atómu?
6. Koľko tepla sa uvoľní spálením 1 kg uhlia?

Riešenie (heslovite):

1. Pri adiabatickom stlačení: $TV^{\kappa-1} = T_0V_0^{\kappa-1}$, $\kappa = 1,4$. Teplota po stlačení nemôže presiahnuť rádove 500 °C. Bude treba $V/V_0 \sim (300/800)$
 $\frac{1}{\kappa - 1} \approx 1 : 10$.

2. Vo valci po stlačení $pV^* = p_0 V_0^*, \kappa = 1,4$. Pre kompresný pomer $> 1 : 10$ bude tlak $p/p_0 > 25$. Dá sa teda očakávať, že pre rýchle vstreknutia paliva je potrebný tlak rádovo 10 MPa.

3. Treba zohriať rádovo 10 l vody asi o 60 °C za približne 30 min pri účinnosti $\sim 70 \%$. Príkon 2000 W.

4. Odhad príkonu bežných spotrebičov. Odhad prúdu pri 220 V. Poistky ~ 10 A.

5. Rozmer atómu je rádovo $r \sim 10^{-10}$ m. Potenciálna energia v coulombovskom poli

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r}.$$

Pre náboj jedného elektrónu $|Q| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C dostaneme $W = 2 \cdot 10^{-18}$ J = 10 eV.

6. Pri chemických reakciách možno očakávať energetické zmeny na úrovni 1 eV/atóm. V 1 kg uhlia je $\frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 10^{26}$ atómov. Možno očakávať energiu rádovo $0,5 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ J = $8 \cdot 10^3$ kJ (čo rádovo súhlasí so skutočnosťou).

Domnievame sa, že tieto príklady dostatočne ilustrujú typ úloh, ktoré sme mali na mysli. Na prvý pohľad by sa snáď mohlo zdať, že úlohy typu „Odhadnite . . . “ sa najvhodnejšie zostavujú v kontexte praktickej skúsenosti denného života. Ale nie je to pravda.

3. Úlohy typu „Odhadnite . . . “ v širšom kontexte

Všimnime si ešte raz hlavné črty príkladov, ktoré sme doteraz uvádzali.

— Príklady nemali úplné zadanie. Neúplné zadanie bolo doplnené znalosťami z praktického života, ktoré žiak má z vlastnej skúsenosti. Takto sa spájajú fyzikálne poznatky s praktickou skúsenosťou. Možno tiež povedať, že príklady boli zadávané z oblasti, s ktorou je žiak, takrečeno FAMILIÁRNY. Na druhej strane príklady tohto typu k získaniu familiárnosti značne napomáhajú.

— Pri riešení bolo vždy treba „vyhmatnúť“ podstatu praktického problému a spojiť ju s príslušnými fyzikálnymi poznatkami (toto štádium budeme v ďalšom nazývať VÝHMAT).

— V každom príklade treba po „výhmate“ previesť hrubý rádový odhad výsledku. Toto štádium budeme nazývať „PREVEDENIE ODHADU“.

Úlohy typu „Odhadnite . . . “ na jednej strane vyžadujú „familiárnosť“ s predmetom a na druhej strane túto „familiárnosť“ podporujú. Tento aspekt je veľmi dôležitý najmä pri výučbe základov atómovej fyziky.

Žiak tu totiž postráda skúsenostné poznatky a hrozí nebezpečenstvo, že teoretický výklad „ostane visieť vo vzduchu“ ak ho nesprevádza zafixovanie predstavy o typických veľkostiach jednotlivých veličín, ktoré tu prichádzajú do úvahy.

Domnievame sa dokonca, že zoznámenie sa s problematikou by malo začínať sériou úloh tohto typu a až potom by mal (na základe takto získanej skúsenosti) nasledovať teoretický výklad.

Aby sme tento bod ilustrovali, uvedieme opäť príklad: Odhadnite veľkosť intenzity elektrického poľa pôsobiaceho na elektrón v atóme vodíka!

Úlohu možno riešiť niekoľkými spôsobmi:

a) Intenzita elektrického poľa bodového náboja (protónu) vo vzdialenosti r je daná vzťahom $E = Ke/r$, kde $K = 1/4\pi\epsilon_0$. Dosadíme za náboj elektrónu $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, za konštantu $K = 9 \cdot 10^9$ N.m².C⁻², a za r polomer atómu vodíka $r = 0,5 \cdot 10^{-10}$ m a pracne dospejeme k výsledku.

b) Spomenieme si na to, že typická energia elektrónu v atóme vodíka je okolo 10 eV, typický rozdiel napätia je preto 10 V. Typická vzdialenosť je $a \approx 10^{-10}$ m. Odtiaľ pre intenzitu poľa máme $E \approx 10$ V/ 10^{-10} m $\approx 10^{11}$ Vm⁻¹.

Odhad týmto druhým spôsobom je oveľa rýchlejší a oveľa „fyzikálnejší“. Pri výpočte sme nedosadzovali do vzorca základné konštanty ako e (náboj elektrónu), a (Bohrov polomer), K (konštanta v Coulombovom zákone) ale priamo sme využili znalosť veličín typických pre pohyb elektrónu v atóme.

Takýto spôsob odhadu budeme nazývať „ODHAD ZAVESENÍM“ (pretože odhadovaná veličina je „zavesená“ na typické veličiny z danej oblasti). Tento spôsob odhadu, domnievame sa, treba uprednostňovať pred skôr spomínaným „ODHADOM DOSADENÍM“.

Uvedieme ešte jednu úlohu na ilustráciu rozdielu medzi „odhadom zavesením“ a „odhadom dosadením“.

Odhadnite rádove rozdiel hmotností dvoch hadrónov lišiacich sa len veľkosťou elektrického náboja (takéto dvojice sú napr. protón a neutrón, kladný a neutrálny pión a pod.).

Riešenie dosadením

Typický rozmer hadrónu je $r \sim 10^{-15}$ m. Energia náboja e rozdeleného v priestore s lineárnym rozmerom r je $e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$. Ak sem explicitne dosadíme, dostaneme žiadaný výsledok.

Riešenie „zavesením“ na atómovú fyziku

Typická energia elektrónu v atóme je 10 eV $\approx e^2/(4\pi\epsilon_0 a)$, kde a je Bohrov polomer. Pretože rozmer hadrónu r je 10^5 krát menší ako Bohrov polomer, bude energia náboja e rozloženého v objeme o polomere r asi 10^5 krát väčšia ako elektromagnetická energia elektrónu v atóme vodíka. Teda: 10 eV. $10^5 = 10^6$ eV = 1 MeV

Riešenie „zavesením na jadrovú fyziku“

Elektrostatická energia je $e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$. Ale r je približne rovné Comptonovej vlnovej dĺžke piónu $r \sim h/m_\pi c$. Odtiaľ pre energiu máme

$$(e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c)m_\pi c^2.$$

Prvý člen v zátvorke je bezrozmerná konštanta jemnej štruktúry, rovná zhruba $(1/137)$, výraz $m_\pi c^2$ je asi 140 MeV. Výsledok je, tak ako predtým, okolo 1 MeV.

Vidieť, že riešenia „zavesením“ sú rýchlejšie, fyzikálne hlbšie a navyše podstatne znižujú možnosť omylu. Pri dosadzovaní základných konštánt do vzorca ako $e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$ sa ľahko môžeme zmýliť o niekoľko rádov.

4. Záverečné poznámky

Netrúfame si dať návod na to, ako by žiaci, s istou zárukou, mohli získať schopnosť riešiť úlohy typu „Odhadnite...“. Na to, aby žiak takéto úlohy vedel riešiť, je však určite treba, aby bol familiárny s predmetom, aby vedel previesť „výhmat“ a aby mal dostatočnú zručnosť na približné odhadnutie výsledku.

Samotný „výhmat“ je tvorivá činnosť a na takúto činnosť návodov niet. Rozhodne však pomôže, ak žiakov vedieme k tomu, aby v každom probléme hľadali „hlavný uzol“, teda to miesto, ktoré je pre riešenie podstatné. Toto miesto treba podrobne analyzovať a nájsť príslušný poznatok (zákon, vzťah), pomocou ktorého možno problém objasniť. Žiakov treba tiež viesť k tomu, aby poznali základné princípy a ich súvislosti a aby vedeli odlíšiť podstatné a principiálne veci od menej podstatných.

Ďalej asi treba zadávať žiakom úlohy, ktoré potrebujú určitý „výhmat“ a nielen mechanické dosadzovanie. Ak chce učiteľ takéto úlohy do vyučovania zaradiť, musí si ich zväčša vytvoriť sám. Nazdávame sa však, že je to činnosť nanajvýš zaujímavá, možno si pri nej vyskúšať vlastné sily a navyše možno prísť (pri vydaní konštrukcii príkladu alebo pri jeho riešení) k „radosti objaviteľského typu“ pre žiaka i pre učiteľa.

Nové blízké planetky

RNDr. RENÉ HUDEC, Praha

I v éře kosmonautiky dochází stále ještě k novým astronomickým objevům, založeným na ryze pozemských pozorováních. Připomeňme např. nedávný objev prstenců Urana či nyní oznámený objev dvou nových planetek, které se mohou těsně přiblížit k naší Zemi, o němž se v tomto článku zmíníme podrobněji.

O tom, že prostor mezi Jupiterem a Marsem není prázdný, ale že v něm obíhají oproti planetám mnohem menší tělesa — planetky neboli asteroidy — vědí astronomové již dlouho. První planetku — Ceres — objevil 1. 1. 1801 *G. Piazzi* jako objekt se značným vlastním pohybem do té doby neznámý. Do roku 1807 byly objeveny další tři velké asteroidy — Pallas, Juno a Vesta — které jsou pozorovatelné již malými dalekohledy či triedry. Dnes je známo již několik tisíc planetek, z nichž přes 2 000 má oficiální pojmenování. Naprostá většina těchto objektů obíhá mezi drahami Jupitera a Marsu, některé však obíhají mezi Marsem a Zemí a jsou i takové, které dokonce protínají dráhu naší Země.

Mezi výjimečné planetky, které se mohou přiblížit k Zemi, patří i oba nově objevené asteroidy. První z nich, označený jako 1978 CA, byl náhodně objeven 8. 2. 1978, druhý, označený 1978 DA, následoval 17. 2. 1978. Planetky objevil *H. E. Schuster* na snímcích pořízených Schmidtovou kamerou na evropské jižní observatoři v jihoamerické La Silla.

Podle nových pravidel jsou nově objevené asteroidy označovány rokem objevu a dvěma písmeny latinské abecedy. První z nich udává pořadové číslo čtrnáctidenního intervalu od počátku roku, v němž došlo k prvnímu pozorování. Druhé písmeno je doplňující a určuje pořadí objevu jednotlivých objektů v daném čtrnáctidenním intervalu. Protože první z nově objevených planetek byla poprvé pozorována 8. 2. 1978, dostala označení 1978 CA. Druhá byla objevena až o 9 dní později a nese tudíž označení 1978 DA.

Planetka 1978 CA byla v den objevu od Země vzdálena 46 miliónů km a rychle se k nám přibližovala. Nejmenší vzdálenosti — 19 miliónů km — dosáhla 8. 3. 1978. Asteroid oběhne kolem Slunce jednou za 435 dní a patří ke skupině planetek Apollo, které protínají zemskou dráhu. Dnes jich známe již 21. Planetka 1978 DA zemskou dráhu sice neprotíná, ale

těsně se k ní v perihelu přibližuje. K takovému přiblížení došlo 15. 3. 1978, kdy se objekt přiblížil k Zemi až na vzdálenost 13 miliónů km. Asteroid obíhá po protáhlé dráze mezi Jupiterem a Zemí a patří do skupiny planetek Amor, které protínají dráhu Marsu. Dnes jich známe 13. I když mají oba asteroidy značně odlišné dráhy, při svých přiblíženích k naší Zemi se vzájemně sblížily až na pouhých 3,8 miliónů km.

Na základě fotometrických a polarizačních měření bylo albedo planetky 1978 CA určeno na $0,068 \pm 0,006$, planetky 1978 DA na $0,17 \pm 0,03$. Střední průměr prvního objektu činí $1,86 \pm 0,04$ km, druhého pouhých $0,90 \pm 0,05$ km. Jde tedy o velmi malá tělesa, pozorovatelná jen díky jejich velkému přiblížení k naší planetě. A ještě jedna zajímavost. Ze světelné křivky 1978 CA byla určena doba její rotace kolem osy. Perioda rotace činí 3 hodiny a 45 minut, což je třetí nejkratší známá rotační perioda v naší sluneční soustavě vůbec.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

9. Ukažte, že je možno najít matici **A** tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

takovou, že všechny prvky $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ jsou prvočísla a také všechny prvky matice $\mathbf{A}^2$ jsou prvočísla.

(Došla 4 řešení.)

Jiří Sedláček

Řešil Jaroslav Hájek, 4. C, gymn. Bílovec:

Vyhovuje např. matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Evidentní je, že všechny prvky matice **A** jsou prvočísla. Vypočítáme nyní matici **A**². Platí

$$\mathbf{A}^2 = \begin{vmatrix} 83, & 71, & 71 \\ 71, & 83, & 71 \\ 71, & 71, & 83 \end{vmatrix}.$$

Protože čísla 83 a 71 jsou prvočísla, vidíme, že i všechny prvky matice **A**² jsou prvočísla.

Redakční poznámka. Jiný příklad uvádí ve svém řešení Jaroslav Štěpánek, 2. C gymnázia v Bílovci. Našel matici

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3, & 5, & 7 \\ 5, & 3, & 23 \\ 7, & 23, & 3 \end{vmatrix},$$

pro kterou je

$$\mathbf{A}^2 = \begin{vmatrix} 83, & 191, & 157 \\ 191, & 563, & 173 \\ 157, & 173, & 587 \end{vmatrix}.$$

Autor úlohy k tomu poznamenává, že také např. matice

$$\begin{vmatrix} 3, & 7, & 13 \\ 7, & 19, & 3 \\ 13, & 3, & 43 \end{vmatrix}$$

řeší problém, neboť její druhá mocnina je

$$\begin{vmatrix} 227, & 193, & 619 \\ 193, & 419, & 277 \\ 619, & 277, & 2027 \end{vmatrix}.$$

Všechny tři dosud uvedené matice byly souměrné. Josef Tkadlec, 3. C gymnázia v Bílovci uvádí nesouměrnou matici

$$\begin{vmatrix} 2, & 2, & 13 \\ 2, & 2, & 37 \\ 47, & 83, & 3 \end{vmatrix},$$

která také vyhovuje podmínkám, neboť její druhá mocnina je

$$\begin{vmatrix} 619, & 1087, & 139 \\ 1747, & 3079, & 211 \\ 401, & 509, & 3691 \end{vmatrix}.$$

10. Je dáno přirozené číslo n . Určete, pro kolik pořadí (permutací) $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ čísel $1, 2, \dots, n$ nabývá součet

$$|p_1 - 1| + |p_2 - 2| + \dots + |p_n - n|$$

maximální hodnoty.

(Došla 2 řešení)

Antonín Vrba

Autorovo řešení:

Nahradíme-li pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ člen $|p_j - j|$ rozdílem $p_j - j$ nebo $j - p_j$ podle toho, který z nich je nezáporný, dostaneme pro každé pořadí součet $2n$ sčítanců

$$1, 1, 2, 2, \dots, n, n, \quad (1)$$

přičemž právě u n z nich bude znaménko minus. Upravíme-li tento součet na tvar

$$1 + 1 + 2 + 2 + \dots + n + n + 2z = n(n + 1) + 2z,$$

kde z je součet zmíněných n nezáporných sčítanců, vidíme, že je maximální, právě když záporné znaménko je u prvních n sčítanců v (1) — pokud to však pro nějaké pořadí nastane. Pro pořadí $(n, n - 1, \dots, 1)$ to tak skutečně je. Snadno zjistíme, že pro lichá n je maximální součet roven $\frac{n^2 - 1}{2}$ a pro sudá n je $\frac{n^2}{2}$, což můžeme souhrnně vyjádřit jako $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ (celá část).

My však máme určit, pro kolik ze všech $n!$ pořadí příslušný součet tohoto maxima nabývá. Budeme uvažovat zvlášť pro sudá a lichá n .

Je-li $n = 2k$, maxima se nabývá právě pro všechna pořadí, kterým odpovídají součty, v nichž jsou záporná znaménka u sčítanců $1, 1, 2, 2, \dots, k, k$. Ukážeme, že to jsou právě všechna pořadí, pro která je

$$\{p_1, p_2, \dots, p_k\} = \{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}, \quad (2)$$

$$\{p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_{2k}\} = \{1, 2, \dots, k\}$$

Kdyby totiž pro nějaké $r \in \{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}$ bylo $p_r > k$, dostalo by se ze členu $|p_r - r|$ do součtu buď p_r nebo r se záporným znaménkem a součet by pak nebyl maximální. Aby byl součet maximální, musí tedy platit (2). Pro každé pořadí, které vyhovuje podmínce (2), součet zřejmě maximální je. Dostáváme tak právě $(k!)^2$ pořadí.

V případě $n = 2k + 1$ je součet maximální, právě když záporná znaménka jsou u sčítanců $1, 1, 2, 2, \dots, k, k, k + 1$. Analogicky jako v předešlém případě zjistíme, že nutná podmínka pro maximalitu součtu je

$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \dots, p_{2k+1}\} \subset \{1, 2, \dots, k + 1\}.$$

Aby byl součet maximální, musí tedy platit

$$\{p_1, p_2, \dots, p_{k+1}\} = \{k+2, k+3, \dots, 2k+1\} \cup \{v\}, \quad (3)$$

$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \dots, p_{2k+1}\} = \{1, 2, \dots, k+1\} - \{v\},$$

kde $v \in \{1, 2, \dots, k+1\}$.

Vyšetříme každou z $k+1$ disjunktních skupin pořadí, která splňují (3). Nejjednodušší situace je pro $v = k+1$. Je totiž zřejmé, že pro každé pořadí, pro něž

$$\{p_1, p_2, \dots, p_{k+1}\} = \{k+1, k+2, \dots, 2k+1\},$$

$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \dots, p_{2k+1}\} = \{1, 2, \dots, k\}$$

a kterých je právě $k! (k+1)!$, je součet maximální.

Dále předpokládejme, že $v < k+1$. Aby byl součet maximální, musí být $p_{k+1} = v$. Jinak by totiž bylo $v = p_j$ pro některé $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ a z členu $|p_j - j| = |v - j|$ by se do součtu dostalo buď v nebo j s kladným znaménkem, takže by součet nebyl maximální. Nutná podmínka pro maximalitu je v tomto případě tedy

$$\{p_1, p_2, \dots, p_k\} = \{k+2, k+3, \dots, 2k+1\},$$

$$p_{k+1} = v,$$

$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \dots, p_{2k+1}\} = \{1, 2, \dots, k+1\} - \{v\}.$$

Hned je však vidět, že tato podmínka je pro maximalitu také postačující. Pro každé $v \in \{1, 2, \dots, k\}$ tak dostáváme právě $(k!)^2$ pořadí.

Zjistili jsme, že pro liché n je součet maximální právě pro

$$k! (k+1)! + k (k!)^2 = (2k+1)(k!)^2$$

pořadí.

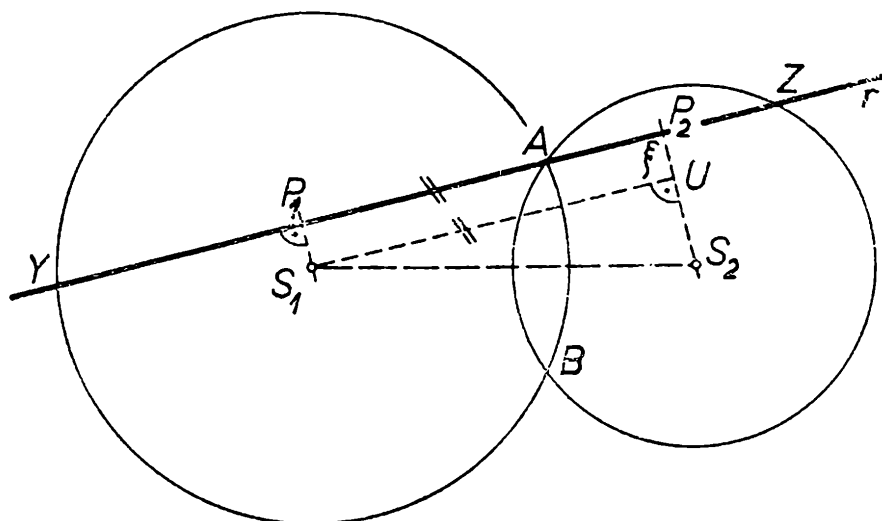
11. Jsou dány dvě kružnice, které se protínají v bodech $A \neq B$. Bodem A vedte přímku tak, aby její průnik se sjednocením obou kruhů měl danou délku d .

(Došla 4 řešení.)

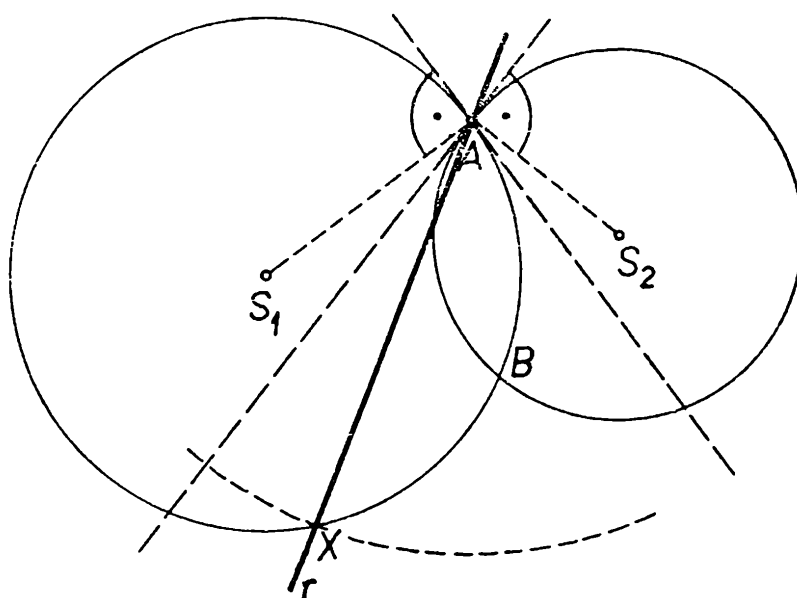
Antonín Vrba

Autorovo řešení:

Rozbor: Mohou nastat dva případy — buď je A krajním bodem průniku (řešení 1. typu) nebo je vnitřním bodem (řešení 2. typu). V obou případech je průnik úsečka. Označme ω úhel, jehož ramena jsou tečny k daným kružnicím v bodě A , obsahující průnik daných kruhů. Každé řešení 1. typu leží v úhlu ω (i s hranicí), zatímco každé řešení 2. typu v úhlu výplňkovém (bez hranice). Soustředíme se na řešení 2. typu (obr. 1). Nechť r je hledaná přímka. Paty P_1, P_2 kolmic spuštěných na ni ze středů S_1, S_2 daných kružnic jsou odděleny bodem A a pólí tětivy



Obr. 1



Obr. 2

AY , AZ . V pravoúhlém trojúhelníku S_1S_2U , jehož odvěsna S_1U je rovnoběžná s r , je tedy $S_1U = d/2$.

Konstrukce: Sestrojíme k oběma kružnicím tečny v bodě A (obr. 2). Dále sestrojíme oblouk kružnice (A, d) ležící v úhlu ω (včetně krajních bodů). Označíme-li X společný bod tohoto oblouku s obvodem sjednocení daných kruhů, bude přímka AX řešením 1. typu.

Nad přeponou S_1S_2 sestrojíme pravoúhlý trojúhelník (obr. 1), jehož odvěsna S_1U má velikost $d/2$. Leží-li bod A uvnitř (ne na hranici) pásu omezeného přímkou S_2U a rovnoběžkou s ní vedenou bodem S_1 sestrojíme bodem A rovnoběžku s přímkou S_1U . To je řešení 2. typu.

Důkaz: Z konstrukce je patrné (obr. 2), že úsečka AX má velikost d . Vzhledem k tomu, že leží v úhlu ω , nemá přímka AX se sjednocením kruhů žádný společný bod vně úsečky AX . Přímka AX je tedy řešením 1. druhu.

Přímky S_2U a rovnoběžka s ní procházející bodem S_1 (obr. 1) protínají přímku r v bodech P_1, P_2 , přičemž $P_1P_2 = S_1U = d/2$. Vzhledem k tomu, že bod A leží uvnitř pásu určeného zmíněnými rovnoběžkami, odděluje bod A body P_1, P_2 . Bod Y souměrně sdružený k bodu A podle středu P_1 leží na kružnici (S_1, S_1A) , neboť $S_1A = S_1Y$, podobně bod Z souměrně sdružený k bodu A podle středu P_2 , přičemž $YZ = 2(P_1A + P_2A) = d$. Přímka YZ je řešením 2. typu.

Diskuse pro řešení 1. typu: Rozeznávejme dva případy:

I. Je-li $\sphericalangle S_1AS_2 \geq 90^\circ$, leží body S_1, S_2 vně nebo na hranici úhlu ω a nejdelší tětiva kruž. o středu S_1 (resp. S_2), která prochází bodem A a leží v úhlu ω , leží na rameně úhlu ω . Snadno zjistíme, že její velikost je dvojnásobek velikosti výšky trojúhelníku S_1S_2A v bodě S_1 (resp. S_2). Nejkratší je společná tětiva obou kružnic a její velikost je dvojnásobek velikosti výšky v bodě A . Označme výšky trojúhelníku S_1S_2A tak, aby $v_1 < v_2 \leq v_3$ (v_1 je vždy výška v bodě A). Pro počet řešení 1. typu jsou následující možnosti:

$$\begin{aligned} d &< 2v_1 \dots 0 \\ d &= 2v_1 \dots 1 \\ 2v_1 &< d \leq 2v_2 \dots 2 \\ 2v_2 &< d \leq 2v_3 \dots 1 \\ d &> v_3 \dots 0. \end{aligned}$$

II. Je-li úhel $\sphericalangle S_1AS_2$ ostrý, leží body S_1, S_2 uvnitř úhlu ω a nejdelší tětiva každé z daných kružnic, která prochází bodem A a leží v úhlu ω , je její průměr. Nejkratší tětiva je buď společná tětiva nebo tětiva ležící na rameně úhlu ω . I v tomto případě jsou velikosti společné tětivy a tětiv na ramenech rovny dvojnásobkům příslušných výšek trojúhelníku S_1S_2A . Označme výšky ve vrcholech A, S_1 tak, aby $v_1 \leq v_2$. Pro počet bodů X ležících na kružnici o středu S_1 dostáváme

$$\begin{aligned} d &< 2v_1 \dots 0 \\ v_1 &\leq d < 2v_2 \dots 1 \\ v_2 &\leq d < 2S_1A \dots 2 \\ d &= 2S_1A \dots 1 \\ d &> 2S_1A \dots 0. \end{aligned}$$

Označme výšky ve vrcholech A, S_2 tak, aby $w_1 \leq w_2$. Pro počet bodů X ležících na kružnici o středu S_2 dostáváme

$$\begin{aligned} d &< 2w_1 \dots 0 \\ w_1 &\leq d < 2w_2 \dots 1 \\ w_2 &\leq d < 2S_2A \dots 2 \\ d &= 2S_2A \dots 1 \\ d &> 2S_2A \dots 0. \end{aligned}$$

Počet všech řešení 1. typu pak dostaneme tak, že sečteme příslušné počty pro obě kružnice. Je-li však d rovno dvojnásobku výšky v v bodě A , musíme součet zmenšit o 1, abychom nezapočetli dvakrát společnou tětivu.

Diskuse pro řešení 2. typu:

Je-li $d > 2S_1S_2$, nelze sestrojit trojúhelník S_1S_2U a úloha nemá řešení 2. typu.

Je-li $d = 2S_1S_2$, redukuje se trojúhelník S_1S_2U na úsečku S_1S_2 . V případě, že ani jeden z úhlů $\sphericalangle AS_1S_2$, $\sphericalangle AS_2S_1$ není tupý, leží bod A v pásu omezeném rovnoběžkami procházejícími body S_1, S_2 kolmo na přímkou S_1S_2 a úloha má jediné řešení 2. typu. V opačném případě řešení 2. typu neexistuje.

Je-li $d < 2S_1S_2$, existují právě dva trojúhelníky S_1S_2U . Bod A leží v pásu popsáném v odd. konstrukce, právě když

$$\cos \sphericalangle S_1S_2A > \frac{d}{2S_1S_2} \text{ a zároveň } \cos \sphericalangle S_2S_1A > \frac{-d}{2S_1S_2}. \quad (1)$$

a v pásu odpovídajícímu druhému trojúhelníku, právě když

$$\cos \sphericalangle S_1S_2A > \frac{-d}{2S_1S_2} \text{ a zároveň } \cos \sphericalangle S_2S_1A > \frac{d}{2S_1S_2}. \quad (2)$$

Podle toho, kolik z podmínek (1) a (2) je splněno, dostáváme 0, 1 nebo 2 řešení 2. druhu. Celkový počet řešení je součet počtů řešení 1. a 2. typu.

12. Shodné zobrazení Z v prostoru převádí vrcholy A, B, C, D pravidelného čtyřstěnu po řadě v body B, C, D, A . Určete všechny body X na povrchu čtyřstěnu $ABCD$, které mají od svého obrazu $Z(X)$ minimální vzdálenost.

(Došla 3 řešení)

Jan Vyšín

Upravené řešení Josefa Tkadlece, 3.C G Bílovec:

Stačí najít hledané body na jedné stěně, např. ABD , neboť zobrazení Z je dáno cyklickou permutací vrcholů; tak můžeme přejít od stěny ABD k libovolné jiné stěně čtyřstěnu.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem A tak, aby platilo

$$\mathbf{AB} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{AC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \mathbf{AD} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Pro každý bod X stěny ABD platí

$$X = A + x_1 \mathbf{AB} + x_2 \mathbf{AD},$$

kde x_1, x_2 jsou reálná čísla. Pro bod $Z(X)$ pak platí

$$Z(X) = Z(A) + \overrightarrow{x_1 Z(A)Z(B)} + \overrightarrow{x_2 Z(A)Z(D)} = B + x_1 \mathbf{BC} + x_2 \mathbf{BA}.$$

Protože $\mathbf{BA} = -\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{AC} - \mathbf{AB}$, dostaneme

$$Z(X) = B + x_1 \mathbf{AC} - (x_1 + x_2) \mathbf{AB}.$$

Pro vzdálenost d bodů X a $Z(X)$ platí

$$d = \|XZ(X)\| = \|\mathbf{AB} + x_1 \mathbf{AC} - (x_1 + x_2) \mathbf{AB} - x_1 \mathbf{AB} + x_2 \mathbf{AD}\|.$$

Po dosazení a úpravě

$$d = \left\| \left(1 - 2x_1 - x_2 + \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}; x_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - x_2 \frac{\sqrt{3}}{6}; -x_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right\|,$$

$$d = \left\| \left(1 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2; x_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - x_2 \frac{\sqrt{3}}{6}; -x_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right\|,$$

$$d^2 = 1 + 3x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 + 4x_1x_2.$$

Abychom našli nejmenší hodnotu d^2 , položíme obě parciální derivace rovny nule.

$$6x_1 - 3 + 4x_2 = 0, \quad 6x_2 - 3 + 4x_1 = 0.$$

Po rozřešení dostáváme

$$x_1 = x_2 = \frac{3}{10}.$$

Snadno se přesvědčíme, že pro tyto hodnoty x_1, x_2 nabývá d nejmenší hodnoty a že takto určený bod X leží na povrchu čtyřstěnu $ABCD$. Tento bod X leží na výšce (těžnici) vedené bodem A , a to ve vzdálenosti $\frac{1}{10} \cdot 3\sqrt{3}$ od bodu A .

Hledanými body jsou tedy čtyři body X_1, X_2, X_3, X_4 ležící po řadě na výškách vedených body A, B, C, D ke hranám BD, CA, DB, AC ve vzdálenosti $\frac{1}{10} \cdot 3\sqrt{3}$ od bodů A, B, C, D .

Poznámky autora:

1. Není třeba určovat minimum kvadratické funkce o dvou proměnných pomocí parciálních derivací (dokonce vyšších řádů) a totálního diferenciálu. Vystačili bychom s derivací funkce jedné proměnné nebo dokonce s algebraickou úpravou

$$d^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x_1 + \sqrt{3}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} \right)^2 + k,$$

kde k je kvadrát hledaného minima.

2. Za povšimnutí stojí, že jsme nevyšli z parametrického vyjádření stěn (tj. trojúhelníků), ale z rovin obsahujících tyto stěny. Rozřešili jsme tedy úlohu trochu obecnější: kterou?

Fyzika

3. V potoke, ktorého koryto má prierez $S = 0,5 \text{ [m}^2\text{]}$, tečie voda priemernou rýchlosťou $v = 0,2 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}\text{]}$ a padá vodopádom s výšky $h = 8 \text{ [m]}$. Stanovte výkon potoka obecnou veličinovou rovnicou a obecný výsledok upravte na číselnú rovnicu, aby výkon bol v jednotkách $[\text{kW}]$ — Hustota vody je $1 \text{ [g} \cdot \text{cm}^{-3}\text{]}$.

(Došlo 20 řešení)

Evžen Říman

Řešil David Brož, 4. roč. G v Semilech:

Označme hustotu vody ρ a tíhové zrychlení g .

Vzhledem k místu pod vodopádem má libovolný soubor molekul (náhodně vybraný) vody o celkové hmotnosti m v korytě potenciální energii

$$W_p = mgh$$

a kinetickou

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2,$$

tedy celkovou mechanickou energii:

$$W = m \left(gh + \frac{1}{2} v^2 \right). \quad (1)$$

Při ustáleném proudění libovolně zvoleným průřezem koryta proteče vždy za čas dt voda o hmotnosti

$$m = Sv\rho \cdot dt,$$

která podle (1) má energii:

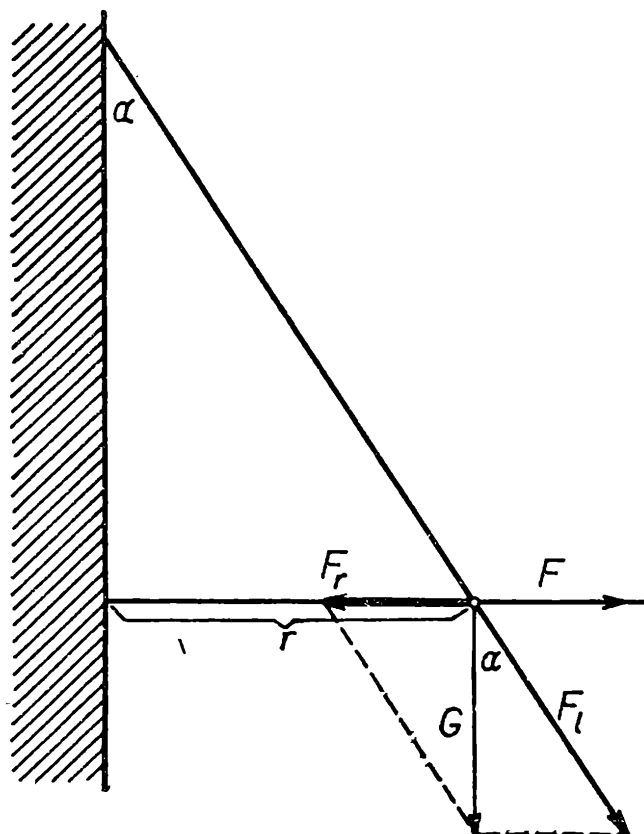
$$W = Sv\rho \left(gh + \frac{1}{2} v^2 \right) \cdot dt$$

a pod vodopádem může vykonat práci

$$A = W$$

Výkon potoka je tedy obecně určen rovnicí:

$$P = \frac{A}{dt} = Sv\rho \left(gh + \frac{1}{2} v^2 \right).$$



Obr. 1

Má-li být výkon v jednotce [kW], potom za předpokladu, že:

$$\begin{aligned} [S] &= \text{m}^2, \\ [v] &= \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ [h] &= \text{m}, \\ [\rho] &= \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}, \\ [g] &= \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \end{aligned} \quad (2)$$

má rovnice tvar:

$$P = S v \rho \left(g h + \frac{1}{2} \cdot v^2 \right),$$

neboť

$$1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W} \quad \text{a} \quad 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Po číselném dosazení (za $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) dostaneme:

$$P \doteq 8 \text{ [kW]}$$

4. Vodivá guľôčka, ktorej hmotnosť je $m = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ [kg]}$, je nabitá elektrickým nábojom Q neznámej veľkosti; visí na izolujúcom (nehmotnom) vlákne dĺžky $l = 26 \text{ [cm]}$. Druhý koniec vlákna je upevnený na veľkej zvislej kovovej doske, ktorej plošná hustota náboja je $\sigma = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ [C} \cdot \text{m}^{-2}]$. Silou elektrického odpudzovania vzdiali sa guľôčka od steny na vzdialenosť $r = 10 \text{ [cm]}$. Vypočítajte veľkosť náboja Q na guľôčke (obr. 1).

(Došlo 20 riešení)

Evžen Říman

Řešil Aleš Langr, C 3. G Fr. Hajdy v Ostravě 3:

Předpokládejme, že nabitá deska vytváří ve svém okolí homogenní elektrické pole, jehož intenzita je dána vztahem

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}, \quad (1)$$

kde σ je plošná hustota náboje na desce a ε permitivita okolního prostředí. Toto elektrické pole pak působí na nabitou kuličku silou

$$F = Q \cdot E = Q \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon}, \quad (2)$$

kde Q je hledaný elektrický náboj kuličky. Tato síla odpuzuje kuličku od desky a je v rovnováze se silou F_r , pro kterou platí:

$$F_r = G \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Podle obrázku je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}};$$

potom

$$F_r = m \cdot g \cdot \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}. \quad (4)$$

Protože platí $F = F_r$ (síly jsou v rovnováze), dostáváme podle vztahů (2) a (4)

$$Q \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon} = m \cdot g \cdot \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}},$$

$$Q = \frac{2 \cdot m g r \varepsilon}{\sigma \sqrt{l^2 - r^2}}.$$

Po dosazení zadaných hodnot (permitivitu prostředí volme $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1}$) dostáváme

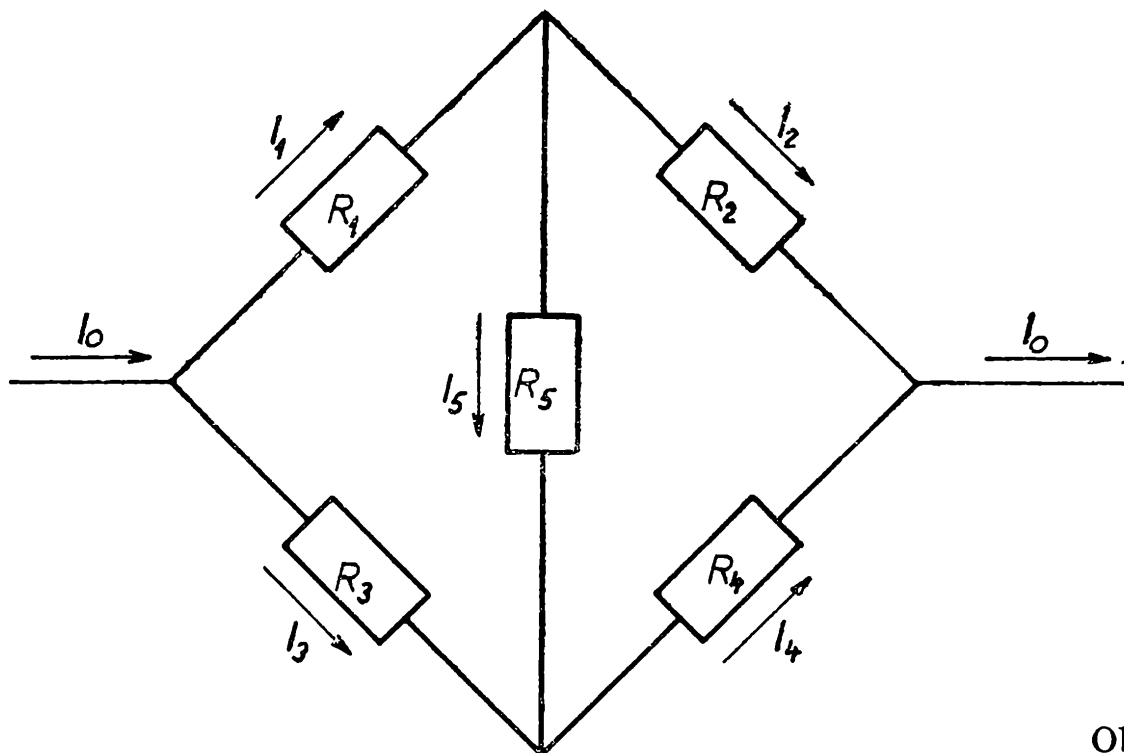
$$Q = 5,6 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

Aby se kulička udržela ve vzdálenosti r od nabité desky, musí na ní být náboj

$$Q = 2mg \cdot \frac{r \cdot \varepsilon}{\sigma \sqrt{l^2 - r^2}},$$

což je asi $Q = 5,6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

5. Vypočítajte hodnoty prúdov I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 v mostíku podľa nákresu (obr. 2). Dané sú odpory R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 a prúd I_0 . Označené smery



Obr. 2

prúdov boli zvolené ľubovoľne. Riešte obecné! (Skúšku môžete spraviť dosadením $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 3\Omega$, $R_5 = 6\Omega$, $I_0 = 1\text{ A}$).
(Došlo 19 riešení) Evržen Říman

Řešil Jan Kuchař, 4. A G v Jihlavě:

Rozepíšeme Kirchhoffovy zákony pro všechny uzly:

$$I_0 = I_1 + I_3 \Rightarrow I_3 = I_0 - I_1, \quad (1)$$

$$I_1 = I_2 + I_5 \Rightarrow I_5 = I_1 - I_2, \quad (2)$$

$$I_4 = I_3 + I_5, \quad (3)$$

$$I_0 = I_2 + I_4 \Rightarrow I_4 = I_0 - I_2. \quad (4)$$

Dále napíšeme Kirchhoffovy zákony pro smyčky:

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_5 I_5 = 0, \quad (5)$$

$$R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0, \quad (6)$$

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0. \quad (7)$$

Vztahy (1) a (2) dosadíme do (5):

$$R_1 I_1 - R_3 I_0 + R_3 I_1 + R_5 I_1 - R_5 I_2 = 0,$$

$$I_1(R_1 + R_3 + R_5) - I_2 R_5 - R_3 I_0 = 0,$$

$$I_2 = \frac{I_1(R_1 + R_3 + R_5) - R_3 I_0}{R_5}. \quad (5')$$

Vztahy (1) a (4) dosadíme do (7):

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_0 + R_3 I_1 - R_4 I_0 + R_4 I_2 &= 0, \\ I_1(R_1 + R_3) + I_2(R_2 + R_4) - I_0(R_3 + R_4) &= 0. \end{aligned} \quad (7')$$

Dosadíme (5') do (7'):

$$\begin{aligned} I_1(R_1 + R_3) + \frac{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)I_1 - (R_2 + R_4)R_3 I_0}{R_5} &= \\ &= I_0(R_3 + R_4). \end{aligned}$$

Po roznásobení a vytknutí je

$$\begin{aligned} \overbrace{I_1(R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 \cdot R_5)}^A &= \\ &= I_0(R_2 R_3 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5) \end{aligned}$$

Vyjádříme I_1 , přičemž výraz v závorce na levé straně rovnice označíme jako A :

$$I_1 = \frac{I_0(R_2 R_3 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5)}{A}. \quad (8)$$

Vztah (8) dosadíme do (5'):

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{I_0}{R_5} \cdot \left(\frac{\begin{aligned} &R_1 R_2 R_3 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_5 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_3^2 + R_3^2 R_4 + \\ &+ R_3^2 R_5 + R_3 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_3 R_4 R_5 + R_3 R_5^2 + \\ &+ R_4 R_5^2 - R_1 R_2 R_3 - R_1 R_3 R_4 + - R_1 R_3 R_5 - R_2 R_3^2 - \\ &- R_2 R_3 R_5 - R_3^2 R_4 - R_3^2 R_5 - R_3 R_4 R_5 \end{aligned}}{A} \right), \\ I_2 &= \frac{I_0(R_1 R_4 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5)}{A}. \end{aligned} \quad (9)$$

Vztah (8) dosadíme do (1):

$$\begin{aligned} A \cdot I_3 &= I_0(R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + \\ &+ R_4 R_5 - R_2 R_3 - R_3 R_4 - R_3 R_5 - R_4 R_5), \\ I_3 &= \frac{I_0(R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_2 R_5)}{A}. \end{aligned} \quad (10)$$

Dosadíme vztah (9) do (4):

$$\begin{aligned} A \cdot I_4 &= I_0(R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + \\ &+ R_4 R_5 - R_1 R_4 - R_3 R_4 - R_3 R_5 - R_4 R_5), \\ I_4 &= \frac{I_0(R_1 R_2 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_2 R_5)}{A}. \end{aligned} \quad (11)$$

Vztahy (8) a (9) dosadíme do (2):

$$A \cdot I_5 = (R_2 R_3 - R_1 R_4 + R_3 R_4 - R_3 R_5 + R_3 R_5 + R_4 R_5 - R_4 R_5),$$

$$I_5 = \frac{I_0(R_2 R_3 - R_1 R_4)}{A}. \quad (12)$$

Provedeme výpočet pro hodnoty $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 3\Omega$, $R_5 = 6\Omega$, $I_0 = 1 \text{ A}$:

Nejdříve vypočteme hodnotu výrazu „ A “: ($A = R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5$):

$$I_1 = \frac{20 + 12 + 24 + 18}{132} \text{ A} = \frac{37}{66} \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{6 + 12 + 24 + 18}{132} \text{ A} = \frac{5}{11} \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{10 + 6 + 12 + 30}{132} \text{ A} = \frac{29}{66} \text{ A},$$

$$I_4 = \frac{10 + 12 + 20 + 30}{132} \text{ A} = \frac{6}{11} \text{ A},$$

$$I_5 = \frac{20 - 6}{132} \text{ A} = \frac{7}{66} \text{ A}.$$

Závěr: Hledané hodnoty proudů udávají vztahy (8), (9), (10), (11), (12); o správnosti obecného výpočtu se lehce přesvědčíme dosazením výše vypočítaných hodnot do vztahů (1) až (7).

Nejmladším čtenářům

1. V tomto příkladu uvedeme několik vlastností přirozených čísel a vy rozhodněte, zda si tyto vlastnosti neodporují.

a) Přirozené číslo A má tyto vlastnosti:

Poslední jeho cifra je 7,

je dělitelné číslem 9,

je dělitelné číslem 5.

b) Přirozené číslo B má tyto vlastnosti:

je dělitelné číslem 5,

je dělitelné číslem 4,

jeho ciferný součet je 9,

$B + 7$ je dvojmoc přirozeného čísla.

2. Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Označme K střed hrany AC , L střed hrany BD .

a) Jakou částí objemu čtyřstěnu $ABCD$ je objem čtyřstěnu $KCLB$?

b) Vypočítejte velikost úsečky KL .

3. Daný lichoběžník $ABCD$ rozdělte na 3 (4, 5, ...) lichoběžníky navzájem stejných obsahů.

Řešení.

1.a) Číslo A je dělitelné číslem 5, a proto končí buď nulou nebo pětkou. S tím je v rozporu první vlastnost.

b) Číslo B je dělitelné číslem 20 končí proto nulou. Číslo $B + 7$ končí tudíž cifrou 7, ale touto cifrou nekončí žádná dvojmoc přirozeného čísla.

2. a) Čtyřstěn $KCLB$ má podstavu BCK dvakrát menší než je podstava ABC čtyřstěnu $ABCD$. Výška, příslušná k této podstavě je dvakrát menší, než je příslušná výška čtyřstěnu $ABCD$. Proto objem čtyřstěnu $KCLB$ je čtyřikrát menší než objem čtyřstěnu $ABCD$.

b) Nakreslete si obrázek a uvidíte, že trojúhelník BKD je rovnoramenný, neboť $|BK| = |DK| = \frac{a}{2} \sqrt{3}$, kde a je velikost hrany čtyřstěnu. Úsečka KL je výška tohoto trojúhelníku (a zároveň jeho osa souměrnosti). Z pravoúhlého trojúhelníku BKL máme

$$|KL|^2 = |BK|^2 - |BL|^2 = \frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 \Rightarrow KL = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$

3. Vyjděte ze vzorce pro obsah lichoběžníku $P = s \cdot v$, kde s je velikost jeho střední příčky a v velikost jeho výšky.

S. H.

Novoroční úloha

Rozhodněte, zda číslo

1 9 7 9

je prvočíslo.

Řešení úlohy bude uveřejněno v lednovém čísle *Rozhledů*.

z Jednoty čs. matematiků a fyziků

Poprad 1978

Náš časopis vychází za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků (JČSMF) a rádi proto občas přinášíme zprávy, jež se týkají života této naší vědecké společnosti. Dnes bychom si chtěli povědět o nedávném sjezdu, který JČSMF konala společně s Jednotou slovenských matematiků a fyziků (JSMF). Sjezdy obou Jednot byly v Popradě ve dnech 5. až 7. října 1978 a sešli se na nich matematikové a fyzikové nejrůznějšího zaměření. Je to charakteristický rys této vědecké společnosti, že sdružuje ve svých řadách jak dva blízké vědní obory, tak pracovníky různých typů — učitele a středoškolské profesory, vědecké a odborné pracovníky i studenty, kteří se zajímají o matematiku a fyziku.

Ještě před sjezdy vyšel *Sjezdový sborník JČSMF a JSMF*, pěkná publikace, která informuje o činnosti obou vědeckých společností za poslední období. Jak známo, vznikla Jednota z někdejšího Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky, který založili pražští universitní studenti už r. 1860. Dnes má JČSMF podle posledního údaje 2858 členů, JSMF celkem 2415 členů a počet členstva stále mírně stoupá. Vítáme do svých řad zvláště mladou generaci — středoškolské a vysokoškolské studenty. Mnozí z nás starších začínali v Jednotě také už za svých studií a stále se k ní vracejí. Jednota vypisuje konkurs pro mladé vědecké pracovníky a odměňuje jejich práce cenami, umožňuje svým členům cesty do zahraničí na vědecké konference a studijní pobyty, vydává členský časopis *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, účastní se při organizaci ma-

tematické a fyzikální olympiády a plní ještě řadu dalších úkolů. Konečně ani sleva, kterou členové dostávají při koupi odborné literatury, není zanedbatelná.

Sjezdy v Popradě měly pracovní ráz. Z funkce předsedy JČSMF odstoupil akademik Josef Novák, který Jednotě předsedal už po dvě období. *Novým předsedou JČSMF byl zvolen Dr. Miroslav Rozsival. Předsedou JSMF se opět stal prof. dr. Václav Medek.* Ze sjezdů vyšly ovšem i nové ústřední výbory obou Jednot. Čeká je hodně práce, neboť úkoly JČSMF a JSMF se rozrůstají a pracovníků v oblasti matematických a fyzikálních věd je stále nedostatek. Přejeme Jednotě do nové práce plný úspěch a doufáme, že najde zdatné členy a pomocníky i mezi našimi čtenáři.

J. S.

Ze zahraničních časopisů

Tři příklady, jejichž řešení zde uvádíme, jsou z polského časopisu *Matematyka*.

1. Přirozenými čísly řešte

$$1 + 2^x = y^2. \quad (1)$$

Řešení. Rovnici dáme tvar

$$(y + 1)(y - 1) = 2^x. \quad (2)$$

Poněvadž jde vesměs o přirozená čísla, bude platit:

$$a) \ y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2,$$

$$y + 1 = 2^x \Rightarrow y = 2^x - 1.$$

Na první pohled vidíme, že přirozenými čísly nelze oběma rovnicím vyhovět. Podle první rovnice má být číslo y sudé a podle druhé má být liché. Tento případ tedy neposkytuje žádné řešení.

b) Z rovnice (2) můžeme odvodit tyto dvě rovnice:

$$y - 1 = 2^u,$$

$$y + 1 = 2^v, \quad (3)$$

kde u, v jsou přirozená čísla. Z obou rovnic (3) dostaneme rovnice

$$y = 2^{u-1} + 2^{v-1},$$

$$1 = 2^{v-1} - 2^{u-1}.$$

Levá strana této druhé rovnice je číslo liché a proto i pravá strana musí být číslo liché. To se stane jedině tehdy, když $u - 1 = 0$ a pak

$$1 = 2^{v-1} - 1, \quad 2^{v-1} = 2, \quad v = 2.$$

Tím dospíváme k jedinému řešení dané rovnice

$$x = y = 3.$$

2. Ukažte, že číslo, které je v desítkové soustavě zapsáno v tvaru

$$N = \underbrace{111 \dots 11}_{2n \text{ jedniček}} - \underbrace{222 \dots 22}_n$$

je vždy dvojmoc přirozeného čísla.

Řešení. Důkaz provedeme tak, že daný dvojčlen budeme postupně upravovat: Nejprve z daného dvojčlenu vytkneme $\underbrace{111 \dots 11}_n$

$$\begin{aligned} N &= \underbrace{111 \dots 11}_n (\underbrace{1000 \dots 01}_{n-1 \text{ nul}} - 2) = \underbrace{111 \dots 11}_n \cdot \underbrace{999 \dots 99}_n = \\ &= \underbrace{111 \dots 11^2}_n \cdot 3^2 \end{aligned}$$

a tím je důkaz tvrzení proveden.

3. O obsahu S trojúhelníku platí

$$S = a^2 - (b - c)^2,$$

kde a, b, c jsou velikosti stran trojúhelníku. Určete velikost úhlu α . (Úhly trojúhelníku jsou označeny obvyklým způsobem.)

Řešení. Napsaný výraz budeme upravovat:

$$S = (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) - (b^2 + c^2 - 2bc),$$

$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha = 2bc(1 - \cos \alpha),$$

$$\sin \alpha = 4(1 - \cos \alpha),$$

$\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ vyjádříme funkcemi polovičního úhlu:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Odtud dostáváme:

$$\text{I.} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Toto řešení nemá s ohledem na povahu úlohy smysl.

II.

$$\cos \frac{\alpha}{2} - 4 \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,25, \quad \frac{\alpha}{2} \doteq 14^{\circ}02',$$

$$\alpha \doteq 28^{\circ}04'$$

Stanislav Horák

různé

Porucha není ve vašem přijímači

RNDr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., ČSAV Praha

Leckterý radista na lodi či na letišti zažil následující příhodu: pomocí svého vysílače udržoval krátkovlnné spojení s protistanicemi a poslech byl jako obvykle výborný; avšak náhle, během jediné minuty, signály protistanice zeslábly, až úplně vymizely. Současně vymizely i signály ostatních stanic na telegrafním pásmu, ba dokonce i signály silných rozhlasových vysílačů.

Vše vypadalo přesně tak, jakoby vysokofrekvenční část přijímače přestala správně pracovat. První podezření ovšem padne na samotnou anténu, neztratila-li kontakt s přijímačem. Nalezli se i výtečníci, kteří začali dokonce proměřovat jednotlivé obvody přijímače.

Avšak porucha tentokrát nebyla v přijímači, nýbrž stopadesát milionů kilometrů daleko — na Slunci. Kdo by se v tu chvíli díval na sluneční disk pomocí spektroheliokopu, spatřil by na jednom místě oslnivě bílou skvrnku — chromosférickou erupci. Při ní Slunce do prostoru vysílá nejen mnoho světelných vln, ale i silné záření rentgenové. Toto záření po vniknutí do zemské ionosféry dokáže v krátkém čase zcela přetvořit vrstvu *D*, rozprostírající se zhruba ve výšce od 50 do 80 kilometrů, a částečně i spodní část oblasti *E*, ležící těsně nad vrstvou *D*. Jde o nejhustší vrstvy ionosféry a to má ovšem za následek, že se neobvykle zvětší útlum procházejících krátkovlnných signálů. Tento útlum je nepřímě úměrný čtverci příslušného kmítočtu, takže rádiové signály, šířící se prostorovou vlnou „odrazem“ od ionosféry, jsou zejména na nižších kmítočtech silně tlumeny, a tedy se k cíli nedostanou. Nejvíce

bývají postiženy kmitočty od 2 do 8 MHz, při silných erupcích i vyšší. Jde o tzv. *Dellingerův jev*, popsáný již v první polovině našeho století.

Pokud erupce trvá, trvá i Dellingerův jev a radisté se na krátkých vlnách nikam nedovolají, pokud ke spojení potřebují ionosféru, ležící na straně zemského povrchu přivrácené Slunci (v noci k tomuto úkazu pochopitelně nedochází). Teprve když erupce skončí (bývá to po několika minutách až několika desítkách minut), začne se uplatňovat rekombinace vzniklých iontů a elektronů a postižená oblast ionosféry se vrací do svých „normálních kolejí“: krátkovlnný útlum rychle klesá a původní slyšitelnost krátkovlnných signálů se obnovuje.

Četnost výskytu Dellingerových jevů sleduje tutéž periodicitu jako veškerá sluneční aktivita. Protože se nyní pohybujeme v okolí nového maxima sluneční aktivity, budeme stále častěji svědky tohoto zajímavého jevu; v některých dnech, bude-li Slunce zvláště rozbouřené, může nastat Dellingerův jev i několikrát. V minimu sluneční aktivity bývá tento jev značně vzácný a řada mladších radistů se s ním tedy neměla možnost setkat. Tím na ně náhlé vymizení krátkovlnných signálů při chromosférických erupcích působí mohutněji. Je to však zajímavý úkaz i pro všechny, kteří rádi sledují přírodní jevy a často poslouchají rozhlasové pořady vysílané na krátkých vlnách. Protože se nyní dostáváme do období četných erupcí, upozorňujeme na Dellingerův jev všechny zájemce: jejich rozhlasový přijímač je schopen jim dát zprávu, že v daleké chromosféře Slunce došlo k jevu, který může pracovníkům spojů způsobit mnoho starostí...

Kdy bude zase rok končit nedělí

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

Letos je o vánočních a novoročních svátcích celkem sedm dní pracovního volna. Podíváme-li se do kalendáře, snadno zjistíme, proč tomu tak je. Štědrý den i Silvestr připadá totiž na neděli. Dokonce lze říci, že příčina je pouze v tom, že rok 1978 končí nedělí.

Velký počet nepracovních dní o svátcích přijde každému vhod. Všeobecně zajímavá je tedy otázka, jak dlouho budeme čekat na rok, jenž bude obdobně příznivý na dny pracovního volna o vánočních a novoročních svátcích. K tomu stačí zjistit, který nejbližší rok končí nedělí. Řešení tohoto problému není složité.

Souvislost dnů, jimiž končí dva sousední roky, plyne z rovností:

$$365 = 7.52 + 1, \quad 366 = 7.52 + 2.$$

Např. skončil-li jeden rok nedělí, pak po něm bezprostředně následující rok, pokud je nepřestupný, skončí pondělím. Jestliže však bude přestupný, pak skončí úterým. Podobně je tomu v ostatních případech.

Řešení úlohy nalezneme nejsnadněji pomocí tabulky:

Rok	31. XII.
1978	N
1979	Po
1980	St
1981	Č
1982	Pá
1983	So
1984	Po
1985	Ú
1986	St
1987	Č
1988	So
1989	N

Při jejím sestavování bylo třeba dát pozor na přestupné roky. Hledaný rok je 1989.

Budete-li se problémem zabývat hlouběji, zjistíte, že roky končící nedělí se nevyskytují jen po 11 letech, ale někdy již po 5 nebo 6 letech. Koncem století budou nedělí končit roky 1995 a 2000. Ovšem počet let by mohl být i 7 nebo 12 a to na těch přechodech století, když odpadá jeden přestupný rok*).

*) Od zavedení gregoriánského kalendáře v roce 1582 jsou přestupnými roky z let, jejichž letopočet končí dvěma nulami, jen ty, které jsou dělitelné číslem 400. Např. roky 1700, 1800, 1900 byly nepřestupné, rok 2000 bude přestupný.

Beseda čtenářů k 430. výročí narození Giordana Bruna

JOSEF KOTYK, Pardubice

Kdo hledá pravdu, musí, pokud je jen možno,
pochybovati o všem.

René Descartes

Učitel: Pochybovati je cesta k poznání.

Iva: To je také zásada naší vědychtivé mládeže.

Eva: Jaká je tedy dnešní představa o vesmíru?

Zmatlík: Pravda Giordana Bruna, že vesmír je nekonečný, je pouze poloviční. Celá pravda zní: Nekonečný světový prostor je zároveň konečný. Takový by se mi pak docela líbil.

Ema: Ano. Již ve starověké filosofii — v učení Hérakleita Temného z Efesu (žil v letech asi 530 až 480 př. n. l.) aj. — se setkáváme s názorem o koexistenci protiv, že vše obsahuje v sobě také svůj opak. Všechno je — a také není.

Zmatlík: To je má řeč! Různé je zároveň stejné — o tom přesvědčuji naši mládež už řadu let!¹⁾

Učitel: Ještě začátkem 20. století byla Mléčná dráha považována za celý vesmír. Novými objevy se však pojem vesmíru značně rozšířil. Hvězdy se seskupují do galaxií, galaxie pak do mohutných supergalaxií a metagalaxií.

Jan: To je však v podstatě smělá představa Giordana Bruna!

Učitel: V podstatě ano. Také Giordano Bruno učil, že je nekonečně mnoho stálic, nekonečně mnoho slunečních soustav, jako je naše, ty se sdružují v nekonečně mnoho Mléčných soustav, ty se opět seskupují v nekonečně mnoho soustav vyššího řádu atd.

Ida: „Mysli se nejvyš“, píše básník, „a nad tebou
hvězd jako vřesných zvonců —
a kdybys byl jako Slunce stár,
nedomyslíš se konců!“

Zmatlík: Ha! Básník, jehož veršů jsme se dovolávali v poslední besedě o nebeské klenbě, opěvuje jinými verši svých „Písní kosmických“ nekonečnost vesmíru. Neruda je tedy stoupencem dialektiky Hérakleita Temného — jako já!

¹⁾ Své názory doložil žák Zmatlík také v Rozhledech tvrzením, že každá dvě — i nestejná — čísla jsou stejná. Viz článek „Zmatlíkova poučka“ v roč. 50, čís. 6, str. 284 a 285.

Iva: Cestovatel, který by se ubíral světovým prostorem neustále v témž směru, přicházel by vždy k novým a novým světům a nikde by nedohlédl konce; byl by tedy přesvědčen, že vesmír je nekonečný.

Jan: Naši hvězdnou soustavu měli bychom si tedy představovat jako ostrůvek v nekonečném prostoru. Mimo něj buď vůbec žádných hvězd není nebo se hvězdy sice vyskytují, ale čím dále tím řidčeji, takže hustota jejich rozdělení klesá rychle k nule.

Zmatlík: Náš maličký ostrůvek by se však v nekonečném světovém prostoru neudržel. Ztrácel by nejen energii zářením do prostoru, ale hvězdy by z něho unikaly podobně, jako unikají molekuly plynu z nádrže, kterou spojíme s nádobou, z níž plyn je vyčerpán. Nakonec by všechny hvězdy ve světovém prostoru „zmizely“; odděleny od ostatních hvězd vzdálenostmi nad pomyslení velikými, pohybovaly by se v tklivém osamění...

Učitel: My nemáme ani možnost dokázat, že se něco takového ve skutečnosti neděje.

Zmatlík: Tím hůře! Do vystoupení Giordana Bruna jsme žili velkými nadějemi. Od té doby máme velký strach. Ó hrůzo!

Učitel: Připadá nám sice těžkým smířit se s důsledky učení Giordana Bruna, kterých se Zmatlík tolik bojí. Proces, o němž Zmatlík mluvil, by však vyžadoval doby, vedle níž jsou biliony a snad i triliony let pouhým okamžikem.

Ema: V každé knize o Einsteinově principu relativnosti nacházíme však také — Zmatlíkovi pro útěchu — stať o konečnosti světového prostoru. Holandský astronom de Sitter († 1934) sestrojil dokonce již originální model vesmíru; „obvod“ světového prostoru odhaduje na sto až tisíc milionů světelných let.

Učitel: Ano. Konečnost, s níž tu máme co činit, není však konečnost fyzikální, nýbrž metrická. Trojrozměrný prostor, v němž žijeme, je jakousi obdobou dvojrozměrného uzavřeného prostoru (např. plochy kulové, vejčité aj.), jenž nemá hranic, ale není nekonečný. Prostor vyplněný hmotou rovněž nemá hranic nebo, jak lze také říci, nemá konce, ale přesto není nekonečný. Pak se ovšem hvězdy z něho nerozběhnou; nemohou, neboť nemají kam...

Eva: Tvoje štěstí, Zmatlíku!

Jan: Co však Giordano Bruno? Co by tomu on říkal? Bylo by i jemu lehké s tím se smířiti?

Učitel: V otázce fyzikální nekonečnosti hmotného světa sotva lze mít o pravdě Giordana Bruna nějaké pochyby. Problém metrické konečnosti či nekonečnosti vesmíru není však dosud zdaleka vyřešen. Jedině pozorování astronomická —

Jan: Svými brejlemi mámení? Vyloučeno! „Špatnými zpravodaji jsou člověku oči i uši“, varoval už před 25 stoletími moudrý Hérakleitos.

Učitel: Jedině pozorování astronomická mohla by nám v dané problematice poskytnouti jistotu. Dnes ji ovšem čekati nemůžeme.

Zmatlík: Lituji. Dnes to tedy nebude... Snad příště?

Jan: Stačí na to vůbec lidské bytí?

Ema: Bytí a nebytí je totéž — pohyb bezprostředního mizení jednoho v druhém...

Učitel: Ano. Zcela v duchu Hérakleitově! Tato slova napsal německý filosof Georg W. F. Hegel (1770—1831) ve svém díle „Die Wissenschaft der Logik“.

Eva: Hérakleitovu dialektiku pěstovali tedy i filosofové nové doby?

Učitel: Dialektika, podle vlastních slov Hegelových „algebra revoluce“, ovlivnila značně vývoj filosofie také v době nejnovější. Hegelovo dialektické rozvíjení idejí postavil však „na nohy“, tj. na materialistický základ, teprve Karel MARX, tvůrce filosofie dialektického a historického materialismu; od jeho narození uplynulo dne 5. května 1978 160 let. Skvělou obhajobou dialektiky je práce V. I. LENINA „Materialismus a empiriokriticismus“; ukazuje, že kontinuita dějinného vývoje představuje konkrétně historickou jednotu stránek přetržitosti a nepřetržitosti.²⁾

Sen

PETR STROSSA, žák III. C gymnázia v Bílovci

Co bylo předtím, nevím, až na to, že jsem šel po ulici, a to velmi dlouho. Zdálo se, že ulice nemá konce, a všechny její domy byly stejné. Zděšen tím architektonickým dílem, začal jsem za chůze pozorovat sojky a holuby poletující v ovzduší. Právě svítalo. Pak náhle ulice skončila a přede mnou stál dům o třech patrech. Vešel jsem dovnitř.

V první místnosti slabě poblikávala červená světelná tabule. Za stolem s řadou telefonů seděl člověk. „Dobrý den,“ řekl, „vítám vás v tomto domě. Jmenuji se *Kalkulátor*.“ Na světelné tabuli se rozsvítilo číslo. Už si nepamatuji, jaké. „Tato tabule,“ řekl člověk, „se jmenuje *Display*.“ Neudivilo mne, že odpovídá na mé nevyslovené otázky, a vešel jsem do

²⁾ V podrobnostech viz např. také článek Lad. Tomáška „Dialektický materialismus a kontinuita společenského vývoje“, Tvorba 13/1978.

dalších dveří. Ještě jsem zaslechl, jak do jednoho telefonu křičí: „Sto sedmdesát osm celých, dvacet pět!“

Za dveřmi bylo schodiště. Také před schodištěm stál člověk. Měl v ruce vysílačku, a stejně jako první, také on mne uvítal srdečnými slovy: „Dobrý den, návštěvníku. Dovolte, abych se představil. Jsem *Čítač*. Schodiště je *programová paměť*. Když dostanu příkaz, jdu po schodišti nahoru. Když jdu po schodišti, *Displej* slabě poblikává. Na každém schodu je napsána instrukce. Já ji sděluji *Hlavnímu Operátorovi*. Když je 41 nebo 59, zastavím se a čekám na nový rozkaz. Když je 42, otočím se a běžím dolů.“

„Teď máte volno?“

„Ano. To je totiž tak: tam nahoře, ve třetím patře, sedí ve své kanceláři *Hlavní Operátor*. Ten má před sebou tabulku, která slove *Zobrazovací registr*. A do té tabulky si teď právě zapisuje křídou nějaké číslo, které mu telefonicky sděluje zákazník. Náš zákazník — náš pán.“

„Mohu se jít podívat za *Hlavním Operátorem*?“

„Nikoliv. Jen tři lidé mohou chodit po schodišti: *Čistič*, *Zapisovač* a já. Až zákazník nebude program potřebovat, zavolá *Čističi* a ten schody utře. Když bude zákazník chtít uložit jiný program, *Zapisovač* ho napíše na schody. Schodů je sto. Jsou očíslovány 00 až 99.“

„*Hlavní Operátor* nesmí jít dolů?“

„Nikoliv. *Hlavní Operátor* je tu od toho, aby počítal, ne aby chodil po schodech. Jestli vás to zajímá, má tam ještě devět menších tabulek, *Operačních registrů*. Do nich přepisuje obsahy *Zobrazovacího registru* a mezi ně klade operace. Dovoluje-li mu to *Zákon hierarchie* (takové zákony on má v knihách a ručí za jejich dodržování), operace provede. Pak má ještě deset tabulek v zásuvce — těm se říká *Datové registry*. Když dostane *Čistič* patřičné příkazy (třeba i ode mne), vtrhne do jeho kanceláře a některé registry smaže.“

„Je tam nahoře ještě někdo?“

„Jistě. Například *Časoměřič*. Když volám instrukci 59, *Hlavní Operátor* se spojí s *Časoměřičem* a vydá obsah *Zobrazovacího registru* na *Displej*, *Časoměřič* odměří půl sekundy a zavolá *Hlavnímu Operátorovi* „dost“ — a *Hlavní Operátor* zhasne *Displej* a pošle mě dál. — Nebo *Testovač*. Má před sebou *Testovací registr*, a když zavolám 37 nebo 47, *Testovač* porovná svůj registr se *Zobrazovacím* a odpoví mi „ano“ nebo „ne“. Když odpoví „ano“, přečtu další dva schody — na nich je adresa, na kterou se přemístím (je-li tam například 06 a 03, půjdu na schod číslo 63). Když odpoví „ne“, přeskočím dva schody a jdu dál. — Nebo *Statistik*. Ten počítá jen průměr a směrodatnou odchylku.“

„Ale co kdyby *Zapisovač* napsal na schodiště nějaký nesmysl a vy nevěděl, co dělat dál?“

„To se stává. Zavolám *Hlavnímu Operátorovi*, že mám před sebou chybnou instrukci, on rozsvítí obsah *Zobrazovacího registru* a začne s ním blikat. Může se ovšem stát, že já budu instrukci považovat za správnou. Já jsem jenom *Čítač*! Pak musí chybu objevit *Hlavní Operátor*.“

„Běž!“ ozvalo se z vysílačky.

„Promiňte, musím jít,“ omluvil se mi *Čítač*. „Třicet tři!“ zvolal, stoupaje na první schod. „Nula jedna!“ zvolal, stoupaje na druhý schod.

Otočil jsem se a prošel jsem dveřmi. Nechal jsem za zády poblikávající *Displej* a vyšel jsem z domu. Slunce mi svítilo do očí...

Otevřel jsem oči. Seděl jsem na křesle ve svém pokoji. Uhnul jsem očima před oslňujícími paprsky vycházejícího slunce a objevil jsem na klíně *Návod k použití programovatelného kalkulátoru Texas Instruments SR-56*. Byl otevřený na straně 92. Vzpomněl jsem si, že právě tam jsem skončil jeho studium nedlouho po poslední spodní kulminaci středního Slunce.

recenze

František Jílek, Josef Kuba, Jaroslava Jílková:

SVĚTOVÉ VYNÁLEZY V DATECH,

chronologický přehled významných událostí z dějin tvůrčí technické práce

Mladá fronta, Praha 1977, 2. svazek Malé encyklopedie, 287 stran, váz. Kčs 25,—

Za několik dní začne rok 1979. V kalendářích jsou uvedena významná výročí, avšak na mezníky ve vývoji techniky se zapomíná. Ve škole v dějepisu je historie techniky také jen na okraji zájmu. Zalistujme v příručce Světové vynálezy v datech a podívejme se, co se stalo před 50, 80, 100, 120 a 150 lety. Údaje, které nyní uvedeme, nebyly z knížky doslovně přejaty; většinou byly zestručněny.

1929 V Janečkově zbrojovce v Praze začala výroba motocyklů značky *Jawa*.

Sovětský raketový průkopník *Konstantin Eduardovič Ciolkovskij* navrhl řešení několikastupňových kosmických raket.

1899 *Václav Laurin* a *Václav Klement* vyrobili v Mladé Boleslavi první český motocykl značky *Slavia*.

1878—1880 *František Křižík* zkonstruoval vynikající obloukovou lampu, která získala světové uznání a byla hromadně vyráběna.

- 1879 *Thomas Alva Edison* sestrojil žárovku, která byla schopna svítit desítky a brzy i stovky hodin.
Angličan *Sydney Gilchrist Thomas* vyřešil problém konvertorové výroby oceli z rud obsahujících fosfor. *Kladenské železářny* provedly téhož roku tavbu oceli Thomasovým způsobem a získaly v tomto směru primát na celém evropském kontinentě.
Vítkovické železářny zavedly jako první na evropské pevnině duplexní pochod ve výrobě oceli přelitím suroviny z kyselého konvertoru do zásaditého.
- 1859 Hrabě Valdštejn založil v Plzni strojírnou, kterou v roce 1869 převzal *Emil Škoda*.
- 1829 *Josef Ressel* předváděl v Terstu zkušební jízdu parníku „Civetta“ poháněného lodním šroubem, který byl umístěn na zádi lodi mezi vazem a kormidlem.
Lokomotiva „Raketa“ Angličana *Georga Stephensona* dosáhla v závodě lokomotiv do té doby neslýchané rychlosti 46 km/h a brzy po závodě téměř 60 km/h.

Náš malý výběr z celkového počtu asi 2000 hesel je pouze z let 1829 až 1929. Knížka však přehledně zobrazuje historii techniky v rozsahu, který byl při jejím dokončování nejširší možný. První heslo hovoří o době 2,5 miliónu let př. n. l., kdy začal vývoj člověka. Poslední heslo informuje o společném kosmickém letu lodí *Sojuz* a *Apollo* v roce 1975.

Knížku podávající chronologický přehled vývoje techniky od nejstarších dob až téměř k dnešku jsme dlouho postrádali. Nakladatelství Mladá fronta připravuje v současné době i obdobně zpracovanou příručku věnovanou dějinám vědeckých objevů.

Jiří Mída

redakce hovoří

Pokyny autorům

Rozhledy matematicko-fyzikální mohou otisknout jenom ty články, které byly zaslány redakci s úplným autorovým jménem, jeho akademickými a vědeckými tituly, s udáním pracoviště a bytové adresy autora. O otištění rozhoduje redakční rada nebo vedoucí redaktor po vyjádření recenzenta. *Nevyžádané rukopisy se nevracejí.*

Obsah: Rozhledy matematicko-fyzikální jsou určeny především studentům středních škol a středních odborných učilišť s maturitou. Jejich obsah i způsob podání má proto odpovídat tomuto poslání. Otištěné články musí být psány srozumitelně, pokud možno zajímavě a nemají být příliš dlouhé. Autoři se musí řídit pravidly českého nebo slovenského pravopisu, musí respektovat přijaté názvy a značky a (ve fyzice) zákonem stanovené jednotky a označení.

Úprava rukopisu: Nejprve je třeba uvést titul příspěvku (krátce a výstižně), potom jméno a působiště autora. Text je nutno psát na stroji (nikoliv však perličkou), černou páskou, ob řádek, a to po jedné straně bílého papíru formátu A4. Na každé stránce má být nejvýše 30 řádek, z nichž každý obsahuje 60 úhozů. Nadpisy nebo zdůrazněná slova textu podtrhujte jenom obyčejnou (ne propisovací) tužkou. Poznámky pod čarou — pokud možno v minimálním počtu — je třeba v textu vyznačit postupně číslicemi v exponentu a psát je hned za řádek rukopisu, k němuž patří; od ostatního textu se oddělí vodorovnými čarami. Obrázky se nikdy nekreslí do textu článků!

Matematické výrazy a vzorce se v textu doplňují ručně (velmi čitelně!) inkoustem, tuší nebo propisovací tužkou; zvláštní pozornost je třeba věnovat připisování indexů a exponentů. Vzorce se číslují v oblých závorkách na pravé straně, a to jenom tehdy, jestliže se na ně odvoláváme v dalším textu.

V odkazech na literaturu uvádíme (a to střídavě) jenom publikace dostupné čtenářům Rozhledů, tj. především literaturu psanou v českém nebo slovenském jazyce. Uvádí-li se odkazy na zahraniční literaturu, pak jenom na publikace knižní, nikoli na specializované vědecké časopisy. Odkazy je třeba v textu průběžně číslovat; číslice se píší do hranatých závorek. Odkaz obsahuje jméno autora, název knihy nebo článku (u časopisu ročník a stránku), vydavatele, místo a rok vydání.

Obrázky se rýsují tuší na pauzovací papír a popisují se normalizovaným písmem šablonou 5 mm; čáry musí být ostré a nerozpité. Očíslované texty k obrázkům se přikládají na konec rukopisu. Je třeba pamatovat na to, že se obrázky pro tisk zmenšují v poměru 1 : 2. Fotografie musí být ostré, kvalitní a zhotovené na lesklém bílém papíru. Autor může také zaslat redakci jenom obrázky narýsované tužkou; redakce dá takové obrázky pro tisk narýsovat. I v tomto případě je třeba dodat obrázky pečlivě narýsované a čitelně popsané.

Informace pro předplatitele Rozhledů

V poslední době došel do redakce větší počet dopisů, v nichž si čtenáři chtějí předplatit Rozhledy nebo si stěžují, že neobdrželi některé číslo. Předplatné však přijímá jen Poštovní novinová služba a u ní je též třeba reklamovat špatné doručování časopisu.

Redakce má ve svém archivu malý počet některých čísel Rozhledů z minulých ročníků. V případě, že Vám nějaké číslo chybí, můžete si o ně napsat a podle možnosti Vám je zašleme.

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních

přeje svým čtenářům

a spolupracovníkům

hodně úspěchů v roce 1979

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

calore m.

- specifico
- atomico
- di combustione
- di Joule
- di reazione
- molecolare

caloria ž.

calorimetro m.

calotta ž.

sferica

cambiare

cambiamento m.

camera a nebbia ž.

camera oscura ž.

cammino ottico m.

campo m.

- complesso
- di convergenza
- di definizione
- d'integrità
- di variabilità
- elettrico
- magnetico
- — terrestre

canale m.

candela ž.

— internazionale

— decimale

canonico

capace

capacità ž.

teplo

- specifické, měrné
- atomové
- spalné, vyhřevnost
- Jouleovo
- chemické reakce
- molekulární

kalorie

kalorimetr

vrchlík

— kulový

(z)měnití

změna, výměna

mřížná komora (Wilsonova)

temná komora

optická dráha

komutativní těleso

těleso komplexních čísel

obor konvergence

— definiční

— integrity

— proměnné

pole elektrické

— magnetické

— — zemské

kanál (inform.)

svíčka

— mezinárodní

kandela, (cd)

základní, kanonický

prostorový, obsáhlý; schopný

prostorost, kapacita (vodiče)

cardinale
 carica elettrica ž
 caso m
 catena ž
 a catena
 cateto m
 catodo m
 cavallo vapore m
 cavo
 cella elementare ž
 cellula fotoelettrica ž
 centesimo
 centesimo m
 cento m
 centrale
 centro m
 — di proiezione
 cerchio m
 — circoscritto
 — di distanza
 — exinscritto
 — inscritto
 — osculatorio
 cerchi equatoriali
 — ortogonali

chemiluminescenza ž
 chilogrammo m
 chimica fisica ž
 chiuso
 cibernetica ž
 ciclo m
 cicloide ž (curva)
 ciclometrico
 ciclotron m
 cifra ž
 cilindro m
 cilindrico
 cima ž

základní, kardinální
 elektrický náboj
 případ, náhoda
 řetěz, řetězec
 řetězový
 odvěsna
 katoda
 kůň, koňská síla
 dutý
 elementární částice
 fotoelektrický článok
 stý
 setina; italský halér
 sto
 středový, střední
 střed
 — promítání
 kruh, kružnice
 kružnice opsaná
 — distanční
 — připsaná
 — vepsaná
 — oskulační
 kružnice rotace
 — ortogonální, kolmo
 se protínající
 chemická luminescence
 kilogram
 fyzikální chemie
 uzavřený
 kybernetika
 kruh
 cykloida
 cyklometrický
 cyklotron
 číslice; značka; šifra
 válec; válcová plocha
 válcový
 vrchol

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

5

ROČNÍK 57, 1978-1979, LEDEN

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. O. Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1978.

OBSAH

Doc. J. Vyšín, CSc.: Pravděpodobnostní hra III. (A nakonec něco pro gymnazisty)	193
P. Fejtková, dr. M. Malík: Další úvahy o datových typech	205
V. Havlena, J. Kokeš: Co možná nevíte o kvadratických rovnicích	210
K. Pavlas: Existence přímek protínajících systémy útvarů	215
Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Kruhová inverze	218
Dr. O. Houdek: O teplotách tání a varu ještě jinak	223
Prof. E. Kraemer: Nejmladším čtenářům	228
S. Horák, doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	228
In memoriam	231
Dr. J. Mrázek, CSc.: Zajímavé rozměry rádiových vln	232
J. S.: O dokonalých čtvercích	233
Dr. J. Šedivý: Mezinárodní kongres matematiků 1978	235
Řešení úlohy z prosincového čísla Rozhledů	236
Rezence	237
Redakce hovoří	239
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky

matematika

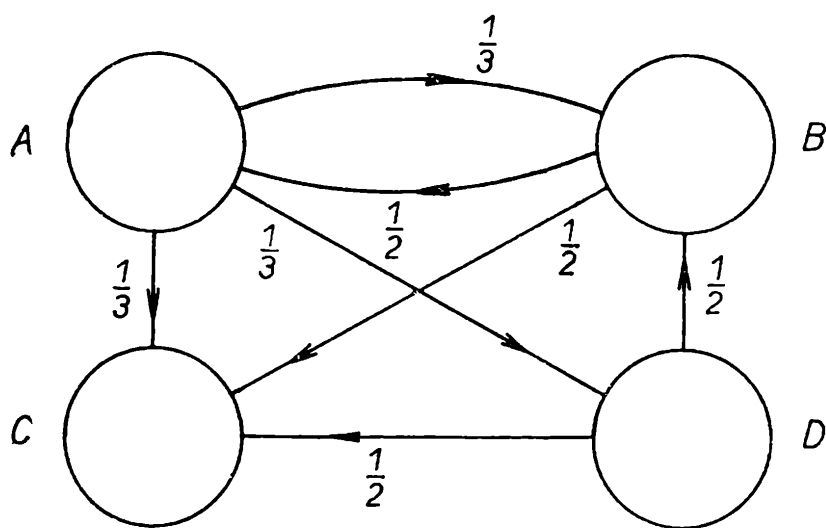
Pravděpodobnostní hra III (A nakonec něco pro gymnazisty)

Doc. JAN VYŠÍN, CSc., Praha

I.

Ale Michal nevyložil nic. Při skoku dalekém si poranil nohu v kotníku, a ležel proto na ortopedii v sousedním městě.

Schůzka „badoušů“ byla zase četně navštívena a Pavel — modelář a Petr — teoretik ji vedli. „Já bych vám chtěl ukázat ještě jeden model náhodných procházek, a to zrovna té struktury z obr. 40. Její schéma je na obr. 43.

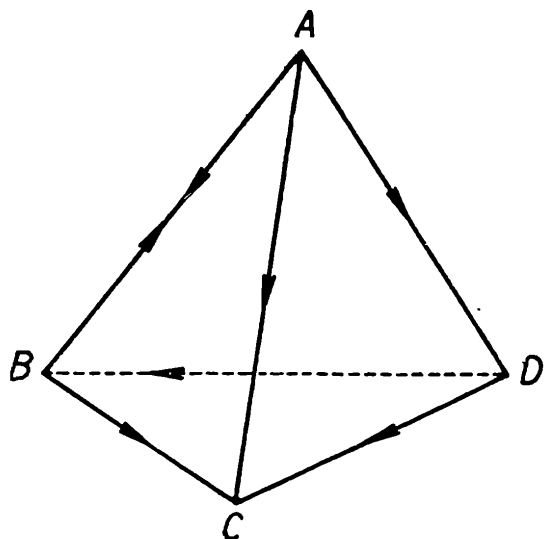


Obr. 43

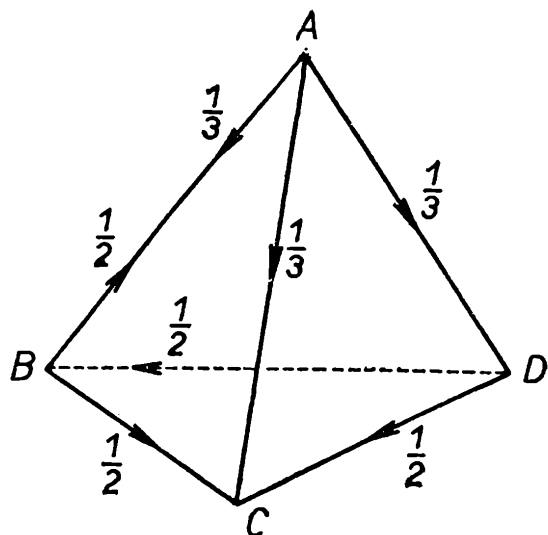
Nakreslíme si obrázek čtyřstěnu $ABCD$ (obr. 44), popíšeme jeho vrcholy, hrany opatříme šipkami. Zlomky nebudeme zatím připisovat; proč, to nám vysvětlí následující situace:

Představíme si, že se z vrcholu A rozbíhají mravenečkové po hranách čtyřstěnu. V každém vrcholu se může mraveneček svobodně rozhodnout, po které ze tří hran vycházejících z tohoto vrcholu chce běžet. Jsou však dvě výjimky:

- (a) nesmí běžet z vrcholu B do D a z D do A ;
- (b) přijde-li do vrcholu C , musí skončit své putování.



Obr. 44



Obr. 45

Z toho omezení vyplývá, že šipky můžeme popsat zlomky (obr. 45).

„Na minulé besedě jsme zjistili pomocí žebříčku i pomocí rovnic, že a mravenečků nasazených ve vrcholu A do hry doběhne vesměs do vrcholu C .“

„A co kdybychom ta omezení zrušili?“, zeptal se s trochou potměšilosti Valentin; bylo vidět, že už si něco dříve promyslel a připravil.

Několik dětí, které našly zálibu v řešení soustav rovnic o více neznámých, se vrhlo k tabuli a začaly počítat. Označily x, y, z, t počet mravenců, kteří prošli vrcholy A, B, C, D a napsaly rovnice:

$$x = a + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} + \frac{t}{3},$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{z}{3} + \frac{t}{3},$$

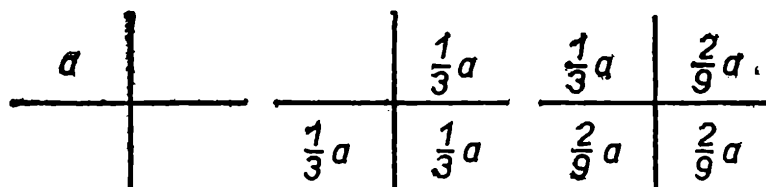
(5)

$$z = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{t}{3},$$

$$t = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3},$$

Odečtením první a druhé rovnice (5) vyšlo $x - y = a + \frac{y}{3} - \frac{x}{3}$, neboli

$$x - y = \frac{3}{4}a. \quad (6)$$



Obr. 46

Odečtením druhé a třetí rovnice (5) vyšlo po úpravě

$$z = y. \quad (7)$$

A konečně dosazením za t z čtvrté rovnice (5) do třetí rovnice (5) vyšlo po úpravě

$$x = y \quad (8)$$

Ze (7), (8) a čtvrté rovnice (5) vyplynulo

$$t = x. \quad (9)$$

A nyní vznikla panika: z (8) a (6) vyšlo $\frac{3}{4}a = 0$ a to přece není pravda, když na vrchol A bylo umístěno a mravenců (např. $a = 20$).

„To je špatně! To nejde řešit! Tam je chyba!“, ozývaly se hlasy.

„Přezkoušejte si výpočet, uvidíte, že tam není chyba,“ vložil se do rozčileného dohadování Petr s ironickým úsměvem. A opravdu, chyba tam nebyla.

„To je tak,“ vysvětloval Petr klidně, „úloha opravdu nemá řešení. Když jste se pokoušeli rozřešit soustavu rovnic (5), předpokládali jste, že se dají najít taková čísla x, y, z, t , která všem těmto rovnicím vyhovují, Ale ona taková čísla neexistují! Váš nesprávný předpoklad se vám vymstil tím, že vám vyšlo, že *kladné číslo a je rovno nule*. To je zřejmá nepravda. Takovéhle postupy se v matematice časem vyskytují a říká se jim *důkazy sporem*.“

„Ale stejně nám není jasné,“ protestovaly děti, „že se nedají vypočítat čísla x, y, z, t , která přece mají význam a existují.“

„To je právě to, že neexistují,“ odporoval Petr. „Co je to x ? To je počet všech mravenců, kteří projdou vrcholem A . A ten počet není konečný; někteří mravenci znovu a znovu pochodují tímto vrcholem...“

„Samozřejmě, pochopitelné vysvětlení nám může dát jedině model,“ dosvědčoval Pavel. „V tom modelu s mravenci se dá ukázat, že při každém kroku v „žebříčku“ projde každým vrcholem aspoň $\frac{2}{9}$ mravenců. Podívejte se: je to myšlenkově dost těžká úvaha: první dva kroky jsou na obr. 46.“

α_n	β_n
β_n	β_n

Obr. 47

α_{n+1}	β_{n+1}
β_{n+1}	β_{n+1}

Obr. 48

Označíme α_n a β_n stavy žebříčku po n -tém kroku; tři pole musí obsahovat podle pravidel jeho vytvoření tatáž čísla, (obr. 47).

Po následujícím kroku dostaneme žebříček na obr. 48 a bude platit

$$\alpha_{n+1} = \beta_n, \quad \beta_{n+1} = \frac{1}{3}\alpha_n + \frac{2}{3}\beta_n. \quad (*)$$

Odhadneme podle obr. 46

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}a > \frac{2}{9}a, \quad \beta_2 = \frac{2}{9}a,$$

platí podle (*)

$$\alpha_3 \geq \frac{2}{9}a, \quad \beta_3 \geq \frac{2}{9}a,$$

obecně

$$\alpha_n \geq \frac{2}{9}a, \quad \beta_n \geq \frac{2}{9}a.$$

„Celá tato nesnáz je způsobena tím, že není vrchol, v kterém by se mohli mravenci shromažďovat a z kterého by nemohli utéci,“ doplňoval Petr. „Rozumíte tomu?“

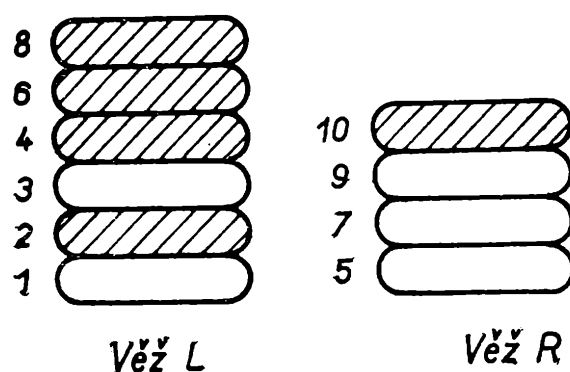
Je třeba říci, že děti příliš nerozuměly a byly zmatené; Petr a Pavel „přestřelili“. Proto se rychle obrátili k jiné úloze.

„Ty předcházející modely si byly příliš podobné,“ řekl Pavel, „stále tam někdo procházel nebo se podávala jablka nebo protékala voda. Ale teď vám ukážu model docela jiný, který vede na mechanismus nám už známý. V teorii pravděpodobnosti se také někdy říká, že hra, kterou vám předvedu, se dá *simulovat* (znázornit) hrou s jablky nebo také obráceně. Takováhle simulace je ovšem něco jiného, než když třeba někdo předstírá nemoc, aby nemusil do školy.“

Hru, kterou nazveme „Dvě věže“, budou hrát dva hráči: Bílý a Černý. Každý z nich bude mít teoreticky neomezený počet hracích kamenů své barvy; na každém kameni lze rozlišit líc (L) a rub (R). (Bílé kameny mohou být např. desetníky, černé dvacetníky, líc je číslo, rub je znak). Každý hráč hodí jedním kamenem (mincí): padne-li líc, dá kámen do sloupku L, padne-li rub, dá kámen do sloupku R. První tah má Bílý.

Tak staví oba hráči dvě „věže“: L a R. Hra končí, jakmile jsou „střechy“ obou věží *poprvé* téže barvy; tato barva vyhrává.

Na obr. 49 je naznačen průběh hry v 10 tazích; čísla tahů jsou připsána k položeným kamenům. Vyhrává Černý 10. tahem.

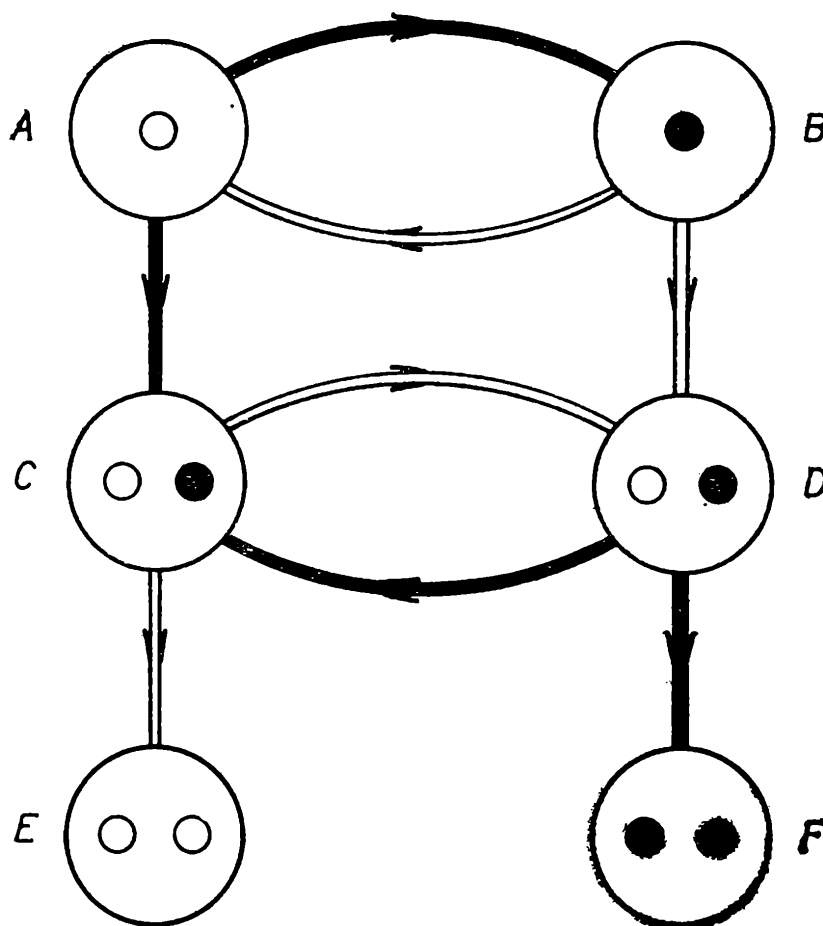


Obr. 49

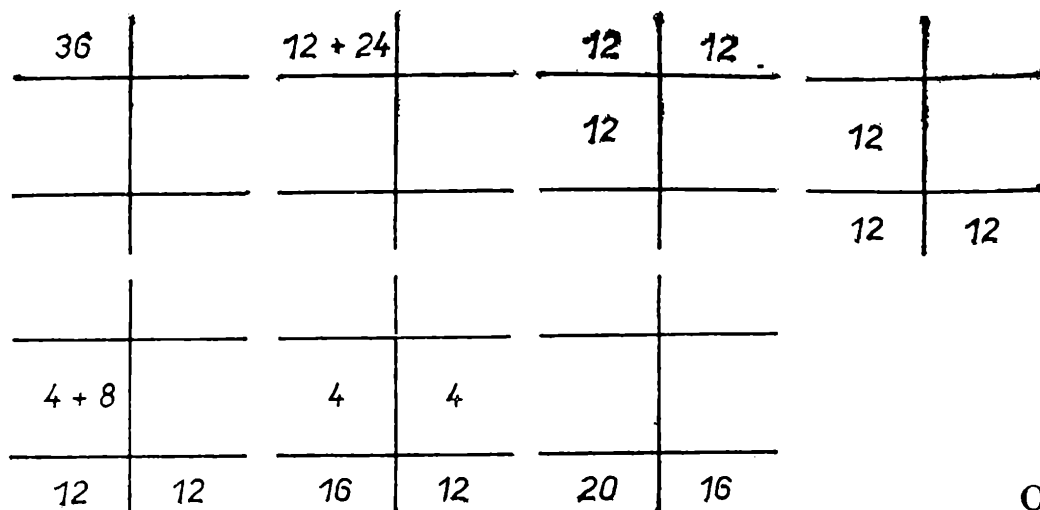
Pro zaznamenání průběhu hry vám navrhuji schéma na obr. 50:

A , B , C , D , E , F představuje 6 možných situací podle barvy střech; např. terč B s jedním černým kroužkem znamená: je jen jedna věž, a to s černou střechou. Bílá šipka znamená: táhne Bílý a převede např. situaci C v situaci E ; podobně černé šipky znamenají tahy Černého.

Situace $E(F)$ znamená: vyhrává Bílý (Černý). Každá partie hry „Dvě věže“ začíná situací A (proč?) a končí situací E nebo F ; jsou však také partie nerozhodné; vyhledejte některou!



Obr. 50



Obr. 51

Sehrajeme-li a partií hry (např. $a = 36$) a určitý počet x partií dojde do situace např. D , pak podle zkušenosti asi $\frac{1}{2}x$ z těchto partií přejde do situace C a $\frac{1}{2}x$ do situace F .

Má se sehrát a partií hry „Dvě věže“ a ptáme se:

- Můžeme pomocí diagramu z obr. 50 předpovědět, kolik asi partií skončí výhrou Bílého a kolik výhrou Černého?
- Můžeme předpovědět, kolik partií projde každou ze situací A , B , C , D , E , F ? [Je to rozšíření předchozí otázky (a)].

Shromáždění „badoušů“ se během Pavlova výkladu víc a víc vzrušovalo, ozývaly se jednotlivé výkřiky, až splynuly v konstatování: „To už přece známe, tu úlohu jsme řešili. Když je partií 36, vyhraje Bílý asi 20-krát a Černý asi 16-krát.“ Dokonce někdo šel k tabuli a napsal známý výpočet (obr. 51).

„No, a co ta druhá otázka?“ zeptal se Pavel.

„To přece už vyřešil Pavel,“ volaly. „Já to mám zapsané,“ hlásil se Valentin a hned diktoval (viz str. 149, (V)):

$$x = \frac{4}{3}a, \quad y = \frac{2}{3}a, \quad z = \frac{10}{9}a, \quad t = \frac{8}{9}a, \quad u = \frac{5}{9}a, \quad v = \frac{4}{9}a;$$

stačí jen dosadit $a = 36$; vyjde

$$x = 48, \quad y = 24, \quad z = 40, \quad t = 32, \quad u = 20, \quad v = 16.$$

„A není vám divné, že vychází např. $x = 48$, $z = 40$, ačkoli je počet her $a = 36$,“ vmísil se do debaty Petr. „To znamená: není nesmyslné, že celkový počet opakování některé situace, např. C , je větší než počet partií?“

Děti se na chvíli zarazily, ale brzy na to přišly: „Vždyť se v některé partii může opakovat tatáž situace vícekrát,“ vysvětlovaly.

„Správně,“ přikyvoval Petr s úsměvem, „je to podobné, jako když v obchodním domě procházejí někteří kupující určitým sálem vícekrát, nebo když ve vodovodním systému protéká část vody vícekrát určitou komorou.“

Nato se schůzka skončila a zdálo se, že není dále co říci k náhodným procházkám.

II.

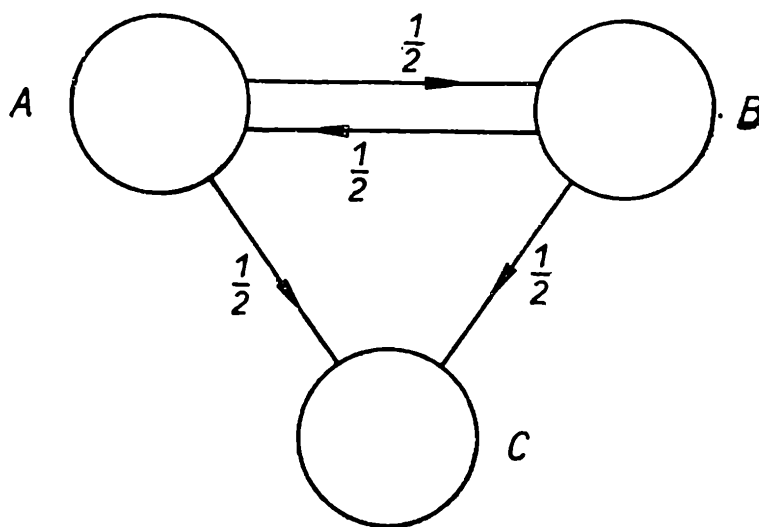
Po několika dnech se vrátil Michal z ortopedie a belhal se se škrobovým obvazem. Celý tábor se jednoho večera vypravil do hvězdárny v sousedním městě podívat se na zatmění Měsíce. Michal však zůstal doma a vybelhal se jen na stráň za táborem. Tady leželi Petr s Pavlem a rozprávěli.

„Tak co, Michale,“ oslovili jej, „ještě máš nějaké problémy s náhodnými procházkami?“

„Já jsem si pečlivě opsal od Valentina to, co jste tu dělali, když jsem byl v nemocnici, ale musím říci, že pořád něčemu nerozumím,“ mračil se Michal.

„A čemu pak?“

„No, vezměme třeba ten model obchodního domu z obr. 40 resp. 43.



Obr. 52

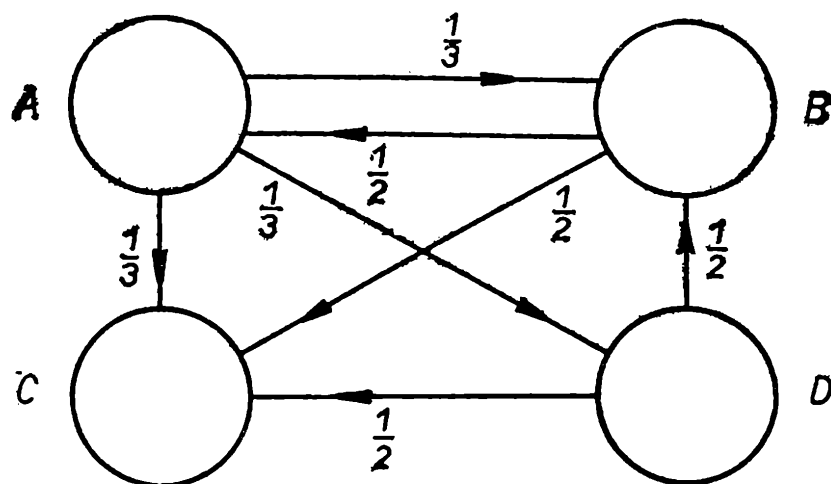
Vyšlo nám výpočtem, že se všichni kupující sejdou v hale C, a přece je myslitelné, že někteří kupující budou stále procházet cestou ADBA a nikdy se do C nedostanou. Neudělali jsme nějakou chybu?“

„A kolik takových kupujících bude?“ zeptal se Petr.

„No, hodně málo, čím dál tím méně,“ přisvědčoval Michal.

„To se musí zjistit docela přesně,“ trval na svém Petr. „Počkej, ukáži ti to na jednodušším příkladě,“ a nakreslil schéma (obr. 52).

„To je obchodní dům s třemi halami; procházení v něm je naznačeno obvyklým způsobem. Jednodušší oproti předešlému je v něm to, že



Obr. 40 bis

kupující, kteří se vracejí do A , mají *jen jednu* možnost (ABA), naproti tomu na obr. 40 by měli *dvě* možnosti ABA a $ADBA$.

A teď dovedeme odpovědět na otázku, proč jsou v našich výpočtech zahrnuti i ti kupující, kteří věčně přecházejí mezi A , B ; kolik je těch, kteří se stále vracejí do A . Nejdříve je v A shromážděno a lidí, po návratu z B je jich $\frac{a}{4}$, po druhém návratu prochází halou A jen $\frac{a}{4^2}$ lidí atd. Po

n -tém návratu jich prochází $\frac{a}{4^n}$, což při velkém n může být číslo velmi malé. Např. je-li $n = 9$, je $4^n = 262144$; je-li a rovno číslu 262144, je $\frac{a}{4^n} = 1$. Při $(n + 1)$ ním návratu už by se tu octl méně než jeden člověk, což je prakticky nemožné. S lidmi je těžko tuto situaci smiulovat, ale dobře to jde s vodou ve vodovodním potrubí: tam bude cestu ABA konat stále menší a menší množství vody...

„To je něco takového jako známé paradoxon Achilles a želva,“ vpadl do výkladu Pavel.

„Není,“ pravil Petr. „V paradoxu Achilles a želva tvoří konvergentní řady nejen délky stále se zmenšujících drah, ale i časy, ve kterých jsou proběhnuty... Ale zde,“ Petr si vzpomněl, že mají něco srozumitelně vyložit Michalovi, „těch do A se vracejících zákazníků nebo litrů vody je

$$\frac{a}{4} + \frac{a}{4^2} +$$

a součet této geometrické řady s kvocientem $\frac{1}{4}$ je

$$\frac{a}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a}{3},$$

$\begin{array}{c c} \textcircled{648} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & 216 \\ \hline 216 & 216 \end{array}$	$\begin{array}{c c} \textcircled{108} & 0 \\ \hline 324 & 216 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 108 & 108 \\ \hline 432 & 0 \end{array}$
$\begin{array}{c c} 0 & 144 \\ \hline 468 & 36 \end{array}$	$\begin{array}{c c} \textcircled{72} & 0 \\ \hline 540 & 36 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 72 & 18 \\ \hline 558 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & 42 \\ \hline 582 & 24 \end{array}$
$\begin{array}{c c} \textcircled{21} & 0 \\ \hline 603 & 24 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 21 & 12 \\ \hline 615 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & 19 \\ \hline 622 & 7 \end{array}$	$\begin{array}{c c} \textcircled{9} & 1 \\ \hline 631 & 7 \end{array}$
$\begin{array}{c c} 9 & 4 \\ \hline 634 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & 7 \\ \hline 637 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{c c} \textcircled{3} & 1 \\ \hline 640 & 4 \end{array}$	
$\begin{array}{c c} 3 & 3 \\ \hline 642 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} 0 & 4 \\ \hline 643 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c} \textcircled{2} & 0 \\ \hline 645 & 1 \end{array}$	

Obr. 53

takže halou A (komorou A) projde (proteče) celkem $\frac{4}{3}a$ lidí (litrů vody).

Víš, co jsou to konvergentní geometrické řady?“ obrátil se Petr na Michala. Michal si soukromě četl různé učebnice pro vyšší třídy a populární příručky, proto to věděl.

„Já to zkusím s řadami pro původní úlohu,“ připojil se Michal.

„To můžeš; označíš-li x , y , z , t počet osob, které projdou halami A , B , C , D , vyjde stejně $x = \frac{4}{3}a$, protože do haly A se mohou vrátit jen kupující z haly B , a tedy je

$$x = a + \frac{a}{4} + \frac{a}{4^2} + \dots = \frac{4}{3}a.$$

Další výpočet je stejný jako při řešení rovnicemi.“

Michal chvíli uvažoval a pak přikývl.

„Ovšem, v úloze s obr. 40 bis je to složitější: tady jsou dva „okruhy“ ABA a $ADBA$ a je lépe vycházet z rovnic,“ upozorňoval Petr. „Udělejme si však *numerický pokus*. Zkusme výpočet pro $a = 648$, přemístíme je všechny až do haly C a pak vypočteme x , tj. počet zákazníků, kteří prošli halou A . Mělo by nám vyjít $\frac{4}{3} \cdot 648 = 864$.“

„Já se připojím,“ prohlásil Pavel, „a navrhuji, aby každý z nás tři řešil úlohu odděleně a výsledky porovnáme.“ „Souhlasím,“ řekl Petr, „ale Michalovi musíme trochu pomáhat.“

Tak tedy nejdříve se podívejme přes rameno Petrovi. Prováděl výpočet, který je na (obr. 53).

Nyní se Petr zastavil: bylo vidět, že během výpočtu si stranou na papíře dělal zkoušky, tj. sčítal všechna čísla žebříčku, zda mu dávají 648. Pak si záhadně okroužkoval některá čísla v „buňce A “ a sečetl je

$$648 + 108 + 72 + 21 + 9 + 3 + 2 = 863.$$

Nato se podíval do papíru Michalova. Michal měl výpočet stejný až k schématu

$$\begin{array}{r|l} 72 & 18 \\ \hline 558 & 0 \end{array}$$

Pak pokračoval jinak (obr. 54):

$$\begin{array}{r|l} 81 & 0 \\ \hline 567 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 0 & 27 \\ \hline 594 & 27 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 0 & 40 \\ \hline 607 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 0 \\ \hline 627 & 1 \end{array}$$

Obr. 54

a zastavil se. Kroužky ve svém zápisu neměl.

Petr nahlédl do Pavlova řešení; ten dospěl k schématu

$$\begin{array}{r|l} 2 & 0 \\ \hline 645 & 1 \end{array}$$

a dále se lopotil se zlomky (obr. 55).

