

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

1

ROČNÍK 56, 1977-1978, ZÁŘ



rozhledy

ROČNÍK 56
ZÁŘÍ 1977

1

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VÚOŠ Praha, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1977.

OBSAH

Prof. E. Kraemer: Padesát pět let našich Rozhledů	1
H. Husová: O přibližných řešeních minimalizace odpadu	2
Dr. J. Šedivý: Věty o stejných zbytcích	7
Dr. B. Zelinka: O matematických symbolech	10
S. Horák: Řezy rotační válcové plochy	15
Ing. E. Veselá: Teorie podobnosti	20
Ing. E. Veselá: Dimenzionální analýza	25
Naše soutěž	33
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	45
Dr. J. Mrázek, CSc.: Logické systémy kapsních kalkulátorů I	46
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Padesát pět let našich Rozhledů

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Desátým číslem vydaným v červnu r. 1977 dovršily Rozhledy matematicko-fyzikální 55. ročník. Začaly vycházet počátkem školního roku 1921/22 s názvem Rozhledy matematicko-přírodovědecké jako časopis, jehož hlavním posláním bylo prohlubovat u středoškolských studentů zájem o matematicko-fyzikální vědy. Vydávala je 30 let Jednota československých matematiků a fyziků, jejíž významní členové je také stále redigovali. Byli to nejprve středoškolští profesori *dr. Vladimír Ryšavý* (prvních 9 ročníků) a *dr. Jan Schuster* (10. a 11. ročník), později další učitelé těchto škol, z nichž většina byla po osvobození Československa povolána na naše vysoké školy. Vedle středoškolského profesora *dr. Aloise Wanglera*, který redigoval v letech 1932 až 1946 fyzikální část Rozhledů, to byli *František Vyčichlo, DrSc.* (1932 až 1946), *Zdeněk Pírko, DrSc.* (1941 až 1951), *dr. Alois Urban* (1942 až 1951), vesměs profesori Českého vysokého učení technického (ČVUT) v Praze a *Emil Kašpar, DrSc.* (1946 až 1950), profesor Univerzity Karlovy (UK) v Praze.

V letech 1952 až 1956 byly Rozhledy matematicko-přírodovědecké vydávány v nakladatelství Československé akademie věd jako časopis, který měl v nejširších kruzích popularizovat matematiku, fyziku a chemii; vedoucím redaktorem byl *dr. Milan Drátovský* z UK v Praze. Protože se toto poslání časopisu neosvědčilo, vrátil se v r. 1957 ke svému původnímu poslání s názvem Rozhledy matematicko-fyzikální; jejich vydávání převzalo Státní pedagogické nakladatelství. Redigovali je docenti ČVUT v Praze, *dr. Miroslav Menšík* a *Ota Setzer* (1957 až 1968); po smrti docenta Menšíka se stal vedoucím redaktorem *docent Setzer*, který Rozhledy řídil s dalším pracovníkem ČVUT *Stanislavem Horákem* až do konce školního roku 1971/72. Od té doby pracuje redakční rada Rozhledů v podstatě v nynějším složení, rozšířeném v roce 1977 o několik nových členů.

Poslání našich Rozhledů je tedy v zásadě totéž jako před půl stoletím. Avšak velmi podstatný rozdíl mezi dobou předmnichovské republiky a dnešním stavem v socialistickém Československu je v tom, že počet mládeže studující na našich středních školách je dnes několikrát vyšší, než tomu bylo tehdy, a má se nadále zvyšovat s perspektivou (vytyčenou XV sjezdem KSČ) poskytnout úplné střední vzdělání většině naší mládeže. Přitom přirozeně bude také vzrůstat počet studentů vysokých škol, zejména v oborech technických a matematicko-přírodovědeckých. Cesta k dovršení těchto náročných cílů je naznačena v dokumentu *Další rozvoj československé výchovně vzdělávací soustavy*, který vydala v roce

1976 naše ministerstva školství. Z tohoto dokumentu bude také vycházet snažení redakční rady Rozhledů, které bude nutno více než dosud orientovat ke studentům středních odborných škol a středních odborných učilišť poskytujících úplné střední vzdělání. Zájem studentů o matematiku a fyziku budou Rozhledy podporovat mimo jiné otiskováním článků ukazujících význam těchto oborů pro praxi, článků historických, různých aktualit apod.

Rozhledy budou i nadále pomáhat rozvíjet matematickou a fyzikální olympiádu otiskováním informací i příkladů, budou však také pokračovat ve své tradiční soutěži v řešení úloh, dotované cenami ministerstev školství ČSR a SSR i cenami Státního pedagogického nakladatelství. Nezapomenou ani na recenze takových publikací, které svým obsahem a způsobem výkladu jsou vhodné pro středoškolské studenty.

Rozhledy matematicko-fyzikální jsou časopisem s dobrou tradicí. V jejich čele stáli vždy významní vědečtí a odborní pracovníci z oblasti matematicko-fyzikálních věd, kteří byli zároveň dobrými pedagogy a organizátory. Velkým úkolem nynější redakční rady je udržet a prohloubit tuto dobrou tradici. To znamená pracovat tak, aby Rozhledy přispívaly podle svých možností k plnění významných úkolů, které naši vyspělé socialistické společnosti vytyčil XV. sjezd Komunistické strany Československa.

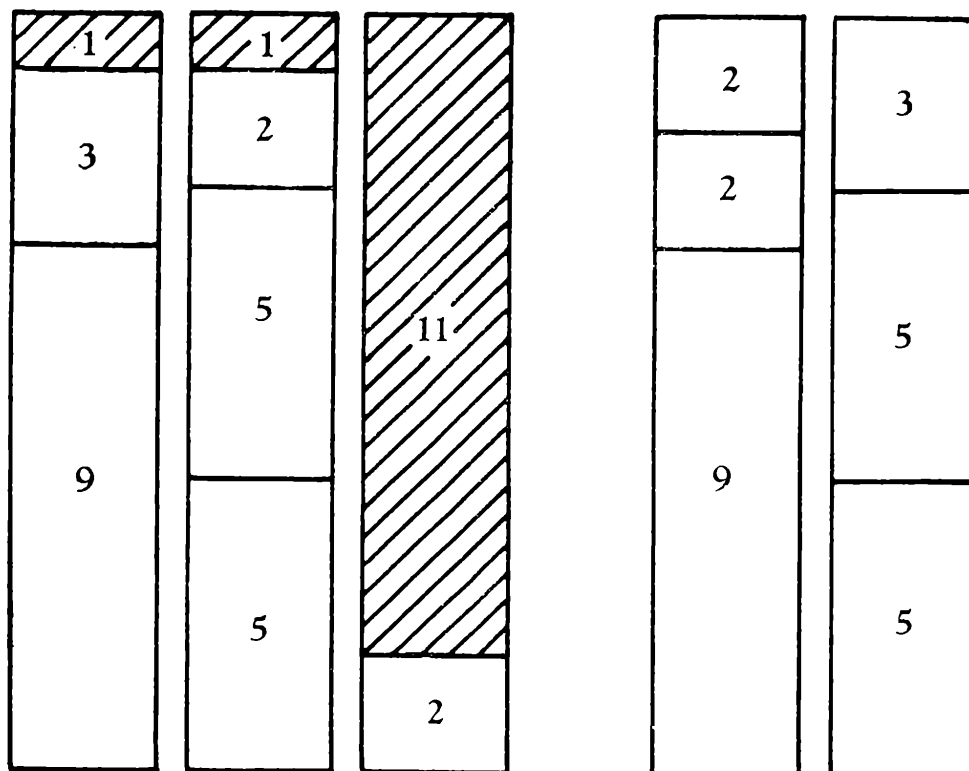
matematika

O přibližných řešeních minimalizace odpadu

HELENA HUSOVÁ, MFF UK, Praha

V článku „Úloha o minimalizaci odpadu“ v 10. čísle minulého ročníku Rozhledů jsme vymezili problém minimalizace odpadu při řezání souprav tyčí. Máme-li nařezat z dlouhých tyčí délky d soupravu vyhovující seznamu D požadovaných délek, nazýváme optimálním takové řešení tohoto úkolu, při němž použijeme nejmenšího možného počtu dlouhých tyčí (tento počet jsme označili $N(D)$).

Ukážeme si zde dva známé jednoduché postupy. V obecném případě nevedou sice k optimálnímu řešení; bylo však o nich dokázáno, že procento odpadu při jejich použití nikdy příliš nepřevyšuje minimální možný odpad. Důležité přitom je, že při výrobě velkých sérií stejných souprav



Obr. 1a, b

se blíží tyto postupy (algoritmy) optimálnímu řešení obvykle více než při své aplikaci na malé série nebo na jednotlivé soupravy (viz příklad 3. uvedený níže).

Nyní již přistupme k vysvětlení těchto algoritmů. Abychom je mohli lépe popsat, očíslovíme dlouhé tyče délky d , tj. tyče, z nichž řezeme. Jestliže nám někdo předepíše seznam požadovaných délek, např. (2, 3, 3, 1, 4, 5, 7, 2), nejprve jej uspořádáme v nerostoucí posloupnost, v našem případě (7, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1). Nadále budeme předpokládat, že seznam délek $D = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ je vždy uspořádán takovýmto způsobem; je tedy

$$d \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m > 0. \quad (1)$$

1. Maximový algoritmus

První z algoritmů nazveme třeba *maximový* a počet tyčí použitých při jeho aplikaci na seznam D budeme značit $M(D)$. Z první dlouhé tyče uřízneme nejdelší požadovaný kus (tedy kus délky a_1); ze zbytku, který případně zůstane, uřízneme opět nejdelší možný kus (tj. kus o délce a_i , kde a_i je největší z čísel $a_2, \dots, a_m$ takových, že $d - a_1 \geq a_i$), z případného zbytku opět nejdelší možný kus, atd. Podle téhož pravidla pokračujeme potom na druhé, $\dots$, $M(D)$ — té tyči. Vždy tedy řezeme maximální z dosud neuříznutých kusů (odtud název algoritmu).

Maximový algoritmus lze popsat ještě jinak: Požadované kusy řežeme v tom pořadí, jak jsou v seznamu D zapsány jejich délky při splnění podmínky (1); přitom každý kus uřízneme z tyče s nejmenším možným pořadovým číslem. Promyslete si, že jde skutečně o tentýž algoritmus. Rozdíl oproti první variantě může být pouze v časovém pořadí, kdy který kus řežeme. Jestliže např. v uvedeném příkladě našeho seznamu je $d = 8$, budeme kus délky 4 řezat při prvním popisu algoritmu jako pátý, kdežto při druhém popisu jako třetí (v obou případech však jako první kus ze třetí tyče). Je jasné, že tato okolnost nemá žádný vliv na velikost odpadu.

2. Zbytkový algoritmus

Dalšímu obecnému postupu budeme říkat *zbytkový algoritmus*. Soupravu opět řežeme v pořadí, které je určeno seznamem D splňujícím podmínku (1). Tentokrát se však nesnažíme řezat každý kus z tyče s *ct* nejmenším pořadovým číslem, ale postupujeme následujícím způsobem. Kus o délce a_1 uřízneme z první tyče; máme-li již uříznuty kusy o délkách $a_1, \dots, a_i (1 \leq i \leq m-1)$, uřízneme $i+1$ -ní kus z tyče, kde je velikost zbytku nejmenší ze zbytků větších nebo rovných a_{i+1} . V případě, že je takových tyčí několik, použijeme tu, která má nejmenší pořadové číslo. Při rozhodování o umístění jednotlivých kusů tedy hraje roli porovnání velikosti zbytků na jednotlivých tyčích. Počet tyčí použitých při tomto algoritmu budeme označovat $Z(D)$.

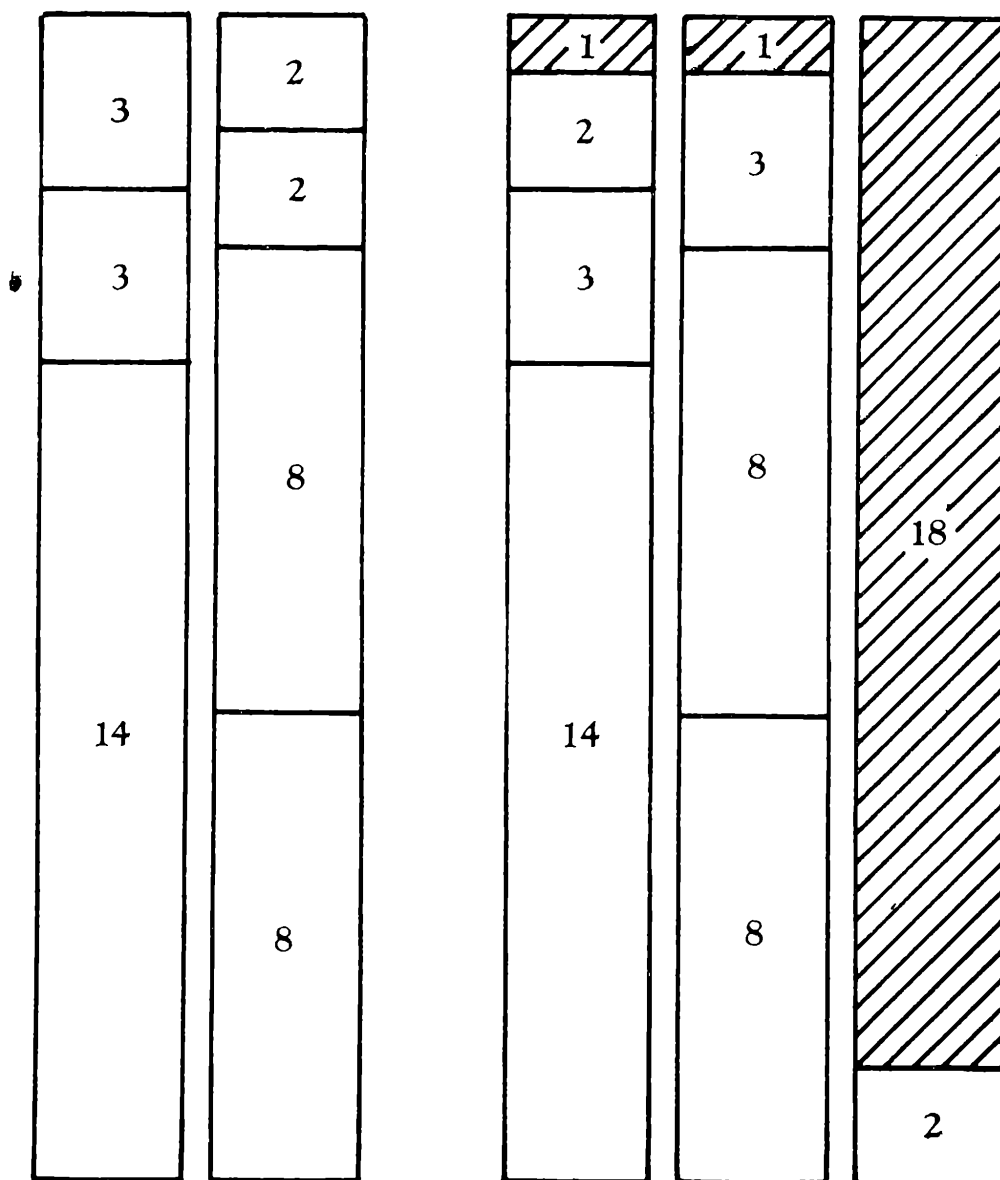
Nelze jednoznačně říci, který z obou algoritmů je lepší — záleží na konkrétní úloze. Ze studovaných úloh uveďme si dvě ukázky.

Příklad 1. Budiž $d = 13$, $D = (9, 5, 5, 3, 2, 2)$. Situace je znázorněna na obr. 1 (šrafované části značí odpad). Umístění kusů o délkách 9, 5, 5 je při obou postupech stejné. Potom se umísťuje kus délky 3; v maximovém algoritmu jej umístíme na první tyč. Postupujeme-li podle zbytkového algoritmu, porovnáme zbytky na obou dosud použitých tyčích — ty jsou rovny 4 na první a 3 na druhé tyči, proto použijeme druhé tyče. Bude tedy $Z(D) = N(D) = 2$, $M(D) = 3$.

Příklad 2. Nechť $d = 20$, $D = (14, 8, 8, 3, 3, 2, 2)$. V tomto případě je $M(D) = N(D) = 2$, $Z(D) = 3$, takže je výhodnější naopak maximový algoritmus (viz obr. 2).

Na množině všech přirozených čísel definujeme binární relaci R_m takto: uspořádaná dvojice (a, b) nechť leží v R_m právě tehdy, existuje-li (při pevně zvoleném d) seznam D , pro nějž je $M(D) = a$ a zároveň $N(D) = b$. Obdobně definujeme relaci R_z pro zbytkový algoritmus.

Příklad 3. Budiž $d = 7$, $D = (3, 2, 2)$ a dále uvažujme také všechny soupravy vyhovující seznamům tvaru $c \cdot D$, kde c je přirozené číslo [např. $2 \cdot (3, 2, 2) = (3, 3, 2, 2, 2, 2)$]. Při použití na tyto seznamy je maximový algoritmus totožný se zbytkovým (ukážte). Pokud je $c > 1$, není však tento postup optimální. Dosazujeme-li za c postupně hodnoty



Obr. 2a, b

2, 3, 4 atd., zjišťujeme, že v relaci R_m (a také v relaci R_2) leží dvojice (3,2), (4, 3), (5, 4) atd. Přitom zde platí

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{M(c \cdot D)}{N(c \cdot D)} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{Z(c \cdot D)}{N(c \cdot D)} = \frac{7}{6},$$

jak jistě čtenář sám dokáže.

Pro systematické studium vlastností těchto algoritmů a také při hledání některých algoritmů jiných se někdy jeví výhodné omezit se na případ, kdy délka d je rovna přirozenému číslu n a kdy také všechny uvažované seznamy délek obsahují pouze přirozená čísla [přičemž je zároveň splněna podmínka (1)]. Úlohy, které vyhovují této podmínce, nazýváme úlohami při $d = n$ (tedy v příkladě 1 šlo o úlohu při $d = n = 13$). V obecném případě ovšem toto nemusí nastat, resp. hodnota

n může být značně vysoká (v důsledku různých dodatečných požadavků praxe).

Uvažme třeba následující příklad.

Příklad 4. Z tyčí délky 5000 mm máme nařezat jistý počet tyčí délek 1000, 2000, 3000 a 4000 mm. Zde by bylo $n = 5000$, ale můžeme položit také $n = 5$, bereme-li jako délkovou jednotku 1 metr. Přistupuje však požadavek, že na obou koncích pětimetrové tyče je nutný odpad 14 mm. Máme tedy k dispozici tyče délky $d = 4972$ mm a řežeme z nich tyče délek 1000, 2000, 3000 a 4000 mm. Nejmenší možná hodnota čísla n je 1243.

Poznamenejme, že úlohy o minimalizaci odpadu mají řadu obměn. Velmi často se vyskytuje varianta v dvojrozměrném prostoru: neřežou se tyče, u nichž jsme sledovali pouze jeden rozměr, ale desky s obdélníkovým půdorysem, které se liší v obou rozměrech. Zde je třeba dát pozor již při matematické formulaci některých problémů a postupů (zkuste např. nalézt algoritmus, analogický zbytkovému či maximovému).

Různá zobecnění jsou však možná i v případě jednorozměrných kusů. Při dané délce d dlouhých tyčí je pro některé seznamy délek odpad velký i v případě, že řešení bylo optimální. Může se však stát, že výrobce má k dispozici několik druhů dlouhých tyčí různých délek. Úvahy jsou potom kombinovány s rozhodováním, kterých druhů tyčí se má použít.

Na závěr ještě dodejme, že podobné rozmisťovací problémy se vyskytují i v některých jiných, nevýrobních oblastech lidské činnosti.

Pro čtenáře, které tato problematika zaujala blíže, uvádíme několik námětů k přemýšlení.

Cvičení

1. Jestliže $(a, b) \in R_m$, potom také $(a + k, b + k) \in R_m$, kde k je libovolné přirozené číslo.

2. Zjistěte, zda a) $(5, 3) \in R_m$, b) $(6, 4) \in R_m$?

3. Pokuste se zjistit, zda ze vztahu $(a, b) \in R_m$ plyne, že $a \leq \frac{3}{2}b$.

4. V příkladě 3 jsme ukázali, že pro úlohy při $d = n = 7$ obecně není maximový algoritmus optimální. Pro některé malé hodnoty n však maximový algoritmus vede k optimálnímu řešení každé úlohy při $d = n$. Nalezněte všechna n s touto vlastností.

5. Řešte úlohy, obdobné cvičením 1–4 pro zbytkový algoritmus.

6. Může se zbytkový algoritmus lišit od maximového při použití na seznam délek, v němž se vyskytují nejvýše tři různé hodnoty? (V našich příkladech se vyskytovaly čtyři různé hodnoty.)

7. Zkoumejte, pro které hodnoty n je zbytkový algoritmus totožný s maximovým pro všechny úlohy při $d = n$.

8. Pokuste se nalézt jednoduchý popis algoritmu, který vede k optimálnímu řešení všech úloh při $d = n = 7$.

Věty o stejných zbytcích

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

V minulém ročníku Rozhledů čtenáři našli návody k objevování kritérií dělitelnosti přirozených čísel zvoleným prvočíslem, resp. složeným číslem. Zajímavé je však i objevování případů, kdy všechna přirozená čísla určitého typu dávají při dělení zvoleným přirozeným číslem stejné zbytky. Ukážeme si několik příkladů, další příležitosti budou obsaženy v úlohách.

1. *Zkoumejme, jaký zbytek při dělení šesti dávají prvočísla větší než šest.* Zapišme si několik případů:

$$\begin{array}{llll} 7 = 1.6 + 1 & 13 = 2.6 + 1 & 19 = 3.6 + 1 & 29 = 4.6 + 5 \\ 11 = 1.6 + 5 & 17 = 2.6 + 5 & 23 = 3.6 + 5 & 31 = 5.6 + 1 \end{array}$$

Vidíme, že zbytky jsou jen čísla 1 nebo 5; odvážíme se tedy vyslovit hypotézu: *Všechna prvočísla větší než šest dávají při dělení šesti buď zbytek 1 nebo zbytek 5.*

Důkaz podáme snadno pomocí proměnné k , jejímž oborem je množina všech přirozených čísel. Libovolné přirozené číslo větší než pět dává při dělení šesti jeden ze zbytků 0, 1, 2, 3, 4, 5, a lze je proto zapsat jedním z výrazů $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$, kde k je přirozené číslo. Některé z nich lze upravit na součin:

$6k$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 3 = 3(2k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$, proto označují složená čísla. Pro prvočísla můžeme tedy dostat jen zbytek 1 nebo zbytek 5.

Bezprostředním důsledkem dokázané věty je to, že prvočíselná dvojčata, např. 11 a 13, 17 a 19, 29 a 31 „obklopují“ násobek šesti. Jde o prvočísla tvaru $6k - 1$, $6k + 1$, přičemž $6k - 1 = 6(k - 1) + 5$.

2. *Zkoumejme, jaký zbytek při dělení čtyřmi dávají druhé mocniny přirozených čísel.*

Zapišme si několik případů:

$$\begin{array}{llll} 1^2 = 0.4 + 1 & 3^2 = 2.4 + 1 & 5^2 = 6.4 + 1 & 7^2 = 12.4 + 1 \\ 2^2 = 1.4 + 0 & 4^2 = 4.4 + 0 & 6^2 = 9.4 + 0 & 8^2 = 16.4 + 0 \end{array}$$

Výsledky nás opravňují k vyslovení hypotézy:

Druhá mocnina každého přirozeného čísla dává při dělení čtyřmi buď zbytek 0 nebo zbytek 1.

Důkaz. Každé přirozené číslo lze zapsat buď jako $2k$ nebo jako $2k - 1$, kde k je přirozené číslo. Druhé mocniny

$$4k^2 = 4 \cdot k^2 + 0, \quad 4k^2 - 4k + 1 = 4 \cdot (k^2 - k) + 1,$$

dávají skutečně zbytky 0, resp. 1.

Zpestřeme si látku problémem: *Je číslo 472 591 součtem druhých mocnin nějakých dvou přirozených čísel?*

Místo zoufalého experimentování se vyplatí zamyslet se nad součty dvou druhých mocnin přirozených čísel a, b . Při dvou možnostech $a = 2k, a = 2k - 1$ a dvou možnostech $b = 2r, b = 2r - 1$ máme celkem čtyři možnosti pro $a^2 + b^2$:

$$4k^2 + 4r^2 = 4(k^2 + r^2) + 0,$$

$$4k^2 + 4r^2 - 4r + 1 = 4(k^2 + r^2 - r) + 1,$$

$$4k^2 - 4k + 1 + 4r^2 - 4r + 1 = 4(k^2 - k + r^2 - r) + 2$$

(čtvrtý případ získáme pouhou záměnou k, r ve druhém případě).

Ani v jednom případě nedostáváme zbytek 3, proto žádné přirozené číslo které při dělení čtyřmi dává zbytek tři, nemůže být součtem druhých mocnin dvou přirozených čísel. A to je právě případ čísla 472 591.

3. Zkoumejme, jaký zbytek při dělení pěti dávají čtvrté mocniny přirozených čísel.

Zapišme opět několik případů:

$$1^4 = 0 \cdot 5 + 1 \quad 3^4 = 16 \cdot 5 + 1 \quad 5^4 = 125 \cdot 5 + 0$$

$$2^4 = 3 \cdot 5 + 1 \quad 4^4 = 51 \cdot 5 + 1 \quad 6^4 = 259 \cdot 5 + 1$$

Tentokrát je výsledek zajímavý pro čísla nedělitelná pěti, proto vyslovíme hypotézu:

Čtvrtá mocnina každého přirozeného čísla, které není dělitelné pěti, dává při dělení pěti zbytek 1.

Důkaz. Každé zkoumané přirozené číslo lze zapsat jedním z výrazů $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$, kde $k = 0, 1, 2$,

Čtvrtou mocninu součtů můžeme zapsat pomocí vzorce

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = a[\quad] + b^4,$$

dostaneme $(5k + 1)^4 = 5k \cdot (\quad) + 1 = [\quad] \cdot 5 + 1$,

$$(5k + 2)^4 = 5k \cdot (\quad) + 16 = [\quad + 3] \cdot 5 + 1,$$

$$(5k + 3)^4 = 5k \cdot (\quad) + 81 = [\quad + 16] \cdot 5 + 1,$$

$$(5k + 4)^4 = 5k \cdot (\quad) + 256 = [\quad + 51] \cdot 5 + 1.$$

Závorky s tečkami naznačují složité výrazy, které nás nezajímají, jakmile máme vytknutého činitele.

4. Zkoumejme, jaký zbytek při dělení šesti dávají čísla typu

$mn(m + n)(m - n)$ pro libovolná přirozená čísla $m, n, m > n$.

Jde o výraz s dvěma proměnnými, máme možnost nezávislé volby m, n :

$$m = 2, n = 1 \quad 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 6 = 1 \cdot 6 + 0,$$

$$m = 3, n = 1 \quad 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 24 = 4 \cdot 6 + 0,$$

$$m = 3, n = 2 \quad 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 30 = 5 \cdot 6 + 0.$$

Zdá se, že tentokrát získáváme jen nulové zbytky; vyslovíme proto hypotézu o dělitelnosti:

Číslo $mn(m + n)(m - n)$ je dělitelné šesti při všech přirozených číslech m, n , z nichž m je větší.

Důkaz vyžaduje, abychom probrali všechny volby dvojic m, n při

$$m = 6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5,$$

$$n = 6r, 6r + 1, 6r + 2, 6r + 3, 6r + 4, 6r + 5.$$

Jde o 36 případů; ověření je nejsnazší při $m = 6k$ a libovolném m , při libovolném m a $n = 6r$, při $m = 6k + q$, $n = 6r + q$ [tehdy $m - n = 6(k - r)$]. Ze zbývajících 18 případů ukažme několik, chybějící si čtenář doplní sám.

$$m = 6k + 1, n = 6r + 2$$

$$\begin{aligned} & (6k + 1)(6r + 2)(6k + 6r + 3)(6k - 6r - 1) = \\ & = (6k + 1)^2 (3r + 1) \cdot 3 (2k + 2r + 1)(6k - 6r - 1) = \\ & = 6 \quad [\quad] \end{aligned}$$

$$m = 6k + 5, n = 6r + 4$$

$$\begin{aligned} & (6k + 5)(6r + 4)(6k + 6r + 9)(6k - 6r + 1) = \\ & = (6k + 5)^2 (3r + 2) \cdot 3 (2k + 2r + 3)(6k - 6r - 1) = \\ & = 6 \quad [\quad] \end{aligned}$$

Ve všech případech skutečně získáme čísla dělitelná šesti, tím je hypotéza dokázána.

Pokud jste četli o pythagorejských trojúhelnících (tj. pravoúhlých trojúhelnících s celočíselnými velikostmi stran), spatřujete v dokázané hypotéze potvrzení toho, že *obsah každého pythagorejského trojúhelníka je dělitelný šesti*.

Poznali jste několik vět o stejných zbytcích při dělení přirozených čísel určitého typu zvoleným číslem, hlavně jste si však uvědomili jednu možnou metodu, jak lze takové věty objevovat a dokazovat. Příklady 3 a 4 svědčí o tom, že je to metoda někdy zdoluhavá, nicméně účinná; můžete jí použít, neznáte-li úspornější metodu. Někdy lze postup zkrátit, jak se přesvědčíte při řešení úlohy 1 podle návodu za jejím textem. Bývá také výhodné pracovat se zápisy $5k - 1$, $5k - 2$ místo $5k + 4$, $5k + 3$ apod., zjednodušíme tím numerické výpočty (přesvědčte se o tom v příkladech 3 a 4).

Matematika má samozřejmě vypracovány i rychlejší způsoby dokazování vět o stejných zbytcích, např. pomocí aritmetiky zbytkových tříd či kongruencí. Čtenáři, kteří se o ně zajímají, mohou prostudovat svazek edice Škola mladých matematiků (A. Apfelbeck: Kongruence).

Úlohy

- Zkoumejte, jaký zbytek dávají
 - druhé mocniny všech lichých přirozených čísel při dělení osmi,
 - druhé mocniny všech lichých čísel nedělitelných třemi, jestliže je dělíme dvanácti,
 - součiny $(n - 1)n(n + 1)$ při všech lichých d , dělíme-li je 24.
 [Postačí diskutovat a) $n = 4k + 1$, $4k + 3$; b) $n = 6k + 1$, $6k + 5$; c) $n = 12k + 1$, $12k + 3$, ..., $12k + 11$.]
- Pomocí příkladu 3 zdůvodněte, že rozdíly $m^4 - n^4$ jsou dělitelné pěti při všech dvojicích přirozených čísel m, n , z nichž žádné není dělitelné pěti.
- Dokažte, že součiny $mn(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)$ jsou dělitelné pěti při všech dvojicích přirozených čísel m, n .
- Dokažte, že součiny $mn(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)$ jsou dělitelné třiceti při všech dvojicích přirozených čísel m, n . [Využijte příkladu 4.]

0 matematických symbolech

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc, Liberec

Jak je vám známo, matematika používá celé řady různých symbolů. Je jich tolik, že se někdy dokonce mluví o tom, že matematika má svůj jazyk. Skutečně, napíšeme-li například $1 + 1 = 2$, není to psáno česky ani žádným jiným národním jazykem, zato však je to mezinárodně srozumitelné. Napíšeme-li „jeden“, je to slovo v českém jazyce, které značí určitou číslovku. V jiném jazyce (například v němčině) může mít význam zcela jiný nebo také žádný. Zato číslice 1 neznačí slovo v některém jazyce, ale značí určitý pojem, pro který různé jazyky mají různá slova, ale jeho označení touto číslicí je každému srozumitelné. Je to tedy takzvaný ideogram — znak vyjadřující nikoliv slovo, ale pojem (ideu). Je to něco podobného jako znaky čínského písma. Jednotlivé čínské znaky také vyjadřují pojmy, pro něž v různých dialektech čínštiny existují různá slova, takže obyvatelé různých částí Číny by se třeba nedomluvili, ale mohou si dopisovat. A to je také právě výhodou matematických symbolů — jsou mezinárodně srozumitelné.

Mohli byste poznamenat, že by tedy bylo asi nejvýhodnější zavést v matematice mezinárodně srozumitelné symboly prostě pro všechno a neužívat v matematických textech ničeho jiného než těchto symbolů, tedy nepsat v žádném národním jazyce. Alespoň v některých oborech matematiky by to skutečně bylo možné (například v matematické logice). Někdy se to dělá kvůli tomu, aby se dala správnost důkazu ověřit samočinným počítačem. Uvažme však, že každý člověk se učil mluvit slovy a ne matematickými symboly, takže by čtení takovýchto textů bylo značně namáhavé. Kromě toho v matematickém textu nebývají jen věty a jejich důkazy, ale také různé poznámky a vysvětlivky, které by stejně bylo nutno psát v národním jazyce. Nemůžeme tedy matematickými symboly nahradit všechno, to však neubírá nic na jejich významu. Ten, kdo se chce věnovat matematice, musí její symboliku znát a umět jí správně používat.

Povíme si tedy něco o základních symbolech, kterých matematika užívá.

§ 1. Číslice

V matematice se užívá především číslic arabských. Římských číslic se používá pouze k označování odstavců, případně vět a také k označování vyšších derivací (o tom si povíme později). Je to samozřejmě proto, že arabské číslice jsou vžité a běžné početní úkony se s nimi provádějí rozhodně lépe, než by se mohly dělat s číslicemi římskými.

Důležité je uvědomit si, že číslice není totéž co číslo. Arabských číslic je pouze deset: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pomocí nich se pak zapisují čísla. Nejčastěji se to děje v desítkové (dekadické) soustavě. Není tomu tak proto, že by tato soustava byla nejvýhodnější. Naopak, číslo 10 má pouze dva vlastní dělitele, a to 2 a 5, tedy každý zlomek, který má v základním tvaru jmenovatel dělitelný jiným prvočíslem než 2 nebo 5, lze v desítkové soustavě zapsat pouze nekonečným periodickým desetinným číslem. Je tedy například $\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$, $\frac{1}{6} = 0,1666 \dots$

a číslo $\frac{1}{7}$ má dokonce periodu 1428573. Proto se například neužalo měření úhlů na takzvané grady, kde jeden grad byl setinou velikosti pravého úhlu a dělil se na deset decigradů, sto centigradů a tisíc miligradů. Tato míra byla navržena proto, aby se i při měření úhlů vycházelo z čísla 10 a jeho mocnin, jako je tomu u měření délek, hmotností a jiných veličin. Avšak právě zde se silně projevila nevýhodnost tohoto čísla. Představte si, že bychom měli říci, že každý úhel rovnostranného trojúhelníka má velikost 66 gradů, 6 decigradů, 6 centigradů a $6\frac{2}{3}$ miligradu. Desítkové soustavy se nicméně používá a plyne to ze známého anatomického faktu, že člověk má na obou rukou dohromady deset prstů. A poněvadž prsty jsou nejstarší početní pomůckou, vznikla desetinná soustava a užívá se jí dodnes.

Napišeme-li tedy 1977, značí to číslo rovné $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$. Bylo by možná logičtější psát to v opačném pořadí, začínat jednotkami. Náš zápis souvisí však jednak s tím, že názvy čísel vyslovujeme v pořadí od vyšších řádů k nižším (tisíc devětset sedmdesát sedm), jednak s tím, že naše číslice jsou arabské a Arabové píší zprava doleva.

Někdy se užívá také jiných číselných soustav. Při výpočtech na samostatném počítači má význam soustava dvojková (dyadická), která užívá pouze dvou číslic, a to 0 a 1. Tyto číslice lze totiž snadno vyjádřit například tím, že 1 znamená, že určitým obvodem prochází proud, a 0 znamená, že proud neprochází. Číslo 1977 by se ve dvojkové soustavě vyjádřilo jako 11110111001. Z toho vidíme, že pro „ruční“ počítání, to jest počítání bez počítače, by tato soustava vhodná nebyla. Jsou s ní potíže i tehdy, je-li potřeba zaznamenávat větší množství čísel ve dvojkové soustavě. Proto se používá v souvislosti s počítači také soustavy osmičkové (oktadické). Číslo 8 je mocninou dvou, proto lze snadno osmičkový zápis převést na dvojkový. (Podrobnostmi se zde zabývat nebudeme.) Číslo 1977 by se v osmičkové soustavě zapsalo jako 3671.

Číslic 0 a 1 se rovněž v matematické logice užívá k označování tak-

zvaných pravdivostních hodnot. Nulou se označuje výrok nepravdivý, jedničkou pravdivý. I to má aplikace v samočinných počítačích.

Číslic se ovšem často používá v indexech a k číslování vět, definic, odstavců atd. Přesto však můžeme tvrdit (i když se to možná bude zdát divné), že číslice nejsou nejdůležitějšími symboly v matematice. Jsou jimi písmena.

§ 2. Písmena

Písmeny se v matematice označuje prakticky všechno: čísla, množiny, relace, body, křivky a mnoho dalších matematických objektů. Nejčastěji se užívá písmen latinské abecedy, to jest abecedy, které užívá mnoho světových jazyků, mezi nimi i čeština. (Pokud však mluvíme o latinské abecedě, máme na mysli jen skutečně latinská písmena, tedy nikoliv písmena s čárkami či háčky.) Užívá se prakticky všech písmen této abecedy, a to malých (minuskulí) i velkých (majuskulí). Čísla se zpravidla značí malými písmeny, někdy však také velkými, zvláště tehdy, má-li se zdůraznit, že jde o velké číslo. K označení neznámých či proměnných se zpravidla užívá písmen z konce abecedy (x, y, z), k označení celých čísel se užívá obvykle písmen z prostředku abecedy (m, n, p), jiné konstanty zpravidla označujeme písmeny ze začátku abecedy (a, b, c). Malými písmeny se rovněž označují obecné prvky množin. Složitější matematické objekty jako množiny se zapisují velkými písmeny. Ovšem není to nějaké obecné pravidlo; funkce jsou dosti složité matematické objekty, a přesto se obvykle značí malými písmeny. V geometrii je to zcela obráceně; body se značí velkými písmeny, přímky a křivky malými. Kdybychom však vzali do ruky starší geometrickou literaturu (například známou učebnici Kadeřávka, Klímy a Kounovského), našli bychom tam body značené malými písmeny a přímky velkými. Je to pro nás nezvyklé, velmi by nám to ztěžovalo studium, nicméně je to však jaksi přirozenější; přímka je přece „něco většího“ než bod.

Označení často volíme tak, aby vyjadřovalo začáteční písmeno příslušného slova — množina M , funkce $f(x)$.

V tisku se písmena označující matematické symboly zpravidla tisknou kursivou (ležatým písmem); je to proto, abychom v textu mohli rozlišit například číslo a od spojky a nebo číslo s od předložky s. Antikvou (stojatým písmem) se tisknou pouze některé ustálené symboly jako $\sin$, $\cos$ nebo písmeno d označující diferenciál (tedy dx je diferenciál x). Zde naopak antikva pomáhá odlišit tyto symboly od ostatních matematických symbolů. Často se užívá i jiných typů písma jako písmo rondové A, B, C , polotučná kursiva A, B, C , polotučná antikva A, B, C a podobně. Podrobněji se o tom můžete dočíst v knize [1]. Je to zapotřebí proto, aby se rozlišily různé druhy matematických objektů (například

systém množin je vhodné značit jiným typem písma než množinu z tohoto systému).

Z téhož důvodu se používá i jiných abeced než latinské. Je pochopitelné, že se nejprve sáhlo po písmu země, která byla kolébkou evropské kultury (včetně matematiky) a jejíž jazyk byl po dlouhá staletí vedle latiny jazykem vzdělanců — po písmu řeckém. S řeckými písmeny jste se setkali již na základní škole při označování úhlů a rovin v geometrii. Užívá se jich ovšem i pro mnoho dalších matematických objektů. Nejčastěji se užívá malých písmen, i když se leckde setkáme i s velkými. Zásoba velkých řeckých písmen je totiž dosti omezená; mnohá z nich vypadají stejně jako odpovídající latinská (například alfa a beta) nebo jako jiná latinská písmena (velké éta vypadá jako H), a tedy jich vlastně jakožto řeckých písmen použít nelze. Naproti tomu z malých řeckých písmen pouze písmeno omikron je stejné jako latinské o , ostatní jsou od latinských odlišná. Řeckou abecedu najdete v tabulce 1. Je třeba poznamenat, že názvy řeckých písmen jsou v češtině vždy středního rodu a nesklonné, i když bychom je podle tvaru mohli zařadit do některého skloňování mužského nebo ženského rodu. Neřekneme tedy nikdy, že „kladnou alfu dělíme zápornou betou“, ale vždy „kladné alfa dělíme záporným beta“.

Moderní matematika dokonce nevystačí ani se zmíněnými dvěma abecedami a užívá ještě takzvané fraktury (švabachu), to jest německého písma. Je to písmo, se kterým se můžete setkat ve starších německých knihách; dnes již Němci používají běžně latinky. Zatímco text tištěný řeckým písmem nelze číst bez znalosti tohoto písma, můžeme text tištěný frakturou přece jen číst, aniž bychom se tomuto písmu učili. Je to totiž v podstatě upravená latinka. Přesto neexistuje německé písmeno, které by vypadalo zcela stejně jako odpovídající latinské, a tedy německá abeceda skýtá matematice bohatší zásobu symbolů než řecká. Frakturu najdete v tabulce 2. Stačí, když ji ovládnete pasivně, to znamená, že poznáte vytištěné písmeno. Není vůbec nutné, abyste uměli sami psát tiskací frakturová písmena. Chce-li autor matematického textu užít frakturových písmen, napíše v rukopise odpovídající latinská písmena a zatrhne je zeleně. Sazeč pak již příslušné frakturové písmeno vysází. Nebylo by ovšem na škodu, kdybyste se naučili psát psací německá písmena, ale ta zde uvádět nebudeme; můžete je nalézt v některé starší učebnici němčiny.

Malá frakturová písmena mají svůj ustálený význam — označují takzvaná kardinální čísla neboli mohutnosti množin. Podobně jako u konečné množiny můžeme určit její počet prvků, můžeme i nekonečným množinám přiřazovat jisté symboly vyjadřující takzvanou mohutnost. Nebudeme to zde popisovat podrobněji, stačí, když si budeme pamatovat, že malá frakturová písmena jsou vyhrazena ke značení těchto

mohutností. Velkých frakturových písmen se užívá hlavně k označování systémů množin a množin s určitou strukturou (například grup).

Zmínili jsme se o mohutnostech množin. K označování mohutností nekonečných množin se užívá také jednoho písmene z jedné další abecedy, a to hebrejské. Jde o první písmeno této abecedy, které se nazývá alef a píše se $\aleph$. Je to zatím jediné písmeno hebrejské abecedy, kterého se v matematice používá; ostatní písmena této abecedy nejsou tak výrazná a snadno by se mezi sebou zaměňovala, proto dosud nenalezla v matematice uplatnění.

K písmenům se často připojují indexy. Mohou jimi být čísla, písmena nebo i jiné značky. Tak máme například a_1, b_2, c_k, d_M, f_+ . Indexů může být i několik u jednoho písmene; například a_{ij}, b_{klm} . Pokud nemůže dojít k nedorozumění, píše se přímo za sebou; jinak se mezi ně píše čárka. Například „ a jedna dvě“ můžeme napsat prostě a_{12} , pokud by se to ovšem mohlo zaměnit za „ a dvanáct“, píšeme $a_{1, 2}$. Podobně píšeme čárku tehdy, je-li některý z indexů složitějším výrazem, třeba a_i, j_{+1} . Dokonce v indexu může být i písmeno rovněž s indexem — a_{n_i} .

Někdy se indexy píše i nahoru, podobně jako exponent; říkáme jim horní indexy a obvyklé indexy pak nazýváme dolními indexy. Pokud by takovýto index mohl být považován omylem za exponent, dáme jej do závorky, tedy píšeme $a^{(2)}$. Může být samozřejmě písmeno s horním i dolním indexem — $b_1^{(2)}$. Výjimečně se píše indexy i před písmeno, například v deskriptivní geometrii $1h_2$.

Kromě indexů lze přidávat k písmenům i jiná znaménka. Nejčastěji to bývají čárky a hvězdičky; tak máme a', a'', b^*, b^{**} . Nad písmenem pak může být pruh — $\bar{a}$. Je to vlastně označení, kterého užívá litevština a lotyšština k označení délky samohlásky místo naší čárky; k témuž účelu se ho používá i v učebnicích latiny (jinak se v latině nepíše). Dále se užívá vlnovky — $\tilde{a}$ (je to znaménko „tilda“ užívané ve španělštině a portugalštině) a stříšky — $\acute{a}$ (je to známý francouzský „accent circonflexe“ nebo slovenský „vokáň“). Také lze nad písmeno nebo nad několik písmen psát šipku — $\vec{a}, \vec{AB}$.

Je ovšem mnoho dalších možností a vynalézavost autorů matematických publikací je v tom nepřeborná — někteří autoři užívají i notových křížků a „béček“. Vám však postačí, když se seznámíte s těmi symboly, které zde byly uvedeny; v nepřiliš složitých matematických textech se s nimi vystačí.

(Dokončení)

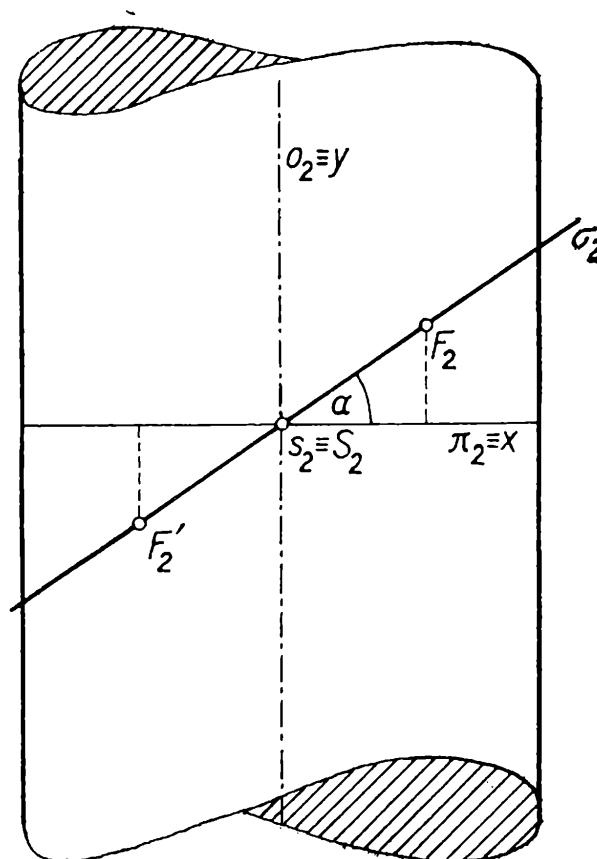
konstruktivní geometrie

Řezy rotační válcové plochy

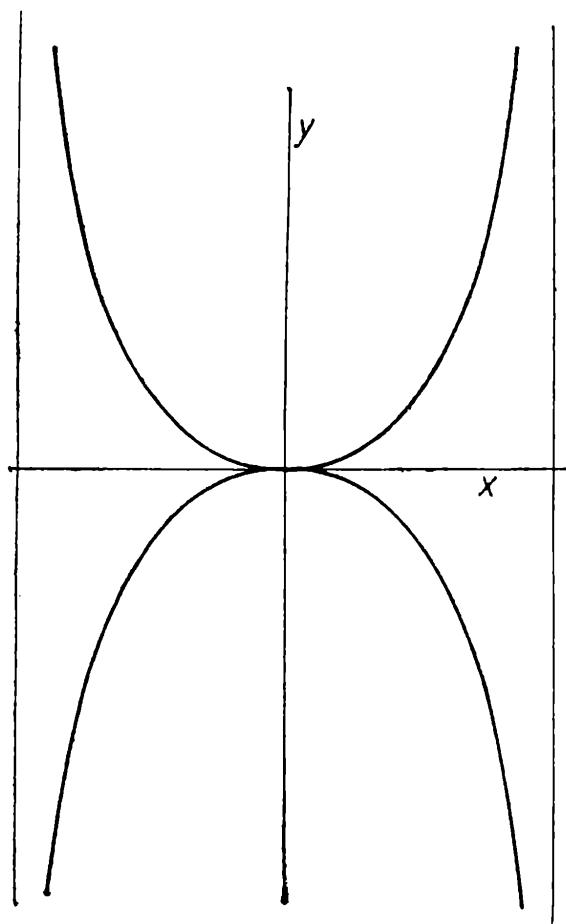
STANISLAV HORÁK, Praha

Rovina, která není kolmá k ose rotační válcové plochy a není s ní rovnoběžná, protíná tuto plochu v elipse. Představte si, že tato rovina se otáčí kolem nějaké pevné přímky. Pak dostaneme množinu nekonečně mnoha eliptických řezů a tu si můžeme klást různé otázky, např. jaká je množina ohnisek všech takových eliptických řezů. Na tuto otázku neodpovíme obecně, probereme tu jen dva speciální případy.

I. Je dána rotační válcová plocha a rovina π , která ji protíná v kružnici $k = (S; r)$. Rovina π je tudíž kolmá k ose o dané plochy. Předpokládejme, že rovina π se otáčí kolem přímky s , která prochází bodem S a kolmo protíná osu o . Ptejme se, co je množina ohnisek všech eliptických řezů dané válcové plochy s rovinami, vzniklými uvedeným způsobem z roviny π .



Obr. 1a



Obr. 1b

Řešení (obr. 1a). Jestliže se rovina π otočí o úhel α , kde $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (nezáleží na tom, zda se otáčení děje v kladném či záporném smyslu), dostane se do polohy σ . Rovina σ protíná danou válcovou plochu v elipse, jejíž ohniska jsou F, F' . Obě ohniska leží v rovině ν , která prochází osou o kolmo k přímce s . Rovinu ν zvolme za druhou průmětnu. Potom druhým průmětem roviny σ a každé roviny, vzniklé z roviny π otočením kolem přímky s , je přímka σ_2 . Druhé průměty ohnisek F, F' jsou body F_2, F'_2 incidentní se σ_2 . Je patrné, že hledaná množina všech ohnisek je rovinný útvar v rovině ν a proto k jeho zjištění i k jeho studiu je vhodná analytická metoda. Dodejme ještě, že tento rovinný útvar je shodný se svým průmětem do ν .

V rovině ν zvolme osu x v průsečnici rovin π, ν a osu y v ose o dané rotační válcové plochy. Potom můžeme psát (a je délka hlavní poloosy, e je délka excentricity elipsy, která je řezem dané plochy rovinou σ):

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= a \Rightarrow a = r \cos \alpha, \\ e &= SF = S_2F_2 = \sqrt{a^2 - r^2} = r \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Bod $F_2 = F$ má souřadnice:

$$x = S_2F_2 \cos \alpha = SF \cos \alpha = r \sin \alpha, \quad (1)$$

$$y = S_2F_2 \sin \alpha = SF \sin \alpha = r \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha. \quad (2)$$

Pro souřadnice x', y' bodu $F'_2 = F'$ platí

$$x' = -x \Rightarrow x' = -r \cdot \sin \alpha, \quad (3)$$

$$y' = -y \Rightarrow y' = -r \cdot \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha. \quad (4)$$

Rovnice (1), (2) a (3), (4) platí pro ohniska řezů. Platí však i obráceně: Jestliže souřadnice některého bodu vyhovují rovnicím (1), (2) nebo rovnicím (3), (4), pak tento bod je ohniskem nějakého řezu rovinou, vzniklé z roviny π otočením kolem přímky s . Množina všech hledaných ohnisek je tudíž dána rovnicemi (1), (2) a (3), (4). Poněvadž v těchto rovnicích je proměnný úhel α , jsou to *rovnice parametrické*.

Vylučme parametr α z rovnic (1), (2). Především platí

$$y/x = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \sin \alpha = y / \sqrt{x^2 + y^2}.$$

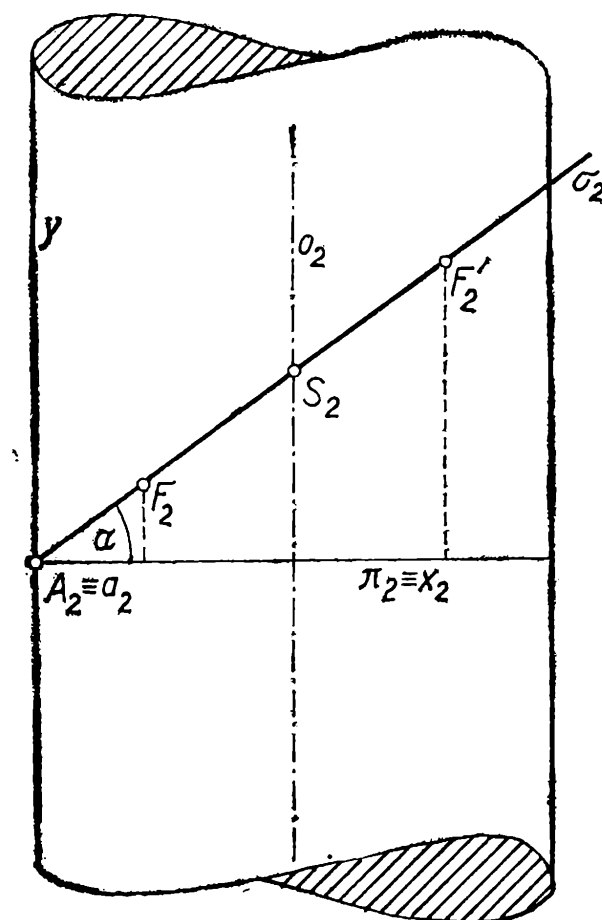
Tuto hodnotu dosadíme do (1) a po kratší úpravě dojdeme k rovnici

$$x^2(x^2 + y^2) = r^2 y^2$$

Kdybychom parametr α vyloučili z rovnic (3), (4), dospěli bychom k téže rovnici.

Vidíme tedy, že hledanou množinou všech ohnisek je křivka 4. stupně, které se v literatuře říká *kappa-křivka*. Je to pro její podobnost s řeckým písmenem κ . Přímky $x = -r$, $x = +r$ jsou její asymptoty (obr. 1b).

II. Opět jako v předešlém případě mějme rotační válcovou plochu



Obr. 2a

a rovinu π , která je kolmá k ose o této plochy. Rovina π protíná válcovou plochu v kružnici k . Na kružnici k zvolme libovolný bod A a v něm sestrojme tečnu a kružnice k .

Jestliže se rovina π otáčí kolem tečny a , pak v každé své poloze (až na dva různé případy) protíná válcovou plochu v elipse. Ptejme se opět, co je množina ohnisek všech těchto elips.

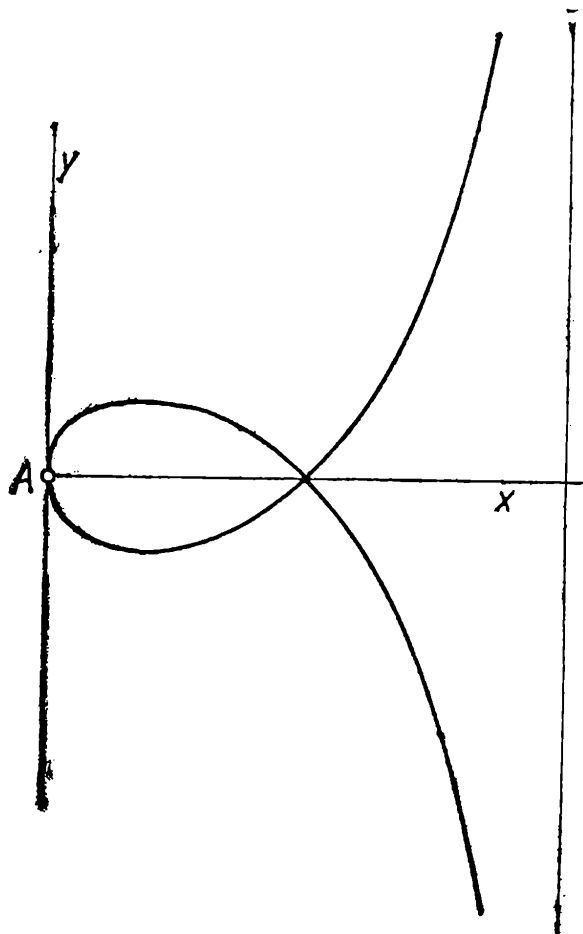
Řešení (obr. 2a). Zvolme druhou průmětnu ν tak, aby procházela osou o válcové plochy a aby současně byla kolmá k tečně a . Druhým průmětem přímky a je pak bod $a_2 = A_2$ a druhým průmětem roviny σ je přímka σ_2 incidentní s a_2 . První průmětnu zvolme přímo v rovině π .

Uvažme nyní, že ohniska F, F' všech eliptických řezů leží v druhé průmětně a že tedy hledanou množinou bude nějaký rovinný útvar v ν . Při řešení našeho problému můžeme tudíž opět použít analytické geometrie v rovině.

V rovině ν zvolme souřadnicovou soustavu tak, že osa $x = \pi_2$ a osa y splývá s nárysně obrysovou površkou bodu A . Bod $F_2 = F$ má potom souřadnice (pro velikost hlavní poloosy a , excentricity e platí přirozeně vzorce odvozené v odst. I; i úhel α je úhel sevřený rovinami π a σ):

$$x = (a - e) \cos \alpha = r(1 - \sin \alpha), \quad (1')$$

$$y = (a - e) \sin \alpha = r(1 - \sin \alpha) \operatorname{tg} \alpha \quad (2')$$



Obr. 2b

Obdobně pro ohnisko F' :

$$x' = r(1 + \sin \alpha), \quad (3')$$

$$y' = r(1 + \sin \alpha) \operatorname{tg} \alpha. \quad (4')$$

Platí však i obráceně: Každý bod, jehož souřadnice x, y splňují rovnice (1'), (2') nebo (3'), (4'), je bodem hledané množiny.

Z rovnic (1'), (2') vylučme parametr α . Nejprve dostaneme

$$y : x = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \sin \alpha = y : \sqrt{x^2 + y^2}$$

Za $\sin \alpha$ dosadíme do rovnice (1') a po kratší úpravě dostaneme

$$r^2 y^2 = (r - x)^2 (x^2 + y^2).$$

Tato rovnice se dá ještě zjednodušit:

$$(x - 2r)(x^2 + y^2) + r^2 x = 0. \quad (5)$$

Přesvědčte se, že vyloučením parametru α z rovnic (3') a (4') dojdeme k témuž výsledku, takže hledaná množina ohnisek v kartézské soustavě souřadnic je vyjádřena rovnicí (5) s výjimkou bodu A . Jak tato křivka vypadá, je znázorněno na obr. 2b. Osa y je tečnou křivky a bod $(r; 0)$ je dvojnásobný. Tato křivka je 3. stupně a nazývá se *strofoida* (přesněji *přímá strofoida*). Přímka $x = 2r$ je její asymptota.

Cvičení

1. Je dána rotační válcová plocha o ose o a přímka s , která tuto osu kolmo protíná. Najděte množinu bodů dotyku všech tečných rovin, proložených přímkou s ke všem kulovým plochám vepsaným dané válcové ploše.

2. Je dána rotační válcová plocha a na její ose o je zvolen libovolný bod S . Najděte množinu bodů dotyku všech tečných rovin, proložených bodem S ke všem kulovým plochám vepsaným dané válcové ploše.

3. Bodem A strofoidy vedme libovolnou přímku, která tuto křivku protne ještě v bodech B, C a asymptotu protne v bodě D . Ukažte, že $AB = CD$.

4. Je dána rotační válcová plocha a její tečna a , která je kolmá k ose o dané válcové plochy. Co je množina bodů dotyku všech tečných rovin vedených přímkou a ke všem kulovým plochám vepsaným dané válcové ploše?

Teorie podobnosti

Ing. EVA VESELÁ, ČVUT - FSI

V dnešní době se stále více věnuje pozornost okolnostem, které souvisejí s tzv. fyzikální podobností. Exaktní řešení některých problémů se dá provést někdy velice obtížně, někdy není možné provést takovéto řešení vůbec, a často ani neumíme zkoumaný jev matematicky popsat. Při vyšetřování takovýchto jevů je vhodné a výhodné použít metod podobnosti. Tak např. konstrukce letadel, lodí, přehrad a dalších složitých technických staveb je založena na předběžných zkoumáních a měřeních na modelech. Aby bylo možno správně aplikovat tato měření na skutečné konstrukce, je nutno dodržovat zásady, které nám podává teorie podobnosti.

Fyzikální podobnost je možno aplikovat při zkoumání fyzikálních jevů, a to fyzikálních jevů stejného druhu. To znamená, že oba fyzikální děje — zkoumaný i měřený — jsou popsány rovnicemi¹⁾, u kterých jsou rozdílné pouze konstanty u proměnných (např. rychlost proudu u podobného děje je opět rychlostí proudu, ovšem mající jinou velikost, jejíž hodnota vyplývá z teorie podobnosti).

Podobnost fyzikálních jevů musíme odlišovat od *analogie*, kde se zabýváme zkoumáním dvou jevů, které jsou popsány rovnicemi stejného tvaru²⁾, ale co do obsahu se u rovnic liší jak koeficienty, tak i proměnné (např. rychlostnímu poli v proudu kapaliny kolem obtékaného profilu odpovídají ekvipotenciální plochy v elektrostatickém poli).

Chceme-li sledovat určitý fyzikální děj, či chceme-li zjistit, v jakých případech bude tento děj probíhat za nejvýhodnějších podmínek, pak sledujeme chování tohoto děje na určitém *modelu*³⁾, na kterém je možno snadněji provádět měření (např. vyšetřujeme-li nějaký velice rychlý děj, pak zvolíme podle teorie podobnosti takový model, aby měřená rychlost byla malá; velká *díla*³⁾ nahrazujeme menšími modely, atp.) Při

¹⁾ Přesně řečeno jsou popsány stejnou diferenciální rovnicí co do tvaru i obsahu, tedy v obou rovnicích jsou tytéž proměnné ve stejném matematickém tvaru a liší se pouze konstanty u proměnných.

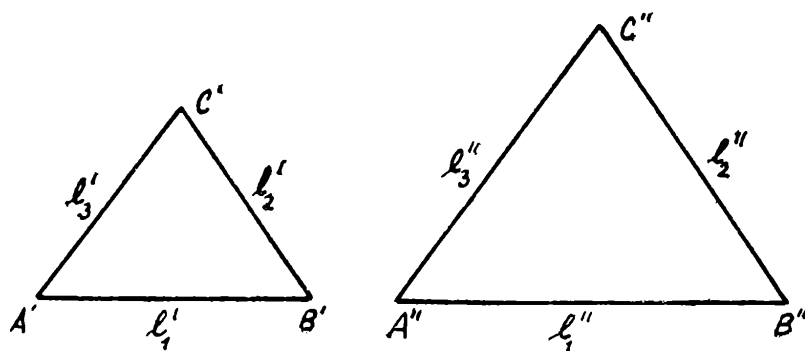
²⁾ Přesně řečeno diferenciálními rovnicemi stejného tvaru.

³⁾ V teorii podobnosti nazýváme vyšetřovaný předmět, na němž provádíme měření, *modelem*, a předmět, jehož chování chceme při daném fyzikálním ději stanovit — *dílem*.

správném použití teorie podobnosti je možno upotřebit výsledky, které získáme při jednom pokuse — tedy na jednom modelu — na všechny případy, které si budou podobné.

Původně byl pojem podobnosti zaveden v geometrii, odkud pak byl převzat do jiných vědních oborů. Jak je z geometrie známo, mají podobné geometrické obrazce, např. trojúhelníky, stejné úhly a sobě odpovídající strany jsou sobě úměrné (viz obr. 1):

$$\frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \frac{l_3''}{l_3'} = \text{konst} = c_l, \quad (1)$$



Obr. 1a, 1b

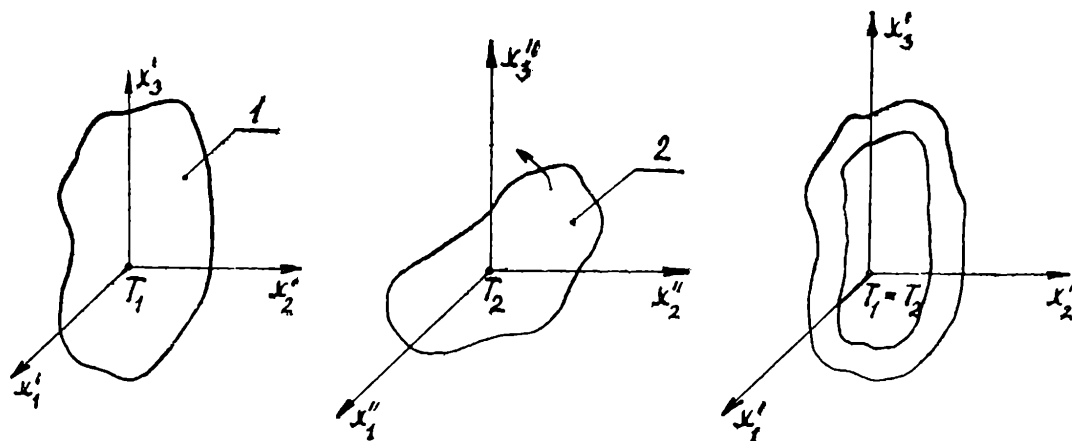
kde l_1', l_2', l_3' jsou délkové rozměry daného trojúhelníka, a l_1'', l_2'', l_3'' jsou délkové rozměry druhého trojúhelníka, který je podobný danému. Konstanta c_l je součinitel úměrnosti, neboli *konstanta podobnosti* (někdy též poměr podobnosti), jejíž velikost musíme dodržet, aby byla podobnost zachována. Podmínka (1) definuje tzv. *geometrickou podobnost*. Tato podmínka platí zcela obecně pro shodné úsečky podobných obrazců, např. výšky, těžnice, atd. Na základě geometrické podobnosti je pak možno řešit řadu praktických úloh. Tak např. z vlastností podobných trojúhelníků lze stanovit výšku věže neb šířku řeky bez přímého měření.

V elementární geometrii je dána následující definice podobných mnohoúhelníků: dva mnohoúhelníky téhož typu jsou si podobné, jsou-li úhly jednoho mnohoúhelníka rovny odpovídajícím úhlům mnohoúhelníka druhého, a strany, svírající tyto shodné úhly jsou si úměrné.

Této definici podobnosti mnohoúhelníků odpovídá také definice následující: dva mnohoúhelníky jsou si podobné, je-li možno najít takové jejich vzájemné umístění, že *rovnoměrnou deformací*⁴⁾ jednoho z nich můžeme dosáhnout toho, že se oba mnohoúhelníky budou shodovat.

Tato definice podobnosti mnohoúhelníků má ale následující nedostatky — není zde ukázáno, jakým vzájemným způsobem musí být oba mnohoúhelníky umístěny. Budeme si tedy definovat též *sdružené* (od-

⁴⁾ Rovnoměrnou (stejněměrnou) deformací rozumíme takovou deformaci, v důsledku které se zmenšují resp. zvětšují všechny rozměry deformujícího se tělesa najednou a v témže poměru či násobku.



Obr. 2a, 2b, 2c

povídající) umístění, které je nutné pro dodržení geometrické podobnosti (už obecně, týkající se dvou libovolných těles — viz obr. 2). Ztotožníme těžiště T_1 tělesa 1 s těžištěm T_2 tělesa 2, a podaří-li se nám otáčením jednoho tělesa (např. tělesa 2) kolem společného těžiště dosáhnout takovou polohu obou těles, při které se v důsledku rovnoměrné deformace obrysy obou těles ztotožní ve všech bodech, pak jsou si tělesa 1, 2 podobná.

Jednotlivé body, které se při deformaci ztotožní, nazýváme *sdrúžené (odpovídající si) body*. Vzájemnou polohu obou podobných těles, která nám zaručuje jejich totožnost v důsledku rovnoměrné deformace, nazýváme *odpovídajícím umístěním*.

Pojem podobnosti lze rozšířit na libovolné fyzikální jevy. Např. *podobnost kinematická* se vztahuje k vyšetřování rychlostí, *podobnost dynamická* zkoumá síly, *podobnost teplotní* uvažuje tepelná pole, atd.

Při rozboru podobných jevů je možno porovnávat jen stejnorodé veličiny vyskytující se v odpovídajících bodech prostoru. Stejnorodé jsou takové veličiny, které mají stejný fyzikální smysl a měří se ve stejných jednotkách.

Nesmíme zapomenout, že v mnoha případech podobnosti nezůstává ani čas invariantní, ale že je nutno ho určovat z transformačního vztahu

$$\frac{\tau''}{\tau'} = c_t.$$

Podle podobných transformačních vztahů se dále mění všechny veličiny, které se dotýkají vyšetřovaného fyzikálního jevu a které nazýváme *veličinami určujícími (charakterizujícími) daný jev*.

Musíme si tedy uvědomit, že podobnost dvou fyzikálních jevů znamená podobnost všech veličin charakterizujících vyšetřovaný jev. Jinak můžeme tento závěr formulovat takto:

V odpovídajících si bodech prostoru a v odpovídajících si dobách je

libovolná veličina φ'' jednoho jevu, vyjádřená pomocí odpovídající veličiny φ' jevu druhého, vyjádřena vztahem

$$\varphi'' = c_\varphi \cdot \varphi'$$

kde c_φ je konstantou podobnosti veličiny φ (neboli transformačním součinitelem veličiny φ). Tento součinitel nezávisí ani na souřadnicích ani na čase.

Mnohé fyzikální veličiny (např. teplota, hustota, rychlost, atd.) mají v různých bodech vyšetřovaného prostoru různé velikosti, a potom je podmínkou podobnosti těchto veličin podobnost v celém rozsahu uvažované soustavy, čili *podobnost polí fyzikálních veličin*.

Matematicky pak definujeme podobnost polí hustoty ρ , viskozity η , teploty T , rychlosti v , zrychlení a , atd. následujícími vztahy:

$$\frac{\rho''}{\rho'} = c_\rho, \quad \frac{\eta''}{\eta'} = c_\eta, \quad \frac{T''}{T'} = c_T, \quad \frac{v''}{v'} = c_v, \quad \frac{a''}{a'} = c_a, \text{ atd.}$$

Při vyšetřování fyzikálních jevů si nemůžeme volit všechny konstanty podobnosti libovolně. Ukažme si to na následujícím příkladě: uvažujme rychlost v nějakého tělesa, která je definována jako změna dráhy tělesa s za čas t , za který byla tato dráha proběhnuta, tedy:

$$v = s/\tau$$

Aplikujeme-li tuto definici na sdružené body podobného tělesa, které probíhají podobné dráhy, pak dostáváme

v jedné soustavě $v' = s'/\tau'$

v druhé soustavě $v'' = s''/\tau''$

dělením obou rovnic dostáváme

$$\frac{v''}{v'} = \frac{s''}{s'} : \frac{\tau''}{\tau'},$$

a označíme-li

$$\frac{v''}{v'} = c_v, \quad \frac{s''}{s'} = c_s, \quad \frac{\tau''}{\tau'} = c_\tau,$$

pak tyto konstanty podobnosti musí splňovat podmínku

$$c_v = c_s/c_\tau, \text{ čili } \frac{c_v c_\tau}{c_s} = 1$$

Přepíšeme-li tuto rovnici pomocí rovnice (2), dostáváme

$$\frac{v'' \tau''}{s''} = \frac{v' \tau'}{s'} = \frac{v \tau}{s} = \text{konst.} \quad (3)$$

Tato rovnice nám ukazuje na základní vlastnost podobných soustav: poměr určitých veličin vstupujících do vyšetřovaného jevu má tutéž číselnou hodnotu. Takováto čísla nazýváme kritéria podobnosti (*bezrozměrné parametry, invarianty podobnosti*). Jsou to bezrozměrné veličiny.

Kritéria podobnosti označujeme počátečními písmeny jmen badatelů, kteří příslušná kritéria objevili, např. Re (Reynolds), Ne (Newton), Eu (Euler), Nu (Nusselt), atd.

Příklad

Podle 2. pohybového Newtonova zákona je síla F dána jako součin hmotnosti tělesa m a jeho zrychlení a , tedy

$$F = m \cdot a = m \cdot v/\tau.$$

Tento zákon aplikujeme na sdružená tělesa podobných soustav:

$$\text{pro 1. soustavu } F' = m' \cdot v'/\tau', \quad (4a)$$

$$\text{pro 2. soustavu } F'' = m'' \cdot v''/\tau'' \quad (4b)$$

Soustavy mají být podobné, tak si můžeme vyjádřit proměnné 2. soustavy pomocí proměnných 1. soustavy:

$$F^5 = c_F \cdot F', \quad m^5 = c_m \cdot m', \quad v^5 = c_v \cdot v', \quad \tau^5 = c_\tau \cdot \tau' \quad (5)$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice (4b):

$$c_F \cdot F' = \frac{c_m \cdot c_v}{c_\tau} = \frac{m' \cdot v'}{\tau'}. \quad (6)$$

Rovnice (4a) a rovnice (6) musí být identicky rovny, tedy musí platit

$$\frac{c_F \cdot c_\tau}{c_m \cdot c_v} = 1$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu výrazy (5), dostaneme:

$$\frac{F' \cdot \tau'}{m' \cdot v'} = \frac{F'' \cdot \tau''}{m'' \cdot v''} = \frac{F \cdot \tau}{m \cdot v} = \text{konst.} = \text{Ne} \quad (\text{Newtonovo kritérium})$$

Kritéria podobnosti lze stanovit pro každý fyzikální děj. Je nutno proto vyšetřit závislosti mezi proměnnými charakterisujícími uvažovaný fyzikální děj. Tyto matematické závislosti jsou základem teorie podobnosti. Tedy z těch rovnic, které nám popisují vyšetřovaný fyzikální jev, a které není možno řešit, neb jejich řešení je velice obtížné, dostáváme kritéria podobnosti. Někdy ovšem neznáme ani matematický popis vyšetřovaného fyzikálního děje, a potom hledáme kritéria podobnosti pomocí dimenzionální analýzy (viz pokračování tohoto článku pod názvem Dimenzionální analýza).

Tři hlavní věty podobnosti

1. Podobné jevy mají stejná kritéria podobnosti (Newtonova věta).
2. Je-li vyšetřovaný děj určen podobnostními kritérii $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$, pak závislost mezi proměnnými je vyjádřena kritériální rovnicí

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n) = 0$$

(věta Federman-Buckinghamova).

3. Fyzikální děje jsou podobné, jsou-li podobné okrajové podmínky, a jsou-li z těchto okrajových podmínek odvozená kritéria číselně rovna

(věta Kirpičev-Guchmanova). Tato věta říká, že musíme zvlášť stanovit kritéria z veličin určujících okrajové podmínky, která nazýváme kritérii určovacími.

Závěry plynoucí z těchto tří vět podobnosti:

1. Při zkoušce je nutno měřit všechny veličiny, které jsou obsaženy v kritériích podobnosti vyšetřovaného fyzikálního jevu.
2. Výsledky zkoušky je nutno vyjádřit pomocí kritérií podobnosti a vztahy mezi nimi musíme vyjadřovat ve tvaru kritériálních rovnic.
3. Podobné jevy jsou ty jevy, u kterých jsou podobné okrajové podmínky a jejichž určovací kritéria jsou shodná.

Literatura :

- [1] Kožešník, J., Fyzikální podobnost a stavba modelů, Praha 1948
- [2] Sedov, L. I., Metody podobnosti a rozměrovosti v mechanice, SNTL 1954
- [3] Michejev, M. A., Základy sdílení tepla, Průmyslové vydavatelství, Praha 1952
- [4] Langhar, H. L., Dimensional Analysis and Theory of Models, John Willey and Sons, New York, London, Sydney, 1951

Dimenzionální analýza

Ing. EVA VESELÁ, ČVUT - FSI

Jak název říká, budeme se zde zabývat vztahy mezi dimenzemi neboli rozměry při různých fyzikálních jevech.

Při vyjadřování kvalitativních a kvantitativních vztahů mezi fyzikálními vlastnostmi, stavy a jevy různých materiálních objektů musíme zavést pojem *fyzikální veličina* (např. hmotnost, rychlost, síla, zrychlení, intenzita magnetického pole atd.).

Kvantitativní vyjádření veličiny nazýváme *hodnotou veličiny*. Hodnotu veličiny X zapisujeme tímto způsobem:

$$X = \{X\} \cdot [X],$$

kde $\{X\}$ je číselná hodnota veličiny X ,

$[X]$ je jednotka veličiny X , v níž je číselná hodnota veličiny vyjádřena.

Podle nové revidované československé normy ČSN 01 1300 jsou u nás zákonnými měrovými jednotkami jednotky soustavy SI a jejich násobky a díly. Tato norma také stanoví názvy a značky jednotek. Důsledné užívání měrové soustavy SI bude u nás uzákoněno od roku 1980.

V tomto článku předpokládáme též užití měrové soustavy SI, tedy všechny rozměry budou dány jednotkami této soustavy.

Základní jednotky soustavy SI:

veličina — název	základní jednotka		rozměrový symbol
	název	značka	
délka	metr	m	$(l) = L$
hmotnost	kilogram	kg	$(m) = M$
čas	sekunda	s	$(\tau) = T$
elektrický proud	ampér	A	$(I) = I$
termodynamická teplota	kelvin	K	$(t) = \Theta$
látkové množství	mol	mol	$(n) = N$
svítivost	kandela	cd	$(J) = J$

Rozměrové (dimenzionální) rovnice, tedy rovnice mezi rozměry fyzikálních veličin zapisujeme ve tvaru

$$(v) = \frac{(s)}{(\tau)} = LT^{-1},$$

čti: rozměr rychlosti je roven rozměru délky k rozměru času.

Zrychlení a je definováno jako změna rychlosti v za čas τ , tedy rozměrová rovnice bude

$$(a) = \frac{(v)}{(\tau)} = \frac{(s)}{(\tau)^2} = LT^{-2}.$$

Síla F je podle 2. Newtonova pohybového zákona definována jako součin hmotnosti tělesa m a jeho zrychlení a , tedy rozměrová rovnice bude

$$(F) = (m) (a) = (m) \cdot \frac{(s)}{(\tau^2)} = MLT^{-2}.$$

Hustota homogenního tělesa ρ je definována jako podíl hmotnosti tělesa m a jeho objemu v , tedy rozměrová rovnice je

$$(\rho) = \frac{(m)}{(V)} = ML^{-3}.$$

Rozměr libovolné fyzikální veličiny z tedy označujeme jako (z) . Je-li fyzikální veličina z bezrozměrná, pak platí

$$(z) = 1.$$

Jednotkové rovnice, tedy rovnice mezi jednotkami, zapisujeme ve tvaru

$$[F] = \frac{[m] \cdot [v]}{[\tau]} = [m] [a]$$

resp.

$$[F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{s}} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{N}.$$

Rovnice se nazývá dimenzionálně homogenní tehdy, nezávisí-li veličina vyjádřená rovnicí na základních měřicích jednotkách.

Tak např. rychlost volného pádu v tělesa z výšky h je dána vztahem $v = \sqrt{2gh}$, kde g je tíhové zrychlení. Tato rovnice je obecně platná, měříme-li všechny veličiny v jedné soustavě, tedy např. délku v metrech a čas v sekundách. Podle výše uvedené definice je tato rovnice dimenzionálně homogenní. Dosadíme-li za tíhové zrychlení hodnotu $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, pak pro rychlost volného pádu těles dostáváme vztah $v = 4,45 \sqrt{h}$. Tato rovnice platí pro rychlost volného pádu těles na zemském povrchu, ale není již rovnicí dimenzionálně homogenní, protože velikost součinitele 4,45 je platná pouze tehdy, měříme-li čas v sekundách a délku v metrech. Z toho je zřejmé, že už samotný součinitel 4,45 má rozměr, a to L^{-1}T . Jelikož dimenze není možno přiřazovat číslům, není možno tuto rovnici považovat za dimenzionálně homogenní.

Z definice dimenzionální homogenity rovnic vyplývá, že rovnice ve tvaru

$$x = a + b + c +$$

je dimenzionálně homogenní tehdy a jen tehdy, mají-li proměnné x , a , b , $c \dots$ tytéž rozměry. Obsahuje-li rovnice součet nebo rozdíl dvou výrazů, majících rozličné rozměry, je chybná.

Dimenzionální analýza je založena na tom, že řešení problému je možno vyjádřit pomocí dimenzionálně homogenních rovnic jako proměnných. Tato skutečnost vyplývá z toho, že základní fyzikální rovnice jsou rovnicemi dimenzionálně homogenními, a že tedy ostatní rovnice, které jsou z nich odvozeny, jsou též rovnicemi dimenzionálně homogenními.

Dimenzionální analýza na základě rozboru dimenzí fyzikálních veličin stanoví kritéria podobnosti (bezrozměrné parametry) vyšetřovaného fyzikálního jevu. Závislost mezi proměnnými charakterizujícími daný fyzikální jev je pak možno vyjádřit podle 2. hlavní věty podobnosti (věta Federman-Buckinghamova¹) — viz např. lit. [3] — ve tvaru kritériální rovnice

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n) = 0,$$

kde $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$ jsou bezrozměrné parametry vyšetřovaného fyzikálního jevu. Funkční závislost mezi těmito parametry je nutno stanovit experimentálně.

¹) Tato věta říká, že je-li fyzikální jev popsán dimenzionálně homogenní rovnicí, pak je možno jej zapsat jako závislost mezi úplnou soustavou vzájemně nezávislých bezrozměrných parametrů daného fyzikálního jevu.

Provádíme-li dimenzionální analýzu problému, pak nejprve musíme rozhodnout, které veličiny vstupují do problému (čili tzv. veličiny charakterizující vyšetřovaný fyzikální děj). Abychom neopomenuli uvažovat některou veličinu, je nutné znát mechanismus vyšetřovaného děje, neboť jinak bychom dostali neúplný a nesprávný výsledek. Dokonce i v tom případě, kdy je veličina prakticky konstantní (např. tíhové zrychlení g , Poissonova plynová konstanta κ , permitivita vakua ϵ_0 atd.), může mít tato veličina základní význam, protože obsahuje další proměnné, které se mohou vyskytovat v bezrozměrných parametrech.

Ze všech proměnných charakterizujících daný fyzikální jev vytvoříme tedy bezrozměrné parametry. Jak bylo řečeno, řešený problém se dá převést na hledání funkční závislosti mezi úplnou soustavou vzájemně nezávislých bezrozměrných parametrů. Ukažme si např. takovou soustavu bezrozměrných parametrů při řešení obecného problému v mechanice kapalin. Budeme uvažovat tyto proměnné: sílu F , délkový rozměr l , rychlost v , hustotu ρ , dynamickou viskozitu η , tíhové zrychlení g , rychlost zvuku c , povrchové napětí σ . Z těchto proměnných je možno vytvořit např. tuto soustavu vzájemně nezávislých bezrozměrných parametrů:

Reynoldsovo číslo $Re = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta}$, kde $\nu = \eta/\rho$ kinematická viskozita

Machovo číslo $Ma = \frac{v}{c}$

Froudeho číslo $Fr = \frac{v^2}{lg}$

Weberovo číslo $We = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$

Eulerovo číslo $Eu = \frac{p}{v^2 \rho}$, kde p je tlak.

Z těchto bezrozměrných parametrů je možno vytvořit jiné bezrozměrné parametry, které budou mít tvar

$$Re^{a_1} Ma^{a_2} Fr^{a_3} We^{a_4} Eu^{a_5}, \text{ kde}$$

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 jsou konstantní koeficienty. Tak např. z uvedených bezrozměrných parametrů lze vytvořit

$$\frac{v^3 \rho}{\eta g} = Re \cdot Fr, \text{ atd.}$$

Máme-li tedy úplnou soustavu bezrozměrných parametrů, pak každý další bezrozměrný parametr je dán jako součin mocnin bezrozměrných parametrů soustavy.

Abychom mohli přistoupit k řešení dalších otázek, jako je např. stanovení počtu kritérií a jejich tvar, musíme odbočit trochu do matematiky.

Determinant n -tého řádu je čtverec obsahující n^2 členů (prvků), jehož hodnota je definována.

Determinant 2. řádu je definován následujícím způsobem:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

V determinantu n -tého řádu označujeme prvek r -tého řádku a k -tého sloupce jako a_{rk} .

Vynecháme-li v determinantu A n -tého řádu j -tý řádek a k -tý sloupec (tj. řady křížící se v prvku a_{jk}), vznikne sesunutím ostatních řad determinant $(n-1)$ -ního řádu, který nazýváme *subdeterminantem* (*minor*) determinantu A přidruženým k prvku a_{jk} a označujeme jej jako S_{jk} .

Doplňěk A_{jk} k prvku a_{jk} je subdeterminant S_{jk} násobený číslem $(-1)^{j+k}$, tedy $A_{jk} = (-1)^{j+k} S_{jk}$.

Determinant A je roven součtu součinů vzniklých tak, že prvky jeho libovolné řady (sloupce) násobíme jejich doplňky, tj.

$$A = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk} \quad . \text{ rozvoj podle prvků } j\text{-tého řádku ,}$$

$$A = \sum_{j=1}^n a_{jk} A_{jk} \quad \dots \text{ rozvoj podle prvků } k\text{-tého sloupce .}$$

Jako příklad si spočítejme hodnotu determinantu

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 9 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{rozvojem podle prvků 1. řádku:}$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = \\ &= 2(12 + 63) - 3(8 - 35) + 36 + 30 = 297 \end{aligned}$$

Při vyšetřování určitého jevu si nejprve zjistíme všechny veličiny, které ho ovlivňují. Jsou to např. rychlost v , délkový rozměr l , síla F , hustota ρ , dynamická viskozita η , tíhové zrychlení g . Jejich rozměry si zapíšeme jako součiny mocnin základních jednotek a exponenty si dáme do tabulky:

	v	l	F	ρ	η	g
m (kg)	0	0	1	1	1	0
l (m)	1	1	1	-3	-1	1
τ (s)	-1	0	-2	0	-1	-2

(1a)

V matematice nazýváme toto obdélníkové schéma čísel *matice*. Tato matice obsahuje čísla, která jsou exponenty u dimenzí veličin, a proto ji nazýváme *dimenzionální maticí*.

Matice se nazývá *čtvercová*, je-li počet řádků roven počtu sloupců. Z libovolné matice je možno vytvořit čtvercové matice tím, že vyne-

cháme určitý počet sloupců resp. řádků. Z této čtvercové matice pak můžeme vytvořit determinant a stanovit jeho hodnotu. *Hodnotí matice* pak nazýváme řád nejvyššího nenulového determinantu, který lze z dané matice vytvořit.

Tak např. v uvedené dimenzionální matici je hodnota matice 3, protože determinant vytvořený z posledních tří sloupců je nenulový a je třetího řádu.

Počet bezrozměrných parametrů určujících daný fyzikální jev je dán počtem proměnných vstupujících do daného děje minus hodnota dimenzionální matice.

Pro uvedený příklad máme: počet proměnných 6, hodnota dimenzionální matice 3, a tedy počet bezrozměrných parametrů bude $6 - 3 = 3$. (V tomto případě to bude Reynoldsovo číslo, Froudeho číslo a Eulerovo číslo.)

Uvažujme matici

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 7 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & -1 & 24 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že pronásobením 1. řádku (-4) a druhého řádku (-3) a sečtením obou těchto výrazů dostáváme řádek třetí. Z toho je zřejmé, že třetí řádek je *lineární kombinací* obou dvou předchozích řádků.

Řádky matice nazýváme *lineárně závislé*, jestliže existuje alespoň jeden řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků. Jinak nazýváme matici lineárně nezávislou. Má-li matice pouze dva řádky, pak lineární závislost je rovna úměře mezi řádky. Je možno formulovat větu:

Řádky matice jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy, je-li hodnota matice menší než počet řádků.

Z toho je zřejmé, že hodnota matice se nezmění, vypustíme-li řádky, které jsou lineární kombinací ostatních řádků. Vypočteme-li si tedy hodnotu matice, zjistíme, je-li či není-li matice lineárně závislá.

Příklad na výpočet bezrozměrných parametrů.

Uvažujme opět proměnné v , l , F , ρ , η , g jako v předešlém případě. Libovolný bezrozměrný parametr π bude mít tvar

$$\pi = v^{k_1} l^{k_2} F^{k_3} \rho^{k_4} \eta^{k_5} g^{k_6}. \quad (1)$$

Rovnici (1) napíšeme rozměrově:

$$(\pi) = 1 = (l\tau^{-1})^{k_1} (l)^{k_2} (ml\tau^{-2})^{k_3} (ml^{-3})^{k_4} (ml^{-1}\tau^{-1})^{k_5} (l\tau^{-2})^{k_6}$$

$$1 = (m^{(k_3 + k_4 + k_5)} l^{(k_1 + k_2 + k_3 - 3k_4 - k_5 + k_6)} t^{(-k_1 - 2k_3 - k_5 - 2k_6)})$$

Aby pravá strana rovnice dávala jedničku, musí být součin exponentů u každého součinitele roven nule, tedy

$$k_3 + k_4 + k_5 = 0, \quad (2a)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 - 3k_4 - k_5 + k_6 = 0, \quad (2b)$$

$$-k_1 - 2k_3 - k_5 - 2k_6 = 0 \quad (2c)$$

Je zřejmé, že tyto tři rovnice dostaneme přímo z dimenzionální matice (1a), položíme-li místo symbolů proměnných v, l, F, ρ, η, g exponenty $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ a sečteme-li vždy v řádku matice čísla vynásobená tím k , pod kterým jsou zapsána.

V soustavě rovnic (2) máme 6 neznámých, ale jen tři rovnice pro jejich stanovení. Je tedy možno si velikosti tří neznámých zvolit, a zbývající tři pak stanovit řešením rovnic.

Volme např.:

$$k_1 = -2, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 1,$$

pak řešením rovnic (2) dostáváme

$$k_4 = -1, \quad k_5 = 0, \quad k_6 = 0$$

a bezrozměrný koeficient bude mít tvar

$$\pi_1 = v^{-2} l^{-2} F \rho^{-1} \quad (\text{tj. Eulerovo číslo}),$$

$$\text{volíme-li} \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0,$$

$$\text{dostáváme} \quad k_4 = 1, \quad k_5 = -1, \quad k_6 = 0$$

a bezrozměrný parametr bude mít tvar

$$\pi_2 = v l \rho \eta^{-1} \quad (\text{Reynoldsovo číslo}).$$

$$\text{Volíme-li} \quad k_1 = 2, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 0,$$

$$\text{dostaneme} \quad k_4 = 0, \quad k_5 = 0, \quad k_6 = -1$$

a bezrozměrný parametr bude

$$\pi_3 = v^2 l^{-1} g^{-1} \quad (\text{Froudeho číslo}).$$

Předpokládejme, že chceme stanovit bezrozměrné parametry z n proměnných. Ukázali jsme si, že exponenty $k_1, k_2, \dots, k_n$ v bezrozměrném parametru jsou dány řešením algebraických rovnic

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n = 0,$$

$$b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_n k_n = 0, \text{ atd.},$$

kde koeficienty $a_1, b_1, \text{ atd.}$ jsou řady dimenzionální matice. Rovnice takového typu nazýváme rovnicemi homogenními. Řešení těchto rovnic je $(k'_1, k'_2, \dots, k'_n), (k''_1, k''_2, \dots, k''_n), \text{ atd.}$ a $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, kde platí

$$k_1 = A k'_1 + B k'_1 +$$

$$k_2 = A k''_2 + B k''_2 +$$

(To je možno si ověřit dosazením do původní rovnice za k_1, k_2 .) Řešení $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ nazýváme *lineární kombinací řešení* $(k'_1, k'_2, \dots, k'_n), (k''_1, k''_2, \dots, k''_n), \text{ atd.}$ Řešení, které je lineární kombinací známých řešení, je triviální, je tedy možno vytvořit libovolný počet takovýchto řešení. Nejvíce nás pochopitelně zajímají vzájemně nezávislá řešení.

- b) $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = k_4 = 0,$
pak $k_5 = 9, k_6 = -4, k_7 = -7,$
- c) $k_1 = k_2 = 0, k_3 = 1, k_4 = 0,$
pak $k_5 = -9, k_6 = 5, k_7 = 7,$
- d) $k_1 = k_2 = k_3 = 0, k_4 = 1,$
pak $k_5 = 15, k_6 = -6, k_7 = -12.$

Řešení je možno uspořádat ve tvaru matice:

	k_1 P	k_2 Q	k_3 R	k_4 S	k_5 T	k_6 U	k_7 V
π_1	1	0	0	0	-11	5	8
π_2	0	1	0	0	9	-4	-7
π_3	0	0	1	0	-9	5	7
π_4	0	0	0	1	15	-6	-12

Každý řádek matice nám dává bezrozměrný parametr:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= P & T^{-11} U^5 V^8 \\ \pi_2 &= Q & T^9 U^{-4} V^{-7} \\ \pi_3 &= R & T^{-9} U^5 V^7 \\ \pi_4 &= S & T^{15} U^{-6} V^{-12}.\end{aligned}$$

Uvažujme nyní případ, kdy hodnost matice je menší než počet jejích řádků. Mějme např. pro proměnné P, Q, R, S dimenzionální matici:

	k_1 P	k_2 Q	k_3 R	k_4 S
m	2	1	3	4
l	-1	6	-3	0
t	1	20	-3	8

Všechny determinanty 3. řádu sestavené z této matice jsou nulové. Např. determinant 2. řádu

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12, \text{ je nenulový, a tedy hodnost matice } r = 2.$$

Počet nezávislých bezrozměrných parametrů tedy bude $4 - 2 = 2$.

Je-li hodnost matice menší než počet řádků, není pak nutno uvažovat všechny řádky dimenzionální matice. V našem případě stačí uvažovat první dva řádky. Příslušné algebraické rovnice odpovídající těmto dvěma řádkům budou:

$$\begin{aligned}2k_1 + k_2 + 3k_3 + 4k_4 &= 0 \\ -k_1 + 6k_2 - 3k_3 &= 0.\end{aligned}$$

Volíme tedy velikosti k_1, k_2 a řešení zapisujeme do matice

	k_1 P	k_2 Q	k_3 R	k_4 S
π_1	1	0	$-1/3$	$-1/4$
π_2	0	1	2	$-7/4$

a bezrozměrné parametry jsou

$$\begin{aligned}\pi_1 &= P R^{-1/3} S^{-1/4} \\ \pi_2 &= Q R^2 S^{-7/4}.\end{aligned}$$

Literatura

- [1] Šindelář V. a kol., Metrologie a zavedení soustavy jednotek SI, SNTL-VÚNM, 1975
- [2] Maxwell, J. C., On the Mathematical Classification of Physical Quantities, Proc. Lond. Math. Soc., Vol. III, No 34, p. 224, March 1871
- [3] Veselá, E., Fyzikální podobnost, Rozhledy matematicko-fyzikální
- [4] Chudý, J., Determinanty a matice, SNTL 1971
- [5] Langhar, H. L., Dimensional Analysis and Theory of Models, John Willey and Sons, New York, London, Sydney, 1951
- [6] Kožešník, J., Fyzikální podobnost a stavba modelů, Praha 1948

NAŠE SOUTĚŽ

Také letos vypisuje naše redakce spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie — nezávisle na Matematické a fyzikální olympiádě. Této soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Při případném umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Pokyny řešitelům :

Řešení každého příkladu pište čitelně (nejlépe strojem) na zvláštní list papíru formátu A4, a to vždy po jedné jeho straně. Dole vpravo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu, školu a své bydliště. Jména členů kolektivu a jejich adresy napište na druhou (nepopsanou) stránku každého listu. Nečitelná nebo nedbale popsaná řešení ze soutěže vyřazujeme.

Text řešení každého příkladu formulujte výstižně, stručně, ale jasně. Přitom užívejte platné terminologie a symboliky. Připojujete-li k řešení některého příkladu obrázek, dbejte o to, aby byl pečlivě narýsován a jasně popsán.

Řešení první části soutěžních příkladů otištěných v tomto čísle zašlete nejpozději do 31. ledna 1978 na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních, Trojanova 13, Praha 2, PSČ 121 34 s označením: Naše soutěž.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Platí-li pro reálná čísla $x_1, \dots, x_n$

$$(n-1)(x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq (x_1 + \dots + x_n)^2,$$

a zároveň pro některé $k \leq n$

$$(k-1)(x_1^2 + \dots + x_k^2) \geq (x_1 + \dots + x_k)^2,$$

pak platí v obou nerovnostech rovnost. Dokažte a ukažte, že je-li $k < n$, pak platí v obou nerovnostech rovnost. Dokažte a ukažte, že je-li $k < n$, je

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n.$$

Miroslav Fiedler

2. Trojúhelník má obvod $2s = 54$, poloměr kružnice opsané $r = \frac{65}{6}$

a pro velikosti jeho těžnic platí

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{1515}{2}.$$

Vypočítejte velikosti jeho stran a, b, c za předpokladu, že je $a < b < c$.

Jan Fráňa

3. Je dána množina všech elips, které mají společný hlavní vrchol A a v něm společnou hyperoskulační kružnici. Zjistěte množinu vedlejších vrcholů všech elips dané množiny.

Stanislav Horák

4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ platí tato nerovnost:

$$\left| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \right| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3|$$

Josef Kotyk

5. Narýsujte libovolný dutý úhel s vrcholem V , uvnitř jeho ramen zvolte body T_1, T_2 tak, aby bylo $VT_1 \geq VT_2$ a sestrojte střed S úsečky T_1T_2 . Potom sestrojte úhel $\sphericalangle T_2VQ$ shodný s úhlem $\sphericalangle T_1VS$ tak, aby ležel v polorovině VT_2T_1 a úhel $\sphericalangle VT_1Q'$, který je shodný s úhlem $\sphericalangle T_1VS$ a leží v polorovině VT_1T_2 . Dokažte tato tvrzení:

a) Polopřímky VQ, T_1Q' se protínají v bodu F , který leží uvnitř daného úhlu $\sphericalangle T_1VT_2$;

- b) $VF^2 = FT_1 \cdot FT_2$;
 c) $FT_1 : FT_2 = VT_1^2 : VT_2^2$.

Emil Kraemer

6. Je dána kružnice k o poloměru ρ . O každém trojúhelníku, jemuž je kružnice k vepsána, říkáme, že je této kružnici opsán; shodné trojúhelníky pokládáme za různá umístění téhož trojúhelníku. Mezi všemi trojúhelníky, které jsou kružnici k opsány, je také trojúhelník rovnostranný. Bez použití počtu diferenciálního dokažte, že tento trojúhelník má ze všech trojúhelníků kružnici k opsaných nejmenší obvod i nejmenší obsah.

Emil Kraemer

7. Elipsa má vrcholy hlavní osy v bodech A, B a vrcholy vedlejší osy v bodech C, D ; T budiž libovolný bod elipsy. Je-li $T \neq A, T \neq B$, pak kolmice vedené bodem T k přímkám TA, TB protínají hlavní osu elipsy v bodech M, N . Je-li $T \neq C, T \neq D$, pak kolmice vedené bodem T k přímkám TC, TD protínají vedlejší osu elipsy v bodech P, Q . Dokažte tato tvrzení:

a) Úsečky MN, PQ jsou nenulové, nejsou shodné a jejich velikosti nezávisí na volbě bodu T .

b) Obsah obdélníku, jehož strany jsou shodné s úsečkami MN, PQ , je roven obsahu obdélníku, jehož střední příčky jsou úsečky AB, CD .

Emil Kraemer

8. V rovině je dána konečná neprázdná množina $\mathbf{M}$ navzájem stejno-
 lehlých čtverců a přirozené číslo $k \geq 1$. Předpokládejme, že žádných $k + 1$ různých čtverců z množiny $\mathbf{M}$ neobsahuje společný bod. Dokažte, že množinu $\mathbf{M}$ lze rozdělit na nejvýše $4k - 3$ disjunktních tříd, přičemž žádné dva čtverce z jedné a téže třídy neobsahují společný bod.

Jaroslav Morávek

9. Ukažte, že je možno najít čtvercovou matici $\mathbf{A}$ tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{bmatrix}$$

takovou, že všechny její prvky $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33})$ jsou prvočísla a také všechny prvky matice $\mathbf{A}^2$ jsou prvočísla.

Jiří Sedláček

10. Je dáno přirozené číslo n . Určete, pro kolik permutací $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ čísel $1, 2, \dots, n$ nabývá součet

$$|p_1 - 1| + |p_2 - 2| + \dots + |p_n - n|$$

maximální hodnoty.

Antonín Vrba

11. Jsou dány dvě kružnice, které se protínají ve dvou různých bodech A, B . Vedte bodem A přímkou tak, aby její průnik se sjednocením obou daných kruhů měl danou délku d .

Antonín Vrba

12. Shodné zobrazení Z v prostoru převádí vrcholy A, B, C, D pravidelného čtyřstěnu po řadě v body B, C, D, A . Určete všechny body X na povrchu čtyřstěnu $ABCD$, které mají od svého obrazu $Z(X)$ minimální vzdálenost.

Jan Vyšín

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány dva různé body A, B a rovina σ . Určete množinu K všech bodů X , které mají tu vlastnost, že body X' s nimi souměrně sdružené podle roviny σ tvoří spolu s body A, B rovnostranný trojúhelník. — Proveďte graficky pro tento případ: $A(-5, 5; 4, 5; 4, 5)$, $B(-3; 2; 7)$, $\sigma(-2; 90^\circ; 70^\circ)$.

Stanislav Horák

2. Je dána rovina π , bod A mimo ni ležící a přímka p , která neleží v rovině π a neprochází bodem A . Sestrojte kulovou plochu, která prochází bodem A , dotýká se roviny π a má střed na přímce p .

František Hradecký

3. Těžištěm T trojúhelníku je vedena přímka, která protíná dvě jeho strany a prodloužení další strany v bodech P, Q, R . Je-li na této přímce zvolena soustava souřadnic s počátkem T , v níž mají body P, Q, R po řadě souřadnice p, q, r , potom je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0.$$

Dokažte toto tvrzení bez použití analytické geometrie.

Emil Kraemer

4. a) Je dána rovina ρ , která není k průmětně π kolmá a není s ní rovnoběžná; v rovině ρ je dán dutý úhel s vrcholem V o velikosti $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Při které poloze tohoto úhlu vzhledem k hlavní a spádové přímce roviny ρ procházející vrcholem V může být pravoúhlý průmět daného úhlu opět úhel o velikosti α ?

b) Rovina ρ , která není k průmětně π kolmá, je dána svou stopou p^e a bodem V určeným pravoúhlým průmětem V_1 do roviny π a kótou $z \neq 0$. Umístěte do roviny ρ dutý úhel o velikosti $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ tak, aby měl vrchol v bodu V a aby jeho pravoúhlý průmět do roviny π byl opět úhel o velikosti α . Proveďte graficky: a) pro $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) pro $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Při řešení úlohy předpokládáme znalost této věty: „Leží-li pravý úhel v rovině ρ , která není k průmětně π kolmá a není s ní rovnoběžná tak, že jedno jeho rameno leží na hlavní přímce roviny ρ , potom jeho pravoúhlý průmět do roviny π je opět úhel pravý.“

Emil Kraemer

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány dva různé body V , M a přímka t , která není incidentní se žádným z nich. Sestrojte rotační kuželovou plochu, která má tyto vlastnosti: Jejím vrcholem je bod V , jeden její parabolický řez má tečnu t a osa tohoto řezu prochází bodem M .

(Došla 4 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Rupert Leitner, IV. roč. G, Semily:

Rovina σ parabolického řezu je určena bodem M a přímkou t ; tedy $\sigma = (M, t)$. Rovina $\tau = (V, t)$ je tečná rovina hledané kuželové plochy. Další tečná rovina kuželové plochy je rovina α , která prochází vrcholem V rovnoběžně s rovinou σ . Osa kuželové plochy leží proto v rovině souměrnosti ω obou tečných rovin α , τ .

Rovina β , proložená přímkou VM kolmo k rovině σ , je rovina souměrnosti hledané kuželové plochy (obsahuje tudíž osu v hledané plochy) a je to současně rovina souměrnosti našeho parabolického řezu. Průsečnice rovin β , ω je osa v hledané kuželové plochy.

Ještě je potřeba sestavit řídicí kružnici kuželové plochy. Ta leží v libovolné rovině γ kolmé k ose v (nesmí však obsahovat vrchol V); průsečík $S = v \cap \gamma$ je střed řídicí kružnice. Tato kružnice se pak dotýká přímek $\gamma \cap \tau$ a $\gamma \cap \alpha$.

Poněvadž existují dvě roviny souměrnosti tečných rovin α , τ , vyhovují naší úloze dvě rotační kuželové plochy.

2. Je dán bod S a rovina ρ , která s ním není incidentní. Sestrojte krychli, která má střed v bodě S a má tu vlastnost, že ji rovina ρ protíná v trojúhelníku, který má ze všech trojúhelníkových řezů krychle největší obsah.

(Došlo 5 řešení)

František Hradecký

Upravené řešení Rostislava Urbana, 3. A G v Ostravě, Šmeralova ul.:

Krychle má čtyři tělesové úhlopříčky procházející týměž bodem S , který je jejich společným středem (střed krychle). Trojúhelníkovým řezem krychle o maximálním obsahu je rovnostranný trojúhelník, jehož stranami jsou stěnové úhlopříčky krychle. Tento trojúhelník má totiž ze všech trojúhelníkových řezů krychle největší základnu a zároveň největší k ní příslušnou výšku. Označíme-li vrcholy krychle $A, B, C, D, A', B', C', D'$ (kde je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$), je takovým trojúhelníkem např. trojúhelník ACB' .

V rozboru naší úlohy nejprve dokážeme, že rovina ρ trojúhelníku ACB' je kolmá k tělesové úhlopříčce BD' krychle. Je-li S středem krychle, je $SA = SC = SB'$. Je-li T pravoúhlým průmětem bodu S

do roviny ϱ trojúhelníku ACB' , jsou pravoúhlé trojúhelníky STA , STC , STB' shodné, neboť mají shodné přepony SA , SC , SB' a společnou odvěsnu ST . Je tedy také $TA = TC = TB'$, takže bod T je středem rovnostranného trojúhelníku ACB' . Zcela obdobně dokážeme, že také pravoúhlý průmět bodu B do roviny ϱ je v bodu T . Protože bodem T prochází jediná kolmice k rovině ϱ , splývají přímky ST , BT v jedinou přímku, na které leží tělesová úhlopříčka BD' krychle; je tedy $BD' \perp \varrho$.

Hledaný trojúhelník ležící v rovině ϱ je tedy rovnostranný a má střed v bodu T ; jeho strana má velikost $a\sqrt{2}$, kde a je velikost hrany krychle. Protože bod T je těžištěm a zároveň průsečíkem výšek rovnostranného trojúhelníku o straně s velikostí $a\sqrt{2}$, je

$$r = AT = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \sqrt{2} = \frac{u}{3} \sqrt{2}, \quad (1)$$

kde $a\sqrt{3}$ je velikost tělesové úhlopříčky krychle. Z pravoúhlého trojúhelníku ATS s přeponou $AS = \frac{u}{2}$ a odvěsnami $AT = r$, $TS = v$ podle Pythagorovy věty a podle (1) plyne, že je

$$\frac{u^2}{4} = \frac{2u^2}{9} + v^2,$$

$$9u^2 = 8u^2 + 36v^2,$$

takže $u = 6v$; podle (1) je potom $r = AT = 2v\sqrt{2}$.

Z rozboru plyne tato konstrukce: 1. Bodem S vedeme kolmici k rovině ϱ a sestrojíme její patu T . 2. Na přímce ST sestrojíme dva různé body B , D' tak, aby bylo $SB = SD' = 3 \cdot ST = 3v$. 3. V rovině ϱ sestrojíme libovolný rovnostranný trojúhelník ACB' vepsaný do kružnice opsané kolem bodu T poloměrem $r = 2v\sqrt{2}$. 4. K bodům A , C , B' sestrojíme body C' , A' , D středově souměrné podle bodu S .

Potom lze (na základě rozboru) dokázat, že body A , B , C , D , A' , B' , C' , D' jsou vrcholy hledané krychle. Úloha má (viz bod 3) nekonečně mnoho řešení. Všechny krychle splňující podmínku úlohy tvoří množinu krychlí, které vzniknou rotací krychle $ABCD A' B' C' D'$ kolem přímky BD' .