Na tomto místě se zastavil.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c|c} 0 & \frac{2}{3} \\ \hline 645 + \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & 0 \\ \hline 646 & \frac{5}{3} \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline 646 + \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c} \frac{2}{3} & 0 \\ \hline 647 & \frac{1}{3} \end{array} \\
\\
\begin{array}{c|c} 0 & \frac{2}{9} \\ \hline 647 + \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c} \frac{1}{9} & 0 \\ \hline 647 + \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \hline 647 + \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c} \frac{2}{9} & 0 \\ \hline 647 + \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{array} \\
\\
\begin{array}{c|c} 0 & \frac{2}{27} \\ \hline 647 + \frac{20}{27} & \frac{5}{27} \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c} \frac{1}{27} & \frac{2}{27} \\ \hline 647 + \frac{23}{27} & \frac{1}{27} \end{array}
\end{array}$$

Obr. 55

$$\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 645 & 1 \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 646 & -1 \end{array}
\quad
\boxed{
\begin{array}{c|c} -1 & 2 \\ \hline 647 & 0 \end{array}
}
\quad
\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 648 & \end{array}$$

Obr. 56

„Podívejte se,“ pozval Petr oba řešitele k sobě, „já teď dokončím svůj výpočet (obr. 56), a to pomocí „vypůjčených zákazníků“; zápis je krátký.

„Záporní zákazníci“ jsou vypůjčení, ti se do hry nepočítají, musí se zase vrátit. Okroužkovaná čísla značí příliv nových kupujících do haly A; jejich součet je

$$648 + 108 + 72 + 21 + 9 + 3 + 2 = 863 .$$

Pak už přijde do A jen jeden ze dvou zákazníků ze zarámovaného schématu na obr. 56. Celkem tedy prošlo halou A opravdu 864 osob, což je $\frac{4}{3}$ z 648.“

„Moment, já dokončím s „vypůjčenými zákazníky“ své řešení,“ prohlásil Michal (obr. 57).

Pak si také okroužkoval čísla 648, 108, 72, sečetl je $648 + 108 + 72 = 828$ a pak sledoval dále svůj výpočet a vstupy nových zákazníků do haly A:

$$9 + 20 + 5 + 1 + 1 = 36 .$$

20	0	-1	7	-1	11	4	1
627	1	634	8	638	0	643	0

1	2	2	0	-1	1	-1	2
644	1	645	1	646	2	647	0

0	0
648	0

Obr. 57

Součet $828 + 36$ mu dal $864 = \frac{4}{3} \cdot 648$. Michal byl velmi spokojen; dovedeme si odůvodnit jeho postup?

Zato Pavel se díval nevraživě na své zlomky. „Nemrač se, Pavle,“; řekl mu Petr. „Tvůj výpočet úplně hmatatelně ukazuje, jak čísla x, y, t v polích A, B, D konvergují k nule a jak číslo z z pole C se blíží neomezeně číslu $a = 648$. Ovšem, že nesmíme interpretovat čísla jako počty osob, ale spíše jako litry vody.“ Uzavřel Petr.

„Moment — ještě jednou,“ ozval se hloubavý Michal. „Teď vidím, že pravidlo (II) vyslovené na začátku je vlastně zbytečné: dá se odvodit z pravidla (I) pomocí konvergentních řad.“

„Máš pravdu, Michale,“ zakončil Pavel, „ale myslím, že jsme si toho řekli pro dnešek o náhodných procházkách dost. Slyším ostatně, že už naši přicházejí, a tak se bude asi mluvit spíše o zatmění Měsíce než o matematice.“

Další úvahy o datových typech

PAVLA FEJTKOVÁ, dr., MAREK MALÍK, MFF UK Praha

V minulých číslech časopisu *Rozhledy* jsme v článcích „*Datové typy*“, „*Třídy*“ a „*Pointry*“ ukázali, jakým způsobem můžeme popisovat některé situace a objekty reálného světa pro účely dalšího zkoumání. Seznámili jsme se s mnoha novými pojmy, z nichž některé se možná zdály velice snadné a přirozené, jiné se jevily komplikovanější vzhledem k jednoduchým situacím, které zobrazovaly. Ale pokud budete chtít sledovat články, které budou navazovat a které ukážou některé z možností, jak lze našich úvah dále využít, bude důležité, aby se vaše uvažování v zavedených pojmech stalo zcela samozřejmé.

Z těchto důvodů nyní znovu přemýšlejme o termínech a pojmech, kterých jsme užívali. Zamysleme se nad nimi zejména z toho velice důležitého hlediska, do jaké míry *způsob našeho běžného myšlení odpovídá práci se zavedenými pojmy*. Aby se všechny zavedené pojmy a způsob práce s nimi (říkáme někdy zavedený formalizmus) staly při uvažování samozřejmé a přirozené, uvědomujme si, jak skutečně popisujeme (formalizujeme) způsob našeho myšlení, jinak řečeno, uvědomme si podobnost principů našeho myšlení a principů zaváděné teorie.

Zatím jsme zvyklí mluvit o údajích (které charakterizují nebo popisují různé objekty) jako o *datech*, a to o datech různých typů. Nyní si znovu uvědomme, jak vnímáme údaje reálného světa:

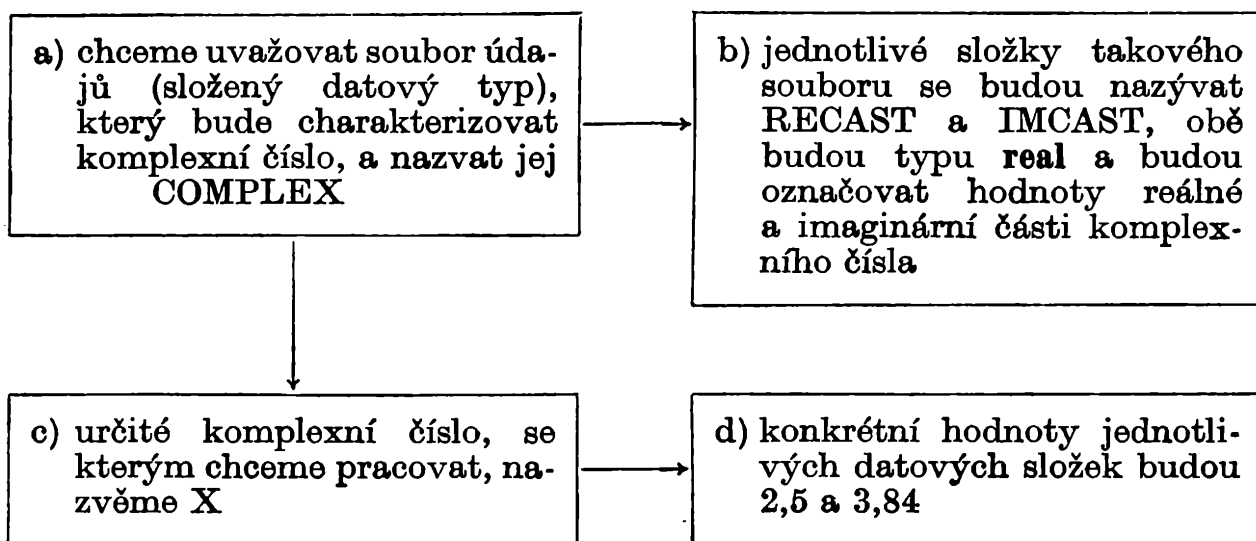
- 1) K objektu většinou vztahujeme nějaký *komplex údajů* (dat).
(Např.: Každý člověk má nějakou výšku, váhu, pohlaví, je či není svobodný, má nějaký tvar obličeje, barvu vlasů, očí atd.)
- 2) Tyto údaje si můžeme uvědomovat více či méně *strukturované*.
(Např.: Buď výška, váha, délka vlasů, barva vlasů...
nebo tělesné rozměry $\left\langle \begin{matrix} \text{výška} \\ \text{váha} \end{matrix} \right\rangle$, vlasy $\left\langle \begin{matrix} \text{délka} \\ \text{barva} \end{matrix} \right\rangle$...)
- 3) Jednotlivým údajům *přiřazujeme slovo* (nějak je nazýváme), aby byl o zřejmé, které hodnoty budou o čem vypovídat.
- 4) Jednotlivé údaje jsou nějakého *dohodnutého typu*.
(Např. víme, že jistá vlastnost bude udána číselnou hodnotou, jiná slovem udávajícím barvu apod.)

Víme, že takový *komplex údajů může vypovídat o jakémkoli objektu příslušného typu*, v našem příkladě o kterémkoli člověku. Bude-li ten člověk například váš známý Karel, pak bude charakterizován (popsán) konkrétními údaji příslušných typů.

Zopakujme si nyní některé pojmy ze zavedené symboliky. K označení proměnných jsme začali používat *identifikátorů* (místo libovolně utvořených názvů). Zejména jsme se naučili používat pojmu *proměnná* a *hodnota proměnné* obecněji, než jak jsme zvyklí z běžné matematiky, kde se zatím pracovalo vesměs pouze s číselnou hodnotou. Zpočátku bylo asi poněkud nezvyklé říkat třeba, že hodnotou proměnné X je „OVALNY“ nebo hodnotou proměnné X je **true** (pravda). Možná, že už to tolik potíží nedělalo, když jste místo identifikátoru X použili identifikátor, který připomíná slovo běžného jazyka. (Hodnotou proměnné TVAROBLICEJE je „OVALNY“, hodnotou proměnné SVOBODNY je **true** apod.) Poznali jsme tedy *základní datové typy* **real**, **integer**, **Boolean**, **character**, **text** a postupně jsme z nich uměli utvářet *složené typy* a složený typ s přiřazeným identifikátorem jsme nazvali *třídou* (**class**).

Dokážeme tedy popsat následující vztahy:

1. příklad:



a tyto úvahy jsme se naučili symbolicky psát takto:

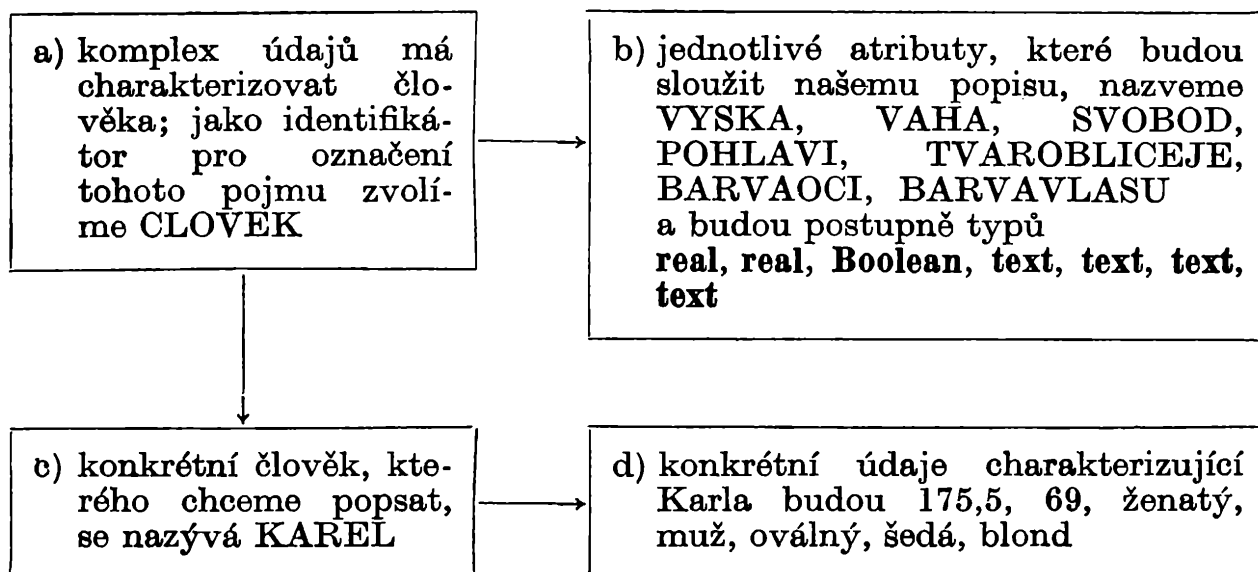
a), b) **class** COMPLEX;
 <real RECAST, IMCAST>

c) **ref** (COMPLEX) X;

d) hodnotou proměnné X je <2.5; 3.84>

(Říkáme, že třída COMPLEX má dva atributy RECAST a IMCAST a hodnoty atributů konkrétního datového údaje jsou 2,5 a 3,84. Proměnná X je třídou COMPLEX kvalifikována.)

2. příklad:



a opět je dokážeme napsat symbolicky:

```
a), b) class CLOVEK;  
    <real VYSKA, VAHA;  
    Boolean SVOBOD;  
    text POHLAVI, TVAROBLICEJE, BARVAOCI, BARVAVLASU>  
c) ref (CLOVEK) KAREL;  
d) hodnota proměnné KAREL je  
    <175.5; 69; false; „MUZ“; „OVALNY“; „SEDA“; „BLOND“>
```

Dokonce nejenže mluvíme o hodnotě proměnné datového typu (např. proměnné KAREL), ale poznali jsme i prostředky, jak lze hovořit o hodnotách jednotlivých atributů (jednotlivých složek datového údaje). Poznali jsme, že zápis

KAREL . VAHA

znamená totéž co v mluveném jazyce slovní spojení Karlova váha; tedy, že mezi všemi údaji vztahujícími se ke Karlovi uvažujeme hodnotu právě té složky datového údaje, která je označena jako VAHA.

Ve všech postupech je vidět zřejmá analogie s tím, jak jsme se od dětství učili mluvit a myslet, vytvářeli jsme pojmy a každý pojem jsme vyjádřili slovem (v zaváděné symbolice: pojem — souhrn atributů = = třída — class; slovo pro onen pojem = název třídy) a samozřejmě, když jsme uvažovali o konkrétním objektu (konkrétní objekt = exemplář třídy), dokázali jsme jej také pojmenovat, odvolávat se na něj (reference = pointer) a charakterizovat jej jednotlivými konkrétními hodnotami jeho atributů, na které se odvoláváme opět pomocí názvů.

(Uvědomme si znovu tyto aspekty na příkladu 2. Pojem člověk včetně slova pro onen pojem; názvy jednotlivých atributů člověka (výška, barva vlasů apod.), určitý člověk (konkrétní exemplář třídy), na kterého se můžeme odvolat jménem Karel apod.).

Je třeba samozřejmě znovu zopakovat, že v popisech pracujeme se zjednodušenými obrazy skutečnosti, tzn. pro každý pojem máme většinou mnohem více charakteristik (a často bychom je ani neuměli vyjmenovat), než kolik jich uvažujeme pro naše popisy a zkoumání. Naproti tomu v popisech musíme více dbát toho, aby nedošlo k nejednoznačnosti. (Např. použití stejných identifikátorů pro různé proměnné apod.).

Pojem bývá navíc často spojen s nějakými ději, nebo o něm víme, že se objekty mohou nějakých dějů zúčastnit. Tuto spjatost s dějem nebo s činností zatím ještě neumíme postihnout, a proto o ní neuvažujeme, ale velice brzo poznáme, jak lze v naší teorii zachytit i takové jevy.

Pokusme se ještě zopakovat práci se zavedenými pojmy na následujícím příkladě. (V levém sloupci bude vždy řečeno, kterou skutečnost chceme zachytit, v pravém symbolický zápis nebo způsob vyjádření).

Petr očekává, že dostane psa, o psech toho mnoho neví, jeho atributy pro psa jsou zatím pouze rasa, barva a rozlišení, zda jde o štěně nebo o dospělého psa	můžeme zavést třídu: class PES; <text RASA, BARVA; Boolean STENE>
Petr štěně dostane	začneme mluvit o konkrétním <i>exempláři třídy</i> (tento fakt ještě neumíme symbolicky zapsat)
chce je nazývat jménem Alan	zavedeme proměnnou kvalifikovanou pro třídu PES: ref (PES) ALAN;
štěně je pudl černé barvy	konkrétní datový údaj: <„PUDL“; „CERNY“; true> hodnoty atributů: ALAN.BARVA=„CERNY“ ALAN.STENE ≡ true
později se Petr dozví, že Alan je z „dobré rodiny“, s rodokmenem, rodiče byli psi soutěžní atd.,	rozšíříme třídu např. takto: class PES; <ref (CLOVEK) MAJITEL;

začne tedy uvažovat o mnohých dalších attributech

```
ref (PES )MATKA;
ref (PES) OTEC;
ref (DATUM) NAROZENI;
ref (SOUTEZ)
    POSLEDNISOUTEZ;
integer POCETCEN;
text RASA, BARVA;
.....>
```

některé atributy jsou pointry, tzn. předpokládáme, že by byly definovány příslušné třídy, např.

```
class SOUTEZ;
<text MISTO;
integer UMISTENI;
ref (DATUM) DAT>
```

zná určit jejich hodnoty

např.
ALAN.MAJITEL==PETR
apod.

Petr se může např. ptát, kolik získala Alanova matka cen v soutěžích

ptáme se na hodnotu proměnné
ALAN.MATKA.POCETCEN

To jsou zatím jen některé úvahy, jež dokážeme v zavedené symbolice zapsat. Mnohé z otázek byly zatím opominuty, ale v budoucnu se jimi budeme zabývat.

Otázka, kterou bychom měli vyřešit už nyní, je, co bude hodnotou proměnné

ALAN . POSLEDNISOUTEZ,

když Alan ještě nikdy nesoutěžil. S obdobnou otázkou se můžeme setkat prakticky u exempláře každé třídy, která má referenční atributy. V minulém článku jsme uvažovali například třídu pro popis žáků ve škole s referenčním atributem VEDLE, který vypovídal o sousedu ve školní lavici. Znovu si můžeme položit otázku, co bude hodnotou atributu VEDLE toho žáka, který sedí v lavici sám. Pokud by atribut měl vypovídat o počtu jeho sousedů v lavici, byl by patrně typu *integer* a jeho hodnotou by byla nula. Podobně by měla být hodnota referenční proměnné, která ukazuje na neexistujícího souseda, jakási „referenční nula“.

Pro popsané případy se skutečně zavádí speciální hodnota referenční proměnné, která se označuje zvláštním slovem **none**.

Platí tedy

ALAN.POSLEDNISOUTEZ == none.

Cvičení.

Vytvořte návrh popisu všech tříd, jimiž jsou kvalifikovány referenční proměnné v posledním příkladu (SOUTEZ, CLOVEK, DATUM); pokuste se vymyslet některé další vztahy a situace a popište je.

Co možná nevíte o kvadratických rovnicích

VLADIMÍR HAVLENA a JAROSLAV KOKEŠ, gymnázium Rumburk

V tomto článku se budeme zabývat dvěma méně známými metodami grafického řešení kvadratických rovnic.

Metoda posunuté paraboly

umožňuje graficky nalézt reálnou a imaginární část kořenů kvadratické rovnice, jejíž oba kořeny jsou *komplexní nereálné*.

Mějme danu kvadratickou rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

s reálnými koeficienty a, b, c , $a \neq 0$, která nemá žádný reálný kořen. Víme, že taková rovnice má dva různé konjugované komplexní kořeny. Určíme graficky reálné a imaginární části těchto kořenů.

V ortonormálním systému souřadnic sestrojíme graf funkce

$$f: y = ax^2 + bx + c.$$

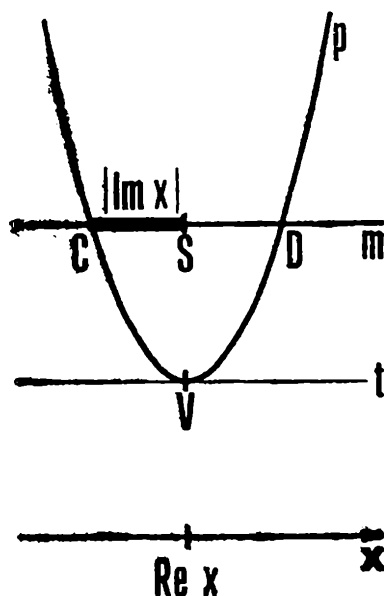
Jelikož rovnice (1) nemá reálné kořeny, graf funkce f zřejmě neprotíná osu x .

Sestrojíme vrcholovou tečnu t paraboly p , která je grafem funkce f . Dále nalezneme přímku m , jež je obrazem osy x v osově souměrnosti podle vrcholové tečny t (viz obr. 1). Přímka m protne parabolu p ve dvou bodech C a D ; střed úsečky CD označme S .

Nyní platí: *Reálné části* obou kořenů rovnice (1) se sobě rovnají a jsou rovny 1. souřadnici vrcholu V paraboly p (nebo též 1. souřadnici bodu S). *Imaginární části* obou kořenů se od sebe liší pouze znaménkem; jejich absolutní hodnota je rovna velikosti úsečky CS (nebo polovině úsečky CD).

Naše tvrzení teď dokážeme.

Určeme početně 1. souřadnici vrcholu paraboly p , která je grafem funkce f . Protože v bodě vrcholu nastává jediný lokální extrém funkce f



Obr. 1

a funkce f má definovanu prvou derivaci všude v oboru reálných čísel, je v bodě vrcholu hodnota první derivace f' funkce f rovna nule. Vypočteme prvou derivaci:

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Ta je zřejmě rovna nule v jediném bodě x_0 , pro nějž platí

$$2ax_0 + b = 0.$$

Proto

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad (2)$$

je 1. souřadnice vrcholu paraboly p .

Připomeneme-li si, že rovnice (1) má dva kořeny

$$x = -\frac{b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad (3)$$

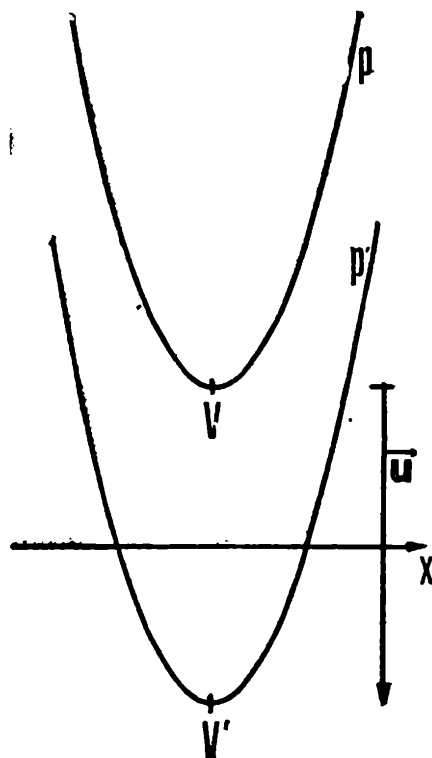
jejichž reálná část je

$$\operatorname{Re}(x) = -\frac{b}{2a},$$

dostáváme srovnáním (2) a (3) první část našeho tvrzení.

Zdůvodněme nyní grafické nalezení imaginární části kořenů rovnice (1). K tomu vypočteme 2. souřadnici vrcholu paraboly p , což je funkční hodnota funkce f v bodě $-b/2a$. Je

$$f(-b/2a) = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$



Obr. 2

Vrchol má tedy souřadnice

$$V = \left[-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right].$$

K parabole p sestrojme nyní parabolu p' získanou posunutím paraboly p , zobrazujícím vrchol V do bodu

$$V' = \left[-\frac{b}{2a}; \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right],$$

tedy do bodu, jehož 1. souřadnice se nezměnila a 2. souřadnice změnila své znaménko (viz obr. 2). Protože toto posunutí je určeno vektorem

$$u = \left(0; \frac{b^2 - 4ac}{2a} \right),$$

je parabola p' grafem funkce

$$g: y = ax^2 + bx + c + \frac{b^2 - 4ac}{2a},$$

což po úpravě dá

$$g: y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{2a} - c.$$

Graf funkce g protíná osu x ve dvou bodech, jejichž 1. souřadnice jsou reálnými kořeny rovnice

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{2a} - c = 0. \quad (4)$$

Porovnejme nyní početně řešení rovnice (1) a (4).

Rovnice (1) má kořeny (3), rovnice (4) má při stejném významu koeficientů a, b, c kořeny

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4a\left(\frac{b^2}{2a} - c\right)}}{2a},$$

tedy

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Protože obě paraboly p, p' mají stejnou 1. souřadnici vrcholu, je zřejmé u paraboly p' polovina vzdálenosti průsečíků s osou x rovna

$$\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

což je právě podle (3) absolutní hodnota imaginární části řešení rovnice (1).

Hledáme-li tedy imaginární části kořenů rovnice (1), stačí příslušnou parabolu p posunout do p' a určit polovinu velikosti úsečky vymezené posunutou parabolou na ose x . V praxi je však pohodlnější místo paraboly posunout osu x v inverzním posunutí; dostaneme tak přímku m na obr. 1.

Metoda kružnice

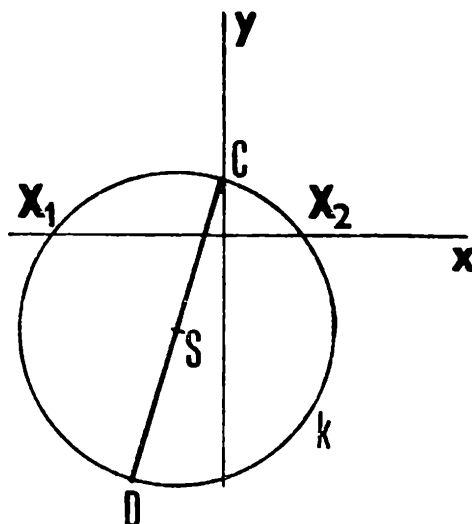
je velmi pohodlnou metodou ke grafickému hledání kořenů kvadratické rovnice v *normovaném tvaru*, a to rovnice s reálnými kořeny.

Nechť rovnice

$$x^2 + px + q = 0 \quad (5)$$

má alespoň jeden reálný kořen. V ortonormálním systému souřadnic sestrojme úsečku CD (obr. 3), kde $C = [0; 1]$ a $D = [-p; q]$. Nad průměrem CD opišme kružnici; první souřadnice průsečíků X_1, X_2 kružnice k s osou x jsou kořeny rovnice (5).

K ověření správnosti metody budeme pracovat s rovnicí kružnice k .



Obr. 3

Souřadnice středu S kružnice k jsou aritmetickými průměry souřadnic bodů C a D . Je tedy

$$S = \left[-\frac{p}{2}; \frac{1+q}{2} \right].$$

Poloměr r kružnice k je roven velikosti úsečky CS , tedy

$$r^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{(q-1)^2}{4}.$$

Nyní už můžeme dosadit do obecné rovnice kružnice

$$k: (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2; S = [m; n].$$

Dostaneme

$$k: \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1+q}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{(q-1)^2}{4}. \quad (6)$$

Hledejme 1. souřadnice průsečíků kružnice k s osou x , tedy s přímkou o rovnici $y = 0$. Po dosazení poslední podmínky do (6) vychází

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4}.$$

Po úpravě dostaneme

$$x^2 + px + q = 0,$$

což je jednak rovnice pro 1. souřadnice průsečíků kružnice k s osou x , jednak i námi řešená původní kvadratická rovnice (5).

Cvičení: Řešte graficky metodou kružnice kvadratickou rovnici se dvěma nereálnými komplexními kořeny. Ukažte, že k tomu stačí sestavit kružnici nad průměrem CD , kde $C = [0; 1]$, $D = \left[-p; \frac{p^2 - 2q}{2}\right]$.

Existence přímk protínajících systémy útvarů

KAREL PAVLAS, gymnázium Třebíč

Hellyovy věty zaručují existenci bodů společných všem útvarům jistého systému, umožňují však také důkazy vět o existenci přímk, které protínají všechny útvary určitých systémů. Společným rysem důkazů těchto vět je konstrukce pomocných systémů úseček na přímcích či oblouků na kružnici, o kterých pojednával článek *Hellyovy věty o obloucích kružnic* (Rozhledy, č. 8, ročník 56).

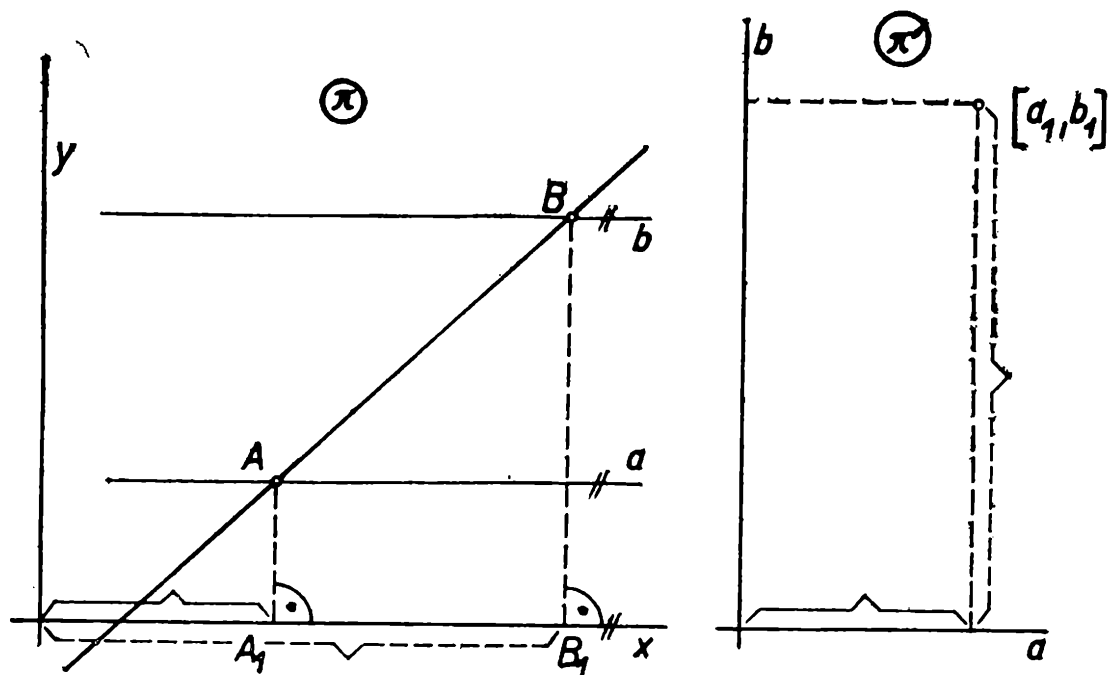
Příklad 1. Je dána soustava konvexních útvarů $U_1, U_2, \dots, U_n$. Nechť každé dva útvary této soustavy mají aspoň jeden společný bod. Potom libovolným bodem S roviny je možno vést přímk q , která protíná všechny útvary dané soustavy. Dokažte.

Řešení. V rovině daných konvexních útvarů zvolíme bod S a sestrojíme libovolnou kružnici $k = (S, r)$. Každý útvar U_i promítneme na kružnici k tím způsobem, že bodem S vedeme všechny průsečnice útvaru U_i a sestrojíme jejich průsečíky s kružnicí k . Všechny útvary soustavy se tak promítnou na kružnici k do oblouků, z nichž každé dva mají společný aspoň jeden bod. Soustava oblouků splňuje předpoklady úlohy 4 v citovaném článku, proto existují takové dva diametrálně protilehlé body Q, Q^+ kružnice k , že na každém oblouku leží aspoň jeden z těchto bodů. Jestliže středem S kružnice k vedeme přímk q , která spojuje body Q, Q^+ , našli jsme přímk, která protíná všechny útvary $U_1, U_2, \dots, U_n$, a tím je řešení úlohy provedeno.

Příklad 2. Je dána soustava konvexních útvarů $U_1, U_2, \dots, U_n$. Každé dva útvary z této soustavy mají aspoň jeden společný bod. Dokažte, že ke každé přímce p v rovině daných útvarů lze najít přímk q , která je na přímce p kolmá a protíná všechny útvary soustavy.

Řešení. V rovině dané soustavy zvolíme libovolnou přímk p . Útvary $U_1, U_2, \dots, U_n$ pravoúhle promítneme na přímk p do soustavy úseček $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$, z nichž každé dvě mají aspoň jeden společný bod. Tato soustava úseček splňuje podmínky úlohy 1 v citovaném článku, podle níž existuje aspoň jeden bod Q společný všem úsečkám. Bod Q leží na přímce p , a vztyčíme-li v něm k přímce p kolmici q , přímk q protíná všechny útvary $U_1, U_2, \dots, U_n$.

Příklad 3. Je dána soustava kartézských souřadnic v rovině a systém pravoúhelníků $R_1, R_2, \dots, R_n$, kde $n \geq 3$, které mají strany rovnoběžné s osami systému souřadnic. Nechť každé tři pravoúhelníky systému jsou prořaty aspoň jednou přímkou s nezápornou směrnici. Potom existu-



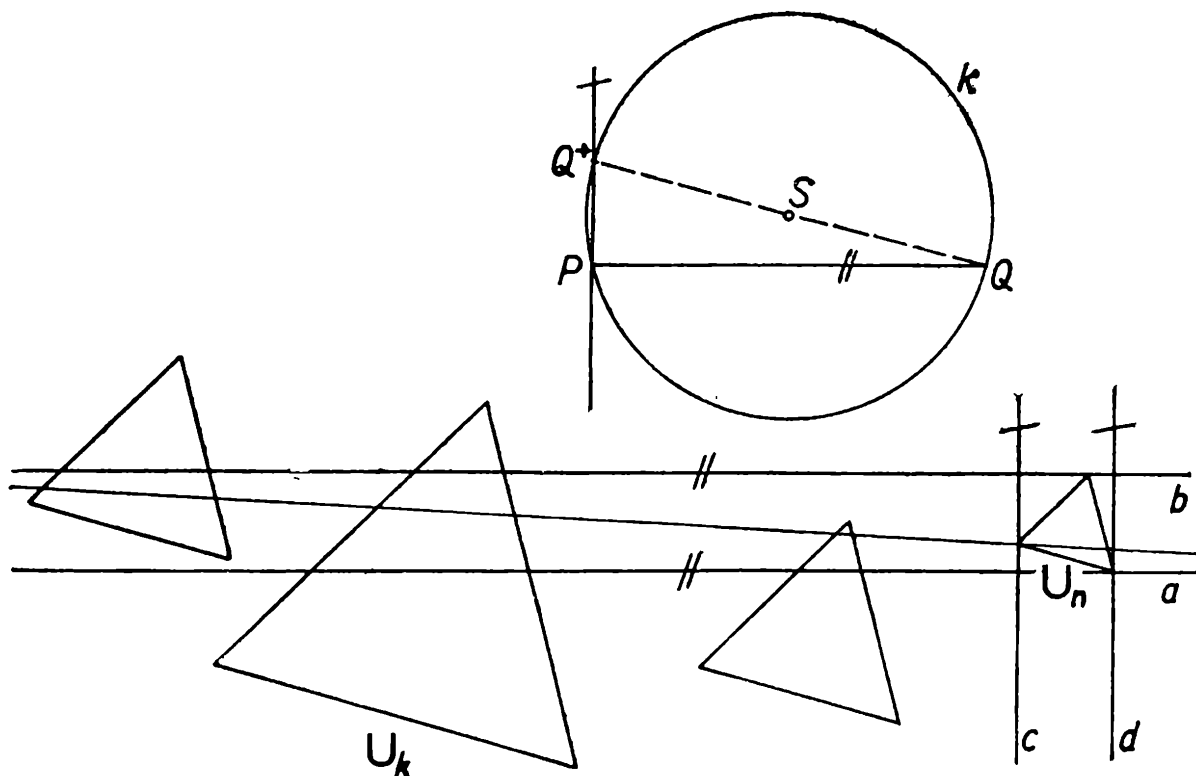
Obr. 1

je přímka s nezápornou směrnici, která protíná všechny pravoúhelníky systému.

Řešení. Uvažujme nejdříve přímku, která má směrnici $k = 0$. Jestliže mezi pravoúhelníky $R_1, R_2, \dots, R_n$ existují aspoň dva takové, že je můžeme protnout právě jednou přímkou, která má směrnici 0, potom přímka protíná každý třetí pravoúhelník, a tedy všechny pravoúhelníky systému.

Předpokládejme, že pro směrnici uvažované přímky platí $k > 0$. V uvažované soustavě souřadnic zvolíme libovolné různé přímky a, b , které jsou rovnoběžné s osou x . Uvažovaná přímka protíná tyto rovnoběžky po řadě v bodech A, B , které pravoúhle promítneme na osu x do bodů A_1, B_1 se souřadnicemi $a_1, b_1, a_1 < b_1$. Každé přímce s nezápornou směrnici přiřadíme bod $[a_1, b_1]$, který zobrazíme v pomocné rovině π' (obr. 1). Všechny takové přímky, které v π protínají určitý pravoúhelník R_i , kde $1 \leq i \leq n$, se zobrazí v rovině π' jako konvexní, uzavřený, ale neomezený útvar R'_i . Protože každé tři pravoúhelníky R_i, R_j, R_k z daného systému jsou prořaty vhodnou přímkou, mají útvary R'_i, R'_j, R'_k společný bod. Podle Hellyovy věty mají všechny útvary $R'_1, R'_2, \dots, R'_n$ společný bod, a tedy také pravoúhelníky $R_1, R_2, \dots, R_n$ mají společnou přímku s nezápornou směrnici.

Příklad 4. Je dána konečná množina konvexních útvarů $U_1, U_2, \dots, U_n$, které jsou po dvojicích stejnolehle a té vlastnosti, že každé čtyři útvary mají společnou průsečnici. Potom existují čtyři přímky a, b, c, d (po dvojicích rovnoběžné nebo kolmé) takové, že každý útvar je prořat aspoň jednou z nich.



Obr. 2

Řešení. Na libovolné kružnici $k = (S, r)$, která leží v rovině daných útvarů, zvolíme bod P . Provedeme zobrazení libovolné přímky p na bod kružnice k tímto způsobem: Bodem P vedeme rovnoběžku q s přímkou p , která protíná kružnici k v druhém bodě Q . V tomto zobrazení přejde množina všech přímek, které protínají libovolné dva útvary z dané množiny útvarů, v množinu bodů Q , které vyplní oblouk na kružnici k . Každá čtveřice útvarů, která má podle předpokladu společnou průsečnici, vytvoří na kružnici k šest dvojic oblouků takových, že každé dva oblouky mají aspoň jeden společný bod. Podle úlohy 4 existují na kružnici k diametrálně protilehlé body Q, Q^+ takové, že každý oblouk obsahuje aspoň jeden z nich. Bodům Q, Q^+ odpovídají dvě navzájem kolmé přímky PQ, PQ^+ . Z dosavadních úvah vyplývá toto tvrzení:

Jestliže každé čtyři útvary ze soustavy libovolných konvexních útvarů $U_1', U_2', \dots, U_n'$ mají společnou průsečnici, potom existují dvě navzájem kolmé přímky PQ, PQ^+ takové, že každá dvojice z uvažované množiny útvarů má společnou průsečnici, která je rovnoběžná aspoň s jednou z přímek PQ, PQ^+ .

Doposud jsme nepoužili předpoklad o tom, že útvary jsou po dvojicích stejnolehle (viz obr. 2). Po dvojicích stejnohlele útvary mají sobě odpovídající úsečky rovnoběžné a sobě odpovídající úhly shodné. Uspořádáme dané útvary sestupně podle velikosti tak, že útvar U_n má nejmenší obsah. Útvaru U_n opíšeme pravoúhelník tak, aby jeho prodlou-

žené strany byly přímky a, b, c, d , které jsou rovnoběžné nebo kolmé vzhledem k přímkám PQ, PQ^+ . Dokážeme, že aspoň jedna z těchto přímek protíná každý útvar dané množiny.

Vybereme libovolný útvar U_k , kde $k \neq n$. Všechny přímky, které protínají dvojici útvarů U_k, U_n , se zobrazují na kružnici k do oblouku, který obsahuje jeden z bodů Q, Q^+ . Nechť je to třeba bod Q . Bod Q leží tedy na oblouku, na němž leží body odpovídající všem průsečnicím útvarů U_k, U_n . S přímkou PQ jsou rovnoběžné dvě ze čtyř přímek a, b, c, d . Nechť jsou to přímky a, b . Mají tu vlastnost, že aspoň jedna z nich protíná dvojici útvarů U_k, U_n . Útvar U_k je tedy proťat aspoň jednou z přímek a, b, c, d .

Tím je úloha vyřešena.

Kruhová inverze

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT Praha

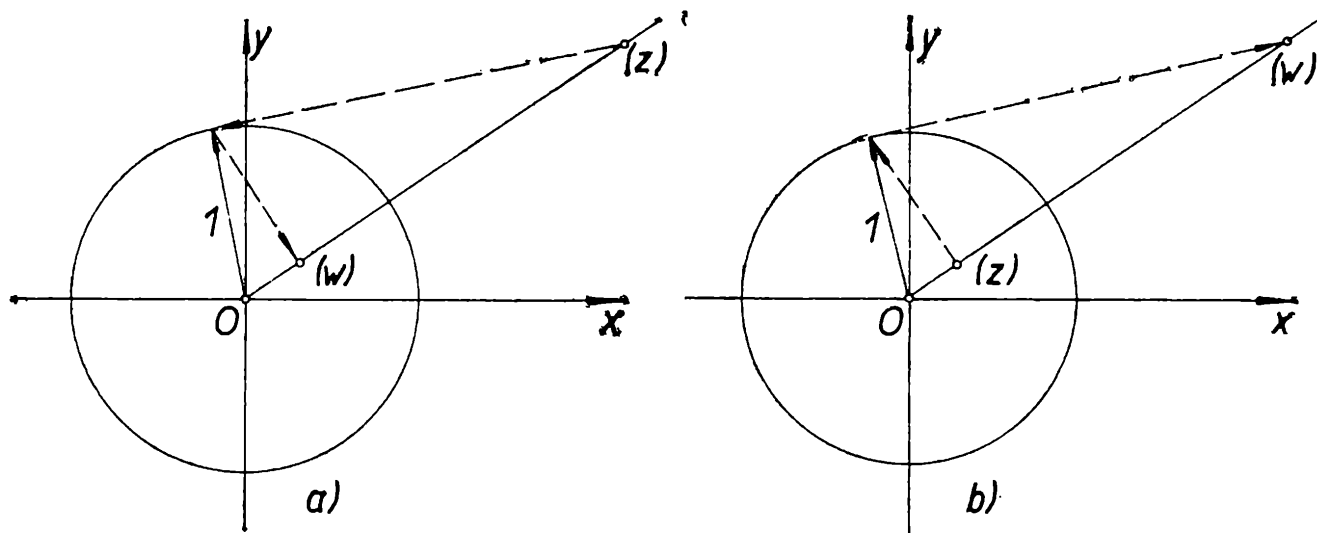
Vedle tzv. lineárních příbuzností v rovině, jako jsou např. všechny shodnosti, podobnost, osová afinita a středová kolineace, můžeme uvažovat také mnohem obecnější příbuznosti.

V případě lineárních příbuzností odpovídá obecně (až na případné výjimky) bodu bod, přímce přímka, kuželosečce kuželosečka atd. Tyto příbuznosti analyticky vyšetřujeme pomocí soustav lineárních rovnic.

V příbuznostech, ve kterých při takovém vyšetřování je nutno použít rovnic vyšších stupňů (a tedy nikoliv vesměs lineárních), odpovídá obecně (tj. opět až na případné výjimky) bodu bod, přímce však křivka, která je aspoň kuželosečka, a obráceně takové křivce, která vznikla z přímky, odpovídá přímka. Stupeň křivky odpovídající přímce je stupněm uvažované příbuznosti.

V dalším se budeme zabývat nejjednodušší kvadratickou příbuzností, ve které přímce odpovídá kružnice, tzv. *kruhovou inverzí*. K vyšetření jejích základních vlastností použijeme analytické geometrie Gaussovy roviny.¹⁾

¹⁾ Základy analytické geometrie Gaussovy roviny jsou uvedeny v článku: Drábek K., Použití komplexních čísel v geometrii. Rozhledy (44), 1965—66, str. 289—293 a 348—352.



Obr. 1

Pro vyhledání vlastností kruhové inverze zvolme tzv. *řídící kružnici inverze v jednotkové kružnici*²⁾, a tedy počátek o (obr. 1) je *středem inverze*. Řídící kružnice má rovnici

$$z\bar{z} = 1. \quad (1)$$

Přiřadíme nyní libovolnému bodu $(z) \neq o$ Gaussovy roviny bod (w) tak, že platí

$$z\bar{w} = 1 \text{ (nebo } \bar{z}w = 1). \quad (2)$$

K tomu ukážeme nejdříve konstrukci bodu (w) a z ní nám vyplyne vztah (2), který nazveme *rovnicí kruhové inverze* a který zapisujeme také ve tvaru

$$z = 1 : \bar{w} \text{ (nebo } w = 1 : \bar{z}). \quad (2^*)$$

Přiřazení bodů (z) , (w) provedeme tak, aby spojnice obou bodů (obr. 1) ležela na polopřímce vycházející ze středu o kružnice (1), přičemž pro součin orientovaných vzdáleností obou bodů od středu o platí³⁾

$$\overrightarrow{(z)o} \cdot \overrightarrow{(w)o} = 1. \quad (3)$$

Podle rovnice (3) sestrojíme tedy k danému bodu (z_0) odpovídající bod (w_0) užitím jedné z Euklidových vět.

²⁾ Tato volba nemá vliv na obecnost našich úvah, neboť při zvolení kružnice o poloměru $r > 0$, $r \neq 1$, se prováděné úvahy nezmění, pouze ve výpočtech se objeví mocniny čísla r .

³⁾ Viz např. článek: Kuřina F., Kruhová inverze. Rozhledy (43), 1964—65, str. 385—394, 438—442, kde úvahy jsou provedeny pomocí syntetické geometrie.

Vztahem (3) jsme však v rovině určili příbuznost, jejíž rovnici najdeme. K tomu určíme průsečíky (z_1) , (z_2) přímky $(z_0)(w_0)$, která prochází středem inverze o , s řídicí kružnicí (1) a vypočteme vztah (označený dále D) orientovaných vzdáleností ve tvaru

$$D = \frac{\overrightarrow{(z_0)o} - \overrightarrow{(z_1)o}}{\overrightarrow{(z_0)o} - \overrightarrow{(z_2)o}} = \frac{\overrightarrow{(w_0)o} - \overrightarrow{(z_1)o}}{\overrightarrow{(w_0)o} - \overrightarrow{(z_2)o}}.$$

Protože oba body (z_1) , (z_2) leží na kružnici (1), platí pro ně

$$(z_1)o = (z_2)o = 1,$$

dále je

$$(z_0)o = z_0, (w_0)o = w_0,$$

a tedy

$$D = \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} : \frac{w_0 - 1}{w_0 + 1} = \frac{z_0 w_0 + z_0 - w_0 - 1}{z_0 w_0 - z_0 + w_0 - 1}.$$

Podle vztahu (3) je $z_0 w_0 - 1 = 0$, a tedy pro výraz D dostaneme

$$D = -1$$

Výraz D je tzv. *harmonický dvojpoměr* čtyř bodů (z_0) , (w_0) , (z_1) , (z_2) v tomto pořadí.⁴⁾

Ukážeme nyní, že bod (w_0) určený podle vztahu (3) k bodu (z_0) , pro který tedy dvojpoměr čtyř bodů (z_0) , (w_0) , (z_1) , (z_2) je harmonický, splňuje rovnici kruhové inverze (2) nebo (2*).

Přímka $(z_0)o$, na které leží hledaný bod (w_0) , má rovnici

$$\bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} = 0$$

a protíná kružnici (1) v bodech (z_1) , (z_2) , pro které platí

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{z_0 : \bar{z}_0}$$

Pro dvojpoměr $D = -1$ máme nyní

$$\frac{z_0 - \sqrt{z_0 : \bar{z}_0}}{z_0 + \sqrt{z_0 : \bar{z}_0}} : \frac{w_0 - \sqrt{z_0 : \bar{z}_0}}{w_0 + \sqrt{z_0 : \bar{z}_0}} = -1$$

a odtud po výpočtu

$$w_0 = 1 : \bar{z}_0,$$

což je rovnice (2*).

⁴⁾ O jeho vlastnostech viz více v článku: Valešová M., Dvojpoměr. Rozhledy (38), 1959—60, str. 308—315.

Z této rovnice je patrné, že každému bodu (z) odpovídá jediný bod (w) s výjimkou bodu o . Tomuto bodu přiřadíme definitoricky nevlastní bod Gaussovy roviny. Rovněž je zřejmo, že vnějšímu bodu vzhledem ke kružnici (1) odpovídá její vnitřní bod a obráceně. Body kružnice (1) jsou samodružné, a je tedy také kružnice (1) samodružná (bod za bodem) v uvažované kruhové inverzi.

Uvedeme nyní některé ze základních vlastností kruhové inverze, které snadno plynou z její rovnice:

1) *Přímce, která prochází středem inverze, odpovídá táž přímka* (a je tedy také tato přímka samodružná v inverzi (2), ovšem jen jako celek, nikoliv bod za bodem, až na její průsečíky s řídící kružnicí inverze).

Důkaz: Do rovnice přímky $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 0$ dosadíme za $z, \bar{z}$ podle rovnice kruhové inverze (2*). Dostaneme

$$\bar{\alpha} \bar{w} + \alpha w = 0, \text{ tj. } \bar{\alpha}w + \alpha\bar{w} = 0.$$

2) *Přímce, která neprochází středem inverze, odpovídá kružnice, která prochází středem inverze.*

Důkaz: Přímce $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + A = 0, A = \bar{A} \neq 0$ odpovídá (po úpravě)

$$(w + \alpha : A)(\bar{w} + \bar{\alpha} : A) = \alpha\alpha : A^2,$$

tedy kružnice se středem v bodě $(-\alpha : A)$ a poloměrem $R = |\alpha| : A$.

3) *Kružnici, která prochází středem inverze, odpovídá přímka, která neprochází středem inverze.*

Důkaz: Kružnici $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 0$ odpovídá (po dosazení z rovnic inverze (2*) a příslušné úpravě) přímka

$$\bar{\alpha}w + \alpha\bar{w} + 1 = 0,$$

jestliže ještě použijeme úmluvy o nevlastním bodu Gaussovy roviny.

4) *Kružnici neprocházející středem inverze odpovídá kružnice, která rovněž neprochází středem inverze.*

Důkaz: Kružnici $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2$, kde tedy $z_0\bar{z}_0 \neq R^2$, odpovídá podle rovnic (2*)

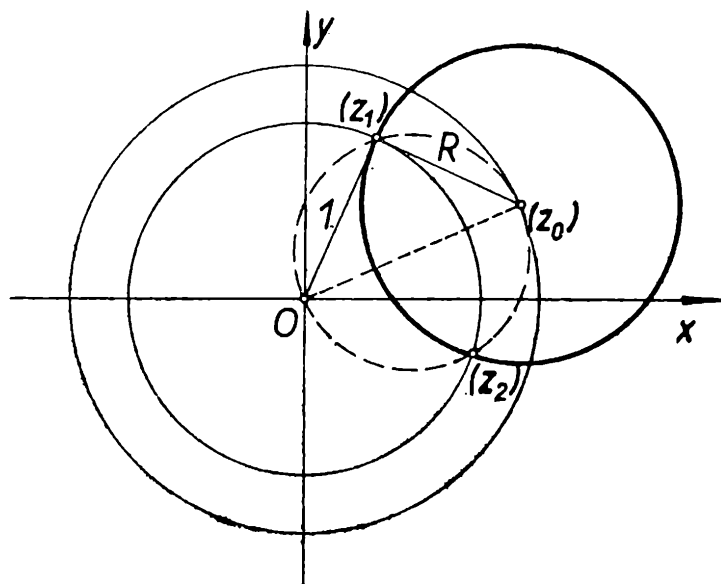
$$(1 : \bar{w} - z_0)(1 : w - \bar{z}_0) = R^2,$$

tj. po úpravě

$$w\bar{w}(R^2 - z_0\bar{z}_0) + \bar{z}_0w + z_0\bar{w} = 1.$$

Podle předpokladu daná kružnice neprochází středem inverze, a dostáváme proto po úpravě rovnici kružnice ve tvaru

$$(w + w_0)(\bar{w} + \bar{w}_0) = \varrho^2, \quad (4)$$



Obr. 2

kde

$$w_0 = z_0 : (R^2 - z_0 \bar{z}_0), \quad \varrho = R \sqrt{|R^2 - z_0 \bar{z}_0|}.$$

Z provedeného výpočtu je vidět, že středy obou kružnic nejsou odpovídající si body v kruhové inverzi (2),

Příklad: Určeme podmínky, za kterých kružnice o středu (z_0) a poloměru R v kruhové inverzi (2) je samodružná (obr. 2).

Poznamenejme hned, že samodružnost této kružnice je jiná než samodružnost řídící kružnice inverze (1). Je totiž samodružná jako celek, nikoliv bod za bodem, až na dva její body, které jsou průsečíky s kružnicí (1).

Kružnici $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2$ podle vlastnosti 4) odpovídá kružnice (4). Má-li to být táž kružnice, musí být střed dán vztahem

$$z_0 = -w_0, \text{ tj. } z_0 = -z_0 (R^2 - z_0 \bar{z}_0);$$

odtud plyne

$$z_0 \bar{z}_0 = R^2 + 1. \quad (5)$$

Rovnice (5) ukazuje, že střed takové kružnice je vždy vnějším bodem řídící kružnice (1) a že samodružná kružnice se protíná s řídící kružnicí inverze pod pravým úhlem.

Při daném středu samodružné kružnice v bodě (z_0) , pro který $|z_0| > 1$, určuje (5) jednoznačně její poloměr R . Je-li však dán poloměr $R > 0$ samodružné kružnice, pak podle (5) její střed (z_0) není jednoznačně určen, leží totiž na soustředné kružnici s (1).

Poznámka 1. Pomocí kruhové inverze snadno najdeme rovnice a vlastnosti křivek, jejichž graf získáme při konstrukcích v kinematické geometrii.

Tak např. Bernoulliho lemniskata jako úpatnice rovnoosé hyperboly pro pól v jejím středu je inverzní křivka k rovnoosé hyperbole (která neprochází středem inverze)

$$z^2 - \bar{z}^2 = 4iA, \text{ čili } xy = A,$$

s rovnici

$$(z\bar{z})^2 + i(z^2 - \bar{z}^2) - 4A = 0, \text{ čili } (x^2 + y^2)^2 - xy : A = 0.$$

Otočením soustavy souřadnic o úhel -45° dostaneme známé vyjádření této lemniskaty s tečnami v přímkách $x \pm y = 0$.

Obdobně dostaneme jako inverzní křivku rovnoosé hyperboly

$$z^2 - \bar{z}^2 + \alpha z - \bar{\alpha} \bar{z} = 0, \text{ kde } \alpha = A(1 + i),$$

která prochází středem inverze, tzv. přímkou strofoidu s rovnici

$$z\bar{z}(\alpha z - \bar{\alpha} \bar{z}) + z^2 - \bar{z}^2 = 0, \text{ čili } (x^2 + y^2)(x + y) + 2xy : A = 0.$$

Také tuto rovnici otočením o úhel -45° uvedeme na známý tvar, který lze najít v učebnicích pro přímkou strofoidu jako úpatnici paraboly pro pól v průsečíku její osy s řídicí přímkou.

Poznámka 2. Lze ukázat, že příbuznost, která je dána rovnici

$$z = (\alpha w + \beta)(\gamma \bar{w} + \delta), \text{ příp. } z = (\alpha w + \beta)(\gamma \bar{w} + \delta),$$

kde $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, je také kruhovou příbuzností, tj. přímce obecně odpovídá kružnice, kružnici pak kružnice. Zřejmě kruhová inverze (2) je zvláštním případem druhé příbuznosti, jestliže $\alpha = \delta = 0, \beta = \gamma = 1$.

fyzika

0 teplotách tání a varu ještě jinak

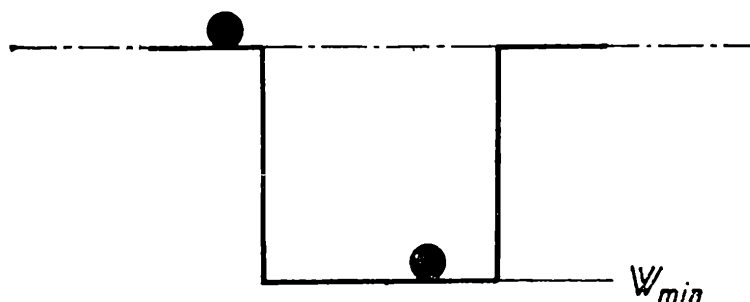
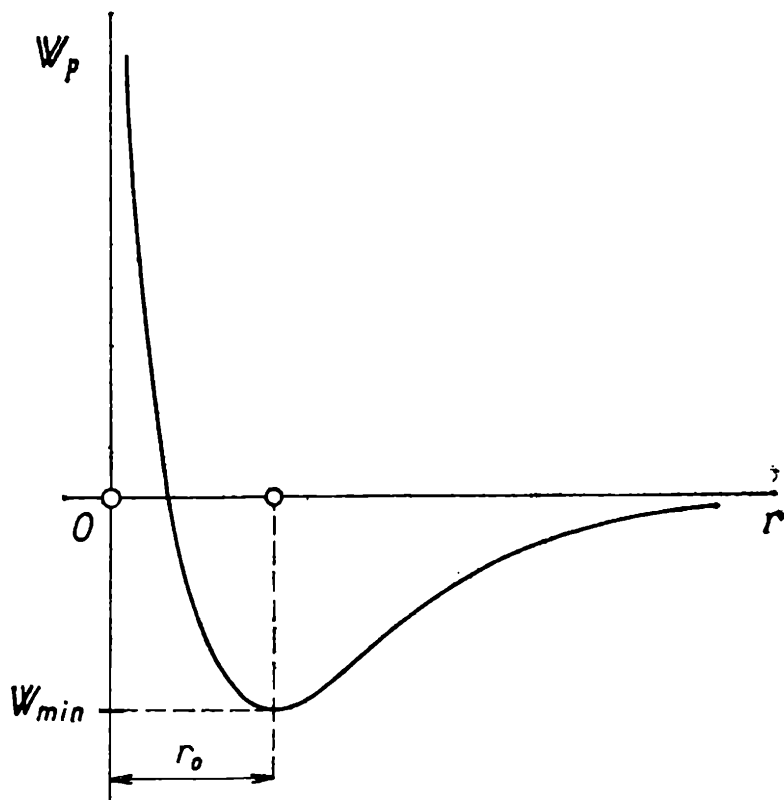
Dr. OLDŘICH HOUBEK, Jičín

S těmito veličinami se setkáváme především při studiu skupenských změn. Za daného tlaku dochází k varu kapaliny při určité teplotě, nazývané teplota (bod) varu. Je shodná s teplotou nasycené páry, a proto lze její hodnotu z křivky nasycené páry odečíst. Potom můžeme teplotu varu definovat jako teplotu nasycené páry při daném tlaku.

Podobně je tomu s teplotou (bodem) tání odpovídajícím teplotě, kdy za daného tlaku existují současně pevná a kapalná fáze uvažované látky. V obou případech stav látky (makrostav) je charakterizován hodnotami příslušných makroskopických veličin (tlak, teplota...), tj. příslušný popis je makroskopický. Lze však také vysvětlit vlastnosti uvažovaných veličin z hlediska vnitřní struktury příslušných látek, tj. použít popisu mikroskopického. Jak budou definovány uvedené charakteristiky skupenských změn v tomto případě?

V mechanice je významný tzv. *princip minimální energie*, vyjadřující poznatek, že tělesa se snaží zaujmout takovou polohu nebo takové uspo-

Obr. 1a



Obr. 1b

řádání, aby jejich energie byla minimální. Tak těleso pohybující se volným pádem bude klesat, dokud nepřejde do stavu s minimální potenciální gravitační energií, tj. na energetickou hladinu s minimální hodnotou gravitačního potenciálu. Makroskopickým modelem může zde být kulička — makročástice v „jamce“ — obr. 1b. V případě mikrotělesa může být příkladem interakce dvou mikročástic vytvářejících vazbu. Modelem zde je křivka — *potenciální jáma* (obr. 1a), zobrazující závislost potenciální energie na vzájemné vzdálenosti interagujících částic. Z obou modelů je patrné, že stabilní poloha makrotělesa stejně jako rovnovážná poloha mikrotělesa vytvářejícího vazbu odpovídá jejich minimální energii.

Jak tomu bude v případě, kdy nepůjde o individuální těleso, ale o soustavu těles? Konkrétně v případech, kdy makrotěleso uvažujeme jako soustavu složenou z velkého počtu mikrotěles (atomů, molekul, iontů).

Zjistilo se, že v takových soustavách probíhají dva protichůdné děje. Z jedné strany se zde částice podle principu minimální energie snaží sblížit s ostatními částicemi za vzniku vazeb a tak vytvářet makrotěleso

s minimálním objemem. Z druhé strany se zde však uplatní nový činitel, podmíněný tepelným pohybem mikročástic. Jím se vysvětluje skutečnost, že např. molekuly plynu uzavřeného v nádobě neklesají ke dnu, ale pohybují se neuspořádaně po celém objemu nádoby. Důsledkem je snaha plynu zaujmout maximální objem, vzrůstající úměrně s jeho teplotou.

Jak se potom projeví současné působení obou těchto protikladných tendencí? Příkladem může být zemská atmosféra, jejíž molekuly ani neklesají k Zemi, ani se nerozptylují do kosmického prostoru. Její stabilita je tak důkazem existence dynamické rovnováhy obou dějů.

Z tohoto hlediska je možno určit podmínky rovnováhy v jednotlivých stavech látky při jejich skupenských změnách. Modelem plynného stavu může být soustava částic bez vazeb, modelem kapalného — soustava částic se středně pevnými vazbami a modelem tuhého soustava částic s pevnými vazbami. Rovnovážný stav zde bude vázán podmínkou, že rychlosti obou opačně orientovaných dějů budou stejné. Konkrétně zde těmto dějům odpovídá: vypařování—kondenzace a tání—tuhnutí. Z modelů jednotlivých skupenských stavů je patrné, že v uvedené jejich posloupnosti roste počet vazeb mezi částicemi, tj. snižuje se vnitřní energie soustavy a roste její stabilita v souladu s principem minimální energie.

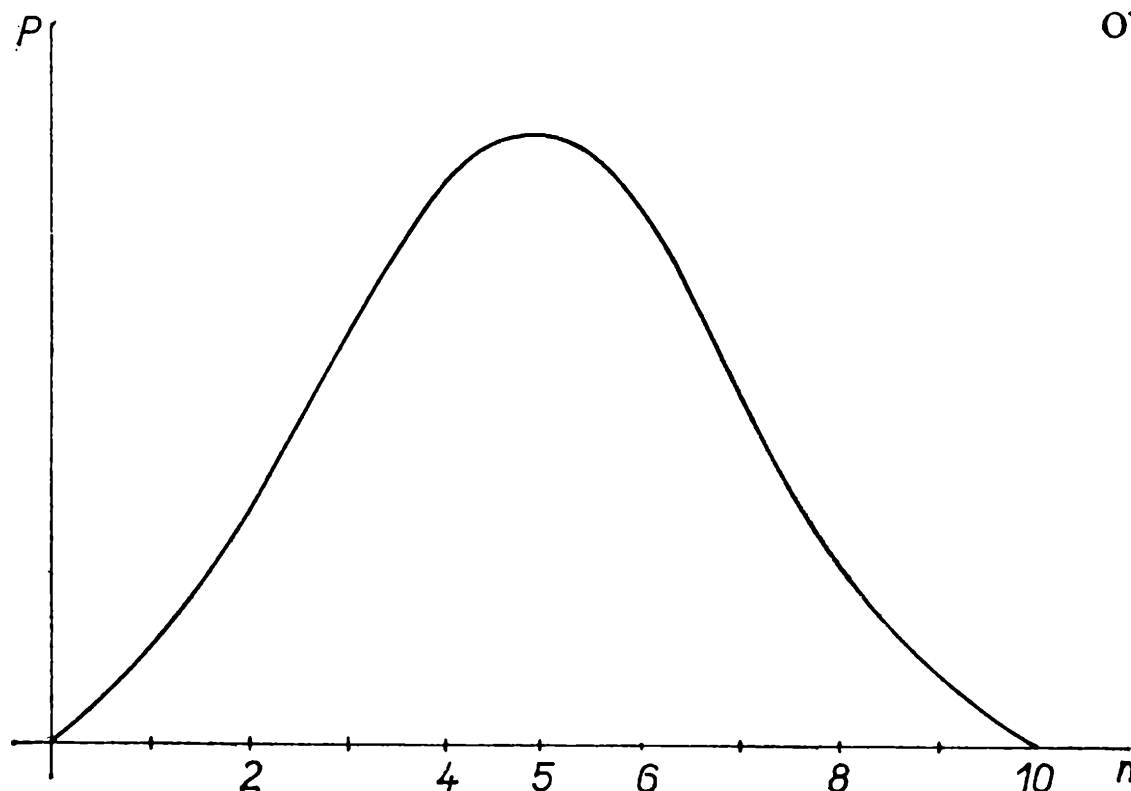
Druhá tendence se svou závislostí na teplotě je charakterizována jistým stupněm neuspořádanosti, který v uvažovaném sledu skupenství klesá. Otázka je, jak tuto skutečnost fyzikálně vyjádřit. Zatímco podmínku minimální energie lze kvantitativně stanovit přesně definovanými vztahy pro příslušné druhy energie, ukázalo se, že ke kvantitativnímu vyjádření stupně neuspořádanosti je nutno použít pravděpodobnostní interpretace, jak bude patrné z následujícího příkladu.

V nádobě rozdělené vysouvací přepážkou na dvě poloviny (A, B) je v jedné polovině zředěný plyn a v druhé vakuum. Po vysunutí přepážky se rozšíří plyn po celé nádobě. Jeho vnitřní energie se nemění a expanze probíhá samovolně. K opačnému ději, samovolné kompresi, zde nedochází.

K vysvětlení této jednostranné směrovanosti je možno vyjít ze soustavy složené z minimálního počtu částic (molekul), tj. dvou. Rovnoměrné rozdělení plynu mezi obě poloviny nádoby přísluší, nazíráno z makroskopického hlediska, jistému makrostavu plynu, který může být realizován dvěma různými uspořádáními jednotlivých molekul, čili dvěma různými mikrostavy, jak je patrné z následujícího schématu:

A	B
1	2
2	1

Existuje však ještě jedna možnost, kdy makrostav je realizován pouze jedním mikrostavem. Tehdy jsou obě molekuly v jedné z obou polovin



nádoby. Ze srovnání je patrné, že v prvním případě přísluší soustavě nižší stupeň uspořádanosti než v případě druhém. Vzhledem k tomu, že první makrostav se dá realizovat dvěma mikrostavy, znamená to, že je také dvojnásob pravděpodobnější než makrostav druhý, jehož existence je spojena s jedinou možností realizace. Z toho tedy plyne, že uvažovaný makrostav je tím pravděpodobnější, čím větším počtem mikrostavů se dá uskutečnit, tj. čím větší bude stupeň jeho neuspořádanosti. Na obr. 2 je analogovým počítačem zakresleno řešení pro případ, kdy plyn se skládá z 10 molekul. Na svislé ose je vynášena pravděpodobnost existence příslušného mikrostavu a na vodorovné ose odpovídající počet molekul v jedné pevně zvolené polovině nádoby. Z řešení je patrné, že největší pravděpodobnost odpovídá makrostavu, kdy v každé polovině nádoby je 5 molekul. (Z 1024 mikrostavů příslušných soustavě je tento stav realizován maximálním počtem, tj. 252 mikrostavy.)

Je tedy možno soudit, že i v případě soustavy složené z velkého počtu molekul bude nejstabilnější stav, který — posuzováno z mikroskopického hlediska — bude stavem nejpravděpodobnějším. Příslušná hodnota pravděpodobnosti je tak kvantitativním vyjádřením skutečnosti, že tomuto makrostavu přísluší nejnižší stupeň uspořádanosti. Uvedený příklad můžeme současně považovat za ilustraci *principu směrovanosti dějů k nejpravděpodobnějšímu stavu*, a tak upřesnit počáteční úvahu o protichůdných tendencích v soustavách složených z velkého počtu částic takto: V těchto soustavách probíhají současně dva děje. Prvý z nich je charakterizován snahou po přechodu soustavy do stavu s minimální energií

a druhý snahou po dosažení nejpravděpodobnějšího stavu, tj. stavu s nej-
nižším stupněm uspořádanosti.

Vraťme se nyní ještě zpět k příkladu zemské atmosféry. Zde důsledkem snahy po dosažení minima energie je pohyb molekul k Zemi. Současně snaha po dosažení nejpravděpodobnějšího stavu se projeví v jejich chaotickém pohybu v prostoru. Stabilita atmosféry je potom důsledkem rovnováhy obou tendencí, jejichž projevem je rovnovážné rozložení mikročástic, charakteristické vyšší koncentrací molekul při povrchu zemském, která směrem vzhůru klesá. Analogická bude situace i v případě skupenských změn. Tak vypařování bude odpovídat snaze po maximální neuspořádanosti a kondenzace snaze po dosažení minimální energie. Obdobně tomu bude i v případě tání a tuhnutí. Protože tendence k neuspořádanosti roste s teplotou, bude mít teplota při ustavení rovnováhy rozhodující význam. To znamená, že při nízkých teplotách bude převládat tendence k minimu energie spojená se vznikem vazeb mezi částicemi (kondenzace, tuhnutí), při vysokých teplotách tendence po maximální neuspořádanosti (vypařování, tání).

Z toho plyne, že rovnovážnému stavu, kdy rychlosti obou dějů jsou stejně veliké, tj. kdy koexistují současně obě skupenství, musí odpovídat teplota rovná teplotě varu či tání. Že složka spojená s neuspořádaností je závislá na tlaku a že musí tedy existovat závislost teploty tání a varu na této veličině, si čtenář vyvodí jistě sám.

A tak zatímco na počátku byly tyto veličiny definovány makroskopicky, tj. pomocí makroskopických veličin sloužících k jejich praktickému změření, existuje též možnost jejich mikroskopické představy, vycházející z vnitřní struktury příslušných skupenských stavů a dějů, které v nich z tohoto hlediska probíhají.

Nejmladším čtenářům

Holandský časopis Pythagoras uvádí ve druhém čísle 17. ročníku (z r. 1977), jak lze zapsat číslo 100 užitím devíti stejných číslic a jednoduchých početních výkonů. V zápisech, které časopis uvádí, se vyskytuje také symbol $5!$, který znamená součin $1.2.3.4.5$. Přesvědčte se, že ve všech devíti případech, které otiskujeme, dostaneme jako výsledek vždy číslo 100. Pokuste se najít v každém z uvedených devíti případů ještě jiný způsob vyjádření čísla 100 užitím devíti stejných číslic.

$$1.111 - 1.11 + 1 - 1 =$$

$$2^{2^2} \cdot (2.2.2 - 2) + 2^2 =$$

$$3.33 + 3^{\frac{3 \cdot 3 - 3 \cdot 3}{3}} =$$

$$\left(4.4 + 4 + 4 + 4^{\frac{4-4}{4}}\right) \cdot 4 =$$

$$5! + 5 + 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 =$$

$$66 + 6.6 - \frac{6+6}{6} + 6 - 6 =$$

$$\left(7.7 + 7^{\frac{7-7}{7}}\right) \cdot \frac{7+7}{7} =$$

$$(8888 : 88) - 8^{8-8} =$$

$$99 + 9^{999-999} =$$

Emil Kraemer

Ze zahraničních časopisů

Z polského časopisu Matematyka opět několik pěkných příkladů.

1. Najděte všechna čísla x , pro něž platí

$$\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1,$$

kde $\ln x$ je přirozený logaritmus čísla $x > 0$.

2. Jestliže v rovnoramenném trojúhelníku má úhel při hlavním vrcholu velikost 40° , potom platí

$$a^3 + b^3 \sqrt{3} = 3ab^2,$$

kde a je velikost základny a b velikost ramene. Dokažte.

2'. Jestliže v rovnoramenném trojúhelníku má úhel při hlavním vrcholu velikost 20° , potom platí

$$a^3 + b^3 = 3ab^2,$$

kde a, b mají též význam jako v předcházejícím příkladě. Dokažte.

3. Jak je nutno zvolit číslo a , aby množina všech řešení nerovnosti

$$(ax - 1)^2 > (ax + 2)^2$$

byla podmnožinou intervalu $x \in (1; \infty)$? (Neznámá je x).

4. Která čísla x splňují rovnici

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8),$$

kde $a \neq 1$.

Návod:

1. Umocněním na druhou: $\sin(\pi \lg x) \cdot \cos(\pi \lg x) = 0$.

a) $\sin(\pi \lg x) = 0 \Rightarrow \pi \lg x = k\pi$, kde k je libovolné celé číslo a odtud $x = e^k$;

b) $\cos(\pi \lg x) = 0 \Rightarrow \pi \lg x = k \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{k}{2}}$, kde k je libovolné liché číslo.

2. Daný rovnoramenný trojúhelník je svou osou souměrnosti rozdělen na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Z nich $\sin 20^\circ = \frac{a}{2b}$. Dále použijeme vzorec $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$.

3. Po úpravě dostaneme $6ax < -3$. Poněvadž $x > 1$, je $-\frac{1}{2} < a < 0$.

4. Součet na levé straně rovnice je

$$\frac{a^{x+1} - 1}{a - 1}$$

a po krátké úpravě $a^{x+1} - 1 = a^{16} - 1 \Rightarrow x = 15$.

Stanislav Horák

Z německého časopisu „Alpha“ (NDR):

1. Bez použití počítače vypočítejte hodnotu výrazu $\frac{a}{b}$, kde

$$a = 38795689.38795688.38795687.38795686 -$$

$$- 38795684.38795683.38795682.38795681,$$

$$b = 38795688^2 + 38795686^2 + 38795684^2 + 38795682^2.$$

2. Určete trojici reálných čísel x, y, z , pro něž platí

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{7}{12},$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{8}{15},$$

$$\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} = \frac{9}{20}.$$

3. Reálnými čísly řešte rovnici

$$x(x+2)(x+4)(x+6) = (x+1)(x+3)^2(x+5).$$

4. Řešte rovnici

$$|x| = \frac{x}{2} + 2.$$

5. Řešte rovnici

$$\log_2[\log_2(\log_2 x)] = 0.$$

6. Určete aritmetickou posloupnost, ve které součet prvních n členů je

$$s_n = n^2 + 5n.$$

7. Najděte všechna kladná čísla $x \neq 1$, pro něž platí

$$\log_x 4 + \log_x 8 + \log_x 16 + \log_x 32 = \frac{73}{12}.$$

8. Najděte všechny reálné mnohočleny tvaru $f(x) = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla, aby pro reálné x platilo $f[f(x)] = 2x + 1$.

9. Najděte přirozená čísla n , pro něž platí, že součet všech přirozených čísel od 1 do n je

a) dvojciferné číslo napsané stejnými číslicemi;

b) trojiciferné číslo napsané navzájem stejnými číslicemi.

10. Obvod pravoúhlého rovnoběžníka vyjádřený v cm se rovná jeho obsahu měřenému v cm^2 . Jaké jsou jeho rozměry, je-li velikost každé jeho strany v cm přirozené číslo menší než 7?

11. Dva vypuklé mnohoúhelníky mají dohromady 21 stran. Počet úhlopříček jednoho z nich je dvojnásobný než počet úhlopříček druhého z nich. Kolik vrcholů mají jednotlivé mnohoúhelníky?

12. Jsou dány tři body A, B, T , které tvoří trojúhelník. Sestrojte dvě kružnice k_1, k_2 týchž poloměrů, jež se dotýkají v bodě T , jde-li k_1 bodem A a k_2 bodem B .

13. Dokažte: Je-li součet čtyř libovolných přirozených čísel liché číslo, je součin těchto čísel sudé číslo.

Výsledky: 1. $5.38795685 = 193\,978\,425$; 2. $x = 1, y = 2, z = 3$; 3. $x = -3 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$; 4. $-\frac{4}{3}, 4$; 5. $x = 4$; 6. 6, 8, 10, 12... 7. $x = 2$; 8. $f(x) = \pm x\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2}$; 9. a) 10, b) 36; 10. 3, 6 nebo 4,4; 11. 9, 12; 12. středovou souměrností o středu v bodě T .

Doc. Ota Setzer

různé

In memoriam

V listopadu 1978 proběhla tiskem zpráva, že po delší těžké nemoci zemřel *dr. Jiří Mrázek, CSc.*, vědecký pracovník Geofyzikálního ústavu ČSAV, jeden z našich předních odborníků v geofyzikálním výzkumu a kosmonautice, spolupracovník tisku, rozhlasu a televize. Naši čtenáři vědí, že v posledních letech pilně psal i pro *Rozhledy matematicko-fyzikální* a jeho příspěvky vzbudily vždycky zájem.

Jiří Mrázek se narodil 17. dubna 1923 v Praze a seznámil jsem se s ním už v roce 1945 na Karlově univerzitě, kde jsme studovali matematiku a fyziku na tehdejší přírodovědecké fakultě. Pak jsme se znovu sešli počátkem padesátých let v Matematickém ústavě ČSAV, kde dr. Jiří Mrázek po nějaký čas pracoval. Bylo to v době, kdy se u nás začala rozvíjet matematická olympiáda a starší generace si ještě pamatuje na Mrázkovy poutavé besedy s řešiteli této soutěže. Zájem o experimentální vědy jej pak vedl do Geofyzikálního ústavu ČSAV a postupem let se stal nejznámějším popularizátorem svého vědního oboru v hromadných sdělovacích prostředcích. Zemřel v Praze 14. listopadu 1978.

Redakce *Rozhledů* velmi želí předčasného skonu tohoto milého spolupracovníka, který by byl zajisté vykonal ještě mnoho užitečné práce pro matematicko-fyzikální vědy, kdyby mu to bylo dopřáno.

Jiří Sedláček

Zajímavé rozměry rádiových vln

RNDr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Náš malý tranzistorový přijímač se stal často nepostradatelným průvodcem na výletech; a ač se venku spíše doporučuje věnovat se krásám přírody a poslouchání uklidňujících zvuků ptactva a bublajících potůčků, naleznou se lidé, kteří i na výletech poslouchají rádio. Jestliže navíc mají kladný vztah k přírodním vědám, nemohou si nevšimnout jevů, které „normálnímu“, tj. doma poslouchajícímu rozhlasovému posluchači, zůstávají zcela ukryty...

Již střední vlny, pokládáné obvykle za jedny z nejstálejších vln, vykazují celou řadu zajímavostí. Feritové antény zabudované v přenosných přijímačích umožňují obvykle zjistit směr, odkud k nám sledované vlny přicházejí. V tom směru totiž poznáme výrazné ostré minimum signálů. Čím bude kolem nás méně elektrických vodičů, dálkově srovnatelných s vlnovou délkou sledovaného vysílače, tím bude toto minimum užší a výraznější. A tu si můžeme povšimnout toho, že nesměruje všude do teoretického směru, ale všelijak se mění. Budeme totiž zaznamenávat nejrůznější odrazy vln, jež se na naší anténě budou všelijak fázově skládat. Obvykle můžeme nalézt i vlastní příčinu těchto odrazů — např. dálkové elektrické vedení. Avšak často nalezneme popisované jevy ve zcela rovném terénu, postrádajícím příčiny možných odrazů. Tu si vzpomeňme, že střední vlny pronikají i několik metrů až desítek metrů pod zemský povrch, a je-li tam nějaké vhodné rozhraní, lišící se značně vodivostí nebo dielektrickou konstantou, postačí to k mimořádným odrazům a následnému vzniku směrových efektů. Zcela určitě dochází k podobným jevům např. v krajině, kde jsou pod zemským povrchem ukryty jeskynní systémy; na tom byla dokonce vypracována metoda, jak tyto podzemní prostory objevovat.

K jinému středovlnnému efektu dochází tam, kde je v okolních horninách hodně železa či jiného magnetického materiálu. To jsou ona pověstná místa špatného příjmu, jaká můžeme nalézt v okolí Řípu či Milešovky, ale i u Zruče nad Sázavou a v jiných místech Posázaví. Taková místa znají dobře naši rádioamatéři — třebaže se navzájem vidí, nemohou ani na tuto přímou viditelnost navázat vzájemné rádiové spojení. I tak dochází k různým směrovým anomáliím a každý zná pravděpodobně nejméně jednu historku o tom, jak se z tohoto důvodu nedařilo rádiové zaměřování utajovaného vysílače...

Kdybychom svá pozorování prováděli nikoli na středních vlnách, nýbrž na vlnách velmi krátkých, zjistili bychom i význačný vliv počasí: metrové vlny se totiž šíří i odrazem či rozptylem v troposféře, k čemuž

napomáhají hladiny různých optických vlastností (jde v podstatě o jakousi rádiovou obdobu známé faty morgány). Dokonce na radarových vlnách způsobily tyto nepravidelnosti vznik „fantomů“, které ve skutečnosti vůbec neexistovaly (o řadě z nich se vyprávělo např. v různých strašidelných historkách týkajících se UFO). Zkrátka okolo nás je dosti vlivů přírodního charakteru, ovlivňujících „teoretické“ chování rádiových vln, a jejich studium metodou sledování rádiových signálů je nejen dobrodružné, ale často i poučné.

0 dokonalých čtvercích

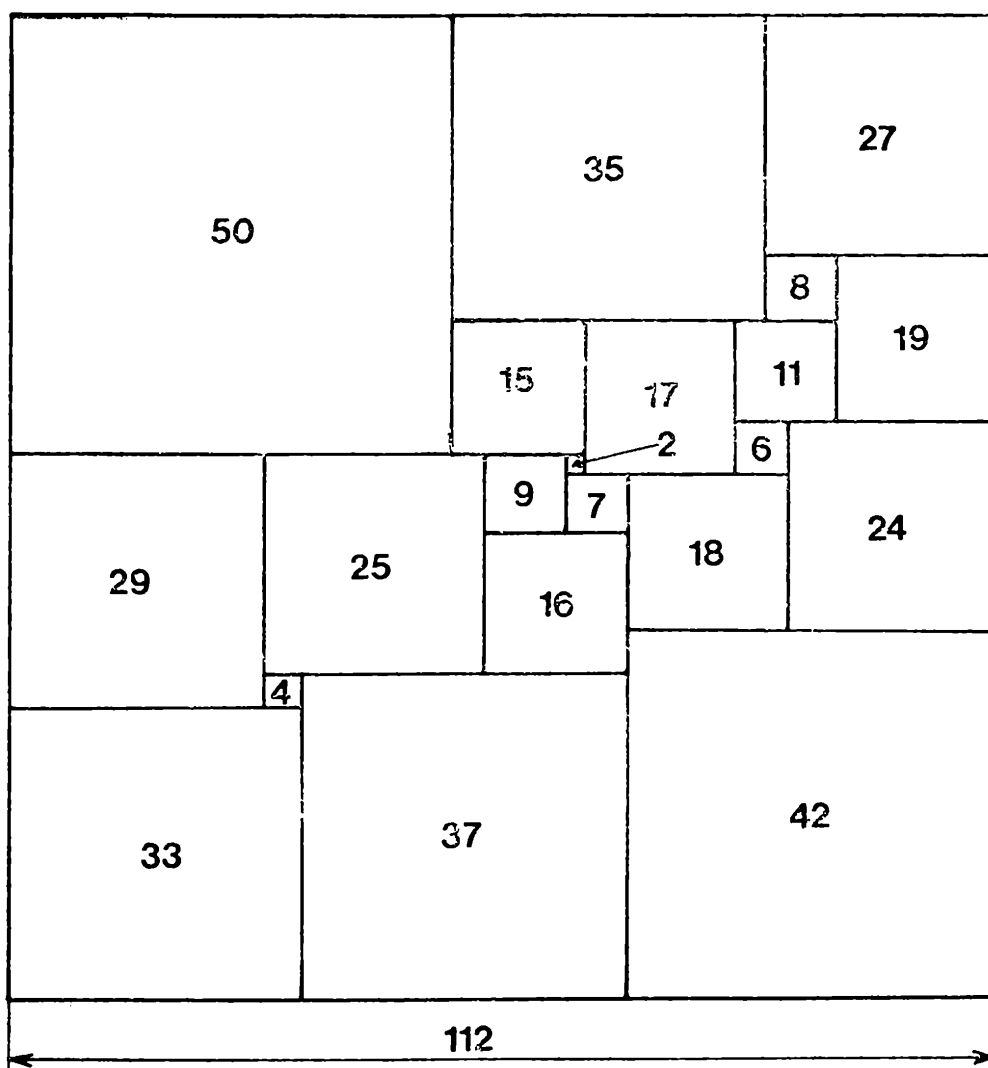
Je-li dán libovolný čtverec, snadno jej pokryjeme shodnými a vzájemně se nepřekrývajícími menšími čtverci. Stačí v daném čtverci sestrojít např. obě střední příčky, čímž se základní čtverec rozdělí na čtyři menší čtverce s požadovanou vlastností. Změňme však úlohu a žádejme, aby žádné dva menší čtverce, na něž je daný čtverec rozdělen, nebyly shodné. Samozřejmě si též přejeme, aby soustava menších čtverců měla aspoň dva prvky, jinak by otázka byla triviální.

Dostali jsme se tak k problému, který je kupodivu velmi těžký. Podaří-li se nám rozdělit daný čtverec na čtverce menší tak, že žádné dva se nepřekrývají ani nejsou shodné, řekneme, že máme před sebou *dokonalý čtverec*. První dokonalý čtverec objevila r. 1938 skupina čtyř matematiků z university v Cambridge. Rozdělili daný čtverec na 69 menších čtverců s požadovanými vlastnostmi a je přirozené tomuto případu říkat dokonalý čtverec řádu 69. Od té doby se našla celá řada jiných dokonalých čtverců. Jeden, který je řádu 24, získáme tak, že za výchozí zvolíme čtverec, jehož strana má velikost 175 a velikosti stran malých čtverců jsou po řadě

1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81.

Pokuste se sami sestavit si z těchto údajů onen dokonalý čtverec řádu 24. Uvidíte, že i tak je to dosti svízelná práce.

Nejzajímavější dokonalý čtverec bude zřejmě ten, o němž referuje časopis *Scientific American* ve svém červnovém čísle z roku 1978 (Vol. 238, čís. 6, str. 67 B). Čtverec sestavil A. J. W. Duijvestijn z jedné university v Holandsku a má tu pozoruhodnost, že je to dokonalý čtverec nejmenšího možného řádu. Řád tohoto nového dokonalého čtverce je 21 a dostaneme jej, když základní čtverec se stranou velikosti 112 rozložíme na 21 malých čtverců tak, jak ukazuje připojený obr. 1. Už dříve se vědělo, že neexistuje žádný dokonalý čtverec řádu 20 nebo



Obr. 1

řádu menšího, ale dosud nebyl znám žádný dokonalý čtverec s řádem menším než 24. Autor objevu dokázal také, že nový dokonalý čtverec je v jistém smyslu jediný. Tím zajímavější je ovšem toto minimum.

Dalo by se mluvit i o obecnější otázce, o rozkladu daného obdélníka na čtverce, z nichž žádné dva nejsou shodné. Jiná příbuzná problematika by nás mohla přenést do oblasti rovnostranných trojúhelníků. Tam bychom se však s hledáním rozkladu marně lopotili. *W. T. Tutte* dokázal už r. 1948, že není možné rozložit daný rovnostranný trojúhelník na několik menších nepřekrývajících se rovnostranných trojúhelníků tak, aby žádné dva nebyly shodné.

J. S.

Mezinárodní kongres matematiků 1978

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, UK Praha

Tradici mezinárodních kongresů matematiků lze srovnat s tradicí novověkých olympiád. Oba typy mezinárodních setkání jsou organizovány od posledního desetiletí 19. století (olympiády 1896, kongresy 1897), konají se periodicky (olympiády po čtyřech letech, kongresy obdobně, ale s několika výjimkami) a jejich posloupnost byla přerušována světovými válkami.

Pořadatelem mezinárodních kongresů je Mezinárodní matematická unie, která střídá místa jejich konání. Například v r. 1966 byl tento kongres v *Moskvě*, v r. 1970 v jihofrancouzské *Nice*, v r. 1974 ve *Vancouveru* na tichomořském pobřeží Kanady, v r. 1978 v *Helsinkách*, na r. 1982 je plánován do *Varšavy*.

Finské hlavní město hostilo účastníky kongresu od 15. 8. do 23. 8. 1978. Kongres byl zahájen v hale Finlandia, kde se konala v r. 1975 poslední zasedání konference o evropské bezpečnosti a spolupráci a za účasti hlavních států byl podepsán závěrečný dokument. Plenární zasedání kongresu probíhala tamtéž, ale pro jednání menších skupin účastníků sloužily posluchárny v několika budovách helsinské univerzity. Cenným zdrojem informací byla i výstava knih z předních světových nakladatelství vydávajících matematickou literaturu.

Kolem 3000 účastníků kongresu z 86 zemí bylo ubytováno nejen v Helsinkách, ale i v hotelích v okruhu asi 20 km, například v známém středisku Otaniemi v sídlišti Tapiola a jinde. Přeprava velkého počtu lidí během krátké doby do centra města si vyžádala zvláštní dopravní opatření (desítky autobusů k jednotlivým ubytovnám). I tyto údaje svědčí o náročné organizační práci přípravného výboru a o velkém zájmu světové matematické veřejnosti o účast na kongresu.

Jak probíhal den účastníka kongresu? Ve zvláštní brožurce s časovým rozvrhem všech přednášek, sdělení a krátkých sdělení v sekcích si předem našel ty, které souvisely s jeho odborným zaměřením či vzbuzovaly jeho zájem. V případě časové kolize musel zvolit jednu z akcí, tak si sestavil svůj program v bohaté nabídce a podle plánu univerzitních budov si určil trasy, po kterých se bude během přestávek přemísťovat z jedné posluchárny do jiné. Kdo měl více zájmů, více se naběhal, ale také více poznal.

Po vyslechnutí přednášky či sdělení mohl každý vznést stručný dotaz, po skončení pak mohl navázat kontakt s přednášejícím, domluvit si s ním setkání ještě během kongresu, případně požádat o zaslání textu

jeho prací, získat jeho adresu atd. Toto navazování osobního styku, výměny materiálů apod. je jedním z hlavních přínosů matematických kongresů, zejména pro mladé matematiky.

Každý čtenář Rozhledů, který se chce věnovat vědecké práci v matematice, by si však měl uvědomit, že bez solidního ovládnutí aspoň dvou světových jazyků se nemůže dobře uplatnit. Je velmi krátkozraké stavět svůj zvýšený zájem o matematiku proti studiu jazyků.

Matematický obsah sdělení přednášených na kongresu je samozřejmě příliš vzdálen od středoškolské matematiky, proto o něm zde nepadlo slovo. Částečně jste poznali kongres jako společenskou událost ve světové matematické obci.

Řešení úlohy z prosincového čísla Rozhledů

Úloha zněla: *Rozhodněte, zda číslo 1979 je prvočíslo.*

Při čtení textu úlohy jistě většinu čtenářů napadlo, že se stačí podívat do tabulek. Ovšem školní tabulky, užívané na ZDŠ i na středních školách, obsahují seznamy prvočísel pouze od 2 do 997. Je tedy třeba použít rozsáhlejších matematických tabulek, např. Valouchových *Pětimístných tabulek logaritmických*. V nich každý snadno zjistí, že číslo 1979 je prvočíslo.

Úlohu však můžeme vyřešit i bez tabulek nebo jen pomocí běžných školních tabulek.

Snadno lze dokázat větu: Jestliže a, d, d' jsou libovolná přirozená čísla, pro něž platí

$$a = d \cdot d' \quad d \leq d'$$

pak

$$d \leq \sqrt{a} \leq d'$$

Z tabulek lze zjistit, že $\sqrt{1979} \doteq 44,5$. Při vyšetřování, zda číslo 1979 je prvočíslo, stačí se tedy omezit jen na zjištění, není-li číslo 1979 dělitelné některým z prvočísel menších než 45. Žádné z nich je nedělí, a proto číslo 1979 je prvočíslo.

Poznámka. Data některých dnů letošního roku jsou zajímavá tím, že je tvoří tři prvočísla (např. 17. 2. 1979). Je tomu tak i v případě, že leto-počet 1979 zkrátíme na 79. Určení počtu těchto dní přenecháváme čtenářům.

Jiří Mída

Informace o knižnici Škola mladých matematiků

Mezi novinky populárně odborné matematické literatury z podzimu 1978 patří poslední svazek knižnice Škola mladých matematiků s názvem *Uspořádané množiny*. Tato malá knížka je už 42. svazkem edice určené zájemcům o matematiku z řad středoškolských studentů, edice, kterou pod souhrnným názvem Škola mladých matematiků vydává ÚV matematické olympiády v pražském nakladatelství Mladá fronta. Útlé knížky osmerkového formátu patřící do této edice mají rozsah přibližně 80 stran a pojednávají velmi přístupnou formou o různých zajímavých problémech tradiční i moderní matematiky. Většina názvů ukazuje, že matematika je vybírána s ohledem na témata středoškolského učiva. Problémy objasňované v jednotlivých knížkách jsou vybrány z různých oborů tak, aby si čtenáři mohli vybrat podle vlastního zájmu z několika tematických okruhů: z *geometrie* (např. Kružnice, O podobnosti v geometrii, Shodná zobrazení, Konvexní útvary), z *teorie čísel a matematických struktur* (např. Co víme o přirozených číslech, O dělitelnosti čísel celých, Komplexní čísla), z *algebry* (např. Polynomy v moderní algebře, O rovnicích s parametry, O nerovnostech), z *kombinatoriky a teorie míry* (např. Faktoriály a kombinační čísla, Vytvořující funkce), z *teorie množin* (např. Malý výlet do moderní matematiky, Druhý výlet do moderní matematiky, Uspořádané množiny).

Těchto několik okruhů a názvů jednotlivých svazků, uvedených bez nároku na úplnost a přesnost bibliografických údajů, má ukázat pestrou paletu studovaných otázek i přitažlivost jednotlivých témat. Všechny svazky však mají jedno společné. Autoři vycházejí ze středoškolského učiva, prohlubují poznatky v něm obsažené, popř. ukazují nový pohled na studovaný problém. Autoři jsou většinou z řad středoškolských a vysokoškolských učitelů, kteří mají zkušenosti z práce s mladými matematiky a dovedou přístupně zpracovat studovanou problematiku. Volí jasnou a pochopitelnou formu výkladu, který demonstrují a doplňují řadou řešených příkladů. Po každé kapitole jsou vždy zařazeny úlohy na procvičení s uvedenými výsledky, aby si čtenář mohl ověřit své pochopení a znalosti.

Škola mladých matematiků je dobrým pomocníkem při studiu, a proto má redakce tohoto časopisu v úmyslu navázat na tuto úvodní informaci a v dalších článcích probrat podrobněji některé tematické okruhy.

E. Malinová

Eva Kotulová:

KALENDÁŘ ANEB KNIHA O VĚČNOSTI A ČASU

Svoboda 1978, Klub čtenářů, celoplátěná vazba, 192 str.

Kniha je rozdělena do čtyř kapitol. V první — K čemu potřebujeme kalendář, kde jsme ho získali a co s ním uděláme — se kromě otázek, patrných z názvu kapitoly, hovoří o přístrojích k měření času. Druhá kapitola podává Astronomické základy kalendáře s pohledem na Ptolemaia, Koperníka, Tychona, Tadeáše Hájka, Galileiho. Samostatná část je věnována kalendáři v českých zemích s šestistránkovým otiskem romanticky laděného strachuplného příběhu z kalendáře na rok 1885. Návazná kapitola Předchůdci řehořského kalendáře orientuje o kalendáři Egyptanů, Sumerů, Babylónanů, Číňanů, Indů, Řeků, Římanů, Arabů, Peruánců, Mayů a o astronomických přístrojích: Jakubova hůl, armilární sféra, kvadrant, sextant, astrolábium, dalekohled. Poslední kapitola Návrhy na změnu řehořského kalendáře začíná Scaligerovým stanoviskem (1583) a přechází až do současnosti. Kniha informuje o stanovisku OSN a o společensko-ekonomických požadavcích a výhradách k předkládaným návrhům reformy. Pro ilustraci obtíží, které mohou být s kalendářnictvím spojeny, uvádíme, že Indie zvládá přepestré datování na svém území každoroční edicí 3000stránkového almanachu!

S ohledem na lehký, svěží sloh je kniha příjemnou, nenáročnou četbou pro chvíle odpočinku. Upoutávají časté dobové citáty (výběrově připomínáme *Plauta*, *Shakespeara*, *Koperníka*, *Komenského*). Velmi početné, namnoze barevné ilustrace jsou jednak převzaty z původních pramenů, jednak jde o „technické“ zpodobení k podávanému textu, jednak o moderně koncipovanou stylistiku starých žánrů včetně montáže staroegyptské symboliky a stylizace babylónské Tiamaty.

S ohledem na širší shrnutého materiálu by knížce pro další vydání prospělo připojení rejstříku. Zájemce o časoměrnou tematiku upozorňujeme, že moskevské nakladatelství Nauka připravuje pro Institut historie přírodních věd a techniky na druhé čtvrtletí 1979 obsáhlou (640 str.) knihu o dějinách hodin od starověku až po současnou chronometrii včetně hodin atomových.

K. Mišoň

redakce hovoří

Pokyny autorům

Rozhledy matematicko-fyzikální mohou otisknout jenom ty články, které byly zaslány redakci s úplným autorovým jménem, jeho akademickými a vědeckými tituly, s udáním pracoviště a bytové adresy autora. O otištění rozhoduje redakční rada nebo vedoucí redaktor po vyjádření recenzenta. Nevyžádané rukopisy se nevracejí.

Obsah : Rozhledy matematicko-fyzikální jsou určeny především studentům středních škol a středních odborných učilišť s maturitou. Jejich obsah i způsob podání má proto odpovídat tomuto poslání. Otištěné články musí být psány srozumitelně, pokud možno zajímavě a nemají být příliš dlouhé. Autoři se musí řídit pravidly českého nebo slovenského pravopisu, musí respektovat přijaté názvy a značky a (ve fyzice) zákonem stanovené jednotky a označení.

Úprava rukopisu : Nejprve je třeba uvést titul příspěvku (krátce a výstižně), potom jméno a působiště autora. Text je nutno psát na stroji (nikoliv však perličkou), černou páskou, ob řádek, a to po jedné straně bílého papíru formátu A4. Na každé stránce má být nejvýše 30 řádků, z nichž každý obsahuje 60 úhozů. Nadpisy nebo zdůrazněná slova textu podtrhujte jenom obyčejnou (ne propisovací) tužkou. Poznámky pod čarou — pokud možno v minimálním počtu — je třeba v textu vyznačit postupně číslicemi v exponentu a psát je hned za řádek rukopisu, k němuž patří; od ostatního textu se oddělí vodorovnými čarami. Obrázky se nikdy nekreslí do textu článků!

Matematické výrazy a vzorce se v textu doplňují ručně (velmi čitelně!) inkoustem, tuší nebo propisovací tužkou; zvláštní pozornost je třeba věnovat připisování indexů a exponentů. Vzorce se číslují v oblých závorkách na pravé straně, a to jenom tehdy, jestliže se na ně odvoláváme v dalším textu.

V odkazech na literaturu uvádíme (a to střídavě) jenom publikace dostupné čtenářům Rozhledů, tj. především literaturu psanou v českém nebo slovenském jazyce. Uvádějí-li se odkazy na zahraniční literaturu, pak jenom na publikace knižní, nikoli na specializované vědecké časopisy. Odkazy je třeba v textu průběžně číslovat; číslice se píší do hranatých závorek. Odkaz obsahuje jméno autora, název knihy nebo článku (u časopisu ročník a stránku), vydavatele, místo a rok vydání.

Obrázky se rýsují tuší na pauzovací papír a popisují se normalizovaným písmem šablonou 5 mm; čáry musí být ostré a nerozpité. Očíslované texty k obrázkům se přikládají na konec rukopisu. Je třeba pamatovat na to, že se obrázky pro tisk zmenšují v poměru 1 : 2. Fotografie musí být ostré, kvalitní a zhotovené na lesklém bílém papíru. Autor může také zaslat redakci jenom obrázky narýsované tužkou; redakce dá takové obrázky pro tisk narýsovat. I v tomto případě je třeba dodat obrázky pečlivě narýsované a čistelně popsané.

Informace pro předplatitele Rozhledů matematicko-fyzikálních

Redakci Rozhledů matematicko-fyzikálních stále docházejí dopisy, v nichž si předplatitelé našeho časopisu stěžují, že nedostali některé číslo. Zároveň zpravidla žádají, aby jim toto číslo redakce zaslala. K tomu redakce připomíná, že předplatné na Rozhledy přijímá jenom *Poštovní novínová služba*, u níž je třeba špatné doručování Rozhledů reklamovat.

Redakce zároveň poznamenává, že má ve svém archivu malý počet některých čísel Rozhledů, a to i ze starších ročníků. Chybí-li někomu některé číslo, může si o ně redakci napsat. Má-li je redakce ještě v archivu, ochotně je žadateli zašle.

Znovu připomínáme, že od 1. září 1978 přesídlila redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních do budovy pedagogické fakulty Univerzity Karlovy na katedru matematiky. Adresa je tato:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1 - Nové Město,
telefon 29 87 50 (meziměsto), 298751 až 9

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

cinematica ž
cinematico
cinquanta
cinquantesimo
cinquantesimo m
cinque
circolare
circolo m
— vizioso
circoli polari
circonferenza ž
— goniometrica
— circoscritta
— inscritta
circoscrivere
circuito m
circuiti elettrici
— elettronici
classe ž
classificazione ž
coefficiente m
— angolare
— binomiale
coincidere
coincidenza ž
collegamento m
collineazione ž
colonna ž
colore m
colorimetro m
combinazione ž
commutatore

kinematika
kinematický
padesát
padesátý
padesátina
pět
kruhový, goniometrický
kruh, okruh
bludný kruh
polární kruhy
kružnice, obvod
jednotková kružnice
kružnice opsaná
— vepsaná
opsati
obvod
elektrické obvody, sinop, stadi
— slaboproudé
trída
trída, klasifikace
koeficient
směrnice (přímky)
kombinace, číslo
shodovati se, kryti se
shoda, splynutí
spojení, zapojení
kolineace
sloup, sloupec
barva
kolorimetr
kombinace
komutativní

commutatrice ž (macchina)

comparare

comparazione ž

compasso m

compatibile

compatibilità ž

complemento m

— algebrico

complesso

complesso m

completo

complicato

composizione ž

composto

composto m

comune

comunicazione ž

concavo

concentrico

conclusione ž

concorrere

concreto

condensatore m

condensazione ž

condizionato

condizione ž

condizioni iniziali

conducibilità ž (elettrica, termica)

condurre

conduttanza ž

conduttività ž

conduttore m

conduzione ž

congiungente proposizionale

congiunzione ž

congruenza ž

— aritmetica

conica ž (sezione)

conico

motorgenerátor

srovnávací, porovnávací

srovnání, přirovnání

kružidlo, kružítko

slučitelný, kompatibilní

slučitelnost, kompatibilita

doplňek

— v determinantu

komplexní

komplex; soubor

úplný

složitý

skládání

složený

sloučenina

obecný, obyčejný, společný

kommunikace; dráha

datý, vydatý

soustředný

důsledek, (a) závěr

sblížit se

konkrétní

kondenzátor

kondenzace

podmíněný, relativní

podmínka

počáteční podmínky

vodivost (elektrická, termická)

vésti

vodivost (střídavého proudu)

vodivost

vodič

vedení

spojka, funktor

konjunkce (logická i astronomická)

shodnost

kongruence

kuželosečka

kuželový

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

6

ROČNÍK 57, 1978-1979, ÚNOR

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr. Josef Dibeika, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. O. Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1979.

OBSAH

Doc. dr. ing. J. Večeř, CSc.: Třicet let RVHP	241
Dr. L. Dvořák: Náčelník veliké relativity .	244
P. Fabinger: Celá část reálného čísla	250
P. Fejtková, dr. M. Malík: Příkazy .	254
Dr. J. Šedivý: Mnohočleny s větším počtem prvočíselných hodnot	260
S. Horák: Speciální křivky třetího stupně	262
Prof. E. Kraemer: Feuerbachova kružnice devíti bodů	266
Dr. R. Tulak: Padesát let Geiger-Müllerova detektoru	272
Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Matěj Norbert Vaněček	277
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Krátká historie českých měr .	279
Dr. J. Mída: Tři úlohy o mincích z doby Marie Terezie	283
Ze zahraničních časopisů	283
Recenze	284
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. strana obálky

Třicet let RVHP

Doc. JUDr. ing. JAN VEČEŘ, CSc., Praha

V lednu 1979 jsme si připomněli třicáté výročí vzniku integračního sdružení socialistických zemí — Rady vzájemné hospodářské pomoci. RVHP byla založena počátkem roku 1949, kdy v evropských lidově demokratických zemích byla v podstatě zakončena poválečná obnova národního hospodářství a kdy se v širokém měřítku začínaly klást ekonomické základy socialismu.

Dějiny vzniku a činnosti Rady jsou dějinami rozvoje a prohlubování hospodářské spolupráce socialistických členských států. Od doby, kdy těžiště spolupráce spočívalo ve dvoustranných hospodářských vztazích, uplynula již dlouhá řada let. V současné době je ekonomický rozvoj členských států založen na plnění „*Komplexního programu dalšího prohlubování a zdokonalování spolupráce a rozvoje socialistické ekonomické integrace členských států RVHP*“, který byl přijat v r. 1971.

Společenství socialistických států se opírá o ekonomickou základnu stejného typu v každém státě — o společenské vlastnictví výrobních prostředků, o státní zřízení stejného typu — o vládu lidu v čele s dělnickou třídou, a o jednotnou ideologii — marxismus-leninismus. Komplexní program vychází z toho, že všestranný rozvoj a upevňování každého jednotlivého socialistického státu je rozhodující podmínkou pro cestu světové soustavy socialismu vpřed. Úspěšný rozvoj národního hospodářství a zdokonalování společenských vztahů, všestranný pokrok každého socialistického státu odpovídají zájmům společné věci socialismu. Výrobní síly členských států RVHP dosáhly vysoké úrovně rozvoje, ve státech byla vytvořena mnohódvětvová industriální struktura národního hospodářství a zvýšila se technická úroveň výroby. Značně vzrostla hmotná a kulturní úroveň obyvatelstva členských států RVHP.

V současné době dosáhlo společenství členských států takové úrovně, která je charakterizována řadou vzájemně souvisejících rysů. Členské státy především prohloubily svou spolupráci v oblasti plánovací činnosti, včetně rozvíjející se soustavy národohospodářských plánů. V některých případech přecházejí členské země ke společnému plánování jednotlivých druhů výroby a odvětví a ke společnému prognózování hospodářského rozvoje. Rozvíjí se soustavná spolupráce mezi členskými státy RVHP v oblasti plánovité organizace mezinárodní specializace a kooperace výroby.

Současný stupeň rozvoje výrobních sil, především probíhající vědeckotechnická revoluce, vede k tomu, že členské státy RVHP výrazně prohlubují spolupráci v oblasti vědy a techniky. Tento proces probíhá na

dvoustranném a mnohostranném základě a zahrnuje jak výměnu vědeckotechnických poznatků, tak společné výzkumy a vědeckotechnické práce.

Socialistické státy spojují často své úsilí při výstavbě velkých výrobních a dopravních objektů, o něž mají společný zájem. Příkladem takové spolupráce může být v současné době plynovod „*Sojuz*“, který pomáhali stavět také českoslovenští odborníci a dělníci a jímž ze Sovětského svazu již dostáváme přírodní plyn potřebný k rozvoji naší ekonomiky. Podobnému cíli slouží vznik a rozvoj internacionálních výrobně ekonomických organizací a hospodářských sdružení, jakými jsou například propojená energetická soustava „*Mír*“, „*Intermetall*“, Organizace pro spolupráci v průmyslu valivých ložisek, Společný park nákladních vagónů a další, jež mají přispívat ke kooperaci a specializaci výroby a zajišťovat vysokou efektivnost mezinárodní socialistické dělby práce.

Značný význam pro prohlubování integračních procesů má utváření mezinárodní úvěrově bankovní soustavy, k níž položily základ Mezinárodní banka hospodářské spolupráce a Mezinárodní investiční banka členských států RVHP. Vytvoření této soustavy usnadňuje mezinárodní obchod a koordinaci zbožně peněžních nástrojů (ceny, devizové kursy, návratnost deviz, soustavy zúčtování ap.).

V současné době rozvoje hospodářské spolupráce mezi členskými zeměmi se klade značný důraz na bezprostřední vztahy mezi národními úřady, odvětvovými ministerstvy, hospodářskými organizacemi, vědeckými institucemi a podniky. V souvislosti s tím dochází ke zvyšování efektivnosti kooperačního úsilí.

Pro členské státy RVHP má značný význam strukturální přestavba národního hospodářství. V současné době, kdy se v praxi stále častěji prosazuje zásada urychleného předávání vědeckotechnických poznatků do výroby, se mění ekonomická váha jednotlivých odvětví a oborů národního hospodářství. Významu začínají nabývat taková odvětví, jako je chemie, elektrotechnika, moderní strojírenství, elektronika ap. Výrazně se také mění palivová a energetická základna členských států — do popředí vystupuje problém zásobování naftou a plynem, výstavba atomových elektráren a jiných významných energetických komplexů atd. Ukazuje se, že všechny tyto úkoly, které před členské státy staví stupeň rozvoje výrobních sil, jehož dosáhly, lze mnohem snadněji a s větším efektem řešit společně.

Ekonomický růst většiny členských zemí RVHP byl v minulosti založen na široké mobilizaci extenzivních faktorů ekonomického růstu. V současné době vystupuje do popředí nutnost přechodu k intenzivnímu hospodaření s pracovními silami, s energií, materiálem a výrobními fondy. Zkušenosti ze všech členských států ukazují, že v současné době začíná být mnohem lacinější hledat efektivnější metody využití energie

a materiálu, než tuto okolnost nedoceňovat a řešit problém jen dalším růstem těžby. Tuto okolnost podtrhuje ještě to, že nová ložiska surovin a palivově energetických zdrojů jsou často v oblasti věčného sněhu a ledů, na mořském dně nebo ve velmi vzdálených oblastech. Intenzifikace výroby a zvyšování její efektivity se má podle Komplexního programu opírat především o široké využití vědeckotechnických poznatků ve výrobě a o rozsáhlou výměnu vědeckotechnických informací.

Spolupráce členských zemí RVHP se nevyčerpává společnými akcemi v oblasti průmyslové výroby. Velkou pozornost věnují členské státy koordinované spolupráci v zemědělství (vzpomeňme alespoň pěstování sovětských pšenic na našich polích), v dopravě, ve stavebnictví, ve vodním hospodářství a v dalších ekonomických sférách.

Postupný rozvoj států socialistického společenství dokazují kvalitativní a kvantitativní změny v jejich ekonomice. Soustavně vzrůstá úloha průmyslu ve výrobě úhrnného společenského produktu a národního důchodu, zrychluje se tempo hospodářského růstu, výsledky vědeckotechnické revoluce splývají s přednostmi světové socialistické soustavy hospodaření, průběžně se zvyšuje životní úroveň pracujících členských států RVHP. Cílevědomě koordinovaná ekonomická politika států socialistického společenství vede k rozvoji, prohlubování a zdokonalování hospodářských vztahů integrujících států. Společná cesta usnadňuje výstavbu a rozvoj rozvinuté socialistické společnosti. Lze předpokládat, že ze všech těchto důvodů bude úloha a význam Rady vzájemné hospodářské pomoci jako kolektivního orgánu bratrských států v rozvoji socialistické ekonomické integrace nadále vzrůstat.