3. a) Jsou dány přímky p , q , r , z nichž každé dvě jsou mimoběžné, a reálné číslo $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$. Sestrojte přímku x , která protíná přímky p , q , r po řadě v bodech P , Q , R tak, že dělicí poměr $(PQR) = \lambda$.

b) Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte krychli, jejíž protější stěny $ABCD$, $A'B'C'D'$ jsou popsány tak, že je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Zobrazte středy S , T jejích hran AD , $C'D'$ a přímky $p = A'D'$, $q = ST$, $r = BC'$. Dokažte, že každé dvě z těchto tří přímek jsou mimoběžné,

zvolte $\lambda = \frac{3}{2}$ a v uvedené projekci rozřešte úlohu a). Popište přesně polohu bodu P vzhledem k bodům A', D' , polohu bodu Q vzhledem k bodům S, T a polohu bodu R vzhledem k bodům B, C'
(Došla 3 řešení) Emil Kraemer

Autorovo řešení :

Řešení se opírá o větu, která se stručně (i když nepřesně) formuluje takto: „Dělicí poměr se rovnoběžným promítáním nemění.“ Viz autorův článek *Užití dělicího poměru v geometrii* ve 4. čísle 55. ročníku Rozhledů (1976/77), str. 180.

a) Předpokládejme, že jsme hledanou přímkou x už sestrojili. Zvolme rovinu π tak, aby nebyla rovnoběžná s přímkou p a promítneme do ní přímky p, q, r, x směrem daným přímkou p . Potom průmětem přímky p je bod $p' = P'$, kdežto průměty přímek q, r, x (z nichž žádná není rovnoběžná s přímkou p) jsou přímky q', r', x' . Přímky q', r' jsou různé a neprocházejí bodem $P' = p'$; přitom jsou buď různoběžné nebo rovnoběžné. Přímka x' prochází bodem P' a protíná přímky q', r' po řadě v bodech Q', R' , které jsou průměty bodů Q, R ležících na přímkách q, r . Podle výše uvedené věty je $(P'Q'R') = (PQR) = \lambda$.

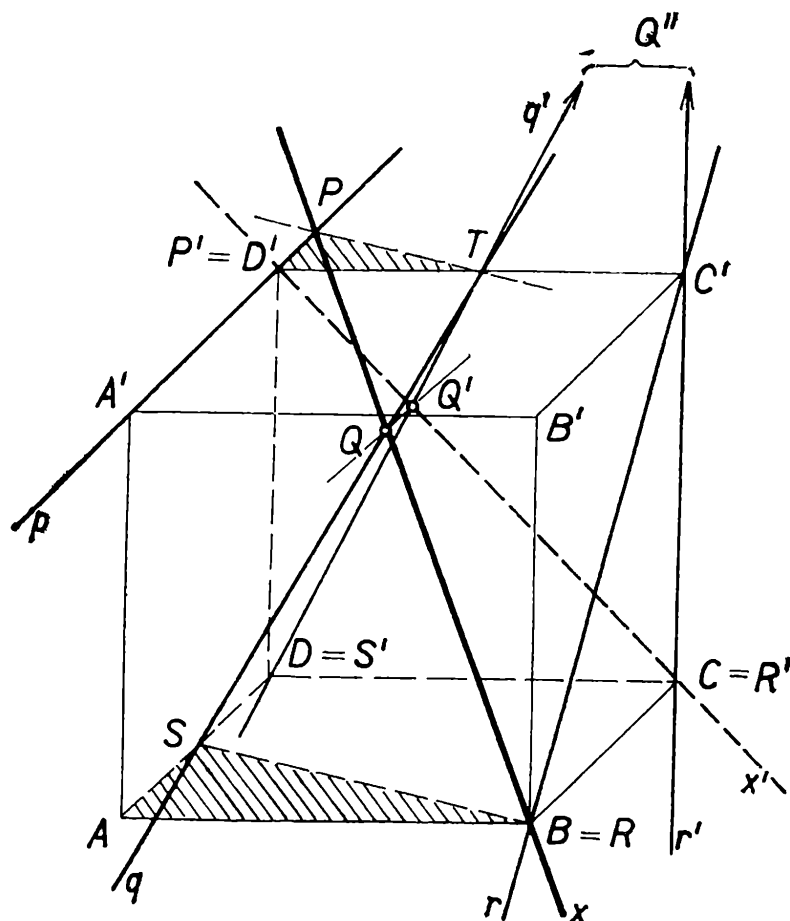
1. Protínají-li se přímky q', r' , pak jejich průsečík označme Q'' a sestrojme průsečík P'' přímky r' s přímkou $t \parallel Q'Q''$ vedenou bodem P' . Podle výše uvedené věty je $(P''Q''R') = (P'Q'R') = (PQR) = \lambda$. 2. Je-li $q' \parallel r'$, pak pro každou přímkou $x'' \neq x'$ vedenou v rovině π bodem P' tak, že protíná přímky q', r' v bodech Q'', R'' , je $(P''Q''R'') = (P'Q'R') = (PQR) = \lambda$.

Z provedeného rozboru plyne tato *konstrukce*: Výše popsáním způsobem zvolíme rovinu π a směrem určeným přímkou p do ní promítneme přímky p, q, r ; tak dostaneme bod $p' = P'$ a dvě různé přímky q', r' .

1. Jsou-li přímky q', r' různoběžné s průsečíkem Q'' , pak vedeme bodem $p' = P'$ přímkou $t \parallel Q'Q''$, sestrojíme její průsečík P'' s přímkou r' a na této přímce sestrojíme bod R' určený dělicím poměrem $(P''Q''R') = \lambda$; potom je $(P'Q'R') = (P''Q''R') = \lambda$, přitom je $Q' = q' \cap P'R'$. Body Q', R' jsou průměty bodů Q, R přímek q, r ; přímka $x = QR$ protíná přímkou p v bodě P ; protože je $RR' \parallel QQ' \parallel PP'$, je $(PQR) = (P'Q'R') = \lambda$.

2. Jsou-li přímky q', r' rovnoběžné, pak pro každou přímkou x' vedenou bodem $p' = P'$ tak, že protíná přímky q', r' v bodech Q', R' , je dělicí poměr $(P'Q'R')$ stejný. Je-li rovný číslu λ , pak tímž způsobem jako v případě 1 dostaneme ke každé přímce x' přímkou $x = QR$, pro kterou je $(PQR) = (P'Q'R') = \lambda$. Je-li $(P'Q'R') \neq \lambda$, pak úloha nemá řešení.

V případě označeném jako 1 má úloha jedno řešení, i když by se zdálo, že při jiné volbě roviny π nebo při volbě směru promítání do π (který



Obr. 1

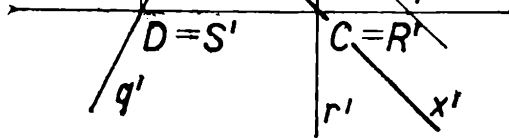
může být také určen přímkou q nebo přímkou r) můžeme dostat další řešení. Kdyby totiž existovala další přímka $y \neq x$ splňující podmínku úlohy, pak její průmět y' do roviny π by procházel bodem P' a protínal přímky q', r' v bodech $Q^* R^*$; přitom by bylo $(P'Q^*R^*) = \lambda = (P'Q'R')$. Avšak body P', Q^*, R^* jsou středové průměty bodů P', Q', R' přímky x' na přímku y' ; pak však je $(P'Q^*R^*) \neq (P'Q'R')$ — viz výše citovaný článek autora úlohy v 55. ročníku Rozhledů, str. 183. V případě označeném jako 2 má úloha nekonečně mnoho řešení nebo nemá žádné řešení.

b) Kdyby přímky $p = A'D', q = ST$ nebyly mimoběžky, pak by ležely v téže rovině; byla by to rovina určená body A', D', T , tj. rovina stěny $A'B'C'D'$ (obr. 1). Avšak přímka $q = ST$ v této rovině neleží, neboť v ní neleží její bod S . Obdobně se dokáže, že přímky p, r a přímky q, r jsou mimoběžky.

Za rovinu π zvolíme rovinu stěny $CDD'C'$ (obr. 1). Potom je průmětem přímky p bod $P' = D'$; průměty přímek $q = ST, r = BC'$ jsou přímky $q' = DT, r' = CC'$. V našem případě jsou přímky q', r' různoběžky; jejich průsečík označme Q'' (obr. 2). Přímka $t \parallel q'$ vedená bodem $D' = P'$ protne přímku $r' = CC'$ v bodě P'' . Protože bod T je středem strany $C'D'$, jsou trojúhelníky $TC'Q'', TD'D$ středově souměrné podle středu T ; je tedy $C'Q'' = D'D = a =$ velikost hrany krychle. Přitom bod Q'' leží na prodloužení strany CC' za bod C' . Protože obrazec $DQ''P''D''$ je rovnoběžník, je $P''Q'' = D'D = a$; přitom bod P'' leží na pro-

$$= (P'Q'R') = \frac{3}{2}.$$

$D'P = \frac{1}{2}AS$, tj. $D'P = \frac{1}{4}a$. Je tedy $(A'D'P') = \frac{5}{1} = 5$. Podle věty



Obr. 2

T'' leží na prodloužení úsečky DC za bod C tak, že je $CT'' = D'T = \frac{1}{2}a$.
Je tedy $(STQ) = (DTQ') = (DT''C) = -2$.

4. Je dána průmětna π a rovina ϱ , která má od průmětny π odchylku φ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. V rovině ϱ je umístěn pravý úhel a je sestrojen jeho pravoúhlý průmět do roviny π . Potom platí:

a) Tento průmět má největší velikost α tehdy, jestliže je

$$\alpha > \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

To nastane právě tehdy, jestliže osa daného pravého úhlu leží na spádové přímce roviny.

b) Tento průmět má nejmenší velikost α' tehdy, jestliže je

$$\alpha' < \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} = \cos \varphi$$

To nastane právě tehdy, jestliže osa daného pravého úhlu leží na hlavní přímce roviny ϱ .

Dokažte.

(Došlo 5 řešení)

Emil Kraemer

Autorovo řešení:

Při řešení použijeme těchto dvou známých vět:

Věta 1. Je-li pravý úhel umístěn v rovině ϱ , která má od průmětny π odchylku φ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, tak, že jedno jeho rameno leží na hlavní přímce roviny ϱ , pak jeho pravoúhlý průmět je opět úhel pravý.

Věta 2. Jsou-li x, y nezáporná čísla, potom je

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

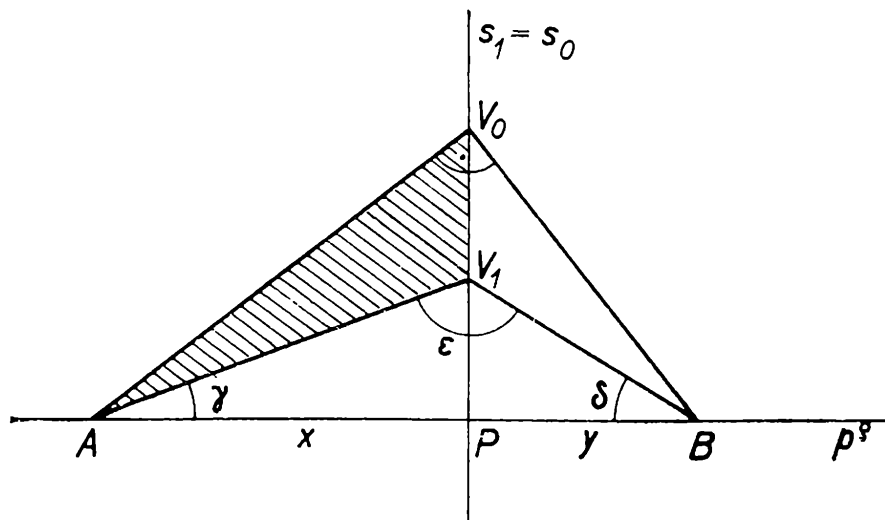
přítom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x = y$.

Při vyšetřování velikosti pravoúhlého průmětu pravého úhlu ležícího v dané rovině ϱ zbývá tedy vyšetřit případy, kdy žádné rameno tohoto úhlu není rovnoběžné s průmětnou. Bez újmy obecnosti můžeme zvolit průmětnu π tak, aby vrchol V daného pravého úhlu neležel v průmětně; potom jde o tyto dva případy:

a) Obě ramena nebo prodloužení obou ramen daného úhlu protínají průmětnu π .

b) Jedno rameno a prodloužení druhého ramene daného úhlu protínají průmětnu π .

a) Pravoúhlé průměty vrcholových úhlů jsou opět úhly vrcholové, a tedy shodné. Stačí se proto omezit na případ, kdy obě ramena daného



Obr. 3

úhlu protínají průmětnu π , tj. stopu p^e roviny ϱ ; tyto průsečíky označme A, B . Daný úhel je tedy úhel $\sphericalangle AVB$. Pravoúhlé průměty bodů a přímek označme indexem 1.

Vedme vrcholem V spádovou přímku s roviny ϱ , tj. přímku $s \perp p^e$; podle věty 1 je $s_1 \perp p^e$. Stopník přímky s označme P . Protože trojúhelník AVB je pravoúhlý s přeponou AB , leží bod P uvnitř úsečky AB , takže přímka s rozděljuje úhel $\sphericalangle AVB$ ve dva ostré úhly. Otočme rovinu ϱ kolem její stopy p^e do průmětny tak, aby bod V padl po otočení do bodu V_0 , který leží uvnitř poloroviny p^e V_1 . Bod V se přitom otáčí v rovině určené různoběžkami s, s_1 , takže bod V_0 leží na přímce $s_1 = s_0$; přitom je $PV_0 > PV_1$ (obr. 3). Zvolme jednotku délky tak, že je

$$PV_0 = PV = 1 ; \quad (1)$$

potom je

$$PV_1 = \cos \varphi . \quad (2)$$

Zároveň je

$$\sphericalangle AV_0B = \sphericalangle AV_0P + \sphericalangle BV_0P , \quad (3)$$

$$\sphericalangle AV_1B = \sphericalangle AV_1P + \sphericalangle BV_1P \quad (4)$$

Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku aplikované na trojúhelníky AV_1V_0, BV_1V_0 , je

$$\sphericalangle AV_1P > \sphericalangle AV_0P , \quad \sphericalangle BV_1P > \sphericalangle BV_0P$$

Podle (3) a (4) je tedy $\sphericalangle AV_1B > \sphericalangle AV_0B$, tj. je tupý; proto také pro maximální velikost α průmětu daného úhlu platí:

$$\alpha > \frac{\pi}{2} . \quad (5)$$

Je-li ε velikost úhlu $\sphericalangle AV_1B$ a jsou-li γ, δ velikosti úhlů $\sphericalangle V_1AB, \sphericalangle V_1BA$, potom je $\varepsilon = \pi - (\gamma + \delta)$. Proto bude číslo ε největší, bude-li $\gamma + \delta$ nejmenší; hledáme tedy minimum součtu $\gamma + \delta$, který je menší než $\frac{\pi}{2}$ (neboť $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$). Z pravoúhlých trojúhelníků AV_1P, BV_1P , jejichž strany PA, PB mají po řadě velikosti x, y , podle (2) plyne, že je

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{PV_1}{PA} = \frac{\cos \varphi}{x}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{PV_1}{PB} = \frac{\cos \varphi}{y}.$$

Proto je

$$\operatorname{tg}(\gamma + \delta) = \frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta} = \left(\frac{\cos \varphi}{x} + \frac{\cos \varphi}{y} \right) : \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{xy} \right).$$

Protože trojúhelník AV_0B je pravoúhlý s přeponou AB , je podle Euklidovy věty o výšce $PA \cdot PB = PV_0^2$, tj. podle (1)

$$xy = 1. \quad (6)$$

Podle toho je tedy

$$\operatorname{tg}(\gamma + \delta) = \frac{(x + y) \cos \varphi}{xy} \cdot \frac{xy}{1 - \cos^2 \varphi},$$

$$\operatorname{tg}(\gamma + \delta) = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

Protože každé číslo $\gamma + \delta$ leží v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, bude nejmenší tehdy, jestliže $\operatorname{tg}(\gamma + \delta)$ bude nejmenší; protože φ je konstanta, nastane to tedy v tom případě, kdy číslo

$$x + \frac{1}{x} \quad (7)$$

bude nejmenší. Podle věty 1 však je

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \sqrt{x \frac{1}{x}} = 2;$$

přitom minimum pro (7) nastane podle věty 1 pro $x = \frac{1}{x}$, tj. pro $x^2 = 1$ čili pro $x = 1$ (neboť je $x > 0$). Podle (6) je potom také $y = 1$; to znamená, že v tomto případě je $PA = PB$, takže pravoúhlý trojúhelník AV_0B je rovnoramenný. Potom však osa jeho úhlu $\sphericalangle AV_0B$ leží na přímce $s_1 = s_0$, takže osa úhlu $\sphericalangle AVB$ leží na spádové přímce roviny ϱ . Velikost ε úhlu $\sphericalangle AV_1B$ bude tedy maximální (rovná α) tehdy, jestliže osa úhlu $\sphericalangle AVB$ leží na spádové přímce roviny ϱ ; podle (2) potom je

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{PA}{PV_1} = \frac{1}{\cos \varphi}. \quad (8)$$

b) Jestliže jedno rameno daného pravého úhlu a prodloužení jeho druhého ramene protínají stopu p^e v bodech A, B , pak úhel $\sphericalangle AVB$ je vedlejší k danému, a tedy je též pravý. Daný úhel bude pak nejmenší, bude-li úhel $\sphericalangle AVB$ největší, tj. podle a) tehdy, bude-li jeho osa ležet na spádové přímce roviny ϱ ; potom však osa daného úhlu leží na přímce

hlavní. Je-li α' minimální velikost daného úhlu, je $\alpha' = \pi - \alpha$, takže podle (8) je

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \cos \varphi.$$

Protože podle (5) je $\alpha > \frac{\pi}{2}$, je $\alpha' < \frac{\pi}{2}$.

Ze zahraničních časopisů

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Ze sovětského časopisu „*Kvant*“

1. Značí-li $\overline{xyz}$ číslo napsané ciframi x, y, z (v tomto sledu), řešte:
 $\overline{xyz} = \overline{yz^2}$, b) $x^y = \overline{yx}$, c) $x^{y+2} = \overline{yx}$, d) $(x + y + z)^3 = \overline{xyz}$, e) $(x + y + z + u)^3 = \overline{xyz}$, f) $(x + y)^3 = \overline{xyx}$, g) $\left(\frac{x + y + z}{2} \right)^3 = \overline{xyz}$.

2. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

Z německého časopisu „*Alpha*“:

3. Najděte všechna trojčíselná přirozená čísla této vlastnosti: Připíšeme-li vlevo k tomuto číslu další tři cifry, dostaneme dvojnásobek původního čísla.

4. Rozhodněte, zdali číslo

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \quad \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

je nebo není racionální; v kladném případě toto číslo určete.

Z jugoslávského časopisu „*Matematičko-fizički list*“:

5. Napište rovnici s celistvými koeficienty, jejíž jedno řešení je $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

6. Do čtvrtkruhu poloměru r je vepsána kružnice. Vypočtěte celkový obsah částí omezených oběma poloměry, kruhovým obloukem a vepsanou kružnicí.

7. Součet několika po sobě jdoucích přirozených čísel je 1000. Určete tato čísla.

8. Dokažte, že pro $x > 0, y > 0$ nemůže být mnohočlen

$$P = x^5 + x^4y - 2x^3x^2 - x^2y^3 - xy^4 + 2y^5$$
 záporný.

Z bulharského časopisu „*Matematika*“

9. Řešte soustavu rovnic

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - y - 2 = 0$$

$$2x^2 + xy + y^2 + x - y - 4 = 0$$

10. Najděte všechna přirozená čísla, jež splňují nerovnost

$$\frac{x-3}{2} - \frac{x+1}{3} < \frac{1-x}{4}.$$

11. Řešte rovnici $\sqrt[3]{16x+32} - \sqrt[3]{16x-32} = 4$.

12. Upravte výraz

$$V = \left[(a-b) \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + a-b \right] \cdot \left[(a-b) \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - 1 \right) \right].$$

Z holandského časopisu „*Pythagoras*“:

13. Ve čtverci $ABCD$ je bod K střed strany AB a bod L leží na úhlopříčce AC ($AL : LC = 3 : 1$). Dokažte, že úhel DLK je pravý.

14. Dokažte, že žádné z čísel tvaru $8n + 7$ (n přirozené) nemůže být napsáno jako součet dvojmocí tří celých čísel.

Výsledky.

1. a) 625, b) 25, c) 32, d) 512, e) 4913 nebo 5832, f) 343, g) 729.

2. $\frac{n^2 + 5n}{12(n^2 + 5n + 6)}$. 3. 376, 625. 4. 1. 5. $x^6 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 -$

$-36x + 1 = 0$. 6. $P = \frac{\pi r^2}{4} - \pi r^2 (\sqrt{2} - 1) \times 0,25 r^2$. 7. a) 198, 199, .

. . 202, b) 55, 56, . . . , 70, c) 28, 29, . . . , 52. 8. $P = (x-y)^2 (x^2 + xy + y^2) (x+2y)$ 9. $\left(\frac{-9 - \sqrt{145}}{16}, \frac{7 - \sqrt{145}}{8} \right), \left(\frac{-9 + \sqrt{145}}{16}, \frac{7 + \sqrt{145}}{8} \right),$

$(1; 1), \left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{2} \right)$. 10. 1, 2, 3, 4. 11. ± 2 12. $2b \cdot (a-b)$

r ů z n é

Logické systémy kapesních kalkulačků I.

RNDr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc. Praha

S kapesními kalkulačkami se již setkáváme všude — v odborných pracovnách, ve škole i v domácnostech. Převládají počítače jednoduché, disponující základními výpočetními operacemi, ale přibývá i kalkulačků

střední složitosti, tzv. kalkulátorů „vědeckých“, schopných počítat i hodnoty nejběžnějších vyšších funkcí jako je logaritmus, obecná mocnina či skupina funkcí goniometrických a cyklometrických. V poslední době se na náš trh dostávají i kapesní kalkulátory poslední generace, schopné programování. Proto nebude na škodu, jestliže se v několika samostatných článcích pokusíme nastínit obecné zásady práce právě s počítači nejsložitějších dvou kategorií. Nejjednodušší kalkulátory tentokrát pomineme, stejně jako všechny typy kalkulátorů pracujících pouze se dvěma výpočetními registry [ty poznáme obvykle podle toho, že automaticky „zavorkují“, tj. po stisknutí některého algebraického operačního tlačítka provedou automaticky poslední algebraickou operaci, takže nejsou schopny bez použití datové „paměti“ vypočítat přímo ani tak jednoduchý výraz jako $(a + b) (c + d)$].

Uvažované složitější druhy kapesních počítačů již mají vloženu určitou výpočetní logiku, základní „pravidla hry“, bez jejichž dodržování můžeme dostávat chybné výsledky. Tak např. kalkulátory firmy *Hewlett-Packard* pracují vesměs s tzv. „reversní polskou logikou“ (RPL). Je to logický systém, který si jmenovaná firma nechala patentovat a jehož používá ve všech svých malých kalkulátorech. Budeme mu věnovat samostatný článek, a proto dnes uvedeme pouze jeho základní zásadu: nové číslo se vkládá do prvního ze čtyř navzájem propojených operačních registrů tlačítkem „ENTER“, pokud nevzniklo jako výsledek předcházejícího výpočtu. Po něm se vloží do displeje druhý operand a teprve potom se stiskne příslušné operační tlačítko. Potřebujeme-li např. sečíst čísla 2 a 3 a výsledek vynásobit čtyřmi, stiskneme postupně tato tlačítka:

2	ENTER	3	+	4	×
---	-------	---	---	---	---

a na displeji bude výsledek 20.

Zcela jinak pracuje druhý základní logický systém, který vyvinula konkurenční firma *Texas Instruments* a nazvala „Algebraický operační systém“ (AOS). Kalkulátor má vložena základní pravidla počítání se závorkami a také „ví“, že umocňování s odmocňováním má přednost před násobením a dělením a tyto dvě operace před sečítáním a odčítáním. To umožňuje vkládat čísla a operační příkazy včetně závorek přesně v témže pořadí, v jakém jsou zapsány v příslušném matematickém výrazu, aniž se musíme starat o to, v jakém pořadí mají být jednotlivé operace prováděny.

Tím jsme si vymezili dva nejzákladnější systémy počítání a obsah nejbližších příštích pokračování. Podíváme se totiž nejdříve na oba systémy „zblízka“ a potom lépe porozumíme hlavním zásadám, podle nichž se zhotovují programy pro kapesní kalkulátory.

OPRAVA

V posledních dvou článcích *Normální formy výrokových formulí* (Rozhledy, roč. 55, č. 6 a č. 7) došlo k některým nedopatřením. Žádáme čtenáře, aby si tato nedopatření opravil:

- str. 256 až 262 — při sazbě došlo k oddělení obrázků od příslušných tabulek, u kterých zůstal jen nadpis, který by bylo vhodnější umístit k patřičným obrázkům;
- str. 260 — 7. řádek zdola má začínat „tabulky k obr. 5 a k obr. 6, .
- str. 261 — formule (*) má končit $(\bar{b} \vee \bar{c})$ a nikoliv $(b \vee \bar{c})$;
- str. 262 — formule na posledním řádku má končit $\bar{d}$. a nikoliv d).;
- str. 290 — u obr. 4 má být vstup invertoru označen a ;
- str. 293 — v tabulce mají být sloupce s pravdivostními hodnotami umístěny po řadě pod znaky $\neg$, $\Rightarrow$, q , $\Leftrightarrow$, $\wedge$;
- str. 293 — u posledního logického členu v obr. 10 má být znak $\vee$ a formule na výstupu má být správně $(p \wedge r) \vee (\neg p \vee r) \wedge \neg q$
- str. 296 — v 8. řádku shora má být vytištěno: $a =$ topné těleso pracuje,;
- str. 297 — v 8. řádku shora má být správně

$$\neg [(\neg p \vee q) \wedge \neg p] \vee \neg q$$

(prostřední z vytištěných znaků $\vee$ má být $\wedge$).

K počátku nového školního roku
přejeme všem starým i novým
čtenářům Rozhledů mnoho úspěchů

Redakce

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

použití	use, application
povrch hranatého tělesa	area of faces, surface
poznámka	note
pramen	source
pravdivý	true
pravděpodobnost	probability
počet pravděpodobnosti	calculus of probability
rozložení pravděpodobnosti	probability distribution
pravděpodobný	plausible
pravidelnost	regularity
pravidelný	regular
pravidelný mnohostěn	regular, Platonic solid
pravidlo	rule
pravítko	ruler, straightedge
logaritmické pravítko	slide rule
pravoúhlý	orthogonal
pravoúhlé promítání	orthogonal projection
pravoúhlá soustava souřadnic	rectangular axes, rectangular system of coordinates
pravý úhel	right angle
prázdný	empty
prázdná množina	empty set, null set, vacuum set
primitivní funkce	primitive, antiderivative
princip	principle
problém	problem
probíhat	describe
procento	percentage, percent
prodloužení	dilatation
prodloužit	produce, prolong
profil	edge view
programování	programming
lineární programování	linear programming
procházet	pass through
projektivní	projective
projektivní geometrie	projective geometry

projektivita	projective transformation, project- ivity
proměnná	variable
nahodilá proměnná	random variable
nezávisle proměnná	independent variable
závisle proměnná	dependent variable
promítací přímka	projector
promítání	projection
kosouhlé promítání	oblique projection
rovnoběžné promítání	parallel projection
středové promítání	central projection
prosté zobrazení	(uniquely) invertible correspondence
prostor	space
n-rozměrný prostor	n-dimensional space
metrický prostor	metric space
prostorový	spatial, space, twisted
prostorová křivka	skew curve, space curve
protiklad	contradiction
protilehlý	opposite
proti smyslu hodinových ručiček	counter-clockwise
protínat	cut, intersect, penetrate
protínání	section
protnout	pierce, cut
provést	carry out
průměr	average, diameter, mean
aritmetický průměr	arithmetic mean
vážený průměr	weighted average
průměrný	average
průmět	projection
pravoúhlý průmět	orthogonal projection
sdružené průměty	set of projections
průmětna	plane of projection
pomocná průmětna	secondary plane of projection
průnik	intersection
průsečík	point of intersection, cross point (tec- rie grafů)
průsečíkové číslo	crossing number
průsečík výšek	orthocenter
průsečnice	line of intersection
prvek	element
první	first
prvočinitel	prime factor
prvočíslo	prime (number)
předpoklad	assumption, condition, supposition, hypothesis
odstranění předpokladu	removal of supposition

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

2

ROČNÍK 56, 1977-1978, ŘÍJEN



rozhledy

ROČNÍK 56
ŘÍJEN 1977

2

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VUOŠ Praha, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1977.

OBSAH

Dr. R. Wohlgemuthová, CSc.: Velká říjnová socialistická revoluce - odkaz a příklad	49
Dr. B. Zelinka, CSc.: O matematických symbolech (Dokončení)	51
Dr. J. Mrázek, CSc.: O některých aplikacích kosmonautiky	59
Fr. Golab, dr. J. Procházka: Josef Ressel (1793-1857)	60
F. Hradecký: Analogie v geometrii	63
J. Kotyk: Gaussova metoda vážení	74
Naše soutěž (řešení úloh minulého ročníku Rozhledů)	76
Výsledky celostátního kola 26. ročníku MO kategorie A	95
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Velká říjnová socialistická revoluce — odkaz a příklad

PhDr. RENATA WOHLGEMUTHOVÁ, CSc., UK Praha

Před 60 lety — 7. listopadu 1917 — se prostřednictvím telegrafických jiskrových depeší dozvěděl svět ohromující zprávu, že v carském Rusku byla nastolena vláda sovětů, že zde zvítězila socialistická revoluce. „Všem, všem, všem...“ vyťukávaly telegrafy první výzvy sovětské moci k okamžitému ukončení války a inspirující dekrety o právu národů na národní samostatnost, chléb a půdu. Zprávy o tomto vítězství dělníků a rolníků uprostřed vrcholící první světové války přinášely vyčerpanému lidstvu novou posilu a naději. Pod prapory Října a jeho příkladem zahájily i masy národů v Rakousko-Uhersku rozhodný nástup za ukončení války a právo na vlastní státní samostatnost. Existence sovětské moci jako nového společenského systému podnítila i obrovskou revoluční vlnu v Evropě po první světové válce a řadu heroických pokusů o nastolení sovětské moci po vzoru revoluce v Rusku.

Rok 1917 se tak zapsal hluboko a natrvalo do dějin lidstva. 7. listopad znamenal nejen zásadní obrat v dějinách Ruska, ale skutečnost, že zde zvítězila první socialistická revoluce a rozvíjela se socialistická společnost, byla přelomem celých moderních světových dějin. Říjen přinesl nejenom hluboký a trvalý průlom do dosud jednotného kapitalistického světa a zahájil všeobecnou krizi kapitalismu, znamenal však i nový rozhodující historický mezník, neboť od té doby začalo lidstvo počítat nástup a dějiny nového společenského řádu — socialismu. Říjnová revoluce byla rovněž obrovskou inspirací a programovým příkladem pro miliónové masy dělníků a pracujících, jimž dávala nejenom neustálé povzbuzení svou rozvíjející se existencí, ale stala se i zdrojem zkušeností pro boj světových mas za vlastní osvobození. Tuto historickou roli VŘSR měl právě na mysli V. I. Lenin, když již krátce po vítězství revoluce prohlásil, že „socialistická sovětská republika v Rusku bude živým příkladem pro národy všech zemí a propagační, revolucionizující působení tohoto příkladu bude ohromné.“⁽¹⁾

7. listopad 1917 nebyl však jen heroickým krátkodobým naplněním tužeb vykořisťovaných o vítězství socialistické revoluce, ale tato revoluce zůstala historickou skutečností i přes neslýchanou intervenci čtrnácti

V. I. Lenin: Spisy, sv. 26, str. 434 — 435

kapitalistických států a obrovskou blokádu, kterou kapitalistický svět zorganizoval proti sovětskému státu v prvních letech jeho existence. Navzdory tomuto soustředěnému úsilí světové reakce se rodila v Rusku nová společnost, jež dokázala odstranit vykořisťování lidské práce, osvobodit potlačené národy, vymanit člověka z ponížení a zaostalosti k rozmachu jeho osobnosti a tvůrčích sil. H. G. Wells při své návštěvě v sovětském Rusku v říjnu 1920 byl sice překvapen elánem a heroismem tehdejší generace Října a hluboce se obdivoval Leninovi jako vůdci sovětské revoluce, avšak považoval Leninovy plány na budoucnost Sovětského Ruska jako světového centra pokroku, hospodářského rozmachu, uplatnění vědy a techniky, jen za pouhou vizi.

Navzdory těmto představám však počali dělníci a rolníci, kteří zvítězili 7. listopadu 1917, okamžitě uskutečňovat smělé plány bolševické strany na přeměnu zaostalého carského Ruska v moderní vyspělý systém. Cestou prvních pětiletok a za obrovského elánu sovětských budovatelů vyrůstal SSSR rychle v prvořadou světovou velmoc.

Vítězství socialistického režimu nad fašismem ve druhé světové válce otevřelo cestu novému rozmachu socialismu ve světě a dokončilo rozpad koloniálního panství. Na cestu socialismu vstoupily další národy Evropy, mezi nimi i naše národy a socialismus zakotvil i v jiných světadílech a přerostl v mocnou světovou soustavu, jež rozhodným způsobem ovlivňuje běh současných dějin.

60. výročí zastihuje SSSR jako prvořadou světovou velmoc v nástupu k realizaci smělých plánů na budování základů nadcházející výstavby komunistické společnosti. Za pouhých 60 let, což představuje v dějinách zhruba osudy dvou lidských generací, se změnila od základů tvář bývalého carského Ruska. SSSR vybudoval obrovskou hospodářskou základnu, předstihl v řadě odvětví kapitalistický svět, vstoupil jako první do kosmu a v mnoha oborech zaujal ve světě první místo. Také ve vzdělání a na poli vědy se otevřely v SSSR nebývalé perspektivy. Zatímco v prvních letech své existence musel sovětský stát urychleně likvidovat masovou negramotnost, stojí dnes Sovětský svaz v mnohých vědeckých oborech na předních místech světové vědy a má prvenství v řadě vědeckých výzkumů. V zemích národů SSSR, kde před revolucí neexistovalo ani střední školství, vyrostly desítky universit a specializovaných vědeckých pracovišť. V Uzbekistánu studují mladí lidé na 85 vysokých školách, a i v malých republikách, jako Tádžikistánu je 7 vysokých škol, v Turkmenii 5. Celkem je na území SSSR 805 vysokých škol, na nichž studuje téměř pět miliónů mladých lidí.

Centrální vědecká instituce Akademie věd SSSR sdružuje na 5000 vědeckých a výzkumných pracovišť, jež se zabývají nejnáročnějšími úkoly a přinášejí výsledky, uznávané v celém vědeckém světě. Vedle toho existují specializované akademie věd pro jednotlivé obory, národní akademie

svazových republik a dokonce celá výzkumná centra, vybudovaná na Urale, Dálném východě a severním Kavkaze. K nejznámějším z nich patří město vědců v Novosibirsku, kde pracuje na soustředěném výzkumu z oblasti přírodních věd, matematiky a fyziky přes 10 000 vědeckých pracovníků. Na Sibiři vyrostlo také nové „město studentů“ Irkutsk, kde studuje přes 50 000 mladých lidí na moderní universitě a 7 specializovaných institutech.

V desáté pětiletce, která v současné době v SSSR probíhá, má věda a výzkum jedno z čelných postavení a mimořádně náročné úkoly. Základní směr, jež postavil před sovětskou společností XXV. sjezd KSSS — začít s budováním materiálně technické základny komunistické společnosti — nelze splnit bez rozhodujícího podílu vědy a techniky a jejího dalšího rozmachu.

Letošní 60. výročí Velké říjnové socialistické revoluce, jež si připomínáme, není proto jenom nějakou historickou vzpomínkou na 7. listopad 1917. Skutečný a opravdový odkaz Října a jeho inspirující příklad spočívá v aktivním uskutečňování myšlenek, které nastolil a budování socialistické společnosti, ke které svým vítězstvím otevřel světu cestu.

matematika

0 matematických symbolech

(Dokončení)

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

§ 3. Symboly relací

Relace se často označují také písmeny. Je-li nějaká relace označena například $\mathbf{R}$, potom to, že prvky a a b jsou v relaci $\mathbf{R}$, označujeme buď $a \mathbf{R} b$, nebo $(a, b) \in \mathbf{R}$. My se však zde budeme zabývat speciálními symboly pro relace.

Jistě znáte symboly $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\subset$, $\in$. Často se užívá symbolu $\equiv$. V geometrii značí totožnost objektů; $A \equiv B$ čteme „bod A je totožný s bodem B “. V teorii čísel se jím označuje kongruence. Napíše-li se $a \equiv b \pmod{c}$, čte se to „ a je kongruentní s b modulo c “ a znamená to, že rozdíl čísel a a b je dělitelný číslem c . Tohoto symbolu se ovšem

může užívat i v dalších významech, vždy však značí nějakou ekvivalenci (reflexivní, symetrickou a transitivní relaci). K označování relací ekvivalence se často užívá i symbolů $\sim$, $\cong$, $\triangleq$. Například v geometrii $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ znamená, že trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku DEF , a $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ značí, že trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem DEF ; samozřejmě ani tyto symboly nejsou omezeny pouze na geometrii. Přibližná rovnost se značí $\doteq$ nebo $\approx$.

Je-li číslo a o mnoho větší než číslo b , můžeme psát $a \gg b$ nebo $b \ll a$. K označování nerovností v jiném uspořádání, než je přirozené uspořádání množiny reálných čísel, se také užívá symbolů $\prec$, $\succ$, $\preceq$, $\succeq$ i některých dalších značek.

Symbol množinové inkluze $\subset$ je vám jistě znám; $A \subset B$ čteme „množina A je podmnožinou množiny B “. Musíme však dát pozor; mnozí autoři, zvláště zahraniční, tím míní, že „množina A je vlastní podmnožinou množiny B “, jinak užívají symbolu $\subsetneq$.

Symbol $\in$ představuje vlastně jeden ze způsobů psaní řeckého písmene epsilon; $a \in M$ značí „ a je prvkem množiny M “ a v jiném významu se tohoto $\in$ zásadně neužívá. Jiným způsobem zápisu epsilon je ε a toho se užívá podobně jako jiných řeckých písmen.

K symbolům relací se mohou připojovat i indexy. Je-li například na množině M dáno určité uspořádání a prvek a je v tomto uspořádání menší než prvek b (říkáme také, že a je před b v příslušném uspořádání), můžeme to zapisovat $a <_M b$.

Mezi symboly relací můžeme zahrnout i $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ a $\rightarrow$. Výraz $A \Rightarrow B$ čteme „z A vyplývá B “ nebo „ A implikuje B “, výraz $A \Leftrightarrow B$ značí „ A platí právě tehdy, platí-li B “ nebo „ A je ekvivalentní s B “. Symbolu $\rightarrow$ se užívá v různých významech podle potřeby.

Všimněme si ještě toho, že znaménka značící symetrické relace bývají skutečně symetrická podle svislé osy ($=$, $\equiv$, $\doteq$, $\triangleq$) nebo alespoň podle středu ($\sim$, $\approx$), zatímco symboly antisymetrických relací tuto vlastnost zásadně nemají ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\subset$).

§ 4. Symboly operací

Všichni znáte symboly pro sčítání, odčítání, násobení a dělení čísel. Víte, že násobení se může značit tečkou nebo i bez symbolu prostým umístěním symbolů jednotlivých činitelů za sebou. Dělení se může vyjadřovat dvojtečkou, ale častěji se značí zlomkovou čarou. (Dvojtečky se užívá spíše pro označení poměru.) Ze školy jste zvyklí psát vodorovnou zlomkovou čáru; je to přehledné, zvláště když je třeba zlomek upravovat. V matematických vědeckých publikacích se však dává přednost šikmé zlomkové čáře; je to proto, aby se usnadnil tisk. Rovněž odmocnínko ve vědeckých publikacích vypadá trochu jinak než to, na které jste zvyklí ze školy; místo vodorovné čáry nad celým odmocněncem má jen

krátkou čárku — $\sqrt{}$. Odmocňujeme-li složitější výraz, musíme užít závorek — $\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Důvod je tentýž jako u šikmé zlomkové čáry. Mezi operace s čísly můžeme zahrnout i faktoriál značený známým vykřičníkem; symbol $n!$ znamená součin všech přirozených čísel od jedné do n .

Kromě symbolů pro operace s čísly znáte také symboly množinových operací průniku, sjednocení a rozdílu množin. Dále existují operace s vektory. Sčítání a odčítání vektorů a násobení vektoru skalárem se značí stejně jako odpovídající operace s čísly. Existují ovšem dva druhy násobení vektorů, a to skalární a vektorové. Skalární součin dvou vektorů se zapisuje stejně jako součin čísel, tedy tečkou nebo prostým umístěním symbolů jednotlivých činitelů za sebou. Abychom odlišili vektorový součin od skalárního, používáme symbolu násobení „pro malé děti“, tedy ležatého křížku, kterého jste užívali v prvních třídách základní školy. Vektorový součin vektorů u a v tedy píšeme $u \times v$. Symbolu $\times$ se rovněž používá pro kartézský součin množin; symbol $M \times N$ značí množinu všech uspořádaných dvojic, v nichž první prvek patří do množiny M a druhý prvek do množiny N .

V abstraktní algebře se můžeme setkat s mnohými dalšími symboly operací. Například v teorii svazů existují operace zvané průsek a spojení. Podobnost těchto slov se slovy průnik a sjednocení není náhodná; je tu skutečně těsná souvislost. Proto se průsek někdy značí stejně jako průnik a spojení stejně jako sjednocení, ovšem lépe je přece jen tyto operace odlišit, a proto se průsek značí $\wedge$ a spojení $\vee$; tedy $a \wedge b$ je průsek prvků a a b a $a \vee b$ je jejich spojení. Vidíme, že tyto symboly jsou podobné symbolům průniku a sjednocení, ale přece jen odlišné. Je řada dalších symbolů, kterých se v abstraktní algebře používá, například $*$, $\oplus$, $\circ$, $\triangle$.

Vraťme se nyní opět k číslům. Může se stát, že potřebujeme sečíst například třetí mocniny všech přirozených čísel od jedné do padesáti. To můžeme zapsat s použitím takzvaného sumačního symbolu takto:

$\sum_{n=1}^{50} n^3$. Čteme to „suma od jedné do padesáti z n na třetí“ a znamená to,

že za n ve výrazu n^3 dosazujeme postupně všechna přirozená čísla od jedné do padesáti a sčítáme všechny takto získané hodnoty. Kdybychom měli sečíst třetí mocniny všech čísel z dané množiny čísel M , napsali bychom to $\sum_{n \in M} n^3$: Máme-li nějaká čísla označená a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

a máme-li je sečíst, můžeme opět psát $\sum_{n=1}^5 a_n$. Symbol Σ je vlastně

velké řecké písmeno sigma; toto písmeno odpovídá našemu S a je to začáteční písmeno latinského slova „summa“ značícího „součet“. I v češtině se užívá často slova suma místo součet.

Podobný znak existuje i pro násobení; je to vlastně velké řecké písmeno pí odpovídající našemu P a je to začáteční písmeno latinského

slova „productus“, které znamená „součin“. Píšeme tedy například $\prod_{n=1}^{50} a_n$ nebo $\prod_{n \in M} a_n$. Podobně u množinových operací můžeme použít v takovéto funkci zvětšených symbolů; tak $\bigcup_{n=1}^{50} M_n$ značí sjednocení množin M_n pro všechna přirozená n od jedné do padesáti a $\bigcap_{n=1}^{50} M_n$ značí jejich průnik. I pro spojení a průsek v teorii svazů se užívá příslušných zvětšených symbolů.

V diferenciálním a integrálním počtu se setkáváme se symboly derivací a integrálů. Derivaci y podle x značíme buď y' nebo $\frac{dy}{dx}$; druhý způsob představuje vlastně podíl diferenciálů. Vyšší derivace se značí buď příslušným počtem čárek (y'' , y''') nebo horním indexem, který je buď v závorce, nebo je vyjádřen římským číslem; tedy čtvrtou derivaci proměnné y můžeme značit $y^{(4)}$ nebo y^{IV} . Lze použít i zmíněného zlomkového tvaru; potom druhá derivace y podle x je $\frac{d^2y}{dx^2}$. Výraz d^2y představuje druhý diferenciál y (tedy diferenciál diferenciálu), výraz dx^2 je druhá mocnina diferenciálu x . Parciální derivace označujeme podobně, pouze písmeno d se zde píše trochu zvláštním způsobem: $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

Symbol integrálu $\int$ vznikl z písmene S , které opět značí sumu neboli součet; integrál lze totiž chápat jako součet nekonečně malých veličin. Za znaménkem integrálu musí vždy následovat diferenciál, tedy například

$$\int x^2 dx.$$

U určitých integrálů přepisujeme integrační meze; tedy máme

$$\int_2^3 x^2 dx.$$

U dvojných a trojných integrálů se užije příslušného počtu integračních znamének a pod ně se přepíše symbol oblasti, přes kterou se integruje, tedy

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy, \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Pro integrál přes uzavřenou křivku se užívá symbolu $\oint$.

Mezi symboly operací můžeme zahrnout i některé symboly funkcí vyjádřené skupinou písmen — $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, $\arcsin x$. Místo e^x , kde e je základ přirozených logaritmů, můžeme psát $\exp x$; je to výhodné tehdy, je-li v exponentu složitý výraz.

Skupinou písmen se vyjadřuje například i limita ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$), supremum ($\sup \mathbf{M}$), infimum ($\inf \mathbf{M}$), maximum a minimum (například $\max(a, b)$ značí to z čísel a, b , které je větší nebo rovno druhému) a podobně. V tisku se takováto skupina písmen vždy sází antikvou, aby se odlišila od ostatních symbolů.

Ve vektorové analýze značíme také divergenci vektoru $\mathbf{v}$ symbolem $\operatorname{div} \mathbf{v}$ a jeho rotaci symbolem $\operatorname{rot} \mathbf{v}$. Existuje i takzvaný Hamiltonův operátor ∇ , který se čte „nabla“ nebo „del“. Je-li například f nějaká funkce tří proměnných x, y, z , je ∇f rovno vektoru, jehož souřadnice jsou parciální derivace f podle x, y a z .

§ 5. Závorky.

Ze školy znáte trojí druh závorek: kulaté (správněji by se mělo říkat okrouhlé, protože přece nemají tvar koule), hranaté a složené. Užívali jste jich ve výrazech jako

$$\{a + b[c^{\text{a}} + d(e + f)]\};$$

mělo to význam pro přehlednost psaní. V matematických vědeckých publikacích se takového závorekování zpravidla neužívá a píší se pouze kulaté závorky; tedy

$$(a + b(c + d(e + f)))$$

Hranaté a složené závorky mívají poněkud jinou funkci. Do hranatých závorek píšeme uspořádané n -tice prvků; tedy $[5, 8, 12, 13]$ je uspořádaná čtveřice složená z čísel 5, 8, 12, 13. Uvádíme-li množinu výčtem jejích prvků, užíváme složených závorek; tedy $\{5, 8, 12, 13\}$ je množina, jejíž prvky jsou čísla 5, 8, 12, 13. Podobně $\{x \in \mathbf{M}, x^2 > 5\}$ značí množinu všech prvků množiny $\mathbf{M}$, jejichž druhá mocnina je větší než pět (předpokládáme, že $\mathbf{M}$ je nějaká množina čísel). Kulatých závorek se také používá v označení funkcí — tedy $f(x)$, $f(x, y)$. Všeobecně pomocí nich značíme nějaký objekt, který je závislý na jiném objektu; tedy $\mathbf{M}(x)$ je objekt $\mathbf{M}$, který je závislý na x . Hranaté závorky mohou také označovat takzvanou celou část čísla; je-li x nějaké číslo, pak $[x]$ je největší celé číslo, které je menší nebo rovno x . Máme $[5] = 5$, $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$, $\left[-\frac{3}{2}\right] = -2$.

Užívá se i dalšího druhu závorek, a to závorek lomených. Jsou-li a a b dvě reálná čísla taková, že $a \leq b$, označujeme symbolem $\langle a, b \rangle$ uzavřený interval omezený čísly a a b , to jest množinu všech reálných čísel x takových, že $a \leq x \leq b$. Množina všech reálných čísel x , pro něž platí $a < x < b$, se nazývá otevřený interval a značí se (a, b) , tedy pomocí kulatých závorek. Množina všech reálných čísel x , pro něž platí

Tabulka 1.

Řecké písmo			
Velké písmeno	Malé písmeno	Název	Význam
A	α	alfa	a
B	β	beta	b
Γ	γ	gama	g
Δ	δ	delta	d
E	ϵ	epsilon	e
Z	ζ	dzeta	dz
H	η	éta	é
Θ	θ	theta	th
I	ι	iota	i
K	κ	kapa	k
Λ	λ	lambda	l
M	μ	mí	m
N	ν	ný	n
E	ξ	ksí	ks
O	$\omicron$	omikron	o
Π	π	pí	p
P	ρ	ró	r
Σ	σ	sigma	s
T	τ	tau	t
Y	υ	ypsilon	y
Φ	φ	fí	f
X	χ	chí	ch
Ψ	ψ	psí	ps
Ω	ω	omega	ó

$a \leq x < b$, se značí $\langle a, b \rangle$ a množina všech reálných čísel x , pro něž platí $a < x \leq b$, se značí $(a, b]$; užívá se tedy dvojího druhu závorek.

Hranaté závorky slouží také k odkazům na citovanou literaturu. Na konci vědecké publikace i populárně naučného článku bývá seznam literatury; jednotlivé údaje v tomto seznamu se číslují čísly v hranatých závorkách a na ně se pak odkazuje v textu článku. Například píšeme-li zde o knize [1], míníme tím knihu K. Wicka „Pravidla matematické sazby“, uvedenou pod tímto číslem na konci článku. Je to jediná publikace, která je zde citována; u některých matematických publikací však bývá uvedeno i několik set citací. Číslem v kulaté závorce se zase označují vzorce v textu; aby se vzorec nemusel opakovat, označí se po pravé straně například (2) a potom se prostě uvede „podle vzorce (2)“.

K závorkám můžeme počítat i svislé čárky označující absolutní hodnotu; $|n|$ značí absolutní hodnotu čísla n . Dále například norma matice $\mathbf{M}$ se značí $||\mathbf{M}||$.

Tabulka 2.

Fraktura		
Velké písmeno	Malé písmeno	Význam
À	a	a
Ä	b	b
Ç	c	c
Ð	d	d
Ê	e	e
Ë	f	f
Ê	g	g
Ë	h	h
Ë	i	i
Ë	j	j
Ë	k	k
Ë	l	l
Ë	m	m
Ë	n	n
Ë	o	o
Ë	p	p
Ë	q	q
Ë	r	r
Ë	s ß	s
Ë	t	t
Ë	u	u
Ë	v	v
Ë	w	w
Ë	x	x
Ë	y	y
Ë	z	z

§ 6. Interpunkční znaménka.

Nebudeme zde mluvit o vykřičníku značícím faktoriál; ten vlastně nemá význam interpunkčního znaménka. Často se však setkáváme s interpunkční čárkou; odděluje od sebe jednotlivé symboly ve výčtu nějakých prvků; tak můžeme mít množinu $\{a, b, c, d\}$ nebo funkci $f(x, y, z)$. Jinak ovšem známe čárku i ve funkci desetinné čárky. Proto oddělujeme-li od sebe několik desetinných čísel, používáme středníku — 1,5; 2,25; 3,8. Středníku použijeme i tehdy, potřebujeme-li oddělit symboly objektů různého druhu. Značíme-li M_1, M_2, M_3 množiny a n_1, n_2, n_3, n_4 čísla a potřebujeme-li zapsat uspořádanou sedmici z těchto prvků, můžeme psát

$$[M_1, M_2, M_3; n_1, n_2, n_3, n_4].$$

Máme-li symboly s různými indexy, jejichž počet je dosti vysoké číslo nebo číslo označené písmenem, píšeme jejich výčet pomocí teček; například můžeme mít množinu $\{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ nebo funkci n pro

měnných $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Všimněme si, že před první i za poslední tečkou se píše čárka. Podobně i součet čísel jedna až deset můžeme psát $1 + 2 + \dots + 10$. I zde píšeme znaménko plus před první i za poslední tečku. Tečka má v matematice ještě další speciální významy, o nichž se zde nebudeme zmiňovat.

Dvojtečky se užívá k označení poměru (jak jsme již uvedli výše). Dále, je-li například φ zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{N}$, píšeme $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$.

§ 7. Speciální symboly.

Existují další symboly, které nelze zahrnout do uvedených skupin. Je to například symbol ∞ pro nekonečno. Nekonečno se zpravidla nepokládá za číslo, proto tento symbol neuvádíme mezi číslicemi. Dále je to symbol $\emptyset$ pro prázdnou množinu. Je to samozřejmě něco jiného než nula; proto nulu značící číslo nikdy neškrtneme. V matematické lingvistice se pro označení mezery užívá symbolu $\#$. V tomto článku jste si mohli všimnout i symbolu $\S$ označujícího paragraf. Ten ve vás možná vyvolá představu soudní síně, protože se ho nejčastěji používá v zákonících. Není to však symbol omezený pouze na právní vědu; paragraf znamená prostě odstavec a může to být i odstavec matematického článku. Není to vlastně matematický symbol, ale zmiňujeme se o něm také, protože je třeba jej znát.

Popsali jsme si některé matematické symboly. Jejich výčet není ovšem zdaleka úplný. Nemluvili jsme o symbolech matematické logiky, o některých speciálních geometrických symbolech ani o zápisu matic a determinantů. Rovněž jsme zcela vynechali i symboly z programovacích jazyků. Doufám však, že jste poznali bohatost matematické symboliky a že se po přečtení tohoto článku v ní budete moci alespoň trochu orientovat.

Literatura :

- [1] K. Wick: Pravidla matematické sazby. Nakladatelství ČSAV Praha 1963.

0 některých aplikacích kosmonautiky

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Dnes úvahy o kosmické technologii zakončíme. Nezmínili jsme se ještě o krystalizaci (až na stručnou zmínku uveřejněnou před časem), a tak aspoň stručně: Krystaly v kosmickém beztíží porostou mnohem dokonaleji, jelikož jejich růst nebude rušen tepelnými proudy při stejné teplotě tuhnutího roztoku a nedojde ani k interakcím krystalizujícího materiálu se stěnami nádob, protože materiál může být ještě v tekutém stavu pohodlně umístěn v prázdném neohrazeném prostředí.

Důsledkem toho budou např. mnohem pevnější kovová i umělá vlákna; lze vypočítat, že při dokonalejší krystalické formě materiálů by bylo možno pevnost vláken o stejném průřezu zvětšit až o několik řádů proti dnešním hodnotám, čímž bychom se podstatně přiblížili optimálním teoretickým hodnotám.

Rovněž si v kosmu přijdou na své skláři, protože budou moci nechat tuhnout směsi kyslíčků, které se zde na Zemi neudrží v homogenním stavu. Nemusí to být pouze sklo, nýbrž i hmoty důležité v elektronickém průmyslu; při společném letu Sojuz—Apollo byly prováděny zkoušky s tavením wolframu, hliníku, germánia a křemíku pomocí slunečné peci (v podstatě velké lupy, v jejímž ohnisku vznikala teplota až 1100 °C).

V beztížném prostředí bude možno vyrábět bez použití uzavíracích nádob součástky odolné proti vysokým teplotám (přes 1000 °C). Na zemském povrchu není vyhlídka, že by nějaký kovový materiál vykazoval dostatečnou odolnost proti tečení při tak vysokých teplotách. Dokonce zřejmě dojde i k „modernizaci“ některých výrobních postupů v přípravě lékařenských či mikrobiologických preparátů. Tak např. lze podstatně urychlit vývoj vakcín; na oběžné dráze totiž nemusíme mikroorganismy pěstovat v rovině, nýbrž nám porostou v prostoru a tedy za jednotku času vznikne větší počet dalších mikroorganismů. Bylo vypočteno, že takto by bylo možno včas vyrobit ochranné látky proti nebezpečným chřipkovým epidemiím pro značný počet ohrožených osob a ne pouze pro nedostatečný počet těch nejpotřebnějších jako dosud.

Avšak i „klasická“ výroba léků by na oběžné dráze doznala změn; vzpomeňme si např. na opotřebování ložisek velkých pozemských odstředivek, oddělujících od sebe molekuly různých drog o podobné hus-

totě. Na oběžné dráze by mohla existovat bezložisková odstředivka (stačila by nádoba volně rotující v prostoru, přičemž by se rychlost rotace po velmi dlouhou dobu vůbec neměnila).

■ Až budou v provozu raketoplány — oni „kříženci“ dosavadních kosmických raket s kluzáky, schopní mnohonásobných letů do kosmu — stane se to vše a ještě mnoho dalších námětů skutečností. Lidé se naučí na oběžné dráze dlouhodobě pracovat, jejich dopravní spojení s mateřskou planetou bude levné a operativní. Budou jezdit do obíhajících laboratoří provádět své experimenty stejně jako získávat nové zkušenosti, studenti tam budou pracovat na svých diplomových pracích a možná, že si na své přijdou i pacienti v období rekonvalescence. Je totiž známo, že v beztížném prostoru vystačí srdce pouze se zlomkem dřívějšího výkonu. Protože v raketoplánech blízké budoucnosti nenaštane žádné nebezpečné přetížení, bude docela dobře možné, že budou vznikat i obíhající sanatoria, v nichž se budou doléčovat pacienti po překonaných infarktech či jiných onemocněních.

Ptáte se, kdy se to vše stane skutečností? Už jsme to vlastně naznačili v jedné z předcházejících úvah: budou to osmdesátá léta, jež proběhnou ve znamení velkých praktických experimentů na postupně budovaných obřích orbitálních stanicích s mnohočetnými mezinárodními posádkami. Počítá se s tím, že až budou k dispozici raketoplány (což se očekává již koncem tohoto desetiletí), budou létat posádky do kosmického prostoru téměř každodenně. Pak se rychle začnou uskutečňovat všechny ty záračné novinky, o nichž jsme vám vyprávěli v tomto seriálu článků.

Josef Ressel (1793 - 1857)

FRANTIŠEK GOLAB, Dr. JOSEF PROCHÁZKA, PdF, Ostrava

Letos uplyne 120 let od úmrtí vynálezce lodního šroubu Josefa Ressla.

Josef Ressel se narodil 29. června 1793 v Chrudimi. Když úspěšně dokončil studium na gymnáziu v rakouském Linci, vstoupil r. 1809 do dělostřelecké školy v Českých Budějovicích. Protože byl pro výkon vojenského povolání tělesně slabý, rozhodl se v roce 1812 pro studium medicíny na vídeňské univerzitě. Po dvou letech studia zanechal, protože jeho rodiče jej už nemohli dále finančně podporovat. Využil proto možnosti studia na lesnické akademii v Mariabrunnu u Vídně, jež bylo spojeno s udělením stipendia přijatým uchazečům. Skutečně byl přijat

s ročním stipendiem 400 zlatých. Kromě toho si přivydělával na akademii kreslením a kondicemi, takže dokonce mohl podporovat své chudé rodiče.

V roce 1817 ukončil studium na lesnické akademii a nastoupil do služeb státního panství v Platerjachu v Kraňsku. V krátké době se stal podlesním v Lublani (zde zkonstruoval svůj první vynález — dálkoměr) a od roku 1827 působil jako lesní v Terstu.

Již za svého pobytu v Lublani se vrátil k úvahám ze svých studentských let o využití Archimédova šroubu k pohonu lodí a balónů, k úvahám, jimiž se již dávno před ním zabývali takoví velikáni jako Leonardo da Vinci a řada dalších. Pracoval neúnavně a výsledkem byl první lodní šroub, který si nechal podle svých plánů vyrobit a s nímž v r. 1826 začal provádět i první praktické pokusy. Namontoval jej na malý desetimetrový člun o nosnosti pěti tun. Šroub umístil na přídi lodi, protože se domníval, že umístění šroubu na zádi lodi by mohlo ztížit řízení kormidla. Dne 11. února 1827, tedy před 150 lety mu byl udělen patent na lodní šroub s platností na dva roky.

Když byl přeložen do Terstu, pokračoval dále ve svých pokusech, až konečně dospěl k definitivnímu řešení umístění šroubu na zádi lodi tak, jak je známe dnes.

O uplatnění svého vynálezu musil Ressel těžce zápasit. Nikde nenacházel porozumění ani podporu. Konečně získal pro své plány terstského velkoobchodníka Ottavia Fontanu, s nímž sjednal smlouvu o zavedení šroubové paroplavby mezi Monfalconem a Istrií. Proti těmto záměrům se však postavil majitel kolesové paroplavby mezi Terstem a Benátkami Angličan Morgan a vymohl si zákaz pokusů na této lince. Ressel se proti tomuto rozhodnutí mnohokrát odvolával, ale bez úspěchu. Fontana z obav o investované peníze poslal Resslera k vídeňské dvorské komoře, aby rozhodla spor s Morganem. Po dlouhém jednání komora Resslerův podnik schválila s tím, že loď i parní stroj budou vyrobeny v Rakousku.

Přišla další rána. Pro loď Civettu, kterou postavil za Fontanovy finanční pomoci, štýrská strojírna nedodala parní stroj. Teprve po mnoha urgencích byl parní stroj dodán, a tak 4. srpna 1829 došlo k první zkušební jízdě, které přihlíželo mnoho diváků. Loď Civetta (Sova) byla 19 m dlouhá, 3,5 m široká, 2 m vysoká a byla poháněna Resslerovým šroubem, jímž dosáhla rychlosti 3,09 m/s. Strojní zařízení ze štýrských dílen bylo velmi nedokonalé. Každou chvíli docházelo k poruše, až byl vydán zákaz plavby „z bezpečnostních důvodů“. Také Fontana ztratil zájem o Resslera a vypověděl smlouvu.

V dopise svému příteli r. 1830 píše Ressel o lodi Civettě: „Postavil jsem parník, který má místo koles vzadu šroub dlouhý 6 stop, jenž, otáčen parním strojem, pohání loď. Parní stroj byl zhotoven ve Štýrsku a je tou měrou nezpůsobilý, že se s ním nemohlo jet ani čtvrt hodiny, pak se poroučel“.

O Resslera se začali zajímat někteří cizinci, kteří jeho vynálezy doslova kradli. Nejprve to byl zástupce jedné pařížské firmy Bauer, který pod jménem Mallarovo si dal patentovat lodní šroub (nepatrně pozměněný Resslerův vynález).

Roku 1855 anglická admirálita vypsala cenu 20 000 liber pro toho, kdo úředně prokáže své prvenství lodního šroubu. Ressel se přihlásil, ale na odpověď čekal marně.

I když Resslerovým nejvýznamnějším vynálezem je lodní šroub, není zdaleka jeho jediným vynálezem. Ressel vynalezl lisovací válec na menší kovové předměty, válcový mlýn obilí s dutými válci (byl postaven v Terstu), šroubový lis na olej a víno, zlepšený hydraulický parní stroj, kuličkové ložisko, mazání pro hřídele strojů, regenerační parní stroj, větrný mlýn se svislým větrným kolem na různou rychlost a směr větru, vylepšený pluh s jednoduchým ovládáním, přenosný polní optický telegraf pro vojenské účely, dálkový vodní pohon, objevil nový způsob vyluhování barev a tříslovin ze stromů a vyztužování výtažků. Zvláštní pozornost zasluhuje také jeho vynález parního vozu pro osobní dopravu, s nímž v roce 1830 konal v Terstu zkušební jízdy, dělová lafeta zmírňující zpětný náraz po výstřelu a pneumatický přístroj pro rychlou dopravu uhlí a nerostů.

Mnohostranná byla Resslerova činnost lesníka. Podal mnoho návrhů pro zkvalitnění lesních porostů v Istrii a na zalesnění Krasu. Přemýšlel, jak lesnictví zlepšit a z hospodárnit. I když s návrhy z oboru lesnictví nepochodil o mnoho lépe než s technickými vynálezy, přece nebylo v Přímoří od roku 1830 až do jeho smrti větší lesní úřední akce, při jejímž řešení by se byl neúčastnil.

Zemřel vzdálen od své rodiny v noci z 9. na 10. října 1857 blízko Lublaně na následky tyfového onemocnění. Byl pochován v Lublani.

Až dlouho po jeho smrti byly uznány jeho zásluhy o rozvoj techniky. Slavný Čech, chrudimský rodák, průkopník světového významu Josef Ressel, jak sám napsal, nepracoval „ani pro hmotný prospěch, ani z ješitnosti“, ale aby ulehčil lidem námahu a učinil lidský život šťastnější.

konstruktivní geometrie

Analogie v geometrii

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

Velmi mnohé objevy v matematice i v jiných vědních naukách vznikly na základě porovnávání vlastností objektů a správným užitím analogie, která byla vysoko oceněna např. *Janem Keplerem*: „I já především si cením analogií, které byly mými opravdovými a věrnými učiteli. Ony umožňují poznat všechny taje přírody a nejméně by se jimi mělo pohrdat v geometrii“ [viz liter. (2)].

Dějiny matematiky mohou vykazat velmi mnoho příkladů, jak důležitou úlohu při rozvoji matematiky mělo využití analogií. Skvělým příkladem jsou práce švýcarského matematika *Leonarda Eulera* (1707 až 1783).

Analogie rozvíjejí logické myšlení a tvůrčí schopnosti, které jsou nezbytné pro každého vědeckého pracovníka, matematika, inženýra, lékaře aj.

Během dlouhého vývoje lidstva člověk poznával a porovnával vlastnosti předmětů okolního světa a usuzoval, když mají některé vlastnosti společné, že mohou mít i další společné vlastnosti. „*Per analogiam*“ poznával tak důkladněji vlastnosti okolního světa.

Logická struktura usuzování na základě analogie je následující:

Předmět A má vlastnosti $a, b, c \dots x$,
předmět B má vlastnosti a, b, c

Je pravděpodobné, že předmět B bude mít také
vlastnost x .

Usuzování „*per analogiam*“ má v matematice především cenu objevitelskou, není nikdy matematickým důkazem. Vede pouze k domněnce, která nemusí být pravdivá. Je-li pravdivá a její správnost byla dokázána logicky správným důkazem, stane se matematickou větou. A tak při získávání dalších správných poznatků pomocí analogií se uplatňují *postupy induktivní* (při porovnávání a poznávání vlastností objektů) i *postupy deduktivní* (při provádění logicky správných důkazů domněnek), stejně tak jako *analýza* (při zjišťování vlastností objektů) i *syntéza* (při sestavování hypotéz). To vše přispívá k tvořivému a uvědomělému ovládnutí příslušné látky.

Ve školské matematice jste poznali veliké množství analogických vlastností při provádění početních operací, při postupech řešení úloh algebraických i geometrických, při studiu vlastností útvarů planimetrických i stereometrických aj. Zamyslete se sami nad analogickými vlastnostmi trojúhelníků a čtyřúhelníků, trojúhelníků a čtyřstěnů, rovnoběžníků a rovnoběžnostěnů, vzájemné polohy dvou kružnic a vzájemné polohy dvou kulových ploch aj. Zjistíte, že některé vlastnosti jsou *plně totožné*, např. úhlopříčky v obdélníku jsou stejně dlouhé a navzájem se půlí, což platí doslovně i pro kvádr. V každém trojúhelníku je součet libovolných dvou stran větší než strana třetí a totéž platí pro každé dvě strany (tj. pro velikosti úhlu hran) trojhranu. Víte však také, že každému trojúhelníku lze kružnici vepsat, což neplatí pro každý čtyřúhelník, ale jen pro čtyřúhelník tětiový. Výšky v trojúhelníku se protínají v jediném bodě, jediné však ve čtyřstěnech ortocentrických se tělesové výšky protínají v jediném bodě. V těchto příkladech platí *analogie jen ve zvláštních případech*.

Porovnáváme-li při užití analogie vlastnosti útvarů rovinných a útvarů prostorových, zjišťujeme, že v mnohých případech odpovídá bodu přímka, přímce nebo úsečce rovina nebo její část, rovině (části roviny) prostor (část prostoru), např. průsečíku dvou různoběžek odpovídá průsečnice dvou různoběžných rovin, stranám trojúhelníku stěny čtyřstěnu apod. Často útvaru definovanému v rovině odpovídá *táž* definice odpovídajícího útvaru v prostoru, např. definici kružnice jako množiny bodů, které mají od pevného bodu konstantní vzdálenost, definice kulové plochy apod. Je ovšem třeba podrobně prozkoumat a analyzovat vlastnosti útvarů, které jsou sdruženy analogií. Různým vlastnostem trojúhelníka mohou odpovídat podobné vlastnosti čtyřúhelníka, šestiúhelníka, čtyřstěnu apod.

Jestliže většinou v dalším uvedeme analogie mezi útvary planimetrickými a útvary stereometrickými, je možno najít obráceně vlastnosti útvarů prostorových, které vedou k podobným vlastnostem útvarů v rovině. Některé příklady uvedeme v dalším textu.

Předpokládáme, že příklady, které dále uvádíme, budou sloužit čtenářům jen jako ukázky pro jejich další samostatnou práci při řešení úloh uvedených na konci článku. To je především účelem tohoto článku.

Stejným postupem lze dokázat existenci *Jeřábkových bodů* ve čtyřstěnu (je celkem 6 možností).*)

*) O Jeřábkových bodech v trojúhelníku viz článek St. Horáka v Rozhledech, roč. 55, str. 391.

Příklady :

1a) V každém trojúhelníku existuje právě jeden bod L (Lemoineův bod), pro který platí :

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c ,$$

kde d_a, d_b, d_c jsou vzdálenosti bodu L od stran a, b, c trojúhelníka ABC . Řešení je uvedeno v článku St. Horáka v 55. roč. Rozhledů matem.-fyzikálních str. 354.

1b) V každém čtyřstěnu existuje právě jeden bod L (Lemoineův bod), pro který platí :

$$d_a : d_b : d_c : d_d = S_A : S_B : S_C : S_D ,$$

kde d_a, d_b, d_c, d_d jsou vzdálenosti bodu L od stěn čtyřstěnu $ABCD$ a S_X značí obsah trojúhelníku, který leží proti vrcholu X čtyřstěnu.

Řešení :

Spojíme-li úsečkami bod L s vrcholy čtyřstěnu, dostaneme čtyři čtyřstěny bez společných vnitřních bodů, jejichž sjednocením je daný čtyřstěn. Pro součet jejich objemů platí:

$$3V = d_a S_A + d_b S_B + d_c S_C + d_d S_D, \quad (1)$$

V je objem daného čtyřstěnu.

Z podmínky úlohy plyne:

$$d_a = k \cdot S_A, d_b = k \cdot S_B, d_c = k \cdot S_C, \\ d_d = k \cdot S_D,$$

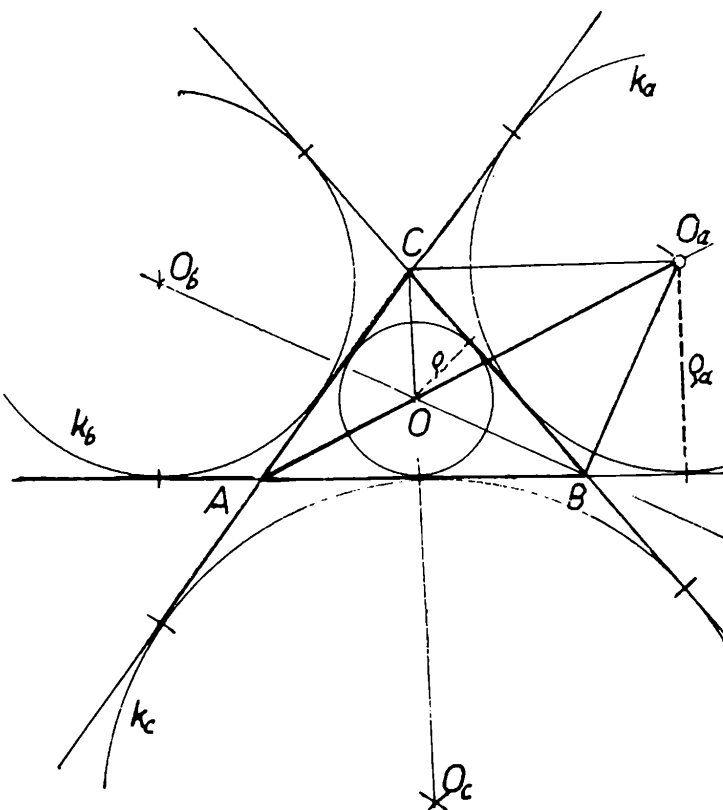
kde k je konstanta úměrnosti, kterou určíme. Po dosazení do (1) a po jednoduché úpravě dostaneme

$$k = 3V : (S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2) .$$

A tak je, označíme-li S součet druhých mocnin obsahů stěn:

$$d_a = \frac{3V \cdot S_A}{S}, \quad d_b = \frac{3V S_B}{S},$$

$$d_c = \frac{3V S_C}{S}, \quad d_d = \frac{3V S_D}{S} .$$



Obr. 1a

Tím je bod L jednoznačně určen.

2a) V každém trojúhelníku ABC platí rovnost :

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} ,$$

kde ϱ je poloměr kružnice do $\triangle ABC$ vepsané a ϱ_x poloměry kružnic připsaných.

Řešení : (Viz obr. 1a)

Spojíme-li střed O_a kružnice k_a úsečkami s vrcholy $\triangle ABC$ a určíme obsah tohoto trojúhelníku S také pomocí obsahů $\triangle ABO_a$, $\triangle ACO_a$, $\triangle BCO_a$, tj. dvojím způsobem, dostaneme:

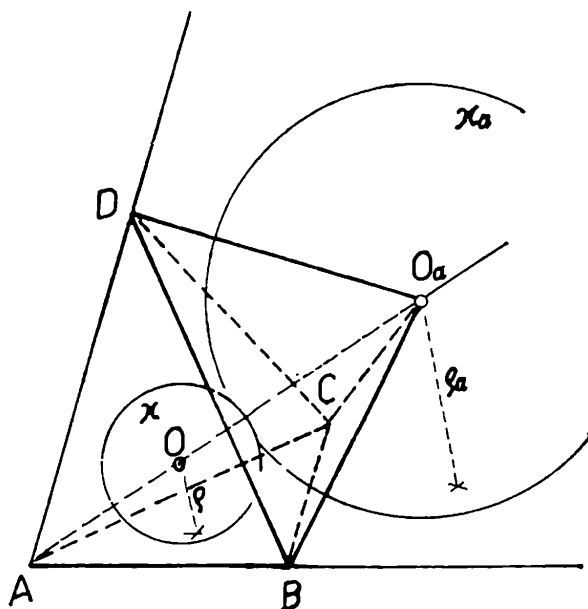
$$1. \quad S = s \cdot \varrho, \text{ kde } s = \frac{a + b + c}{2},$$

$$2. \quad S = (s - a) \cdot \varrho_a .$$

Pro kružnice $k_b(O_b, \varrho_b)$ a $k_c(O_c, \varrho_c)$ dostaneme podobně

$$S = (s - b) \cdot \varrho_b ,$$

$$S = (s - c) \cdot \varrho_c .$$



Obr. 1b

Poněvadž

$(s - a) + (s - b) + (s - c) = s$,
dostaneme po dosazení z předcházejících rovností a zjednodušení:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d}.$$

2b) V každém čtyřstěnu $ABCD$ platí rovnost:

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d},$$

kde ρ je poloměr kulové plochy do čtyřstěnu $ABCD$ vepsané a ρ_x poloměry kulových ploch připsaných.

Řešení: (Viz obr. 1b)

Spojíme-li úsečkami střed O_A kulové plochy κ_a s vrcholy A, B, C, D daného čtyřstěnu a vyjádříme objem V daného čtyřstěnu pomocí objemů čtyřstěnů $O_A(BCD)$, $O_A(ABD)$, $O_A(ABC)$, $O_A(ACD)$, dostaneme při zkráceném označení jako v příkladě 1b:

$$1. \quad 3V = (S_A + S_B + S_C + S_D) \cdot \rho = S \cdot \rho,$$

$$\text{kde } S = S_A + S_B + S_C + S_D.$$

$$2. \quad 3V = (S_B + S_C + S_D - S_A) \cdot \rho_a = (S - 2S_A) \cdot \rho_a.$$

Podobně pro další připsané kulové plochy $\kappa_b, \kappa_c, \kappa_d$ platí:

$$3V = (S - 2S_B) \cdot \rho_b,$$

$$3V = (S - 2S_C) \cdot \rho_c,$$

$$3V = (S - 2S_D) \cdot \rho_d.$$

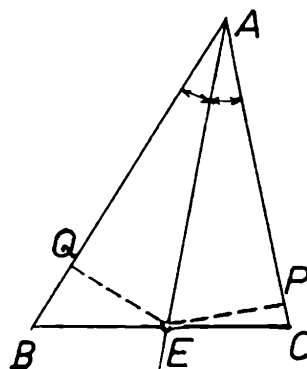
Poněvadž platí

$$(S - 2S_A) + (S - 2S_B) + (S - 2S_C) + (S - 2S_D) = 2S,$$

dostaneme po dosazení za výrazy v závorkách z předcházejících rovností a zjednodušení:

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d}.$$

3a) Osa vnitřního úhlu v trojúhelníku protíná protější stranu v bodě, který dělí tuto stranu v poměru délek přilehlých stran.



Obr. 2a

Z vlastnosti osy vnitřního úhlu v trojúhelníku plyne, že délky výšek vedených z jejího bodu E na strany AB a AC trojúhelníku jsou si rovny, tj. $EP = EQ$.

Poměr obsahů $\triangle AEB$ a $\triangle AEC$ je

$$\frac{|\triangle AEB|}{|\triangle AEC|} = \frac{AB}{AC}.$$

Ale $\triangle AEB$ a $\triangle AEC$ mají společnou výšku na stranu BC , proto je

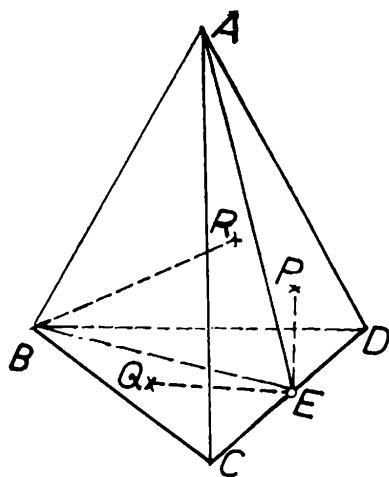
$$\frac{|\triangle AEB|}{|\triangle AEC|} = \frac{EB}{EC}.$$

Z těchto nalezených vztahů pak plyne

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

3b) *Rovina souměrnosti klínu, který určují roviny sousedních stěn čtyřstěnu, protíná protější hranu čtyřstěnu v bodě, který dělí tuto hranu v poměru plošných obsahů přilehlých stěn.*

Řešení :



Obr. 2b

Rovina ABE je rovinou souměrnosti klínu, který tvoří roviny ABC a ABD čtyřstěnu (obr. 2b). Jsou-li P, Q paty kolmic z bodu E , v němž rovina souměrnosti klínu protíná hranu CD , pak pro délky kolmic na roviny ABC a ABD plyne $EP = EQ$.

Objemy čtyřstěnů $V_1 = E(ABC)$ a $V_2 = E(ABD)$ jsou v poměru

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{|\triangle ABC|}{|\triangle ABD|}.$$

Je-li BR výška vedená z bodu B na rovinu ACD , jsou objemy čtyř-

stěnů $B(EAC)$ a $B(EAD)$ v poměru

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{|\triangle EAC|}{|\triangle EDC|} = \frac{EC}{ED},$$

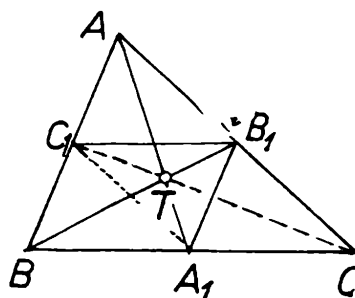
neboť $\triangle AEC$ a $\triangle EAD$ mají společnou délku výšky z bodu A na stranu CD .

Platí tedy z předcházejících vztahů i z výsledků úlohy 3a

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{|\triangle ABC|}{|\triangle ABD|} = \frac{|\triangle EAC|}{|\triangle EAD|} = \\ &= \frac{|\triangle EBC|}{|\triangle EBD|} = \frac{EC}{ED} = \frac{BC}{BD}. \end{aligned}$$

4a) *V každém trojúhelníku se těžnice protínají v jednom bodě T , který dělí každou těžnici v poměru 2 : 1.*

Řešení :



Obr. 3a

Označme A_1, B_1, C_1 středy stran $\triangle ABC$ a T průsečík $AA_1 \cap BB_1$. Ze stejnohlých trojúhelníků $\triangle ATB \sim \triangle A_1TB_1$ plyne vzhledem k tomu, že $A_1B_1 \parallel AB$ je $TA_1 : TB_1 = TA : TB = A_1B_1 : AB = 1 : 2$, a poněvadž je $TA + TA_1 = AA_1$, $TB + TB_1 = BB_1$, určíme snadno, že

$$TA = \frac{2}{3} AA_1; \quad TB = \frac{2}{3} BB_1.$$

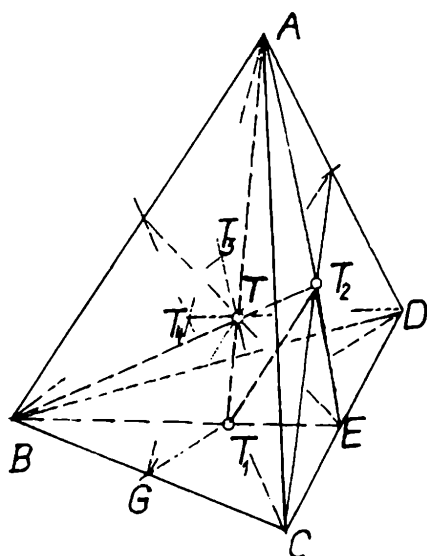
Podobně ze stejnohlých trojúhelníků $\triangle C_1TB_1 \sim \triangle CTB$, je-li $T' = CC_1 \cap AA_1$, plyne $T'C =$

$$= \frac{2}{3} CC_1 \text{ a } T'A = \frac{2}{3} AA_1.$$

Z rovnosti $TB = T'B$, pak plyne $T = T'$.

4b) V každém čtyřstěnu se protínají (tělesové) těžnice spojující vrchol čtyřstěnu s těžištěm protější stěny v jednom bodě T , který dělí každou těžnici v poměru 3 : 1.

Řešení :



Obr. 3b

V $\triangle ABE$, jehož strany BE a AE procházejí těžišti T_1 a T_2 stěn BCD a ACD , je $T_1T_2 \parallel AB$ a $T_1T_2 : AB = 1 : 3$.

AT_1 protíná BT_2 v bodě T . Ze stejnohlých trojúhelníků $\triangle TT_1T_2 \sim \triangle TAB$ plyne

$TA : TB = TT_1 : TT_2 = 1 : 3$, a poněvadž $TA + TT_1 = AT_1$, $TB + TT_2 = BT_2$, určíme snadno

$$TA = \frac{3}{4} AT_1, TB = \frac{3}{4} BT_2.$$

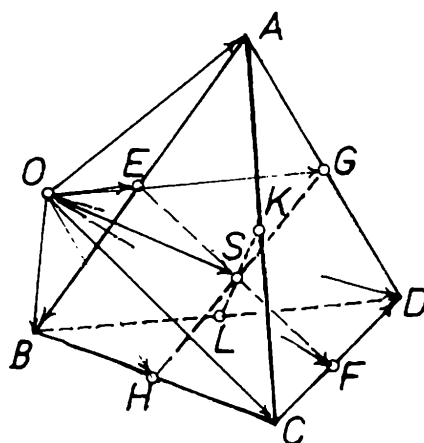
Z $\triangle ADG$ (G je střed hrany BC) dostaneme stejným způsobem (označíme-li T' průsečík $TD \cap TA$),

$$TD = \frac{3}{4} DT_4 \text{ a } T'A = \frac{3}{4} AT_1.$$

Z rovnosti $TA = T'A$ plyne pak totožnost $T' = T$. Stejně dokážeme, že i zbývající těžnice prochází bodem T .

Tím je důkaz proveden.

5a) Úsečky, které spojují středy protějších stran v libovolném vypuklém rovinném čtyřúhelníku, se protínají v bodě S , který je též středem úsečky spojující středy jeho úhlopříček.



Obr. 4

Řešení :

Důkaz dostaneme z výsledku př. 5b, když obrazec čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 4) pokládáme za rovnoběžný průmět čtyřstěnu. Všechny rovnosti uvedené v řešení příkladu 5b zůstávají v platnosti. Tím je věta dokázána.

5b) Úsečky, které spojují středy protějších hran v libovolném čtyřstěnu, se protínají v jediném bodě.

Řešení :

K důkazu užijeme vektorů. Je-li O libovolný bod prostoru, můžeme vektory určené hranami čtyřstěnu vyjádřit pomocí vázaných vektorů, např. $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}$, $\mathbf{CD} = \mathbf{OD} - \mathbf{OC}$ apod.

Označme E, F, G, H, K, L středy úseček AB, CD, AD, BC, AC, BD .

Vektory příslušné bodům E a F jsou:

$$\mathbf{OE} = \frac{1}{2} (\mathbf{OA} + \mathbf{OB}),$$

$$\mathbf{OF} = \frac{1}{2} (\mathbf{OC} + \mathbf{OD}).$$

Středu S úsečky EF přísluší vektor $\mathbf{OS}$:

$$\mathbf{OS} = \frac{1}{2} (\mathbf{OE} + \mathbf{OF}) = \frac{1}{4} (\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD}).$$

K témuž výsledku dojdeme, určíme-li vektory příslušné středům úseček CH a KL , tj. $\mathbf{OS}' = \frac{1}{2} (\mathbf{OG} +$

$$+ \mathbf{OH}), \mathbf{OS}'' = \frac{1}{2} (\mathbf{OK} + \mathbf{OL}),$$
 což

znamena, že $\mathbf{OS} = \mathbf{OS}' = \mathbf{OS}''$ a totožnost bodů $S = S' = S''$. Protínají se tudíž úsečky EF , GH , KL v jediném bodě, který je středem všech těchto úseček.

6a) *Výšky v každém trojúhelníku se protínají v jednom bodě.* Úlohu vzhledem k úloze 6b) budeme formulovat takto: *Jestliže dvě výšky v trojúhelníku se protínají v bodě V , pak tímto bodem prochází i třetí výška trojúhelníku.*

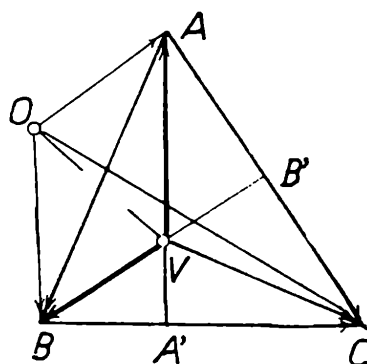
Řešení: (Viz obr. 5a)

Z podmínky úlohy plyne pro vektory $\mathbf{VA}$ a $\mathbf{BC}$ a pro vektory $\mathbf{VB}$ a $\mathbf{AC}$

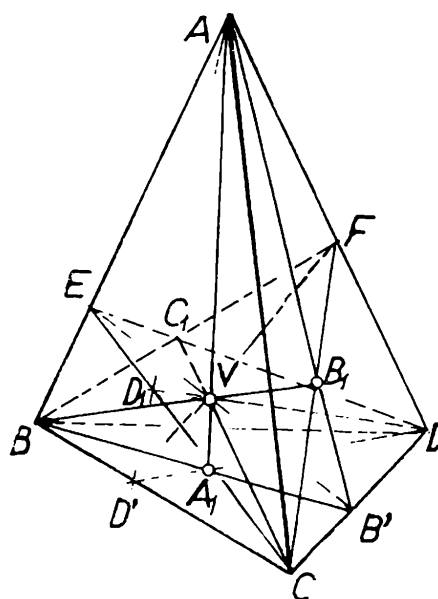
$$\mathbf{VA} \cdot \mathbf{BC} = 0, \mathbf{VB} \cdot \mathbf{AC} = 0.$$

(Předpokládáme, že výšky AA' , BB' se protínají v bodě V .)

Užijeme-li vázaných vektorů s počátkem v libovolném bodě O , pak skalární součiny vyjádříme



Obr. 5a



Obr. 5b

$$\begin{aligned} (\mathbf{OA} - \mathbf{OV}) (\mathbf{OC} - \mathbf{OB}) &= \\ &= \mathbf{OA} \cdot \mathbf{OC} - \mathbf{OV} \cdot \mathbf{OC} - \\ &- \mathbf{OA} \cdot \mathbf{OB} + \mathbf{OV} \cdot \mathbf{OB} = 0, \\ (\mathbf{OB} - \mathbf{OV}) (\mathbf{OC} - \mathbf{OA}) &= \\ &= \mathbf{OB} \cdot \mathbf{OC} - \mathbf{OV} \cdot \mathbf{OC} - \\ &- \mathbf{OB} \cdot \mathbf{OA} + \mathbf{OV} \cdot \mathbf{OA} = 0. \end{aligned}$$

Po odečtení druhé rovnosti od první dostaneme

$$\mathbf{OC}(\mathbf{OA} - \mathbf{OB}) - \mathbf{OV}(\mathbf{OA} - \mathbf{OB}) = \\ = (\mathbf{OC} - \mathbf{OV}) (\mathbf{OA} - \mathbf{OB}) = 0,$$

tj. $\mathbf{VC} \perp \mathbf{BA}$. Tím je věta dokázána.

Pokládejme nyní obrazec 5a za kolmý průmět čtyřstěnu $V(ABC)$.

Zřejmě pro jeho hrany platí

$$VA \perp BC, VB \perp AC.$$

Z provedeného důkazu pro trojúhelník plyne pro čtyřstěn:

Má-li čtyřstěn dvě dvojice navzájem kolmých hran, jsou i zbývající dvě hrany navzájem k sobě kolmé.

Takový čtyřstěn nazýváme *čtyřstěnem ortocentrickým*. Mezi ortocentrické čtyřstěny náleží i čtyřstěn pravidelný.

6b) *Ve čtyřstěnu ortocentrickém se protínají výšky v jednom bodě.*

Řešení :

Z příkladu 6a) je zřejmé, že v každém ortocentrickém čtyřstěnu je *kolmý průmět kteréhokoliv jeho vrcholu do protější stěny průsečíkem výšek (ortocentrem) této stěny.*

Nechť je V průsečík výšek AA_1 a BB_1 (z vrcholů A, B na protější stěny — obě leží v téže rovině $ABB' \perp CD$

Dokážeme nyní, že také přímka CV je výškou čtyřstěnu. Přímka CV leží v rovině CDE , kde E je pata výšky $B'V$ na stranu AB v $\triangle ABB'$. Hrana $AB \perp EB' \wedge AB \perp CD$, je proto $AB \perp CDE$; z toho plyne $CV \perp AB$

Přímka CV leží také v rovině BCF , která je kolmá k hraně AD , neboť $BC \perp AD \wedge CB_1 \perp AD$ (CB_1 je výškou v $\triangle ACD$); proto je také $CV \perp CD$.

Poněvadž je $CV \perp AD \wedge CV \perp AB$, je přímka CV kolmá k rovině ABD . Stejně tak dokážeme, že přímka VD je kolmá k rovině ABC .

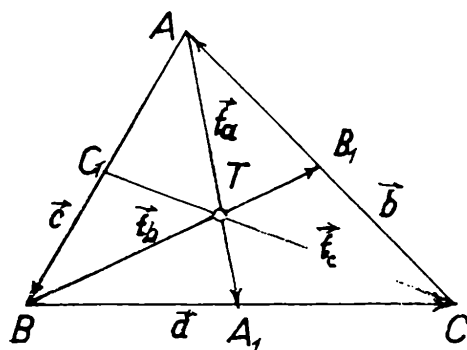
Procházejí tudíž všechny čtyři výšky ortocentrického čtyřstěnu jedním bodem. Není-li podmínka kolmosti protějších hran čtyřstěnu splněna,

není A_1 ortocentrem $\triangle BCD$, jsou výšky AA_1, BB_1 mimoběžné a tudíž výšky čtyřstěnu se neprotínají v jednom bodě.

7a) *Máme určit součet druhých mocnin délek těžnic v trojúhelníku pomocí délek jeho stran.*

Řešení :

Označme délky těžnic $AA_1 = t_a$, $BB_1 = t_b$, $CC_1 = t_c$.



Obr. 6a

Z trojúhelníků $\triangle ABA_1$, $\triangle ACA_1$ dostaneme následující rovnosti mezi vektory:

$$\mathbf{t}_a = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}; \quad \mathbf{t}_a = -\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a};$$

$$t_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} + \mathbf{ac};$$

$$t_a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + \mathbf{ab}.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$2 \cdot t_a^2 = c^2 + b^2 + \frac{a^2}{2} + \mathbf{a(c + b)},$$

ale $\mathbf{c + b = -a}$, takže je

$$t_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme

$$t_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4},$$

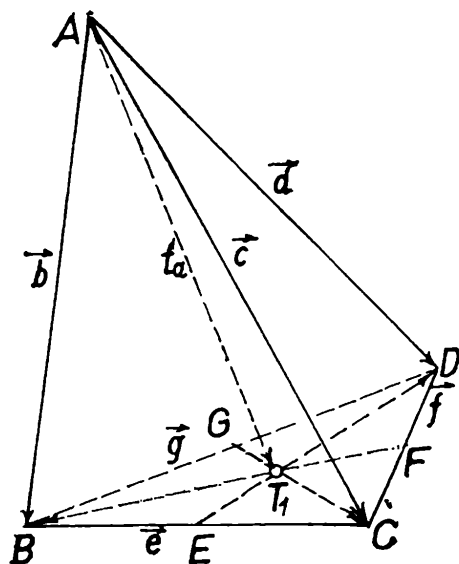
$$t_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

7b) Máme určit součet druhých mocnin délek (tělesových) těžnic ve čtyřstěnu pomocí délek jeho hran.

Řešení :



Obr. 6b

Označme délky hran: $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $BC = e$, $CD = f$, $BD = g$ a těžnice procházející vrcholy A, B, C, D t_a, t_b, t_c, t_d . Z trojúhelníků: $\triangle ABT_1$, $\triangle ACT_1$, $\triangle ADT_1$ dostaneme vztahy mezi vektory:

$$t_a = \mathbf{AB} - \frac{2}{3} \mathbf{BF},$$

$$t_a = \mathbf{AC} - \frac{2}{3} \mathbf{GC},$$

$$t_a = \mathbf{AD} - \frac{2}{3} \mathbf{ED}.$$

a z nich

$$t_a^2 = AB^2 + \frac{4}{9} BF^2 - \frac{4}{3} \mathbf{AB} \cdot \mathbf{BF},$$

$$t_a^2 = AC^2 + \frac{4}{9} GC^2 - \frac{4}{3} \mathbf{AC} \cdot \mathbf{GC},$$

$$t_a^2 = AD^2 + \frac{4}{9} ED^2 - \frac{4}{3} \mathbf{AD} \cdot \mathbf{ED}.$$

$$\text{Poněvadž } \mathbf{AB} \cdot \mathbf{BF} = \frac{2}{3} BF^2,$$

$$\mathbf{AC} \cdot \mathbf{GC} = \frac{2}{3} GC^2,$$

$$\mathbf{AD} \cdot \mathbf{ED} = \frac{2}{3} ED^2,$$

což plyne z definice skalárního součinu, dostaneme po sečtení a jednoduché úpravě a po dosazení velikostí vektorů a podle výsledku př. 7a)

$$BF^2 + GC^2 + ED^2 = \frac{3}{4}(e^2 + f^2 + g^2)$$

$$3 \cdot t_a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - \frac{1}{3}(e^2 + f^2 + g^2).$$

Cyklickou záměnou vrcholů a hran čtyřstěnu dostaneme

$$3 \cdot t_b^2 = b^2 + g^2 + e^2 - \frac{1}{3}(c^2 + f^2 + d^2),$$

$$3 \cdot t_c^2 = e^2 + f^2 + c^2 - \frac{1}{3}(b^2 + d^2 + g^2),$$

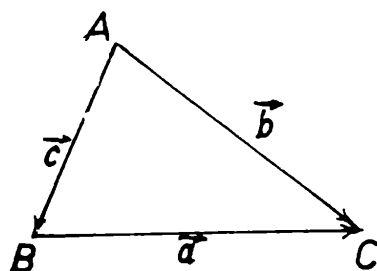
$$3 \cdot t_d^2 = d^2 + f^2 + g^2 - \frac{1}{3}(b^2 + c^2 + e^2).$$

Po sečtení těchto čtyř rovností a jednoduché úpravě dostaneme výsledek:

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 + t_d^2 = \frac{4}{9} (b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2).$$

8a) Užitím vektorů máme určit obsah trojúhelníku, jsou-li dány velikosti jeho stran.

Řešení:



Obr. 7a

Označíme-li $\mathbf{AB} = \mathbf{c}$, $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{a}$, pak $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\mathbf{b} : \mathbf{c} = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 = \\ &= \frac{[(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b-c)^2]}{(2bc)^2} = \\ &= \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(2bc)^2}, \text{ kde} \\ s &= \frac{a+b+c}{2}. \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníku ABC určíme vektorovým součinem vektorů:

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \frac{1}{2} b \cdot c \sin \alpha.$$

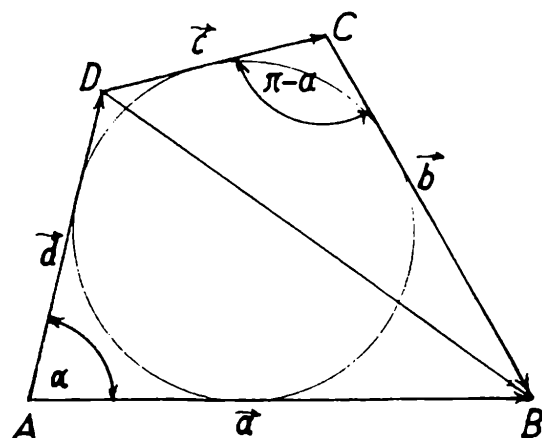
Po dosazení za $\sin \alpha$ máme

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

což je známý vzorec Heronův.

8b) Užitím vektorů máme určit obsah tětivového čtyřúhelníku, jsou-li dány velikosti jeho stran.

Řešení:



Obr. 7b

Označíme-li $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$, $\mathbf{AD} = \mathbf{d}$, $\mathbf{CB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{DC} = \mathbf{c}$, pak z $\triangle ABD$ určíme $\mathbf{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{d}$ a z $\triangle DBC$ $\mathbf{DB} = \mathbf{c} + \mathbf{b}$.

Pro velikosti těchto vektorů dostaneme vzhledem k tomu, že

$$\begin{aligned} |\angle DCB| &= 180^\circ - \alpha, \\ DB^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha, \\ DB^2 &= c^2 + b^2 + 2cb \cos \alpha. \end{aligned}$$

Z těchto rovností určíme

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(bc + ad)}.$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(bc + ad)} \right)^2 = \\ &= \frac{[(a+d)^2 - (b-c)^2]}{4(bc + ad)^2} \cdot \\ &\cdot \frac{[(b+c)^2 - (a-d)^2]}{4(bc + ad)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ad+bc)^2},$$

$$\text{kde } s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

$$= \frac{ad+bc}{2} \sin \alpha.$$

Dosadíme-li za $\sin \alpha$ vypočítanou hodnotu, dostaneme

Obsah čtyřúhelníku je

$$S = \frac{1}{2} (|\mathbf{a} \times \mathbf{d}| + |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|) =$$

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

což je vzorec *Brahmaguptův*.

Ze vzorce Brahmaguptova dostaneme vzorec Heronův*), když v něm položíme $d = 0$.

Literatura :

1. D. Polya: *Kak řešat zadaču*. Učpedgiz. Moskva 1961
2. D. Polya: *Matematika i pravděpodobnyje rassužděníja*, Učpedgiz, Moskva, 1957
3. Akad. ped. nauk SSSR: *Enciklopedija element. matematiki. Geometrija* Moskva (1963)
4. P. M. Erdniev: *Sravněníje i obobščeníje ...* Učpedgiz, Moskva, 1960

Cvičení :

1. Jsou-li d_a, d_b, d_c délky kolmic vedených z libovolného vnitřního bodu trojúhelníku na jeho strany a, b, c a v_a, v_b, v_c délky jeho výšek, pak platí $\frac{d_a}{v_a} + \frac{d_b}{v_b} + \frac{d_c}{v_c} = 1$; dokažte.

Platí podobná rovnost pro čtyřstěn. Jak zní tato rovnost?

2. Promítneme-li vnitřní bod M v trojúhelníku ABC z jeho vrcholů do protějších stran do bodů M_1, M_2, M_3 , pak platí

$$\frac{AM}{AM_1} + \frac{BM}{BM_2} + \frac{CM}{CM_3} = 2;$$

dokažte. Platí podobná rovnost také pro čtyřstěn?

3. V libovolném rovnoběžníku, jehož strany mají délky a, b , a jehož úhlopříčky jsou e, f , platí rovnost $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ (viz článek St. Hora: *Vektory v geometrii*, *Rozhledy*, roč. 55, str. 198). Dokažte, že pro rovnoběžnostěn platí analogická rovnost: $e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$, kde e, f, g, h jsou délky jeho tělesových úhlopříček.
4. Dokažte, že každý vnitřní bod pravoúhelníku má od jeho protějších vrcholů stálý součet druhých mocnin vzdáleností. Totéž platí pro kvádr. Dokažte.

*) Heron (1. stol. n. l.), řecký matematik a fyzik žijící v Alexandrii. Brahmagupta (zač. 7. stol. n. l.), indický matematik.

5. Dokažte, že pro každý vnitřní bod v libovolném trojúhelníku platí, že součet jeho vzdáleností od stran trojúhelníka je větší než nejmenší jeho výška a menší než největší jeho výška.
Dokažte, že analogický vztah platí i pro libovolný čtyřstěn.
6. Vedeme-li vnitřním bodem libovolného čtyřstěnu příčku rovnoběžné se dvěma protějšími hranami čtyřstěnu, pak součet poměrů délek těchto příček a délek s nimi rovnoběžných hran je stálý.
Řešte nejprve analogickou úlohu pro trojúhelník.
7. V každém trojúhelníku, v němž v_a, v_b, v_c jsou délky jeho výšek, ϱ poloměr kružnice vepsané a ϱ_x poloměry kružnic připsaných, platí rovnost:

$$4\left(\frac{1}{v_a^2} + \frac{1}{v_b^2} + \frac{1}{v_c^2}\right) = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho_a^2} + \frac{1}{\varrho_b^2} + \frac{1}{\varrho_c^2};$$
 dokažte tuto rovnost a přesvědčte se, že podobná rovnost platí též pro každý čtyřstěn.
8. Rovinný vypuklý čtyřúhelník $ABCD$ obsahuje $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD$ a $\triangle BCD$. V každém z těchto trojúhelníků sestrojte těžiště a spojte je úsečkou se zbývajícím vrcholem čtyřúhelníku. Dokažte, že všechny tyto úsečky se protínají v jednom bodě. (Užijte výsledku př. 40 v textu!)
9. Ze všech pravoúhelníků o stálém obvodu má čtverec největší obsah.
Dokažte užitím nerovnosti $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
Sestavte podobnou úlohu pro kvádr a dokažte její správnost.
10. Ze všech kvádrů vepsaných do koule má krychle největší objem. Dokažte nejprve analogickou úlohu pro pravoúhelník (podle návodu v úloze 9).
11. Ze všech trojúhelníků vepsaných do daného kruhu má rovnostranný trojúhelník největší obsah (podle úlohy 9). Analogická věta platí pro čtyřstěny vepsané do dané koule. Dokažte obě tvrzení.
12. Pravoúhlému trojúhelníku v analogii odpovídá pravoúhlý čtyřstěn, jehož všechny stěnové úhly při jeho hlavním vrcholu jsou pravé. Tento čtyřstěn má jisté analogické vlastnosti odpovídající známým větám v pravoúhlém trojúhelníku. Najděte a dokažte tyto vztahy. Uvažte, že délce strany v trojúhelníku odpovídá obsah odpovídajícího obrazce.

různé

Gaussova metoda vážení

(K 200. výročí narození Karla Friedricha Gausse)

JOSEF KOTYK, Pardubice

Z pákových vah, běžně používaných k stanovení hmotnosti tělesa, jsou nejdůležitější *váhy* zv. *rovnoramenné*. Jejich vahadlem je dvojzvratná páka, o jejíchž ramenech předpokládáme, že jsou přesně stejné

dlouhá. Přijímajíce tento předpoklad s plnou důvěrou, dospívají žáci již na základní škole k snadným závěrům: Je-li na rovnoramenných vahách vahadlo v rovnovážné poloze, tj. je-li moment tíhy předmětu roven momentu tíhy závaží, je tíha tělesa rovna tíze závaží a hmotnost tělesa hmotnosti závaží. Pokud vážení opakují, ponechávajíce vážený předmět zpravidla opět na misce levé, závaží kladou pak opět na misku pravou, nebývají k tomu vedeni pochybnostmi o rovnoramennosti vahadla, nýbrž přirozenou snahou odstranit chyby, jež obvykle doprovázejí každé měření. Teprve později (někdy však až na přímý podnět učitele fyziky) začnou se přemýšliví žáci stavět k předpokladu rovnoramennosti vahadla kritičtěji. Zkušenosti dokládají, že skepse v tomto směru je opodstatněna. Zváží-li žáci týž předmět hmotnosti x střídavě na obou miskách, shledávají, že závaží k jeho vyvážení potřebná jsou zpravidla rozdílná; jejich hmotnosti jsou např. $z_1 = 78,398$ g, $z_2 = 78,386$ g, v hrubším případě např. $z_1 = 5,96$ g, $z_2 = 5,34$ g apod., hmotnost tělesa je pak podle jejich závěrů pravděpodobně určena *aritmetickým průměrem*

$$x = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

A vy, milí čtenáři? Pokud žijete ještě v idylické jistotě, že vahadlo vah rovnoramenných musí nutně být pákou rovnoramennou, odhodlejte se k tomu, o rovnoramennosti vah se skutečně také přesvědčit. Předpokládejte, že délky ramen vahadla l_1 , l_2 jsou různé ($l_2 \neq l_1$), odvažte týž předmět hmotnosti x rovněž na obou miskách závažími hmotnosti z_1 resp. z_2 ($z_2 \neq z_1$) — *metoda Gaussova** — a vyvoďte příslušné důsledky.

Přemýšlejme obecně takto:

Rovnost momentů tíhových sil předmětu a závaží vyjádříme vztahy platnými pro

$$\text{vážení I.} \quad x \cdot g \cdot l_1 = z_1 \cdot g \cdot l_2 \quad (1)$$

$$\text{vážení II.} \quad z_2 \cdot g \cdot l_1 = x \cdot g \cdot l_2 \quad (2)$$

Z nich dělením dostáváme ihned

$$\frac{x}{z_2} = \frac{z_1}{x}$$

neboli

$$x^2 = z_1 \cdot z_2$$

z čehož

$$x = \sqrt{z_1 \cdot z_2} \quad (3)$$

Správná hmotnost předmětu rovná se geometrickému průměru hmotností obou závaží.

Velikost odchylky od rovnoramennosti vah stanovíme hodnotou po-

Záslužnou vědeckou činnost *Karla Friedricha Gausse* (1777—1855), jednoho z největších matematiků všech dob, připomněl čtenářům Rozhledů autorův článek „Karl Friedrich Gauss“ v roč. 53, čís. 5, str. 279 až 285, k němuž zároveň odkazujeme.

měru $\frac{l_1}{l_2}$. Z rovností (1), (2) vychází násobením (a opět po vhodném krácení)

$$z_2 \cdot l_1^2 = z_1 \cdot l_2^2$$

neboli

$$\frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{z_1}{z_2}$$

z čehož

$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \quad (4)$$

Poměr délek ramen vahadla (a tím i velikost odchylky od rovnoramennosti vah) určíme hodnotou druhé odmocniny poměru hmotností obou závaží.