Náčelník Veliké relativity

RNDr. LEOŠ DVOŘÁK, UK Praha

Zeptáte-li se na ulici náhodného chodce, koho považuje za největšího fyzika dvacátého století, uslyšíte téměř jistě jeho jméno. Kolují o něm historky, natáčejí se filmové veselohry. A přece stejně jako záplavou hustých vlasů je jeho portrét lemován až nadlidskou aureolou geniality. Sláva, jež ho potkala už v průběhu života, ho nezměnila. Dál to byl člověk vždy ochotný pomoci, skromný, neúnavný hledač harmonie a pravdy. Člověk, myslitel, jeden z největších fyziků všech dob, *Albert Einstein*.

Narodil se 14. března 1879 v Ulmu, městečku v podhůří Švábských Alp na levém břehu Dunaje v rodině nepříliš úspěšného obchodníka *Hermana Einsteina*. Rodina se brzy přestěhovala do Mnichova, kde otec a strýc založili malou továrničku na elektrotechnické zařízení. Tento strýc, Jakub Einstein, byl první, kdo u malého Alberta podnítil zájem o matematiku.

Albert Einstein nebyl zázračným dítětem. Sám později prohlásil, že snad určité zpoždění ve vývoji způsobilo, že o podstatě prostoru a času přemýšlel později než většina lidí, která tak činí jen v raném dětství, a že proto do této oblasti mohl proniknout hlouběji. Známa je sice příhoda s kompasem, který uviděl poprvé asi věku 4 až 5 let a zaujat chováním střelky prohlásil, že „musí existovat něco, co střelkou hýbe“, ale ani tato událost neznamena nic zázračného. Také ve škole se nijak zvlášť neprojevoval a i na gymnáziu, kam začal chodit od 10 let, studoval bez výraznějších úspěchů a patrně též bez většího zájmu. Vojensko-byrokratický duch, tak výrazně tam panující, ho dráždil a odpor k upjatosti, bezduché kázni a militarismu si Albert Einstein zachoval po celý život.

V době gymnaziálních studií se už zajímal o vědu, k níž ho ovšem nepřivedla škola, ale populární knihy, které mu půjčoval polský student medicíny *Max Talmey*, navštěvující jeho rodinu. Zároveň ho tyto knihy odvrátily od náboženství, což se mimo jiné projevilo tím, že vystoupil ze židovské obce.

Jeho poměr k náboženství je vůbec velmi zajímavý. Přesto, že často používal pojmu Bůh, byl v podstatě ateista a když mluvil o Bohu, měl na mysli objektivní zákonitosti světa, jejich jednotu a harmonii. V tom byl duchovním dědicem *Benedikta Spinozy*, jehož ostatně často četl a velmi obdivoval. Einsteinovo „kosmické náboženství“, jak bývá někdy nazýváno, není tedy ničím jiným, než vírou v objektivní existenci a jednotu světa, v jednotu a harmonii jeho zákonů a jejich poznatelnost. (Nejednou

také vystupoval proti pozitivistickým názorům *Ernsta Macha* a později Vídeňského kruhu.)

Svobodomyslnost s sebou ovšem nesla svá rizika. Poté, co se jeho rodiče přestěhovali do Itálie (Herman Einstein opravdu nebyl příliš úspěšný obchodník a v Mnichově mu hrozil bankrot), byl Albert Einstein rok před ukončením z gymnázia vyloučen, neboť „jeho přítomnost narušuje u žáků úctu ke škole“. Co dělat? Bavila ho matematika a fyzika, ale na univerzitu bez maturity jít nemohl. Zbývala škola technického typu. Curyšský Polytechnický institut byl jednou z nejlepších takovýchto škol. Příjímací zkoušky přes prokázané výborné matematické znalosti Albert Einstein neudělal — pro nedostatečné znalosti cizích jazyků, botaniky a zoologie (!). Dostal však radu, aby ukončil některou švýcarskou střední školu a za rok přišel ke zkouškám znovu. Po ročním studiu na kantonální škole v Aarau pak byl skutečně v r. 1896 (bez zkoušek) přijat na pedagogickou fakultu Polytechniky.

Byla to v podstatě fakulta matematicko-fyzikální. Mladý Einstein kromě přednášek z matematiky a fyziky zapisoval i speciální přednášky z filozofie, historie, ekonomiky a literatury. Na přednášky však chodil zřídka. Látku, probíranou z fyziky, už znal, a tak raději studoval sám originální práce Maxwellovy, Kirchhoffovy, Boltzmannovy a Herzovy. Matematické přednášky pro něj pak zapisoval jeho přítel *Marcel Grossman*, tentýž Grossman, který mu později pomáhal propracovat matematický aparát obecné teorie relativity. Na zkoušky se Einstein učil nerad. Přesto však v r. 1900 ukončil fakultu s dobrými známkami a pověstí talentovaného mladíka. Talentovaného, leč svérázného, svobodomyslného a nedbajícího na etiketu. Takže na rozdíl od většiny svých studentských přátel (a na rozdíl od panujících zvyklostí) místo na fakultě nedostal.

Následovaly skoro dva roky dočasných prací a hledání trvalého místa, až v červenci 1902 (na přímlovu otce Marcela Grossmana) byl přijat na místo technického experta 3. třídy v patentním úřadě v Bernu. 6. ledna 1903 se oženil s *Milevou Maric*, srbskou emigrantkou z Rakousko-Uherska, s níž se znal již z doby studií. (Manželství, ze kterého se narodily dvě děti — synové *Hans Albert* a *Eduard*, nebylo příliš šťastné a asi po deseti letech skončilo rozpadem.) Ke zlepšení finanční situace začal Einstein dávat kondice — z kondic se však vyvinul debatní kroužek (zvaný honosně „*Academia Olympia*“), v němž se přátelé věnovali náruživým diskusím o matematice, filozofii i literatuře. Členem kroužku byl později i italský inženýr *Michelangelo Besso*, jediný člověk, jemuž Einstein děkoval ve svém slavném prvním článku o speciální teorii relativity.

Později Einstein tvrdil, že studium techniky a nových technických myšlenek při práci v patentním úřadě mu v mnohém pomohlo. (Málo je

známo, že s *Paulem Gabichtem* — bratrem *Konráda Gabichta*, jednoho z členů „*Academie Olympie*“ — navrhl a sestrojil několik elektrotechnických přístrojů.) Einsteinův přístup je ovšem více než zajímavý — byl rád, že po zaměstnání a v neděli má volný čas, kdy se může věnovat fyzice. I později tvrdil, že nejvhodnějšími povoláními pro fyzika jsou povolání lampáře či strážce majáku, protože poskytují dostatek času k přemýšlení a kontemplaci. Po celý život bral nerad peníze za fyzikální výzkum a říkal, že by rád dělal nějakou prospěšnou manuální činnost (například vyráběl boty) a fyzice se věnoval až ve volném čase. Fyzika a hledání jejích nejobecnějších zákonů pro něj bylo cosi až posvátného, co nelze směňovat za peníze.

Až do r. 1905 Einstein téměř nic nepublikoval a nic nenaznačovalo jeho budoucí popularitu a slávu. V tomto roce mu však v „*Annalen der Physik*“ vyšlo hned několik článků. Dva z nich (jeden o Brownově pohybu, dokazující existenci molekul, tehdy ještě mnohými fyziky popíranou; druhý, vysvětlující fotoelektrický jev na základě představy o diskrétním charakteru pohlcování elektromagnetické energie a předznamenávající tak vlastně kvantovou fyziku) by každý sám o sobě stačily dostat Einsteinovo jméno na stránky učebnic. Třetím byl slavný článek „K elektrodynamice pohybujících se těles“, formulující základy speciální teorie relativity.

Již dlouho se cítila potřeba teorie, která by rozporné výsledky pokusů uvedla do souladu s představou o existenci éteru. Lorentzovo vysvětlení bylo příliš umělé a nepřirozené (i když vzorce, nalezené Lorentzem, zůstávají zachovány i v teorii relativity — Einstein je ovšem odvodil jiným způsobem bez znalosti Lorentzovy práce). Einsteinova teorie, která problém vyřešila nesmírně elegantně tak, že popřela samu existenci éteru, byla téměř okamžitě přijata. Někteří fyzici (například *Planck*) pak začali chápat i genialitu jejího tvůrce. Přišla i oficiální uznání. Na podzim 1908 se Albert Einstein stal soukromým docentem Bernské univerzity a v létě r. 1909 mimořádným profesorem univerzity v Curychu. Koncem roku 1910 se uvolnilo místo řádného profesora na Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze a rektor německé univerzity *Anton Lampa* (poněmčelý Čech) pozval Einsteina, tehdy již člověka s evropským jménem, ve snaze zvýšit lesk univerzity. Na podzim r. 1911 začal Einstein v Praze přednášet.

— Praha se Einsteinovi zalíbila. Dokonce tak, že pořadí oficiálních návštěv (jichž měl vykonat asi 40) volil tak, aby znovu viděl ty části Prahy, jež ho zaujaly. Takto stanovené pořadí se ovšem neshodovalo s tím, jež stanovovala etiketa, takže byl podezříván z neúcty ke služební hierarchii (ostatně asi právem). V Praze se Einstein přátelil mimo jiné s mladým spisovatelem *Maxem Brodem* a s matematikem *Georgem Pikem* (jež ho upozornil na práce *Levi-Civity* v diferenciální geometrii, které měly pro Einsteina, tehdy již pracujícího na obecné teorii relativity,

svůj význam). Skromnost, dobrota a smysl pro humor našly Einsteinovi v Praze mnoho přátel. Ale také nepřátel — jeho humor byl leckdy chápán jako neúcta k profesorskému stavu a skromný oblek, který ho ostatně charakterizoval celý život (kožené sako, košile bez límečku, kalhoty bez šlí, žádné ponožky), jako revoltu proti akademické upjatosti.

V roce 1912 přijal Einstein místo vedoucího katedry na curyšské Polytechnice a v r. 1914 na naléhání Maxe Plancka a Waltera Nernsta po značném váhání místo ředitele Institutu císaře Viléma v Berlíně. Víme, proč váhal — vzpomínky na kasárenský duch německé školy a gymnázia byly ještě stále živé. Ostatně tato militaristická atmosféra v Německu opět zesílila s příchodem první světové války a později před nástupem fašismu. V Institutu císaře Viléma působil Einstein až do r. 1933. Na pravidelném semináři se tam setkávali přední fyzikové — *Planck, Nernst, Max von Laue, Schrödinger* a jiní.

Od r. 1905 pracoval Einstein prakticky sám, jen s pomocí Marcela Grossmana na relativistické teorii gravitace. Ohromné úsilí bylo v r. 1916 korunováno úspěchem a svět se dozvěděl o obecné teorii relativity. Její obtížný formální aparát a paradoxnost nového pohledu na prostor a čas však způsobily, že téměř nebyla pochopena. Též předpovídané efekty byly tak malé, že se zdálo téměř nemožné ji experimentálně ověřit. Již v r. 1917 však *Artur Eddington* navrhl proměřit ohyb paprsků světla hvězd, procházejících blízko Slunce při zatmění. Expedice do Guinejského zálivu a do Brazílie, vedené Eddingtonem, pak při zatmění Slunce 29. 5. 1919 získaly výsledky zcela shodné s předpovědí obecné teorie relativity. Toto skvělé potvrzení a snad i fakt, že šlo o teorii německého vědce, kterou ověřili Angličané (což byl světlý paprsek spolupráce po hysterii válečné nenávisti) způsobily, že Einstein získal obrovskou popularitu mezi všemi vrstvami lidí. (Získal samozřejmě i další nepřátele — v Německu byla např. založena celá organizace, bojující proti jeho vlivu.) Velký hledač harmonie využíval své popularity k tomu, aby pomohl i společnosti být harmoničtější a racionálnější. Přednášel o internacionalismu a spolupráci. V r. 1922 byl dokonce jmenován do Komise intelektuální spolupráce při Lize národů. Rozčarován její bezmocností a pasivitou z ní však následujícího roku vystoupil.

Začátek 20. let byl obdobím velkých cest. Einstein cestoval spolu se svou druhou ženou *Elsou* (vzal si ji v r. 1919 po rozvodu s Milevou). Navštívil postupně Holandsko, Československo, Rakousko, Ameriku, Anglii, Francii a pak i Japonsko, Palestinu a Španělsko. Všude přednášel — populárně i odborněji — o fyzice i o nutnosti dorozumění mezi národy. V červenci 1923 odjel do Švédska převzít Nobelovu cenu (je zajímavé, že díky hlasům proti teorii relativity, jež se tehdy objevovaly zejména v Německu, mu tato cena byla udělena „za objev zákona fotoelektrického jevu a práce v oblasti teoretické fyziky“). Celou finanční hodnotu Nobelovy ceny dal své první ženě.

V roce 1930 byl Einstein pozván, aby přednášel na Kalifornském technologickém institutu v Pasadeně. Je známo, že navštívil i observatoř na Mount Wilsonu a známá je i příhoda, kdy Elsa Einsteinová po objasnění, že mohutný teleskop observatoře je nutný k odhalování tajemství vesmíru, pravila: „To je zajímavé, můj muž to většinou dělá na rubu staré obálky.“ Méně známo je, že Einstein navštívil i indiánský kmen v Arizoně, dostal od Indiánů titul náčelníka a jméno, které je názvem tohoto článku.

Do Pasadeny byl pak Einstein pozván ještě několikrát. Během posledního pobytu nastoupil v Německu k moci Hitler. Einsteinovy práce byly veřejně spáleny před berlínskou Státní operou spolu s jinou „neárijskou a komunistickou literaturou“ Na jaře roku 1933 odjel Einstein do Belgie, kde ale musela být jeho vila chráněna před nacistickými agenty. Následoval krátký pobyt v Anglii a v říjnu 1933 přijal Einstein místo v Institutu pro pokročilá studia v Princetonu. V roce 1936 přišel další úder osudu — smrt jeho druhé ženy Elsy.

Od začátku 20. let pracoval Einstein v podstatě na jediném problému — na zobecnění obecné teorie relativity, na unitární teorii pole. Tato práce ležela zcela stranou zájmu drtivé většiny fyziků (totéž vlastně platilo i dříve v případě obecné teorie relativity), kteří se koncentrovali převážně na problémy kvantové mechaniky. Einstein kvantovou mechaniku nikdy nepřijal. Statističnost kvantově mechanického popisu se přičila jeho vědeckému instinktu. Hledal hlubší teorii, z níž by šly zákony kvantové mechaniky odvodit, jedinou všezahrnující teorii, unitární teorii pole. Tentokrát však byl problém příliš náročný, matematické obtíže příliš značné — Einstein zamítal jednu variantu po druhé a ani poslední, nejpropracovanější ho příliš neuspokojila. Navíc ostatním fyzikům se díky objevům stále nových a nových částic a polí zdála Einsteinova cesta neschůdná a slepá. Až dnes, kdy potřeba sjednocující teorie je chápána snad víc než dříve, docházejí jeho snahy v jistém smyslu své rehabilitace.

^{1002:} Je však třeba ocenit i Einsteinův vliv na kvantovou mechaniku. *Niels Bohr* to učinil, když prohlásil, že Einstein vykonal pro kvantovou mechaniku mnoho, že díky jeho kritice se vyjasnila řada problémů a vývoj mohl jít dále.

Zůstává ještě jedna kapitola Einsteinova života — tragická kapitola, týkající se atomové bomby. V červenci 1939 upozornili *Wigner* a *Szillard* Einsteina na možnost řetězové reakce v uranu a na nebezpečí jejího zneužití v nacistickém Německu. Na návrh finančníka *Alexandra Sachse* byl později nastylizován dopis prezidentu Rooseveltovi, poukazující na tyto skutečnosti. 2. srpna 1939 Albert Einstein tento dopis podepsal. (V březnu 1940 pak poslal Rooseveltovi další dopis, v němž upozorňoval na vzrůstající zájem Německa o uran.)

Začátkem roku 1945, kdy již zmizela obava z toho, že Německo vyvine atomovou pumu, poslali Szillard a Einstein dopis prezidentovi, v němž před použitím bomby varovali. Je známo, že po tragédii Hirošimy a Nagasaki Einstein prohlásil: „To já jsem zmáčkl knoflík.“ Protože však nepatřil k lidem, kteří věří, že na jednotlivcích závisí chod dějin, nevztahují se tato jeho slova ani tak k dopisu z r. 1939, jako spíše k celému faktu zneužití vědy, harmonických a krásných přírodních zákonů, té vědy, která měla být nadějí lidstva, ve prospěch iracionálních sil války a ničení. Toto zneužití bylo pro Einsteina bolestnou tragédií.

Po válce Einstein dál pracoval na problémech unitární teorie pole. Musel pracovat — fyzika mu byla stejnou životní potřebou jako dýchání. To není fráze. Řada svědků z různých období Einsteinova života uvádí, že ať dělal cokoli — procházel se, psal doporučující dopisy, diskutoval o politice — vždy byl znát někde v pozadí nepřetržitý tok myšlenek, řešících vědecké problémy, na nichž v té době pracoval. Tok, napájený z nějakého nevysychajícího životodárného zdroje. A tak navzdory únavě, stáří, ranám osudu a zklamání z disharmonie společenského vývoje i neúspěchů v budování unitární teorie Einstein pracoval dál. Dál chodil ulicemi Princetonu, jehož obyvatelé ho milovali a ctili — génia se záplavou bílých vlasů a zářícíma očima.

13. dubna 1955 byl se silnými bolestmi přijat do nemocnice. Diagnóza zněla: výduť aorty. Operaci odmítl. Zemřel po přechodném zlepšení stavu v pondělí 18. dubna ve dvě hodiny ráno na krvácení z aorty do dutiny břišní. V závěti odmítl jakékoli náboženské obřady a oficiální ceremonie. Místo a čas pohřbu znali jen nejbližší přátelé. Po kremaci byl jeho popel rozprášen do vzduchu.

Smrti se nebál. Kdysi na otázku, co by dělal, kdyby měl za tři hodiny umřít, odpověděl: „Rozmyslil bych si, jak těch třech hodin nejlépe využít, pak bych složil své papíry, klidně si lehl a umřel.“ Žil šestasedmdesát let a opravdu jich využil co nejlépe. Přesvědčuje nás o tom precizní stavba a elegance jeho největšího díla — teorie relativity. Teorie zdánlivě paradoxní a nepřijatelné, a přesto tak přirozené a harmonické. Přesvědčuje nás o tom, že její tvůrce byl a zůstane velikým vědcem, hledačem harmonie a pravdy, jedním z největších fyziků všech dob.

Literatura :

- [1] B. G. Kuzněcov: Albert Einstein, Nauka, Moskva, 1967
- [2] L. Infeld: Mé vzpomínky na Einsteina, Orbis, Praha, 1959
- [3] A. Einstein: Jak vidím svět, Čs. spis., Praha, 1961

Poznámka : Materiál k článku byl čerpán převážně z fundované Einsteinovy biografie (1), kterou lze doporučit zájemcům o podrobnější seznámení s Einsteinovým životem a dílem. Zajímavé jsou též vzpomínky Einsteinova spolupracovníka Leopolda Infelda (2). Postřehy a názory samotného Alberta Einsteina lze nalézt v (3).

matematika

Celá část reálného čísla

PETR FABINGER, UK Praha

V četných oblastech matematiky se setkáváme se symbolem $[x]$, který se nazývá celou částí reálného čísla x . Čtenáři Rozhledů se setkali s tímto pojmem i v několika článcích posledních ročníků časopisu. Snad nebude na škodu seznámit se s vlastnostmi tohoto symbolu od základu.

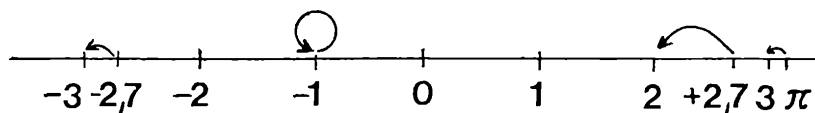
Definice 1. Celou částí reálného čísla x nazýváme takové celé číslo k , pro které platí

$$k \leq x < k + 1. \quad (1)$$

Toto celé číslo označujeme $[x]$, takže lze psát $[x] = k$, a tedy

$$[x] \leq x < [x] + 1. \quad (1')$$

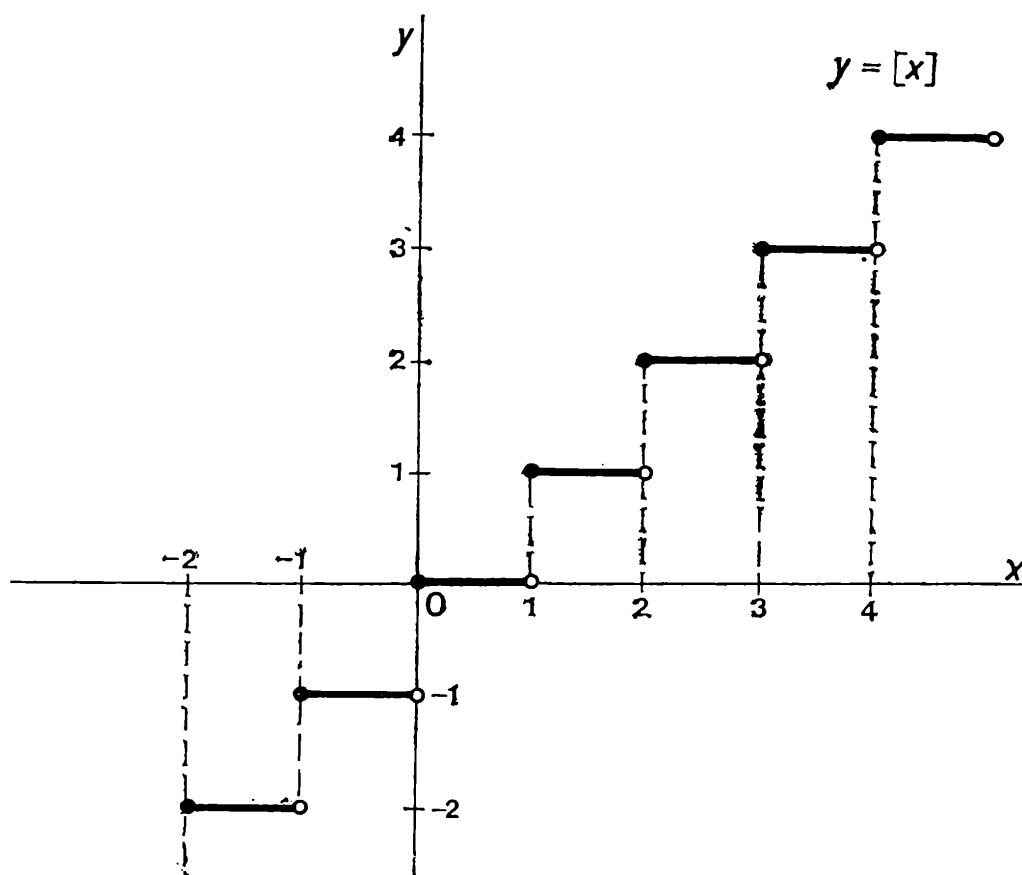
Názorněji řečeno: $[x]$ je největší z těch celých čísel, která nejsou větší než x . Zřejmě: $[2,7] = 2$, $[0,03] = 0$, $[\pi] = 3$, $[-1] = -1$, $[-2,7] = -3$, což znázorňuje obr. 1. V něm šipka vychází z čísla x a končí v $[x]$. Je-li x celé číslo, mají šipky tvar smyček, není-li x číslo celé, míří šipky zprava doleva.



Obr. 1

Ke každému reálnému číslu x můžeme podle definice 1 určit jediné celé číslo $[x]$. Proto rovnice $y = [x]$ definuje na množině R všech reálných čísel funkci, kterou obvykle nazýváme rovněž „celá část“. Její graf ukazuje obr. 2. Pro celé k nabývá tato funkce téže hodnoty $f(x) = k$ pro všechna $x \in \langle k, k + 1 \rangle$. Graf celé části je nespojitý, je složen z polouzavřených úseček, které tvoří jednotlivé stupně grafu. Proto naše funkce patří mezi tzv. *funkce stupňové* (či *schodové*). Ukažme nyní jeden jednoduchý příklad.

Příklad 1. Sestrojme graf funkce $f : x \mapsto [\sin x]$, která, jak uvidíme, má zajímavý průběh.



Obr. 2

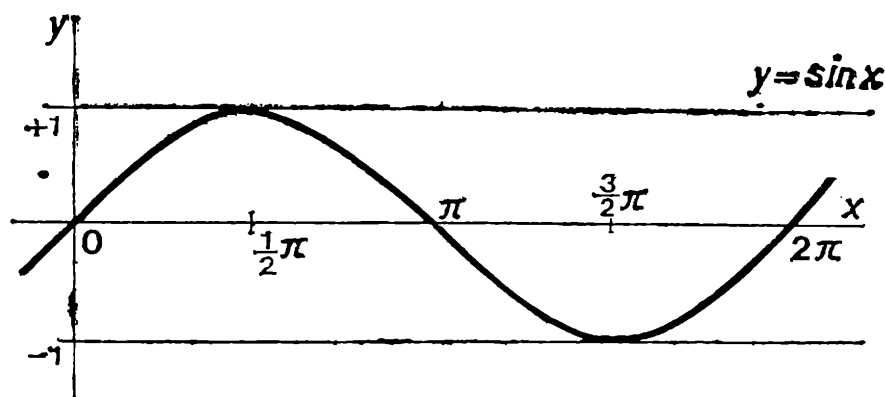
Řešení: Probereme jen interval $\langle 0, 2\pi \rangle$, neboť vzhledem k periodicitě $\sin x$ lze získané výsledky lehce přenést na celou množinu R . V intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ je $0 \leq \sin x < 1$; proto $[\sin x] = 0$. Pro $x = \frac{\pi}{2}$ je $\sin x = 1$ a tedy $[\sin x] = 1$. V intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ je opět $0 \leq \sin x < 1$, takže $[\sin x] = 0$. V intervalu $(\pi; 2\pi)$ je $-1 \leq \sin x < 0$, a proto $[\sin x] = -1$. Graf funkce f ukazuje obr. 3b, na obr. 3a je pro porovnání nakreslen graf $\sin x$.

Poznámka. Vidíme, že funkce f je v bodě 0 spojitá pouze zprava, v bodě $\frac{\pi}{2}$ není spojitá vůbec, i když zde má (oboustrannou) limitu; v bodě π je spojitá zleva, v bodě $\frac{3}{2}\pi$ je spojitá, neboť $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$.

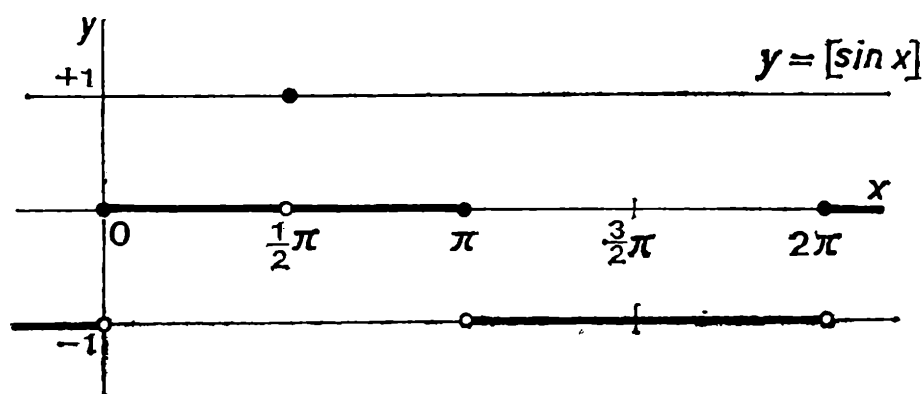
Odvoďme nyní dvě základní vlastnosti celé části. Vyjděme od soustavy nerovností (1') a odečtěme od pravé z nich číslo 1. Dostáváme

$$x - 1 < [x].$$

K této nerovnosti můžeme připsat levou nerovnost soustavy (1'). Dostáváme tak větu:



Obr. 3a



Obr. 3b

Věta 1: Pro každé reálné číslo x platí

$$x - 1 < [x] \leq x. \quad (2)$$

Přejdeme nyní k výrazům, které obsahují dvě proměnné. Položme si otázku, pro která reálná x a y platí $[x + y] = [x] + [y]$? Je téměř zřejmé, že tato rovnost platí, je-li aspoň jedno z čísel x a y celé. Obecnější odpověď dává

Věta 2: Označme $r = x - [x]$ a $s = y - [y]$. Je-li $r + s < 1$, pak $[x + y] = [x] + [y]$.

Důkaz: Platí tedy

$$x = [x] + r \quad (3a)$$

$$y = [y] + s \quad (3b)$$

Čísla r a s jsou zřejmě nezáporná, takže platí

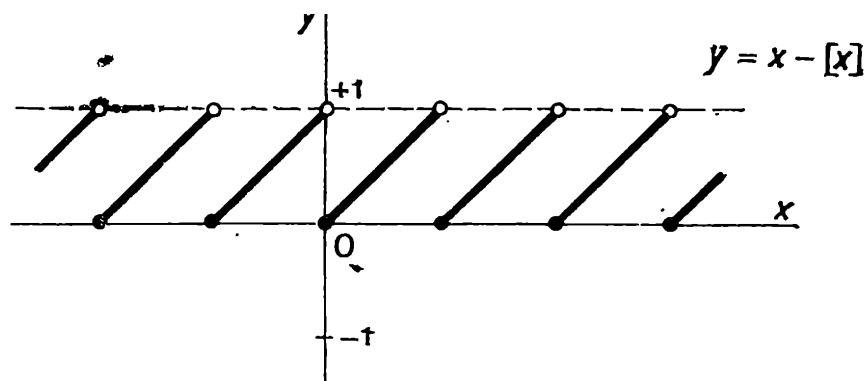
$$0 \leq r + s < 1. \quad (4)$$

Přičtíme k pravé nerovnosti této soustavy $[x] + [y] - 1$. Dostaneme:

$$[x] + [y] - 1 + r + s < [x] + [y],$$

tj.

$$x + y - 1 < [x] + [y]. \quad (5)$$



Obr. 4

Přičtením $[x] + [y]$ k levé nerovnosti soustavy (4) získáme

$$[x] + [y] \leq [x] + [y] + r + s,$$

tj.

$$[x] + [y] \leq x + y. \quad (6)$$

Spojíme (5) a (6) v soustavu

$$x + y - 1 < [x] + [y] \leq x + y.$$

Na druhé straně však podle věty 1 platí

$$x + y - 1 < [x + y] \leq x + y.$$

V intervalu $(x + y - 1; x + y)$ leží však jediné celé číslo. Proto

$$[x + y] = [x] + [y].$$

Poznámka: Je-li aspoň jedno z čísel x a y celé, je $r = 0$ nebo $s = 0$, takže $r + s < 1$ a tedy podle věty 2 $[x + y] = [x] + [y]$, jak jsme předem očekávali.

Ukažme si využití věty 2 na dvou příkladech.

Příklad 2. Určeme $[\log_{10} x]$, $x \in (0, +\infty)$.

Řešení: Každé reálné číslo $x > 0$ můžeme napsat v tzv. semilogaritmickém tvaru $x = N \cdot 10^r$, kde $1 \leq N < 10$ a r je číslo celé, zvané řád čísla x . Pak

$$\log_{10} x = \log_{10} N + r,$$

kde $0 \leq \log_{10} N < 1$. S užitím věty 2 provedeme snadno žádaný výpočet:

$$[\log_{10} x] = [\log_{10} N + r] = [\log_{10} N] + [r] = r.$$

Celá část dekadického logaritmu je tedy dobře známá charakteristika logaritmu.

Příklad 3. Dokažme, že funkce $f: x \mapsto x - [x]$ je periodická s periodou 1, tzn., že pro každé reálné číslo x je $f(x) = f(x + 1)$.

Řešení: Funkce f je definována pro každé reálné x . Funkční hodnota v bodě $x + 1$ je $f(x + 1) = x + 1 - [x + 1]$. Vzhledem k větě 2 je $[x + 1] = [x] + 1$, takže pro každé x platí

$$f(x + 1) = x + 1 - ([x] + 1) = x - [x] = f(x).$$

Graf této funkce ukazuje obr. 4.

Cvičení

1. Načrtněte grafy funkcí

a) $F: x \mapsto [-x + 2];$

c) $H: x \mapsto [\log_2 x];$

b) $G: x \mapsto [3x];$

d) $Q: x \mapsto \left[\frac{x}{x + 1} \right].$

2. Řešte rovnici

$$\left[1 - \frac{x}{2} \right] = [2x].$$

3. Znázorněte v rovině množinu všech bodů $M(x, y)$, pro něž platí $[x] \cdot [y] = 1$.

Příkazy

PAVLA FEJTKOVÁ, dr. MAREK MALÍK, MFF UK Praha

V několika předcházejících článcích (viz [1] až [4]) o datech a datových typech jsme hovořili o různých problémech, které vznikají, chceme-li pomocí „matematického jazyka“ popisovat různé objekty nematematického světa kolem nás. Zavedli jsme pojmy *data*, *datový typ*, *třída*, *pointer* a ukázali jsme si, jak s nimi budeme pracovat.

Dosud jsme však hovořili pouze o případech, kdy popisujeme nějakou neměnnou situaci — stav nějakého objektu, jehož vlastnosti se nemění. Nyní se budeme zabývat problémem, *jak v naší teorii zapsat nějaký děj*.

Již dříve jsme si uvedli, že pod proměnnou datového typu rozumíme veličinu, která může nabývat hodnot z oboru datových údajů téhož typu.

‡ Znamená to tedy, že řekneme-li v nějaké úvaze, že uvažujeme reálné číslo x , je to něco zcela odlišného, než když řekneme, že uvažujeme reálnou veličinu X . Reálným číslem rozumíme totiž pevnou hodnotu (např.

7.428), která je během celé úvahy stejná — naproti tomu reálná proměnná může během naší úvahy nabývat různých hodnot (nematematicky řečeno, chvíli může být 7.428, chvíli 3.252 a podobně). To se může zdát na první pohled neobvyklé — skutečně není označování měnících se veličin v klasické matematice běžné. Ale v nematematickém světě kolem nás se s takovým uvažováním (i když zřejmě nevědomky) setkáme velmi často.

Vraťme se třeba k případům, kdy jsme popisovali žáky ve škole či pracovníky nějakého závodu, a představme si, že budeme uvažovat počet peněz v peněžence nějakého člověka. K popsání takové veličiny zavedeme reálnou proměnnou a označíme ji identifikátorem:

real PPVP;

Předpokládejme, že našeho člověka sledujeme třeba celý den. Pak se hodnota proměnné PPVP může samozřejmě měnit (naš člověk dostane výplatu, koupí si noviny, najde na ulici desetihalér a podobně), ale její význam — to jest určení toho, co popisuje — zůstává neustále týž.

Nyní přejdeme od této úvahy zpět do naší teorie a řekněme si, jak budeme takové změny proměnné zapisovat. Nejprve nás bude zajímat, *jak dosadíme do veličiny pevnou hodnotu*. Například náš člověk si ráno vloží do peněženky 132 korun a 30 haléřů. Pak toto zapíšeme:

PPVP: = 132.30;

To znamená že hodnota výrazu na pravé straně se stane hodnotou proměnné na straně levé. Velmi podobně budeme zapisovat další, mírně složitější změny. Například, dostane-li člověk naší úvahy 100 korun, zapíšeme to:

PPVP: = PPVP + 100;

Opět nejprve spočteme hodnotu výrazu na pravé straně a pak ji dosadíme jako hodnotu proměnné uvedené na levé straně — měla-li tedy proměnná PPVP před provedením tohoto příkazu hodnotu 132.30, bude mít po jeho provedení hodnotu 232.30. Zcela analogicky můžeme psát:

PPVP: = PPVP + 0.1;

PPVP: = PPVP — 3.30;

a podobně (jednotlivé příkazy oddělujeme mezi sebou středníky).

Právě zavedený příkaz nazýváme dosazovací příkaz a můžeme jej použít pro proměnné všech základních typů.

Abychom si mohli ukázat několik příkladů, uvažujeme následující proměnné:

real RA,RB,RC;

integer I1,I2;

Boolean BOL,BOOL;

character CC;

text T;

Pak podobně jako výše můžeme do každé z nich dosadit nějakou konstantu — tj. *konkrétní hodnotu jejich typu*. Například:

RA: = -13.8243769;

I2: = 37;

BOL: = true;

CC: = 'Y';

T: = "PRAHA 10 — VRSOVICE";

Mezi proměnnými typů **real** nebo **integer** můžeme (podobně jako bylo ukázáno výše) používat různé obvyklé operace. Například:

RA: = RA + RC;

I1: = I1 * I2;

RB: = RB/2;

RC: = RA** 4;

I1: = I2 - I1;

(značku / používáme pro dělení, * pro násobení a ** pro umocňování).

Výrazy na pravé straně přiřazovacího příkazu mohou být ovšem komplikovanější — pak budeme používat závorek, a to pouze okrouhlých(!):

RA: = (RA + RC) * (RB/2 + 1);

I1: = (I2 + 1) ** (4 + I1);

RC: = RA ** (RB ** (1 * RA));

nebo dokonce:

I2: = I1 ** (1 + I1 ** (1 + I1 ** (1 + I1 ** (1 + I1))));

— Není-li jinak uzávorkováním předepsáno, provádíme ve výrazech na pravé straně nejprve umocňování, pak násobení a dělení a nakonec sčítání a odčítání.

Výrazy na pravé straně uvedených příkazů vždy označují nějakou reálnou nebo celočíselnou hodnotu. *Takovým výrazům budeme říkat aritmetické*. Nejjednodušším aritmetickým výrazem je zápis samotné proměnné nebo konstanty typu **integer** či **real**.

Do proměnných typu **Boolean** můžeme dosazovat nejenom *logické konstanty* (tj. hodnoty **true** a **false**), ale i hodnoty tak zvaných *logických výrazů*. Nejjednodušším logickým výrazem je opět pouhý zápis proměnné typu **Boolean** nebo logické konstanty.

Jiný jednoduchý logický výraz vznikne porovnáním dvou aritmetických výrazů. Můžeme tedy napsat například:

BOL: = I1 = 1;

Pak proměnná BOL bude mít po provedení tohoto příkazu hodnotu **true**, jestliže hodnota proměnné I1 je právě rovna jedné, a jinak bude mít hodnotu **false**.

Podobně můžeme psát:

$BOL := (RA + 1) * RB > RC ** 2;$

$BOOL := I1 - 1 \geq I2;$

$BOOL := RA < RC/RB;$

Složitější logické výrazy vzniknou použitím některých *základních logických operací*. Obvykle používáme tři základní: *negaci* (značka $\neg$), *konjunkci* (značka $\wedge$) a *disjunkci* (značka $\vee$).

Tedy například:

$BOOL := BOL \vee RA = RB + 1;$

$BOOL := \neg BOOL \wedge (RC > 3.141 \vee I1 = 1);$

(zde nejprve vyhodnocujeme negaci, pak konjunkci a nakonec disjunkci).

S popsáním přiřazovacím příkazem bychom ovšem nevystačili ve všech úvahách. Představme si třeba následující případ:

Pracovník na závodě dostane jednorázovou odměnu, ze které se platí daň ve výši 50,— Kčs, nepřesahuje-li výše této odměny 450 korun, a jinak daň ve výši 100 Kčs.

Odměnu, kterou pracovník dostal, zapíšeme reálnou proměnnou:

real ODMENA;

Potom v případě že $ODMENA \leq 450$, chceme provést příkaz:

$ODMENA := ODMENA - 50;$

a v opačném případě — tj. když $ODMENA > 450$ — chceme provést příkaz:

$ODMENA := ODMENA - 100;$

K zapsání takové situace použijeme tak zvaný *podmíněný příkaz*. K jeho zápisu používáme tři vyznačená slova: **if** (*jestliže*), **then** (*pak*) a **else** (*jinak*):

if $ODMENA \leq 450$ **then**

$ODMENA := ODMENA - 50$

else

$ODMENA := ODMENA - 100;$

Což můžeme zapsat též (rozmyslete si!):

if $ODMENA > 450$ **then**

$ODMENA := ODMENA - 100$

else

$ODMENA := ODMENA - 50;$

Obecný tvar podmíněného příkazu vypadá tedy následovně:

if $\boxed{\text{logický výraz}}$ **then** $\boxed{\text{příkaz 1}}$ **else** $\boxed{\text{příkaz 2}}$;

a znamená, že je-li hodnota logického výrazu uvedeného mezi vyhraženými slovy **if** a **then** rovna **true**, provede se *příkaz 1*, je-li rovna **false**, provede se *příkaz 2*.

V některých případech potřebujeme podmíněný příkaz v poněkud jednodušší podobě: například v situaci, kdy se z odměny přesahující 450 korun platí daň 100,— Kčs jako v předcházejícím příkladu, ale z odměny, která 450,— Kčs nepřesahuje, se neplatí daň žádná.

Pak v případě, že $ODMENA > 450$, chceme provést příkaz :

$ODMENA := ODMENA - 100;$

ale v opačném případě nechceme provést nic.

K zápisu takovéto situace použijeme tak zvaný *neúplný podmíněný příkaz* :

if $ODMENA > 450$ **then**

$ODMENA := ODMENA - 100;$

se zřejmým významem.

V přiřazovacích a podmíněných příkazech nemusí vystupovat jenom samotné proměnné základních typů, ale mohou zde vystupovat i *atributy referenčních proměnných*, tj. proměnných kvalifikovaných pro nějakou třídu.

Uvažujeme například třídu, jejíž datové údaje budou zjednodušeně popisovat pracovníky nějakého závodu:

class PRACOVNIK;

<**text** JMENO, ADRESA;

real MZDA, PENIZE;

character CECH>;

kde reálný atribut označený identifikátorem MZDA budeme používat k označení měsíční mzdy pracovníka a podobně reálný atribut PENIZE k označení, kolik má který pracovník u sebe peněz.

Uvažujeme dále proměnnou kvalifikovanou pro tuto třídu:

ref (PRACOVNIK) NOVAK;

a předpokládejme, že tato nabývá konkrétní hodnoty.

Situaci, kdy pracovník, který je hodnotou proměnné NOVAK, dostane měsíční zálohu ve výši třetiny své pravidelné mzdy, pak zapíšeme:

$NOVAK.PENIZE := NOVAK.PENIZE + NOVAK.MZDA/3;$

Nyní uvažujeme ještě dalšího pracovníka, který je hodnotou jiné proměnné:

ref (PRACOVNIK) JONAS;

Pak situaci, kdy pracovník JONAS dá pracovníku NOVAK 10 korun, zapíšeme dvojicí příkazů (rozmyslete si!!):

$NOVAK.PENIZE := NOVAK.PENIZE + 10;$

$JONAS.PENIZE := JONAS.PENIZE - 10;$

Uvažujme dále složitější případ, kdy pracovník JONAS (tj. pracovník popsaný konkrétní hodnotou proměnné JONAS) je dlužen pracovníku NOVAK větší částku — v případě, že má u sebe více než 1000,— Kčs mu vrátí 200 korun a jinak jen 100,— Kčs.

Tedy v případě, že logický výraz

$\text{JONAS.PENIZE} > 1000$

má hodnotu **true**, chceme provést dvojici příkazů:

$\text{NOVAK.PENIZE} := \text{NOVAK.PENIZE} + 200;$

$\text{JONAS.PENIZE} := \text{JONAS.PENIZE} - 200;$

a v opačném případě jinou dvojici příkazů:

$\text{NOVAK.PENIZE} := \text{NOVAK.PENIZE} + 100;$

f $\text{JONAS.PENIZE} := \text{JONAS.PENIZE} - 100;$

Použít k takovému účelu přímo podmíněný příkaz nemůžeme, neboť hodnotou logického výrazu máme vázáno provedení více jak jednoho příkazu. Potřebovali bychom tedy nějaký prostředek zápisu, odpovídající algebraickým závorkám. Skutečně máme tak zvané *programové závorky* psané pomocí vyhrazených slov **begin** a **end**.

S jejich pomocí můžeme již podmíněný příkaz použít a celou situaci zapsat:

if $\text{JONAS.PENIZE} > 1000$ **then**

begin

$\text{NOVAK.PENIZE} := \text{NOVAK.PENIZE} + 200;$

$\text{JONAS.PENIZE} := \text{JONAS.PENIZE} - 200$

end

else

begin

$\text{NOVAK.PENIZE} := \text{NOVAK.PENIZE} + 100;$

$\text{JONAS.PENIZE} := \text{JONAS.PENIZE} - 100$

end;

(před vyhrazeným slovem **end** můžeme oddělovací středník za posledním „uzávorkovaným“ příkazem vypustit).

Skupině příkazů uzavřených v programových závorkách **begin** a **end** říkáme *složený příkaz*.

Uvedené druhy příkazů — *přiřazovací*, *podmíněný* a *složený* — nejsou zdaleka všechny. O dalších možnostech a zejména o příkazech s referenčními proměnnými si řekneme něco v příštím článku.

Literatura :

[1] Fejtková, Malík: Datové typy, Rozhledy MF, tento ročník, č. 1

[2] Fejtková, Malík: Třídy, tamtéž č. 2

[3] Fejtková, Malík: Pointry, tamtéž č. 3

[4] Fejtková, Malík: Další úvahy o datových typech, tamtéž č. 5

Mnohočleny s větším počtem prvočíselných hodnot

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK

V nových učebnicích pro gymnázia (sešit 1, čl. 2,5) se pracuje s trojčlenem $T(k) = k^2 + k + 11$, který pro všechna celá čísla $k = -5, -4, -3, \dots, 4, 5$ nabývá prvočíselných hodnot. Dokazuje se obecná hypotéza, že hodnoty trojčlenu pro všechna celočíselná k jsou lichá čísla; vyvrací se obecná hypotéza, že hodnoty trojčlenu jsou prvočísla pro všechna celočíselná k . Vyvrácení se dosahuje protipříkladem pro $k = 11$; $T(11) = 143$, což je složené číslo.

Zájem matematiků o mnohočleny s prvočíselnými hodnotami je doložen už v polovině 18. století. *Christian Goldbach* uveřejnil v r. 1752 poznatek, že žádný mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficienty nemůže nabývat výlučně prvočíselných hodnot.

Platnost této věty se zdála zřejmá na první pohled; každý mnohočlen s celočíselnými koeficienty

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

nabývá při $a_0 = 0$ hodnot dělitelných kteroukoliv nenulovou hodnotou proměnné x , při $a_0 \neq 0$ nabývá aspoň pro $x = a_0$ hodnoty dělitelné číslem a_0 , tj.

$$a_0 \text{ dělí } P(a_0).$$

Avšak jen pro $a_0 \neq 1, a_0 \neq -1$ je tím prokázáno, že $P(a_0)$ má dělitele různého od 1, $-1, P(a_0), -P(a_0)$, tj. je číslem složeným. Zbývalo podat důkaz i pro $|a_0| = 1$; Goldbach bez důkazu poznamenal, že při prvočíselné hodnotě $P(r)$

$$x = P(r) \text{ dělí } P(x + r).$$

Důkaz věty snadno pochopí ti z vás, kteří znají binomickou větu. Postačí však, uvědomíte-li si, že

$$\left. \begin{aligned} x + r &= x \cdot 1 + r \\ (x + r)^2 &= x(x + 2r) + r^2 \\ (x + r)^3 &= x(x^2 + 3xr + 3r^2) + r^3 \end{aligned} \right\} (x + r)^n = x \cdot q_n + r^n.$$

Libovolnou n -tou mocninu dvojčlenu $x + r$ lze vyjádřit jako součet nějakého celočíselného násobku x a n -té mocniny čísla r . Totéž platí o hodnotách mnohočlenu $P(x)$, dosadíme-li $x + r$ na místo x :

$$P(x + r) = a_n(x + r)^n + a_{n-1}(x + r)^{n-1} + \dots + a_1(x + r) + a_0,$$

$$P(x + r) = a_n \cdot (x \cdot q_n + r^n) + a_{n-1}(x \cdot q_{n-1} + r^{n-1}) + \dots + \\ + a_1(x \cdot q_1 + r) + a_0 = x(a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \dots + a_1 q_1) + \\ + (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0).$$

Druhá závorka je hodnotou $P(r)$; zvolíme-li také $x = P(r)$, dostáváme

$$P(x + r) = P(r) \cdot (a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \dots + a_1 q_1 + 1),$$

a tedy $P(r)$ dělí $P(x + r)$.

Dokončeme nyní úvahu o mnohočlenech $P(x)$: Každý takový mnohočlen nabývá i hodnot různých od $-1, 0, 1$; je-li $P(r)$ takovou hodnotou, pak $P[P(r) + r]$ je dělitelné číslem $P(r)$, a tedy číslo složené. Každý mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými hodnotami nabývá též hodnot, které jsou složenými čísly.

L. Euler dokázal r. 1762 obecnější větu než vyslovil *Goldbach*: Pro každá dvě přirozená čísla k, r a mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficienty platí, že $P(r)$ dělí $P[k \cdot P(r) + r]$.

Důkaz této věty můžete získat drobnou úpravou závěrečné části předešlého důkazu. Doplňme tyto úvahy jedním příkladem.

Příklad. Zvolme mnohočlen $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ s hodnotou $P(2) = 5$ při $r = 2$; dále zkoumejme $P(k \cdot 5 + 2)$ při $k = 1, 2, 3, 4$: $P(7) = 230, P(12) = 1355, P(17) = 4130, P(22) = 9305$.

Dostáváme vesměs čísla dělitelná pěti, tj. hodnotou $P(2)$.

Eulerův výsledek pohřbil naděje, že se podaří posloupnost prvočísel vyjádřit vzorcem pro n -tý člen ve tvaru mnohočlenu. Zájem matematiků se zaměřil na hledání mnohočlenů, které mají vysoký počet prvočíselných hodnot, pokud možno za sebou následujících. *L. Euler* uvedl do r. 1772 příklady:

$$x^2 - x + 41 \text{ s prvočíselnými hodnotami pro } x = 1, 2, \dots, 40,$$

$$x^2 + x + 17 \text{ s prvočíselnými hodnotami pro } x = 0, 1, \dots, 15,$$

$$x^2 + x + 41 \text{ s prvočíselnými hodnotami pro } x = 0, 1, \dots, 39.$$

A. M. Legendre uveřejnil v r. 1798 řadu dalších kvadratických výrazů s prvočíselnými hodnotami, např. $2x^2 + 29$ pro $x = 0, 1, \dots, 28$. Později *G. Oltramare* (1857) uvedl parametrické systémy

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}(163 + a^2), \quad x^2 + (2b + 1) \cdot x + b^2 + b + 41$$

jako vhodné pro získání řady trojčlenů s požadovanými vlastnostmi. (Napište si některé z nich a určete rozmezí hodnot proměnné x , pro které nabývají jen prvočíselných hodnot.)

Trojčlen $x^2 + x + 41$ se stal zajímavý tím, že v řadě trojčlenů $x^2 + x + a$ s prvočíselnými hodnotami pro $x = 0, 1, \dots, a - 2$ se začal

jevit jako vůbec poslední. Trojčleny $x^2 + x + 5$, $x^2 + x + 7$, $x^2 + x + 11$, $x^2 + x + 17$ mají popsanou vlastnost; najdete ještě další s absolutním členem menším než 41? V r. 1879 ukázal *H. Le Lasseur*, že žádný mnohočlen typu $x^2 + x + a$ nedává při $41 < a < 54\,000$ prvočíselné hodnoty pro $x = 0, 1, \dots, a - 2$. Dnes je známo, že takové hodnoty nedává ani žádné $a < 125 \cdot 10^7$ a že mezi čísly většími existuje nejvýše jedno s požadovanou vlastností.

E. B. Escott (1899) využil toho, že trojčlen $x^2 + x + 41$ má prvočíselné hodnoty i pro $x = -1, -2, \dots, -40$; nahradil x dvojčlenem $x - 40$ a získal trojčlen $x^2 - 79x + 1601$ s prvočíselnými hodnotami pro $x = 0, 1, \dots, 79$. Získal tím v té době „rekordní“ trojčlen s 80 za sebou následujícími prvočíselnými hodnotami. (Jde o 80 různých prvočísel?)

Mezi dalšími kvadratickými trojčleny s mnoha prvočíselnými hodnotami za sebou se uvádějí $2x^2 - 2x + 19$, $3x^2 - 3x + 23$, $8x^2 - 326x + 2659$, $9x^2 - 231x + 1523$. Chcete prozkoumat, kolika prvočíselných hodnot nabývají?

Z mnohočlenů vyšších stupňů lze uvést $x^3 + x^2 + 17$ s prvočíselnými hodnotami pro $x = -14, -13, \dots, 10$. Také zde lze substitucí $x - 10$ místo x získat mnohočlen, který dává prvočíselné hodnoty pro $x = 0, 1, \dots, 24$.

Máte-li k dispozici tabulku prvočísel a dost času, případně kalkulátor, můžete se pokusit objevit vlastní mnohočlen s velkým počtem za sebou následujících prvočíselných hodnot. Nestaňte se ale „otroky vášně“, studujte raději matematiku širěji.

Speciální křivky třetího stupně

STANISLAV HORÁK, Praha

Nulový bod funkce $f(x)$ je takové číslo a , pro něž $f(a) = 0$. V tomto článku budeme hledat takové algebraické funkce třetího stupně

$$f(x) = x(x - a)(x - b),$$

které mají nejen své nulové body vyjádřené celými čísly, ale aby také funkce $f'(x)$ měla své nulové body vyjádřené celými čísly. Abychom se nerozptylovali zvláštními případy našeho problému, budeme žádat, aby všechny nulové body byly vesměs různé. — Tento článek je zjednodušený a stručný výťah z článku v *Elemente der Mathematik*, roč. 1963, str. 101.

I. Začneme tedy funkcí

$$f(x) = x(x - a)(x - b), \tag{1}$$

kde $a \neq b$ jsou celá čísla různá od nuly. Její nulové body jsou 0, a , b .

První derivace funkce $f(x)$ je

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a + b)x + ab. \quad (2)$$

Funkce $f'(x)$ má mít celočíselné nulové body. To nás přivádí k rovnici

$$3x^2 - 2(a + b)x + ab = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$x_{1,2} = \frac{1}{3} [(a + b) \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}]. \quad (2')$$

Čísla x_1, x_2 jsou nulové body funkce (2). Aby to byla celá čísla, musí být výraz pod odmocnítkem dvojmocí celého čísla. Toto číslo, zatím neznámé, označíme M . I platí

$$a^2 - ab + b^2 = M^2 \quad (3)$$

Poněvadž žádné z čísel a, b není rovno nule, není ani číslo M rovno nule, neboť pro každá dvě reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$, a tím spíše platí $a^2 + b^2 \geq ab$. Proto můžeme rovnici (3) dělit číslem M^2 . Zároveň položíme

$$\frac{a}{M} = \xi, \quad \frac{b}{M} = \eta. \quad (4)$$

Z rovnice (3) tak dostaneme rovnici

$$\xi^2 - \xi\eta + \eta^2 = 1. \quad (5)$$

Je přirozené, že každé celočíselné řešení rovnice (3) poskytuje právě jedno řešení rovnice (5) čísly racionálními a obráceně, každé racionální řešení rovnice (5) poskytuje celočíselné řešení rovnice (3).

Rovnice (5) představuje v kartézské soustavě souřadnic elipsu, na níž leží racionální bod $A [1; 1]$. Najít racionální řešení rovnice (5) je totéž jako najít racionální body na elipse (5). (O racionálních bodech na některých algebraických křivkách jsem napsal článek v *Rozhledech*, roč. 53, str. 291.)

Bodem A proložíme libovolnou přímkou p :

$$p \equiv \eta = k(\xi - 1) + 1, \quad (6)$$

kde k je libovolné celé číslo.*) Její průsečíky s elipsou (5) jsou určeny rovnicí

$$\xi^2(1 - k + k^2) + \xi(-2k^2 + 3k - 1) + (k^2 - 2k) = 0$$

*) Bodem A prochází též přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou y , která má s křivkou (5) společný racionální bod $[1; 0]$. Tato přímka však není zachycena rovnicí (6), a tudíž ani bod $[1; 0]$ nedostaneme způsobem zde popsaným.

Jeden z průsečíků je právě bod A a druhý je bod $B[\xi_2; \eta_2]$, kde

$$\xi_2 = (k^2 - 2k) \quad (k^2 - k + 1) \quad (7a)$$

a z rovnice (5) je pak

$$\eta_2 = (1 - 2k) \quad (k^2 - k + 1). \quad (7b)$$

Bod B je další racionální bod elipsy (5). Rovnice (7a) a (7b) nám poskytují racionální řešení rovnice (5), a tudíž i celočíselná řešení rovnice (4). Stačí totiž položit

$$\begin{aligned} a &= 3(k^2 - 2k), \\ b &= 3(1 - 2k), \\ M &= 3(k^2 - k + 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Činitele 3 jsme přidali proto, aby x_1, x_2 — viz rovnici (2) — byla celá čísla, jak žádá úloha. Přesvědčte se dosazením z rovnic (8), že skutečně platí $a^2 - ab + b^2 = M^2$.

S rovnicemi (8) provedeme ještě nějaké úpravy. Celé číslo k je v rovnicích (8) parametr. Rovnice (8) jsou vzhledem k tomuto parametru nehomogenní, a proto se velmi často v takovýchto případech — a má to svoje nesporné výhody — zavádějí parametry dva, homogenní. Děje se tak substitucí $k = \frac{u}{v}$. Abychom tyto homogenní parametry mohli zavést, musíme se vrátit k rovnicím (7a) a (7b). Z nich po dosazení dostaneme (index 2 již nepíšeme)

$$\begin{aligned} \xi &= (u^2 - 2uv) \quad (u^2 - uv + v^2), \\ \eta &= (v^2 - 2uv) \quad (u^2 - uv + v^2). \end{aligned}$$

Rovnice (8) nabudou potom tvaru

$$\begin{aligned} a &= 3(u^2 - 2uv), \\ b &= 3(v^2 - 2uv), \\ M &= 3(u^2 - uv + v^2), \end{aligned} \quad (9)$$

kde u, v jsou libovolná celá čísla. Může se však stát, že pro některé hodnoty u, v je $a = 0$ nebo $b = 0$. Avšak to jsme již na začátku našeho článku vyloučili.

II. Zvídavý čtenář se možná zeptá, jak by vypadalo řešení problému, kdyby funkce $f(x)$ byla tvaru

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c), \quad (10)$$

kde a, b, c jsou celá čísla a platí o nich $abc \neq 0$. Zde bychom zavedli novou proměnnou y substitucí

$$x = y + a \text{ (nebo } y = x + b, \text{ nebo } x = y + c).$$

Pod dosazení do rovnice (10)

$$f(y + a) = y(y + a - b)(y + a - c)$$

Tím jsme tento případ převedli na případ známý.

Cvičení

1. Do rovnic (9) dosadte $u = 1$, $v = 3$, vypočítejte a , b a tyto hodnoty dosadte do (1). Přesvědčte se, že získaná funkce 3. stupně má vlastnosti požadované na začátku tohoto článku.
2. Za u , v si zvolte sami nějaká čísla (různá od nuly) a o získané funkci 3. stupně se přesvědčte, že má vlastnosti vyslovené v tomto článku.
3. Polynomická funkce

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

má tři nulové body, vyjádřené celými čísly. Najděte je. Potom sestavte tři různé substituce, které funkci $f(x)$ převedou na funkci bez absolutního členu. Ukažte, dále, že funkce $f'(x)$ nemá nulové body vyjádřené celými čísly.

4. Ukažte, že funkce $f(x) = x(x - 15)(x - 24)$ má vlastnosti požadované v textu článku.
5. Totéž pro funkci $f(x) = x^3 - 6x^2 - 495x + 500$.

Výsledky

1. $a = -15$, $b = 9$; $f(x) = x(x + 15)(x - 9)$; $f'(x) = 3x^2 + 12x - 135$; $x_1 = 5$, $x_2 = -9$.
3. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$. Nulové body jsou 1, 2, -2.
 - a) $x = y + 1$, $F(y) = y(y - 1)(y + 3)$. $F(y) = y^3 + 2y^2 - 3y$. $F'(y) = 0$ nemá racionální kořeny.
 - b) $x = y + 2$, $F(y) = y(y + 1)(y + 4)$.
 - c) $x = y - 2$, $F(y) = y(y - 3)(y - 4)$.
4. $f(x) = x^3 - 39x^2 + 360x$; $f'(x) = 3x^2 - 78x + 360$; $x_1 = 20$, $x_2 = 6$.
5. $f(x) = (x - 1)(x + 20)(x - 25)$. Provedeme substituci $x = y - 20$. $F(y) = y(y - 21)(y - 45) = y^3 - 66y^2 + 945y$. $F(y) = 3y^2 + 132y + 945$; $y_1 = -9$, $y_2 = -35$. Ze substitučního vzorce pak dostaneme $x_1 = y_1 - 20 = -29$, $x_2 = y_2 - 20 = -55$.

Feuerbachova kružnice devíti bodů

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V některých ročnících Rozhledů matematicko-fyzikálních byly otištěny články o kružnici devíti bodů trojúhelníku, které se říká podle německého matematika *Karla Wilhelma Feuerbacha* (žil v letech 1800—1834) též *kružnice Feuerbachova*. Avšak důkaz toho, že příslušných devět bodů leží na téže kružnici, byl v těchto člancích vždy poměrně složitý. Je snad proto zajímavé uvést důkaz, k jehož porozumění stačí vědomosti z geometrie probírané na základní škole.

V libovolném trojúhelníku ABC označme středy jeho stran BC , CA , AB po řadě A_1 , B_1 , C_1 ; paty výšek k těmto stranám označme po řadě A_2 , B_2 , C_2 . Přímký, na nichž leží výšky trojúhelníku ABC , se protínají v témže bodě V , jemuž říkáme *ortocentrum trojúhelníku ABC* . Středů úseček VA , VB , VC označme po řadě A_3 , B_3 , C_3 (obr. 1). Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou AB , je $V = C$ (obr. 2, 3); říkáme, že úsečka VC je nulová. V tomto případě pokládáme bod $V = C$ zároveň za střed nulové úsečky VC . Po těchto úmluvách přistoupíme k výkladu o kružnici devíti bodů trojúhelníku ABC .

Věta 1. Budiž ABC libovolný trojúhelník s ortocentrem V . Potom středy A_1 , B_1 , C_1 jeho stran, paty A_2 , B_2 , C_2 jeho výšek a středy A_3 , B_3 , C_3 úseček AV , BV , CV jsou body téže kružnice.

Důkaz. a) Předpokládejme nejprve, že trojúhelník ABC není pravoúhlý a je různostranný. Potom paty jeho výšek nesplývají se žádným jeho vrcholem ani se středem žádné strany; ortocentrum V neleží na žádné z přímek BC , CA , AB . Proto A_i , B_i , C_i , ($i = 1, 2, 3$) je devět navzájem různých bodů, ať je trojúhelník ostroúhlý (obr. 1) nebo tupoúhlý (obrázek si nakreslí čtenář sám).

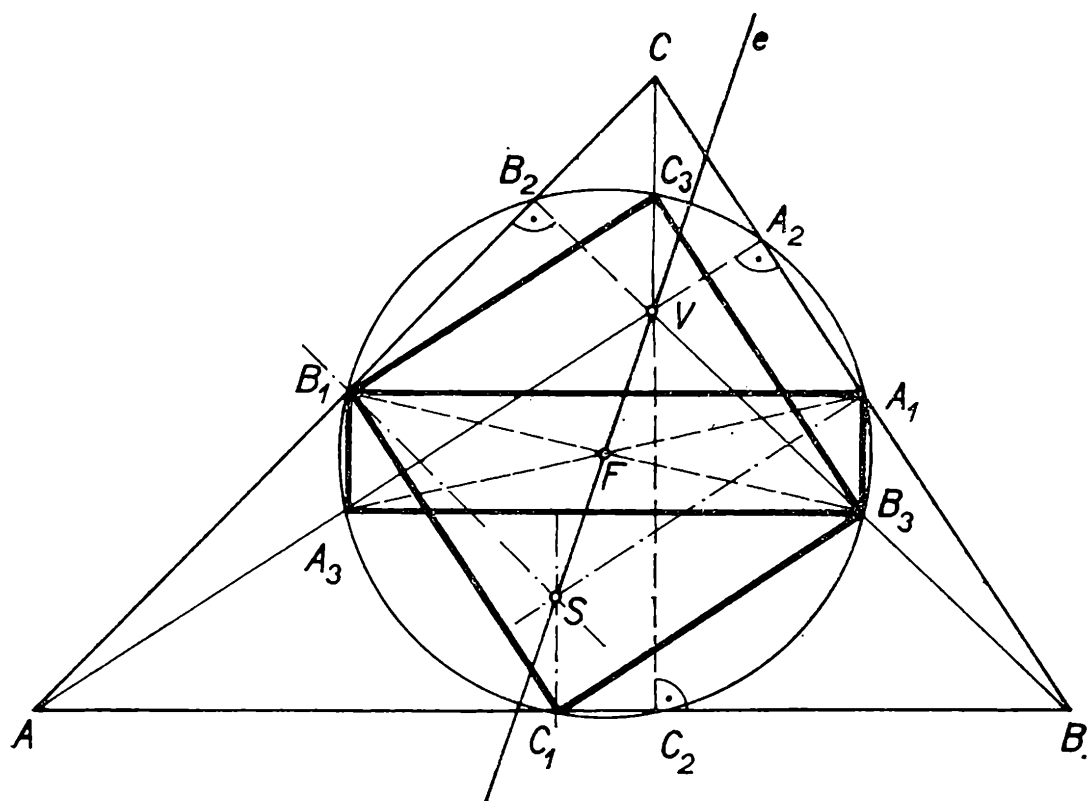
Úsečka A_1B_1 je střední příčkou v trojúhelníku ABC ; proto je přímka A_1B_1 rovnoběžná s přímkou AB . Z trojúhelníku ABV se střední příčkou A_3B_3 plyne, že též přímka A_3B_3 je rovnoběžná s přímkou AB , $A_3B_3 \neq A_1B_1$; je tedy

$$A_1B_1 \parallel A_3B_3 \parallel AB \quad (1)$$

Z trojúhelníků BCV , ACV se středními příčkami A_1B_3 , B_1A_3 plyne, že pro navzájem různé přímky A_1B_3 , B_1A_3 , CV platí

$$A_1B_3 \parallel B_1A_3 \parallel CV \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne, že obrazec $A_1B_1A_3B_3$ je rovnoběžník; protože však je $CV \perp AB$, je to obdélník.



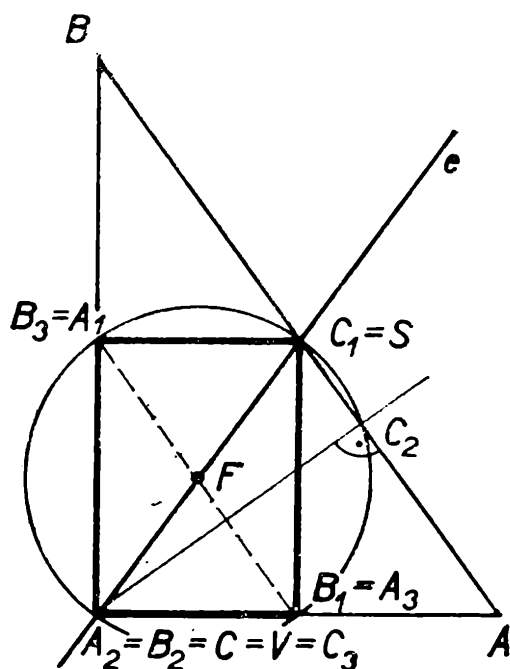
Obr. 1

Zcela obdobně (pomocí trojúhelníků ABC a BCV , resp. ABV a ACV) dokážeme, že také obrazec $C_1B_1C_3B_3$ je obdélník. Tento obdélník má s obdélníkem $A_1B_1A_3B_3$ společnou úhlopříčku B_1B_3 ; oba obdélníky mají tedy též střed F . Kružnice opsaná obdélníku $A_1B_1A_3B_3$ je zároveň opsána obdélníku $C_1B_1C_3B_3$; to znamená, že body $A_1, B_1, A_3, B_3, C_1, C_3$ jsou body téže kružnice. Protože jejím průměrem je úsečka A_1A_3 a úhel $\sphericalangle A_1A_2A_3$ je pravý, je bodem této kružnice i bod A_2 . Zcela obdobně dokážeme, že vrcholy B_2, C_2 pravých úhlů $\sphericalangle B_1B_2B_3, \sphericalangle C_1C_2C_3$ nad průměry B_1B_3, C_1C_3 jsou rovněž body sestrojené kružnice.

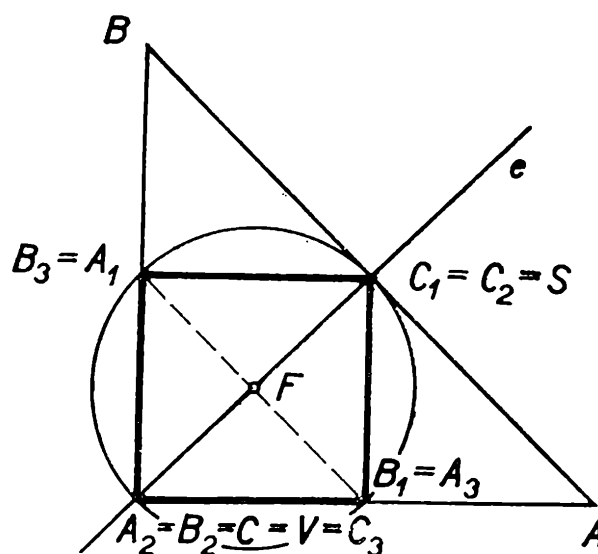
b) Není-li trojúhelník ABC pravoúhlý, ale je rovnoramenný se základnou AB , je $C_1 = C_2$; jinak důkaz probíhá stejně jako v a). Z devíti bodů A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$) je navzájem různých jenom osm; přímka AB je tečnou Feuerbachovy kružnice v jejím bodě $C_1 = C_2$.

c) Je-li trojúhelník ABC rovnostranný, je $A_1 = A_2, B_1 = B_2, C_1 = C_2$, ale důkaz je jinak též jako v a). Z devíti bodů A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$) je navzájem různých jenom šest a přímky AB, BC, CA jsou tečnami Feuerbachovy kružnice v jejích bodech $C_1 = C_2, A_1 = A_2, B_1 = B_2$. Tato kružnice splývá s kružnicí, která je trojúhelníku ABC vepsána.

d) Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou AB , je $A_2 = B_2 = C = V = C_3, A_1 = B_3, B_1 = A_3$ (obr. 2, 3). Místo obdélníku $A_1B_1A_3B_3$ vznikne úsečka A_1B_1 splývající s úsečkou B_3A_3 . V tomto případě je Feuerbachova kružnice opsána obdélníku (resp. čtverci) $C_1B_1C_3B_3$; jejím bo-



Obr. 2



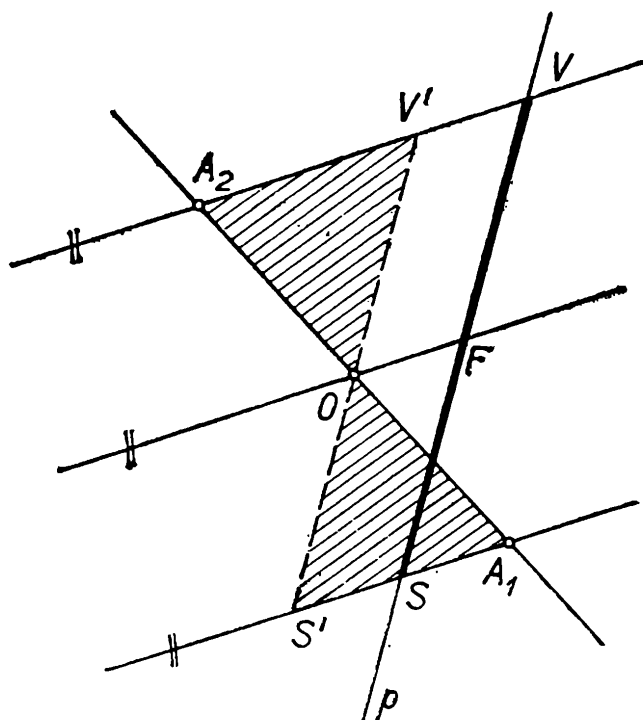
Obr. 3

dem je též bod C_2 . Je-li trojúhelník ABC různoustranný, je $C_1 \neq C_2$ (obr. 2), takže z devíti bodů A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$) je navzájem různých jenom pět. Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný, je $C_2 = C_1$ (obr. 3), takže z devíti bodů A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$) jsou navzájem různé jenom čtyři; přímka AB je tečnou Feuerbachovy kružnice v bodě $C_1 = C_2$.

Než přistoupíme k dalšímu výkladu, dokážeme pomocnou větou o rovnoběžném průmětu středu úsečky. Na obr. 4 je narysována úsečka A_1A_2 , její vnitřní bod O a přímka p obsahující tři různé body S, V, F . Jsou-li přímky A_1S, A_2V, OF rovnoběžné (jako na obr. 4), pak říkáme, že body S, V, F jsou rovnoběžnými průměty bodů A_1, A_2, O na přímku p . Zároveň je zřejmé, že průmět F vnitřního bodu O úsečky A_1A_2 je vnitřním bodem úsečky SV .

Pomocná věta. Nechť body S, V jsou po řadě rovnoběžnými průměty krajních bodů A_1, A_2 úsečky A_1A_2 . Potom rovnoběžný průmět F středu O úsečky A_1A_2 je středem úsečky SV .

Důkaz. Jsou-li přímky A_1A_2, SV rovnoběžné, je obrazec A_1SVA_2 rovnoběžník se střední příčkou OF ; proto jsou úsečky FS, FV shodné. Nejsou-li přímky A_1A_2, SV rovnoběžné, vedeme bodem O rovnoběžku s přímkou SV a sestrojíme její průsečíky S', V' s přímkami A_1S, A_2V (obr. 4). Podle předpokladu jsou úsečky OA_1, OA_2 shodné. Avšak také vrcholové úhly $\sphericalangle A_1OS', \sphericalangle A_2OV'$ jsou shodné a rovněž střídavé úhly $\sphericalangle OA_1S', \sphericalangle OA_2V'$ jsou shodné. Proto je $\triangle OA_1S' \cong \triangle OA_2V'$ (*usu*); z toho plyne, že je $OS' = OV'$. Z rovnoběžníku $S'SVV'$ se střední příčkou OF pak plyne, že je též $FS = FV$.



Obr. 4

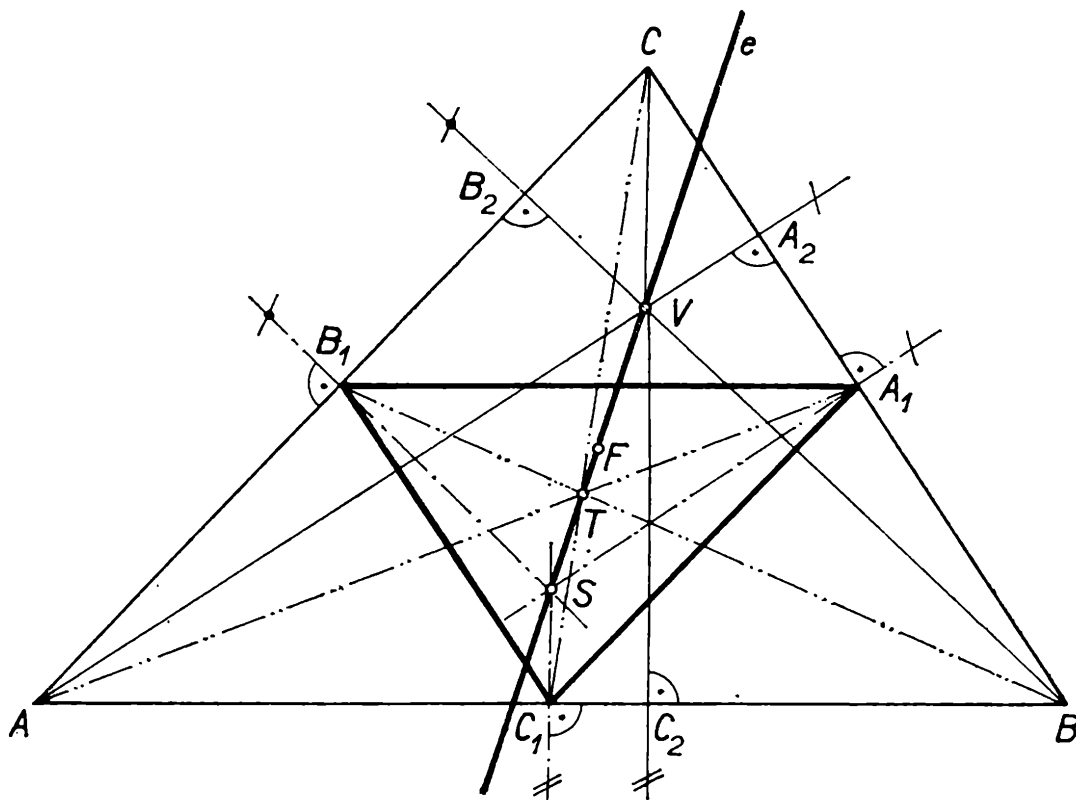
Věta 2. Nechť bod S je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC a bod V je ortocentrem téhož trojúhelníku.

Potom platí:

- Střed F Feuerbachovy kružnice je středem úsečky SV ;
- poloměr této kružnice je roven polovině poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Důkaz. a) Je-li trojúhelník ABC různostranný (obr. 5) nebo rovnoramenný se základnou AB (obr. 3, kde trojúhelník ABC je zároveň pravoúhlý), je $A_1 \neq A_2$, $B_1 \neq B_2$ a přímka SV je rovnoběžná s rovnoběžkami A_1S , AA_2 i s rovnoběžkami B_1S , BB_2 . Protože Feuerbachova kružnice prochází body A_1 , A_2 , má střed na ose úsečky A_1A_2 ; obdobně má střed na ose úsečky B_1B_2 . Osy těchto úseček A_1A_2 , B_1B_2 se tedy protínají ve středu F Feuerbachovy kružnice. Avšak osa úsečky A_1A_2 prochází jejím středem a je rovnoběžná s přímkami A_1S , AA_2 (které jsou kolmé na přímku A_1A_2); podle pomocné věty protíná přímku SV v jejím středu. Totéž však platí podle téže pomocné věty i pro osu úsečky B_1B_2 . To znamená, že průsečík F os úseček A_1A_2 , B_1B_2 je středem úsečky SV . Je-li trojúhelník ABC rovnostranný, je $S = V = F$, takže bod F je středem nulové úsečky SV .

b) Feuerbachova kružnice devíti bodů je kružnicí opsanou trojúhelníku $A_1B_1C_1$ (obr. 1, 2, 3). Strany trojúhelníku $A_1B_1C_1$ jsou středními příčkami trojúhelníku ABC ; proto každá z nich je rovna polovině té strany trojúhelníku ABC , s níž je rovnoběžná. Trojúhelníky ABC , $A_1B_1C_1$



Obr. 5

jsou tedy podobné v poměru podobnosti 2 : 1; proto poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC je dvakrát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

Nakonec dokážeme ještě jednu větu, která se týká též Feuerbachovy kružnice devíti bodů.

Věta 3. Není-li trojúhelník ABC rovnostranný, pak střed S kružnice jemu opsané, těžiště T , ortocentrum V a střed F Feuerbachovy kružnice jsou čtyři navzájem různé body ležící v téže přímce e v pořadí S, T, F, V tak, že je

$$|ST| = \frac{1}{3} |SV|, \quad |TF| = \frac{1}{4} |TV|.$$

Důkaz. Víme, že těžnice AA_1, BB_1, CC_1 trojúhelníku ABC procházejí tímž bodem T , který leží uvnitř každé těžnice (obr. 5); přitom platí:

$$\frac{|A_1T|}{|AT|} = \frac{|B_1T|}{|BT|} = \frac{|C_1T|}{|CT|} = \frac{1}{2}.$$

Proto stejnolehlost se středem T a koeficientem $k = -\frac{1}{2}$ převádí body A, B, C po řadě do bodů A_1, B_1, C_1 a výšky AA_2, BB_2, CC_2 do os stran

BC , CA , AB ; je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB , splyne těžnice CC_1 s výškou k základně AB a s osou strany AB v jedinou přímku. Uvedenou stejnolehlostí přejde tedy ortocentrum V do středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC . Střed stejnolehlosti T leží tedy mezi body V , S , a to tak, že je $|TS| : |TV| = 1 : 2$; je tedy

$$|ST| = \frac{1}{3} |SV|.$$

Podle věty 2 je střed F Feuerbachovy kružnice středem úsečky VS ; proto leží mezi body T , V . Body S , V , T , F jsou tedy navzájem různé body téže přímky e . Tato přímka je narysována na obr. 1, 2, 3, 5; na obr. 1, 2, 3 není však vyznačeno těžiště T trojúhelníku ABC .

Protože bod T leží uvnitř úsečky SF , je $TF = SF - ST$. Avšak $|SF| = \frac{1}{2} |SV|$, $|ST| = \frac{1}{3} |SV|$, takže je

$$|TF| = \frac{1}{6} |SV|.$$

Protože $|SV| = \frac{3}{2} |TV|$, je

$$|TF| = \frac{1}{4} |TV|.$$

Přímka e , která obsahuje body S , T , F , V , se nazývá *přímkou Eulerovou*. Je pojmenována po vynikajícím matematiku *Leonhardu Eulerovi*, který žil v letech 1707 až 1783. Narodil se v Basileji (ve Švýcarsku), avšak jako dospělý muž žil většinou v cizině, nejprve jako člen pruské akademie v Berlíně (1741 až 1766) a potom jako člen akademie v Petrohradě (1766 až 1783). Za jeho života vyšlo 530 jím napsaných knih a pojednání; další byly vydány po jeho smrti. Dnes se počet jeho děl udává číslem 886.

Feuerbachova kružnice devíti bodů má ještě jiné vlastnosti, než jsme uvedli. Tak např. si všimněte, že v ostroúhlém trojúhelníku ABC na obr. 1, v němž je $AB > AC > BC$, je kružnice devíti bodů rozdělena patami A_2 , B_2 , C_2 výšek na tři oblouky, které mají tuto vlastnost: Uvnitř kratšího oblouku B_2A_2 leží jeden bod Feuerbachovy kružnice (C_3), uvnitř sousedního oblouku A_2C_2 leží její dva body (A_1 , B_3) a uvnitř zbývajícího oblouku C_2B_2 leží její tři body (C_1 , A_3 , B_1). Týž výsledek dostaneme, je-li trojúhelník ABC tupoúhlý a je-li opět $AB > AC > BC$.

Euler dokázal, že kružnice devíti bodů trojúhelníku ABC se dotýká kružnice tomuto trojúhelníku vepsané a všech tří kružnic, které jsou tomuto trojúhelníku připsány (tj. dotýkají se přímek AB , BC , CA a leží

vně trojúhelníku ABC). Důkaz této vlastnosti není však tak jednoduchý, jako byly důkazy vět 1 až 3. Pro pravoúhlý trojúhelník ABC byla tato vlastnost Feuerbachovy kružnice dokázána (metodou souřadnic v článku *R. Cihláře* otištěném v Rozhledech matematicko-fyzikálních na str. 49 až 53 druhého čísla ročníku 41 (1962–63).

fyzika

Padesát let Geiger-Müllerova detektoru

RNDr. RUDOLF TULAK, Vysoká vojenská velitelská-technická škola, Martin

Fyzikové mají v dnešní době celou škálu různých přístrojů, které jim umožňují „vidět“ a „měřit“ jednotlivé ionizující částice nebo fotony. Tuto okolnost si vyžádala sama praxe. Zkoumání jaderných jevů v laboratoři, údržba a kontrola atomových zařízení, hledání radioaktivních minerálů, kontrola ochrany pracovníků i lékařská praxe vyžadují zvláštní přístroje, které přeměňují primární jev, nezjistitelný našimi smysly, v jev sekundární, který je již buď viditelný nebo měřitelný.

Tak je možno:

- vidět dráhy částice, které se projevují jako řetěz mlžných kapek ve Wilsonově komoře nebo jako sled bublin v tekutém vodíku či propanu;
- měřit intenzitu záření pomocí ionizační komory;
- měřit počet částic vyslaných radioaktivním zdrojem pomocí Geiger-Müllerova počítače;
- měřit počet a energii vyslaných částic proporcionálním nebo scintilačním počítačem.

Mezi jednotlivými detektory, které umožňují „vidění“ nebo měření intenzity, případně počtu částic, zaujímal *Geiger-Müllerův počítač* do nedávna popřední místo. *A. Einstein* ho nazval „nejcitlivějším orgánem lidstva“, s úspěchem ho používala ve své pařížské laboratoři již objevitelka radioaktivity *M. Curieová-Sklodovská* a dobré služby prokázal i pracovníkům Rutherfordovy laboratoře. Pro svou univerzálnost a spolehlivost se G-M počítače za padesát let tak rozšířily, že se staly jakýmsi reprezentanty skupiny počítačů, které využívají výboje v plynu. Jejich

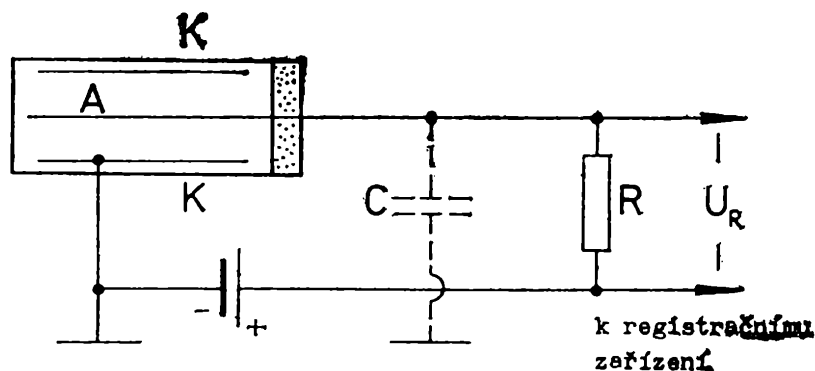
popis se dostal do každé učebnice středoškolské fyziky a vlastní přístroj by neměl chybět v žádné školní sbírce fyzikálních pomůcek.

Jeho autory, jak ostatně vyplývá z názvu, jsou *Hans Geiger a Walter Müller*, kteří v r. 1928 konstruují na základě dřívějších objevů Geigera „Geiger-Müllerovu trubici“, určenou k měření ionizujícího záření.

Hlavní autor, německý fyzik, žák E. Rutherforda, člen pruské AV, *Johannes Wilhelm Hans Geiger* (30. 9. 1882 — 24. 10. 1945), byl profesorem na německých univerzitách (v Kielu, Tübingenu, Berlíně) a na technice v Berlíně. Už r. 1908 určil náboj elektronu na $1,53 \cdot 10^{-19}$ coulombů, napsal práci „Messmethoden auf dem Gebiete der Radioaktivität“ (Měřicí metody v oblasti radioaktivity), avšak jeho jméno vstoupilo do podvědomí vědců, techniků, lékařů, žáků a studentů právě konstrukcí uvedeného detektoru.

Princip G-M počítače

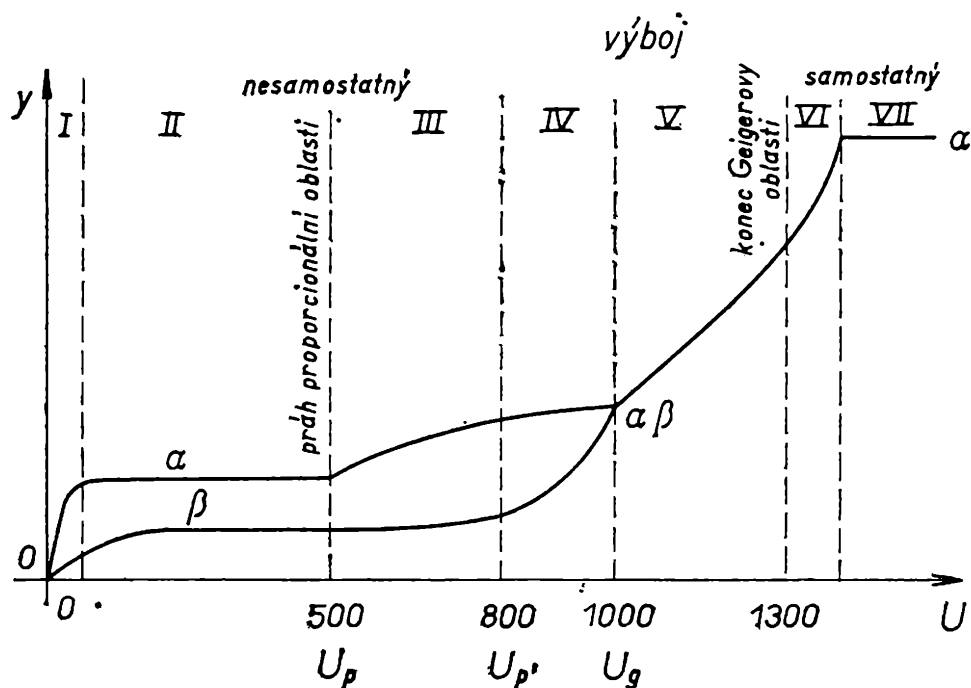
Objasníme stručně princip G-M počítače s důrazem na odlišnosti proti počítačům využívajícím ionizační komory a proti tzv. proporcionálním počítačům. G-M počítač je v podstatě válcový kondenzátor, jehož vnitřní elektroda je tvořena tenkým drátkem a vnější elektrodu tvoří pokovená stěna vzduchotěsně uzavřené skleněné trubice. Vnitřní elektroda (anoda) *A* je od vnější elektrody (katody) *K* dobře izolována. Principiální schéma zapojení počítače je na obr. 1.



Obr. 1

Studujeme-li obecnou závislost ionizačního proudu na napětí přiloženém na elektrodách, dostaneme křivku pro α a β částice (obr. 2). Její stoupání se různě mění s velikostí napětí na elektrodách, a proto rozeznáváme tyto obory:

- I. Obor Ohmova zákona se vyznačuje úměrností ionizačního proudu s napětím, která platí pro poměrně malá napětí. Této oblasti nebylo dosud využito na detekci radioaktivního záření.
- II. Obor nasyceného proudu je charakterizován jistou stálou hodnotou proudu, která je dána množstvím iontů za sekundu v celém objemu



Obr. 2

plynu; znamená to, že všechny vytvořené ionty jsou sbírány na elektrodách. Výšky impulsů částic alfa a beta jsou úměrné jejich energii. Přístroj funguje v tomto druhém úseku použitého napětí jako ionizační komora.

- III.—IV. Obor proporcionalnosti začíná napětím ≈ 500 V, při kterém jsou ionty vzniklé průchodem záření urychleny polem do té míry, že vytvářejí další ionty nárazem na neutrální molekuly. Každý iont urychlený polem vytvoří stejný počet nových iontů, který až do jistého napětí $U \approx 800$ V nezávisí na napětí kondenzátoru. V tomto oboru III je tedy ionizační proud proporcionalní (úměrný) počtu iontů vzniklých přímým působením záření, a tedy úměrný intenzitě záření. Přístroj pracuje v tomto třetím úseku jako proporcionalní počítač. V dalším úseku IV se křivky pro částice alfa a beta přibližují, úměrnost impulsů již nezachovává; je to oblast omezené proporcionalnosti.
- V. Geigerův obor začíná napětím $U \approx 1000$ V a končí napětím $U \approx \approx 1300$ V, při němž již nastává samostatný výboj koronový (oblast VI) a dále výboj jiskrový (oblast VII).

V Geigerově oblasti nastává nový jev. Zatímco v proporcionalní oblasti byl pochod multiplikace lokalizován na blízké okolí vlákna, zde se lavina rozšiřuje podél celého vlákna. (Viz. obr. 3.) Vznikají tak napěťové impulsy stálé velikosti a dosahuje se zesílení 10^6 až 10^8 , což je značnou výhodou G-M počítačů.

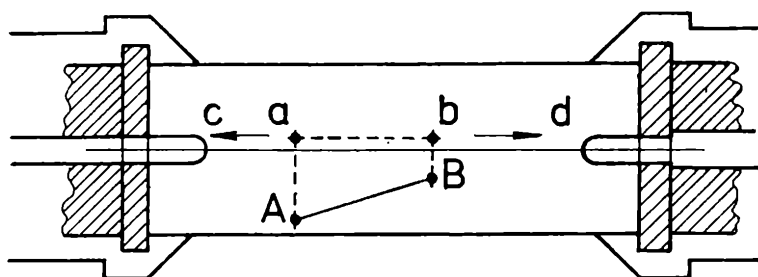
Abychom porozuměli mechanismu rozvoje laviny, budeme sledovat typ tzv. samozhášecího počítače; náplní je jednoatomový plyn, obvykle

argon a organické páry, většinou alkoholové. Obvykle bývá parciální tlak argonu 12 000 Pa a tlak alkoholových par 1300 Pa.

Při průchodu nabité částice G-M počítačem nastávají postupně tyto fáze:

Nejprve se vytvoří určitý počet iontových párů stejně jako v ionizační komoře.

Potom nastane multiplikace primárních iontů jako v případě proporcionálního počítače. Atomy, které se dostanou při nárazové ionizaci do vzbuzeného stavu, se vracejí do počátečního stavu vysíláním ultrafialových paprsků; tyto fotony jsou vysílány na všechny strany a samy rovněž vytvářejí ionty. Avšak jenom ionty vzniklé v okolí vlákna jsou



Obr. 3. Mechanismus výboje: částice vnikne do počítače po dráze AB , primární ionty přiletí k vláknu v úseku ab ; lavina elektronů se šíří současně od bodu a k c a od b k d .

v elektrostatickém poli dostatečně silném, aby mohly přispět k rozvoji laviny. Vláknem „hoří“ směrem k oběma svým koncům; fotony se velmi rychle absorbují a ionizují molekuly; jejich absorpce nastává v alkoholu.

Vznikne tak iontový obal, který se šíří podél vlákna rychlostí asi 10 cm za mikrosekundu. Tento obal obsahuje elektrony i kladné ionty; elektrony zachycené vláknem dávají vznik impulsu, který zaznamenáváme. Kladné těžké ionty se pohybují asi 100krát pomaleji než elektrony a letí směrem k obalové elektrodě počítače.

Jakmile by obal kladných iontů dospěl k vnější elektrodě, mohl by jeden iont argonu narazit na stěnu a vyrazit z ní elektron, který by pak při letu směrem k vláknu vyvolal nový výboj, čemuž se musí zabránit. Když na stěnu narazí molekula alkoholu, nevytvoří se žádné sekundární elektrony.

Setká-li se iont argonu s neutrální molekulou alkoholu, je velmi pravděpodobné, že na argon přistoupí jeden elektron a tím jej zneutralizuje, kdežto z alkoholu se stane molekulární iont. Proces opačného přenosu náboje je energeticky nemožný; a protože iont argonu může prodělat asi 100 000 srážek během své cesty od vlákna ke stěně, je velmi nepravděpodobné, že by dospěl až k elektrodě a způsobil tak dvojný impuls.

Počítače, které fungují uvedeným způsobem, se nazývají *samozhášecí*, protože při právě popsaném mechanismu se výboj neudrží a zhasne. Po skončení impulsu (za dobu τ_p) dochází k registraci další částice až v okamžiku, kdy registrační zařízení dovoluje zaznamenat nový napěťový impuls. Doba k tomu potřebná $\tau_R \approx 10^2 \mu s$ je závislá na citlivosti předzesilovače registračního zařízení. Celková doba, po kterou není registrována žádná jiná částice, tzv. *mrtvá doba zařízení*, je $\tau = \tau_p + \tau_R$. Časové ztráty v elektronických obvodech lze vzhledem k ní zanedbat. Její hodnota bývá (100 až 500) μs .

Tím, že alkoholové molekuly nezpůsobují extrakci elektronů z obalové elektrody, nýbrž se při srážce samy disociují, je směs postupně o alkohol ochuzována a počítač stárne. Životnost běžných počítačů je omezena asi na 10^9 impulsů, což je asi 100 dní trvalého provozu při 100 impulsech za sekundu.

V určitých směsích, které obsahují halogenní prvky, jako bróm, chlór, atd., disociace nenastává, a životnost takových náplní je proto teoreticky neomezená.

Pro správnou funkci počítače G-M je samozřejmě nutné volit vhodné napětí uvnitř Geigerova oboru, kdy je četnost impulsů prakticky nezávislá na napětí.

Během doby bylo vyvinuto mnoho různých typů počítačích trubice G-M. Pro záření γ je vhodná trubice s mosaznou nebo měděnou katodou K a s anodou A z wolframového drátku tloušťky $50 \mu m$. Pro záření β lze užít podobné trubice, jejíž válcová katoda z hliníkového plechu tloušťky 0,1 mm tvoří zároveň plášť trubice. K měření aktivity kapalin je určena ponorná tenkostěnná trubice a různé typy průtokových počítačů. K počítání částic α a β se užívá zvonkových trubice s tenkým slidovým okénkem.

Za padesát let nabyl G-M počítač jakéhosi prioritního místa mezi přístroji jaderné fyziky a dosud se ho používá jak v základním, tak i v aplikovaném výzkumu.

Použitá literatura :

1. Horák, Zd.: Fyzika, Svazek 2, SNTL, Praha 1976
2. Populární encyklopedie, Atomový věk, SNTL, Praha 1976
3. Oravec, J.: Matematika a fyzika ve škole, ročník 6, str. 200.

Z dějin exaktních věd

Matěj Norbert Vaněček

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT Praha

Na pražskou vysokou technickou školu po celou dosavadní dobu jejího trvání byli jmenováni řádnými profesory matematiky vždy vynikající odborníci. Na některé z nich, zejména když pracovali v oboru, který dnes není již atraktivní, příp. se věnovali více pedagogické než vědecké činnosti, se v dnešní době neprávem zapomíná.

Mezi těmito vysokoškolskými učiteli je také *Matěj Norbert Vaněček*, narozený 30. ledna 1859 v Táboře. Vyšel z chudých poměrů, jeho otec byl zedníkem, a jako každý takový chudý student tehdejší doby se na studiích sám vydržoval. Za svého studia na nižším stupni tábořské reálky roznášel telegramy po okolních osadách, někdy i do velmi vzdálené Bechyně. Protože v šestnácti letech vážně onemocněl plicním neduhem, dokončil středoškolská studia až v roce 1880, kdy též začal na podzim studovat na české vysoké technické škole v Praze matematiku a deskriptivní geometrii. V letech 1883/84 se stal suplentem na reálném a vyšším gymnasiu v Havlíčkově Brodě, načež v letech 1884 až 1888 působil jako asistent při I. stoličce matematiky u *prof. PhDr. Gabriela Blažka*. Během této asistentury získal v roce 1886 aprobaci učitelské způsobilosti z matematiky a deskriptivní geometrie pro vyšší reálky s českou vyučovací řečí. V roce 1888 již také poprvé suploval přednášky z matematiky za *prof. Blažka*, který byl tehdy poslancem říšské rady za Staré Město pražské.

Protože vzhledem k systemizaci (malého) počtu míst na vysokých školách neměl možnost za svého asistentského období zůstat na vysoké škole jako vysokoškolský učitel, odešel obdobně jako jeho současníci (např. pozdější profesori *Bedřich Procházka* a *Jan Sobotka*) na střední školu. Tak v letech 1889 až 1893 je suplentem reálky v Hradci Králové, v letech 1893 až 1903 profesorem matematiky a deskriptivní geometrie na nejdříve matiční, pak státní reálce v Českých Budějovicích.

V roce 1903 se vrátil jako profesor na krátce před tím založenou reálku v rodném Táboře (v době jeho studií byla reálka spojena s gymnasiem), ale již v roce 1904 dostal dovolenou z výkonu této funkce proto, aby mohl znovu suplovat přednášky z matematiky I a II v paralelním oddělení pražské techniky.

Habilitoval se 27. ledna 1906 a jako docent ohlásil přednášku *O invariantech* (vždy 2 hodiny v zimním semestru ve škol. roce 1906/07 a 1907/08). V této přednášce se zaměřil na geometrický význam invariantů a kovariantů zvláště v teorii kuželoseček a křivek třetího řádu.

Po odchodu prof. Blažka do výslužby byl 9. února 1908 jmenován řádným profesorem matematiky. V této funkci se stal po zřízení vysokých škol (podle nového organizačního statutu z 1. září 1920 čís. 53.240) a ústavů na Českém vysokém učení technickém přednostou I. ústavu matematiky na Vysoké škole inženýrského stavitelství.

Prof. M. N. Vaněček zemřel 15. září 1922 v Nemyšli u Tábora a je pohřben na malém hřbitově v Celkovicích.

Prof. M. N. Vaněček uveřejnil samostatně 12 vědeckých pojednání, většinou s geometrickou problematikou, společně se svým starším bratrem *Josefem Sylvestrem* pak 14 dalších prací. Publikoval ve Věstníku Královské české společnosti nauk, dále v *Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris*, v *Bulletin de la Société mathématiques de France* a tři práce ve výročních zprávách reálků (Hradec Králové 1890, České Budějovice 1894 a Tábor 1904).

V době svého učitelského působení v Českých Budějovicích vydal čtyřdílnou učebnici *Měřictví pro I. až IV. třídu reálných škol* (Tábor 1901 až 1903). Své poznatky z problematiky výuky na střední škole uplatnil při tehdy připravované reformě střední školy, kdy vznikl také jeho vlastní návrh na podstatu a cíle reformy vůbec. Ve spise *K reformě středoškolského studia* (Praha 1914, 20 stran) vyložil své hlavní zásady reformy. Požadoval při ní rozšíření reálků o osmou třídu, přičemž prvních šest tříd mělo tvořit základ všeobecného vzdělání, poslední dvě pak měly sloužit jako příprava pro další studium na vysokých školách. Přitom podrobně rozvedl učební osnovu jak společných šesti tříd reálné školy, tak i dvouleté přípravy pro matematicko-technické studium. Jeho návrhy předcházely tedy středoškolské reformě uskutečněné až po první světové válce a jak se ukázalo, měly s touto reformou mnoho styčných bodů.

Literatura :

[1] Foltá J.: Dva představitelé „České geometrické školy“. (Ke 40. výročí úmrtí J. S. a M. N. Vaněčků). Zprávy Komise pro dějiny přírodních, lékařských a technických věd, (12) 1962, str. 13–21.

[2] Hruška V.: Matěj Norbert Vaněček. Nekrolog v časopise Naše věda - kritický měsíčník, (IV) 1821/22, str. 199–200.

[3] Hruška V.: Posmrtná vzpomínka na Mat. Norb. Vaněčka. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, (52) 1923, str. 313–319.

Krátká historie českých měr

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., Praha

V současné době probíhá na celém světě zavádění nových měřicích jednotek, někde v širším, jinde v užším měřítku, podle dosavadního vývoje v té které zemi. Tak např. změny v měřicích jednotkách v zemích, v nichž již delší dobu je aplikována metrická soustava, jsou zpravidla relativně malé. Pokud jde o členské země Rady vzájemné hospodářské pomoci, vyskytují se větší komplikace v republice Kuba a v Mongolské lidové republice.

Protože dnešní nejpokrokovější stav v měřicích jednotkách je logicky poplatný historickému vývoji v této oblasti, je vhodné seznámit se alespoň letmo s touto historií.

Vývoj a stav měr a vah v každé době byl velmi úzce spjat se současným stavem hospodářství státu. Měrová historie ukazuje, že každému hospodářskému rozkvětu krátce předcházela éra jakési měrové obrody, jak lze snad nazvat vzestup pořádku v mírách a vahách. I když se lze jen obtížně seznámit s celým měrovým vývojem u nás, od historických počátků českého státu, protože historické (nejčastěji archivální) podklady jsou velmi kusé a někdy i dosti nepřesné a mnohdy dokonce již dnes nesrozumitelné, přesto je možno sestavit krátký přehled starých měr a vah používaných v českých zemích.

Lze pak lépe pochopit postupně rostoucí snahu po unifikaci jednotek (spolu s jejich realizacemi, tedy dnešními etablony), jak dnes míry nazýváme, stále ve větších a větších regionálních celcích, dnes již v měřítku celosvětovém. Tato snaha byla vedena přáním po odstranění velké měrové roztržitosti, jež se na určitém stupni výroby a obchodu projevila jako nepraktická a neekonomická.

Do určité míry vysvětlují názvy starších jednotek (měr a vah) zčásti *technologické postupy* v oblastech, do kterých jednotky příslušely (např. při orbě, setí, sklizni aj.), některé zjednodušené *matematické operace* (např. velikost plochy z omezujícího obvodu aj.), nebo také určitou souvztažnost s *měnou* (u jednotek hmotnosti, tj. vah, resp. u jejich realizací, závaží; tak je tomu u nás se hřivnou, jinde s librou, markou, uncí apod.). Kromě toho přežívá starší měrová technika v rozličných *slovech* a *úslovích*, jejich původní význam si mnohdy již ani neuvědomujeme. Dále uváděné odstavce si nečiní nárok na úplnost, jednak pro omezený rozsah tohoto článku, jednak pro neúplnost podkladové dokumentace, někdy i těžko dostupné nebo v průběhu věků ztracené či zničené.

Z podkladové literatury, z níž se čerpalo a s níž se seznámíme v některém z dalších budoucích příspěvků, uvedeme si zde velmi cenné a obsažné dílo Augustina Sedláčka: *Paměti a doklady o staročeských mírách a vahách*, vydané v roce 1923 v Rozpravách bývalé České akademie věd a umění.

Než přikročíme k názvoslovným zdrojům jednotek (měr), je zapotřebí uvést, že význam pojmu míra je dvojitý. Značí předně jednotku příslušné veličiny, jednak realizaci této jednotky, tam, kde je to ovšem možné. Takové realizace nazýváme dnes etalony. Podobně váhami se dříve rozuměly jak jednotky, tak i jejich realizace, tj. závaží. Dnešní etalon, to co by se dříve mohlo označit za etalonovou míru, nazýval se ve staré češtině zpravidla mírnou mírou. Zde v úvodní části se dotkneme některých dalších termínů.

Tak u některých délkových měr se k naměřené hodnotě přidával jistý *příměrek*, nazývaný zpravidla „*naděl Bůh*“.

Objemové míry se dělily na *míry suté* a *míry duté*, tj. *míry na kapaliny* (*míry „řidkých věcí“*). Zásadní rozdíl byl zpravidla ten, že měřený objem dosahoval u *suté míry* až k samotnému okraji míry (aby se mohla míra *sehnat*), kdežto u *kapalinové míry* zůstával zpravidla *nadměrek*, aby kapalina při odměřování nepřetekla přes okraj. Adjektivum *sutý* značí tedy totéž co *sypaný*, *suté míry* jsou tedy míry pro *sypké látky*. U obilovin se udržoval až do 19. stol. rozdíl mezi *sutou mírou sháněnou* (nebo také *sehnanou*) a *sutou mírou vrchovatou*. Význam druhé míry je jasný, předpokládáme-li, že se do ní sypalo shora, v její podélné ose. *Vrch* (*navršení*) se ponechával např. u ječmene, ovsa, prosa, máku, pohanky aj. Jindy se *shánělo*; nasypaná míra se *sehnala* („seřízla“) přes okraj míry dřevem (nazývaným svého času také „česky“: „Strychholz“) — čímž se odstranila sypká látka, která přesahovala okraj. Podle Hájkovy kroniky se *sháněla* např. pšenice, žito aj. Sedláček uvádí také, že se měřivalo také na „*půl vrchu*“, tj. na polovrchovatou míru.

Při odměřování sypkých látek musel být dodržen určitý postup, protože za nesprávné odměřování se považovalo nejen nedostatečné naplnění míry, ale opačně také *natřesení* a také výše zmíněný *vrch*, o jehož oficiálním připuštění rozhodovala slehnutelnost sypké látky. O *sutých mírách* se zmiňuje Hájek v Měřičském spise, přiloženém ke kronice. Tak např. u čberu, jehož měrná hodnota na Třeboňsku činila u *vrchovatého* asi 79 litru a u *sehnaného* asi 65 litru. *Sutými mírami* se měřily také ryby.

Nesprávnými mírami se rozuměly úmyslně nebo neúmyslně nesprávná měrová zařízení. Byla-li míra, co do své hodnoty menší, nežli měla být podle „své definice“, hovořilo se také o *menší míře*. Pro úmyslně nesprávné měření se používala tzv. *dvojitá míra*, z níž *větší* používal obchodník při nákupu a *menší* při prodeji.

Název *krátká a dlouhá míra*, používaný u některých zahraničních jednotek dodnes, vznikl pravděpodobně při zavádění nových měr, lépe řečeno měr nově definovaných, ale téhož pojmenování. Míra nějakého názvu s hodnotou menší byla *krátká míra*, míra téhož pojmenování s hodnotou větší byla *dlouhá míra*. Tak např. loket byl v Čechách krátký a dlouhý, krátký byl původním loktem pražským, dlouhý byl původně loktem vídeňským. V přechodné době, než se nová míra (v tomto případě vídeňský loket) všeobecně ujala, existovaly míry dvě. Se starou mírou se měřilo, byla-li menší, s tzv. *příměrkem*, jenž činil rozdíl obou měr.

A. Sedláček uvádí, že se ze svého mládí pamatuje na to, že ačkoliv zmíněný pražský loket (jako *krátká míra*) se již delší dobu nesměl používat, znamenali si jeho hodnotu obchodníci vroubkem na vídeňském lokti, který byl jedinou přípustnou mírou tohoto druhu.

Dříve jsme se již zmínili o tom, že *mírnou mírou* se rozuměl dnešní etalon. Mírná míra se někdy nazývala také *kontrolní mírou*. Ta měla dříve, nejčastěji na tržištích, stejnou funkci jako mají dnes např. kontrolní váhy v samoobsluhách nebo velkých prodejnách. Tyto míry sloužily také ke kontrole prodávaného zboží kontrolními orgány (např. rychtářem; vzpomeňme si přitom i na údajné kontroly krále Václava IV. u pekařů). Podle Sedláčka zajišťovali dohled nad správným zachováváním místní míry v Kutné Hoře v 16. století dva konšelé (zvláště k tomu určení), kteří se na „suché dni“ (kdy se začínalo cejchovat) přesvědčovali o správnosti měr.

Takovéto kontrolní mírné míry, pokud byly používány k veřejné kontrole, byly vystaveny tak, aby byly každému přístupné. Někdy ovšem jen při použití přistavených dřevěných schůdků — aby třeba do radniční zdi zazděné míry (šlo-li např. o délku) — byly přístupné jen při trhu, kdy se schůdky přistavovaly. Tak jeden pražský loket byl zazděn na Staroměstské radnici, druhý lze shlédnout dodnes na Novoměstské radnici (na věži, se strany boční ulice). Třetí býval na radnici v Mělníce, kde byl zazděn spolu s vídeňským loktém.

Názvy měr — jednotek se odvozovaly různým způsobem, často podle způsobu jejich realizace. Uvedme si několik příkladů, jak se názvy odvozovaly od

- *částí lidského těla* (prst, dlaň, loket, palec aj.),
- *vzájemné vzdálenosti částí lidského těla* (stopa, sáh, píd aj.),
- *lidské činnosti* (resp. úkonů) kročej, hon aj.)
- *různých přírodních objektů* (zrno, kámen, prut aj.)
- *různých lidských výtvorů* (lahvice, sud, vědro, žejdlík, záhon aj.),
- *objektů, používaných k měření* (provazec a také některé z předchozích),
- *pomístních názvů různých*, regionálně používaných a platných měr a vah (např. týnský, svídnický, žitavský — zde se rozumí loket aj.),

- *různých cizích slov* (i neměrového významu) (např. míle, ahtel, libra, grosband, lot, kár, asi také korec či kořec aj.),
- *násobků či dílů* rozličných měr nebo vah (např. míle, cent, dvoucent, ahtel, půlka, kvarta aj.).

K uvedeným způsobům nazývání tehdejších jednotek mohli bychom přiřadit ještě další způsoby, ne již tak typické anebo dnes již obtížně charakterizovatelné. Jak bylo z uvedených příkladů patrné, odvozování podle různých hledisek se u některých měr a vah překrývá.

Podle starých zápisů je zřejmé, že obvyklé kvantování některých věcí (např. do obalů, shluků, balíků, svazků, dopravních prostředků apod.) stávalo se v některých případech podkladem ke tvorbě míry. Tak jsme se již zmínili o lahvi, sudu, vozu apod. jako o staré míře — často dnes již neurčitelné. Původně zde jistě nebylo zmíněné kvantum míněno jako míra, opakovaným používáním se z něho však míra vyvinula. Ostatně i dnes se často mezi nezasvěcenými osobami zaměňují měřidla (tedy dřívější „ztělesněné míry“) za dávky dané obalem — tak tomu může být příkladně u lahví. I dnes se však hovoří o počtu vagonů, stohů apod. jako o jakési míře. Dříve nebyl často zřetelný rozdíl mezi vlastní mírou a „dávkovým“ kvantem.

Starší, běžněji rozšířená měření se omezovala na poměrně malý počet fyzikálních veličin, které měly význam pro denní život a také pro řemesla a pro obchod. Měření ve dřívější jednoduché výrobě nebylo z celkového měrového pohledu rozhodně dominantní.

Šlo zejména o čas, *geometrické vlastnosti* různých objektů a *hmotnost* (dř. váhu). V menší míře šlo o *teplotu* (spíše teplotní rozdíl), *rychlost* (v námořní dopravě) a *úhel* (zvláště pro měření zeměpisných souřadnic a v astronomii). V dalších pokračováních se zaměříme na jednotky těch veličin, u nichž bylo již odpradáвна obecným zájmem zabezpečovat jednotnost a přesnost měr. Jsou to jednotky délky, plošného obsahu (velikosti plochy), objemu a hmotnosti.

Nejmladším čtenářům

Tři úlohy o mincích z doby Marie Terezie

Podle knihy Bedřicha Spáčila: *Česká měna od dávné minulosti k dnešku* (Orbis, Praha 1974) byla soustava mincí v tereziánské době velmi složitá. Razily se tolary, zlaté (zlatky), půltolary a čtvrttolary. Tolar měl 120 krejcarů a zlatka polovinu, tj. 60 krejcarů. Další mince byly: dvacetikrejcare, sedmnáctikrejcare, desetikrejcare, sedmikrejcare, tříkrejcare (malé groše), půlkrejcare (trojníky), grešle (tj. třetiny krejcaru) a vídeňské peníze (feníky, tj. čtvrtiny krejcaru). Všechny mince byly původně stříbrné. Nejdrobnější z nich byly obsahem stříbra poněkud nadhodnoceny, a proto se pašovaly do ciziny. Roku 1760 se tedy začaly mince menší než malý groš razit z mědi a soustava byla doplněna o krejcar. Drobné mince se však staly druhem tzv. *kreditních peněz*, neboť jejich hodnota, daná hmotností použité mědi, byla menší než hodnota na nich vyznačená.

Nadpis tohoto článku ovšem nesliboval pojednání o mincích s portrétem císařovny, ale úlohy. Zde jsou:

1. Ve známé písni se zpívá: „Sekera je za dva zlaté a topůrko za tolar.“ Vyjádřete cenu kompletní sekery v malých groších. [80]

2. Naleznete nejmenší celou částku zlatých, kterou bylo možno vyplatit celým počtem každého z uvedených druhů mincí. [238]

3. Zjistěte, kolika způsoby bylo možno rozměnit tolar na dvacetikrejcare, sedmnáctikrejcare a malé groše. [11]

Jiří Mída

Ze zahraničních časopisů

Tato rubrika obsahuje ve 3. čísle tohoto ročníku *Rozhledů* jako první úlohu rovnici

$$\sqrt[3]{24+x} + \sqrt[3]{12-x} = 6, \quad (1)$$

přičemž ve výsledcích se uvádí, že její kořen je číslo 3.

Čtenář *Jindřich Šilhán* ze Ždánic na okrese Hodonín upozornil redakci, že řešením rovnice (1) jsou také čísla -24 a -88 . Pro číslo -24 se o tom

snadno přesvědčíme zkouškou. U čísla -88 se setkáváme se zajímavým paradoxem. Reálné číslo -88 je kořenem rovnice (1) v oboru komplexních čísel, avšak není jejím řešením v oboru reálných čísel. Příčinou jsou rozdílné definice odmocniny v obou oborech.

V oboru reálných čísel se symbolu $\sqrt[n]{a}$, kde n je přirozené číslo, užívá jen v případě, že a je nezáporné číslo. Označuje se jím nezáporné číslo x , pro které platí

$$x^n - a = 0. \quad (2)$$

V oboru komplexních čísel se n -tou odmocninou z komplexního čísla a , kde n je přirozené číslo, rozumí každý kořen rovnice (2).

Symbolu $\sqrt[3]{24 - 88}$, tj. $\sqrt[3]{-64}$, lze tedy dát význam jedině v oboru komplexních čísel. Ovšem ani zde není situace tak jednoduchá, neboť vedle čísla -4 jsou třetími odmocninami z čísla -64 také čísla

$$2(1 + i\sqrt{3}) \quad \text{a} \quad 2(1 - i\sqrt{3}).$$

Na závěr této poznámky si ještě stručně popíšme postup při řešení rovnice (1). Dvojí umocňování je dost pracné. Lepší je použít substituce. Např. lze zavést novou neznámou y rovností

$$y = \sqrt{12 - x} \quad (3)$$

Po snadné úpravě a umocnění dospějeme k rovnici

$$(6 + y)(6 - y) = (6 - y)^3,$$

která má kořeny 3, 6 a 10. Z rovnosti (3) nalezneme, že příslušná čísla x jsou 3, -24 a -88 . Pak ovšem musíme provést zkoušku, zda tato čísla jsou skutečně v příslušném číselném oboru řešením rovnice (1).

Jiří Mída

recenze

Jiří Anděl:

MATEMATICKÁ STATISTIKA

Vydalo SNTL — nakladatelství technické literatury, Praha ve spolupráci s n. p. ALFA, vydavatelstvo technickej a ekonomickej literatury, Bratislava, jako schválenou vysokoškolskou učebnici. Vyšlo

v Praze 1978 v 1. vydání, náklad 4200 výtisků. Kniha má 352 strany se 4 obrázky a 68 tabulkami. Cena vázaného výtisku 25 Kčs.

Současná matematika je pestrá paleta nejrozumnějších matematických disciplín, které jsou více či méně aplikovatelné v praxi. Na

jedné straně stojí ryze teoretické disciplíny, v jejichž čele najdeme například teorii čísel. Někde uprostřed jsou disciplíny, které umožňují studovat přírodu a techniku; jim vévodí matematická analýza, využívající diferenciálního a integrálního počtu, diferenciálních rovnic apod. Na druhé straně této palety stojí matematická statistika, která je z hlediska možností svých aplikací skutečnou královnou mezi matematickými disciplínami. Lze ji aplikovat nejen v přírodě a technice, ale i při studiu společenských věd.

Vydavatelé doporučují proto tuto učebnici slovy: „Publikace je určena jak posluchačům vysokých škol, kteří potřebují zvládnout partii ze statistiky, tak i technikům, biologům, lékařům a ekonomům, kteří v ní najdou praktické návody a aplikace matematické statistiky, doplněné konkrétními příklady a číselnými údaji.“ Všimněme si v první řadě právě těchto konkrétních příkladů, na kterých autor ilustruje nejen metody matematické statistiky, ale i možnosti jejích aplikací v nejrůznějších oblastech lidské činnosti. Řešené příklady lze právě z hlediska těchto lidských činností rozdělit do několika skupin:

1. *Moderní technika :*

a) Kontrola balicího automatu z hlediska přesnosti požadovaného dávkování cukru do plněných balíčků.

b) Kontrola rovnoměrnosti ojíždění pneumatik u automobilů dané

značky při správném seřazení geometrie předních kol.

2. *Technologie :*

a) Vliv teploty na délkovou roztažnost zvoleného materiálu.

b) Vliv kvality ocele na tavicí peci.

3. *Zemědělství a ovocnářství :*

a) Vliv různých diet při výzkumu selat na průměrné denní váhové přírůstky.

b) Porovnání výnosnosti různých odrůd brambor na pozemku dané kvality.

c) Vliv různých hnojiv na výnos zvolených odrůd obilovin.

d) Závislost kvality zimních odrůd jablek na délce uskladnění.

4. *Lékařství :*

a) Závislost tělesného stavu dítěte (speciálně obezita) na tom, jedná-li se o prvorozence nebo druhorozence.

b) Vliv tří různých preparátů na srážlivost krve.

c) Závislost krevního tlaku na prováděném lékařském experimentu.

5. *Demografie :*

a) Pravděpodobnost, že narozené dítě je chlapec nebo dívka.

b) Závislost počtu narozených dětí na měsíci narození.

6. *Sociologie :*

a) Porovnání rozvodovosti v ČSR a SSR. Při zjištění statisticky významného rozdílu porovnání tendencí (zda růst nebo pokles je různý nebo stejný).

b) Vliv výdajů na stravu na jednoho člena domácnosti v závislosti na příjmu a počtu členů rodiny.

c) Závislost rodinného stavu (svobodný, ovdovělý, rozvedený) u snoubenců vstupujících do manželství.

7. *Ekonomika* :

a) Závislost spotřeby pohonných hmot na rychlosti vozidla při téže rychlostním stupni.

b) Závislost hodnoty prodaného zboží na různém stupni reklamy (bez reklamy, reklama v tisku, reklama v tisku a televizi) a na druhu obalu (sáček, krabice apod.).

8. *Psychologie* :

a) Závislost mezi známkou z určitého předmětu a nervovou labilitou.

b) Vliv hlučnosti prostředí, způsobu motivace problému, doby řešení problému na délku nutnou k vyřešení problému.

Podrobněji si všimneme poslední uvedeného příkladu z oblasti psychologie, který jistě zaujme i čtenáře Rozhledů a na kterém alespoň stručně naznačíme, jakých metod používá moderní matematická statistika. Uvedeme doslovné znění tohoto příkladu:

Bylo vybráno 48 maturantů a každý z nich nezávisle na ostatních měl vyřešit týž zadaný problém. U každého se zjišťoval čas v minutách potřebný k vyřešení. Sledovaly se přitom faktory:

Faktor A — hlučnost okolí:

1. absolutní ticho; 2. tichá hudba; 3. reprodukce zajímavé rozhlasové hry; 4. reprodukce silného hluku.

Faktor B — navození situace:

1. pochvala studenta za dosavadní vynikající práci ve škole a zdůraznění toho, že předložený problém se dá snadno řešit; 2. žádný komentář před pokusem; 3. konstatování různých nedostatků mladé generace a prohlášení, že takoví lidé jen stěží mohou vyřešit předložený problém.

Faktor C — denní doba:

1. řešení problému ráno; 2. řešení problému večer.

V každé kombinaci těchto tří faktorů se udělal pokus se dvěma studenty. Z provedeného statistického šetření se užitím jedné ze základních statistických metod — analýzy rozptylu — došlo k závěru:

Závěr Z: Na čas potřebný k vyřešení problému má vliv hlučnost a denní doba. Vliv navození situace prokázán nebyl.

Je však třeba si uvědomit, že většina závěrů, ke kterým statistika dochází, nemá absolutní platnost, ale jen určitou, i když zpravidla značně velkou, pravděpodobnostní hodnotu. V našem případě má závěr Z pravdivostní hodnotu 95 %, neboli je jen 5% riziko, že uvedený závěr je nesprávný.

Metody, kterých se při podobných statistických šetřeních užívá, se většinou zakládají na testování

tzv. nulových hypotéz a vyšetřování intervalů spolehlivosti.

V učebnici autor velmi zdařile a srozumitelně charakterizuje podstatu probíraných metod a postupů (náhodný výběr a jeho ústřední postavení v matematické statistice, regrese, korelace, testování hypotéz, analýza rozptylu, testy dobré shody apod.); právě po této stránce je učebnice v české literatuře ojedinělá. V teoretických partiích, které jsou základem aplikací, je učebnice značně náročná na předběžné znalosti čtenáře (předpokládají se znalosti základů tzv. vyšší matematiky a teorie matic). Tyto části však nemusí studovat ti, kteří hledají pouze konkrétní statistické modely a metody vhodné k šetření problémů z vlastní oblasti činností.

Knihu tak lze skutečně doporučit všem, kterým je určena.

M. Koman

Anthony Ralston:

ZÁKLADY NUMERICKÉ MATEMATIKY

ACADEMIA 1978, celoplátěná vazba, 636 str., 46 Kčs.

Úspěchy vědeckotechnické revoluce jdou ruku v ruce s rozvojem počítačů, podněcujícím vytvářet specifické metody numerické matematiky. Hledají se nové konstruktivní postupy k řízení strojových výpočtů zaměřených k efektivnímu využití výsledků jak v technické, tak i v hospodářské praxi. Naši zájemci však dosud

postrádají původní českou moderně založenou učebnici, která by mohla být zásadní orientační vstupní příručkou k získání hlubšího rozhledu po numerické matematice, zaměřenou pro potřebu pracovníků výpočetních center.

Tento nedostatek odstraňuje již druhé vydání recenzované světově známé učebnice vynikajícího odborníka. Upozorňujeme na ni proto čtenáře, počítajícího perspektivně s uplatněním ve výpočetních ústavech. Řada otázek v knize sice převyšuje rámec středoškolského studia, ale vážný zájemce z vyšších tříd zvládne nejednu část a při další přípravě na povolání se mu kniha stane dobrým průvodcem. Zatím bude informován o pojmu chyby, zaokrouhlování, pevné a pohyblivé desetinné čárce, o rychlosti výpočtu, o některých druzích aproximace, o interpolaci a extrapolaci, o numerické kvadratuře a o přibližném řešení rovnic.

K. Mišoň

Kolektiv:

VÝSLOVNOST SPISOVNÉ ČEŠTINY

ACADEMIA 1978, celoplátěná vazba, 320 str., 36 Kčs.

Nadpis knihy neprozrazuje, že její většinu zaujímá Výslovnostní slovník, užitečný jako příruční pomůcka — zvláště pro jazykově nezaměřené pracovníky. Čtenář Nerudových Kosmických písní zde nalezne správnou výslovnost aeon Světa, čtenář Vrchlického Sata-

nelly se doví, jak správně vyslovit pistácie, čtenář detektivek si ověří výslovnost jména Maigret, zahrádkář nebude mít pochyby, jak vyslovit magnólii. Také čtenář našeho časopisu nalezne ve slovníku desítky termínů z oboru svých zájmů — a právě proto na knihu upozorňujeme. Vybíráme ukázkově jen z prvních dvou stránek slovníku obsahujícího 205 stránek: abakus, abiturient, abreviace, abscisa, absence, absolutní, absovent, absorpce, abstrakce, adice, aditivní, adsorpce, aequator, aerodyna-

mika, aerostatika, afélium, afinita, afinní.

Ve stati věnované české výslovnosti cizích vlastních jmen — členěné do 24 jazyků — najde patrně převod z jazyka Puškinova časté využití. I ten, kdo by chtěl v knize hledat jen správnou výslovnost toho kterého názvu, nechť si přečte úvod: získá informaci o šíři hledisek a pracovní náročnosti, kterou sestavení knihy představuje. O významu díla ve školních knihovnách nelze pochybovat.

K. Mišoň

Edice Škola mladých matematiků v roce 1979

Na letošní rok jsou plánovány dva nové svazky a dvě reedice. V prvním vydání vyjdou knížky:

Arnošt Niederle: *Zajímavé dvojice trojúhelníků*

Bohdan Zelinka: *Matematika hrou i vážně*

Mnoho zájemců uvítá nová vydání dávno rozebraných svazků:

Jaroslav Šedivý: *Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách*

Jaroslav Šedivý: *O podobnosti v geometrii*

Svazky knihovny ŠMM snadno poznáte za výklady knihkupectví podle typických barevných obálek s velkými písmeny M a O. V nakladatelství Mladá fronta je vydává ÚV matematické olympiády.

Směrnice pro autory (pokyny pro úpravu rukopisů) byly naposledy uveřejněny v 5. čísle tohoto ročníku Rozhledů. Rukopisy je třeba zasílat s jednou kopií.

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

conjugato	sčružený
connessione ž.	kenexe
connettere	spojiti
cono m.	kužel
conseguente di una implicazione	implikovaný výrok
conservare	zachovávat, uchovávat
considerare	uvažovat, zkoumat
considerazione ž.	úvaha
contare	počítati, odpočítavati
contatore m.	čítac (např. tachometr, elektroměr)
— di Geiger-Müller	Geiger-Müllerův počítač
contatto m.	dotyk, styk, kontakt
contenere	obsahovat
contenuto m.	obsah
— termico	tepelný obsah, entalpie
continuamente	nepřetržitě spojitě
continuità ž.	spojitost
continuo	spojitý
conto m.	počet, účet
rendere conto	počati, zprávu
tenere conto	bráti v úvahu
contorno apparente m.	obrys
contraddire	odporovat (si)
contraddittorio	odporující (si)
contraddizione ž.	kontradikce (logická)
contrario	opačný, protikladný
controllo m.	regulátor, řadič (počítač)
convergere	konvergovati
convergenza ž.	konvergence
convertore m.	konvertor
convesso	konvexní, vypuklý
convezione ž.	konvekce (např. vedení tepla)

coordinata ž
 — omogenea
 — corrente
 — polare
 — proiettiva
 coppia ž
 — di forze
 corda ž
 corollario m
 corona ž
 corpo m

 correlazione ž
 corrente
 corrente elettrica ž
 — — alternata
 — — continua
 corretto
 corto
 corto circuito m
 cosecante ž
 coseno m
 coseni direttori
 costante ž
 — dielettrica
 — magnetica
 — di Planck
 costellazione ž
 costruire
 costruzione ž
 costruzioni di Steiner
 cotangente ž
 coulomb
 crescente
 crescere
 cresta ž
 cristallo m
 criterio m
 critico (volume, pressione)

souřadnice
 — homogenní
 — proměnná
 — polární
 — projektivní
 dvojice
 — sil
 tětiva, struna
 důsledek (věty), závěr
 mezikruží; věnec; koruna (měna)
 těleso (geometrické, algebraické jen
 nekomutativní)
 korelace
 proměnný
 elektrický proud
 — — střídavý
 — — stejnosměrný
 správný
 krátký
 krátké spojení
 kosekans
 kosinus
 směrové kosiny
 konstanta
 — dielektrická
 — magnetická
 — Planckova kvantová
 konstelace
 konstruovati; stavěti, budovati
 konstrukce; stavba
 Steinerovy konstrukce
 kotangens
 coulomb (jednotka)
 rostoucí
 růsti
 hřeben
 krystal
 kritérium
 kritický (tlak, objem)

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

7

ROČNÍK 57, 1978-1979, BŘEZEN

rozhledy

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Ehudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. O. Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., UNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1979.

ROČNÍK 57
BŘEZEN 1979

7

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Obsah

P. Fejtková, dr. M. Malík: Příkazy pro referenční proměnné	289
Doc. dr. V. Mráz, CSc.: Přesnost výpočtů s neúplnými čísly	296
Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Mocnost bodu ke kružnici	309
Dr. O. Pöss, A. Štrbová: Jedna metoda merania rýchlosti zvuku v pevných látkach	314
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Planeta Země	318
J. Kušnier: História komplexných čísel	324
Dr. J. Mída: O „stavbách“ z hracích kostek	328
Doc. ing. Z. Janout, CSc.: Novosibirská státní univerzita	331
T. Svoboda: Astronautika za mír a lidský pokrok	334
Recenze	336
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky

Příkazy pro referenční proměnné

PAVLA FEJTKOVÁ, dr. MAREK MALÍK, MFF UK Praha

V minulém článku s názvem „*Příkazy*“ jsme dospěli k poznatku, že bude zapotřebí používat prostředků, které umožní popsat nejen neměnný stav a strukturu objektů, ale také jejich dynamiku, tedy změny, eventuálně děje, jichž se objekt nějakým způsobem účastní. Poznali jsme, že celý *proces budeme popisovat pomocí popisů jednotlivých dílčích akcí a ty budou vyjádřeny příkazy*.

Až dosud jsme vždy pro jednotlivé zavedené pojmy uváděli, jakou formou budeme kterou skutečnost zapisovat. Abychom předešli nejednoznačností při interpretaci příkazů, budeme při jejich zápisu dbát dodržování této formy ještě přísněji. Abychom tedy mohli jednotlivým zápisům význam (*sémantiku*) přisoudit jednoznačně, budeme vždy přesně určovat způsob — pravidla zápisu (*syntax*). (O zápisu, který nebude utvořen podle předepsané syntaxe, řekneme, že je syntakticky nesprávný a nebude mít určen význam.)

Zatím jsme řekli, jak je možno v příkazech zapsat aritmetický výraz z čísel a proměnných (typů **real** a **integer**) s použitím aritmetických operátorů a okrouhlých závorek (předepisujících provedení aritmetických operací v určeném pořadí); jak lze obdobně vytvořit logický výraz (z logických proměnných a operátorů); nezaváděli jsme vytváření výrazů ani použití operátorů pro proměnné ostatních typů. Dále jsme konstatovali, že výraz je vlastně pravidlo pro určení hodnoty.

O příkazech jsme řekli, že je od sebe budeme oddělovat středníky a že sémantika nebude závislá na další grafické úpravě (např. členění příkazu na řádky apod.).

Shrňme a zpřesněme, které příkazy jsme zatím poznali (zopakujeme pouze syntax):

příkaz složený

```
begin [posloupnost příkazů navzájem oddělených středníky] end
```

příkazy podmíněné

```
if [logický výraz] then [příkaz]
```

if logický výraz then příkaz 1 else příkaz 2

příkaz dosazovací

standardní proměnná := určení hodnoty

standardní atribut := určení hodnoty

kde hodnota a proměnná (resp. atribut) musí být stejného typu s výjimkou typu **real** a **integer**, kdy hodnota může být obojího typu.

Určení hodnoty může být buď přímo zápis hodnoty příslušného typu nebo pravidlo pro určení hodnoty (např. aritmetický nebo logický výraz).

Poslední z uvedených příkazů — dosazovací — je nejdůležitější novum, s nímž jsme v předešlém článku začali pracovat. Až do té doby, než jsme zavedli dosazovací příkaz, nejenže jsme neuměli popsat proces, ale vlastně jsme nedokázali prostředky naší teorie popsat ani neměnný stav objektu. Neuměli jsme totiž formálně zapsat fakt, že určitá proměnná nebo atribut mají nějakou hodnotu (tuto skutečnost jsme obcházeli pouze slovním konstatováním). Přitom od začátku víme, že právě hodnoty (údaje, data) charakterizují objekt, že *s hodnotami* v naší teorii *pracujeme jakožto s hodnotami proměnných* (tak jsme pojem proměnné definovali), a tudíž příkazy změn hodnot budou jedním z nejdůležitějších prostředků pro popis procesu.

Když jsme se podrobně zabývali sémantikou dosazovacího příkazu, zdůraznili jsme to, že se nejedná o takové dosazení *za* proměnnou, jaké je obvyklé v běžné matematice. Pro přiblížení problematiky jsme použili dokonce termínu *dosazení do* proměnné (i když se předložky *do* z jazykových důvodů příliš často nepoužívá).¹⁾ Tomu, že standardní proměnné (resp. atributu) je dosazovacím příkazem *určena hodnota*, budeme říkat také, že proměnná (atribut) *nabyla hodnoty*. (Zopakujme, že proměnná, resp. atribut bude mít tuto hodnotu tak dlouho, dokud jí jiným příkazem nebude určena hodnota nová.)

Ve výkladu i v příkladech se zatím jednalo pouze o proměnné a atributy základního typu — standardní. Dále se budeme zabývat otázkou, které analogické prostředky existují pro proměnné nestandardní.

Abychom si plně uvědomili, proč je tato otázka složitější, připomeňme znovu, jak jsme od počátku výkladu proměnné a data rozdělovali.

Poznali jsme u dat, proměnných a atributů:

¹⁾ V literatuře lze nalézt ve stejném významu i „dosazení hodnoty proměnné“ (proměnné — 3. pád), nebo se používá i termínů *příkaz přiřazovací* (hodnota je proměnné přiřazena), *příkaz prisvojovací* (hodnota je prisvojena).

typy $\left\{ \begin{array}{l} \text{základní (standardní, jednoduché, nestrukturované)} \\ \quad \text{— jejichž hodnota je dále nedělitelná} \\ \text{složené (nestandardní, referenční, strukturované)} \\ \quad \text{— jejichž hodnota se skládá ze složek dalších.} \end{array} \right.$

U proměnných základních typů je situace jednoduchá v tom, že každá proměnná má v určitém okamžiku jedinou hodnotu; proměnná tedy buď určenou hodnotu má, nebo nemá. U proměnné referenční je situace poněkud složitější. Složený typ — tedy komplex údajů — popisuje (charakterizuje) určitý objekt a nyní může nastat situace, kdy buď známe hodnoty všech datových složek (čili celý komplex údajů a objekt je popsán), nebo sice neznáme hodnoty všech složek, ale přesto hovoříme o určitém objektu, který onen souhrn údajů reprezentuje. Uvidíme, že pojmy, s nimiž budeme dále pracovat, budou opět paralelou toho, jak o obdobných situacích běžně uvažujeme.

Ilustrujme problematiku nejprve na příkladě. Náš známý Petr má dostat psa. Budeme tedy uvažovat o konkrétním objektu — exempláři třídy PES. (Předpokládejme, že jsme se nejprve dohodli na popisu třídy PES.) Pro tento exemplář můžeme užívat různá označení, ať už je to jméno, např. Hary, nebo slovní spojení Petrův pes (pokud má psa jednoho a příslušné určení je jednoznačné). U tohoto příslušníka biologického druhu nemusíme znát některé atributy (jako jsou např. váha nebo datum narození), dokonce nemusíme v jisté fázi znát žádný atribut, a přesto mluvíme o jednom konkrétním exempláři, a budeme-li mluvit o sousedově Donovi, máme na mysli jiný exemplář téže třídy.

U složených typů budeme tedy rozlišovat následující aspekty :

- 1) skutečnost, že existuje objekt určité třídy,
- 2) označení (pojmenování) tohoto objektu,
- 3) určení hodnot jednotlivých atributů.

ad 1)

Skutečnost, že uvažujeme nový objekt — exemplář třídy — zapisujeme:

`new` identifikátor třídy `.`

Zápis čteme, že je určen nebo *generován objekt* příslušné třídy. (`new` — angl. nový). Tento zápis nevypovídá ani o tom, pod kterým jménem se můžeme na objekt odvolávat, ani o tom, jaké má atributy.

Předpokládejme například, že je popsána třída PES a v zápisech použijeme dvakrát za sebou:

`new PES`

`new PES`

znamená to, že jsme generovali dva různé exempláře třídy PES.

Obdobně jako aritmetický výraz určuje číselnou hodnotu, tak se to-
muto zápisu říká *referenční* (někdy *objektový*) *výraz* a určuje objekt.

Ještě poznamenejme, že žádný výraz nemůže být zapsán samostatně,
ale jen jako element jiného celku (např. příkazu).

ad 2)

Skutečnost, že proměnná (resp. atribut) označuje objekt, zapíšeme po-
mocí *přiřazovacího příkazu* :

:—

resp.

 :—

 .

Určený objekt musí být téže třídy, pro kterou je kvalifikována proměnná
(atribut), zapsaná vlevo od znaménka přiřazení. Objekt zatím umíme
určit buď generátorem **new**, např.:

HARY :— **new** PES

nebo jinou proměnnou, která už označuje objekt příslušné třídy:

HARIK :— HARY

nebo PETR. STENE :— HARY

ad 3)

Určit hodnoty atributů už umíme, protože známe příkazy pro určení
hodnot. Samozřejmě můžeme určovat hodnoty atributů jen u těch ob-
jektů, které existují — které byly generovány.

Pokračujeme v našem příkladě. Pokud víme, že atributy třídy PES
s označením BARVA, MATKA jsou typu **text**, můžeme zapsat třeba:

HARY. BARVA := "CERNA"

HARY. MATKA := "AMINA"

Pokud by atribut MATKA byl referenční — byl by určen zápisem

ref (PES) MATKA

a pokud by v našich úvahách už existoval onen objekt, byl by tedy určen
například zápisem

AMINA :— **new** PES

pak bychom mohli zapsat

HARY. MATKA :— AMINA

(Rozmyslete si rozdíl v obou zápisech při různých určeních atributů
MATKA.)

Ve všech dalších úvahách musíme pečlivě *rozlišovat existenci objektů*
a *označení objektů*. Uvědomme si ještě jednou tento rozdíl na následujícím
jednoduchém příkladě, kde zároveň zopakujeme už známý vztah rov-
nosti a nerovnosti objektů (relační znaménka **=** a **=/**).

Předpokládejme opět, že je popsána třída PES a že proměnné HARY, HARIK, DON jsou kvalifikované pro tuto třídu, tedy

ref (PES) HARY, HARIK, DON

Zapíšeme-li příkazy:

HARY :— **new** PES ;

DON :— **new** PES;

HARIK :— HARY

pak existují pouze dva objekty a platí $HARY \neq DON$,
 $HARIK \neq DON$, $HARY = HARIK$.

Obdobně musíme uvažovat při změnách atributů. Když zapíšeme za sebou následující příkazy:

HARY.VAHA := 3;

HARIK.VAHA := 2.5

znamená to, že oba příkazy se týkaly atributu (VAHA) téhož objektu, a tudíž hodnota atributu je taková, jaká byla určena naposled, a nezáleží na tom, pod kterým jménem objektu byla změna hodnoty provedena; platí tedy

HARY.VAHA = 2.5

Zdůrazněme ještě, že nesmíme zaměňovat dvě skutečnosti, jednak kdy uvažujeme pod různým označením tentýž datový údaj, nebo kdy dva složené datové údaje — exempláře téže třídy — mají všechny složky (hodnoty všech atributů) sobě rovny.

Uveďme opět příklad.

Nechť je následovně určena třída obdélníků.

class OBDELNIK;

< **real** VYSKA, SIRKA >

a uvažujme dva obdélníky, které označíme X1 a X2:

ref (OBDELNIK) X1, X2;

X1 :— **new** OBDELNIK;

X2 :— **new** OBDELNIK;

dále předpokládejme, že se provedou příkazy:

X1.VYSKA := 1.6;

X2.VYSKA := 1.6;

X1.SIRKA := 2.2;

X2.SIRKA := 2.2;

Pak sice platí, že všechny odpovídající složky obou objektů jsou si rovny, ale objekty jsou přesto různé, tedy $X1 \neq X2$. (Když obdobný příklad sestavíme pro třídu ZAK s atributy VYSKA a VAHA, budou uvedené vztahy ještě zřejmější.)

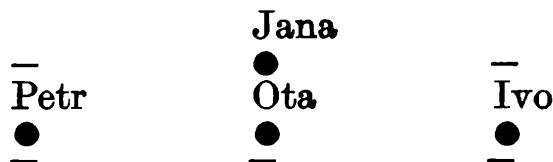
Ukažme všechny poznatky ještě na jednom příkladě.
Zavedme jednoduchou třídu:

```
class ZAK;
    <ref (ZAK) VLEVO, VPRAVO, VPREDU, VZADU>
```

a zavedme proměnné:

```
ref (ZAK) OTA, PETR, IVO, JANA;
```

Kdybychom řekli, „je-li zaveden zasedací pořádek podle schematu“



pak bychom dokázali formálně konstatovat vztahy:

```
JANA. VZADU == OTA,
```

```
PETR. VPRAVO == OTA atd.
```

My už ale dokážeme „zavést zasedací pořádek“ žáků sami (pomocí zápisu vztahů exemplářů třídy ZAK) a schéma přitom není nutno kreslit, protože všechno musí být zřejmé z popisu.

Nejprve musíme určit, které objekty budou v popisu zúčastněny:

```
JANA :- new ZAK;
```

```
PETR :- new ZAK;
```

```
OTA :- new ZAK;
```

```
IVO :- new ZAK;
```

a dále určit hodnotu každého atributu každého žáka:

```
OTA.VPREDU :- JANA;
```

```
OTA.VLEVO :- PETR;
```

```
OTA.VPRAVO :- IVO;
```

```
OTA.VZADU :- none atd.
```

Uvažme ještě, jak bychom zapsali, kdyby si vedle Jany vpravo přisedl soused, o němž bychom prozatím nevěděli, jak ho nazvat. Máme tedy zapsat změnu vztahů v zasedacím pořádku. Můžeme ji popsat například takto:

```
JANA. VPRAVO :- new ZAK;
```

```
IVO. VPREDU :- JANA. VPRAVO
```

(Rozvažte, co by znamenal zápis: JANA. VPRAVO :- new ZAK;
IVO. VPREDU :- new ZAK.)

Na závěr uvedeme ještě zobecnění syntaxe přiřazovacího a dosazovacího příkazu. Pokud chceme určit stejnou hodnotu více proměnným (atributům), nebo pokud chceme, aby několik referenčních proměnných (atributů) označovalo týž objekt, můžeme zapsat:

$\boxed{\text{proměnná}} := \boxed{\text{proměnná}} := \boxed{\text{určení hodnoty}}$

nebo

$\boxed{\text{proměnná}} :- \boxed{\text{proměnná}} :- \boxed{\text{určení objektu}}$

(Příkazy v této formě je možno použít i pro atributy. Samozřejmě platí pro shody typů stejná omezení, o kterých jsme mluvili při zavádění jednodušších forem těchto příkazů.)

V předcházejícím příkladě je tedy možno zapsat:

IVO.VPREDU :— JANA.VPRAVO :— **new** ZAK

nebo

JANA.VZADU :— PETR.VPRAVO :— IVO.VLEVO :— OTA

apod.

Cvičení :

Stanovte přesně, které třídy by musely být určeny (se kterými atributy) a které objekty by musely být generovány, aby bylo možno zapsat následující příkazy:

1)

```

if PAVEL.VKLADKNIZKA  $\neq$  none  $\wedge$  PAVEL.USPORY > 100
  then PAVEL.VKLADKNIZKA.CASTKA := PAVEL.VKLADKNIZKA.CASTKA + PAVEL.USPORY
else if PAVEL.USPORY > 100 then
  begin PAVEL.VKLADKNIZKA :— new VK;
  PAVEL.VKLADKNIZKA.CASTKA := PAVEL.USPORY
  end

```

2)

```

if KRAL.SYNNEJSTARSI  $\neq$  none
  then NASLEDNIK :— KRAL.SYNNEJSTARSI
  else if KRAL.BRATR  $\neq$  none
    then begin
      if KRAL.BRATR.SYNNEJSTARSI  $\neq$  none
        then NASLEDNIK :— KRAL.BRATR.SYNNEJSTARSI
      end
    else if KRAL.DCERANEJSTARSI  $\neq$  none
      then NASLEDNIK :— KRAL.DCERANEJSTARSI

```

Pokuste se popsat i jiná pravidla pro určení následníka trůnu (zacházení s úsporami), eventuálně tato pravidla rozšiřte o některé z možností, na které zatím nebylo pamatováno.

Přesnost výpočtů s neúplnými čísly

Doc. Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

V technických, fyzikálních, ekonomických a jiných výpočtech se pracuje s čísly, z nichž některá nebývají přesná, ale jen přibližná — jak říkáme — jsou zatížena chybami.¹⁾ Pro tato čísla se ujal název *neúplná čísla*. Na základě velikosti chyb neúplných čísel, s nimiž se počítá, můžeme stanovit velikost chyby výsledku, ke kterému vede třeba i celý řetězec početních operací. Uvědomělé počítání s neúplnými čísly může poskytnout informaci o dosažitelné přesnosti prováděných početních operací i zefektivnit počítání; kromě toho ovšem kultivuje numerické počítání vůbec.

Pravidla, ke kterým dospíváme v tomto článku, nikterak nepozbývají na významu ani při používání miniaturních elektronických kalkulaček, nacházejících cestu i do škol, ani při užívání logaritmického pravítka, které dosud bývá v rukou našich počtářů. Vidíme-li do probírané tematiky, znamená to žádoucí a prospěšnou orientaci v poměrně značném počtu čísel v registru kalkulačky nebo při používání různých tabelovaných hodnot, popř. i umožňuje získat informaci o dosahované přesnosti výpočtu na logaritmickém pravítku nebo při užití numerických hodnot z nomogramů.

K pojmu neúplného čísla dospíváme nejčastěji zaokrouhlováním reálných čísel, zapsaných ve tvaru desetinného čísla. Jak je ze školy známo, reálná čísla jsou buď racionální, anebo iracionální. Každé racionální číslo lze vyjádřit zlomkem, jehož číselník i jmenovatel jsou celá nesoudělná čísla, např. $\frac{3}{8}$ nebo $\frac{73}{55}$. Ve tvaru desetinného čísla jim odpovídají po

řadě zápisy 0,375 a 1,327; čárky nad posledními dvěma číslicemi značí periodu — neustálé jejich opakování, takže bychom mohli psát 1,3272727 ... Praktické počítání s desetinnými periodickými čísly vede k zaokrouhlování těchto čísel.

Ještě větší obtíže vznikají při počítání s čísly iracionálními. Algoritmus vedoucí k vyjádření iracionálního čísla ve tvaru desetinného čísla zpravidla umožňuje zapsat číslo s libovolnou přesností, avšak k přesné hodnotě konečným počtem kroků algoritmu dospět nelze. Má-li např. čtverec stranu délky 1, pak délka jeho úhlopříčky je dána iracionálním číslem, které zapisujeme $\sqrt{2}$ a rozumíme jím číslo, jehož druhá mocnina je rovna 2. Druhá mocnina každého racionálního čísla je však buď menší než 2, anebo je větší než 2; rovnost nemůže nastat. Např. je $1,41^2 =$

¹⁾ Nejde ovšem o chyby, které vznikají např. z únavy počtáře nebo z nedostatečného ovládání početního algoritmu.

$= 1,9881$ a $1,42^2 = 2,0164$, takže $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ a přitom $1,42 - 1,41 = 0,01$. Dále platí $1,414^2 = 1,999396$ a $1,415^2 = 2,002225$, tedy $1,414^2 < 2 < 1,415^2$, přičemž $1,415 - 1,414 = 0,001$ atd. Stejně můžeme pokračovat bez omezení. Vždy lze najít dvě desetinná čísla $a_{(n)}$, $a'_{(n)}$ taková, že $a_{(n)} < \sqrt{2} < a'_{(n)}$, přičemž rozdíl $a'_{(n)} - a_{(n)}$ je menší než sebemenší předem zvolené kladné číslo. Zvolíme-li za takové číslo třeba $0,00003$, pak je $a_{(5)} = 1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422 = a'_{(5)}$, takže při počtu desetinných míst $n = 5$ je příslušný rozdíl $1,41422 - 1,41421 = 0,00001$, což je menší číslo než zvolené číslo $0,00003$. Desetinný rozvoj iracionálního čísla $\sqrt{2}$ uvedený na osm desetinných míst je $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ (tečkami vyjadřujeme pokračování číslic v zápisu desetinného rozvoje). Kdybychom vypočetli na stejný počet desetinných míst délku podstavné krychle hrany, jejíž objem je 2, došli bychom k iracionálnímu číslu $\sqrt[3]{2} = 1,25992104 \dots$. Iracionálními čísly jsou i známé Ludolfovo číslo $\pi = 3,14159265 \dots$, většina hodnot logaritmů čísel (např. $\log 60 = 1,77815125 \dots$) i hodnot goniometrických funkcí nebo jejich logaritmů atd.

Při provádění početních operací s reálnými čísly jsme často nuceni omezit se jen na několik začátečních číslic (nekonečného) desetinného rozvoje těchto čísel.²⁾ Ve škole jsme se s tím mnohokrát setkali při řešení početních úloh, kdy jsme museli reálná čísla *zaokrouhlovat*.

Zaokrouhlování čísel se provádí tak, že v zápisu čísla se ponechá jen několik číslic nejvyšších řádů a ostatní číslice se vynechají. Přitom poslední ponechanou číslici

- neměníme, je-li následující číslice menší než 5 (zaokrouhlování sestupné), nebo ji
- zvýšíme o 1, když následující číslice je větší než 5, nebo je-li první z vynechaných číslic 5, za níž následuje (na kterémkoli místě) číslice různá od nuly; při tomto vzestupném zaokrouhlování se ovšem mohou měnit i předposlední a další číslice, jak dále uvedeme na příkladu.
- Když je první vynechaná číslice 5, za níž následují jen samé nuly, je z matematického hlediska lhostejno, zaokrouhlíme-li sestupně nebo vzestupně. Praxe tento případ řeší tak, že se číslice před vynechanou číslicí 5 nechá beze změny, byla-li sudá, a zvětší se o 1, byla-li lichá.

²⁾ To si čtenář dobře ujasní, pokusí-li se třeba o numerický výpočet podílu $d = \pi : \sqrt{2}$ nebo součinu $n = 1,327 \cdot \log 60$. Doporučujeme, aby si čtenář porovnal svůj výpočet s výsledky zde uvedenými: $d = 2,22144146 \dots$, $n = 2,36009182 \dots$

d) Jestliže při zaokrouhlování vynecháme číslici před desetinnou čárkou, pak vynechané číslice až k desetinné čárce nahradíme menšími nulami.

Příklady. Ad a) Zaokrouhlíme-li číslo 6,8134 na dvě (tři) desetinná místa, dostaneme 6,81 (6,813). O prvním čísle také říkáme, že jsme je zapsali třemi platnými číslicemi, druhé čtyřmi platnými číslicemi. Ad b) Při zaokrouhlování čísla 0,0619851 na tři (čtyři, pět) desetinných míst (na dvě, tři, čtyři platné číslice) dostaneme 0,062 (0,0620**), 0,06199). Ad c) $12,1500 \doteq 12,2$; $8,6500 \doteq 8,6$ (nebo 8,7); zaokrouhlíme-li číslo 8,6500 na tři desetinná místa, dostáváme číslo 8,650. Ad d) Vypočtený objem vodní přehrady je 7850450 m^3 . Při zaokrouhlování na statisíce zapíšeme $7900000 \text{ m}^3 = 79 \cdot 10^5 \text{ m}^3$; Poznamenejme, že z hlediska neúplných čísel mají čísla $7850 \cdot 10^3$ a $785 \cdot 10^4$ různý význam, o čemž se ještě zmíníme později.

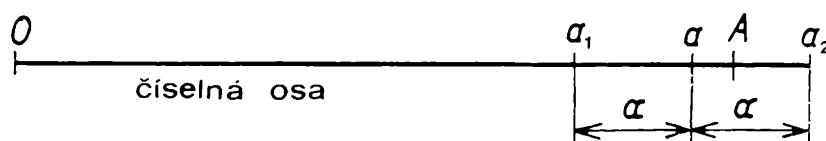
Při zaokrouhlování přesného čísla A na n -tý řád, tj. při nahrazování daného čísla A číslem $a_{(n)}$, se dopouštíme tzv. *prosté (absolutní) chyby* α , jejíž horní hranice nepřesahuje polovinu jednotky řádu, na který bylo číslo zaokrouhleno, tedy hodnotu $0,5 \cdot 10^n$, takže platí nerovnost

$$|A - a_{(n)}| \leq 0,5 \cdot 10^n, \quad (1)$$

v níž je pravá strana horní hranicí prosté chyby

$$\alpha_{\max} = 0,5 \cdot 10^n \quad (2)$$

Často přesné číslo A neznáme, ale známe jen příslušné zaokrouhlené číslo a ³⁾ a horní hranici jeho prosté chyby $\alpha_{\max}$. Situaci znázorňuje obr. 1, v němž je a_1 dolní mez neúplného čísla a a a_2 je horní mez neúplného čísla a .⁴⁾ Přesné číslo A je z intervalu



Obr. 1

$$A - \alpha \leq a \leq A + \alpha. \quad (3)$$

Místo nerovností (3) píšeme méně přesně, avšak ve stejném smyslu jen

$$A = a + \alpha. \quad (3')$$

**) Nulu na posledním místě je ovšem nutno zapsat.

³⁾ Poněvadž nemůže dojít k nedorozumění, píšeme jen a místo $a_{(n)}$.

⁴⁾ Pro zjednodušení a bez újmy obecnosti budeme uvažovat jen o reálných číslech kladných.

Zaokrouhlíme-li přesné číslo $A = 6,1738$ na řád $n = -3$, dostaneme neúplné číslo $a = 6,174$ a nerovnost (1) má tvar

$$|6,1738 - 6,174| \leq 0,5 \cdot 10^{-3} \quad \text{čili} \quad \alpha = 0,0002 \leq 0,0005 \leq \alpha_{\max};$$

zaokrouhlení stejného čísla na řád $n = -1$ (na jedno desetinné místo) dává neúplné číslo $6,2$ a nerovnost (1) má tvar

$$|6,1738 - 6,2| \leq 0,5 \cdot 10^{-1} \quad \text{čili} \quad \alpha = 0,0262 \leq 0,05 = \alpha_{\max}.$$

Při zaokrouhlování čísla 7850430 na řád $n = 4$ máme neúplné číslo 7850000 ⁵⁾ a nerovnost (1) je

$$|7850430 - 7850000| \leq 0,5 \cdot 10^4 \quad \text{čili} \quad \alpha = 430 \leq 5000 = \alpha_{\max};$$

při zaokrouhlení na řád $n = 2$ je neúplné číslo 7850400 a nerovnost (1) je

$$|7850430 - 7850400| \leq 0,5 \cdot 10^2 \quad \text{čili} \quad \alpha = 30 \leq 50 = \alpha_{\max}.$$

Jestliže zaokrouhlíme číslo $0,00203996$ na $n = -4$ řád nebo $n = -7$ řád, dostaneme neúplná čísla $0,0020$ nebo $0,0020400$ ⁶⁾ a příslušné nerovnosti (1) jsou

$$|0,00203996 - 0,0020| \leq 0,5 \cdot 10^{-4} \quad \text{čili} \quad \alpha = 0,00003996 \leq 0,00005 = \\ = \alpha_{\max},$$

$$|0,00203996 - 0,0020400| \leq 0,5 \cdot 10^{-7} \quad \text{čili} \quad \alpha = 4 \cdot 10^{-8} \leq 5 \cdot 10^{-8} = \\ = \alpha_{\max};$$

u neúplných čísel $0,0020$ nebo $0,0020400$ je nutno nuly na konci čísla zapisovat, protože z hlediska neúplných čísel neplatí třeba rovnosti $0,2 = 0,20$, resp. $72000 = 7200$, neboť příslušné intervaly $\langle 0,15; 0,25 \rangle$, $\langle 0,195; 0,205 \rangle$, resp. $\langle 71500; 72500 \rangle$, $\langle 71950; 72050 \rangle$ nejsou stejné.

Známe-li jen zaokrouhlené (neúplné) číslo a , můžeme stanovit jednak horní hranici jeho prosté chyby $\alpha_{\max}$, jednak interval, v kterém leží přesné číslo A . Pro shora uvedených šest příkladů můžeme sestavit tabulku, ke které se ještě vrátíme. Čtenáři doporučujeme, aby si za cvičení sám doplnil prostřední dva sloupce a pak se přesvědčil, že přesná čísla A vskutku padnou do uvedených intervalů (viz tab. na str. 300).

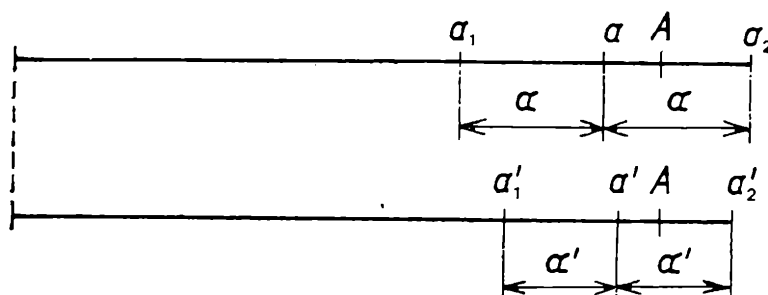
Neúplná čísla získáváme také měřením. I velmi přesné měření je zatíženo chybami, které nelze vyloučit. Např. stupnice měřidla má své nejmenší dílky, jejichž počet lze přesně stanovit, avšak měřená veličina se zpravidla přesně nekryje s některou čárkou stupnice. Nezbývá, než při měření uvést jen celé dílky stupnice nebo část dílku stupnice odhadnout.

⁵⁾ Také říkáme, že jsme toto číslo zapsali třemi platnými číslicemi.

⁶⁾ Číslo $0,0020$ je zaokrouhleno na dvě platné číslice, číslo $0,0020400$ na pět platných číslic.

zaokrouh- lené (neúplné) číslo a	prostá chyba $\alpha_{\max}$	interval, ve kterém se nachází přesné číslo A	přesné číslo A
6,174	0,0005	6,1735; 6,1745	6,1738
6,2	0,05	6,15; 6,25	6,1738
7850000	5000	7845000; 7855000	7850430
7850400	50	7850350; 7850450	7850430
0,0020	$5 \cdot 10^{-5}$	0,00195; 0,00205	0,00203996
0,0020400	$5 \cdot 10^{-8}$	0,00203950; 0,00204005	0,00203996

O hodnotě měřené veličiny A můžeme jen tvrdit, že náleží do intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$, jehož meze můžeme spolehlivě určit. Nahrazujeme tedy přesné číslo A neúplným číslem a s chybou, jejíž nejvyšší mez je α , takže platí nerovnosti (3), což zapisujeme — jak jsme již uvedli — ve tvaru (3'). Na obr. 2, který je obdobou obr. 1, je znázorněno měření veličiny A jednak měřidlem s menší přesností ($a \pm \alpha$), jednak měřidlem s větší přesností ($a' \pm \alpha'$). Při čtení na měřidle platí, že horní mez prosté chyby je rovna polovině přesnosti (dílků) daného měřidla.



Obr. 2

Příklad. Průměr hřídele 29 mm byl změřen milimetrovým měřítkem. Přesnost měřidla je 1 mm, takže horní mez prosté chyby je $0,5 \cdot 1 \text{ mm} = 0,5 \text{ mm}$. Průměr hřídele je $(29 \pm 0,5) \text{ mm}$, je tedy z intervalu $\langle 28,5; 29,5 \rangle$. Při užití měřítka děleného po 0,5 mm bylo naměřeno, že průměr hřídele je 29,5 mm. Přesnost tohoto měřítka je 0,5 mm, takže horní mez prosté chyby je $0,5 \cdot 0,5 \text{ mm} = 0,25 \text{ mm}$ a příslušný průměr hřídele je $(29,5 \pm 0,25) \text{ mm}$; v případě, že bychom uváděli prostou chybu jen na jednu platnou číslici, jak bývá obvyklé, zapsali bychom průměr hřídele neúplným číslem $(29,5 \pm 0,3) \text{ mm}$.⁷⁾

⁷⁾ Zde je třeba zvýšit horní mez prosté chyby na 0,3 mm a nikoliv na 0,2 milimetru.

Kdybychom dokázali odhadnout na milimetrovém měřítku pětiny milimetru, byla by horní mez prosté chyby polovinou pětiny mm, tedy $\alpha_{\max} = 0,5 \cdot 0,2 \text{ mm} = 0,1 \text{ mm}$. Takto změřený průměr hřídele bychom zapsali $(29,5 \pm 0,1) \text{ mm}$.

Při numerickém výpočtu nejčastěji známe neúplné číslo a a horní hranici jeho prosté chyby, kterou budeme značit jen α , což zapisujeme podle (3) nebo stručněji podle (3'). Na základě toho umíme vypočítat dolní mez a_1 a horní mez a_2 neúplného čísla a :

$$a_1 = a - \alpha, \quad (4)$$

$$a_2 = a + \alpha. \quad (4')$$

Aritmetický průměr obou mezí je střední hodnotou neúplného čísla a , o němž často mluvíme jako o neúplném čísle a (viz obr. 1);

$$a = \frac{1}{2} (a_1 + a_2). \quad (5)$$

Z mezí neúplného čísla a vypočteme i jeho prostou chybu α (viz obr. 1) z rovnice

$$\alpha = \frac{1}{2} (a_2 - a_1). \quad (6)$$

Prostá chyba však není úplnou charakteristikou přesnosti neúplného čísla. Např. centimetrovým měřítkem zjistíme délku krabičky 15 cm a délku stolu 148 cm. Ač při obou měřeních je prostá chyba $\alpha = 0,5 \text{ cm}$, pokládáme délku stolu za přesněji změřenou než délku krabičky. O tom nás informuje *poměrná (relativní) chyba p* neúplného čísla a , která je podílem prosté chyby α a neúplného čísla a :⁸⁾

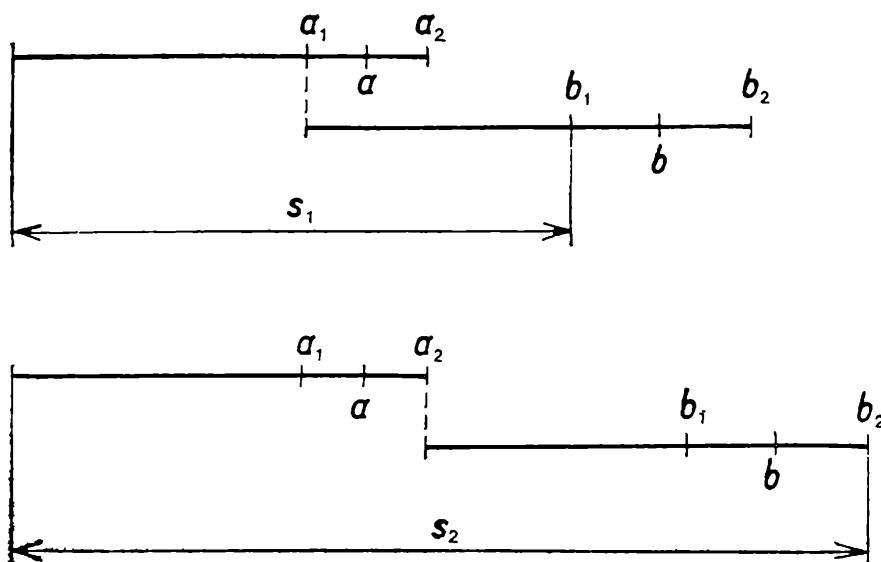
$$p = \frac{\alpha}{a} \quad \text{nebo} \quad p\% = 100 \frac{\alpha}{a}. \quad (7)$$

V našem případě je poměrná chyba délky krabičky p_k desetkrát větší než poměrná chyba délky stolu p_s . Skutečně $p_k = \frac{0,5 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \doteq 0,033$, resp.

3,3 %; $p_s = \frac{0,5 \text{ cm}}{148 \text{ cm}} \doteq 0,0034$, resp. 0,34 %. Rozměr $(148 \pm 0,5) \text{ cm}$ pokládáme za (desetkrát) přesnější než rozměr $(15 \pm 0,5) \text{ cm}$, protože jeho poměrná chyba je (desetkrát) menší: $p_s = 0,34 \%$, $p_k = 3,3 \%$.

Nyní probereme základní početní operace s neúplnými čísly. Budeme se především zajímat o velikost prosté chyby výsledků početních ope-

⁸⁾ Jak jsme již uvedli, jistě nedojde k nedorozumění, když místo o střední hodnotě neúplného čísla mluvíme jen o neúplném čísle.



Obr.

rací: a) sčítání, b) odčítání, c) násobení, d) dělení, e) mocnění, f) odmocňování.

a) *Sčítání neúplných čísel.* Jsou-li čísla a, b zatížena prostými chybami, je jejich součet $s = a + b$ zatížen prostou chybou, již označíme σ . Dolní mez součtu s je s_1 a horní mez s_2 (viz obr. 3):

$$s_1 = a_1 + b_1 = (a - \alpha) + (b - \beta) = a + b - \alpha - \beta,$$

$$s_2 = a_2 + b_2 = (a + \alpha) + (b + \beta) = a + b + \alpha + \beta.$$

Po dosazení vypočtených mezí do (5) pro neúplné číslo $(s \pm \sigma)$ platí:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2) = \frac{1}{2}[(a + b - \alpha - \beta) + (a + b + \alpha + \beta)] = \\ &= \frac{1}{2}[2(a + b)] = a + b. \end{aligned}$$

K prosté chybě σ součtu s vede dosazení obou mezí do (6):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}(s_2 - s_1) = \frac{1}{2}[(a + b + \alpha + \beta) - (a + b - \alpha - \beta)] = \\ &= \frac{1}{2}[2(\alpha + \beta)] = \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Získali jsme pravidlo 1.

PRAVIDLO 1. Prostá chyba součtu dvou neúplných čísel se rovná součtu prostých chyb těchto čísel. Snadno bychom našli, že i při větším počtu sčítanců je prostá chyba součtu neúplných čísel rovna součtu prostých chyb jednotlivých sčítanců.

Příklady: Vypočtete součet neúplných čísel: a) $(25,5 \pm 0,2) + (34,6 \pm 0,7)$; b) $(18,7 + 6,1 + 3,13)$. Řešení: a) součet je $25,5 + 34,6 =$

$= 60,1$; chyba je $0,2 + 0,7 = 0,9$; výsledek je $(60,1 \pm 0,9)$; přesný součet je z intervalu $\langle 59,2; 62,0 \rangle$. b) součet je $(18,7 + 6,1 + 3,13 = 27,93$; chyba je $0,05 + 0,05 + 0,005 = 0,105$; výsledek $27,93$ je zatížen chybou $0,105$; přesný součet náleží do intervalu $\langle 27,825; 28,035 \rangle$. Často se prosté chyby zaokrouhlují na jednu platnou číslici a podle toho se pak zaokrouhlí i neúplné číslo. V našem případě to je $27,9 \pm 0,1$.

b) *Odčítání neúplných čísel*. Předpokládejme, že o neúplných číslech a , b platí $a > b$.⁹⁾ Dolní mez r_1 rozdílu $r = a - b$ vypočteme tím, že od dolní meze menšitele a_1 odečteme horní mez b_2 menšence b (čtenář si může sám pořídit náčrtek obdobný obr. 3):

$$r_1 = a_1 - b_2 = (a - \alpha) - (a + \beta) = a - b - \alpha - \beta.$$

Horní mez r_2 rozdílu r je

$$r_2 = a_2 - b_1 = (a + \alpha) - (b - \beta) = a - b + \alpha + \beta.$$

Neúplné číslo r je podle (5) (viz poznámku pod čarou⁸⁾)

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}[(a - b - \alpha - \beta) + (a - b + \alpha + \beta)],$$

$$r = a - b.$$

Prostá chyba ϱ rozdílu r je podle (6)

$$\varrho = \frac{1}{2}(r_2 - r_1) = \frac{1}{2}[(a - b + \alpha + \beta) - (a - b - \alpha - \beta)] = \alpha + \beta$$

Došli jsme k podobnému pravidlu, které platí pro součet.

PRAVIDLO 2. Prostá chyba rozdílu neúplných čísel se rovná součtu prostých chyb menšence a menšitele.

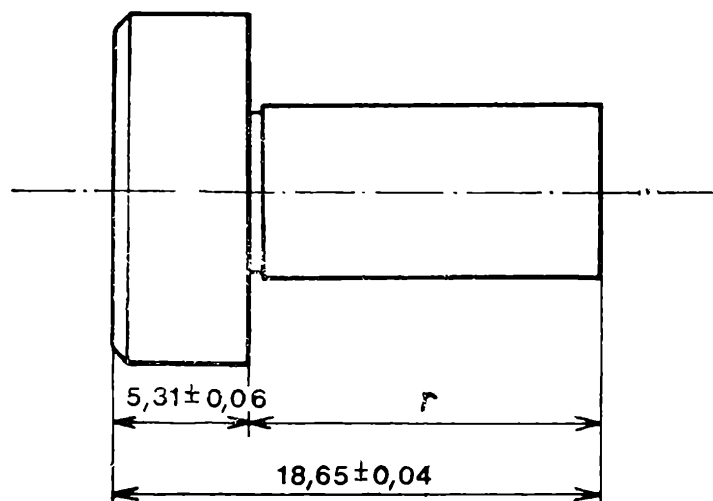
Příklady: c) Vypočtete rozdíl $(163,5 \pm 0,2) - (67,3 \pm 0,4)$; d) Stanovte kótu r z obr. 4. Řešení: c) rozdíl je $96,2 \pm 0,6$; d) kóta $r = (18,65 \pm 0,04) - (5,31 \pm 0,06) = 13,34 \pm 0,10$.

c) *Násobení neúplných čísel*. Nechť součin n dvou neúplných čísel $a \pm \alpha$, $b \pm \beta$ má prostou chybu ν . Pak dolní mez součinu je $n_1 = a_1 b_1 = (a - \alpha) \cdot (b - \beta) = ab - \alpha b - \beta a + \alpha \beta$ a horní mez je $n_2 = a_2 b_2 = (a + \alpha) \cdot (b + \beta) = ab + \alpha b + \beta a + \alpha \beta$. Po dosazení těchto mezí do (5) je vzorec pro součin neúplných čísel a , b

$$n = ab + \alpha \beta. \quad (8)$$

Sčítanec $\alpha \beta$ na pravé straně rovnosti (8) je, s ohledem na sčítance ab ,

⁹⁾ Viz poznámku ⁴⁾ pod čarou.



Obr. 4

tak malý, že ho můžeme zanedbat a vztah (8) bude mít jednodušší tvar

$$n = ab, \quad (8')$$

podle něhož se většinou součin neúplných čísel počítá.

Příklady: e) Vypočítejte součin $(32,8 \pm 0,05) \cdot (8,2 \pm 0,03)$. Řešení:

32,8	8,2	= 268,96	a	b
0,05	0,03	= 0,0015	α	β
		268,9615	$ab + \alpha\beta$	

Porovnání obou výsledků naznačuje, že můžeme číslo $\alpha\beta$ zanedbat a součin neúplných čísel zapsat hodnotou 268,96, o čemž se přesvědčíme i výpočtem prosté chyby součinu.

Prostou chybu ν součinu neúplných čísel vypočteme podle (6):

$$\nu = \frac{1}{2} (n_2 - n_1) = \frac{1}{2} [(ab + b\alpha + a\beta + \alpha\beta) - (ab - \alpha\beta - a\beta + \alpha\beta)]$$

a po úpravě je

$$\nu = a\beta + b\alpha. \quad (9)$$

Dělíme-li obě strany rovnice (9) součinem $n = ab$, dostaneme rovnici pro výpočet poměrné chyby:

$$\frac{\nu}{n} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}, \quad (10)$$

z kterého prostou chybu součinu neúplných čísel zpravidla počítáme. Vyjádříme závěr pravidlem.

PRAVIDLO 3. Poměrná chyba součinu neúplných čísel se (přibližně) rovná součtu poměrných chyb jeho činitelů.

Příklady : e) Vraťme se k součinu z předešlého příkladu. $(32,8 \pm 0,005) \cdot (8,2 \pm 0,03)$, jehož hodnota je 268,96, resp. 268,9615. Zbývá stanovit prostou chybu, a to z chyby poměrné. Podle (10) dostáváme následující rovnici, kterou řešíme:

$$\frac{\nu}{268,96} = \frac{0,05}{32,8} + \frac{0,03}{8,2},$$

$$\frac{\nu}{268,96} = 0,00152 + 0,00366 = 0,00518,$$

$$\nu = 1,393, \text{ resp. } 1,4.$$

S ohledem na tuto prostou chybu zaokrouhlíme i výsledek na $269,0 \pm 1,4$.

f) Vypočteme obvod prstence, jehož průměr $d = (27,32 \pm 0,005)$ mm. Řešením je součin $\pi \cdot d$, v němž lze číslo π zapsat neomezeným počtem číslic. Zpravidla bereme stejný počet platných číslic nebo o jednu číslici více, než má činitel s nejmenším počtem číslic. K průměru 27,32 vezmeme $\pi = 3,1416$ a pak je příslušný součin 85,828512 a jeho poměrná chyba je podle (10)

$$\frac{\nu}{85,8} = \frac{0,00005}{3,14} + \frac{0,005}{27,32}.$$

Prostá chyba součinu neúplných čísel $\nu = 0,017$, resp. 0,02. S ohledem na ni zaokrouhlíme i součin 85,828512 na $85,829 \pm 0,017$, resp. na $85,83 \pm 0,02$.

d) *Dělení neúplných čísel.* Při stanovení podílu $d = a : b$ neúplných čísel a jeho prosté chyby δ opět použijeme metody mezí. Dolní mez d_1 podílu získáme dělením nejmenšího dělence největším dělitelem, tj. $a_1 : b_2$. Horní mez d_2 je podílem $a_2 : b_1$.

$$d_1 = \frac{a_1}{b_2} = \frac{a - \alpha}{b + \beta}, \quad d_2 = \frac{a_2}{b_1} = \frac{a + \alpha}{b - \beta};$$

podle (5) je podíl

$$d = \frac{1}{2} (d_1 + d_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{a - \alpha}{b + \beta} + \frac{a + \alpha}{b - \beta} \right)$$

a po úpravě je podíl $(a \pm \alpha) : (b \pm \beta)$

$$d = \frac{ab + \alpha\beta}{b^2 - \beta^2}; \quad (11)$$

dělme čitatele i jmenovatele tohoto zlomku číslem $b^2 \neq 0$:

$$d = \frac{\frac{a}{b} + \frac{\alpha\beta}{b^2}}{1 - \frac{\beta^2}{b^2}};$$

v tomto zlomku můžeme čísla $\frac{\alpha\beta}{b^2}$ a $\frac{\beta^2}{b^2}$ zanedbat s ohledem na jejich velmi malou hodnotu. Pak se podíl d počítá vskutku jen dělením a b . Později se k tomu vrátíme při řešení příkladu.

Nyní přistoupíme ke stanovení poměrné, popř. prosté chyby podílu. Podle (6) je prostá chyba

$$\delta = \frac{1}{2} (d_2 - d_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{a + \alpha}{b - \beta} - \frac{a - \alpha}{b + \beta} \right);$$

po úpravě vychází

$$\delta = \frac{a\beta + b\alpha}{b^2 - \beta^2}. \quad (12)$$

Poměrná chyba je podle (7) $\frac{\delta}{d}$ podílem pravých stran (12) a (11), což po úpravě a zanedbání $\alpha\beta$ dává tvar

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}. \quad (13)$$

PRAVIDLO 4. Poměrná chyba podílu neúplných čísel se (přibližně) rovná součtu poměrných chyb dělence a dělitele.

Příklad g) Vypočítejte podíl d neúplných čísel 3,67 a 2,1. Řešení: $d \doteq 3,67 : 2,1 = 1,7476190$. Když vypočteme podíl podle „obtížnějšího“ vzorce (11), kde $\alpha = 0,005$ a $\beta = 0,05$, je $d = 1,748667$. Pro zaokrouhlení podílu ještě potřebujeme znát prostou chybu podílu. Z (13) po dosazení plyne rovnice

$$\frac{\delta}{1,748} = \frac{0,005}{3,67} + \frac{0,05}{2,1}$$

a z ní vyřešíme $\delta = 0,04$. Prostá chyba je v setinách, a tedy na setiny zaokrouhlíme i podíl. Oba podíly počítané dělením a b nebo podle vzorce (11) dávají stejnou hodnotu $d = 1,75 \pm 0,04$.

e) *Mocnění neúplného čísla.* Mějme umocnit přirozeným mocnitelem k neúplné číslo $(a \pm \alpha)$. Budeme se zajímat o prostou chybu μ mocniny $m = a^k$, tedy o neúplné číslo $m \pm \mu$. Z předešlých úvah o součinu ne-

úplných čísel víme, že jeho poměrná chyba se rovná součtu poměrných chyb jednotlivých činitelů, tedy

$$\frac{\mu}{m} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} + \dots + \frac{\alpha}{a} \text{ (} k \text{ sčítanců)},$$

což zapisujeme stručněji

$$\frac{\mu}{m} = k \cdot \frac{\alpha}{a}. \quad (14)$$

Z této rovnice již dokážeme prostou chybu μ mocniny m vypočítat.

Příklad h) Vypočtete $m = (2,17 \pm 0,07)^4$. Řešení $2,17^4 = 22,17373921$. Ze vztahu (14) vznikne po dosazení rovnice

$$\frac{\mu}{22,17} = 4 \cdot \frac{0,07}{2,17}$$

a z ní již vypočteme prostou chybu $\mu = 2,9$, resp. 3. Mocnina, která je neúplným číslem, je $m = 22,2 \pm 2,9$, resp. 22 ± 3 .

f) *Odmocňování neúplného čísla.* Při odmocňování neúplného čísla $a \pm \alpha$ přirozeným číslem n je výsledkem neúplné číslo $e \pm \varepsilon$. Platí tedy

$$e = \sqrt[n]{a} \quad \text{čili} \quad a = e^n.$$

Na poslední tvar rovnice můžeme pohlížet jako na mocninu neúplného čísla e , jehož prostou chybu ε chceme vypočítat. K tomu je třeba v (14) použít nového označení; dostaneme tvar

$$\frac{\alpha}{a} = n \cdot \frac{\varepsilon}{e}, \quad (15)$$

do kterého již dosazujeme dané numerické hodnoty, abychom vyřešili rovnici o neznámé ε .

Příklad i) Vypočtete $e = \sqrt[3]{920 \pm 5}$. Řešení: $\sqrt[3]{920} \doteq 9,7259$. Dosazením do (15) získáme rovnici $\frac{5}{920} = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{9,73}$, z níž je prostá chyba $\varepsilon = 0,018$, resp. 0,02. Prostá chyba je v tisícinách (setinách), a tedy na tisíciný (setiný) zaokrouhlíme i odmocninu $e = 9,726 \pm 0,018$, resp. $9,73 \pm 0,02$.

Nezajímá-li nás velikost prosté nebo poměrné chyby mocniny nebo odmocniny neúplného čísla, kterou vypočteme podle vztahů (14) nebo (15), zaokrouhlíme mocninu nebo odmocninu neúplného čísla podle následujícího pravidla:

PRAVIDLO 5. Mocninu nebo odmocninu neúplného čísla zaokrouhluje-
me na stejný počet platných číslic, na který je tato mocnina nebo od-
mocnina dána.

Příklad j) $\sqrt[3]{920} \doteq 9,7$; *k)* $0,12^4 \doteq 0,00021$ (v obou případech je vý-
sledek zaokrouhlen na dvě platné číslice.

Nejčastěji provádíme řadu početních operací s neúplnými čísly i s čísly
přesnými, aniž se zabýváme přesností prováděných operací. Pro takový
účel ještě vyslovíme dvě užitečná pravidla, vycházející z poznatků uve-
dených v tomto článku. Obě pravidla umožňují podstatně zrychlit a zjed-
nodušit počítání, neboť se zbytečně nepočítáme s čísly o velkém počtu
číslíc.

PRAVIDLO 6. Součet nebo rozdíl neúplných čísel zaokrouhluje-
me na nejvyšší řád neúplného čísla, které je v součtu nebo rozdílu uvedeno.

V příkladech jsme přesná čísla (jejich prostá chyba se rovná nule),
podtrhli. Vypočtete: *l)* $a = 1,963 + 1,9 - 0,7 = 3,163$ (nejvyšší
řád -1), takže $a = 3,2$ ($3,2 \pm 0,1$). *m)* $b = 47,3197 + 3,6 + 12,791 -$
 $- 19,35$ (nejvyšší řád -2); popř. stačí již před sčítáním nebo odčítáním
zaokrouhlit na řád -2 ; $b = 47,32 + 3,60 + 12,79 - 19,35 = 44,36$;
($44,361 \pm 0,0006$).

PRAVIDLO 7. Součin nebo podíl neúplných čísel zaokrouhlíme na ten
počet platných číslic neúplného čísla součinu nebo podílu, které má
nejmenší počet platných číslic.

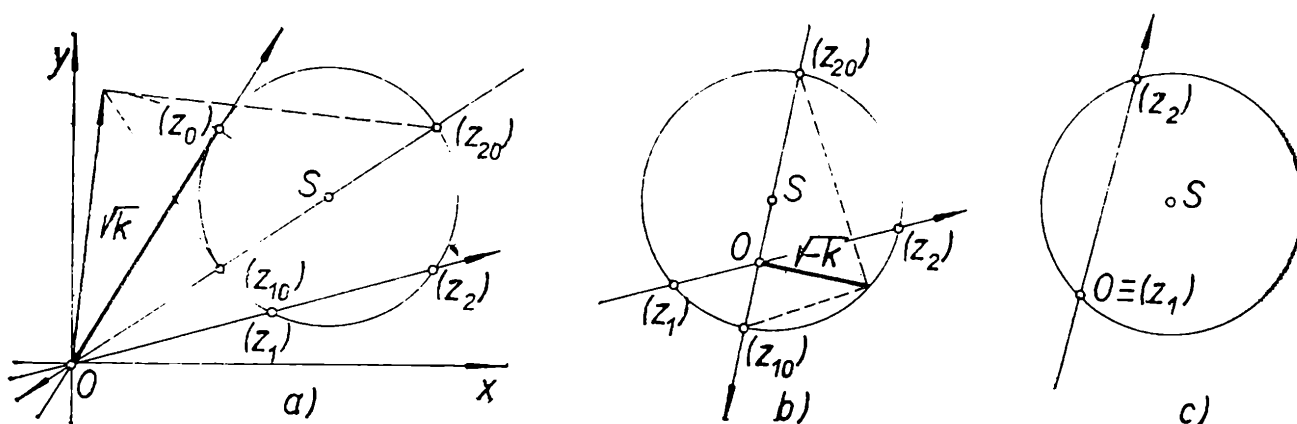
Příklady: *n)* $c = \frac{6,85 \cdot 2,3}{0,73} = 21,5821\dots$ — zaokrouhlíme na dvě
platné číslice; $c = 22$; ($22,6 \pm 0,6$). Při výpočtu ovšem provádíme algorit-
mu sdělení nebo násobení jen tak dlouho, než ve výsledku obdržíme přísluš-
ný počet platných číslic, popř. ještě o jednu číslici více, z níž popř. pak
bereme při zaokrouhlování opravu. *o)* $d = \frac{(923,178 + 18,71) \cdot 4}{82700 - 491} \doteq$
 $\doteq 0,0456$. Při „přesném“ provádění početních operací získáme výsledek
 $d = 0,0458289\dots$; uvažujeme-li prosté chyby jednotlivých čísel, pak
dostaneme $d = 0,0458 \pm 0,0003$. Zjišťujeme tedy, že výsledek $0,0456$
získaný uplatňováním pravidel 1 a 2 je z intervalu $\langle 0,0455; 0,0461 \rangle$,
v kterém leží přesné číslo d . *p)* Proveďte výpočet s neúplnými čísly
 $\sqrt[3]{261} \cdot (4,23 - 1,9103)$
 $(0,09084 + 3,521) \cdot 31,7^2$.

Výpočet: $\frac{6,39 (4,23 - 1,91)}{(0,091 + 3,521) \cdot 1000} = \frac{6,39 \cdot 2,32}{3,612 \cdot 1000} = \frac{14,8}{3610} = \underline{0,00410}$;
přesnější výpočet dává výsledek $0,004084 \pm 0,000008$.

Mocnost bodu ke kružnici

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT Praha

V tomto časopise byl několikrát uveřejněn článek, ve kterém byli čtenáři seznámeni s pojmem mocnosti bodu ke kružnici a některými jednoduchými vlastnostmi a konstrukcemi z toho plynoucími.¹⁾ Nyní použijeme při výkladu uvedeného pojmu analytické geometrie aplikované na Gaussovu rovinu. Každý bod (z) euklidovské roviny bude v této geometrii dán jako komplexní číslo z .²⁾



Obr. 1

Pro danou kružnici (obr. 1) s rovnicí

$$z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + C = 0, \quad (1)$$

kde β je komplexní, C reálné číslo, přičemž $\beta\bar{\beta} - C > 0$, určíme její průsečíky s přímkou, která prochází počátkem O soustavy souřadnic, např. o rovnici

$$\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = 0, \quad (2)$$

¹⁾ Viz např. Horák St.: Rozhledy (33), 1957, str. 14—19, nebo Šedivý J.: Rozhledy (40), 1961—62, str. 207—212, příp. též Drábek K.: Rozhledy (45), 1966—67, str. 270—272.

²⁾ Více o této interpretaci bodů roviny a analytické geometrii s tím související se najde v článku Drábek K.: Použití komplexních čísel v geometrii, Rozhledy (44), 1965—66, str. 289—293, 348—352. Výsledků z tohoto článku v dalším využíváme, rovněž předpokládáme znalost základních početních vztahů a operací s komplexními čísly. Viz též Hradecký F.: Užití komplexních čísel v geometrii, Rozhledy (48), 1969—1970 (stručné shrnutí na začátku článku na str. 153—155).

kde $\alpha \neq 0$ je komplexní číslo. Předpokládejme, že tato přímka protíná kružnici (1) ve dvou různých bodech $(z_1), (z_2)$.

Ukážeme, že součin orientovaných úseček $\overrightarrow{O(z_1)}, \overrightarrow{O(z_2)}$ je konstantní, ať zvolíme přímku (2) jakkoliv, tj. že tento součin je nezávislý na volbě komplexního čísla α .

Body $(z_1), (z_2)$ jsou body ležící na dané kružnici (1), takže platí

$$z_1 \bar{z}_1 + \bar{\beta} z_1 + \beta \bar{z}_1 + C = 0, \quad (3)$$

$$z_2 \bar{z}_2 + \bar{\beta} z_2 + \beta \bar{z}_2 + C = 0; \quad (4)$$

protože však leží také na dané přímce (2), je

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$z_2 = \pm r_2 (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

takže součin

$$z_1 \bar{z}_2 = k \quad (5)$$

je vždy reálné číslo.

Násobíme-li rovnici (3) číslem z_2 , rovnici (4) číslem z_1 a použijeme-li vztah (5), obdržíme rovnice

$$k z_1 + \bar{\beta} z_1 z_2 + \beta k + C z_2 = 0,$$

$$k z_2 + \bar{\beta} z_1 z_2 + \beta k + C z_1 = 0,$$

jejichž odečtením plyne

$$(k - C) (z_1 - z_2) = 0$$

Protože podle předpokladu jsou oba body $(z_1), (z_2)$ různé, je $z_1 \neq z_2$, a tedy

$$k = C.$$

Z výrazu (5) máme pro absolutní hodnotu čísla k

$$|k| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$$

je tedy tato absolutní hodnota rovna součinu neorientovaných úseček $O(z_1), O(z_2)$. Vrátime-li se k orientaci, pak číslo k je kladné, příp. záporné, když oba body $(z_1), (z_2)$ jsou na téže polopřímce, příp. na opačných polopřímkách. Tím jsme prokázali konstantnost výše uvedeného součinu orientovaných úseček.

Je-li $k > 0$ a bod (z_2) se blíží k bodu (z_1) , pak příslušná sečna se blíží k tečně v bodě (z_1) , a tedy v limitě

$$k = \overrightarrow{O(z_0)}^2,$$

kde (z_0) je bod dotyku tečny z bodu O ke kružnici (1) (viz též obr. 1a).

Jestliže bod O je bodem kružnice (1), pak $C = 0$, a tudíž i $k = 0$ (viz obr. 1c).

Kružnice (1) se může redukovat také na bod (tzv. kružnice s nulovým poloměrem) a v tomto případě $k = C$ je rovno čtverci vzdálenosti OS , kde S je daný bod (střed nulové kružnice).

Nalezenou konstantní hodnotu $k = C$ nazveme *mocností bodu O vzhledem ke kružnici (1)*. Z rovnice pro její určení se znovu potvrzuje, že tato mocnost nezávisí na volbě přímky (2) bodem O . Vedeme-li proto tuto přímku středem S dané kružnice (1), pak když oba průsečíky jsou (z_{10}) , (z_{20}) a označíme-li $d = OS$, je vždy (obr. 1a, 1b, 1c)

$$\overrightarrow{O(z_{10})} \cdot \overrightarrow{O(z_{20})} = (d + r)(d - r) = d^2 - r^2$$

Z nalezeného vztahu plyne pak konstrukce (absolutní) velikosti čísla k užitím první, příp. druhé Euklidovy věty.

Mocnost $k = C$ závisí pouze na volbě počátku O soustavy souřadnic, přičemž na volbě osy x (příp. osy y) naproti tomu vůbec nezávisí. Při otáčení $\zeta = pz$, kde p je komplexní číslo, pro které $|p| = 1$, kolem počátku O soustavy souřadnic (užitím $z = \bar{p}\zeta$) dostaneme pro kružnici (1) vyjádření

$$p\bar{p}\zeta\bar{\zeta} + \bar{\beta}\bar{p}\zeta + \beta p\bar{\zeta} + C = 0$$

a odtud opět $k = C$, neboť $p\bar{p} = 1$.

Obraťme se nyní k určení mocnosti libovolného bodu (w) ke kružnici (1). Poznamenejme však především, že vztah $k = d^2 - r^2$, kde $d = (w)S$, je i v tomto případě zachován.

Provedeme posunutí soustavy souřadnic tak, aby se daný bod (w) stal počátkem Ω posunuté soustavy souřadnic, tj. položíme $z = \zeta + w$. Rovnice kružnice (1) přejde do tvaru

$$\zeta\bar{\zeta} + (\bar{w} + \bar{\beta})\zeta + (w + \beta)\bar{\zeta} + w\bar{w} + \bar{\beta}w + \beta\bar{w} + C = 0$$

a odtud plyne výsledek pro mocnost bodu (w) ke kružnici (1) ve tvaru

$$k = w\bar{w} + \bar{\beta}w + \beta\bar{w} + C$$

Ukážeme nyní několik vlastností vyplývajících z nalezených výsledků:

1) Buď dáno reálné číslo k a hledejme takové body (w) , které mají vzhledem ke kružnici (1) uvedenou mocnost k . Všechny tyto body leží na kružnici (v obr. 2 bylo zvoleno $k > 0$)

$$w\bar{w} + \bar{\beta}w + \beta\bar{w} + C - k = 0 \quad (6)$$

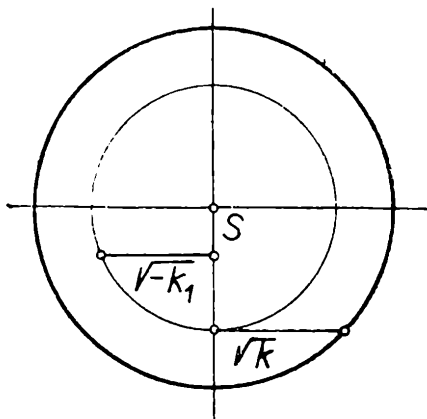
soustředné s danou kružnicí (1).

2) Uvažujme teď dvě nesoustředné kružnice s rovnicemi

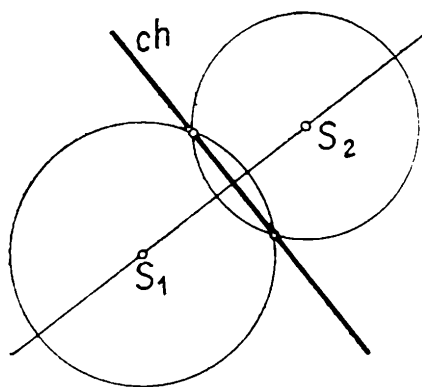
$$z\bar{z} + \bar{\beta}_1 z + \beta_1 \bar{z} + C_1 = 0,$$

$$z\bar{z} + \bar{\beta}_2 z + \beta_2 \bar{z} + C_2 = 0;$$

β_1 je tedy různé od β_2 .



Obr. 2



Obr. 3

Bod (w) , který má stejnou mocnost k oběma kružnicím, vyhovuje rovnici

$$(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)w + (\beta_1 - \beta_2)\bar{w} + C_1 - C_2 = 0. \quad (7)$$

Všechny takové body (w) s požadovanou vlastností leží tedy na přímce ch (obr. 3), tzv. *chordála daných kružnic*.³⁾

Pro soustředné kružnice chordála neexistuje.

Mají-li obě kružnice společné (reálné) body, pak chordála (7) těmito body nutně prochází (neboť každý z nich má mocnost rovnou nule k oběma daným kružnicím).

Vztah (6) dává možnost konstrukce chordály při neprotínajících se kružnicích. Sestrojíme kružnici, jejíž body mají touž (vhodně) zvolenou mocnost k první kružnici, a obdobnou kružnici s body o této mocnosti ke druhé kružnici. Vhodnost volby čísla k je v tom, že chceme, aby se takto sestavené kružnice protínaly, neboť pak spojnice obou jejich průsečíků je hledaná chordála.

3) Uvažujme teď tři nesoustředné kružnice, jejichž středy neleží také v téže přímce, s rovnicemi

$$z\bar{z} + \bar{\beta}_i z + \beta_i \bar{z} + C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

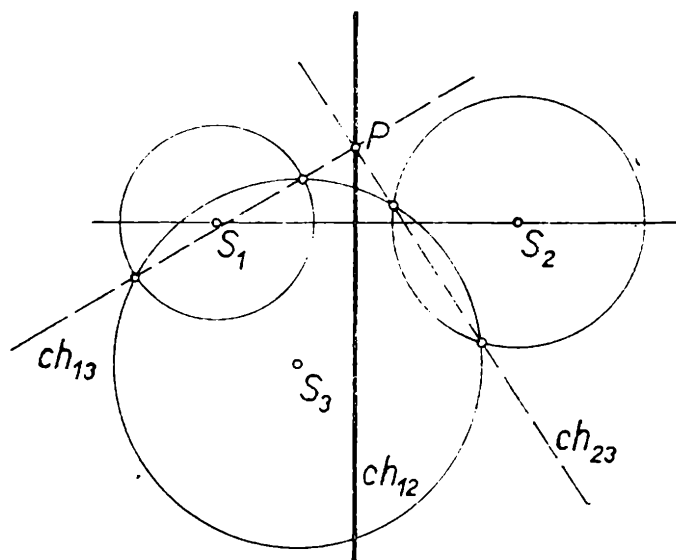
kde proto $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \beta_1$.

Vždy dvě dvojice z uvažovaných tří kružnic mají společnou chordálu; rovnice těchto tří chordál jsou

$$(\bar{\beta}_i - \bar{\beta}_k)z + (\beta_i - \beta_k)\bar{z} + C_i - C_k = 0,$$

$$i, k = 1, 2, 3; i \neq k.$$

³⁾ Tato přímka je kolmá na spojnici středů obou kružnic. Rovnice této spojnice je $(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)w - (\beta_1 - \beta_2)\bar{w} + C_1 - C_2 = 0$ a odtud již plyne vztah pro dvě k sobě kolmé přímky; viz např. některý z obou článků uváděných v pozn.²⁾.



Obr. 4

Vzhledem k předpokladu mají první dvě chordály společný bod a tímto bodem nutně prochází i třetí chordála (obr. 4). Tento společný bod nazýváme *chordálový* (někdy též *potenční*) *střed*.

V případě, že by středy uvažovaných kružnic ležely na téže přímce, pak jsou všechny tři chordály rovnoběžné a chordálový střed neexistuje. Obráceně, jsou-li všechny tři chordály rovnoběžné, pak středy uvažovaných kružnic jsou od sebe různé a leží na jedné přímce.

4) Úvahy o mocnosti bodu ke kružnici ukončíme dvěma větami:

Věta 1: *Geometrické místo bodů, jejichž rozdíl mocností vzhledem k dvěma daným kružnicím je konstantní a roven p , je přímka.*

Důkaz plyne z vyjádření tohoto rozdílu, který dostáváme ve tvaru

$$(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)w + (\beta_1 - \beta_2)\bar{w} + C_1 - C_2 - p = 0.$$

Zřejmě pro $p = 0$ dostáváme chordálu obou daných kružnic.

Věta 2: *Geometrické místo bodů, jejichž poměr mocností ke dvěma daným kružnicím je konstantní a roven p , je kružnice.*

Důkaz plyne z vyjádření tohoto poměru, kdy jako výsledek obdržíme

$$(1 - p)w\bar{w} + (\bar{\beta}_1 - p\bar{\beta}_2)w + (\beta_1 - p\beta_2)\bar{w} + C_1 - pC_2 = 0.$$

V tomto případě pro $p = 1$ dostáváme zase chordálu.

Je vidět, že první věta je zobecněním věty o přímce jako geometrickém místě bodů, jejichž rozdíl vzdáleností od dvou pevných bodů je konstantní, druhá pak zobecněním tzv. Apolloniovy kružnice jako geometrického místa bodů, které mají od dvou pevných bodů stálý poměr vzdáleností (různý od 1).

fyzika

Jedna metóda merania rýchlosti zvuku v pevných látkach

RNDr. ONDREJ PÖSS – ANNA ŠTRBOVÁ, Bratislava

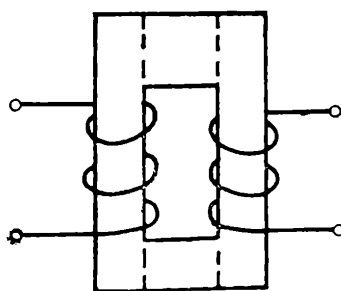
Mnohí z vás sa už určite zamýšľali nad tým, ako sa meria rýchlosť zvuku v pevných látkach. Jedným zo spôsobov merania je *Kundtova metóda*. Tu sa upevnená tyč pozdĺžne rozkmitá a kmitanie konca tyče sa prenáša na vzduchový stĺpec v uzavretej trubici. Ak do trubice nasypeme jemné korkové piliny, potom sa piliny zhromaždia v uzloch. Pre rýchlosť šírenia zvuku v tyči c platí:

$$c = \frac{2l}{\lambda} c_v,$$

kde l je dĺžka tyče, λ je vlnová dĺžka zvuku vo vzduchu a c_v je rýchlosť zvuku vo vzduchu.

Vlnovú dĺžku vo vzduchu λ určíme tak, že odmeriame vzdialenosť dvoch susedných zhlukov pilín (dvoch uzlov) v trubici. Táto vzdialenosť je rovná polvlně.

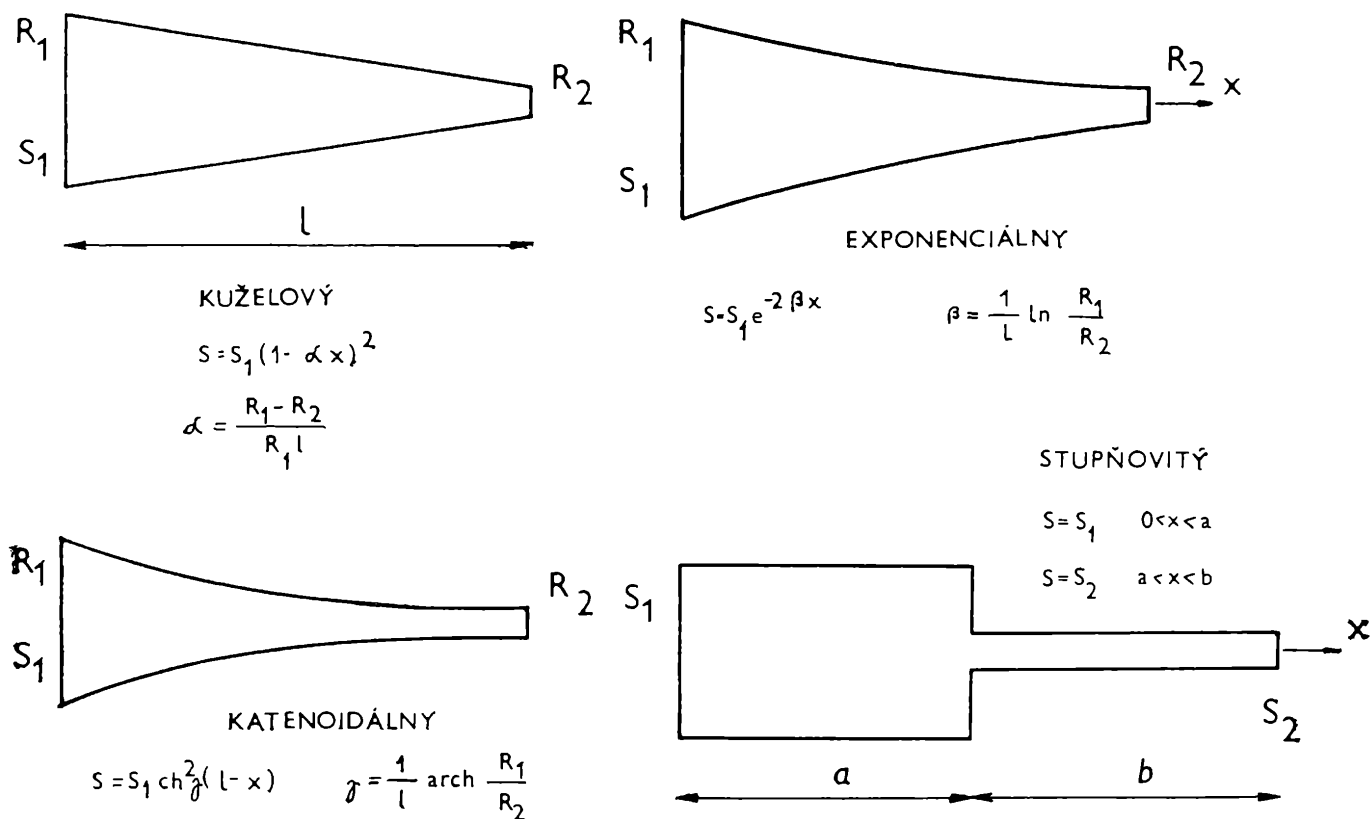
Použitím moderných zariadení a prístrojov je možné merať rýchlosť šírenia zvuku v pevných látkach aj inými metódami. Jednou z takýchto



Obr. 1

metód je aj metóda stojatého ultrazvukového vlnenia. Pri tejto metóde sa môže použiť ultrazvukový generátor UG—252 a magnetostrikčný menič ako zdroj ultrazvuku.

Ultrazvukový generátor UG—252 bol vyvinutý Výskumným ústavom mechanizácie a automatizácie v Novom Meste nad Váhom. UG—252 je elektrónkový generátor určený k napájaniu magnetostrikčných meničov s pracovnou frekvenciou v pásme 20 kHz. Používa sa hlavne na napájanie malých čistiacich a obrábacích ultrazvukových zariadení.



Obr. 2

K ultrazvukovému generátoru sa pripája magnetostrikčný menič ako zdroj ultrazvuku. Na čom sa zakladá jeho činnosť? Vplyvom magnetického poľa mnohé kovy a zliatiny menia svoje rozmery. Tento jav sa nazýva *magnetostrikciou*. Medzi najznámejšie magnetostrikčné materiály patria železo, kobalt, nikel a ich zliatiny. Najjednoduchší typ magnetostrikčného meniča je feromagnetická tyčka, na ktorej je navinuté budiace vinutie. Ak týmto vinutím prechádza striedavý prúd s frekvenciou f , vytvorí sa v tyčke striedavé magnetické pole, v dôsledku čoho bude tyčka kmitať s frekvenciou $2f$. Pre vyššiu účinnosť je možné spolu so striedavým prúdom privádzať aj prúd jednosmerný, ktorým sa tyčka predmagnetizuje.

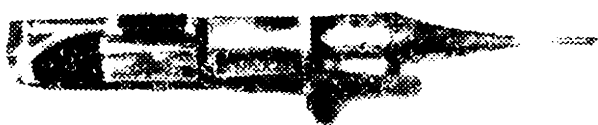
Nevýhodou jednotyčkových meničov je, že magnetické indukčné čiary sa uzatvárajú cez vzduch po dlhej dráhe, tým vznikne magnetický rozptyl a demagnetizácia. Tento nedostatok čiastočne odstraňuje okienkový typ meniča, ktorý je zložený z dvoch tyčiek na koncoch pevne spojených vložkou z toho istého materiálu (obr. 1). Budiace cievky sú navinuté na oboch bočných tyčkách. Okienkový typ magnetostrikčného meniča má najširšie uplatnenie vo výkonných ultrazvukových zariadeniach, lebo pri pomerne veľkej koncovej ploche umožňuje vyžiariť veľkú energiu. Ak požadujeme od meniča ešte väčšiu vyžiarенú energiu, pristupujeme ku konštrukcii viacokienkového meniča.

Z hľadiska praktického použitia je potrebné vhodne vyriešiť uchytenie

meniča na vonkajšiu konštrukciu. V praxi sa najčastejšie postupuje tak, že na menič sa upevní polvlnový rezonátor a tento sa prichytí v uzlovej rovine. Taktiež je potrebné venovať pozornosť spoju medzi meničom a rezonátorom, pretože tento spoj je značne tepelne i mechanicky namáhaný.

Na koncentráciu energie ultrazvuku používame koncentrátory. Typ koncentratora je daný priebehom zmeny pričného priemeru pozdĺž koncentratora. Typy koncentrátorov sú na obr. 2.

Magnetostrikčný menič s napájkovaným katenoidálnym koncentrátorom je na obr. 3. Ak na koniec koncentratora pevne oprieme vzorku, touto vzorkou postupuje intenzívne pozdĺžne ultrazvukové vlnenie. Pri



Obr. 3

nenulovej absorpcii vzorky sa so vzrastajúcou vzdialenosťou od koncentratora znižuje intenzita vlnenia, pričom absorbovaná energia sa mení na tepelnú energiu. Teplota vzorky, meraná v smere šírenia ultrazvuku, vykazuje maximum a poloha tohto maxima závisí od súčiniteľa absorpcie.

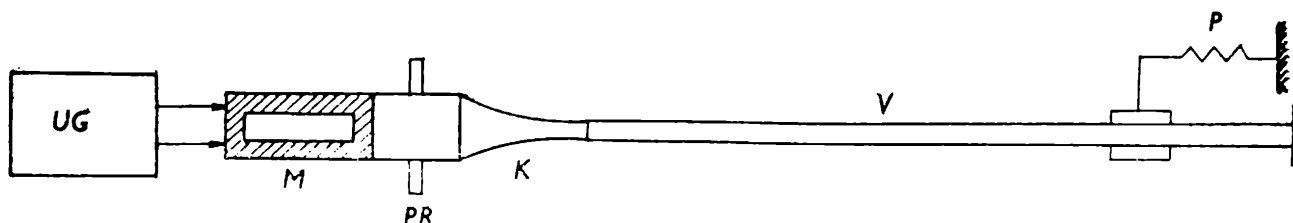
Pri odraze ultrazvuku od konca vzorky vznikne vo vzorke pri vhodnej frekvencii stojaté vlnenie. Pre rozloženie teploty pozdĺž vzorky platí vzťah.

$$T(x, \lambda) = T_{\max} \cos \frac{4\pi x}{\lambda},$$

kde $T_{\max}$ je maximálna teplota, λ je vlnová dĺžka ultrazvuku a x je vzdialenosť od konca koncentratora.

Z toho vzťahu vyplýva, že rozloženie teploty pozdĺž vzorky je periodické, pričom vzdialenosť susedných maxím je $\frac{\lambda}{2}$. To ale znamená, že ak určíme polohy teplotných maxím, môžeme určiť vlnovú dĺžku ultrazvuku vo vzorke. Pri známej frekvencii môžeme určiť rýchlosť ultrazvuku vo vzorke podľa vzťahu $c = \lambda \cdot f$.

Zostava merania s blokovou schémou je na obr. 4. Ako vzorky možno použiť smrekové a bukové drevo, plexisklo a texgumoid v tvare valca



Obr. 4

o priemere $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ a o dĺžke $0,35 \text{ m}$. Výber vzoriek je podmienený dostatočne veľkým súčiniteľom absorpcie.

Po zapnutí ultrazvukového generátora nastavíme rezonančnú frekvenciu. O rozložení kmitní sa môžeme presvedčiť aj hmatom, prípadne mikroskopom; vo vzdialenosti polovičnej vlnovej dĺžky sú kmitne. Medzi nimi sú uzly, v ktorých je výchylka nulová. Najväčšia teplota je v uzloch, najmenšia v kmitniach. Ak pred meraním namočíme vzorky do roztopeného parafínu, pri meraní sa po určitom čase začne parafín v uzloch topiť. Takto môžeme určiť vzdialenosť niekoľkých uzlov a z tejto vzdialenosti vypočítať vlnovú dĺžku ultrazvuku. Výsledky merania sú v tabuľke:

Vzorka	$f[\text{kHz}]$	$\lambda [\text{m}]$	$c [\text{ms}^{-1}]$
Smrekové drevo	19,1	0,30	5730
Bukové drevo	19,7	0,24	4728
Texgumoid	18,6	0,14	2604
Plexisklo	16,8	0,13	2184

Rýchlosť šírenia zvuku v dreve závisí od mernej hmotnosti dreva, od jeho vlhkosti a aj od toho, či je vzorka urobená pozdĺž vlákien, alebo kolmo na vlákna. Štátny výskumný ústav drevársky udáva hodnoty $5925 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pre smrekové drevo mernej hmotnosti $453 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a vlhkosti 11% , pre bukové drevo $4752 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pri mernej hmotnosti $701 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a vlhkosti 11% .

Ak máme k dispozícii potrebné zariadenia, môžeme si pripraviť meranie podľa blokovej schémy na obr. 4. Pri svojich meraniach môžete použiť, tak ako my, rôzne druhy dreva a umelých látok.

LITERATÚRA:

A. ŠTRBA: Fyzikálny časopis, 20, 1 56 (1970)

L. BERGMAN: Ultrazvuk i ego primenenie v nauke i technike, III, Moskva 1957

astronomie

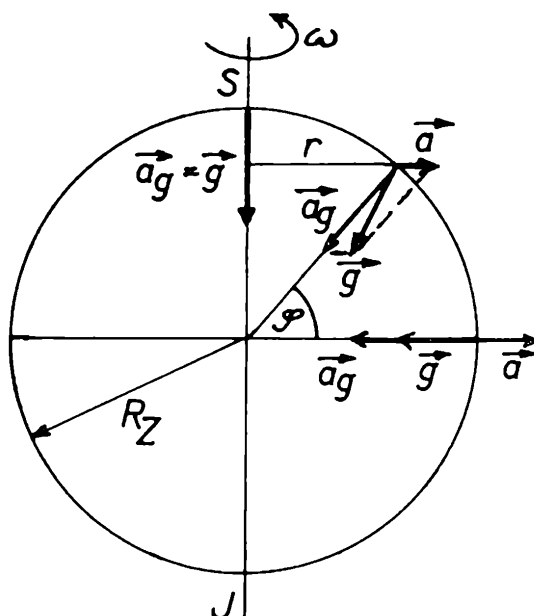
Planeta Země

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ – RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

O Zemi obvykle uvažujeme jako o kouli, jejíž poloměr je 6371 km; koule s tímto poloměrem má stejný objem i povrch jako Země. Přesná měření ukázala, že ve skutečnosti tvar Země není přesně kulový; má tvar tzv. *geoidu*, který je definován jako myšlená plocha, která je v libovolném místě zemského povrchu kolmá k tíhovému zrychlení. Povrchem se při této definici ovšem rozumí nikoliv skutečný povrch Země s pohořími, dolinami atd., ale ten povrch, který by tvořila klidná hladina moře (bez změn, působených větrem, přílivy a odlivy). Přesně vzato je geoid nepravidelné těleso, s dostatečnou přesností jej však lze nahradit *rotačním elipsoidem* s velkou poloosou délky 6378,388 km a malou poloosou délky 6356,912 km. Odchyłky geoidu od tohoto rotačního zemského elipsoidu nepřesahují, měřeno ve svislém směru, 150 m. Malá poloosa zemského elipsoidu se obvykle označuje jako polární poloměr Země, velká poloosa pak jako rovníkový poloměr. Rozdíl délek obou poloos je 21,476 km, což je ve srovnání s rozměry Země poměrně malá hodnota; zploštění Země, definované jako rozdíl délek poloos dělený délkou velké poloosy, je jen 0,003 367. Kdybychom si představili Zemi jako těleso s rovníkovým průměrem 1 metr, byl by polární průměr kratší jen o 3,367 mm. Nejvyšší hora na Zemi, Mount Everest, by na tomto modelu Země měla výšku jen 0,7 mm.

Velmi důležitou fyzikální charakteristikou Země je její *hmotnost*, neboť pomocí hmotnosti Země se vyjadřují hmotnosti jiných planet sluneční soustavy. Pro hmotnost Země byla na základě Newtonova gravitačního zákona určena hodnota $M_Z = 5,983 \cdot 10^{24}$ kg. Z hmotnosti a rozměrů Země můžeme určit její *střední hustotu*: $\bar{\rho}_Z = 5522 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Skutečná hustota v zemském tělese je v různých místech různá; obecně lze říci, že roste s rostoucí hloubkou pod povrchem Země. V zemském jádru, které má poloměr asi 650 km a v němž je teplota látky kolem 3500 °C, dosahuje hustota hodnoty 127 000 kg·m⁻³, v zemské kůře, tj. v nejhornější vrstvě Země, je hustota jen 2600 až 2800 kg·m⁻³.

Z dalších fyzikálních charakteristik Země si všimněme ještě tíhového zrychlení. *Tíhové zrychlení* na povrchu Země je výslednicí gravitačního zrychlení, které je dáno Newtonovým gravitačním zákonem, a zrychlení vznikajícího vlivem zemské rotace. *Gravitační zrychlení* směřuje ke stře-



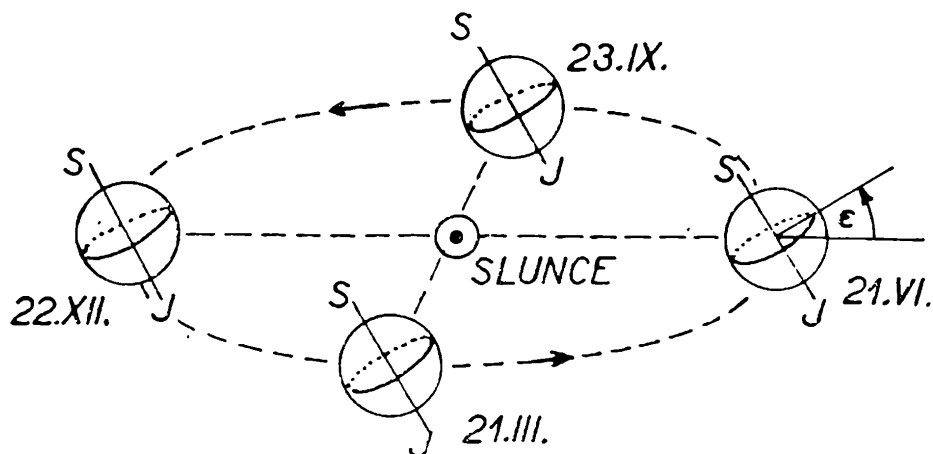
Obr. 1. Gravitační a tíhové zrychlení na povrchu Země

du Země. Kdyby byla Země homogenní koule, mělo by na všech místech jejího povrchu tutéž hodnotu; vlivem zploštění Země a také vlivem nerovnoměrného rozložení látky v blízkosti povrchu Země (místa s větší hustotou, horské masivy) je velikost gravitačního zrychlení na různých místech povrchu Země různá, odchylky však nejsou příliš velké. Abychom ukázali podíl zemské rotace na tíhovém zrychlení, předpokládejme, že Země má tvar koule o poloměru R_Z a její gravitační pole je centrální, tj. symetrické vzhledem ke středu Země. Gravitační konstanta nechť je κ .

Gravitační zrychlení

$$a_g = \frac{\kappa M_Z}{R_Z^2}$$

směřuje ke středu Země. Země rotuje kolem vlastní osy úhlovou rychlostí $\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; ve vztažné soustavě spojené s povrchem Země působí na těleso na povrchu Země setrvačná (tzv. odstředivá) síla $F = m\omega^2 r$, orientovaná od osy rotace, a zrychlení, které tato síla tělesu uděluje, je $a = \omega^2 r$ (obr. 1). Vzdálenost r daného místa na povrchu Země od osy otáčení závisí na zeměpisné šířce vztahem $r = R_Z \cos \varphi$, zrychlení, které vzniká rotací Země, má tedy velikost $a = \omega^2 R_Z \cos \varphi$. Tíhové zrychlení je dáno vektorovým součtem gravitačního zrychlení a zrychlení vznikajícího vlivem zemské rotace: $\mathbf{g} = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}$. Je zřejmé, že gravitační zrychlení je totožné s tíhovým zrychlením jen na zemských pólech, kde je $a = 0$, $\mathbf{g} = \mathbf{a}_g$. Pro jiná místa zemského povrchu se tíhové zrychlení liší od zrychlení gravitačního jak co do směru, tak co do velikosti. Tíhové zrychlení se zmenšuje směrem od pólů k rovníku. Na



Obr. 2. Sklon zemské osy a roviny rovníku vzhledem k rovině ekliptiky

rovníku směřuje tíhové zrychlení opět ke středu Země, rozdíl velikostí gravitačního a tíhového zrychlení je však na rovníku největší, neboť zrychlení $\mathbf{a}$ má opačnou orientaci vzhledem ke gravitačnímu zrychlení a nabývá největší velikosti $a = \omega^2 R_Z$.

Vlivem zploštění Země a rotace Země kolem osy se tíhové zrychlení mění od hodnoty $9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ na zemských pólech do $9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ na zemském rovníku. Tíhové zrychlení závisí ovšem také na nadmořské výšce daného místa; s rostoucí nadmořskou výškou se zmenšuje.

Země koná dva základní pohyby: otáčí se kolem své osy a obíhá kolem Slunce. Země *rotuje* kolem své osy směrem od západu k východu a vzhledem ke hvězdám má periodu rotace $23^{\text{h}} 56^{\text{min}} 04^{\text{s}}$, což je *hvězdný* neboli *siderický den*. Průměrná doba jedné otočky vzhledem ke Slunci je 24 hodin. Rotace Země kolem osy byla v minulosti považována za zcela rovnoměrnou a používalo se jí k přesnému měření času a k definici časové jednotky. Přesná měření však ukázala, že rotace Země není dokonale pravidelná. Bylo zjištěno, že se rotace postupně zpomaluje asi o jednu tisícinu sekundy za století, o čemž svědčí také staré záznamy o pozorování zatmění Slunce, zákrytů kvězd Měsícem apod.; kromě tohoto prodlužování dne byly zjištěny změny periodického rázu, z nichž hlavní má amplitudu 0,06 s a periodu 1 rok, vyskytují se také změny nepravidelné. Na změnách zemské rotace se podílejí mořské slapy (příliv a odliv), meteorologické procesy a také přesuny látky v zemském nitru.