Jestliže $z_1 = z_2 = z$, jest $\frac{z_1}{z_2} = 1$; podle (4) také $\frac{l_1}{l_2} = 1$ neboli $l_1 = l_2$. V tomto případě jsou váhy přesně rovnoramenné. Hmotnost váženého předmětu je potom $x = \sqrt{z^2} = z$.

Cvičení:

1. Stanovte správnou hmotnost předmětu a poměr délek ramen vahadla v numerických příkladech uvedených výše. Obdobné závěry vyvoďte také z vlastních laboratorních prací!

2. Přesvědčte se (a obecně dokažte), že hodnota aritmetického průměru čísel z_1, z_2 je větší než hodnota jejich průměru geometrického. Uvažte také, kdy nastává rovnost!

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Do čtvercové tabulky s $n \cdot n$ čtvercovými poli jsou vepsána čísla $1, 2, \dots, n$ tak, že každý řádek i každý sloupec obsahuje všechna tato čísla; kromě toho je tabulka souměrná podle své hlavní úhlopříčky. Dokažte, že tato úhlopříčka obsahuje všech n čísel $1, 2, \dots, n$ právě tehdy, když n je číslo liché. — Číslo zapsané v i -tém řádku j -tého sloupce označte a_{ij} ; hlavní úhlopříčka tabulky obsahuje čísla a_{ii} a tabulka podle ní souměrná má $a_{ji} = a_{ij}$ pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Ladislav Bican, Petr Němec

(Došlo 10 řešení)

Upravené řešení Pavla Kolaříka, 3. C gymnázia v Bílovci :

Každé číslo $1, 2, \dots, n$ se vyskytuje v každém řádku tabulky právě jednou, v celé tabulce se tedy vyskytuje právě n -krát.

Nechť nejprve hlavní úhlopříčka obsahuje všechna čísla $1, 2, \dots, n$. Číslo 1 se potom mimo tuto úhlopříčku vyskytuje v tabulce ještě $(n - 1)$ -krát. Protože tabulka je souměrná podle hlavní úhlopříčky, vyskytuje se $(n - 1)/2$ -krát nad hlavní úhlopříčkou (tj. jako prvek a_{ij} , kde $i < j$) a rovněž $(n - 1)/2$ -krát pod hlavní úhlopříčkou (jako a_{ij} , kde $i > j$). Číslo $n - 1$ je tedy sudé a n je liché.

Obráceně, nechť hlavní úhlopříčka neobsahuje všechna čísla $1, 2, \dots, n$. Pak číslo i , které se v hlavní úhlopříčce nevyskytuje, je vzhledem k souměrnosti tabulky obsaženo $n/2$ -krát nad hlavní úhlopříčkou a $n/2$ -krát pod touto úhlopříčkou. Číslo n je tedy sudé.

2. Vrchol konvexního šestiúhelníku nazveme pravidelně rozděleným, jestliže tři úhlopříčky z něho vedené rozdělují jeho vnitřní úhel na čtyři stejné úhly. Charakterizujte všechny konvexní šestiúhelníky $ABCDEF$, které mají vrcholy A, B, C pravidelně rozdělené.

Miroslav Fiedler.

(Došlo 6 řešení)

Řešil Jaroslav Hančl, 2. C gymnázium Bílovec (řešení upravil autor úlohy),

Ukážeme, že úloze vyhovují jednak pravidelné šestiúhelníky, jednak šestiúhelníky $ABCDEF$, jejichž vrcholy A, F, E, D, C jsou po sobě jdoucí vrcholy pravidelného desetiúhelníku a B jeho střed, a žádné jiné. První část je zřejmá.

Nechť nyní šestiúhelník $ABCDEF$ splňuje předpoklady úlohy. Označme B' průsečík přímek AD a CF , S průsečík přímek BE a AC , P průsečík přímky EB' a AC . Úhly při vrcholech A, B, C označíme $4\alpha, 4\beta, 4\gamma$, takže např. $\sphericalangle BAF = \sphericalangle FAE = \sphericalangle EAD = \sphericalangle DAC = \alpha$ atd.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha \leq \gamma$. Potom je $\sphericalangle BSC \leq 90^\circ$, takže $\sphericalangle ESC \geq 90^\circ$. Protože $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$ (*usu*), je B' souměrně sdružený k B podle přímky AC . Proto B' (a tedy i P) leží v polorovině EBC a $\sphericalangle EPC \geq \sphericalangle ESC \geq 90^\circ \geq \sphericalangle EPA$. Celkem je tedy

$$180^\circ - \sphericalangle B'EA - 2\alpha = \sphericalangle EPA \leq \sphericalangle EPC = 180^\circ - \sphericalangle B'EC - 2\gamma.$$

Bod B' je však středem kružnice vepsané $\triangle ACE$, takže $\sphericalangle B'EA = \sphericalangle B'EC$. Z předchozí nerovnosti $180^\circ - \sphericalangle B'EA - 2\alpha \leq 180^\circ - \sphericalangle B'EC - 2\gamma$ proto vyplývá, že $\gamma \leq \alpha$. Celkem tedy

$$\alpha = \gamma$$

Situace je tudíž taková, že $\triangle ABC$ je rovnoramenný s rameny AB a BC . Šestiúhelník je proto souměrný podle přímky BE a přímky AD a CF se protínají v bodě osy BE , který označíme O . Zjistíme, jaké vztahy splňují úhly α a β .

$Z \triangle ABC$ je

$$2\alpha + 4\beta = 180^\circ. \quad (1)$$

V $\triangle ADB$ je $\sphericalangle ADB = 180^\circ - 2\alpha - 3\beta = \beta$ podle (1). Protože také $\sphericalangle OBD = \beta$, je $\triangle BOD$ rovnoramenný s rameny OB, OD .

Platí nyní pomocná věta:

Je-li $PQRS$ konvexní čtyřúhelník, v němž $PQ = QR$ a $\sphericalangle PSQ = \sphericalangle QSR$, pak nastane alespoň jeden z těchto případů:

a) S leží na polopřímce opačné k polopřímce TQ , kde T je střed úsečky PR ;

b) S leží na tom oblouku PR (bez krajních bodů) kružnice opsané $\triangle PQR$, který neobsahuje Q .

Pomocné věty použijeme na čtyřúhelník $BODC$. Nastane-li případ a), jsou body B a D souměrně sdružené podle přímky OC , takže $\sphericalangle BDC = \beta$. Z $\triangle BCD$ je

$$4\alpha + 2\beta = 180^\circ,$$

což porovnáním s (1) dává

$$\alpha = \beta = 30^\circ.$$

$\triangle AEC$ je pak rovnostranný, a protože $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BCA = \sphericalangle ECD = \sphericalangle FAE = 30^\circ$, je šestiúhelník pravidelný.

Nastane-li případ b), tj. leží-li body B, O, D, C na kružnici, je $\sphericalangle BOD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$. To znamená, že $180^\circ - 2\beta + 4\alpha = 180^\circ$ neboli $\beta = 2\alpha$, což s (1) dává

$$\alpha = 18^\circ, \quad \beta = 36^\circ$$

Přitom

$$\sphericalangle AFC = 180^\circ - 3\alpha - \alpha = 108^\circ,$$

$$\sphericalangle ADC = 180^\circ - 3\alpha - \alpha = 108^\circ,$$

$$\sphericalangle AEC = 180^\circ - 2\alpha - 2\alpha = 108^\circ;$$

protože $\sphericalangle ABC = 144^\circ = 360^\circ - 2 \cdot 108^\circ$, leží body A, F, E, D, C na kružnici se středem B (obvodový úhel 108° nad úsečkou AC). Protože $\sphericalangle ABF = \sphericalangle FBE = \sphericalangle EBD = \sphericalangle DBC = 36^\circ$, jsou body A, F, E, D, C po sobě jdoucí vrcholy pravidelného desetiúhelníku se středem B .

Redakční poznámka. Text 2. úlohy je proti původnímu znění upraven, aby byla zachycena druhá varianta. Na to, že úloha má další řešení, upozornil právě Jaroslav Hančl z Bílovce.

3. Řešte v oboru komplexních čísel rovnici

$$x^5 - 4x^4 - x^3 + kx^2 - 18x + 4 = 0,$$

jestliže pro její kořeny x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) platí:

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \cdot x_5.$$

Vypočtete koeficient k .

Jan Fráňa

(Došlo 7 řešení)

Upravené řešení Rostislava Urbana, 3. A G Ostrava :

Jestliže x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jsou kořeny rovnice, pak platí mezi koeficienty a kořeny rovnice po úpravách vztahy:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4,$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_4 + x_5) + x_4x_5 = -1,$$

$$x_1x_2x_3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \cdot (x_4 + x_5) + x_4x_5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = -k,$$

$$x_1x_2x_3 \cdot (x_4 + x_5) + x_4x_5 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -18,$$

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = -4$$

a podle zadání: $x_1 + x_2 + x_3 = x_4x_5$.

Zavedeme substituce: $x_4 + x_5 = a$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4x_5 = b$$

$$x_1x_2x_3 = c$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = d.$$

Dosazením do předchozích vztahů získáme

$$a + b = 4, \quad (1)$$

$$d + ab + b = -1, \quad (2)$$

$$c + ad + b^2 = -k, \quad (3)$$

$$ac + bd = -18, \quad (4)$$

$$bc = -4. \quad (5)$$

Z této soustavy rovnic (1), (2), (4), (5) dostaneme úpravou rovnici:

$$b^4 - 5b^3 - b^2 + 22b - 16 = 0,$$

$$(b^4 - 16) - b \cdot (5b^2 + b - 22) = 0,$$

$$(b - 2) \cdot (b^3 + 2b^2 + 4b + 8) - b \cdot (b - 2) \cdot (5b + 11) = 0,$$

$$(b - 2) \cdot (b^3 - 3b^2 - 7b + 8) = 0$$

Tato rovnice má jediný racionální kořen $b = 2$.

Rovnice $b^3 - 3b^2 - 7b + 8 = 0$ přejde substitucí $b = y + 1$ na tvar $y^3 - 10y - 1 = 0$ a má iracionální kořeny $y_1 \doteq 3,2111$, $y_2 \doteq -0,0997$, $y_3 \doteq -3,1115$, tedy i b jsou iracionální.

Pro $b = 2$ vychází ze substitučních rovnic (1), (2), (4), (5):

$$a = 2, c = -2, d = -7$$

Pro kořeny x_4, x_5 platí: $x_4 + x_5 = a = 2$, $x_4 \cdot x_5 = b = 2$, z čehož

$$x_4 = 1 + i, x_5 = 1 - i.$$

Zbývající tři kořeny dané rovnice vypočítáme z kubické rovnice, kterou dovedeme sestavit, neboť platí:

$$x_1 + x_2 + x_3 = b = 2, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = d = -7, x_1x_2x_3 = c = -2, \text{ tedy } x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Řešíme ji úpravou: } (x^3 + 8) - (2x^2 + 7x + 6) &= 0, \\ (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4) - (x + 2) \cdot (2x + 3) &= 0, \\ (x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Kořeny jsou vesměs reálné: $x_1 = -2, x_2 = 2 + \sqrt[3]{3}, x_3 = 2 - \sqrt[3]{3}$
Koeficient k dává rovnice (3): $k = 12$.

4. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 = (O; r_1), k_2 = (O; r_2)$, kde je $r_1 < r_2$. Na kružnici k_1 zvolme libovolný bod P a vedme jím libovolnou přímku p tak, aby protínala kružnici k_1 ještě v bodě $A \neq P$. Bodem P sestrojme dále přímku $q \perp p$ a její průsečíky s kružnicí k_2 označme B, C . Dokažte, že při pevně zvoleném bodu P má trojúhelník ABC těžiště, jehož poloha nezávisí na volbě přímky p .

Stanislav Horák

(Došlo 12 řešení)

Příklad byl řešen v podstatě dvěma různými způsoby. Redakce uvádí oba.

1. Řešil Jaroslav Hančl, II. c G Bílovec

Druhý průsečík přímky q s kružnicí k_1 označme Q (obr. 1). Střed tětiny PQ je bod M ; je to zároveň střed tětiny BC v kružnici k_2 . Trojúhelníky ABC a APQ mají (kromě společného vrcholu A) také společnou těžnici AM . Musí mít proto i společné těžiště T . Ale v trojúhelníku APQ je úsečka OP další jeho těžnice. Těžiště T je podle toho průsečík těžnic AM, OP . Těžiště T je tedy vnitřní bod pevné úsečky OP a je určeno jednoznačně poměrem $OT : PT = 1 : 2$. Tím je důkaz předloženého tvrzení proveden.

2. Podle řešení Jana Matějky, III. d G Praha 2

Souřadnicovou soustavu zvolme tak, aby její počátek splýval se středem O a bod P ležel v ose y (obr. 2). Tedy např. $P = [0; -r_1]$. Potom

$$k_1 \equiv x^2 + y^2 = r_1^2, \quad (1)$$

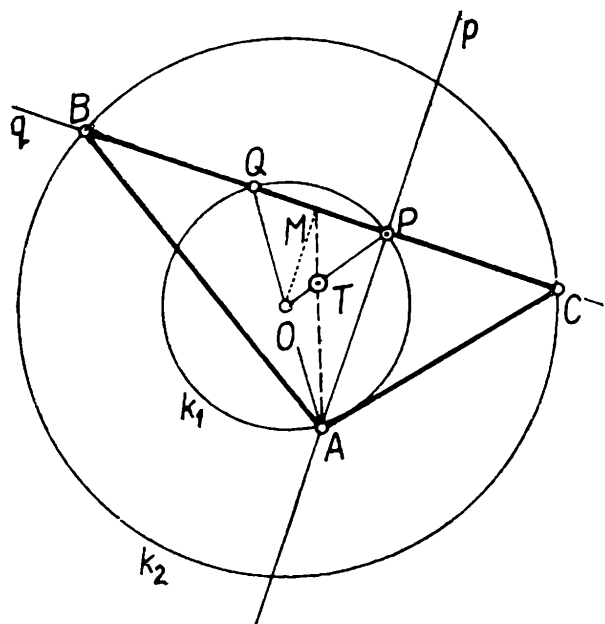
$$k_2 \equiv x^2 + y^2 = r_2^2, \quad (2)$$

$$p \equiv y = kx - r_1, \quad (3)$$

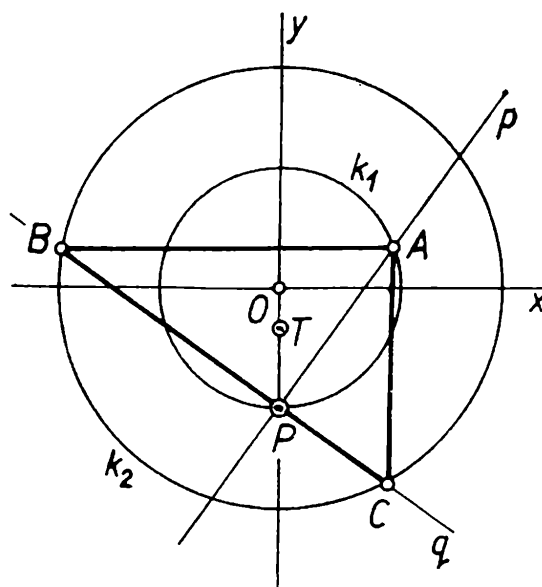
$$q \equiv y = -\frac{1}{k}x - r_1. \quad (4)$$

Řešením soustavy rovnic (1) a (3) — v nichž x, y nebudeme považovat za proměnné, nýbrž za neznámé — dostaneme

$$A = \left[\frac{2kr_1}{k^2 + 1}; \frac{r_1(k^2 - 1)}{k^2 + 1} \right].$$



Obr. 1



Obr. 2

Řešením soustavy rovnic (2) a (4) obdobně dostaneme

$$B = \left[\frac{-k(r_1 + \sqrt{D})}{k^2 + 1} ; \frac{r_1 + \sqrt{D}}{k^2 + 1} \right],$$

$$C = \left[\frac{-k(r_1 - \sqrt{D})}{k^2 + 1} ; \frac{r_1 - \sqrt{D}}{k^2 + 1} \right],$$

kde $D = r_2^2 + k^2 r_2^2 - k^2 r_1^2$.

Znáмым způsobem vypočítáme souřadnice těžiště:

$$T = \frac{1}{3} (A + B + C) = \left[0 ; \frac{1}{3} r_1 \right]$$

a jsme s důkazem hotovi. Přirozeně výsledky prvního a druhého souhlasí.

Poznámka. Všimněte si, že první řešení bylo oproti druhému podstatně kratší, ale bylo k němu potřebí postřeh a vtip. Druhé řešení nevyžadovalo ani postřeh ani vtip, chtělo jen zběhlost v úpravě výrazů, ale bylo nepoměrně delší.

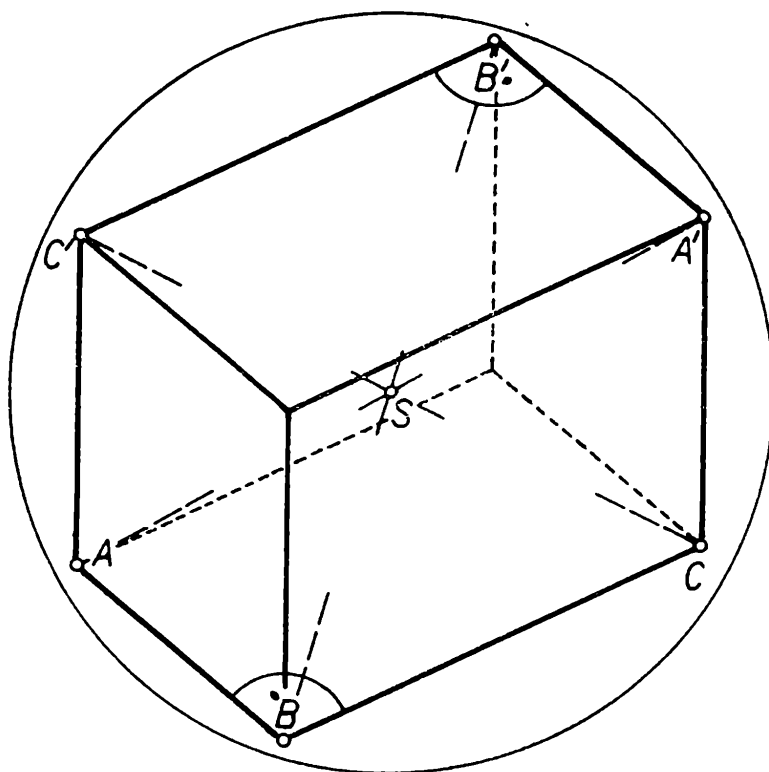
5. Je dána kulová plocha $\kappa = (S; r)$ a na ní body A, B, C tak, že úhel $ABC = 90^\circ$. K bodům A, B, C sestrojte po řadě body A', B', C' souměrně sdružené podle středu S . Dokažte, že každý ze zborcených pětiúhelníků $ABCA'B'$, $ABCA'C'$, $ABCB'C'$ má všechny úhly pravé. (Zborcený n -úhelník je ten, jehož všechny vrcholy neleží v téže rovině.)

Stanislav Horák

(Došlo 11 řešení)

Řešil Jaroslav Hájek, III. c, G Bílovec

Všimněme si, že roviny (ABC) a $(A'B'C')$ jsou vzájemně rovnoběžné, neboť jsou souměrně sdružené podle středu S . Z téhož důvodu jsou na-



Obr. 1

vzájem rovnoběžné i roviny (BCA') , $(B'C'A)$ a roviny (ABC') , $(A'B'C)$. Poněvadž kromě toho všech šest bodů leží na kulové ploše κ , vyjmenované roviny omezují kvádr (nikoliv jen rovnoběžnostěn). Obr. 1.

Máme-li tedy např. pětiúhelník $ABCA'B'$, platí:

- $\angle ABC = 90^\circ$, neboť tento úhel byl dán,
- $\angle BCA' = 90^\circ$, neboť jde o dvě sousední hrany kvádru,
- $\angle CA'B' = 90^\circ$, tentýž důvod,
- $\angle C'B'A = 90^\circ$, neboť hrana $A'B'$ je kolmá na stěnu $AB'C'$, a tudíž i na stěnovou úhlopříčku AB' ,
- $\angle B'AB = 90^\circ$, neboť hrana AB je kolmá na stěnu $AB'C'$, a tudíž je kolmá i na stěnovou úhlopříčku AB' .

Tím je důkaz pro zvolený pětiúhelník proveden; pro druhé dva se důkaz provádí stejným způsobem.

6. V libovolném trojúhelníku ABC označme středy stran BC , CA , AB po řadě písmeny P , Q , R a uvnitř trojúhelníka PQR zvolme libovolný bod L . Potom polopřímka AL protne úsečku QR v jejím vnitřním bodě A' , polopřímka BL protne úsečku RP v jejím vnitřním bodě B' a polopřímka CL protne úsečku PQ v jejím vnitřním bodě C' ; přitom platí:

$$\left| \frac{QA'}{RA'} - \frac{PB'}{RB'} \right| < 1 < \frac{QA'}{RA'} + \frac{PB'}{RB'},$$

$$\left| \frac{RB'}{PB'} - \frac{QC'}{PC'} \right| < 1 < \frac{RB'}{PB'} + \frac{QC'}{PC'},$$

Dokažte.

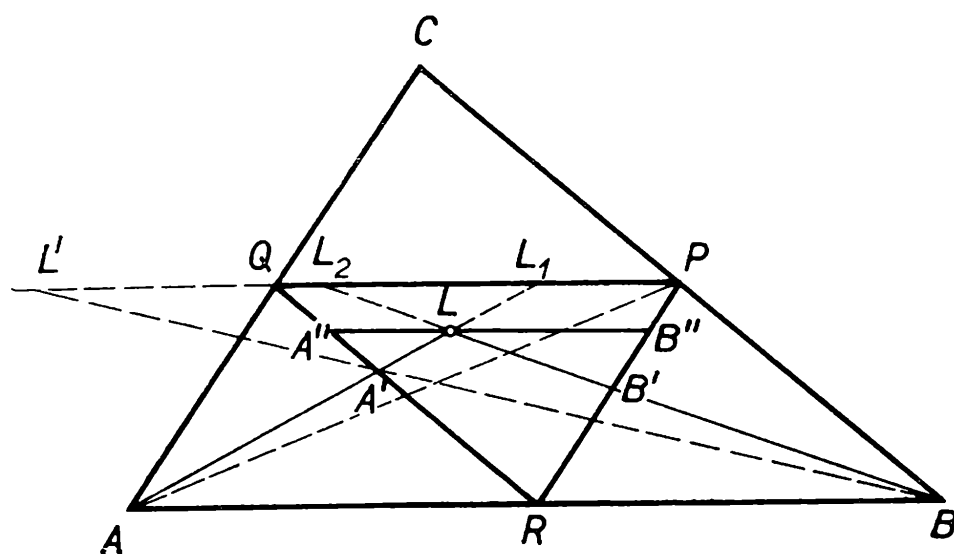
Emil Kraemer

(Došlo 6 řešení)

Upravené řešení Rostislava Urbana, 3. A gymnázia v Ostravě 1:

Stačí dokázat nerovnosti uvedené na prvním místě; druhé dvě dostaneme cyklickou záměnou.

Bod L je vnitřním bodem $\triangle PQR$, a tedy též vnitřním bodem rovnoběžníku $ARPQ$ (obr. 1); leží tedy uvnitř úhlu $\sphericalangle QAR$. Proto polopřímka AL protíná úsečku QR v jejím vnitřním bodě A' . Obdobně dokážeme, že bod B' leží uvnitř úsečky RP .



Obr. 1

Jsou-li a, b, c po řadě velikosti stran trojúhelníku ABC , je $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Vedme bodem L rovnoběžku s přímkou PQ a sestrojme její průsečíky A'', B'' se stranami QR, RP trojúhelníku PQR . Potom body A', B' leží po řadě uvnitř úseček $A''R, B''R$; zároveň je $\triangle A''RB'' \sim QRP$ (uu). Proto je

$$A''R = k \cdot QR = k \frac{a}{2}, \quad (1)$$

$$RB'' = k \cdot RP = k \frac{b}{2}, \quad (2)$$

$$B''A'' = k \cdot PQ = k \frac{c}{2}; \quad (3)$$

přitom je

$$0 < k < 1. \quad (4)$$

Budiž x velikost úsečky $A''L$; protože bod L je vnitřním bodem úsečky $B''A''$, je

$$\begin{aligned} 0 < x < k \frac{c}{2}, \\ 0 < 4x < 2kc. \end{aligned} \quad (5)$$

Potom podle (3) je

$$B''L = B''A'' - A''L = \frac{kc}{2} - x. \quad (6)$$

Dále je $\triangle A''A'L \sim \triangle RA'A$ (uu); proto je

$$A'A'' : A''L = RA' : RA.$$

Protože je $A''L = x$, $RA = \frac{c}{2}$, je

$$A'A'' = \frac{2x}{c} \cdot RA' \quad (7)$$

Bod A' leží mezi body A'' , R ; proto je $A'A'' + RA' = A''R$, takže podle (7) a (1) je

$$\begin{aligned} RA' \cdot \left(\frac{2x}{c} + 1 \right) &= \frac{ka}{2}, \\ RA' &= \frac{a}{2} \cdot \frac{kc}{2x + c}. \end{aligned} \quad (8)$$

Protože bod A' leží uvnitř úsečky QR , je $QA' = QR - RA'$, tj. podle (8)

$$\begin{aligned} QA' &= \frac{a}{2} \left(1 - \frac{kc}{2x + c} \right), \\ QA' &= \frac{a}{2} \cdot \frac{2x + c - kc}{2x + c}. \end{aligned} \quad (9)$$

Podle (8) a (9) je tedy

$$\frac{QA'}{RA'} = \frac{2x + c - kc}{2x + c} \cdot \frac{2x + c}{kc} = \frac{2x + c - kc}{kc}. \quad (10)$$

Dále je $\triangle B''B'L \sim \triangle RB'B$ (uu), takže je

$$B'B'' : B''L = RB' : RB.$$

Podle (6) je tedy

$$\begin{aligned} B'B'' &= \frac{kc - 2x}{2} \cdot \frac{2}{c} RB', \\ B'B'' &= \frac{kc - 2x}{c} \cdot RB' \end{aligned} \quad (11)$$

Avšak $B'B'' + RB' = RB''$, takže podle (11) a (2) je

$$RB' \left(\frac{kc - 2x}{c} + 1 \right) = \frac{kb}{2},$$

$$RB' = \frac{b}{2} \cdot \frac{kc}{kc - 2x + c}. \quad (12)$$

Protože bod B' je vnitřním bodem úsečky RP , je $PB' = RP - RB'$, takže podle (12) je

$$PB' = \frac{b}{2} \cdot \left(1 - \frac{kc}{kc - 2x + c} \right),$$

$$PB' = \frac{b}{2} \cdot \frac{c - 2x}{kc - 2x + c}. \quad (13)$$

Podle (12) a (13) je tedy

$$\frac{PB'}{RB'} = \frac{c - 2x}{kc - 2x + c} \cdot \frac{kc - 2x + c}{kc} = \frac{c - 2x}{kc}. \quad (14)$$

Podle (10) a (14) je

$$\left| \frac{QA'}{RA'} - \frac{PB'}{RB'} \right| = \frac{|2x + c - kc - c + 2x|}{kc} = \frac{|4x - kc|}{kc}. \quad (15)$$

Je-li $4x - kc \geq 0$, je $|4x - kc| = 4x - kc$. Podle (5) je $4x - 2kc < 0$, čili $4x - kc < kc$, tj. $|4x - kc| < kc$; proto je poslední zlomek v (15) menší než 1. Je-li $4x - kc < 0$, je $|4x - kc| = kc - 4x$. Podle (5) je $4x > 0$, $-4x < 0$, a tedy $kc - 4x < kc$, tj. $|4x - kc| < kc$; i v tomto případě je tedy poslední zlomek v (15) menší než 1. Tím je první nerovnost dokázána.

Podle (10) a (14) je

$$\frac{QA'}{RA'} + \frac{PB'}{RB'} = \frac{2x + c - kc + c - 2x}{kc} = \frac{2c - kc}{kc} =$$

$$= \frac{2 - k}{k} = \frac{2}{k} - 1 > 1,$$

neboť $\frac{2}{k} > 2$, což plyne ze (4).

Uvádíme ještě autorské řešení, které se od předešlého liší tím, že nepoužívá výpočtů délek úseček:

Polopřímka AL protíná přímku PQ v bodě L_1 , který je vnitřním bodem polopřímky QR ; polopřímka BL protíná přímku PQ v bodě L_2 ,

který je vnitřním bodem polopřímky PQ . Stejnolehlost se středem A' , která převádí bod R do bodu Q , převádí bod A do bodu L_1 ; proto je

$$\frac{QA'}{RA'} = \frac{QL_1}{RA}.$$

Stejnolehlost se středem B' , která převádí bod R do bodu P , převádí bod B do bodu L_2 ; proto je

$$\frac{PB'}{RB'} = \frac{PL_2}{RB}.$$

Protože je $RA = RB = PQ$, je

$$\begin{aligned}\frac{QA'}{RA'} + \frac{PB'}{RB'} &= \frac{QL_1 + PL_2}{PQ}, \\ \frac{QA'}{RA'} - \frac{PB'}{RB'} &= \frac{|QL_1 - PL_2|}{PQ}.\end{aligned}$$

Je tedy třeba dokázat tyto dvě nerovnosti:

$$QL_1 + PL_2 > PQ, \quad (a)$$

$$|QL_1 - PL_2| < PQ. \quad (b)$$

a) Leží-li bod L uvnitř úhlu $\sphericalangle PAQ$, leží bod L_1 mezi body P , Q a mezi body P , L_2 (obr. 1); je tedy $QL_1 + PL_2 = QL_1 + PL_1 + L_1L_2 = PQ + L_1L_2 > PQ$. Je-li L bodem polopřímky AP , je $L_1 = P$, kdežto L_2 je vnitřním bodem polopřímky PQ ; je tedy $QL_1 = PQ$, takže opět platí (a). Je-li L vnitřním bodem úhlu $\sphericalangle PAR$, leží bod L_1 na prodloužení úsečky PQ za bod P (obr. 2); je tedy $QL_1 > PQ$, a tedy tím spíše platí (a). Tím je nerovnost (a) dokázána.

b) Předpokládejme nejprve, že bod L je vnitřním bodem úhlu $\sphericalangle QAP$ (obr. 1) nebo vnitřním bodem polopřímky AP . Potom přímka BA' protíná přímku PQ v bodě L' ; přitom bod L_2 leží mezi body P , L' . Proto je

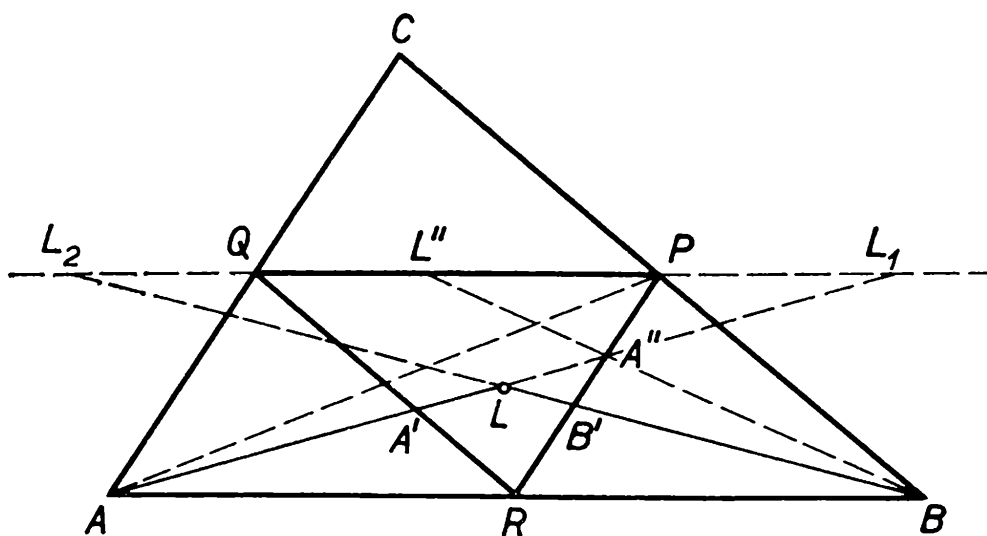
$$PL' > PL_2. \quad (1')$$

Stejnolehlost se středem A' , která převádí bod A do bodu L_1 , převádí bod B do bodu L' a střed R úsečky AB do středu Q úsečky L_1L' . Bod Q leží tedy mezi body L' , L_1 , a tedy mezi body L' , P ; proto je $PQ + QL' = PL'$. Avšak $QL = QL_1$, takže je $PQ + QL_1 = PL'$; podle (1') je tedy $PQ + QL_1 > PL_2$, tj.

$$PL_2 - QL_1 < PQ. \quad (b')$$

Nechť bod L je vnitřním bodem úhlu $\sphericalangle PAR$, tj. úhlu $\sphericalangle PAB$. Potom polopřímka AL protíná úsečku RP v jejím vnitřním bodu A'' , odděluje body B , P a protíná přímku PQ v bodě L_1 ležícím na prodloužení úsečky PQ za bod P ; proto je

$$PQ + PL_1 = QL_1. \quad (2')$$



Stejnolehlost se středem A'' , která převádí bod A do bodu L_1 , převádí bod B do bodu L'' a střed R úsečky AB do středu P úsečky L_1L'' ; tedy je $PL_1 = PL''$. Podle (2) pak je

$$PQ + PL'' = QL_1. \quad (3')$$

Bod B' je vnitřním bodem poloroviny ALB , kdežto bod P je vnitřním bodem poloroviny opačné; proto přímka AL odděluje body B' , P , tj. bod A'' leží mezi body B' , P . Polopřímka BA'' je tedy částí úhlu $\sphericalangle PBL$, takže bod L'' leží mezi body P , L_2 ; proto je $PL_2 > PL''$. Podle (3') je tedy $PQ + PL_2 > QL_1$, tj.

$$QL_1 - PL_2 < PQ. \quad (b'')$$

Z (b') a (b'') plyne (b). Tím je důkaz proveden.

7. Zvolme na elipse se středem O a poloosami a , b ($a > b$) libovolně bod T tak, aby nesplýval se žádným vrcholem elipsy, sestrojme v něm tečnu t a normálu n elipsy. Potom existuje nekonečně mnoho kružnic, které leží v polorovině tO , mají střed na normále n a procházejí bodem T (dotýkají se v bodě T elipsy). Dá se dokázat, že právě jedna z nich má tuto vlastnost: je rozdělena normálou n na dvě části (bez bodu T) takové, že v jistém okolí bodu T leží všechny body jedné části uvnitř a všechny body druhé části vně elipsy. Tato kružnice se nazývá *oskulační kružnicí elipsy v bodě T* . Zvolíme-li ortonormální soustavu souřadnic tak, aby její počátek byl ve středu O elipsy a osa x v její hlavní ose, pak bod T má souřadnice $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$. Oskulační kružnice elipsy v bodě T má pak poloměr r , pro který platí (jak lze dokázat) tento vzorec:

$$r = \frac{(a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}. \quad (1)$$

Proveďte tyto dvě (obdobné) konstrukce:

1. Průsečíkem P_1 (resp. P_2) normály n s hlavní (resp. vedlejší) osou elipsy ved'te přímku $p_1 \parallel t$ (resp. $p_2 \parallel t$). 2. Sestrojte průsečík Q_1 (resp.

Q_2) přímky p_1 (resp. p_2) s průměrem OT elipsy. 3. Bodem Q_1 (resp. Q_2) vedte rovnoběžku s vedlejší (resp. s hlavní) osou elipsy a sestrojte její průsečík S_1 (resp. S_2) s normálou n . Potom dokažte tato tvrzení:

- a) Body S_1, S_2 splývají v jediný bod S ;
- b) kružnice opsaná kolem bodu S poloměrem ST je oskulační kružnicí elipsy v bodě T , tj. má poloměr r udaný vzorcem (1).

Emil Kraemer

(Došlo 12 řešení)

Upravené řešení Jana Matějky, 3. D gymnázia v Praze 2, W Piecka 2:

Tečna t elipsy v jejím bodě $T = [x_1; y_1]$ má rovnici $b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 = 0$. Protože je $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$, má tato tečna směrnici

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Proto normála $n \perp t$ má směrnici

$$k' = \frac{a^2y_1}{b^2x_1};$$

rovnice této normály tedy je

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1),$$

$$a^2y_1x - b^2x_1y - (a^2 - b^2)x_1y_1 = 0. \quad (2)$$

Její průsečík P_1 s hlavní osou elipsy má souřadnici $y = 0$; z rovnice (2) pak vypočteme souřadnici x . Obdobně zjistíme souřadnice bodu P_2 ; tak dostaneme tento výsledek:

$$P_1 = \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1; 0 \right], \quad P_2 = \left[0; -\frac{a^2 - b^2}{b^2} y_1 \right].$$

Přímka OT prochází počátkem a bodem $T = [x_1; y_1]$, takže má rovnici

$$y = \frac{y_1}{x_1} x. \quad (3)$$

Přímka $p_1 \parallel t$ prochází bodem P_1 , takže má rovnici

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \left(x - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 \right). \quad (4)$$

Pro společný bod přímek OT, p_1 platí rovnice (3) i (4), takže je

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{x_1} x &= -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \left(x - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 \right), \\ a^4y_1^2x &= -a^2b^2x_1^2x + b^2(a^2 - b^2)x_1^3, \\ a^2x(b^2x_1^2 + a^2y_1^2) &= b^2(a^2 - b^2)x_1^3. \end{aligned}$$

Protože bod $T = [x_1; y_1]$ je bodem elipsy, je $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$, takže dostaneme rovnici

$$a^4x = (a^2 - b^2) x_1^3,$$

z níž plyne, že je

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x_1^3, \quad (5)$$

což je souřadnice x průsečíku Q_1 přímek OT , p_1 .

Přímka $p_2 \parallel t$ procházející bodem P_2 má rovnici

$$y + \frac{a^2 - b^2}{b^2} y_1 = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x; \quad (6)$$

pro její průsečík s přímkou OT platí také (3), čili platí rovnice

$$x = \frac{x_1}{y_1} y.$$

Podle (6) je tedy

$$y + \frac{a^2 - b^2}{b^2} y_1 = - \frac{b^2 x_1^2}{a^2 y_1^2} y;$$

po obdobné úpravě jako v předešlém případě dostaneme tento výsledek:

$$y = - \frac{a^2 - b^2}{b^4} y_1, \quad (7)$$

což je souřadnice y bodu Q_2 .

Sestrojíme bod S , který má souřadnice udané vzorci (5) a (7); dosazením těchto souřadnic do levé strany rovnice (2) normály dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 y_1 \frac{a^2 - b^2}{a^4} x_1^3 + b^2 x_1 \frac{a^2 - b^2}{b^4} y_1^3 - (a^2 - b^2) x_1 y_1 = \\ = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} x_1 y_1 (b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2) = 0, \end{aligned}$$

neboť bod $T = [x_1; y_1]$ je bodem dané elipsy. Souřadnice bodu S vyhovují rovnici normály n ; to znamená, že tento bod je bodem této normály. Zbývá dokázat, že úsečka ST má velikost r udanou vzorcem (1); to znamená vypočítat vzdálenost bodů

$$S = \left[\frac{a^2 - b^2}{a^4} x_1^3; - \frac{a^2 - b^2}{b^4} y_1^3 \right], \quad T = [x_1; y_1].$$

Podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů je

$$r^2 = \left(x_1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} x_1^3 \right)^2 + \left(y_1 + \frac{a^2 - b^2}{b^4} y_1^3 \right)^2 =$$

$$= \frac{x_1^2}{a^8} (a^2(a^2 - x_1^2) + b^2x_1^2)^2 + \frac{y_1^2}{b^8} (b^2(b^2 - y_1^2) + a^2y_1^2)^2.$$

Z rovnice elipsy platné pro bod $T = [x_1; y_1]$ však plyne, že je

$$a^2 - x_1^2 = \frac{a^2y_1^2}{b^2}, \quad b^2 - y_1^2 = \frac{b^2x_1^2}{a^2};$$

proto je

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{x_1^2}{a^8} \left(\frac{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}{b^2} \right)^2 + \frac{y_1^2}{b^8} \left(\frac{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}{a^2} \right)^2 = \\ &= (b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^2 \left(\frac{b^4x_1^2}{a^8b^8} + \frac{a^4y_1^2}{a^8b^8} \right) = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^3}{a^8b^8}. \end{aligned}$$

Z toho však plyne vzorec (1).

8. Užitím metody souřadnic dokažte tuto větu: Libovolné tři tečny paraboly omezují trojúhelník, jehož ortocentrum leží na řídící přímce této paraboly.

Emil Kraemer

(Došlo 12 řešení)

Řešení Pavla Kolaříka, 3 C. gymnázium v Bílovci:

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, aby její počátek byl ve vrcholu paraboly a aby její ohnisko F mělo souřadnice $x = \frac{1}{2}; y = 0$, tj. $F = \left[\frac{1}{2}; 0 \right]$. Potom její parametr $2p = 2$ a její rovnice je

$$y^2 = 2x; \tag{1}$$

její řídící přímka má pak rovnici $x = -\frac{1}{2}$. (2)

Zvolme na parabole tři různé body A, B, C ; k tomu stačí volit jejich souřadnice y tak, aby to byla tři různá reálná čísla a, b, c . Podle (1) je potom

$$A = \left[\frac{a^2}{2}; a \right], \quad B = \left[\frac{b^2}{2}; b \right], \quad C = \left[\frac{c^2}{2}; c \right].$$

Tečna paraboly v bodě $T = [x_1; y_1]$ má pak rovnici $y_1y = x + x_1$, takže tečny t_A, t_B, t_C v bodech A, B, C mají tyto rovnice:

$$ay = x + \frac{a^2}{2}, \quad by = x + \frac{b^2}{2}, \quad cy = x + \frac{c^2}{2}.$$

Pro průsečík $K = [x; y]$ tečen t_A, t_B platí:

$$ay - \frac{2}{a^2} = by - \frac{2}{b^2}, \quad (a - b)y = \frac{1}{2}(a + b)(a - b).$$

Protože je $a \neq b$, je $y = \frac{a+b}{2}$;

z rovnice tečny t_A nebo t_B potom dostaneme

$$x = \frac{ab}{2}.$$

Zcela stejně vypočteme souřadnice bodu $L = t_A \cap t_C$ a bodu $M = t_B \cap t_C$. Je tedy:

$$K = \left[\frac{ab}{2}; \frac{a+b}{2} \right], L = \left[\frac{ac}{2}; \frac{a+c}{2} \right], M = \left[\frac{bc}{2}; \frac{b+c}{2} \right].$$

Vypočteme-li souřadnice vektorů $\mathbf{KL}$, $\mathbf{KM}$, zjistíme, že tyto vektory nejsou rovnoběžné; to znamená, že body K , L , M neleží v přímce. Dokázali jsme tedy, že tři různé tečny paraboly omezují vždy trojúhelník.

Protože je $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, jsou alespoň dvě z těchto tří čísel různá od nuly. Předpokládejme, že jsme volili označení bodů A , B , C tak, že je $a \neq 0$, $b \neq 0$. Potom tečny v bodech A , B mají směrnice (nejsou rovnoběžné s osou y), které označíme k_A , k_B ; je tedy

$$k_A = \frac{1}{a}, k_B = \frac{1}{b}.$$

Přímky kolmé k tečně t_A mají potom směrnici $(-a)$, přímky kolmé k tečně t_B mají směrnici $(-b)$. Výška $\triangle KLM$ vedená bodem M ke straně KL (na tečně t_A) má tedy rovnici

$$y - \frac{b+c}{2} = -a \left(x - \frac{bc}{2} \right),$$

$$y = -ax + \frac{abc + b + c}{2}. \quad (3)$$

Obdobně zjistíme, že výška $\triangle KLM$ vedená bodem L ke straně KM (na tečně t_B) má rovnici

$$y = -bx + \frac{abc + c + a}{2}.$$

Pro průsečík $V = [x; y]$ přímek (3) a (4) je tedy

$$-ax + \frac{abc + b + c}{2} = -bx + \frac{abc + c + a}{2},$$

$$x(b-a) = \frac{1}{2}(a-b).$$

Protože je $a \neq b$, je $b - a \neq 0$, takže je

$$x = -\frac{1}{2};$$

podle (2) to znamená, že průsečík V výšek trojúhelníka KLM leží na řídicí přímce paraboly.

9. Na kružnici je dáno 13 bodů $A_1, A_2, \dots, A_{13}$. Kromě toho je dána množina $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$. Ukažte, že ke každému bodu A_i ($i = 1, 2, \dots, 13$) je možno přiřadit jednu podmnožinu $\mathbf{M}_i$ množiny $\mathbf{M}$ tak, že dvěma různým bodům A_i, A_j jsou přiřazeny dvě různé podmnožiny $\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j$ a že pro každé dva sousední body A_i, A_j platí $\mathbf{M}_i \cup \mathbf{M}_j = \mathbf{M}$. Platí toto tvrzení také v případě, kdy je na kružnici dáno 14 bodů?

Jiří Sedláček

(Došlo 15 řešení)

Řešil Josef Tkadlec, II. C, gymnázium Bílovec :

Zvolme si například zobrazení

$$\begin{array}{lll} A_1 \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, & A_5 \rightarrow \{3, 4\}, & A_8 \rightarrow \{2, 4\}, \\ A_2 \rightarrow \{1\}, & A_6 \rightarrow \{1, 2, 4\}, & A_9 \rightarrow \{1, 2, 3\}, \\ A_3 \rightarrow \{2, 3, 4\}, & A_7 \rightarrow \{1, 3\}, & A_{10} \rightarrow \{1, 4\}, \\ A_4 \rightarrow \{1, 2\}, & & \\ & A_{11} \rightarrow \{2, 3\}, & \\ & A_{12} \rightarrow \{1, 3, 4\}, & \\ & A_{13} \rightarrow \{2\}, & \end{array}$$

které vyhovuje daným podmínkám.

Mezi přiřazenými podmnožinami nemůže být množina prázdná. Kdyby totiž tomu tak bylo a tato množina byla přiřazena nějakému bodu A_i , musela by být oběma sousedním bodům bodu A_i přiřazena množina $\mathbf{M}$, což je ve sporu s podmínkami. Mezi přiřazenými podmnožinami mohou být nejvýše dvě jednoprvkové podmnožiny. Z podmínek úlohy totiž plyne, že každá jednoprvková množina $\{i\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, musí sousedit (v přiřazení) s množinami $\mathbf{M} - \{i\}$ a $\mathbf{M}$. Protože množina $\mathbf{M}$ se může objevit v přiřazení pouze jednou, mohou s ní sousedit nejvýše dvě jednoprvkové množiny. Spočítejme teď celkový počet x podmnožin $\mathbf{M}$, které můžeme přiřadit jednotlivým bodům:

$$x = 2 + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 13.$$

Přiřazení s danými vlastnostmi je tedy možné jen tehdy, je-li počet bodů na kružnici menší než 14. Proto tvrzení v případě daných 14 bodů na kružnici neplatí.

Redakční poznámka : Miroslav Kotrla, 4a SPŠ v Kutné Hoře, si všiml ve svém řešení, že 9. úlohu lze pokládat za problém z teorie grafů.

10. Dvě kvadratické rovnice

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0, \quad a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

s reálnými koeficienty mají aspoň jeden společný kořen právě tehdy, když

$$(a_1c_2 - a_2c_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Dokažte vyslovenou větu pro kořeny rovnic v oboru komplexních čísel.

Jaroslav Šedivý

(Došlo 12 řešení)

Zestručněné řešení *Jaroslava Hančla, 2 C, G Bílovec*:

Označme x_1, x_2 kořeny první rovnice; x_3, x_4 kořeny druhé rovnice. Protože jde o kvadratické rovnice, je $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ a platí:

$$x_1x_2 = \frac{c_1}{a_1},$$

$$x_3x_4 = \frac{c_2}{a_2},$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b_1}{a_1},$$

$$x_3 + x_4 = -\frac{b_2}{a_2}.$$

Dané rovnice mají společný aspoň jeden kořen právě tehdy, když

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 0.$$

Po úpravách lze získat ekvivalentní rovnici

$$(x_1x_2 - x_3x_4)^2 = [(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)] \cdot [x_1x_2(x_3 + x_4) - x_3x_4(x_1 + x_2)],$$

do níž dosadíme výrazy s koeficienty rovnic a snadno dostaneme ekvivalentní rovnici

$$(a_1c_2 - a_2c_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Poznámka. Někteří řešitelé použili znalostí o řešení soustavy lineárních rovnic, kterou získali z daných rovnic po substituci $y = x^2$. Většinou se však nezamysleli nad existenčními otázkami při $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Údaj o kořenech v oboru komplexních čísel měl zbavit řešitele povinnosti studovat podmínky existence kořenů, někteří se však naopak zaměřili jen na nereálné kořeny.

11. Odhadněte největší hodnotu součtu $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ pro úhly α, β, γ trojúhelníku. Vyslovte a dokažte příslušnou větu.

Jaroslav Šedivý

(Došlo 13 řešení)

Řešil *Jan Matějka, 3. D, G Praha 2, W. Piecka 2*:

Nejdříve dokážeme pomocnou větu:

Pro každá tři reálná čísla α, β, γ z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ platí

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3 \sin \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right).$$

Důkaz. Pro uvedená čísla platí

$$\sin \alpha \geq 0, \sin \beta \geq 0, \sin \gamma \geq 0, \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1,$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Zvolme čtvrté číslo $\delta \in \langle 0, \pi \rangle$ a použijme právě odvozené nerovnosti:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta \leq 2 \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \frac{\gamma + \delta}{2} \right);$$

protože také $\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\gamma + \delta}{2}$ patří do intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, získáváme

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta &\leq 2 \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\gamma + \delta}{2} \right) = \\ &= 4 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4}. \end{aligned}$$

Dosadíme $\delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ a po kratší úpravě dostaneme

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

Jsou-li α, β, γ úhly trojúhelníka, platí $\alpha + \beta + \gamma = \pi$,

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pro $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ dosahuje součet uvedené hodnoty; proto největší

hodnotou součtu $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ je číslo $3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Poznámka. Odvozené nerovnosti pro součty sinů jsou zvláštními případy nerovností platných pro ostře s -konkávní funkce, o kterých přinesly Rozhledy článek v č. 3, roč. 53. Řešitelé R. Lukáš, G. Havířov a L. Mucha, G. Prešov využili těchto poznatků k nejstručnějšímu řešení úlohy. Většina řešitelů uplatnila věty o hledání extrémů funkcí jedné, dvou i tří proměnných.

12. V prostoru jsou dány různé body $A_1, A_2, \dots, A_k$. Středy úseček $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_kA_1$ označme po řadě $S_1, S_2, \dots, S_k$. Každému bodu X přiřadme bod X' takto: K bodu X sestrojme bod X_1 souměrně sdružený podle středu S_1 , k bodu X_1 bod X_2 souměrně sdružený podle středu S_2 , ..., k bodu X_{k-1} bod $X_k = X'$ souměrně sdružený podle

středu S_k . Nalezněte všechny samodružné body tohoto zobrazení, tj. všechny body prostoru, pro něž je $X' = X$.

Antonín Vrba

(Došlo 12 řešení)

Upravené řešení Jaroslava Hančla, 2. C gymnázia v Bílovci:

Ze souměrnosti podle středu S_1 plyne $XA_1 \sim A_2X_1$,

ze souměrnosti podle středu S_2 plyne $X_1A_2 \sim A_3X_2$,

ze souměrnosti podle středu S_k plyne $X_{k-1}A_k \sim A_1X'$,

kde symbol $\sim$ znamená, že příslušné úsečky jsou shodné, rovnoběžné a shodně orientované. Odtud vyplývá:

Je-li k liché číslo, platí pro každý bod X , že $A_1X \sim X'A_1$. Uvažované zobrazení je tedy souměrnost podle středu A_1 a jediný samodružný bod je bod A_1 .

Je-li k sudé číslo, platí pro každý bod X , že $A_1X \sim A_1X'$. Uvažované zobrazení je tedy identické a každý bod prostoru je samodružný.

olympiády

Výsledky celostátního kola 26. ročníku Matematické olympiády, kategorie A

(Plzeň, 6. a 7. května 1977)

A. Vítězové:

1.	Jan KRATOCHVÍL	3a	G	Pardubice
2.	Pavol QUITTNER	4b	G	Prievidza
3.—4.	Jiří NAVRÁTIL	4a	G	Olomouc-Hejčín
	Josef TKADLEC	2c	G	Bílovec
5.	Ilja TUREK	3g	G	Hradec Králové
6.—7.	Jan NEKOVÁŘ	8. tř. ZDŠ		Praha 6, Sušická
	Vladimír MATĚNA	2a	G	Trutnov

8.—9.	Vladimír PASTRŇÁK	4b	G	Ostrava 1
	Peter TAKÁČ	4c	G	Šafárikovo
10.	Zdeněk KALOUSEK	3b	G	Jablonec n. Nisou
11.	Jan BÁZLER	4b	G	Mladá Boleslav
12.—15.	Jiří KOLAFA	4d	G	Praha 2, W. Piecka
	Josef PAVEL	4a	G	Rychnov n. Kněžnou
	Jaromír MATĚNA	3a	G	Hradec Králové
	Martin ČADEK	4a	G	Brno, kpt. Jaroše
16.	Peter MARKOŠ	4	G	Kremnica
<i>B. Další úspěšní řešitelé :</i>				
17.	Zdeněk VAVŘÍN	3c	G	Praha 1, Štěpánská
18.—21.	Richard LISKA	4a	G	Pardubice
	Luděk KLIMEŠ	4a	G	Blansko
	Martin PETRÁK	4a	G	Ostrava-Hrabůvka
	Michal ČVERČKO	4d	G	Košice, Šmeralova
22.	Jiří SVOBODA	4a	G	Brno, kpt. Jaroše
23.	Milan VEŠČÍČIK	3a	G	Bratislava, Červenej armády
24.	Peter FILAKOVŠKY	3c	G	Nové Zámky
25.	Ján POLÁK	4a	G	Bratislava, Červenej armády
26.	Petr BAHNÍK	3a	G	Pardubice
27.	Josef BLAŽEK	4a	G	Mnichovo Hradiště
28.	Dagmar KŘIVÁNKOVÁ	4b	G	Praha 7, Nad štolou
29.	Rupert LEITNER	4	G	Semily
30.	Rostislav URBAN	3a	G	Ostrava 1
31.—33.	Petr KUČÍREK	3b	G	Brno, Koněvova
	Vladimír HANÁK	3c	G	Bílovec
	Petr MÄSIAR	2b	G	Námestovo
34.	Petr BERÁNEK	3a	G	Praha 9, Litoměřická
35.—37.	Miroslav TŮMA	3	G	Nová Paka
	Ján POTFAJ	4a	G	Nové Mesto n. Váhom
	Juraj KOUŘIL	4a	G	Nové Mesto n. Váhom
38.	Lubomír HÚSKA	4b	G	Prievidza

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

předpokládat	suppose
představit si	visualize
představovat	represent
překrývat se	overlap
přemísťování	displacement, change of position
přepona	hypotenuse
přerovnat	rearrange
přesnost	accuracy, precision
s přesností na n desetinných míst	accurate to n decimal places
přesný	exact
převedení	conversion
převrácený	reciprocal
převrátit	invert
přiblížení	approximation
přibližně	approximately
přibližný	approximate
přičítat	add
příčka	brace, transversal
přidat	add
příklad	example
přilehlé	adjacent
přímka	straight line
hlavní přímka	principal line
přímková plocha	ruled surface
přímočarý	rectilinear
přímý	direct
případ	case
zvláštní případ	special case
připsaná kružnice	escribed circle
přípustný	concessive
přirozený	natural
přirozené číslo	positive integer

přírůstek
přístupný
přístup
přiřazení
vzájemně jednoznačné přiřazení

půdorys
půlit
Pythagorova věta

racionální
radián
rameno
rameno úhlu
reálný
reálná část
reálná osa
reálná složka
reciproký
reducibilní
redukovatelný
relace
regulus
rekurentní
relativní
relativní číslo
relativně konvergentní

rod
rok
rostoucí
rotace
rovina
rovina kolmá na základnici
rovinný
rovina řezu
roviny téhož svazku
sečná rovina
roviny procházející jedním bodem
rovinný graf
rovinný obor

increment
accessible, within reach
attitude
correspondence
reciprocally one-to-one correspondence

plan
bisect, halve
Pythagoras's theorem

R

rational
radian
arm
side of angle
real
real part
real axis
real part
reciprocal
reducible
reducible
relation
regulus
recursive
relative
directed number
conditionally convergent
genus
year
ascending, increasing
rotation
plane
profile plane
planar, plane
secant plane
coaxial planes
secant plane
copunctal planes
planar graph
plane domain

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

3

ROČNÍK 56, 1977-1978, LISTOPAD



ROČNÍK 56
LISTOPAD 1977

3

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VUOŠ Praha, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1977.

OBSAH

Dr. S. Trávníček, CSc.: Výplata n Kės	97
Dr. A. Vrba, CSc.: Historie problému o pokrytí obdélníka čtverci .	105
Prof. E. Kraemer: Výpočet velikosti pravoúhlého průmětu úhlu	107
F. Hradecký: K rovinným řezům na rotační válcové a kuželové ploše .	114
Dr. R. Tulak: Rázová vlna - zvláštní druh akustické vlny	119
Dr. O. Pöss: Pred 200 rokmi zomrel Ján Andrej Segner	123
Naše soutěž	128
Olympiády	136
Dr. J. Sedláček: Nezapomenutelné čtvrtstoletí .	138
J. Kotyk: Beseda čtenářů k 250. výročí Isaaca Newtona .	140
Nejmladším čtenářům .	143
Recenze	144
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Výplata n Kčs

RNDr. STANISLAV TRÁVNÍČEK, CSc., Olomouc

V tomto článku se zabýváme problémem: *Kolika způsoby lze vyplatit obnos n Kčs (n je přirozené číslo nebo 0) užitím korunových, dvoukorunových a pětikorunových mincí.* Tento problém se nezdá příliš složitý, ale uvidíme, že nás jeho řešení zavede do zajímavých zákoutí matematiky.

O korunových, dvoukorunových a pětikorunových mincích tu budeme pojednávat často, proto se dohodneme na zkratkách: K, D, P.

Pro první seznámení s problémem zvolme např. $n = 6$, tj. ptejme se, kolika způsoby lze provést výplatu 6 Kčs. Napadne nás hned: 1 P a 1 K, jiný způsob: 3 D, také: 2 D a 2 K, ještě: 6 K. Je ještě jiná možnost? Ano: 1 D a 4 K.

Počet způsobů, jimiž lze vyplatit n Kčs pomocí P, D, K označme $S(n)$; vidíme, že $S(6) = 5$.

Pro nepříliš velké n lze nalézt $S(n)$ prostě tak, že vhodným způsobem vypíšeme všechny možné výplaty. Náš úvodní příklad jistě vede k myšlence, že nelze postupovat chaoticky, ale je třeba dodržovat určitý systém zápisu, abychom žádnou z možností nevynechali. V tabulce 1 uvádíme jednu z vhodných úprav zápisu pro n od 0 do 10.

Čtenáři se doporučuje vypracovat samostatně tabulku 1', v níž se bude pokračovat v tabulce 1 až např. do $n = 20$. Pro kontrolu uvádíme v tabulce 2 hodnoty $S(n)$ pro n od 0 do 20.

Z rozboru tabulky 1 a tabulky 1' (kterou si sestavil čtenář) můžeme dojít k nejrůznějším úvahám o tom, jak najít vzorec pro výpočet $S(n)$. Zvolíme zde ten přístup, že daný problém nejprve zjednodušíme; ptáme se na počet $S_0(n)$ způsobů, kterými lze vyplatit n Kčs užitím jen D a K (tj. bez použití P).

Jaký je největší počet D, kterých lze při výplatě použít? Pro n sudé to je $d = \frac{n}{2}$, pro n liché pak $d = \frac{n-1}{2}$; tedy n dělíme dvěma a celá část podílu je hledaným maximálním počtem D.

Je zcela přirozené, zapojíme-li do svých úvah funkci zvanou „celá část“, označení $[]$. Čtenáři tohoto časopisu se s ní setkali již častěji, ale připomeňme: $[5] = 5$, $[3, 5] = 3$, $[7, 25] = 7$. (Pozor! V celém tomto článku znamenají hranaté závorky vždy funkci „celá část“.)

Tabulka 1.

n	P	D	K	$S(n)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0 0	1 0	0 2	2
3	0 0	1 0	1 3	2
4	0 0 0	2 1 0	0 2 4	3
5	1 0 0 0	0 2 1 0	0 1 3 5	4
6	1 0 0 0 0	0 3 2 1 0	1 0 2 4 6	5
7	1 1 0 0 0 0	1 0 3 2 1 0	0 2 1 3 5 7	6

n	P	D	K	$S(n)$
8	1 1 0 0 0 0 0	1 0 4 3 2 1 0	1 3 0 2 4 6 8	7
9	1 1 1 0 0 0 0 0	2 1 0 4 3 2 1 0	0 2 4 1 3 5 7 9	8
10	2 1 1 1 0 0 0 0 0 0	0 2 1 0 5 4 3 2 1 0	0 1 3 5 0 2 4 6 8 10	10

Tabulka 2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(n)$	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	10

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$S(n)$	11	13	14	16	18	20	22	24	26	29

Tabulka 3.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$S_0(n)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Největší počet D, kterých lze při výplatě n Kčs použít, je tedy $d = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$; např. pro $n = 17$ je $d = \left\lfloor \frac{17}{2} \right\rfloor = 8$. Kolik D může být při výplatě použito? Výčet všech možností je: 0 D (výplata jen v korunových mincích), 1 D, 2 D, $\dots$, d D (v každém případě je zbytek do částky n vyplacen v korunových mincích). Je tedy celkem $d + 1$ možných výplat, tj.

$$(1) \quad S_0(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor.$$

V tabulce 3 uvádíme hodnoty $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (= maximální počet D, kterých lze při výplatě použít) a $S_0(n)$ (= počet možných výplat) pro n od 0 do 10.

Odvození vzorce (1) nám napovídá cestu k získání vzorce pro $S(n)$.

Ptejme se na největší počet P, kterých lze při výplatě použít. Je to zřejmě číslo $p = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$; např. pro $n = 23$ je $p = \left\lfloor \frac{23}{5} \right\rfloor = 4$. Při výplatě n Kčs máme tedy tyto možnosti: nepoužít žádnou P, pak lze výplatu provést $S_0(n)$ způsoby jen pomocí D a K; použít jednu P, zbývajících obnos $n - 5$ vyplatit jen pomocí D a K, možností je právě $S_0(n - 5)$; použít 2 P, počet způsobu výplaty je pak $S_0(n - 10)$; atd. — až po případ p P, kdy je zbývajících obnos k výplatě $n - 5p$ a počet možných výplat je $S_0(n - 5p)$. Celkem $S(n) = S_0(n) + S_0(n - 5) + S_0(n - 10) + \dots + S_0(n - 5p)$ a podle (1) dostáváme

$$(2) \quad S(n) = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n-5p+2}{2} \right\rfloor,$$

na pravé straně je $p + 1$ členů.

Příklad 1. Vypočteme $S(39)$. Máme $p = \left\lfloor \frac{39}{5} \right\rfloor = 7$,

$$S(39) = \left\lfloor \frac{41}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{36}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{31}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{21}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor =$$

$$= 20 + 18 + 15 + 13 + 10 + 8 + 5 + 3 = 92 \text{ (sečítáme } p + 1 = 8 \text{ členů).}$$

Příklad 2. Vypočteme $S(32)$. Máme $p = \left\lfloor \frac{32}{5} \right\rfloor = 6$,

$$S(32) = \left\lfloor \frac{34}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{29}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{24}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{19}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{14}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor =$$

$$= 17 + 14 + 12 + 9 + 7 + 4 + 2 = 65 \text{ (sečítáme } p + 1 = 7 \text{ členů).}$$

Ověřte si použití vzorce (2) na dalších příkladech! Vidíme, že $S(n)$ zjistíme pomocí (2) pohodlněji než rozpisem možností, který jsme prováděli v tabulce 1. Současně však vidíme, že pro větší n jsou součty poněkud obsáhlé; např. při výpočtu $S(1618)$ by bylo $p = \frac{1618}{5} = 323$, tj. sečítali bychom 324 členů. Proto řešení problému ještě nekončí, budeme pokračovat průzkumem možností úpravy vzorce (2) na jednodušší tvar.

Předně si uvědomíme, že vzorec (2) požaduje sečtení konečného počtu přirozených čísel. Pro některé zvláštní případy konečných součtů přirozených čísel jsou známy vzorce. K nejznámějším patří vzorec vyjadřující součet všech přirozených čísel od 1 až do daného čísla; pro snadnost dalšího použití volme toto číslo $k - 1$.

Pak platí:

$$(3) \quad \forall k \in \mathbb{N}; 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) = \frac{1}{2} k (k - 1).$$

Např. $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 101 \cdot 100 = 5050$. Čtenář, který zná aritmetické posloupnosti, není nijak překvapen a vzorec (3) si dovede lehce dokázat; vhodné použití vzorce (3) nám pomůže podstatně zjednodušit upravované výrazy.

Při pozorném sledování součtů v příkladech 1 a 2 nacházíme zajímavé pravidelnosti, které nás mohou navést na správnou cestu ke zjednodušení vzorce (2). Předně si všimněme sousedních sčítanců. Mají tvar $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m-5}{2} \right\rfloor$; označme tento součet symbolem $s(m)$.

$$\text{Např. } s(36) = \left\lfloor \frac{36}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{31}{2} \right\rfloor, s(41) = \left\lfloor \frac{41}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{36}{2} \right\rfloor \text{ apod.}$$

Je-li m sudé, tj. $m = 2j$, kde $j \in \mathbb{N}$, pak $s(m) = s(2j) = \left\lfloor \frac{2j}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2j-5}{2} \right\rfloor =$
 $= [j] + [j-2,5] = j + (j-3) = 2j-3 = m-3$. Pro m liché, tj.
 $m = 2j-1$, kde $j \in \mathbb{N}$, je $s(m) = s(2j-1) = \left\lfloor \frac{2j-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2j-1-5}{2} \right\rfloor =$
 $= [j-0,5] + [j-3] = (j-1) + (j-3) = (2j-1)-3 = m-3$.
V obou případech je

$$(4) \quad s(m) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m-5}{2} \right\rfloor = m-3.$$

Např. $s(36) = 18 + 15 = 33$, $s(41) = 20 + 18 = 38$, atd.

Přejdeme nyní k úpravě vzorce (2) a nejprve předpokládejme, že p je liché číslo. Pro lepší porozumění si zvolenou metodu zkusíme napřed při úpravě pravé strany vzorce v příkladě 1. Sčítá se zde 8 členů, sdružíme je po dvou a každou dvojici upravíme podle vzorce (4). Máme postupně:

$$S(39) = \left(\left\lfloor \frac{41}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{36}{2} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{31}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{2} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{21}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{2} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \right) =$$

$$= s(41) + s(31) + s(21) + s(11) = 38 + 28 + 18 + 8 (= 92).$$

Po úpravě podle (4) sečítáme tedy už jen 4 členy, pro něž platí, že každý další je o 10 menší než předchozí.

Tuto úpravu lze pro liché p provést obecně ve vzorci (2). Na pravé straně je sudý počet $p+1$ členů, sdružíme je po dvou:

$$S(n) = \left(\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-13}{2} \right\rfloor \right) + \dots +$$

$$+ \left(\left\lfloor \frac{n-5p+7}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-5p+2}{2} \right\rfloor \right).$$

Úpravou podle vzorce (4) dostáváme

$$(5) \quad S(n) = (n-1) + (n-11) + \dots + (n-5p+4).$$

Ve vzorci (5) máme sečíst $k = \frac{p-1}{2}$ členů tvaru

$$s_k = a + (a-10) + (a-20) + \dots + (a-10 \cdot (k-1));$$

v tomto případě je $a = n-1$. Upravujeme: $s_k = k \cdot a - 10 - 20 - \dots - 10 \cdot (k-1) = k \cdot a - 10 \cdot (1 + 2 + \dots + (k-1))$. Pomocí (3) se dostane $s_k = k \cdot a - 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot k(k-1)$ a po úpravě

$$(6) \quad s_k = k(a - 5k + 5);$$

s_k je tedy součet k členů, kde 1. člen je a , každý následující je o 10 menší než předchozí.

Jestliže součet (5) upravíme pomocí vzorce (6), dostaneme

$$(7) \quad S(n) = \frac{p+1}{2} \left(n - \frac{5p}{2} + \frac{3}{2} \right).$$

Vyjádříme nyní n ve tvaru $n = 5p + q$; q je jedno z čísel 0, 1, 2, 3, 4, tj. zbytek při dělení čísla n číslem p . Pak

$$(8) \quad 5p = n - q, p = \frac{n - q}{5}$$

a po dosazení (8) do (7) máme

$$S(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{n - q}{5} + 1 \right) \left(n - \frac{n - q}{2} + \frac{3}{2} \right) = \frac{n - q + 5}{20} (n + q + 3);$$

po roznásobení a po úpravě je

$$(9) \quad S(n) = \frac{1}{20} (n^2 + 8n + 2q - q^2 + 15).$$

Ověříme použití vzorce (9) při výpočtu $S(39)$: $p = \left[\frac{39}{5} \right] = 7$ je číslo liché, $q = 39 - 7 \cdot 5 = 4$ (tj. zbytek při dělení čísla 39 pěti). $S(39) = \frac{1}{20} (39^2 + 8 \cdot 39 + 2 \cdot 4 - 4^2 + 15) = \frac{1}{20} 1840 = 92$. Vzhledem k výpočtu podle (2) v příkladě 1 není zlepšení zdánlivě příliš výrazné, ale např. při výpočtu $S(1618)$ je $p = \left[\frac{1618}{5} \right] = 323$, $q = 3$ (zbytek při dělení čísla 1618 pěti), takže počítáme $S(1618) = \frac{1}{20} (1618^2 + 8 \cdot 1618 + 2 \cdot 3 - 3^2 + 15) = 131544$, výpočet je podstatně kratší než podle (2).

Povzbuzení tímto úspěchem, tj. získáním vzorce (9) pro liché p , uvažujme nyní druhý případ, že číslo p je sudé. Ve vzorci (2) je na pravé straně lichý počet členů. První z nich ponechejme a dalších p členů sdružíme po dvou:

$$S(n) = \left[\frac{n+2}{2} \right] + \left(\left[\frac{n-3}{2} \right] + \left[\frac{n-8}{2} \right] \right) + \left(\left[\frac{n-13}{2} \right] + \left[\frac{n-18}{2} \right] \right) + \dots + \left(\left[\frac{n-5p+7}{2} \right] + \left[\frac{n-5p+2}{2} \right] \right).$$

Každou dvojici v závorkách upravíme užitím vzorce (4): v první závorce je $s(n-3) = n-6$, ve druhé $s(n-13) = n-16$, v poslední $s(n-5p+7) = n-5p+4$, takže

$$(10) \quad S(n) = \left[\frac{n+2}{2} \right] + (n-6) + (n-16) + \dots + (n-5p+4).$$

Např. pro $n = 32$ je $S(32) = \left\lfloor \frac{34}{2} \right\rfloor + s(29) + s(19) + s(9) = 17 + 26 + 16 + 6 (= 65)$. Ve vzorci (10) tedy mimo 1. člen sčítáme $\frac{p}{2}$ čísel, každé další je vždy o 10 menší než předchozí. Použijeme opět vzorce (6), kde $k = \frac{p}{2}$, $a = n - 6$:

$$(11) \quad S(n) = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor + \frac{p}{2} \left(n - 6 - 5 \cdot \frac{p}{2} + 5 \right) = \\ = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor + \frac{p}{2} \left(n - \frac{5p}{2} - 1 \right).$$

Vyjádríme opět $n = 5p + q$, kde q je jedno z čísel 0, 1, 2, 3, 4, takže platí (8). Pro výpočet členu $\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$ je třeba uvažovat dva případy:

Pro q sudé, tj. $q = 0, 2, 4$, je n rovněž sudé (neboť p je též sudé), takže $\frac{n+2}{2}$ je celé číslo, lze psát $\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor = \frac{n+2}{2}$. V (11) je $S(n) = \frac{n+2}{2} + \frac{n-q}{10} \left(n - \frac{n-q}{2} - 1 \right)$ a po úpravě

$$(12) \quad S(n) = \frac{1}{20} (n^2 + 8n + 2q - q^2 + 20).$$

Pro q liché, tj. $q = 1$ nebo 3, je n rovněž liché, $\frac{n+2}{2} = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}$, kde $\frac{n+1}{2}$ je číslo celé, tedy $\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2}$, a z (11) po dosazení $n = 5p + q$ máme $S(n) = \frac{n+1}{2} + \frac{n-q}{10} \left(n - \frac{n-q}{2} - 1 \right)$ a po úpravě

$$(13) \quad S(n) = \frac{1}{20} (n^2 + 8n + 2q - q^2 + 10).$$

Výsledné vzorce (9), (12), (13) řeší náš problém. Jestliže je navzájem srovnáme, vidíme, že všechny tři mají tvar

$$(14) \quad S(n) = \frac{1}{20} (n^2 + 8n) + r;$$

pouze druhý výraz $r = \frac{1}{20} (2q - q^2 + t)$, kde $t = 15, 10, 20$, závisí na paritě (sudosti či lichosti) nebo hodnotách p, q . Prozkoumáme ještě

Tabulka 4.

q	$2q - q^2 + 15$	$2q - q^2 + 10$	$2q - q^2 + 20$
0	15	—	20
1	16	11	—
2	15	—	20
3	12	7	—
4	7	—	12

možnosti získání jediného vzorce. Zatím je totiž stav takový, že nejprve bychom museli zjistit paritu p , pak hodnotu q , podle toho provést volbu správného vzorce a do tohoto vzorce dosadit. V tabulce 4 uvádíme hodnoty výrazů $20r = n^2 + 8n + t$ pro $q = 0, 1, 2, 3, 4$.

Pro liché p platí v tabulce 1. sloupec, pro sudé p platí 2. nebo 3. sloupec podle toho, je-li q liché nebo sudé. Zbývající případy nenastanou a v tabulce jsou proškrtnuty.

Ve všech případech je tedy $20r$ celé číslo od 7 do 20, $r \in \left\langle \frac{7}{20}, 1 \right\rangle$. Podle

(14) je výraz $S(n) - r = \frac{1}{20}(n^2 + 8n)$ menší než $S(n)$ v některých případech přesně o 1, v ostatních méně než o 1, takže $\left\lfloor \frac{1}{20}(n^2 + 8n) \right\rfloor$ je přesně o 1 menší než $S(n)$; z toho

$$(15) \quad S(n) = \left\lfloor \frac{1}{20}(n^2 + 8n) \right\rfloor + 1.$$

Tak dostáváme velmi pěkný a jednoduchý závěrečný vzorec pro výpočet $S(n)$, který beze zbytku řeší problém formulovaný na počátku článku: *Obnos n Kčs lze užitím korunových, dvoukorunových a pětikorunových mincí vyplatit $S(n)$ způsoby, kde $S(n)$ se vypočte podle vzorce (15).*

Při použití vzorce (15) už nemusíme znát p ani q , nemusíme provádět žádné pomocné výpočty.

Např. pro $n = 1618$ máme $S(1618) = \left\lfloor \frac{1}{20}(1618^2 + 8 \cdot 1618) \right\rfloor + 1 = [131543,4] + 1 = 131544$.

Je možné, že daný problém a jeho řešení inspirují čtenáře k formulaci problému i pro mince jiných hodnot, k zobecnění problému nebo k jeho rozšíření na více druhů mincí. I o to jde.

Historie problému o pokrytí obdélníka čtverci

RNDr. ANTONÍN VRBA, CSc., Praha

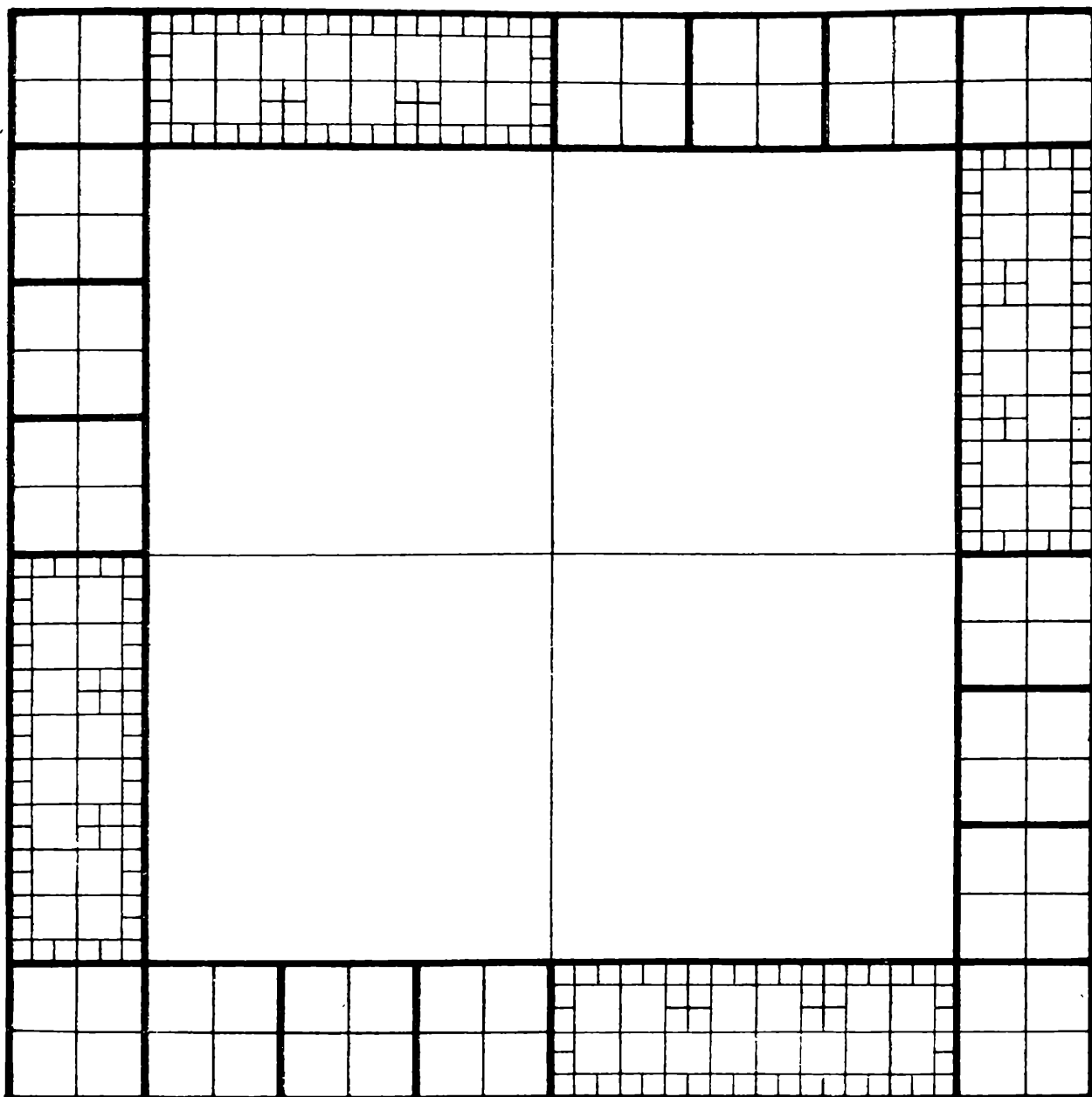
Buď dána úsečka U a na ní úsečky $U_1, U_2, \dots, U_k$, které ji pokrývají, tj. každý bod úsečky U leží v některé z úseček $U_1, U_2, \dots, U_k$. Potom lze ukázat, že z úseček $U_1, U_2, \dots, U_k$ lze vybrat takovou soustavu úseček, které pokrývají alespoň polovinu úsečky U a přitom žádné dvě z nich nemají společný bod (viz [1], [3], [4], [5]). Přeneseme-li situaci do roviny, vzniká na první pohled věrohodný problém:

Je dán obdélník a v něm konečný počet čtverců, které ho pokrývají a mají strany rovnoběžné s jeho stranami. Lze z nich vždy vybrat soustavu čtverců, které pokrývají alespoň čtvrtinu obdélníka a přitom žádné dva z nich nemají společný bod?

R. 1928 otiskl vedoucí redaktor polského časopisu *Fundamenta mathematicae* W. Sierpiński dopis [6], který dostal od známého maďarského matematika Tibora Radó. Pisatel se v něm zmiňoval o tom, že se v souvislosti se studiem funkcí několika reálných proměnných zabýval otázkou, která je vlastně totožná s uvedeným problémem (byla formulována obecněji). Dospěl však ke kladné odpovědi, jen když nahradil čtvrtinu devítinou (to je snadné, viz [2], [3], [4], [5]), nicméně vyjádřil domněnku, že i pro čtvrtinu je odpověď kladná. R. 1940 vyšla práce [7] mladého leningradského matematika A. S. Sokolina, v níž bylo ukázáno, že domněnka se čtvrtinou platí v případě, kdy všechny pokrývající čtverce jsou shodné. Sokolinův důkaz není obtížný a zájemci se s ním mohou seznámit také v populárním článku [3]*). K tomuto výsledku došli později i jiní autoři různými způsoby. Pokud jde o obecný případ, nejprve r. 1950 R. Rado dokázal [8] domněnku pro $1/8,75$ a to pak r. 1960 zlepšil V. A. Zalgaller [9] na $1/8,6$. Tyto odhady ovšem jen málo zlepšují výsledek s devítinou a jsou stále příliš daleko od domněnky T. Radó se čtvrtinou.

Překvapivý obrat nastal r. 1973, kdy maďarský matematik Miklós Ajtai uveřejnil [10] příklad, kterým tuto domněnku vyvrátil. Z toho také vyplývá, že úloha o koberečcích, která byla formulována v [1] a řešena v [2], řešení nemá. Omyl se skrývá v závěru řešení za frází

*) Poznámka pro čtenáře článku [3]: Tam se vybere pouze soustava čtverců, z nichž žádné dva nemají společný vnitřní bod, mohou se však dotýkat. To lze vyloučit následujícím trikem: Zvětšíme rozměr pomocné sítě, ale jen tak málo, aby pro obsah S' pokryté oblasti (vzhledem k novému měřítku) platilo $S' > c(S)$, kde $c(S)$ je největší z celých čísel menších než S . Tím je zaručeno, že z Blichfeldtovy věty dostaneme pro obě sítě stejný počet bodů. Pro druhou síť se však vybrané čtverce již nemohou dotýkat.



„jak je hned vidět“. Na tuto chybu upozornil student Petr Beránek z Prahy. Ajtaiův příklad vidíte na obrázku. Každá soustava čtverců vybraná tak, aby žádné dva neměly společný bod, zde pokrývá méně než čtvrtinu $\left(\text{nejvýše } \frac{575}{2304}\right)$ celého čtverce. K tomu, abyste si to ověřili, stačí provést následující kroky:

1. Soustava nedotýkajících se čtverců nemůže pokrývat více než čtvrtinu žádné ze silně orámovaných částí. (Pro obdélníkovou část to plyne z toho, že ji lze šachovnicovým způsobem rozdělit na čtverce o straně 2, přičemž pro každý z nich je každá jeho čtvrtina z jiného pokrývacího čtverce.)
2. Každá soustava nedotýkajících se čtverců, které pokrývají čtvrtinu obdélníkové části, má společný bod se stranou velkého vnitřního

čtverce. (Rozlište několik případů podle toho, které z větších čtverců jsou vybrány. Přitom využijte poznámky v závorce v b. 1).)

3. Pokrývá-li soustava nedotýkajících se čtverců čtvrtinu každého ze čtyř exemplářů obdélníkové části, nemůže do ní patřit žádný ze čtyř prostředních čtverců.

Literatura

- [1] A. Vrba: O hlemýždi, koberečcích a jak to souvisí s pokrýváním úsečky I. Rozhledy 55 (1976—7) 9, 389—391.
- [2] A. Vrba: O hlemýždi, koberečcích a jak to souvisí s pokrýváním úsečky II. Rozhledy 55 (1976—7) 10, 439—441.
- [3] I. M. Jaglom: O zadače Rado. Kvant 1975, 8, 40—45.
- [4] D. O. Škljarskij, N. N. Čencov, I. M. Jaglom: Geometričeskije ocenki i zadači iz kombinatornoj geometrii, 1974.
- [5] N. B. Vasiljev, S. A. Molčanov, A. L. Rozental, A. P. Savin: Matematikačeskije sorevnovanija-geometrija, 1974.
- [6] T. Radó: Sur un problème relatif à un théorème de Vitali. Fundamenta mathematicae 11 (1928), 228—229.
- [7] A. S. Sokolin: Concerning a problem of Radó. Doklady AN SSSR 26 (1940), 871—872.
- [8] R. Rado: Some covering theorems. Proceedings of the London mathematical society 51 (1950), 232—264.
- [9] V. A. Zalgaller: Zamečanija o zadače Rado. Matematikačeskoje prosveščenijs 5 (1960), 141—148.
- [10] M. Ajtai: The solution of a problem of T. Radó. Bulletin de l'Académie polonaise des sciences 21 (1973), 61—63.

Výpočet velikosti pravoúhlého průmětu úhlu

Prof. E M I L K R A E M E R, UK Praha

Téměř v každé učebnici deskriptivní geometrie se uvádí pro velikost d' pravoúhlého průmětu $A'B'$ nenulové úsečky AB o délce d tento vzorec:

$$d' = d \cos \alpha;$$

přitom α je odchylka přímky AB od průmětny, takže je $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Avšak ani ve velkých vysokoškolských učebnicích se neuvádí, jak se vypočte velikost pravoúhlého průmětu dutého úhlu. Všimněme si proto tohoto problému.

Budiž dána rovina ρ , která není kolmá k průmětně. Potom lze snadno dokázat tyto věty:

- a) Pravoúhlý průmět dutého úhlu ležícího v rovině ρ je dutý úhel.
b) Pravoúhlé průměty vrcholových úhlů ležících v rovině ρ jsou vrcholové úhly.
c) Pravoúhlé průměty vedlejších úhlů ležících v rovině ρ jsou vedlejší úhly.

Případy b), c) jsou znázorněny na obr. 1, kde v rovině ρ jsou dány vrcholové úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CVD$. Jejich pravoúhlé průměty do průmětny π jsou vrcholové úhly $\sphericalangle A'V'B'$, $\sphericalangle C'V'D'$. Vedlejší úhly v rovině ρ jsou např. $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CVB$; jejich průměty jsou vedlejší úhly $\sphericalangle A'V'B'$, $\sphericalangle C'V'B'$. Úhly $\sphericalangle A'V'B'$, $\sphericalangle C'V'D'$ jsou tedy shodné a úhly $\sphericalangle A'V'B'$, $\sphericalangle C'V'B'$ jsou výplňkové.

Při řešení naší úlohy budeme ještě potřebovat tři pomocné věty, které nyní uvedeme.

Pomocná věta 1. V rovině ρ , která není kolmá k průmětně, je dán pravý úhel, jehož jedno rameno je rovnoběžné s průmětnou. Potom pravoúhlý průmět tohoto úhlu je opět úhel pravý.

Důkaz této věty, který je velmi jednoduchý, se uvádí v každé učebnici deskriptivní geometrie. Viz např. *Urban, Deskriptivní geometrie*, I. díl, str. 100 (vydalo SNTL v Praze).

Pomocná věta 2. Je-li $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$, je

$$\cotg(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\cotg \varphi_1 \cotg \varphi_2 - 1}{\cotg \varphi_1 + \cotg \varphi_2}, \quad (a)$$

$$\cotg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\cotg \varphi_1 \cotg \varphi_2 + 1}{\cotg \varphi_2 - \cotg \varphi_1}, \quad \varphi_1 > \varphi_2. \quad (b)$$

Vzorec (a) se pro $\varphi_1 + \varphi_2 \neq \frac{\pi}{2}$ snadno dokáže ze známého vzorce pro $\tg(\varphi_1 + \varphi_2)$ tak, že se přitom užije vzorce $\tg \varphi \cdot \cotg \varphi = 1$. Pro $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ je $\cotg(\varphi_1 + \varphi_2) = \cotg \frac{\pi}{2} = 0$,

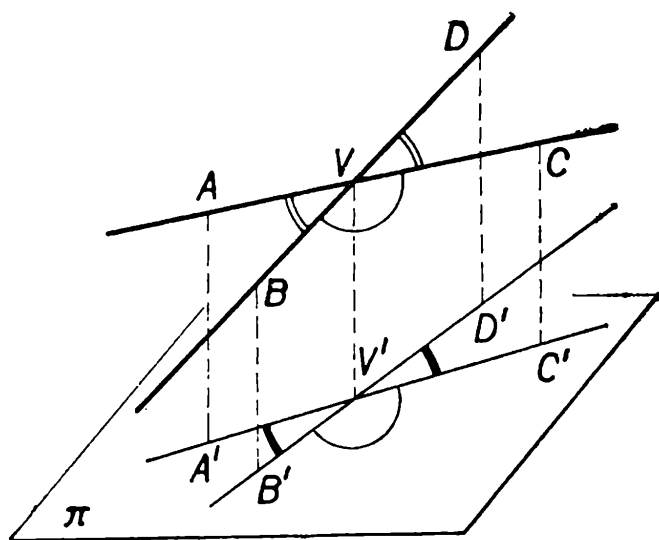
$$\cotg \varphi_1 \cotg \varphi_2 - 1 = \cotg \varphi_1 \cotg \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) - 1 = \cotg \varphi_1 \tg \varphi_1 - 1 = 0,$$

$\cotg \varphi_1 + \cotg \varphi_2 > 0$; takže vzorec (a) platí i v tomto případě. Vzorec (b) se odvodí ze vzorce pro $\tg(\varphi_1 - \varphi_2)$.

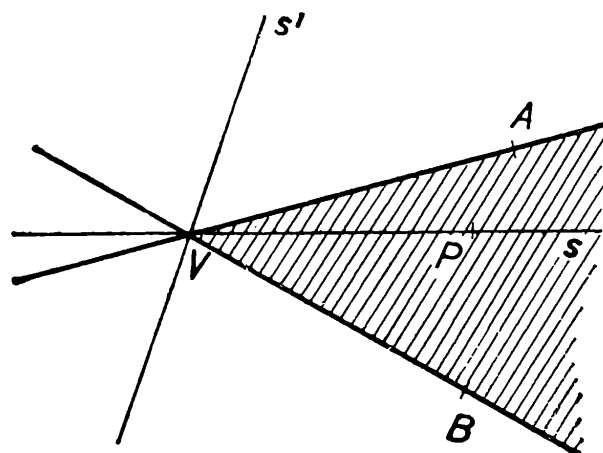
Pomocná věta 3. Pro libovolná reálná čísla α , x platí tyto vzorce:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 x,$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) = \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 x.$$



Obr. 1



Obr. 2

Důkaz. Podle vzorců pro součet, resp. rozdíl velikostí dvou úhlů platí:

$$\begin{aligned}
 & \cos\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) = \\
 & = \left(\cos\frac{\alpha}{2} \cos x - \sin\frac{\alpha}{2} \sin x\right) \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} \cos x + \sin\frac{\alpha}{2} \sin x\right) = \\
 & = \cos^2\frac{\alpha}{2} \cos^2 x - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2 x = \cos^2\frac{\alpha}{2} \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2\frac{\alpha}{2} \sin^2 x = \\
 & = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2 x.
 \end{aligned}$$

Zcela obdobně se dokáže druhý vzorec.

Než přistoupíme k vlastnímu výkladu, dohodneme se na tom, co budou znamenat obraty „*přímka rozděluje úhel*“ a „*přímka nerozděluje úhel*“. Nechť přímka s leží v rovině dutého úhlu $\sphericalangle AVB$ a prochází vrcholem V tohoto úhlu. Obsahuje-li přímka s některý vnitřní bod P úhlu $\sphericalangle AVB$ (obr. 2), říkáme, že tato přímka rozděluje úhel $\sphericalangle AVB$; v opačném případě, pokud je $s \neq VA$, $s \neq VB$, říkáme, že přímka s úhel $\sphericalangle AVB$ nerozděluje. Polopřímku opačnou k rameni VA nebo VB úhlu $\sphericalangle AVB$ nazveme *prodloužením tohoto ramene*.

Obrátme se nyní k naší úloze, tj. k výpočtu velikosti φ pravoúhlého průmětu dutého úhlu o velikosti α , jehož rovina ρ není kolmá k průmětně. Číslo φ závisí zřejmě na velikosti α daného úhlu $\sphericalangle AVB$, na odchylce ε roviny ρ od průmětny a na „poloze“ úhlu $\sphericalangle AVB$ v rovině ρ ; tuto „polohu“ můžeme charakterizovat odchylkou x spádové přímky roviny ρ od přímky, jejíž částí je osa úhlu $\sphericalangle AVB$.

Věta 1. Nechť rovina ρ má od průmětny odchylku ε , pro kterou je $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, $\cos \varepsilon = k$. V rovině ρ je dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$ o velikosti α , jehož osa je částí přímky mající od spádové přímky roviny ρ odchylku x . Potom velikost φ pravoúhlého průmětu úhlu $\sphericalangle AVB$ je udána tímto vzorcem:

$$\cotg \varphi = \frac{(k^2 + 1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + (1 - k^2) \sin^2 x}{k \sin \alpha}. \quad (1)$$

Důkaz. Podle předpokladu je $0 < \alpha < \pi$; protože průmět dutého úhlu je dutý úhel, je také $0 < \varphi < \pi$. Protože x je odchylka dvou přímek, je $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

a) Je-li rovina ρ rovnoběžná s průmětnou, je $\varepsilon = 0$, $\cos \varepsilon = k = 1$; zároveň je úhel $\sphericalangle AVB$ shodný se svým pravoúhlým průmětem, takže $\varphi = \alpha$. Vzorec (1) má pro $\varepsilon = 0$ tento tvar:

$$\cotg \varphi = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sin \alpha}.$$

Ze známého vzorce pro $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|$ plyne, že je

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

takže pravou stranu vzorce pro $\cotg \varphi$ lze napsat takto:

$$\frac{1 + \cos \alpha - 1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cotg \alpha.$$

Je tedy $\cotg \varphi = \cotg \alpha$ a protože čísla φ, α jsou v intervalu $(0, \pi)$, je $\varphi = \alpha$. Vzorec (1) tedy v tomto případě platí.

b) Předpokládejme tedy, že rovina ρ není s průmětnou rovnoběžná (a ovšem není k ní kolmá); potom je

$$0 < k < 1. \quad (2)$$

Bez újmy obecnosti můžeme zvolit průmětnu π tak, aby neprocházela vrcholem V daného dutého úhlu $\sphericalangle AVB$ ležícího v rovině ρ . Vedme bodem V spádovou přímku s roviny ρ . Potom pro polohu úhlu $\sphericalangle AVB$ vzhledem ke spádové přímce s a ke stopě p^ρ roviny ρ mohou nastat tyto možnosti:

1. Obě ramena nebo prodloužení obou ramen úhlu $\sphericalangle AVB$ protínají stopu p^ρ a zároveň spádová přímka s tento úhel rozděluje.

2. Obě ramena nebo prodloužení obou ramen úhlu $\sphericalangle AVB$ protínají stopu p^e a zároveň spádová přímka s tento úhel nerozděluje.

3. Obě ramena nebo prodloužení obou ramen úhlu $\sphericalangle AVB$ protínají stopu p^e a zároveň jedno z těchto ramen je částí spádové přímky s .

4. Jedno rameno úhlu $\sphericalangle AVB$ a prodloužení druhého protínají stopu p^e .

5. Jedno rameno úhlu $\sphericalangle AVB$ je částí přímky rovnoběžné se stopou p^e .

Otočme daný úhel s rovinou ϱ kolem její stopy p^e do průmětny. Tak dostaneme v průmětně úhel $\sphericalangle A_0V_0B_0$ shodný s úhlem $\sphericalangle AVB$; proto velikost úhlu $\sphericalangle A_0V_0B_0$ je α . Otočení roviny ϱ do průmětny provedme tak, aby bod V_0 ležel uvnitř opačné poloroviny s hraniční přímkou p^e než průmět V_1 bodu V . Protože je $s \perp p^e$, je podle pomocné věty 1 také $s_1 \perp p^e$. Stopa p^e je tedy kolmá k různoběžkám s, s_1 , a tedy kolmá k rovině jimi určené. V této rovině se otáčí kolem stopy p^e bod V , takže body V_1, V_0 leží na přímce $s_1 = s_0$; její průsečík se stopou p^e označme P . Sestrojíme osu úhlu $\sphericalangle A_0V_0B_0$; odchylka přímky, jejíž je částí, od přímky $s_1 = s_0$ je táž jako odchylka x spádové přímky s od přímky, jejíž částí je osa úhlu $\sphericalangle AVB$.

V případech 1 až 4 protínají ramena úhlu $\sphericalangle AVB$ nebo jejich prodloužení stopu p^e v bodech M, N ; označení těchto bodů volme tak, aby bylo $PM \geq PN$. V případě 5 protíná stopu p^e jedno rameno nebo jeho prodloužení; tento průsečík označme N .

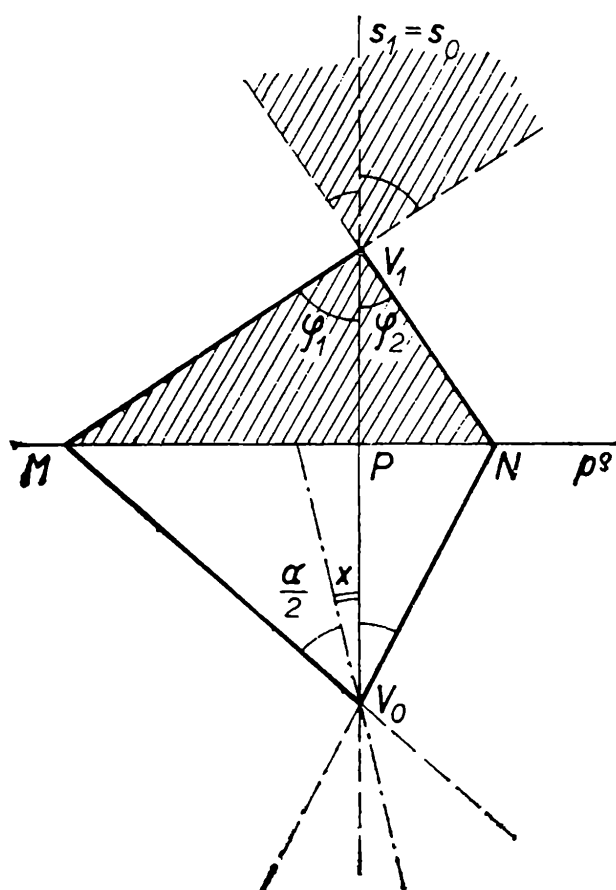
V případech 1 až 3 (obr. 3, 4, 5) je úhel $\sphericalangle A_0V_0B_0$ totožný s úhlem $\sphericalangle MV_0N$ nebo s úhlem k němu vrcholovým; proto je velikost úhlu $\sphericalangle MV_0N$ rovna α . Obdobně je úhel $\sphericalangle A_1V_1B_1$ totožný s úhlem $\sphericalangle MV_1N$ nebo s úhlem k němu vrcholovým, takže velikost úhlu $\sphericalangle MV_1N$ je rovna φ .

V prvním a druhém případě (obr. 3, 4) jsou trojúhelníky $MPV_0, MPV_1, NPV_0, NPV_1$ vesměs pravoúhlé. Je-li $PM > PN$, je úhel $\sphericalangle MV_0P$ větší než úhel $\sphericalangle NV_0P$, takže osa úhlu $\sphericalangle MV_0N$ leží v úhlu $\sphericalangle MV_0P$; je-li $PM = PN$, pak osa úhlu $\sphericalangle MV_0N$ splyne s polopřímkou V_0P . Velikosti úhlů $\sphericalangle MV_1P, \sphericalangle NV_1P$ budtež φ_1, φ_2 ; v obou případech (obr. 3, 4) je

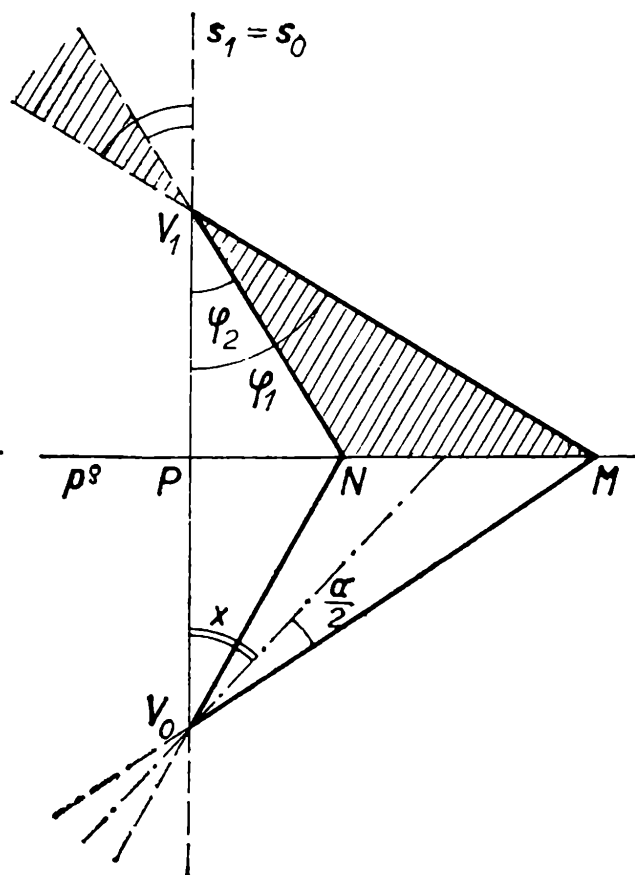
$$\cotg \varphi_1 = \frac{V_1P}{MP}, \quad \cotg \varphi_2 = \frac{V_1P}{NP}. \quad (3)$$

1. V prvním případě (obr. 3) je $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ a čísla $\frac{\alpha}{2} + x, \frac{\alpha}{2} - x$ jsou velikostmi úhlů $\sphericalangle MV_0P, \sphericalangle NV_0P$. Protože je x menší než velikost úhlu $\sphericalangle MV_0P$, je

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$



Obr. 3



Obr. 4

Z pravoúhlých trojúhelníků MPV_0 , NPV_0 plyne, že je

$$MP = \frac{V_0P}{\cotg\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)}, \quad NP = \frac{V_0P}{\cotg\left(\frac{\alpha}{2} - x\right)}.$$

Podle (3) je tedy

$$\cotg \varphi_1 = \frac{V_1P}{V_0P} \cotg\left(\frac{\alpha}{2} + x\right), \quad \cotg \varphi_2 = \frac{V_1P}{V_0P} \cotg\left(\frac{\alpha}{2} - x\right).$$

Avšak $V_0P = VP$, takže je

$$\frac{V_1P}{V_0P} = \frac{V_1P}{VP} = \cos \varepsilon = k, \quad (5)$$

kde pro k platí (2). Je tedy

$$\cotg \varphi_1 = k \cotg\left(\frac{\alpha}{2} + x\right), \quad \cotg \varphi_2 = k \cotg\left(\frac{\alpha}{2} - x\right).$$

Protože je $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$, je podle pomocné věty 2

$$\cotg \varphi = \frac{1}{k} \cdot \frac{k^2 \cotg\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \cotg\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) - 1}{\cotg\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) + \cotg\left(\frac{\alpha}{2} - x\right)}. \quad (6)$$

2. V druhém případě (obr. 4) splývá polopřímka PM s polopřímkou PN a úhly $\sphericalangle MV_0N$, $\sphericalangle MV_1N$ jsou ostré; je tedy

$$0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad (4')$$

Protože je $PM > PN$, je úhel $\sphericalangle MV_0P$ větší než úhel $\sphericalangle NV_0P$; přitom velikosti těchto úhlů jsou po řadě

$$x + \frac{\alpha}{2}, \quad x - \frac{\alpha}{2}.$$

Obdobně jako v prvním případě je

$$MP = \frac{V_0P}{\cotg\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)}, \quad NP = \frac{V_0P}{\cotg\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Podle toho a podle (3) a (5) je tedy

$$\begin{aligned} \cotg \varphi_1 &= k \cotg\left(x + \frac{\alpha}{2}\right), \\ \cotg \varphi_2 &= k \cotg\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) = -k \cotg\left(\frac{\alpha}{2} - x\right). \end{aligned}$$

Protože v tomto případě (obr. 4) je $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$,

$0 < \varphi_2 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, je podle pomocné věty 2

$$\cotg \varphi = \frac{1}{k} \cdot \frac{-k^2 \cotg\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \cotg\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) + 1}{-\cotg\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) - \cotg\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)}.$$

Rozšíříme-li druhý zlomek číslem (-1) , dostaneme pro $\cotg \varphi$ též výsledek jako v (6).

V prvním i ve druhém případě jsme tedy došli ke vzorci (6). Rozšíříme-li v tomto vzorci druhý zlomek číslem $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - x\right)$, dostaneme tento výsledek:

$$\cotg \varphi = \frac{1}{k} \cdot \frac{k^2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)}.$$

Užijeme-li na čitatel druhého zlomku pomocnou větu 3 a na jmenovatel vzorec $\sin \gamma \cos \delta + \cos \gamma \sin \delta = \sin (\gamma + \delta)$, dostaneme tento vzorec:

$$\begin{aligned} \cotg \varphi &= \frac{1}{k} \cdot \frac{k^2 \cos^2 \frac{x}{2} - k^2 \sin^2 x - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 x}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + (1 - k^2) \sin^2 x - 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{k \sin \alpha}; \end{aligned}$$

z toho však plyne ihned vzorec (1) z textu věty 1. Pro první dva případy je tedy věta 1 dokázána.

(Pokračování)

konstruktivní geometrie

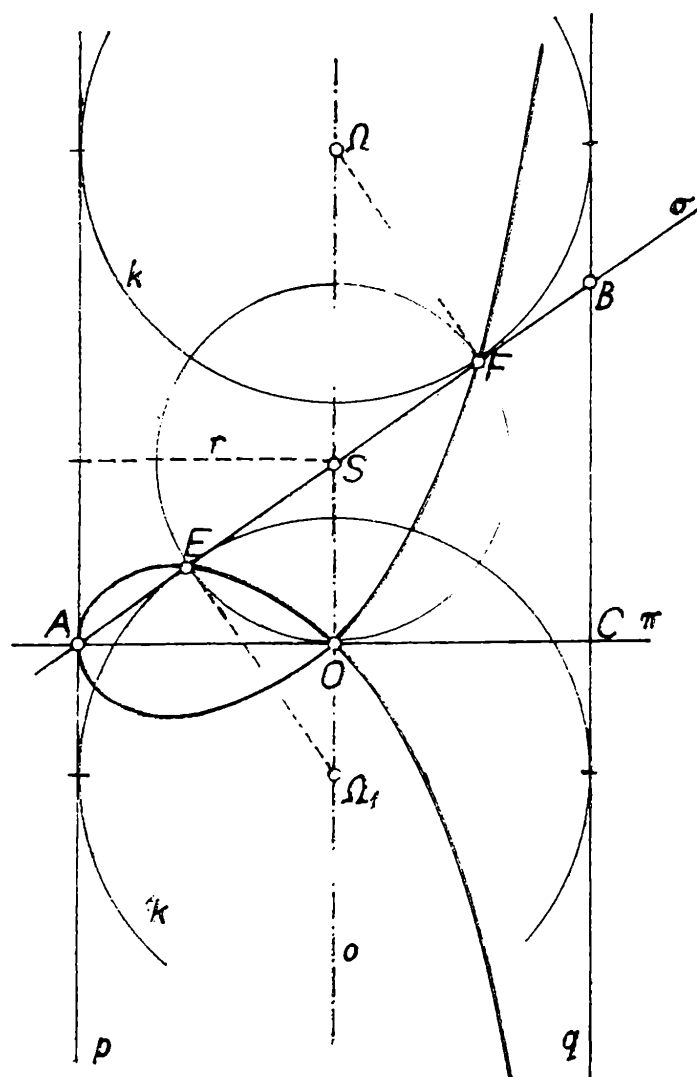
K rovinným řezům na rotační válcové a kuželové ploše

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

V deskriptivní geometrii jste poznali větu *Quetétetovu-Dandelinovu*: „Vepíšeme-li do rotační válcové (kuželové) plochy kulové plochy tak, aby se dotýkaly roviny řezu, jsou jejich dotykové body s touto rovinou ohnisky kuželosečky řezu.“

Nechť t je tečna rotační válcové (kuželové) plochy, která je kolmá k ose této plochy. Roviny procházející touto tečnou tvoří svazek rovin, které protnou uvedenou plochu v soustavě kuželoseček. Bude nás zajímat, co vyplňují všechna ohniska těchto kuželoseček.

Úlohu provedeme nejprve pro rotační plochu válcovou a pak také pro rotační plochu kuželovou.



Obr. 1

Než však přistoupíme k těmto úlohám, budeme se zabývat úlohou planimetrickou:

Je dána množina kružnic dotýkajících se přímky x v bodě O a bod A , který leží na přímce x , $A \neq O$. Každá polopřímka o počátku v bodě A procházející středem S kružnice dané množiny ji protne ve dvou bodech M (M'). Máme určit množinu všech bodů M (M'), když body S vyplní celou kolmici $y \perp x$ vedenou bodem O .

Označme velikost úsečky $AO = a$. V pravoúhlé soustavě souřadnic $O(x, y)$ má kružnice $k(S, r)$ dotýkající se osy x v počátku O rovnici

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0. \quad (1)$$

Ze stejnohlých pravoúhlých trojúhelníků $\triangle AOS \sim \triangle AM_1M$ (obr. 1) plyne

$$\frac{OS}{AO} = \frac{MM_1}{AM_1}, \text{ tj. } \frac{r}{a} = \frac{y}{a \pm x} \Rightarrow r = \frac{ay}{a \pm x}. \quad (2)$$

Po dosazení (2) do (1) a po jednoduché úpravě dostaneme

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - x^2) \quad (3)$$

nebo
$$x^2(a + x) = y^2(a - x) \quad (3')$$

a odtud
$$y = \pm x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}. \quad (3'')$$

Z rovnice (3) poznáváme, že hledanou množinou všech bodů M (M') je křivka třetího stupně, která se nazývá *přímou strofoidou*. Z rovnice (3) resp. (3') je zřejmé, že křivka je souměrná podle osy x . Z rovnice (3'') poznáváme, že pro $x = a$ ztrácí příslušná funkce význam, což znamená, že přímka o rovnici $x = a$ je *asymptotou* křivky. Bod A nazveme *hlavním vrcholem strofoidy*. Bod O je jejím dvojnásobným bodem, neboť přímky $y = \pm x$, které jím procházejí, mají s křivkou jediné bod $(0, 0)$ společný, což plyne z rovnice (3). Jsou tudíž tečny ve dvojnásobném bodě navzájem k sobě kolmé. Pro snadné narýsování křivky poznáváme, že poloměr kružnice křivosti křivky ve vrcholu A je $\rho = \frac{a}{4}$. Další dva vrcholy mají souřadnice

$$\left[\frac{a}{2}(1 - \sqrt{5}), \pm \frac{a}{2}(1 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2} \right].$$

Křivka má celou řadu zajímavých vlastností, jejichž důkazy však nejsou účelem* tohoto článku.*)

Dosadíme-li do (3') $y = tx$, dostaneme po jednoduché úpravě *parametrické rovnice* křivky:

$$x = \frac{a(t^2 - 1)}{1 + t^2}, \quad y = \frac{at(1 - t^2)}{1 + t^2}. \quad (4)$$

Je-li počátek polárních souřadnic v bodě A a φ úhel průvodiče φ s osou x , je rovnice přímé strofoidy v polárních souřadnicích

$$\rho = a \frac{1 \pm \sin \varphi}{\cos \varphi}. \quad (5)$$

Těchto rovnic se výhodně využívá při důkazech vlastností křivky.

Nyní se vrátíme k naší dané úloze.

Za průmětnu kolmého promítání na rovinu zvolme rovinu $\nu \perp t$ procházející osou o rotační válcové plochy. (V obr. 2 jsou pro zjednodušení průmětové indexy vynechány). Obrysové přímky válcové plochy jsou p , q , rovina řezu je $\sigma \perp \nu$, průsečná křivka (elipsa) se zobrazuje jako úsečka AB , její ohniska jsou E , F , její střed je S , vedlejší osa elipsy,

*) Viz např. *A. A. Savelov: Ploskie krivie. Gosizdat fiziko-matem. liter. Moskva 1960.*



Pro rotační kuželovou plochu nastane jistá změna. Jsou-li opět E, F dotykové body kulových ploch vepsaných do rotační kuželové plochy, které se v těchto bodech dotýkají roviny řezu, dokážeme, že v rovině $\nu \perp t$ opět platí $SE = SF = SO$; O je střed kružnice v rovině $\pi \perp o$ a procházející tečnou t (obr. 3).

118

Zřejmě pak platí $SO = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(VA - VB) = SE$; je tedy skutečně $SO = SE = SF$, což jsme chtěli dokázat. Odtud plyne snadná konstrukce této křivky.

Hledanou množinou všech ohnisek kuželoseček rotační kuželové plochy v rovinách procházejících tečnou $t \perp o$ je obecná (kosá) strofoida, ležící v rovině $v \perp t$ procházející osou kuželové plochy.

Od přímé strofoidy se liší obecná strofoida tím, že její vrchol neleží na společné tečně soustavy kružnic majících středy na přímce q' a procházejících bodem O . Přímka AO svírá s přímkou q' úhel $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Je-li v rovině v dána obecná strofoida, přenechávám čtenáři, jak se sestrojí rotační kuželová plocha, aby ohniska jejích rovinných řezů ležela na této křivce.

Jednoduché matematické vyjádření *obecné (kosé) strofoidy* v polárních souřadnicích s počátkem v bodě A : Označíme-li velikosti úhlů $|\sphericalangle AOQ| = \alpha$, $|\sphericalangle OAS| = \varphi$, $AO = a$, pak z $\triangle OAS$ podle sinové věty platí $OS : AS : AO = \sin \varphi : \sin \alpha : \sin (\pi - \varphi - \alpha)$ a odtud dostaneme

$$\frac{AS \pm OS}{AO} = \frac{\sin \alpha \pm \sin \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)}$$

a odtud
$$AS \pm OS = \varrho = \frac{a \cdot (\sin \alpha \pm \sin \varphi)}{\sin (\alpha + \varphi)}.$$

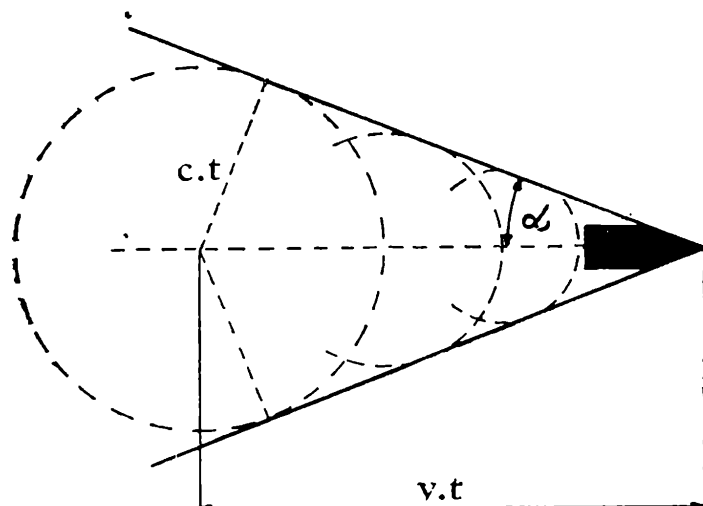
fyzika

Rázová vlna - zvláštní druh akustické vlny

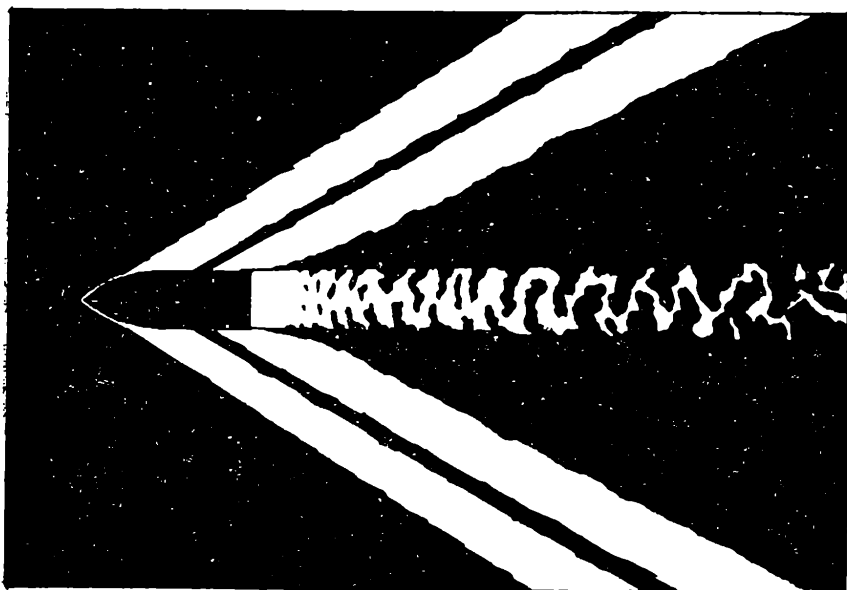
RNDr. RUDOLF TULAK, Martin

V dnešní době prudkého rozvoje letectví jsme téměř denně znepokojováni mohutnými akustickými třesky, které nás upozorňují, že nad námi prolétá nadzvukovou rychlostí moderní tryskový letoun. Účelem článku je objasnit čtenáři fyzikální podstatu tohoto nepříjemného zvukového jevu, jehož příčinou je zvláštní druh akustické vlny — tzv. *balistická vlna*, která má vlastnosti *rázové vlny*.

Jestliže zdroj vlnění se v prostředí pohybuje rychlostí v_{zdr} , která převyšuje rychlost v šíření vln v prostředí, potom rozruchy jím genero-



Obr. 1



Obr. 2

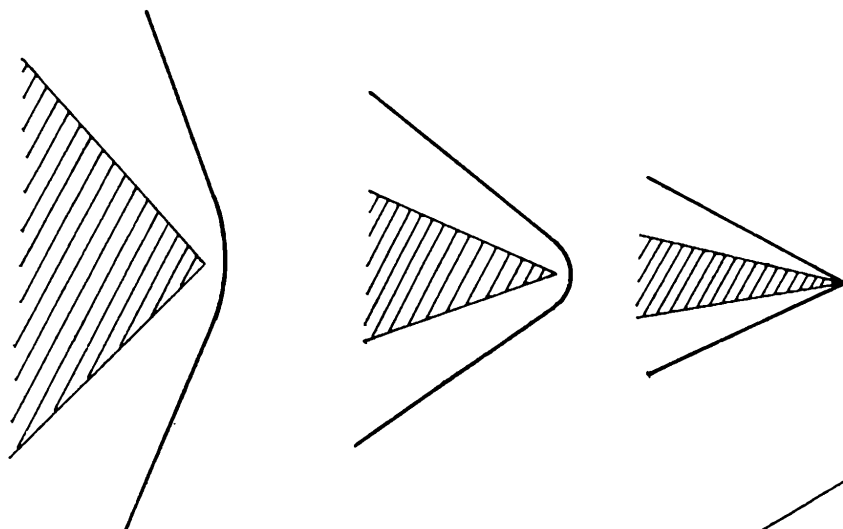
vané podél trajektorie zůstávají za zdrojem. Tyto jednotlivé vlny se skládají dohromady a působí navenek jako silné zhuštění na obálce všech koulí. Tato obálka je čelem rázové vlny, která stále postupuje, jak se jednotlivé kulové vlnoplochy rozšiřují. Má tvar kužele s vrcholem v tom bodě, kde je právě zdroj vlnění.

Vrcholový úhel kužele závisí na poměru v_{zdr} a rychlosti vln v (ve vzduchu c), jak je patrné z obrázku č. 1,

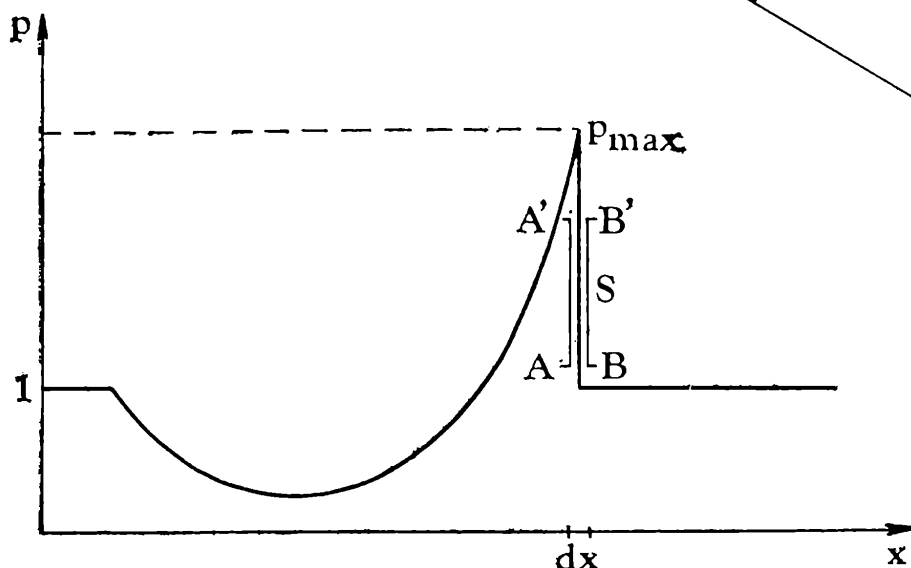
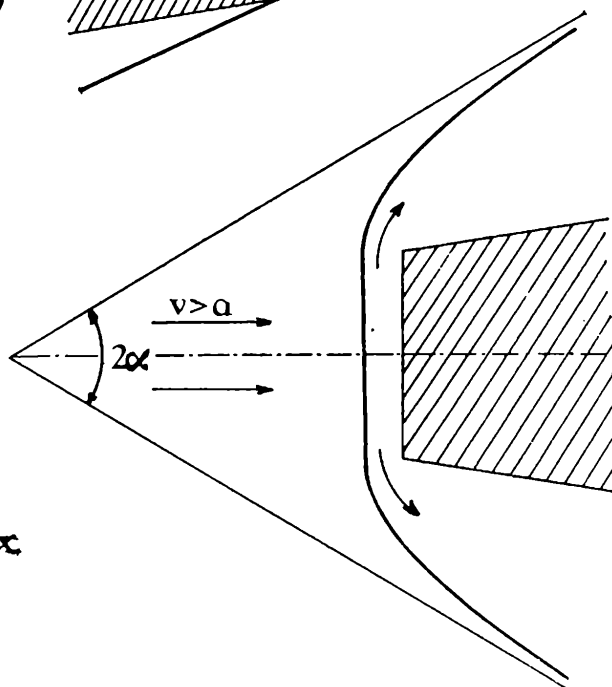
$$\sin \alpha = \frac{c \cdot t}{v_{zdr} t} = \frac{c}{v_{zdr}}.$$

Velice názorným optickým příkladem takové vlny je vlna, jež se šíří po vodní hladině od přídě lodi při rychlejším pohybu, než je rychlost vln na hladině.

Ve vzduchu dochází k obdobnému jevu při výbuších, výstřelech, při letu náboje, rakety nebo letadla nadzvukovou rychlostí. Uvedený jev lze poměrně dobře pozorovat i na fotografii letící střely (viz. obr. 2), kde



Obr. 4



Obr. 5

je patrné zhuštění vzduchu před hlavou střely. Tvary rázové vlny závisí i na ostrosti úhlu přední hrany projektilu (obr. 3 a 4).

Rázová vlna je v podstatě plocha, na níž hustota, tlak a rovněž teplota i rychlost vzduchu mění skokem svou velikost.

Za čelem rázové vlny se pohybuje *oblast stlačení*, tj. vrstva vzduchu, jehož tlak převyšuje atmosférický tlak. Za oblastí stlačení následuje *oblast zředění*, kde je tlak nižší než atmosférický. Graf závislosti tlaku v rázové vlně na vzdálenosti od čela vlny je znázorněn na obr. 5.

Rozdíl mezi maximálním tlakem nárazové vlny a normálním atmosférickým tlakem se nazývá *tlaková amplituda* nárazové vlny. A tak vidíme, že nárazová vlna sama o sobě ani není postupujícím kmitáním a že ani není „pravou“ akustickou vlnou. Avšak jako každé jiné rozpětí elastického prostředí, tak i ona se stává zdrojem, z něhož se akustická

vlna vytváří. Kmitavé pohyby, které vzbuzují ve vzduchu nárazové vlny, patří mezi kmitavé pohyby složené. Nejsilnější jsou v něm kmity o frekvencích 100 až 150 Hz, zatímco kmity o vysokých frekvencích jsou poměrně rychle tlumeny atmosférou.

Sluchový vjem, vyvolaný nárazovou vlnou, se nazývá *náraz*. Náraz se liší od běžného zvuku tím, že jeho vjem je způsoben náhlým mechanickým tlakem na bubínek lidského ucha a na lebeční kosti. Avšak slyšitelnost nárazové vlny bývá také vysvětlována jako účinek vysokofrekvenčního chvění, s ní přicházejícího.

K odvození rychlosti $v_{\text{ráz}}$ pohybu čela rázové vlny a rychlosti v_{vzd} vrstvy stlačeného vzduchu, pohybujícího se za čelem rázové vlny, použijeme zákona zachování hmotnosti a zákona zachování hybnosti.

Budeme uvažovat malou část čela rázové vlny o ploše S , která v počátečním časovém okamžiku má polohu AA' . Během časového intervalu dt postoupí uvažovaná část čela do polohy BB' . Tlak před čelem vlny značíme p_0 a hustotu vzduchu ρ_0 . Za čelem rázové vlny se tlak a hustota vzduchu skokem změni a budou mít hodnoty p a ρ .

Během časového okamžiku dt pak povrchem AA' čela projde rychlostí v_{vzd} vzduch o hustotě ρ a hmotnosti $(\rho - \rho_0) S dx$. Následkem toho se hmotnost vzduchu mezi plochami AA' a BB' zvětší a bude platit:

$$(\rho - \rho_0) S dx = \rho S v_{\text{vzd}} dt ,$$

avšak dx/dt je rychlost postupu čela vlny $v_{\text{ráz}}$, a tak

$$v_{\text{ráz}} = \frac{\rho}{\rho - \rho_0} v_{\text{vzd}} .$$

Existence nespojitého skoku tlaku Δp v čele rázové vlny vyvolává tam sílu $(p - p_0)S$ ve směru šíření vlny, jejíž impuls za dobu dt je $(p - p_0)S dt$. Působením této síly se dosud nehybný plyn ve vrstvě o šířce dx mezi plochami AA' a BB' dá do pohybu rychlostí v_{vzd} , a jeho hybnost tedy bude $v_{\text{vzd}} \rho_0 S dx$. Podle druhého zákona dynamiky je impuls síly roven změně hybnosti:

$$v_{\text{vzd}} \rho_0 S dx = (p - p_0) S dt ,$$

z čehož plyne

$$v_{\text{ráz}} = \frac{p - p_0}{\rho_0} \frac{1}{v_{\text{vzd}}} .$$

Z této rovnice a rovnice odvozené v předchozím odstavci dostaneme střídavým eliminováním v_{vzd} a $v_{\text{ráz}}$ následující výrazy pro $v_{\text{ráz}}$ čela rázové vlny a rychlost v_{vzd} vrstvy komprimovaného vzduchu:

$$v_{\text{ráz}} = \sqrt{\frac{p - p_0}{\rho - \rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho}} , \quad v_{\text{vzd}} = \sqrt{\frac{p - p_0}{\rho_0} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho}}$$

Protože člen $\rho (\rho - \rho_0)^{-1}$ je zřejmě větší než 1, rychlost čela rázové vlny je vždy větší než rychlost stlačeného vzduchu v rázové vlně.

Vyjádříme-li hustotu pomocí měrného objemu plynu, dostaneme pro rychlost $v_{\text{ráz}}$ čela vlny další vztah:

$$v_{\text{ráz}} = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta V_0}} V_0^2$$

Tato rovnice umožňuje rozhodnout o tom, jak se rázová vlna mění během svého šíření. V prvním okamžiku je tlaková amplituda nárazové vlny značně veliká. Ale jak se nárazová vlna šíří atmosférou, tak pohlcuje vzdušné prostředí její energii a tím se zároveň zmenšuje její tlaková amplituda. Při značném poklesu tlakové amplitudy přejde vlna nárazová ve vlnu akustickou a poslední rovnice potom přejde ve výraz pro rychlost zvukové vlny ve vzduchu.

Na závěr ještě doplníme, že *A. A. Čerenkovem* objevené vyzařování elektromagnetických vln částicí s elektrickým nábojem, která se prostředím pohybuje rychlostí převyšující fázovou rychlost světla v tomto prostředí, je do jisté míry analogické zde popsané rázové vlně.

Před 200 rokmi zomrel Ján Andrej Segner

RNDr. ONDREJ PÖSS,
UKo Bratislava



Dňa 5. októbra 1977 je tomu 200 rokov, čo v Halle zomrel bratislavský rodák, fyzik svetového mena, Ján Andrej Segner. Narodil sa 10. októbra 1704 v meštianskej rodine v Bratislave. Jeho otec Michal Segner bol obchodníkom a Segnerovská rodina patrila medzi najpoprednejšie rodiny v Bratislave. Rodný dom J. A. Segnera je na Michalskej ulici č. 7.

Školské vzdelanie získal J. A. Segner v Bratislave a v Rábe. Roku 1724 išiel do Debrecína, kde pobudol približne rok. Roku 1725 sa zapísal na lekársku fakultu univerzity v Jene, ale priniesol si so sebou aj mnohé iné záujmy, predovšetkým o matematiku, fyziku a prírodné vedy vôbec. Už počas štúdia na lekárskej fakulte uverejnil rozpravu z matematiky (1725) a rozpravu z chémie (1726). Lekársky diplom získal r. 1729, za doktora medicíny bol promován roku 1730.

Po absolvovaní štúdia Segner vykonával lekársku prax v Bratislave. Po roku ho *Matej Bel* (významný bratislavský geograf a historik) odporučil debrecínskemu mestskému notárovi, kde Segner prijal miesto mestského lekára. Po roku odišiel do Jeny. V Jene uzavrel manželstvo so svojou študentskou láskou — s dcérou profesora *Teichmeiera*.

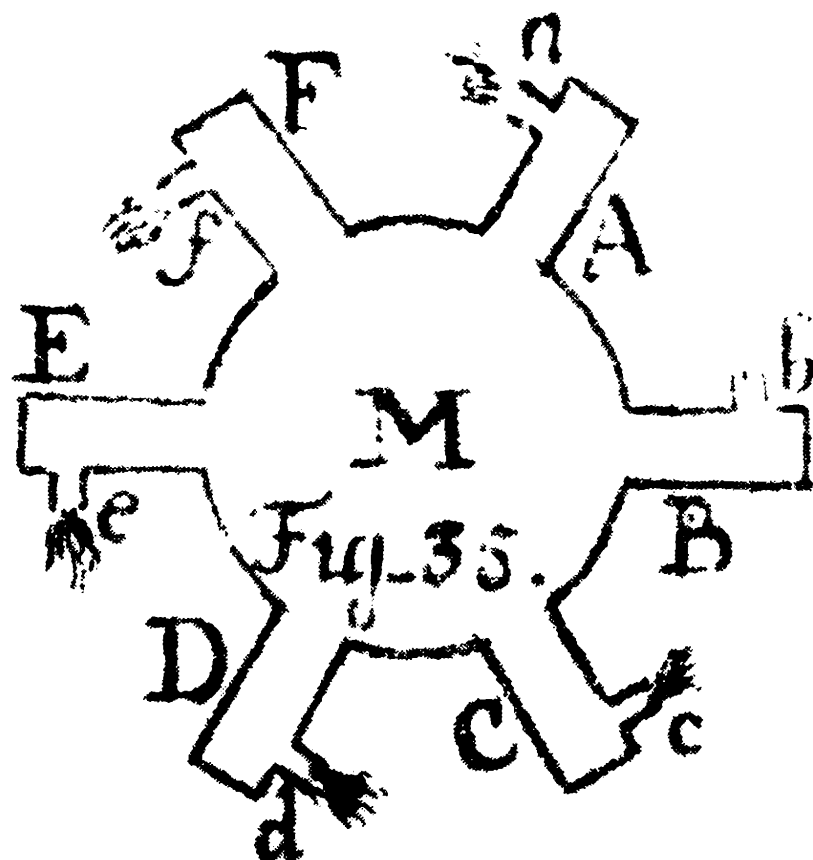
Vedecká práca Segnera začína od tohto obdobia. Už roku 1733 sa stáva riadnym profesorom matematiky na univerzite v Jene. Roku 1735 mal ísť ako profesor na univerzitu do Halle, prijal však pozvanie na univerzitu do Göttingenu, kde viedol katedru matematiky, fyziky a chémie. V Göttingene pôsobil Segner 20 rokov. Roku 1755 odišiel ako profesor na univerzitu do Halle, kde pracoval do svojej smrti 5. októbra 1777.

Ján Andrej Segner bol typickým predstaviteľom učeného sveta 18. storočia. Bol lekárom, matematikom, fyzikom, astronómom, chemikom, botanikom a aj filozofom. Avšak ku koncu života skončil s polyhistorstvom a venoval sa predovšetkým fyzike, pretože sám zistil, že venovať sa do hĺbky viacerým vedným odborom nie je v ľudských silách. Doteraz sa z jeho pozostalosti uvádza asi 80 prác, no ďalšie sa pravdepodobne ešte objavujú. Žiaľ, do našich čias sa zachovalo už iba málo pôvodných Segnerových prác.

Najúspešnejšími Segnerovými prácami boli práce z oblasti mechaniky pevných látok a kvapalín. Roku 1750 vydal súbor šiestich prác „Šesť programov o hydraulike“. Názvy jednotlivých prác sú tieto:

1. Niekoľko téz o povahe kvapalín,
2. Doplnky J. A. Segnera k statii o povahe kvapalín,
3. O konkávnom povrchu kvapalín,
4. Kvapaliny s konvexným povrchom,
5. Názor o hydraulickom stroji,
6. Výpočítanie objemu opísaného hydraulického stroja a jeho účinku.

V prvých štyroch prácach Segner podáva súbor dovtedy známych poznatkov o povahe kvapalín. Tvrdí, že kvapaliny sa skladajú z veľmi malých častíc určitého tvaru, ktoré sa vyznačujú ťažou. Uvažuje o silách pôsobiacich medzi týmito časticami. Skúma konkávne a konvexné povrchy a tu rozoberá silové pôsobenie medzi kvapalinou a stenou nádoby. Pri výpočtoch používa aj integráciu a počíta s nekonečne malými prvkami. Celkove sú výpočty veľmi neprehľadné, komplikujú ich mnohé geometrické úmery a zbytočné používanie písma. Táto spleť patrí



Obr. 1

však k dobovým formám. Najväčší význam pre teóriu hydraulických strojov má piata a šiesta časť, kde Segner oboznamuje so svojimi úvahami a pozorovaniami. Z voľne zavesenej valcovej nádoby vyčnieva na boku rúrka s otvorom. Ak z otvoru vyteká voda, následkom reaktívnej sily sa nádoba vychýli na opačnú stranu. Segner zavesil valec s vodou aj pod vyčerpaný sklenený zvon a dokázal, že jav sa odohráva aj vo vákuu, ba že vzduch predstavuje skôr odpor než pohonnú silu. Týmto sa Segner stal objaviteľom *princípu reaktívnej sily*. Už aj predtým sa používali zariadenia poháňané reaktívnou silou (napr. Herónova banka, alebo strely, ktoré používali pri obliehacích bojoch Turci), avšak pohyb sa vysvetľoval na základe odporu, ktorý kladie vzduch unikajúcej pare alebo plynom. V šiestej kapitole oboznamuje Segner so svojím kolesom. Vyobrazenie Segnerovho kolesa z jeho originálnej práce je na obr. 1. Je zaujímavé, že tomuto súboru prác neprpisuje veľký význam ani sám Segner. Píše: „Nájdu sa takí, čo budú túto prácu považovať za zbytočnú. Hoci, keď sa v prírodovede zaoberáme akoukoľvek čiastkovou otázkou, nikdy ju nemáme pokladať za zbytočnú.“ Pravdivosť Segnerových slov sa vo vede často potvrdila.

V tejto súvislosti je potrebné spomenúť priateľstvo Segnera s veľduchom 18. storočia — s *Leonhardom Eulerom*. Na Eulerove odporúčanie

profesor matematiky a fyziky na univerzite v Halle: „Možno aj iní bádatelia sa v mechanike zaoberali takými osami prechádzajúcimi centrom zotrvačnosti, okolo ktorých sa môže teleso voľne pohybovať za predpokladu, že momenty centrifugálnej sily, ktoré vznikajú pri otáčaní, sa vzájomne rušia. Ale veľmi pochybujem, že by bol niekto pred Eulerom objavil, že všeobecnou vlastnosťou hociktorého telesa je, že sú tri takéto voľné osi, okrem pána Segnera, ktorý odborne dokázal túto vlastnosť vo svojej práci *Specimen theoriae turbinum*, vydanej v Halle roku 1755.“

Druhou oblasťou, ktorou sa Segner zaoberal, je optika. Významnejšie sú dve jeho práce: „*O výnimočnosti svetla*“ a „*O ohni*“. V prvej práci predkladá svoj názor o svetle. Svetlo považuje za pohybujúcu sa svetelnú hmotu, ktorá sa vzdaluje od svietiacich telies a prichádza k našim očiam. Domnieva sa, že svetlo sa šíri v časticiach a vzdialenosť dvoch častíc je päťnásobok priemeru Zeme. Práca „*O ohni*“ je iba zmesou pohybovej teórie tepla. Zdôrazňuje, že teplo sa nemôže presunúť z chladnejšieho telesa na teplejšie a že na horenie je potrebný vzduch.

Známy je jeho príspevok „*O archimedovskom zrkadle*“. Tu odvodil základné zákony geometrickej optiky a podrobne sa zaoberá parabolickými zrkadlami. Tvrdí, že Archimedes mohol zostrojiť veľké parabolické zrkadlo, ale podpáliť rímske lode útočiace na Syrakúzy pomocou nich nemohol.

Významnou zložkou Segnerovej práce bolo aj písanie učebníc. Jeho učebnice matematiky a fyziky patrili v tom čase medzi najuznávanejšie. Najznámejšia Segnerova učebnica je „*Úvod do prírodovedy*“. Prvé vydanie vyšlo v Göttingene roku 1746 v nemeckej reči. Táto učebnica dosiahla viacej vydaní, pričom Segner ju postupne dopĺňal a opravoval. Na vtedajšie pomery to bola veľmi moderná učebnica, čo dokumentuje aj rozčlenenie látky. Fyziku rozčlenil do 10 kapitol: 1. O všeobecných vlastnostiach telies. 2. O rovnováhe. 3. O rovnováhe kvapalín. 4. O plynoch. 5. O príťažlivej sile. 6. O ohni. 7. O svetle. 8. O pohyboch pochádzajúcich od rozličných účinkov síl. 9. O nebeských telesách. 10. O atmosferických javoch. Segner sa snažil dodržiavať zásadu, aby sa každý dôležitý jav podložil experimentom. Z tejto učebnice vidieť, že Segner bol dobrým pedagógom.

Ján Andrej Segner bol jeden z mála našich fyzikov, ktorý sa v 18. a 19. storočí stal uznávaným vo svete. Podobne ako M. Hell a J. Petzval aj Segner sa stal známym len vďaka svojmu pôsobeniu vo vyspelých krajinách. V tom čase vyučovaní fyziky na území dnešného Slovenska chýbala patričná úroveň, pretože ťažisko vyučovania bolo v latine a teológii. Taktiež na vedeckú prácu v oblasti fyziky chýbali možnosti a príležitosti. Preto venujme spomienku nášmu rodákovi, ktorý sa dokázal presadiť a objavil princíp reaktívnej sily, princíp, ktorý je základom teórie vodných turbín a aj reaktívnych motorov.

NAŠE SOUTĚŽ

V soutěži o ceny, kterou jsme vypsalí ve druhém čísle Rozhledů, otiskujeme další příklady, a to z fyziky. Řešení těchto příkladů upravená podle návodu v uvedeném čísle zašlete nejpozději do konce března 1978 na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13, PSČ 12 134 s označením Naše soutěž.

Úlohy k řešení

Fyzika

1. K určování stáří archeologických předmětů organického původu se používá metoda založená na měření množství radiouhlíku ^{14}C , který se do rostlin dostává ze vzduchu přijímáním CO_2 a do živočišného organismu pak rostlinnou potravou. Během života organismu se sice radiouhlík rozpadá, ale je neustále potravou doplňován, takže je v každém organismu určitá rovnováha. Uhynutím organismu přestává příjem potravy (u rostlin příjem CO_2); zásoba ^{14}C se neobjevuje a nashromážděný radiouhlík se rozpadá. Jelikož zákon rozpadu radioaktivních látek je znám, lze určit dobu uplynulou od uhynutí organismu, tedy stáří předmětu organického původu, změříme-li jednak množství radiouhlíku v živém organismu (předpokládá se, že se během dlouhé historické doby nezměnilo) a jednak množství zbylého radiouhlíku v předmětu organického původu.

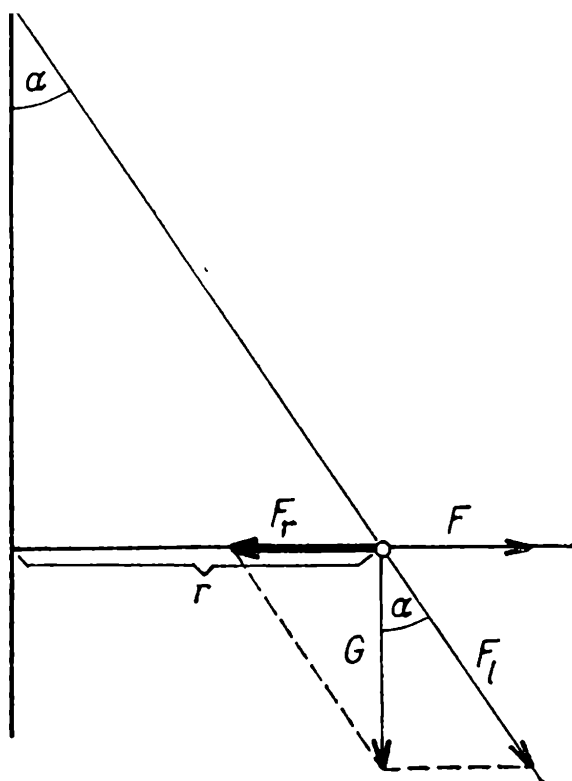
Určete stáří dřevěného předmětu nalezeného v jedné z egyptských pyramid, u kterého bylo zjištěno, že jeho měrná aktivita radiouhlíku ^{14}C činí $3/5$ měrné aktivity téhož izotopu v právě pokácených stromech. Poločas rozpadu ^{14}C je roven 5570 let. (Měrnou aktivitou rozumíme aktivitu jednotkové hmotnosti látky).

Zdeněk Janout

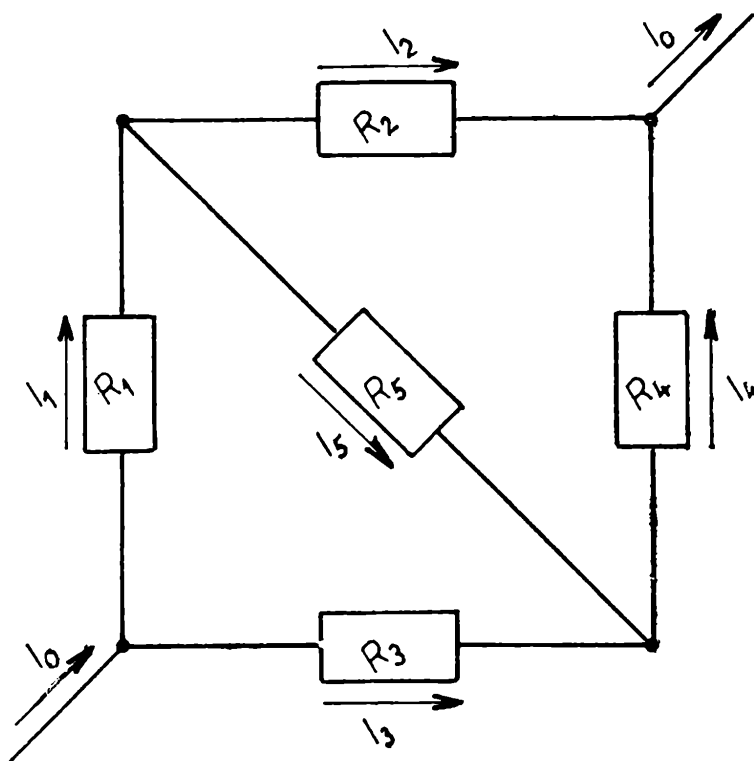
2. Vypočítejte: a) hmotnostní úbytek (v jednotkách u) a vazbovou energii (v MeV) jádra izotopu uhlíku ^{12}C , b) energii (v MeV), kterou je zapotřebí dodat jádru ^{12}C , abychom je rozdělili na tři stejné částice. Při výpočtu použijte následující hodnoty hmotností neutrálních atomů: uhlíku 12,000 000 u , vodíku 1,007 825 u , hélia 4,002 604 u a neutronu 1,008 665 u . Jednotka u se nazývá atomovou hmotnostní jednotkou; platí $1\ u = 1,6060 \times 10^{-27}\ \text{kg}$.

Poznámka: Jelikož při výpočtech se odečítají dvě přibližně stejné velká čísla, je zapotřebí vzít hmotnosti se všemi platnými místy.

Zdeněk Janout



Obr. 1



Obr. 2

3. V potoku, ktorého koryto má prierez $S = 0,5 \text{ [m}^2\text{]}$, tečie voda priemernou rýchlosťou $v = 0,2 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}\text{]}$ a padá vodopádom s výšky $h = 8 \text{ [m]}$. Stanovte výkon potoka obecnou veličinovou rovnicou a obecný výsledok upravte na číselnú rovnicu, aby výkon bol v jednotkách $[\text{kW}]$ resp. v jednotkách $[\text{k}]$. — Hustota vody je $1 \text{ [g} \cdot \text{cm}^{-3}\text{]}$.

Evžen Říman

4. Vodivá guľôčka, ktorej hmotnosť je $m = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ [kg]}$, je nabitá elektrickým nábojom Q neznámej veľkosti; visí na izolujúcom (nehmotnom) vlákne dĺžky $l = 26 \text{ [cm]}$. Druhý koniec vlákna je upevnený na veľkej zvislej kovovej doske, ktorej plošná hustota náboja je $\sigma = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ [C} \cdot \text{m}^{-2}\text{]}$. Silou elektrického odpudzovania vzdiali sa guľôčka od steny na vzdialenosť $r = 10 \text{ [cm]}$. Vypočítajte veľkosť náboja Q na guľôčke (obr. 1).

Evžen Říman

5. Vypočítajte hodnoty prúdov I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 v mŕstku podľa nákresu (obr. 2). Dané sú odpory R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 a prúd I_0 . Označené smery prúdov boli zvolené ľubovoľne. Riešte obecné! (Skúšku môžete spraviť dosadením $R_1 = 2 \Omega, R_2 = 5 \Omega, R_3 = 4 \Omega, R_4 = 3 \Omega, R_5 = 6 \Omega, I_0 = 1 \text{ A}$).

Evžen Říman

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Loňské soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních se účastnilo 34 jednotlivců a 1 kolektiv. Proti loňsku, kdy bylo celkem 47 jednotlivců a 7 kolektivů, je to překvapující zhoršení. Po zhodnocení všech soutěžních prací uvádíme nejúspěšnější řešitele v jednotlivých vědních oborech:

Matematika :

1.—2.	Jaroslav Hančl, G Bílovec	56 bodů
1.—2.	Luděk Klimeš, G Blansko .	56 bodů
3.	Rostislav Urban, G Ostrava .	54 bodů
4.	Pavel Kolařík, G Bílovec	53 bodů
5.	Rupert Leitner, G Semily	51 bodů
6.	Igor Böhm, SPŠS Zvolen	48 bodů
7.	Jaroslav Hájek, G Bílovec	44 bodů
8.	Jan Matějka, G W. Piecka Praha	38 bodů
9.	Miroslav Kotrla, SPŠ Kutná Hora	34 bodů
10.	Jozef Legény, G Partizánske	33 bodů

Fyzika :

1.	Jan Kuchař, G Jihlava	30 bodů
2.	Hana Čermáková, G Bílovec	29 bodů
3.	Lubomír Mucha, G Prešov	28 bodů
4.— 5.	Lubica Lacinová, G J. Hronca, Bratislava	25 bodů
4.— 5.	Vladimír Barták, SPŠ Jihlava	25 bodů
6.	Josef Stuhl, G Jihlava .	24 bodů
7.	Rostislav Urban, G Ostrava	23 bodů
8.	Martin Václavík, G Vsetín	23 bodů
9.—11.	Marián Bezák, G Nitra	22 bodů
9.—11.	Tomáš Morcinek, G Karviná	22 bodů
9.—11.	Jindřich Reclik, G Karviná	22 bodů

Konstrukční geometrie :

1.—2.	Luděk Klimeš, G Blansko .	18 bodů
1.—2.	Rostislav Urban, G Ostrava .	18 bodů
3.—4.	Pavel Kolařík, G Bílovec	13 bodů
3.—4.	Rupert Leitner, G Semily	13 bodů

Nakonec připojujeme abecední seznam všech úspěšných řešitelů. Za jménem řešitele uvádíme ústav, na němž řešitel studoval:

Vladimír Barták, SPŠ Jihlava, *Marián Bezák*, G Nitra, *Thomas Blecha*, G Banská Bystrica, *Igor Böhml*, SPŠS Zvolen, *Hana Čermáková*, G Bílovec, *Jozef Čermák*, SPŠE Košice, *Jaroslav Hájek*, G Bílovec, *Jaroslav Hančl*, G Bílovec, *V. Hrabě*, G Český Brod, *Mária Hrnčiarová*, G Banská Bystrica, *Vlastislav Januš*, G Pelhřimov, *Zdena Karlíková*, G Zlaté Moravce, *Luděk Klimeš*, G Blansko, *Pavel Kolařík*, G Bílovec, *Miroslav Kotrla*, SPŠ Kutná Hora, *Oskar Křenek*, G Bílovec, *Jan Kuchař*, G Jihlava, *Lubica Lacinová*, G J. Hronca Bratislava, *Jozef Legény*, G Partizánske, *Rupert Leitner*, G Semily, *Radomír Lukáš*, G Havířov, *Drahomír Malina*, G Semily, *Jan Matějka*, G W. Piecka Praha, *Tomáš Morcinek*, G Karviná, *Lubomír Mucha*, G Prešov, *Jindřich Reclík*, G Karviná, *Vít Soušek*, SPŠS Nové Město n/Metují, *Josef Stuhl*, G Jihlava, *Jiří Svoboda*, G tř. kp. Jaroše, Brno, *Miroslav Šulc*, G Turnov, *Josef Tkadlec*, G Bílovec, *Rostislav Urban*, G Ostrava, *Martin Václavík*, G Vsetín, *Zdeněk Weiss*, G J. Fučíka Plzeň, *Kolektiv 4. D třídy*, G Párovce.

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních děkuje všem řešitelům za projevený zájem, vítězům blahopřeje a nejúspěšnějším z nich zašle z prostředků ministerstva školství i SPN věcné výhry.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Fyzika

1. Určete množství tepla (v joulech), které se uvolní v 10 mg preparátu obsahujícím pouze radioaktivní jádra polonia ^{210}Po za dobu rovnou poločasů rozpadu jader ^{210}Po . Jádro polonia se rozpadá podle schématu: $^{210}\text{Po} \rightarrow ^{206}\text{Pb} + ^4\text{He}$. Kinetická energie vysílané částice alfa je rovna

5,3 MeV ($1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). Úlohu nejdříve řešte obecně a pak číselně.

Zdeněk Janout

(Došlo 25 řešení)

Řešil Jan Kuchař, III. A, gymnázium v Jihlavě:

Při rozpadu jádra polonia se po vyslání částice alfa bude vzniklé jádro olova pohybovat podle zákona akce a reakce opačným směrem než částice alfa, přičemž podle zákona zachování hybnosti platí

$$m_2 v_2 = m_1 v_1, \quad (1)$$

kde m_1, v_1 jsou hmotnost a rychlost částice alfa, m_2, v_2 jsou hmotnost a rychlost jádra olova.

Podle zákona zachování energie je celková uvolněná energie W_0 při rozpadu jednoho jádra polonia rovna součtu kinetické energie W_2 jádra olova a kinetické energie W_1 částice alfa. Tedy

$$W_0 = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (2)$$

Jestliže za v_2 dosadíme ze vztahu (1), dostaneme

$$W_0 = W_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = W_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2} \right), \quad (3)$$

kde A_1, A_2 jsou nukleonová (hmotnostní) čísla částice alfa a jádra olova.

Jestliže je v preparátu n jader, potom teplo Q vzniklé za dobu poloměru rozpadu (předpokládáme-li, že se všechna kinetická energie částic a jader přemění v teplo) je

$$Q = \frac{n}{2} \cdot W_0. \quad (4)$$

Počet atomů, a tedy i jader, v m kg preparátu polonia ^{210}Po je

$$n = \frac{m}{210} N_A, \quad (5)$$

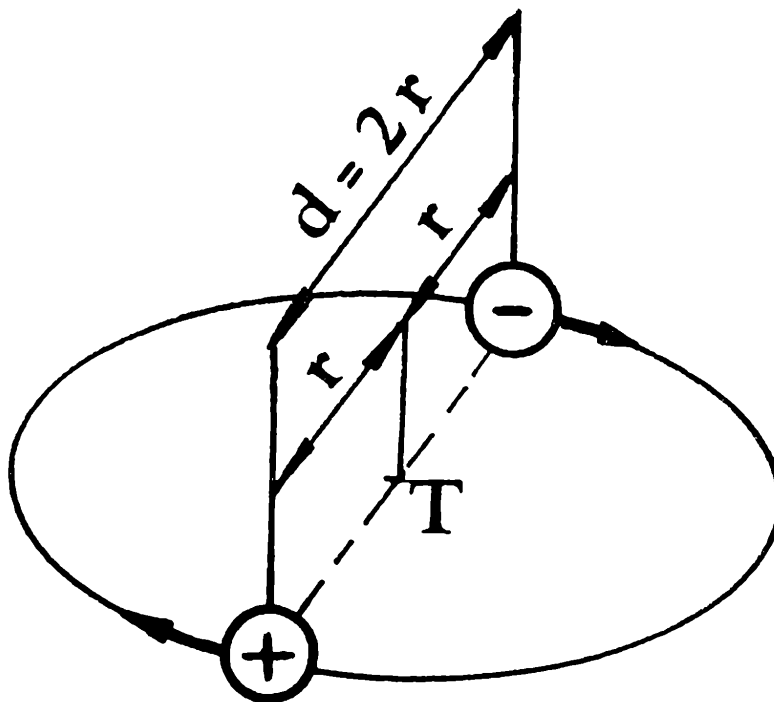
kde N_A je Avogadrova konstanta ($N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$).

Dosadíme-li vztahy (3) a (5) do vztahu (4), dostaneme pro teplo Q

$$Q = \frac{m N_A}{2 \cdot 210} \cdot W_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2} \right). \quad (6)$$

Pro hodnoty $m = 10 \text{ mg}$, $W_1 = 5,3 \text{ MeV}$, $A_1 = 4$, $A_2 = 206$ je

$$\begin{aligned} Q &= \frac{6,023 \cdot 10^{26} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 5,3 \cdot 10^6}{2 \cdot 210} \left(1 + \frac{4}{206} \right) \text{ eV} = \\ &= \frac{6,023 \cdot 5,3 \cdot 1,02}{4,2} \cdot 10^{25} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 12,4 \cdot 10^3 \text{ kJ}. \end{aligned}$$



Závěr: Teplo vzniklé rozpadem preparátu polonia za dobu poločasu rozpadu je dáno vztahem (6). Pro zadané hodnoty je $Q = 12,4 \cdot 10^3$ kJ.

Poznámka autora: Většina řešitelů se dopustila té chyby, že zapomněla na kinetickou energii vzniklého jádra olova.

2. Užitím Bohrovy teorie atomu vypočítejte pro pozitronium (soustava tvořená částicemi elektronem a pozitronem, které rotují kolem společného těžiště):

a) vzdálenost mezi oběma částicemi v základním stavu a jejich obvodovou rychlost. Porovnejte vypočtenou rychlost s druhou kosmickou rychlostí.

b) energii (v eV) pozitronia v základním stavu a vlnovou délku elektromagnetického záření, které může pozitronium ionizovat. Úlohu řešte nejdříve obecně a potom číselně.

Zdeněk Janout

(Došlo 22 řešení)

Řešila Hana Čermáková, II. C, gymnázium Bílovec:

a) Elektron a pozitron mají stejnou hmotnost, kterou označíme m , a opačné náboje. Obíhají kolem společného těžiště, přičemž zachovávají konstantní vzdálenost. Poněvadž mají stejnou vzdálenost od těžiště a stejnou úhlovou rychlost, mají také stejnou obvodovou rychlost. Vzájemná vzdálenost d je rovna (viz obrázek).

$$d = 2r, \quad (1)$$

kde r je poloměr jejich dráhy, kterou považujeme za kruhovou.

Podle prvního Bohrova postulátu je celkový moment hybnosti celo-
číselným násobkem $\frac{h}{2\pi}$, tj.

$$mvr + mvr = n \cdot \frac{h}{2\pi},$$

přitom pozitronium je v základním stavu, tedy platí $n = 1$. V před-
chozím vztahu h je Planckova konstanta. Proto

$$2 mvr = \frac{h}{2\pi}. \quad (2)$$

Odstředivá síla působící při obíhání, kterou je síla elektrostatická

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{d^2},$$

je v rovnováze se silou dostředivou

$$F_d = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

kde ϵ_0 je permitivita vakua, e prostá hodnota náboje elektronu.
Tedy

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{d^2} = 2m \frac{v^2}{d}. \quad (3)$$

Dosazením za r z (1) dostaneme vztah (2) ve tvaru

$$mvd = \frac{h}{2\pi}. \quad (4)$$

Rovnice (3) a (4) tvoří soustavu dvou rovnic pro neznámé v a d . Řešením
soustavy rovnic dostáváme hledané vztahy pro v a d

$$d = \frac{2 \epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}, \quad (5)$$

$$v = \frac{e^2}{4 \epsilon_0 h}. \quad (5')$$

Numerický výpočet:

$$d = \frac{2 \cdot (6,6 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 8,8 \cdot 10^{-12}}{3,1 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 1,06 \cdot 10^{-10} \text{ m},$$

$$v = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{4 \cdot 8,8 \cdot 10^{-12} \cdot 6,6 \cdot 10^{-34}} = 1,10 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Druhá kosmická rychlost pro zemský povrch je určena vztahem

$$v_k = \sqrt{2 R g},$$

kde R , g jsou poloměr a gravitační zrychlení Země. Dosazením číselných hodnot dostaneme

$$v_k = \sqrt{2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot 9,81} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Porovnáme v a v_k :

$$\frac{v}{v_k} = \frac{1,10 \cdot 10^6}{1,12 \cdot 10^4} = 10^2.$$

Závěr: Vzdálenost mezi oběma částicemi v základním stavu je $1,06 \cdot 10^{-10}$ m, jejich obvodová rychlost je $1,10 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tato rychlost je 100krát větší než druhá kosmická rychlost.

b) Celková energie pozitronia je součtem jeho potenciální a kinetické energie, tj.

$$W = W_p + W_k \quad (6)$$

Přitom

$$W_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{d}, \text{ (elektrostatická potenciální energie),}$$

$$W_k = W_{\text{pozitronu}} + W_{\text{elektronu}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = m v^2. \quad (6')$$

Z podmínky pro stabilitu dráhy (3) vyjádříme rychlost

$$v = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m d},$$

kterou dosadíme do vztahu pro kinetickou energii (6')

$$W_k = m \cdot \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m d} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d},$$

tedy celková energie pozitronia je

$$W = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d}. \quad (7)$$

Dosadíme-li z (5) do (7), dostaneme pro celkovou energii vztah

$$W = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\pi m e^2}{2\epsilon_0 h^2} = -\frac{m e^4}{16\epsilon_0^2 h^2}. \quad (8)$$

Tato energie je menší než nula, poněvadž je vazebná. Ionizační energie má stejnou velikost, ale je kladná, tedy $W_i = |W|$.

Získá-li pozitronium tuto energii, například absorpcí elektromagnetického záření frekvence

$$\nu = \frac{W_i}{h}, \quad (9)$$

dojde k roztržení pozitronia na volný elektron a pozitron. Vyjádříme-li

ve vztahu (9) frekvenci pomocí vlnové délky $\lambda = c/\nu$, dostaneme hledaný vztah

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{W_i}, \quad (10)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu.

Numerický výpočet:

$$W = - \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{16 \cdot (8,8 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6,6 \cdot 10^{-34})^2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = - 6,8 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 182 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 182 \text{ nm}.$$

Závěr: Energie pozitronia v základním stavu je rovna $-6,8 \text{ eV}$, vlnová délka elektromagnetického záření potřebná k dosažení ionizace pozitronia je rovna 182 nm .

Poznámka autora: Převážná část řešitelů se dopustila té chyby, že v prvním Bohrově postulátu nebrala v úvahu moment hybnosti celého pozitronia, nýbrž jen moment hybnosti jedné z částic.

olympiády

Třetí kolo kat. A XVIII. roč. FO

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno

Třetí kolo kat. A XVIII. roč. FO se konalo ve Východoslovenském kraji v Košicích v době od 28. do 30. dubna 1977.

Účastníci byli vybráni z nejlepších řešitelů 2. kola v jednotlivých krajích, a to všichni až po klasifikaci 2,2,3,4 (s permutací) a 3 z klasifikace 1,1,4,4. Klasifikace byla opět čtyřstupňová. Celkem bylo pozváno 80 úspěšných řešitelů 2. kola. Z pozvaných bylo 71 z gymnázií a 9 ze SPŠ; z nich bylo 71 ze IV. ročníku a 9 z III. ročníku.

Třetí kolo bylo slavnostně zahájeno 28. dubna v 17 hod. v aule SPŠ elektrotechnické v Košicích za účasti děkana *prof. dr. Juraje Daniela-Szabó*, zástupce MŠ SSr, úši Vojtěcha Nyitraie, zástupkyně SSM a zástupce OŠ VS KNV. Před zahájením byli členové ÚVFO přijati děkanem přírodovědecké fakulty UPJŠ.

Tabulka 1.

Kraj	Počet všech pozvaných řešitelů	Počet všech úspěšných řešitelů	Z toho počet vítězů	Počet nedosta- vivších se	Počet neúspěš- ných
Praha	11	9	3		2
Stř. Č.	6	5	3		1
JČ	2	1			1
ZČ	4	2		1	1
SČ	5	2	1	1	2
VČ	15	7	3		8
JM	13	9	4		4
SM	7	3			4
Blava	6	1			5
ZS	2	1			1
StřS	4	2	2		2
VS	5	3			2
Celkem	80	45	16	2	33

Teoretické úlohy řešili soutěžící 29. dubna na SPŠ elektrotechnické. Odpoledne byl uspořádán zájezd na Duklu a na Domašskou přehradu. Laboratorní úlohu řešili účastníci 30. dubna v laboratořích přírodovědecké fakulty UPJŠ. Po ukončení práce odjžděli soutěžící domů.

Prvá tabulka uvádí pro každý kraj počet pozvaných řešitelů, počet úspěšných řešitelů, z toho počet vítězů, počet nedostavivších se řešitelů a počet neúspěšných řešitelů. Z 80 soutěžících bylo 45 úspěšných řešitelů a z toho 16 vítězů. Jména vítězů jsou uvedena v tabulce 2.

Všech 16 vítězů dostalo od MŠ SSR odměnu po 300,— Kčs a dva další úspěšní řešitelé po 100,— Kčs.

K získání celkového obrazu o úspěších jednotlivých krajů ve FO všimněme si ještě výsledků třetích kol ze všech 18 ročníků.

a) Účastníci pro 3. kolo se vybírají podle klasifikace v 2. kole v kraji, a to do celkového počtu 80 každý rok. Pořadí krajů podle počtu účastníků ve 3. kole je toto:

1. Praha 22,2 %, 2. JMK 14,4 %, 3. SMK 11,2 %, 4. VČK 11,1 %.

b) Pořadí podle počtu úspěšných řešitelů ve 3. kole je toto:

1. Praha 26,1 %, JMK 18,8 %, 3. VČK 11,4 %, 4. Blava + ZSK 10,2 %. Vyšší procento úspěšných než účastníků znamená, že se kraj lépe uplatnil.

c) Pořadí podle počtu vítězů ve 3. kole je toto:

1. Praha 28,1 %, 2. JMK 24,8 %, 3. VČK 11,2 %, 4—5. SMK a Blava + ZSK 8,2 %. Vyšší procento vítězů než úspěšných v kraji znamená, že se účastníci kraje lépe umístili.

Tabulka 2.

Vítězové 3. ko a kategorie A XVIII. ročníku FO

Umístění	Jméno	Kraj	Škola	Roč.
1.— 2.	Turek Ilja	VČ	G Hradec Králové	3
1.— 2.	Matěna Jaromír	VČ	G Hradec Králové	3
3.	Svoboda Jiří	JM	G Bo, kpt. Jaroše	4
4.— 5.	Kolafa Jiří	Pha	G P 2, W. Piecka	4
4.— 5.	Kotrla Miroslav	StřČ	SPŠ Kutná Hora	4
6.	Klimeš Luděk	JM	G Blansko	4
7.	Jenčík Karel	StřČ	SPŠ Kutná Hora	4
8.	Kučírek Petr	JM	G Bo, Koněvova	3
9.—10.	Leitner Rupert	VČ	G Semily	4
9.—10.	Quittner Pavol	SS	G Prievidza	4
11.	Halabala Jindřich	JM	G Bo, Křenová	4
12.—14.	Kohout Petr	Pha	SPŠE P 2, Ječná	4
12.—14.	Kalousek Zdeněk	SČ	G Jablonec n. N.	3
12.—14.	Takáč Peter	SS	G Šafárikovo	4
15.—16.	Mrkvička Miloš	Pha	G P 1, Štěpánská	4
15.—16.	Bázler Jan	StřČ	G Ml. Boleslav	4

d) Nejdůležitější je však, jaká část účastníků z kraje se úspěšně uplatnila ve 3. kole. Pořadí je toto:

1. JMK 71,2 %, 2. Praha 64,8 %, 3. VČK 56,4 %, 4. Blava + ZSK 50,4 % a ostatní kraje jsou již pod 50 % až do 40,0 %.

různé

Nezapomenutelné čtvrtstoletí

Kdybych měl psát článek o životním jubileu nějaké významné osobnosti, byl bych na rozpacích, co do příspěvku zařadit, které momenty v oslavencově životě vyzvednout, jak hodnotit jeho dílo a jak popsat jeho vliv na naše vrstevníky. Stejně rozpaky mne provázejí dnes, kdy oslavencem není žádná konkrétní osobnost, ale vědecká instituce. Mateematický ústav ČSAV (s pobočkou v Brně) si totiž na sklonku roku 1977 připomíná už čtvrtstoletí své existence.

Měl jsem to štěstí, že jsem byl roku 1952 přítomen, když ústav vznikl. Jak to bylo? V romantickém prostředí na Loretánském náměstí v Praze měl své sídlo *Ústřední ústav matematický*, k jehož zaměstnancům jsem patřil. Většina z nás byli mladí lidé, vědečtí aspiranti, jenom několik vedoucích pracovníků patřilo ke starší generaci. Když byla na podzim 1952 založena Československá akademie věd, byl náš ústav reorganizován a zařazen do svazku vědeckých ústavů ČSAV. Vznik *Matematického ústavu ČSAV* se datuje dnem 17. listopadu 1952. Začala se rozvíjet nová práce, řešily se nové úkoly, přicházeli noví lidé, ústav se rozrůstal a stával se známým i v zahraničí. Prostory na Loretánském náměstí byly záhy těsné, i následovalo několikrát stěhování. Dnes má ústav své ředitelství v Žitné ulici v Praze 1.

V čele ústavu stáli po celou dobu významní matematikové, již byli i výbornými organizátory vědecké práce. Prvním ředitelem byl akademik *Eduard Čech*, druhým člen korespondent *Vladimír Knichal*, třetím akademik *Josef Novák* a nyní ústav vede prof. dr. *Jiří Fábera*, CSc. V krátkém pojednání nemohu rozebrat všechny vědecké obory, které se zde pěstovaly a pěstují. Patří sem matematická analýza, algebra, geometrie, počet pravděpodobnosti a matematická statistika, topologie, numerické metody, matematická logika a také aplikace těchto disciplín. Pořádají se vědecké semináře, letní školy i mezinárodní kongresy a v ústavě mají svou redakci též tři matematické časopisy (*Časopis pro pěstování matematiky*, *Aplikace matematiky* a *Czechoslovak mathematical journal*).

Vědecká práce je specializována do jednotlivých oddělení. Tak je tu např. oddělení obyčejných diferenciálních rovnic, oddělení parciálních diferenciálních rovnic, dále numerických metod, teorie grafů a matematické logiky atd. Potřeby školské daly vznik *Kabinetu pro modernizaci vyučování matematice*, jak asi vědí všichni, kdo mají blízko ke školským záležitostem. Naše studenty bude zajímat, že jedním ústavním úkolem je i matematická olympiáda. Tato soutěž vznikla před léty z podnětu akademika Eduarda Čecha a na její organizaci se Matematický ústav stále podílí spolu s několika dalšími institucemi. Mladší pracovníci Matematického ústavu pomáhají při školení olympioniků, při opravách úloh, při korespondenčním semináři a starší jsou na vedoucích místech mezi organizátory soutěže. Tak akademik *Josef Novák* byl řadu let předsedou Ústředního výboru matematické olympiády a pak ho vystřídal doc. *Jan Vyšín*, CSc., jenž byl v čele rovněž po mnoho ročníků. Od založení soutěže spolupracuje s olympiádou prof. dr. *Miroslav Fiedler*, DrSc., nynější její místopředseda. Vedle své vědecké práce najde si vždycky čas, aby vymyslel zrovna ty nejpěknější úlohy a také na naše Rozhledy pamatuje každoročně nějakým problémem do rubriky Úlohy o ceny.

Naše malé rozjímání končí. Až se někteří z vás, milí čtenáři, budou rozhodovat pro vysokoškolské studium matematiky nebo příbuzných oborů, budete se hlouběji zabývat matematikou a seznámíte se jistě i podrobněji s prací Matematického ústavu ČSAV. Kéž bychom stále měli dostatek matematických adeptů pro potřeby naší milované vědy i pro pedagogické potřeby našich středních a vysokých škol!

Jiří Sedláček

Beseda členářů k 250. výročí Isaaca Newtona

JOSEF KOTYK, Pardubice

Nelze prokázatí pravdě větší službu,
než očistit ji od věcí falešných

Isaac Newton

Jan: Fyzikové naší doby si svůj život nesmírně zkomplikovali. Všechno jim je relativní. Newton by se divil...

Ema: Staré časy byly pro fyziky opravdu idylicky bezstarostné. V druhé polovině minulého století snili fyzikové dokonce již o brzkém dovršení stavby své vědy.¹⁾

Jan: A což dříve! Mnohem dříve! Před staletími! V oněch dávných dobách byly jen pojmy „napravo“ a „nalevo“ relativní.

Ema: Již ve starověké filosofii (v učení Hérakleita z Efesu aj.) se však setkáváme s názorem o koexistenci protiv, s tvrzením, že vše obsahuje v sobě svůj opak, např. že „levé“ je zároveň „pravé“ apod.

Zmatlík: Levé je zároveň pravé — tak tomu před 25 stoletími²⁾ bývalo! To by se mně docela líbilo.

Jan: Lidé věřili, že Země je plochá, pojmy „nahoru“ a „dolů“ měly tehdy ještě význam absolutní.³⁾ Je-li však Země kulatá...

¹⁾ Zakladatel kvantové teorie *Max Planck* (*1858) svěřil se za studií svému profesoru, že by se chtěl věnovat teoretické fyzice. Dostalo se mu však této odpovědi: „Mladíku, proč si kazit život věcí, která nemá žádnou perspektivu? Teoretická fyzika je věda v podstatě uzavřená.“

²⁾ Filosof *Hérakleitos z Efesu* zv. *Temný* žil v letech asi 530 až 480 před n. l.

³⁾ Ani na Newtona nezůstala záliba pro absolutno bez vlivu. Newtonovy definice absolutního prostoru, absolutního času a absolutního pohybu uvádí autor ve své „Besedě s členáři“ v *Rozhledech* roč. 55, čís. 6, str. 282 až 284.

Eva: Honza tomu zřejmě dosud nevěří!

Jan: Nikoli. Země byla přece obepluta! Od těch dob, co je prokazatelně kulatá, staly se i pojmy „nahoru“ a „dolů“ relativními. Co je pro mne nahoru, je pro mého protinožce dolů.

Zmatlík: Levé je zároveň pravé. Nahoru je zároveň dolů. To se mně začíná líbit. Různé je zároveň stejné — to je má řeč! O tom přesvědčuji mládež už řadu let.⁴⁾ Newton by se divil.

Jan: Na protější straně Země žijí lidé, kteří mají hlavu „dole“, nohy „nahore“ — a tak chodí!

Eva: Díky přitažlivosti zemské, objevené náhodně Newtonem.

Jan: Ano, náhodně! Kdyby se byl Newton jednoho památného dne neuložil po dobrém obědě na trávník ve své zahradě...

Eva: Nepřipadl by asi — míní Honza — na myšlenku všeobecné přitažlivosti hmot a gravitační zákon bychom nenazývali Newtonovým.

Ema: Ano, vypravují o tom Voltaire, Euler a jiní.⁵⁾

Jan: Newton dumal bezpochyby, zdali je právě v klidu absolutním či relativním, zdali leží pod jabloní či nad ní, když pojednou spadlo jablko. Teprve to ho podnítilo k hlubším úvahám.

Eva: Jablko? Jablko — spadlo! Padalo-li však, tedy i v Anglii směrem dolů. To mohlo být Newtonovi spolehlivým důkazem, že leží bezpečně pod jabloní.

Jan: Zajisté. Takto zabezpečen, Newton dumal dále.

Eva: Jablko totiž spadlo Newtonovi na hlavu. I rozběsklo se v hlavě Newtonově: Co by se stalo, kdyby strom byl tak vysoký, že by dosahoval až na Měsíc? Spadlo-li jablko — spadl by i Měsíc!

Jan: Měsíc však na štěstí nespadl...

Ema: Ovšem. Měsíc nespadl, protože je v pohybu. Newton věděl — sám to dokázal — že koná pohyb středový působením dostředivé síly, která míří k Zemi. Ta přivodila také volný pád jablka. Je to právě ona gravitace, přitažlivost zemská.

Jan: Jablko však nespadlo na Zemi, ale prý Newtonovi na jeho geniální hlavu. Ta trefa! Či snad šťastná náhoda? Kdyby Newton byl jen trochu namyšlený...

Eva: Náš Honza by se na jeho místě domníval, že příčinou pádu jablka byla by v tom případě jistě přitažlivost jeho moudré hlavy.

Jan: Skutečně! To Newtona nenapadlo! Mohl ostatně také předpokládat, že jakási síla pudí jablko směrem k němu, odpudivá síla ko-
runy stromu.

⁴⁾ Své názory doložil žák Zmatlík v nedávné době také v našem časopise tvrzením, že každá dvě — i nestejná — čísla jsou stejná. Viz článek „Zmatlíkova poučka“ v roč. 50, čís. 6, str. 284 a 285.

⁵⁾ Viz François-Marie Arouet de Voltaire „Základy Newtonovy filosofie“ (1738) a Leonhard Euler „Briefe ... über verschiedene Gegenstände der Physik und Philosophie“, Stuttgart 1847.

Ema: Anebo odpudivá síla z tajemného vesmíru. Bylo zjištěno, že mlhoviny se od nás vzdalují. Někteří astronomové, např. Voroncov-Veljaminov (SSSR), upozornili, že galaxie mohou na sebe navzájem působit odpudivou silou; nebylo by to prý nic nepřírodního.

Jan: Co by tomu všemu složitému působení sil, o nichž učí dnešní fyzika, Newton říkal?

Ema: Newton by se divil.⁶⁾ Mlčel by však. Newton je příkladem člověka neobyčejně tichého, stále zabraného do vědeckého myšlení. Je známo, že ani jako zástupce Trinity College v parlamentě nepronесl jiné řeči než několik slov, jimiž jednou požádal sluhu, aby — zavřel okno.

Eva: Jeden starověký filosof řekl: „Buďme tiši, neboť uslyšíme — šepot bohů...“

Ema: Bohové však odešli. Zůstali jen lidé...

„Přemnoho jest mocného,

však mocnější všeho je člověk“. (Sofoklés: Antigona.)

Ida: Newton patřil k řetězu badatelů, předávajících si staletími tajemství hmoty i síly, jež se v ní skrývá. Oceňuje zásluhy svých přímých předchůdců, Koperníka, Keplera, Galileiho, doznal skromně: „Vystoupil-li jsem dost vysoko a viděl dále než druzí, pak jen proto, že jsem stál na zádech obrů...“

Zmatlík: I já — mívám někdy zdání, že stojím na zádech filosofa-obra Hérakleita Temného, jenž hlásal: „Všechno je — a také není. Všechno se mění.“

Ida: Nic netrvá. Jasnozřivý Newton věděl, že — podle jeho vlastních slov — „před námi se rozkládá nekonečný oceán Pravdy dosud zcela neprozkoumaný...“

⁶⁾ Naší besedě se tématicky přimyká populárně-vědecká kniha Dr. Frant. Běhounka „Newton by se divil“ (katalog n. p. „Kniha“, čís. 37), kterou doporučujeme zároveň pozornosti čtenářů.

nejmladším čtenářům

V arabských pohádkách nacházíme tuto hádanku: Jedno letící hejno holubů přiletělo k jednomu vysokému stromu. Někteří z nich se posadili na strom a druzí pod něj. Promluvil jeden na stromě k těm dole: „Když jeden z vás poletí nahoru, tak vás bude jedna třetina z nás všech. V případě, že jeden z nás poletí dolů, tak nás bude stejný počet.“

Kolik holubů bylo na stromě a kolik pod ním?

Naleznete zbývající cifry při násobení stejných čísel?

$$(6 \quad) (6 \quad) \cdot (6 \quad) = \quad 9$$

Příspěvky došlé do redakce Rozhledů jsou číslovány a začíná se každý rok číslovat od jedničky. Minulý rok došlo 572 příspěvků. Kolikrát se v číslování objevila cifra 3?

Ukažte, že pro každé číslo a je trojčlen

$$a^2 + 2a + 10$$

vždy číslo kladné.

S. H.

Řešitelé úlohy dr. Komana KOLIK JE JIM LET?, uveřejněné v 8. čísle minulého ročníku Rozhledů

Do 17. května 1977 došla správná řešení od 25 čtenářů.
Jsou to:

Štefan Bajunk, Liptovský Mikuláš; Boris Bartalský s Lubošem Krajňákem, Spišská Nová Ves; Vladimír Beran, Chomutov; Ivan Brychta, Hlinsko; Jaroslav Diviš, Česká Lípa; Zdeněk Coufal, Gottwaldov; Alena Jánošová, Nitra; František Jonáš, Humpolec; Jaromír Kulháněk, Jiříkov; Jan Kuzmík, Frýdek-Místek; Anna Madlová, Bratislava; Milan Matoušek, Hlučín; Renata Nováková, Hlinsko v Čechách; Martin Országh, Topoľčany; Lydie Paučochářová, Kyjov; Ota Pösel, Karviná; Vojtěch Potočný, Žilina; Petr Stríbrný, Ostrava-Hrabůvka; Jaroslav Šmarda, Třebíč; Gustav Tobolka, Praha 6; Zdeňka Turečková, Klatovy; Eugen Viszus, Dubnica n. V.; Libor Veselý, Jihlava; Miroslav Žilínek, Gbely.

mk

Knižnica „Epsilon“

Nie často majú študenti možnosť vlastniť celú edíciu zaujímavých knížiek o matematike a jej aplikáciách v prírodovedných, technických a spoločenských vedách. Vydavateľstvo ALFA, n. p., v Bratislave takúto príležitosť poskytuje vydávaním novej edície Epsilon, ktorá je určená všetkým záujemcom o rozšírenie si rozhľadu a vedomostí z moderných matematických disciplín. Do knižnice Epsilon sú doteraz zaradené tieto publikácie:

- J. B. Dynkin a kol.: Matematické hlavolamy
- I. M. Gelfand a kol.: Súradnicová sústava
- Š. Znam: Teória čísiel
- A. Rényi: Dialógy o matematike
- J. Bosák: Grafy a ich aplikácie
- L. Kosmák: Kombinatorická teória pravdepodobnosti
- L. Kosmák: Množinová algebra
- A. Legén: O grupách a okruhoch
- I. Vajda: O informácii a štatistike
- J. Smítal: O funkciách
- T. Šalát: Reálne čísla

Prvé dve knižky už vyšli koncom roku 1976 a začiatkom roku 1977. Sú brožované, zatiaľ v jednotnej úprave a cene 5 Kčs, v rôznych nákladoch (15 000 a 3000 kusov). „Matematické hlavolamy“ sú zbierkou 111 riešených a 36 neriešených zaujímavých úloh s matematickou tematikou na náročnejšej úrovni ako bežné populárne hádanky a hlavolamy. Zaradené úlohy potrebujú často hlbšie znalosti z algebry a logiky a hlavne pozorného a hlbavého čitateľa. Gelfandova „Súradnicová sústava“ je určená pre začínajúcich záujemcov o analytickú geometriu, ktorí sú ochotní riešiť aj cvičenia, ktoré sa v ďalšom texte používajú. Prínosom je spôsob výkladu a niektoré úlohy na určovanie útvarov pomocou súradníc. V závere knižky sa dočítate o „záhadách“ štvorrozmerných útvarov.

Ak chcete mať celú sériu knížiek edície Epsilon, nezaváhajte. Populárnych a hodnotných knížiek o matematike nie je ešte stále dosť.

D. Jedinák

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

rovnat se
rovnat se nule
rovnice
rovník
rovnoběžka
rovnoběžník
rovnoběžnostěn
rovnoběžný
rovnoměrný
rovnoramenný
rovnostranný
rovnost
rozbor
rozdělení
 rozdělení pravděpodobnosti
rozdíl
rozdílný
 být rozdílný
rozhodnout
rozklad
rozložit
rozložení
 rozklad vektorů
rozměr
rozptyl
rozšíření
roztažení
rozvinutelný
rozvinutí
rozvoj
 asymptotický rozvoj
rušit
různoběžné přímky

equal
vanish, be equal to zero
equation
equator
parallel
parallelogram
parallelepiped
parallel
uniform
isosceles
equilateral
equality
analysis
distribution
 probability distribution
difference
different
 differ
decide
decomposition, partition, factoring
decompose, factor
distribution
 resolution of vectors
measurement, dimension
dispersion, variance
extension
dilatation
developable, expansible
development
expansion
 asymptotic expansion
cancel, vanish
intersecting lines

rychlost
průměrná rychlost

velocity, speed
average velocity

Ř

řád
řád derivace
řád determinantu
řád diferenciální rovnice
řád grupy
řada
alternující řada
bodová řada
číselná řada
Fourierova řada
geometrická řada
mocninná řada
stejněměrně konvergentní řada
řádek
řešení
řešit
řez
rovinný řez
řez kuželem
řídící kružnice
řídící přímka (křivka)
řídká množina

order
order of derivative
order of determinant
order of differential equation
order of group
series
alternating series
pencil of points
number series
Fourier series
geometric series
power series
uniformly convergent series
row
solution
solve
section, cut
plane section
conic section
director circle
directrix
nowhere dense set

S

sám k sobě sdružený
samodružný bod
s čárkou (např. A')
sčítanec
sčítání
sčítání s přechodem
sčítat
sdružený
sdružené poláry
sdružené průměty
sečna
sečná rovina
sedlo
sedlový bod
sedm
sedmnáct

self-conjugate
double point
dashed
addend
adding, addition
carrying in addition
add
conjugate
lines polar to each other
set of projections
secant
secant plane
saddle
saddle point
seven
seventeen

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

4

ROČNÍK 56, 1977 - 1978, PROSINEC



rozhledy

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, Ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VÚOŠ Praha, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, Ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1977.

ROČNÍK 56
PROSINEC 1977

4

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

Dr. B. Zelinka, CSc.: Kreslení obrázků jedním tahem	145
Prof. E. Kraemer: Výpočet velikosti pravoúhlého průmětu úhlu (dokončení)	152
J. Pšenička: Surdické výrazy	158
Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Styk dvou křivek	161
F. Hradecký: Další užití analogie	164
Dr. Ing. J. Pospíšil, CSc.: Vláknová optika	171
Dr. M. Šírká - dr. J. Šírký: Bílé trpaslíci hvězdy	179
Naše soutěž: Autorská řešení úloh minulého ročníku	181
Dr. V. Flajšinger: Ušlechtilý divoch	186
Dr. J. Šedivý: Magické čtverce a trojúhelníky s devíti čísly	190
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Kreslení obrázků jedním tahem

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

Mezi úlohami rekreační matematiky se často vyskytují úlohy tohoto typu: Je dán jistý obrázek; máme určit, zda jej lze nakreslit jedním tahem, a pokud to jde, provést to. Většinou lidé řeší takovéto úlohy zkusmo, což ovšem vyžaduje dosti času. Podívá-li se však na takový obrázek někdo, kdo je obeznámen s teorií grafů, stačí mu letmý pohled k tomu, aby úlohu vyřešil. Ostatní pak kroutí hlavou údivem nad tím, jak to mohl v tak krátké době zvládnout; zvláště tehdy, když rezolutně prohlásí, že obrázek jedním tahem nakreslit nelze.

Ukážeme si zde určité matematické tvrzení, které nám umožňuje tyto úlohy řešit. Toto tvrzení je součástí jistého odvětví matematiky, které se nazývá teorie grafů. Grafy, kterými se tato teorie zabývá, jsou něco jiného než známé grafy funkcí. Řekněme si, co to tedy je.

Neorientovaný graf je uspořádaná dvojice množin U , H , kde H je podmnožina množiny všech dvouprvkových podmnožin množiny U . Prvky množiny U nazýváme uzly grafu, prvky množiny H nazýváme hranami grafu. Je-li $h \in H = \{u, v\}$, říkáme, že hrana h spojuje uzly u a v a že u a v jsou koncové uzly hrany h . Říkáme také, že hrana h je incidentní s uzly u a v a že uzly u a v jsou incidentní s hranou h .

Místo „neorientovaný graf“ budeme říkat pouze „graf“; teorie grafů zkoumá i takzvané orientované grafy, ale těmi se zde zabývat nebudeme.

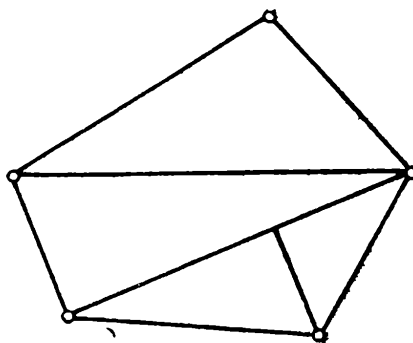
Z definice není na první pohled jasné, oč vlastně jde. Ukážeme si však určité znázornění tohoto pojmu. Uzly grafu nakreslíme jako kolečka. Jestliže některá dvojice uzlů patří do množiny H , spojíme příslušná kolečka úsečkou nebo obloukem; tato úsečka nebo oblouk nám znázorňuje hranu. Příklad je na obr. 1.

Definujme si některé další pojmy.

Má-li graf G množinu uzlů U a množinu hran H , píšeme $G = (U, H)$. Jsou-li nyní $G_1 = (U_1, H_1)$, $G_2 = (U_2, H_2)$ dva grafy takové, že $U_1 \subset U_2$, $H_1 \subset H_2$, říkáme, že graf G_1 je podgrafem grafu G_2 .

Je-li u uzel grafu G , pak počet hran incidentních s uzlem u v grafu G se nazývá stupeň uzlu u v grafu G . Uzel stupně 0 se nazývá izolovaný uzel.

Jsou-li u a v dva uzly grafu G , pak sledem mezi uzly u a v v grafu G se nazývá konečná posloupnost



Obr. 1

$$(1) \quad u = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \dots, u_{n-1}, h_n, u_n = v,$$

kde $u_0, \dots, u_n$ jsou uzly, $h_1, \dots, h_n$ hrany grafu G a hrana h_i spojuje uzly u_{i-1}, u_i pro každé $i = 1, \dots, n$. Jestliže navíc $h_i \neq h_j$ pro $i \neq j$ (tedy žádná hrana se v posloupnosti neopakuje), pak takovýto sled se nazývá *tah*. Jestliže posloupnost (1) je *tah* a $u = v$, pak je to *tah uzavřený*, je-li $u \neq v$, pak jde o *tah otevřený*.

Existuje-li sled mezi uzly u a v v grafu G , říkáme, že uzly u a v spolu souvisí v grafu G . Je to určitá binární relace na množině uzlů grafu G . Je zřejmě reflexivní; každý uzel souvisí sám se sebou, protože sled se může skládat z jediného uzlu. Je to také relace symetrická; existuje-li sled z u do v a napíšeme-li jej v opačném pořadí, dostáváme sled z v do u . Konečně je to také relace transitivní; existuje-li sled z uzlu u do uzlu v a sled z uzlu v do uzlu w , pak tyto dva sledy můžeme napsat za sebou a dostaneme tak sled z u do w .

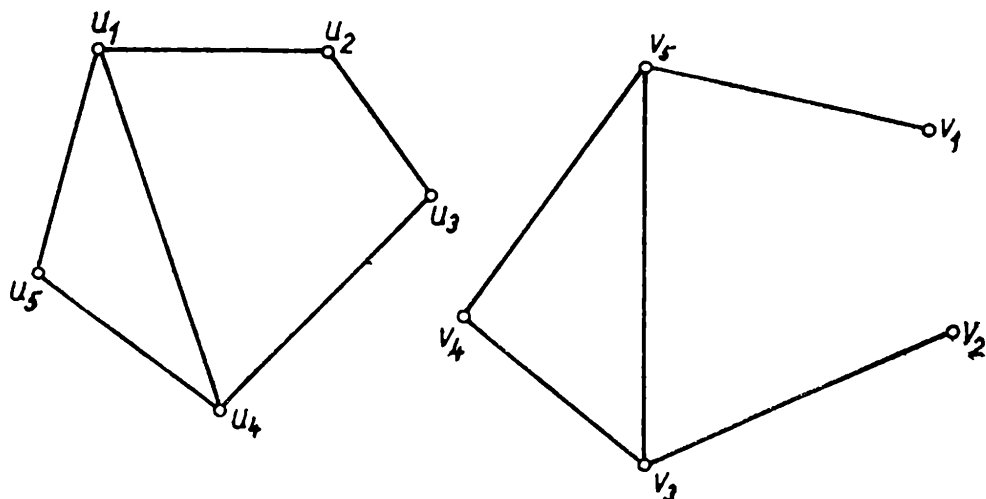
Jak víte, binární relace, která je reflexivní, symetrická a transitivní, se nazývá ekvivalence. Víte také, že každá ekvivalence určuje rozklad příslušné množiny na neprázdné disjunktní podmnožiny zvané třídy ekvivalence; dva prvky množiny jsou v příslušné ekvivalenci právě tehdy, jestliže oba patří do téže třídy.

Mějme tedy na množině U uzlů grafu G relaci ekvivalence takovou, že uzly u a v jsou v této relaci právě tehdy, jestliže spolu souvisí v grafu G . Každá hrana grafu G zřejmě spojuje uzly patřící do téže třídy ekvivalence. Vezmeme podgraf grafu G složený z uzlů jedné třídy a ze všech hran, které spojují dvojice těchto uzlů; tento podgraf nazveme *komponentou grafu G* . Na obr. 2 vidíme graf složený ze dvou komponent; jedna má množinu uzlů $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, druhá $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Náznorně zde vidíme, oč jde; každá komponenta je vlastně jako samostatný obrázek.

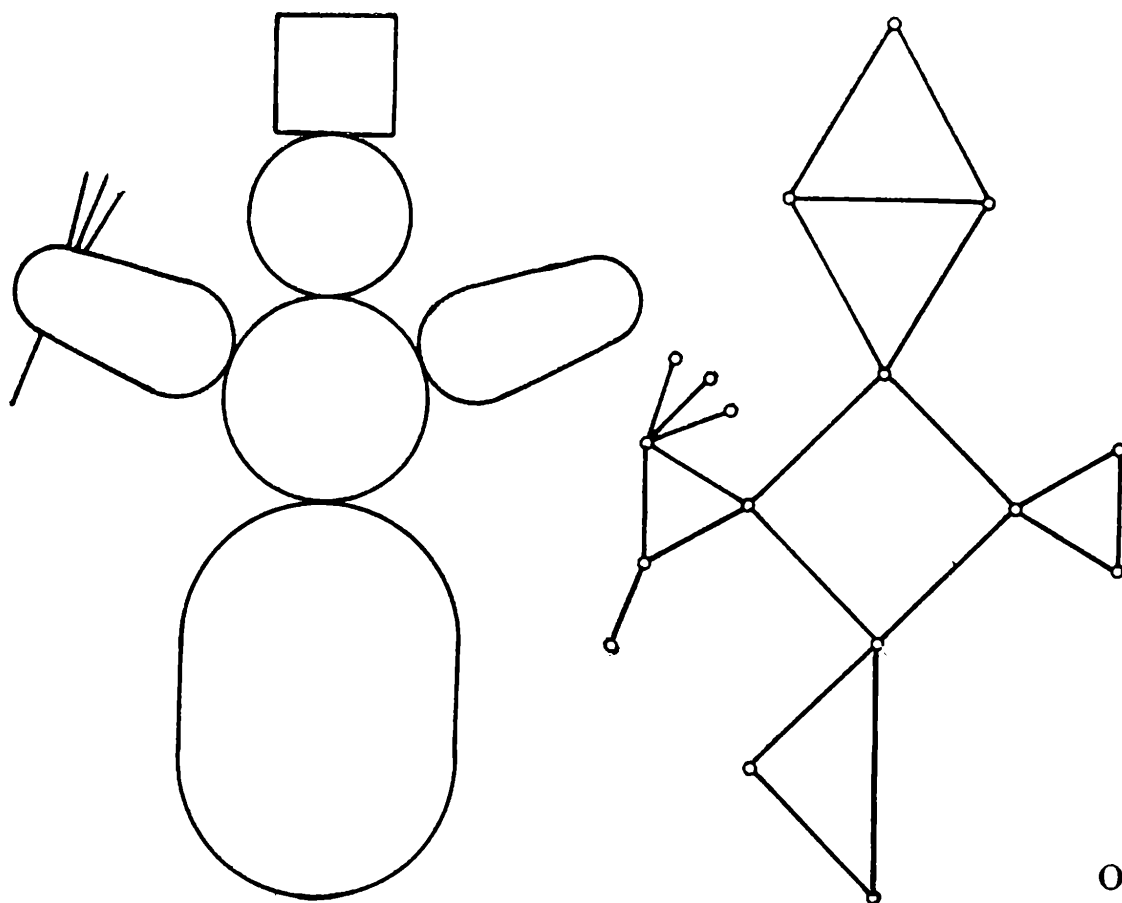
Graf, který se skládá pouze z jediné komponenty (a v němž tedy každé dva uzly spolu souvisí), se nazývá *souvěšlý*.

Po objasnění těchto základních pojmů můžeme přistoupit k výkladu a řešení úlohy.

Daný obrázek si můžeme nakreslit jako graf. Každý bod, z něhož vychází pouze jediná čára nebo více než dvě čáry, zakreslíme jako uzel grafu. Úsek čáry mezi dvěma uzly bude znázorňovat hranu grafu. Při-



Obr. 2



Obr. 3

tom se nám ovšem může stát, že některé dva uzly budou spojeny více než jednou hranou nebo že některý uzel bude spojen hranou sám se sebou. To naše definice grafu nepřipouští. (Někdy se v teorii grafů připouštějí i tyto případy, ale tím se zde zabývat nebudeme.) V takovém případě musíme obrázek ještě dále upravit. Jsou-li některé dva uzly spojeny dvěma různými hranami, zakreslíme ještě některý vnitřní bod jedné z nich jako uzel. Spojuje-li hrana některý uzel se sebou samým, zakreslíme dva její vnitřní body jako uzly. Na obrázku 3 vidíme, jak se to dělá; sněhulák je ovšem nakreslen zezadu, aby nebyly potíže s obličejem.

Obrázek lze pak nakreslit jedním tahem právě tehdy, jestliže v příslušném grafu existuje tah obsahující všechny uzly a všechny hrany. (Musí jít o tah, nikoliv pouze o sled, protože při kreslení obrázku jedním tahem se samozřejmě požaduje, aby se žádný úsek čáry nekreslil dvakrát.) Takovýto tah se nazývá eulerovský tah a může být opět uzavřený nebo otevřený. Existuje-li v grafu uzavřený eulerovský tah, můžeme příslušný obrázek nakreslit tak, že začneme v libovolném bodě a kreslení ukončíme v tomtéž bodě. Jde-li o otevřený eulerovský tah, pak musíme vědět, kterým uzlem tento tah počíná a kterým končí, a kreslit obrázek vždy tak, že vyjdeme z bodu odpovídajícího jednomu z těchto uzlů a skončíme v druhém.

Dokážeme větu.

Věta 1. *V konečném grafu G o více než jednom uzlu existuje uzavřený eulerovský tah právě tehdy, je-li graf G souvislý a má-li v něm každý uzel sudý stupeň.*

Poznámka. Konečným grafem rozumíme graf $G = (U, H)$, kde U i H jsou konečné množiny. Jinými grafy se v tomto článku zabývat nebudeme.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že v grafu G existuje uzavřený eulerovský tah. Pak graf G je zřejmě souvislý; mezi každými dvěma jeho uzly existuje sled, který je částí zmíněného eulerovského tahu. Označme nyní uzavřený eulerovský tah jako posloupnost

$$(2) \quad u = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \dots, u_{n-1}, h_n, u_n = u.$$

Nechť v je uzel grafu G různý od u a nechť se ve vyjádření (2) vyskytuje k -krát, kde k je přirozené číslo. Pak před každým jeho výskytem v posloupnosti (2) je jedna hrana incidentní s v a za ním také jedna. Obráceně, vyskytuje-li se v (2) hrana incidentní s v , musí být před ní nebo za ní uzel v . Poněvadž každá hrana grafu G se v (2) vyskytuje právě jednou, je uzel v incidentní právě s $2k$ hranami, a tedy jeho stupeň je sudý. Podobně nechť uzel u se vyskytuje l -krát v posloupnosti (2). Pak se vyskytuje hrana incidentní s u po prvním členu posloupnosti (2), před posledním členem, před každým dalším výskytem u i po něm; podobně jako v předešlém případě dokážeme, že stupeň uzlu u je $2l-2$, což je opět sudé číslo.

Nyní předpokládejme, že graf G je souvislý a že všechny jeho uzly mají sudý stupeň. Zvolme v grafu G uzel u_0 a jednu hrana s ním incidentní označme h_1 . Její druhý koncový uzel označme u_1 a zvolme hrana h_2 incidentní s u_1 a různou od h_1 . Její druhý koncový uzel označíme u_2 a pokračujeme takto dále; volíme vždy takové hrany, kterými jsme při našem postupu dosud neprošli. Po konečném počtu kroků dojdeme do uzlu, z něhož již nemůžeme vyjít žádnou hranou, kterou jsme dosud neprošli. Tento uzel je u_0 ; kdyby to byl jiný, musel by mít lichý stupeň, protože jsme do něj vždy jednou hranou vcházeli, druhou vycházeli.

Dostali jsme tak uzavřený tah v G . Tím jsme dokázali, že v grafu G existuje alespoň jeden uzavřený tah. Označme T_0 takový uzavřený tah v G , který má maximální počet hran; předpokládejme o něm, že není eulerovský. Odstraňme z G všechny hrany tahu T_0 a vzniklý graf označme G' . Každý uzel grafu G je zřejmě incidentní se sudým počtem hran tahu T_0 ; tedy i graf G' má tu vlastnost, že stupně všech jeho uzlů jsou sudé. Obecně ovšem nemusí být souvislý. Protože však T_0 není eulerovský tah, existuje v grafu G' alespoň jedna hrana a tedy alespoň jedna komponenta C , která nesestává z izolovaného uzlu. V komponentě C existuje alespoň jeden uzel v , kterým prochází tah T_0 ; jinak by graf G obsahoval alespoň dvě různé komponenty, z nichž jedna by obsahovala C , druhá by obsahovala uzly a hrany tahu T_0 . Komponenta C je konečný souvislý graf, v němž stupně všech uzlů jsou sudé, a obsahuje alespoň jednu hranu. Sestrojíme uzavřený tah T_1 v C podobně, jako jsme sestrojovali uzavřený tah v G ; vyjdeme při tom z uzlu v . Nyní sestrojíme tah T v grafu G tak, že jdeme po tahu T_0 až do prvního výskytu uzlu v , potom projdeme tahem T_1 opět do v a dále pokračujeme opět tahem T_0 . Tím dostáváme uzavřený tah v grafu G , který má více hran než T_0 , což je spor. Tedy tah T_0 je uzavřený eulerovský tah v grafu G .

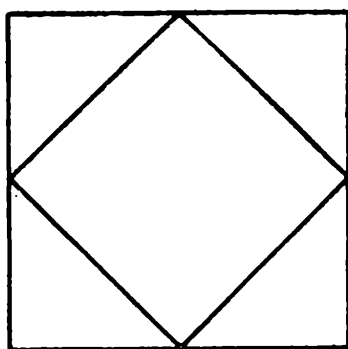
Nyní tedy vidíme, kdy můžeme obrázek nakreslit jedním tahem tak, že vyjdeme z libovolného bodu a opět se do něj vrátíme; je to právě tehdy, jestliže odpovídající graf je souvislý a všechny jeho uzly mají sudý stupeň.

Zajímalo by nás ovšem, jak je to v případě, kdy se v tomto grafu vyskytují uzly lichého stupně. Především si musíme říci, že počet těchto uzlů musí být sudý. Jak jsme už uváděli, součet stupňů všech uzlů grafu je dvojnásobkem počtu hran, a je to tedy číslo sudé. Kdybychom měli lichý počet uzlů lichého stupně, byl by součet těchto stupňů lichý.

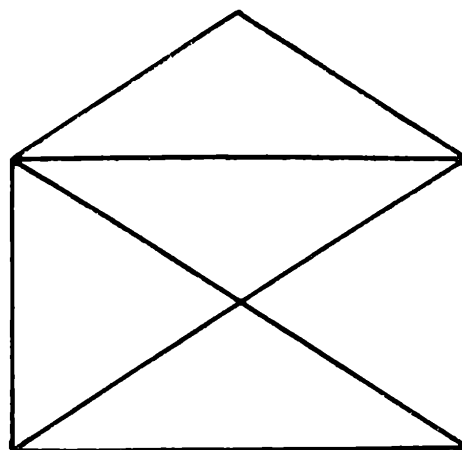
Dokážeme si další větu.

Věta 2. Nechť G je konečný souvislý graf, který obsahuje právě $2k$ uzlů lichého stupně, kde k je přirozené číslo. Pak v grafu G existuje k otevřených tahů takových, že každá hrana grafu G je obsažena právě v jednom z nich. Přitom neexistuje méně než k tahů této vlastnosti.

Důkaz. Uzly lichého stupně v grafu G označíme $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k$. Nyní budeme sestrojovat graf G^* , jehož podgrafem bude graf G . Nechť $w_1, w_2, \dots, w_k$ jsou navzájem různé uzly nepatřící do G . Uzel w_i (pro každé $i = 1, 2, \dots, k$) spojíme hranami s uzly u_i a v_i ; graf takto vzniklý bude G^* . Graf G^* je samozřejmě souvislý. Každý z uzlů $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k$ má v grafu G^* stupeň o jednu větší než v grafu G , a tedy sudý. Každý z uzlů $w_1, w_2, \dots, w_k$ má stupeň 2, tedy také sudý. Stupně ostatních uzlů jsou stejné v G^* jako v G , a tudíž také sudé. Podle věty 1 v grafu G^* existuje uzavřený eulerovský tah T ; tento tah zřejmě prochází každým z uzlů $w_1, w_2, \dots, w_k$ právě jednou. Odstraníme-li opět uzly $w_1, w_2, \dots, w_k$ a hrany s nimi incidentní, tah T se rozpadne



Obr. 4



Obr. 5

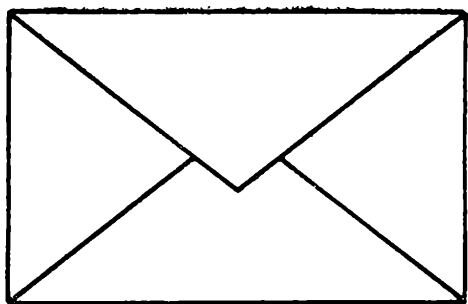
na k otevřených tahů v G té vlastnosti, že každá hrana grafu G je obsažena právě v jednom z nich.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $l < k$ v grafu G existuje l otevřených tahů $T_1, T_2, \dots, T_l$ té vlastnosti, že každá hrana grafu G je obsažena právě v jednom z nich; předpokládejme dále, že l je nejmenší číslo této vlastnosti. Pro $i = 1, 2, \dots, l$ označme a_i počáteční a b_i koncový uzel tahu T_i . Uzly $a_1, a_2, \dots, a_l, b_1, b_2, \dots, b_l$ jsou navzájem různé; jinak bychom mohli některé dva tahy spojit a dostat tak méně než l tahů žádané vlastnosti. Sestrojíme graf G^{**} tak, že vezmeme uzly $c_1, c_2, \dots, c_l$ nepatřící do G a pro každé $i = 1, 2, \dots, l-1$ spojíme uzel c_i hranami s uzly b_i, a_{i+1} a dále spojíme uzel c_l s uzly b_l, a_1 . Snadno vidíme, že v G^{**} existuje uzavřený eulerovský tah, a tedy G^{**} obsahuje pouze uzly sudého stupně. Avšak všechny uzly grafu G kromě $a_1, a_2, \dots, a_l, b_1, b_2, \dots, b_l$ mají tentýž stupeň v G^{**} jako v G , tedy uzlů lichého stupně v G je nejvýše $2l$, což je méně než $2k$; došli jsme ke sporu. Tedy nejmenší počet tahů žádané vlastnosti je skutečně k .

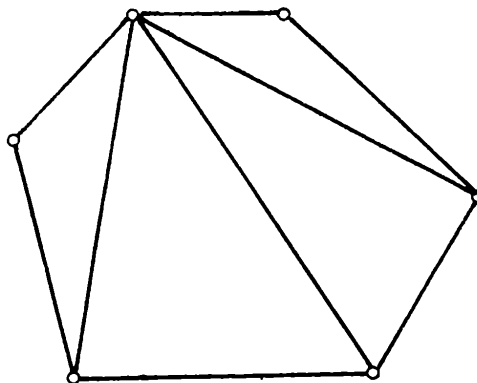
Položíme-li $k = 1$, dostaneme důsledek.

Důsledek. *V konečném grafu G o více než jednom uzlu existuje otevřený eulerovský tah právě tehdy, je-li graf G souvislý a právě dva jeho uzly mají lichý stupeň.*

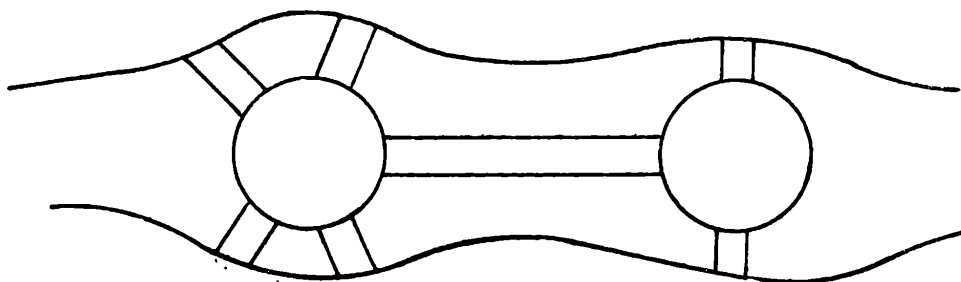
Nyní už si tedy s kreslením obrázků víme rady. K danému obrázku si představíme příslušný graf a počítáme v něm uzly lichého stupně. Není-li žádný, můžeme obrázek nakreslit jedním tahem tak, že vyjdeme z libovolného bodu a nakonec se do něj opět vrátíme. Jsou-li takovéto uzly dva, pak také můžeme obrázek nakreslit jedním tahem, musíme však začít v bodě odpovídajícím jednomu uzlu lichého stupně a skončit v bodě odpovídajícím druhému takovému uzlu. Je-li uzlů lichého stupně více, nemůžeme obrázek nakreslit jedním tahem. Víme však, kolika tahy je to možné, a víme také, že každý takovýto tah musí začít i skončit v bodě odpovídajícím uzlu lichého stupně.



Obr. 6



Obr. 8



Obr. 7

Obrázek 4 lze nakreslit jedním tahem tak, že vyjdeme z libovolného bodu a zase se do něj vrátíme. Obrázek 5 můžeme nakreslit jedním tahem pouze tak, že vyjdeme z určitého bodu a skončíme v jiném určitém bodě. (Které body to jsou?) Obrázek 6 nakreslíme třemi tahy; méně tahy to nelze.

Eulerovský tah je pojmenován podle slavného matematika *Leonharda Eulera* (1707–1783), který se těmito grafy zabýval. Tehdy ovšem ještě neexistovala teorie grafů jako matematická disciplína. Euler se těmto věcem věnoval víceméně jako pouhým hádankám na rozptýlení, nicméně položil tak důležité základy k později vzniklé teorii grafů. Ve městě Královci (Königsberg, dnes Kaliningrad), kde tehdy žil, bylo sedm mostů přes řeku Pregel (viz obr. 7). Obyvatelé města si lámali hlavu s hádankou, zda je možno si udělat procházku městem tak, aby se přes každý most přešlo právě jednou. Zřejmě by to bylo možné tehdy, kdyby v grafu na obr. 8 existoval eulerovský tah; ten ovšem neexistuje. (Proč?) Tato hádanka, kterou tehdy Euler rozřešil, se dodnes traduje v literatuře o teorii grafů jako „problém sedmi mostů města Královce“. A Euler tuto hádanku nejen rozřešil, ale rozvinul kolem ní teorii, kterou jsme si právě popsali. Vidíme tedy, že i hříčky vymyšlené pro zábavu mohou významně přispět k rozvoji matematiky.

Výpočet velikosti pravoúhlého průmětu úhlu

(dokončení)

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

3. Ve třetím případě splývá bod N s bodem P (obr. 5); úhly $\sphericalangle MV_0N$, $\sphericalangle MV_1N$ jsou ostré a pro x platí:

$$x = \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad (4'')$$

Z pravoúhlých trojúhelníků MPV_1 , MPV_0 plyne, že je

$$\cotg \varphi = \frac{V_1P}{MP}, \quad MP = \frac{V_0P}{\cotg \alpha};$$

z toho podle (5) a (2) plyne, že je

$$\cotg \varphi = k \cotg \alpha, \quad 0 < k < 1. \quad (7)$$

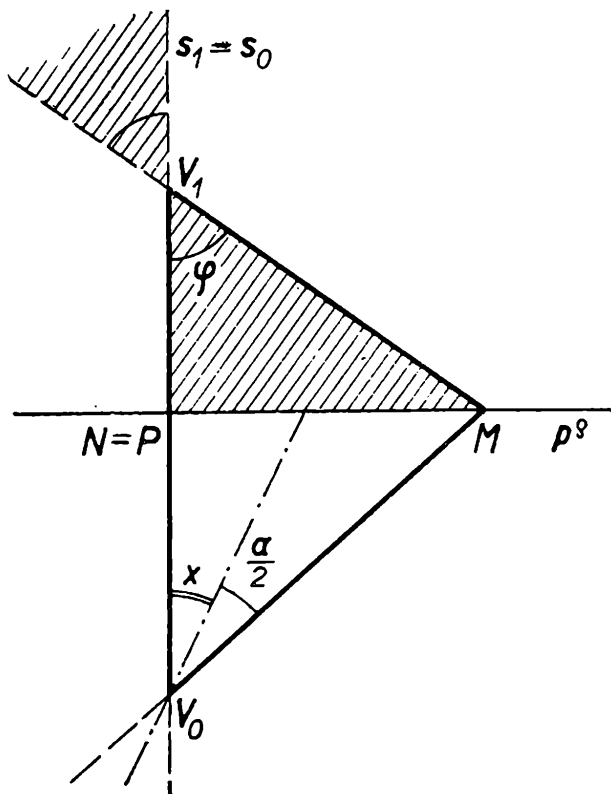
Dosadíme-li do vzorce (1) z textu věty 1 za x podle (4''), dostaneme

$$\begin{aligned} \cotg \varphi &= \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{k \sin \alpha} = \\ &= \frac{k^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{k \sin \alpha} = k \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = k \cotg \alpha, \end{aligned}$$

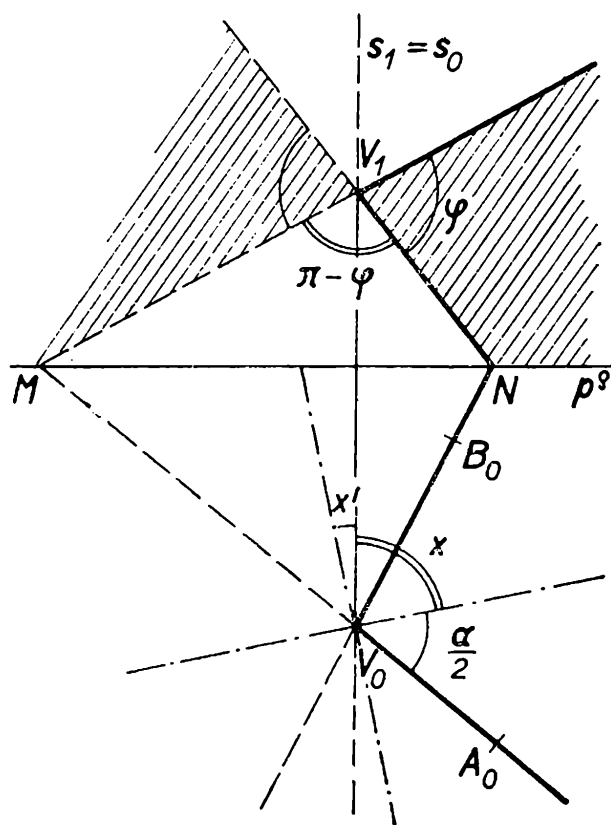
což je ve shodě se (7). Věta 1 platí tedy i v tomto případě.