Koncem 19. století bylo zjištěno, že se zeměpisné šířky pevných míst na povrchu Země neustále nepatrně mění, což lze vysvětlit jen změnami v poloze rotační osy Země v zemském tělese, tj. změnou polohy světových pólů. Měření ukazují, že pól koná dva pohyby: jeden po elipse s poloosami 7,5 m a 2,5 m, jejíž poloha i tvar se však neustále mění, druhý po kružnici s poloměrem asi 8 m. Perioda prvního pohybu je 1 rok, dru-

hého asi 14 měsíců. Póly vykonávají tedy nepravidelný pohyb; od střední polohy se však nevzdalují více než o 10 m.

Druhým základním pohybem Země je její obíhání kolem Slunce. Země *obíhá* kolem Slunce po eliptické dráze, jejíž velká poloosa má délku $a = 149,6 \cdot 10^6$ km. Numerická excentricita dráhy je $e = 0,016\,73$, dráha se tedy příliš neliší od kružnice; vzdálenost Země od Slunce se mění od $147,1 \cdot 10^6$ km (Země je v perihéliu) do $152,1 \cdot 10^6$ km (Země je v aféliu). Vlivem excentricity zemské dráhy se poněkud mění také okamžitá rychlost Země na její dráze kolem Slunce. Průměrná rychlost je $29,77 \text{ km.s}^{-1}$, rychlost v perihéliu je $29,271 \text{ km.s}^{-1}$, v aféliu $30,276 \text{ km.s}^{-1}$. Země obíhá kolem Slunce v témž směru, v němž se otáčí kolem své osy; tento směr se v astronomii nazývá *přímý* (direktní) směr.

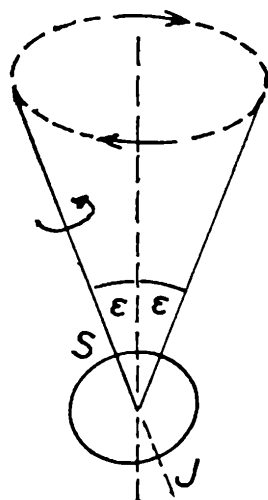
Rovina, v níž obíhá Země kolem Slunce, se nazývá rovina ekliptiky; vzhledem k této rovině se měří sklony drah planet a ostatních těles ve sluneční soustavě. Rovina ekliptiky svírá s rovinou zemského rovníku úhel $\varepsilon = 23^\circ 27'$, zemská osa tedy svírá s rovinou ekliptiky úhel $66^\circ 33'$ (obr. 2). Připomeňme, že sklon zemské osy vzhledem k rovině ekliptiky je příčinou střídání ročních období: v době, kdy je ke Slunci přikloněn severní pól, je na severní polokouli léto, na jižní polokouli zima, a v době, kdy je ke Slunci přikloněn jižní pól, je na severní polokouli zima, na jižní léto. Protože je Země v perihéliu začátkem ledna, v aféliu začátkem července, jsou rozdíly mezi průměrnými zimními a letními teplotami poněkud větší na jižní polokouli než na severní. Vzhledem k tomu, že se Země pohybuje v perihéliu rychleji než v aféliu, trvá na severní polokouli zimní „půlrok“ (podzim a zima) jen 179 dní, letní „půlrok“ (jaro a léto) 186 dní, tedy o týden déle; na jižní polokouli je tomu naopak.

Úhel, který svírá rovina zemského rovníku s rovinou ekliptiky, se působením ostatních planet sluneční soustavy s časem poněkud mění — v současné době se zmenšuje asi o $0,5''$ za rok. V periodě 40 tisíc roků se sklon ekliptiky vzhledem k rovině rovníku mění v mezích od $21^\circ 55'$ do $24^\circ 18'$; tyto změny mohou mít podstatný vliv na dlouhodobé změny zemského podnebí.

Podobně jako u ostatních planet mění se i u Země poloha dráhy v rovině ekliptiky. Spojnice perihélia a afélia neboli *přímka apsid* se postupně stáčí v přímém směru, tj. ve směru oběhu Země kolem Slunce, a o 360° se otočí za 21 000 roků. Během této doby se ocitá Země v perihéliu v různých ročních obdobích. V současné době je to 2. ledna, v roce 4000 před naším letopočtem procházela Země perihéliem 21. září, v roce 1250 našeho letopočtu 21. prosince a v roce 11 900 bude Země v perihéliu 21. června (první letní den).

Dalším pohybem, který koná Země, je *precesní pohyb*. Země má tvar elipsoidu, jehož osa je skloněna vzhledem k rovině ekliptiky. Vlivem

gravitačního působení Slunce, Měsíce i ostatních planet vzniká precesní pohyb Země (obr. 3), osa Země opisuje v prostoru plášť kužele podobně jako osa roztočeného setrvačníku, který postavíme šikmo na vodorovnou podložku (u setrvačníku způsobuje precesi přitažlivost Země). Důsledkem precesního pohybu zemské osy je, že se mění poloha světového pólu mezi hvězdami, zemská osa směřuje postupně k různým kvězdám. Perioda této lunisolární precese je asi 26 000 roků (tzv. platónský rok). Plášť kužele, který opisuje zemská osa, svírá s osou kužele úhel rovný sklonu ekliptiky, tj. asi $23,5^\circ$. V současné době směřuje zemská osa ke hvězdě α v souhvězdí Malé medvědice (Malého vozu) a tato hvězda je známá pod názvem Polárka. Kolem r. 3000 před naším letopočtem byla polárkou hvězda Thuban (α v souhvězdí Draka), v roce 4000 jí bude hvězda Alrai (γ v souhvězdí Cefeje) a v roce 14 000 bude zemská osa směřovat do blízkosti Vegy (α v souhvězdí Lyry). Vlivem precese se měn



Obr. 3. Precese zemské osy

poloha přímky, v níž se protínají rovina světového rovníku s rovinou ekliptiky. Tato přímka se stáčí ve zpětném směru (proti oběhu Země kolem Slunce) s periodou rovnou periodě precese a za rok se stočí o $50,2''$. O tentýž úhel se posunou za rok jarní a podzimní bod (průsečíky ekliptiky a světového rovníku na sféře).

Přes precesní pohyb zemské osy se překládá periodické kolísání zemské osy — *nutace*. Příčinou nutace je především skutečnost, že dráha Měsíce neleží v rovině ekliptiky. Nutace má periodu 18,7 roku a amplitudu $9,2''$.

Doba, za kterou oběhne Země kolem Slunce, se nazývá *rok*. Tento pojem je však třeba upřesnit — závisí totiž na tom, ke kterému základnímu bodu vztahujeme oběh Země kolem Slunce. Oběžná doba Země vzhledem ke hvězdám je $365^d\ 06^h\ 09^{\min}\ 9,5^s$ a nazývá se *siderický* neboli

hvězdný rok. Pro život na Zemi má největší význam tropický rok, z něhož je odvozován kalendářní rok (též občanský rok) a během něhož se vystřídají roční období. *Tropický rok* je definován jako doba mezi dvěma po sobě následujícími průchody Slunce jarním bodem. Vlivem precese zemské osy se jarní bod posouvá ve zpětném směru, tropický rok je tedy asi o 20 minut kratší než rok siderický — trvá $365^{\text{d}} 05^{\text{h}} 48^{\text{min}} 46^{\text{s}}$.

Doba mezi dvěma po sobě následujícími průchody Země perihéliem se nazývá *anomalistický rok*. Protože se perihélium posouvá v přímém směru, je anomalistický rok o něco delší než rok siderický, jeho trvání je $365^{\text{d}} 06^{\text{h}} 13^{\text{min}} 53^{\text{s}}$.

Při sledování pohybu Země obvykle předpokládáme, že Slunce je v klidu a kolem něho obíhá Země. Ve skutečnosti se Země pohybuje kolem hmotného středu sluneční soustavy — tento střed však leží v blízkosti středu Slunce, neboť ve Slunci je soustředěno 99 % hmotnosti sluneční soustavy.

Podobně předpokládáme, že Měsíc obíhá kolem Země, ve skutečnosti však obě tělesa obíhají kolem společného hmotného středu. Hmotnost Měsíce je poměrně velká (soustava Země-Měsíc se někdy označuje jako dvojplaneta) a činí $1/81$ hmotnosti Země, hmotný střed je ve vzdálenosti 4680 km od středu Země. Země tedy opisuje dráhu o poloměru 4680 km s periodou 27,3 dne (siderický měsíc) kolem hmotného středu soustavy Země-Měsíc a celá tato soustava obíhá kolem Slunce.

Dalším pohybem, který Země koná spolu se Sluncem s celou sluneční soustavou, je pohyb kolem jádra Galaxie. V současné době je rychlost tohoto pohybu $247 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, Slunce se pohybuje kolem jádra Galaxie po složité dráze, podobné elipse. Bylo vypočteno, že jeden oběh vykoná asi za 200 miliónů roků. Za 12 miliónů roků má Slunce projít perigalaktikem, tj. bodem na své dráze, který leží nejbližše středu Galaxie.

Naše Galaxie je členem místní soustavy galaxií, do níž patří také spirální galaxie v Andromedě M 31, obě Magellanova mračna a další nepravidelné a eliptické galaxie — střed této místní soustavy galaxií leží ve směru souhvězdí Panny. Výpočty z poslední doby ukazují, že se naše Galaxie (a tedy i Slunce se Zemí a ostatními tělesy sluneční soustavy) pohybuje kolem centra místní soustavy galaxií rychlostí asi $500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, přičemž oběžná doba se odhaduje na 10^{11} roků. Místní soustava galaxií se nově nazývá Hypergalaxie, kromě ní bylo objeveno několik dalších hypergalaxií.

Pohyby Země se projevují ve zdánlivých pohybech kosmických těles na sféře, jako je zdánlivé denní otáčení oblohy, zdánlivý pohyb Slunce po ekliptice, periodické změny v poloze hvězd na sféře apod.; v mnoha případech se tyto zdánlivé pohyby skládají se skutečnými pohyby kosmických těles — příkladem je synodická oběžná doba Měsíce, dráhy planet mezi hvězdami aj. O těchto jevech pojednáme v dalších článcích.

Z dějin exaktních věd

História komplexných čísel

JOZEF KUŠNIER, Tvrdoší

Číslo je základným pojmom matematiky, a preto ho treba rozlišovať od pojmu cifra. Cifry sú totiž prostriedkom formálneho zápisu čísel.

Pojem čísla sa v histórii neustále vyvíjal. Za primitívne v tomto vývoji je nutné považovať prirodzené čísla. Zavedením operácií s prirodzenými číslami sa obor týchto čísel rozšíril na celé čísla, zavedením operácií s celými číslami sa obor týchto čísel rozširuje na racionálne čísla, ďalším rozšírením sú čísla reálne a konečne čísla komplexné. Komplexné čísla sú uzavreté voči všetkým základným početným operáciám.

Z historického hľadiska je možné povedať, že zlomky boli známe a počítalo sa s nimi už okolo r. 2000 p. n. l. u Egyptanov a Sumerov. Pythagorejci už okolo r. 500 p. n. l. poznali iracionálne čísla. Indovia, od ktorých pochádzajú znamienka, zaviedli nulu a záporné čísla.

Dejiny komplexných čísel uvádzajú názorné príklady ťažkostí, ktoré sa môžu vyskytnúť pri rozšírení dlho známych pojmov. Počítanie s „neobyčajnými“ číslami dávalo správne výsledky, ale teoretické podklady a systematická výstavba začínali až neskôr.

Prvý známy vstup imaginárnych koreňov do matematiky sa objavil na základe omylu u Heróna (v 1. st. p. n. l.) pri výpočte tupého štvorhranného ihlana na základe „násilného“ kroku vo výraze $\sqrt{81 - 144}$. Herón to jednoducho počítal takto: $\sqrt{81 - 144} = \sqrt{144 - 81} = \sqrt{63}$

Indickí matematici nepracovali s komplexnými číslami, aj keď sa tieto formálne pri výskume priamo naskytali. *Mahavíra* okolo r. 830 n. l. napísal: „Existuje v prírode vlastnosť, že záporná hodnota nie je štvorcom čísla.“ *Bhaskara* (nar. 1114) napísal: „Zo zápornej hodnoty nie je druhá odmocnina, lebo táto nie je štvorcom.“

Mienky *Mahavíra* a *Bhaskara* boli záverečným úsudkom skorších indických matematikov k odmocninám zo záporných čísel.

Islamským matematikom teória imaginárnych hodnôt bola úplne neznáma a nenarábali s nimi, pretože prebrali metódy z gréckych kultúrnych kruhov, ktoré vystupovanie komplexných riešení vylučovali.

Európsky stredovek tiež nič nepriniesol pre teóriu komplexných čísel. *Fibonacci* (1170? — 1250?), *N. Chuguet* (okolo 1500) a *Paciolo* (1445? až 1515), ktorí patrili medzi najznámejšie osobnosti na poli matematiky,

komplexné riešenia pri rovniciach prostredníctvom vedľajších podmienok vylučovali. Tú časť svojho diela, ktorá je venovaná algebraickým rovniciam, končil Pacciolo úvahou o riešiteľnosti kubických rovníc typu

$$x^3 + ax = b, \quad x^3 + b = ax;$$

(a, b sú kladné): „*Umenie algebry nám ešte nedalo metódu práve tak, ako ešte nemáme metódu na kvadratúru kruhu*“.

Prvý, komu sa podarilo rozriešiť jeden z typov kúbickej rovnice

$$x^3 + ax = b; \quad (a, b > 0),$$

bol profesor boloňskej univerzity *Scipio del Ferro* (1465 — 1526). Del Ferro nepublikoval svoje práce, ale poskytol ich svojmu žiakovi *A. M. Fiorovi*, ktorý tieto s úspechom používal na matematických turnajoch. Na jednom takomto turnaji sa Fior stretol so samoukom *Niccolom Tartagliom* (1500? — 1557). Tartaglio pred turnajom nezávisle odvodil del Ferrove výsledky, čo mu umožnilo vyriešiť všetky úlohy postavené Fiorom, ktorý na druhej strane bol natoľko zarazený, že nevyriešil príklady stanovené Tartagliom. Deň po turnaji Tartaglia rozriešil aj rovnicu $x^3 = ax + b$.

Ešte v roku 1539 *H. Cardáno* (pracoval hlavne v medicíne) vo svojom diele *Practica arithmetica* pokladal riešenia kubických rovníc za nemožné, pretože nemali podľa jeho mienky geometrickú interpretáciu. No v tom istom roku si vyžiadal od Tartaglia jeho riešenia Cardáno (1501 až 1576) s tým, že ich nebude publikovať. Tartaglio mu ich oznámil vo forme 25riadkovej básne. Po preformulovaní a dokázaní tohto pravidla sa Cardáno cítil oprávnený ho publikovať v diele *Ars magna sive regulis algebraicis* v roku 1545, pričom nezabudol spomenúť Tartagliovu prioritu.

V diele riešil systém rovníc: $10 = a + b$

$$40 = a \cdot b$$

a našiel riešenie v tvare $5 + \sqrt{-15}$, $5 - \sqrt{-15}$

Po dosadení zistil, že výsledok formálne platí. Sám Cardáno ich pokladal za bezcenné a zbytočné.

V Cardánových pozostalostiach sa našla práca, vydaná v r. 1663 pod názvom *Sermo de plus et minus* (pojednanie o plus a mínus), ktorá jasne ukázala, odkiaľ čerpal Cardáno svoje nesprávne predstavy.

Prvým matematikom, ktorý správne ocenil použitie imaginárnych veličín, bol *Rafael Bombeli* (1530? — 1572?). Bol synom obchodníka a pracoval ako inžinier. Okolo r. 1560 píše svoje hlavné dielo *L'Algebra parte maggiore dell'arithmetica*, vydané v Bologni 1572. V tomto diele položil základy teórie komplexných čísel tým, že zaviedol násobenie imaginárnych a reálnych veličín. Mal svoju vlastnú symboliku, napr.:

$$p \text{ di } m \cdot 2 \quad \text{pre } + 2i, \quad m \cdot \text{dim} \cdot 2 \quad \text{pre } - 2i$$

a pravidlá pre násobenie s nimi: napr.

pin 'nia pin 'di meno, fa pin 'di meno,

čo znamená v našom zápise

$$(+1) \cdot (+i) = +i.$$

Bombeli vyriešil mnoho príkladov s komplexnými číslami, napr.

$$\sqrt[3]{4 - i\sqrt{6}} \quad \sqrt[3]{2 - i\sqrt{5}}$$

delil ich, odmocňoval a pod.

Bombeliho algebra významne vplývala na *Leibniza*, ktorý sa často na neho odvolával, a *Eulera*, ktorý ho často citoval.

Bombelim sa končí „*pokusná doba*“ pojednania o imaginárnych veličinách. *F. Viète* (1540 — 1603) zaviedol v algebre symbolický počet tým, že začal používať špeciálne označenia pomocou písmen pre premenné a pre koeficienty.

R. Descartes (1596 — 1650) vo svojom diele *Geometrii* (1637) konštatuje: „Korene rovnice nie sú vždy len reálne čísla, ale niekedy aj domnelé čísla-soumelent imaginaires. Pri každej rovnici sa vyskytuje len toľko reálnych (imaginárnych) koreňov, akého stupňa je rovnica.“

A. Girard (1595 — 1633), ktorý komplexné hodnoty nazýval solutions enveloppées, videl ich zmysel len v zachovaní vo všeobecných vyjadreniach. V r. 1629 dokázal, že rovnica má toľko riešení, koľkého je stupňa (základná veta algebry).

Vedecký pokrok v skúmaní komplexných čísel zaznamenala prvý raz doba matematiky, ktorá bola charakterizovaná prostredníctvom vyššej analýzy. Bol to najmä *Leibniz* (1646 — 1716), ktorý prvý najskôr „vstúpil na novoobjavenú oblasť“. Pri štúdiu Bombeliho algebry urobil *Leibniz* prekvapivý objav. Našiel, že platí:

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}} = \sqrt[3]{6}$$

a dokázal tým svoju neobyčajnú počtársku šikovnosť. Hoci *Lebniz* veľmi veľa počítal s komplexnými číslami, mal o nich svoju osobitnú predstavu. Hovoril: „Stali sa zázrakom analýzy, netvorom ideálneho sveta, dvojitém bytím, skoro niečo medzi bytím a nebytím.“

Takéto chápanie nebránilo *Lebnizovi*, aby od r. 1702 nepoužíval kompl. čísla v čo najširšej miere na integrovanie racionálnych funkcií použitím parciálnych zlomkov a pod. Popritom diskutoval o dôležitej otázke, či každý polynom s reálnymi koeficientami je možné vyjadriť ako súčin činiteľov prvého a druhého stupňa a popieral túto otázku. (Argumentoval príkladom $x^4 + a^4$.)

V inej spojitosti diskutoval s *Johanom Bernoullim* (1667 — 1748) v rokoch 1712/13 o otázke, čo sa rozumie pod logaritmom záporných a ima-

ginárnych čísel, kde Leibniz správne tvrdil, že logaritmus záporných čísel je imaginárnym, ale nedomnieval sa, že by mohli byť viacvýznamové. V tejto otázke ako prvý predložil práce *L. Euler* (1701 — 1783), ktorý vyložil ich úplný obsah. Eulerovi spôsobovalo ťažkosti dokázať, čo si pod komplexnými číslami predstavuje. On sám dosiahol výrazných úspechov pri výskume pomocou komplexných čísel, a preto musel pochybnosti vo svojich predstavách objasniť. Dosiahol smerodajný pokrok v tom, že použil komplexné čísla na riešenie analytických problémov. Uvedieme niektoré výsledky:

- Formulácia vety, že každý polynom s reálnymi koeficientmi možno rozložiť na súčin činiteľov prvého a druhého stupňa (1742).
- Explicitný zápis *Moivreovej vety* (1748).
- Zavedenie známych formúl (okolo r. 1760)

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}); \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}).$$

Tieto výsledky získal pomocou porovnaní trigonometrických a exponenciálnych radov.

- ukázal, že $\ln x = c + (\varphi \pm 2\pi\lambda)i$, λ — prirodzené, platí, že x je vyjadrené v tvare:

$$x = e^c (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Logaritmy záporných alebo imaginárnych čísel sú teda úplne imaginárne, pretože logaritmus každého čísla má nekonečne mnoho hodnôt.

Svojimi prácami v teórii elementárnych funkcií komplexnej premennej vytvoril Euler ako prvý uzavretú teóriu analytických funkcií.

Pravidlá pre násobenie komplexných čísel prvý opísal *H. Kühn* (1690 — 1769).

Nové dejiny komplexných čísel začali s *C. F. Gaussom* (1777 — 1855), a síce pri skúmaní základnej vety algebry. Táto veta už bola známa spomínanému *A. Girargovi*, ktorý ju formuloval v r. 1629 — *D'Alambert* sa pokúsil o jej prvý dôkaz. Sám Gauss podal ešte tri dôkazy v r. 1815, 1816, 1849. V dôkaze z r. 1815 sa Gauss snažil obmedziť na minimálne použitie analýzy.

Až hodne neskôršie sa Gauss vyjadril ku komplexným číslam a poznamenal: „Hodnota udáva veličinu, ktorá je zapísaná v tvare $a + bi$, kde a, b sú reálne čísla, i nahradzuje tvar $\sqrt{-1}$ (Toto označenie pochádza od Eulera.) Komplexné číslo je celé (Gaussovo celé číslo) ak a, b sú súčasne celé čísla. Komplexné čísla teda nie sú v rozpore s reálnymi, ale ich obsahujú ako špeciálny prípad.“

Gauss podal podrobný výklad k. č. a na ich kritiku argumentoval, že aj záporné čísla a zlomky boli nedôverčivo prijaté...

Gaussovými prácami dostali komplexné čísla domové právo v matematike, ich existenčné oprávnenie dostatočne ukázala potreba napr. v teórii analytických funkcií. Zavedením komplexných čísel stal sa opis rovinných útvarov jednoduchý.

Veľmi ďalekosiahle boli stanoviská, ktoré vznikli spojením prác *C. Wessela* (1745 — 1818), *J. R. Arganda* (1768 — 1822) a Gaussa. Týkali sa hlavne geometrického zobrazenia a ich geometrického výkladu. Začala sa doba mimomatematickej aplikácie komplexných čísel.

Dôkazom toho je fakt, že koncom minulého storočia objavil americký elektrotechnik *O. Heaviside* (1850 — 1925) spôsob na riešenie úloh elektrotechniky. Jeho počet sa skoro ukázal ako modifikačné a silné zlepšenie „Symbolickej metódy“ Označujeme ho ako počet operátorov.

Použitá literatúra:

1. Dirk J. Struik — Dějiny matematiky, Praha 1963
2. Komentár pre učiteľov pre 3. roč. vyučovania na gymnáziach
3. Mathematik in der Schule — Über Anwendung der k. Zahlen, 5/77
4. Mathematik in der Schule — Zur Geschichte der k. Zahlen, 6/76

matematické zábavy

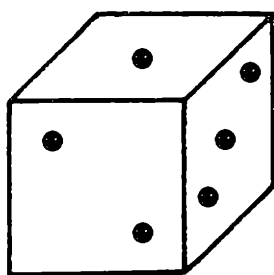
0 „stavbách“ z hracích kostek

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

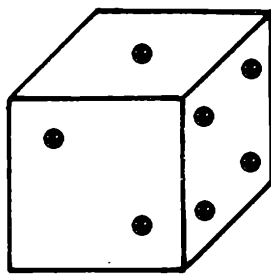
Hrací kostku měl každý ze čtenářů jistě mnohokrát v ruce. Používá se např. ve známé hře *Člověče, nezlob se*. Hrací kostka je dávného původu, v knížce [1] se uvádí, že ji znali již ve starověkém Řecku, Egyptě i Orientě. Nejpodivuhodnější je, že odedávna jsou na ní vyznačena čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby součet čísel na protějších stěnách byl sedm.

Kostky jsou nejrůznějších druhů. Liší se velikostí, zaoblením hran, materiálem a barvou. Čísla na stěnách jsou vyznačena pomocí teček, které se nazývají *oka*. Počet ok na stěně není třeba počítat, neboť jsou sestavena do charakteristických obrazců.

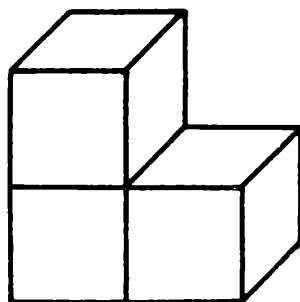
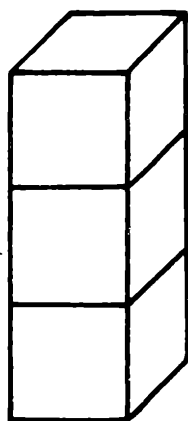
Představme si, že máme krychli a že na ní chceme vyznačit oka tak jako na hrací kostce. Na jednu libovolně zvolenou stěnu nakreslíme jedno oko a na protější stěnu šest ok. Na další stěně, kterou si opět libovolně vybereme, vyznačíme dvě oka a na protější stěně pět ok. Získáme



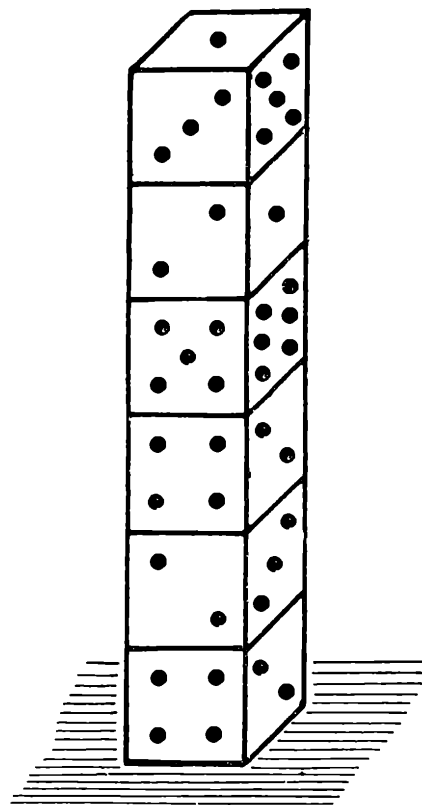
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 4



Obr. 3

tak polotovar, z něhož mohou vzniknout hrací kostky dvou typů podle toho, jak na zbývající dvě stěny nakreslíme tři a čtyři oka (obr. 1 a 2).

Máte-li několik hracích kostek, tak si je prohlédněte, zda jsou mezi nimi zastoupeny oba typy. Vyzkoušejte si též jednu vlastnost hracích kostek. Dejte hrací kostku před zrcadlo a podívejte se dobře na její obraz v zrcadle. Bude jím kostka jiného typu, než je kostka před zrcadlem.

S hracími kostkami si můžeme krátit chvíli i méně obvyklým způsobem, tj. užívat jich jako stavebnicových kostek a stavět z nich sloupy, zdi, schody apod. Tyto „stavby“ mohou být i námětem matematických úloh. Např. v okresních kolech IX. ročníku matematické olympiády v NDR v roce 1970 řešili soutěžící v nejnižší kategorii úlohu, jejíž text ve volném překladu zní:

Na neprůhledné desce stojí sloupek postavený ze šesti stejných hracích kostek (obr. 3), přičemž na horní ploše sloupku je právě jedno oko. Určete celkový počet ok, která můžeme spatřit jen v případě, že sloupek rozebereme.

Čtenář jistě snadno zjistí, proč k řešení vede výpočet:

$$6 \cdot 7 - 1 = 41$$

Složitější úloha, kde bylo třeba aspoň v představě si vypomoci lepidlem, se řešila ve XX. ročníku čs. matematické olympiády v kategorii Z. Žákům byl předložen tento problém:

K hrací kostce přilepíme další dvě stejné hrací kostky z téhož materiálu vždy celými stěnami. Jak kostky slepit a pak slepenec položit na stůl aspoň jednou stěnou tak, aby počet viditelných ok byl a) maximální; b) minimální?

(Za viditelné považujeme všechny stěny slepenice, které nepřiléhají ke stolu.)

Možné slepenice jsou právě dvou tvarů (obr. 4). Na stůl je lze postavit celkem pěti způsoby. Uvedme pouze, že největší počet viditelných ok může být 52 a nejmenší 26. Komentované řešení lze nalézt v ročence [2] na str. 84.

Na závěr si uvedme ještě jednu úlohu:

Zvolte si přirozené číslo n , pro které platí

$$2 \leq n \leq 12. \quad (1)$$

Způsobem jako na obr. 3 postavte ze stejných hracích kostek nejvyšší možný sloupek tak, aby celkový počet ok na každých dvou stěnách, které na sobě leží, byl roven číslu n .

Určete, kolik různých řešení má úloha pro čísla n , která splňují podmínku (1). Přitom dva sloupky, z nichž jeden může vzniknout z druhého posunutím a otočením kolem svislé osy, nepovažujeme za dvě různá řešení.

Řešení této úlohy otiskneme v dubnovém čísle Rozhledů.

Mezi řešení poslední úlohy pro $n = 8$ náleží také tzv. *magické věže*. Podle úlohy na str. 145 v knížce [3] se názvu magická věž užívá pro sloupek, jenž je postaven ze šesti stejných hracích kostek tak, že má tyto dvě vlastnosti:

- (1) Na každé svislé stěně sloupku je všech šest obrazců, které znázorňují na hracích kostkách čísla 1 až 6.
- (2) Na dolních stěnách kostek jsou postupně od zdola vzhůru vyznačena čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Literatura

- [1] M. Gardner: Matematické čudesá i tajny (překlad z angličtiny), Nauka, Moskva 1964
- [2] J. Vyšín a kol.: XX. ročník matematické olympiády, SPN, Praha 1972
- [3] M. Koman—J. Vyšín: Malý výlet do moderní matematiky, Mladá fronta, Praha 1972

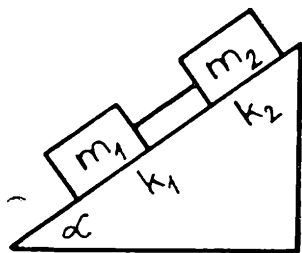
Novosibírská státní univerzita

Doc. Ing. ZDENĚK JANOUT, CSc., FJFI ČVUT Praha

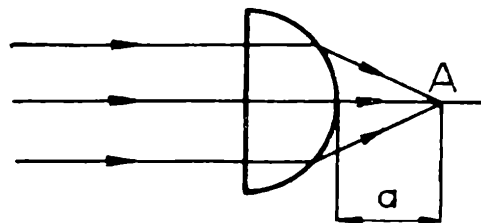
Novosibírská státní univerzita leží asi 30 km od středu Novosibírsku na území Akademgorodku v malebném lese na břehu Obského moře. Vedle učebních budov stojí koleje, menzy a sportovní areál. Na univerzitě studuje okolo 4000 studentů, aspirantů a stážistů. Univerzitu tvoří šest fakult: mechanicko-matematická, fyzikální, přírodních věd, geologicko-geofyzikální, ekonomická a humanitní. Hlavním úkolem univerzity je výchova vysoce kvalifikovaných specialistů-výzkumníků v oblasti matematiky, mechaniky, fyziky, chemie, biologie, geologie, ekonomické kybernetiky, historie a jazykovědy v podstatě pro Sibiř a Dálný východ. Absolventi univerzity odcházejí pracovat do vědecko-výzkumných ústavů, výpočetních center, výzkumných laboratoří a také přednášet na vysoké školy.

Na přípravě specialistů v Novosibírské státní univerzitě se podílí i vědecký a pedagogický potenciál vědeckého centra Sibiřského oddělení akademie věd SSSR (dále jen SO AV SSSR). Novosibírské vědecké centrum a univerzita představují ve skutečnosti jednolitý vědeckovýchovný komplex. Základní část pedagogické práce zajišťují vědci z ústavů SO AV SSSR — akademici, členové korespondenti AV SSSR, doktoři a kandidáti věd. Tím je zabezpečena vysoká teoretická úroveň přednášek i neustálé zdokonalování učebních programů v souladu s novými výsledky vědy. Jinou principiální zvláštností výuky jsou povinná výzkumná praktika studentů v ústavech SO AV SSSR. Díky teritoriální blízkosti univerzity a ústavů SO AV SSSR mají studenti možnost zúčastnit se ústavních seminářů, vědeckých porad a konferencí, seznamovat se s posledními vědeckými výsledky, setkávat se s význačnými vědci z jiných vědeckých center a hlavně se bezprostředně zúčastnit tvořivé vědecké práce. Tímto způsobem se studenti vychovávají přímo při řešení vědeckovýzkumných úkolů. Témata ročníkových i diplomových prací se týkají aktuální problematiky rozpracované v SO AV SSSR. Studenti se aktivně účastní i studentských vědeckých konferencí, na kterých přednášejí výsledky svých teoretických i experimentálních prací. Tato činnost přispívá k vyvíjení trvalých návyků k vědecké práci.

Důležitou roli sehrávají při výběru vhodných studentů kvalitní přijímací zkoušky. Například uchazeč na fyzikální fakultu musí mít nejen



Obr. 1

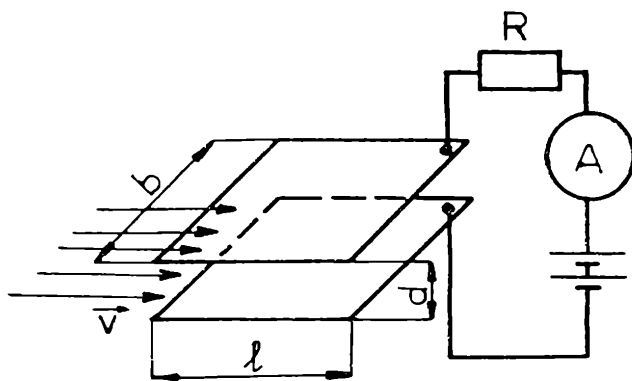


Obr. 2

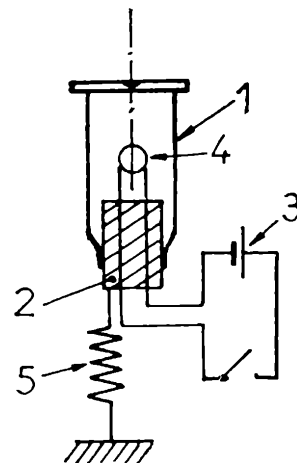
zájem o studovaný obor, ale musí prokázat i značné hluboké fyzikální znalosti a jisté „fyzikální myšlení“. Ve školním roce 1977/8 dostal každý uchazeč šest příkladů, na jejichž řešení měl pět hodin. V každém souboru byly příklady tří typů. První čtyři tvořily všeobecně přijaté výpočetní úlohy různé obtížnosti: od téměř standardních školních úloh až po složité příklady, vyžadující hluboké znalosti a umění orientovat se ve složitější fyzikální problematice. Pátý příklad tvořila úloha typu „odhadněte“. Text úlohy popisoval jev dobře známý uchazeči; uchazeč sám si musel zvolit hodnoty fyzikálních veličin nezbytných pro řešení úlohy a jejich užitím získat číselnou odpověď. Při řešení této úlohy bylo nutno pochopit podstatu fyzikálního jevu, zformulovat jednoduchý (neboť je potřebný pouze řádový odhad) fyzikální model tohoto jevu, vzít rozumné hodnoty fyzikálních veličin a nakonec (při správném používání systému jednotek) dostat číselný výsledek, víceméně odpovídající realitě. Poznámeme, že hrubý řádový odhad je nezbytný v každé počáteční etapě vědecké práce, jako například při plánování experimentu, při projektování aparatury či při teoretických úvahách. O úlohách typu odhadněte byl publikován v *Rozhledech matematicko-fyzikálních* v čísle 3 letošního ročníku zajímavý článek od doc. J. Pišúta a dr. V. Černého z Komenského univerzity z Bratislavy, který zájemcům o tento typ úloh vřele doporučuji přečíst. V posledním — šestém — příkladu bylo zapotřebí objasnit jev, předvedený experimentátorem na demonstračním stole. V tomto případě bylo důležité pochopit podstatu jevu a mezi rozličnými fyzikálními fakty *vydělit* ty hlavní. V závěru článku uvádím pro zajímavost jeden soubor příkladů a několik úloh typu odhadněte použitých při přijímacích zkouškách ve školním roce 1977/8.

1. Po nakloněné rovině (obr. 1.) klouzají dva kvádry o hmotnostech m_1 a m_2 spojené nehmotnou neprotahitelnou nití. Koeficienty tření mezi kvádry a rovinou jsou rovny k_1 a k_2 , přičemž $k_2 > k_1$. Nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel α . Najděte napětí nitě.

2. Ve vertikálně stojící válcové nádobě naplněné vzduchem jsou v rovnováze dva tenké těžké písty, každý o hmotnosti m . Vzdálenost mezi písty je rovna vzdálenosti mezi spodním pístem a dnem nádoby a je rovna l . Průřez nádoby je S a vnější tlak je p_0 . Do jaké vzdálenosti od



Obr. 3



Obr. 4

dna se dostane spodní píst, když na horní píst bude působit síla takovým způsobem, že se píst přemístí na místo spodního? Tření neuvažujte, teplota je konstantní.

3. Úzký svazek světla se po projití polokoulí ze skla o indexu lomu n fokusuje do bodu A vzdáleném o a od vypuklé plochy (obr. 2.). V jaké vzdálenosti b měřené od rovinného povrchu se soustředí svazek světelných paprsků jdoucích z opačné strany? Předpokládejte, že pro malé úhly platí $\sin \alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha$.

4. Prostorem mezi elektrodami deskového kondenzátoru prochází proud elektronů letících rychlostí v rovnoběžně s deskami (obr. 3.). Koncentrace elektronů v proudu (počet elektronů v jednotce objemu) je rovna n . Délka deskové elektrody je l , šířka b a vzdálenost mezi nimi d . K horní elektrodě je přes odpor R a ampérmetr A připojen kladný pól baterie o elektromotorickém napětí E (vnitřní odpor lze zanedbat). Dolní elektroda je připojena k zápornému pólu baterie. Určete, jaký údaj ukáže ampérmetr.

5. Kladívkem byl pěti údery zatlučen hřebík do dřevěné stěny. Odhadněte, jakou silou je nutno působit na hlavu hřebíku, aby byl vytážen.

6. Prázdna nábojnice 1 (obr. 4.) je nasazena na plastickou zátka 2, kterou procházejí drátky elektrického obvodu 3, kterým je zapálena hořící směs 4. Z počátku je zátka upevněna k pružině 5. Směs se zapálí, nábojnice vyletí. V druhém případě není zátka upevněna k pružině, ale k masivnímu stojanu. Po zapálení směsi nábojnice vyletí značně výše. Objasněte efekt zvětšení výšky.

Příklady typu odhadněte, vzaté z různých souborů:

1. Odhadněte rychlost střel, které vyletují z nábojů vhozených do ohničku. Při střelbě z pušky je rychlost střely okolo 800 m/s.

2. Odhadněte tlak vzduchu v šachtě hluboké 10 km.
3. Odhadněte, s jakou minimální rychlostí je možno jet na vodních lyžích.
4. Kolika zdvihy pístu pumpičky jízdního kola je možno nahustit fotbalový míč?
5. Odhadněte, jaká část atmosférického kyslíku Země se spotřebuje při spálení dvou miliard tun uhlí (tato cifra je blízká ke světové těžbě uhlí za rok).
6. Odhadněte, jaký by byl tlak atmosféry, kdyby se odpařila veškerá voda obsažená v oceánech.



Astronautika za mír a lidský pokrok

TOMÁŠ SVOBODA, Gymnázium Praha 7

Pod tímto heslem se ve dnech 1. až 8. října 1978 sešel v Dubrovniku 29. kongres mezinárodní astronautické federace IAF, organizace, která sdružuje všechny světové instituce zabývající se kosmonautikou.

Kongresu se zúčastnilo 1200 delegátů ze všech zemí světa. Tím byl překonán dosavadní rekord 1000 osob přítomných na 28. kongresu IAF v Praze. Stálý růst zájmu o kongresy IAF je způsoben pravděpodobně tím, že na rozdíl od dřívějších let, kdy byly kongresy poměrně úzce specializované, se nyní jejich obsah rozšiřuje, aby pokrýval celou oblast kosmonautiky a příbuzné vědní obory.

Mezi delegáty v Dubrovniku bylo i šest kosmonautů ze socialistických států (*A. Leonov, V. Kubasov, V. Sevastjanov, P. Klimuk, V. Remek a M. Hermaszewski*). Jejich vystoupení týkající se letu stanice Saljut 6 bylo očekáváno s velkým zájmem. Sovětský akademik *B. N. Petrov* upozornil při té příležitosti na zajímavý fakt, že zatímco let Saljutu s posádkou stále ještě pokračuje, my na Zemi máme již možnost hodnotit první výsledky expedice na základě materiálů dovezených zpět loděmi Sojuz. Kongres se totiž konal ještě v době rekordního letu kosmonautů *Kovaljonka a Ivančenkova*, který trval 140 dní.

V rámci kongresu se konala řada zasedání a sympozií; např. zasedání o bezpečnosti kosmických letů, sympozium kosmické biologie, konference o pohonných systémech, kolokvium kosmického práva atd.

Zlatým hřebem kongresu byla bezesporu dvě půldenní zasedání věnovaná problémům kosmické energetiky, na nichž se hovořilo především o otázce tzv. orbitálních elektráren. Očekává se, že již koncem tohoto století by měly tyto kolosy o rozměrech několika kilometrů, umístěné na oběžné dráze ve výšce 36 tisíc kilometrů nad Zemí, přeměňovat energii slunečního záření na elektrickou a dodávat ji na Zemi. Přeměna energie se bude dít pomocí polovodičových fotočlánků s účinností asi 11 %. Přenos energie na Zemi se má realizovat užitím mikrovlnného paprsku s účinností asi 60 %. Není však dosud známo, zda tento způsob přenosu bude z ekologického hlediska zcela bezpečný.

V současné době se uvažuje o stavbě elektráren o výkonu 5 GW. Aby tyto elektrárny uspokojily přírůstek světové spotřeby energie v příštím století, bylo by třeba jich postavit okolo dvou set. Vzhledem k tomu, že pořizovací cena sluneční orbitální elektrárny přesahuje 10 miliard dolarů, jedná se o gigantický úkol, jehož uskutečnění není v silách žádného jednotlivého státu. Jediným možným řešením je spolupráce států celého světa. Technické, technologické, ekonomické a politické problémy spojené s realizací této myšlenky jsou velmi obtížné. Jedná se bezesporu o největší a nejnáročnější technický projekt, s jakým se lidstvo setkalo. Podrobný popis připravovaného projektu bude otištěn v časopise *Letectví a kosmonautika*.

Velmi zajímavá byla studentská vědecká konference, na níž studenti z celého světa přednášeli své práce, které pak hodnotila mezinárodní porota. Přednášené práce se svým obsahem velmi lišily, od čistě astronomických až po ty, které se zabývaly praktickým využitím astronautiky. V soutěži zvítězil *S. Kent*, anglický student, který hovořil o možnosti využít odhazovací nádrže kosmického raketoplánu jako návratného tělesa pro průchod atmosférou. Nádrž je dlouhá 48 metrů, má hmotnost 35 tun a obsahuje většinu paliva potřebného pro start kosmického raketoplánu.

Po vyčerpání paliva se odhazuje buď ještě v atmosféře, nebo je možno ji vynést na oběžnou dráhu. *S. Kent* matematicky dokázal, že lze prázdné nádrže využít jako dopravního prostředku pro dopravu nákladů z oběžné dráhy zpět na Zem, jelikož její konstrukce je schopna odolat aerodynamickému ohřevu při vstupu do atmosféry.

Z Československa nebyla vyslána speciální studentská delegace; zúčastnili se pouze dva naši studenti; *Vladimír Poulek* z ČVUT a autor tohoto článku. *V. Poulek* obsadil překvapivé třetí místo se svou prací o možnosti přestavby kosmického raketoplánu tak, aby byl schopen letu bez odhazování nádrže a pomocných motorů, což by zlevnilo jeho provoz.

Celková úroveň kongresových jednání byla tradičně vynikající.

MALÁ ENCYKLOPÉDIA MATEMATIKY

Zostavil kolektív autorov pod vedením prof. dr. T. Šaláta, DrSc.

Vydalo Vydavateľstvo Obzor, n. p., Bratislava, roku 1978, druhé, prepracované a doplnené vydanie, 856 strán, viaz. 85 Kčs.

Zvedaví študenti neraz potrebujú prvú informáciu o nových poznatkoch z matematiky. Knihou, ktorá môže poskytnúť informácie o súčasnom stave, základných výsledkoch, metódach a vývinových tendenciách rôznych matematických disciplín, je uvádzaná encyklopédia. Publikácia je kolektívnou prácou mnohých slovenských matematikov.

Úvodnou kapitolou je stručný náčrt dejín matematiky, ktorý v priereze starovekej, gréckej, stredovekej matematiky až po matematiku 17.—20. storočia naznačuje základné výsledky a stručné vedecké profily ich tvorcov. Zaujímavou súčasťou kapitoly je stať „O niektorých filozofických problémoch v matematike“, kde si uvedomíme filozofické koncepcie okolo základov matematiky (intuicionizmus, logicizmus, metamatematická metóda, dialektika).

Prehľad kapitol: Teoretická aritmetika, Základy geometrie, Matematická analýza, Numerická analýza, Geometria, Topológia, Algebra, Funkcionálna analýza a va-

riačný počet, Teória pravdepodobnosti, matematická štatistika a teória informácie, Kombinatorická analýza, teória grafov a hier, Kategórie a funktory, Matematická logika, Aplikácie matematiky, Matematická informatika, Kybernetika aspoň trochu naznačujú rozsah spracovanej problematiky.

V období nezadržateľného spracovania informácií na počítačoch vás možno budú zaujímať niektoré otázky z oblasti informatiky. V Malej encyklopédii matematiky je XV kapitola určená pre túto problematiku. Je tu uvedená stručná história vzniku a vývoja počítačov, naznačená je problematika teórie systémov, teórie algoritmov, teórie automatov, teórie formálnych jazykov. Píše sa tu o technickom i programovom vybavení počítačov. Záverečná kapitola je venovaná niektorým otázkam okolo kybernetiky.

Malá encyklopédia matematiky svojím druhým vydaním dokazuje svoju opodstatnenosť, aktuálnosť i obľúbenosť. V rukách mladých študentov bude dobrou orientačnou pomôckou, motivačným impulzom i zdrojom základných poznatkov. Mnoho stredoškolákov môže za 85 Kčs získať nielen masívnu reprezentačnú publikáciu, ale aj radosť a potešenie z nových poznatkov, odhalených súvislostí a možných aplikácií.

Dušan Jedinák

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

erivello m
cubico
cubo m
curie
curva ž
— di Gauss
— piana
— sgheмба
curvatura ž
cuspidе ž

síto
kubický, krychlový
krychle; třetí mocnina
curie (jednotka)
křivka; čára
Gaussova křivka četnosti
čára rovinná
— prostorová
křivost, zakřivení
vrchol; brot

D

dado m
decaedro m
decagono m
decidere
decisione ž
decimale
decimo
decimo m
decina ž
declinazione ž
decomponibile
decomponibilità ž
decomporre
decomposizione ž
decescente
decescenza ž
decescere
dedurre

kostka (hrač); matice (šroubu)
desetistěn
desetiúheřník
rozhodnouti
rozhodnutí
desetinný, dekadický
desátý
desetina
desítka
deklinace
rozložitelný
rozložitelnost
rozložit
rozklad
klesající, ubývající
úbytek
klesati, ubývati
odvoditi

deduzione ž
 definire
 definizione ž
 deflessione ž
 deformare
 deformazione ž
 degenerazione ž
 degenerare
 denaro m
 denominatore m (di una frazione)
 densità ž
 — di corrente
 depolarizzazione ž
 derivabile
 derivabilità ž
 derivare
 derivata ž
 — a destra
 — a sinistra
 — mista
 — parziale
 — numerica
 — per serie
 derivato
 descrivere (una curva)
 designare
 determinante m
 — aggiunto
 — di Cauchy-Vandermonde
 — funzionale
 — jacobiano
 — reciproco
 determinare
 determinato
 deviazione ž
 diagonale
 diagonale m (segmento)
 diagramma m

dedukce; odvození
 definovati
 definice
 ohyb
 deformovati, pokríviti
 deformace
 degenerace
 degenerovaný, zvrhlý
 peníze
 jmenovatel (zlomku)
 hustota
 — proudu
 depolarizace
 odvoditelný; derivovatelný
 odvoditelnost, derivovatelnost
 odvoditi; derivovati
 derivace
 — zprava
 — zleva
 — smíšená
 — parciální
 derivování numerické
 — řadou
 odvozený; zderivovaný
 opisovati (křivku)
 označovati
 determinant
 — sdružený
 — Vandermondův
 — funkcionální
 — Jacobiho
 — reciproký
 určití
 určený
 deviate
 diagonální, úhlopříčný
 úhlopříčka
 diagram

rozhledy

0

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

8

ROČNÍK 57, 1978-1979, DUBEN

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr. Josef Dibeika, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. O. Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha,

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1979.

ROČNÍK 57

DUBEN 1979

8

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

P. Fejtková, dr. M. Malik: Cykly, seznamy a generátor .	337
Z. Půlpán: Bernoulliho schéma .	346
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Jak lze tvořit koherentní odvozené jednotky .	349
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Zdánlivé pohyby kosmických těles — I. —	355
D. Jedinák: Bernard Bolzano - humanista a matematik	363
J. Kotyk: Thomas Young .	365
Dr. A. Vrba, CSc.: Čebyševova nerovnost .	367
Prof. E. Kraemer: Americký prezident a Pythagorova věta	375
Dr. J. Mida: Ještě jednou o „stavbách“ z hracích kostek	376
Dr. O. Klaučová, CSc.: Matematika při přijímacích pohovorech na vysokých školách ZSSR	379
Recenze	384
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český .	3. a 4. strana obálky

Cykly, seznamy a generátor

PAVLA FEJTKOVÁ, Dr. MAREK MALÍK, MFF UK Praha

V předcházejícím čísle Rozhledů jsme v článku „Příkazy pro referenční proměnné“ pokračovali v popisování příkazů — zápisů požadavků na provedení určitých akcí. Dosud jsme zavedli *příkaz podmíněný, složený, dosazovací a přiřazovací*. Pomocí těchto příkazů umíme určovat hodnotu standardních i referenčních proměnných a atributů. Dále umíme určit exemplář třídy a pracovat s hodnotami jeho atributů.

Nyní se seznámíme s velmi důležitými příkazy, které umožňují opakování určitých akcí. Takové opakování podobných akcí je u různých dějů velmi časté a příkazy, které ho vyjadřují, nazýváme souhrnně *příkazy cyklu*. Půjde o obdobu toho, co máme na mysli, když v přirozeném jazyce řekneme např. větu: „*Opakuj určitou činnost tak dlouho, dokud platí nějaká podmínka!*“ nebo „*Pro všechny prvky množiny P proved nějakou akci!*“.

Především si řekneme, jak budeme takové příkazy zapisovat v zavedené symbolice.

Nejdůležitější pro nás bude příkaz, jehož význam by bylo možno popsat větou:

„**Pokud platí nějaká podmínka, prováděj opakovaně určitý příkaz!**“

(Podmínku umíme vyjádřit pomocí logického výrazu, pojem příkazu známe). Pro zápis použijeme anglických slov: *while* = pokud a *do* = prováděj. Vlastní zápis bude mít tvar:

while logický výraz **do** příkaz

Kdybychom požadovali, aby se opakovalo více příkazů, museli bychom z nich vytvořit příkaz složený a ten zapsat za **do**.

Představme si třeba následující příkaz:

while $Y \geq 13$ **do** $Y := Y - 13$

Příkaz za **do** (tedy $Y := Y - 13$) představuje zmenšení hodnoty proměnné Y o 13. Celek předepisuje, aby se opakovalo toto zmenšování hodnoty Y o 13 tak dlouho, dokud je zmenšovaná hodnota Y neustále větší nebo rovna 13. Zamyslíme-li se nad významem celého příkazu, uvědomíme si, že pokud je hodnota proměnné Y předem dána, pak se po provedení

opakovaného odčítání čísla 13 například dozvíme, zda je číslo, které bylo původní hodnotou Y, dělitelné třinácti beze zbytku. (Výsledná hodnota Y je totiž zbytek po dělení třinácti.)

Představme si ještě následující situaci: Předpokládejme na chvíli, že nemáme k dispozici operaci dělení a chceme získat hodnotu celé části podílu Y/X. (Y a X jsou proměnné, o kterých předpokládáme, že mají určenu kladnou hodnotu). Opět můžeme použít metody postupného odčítání (od hodnoty proměnné Y budeme odečítat hodnotu proměnné X). Navíc musíme počítat, kolikrát se odečtení provedlo a tento počet má být hodnotou proměnné VYSL.

Uvedený příklad pak můžeme zapsat:

VYSL: = 0 ;

while Y $\geq$ X do

begin Y: = Y - X ; VYSL: = VYSL + 1 end

Po provedení těchto příkazů bude hodnotou proměnné VYSL celá část podílu původních hodnot proměnných Y a X, hodnotou proměnné Y bude po provedení zbytek uvažovaného dělení a hodnota proměnné X zůstane nezměněna. (Nepřehlédněme, že proměnné VYSL musíme na začátku určit hodnotu příkazem, pouze o proměnných X a Y jsme předpokládali, že mají hodnotu určenou předem.)

Z množství různých dalších příkazů cyklu uvedeme na tomto místě ještě jeden typ, v němž se vyskytuje tak zvaný *parametr cyklu*. Parametr cyklu je proměnná, pro kterou je charakteristické, že nabývá různých hodnot a pro každou z těchto hodnot se má provést opakovaný příkaz.

Pokud je parametrem standardní proměnná, pak zápis vypadá takto:

for	proměnná neboli parametr cyklu	:=	seznam výrazů (aritmetických, logických, . . . podle typu parametru cyklu) navzájem oddělených čárkou	do	příkaz
-----	---	----	--	----	--------

Uvedme příklad. Kdybychom požadovali sečtení všech prvočísel menších než 14, můžeme to zapsat:

SOU CET: = 0 ;

for PRVOC: = 2, 3, 5, 7, 11, 13, do

SOU CET: = SOU CET + PRVOC

Tedy proměnná PRVOC nabývá postupně hodnot 2, 3, 5, 7, 11, 13 a pro každou z těchto hodnot se provede příkaz uvedený za do — tj. přičtení této hodnoty k dosavadnímu mezisoučtu.

V případě, že parametr cyklu je referenční proměnná, bude zápis příkazu následující:

for	referenční proměnná — — parametr cyklu	:—	seznam referenčních výrazů (kvalifikovaných pro tutéž třidu jako parametr) oddělených čárkami	do	příkaz
-----	---	----	--	----	--------

Opět uvedeme jednoduchý příklad. Předpokládejme, že je zavedena třída STUDENT s celočíselným atributem BODY (například pro zápis výsledků nějaké soutěže). Předpokládejme dále, že máme referenční proměnné Z, A, B, C, D, E a F kvalifikované též pro třídu STUDENT — přičemž proměnné A, B, C, D, E, F označují konkrétní exempláře této třídy.

Chceme-li nyní u datových struktur, které jsou hodnotami proměnných A, B, C, D, E a F, zvýšit hodnotu atributu BODY o jedničku, provedeme to následovně:

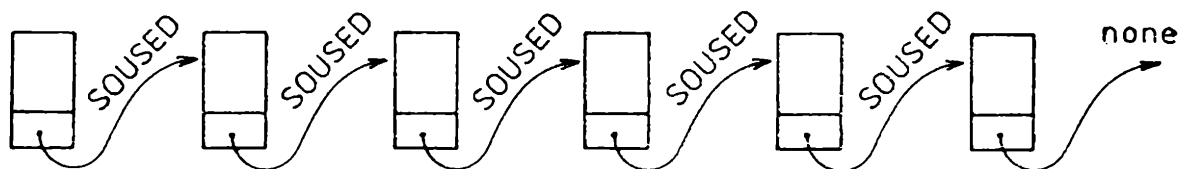
```
for Z: — A, B, C, D, E, F do
  Z.BODY: = Z.BODY + 1
```

V souvislosti s příkazem cyklu*) se nyní zmíníme o velmi důležité a velmi často užívané datové struktuře — lépe řečeno seskupení datových struktur — totiž o *seznamu*.

Uvažujme nejdříve nějakou třídu A, která má mezi svými atributy též referenční atribut SOUSED, který je kvalifikovaný pro tuto třídu A:

```
class A;
<
ref (A) SOUSED;
>
```

Pak si lze představit konečnou posloupnost datových struktur — exemplářů třídy A, z nichž každý má tu vlastnost, že *hodnotou jeho atributu SOUSED je právě jeho následník v uvažované posloupnosti*. (Poslední v posloupnosti má hodnotu atributu SOUSED rovnu referenční konstantě none.) Situaci znázorňuje obrázek 1.



Obr. 1

*) Existuje řada dalších příkazů cyklu. Například existuje více možností, jakým způsobem určovat hodnotu parametru cyklu, které jsou důležité tím, že nemusíme hodnoty explicitně vyjmenovat, jak je to nutné v uvedeném případě.

Seznamem datových struktur rozumíme jejich konečnou posloupnost právě popsaných vlastností.

Uvažujme například (podobně jako v předchozích člancích) třídu pro částečný popis žáků ve škole:

```
class ZAK;  
  <real VAHA, VYSKA;  
  character TRIDA;  
  integer ROCNIK;  
  ref (ZAK) VEDLE>
```

a uvažujme dále referenční proměnné:

```
ref (ZAK) JANA,JITKA,HANA,PETR,JAN;
```

které označují konkrétní datové struktury. Představme si, že skuteční žáci popsaní těmito strukturami stojí v řadě, což je zachyceno pomocí hodnot atributu VEDLE. Pak můžeme hovořit o seznamu těchto datových struktur, například, když platí:

```
JANA.VEDLE == JAN  
JAN.VEDLE == PETR  
PETR.VEDLE == HANA  
HANA.VEDLE == JITKA  
JITKA.VEDLE == none
```

Velkou výhodou takového seznamu je, že stačí pamatovat si jeho *první položku*. V uvedeném případě nám třeba postačí pouze jedna referenční proměnná:

```
ref (ZAK) Z;
```

Po přiřazení:

```
Z: — JANA
```

můžeme ostatní proměnné zapomenout, neboť například platí:

```
Z.VEDLE.VEDLE.VEDLE == HANA
```

nebo

```
Z.VEDLE == JAN
```

• podobně.

S datovými strukturami seskupenými do seznamu se velmi dobře pracuje. Kdybychom např. chtěli sečíst hodnoty atributů VAHA a VYSKA všech struktur v našem seznamu, bylo by to možné provést příkazy:

```
SOUCETVAH := SOUCETVYSEK := 0;  
POMZAK := Z;  
while POMZAK != none do  
  begin
```

```

SOUCETVAH := SOUCETVAH + POMZAK.VAHA;
SOUCETVYSEK := SOUCETVYSEK + POMZAK.VYSKA;
POMZAK := POMZAK.VEDLE

```

end

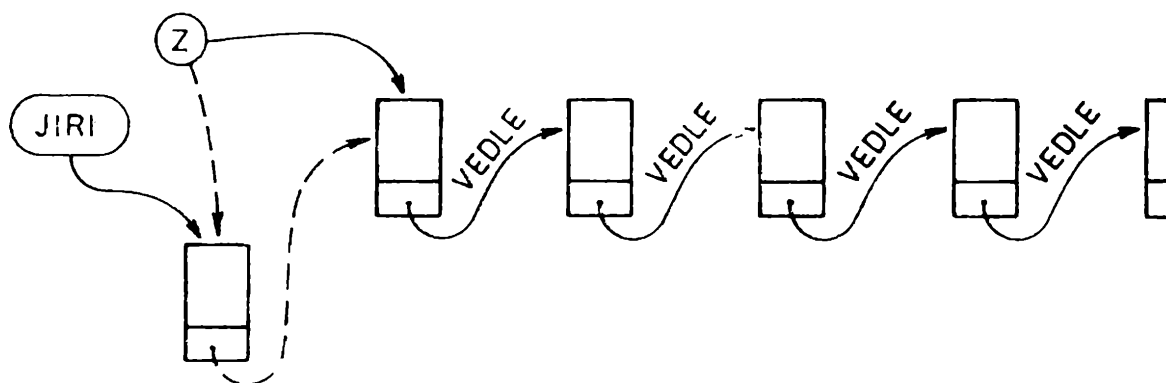
Pomocná proměnná POMZAK kvalifikovaná pro třídu ZAK se během provádění tohoto příkazu cyklu jakoby „posouvá“ po seznamu začínajícím hodnotou Z - to zaručuje poslední část složeného příkazu, který je uveden za **do** (totiž POMZAK := POMZAK.VEDLE).

Chceme-li nyní zařadit na začátek uvedeného seznamu další datovou strukturu — exemplář třídy ZAK — označenou například pomocí referenční proměnné JIRI, provedeme to velmi jednoduše (viz obr. 2):

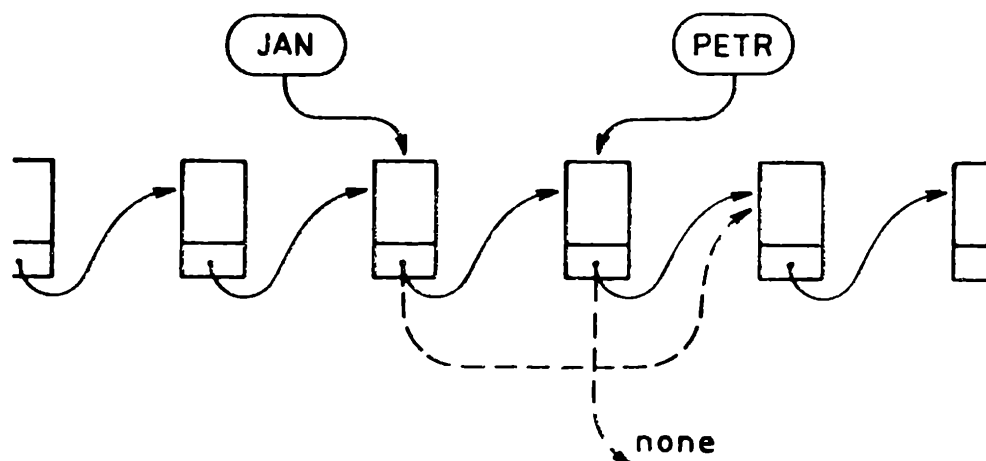
```
JIRI.VEDLE := Z;
```

```
Z := JIRI
```

(Tedy sousedem struktury JIRI je bývalý začátek seznamu a nový začátek je právě struktura JIRI).



Obr. 2

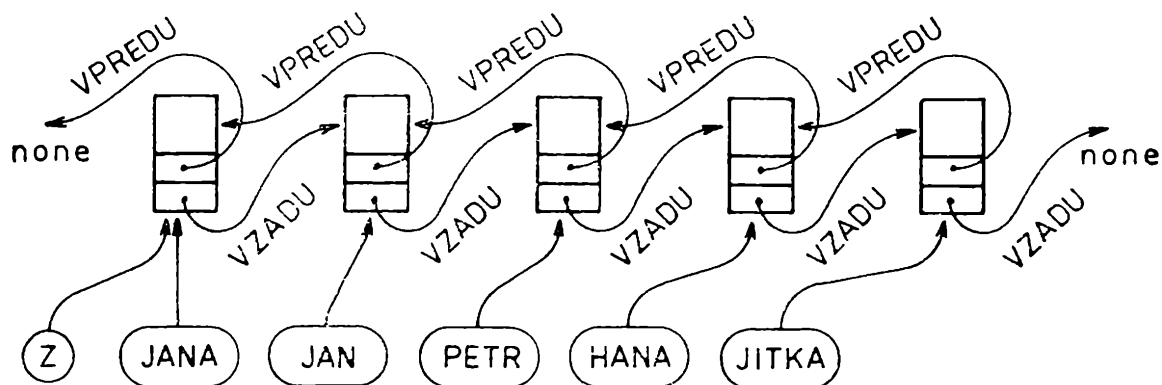


Obr. 3

Zamysleme se nyní nad opačnou úlohou: například jak z našeho seznamu vypustit strukturu, která je hodnotou proměnné PETR. Jestliže si pamatujeme, že předchůdcem této struktury v seznamu je hodnota proměnné JAN, je situace jednoduchá (obr. 3):

```
JAN.VEDLE := PETR.VEDLE;
```

```
PETR.VEDLE := none
```



Obr. 4

(Představíme-li si skutečné žáky, znamená to: „*Petr*“ odešel z fronty, tedy za „*Janem*“ stojí ten, kdo stál dříve za „*Petrem*“ a za „*Petrem*“ nestojí nyní nikdo.)

Potřebnou informaci o předchůdci v seznamu nemusíme mít ale k dispozici. Pak musíme seznam od začátku prohlížet a předchůdce struktury PETR hledat. Tedy:

```
POMZAK:— Z;
while POMZAK.VEDLE /= PETR do
POMZAK:— POMZAK.VEDLE;
POMZAK.VEDLE:— PETR.VEDLE;
PETR.VEDLE:— none
```

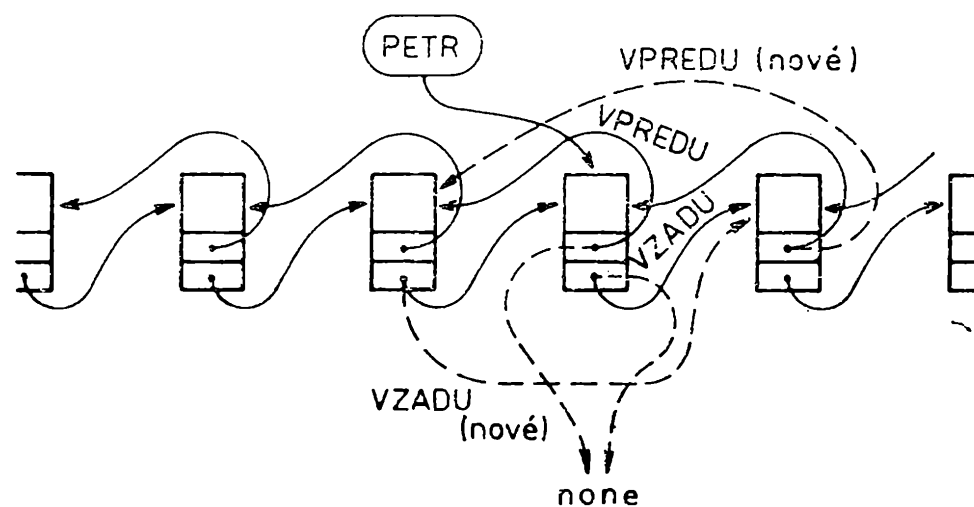
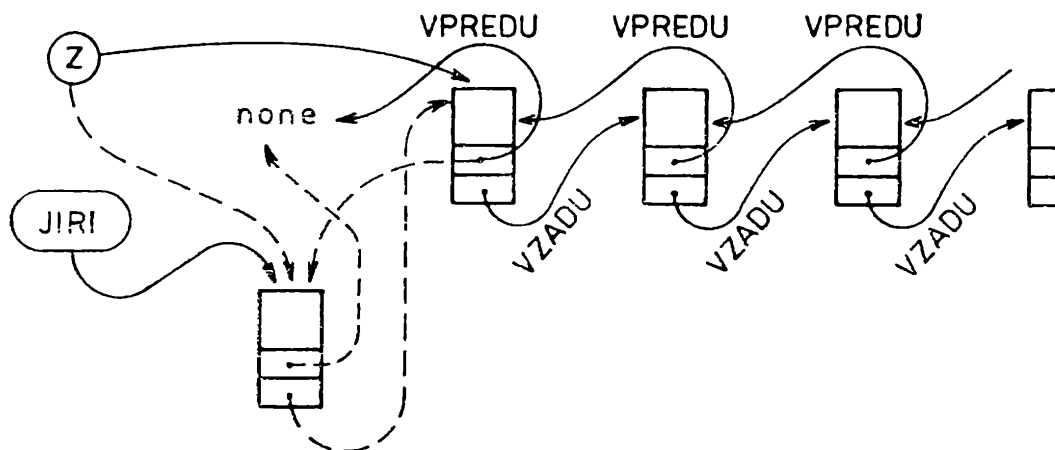
(Čili: Procházíme pomocí proměnné POMZAK seznamem tak dlouho, dokud následníkem hodnoty proměnné POMZAK není struktura PETR. Po skončení příkazu cyklu bude tedy platit POMZAK.VEDLE == PETR a provedeme další dva příkazy jako dříve.)

Protože vypouštění prvku ze seznamu je velmi časté, *bylo by vhodné, aby prvek seznamu neodkazoval pouze na svého následníka, ale též na svého předchůdce*. Seznamy takového typu jsou též myslitelné (a běžné) a nazýváme je *seznamy dvousměrné*.

Uvažovaná třída ZAK by pro konstrukci dvousměrného seznamu mohla mít například tento tvar:

```
class ZAK;
<real VAHA,VYSKA;
character TRIDA;
integer ROCNIK;
ref (ZAK) VPREDU,VZADU>
```

Předpokládejme, že opět máme referenční proměnnou Z kvalifikovanou pro třídu ZAK, jejíž hodnotou je začátek dvousměrného seznamu (obr. 4).



Zařazení nové struktury JIRI do tohoto seznamu pak provedeme následujícími příkazy (obr. 5):

JIRI.VZADU:— Z;

JIRI.VPREDU:— none;

Z.VPREDU:— JIRI;

Z:— JIRI

Opět si představme konkrétní řadu žáků: 1. příkaz: Za „*Jiřím*“ stojí nyní ten, co byl dříve první. 2. příkaz: Před „*Jiřím*“ nestojí nikdo. 3. příkaz: Před tím, co byl dřív první, stojí nyní „*Jiří*“. 4. příkaz: Na začátku stojí nyní „*Jiří*“.

Jak jsme se zmínili, bude vypuštění prvku z dvousměrného seznamu jednodušší než ze seznamu jednosměrného. Pro vypuštění struktury, která je hodnotou proměnné PETR (předpokládáme, že je někde uvnitř seznamu) použijeme příkazy (obr. 6):

PETR.VPREDU.VZADU:— PETR.VZADU;

PETR.VZADU.VPREDU:— PETR.VPREDU;

PETR.VZADU:— PETR.VPREDU:— none

Neboli: 1. Za tím, co stál před „*Petrem*“, stojí nyní ten, co stál za „*Petrem*“. 2. Podobně: Před tím, co stál za „*Petrem*“, stojí nyní ten, co stál před „*Petrem*“. 3. A konečně: Před „*Petrem*“ ani za „*Petrem*“ nestojí nyní nikdo.

Nyní si ještě upřesníme pojem, o němž byla již v předchozím článku zmínka, a to pojem *generování exempláře nějaké třídy*.

Jak jsme již několikrát uvedli, považujeme popis (neboli deklaraci) třídy za jakýsi *popis prototypu* datové struktury, podle něhož můžeme vytvářet konkrétní datové struktury — *exempláře dané třídy*. Musíme tedy u každé třídy přísně rozlišovat:

1. *Její prototyp* — popis jak vytvářet datové struktury.

2. *Její exempláře* — skutečné datové struktury vytvořené podle jejího prototypu.

Zopakujme, že vytváření exempláře třídy se děje takzvaným generátorem. Zapisujeme jej:

```
new [ identifikátor třídy ]
```

Například (pro třídu ZAK výše uvedenou):

```
JIRI:— new ZAK;
```

```
JIRI.VPREDU:— new ZAK
```

(Proměnné JIRI jsme přiřadili jako hodnotu nový exemplář třídy ZAK a druhým příkazem jsme atributu VPREDU tohoto exempláře přiřadili též nový exemplář třídy ZAK.)

Mnohdy by bylo účelné *provádět při každém generování exempláře určité třídy nějaké akce*. Budeme například generovat exempláře třídy KARTA popsané deklarací:

```
class KARTA;
```

```
<text BARVA,HODNOTA>
```

(Jejími exempláři budou například struktury <„PIKY“;„SEDMICKA“> nebo <„SRDCE“;„KRAL“>.) Bude nás zajímat, kolik exemplářů této třídy jsme vůbec vytvořili. Tedy jako bychom při každém vyvolání generátoru zápisem

```
new KARTA
```

chtěli současně provést příkaz:

```
POCETVSECHKARET:= POCETVSECHKARET + 1
```

(kde POCETVSECHKARET je samozřejmě celočíselná proměnná, která jako své hodnoty nabývá právě počtu všech dosud vygenerovaných karet.)

Takové *svázání generátoru s operacemi* můžeme zavést přímo v prototypu třídy. Na konec deklarace třídy budeme psát příkaz, který má být proveden vždy současně s generováním. Tedy deklarace třídy bude mít tvar:

class identifikátor; ⟨ deklarace atributů ⟩ příkaz

(Zakončujeme středníkem.)

V uvedeném případě s kartami bychom tedy psali:

class KARTA;

⟨text BARVA,HODNOTA⟩

POCETVSECHKARET:= POCETVSECHKARET + 1;

Nebudeme-li chtít svázat s generátorem žádné operace, necháme místo pro příkaz prázdné (tzv. *prázdný příkaz*) a napíšeme pouze zakončovací středník, např.:

class OBDELNIK;

⟨real ZAKLADNA,VYSKA⟩;

Chceme-li naopak svázat s generátorem příkazů více, vytvoříme z nich jako obvykle příkaz složený.

Musíme ještě učinit tuto úmluvu: budou-li se v příkazu v deklaraci třídy vyskytovat identifikátory jejích atributů, budeme je při generování exempláře s prováděním příkazu třídy chápat jako *atributy tohoto právě generovaného exempláře*.

Například na jisté soutěži přidělíme každému soutěžícímu na začátku 100 trestných bodů, z nichž budeme později odečítat. K tomu účelu můžeme zavést například takovouto deklaraci třídy pro popis soutěží-cího:

class SOUTEZICI;

⟨text JMENO,PRIJMENI;

integer BODY⟩

begin

BODY:= 100;

POCETSOUTEZICICH:= POCETSOUTEZICICH + 1

end;

Čili: Při generování každého exempláře této třídy se automaticky dosadí do jeho atributu BODY hodnota 100 a hodnota celočíselné proměnné POCETSOUTEZICICH se zvětší o jedničku.

Máme tedy možnost hovořit v příkazu třídy o attributech právě generovaného exempláře. K tomu, abychom mohli označovat v příkazu třídy *právě generovaný exemplář celkově*, zavedeme ještě jeden pojem: Napíšeme-li v příkazu deklarace třídy výraz ve tvaru:

this identifikátor této třídy

budeme jím rozumět při generování exempláře označení právě tohoto generovaného exempláře.

Doplníme-li například příkazem výše uvedenou třídu ZAK:

```
class ZAK;  
<real VAHA,VYSKA;  
character TRIDA;  
integer ROCNIK;  
ref (ZAK)VEDLE>  
begin  
    VEDLE:— ZAC;  
    ZAC:— this ZAK  
end;
```

(předpokládáme, že ZAC je referenční proměnná kvalifikovaná pro třídu ZAK), znamená to, že při vytvoření exempláře třídy ZAK se tento exemplář automaticky zařadí na začátek seznamu (jednosměrného), na jehož první prvek odkazuje proměnná ZAC (rozmyslete si!).

Bernoulliovo schéma

ZDENĚK PŮLPÁN, Pedagogická fakulta Hradec Králové

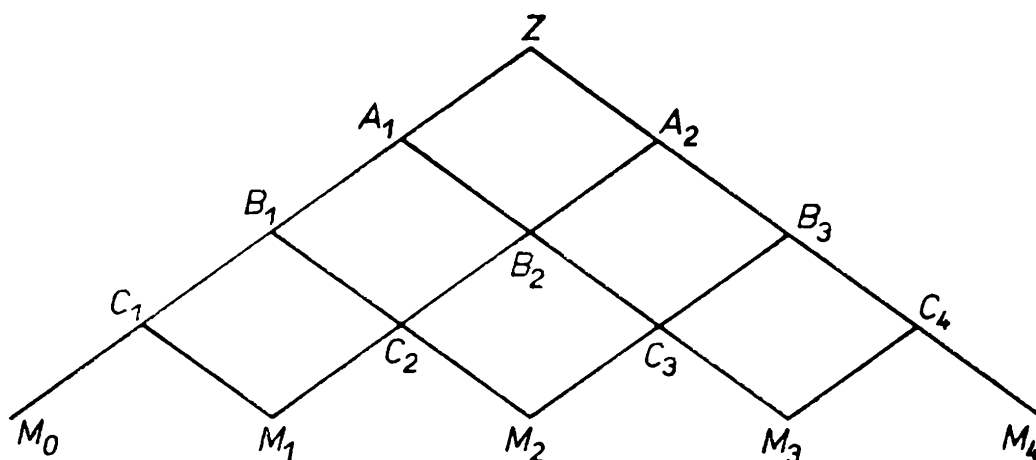
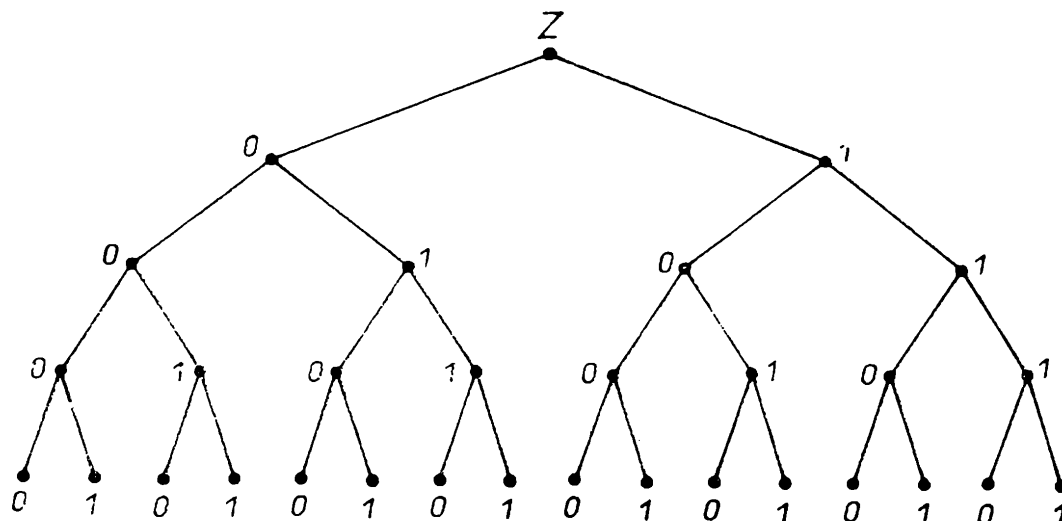
Představme si hru, ve které hráč v každém kroku hází čtyřikrát symetrickou homogenní mincí. Hráč získává přitom právě tolik bodů, kolik líců mu přitom padlo. S jakou pravděpodobností získává v jednom kroku právě k bodů?

Každý výrok, týkající se výsledku našeho pokusu, se dá zobrazit na uspořádanou čtveřici, skládající se pouze z nul (0 označuje, že padl rub) a jedniček (1 označuje, že padl líc). Všech těchto čtveřic je 2^4 a jsou stejně pravděpodobné. Výroku „hráč vyhrává právě k bodů“ odpovídá z úplného systému 2^4 čtveřic celkem $\binom{4}{k}$ čtveřic, je tedy

$$P[\text{„hráč vyhrává právě } k \text{ bodů“}] = P_k = \frac{\binom{4}{k}}{2^4} = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$; pro ostatní k je $P_k = 0$.

Vznik uspořádaných čtveřic, skládajících se z nul a jedniček, si můžeme představit pomocí grafu 1, kde každá cesta, začínající v Z a končící v uzlu na posledním řádku, nám určuje jistou uspořádanou čtveřici (v pořadí daném orientací hran).



Obr. 2. Bernoulliho schéma

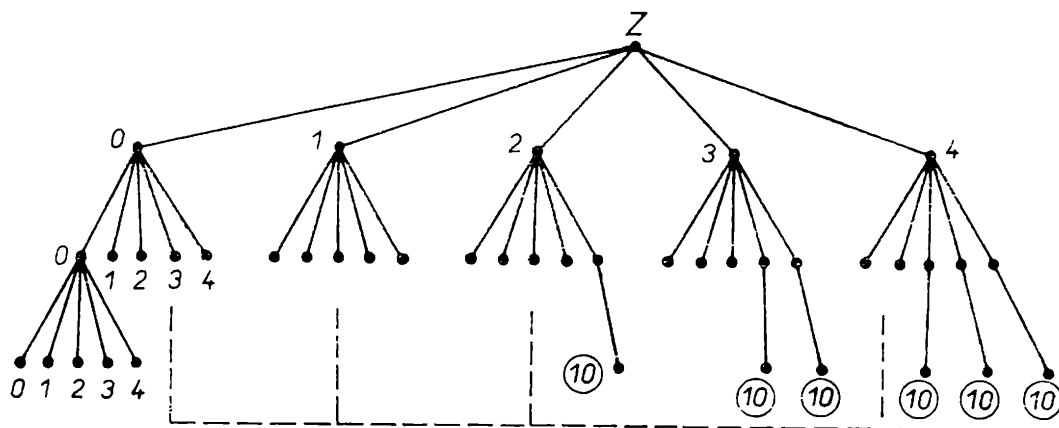
Uspořádané čtveřice, které mají stejný počet jedniček, mají i stejný počet hran vpravo, a tak je možno náš graf zjednodušit na graf 2, kde uzel M_k je obrazem výroku „hráč vyhrává právě k bodů“.

Srovnáním obou grafů zjistíme, že jsme pravděpodobnost P_k počítali správně.

O správnosti našeho výpočtu se však můžeme přesvědčit i pomocí tzv. *Galtonova prkénka*, které je sestaveno podle předchozího grafu. Do horního otvoru Z nasypeme drobné kuličky, které náhodně putují až na místo M_0 nebo M_1 nebo ... nebo M_4 . Je-li zhotoveno dokonale, pak pravděpodobnost, že kulička půjde vpravo, je stejná jako vlevo a je $\frac{1}{2}$. Bude-li kuliček dostatečně mnoho, pak poměrné četnosti kuliček, které padnou do M_k , budou blízké námi nalezeným hodnotám pravděpodobnosti P_k , tedy

$$P_k \approx \frac{m_k}{m},$$

kde m je počet všech kuliček a m_k počet kuliček, které jsou v cíli M_k .



Obr. 3

Číslo $\frac{m_k}{m}$ nám může sloužit jako odhad pravděpodobnosti P_k v případě, že by se nám P_k nepodařilo určit výpočtem z teoretických předpokladů.

Nakonec si ještě položíme otázku, s jakou pravděpodobností hráč může získat ve třech krocích právě 10 bodů? K řešení této úlohy si sestojíme zase stromový graf, kde každý uzel bude odpovídat situaci, do které se hráč dostane po určitém počtu kroků. Čísla u uzlů budou odpovídat počtu získaných bodů v určitém kroku x (viz graf 3).

Pravděpodobnost cesty $Z - 2 - 4 - 4$ je podle našeho grafu vzhledem k nutnosti současné platnosti výroků, jimž odpovídají po řadě pravděpodobnosti P_2, P_4, P_4 , rovna $P_2 \cdot P_4^2$. Stejnou pravděpodobnost pak mají i cesty $Z - 4 - 2 - 4$ a $Z - 4 - 4 - 2$. Podobná situace nastává i se třemi cestami obsahujícími uzly 3, 3 a 4. Odpovíme tedy na naši otázku. Pravděpodobnost toho, že hráč může ve třech krocích získat právě 10 bodů, je

$$P = 3 \cdot P_2 \cdot P_4^2 + 3 \cdot P_3^2 P_4 \doteq 0,016.$$

Příklad: Určete, jaká je pravděpodobnost toho, že hráč ve třech krocích získá méně než 10 bodů!

Řešení: $P = 1 - 3 \cdot P_2 P_4^2 - 3 P_3^2 P_4 - 3 P_3 P_4^2 - P_4^3$.

Nyní uvažujme trochu obecněji a ptejme se, jaká je pravděpodobnost toho, že po n -tém kroku dosáhne hráč právě d bodů? Odpověď dostaneme velmi snadno, když si uvědomíme, že po n -tém kroku máme vlastně $4n$ hodů mincí s celkovým počtem 2^{4n} možných různých výsledků. Z tohoto počtu výsledků je $\binom{4n}{d}$ výsledků, kdy hráč dosáhl právě d bodů.

Tedy hledaná pravděpodobnost P je

$$P = \frac{\binom{4n}{d}}{2^{4n}}.$$

Pro $n = 3$ a $d = 10$ pak musí být $P = \frac{\binom{12}{10}}{2^{12}} = 3 \cdot P_2 P_4^2 + 3 P_3^2 P_4$ v soulase s předcházejícím řešením.

fyzika

Jak lze tvořit koherentní odvozené jednotky

Ing. dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., ÚNM Praha

I když konečný výsledek při tvorbě koherentních odvozených jednotek musí být v určitém systematickém uspořádání jednotek (např. v SI) jednoznačný, lze k němu dojít poněkud odlišnými postupy.

Víme, že podmínkou *koherence* odvozených jednotek je, aby číselné faktory v rovnicích, kterými jsou tyto jednotky definovány, byly rovny jedné. Tato podmínka by měla být splněna v *rovnících jednotkových*, které jsou sice mnohde uznávány a používány, jež však nejsou dosud zdaleka běžné. Tak např. norma RVHP 1052-78 „Metrologie. Jednotky fyzikálních veličin“ uvádí v příloze, že koherentně odvozené jednotky SI se tvoří s pomocí veličinových rovnic, do kterých se dosazují za veličiny příslušné jednotky SI. Postup je vysvětlován na následujících příkladech.

Příklad 1.

Jednotky rychlosti se tvoří pomocí rovnice definující rychlost přímočarého a rovnoměrného pohybu bodu

$$v = \frac{s}{t},$$

kde značí v . . . rychlost

s . . . délku uběhnuté dráhy

t . . . dobu pohybu bodu.

Dosadíme-li namísto s a t jejich jednotky, dostaneme

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Jak je zřejmé, je jednotkou rychlosti SI jeden metr za sekundu. Je to rychlost přímočaře a rovnoměrně se pohybujícího bodu, při níž se poloha bodu přemístí za 1 sekundu o 1 metr.

Jestliže má rovnice číselný koeficient odlišný od jedné, pak při tvorbě koherentních jednotek dosazujeme do pravé strany této rovnice jednotky SI s takovou hodnotou, aby po vynásobení vznikl koeficient rovný jedné. To doporučuje zmíněná norma.

Příklad 2.

Použijeme-li při tvorbě jednotky energie rovnice

$$E = \frac{1}{2} m v^2,$$

kde značí E . . . kinetickou energii

m . . . hmotnost

v . . . rychlost pohybu bodu,

pak dostaneme koherentní jednotku energie SI např. takto

$$[E] = \frac{1}{2} (2[m][v]^2) = \frac{1}{2} 2 \text{ kg } (1\text{m/s})^2 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J},$$

nebo

$$[E] = \frac{1}{2} [m] (\sqrt{2} [v])^2 = \frac{1}{2} \text{ kg } (\sqrt{2} \text{ m/s})^2 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$$

Je patrné, že jednotka SI energie je joule (rovnající se newtonmetr).

V uvedených příkladech je joule roven energii tělesa s hmotností 2 kg pohybujícího se rychlostí 1 m/s nebo tělesa s hmotností 1 kg pohybujícího se rychlostí $\sqrt{2}$ m/s.

Takovýto postup je jistě možný, pokusíme se však zvolit postup názornější. V daném případě energie lze volit za výchozí veličinovou rovnici definiční vztah

WOLFF

$$A = F \cdot l,$$

který je uváděn v metrologické literatuře*) a který plyne zjednodušením známé vektorové rovnice

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l} = F \cdot l \cdot \cos \alpha.$$

*) Např. *Burdun G. D., Markov B. N.: Osnovy metrologii* (str. 53, vztah III. 23; Izdatelstvo standartov, Moskva, 1975).

Pro použití této rovnice hovoří také uvedená jednotka newtonmetr, rovná joulu, která z rovnice pro kinetickou energii nikterak nevyplývá.

Použijeme proto předešlé rovnice a rozepíšeme ji podle známé rovnice

$$X = \{X\} \cdot [X],$$

kde značí X veličinu (hodnotu veličiny), $\{X\}$ její číselnou hodnotu a $[X]$ jednotku.

Dostaneme

$$\{A\}[A] = \{F\}[F] \cdot \{l\}[l]$$

Ve vlastní povaze jednotek (tj. v obecné definici lineárních jednotek) spočívá samozřejmá skutečnost, že jednotka má jednotkovou hodnotu příslušné veličiny. Mohli bychom to poněkud neobvykle psát symbolicky takto

$$\{[A]\} = \{[F]\} = \{[l]\} = 1.$$

V tomto případě musí z porovnání s původní veličinovou rovnicí vyplynout, že

$$\{A\} = \{F\} \cdot \{l\} = 1,$$

a současně, že

$$\{A\} = \{F\} = \{l\}.$$

Z toho ovšem dále plyne, že

$$\{A\} = \{F\} = \{l\} = 1$$

a po dosazení do rozepsaného znění rovnice dostaneme

$$1 [A] = 1 [F] \cdot 1 [l],$$

a protože jedničku zpravidla vynecháváme, dostaneme pouze jednotkovou rovnici

$$[A] = [F] \cdot [l]$$

a postupně dále

$$[A] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} = \text{J},$$

čili

$$\text{J} = \text{N} \cdot \text{m} \text{ nebo přesněji } 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}.$$

A nyní se můžeme vrátit k rovnici kinetické energie

$$A = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Rozepíšeme si tuto rovnici podobně jako v předešlém případě

$$\{A\}[A] = \frac{1}{2} \{m\}[m] (\{v\}[v])^2$$

a dále

$$\{A\}[A] = \frac{1}{2} \{m\}[m] \{v\}^2[v]^2.$$

Dosaďme si za

$$[A] = 1 \text{ J} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}, \quad [m] = 1 \text{ kg} \text{ a}$$

$$[v] = 1 \text{ m/s} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\{A\} \cdot 1 \text{ J} = \frac{1}{2} \{m\} \cdot 1 \text{ kg} \{v\}^2 \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ s}^{-2}$$

a upravme

$$\{A\} \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{1}{2} \{m\} \{v\}^2$$

$$\{A\} \frac{1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}}{1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{1}{2} \{m\} [v]^2,$$

z čehož

$$\{A\} = \frac{1}{2} \{m\} \{v\}^2,$$

což je rovnice číselných hodnot, z níž je přímo patrné, že má-li být číselná hodnota energie jednotková, tj.

$$\{A\} = 1,$$

musí být

- při jednotkové hmotnosti pohybujícího se objektu (hmotného bodu), tj. $\{m\} = 1$, hodnota rychlosti $\{v\} = \sqrt{2}$ nebo
- při jednotkové rychlosti téhož objektu, $\{v\} = 1$, číselná hodnota jeho hmotnosti $\{m\} = 2$.

Tyto závěry jsou shodné se závěry druhého příkladu z normy RVHP. To vše je celkem jednoduché. Uvádíme si to zde však proto, abychom si odvodili jednotkovou rovnici, která je při odvozování koherentních jednotek SI mnohem srozumitelnější, nežli rovnice veličinová. Budeme nyní dělit výchozí rovnici rozepsanou do součinů číselných hodnot a jednotek poslední rovnicí číselných hodnot, tj. rovnicí

$$\{A\} [A] = \frac{1}{2} \{m\} [m] \cdot \{v\}^2 [v]^2$$

dělíme rovnicí

$$\{A\} = \frac{1}{2} \{m\} \{v\}^2$$

a dostaneme

$$[A] = [m] [v]^2,$$

což je hledaná jednotková rovnice. V této rovnici je číselný součinitel rovný jedné, jak vyžaduje zásada koherence. Přitom je zřejmé tvrzení o jednotkových rovnicích, že číselné faktory z veličinových rovnic nepřecházejí do jednotkových rovnic.

Uvedeme si ještě některé příklady další:

Příklad 3.

Mohli bychom pro přímočarou rychlost v použít této veličinové rovnice

$$v = \sqrt{2gh}$$

kde značí g . místní tíhové zrychlení

h . . . výšku hladiny volně vytékající kapaliny nad středem malého výtokového otvoru.

Je jistě zřejmé, že tato veličinová rovnice není definiční a v daném příkladě ji k tomuto účelu můžeme použít.

Rozepíšeme opět rovnici

$$\{v\}[v] = \sqrt{2} (\{g\}[g]\{h\}[h])^{1/2},$$

$$\{v\}[v] = \sqrt{2} \{g\}^{1/2}[g]^{1/2}\{h\}^{1/2}[h]^{1/2}$$

a dosadíme nyní z první rovnice již známé hodnoty a dostaneme

$$\{v\} 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \sqrt{2} \{g\}^{1/2} 1 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1} \{h\}^{1/2} 1 \text{ m}^{1/2},$$

$$\{v\} 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \sqrt{2} \{g\}^{1/2} \{h\}^{1/2} 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

a po dělení celé rovnice jednotkou rychlosti je

$$\{v\} = \sqrt{2} \{g\}^{1/2} \{h\}^{1/2},$$

což je opět rovnice číselných hodnot. Má-li být číselná hodnota rychlosti v jednotková, tj. v případě, že $\{v\} = 1$, musí být

— při jednotkové číselné hodnotě tíhového zrychlení $\{g\} = 1$ číselná hodnota výšky h rovna $\{h\} = \frac{1}{2}$, respektive

— při jednotkové číselné hodnotě výšky $\{h\} = 1$ číselná hodnota tíhového zrychlení $\{g\} = \frac{1}{2}$.

To by tedy znamenalo, že výtoková rychlost kapaliny v bude rovna $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ v případě, že při tíhovém zrychlení $g = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ bude výška kapaliny nad středem otvoru $h = 0,5 \text{ m}$, nebo v případě, že při jednotkové výšce hladiny kapaliny, $h = 1 \text{ m}$, musí být tíhové zrychlení rovno $g = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Na závěr tohoto případu dělíme původní rozepsanou versi rovnice poslední rovnicí číselných hodnot

$$\{v\}[v] = \sqrt{2} \{g\}^{1/2}[g]^{1/2}\{h\}^{1/2}[h]^{1/2},$$

$$\{v\} = \sqrt{2} \{g\}^{1/2} \{h\}^{1/2},$$

z čehož plyne, že

$$[v] = [g]^{1/2} [h]^{1/2}.$$

To je příslušná *jednotková rovnice*. Je zřejmé, že v jednotkové rovnici není číselný koeficient z rovnice veličinové, zatímco v rovnici číselných hodnot zůstal. V jednotkové rovnici se zachovaly beze změny mocnitéle u jednotek. Podle toho bychom při dosazení jednotek SI mohli psát

$$[v] = (1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^{1/2} (1 \text{ m})^{1/2} = 1 \text{ m}^{1/2} \cdot 1 \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ m}^{1/2} = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Příklad 4.

Veličinovou definiční rovnici první radiační konstanty Planckova zákona c_1 zní

$$c_1 = 2 \pi h \cdot c^2,$$

kde značí h Planckovu konstantu, jejíž jednotka je stejná jako u veličiny zvané „účinek“ (odtud též dříve používaný název této konstanty „účinkové kvantum“). Jednotka účinku je $[H] = 1 \text{ J} \cdot \text{s}$

c je rychlost světla (ve vakuu). Jednotka $[c] = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Podle dřívějšího jsme si ukázali, že číselné koeficienty (tzv. bezrozměrné) z veličinových rovnic odpadají, transformujeme-li je do jednotkových rovnic. Jednotková rovnice v tomto případě bude tedy znít

$$[c_1] = [h] \cdot [c]^2 = 1 \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^2$$

Rozepíšeme-li původní veličinovou rovnici ve tvar

$$\{c_1\} [c_1] = 2 \pi \{h\} [h] \{c\}^2 [c]^2,$$

dostaneme po úpravě, protože víme, že $[c_1] = [h] \cdot [c]^2$, rovnici číselných hodnot

$$\{c_1\} = 2 \pi \{h\} \{c\}^2.$$

Na památku Alberta Einsteina

Při příležitosti stého výročí narození Alberta Einsteina byla na domě č. 7 v Lesnické ulici v Praze na Smíchově dne 13. března 1979 odhalena jeho busta s pamětní deskou. V tomto domě bydlel se svou rodinou v letech 1911 až 1912, kdy vedl ústav teoretické fyziky na pražské německé universitě. Autory busty a desky jsou akademický sochař Milan Benda a ing. arch. Ivan Hněvkovský.

Zdánlivé pohyby kosmických těles - I.

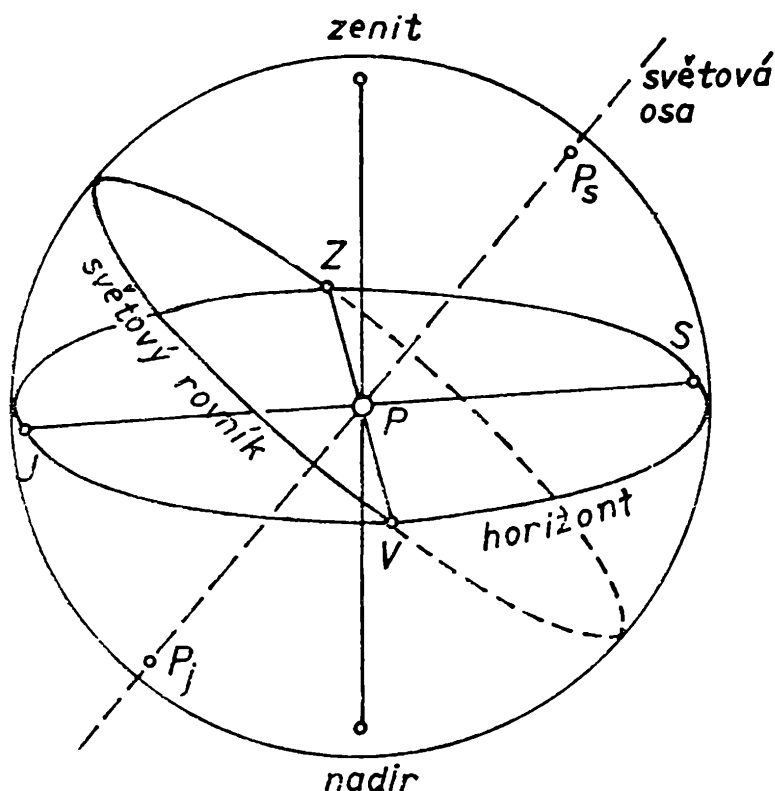
RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Slunce, Měsíc, planety, hvězdy i jiná kosmická tělesa jsou ve velkých vzdálenostech od Země. Vzdálenosti jednotlivých objektů se značně liší: nejbližším kosmickým tělesem je Měsíc, ve více než 400krát větší vzdálenosti je Slunce a nejvzdálenější planeta sluneční soustavy — Pluto — je v průměru ještě čtyřicetkrát dále od Země. Všechny hvězdy jsou daleko za hranicemi sluneční soustavy — nejbližší hvězda je ve vzdálenosti 1,3 parseku (pc), což znamená, že světlo vysílané touto hvězdou dospěje na Zemi za čtyři roky. Při pozorování ze Země však rozdíly ve vzdálenostech kosmických objektů nepostřehneme, zdánlivě se všechny promítají na povrch koule, které se říká *obloha*. Odborný název pro kulovou plochu se středem v místě pozorovatele je *sféra*; rozměry Země jsou vzhledem k rozměrům sféry zanedbatelné, pozorovatel na libovolném místě zemského povrchu je vždy ve středu sféry a rovněž střed Země si můžeme myslet ve středu sféry.

Pozorujeme-li objekty na sféře po několik hodin, zjistíme, že se sféra otáčí, a to od východu k západu. Slunce, Měsíc i hvězdy vycházejí na východním obzoru, dosáhnou největší výšky na jihu a zapadají na západě. Některé hvězdy nezapadají vůbec, ale opisují kruhové dráhy kolem bodu nad severním obzorem. Při pozorování v průběhu roku si můžeme povšimnout, že se mění vzhled hvězdné oblohy. V létě vidíme v noci na obloze jiná souhvězdí než v zimě, výrazné změny pozorujeme také ve zdánlivé denní dráze Slunce: v létě je Slunce déle nad obzorem a v poledne dosahuje mnohem větší výšky nad obzorem než v zimě.

V těchto změnách se odrážejí pohyby, které koná naše Země: zdánlivé denní otáčení oblohy od východu k západu je způsobeno rotací Země kolem osy v opačném směru, tj. od západu k východu, změny hvězdné oblohy i změny ve zdánlivé denní dráze Slunce v průběhu roku způsobuje obíhání Země kolem Slunce.

Abychom mohli zdánlivé pohyby kosmických těles na sféře podrobněji popsat, promítneme na sféru základní přímky a roviny, související jednak s pozorovacím místem, jednak se základními pohyby Země. Každá rovina, proložená pozorovacím místem P (střed sféry) je rovinou hlavní a protíná sféru v hlavní kružnici (kružnice s poloměrem rovným poloměru sféry). Jednou ze základních rovin, používaných v astronomii,

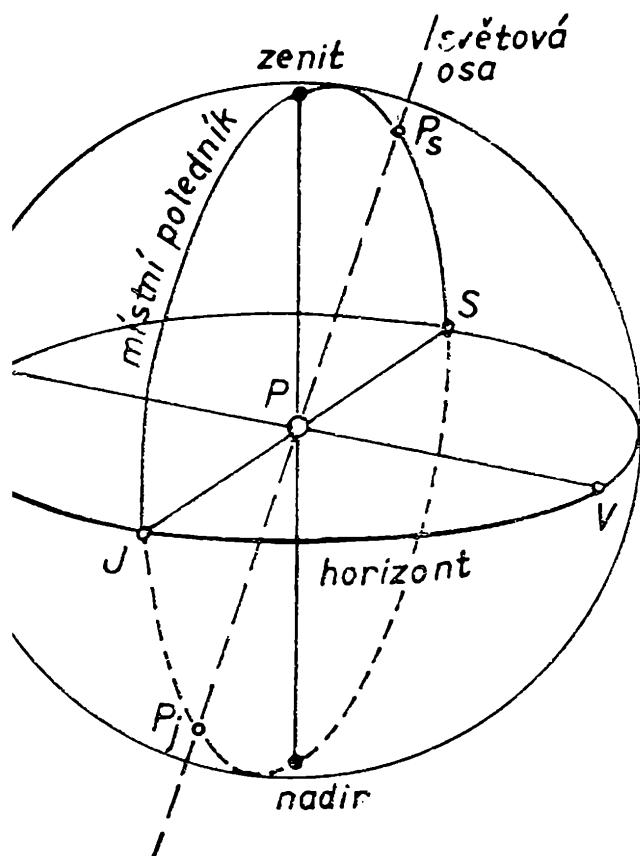


Obr. 1. Význačné body, směry a roviny na sféře

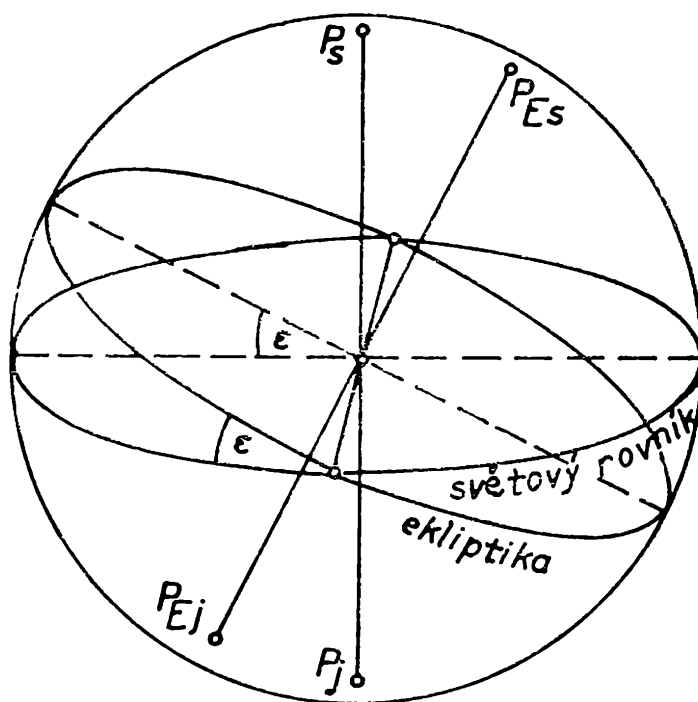
je rovina vodorovná. Tato rovina protíná oblohu v kružnici, která se nazývá *obzorník* neboli *horizont*. Kolmice k této rovině protne oblohu nad hlavou pozorovatele v bodě, který se nazývá *zenit* (nadhlavník), na opačné straně protíná tato kolmice sféru v bodě zvaném *nadír* (podnožník) (obr. 1).

Země se otáčí kolem osy, jejíž směr v prostoru je prakticky stálý. Kolem téže osy, zvané v astronomii *světová osa*, se zdánlivě otáčí (ovšem v opačném směru) sféra. Světová osa protíná sféru v severním P_S a v jižním P_J světovém pólu. Rovina, kolmá ke světové ose a procházející středem sféry (pozorovacím místem), je rovnoběžná s rovinou rovníku Země. Tato rovníková rovina protíná sféru v kružnici, zvané *světový rovník*. Světový rovník a horizont se protínají ve východním a západním bodě, přímka kolmá na spojnici východního a západního bodu protíná sféru v severním a v jižním bodě horizontu. Hlavní kružnice, procházející zenitem, nadírem, severním a jižním bodem, se nazývá *místní poledník* (obr. 2); místní poledník prochází ovšem také severním a jižním světovým pólem.

Na sféru můžeme promítnout také rovinu, v níž obíhá Země kolem Slunce, tj. *rovinu ekliptiky*. Tato rovina protíná sféru v kružnici, zvané *ekliptika* (obr. 3). Světový rovník a ekliptika se na sféře protínají ve dvou bodech, zvaných *jarní bod* a *podzimní bod*. V průběhu roku se Slunce promítá do jednotlivých bodů na ekliptice, přičemž jarním bodem prochází v den *jarní rovnodennosti* (začátek jara), podzimním bodem



Obr. 2. Místní poledník

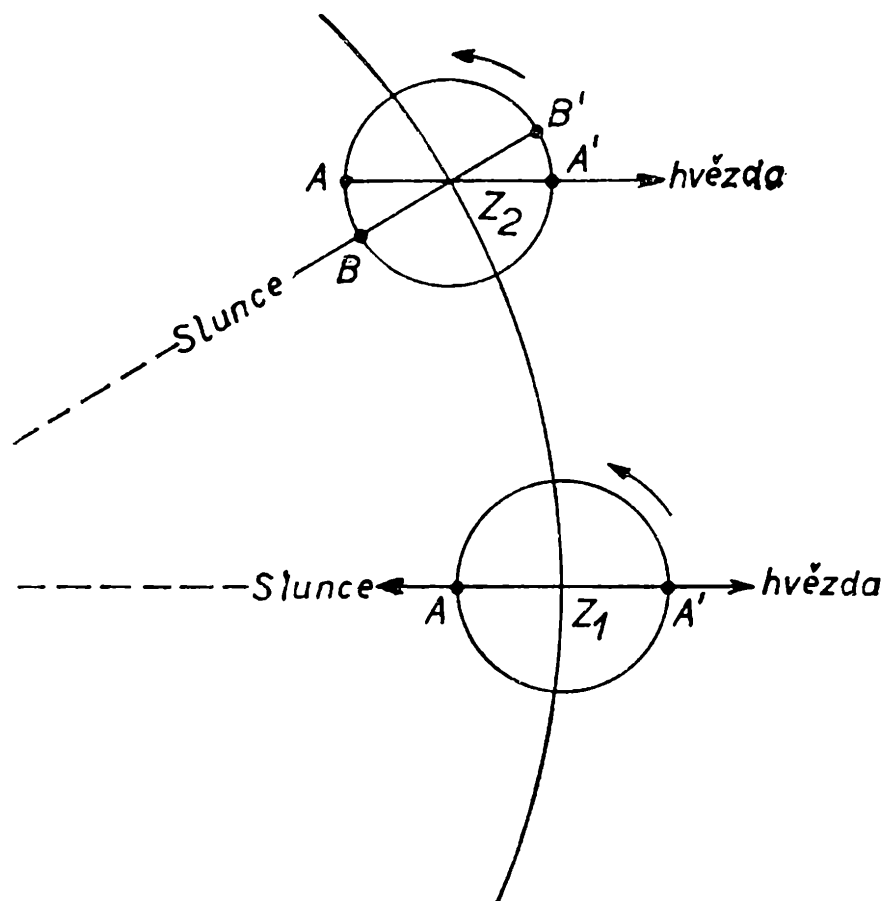


Obr. 3. Poloha ekliptiky vzhledem ke světovému rovníku

v den *podzimní rovnodennosti* (začátek podzimu). Kolmice k rovině ekliptiky, procházející středem sféry, protíná sféru v *pólech ekliptiky* P_{Es} , P_{Ej} .

Hvězdný a sluneční den

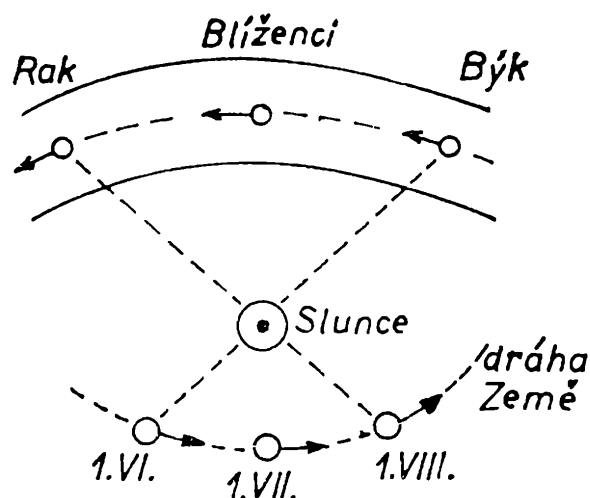
Pozorujeme-li některou hvězdu několik nocí po sobě, zjistíme, že hvězda vychází vždy v téměř místě na východním obzoru, dosahuje vždy téže největší výšky nad jižním obzorem a zapadá vždy v téměř místě na západním obzoru, opisuje tedy každý den tutéž zdánlivou dráhu na sféře, avšak východ, vrcholení i západ hvězdy nastává vždy asi o 4 minuty dříve než dne předcházejícího. Hvězda dosahuje největší výšky nad obzorem při průchodu místním poledníkem; průchodu místním poledníkem říkáme proto *vrcholení* neboli *kulminace* hvězdy. Přesněji řečeno, jde o *horní kulminaci*. V astronomii se používá také pojmu *dolní kulminace*, při níž hvězda opět prochází místním poledníkem, ale je v největší hloubce pod obzorem. Hvězdy, které nezapadají, jsou při dolní kulminaci v nejmenší výšce nad severním obzorem. Doba mezi dvěma horními (nebo dolními) kulminacemi hvězdy se nazývá *hvězdný den* (za tuto dobu se Země otočí o 360° vzhledem ke hvězdám); podobně je definován sluneční den jako doba mezi dvěma dolními kulminacemi Slunce (Slunce je v dolní kulminaci o půlnoci a jak víme, o půlnoci se mění datum). Slunce vrcholí každý den přibližně v tutéž dobu — ve 12 hodin místního



Obr. 4. Rozdíl mezi hvězdným a slunečním dnem

času, je tedy zřejmé, že hvězdný den je asi o 4 minuty kratší než den sluneční. Za rok naroste rozdíl mezi hvězdným a slunečním časem na 24 hodiny, po uplynutí jednoho roku vrcholí hvězda opět v tutéž dobu slunečního času. Rozdíl mezi hvězdným a slunečním dnem způsobuje, že v průběhu roku jsou v noci nad obzorem postupně různá souhvězdí, ovšem s výjimkou tzv. *cirkumpolárních souhvězdí*, tvořených hvězdami, které nezapadají a jsou proto pozorovatelné v kteroukoliv roční dobu. Hvězdy, které např. začátkem ledna kulminují o půlnoci, budou po uplynutí poloviny roku kulminovat v poledne, a proto budou v létě na denní obloze, a nebudou tudíž pozorovatelné.