4. Ve čtvrtém případě, kdy jedno rameno a prodloužení druhého ramene daného úhlu $\sphericalangle AVB$ protínají stopu p^e v bodech M , N , je úhel $\sphericalangle MV_0N$ vedlejší k úhlu $\sphericalangle A_0V_0B_0$, jenž má velikost α ; proto velikost úhlu $\sphericalangle MV_0N$ je $\pi - \alpha$. Obdobně velikost úhlu $\sphericalangle MV_1N$ je $\pi - \varphi$. Protože obě ramena úhlu $\sphericalangle MV_0N$ protínají stopu p^e , nastane pro tento úhel případ první (obr. 6) nebo druhý (obr. 7) nebo třetí (obr. 8). Přímka, jejíž částí je osa úhlu $\sphericalangle A_0V_0B_0$, má od přímky $s_0 = s_1$ odchylku x ; odchylka přímky, jejíž částí je osa úhlu $\sphericalangle MV_0N$, budiž x' . Jestliže tyto dvě vzájemně kolmé přímky protínají stopu p^e , omezují s ní pravoúhlý trojúhelník, jehož výška je částí přímky $s_1 = s_0$; proto je

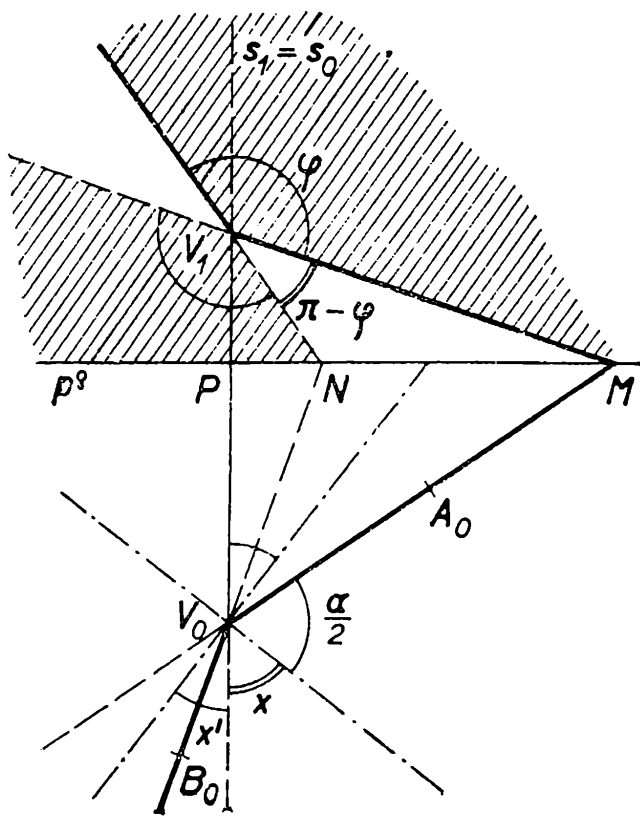
$$x' + x = \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$



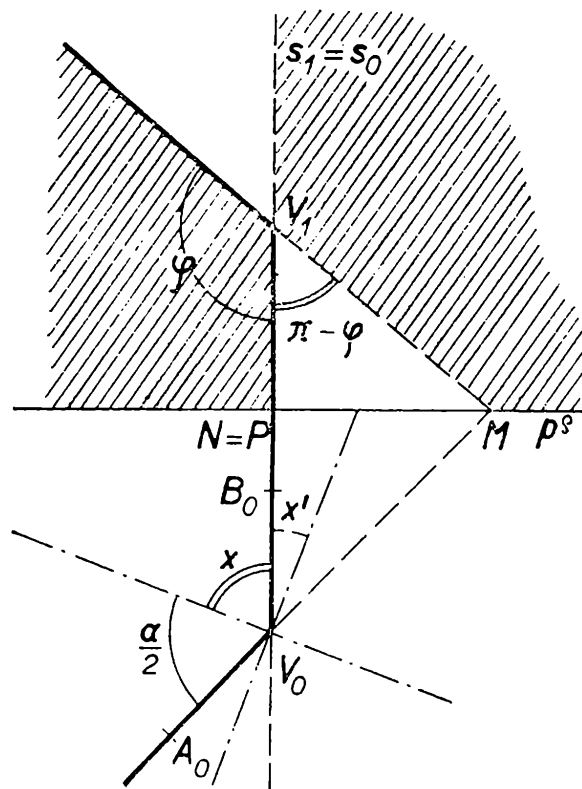
Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

Tento vzorec platí i pro případ, kdy jedna z uvedených přímek je rovnoběžná se stopou p^e a druhá splývá s přímkou $s_1 = s_0$. Protože podle (4) je $0 \leq x' < \frac{\pi}{2}$, je podle (8)

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4''')$$

Pro velikost $\pi - \varphi$ úhlu $\sphericalangle MV_1N$ platí podle věty 1, kterou jsme již pro první tři případy dokázali, tento vzorec:

$$\cotg (\pi - \varphi) = \frac{(k^2 + 1) \cos^2 \frac{\pi - \alpha}{2} - 1 + (1 - k^2) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{k \sin (\pi - \alpha)}.$$

Protože je

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad \sin (\pi - x) = \sin x,$$

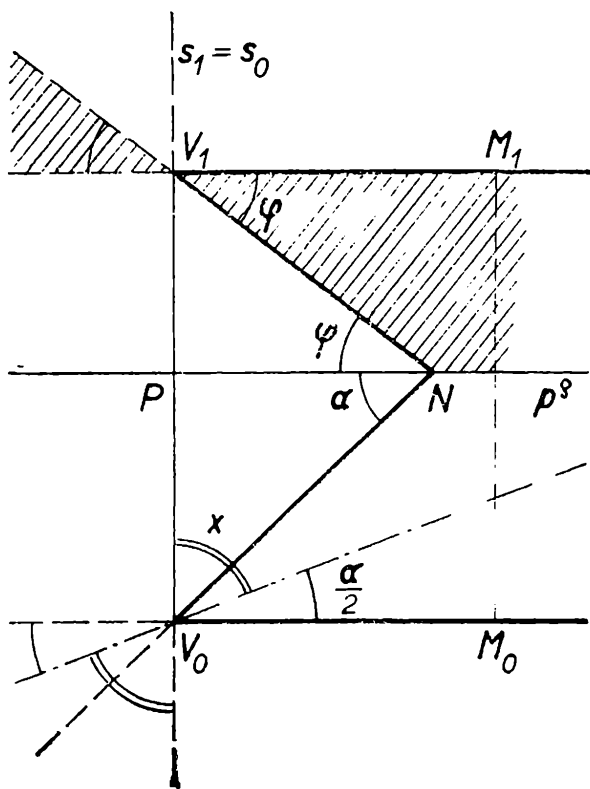
je

$$\begin{aligned} \cotg (\pi - \varphi) &= - \frac{\left(k^2 + 1 \right) \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 1 + (1 - k^2) (1 - \sin^2 x)}{k \sin \alpha} = \\ &= \frac{k^2 + 1 - (k^2 + 1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + 1 - k^2 - (1 - k^2) \sin^2 x}{k \sin \alpha} = \\ &= \frac{-(k^2 + 1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - (1 - k^2) \sin^2 x}{k \sin \alpha} \end{aligned}$$

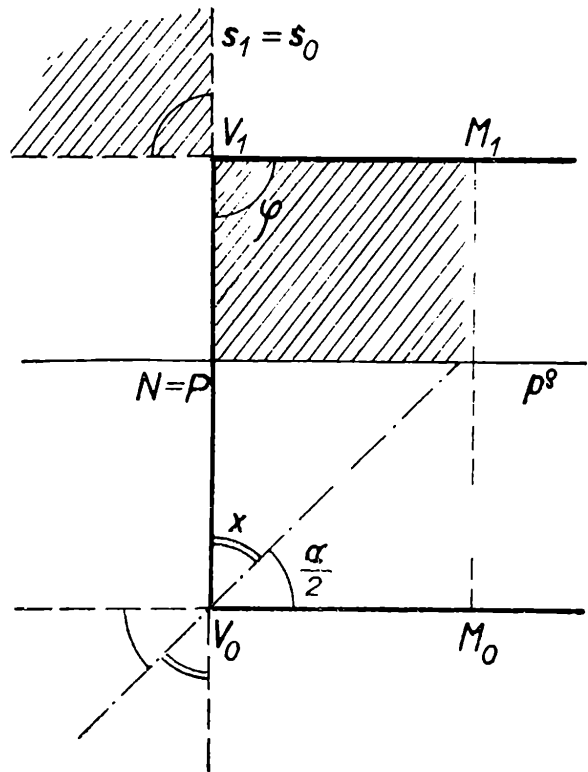
Avšak $\cotg (\pi - \varphi) = - \cotg \varphi$, takže z poslední rovnosti plyne opět vzorec (1) z textu věty 1.

5. V pátém případě je rameno $VA = VM$ daného úhlu $\sphericalangle AVB$ rovnoběžné se stopou p^e ; druhé rameno nebo jeho prodloužení protíná stopu p^e v bodě N . Je-li úhel $\sphericalangle M_0V_0N$ ostrý (obr. 9), je také úhel $\sphericalangle M_1V_1N$ ostrý (neboť je pravou částí pravého úhlu $\sphericalangle M_1V_1P$); přitom je $\sphericalangle V_0NP = \sphericalangle M_0V_0N$, $\sphericalangle V_1NP = \sphericalangle M_1V_1N$ (úhly střídavé). Z pravoúhlých trojúhelníků V_0NP , V_1NP plyne, že je

$$NP = V_0P \cotg \alpha, \quad \cotg \varphi = \frac{NP}{V_1P};$$



Obr. 9



Obr. 10

podle (5) je tedy

$$\cotg \varphi = \frac{V_0 P}{V_1 P} \cotg \alpha = \frac{1}{k} \cotg \alpha. \quad (9)$$

Je-li úhel $\sphericalangle M_0 V_0 N$ pravý (obr. 10), je podle pomocné věty 1 také úhel $\sphericalangle M_1 V_1 N$ pravý, takže je $\alpha = \varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cotg \alpha = \cotg \varphi = \cotg \frac{\pi}{2} = 0$. Vzorec (9) platí tedy i v tomto případě. Je-li úhel $\sphericalangle M_0 V_0 N$ tupý (obr. 11), je také úhel $\sphericalangle M_1 V_1 N$ tupý (neboť je součtem úhlů $\sphericalangle M_1 V_1 P$, $\sphericalangle P V_1 N$). Potom úhel $\sphericalangle V_0 N P$ má velikost $\pi - \alpha$ a úhel $\sphericalangle V_1 N P$ má velikost $\pi - \varphi$; z pravoúhlých trojúhelníků $V_0 N P$, $V_1 N P$ plyne, že je

$$NP = V_0 P \cotg (\pi - \alpha), \cotg (\pi - \varphi) = \frac{NP}{V_1 P}.$$

Podle (5) je tedy

$$\cotg (\pi - \varphi) = \frac{V_0 P}{V_1 P} \cotg (\pi - \alpha) = \frac{1}{k} \cotg (\pi - \alpha);$$

protože $\cotg (\pi - w) = -\cotg w$, dostaneme z posledního vzorce opět vzorec (9). Z obr. 9, 10 a 11 zároveň plyne, že je

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad (4''')$$

b) Ze všech úhlů $\sphericalangle AVB$ velikosti α ležících v rovině ρ má nejmenší průmět ten úhel $\sphericalangle AVB$, jehož osa je částí hlavní přímky roviny ρ . V tomto případě je velikost φ'' průmětu úhlu $\sphericalangle AVB$ vyjádřena vztahem

$$\cotg \varphi'' = \frac{(k^2 + 1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} - k^2}{k \sin \alpha} \quad (11)$$

Důkaz. Je-li dána rovina ρ a v ní úhel $\sphericalangle AVB$ o velikosti α , pak ve vztahu (1) z věty 1 je velikost φ průmětu tohoto úhlu funkcí jediné proměnné x ; přitom podle (4) až (4''') je

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Podle předpokladu je $0 < k < 1$, takže je $k^2 < 1$ čili $1 - k^2 > 0$.

Číslo φ udané vztahem (1) bude největší, právě když bude $\cotg \varphi$ nejmenší, tj. právě když bude $\sin x = 0$; to nastane právě tehdy, bude-li $x = 0$. To je právě v tom případě, kdy osa úhlu $\sphericalangle AVB$ je částí spádové přímky roviny ρ . Podle (1) je potom $\varphi = \varphi'$ udáno vztahem (10).

Číslo φ udané vztahem (1) bude nejmenší, právě když bude $\cotg \varphi$ největší, tj. právě když bude $\sin x = 1$; to nastane právě tehdy, bude-li $x = \frac{\pi}{2}$. To je právě v tom případě, kdy osa úhlu $\sphericalangle AVB$ je částí hlavní přímky roviny ρ . Podle (1) je potom $\varphi = \varphi''$ udáno vztahem (11).

Důsledek. Pro čísla φ' , φ'' z věty 2 platí: $\varphi' > \alpha$, $\varphi'' < \alpha$.

Důkaz provedeme pro φ' , a to nepřímou. Předpokládejme, že není $\varphi' > \alpha$, tj. že platí $\varphi' \leq \alpha$. Protože čísla φ' , α jsou v intervalu $(0, \pi)$, je potom $\cotg \varphi' \geq \cotg \alpha$, tj. podle (10)

$$\frac{(k^2 + 1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{k \sin \alpha} \geq \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Protože je $k > 0$, $\sin \alpha > 0$, plyne z toho nerovnost

$$k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \geq k \cos^2 \frac{\alpha}{2} - k \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq 1, \quad (k - 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq 0.$$

Protože je $\sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq 0$, musí být též $k - 1 \geq 0$ čili $k \geq 1$. Avšak to odporuje předpokladu, podle něhož je $k < 1$.

Zcela obdobně se dokáže, že je $\varphi'' < \alpha$.

Cvičení

V rovině ϱ , která není s průmětnou rovnoběžná a není k ní kolmá, je dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$ o velikosti α ; jeho pravoúhlý průmět je úhel $\sphericalangle A_1V_1B_1$ o velikosti φ . Dokažte, že potom platí tyto věty:

1. Je-li jedno rameno úhlu $\sphericalangle AVB$ částí spádové přímky roviny ϱ , pak a) pro $\alpha < \frac{\pi}{2}$ je $\alpha < \varphi < \frac{\pi}{2}$;

b) pro $\alpha > \frac{\pi}{2}$ je $\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha$.

2. Je-li jedno rameno úhlu $\sphericalangle AVB$ částí hlavní přímky roviny ϱ , pak a) pro $\alpha > \frac{\pi}{2}$ je $\varphi < \alpha$;

b) pro $\alpha > \frac{\pi}{2}$ je $\varphi > \alpha$.

3. Je-li úhel $\sphericalangle AVB$ rozdělen hlavní přímkou roviny ϱ , ale není rozdělen její spádovou přímkou, pak je $\varphi < \alpha$.

4. Je-li úhel $\sphericalangle AVB$ rozdělen spádovou přímkou roviny ϱ , ale není rozdělen její hlavní přímkou, pak je $\varphi > \alpha$.

Poznámka. Není-li úhel $\sphericalangle AVB$ rozdělen ani hlavní ani spádovou přímkou roviny ϱ anebo je-li rozdělen hlavní i spádovou přímkou roviny ϱ , pak může být $\varphi < \alpha$ nebo $\varphi = \alpha$ nebo $\varphi > \alpha$. Bližší o tom bude uvedeno v řešení 4. úlohy z konstrukční geometrie, která byla otištěna v prvním čísle letošního ročníku Rozhledů.

Surdické výrazy

J I Ř Í P Š E N I Č K A, Nový Bor

Popudem k napsání tohoto článku se stal výsledek výpočtu délky úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku. Při výpočtu mi vycházelo $u = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, zatímco výsledek uvedený ve sbírce úloh byl značně

jednodušší; podle něho byla délka úhlopříčky $u = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1)$. Šlo o sovětskou sbírku soutěžních úloh s řešeními, vydanou v roce 1963.

Je zřejmé, že v sovětských středních školách se probírají i tzv. surdické výrazy, které žáci našich středních škol neznají.

Čtenář Rozhledů se může o správnosti obou výsledků pro délku úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku přesvědčit např. porovnáním jejich druhých mocnin, tj. výrazů pro u^2 :

$$\left[\frac{a}{\sqrt{2}} (\sqrt{3 + \sqrt{5}}) \right]^2 = \frac{a^2}{2} (3 + \sqrt{5}),$$

$$\left[\frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1) \right]^2 = \frac{a^2}{4} (5 + 2\sqrt{5} + 1) = \frac{a^2}{2} (3 + \sqrt{5}),$$

což je u kladných čísel možno.

Surdické výrazy jsou reálná čísla tvaru $a + \sqrt{b}$, kde $b > 0$. Název „surdický“ (hluchý, nechápající) lze však daleko výstižněji přeložit jako „nepochopitelný“. V tomto smyslu jej také poprvé užil *Leonardo Pisánský*, známý blíže pod jménem *Fibonacci* ve svém díle „Liber abaci“ z roku 1202. Výraz převzal z arabštiny a převedl jej v obdobném významu do latiny. Níže uvedené vzorce (1) a (2) znal již ve 12. století indický matematik *Bháskara*.

Není-li $b = k^2$, kde k je libovolné reálné číslo, je surdický výraz číslo iracionální. Definujeme proto: *Dvojčlen složený z racionálního čísla a iracionální druhé odmocniny je surdický výraz*. Např.: $3 + \sqrt{7}$, $6 - \sqrt{3}$, a $\pm \sqrt{b}$ apod. Můžeme říci, že surdický výraz se skládá z racionální a iracionální části. Dále označíme výrazy, lišící se pouze znaménkem iracionální části jako *surdické výrazy sdružené*, např.: $3 + \sqrt{5}$ a $3 - \sqrt{5}$.

Poněvadž sdružené výrazy budou pro naše další úvahy nejpodstatnější, ukážeme, jak vypadají základní operace s nimi:

$$(a + \sqrt{b}) + (a - \sqrt{b}) = 2a,$$

$$(a + \sqrt{b}) - (a - \sqrt{b}) = 2\sqrt{b},$$

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b,$$

$$\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \frac{(a + \sqrt{b})^2}{a^2 - b} = \frac{a^2 + b}{a^2 - b} + \frac{2a\sqrt{b}}{a^2 - b}.$$

Součet a součin sdružených surdických výrazů jsou čísla racionální, rozdíl a podíl jsou iracionální. Dále platí věta: *Součet nebo rozdíl druhých odmocnin dvou sdružených surdických výrazů lze vyjádřit jedinou druhou odmocninou*.

Důkaz: Nechť jsou dány výrazy: $a + \sqrt{b}$, $a - \sqrt{b}$, kde $a > \sqrt{b} \geq 0$. Součet nebo rozdíl jejich druhých odmocnin je:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

umocníme jej dvěma a máme:

$$a + \sqrt{b} \pm 2\sqrt{a^2 - b} + a - \sqrt{b} = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}$$

Je proto:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})} \quad (1)$$

Tato úprava je při výpočtech výhodná pouze tehdy, je-li $a^2 - b = m^2$,

například: $\sqrt{8 + \sqrt{15}} - \sqrt{8 - \sqrt{15}} = \sqrt{2(8 - \sqrt{64 - 15})} = \sqrt{2}$

nebo:

$$\begin{aligned} \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} + \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} &= \sqrt{2[a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}]} = \\ &= \sqrt{2[a + b + \sqrt{(a - b)^2}]} = 2\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Při úpravách algebraických výrazů s druhými odmocninami je někdy výhodné vyjádřit druhou odmocninu ze surdického výrazu součtem nebo rozdílem dvou sdružených surdických výrazů $a + \sqrt{b}$, $a - \sqrt{b}$. Opět předpokládáme, že $a > \sqrt{b} \geq 0$. Podle předešlé věty platí:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - b})}$$

resp. $\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a - \sqrt{a^2 - b})}$

Sečtením a odečtením těchto rovnic dostáváme:

$$2\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - b})} + \sqrt{2(a - \sqrt{a^2 - b})}$$

$$2\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - b})} - \sqrt{2(a - \sqrt{a^2 - b})}$$

čili (píšeme obě rovnice současně):

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}. \quad (2)$$

Je samozřejmé, že tato úprava je výhodná pouze tehdy, je-li $\sqrt{a^2 - b}$ racionální číslo. Jakého zjednodušení lze potom dosáhnout, ukazují třeba tyto příklady:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sqrt{100 - 2\sqrt{2499}} = \\ &= \sqrt{\frac{100 + \sqrt{10\,000 - 9996}}{2}} - \sqrt{\frac{100 - \sqrt{10\,000 - 9996}}{2}} = \sqrt{51} - 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & \sqrt{x \pm \sqrt{x^2 - y^2}} = \\
& = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - (x^2 - y^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - (x^2 - y^2)}}{2}} = \\
& = \sqrt{\frac{x + y}{2}} \pm \sqrt{\frac{x - y}{2}}, \text{ pro } x > y > 0.
\end{aligned}$$

Vzorců (1) i (2) lze použít při úpravách algebraických výrazů s druhými i vyššími odmocninami, při usměrňování zlomků a při některých výpočtech s odmocninami, kde odstraníme obtížnější odmocninu z iracionálního čísla a usnadníme si případně výpočet užitím tabulek. Čtenářům doporučuji, aby si pochopení tohoto článku ověřili na jednoduchých příkladech:

$$\begin{aligned}
1. \quad & \sqrt{31 + \sqrt{600}} \quad 2. \quad \sqrt{52 - 2\sqrt{51}} \quad 3. \quad \sqrt{8 + \sqrt{15}} - \sqrt{8 - \sqrt{15}} \\
4. \quad & \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \quad 5. \quad \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}} \pm \sqrt{x + y - 2\sqrt{xy}} \\
& [\text{Výsledky: } 1. \ 5 + \sqrt{6}, 2. \ \sqrt{51} - 1, 3. \ \sqrt{2}, 4. \ 4\sqrt{2} \ 5. \ 2\sqrt{x}; 2\sqrt{y}].
\end{aligned}$$

konstruktivní geometrie

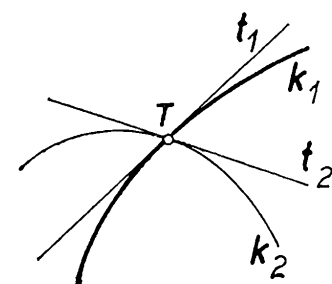
Styk dvou křivek

Doc. dr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

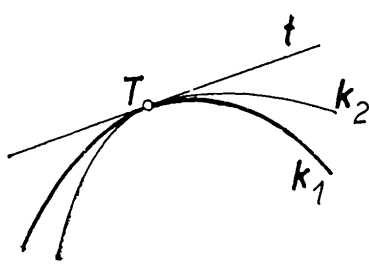
V tomto článku si vysvětlíme bez nároku na úplnou přesnost důležitý pojem z geometrie křivek, který se týká styku dvou rovinných křivek k_1, k_2 .¹⁾

Uvažujme tedy dvě křivky k_1, k_2 (obr. 1), které se protínají v bodě T tak, že tečny t_1, t_2 sestrojené v něm k oběma křivkám jsou různé. Potom říkáme, že dané křivky k_1, k_2 mají v bodě T styk (právě) *nultého řádu* (také používáme názvu *jednobodového dotyku*).

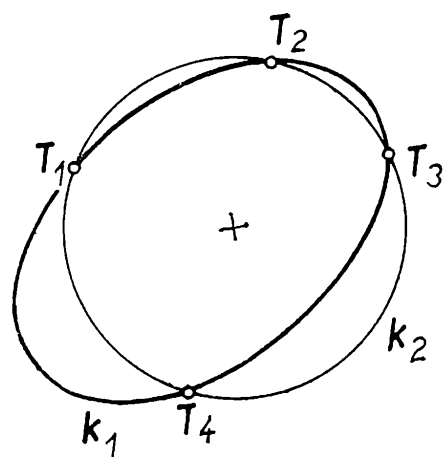
¹⁾ Přesně a se všemi podrobnostmi pro případ styku dvou prostorových křivek je tento pojem vykládán v základech diferenciální geometrie křivek. Případ dvou rovinných křivek je pak jeho zvláštním případem. Je k tomu třeba znalostí z vektorové algebry a analýzy.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Jestliže obě křivky k_1, k_2 mají ve společném bodě T také společnou tečnu t (obr. 2), pak nastává *styk nejméně prvního řádu (dvoubodový)*. To znamená, že v bodě T splývají aspoň dva z možných průsečíků obou křivek. Splývají-li v něm pouze dva, pak mluvíme o *styku právě prvního řádu (právě dvoubodovém)*. Jestliže uvažované křivky k_1, k_2 jsou algebraické a mají stupeň n_1, n_2 , pak z vyjádření rovnicemi $y = f_1(x)$, příp. $y = f_2(x)$ nebo $f(x, y) = 0$, příp. $g(x, y) = 0$ po vyloučení jedné proměnné, např. y , dostaneme algebraickou rovnici pro x stupně $n_1 \cdot n_2$. V našem případě má tato rovnice pro hodnotu x_0 odpovídající souřadnici x bodu T aspoň dvojnásobný kořen. Je-li tento kořen právě dvojnásobný, pak v bodě T nastává styk právě druhého řádu.

Jsou-li splněny další zcela určité podmínky, pak mluvíme o styku vyššího řádu.²⁾

Uvedeme nyní pojem zvláštního styku dvou křivek k_1, k_2 a to pojem *oskulace křivky k_2 vzhledem ke křivce k_1* .³⁾

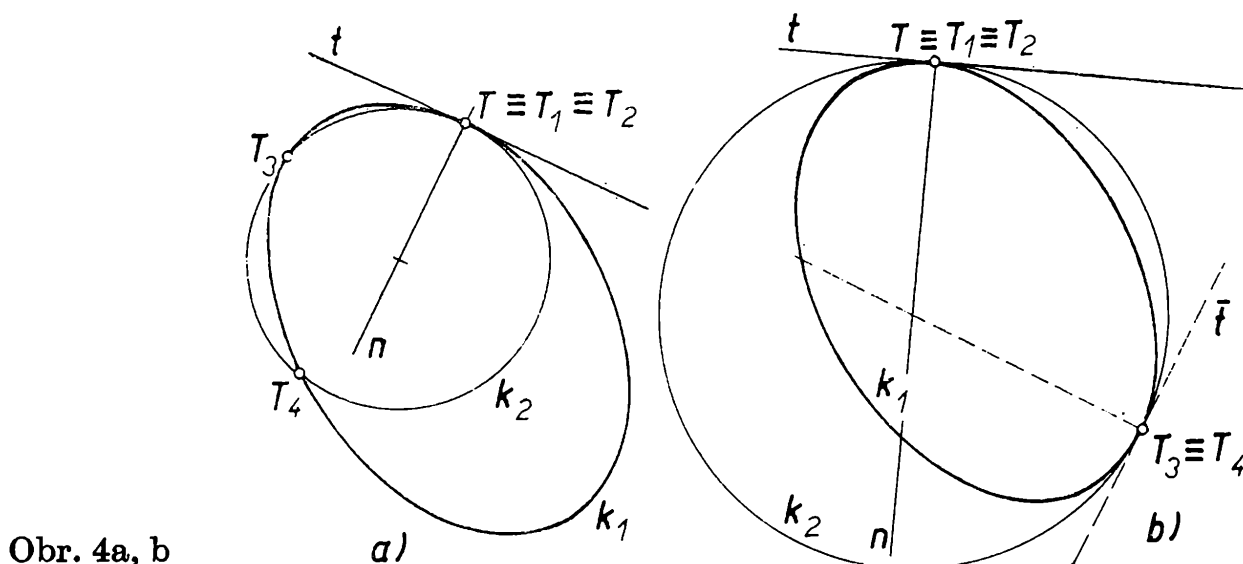
Má-li křivka k_2 s křivkou k_1 ve společném bodě T styk nejvýše možného řádu, pak ji nazýváme oskulační křivkou dané křivky k_1 v jejich společném bodě. Krátce: křivka k_2 v bodě T oskuluje křivku k_1 . Zároveň z určenosti křivky k_2 , která oskuluje křivku k_1 v daném bodě T plyne, že je křivkou k_1 úplně určena.

Ukažme si vše na případu kuželosečky k_1 a kružnice k_2 .

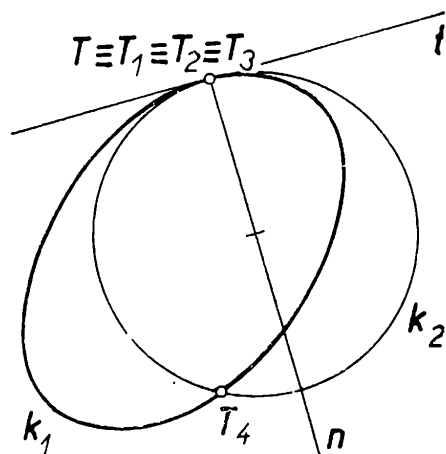
Obě křivky jsou algebraické druhého stupně a mají obecně čtyři různé průsečíky T_1, T_2, T_3, T_4 a v nich různé tečny k oběma křivkám. V obr. 3 je zakreslen případ, kdy tyto průsečíky jsou všechny reálné. Kuželosečka a kružnice mají v tomto případě v každém průsečíku styk (právě) nulového řádu.

²⁾ Snadno nahlédneme, že když mají dvě křivky k_1, k_2 ve společném bodě T styk aspoň k -tého řádu $k > 0$, že v něm mají také styk nižšího řádu.

³⁾ Jak z dalšího výkladu bude patrné, obecně neoskuluje obráceně křivka k_1 křivku k_2 . Název pojmu je z latinského osculum = políbení.



Obr. 4a, b



Obr. 5

Je-li jeden z průsečíků právě dvojnásobný a zbývající dva jsou buď různé (obr. 4a) nebo splývající (obr. 4b), pak mají křivky k_1 , k_2 v tomto společném bodě T také společnou tečnu t . Kuželosečka a kružnice mají nyní v bodě T styk právě prvního řádu. Nevíme-li však nic o zbývajících průsečících T_3 , T_4 , pak mluvíme o styku nejméně prvního řádu. V případě obr. 4b máme kružnici dvojnásob se dotýkající dané kuželosečky.

Kružnice k_2 , která se dotýká v bodě T kuželosečky k_1 , má svůj střed na normále n v bodě T . Měňme teď její poloměr tak, aby se oblouk TT_3 stále zmenšoval. Najdeme v limitě kružnici k_2 , která má v bodě T tři (splývající) body společné s kuželosečkou k_1 (obr. 5), je tedy jednoznačně určena. Její dotyk je (obecně) maximální, máme proto stanovenou tzv. *oskulační kružnici* v bodě T .

Obecně vyšší styk oskulační kružnice k_2 a kuželosečky k_1 nenastane. Požadavek styku třetího řádu (čtyřbodového) je už podmínkou pro bod kuželosečky a ukazuje se, že v takovém případě se jedná vždy o vrcholy kuželosečky. Tyto zvláštní oskulační kružnice se také někdy nazývají *hyperoskulační* (též oskulační kružnice ve vrcholech kuželosečky).

Vzhledem k určenosti kružnice vede požadavek její oskulace v daném bodě T ke snížení určujících prvků kuželosečky o tři. Je tedy kuželosečka určena oskulační kružnicí v bodě T a např. dalšími dvěma body M_1 , M_2 různými od T a neležícími na tečně t kružnice k_2 v bodě T apod. Konstrukce takto daných kuželoseček nejsou obtížné, zpravidla se používá perspektivní kolineace mezi danou oskulační kružnicí k_2 a hledanou kuželosečkou k_1 .

Další užití analogie

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

(V tomto příspěvku bude užito některých vlastností čtyřstěnnů odvozených v článku „Analogické úlohy v geometrii str. 63, v textu označeném A. u. g.)

Mnohým čtenářům je známa věta: „*V každém trojúhelníku průsečík jeho výšek, střed kružnice procházející středy jeho stran (kružnice 9 bodů), jeho těžiště a střed opsané kružnice leží na téže přímce (Eulerově přímce).*“ Analogická věta platí též v každém ortocentrickém čtyřstěnu. Její důkaz je obsahem tohoto článku.

Pokládáme za vhodné napřed uvést pomocí vektorů důkaz věty planimetrické a téhož postupu pak užít k odvození vlastností ortocentrického čtyřstěnu.

Průsečík výšek v trojúhelníku ABC označme O (ortocentrum) a vektory $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$, $\mathbf{OC} \dots \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ a budeme je nazývat *vrcholovými (ortocentrickými) vektory*. Paty výšek, středy stran a středy úseček OA , OB , OC označíme podle obr. 1, který zastupuje libovolný trojúhelník.

Zřejmě platí $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{CA} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$.

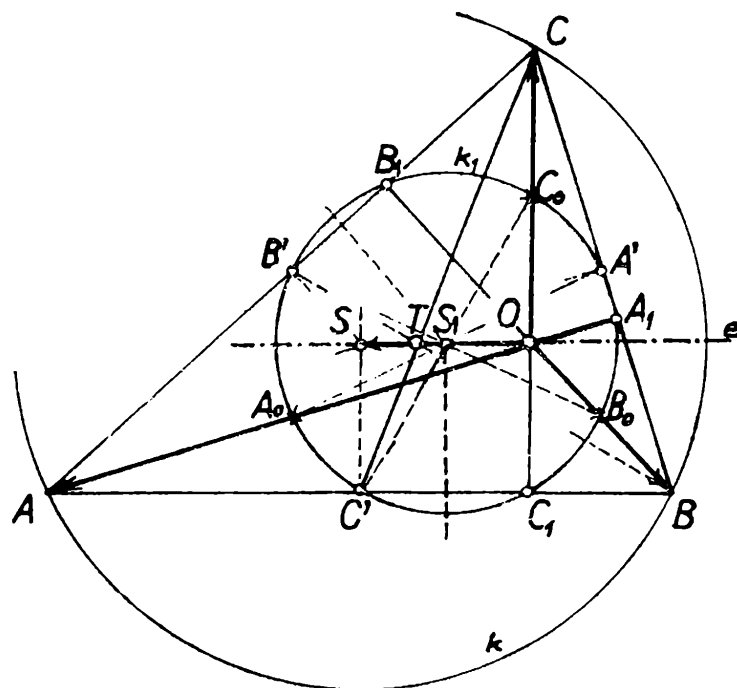
Podmínku kolmosti vrcholových vektorů a příslušných stran vyjádříme užitím *skalárního součinu vektorů*; tak dostaneme $\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) = 0$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) = 0$, $\mathbf{r}_3(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0$ a odtud dostaneme rovnosti

$$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 = \text{konst. } k, \quad (1)$$

tj. *součin kterýchkoliv dvou vrcholových (ortocentrických) vektorů je stálý*. Je-li trojúhelník ostroúhlý, je bod O jeho vnitřním bodem a $k < 0$, neboť úhel kterýchkoli dvou vrcholových vektorů je tupý, pro pravoúhlý trojúhelník je $k = 0$, a pro trojúhelník tupoúhlý je $k > 0$.

Středům $A'B'C'$ stran $\triangle ABC$ přísluší vektory

$$\mathbf{OA'} = \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2}, \quad \mathbf{OB'} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2}, \quad \mathbf{OC'} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2},$$



Obr. 1

středům A_0, B_0, C_0 úseček OA, OB, OC vektory $\mathbf{OA}_0 = \frac{\mathbf{r}_1}{2}, \mathbf{OB}_0 = \frac{\mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{OC}_0 = \frac{\mathbf{r}_3}{2}$. Středu S_1 úsečky C_0C' přísluší vektor

$$\mathbf{OS}_1 = \frac{\mathbf{OC}' + \mathbf{OC}_0}{2} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{4}. \quad (2)$$

K témuž výsledku dospějeme, určíme-li vektory příslušné středům úseček B_0B' , a A_0A' . Protínají se tudíž úsečky A_0A', B_0B', C_0C' v témže bodě S_1 , který je zároveň průsečíkem os úseček C_1C', B_1B', A_1A' . Tím jsme dokázali, že body $A_1, A', A_0, B_1, B', B_0, C_1, C', C_0$ leží na téže kružnici (k_1), tj. *Eulerově kružnici 9 bodů*.

Poloměr této kružnice se rovná např. velikosti vektoru $\mathbf{S}_1\mathbf{C}_0 = \mathbf{OC}_0 - \mathbf{OS}_1 = \frac{\mathbf{r}_3}{2} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{4} = \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{4}$, takže platí

$S_1C_0 = \frac{1}{16}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2.\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 - 2.\mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 - 2.\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3)$ a odtud po zjednodušení vzhledem k rovnostem (1) dostaneme

$$S_1C_0 = \frac{1}{4} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2k}. \quad (2')$$

Utvoříme-li poloviční součet všech vrcholových vektorů, dostaneme

$$\mathbf{OS} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2}, \quad (3)$$

který přísluší k bodu S , který je souměrný k bodu O podle středu S_1 . Tento bod je průsečíkem os stran $\triangle ABC$, a je tudíž středem kružnice (k) opsané $\triangle ABC$. Poloměr této kružnice určíme např. jako velikost vektoru $\mathbf{SA} = \mathbf{OA} - \mathbf{OS} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)$. Z SA^2 užitím rovnosti (1)

$$\text{dostaneme velikost úsečky } SA = \frac{1}{2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2k}. \quad (3')$$

Porovnáním výsledků (2') a (3'), vidíme, že poloměry kružnic k_1 a k jsou v poměru 1 : 2. To plyne též ze stejnoolehlosti $\triangle OS_1C_0 \sim \triangle OSC$ ($S_1C_0 : SC = 1 : 2$).

Určíme ještě vektor $\mathbf{OT}$ příslušný k těžišti $\triangle ABC$; dostaneme

$$\mathbf{OT} = \frac{2}{3} \mathbf{OC}' + \frac{1}{3} \mathbf{OC} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}; \quad (4)$$

$$(\mathbf{TC}' = \frac{1}{3} \mathbf{CC}', \mathbf{OT} = \mathbf{OC}' - \frac{1}{3}(\mathbf{OC}' - \mathbf{OC}) = \frac{2}{3} \mathbf{OC}' + \frac{1}{3} \mathbf{OC})$$

Porovnáním výsledků (2), (3), (4) dostaneme

$$OS_1 : OT : OS = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} \text{ a odtud } OS_1 : S_1T : TS = 3 : 1 : 2.$$

Tím jsme dokázali: V každém trojúhelníku průsečík výšek (O), střed Eulerovy kružnice 9 bodů (S_1), těžiště T a střed kružnice opsané leží na přímce (Eulerovy přímce) a body S_1 a T dělí úsečku OS v poměru 3 : 1 : 2.

Nyní přistoupíme k vlastní úloze, tj. odvození analogických vztahů v ortocentrickém čtyřstěnu, jehož některé vlastnosti jsme poznali v čl. A.u.g. Průsečík tělesových výšek označme opět O a vrcholové (ortocentrické) vektory $\mathbf{OA} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{OB} = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{OC} = \mathbf{r}_3$, $\mathbf{OD} = \mathbf{r}_4$. Další význačné body označme podle obr. 2. Poněvadž $OD \perp (ABC)$, platí zároveň $OD \perp AB$, $OD \perp BC$, a poněvadž $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$, zní podmínka kolmosti vyjádřená skalárním součinem vektorů: $\mathbf{r}_4(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0$, $\mathbf{r}_4(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) = 0$; odtud dostaneme $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_2\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_3\mathbf{r}_4$. Z kolmosti $OA \perp (BCD)$ a $OB \perp (ACD)$ dostaneme další rovnosti, takže platí

$$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_3\mathbf{r}_4 = \text{konst. } k. \quad (1)$$

Číslo k má stejný význam pro čtyřstěn jako pro $\triangle ABC$.

Středům hran A' , B' , C' , E' , F' , G' přísluší vektory:

$$\mathbf{OA}' = \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2}, \quad \mathbf{OB}' = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2}, \quad \mathbf{OC}' = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2},$$

$$\mathbf{OE}' = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4}{2}, \quad \mathbf{OF}' = \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4}{2}, \quad \mathbf{OG}' = \frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2}.$$

Úsečky $A'E'$, $C'G'$, $B'F'$ se protínají v jediném bodě S_1 , který je středem těchto úseček (viz též př. 5a čl. A.u.g) a k němuž přísluší vektor

$$\mathbf{OS}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4}. \quad (2)$$

Ukážeme, že bod S_1 má od všech krajních bodů těchto úseček stejnou vzdálenost. Platí např.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1\mathbf{C}' &= \mathbf{OC}' - \mathbf{OS}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4} = \\ &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4}{4} \end{aligned}$$

a pro velikost tohoto vektoru platí

$$\begin{aligned} S_1C'^2 &= \\ &= \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_4}{16}. \end{aligned}$$

Užitím rovností (1) po zjednodušení dostaneme

$$S_1C' = \frac{1}{4} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 - 4k} \quad (2')$$

K témuž výsledku dospějeme, určíme-li velikosti úseček S_1A' , S_1B' . Je tudíž bod S_1 středem kulové plochy κ_1 , která prochází krajními body úseček $A'E'$, $B'F'$, $C'G'$.

Poněvadž každé dvě protější hrany ortocentr. čtyřstěnu jsou k sobě kolmé (viz př. 6 čl. A. u. g.), můžeme každou hranou čtyřstěnu proložit rovinu kolmou k protější hraně čtyřstěnu. Tak např. hranou DC proložíme rovinu DCC_1 , která protíná protější hranu v bodě C_1 který je zároveň společnou patou výšek $\triangle ABD$ a $\triangle ABC$, ležících v této rovině. Roviny proložené dalšími hranami kolmo k protějším hranám určí další body. Dostaneme tak na hranách čtyřstěnu body $A_1, B_1, C_1, E_1, F_1, G_1$. Těmito body prochází též kulová plocha κ_1 , neboť tato kulová plocha protíná každou stěnu v *Eulerově kružnici*, která prochází nejen středy stran, ale i patami výšek v každé stěně. Také roviny souměrnosti úseček $A'A_1, B'B_1$ atd. procházejí středem S_1 kulové plochy κ_1 , který je zároveň společným bodem všech kolmic vedených středy Eulerových kružnic k jejich rovinám.

Kulová plocha κ_1 obsahuje 12 bodů (středů hran a pat stěnových výšek, ležících po dvou na všech hranách čtyřstěnu) a dále všechny Eulerovy kružnice ve všech stěnách čtyřstěnu.

Upozornujeme však, že kulová plocha κ_1 *neprochází středy úseček* OA , OB , OC , OD , jak bychom očekávali. Abychom to dokázali, určíme velikost vektoru $\mathbf{S}_1\mathbf{A}_0 = \mathbf{OA}_0 - \mathbf{OS}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{2} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4}{4}$. (A_0 je střed úsečky OA). Snadno zjistíme, že pro velikost úsečky S_1A_0 platí:

$$S_1A_0^2 = \frac{1}{16} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 - 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_4 + 2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + 2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_4 + 2\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4)$$

$$\text{a odtud dostaneme } S_1A_0 = \frac{1}{4} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2} \quad (2^*)$$

Srovnáme-li tento výsledek s poloměrem kulové plochy κ_1 , tj. s (2'), zjišťujeme, že $S_1A_0 \neq S_1A'$ ($= S_1C'$).

Sestrojíme-li k bodu O středově souměrný bod S podle středu S_1 , dostaneme vektor $\mathbf{OS} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2}$,

který přísluší středu kulové plochy procházející vrcholy A , B , C , D čtyřstěnu.

Pro vektor $\mathbf{SA}$ platí: $\mathbf{SA} = \mathbf{OA} - \mathbf{OS} = \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4}{2}$ a pro velikost úsečky SA dostaneme

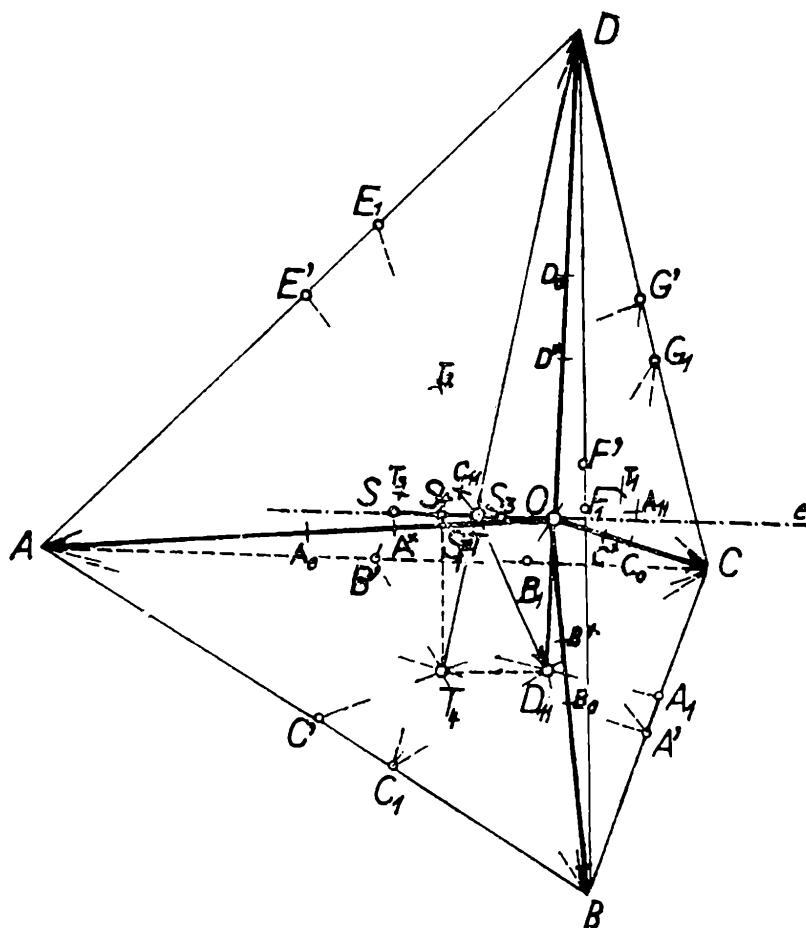
$$SA = \frac{1}{2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}$$

K témuž výsledku dojdeme, určíme-li velikosti vektorů $\mathbf{SB}$, $\mathbf{SC}$, $\mathbf{SD}$. Porovnáním výsledků (3) a (2*) zjišťujeme, že kulová plocha opsaná čtyřstěnu má dvojnásobný poloměr než kulová plocha κ_2 o středu S_1 , která je soustředná s kulovou plochou κ_1 a prochází středy úseček OA , OB , OC , OD .

Určíme ještě vektor $\mathbf{OT}$ příslušný *těžišti čtyřstěnu* (obr. 2). Těžiště čtyřstěnu leží v jedné čtvrtině každé těžnice (měřeno od těžiště stěny (viz př. 4 A. u. g.)). Platí pak např. $TT_4 = \frac{1}{4} DT_4$, (T_4 je těžiště $\triangle ABC$).

$$\begin{aligned} \mathbf{DT}_4 = \mathbf{OT}_4 - \mathbf{OD} &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} - \mathbf{r}_4; \mathbf{OT} = \mathbf{OT}_4 - \mathbf{TT}_4 = \\ &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} - \frac{1}{4} \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} - \mathbf{r}_4 \right), \end{aligned}$$

$$\text{takže} \quad \mathbf{OT} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4}. \quad (4)$$



Obr. 2

Tento výsledek značí, že střed S_1 kulové plochy κ_1 je zároveň těžištěm čtyřstěnu.

Ještě nás zajímá, jakou vlastnost bude mít kulová plocha κ_3 , která prochází třetinami úseček spojujících bod O s vrcholy čtyřstěnu. Těmto bodům A^* , B^* , C^* , D^* přísluší vektory $\frac{\mathbf{r}_1}{3}$, $\frac{\mathbf{r}_2}{3}$, $\frac{\mathbf{r}_3}{3}$, $\frac{\mathbf{r}_4}{3}$.

Tato kulová plocha (κ_3) je stejnohlá s kulovou plochou κ podle středu O s koef. stejnohlálosti $\frac{1}{3}$. Jejímu středu S_3 přísluší vektor

$$\mathbf{OS}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{6} \quad (5)$$

a její poloměr je $S_3A^* = \frac{1}{3} SA$, tj.

$$S_3A^* = \frac{1}{6} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2} \quad (5')$$

Tato kulová plocha (κ_3) prochází těžišti všech stěn čtyřstěnu, neboť např. pro vzdálenost S_3T_4 platí (viz obr. 2):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_3\mathbf{T}_4 &= \mathbf{OT}_4 - \mathbf{OS}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{6} = \\ &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4}{6} \end{aligned}$$

a pro velikost vektoru $\mathbf{S}_3\mathbf{T}_4$ vzhledem k rovnosti (1*) platí

$$S_3T_4 = \frac{1}{6} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}.$$

K témuž výsledku dospějeme, určíme-li vzdálenosti bodu S_3 od těžišť ostatních stěn čtyřstěnu.

Tato kulová plocha však prochází *i patami všech tělesových výšek čtyřstěnu*, což plyne z následující úvahy:

Utvoříme-li součet vektorů $\mathbf{OD}^* = \frac{1}{3}\mathbf{r}_4$ a vektoru $\mathbf{OT}_4 = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)$, dostaneme vektor $\mathbf{OS}_4 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{3}$, který je dvojnásobkem vektoru $\mathbf{OS}_3$. Poněvadž vektor $\mathbf{r}_4$ je kolmý k rovině $\triangle ABC$, je úsečka $T_4S_3 = \frac{1}{3}OD$ k této rovině kolmá. Je-li D_{11} pata tělesové

výšky, vedené bodem D k rovině ABC , leží střed S_3 v rovině souměrnosti úsečky $D_{11}T_4$ a bod S_3 má od bodů D_{11} a T_4 stejnou vzdálenost. Totéž platí pro ostatní dvojice vektorů $\mathbf{OA}^*, \mathbf{OT}_1, \mathbf{OB}^*, \mathbf{OT}_2, \mathbf{OC}^*, \mathbf{OT}_3$.

Kulová plocha κ_3 , procházející těžišti všech stěn čtyřstěnu, prochází patami všech tělesových výšek a třetinami úseček, které spojují ortocentrum čtyřstěnu s jeho vrcholy. Obsahuje tudíž také tato kulová plocha 12 význačných bodů ortocentrického čtyřstěnu.

Dále jsme dokázali: *Kolmice sestavené ke stěnám čtyřstěnu v jejich těžištích se protínají v jediném bodě (S_4), který leží s body S_1 a S na téže přímce (Eulerově přímce čtyřstěnu). Bod S_4 má od stěn čtyřstěnu vzdálenosti rovné třetinám úseček spojujících bod O s vrcholy čtyřstěnu a kolmých k těmto stěnám.*

Shrňme nyní dosažené výsledky:

V každém ortocentrickém čtyřstěnu máme tyto význačné kulové plochy:

1. Kulová plocha κ_1 o středu S_1 prochází všemi středy hran a všemi patami stěnových výšek na hranách čtyřstěnu a protíná každou stěnu čtyřstěnu v Eulerově kružnici 9 bodů. Její střed je zároveň těžištěm čtyřstěnu.

2. Kulová plocha κ_3 má střed v bodě S_3 , prochází všemi těžišti trojúhelníkových stěn čtyřstěnu, všemi patami tělesových výšek a třetinami úseček spojujících průsečík tělesových výšek s vrcholy čtyřstěnu. Její poloměr se rovná třetině poloměru kulové plochy κ procházející vrcholy čtyřstěnu,

3. Kulová plocha κ_2 , která je soustředná s kulovou plochou κ_1 o středu S_1 a má poloměr rovný polovině poloměru kulové plochy (opsané čtyřstěnu), prochází středy úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy čtyřstěnu.

Středy S_1, S_3, S kulových ploch $\kappa_1, \kappa_3, \kappa$ leží na téže přímce (Eulerově přímce ortocentrického čtyřstěnu), která prochází průsečíkem tělesových výšek, a body S_3, S_1 dělí úsečka OS v poměru

$$OS_3 : S_3S_1 : S_1S = 2 : 1 : 3; \left(OS_3 : OS_1 : OS = \frac{1}{6} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} \right).$$

Na této přímce leží i průsečík S_4 kolmic vedených těžišti jednotlivých stěn k těmto stěnám a dělí úsečku OS v poměru $2 : 1$.

Užitím analogického postupu dospěli jsme tak k zajímavým výsledkům, které nejsou sice plně analogické (jsou zde jistě odlišnosti), ale je pěknou ukázkou, jak užít analogie k objevování nových poznatků.

fyzika

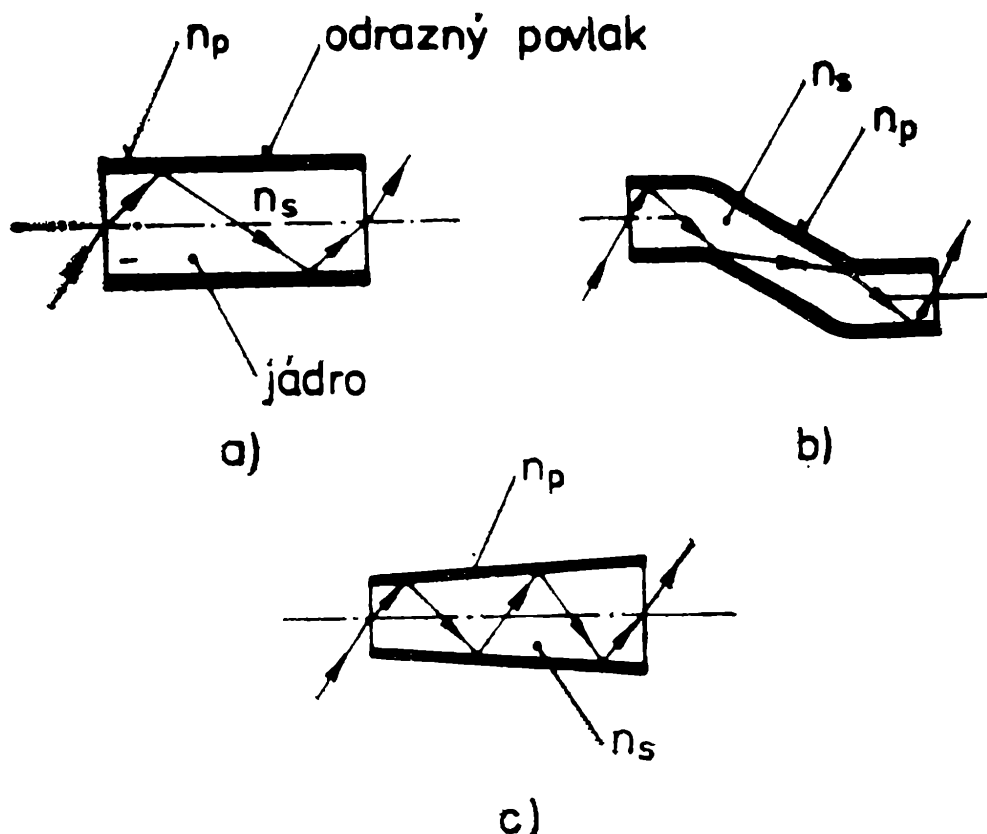
Vláknová optika

RNDr. ing. J. POSPÍŠIL, CSc, UP Olomouc

1. Úvod

Vláknová optika je disciplína studující široký okruh jevů podmíněných průchodem světla opticky průhledným a perfektně čistým vláknem, jehož příčné rozměry nejsou velké ve srovnání s vlnovou délkou světla. Pro výrobu vláken se používají různá skla, jak anorganická, tak organická.

Průchod světla vláknem je výsledkem mnohonásobného úplného vnitřního odrazu na rozhraní dvou prostředí s různým indexem lomu. Na rozdíl od čočkové optiky, ve které optické prostředí (čočky) vytváří obraz, účastní se optické prostředí vláknové optiky pouze na jeho přenosu. Optické prostředí vláknové optiky je tedy vlnovodem (optickým přenosovým vedením, neboli světlovodem), jehož vstupní a výstupní průřez přímo lineárně ovlivňuje změny velikosti přenášeného obrazu. To je jedna ze základních vlastností vláknové optiky, které se v širokém rozsahu využívá v praxi, například v obvodech funkční optoelektroniky. Na obr. 1 je schematické znázornění průchodu světla přímým válcovým (obr. 1a), ohnutým válcovým (obr. 1b) a kuželovým (obr. 1c) vláknem.



Obr. 1

Taková vlákna jsou základními stavebními prvky (elementy, součástkami) vláknové optiky. Nezávisle na tvaru se světloved vždy skládá z jádra a odrazného povlaku, jehož index lomu n_p je menší než index lomu jádra n_s ($n_p < n_s$).

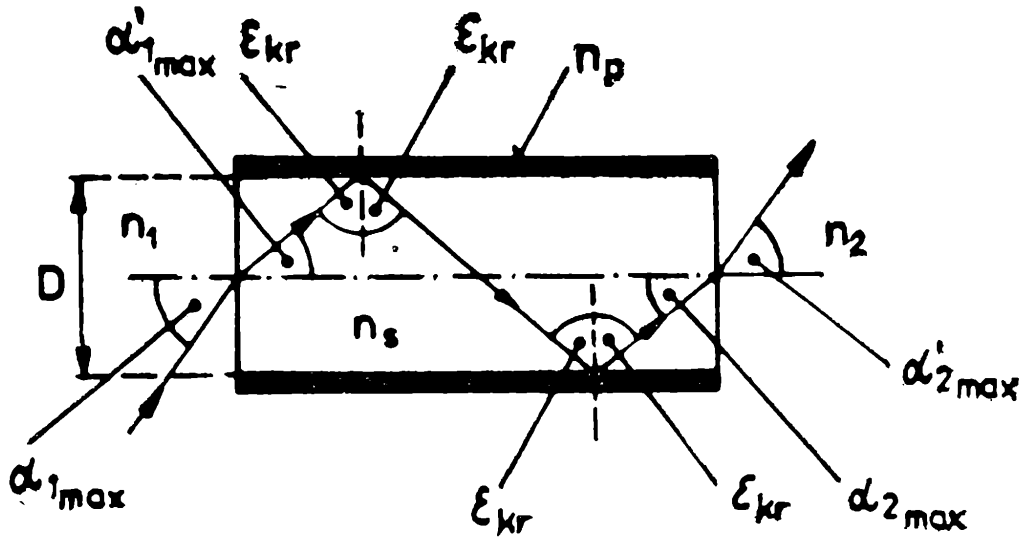
2. Paprsková optika optických vláken

2.1. Válcové vlákno

Předpokládejme homogenní opticky průhledné a dokonale čisté přímé válcové vlákno o indexu lomu n_s (obr. 2). Nechť dále index lomu odrazného povlaku je n_p , při čemž vždy platí $n_p < n_s$. Index lomu prostředí, ze kterého paprsek vstupuje do vlákna, je n_1 a výstupní prostředí nechť má index lomu n_2 . Úhel dopadu vstupujícího paprsku nechť je α_1 a úhel lomu vystupujícího paprsku označme α'_2 .

Zjistíme nyní podmínku pro šíření světla vláknem, jehož příčné rozměry nejsou velké ve srovnání s vlnovou délkou světla. K tomuto účelu uvažujeme meridiánový světelný paprsek, jemuž přísluší tzv. kritický úhel dopadu ε_{kr} na vnitřní stěně vlákna. Je to vlastně mezní úhel dopadu ($\varepsilon_m = \varepsilon_{kr}$), pro který v analyzovaném případě platí

$$\sin \varepsilon_{kr} = \frac{n_p}{n_s}, \quad (1)$$



Obr. 2

přičemž též platí

$$\sin \varepsilon_{kr} = \cos \alpha'_{1 \max}, \quad (2)$$

kde $\alpha'_{1 \max}$ je maximální hodnota úhlu lomu na vstupu vlákna, při které se světlo ještě šíří vláknem způsobem úplného odrazu. Součin $A = n_1 \cdot \sin \alpha_{1 \max}$ je vstupní numerická apertura světlovodu a závisí obdobně jako výstupní numerická apertura světlovodu $A' = n_2 \sin \alpha'_{2 \max}$ obecně na indexech lomu n_s , n_p , n_1 a n_2 ($\alpha_{1 \max}$ jsou maximální hodnoty vstupního a výstupního úhlu dopadu paprsku odpovídající podle zákona lomu maximálním hodnotám $\alpha'_{1 \max}$ a $\alpha_{2 \max}$ lomeného vstupního a výstupního paprsku).

Světelný paprsek se šíří válcovým světlovodem úplným odrazem za podmínek $\varepsilon \geq \varepsilon_{kr}$ a $\alpha'_1 \leq \alpha'_{1 \max}$, tj. když platí

$$\cos \alpha'_1 \geq \frac{n_p}{n_s}. \quad (3)$$

Využitím zákona lomu na vstupu vlákna

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_s \cdot \sin \alpha'_1$$

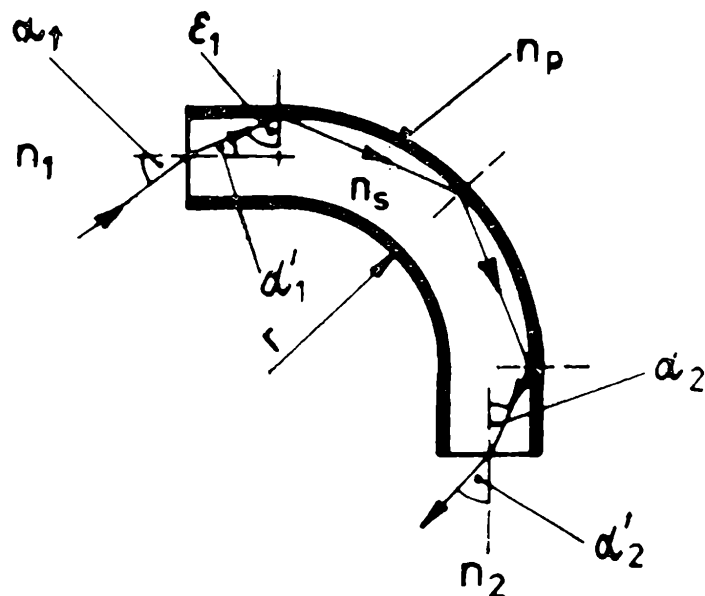
Ve zvláštním případě, kdy $n_1 = n_2 = n_p = 1$, dostaneme ekvivalentní podmínku

$$\sin^2 \alpha_1 \leq \frac{n_s^2 - n_p^2}{n_1^2}. \quad (4)$$

Pro výstupní úhel α'_2 lze odvodit podobnou podmínku

$$\sin^2 \alpha'_2 \leq \frac{n_s^2 - n_p^2}{n_2^2},$$

která pro $n_2 = n_1$ se plně ztotožňuje s podmínkou pro vstupní úhel α_1 .



Obr. 3

V tomto případě tedy je

$$\alpha_1 = \alpha'_2 \quad \text{a} \quad \alpha_{1 \max} = \alpha'_{2 \max}.$$

To znamená, že výstupní apertura se rovná vstupní apertuře.

Ve zvláštním případě, kdy $n_1 = n_2 = n_p = 1$, dostaneme

$$\sin^2 \alpha_1 = \sin^2 \alpha'_2 \leq n_s^2 - 1,$$

a tudíž

$$n_s^2 \geq \sin^2 \alpha_1 + 1$$

Protože $\sin \alpha$ nemůže být větší než 1, lze předcházející podmínku pro úplný odraz ve válcovém vlákně napsat ve tvaru

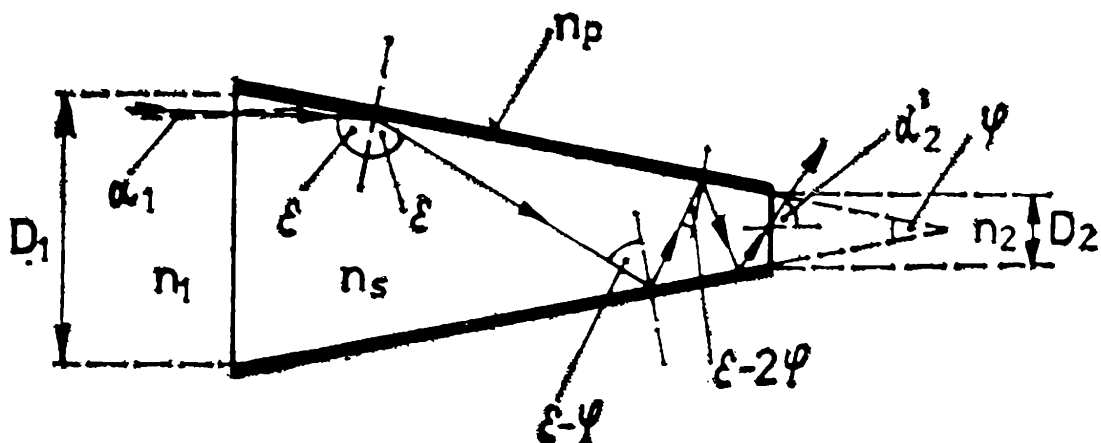
$$n_s \geq \sqrt{2}$$

Mnoho aplikací vláknové optiky závisí na ohebnosti vlákna. Je-li vlákno ohnuto (obr. 1b a obr. 3), pak podmínka (3) nebo (4) přesně neplatí. Je to způsobeno změnou směru a výšky dopadu paprsků podél světlovodu, danou proměnným poměrem průměru vlákna k délce jeho části a poloměru ohybu k průměru vlákna. Úhel dopadu na povrchu válce je redukován a obecně existuje minimální úhel ohybu, pro který je ještě vstupní numerická apertura světlovodu nenulová.

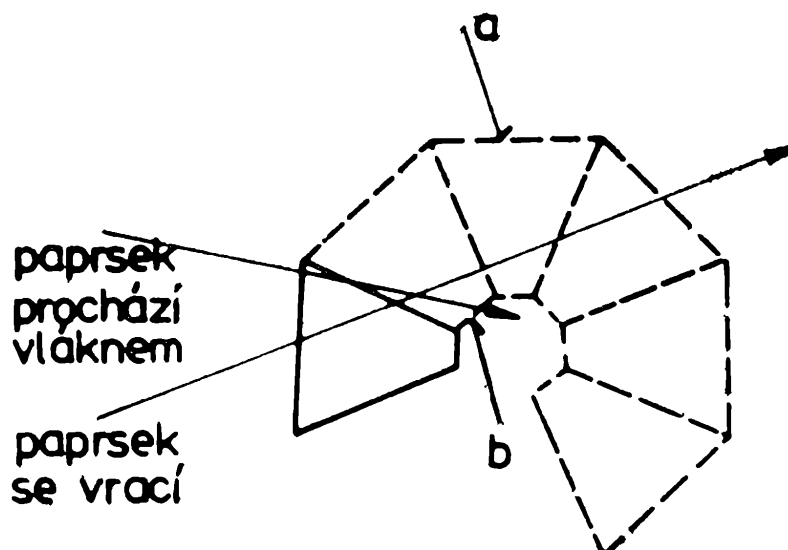
Je-li geometrie ohnutého válcového vlákna analyzována pomocí meridiánového paprsku, znázorněného na obr. 3, pak lze zjistit, že minimální poloměr ohybu $r_{\min}$ vlákna vyhovuje pro $n_1 = n_2 = n_p = 1$ a $n_s = 1,5$ (skleněné vlákno bez odrazného povlaku ve vakuu neboli přibližně ve vzduchu) podmínce

$$r_{\min} \geq 3,5 D,$$

kde D je průměr válcového vlákna. Prakticky při poloměru ohybu $r \approx 20 D$ lze zanedbat ztráty lomem stěnami vlákna u většiny vláken. Protože příčné rozměry vláken jsou řádově mikrometry nebo desítky mikrometrů, dá se uvedená podmínka snadno splnit.



Obr. 4



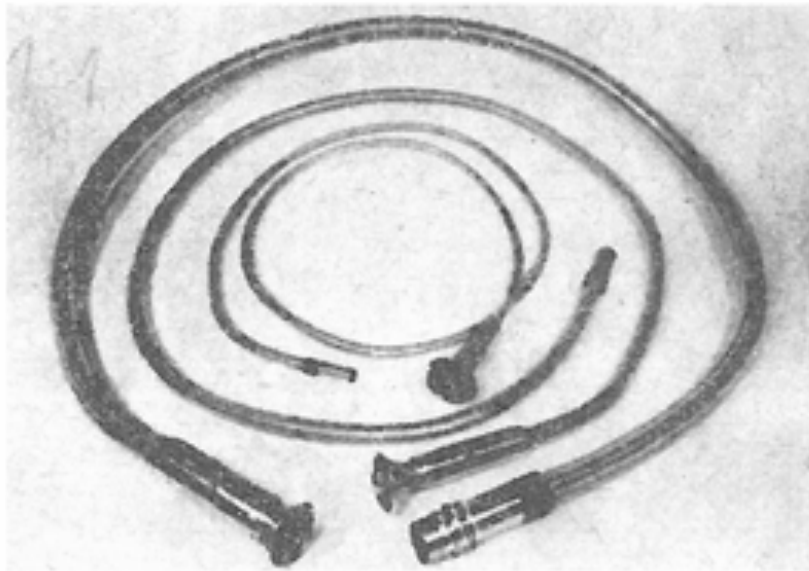
Obr. 5

Poznamenejme ještě, že lze přesně vyrobit vlákna průměru asi $5 \mu m$ až $12 \mu m$. Povlak vláken o menším indexu lomu než je index lomu samotných vláken bývá asi $1 \mu m$ až $2 \mu m$. U rovných válcových vláken lze dosáhnout až jednotkové numerické apertury.

2.2 Kuželové (kónické) vlákno

Je to transparentní homogenní opticky průhledné vlákno perfektní čistoty a kruhového průřezu, jehož průměr se mění lineárně podél jeho délky tak, že vytvoří komolý kužel (viz obr. 1c a obr. 4). Kuželových vláken se v praxi využívá jako světelných sběračů (světelných kolektorů), například ve spojení s fotodetektory u optoelektronických soustav.

Světlo, které vstupuje například do většího konce vlákna podle obr. 4, je úplně odraženo v souladu s podmínkami (3) a (4). U kužele se však úhel odrazu $\epsilon \geq \epsilon_{kr}$ zmenšuje se zmenšujícím se průměrem. Toto zmenšení závisí na vrcholovém úhlu kužele φ tak, že každý následující úhel dopadu je o úhel φ menší než předcházející (viz obr. 4). Existuje tedy úhel dopadu, pro který se již světelné paprsky nedostanou k výstupu kuželového světlovodu, ale vystoupí jeho stěnou nebo se vrátí zpět v případě nulové hodnoty dopadového úhlu.



Obr. 6

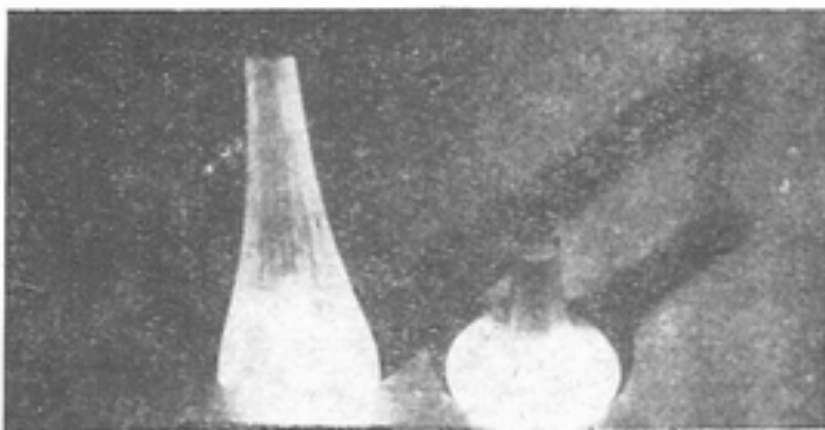
U kuželového světlovodu je podmínka (3) [nebo (4)] porušena a velká část světla uniká stěnami vlákna. Na obr. 5 je ukázáno, jak lze graficky zjistit limitní podmínku pro návrat světelného paprsku ke vstupu kužele. K tomu je sestrojen obrazec vytvořený překlápěním rozvinutého pláště komolého kužele kolem jeho povrchové přímky o celé násobky 180° . Pak platí, že všechny paprsky, které neprotínají hraniční čáry b získaného obrazce, příslušného výstupní ploše komolého kužele, se vrací zpět ke vstupu světlovodu. Ostatní paprsky procházejí (uvedené metody se běžně využívá při analýze chodu světelných paprsků odraznými hranoly).

U kuželového světlovodu závisí vstupní apertura na tom, zda jde o rozptylový nebo zaostřovací světlovod. Pro rozptylový světlovod (světlovod, jehož průměr se lineárně zvětšuje směrem od jeho vstupu — obr. 1c) zůstává v platnosti podmínka (3). Při této podmínce všechny světelné paprsky světlovodem procházejí.

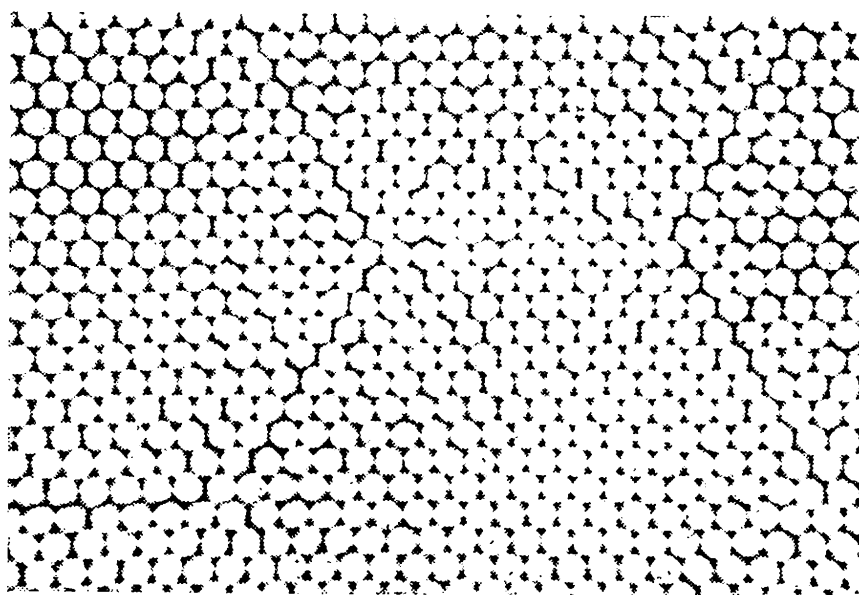
U zaostřovacích světlovodů, tj. kuželových světlovodů, jejichž průměr se od jejich vstupu směrem k výstupu lineárně zmenšuje (obr. 4), se úhel dopadu světelného paprsku ve vztahu k rozšiřování kužele zvětšuje až na kritickou (mezní) hodnotu ε_{kr} . To znamená, že vstupní apertura závisí na poměru $\frac{D_2}{D_1}$ výstupního a vstupního kruhového průřezu světlovodu.

Limitní podmínka pro propuštěný světelný paprsek kuželového vlákna podle obr. 4 může být aproximována předpokladem, že v rozvinutí podle obr. 5 jsou hraniční čáry a a b kruhové o průměrech D_1 a D_2 . V tomto případě platí

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha'_2} = \frac{D_2}{D_1} \quad (6)$$



Obr. 7



Obr. 8

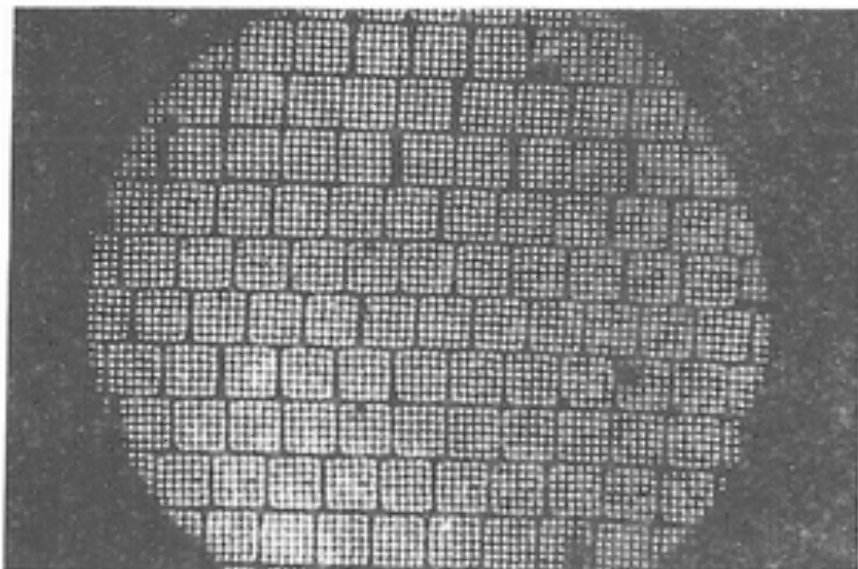
a podmínka pro průchod světelného paprsku kuželovým světlovodem je

$$\sin^2 \alpha_1 \max = \frac{D_2}{D_1} \frac{n_s^2 - n_p^2}{n_1^2}. \quad (7)$$

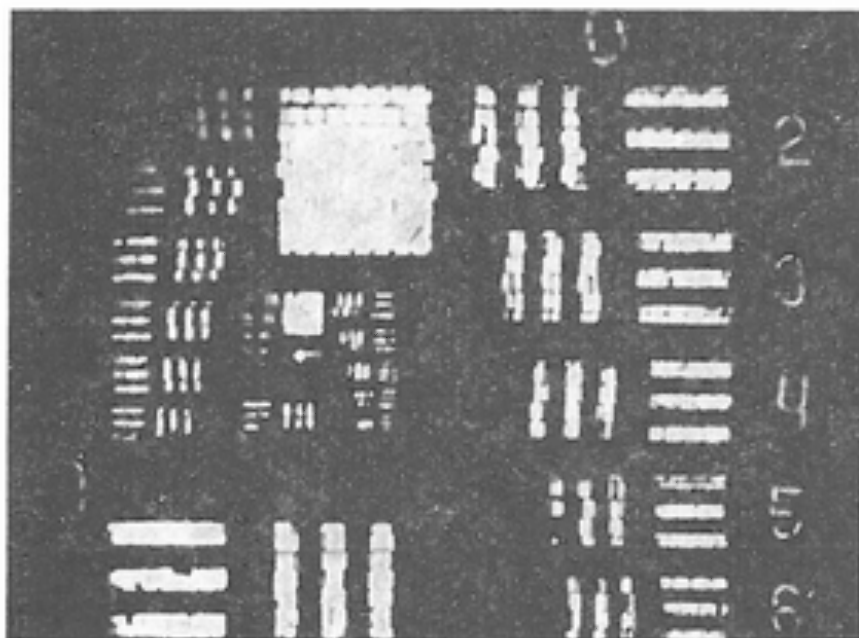
V uvedených vztazích jsou α_1 a α'_2 vstupní a výstupní úhel světelného paprsku u kuželového světlovodu. Pro rozptylový světlovod je $\alpha'_2 < \alpha_1$, a tudíž tento světlovod se chová jako kolimační prvek. Pro zaostřovací světlovod je naopak $\alpha'_2 > \alpha_1$.

2.3. Svazky váken

Dříve uvedené vztahy jsou základem pro výpočet zařízení a systémů s optickými vlákny. Platí nejen pro jednotlivá vlákna, ale v určité míře i pro svazky vláken (složené světlovody), které v praxi obsahují 10^5 až 10^8 jednotlivých světlovodů. U těchto svazků jsou jednotlivá vlákna k sobě přitlačena nejvíce možným způsobem a jsou zapuštěna v ztuhlé nosné látce (v matrici), takže tvoří jednotku.



Obr. 9



Obr. 10

Důležitou vlastností optických přenosových vedení (světlovodů) tvořených svazky vláken je (na rozdíl od čočkových soustav) jejich větší světelnost daná číselnou aperturou, která se přibližně rovná jedné a bývá přibližně šest až osmkrát větší než číselná apertura čočkových soustav.

Na obr. 6 jsou uvedeny příklady dlouhých ohebných vláknových trubic tvořených svazky vláken zakončených tak, že jsou využitelné jako světlovody světla vstupujícího jednou stranou a vystupujícího druhou stranou. Koncové rozšířené části světlovodů jsou vyobrazeny na obr. 7. Obr. 8 znázorňuje zvětšený řez svazku vláken o průměrech $100\ \mu\text{m}$ zapuštěných v tuhé nosné látce. Řez světlovodem tvořeným soustavou malých světlovodů je na obr. 9 (vlákna mají průřezy průměru $10\ \mu\text{m}$). Obr. 10 ukazuje vzhled čárového testu pozorovaného světlovodem se strukturou podle obr. 8.

(Pokračování)

Bílé trpasličí hvězdy

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Výraznou skupinu hvězd na Hertzsprungově-Russellově diagramu*) tvoří tzv. bílí trpaslíci. Jsou to hvězdy spektrálních tříd nejčastěji A až F, jejichž hmotnost je srovnatelná s hmotností Slunce, ale s velmi malými poloměry, řádově rovnými poloměrům planet sluneční soustavy. Ze spektrálních tříd bílých trpaslíků je zřejmé, že jde o hvězdy s velmi vysokou povrchovou teplotou, avšak vzhledem k malým poloměrům jsou jejich svítivosti malé a na *Hertzsprungově-Russellově diagramu* leží tyto hvězdy hluboko pod hlavní posloupností.

Prvním objeveným bílým trpaslíkem je průvodce hvězdy Síría. Síríus je nejjasnější hvězdou v souhvězdí Velkého psa a současně nejjasnější hvězdou na obloze vůbec. Jeho zdánlivá hvězdná velikost je $-1,46^m$ a je ve vzdálenosti 2,66 parseků. V zimním období můžeme Síría pozorovat na večerní obloze. Při měření tzv. vlastního pohybu Síría, tj. změn jeho polohy vzhledem k velmi vzdáleným hvězdám, bylo začátkem tohoto století zjištěno, že se nepohybuje po přímce, ale po vlnovce. Vysvětlení tohoto jevu mohlo být jen jediné — Síríus je složkou dvojhvězdy. Jak je známo, pohybují se složky dvojhvězdy kolem společného těžiště. Toto těžiště vykonává přímočarý pohyb, obě složky se kolem něho pohybují po eliptických dráhách a složením obou pohybů je pak pozorovaný pohyb po vlnovce. Bylo zřejmé, že Síríův průvodce září mnohem slaběji než hlavní hvězda, proto tak dlouho unikal pozornosti astronomů. Tvar křivky, kterou při vlastním pohybu opisoval Síríus, však svědčil o tom, že jeho průvodce má dosti velkou hmotnost, rovnou přibližně hmotnosti Slunce. Proměřením křivky bylo zjištěno, že průvodce obíhá kolem Síría v průměrné vzdálenosti 20 astronomických jednotek a s oběžnou dobou 50 roků.

Později byl tento průvodce, nazvaný Síríus B, identifikován jako bílá hvězda zdánlivé hvězdné velikosti $8,6^m$. Ze známé vzdálenosti Síría byla vypočtena absolutní hvězdná velikost Síría B, která je $11,4^M$. Na obr. 1 je nakreslena dráha zdánlivého pohybu Síría a jeho průvodce. Objev prvního bílého trpaslíka učinil v roce 1914 americký astronom *W. S. Adams* (1876—1956), název této skupiny hvězd je od anglického astro-

*) Viz článek Hertzsprungův-Russellův diagram, „Rozhledy mat.-fyz.“, 55, 1976—77, č. 9, s. 415—420.

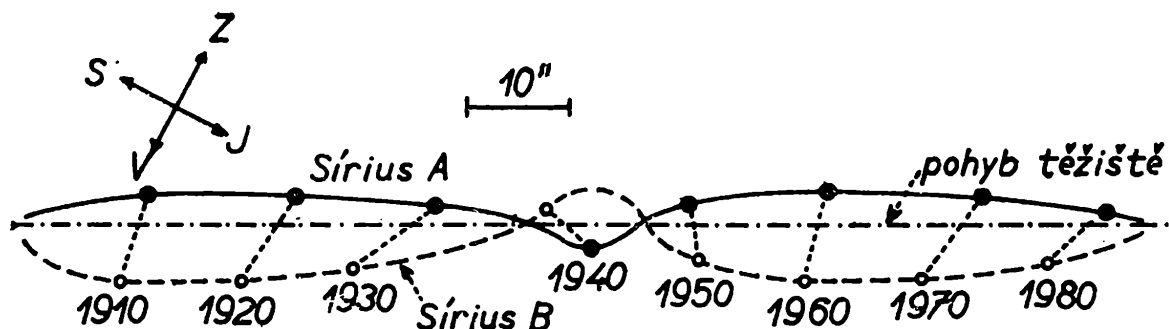
noma *A. Eddingtona* (1882—1944). Anglicky se bílí trpaslíci nazývají *white dwarfs*, odtud zkratka *wd*. Z podrobných výzkumů Síría B vyplynulo, že jeho hmotnost je 0,99 hmotnosti Slunce, poloměr však jen 0,022 poloměru Slunce, tj. asi 14 000 km. Srovnáme-li rozměry Síría B s rozměry naší Země, vidíme, že je jen asi dvakrát větší než Země. Je zřejmé, že hvězda má obrovskou průměrnou hustotu; pro Síría B vychází hustota kolem $2 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, tedy dvěstětisíckrát větší, než je hustota vody. Abychom si o hustotě látky v bílém trpaslíku učinili lepší představu, uveďme, že jeden krychlový centimetr látky této hvězdy má hmotnost 200 kg.

V průměru je střední hustota látky bílých trpaslíků $10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, tedy stotisíckrát větší než hustota vody, vyskytují se však bílí trpaslíci s mnohem vyšší hustotou. Jednou z velmi zajímavých hvězd tohoto typu je *Van Maanenova hvězda*, která je ve vzdálenosti 4,2 parseku od sluneční soustavy. Zdánlivá hvězdná velikost této hvězdy je 12,3^m, absolutní hvězdná velikost jen 14,3^M. Hmotnost *Van Maanenovy hvězdy* je 3,4krát větší než hmotnost Slunce, poloměr však činí jen 0,009 poloměru Slunce — hvězda má rozměry přibližně stejné jako naše Země. Průměrná hustota látky v této hvězdě dosahuje řádově hodnoty $10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, jeden krychlový centimetr látky má tedy hmotnost deset tun.

Vzhledem k malým rozměrům a velkým hmotnostem bílých trpaslíků dosahuje tíhové zrychlení na jejich povrchu značných hodnot — je řádově tisíckrát až stotisíckrát větší než na povrchu Slunce (tíhové zrychlení na povrchu Slunce je 274 m s^{-2}). Ve spektrech bílých trpaslíků se projevuje efekt, vyplývající z Einsteinovy obecné teorie relativity — posun spektrálních čar k červenému konci spektra, nazývaný gravitační posuv. Posunutí spektrální čáry je přímo úměrné hmotnosti a nepřímo úměrné poloměru hvězdy; u nejhustších bílých trpaslíků dosahuje hodnoty několika desetin nanometru, což je hodnota již dobře měřitelná. Tento gravitační posuv je však třeba odlišovat od Dopplerova posuvu, který vzniká při vzdalování (nebo přibližování) hvězdy, proto jej lze spolehlivě určit jen u bílých trpaslíků, které jsou, podobně jako Síríus B, složkami dvojhvězdy.

Z teorie vnitřní stavby hvězd plyne, že za takových fyzikálních podmínek, které panují v bílých trpaslících (vysoké teploty, obrovské hustoty látky, vysoký tlak), musí nastat tzv. degenerace plynu, kdy jsou atomy zcela zbaveny elektronového obalu. Oblast degenerovaného plynu vyplňuje téměř celou hvězdu až na povrchovou slupku o tloušťce několika setin poloměru hvězdy, v níž si plyn uchovává normální vlastnosti a má také bohatý obsah vodíku. Pozorované spektrum hvězdy vzniká právě v této povrchové slupce.

Počet objevených bílých trpaslíků dosahuje v dnešní době několika set, předpokládá se však, že jejich skutečný počet je mnohem vyšší



Obr. 1. Křivka opisovaná při vlastním pohybu složkami dvojhvězdy Síría

a dosahuje až 10 % všech hvězd v Galaxii. Příčina, proč je počet objevených hvězd tohoto typu poměrně malý, je zřejmá — způsobuje to jejich malá svítivost, pro kterou můžeme objevit jen poměrně blízké bílé trpaslíky.

Z hlediska vzniku a vývoje hvězd představují bílí trpaslíci podle současných představ jednu ze závěrečných fází života hvězdy. Vodík uvnitř hvězdy je již přeměněn na jiné prvky, v nitru hvězdy již nejsou zdroje energie. Předpokládá se, že bílý trpaslík postupně vychladne a vyhasne. Toto konečné stadium vývoje ovšem dosud nebylo pozorováno. Z teorie vyplývá také, že ve stadiu bílých trpaslíků mohou končit svůj vývoj jen hvězdy, jejichž hmotnost není příliš větší než hmotnost Slunce. Hvězdy s větší hmotností se pravděpodobně mění v tzv. neutronové hvězdy, za něž jsou pokládány pulsary; vývoj hvězd s ještě větší hmotností končí pravděpodobně gravitačním kolapsem neboli přeměnou v černou díru.

Naše soutěž

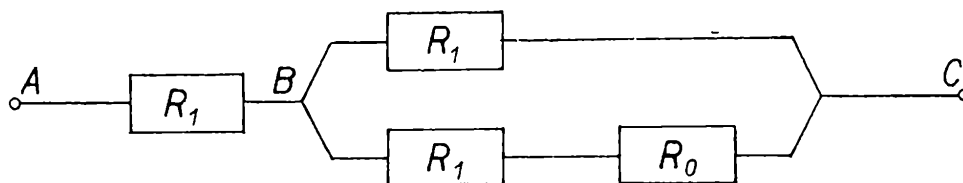
Autorská řešení úloh minulého ročníku

Fyzika

3. Vo vetvenom obvode elektrického prúdu (podľa obr. 1) je daný odpor $R_0 = 5$ ohmov. Stanovte odpor R_1 tak, aby celkový odpor medzi bodmi A, C bol tiež R_0 !

(Došlo 28 riešení).

Evžen Říman



Obr. 1

Riešenie. Pre spojovanie odporov platí:

Sériové $R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots = R.$

Paralelné $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots = \sum \frac{1}{R}.$

Daný je odpor $R_0 = 5$ ohmov = odpor od bodu A do bodu C . Určme odpor R_{BC} od bodu B do bodu C :

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_0} = \frac{R_1 + R_0 + R_1}{R_1 \cdot (R_1 + R_0)} = \frac{R_0 + 2 R_1}{R_1(R_0 + R_1)}.$$

Z toho dostaneme

$$R_{BC} = \frac{R_1(R_0 + R_1)}{R_0 + 2 R_1}. \quad (1)$$

Hľadáme odpor

$$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = R_1 + \frac{R_1(R_0 + R_1)}{R_0 + 2 R_1},$$

čo uvedením na spoločný menovateľ dá výsledok

$$R_{AC} = \frac{2 R_0 R_1 + 3 R_1^2}{R_0 + 2 R_1}. \quad (2)$$

Dosaďme $R_{AC} = R_0$; dostaneme $\frac{2 R_0 R_1 + 3 R_1^2}{R_0 + 2 R_1} = R_0.$

Po odstránení zlomku a úprave dostanem z toho

$$R_1^2 = \frac{R_0^2}{3}, \text{ takže } R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3} \Omega.$$

4. V okamžiku, keď sa elektrický vlak dáva do pohybu, pozorovateľ, ktorý stojí u začiatku prvého vagóna, zaznamenal, že prvý vagón išiel mimo neho za dobu $t = 4$ sekundy. Koľko sekund bude sa mimo neho pohybovať n -tý vagón? Určte pre $n = 7$. (Považujte pohyb za rovnomerne zrýchlený; všetky vagóny sú rovnako dlhé).

(Došlo 28 riešení.)

Evžen Říman

Riešenie: Predpokladajme, že vagóny vlaku sú tesne vedľa seba a pozorovateľ P stojí u hrany prvého vagóna. Pohyb vlaku je rovnomerne zrýchlený, tj. platí $s = \frac{1}{2} t^2$ (1) (dráha = súčinu polovičného zrýchlenia a štvorca času). Dĺžka d každého z vagónov je rovnaká. Očíslujme dĺžku vagónov d_1 (prvý), d_2 (druhý), d_3 (tretí) $\dots = d$ (takže indexy udávajú len poradie vagónov, v ktorom mίjajú pozorovateľa P).

Podľa textu zadaného príkladu prejde prvý vagón okolo pozorovateľa za dobu $t_1 = 4$ [s]. Vzorec (1) teda dá

$$d_1 = d = \frac{1}{2} a t_1^2 \quad (1a), \quad \text{z čoho} \quad a = \frac{2d}{t_1^2} = \frac{d}{8} \quad [\text{m.s}^{-2}], \quad (1b)$$

$$\text{pretože } t_1^2 = 16 \quad [\text{s}^2] \quad (1c).$$

Dva vagóny majú dĺžku $2d$, takže platí $2d = \frac{1}{2} a t_2^2$, z čoho použitím vzťahu (1b) obdržíme $2d = \frac{1}{2} \frac{2d}{t_1^2} t_2^2$. Kratíme (čo sa dá) a dosadíme vzťah (1c); vznikne $t_2^2 = 2 t_1^2 = 2 \cdot 16 [\text{s}^2] \Rightarrow t_2 = 4\sqrt{2}$ [s] (2). Podobne bude (stále užitím vzťahu (1b))

$$3d = \frac{1}{2} a t_3^2 \Rightarrow 6d = a t_3^2 \Rightarrow 6d = \frac{d}{8} t_3^2 \Rightarrow t_3^2 = 48 \quad [\text{s}^2];$$

$$4d = \frac{1}{2} a t_4^2 \Rightarrow 8d = a t_4^2 \Rightarrow 8d = \frac{d}{8} t_4^2 \Rightarrow t_4^2 = 64 \quad [\text{s}^2];$$

$$5d = \frac{1}{2} a t_5^2 \Rightarrow 10d = a t_5^2 \Rightarrow 10d = \frac{d}{8} t_5^2 \Rightarrow t_5^2 = 80 \quad [\text{s}^2] \text{ atď.}$$

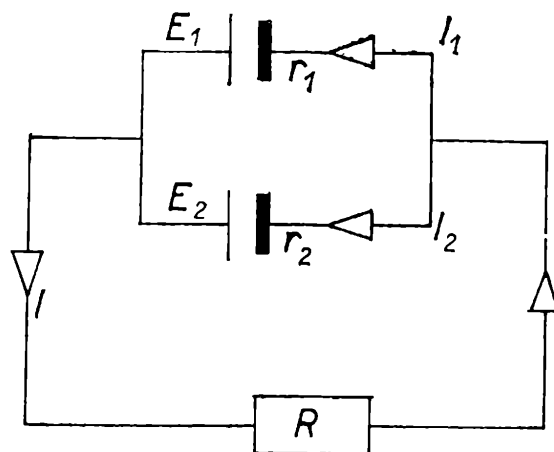
Z týchto výsledkov vidno, že $t_1 = 4[\text{s}]$, $t_2 = 4 \cdot \sqrt{2}$, $t_3 = 4 \cdot \sqrt{3}$, $t_4 = 4 \cdot \sqrt{4} = 8$; $t_5 = 4 \cdot \sqrt{5}$; $t_6 = 4 \cdot \sqrt{6} : \dots t_n = 4 \cdot \sqrt{n}$ (3), kde všetky časy sú v sekundách.

Doba pohybu n -tého vagóna okolo pozorovateľa P je

$$T_n = t_n - t_{n-1} = 4 \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}). \quad (4)$$

Pre $n = 7$ dostaneme $T_7 = 4 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{6}) = 0,7850464$ [s].

5. Dva galvanické články, ktorých elektromotorické napätia sú $E_1 = 3,6$ V, $E_2 = 4,5$ V a vnútorné odpory sú $r_1 = 0,4 \Omega$, $r_2 = 0,5 \Omega$, sú zapojené do obvodu, ktorý má v hlavnom vedení odpor R (viď obr. 2). Stanovte: 1. Aké veľké sú prúdy I_1 , I_2 , I , ak $R = 22 \Omega$. 2. Aké veľké sú prúdy pri skratu, tj. pre $R \rightarrow 0$? 3. Aké veľké je elektromotorické napätie (E) a vnútorný odpor (r) zdroja, ktorý je danej baterii ekviva-



Obr. 2

lentný? 4. Aký veľký by musel byť vonkajší odpor R , aby odpor v prvej vetve bol nulový? 5. Pri akom vonkajšom odpore R sú prúdy v oboch vetvách rovnaké? (Došlo 26 riešení.)

Evžen Říman

Riešenie:

$$I_1 = \frac{E_1 \cdot (R + r_2) - E_2 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2} = \frac{3,6 \cdot 22,5 - 4,5 \cdot 22}{22 \cdot 0,9 + 0,2} = -0,9 \quad [\text{A}]$$

$$I_2 = \frac{E_2(R + r_1) - E_1 \cdot R}{R(r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2} = \frac{4,5 \cdot 22,4 - 3,6 \cdot 22}{20} = 1,08 \quad [\text{A}]$$

$$I = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2} = \frac{3,6 \cdot 0,5 + 4,5 \cdot 0,4}{22 \cdot 0,9 + 0,2} = 0,18 \quad [\text{A}]$$

2. Skrat:

$$I_1 = \frac{E_1}{r_1} = \frac{3,6}{0,4} = 9 \quad [\text{A}]; \quad I_2 = \frac{E_2}{r_2} = \frac{4,5}{0,5} = 9 \quad [\text{A}] \quad I = 18 \quad [\text{A}]$$

$$3. \quad E = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2} = \frac{3,6 \cdot 0,5 + 4,5 \cdot 0,4}{0,9} = 4 \quad [\text{V}]$$

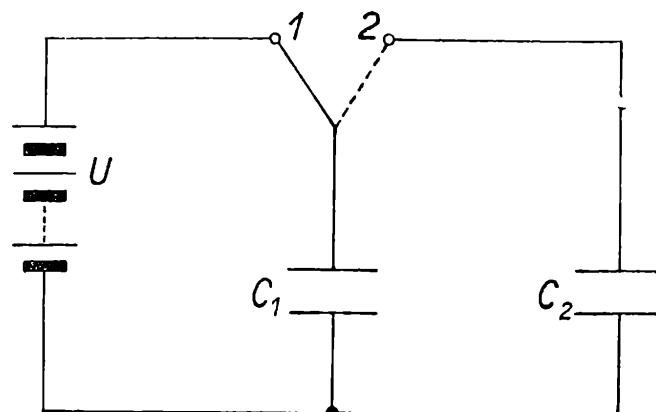
$$r = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} = \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,4 + 0,5} = \frac{0,2}{0,9} = \frac{2}{9} \doteq 0,222 \, \Omega$$

$$4. \quad E_1 R + E_1 r_2 - E_2 R = 0; \text{ z toho } R = \frac{E_1 r_2}{E_2 - E_1} = \frac{3,6 \cdot 0,5}{0,9} = 2 \, \Omega$$

pri skratu!!

$$5. \quad R = \frac{E_2 r_1 - E_1 r_2}{2 \cdot (E_1 - E_2)} = \frac{4,5 \cdot 0,4 - 3,6 \cdot 0,5}{2 \cdot (3,6 - 4,5)} = \frac{1,8 - 1,8}{2 \cdot 0,9} = 0!!$$

pri skratu!!



Obr. 3

6. Dva kondenzátory sú paralelne spojené. Kondenzátor s kapacitou $C_1 = 200 \text{ pF}$ bol nabitý na potenciál $U = 120 \text{ V}$. Potom bola nabíjacia batéria odpojená a nabitý kondenzátor bol spojený paralelne s iným kondenzátorom neznámej kapacity C_2 (obr. 3). Tým napätie kleslo na $U' = 48 \text{ V}$. Určte pôvodný náboj Q_1 prvého kondenzátora, kapacitu C_2 , ďalej náboje Q_1 , Q_2 každého z kondenzátorov, keď boli paralelne spojené, a množstvo rozptýlenej energie $W = W - W'$. Kam sa podela táto energia?

(Došlo 28 riešení.)

Evžen Říman

Riešenie:

$$Q_1 = C_1 U = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ A.s}$$

$$Q'_1 = C_1 U' = 9,6 \cdot 10^{-9} \text{ A.s}$$

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 \quad (\text{zákon o zachovaní náboje})$$

$$\Rightarrow Q'_2 = Q_1 - Q'_1 = C_1(U - U') = 1,44 \cdot 10^{-8} \text{ A.s}$$

$$Q'_2 = C_2 U' \Rightarrow C_2 = Q'_2/U' = C_1(U - U')/U' = 300 \text{ pF}$$

Poloha spínača 01 pri nabíjaní

02 pri vybíjaní

$$\begin{aligned} \Delta W &= W - W' = \frac{1}{2} C_1 U^2 - \frac{1}{2} (C_1 + C_2) U'^2 = \\ &= \frac{1}{2} C_1 (U^2 - U'^2) - C_2 U'^2 = \frac{1}{2} C_1 (U^2 - U'^2) - C_1 (U - U') U'^2/U' = \\ &= \frac{1}{2} C_1 (U + U')(U - U') - C_1 U'(U - U') = \\ &= \frac{1}{2} C_1 (U - U') \cdot (U + U' - U') = \frac{1}{2} C_1 \cdot (U - U') \cdot U = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-10} \text{ F} \cdot 72 \text{ V} \cdot 120 \text{ V} = 10^{-10} \cdot 72 \cdot 120 \text{ J} = 8,640 \cdot 10^{-7} \text{ J} \end{aligned}$$

Rozptýlená energia W sa zmení v Jouleovo teplo v odporoch a čiastočne v elektromagnetické žiarenie. Ak je odpor spojov R malý, prechádza náboj z prvého kondenzátora na druhý oscilujúcim elektrickým prúdom, ktorý trvá tým dlhšie, čím je odpor R menší.

různě

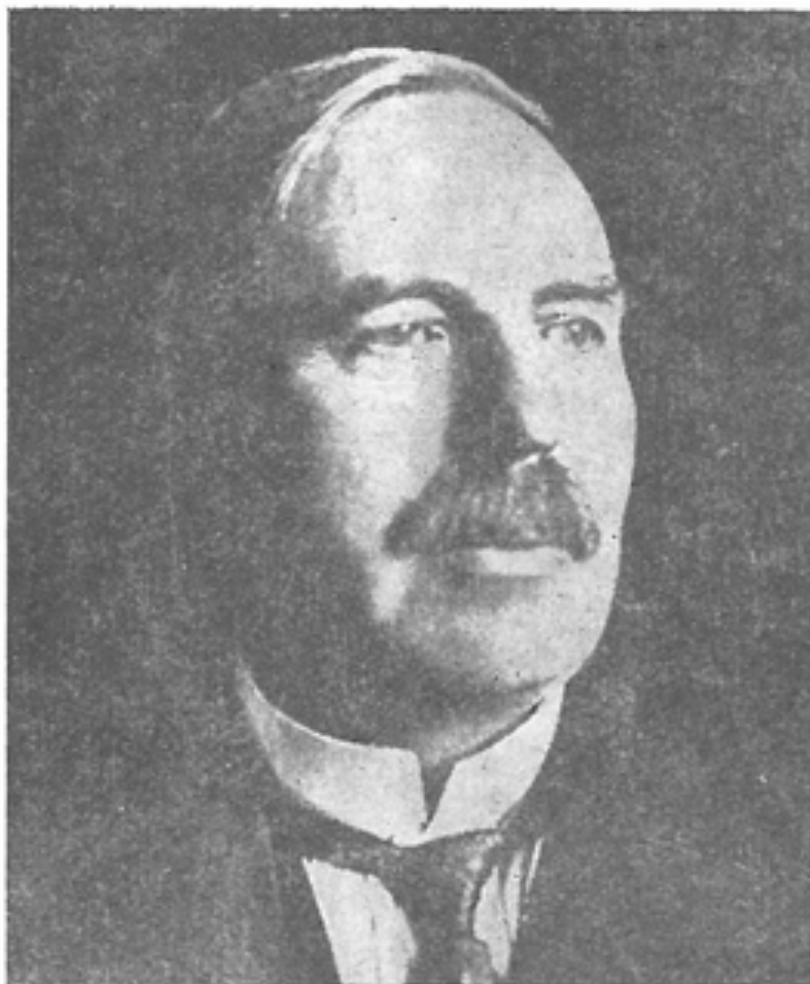
Ušlechtilý divoch

(Ke 40. výročí úmrtí Ernesta Rutherforda)

RNDr. VLASTIMIL FLAJSINGR, Gottwaldov

Rutherford, jehož mohutná postava byla vždycky zosobněním zdraví a síly, začal najednou stárnout, třebaže si to nechtěl připustit. Když jednou vsouval do elektroskopu jemný lístek zlata, chvěly se mu ruce tak, že musel požádat svého asistenta Crowa, aby to udělal za něho. Za několik dnů se táž příhoda opakovala; tehdy se už Crowe nezdržel a starostlivě se zeptal: „Zase vás zlobí ty nervy?“ Ale Rutherford hned zařval jako tur: „Žádné nervy, k sakru! To vy třesete stolem!“ Říkalo se o něm, že je to divoch, ušlechtilý divoch, ale přece jen divoch. Spřátelit se s ním je právě tak nemožné jako tykat si s přírodními živly [3].

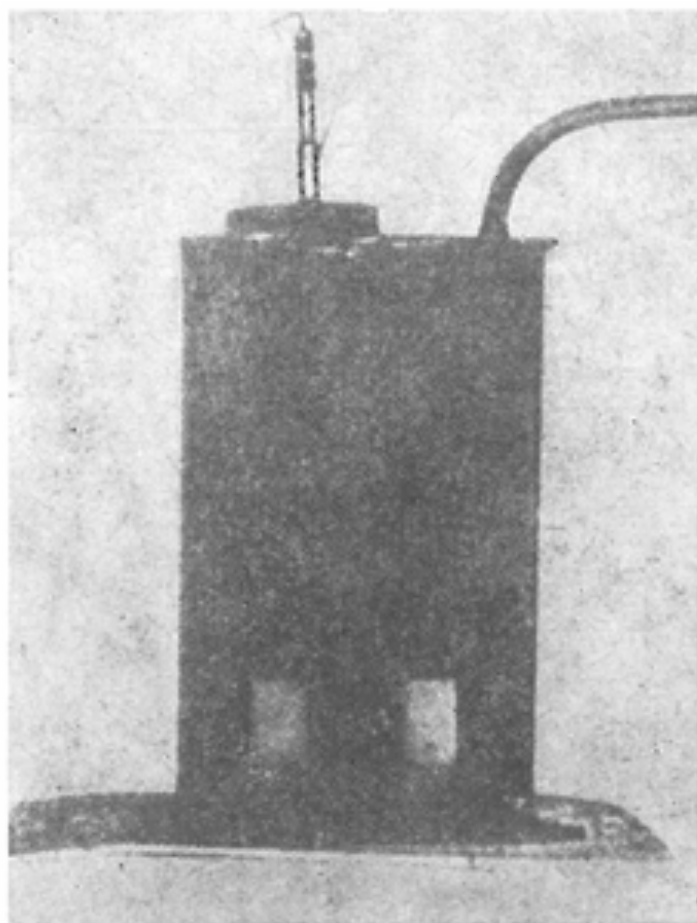
Ernest Rutherford, otec nukleární fyziky, se narodil 30. srpna 1871 poblíž Nelsonu na Novém Zélandu jako čtvrté dítě Jamese a Marthy Rutherfordových. Jeho otec přišel farmařit na Nový Zéland ze skotského Perthu. Jako dítě se Ernest nejživěji zajímal o fotografování, opravu hodin a (stejně jako Newton) stavbu vodních mlýnků. V 15 letech získal stipendium pro studium na nelsonské koleji, jeho výborné studijní schopnosti mu zajistily v roce 1889 i universitní stipendium na *Canterbury College*, kde se již specializoval na matematiku a fyziku. Po absolvování studia se zabýval problémy magnetismu v souvislosti s radiovými vlnami tehdy nově objevenými. V roce 1895 odchází do Cavendishovy laboratoře v *Cambridge* k *J. Thomsonovi*, opět na stipendijní pobyt. Zpočátku ještě pokračoval ve výzkumu šíření radiových vln, přijímal je až do vzdálenosti 1 míle, brzy ho však upoutalo rentgenové záření. Společně s Thomsonem dokázal jeho ionizační schopnosti. Totéž prokázal i pro ultrafialové záření a záření vydávané uranem, u něhož rozlišil složky α a β .



Jeho pobyt v Cambridge byl provázen finančními potížemi, přestože jeho nájem během semestru byl relativně nízký — 7,5 libry (to vše bez oleje na svícení). Proto uvítal možnost působení na *McGillově universitě v Montrealu* s 500 librami ročního platu, kam přišel v roce 1898.

Učitelská nezkušenost mu nejprve působila určité potíže, ale brzy se jeho přednášky těšily mezi studenty značné oblibě, podobně jako on sám mezi svými novými kolegy. Pustil se naplno do práce a hned ho zaujalo, že záření vydávané thoriem bylo překvapivě ovlivňováno — průvanem! Proudem vzduchu ztrácelo až polovinu své schopnosti vybíjet lístkový elektroskop. V roce 1900, spolu s chemikem *F. Soddy*em, shledal u thoria X ($^{224}_{88}\text{Ra}$) exponenciální závislost aktivity na čase, což potvrdil i pro jiné radioaktivní materiály. Objev inertních plynů ve výbojové trubici při pokusech s radiovými a thoriovými preparáty byl pak demonstrací přeměn způsobených radioaktivním zářením uvnitř samotného atomu, který až do té doby byl pokládán za nedělitelný.