Rozdíl mezi hvězdným a slunečním časem je způsoben oběhem Země kolem Slunce. Za hvězdný den se Země otočí o 360° vzhledem ke hvězdám, za sluneční den vzhledem ke Slunci. Země obíhá kolem Slunce ve stejném směru, ve kterém se otáčí kolem své osy. Pro zjednodušení předpokládejme, že dráha Země je kruhová. Za jeden rok, tj. za 365,24 dne, opíše spojnice Země a Slunce úhel 360° , což znamená, že za jeden den opíše přibližně úhel 1° . Situace je znázorněna na obr. 4. Je-li Země v poloze Z_1 , směřuje ke Slunci úsečka AA' , v místě A na Zemi Slunce kulminuje. Po uplynutí jednoho hvězdného dne se přesune Země do polohy Z_2 ; úsečka AA' je rovnoběžná se svou původní polohou, neboť



Obr. 5. Zdánlivá roční dráha Slunce po ekliptice

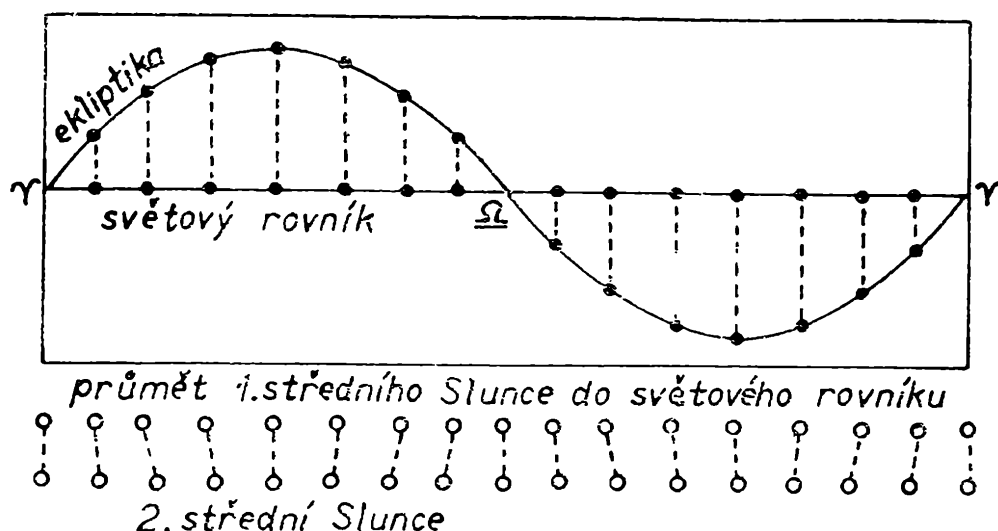
Země se otočila vzhledem ke hvězdám o 360° , ke Slunci však nyní směřuje úsečka BB' . K tomu, aby se úsečka AA' natočila do polohy BB' a aby Slunce kulminovalo v bodě A , je potřeba asi 4 minut, což si snadno ověříme přibližným výpočtem. Úsečka AA' se musí stočit asi o 1° ; Země se otočí za 24 hodin, tj. 1440 minut, o 360° , o jeden stupeň se tedy otočí za $\frac{1440 \text{ min}}{360^\circ} = 4 \text{ minuty}$. Přesnější výpočet vede k hodnotě rozdílu

mezi hvězdným a slunečním dnem 3 min 56,55 s. Jeden rok má 365,24 slunečních dnů, hvězdných dnů o jeden více, tj. 366,24.

Posune-li se Země na své dráze kolem Slunce o určitý úhel, posune se o tentýž úhel, ale v opačném směru, průmět Slunce na ekliptiku. Oběh Země kolem Slunce je tedy příčinou zdánlivého ročního pohybu Slunce mezi hvězdami. Během roku projde Slunce celou ekliptikou a vrátí se do původní polohy; promítá se postupně do souhvězdí, rozložených podél ekliptiky. Tato souhvězdí se nazývají zvířetníková (neboli zodiakální) souhvězdí. Zdánlivý pohyb Slunce mezi zvířetníkovými souhvězdími je znázorněn na obr. 5.

Časová rovnice

Všimněme si blíže slunečního dne, kterým se řídí občanský život. Pravý sluneční den je doba mezi dvěma průchody Slunce místním poledníkem. Okamžik horní kulminace Slunce se nazývá pravé poledne. Kdyby byla dráha Země kolem Slunce kruhová a kdyby rovina rovníku byla totožná s rovinou ekliptiky, byly by pravé sluneční dny přesně stejné (předpokládáme rovnoměrnou rotaci Země kolem osy). Ve skutečnosti však je dráha Země eliptická, z čehož vyplývá, že se mění rychlost Země na její dráze, a rovina ekliptiky svírá s rovinou rovníku úhel $23,5^\circ$. Obě tyto skutečnosti způsobují, že se pravé sluneční dny od sebe liší: v době kolem jarní a podzimní rovnodennosti je pravý sluneční den

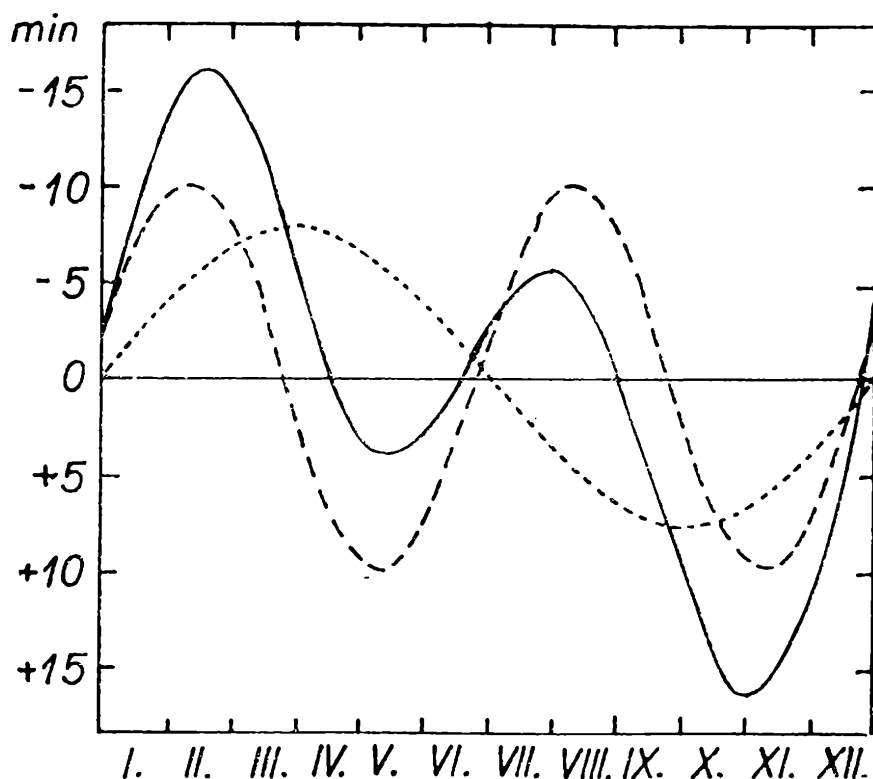


Obr. 6. Zdánlivý pohyb Slunce po ekliptice a jeho průmět na světový rovník

asi o 20 s kratší než průměrný sluneční den, v době letního slunovratu je asi o 13 s delší, v době zimního slunovratu je delší téměř o 30 s. Pravý sluneční čas tedy plyne nerovnoměrně, proto se místo pravého slunečního času používá tzv. *střední sluneční čas*.

První příčinou nerovnoměrného plynutí pravého slunečního času je eliptická dráha Země. Země se pohybuje nejrychleji v perihéliu (začátkem ledna), nejpomaleji v aféliu (začátkem července). Nerovnoměrný pohyb Země se zrcadlí v nerovnoměrném zdánlivém pohybu Slunce po ekliptice; aby se tato nerovnoměrnost odstranila, zavedli astronomové tzv. *první střední Slunce* — myšlené Slunce, které se pohybuje rovnoměrně, přičemž prochází současně s pravým Sluncem tím bodem ekliptiky, do nějž se pravé Slunce promítá v době, kdy je Země v perihéliu a aféliu. V den, kdy je Země v perihéliu, prochází skutečné i první střední Slunce místním poledníkem současně, pak se první střední Slunce postupně opožďuje, přičemž rozdíl nabude maximální hodnoty asi 7,5 min začátkem dubna; pak se pohyb Země na dráze zpomaluje natolik, že myšlené první střední Slunce začne skutečné Slunce opět „dohánět“ a začátkem července procházejí obě poledníkem současně. V té době je však pohyb Země nejpomalejší, první střední Slunce tedy předhání skutečné Slunce a začátkem října dosáhne rozdíl opět maximální hodnoty asi 7,5 min — o tuto dobu prochází nyní skutečné Slunce poledníkem později než první střední Slunce. Rozdíl se pak zmenšuje až do začátku ledna, kdy se obě Slunce sejdou.

Avšak ani první střední Slunce, které se po ekliptice pohybuje rovnoměrně, neprochází místním poledníkem ve stejných časových intervalech. Abychom to pochopili, rozviňme pás sféry, zahrnující světový rovník a ekliptiku, do roviny. V tomto rozvinutí bude rovník úsečka, ekliptika bude tvořit sinusoidu (obr. 6). Slunce se pohybuje rovnoměrně po ekliptice, na dobu kulminace má však vliv jeho průmět do rovníku.



Obr. 7. Časová rovnice a její dvě složky

Z obr. 6 je zřejmé, že pohyb tohoto průmětu do rovníku není rovnoměrný. V době, kdy prochází první střední Slunce jarním a podzimním bodem, svírá jeho dráha s rovníkem úhel $23,5^\circ$ a průmět se pohybuje pomaleji (promítá se i rychlost Slunce), v době slunovratů je dráha Slunce rovnoběžná s rovníkem a rychlost průmětu je totožná s rychlostí Slunce na ekliptice. Proto se zavádí tzv. *druhé střední Slunce*; je to myšlené Slunce, které se pohybuje rovnoměrně po světovém rovníku, přičemž prochází současně s prvním středním Sluncem body rovnodennosti. Vliv sklonu zemské dráhy k rovině rovníku na průběh pravého slunečního času je ještě výraznější než vliv excentricity. Po průchodu jarním bodem se pohybuje druhé střední Slunce rychleji než průmět prvního středního Slunce na rovník, rozdíl průchodu místním poledníkem dosáhne maximální hodnoty kolem 10 minut, pak se zmenšuje, v době slunovratu se obě Slunce sejdou a pak se druhé střední Slunce opožďuje, přičemž rozdíl dosáhne opět hodnoty kolem 10 minut, druhé střední Slunce začne první „dohánět“ a obě Slunce se sejdou v den podzimní rovnodennosti; ve druhé polovině roku se celý průběh opakuje.

Obě uvedené příčiny působí současně a jejich vlivy se sečítají; perioda prvního vlivu (excentricita dráhy Země) je jeden rok, perioda druhého vlivu (sklon zemské dráhy) je půl roku. Měřítkem našeho času je druhé střední Slunce; rozdíl mezi průchodem skutečného Slunce a druhého středního Slunce místním poledníkem nazýváme obvykle „časová rovni-

ce“; přesnější označení je *časová korekce* (tento termín se však dosud nevžil). Její průběh je znázorněn na obr. 7, a to plnou čarou; tečkovaně je nakreslen vliv excentricity zemské dráhy (tj. rozdíl mezi skutečným Sluncem a prvním středním Sluncem), čárkovaně vliv sklonu zemské dráhy neboli rozdíl mezi prvním středním Sluncem a druhým středním Sluncem. Z obr. 7 je zřejmé, že časová rovnice dosahuje největší záporné hodnoty v polovině února, kdy se skutečné Slunce opoždí za druhým středním Sluncem o 14,5 min, největší kladné hodnoty na začátku prosince, kdy prochází skutečné Slunce místním poledníkem o více než 16 minut dříve než druhé střední Slunce. O hodnotu danou časovou rovnicí se ovšem posouvá nejen poledne, ale také východ a západ Slunce; nápadné je zejména opožďování východu Slunce ještě po zimním slunovratu a nestejně trvání „dopoledních“ a „odpoledních“ hodin v únoru a v listopadu.

Připomeňme, že jsme zde hovořili o místním čase, který se vztahuje na průchod Slunce místním poledníkem. Místní čas se liší pro jednotlivé poledníky, přičemž rozdíl činí 4 minuty na 1° zeměpisné délky, neboť Země se otočí o 1° právě za 4 minuty. Je zřejmé, že místní čas je pro praktické účely zcela nevhodný; rozdíl v místních časech např. mezi Plzní a Košicemi činí asi půl hodiny, pro místa s rozdílem zeměpisných délek 15° je rozdíl místních časů již 1 hodina atd., proto byl mezinárodní úmluvou zaveden *světový* a *pásmový čas*. Světový čas je místní čas nultého poledníku, pásmový čas se od světového času liší vždy celistvým počtem hodin. U nás používáme *středoevropského času*, což je místní čas 15. poledníku východní délky. Pro zajímavost připomeňme, že 15. poledník prochází Jindřichovým Hradcem; v tomto městě se tedy shoduje středoevropský čas s místním časem.*)

V tomto článku jsme se zabývali vlivem rotace Země a jejího oběhu kolem Slunce na denní pohyb hvězd a na denní i roční zdánlivý pohyb Slunce, kterým je určován čas na Zemi. Ve druhé části tohoto článku si povšimneme, jak se roční oběh Země kolem Slunce odráží ve zdánlivých změnách poloh hvězd.

*) Od 1. dubna 1979 do 29. září 1979 platí v ČSSR *letní čas*, tj. východoevropský čas, který je místním časem 30. poledníku východní délky. Tento poledník probíhá v blízkosti Leningradu, Kyjeva a Oděsy. (Pozn. red.)

Z dějin exaktních věd

Bernard Bolzano - humanista a matematik

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topoľčany

Bernard Bolzano (nar. 5. 10. 1781, zomrel 18. 12. 1848), profesor pražskej univerzity v rokoch 1806—1819, bol veľmi často v styku s mladými ľuďmi. Sám sa neváhal podpísať *Filoteknos*, t.j. milujúci deti. Už prvá prednáška presvedčila poslucháčov univerzity, že vychudnutý, chorľavý profesor je oddaný službe odovzdávať poznatky svojich štúdií filozofických i matematických s plným nasadením svojich schopností, s láskou i pochopením pre mladých študentov. Namiesto dohodnutej rebélie sa po prvej prednáške B. Bolzana ozval potlesk. Po celú dobu svojho úradu bol Bolzano starostlivým a citlivým vychovávateľom, nevyhýbajúcim sa žiadnym otázkam študentov. Bol prísny a spravodlivým examinátorom, obľúbeným prednášateľom.

Na priblíženie života a diela vám môže poslúžiť publikácia *J. Loužila* „Bernard Bolzano“, ktorú v roku 1978 vydalo nakladateľstvo Melantrich v Prahe. V knižke sú uvedené okrem životopisných údajov a postrehov z učiteľského pôsobenia aj Bolzanove utopické názory na organizáciu spoločnosti a hlboké posúdenie jeho práce *Vedoslovie*. Súčasťou práce Jaromíra Loužila sú aj obrazové prílohy a výber preložených úryvkov z Bolzanovho diela. Kniha je sympatickým príspevkom k 130. výročiu úmrtia a 200. výročiu narodenia Bernarda Bolzana.

My si pripomenieme niektoré zásluhy B. Bolzana v oblasti matematiky. Štyri roky pred *A. Cauchym* odvodil nutnú podmienku pre konvergenciu radov s reálnymi členmi. A zároveň formuloval tiež postačujúcu podmienku pre konvergenciu. Vyslovil vetu, že každá ohraničená nekonečná postupnosť reálnych čísel má aspoň jeden hromadný bod. V práci *Rýdzo analytický dôkaz* (1817) dokázal vetu: Ak funkcia $f(x)$ je v intervale $\langle a, b \rangle$ spojitá a $f(a) \cdot f(b) < 0$, tak v (a, b) existuje aspoň jedno c tak, že $f(c) = 0$. Ako prvý podal Bolzano presnú definíciu spojitosti funkcie. Zostrojil spojitú funkciu, ktorá nemá deriváciu v žiadnom bode hustej množiny. Ďalej zostrojil spojitú funkciu, ktorá nie je monotónna na žiadnom intervale svojho definičného oboru. Zaoberal sa a mal rozpracovanú teóriu reálnych čísel, pokúšal sa o dôkaz axiómy o rovnobežkách. Bolzano zaviedol pojmy uzavretého, otvoreného a polouzavretého intervalu.

V *Paradoxoch nekonečna* vystihol B. Bolzano niektoré zásadné myšlienky teórie množín, čo ocenil sám G. Cantor. Bolzano rozlíšil konečnú, spočítateľnú a nespočítateľnú množinu, uznával aktuálne nekonečno. Dokázal, že vlastná podmnožina nekonečnej množiny môže byť s ňou samou ekvivalentná. Bernard Bolzano dospel až k pojmom mohutnosti množiny a mohutnosti kontinua, ale nevyužil ich. Medzi prvými pochopil význam nekonečna v matematike a vytušil dôležitosť precíznych definícií. Napríklad napísal: „Konečné a nekonečné sa vzťahuje na určité vnútorné vlastnosti predmetov a vôbec sa netýka len ich vzťahov k našej poznávacej schopnosti či dokonca k našim zmyslom.“

Hlbokým odkazom v oblasti sémantickej logiky sa stalo Bolzanovo *Vedoslovie*, dokončené v roku 1830, ktoré vyšlo anonymne v roku 1837. Bolzano, vychádzajúci zo svojich filozofických a etických princípov, sa snažil hľadať objektívne dôvody matematických poučiek: „Predovšetkým som si stanovil pravidlo, že ma žiadna zrejmosť predpokladu nedonúti pre to, aby som sa cítil zbavený povinnosti hľadať preň dôkazy tak dlho, pokiaľ jasne neuvidím, že nemožno a prečo nemožno požadovať žiadny dôkaz.“ Spresňoval pojmy, budoval systém, spájaj morálny ideál s exaktnou metódou. Spoznal, že v matematike sa nemôžeme zaobiť bez dôkazu existencie. Pri dôkazoch žiadal Bolzano uviesť všetky predpoklady, používať dané a neuchylovať sa k cudzorodým pojmom. Naznačil cesty k formalizácii niektorých dôkazových postupov.

Bernard Bolzano predbehol v mnohých matematických úvahách svojich súčasníkov. I keď mnohé jeho významné podnety zostali v jeho dobe nepublikované i nepochopené, aj tak mu nesporne patrí popredné miesto v histórii matematiky. Bolzano dokázal veľmi dobre narábať s jemným aparátom matematiky, zdôrazňoval súvislosť matematiky s logikou a filozofiou, prispel k výstavbe solídnych základov modernej matematiky i logiky.

Svoje utopické predstavy o riadení spoločnosti vypracoval Bolzano v práci *O najlepšom štáte*. Toto dielo je odrazom jeho ideí o obecnom blahu ako najvyššom mravnom zákone.

B. Bolzano zostane v našich dejinách zapísaný ako významný matematik, logik, filozof i sociálny mysliteľ. Ako človek pokrokový, ktorý svoje presvedčenie vedecké i humanistické nielen hlásal, ale aj žil. Myšlienka *Isokratova*, ktorú citoval Bolzano ako motto svojej prvej práce *Úvahy o niektorých predmetoch elementárnej geometrie*, je zaujímavým postrehom, výstižnou charakteristikou i podnetným impulzom:

„... vo vedách i vo všetkých ostatných oblastiach neprinášajú pokrok tí, ktorí krčovite zotrúvajú na ustálenom stave vecí, ale tí, ktorí sa usilujú o lepšie, tí, ktorí sa odvážia stále meniť všetko, čo nie je v poriadku.“

Thomas Young

JOSEF KOTYK, Pardubice

Anglický lékař *Thomas Young*, zesnulý před 150 lety dne 10. května 1829 v Londýně, je nejen jednou z největších postav v dějinách fyzikální optiky, nýbrž také jednou z nejskvělejších hvězd plejády, která formovala fyzikální myšlení 19. století. Hlubším studiem nejdelikátnějších optických jevů, interference, difrakce (ohybu) a polarizace světla přispěl však zejména k prohloubení našeho poznání podstaty světla.

Thomas Young (naroz. dne 13. června 1773 v Milvertonu) je duchovním otcem principu interference. Je-li světlo, usuzoval, podle představ Huygensovy undulační teorie dějem povahy vlnivé, musí i u něho obdobně jako u zvuku docházet k interferenci. Young objevil, že k ní dochází např. na tenkých vrstvách vzduchových v trhlinách krystalů, skla apod. Vznik jejich barev vyložil interferencí světla.¹⁾

Některé ohybové zjevy byly pozorovány a popsány již v 17. století (*Fr. M. Grimaldi*, 1618 — 1663). Young nepochyboval, že u nich jde také o interferenci světla; věděl zejména o existenci interferenčních proužků uprostřed stínu drátu při známém ohybovém pokusu. K úspěšným Youngovým výkonům patří také výklad tmavého středu soustavy interferenčních kroužků, vznikajících na vzduchové vrstvě mezi známými Newtonovými skly. Z vlastních Newtonových měření²⁾ odvodil Young také vlnovou délku monochromatického (jednoduchého) světla. Po objevu ultrafialového záření (kolem r. 1801) dokázal Newtonovými skly rovněž jeho interferenci; interferenční kroužky učinil viditelnými tím, že je zachytil na papír napuštěný dusičnanem stříbrným; to mu umožnilo stanovit také vlnovou délku záření. Young upozornil rovněž na vliv ohybu světla na neostrost obrazů v mikroskopu; předešel tím o půl století Abbeovu³⁾ teorii rozlišovací schopnosti.

Rokem 1801, kdy Young vystoupil s představou interference a použil jí na Newtonovy kroužky, začalo heroické období⁴⁾ vlnové teorie světla.

¹⁾ Na vrstvách větší tloušťky vznik interferenčních zjevů nepozorujeme. Vysvětlete, proč!

²⁾ *Isaac Newton*, autor emanační (emisní) teorie světla (*Optics*, 1704), však interferenci světla neznal; píše pouze o „střídavých stavech“ (angl. fits = nálady, vrtochy) světelných částic; mýnil zřejmě periodicitu děje.

³⁾ *Ernst Abbe* (1840—1905) působil na univerzitě v Jeně a jako vědecký poradce tamějších optických závodů; podal teorii optických přístrojů, přihlížející také k ohybu světla; má největší zásluhu o jejich zdokonalení.

⁴⁾ *Max von Laue*: Dějiny fyziky (Malá moderní encyklopedie, sv. 11, Orbis - Praha 1963), str. 39.

Závěry, k nimž Young dospěl studiem úkazů polarizace světla (objevené r. 1809), sdělil roku 1817 v dopise profesoru polytechnické školy v Paříži Dom. Fr. Arago⁵⁾ slovy: „Poněvadž polarizovaný paprsek má v různých směrech k němu kolmých různé vlastnosti, může být světlo jen vlněním příčným.“ Doba nebyla však zralá pro řešení problematiky tak svízelné; představa příčného charakteru světelného vlnění kladla na vlastnosti hypotetického světelného éteru (předpokládaného nesmírně řídkého, vše pronikajícího a přitom tuhého nosného prostředí) požadavky tak absurdní, že fyzikové se nedokázali s ní ihned vypořádat. Teprve další práce Youngova vrstevníka a posléze i dovršitele jeho díla Aug. J. Fresnela (zemř. roku 1827) potvrdily její správnost.

Optické vlastnosti látky souvisí s její pružností. Optika byla podle tehdejších názorů jako nauka o pružnosti světelného éteru součástí mechaniky. V této souvislosti, spíše však z okrajového pole Youngovy působnosti, je našim čtenářům znám také Youngův modul pružnosti.

Jako lékař zabýval se Young fyziologickou optikou, studiem akomodace oka, vizuálního astigmatismu a mechanismu barevného vidění. Předpokládal, že existují tři základní barevné počítky: počitek barvy červené, zelené a fialové, z nichž se dá podle něho každý jiný barevný počitek složit. Svědčí o správnosti a trvalé platnosti Youngova myšlení, že Youngova teorie barevného vidění byla v druhé polovině 19. století vzkříšena takovými duchy, jakými byli James Clerk Maxwell, zesnulý před 100 lety dne 5. listopadu 1879, Hermann von Helmholtz a jiní.

V roce 1800 byla založena slavná Royal Institution v Londýně. Na ní působil Young od roku 1801 jako profesor Natural Philosophy (= fyziky)⁶⁾; záhy však poznal, že posluchačům je „příliš učený“, proto již roku 1803 učitelské činnosti zanechal. Rovněž v lékařské praxi, kterou vykonával jen asi do roku 1818, nebyl příliš úspěšný. Vědecká práce byla mu vyšším posláním. Dokladem toho je také Youngova vědecká činnost v oboru egyptologie. Český egyptolog akademik *Frant. Lexa* (1876 — 1960) se netajil při svých univerzitních přednáškách⁷⁾ tím, že teprve objevy, které Young publikoval roku 1819 — jejich význam si připomeňme zvláště o jejich letošním 160. výročí — uvedly o tři roky

⁵⁾ *Dominique François Arago* (1786—1853) proslul studiem magnetických účinků elektrického proudu, rotačního magnetismu (Aragův rotační magnetismus) aj.

⁶⁾ Tamější katedru chemie vedl tehdy *Humphrey Davy*, našim čtenářům z učiva fyziky rovněž známý (Davyho hornický kahan, Davyho el. oblouk aj.; pracoval také na zkapalňování plynů). Zemřel před 150 lety v témž roce 1829 jako Young.

⁷⁾ Jeho vědecké činnosti, také v matematice, se týká autorova Hrst vzpomínek v *Rozhledech* roč. 54, čís. 7, str. 333 až 335.

později, v roce 1822, *Jeana Fr. Champolliona* k rozluštění hieroglyfického písma. Podle nápisu na pamětní desce, umístěné ve Westminsterském opatství, byl Young „první, kdo pronikl do temnot, které po věky zahalovaly egyptské hieroglyfy“. Ještě na úmrtním loži pracoval „poslední člověk, který věděl všechno“ — na svém egyptském slovníku

olympiády

Čebyševova nerovnost

RNDr. ANTONÍN VRBA, CSc., MÚ ČSAV Praha

První přípravná úloha kategorie A v letošním ročníku matematické olympiády byla asi nejobtížnější a také nejzajímavější. Myslím, že stojí za to, abychom se k ní v tomto článku ještě vrátili a trochu ji rozebrali.

Nech a_{jk} ($j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$) sú reálne čísla, pre ktoré je

$$0 \leq a_{j1} \leq a_{j2} \leq \dots \leq a_{jm} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Dokážte nerovnosť

$$\left(\sum_{k=1}^m a_{1k} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{2k} \right) \dots \left(\sum_{k=1}^m a_{nk} \right) \leq m^{n-1} \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{nk}.$$

Kedy platí rovnosť?

Je tedy dáno mn nezáporných čísel

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m},$$

$$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m},$$

$$a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}$$

a ta jsou v každém řádku uspořádána podle velikosti. Levou stranu nerovnosti dostaneme tak, že sečteme čísla v každém řádku a těchto n součtů znásobíme. Roznásobením závorek bychom dostali součet všech m^n součinů tvaru

$$a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

tj. součinů, v nichž je zastoupeno právě po jednom čísle z každého řádku.

Na pravé straně je součet jen m z těchto součinů — jde o součiny čísel z jednotlivých sloupců — je však opatřen koeficientem m^{n-1} .

Co říká nerovnost pro malá n ? Pro $n = 1$ má tvar

$$\sum_{k=1}^m a_{1k} \leq \sum_{k=1}^m a_{1k}$$

a samozřejmě platí pro každou m -tici reálných čísel $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}$, přitom vždy nastane rovnost. Pro $n = 2$ se naše nerovnost redukuje na

$$\left(\sum_{k=1}^m a_{1k} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{2k} \right) \leq m \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k}.$$

Teď už není na první pohled vidět, platí-li to vždy za daných předpokladů. Ještě než se o tom přesvědčíme, přepíšeme si nerovnost šikovněji. Protože n máme konkrétně dáno a je malé, není pohodlné rozlišovat dané m -tice pomocí indexů, raději pro každou vybereme jiné písmeno. Budeme tedy dokazovat nerovnost

$$\left(\sum_{k=1}^m x_k \right) \left(\sum_{k=1}^m y_k \right) \leq m \sum_{k=1}^m x_k y_k$$

za předpokladu

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \\ 0 &\leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Je to tzv. *Čebyševova**) *nerovnost*. Ještě naposledy odbočme a uvědomme si její význam. Odhaduje zdola skalární součin $\sum_{k=1}^m x_k y_k$ vektorů $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $(y_1, y_2, \dots, y_m)$. V loňském ročníku olympiády se všemi koly kategorie A táhla tzv. *Cauchyova-Schwarzova-Buňakovského* nerovnost

$$\left| \sum_{k=1}^m x_k y_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^m x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m y_k^2 \right),$$

která dává odhad skalárního součinu shora (bez jakýchkoliv předpokladů o reálných x_k, y_k).

Roznásobíme-li levou stranu Čebyševovy nerovnosti, dostaneme součet m^2 součinů

$$\begin{aligned} &x_1 y_1 + x_1 y_2 + \dots + x_1 y_m + \\ &+ x_2 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_2 y_m + \\ &+ x_m y_1 + x_m y_2 + \dots + x_m y_m. \end{aligned}$$

*) *P. L. Čebyšev* (1821–1894), ruský matematik, studoval v Moskvě a pak pracoval v Petrohradě. Vynikl zejména v teorii čísel, integrálním počtu a v aproximaci funkcí mnohočleny. Také konstruoval a zhotovoval důmyslné mechanismy.

Přitom m součinů z pravé strany nerovnosti je v tomto schématu napsáno v diagonále. Je přirozené snažit se využít nerovností (1) a odhadovat jednotlivé součiny $x_k y_k$. Každý z prvních k součinů v k -tém řádku

$$x_k y_1, x_k y_2, \dots, x_k y_k$$

stejně jako každý z prvních k součinů v k -tém sloupci

$$x_1 y_k, x_2 y_k, \dots, x_k y_k$$

je zřejmě nejvýše roven diagonálnímu součinu $x_k y_k$. Dostaneme tak nerovnost

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m x_k \right) \left(\sum_{k=1}^m y_k \right) &\leq x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + \dots + (2m-1) x_m y_m = \\ &= \sum_{k=1}^m (2k-1) x_k y_k. \end{aligned}$$

S tím už půjde sotva co dělat, neboť čím větší jsou diagonální součiny, tím větší jsou u nich koeficienty. Dostali jsme sice zajímavou nerovnost, která však s Čebyševovou nerovností nesouvisí. Ta je daleko kvalitnější a při jejím odvození budeme muset pracovat jemnějšími metodami.

Místo jednotlivých součinů $x_i y_j$ zkusme odhadnout pomocí diagonálních součinů $x_k y_k$ raději součty $x_i y_j + x_j y_i$. To se nám snadno podaří:

$$x_i y_j + x_j y_i = (x_i y_i + x_j y_j) - (x_i - x_j)(y_i - y_j) \leq x_i y_i + x_j y_j; \quad (2)$$

menšitel prostředního výrazu je totiž díky (1) nezáporný. Sečteme-li těchto m^2 nerovností pro všechny dvojice indexů i, j , dostaneme přímo Čebyševovu nerovnost.

Zabývejme se ještě otázkou rovnosti. Nastane-li v Čebyševově nerovnosti rovnost, nastane i ve všech m^2 nerovnostech (2), takže pro každou dvojici indexů i, j bude

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) = 0.$$

Zejména pak bude

$$(x_1 - x_m)(y_1 - y_m) = 0.$$

Vzhledem k (1) bude pak buď

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m$$

nebo

$$y_1 = y_2 = \dots = y_m.$$

Obráceně, bude-li tato podmínka splněna, nastane zřejmě v Čebyševově nerovnosti rovnost.

Jiná možnost je zkusit to matematickou indukcí podle m . Pro $m = 1$ nerovnost

$$xy \leq xy$$

ovšem vždy platí a vždy nastává rovnost (index 1 jsme vynechali). Předpokládejme, že pro $m = p \geq 1$ Čebyševova nerovnost platí. Jak je to pro $m = p + 1$? Rozdíl pravé a levé strany pak je

$$P - L = (p + 1) \sum_{k=1}^{p+1} x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^{p+1} x_k \right) \left(\sum_{k=1}^{p+1} y_k \right) = (p + 1) \sum_{k=1}^p x_k y_k - \\ - \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \left(\sum_{k=1}^p y_k \right) + p x_{p+1} y_{p+1} - x_{p+1} \left(\sum_{k=1}^p y_k \right) - \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) y_{p+1}.$$

Podle indukčního předpokladu je $\left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \left(\sum_{k=1}^p y_k \right) \leq p \sum_{k=1}^p x_k y_k$,

a tedy

$$P - L \geq \sum_{k=1}^p x_k y_k + p x_{p+1} y_{p+1} - x_{p+1} \left(\sum_{k=1}^p y_k \right) - \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) y_{p+1} = \\ = \sum_{k=1}^p (x_k y_k + x_{p+1} y_{p+1} - x_{p+1} y_k - x_k y_{p+1}) = \\ = \sum_{k=1}^p (x_{p+1} - x_k)(y_{p+1} - y_k)$$

V posledním výrazu jsou vzhledem k uspořádání čísel x_i, y_i podle velikosti všechny členy nezáporné a Čebyševova nerovnost je dokázána.

Průběh důkazu indukčního kroku signalizuje, že

$$m \sum_{k=1}^m x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^m x_k \right) \left(\sum_{k=1}^m y_k \right) = \\ 2. \text{ ř.} \quad = \underbrace{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}_{1. \text{ sl.}} + \\ 3. \text{ ř.} \quad + \underbrace{(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)}_{1. \text{ sl.}} + \underbrace{(x_3 - x_2)(y_3 - y_2)}_{2. \text{ sl.}} + \\ (m-1). \text{ ř.} \quad + \underbrace{(x_{m-1} - x_1)(y_{m-1} - y_1)}_{1. \text{ sl.}} + \underbrace{(x_{m-1} - x_2)(y_{m-1} - y_2)}_{2. \text{ sl.}} + \\ + \dots + \underbrace{(x_{m-1} - x_{m-2})(y_{m-1} - y_{m-2})}_{(m-2). \text{ sl.}} + \\ m. \text{ ř.} \quad + \underbrace{(x_m - x_1)(y_m - y_1)}_{1. \text{ sl.}} + \underbrace{(x_m - x_2)(y_m - y_2)}_{2. \text{ sl.}} + \dots + \\ + \underbrace{(x_m - x_{m-2})(y_m - y_{m-2})}_{(m-2). \text{ sl.}} + \underbrace{(x_m - x_{m-1})(y_m - y_{m-1})}_{(m-1). \text{ sl.}}$$

Skutečně. Součin $x_k y_k$ dostaneme poprvé v k -tém řádku, a to $(k - 1)$ -krát, a dále pak v každém dalším řádku jednou (v k -tém sloupci), celkem tedy $(m - 1)$ -krát jako na levé straně. Součin $x_i y_j$ dostaneme pro $i \neq j$ právě jednou: je-li $i > j$, v i -tém řádku a j -tém sloupci, je-li $i < j$ v j -tém řádku a i -tém sloupci, vždy se znaménkem $-$. Z rozvoje okamžitě vidíme, že Čebyševova nerovnost platí, a také podmínku pro rovnost. Ten, kdo je zblhlý v úpravách takovýchto výrazů, mohl rozvoj hned uhodnout.

Mohli jsme k němu však dojít i bez indukce a bez hádání, jak si hned ukážeme. Budeme přitom manipulovat s indexy a se sumami a raději si napřed uvědomíme některé celkem samozřejmé věci, které možná nejsou všem čtenářům zcela běžné. Dejme tomu, že máme dána čísla $a, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$.

(I) Sčítáme-li přes index, na němž sčítance nezávisí, dostáváme např.

$$\sum_{i=1}^m a = a + a + \dots + a = ma$$

nebo podobně

$$\sum_{i=1}^m a_j = a_j + a_j + \dots + a_j = ma_j$$

(II) Sčítací index žije jen v rámci příslušné sumy a jeho volba je celkem libovolná, např.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{k=1}^m a_k$$

nebo

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) = \left(\sum_{r=1}^m a_r \right) \left(\sum_{s=1}^n b_s \right) = \left(\sum_{s=1}^n a_s \right) \left(\sum_{r=1}^m b_r \right).$$

(III) To už jsme se dostali k dvojitym sumám. Zde platí podle distributivního zákona

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m a_i \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j \right)$$

a také

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) b_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_i b_j \right).$$

Je to všechno totéž, totiž součet mn součinů $a_i b_j$. Jednotlivé zápisy se liší jen různou organizací sčítání, kterou naznačují závorky. Závorky jsou tu jinak zbytečné a nemají vliv na výsledek.

Takovéto formální záležitosti se vyplatí bezpečně zvládnout a zmechanizovat hlavně pro práci se soustavami lineárních rovnic a nerovností s více proměnnými, se kterými se setkáte v n -rozměrné analytické geometrii a lineární algebře hned na začátku vysokoškolského studia. Je však třeba neztratit přehled o tom, co se za formálními kouzly skrývá.

Vraťme se však k Čebyševově nerovnosti. Je přirozené snažit se při jejích úpravách dosáhnout toho, aby měly obě strany podobný tvar pokud jde o způsob sumace. Na levé straně máme (podle II a III)

$$L = \left(\sum_{k=1}^m x_k \right) \left(\sum_{k=1}^m y_k \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i y_j .$$

I pravou stranu uvedeme pod dvojitou sumu (podle I)

$$P = m \sum_{k=1}^m x_k y_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_j y_j .$$

Je tedy

$$P - L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (x_j - x_i) y_j . \quad (3)$$

Z toho ještě moc vidět není. Hodilo by se nám, kdyby pod sumu ještě přibyl člen, který vznikne záměnou indexů i, j . Toho však snadno dosáhneme. Nejprve všude v (3) vzájemně zaměníme indexy i, j (to je jen změna označení sčítacích indexů — viz II):

$$P - L = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m (x_i - x_j) y_i .$$

A teď zaměníme indexy jen pod sumačními znameními (to je jen změna organizace sčítání — viz III):

$$P - L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (x_i - x_j) y_i . \quad (4)$$

Sečteme-li (3) a (4), dostaneme

$$2(P - L) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (x_i - x_j)(y_i - y_j) ,$$

což je při dodržení předpokladu (1) vždy nezáporné.

Rozepišme si ještě sumu, ke které jsme nakonec došli:

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_1)(y_1 - y_1) + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + \dots + (x_1 - x_{m-1})(y_1 - y_{m-1}) + \\ & + (x_1 - x_m)(y_1 - y_m) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_2)(y_2 - y_2) + \\ & + \dots + (x_2 - x_{m-1})(y_2 - y_{m-1}) + (x_2 - x_m)(y_2 - y_m) + \dots + \end{aligned}$$

$$+ (x_m - x_1)(y_m - y_1) + (x_m - x_2)(y_m - y_2) + \dots + \\ + (x_m - x_{m-1})(y_m - y_{m-1}) + (x_m - x_m)(y_m - y_m) .$$

Budou-li členy napsány přesně pod sebou, pak v diagonále jsou nuly. Část pod diagonálou se přesně shoduje s rozvojem, který jsme měli už předtím. A nad diagonálou je díky symetrii

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) = (x_j - x_i)(y_j - y_i) .$$

také totéž.

Ještě si všimněte, že v žádném z důkazů Čebyševovy nerovnosti jsme nepotřebovali předpoklad o nezápornosti, nerovnost platí i bez tohoto omezení. Také zůstává v platnosti, nahradíme-li předpoklad

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$$

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m$$

jiným vhodným uspořádáním, např.

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m$$

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m ;$$

důležité je jen to, aby pro všechny dvojice indexů i, j platilo

$$x_i \leq x_j \Leftrightarrow y_i \leq y_j .$$

To už snad stačí o případě $n = 2$. Budeme se teď věnovat nerovnosti pro obecné n . K jejímu důkazu se přímo nabízí matematická indukce. Pro $n = 1$ a $n = 2$ nerovnost, jak víme, platí. Předpokládejme, že platí pro $n = p \geq 2$, tj.

$$\left(\sum_{k=1}^m a_{1k} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{2k} \right) \dots \left(\sum_{k=1}^m a_{pk} \right) \leq m^{p-1} \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{pk} . \quad (5)$$

Vynásobíme-li obě strany nezáporným číslem $\sum_{k=1}^m a_{p+1,k}$, dostaneme

$$\left(\sum_{k=1}^m a_{1k} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{2k} \right) \dots \left(\sum_{k=1}^m a_{pk} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{p+1,k} \right) \leq \\ \leq m^{p-1} \left(\sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{pk} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{p+1,k} \right) .$$

Protože kromě předpokladu

$$a_{p+1,1} \leq a_{p+1,2} \leq \dots \leq a_{p+1,m}$$

platí také

$$a_{11} a_{21} \dots a_{p1} \leq a_{12} a_{22} \dots a_{p2} \leq \dots \leq a_{1p} a_{2p} \dots a_{pp} ,$$

jak plyne z předpokladů o prvních p soustavách čísel a_{ij} (s využitím

předpokladu nezápornosti, který je tu už podstatný), podle Čebyševovy nerovnosti je

$$\left(\sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{pk} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{p+1,k} \right) \leq m \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{pk} a_{p+1,k}. \quad (6)$$

Odtud je zřejmé, že nerovnost platí i pro $n = p + 1$ a důkaz je proveden.

Ještě zbývá rozhodnout, kdy nastává rovnost. Hned je vidět, že pokud se některá z m -tic

$$a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm}$$

skládá ze samých nul, rovnost platí. Předpokládejme, že žádná m -tice není nulová. Případy $n = 1$ a $n = 2$ nás vedou k hypotéze, že rovnost nastává, právě když alespoň $n - 1$ z n daných m -tic čísel a_{jk} se skládá ze stejných čísel. Vrátime-li se k indukčnímu kroku, vidíme, že v nerovnosti pro $n = p + 1$ nastane rovnost, právě když nastane v obou nerovnostech (5) i (6). V nerovnosti (6) nastane rovnost, jak víme z diskuse rovnosti pro Čebyševovu nerovnost, právě když buď

$$a_{p+1,1} = a_{p+1,2} = \dots = a_{p+1,m}$$

nebo

$$a_{11} a_{21} \dots a_{p1} = a_{12} a_{22} \dots a_{p2} = \dots = a_{1p} a_{2p} \dots a_{pp}.$$

Druhá podmínka je ekvivalentní s rovnostmi

$$a_{j1} = a_{j2} = \dots = a_{jm}$$

pro všechna $j = 1, 2, \dots, p$.

Předpokládáme-li (pro indukci), že pro $n = p$ hypotéza platí a dáme dohromady tuto podmínku pro rovnost v nerovnosti (5) s podmínkou pro rovnost v nerovnosti (6), souhlasí to a hypotéza je dokázána matematickou indukcí. Rovnost tedy nastává, právě když buď alespoň jedna m -tice

$$a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm}$$

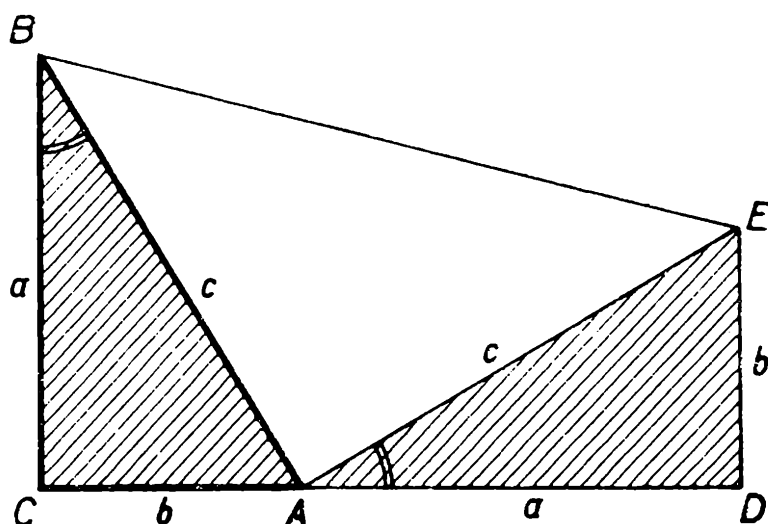
jsou samé nuly anebo když v alespoň $n - 1$ těchto m -ticích jsou si čísla rovna.

Závěrem připomeňme, že čtenáři edice Škola mladých matematiků nerovnost znali z 39. svazku, A. Kufner: Nerovnosti a odhady. Je tam v nepatrně jiném tvaru odvozena na str. 31–32.

Americký prezident a Pythagorova věta

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Obecně je známo, že vynálezcem dnes užívaného hromosvodu je významný severoamerický státník *Benjamin Franklin*. Méně známo je, jak uvádí holandský časopis *Pythagoras* (5. číslo 17. ročníku z r. 1978), že severoamerický prezident *Garfield* vymyslel ve svém volném čase v roce 1882 originální důkaz Pythagorovy věty. Protože jde o důkaz velmi jednoduchý, je vhodné s ním seznámit také čtenáře našich Rozhledů.



Obr. 1

Na obr. 1 je narysován pravoúhlý trojúhelník ABC , jehož odvěsny BC , CA mají po řadě velikosti a , b ; velikost přepony AB je c . Sestrojme na prodloužení úsečky CA za bod A bod D tak, aby úsečka AD byla shodná s úsečkou BC a v polorovině ACB sestrojme trojúhelník ADE shodný s trojúhelníkem BCA ; je tedy

$$|AD| = |BC| = a, \quad |DE| = |CA| = b, \quad |AE| = |BA| = c.$$

Obrazec $BCDE$ je pravoúhlý lichoběžník nebo obdélník (pro $a = b$) se základnami BC , DE o velikostech a , b a s výškou $a + b$; jeho obsah P je tedy

$$P = \frac{(a + b)^2}{2}. \quad (1)$$

Protože úhel $\sphericalangle DAE$ je shodný s úhlem $\sphericalangle CBA$ pravoúhlého trojúhelníku ABC , jsou úhly $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle CAB$ doplňkové, proto úhel $\sphericalangle BAE$ je pravý. Trojúhelník BAE je tedy pravoúhlý; protože je $|AE| = |BA| = c$, je také rovnoramenný. Lichoběžník (obdélník) $BCDE$ je tedy složen ze tří nepřekrývajících se pravoúhlých trojúhelníků, a to ABC , EAD , BAE . Jeho obsah P je tedy rovný součtu obsahů těchto trojúhelníků, tj.

$$P = 2 \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}. \quad (2)$$

Podle (1) a (2) je tedy

$$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Protože v důkazu jde jenom o obsahy pravoúhlých trojúhelníků a pravoúhlého lichoběžníku, stačí k jeho pochopení znát v podstatě jenom vzorec pro obsah obdélníku.

matematické zábavy

Ještě jednou o „stavbách“ z hracích kostek

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

V článku se budeme zabývat sloupky ze stejně velkých hracích kostek. Jeden takový sloupek znázorňuje obr. 1. Začneme *úlohou*:

Představme si, že jsme z k hracích kostek, které mají stejné rozměry, postavili sloupek. Přitom k je přirozené číslo větší než jedna. Určete, kolik existuje různých sloupků, jež vzniknou z našeho sloupku přestavbami, při kterých nejnižší kostkou nehýbáme a každou z ostatních kostek můžeme otočit kolem její svislé osy o libovolný celý násobek pravého úhlu.

Vzhledem k dolní kostce může každá další kostka zaujmout při přestavbě sloupku celkem čtyři různé polohy. Pro $k = 2$ jsou tedy takové sloupky právě čtyři, pro $k = 3$ je těchto sloupků právě $4 \cdot 4 = 16$. Matematickou indukcí snadno dokážeme, že ze sloupku postaveného z k hracích kostek můžeme vytvořit právě 4^{k-1} různých sloupků.

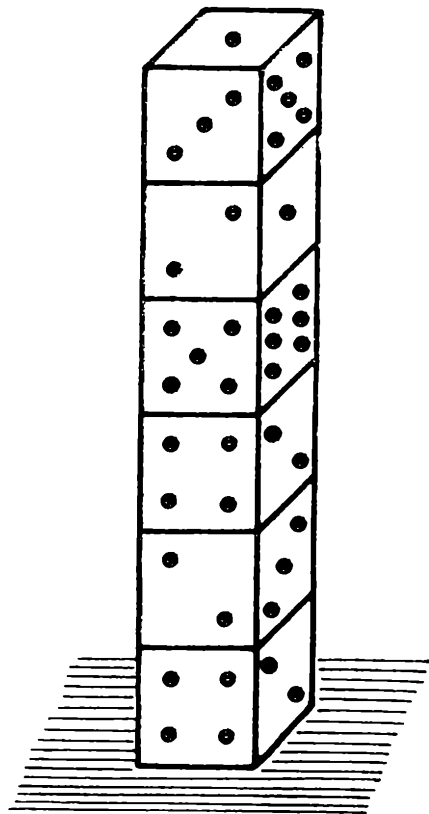
Výsledku této úlohy využijeme při řešení úlohy uvedené v článku [1]. Připomeňme si její text:

Zvolte si přirozené číslo n , pro které platí

$$2 \leq n \leq 12. \quad (1)$$

Způsobem jako na obr. 1 postavte ze stejných hracích kostek nejvyšší možný sloupek tak, aby celkový počet ok na každých dvou stěnách, které na sobě leží, byl roven číslu n .

Určete, kolik různých řešení má úloha pro čísla n , splňující podmínku (1). Přitom dva sloupky, z nichž jeden může vzniknout z druhého posunutím a otočením kolem svislé osy, nepovažujeme za dvě různá řešení.



Obr. 1

Dříve než začneme úlohu řešit, všimněme si, že v textu se hovoří o stejných hracích kostkách. Tím se rozumí, že mají nejen stejné rozměry, ale jsou také téhož typu (viz [1]).

Předpokládejme, že jsme zvolili přirozené číslo n , splňující podmínku (1) a postavili z k stejných hracích kostek takový sloupek, že celkový počet ok na každých dvou stěnách, které na sobě leží, je roven číslu n . Počty ok na horních stěnách kostek označme postupně od zdola vzhůru

$$a_1, a_2, \dots, a_k. \quad (2)$$

Počty ok na vodorovných stěnách kostek po řadě odzdola nahoru jsou tedy

$$7 - a_1, a_1, 7 - a_2, a_2, \dots, 7 - a_k, a_k. \quad (3)$$

Odtud plyne, že pro každé $j = 1, 2, \dots, k - 1$ platí:

$$a_j + (7 - a_{j+1}) = n,$$

tj.

$$a_{j+1} = a_j + (7 - n) \quad (4)$$

Posloupnost (2) je tedy aritmetická s diferencí

$$d = 7 - n.$$

Z posloupnosti (3) a rovnosti (4) plyne ještě jeden zajímavý výsledek.

V uvažovaném sloupku otočme postupně každou kostku tak, aby se její horní stěna stala dolní. Posloupnost počtu ok na vodorovných stěnách všech kostek odzdoła vzhůru pak bude

$$a_1, 7 - a_1, a_2, 7 - a_2, \dots, a_k, 7 - a_k.$$

Součet počtů ok na každých dvou stěnách ležících na sobě pak je

$$n' = (7 - a_j) + a_{j+1},$$

tj. podle (4)

$$n' = (7 - a_j) + a_j + (7 - n) = 14 - n.$$

Odtud vyplývá, že z každého sloupku, který je řešením naší úlohy pro číslo n , dostaneme postupným převrácením všech kostek, jímž horní stěna každé z nich se stane její dolní, sloupek, řešící úlohu pro číslo $14 - n$. Úloha bude tedy mít stejné počty řešení pro tato čísla n : 2 a 12, 3 a 11, 4 a 10, 5 a 9, 6 a 8.

Pro $n = 7$ je $d = 0$, takže posloupnost (2) je konstantní. Sloupky se stavějí tak, aby na horních stěnách všech kostek byl týž počet ok. Nejvyšší sloupek tedy pro $n = 7$ neexistuje, neboť každý sloupek lze neomezeně zvyšovat.

Pro $n = 2, 3, 4, 5, 6$ lze nalézt tyto posloupnosti (2) s největším možným počtem prvků:

$$n = 2, d = 5: (1, 6)$$

$$n = 3, d = 4: (1, 5), (2, 6)$$

$$n = 4, d = 3: (1, 4), (2, 5), (3, 6)$$

$$n = 5, d = 2: (1, 3, 5), (2, 4, 6)$$

$$n = 6, d = 1: (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Každá z těchto posloupností vede k řešení úlohy pro příslušné číslo n . Z každého sloupku, který odpovídá některé z uvedených posloupností, dostaneme pro příslušné číslo n další řešení vhodným otočením jednotlivých kostek podle svislé osy sloupku. Užijeme-li výsledku úvodní úlohy, dospějeme k tabulce:

n	2	3	4	5	6	7	9	9	10	11	12
počet řešení	4	8	12	32	1024	0	1024	32	12	8	4

Poslední úlohu můžeme dále zobecňovat. Např. budeme sloupky stavět z kostek stejných rozměrů, avšak neomezíme se jen na kostky téhož typu. Sestavovat lze ovšem nejen sloupky, ale i zdi, věže, schodiště apod. Můžeme zde požadovat, aby celkové počty ok na každých dvou stěnách, které k sobě celé přiléhají, byly rovny nějakému předem zvolenému

přirozenému číslu n , pro něž platí podmínka (1). Snadná je např. tato úloha :

Z osmi stejných hracích kostek postavte krychli tak, aby součet počtů ok na každých dvou stěnách, které se celou plochou dotýkají, byl sedm. Zjistěte, zda mezi těmito krychlemi existuje taková, která má na každé své stěně jen obrazce, znázorňující stejné počty ok.

Čtenářům doporučujeme, aby si další obdobné úlohy sami sestavili a řešili.

Literatura

[1] J. Mída : O „stavbách“ z hracích kostek. Rozhledy m.-f., č. 7, roč. 57

různé

Matematika pri prijímacích pohovoroch na vysokých školách ZSSR

RNDr. OLGA KLAUČOVÁ, CSc., SVŠT, Bratislava

Úlohy národného hospodárstva, ktoré formulujú zjazdy a pléna ÚV KSČ do najbližšej budúcnosti, si vyžadujú dôkladnú a vysoko náročnú prípravu inžinierskych kádrov. Ako sa zdôraznilo vo viacerých dokumentoch, osobitný význam má a bude mať strojárstvo; štúdium strojárstva kladie na poslucháčov nároky zodpovedajúce náročnosti úloh v tejto oblasti. Nároky sa zrejme prenesú už na prijímacie pohovory na fakultu, čiže na výber budúcich poslucháčov. V tejto súvislosti významné miesto zaberá matematika. Pretože každé porovnanie môže byť len užitočné, zaujímalo nás, čo sa žiada od maturanta pri prijímacích pohovoroch na vysoké školy technického smeru — a najmä na strojnícke fakulty — v ZSSR. V známom vedecko-populárnom fyzikálno-matematickom časopise *Kvant* (roč. 1978, č. 1 až 7), ktorý vydáva Akadémia vied ZSSR a Akadémia pedagogických vied ZSSR, uverejnili na pokračovanie varianty pohovorových písomných prác z matematiky a fyziky aj s výsledkami; sú to materiály z rôznych vysokých škôl technického i univerzitného smeru. V tomto článku si všimneme príklady z matematiky, ktoré sa vyskytli na pohovoroch na technické školy zamerané na strojárstvo.

1. *Moskovskij avtomechaničeskij institut*. Je to jeden z najvýznamnejších inštitútov, v ktorom sa vychovávajú špecialisti-konštruktéri automobilov a traktorov, inžinieri-mechanici, inžinieri-výskumníci, technológovia strojárenskej výroby.

Variant I.

1. Riešte rovnicu $4^x + 2^{x+1} = 80$.

2. Riešte rovnicu $2 \cotg \frac{x}{2} + 3 \tg \frac{x}{2} = 5$.

3. Riešte nerovnicu $\log 2^{\frac{x-1}{2^{x-3}}} > -\log 2$.

4. Nájdite polomer základne valca, ktorý má pri danom objeme V najmenší povrch.

5. Nájdite funkciu $F(x)$ a zostrojte jej graf, ak $F'(x) = 3x^2 + 1$ a $F(1) = 3$.

Výsledky. 1. 3. 2. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2r\pi$ ($k, r \in \mathbb{Z}$).

3. $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. 4. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 5. $F(x) = x^3 + x + 1$.

Variant II.

1. Riešte rovnicu $2^{2x+1} + 4 = 9 \cdot 2^x$.

2. Riešte rovnicu $6 \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 1$.

3. Riešte nerovnicu $2^{\log_2 \frac{2x}{x-3}} < 1$.

4. Nájdite výšku kužela maximálneho objemu, ktorý je vpísaný do gule s polomerom R .

5. Vypočítajte plošný obsah rovinného útvaru ohraničeného krivkami $y = x + 1$, $y = 5 + 3x - 2x^2$.

Výsledky. 1. $\{-1, 2\}$. 2. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{5} + r\pi$ ($k, r \in \mathbb{Z}$)

3. $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. 4. $\frac{4}{3}R$. 5. 9.

2. *Moskovskij energetičeskij institut* je jedným z najväčších inštitútov, v ktorom sa vychovávajú inžinierske a vedecké kádre takmer pre všetky smery súčasnej energetiky; medziiným inžinieri pre energetické strojárstvo. Tento inštitút má filiálky v Kazani a Smolensku.

Variant I.

1. Zjednodušte algebraický výraz a vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \left[\left(\frac{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x}} \right)^{-1} - \frac{2\sqrt[4]{ax}}{x^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}}} \right]^{-1} - (\sqrt[4]{2})^{\log_4 a} \right\}$$

2. Riešte rovnicu $(3x^2 - 7,2x + 3,9 - 9\sqrt[3]{3}) \log(7 - x) = 0$.

3. Do gule, ktorá má povrch 27π , vpíšte valec maximálneho objemu. Jaká bude jeho výška?

4. Vypočítajte všetky hodnoty $x \in \left[-\frac{5}{3}\pi, \pi\right]$, ktoré vyhovujú rovnici

$$\sin(5\pi - x) + \operatorname{tg}(3\pi + x) = \frac{(\cos x)^{-1} - \cos x}{2 \sin x}.$$

5. V rovnoramennom lichobežníku je ostrý uhol pri dolnej základni α , dĺžka ramena sa rovná číslu a . Dĺžka úsečky, ktorá spája vrchol hornej základne so stredom spodnej základne, je tiež číslo a . Vypočítajte plošný obsah lichobežníka.

$$\text{Výsledky. 1. } a^2. \text{ 2. } \left\{\frac{1}{5}, 6\right\}. \text{ 3. 3. 4. } \left\{-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}. \text{ 5. } \frac{3}{2} a^2 \sin 2\alpha.$$

Variant II.

1. Zjednodušte algebraický výraz

$$\frac{[(3b^2 + 2a^2)^2 - 24a^2b^2]^{\frac{1}{4}}}{3b - a^2 \cdot 2^{1-\log_2 b}} + \sqrt[4]{a - b^2} - \sqrt[4]{a + 2b \sqrt[4]{a - b^2}}$$

$$\text{ak } \frac{a}{b} > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. Nájdite obor definície funkcie

$$f(x) = \sqrt[4]{\log_{0,2}^2 x + (\log_{0,2} x^3)(\log_{0,2} 0,0016) + 36}$$

3. Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie

$f(x) = 3x - 9x^2 - 7x^3 - 6$ na intervale $\left[-\frac{3}{2}, 1\right]$ a zostrojte graf funkcie na danom intervale.

4. Vypočítajte všetky hodnoty $x \in \left(-\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$, ktoré vyhovujú rovnici $\sin x + 2 \cos x + 2 \sin x \cdot \cos^2 x = 0$.

5. Rovnoramenný trojuholník s obvodom rovným číslu p a uhlom α , ktorý zvierajú ramená, je základňou kolmého hranola. Uhol medzi uhlo-

priečkami zhodných bočných stien hranola, ktoré vychádzajú z toho istého vrchola, je β . Vypočítajte objem hranola.

Výsledky. 1. $-2b$. 2. $x > 0$. 3. $\min_{x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]} f(x) = f(1) = -19$, $\max_{x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]} f(x) =$

$$= f\left(\frac{1}{7}\right) = -5 \frac{38}{49} \cdot 4 \cdot \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\} \cdot 5 \cdot \frac{p^3 \sin \alpha \sqrt{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}}{128 \cos^6 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) \sin \frac{\beta}{2}}.$$

3. *Moskovskij institut chimičeskogo mašinostrojenija* má päť fakúlt, vychováva okrem iného špecialistov pre chemické stroje a výrobu chemických prístrojov.

Variant I.

1. Dokážte identitu $\sin^2 \alpha - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$.

2. Riešte nerovnicu $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$.

3. Brigáda drevorubačov mala vyrúbať za niekoľko dní 216 m^3 dreva. Prvé tri dni plnila plán a potom každý deň ho prekročila o 8 m^3 ; deň pred termínom narúbala 232 m^3 . Aká bola denná norma brigády?

4. Pri akých hodnotách r, s je vektor $\mathbf{a} = (3, -1, r)$ kolmý na vektor $\mathbf{b} = (2, s, 1)$, ak $|\mathbf{b}| = 3$?

5. Do gule o polomere $R = 3$ je vpísaný valec maximálneho objemu. Vypočítajte objem tohto valca.

Výsledky. 2. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. 3. 24 m^3 4. $r_1 = -4, s_1 = 2$ a $r_2 = -8, s_2 = -2$. 5. $12\pi\sqrt{3}$.

Variant II.

1. Dokážte identitu $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \cotg \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1$.

2. Riešte systém rovníc $3^x \cdot 2^y = 144$
 $\log_{\sqrt{2}} (y - x) = 2$.

3. Vlak vychádza z mesta A a za 10 hod. 40 min. príde do mesta B . Ak by vlak prešiel za hodinu o 10 km menej, príde do mesta B o 2 hod.

8 min. neskôr. Vypočítajte vzdialenosť medzi mestami a rýchlosť vlaku.

4. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$.

5. Súčet dĺžok uhlopriečok rovnobežníka je 8 cm. Vypočítajte minimálny súčet štvorcov dĺžok všetkých strán rovnobežníka.

Výsledky. 2. $x = 2, y = 4$. 3. 640 km, 60 km/h. 4. $\frac{1}{16}$. 5. 32.

4. *Marijskij politechničeskij institut im. A. M. Gorkogo* má aj strojnícku fakultu. Na tomto inštitúte maturanti mali zo siedmich príkladov vyriešiť ľubovoľných päť, ak chceli získať známku výborne.

Variant I.

1. Riešte rovnicu $2 \log_9 x + 9 \log_x 3 = 10$.

2. Riešte rovnicu $2 \sin 5x \cdot \cos 6x + \sin x = \sin 7x \cdot \cos 4x$.

3. Riešte nerovnicu $9^x < 3^x + 2$.

4. Zjednodušte $\frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$.

5. Vypočítajte plášť kužela o objeme V , ak uhol medzi povrchovou priamkou a základňou je α .

6. Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$ na intervale $[-1, 3]$.

7. Vypočítajte plošný obsah rovinného útvaru ohraničeného krivkami $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

Výsledky. 1. $\{3, 3^9\}$. 2. $x = \frac{\pi}{4}k$, $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}r$ ($k, r \in \mathbb{Z}$). 3. $(-\infty,$

$\log_3 2)$. 4. $x = 1$. 5. $\int_0^3 \frac{9\pi V^2}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} d\alpha$ 6. $\min_{x \in [-1, 3]} y = y(3) = -\frac{5}{13}$,
 $\max_{x \in [-1, 3]} y = y(0) = 1$. 7. 9.

(Dokončení v príštím čísle)

Ladislav Beran:

USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

Škola mladých matematiků, sv. 42, vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, Praha 1978, stran 74, obr. 27, cena 5 Kčs

V edici Škola mladých matematiků se objevuje nový autor, který je ovšem matematické obci dobře znám ze svých prací vědeckých. Řešitelům matematické olympiády napsal další svazek do jejich matematické knihovničky a ten máme nyní před sebou. Je to „matematika bez násobilky“, abychom použili slov předmluvy. Znamená to, že při četbě spisku a při řešení příkladů není třeba žádných numerických výpočtů, vystačí se jen s logickým usuzováním.

Uspořádání je pojem, s nímž se setkáváme v různých formách každodenně a často si to ani neuvědomujeme. Tak třeba slovosled upravuje pořadí slov ve větě, věci, které nás obklopují, si uspořádáváme podle toho, jak je máme v oblibě, a mezi časté hry menších dětí patří sledování aut podle jejich barvy. Když si ve volné chvíli stavíte model plachetnice nebo vlastnoručně sestavujete transistorový přijímač, musíte postupovat systematicky — musíte uspořádat svou činnost. Obdobně je

tomu i na vyšší úrovni při organizaci každé výrobní činnosti, kde člověku už musí pomáhat počítač. Počítače dokáží řídit i chod velkých podniků.

Matematika překlenula vzdálenost mezi konkrétními situacemi a jejich abstraktním jádrem. Nechť P je neprázdná množina, na níž je definována reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace ρ . Pak dvojici (P, ρ) nazveme uspořádanou množinou. Vlivem angličtiny se pro (P, ρ) ujal název poset (zkráceno z anglického partially ordered set) a autor se rozhodl užívat termínu poset i ve svém spise. Ze školského hlediska je to název neobvyklý, ale není snad na škodu, když se s ním zájemce o matematiku seznámí.

Knížka má čtyři kapitoly a zde jsou jejich názvy: 1. Uspořádané množiny. 2. Svazy — základní vlastnosti. 3. Příklady svazů. 4. Základní třídy svazů. V každé kapitole je rozřešeno několik příkladů (celkem je jich 26) a několik úloh je se stručným návodem (je tu celkem 27 úloh). Čtenáři zbývá, aby za každou kapitolou rozřešil samostatně několik cvičení, přičemž výsledky si může najít v závěru brožury.

Je to moderně napsaná knížka, kterou uvítají náročnější studenti, kteří si libují v abstraktním myšlení.

Jiřina Sedláčková

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

diamagnetismo m	diamagnetismus
diametro m	průměr (v geometrii)
diapositiva ž	diapositiv
dicinove	devatenáct
dicinovesimo	devatenáctý
dicinovesimo m	devatenáctina
diciasette	sedmnáct
diciasettesimo	sedmnáctý
diciasettesimo m	sedmnáctina
diciotto	osmnáct
diciottesimo	osmnáctý
diciottesimo m	osmnáctina
dieci	deset
diedro m	klin (ve stereometrii)
— acuto	— s úhlem ostrým
— ottuso	— s úhlem tupým
— retto	— s úhlem pravým
dielettrico	dielektrický
difetto di massa m	hmotový defekt
differenza ž	rozdíl
— di potenziale	elektrické napětí
di differenze finite	diferenční
differenziale m	diferenciál
— parziale	— parciální
— totale, esatto	— totální
differenziare	diferencovat
diffrazione ž	difrakce, ohyb
diffusione ž	difuze
dilatazione ž	dilatace; roztažnost; roztažení
dimensione ž	rozměr, dimenze
diminuendo m	menšeneč
diminuire	zmenšiti

dimostrazione ž
adurre una dimostrazione
dinamica ž
dinamico
dinamo ž
dinamometro m
dintorno
dintorni m
diodo m
— a cristallo
— a vuoto
diottria ž
dipendente
dipendenza ž
— lineare
— funzionale
dipolo m
— elettrico
— magnetico
direttrice ž (retta, curva)
direzione ž
— asintotica
disco m
discontinuità ž
discontinuo
discreto
discriminante m
discussione ž
disegnare
disegno m
diseguaglianza ž
disgiungere
disgiunzione ž
dislocazione ž
dispari
dispersione ž
disposizione ž
dissoziazione elettrolitica ž

důkaz
provéstí důkaz
dynamika
dynamický
dynamo
dynamometr
okolo
okolí
dioda
— polovodičová
— elektronová (elektronka)
dioptrie
závislý
závislost
— lineární
— funkcionální
dipól
— elektrický
— magnetický
řídící čára
směr
— asymptotický
disk, kotouč, deska
nespojitosť
nespojité
diskrétní
diskriminant
diskuse
rýsovať, kresliť
výkres, rys, náčrt, nákres
nerovnosť, nerovnice
oddělití, odloučení
disjunkce (logická)
přemístění
lichý
disperse, rozptýl
permutace, rozmístění
elektrolytická disociace

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

9

ROČNÍK 57, 1978-1979, KVĚTEN

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VYKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr.
Jozef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák,
ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bra-
tislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc.
ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Mi-
lan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň,
CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr.
Oldřich Petránek, SPŠEI Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., CSAV Praha, doc. O. Setzer, ČVUT
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr.
Ondrej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav
Šindelář, CSc., UNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním peda-
gogickém nakladatelství v Praze za odborné
péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.
Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné
20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého
čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár.
podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2.
Režisuje Poštovní novinová služba. Informace
o předplatném podá a objednávky přijímá
každá pošta a každý doručovatel. Objednávky
do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice
a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tis-
ku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková
úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní
pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze

OBSAH

Dr. Ľ. Bican, CSc.: O Eukleidově algoritmu	385
P. Fejtková, dr. M. Malik: Parametry a procedury	388
Dr. L. Dvořák: Teorie relativity	396
J. Šilhán: Úloha o broukovi a gumě	405
Dr. J. Sedláček, CSc.: Významný polský matematik	409
R. Rebstöck: 100 let elektromotoru v že- lezniční dopravě	411
Úlohy pro I. kolo XXI. ročníku FO	413
Dr. B. Zelinka, CSc.: Kouzelná krychle	421
Pro volnou chvíli	422
Ze zahraničních časopisů	423
Dr. O. Klaučová, CSc.: Matematika při přijímacích pohovorech na vysokých školách ZSSR	428
Z Jednoty čs. matematiků a fyziků	430
Recenze	431
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky

0 Eukleidově algoritmu

RNDr. LADISLAV BICAN, CSc., UK Praha

V článku *dr. E. Caldy* [1] se ukazuje, jakým způsobem je možno přenést metodu hledání největšího společného dělitele dvou celých čísel pomocí Eukleidova algoritmu do oboru tzv. celých komplexních čísel, tj. komplexních čísel tvaru $a + bi$, a, b celá. Prostudujeme-li podrobně zmíněný článek, zjistíme, že možnost hledání největšího společného dělitele dvou celých čísel pomocí Eukleidova algoritmu je založena na následující větě:

Věta 1. K libovolným celým číslům a, b ($b \neq 0$) existují celá čísla q, r tak, že platí $a = bq + r$, kde $0 \leq r < |b|$

Stejnou možnost nám v oboru celých komplexních čísel zaručuje analogická věta:

Věta 2: Ke každým celým komplexním číslům $a_1 + a_2i, b_1 + b_2i$ ($b_1 + b_2i \neq 0$) existují celá komplexní čísla $q_1 + q_2i, r_1 + r_2i$ tak, že $a_1 + a_2i = (b_1 + b_2i)(q_1 + q_2i) + r_1 + r_2i$, kde $0 \leq ||r_1 + r_2i|| < ||b_1 + b_2i||$, přičemž $||r_1 + r_2i||$ značí druhou mocninu absolutní hodnoty komplexního čísla $r_1 + r_2i$, tj. $r_1^2 + r_2^2$.

Cílem tohoto článku je ukázat, že uvedené věty nelze žádným způsobem zobecnit na libovolnou podmnožinu $\mathbf{R}$ množiny komplexních čísel, a to ani v případě, že podmnožina $\mathbf{R}$ obsahuje s každými dvěma svými prvky a, b jejich součet $a + b$ a součin ab (v takovém případě se říká, že množina $\mathbf{R}$ je uzavřená vzhledem k operacím sčítání a násobení).

Zamyslíme-li se nad větami 1 a 2, vidíme, že v obou případech je každému prvku a z dané množiny přiřazeno celé nezáporné číslo $|a|$, přičemž toto přiřazení má jisté další vlastnosti. V případě věty 1 je $|a|$ rovno absolutní hodnotě čísla a , v případě věty 2 je $|a|$ rovno druhé mocnině absolutní hodnoty komplexního čísla a . Zaujmeme nyní abstraktní stanovisko a vyslovíme obecnou definici:

Definice 1: Budeme říkat, že neprázdná množina $\mathbf{M}$ komplexních čísel splňuje podmínku (E), jestliže každému prvku $a \in \mathbf{M}$ je přiřazeno celé nezáporné číslo $|a|$ tak, že platí

- (i) $|a| = 0$, právě když $a = 0$,
- (ii) jestliže $a|b$, pak $|a| \leq |b|$,

(iii) ke každým dvěma prvům $a, b \in \mathbf{M}$, $b \neq 0$, existují prvky $q, r \in \mathbf{M}$ takové, že $a = bq + r$, přičemž $|r| < |b|$.

Celé nezáporné číslo $|a|$ nazýváme *normou čísla a* .

Věta 3: Buď $\mathbf{M}$ neprázdná množina komplexních čísel splňující podmínku (E). Jestliže $\mathbf{M}$ obsahuje čísla 1 a -1 , pak pro každý nenulový prvek $a \in \mathbf{M}$ platí $|1| = |-1| \leq |a|$.

Důkaz: Protože $1 = (-1)(-1)$, je číslo 1 dělitelné číslem -1 a $|-1| \leq |1|$ podle podmínky (ii). Na druhé straně $-1 = 1(-1)$, takže $|1| \leq |-1|$ a tedy $|1| = |-1|$. Je-li $a \in \mathbf{M}$ libovolný nenulový prvek, pak $1|a$, a tudíž $|1| \leq |a|$ opět podle podmínky (ii).

Věta 4: Buď $\mathbf{M}$ neprázdná množina komplexních čísel splňující podmínku (E). Jestliže $\mathbf{M}$ obsahuje číslo 1, pak pro nenulový prvek $a \in \mathbf{M}$ platí $|a| = |1|$, právě když existuje prvek $q \in \mathbf{M}$ takový, že $aq = 1$.

Důkaz: Jestliže $aq = 1$ pro nějaké $q \in \mathbf{M}$, pak $a|1$, takže $|a| \leq |1|$. Obrácená nerovnost byla dokázána v předchozí větě.

Nechť naopak $|a| = |1|$. Podle (iii) existují prvky $q, r \in \mathbf{M}$ takové, že $1 = aq + r$ a $|r| < |a| = |1|$. Podle předchozí věty je však nutně $|r| = 0$, a tedy $r = 0$ podle (i), čímž je důkaz věty dokončen.

Ve světle definice 1 je tedy naším cílem sestavit množinu $\mathbf{R}$ komplexních čísel uzavřenou vzhledem k operacím sčítání a násobení, která nesplňuje podmínku (E). Jinými slovy to znamená, že na množině $\mathbf{R}$ není možno žádným způsobem zavést normu prvků $|a|$ tak, aby přitom byly splněny podmínky (i), (ii) a (iii) z předchozí definice.

Definice 2: Označme $\mathbf{R}$ množinu všech komplexních čísel, která jsou buď tvaru $a + bi\sqrt{19}$, kde a, b jsou celá čísla, nebo tvaru $(a/2) + (b/2)i\sqrt{19}$, kde a, b jsou lichá celá čísla. Jinak řečeno $\mathbf{R} = \{\overline{a + bi\sqrt{19}} \mid a, b \text{ celá}\} \cup \{(a/2) + (b/2)i\sqrt{19} \mid a, b \text{ celá lichá}\} = \{(a/2) + (b/2)i\sqrt{19} \mid a, b \text{ celá čísla buď obě sudá nebo obě lichá}\}$.

Věta 5: Množina $\mathbf{R}$ z předchozí definice je uzavřená vzhledem k operacím sčítání a násobení.

Důkaz: Nechť $\alpha = (a/2) + (b/2)i\sqrt{19}$, $\beta = (c/2) + (d/2)i\sqrt{19}$ jsou dva libovolné prvky z množiny $\mathbf{R}$, tj. čísla a, b a c, d jsou vždy buď obě sudá nebo obě lichá. Potom $\alpha + \beta = ((a+c)/2) + ((b+d)/2)i\sqrt{19}$, přičemž čísla $a+c, b+d$ jsou zřejmě buď současně obě sudá nebo obě lichá, takže $\alpha + \beta \in \mathbf{R}$. Dále jest $\alpha\beta = ((ac - 19bd)/4) + ((ad + bc)/4)i\sqrt{19} = (x/2) + (y/2)i\sqrt{19}$. Nyní musíme rozlišit tři případy:

1. Nechť a, b, c, d jsou sudá čísla, $a = 2a', b = 2b', c = 2c', d = 2d'$. Pak $x = (ac - 19bd)/2 = 2(a'c' - 19b'd')$ a $y = (ad + bc)/2 = 2(a'd' + b'c')$ a obě čísla x, y jsou sudá.

2. Nechť a, b, c, d jsou lichá čísla, $a = 2a' + 1, b = 2b' + 1, c = 2c' + 1, d = 2d' + 1$. Pak $x = 2(a'c' - 19b'd') + a' + c' - 19b' - 19d' - 9$, $y = 2(a'd' + b'c') + a' + b' + c' + d' + 1$, odkud $x - y = 2(a'c' - 19b'd' - a'd' - b'c' - 10b' - 10d' - 5)$, takže obě čísla x, y jsou současně buď sudá nebo lichá.

3. Nechť a, b jsou sudá čísla a c, d jsou lichá čísla, $a = 2a', b = 2b', c = 2c' + 1, d = 2d' + 1$. Pak $x = 2(a'c' - 19b'd') + a' - 19b', y = 2(a'd' + b'c') + a' + b', x - y = 2(a'c' - 19b'd' - a'd' - b'c' - 10b')$ a čísla x, y jsou opět buď současně sudá nebo současně lichá.

V každém případě tedy vidíme, že číslo $\alpha\beta$ leží opět v množině $\mathbf{R}$, čímž je věta dokázána.

Věta 6: Pro každý prvek $\alpha = (a/2) + (b/2)i\sqrt{19}$ z $\mathbf{R}$ je druhá mocnina absolutní hodnoty $||\alpha||$ celé nezáporné číslo.

Důkaz: Jest $||\alpha|| = (a^2 + 19b^2)/4$. Jsou-li obě čísla a, b sudá, $a = 2a', b = 2b'$, je $||\alpha|| = (a')^2 + 19(b')^2$ celé nezáporné číslo. Jsou-li obě čísla a, b lichá, $a = 2a' + 1, b = 2b' + 1$, je $||\alpha|| = (a')^2 + 19(b')^2 + a' + 19b' + 5$ opět celé nezáporné číslo.

Věta 7: Množina $\mathbf{R}$ komplexních čísel z definice 2 nesplňuje podmínku (E).

Důkaz: Budeme postupovat nepřímou, tj. budeme naopak předpokládat, že množina $\mathbf{R}$ splňuje podmínku (E), a z tohoto předpokladu odvodíme spor. Každému prvku $\alpha \in \mathbf{R}$ je tedy přiřazena jeho norma $|\alpha|$ takovým způsobem, že jsou splněny podmínky (i), (ii) a (iii) z definice 1. Podle věty 3 mají čísla 1 a -1 nejmenší možnou normu mezi všemi nenulovými prvky množiny $\mathbf{R}$. Pomocí věty 4 si nyní ukážeme, že každý další nenulový prvek množiny $\mathbf{R}$ má nutně větší normu než je $|1|$. Jestliže totiž $|\alpha| = |1|, \alpha = (a/2) + (b/2)i\sqrt{19}$, pak nutně existuje prvek $\gamma = (c/2) + (d/2)i\sqrt{19}$ takový, že $\alpha\gamma = 1$. Pak však pro druhou mocninu absolutní hodnoty $||\alpha||$ čísla α platí $||\alpha|| ||\gamma|| = 1$. Protože podle věty 6 je $||\alpha||$ vždy přirozené číslo, je nutně $||\alpha|| = 1$, tj. $a^2 + 19b^2 = 4$. Odtud ihned vidíme, že $b = 0, a = \pm 2$, takže $\alpha = \pm 1$ a čísla 1, -1 jsou jediné dva prvky z množiny $\mathbf{R}$ s nejmenší možnou normou $|1| = |-1|$.

Nyní se již důkaz věty 7 dokončí bez obtíží. V množině všech nenulových prvků množiny $\mathbf{R}$, jejichž norma je větší než $|1|$, existuje prvek α s nejmenší možnou normou (pokud je takových prvků více, vybereme libovolně jeden z nich). Spolu s tímto prvkem α uvažujeme ještě prvek $\beta = (1/2) + (i/2)\sqrt{19}$. Podle podmínky (iii) z definice 1 existují prvky $\gamma, \varrho \in \mathbf{R}$ takové, že $\beta = \alpha\gamma + \varrho$, přičemž $|\varrho| < |\alpha|$. Vzhledem k volbě prvku α mohou tudíž nastat pouze dvě možnosti, a to buď $|\varrho| = 0$ nebo $|\varrho| = |1|$. Podle (i) je v prvním případě $\varrho = 0$, zatímco podle předchozího

odstavce je v druhém případě $\varrho = \pm 1$. Mohou tedy nastat právě tři možnosti, které si rozebereme jednotlivě.

a) $\beta = \alpha\gamma$. Pak $5 = \|\beta\| = \|\alpha\| \|\gamma\|$, takže buď $\|\alpha\| = 1$ nebo $\|\alpha\| = 5$. Příklad $\|\alpha\| = 1$ je však vyloučen vzhledem k volbě prvku α , protože jedinými prvky množiny $\mathbf{R}$, pro které je $\|\alpha\| = 1$ jsou čísla $1, -1$.

b) $\beta = \alpha\gamma + 1$. Pak $5 = \|\beta - 1\| = \|\alpha\| \|\gamma\|$, takže opět stejně jako v případě a) je nutně $\|\alpha\| = 5$.

c) $\beta = \alpha\gamma - 1$. Pak $7 = \|\beta + 1\| = \|\alpha\| \|\gamma\|$, odkud plyne $\|\alpha\| = 7$ podobným způsobem jako v a).

Vidíme tedy, že připadají v úvahu pouze takové prvky α , pro které je $\|\alpha\|$ buď 5 nebo 7. Nyní podle podmínky (iii) existují k číslům 2, α čísla γ, ϱ z množiny $\mathbf{R}$ taková, že $2 = \alpha\gamma + \varrho$, kde $|\varrho| < |\alpha|$. Stejně jako v předchozím odstavci je nutně $\varrho = 0, 1, -1$. Pro $\varrho = 0$ máme $4 = \|2\| = \|\alpha\| \|\gamma\|$, což není možné vzhledem k tomu, že $\|\alpha\|$ je buď 5 nebo 7. Pro $\varrho = 1$ jest $1 = \|1\| = \|\alpha\| \|\gamma\|$, což opět není možné. Konečně pro $\varrho = -1$ je $9 = \|3\| = \|\alpha\| \|\gamma\|$, což zase není možné. Dostáváme se tedy ke sporu, který dokazuje větu 7.

Na závěr ještě poznamenejme, že platnost věty 7 zdaleka neznamena, že by v množině $\mathbf{R}$ neexistoval k libovolným dvěma prvkům jejich největší společný dělitel (ve smyslu definice největšího společného dělitele z [1], str. 243, kde je ovšem nutno slova „celé číslo“ nahradit slovy „prvek z množiny $\mathbf{R}$ “). Dá se dokázat, že v množině $\mathbf{R}$ k libovolným dvěma prvkům skutečně existuje jejich největší společný dělitel. Věta 7 nám však říká, že největšího společného dělitele dvou prvků $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ nelze obecně spočítat pomocí Eukleidova algoritmu.

Literatura: [1] E. Calda: Největší společný dělitel v oboru celých komplexních čísel, *Rozhledy mat.-fyz. roč. 56 (1978)*, str. 243—247.

Parametry a procedury

PAVLA FEJTKOVÁ, Dr. MAREK MALÍK, MFF UK Praha

Minulý článek s názvem „*Cykly, seznamy a generátor*“ ukázal některé další možnosti zavádění teorie. Především jsme rozšířili druhy příkazů o některé příkazy cyklů, tj. příkazy, které umožní opakování určitých akcí. Věnovali jsme se možnostem práce s často užívaným seskupením datových struktur — a to seznamem. Další důležitou informací, kterou budeme zejména potřebovat pro následující výklad, bylo rozšíření pojmu deklarace třídy (deklarací jsme nazvali zavedení třídy) o *příkazovou* neboli *operační část*.

Deklaraci třídy nazýváme zatím

```
class identifikátor ; ⟨ deklarace atributů ⟩ příkaz ;
```

Připomeňme, že toto rozšíření znamená, že při každém generování exempláře třídy se zároveň provede příkaz uvedený v deklaraci třídy.

Uvědomme si znovu rozdíl v používání příkazů zapsaných v deklaraci třídy a příkazů stojících mimo ni. Zopakujme tyto aspekty na následujícím příkladě.

Při sportovní soutěži se má u každého závodníka evidovat jeho jméno, startovní číslo a dosažený čas. Chceme postupně přicházejícím závodníkům přidělovat startovní čísla a zaznamenávat, kolik startovních čísel bylo celkem přiděleno. Uvažme, jak lze zapsat příslušné akce např. pro první tři závodníky. (Nechť jsou Z1, Z2, Z3, X referenční proměnné kvalifikované pro třídu ZAVODNIK a POCET je proměnná typu integer.)

1. řešení.

Deklarujeme-li třídu ZAVODNIK následovně

```
class ZAVODNIK;  
  <text JMENO;  
  real CAS;  
  integer STARTCISLO>
```

pak můžeme situaci popsat např. takto:

```
POCET := 0;  
Z1 := new ZAVODNIK;  
POCET := POCET + 1;  Z1.STARTCISLO := POCET;  
Z2 := new ZAVODNIK;  
POCET := POCET + 1;  Z2.STARTCISLO := POCET;  
Z3 := new ZAVODNIK;  
POCET := POCET + 1;  Z3.STARTCISLO := POCET;
```

2. řešení.

Na první pohled je zřejmé, že akce mohou být provedeny zároveň s generováním každého exempláře a že můžeme třídu deklarovat např.:

```
class ZAVODNIK;  
  <text JMENO;  
  real CAS;  
  integer STARTCISLO>  
  begin  
    POCET := POCET + 1;  
    STARTCISLO := POCET  
  end
```

Exempláře pak stačí generovat takto:

```
POCET := 0;  
Z1 := new ZAVODNIK;  
Z2 := new ZAVODNIK;  
Z3 := new ZAVODNIK
```

nebo pouze

```
for X := Z1,Z2,Z3 do X := new ZAVODNIK
```

Uvědomme si znovu, že příkaz (uvedený v deklaraci třídy)

```
STARTCISLO := POCET
```

určuje hodnotu atributu STARTCISLO vždy pro ten exemplář třídy ZAVODNIK, který je právě generován. Ale chceme-li určit hodnotu atributu mimo deklaraci třídy, musíme vždy vyjádřit, kterého exempláře atribut máme na mysli, tedy např.

```
Z1.STARTCISLO := POCET
```

Cvičení.

Popište stejnou úlohu s tím rozdílem, že závodníky nebudete postupně označovat Z1, Z2, Z3 atd., ale utvoříte seznam závodníků. Vytvořte takovou deklaraci třídy ZAVODNIK, která to umožní. ;

Dříve než přistoupíme k dalšímu výkladu, položme následující otázku. Budeme uvažovat opět jednu z možných tříd pro popis žáků ve škole:

```
class ZAK;  
<text JMENO,PRIJMENI;  
integer ROKNAROZENI;  
real VAHA,VYSKA;  
ref (ZAK) SOUSED>;
```

Předpokládejme, že referenční proměnná KAREL je kvalifikována pro třídu ZAK. Vytvořme nový exemplář třídy ZAK a označme jej proměnnou KAREL, tedy:

```
KAREL := new ZAK;
```

Nyní má smysl klást otázku: Jakou hodnotu bude mít po provedení tohoto příkazu proměnná KAREL.VAHA nebo KAREL.SOUSED?

Hodnoty atributů nového exempláře třídy ZAK nejsou zatím určeny, proto zavedeme úmluvu o tak zvané inicializaci:

V okamžiku vytvoření (generování) exempláře třídy má každý atribut exempláře (není-li mu určena hodnota v příkazech v operační části třídy) jistou (předem danou) hodnotu, která závisí pouze na typu uvažovaného atributu.

Tyto základní (iniciální) hodnoty udává pro jednotlivé datové typy následující tabulka:

typ atributu	iniciální hodnota
integer	0
real	0.0
character	' (mezera)
Boolean	false
text	” “ (prázdný text)
ref...	none

V předešlém příkladě tedy platí:

KAREL.VAHA = 0.0 nebo KAREL.SOUSED == **none** a podobně.

Další možnosti, jak určit počáteční hodnoty atributů při vytváření exemplářů třídy, ukážeme na následujícím příkladě. Zavedme třídu:

```
class KARTA;
<text BARVA, HODNOTA>;
```

uvvažujeme dvě referenční proměnné:

```
ref (KARTA) A, B;
```

a chtěli bychom např. přiřadit proměnné A exemplář třídy odpovídající srdcové sedmičce a proměnné B datovou strukturu odpovídající pikovému králi. Zatím neznáme jinou možnost, než to provést následující šesticí příkazů:

```
A :— new KARTA;
B :— new KARTA;
A.BARVA := "SRDCE";
A.HODNOTA := "SEDMICKA";
B.BARVA := "PIKY";
B.HODNOTA := "KRAL";
```

V prvních dvou příkazech jsme vytvořili jakoby „prázdné karty“ a teprve v dalších příkazech určíme jejich atributům požadované hodnoty. (Takový způsob není příliš praktický, spíše odpovídá postupu, jakým by se karty v tiskárně vyráběly, než postupu, kdy například vyjmeme určitou kartu z balíčku.)

Abychom se vyhnuli tak zdlouhavému vytváření jednotlivých exemplářů údajových struktur, zavedeme pojem tzv. *parametrů třídy*.

Parametrem třídy budeme rozumět speciální atribut, jehož iniciální hodnotu zadáváme přímo při generování exempláře.

Na rozdíl od neparametrických atributů (tj. těch atributů, jichž jsme dosud užívali a které jsme zapisovali v lomených závorkách) budeme parametry psát v okrouhlých závorkách mezi identifikátor třídy a první středník.

Obecný tvar deklarace třídy bude tedy následující:

```
class [ identifikátor třídy ] ( [ seznam parametrů ] );
< [ seznam deklarací atributů ] > [ příkaz ] ;
```

(Parametry jsou stejně jako atributy uvedeny se svým typem a jsou v seznamu navzájem odděleny čárkami. Atributovou nebo parametrickou část je možno vynechat.)

Uvedenou třídu KARTA můžeme tedy modifikovat takto:

```
class KARTA (text BARVA, HODNOTA);;
```

V zápisu generátoru pak musí být uvedeny skutečné hodnoty parametrů (aktuální parametry) v tom počtu a pořadí, v jakém jsou uvedeny parametry v deklaraci třídy, např.:

```
A :— new KARTA ("SRDCE", "SEDMICKA");
```

```
B :— new KARTA ("PIKY", "KRAL");
```

Zápis generátoru má tedy tvar:

```
new [ identifikátor třídy ] ( [ seznam hodnot parametrů
                             navzájem oddělených čárkami ] )
```

Je zřejmé, že takto se značně zjednoduší vytváření konkrétních exemplářů třídy. Při prvním dojmu by se mohlo zdát, že by bylo účelné všechny atributy chápat jako parametry. Na následujícím příkladě bude vidět, že tomu tak není.

Zavedme třídu, kterou budeme popisovat obdélníky v rovině:

```
class OBDELNIK (real ZAKLADNA,VYSKA);
<real OBSAH,OBVOD>
begin
    OBSAH := ZAKLADNA*VYSKA;
    OBVOD := 2*(ZAKLADNA+VYSKA)
end;
```

U každého obdélníka nás tedy zajímají čtyři údaje, které budou vyjádřeny reálnými čísly: rozměry stran (atributy ZAKLADNA a VYSKA), velikost obsahu (OBSAH) a obvodu (OBVOD). Poslední dva údaje jsou ale odvoditelné z prvních dvou — z rozměrů stran lze určit velikost obsahu i obvodu. Toho je využito v operační části třídy, kde jsou atributům OBSAH a OBVOD určeny příslušné hodnoty.

Jestliže zapíšeme např. příkaz

```
XY :— new OBDELNIK (3.5,2.5);  
(pro ref (OBDELNIK)XY ),
```

provede se:

1. Vytvoření nového exempláře třídy OBDELNIK, jehož parametry ZAKLADNA a VYSKA mají po řadě hodnoty 3,5 a 2,5.
2. Provedení příkazů operační části třídy, v nichž se určí hodnoty atributů PLOCHA a OBVOD právě vytvořeného exempláře.
3. Takto nově vytvořený exemplář se přiřadí proměnné XY.

Po provedení uvedeného příkazu bude tedy platit:

```
XY.ZAKLADNA = 3.5 , XY.VYSKA = 2.5 ,  
XY.OBSAH = 8.75 , XY.OBVOD = 12.0 .
```

Hodnoty uváděné v zápisu generátoru mohou mít též tvar výrazu (příslušný parametr pak nabude hodnoty tohoto výrazu). §

Lze tedy psát např.:§

```
UV :— new OBDELNIK (XY.ZAKLADNA+3, XY.VYSKA*2)
```

apod.

Uvedme jako další příklady tříd s parametry třeba třídu pro popis bodu v rovině se souřadnou soustavou:

```
class BOD (real SOURADNICEX, SOURADNICEY);  
<real VZDALENOSTODPOCATKU>  
VZDALENOSTODPOCATKU := (SOURADNICEX**2 +  
SOURADNICEY**2)**(1/2);
```

nebo následující možnou třídu pro popis žáků stojících za sebou ve frontě:

```
class ZAK (text JMENO,PRIJMENI);  
<integer PORADI;  
ref (ZAK) PREDCHAZEJICI>  
begin  
PREDCHAZEJICI :— POSLEDNI;  
POSLEDNI: — this ZAK;  
PORADI: = PREDCHAZEJICI.PORADI + 1  
end,
```

kde referenční proměnná

```
ref (ZAK) POSLEDNI
```

nabývá vždy jako své hodnoty exempláře odpovídajícího žáku, který stojí poslední v dané frontě. Zapíšeme-li zápis generátoru:

```
new ZAK ("JIRI", "KRALICEK");
```

znamená to zařazení nového exempláře třídy ZAK do seznamu, který reprezentuje uvažovanou frontu. (Rozmyslete si situaci: nový žák se jmenuje Jiří Králíček, před ním stojí ten, který byl dříve poslední, teď

je poslední Jiří a jeho pořadí ve frontě je o jedničku větší než pořadí žáka před ním.)

Na rozboru uvedených příkladů je vidět, že generování exempláře třídy lze chápat jako dvě po sobě jdoucí akce:

1. *Vytvoření nového exempláře, v němž se za parametry dosadí hodnoty uvedené v generátoru.*
2. *Provedení příkazů operační části třídy, ve kterých je možno využívat hodnot parametrů.*

Chceme-li vytvářet pouze exempláře třídy a neprovádět při generování žádné příkazy, zařídíme to tak, že v deklaraci třídy neuvedeme žádnou operační část — připomeňme např. deklaraci:

```
class KARTA (text BARVA,HODNOTA);;
```

Velice často bychom také potřebovali zachytit situaci opačnou v tom smyslu, že bychom chtěli *vícekrát provádět tytéž akce, ale bez vytváření exemplářů tříd.*

Uvažme nejprve, jak by vypadalo řešení, kdybychom použili dosud známých prostředků tříd.

Předpokládejme například, že pro známé hodnoty celočíselných proměnných A, B potřebujeme několikrát zjišťovat celočíselný zbytek po dělení výrazů ($A + B$, $2 * A - B$ aj.) sedmi.

Mohli bychom pro tyto účely zavést třídu:

```
class ZBYTEK (integer VSTUP);  
begin  
    while VSTUP  $\geq$  0 do VSTUP := VSTUP - 7;  
    ZB := VSTUP + 7  
end
```

kde ZB je proměnná typu **integer**.

Po provedení příkazu

```
new ZBYTEK (A + B)
```

bude mít proměnná ZB hodnotu zbytku po dělení $(A + B)/7$, obdobně po provedení

```
new ZBYTEK (2 * A - B) hodnotu zbytku po dělení  $(2 * A - B)/7$ 
```

a podobně.

Je zřejmé, že úloha byla sice vyřešena, ale že se při každém provedení požadovaných akcí vytváří nepotřebný a tudíž nežádoucí exemplář třídy ZBYTEK. Pro samostatné provádění příkazů bychom tedy potřebovali prostředky analogické operační části třídy. Takové prostředky existují a nazývají se *procedury*.

Podobně jako je deklarace třídy prototypem vytváření exemplářů datových struktur, je deklarace procedury prototypem provedení příkazů její operační části, tedy prototypem procesu.

Procedura pro předcházející příklad by mohla mít tvar:

```
procedure ZBYTEK (integer VSTUP);  
begin  
    while VSTUP ≥ 0 do VSTUP := VSTUP - 7;  
    ZB := VSTUP + 7  
end
```

Obecný tvar deklarace procedury je následující:

```
procedure identifikátor  
procedury (seznam parametrů); příkaz ;
```

(Podobně jako u deklarace třídy nazýváme příkaz v deklaraci procedury její operační částí. Parametry jsou navzájem odděleny čárkami.)

Jako vytváříme exemplář třídy zápisem generátoru, tak provádění operační části procedury přikazujeme tzv. *voláním procedury* nebo také *příkazem procedury*.

Syntaxe příkazu (volání) procedury je následující:

```
identifikátor procedury (seznam hodnot  
aktuálních parametrů)
```

Pro řešenou úlohu by příslušné příkazy měly tvar:

```
ZBYTEK (A + B);  
ZBYTEK (2 * A - B)
```

Volání procedury tedy znamená provedení příkazů její operační části, kde jsou místo parametrů použity hodnoty aktuálních parametrů uvedené v příkazu volání.

Na závěr uveďme jeden složitější příklad použití procedury. Naším úkolem bude sestavit vhodné prostředky zaváděné teorie pro výpočet vzdáleností dvojic bodů v rovině se souřadným systémem.

Zavedme třídu pro popis bodů v rovině např. takto:

```
class BOD (real SOUR1,SOUR2);  
    <real VZDALODPOC>  
    VZDALODPOC := (SOUR1 ** 2 + SOUR2 ** 2) ** (1/2);
```

mějme proměnné:

```
real VZ;  
ref (BOD) A,B,C,D;
```

a nechť konkrétní body A, B, C, D jsou zadány následovně:

```
A: — new BOD (17.4,4.8);  
B: — new BOD (2.8765,2.1);  
C: — new BOD (1.1,99.23);  
D: — new BOD (0.4,8.4);
```

Pro výpočet vzdálenosti dvou bodů sestavme proceduru:

```
procedure VZDAL (ref(BOD)X, Y);  
begin  
    VZ := ((X.SOUR1—Y.SOUR1) ** 2+(X.SOUR2—Y.SOUR2)  
           ** 2) ** (1/2)  
end
```

Při vyvolání této procedury

VZDAL (A,C);

se provede její operační část, kde parametr X bude nahrazen datovou strukturou označenou jako A a parametr Y bude nahrazen exemplářem C. Do proměnné VZ se dosadí hodnota vzdálenosti bodů A a C (přesněji řečeno bodů, které odpovídají exemplářům třídy BOD).

Analogicky lze zapisovat volání procedury pro výpočet všech ostatních požadovaných vzdáleností, např.:

```
VZDAL (A,B);  
VZDAL (A,D);  
VZDAL (C,D)   apod.
```

Už z těchto zápisů je vidět, že používání procedur je často velice značným zjednodušením zápisů některých algoritmů.

fyzika

Teorie relativity

RNDr. LEOŠ DVOŘÁK, UK Praha

V roce 1979 uplyne již sto let od narození tvůrce teorie relativity — *Alberta Einsteina*. Princip relativity a jeho použití pro jednotný popis zákonů fyziky je však mnohem starší. Vývoj tohoto principu dobře charakterizuje pokrok v chápání stále obecnějších přírodních zákonů a též velikost vkladu Alberta Einsteina do souhrnu lidského poznání.

1. *Newtonovská mechanika*

Klasická mechanika je založena na třech Newtonových zákonech, určujících pohyb hmotného bodu pod vlivem vnější síly a kladoucích jisté požadavky na silové působení (zákon akce a reakce). Tyto zákony

jsou doplněny víceméně mlčky činěnými předpoklady o vlastnostech pravých sil (tj. sil, jež mají původ ve vzájemné interakci částic). Těmito předpoklady jsou princip superpozice (vektorového sčítání sil), působení přímo do dálky (síla mezi dvěma částicemi je funkcí jejich okamžité vzdálenosti) a centrálnost sil (síla má směr spojnice částic). Z tohoto souboru postulátů lze odvodit všechny zákony zachování a prakticky celou klasickou mechaniku. Je třeba připomenout, že elektrostatická a gravitační síla velmi dobře splňují výše uvedené předpoklady (v případě nepříliš silných gravitačních polí a rychlostí malých ve srovnání s rychlostí světla), což vysvětluje úspěchy newtonovské mechaniky např. při popisu pohybu planet.

První Newtonův zákon se někdy zdá být triviálním důsledkem 2. zákona (pro $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ plyne z 2. zákona $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ a tedy $\mathbf{v} = \text{konst.}$). Ve skutečnosti proto, abychom vůbec mohli zapsat 2. Newtonův zákon, potřebujeme určitou soustavu souřadnic. 1. zákon nám říká, že existuje soustava, vůči níž se volné hmotné body pohybují rovnoměrně přímočaře — tzv. *inerciální soustava souřadnic*, inerciální systém. A právě tento inerciální systém je soustavou, v níž platí 2. Newtonův zákon. Opravdu, např. na otáčejícím se kolotoči 2. zákon neplatí (pokud do něj vstupují jen pravé síly) a chceme-li jeho platnost formálně zachovat, musíme zavést celou řadu setrvačných sil (sílu odstředivou, Coriolisovu, atd.), které nemají původ v interakci s žádnými hmotnými tělesy. První Newtonův zákon tedy vlastně postuluje existenci inerciálního systému.

Při určování inerciálního systému máme ovšem určitou libovůli. Můžeme libovolně otočit soustavu souřadnic kolem počátku (a libovolně posunout počátek) — výsledkem bude opět inerciální systém (což je přirozený důsledek vektorového charakteru rovnic). Navíc přejdeme-li od inerciálního systému S (o souřadnicích x, y, z) k systému S' (o souřadnicích x', y', z'), transformací

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \quad (V = \text{const.}),\end{aligned}\tag{1}$$

bude S' rovněž inerciální. To lze lehce ověřit z transformačního vztahu pro složky rychlostí, jak jej odvodíme z (1) např. derivací podle času (v' se vztahuje k S' , v k S):

$$\begin{aligned}v_{x'} &= v_x - V \\v_{y'} &= v_y \\v_{z'} &= v_z\end{aligned}\tag{2}$$

Fyzikálně odpovídá transformace (1) rovnoměrnému přímočarému pohybu systému S' vzhledem k S rychlostí V ve směru osy x . Je to tzv. *speciální Galileiho transformace*. (Obecnou Galileiho transformaci, která

zahrnuje rovnoměrné přímočaré pohyby S' vzhledem k S v libovolném směru, lze získat složením speciální Galileiho transformace a otočení systému kolem počátku spolu s případným posunem počátku.) Významnou vlastností Galileiho transformace (i obecné) je skutečnost, že zachovává délkový interval Δl .

Je-li

$$\begin{aligned}(\Delta l)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \\(\Delta l')^2 &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2,\end{aligned}\tag{3}$$

kde přirozeně $\Delta x = x_1 - x_2$, $\Delta x' = x'_1 - x'_2$, atd., pak platí

$$\Delta l' = \Delta l,\tag{4}$$

jsou-li S a S' spojeny Galileiho transformací.

Všechny systémy, pohybující se vůči inerciálnímu systému rovnoměrně přímočaře, jsou tedy také inerciální. Newtonovy zákony (a předpoklady o vlastnostech pravých sil) by proto měly platit ve všech těchto systémech. A opravdu platí (v rámci klasické mechaniky). Ve skutečnosti z platnosti Newtonových zákonů v jednom inerciálním systému plyne jejich platnost ve všech systémech, spojených s ním Galileiho transformací. (Ilustrace v případě speciální Galileiho transformace je prostá: derivací (2) zjistíme, že zrychlení je v systémech S a S' stejné, $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$; působící síla se rovněž nemění, neboť závisí jen na vzdálenostech bodů, které se při Galileiho transformaci nemění — viz (4); takže $m\mathbf{a} = \mathbf{F} \Rightarrow m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'$.) Tento fakt je obsahem *klasického principu relativity*, který tvrdí, že zákony klasické mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních systémech. Ekvivalentní formulací je tvrzení, že zákony klasické mechaniky jsou *invariantní* vůči Galileiho transformaci (tj. že při Galileiho transformaci nemění svůj tvar).

K transformačním vztahům (1) (a též k obecné Galileiho transformaci) patří vlastně ještě čtvrtý vztah, a to

$$t' = t.\tag{5}$$

Tato rovnost, obvykle mlčky předpokládaná, říká, že existuje jediný absolutní čas pro všechny inerciální systémy stejný. Dvě události současné v jednom inerciálním systému jsou současné ve všech inerciálních systémech. Protože síly působící přímo do dálky se vyznačují nekonečnou rychlostí šíření interakce, má tato současnost jednoznačný fyzikální smysl.

Analogicky k absolutnímu času byla předpokládána i existence jediného absolutně nehybného inerciálního systému. Potíž byla v tom, že na základě mechanických pokusů nelze tento absolutní inerciální systém nalézt — podle klasického principu relativity budou výsledky všech (mechanických) pokusů stejné jak v absolutním, tak v libovolném jiném inerciálním systému.

2. Elektrodynamika

S rozvojem elektrodynamiky se zdálo, že tato potíž (nemožnost nalezení absolutního inerciálního systému) bude překonána. Maxwellovy rovnice, popisující chování elektromagnetického pole (a tedy i šíření světla), totiž nejsou invariantní vůči Galileiho transformaci. Lze tedy najít systém, v němž platí, a to měl být právě onen absolutní inerciální systém. Podle mechanistických představ mělo totiž elektromagnetické vlnění být vlněním nevažitelného a všeprostupujícího prostředí — éteru a Maxwellovy rovnice měly platit v soustavě, vůči níž je éter v klidu. Tak byl absolutní inerciální systém ztotožněn se systémem éteru.

Nalezení systému éteru již mělo být jednoduché (alespoň teoreticky). Vůči éteru se totiž světlo pohybuje (ve vakuu) rychlostí c ve všech směrech stejnou. V ostatních inerciálních systémech je (podle (2)) rychlost šíření světla v různých směrech různá. Stačí tedy změřit v daném systému rychlost světla v různých směrech, abychom určili pohyb systému vůči éteru.

Experimentálně je toto měření záležitost značně komplikovaná (je nezbytná vysoká přesnost, neboť očekávané efekty pohybu vůči éteru jsou malé). Když v roce 1881 *Michelson* a *Morley* provedli svůj slavný experiment měření pohybu Země vůči éteru, byla díky použité interferometrické metodě přesnost tak vysoká, že mohla být změřena i rychlost jen 0,3 km/s (a očekávaly se rychlosti značně vyšší, vždyť rychlost pohybu Země kolem Slunce je přibližně 30 km/s). Navzdory všem očekáváním dal pokus záporný výsledek: Země se nepohybuje vůči éteru. To bylo překvapující a v rozporu s jinými experimenty. K výkladu *Michelsonova-Morleyova* pokusu navrhl později *Konrad Lorentz* hypotézu, že všechna tělesa se při pohybu vůči éteru v podélném směru zkracují a že chod hodin, pohybujících se vůči éteru, se zpomaluje. Na základě těchto hypotéz odvodil, že pohyb vůči éteru nelze určit. Éter byl tedy zachráněn, ovšem za cenu značně umělé a odnikud neplynoucí hypotézy. (Lorentzovy vztahy jsou ovšem formálně zachovány i ve speciální teorii relativity; jak však uvidíme dále, jejich interpretace je mnohem přirozenější.)

Teprve *Albert Einstein* (a to bez znalosti Lorentzových prací) našel odvahu prohlásit, že jestliže systém éteru nelze nijak fyzikálně určit, je nutno zavrhnout existenci éteru vůbec, zrovnoprávnit všechny inerciální systémy a experimentálně ověřenou konstantnost rychlosti světla vzít za základ nové teorie — speciální teorie relativity.

3. Speciální teorie relativity

Základem speciální teorie relativity jsou tři postuláty:

1. Existuje inerciální systém.

2. Světlo se pohybuje ve všech inerciálních systémech (ve vakuu) stejnou rychlostí.
3. Fyzikální zákony mají ve všech inerciálních systémech stejný tvar.

Třetí postulát bývá nazýván *speciálním principem relativity*. Z prvních dvou postulátů lze odvodit *Lorentzovy transformace* mezi souřadnicemi dvou inerciálních systémů (za doplňujícího předpokladu, že transformace jsou lineární — nebo za předpokladu ekvivalentního — obecně bychom dostali tzv. konformní transformace, vůči nimž nejsou veškeré fyzikální zákony invariantní). Speciální Lorentzova transformace ze systému S do systému S', pohybujícího se vzhledem k S rychlostí V ve směru osy x (tedy ekvivalent transformace (1)), má tvar

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.\end{aligned}\tag{6}$$

Stojí za připomínku, že (6) přechází v (1) pro $\frac{V}{c} \rightarrow 0$. Podobně jako Galileiho transformace zachovávala délkový interval (3), zachovává Lorentzova transformace tzv. čtyřinterval

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2,\tag{7}$$

je tedy

$$\Delta s' = \Delta s\tag{8}$$

Podstatná je skutečnost, že i čas je jednou ze souřadnic, které se transformují. (Často se v této souvislosti pro označení těsného spojení prostorových a časových souřadnic používá termínu čtyřrozměrný prostor-čas. Pohled na vztah (7) nás však ujišťuje, že čas, respektive souřadnice ct má oproti souřadnicím x, y, z zvláštní postavení a není jim zcela ekvivalentní.) Neexistuje tedy již absolutní čas, stejný pro všechny inerciální systémy, pro všechny pozorovatele. To s sebou přináší celou řadu nových a zdánlivě paradoxních závěrů.