Podíl náboje a hmotnosti a rychlost α částic určil Rutherford z jejich výchylek v elektrickém a magnetickém poli. Určení samotného náboje nebylo provedeno až do roku 1908, protože podstata těchto částic stále nebyla ještě známa. Přesto již v roce 1904 byl Rutherford přesvědčen o tom, že jde o heliony, v čemž ho posiloval výskyt helia při těžbě uranu.



Elektroskop pro detekci částic

Rutherfordovy znalosti o uvolňování tepelné energie při radioaktivním rozpadu mu rovněž umožnily odhadnout stáří země. V té době se pomocí metody vycházející z doby potřebné k ochlazení horkých plynů na průměrnou teplotu země odhadovalo stáří země jen na několik set miliónů let. Průběh tepelných změn při radioaktivním rozpadu je pomalejší, a tak Rutherford dal vlastně podnět k palcovým titulům, které se záhy objevily v novinách: „Soudný den odložen“.

V roce 1907 přešel na universitu do *Manchesteru*, kde se stal pro studenty „malým bohem“. Ve spolupráci s *H. Geigerem*, využívaje jeho dnes už slavný detektor, určil velikost náboje částice α . V roce 1908 převzal Nobelovu cenu za chemii, ale toto své „přeřazení“ mezi chemiky bral spíše s humorem. Ve své slavnostní řeči popsal experiment, v němž spektroskopicky dokázal podstatu α záření.

V roce 1911 *Geiger* a jeho žák *E. Marsden* provedli pokus, kdy částicemi α ostřelovali kolmo velmi jemnou zlatou fólii. Rutherford vyslovil hypotézu, že scientilační záblesky budou pozorovány i ve značně odlišných úhlech vzhledem k původnímu směru vystřelování [1]. Tato hypotéza byla k všeobecnému překvapení skvěle potvrzena. Později řekl

Rutherford, že to bylo „jako kdybyste kouli o průměru 40 cm stříleli na hedvábný papír a koule se odrazila zpět a zasáhla vás“. Tím bylo experimentálně dokázáno, že kladný náboj atomu je soustředěn v malém jádře v jeho středu. Tato představa se podstatně lišila od tehdy uznávaného Thomsonova modelu atomu, podle něhož kladný náboj vyplňoval s konstantní objemovou hustotou kouli, uvnitř které plavalo právě tolik elektronů, aby atom byl elektricky neutrální. Velké odchylky α částic v Geigerově a Marsdenově pokusu pak prokázaly neudržitelnost této teorie.

Rutherford se podílel rovněž na *Moseleyových* měřeních rentgenových spekter různých prvků, což umožnilo přesné určení jejich protonových čísel. Také *Bohrově* formulaci modelu atomu předcházela jeho spolupráce s Rutherfordem v Manchesteru.

První světová válka přerušila činnost universitních laboratorí. Rutherford se nějakou dobu věnoval akustické detekci ponorek. Po svém návratu k jaderné fyzice realizoval v roce 1919 dnes už slavná měření doletu α částic v plynech. Pozorovaná přeměna jádra atomu dusíku v jádro atomu kyslíku se tak stala první umělou jadernou reakcí vůbec. V témže roce zaujal Rutherford místo J. Thomsona v *Cambridge*, kde se společně s *J. Chadwickem* soustředil na studium jaderných reakcí lehkých prvků. Již v roce 1920, 12 let před Chadwickovým objevem, předpověděl existenci neutronu na základě rozdílů v narůstání hmotnosti a náboje u jader těžkých prvků. Během svého pobytu v *Cambridge* získal Rutherford četné pocty vědecké i šlechtické. Později byl znám jako ochránce všech fyziků prchajících před Hitlerem z nacistického Německa. Živě podporoval *Cockrofta* a *Waltona* ve stavbě urychlovače protonů a deuteronů. Bombardování deuteria deuterony bylo také námětem jeho poslední práce, kterou publikoval 21. srpna 1937. O dva měsíce později umírá na následky zranění utrpěného ve své zahradě.

Atomové bomby se Ernest Rutherford nedožil, bezpochyby by ji však nenáviděl. Nevěřil, že by se jaderná energie mohla uvolnit v takovém množství. Nicméně již v roce 1915 vyjádřil naději, že ji nikdo neovládne, aniž by se dříve nenaučil žít se svými sousedy v míru.

Literatura:

- [1] Abbott, A. F.: Ordinary level physics, Heineman, London 1969
- [2] Jacobs, D. J.: Lord Rutherford, Physics Education, 7, 1971, 3
- [3] Jungk, R.: Jasnější než tisíc sluncí, Mladá fronta, Praha 1965

matematicko - fyzikální zábavy

Magické čtverce a trojúhelníky s devíti čísly

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK

O magických čtvercích jste jistě četli; studenti gymnázií mohli řešit v 1. ročníku tuto úlohu ze sbírky:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

V polích čtverce jsou vepsána písmena, z nichž každé označuje jiné z čísel 1, 2, ..., 9. Zjistěte jakých hodnot může nabývat e , chceme-li vytvořit tzv. magický čtverec (tj. čtverec se stejnými součty čísel v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách).

Klíčová pozice čísla e spočívá v tom, že je sčítancem ve čtyřech sledovaných součtech, zatímco ostatní čísla v nejvýše třech. Celkový součet

$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + \dots + 9 = 45$,
proto na každý řádek připadá součet 15. Součty s číslem e dávají

$$(a + e + i) + (c + e + g) + (d + e + f) + (b + e + h) = 60$$

$$3e + (a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 60$$

$$3e + 45 = 60$$

$$e = 5$$

V každém magickém čtverci popsaného typu je tedy v prostředním poli zapsáno prostřední z čísel 1, 2, ..., 9. V rozích čtverce se mohou vyskytovat jen ta čísla, která umožňují dosáhnout součtu 15 třemi způsoby; proto je užitečné zapsat všechny možné součty, které přicházejí v úvahu:

$$\begin{array}{l} 1 + 5 + 9, \quad 1 + 6 + 8, \quad 2 + 4 + 9, \quad 2 + 5 + 8, \\ 2 + 6 + 7, \quad 3 + 4 + 8, \quad 3 + 5 + 7, \quad 4 + 5 + 6. \end{array}$$

Pouze čísla 2, 4, 6 a 8 se vyskytují ve třech součtech, a to je předurčuje do rohů čtverce. V téměř řádku můžeme umístit první a druhé nebo první a třetí z nich; po této volbě lze již čtverec jednoznačně doplnit. Sestavte si všechny magické čtverce tohoto typu.

Obdobně můžeme dospět k pojmu magický trojúhelník — na místo každého písmene v připojeném schematu máme doplnit jiné z čísel 1, 2, ..., 9 tak, aby součet čísel zapsaných na téže straně trojúhelníka byl ve všech třech případech stejný. Naznačme si řešení tohoto zábavného úkolu.

Klíčovou polohu mají zřejmě čísla ve vrcholech trojúhelníka; součty na stranách však nejsou jednoznačně určeny. Označme takový součet proměnnou s ; pak запиšme

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= s \\ d + e + f + g &= s \\ g + h + i + a &= s \\ 2(a + d + g) + (b + c + e + f + h + i) &= 3s \\ \underline{a + d + g + b + c + e + f + h + i} &= 45 \end{aligned}$$

Součet $a + d + g$ je omezen několika podmínkami:

- a) je vždy násobkem tří (odůvodněte z $3s - 45$),
- b) má nejmenší možnou hodnotu $1 + 2 + 3 = 6$,
- c) má největší možnou hodnotu $7 + 8 + 9 = 24$,
- d) nemůže se rovnat 9 ani 21

Poslední tvrzení se dokáže sporem: Z předpokladu, že $a + d + g = 9$, plyne, že $9 = 3s - 45$, tj. $s = 18$. Dále je z $a + d + g = 9$ zřejmé, že ani jedno z čísel a, d, g se nerovná 9, proto číslo 9 musí být „uvnitř strany“ trojúhelníka. Nechť je např. $b = 9$, pak

$$\begin{aligned} a + 9 + c + d &= 18, \quad \text{tedy} \quad a + c + d = 9, \\ &\quad \text{ale také} \quad a + g + d = 9, \end{aligned}$$

a to vede k důsledku $c = g$, který neplatí. Odmítáme tedy platnost výroku $a + d + g = 9$.

Pokuste se o obdobný důkaz, že $a + d + g \neq 21$.

V důsledku toho, že lze volit jen $a + d + g = 6, 12, 15, 18$ či 24, proměnná s nabývá jen hodnot 17, 19, 20, 21 či 23. A to už je úloha pro vás: sestavte magické trojúhelníky s udanými hodnotami součtu s . Na ukázkou máte tři otištěné:

$\begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ 7 & & 5 & & \\ 6 & & & 9 & \\ 3 & 8 & 4 & 2 & \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} & 4 & & & \\ 9 & & 3 & & \\ 1 & & & 8 & \\ 6 & 7 & 2 & 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} & 7 & & & \\ 6 & & 3 & & \\ 1 & & & 5 & \\ 9 & 4 & 2 & 8 & \end{array}$
---	---	---

Najdete všechny magické trojúhelníky, které existují? Které z nich jsou stejného typu, tj. mají stejné neuspořádané skupiny čísel na svých stranách? Kolik je různých typů těchto trojúhelníků? Prozkoumejte samostatně tuto problematiku, případně ji zobecněte pro trojúhelníky s 12 písmeny.

Zápis druhých mocnin stejnými číslicemi

Ve svých tabulkách druhých mocnin přirozených čísel nenajdete žádné aspoň dvojciferné číslo zapsané pomocí stejné číslice na všech místech zápisu. Je to způsobeno malým rozsahem tabulek nebo takové číslo vůbec neexistuje? Sledujte další otázky, sami objevíte odpověď:

a) Kterými číslicemi končí zápisy druhých mocnin přirozených čísel? Jistě řeknete, že 0, 1, 4, 5, 6, 9. Umíte to dokázat?

[Uvažujte o $1^2, \dots, 9^2$ a dále o $n = 10a + b$, $0 \leq b < 9$.]

b) Jaký zbytek při dělení čtyřmi dávají druhé mocniny přirozených čísel? Víte už, že jedinými zbytky jsou 0 a 1. [Zapište $(2k)^2$, $(2k-1)^2$ a vytkněte násobek čísla 4.]

c) Jak rychle určíme zbytek, který při dělení čtyřmi dá víceciferné číslo, např. 289157593? Vzpomeňte si na tzv. znak dělitelnosti čísla čtyřmi; dokažte, že $n = 100a + b$, $0 \leq b < 99$, dává při dělení čtyřmi týž zbytek jako číslo b . Postačí tedy zkoumat poslední dvojčíslí daného čísla.

d) Jakými dvojčíslími mohou končit zápisy druhých mocnin přirozených čísel zapsaných stejnou číslicí ve všech místech? Získáte

00, 11, 44, 55, 66, 99 .

Prozkoumejte, které zbytky při dělení čtyřmi dají tato dvojciferná čísla. Potvrdíte tak, že *žádné číslo zapsané samými jedničkami, samými pětkami, samými šestkami ani samými devítkami nemůže být druhou mocninou přirozeného čísla.*

e) Jak je tomu s číslicemi 0 a 4, které úspěšně prošly naší prověrkou v d)? Číslo zapsané samými nulami není přirozené číslo. Pokud by některé číslo zapsané samými čtyřkami $44 \dots 4$ bylo druhou mocninou přirozeného čísla h , pak by h bylo sudé, tj. $h = 2m$, m přirozené. Z rovnosti $44 \dots 4 = h^2 = 4m^2 = 4 \cdot (11 \dots 1)$ plyne, že $m^2 = 11 \dots 1$, ale to odporuje zjištění v úseku d).

Zbývá vám, abyste vyslovili konečný závěr. Máte-li zájem, pokuste se dokázat, že *zápis druhé mocniny žádného přirozeného čísla nemůže končit více než třemi čtyřkami* a že $1444 = 38^2$ je nejmenší z těch čísel, která mají takový zápis se *třemi* čtyřkami. Je nějak omezen počet nul na konci zápisů druhých mocnin přirozených čísel?

Jaroslav Šedivý

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

sedmina
sedmiúhelník
sedmý
sekans
sestrojit
setina
seřiznutý (rovinou rovnoběžnou
s podstavou)
sférický
shoda
shodný
shodné zobrazení
shodnost
singulární bod
sinová věta
sinus
sinusoida
sít
sjednocené
sjednocení
skalár
skalární
skalární součin
skalární násobení
sklon
sklopení
sleva
sloupec
skutečný
skutečná velikost

seventh
heptagon
seventh
secant
construct
hundredth
truncated

spherical
congruence
congruent, of same length
rigid motion
equality
singular point
sine formula
sine
sine curve
net
united
union
scalar
scalar
scalar product, dot product
scalar multiplication
slope
revolution
discount
column
real, actual, true
true size, full size

skok	jump
složení	composition
opakované složení	iterated composition
složený	composite, composed, complex
složené číslo	composite number
složená funkce	composite of functions
složený úrok	compound interest
složená závorka	brace
složený zlomek	complex fraction
složitý	complicated
složka	component
směr	direction
směrnice	angular coefficient
směrové kosiny	direction cosines
smyčka	loop
smysl	sense
snadné	easy
soubor	battery
současný	simultaneous
součet	sum
součet množin	union of sets
součin	product
kartézský součin	Cartesian product
skalární součin	scalar product, dot product
vektorový součin	vector product, cross product
souměrnost	symmetry
souměrný	symmetric
souměřitelné	commensurable
souřadnice	coordinate
sousední	neighbouring, adjacent
soustava	system
číselná soustava	number system
soustava souřadnic	system of coordinates
uspořádaná soustava	ordered system
soustava rovnic	simultaneous equations
soustředit	focus, concentrate
soustředný	concentric
souvislost	connection
souvislý	connected
spád	inclination, slope
největší spád	maximum inclination
spirála	spiral
splňovat	fulfill, satisfy
splývat	coincide
spočetný	denumerable, countable
spočetná množina	enumerable set, countable set
spočítat	count

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

5

ROČNÍK 56, 1977-1978, LEDEN



rozhledy

Nositel vyznamenání

Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, Ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VÚOŠ Praha, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novln. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1977.

**ROČNÍK 56
LEDEN 1978**

5

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

L. Bican: O řešení Pellovy rovnice .	193
Prof. E. Kraemer: Aritmetický a geometrický průměr I	198
J. Sedláček: Částečné součty řad s polynomickými členy	206
Dr. J. Šedivý: Prodlužování konečných posloupností prvočísel	211
Ing. V. Patrovský, CSc.: Crookesův radiometr	213
Dr. ing. J. Pospíšil, CSc.: Vláknová optika (dokončení) .	216
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Obří a velebří hvězdy	224
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	229
Dr. V. Malíšek, CSc.: Rozvoj fyziky v Sovětském svazu za šedesát let .	231
J. Kotyk: Z počátků českého letectví	235
Matematické zábavy	238
Recenze	238
H. Holmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

matematika

0 řešení Pellovy rovnice

LADISLAV BICAN, Praha

Záměrem tohoto článku je podat praktický návod na řešení tzv. Pellovy rovnice, tj. na nalezení všech dvojic celých čísel $[x, y]$, které vyhovují rovnici $x^2 - Ay^2 = 1$, kde A je přirozené číslo, které není druhou mocninou žádného přirozeného čísla. Název Pellova rovnice pochází od P. Fermata (1601—1665), který jako první znal obecnou metodu řešení této rovnice. Řešení některých speciálních typů této rovnice bylo však známo již daleko dříve. Již v 7. století se touto rovnicí zabýval indický matematik Brahmagupta a rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$ se vyskytuje u některých řeckých a indických matematiků již ve 4. století před n. l.

O řešení Pellovy rovnice platí celá řada vět, z nichž některé si bez důkazu uvedeme, ale hlavně se zaměříme na metody hledání těchto řešení.

Konečným řetězovým zlomkem rozumíme výraz

$$(1) \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}},$$

kde a_0 je celé číslo, $a_1, a_2, \dots, a_k$ jsou přirozená čísla a $a_k > 1$. Podobně nekonečným řetězovým zlomkem rozumíme výraz

$$(2) \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{\ddots}}}}},$$

kde a_0 je celé číslo a $a_1, a_2, \dots$ jsou čísla přirozená. Vzhledem k tomu, že s řetězovými zlomky budeme v dalším pracovat, je účelné zvolit si pro tyto výrazy nějaký vhodný zápis. Tak zlomek (1) budeme zapisovat ve tvaru $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ a zlomek (2) ve tvaru $[a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Slovy řetězový zlomek budeme v dalším rozumět buď konečný nebo nekonečný řetězový zlomek. V případě konečného řetězového zlomku bude n značit celé nezáporné číslo, $n \leq k$ a v případě nekonečného řetězového zlomku bude n značit libovolné nezáporné celé číslo. Číslo $A_n = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ se nazývá n -tým sblíženým zlomkem řetězového zlomku (1) nebo (2). Definujeme-li posloupnosti P_n, Q_n celých čísel vztahy

$$P_{-1} = 1, P_0 = a_0, P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 1 \quad \text{a}$$

$$Q_{-1} = 0, Q_0 = 1, Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, n \geq 1,$$

pak je možno dokázat, že $A_n = P_n/Q_n, n = 0, 1, \dots$ Při výpočtu sblížených zlomků je účelné zapisovat vypočtené hodnoty do následující tabulky:

	a_0	a_1	a_2	
P_{-1}	P_0	P_1	P_2	
Q_{-1}	Q_0	Q_1	Q_2	

Nekonečný řetězový zlomek (2) se nazývá periodický, jestliže jej lze napsat ve tvaru $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_{s+k-1}, a_{s+1}, \dots, a_{s+k-1}, a_{s+1}, \dots]$, kde k je přirozené a s celé nezáporné číslo. Nejmenší přirozené číslo k , pro které lze nekonečný řetězový zlomek (2) napsat v tomto tvaru, se nazývá jeho periodou.

Je-li α reálné číslo, označme $[\alpha]$ celou část čísla α , tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovné α . Ukažme si nyní, jakým způsobem lze každému reálnému číslu α přiřadit řetězový zlomek. Položme $a_0 = [\alpha]$ a zapišme α ve tvaru $\alpha = a_0 + 1/\alpha_1$. Položme dále $a_1 = [\alpha_1]$ a zapišme α_1 ve tvaru $\alpha_1 = a_1 + 1/\alpha_2$. Postupujeme-li stejným způsobem dále, $a_2 = [\alpha_2], \alpha_2 = a_2 + 1/\alpha_3$, atd., dostaneme k danému reálnému číslu α nějaký (konečný nebo nekonečný) řetězový zlomek $[a_0; a_1, \dots]$. Přitom se dá dokázat, že je-li A přirozené číslo, které není druhou mocninou žádného přirozeného čísla, pak řetězový zlomek příslušný číslu $\sqrt{A}$ je nekonečný periodický řetězový zlomek tvaru $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, 2a_0, \dots]$.

Přístupme nyní ke studiu vlastností řešení Pellovy rovnice

$$(4) \quad x^2 - Ay^2 = 1,$$

kde A je přirozené číslo, které není druhou mocninou žádného přirozeného čísla. Pro řešení této rovnice, tj. pro dvojici $[x, y]$ celých čísel vyhovujících této rovnici, budeme používat zápisu $x + y\sqrt{A}$. Hned uvidíme, v čem spočívá výhoda tohoto zápisu. Řešení $x + y\sqrt{A}$ rovnice (4) nazveme kladným, je-li $x > 0, y > 0$. Je zřejmé, že při hledání řešení Pellovy rovnice (4) se stačí omezit na hledání kladných řešení.

Budte $\alpha = x + y\sqrt{A}$, $\beta = z + u\sqrt{A}$ kladná řešení rovnice (4). Řekneme, že α je menší než β , $\alpha \prec \beta$, jestliže $x < z$ a $y < u$. Dá se dokázat, že pro každá dvě různá kladná řešení α , β rovnice (4) platí buď $\alpha \prec \beta$ nebo $\beta \prec \alpha$.

Uvedme si nyní bez důkazů tři základní věty o řešení Pellovy rovnice.

Věta 1.: Označme $j = \bar{x} + \bar{y}\sqrt{A}$ nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice (4). Pak j^n , $n = 1, 2, \dots$ jsou právě všechna kladná řešení této rovnice.

Věta 2.: Bud' $j = \bar{x} + \bar{y}\sqrt{A}$ nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice (4). Pak $j^{n+2} = 2\bar{x}j^{n+1} - j^n$ pro všechna celá nezáporná čísla n .

Věta 3.: Bud' $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0, a_1, \dots]$ nekonečný periodický řetězový zlomek příslušný číslu $\sqrt{A}$. Pak $P_{kn-1} + Q_{kn-1}\sqrt{A}$, kde n je přirozené číslo takové, že kn je sudé, jsou právě všechna kladná řešení Pellovy rovnice (4). Speciálně pro k sudé je $P_{k-1} + Q_{k-1}\sqrt{A}$ nejmenší kladné řešení této rovnice a pro k liché je $P_{2k-1} + Q_{2k-1}\sqrt{A}$ nejmenší kladné řešení této rovnice.

Při praktickém hledání řešení rovnice (4) budeme tedy postupovat takto:

- nalezneme řetězový zlomek příslušný číslu $\sqrt{A}$,
- podle věty 3 nalezneme nejmenší kladné řešení $j = \bar{x} + \bar{y}\sqrt{A}$ rovnice (4),
- najdeme mocniny j^n pomocí věty 2. Jednotlivé mocniny j^n budeme přitom zapisovat do tabulky

x_0	x_1	x_2	
y_0	y_1	y_2	

, kde $x_n + y_n\sqrt{A} = j^n$.

Ukažme si tento postup na třech konkrétních příkladech:

1. Najdeme prvních pět kladných řešení Pellovy rovnice $x^2 - 5y^2 = 1$.

Řešení: a) Jest

$$a_0 = 2 \quad \sqrt{5} = 2 + 1/\alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2,$$

$$a_1 = 4, \quad \sqrt{5} + 2 = 4 + 1/\alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2,$$

$$a_2 = 4,$$

takže nekonečný periodický řetězový zlomek příslušný $\sqrt{5}$ je $[2; 4, 4, \dots]$, přičemž perioda $k = 1$.

b) Máme

	2	4	
1	2	9	
0	1	4	

takže $j = 9 + 4\sqrt{5}$.

c) Jest

1	9	161	2889	517841	930 249
0	4	72	1292	23 184	416 020

2. Nalezněme prvních pět kladných řešení Pellovy rovnice $x^2 - 22y^2 = 1$.

Řešení: a) Jest

$$a_0 = 4, \sqrt{22} = 4 + 1/\alpha_1, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{22} - 4} = \frac{\sqrt{22} + 4}{6},$$

$$a_1 = 1, \frac{\sqrt{22} + 4}{6} = 1 + 1/\alpha_2, \alpha_2 = \frac{6}{\sqrt{22} - 2} = \frac{\sqrt{22} + 2}{3},$$

$$a_2 = 2, \frac{\sqrt{22} + 2}{3} = 2 + 1/\alpha_3, \alpha_3 = \frac{3}{\sqrt{22} - 4} = \frac{\sqrt{22} + 4}{2},$$

$$a_3 = 4, \frac{\sqrt{22} + 4}{2} = 4 + 1/\alpha_4, \alpha_4 = \frac{2}{\sqrt{22} - 4} = \frac{\sqrt{22} + 4}{3},$$

$$a_4 = 2, \frac{\sqrt{22} + 4}{3} = 2 + 1/\alpha_5, \alpha_5 = \frac{3}{\sqrt{22} - 2} = \frac{\sqrt{22} + 2}{6},$$

$$a_5 = 1, \frac{\sqrt{22} + 2}{6} = 1 + 1/\alpha_6, \alpha_6 = \frac{6}{\sqrt{22} - 4} = \sqrt{22} + 4,$$

$$a_6 = 8, \dots,$$

takže nekonečný periodický řetězový zlomek příslušný $\sqrt{22}$ je $[4; 1, 2, 4, 2, 1, 8, 1, 2, \dots]$, přičemž perioda $k = 6$.

b) Máme

	4	1	2	4	2	1	
1	4	5	14	61	136	197	
0	1	1	3	13	29	42	

takže $j = 197 + 42\sqrt{22}$.

c) Jest

1	197	77 617	30 580 901	12 048 797 377	4 747 195 585 637
0	42	16 548	6 519 870	2 568 812 232	1 012 105 499 538

3. Najděme první čtyři kladná řešení Pellovy rovnice $x^2 - 31y^2 = 1$.
Řešení: a) Jest

$$a_0 = 5, \sqrt{31} = 5 + 1/\alpha_1, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{31} - 5} = \frac{\sqrt{31} + 5}{6},$$

$$a_1 = 1, \frac{\sqrt{31} + 5}{6} = 1 + 1/\alpha_2, \alpha_2 = \frac{6}{\sqrt{31} - 1} = \frac{\sqrt{31} + 1}{5},$$

$$a_2 = 1, \frac{\sqrt{31} + 1}{5} = 1 + 1/\alpha_3, \alpha_3 = \frac{5}{\sqrt{31} - 4} = \frac{\sqrt{31} + 4}{3},$$

$$a_3 = 3, \frac{\sqrt{31} + 4}{3} = 3 + 1/\alpha_4, \alpha_4 = \frac{3}{\sqrt{31} - 5} = \frac{\sqrt{31} + 5}{2},$$

$$a_4 = 5, \frac{\sqrt{31} + 5}{2} = 5 + 1/\alpha_5, \alpha_5 = \frac{2}{\sqrt{31} - 5} = \frac{\sqrt{31} + 5}{3},$$

$$a_5 = 3, \frac{\sqrt{31} + 5}{3} = 3 + 1/\alpha_6, \alpha_6 = \frac{3}{\sqrt{31} - 4} = \frac{\sqrt{31} + 4}{5},$$

$$a_6 = 1, \frac{\sqrt{31} + 4}{5} = 1 + 1/\alpha_7, \alpha_7 = \frac{5}{\sqrt{31} - 1} = \frac{\sqrt{31} + 1}{6},$$

$$a_7 = 1, \frac{\sqrt{31} + 1}{6} = 1 + 1/\alpha_8, \alpha_8 = \frac{6}{\sqrt{31} - 5} = \sqrt{31} + 5,$$

$$a_8 = 10, .$$

takže nekonečný periodický řetězový zlomek příslušný $\sqrt{31}$ je $[5; 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, \dots]$, přičemž perioda $k = 8$.

b) Máme

	5	1	1	3	5	3	1	1	
1	5	6	11	39	206	657	863	1520	
0	1	1	2	7	37	118	155	273	

takže $j = 1520 + 273\sqrt{31}$

c) Jest

1	1520	4 620 799	14 047 227 440	42 703 566 796 801
0	273	829 920	2 522 956 527	7 669 787 012 160

Aritmetický a geometrický průměr I.

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Jsou-li c_1, c_2 libovolná reálná čísla, potom jejich *aritmetickým průměrem* nazýváme číslo

$$A = \frac{c_1 + c_2}{2};$$

je-li $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$, potom *geometrickým průměrem* těchto čísel nazýváme číslo

$$g = \sqrt{c_1 c_2}$$

O těchto průměrech platí věta, kterou nyní dokážeme.

Věta 1 (*o aritmetickém a geometrickém průměru*). Jestliže je $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$, potom je

$$\sqrt{c_1 c_2} \leq \frac{c_1 + c_2}{2}; \quad (1)$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $c_1 = c_2$.

Důkaz. Pro libovolná reálná čísla c_1, c_2 platí nerovnost

$$0 \leq (c_1 - c_2)^2; \quad (2)$$

přítom rovnost nastane právě tehdy, je-li $c_1 = c_2$. Avšak (2) je ekvivalentní s nerovností

$$4 c_1 c_2 \leq (c_1 + c_2)^2.$$

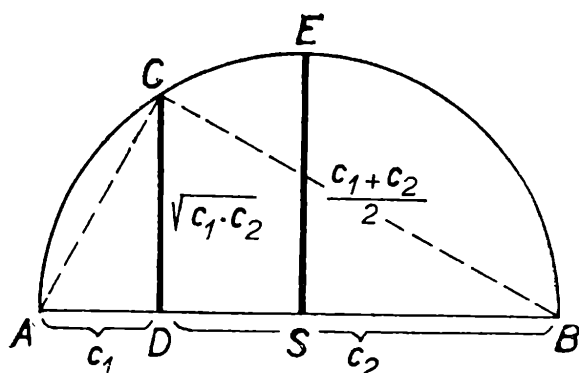
Je-li $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$, je poslední nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$2 \sqrt{c_1 c_2} \leq c_1 + c_2,$$

z níž plyne ekvivalentní nerovnost (1).

Poznámka. Na obr. 1 je pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a výškou CD k této přeponě. Je-li $|AD| = c_1, |BD| = c_2$, je podle Euklidovy věty o výšce

$$|CD| = \sqrt{c_1 c_2}.$$



Obr. 1

Sestrojíme-li poloměr $ES \perp AB$ kružnice opsané trojúhelníku ABC (jejíž střed S je středem přepony AB), je

$$|ES| = \frac{c_1 + c_2}{2}.$$

Z obr. 1 je patrné, že pro $c_1 \neq c_2$ je $CD < ES$, a tedy též je $|CD| < |ES|$; pro $c_1 = c_2$ úsečky CD, ES splynou, takže je $|CD| = |ES|$. Obr. 1 tedy názorně ukazuje obsah věty 1 pro $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Věty 1 lze užít při řešení některých geometrických úloh o extrémech (maximech a minimech). Uvedeme dvě takové úlohy; nejdříve však připomeneme několik poznatků z analytické geometrie, které budeme při řešení těchto úloh potřebovat.

Zvolíme-li hlavní osu elipsy za osu x a její vedlejší osu za osu y ortonormální (kartézské) soustavy souřadnic, pak v této soustavě má elipsa parametrické rovnice

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi, \quad (3)$$

kde a je hlavní, b vedlejší poloosa elipsy. Geometrický význam parametru φ je vyložen v učebnici matematiky pro přírodovědnou větev gymnázií, díl III, str. 116. Je-li $T[x_1; y_1]$ libovolný bod elipsy, potom

v uvedené soustavě souřadnic má její tečna sestrojená v bodě T rovnici

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

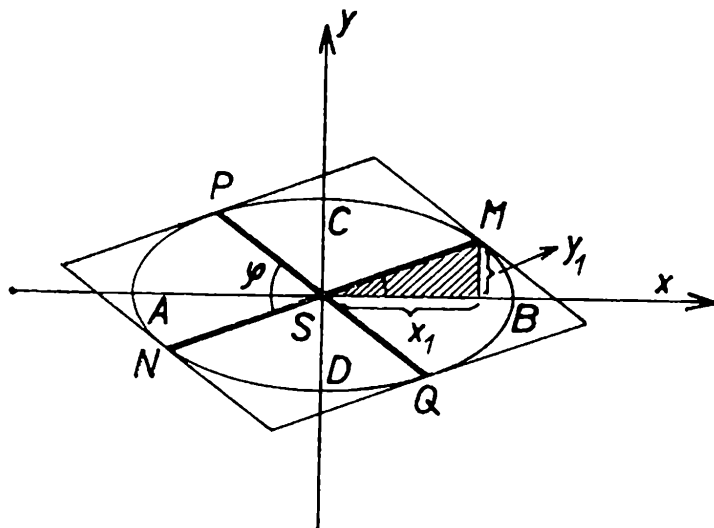
Není-li bod T hlavním vrcholem elipsy (tj. je-li $y_1 \neq 0$), pak z uvedené rovnice plyne, že je

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x + \frac{b^2}{y_1};$$

to znamená, že uvedená tečna má směrnici

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}. \quad (4)$$

Každá tětiva MN elipsy, která prochází jejím středem S , se nazývá *průměrem elipsy*; slovem průměr však také rozumíme přímku MN . Ze souměrnosti elipsy podle jejího středu S plyne, že její tečny v bodech M , N jsou vzájemně rovnoběžné (obr. 2). Potom průměr PQ elipsy,



Obr. 2

který je rovnoběžný s těmito tečnami, nazýváme *sduženým k průměru MN* . Snadno lze dokázat (např. metodou souřadnic), že tečny elipsy v bodech P , Q jsou rovnoběžné s průměrem MN ; je tedy průměr MN sdužen k průměru PQ . Dvojici průměrů MN , PQ proto nazýváme *sduženými průměry elipsy*. Elipsa má nekonečně mnoho dvojic sdužených průměrů; jednou z nich jsou také její osy AB , CD (obr. 2). Pro ostatní dvojice sdužených průměrů elipsy platí tato věta:

Věta 2. Nechť MN , PQ jsou sdužené průměry elipsy, jejíž osy AB (hlavní osa o velikosti $2a$), CD (vedlejší osa o velikosti $2b$) nesplývají s průměry MN , PQ . Potom v ortonormální soustavě souřadnic s osami $x = AB$, $y = CD$ mají sdužené průměry MN , PQ směrnice k_1 , k_2 , pro něž platí:

$$k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2}. \quad (5)$$

Důkaz. Osy x, y rozdělí rovinu ve čtyři kvadranty, které číslujeme známým způsobem. Zvolíme-li průměr MN tak, aby bod M ležel uvnitř prvního kvadrantu (na obr. 2 je to uvnitř úhlu $\angle BSC$), prochází průměr MN prvním a třetím kvadrantem tak, že je

$$M [x_1; y_1] \quad x_1 > 0, y_1 > 0;$$

přímka MN má potom směrnici

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1} > 0 \quad (6)$$

Průměr PQ sdružený k průměru MN je rovnoběžný s tečnou elipsy sestrojenou v bodě M , takže má podle (4) směrnici

$$k_2 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} < 0 \quad (7)$$

To znamená, že průměr PQ prochází druhým a čtvrtým kvadrantem. Říkáme, že průměry MN, PQ jsou odděleny osami AB, CD elipsy. Protože je $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$, plyne ze (6) a (7) výsledek (5).

Poznámka. Protože je $a > b$, plyne z věty 2, že je vždy $k_1 k_2 \neq -1$; to znamená, že sdružené průměry elipsy, které nejsou jejími osami, nejsou nikdy vzájemně kolmé (viz výše citovanou učebnici, str. 59). Velikost φ ostrého úhlu jimi sevřeného nazýváme jejich *odchylkou* ($0 < \varphi < \pi/2$); odchylka os elipsy je $\frac{\pi}{2}$, tj. maximální.

Úloha 1. Najděte tu dvojici sdružených průměrů elipsy, jejichž odchylka je minimální.

Řešení. Každé dva sdružené průměry, které nejsou osami elipsy, mají podle věty 2 ve výše uvedené soustavě souřadnic směrnice k_1, k_2 , z nichž jedna je kladná a druhá záporná. Volme označení tak, že je

$$k_1 > 0; \quad (8)$$

potom podle věty 2 je

$$k_2 = -\frac{b^2}{a^2 k_1} < 0 \quad (9)$$

Z analytické geometrie víme (viz výše citovanou učebnici, str. 59), že odchylka φ dvou přímek, které mají směrnice k_1, k_2 , se vypočte podle vzorce

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \quad (10)$$

V našem případě je

$$k_1 - k_2 = k_1 + \frac{b^2}{a^2 k_1} = \frac{a^2 k_1^2 + b^2}{a^2 k_1},$$

$$1 + k_1 k_2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2},$$

kde e je excentricita elipsy. Odchylka φ libovolných dvou sdružených průměrů elipsy, které nejsou jejími osami, je tedy podle (10) udána vzorcem

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{a^2 k_1^2 + b^2}{a^2 k_1} \cdot \frac{a^2}{e^2} \right|,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{e^2} \left(a^2 k_1 + \frac{b^2}{k_1} \right), \quad (11)$$

neboť podle (8) je $k_1 > 0$, takže oba zlomky ve vzorci pro $\operatorname{tg} \varphi$ jsou kladné.

Podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru, aplikované na kladná čísla $a^2 k_1, \frac{b^2}{k_1}$, je

$$a^2 k_1 + \frac{b^2}{k_1} \geq 2 \sqrt{a^2 k_1 \cdot \frac{b^2}{k_1}} = 2 ab;$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li

$$a^2 k_1 = \frac{b^2}{k_1}. \quad (12)$$

Podle (11) je tedy

$$\operatorname{tg} \varphi \geq \frac{2 ab}{e^2};$$

přitom podle (12) nastane rovnost (tj. úhel φ bude nejmenší) právě tehdy, je-li

$$k_1^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Protože je $k_1 > 0$, je to právě tehdy, je-li

$$k_1 = \frac{b}{a}; \quad (13)$$

podle (9) je potom

$$k_2 = -\frac{b}{a}. \quad (14)$$

Minimální odchylku φ_0 mají tedy ty dva sdružené průměry elipsy, jejichž směrnice jsou udány ve (13) a (14). Jsou to přímky, jejichž částmi jsou úhlopříčky obdélníka, který má střední příčky AB , CD na osách elipsy. Tato nejmenší odchylka φ_0 je udána vzorcem

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2ab}{e^2}.$$

Poznámka. Než přistoupíme k další úloze, připomeneme ještě tyto dva vzorce, které platí pro $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad (15)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = 1 + \operatorname{cotg}^2 \varphi. \quad (16)$$

Úloha 2. Najděte tu normálu elipsy, která má od jejího středu maximální vzdálenost.

Řešení. Normála elipsy je kolmice k její tečně procházející dotykovým bodem této tečny. Normály sestrojené v hlavních vrcholech elipsy splývají tedy s její hlavní osou a normály sestrojené ve vedlejších vrcholech elipsy splývají s její vedlejší osou. Tyto normály mají tedy od středu elipsy vzdálenost rovnou nule, tj. minimální.

Budiž nyní T bod elipsy, který nespývá se žádným jejím vrcholem. Zvolíme-li hlavní osu elipsy za osu x a její vedlejší osu za osu y ortonormální soustavy souřadnic, má bod T souřadnice $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$. Protože je elipsa souměrná podle svých os a podle svého středu, stačí se omezit na bod T , pro který je

$$x_1 > 0, \quad y_1 > 0. \quad (17)$$

Tečna elipsy sestrojená v tomto bodě T má směrnici $k \neq 0$, která je udána vzorcem (4). Podle vzorce $k_1 k_2 = -1$, platného pro směrnice dvou vzájemně kolmých přímek, má pak normála elipsy sestrojená v bodě T směrnici

$$k = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}.$$

Podle známého vzorce má tato normála rovnici

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1),$$

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y - x_1 y_1 (a^2 - b^2) = 0$$

Avšak podle (3) a (17) je

$$x_1 = a \cos \varphi, \quad y_1 = b \sin \varphi, \quad \sin \varphi > 0, \quad \cos \varphi > 0 \quad (18)$$

Lze tedy rovnici normály elipsy napsat také takto:

$$x a^2 b \sin \varphi - y a b^2 \cos \varphi - a b (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$x a \sin \varphi - y b \cos \varphi - (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

Podle známého vzorce je vzdálenost středu elipsy (tj. počátku soustavy souřadnic) od této přímky

$$d = \frac{|-(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi|}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (19)$$

Protože je $a > b > 0$ a podle (18) je též $\sin \varphi > 0$, $\cos \varphi > 0$, je $d > 0$. Toto d bude největší právě tehdy, bude-li největší

$$d^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}; \quad (20)$$

přitom jsme použili toho, že $|p|^2 = p^2$. Protože číslo $(a^2 - b^2)^2$ je kladná konstanta, bude d^2 maximální právě tehdy, bude-li maximální

$$\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Avšak to bude největší právě tehdy, bude-li

$$\frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{b^2}{\sin^2 \varphi}$$

nejmenší. Podle (15) a (16) je

$$\frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = a^2 + b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi$$

Protože a^2 , b^2 jsou kladné konstanty, bude uvedený zlomek nejmenší právě tehdy, bude-li nejmenší

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi \quad (21)$$

Protože jde vesměs o čísla kladná, je podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi \geq 2 \sqrt{a^2 b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{cotg}^2 \varphi} = 2ab,$$

neboť $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{cotg} \varphi = 1$; přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi \quad (22)$$

Došli jsme tedy k tomuto výsledku: Číslo d udané vzorcem (19) bude největší právě tehdy, bude-li (21) nejmenší; to nastane právě tehdy,

bude-li platit (22). Protože je $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, lze (22) napsat takto:

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{b^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi},$$

což platí právě tehdy, je-li

$$\operatorname{tg}^4 \varphi = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{b}{a}. \quad (23)$$

Největší vzdálenost od středu elipsy má tedy její normála v bodě T $[a \cos \varphi; b \sin \varphi]$, kde pro φ platí (23). Podle (15) a (16) je pro toto φ

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{a+b}{a}, \quad \frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{a+b}{b};$$

protože podle (18) je $\sin \varphi > 0$, $\cos \varphi > 0$, je

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{a}{a+b}} \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{b}{a+b}} \quad (24)$$

V prvním kvadrantu existuje tedy právě jeden bod elipsy, a to bod

$$T \left[a \sqrt{\frac{a}{a+b}} \quad b \sqrt{\frac{b}{a+b}} \right],$$

k němuž příslušná normála má od středu elipsy největší vzdálenost d_0 . Podle (20) a (24) je

$$d_0^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 ab}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{a^2b + ab^2} = \frac{(a-b)^2 ab (a+b)}{ab (a+b)} = (a-b)^2;$$

je tedy $d_0 = a - b$

Cvičení.

1. Necht P_1 , P_2 jsou obsahy podstav, v výška a V objem komolého jehlanu; potom platí:

$$\sqrt{P_1 P_2} < \frac{V}{v} < \frac{1}{2} (P_1 + P_2)$$

Dokažte. Pro které těleso platí místo obou nerovností rovnost?

2. Pokládáme-li čtverec za zvláštní případ obdélníka, platí:

a) ze všech obdélníků o daném obsahu P má nejmenší obvod čtverec;

b) ze všech obdélníků o daném obvodu o má největší obsah čtverec. Dokažte.

3. Je dán obsah P kruhové výseče. Pro který středový úhel je její obvod nejmenší? — *Výsledek*: pro úhel, jehož velikost (v obloukové míře) je rovna dvěma radiánům.

4. O trojúhelníku ABC víme, že má obsah P a úhel $\sphericalangle ACB$, který má velikost γ . Který ze všech trojúhelníků splňujících tyto podmínky má nejmenší obvod? — *Návod*: zjistěte nejprve, kdy je součet stran CA , CB nejmenší a potom, kdy je minimální strana AB . — *Výsledek*: rovnoramenný trojúhelník s rameny CA , CB .

(Pokračování)

Částečné součty řad s polynomickými členy

JAROSLAV SEDLÁČEK, Hradec Králové

Ve 4. čísle 54. ročníku *Rozhledů* připomněl J. Kotyk v článku „Rozhledy pomáhají škole“ stále oblíbené téma součtů k -tých mocnin přirozených čísel a citoval několik jiných článků v minulých ročnících, které řešily dané téma metodami odlišujícími se od běžného učiva.

Porovnáme-li tyto způsoby navzájem, zjistíme, že běžně používají dříve získaných výsledků pro součty nižších mocnin, případně i řešení složité soustavy rovnic o mnoha neznámých. Nikde jsem se však dosud nesetkal s přímým řešením, které se dá odvodit pro každou posloupnost zcela nezávisle a které jsem našel již v roce 1941.

Využívám vzájemných vztahů mezi kombinačními čísly a difference aritmetických posloupností. V článku Fr. Janečka (roč. 47, č. 2, str. 56—59) je taktéž uvedeno řešení pomocí těchto čísel. Obě metody se tedy zpočátku shodují, později však Janečkova metoda opouští přímou cestu a využívá nižších mocnin.

Vyjděme od základního vztahu mezi kombinačními čísly

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

Vynásobme každé kombinační číslo $\binom{i}{k}$ koeficientem c_i a sečtěme pro $i = n, n-1, \dots, k$

$$c_n \binom{n}{k} + c_{n-1} \binom{n-1}{k} + \dots + c_i \binom{i}{k} + \dots + c_k \binom{k}{k} =$$

$$\begin{aligned}
&= c_n \left[\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} \right] + \dots + c_i \left[\binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} \right] + \dots + \\
&\quad + c_k \left[\binom{k+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} \right] = \\
&= c_n \binom{n+1}{k+1} + (c_{n-1} - c_n) \binom{n}{k+1} + \dots + (c_{i-1} - c_i) \binom{i}{k+1} + \\
&\quad + \dots + (c_k - c_{k+1}) \binom{k+1}{k+1} - c_k \binom{k}{k+1}. \quad (1)
\end{aligned}$$

Částečný součet řady s členy $c_i \binom{i}{k}$ je tedy roven součtu čísla $c_n \binom{n+1}{k+1}$ a rozdílové řady s členy $(c_{i-1} - c_i) \binom{i}{k+1}$; poslední výraz $c_k \binom{k}{k+1}$ je roven nule, protože z k prvků nelze vytvořit $(k+1)$ — prvkovou podmnožinu. Sestrojení rozdílové řady může usnadnit výpočet částečného součtu původní řady.

Využijme tohoto poznatku k určení součtu třetích mocnin přirozených čísel

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3.$$

Vynásobením členů této řady řadou n kombinačních čísel $\binom{n-1}{0}$, $\binom{n-2}{0}$, $\binom{n-3}{0}$, $\dots$, $\binom{0}{0}$ rovných jedné získáme

$$\begin{aligned}
&1. \binom{n-1}{0} + 8. \binom{n-2}{0} + 27. \binom{n-3}{0} + 64. \binom{n-4}{0} + \\
&\quad + 125. \binom{n-5}{0} + \dots
\end{aligned}$$

Rozdílové posloupnosti následují po sobě takto:

$$\begin{aligned}
&1. \binom{n}{1} + 7. \binom{n-1}{1} + 19. \binom{n-2}{1} + 37. \binom{n-3}{1} + 61. \binom{n-4}{1} + \dots \\
&1. \binom{n+1}{2} + 6. \binom{n}{2} + 12. \binom{n-1}{2} + 18. \binom{n-2}{2} + 24. \binom{n-3}{2} + \dots \\
&1. \binom{n+2}{3} + 5. \binom{n+1}{3} + 6. \binom{n}{3} + 6. \binom{n-1}{3} + 6. \binom{n-2}{3} + \dots \\
&1. \binom{n+3}{4} + 4. \binom{n+2}{4} + 1. \binom{n+1}{4} + 0 + 0 + \dots
\end{aligned}$$

Poslední součet dává stejný výsledek jako všechny předchozí a je hledaným součtem třetích mocnin přirozených čísel $1, 2, \dots, n$, o čemž se můžeme přesvědčit převedením tohoto výrazu na známý algebraický tvar

$$\binom{n+3}{4} + 4 \cdot \binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4} = \frac{n}{4!} (6n^3 + 12n^2 + 6n) = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

Pro názornější pochopení uvedeného postupu uvedme si součty všech řádků při malém počtu členů, např. $n = 5$:

$$\begin{aligned} 1.1 &+ 8.1 &+ 27.1 &+ 64.1 &+ 125.1 &= 225, \\ 1.5 &+ 7.4 &+ 19.3 &+ 37.2 &+ 61.1 &= 225, \\ 1.15 &+ 6.10 &+ 12.6 &+ 18.3 &+ 24.1 &= 225, \\ 1.35 &+ 5.20 &+ 6.10 &+ 6.4 &+ 6.1 &= 225, \\ 1.70 &+ 4.35 &+ 1.15 &+ 0 &+ 0 &= 225. \end{aligned}$$

Jako se zde snížil počet n členů na pouhé tři členy, tak se podobně snižuje počet členů u všech mocninových i součinnových řad přirozených čísel. Je-li řada k -tého stupně, obsahuje její k -tá rozdílová řada stejné koeficienty při kombinačních číslech (od jistého počínaje); v následující $(k+1)$ -ní rozdílové řadě získáme pak nulové koeficienty.

Popsaný způsob odvozování vzorců pro částečné součty řad je poměrně pracný; z rovnice (1) lze však vyvodit jiný efektivní postup. Dosazením $c_i = 1$ získáme z (1) rovnici (zapsanou pozpátku)

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \quad (2)$$

V tomto zápisu je patrné, že sčítáme kombinační čísla se stejnou dolní složkou k a s horní složkou rostoucí od k až po n ; *součet je pak vyjádřen jediným kombinačním číslem, které se z největšího sčítance získá zvýšením obou složek o jednu, např.*

$$\begin{aligned} \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \dots + \binom{n-1}{0} + \binom{n}{0} &= \binom{n+1}{1}, \\ \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{n-1}{1} + \binom{n}{1} &= \binom{n+1}{2}, \\ \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} &= \binom{n+1}{3}. \end{aligned}$$

Právě uvedeného poznatku lze využít k výpočtu částečného součtu řady, známe-li nebo můžeme-li kombinačními čísly vyjádřit členy řady. Nejsnáze se řeší případy, kdy každý člen řady je součinem několika přirozených čísel bezprostředně za sebou následujících, např.

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + i \cdot (i+1) \cdot (i+2) + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Kombinační tvar obecného členu je

$$a_i = i \cdot (i+1) \cdot (i+2) = 3! \binom{i+2}{3}.$$

Z toho ihned plyne, že součet

$$3! \binom{3}{3} + 3! \binom{4}{3} + \dots + 3! \binom{n+2}{3} = 3! \binom{n+3}{4} = \\ = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

[Porovnejte tento výpočet s výpočtem téhož příkladu K. Kunce (Rozhledy, roč. 39, str. 398—406)].

V případech, kdy je i -tý člen řady součinem přirozených čísel lišících se o méně nebo více než jedna, můžeme si vypomoci umělými úpravami, při nichž „nepohodlné“ činitele vyjádříme pomocí čísel sousedících s „pohodlnými“ činiteli. Příklady ukáží, oč jde:

$$1. a_i = i(i+1)^2 \cdot (i+2) = i(i+1)(i+2) \cdot \frac{(i+3) + (i-1)}{2} = \\ = 12 \cdot \binom{i+3}{4} + 12 \cdot \binom{i+2}{4},$$

$$2. a_i = i \cdot (i+1) \cdot (i+2)^2 = i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot \frac{3 \cdot (i+3) + (i-1)}{4} = \\ = 18 \cdot \binom{i+3}{4} + 6 \cdot \binom{i+2}{4},$$

$$3. a_i = i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot (i+4) = \\ = i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot \frac{5 \cdot (i+3) - (i-1)}{4} = 30 \cdot \binom{i+3}{4} - 6 \cdot \binom{i+2}{4}.$$

Využijme tohoto poznatku k určení součtu druhých mocnin přirozených čísel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2, \\ a_i = i^2 = i \cdot \frac{(i+1) + (i-1)}{2} = \binom{i+1}{2} + \binom{i}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \\ = \frac{n \cdot (n+1)}{3!} \cdot [(n+2) + (n-1)] = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1).$$

Nakonec vypočítejme výsledky F. Janečka pomocí této metody. Dopusud jsme pracovali jen se součty kombinačních čísel s touž spodní složkou. Je to způsobeno tím, že jsme zajišťovali souměrnost výrazů a činitele vymykající se z řady jsme rozdělávali na dva přimykající se z obou stran k „pohodlným“ činitelům. Činitele však můžeme přidat

jen z jedné strany k ostatním a vytvořit kombinační čísla s různými spodními složkami. Například

$$1. \ a_i = i^2 = i \cdot [(i-1) + 1] = i(i-1) + i = 2\binom{i}{2} + \binom{i}{1}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2},$$

$$2. \ a_i = i^3 = i^2(i-1) + i^2 = i(i-1)[(i-2) + 2] + i[(i-1) + 1] = i(i-1)(i-2) + 3i(i-1) + i = \\ = 6\binom{i}{3} + 6\binom{i}{2} + \binom{i}{1},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Právě tyto dva vzorce vypočetl F. Janeček svou metodou. Nejsou to však všechny možné vzorce, neboť při rozkladu n^2 můžeme zaměnit znaménka a pro druhou mocninu získáme již třetí vzorec

$$a_i = i^2 = i \cdot (i+1) - i = 2 \cdot \binom{i+1}{2} - \binom{i}{1},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 2 \cdot \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2}.$$

Při vyšších mocninách počet vzorců neobyčejně vzrůstá, protože můžeme všechny tři způsoby úpravy ještě vzájemně kombinovat a pro každý další stupeň úpravy použít jiný. Tak např. pro součet třetích mocnin se dá podobně odvodit, kromě obou uvedených vzorců, ještě 15 dalších, z nichž uvedme tyto:

$$6\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{2}, \quad 6\binom{n+2}{4} + \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{3},$$

$$6\binom{n+3}{4} - 6\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{2}, \quad 5\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4} + \binom{n+2}{3},$$

$$6\binom{n+3}{4} - 5\binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{3}, \quad \binom{n+3}{4} + 5\binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{3}.$$

Jejich rovnost se snadno dokáže pomocí vpředu uvedeného základního vztahu mezi kombinačními čísly, z něhož se dá také sestavit ještě mnohem větší množství vzorců. Z tohoto přehledu je nejlépe patrné, jaké nepřehledné možnosti poskytují kombinační čísla a jak jsou doposud jejich vlastnosti opomíjeny.

Na závěr budiž uveden ještě způsob, jak se odvodí součet $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, je-li obecný člen rozveden v polynom $a_i = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + \dots + c_r i^r$, který není nutno převádět (mnohdy s potížemi) na součinnový tvar.

V tomto polynomu se každá mocnina buďto sčítá zvlášť podle vpředu uvedených vzorců s možností přímého konečného vyjádření součtu:

$$\begin{aligned}
 a_i &= 2i^3 + 5i^2 - 2i + 3, \\
 (2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3) &+ (2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 3) + \dots + \\
 &+ (2n^3 + 5n^2 - 2n + 3) = \\
 &= 2 \left[6 \binom{n+3}{4} - 5 \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{3} \right] + 5 \left[2 \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2} \right] - \\
 &- 2 \binom{n+1}{2} + 3 \binom{n}{1} = 12 \binom{n+3}{4} - 2 \binom{n+1}{3} - 7 \binom{n+1}{2} + 3 \binom{n}{1},
 \end{aligned}$$

nebo se předem upraví na tvar, který se dá převést na kombinační číslo, a potom se teprve provede výpočet součtu:

$$\begin{aligned}
 a_i &= 2i^3 + 5i^2 - 2i + 3 = 2(i^3 - i) + 5(i^2 - i) + 5i + 3 = \\
 &= 12 \binom{i+1}{3} + 10 \binom{i}{2} + 5 \binom{i}{1} + 3 \binom{i-1}{0}, \\
 (2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3) &+ (2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 3) + \dots + \\
 &+ (2n^3 + 5n^2 - 2n + 3) = 12 \binom{n+2}{4} + 10 \binom{n+1}{3} + 5 \binom{n+1}{2} + 3 \binom{n}{1}.
 \end{aligned}$$

Článek rozvádí dosud neuveřejněné bohaté zkušenosti s kombinačními čísly, které by bylo třeba správně ocenit a využít.

Prodlužování konečných posloupností prvočísel

Předpokládejme, že známe prvních n členů posloupnosti prvočísel 2, 3, 5, ..., které označíme $p_1, p_2, \dots, p_n$. Na základě toho můžeme stanovit všechna prvočísla mezi p_n a p_n^2 ; jeden ze způsobů si nyní popíšeme, v pravém sloupci zařadíme ilustrační příklad pro $p_n = 7$.

1. Vypočítáme zbytky z_i při dělení p_n všemi předcházejícími prvočíslly $p_i, i = 2, \dots, i-1$.

7 dělíme $p_2 = 3$ a $p_3 = 5$,
 $z_2 = 1, z_3 = 2$

2. Utvoříme posloupnosti S_i sudých čísel $\{2kp_i - (z_i + p_i)\}$ při lichém z_i ,

Posloupnosti S_2, S_3 :
 $S_2 = \{6k - 4\} = 2, 8, 14, 20,$

$$\{2kp_i - z_i\} \quad \text{při sudém } z_i$$

$$S_3 = \{10k - 2\} = 8, 18, 28,$$

3. Členy posloupností S_i vyškrtneme z posloupnosti S všech sudých čísel; získáme posloupnost $D = \{d_j\}$ (posloupnost diferencí).

$$\text{Omezíme se na } d_j < p_n^2 - p_n$$

Po vyškrtnutí členů S_1, S_2 z S získáme

$$D = \{4, 6, 10, 12, 16, 22, 24, 30, 34, 36, 40\}$$

4. Posloupnost $\{p_n + d_j\}$ pro $j = 1, 2$, je prodloužením posloupnosti prvočísel

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

$$p_{n+1} = p_n + d_1,$$

$$p_{n+j} = p_n + d_j \text{ pro } d_j < p_n^2 - p_n$$

Číslo $7 + 4 = 11$ je dalším číslem v posloupnosti prvočísel. Dále dostáváme po řadě

$$7 + 6 = 13,$$

$$7 + 10 = 17,$$

$$7 + 12 = 19,$$

$$7 + 16 = 23,$$

$$7 + 22 = 29,$$

$$7 + 24 = 31,$$

$$7 + 30 = 37,$$

$$7 + 34 = 41,$$

$$7 + 36 = 43,$$

$$7 + 40 = 47$$

Není obtížné zdůvodnit, že každé číslo $p_n - z_i$ je dělitelné p_i , pak je i $p_n - z_i + s \cdot p_i$ dělitelné p_i , tj. složené číslo. Protože p_n je liché, p_i liché, je rozdíl $(p_n - z_i + s \cdot p_i) - p_n = s \cdot p_i - z_i$ střídavě sudý a lichý, zatímco pro prvočísla větší než p_n získáme jedině sudé rozdíly. Proto se pracuje jen s posloupnostmi *sudých* čísel a volbou $s = 2k + 1$, resp. $s = 2k$, tento výběr sudých čísel zajišťujeme.

Popsaný způsob prodloužení posloupnosti je poměrně rychlý a poskytuje potěšení, že prvočísla vycházejí jako výsledky výpočtu. Jak jistě víte, neexistuje žádný přijatelně jednoduchý vzorec pro výpočet všech členů posloupnosti prvočísel; tím více nás může těšit i práce „po částech“.

Š. J.

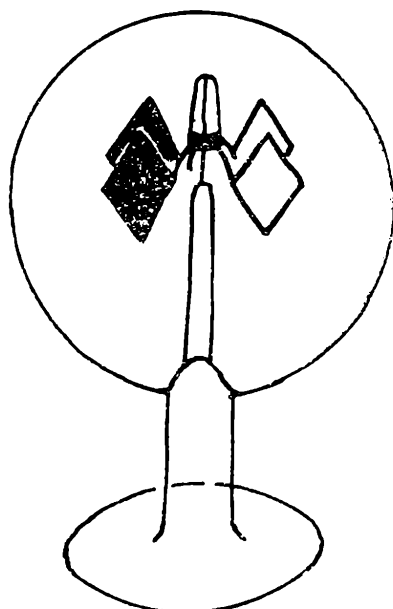
fyzika

Crookesův radiometr

Ing. V. PATROVSKÝ, CSc

Sir *William Crookes* byl jedním z nejúspěšnějších fyziků, ba i chemiků minulého století. Zabýval se důkladně katodovými paprsky, které před ním nedlouho objevil Hittorf a prokázal jejich mechanický účinek, když v uzavřeném prostoru jim postavil do cesty lehké slídové kolečko s lopatkami, které se roztočilo. Podobně prokázal účinek tepelných paprsků na lehký otočný systém uzavřený v baňce, z níž však byl vzduch vyčerpán jen částečně — a to je právě jeho radiometr, o němž pojednáme. Pro úplnost je třeba dodat, že Crookes objevil roku 1861 tehdy nový prvek thalium a nebudeme ani ostýchavě zamlčovat, že se zabýval též v té době módním spiritismem. Dobrý přírodovědec zkoumá všechny jevy, které jej zajímají, a snaží se vysvětlit je. Pokud vysvětlení nelze nalézt na úrovni současné vědy — a takových problémů je i dnes celá řada — připomeňme znovu diskutovaný problém neutrin a energetických zdrojů Slunce — problém nepopře, ani „nevysvětlí“ banálně jednoduchým a tedy i špatným způsobem, ale ponechá jej na pozdější příhodnější dobu. Crookesův radiometr, někdy zvaný také větrníček, se nedávno dostal na scénu v souvislosti s tzv. psychickou energií, již se snažil marně vysvětlit již Crookes, nikoliv ovšem pomocí tohoto radiometru. Je jen škoda, že tento poměrně jednoduchý přístrojek není u nás již k dostání, ačkoliv starší generace pamatuje, že byl před válkou často používán za výlohami výkladů jako poutač, který se točil zdánlivě sám od sebe — tedy jakési perpetuum mobile. Ve skutečnosti energii k otáčení mu dodávaly žárovky nebo tepelné záření slunce.

Z obrázku vidíme, že ve skleněné baňce s vhodným stojanem je uvnitř natavena ocelová jehla a na ní na skleněném ložisku jsou symetricky připojeny čtyři čtverhranné slídové destičky, na jedné straně začerněné. Po dopadu tepelného záření, ať již jde o žárovku, svíčku, horká kamna nebo sluneční záření se tento systém roztočí a to světlou stranou vpřed. Pohyb je způsoben tím, že černá strana pohlcuje více tepla než strana světlá a následkem toho se u ní zvyšuje kinetická energie zbylých molekul vzduchu, což uvede systém v pohyb. Můžeme se přesvědčit, např. pomocí diaprojektoru a barevných skleněných filtrů, že lopatky se otáčejí v bílém původním světle, ve světle červeném, oranžovém i žlutém, které obsahují stále dostatek infračervených paprsků, avšak neotáčejí se ve světle modrém nebo zeleném, popř. ve světle monochromatickém



Obr. 1

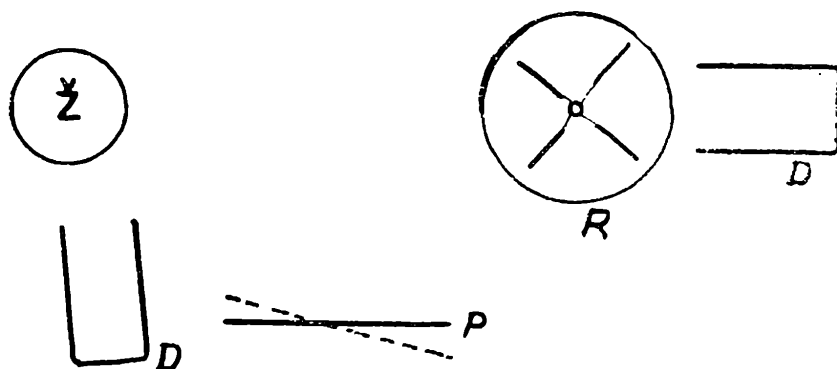
(sodíková výbojka) nebo ve světle, z něhož byly tepelné paprsky odfiltrovány, např. slabě zeleným determálním filtrem. Můžeme se přesvědčit, že vzdalováním tepelného zdroje se rychlost otáčení větrníčku snižuje, a můžeme se rovněž přesvědčit o vlivu třeba částečného směrování světla stínítkem nebo parabolickým zrcadlem. Sklo ovšem propouští infračervené paprsky maximálně do vlnové délky $2,5\ \mu\text{m}$, proto jsou účinné tepelné zdroje s vyšší teplotou, jako je žárovka či Slunce, které maximum zářivosti (Wienův a Planckův vyzařovací zákon) mají posunuto ke kratším vlnám. Proto tělesa rozžhavená na nižší teploty (kamna, vařič) působí na radiometr poměrně slabě, neboť jejich maximum vyzařování leží nad $3\ \mu\text{m}$. Můžeme se rovněž přesvědčit, že silnější sklo, zejména zelenavé, značně snižuje otáčení lopatek a rovněž voda, která začíná pohlcovat tepelné záření již od $0,8\ \mu\text{m}$. Popišme však další pokusy. Nastavme vzdálenost mezi radiometrem a žárovkou tak, aby se lopatky otočily 15 až 20krát za minutu. Ač by pro počítání otáček byl vhodný malý elektronický počítač, vidíme i pouhým okem a můžeme při troše pozornosti spočítat, že obrátky s časem klesají a po určité době může dojít i k zastavení. Poznamenejme si polohu radiometru vzhledem k žárovce a ochladíme radiometr v ledničce. Když jej asi po pěti minutách vyjmeme a dáme na původní místo, bude se dosti rychle opět točit, ačkoliv se vzdálenost od žárovky ani její teplota zřejmě nezměnila. To nám naznačilo, že rychlost otáčení lopatek nezávisí jen na tepelné intenzitě zdroje, jeho spektrálním rozložení a vzdálenosti, ale zřejmě i na teplotě samotného radiometru. Dejme nyní radiometr do sušárny nebo plynové trouby vyhřáté asi na $80\ ^\circ\text{C}$. Ihned po vnoření do teplého prostoru se lopatky prudce roztočí. Uzavřeme dvířka sušárny a otevřeme je za 3 až 4 minuty. K našemu údivu lopatky budou nehybné. Ještě více se asi podívíme, když radiometr vyjmeme a postavíme na stůl, avšak mimo dosah tepelných zdrojů. Začne se sám prudce točit, avšak otáčení

se zpomaluje, až se zastaví. Pozoruhodné však je, že radiometr se nyní točí opačným směrem, tedy černou plochou dopředu. Tento náš stěžejní pokus prokazuje, že ohřátý radiometr teplo do okolí (které je chladnější) vydává a proto nastává opačný pochod i opačný směr otáčení. Jinými slovy, radiometr se vždy začne otáčet, jestliže jeho teplota je rozdílná od teploty okolí a vnitřní kinetický tlak překoná tření ložiska. V čase, kdy se teplota radiometru a okolí vyrovná (s ohledem na tření), lopatky se zastaví, což jsme pozorovali po vložení do sušárny i po opětovém vyjmutí ven. V případě žárovky pochopitelně vyrovnáním teplot míníme nejbližší teplotu okolí radiometru, resp. teplotu jeho povrchu (baňky), nikoliv pochopitelně teplotu vlákna žárovky. Překonání odporu tření v ložisku ovšem určitý malý tepelný tok vyžaduje. Radiometr tedy působí jako citlivé teplotně radiační „váhy“, a vyměňuje si radiační teplotu se svým okolím podle zjednodušeného vzorce *Stefan-Boltzmannova* :

$$F = \varphi \cdot i (T_1^4 - T_2^4),$$

kde F = tepelný tok, φ = úhel dopadu paprsků, i = koeficient tepelného přenosu, T_1 = absolutní teplota tělesa o vyšší teplotě, T_2 = absolutní teplota tělesa o nižší teplotě, zde radiometru. Označíme-li tepelný tok potřebný k překonání tření v ložisku F' , potom je zřejmé, že $F' > F$.

Z rovnice dále vyplývá, že tepelný tok může být ovlivněn směřováním paprsků a změnou konstanty přenosu tepla (φ , i) a dále že v případě čtvrtých mocnin stačí zcela nepatrná změna teploty, aby se F' podstatně změnil. O tom se můžeme přesvědčit v poslední sérii pokusů, kdy pomocí žárovky roztočíme lopatky radiometru na 10 až 20 otáček za minutu a systém ponecháme v klidu tak dlouho, až se rychlost ustálí. Přitom pravděpodobně budeme muset vzdálenost žárovky a radiometru zmenšit. Po ustálení rychlosti otáčení dáme po straně nejprve bílou nebo lesklou kovovou plochu a později ji vyměníme za drsnou tmavou. Můžeme pak zjistit, že se lopatky radiometru zpomalují nebo se zastavují, jestliže černá plocha je natočena k žárovce nebo bílá plocha k radiometru a naopak. Podobně můžeme ze strany k žárovce postavit tmavou



Obr. 2

dutinu (d) která otáčky radiometru zpomalí, ale namířena na radiometr nebo postavena za něj otáčky zrychlí, prostě tím, že „odčerpává“ po jistou dobu teplo z teplotního pole žárovky nebo radiometru (obr. 2). Při vhodném oblečení může takové zpomalování až zastavení provést i poblíž sedící osoba. Budí to dojem o její „psychické síle“, ve skutečnosti nastává distorse radiačního pole třetím tělesem.

Vláknová optika

RNDr. ing. J. POSPÍŠIL, CSc, UP Olomouc

(dokončení)

3. Ztráty světelné intenzity ve světlovodu

Maximální délka $l_{\max}$ světlovodu je omezena zeslabením přenášené světelné intenzity její absorpcí v látce světlovodu. Toto zeslabení v prvním přiblížení probíhá podle exponenciálního zákona

$$I = I_0 e^{-k_p l_{ef}},$$

kde I_0 a I jsou intenzity záření na vstupu ($x = 0$) a v bodě $x > 0$ příslušnému délce l_{ef} světlovodu umístěného podél souřadné osy x ; k_p je tzv. činitel zeslabení světlovodu a l_{ef} je efektivní délka dráhy paprsku, která obecně závisí na vstupním úhlu dopadu α_1 , vlnové délce λ světla, indexu lomu n_s jádra vlákna a na tvaru vlákna.

Propustnost I vlákna daného tvaru se obvykle pro dané hodnoty α_1 , λ a n_s ve vláknové optice hodnotí vztahem

$$T = \frac{I}{I_0} = e^{-k_p l_{ef}}$$

Platí-li $k_p l_{ef} \ll 1$, pak lze využít jen prvních dvou členů Taylorova rozvoje funkce $e^{-k_p l_{ef}}$:

$$T \approx 1 - k_p l_{ef} \quad (9)$$

Činitel zeslabení k_p je dán součtem koeficientů absorpce a rozptylu. V rozsahu průhlednosti optických skel ($\lambda = 0,4 \mu\text{m}$ až $0,8 \mu\text{m}$) má činitel absorpce velikost řádově 10^{-2} m^{-1} až 10^{-3} m^{-1} .

Základní zeslabení světelné intenzity způsobují rozptyly světelného záření podél světlovodů, způsobené nerovnoměrným mikrorelíéfem jeho

povrchu, nečistotami a přítomností vad ve struktuře jádra světlovodu a odrazného povlaku. Tato složka činitele zeslabení závisí značně na průměru a strmosti ohybu světlovodu, na materiálu a tloušťce odrazného povlaku a může se měnit ve větším rozsahu. Určení vlivu těchto faktorů na koeficient rozptylu není prakticky přesně možné. Proto se činitel zeslabení k_p určuje empiricky. S chybou 10 % až 20 % je možnost předpokládat platnost relace

$$k_p l_{ef} \approx k_p l,$$

kde l je skutečná délka světlovodu.

Je třeba si uvědomit, že vztahy (8) a (9) neobsahují ztráty světla stěnami světlovodu při jeho vnitřních odrazech. Tyto ztráty se zmírňují na zanedbatelnou míru odrazným povlakem. Relace (8) a (9) též nevystihují ztráty světelného záření vznikajícího odrazem na vstupní a výstupní ploše světlovodu. Tyto ztráty obecně závisí na indexech lomu n_1 , n_2 a n_s prostředí, na úhlu dopadu α_1 a α_2 na vstupní a výstupní ploše světlovodu a též na tvaru vlákna. Pro malé úhly dopadu ($\leq 30^\circ$) jsou tyto ztráty na vstupu a výstupu úměrné podílům

$$\left(\frac{n_1 - n_s}{n_1 + n_s} \right)^2 \text{ a } \left(\frac{n_s - n_2}{n_s + n_2} \right)^2$$

jak to vyplývá z vlnové teorie odraznosti a propustnosti světla na rozhraní dvou homogenních a izotropních dielektrik bez elektrických nábojů. U skleněných vláken bývají pro úhly dopadu 30° až 40° tyto ztráty 7 % až 20 %. Zmenšují se se zmenšujícím se úhlem dopadu a se zmenšujícími se rozdíly $(n_1 - n_s)$ a $(n_s - n_2)$. Lze je dále zmenšovat použitím průsvitných povlaků s indexem lomu

$$n_3 \approx \sqrt{n_1 n_s} \quad \text{a} \quad n'_3 \approx \sqrt{n_2 n_s}$$

na vstupu a výstupu světlovodu. V tomto případě lze ukázat, že ztráty odrazem se zmenší vynásobením činitelem

$$\frac{[(n_1 - n_2)(n_1 + n_3)(n_s + n_3)]^2}{(n_1 + n_s)^2 \{[(n_1 + n_3)(n_s + n_3)]^2 + [(n_3 - n_s)(n_1 + n_3)]^2\}}$$

Ve funkčních optoelektronických obvodech, ve kterých jsou použity světlovody, tvoří ztráty odrazem základní složku ztrát a na jejich zmenšení závisí účinnost optického spoje. Při malých průměrech světlovodů $D \leq 2\lambda$, neboli $D \leq \frac{\lambda}{2}$, má světlovod selektivní vlastnosti a propouští především krátkovlnné elektromagnetické záření, jehož kmitočet je vymezen uvedenou nerovností $D \leq \frac{\lambda}{2}$. To umožňuje použít světlovodu k rozkladu světla a k oddělení spektrální složky přenášené informace.

Zmíněná nerovnost $D \leq \frac{\lambda}{2}$ si zachovává platnost i pro minimální tloušťku odrazného povlaku světlovodu, při které ještě nastává úplný vnitřní odraz. Při tloušťkách odrazného povlaku porovnatelných s vlnovou délkou přenášeného záření nedochází k úplnému vnitřnímu odrazu paprsku, a ten tedy vystupuje za hranice světlovodu jeho stěnami.

Pro světlovodné vlákno, jehož průměr je větší než vlnová délka světla $D > \lambda$, dostačuje odrazný povlak o tloušťce $h \geq 0,5 \mu\text{m}$. Vyjdeme-li z nerovnosti $D \leq 2\lambda$, je minimální průměr $D_{\min}$ světlovodu pro záření viditelné oblasti elektromagnetického spektra roven hodnotě

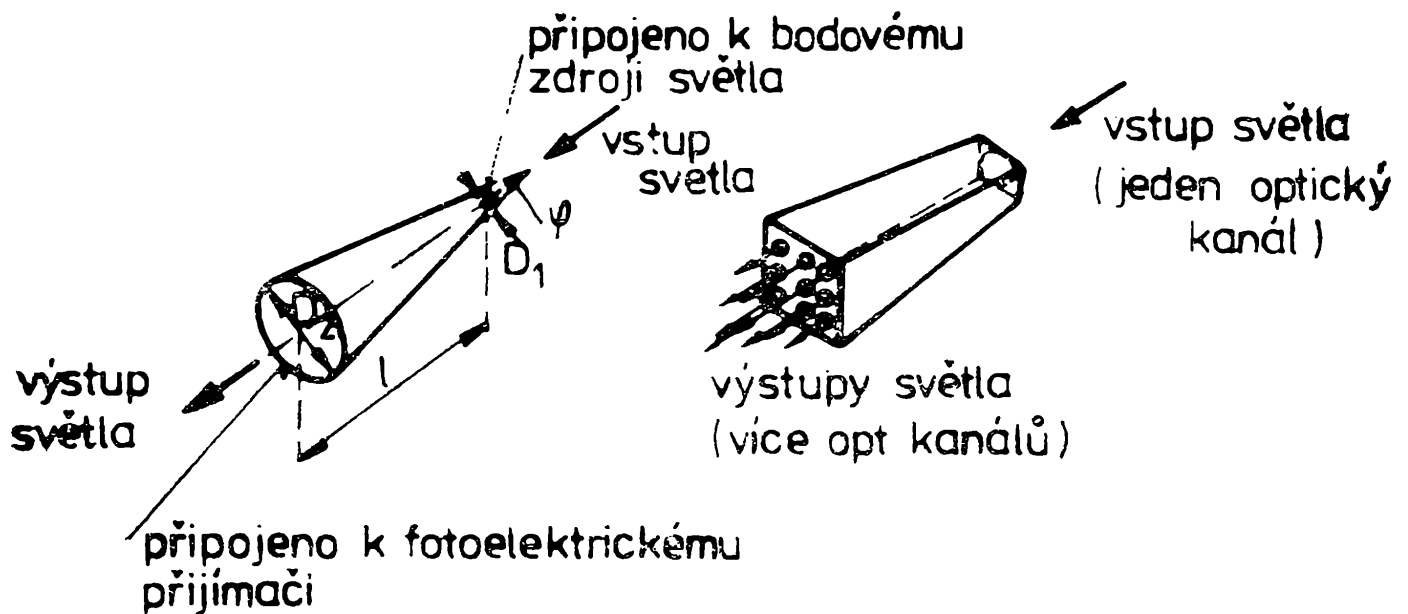
$$D_{\min} \geq 2\mu\text{m} \quad \text{až} \quad D_{\min} \geq 3\mu\text{m}.$$

4. Některá využití vláknové optiky v praxi

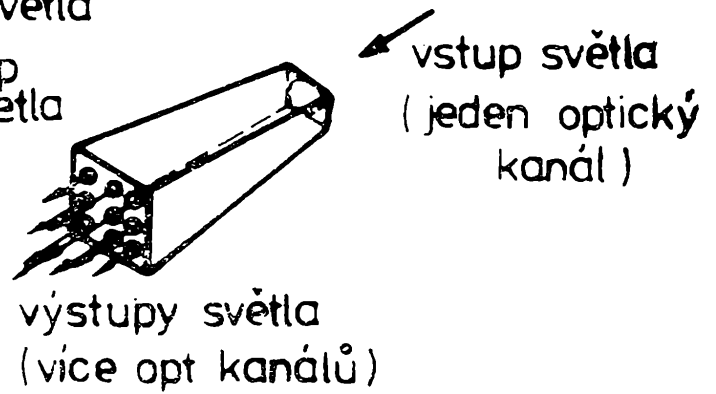
Složený světlovod může obsahovat rozličné množství jednoduchých vláken různého tvaru z různého materiálu a různého geometrického uspořádání, čímž lze v širokém rozmezí ovlivňovat jeho vlastnosti a vytvářet různé prvky pro praktické využití. Těmto světlovodným prvkům říkáme fokony.

Podle složení použitého skla se může měrný elektrický odpor světlovodu měnit v širokém rozmezí od $10^{12} \Omega \cdot \text{m}$ do $10 \Omega \cdot \text{m}$. To umožňuje použít světlovody nejen pro přenos světelného záření a ke galvanickému oddělení elektronických soustav, ale také pro přenos elektrických signálů v elektrických obvodech s malými proudy. V případech, kdy je žádána galvanická vazba s malým odporem, je možno navíc povrch světlovodu ještě pokovit. Takový světlovod pak zajistí jak optické, tak i elektrické spojení, což rozšiřuje oblast použití vláknové optiky ve funkčních elektronických obvodech.

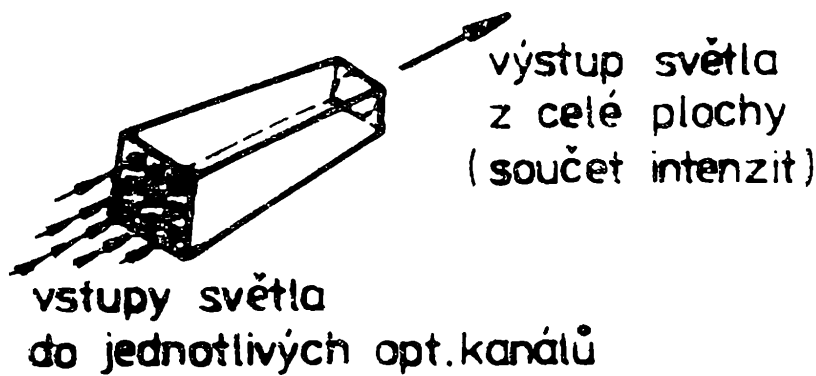
Světlovody mohou plnit v optoelektronice funkci prvků sloužících přizpůsobení fotoelektrického přijímače k světelnému zdroji tak, aby bylo dosaženo žádaného činitele přenosu signálu (žádané přenosové charakteristiky přenosové soustavy). Jde především o optimální přenos výkonu. Tak lze například přizpůsobit fotoelektrické přijímače o různé ploše s bodovými zdroji světla (se zdroji světla malé plochy), jak to je znázorněno například na obr. 11a. Fokon může též pracovat jako zmnožovač optických kanálů (obr. 11b). Ve složitých zapojeních měničů v mnohokanálových přepínačích s velkým počtem sekcí umožní toto řešení vyloučit nežádoucí fázové posuvy a vytvořit kompaktní obvod řízení zdroje světla v optronu (optron je název pro funkční součástky v optoelektronice). Rovněž zajistí velkou objemovou hustotu přepínačích fotoelektrických přijímačů omezenou rozlišovací schopností vláknové optiky (rozlišovací schopnost je asi 10 čar mm^{-1} až 40 čar mm^{-1}).



a)



b)



c)

Obr. 11 a, b, c

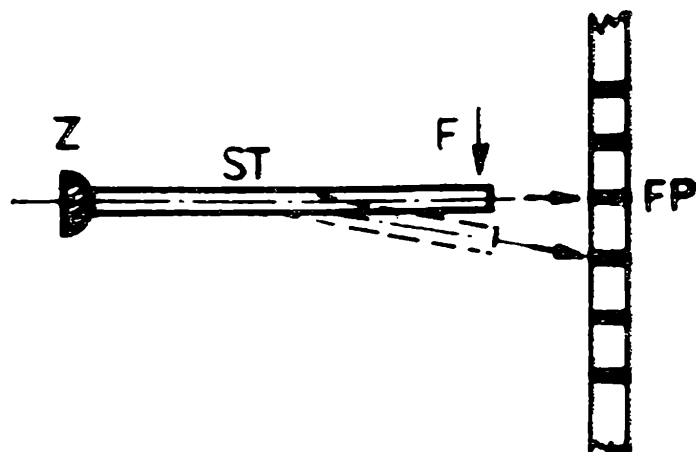
Minimální délka $l_{\min}$ fokonu je přímo úměrná podílu $\frac{D_1}{D_2}$ a je omezena nerovností

$$l_{\min} \geq \frac{D_2 - D_1}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{D_1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \left(\frac{D_2}{D_1} - 1 \right),$$

kde φ je úhel udávající kuželovitost fokonu v soulase s rovnicí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{D_2 - D_1}{2l}.$$

Délka fokonu l pro $\frac{D_2}{D_1} \gg 1$, je-li jeho použití účelné, nemůže být



Obr. 12

podle podmínky maximálního činitele přenosu menší než $4 \cdot 10^{-3}$ m až na $5 \cdot 10^{-3}$ m. Průchozí kapacita optronu je pak 10^{-4} nF až 10^{-5} nF a svodový odpor vztažený k rozmezí od vstupů k výstupu optronu se zvětší na $10^{18} \Omega$, což je důležité pro oddělování pulsních obvodů. Jestliže v optronu zaměníme vzhledem k fokonu umístění fotoelektrického přijímače a zdroje světla (obr. 11c), bude takový optron (s prakticky bodovým fotoelektrickým přijímačem) provádět operace sčítání. V rozsahu lineární části luxampérové charakteristiky fotoelektrického přijímače platí:

$$i_f = K \sum_{n=1}^N I_n,$$

kde I_n je intenzita vyzařování n -tého zdroje světla, na kterém je n -tý elektrický vstup optronu, a i_f je fotoelektrický proud v obvodu fotoelektrického přijímače (K je konstanta úměrnosti).

Světlovodů lze principiálně použít ve funkci rychlých spínacích součástek. Jako každé vedení způsobuje i světlovod určité zpoždění t_z přenášeného signálu. To lze vyjádřit vztahem

$$t_z = \frac{l(1 - \cos \alpha_1)}{v_\varphi \cos \alpha_1}.$$

Je tedy úměrné poměru $\frac{v_\varphi}{l}$, kde l je délka světlovodu a v_φ je fázová rychlost světla ve světlovodu. U světlovodů z anorganických skel o délce $l = 0,01$ m vznikne zpoždění řádu 10^{-9} s až 10^{-10} s, což je porovnatelné se zpožděním rychlých spínacích součástek v elektronice.

Světlovodu se v praxi může využít k měření zrychlení kmitů vyvolaných například periodickou budící silou F (obr. 12): Tyč zhotovená ze skleněných vláken ST daného průměru a délky tvoří nosník připevněný na zdroj světla Z optronu. Volný konec nosníku může se pohybovat podél řady fotoelektrických přijímačů FP. Při dané hmotnosti nosníku ST bude v rozsahu malých odchylek posuv volného konce Δy úměrný zrychlení a_y pohybu. Minimální vzdálenost prvků FP je při použití

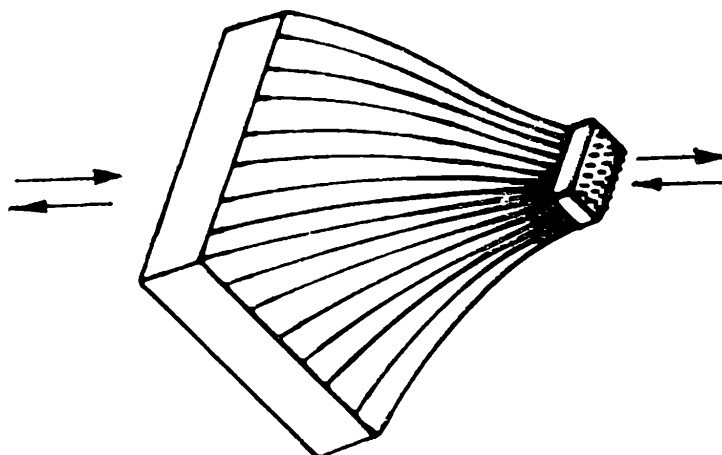
současných fotoelektrických odporů $10\text{ }\mu\text{m}$ až $40\text{ }\mu\text{m}$. Ta ovlivňuje citlivost optronu.

Jedno z mnoha samozřejmých využití optických vláken je přenos obrazu z jednoho do druhého místa, často pomocí kruhové dráhy. Je využíváno paralelních svazků vláken. Jeden konec je v kontaktu s objektem nebo s obrazem vytvořeným běžnou optickou soustavou a druhý konec je umístěn ve zvoleném místě, ve kterém chceme obraz vidět nebo jej zaznamenat, například televizní kamerou nebo na fotografickém filmu. Rozlišení je ovšem omezené v závislosti na rozmístění vláken ve svazku.

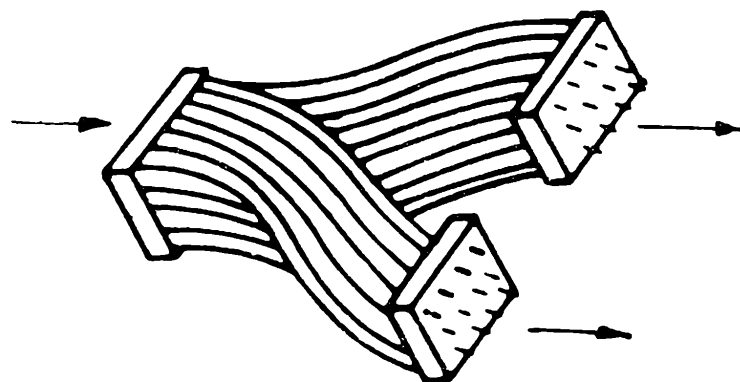
Vlákna nevytvářejí obrazy, ale jsou jen transformačním prvkem. Sbírají jen světlo ze zobrazovacího prostoru, který je limitován průměrem jednotlivých vláken a přenáší toto světlo na druhý konec svazku, kde je obraz rekonstruován z diskrétního obrazu vytvořeného body, reprezentovanými jednotlivými vlákny. Současná technologie umožňuje získat svazky vláken, jejichž rozlišovací schopnost je až 100 čar mm^{-1} . To je poměrně velmi dobrá rozlišovací schopnost.

Svazků vláken lze užít k dynamickému snímání objektů a obrazů. Kmitá-li svazek vláken příčně k předmětu, pak každé vlákno působí jako snímací apertura a přenos obrazu je ovlivněn optickou přenosovou funkcí apertury. Je-li amplituda příčných kmitů svazku vláken menší než součet průměrů několika málo vláken svazku, pak přenesený obraz při dynamickém snímání je kvalitnější (přenosová soustava má lepší rozlišení), než tomu je u statického (nehybného) snímání.

Vláknové optiky je možno využívat k pozorování nepřístupných vnitřních orgánů živočichů nebo nepřístupných systémů různých zařízení. Úzký svazek vláken je vnořen do organismu (do zařízení). Částí svazku se zajistí osvětlení orgánu z vhodného světelného zdroje a druhá část svazku, spojená s mikroskopem, umožňuje přímé pozorování. Svazky pro zmíněné účely obsahují jen řádově 10^3 vláken, což bývá zcela dostačující.

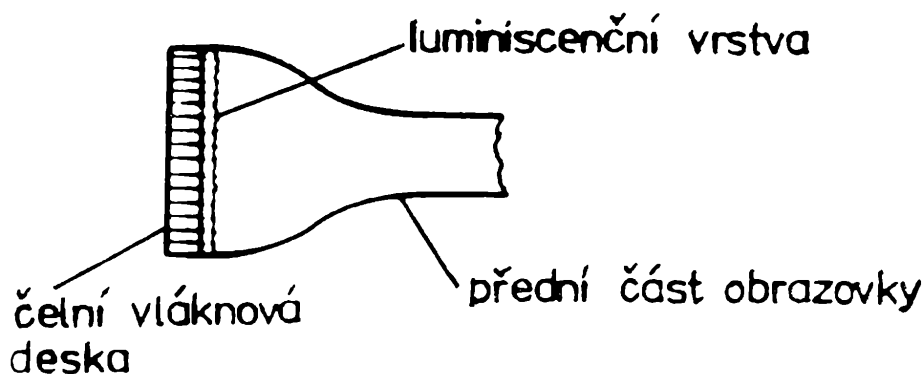


Obr. 13



Obr. 14

Nestejnou hustotou rozmístění vláken na obou koncích svazku lze získat zvětšené nebo zmenšené obrazy (viz např. obr. 13). Svazků je též možné využít k zmnožování obrazů pro pozorování více pozorovateli. Princip je patrný z obr. 14, kde je naznačeno uspořádání pro zdvojení obrazu.

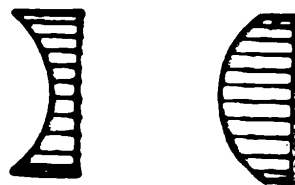


Obr. 15

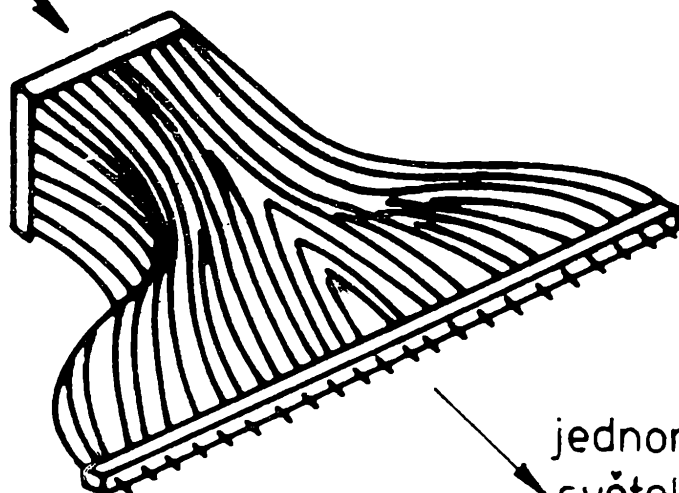
Svazků vláken se často využívá ve formě desek, tvořících čelní desky stínítek obrazovek (viz obr. 15). Je-li takové desky využito v součinnosti s běžnou zobrazovací optickou soustavou, pak maximum světelné energie, které může být sejmuta z objektivu, je ohraničeno relativní aperturou optické soustavy, která jen zřídka dosahuje hodnoty $1/f$. Svazek vláken může mít až jednotkovou efektivní numerickou aperturu odpovídající relativní apertuře $f/0,5$. Je-li tedy tento svazek vláken v kontaktu s objektem nebo obrazem, pak může sejmut více světelné energie než v případě pouhé optické soustavy. Je tedy účinnost vláknové optiky mnohem větší, než je účinnost konvenčních optických soustav. Pro dosažení plné výhody vláknové optiky musí být svazek vláken v přímém kontaktu s objektem, který emituje sbírané světlo. To je zdokonaleno u obrazovek. Na stínítku obrazovky je umístěna vláknová čelní deska, jejíž vnitřní povrch je opatřen luminiscenční vrstvou (obr. 15).

Jsou-li jedna nebo dvě čelní plochy vláknové desky zakřiveny, pak deska vykonává funkci čočky. Na obr. 16 je příklad plankonvexní a plankonkávní vláknové desky.

dvojrozměrné rozložení
světelné intenzity

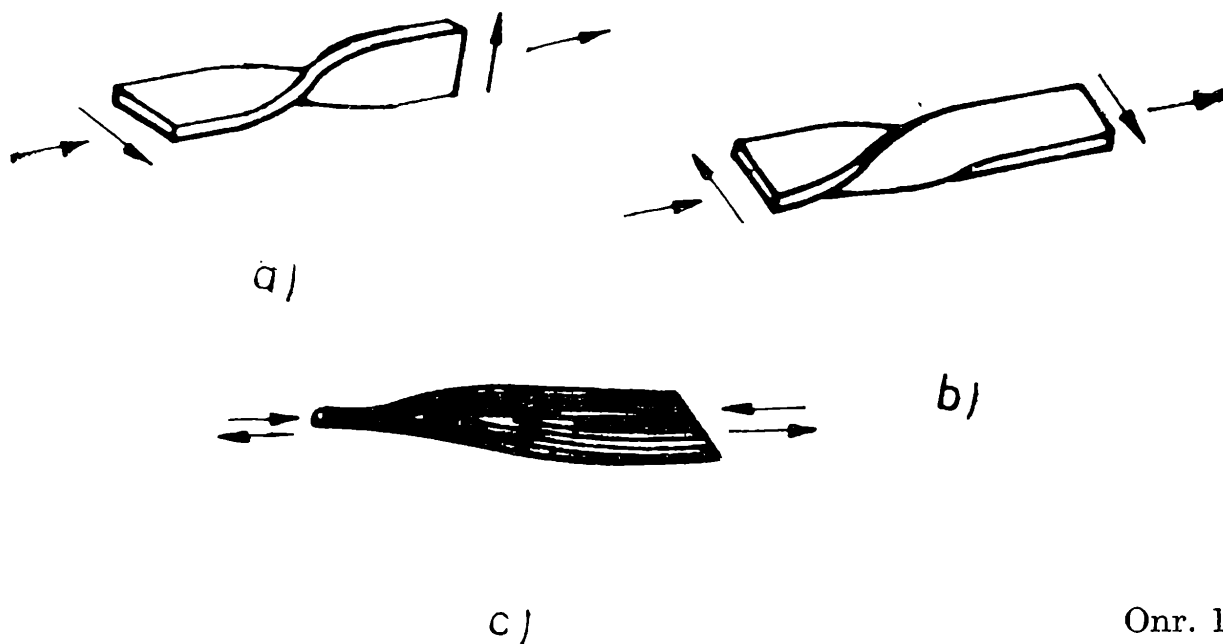


Obr. 16



jednorozměrné rozložení
světelné intenzity

Obr. 17



Obr. 18

Využitím vláknové optiky lze řešit mnoho úloh geometrické i prostorové přeměny signálů. Ovlivnění obrazové struktury přenášeného obrazu lze provádět pomocí svazků vláken s vhodně tvarovaným průřezem. Příklad svazku, pomocí kterého lze transformovat dvojrozměrné rozložení intenzity v jednorozměrné, je na obr. 17.

K přeměňování souřadné soustavy pevné topologické struktury (inverze, natočení o daný úhel, rozvinutí a řádkování) je možno v nejjednodušším případě využít mnohovlákných (mnohožilových) světlovodů (fokonů) vhodného tvaru. Na obr. 18 jsou znázorněny světlovody ve

tvaru poloosmy, osmy a tzv. plochý fokon (viz obr. 18a, 18b a 18c) které umožňují převést řádek ve sloupec, vodorovný řádek na šikmý řádek, inverzi řádku a přeměnění tečky na řádek a naopak.

Při náhodném uspořádání vláken ve svazku dosáhneme na výstupu zkreslený útvar, který lze považovat za kódovaný obraz. Dekódování se pak provede svazkem stejného uspořádání s opačným chodem světelných paprsků.

5. Závěr

Z předcházejícího je patrné, že vláknová optika patří mezi důležité disciplíny s velkými perspektivami. Řešením některých problémů vláknové optiky se zabývá kromě jiných pracovišť též katedra fyziky přírodovědecké fakulty UP v Olomouci.

astronomie

Obří a veleobří hvězdy

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Větev obrů se na Hertzsprungově-Russellově diagramu odděluje od hlavní posloupnosti u spektrální třídy F. Zatímco absolutní hvězdné velikosti hvězd hlavní posloupnosti směrem ke spektrální třídě M postupně klesají, jsou hvězdné velikosti obrů kolem O^M a směrem ke spektrální třídě M se ještě poněkud zvyšují, takže rozdíl hvězdných velikostí u spektrální třídy M přesahuje 10^M . Protože povrchové teploty hvězd téže spektrální třídy jsou prakticky stejné, znamená to, že obří hvězdy mají mnohem větší poloměry než hvězdy hlavní posloupnosti. Pro odhad poměru poloměrů můžeme použít Pogsonovy rovnice a vztahu pro závislost zářivosti hvězdy na její povrchové teplotě a poloměru. V předcházejícím článku jsme odvodili vztah

$$M_2 - M_1 = 2,5 \log \frac{R_1^2 T_1^4}{R_2^2 T_2^4}$$

v našem případě uvažujeme stejné povrchové teploty, tj. $T_1 = T_2$. Odtud pro poměr poloměrů vyplývá

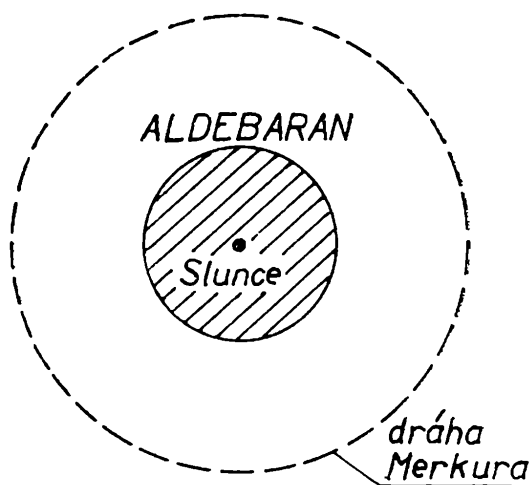
$$\log \frac{R_1}{R_2} = \frac{M_2 - M_1}{5}.$$

Při rozdílu hvězdných velikostí o 5^M jsou tedy poloměry obrů desetkrát větší než poloměry hvězd hlavní posloupnosti, při rozdílu 10^M sto-krát větší a při rozdílu 15^M tisíckrát větší.

Větev veleobrů leží nad větví obrů, veleobři jsou ještě o několik magnitud jasnější než obři, z čehož vyplývá, že jejich poloměry jsou ještě větší. Je zřejmé, že názvy „obři“ a „veleobři“ se nevztahují jen na zářivosti hvězd, ale i na jejich rozměry. Poloměry obrů a veleobrů jsou přitom tím větší, čím jsou tyto hvězdy chladnější. Protože hmotnosti hvězd jsou v mnohem menším intervalu než jejich poloměry — nejhmotnější hvězdy mají hmotnosti jen několika desítek hmotnosti Slunce — vyplývá odtud, že průměrné hustoty obrů a veleobrů jsou mnohem menší než je průměrná hustota Slunce. V mnoha případech jsou tyto hustoty několikrát menší než je hustota zemské atmosféry.

Uveďme alespoň několik příkladů fyzikálních charakteristik obřích a veleobřích hvězd.

Nejjasnější hvězda v souhvězdí Býka, α Tauri, nazývaná Aldebaran, je červený obr spektrální třídy K5. Je ve vzdálenosti 20 pc od nás, má povrchovou teplotu 3500 K a absolutní hvězdnou velikost $-0,6^M$. Tato hvězda patří mezi několik nejjasnějších a největších hvězd, jejichž průměr byl přímo změřen interferometrem. Z těchto měření a z teoretických výpočtů vyplývá, že poloměr Aldebarana je 36krát větší než poloměr Slunce, tj. $25 \cdot 10^9$ m. Na obr. 1 je znázorněna velikost Aldebarana ve srovnání s dráhou Merkura kolem Slunce (Merkur



Obr. 1. Velikost Aldebarana ve srovnání s dráhou Merkura

obíhá ve vzdálenosti $58 \cdot 10^9$ m). Uvážíme-li, že úhlový průměr Slunce, pozorovaný ze Země, je asi $0,5^\circ$, pak kdyby na místě Slunce byl Aldebaran, měl by jeho kotouč úhlový průměr 18° . Aldebaran je složkou dvojhvězdy, proto mohla být přesně stanovena jeho hmotnost. Bylo zjištěno, že hmotnost Aldebarana je 3,6krát větší než hmotnost Slunce. Známe-li poloměr a hmotnost hvězdy, můžeme snadno vypočítat její průměrnou hustotu. Podle definice je hustota

$$\varrho = \frac{M}{V}.$$

Hvězda je koule o poloměru R , je tedy její objem $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. Hmotnosti hvězd vyjadřujeme v jednotkách hmotnosti Slunce $M_\odot$, poloměry v jednotkách poloměru Slunce $R_\odot$. Pro Aldebarana je $M = 3,6 M_\odot$, $R = 36 R_\odot$, průměrná hustota je tedy

$$\bar{\varrho} = \frac{3,6 M_\odot}{\frac{4}{3} \pi (36 R_\odot)^3}.$$

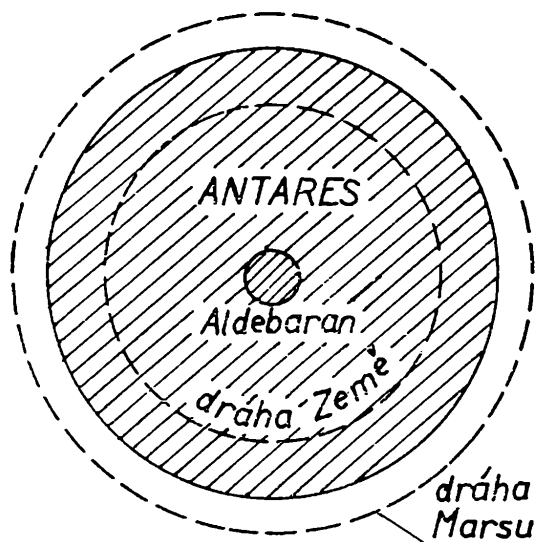
Průměrná hustota Slunce je dána vztahem $\bar{\varrho}_\odot = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3} \pi R_\odot^3}$ a její hod-

nota je $\bar{\varrho}_\odot = 1400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Pro Aldebarana vychází

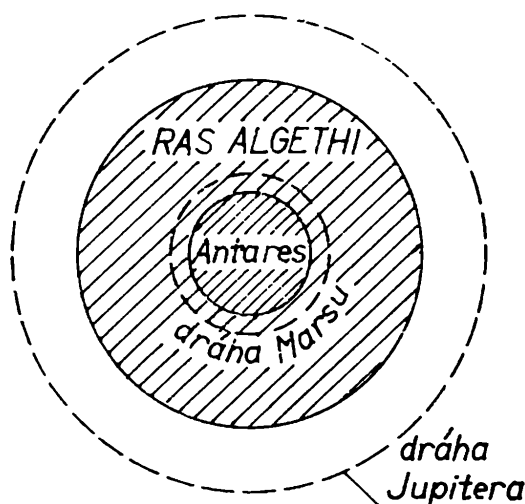
$$\bar{\varrho} \doteq 8 \cdot 10^{-8} \varrho_\odot \doteq 0,11 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Průměrná hustota Aldebarana je tedy více než desetkrát menší než hustota vzduchu za normálního tlaku. Zde je třeba si uvědomit, že jsme vypočítali průměrnou hustotu hvězdy. Hustota vnějších vrstev je ještě mnohem menší, směrem do nitra hvězdy hustota roste a v jejím jádru je dostatečně vysoká, aby mohly probíhat jaderné reakce, které jsou zdrojem energie každé hvězdy.

Aldebarana můžeme označit jako průměrnou obří hvězdu. Existují však ještě mnohem větší hvězdy. Ve vzdálenosti 110 pc od Slunce září nejjasnější hvězda v souhvězdí Štíra — Antares (α Scorpii). Je to červený veleobr spektrální třídy M1 s povrchovou teplotou 3100 K a s hmotností 20krát větší než je hmotnost Slunce. Absolutní hvězdná velikost Antara je -5^M . Z výpočtů i z interferometrických měření vyplývá, že poloměr Antara je $285 R_\odot$, tj. ještě asi osmkrát větší než poloměr Aldebarana. Vyjádříme-li poloměr této hvězdy v metrech ($R_\odot = 6,96 \cdot 10^8$ m), dospějeme k hodnotě $R \doteq 2 \cdot 10^{11}$ m. Poloměr zemské dráhy je asi $1,5 \cdot 10^{11}$ m, je tedy zřejmé, že poloměr Antara je větší než poloměr zemské dráhy. Na obr. 2 je znázorněna velikost Antara ve srovnání s velikostí dráhy Země a velikostí Aldebarana. Zakreslena je rovněž dráha Marsu,



Obr. 2. Velikost Antara ve srovnání s dráhou Země a Marsu

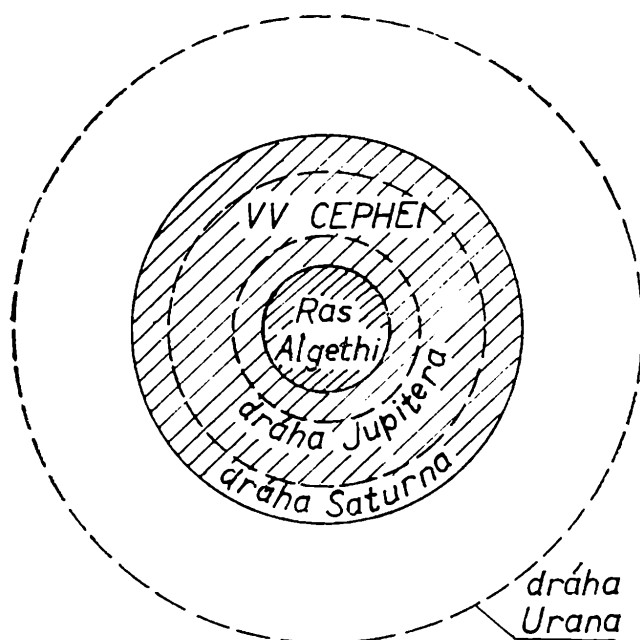


Obr. 3. Velikost hvězdy Ras Algethi ve srovnání s dráhami Marsu a Jupitera

který by obíhal ve výšce pouhých 27 miliónů kilometrů nad povrchem Antara. Průměrná hustota látky je u této hvězdy jen $\rho = 9 \cdot 10^{-7} \rho_{\odot} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; je tedy tisíckrát menší než hustota vzduchu za normálního atmosférického tlaku.

Hvězda α v souhvězdí Herkula, nazývaná Ras Algethi, je dvojhvězda, jejíž jedna složka je polopravidelná proměnná hvězda. Tato proměnná hvězda je červený obr spektrální třídy M5, jehož poloměr je asi 800krát větší než poloměr Slunce. Do této hvězdy by se vešla nejen dráha Země, ale i dráha Marsu a Jupiter by obíhal v nevelké vzdálenosti nad jejím povrchem. Rozměry této hvězdy jsou ve srovnání s velikostí Antara a dráhami Marsu a Jupitera znázorněny na obr. 3.

Proměnná hvězda VV Cephei je ještě třikrát větší než Ras Algethi —



Obr. 4. Velikost VV Cephei ve srovnání s dráhami Jupitera, Saturna a Urana

její poloměr je 2500krát větší než poloměr Slunce. Kdyby byla tato hvězda na místě našeho Slunce, zůstaly by nad jejím povrchem jen nejvzdálenější planety Uran, Neptun a Pluto; i dráha Saturna by již byla pod jejím povrchem. Rozměry hvězdy ve srovnání s dráhami Jupitera, Saturna a Urana a velikostí Ras Algethi jsou znázorněny na obr. 4. Hvězda VV Cephei patří mezi největší dosud známé hvězdy. Podle současných znalostí je větší již jen veleobr ϵ Aurigae B, který má tak nízkou povrchovou teplotu, že září v infračervené oblasti spektra a byl objeven díky tomu, že je složkou zákrytové proměnné hvězdy. Druhá složka dvojhvězdy je veleobr spektrální třídy F. Obě hvězdy obíhají kolem společného těžiště s oběžnou dobou 27 roků. Z doby trvání zákrytu, která je asi dva roky, bylo odvozeno, že poloměr infračerveného veleobra je $3000 R_{\odot}$ a započteme-li do poloměru i rozsáhlou atmosféru, dostáváme hodnotu $6000 R_{\odot}$, což je přibližně poloměr dráhy Neptuna. Průměrná hustota látky v infračerveném veleobru je tak malá ($10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), že během zákrytu proniká světlo jasné složky infračervenou hvězdou. Pro vysvětlení neobvyklých vlastností této veleobří hvězdy byly vysloveny dvě hypotézy. Podle jedné z nich jde o velmi mladou, právě vznikající hvězdu, která je v současné době kondenzujícím se oblakem prachu a plynu. Je-li správná tato hypotéza, pak by se musela teplota hvězdy postupně zvyšovat. Podle druhé hypotézy jde naopak o hvězdu velmi starou, jejíž vývoj je prakticky ukončen a proběhl u ní gravitační kolaps. Podle této domněnky je tedy ϵ Aurigae černá jáma, obklopená rozsáhlým oblakem mezihvězdného prachu. O tom, která hypotéza je správná, rozhodne pozorování v dalších letech.

Ze zahraničních časopisů

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Z německého časopisu „Alpha“:

1. Najděte všechna přirozená čísla n , pro něž číslo $z = \frac{n+17}{n-3}$ je také přirozené.

2. Určete všechna prvočísla p , pro něž číslo $z = p^6 + 3p^2 - 3p^4 - 1$ není dělitelné 13824.

3. Řešte $\sqrt{x + \sqrt{2x}} + \sqrt{x - \sqrt{2x}} = x$.

4. Součet dvojciferného přirozeného čísla a jeho ciferného součtu je 100. Najděte všechna čísla této vlastnosti.

5. Najděte všechny lineární mnohočleny tvaru $f(x) = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla, aby pro ně platilo $f[f(x)] = 2x + 1$.

6. Pět děvčat starších 10 let bylo dotazováno na své stáří. K tomu odpovědělo pravdivě každé z nich:

- a) Doris není ani nejmladší ani nejstarší;
- b) Barbora je mladší než Carmen, ale starší než Doris;
- c) Carmen je stará 14 let;
- d) Barbora i Carmen jsou obě mladší než Evelina;
- e) Evelina je o 5 let starší než Angelika.

Jak staré je každé děvče, jsou-li jejich stáří navzájem různá?

7. Určete všechna racionální čísla splňující rovnici $[2x - 5] = 3$, kde $[x]$ značí největší celé číslo, jež není větší než x .

8. Najděte všechna přirozená čísla, která jsou dělitelná osmi i devíti a jsou tvořena čtyřmi po sobě jdoucími číslicemi (v libovolném pořadí).

Z bulharského časopisu „Matematika“:

9. Řešte rovnici $\sqrt[3]{5+x} - \sqrt{x-2} = 1$

10. Řešte rovnici $\log_5^4(x-2)^2 + \log_5^2(x-2)^3 = 25$

11. Řešte rovnici $(2 + \sqrt[3]{3})x + (2 - \sqrt[3]{3})x = 14$.

12. Upravte výraz

$$\left[\left(\frac{a}{3} - \frac{1}{2} \right) \cdot a^2 - a^{2n+1} (3a^{2n-2}) \right] \cdot (3a - 1);$$

jaké hodnoty nabude pro $a = -2$?

Z jugoslávského časopisu „*Matematičko fizički list*“:

13. Sečtěte $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$.

14. Číslo

$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{\sqrt{2}-2}, \frac{1}{2}$ jsou první tři členy geometrické posloupnosti.

Sečtěte příslušnou nekonečnou řadu.

15. Zjednodušte

$$\frac{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1} - \sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}.$$

16. Určete hodnotu výrazu $3x^2 + 4y - 3y^2$, je-li

$$x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}.$$

17. Výraz $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$ napište ve tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde a a b jsou přirozená čísla.

Ze sovětského časopisu „*Kvant*“:

18. Řešte rovnice:

$$\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x} + \frac{\sqrt[7]{12+x}}{12} = \frac{64}{3} \cdot \sqrt[7]{x}$$

19.
$$\frac{(5-x)\sqrt{5-x} + (x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2.$$

20.
$$\sqrt[3]{4-4x+x^2} + \sqrt[3]{49+14x+x^2} = 3 + \sqrt[3]{14-5x-x^2}$$

21.
$$\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2-16} - 6.$$

22.
$$\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0.$$

23.
$$\frac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} - \log_3 x + \log_3^2 x = 3.$$

Výsledky: 1. $n = 4, 5, 7, 8, 13, 23$; 2. $p = 2$; 3. $0; 2; 1 + \sqrt{5}$. 4. Jen 86.
5. $f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1$ nebo $f(x) = -\sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1$. 6. $A = 11$,
 $B = 13$, $C = 14$, $D = 12$, $E = 16$. 7. $4 \leq x < 4,5$. 8. 4536; 3456.

9. 3. 10 $x_1 = 7, x_2 = \frac{11}{5}$, 11. ± 2 . 12. $\frac{-3a^3}{2} + \frac{a^2}{2}$ 14. 13. $\frac{3}{2}$.
 14. $4 + 3\sqrt{2}$. 15. $\sqrt{2}$. 16. $\frac{1}{3}(56\sqrt{10} + 12)$. 17. $5 + 3\sqrt{2}$. 18. $x_1 =$
 $= \frac{12}{127}, x_2 = -\frac{4}{43}$; 19. $x_1 = 3, x_2 = 5$. 20. $x_1 = 1, x_2 = -6$.
 21. 5; 22. $\frac{1}{12}$; 23. $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 9$.

různé

Rozvoj fyziky v Sovětském svazu za šedesát let

RNDr. VLADIMÍR MALÍŠEK, CSc., UP Olomouc

Rozvoj vědy jako sociálního jevu vždy těsně souvisel se stavem a se změnami sociální struktury; a skutečně z dějin je známo, že sociální revoluce bývají provázeny také přelomy ve vědě. Vidíme to na Francouzské revoluci, k jejímž prvním činům patřila realizace metrické soustavy fyzikálních jednotek a totéž platí i o vztahu mezi nastolením nových poměrů v někdejší Ruské před šedesáti lety a novými cestami, jimiž se od té doby ubírá fyzika v SSSR.

Před revolucí měla v Rusku pěstovat vědu „Imperátorská akademie věd“, zatímco univerzity byly apriori degradovány na instituce jediné pedagogické; šlo tehdy o devět univerzit — v Petrohradě, Moskvě, Kyjevě, Kazani, Charkově, Novorosijsku, Tomsku, Varšavě a Helsinkách (Polsko i Finsko byly částí Ruského impéria). Přitom Akademie byla vůči univerzitám institucí skutečně imperátorskou; jejím prezidentem byl *Konstantin Romanov* z carské rodiny, jejími členy byly hlavně přední carští úředníci. Při řevnivosti, panující mezi Akademií a univerzitami, neměli do ní přístup právě univerzitní profesori, byť to byl *Mendělejev*, *Timirjazev* či *Stoletov*. Podpora věd ze strany Akademie byla

minimální, a navíc její hlavní zájmy byly vzdáleny skutečným potřebám země i vědy. Zato o pohromy v profesorských sborech nebyla nouze. Není tedy divu, že odcházeli profesori, a to do soukromí (*P. N. Lebeděv*) i za hranice (*Kovalevská, Sklodovská*), stejně jako studenti (v zahraničí dostudoval *Lebeděv, Ioffe, Mandelštam, Golicyn, Papaleski*). Na ruských univerzitách se také nenašlo místo např. ani pro *Ehrenfesta* a *Ioffeho*.

Proto také k prvním opatřením po revoluci patřilo budování nových vědecko výzkumných pracovišť ve zcela novém duchu a s novým posláním; cílem přitom bylo vybudovat pracoviště dobře teoreticky fundovaná, jež by byla s to podstatně přispět jak k rozvoji vědy, tak k rychlému řešení aktuálních problémů praktického rázu. V tomto duchu vybudoval *Bonč-Brujevič* s podporou samého *Lenina* radiolaboratoř v Dolním Novgorodě, *Ioffe* a *Nemenov* rentgeno-radiologický ústav v Leningradě a *Rožděstvěnskij* optický institut. V Moskvě zřídil *Lazarev* ústav biofyziky a *Žukovskij* Centrální aerohydrodynamický ústav. Právě tyto ústavy se staly centry, z nichž vyrostla sovětská fyzika a z nichž vznikly nové vědecké fyzikální ústavy, zejména Fyzikální ústav AV SSSR v Moskvě, Fyzikálně technický ústav, Ústav chemické fyziky, Ústav atomové fyziky vedený *Kurčatovem*, Radiový ústav vedený *Vernadským*, Elektrofyzikální ústav vedený *Černyševem*. Tyto ústavy se staly semeništěm obdobných ústavů v dalších oblastech SSSR. Kromě těchto státních institucí vznikla již v roce 1919 také zájmová celosvazová Asociace fyziků, jež spojovala na neoficiální bázi všechny sovětské fyziky. Je třeba si přitom uvědomit, že to všechno vznikalo za neobyčejně svízelné situace v podmínkách revoluce, kdy byl katastrofální nedostatek nejen nejelementárnějších životních potřeb, ale také úplná izolace od zahraničních informací i tradičních dodavatelů vědeckých přístrojů. Jako jediný pozitivní faktor v oněch dobách působilo nadšení samotných fyziků a velká pozornost a podpora ze strany vlády. O jejich intenzitě svědčí to, že již v krátké době po revoluci pracují v Sovětském svazu vědecké ústavy moderního typu, schopné řešit významné vědecké a technické problémy, a to v celé řadě rozhodujících oblastí, zejména v atomové fyzice, fyzice jádra (tehdy se mluvilo o radioaktivitě), elektronice, fyzice záření, fyzice pevných látek, optice a spektroskopii, geofyzice a biofyzice, matematických metodách fyziky a teoretické fyzice.

Pokusme se nyní alespoň stručně charakterizovat hlavní směry, vůdčí osobnosti v těchto směrech a jejich nejzávažnější výsledky.

Ke koryfejům teoretické fyziky patří *D. S. Rožděstvěnskij*, který rozvinul teorii atomových spekter alkalických kovů a v roce 1920 zorganizoval Atomovou komisi, v níž působili zejména *A. N. Krylov, N. I. Muschelišvili, Ja. D. Tamarskij, A. A. Fridman* a další. První ruskou učebnici teoretické fyziky napsal *Jakub I. Frenkel*, který také vypracoval teorii elektrické vodivosti. V jeho stopách šel v další generaci *L. D. Lan-*

dau, který s *E. M. Lifšicem* vypracoval světoznámou desetisvazkovou učebnici teoretické fyziky, jež je dnes přeložena do všech světových jazyků. K nejvýznamnějším teoretikům tohoto období patří kromě matematického fyzika *V. A. Stěklova* zejména jeho žák *Aleksandr A. Fridman*, který vedle hydrodynamiky, jíž se zabýval „profesionálně“, prohloubil obecnou teorii relativity a kosmologii. V ní na rozdíl od Einsteina podal také nestacionární řešení jeho rovnic gravitačního pole. Tím teoreticky předpověděl expanzi vesmíru, jež byla později Hubblem skutečně pozorována. To také Einstein později dodatečně ocenil; tím byla zároveň založena nová relativistická kosmologie.

Pokračovatelem v oblasti relativity se stal leningradský *V. A. Fok*, který odvodil pohybové rovnice pro systém mnoha částic v relativistickém případě a v roce 1930 vypracoval nezávisle na Hartreem metodu řešení problému mnoha částic v kvantové mechanice. Světový primát získala sovětská teoretická fyzika ve čtyřech speciálních oblastech: v oboru supratekutosti, jejímž objevitelem je *L. D. Landau* (Nobelovu cenu obdržel v roce 1962), v problematice vzniku záření při průchodu nabitých částic látkami (za objev nového druhu záření, které vzniká při průchodu nabitých částic látkou rychlostí převyšující fázovou rychlost světla v této látce obdrželi v roce 1958 Nobelovu cenu *P. A. Čerenkov*, *I. M. Frank* a *I. E. Tamm*; jde o tzv. Čerenkovovo záření), v oblasti laserů (za objev plynového laseru získal Nobelovu cenu v roce 1964 *N. G. Basov* a *A. M. Prochorov*). Konečně v roce 1928 zároveň s Ramanem v Indii učinil „největší objev století v optice“ sovětský fyzik *Mandelštam* a *Landsberg*. Šlo o objev tzv. kombinovaného rozptylu světla, který spočívá v tom, že v rozptýleném světle po ozáření látek monochromatickým světlem se objeví kolem spektrální čáry, identické se spektrem dopadajícího záření, další spektrální čáry, jejichž frekvence se liší od frekvence dopadajícího záření právě o frekvenci, která se rovná frekvenci kmitů atomů v molekule. Tento jev, zvaný Ramanův či kombinovaný rozptyl světla, skýtá jedinečné možnosti pro poznání struktury a dynamiky molekul. Komise švédské akademie věd však Nobelovu cenu v tomto případě nerozdělila, jak se to stalo později v případě objevu laseru.

V dalších oblastech teoretické fyziky vynikli zejména *N. N. Bogoljubov* ve statistické fyzice a v kvantové teorii pole (dnes je ředitelem největšího fyzikálního pracoviště socialistických zemí — Spojeného ústavu jaderných výzkumů v Dubně u Moskvy), *A. S. Davydov* v teorii atomového jádra a ve fyzice krystalů, *A. I. Achiezer* v kvantové elektrodynamice a v teorii plazmatu, *A. Z. Petrov* v obecné teorii relativity a v teorii gravitace a řada dalších.

Pro metody práce sovětských fyziků je na rozdíl od dřívějších dob příznačná spolupráce akademií s univerzitami a technickými ústavy,

dále spolupráce a prolínání práce teoretiků a experimentátorů a v neposlední řadě intenzivní mezinárodní spolupráce. Výsledky vědecké i pedagogické práce v oboru fyziky jsou publikovány způsobem, který svou kvantitou i kvalitou zaujímá jedno z nejpřednějších míst na světě; kvalita, láce a světový standard sovětských fyzikálních publikací, do nichž jsou pojata rovněž všechna významná vědecká díla zahraničních autorů (ve formě překladů) je dnes již světově proslulá.

Všimněme si co nejstručněji ještě hlavních výsledků v oblasti smíšených experimentálních a teoretických výzkumů.

V oblasti fyziky jádra a elementárních částic je proslulá předpověď *D. D. Ivaněnka* o přítomnosti neutronů v atomových jádrech, provedená v r. 1932 paralelně s Heisenbergem. *B. V. Kurčatov*, *I. V. Kurčatov* patří k zakladatelům sovětské jaderné fyziky a energetiky a k objevitelům jaderné izomerie u uměle radioaktivních jader, *V. I. Veksler* k objevitelům principu autofázování v cyklotronech (1944), *K. A. Petržak* a *G. N. Flerov* k objevitelům spontánního dělení jader uranu (1940) a k průkopníkům analýzy řízené termonukleární reakce patří *L. A. Arcimovič* a *M. A. Leontovič*. Kolektivům mladých badatelů v Dubně se dále podařilo připravit supertěžké izotopy dosud neznámých chemických prvků a atomy tvořené antihmotou (antihelium). S objevy v oblasti jaderné fyziky souvisí velmi těsně také celá řada aplikací, ať již jde o aplikace vojenského charakteru, k nimž patří konstrukce plutoniové a uranové pumy, využívající kladné energetické bilance při štěpení jader, a konstrukce vodíkové a lithiové pumy, opírající se o uvolňování energie při slévání jader těchto prvků — či o aplikace mírového charakteru. Patří k nim zejména prudce se rozvíjející jaderná energetika (pohon elektrárenských turbin a lodí), výroba izotopů a výroba superjemných filtrů vznikajících principiálně prostřílením polymerních fólií při korpuskulárním ozařování radioaktivními izotopy. Tato metoda otevírá netušené možnosti medicíně a biologii (byla provedena separace jednotlivých virů, buněk krve), stejně jako hygieně (čištění vod) a dalším oblastem.

V celé řadě fyzikálních i technických otázek fyziky nízkých teplot vynikl *P. L. Kapica* (např. při řešení problému kvantových kapalin, k nimž patří helium II); *L. D. Landau* objevil v této kapalině existenci tzv. druhého zvuku, tj. šíření tepelných vln zcela jinou rychlostí než je rychlost „obyčejného zvuku“. Významné jsou dále práce *Landaua*, *A. I. Šalnikova* a *V. L. Ginzburga* z oboru supravodivosti a supratekustosti, z nichž mj. vyplývá tzv. vrstevná struktura supravodivých a normálních stavů v těchto látkách. Velmi významný podíl má sovětská fyzikální škola na prozkoumání fázových přechodů druhého druhu (tj. fázových přechodů, jež nejsou provázeny změnou energie).

Velkou pozornost věnovali sovětští fyzikové od počátku problematice pevné fáze a fyzice krystalů. V této oblasti jsou proslulé práce o vnitřní

symetrii krystalů (na starou školu kolem Fedorova navázali *A. V. Šubnikov* a *N. V. Bělov*). V oblasti polovodičů a mikroskopické teorie mechanických vlastností pevných látek je znám svými výsledky *A. F. Ioffe* a *Ja. I. Frenkel* a jejich škola.

Nelze vyjmenovat řadu výsledků, jichž bylo dosaženo v teorii kmitů, v oblasti magnetik, dielektrik, polovodičů a kovů, ani v oblasti akustiky, neboť by vyžadovaly delší komentář. Nebudeme si všímat ani výsledků dosažených v oblastech blízkých fyzice, z nichž jsou proslulé objevy v astronomii, vynálezy a úspěchy v astronautice, geofyzice a teoretické práce v chemické fyzice, fyzikální chemii a biofyzice.

Avšak i z tohoto epizodického přehledu je jistě patrné, že sovětská fyzika je dnes jednou z dominantních složek světové fyzikální vědy a že udělala oproti stavu před šedesáti lety pokrok, pro který lze sotva najít ve světě obdobu.

Z počátků českého letectví

(Napsáno v roce 1977 k 50. výročí úmrtí inž. J. Kašpara.)

JOSEF KOTYK, Pardubice

Velmi poutavou kapitolou našich kulturních dějin jsou počátky českého letectví. V nich zaujímá klíčové místo jejich pardubická etapa, reprezentovaná jménem prvního českého letce inž. *Jana Kašpara* (1883—1927) a jeho bratrance *Evžena Čiháka* (1885—1958).

*

České letectví nemohlo být v době, o níž píši, originální. Jeho prvořadým úkolem bylo spíše pokoušet se udržet krok s aviatikou zahraniční. Zprávy o ní pronikaly i k nám a s nimi jako zlaté opojení se šířily i představy člověka létajícího na říditelných strojích těžších než vzduch. Touha létat a myšlenka létání stávaly se však módou dříve, než se mohly stát skutkem. V Praze i jinde vznikala Aviatická družstva; nadšení a obětaví jednotlivci se snažili vyrobit mnohé součástky letadla sami, některé příležitostně také kupovali. To platí i o obou jmenovaných pardubických průkopnících českého letectva. První české letadlo sestrojil inž. Kašpar v pardubické továrně na hospodářské stroje. Jeho trup z jasanového dřeva byl vyztužen příčkami z ocelových drátů. Nosné plochy, vyrobené z topolového dřeva, byly potaženy plátnem impregnovaným fermeží. Vrtule byla zhotovena z jednoho kusu bukového dřeva. Podvozek měl

jen obyčejná železná kola. Inž. Kašpar cvičil na svém stroji nejprve jen jízdu. Shledal, že slabý motor je schopen přivodit zprvu jen skoky letadla; musel jej proto nahradit motorem silnějším. Donucen okolnostmi kombinoval při konstrukci časem i prvky cizí, zakoupené v Paříži, např. motor typu „Anzani“ o výkonu 25 k, vrtuli aj.

Dne 25. července 1909 přeletěl francouzský inženýr *Louis Blériot* na jednoplošníku poháněném motorem „Anzani“ jako první úžinu La Manche. Pod vlivem rozvoje a popularity aviatiky v zahraničí netouží pak Kašpar již tolik po originalitě konstruktérské, ale zůstává originální a velmi vytrvalý spíše jen v touze létat. Jeho štěstí neznalo mezí, když mu v březnu 1910 zámožný otec koupil dokonce celé letadlo, osvědčeného „original blériota“, jednoplošník „Canal La Manche“. S ním vykonal inženýr Kašpar bez vážnější nehody řadu veřejných produkcí. Již dne 13. dubna 1910 předvedl dva přímé lety několik set metrů dlouhé; 16. dubna přeletěl už ve výšce 20 až 25 m vzdálenost asi 2 km; 26. dubna se mu podařil další dvoukilometrový let ve výši 35 až 45 m. Dne 21. května létal již celých 9 minut. Dne 12. června obletěl během 14 minut letiště (býv. pardubické cvičiště) sedmkrát; celkem nalétal asi 14 km. Nakonec opsal úplnou osmu, jež byla tehdy považována za vrchol pilotního umění; na její provedení byla ve Francii vypsána vysoká odměna. Dne 18. července se Kašparovi podařilo dosáhnout výšky 120 až 150 m a létat nepřetržitě 28 minut. Po dalších velmi úspěšných produkcích ve dnech 14. a 15. srpna a dne 2. října 1910 v Praze stal se Kašpar nejpopulárnějším mužem v českém národě; okolnost, že prvním úspěšným letcem v Praze byl Čech, byla tehdy velikým zadostiučiněním našemu národnímu citění.

Bilance letecké sezóny 1910 byla velmi dobrá, neobyčejně úspěšná. Rok 1911 očekával inž. Kašpar proto právem s důvěrou. Již dne 23. dubna podnikl zkušební let, který je považován za první leteckou cross-country v Čechách: Po čtyřech kruzích nad pardubickým cvičištěm vystoupil do výše 300 m, zamířil k Nemošicům, prolétl kolem Dražkovic, přeletěl Jesničanky a vrátil se do Pardubic, kde po 14 min 53 s letu opsal nad letištěm opět dva kruhy a hladce přistál. Sebevědomí inž. Kašpara značně stoupl. Dokladem toho je, že o týden později, dne 30. dubna, podnikl první přespolní let Pardubice — Chrudim; odstartoval o 10. hodině a ve výšce 350 m dorazil za 9 minut do cíle, kde se obrátil a za pouhých 5 minut doletěl zpět. Úspěch se dostavoval za úspěchem. Za necelých 14 dní, 13. května, udivil inženýr Kašpar svým vrcholným činem, epochálním letem Pardubice — Praha, prvním dálkovým meziměstským letem. Vzlétl v 6 hod. 13 min., ve výši 400 m přeletěl nad Přeloučí, v 6 hod. 47 min. byl již nad Kolínem, po 7. hod. byl pozorován cestujícími z rychlíku u Poříčan, letěl směrem na Prosek, nad železničním viaduktem přeletěl Vltavu a ve výši 800 m sledoval její tok; v mlze ztratil dočasně orientaci,

klesl asi o 150 m a drže se stále levého břehu řeky letěl přes Hradčany, Malou Stranu, Smíchov a nad stráněmi za Hlubočepy a Zlíchovem k Malé Chuchli, kde za závodní drahou na poli šťastně v 7 hod. 47 min. přistál. Celou dráhu asi 120 km uletěl za 94 minuty, letěl tedy průměrnou rychlostí 80 km . h⁻¹. Na tehdejší dobu šlo o výkon statečný a zcela mimořádný, hrdinný let, který se mohl směle srovnávat s úspěchy letců francouzských a amerických. Jméno inž. Kašpara si získalo nadšený obdiv celého našeho národa a stalo se populárním i za hranicemi. Sám Blériot poslal mu blahopřejný telegram. Pardubickým Aviatickým družstvem byl inž. Kašpar vyznamenán stříbrným věncem, jenž se jako vzácná památka uchovává v depozitáři muzea v Pardubicích.

Tímto úspěchem letecká činnost inž. Kašpara kulminuje. Následuje sice ještě řada jeho letů místních a dálkových i další úspěšné produkce v různých městech, avšak havárie, kterou utrpěl v roce 1912 u Kolína a při které byl vážně zraněn, přiměla ho k tomu, aby aktivního létání zanechal. V Pardubicích si pak zřídil aviatickou školu. V předvečer válečných událostí v roce 1914 byla mu však letadla vojenskou správou zabavena. První světová válka tak jen uspíšila to, k čemu i za jiných okolností muselo jednou dojít: Letectví nemohlo zůstat v rukou amatérů.

Inženýr Jan Kašpar zemřel před 50 lety dne 2. března 1927. Svůj život skončil dobrovolnou smrtí. Nedaleko jeho prvního letiště v Pardubicích „Na Zavadilce“ postavil Aeroklub Republiky československé památník, jenž připomíná prvý vzlet prvního českého aviatika. Jeho zásluh bude vždy vděčně vzpomínáno.

*

S koncem úspěšné letecké činnosti inž. Jana Kašpara a jeho náhlým ústupem ze slávy vychází hvězda druhého průkopníka českého letectví *Evžena Čiháka*. O jeho zkušenostech přináší poutavé vypravování kniha *Evžen Čihák - František Gel: Jak jsem létal a padal* (SNDK, Praha 1957), kterou doporučuji pozornosti našich čtenářů.

matematické zábavy

Kuriozity mocnin

- Zápis čísla $(111\ 111\ 111)^2$ běžným způsobem, tj. skupinou za sebou následujících číslic, je čímsi pozoruhodný. Objevíte to?
- Mocnina $11\ 826^2$ je zapsána devítimístným číslem; v zápisu se vyskytuje každá číslice kromě nuly, ale číslice nejsou v obvyklém pořadí. Objevíte sami jiné číslo s touž vlastností?
- Zápisy 35 853, 84 648, 97 779 jsou „souměrné“; zápisy jejich druhých mocnin obsahují všech deset číslic (včetně nuly). Proč každé pěticiferné číslo s touto vlastností musí být větší než 3000?
- Čísla 13 a 31 jsou zapsána číslicemi v opačných pořadích, navíc i jejich druhé mocniny mají stejnou vlastnost.
- Všechny mocniny čísel 5, 25, 625 končí skupinou číslic, kterou je zapsán základ. Přesvědčte se o tom a podejte odůvodnění. Navíc vypočítejte $(10 + 1) - 5$, $(100 + 1) - 25$, $(1000 + 1) - 625$, $(10\ 000 + 1) - 625$ a zkoumejte mocniny výsledků podle stejného hlediska.
- Všimněte si, že $81 = (8 + 1)^2$, $512 = (5 + 1 + 2)^3$; bylo nalezeno i toto řešení pro šesté mocniny:
 $47\ 045\ 881\ 000\ 000 = (47 + 04 + 58 + 81 + 00 + 00 + 00)^6$

Š. J.

recenze

J. Zemplénová:

Dejiny fyziky na Slovensku do polovice 19. storočia

Vydala Veda, vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied v Bratislave roku 1974, prvé vydanie, preložené z maďarského originálu, strán 448, obrázkov 80, ruský a nemecký súhrn, viaz. Kčs 60,—.

Do dvanástich kapitol rozdelila maďarská prof. dr. Jolana Zemplé-

nová, ktorá sa od roku 1955 zaoberá špeciálnymi problémami z dejín maďarskej a uhorskej fyziky, prácu o dejinách fyziky na Slovensku. Pri svojom štúdiu sa stretávala s pôvodnými, doteraz nezpracovanými archívnymi dokumentárnymi materiálmi, ktoré vzhľadom na začlenenosť Slovenska do rámca Uhorska prinášali nové poznatky o historickom vývoji šírenia fyzikálnych poznatkov

na Slovensku, vzhľadom na jeho dnešné politické hranice. Do súhrnu osobností sú zahrnutí všetci, ktorí sa zúčastnili na rozvoji fyziky a prírodovedy vôbec, ktorí zo Slovenska pochádzali alebo na Slovensku pôsobili, bez ohľadu na národnosť. Tiež chápanie fyziky ako vedného odboru je široké, od philosophiae naturalis cez jednotlivé exaktné a prírodovedné vedy, napríklad astronómiu a chémiu, až po vyučovanie fyziky na školách všetkých typov. Na pozadí svetového vývoja fyziky a kultúrnych pomerov na Slovensku autorka sleduje zámery prednášok z fyziky P. Pázmánya (1570—1637), zakladateľa trnavskej univerzity, objasňuje stretnutia názorov D. Fröhlicha a M. Szentiványiho, pripomína vplyvy J. H. Alsteda a J. A. Komenského na koncepciu fyziky. Z množstva prác určených ako dizertácie, od autorov, ktorí boli pôvodom zo Slovenska, od tej najstaršej z roku 1602, vyberá Zemplénová tie, čo sa aspoň trochu dotýkajú fyziky, astronómie a meteorológie. Viac si všíma súborné diela z philosophiae naturalis v slovenskej odbornej literatúre 17. storočia, kde sa objavujú mená: J. Bayer a I. Caban. Vhodným príkladom pre šírenie fyzikálnych poznatkov a pre rozvoj fyziky sú formy vyučovania a používané učebnice na vtedajších školách (trnavská univerzita, školy v Bratislave, Levoči, Kežmarku a Prešove). Koncom 18. storočia sa systém škôl rozširoval (evanjelické školy, kráľovské akadémie,

stredoškolské ústavy, piaristické školy). Učebnice M. Pankla, A. Tomcsányiho, G. Kováča-Martinyho a A. Fuchsa, Š. A. Jedlíka a M. Schirhubera vystihujú už všeobecný stav fyziky na Slovensku. Zo špeciálnych škôl, v ktorých mala úlohu fyzika, treba spomenúť banskú školu v Banskej Štiavnici, založenú v roku 1735, ktorú Mária Terézia povýšila na banskú akadémiu (1763), a vyššiu hospodársko-technickú školu v Senci. K významným osobnostiam z dejín fyziky, ktoré sú spojené so Slovenskom, patria v období do polovice 19. storočia: Š. A. Jedlík, W. Kempelen, J. A. Segner, M. Hell, J. Petzval.

Publikácia J. Zemplénovej je prvým súborným spracovaním tejto problematiky u nás a je významnou monografiou k dejinám prírodných vied na Slovensku. Po preštudovaní diela musíme iba súhlasiť so slovami dr. Jána Tibenského, ktorý osobne autorku požiadal o spracovanie takto zameraných dejín fyziky na Slovensku: „Je to dielo, ktoré je určené nielen fyzikom a prírodovedcom vôbec, ktorí sa zaujímajú o dejiny svojích disciplín, ale vzhľadom na široký kultúrno-historický záber prináša mnoho cenných údajov aj pre historikov, historikov kultúry, a najmä pre dejiny pedagogiky na Slovensku.“ I keď kniha vyšla v pomerne nízkom náklade, 500 kusov, predpokladáme, že vážny záujemca ju bude vedieť nájsť.

Dušan Jedinák

Kolektiv autorů:

Oborové encyklopedie -

Aplikovaná matematika I (A—L)

Vydalo SNTL, Praha 1977, 1. vydání, 1124 stran, 283 obrázků, 35 tabulek, cena vázaného výtisku Kčs 90,—.

Současný i perspektivní vývoj řady technických a vědních oborů je podmíněn také dalším rozvojem matematiky a matematického bádání, které mimo tradiční oblasti aplikací ve fyzice a technice zasahují i do nedávno nematematizovaných věd, jakými jsou například vědy společenské, biologické, lékařské aj. Proto redakcí teoretické literatury a technických slovníků SNTL vydaná další z řady oborových encyklopedií, zpracovaná čtyřicetičlenným kolektivem autorů za redakce RNDr. Jiřího Nečase, je věnována širokému okruhu čtenářů, kteří pracují v oblasti aplikací matematiky, a koncipována z hlediska potřeb vědeckovýzkumné a technické praxe. Velký zájem o všechny dosud vydané oborové encyklopedie SNTL naznačuje, že potřeba podobně zaměřených publikací tohoto typu mezi čtenářskou obcí existuje a vzrůstá.

Publikace obsahuje ve dvou svazcích více než 2400 abecedně uspořádaných hesel z různých matematických disciplín, propojených odkazy a k rychlé orientaci čtenáře je doplněna seznamem používaných značek a označení, rejstříkem a přehledem doporučené literatury pro hlubší seznámení s určitou problematikou. Ve formě abecedně

řazených výkladových hesel jsou zpracovány tradiční i některé moderní partie matematiky: matematická logika, teorie množin, teorie algebraických soustav, klasická algebra (rovnice, mnohočleny), lineární algebra, analytická (afinní a euklidovská), algebraická, projektivní, deskriptivní a kinematická geometrie, matematická analýza v reálném a komplexním oboru, diferenciální geometrie, vektorová a tenzorová analýza, obecná topologie, algebraická topologie, obyčejné a parciální diferenciální rovnice, integrální rovnice, speciální funkce, harmonická analýza, operátorový počet a integrální transformace, numerické metody, nomografie, teorie pravděpodobnosti, matematická statistika, teorie her, teorie informací, matematické metody v ekonomii, programování pro počítače a základy výpočetní techniky. Šíře a hloubka zpracování jednotlivých hesel je dána jednak rozsahem encyklopedie, jednak okruhem čtenářů, jimž je dílo určeno.

Příručka je určena inženýrům, technikům, ekonomům, projektantům, konstruktérům, výzkumným a vývojovým pracovníkům ve všech technických, přírodovědných i společenských oborech, vysokoškolským pracovníkům a posluchačům vysokých škol technického i universitního směru a dalším čtenářům k pohotovému informování o jednotlivých matematických pojmech, souvislostech a metodách.

(tes)

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

spojit	join
spojitý	continuous
spojitost	continuity
společná tečna	common tangent
společný	common
společný jmenovatel	common denominator
spor	contradiction
správný	correct
srovnání	comparison
srovnatelný	comparable
stačit	suffice
stálost	invariance
stejnolehlost	homothety, dilation
stejnolehlý	homothetic
stejnoměrný	uniform
stejnoměrná konvergence	uniform convergence
stejný počet	equal number
stěna	face
stín	shadow
sto	hundred
stopa	trace (of plane)
stopník	trace (of line)
stoupat	increase
strana	side
střed	centre
střed promítání	centre of projection
střed souměrnosti	centre of symmetry
střed stejnolehlosti	centre of homothety
střed vepsané kružnice	incentre
střední příčka	median, midline (v lichoběžníku)
středový	central
středová kuželosečka	central conic
středové promítání	central projection
středová souměrnost	central symmetry
středový úhel	central angle
střídavý	alternating

stupeň
 stupeň křivky
 stupeň odmocniny
 stupeň plochy
 stupeň rovnice
 stupeň uzlu
 stupnice
 číselná stupnice
 lineární stupnice
 logaritmická stupnice
 stý
 subnormála
 subtangenta
 sudý
 supremum
 svazek přímek
 svazek rovin
 svírat
 svislý
 svislá přímka
 systematický

degree, order
 order of curve
 order of radical
 order of surface
 dimension of equation
 order of node
 scale
 number scale
 uniform scale
 logarithmic scale
 hundredth
 subnormal
 subtangent
 even, bipartite (graph)
 least upper bound
 pencil of lines
 pencil of planes
 intercept
 vertical
 plumb line
 systematic

Š

šachy
 šedesátinný
 šedesátkový
 šest
 šestiboký
 šestistěn
 šestiúhelník
 šestkový
 šířka
 šroubovice
 šroubový pohyb

chess
 sexagesimal
 sexagesimal
 six
 hexagonal
 hexahedron
 hexagon
 senary
 width, breadth
 helix
 screw motion

T

tabulka
 tangens
 tangentoida
 tangentová věta
 tečkovaný
 tečna
 tečná rovina
 tedy
 tehdy a jen tehdy

table
 tangent
 tangent curve
 tangent law
 dotted
 tangent (line)
 tangent plane
 then, consequently,
 if and only if (zkráceně iff)

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

6

ROČNÍK 56, 1977-1978, ÚNOR



rozhledy

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, Ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, RNDr. Josef Novák, CSc., MFF KU, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VÚOS Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, Ing. dr. Václav Sindelář, CSc., ČSMU Prana.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1977.

**ROČNÍK 56
ÚNOR 1978**

6

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

Dr. I. Faktorová, CSc.: Třicáté výročí únorového vítězství	241
Dr. E. Calda: Největší společný dělitel v oboru celých komplexních čísel	243
S. Horák: Z geometrie trojúhelníka	247
Prof. E. Kraemer: Aritmetický a geometrický průměr tl	251
L. Bican: Zobecněná Pelliova rovnice	257
J. Kalafa: Výpočet elementárních funkcí na kapesních minipočítačkách	262
Dr. Ing. J. Pospíšil, CSc.: Optoelektronika	269
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Objev Uranových prstenců	279
J. Sedláčková: Ještě k minulému ročníku MO	282
J. Hrivňák: 80 let od zrodu elektrárny v českých zemích	283
Dr. J. Mída: 250. výročí narození Jana Tesánka	286
Matematické zábavy	287
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Třicáté výročí únorového vítězství

Doc. PhDr. LADISLAVA FAKTOROVÁ, CSc., UK Praha

Třicáté výročí vítězství pracujícího lidu nad reakcí v únoru 1948 je důvodem nejen k oslavám tohoto jubilea, ale i k vážnému zamyšlení nad historickým významem a nad aktuálností revolučního odkazu Února pro současnost.

Vítězný únor je mezníkem nové epochy v československých dějinách, kdy vyvrcholil dlouholetý revoluční zápas dělnické třídy a kdy byla zahájena éra budování socialismu. Únor je však také potvrzením teorie o socialistické revoluci, o přechodu od kapitalismu k socialismu, a proto je také cennou zkušeností nejen našeho, ale i mezinárodního komunistického a dělnického hnutí.

I při letošních oslavách se budeme znovu vracet k událostem šesti únorových dnů v roce 1948, kdy se rozhodovalo a rozhodlo o budoucnosti Československa. Boj proti fašismu a osvobození Československa Sovětskou armádou vytvořilo předpoklady pro vývoj národní a demokratické revoluce a její přerůstání v revoluci socialistickou. Příčinou zostřené politického boje od počátku roku 1948 byly nerealizované úkoly Budovatelského vládního programu, pozemková reforma, národní pojištění, školský zákon aj. i nové požadavky komunistů, jako například znárodnění průmyslových podniků do 50 zaměstnanců. Napjatá situace vyvrcholila 20. února, kdy dvanáct ministrů reakčních stran podalo demisi. O vládní krizi informoval lid hned 21. února *Klement Gottwald* na manifestačním shromáždění pracujících na Staroměstském náměstí a podal návrh na tvoření akčních výborů. Následujícího dne sešel se v Praze celostátní sjezd závodních rad a odborových organizací, který se postavil za politiku KSČ a vyhlásil na 24. února hodinovou manifestační stávku. Ta se stala výrazem jednoty pracujícího lidu Československa, který se tím jednoznačně připojil k požadavku skoncovat definitivně s buržoazií. To se skutečně podařilo a 25. února na mohutné manifestaci pracujících na Václavském náměstí mohl Klement Gottwald oznámit úplnou politickou porážku reakce. Byla vytvořena nová vláda, která již v březnu získala dvoutřetinovou podporu v Ústavodárném shromáždění a v květnových všeobecných volbách devadesátiprocentní podporu voličů.

Současně s výročím Února připomeneme si v letošním roce i další významné události, ke kterým došlo v průběhu únorových dní, vznik Lidových milicí, ustavující sjezd Československo-sovětského přátelství i řadu dalších událostí, pro které právě Únor vytvořil předpoklady. Je to zejména schválení zákona o jednotné škole, zákona o národním

pojištění, zákona o nové pozemkové reformě, znárodnovacích zákonů (týkajících se velkoobchodu, zahraničního obchodu a závodů nad 50 zaměstnanců), dále také sloučení KSČ a sociální demokracie a schválení Ústavy 9. května, která potvrdila lidově demokratický charakter republiky.

Naše zamyšlení v těchto únorových dnech bude však patřit zejména třicetileté cestě budování socialismu pod vedením KSČ, cestě, která potvrdila správnost učení marxismu-leninismu. V krátkém historickém období třiceti let se nám podařilo překonat potíže, omyly, chyby i kontrarevoluční pokusy, dosáhnout významných úspěchů v oblasti ekonomické, politické i ideologické a začlenit naše země pevně do socialistické světové soustavy. Kritická analýza a hodnocení této epochy je obsažena v materiálech XIV. sjezdu strany. Po dobytí moci a výrobních prostředků podařilo se nám překonat sociálně ekonomické rozdíly, rozdíl mezi duševní a fyzickou prací, mezi životem ve městech a na venkově. Podařilo se vytvořit podmínky pro rozvíjení kulturní revoluce a v souvislosti s tím urychlit i vědeckotechnický rozvoj; věda se stala materiální ekonomickou silou, podmiňující další společenský vývoj. Velká pozornost byla věnována rozvoji vzdělání a školství, zákonem o jednotné škole byla jeho demokratizace dovršena a byly položeny základy nové socialistické školy. Třicetiletý vývoj vyústil přípravou obsahové i strukturální přestavby československé výchovně vzdělávací soustavy, která reaguje jak na současné, tak i na budoucí potřeby společenskoekonomického vývoje socialistické společnosti. Zázemím společenské praxe a teoretickým základem vědeckotechnického pokroku se stala rozsáhlá výzkumná činnost, která se vedle vysokých škol rozvíjí zejména v Československé akademii věd.

V oblasti vzdělání a výzkumu bylo podobně jako v jiných oblastech nejúspěšnější a nejproduktivnější období mezi XIV. a XV. sjezdem KSČ; proto také mohl XV. sjezd předložit program budování rozvinuté socialistické společnosti.

Nejlepší oslavou 30. výročí Vítězného února bude v duchu jeho revolučního odkazu přispět ze všech sil a schopností k naplňování a k realizaci programu vytyčeného XV. sjezdem KSČ.

Největší společný dělitel v oboru celých komplexních čísel

RNDr. EMIL CALDA, UK Praha

S otázkami dělitelnosti se na střední škole setkáváte pouze v souvislosti s celými čísly. V tomto článku rozšíříme problematiku dělitelnosti i na obor tzv. celých komplexních čísel. Celým komplexním číslem se rozumí každé komplexní číslo, jež lze vyjádřit ve tvaru $x + iy$, kde x, y jsou celá čísla. Půjde nám zejména o to, nalézt největšího společného dělitele libovolných dvou celých komplexních čísel.

Připomeňme si nejprve některé základní pojmy týkající se dělitelnosti celých čísel:

1. O libovolných dvou celých číslech a, b říkáme, že a dělí b (píšeme $a \mid b$) právě tehdy, když existuje celé číslo c takové, že $ac = b$.
2. Celé číslo t se nazývá *společným dělitelem* celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ právě tehdy, když t dělí každé z čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$.
3. Celé číslo d se nazývá *největším společným dělitelem* celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ [píšeme $d = D(a_1, a_2, \dots, a_n)$] právě tehdy, když d je jejich společným dělitelem a když každý společný dělitel čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ dělí číslo d .

K těmto definicím připojíme několik poznámek. Všimněte si, že v oboru celých čísel platí $0 \mid 0$; neplatí však třeba $0 \mid 2$, neboť neexistuje celé číslo c , pro něž je $0 \cdot c = 2$. Všimněte si dále, že relace „dělí“ v množině $\mathbf{Z}$ všech celých čísel, tj. relace $U = \{[a, b] \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}; a \mid b\}$, je reflexivní a tranzitivní. Pro ilustraci určíme ještě největší společné dělitele čísel 0, 3, -6: dělitelem nuly je každé celé číslo, děliteli čísla 3 jsou právě čísla $\pm 1, \pm 3$, děliteli čísla 6 jsou právě čísla $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Společnými děliteli daných čísel jsou tedy právě čísla $\pm 1, \pm 3$. Největším společným dělitelem čísel 0, 3, -6 je potom každé z čísel ± 3 , tj. platí: $D(0, 3, -6) = \pm 3$.

Zamyslíme-li se nad výše uvedenými definicemi, zjistíme, že žádné okolnosti nebrání rozšíření jejich platnosti z čísel celých na celá komplexní čísla. Stačí pouze v těchto definicích nahradit v příslušných pádech slova „celé číslo“, resp. „celá čísla“ slovy „celé komplexní číslo“,

resp. „celá komplexní čísla“ Poznamenejme ještě, že název „největší společný dělitel“ vznikl z toho, že nejprve byla vyšetřována dělitelnost v oboru celých čísel, kde největším společným dělitelem daných čísel je skutečně ten jejich společný dělitel, který je (v absolutní hodnotě) největší. Takto chápaný pojem největšího společného dělitele se nedá použít v těch číselných oborech, jejichž prvky nelze „srovnat podle velikosti“; jedním z nich je i obor celých komplexních čísel. Proto je největší společný dělitel definován na základě obecnějších vlastností, které umožňují používat ho i v jiných oborech.

Připomeneme si nyní jeden ze způsobů určení největšího společného dělitele libovolných dvou celých čísel a pokusíme se aplikovat jej i na celá komplexní čísla. Víme, že v oboru celých čísel platí následující věta:

Věta 1. K libovolným celým číslům a, b ($b \neq 0$) existují celá čísla q, r tak, že platí

$$a = bq + r, \quad \text{kde} \quad 0 \leq r < |b|$$

Na základě této věty lze určit největšího společného dělitele každých dvou celých čísel, a to postupem, který se nazývá Eukleidův algoritmus; tento postup si vysvětlíme.

Nechť a, b jsou celá čísla, $b \neq 0$; Eukleidovým algoritmem najdeme jejich největšího společného dělitele $D(a, b)$. Určíme nejprve podle věty 1 celá čísla q_1, r_1 tak, aby platilo:

$$a = bq_1 + r_1, \quad \text{kde} \quad 0 \leq r_1 < |b|$$

Je-li $r_1 = 0$, jsme u konce; platí pak $b \mid a$, takže je $D(a, b) = b$.

Pro $r_1 \neq 0$ použijeme větu 1 na čísla b, r_1 a dostaneme:

$$b = r_1q_2 + r_2, \quad \text{kde} \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

Je-li $r_2 = 0$, jsme u cíle; platí totiž $D(a, b) = D[r_1(q_1q_2 + 1), r_1q_2] = r_1$.

Pro $r_2 \neq 0$ pokračujeme dále:

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad \text{kde} \quad 0 \leq r_3 < r_2.$$

Je-li $r_3 = 0$, jsme u konce, neboť je $D(a, b) = r_2$.

Pro $r_3 \neq 0$ pokračujeme tímto způsobem dále a po konečném počtu kroků dojdeme k rovnosti tvaru

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}, \quad \text{kde} \quad r_{n+1} = 0$$

Toto tvrzení vyplývá z toho, že v postupně získávaných rovnostech $a = bq_1 + r_1, b = r_1q_2 + r_2, r_1 = r_2q_3 + r_3, r_2 = r_3q_4 + r_4, \dots$ tvoří celá nezáporná čísla $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ klesající posloupnost, neboť platí: $|b| > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \dots$ Protože jde o klesající posloupnost celých nezáporných čísel, je tato posloupnost nutně konečná a její poslední člen je roven nule. Matematickou indukcí lze dokázat, že číslo r_n v poslední získané rovnosti, tj. v rovnosti $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$, je největším společným dělitelem čísel a, b , tj. $D(a, b) = r_n$.

Ukážeme si tento postup na konkrétním příkladě, v němž Eukleidovým algoritmem určíme $D(6273, 4018)$. Postupujeme výše uvedeným způsobem a dostáváme:

$$\begin{aligned}
6273 &= 4018.1 + 2255 \\
4018 &= 2255.1 + 1763 \\
2255 &= 1763.1 + 492 \\
1763 &= 492.3 + 287 \\
492 &= 287.1 + 205 \\
287 &= 205.1 + 82 \\
205 &= 82.2 + 41 \\
82 &= 41.2
\end{aligned}$$

Je tedy $D(6273, 4018) = 41$. Uvědomme si, že je též $D(6273, 4018) = -41$. Jiné největší společné dělitele již daná čísla nemají.

Budeme nyní zkoumat možnosti, jak tento postup přizpůsobit hledání největšího společného dělitele celých komplexních čísel. Větu 1, na níž je založen Eukleidův algoritmus pro celá čísla, nelze použít bezprostředně, neboť pro komplexní čísla $a_1 + a_2i$, $b_1 + b_2i$ nemají zápisy $a_1 + a_2i > b_1 + b_2i$ smysl. Je tedy vůbec možné (při daných celých komplexních číslech $a_1 + a_2i$, $b_1 + b_2i$, ($b_1 + b_2i \neq 0$)) (sestavit konečnou posloupnost rovností

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2i &= (b_1 + b_2i)(q_1 + q_1'i) + r_1 + r_1'i \\
b_1 + b_2i &= (r_1 + r_1'i)(q_2 + q_2'i) + r_2 + r_2'i \\
r_1 + r_2i &= (r_2 + r_2'i)(q_3 + q_3'i) + r_3 + r_3'i \\
\hline
r_{n-1} + r_{n-1}'i &= (r_n + r_n'i)(q_{n+1} + q_{n+1}'i) + r_{n+1} + r_{n+1}'i
\end{aligned}$$

mezi celými komplexními čísly tak, aby platilo $r_{n+1} + r_{n+1}'i = 0$? Na základě analogie s celými čísly lze usoudit, že to možné je: stačí totiž, aby komplexní čísla $r_1 + r_1'i$, $r_2 + r_2'i$, $r_3 + r_3'i$, splňovala podmínku $|r_1 + r_1'i|^2 > |r_2 + r_2'i|^2 > |r_3 + r_3'i|^2 > \dots$. V tomto případě je posloupnost $|r_1 + r_1'i|^2$, $|r_2 + r_2'i|^2$, $|r_3 + r_3'i|^2$, klesající posloupností celých nezáporných čísel, takže jde o konečnou posloupnost s posledním členem $|r_{n+1} + r_{n+1}'i|^2 = 0$; z toho plyne, že je též $r_{n+1} + r_{n+1}'i = 0$. (Uvědomte si, že je nutno vzít druhou mocninu absolutních hodnot; kdybychom vzali jen absolutní hodnoty uvedených celých komplexních čísel, nemuseli bychom dostat posloupnost celých čísel). Stejně jako u celých čísel lze i nyní dokázat, že platí $D(a_1 + a_2i, b_1 + b_2i) = r_n + r_n'i$. Provedené úvahy spolu s následující větou nám zaručují, že ke každým dvěma celým komplexním číslům existuje jejich největší společný dělitel.

Věta 2. Ke každým celým komplexním číslům $a_1 + a_2i$, $b_1 + b_2i$, ($b_1 + b_2i \neq 0$) existují celá komplexní čísla $q_1 + q_2i$, $r_1 + r_2i$ tak, že platí

$$a_1 + a_2i = (b_1 + b_2i)(q_1 + q_2i) + r_1 + r_2i,$$

kde

$$|r_1 + r_2i|^2 < |b_1 + b_2i|^2$$

Důkaz: Protože je $b_1 + b_2i \neq 0$, existují (racionální) čísla x, y tak, že $x + iy = \frac{a_1 + a_2i}{b_1 + b_2i}$. K číslům x, y určíme celá čísla q_1, q_2 taková, aby platilo

$$|x - q_1| \leq \frac{1}{2}, |y - q_2| \leq \frac{1}{2};$$

takováto čísla q_1, q_2 existují vždy — jde o celá čísla z intervalů $\left\langle x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \right\rangle, \left\langle y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2} \right\rangle$. Nakonec určíme celá čísla r_1, r_2 tak, aby byla splněna podmínka

$$a_1 + a_2i = (b_1 + b_2i)(q_1 + q_2i) + r_1 + r_2i.$$

Zbývá dokázat, že je $|r_1 + r_2i|^2 < |b_1 + b_2i|^2$

Vydělíme-li poslední rovnost číslem $b_1 + b_2i$, dostaneme

$$x + iy = q_1 + q_2i + \frac{r_1 + r_2i}{b_1 + b_2i}, \text{ z čehož vyplývá}$$

$$(b_1 + b_2i)[(x - q_1) + (y - q_2)i] = r_1 + r_2i \quad \text{a dále}$$

$$|b_1 + b_2i|^2 |(x - q_1) + (y - q_2)i|^2 = |r_1 + r_2i|^2$$

Vzhledem ke vztahům $|x - q_1| \leq \frac{1}{2}, |y - q_2| \leq \frac{1}{2}$ platí v poslední rovnosti $|(x - q_1) + (y - q_2)i|^2 < 1$, takže z ní dostáváme $|b_1 + b_2i|^2 > |r_1 + r_2i|^2$. Tím je věta dokázána.

Ke konkrétní ilustraci uvedených postupů vypočteme závěrem dva příklady na určení největšího společného dělitele dvou celých komplexních čísel.

Příklad 1. Určete $D(7 - 9i, 25 + 25i)$.

Řešení: Podle důkazu věty 2 určíme postupně čísla x, y, q_1, q_2, r_1, r_2 :

$$\frac{25 + 25i}{7 - 9i} = \frac{-5 + 40i}{13}, \text{ takže: } x = \frac{-5}{13}, y = \frac{40}{13};$$

$$\left| \frac{-5}{13} - q_1 \right| \leq \frac{1}{2}, \left| \frac{40}{13} - q_2 \right| \leq \frac{1}{2}, \text{ takže } q_1 = 0, q_2 = 3;$$

$$25 + 25i = (7 - 9i) \cdot 3i + (-2 + 4i), \text{ takže } r_1 = -2, r_2 = 4.$$

Protože je $-2 + 4i \neq 0$, postupujeme dále:

$$\frac{7 - 9i}{-2 + 4i} = \frac{-5 - i}{2}, \text{ takže po výpočtu příslušných } q_1, q_2 \text{ máme}$$

$$7 - 9i = (-2 + 4i)(-2) + (3 - i).$$

Protože je $3 - i \neq 0$, postupujeme dále a dojdeme k poslednímu řádku algoritmu:

$$-2 + 4i = (3 - i)(-1 + i).$$

Je tedy $D(7 - 9i, 25 + 25i) = 3 - i$.

Poznámka: Dá se dokázat (učiníme tak v jednom z příštích článků navazujících na tuto problematiku), že kromě čísla $3 - i$ jsou největší společní dělitelé daných čísel též čísla $3 + i$, $-3 + i$ a $-3 - i$ a že jiné největší společné dělitele uvedená čísla nemají.

Napíšeme-li ještě jednou jednotlivé řádky celého postupu (s vynecháním pomocných výpočtů), máme:

$$25 + 25i = (7 - 9i) 3i + (-2 + 4i)$$

$$7 - 9i = (-2 + 4i)(-2) + (3 - i)$$

$$-2 + 4i = (3 - i)(-1 + i) + 0$$

Všimněte si čísel v posledním sloupci tohoto schématu a přesvědčte se, že druhé mocniny absolutních hodnot těchto čísel tvoří (v pořadí shora dolů) klesající posloupnost celých nezáporných čísel.

Příklad 2. Určete $D(125, 67 - i)$.

Řešení: Způsobem podrobně vyloženým výše dostáváme:

$$125 = (67 - i) \cdot 2 + (-9 + 2i)$$

$$67 - i = (-9 + 2i)(-7 - i) + 2 + 4i$$

$$-9 + 2i = (2 + 4i) \cdot 2i + (-1 - 2i)$$

$$2 + 4i = (-1 - 2i)(-2).$$

Je tedy $D(125, 67 - i) = -1 - 2i$. Podle poznámky v předešlém příkladu jsou největšími společnými děliteli daných čísel právě čísla: $1 + 2i$, $1 - 2i$, $-1 + 2i$, $-1 - 2i$.

Cvičení.

1. Určete $D(315221, -257348)$. (Výsledek: ± 101).

2. Určete $D(50, 11 + 3i)$. (Výsledek: $\pm 3 \pm i$).

Z geometrie trojúhelníka

STANISLAV HORÁK, Praha

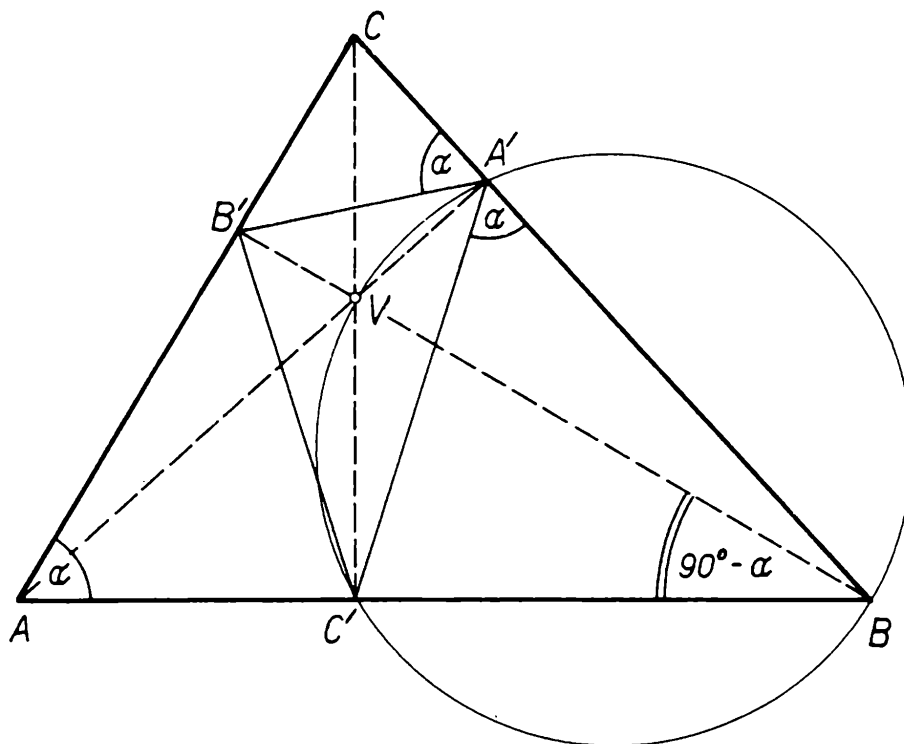
Úkolem článku je seznámit čtenáře Rozhledů s jednou zajímavou větou, k jejímuž důkazu budeme potřebovat znalost dvou vět, které uvádím hned na začátku. Ještě bych chtěl poznamenat, že tento článek je volně zpracován a upraven pro čtenáře Rozhledů podle řešené úlohy č. 600 v *Elemente der Mathematik*, roč. 70.

A. V trojúhelníku ABC je úhel $\sphericalangle BAC$ ostrý (tupý), právě když o délkách stran trojúhelníka platí

$$a^2 < b^2 + c^2 \quad (a^2 > b^2 + c^2)$$

B. Jestliže O , V jsou po řadě střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a ortocentrum trojúhelníku ABC , potom platí

$$\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = \mathbf{OV}$$



Obr. 2

Nyní je třeba si uvědomit, že $(r$ je velikost poloměru kružnice opsané danému trojúhelníku)

$$k^2 = l^2 = m^2 = r^2$$

$$k \cdot l = r^2 \cos 2\gamma, \quad (3)$$

kde $\gamma = \sphericalangle BCA$. Z rovnice (3) vyloučíme úhel γ . Proto počítejme velikost strany $AB = c$. Vyjdeme z rovnosti

$$\begin{aligned} c &= l - k \\ c^2 &= k^2 + l^2 - 2k \cdot l = \\ &= 2r^2 - 2r^2 \cos 2\gamma. \end{aligned}$$

Odtud

$$\cos 2\gamma = \frac{(2r^2 - c^2)}{2r^2}.$$

Po dosazení do (3) dostaneme

$$k \cdot l = r^2 - \frac{1}{2}c^2$$

Cyklickou záměnou máme

$$l \cdot m = r^2 - \frac{1}{2}a^2, \quad m \cdot k = r^2 - \frac{1}{2}b^2$$

Užitím těchto vztahů můžeme upravit rovnici (2). Po kratší úpravě dojdeme k rovnici

$$a^2 + b^2 + 2c^2 = 12r^2. \quad (4)$$

Tento jistě zajímavý výsledek musíme ještě dál upravovat.

Jistěže platí

$$b \leq 2r \Rightarrow b^2 \leq 4r^2 \Rightarrow 3b^2 \leq 12r^2$$

Sem dosadíme z rovnice (4):

$$3b^2 \leq a^2 + b^2 + 2c^2 < 2a^2 + b^2 + 2c^2$$

Máme tak výsledek

$$b^2 < a^2 + c^2.$$

To je však nutná a postačující podmínka pro to, aby úhel $\sphericalangle ABC = \beta < 90^\circ$. Cyklickou permutací dostaneme

$$a^2 < b^2 + c^2, \quad c^2 < a^2 + b^2.$$

Tím dospíváme k tomuto výsledku: Má-li být přímka OV rovnoběžná s přímkou AB , potom trojúhelník ABC musí být nutně ostroúhlý.

b) Abychom dokázali druhou část tvrzení, je potřeba znát velikosti stran ortického trojúhelníka. Nejprve však upravíme relaci (4). Vyjdeme ze vzorce

$$r = abc / 4S,$$

kde S je velikost obsahu trojúhelníka ABC . Potom

$$r^2 = a^2b^2c^2 / [2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)],$$

jak vyplývá z Heronova vzorce pro obsah trojúhelníka. Tuto hodnotu dosadíme do (4). Náležitou úpravou dojdeme k rovnici

$$a^4b^2 + a^2b^4 + 3a^2c^4 + 3b^2c^4 - 4a^2b^2c^2 - a^6 - b^6 - 2c^6 = 0$$

Levá strana rovnice se dá rozložit:

$$(2c^4 - a^4 - b^4 - a^2c^2 + 2a^2b^2 - b^2c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

Uvědomme si, že druhý činitel nemůže být roven nule, jak plyne z předcházejícího, a proto docházíme k jednoduššímu vztahu

$$2c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0. \quad (5)$$

A nyní velikosti stran ortického trojúhelníka. Paty výšek daného trojúhelníka ABC označme A' (na straně BC), B' , C' (obr. 2). Čtyřúhelník $BA'VC'$ je tětiový, a lze mu proto opsat kružnici. A tu je okamžitě vidět (obvodové úhly), že

$$\sphericalangle ABV = \sphericalangle C'BV = \sphericalangle C'A'V = 90^\circ - \alpha,$$

a proto

$$\sphericalangle BA'C' = \alpha.$$

Z trojúhelníka $BA'C'$ tudíž dostaneme

$$A'C' : BC' = \sin \beta : \sin \alpha = b : a,$$

$$A'C' = \frac{b}{a} \cdot a \cos \beta = b \cos \beta.$$

Z kosinové věty uplatněné na daný trojúhelník máme

$$\cos \beta = (a^2 + c^2 - b^2) / 2ac$$

a pak

$$A'C' = b' = b(a^2 - c^2 - b^2) \quad 2ac.$$

Cyklicky dostaneme

$$A'B' = c' = c(b^2 + a^2 - c^2) \quad 2ab$$

$$B'C' = a' = a(c^2 + b^2 - a^2) \quad 2bc$$

Aby délky a' , c' , b' tvořily v tomto pořadí aritmetickou posloupnost, je nutné a stačí, aby

$$a' + b' - 2c' = 0.$$

Dosadíme do této rovnice za a' , b' , c' , vypočtené hodnoty a po kratší úpravě máme

$$-a^4 - b^4 + 2c^4 + 2a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0$$

Porovnáním tohoto vztahu s relací (5) zjistíme, že jsou totožné, čímž je potvrzena správnost vyslovené věty.

Obráceně: Platí-li vztah (5), tvoří velikosti stran ortického trojúhelníka aritmetickou posloupnost v pořadí a' , c' , b' . Platí-li kromě toho vztah (4), můžeme obrácením postupu dostat, že $OV \parallel AB$. Tím je důkaz vysloveného tvrzení proveden.

Cvičení.

1. Jsou dány velikosti tří stran trojúhelníka. Zjistěte, zda příslušný trojúhelník je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý.

2. Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže jsou dány body O , V , O' (Obr. 1)

3. Týká se obr. 1. Dokažte, že platí $CV = OO'$

4. Najděte podmínku pro to, aby vektor OT' (T je těžiště trojúhelníka ABC) byl rovnoběžný se stranou AB . Budete-li dobře počítat, dostanete jako nutou podmínku rovnici (4). To proto, že body O , V , T leží v přímce, zvané *Eulerova* přímka.

5. Ukažte, že $\triangle ABC \sim \triangle A'BC'$ Jsou v obr. 2 ještě jiné podobné trojúhelníky?

Aritmetický a geometrický průměr II

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Výklad o aritmetickém a geometrickém průměru dvou reálných, resp. nezáporných čísel, který je obsahem článku otištěného v 5. čísle letošního ročníku *Rozhledů*, je možno snadno zobecnit. Aritmetickým průměrem $n \geq 2$ reálných čísel $c_1, c_2, \dots, c_n$ nazýváme číslo

$$A = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}; \quad (1)$$

je-li $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, \dots, c_n \geq 0$, potom geometrickým průměrem těchto čísel nazýváme číslo

$$g = \sqrt[n]{c_1 c_2 \cdot \dots \cdot c_n}. \quad (2)$$

O těchto průměrech platí táž věta jako o průměrech dvou čísel; k jejímu důkazu použijeme pomocnou větu, kterou nyní uvedeme.

Pomocná věta. Budiž dáno $n \geq 2$ reálných čísel $c_1, c_2, \dots, c_n$, z nichž aspoň dvě jsou různá; budiž m nejmenší a M největší z těchto n čísel; potom pro aritmetický průměr A čísel $c_1, c_2, \dots, c_n$ platí:

$$m < A < M$$

Důkaz provedeme nepřímou. Předpokládejme, že není $A > m$, tj. že platí $A \leq m$; potom je $A - m \leq 0$. Z toho plyne, že je

$$(c_1 - m) + (c_2 - m) + \dots + (c_n - m) = nA - nm = n(A - m) \leq 0. \quad (3)$$

To však není možné, neboť pro $i = 1, 2, \dots, n$ je $c_i - m \geq 0$ a pro $c_i = M$ je dokonce $M - m > 0$; proto součet dvojčlenů $c_i - m$ uvedených ve (3) je číslo kladné.

Obdobně předpokládejme, že není $A < M$, tj. že je $A \geq M$; potom je $A - M \geq 0$. Z toho plyne, že je

$$(c_1 - M) + (c_2 - M) + \dots + (c_n - M) = nA - nM = n(A - M) \geq 0. \quad (4)$$

To však není možné, neboť pro $i = 1, 2, \dots, n$ je $c_i - M \leq 0$ a pro $c_i = m$ je dokonce $m - M < 0$; proto součet dvojčlenů $c_i - M$ uvedených ve (4) je číslo záporné.

Věta 1. (*o aritmetickém a geometrickém průměru*). Jestliže je $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, \dots, c_n \geq 0$ ($n \geq 2$, celé), potom je

$$\sqrt[n]{c_1 c_2 \cdot \dots \cdot c_n} \leq \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n};$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $c_1 = c_2 = \dots = c_n$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí:

1. Víme, že věta 1 platí pro $n = 2$ (viz větu 1 ve výše citovaném článku v 5. čísle Rozhledů).

2. Předpokládejme, že věta platí pro $n - 1$ nezáporných čísel. Je-li $c_1 = c_2 = \dots = c_n = c$, pak podle (1) a (2) je $g = A = c$; v tomto případě je tedy věta pravdivá. Předpokládejme, že čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ nejsou vesměs stejná; nejmenší z nich budiž m a největší M . Je tedy

$$m < M$$

dokážeme, že potom je $g < A$.

Protože pro sčítání i násobení reálných čísel platí zákon komutativní, můžeme pořadí daných n čísel upravit tak, že je

$$c_1 = m, \quad c_2 = M$$

Je-li $c_1 = m = 0$, je podle (2) také $g = m = 0$; podle pomocné věty je $A > m = g$, tj. $g < A$. Zbývá tedy provést důkaz pro případ, že je

$$c_1 = m > 0; \quad (5)$$

protože $c_1 = m$ je nejmenší z čísel $c_1, c_2, \dots, c_n$, je také $c_2 > 0$, $c_n > 0$. Podle pomocné věty je

$$c_2 - A = M - A > 0, \quad (6)$$

$$A - c_1 = A - m > 0 \quad (7)$$

Potom je

$$c_1 + c_2 - A = \beta_2 > 0, \quad (8)$$

takže podle (8), (6) a (7) je

$$A \beta_2 - c_1 c_2 = A(c_1 + c_2 - A) - c_1 c_2 = (c_2 - A)(A - c_1) > 0;$$

je tedy

$$c_1 c_2 < A \beta_2.$$

Násobíme tuto nerovnost kladným číslem $c_3 c_4 \dots c_n$; tak dostaneme nerovnost

$$c_1 c_2 \dots c_n < A \beta_2 c_3 \dots c_n. \quad (9)$$

Podle (8) je

$$\beta_2 + c_3 + \dots + c_n = c_1 + c_2 - A + c_3 + \dots + c_n = nA - A = (n-1)A,$$

takže je

$$\frac{\beta_2 + c_3 + \dots + c_n}{n-1} = A;$$

to znamená, že A je aritmetickým průměrem $n-1$ čísel $\beta_2, c_3, \dots, c_n$. Protože je $c_3 > 0, \dots, c_n > 0$ a podle (8) je též $\beta_2 > 0$, je podle předpokladu o platnosti věty 1 pro $n-1$ kladných čísel

$$\beta_2 c_3 \dots c_n \leq A^{n-1}.$$

Protože podle (7) a (5) je $A > m > 0$, plyne z poslední nerovnosti tato nerovnost:

$$A \beta_2 c_3 \dots c_n \leq A^n \quad (10)$$

Podle (9) a (10) je tedy

$$c_1 c_2 \dots c_n < A^n,$$

tj.

$$\sqrt[n]{c_1 c_2 \dots c_n} < \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}.$$

Úloha 1. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí nerovnost

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > n(\sqrt[n]{n+1} - 1). \quad (11)$$

Řešení. Na n kladných čísel

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n}{n-1}, \frac{n+1}{n}$$

jejichž součin je zřejmě rovní $n + 1$, aplikujme větu 1. Protože jde o různá čísla, je podle této věty

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n}{n-1} + \frac{n+1}{n} > \sqrt[n]{n+1}$$

$$2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) >$$

$$> \sqrt[n]{n+1}$$

Protože na levé straně poslední nerovnosti je $n - 1$ závorek, lze nerovnost napsat takto:

$$2 + n - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \sqrt[n]{n+1}$$

Z této nerovnosti pak plyne nerovnost (11).

Poznámka. Jsou-li čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ kladná a je-li jejich součet nebo součin konstantní, pak lze větu 1 vyslovit v této podobě:

a) Součin n kladných čísel o daném součtu je největší právě tehdy, jestliže tato čísla jsou si rovna.

b) Součet n kladných čísel o daném součinu je nejmenší právě tehdy, jestliže tato čísla jsou si rovna.

Z toho je patrné, že věty 1 lze v některých případech užít při vyhledávání extrémů (maxim a minim).

Úloha 2. Dokažte tato tvrzení: a) Ze všech trojúhelníků o daném obvodu má největší obsah trojúhelník rovnostranný. b) Ze všech trojúhelníků o daném obsahu má nejmenší obvod trojúhelník rovnostranný.

Řešení. Jsou-li a, b, c velikosti stran, $2s$ obvod a P obsah trojúhelníka, je podle Heronova vzorce

$$\frac{P^2}{s} = (s-a)(s-b)(s-c), \quad (12)$$

kde $s-a, s-b, s-c$ jsou kladná čísla se součtem $3s - 2s = s$. Podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru je

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3 \quad (13)$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $s-a = s-b = s-c$, tj. je-li $a = b = c$. Podle (12) a (13) je tedy

$$P^2 \leq \frac{s^4}{27}, \quad (14)$$

čili

$$s^2 \geq P/\sqrt{27} \quad (15)$$

Při daném obvodu $2s$ je obsah P největší právě tehdy, je-li P^2 největší, tj. podle (14) právě tehdy, je-li $a = b = c$. Při daném obsahu P je obvod $2s$ nejmenší právě tehdy, je-li nejmenší s^2 , tj. podle (15) právě tehdy, je-li $a = b = c$.

Úloha 3. Krabice bez víka podoby kváдру má daný povrch S_5 . Jak musíme volit její rozměry, aby měla maximální objem?

Řešení. Jsou-li a, b rozměry dna krabice a je-li c její další rozměr, je její povrch

$$S_5 = ab + 2ac + 2bc \quad (16)$$

a její objem

$$V = abc. \quad (17)$$

Protože a, b, c jsou čísla kladná, jsou také $c_1 = ab, c_2 = 2ac, c_3 = 2bc$ čísla kladná. Podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru těchto čísel c_1, c_2, c_3 je

$$4a^2b^2c^2 \leq \frac{ab + 2ac + 2bc}{3}; \quad (18)$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $ab = 2ac = 2bc$, tj. je-li $a = b = 2c$.

Podle (18), (17) a (16) je

$$\begin{aligned} 4V^2 &\leq \left(\frac{S_5}{3}\right)^3, \\ V^2 &\leq \frac{S_5^3}{2^2 \cdot 3^3}; \end{aligned} \quad (19)$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $a = b = 2c$, tj. je-li krabice polovinou krychle o hraně s velikostí $2c$, kterou pro $a = b = 2c$ vypočteme ze (16). Je tedy

$$\begin{aligned} S_5 &= (2c)^2 + (2c)^2 + (2c)^2, \\ 2c &= \sqrt[3]{\frac{S_5}{3}} \end{aligned} \quad (20)$$

Při daném povrchu S_5 bude mít podle (19) krabice největší objem

$$V = \frac{S_5}{6} \sqrt[3]{\frac{S_5}{3}}$$

právě tehdy, bude-li polovinou krychle, jejíž hrana má velikost $2c$ uvedenou vzorcem (20).

Úloha 4. Najděte nejmenší hodnotu lineární funkce $x + y + z$ na množině $\left\{ (x, y, z) \mid \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, x > 0, y > 0, z > 0 \right\}$.

Řešení. Podle předpokladu je $x > 0, y > 0, z > 0$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

čili

$$yz + xz + xy = xyz. \quad (21)$$

Podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru kladných čísel $c_1 = xy, c_2 = xz, c_3 = yz$ je

$$x^2 y^2 z^2 \leq \left(\frac{xy + xz + yz}{3} \right)^3$$

tj. podle (21)

$$x^2 y^2 z^2 \leq \frac{x^3 y^3 z^3}{3^3},$$

$$3 \leq \sqrt[3]{xyz} \quad (22)$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $xy = xz = yz$. Protože je $x > 0, y > 0, z > 0$, nastane to právě tehdy, je-li $x = y = z$.

Podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru aplikované na kladná čísla x, y, z je

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \quad (23)$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x = y = z$. Podle (23) a (22) je tedy

$$x + y + z \geq 9,$$

kde rovnost nastane právě pro $x = y = z$. Z toho anebo z dané podmínky pro čísla x, y, z plyne, že v případě rovnosti je $x = y = z = 3$.

Lineární funkce $x + y + z$ nabývá tedy na dané množině své nejmenší hodnoty (rovné 9) pro $x = y = z = 3$.

Cvičení

1. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí nerovnost

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right).$$

Návod: Užijte věty o aritmetickém a geometrickém průměru na n čísel

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}.$$

2. a) Mezi všemi kvádry o daném povrchu má největší objem krychle.
b) Mezi všemi kvádry o daném objemu má nejmenší povrch krychle. — Dokažte.

3. Součet všech 12 hran kvádru je roven číslu s . Který ze všech takových kvádrů má největší a) objem, b) povrch? — *Výsledek:* V obou případech krychle.

4. Rotační válec má daný objem V . Jak musíme volit poloměr jeho podstavy a jeho výšku, abychom dostali válec s minimálním povrchem? — *Výsledek:* Jeho výška musí být rovna průměru podstavy.

5. Dokažte, že funkce $xy + yz + zx$ nabývá na množině $\{(x, y, z) \mid xyz = b, b > 0, x > 0, y > 0, z > 0\}$ svého minima pro $x = y = z = \sqrt[3]{b}$. Jak velké je toto minimum? — *Výsledek:* $3\sqrt[3]{b^2}$

6. Dokažte, že funkce xyz nabývá na množině

$$\left\{ (x, y, z) \mid \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a, a > 0, x > 0, y > 0, z > 0 \right\}$$

svého minima pro $x = y = z = \frac{3}{a}$. Jak velké je toto minimum? — *Výsledek:* $\left(\frac{3}{a}\right)^3$

Zobecněná Pellova rovnice

LADISLAV BICAN, Praha

V minulém čísle jsme si řekli něco o řešení tzv. Pellovy rovnice.

$$x^2 - Ay^2 = 1, \quad (1)$$

kde A je přirozené číslo, které není druhou mocninou žádného přirozeného čísla. Uvedli jsme bez důkazů několik teoretických poznatků o řešení této rovnice, ale hlavní důraz jsme položili na praktickou metodu pro nalezení všech řešení této rovnice.

V tomto článku se budeme zabývat hledáním řešení tzv. zobecněné Pellovy rovnice

$$x^2 - Ay^2 = C, \quad (2)$$

kde A je přirozené číslo, které není druhou mocninou žádného přirozeného čísla a C je libovolné celé číslo. Podobně jako u rovnice (1) i zde se zaměříme na praktické metody pro nalezení všech řešení rovnice (2). Přitom je zřejmé, že se stačí omezit na hledání všech kladných řešení této rovnice, tj. takových řešení $\alpha = x + y\sqrt{A}$, kde $x > 0$, $y > 0$.

Bud' $j = \bar{x} + \bar{y}\sqrt{A}$ nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice (1). Označíme-li $j^{-1} = \bar{x} - \bar{y}\sqrt{A}$, je zřejmé $jj^{-1} = 1$. Bud' dále $\alpha = x + y\sqrt{A}$ libovolné řešení rovnice (2). Čtenář přímým výpočtem snadno ověří, že pak číslo αj^n je pro každé celé číslo n rovněž řešením rovnice (2). Levým řešením k řešení α budeme rozumět řešení αj^{-1} a pravým řešením k řešení α budeme rozumět řešení αj . Je-li $\alpha = x + y\sqrt{A}$ libovolné (ne nutně kladné) řešení rovnice (2), pak absolutní hodnotou řešení α budeme rozumět řešení $|\alpha| = |x| + |y|\sqrt{A}$. Zvláštní roli hrají řešení, jejichž jedna složka je nulová.

Řešení $\alpha = x + y\sqrt{A}$ budeme nazývat nezáporným, jestliže $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Bud' $\alpha = x + y\sqrt{A}$ nezáporné řešení rovnice (2). Posloupností řešení určenou prvkem α budeme rozumět posloupnost $\{\alpha j^n\}_{n=0}^{\infty}$. Je-li α takové kladné řešení rovnice (2), že levé řešení αj^{-1} už není nezáporné, pak dvojici posloupností $\{\alpha j^n, |\alpha j^{-1}| j^n\}_{n=0}^{\infty}$ nazveme sérií řešení rovnice (2). Přitom budeme používat zkráceného označení $\{\alpha, |\alpha j^{-1}|\}_{n=0}^{\infty}$. Je-li α nezáporné řešení rovnice (2), které není kladné (tj. má alespoň jednu ze složek x, y rovnou nule), pak sérií řešení rozumíme prostě posloupnost $\{\alpha j^n\}_{n=0}^{\infty}$, a to vzhledem k tomu, že v tomto případě $|\alpha j^{-1}| = \alpha j$. Podobně jako v případě Pellovy rovnice platí i pro zobecněnou Pellovu rovnici, že pro každá dvě různá nezáporná řešení α, β platí buď $\alpha \prec \beta$, nebo $\beta \prec \alpha$. Význam pojmu série je dán následující větou, která má pro praktické hledání řešení zobecněné Pellovy rovnice (2) zásadní důležitost.

Věta 1.: Bud' $j = \bar{x} + \bar{y}\sqrt{A}$ nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice (1) a bud' $\alpha = x + y\sqrt{A}$ nejmenší nezáporné řešení z libovolné série řešení zobecněné Pellovy rovnice (2). Pak platí

$$y \leq \sqrt{\frac{C(\bar{x} - 1)}{2A}} \text{ pro } C > 0, \quad (3)$$

$$\sqrt{-\frac{C}{A}} \leq y \leq \sqrt{\frac{-C(\bar{x} + 1)}{2A}} \text{ pro } C < 0. \quad (4)$$

Uvědomíme-li si ještě nepříliš hluboký fakt, že každé nezáporné řešení rovnice (2) leží v nějaké sérii, dává nám tato věta metodu pro praktické nalezení všech řešení zobecněné Pellovy rovnice (2):

a) Metodou z minulého čísla najdeme nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice (1).

b) Najdeme odhad pro y daný nerovností (3) nebo (4).

c) Najdeme všechna taková y vyhovující daným nerovnostem, k nimž existují x tak, že $\alpha = x + y\sqrt{A}$ je řešením rovnice (2).

d) Ke každému takto získanému řešení α utvoříme sérii $\{\alpha, |\alpha|^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$, čímž dostaneme všechna nezáporná řešení dané rovnice.

Osvětleme si tuto metodu na třech příkladech:

1. Řešme rovnici $x^2 - 5y^2 = 10$.

Řešení: a) V minulém čísle jsme zjistili, že nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $x^2 - 5y^2 = 1$ je $j = 9 + 4\sqrt{5}$

b) Podle věty 1 musí pro nejmenší nezáporné řešení $\alpha = x + y\sqrt{5}$ každé série řešení platit odhad $y \leq \sqrt{\frac{10 \cdot 8}{10}} < 3$.

c) Pro $y = 1$ dostáváme $x^2 = 15$ a pro $y = 2$ je $x^2 = 30$. Vidíme tedy, že daná rovnice nemá řešení s $y = 1, 2$, takže nemá vůbec žádné řešení.

2. Řešme rovnici $x^2 - 120y^2 = 721$.

Řešení: a) Metodou z předchozího čísla najdeme nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $x^2 - 120y^2 = 1$

$$\text{Jest } a_0 = 10, \sqrt{120} = 10 + 1/\alpha_1, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{120} - 10} = \frac{\sqrt{120} + 10}{20},$$

$$a_1 = 1, \frac{\sqrt{120} + 10}{20} = 1 + 1/\alpha_2, \alpha_2 = \frac{20}{\sqrt{120} - 10} = \sqrt{120} + 10,$$

$$a_2 = 20,$$

takže nekonečný periodický řetězový zlomek příslušný $\sqrt{120}$ je $[10; 1, 20, 1, \dots]$, přičemž perioda $k = 2$. Máme tedy

	10	1
1	10	11
0	1	1

$$\text{takže } j = 11 + \sqrt{120}$$

b) Podle věty 1 je $y \leq \sqrt{\frac{721 \cdot 10}{240}} < 6$ pro nejmenší nezáporné řešení $\alpha = x + y\sqrt{120}$ každé série řešení dané rovnice.

c) Zkusíme postupně $y = 1, 2, 3, 4, 5$ a zjistíme, že dané rovnici vyhovují prvky $\alpha = 29 + \sqrt{120}$ a $\beta = 61 + 5\sqrt{120}$

d) Protože $\alpha j^{-1} = (29 + \sqrt{120})(11 - \sqrt{120}) = 199 - 18\sqrt{120}$ a $\beta j^{-1} = (61 + 5\sqrt{120})(11 - \sqrt{120}) = 71 - 6\sqrt{120}$, má rovnice $x^2 - 120y^2 = 721$ právě dvě série řešení $\{29 + \sqrt{120}, 199 + 18\sqrt{120}\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{61 + 5\sqrt{120}, 71 + 6\sqrt{120}\}_{n=0}^{\infty}$.

3. Řešme rovnici $x^2 - 5y^2 = 187\,891$

Řešení: a) Víme, že nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $x^2 - 5y^2 = 1$ je $j = 9 + 4\sqrt{5}$

b) Podle věty 1 je $y \leq \sqrt{\frac{187\,891 \cdot 8}{10}} < 388$ pro nejmenší nezáporné řešení $\alpha = x + y\sqrt{5}$ každé série řešení dané rovnice.

c) Přímým výpočtem získáme tato řešení dané rovnice:

$436 + 21\sqrt{5}, 444 + 43\sqrt{5}, 504 + 115\sqrt{5}, 536 + 141\sqrt{5}, 544 + 147\sqrt{5}$
 $644 + 213\sqrt{5}, 756 + 277\sqrt{5}, 936 + 371\sqrt{5}$

d) Podobně jako v předchozím příkladě zjistíme, že rovnice $x^2 - 5y^2 = 187\,891$ má těchto 8 sérií řešení:

$\{436 + 21\sqrt{5}, 3504 + 1555\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{444 + 43\sqrt{5}, 3136 + 1389\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty},$
 $\{504 + 115\sqrt{5}, 2236 + 981\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{536 + 141\sqrt{5}, 2004 + 875\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty},$
 $\{544 + 147\sqrt{5}, 1956 + 853\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{644 + 213\sqrt{5}, 1536 + 659\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty},$
 $\{756 + 277\sqrt{5}, 1264 + 531\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{936 + 371\sqrt{5}, 1004 + 405\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}.$

Na závěr se podívejme ještě na některé další zajímavé vlastnosti řešení zobecněné Pellovy rovnice. Pro snazší vyjadřování celé číslo C nazveme A -řešitelným, je-li rovnice $x^2 - Ay^2 = C$ řešitelná. V opačném případě číslo C nazveme A -neřešitelným. Buď $\{\alpha, |\alpha j^{-1}|\}_{n=0}^{\infty}$ nějaká série řešení rovnice (2). Jsou-li posloupnosti $\{\alpha j^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{|\alpha j^{-1}| j^n\}_{n=0}^{\infty}$ navzájem různé, řekneme, že daná série je regulární. Může se ovšem stát, že posloupnosti $\{\alpha j^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{|\alpha j^{-1}| j^n\}_{n=0}^{\infty}$ splývají. V tomto případě nazveme danou sérii singulární.

Věta 2.: Buď $x^2 - Ay^2 = D$ zobecněná Pellova rovnice, kde D je prvočíslo. Pak tato rovnice má nejvýše jednu sérii řešení.

Nechť D je A -řešitelné prvočíslo. Řekneme, že D je regulární, má-li rovnice $x^2 - Ay^2 = D$ regulární sérii řešení. Má-li tato rovnice singulární sérii řešení, řekneme, že D je singulární. Dá se ukázat, že pro každé přirozené číslo A , které není druhou mocninou žádného přirozeného čísla, existuje nejvýše jedno singulární prvočíslo.

Věta 3.: Budte $D_1, D_2, \dots, D_m$ navzájem různá regulární A -řešitelná kladná lichá prvočísla, z nichž žádné nedělí A . Pak všechna kladná řešení rovnice $x^2 - Ay^2 = D_1, D_2, \dots, D_m$ tvoří 2^{m-1} regulárních sérií.

Věta 4.: Buďte $D_1, D_2, \dots, D_m, D_{m+1}$ navzájem různá A -řešitelná kladná lichá prvočísla, z nichž žádné nedělí číslo A . Jestliže D_{m+1} je singulární, pak všechna kladná řešení rovnice

$$x^2 - Ay^2 = D_1 D_2 \cdot \dots \cdot D_m D_{m+1}$$

tvoří 2^{m-1} regulárních sérií.

Je možno ukázat, že je-li α nejmenší kladné řešení rovnice $x^2 - Ay^2 = D$, kde D je A -řešitelné regulární prvočíslo, pak z každé série $\{\beta, \tilde{\beta}\}_{n=0}^{\infty}$ řešení rovnice $x^2 - Ay^2 = C$ obdržíme dvě různé série řešení rovnice $x^2 - Ay^2 = CD$, přičemž $\alpha\beta$ leží v jedné z nich a $\alpha\tilde{\beta}$ leží v druhé. Je-li však D singulární, leží obě řešení $\alpha\beta, \alpha\tilde{\beta}$ v jediné sérii.

Vraťme se nyní k příkladu 3. Číslo 187 891 je součinem čtyř 5-řešitelných regulárních prvočísel 11, 19, 29, 31. Tato jednotlivá prvočísla mají následující série řešení: $\{4 + \sqrt{5}, 16 + 7\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{8 + 3\sqrt{5}, 12 + 5\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{7 + 2\sqrt{5}, 23 + 10\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{6 + \sqrt{5}, 34 + 15\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}$. Právě popsanou metodou obdržíme nejprve dvě série řešení rovnice $x^2 - Ay^2 = 209$, totiž $\{23 + 8\sqrt{5}, 47 + 20\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{17 + 4\sqrt{5}, 73 + 32\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}$. Potom dostaneme toutéž metodou čtyři série $\{129 + 46\sqrt{5}, 241 + 102\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{81 + 10\sqrt{5}, 529 + 234\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{159 + 62\sqrt{5}, 191 + 78\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}, \{79 + 6\sqrt{5}, 591 + 262\sqrt{5}\}_{n=0}^{\infty}$ řešení rovnice $x^2 - Ay^2 = 6061$ a konečně osm sérií rovnice $x^2 - Ay^2 = 187\,891$, které jsou uvedeny v příkladu 3).

Viděli jsme, že pro součin A -řešitelných lichých kladných prvočísel nedělicích A je situace v sériích zcela jasná. Jiná je situace v případech součinu A -neřešitelných prvočísel. V příkladu 2. je $721 = 3 \cdot 107$. Prvočísla 3 a 107 jsou 120-neřešitelná a rovnice $x^2 - 120y^2 = 721$ má dvě série řešení. Ukažme závěrem ještě dva příklady, a to singulárního A -řešitelného prvočísla a rovnice $x^2 - Ay^2 = D_1 D_2 D_3$ s A -neřešitelnými prvočísly mající 4 série řešení.

4. Rovnice $x^2 - 7y^2 = 2$ má řešení $\alpha = 3 + \sqrt{7}$. Nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice $x^2 - 7y^2 = 1$ je $j = 8 + 3\sqrt{7}$. Přitom $\alpha j^{-1} = (3 + \sqrt{7})(8 - 3\sqrt{7}) = 3 - \sqrt{7}$, takže 2 je singulární 7-řešitelné prvočíslo.

5. Jest $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$, kde 7, 13 a 19 jsou 120-neřešitelná prvočísla. Přitom rovnice $x^2 - 120y^2 = 1729$ má čtyři série řešení: $\{43 + \sqrt{120}, 353 + 32\sqrt{120}\}_{n=0}^{\infty}, \{47 + 2\sqrt{120}, 277 + 25\sqrt{120}\}_{n=0}^{\infty}, \{53 + 3\sqrt{120}, 223 + 20\sqrt{120}\}_{n=0}^{\infty}, \{97 + 8\sqrt{120}, 107 + 9\sqrt{120}\}_{n=0}^{\infty}$.

Výpočet elementárních funkcí na kapesních minipočítačkách

JIŘÍ KOLAFA, student gymnasia, Praha

V tomto článku, k jehož napsání mi byl podnětem článek Ing. Vl. Stejskala, CSc. „Kapesní kalkulátor a jeho použití“ v 3. č. Rozhledů 1976, se budeme zabývat výpočtem některých často používaných funkcí na jednoduchých kalkulačkách. Vzhledem k tomu, že většina typů je nejvýše osmimístná s částečně pohyblivou desetinnou čárkou (tečkou), budeme požadovat přesnost výpočtu asi na 6 až 7 platných cifer (se stejnou přesností bývají funkce na osmimístných počítačkách předprogramovány). Větší přesnosti nebývá v praxi zapotřebí a vzhledem k zaokrouhlovacím chybám je obtížné jí dosáhnout, zejména tehdy, když počítáme s čísly v absolutní hodnotě menšími než 1, neboť ta jsou většinou zobrazována jako nejvýše sedmimístná, protože první cifra je 0 před desetinnou tečkou. U jednotlivých metod výpočtu funkcí budeme požadovat především jednoduchost, rychlost, dostatečnou přesnost a postup pokud možno bez zapisování mezivýsledků (u nejjednodušších kalkulaček bez volné paměti nelze poslední požadavek většinou splnit).

DRUHÁ ODMOCNINA

Známý Newtonův iterační vzorec pro výpočet $\sqrt[n]{a}$ má tvar

$$a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a_n} + a_n \right).$$

Nezvolíme-li počáteční aproximaci a_0 řádově různou od $\sqrt[n]{a}$, konverguje posloupnost aproximací a_1, a_2, a_3 rychle k $\sqrt[n]{a}$. Pokud máme počítačku bez volné paměti, do které bychom si uložili jednotlivé hodnoty a_n , je většinou nutné si je zapsat nebo zapamatovat, což vzhledem ke kvadratické konvergenci Newtonovy metody stačí zaokrouhleně asi na polovinu platných cifer požadovaných u výsledku.

Máme-li počítačku, která umožňuje operace s konstantou nebo výměnu registrů takovým způsobem, že lze vydělit číslem, jež zbylo po předchozím výpočtu na displeji, (tj. máme-li X na displeji, pak vypočítáme $\frac{Y}{X}$ např. sledem znaků $\div = Y =$), můžeme k výpočtu odmocniny využít vzorce

$$\sqrt{k^2 + a} = k + \frac{a}{2k + \frac{a}{2k + \frac{a}{2k + \dots}}}$$

Tento tzv. řetězový zlomek zapisujeme z typografických důvodů ve tvaru

$$\sqrt{k^2 + a} = k + \frac{a}{2k} + \frac{a}{2k} + \frac{a}{2k} + \dots$$

Zlomek konverguje tím rychleji, čím je $\frac{a}{2k}$ menší, a proto pro praktický výpočet volíme za k nějaké „okrouhlé“ číslo, jehož dvojmoc je blízká odmocňovanému číslu. Odečtením získáme a , které si uložíme do paměti (např. pro $\sqrt[3]{5}$ je $k = 2$ a $a = 5 - 4 = 1$ nebo pro $\sqrt[3]{0,77}$ je $k = 0,9$ a $a = -0,04$) a počítáme „od konce“ postupně

$$\frac{a}{2k}, 2k + \frac{a}{2k}, \frac{a}{2k + \frac{a}{2k}},$$

atd., až dosáhneme požadované přesnosti. Výpočet pomocí řetězového zlomku bývá o něco delší než Newtonovou metodou, i když není složitější, obvykle však vznikají menší zaokrouhlovací chyby.

Hlavní výhoda řetězového zlomku je však v tom, že na kalkulačce s pamětí lze vypočítat přímo bez zapisování mezivýsledků odmocninu čísla, které máme na displeji z předchozích výpočtů (viz dále výpočet arcsin).

Podobně jako druhou odmocninu lze počítat i vyšší odmocniny pomocí iteračního Newtonova vzorce, jak bylo již popsáno ve výše zmíněném článku ing. Stejskala. Např. pro $\sqrt[3]{a}$ máme

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{a_n^2} + 2a_n \right).$$

LOGARITMUS

I bez znalosti vyšší matematiky lze odvodit jednoduchou metodu pro výpočet dekadického logaritmu. Je-li $a \in (1; 10)$, potom zapišme $\log a = 0,ABCDE$, kde $A, B, \dots$ jsou cifry mantisy. Podle definice logaritmu má platit $a = 10^{0,ABCD\dots}$, rovnici umocníme na desátou a dostaneme $a^{10} = 10^{A,BCD\dots} = 10^A \cdot 10^{0,BCD\dots}$.

Číslo A snadno určíme a tím jsme získali první cifru mantisy, vydělením 10^4 dostaneme nějaké $b = 10^{0,BCD\dots} \in (1; 10)$, s nímž postup opakujeme a získáme další cifru B výsledku atd.

Protože by při přímém umocnění na desátou mohlo dojít k přeplnění, umocníme na druhou a teprve potom na pátou. Máme tedy postup:

1. Není-li číslo, jehož logaritmus počítáme, v intervalu $(1; 10)$, převedeme jej do tohoto tvaru vydělením nebo vynásobením vhodnou mocninou deseti (posunutím desetinné čárky) a poznamenejme si jeho charakteristiku.

2. Umocníme na druhou, je-li výsledek větší než 10, vydělíme jej deseti a zapamatujeme si „5“.

3. Umocníme na pátou (obvykle sledem znaků $xxxx=$ nebo $x=====$, neumožňuje-li počítačka tyto operace s konstantou, počítáme nejlépe jako $a^5 = (a^2)^2 \cdot a$, tedy $ax=x=xa=$). Výsledek vydělíme deseti tolikrát, až dostaneme číslo z intervalu $(1; 10)$.

4. Počet dělení deseti podle bodu 3 přičteme k nule nebo pětce podle bodu 2 a máme první cifru mantisy. Opakováním postupu 2-4 dostáváme další cifry výsledku.

5. Poslední požadovanou cifru zaokrouhlíme (odhadem nebo provedením bodu 2 nahoru či dolů; nebo jen nahoru, abychom zmírnili vliv zaokrouhlovacích chyb).

Vlivem zaokrouhlovacích chyb (největší vliv má první umocnění na druhou) lze na osmimístné kalkulačce vypočítat mantisu logaritmu nejvýše asi na 7 až 8 desetinných míst.

Přirozený logaritmus dostaneme z dekadického znásobením modulem $\ln 10 \doteq 2,302585093$. Chceme-li však použít logaritmus dále k výpočtu obecné mocniny, je výhodné počítat přímo přirozený logaritmus níže uvedeným postupem, neboť tak se vyhneme nejen převádění logaritmů obou základů, ale u počítaček s pamětí i zapisování mezivýsledků. Logaritmované číslo nejdříve dělíme nebo násobíme číslem $e \doteq 2,7182818285$ tak dlouho, dokud nedostaneme číslo z intervalu $(e^{-\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{2}})$ tedy přibližně $(0,6; 1,7)$, čímž získáme rovněž charakteristiku. Z mnoha vzorců pro výpočet přirozeného logaritmu je vzhledem k zaokrouhlovacím chybám i relativní jednoduchosti koeficientů výhodné použít řetězového zlomku

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{2} + \frac{2x}{5} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{7} + \\ + \frac{kx}{2} + \frac{kx}{2k+1} + \dots *) ,$$

Odyodí se z tzv. *Thielovy věty*, viz např. Anthony Ralston: *Základy numerické matematiky* (Academia, Praha 1973), pomocí níž lze získat i (1), (2) a (3), vztah (1) ze ovšem dokázat i elementárně.

v němž s přesností asi 10^{-7} stačí pro $1 + x \in (0,6; 1,7)$ použít 8 členů, po další úpravě máme

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{7} + 2x.$$

Nemáme-li počítačku, jež umožňuje přímý výpočet řetězového zlomku, použijeme některé nekonečné řady, např. vztahu

$$\ln x = 2 \left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \dots \right), \quad \text{kde } y = \frac{x-1}{x+1},$$

jehož 5 členů lze pro $x \in (0,6; 1,7)$ s přesností 10^{-7} zaokrouhlit a upravit na formu vhodnou pro výpočet

$$\ln x = \left(\left(\left(\left(\left(2y^2 + 2 \right) \frac{5y^2}{7} + 2 \right) \frac{3y^2}{5} + 2 \right) \frac{y^2}{3} + 2 \right) y \right).$$

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Pro výpočet funkce e^x použijeme nejlépe Maclaurinovu (Taylorovu) řadu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Budeme-li ji používat pro výpočet $10^y = e^{y \ln 10}$ pro $y \in (0; 0,5)$, tj. $x = y \cdot \ln 10 \in (0; 1,15)$, převedeme ji odhadnutím zbytku řady pro $x = 1$ a úpravou na tvar

$$e^x = \left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\frac{x}{7} + 1 \right) \frac{x}{7} + 1 \right) \frac{x}{6} + 1 \right) \frac{x}{5} + 1 \right) \frac{x}{4} + 1 \right) \frac{x}{3} + 1 \right) \frac{x}{2} + 1 \right) x + 1$$

(pro $x \in (0; 5)$ může být řada o člen kratší). Pro záporná x pak počítáme nejlépe e^x jako $1/e^{-x}$, neboť se tak zmenší zaokrouhlovací chyby, pro x resp. $y \notin (0; 0,5)$ převedeme argument do $(0; 0,5)$ přičtením vhodného celého čísla a výsledek získáme znásobením příslušnou mocninou e resp. 10.

Obecnou mocninu x^y , kde x je kladné a y není obecně celé číslo, počítáme pomocí logaritmické a exponenciální funkce podle vztahu $x^y = 10^{y \log_{10} x}$ nebo $x^y = e^{y \cdot \ln x}$

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Jak bylo již uvedeno v článku ing. Stejskala, lze výpočet funkcí $\sin$ a $\cos$ provést pomocí Taylorových řad, které upravíme na tvar vhodný pro numerický výpočet

$$\sin x = \left(\left(\left(\left(\left(\dots \right) \frac{x^2}{9 \cdot 8} - 1 \right) \frac{x^2}{7 \cdot 6} + 1 \right) \frac{x^2}{5 \cdot 4} - 1 \right) \frac{x^2}{2 \cdot 3} + 1 \right) =$$

$$= \left(\left(\left(\left(\left(\dots \right) \frac{x^2}{72} - 1 \right) \frac{x^2}{42} + 1 \right) \frac{x^2}{20} - 1 \right) \frac{x^2}{6} + 1 \right) x$$

$$\text{a obdobně } \cos x = \left(\left(\left(\left(\left(\dots \right) \frac{x^2}{8 \cdot 7} - 1 \right) \frac{x^2}{6 \cdot 5} + 1 \right) \frac{x^2}{4 \cdot 3} - 1 \right) \frac{x^2}{2} + 1 \right).$$

Výše uvedený počet členů řady dává dostatečně přesné výsledky pro funkce úhlů asi do 50° , pro větší ostré úhly počítáme funkci nejlépe jako kofunkci doplnku úhlu do 90° . Úhel ve stupních, minutách a vteřinách musíme ovšem převést na obloukovou míru (radiány), platí

$$a^\circ b'c'' = [(c/60 + b)/60 + a] \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad.} \quad (\pi \doteq 3,1415926536)$$

Pro výpočet funkcí tg a cotg jsou Taylorovy řady nevhodné, neboť pro větší úhly špatně konvergují a mají složité koeficienty, výhodnější je použít řetězových zlomků (opět pro úhly asi do 50° , jež převedeme na obloukovou míru)

$$\text{tg } x = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{-3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^2}{-7} + \frac{x^2}{9}$$

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{1 + \frac{x^2}{-3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^2}{-7} + \frac{x^2}{9}}{x} \quad (2)$$

Nemáme-li počítačku umožňující přímý výpočet řetězového zlomku, bude vzhledem k požadavku jednoduchosti asi nejlepší počítat

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{a} \quad \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

CYKLOMETRICKÉ FUNKCE

Jsou to funkce inverzní k funkcím goniometrickým, např. $\arctg x = y$ znamená, že $\text{tg } y = x$. Pro jejich výpočet je opět výhodné použít řetězové zlomky. Platí

$$\arctg x = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{4x^2}{5} + \frac{9x^2}{7} + \dots + \frac{k^2 x^2}{2k+1} +$$

což upravíme pro praktické použití pro $x \in (-1; 1)$ odhadnutím zbytku

zlomku a zaokrouhlením na

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{4x^2}{5} + \frac{9x^2}{7} + \frac{16x^2}{9} + \frac{25x^2}{11} + \frac{36x^2}{13} + 2,7x^2 \quad (3)$$

Arkustangens čísel větších než 1 určíme ze vztahu

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad (\text{čili } \operatorname{arctg} x = 90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}) \quad (4)$$

ve stupňové míře), kde $\frac{1}{x} \in (0; 1)$, takže lze použít vzorce (3). Míru obloukovou převedeme na stupňovou vynásobením konstantou $\frac{180}{\pi}$ ($\doteq 57,295779513$)

Nelze-li využít řetězového zlomku, bude výpočet složitější, neboť

$$\text{Maclaurinova řada } \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| \leq 1$$

pro x blízká 1 velmi špatně konverguje. Musíme proto najít nějaký obrat, který nám umožní převést výpočet v okolí $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ na vý-

počet $\operatorname{arctg} x$ pro x blízká 0. Ze vztahu $\operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} y - 1}{\operatorname{tg} y + 1}$ odvodíme vzorec

$$y = \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}, \quad (5)$$

takže stačí počítat $\operatorname{arctg} x$ pro $x \in \left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)$, tj. přibližně $(-0,414; 0,414)$. Pro tato x je zapotřebí v řadě pro arctg 7 členů

$$\operatorname{arctg} x = \left(\left(\left(\left(\left(\left(\frac{11}{13} x^2 - 1 \right) \frac{9}{11} x^2 + 1 \right) \frac{7}{9} x^2 - 1 \right) \frac{5}{7} x^2 + 1 \right) \frac{3}{5} x^2 - 1 \right) \frac{x^2}{3} + 1 \right) x.$$

Protože poslední členy řady stačí znát jen s malou přesností, popř. je lze zcela zanedbat, provedeme podobnou úpravu jako u řady pro e^x a koeficient u x^{11} upravíme tak, aby s dostatečnou přesností aproximoval i zbývající členy řady, po úpravě dostaneme

$$\operatorname{arctg} x = \left(\left(\left(\left(\left(-5x^2 + 7 \right) \frac{x^2}{9} - 1 \right) \frac{5}{7} x^2 + 1 \right) \frac{3}{5} x^2 - 1 \right) \frac{x^2}{3} + 1 \right) x$$

pro $x \in (-0,42; 0,42)$ s chybou $\max. 4 \cdot 10^{-8}$. (6)

Poznamenejme ještě, že ve zmenšování počtu členů řady s příslušnou úpravou koeficientů bychom mohli — samozřejmě do určité míry — pokračovat dále, takže např. dostaneme

$$\operatorname{arctg} x = \left(\left(\left(\left(0,45x^2 - 0,7077 \right) x^2 + 1 \right) 0,6x^2 - 1 \right) \frac{x^2}{3} + 1 \right) x$$

pro $x \in (-0,415; 0,415)$ s chybou asi 10^{-7} . Koeficienty nelze již více zaokrouhlit, aniž by se tím ztrácela přesnost. Pro náš účel nejsou tyto vzorce se složitými koeficienty vhodné, pro počítače je však obvykle výhodnější pamatovat si složitější konstanty, pokud se tím zmenší počet operací potřebných k výpočtu. Většinou se pak používají tzv. Čebyševovy nejlepší aproximace.

Počítáme tedy $\operatorname{arctg} x$ pro $x \in (0; 0,42)$ přímo podle (6), pro $x \in (0,42; 2,4)$ podle (5) a (6) a pro $x \in (2,4; \infty)$ podle (4) a (6).

Výpočet funkcí $\arcsin$ a $\arccos$ je nejsložitější. Maclaurinovu řadu

$$\arcsin x = \left(\left(\left(\left(\left(\cdot \cdot \right) \frac{7^2 x^2}{9 \cdot 8} + 1 \right) \frac{5^2 x^2}{7 \cdot 6} + 1 \right) \frac{3^2 x^2}{5 \cdot 4} + 1 \right) \frac{x^2}{3 \cdot 2} + 1 \right) x, \quad |x| \leq 1$$

lze prakticky použít pouze pro malá x . Vlastnosti těchto funkcí kolem bodu 1 (dobře je to patrné na grafu) si vynucují použití druhé odmocniny při výpočtu, např. pomocí vztahu $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$, protože však známe celkem dobře konvergující vzorce pro arctg , bude asi nejlepší převést výpočet $\arcsin$ a $\arccos$ na výpočet arctg .

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1/x^2 - 1}} \text{ nebo } \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{1/x^2 - 1}$$

$$\text{a } \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arctg} \sqrt{1/x^2 - 1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1/x^2 - 1}}.$$

Použijeme-li pro výpočet odmocniny řetězový zlomek, lze na počítače s pamětí i tyto funkce vypočítat bez jakéhokoliv zapisování mezi-výsledků.