Například dvě události, současné pro jednoho pozorovatele, nemusí být současné pro druhého pozorovatele (který se pohybuje vzhledem k prvnímu). Dokonce v jistých případech může událost A předcházet

události B pro prvního pozorovatele, ale pro druhého pozorovatele může naopak tatáž událost B předcházet událost A. Pokud by událostí A mělo být vyslání nějakého signálu a událostí B přijetí tohoto signálu, plyne ze speciální teorie relativity, že takovýto signál by se musel šířit nadsvětelnou rychlostí. (A naopak pokud by existovaly signály, šířící se rychlostí větší než rychlost světla ve vakuu, mohli bychom každé dvě události A a B spojit signálem.) Pro druhého pozorovatele však příjem takového signálu (událost B) nastal dříve než vyslání signálu (událost A). To je však nemožné, neboť podle principu kauzality musí příčina předcházet následek. (A příjem signálu je jistě následkem jeho vyslání.) Nadsvětelné rychlosti šíření signálů jsou tedy zakázány — pokud by existovaly, byl by porušen princip kauzality. (Speciálně jsou tedy např. zakázány síly, působící přímo do dálky — těm odpovídá nekonečná rychlost šíření interakce.)

Dalšími známými důsledky Lorentzovy transformace jsou kontrakce délek (těleso, pohybující se rychlostí V , naměříme v podélném směru zkrácené v poměru $\sqrt{1 - V^2/c^2} : 1$), dilatace času (hodiny, pohybující se rychlostí V , jdou $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ krát pomaleji oproti hodinám, které jsou v klidu) a relativistické skládání rychlostí (pokud se těleso pohybuje vůči systému S' rychlostí v ve směru osy x a systém S' se sám pohybuje vůči systému S rychlostí V v témže směru, pak těleso se nepohybuje vzhledem k S rychlostí $v + V$, ale rychlostí $(v + V)/(1 + vV/c^2)$).

Podle speciálního principu relativity mají mít všechny fyzikální zákony stejný tvar ve všech inerciálních systémech, jinými slovy, mají být invariantní vůči Lorentzově transformaci. Druhý Newtonův zákon to nesplňuje a je tedy třeba ho modifikovat. Po „opravě“ zjistíme, že hmotnost tělesa není konstantou, ale závisí na rychlosti podle vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (9)$$

Dalším důsledkem modifikovaného pohybového zákona je souvislost hmotnosti tělesa a jeho energie. Energie je přirozeně vždy určena až na aditivní konstantu, ale na základě relativistických úvah se ukazuje přirozené fixovat i tuto konstantu — dostáváme pak slavný Einsteinův vztah ekvivalence hmotnosti a energie,

$$E = mc^2 . \quad (10)$$

Speciální teorie relativity byla a je mnohokrát ověřována nejrůznějšími experimenty. Zejména jsou pak její vztahy používány ve fyzice vysokých energií při konstrukci urychlovačů, v nichž se částice pohybují rychlostmi jen o málo nižšími, než je rychlost světla. Fakt, že tyto urychlovače fungují, je nejlepším ověřením platnosti teorie. O přesnosti ově-

ření speciální teorie relativity obvykle nemají žádnou představu různých „reformátorů“ (z řad laiků), kteří čas od času přicházejí s její kritikou. Nemají zpravidla ani představu o opravdové přirozenosti a eleganci této teorie, kterou pocítí každý, kdo se s ní blíže seznámí.

4. Obecná teorie relativity

Ve speciální teorii relativity jsou ještě stále privilegovány inerciální systémy na úkor ostatních (např. zrychlených systémů). Navíc speciální teorie relativity neplatí v přítomnosti gravitace. (Její přibližná platnost např. v gravitačním poli Země je dána tím, že toto pole je slabé.) Za přítomnosti gravitačního pole totiž nelze definovat inerciální systém, protože gravitaci nelze odstínit a působí na všechna tělesa stejně*) — neexistují tedy volné hmotné body. Inerciální systém (globální, tj. platný v celém prostoru) se za přítomnosti gravitačního pole stává stejnou fikcí, jako byl éter.

Gravitace je univerzálním vlivem díky rovnosti tíhové a setrvačné hmotnosti. Tuto rovnost ověřoval už *Galileo Galilei* („všechna tělesa padají se stejným zrychlením“) a v minulém století pak značně přesněji *von Eötvös*. Dnes je ověřena díky pokusům skupin *Dickeho* a *Braginského* s přesností více než 10^{-12} . Newtonův gravitační zákon tuto rovnost nijak nevysvětluje. Navíc je nepřijatelný, protože představuje sílu působící přímo do dálky, což odporuje principu kauzality, jak bylo uvedeno výše. Jak najít jeho relativistické zobecnění?

Albert Einstein vzal rovnost tíhové a setrvačné hmotnosti (tzv. princip ekvivalence) za základ nové teorie. Univerzálnost gravitačního působení umožnila popisovat ho geometricky — jako vliv geometrie prostoročasu na pohyb těles. S novou teorií — obecnou teorií relativity — vstoupily do fyziky takové pojmy, jako zakřivený prostor, metrika prostoročasu atd. Oč jde?

Zavedeme-li označení $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ct$, lze vztah (7) pro čtyřinterval ve speciální teorii relativity napsat jako

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 \eta_{\alpha\beta} \Delta x_{\alpha} \Delta x_{\beta}, \quad (11)$$

kde

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \\ \eta_{44} &= -1, \\ \eta_{\alpha\beta} &= 0 \quad \text{pro } \alpha \neq \beta \end{aligned} \quad (12)$$

Čtyřinterval v obecné teorii relativity je dán jako

*) Je tzv. univerzálním vlivem.

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 g_{\alpha\beta} \Delta x_{\alpha} \Delta x_{\beta}, \quad (13)$$

kde však $g_{\alpha\beta}$ jsou již obecně funkcemi x_1, x_2, x_3 a x_4 . Nazýváme je složkami *metrického tenzoru* a říkáme, že vztah (13) určuje *metriku prostoročasu*. Nebudeme se zde zabývat doplňujícími podmínkami, které musí složky $g_{\alpha\beta}$ splňovat. Užitečnější bude, když si na analogii v dvourozměrném případě ukážeme, že opravdu mohou charakterizovat zakřivení. V rovině platí pro délkový interval

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \quad (14)$$

zatímco na povrchu jednotkové koule (Θ a φ jsou sférické souřadnice)

$$(\Delta l)^2 = (\Delta \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\Delta \varphi)^2 \quad (15)$$

Podstatný není fakt, že souřadnice jednou značíme x, y a podruhé Θ, φ , ale výskyt členu $\sin^2 \Theta$ v (15), který charakterizuje skutečnost, že povrch koule je zakřiven. Důležité je, že uvedený formalismus umožňuje charakterizovat zakřivení prostoru bez nutnosti jeho vnoření do prostoru vyšší dimenze, takže mluvíme-li o zakřiveném čtyřrozměrném prostoročase, neznamená to, že by existoval nějaký pětirozměrný (či vícerozměrný) prostor, v němž by byl daný prostoročas vložen a „zakřiven“. O zakřivení prostoru se opravdu můžeme přesvědčit „zevnitř“ — např. zjistíme-li, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku není roven 180° , je to důkazem křivosti prostoru. (Názorným příkladem může být opět povrch koule, kde součet vnitřních úhlů libovolného „trojúhelníka“ je větší než 180° — tak by se mohly o zakřivení svého „světa“ přesvědčit hypotetické dvourozměrné bytosti, na něm žijící.)

V obecném prostoročase (tj. za přítomnosti gravitačního pole) neexistuje globální inerciální systém, podobně jako nemůžeme pokrýt povrch koule kartézskou sítí souřadnic. Můžeme však používat téměř libovolné soustavy souřadnic a všechny jsou vzájemně rovnoprávné. *Princip obecné kovariance* (který bychom vlastně mohli nazvat obecným principem relativity) pak požaduje, aby fyzikální zákony měly ve všech těchto soustavách stejný tvar.

Stejně tak, jako lze na povrchu koule zavést v okolí nějakého bodu lokální kartézskou soustavu souřadnic, lze i v obecném prostoročase zavést lokální inerciální systém v určitém místě prostoru v daném čase. Fyzikálně to znamená přejít do systému „padajícího výtahu“ (v padajícím výtahu se gravitační síla lokálně zruší zdánlivou silou, působící ve zrychleném systému, neboli jinak řečeno, všechna tělesa — i sám výťah — padají stejně díky principu ekvivalence). Zhruba lze říci, že v lokálním inerciálním systému nepůsobí gravitační pole a musí v něm tedy (lokálně) platit zákony speciální teorie relativity. Pomocí principu obecné kovariance pak můžeme odvodit tvar fyzikálních zákonů v obecné teorii relativity. Toto tvrzení však není zcela přesné, neboť jsme neuvažovali

vliv slapových sil (vznikajících díky nehomogenitám gravitačního pole), takže obecná teorie relativity není triviálním důsledkem speciální teorie relativity a principu ekvivalence, jak se někdy soudí. V každém případě platí, že vztahy obecné teorie relativity přecházejí v nepřítomnosti gravitačního pole ve vztahy speciální teorie relativity. Opačný přechod není jednoznačný. (Výše naznačeným postupem nelze též odvodit sám gravitační zákon, popisující, jak rozložení hmoty ovlivňuje geometrii prostoročasu — touto otázkou se zde pro její složitost nebudeme zabývat.)

5. *Ověření a aplikace obecné teorie relativity*

Odchylky od výsledků newtonovské teorie, které předpovídá obecná teorie relativity, jsou ve většině případů velmi malé. Ke klasickým třem testům obecné teorie relativity patří gravitační rudý posuv (zhruba řečeno: fotony ztrácejí energii, když stoupají v gravitačním poli), posuv perihela Merkura (po odečtení všech klasických korekcí se perihel Merkura posouvá o 43'' za století) a ohyb světla v gravitačním poli (v blízkosti např. Slunce je paprsek světla vzdálených hvězd odchylován od přímého směru — „padá“ směrem ke Slunci). Tyto testy obecnou teorii relativity s poměrně dobrou přesností potvrzují. Protože však gravitační pole, která „máme k dispozici“ pro tyto testy ve sluneční soustavě, jsou poměrně slabá, je ověření provedeno jen v tzv. limitě slabého pole. Přesnější ověření pro silná gravitační pole je vázáno na rozvoj pozorování astrofyzikálních dějů v blízkosti zkolabovaných objektů (neutronových hvězd, černých děr), kde efekty obecné teorie relativity mají principiální význam. Povzbuzující však je, že během více než 60 let své existence zůstává obecná teorie relativity v podstatě jedinou teorií gravitace, která vydržela zátěž nových testů a experimentálních dat. (Několik málo teorií, které v současnosti kromě obecné teorie relativity vyhovují experimentálním datům, je méně uspokojivých z jiných důvodů a navíc prakticky všechny přecházejí v jisté limitě v obecnou teorii relativity.)

Dlouhou dobu byla obecná teorie relativity pokládána za nesmírně elegantní, ale v podstatě neužitečnou teorii. (Zatímco speciální teorie relativity byla brzy skloubena s kvantovou mechanikou a toto spojení dalo nové pozoruhodné výsledky, není tomu tak v případě obecné teorie relativity dodnes.) Od 60. let se však zdvihla nová vlna zájmu v souvislosti s astrofyzikálními objevy, ukazujícími na existenci těles s nesmírně silným gravitačním polem. Toto pole je nutno popisovat pomocí obecné teorie relativity a relativistické efekty mohou být v takovémto případě pro chování a vývoj objektu dokonce rozhodující. Na druhé straně též vývoj vesmíru jako celku je určován gravitačním polem. Kosmologické modely, vytvořené na základě obecné teorie relativity, umožnily vysvětlit tak podstatné vlastnosti pozorovaného vesmíru, jako jsou

vzdalování galaxií a existence izotropního mikrovlnného záření. V současné době je relativistická astrofyzika a kosmologie neoddělitelnou (byť snad zatím od praktických aplikací vzdálenou) součástí základního výzkumu.

Jak již bylo uvedeno, spojení obecné teorie relativity s kvantovou teorií se dosud neuskutečnilo. Gravitační síly jsou v mikrosvětě zanedbatelně malé proti silám jaderným a elektromagnetickým (i proti silám slabé interakce) a na druhé straně též kvantování samotného gravitačního pole naráží na nesmírné obtíže. Potřeba jednotného popisu se však cítí a existuje i naděje, že nová jednotná teorie by snad mohla odstranit též některé potíže současné kvantové teorie pole. První kroky ke sjednocené teorii byly patrně již učiněny (základy kvantové teorie na pozadí zakřiveného prostoročasu, nejnověji teorie tzv. supergravitace), ale teprve budoucnost ukáže, zda tento problém bude vyřešen spojeným úsilím mnoha fyziků, nebo bude vyžadovat novou osobnost formátu tvůrce teorie relativity — Alberta Einsteina.

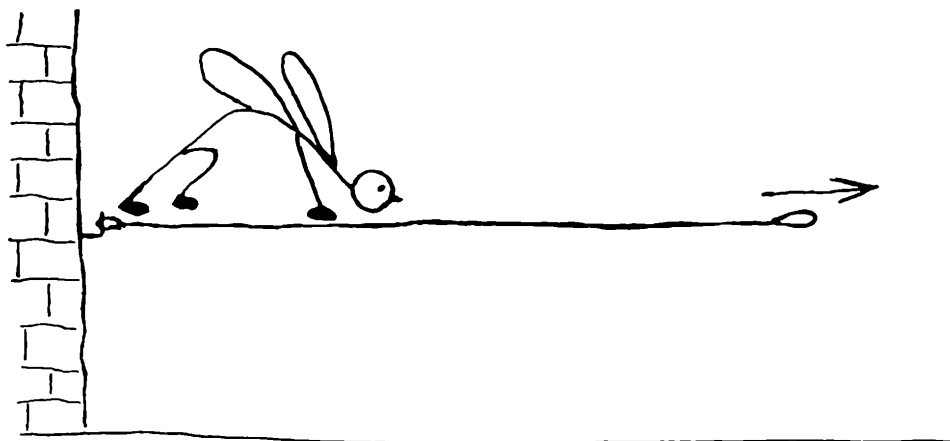
Úloha o broukovi a gumě

JINDŘICH ŠILHÁN, Ždánice

Na praktikum pro pozorovatele proměnných hvězd v roce 1977 přinesl brněnský účastník *Aleš Střecha* následující úlohu:

Svazek letecké gumy 1 km dlouhý je napnutý vodorovně tak, že jeden její konec je upevněn ke skobě, druhý je volný (viz obr. 1). Na skobě sedí brouk. V určitém okamžiku se guma začne napínat tak, že volný konec se začne vzdalovat rychlostí 1 km/s. Zároveň se dá do pohybu brouk a leze po gumě stálou rychlostí 1 m/s vzhledem k tomu místu na gumě, kde se právě nalézá. Doleze někdy brouk na konec gumy?

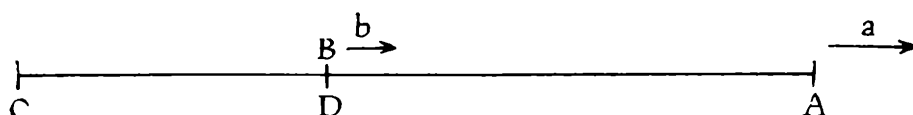
Účastníci praktika, ve své většině žáci středních škol, věnovali úloze



Obr. 1

hodně volných chvil. O řešení se pokoušelo i několik přítomných vysokoškoláků. Úspěch neměli. A přece je úloha řešitelná prostředky, které ovládá nemalé procento dnešních středoškoláků. Za pomoc při důkazu vděčím s. *Vladimíru Tůmovi*, učiteli ze Žeravic.

Je zřejmé, že problém jako fyzikální jen vypadá. Už proto, že reálný gumový svazek krátce po začátku „dostihů“ praskne. Nás bude zajímat matematická stránka věci. Prostě si definujeme gumu, která nepraská. Úlohu rozřešíme obecně, pro různé rychlosti a délky.



Obr. 2

Na našem schematicém obr. 2 je zachycen stav po začátku procesu. Pro počáteční stav položíme $t = 0$; obr. 2 tedy odpovídá nějakému časovému okamžiku $t > 0$. Co se dělo v časech $t < 0$, není předmětem našich úvah. Guma je symbolizována úsečkou CA ležící v ose x . Pevný konec C ztotožníme s počátkem souřadného systému ($x = 0$), volný konec se pohybuje rychlostí a a je označen A . Brouk je představován bodem B , jeho rychlost vzhledem k přilehlým bodům úsečky (k bodu $D \equiv B$) budiž označena b . Rychlosti a i b mají směr doprava, bude tedy $a > 0$, $b > 0$. Označíme $l = CA$. Ježto bod A je v pohybu, je $l = l(t)$. Počáteční délku označíme l_0 . Je $l_0 = l(0)$ a $l(t) = l_0 + at$.

Pro rozložení rychlostí na natahující se úsečce CA musíme učinit nějaký předpoklad, protože zadání je v tomto směru neúplné. Když jsme u naší gumy předpokládali nekonečnou pevnost, přisudme jí i dokonalou pružnost. Necht' je tedy v každém čase splněn Hookův vztah. Pak rychlost v_1 libovolného bodu (např. E) úsečky CA je funkcí jeho souřadnice x a času t :

$$v_1(x, t) = a \frac{x}{l_0 + at}.$$

Rychlost v bodu B (vzhledem k počátku C) je dána vztahem

$$v(t) = b + \frac{ax(t)}{l_0 + at}. \quad (1)$$

Zdánlivě závisí rychlost v ještě na souřadnici x , ta však není nezávisle proměnnou, ale je $x = x(t)$. Ve vzorci (1) totiž x není souřadnicí libovolného bodu úsečky CA , ale je to souřadnice bodu $D \equiv B$. A ten je v čase t jen jeden.

Vzorec (1) představuje tzv. lineární diferenciální rovnici 1. řádu s nekonstantními koeficienty a obecně taková rovnice není středoškolskými

prostředky řešitelná. Naše rovnice je však trochu zvláštní. Derivujeme-li ji ještě jednou podle času, dostaneme:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a}{l_0 + at} \frac{dx}{dt} - \frac{a \cdot a}{(l_0 + at)^2} x(t)$$

Ale $\frac{dx}{dt} = v(t)$ a po dosazení z (1) se vyruší členy s $x(t)$, takže vyjde

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ab}{l_0 + at} = \frac{ab}{l_0} \frac{1}{1 + \frac{a}{l_0} t}.$$

Tuto rovnici lze snadno integrovat a tak vypočítat rychlost v v čase, který pro přehlednost označíme T .

$$v(T) - v(0) = v(T) - b = \frac{ab}{l_0} \int_0^T \frac{1}{1 + \frac{a}{l_0} t} dt.$$

Substitucí

$$u = \frac{a}{l_0} t \tag{2}$$

dostaneme

$$v(T) - b = b \int_0^{\frac{a}{l_0} T} \frac{1}{1 + u} du = b \int_0^{\frac{a}{l_0} T} \frac{d}{du} (\ln |1 + u|) du,$$

takže (vrátíme-li se zpět k označení času malým t):

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = b + b \ln \left(1 + \frac{a}{l_0} t \right). \tag{3}$$

Už vzorec (3) dovoluje odpovědět na otázku, která nás zajímá. Bez ohledu na číselnou velikost a , b , l_0 (pokud jsou to čísla kladná) roste rychlost bodu B s časem nade všechny meze. Jelikož se bod A vzdaluje neměnnou rychlostí (rovnou a), plyne z toho paradoxní závěr, že i náš brouk k cíli jednou dospěje.

Poznámka 1.

Že rychlost pohybu bodu B s časem roste, není těžké zjistit i bez integrace. Stačí si uvědomit, že pro $b = 0$ by byl jeho pohyb rovnoměrný. Jenže to není postačující podmínkou pro dostižení. Např. rychlost vyjádřená funkcí

$$v(t) = b - \frac{b}{1+t}$$

také s časem stále roste, pro žádné $t > 0$ však nepřekročí hodnotu b .

Poznámka 2.

Pokus o integrování rovnice (3) vyžaduje opět použití substituce (2). Pak narazí na problém, jak integrovat funkci $\ln(1+u)$. Lze to provést metodou per partes. Bližší o tom viz např. v [1]. Zde si uvedeme jen výsledek

$$x(t) = \left(\frac{l_0}{a} + t\right) b \ln \left(1 + \frac{a}{l_0} t\right).$$

Brouk by dolezl na konec gumy v čase t , který vyhovuje rovnici

$$\left(\frac{l_0}{a} + at - \left(\frac{l_0}{a} + t\right) b \ln \left(1 + \frac{a}{l_0} t\right)\right) = 0$$

Tato rovnice se dá poměrně snadno řešit, je-li $a = l_0$. Přejde na tvar

$$\ln(1+t) = \frac{a}{b}.$$

Zadané číselné hodnoty jsou tohoto druhu při $a = 1000$, $b = 1$. Pro ně $t = e^{1000} - 1 \approx 1,97 \times 10^{434}$ (sekund).

To je ohromné číslo, více než o 400 řádů větší než stáří vesmíru (20 miliard let $\approx 6,3 \times 10^{17}$ sekund). Také brouk by tedy musel být velmi speciální a nikdo jiný než královna Matematika podobným broukem nedisponuje.

Literatura :

[1] V. Jarník: Integrální počet I, NČSAV Praha 1956

Pocta československému matematikovi

Edinburghská královská společnost zvolila v roce 1978 svým čestným členem československého matematika prof. dr. *Jaroslava Kurzweila*, DrSc., člena korespondenta ČSAV a vedoucího vědeckého pracovníka Matematického ústavu ČSAV v Praze. Blahopřejeme a chceme se pochlubit, že jméno tohoto známého matematika bylo prvně tištěno v Rozhledech, a to v roce 1944.

Redakce

Z dějin exaktních věd

Významný polský matematik

RNDr. JIŘÍ SEDLÁČEK, CSc., MÚ ČSAV Praha

Uplývá deset let od smrti vynikajícího polského matematika Wacława Sierpińskiego, profesora varšavské university a čestného doktora řady dalších universit. Jeho osobnost si tu připomínáme také proto, že byl od roku 1923 čestným členem Jednoty československých matematiků a fyziků, roku 1948 mu Karlova universita v Praze udělila čestný doktorát a od roku 1960 byl zahraničním členem ČSAV.

W. Sierpiński se narodil 14. března 1882 ve Varšavě a na přelomu století začal studovat na varšavské universitě. Jeho první vědecká práce vznikla roku 1904 na závěr universitních studií. Šlo v ní o odhad počtu mřížových bodů, které leží uvnitř kruhu se středem v počátku a s daným poloměrem nebo na hranici tohoto kruhu. Mřížovým bodem v rovině přitom rozumíme bod, jehož obě souřadnice jsou celá čísla. Dá se tušit, že uvažovaný počet mřížových bodů přibližně odpovídá obsahu kruhu. Označme $A(x)$ počet mřížových bodů, jež jsou vnitřními nebo hraničními body kruhu se středem v počátku a s poloměrem $\sqrt{x}$ (kde x je kladné číslo). Jaké chyby se dopustíme, nahradíme-li $A(x)$ číslem πx ? C. F. Gauss dokázal už roku 1837, že existuje kladná konstanta c_1 tak, že pro každé kladné číslo x platí

$$|A(x) - \pi x| < c_1 x^{\frac{1}{2}}.$$

Sierpińskému se podařilo roku 1904 zlepšit tento výsledek tím, že dokázal existenci kladné konstanty c_2 s touto vlastností: platí

$$|A(x) - \pi x| < c_2 x^{\frac{1}{3}}$$

pro každé kladné číslo x . Snížil tedy exponent $\frac{1}{2}$ v Gaussově odhadu na

hodnotu $\frac{1}{3}$. Zdálo by se, že je to zlepšení nepatrné, ale důkaz je obtížný

a obsáhl 40 stran textu. G. H. Hardy a E. Landau ukázali o jedenáct let později (1915), že Sierpińského exponent nemůže být snížen pod hodnotu $\frac{1}{4}$.

Pak následovalo několik postupných zlepšení exponentu $\frac{1}{3}$

(van der Corput, Littlewood, Walfisz, Vinogradov, Titchmarsh, Hua), ale i to nejnovější (Chen-Jing-Run 1963) je jen zhruba o jednu setinu lepší

než Sierpińského výsledek z roku 1904. Problém přesného určení exponentu při uvedeném odhadu je však stále otevřený.

W. Sierpiński začal tedy svou vědeckou dráhu problémem z teorie čísel a číselné teorii zůstal věrný po celý život. Tak např. roku 1948 dokázal, že pro každé přirozené číslo n existuje nekonečně mnoho prvočísel p tak, že všechna čísla $p - n, \dots, p - 3, p - 2, p - 1, p + 1, p + 2, p + 3, \dots, p + n$ jsou složená. Tento pěkný výsledek později ještě zesílili *P. Erdős, A. Walfisz a K. Prachar*. Kromě číselné teorie Sierpiński však stejně úspěšně pracoval v teorii množin, v topologii, v teorii reálných funkcí a v matematické analýze. Kdo z matematiků by dnes neznal např. „Sierpińského koberec“ ukazující, že to s definicí křivky není tak jednoduché, jak by se z názoru zdálo. Sierpiński napsal 724 vědeckých prací a 50 knih a brožur, z nichž mnohé byly přeloženy do cizích jazyků (jedna též do češtiny). Z jeho dílny vyšlo rovněž 15 skript a nepřehledné množství článků popularizačních, historických a příležitostných a spolupracoval i na sedmi školských učebnicích. V roce 1920 byl jedním ze zakladatelů časopisu *Fundamenta Mathematicae* specializovaného na teorii množin a po řadu let zůstal pak jeho hlavním redaktorem.

Sierpiński přednášel na mnoha zahraničních universitách a účastnil se četných matematických kongresů. Nás může zajímat např. společný sjezd matematiků československých a polských, který se konal v Praze roku 1949. Sjezdu společně předsedali *B. Bydžovský* za československou stranu a *W. Sierpiński* za stranu polskou. V roce 1955 byl W. Sierpiński u nás znovu při příležitosti čtvrtého sjezdu československých matematiků.

Dočkal se mnoha poct a akademických uznání v Polsku i na mezinárodním poli, byl čestným doktorem řady universit a členem mnoha vědeckých společností. Život naplněný prací, vědeckými úspěchy i strádáním za druhé světové války skončil před deseti léty. Zemřel 21. října 1969 ve Varšavě, ale jeho dílo žije dál v práci jeho nesčetných žáků. V roce 1971 byl po něm nazván jeden kráter na Měsíci, jedna ulice ve Varšavě nese jeho jméno a Matematický ústav Polské akademie věd jeho jménem označil svou hlavní posluchárnu.

Setkal jsem se s prof. W. Sierpińským dvakrát, prvně roku 1962 na mezinárodním matematickém kongresu ve Stockholmu a podruhé o dva roky později ve Varšavě, když polská matematická obec vzpomínala šedesáti let jeho vědecké a pedagogické práce. Měl jsem tu čest, že jsem si s ním mohl i po několik let dopisovat. Jsem rád, že jsem tohoto velkého matematika osobně poznal a nyní jsem si ho znovu připomněl, když jsem připravoval tento vzpomínkový článek pro náš časopis. Naši čtenáři se s Sierpińského dílem jistě setkají, rozhodnou-li se pro hlubší studium matematiky.

100 let elektromotoru v železniční dopravě

RADOVAN REBSTÖCK, ZDŠ Plánice

V letošním květnu uplynulo sto let od významného okamžiku, od chvíle, kdy elektrický motor začal prakticky sloužit dopravě. Cesta k tomu byla dlouhá a křivolaká, neboť nauka o elektřině a magnetismu byla v tu dobu jednou z nejmladších vědních oborů, neexistovaly prvotní a základní poznatky — a ty bylo třeba nejdříve učinit.

Na počátku stojí zcela jistě jméno dánského profesora fyziky *Hanse Christiana Oersteda* (1777—1851), který poprvé zjistil, že elektrický proud vychyluje magnetku, a vyvolává tedy magnetické pole. Bylo to již roku 1820, kdy tak poznal souvislost mezi jevy elektrickými a magnetickými. Ještě téhož roku sestrojil anglický fyzik *Michael Faraday* (1791—1867), tehdy asistent Royal Institution v Londýně, ve své laboratoři první pokusný elektromotor a v principu tak ukázal na novou možnost užití elektřiny — jako pohonné energie.

Konstrukcí elektromotoru se však nikdo dále nezabývá. Je to pochopitelné — elektrická energie dosud není levnou záležitostí, neboť jejím zdrojem jsou jen a jen galvanické články. Prvořadou zůstává otázka efektivní výroby elektrické energie. Oba problémy spolu tedy úzce souvisejí a z historického hlediska není možné je od sebe oddělit. A souvisejí dále i se jménem Faradaye. Ten se zabýval otázkou, zda je možno magnetismem dojít k elektřině, jestliže Oersted vyvolal elektrickým proudem magnetické pole. Po bezvýsledných pokusech z let 1824, 1825 a 1829 přišel 29. srpen 1831, den, který lze podle Faradayova deníku pokládat za datum objevu elektromagnetické indukce. Tento jev nebyl nikým předvídan, neboť nevyplýval ze žádné dosud známé skutečnosti. Jak se později ukázalo, stejný objev učinil přibližně ve stejnou dobu nezávisle na Faradayovi Američan *Joseph Henry* (1797—1878). Elektromagnetická indukce se stala základem pro nový způsob výroby elektrické energie.

Faraday sám jako první sestrojil a předvedl úzkému kruhu svých spolupracovníků pokusné malé dynamo, stroj na výrobu stejnosměrného proudu. Po roce 1831 začíná konstruovat stroje na výrobu elektrické energie řada vynálezců. Zpočátku to jsou stroje magnetoelektrické, s trvalými magnety, samozřejmě nedokonalé a s řadou dětských nemocí. A ty je nutno vyléčit.

Hned v následujícím roce přichází *André Marie Ampère* (1775—1836) se sběračem proudu, kolektorem. Na dva díly rozděluje kolektor roku 1838 anglický vynálezce elektromagnetu *William Sturgeon* (1783—1850). Návrh, aby trvalé magnety byly nahrazeny elektromagnety, si dává patentovat roku 1845 anglický profesor fyziky *Charles Wheatstone* (1802

až 1875). Jsou napájeny z galvanických článků a stroje této konstrukce jsou tedy s tzv. cizím buzením.

Na skutečnost, že v principu obrácené dynamo se dá použít jako stroj, přeměňující elektrickou energii v mechanickou, tedy elektromotor, poukazovali již od roku 1838 petrohradští fyzikové *Heinrich Friedrich Lenz* (1804—1865) a *Moritz Hermann Jacobi* (1801—1874). Jacobi pak rovněž zkonstruoval první provozuschopný elektromotor. Na důkaz jeho výkonnosti použil tohoto motoru ve člunu, na němž roku 1838 plul proti proudu Něvy v Petrohradě. To už byl první signál nástupu nejpoužívanějšího pohonného zdroje naší doby.

Elektrické stroje jsou dále zdokonalovány. Ital *Antonio Pacinotti* (1841—1912) konstruuje roku 1859 elektromotor s kruhovou kotvou. I když svého vynálezu dále nevyužívá a konstrukci nezdokonaluje, ta přece jen slouží jako výchozí pro práce dalších. Roku 1869 je to Belgičan *Zénobe Theofil Gramme* (1826—1901), který vychází z konstrukce Pacinottiho a zároveň navazuje na práci *Wernera Siemense* (1816—1892), využívaje jeho objevu dynamoelektrického principu z roku 1867. Grammeovy stroje získaly všeobecné uznání, neboť značně snížily náklady na výrobu elektrické energie. Gramme zavedl také kolektor rozdělený na velký počet lamel a jiná zdokonalení. Velký význam měly rovněž praktické výzkumy německého elektrotechnika *Friedricha Hefner-Altenacka* (1845—1904), který zdokonalil rotor elektrických strojů.

V této době je posledním a rozhodným krokem na naší cestě po stopách elektromotoru konečné uznání prací Lenzových a Jacobiho. Roku 1873 je na Světové výstavě ve Vídni prakticky prokázáno, že elektromotor je v principu obrácené dynamo. Elektrická energie je zde přenášena od jednoho dynama ke druhému, vzdálenému asi 1000 metrů. První uvádělo v pohyb druhé, které bylo ve funkci elektromotoru. Byl to zároveň první pokus o dálkové vedení.

A pak nadešel onen významný den. Otevřely se brány Průmyslové výstavy v Berlíně - Treptowě. Je 31. května 1879. Na kolejích úzkého rozchodu stojí vozík, spíše jako dětská hračka. První elektrická lokomotiva, zkonstruovaná *Wernerem Siemensem* a *Johannem Georgem Halskem* (1814—1890). Za ní tři vlečné vozíky, každý pro 6 osob. Samotná lokomotiva (zůstanu u tohoto hrdého názvu) je tak malá, že její řidič sedí přímo na motoru. Ten je napájen ze třetí kolejnice stejnosměrným proudem o napětí 150 V a dosahuje výkonu 2,2 kW.

Lokomotiva se i s vozíčky rozjíždí na třech stech metrech kolejí a dosahuje rychlosti 7 km.h⁻¹. Začíná věk elektrické železniční dopravy.

Literatura :

- [1] Jílek, F., Kuba, J., Jílková, J.: Světové vynálezy v datech. Mladá fronta, Praha 1977
- [2] Křižík F.: Paměti. Technicko-vědecké vydavatelství, Praha 1952
- [3] Lenard, Philipp: Velcí přírodovědci. Orbis, Praha 1943
- [4] Světem práce a vynálezů

olympiády

Úlohy pro I. kolo XXI. ročníku FO

Kategorie A

1. Válcová nádoba, jejíž podstava má průměr D , je naplněna ideální kapalinou do výšky h a je postavena tak, že její osa je svislá. V jejím dnu je zátkou uzavřen kruhový otvor, jehož průměr je D_0 . V určitém okamžiku zátku vytáhneme.

a) Stanovte rychlost v pohybu volného povrchu kapaliny v nádobě jako funkci jeho vzdálenosti x od jeho počáteční polohy.

b) Stanovte zrychlení a pohybu volného povrchu kapaliny v nádobě jako funkci času měřeného od okamžiku, v němž byla zátku vytažena.

c) Podle výsledků charakterizujte pohyb volného povrchu kapaliny v nádobě a stanovte funkci $x = f(t)$.

d) Stanovte dobu t_0 , za kterou kapalina z nádoby vyteče. Řešte nejprve obecně, potom pro $h = 70,0$ cm; $D = 1,00$ m; $D_0 = 1,00$ cm; $g = 9,81$ m.s⁻².

2. Bodový náboj Q je v hloubce h pod povrchem petroleja. Nad petrolejem je vákuum.

a) Určte hustotu σ_1 viazaného náboja v tom bode povrchu petroleja, ktorý je vo vzdialenosti h od bodového náboja.

b) Určte hustotu σ_2 viazaného náboja v bodoch povrchu petroleja, ktoré sú vo vzdialenosti r od bodového náboja, $r > h$.

c) Určte celkový viazaný náboj Q' na povrchu petroleja. Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $Q = 1,0$ μ C; $h = 6,0 \cdot 10^{-2}$ m; $r = 8,0 \cdot 10^{-2}$ m.

Poznámka:

Normálová zložka indukcie D pri prechode elektrického poľa rozhraním dielektrík sa nemení.

3. Duté těleso s malým kruhovým otvorem má vnitřní stěny černé, vnější lesklé. Vnitřní stěny jsou od vnějších dokonale tepelně izolovány.

Před kruhový otvor umístíme spojnou čočku o průměru d a ohniskové vzdálenosti f tak, že její optická osa je kolmá k rovině otvoru. Sluneční paprsky rovnoběžné s optickou osou čočky se soustřeďují v rovině otvoru

tělesa. Průměr tohoto otvoru je menší než obraz Slunce vytvořený čočkou. Celá soustava je ve vakuu.

Stanovte teplotu T vnitřních stěn dutiny v ustáleném stavu, jestliže teplota povrchu Slunce je T_S .

Poznámky:

1. Výkon P_z , který vyzařuje černé těleso při teplotě T , je dán Stefanovým-Boltzmannovým zákonem

$$P_z = S\sigma T^4,$$

kde S je obsah vyzařující plochy, σ konstanta.

2. Z hlediska vyzařování energie považujte Slunce za černé těleso.

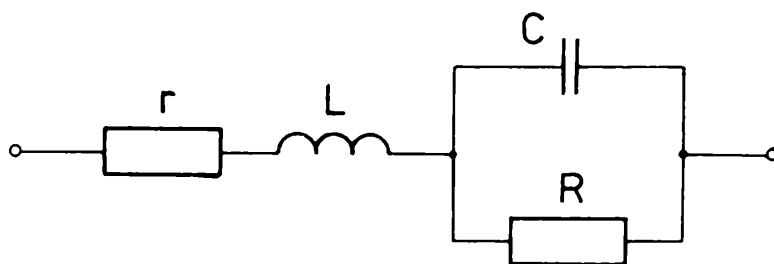
3. Nepřihlížejte ke ztrátám sluneční energie v atmosféře Země a v čočce a k vyzařování energie z vnějších, lesklých stěn dutého tělesa.

4. Raketa, jejíž úhrnná hmotnost je M_0 , byla vystřelena z povrchu Země svisle vzhůru působením stálé tahové síly F . Hmotnost m_t spotřebované pohonné směsi je přímo úměrná času t ; $m_t = m^*t$, kde m^* je hmotnost směsi spotřebované za jednotku času.

a) Stanovte funkci $a = f_1(t)$, kde a je zrychlení rakety v čase t od vystřelení.

b) Stanovte funkci $v = f_2(t)$, kde v je rychlost rakety v čase t od vystřelení.

c) Sestrojte grafy funkcí $a = f_1(t)$, $v = f_2(t)$ pro hodnoty $M_0 = 22 \cdot 10^3$ kg; $F = 3,3 \cdot 10^5$ N; $m^* = 125$ kg.s⁻¹; tíhové zrychlení $g = 9,8$ m.s⁻² je stálé po celé dráze výstupu. Grafy funkcí nakreslete v oboru $0 \leq t \leq 100$ s. Odpor vzduchu neuvažujeme.



Obr. A-1

5. Schéma na obr. A-1 představuje sériový rezonanční obvod sestavený z cívky o indukčnosti L a odporu r a z kondenzátoru kapacity C , jehož dielektrikum má odpor R . Obvod je připojen ke zdroji harmonického střídavého napětí, proud protékající obvodem je s tímto napětím ve fázi.

a) Stanovte úhlový kmitočet ω_0 napětí; uveďte podmínku řešitelnosti.

b) Jak velký je odpor R_0 obvodu?

c) Stanovte poměr $p_1 = \frac{U_1}{U}$, kde U_1 je napětí na cívce, U napětí na obvodu. Jaký je tento poměr pro $R \rightarrow \infty$?

d) Stanovte poměr $p_2 = \frac{U_2}{U}$, kde U_2 je napětí na kondenzátoru. Jaký je tento poměr pro $R \rightarrow \infty$?

Úlohu řešte symbolickou metodou.

6. Meranie indexu lomu destilovanej vody

Pomôcky :

destilovaná voda, statívový materiál, duté sférické zrkadlo, na ktorom nie sú uvedené žiadne údaje (napr. zrkadlo z veľkej optickej súpravy), miniatúrna žiarovka 3,5 V/0,3 A s objímkou a prípojnou dvojlinkou, prípojnú svorky, biele matné tienidlo, dĺžkové pásmové meradlo 1 m až 2 m, batéria 4,5 V.

Postup :

1. Odmerajte ohniskovú vzdialenosť f_1 zrkadla. Žiarovku postavte do vzdialenosti a_1 od zrkadla a pokusne určte vzdialenosť b_1 tienidla od zrkadla tak, aby obraz vlákna žiarovky na tienidle bol čo najostrejší. Z hodnôt a_1 , b_1 určte ohniskovú vzdialenosť f_1 . Zrkadlo je pritom pomocou statívového materiálu upevnené vo vodorovnej polohe.

2. Do dutiny zrkadla nalejte destilovanú vodu. Podobným spôsobom ako v bode 1. odmerajte ohniskovú vzdialenosť f optickej sústavy tvorenej zrkadlom a vodným telesom, ktoré vytvára ploskovypuklú šošovku. Vzdialenosť žiarovky od voľného povrchu vody označte a , vzdialenosť tienidla od voľného povrchu vody pri najlepšom zaostrení označte b .

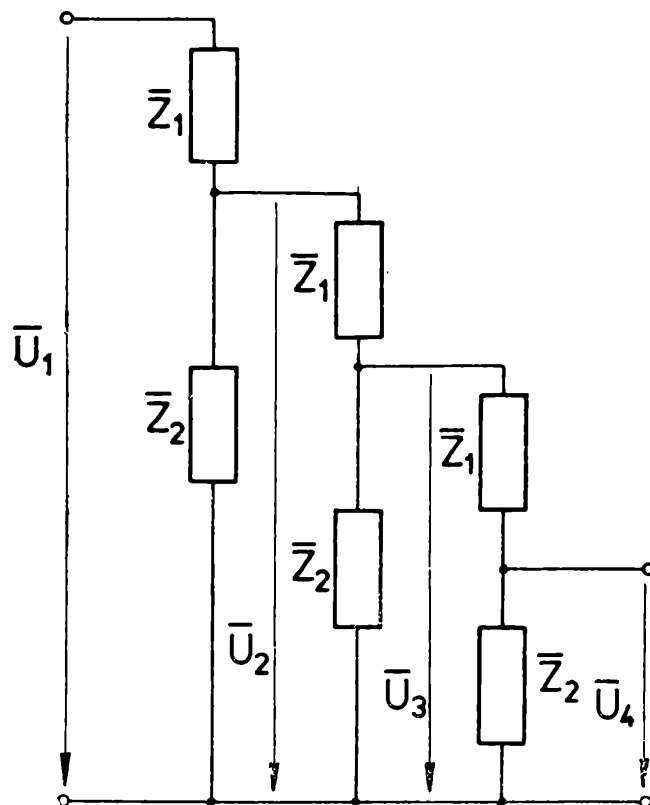
3. Výpočtom dokážte, že pre index lomu vody platí vzťah

$$n = \frac{f_1}{f}.$$

4. Všetky merania vykonajte desaťkrát s rôznymi hodnotami a_1 , b_1 , a , b , výsledky zapíšte do tabuľky

č.	a_1	b_1	a	b	f_1	f	n
1							
2							

5. Priemernú hodnotu n_p určeného indexu lomu porovnajte s hodnotou indexu lomu pre destilovanú vodu uvedenou v tabuľkách.



7. Schéma na obr. A-2 představuje třístupňový kmitočtově závislý dělič napětí, $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ jsou komplexní impedance, význam ostatních veličin je zřejmý z obr. A-2.

a) Označme $\bar{\beta} = \frac{\bar{U}_4}{\bar{U}_1}$ přenos děliče, $\bar{x} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$. Stanovte funkci $\bar{\beta} = f(\bar{x})$.

b) Tuto funkci zapište pro případ, že komplexní impedance $\bar{Z}_1$ jsou tvořeny stejnými kondenzátory o kapacitě C , komplexní impedance $\bar{Z}_2$ stejnými rezistory o odporu R .

c) Pro tento případ stanovte úhlový kmitočet ω_0 , při němž napětí $\bar{U}_4$ a $\bar{U}_1$ jsou navzájem v opačné fázi.

d) Stanovte přenos $\bar{\beta}_0$ děliče při kmitočtu ω_0 .
Úlohu řešte symbolickou metodou.

Kategorie B

1. Umělá družice Země, jejíž hmotnost je m , má přistát na povrchu Země; předpokládejme, že v poslední fázi se pohybuje po svislé dráze z výšky h nad povrchem Země, kde má rychlost v_h .

a) Účinkem brzdících raket a odporu vzduchu působí na družici stálá brzdící síla F . Určete její velikost, jestliže při dotyku s povrchem Země je rychlost družice nulová.

b) Jakou dobu Δt trvá sestup družice z výšky h ?
 Tíhové zrychlení g do výšky h nad povrchem Země považujte za stálé.
 Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 125 \text{ kg}$; $h = 50 \text{ km}$;
 $v_h = 10\,800 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2. Dusík v počátečním stavu (1) je uzavřen ve válcové nádobě pístem, který se může pohybovat bez tření. Dusík má hmotnost m , teplotu T_1 a tlak p_1 .

Izobarickým dějem přejde do stavu (2), v němž má objem V_2 a teplotu T_2 , $T_2 > T_1$. Izotermickým dějem dále přejde do stavu (3), přičemž se jeho objem změní na V_3 a tlak na p_3 , $p_3 > p_1$. Do stavu (4) přejde dusík izochorickým dějem, jeho tlak se změní na p_4 a teplota na T_4 .

a) Určete objem V_1 a hustotu ρ dusíku ve stavu (1).

b) Určete teplotu T_2 dusíku ve stavu (2), teplo ΔQ , které přijal při přechodu ze stavu (1) do stavu (2), a práci ΔW , kterou přitom vykonal.

c) Určete tlak p_3 dusíku ve stavu (3).

d) Určete teplotu T_4 dusíku ve stavu (4).

e) Určete přírůstek ΔU vnitřní energie dusíku ve stavu (4) vzhledem ke stavu (1).

Po výpočtu hodnot tlaku a objemu nakreslete diagram $p-V$ těchto dějů a pomocí něho rozhodněte, zda plyn při přechodu ze stavu (1) do stavu (4) vykonal práci, nebo zda práce byla vykonána působením vnější síly na plynné těleso.

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 2,00 \text{ kg}$, $M_m = 28,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$; $V_2 = 3,20 \text{ m}^3$; $V_3 = 1,60 \text{ m}^3$; $p_1 = p_4 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $c_p = 1,02 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\kappa = 1,40$; $R_m = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

3. Homogenní tyč obdélníkového průřezu o rozměrech a , b a délce l je zavěšena jedním koncem v pevné horizontální ose, která je rovnoběžná s hranou tyče délky a . V blízkosti je na vlákně délky l zavěšena kulička. Obě tělesa mají stejné hmotnosti.

Tyč i vlákno s kuličkou vychýlíme ze svislé polohy tak, aby vlákno zůstalo napnuté, a obě tělesa současně uvolníme.

a) Vysvětlete, jaký pohyb obě tělesa konají.

b) Když výchylka tyče i vlákna od svislého směru byla $\varphi < 5^\circ$, určete, které z těles se vrátí do rovnovážné polohy dříve. Vypočítejte dobu Δt mezi prvním průchodem těles rovnovážnou polohou.

c) Když výchylka tyče a vlákna s kuličkou $\varphi_1 = 60^\circ$, vypočítejte rychlosti v_1 , v_2 kuličky a konce tyče při průchodu rovnovážnou polohou. Tření při pohybu těles neuvažujte. Vlákno se působením tíže a jiných sil při pohybu kuličky neprodlužuje a má hmotnost zanedbatelnou vůči hmotnosti kuličky.

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $b = 0,015 \text{ m}$, $l = 1,00 \text{ m}$.

Poznámky :

Moment setrvačnosti tyče vzhľadom k danej ose otáčenia je

$$I = \frac{1}{12} m (b^2 + 4l^2) .$$

Vzťah pro dobu kmitu fyzického kyvadla je odvoden napr. v studijním textu „Jednoduchý kmitavý pohyb II“ v kapitole 4, str. 12 a 13 v letáku pro XIX. ročník FO.

4. Bod S je stredem kulové plochy o poloměru r . Ve vzdálenosti a od bodu S je bod A , $a > r$. V bodě A je umístěn kladný bodový náboj Q_1 . Uvnitř koule je na spojnici SA záporný bodový náboj Q_2 takový, že výsledný potenciál na celé kulové ploše je nulový.

- Stanovte náboj Q_2 a jeho vzdálenost b od středu S .
- Proveďte diskusi výsledku vzhľadom k veličinám a , r .
- Uvažte případ, že bod S se od bodu A bez omezení vzdaluje po přímce AS , přičemž však délka $d = a - r$ se nemění.

5. Dvojvodičovým elektrickým vedením sa prenáša elektrická energia z jednosmerného zdroja o napätí U_0 do troch spotrebičov, ktoré sú vo vzdialenostiach l_1 , l_2 a l od zdroja napätia, $l_1 < l_2 < l$, l je celková dĺžka vedenia. Jednotlivými spotrebičmi prechádzajú prúdy I_1 , I_2 , I_3 . Vodiče vedenia sú homogénne, majú prierez S a merný odpor ρ .

- Určte napätia U_1 , U_2 , U_3 , ktoré sú na jednotlivých spotrebičoch.
- Určte celkový úbytok ΔU na elektrickom vedení.
- Určte prierez S_p vedenia tak, aby napätie na spotrebičoch nepokleslo pod hodnotu $\frac{pU_0}{100}$, tj. p % z hodnoty napätia U_0 zdroja.

d) Určte prúd I_v , ktorý by prechádzal jediným spotrebičom umiestneným na konci vedenia, pričom celkový úbytok $\Delta U'$ napätia by bol rovnaký ako celkový úbytok ΔU pri pripojení troch uvedených spotrebičov.

e) Určte vzdialenosť l_v na vedení tak, aby všetky tri spotrebiče zapojené v tomto mieste spôsobili úbytok $\Delta U''$ napätia, pričom platí $\Delta U'' = \Delta U$. Spotrebičmi takto zapojenými prechádza prúd $I_1 + I_2 + I_3$.

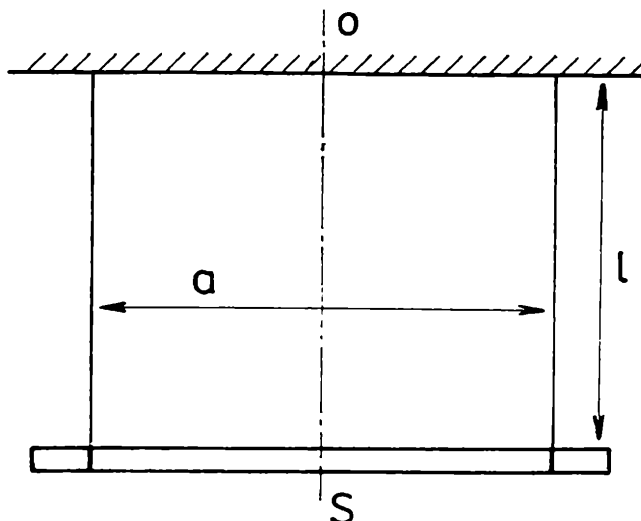
f) Vypočítajte straty ΔP príkonu P na elektrickom vedení.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $U_0 = 220$ V; $l_1 = 200$ m; $l_2 = 400$ m; $l = 500$ m; $I_1 = 20$ A; $I_2 = 30$ A; $I_3 = 10$ A; $S = 50$ mm²; $\rho = 0,024 \cdot 10^{-6}$ $\Omega \cdot$ m; $p = 8$.

6. Vyšetrovanie fyzikálnej závislosti

Pomôcky :

stojan, tenká niť, stopky, libela, dĺžkové meradlo, tenká homogénna tyč dĺžky asi 30 cm.

**Úloha :**

Experimentálne určiť funkciu

$$T = T(l; a), \quad (1)$$

kde T je doba kmitu tenkej tyče zavesenej na bifilárnom závese (obr. B-1), l dĺžka závesu, a vzdialenosť rovnobežných vlákien závesu.

Príprava :

a) Zavesíme niť na stojan tak, aby pozdĺžná os tyče bola vodorovná a aby rovnobežné vlákna závesu boli súmerne združené vzhľadom na zvislú os o prechádzajúcu stredom S tyče.

b) Pootočíme tyč o malý uhol (asi 5°) okolo osi o . Po uvoľnení tyč kmitá v horizontálnej rovine s periódou T .

Postup :

1. Funkcia $T = T(l)$, $a = \text{konšt.}$

a) Odmeriame vzdialenosť a .

b) Pomocou stopiek a dĺžkového meradla určíme približne také dve dĺžky l_A , l_B závesu, pri ktorých sa príslušné periódy T_A , T_B navzájom líšia asi o $\Delta T = 0,4$ s.

c) Meníme dĺžku l závesu a odmeriame 10 sebe prislúchajúcich dvojíc hodnôt (l_i , T_i) z intervalu dĺžok $\langle l_A, l_B \rangle$. Namerané hodnoty zapíšeme do tabuľky (tab. A):

i	$\frac{l}{\text{cm}}$	$\frac{T}{\text{s}}$	$\log\{l\}$	$\log\{T\}$

2. Funkcia $T = T(a)$, $l = \text{konšt.}$

a) Odmeriame dĺžku l .

b) Pomocou stopiek a dĺžkového meradla určíme približne také dve

hodnoty vzdialenosti a , pri ktorých sa príslušné periódy navzájom líšia asi o $\Delta T = 0,4$ s.

c) V stanovenom intervale vzdialenosti a odmeriame 10 dvojíc hodnôt (a_i, T_i) . Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky (tab. B).

i	$\frac{a}{\text{cm}}$	$\frac{T}{\text{s}}$	$\log\{a\}$	$\log\{T\}$

Spracovanie nameraných hodnôt :

a) Predpokladáme, že hľadaná funkcia (1) má tvar

$$T = Kl^\alpha \cdot a^\beta, \quad (2)$$

kde K je konštanta a α, β neznáme konštanty, ktoré je potrebné určiť. Predpokladáme, že α, β sú racionálne čísla.

b) Hodnoty z tabuľky A použijeme na zostrojenie grafu A v súradnicovom systéme $x = \log\{l\}, y = \log\{T\}$.

c) Funkciu (2) upravíme na tvar zodpovedajúci funkcii zobrazenej grafom A. Meraním na grafe určíme približnú hodnotu konštanty α .

d) Hodnoty z tabuľky B použijeme na zostrojenie grafu B v súradnicovom systéme $x = \log\{a\}, y = \log\{T\}$.

e) Funkciu (2) upravíme na tvar zodpovedajúci funkcii zobrazenej grafom B. Meraním na grafe určíme približnú hodnotu konštanty β .

f) Z nameraných hodnôt (tab. A, B) zostrojte grafy C a D funkcií

$$T = T(l); a = \text{konšt.}$$

$$T = T(a); l = \text{konšt.}$$

Vyjadrite tieto funkcie analyticky.

g) Vyjadrite analyticky funkciu (2).

7. Kosmická loď se pohybuje po kruhové oběžné dráze kolem Měsíce s dobou oběhu 2,00 h. V určitém okamžiku se rozdělí na dvě tělesa téže hmotnosti: přistávací kontejner s přístrojovým vybavením a obíhající modul.

a) Stanovte, po jakých drahách se budou po oddělení pohybovat obě tělesa, jestliže přistávací kontejner dopadne právě na opačné straně Měsíce tak, že spojnice místa rozpojení těles a místa dopadu kontejneru prochází středem Měsíce.

b) Jakou rychlostí dopadne kontejner na povrch Měsíce? Za jakých okolností nastane „měkké přistání“?

c) Jaké rychlosti budou mít kontejner a obíhající modul těsně po rozpojení?

d) Za jakou dobu po rozpojení dopadne kontejner na povrch Měsíce?

Kouzelná krychle

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

Byla jedna vědecká konference. Týkala se teorie grafů a kombinatoriky. Zpočátku probíhala tak, jak takové konference obvykle probíhají. Rozruch do ní vnesl teprve jeden účastník, který přijel o něco později, protože se vracel z podobné konference v Maďarsku.

Nepřijel totiž s prázdnýma rukama; přivezl s sebou dva exempláře hlavolamu označeného jako „*bűvös kocka*“. Jiný z účastníků, který pocházel z východního Slovenska a uměl dobře maďarsky, přeložil tento název jako „kouzelná krychle“ (případně „kouzelná kostka“) a přeložil i návod k použití, uvedený na obalu.

Jak ta krychle vypadala a proč vzbudila takový rozruch? Víme, že každou krychli lze vyjádřit jako sjednocení $3^3 = 27$ shodných krychlí; každá z těchto menších krychlí (budeme jim pro rozlišení říkat „krychličky“) má délku hrany rovnou třetině délky hrany původní krychle. Naše krychle byla sestavena z 26 takovýchto krychliček; ta krychlička, která by obsahovala střed krychle, byla vynechána a místo ní tam bylo zařízení k otáčení, o němž bude ještě řeč.

Každá stěna naší krychle je tvořena stěnami devíti krychliček; vidíme tedy na ní devět čtverců. Tyto čtverce mají různé barvy; celkem je použito šesti barev, tedy tolika, kolik má krychle stěn. Krychličky, jejichž stěny tvoří určitou stěnu krychle, budeme nazývat krychličkami této stěny. Tyto krychličky tedy tvoří pravidelný čtyřboký hranol, jehož jedna podstava je příslušná stěna krychle a jehož výška je rovna jedné třetině délky hrany krychle. Budeme mu říkat hranol příslušný k dané stěně krychle.

Hranol příslušný k libovolné stěně krychle lze otáčet kolem jeho osy o libovolný celočíselný násobek pravého úhlu. Tím se ovšem mění vzájemná poloha jednotlivých krychliček a tím i rozmístění jednotlivých barev. Vyřešit hlavolam znamená postupným prováděním takovýchto otáčení uvést krychli do takového stavu, v němž se na každé stěně vyskytuje právě jedna barva.

Není tedy divu, že kouzelná krychle zaujala právě odborníky v kombinatorice. O přestávkách mezi zasedáním, po večerech i na společném výletě šly obě krychle z ruky do ruky a kdekdo si s nimi pohrával. Konference zkrátka žila kouzelnou krychlí.

Matematikové — a zvláště kombinatorikové — by ovšem nebyli matematiky, kdyby jen mechanicky a zkusmo něčím otáčeli. U podobného hlavolamu matematik nikdy není spokojen, pokud se mu podaří jen uvést jej do správné polohy. Spokojen je teprve tehdy, najde-li příslušnou teorii, to jest obecný návod (*algoritmus*), jak najít řešení při libovolné dané počáteční konfiguraci, případně popis takových počátečních konfigurací, z nichž zaručeně nelze dojít k řešení.

A tak v poslední den konference přibyl ještě jeden referát, který původně nebyl na programu. Jeden z účastníků v něm příslušnou teorii popsal. Snad by se někomu mohlo zdát, že něco takového je zneuctěním vážné vědecké konference. Není tomu tak. Hra a vážná věda zdaleka nejsou takové vzájemné protivy, jak by se zdálo. Například jedním z odvětví matematiky je *teorie her*, která vznikla zobecňováním zákonitostí společenských her, která však dnes pomáhá i při řízení národního hospodářství. Nelze tedy přesně oddělit (a zvláště v kombinatorice), co patří do rekreační matematiky a co je vážnou vědou. Referát o kouzelné krychli vyslechli posluchači se stejnou vážností jako všechny ostatní referáty.

Přednášející použil při řešení teorie grup. Nebudu zde jeho přednášku reprodukovat; jednak by to ode mne bylo vlastně chlubení cizím peřím, jednak je příslušná teorie velmi složitá. Zmíním se jen o tom, že výchozím bodem je roztrídění krychliček do tří tříd — na krychličky vrcholové (jejichž jeden vrchol je vrcholem krychle), hranové (jejichž jedna hrana je částí hrany krychle) a středové (jejichž jeden střed stěny je středem stěny krychle). Umístění středových krychliček se žádným otáčením nemění; tedy na každé stěně krychle musíme zjistit barvu toho z jejích devíti čtverců, který obsahuje její střed — tuto barvu pak musí po vyřešení hlavolamu mít celá tato stěna. K hranové krychličce existuje pouze jeden hranol, při jehož otáčení se její umístění mění; u vrcholové krychličky jsou takové hranoly tři.

Snad i mnozí z vás by si rádi pohráli s takovouto krychlí. Bohužel, u nás není k dostání; ani já ji nevlastním. Pojedete-li však do Maďarska, nelitujte 65 forintů a kupte si ji. Stojí to za to!

Pro volnou chvíli

1. Zapište v desítkové soustavě číslo, které má ve dvojkové soustavě zápis
11110111011.
2. Vypočtete: $3^7 - 3^5 + 3^3 + 3^2 - 3^0$.
3. Kolik je $(197 + 9) + 197 \cdot 9$?
4. Číslo 1979 rozložte v součet tří různých prvočísel tak, aby jejich součin byl co největší. [647, 659, 673]

doc. O. Setzer

Ze zahraničních časopisů

Uvedené příklady jsou vyňaty z různých ročníků sovětského časopisu *Matematika v škole*. Uvádíme je i s řešením.

I. Je dán pravidelný n -úhelník $A_1A_2A_3 \dots A_n$, jehož střed je O . Dokažte, že platí

$$\mathbf{v} = \mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3 + \dots + \mathbf{OA}_n = \mathbf{0}$$

Při důkazu rozlišíme případ, kdy n je číslo sudé a kdy n je číslo liché.

a) n je sudé (situace je znázorněna v obr. 1a na pravidelném osmiúhelníku). Všimněme si, že vektory $\mathbf{OA}_1, \mathbf{OA}_{1+\frac{n}{2}}$; $\mathbf{OA}_2, \mathbf{OA}_{2+\frac{n}{2}}$, obecně vektory $\mathbf{OA}_i, \mathbf{OA}_{i+\frac{n}{2}}$ jsou opačné a mají stejnou velikost. Proto jejich součet je roven nulovému vektoru:

$$\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_{1+\frac{n}{2}} = \mathbf{0},$$

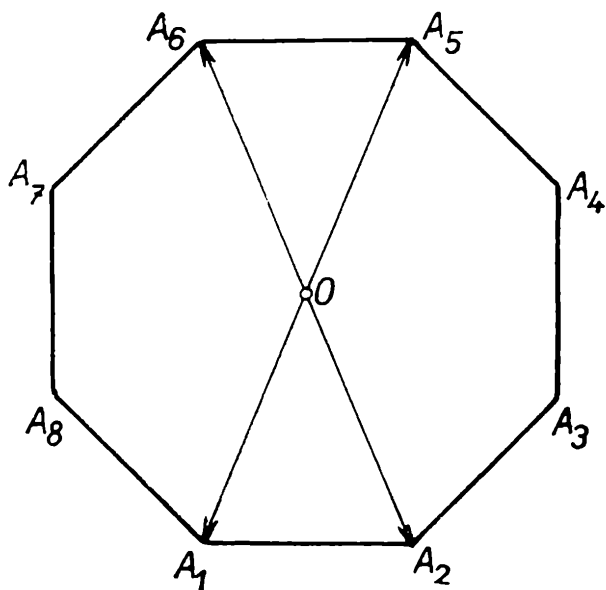
obecně

$$\mathbf{OA}_i + \mathbf{OA}_{i+\frac{n}{2}} = \mathbf{0}$$

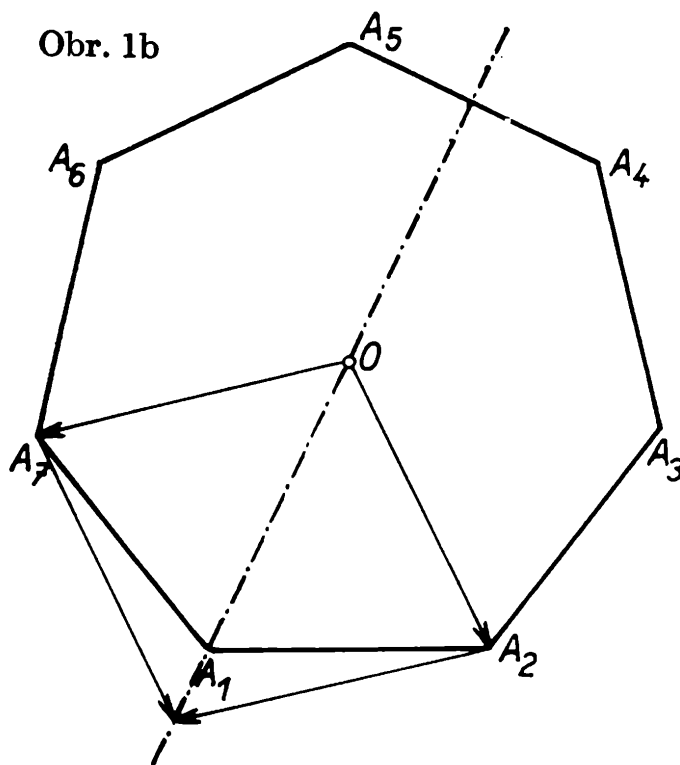
pro $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}$. Tudíž

$$\mathbf{v} = \mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3 + \dots + \mathbf{OA}_n = \mathbf{0}.$$

Obr. 1a



Obr. 1b



b) n je liché (situace je znázorněna v obr. 1b na pravidelném sedmiúhelníku). Daný n -úhelník je souměrný podle přímky $\mathbf{OA}_1$. Podle této přímky jsou souměrně sdružené vektory $\mathbf{OA}_2$, $\mathbf{OA}_n$ a jejich součet je vektor kolineární s vektorem $\mathbf{OA}_1$. Tudíž

$$\mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_n = k \cdot \mathbf{OA}_1,$$

kde $k \neq 0$, $k \in R$.

Avšak totéž platí o dvojicích vektorů $\mathbf{OA}_3$, $\mathbf{OA}_{n-1}$; $\mathbf{OA}_4$, $\mathbf{OA}_{n-2}$; ...; $\mathbf{OA}_i$, $\mathbf{OA}_{n-i+2}$. I můžeme psát

$$\mathbf{v} = \mathbf{OA}_1 + (\mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_n) + (\mathbf{OA}_3 + \mathbf{OA}_{n-1}) + \dots + (\mathbf{OA}_i + \mathbf{OA}_{n-i+2}) = \alpha \mathbf{OA}_1, \quad (1)$$

kde $\alpha \in R$. To napíšeme přehledněji:

$$\mathbf{v} = \mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3 + \dots + \mathbf{OA}_n = \alpha \mathbf{OA}_1,$$

Pravidelný n -úhelník je však souměrný i podle přímky OA_2 a proto analogicky platí

$$\mathbf{v} = \mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3 + \dots + \mathbf{OA}_n = \beta \mathbf{OA}_2, \quad (2)$$

kde $\beta \in R$. Z rovnic (1) a (2) vyplývá

$$\alpha \cdot \mathbf{OA}_1 = \beta \cdot \mathbf{OA}_2. \quad (3)$$

Avšak vektory $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OA}_2$ jsou nekolineární a proto rovnice (3) může být splněna, právě když $\alpha = \beta = 0$, a tudíž $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, jak jsme měli dokázat.

II. Je dán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou navzájem kolmé a shodné. Uvnitř stran AB , BC , CD , DA jsou dány po řadě body P , Q , R , S takové, že platí $AP : BP = BQ : CQ = CR : DR = DS : AS$. Dokažte, že úsečky PR , QS jsou navzájem kolmé a shodné.

Řešení (obr. 2). Podle textu úlohy platí

$$|AC| = |BD|, \quad AC \perp BD, \quad (Z)$$

$$AP : BP = BQ : CQ = CR : DR = DS : AS = k > 0 \quad -$$

Průsečík úhlopříček AC , BD označme O . Z trojúhelníku OAB vyplývá

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}. \quad (1)$$

Avšak

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AP} + \mathbf{PB} = k \cdot \mathbf{PB} + \mathbf{PB} = (k + 1)\mathbf{PB}. \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) lze odvodit vztah

$$(k + 1)\mathbf{PB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}. \quad (3)$$

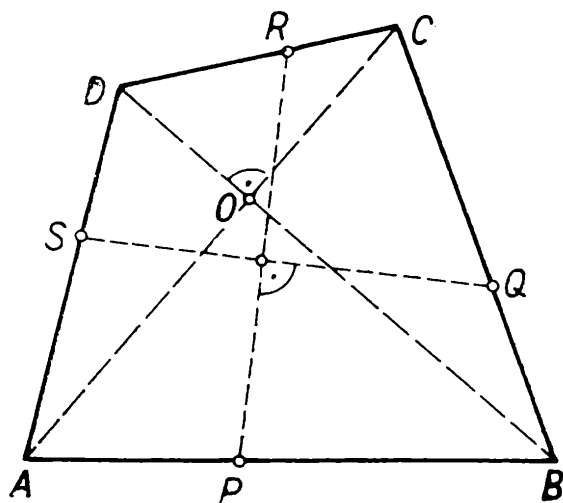
Z trojúhelníku OPB vyplývá

$$\mathbf{PB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OP},$$

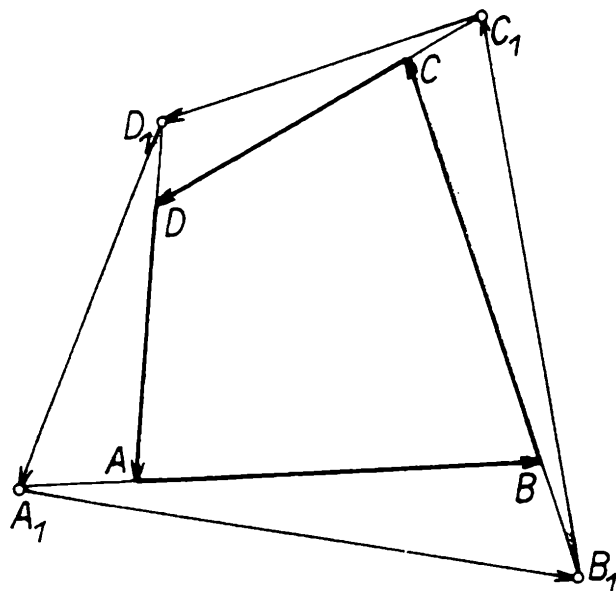
a to dosadíme do (3):

$$(k + 1)(\mathbf{OB} - \mathbf{OP}) = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}. \quad (4)$$

Z rovnice (4) vyjádříme $\mathbf{OP}$:



Obr. 2



Obr. 3

$$\mathbf{OP} = \frac{1}{k+1} \mathbf{OA} + \frac{k}{k+1} \mathbf{OB}.$$

Cyklickou permutací získáme další tři rovnice

$$\mathbf{OQ} = \frac{1}{k+1} \mathbf{OB} + \frac{k}{k+1} \mathbf{OC},$$

$$\mathbf{OR} = \frac{1}{k+1} \mathbf{OC} + \frac{k}{k+1} \mathbf{OD},$$

$$\mathbf{OS} = \frac{1}{k+1} \mathbf{OD} + \frac{k}{k+1} \mathbf{OA}.$$

Pro body P, Q, R zřejmě platí

$$\begin{aligned} \mathbf{PR} &= \mathbf{OR} - \mathbf{OP} = \frac{1}{k+1} [\mathbf{OC} - \mathbf{OA} + k(\mathbf{OD} - \mathbf{OB})] = \\ &= \frac{1}{k+1} (\mathbf{AC} + k \cdot \mathbf{BD}) = \alpha \cdot \mathbf{AC} + \beta \cdot \mathbf{BD}, \end{aligned}$$

přičemž význam čísel α, β je zřejmý.

Podobně zjistíme, že

$$\mathbf{QS} = -\beta \cdot \mathbf{AC} + \alpha \cdot \mathbf{BD}$$

Po této nezbytné přípravě můžeme přistoupit k vlastnímu důkazu.

a) Podle textu úlohy má platit $|\mathbf{PR}| = |\mathbf{QS}|$

$$|\mathbf{PR}|^2 = \alpha^2 \cdot \mathbf{AC}^2 + \beta^2 \cdot \mathbf{BD}^2 + 2\alpha\beta \cdot \mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD} = (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \mathbf{AC}^2,$$

neboť podle (Z) je $|\mathbf{AC}| = |\mathbf{BD}|$ a $AC \perp BD$, tj. $\mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD} = 0$.

Podobně zjistíme, že (podrobný výpočet jako cvičení si jistě čtenář provede sám)

$$|\mathbf{QS}|^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \mathbf{AC}^2,$$

a tím je důkaz první části proveden.

b) Má platit $PR \perp QS$, tj. $\mathbf{PR} \cdot \mathbf{QS} = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{PR} \cdot \mathbf{QS} &= (\alpha \cdot \mathbf{AC} + \beta \cdot \mathbf{BD})(-\beta \cdot \mathbf{AC} + \alpha \cdot \mathbf{BD}) = \\ &= \alpha\beta \cdot (-|\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{BD}|^2) + \alpha^2 \cdot \mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD} - \beta^2 \cdot \mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD} = \\ &= 0 + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

čímž je proveden důkaz i druhé části a tím důkaz celého tvrzení.

III. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Na prodloužení strany AB (BC ; CD ; DA) za bod A (B ; C ; D) je sestrojen bod A_1 (B_1 ; C_1 ; D_1) tak, že $AA_1 = n \cdot AB$ ($BB_1 = n \cdot BC$; $CC_1 = n \cdot CD$; $DD_1 = n \cdot AD$). Jestliže daný čtyřúhelník $ABCD$ má obsah S a čtyřúhelník $A_1B_1C_1D_1$ má obsah S_1 , vypočítejte poměr $S : S_1$.

Řešení (obr. 3). Pro stručnost zavedme toto označení vektorů

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{a}, \quad \mathbf{BC} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{CD} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{DA} = \mathbf{d}; \\ \mathbf{AC} &= \mathbf{e}, \quad \mathbf{BD} = \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Těchto šest vektorů je vázáno vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{e} &= \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{f} = -\mathbf{a} - \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (\text{Z})$$

Obsah S je pak dán vzorcem (polovina absolutní hodnoty vektorového součinu vektorů úhlopříček)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\mathbf{e} \times \mathbf{f}| = \frac{1}{2} |(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (-\mathbf{a} - \mathbf{d})| = \frac{1}{2} |(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})| = \\ &= \frac{1}{2} |(-\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times (-\mathbf{a} - \mathbf{d})| = \frac{1}{2} |(-\mathbf{c} - \mathbf{d}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})| \quad (1) \end{aligned}$$

S tím se zatím spokojíme a všimneme si čtyřúhelníku $A_1B_1C_1D_1$. Zde označíme:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{C}_1, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1, \quad \mathbf{d}_1 = \mathbf{D}_1\mathbf{A}_1; \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{A}_1\mathbf{C}_1, \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{D}_1. \end{aligned}$$

Tyto vektory jsou vázány vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{d}_1 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{f}_1 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{d}_1 \end{aligned} \quad (\text{Z}_1)$$

Ještě potřebujeme souvislost těchto vektorů s vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$. Z trojúhelníku A_1B_1B vyčteme

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{B} + \mathbf{BA}_1 = \mathbf{0},$$

zapsáno stručněji

$$\mathbf{a}_1 + n\mathbf{b} - \mathbf{a} - n\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{a}_1 = (1 + n)\mathbf{a} - n\mathbf{b}$$

a zbývající již cyklicky:

$$\mathbf{b}_1 = (1 + n)\mathbf{b} - n\mathbf{c},$$

$$\mathbf{c}_1 = (1 + n)\mathbf{c} - n\mathbf{d},$$

$$\mathbf{d}_1 = (1 + n)\mathbf{d} - n\mathbf{a}.$$

Odtud již snadno vypočítáme

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = (1 + n)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - n(\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= -\mathbf{a}_1 - \mathbf{d}_1 = n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (1 + n)(\mathbf{a} + \mathbf{d}) = \\ &= n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (1 + n)(-\mathbf{a} - \mathbf{d}).\end{aligned}$$

Nyní již můžeme počítat obsah:

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{f}_1| = \frac{1}{2} |[(1 + n)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - n(\mathbf{b} + \mathbf{c})] \times \\ &\times [n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (1 + n)(-\mathbf{a} - \mathbf{d})]| = \frac{1}{2} |(1 + n)n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \\ &\times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - n^2(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (1 + n)^2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \\ &\times (-\mathbf{a} - \mathbf{d}) - n(1 + n)(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (-\mathbf{a} - \mathbf{d})|\end{aligned}$$

Avšak

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (-\mathbf{a} - \mathbf{d}) = \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Dále užijeme vzorců (1). Výraz pro S_1 se tím zjednoduší:

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} |n^2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (1 + n)^2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (-\mathbf{a} - \mathbf{d})| = \\ &= \frac{1}{2} |[n^2 + (1 + n)^2](\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})| = \\ &= \frac{1}{2} (2n^2 + 2n + 1) \cdot 2S = (2n^2 + 2n + 1)S.\end{aligned}$$

Požadovaný výsledek je

$$S : S_1 = 1 \quad (2n^2 + 2n + 1).$$

Stanislav Horák

různé

Matematika pri prijímacích pohovoroch na vysokých školách ZSSR

(Dokončení)

RNDr. OLGA KLAUČOVÁ, CSc., SVŠT, Bratislava

Variant II.

1. Riešte rovnicu $x^{\log_x(1-x)^2} = 9$.
2. Riešte rovnicu $1 + \cos x = 2 \sin^2 x$.
3. Pre ktoré hodnoty k platí nerovnica $x^2 - (k - 3)x - k + 6 > 0$ pri všetkých reálnych číslach x ?
4. Zjednodušte $\left(\frac{\sqrt{2}}{(1 - x^2)^{-1}} + \frac{2^{\frac{3}{2}}}{x^{-2}} \right) \left(\frac{x^{-2}}{1 + x^{-2}} \right)^{-1}$
5. Objem pravidelného trojbokého hranola je V . Uhol medzi uhlopriečkami dvoch bočných stien, ktoré sú vedené z toho istého vrchola, je α . Určte stranu základne hranola.
6. Nájdite rovnicu dotyčnice ku krivke $y = 1 - x^3$ v bode, ktorého x -ová súradnica je 2.
7. Nájdite $\cos \alpha$, kde α je uhol medzi vektormi $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, ak $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 60^\circ$.

Výsledky. 1. 4. 2. $x = \pi + 2k\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2r\pi$ ($k, r \in \mathbb{Z}$). 3. $(-3,$

$$5). 4. \sqrt{2}. 5. \frac{\sqrt[3]{8V \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt[6]{3(2 \cos \alpha - 1)}}. 6. y = -12x + 17. 7. \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

5. *Sibirskij avtomobilno-dorožnyj institut im. V. V. Kujbyševa má okrem iného fakultu cestných strojov.*

Variant I.

1. Vypočítajte plošný obsah rovinného útvaru ohraničeného parabolou $y = x^2$ a priamkou $y = x$.

2. Zjednodušte $\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{cotg}^2 \beta}$.

3. Načrtnite v pravouhlom súradnicovom systéme množinu bodov, ktorá vyhovuje nerovnostiam $y \leq \log_2 x$, $4x - 3y - 12 \leq 0$.

4. Uhlopriečka pravidelného štvorbokého hranola má dĺžku d . Uhol bočnej steny a uhlopriečky je α . Vypočítajte plášť a objem hranola.

Výsledky. 1. $\frac{1}{6}$. 2. $-\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta$. 4. $Pl. = 4d^2 \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$, $V = d^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$

Variant II.

1. Robotník A potrebuje na opracovanie súčiastky o 7 min. menej ako robotník B . Koľko súčiastok každý opracuje za 4 hod., ak A opracuje za ten čas o 28 súčiastok viac ako B ?

2. Nájdite obor definície funkcie $y = \frac{x^2}{\log(x-2)} - \sqrt{9-x}$

3. Vypočítajte plošný obsah rovinného útvaru ohraničeného krivkami $y = x^2$, $y = 6 - x$, $y = 0$.

4. Plošný obsah osového rezu kužela sa rovná S , uhol povrchových priamok je 2α . Vypočítajte objem kužela.

Výsledky. 1. A 48 súč., B 20 súč. 2. $(2, 3) \cup (3, 9]$. 3. $10 \frac{2}{3}$. 4. $\frac{\pi}{3} S \sqrt{\operatorname{Stg} \alpha}$.

6. *Vitebskij technologičeskij institut legkoj promyšlennosti* vychováva špecialistov pre ľahký a strojársky priemysel. Má viaceré fakulty, medzi iným fakultu mechanicko-technologickú, na ktorej sa vychovávajú odborníci pre strojárské závody a závody ľahkého priemyslu.

Variant I.

1. Riešte rovnicu $\cos 2x + 3 \sin x + 1 = 0$.

2. Dokážte, že postupnosť, pre ktorú $a_n = 2 \cdot 3^n$, je geometrická postupnosť a vypočítajte súčet jej prvých osem členov.

3. Nájdite intervaly monotónnosti a extrémny funkcie $y = \frac{\ln x}{x}$.

4. Vypočítajte $\int_{-1}^0 |2^x - 2^{-x}| dx$.

5. Vypočítajte objem pravidelného štvorbokého ihlana, ak veľkosť strany základne je a , uhol medzi rovinami dvoch bočných stien so spoločnou hranou je α .

Výsledky. 1. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 2. 19 680. 3. rastie na $(0, e]$, klesá na $[e, \infty)$, $y(e) = \frac{1}{e}$ je maximum. 4. $\frac{1}{2 \ln 2}$. 5. $\frac{a^3 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{6 \sqrt{-\cos \alpha}}$.

Variant II.

1. Riešte rovnicu $\log_{x+1} (x - 0,5) = \log_{x-0,5} (x + 1)$.

2. Riešte nerovnicu $4^{x+1} \cdot 3 - 35 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^{x+1} \geq 0$.

3. Vypočítajte $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$.

4. Vypočítajte extrémny funkcie $f(x) = -x + \cos 2x$ na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

5. Základňa kvádra je kosoštvorec s ostrým uhlom veľkosti φ a kratšou uhlopriečkou veľkosti d . Vypočítajte objem kvádra, ak jeho väčšia uhlopriečka zvierá s bočnou stenou uhol veľkosti α .

Výsledky. 1. 1. 2. $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$. 3. 1. 4. $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ je minimum, $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ je maximum.

5. $\frac{d^3 \cotg^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \alpha} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \alpha}$

z Jednoty čs. matematiků a fyziků

Ústřední výbor Jednoty československých matematiků a fyziků (JČSMF) se sešel ve dnech 19. a 20. března 1979 v Domě vědeckých pracovníků ČSAV v Liblicích. Byla to jeho první schůze po sjezdu, který se konal v Popradě v říjnu loňského roku a o němž náš časopis už referoval. Jednání ústředního výboru řídil nový předseda Jednoty

dr. Miroslav Rozsival, program byl velmi bohatý a bude jistě uveřejněn a komentován ve spolkovém tisku JČSMF. Jeden bod se týkal též *Rozhledů* matematicko-fyzikálních, které — jak známo — vycházejí za odborné péče JČSMF. Diskusi o koncepci našeho časopisu uvedl vedoucí redaktor *Rozhledů* *prof. Emil Kraemer*, který seznámil přítomné s činností redakční rady a požádal všechny o spolupráci. Člen naší redakce *dr. Jaroslav Šedivý* si připravil řadu námětů na zlepšení *Rozhledů* a také ostatní členové liblického shromáždění přišli se svými podněty. Zvláště se konstatovalo, že je citelný nedostatek příspěvků fyzikálních. Vítili bychom i více článků od slovenských autorů.

J. S.

recenze

Aristoteles:

O SOFISTICKÝCH DŮKAZECH

Academia ČSAV, 1978, 136 stran,
brožováno, 15 Kčs.

Ve 34 krátkých kapitolách se podává systematika chybné argumentace (kapitoly 1—15), její kritický rozbor a v dalších kapitolách (16—34) je poskytnut praktický návod, jak tvořit a hájit správné závěry. Již před Aristotelem se rýsovala myšlenková potřeba takové práce, když umně formulované paradoxy sofistů znepokojovaly důvěru v objektivní možnost rozumového poznávání. Jde o ujasnění a uplatnění deduktivně správného *dialektického myšlení* jak ve vědě, tak i v debatách a při obraně proti *eristikům*, zneužívajícím dialektiku. Dnes bychom je nazvali demagogy a hašteřivci, diskutujícími proto, aby oponovali — třeba

i jen pohotovou manipulací s jazykovými nepřesnostmi, záměnou formálně podobného za stejné, snadnou oklamat, umluvit méně pohotového partnera, unikat vlastnímu tématu vnášením podružných otázek, působit na vznětlivost. *Aristoteles* srovnává poměr eristika k dialektikovi s poměrem toho, kdo chybně kreslí, ke geometrovi.

Dlouho se význam knihy spatřoval jen ve shrnutí a klasifikaci materiálu o rozmanitých planých myšlenkových a slovních hříčkách (které se dnes často jeví jako velmi naivní) a v systematice jejich vyvracení. Objev antinomií v teorii množin jako důsledků povrchního, bezprostředně názorového přístupu ukázal potřebu velmi kritické, důkladné analýzy i zdánlivých samozřejmostí. Připomeňme alespoň rozporný pojem množiny všech množin. Aristotelovo stano-

visko nepodceňovat nebezpečí scestného úsudku tak dostalo zjevné oprávnění.

Vedle tradičně známých sofismat *Zenóna Eleatského* o neexistenci pohybu, antinomii lháře, kdo říká, že kámen je, je kamenem, nalezneme mnohá i jen méně běžná: být bratrem svých štěňat, bílý i černý člověk, zlo je dobro, sedící může jít (připomínáme Čapkovu konstatování o cyklistovi: je nepřírozené utíkat vsedě), vyjádření kvality kvantitou a kvantity kvalitou, býti něco jiného než člověk a další. Speciálně do obsahové náplně našeho časopisu spadá třeba: nesouměřitelnost úhlopříčky a strany čtverce, být i nebýt dvojnásobkem, Melissův důkaz neomezenosti vesmíru, jednotky a dvojky ve čtveřici (Spejblova varianta automobilu s osmi koly: dvě vpředu, dvě vzadu, dvě vpravo, dvě vlevo. Nebo lovecký případ: Dva otcové a dva synové zastřelili tři zajíce a každý dostal jednoho celého), kvadratura kruhu (*Hippokratés*, *Brysón*), číslo mající

střed, číslo současně liché i sudé. Přitom si pečlivý čtenář srovnáním str. 11₁₄ z předmluvy se str. 27₁₀ Aristotelova textu uvědomí rozličný význam příslovce *plus* a spojky *a*.

Zasvěcená předmluva „Aristotelova kritika eristiky“ i doslov „Vznik a vývoj Aristotelovy logiky“ z pera doc. *Karla Berky* samy o sobě poskytnou solidní informativní přehled o předmětu. Připomínáme odtud, že antinomii lháře věnoval *Theofrastos* tři knihy a *Chrysippos* dokonce osmadvacet knih! Zcela uspokojivě byla antonomie sémanticky vyřešena až v tomto století rozlišením dvou úrovní jazyka.

Jako snadné cvičení k Aristotelovým myšlenkám si moderní čtenář podrobně rozebere a objasní studentskou meditaci vycházející z přímé a nepřímé úměry: čím více víš, tím více zapomeneš; čím více zapomeneš, tím méně víš, aniž by přijal sofistický závěr: čím méně se učíš, tím více víš!

Karel Mišoň

Směrnice pro autory (pokyny pro úpravu rukopisů) byly naposled uveřejněny v 5. čísle tohoto ročníku *Rozhledů*. Rukopisy je třeba zasílat s jednou kopií.

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

distanza ž	vzdálenost
— focale	— ohnisková
— principale	— hlavní, distance
distillazione ž	destilace
— frazionata	— přerušovaná
— secca	— suchá
distribuire	rozdělit
distributivo	distributivní
distributore m	rozdělovač
distribuzione ž	rozdělení
— binomiale	— binomické
— di frequenze	— četnosti
— di Poisson	— Poissonovo
— normale	— normální
— probabilistica	— pravděpodobnosti
disuguaglianza ž	nerovnost, nerovnice, neshodnost
divergente	divergující
divergenza ž	divergence
divergere	divergovat
dividendo m (numero)	dělení
divisibile	dělitelný
divisibilità ž	dělitelnost
divisione ž	dělení
divisore m (numero)	dělitel
massimo comune divisore	největší společný dělitel
dodicaedro m	dvanáctistěn
dodecagono m	dvanáctiúhelník
dodicesimo	dvanáctý
dodicesimo m	dvanáctina
dodici	dvanáct

dominio m
 — semplicemente connesso
 — d'integrità
 doppia rifrazione ž
 doppio
 dose ž
 — di radiazione
 dosimetria ž
 dosimetro m
 dozzina ž
 duale
 dualità ž
 — nel piano
 — nello spazio
 due

oblast
 — jednoduše souvislá
 obor integrity
 dvojlom
 dvojnásobný, dvojité
 dávka
 — záření
 dosimetrie
 dosimetr
 tucet
 duální
 duálnost, dualita
 — v rovině
 — v prostoru
 dva, dvě

E

e
 e, ed
 ebollizione ž
 eccentricità ž
 eccezione ž
 eclisse
 eclittica ž
 eco ž
 effetto di Doppler m
 eguaglianza (uguaglianza) ž
 elementare
 elemento m
 elementi allineati
 — complanari
 elettrocinetica ž
 elettrodinamica ž
 elettrodo m
 elettroforesi ž
 elettroforo di Volta m
 elettrolisi ž
 elettrolito m

Eulerovo číslo e
 a
 var
 výstřednost
 výjimka
 zákryt (v astronomii)
 ekliptika
 ozyěna
 Dopplerův efekt
 rovnice; rovnost; shodnost
 elementární, základní
 prvek, element
 prvky kolineární
 — komplanární
 elektrokinetika
 elektrodynamika
 elektroda
 elektroforéza
 Voltův elektrofor
 elektrolýza
 elektrolyt

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

10

ROČNÍK 57, 1978-1979, ČERVEN

rozhledy

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, doc. dr.
Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák,
ČVUT Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bra-
tislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc.
ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Mi-
lan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň,
CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK
Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr.
Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT
Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr.
Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav
Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním peda-
gogickém nakladatelství v Praze za odborné
péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.
Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné
20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého
čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár.
podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2.
Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace
o předplatném podá a objednávky přijímá
každá pošta a každý doručovatel. Objednávky
do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice
a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tis-
ku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková
úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní
pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1979.

ROČNÍK 57
ČERVEN 1979

10

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

P. Fejtková, dr. M. Malik: Počítače . . . 433

Ing. P. Brada: Model barevného vidění . 443

Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Zdánlivé po-
hyby kosmických těles - II. . . 452

J. Kotyk: William Thomson (Kelvin) . . . 459

Úlohy 29. ročníku matematické olympiády 462

Úlohy pro I. kolo XXI. ročníku FO . . . 467

Dr. J. Barták: Matematika převážně - vážně 476

Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček
italsko-český . . . 3. a 4. strana obálky

matematika

Počítače

PAVLA FEJTKOVÁ, Dr. MAREK MALÍK, MFF UK Praha

Během série článků v tomto ročníku Rozhledů jsme poznali některé prostředky, které slouží k popisu situací a objektů, vztahů mezi nimi, případně k popisu dějů — akcí a procesů, jichž se tyto objekty zúčastňují. Poznali jsme, že tyto akce a objekty mohou být velice rozmanité (patří sem jak zařazení žáka do seznamu, tak třeba pohyb bodu po zvolené křivce apod.)

Aparát, z něhož jsme zatím poznali pouze malou část, je ve své úplnosti mnohem obecnější a s rozsáhlými možnostmi a na závěr bychom si teď měli říci, *k čemu se tohoto aparátu využívá*:

Může sloužit třeba k tomu, aby usnadnil popis reality, např. při výměně informací mezi odborníky apod.; ale hlavní oblastí jeho využití je **zápis problematiky pro zpracování počítačem**.

Uvědomme si, proč jsme se až dosud obešli bez zmínky o „práci počítače“. Snažili jsme se zodpovědět otázku, jak nějakým „rozumným“ způsobem **popsat řešení problému**, a proto bychom se měli řídit při popisu řešení úlohy obdobnými pravidly, ať popis tlumočíme člověku nebo počítači.

Řekli jsme, že pro popis řešení musíme umět:

1. popsát objekty (a kterékoli skutečnosti), s nimiž chceme pracovat,
2. popsát algoritmus řešení¹⁾ (pomocí operací a akcí nad množinou objektů);

příčemž *forma popisu musí být srozumitelná* tomu, komu je popis určen.

Dále se tedy zmíníme o problému, kdy informace jsou určeny pro počítač a co znamená, že forma popisu má být „srozumitelná“ počítači.

Nebudeme se na tomto místě zabývat otázkou principů práce počítače podrobně, o tom pojednává rozsáhlá dostupná literatura. (Např. lze doporučit knihu Jana Sokola: *Jak počítá počítač*.) Postačí nám uvědomit si pouze několik základních *principů práce počítače*:

■ Počítač pracuje se zavedeným způsobem *zobrazenými (zakódovanými) informacemi*, což je podmíněno fyzikální konstrukcí počítače.

¹⁾ Pokud je úloha algoritmicky řešitelná — algoritmus řešení nemusí vždy existovat.

Informace bývají zaznamenány například pomocí posloupnosti nul a jedniček, které jsou zobrazeny dvěma stavy jisté fyzikální veličiny.

- Informace mohou být uchovány v paměti počítače.
- S informacemi počítač „umí“ nějakým způsobem zacházet. V zásadě to bývá pouze několik jednoduchých činností, které počítač „umí“ (aritmetické operace, rozhodnutí apod.).
- Počítač je s to reagovat na instrukce, které přikazují provedení určité činnosti. Množina instrukcí je omezená a je předem dána — počítač je tedy schopen řídit se pouze takovými instrukcemi, jejichž „porozumění mu bylo dáno“ při konstrukci.

Sled instrukcí se nazývá **program**. (Teprve programem vlastně zadáváme předpis, kterým je počítač s to se řídit, má-li provádět složitější akce. Program, jehož instrukce počítač vykonává, bývá celý uložen v paměti počítače.)

Zbývá ještě zodpovědět otázku, proč můžeme mluvit o poměrně náročném vyjadřovacím aparátu, který je určen pro počítač, když jsme řekli, že každý typ počítače může reagovat pouze na speciální množinu instrukcí, které říkáme strojový kód.

Chceme-li, aby počítač prováděl instrukce, zapsané v jakékoli jiné formě (říkáme v jiném jazyce) než je strojový kód, musíme *zajistit převod zápisu do strojového kódu* příslušného počítače. Tento převod ovšem nemusí provádět člověk. Máme-li k dispozici algoritmus pro převod z jistého jazyka do strojového kódu, pak můžeme zajistit, aby tento algoritmus realizoval sám počítač. Algoritmy, které mají funkce takových „převodníků“, se nazývají *překladače* nebo *kompilátory*.

Právě používání kompilátorů umožňuje psát programy v jazycích, které nejsou na počítačích přímo závislé a které používají obecnějších, někdy dokonce značně obecných vyjadřovacích prostředků, z nichž jsme se s některými seznamovali.

Cílem odborníků a tvůrců nových jazyků je, aby aparát (jazyk), v němž bude potřeba vyjádřit značně rozmanité problémové oblasti, byl dostatečně obecný a přitom nepříliš složitý. (Mnohé zatím používané jazyky tuto vlastnost nemají.)

Aparát, se kterým jsme se seznámili, je s nepatrnými změnami základem konkrétního univerzálního *moderního programovacího jazyka* **SIMULA 67**.

V následujícím textu bude uveden *příklad ve formě určené pro počítač* včetně výsledků, vytisknutých po zpracování úlohy počítačem. Protože jde o jedinou ukázkou kompletní úlohy, bude popis algoritmu poněkud podrobnější, než jak tomu bylo dosud.

Mějme pomocí počítače řešit následující úlohu:

„V rovině je dána pravoúhlá souřadná soustava a dva body $E_1 [20,0]$ a $E_2 [-20,0]$.

Znáznorněte graficky všechny body s celočíselnými souřadnicemi, které leží uvnitř oblasti ohraničené Cassiniovou křivkou s ohnisky E_1 a E_2 a parametrem α , kde α je dané kladné reálné číslo!“

Nejprve si připomeneme, co jsou to Cassiniovy křivky. Cassiniovou křivkou s ohnisky F_1 a F_2 a parametrem β nazýváme geometrické místo právě všech bodů P , pro které platí:

$$(PF_1)(PF_2) = \beta^2$$

(Tedy geometrické místo právě těch bodů, jejichž součin vzdáleností od obou ohnisek je konstantní a roven druhé mocnině parametru.)¹⁾

Naší úlohou je tedy znázornit všechny body N roviny, které mají celočíselné souřadnice a pro které platí:

$$(NE_1)(NE_2) < \alpha^2$$

Dříve než přistoupíme k vlastnímu řešení úlohy, bude vhodné učinit jeden omezující předpoklad:

Rozměry uvažované Cassiniovy křivky se samozřejmě zvětšují se zvětšujícím se parametrem. Chceme popsat princip řešení bez závislosti na velikosti parametru α , ale budeme předpokládat, že v žádném případě nepřevýší hodnota parametru nějakou mez. Konkrétně budeme třeba předpokládat, že α je vždy menší než 30.

Při řešení úlohy musíme ze všeho nejdříve provést tak zvanou algoritmizaci — to znamená, musíme naprosto přesně stanovit, **jakým způsobem** budeme při řešení zadané úlohy postupovat.

Především vyplývá z právě uvedeného omezení, že při jakékoliv přípustné hodnotě parametru α (tj. $\alpha < 30$) nemohou v oblasti, kterou máme graficky znázornit, ležet takové body $N [i_1, i_2]$, pro které platí:

$$|i_1| > 40 \quad \text{nebo} \quad |i_2| > 30 .$$

(Rozmyslete si!)

Jinak řečeno, pro každou přípustnou hodnotu α bude Cassiniova křivka ležet uvnitř obdélníka:

$$[+40, +30][+40, -30][-40, -30][-40, +30] .$$

Úvahově nejjednodušším způsobem řešení naší úlohy je postupně probírat body s celočíselnými souřadnicemi, které jsou uvnitř tohoto obdélníka; pro každý z těchto bodů spočítat jeho vzdálenosti k ohniskům E_1 a E_2 a součin získaných hodnot porovnat s druhou mocninou hodnoty parametru α . V případě, že součin vzdáleností k ohniskům bude menší než α^2 , zakreslíme na místo odpovídající danému bodu v rovině nějakou značku.

¹⁾ Připomeňme ještě podobnost s definicí elipsy, což je geometrické místo právě všech bodů P , pro které platí:

$$(PF_1) + (PF_2) = 2\beta$$

Zamyslíme-li se nad uvedeným způsobem řešení, musíme si zejména uvědomit, že popsaný způsob má smysl pouze v případě, kdy chceme úlohu řešit pomocí samočinného počítače.

Bodů s celočíselnými souřadnicemi je totiž uvnitř uvedeného obdélníka 4661 (79×59) a výpočet uvedeným způsobem by byl příliš zdoluhavý i pomocí kapesní kalkulačky. (Kdyby nám výpočet hodnot a test pro jeden bod trval pouhých 10 sekund, trval by celý výpočet pro jednu hodnotu parametru α více než 12 hodin.) ²⁾

Nyní, když již známe přesný způsob, jak budeme naši úlohu řešit, zbývá jenom popsat tento návrh výpočtu tak, aby mohl být sdělen počítači.

Popsat pro počítač proměnné a vlastní výpočtové akce umíme. Nehovořili jsme dosud však o tak zvaných *vstupech a výstupech*.

Při většině výpočtů na počítači musíme totiž dodávat tzv. vstupní údaje, to jest například číselné hodnoty, které jsou během výpočtu používány. V naší úloze musíme například vždy počítači na začátku výpočtu sdělit, jaká je hodnota parametru α . Naopak musí existovat prostředky, pomocí nichž nám počítač sdělí výsledky, které během výpočtu získal.

Uvedené akce vstupu a výstupu se zapisují též do programu (to jest do popisu řešení celé úlohy) pomocí speciálních příkazů. Ve většině programovacích jazyků jsou tyto vstupní a výstupní příkazy přesně definovány. Přesto se jimi nebudeme pro přehlednost zabývat a v dále uvedeném programu budou naznačeny pouze schematicky. Budeme jen předpokládat, že pro výstup používáme tak zvanou širokořádkovou tiskárnu, na které tiskneme jednotlivé znaky zleva doprava horními řádky počínaje.

Řešení uvažované úlohy pak popíšeme pro počítač následujícím programem:

```
0001 begin
0002
0003     class BOD (integer I1,I2);;
0004
0005     ref (BOD) E1,E2;
0006     real VZ,ALFA;
0007     integer J1,J2;
0008
```

²⁾ Tím ovšem nechceme v žádném případě naznačit, že by u výpočtů pomocí samočinného počítače nezáleželo na jejich rychlosti a že by nemělo cenu se u každé úlohy zamýšlet, zda ji nelze spočítat rychleji.

```

0009      procedure VZDALENOST (ref (BOD) A,B);
0010      begin
0011          VZ := (A.I1 - B.I1) ** 2;
0012          VZ := VZ + (A.I2 - B.I2) ** 2;
0013          VZ := VZ ** (1/2)
0014      end;
0015
0016      E1 := new BOD (+20,0);
0017      E2 := new BOD (-20,0);
0018
0019      přečti hodnotu reálné proměnné ALFA ;
0020
0021      J2 := 29;
0022      while J2 > -30 do
0023      begin
0024
0025          J1 := -39;
0026          while J1 < 40 do
0027          begin
0028
0029              ref (BOD) N;
0030              réal V1,V2;
0031
0032              N := new BOD (J1,J2);
0033
0034              VZDALENOST (N,E1);
0035              V1 := VZ;
0036
0037              VZDALENOST (N,E2);
0038              V2 := VZ;
0039

```

```

0040      if V1 * V2 < ALFA ** 2 then
0041          | vytiskni znak hvězdička |
0042      else
0043          | vytiskni znak mezera | ;
0044
0045      J1 := J1 + 1
0046  end;
0047
0048  | přejdi na začátek dalšího řádku | ;
0049  J2 := J2 - 1
0050  end
0051
0052 end

```

Nyní celý program rozebereme a budeme si všímat, jakou funkci mají jeho jednotlivé části. (Sledujte podle čísel řádek!)

Nejprve si povšimneme, že celý program je uzavřen v programových závorkách (řádky 0001 a 0052). Toto je jakási konvence, kterou valná část programovacích jazyků vyžaduje.

Na řádku 0003 je deklarace prototypu třídy BOD, jejíž exempláře nám budou sloužit pro popis bodů roviny s celočíselnými souřadnicemi. Pro zápis hodnot těchto souřadnic slouží parametry třídy I1 a I2.

Na řádcích 0005 až 0007 jsou uvedeny deklarace proměnných, které budeme dále v programu potřebovat.

Dále je na řádcích 0009 až 0014 uvedena deklarace procedury VZDALENOST, která slouží pro výpočet vzdálenosti mezi dvěma body v rovině. Body, jejichž vzájemná vzdálenost má být počítána, jsou dány parametry procedury (A a B). Procedura počítá vzdálenost podle běžného vzorce:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

V její operační části se totiž nejprve na řádku 0011 vypočítá hodnota

$$(a_1 - b_1)^2$$

(prvou souřadnicí bodu A je totiž A.I1) a získaná hodnota se dosadí do reálné proměnné VZ. Na dalším řádku 0012 se k získané hodnotě přičte hodnota

$$(a_2 - b_2)^2$$

a na dalším řádku se provede konečné odmocnění.

Obr. 1

Obr. 2

Po skončení výpočtu procedury VZDALENOST je pak hodnota vzdálenosti mezi body uložena jako hodnota reálné proměnné VZ.

Na řádcích 0016 a 0017 se vytvoří dva exempláře třídy BOD a označí se referenčními proměnnými E1 a E2. Hodnoty těchto proměnných pro nás budou dále představovat ohniska uvažované Cassiniovy křivky.

Obr. 3

Obr. 4

Na řádku 0019 přečteme vstupní údaj, kterým je zadána velikost parametru křivky, a jeho hodnotu dosadíme do reálné proměnné ALFA.

Další část programu již odpovídá výše uvedenému principu výpočtu. Probíráme jednotlivé celočíselné body obdélníka $(-40, +40) \times (-30, +30)$ a pro každý bod tiskneme na odpovídající místo papíru tiskárny mezeru nebo hvězdičku. Protože se papír na tiskárně posunuje směrem vzhůru, procházíme obdélník po jeho jednotlivých řádcích shora.

V celočíselné proměnné J2 je vždy na každém kroku uložena hodnota odpovídající řádce obdélníka (tj. druhé souřadnici testovaných bodů) a v proměnné J1 pozice na tomto řádku (tj. první souřadnice).

Nejprve tedy (0021) dosadíme do proměnné J2 hodnotu 29 — velikost druhé souřadnice bodů v nejvyšším řádku obdélníka. Protože pro všechny řádky obdélníka bude výpočet zcela stejný, popíšeme jej cyklem (řádek programu 0022), jehož vnitřní příkaz (řádky programu 0023 až

Obr. 5

Obr. 6

0050) budeme opakovat tak dlouho, dokud druhá souřadnice testovaných bodů bude větší než -30 .

Pro každou hodnotu druhé souřadnice budeme postupně probírat hodnoty první souřadnice: -39 , -38 , -37 atd. až 38 , 39 . Protože opět pro každý bod budeme provádět též výpočet, můžeme procházení řádky obdélníka popsat též cyklem — nejprve do proměnné J1 dosadíme hodnotu -39 (0025) a vnitřní příkaz tohoto cyklu (0027 až 0046) opakujeme tak dlouho, dokud je hodnota proměnné J1 menší než 40 . Tento druhý cyklus opakujeme samozřejmě při každém průchodu cyklem vnějším.

Ve vnitřní části těchto dvou v sobě vnořených cyklů nejprve zavedeme pomocné proměnné N, V1 a V2 (řádky programu 0029 až 0030).

Na řádce 0032 se vytvoří nová struktura třídy BOD, která svými atributy odpovídá souřadnicím J1 a J2, a označí se referenční proměnnou N. Hodnotou proměnné N je tedy právě ten bod, jehož příslušnost zkoumané oblasti uvnitř křivky budeme dále testovat.

Nejprve spočteme vzdálenost bodu N od ohniska E1. To provedeme pomocí procedury VZDALENOST (řádek 0034), která hodnotu spočtené vzdálenosti dosadí do proměnné VZ. Tuto hodnotu vzdálenosti dosadíme do proměnné V1 (0035).

Obr. 7

Obr. 8

Podobně na řádcích 0037 a 0038 spočteme vzdálenost bodu N od ohniska E2 a výslednou hodnotu dosadíme do proměnné V2.

Je-li nyní součin hodnot proměnných V1 a V2 menší než druhá mocnina parametru křivky, který je hodnotou proměnné ALFA (0040) vytiskneme na odpovídající místo tiskárny hvězdičku (0041), v opačném případě (0042) vytiskneme jen mezeru (0043). Tím se v každém případě posune pozice tiskárny na další místo vpravo a je připravená pro následující bod téhož řádku.

Konečně zvětšíme hodnotu prvé souřadnice o jedničku (řádek 0045). Tím jsme dokončili vnitřní příkaz cyklu z řádky programu 0026 — zde zkontrolujeme, je-li ještě $J1 < 40$. Je-li, postoupili jsme pouze o jedno místo na zkoumaném řádku obdélníku a výpočet opakujeme; není-li, znamená to, že jsme již probrali všechny body s celočíselnými souřadnicemi na příslušném řádku a ukončíme vnitřní příkaz cyklu pro tento řádek.

Pro další řádek zkoumaného obdélníku musíme především přejít na začátek dalšího řádku tiskárny (tj. začít znázorňovat body opět od levého kraje) — 0048. Dále snížíme hodnotu druhé souřadnice J2 o jedničku (0049) — po svislé ose souřadné soustavy se pohybujeme shora dolů.

Tím je ukončen vnitřní příkaz cyklu z řádky 0022. Zde zkontrolujeme, je-li nový řádek ještě uvnitř uvažovaného obdélníku — jestliže ano, pokračujeme s výpočtem na tomto řádku; jestliže ne, znamená to, že jsou všechny uvažované body probrány a výpočet ukončíme.

Přesně takovým způsobem, jaký jsme právě při rozboru vytvořeného programu uvedli, bude pracovat počítač při jeho výpočtu.

Na tiskárně počítače pak obdržíme pro různé vstupní hodnoty para-

metru α různé grafické výsledky. Na obrázcích 1 až 8 jsou tyto výsledky uvedeny pro hodnoty parametru α po řadě:

28, 24, 22, 21, 20, 19, 18, 14.

Tato závěrečná úloha ani úlohy, které jsme řešili v celé sérii článků, nemohly samozřejmě poskytnout úplný obraz všech možností, jak lze daného aparátu využít. Ale snad jste si i nad jednoduchými ukázkami uvědomili, jakým obrovským pomocníkem se stává pro společnost počítač v době bouřlivého vědeckotechnického rozvoje.

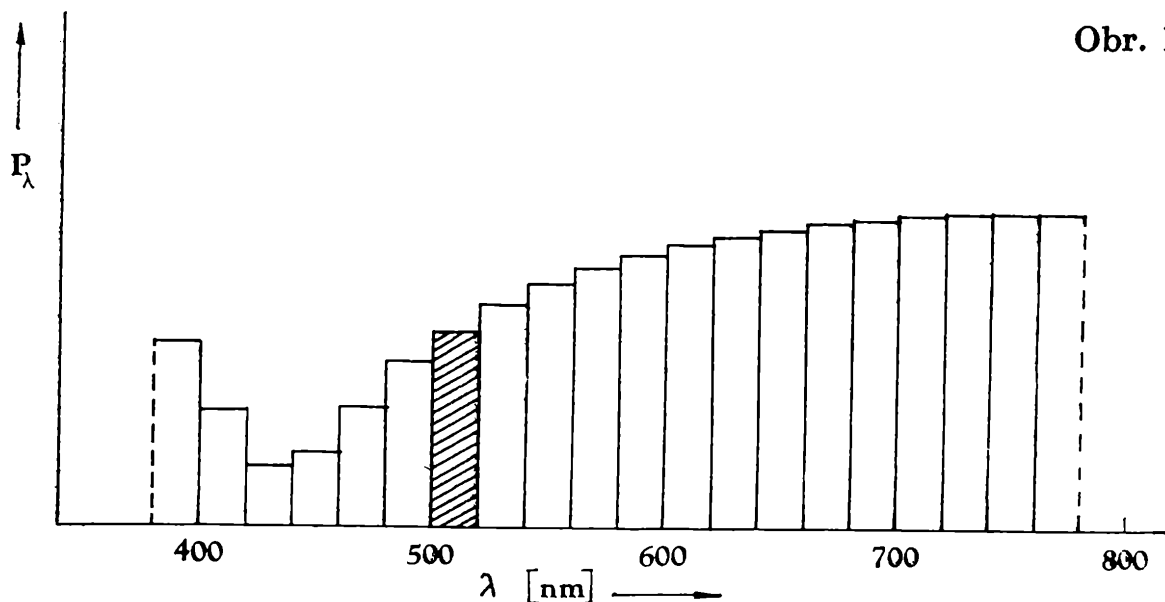
fyzika

Model barevného vidění

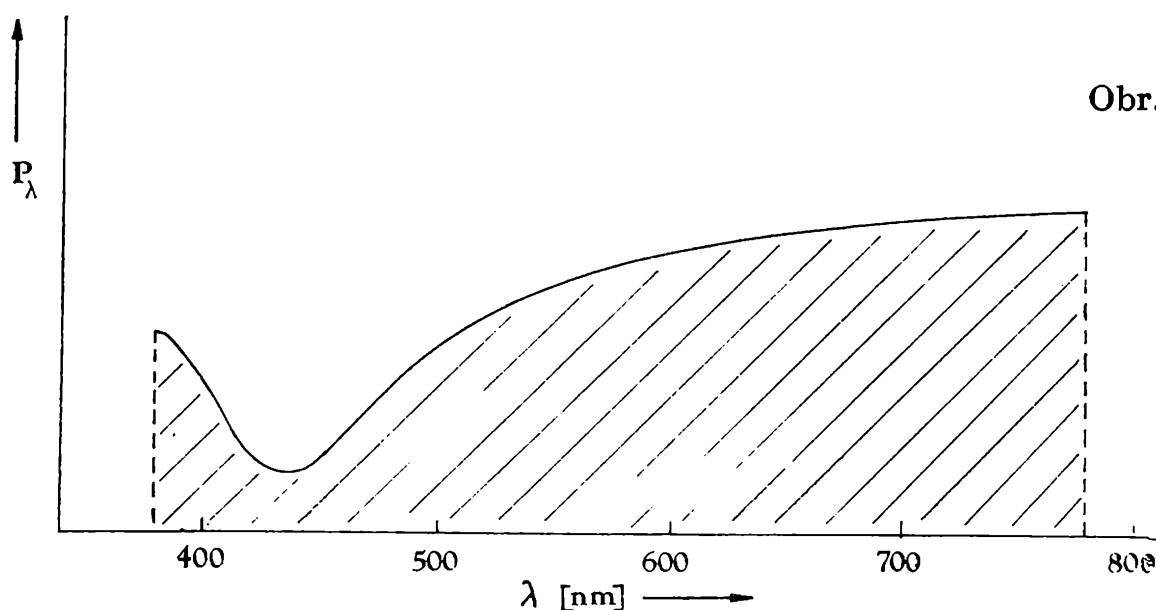
Ing. PAVEL BRADA, FJFI ČVUT

Člověk má k dispozici dva důležité smysly, s jejichž pomocí může přijímat informace od okolního světa prostřednictvím vlnění; jsou to sluch a zrak. Zatímco sluchem vnímáme podélné vlnění molekul vzduchu, zrakem vnímáme světlo, tj. elektromagnetické vlnění s vlnovou délkou λ z intervalu (380 až 780) nm. Vlnová délka zvukového vlnění určuje výšku tónu, zatímco při registraci monochromatického světla určuje vlnová délka světelného záření barevný odstín. Zdá se, že jde o úplnou analogii mezi vnímáním zvuku a vnímáním světla. Avšak určitá odlišnost přece existuje — ve spojitém světelném spektru (např. v duze) můžeme zřetelně rozeznat několik pásů lišících se navzájem svou barvou, přičemž každý pás přechází plynule v pás sousední. Rozeznáváme celkem sedm pásů, které postupně odpovídají těmto barvám: červená, oranžová, žlutá, zelená, modrozelená, modrá a fialová. Při pozorování (či spíše poslouchání) zvukového spektra (např. zvuku sirény, která spojitě mění výšku tónu od nejhlubšího po nejvyšší) nejsme schopni žádné podobné pásy rozeznat. Jak vysvětlit rozdílnost těchto jevů?

Nejdříve si povězme něco o světelném záření. Dnes víme, že se světlo šíří po kvantech. Tato kvanta světelného záření se nazývají *fotony*. Každý foton je charakterizován svou vlnovou délkou λ . Předpokládejme, že z určitého světelného zdroje jsou vysílány fotony, které se pohybují navzájem rovnoběžně a dopadají do oka. V místě oka si představme



Obr. 1



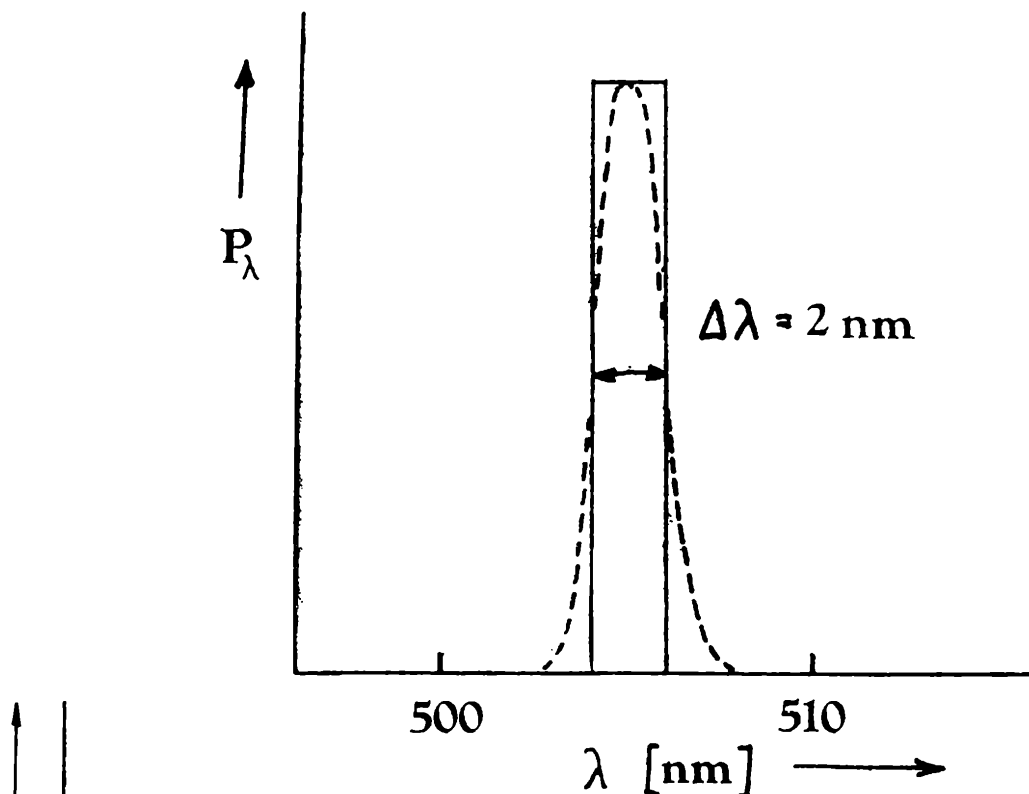
Obr. 2

plošku o velikosti ΔS kolmou na směr šíření fotonů. Tzv. *zářivý tok* P procházející ploškou ΔS je dán vztahem

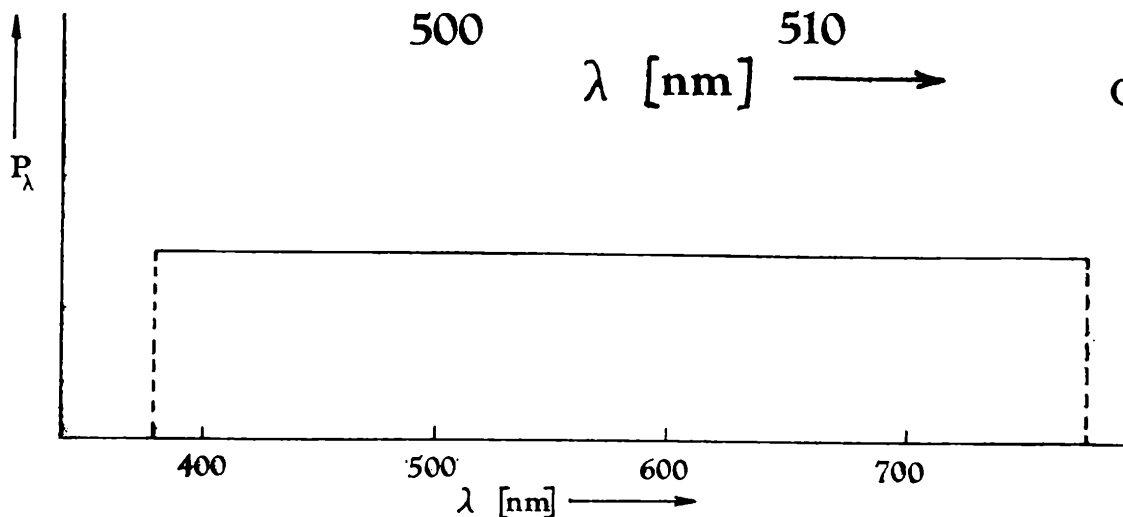
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t},$$

kde ΔW je součet energií všech fotonů, které prošly ploškou ΔS za dostatečně krátký časový interval Δt . Zářivý tok je tedy výkon přenášený zářením a měříme ho ve wattech.

Nyní rozdělme oblast vlnových délek viditelného světla na n stejně velkých intervalů o velikosti $\Delta\lambda$. Nad každým z těchto intervalů sestrojme obdélníček tak, aby se obsah jeho plochy rovnal zářivému toku ΔP_i ($1 \leq i \leq n$) těch fotonů, jejichž vlnová délka leží v i -tém intervalu (obr. 1). Tak např. vyšrafovaný obdélníček má obsah plochy rovný zářivému toku těch fotonů, jejichž vlnová délka leží v intervalu (500 až



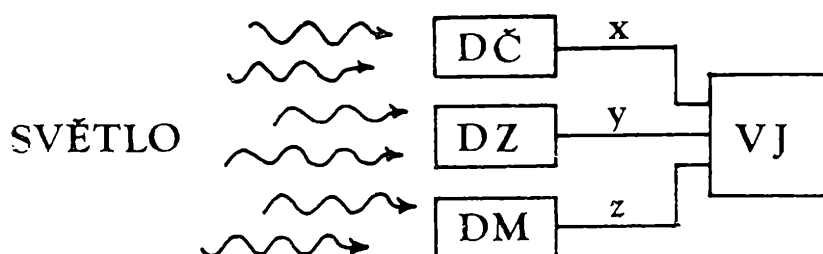
Obr. 3



Obr. 4

520) nm. Zářivý tok fotonů z celé oblasti viditelného světla se rovná součtu obsahů ploch všech nakreslených obdélníků. Jestliže spojíme středy horních stran obdélníků úsečkami, dostaneme přibližnou rozdělovací funkci P_λ . Přesnou rozdělovací funkci P_λ dostaneme, když počet intervalů n necháme vzrůstat nade všechny meze (obr. 2). Tuto rozdělovací funkci nazýváme spektrum světelného záření. Platí, že $P_\lambda = \Delta P / \Delta \lambda$, neboť obsah plochy i -tého obdélníčku ΔP_i se rovná $P_{\lambda_i} \cdot \Delta \lambda$. Na obrázku č. 2 je uveden příklad spojitého spektra. Zde se zářivý tok všech fotonů viditelného světla rovná obsahu vyšrafované plochy pod křivkou. Definujme si, že světlo budeme považovat za monochromatické tehdy, jestliže jsou v něm zastoupeny pouze fotony s vlnovou délkou z intervalu $\left(\lambda - \frac{\Delta \lambda}{2}, \lambda + \frac{\Delta \lambda}{2} \right)$, kde $\Delta \lambda = 2 \text{ nm}$. Na obr. 3 je nakresleno monochromatické světlo ideální (plnou čarou) a skutečné (čárkovaně). Na obr. 4 je nakresleno tzv. *izoengetické spektrum* ($P_\lambda = \text{konst.}$).

Vraťme se nyní k problému vzniku barevných pásů ve světelném spektru. Především si musíme uvědomit, že podstata zmíněného jevu netkví ve vlnění samotném, nýbrž ve způsobu jeho registrace našimi smyslovými orgány — tzv. receptory. Zvukové vlny dráždí jediný receptor (ušní bubínek), který je schopen odesílat do mozku informaci o registrovaném kmitočtu. Při registraci světla je situace poněkud jiná. Jak uvádí *hypotéza o barevném vidění*, existují v oku celkem tři odlišné druhy receptorů (tři druhy čípků umístěné ve žluté skvrně oka), které vysílají signály úměrné míře svého podráždění do mozku. Každý z těchto tří druhů receptorů má jinou citlivost podráždění v závislosti na vlnové délce světla. V mozku potom podle poměrů velikostí jednotlivých signálů vzniká vjem barevného odstínu. Podráždění prvního druhu receptorů vyvolá „červený signál“, druhého druhu „zelený signál“ a třetího druhu „modrý signál“.



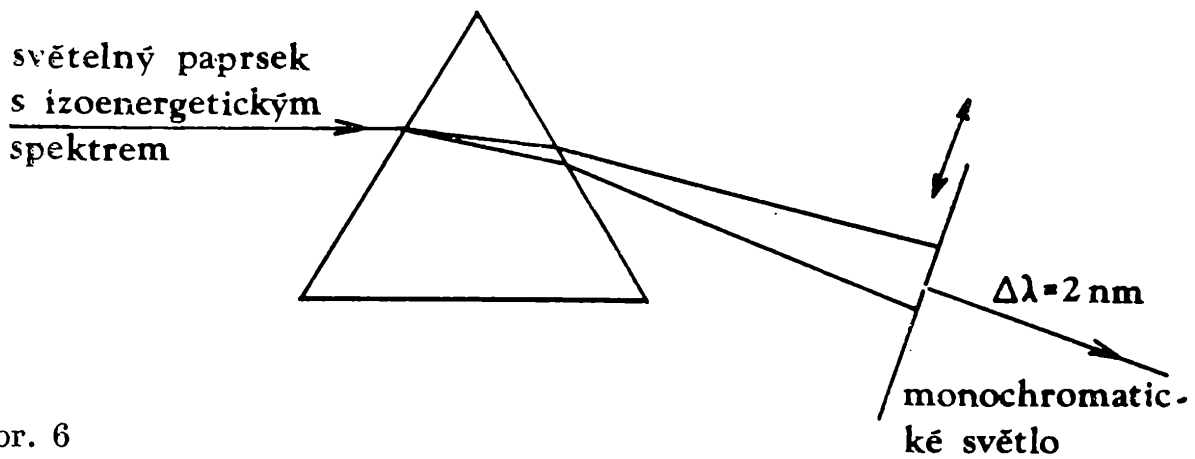
Obr. 5

Tuto situaci můžeme nahradit modelem podle obr. 5. Model obsahuje tři detektory DČ, DZ a DM schopné registrovat fotony a dávat informaci o jejich množství a energii. Nechť tyto detektory odpovídají jednotlivým druhům receptorů v oku (DČ — červenocitlivému, DZ — zelenocitlivému a DM — modrocitlivému) a jejich citlivost k vlnové délce světla je stejná jako citlivosti příslušných druhů receptorů. Dopadali-li na všechny tři detektory současně světelné záření, je z každého detektoru vysílán signál v podobě elektrického proudu do vyhodnocovací jednotky VJ. Tyto signály, které označíme x , y , z (viz obr. 5), mají kladné hodnoty. Jejich velikosti jsou obecně různé a jsou přímo úměrné velikosti signálů, které vznikají podrážděním druhů receptorů v oku. Vyhodnocovací jednotka je schopna vytvořit tyto poměry:

$$\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{x}{z} \quad (1)$$

(pro $y = 0$ resp. $z = 0$ pouze poměr x/z resp. x/y). V tomto modelu odpovídá vyhodnocovací jednotka mozku a vodiče, po kterých jsou přenášeny signály, odpovídají nervům. Na poměrech (1) tedy závisí vnímaný barevný odstín.

Podívejme se, jak bychom sestrojili *křivky citlivosti* jednotlivých druhů receptorů. Uvažujme světelný paprsek s izoenergetickým spektrem (obr. 4) rozložený hranolem (obr. 6). Štěrbina nechť nám vymezení pouze ty



Obr. 6

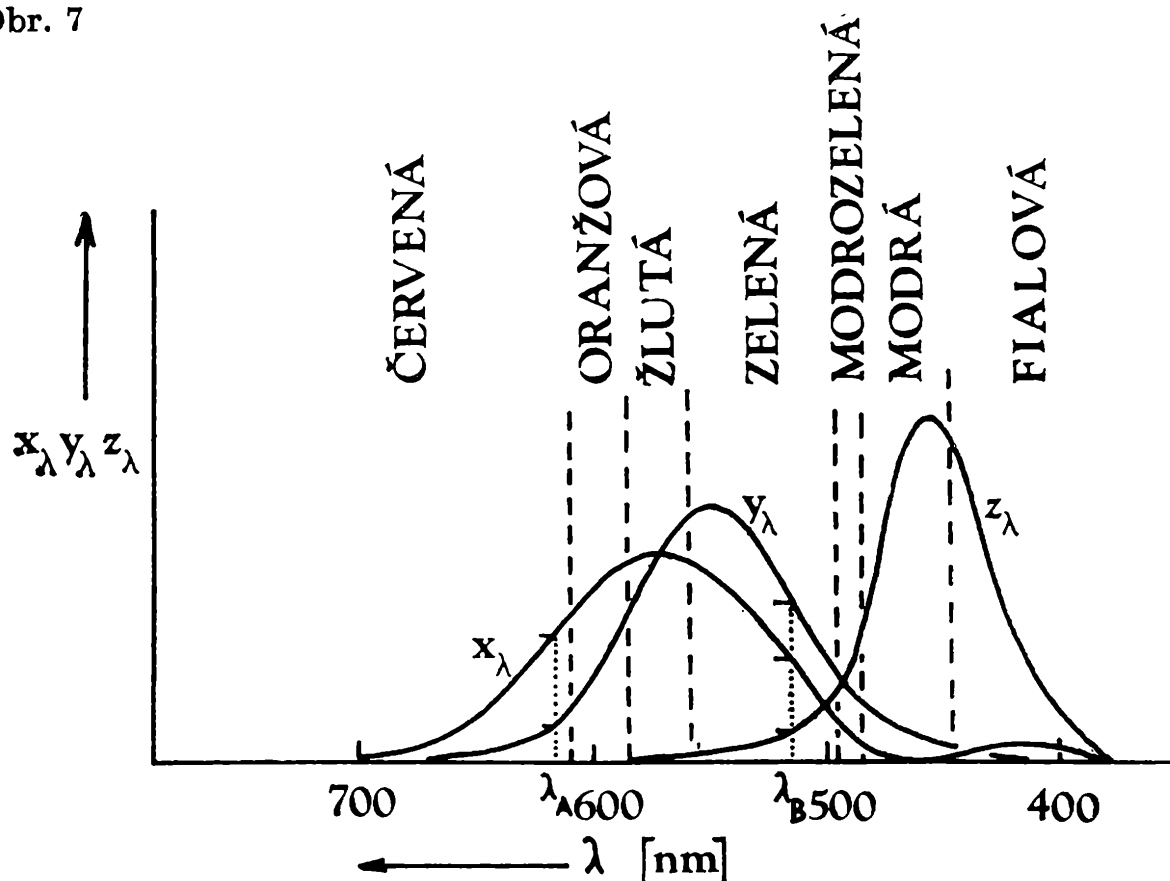
fotony, jejichž vlnová délka leží v intervalu $\left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$. Předpokládejme, že světlo za štěrbinu je ideálně monochromatické ($\Delta\lambda = 2 \text{ nm}$), jeho zářivý tok má velikost jednoho wattu a že působí na všechny tři detektory současně. Křivky citlivosti jednotlivých detektorů sestojíme takto: Na vodorovnou osu nanášíme vlnovou délku λ , kterou vymezuje štěrbina, a na svislou osu nanášíme postupně hodnoty $x_\lambda = x/\Delta\lambda$, $y_\lambda = y/\Delta\lambda$ a $z_\lambda = z/\Delta\lambda$.

Posunujeme-li štěrbinou ve směru označeném šipkami tak, že proběhneme celou oblast viditelného spektra, dostaneme křivky citlivosti x_λ , y_λ , z_λ jednotlivých detektorů, které jsou totožné s křivkami citlivosti odpovídajících druhů receptorů v oku. Jejich předpokládaný průběh vypadá zhruba tak, jak je nakresleno na obr. 7.

Vidíme, že v oblasti vlnových délek větších než zhruba 610 nm bude oko vnímat červenou barvu, neboť daleko nejvíce jsou drážděny červencitlivé receptory. V oblasti (585 až 610) nm, kde vedle červeného podnětu vzrostla příměs podnětu zeleného, vidíme oranžovou barvu, tam kde červený a zelený podnět mají přibližně stejnou velikost, vzniká žlutá barva atd. Tímto způsobem tedy vzniknou všechny barvy spektra.

Ze zkušenosti však víme, že existuje daleko více odstínů barev, než které nám ukazuje např. sluneční spektrum. Jak lze očekávat, dostaneme je mísením různých spektrálních barev. K vysvětlení vzniku různých barevných odstínů používáme grafického znázornění. Ke zhotovení grafu budeme používat katézského systému souřadnic. Graf sestojíme tak, aby ke každému barevnému odstínu byl vzájemně jednoznačně přiřazen právě jeden bod grafu. Připomeňme, že barevný odstín nezávisí na velikosti hodnot x , y , z , ale pouze na poměrech (1). Všimněme si, že když známe hodnoty dvou poměrů, dovedeme třetí poměr jednoduše spočítat. Např. známe-li poměry x/y a y/z , potom $x/z = (x/y) \cdot (y/z)$. Barevný odstín tedy závisí na dvou nezávislých proměnných, tzn., že hledaný graf bude dvourozměrný.

Obr. 7



x_λ - červený podnět y_λ - zelený podnět
 z_λ - modrý podnět

Dvěma trojicím (x, y, z) a $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ odpovídá stejný barevný odstín, právě když platí:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = k \cdot (x, y, z),$$

kde k je kladné reálné číslo (neboť jedině tehdy zůstanou poměry (1) zachovány, tj. $\bar{x}/\bar{y} = x/y$, atd...).

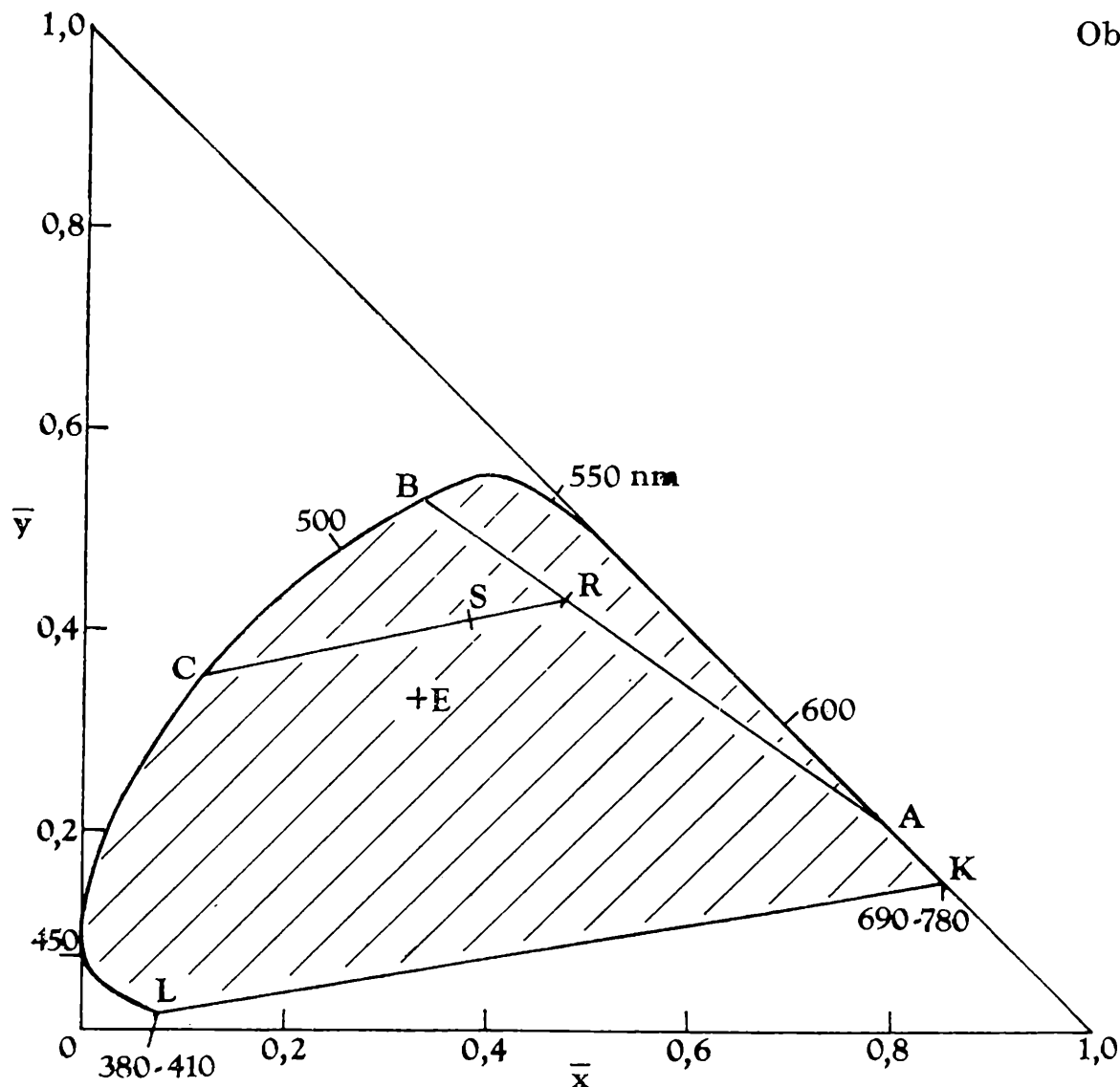
Zvolme $k = 1/(x + y + z)$. Hodnoty $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ lze potom zapsat ve tvaru

$$\bar{x} = \frac{x}{x + y + z}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x + y + z}, \quad \bar{z} = \frac{z}{x + y + z}. \quad (2)$$

Ze vztahu (2) plyne, že

$$\bar{z} = 1 - (\bar{x} + \bar{y}), \quad (3)$$

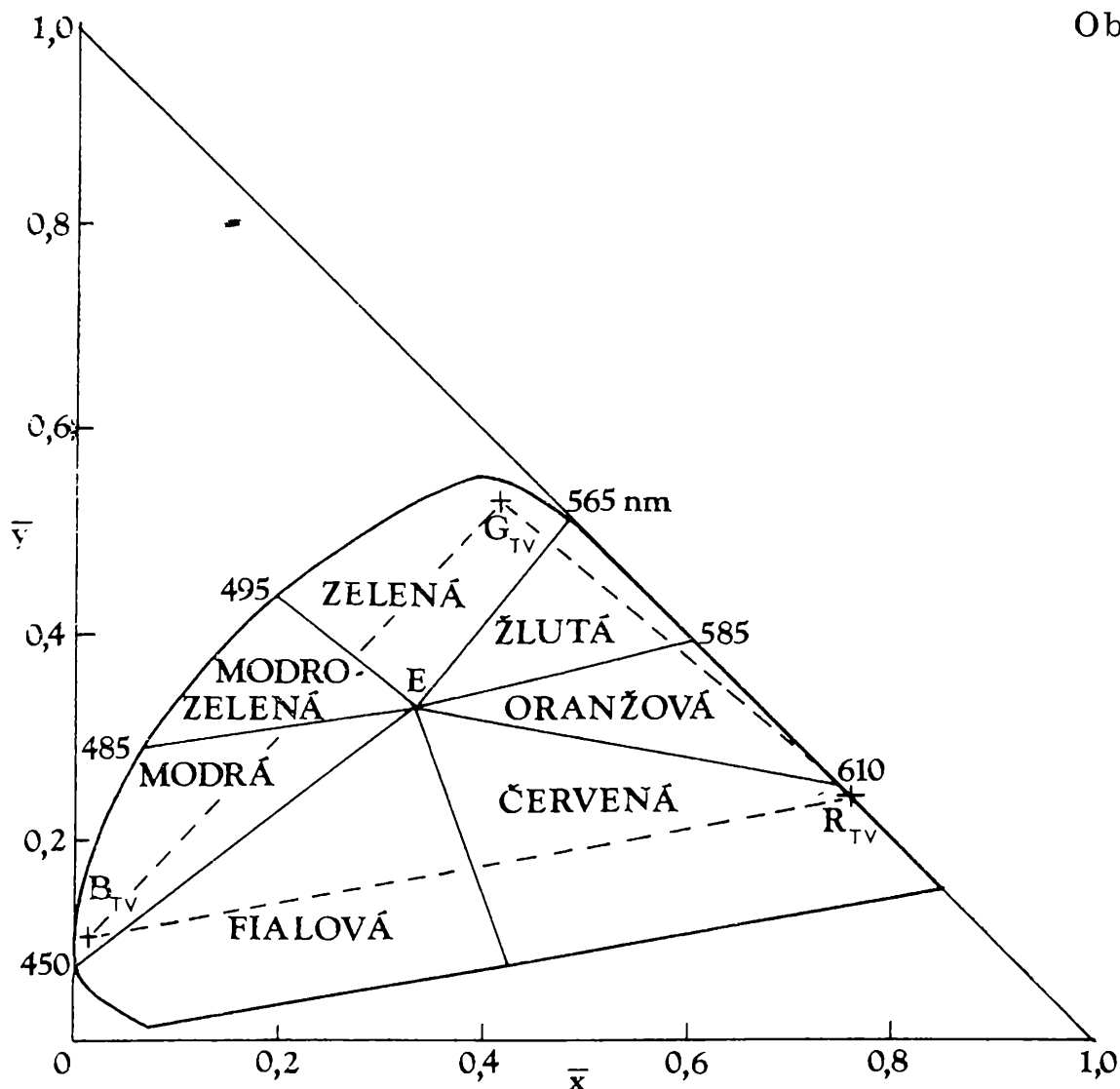
tedy hodnota $\bar{z}$ závisí na hodnotách $\bar{x}$ a $\bar{y}$. Vybereme-li za proměnné v hledaném grafu $\bar{x}$ a $\bar{y}$, bude zřejmě přiřazení barevného odstínu k bodu grafu vzájemně jednoznačné. Jelikož $x, y, z \geq 0$, platí podle (2), že $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \langle 0, 1 \rangle$. Vezmeme-li ještě v úvahu rovnici (3), znamená to, že množina bodů $(\bar{x}, \bar{y})$ odpovídající všem barevným odstínům bude



ohraničena trojúhelníkem s vrcholy v bodech $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$, viz obr. 8, 9.

Jak již bylo uvedeno, dvě světla, která vyvolají v našem modelu signály (x, y, z) a $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, vyvolají i stejný barevný odstín dopadem do oka. Odlišnost se projeví pouze v jas vnímané barvy. S rostoucími hodnotami x, y, z jas barvy roste. Mohlo by nás překvapit, že do grafu nevynášíme hodnoty $\bar{z}$; ty jsou však dány rovnicí (3), takže pro kteroukoliv dvojici hodnot $(\bar{x}, \bar{y})$ lze hodnotu $\bar{z}$ spočítat.

Ukažme si, jak sestrojíme body grafu pro monochromatická světla. Budeme uvažovat např. monochromatické světlo s vlnovou délkou λ_B (obr. 7), které vytváří signály x_B, y_B, z_B . Utvoříme zlomky $\bar{x}_B = x_B/(x_B + y_B + z_B)$ a $\bar{y}_B = y_B/(x_B + y_B + z_B)$. Hodnotám $(\bar{x}_B, \bar{y}_B)$ odpovídá v grafu na obr. 8 bod B . Hodnotu $\bar{z}_B$ vypočítáme podle vzorce (3). Vyneseme-li do grafu tímto způsobem body odpovídající všem monochromatickým světélům, dostaneme křivku $KABCL$ (obr. 8).



Nyní si ukážeme nalezení bodu R , který odpovídá směsi dvou monochromatických světél s vlnovými délkami λ_A a λ_B . Označme písmenem P_A resp. P_B zářivý tok monochromatického světla s vlnovou délkou λ_A resp. λ_B a jeho obraz na obr. 8 $A = (\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ resp. $B = (\bar{x}_B, \bar{y}_B)$. Předpokládejme, že zářivý tok je přímo úměrný vzniklým signálům, a dále si uvědomme, že hodnoty x_A, y_A, z_A resp. x_B, y_B, z_B byly získány pro $P_A = 1$ W resp. $P_B = 1$ W. Potom platí:

$$x_R = P_A \cdot x_A + P_B \cdot x_B, \quad y_R = P_A \cdot y_A + P_B \cdot y_B, \quad z_R = P_A \cdot z_A + P_B \cdot z_B.$$

Pro hodnotu $\bar{x}_R$ platí:

$$\begin{aligned} \bar{x}_R &= \frac{P_A \cdot x_A + P_B \cdot x_B}{P_A \cdot x_A + P_B \cdot x_B + P_A \cdot y_A + P_B \cdot y_B + P_A \cdot z_A + P_B \cdot z_B} = \\ &= \frac{P_A \cdot \bar{x}_A + P_B \cdot \bar{x}_B}{P_A + P_B}. \end{aligned}$$

Obdobné vzťahy platí pro $\bar{y}$ a $\bar{z}$. Poloha bodu R je dána rovností:

$$\begin{aligned}(\bar{x}_R, \bar{y}_R) &= \frac{P_A}{P_A + P_B} (\bar{x}_A, \bar{y}_A) + \frac{P_B}{P_A + P_B} (\bar{x}_B, \bar{y}_B) = \\ &= (\bar{x}_A, \bar{y}_A) + t[(\bar{x}_B, \bar{y}_B) - (\bar{x}_A, \bar{y}_A)]\end{aligned}\quad (4)$$

$$\text{kde } t = \frac{P_B}{P_A + P_B} \in (0, 1)$$

Vidíme, že pravá strana (4) predstavuje parametrické vyjádření úsečky AB , tj. bod R bude vnitřním bodem úsečky AB . Ze vztahu (4) dále plyne, že $|BR| : |AR| = P_A : P_B$. Jelikož křivka $KABCL$ uzavřená úsečkou KL je konvexní útvar, musí body odpovídající směsi libovolných dvou monochromatických světél ležet uvnitř tohoto útvaru. Obdobné úvahy můžeme provést se směsí tří monochromatických světél se zářivými toky P_A, P_B, P_C , kterým odpovídají po řadě body ABC . Výsledný bod S , odpovídající směsi těchto tří světél, leží na úsečce CR tak, že platí $|RS| : |CS| = P_C : (P_A + P_B)$. Tak bychom mohli pokračovat i pro více monochromatických světél, odpovídající bod na grafu bude vždy ležet na vyšrafované ploše (obr.8). To platí i pro světlo se spojitým spektrem. Toto spektrum lze nahradit obdélníčky podobně jako na obr. 1, z nichž každý představuje monochromatické světlo. Uvažte sami, jak bychom postupovali při mísení dvou a více světél se spojitými spektry. Z obr. 8 je zřejmé, že barevný odstín, odpovídající nějakému bodu ležícímu uvnitř vyšrafované plochy, dostaneme nekonečně mnoha způsoby mísením dvou, tří a více monochromatických i nemonochromatických světél. Rovněž dvě světla, z nichž každé má odlišné spektrum, mohou vytvořit stejný barevný odstín.

Všimněme si bodu E o souřadnicích $\bar{x} = \bar{y} = 0,33 (= \bar{z})$. Je-li světlo odpovídající tomuto bodu dostatečně intenzivní, vidíme bílou barvu, při snížené intenzitě vidíme šedou, při velice nízké intenzitě, kdy receptory přestávají být drážděny, se nám barva jeví jako černá. Spojíme-li okraj vyšrafované plochy s bodem pro bílou barvu, pak body na této úsečce odpovídají jednomu barevnému tónu. Sytost barevného tónu se snižuje od okraje směrem do středu, kde přechází v bílou barvu.

Pohledem na obr. 8 zjistíme, že když vhodně vybereme tři základní barvy, můžeme jejich mísením dostat převážnou většinu všech existujících barevných odstínů. Toho využívá *barevná televize a barevná fotografie*. V barevné televizi dochází k mísení tří základních barev znázorněných na obr. 9 body R_{TV}, G_{TV}, B_{TV} . Oblast barevné televize je na obr. 9 znázorněna čárkovaným trojúhelníkem. Je vidět, že barevná televize nemůže přenášet přesně naprosto všechny barevné odstíny.

Čtenáře by možná zajímalo, jak je to s *barvoslepostí*. Barvoslepost může být úplná nebo částečná. Částečná barvoslepost se nazývá *daltonismus* podle anglického vědce *J. Daltona*, který touto chorobou trpěl a poprvé

ji vědecky zkoumal. Podle výše uvedeného modelu barevného vidění vzniká daltonismus tím, že nefunguje jeden ze tří druhů receptorů. Daltonik tedy vidí pouze dvě barvy a jejich směsi. Úplná barvoslepost vznikne tehdy, když nefungují alespoň dva druhy receptorů.

Závěrem je nutno připomenout, že uvedený model barevného vidění je krajně zjednodušen a že existence tří druhů receptorů v lidském oku je pouze hypotéza, která je v souladu s experimentálním pozorováním a naší zkušeností. Existence barvocitlivých čípků je sice prokázána, avšak zatím se nikomu nepodařilo přímo rozlišit jejich tři druhy. Kromě tříslložkové teorie barevného vidění existuje též teorie dvousložková.

astronomie

Zdánlivé pohyby kosmických těles - II.

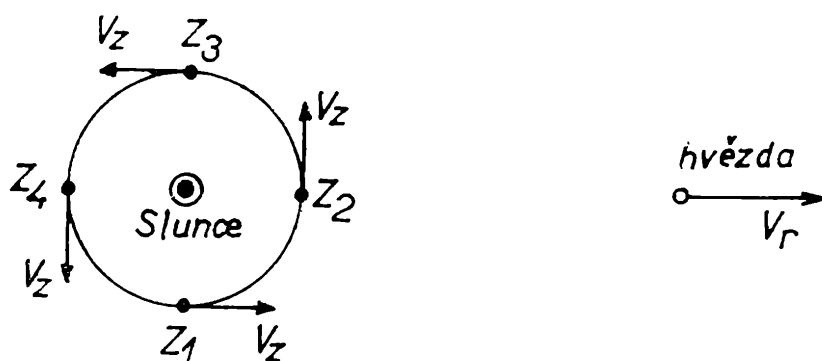
RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

O hvězdách jsme dosud uvažovali jako o velmi vzdálených objektech, jejichž poloha na sféře se nemění a které vlivem rotace Země konají jen zdánlivý denní pohyb — spolu se sférou se otáčejí kolem světové osy. Ve skutečnosti se hvězdy, tak jako všechna kosmická tělesa, pohybují, a to poměrně velkými rychlostmi vzhledem ke sluneční soustavě; rychlosti hvězd jsou řádově desítky až sta kilometrů za sekundu. Rychlost hvězdy vzhledem ke Slunci můžeme rozložit na dvě složky, na rychlost radiální ve směru zorného paprsku a na rychlost tangenciální, která je kolmá ke směru zorného paprsku. Radiální složku rychlosti můžeme měřit spektroskopicky, tangenciální složka se projevuje změnou souřadnic hvězdy, tj. změnou její polohy na sféře; protože jsou však hvězdy v obrovských vzdálenostech od nás, jsou tyto změny nepatrné a jen u poměrně blízkých hvězd dosahují několika obloukových vteřin za rok. Pohyby hvězd vzhledem ke Slunci se při měření ze Země skládají s pohybem Země vzhledem ke Slunci.

Periodické změny v radiálních rychlostech hvězd

Uvažujme hvězdu, která leží v rovině ekliptiky a předpokládejme, že se tato hvězda vzdaluje od sluneční soustavy rychlostí 50 km s^{-1} , radiální složka rychlosti hvězdy je tedy $V_r = +50 \text{ km s}^{-1}$ (radiální rychlosti bereme kladně při vzdalování, záporně při přibližování hvězdy). Rych-

lost Země na její dráze kolem Slunce je přibližně $V_Z = 30 \text{ km s}^{-1}$. Situace je znázorněna na obr. 1. Relativní rychlost hvězdy vzhledem k Zemi se bude během roku měnit: je-li Země v poloze Z_1 , přibližuje se ke hvězdě a při měření zjistíme pro radiální rychlost hodnotu $V_{r1} = V_r - V_Z = -20 \text{ km s}^{-1}$. V poloze Z_2 je rychlost Země kolmá k rychlosti hvězdy, proto nemá vliv na zjištěnou hodnotu radiální rychlosti V_r , v poloze Z_3 se od hvězdy vzdaluje a naměříme $V_{r3} = V_r + V_Z = 80 \text{ km s}^{-1}$, v poloze Z_4 bychom naměřili opět hodnotu V_r . Při měření během celého roku bychom zjistili, že se radiální rychlost vzhledem k Zemi periodicky mění podle sinusoidy (s radiální rychlostí hvězdy se skládá průmět rychlosti Země do směru ke hvězdě) kolem střední hodnoty V_r s amplitudou rovnou rychlosti Země V_Z . Pro hvězdy, které neleží na



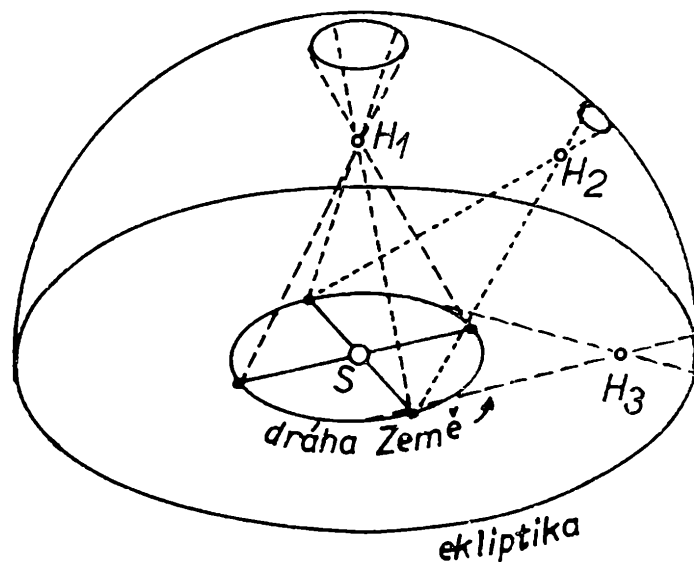
Obr. 1. Vznik periodických změn radiálních rychlostí hvězd vzhledem k Zemi

ekliptice, je průběh radiálních rychlostí obdobný, jen amplituda je menší; jen pro hvězdy, které leží ve směru kolmém k rovině dráhy Země, je rychlost Země trvale kolmá k radiální rychlosti hvězdy, a proto měření neovlivňuje. Změny radiálních rychlostí mají u všech hvězd periodu jednoho roku, jejich amplituda závisí na poloze hvězdy vzhledem k rovině ekliptiky, ale nezávisí na vzdálenosti hvězdy. Při stanovení radiálních rychlostí hvězd vzhledem ke sluneční soustavě je ovšem nutné skutečně naměřené hodnoty opravit o vliv rychlosti Země. Pro úplnost připomeňme, že naše úvaha se týkala jednoduchých hvězd, které nejsou složkou dvojhvězdy nebo vícenásobné hvězdy; u dvojhvězd se projevují v radiálních rychlostech periodické změny způsobené pohybem složek kolem společného hmotného středu.

Roční paralaxa hvězd

Země obíhá kolem Slunce po dráze s velkou poloosou $149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$. Tato vzdálenost je sice vzhledem ke vzdálenostem hvězd velmi malá, u poměrně blízkých hvězd se však projevuje změna polohy Země v nepatrných změnách poloh hvězd na sféře. Polohy blízkých hvězd se během roku mění vzhledem k polohám velmi vzdálených hvězd, na něž již

pohyb Země nemá měřitelný vliv — blízké hvězdy opisují na pozadí hvězd vzdálených eliptické dráhy. Vznik této roční paralaxy hvězd je znázorněn na obr. 2. Ve středu sféry je Slunce, blízké hvězdy jsou uvnitř sféry, velmi vzdálené objekty na jejím povrchu. Při oběhu Země kolem Slunce se mění směr zorného paprsku. Hvězda H_1 , ležící ve směru kolmém k rovině ekliptiky, bude během roku opisovat na sféře kruhovou dráhu (přesněji řečeno dráhu stejného tvaru, jako je dráha Země kolem Slunce), hvězda H_2 bude opisovat dráhu eliptickou, hvězda H_3 , ležící v rovině ekliptiky, se bude během roku pohybovat po úsečce. Perioda pohybu je pro všechny hvězdy jeden rok, tvar dráhy závisí na poloze hvězdy vzhledem k rovině ekliptiky a rozměry dráhy na vzdálenosti hvězdy od sluneční soustavy; velká poloosa zdánlivé dráhy hvězdy na sféře je nepřímo úměrná vzdálenosti hvězdy.



Obr. 2. Roční paralaxa hvězd

Roční paralaxy hvězd mají skutečně nepatrné hodnoty a bylo možno změřit je teprve tehdy, když měřicí technika dosáhla dostatečné přesnosti. Poprvé změřili paralaxu hvězdy ve třicátých letech 19. století téměř současně F. Bessel u hvězdy 61 Cygni, L. Struve u hvězdy α Lyrae a T. Henderson u hvězdy α Centauri. Paralaxy všech hvězd jsou menší než jedna oblouková vteřina. Největší paralaxu má hvězda 9. hvězdné velikosti, nazývaná Proxima Centauri; je to nejbližší hvězda ve vzdálenosti 4,3 světelného roku (l.y.). Pro zajímavost uvedme, že o měření paralaxy se astronomové pokoušeli od dob M. Koperníka, neboť její existence nutně plyne z heliocentrické sluneční soustavy. V té době ovšem zjištění tak malých úhlů bylo naprosto nemožné; neúspěch při snaze zjistit roční paralaxu vedl slavného astronoma Tychona Brahe (1546—1601) k tomu, že Koperníkovu heliocentrickou soustavu nepřijal. Mimo jiné to svědčí o tom, že v tehdejší době neměli astronomové před-



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 57, 1978-79

VEDOUcí REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER, UK Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Dr. Jiří Mída, UK Praha

REDAKČNÍ RADA: Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno,
doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT
Praha, dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chu-
dý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha,
dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT
Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj,
VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPŠE Praha, dr. Jiří Sedlá-
ček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaro-
slav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondrej Šedivý, CSc., PF Nitra,
ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

**Vydává ministerstvo školství
ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze
za odborné péče
Jednoty československých matematiků a fyziků**

OBSAH

Úvodníky

Kraemer Emil: K zahájení 57. ročníku Rozhledů	1
Večeř Jan: Třicet let RVHP	241

Matematika

Bican Ladislav: O Eukleidově algoritmu	385
Delande Georges: Pyramidální aritmetické posloupnosti	110
Drábek Karel: Kruhová inverze	218
Mocnost bodu ke kružnici	309
Fabinger Petr: Celá část reálného čísla	250
Fejtková Pavla, Malík Marek: Datové typy	20
Třídy	58
Pointry	113
Další úvahy o datových typech	205
Příkazy	254
Příkazy pro referenční proměnné	289
Cykly, seznamy a generátor	337
Parametry a procedury	388
Počítače	433
Havlena Vladimír, Kokeš Jaroslav: Co možná nevíte o kvadratických rovnicích	210
Horák Stanislav: O čtyřstěnu	67
Nejmladším matematikům	69
Speciální křivky třetího stupně	262
Hradecký František: Užití analogie v algebře	49
Chajda Ivan: Určování objemů těles pomocí Cavalieriho principu	2
Komenda Stanislav: Co stojí naděje	123
Kraemer Emil: Feuerbachova kružnice devíti bodů	266
Matyášek František: Některé vlastnosti podobných trojúhelníků	10

II.

Mída Jiří: Devítkový doplněk	121
Mráz Vlastimil: Přesnost výpočtů s neúplnými čísly	296
Pavlas Karel: Existence přímek protínajících systémy útvarů	215
Půlpán Zdeněk: Bernoulliovo schéma	346
Šedivý Jaroslav: Kvadratrix	7
Výzkumné úkoly motivované rovností měr útvarů	72
Mnohočleny s větším počtem prvočíselných hodnot	260
Volf Milan: O jednom zajímavém zobrazení	64
Vyšín Jan: Pravděpodobnostní hra I (Náhodné procházky)	97
Pravděpodobnostní hra II (Pozvěme na pomoc algebru)	145
Pravděpodobnostní hra III (A nakonec něco pro gymnazisty)	193

Konstrukční geometrie

Hradecký František: K rovinným řezům na rotační kuželové ploše	26
Šarounová Alena: Vzájemně kolmé tečny paraboly	74

Fyzika

Brada Pavel: Model barevného vidění	443
Černý Vladimír, Pišút Ján: O rozvíjení fyzikálneho myslenia riešením úloh typu „Odhadnite ...“	157
Dvořák Leoš: Teorie relativity	396
Houdek Oldřich: O teplotách tání a varu ještě jinak	223
Hylán Jaroslav: Konstrukce parabolické dráhy šikmého vrhu	30
Pöss Ondrej, Štrbová Anna: Jedna metóda merania rýchlosti zvuku v pevných látkach	314
Šilhán Jindřich: Úloha o broukovi a gumě	405
Šindelář Václav: Jak lze tvořit koherentní odvozené jednotky	349
Tulak Rudolf: Padesát let Geiger-Müllerova detektoru	272

Astronomie

Hudec René: Nové blízké planety	163
Široká Miroslava, Široký Jaromír: Planeta Země	318
Zdánlivé pohyby kosmických těles — I.	355
Zdánlivé pohyby kosmických těles — II.	452

Z dějin exaktních věd

Dvořák Leoš: Náčelník Veliké relativity	244
Drábek Karel: Matěj Norbert Vaněček	277
Jedinák Dušan: Bernard Bolzano — humanista a matematik	363
Ľotyč Josef: Thomas Young	365
William Thomson (Kelvin)	459
Kušnier Jozef: História komplexných čísel	324

Rebstöck Radovan: 100 let elektromotoru v železniční dopravě	411
Sedláček Jiří: Významný polský matematik	409
Šindelář Václav: Krátká historie českých měr	279

Naše soutěž

Úlohy k řešení	37, 77
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	41, 77, 126, 164
Výsledky loňské soutěže Rozhledů	76

Olympiády

MO	90, 91, 92, 137, 462
FO	413, 467
Vrba Antonín: Čebyševova nerovnost	367

Nejmladším čtenářům	178, 228, 283, 375
----------------------------	--------------------

Matematické zábavy	328, 376, 421
---------------------------	---------------

Z Jednoty čs. matematiků a fyziků	179, 430
--	----------

Ze zahraničních časopisů	47, 142, 180, 228, 283, 423
---------------------------------	-----------------------------

Různé

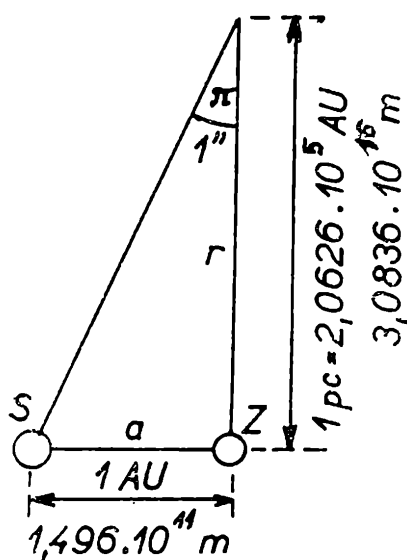
Barták Jaroslav: Matematika převážně — vážně	476
Janout Zdeněk: Novosibirská státní univerzita	331
J. S.: O dokonalých čtvercích	233
Klaučová Olga: Matematika pri prijímacích pohovoroch na vysokých školách ZSSR	379, 428
Kotyk Josef: Hrst vzpomínek	44
Beseda čtenářů k 430. výročí narození Giordana Bruna	141, 185
Mída Jiří: Kdy bude zase rok končit nedělí	183
Řešení úlohy z prosincového čísla Rozhledů	236
Mrázek Jiří: Elektronické hračky pro děti	45
K používání kapesních kalkulačků ve škole	93
Začal vás v létě zlobit televizor?	139
Porucha není ve vašem přijímači	182
Zajímavé rozměry rádiových vln	232
Sedláček Jiří: In memoriam	231
Strossa Petr: Sen	187
Svoboda Tomáš: Astronautika za mír a lidský pokrok	334
Šedivý Jaroslav: Mezinárodní kongres matematiků 1978	235

Recenze	94, 144, 189, 237, 284, 336, 384, 431
----------------	---------------------------------------

stavu o nesmírných vzdálenostech hvězd; Tycho Brahe byl jedním z posledních astronomů, kteří pozorovali oblohu bez dalekohledu: přesnost v měření polohy hvězd tehdejšími přístroji dosahovala jen 1 až 2 obloukové minuty; aby tedy paralaxu změřil, musela by nejbližší hvězda být ve vzdálenosti alespoň dvěstěkrát menší, než je tomu ve skutečnosti.

Závislost paralaxy na vzdálenosti hvězd se využívá k trigonometrickému měření vzdáleností hvězd. Vychází se přitom ze skutečnosti, že paralaxa (velká poloosa zdánlivé dráhy dané hvězdy na sféře) je rovna úhlu, pod kterým bychom z hvězdy viděli poloměr zemské dráhy. Jednotkou vzdálenosti, používanou v astronomii, je parsek (pc). Parsek je vzdálenost, z níž se jeví velká poloosa zemské dráhy pod úhlem $1''$

(obr. 3). Vzdálenost hvězdy $r = \frac{1}{\pi}$ pc, kde π je roční paralaxa hvězdy



Obr. 3. K definici parseku

v obloukových vteřinách. Známe-li vzdálenost hvězdy v jednotkách pc, můžeme ji snadno vyjádřit také v libovolných jiných délkových jednotkách. Podle obr. 3 platí $a = r \operatorname{tg} \pi$; úhel π je velmi malý, je tedy $a = r\pi$

a odtud $r = \frac{a}{\pi}$. Při vzdálenosti $r = 1$ pc je $\pi = 1'' = 4,8481 \cdot 10^{-6}$ rad,

je tedy $1 \text{ pc} = \frac{1}{4,8481 \cdot 10^{-6}} \text{ AU} = 2,0626 \cdot 10^5 \text{ AU}$, nebo v soustavě SI

$1 \text{ pc} = \frac{1,496 \cdot 10^{11}}{4,8481 \cdot 10^{-6}} = 3,0836 \cdot 10^{16} \text{ m}$. Pro převod parseku na světelné roky platí $1 \text{ pc} = 3,259 \text{ l.y.}$

Měření ročních paralax hvězd je i při použití fotografických metod stále zatíženo poměrně velkými pozorovacími chybami; chyby v určení dosahují hodnot kolem $0,02''$, což znamená, že lze takto určovat paralaxy jen poměrně blízkých hvězd. Při vzdálenosti 50 pc je paralaxa $0,02''$, relativní chyba měření tedy dosahuje 100 %. Při měření paralax jsme vá-

zání na naši Zemi. Kdyby bylo možné měřit paralaxy např. z planety Jupitera, který obíhá kolem Slunce ve vzdálenosti 5,2 AU, dosahovaly by paralaxy 5,2krát větší hodnoty než na Zemi, u Saturna 10krát větších hodnot atd.; relativní přesnost měření by se tedy zvětšila, neboť zorný úhel, pod nímž se jeví velká poloosa dráhy planety, by se zvětšil a hvězdy pozorované z této planety by opisovaly na sféře větší dráhy.

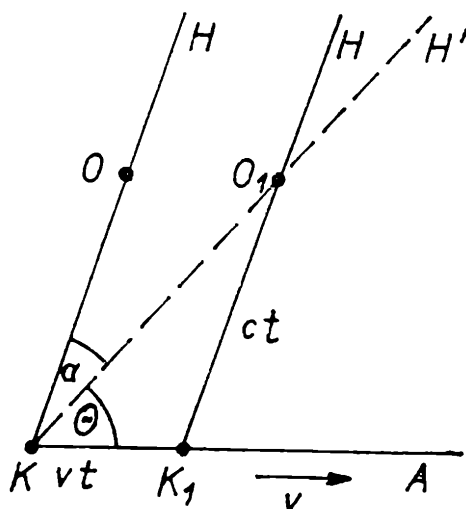
Aberace světla hvězd

Jedním ze dvou základních principů, na nichž je založena Einsteinova speciální teorie relativity, je princip stálé rychlosti světla: rychlost šíření světla ve vakuu je konstantní, nezávislá na vzájemném pohybu vztažných soustav. Znamená to, že měříme-li rychlost světla, vysílaného hvězdami, naměříme vždy touž hodnotu, ať se k nám hvězda přibližuje nebo se od nás vzdaluje sebevětší rychlostí (rychlost hmotných objektů ovšem nemůže být větší než rychlost světla c , tato rychlost je mezní rychlostí pro hmotné objekty). Pro rychlost šíření světla ve vakuu byla změřena hodnota $c = 2,997\,929 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Z principu stálé rychlosti světla ovšem neplyne, že relativní pohyb soustav nemá na světlo (elektromagnetické vlnění) žádný vliv. Při pohybu ve směru spojnice soustav se mění vlnová délka světla, na čemž je založeno měření radiálních rychlostí hvězd. Je-li pohyb kolmý ke spojnici soustav, skládá se rychlost světla s relativní rychlostí soustav, což se projevuje ve změně směru vektoru rychlosti světla (jeho velikost je ovšem stálá); hvězda, která vysílá světlo, se jeví posunuta ve směru relativní rychlosti pozorovatele. Tomuto jevu se říká aberace světla hvězd. S rychlostí světla vysílaného hvězdami se skládá také rychlost Země na její dráze kolem Slunce. Protože se směr rychlosti Země neustále mění, opisují hvězdy zdánlivě eliptické dráhy s periodou jednoho roku; hovoříme pak o *roční aberaci*.

Roční aberaci světla hvězd objevil již v roce 1725 anglický astronom James Bradley; zajímavé na jeho objevu je to, že nehledal aberaci, ale snažil se objevit paralaxu hvězd. Ke svému pozorování si zvolil hvězdu γ Draconis, která při zdánlivém denním otáčení sféry procházela v blízkosti zenitu; souhvězdí Draka patří mezi cirkumpolární souhvězdí, mohl proto hvězdu pozorovat po celý rok. Měření ukázala, že hvězda opsala na obloze za rok kružnici o poloměru asi $20''$, posunovala se však jinak, než by odpovídalo paralaktickému posuvu. Bradley pak pozoroval několik hvězd na různých místech oblohy a zjistil, že všechny se posunují týmž směrem a opisují eliptické dráhy o téže velké poloose ($20''$), malá poloosa se zmenšuje od pólu ekliptiky (v jeho blízkosti je γ Draconis) směrem k ekliptice, kde je malá poloosa rovna nule. Roční aberace souvisí s oběhem Země kolem Slunce, nesouvisí však se vzdáleností hvězd — velká poloosa dráhy hvězdy je pro všechny hvězdy stejná, malá poloosa závisí

na poloze hvězdy vzhledem k rovině ekliptiky, a tedy také na směru rychlosti Země vzhledem ke směru rychlosti světla vysílaného hvězdou.

Vznik aberace vysvětlíme na obr. 4. Při výkladu nebudeme brát v úvahu relativistické efekty; vzhledem k tomu, že rychlost Země na dráze kolem Slunce je velmi malá ve srovnání s rychlostí šíření světla, je výsledek odvozený na základě klasické mechaniky shodný s výsledkem relativistického odvození. Uvažujme, že dalekohledem pozorujeme hvězdu H . Bod O je střed objektivu dalekohledu, bod K střed okuláru. Kdyby byla Země v klidu, dopadl by paprsek procházející středem objektivu na střed okuláru, obraz by se vytvořil v bodě K a hvězdu



Obr. 4. Aberace světla hvězdy

bychom pozorovali ve směru KH . Dalekohled se však spolu se Zemí pohybuje rychlostí v ve směru KA . Světlo se šíří rychlostí c , a proto paprsek, dopadající na střed O objektivu, potřebuje určitý čas t , aby dosáhl okuláru. Za tuto dobu t urazí světlo dráhu $OK = ct$ a dopadne do bodu K , avšak dalekohled spolu se Zemí se přesune o dráhu $KK_1 = vt$. Okulár je nyní v místě K_1 , objektiv v místě O_1 . Obraz hvězdy se nevytvoří ve středu okuláru, neboť ten se za dobu průchodu světla dalekohledem posunul do polohy K_1 . Má-li světlo dopadat na střed okuláru, musí být dalekohled skloněn o úhel α ve směru pohybu dalekohledu tak, aby objektiv byl již v bodě O_1 , zatímco okulár je v bodě K . Světlo hvězdy tedy zdánlivě nepřichází ze směru H , ale ze směru H' . Zdánlivý směr ke hvězdě KH' svírá se skutečným směrem KH úhel α , který se nazývá *aberační úhel*. Pro velikost aberačního úhlu plyne z trojúhelníku KK_1O_1 vztah

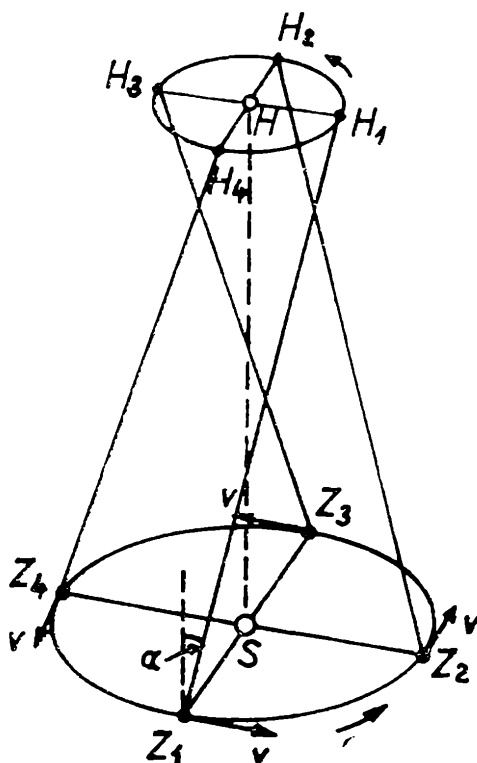
$$\sin \alpha = \frac{v}{c} \sin \Theta ,$$

kde Θ je úhel, který svírá zdánlivý směr ke hvězdě se směrem pohybu pozorovatele. Protože aberační úhel je velmi malý, platí

$$\alpha = \frac{v}{c} \sin \Theta.$$

Na základě měření aberačního úhlu lze určit rychlost šíření světla c , známe-li rychlost Země na její dráze (a ovšem také úhel Θ); při známé rychlosti světla je naopak možno určit rychlost Země na její dráze. Pro vyjádření aberačního úhlu v obloukových vteřinách platí

$$\alpha'' = 20,47'' \sin \Theta,$$



Obr. 5. Roční aberace hvězdy v blízkosti pólu ekliptiky

hodnota $20,47''$ se nazývá *aberační konstanta*. Pro hvězdy na pólu ekliptiky je $\Theta = 90^\circ$, tyto hvězdy opisují během roku prakticky kružnice o poloměru $20,47''$, s rostoucí vzdáleností od pólu ekliptiky se mění kružnice ve stále protáhlejší elipsu a hvězdy v rovině ekliptiky opisují úsečky o délce $40,94''$. Na obr. 5 je znázorněn aberační posuv hvězdy ležící v blízkosti ekliptiky, jak se jeví během ročního oběhu Země kolem Slunce. Je-li Země v poloze Z_1 , jeví se hvězda H posunuta o aberační úhel α ve směru rychlosti Země, tj. do polohy H_1 . Za čtvrt roku je Země v poloze Z_2 , hvězda se jeví posunuta do polohy H_2 a za rok opíše dráhu $H_1H_2H_3H_4$. Aberační úhel je mnohonásobně větší než paralaxy i nejbližších hvězd, proto byl objeven dříve a lze jej také změřit s relativně velkou přesností.

Při měření ovšem nelze měřit posunutí hvězd vzhledem k „hvězdnému pozadí“; všechny objekty, které se na obloze promítají do blízkosti sledované hvězdy, opisují shodné aberační dráhy nezávisle na svých vzdálenostech od Země.

Přes roční aberaci se překládá *aberrace denní*, vznikající vlivem rotace Země kolem osy. Největší hodnoty dosahuje na rovníku, kde se body na zemském povrchu pohybují rychlostí $0,464 \text{ km s}^{-1}$; aberrace tam má hodnotu $0,319''$, směrem k pólům se denní aberrace zmenšuje a na pólech je nulová.

Země se spolu se sluneční soustavou pohybuje kolem centra Galaxie rychlostí asi 250 km s^{-1} a tento pohyb způsobuje tzv. *sekulární aberaci*. Tato aberrace je podstatně větší než roční aberrace, protože se však směr rychlosti sluneční soustavy prakticky nemění — vzhledem k velké oběžné době Slunce se jeho pohyb jeví jako rovnoměrný a přímočarý — nelze sekulární aberaci měřit, neboť všechna kosmická tělesa jsou zdánlivě posunuta o týž úhel, který se s časem nemění. V praktické astronomii proto k sekulární aberaci nepřihlížíme.

Z dějin exaktních věd

William Thomson (Kelvin)

JOSEF KOTYK, Pardubice

Do dějin vědy zapsalo se několik významných Thomsonů. Naším čtenářům je z učiva fyziky známo jméno Williama Thomsona (Kelvina), jedné z největších osobností vědy a techniky 19. století.

William Thomson se narodil před 155 lety dne 26. června 1824 v Belfastu v Severním Irsku v rodině skotského původu. V roce 1832 byl jeho otec James, profesor matematiky Královského akademického ústavu v Belfastu, jmenován profesorem na universitě v Glasgowě ve Skotsku. Po universitních studiích v Glasgowě a v Cambridge pracoval William v proslulé Regnaultově¹⁾ laboratoři v Paříži. Již v roce 1846 stal se, dvaadvacetiletý, profesorem university v Glasgowě, kde působil do svých sedmdesáti pěti let; v roce 1904 byl, osmdesátiletý, ještě rektorem této

¹⁾ *Henri Regnault* (1810—1878), profesor na Collège de France, měřil napětí nasycených par, specifické teplo, roztažnost plynů aj. Čtenářům je znám také Regnaultův hygrometr.

university. Zemřel dne 17. prosince 1907. Je pohřben na westminsterském opatství v Londýně, kde odpočívá také velký Isaac Newton, na jehož tradice Thomson navazoval.

Thomsonovy přednášky na universitě byly pro průměrné posluchače velmi náročné. Hlavními jejich myšlenkami byl Thomson cele zaujat. Říkalo se o něm, že je v současné době jediným fyzikem, jenž během přednášení — vynalézá. Byl také vynikajícím matematikem. Při řešení problémů teoretické fyziky dosahoval tak rychlých úspěchů, že uváděl kolegy-matematiky v přímý úžas. Matematika byla mu ovšem jen nástrojem poznání fyzikálních dějů.

Velikou popularitu zajistily Thomsonovi jeho práce na přenosu telegrafních signálů kabely. Thomson ukázal, že fyzikálně jde v podstatě o nabíjení a vybíjení kondensátoru (velmi dlouhé leydenské láhve), a stanovil, že signály se zpozdí o čas úměrný součinu kapacity a odporu kabelu. Vypracoval také směrnice k výrobě podmořského kabelu, jenž je ovšem neustále nabit, telegrafování pak záleží jen ve změnách jeho náboje. Zabýval se i dynamikou sil při jeho kladení a vyzdvižení při opravách poruch. S uznáním zásluh o úspěšné položení transatlantického kabelu (délky 2650 km a průměru 27 mm) mezi Irskem a New-Foundlandem v roce 1866²⁾, jež umožnilo přímé telegrafní spojení Evropy s Amerikou, byl Thomson povýšen královnou Viktorií do stavu rytířského a dne 10. listopadu 1866 jmenován sirem.

Pracemi na podmořské telegrafii byl Thomson přiveden také k vynálezu zrcátkového galvanometru (známého dnes jako systém Deprez-d'Arsonvalův) a sifonového zapisovače. Ze středoškolského učiva je čtenářům znám Thomsonův vzorec pro kmitočet oscilací při výboji kondensátoru přes indukčnost, Thomsonův dvojmost pro měření velmi malých odporů, Joule-Thomsonův jev (jeho užití vedlo ke zkapalnění plynů) aj.

Bohatou kapitolu dějin fyziky tvoří Thomsonovy práce v termodynamice. Thomson poznal, že teplo je druh energie a důsledným uplatňováním výsledků Jouleových³⁾ pokusů o ekvivalenci tepla a mechanické práce uváděl v život první hlavní větu termodynamiky. Úvahami o účinnosti tepelných strojů, které pracují s Carnotovými⁴⁾ cykly,

²⁾ O dřívějších neúspěšných pokusech tohoto druhu píše podrobně sborník Devatenácté století slovem i obrazem (vyd. J. R. Vilímek v Praze), díl II., sv. 1, str. 109 až 151.

³⁾ Od Jouleova úmrtí dne 11. října 1889 uplyne letos 90 let. Jeho vědecké činnosti se týká autorův článek *James Prescott Joule* v Rozhledech roč. 38, čís. 2, 3 a 4.

⁴⁾ *Nicolas Léonard Sadi Carnot* (1796—1832) vypracoval teorii tepelných strojů a schéma ideálního tepelného stroje, v němž probíhá cyklický proces — Carnotův cyklus.

dospěl k závěru že není možno získávat nepřetržitě práci, jestliže jen ochlazujeme nějaké těleso pod teplotu nejchladnější části okolního prostředí, a k formulaci druhé hlavní věty termodynamiky. Thomson uznával pak absolutní vládu I. a II. hlavní věty termodynamiky nad fyzikálními ději. Jeho povýšení královnou Viktorií do stavu šlechtického (23. února 1892) s označením „lord Kelvin of Largs“ (podle říčky Kelvin, která protéká v blízkosti university v Glasgově, a místa Largs ve Skotsku) bylo právem komentováno s tím, že konečně se stal šlechticem vědec proto, že je — vědcem.

Při rozboru účinnosti ideálních Carnotových cyklů dospěl Thomson k zavedení nové teploměrné stupnice (Kelvinovy); její stupně jsou stejně velké jako Celsiovy, avšak teplotě $t\text{ }^{\circ}\text{C}$ přísluší Kelvinova teplota $(t + 273,15)\text{ }^{\circ}\text{K}$; trojnému bodu vody, který je základním definičním teplotním bodem, přísluší teplota $+0,010\text{ }^{\circ}\text{C}$, což odpovídá teplotě $273,16\text{ }^{\circ}\text{K}$. Základní jednotkou termodynamické teploty (značenou do roku 1967 jako $^{\circ}\text{K}$, nyní však pouze K) je kelvin, definovaný jako 273,16-tá část termodynamické teploty trojného bodu vody.

Z přehledu prací v oboru termodynamiky je zřejmá oprávněnost tvrzení, že tyto práce by samy stačily již zajistit Thomsonovi nesmrtelnost.⁵⁾

Poznámka.

Na nové teorie se díval Thomson s nedůvěrou, pokud se mu nepodařilo podložit je názorným mechanickým modelem. Nemohl se např. smířit zejména s elektromagnetickou teorií světla, s kterou roku 1865 vystoupil J. C. Maxwell. Od Maxwellova úmrtí dne 5. listopadu 1879 uplyne letos právě 100 let, odkazujeme čtenáře proto k autorovu článku *James Clerk Maxwell*, v *Rozhledech*, roč. 28, čís.4, str. 65 až 67.

⁵⁾ S. P. Thompson: *The Life of William Thomson, Baron Kelvin of Largs*. (Londýn, 1910.)

olympiády

Úlohy 29. ročníku matematické olympiády

Kategorie A

Přípravné úlohy

A-P-1 Obsah P konvexního čtyřúhelníku se stranami a, b, c, d a úhly α (mezi stranami a, b), γ (mezi stranami c, d) je dán vzorcem

$$16P^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

neboli

$$P^2 = \frac{1}{16} (-a + b + c + d) \cdot (a - b + c + d) \cdot (a + b - c + d) \cdot$$

$$\cdot (a + b + c - d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Dokažte tento vzorec a odvoďte z něho větu: Při pevných velikostech stran a, b, c, d (a proměnných úhlech α, γ) má konvexní čtyřúhelník největší obsah, je-li tětivový, tj. leží-li všechny jeho vrcholy na kružnici.

A-P-2 Jsou-li A_1, A_2, A_3 vrcholy ostroúhlého trojúhelníka, pak nejmenší kruh, který je obsahuje, je kruh omezený kružnicí opsanou trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Nejsou-li body A_1, A_2, A_3 vrcholy ostroúhlého trojúhelníka a jsou-li aspoň dva z nich navzájem různé, pak nejmenší kruh, který obsahuje body A_1, A_2, A_3 , je kruh omezený Thaletovou kružnicí nad nejdelší z úseček A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 . Dokažte.

A-P-3 Pro každé kladné reálné čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Kedy platí rovnost?

A-P-4 Jsou dány konečné množiny M_1, M_2, M_3, M_4 . Symbolem $|M|$ označme počet prvků množiny M . Dokažte, že platí

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| -$$

$$\begin{aligned}
& - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_1 \cap M_4| - |M_2 \cap M_3| - \\
& - |M_2 \cap M_4| - |M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4| + \\
& + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4| - |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|.
\end{aligned}$$

Soutěžní úlohy

- A-I-1 Označme P_A obsah trojúhelníka $A_1A_2A_3$ a P_B obsah trojúhelníka $B_1B_2B_3$. Jestliže $|A_iA_k| \geq |B_iB_k|$ pro všechny dvojice indexů 1, 2, 3 a v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ není žádný úhel tupý, pak $P_A \geq P_B$. Dokažte.
- A-I-2 Najděte délky stran konvexního čtyřúhelníka, jehož nejdelší strana má délku 13 cm a nejkratší 3 cm, víte-li, že jeho obsah je 96 cm^2 .
- A-I-3 V rovině je dána konečná množina bodů. Každý z nich je označen právě jednou ze tří barev a přitom je každé barvy použito alespoň pro jeden bod. Dokažte, že existuje kruh, který obsahuje po jednom bodu dvou barev a alespoň jeden bod třetí barvy.
- A-I-4 Pro každé kladné reálné čísla $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ platí

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k y_k} \geq \frac{4n^2}{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2}.$$

Dokažte. Kedy platí rovnost?

- A-I-5 Na škole pracuje 64 žiaků v 5 záujmových kruzích. Každý kroužek má aspoň 19 členů. Žádný žiak nepracuje ve více než troch kruzích, ale každé tři kroužky mají aspoň jednoho společného člena. Dokažte, že existují dva kroužky, které mají společných aspoň 5 členů.
- A-I-6 Řešte soustavu rovnic s neznámými $x_1, \dots, x_n$ (c, d sú reálne čísla):

$$\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 &= c \\
x_1 - 2x_2 + x_3 &= c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n &= c \\
x_{n-1} - 2x_n + d &= c.
\end{aligned}$$

Kategorie B

Přípravné úlohy

- B-P-1 Je dáno kladné číslo c , rovina a v ní dvě různoběžky p, q .

- a) Určete množinu všech bodů X dané roviny, pro které je součet vzdáleností od přímek p, q roven c .
 b) Určete množinu všech bodů X dané roviny, pro které je absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od přímek q, p rovna číslu ϵ .

B-P-2 Na šachovnici tvaru 20×20 polí je vyznačeno 31 navzájem různých šachovnic tvaru 8×8 . Dokažte, že existuje pole, které patří alespoň šesti vyznačeným šachovnicím.

B-P-3 Najděte všechny reálné čísla a, b, c také, že rovnice

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

má kořeny a, b, c .

B-P-4 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y = s$$

$$ax + 2y = 0$$

o neznámých x, y , přičemž a, s jsou reálná čísla. Proveďte diskusi řešitelnosti soustavy vzhledem k číslům a, s .

Soutěžní úlohy

B-I-1 Do kružnice je vepsán 1979-úhelník $A_1 A_2 \dots A_{1979}$. Leží-li střed kružnice uvnitř 1979-úhelníka, pak součet úhlů při vrcholech

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{1977}$ je menší než $\frac{1977}{2} \pi$.

Dokažte.

B-I-2 V rovině je dán konvexní úhel a v něm kružnice. Sestrojte na kružnici body, pro které je součet vzdáleností od ramen úhlu minimální.

B-I-3 Je dán trojúhelník ABC , jeho výšky označme v_a, v_b, v_c . Zjistěte zda existuje trojúhelník UVW tak, aby $|UV| = v_a, |VW| = v_b, |WU| = v_c$ a aby strany UV, VW, WU byly po řadě kolmé na strany BC, CA a AB trojúhelníka ABC .

B-I-4 Na šachovnici tvaru 1000×1000 stojí 800 000 figurek. Dokažte, že na obvodu některé její části tvaru 8×8 stojí alespoň 22 figurky.

B-I-5 Kolik řešení má v oboru reálných čísel soustava rovnic

$$ax + \frac{b}{y} = 1$$

$$by + \frac{a}{x} = 1$$

s neznámými x, y ? Proveďte diskusi vzhledem k daným reálným číslům a, b .

B-I-6 Najdite všechny trojice přirozených čísel x, y, z také, že

$$x^3 + y^3 + z^5 = 1979,$$

$$y^2z = x.$$

Kategorie C

Přípravné úlohy

- C-P-1 Je dán trojúhelník ABC . Označme P, Q, R středy jeho stran. Dokažte, že trojúhelníky ABC a PQR mají těžiště ∇ tomtéž bodě.
- C-P-2 Je dán obdélník $ABCD$, v němž je $AB = 2a, BC = a$. Nad stranami AB, AD jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu A mají společný ještě bod K .
- a) Dokažte, že bod K leží na úhlopříčce BD .
- b) Vypočtěte vzdálenosti bodu K od vrcholů A, B, D .
- C-P-3 Najděte všechna trojčíselná přirozená čísla s touto vlastností: Napíšeme-li před hledané číslo stejnou cifru, jako je ta, která stojí na místě jeho jednotek, dostaneme čtyřčíselné číslo, které je o 18 menší než sedminásobek hledaného čísla.
- C-P-4 Určete všechna čísla a, b , pro která platí
- $$(a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 \geq 0.$$
- Zjistěte všechna a, b , pro která nastane rovnost.

Soutěžní úlohy

- C-I-1 V rovině je dán trojúhelník ABC a přímka p , která neprochází žádným jeho vnitřním bodem. Dokažte, že součet vzdáleností bodů A, B, C od přímky p se rovná součtu vzdáleností středů stran AB, BC, AC od přímky p .
- C-I-2 Úsečka AB délky 12 cm je rozdělena bodem C v poměru 1 : 2. V jedné polorovině určené přímkou AB jsou sestrojeny polokružnice s průměry AB, AC, CB . Vypočítejte poloměr kružnice, která se dotýká všech tří polokružnic.
- C-I-3 Jsou dány dvě kružnice, které se dotýkají vně v bodě C . Body dotyku jejich společné vnější tečny označme A, B .
- a) Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.
- b) Vyjádřete obsah trojúhelníka ABC pomocí poloměrů r_1, r_2 daných kružnic.

C-I-4 Uvažujme všechny výrazy, které dostaneme z výrazu

$$u - v - x - y - z$$

doplněním alespoň jedné dvojice závorek tak, aby se tím ve výrazu neobjevilo násobení. [Jeden z těchto výrazů je například $u - ((v - x) - y - z)$. Avšak například výraz $(u - v)(-x - y - z)$ mezi uvažované výrazy nepatří, neboť je v něm násobení.] Kolika různých hodnot mohou nejvýše tyto výrazy nabývat pro jednu pětici čísel u, v, x, y, z ?

C-1-5 Při oslavě svých narozenin Josef zjistil, že sečte-li číslice momentálního letopočtu, dostane svůj věk, a odečte-li momentální letopočet od jeho zrcadlového obrazu, dostane čtyřnásobek svého roku narození. V kterém roce našeho tisíciletí Josef provedl výpočet?

C-I-6 Platí-li pro povrchy P_1, P_2, P_3 tří krychlí $P_3 = P_1 + P_2$, pak pro jejich objemy V_1, V_2, V_3 je $V_1 + V_2 < V_3 \leq \sqrt{2}(V_1 + V_2)$. Dokažte.

Kategorie Z

Přípravné úlohy

Z-P-1 Jsou dány dva různé body P a Q . Sestrojte čtverec, který obsahuje body P a Q a má nejmenší možný obsah.

Z-P-2 Do kružnice je vepsán sedmiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Přímka p prochází středy stran A_3A_4, A_6A_7 . Kolik úhlopříček daného sedmiúhelníka přímka p protíná?

Z-P-3 Určete dvojici různých trojčiferných čísel, která má tyto dvě vlastnosti:

- a) v desítkové soustavě mají čísla zápisy xyz a zyx ,
- b) mají co největšího společného dělitele.

Z-P-4 Dva přátelé z téže obce potřebují navštívit blízké město. První jde pěšky a cesta mu trvá hodinu. Druhý jede na kole a cesta mu trvá 20 minut. Chodec vyšel čtvrt hodiny před odjezdem cyklisty. Za jakou dobu po svém odjezdu ho cyklista dohoní, je-li pohyb každého z nich rovnoměrný?

Soutěžní úlohy

Z-I-1 Je dán čtverec $ABCD$ s délkou strany 2. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou postupně zvoleny body K, L, M, N tak, že

$AK = BL = CM = DN = x$. Vyjádřete obsah čtverce $KLMN$ pomocí x .

Pro které x je obsah čtverce $KLMN$ nejmenší?

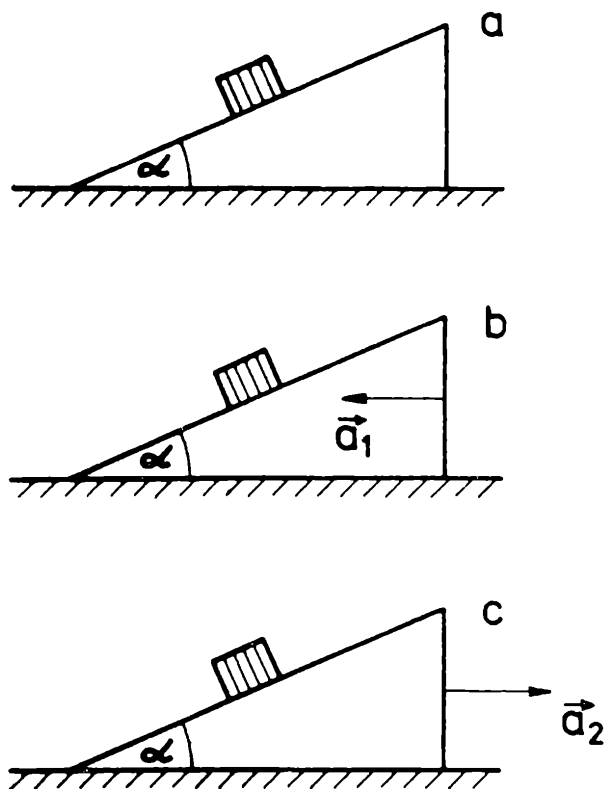
- Z-I-2 Je dán trojboký jehlan $ABCV$. Rovina protíná jeho hrany AB , BC , CV a neprochází žádným z bodů A , B , C , V . Které hrany jehlanu rovina ještě protíná?
- Z-I-3 Je-li N dvojciferné číslo, označme N' číslo, které z něho dostaneme změnou pořadí číslic. Najděte všechny dvojice dvojciferných čísel X , Y , pro která jsou čísla $XY - 1$, $X'Y' - 1$ obě dělitelná deseti.
- Z-I-4 Zjistěte, jestli mohou tři cestující stihnout vlak, který odjíždí za 75 minut ze stanice vzdálené 40 km, dokáže-li každý z nich běžet průměrnou rychlostí 10 km/hod a mají-li k dispozici dvoumístný motocykl, který může jet průměrnou rychlostí 80 km/hod.

Řešení přípravných úloh odevzdejte do 15. listopadu 1979, řešení soutěžních úloh odevzdejte v kategoriích A, Z do 10. ledna 1980, v kategoriích B, C do 15. února 1980.

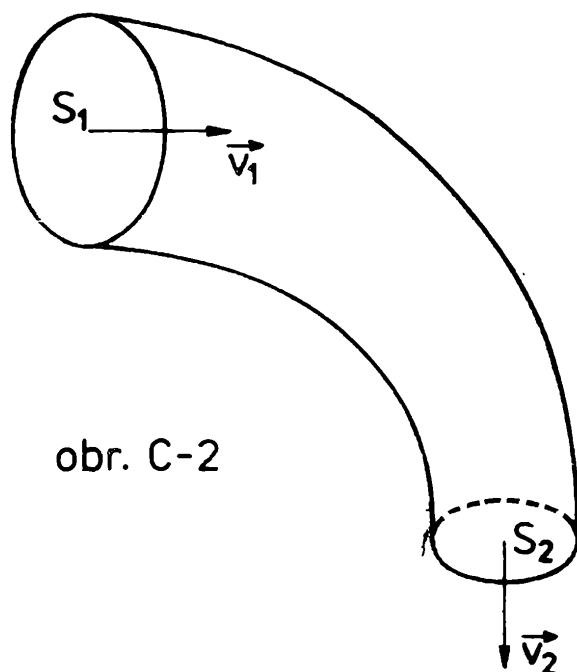
Úlohy pro I. kolo XXI. ročníku FO

Kategorie C

- Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se posunuje těleso; přitom součinitel smykového tření je f .
 - Určete pohyb tělesa ve stejnorodém tíhovém poli po nakloněné rovině, která je v klidu. Proved'te diskusi (obr. C—1a).
 - Jak se změní výsledky úlohy a), jestliže se nakloněná rovina pohybuje po vodorovné podložce se zrychlením a_1 (obr. C—1b)? Proved'te diskusi.
 - Jak se změní výsledky úlohy a), jestliže se nakloněná rovina pohybuje po vodorovné podložce se zrychlením a_2 (obr. C—1c)? Proved'te diskusi.
- Trubice s vodorovnou osou má v jednom místě průřez o obsahu S_1 a ve druhém průřez o obsahu S_2 , $S_1 > S_2$. Trubicí protéká voda ustáleným prouděním. Rychlost vody v prvním průřezu je v_1 a tlak ve druhém průřezu je p_2 .



obr. C-1



obr. C-2

- Určete rychlost v_2 proudění vody ve druhém průřezu a tlak p_1 v prvním průřezu trubice.
- Určete hmotnostní průtok Q_m vody.
- Řešte úlohy a) a b), jestliže osa trubice není vodorovná a průřez S_2 je ve výšce h nad průřezem S_1 .
- Po obecném vyřešení úloh a), b), c) řešte pro hodnoty: $S_1 = 10,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; $S_2 = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; $v_1 = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $p_2 = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. V tomto případě určete pro obě polohy trubice úhrnnou energii proudící vody o hmotnosti $1,0 \text{ kg}$.

3. Trubice zahnutá do pravého úhlu (koleno) má obsah průřezu vstupního otvoru S_1 a výstupního S_2 , $S_1 > S_2$ (obr. C-2). Trubicí protéká kapalina o hustotě ρ ustáleným prouděním při objemovém průtoku Q_V .

- Stanovte velikost výsledné tlakové síly $\mathbf{F}$ proudící kapaliny na stěnu trubice.
- Určete směr síly $\mathbf{F}$ stanovením velikosti úhlu, který svírá s vektorem rychlosti $\mathbf{v}_1$. Kapalinu považujte za ideální. Vliv tíhového pole na kapalinu neuvažujte.

Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty: $Q_V = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$; $S_1 = 1,73 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$; $S_2 = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$; $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

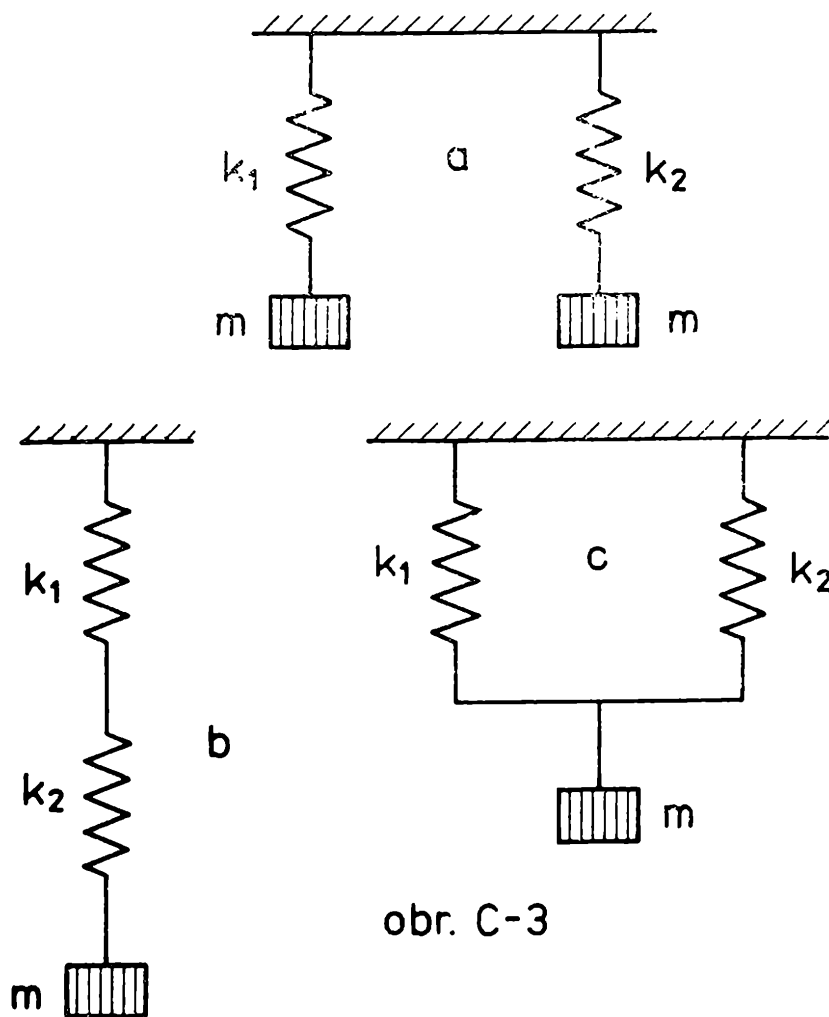
Poznámka:

Změna směru rychlosti proudění kapaliny je způsobena tlakovou silou stěny trubice na kapalinu $\mathbf{F} = Q_m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$, kde Q_m je hmotnostní průtok kapaliny.

4. Vzduch o hmotnosti $m = 1,00$ kg má tlak $p_1 = 10,0 \cdot 10^5$ Pa a teplotu $T_1 = 500$ K. Tlak vzduchu klesne na hodnotu $p_2 = 1,00 \cdot 10^5$ Pa
1. dějem izochorickým,
 2. dějem izotermickým,
 3. dějem adiabatickým.
- a) Určete stavové veličiny soustavy na konci každého děje.
 - b) Znázorněte děje v diagramu $p-V$
 - c) Určete změnu vnitřní energie a práci vykonanou působením vnější síly při ději izochorickém a adiabatickém. Výsledky porovnejte.
 - d) Jak se změní vnitřní energie soustavy při ději izotermickém? Podle diagramu rozhodněte, zda práce vykonaná působením vnějších sil při ději izotermickém je větší nebo menší než práce vykonaná při ději adiabatickém.
5. Osobní automobil projížděl obcí, v níž je největší dovolená rychlost v_d . Automobil vjel do neklopené zatáčky o poloměru křivosti r . Součinitel klidového tření mezi pneumatikou a vozovkou je f_0 .
- a) Při které rychlosti v dojde ke smyku vozidla?
 - b) Určete maximální rychlost $v_{\max}$ jako funkci součinitele f_0 pro bezpečné projetí automobilu zatáčkou daného poloměru. Sestrojte na milimetrový papír graf této funkce pro $r = 50$ m v oboru $0 \leq f_0 \leq 0,8$.
 - c) Z grafu rozhodněte, zda řidič překročil největší dovolenou rychlost $v_d = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ v obci, pro hodnoty $f_0 = 0,45$ nebo $f_0 = 0,60$, jestliže jel rychlostí $v_{\max}$. Výrok ověřte početním řešením.
6. Určení tuhosti soustavy dvou pružin spojených za sebou a vedle sebe
- Pomůcky:
- dvě pružiny přibližně stejné délky, závaží, stopky.
1. Teoretické odvození tuhosti soustavy dvou pružin.
- Pročtěte si z učebnice Fyzika pro 2. ročník gymnázia (SPN Praha, 1974) čl. 64.
- a) Dokažte, že pro tuhost k_s soustavy dvou pružin spojených za sebou (obr. C—3b) platí

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \text{ nebo } k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad (1)$$

kde k_1 je tuhost jedné pružiny, k_2 je tuhost druhé pružiny.



obr. C-3

Poznámka:

Na každou pružinu působí táž tahová síla F , první pružina se prodlouží působením síly F o délku Δy_1 a druhá o délku Δy_2 ; celkové prodloužení soustavy je $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$.

b) Dokažte, že pro tuhost k_p soustavy dvou pružin spojených vedle sebe (obr. C-3c) platí

$$k_p = k_1 + k_2. \quad (2)$$

Poznámka:

Síla F se rozloží na dvě složky: $F = F_1 + F_2$; každá pružina se prodlouží v tutéž délku $\Delta y = \Delta y_1 = \Delta y_2$.

2. Experimentální ověření vztahů (1) a (2)

a) Určete doby kmitu T_1 a T_2 první a druhé pružiny (obr. C-3a). Na každou pružinu zavěste závaží téže hmotnosti m takové, že hmotnost pružiny je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti závaží a že přitom nedojde k trvalé deformaci pružiny. Změřte např. dobu 20 kmitů a měření pro každou pružinu opakujte aspoň pětkrát. Zapište měření, pro každou pružinu určete aritmetický průměr doby 20 kmitů a z něho určete doby T_1 a T_2 . Stanovte absolutní a relativní chybu měření.

b) Určete doby kmitu T_s soustavy pružin spojených za sebou (obr. C—3b) a T_p soustavy pružin spojených vedle sebe (obr. C—3c). Postupujte stejně jako v bodě 2a), použijte závaží stejné hmotnosti m . Z výsledků měření určete podíl $\frac{T_s}{T_p}$.

c) Vyjádřete podíl $\frac{T_s}{T_p} = \sqrt{\frac{k_p}{k_s}}$ jako funkci veličin T_1 a T_2 s použitím vztahů (1) a (2). Dosazením naměřených hodnot T_1 a T_2 určete číselnou hodnotu podílu $\frac{T_s}{T_p}$.

d) Porovnejte číselné hodnoty podílu $\frac{T_s}{T_p}$ získané v bodech 2b) a 2c). Zhodnoťte postup, kterým jste experimentálně ověřili platnost vztahů (1) a (2).

Doplňující úlohy:

1. Přesvědčte se měřením a výpočtem, zda je ve vašich experimentálních podmínkách splněn požadavek, že hmotnosti použitých pružin jsou zanedbatelné vzhledem k hmotnosti závaží. Vyjádřete hmotnost pružiny (popř. soustavy pružin) v procentech hmotnosti závaží. Proč musí být tento požadavek splněn při řešení úloh 1. i 2.?
 2. Ve kterých oblastech fyziky jste poznali vztahy analogické se vztahy (1) nebo (2)? Porovnejte analogické veličiny.
7. Největší rychlost, kterou může automobil projet neklopenou zatáčkou, aniž dojde ke smyku vozidla, je $v_{\max}$ při součiniteli klidového tření f_0 . Největší rychlost, kterou může projet automobil klopenou zatáčkou při stejném součiniteli f_0 a stejném poloměru křivosti r , je $v'_{\max}$.
- a) Určete podíl

$$k = \frac{v_{\max}}{v'_{\max}}$$

při témž součiniteli klidového tření f_0 a témž poloměru křivosti r zatáčky jako funkci úhlu α dostředivého sklonu vozovky v klopené zatáčce.

- b) Sestrojte na milimetrový papír graf funkce $k = f(\alpha)$ v oboru $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$, pro $f_0 = 0,5$.
- c) Určete z grafu hodnotu k pro $\alpha = 12^\circ$. Ověřte výsledek výpočtem. Stanovte, o kolik procent je v tomto případě největší bezpečná rychlost automobilu větší na klopené zatáčce než na neklopené zatáčce při témž součiniteli klidového tření $f_0 = 0,5$ a témž poloměru křivosti zatáčky.

1. Automobil Škoda 105 L se rozjížděl z klidu rovnoměrně zrychleně po přímé vodorovné silnici a za dobu 30 s dosáhl rychlosti $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Dále jel po silnici délky 1,0 km touto rychlostí. Potom vyřadil rychlostní stupeň a pohyboval se bez tahové síly motoru. Odporová síla proti pohybu $F = f m g$, kde $f = 0,08$ je součinitel odporu, m hmotnost automobilu.
 - a) Určete, jakou rychlostí dorazil automobil k místní tabuli obce, která měla vzdálenost 300 m od místa, kde řidič vyřadil rychlostní stupeň.
 - b) Ve vzdálenosti 150 m za místní tabulí obce je železniční přejezd. Stanovte, s jakým zrychlením se musel automobil pohybovat, aby před závorami zastavil. Musel brzdit?
 - c) Určete průměrnou rychlost automobilu po dobu pohybu.
 - d) Nakreslete grafy dráhy a rychlosti jako funkce času.

2. Účinkem nárazu lokomotivy se začal vagón pohybovat po přímém úseku trati AB , který svírá s vodorovnou rovinou úhel α . Za dobu 30 s od počátku pohybu až do zastavení urazil dráhu 60 m. Potom se začal pohybovat zpět dolů, projel vzdálenost BA za dobu 40 s a přešel na vodorovný úsek trati.
 Určete délku dráhy po vodorovné trati z bodu A až do zastavení. Součinitel odporu považujeme za stálý.

3. Plavec, jehož rychlost v klidné vodě je v_2 , plave v řece. Nejprve plave do určité vzdálenosti *po* proudu, pak se proti proudu vrátí. Potom plave do stejné vzdálenosti ve směru kolmém k proudu po přímé dráze, načež se po téže dráze vrátí.
 - a) Dokažte, že v prvním případě se plavec vrátí na své stanoviště za dobu delší než v případě druhém.
 - b) Stanovte rychlost v_1 proudu řeky, jestliže v prvním případě se plavec vrátí na své stanoviště za dobu n -krát delší než v případě druhém.
 Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_2 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $n = 1,9$.
 - c) Sestrojte graf funkce $\frac{v_1}{v_2} = f(n)$ v oboru $1,0 \leq n \leq 3,0$. Podle grafu ověřte výsledek části b).

4. U automobilu Škoda 105 L byly zjištěny tlakové síly na přední osu 5 kN, na zadní osu 7 kN, vzdálenost os měřená ve vodorovném směru je 2,4 m.
 - a) Stanovte, v jaké vzdálenosti od přední osy měřené ve vodorovném směru umísťujeme těžiště vozu.

- b) Při výměně zadního kola selhal zvedák, a proto bylo nutno zvednout celou zadní část vozu. K dispozici byla tuhá tyč délky 3 m. Určete, v jaké vzdálenosti od konce tyče je nutno ji podepřít, má-li člověk, který bude automobil zvedat, hmotnost 80 kg.

Při řešení úlohy si situaci nakreslete vhodným náčrtem.

5. Motocykl, který má spolu s jezdcem hmotnost m , se rozjíždí z klidu po přímém vodorovném úseku silnice délky d působením stálé tahové síly F_1 vodorovného směru. Součinitel úhrnného odporu je f .
- a) Určete zrychlení pohybu vzhledem k vozovce.
 - b) Určete konečnou rychlost motocyklu vzhledem k vozovce.
 - c) Určete práci vykonanou tahovou silou F_1 .
 - d) Určete konečnou kinetickou energii motocyklu vzhledem k vozovce.
 - e) Jaké přeměny energie nastanou v soustavě těles vykonáním práce podle části c)?

Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty: $m = 180 \text{ kg}$; $F_1 = 214 \text{ N}$; $f = 0,040$; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

6. Určení součinitele smykového tření

Pomůcky:

hladké prkno s kladkou, dřevěný hranolek s háčkem, siloměr s měřicím rozsahem do 4 N, pravítko délky 40 cm se stupnicí v milimetrech, posuvné měřidlo, váhy se sadou závaží, sada stejných závaží o hmotnosti 100 g s háčky, stativ, pevná nit délky asi 2 m.

Úkol:

V této práci budete určovat součinitele smykového tření při pohybu dřevěné plochy po dřevěné podložce dvěma způsoby, jejichž výsledky srovnáte.

Způsob I:

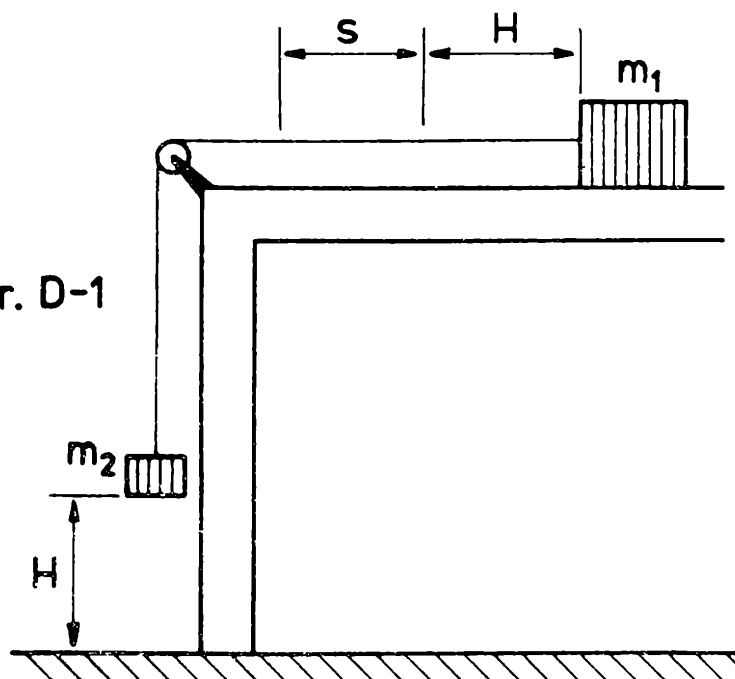
Příprava:

Umístíte hranolek na jeden konec vodorovného prkna, přidržíte ho rukou a pružinu siloměru natáhnete tak, že siloměrem naměříte sílu F . Zjistíte prodloužení x pružiny siloměru. Práce vykonaná při napínání

pružiny $W = F_p x$, kde $F_p = \frac{F}{2}$ je průměrná síla, která působí na pružinu. Hranolek pustíme. Hranolek se uvede do pohybu, urazí dráhu délky s a zastaví se. Práce vykonaná třecí silou $W_1 = f m_1 g s$, kde m_1 je hmotnost hranolku. Z rovnosti $W = W_1$ plyne

$$f = \frac{Fx}{2m_1gs}.$$

obr. D-1



Provedení:

1. Určete hmotnost m_1 hranolku s háčkem.
2. Háček hranolku připojte ke kroužku siloměru nití délky asi 20 cm.
3. Změřte vzdálenosti x a s pro $F = 1$ N. Pokus proveďte alespoň třikrát a určete aritmetický průměr s_p naměřené délky s .
4. Potom měňte F (volte např. 1,5 N, 2,0 N, 2,5 N, 3,0 N) a hmotnost hranolku (přidáním závaží). Údaje sestavte do tabulky:

č.	$\frac{F}{\text{N}}$	$\frac{m_1}{\text{kg}}$	$\frac{x}{\text{mm}}$	$\frac{s_p}{\text{mm}}$	f

5. Určete aritmetický průměr f_p vypočtených hodnot f .

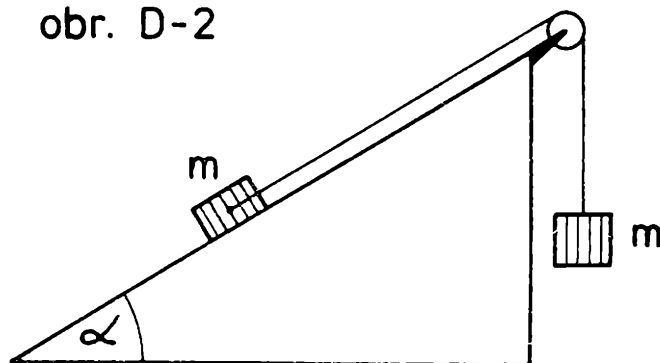
Způsob II:

Příprava:

Podle náčrtku (obr. D—1) sestavte aparaturu k měření. Přes kladku vedte nit, jejíž jeden konec je připojen k hranolku o hmotnosti m_1 , na druhém konci je závaží o hmotnosti m_2 .

Po uvolnění se vlivem tíhy závaží dá seustava do pohybu se zrychlením a , po dopadu závaží na podlahu se hranolek pohybuje dále rovnoměrně zpomaleně, až se zastaví. Délka dráhy pohybu rovnoměrně zrychleného je H , délka dráhy pohybu rovnoměrně zpomaleného je s . Tíhová potenciální energie závaží se změní o hodnotu $\Delta E_p = m_2 g H$, při posunutí hranolku se vykoná práce $W = f m_1 g (s + H)$, závaží

obr. D-2



získá kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2} m_2 v^2$, kde v je jeho rychlost při dopadu na podlahu. Pro součinitel smykového tření platí

$$f = \frac{m_2 H}{(m_1 + m_2) s + m_1 H}.$$

Tento vztah odvodte.

Provedení:

1. Změřte veličiny m_1 , m_2 , H , s . Měření opakujte pro danou trojici hodnot m_1 , m_2 , H alespoň třikrát a určete průměrnou hodnotu s_p naměřených hodnot s .
2. Měření obdobně proveďte s jinými trojicemi hodnot m_1 , m_2 , H .
3. Změřené hodnoty запиšte do tabulky:

č.	m_1	m_2	H	s_p	f

4. Určete aritmetický průměr f_p vypočtených hodnot f .

III. Porovnejte hodnoty f_p získané oběma způsoby.

7. Pokusem bylo zjištěno, že soustavu těles podle obr. D—2 lze uvést nárazem do pohybu tak, že těleso na nakloněné rovině koná rovnoměrný posuvný pohyb vzhůru bez působení vnější síly. Obě tělesa mají stejnou hmotnost m .

Určete součinitel smykového tření.

b) Určete velikost třecí síly.

c) Co se stane, bude-li soustava za stejných podmínek uvedena nárazem do pohybu tak, že těleso na nakloněné rovině koná posuvný pohyb dolů? Popište pohyb.

Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty: $m = 3,0 \text{ kg}$; $\alpha = 37^\circ$.

Matematika převážně – vážně

Dr. JAROSLAV BARTÁK, KPÚ Praha

Ano, to je název nového vzdělávacího pořadu Československé televize. Je určen pro žáky našich středních škol v nejširším slova smyslu.

Je zaměřen na matematiku, kterou se bude snažit podat přístupnou a zajímavou formou, ve které, jak už název napovídá, nebude nouze ani o trochu pobavení.

Iniciátorem pořadu je sám ministr školství ČSR, na pořadu spolupracuje a jeho garantem je Jednota československých matematiků a fyziků. Na realizaci se budou podílet čtyři televizní studia: Praha, Brno, Bratislava a Ostrava. Ohromný štáb spolupracovníků, tvůrců pořadu, má své opodstatnění. Pořad má totiž jedinečný rozsah, snad v historii naší televize vůbec největší: se čtyřicetiminutovými relacemi se budeme jednou týdně scházet u obrazovek po celé čtyři roky s výjimkou školních prázdnin. Bude to celkem 160 čtyřicetiminutových relací.

Budou vysílány vždy v pondělí v 17.15 hodin na prvním programu a reprizovány vždy v úterý ve 22.00 hodin na druhém programu. Slavnostní zahájení je stanoveno na pondělí 3. září 1979.

V pořadu budou probrány vybrané partie z učiva gymnázií, středních odborných škol a středních odborných učilišť, odpovídajícího současným osnovám matematiky. Budou se v něm střídat vtipné scénky s vlastními naučným programem, řešením zajímavých úloh a historickými poznámkami. V relacích budou vystupovat hosté, pracovníci různých profesí, ve kterých se matematika uplatňuje.

Nebude přirozeně chybět ani matematická soutěž. V jejím každoročním závěru na vás čekají hodnotné ceny. Máte se tedy nač těšit.

Proto všichni, kdo máte zájem o matematiku nebo si chcete zlepšit své znalosti v tomto oboru, nezapomeňte od září sledovat pravidelně s tužkou a poznámkovým blokem v ruce pořad Matematika převážně – vážně.

K tomu vám přeje mnoho hezkých chvil u obrazovky a hodně úspěchů naše redakce.

SLOVNÍČEK

ITALSKO - ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

elettromagnete m	elektromagnet
elettromagnetismo m	elektromagnetismus
elettrometro m	elektrometr
elettrone m	elektron
elettronegativo	elektronegativní
elettronica ž	elektronika
elettropositivo	elektropositivní
elettroscopio m	elektroskop
elettrostatica ž	elektrostatika
elevare a potenza	umocniti
elevazione a potenza ž	umocnění
elica ž (curva)	šroubovice
elicoide m	helikoid
eliminare	vyloučiti
eliminazione ž	vyloučení
elisse ž	elipsa
elissoide m	elipsoid
elittico	eliptický
emissione ž	vysílání; záření
— termica	záření tepelné
— fotoelettrica	— fotoelektrické
emulsione ž	emulze
endomorfismo m	endomorfismus
energia ž	energie
— calorica	— tepelná
— cinetica, di movimento	— kinetická, pohybová
— libera	— volná
— potenziale, di posizione	— potenciální, polohy
— raggiante	— zářivá
ennagono m	devítiúhelník
entalpia ž	entalpie, tepelný obsah
entropia ž	entropie

enunciare	zadati, oznámiti
enunciato m	zadání (úlohy)
epicicloide ž (curva)	epicykloida
epidiascopo m	epidiaskop
equatore m	rovník
equazione ž	rovnice
— algebrica	— algebraická
— alle derivate parziali	— diferenciální parciální
— alle differenze finite	— diferenční
— di stato	— stavová
— di una curva	čáry
— di una superficie	— plochy
— differenziale	— diferenciální
— integrale	— integrální
— irrazionale	— iracionální
— lineare	— lineární
— omogenea	— homogenní
— reciproca	— reciproká
— di Schrödinger	Schrödingerova rovnice
equazioni di Hamilton	Hamiltonovy rovnice
— di Lagrange	Lagrangeovy rovnice
— di Maxwell	Maxwellovy rovnice
equidistante	ekvidistantní
equilatero	rovnoběžný
equilibrio m	rovnováha
equivalente	ekvivalentní
equivalente m	ekvivalent
— elettrochimico	— elektrochemický
equivalenza ž	ekvivalence
errore m	omyl; chyba
— assoluto	chyba absolutní
— medio	— střední
— probabile	— pravděpodobná
— relativo	relativní
eruzione ž	výbuch
esaedro m	šestistěn
esattamente	přesně
esatto	přesný; exaktní