Optoelektronika

RNDr. Ing. JAROSLAV POSPÍŠIL, CSc., UP Olomouc

1. Úvod

Optoelektronika řeší otázky související s přeměnou optických signálů v elektrické a obráceně. Vychází z prvků a zákonitostí fyziky, techniky polovodičů, optiky a z techniky a teorie elektrických obvodů. V současné době se v optoelektronice rozvíjejí dva základní směry, a to *optický* a *elektronicko-optický*. Optický směr se především soustřeďuje na optické velkokapacitní paměti (o obsahu více než 10^{10} bitů), na zařízení pro rozpoznávání obrazů a na řízená funkční optická prostředí. Optický směr optoelektroniky je založen na jemných jevech vznikajících při vzájemném působení elektromagnetického záření a pevné látky. Opírá se o holografii, fotochemii, elektrooptiku a jiné obory předpokládající kombinaci magnetických, fázových a plastických jevů, vznikajících v pevných látkách, na něž působí elektromagnetické záření. S optickým směrem souvisejí jak nové principy záznamu a zpracování informace, tak i nové principy přeměny signálů. Jeho perspektiva je podmíněna rozvojem velkých výpočetních systémů funkční optoelektroniky. Optický směr optoelektroniky pracuje se zdroji koherentního optického záření, to jest s lasery, z nichž polovodičové lasery umožňují velké uplatnění mikrominiaturizace a integrace optoelektronických systémů a zařízení. Podle toho se optický směr také označuje jako směr laserový (poznamenejme ještě, že pod pojmem optické záření rozumíme jak viditelné elektromagnetické záření, tj. světlo, tak i záření ultrafialové a infračervené. V optoelektronice se uplatňuje hlavně světlo, ale též ostatní optická záření).

Základem elektronicko-optického směru optoelektroniky je princip fotoelektrické přeměny, uskutečňovaný v pevné látce jednak vnitřním fotoelektrickým jevem a jednak elektroluminiscencí. Galvanické a magnetické vazby, známé z tradičních elektronických obvodů, jsou nahrazeny optickými (fotonovými) vazbami, což přináší nové kvalitativní rozdíly. Přítomnost optické vazby v optickém členu umožňuje zvětšit hustotu informace v převodovém kanálu, rychlost přenosu, odolnost elektronických obvodů proti rušení, obvodovou přizpůsobivost a stupeň miniaturizace obvodů.

Na základě optoelektronického principu lze například konstruovat bezvakuové analogie elektronických součástek a soustav (zesilovače, generátory, spínací obvody, časové členy, atd.), měniče optických signálů (zesilovače světla a obrazů, ploché obrazovky), zařízení pro zobrazení informací (indikační panely, číslicové zobrazovací jednotky — displeje) a další zařízení. Optoelektronika přináší do těchto zařízení konstrukční a obvodovou jednoduchost, galvanické oddělení obvodů a zvětšuje jejich odolnost proti rušení.

Součástkovou základnu optoelektroniky tvoří zdroje optického (světelného) záření, optická prostředí a přijímače optického (světelného) záření. Ty jsou také zároveň třemi základními články v řetězu optoelektronické přeměny.

Zdroj optického záření a přijímač, které jsou vzájemně vázány optickým prostředím (včetně řízeným), představují základní článek optoelektroniky — *optron*, který je schopen plnit jednoduché funkční přeměny. Součástková optoelektronika zkoumá optrony a obvodová optoelektronika se zabývá analýzou optoelektronických obvodů, systémů a zařízení.

2. Optická (fotonová) vazba

Světelný paprsek (popřípadě paprsek optického záření) plní v optoelektronice tytéž funkce řízení, přeměny a vazby jako elektrický signál v elektronických obvodech. Zvláštnosti optické vazby vyplývají z kvalitativních odlišností optického signálu od elektrického. U optické vazby jsou nositelem signálu elektricky neutrální fotony, zatímco u elektrické (galvanické) vazby tuto funkci plní elektrické náboje (elektrony).

Ve světelném toku (v toku optického záření) se fotony vzájemně neovlivňují, nesměšují a nerozptylují. Při přenosu informace světelným tokem nevznikají elektrická ani magnetická pole, která omezují hustotu elektronového proudu a jsou příčinou různých parazitních vazeb v elektronických obvodech. To umožňuje současně přenášet mnoho nezávislých optických signálů jednoduchým kanálem (spojem), aniž se vzájemně ovlivňují, vytvářet mnohokanálové složité spoje a uskutečňovat optickou montáž jen podle potřebných funkčních propojení bez ohledu na protínání nebo proplétání světelných paprsků. Z toho vyplývá, že optická vazba umožňuje v elektronických obvodech dosáhnout prakticky úplného galvanického oddělení vstupu a výstupu systému, snadné přizpůsobení vysokonapěťových obvodů s nízkonapěťovými, obvodů s malou a velkou impedancí a s nízkým a vysokým pracovním kmitočtem. Tyto vlastnosti optické vazby podstatně rozšiřují obvodové možnosti optoelektroniky.

Optickou vazbu lze uskutečňovat jako vysoce selektivní. Její selektivnost je omezena šířkou spektra záření dodávaného zdrojem. Ta se zpra-

vidla pohybuje v rozmezí 10^{-9} m až 10^{-10} m. Kanál optického spoje lze přetížit signálem, jehož intenzita je 10^6 až 10^9 krát větší než je hodnota intenzity pracovního signálu. Je též možnost bezprostředního vizuálního pozorování stavu obvodů nebo součástek, je-li optická vazba realizována viditelným elektromagnetickým zářením (světlem).

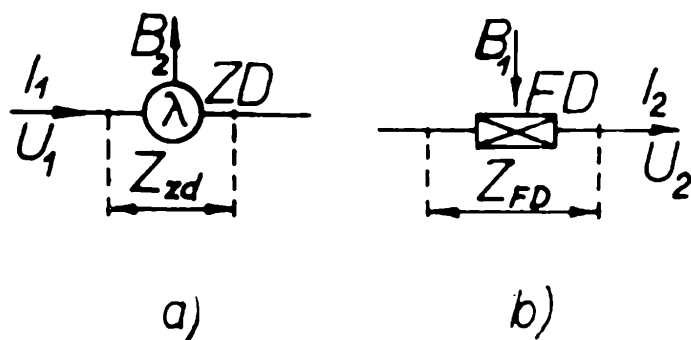
V optoelektronických obvodech — měničích elektrických signálů — se jako vstupní (řídící) i výstupní signály předpokládají elektrické signály. Proto musí být optické vazbě přiřazen měnič elektrického signálu na optický signál a také naopak optického signálu na elektrický.

Vodiče optického záření (světlovody) s maximální světelnou citlivostí musí mít maximum spektrální charakteristiky světelné vodivosti zpravidla v oblasti viditelné části spektra. U většiny materiálů používaných k výrobě světlovodů vzrůstá rychle součinitel pohltivosti záření u krátkovlnné hranice (daleké ultrafialové záření). To způsobuje zeslabení optického signálu podél světlovodu. Použití ultrafialového záření místo viditelného světla může být výhodnější, budou-li optoelektronická zařízení s velkým stupněm integrace a velkou hustotou součástek v jednom pouzdru pracovat při malých prahových signálech a délka světlovodů nebude větší než desetiny nebo jednotky mikrometrů. V takovém případě budou ztráty ve světlovodech prakticky zanedbatelné a za podmínek jinak stejných bude krátkovlnné optické záření podstatně odolnější proti rušivým signálům, spojovací kanál bude mít větší kapacitu a kvantový výtěžek vnitřního fotoelektrického jevu bude větší než u viditelného optického záření (u světla).

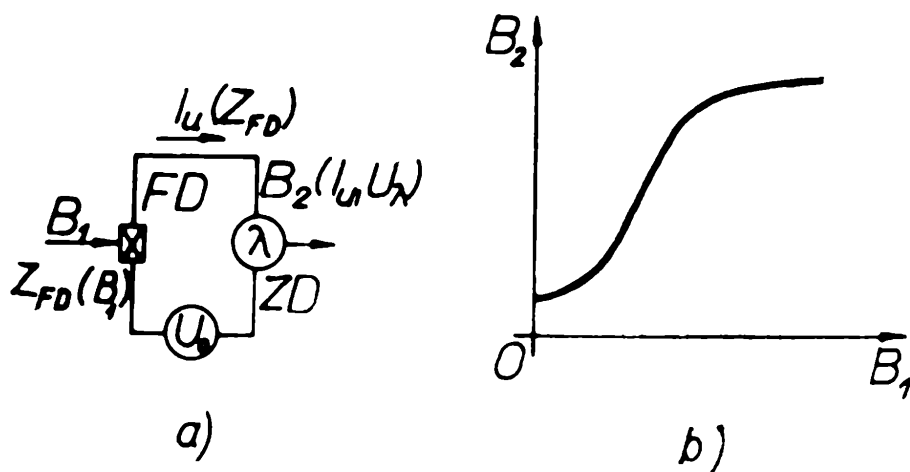
3. *Jednoduchý optron*

Jednoduchý optron je základní stavební součástkou optoelektroniky. K jednoduché přeměně elektrických a optických signálů je třeba v optoelektronice uvažovat na jedné straně zdroj optického záření (zdroj světla), jehož intenzita vyzařování se dá měnit elektrickým signálem (napětím nebo proudem), a na druhé straně přijímač světla (optického záření), jehož impedance se dá změnou ozáření v širokém měřítku též měnit. Při tom spektrální charakteristiky zdrojů a přijímačů musí být v optoelektronických obvodech pokud možno stejné.

Schematické označení řízeného zdroje optického záření (světla) označovaného λ , případně ZD, a ozařováním řízeného optického (fotoelektrického) dvojpólu FD o velikosti impedance Z_{FD} jako základních součástek optoelektronických obvodů jsou na obr. 1. Vstupním řídícím signálem je u zdroje optického záření napětí U_1 (nebo proud I_1) a výstupním signálem jas (intenzita) B_2 . U fotoelektrického dvojpólu je tomu naopak. Vstupním signálem je na něj dopadající světelný tok (tok optického záření) B_1 a výstupním signálem napětí U_2 (nebo proud I_2). V obou



Obr. 1



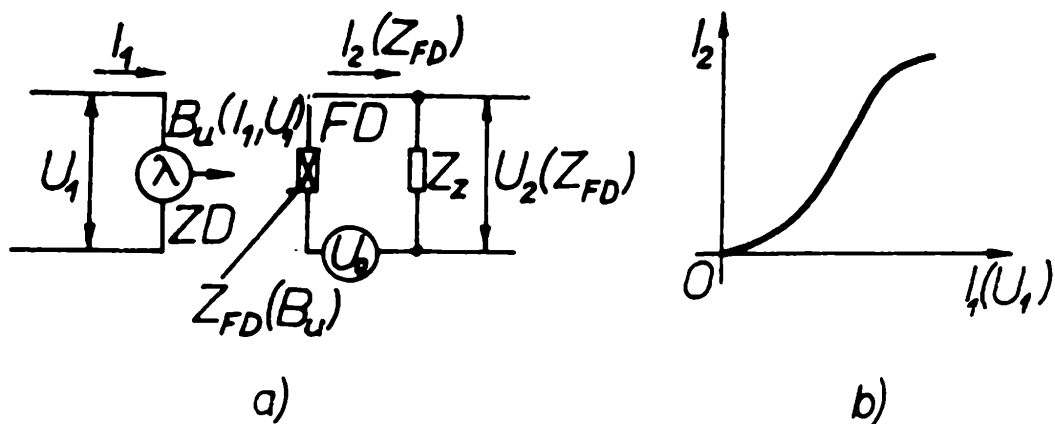
Obr. 2

případech lze měnit výstupní signály změnou vstupních signálů. Poznamenejme, že B , B_1 , B_2 , atd., značí obecné veličiny světelného (optického) signálu (například světelný nebo zářivý tok, intenzitu, jas a podobně).

Je-li zdroj optického záření a fotoelektrický dvojpól v určité vzájemné vazbě, vytvářejí tzv. *optronový pár* (*optronovou dvojici*). Charakteristiky a vlastnosti optronového páru určují charakteristiky a vlastnosti celých optoelektronických obvodů.

Optronový pár je základem jednoduchého optronu, který lze považovat za jednoduchý elektrooptický čtyřpól s jedním optronovým párem. Jednoduchý optron je základní součástí optoelektronických obvodů (obdobně jako například diody a tranzistory u elektronických obvodů).

Na obr. 2a je schéma jednoduchého optronu s vnější optickou a vnitřní elektrickou vazbou. Jeho pracovní režim odpovídá podmínce $U_0 = \text{konst.}$, $B_1 \neq \text{konst.}$ Vstupním řídícím signálem obvodu je světelný tok B_1 (nebo zářivý tok, či výkon) vytvářený světelným dvojpólem, který není součástí uvažovaného optronu. Se změnou B_1 se mění impedance fotoelektrického dvojpólu Z_{FD} a při $U_0 = \text{konst.}$ se mění úbytky napětí na součástkách optronu a také proud I_u v jeho obvodu. Protože jas zdrojů světla zhotovených v pevné fázi (elektroluminiscenčních kondenzátorů, elektroluminiscenčních a laserových diod, atd.) je úměrný procházejícímu proudu (nebo přiloženému napětí), odpovídá jakékoli změně B_1 změna B_2 . Jestliže při stejném spektrálním složení vstupního záření bude $B_2 > B_1$, dochází k *homochromatickému zesílení* světelného toku.



Obr. 3

Má-li B_1 jedno spektrální složení a B_2 jiné, dojde k přeměně záření. V takovém případě při $B_2 > B_1$ dostáváme *heterochromatické zesílení*. Vhodnou volbou spektrálních charakteristik přijímače a zdroje záření je možné pomocí optronu uskutečnit přeměnu viditelného záření o dané vlnové délce na viditelné záření s jinou vlnovou délkou, popřípadě přeměnu neviditelného infračerveného záření na viditelné nebo rentgenového záření na viditelné apod.

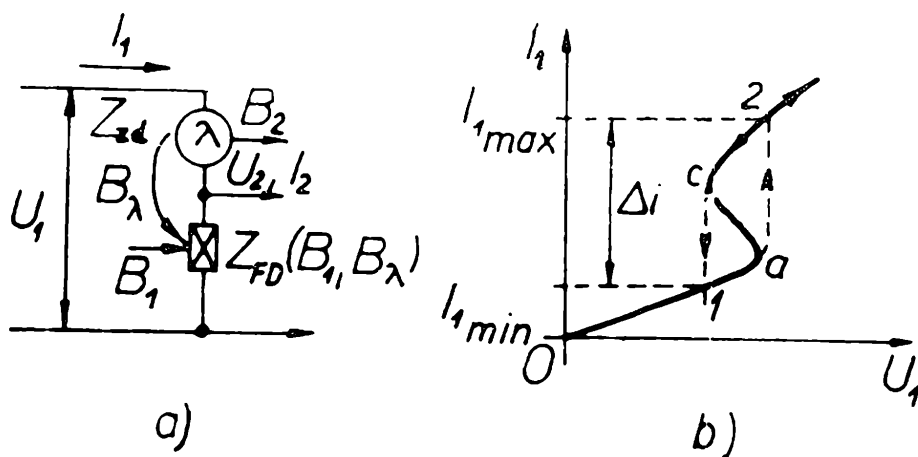
V zapojení na obr. 2a je vstupní a výstupní signál optický. Takovým způsobem (je-li vstup i výstup optronu v podobě optického záření) dostaneme optron, který může pracovat buď jako zesilovač nebo jako měnič optického záření. Typický průběh jeho převodní charakteristiky (pro případ, že přijímač záření je lineární) je uveden na obr. 2b. V tomto pracovním režimu jde o *optron s vnější optickou vazbou*. Přeměny jsou následující: optický signál $\rightarrow$ elektrický signál $\rightarrow$ optický signál.

Uvažovaný optron je základní stavební součástí optoelektronických zesilovačů a elektronických převaděčů obrazu.

Je možné sestavovat matice z velkého počtu optronů. Pomocí polovodičových tenkých vrstev lze vytvořit optronové matice s velmi malými rozměry. Přitom se systém složený z diskretních součástek (matice) mění na systém s rozloženými parametry (integrovaný obvod). Činnost takového obvodu je založena na stejném principu jako činnost obvodu na obr. 2a.

Na obr. 3a je znázorněn *optron s přímou vnitřní optickou vazbou* (Z_z je hodnota zatěžovací impedance). Jeho pracovní režim odpovídá podmínce $U_1 \neq \text{konst.}$, nebo $I_1 \neq \text{konst.}$ a $B_1 = 0$. Mezi součástkami optronového páru se nemění elektrická vazba. Přeměna vstupního elektrického signálu (I_1, U_1) na výstupní elektrický signál (I_2, U_2) se děje podle schématu: elektrický signál $\rightarrow$ optický signál $\rightarrow$ elektrický signál.

Každá změna napětí nebo proudu na vstupu zdroje optického záření (světla) je doprovázena změnou jasu (intenzity) B_u tohoto zdroje. Ta má za následek změnu impedance fotoelektrického dvojpolu a při $U_0 =$



Obr. 4

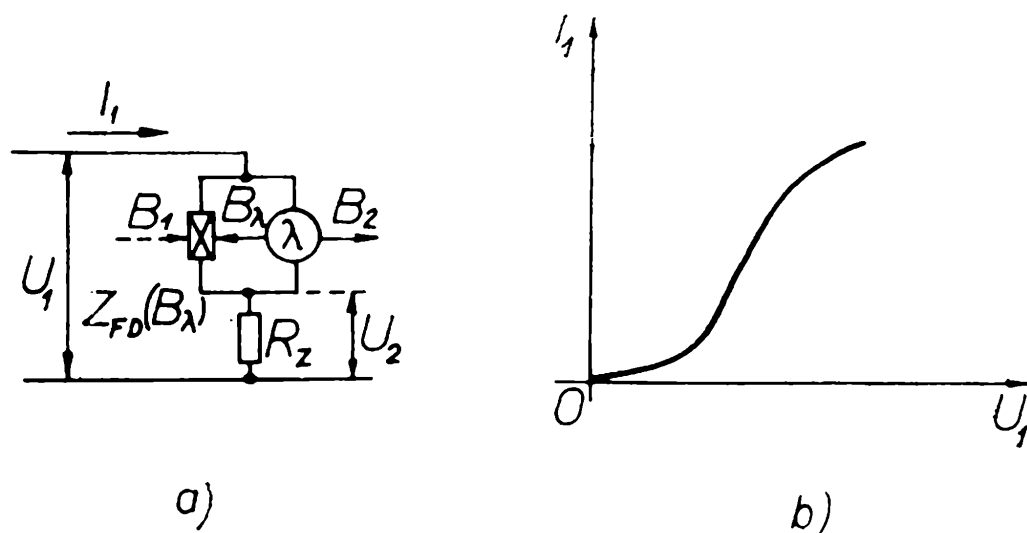
= konst. i odpovídající změnu výstupního proudu nebo napětí. Optron s přímou vnitřní optickou vazbou (bez odporu zátěže náležejícího přímo k vlastnímu optronu) lze tedy považovat za součástku s proměnným odporem, jehož velikost se dá měnit velikostí vstupního řídicího proudu (nebo napětí), obdobně jako je tomu u tranzistoru nebo elektronky (obr. 3b). Takového optronu se v optoelektronice využívá pro přeměnu elektrických signálů (zesílení, generaci, přepínání, tvarování, atd.).

V optronu lze vytvořit nejen přímou optickou vazbu, ale i zpětnou. Ta může být kladná (obr. 4) i záporná (obr. 5). Mimo závislost na znaménku předpokládá optická zpětná vazba v optronu i elektrickou vazbu mezi součástkami optronu. V souhlase s tím se optrony uvedené na obr. 4 a obr. 5 nazývají *optrony s elektrooptickou vazbou*.

Na obr. 4a je *optron s kladnou optickou zpětnou vazbou* (větev B_r). Jas zdroje světla λ se u takového optronu dá měnit buď změnou impedance fotoelektrického dvojpólu Z_{FD} jasem B_1 nebo změnou vstupního napětí U_1 . Optron podle obr. 4a má tedy dva vstupy: optický (B_1) a elektrický (U_1). Konstrukčně je optron řešen tak, že část výstupního jasu B_λ je znovu převedena na fotoelektrický přijímač, zapojený do série se zdrojem světla λ , a způsobuje změnu jeho impedance. Se zmenšením impedance Z_{FD} se zvětší jas zdroje λ . To se projeví úměrným zvětšením B_λ a dalším zmenšením Z_{FD} , atd. Tento proces, který začne při určitých podmínkách, bude mít narůstající průběh do té doby, až změna impedance Z_{FD} nebude dál způsobovat podstatný vzrůst proudu I_1 nebo napětí na zdroji světla λ a tím i B_2 . K tomu stačí, aby byla splněna nerovnost $Z_{FDmin} \ll Z_{zd}$, ze které vyplývá, že $I_1 = I_{1max}$ a $B_2 = B_{2max}$. Tento stav optronu odpovídá stavu „zapnuto“. Ve stavu „vypnuto“ bude:

$$Z_{FD} \gg Z_{zd}, \quad B_2 = B_{2min} \rightarrow 0, \quad I_1 = I_{1min} \rightarrow 0$$

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá, že přechod optronu ze stavu „vypnuto“ do stavu „zapnuto“ nastává působením jeho vnitřních vazeb sko-



kem, což se projeví skokovou změnou proudu v jeho obvodu a výstupního jasu o hodnoty

$$\Delta I = I_{1\max} - I_{1\min},$$

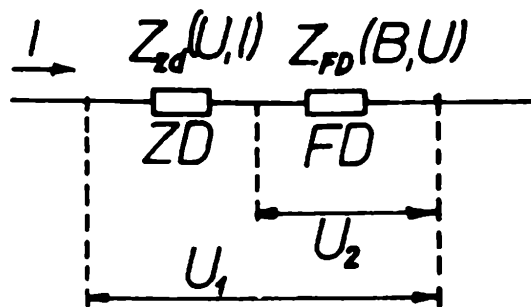
$$\Delta B = B_{2\max} - B_{2\min}$$

Charakteristiky takového optronu (obr. 4b) připomínají charakteristiky elektromagnetického relé nebo spínače a samotný optron se chová jako hradlový spínač působící při $B_1 \geq B_{1\text{prah}}$, nebo $U_1 \geq U_{1\text{prah}}$. Jak je vidět ze schématu na obr. 4a, má optron s kladnou optickou zpětnou vazbou dva výstupy, a to optický (B_2) a elektrický (U_2, I_2). To umožňuje jeho všestrannější použití a rozmanitost obvodových řešení.

Příklad *optronu se zápornou zpětnou vazbou* je na obr. 5a. Fotoelektrický přijímač a zdroj světla jsou tentokrát zapojeny paralelně. Jakékoli zmenšení impedance Z_{FD} způsobí (při jinak stejných podmínkách) zmenšení jasu zdroje světla λ . Jakákoli změna jasu zdroje λ způsobí při záporné zpětné vazbě změnu impedance fotoelektrického dvojpolu, která má snahu zmenšit velikost ΔB_2 . Optron na obr. 5a jako součást elektrického obvodu má vlastnosti nelineárního odporu, jehož charakteristiky se mohou v širokém rozsahu měnit.

Charakteristiky *optronů s elektrooptickou vazbou* nejsou dány jen stupněm přizpůsobení spektrálních charakteristik optronového páru. Součástky optronového páru musí být rovněž přizpůsobeny i svými elektrickými parametry, a to především proudovými a napěťovými. Stejně jako u tranzistorových a elektronkových kaskád vyžadují i optrony při použití elektrického výstupu přizpůsobení impedancí Z_{zd} a Z_{FD} . Na tom závisí činitel přenosu optronu a strmost jeho charakteristiky. Vyjdeme-li z náhradního obvodu na obr. 6, je činitel přenosu elektrického obvodu optronu roven

$$K_u = \frac{Z_{\text{FD}}(B, U)}{Z_{\text{FD}}(B, U) + Z_{\text{zd}}(U, I)},$$



Obr. 6

kde K_u je činitel přenosu napětí, jehož výstupní hodnotu odebíráme z fotoelektrického přijímače.

Impedance Z_{zd} a Z_{FD} jsou v obecném případě nelineárními prvky elektrického obvodu. Pokud závisí na osvětlení také Z_{FD} , je nutné současně přizpůsobit optické, fotoelektrické a elektrické parametry jednotlivých součástí optronu. To klade značné požadavky na charakteristiky a tím i na konstrukční řešení světelného zdroje a fotoelektrického přijímače.

Použití různých optronů a jejich kombinací umožňuje vytvářet složitá zapojení a optoelektronická zařízení s požadovanými funkčními vlastnostmi pro přeměnu jak elektrických, tak i optických signálů.

4. Příklad funkčního zapojení optronu jako logického členu

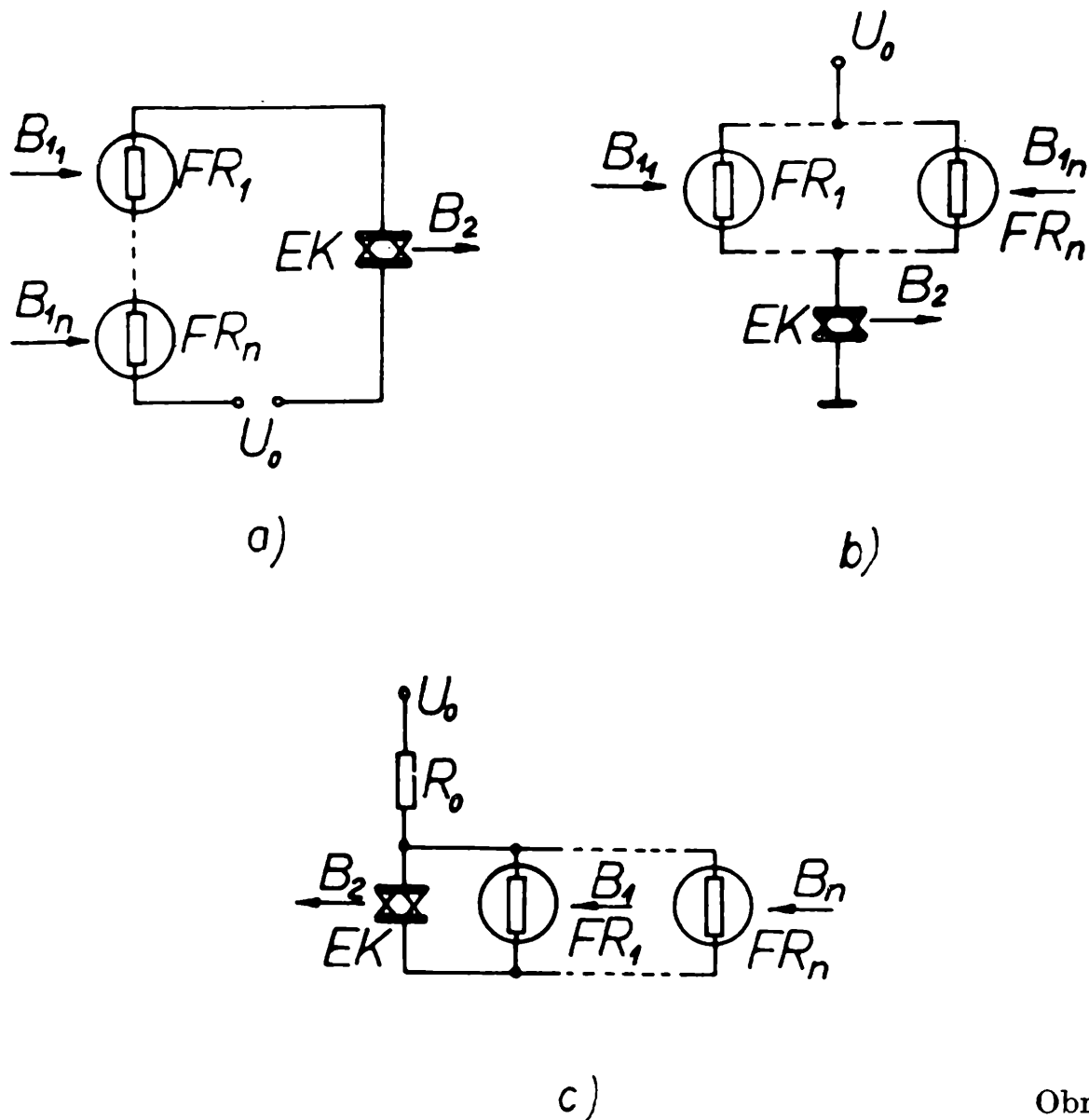
Funkční optoelektronika je principiálně schopná řešit většinu úloh elektronkové a tranzistorové elektroniky. Rozmanitost obvodových řešení je v optoelektronice dána zvolenými optronovými páry a typy optronů a různými jejich kombinacemi.

K nejjednodušším funkčním zapojením optoelektroniky patří logické členy typu I, NEBO, NE, ANI, atd., posuvné registry, měniče elektrických signálů, klopné obvody, relaxační generátory atd. Všimněme si způsobu vytvoření logických operací I, NEBO a NE (detailnější informace lze získat z odborné literatury — viz např. [6] a [8]).

Způsob vytvoření základních logických operací I, NEBO a NE pomocí prostředků optoelektroniky je znázorněn na obr. 7. Jejich základem je optronový pár: elektroluminiscenční kondenzátor EK — fotoelektrický odpor FR. V logickém členu I (obr. 7a) je buzení kondenzátoru EK (a tím i vznik výstupního signálu B_2) možný pouze při splnění podmínky současného buzení vstupů B_{11} , B_{12} , ..., B_{1n} optronu. V logickém členu I jsou všechny fotoelektrické přijímače zapojeny do série v obvodu světelného zdroje EK. Přitom musí být splněny nerovnosti

$$n R_{FRR} \ll Z_{EK}, \quad R_{FR0} \ll Z_{zd},$$

kde R_{FR} je rezistance (odpor) ozářeného fotoelektrického odporu FR, R_{FR0} je rezistance neozářeného fotoelektrického odporu, Z_{EK} je



Obr. 7

hodnota impedance elektroluminiscenčního kondenzátoru EK, Z_{zd} je hodnota impedance zdroje vstupního optického záření a n je počet fotoelektrických přijímačů FR zapojených v sérii.

Jsou-li uvedené nerovnosti splněny, uzavře nepřítomnost budícího signálu na libovolném ze vstupů obvodu zdroj světla a $B_2 = 0$. Uvedené nerovnosti také vymezují maximálně možný počet vstupů daného obvodu na hodnotu

$$n_{\max} \leq \frac{U_0 - U_{pr}}{U_{pr}} \frac{Z_{zd}}{R_{FR}},$$

kde U_{pr} je prahové napětí kondenzátoru EK.

Zapojíme-li na vstupní straně fotoelektrické odpory paralelně (obr. 7b), dostaneme logický člen NEBO. Jeho činnost je obdobná jako činnost členu I pouze s tím rozdílem, že se na výstupu objeví světelný signál při osvětlení libovolného z paralelně zapojených fotoelektrických

odporů. Maximální počet vstupů logického členu NEBO je určen zmenšením celkového odporu R_{FR0}/n paralelní kombinací neosvětlených fotoelektrických odporů na hodnotu, při které napětí na zdroji světla vzroste na hodnotu větší nebo rovnou U_{pr} . Pro tento případ je

$$n_{\max} \leq \frac{U_{pr}}{U_0 - U_{pr}} \frac{R_{FR0}}{Z_{zd}}.$$

Protože $U_{pr}/U_0 \approx 0,1$ až $0,2$, omezuje podmínka $n_{\max} \gg 1$ poměr R_{FR0}/R_{zd} , který musí být větší než 10 až 100.

Zapojení logického členu NE (obr. 7c) v podstatě opakuje obvod optronu se zápornou zpětnou optickou vazbou, ve kterém se fotoelektrický přijímač budí vnějším nezávislým zdrojem světla.

Je-li vstupní signál nulový ($B_1 = 0$), pak výstupní signál je $B_2 = B_{2\max}$. Po přivedení budicího signálu na libovolný z n vstupů se světlo elektroluminiscenčního kondenzátoru EK zkratuje a zhasne, což ve funkci obvodu odpovídá operaci logické negace.

Maximální počet vstupů v členu NE je dán celkovým odporem paralelně zapojených fotoelektrických odporů, při kterém napětí na zdroji světla bude menší než napětí U_{pr} . Při tom je

$$n_{\max} \leq \frac{U_0 - U_{pr}}{U_{pr}} \frac{R_{FR0}}{R_0},$$

což je prakticky stejná hodnota jako pro logický člen I.

Obdobné obvody lze vytvořit i z jiných optronových párů (viz např. [8]).

5. Závěr

Optoelektronika je moderní směr elektroniky. V tomto článku je podána jen úvodní informace o této disciplíně. Podrobnější informace o optoelektronických prvcích, obvodech a principech lze nalézt v odborné literatuře.

Objev Uranových prstenců

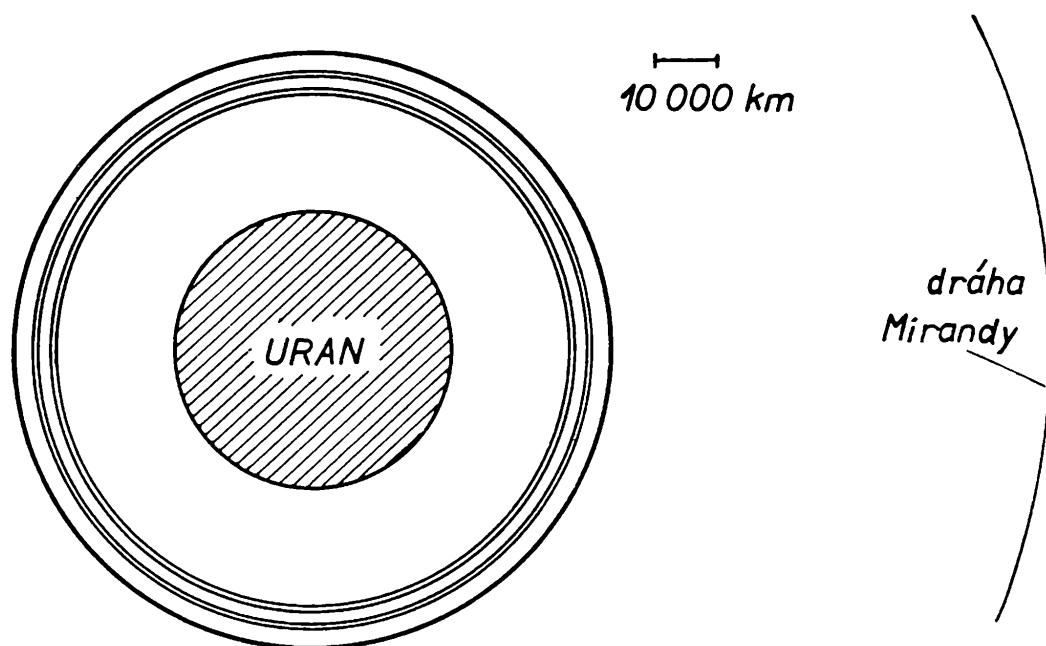
RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Do nedávné doby se všeobecně předpokládalo, že soustava prstenců, obíhajících kolem druhé největší planety sluneční soustavy — Saturna — je ve sluneční soustavě ojedinělým útvarem. Dne 10. března 1977 však byla objevena soustava prstenců také u planety Uranu. Objev byl potvrzen v cirkulářích Mezinárodní astronomické unie a zpráva o objevu byla již začátkem dubna uveřejněna i v denním tisku.

Dříve než uvedeme bližší informace o objevu Uranových prstenců, zopakujme si základní údaje o planetě Uranu. Planetu objevil v roce 1781 anglický astronom William Herschel. Je to první planeta, objevená pomocí dalekohledu. Její zdánlivá hvězdná velikost se mění v mezích od $5,42^m$ do $5,73^m$, je tedy za příznivých pozorovacích podmínek na hranici viditelnosti pouhým okem, avšak její poloha mezi hvězdami se mění jen velmi pomalu, proto je od okolních hvězd při pozorování jen obtížně odlišitelná. Uran je sedmou planetou co do pořadí rostoucí vzdálenosti od Slunce a obíhá kolem Slunce ve střední vzdálenosti 19,2 astronomických jednotek s oběžnou dobou 84 roků. Poloměr planety je 23 600 km, tj. 3,75 poloměrů Země, hmotnost je 14,55 hmotností Země a střední hustota 1560 kg.m^{-3} . Uran rotuje poměrně rychle kolem své osy; jednu otočku vykoná za 10h 49min. Zajímavé je, že rovina rovníku svírá s rovinou dráhy planety úhel 98° , což je největší sklon ze všech planet sluneční soustavy (u Země činí $23,5^\circ$). Hodnota sklonu rovníku k rovině dráhy větší než 90° znamená, že se Uran jako jediná planeta sluneční soustavy otáčí kolem své osy ve zpětném (retrogradním) směru.

Kolem Uranu obíhá 5 měsíců, všechny mají téměř kruhové oběžné dráhy, ležící v rovníkové rovině planety. Nejbližší, Miranda, obíhá ve vzdálenosti 130 000 km od planety, nejvzdálenější Oberon ve vzdálenosti 585 600 km.

K objevu Uranových prstenců je třeba předem říci, že astronomové po nich nepátrali, šlo jim především o zpřesnění rozměrů planety. Na den 10. března 1977 byl předpověděn zákryt slabé hvězdy SAO 158 687 Uranem a průchod nejmenšího a nejbližšího Uranova měsíce, Mirandy, velmi blízko této planety. Oblast viditelnosti zákrytu byla vymezena na pás na zemském povrchu, probíhající z Jižní Afriky přes Indický oceán po západní Austrálii. Na tento úkaz, jehož přesná předpověď

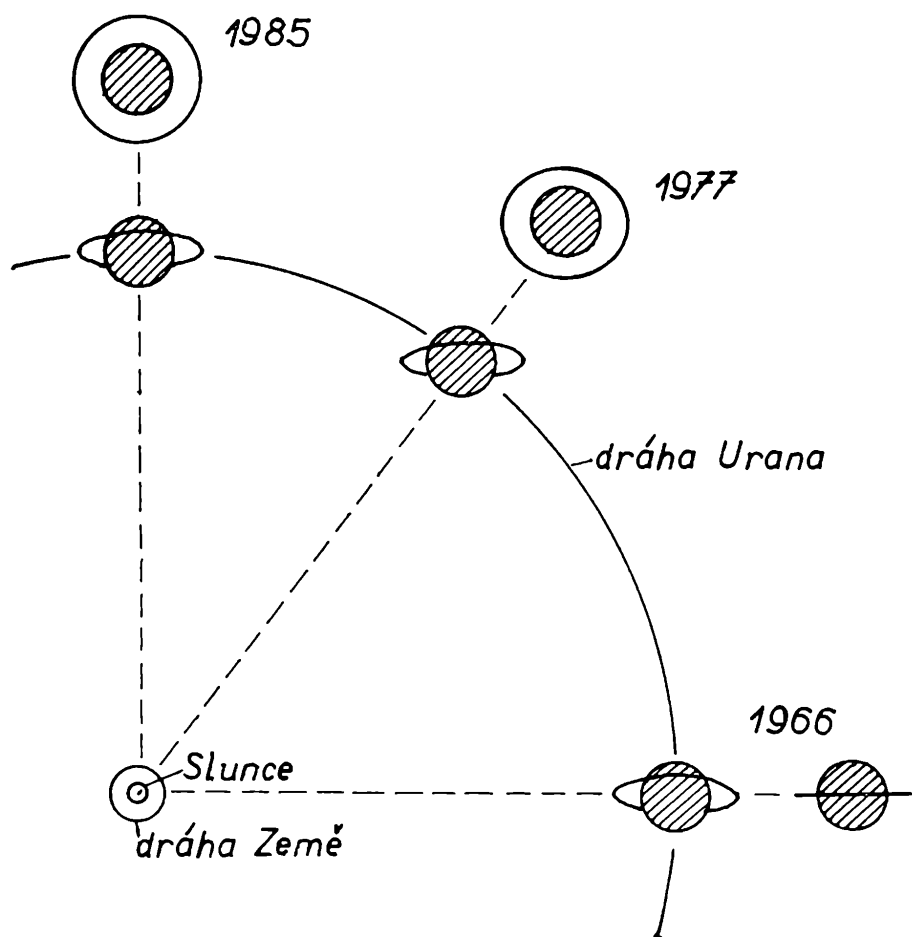


Obr. 1. Soustava prstenců kolem Uranu.

vyžaduje velmi složité výpočty a který má velký význam pro změření rozměrů planety, byla soustředěna pozornost astronomů; do středu oblasti předpovězeného zákrytu přiletěla také Kuiperova létající observatoř — tryskové letadlo, speciálně vybavené astronomickými přístroji. Rozměry Uranu byly skutečně pomocí zákrytu hvězdy zpřesněny; ze zákrytu, trvajícího 25 minut, vyplývá pro poloměr planety nová hodnota ($26\,450 \pm 70$) km.

Pozornost astronomů byla tedy soustředěna na počátek zákrytu hvězdy Uranovou atmosférou. Časový okamžik zákrytu byl předem vypočten, překvapení však přišlo již o 40 minut dříve — sledovaná hvězda na několik sekund „zmizela“. Astronomové připisovali „zmizení“ hvězdy nejprve zákrytu dosud neznámým měsícem Uranu. Výsledky série přesných fotometrických měření, která vykazovala celou řadu méně výrazných změn jasnosti hvězdy před vlastním zákrytem Uranem i po něm, však vedla k domněnce, že příčinou úkazu nebyla ojedinělá tělesa, ale soustava prstenců. Hlavním důvodem pro přijetí této domněnky byla skutečnost, že úkazy probíhaly symetricky před zákrytem planetou a po něm.

Po zpracování naměřených údajů mohly být vypočteny rozměry Uranových prstenců. Bylo objeveno celkem pět prstenců, jejichž existence je doložena nezávislým pozorováním ze čtyř míst. Soustava prstenců je znázorněna na obr. 1. Nejvýraznější je vnější prstenec, který je ve vzdálenosti 52 000 km od středu planety a má šířku asi 100 km. Prstenec je prakticky neprůsvitný a způsobil „zmizení“ sledované hvězdy asi na 9 sekund. Čtyři vnitřní prstence mají šířky jen 10 km až 15 km, nejbližší z nich je ve vzdálenosti 45 000 km od středu planety. Je možné,



Obr. 2. Zdánlivé změny tvaru Uranových prstenců.

že prstenců kolem Uranu je více. Některá pozorování svědčí o existenci dalšího slabého dvojitého prstence ve vzdálenosti 42 500 km od planety, jiná o poloprůsvitném prstenci, jehož šířka je kolem 100 km a je ve vzdálenosti 54 000 km od středu planety; existence těchto prstenců však není plně prokázána. Na obr. 1 je pro porovnání naznačena také dráha nejbližšího Uranova měsíce — Mirandy.

Srovnáme-li soustavu Uranových prstenců se soustavou známých prstenců Saturnových, můžeme pozorovat shodu v tom, že prstence obou planet leží v jejich rovníkové rovině, jsou velmi ploché a leží poměrně blízko planety — největší hustota prstenců je ve vzdálenosti asi 2 poloměrů planety, měřeno od jejího středu. Je zde však také nápadný rozdíl — zatímco Saturnovy prstence vyplňují (až na několik mezer) téměř spojitě celou oblast od povrchu planety, připomínají Uranovy prstence spíše několik tenkých obručí o šířce 10 až 100 km, oddělených od sebe mezerami o šířce 700 km až 3000 km. Hlavní význam objevu Uranových prstenců pro astronomii spočívá v tom, že nyní známe již dva útvary téhož typu ve sluneční soustavě, což umožní studovat, co mají tyto útvary společné a co je na nich tedy zákonité a které vlastnosti jsou individuální.

Jak již bylo uvedeno, je rovníková rovina Uranu, a tedy i rovina, v níž leží jeho prstenec, téměř kolmá na rovinu oběžné dráhy. Z toho vyplývá, že zdánlivý tvar prstenců, pozorovaný ze Země, se postupně mění, podobně jak je to známo u prstenců Saturnových, ale změny jsou však ještě výraznější. Situace je znázorněna na obr. 2. V období, kdy Země prochází rovníkovou rovinou Uranu, se promítají na oblohu jako úsečka a jsou tedy prakticky nepozorovatelné; v této vzájemné poloze byly planety Uran a Země naposledy v roce 1966. Po uplynutí čtvrtiny oběžné doby Uranu se ze Země díváme na pól planety a prstence se jeví maximálně rozevřené, což vzhledem k tomu, že rovníková rovina je kolmá na rovinu dráhy planety, znamená, že se jeví prakticky kruhové. V této poloze vzhledem k Zemi bude Uran v roce 1985. Během 84 roků, za které oběhne Uran kolem Slunce, se tedy prstence dvakrát promítají na oblohu jako úsečky a dvakrát jako kruhové útvary. V době objevu Uranových prstenců v roce 1977 měly prstence zdánlivě eliptický tvar.

Na závěr uvedme, proč nebyly prstence objeveny již dříve pomocí fotografování planety astronomickými dalekohledy. Důvod je velmi prostý: na fotografii se jeví Uran jako kotouček poměrně velkých rozměrů — i při krátké expozici je průměr kotoučku několikrát větší než průměr planety, prstence jsou tedy zakryty, „přesvětleny“ obrazem planety.

Další výzkumy jistě přinesou podrobnější informace o soustavě Uranových prstenců; bude možno rozhodnout, je-li prstenců jen pět nebo více, rovněž bude možné zjistit, zda prostor mezi prstenci je prázdný, nebo je-li, podobně jako u Saturnových prstenců, vyplněn látkou měřitelné hustoty.

olympiády

Ještě k minulému ročníku M0

Školní rok 1976—77 je za námi a tím skončil i další ročník matematické olympiády, jenž měl už pořadové číslo 26. Olympiáda vstoupila tedy do druhého čtvrtstoletí své existence, a nemusíme zde čtenářům proto příliš obšírně líčit, podle jakých zásad soutěž probíhá.

Největší událostí je vždy třetí (celostátní) kolo kategorie A, jež se v uplynulém 26. ročníku konalo v Plzni. Ve dnech 5. až 7. května 1977 se sjeli do Plzně ti studenti, kteří úspěšně prošli druhým kolem kategorie A. Úspěšně tentokrát úskalí druhého kola překonalo 77 žáků z celé

republiky, z toho tři dívky. Překvapením byl J. Nekovář, žák 8. třídy ZDŠ v Praze. Věkově patřil vlastně do kategorie Z, ale probjoval se až do kategorie nejvyšší a umístil se tam na předním místě mezi vítězi.

Ve čtvrtek 5. května se tedy do Plzně sjížděli jednak řešitelé, jednak členové ústředního výboru MO, který každoročně zasedá vždy v rámci třetího kola soutěže. Zahájení celostátního kola v obřadní síni plzeňské radnice ve čtvrtek večer mělo slavností ráz. V pátek 6. května to už vypadalo zcela pracovně. Řešitelé se sešli v aule gymnázia J. Fučíka k olympijským úlohám a Ústřední výbor MO zasedal ve stejné škole. Pracovalo se celé dopoledne a po obědě se oba teamy rozjely na malý výlet. Také sobotní dopoledne 7. května bylo vyplněno prací. Studenti řešili druhou polovinu úloh a organizátoři projednávali všecko, co souvisí s přípravou olympiády. Ústřední výbor MO tímto zasedáním skončil své funkční období a na podzim, ve školním roce 1977—78 už olympiádu řídí nový výbor.

Pobyt v Plzni byl pro všechny velmi příjemný. Plzeňští připravili ty nejlepší podmínky, celý krajský výbor MO pracoval úspěšně a zvláštní dík za přípravu třetího kola patří prof. V. Rádlové. Studenti i členové ÚV MO se v sobotu po obědě rozjeli do svých domovů a budou jistě rádi vzpomínat na tři květnové dny strávené v Plzni.

Na prvním místě se mezi vítězi uplynulého ročníku umístil *J. Kratochvíl* z gymnázia v Pardubicích. Úplný seznam vítězů 26. ročníku matematické olympiády přinášejí *Rozhledy* na jiném místě. A nakonec malou zajímavost. Letos se pro zpracování výsledku třetího kola poprvé použilo počítače.

J. S.

různé

80 let od zrodu elektráren v českých zemích

J I Ř Í H R I V Ň Á K, Libčice nad Vltavou

Na rozvoji elektřiny v Rakousko-uherské říši má nesmírné zásluhy *Ivan Puluj*. Už když se vrátil ze svých studií elektrotechniky na štrasburské univerzitě, nabídla mu budapeštská fa Ganz pro svou vídeňskou filiálku Heider und Braun místo odborného poradce v oboru elektrotechniky. Zde Puluj pracoval v letech 1877—1883, kdy po úspěšné výstavě ve Vídni, pod jejímž dojmem se představenstvo mamutích

steyerských zbrojních závodů rozhodlo vyrábět domácí spotřebiče, byl pověřen vedením výroby elektrospotřebičů. Okamžitě zavedl výrobu skla, vyfoukávání žárovek a trubic, výrobu elektrožárovek a trubic vlastní koncepce, výrobu Křižíkovy obloukové lampy v Křižíkově licenci, výrobu lustrů také vlastní koncepce a jiné spotřebiče. Tato továrna prosperovala tak dobře, že už v létě 1884 uspořádala ve Steyeru světovou výstavu elektrospotřebičů. Ve velké hale bylo zavěšeno několik křišťálových a mosazných lustrů po 100 žárovkách a několik lustrů s žárovkami obloukového světla. Celé město včetně reklam a fontán zářilo různobarevným osvětlením. Toto studené světlo (neonové) zde Puluj po druhé vyzkoušel (poprvé rok předtím ve Vídni). Do pohybu byly dány různé hospodářské stroje a elektrospotřebiče poháněné elektromotory, jejichž zdrojem byla dynamo. Výstava byla světovou událostí, odkud návštěvníci odcházeli úplně fascinováni. V r. 1889 byla v steyerské továrně obnovena původní výroba, což Pulujovi vyhovovalo, neboť mu zbývalo víc času věnovat se německé technice v Praze, kde již od r. 1884 působil jako řádný profesor. Jako vedoucí výroby elektrospotřebičů během těch šesti let měl neocenitelné zásluhy na rozvoji elektrotechniky pro celý svět, kudy Rakousko tyto výrobky exportovalo.

Když se Puluj stal profesorem techniky, byl současně jmenován i hlavním expertem pro rozvoj elektrotechniky pro Čechy a Moravu. V r. 1889 se rakouská vláda rozhodla subvencovat stavbu elektráren. Puluj, pověřený expertizou při rozvoji tohoto nového zdroje energie, objížděl větší města a snažil se přesvědčit konzervativní městské radní, aby těchto subvencí pro postavení elektráren využili. V některých městech toho dosáhl s menšími problémy, ale větší část městských radních kategoricky odmítala zavedení neosvědčených novot. Dokonce i v Praze boj o zavedení elektrárny trval téměř sedm let. Zde byli proti hlavně městští radní Tichý, Tichna s předsedou plynárny Novákem, kteří odůvodňovali své rozhodnutí, že by elektrárna poškozovala zájmy plynárny. Navíc docházelo k rozepřím, zda postavit elektrárnu na stejnosměrný či střídavý proud, pro pohon tramvají nebo všestranného užitku, jedné nebo více elektráren. Puluj již v r. 1889 navrhl postavit elektrárnu na střídavý proud na odlehlém místě jako jsou Holešovice, která by nejlépe splnila všechny požadavky moderní doby, tj. vyráběla by energii jak pro Prahu tak i její okolí a při další nízké investici budování trafostanic by se hodila pro osvětlení i pro pohon různých motorů. Tento Pulujův návrh podpořili prof. *Domalíp*, stav. rada *Karajz* a *ing. Pelikán*. Zásadně byl proti tomuto návrhu *František Křižík*, který rezolutně žádal postavit v Praze čtyři elektrárny na stejnosměrný proud: na Žofíně, v Karmelitské ul., v Sokolské a na Florenci. Tento návrh také zastávali *ing. Čechač*, *dr. Doubrava* a další představitelé továren. Stály proti sobě tři strany a každá z nich se snažila získat na svou stranu veřejné mínění. Nejaktivnější ze všech byl Fr. Křižík, který několikrát

vystoupil na schůzích SIA i na jiných mítincích a kromě toho vydal vlastním nákladem brožurku, kde vyzýval městskou radu, aby postavila takovou elektrárnu, která bude vyrábět proud pro osvětlení a pohon tramvají. Napsal: „Nemůžeme však souhlasit s postavením pouze jedné elektrárny na střídavý proud, kde se bude vyrábět tak vysoký proud, že se nebude hodit ani pro osvětlení města, ani pro pohon tramvají ani jiných strojů, a docházelo by ke komplikacím a vydáním na vybudování spoustu transformátorů. Kdežto stejnosměrný proud hodí se pro všechno bez dalších komplikací.“ On zastával názor postavit čtyři elektrárny pro případ poruchy a pro zajištění práce pro dělníky na delší dobu.

Dne 15. ledna 1887 vystoupil prof. Puluj na veřejné schůzi, kterou svolala městská rada a znovu doporučil postavení jediné elektrárny, a to v Holešovicích, odkud by bylo město co nejméně znečišťováno a neničilo by se životní prostředí obyvatel. Uvedl výhody jediné elektrárny na střídavý proud i s ohledem na drahotu pozemků. „Ovšem, když vám jde pouze o pohon tramvají, tak si postavte elektrárnu na stejnosměrný proud“. Když se na Pulujovu stranu ještě přiklonili další vlivní lidé, jakými byli *ing. Kolben* a *ing. Daněk*, Pulujův projekt na jednu elektrárnu na střídavý proud zvítězil. Městská rada nabídla stavbu deseti firmám, mezi nimi i Fr. Křižíkovi a firmě Bartelmus v Brně. Prelimitární rozpočet na tuto první elektrárnu na střídavý proud v Evropě vynášel 2,600 000 zlatých. A tato elektrárna nám slouží od roku 1898 dodnes.

Kromě Prahy Puluj ještě postavil elektrárny v Mariánských Lázních, Cvikově, Havlíčkově Brodě, v Rakousku v Pozani, Hohenfurtu, Bolzanu aj.

Puluj byl velice čestný a skromný muž. František Křižík o něm napsal, že mu nikdy nezáleželo na slávě; hleděl si jen své práce (F. Křižík, Paměti, Brno 1952). V r. 1916 mu byl udělen rytířský kříž císaře Fr. Josefa II. V domě, kde bydlel v Preslově ul. 15 na Smíchově, je na jeho počest zabudována pamětní deska a na hřbitově na Malvazinkách, kde je pochován, je uvedeno jeho jméno v seznamu významných osobností. Pamětní desku má též ve Vídni, kde pracoval s P. Kulišem na překladech. Jeho jménem je označena také desetiletka (gymnázium) v jeho rodném městě Hrymajlově (Záp. Ukrajina).

250. výročí narození Jana Tesánka

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

Dne 31. března roku 1727 ve vesnici Kensingtonu u Londýna skonal Isaac Newton. V následujícím roce se 9. prosince narodil v Čechách v Brandýse nad Labem *Jan Tesánek*, kterého v osmdesátých letech 18. století znala „učená“ Evropa jako „českého Newtona“.

Pro většinu čtenářů je jméno Jana Tesánka asi neznámé. Byl profesorem vyšší matematiky na pražské universitě a jedním z prvních členů pražské Učené společnosti vzniklé kolem roku 1770, jež později přijala název Královská česká společnost nauk a byla jednou z předchůdkyň dnešní Československé akademie věd. Čestným členem ho jmenovala též Učená společnost v Lipsku. Od svých 17 let byl Tesánek členem jezuitského řádu až do jeho zrušení v roce 1773.

Jan Tesánek studoval na pražské universitě, která mu udělila dva doktoráty — doktorát filozofie a doktorát teologie. Byl žákem *Josefa Steplinga* (1716—1778), jenž se zasloužil o renesanci matematiky a přírodních věd v českých zemích. Profesor Stepling byl jedním z prvních matematiků, věnujících se u nás diferenciálnímu a integrálnímu počtu, dále např. byla jeho zásluhou v Praze v Klementinu přebudována astronomická věž a vybavena tak, že se stala skutečnou astronomickou a meteorologickou observatoří. Pod vlivem Steplinga Tesánek studuje Newtonovy spisy, dokonce i opouští aristotelskou filozofii, jež byla jediné přípustná pro členy jezuitského řádu, a přejímá filozofické názory Newtona, který nebyl katolického vyznání. Tesánkovým nejvýznamnějším činem je komentované latinské vydání prvních dvou dílů Newtonových „Principií“ v Praze v letech 1780 a 1785. Komentovaný třetí díl zůstal bohužel nedokončen v rukopise. Díky těmto knihám byla u nás Newtonova fyzika všeobecně přijata.

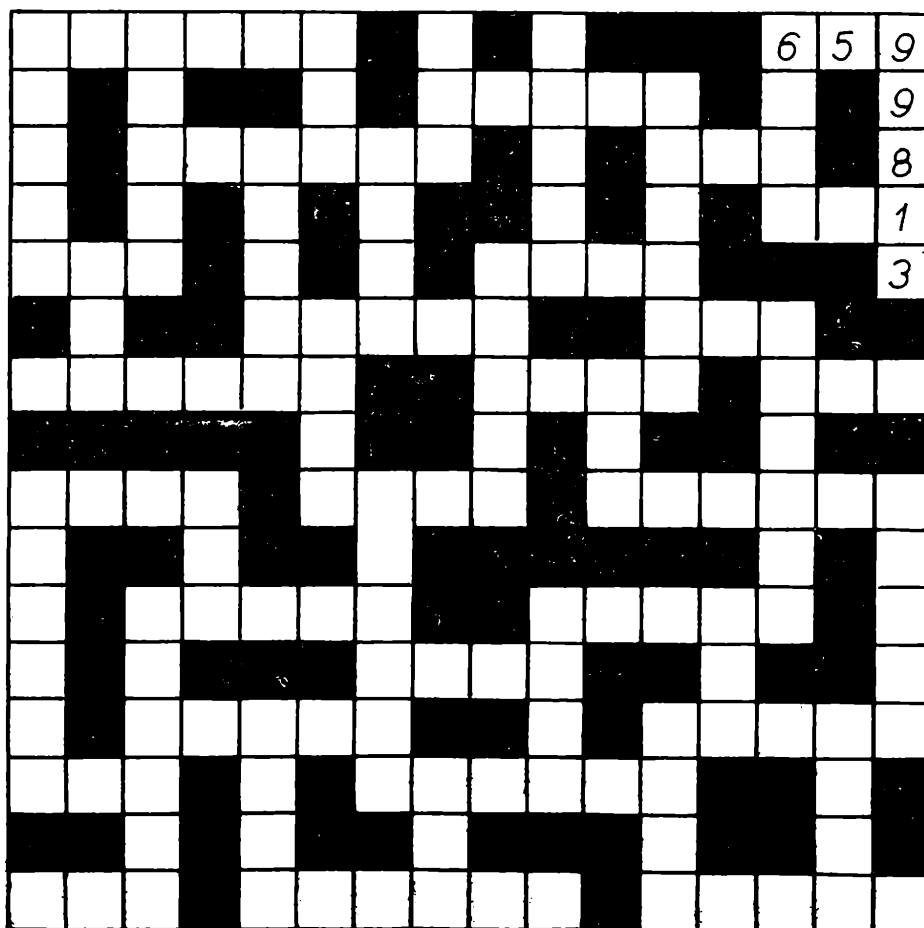
Jan Tesánek zemřel 22. června 1788 v Praze. Pražská Učená společnost uctila jeho památku náhrobkem s nápisem „Magni Newtoni commentator“ (česky: Vykladač velkého Newtona).

Dosud se nenašel žádný spisovatel, který by Tesánka přiblížil beletristickým dílem širší veřejnosti tak, aby byl znám jako jeho mladší kolega *Stanislav Vydra* (1741—1804). Jistě tohoto profesora elementární matematiky na pražské universitě znáte z Jiráskova „F. L. Věka“. S Tesánkovým jménem se lze setkat v jedné malé epizodě ve XXX. kapitole knihy „U zlaté bohyně“, kterou napsal O. Štorch-Marien (nakl. Vyšehrad, 2. vyd., Praha 1972), a dále v románě J. V. Práška „Na hrádecké rychtě“ (nakl. J. Svátek, Praha 1926), kde je strýcem jedné z hlavních postav. Tento román je situován do prostředí vlastenců v jeho rodném městě na počátku národního obrození.

matematické zábavy

Číselná křížovka

Do volných políček vepište dole uvedená čísla. Čísla se píší odleva doprava nebo shora dolů. V nápovědi máte uvedeno jedno trojciferné číslo (659) a na ně navazující číslo pěticiferné (99813). Odtud musíte vyjít. Budete pokračovat asi takto: Ve 4. řádce na konci bude trojciferné číslo končit cifrou 1.



V našem seznamu jsou tato čísla, končící cifrou 1:

141, 591, 771.

Ovšem v 3. sloupci nahoře odprava musí čtyřciferné číslo začínat cifrou 6; to je číslo 6127. Tímto způsobem pokračujeme ve vepisování dalších čísel. — Příjemnou zábavu.

1 0 9	0 9 9 8	1 3 1 3 1	1 0 0 2 4 3
1 2 6	1 5 4 0	1 4 2 6 6	1 2 1 2 1 1
1 4 1	2 6 3 2	2 3 0 2 1	2 2 3 1 4 4
2 0 0	3 3 6 6	2 3 9 5 2	3 4 0 7 0 5
2 0 3	4 3 3 4	2 7 8 5 9	4 7 8 9 0 4
3 3 3	5 3 3 3	3 3 4 5 4	5 1 1 1 3 6
4 0 3			
4 4 4	5 4 8 5	4 2 2 0 8	6 5 2 9 7 3
4 8 4	6 1 2 7	4 8 8 8 2	7 0 0 7 0 2
5 9 1	7 0 0 0	5 5 4 5 5	8 0 9 9 7 7
6 1 6	7 7 5 7	5 6 0 7 0	8 7 4 7 6 0
	7 8 1 0	6 2 3 9 7	9 7 5 3 1 3
	8 0 2 1	7 5 1 4 6	
7 0 2		8 7 7 3 3	
7 7 1		9 1 8 8 0	

S. Horák ml.

Oprava ke str. 157 článku Výpočet velikosti pravoúhlého průmětu úhlu (Rozhledy č. 4)

Na str. 157 ke konci výše citovaného článku je správný postup důkazu tento:

$$\frac{(k^2 + 1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{k \sin \alpha} \geq \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

Protože je $k > 0$, $\sin \alpha > 0$, plyne z (1) nerovnost

$$k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \geq k \cos \alpha > k^2 \cos \alpha, \quad (2)$$

neboť podle předpokladu je

$$0 < k < 1, \quad (3)$$

takže je $k^2 < k$. Avšak nerovnost (2) lze napsat ve tvaru

$$k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} > k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$(k^2 - 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} > 0$$

Protože je $\sin^2 \frac{\alpha}{2} > 0$, je též $k^2 - 1 > 0$ čili $k^2 > 1$, tj. $k > 1$ (neboť je $k > 0$). Avšak to odporuje předpokladu (3).

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

těleso	solid (geom.), field (alg.)
tenzor	tensor
teodolit	theodolite, mining transit, engineer's transit
teorie	theory
teorie grup	group theory
teorie míry	measure theory
tětiva	chord
těžiště	median point, centroid, centre of gravity
těžnice	median
tisíc	thousand
tisícina	thousandth
tloušťka	thickness
topologický	topological
topologie	topology
totožné	coincident
transcendentní	transcendental
transitivní	transitive
translace	translation
transponovat	transpose
trigonometrie	trigonometry
trichotomie	trichotomy
trojboký	triangular
trojciferný	three-digit
trojčlen	trinomial
trojhran	trihedral
trojice	triple
trojková číselná soustava	ternary number system
trojnásobný	triple
trojosý	triaxial
trojrozměrný	three-dimensional
trojúhelník	triangle
obecný trojúhelník	scalene triangle

ostroúhlý trojúhelník
 pravoúhlý trojúhelník
 rovnoramenný trojúhelník
 rovnostranný trojúhelník
 shodné trojúhelníky
 tupoúhlý trojúhelník
 trojúhelníkový
 trojúhelníková nerovnost
 trs přímek
 trs rovin
 třetí
 třetí odmocnina
 třetí mocnina
 třetího stupně
 mnohočlen třetího stupně
 rovnice třetího stupně
 třetina
 tři
 třicet
 třída
 třináct
 tucet
 tuna
 tupoúhlý trojúhelník
 tupý
 tvar
 tvořící přímka
 tvrzení
 týkat se
 typ

acute triangle
 right(-angled) triangle
 isosceles triangle
 equilateral triangle
 congruent triangles
 obtuse triangle
 triangular
 triangle inequality
 sheaf of lines
 sheaf of planes, bundle of planes
 third
 cubic root
 cubed, cubic
 cubic
 cubic polynomial
 cubic equation
 third
 three
 thirty
 class
 thirteen
 dozen
 ton
 obtuse(-angled) triangle
 obtuse
 form
 generator, generating line
 statement, conclusion, assertion
 concern
 type

U

úběžnice
 úběžník
 údaje
 úhel
 doplňkové úhly
 hloubkový úhel
 jednotkový úhel
 konvexní úhel
 ostrý úhel
 pravý úhel
 přímý úhel
 sevřený úhel
 středový úhel
 střídavé úhly
 tupý úhel

vanishing line
 vanishing point
 data
 angle
 complementary angles
 angle of depression
 unit angle
 convex angle
 acute angle
 right angle
 straight angle
 included angle
 angle at centre
 alternate angles
 obtuse angle

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

7

ROČNÍK 56, 1977-1978, BŘEZEN



ROČNÍK 56
BŘEZEN 1978

7

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, Ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, dr. Milan Marček, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., KU Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VUOŠ Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., CSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1978.

OBSAH

Dr. K. Drábek, CSc.: Základy kinematické geometrie v rovině	289
Dr. Š. Iľaš: Stromy a lesy v matematice	292
Prof. E. Kraemer: Některé metrické vlastnosti paraboly	301
S. Horák: Z teorie kuželeseček	311
Dr. R. Tulak: Neutronová bomba a její účinky jako zbraně hromadného ničení	314
Dr. B. Vybíral: O setrvačných silách	319
Dr. M. Široká, dr. J. Široký: Budou planety na jedné přímce?	326
Dr. K. Mišoň, CSc.: Studentská fyzika	331
O. Setzer: Magický šestiúhelník	334
Různé	335
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Základy kinematické geometrie v rovině

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc, ČVUT Praha

Kinematická geometrie v rovině umožňuje nejen snadné sestavení mnoha křivek, ale i určení jejich význačných vlastností. Dále pak zařazuje tyto křivky do skupin podle způsobu vytvoření, umožňuje nalézt středy křivosti v bodech křivky dané určitým výtvarným zákonem apod. Má též velké praktické využití, zejména při konstrukci mechanismů ve strojním inženýrství.¹⁾

Ke studiu této části geometrie je možno přistoupit různým způsobem. Pokud stačí pro použití poznatky tzv. syntetické geometrie, je její upotřebení nejvíce vhodné pro toto studium a děje se tak ve většině našich učebnic geometrie. Víme však, že se při výkladu často odvoláváme na názor, příp. na důkaz, který vyžaduje metod diferenciální geometrie. K tomu jsou však nutné úvahy v souřadnicích, jejichž základ je v analytické geometrii. Jakých souřadnic uijeme, závisí na volbě přístupu k řešení problému a předložených úloh.

V syntetické geometrii při kinematické geometrii zanedbáváme funkci času, čemuž ovšem ve skutečnosti v mechanismech není. Uvažování rychlosti pohybu (tj. vlivu času) je v kinematické geometrii mechanismů velice důležité.

V tomto článku použijeme ke studiu základů rovinné kinematické geometrie vyjádření bodů roviny pomocí komplexních čísel.²⁾

Pohyb, pomocí něhož vzniká daná křivka, si představme jako pohyb roviny (Σ), tzv. *pohyblivé roviny*, v rovině (S) zvané *pevnou rovinou* (obr. 1). Obě roviny jsou soumísné, tj. splývají v jednu rovinu, ve které pohyb probíhá.

V rovině (S) zvolme pravoúhlou soustavu souřadnic $\{O; x, y\}$, stejně

¹⁾ K vytvoření křivek viz např. *Menšík M.*: Základy kinematické geometrie v rovině, *Rozhledy* (35), 1957 nebo *Kepr B.*: O některých křivkách, *Rozhledy* (43), 1964–65 a (44), 1965/66; k praktickému využití např. *Kadeřávek F.*, *Havlíček K.*: Technická geometrie v lékařství a strojní prothetice, Praha 1952 (zvláště str. 62–78). Jinak o kinematické geometrii pojednává každá učebnice pro vysoké školy se strojním zaměřením.

²⁾ Viz např. *Drábek K.*: Použití komplexních čísel v geometrii, *Rozhledy* (44), 1965–66. Výsledků z této práce je použito v tomto článku.

také rovnice komplexně sdružená, tj. rovnice

$$\bar{z} = \bar{m} + \bar{\zeta} (\cos \vartheta(t) - i \sin \vartheta(t)) \quad (1')$$

V kinematické geometrii rovnici (1) interpretujeme dvojím způsobem:

a) Uvažujeme-li pevně zvolené $t = t_0 \in I$, tzv. *fázi pohybu*, představuje rovnice (1) vyjádření zvoleného bodu M pomocí obou systémů souřadnic. Mluvíme o tzv. *koincidenci bodu* (ζ) $\in (\Sigma)$ s bodem (z) roviny (S). Tuto interpretaci nazýváme také *lokální* nebo *fázovou*.

b) Na intervalu I , při tzv. *globální* interpretaci, představuje rovnice (1) parametrickou rovnici (společně s rovnicí (1')) s parametrem t křivky, vytvořené pevně zvoleným bodem (ζ) pohyblivé roviny (Σ) v pevné rovině (S). Tuto křivku nazýváme také *drahou*, *trajektorií* bodu (ζ), tento bod je pak jejím *vytvorujícím bodem*.

Ukážeme nejjednodušší příklady pohybu:

1. Je-li $m = m_0 = \text{konst.}$, pak rovnice (1) vyjadřuje *otáčení* kolem bodu (Ω). Každý bod (ζ) vytváří tedy kružnici (obr. 2), jejíž rovnici dostaneme z rovnice pohybu (1) a (1') vyloučením parametru t . Znásobením výrazů

$$z - m_0 = \zeta (\cos \vartheta(t) + i \sin \vartheta(t)); \quad \bar{z} - \bar{m}_0 = \bar{\zeta} ((\cos \vartheta(t) - i \sin \vartheta(t)))$$

dostaneme

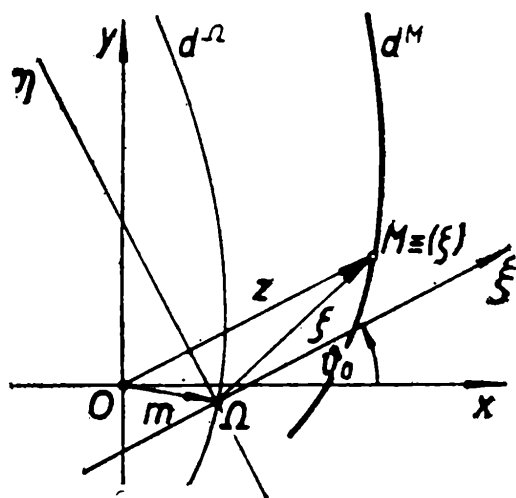
$$(z - m_0)(\bar{z} - \bar{m}_0) = \zeta \bar{\zeta} = R^2.$$

2. Je-li $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{konst.}$, tedy za uvažovaného pohybu má osa ξ stále též směr, vyjadřuje rovnice (1) *posunutí (translaci) podél křivky* (obr. 3) dané rovnicí

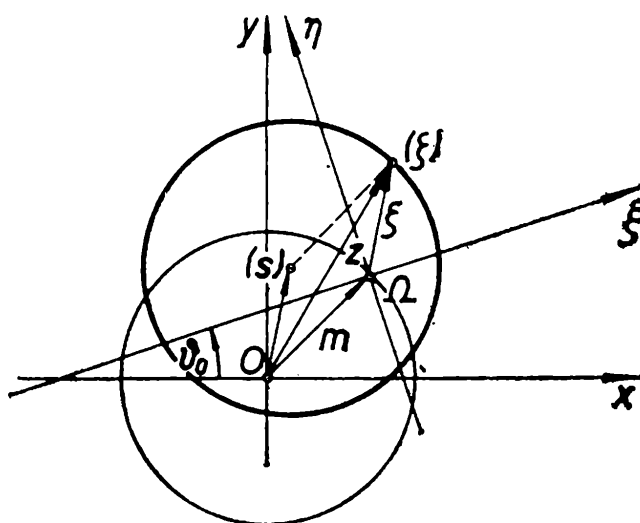
$$z = m(t) \quad (2)$$

nebo parametrickými rovnicemi

$$x = \text{Re } m; \quad y = \text{Im } m. \quad (2')$$



Obr. 3



Obr. 4

Je-li křivka (2) kružnice, tj.

$$m\bar{m} = R^2$$

a označíme-li

$$n_0 = \cos \vartheta_0 + i \sin \vartheta_0, \quad (3)$$

je dráha bodu (ζ) pevného v rovině (Σ) kružnice (obr. 4) v rovině (S) s rovnici

$$(z - \zeta n_0)(\bar{z} - \bar{\zeta} \bar{n}_0) = R^2$$

o středu v bodě s průvodičem $s = \zeta n_0$ a o poloměru R .

Je-li křivka (2) přímka

$$\bar{\alpha}m + \alpha\bar{m} + A = 0,$$

pak dostáváme *obyčejnou translaci směrem této přímky* a dráha bodu (ζ) pevného v rovině (Σ) v rovině (S) je přímka

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} - (\bar{\zeta}\bar{n}_0 + \zeta n_0) + A = 0.$$

3. Je-li současně $m = m_0 = \text{konst.}$, $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{konst.}$, pak se rovina (Σ) nepohybuje v rovině (S) a mluvíme o tzv. *klidu*.

Výše uvedené tři případy pohybů při řešení kinematických problémů zpravidla vylučujeme z našich úvah jako speciální druhy pohybů.

Poznamenejme, že když při daném pohybu $\vartheta = \vartheta(t) = t$, pak nazýváme *pohyb geometrický*. Jsou to všechny pohyby, jimiž jsou v rovinné kinematické geometrii vytvářeny příslušné křivky. Některými z nich se budeme později zabývat.

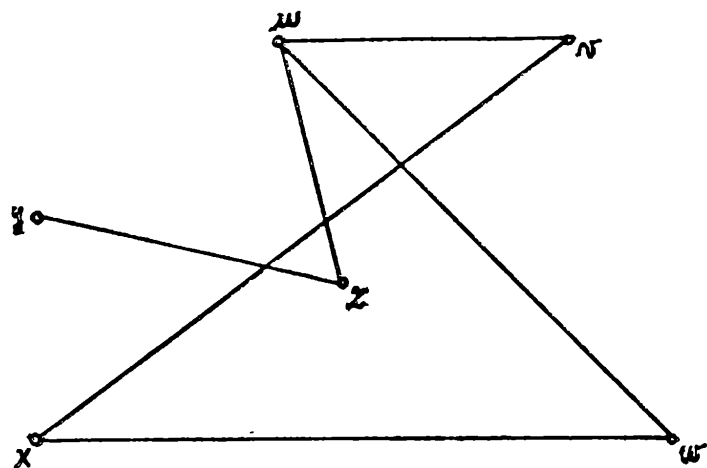
Stromy a lesy v matematice

RNDr. ŠTEFAN ILAŠ, Pedagogická fakulta UPJŠ Prešov

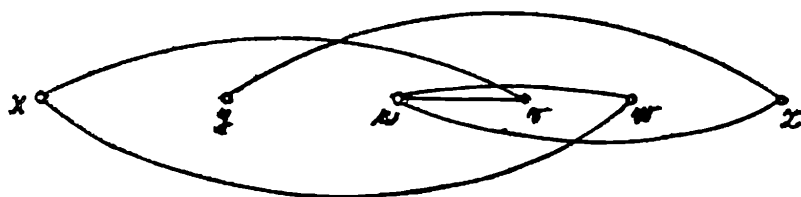
Grafom (presnejšie, *neorientovaným grafom*) nazývame množinu skladajúcu sa z prvkov dvojakého druhu: prvé z nich sú body a nazývame ich vrcholmi; tie sú pospájané prvkami druhého druhu, ktoré nazývame *hranami*. Pritom predpokladáme, že každá hrana spája najviac dva vrcholy (obr. 1).

Za dôležitú informáciu o vrchole grafu považujeme tzv. *stupeň vrcholu*, tj. počet hrán, ktoré „z tohto vrcholu vychádzajú“, čiže ktoré sú s vrcholom incidentné. Na obr. 1 vrcholy x , w , v , z sú druhého stupňa, vrchol y má stupeň 1 a vrchol u stupeň 3.

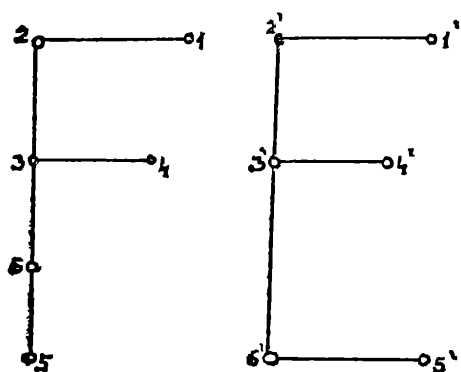
Porovnajme teraz graf na obr. 1 s grafom na obr. 2. Ľahko zistíme, že oba obrázky predstavujú tú istú situáciu; nie je preto rozhodujúce,



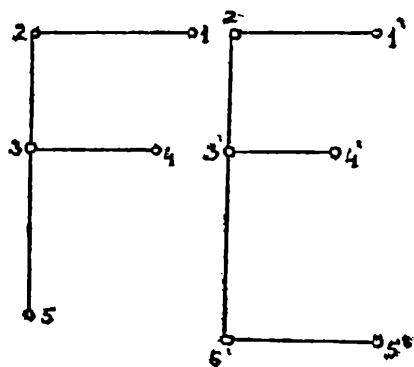
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3a



Obr. 3b

akým spôsobom sú rozmiestnené body x, y, u, v, w, z v rovine a akými čiarami sme pospájali odpovedajúce páry bodov. Preto tieto grafy nepovažujeme za rôzne, hoci ako obrázky nevyzerajú nijak rovnako, avšak rovnako vystihujú podstatu veci. Matematici takýmto grafom hovoria, že sú *izomorfné*.

Grafy G, G' sa nazývajú izomorfné, ak vrcholy (resp. hrany) grafu G môžeme vzájomne jednoznačne priradiť vrcholom (resp. hranám) grafu G' tak, aby dva prvky grafu G boli incidentné práve vtedy, keď sú incidentné im odpovedajúce prvky grafu G' (t.j. ak v grafe G je incidentný vrchol v s hranou h , potom odpovedajúci vrchol v' a hrana h' grafu G' sú incidentné v grafe G') (obr. 3b). Príslušné priradenie (zobrazenie) medzi prvkami (t.j. vrcholmi a hranami) grafov G, G' nazývame *izomorfizmus*. Ak neexistuje medzi G, G' žiadny izomorfizmus, hovoríme,

že graf G nie je izomorfný s grafom G' (alebo že grafy G , G' sú rôzne vzhľadom na izomorfizmus, či z hľadiska izomorfizmu) (obr. 3a).

Z hľadiska teórie grafov izomorfné grafy teda nepovažujeme za rôzne; považujeme ich za ekvivalentné (rovnocenné).

Z iného, tzv. topologického hľadiska považujeme zase za ekvivalentné (rovnocenné) tzv. homeomorfné grafy.

Každý vycíti, že napr. vrcholy druhého stupňa majú v grafe trochu zvláštne postavenie. Ak totiž na niektoré hrany pripojíme ďalšie vrcholy (malé krúžky), ta sa tým (zhruba povedané) mnoho nezmení na optickom vzhľade grafu; (porovnajme napr. prvý graf na obr. 3a, t. j. graf tvaru písmena F , s prvým grafom na obr. 3b, tiež tvaru písmena F).

Touto úvahou sme už blízko k homeomorfizmu.

Nech sú dané dva grafy G , G' ; potom hovoríme, že graf G je *homeomorfný* s grafom G' , ak je buď G izomorfný s G' alebo keď voľbou nových vrcholov druhého stupňa na hranách grafov G , G' môžeme z nich utvoriť izomorfné grafy. (Na obr. 3a sú grafy homeomorfné; môžeme ich totiž „urobiť“ i izomorfne ekvivalentnými pridaním jedného vrcholu druhého stupňa. Je ním vrchol označený číslom 6, ktorému odpovedá v izomorfizme vrchol 6', obr. 3b).

Ak je G homeomorfný s G' , hovoríme tiež, že grafy G , G' sú *topologicky ekvivalentné* (rovnocenné). Z topologického hľadiska (t. j. z hľadiska homeomorfizmu) sú teda vrcholy stupňa 2 nepodstatné.

Takéto (topologické) nazeranie na grafy je tiež veľmi dôležité, pretože v mnohých prípadoch sa skúmajú iba tzv. topologické vlastnosti grafov (t. j. vlastnosti grafov z topologického hľadiska)¹⁾.

Ak medzi grafmi G , G' neexistuje žiadny homeomorfizmus, potom hovoríme, že grafy G , G' sú topologicky rôzne (neekvivalentné).

Cvičenie.

1. Pokúste sa dokázať, že ak sú dva (konečné) grafy izomorfné, potom majú

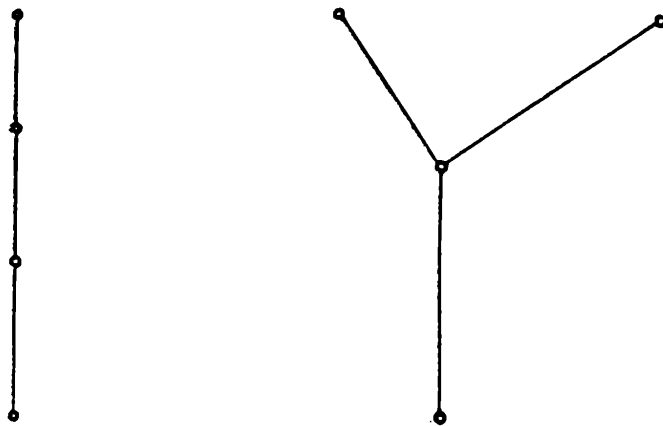
a) rovnaký počet vrcholov; b) rovnaký počet hrán; c) rovnaké stupne vrcholov. Platí aj obrátené tvrdenie?

[Návod (resp. odpoveď): Použite definíciu 2. Obrátené tvrdenie neplatí.]

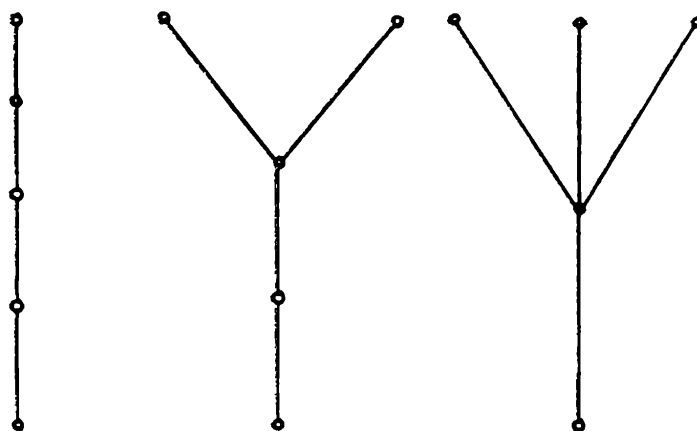
2. Koľko grafov na obr. 4 je topologicky ekvivalentných? [Odp. 2 a 2.] Ak o grafe G platí, že od každého jeho vrcholu možno „prejsť“ do každého ďalšieho (iného) jeho vrcholu po hranách tohto grafu (tj. pre ľubovoľné dva vrcholy existuje spájajúca ich „cesta“), potom takýto graf sa nazýva *súvislým grafom*.

Graf na obr. 5 je zrejmé súvislý; (je súvislý i graf na obr. 1 resp. 2?). Graf, ktorý nie je súvislý (tj. skladá sa z viacerých súvislých grafov, tzv. komponentov, či zložiek) nazývame *nesúvislým grafom*.

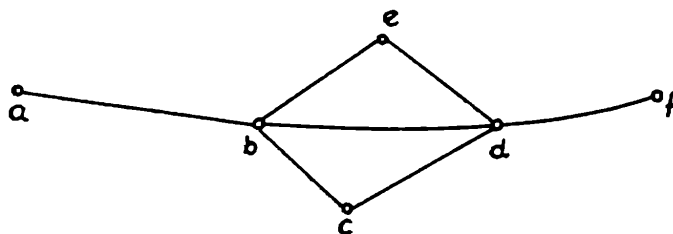
¹⁾ Viac o týchto vlastnostiach sa môže čitateľ dozvedieť napr. z článku „Topologická historka“, Rozhľedy, roč. 52 (1973–74), č. 7, str. 305–309.



Obr. 4a



Obr. 4b



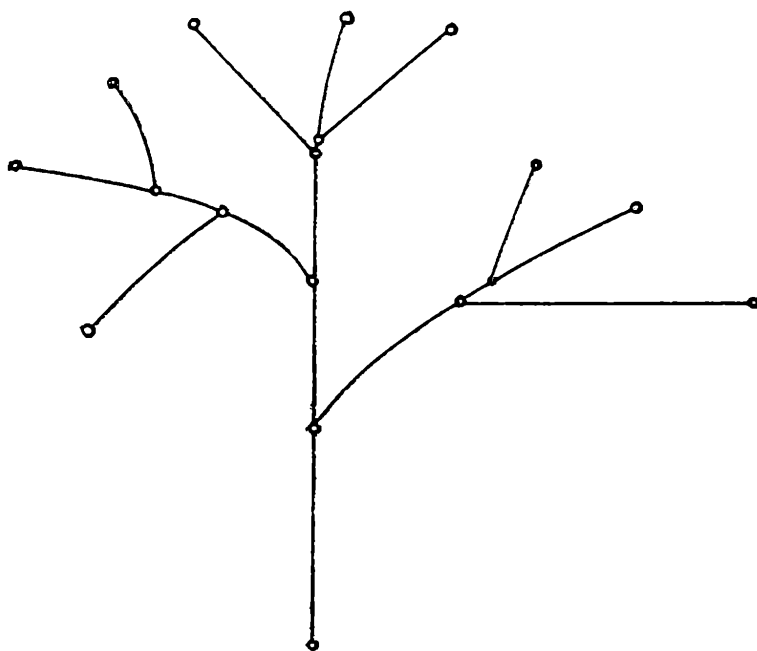
Obr. 5

Na obr. 4a je nesúvislý graf, ktorý pozostáva z dvoch komponentov; na obr. 4b je zase nesúvislý graf, ktorý má tri komponenty.

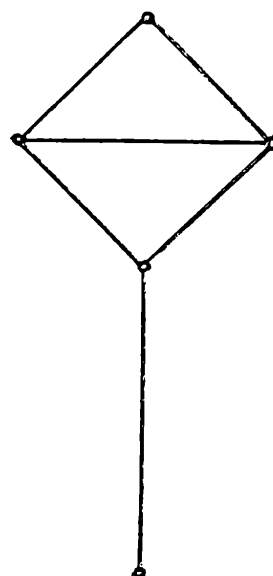
Cvičenie

3. Nakreslite súvislé a vzájomne neizomorfné grafy s tým istým súčtom stupňov všetkých vrcholov (napr. 16). Odhadnite a potom presne určte maximálny počet týchto grafov.

Ak graf neobsahuje uzavreté cesty (tj. kružnice), alebo čo je to isté, ak z jedného jeho vrcholu k ľubovoľnému druhému vedie iba jedna cesta pozostávajúca z hrán tohto grafu, potom takýto graf sa nazýva stro-



Obr. 6



Obr. 7

mom. Súvislý graf neobsahujúci žiadnu kružnicu sa nazýva *strom* (obr. 6).

Napr. na obr. 4a sú dva stromy a na obr. 4b sú tri stromy. Ak je graf nesúvislý a neobsahuje kružnicu, potom každý jeho súvislý komponent je stromom a samotný graf sa nazýva *lesom*. Na obr. 4a je les s dvoma stromami a na obr. 4b les s tromi stromami.

Nesúvislý graf bez kružníc sa nazýva *les*. Každý komponent lesa je jeho stromom.

Najjednoduchším príkladom stromu je úsečka (a taktiež zjednotenie konečného počtu úsečiek vychádzajúcich z jedného bodu). Tri body taktiež možno spojiť práve jediným spôsobom tak, aby vznikol strom. Avšak z grafov so štyrmi vrcholmi už možno dôjsť k dvom topologicky rôznym typom stromov (obr. 4a). Pomocou piatich vrcholov dostaneme tri topologicky rôzne stromy (obr. 4b); zo šiestich vrcholov dostaneme šesť topologicky rôznych stromov.

Sami sa pokúste zostrojiť les pomocou šiestich daných vrcholov, ak všetky stromy tohto lesa majú byť topologicky rôzne.

Niektoré modely „stromov“ z praxe :

1. Rieky so svojimi prítokmi sú dobrými príkladmi grafov-stromov na zemskom povrchu.

2. Silné elektrické výbuchy niekedy tiež pripomínajú na fotografiách stromy s dobre rozvinutou korunou.

3. V tvare stromov rastú niektoré kryštály (tzv. dendrity).

4. Rozvetvené vlákno nervovej buňky má tiež tvar stromu.

5. Obyčajný (drevený) strom bez lístia v neskorých jesenných mesiacoch predstavuje znamenitý trojrozmerný model grafu-stromu.

V ďalších našich úvahách sa pokúsime dôjsť k niektorým výsledkom, ktoré vyjadrujú základné vlastnosti stromov.

Prvou takouto úvahou bude stanoviť počet hrán stromu, ktorý má n vrcholov. Za tým účelom uvažme, že každý strom možno skonštruovať (zostaviť) nasledujúcim spôsobom:

Zoberme jeden jeho ľubovoľný vrchol u , ako východiskový a z neho vedieme všetky hrany zapísané všeobecne v tvare uv_k ; potom z každého vrcholu v_k zase všetky hrany tvaru v_kz , atď. Vždy, ak dokreslíme hranu, dôjdeme tiež k zostrojeniu (vyznačeniu) vrchola (t.j. jej konca). Avšak vrchol u sme nedostali takýmto spôsobom; ten sme si proste sami zvolili, takže počet hrán stromu je o 1 menší než počet jeho vrcholov.

Platí teda:

Veta 1. Počet hrán stromu s n vrcholmi sa rovná číslu $n-1$.

Sami sa pokúste dokázať, že v lese, ktorý má s stromov a v vrcholov, platí: $h = v - s$ (kde h je počet hrán v tomto lese); inými slovami, dokážte, že platí:

Veta 2. Les, v ktorom je s stromov a v vrcholov, obsahuje $(v-s)$ hrán. Napr. v lese na obr. 4a je $v = 8$, $s = 2$ a $h = 6$, t.j. $6 = 8 - 2$.

Už z predošlých úvah je známe, že z každého súvislého grafu dostaneme strom tak, že odoberieme z neho istý počet hrán. Konkrétne, ak v grafe je nejaká kružnica, potom najprv odoberieme jednu hranu tejto kružnice. Ak ešte i potom ostane v grafe nejaká kružnica, opakujeme to znovu, až potiaľ, pokiaľ nedostaneme graf bez kružníc, t.j. strom. Nech graf má v vrcholov, h hrán, a to ešte pred začatím odoberania jeho hrán. Ďalej nech ch je počet tých hrán, ktoré potom odoberieme z grafu, aby sme dostali strom. Keďže takýto „výsledný“ strom má ten istý počet vrcholov, ako pôvodný graf (pretože sme odoberali iba hrany bez vrcholov, ktoré ony spájali), má teda výsledný graf-strom $v-1$ hrán, takže

$$v - 1 = h - ch,$$

odkiaľ

$$ch = h - v + 1$$

Číslo ch sa nazýva *cyklickým stupňom* alebo *cyklomatickým číslom daného súvislého grafu*. (Cyklomatické číslo stromu sa zrejme rovná nule.) Takže k tomu, aby sme daný súvislý graf „premenili“ na strom, je nutné odobrať z neho aspoň $(h - v + 1)$ hrán. Platí teda

Veta 3. Najmenší počet hrán, ktoré treba odobrať z daného súvislého grafu s h hranami a v vrcholmi tak, aby vznikol strom, je daný číslom $(h - v + 1)$.

Napr. na obr. 7 je graf s tromi kružnicami. Aby sme z neho dostali strom, treba „zobrať“ $ch = 6 - 5 + 1 = 2$ hrany.

[Pokúste sa stanoviť, koľko topologicky rôznych stromov vznikne takýmto odobratím hrán a nakreslite ich.]

Ak chceme premeniť súvislý graf na les, treba odobrať z neho väčší

počet hrán, než aký predstavuje cyklomatické číslo tohto grafu (pokúste sa to zdôvodniť).

A teraz skúsme riešiť takúto úlohu:

Treba skonštruovať sieť (elektrickú, telefonnú či vodovodnú) spájajúcu obce $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, aby táto sieť bola čo najekonomickejšia, t. j., aby tvar celej siete skladajúcej sa z jednotlivých „pojitiel“ obcí $a_1, a_2, \dots, a_n$ bol minimálny.

Graf predstavujúci popísanú sieť zrejme nebude obsahovať žiadnu kružnicu; v opačnom prípade by bolo možné odobrať jednu hranu existujúcej kružnice a obce by boli naďalej pospájané každá s každou a súčasne náklady na výstavbu siete by boli menšie. Hľadaná sieť teda musí byť stromom a podľa vety 1 bude mať $n-1$ hrán.

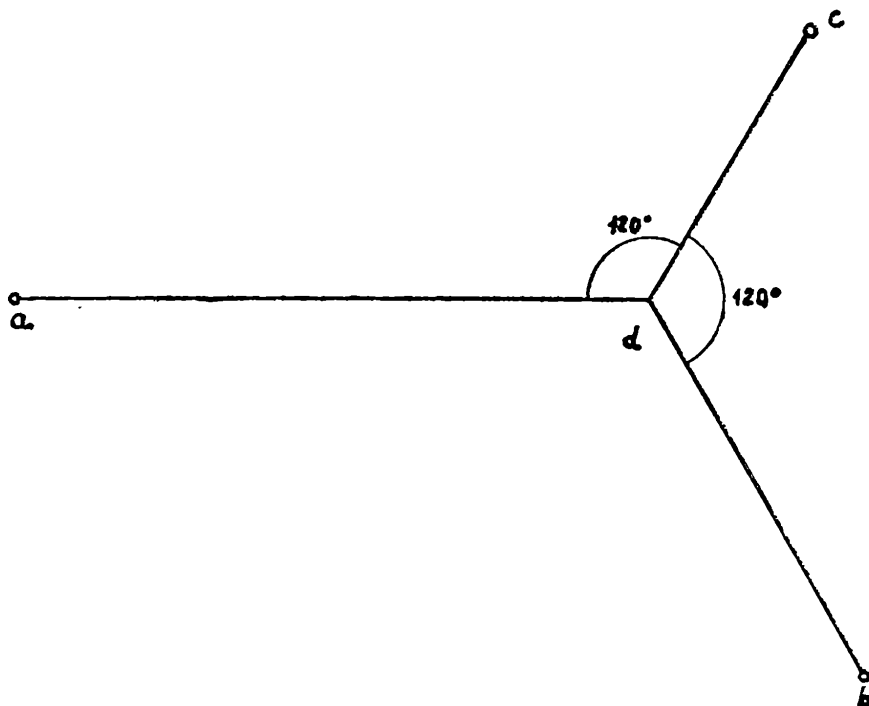
Existuje viacero metód (algoritmov), ako nájsť takýto „minimálny strom“. Uvedieme jednu z nich, ktorej autorom je československý matematik O. Borůvka.

Najprv spojíme dve obce a_i, a_k s „najlacnejšou“ spájajúcou ich hranou $a_i a_k$ (akoby článkom hľadanej siete); obyčajne sú to najbližšie so sebou susediace obce (ak existuje viacero rovnako „nákladných“ hrán, potom vyberieme ľubovoľnú z nich). Túto metódu uplatníme aj pri ďalšom spájaní dvojíc obcí, pričom dbáme pochopiteľne o to, aby nevznikali pritom kružnice. Ak takýmto spôsobom vzniklá sieť zachycuje všetky n obce, potom najekonomickejší strom je už zostrojený, t. j. úloha je vyriešená. Ak ovšem miesto jedného stromu dostaneme les, potom je nutné vybrať jeden strom tohto lesa a spojiť jeden jeho vrchol s vrcholom iného stromu tak, aby táto spojnica bola najlacnejšou hranou spomedzi všetkých možných spojnic obcí (vrcholov) prvého stromu s vrcholmi druhého stromu (t. j. aby spájala „najbližšie“ dve obce, z ktorých jedna predstavuje vrchol jedného a druhá vrchol druhého stromu). To isté treba opakovať i s ostatnými stromami lesa (ak je ich viac než dva). Ak i po tomto procese sieť bude lesom, potom opätovne treba opakovať takýto postup-proces s novými stromami, až pokiaľ „nepremeníme“ les na strom.

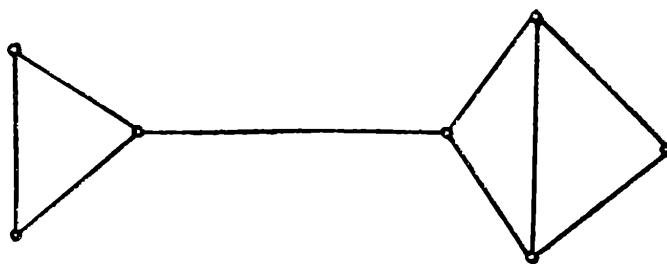
Dôkaz správnosti uvedenej metódy nebudeme tu uvádzať; čitateľ sa môže s ním zoznámiť napr. v [2], str. 53–54.

Štruktúra najekonomickejšej siete tvaru stromu sa trochu pozmení, ak za vrcholy (grafu-stromu) nebudeme považovať iba obce (body) daného systému (množiny) (t. j. v našom prípade body $a_1, a_2, \dots, a_n$), ale i body-priesečníky ich spojnic, čím sa dostaneme ku klasickej *J. Steinerovej úlohe* (známej ešte z minulého storočia): Ako spojiť tri obce a, b, c cestnou sieťou tak, aby jej „rozloha“ bola minimálna; precízny matematickým jazykom vyjadrené, „v rovine sú dané tri body a, b, c , treba nájsť taký štvrtý bod d , aby súčet dĺžok $ad + bd + cd$ bol minimálny“.

Riešenie tejto klasickej úlohy je také, že treba nájsť bod d , z ktorého



Obr. 8



Obr. 9

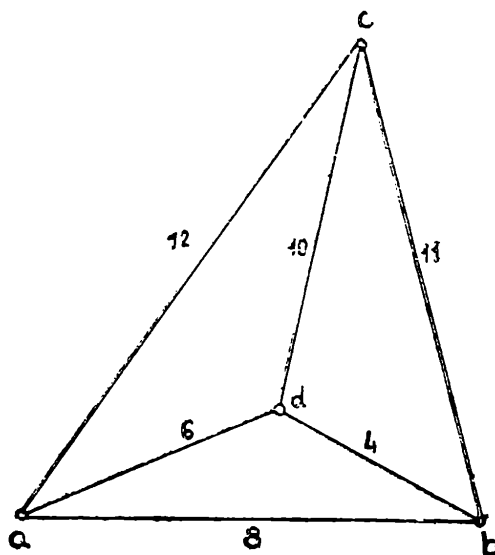
vidíme úsečky ab , bc , ca pod uhlom 120° (obr. 8). (Pokúste sa o dôkaz; ak sa vám to nepodarí, nájdete ho napr. v [1], str. 388. Na str. 392 sa súčasne stretnete tiež so zovšeobecnenou Steinerovou úlohou pre n bodov v rovine.)

Pre príjemnú a užitočnú zábavu ponúkame k vyriešeniu ešte niekoľko úloh.

I. Koľko kružníc obsahuje graf na obr. 9? Premeňte tento graf na strom. Iste dostanete viacero neizomorfných stromov. Zostavte z nich les a uvážte, či nie sú v tomto lese niektoré topologicky ekvivalentné stromy. Stanovte ich počet a overte tiež naše dosiahnuté výsledky zachytené vetami 1, 2 a 3.

II. Koľko topologicky rôznych stromov možno zostrojiť pomocou siedmich daných vrcholov? [Odp. 11.]

III. Nakreslite veľké tlačené písmená latinskej abecedy, ktoré sa skladajú z úsečiek; potom v každom bode zlomu, vetvenia a na koncoch úsečiek umiestnite vrcholy grafu (tak, ako na obr. 3a). Zistite všetky



Obr. 10

dvojice: a) izomorfných grafov; b) homeomorfných grafov. Tvorí všetky tieto grafy (dohromady) les?

IV. Na obr. 10 sú vyznačené štyri obce a , b , c , d aj so vzájomnými vzdialenosťami (týchto obcí v kilometroch). Všetky štyri obce majú byť spojené elektrickým vedením tak, aby každé dve obce boli spojené priamo alebo prostredníctvom ostatných obcí a aby celková dĺžka siete bola minimálna. Navrhnete plán tohto elektrického vedenia (aj vyčíslením dĺžky siete). [Odp. 20 km.]

V. Zostrojte sieť vodovodného potrubia spájajúceho štyri obce, ktoré sú vo vrcholoch: a) štvorca; b) pravidelného päťuholníka, ak táto sieť má byť minimálna. Určte tiež číselne dĺžku tejto siete, ak strana štvorca resp. päťuholníka je 10 km.

[Pripomíname, že hľadaný graf bude (zrejme) strom, ktorý spája vrcholy štvorca (resp. päťuholníka) a že okrem daných štyroch (resp. piatich) bodov-obcí môže mať jeden alebo i viac doplňujúcich vrcholov. Súčasne upozorňujeme, že v prípade štvorca nebudú hľadanú sieť tvoriť jeho uhlopriečky, ako by sa snáď čitateľ mohol domnievať.]

[Odp. a) $10 \cdot 2\sqrt{2} \doteq 28,28\dots$; b) $10(1 + \sqrt{3}) \doteq 27,32\dots$ Vidíme, že v prípade päťuholníka je sieť lacnejšia.]

VI. Zvoľte v rovine šesť bodov; nájdite najekonomickejší strom, ktorého hrany spájajú tieto vrcholy.

[Odp. Ak body $a_1, a_2, \dots, a_6$ sú vrcholmi lomenej čiary s uhlami pri vrcholoch dostatočne blízky 180° , potom samotná lomená čiara je riešením úlohy; vo všeobecnejšom rozpožatí vrcholov vzniknú tiež nové vrcholy (nie viac ako 4) tretieho stupňa, pričom hrany vychádzajúce z týchto vrcholov zvierajú uhly 120° .]

VII. Traja muži majú mená Emil, František a Milan. Bývajú v mes-

tách Tábor, Ostrava, Žilina; ich zamestnanie je: vlakvedúci, sústružník, herec. Vieme:

- a) František nebýva v Ostrave ani v Žiline,
- b) herec sa volá Milan,
- c) vlakvedúci ani sústružník nebýva v Ostrave,
- d) Emil je buď herec alebo vlakvedúci.

Rozhodnite, ktorý z mužov $\{E, F, M\}$ býva v ktorom meste $\{T, O, Ž\}$ a aké má zamestnanie $\{H, V, S\}$.

[*Návod*: Použite stromy logických možností (dve trojice stromov); úloha má totiž dve riešenia. Odp.: 1. možnosť — E býva v O a je H , M v $Ž$ a je S , F v T a je V ; 2. možnosť — E v O a je H , M v $Ž$ a je V , F v T a je S .

Literatúra :

- [1] Courant, R. Robbins, H.: Čto takové matematika? Moskva: Prosveščeniye 1967.
- [2] Ore, O.: Grafy i ich primenenije. Moskva: Mir 1965.
- [3] Sedláček, J.: Nebojte se matematiky. Praha: SNTL 1960 a 1969, resp. v slovenčine, Bratislava: SVTL 1963.
- [4] Sedláček, J.: Kombinatorika v teorii a praxi. Praha: NČAV 1964, resp. novšie vydanie: Úvod do teorie grafů. Praha: Academia 1977.

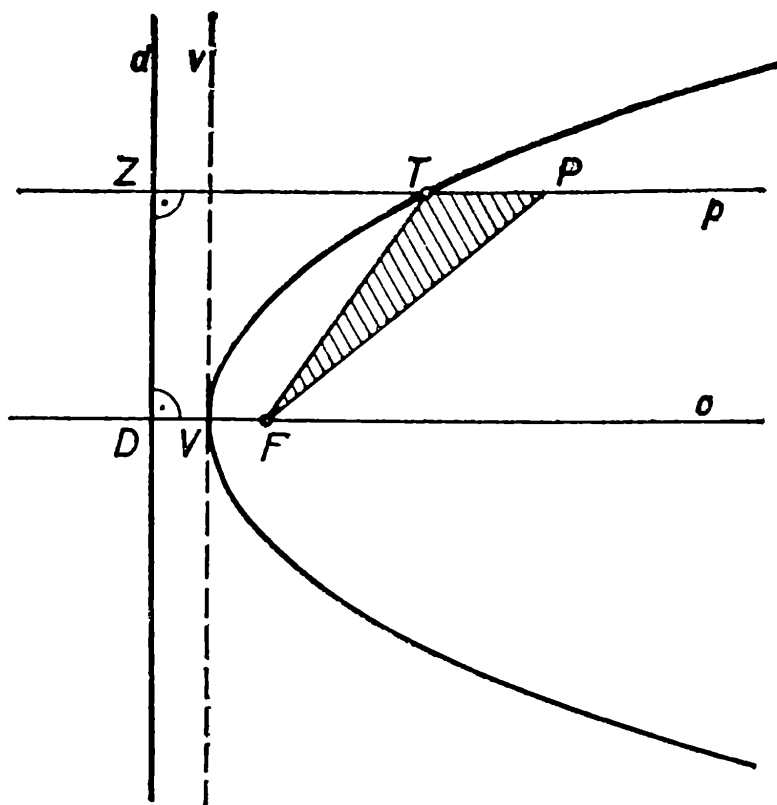
Některé metrické vlastnosti paraboly

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Budiž v rovině dán bod F a přímka d , která tímto bodem neprochází. Potom *parabolou* nazýváme množinu všech bodů této roviny, které mají tu vlastnost, že každý z nich má stejnou vzdálenost od bodu F jako od přímky d . Bod F se nazývá *ohnisko* paraboly, přímce d říkáme *řídící přímka* paraboly. Přímka $o \perp d$ vedená ohniskem F se jmenuje *osa* paraboly; podle ní je parabola souměrná. Je-li $D = o \cap d$, pak střed V úsečky FD je zřejmě bodem paraboly; nazývá se *vrchol* paraboly. Přímce $v \perp o$ ($v \parallel d$) vedené vrcholem V říkáme *vrcholová tečna* paraboly (obr. 1).

Připomeneme nejprve některé vlastnosti paraboly, které se zpravidla uvádějí ve středoškolských učebnicích; jsou odvozeny např. v učebnici matematiky pro 3. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (gymnází) v části věnované analytické geometrii. Potom dokážeme některé další vlastnosti paraboly.

Narýsujeme-li parabolu, vidíme, že rozděluje rovinu ve dvě části; parabolu nepočítáme do žádné z nich. Ta část, k níž patří ohnisko F paraboly, se nazývá *vnitřní oblast paraboly*; druhá část se nazývá



Obr. 1

vnější oblast paraboly. Každá přímka rovnoběžná s osou paraboly (i osa) protíná tuto křivku v jediném bodě. Tento bod rozděluje danou přímku ve dvě navzájem opačné polopřímky. Všechny vnitřní body jedné z nich patří do vnější oblasti paraboly, všechny body druhé patří do vnitřní oblasti paraboly. V každém svém bodě T má parabola právě jednu tečnu, je to přímka, která prochází tímto bodem tak, že každý její bod $Q \neq T$ patří do vnější oblasti paraboly. Z názoru je patrné, (a lze to též dokázat), že parabola a její vnitřní oblast leží v téže polorovině vyřezané libovolnou tečnou paraboly.

Věta 1. a) Jestliže bod P patří do vnitřní oblasti paraboly, potom jeho vzdálenost od její řídící přímky je větší než jeho vzdálenost od ohniska paraboly.

b) Jestliže bod Q patří do vnější oblasti paraboly, potom jeho vzdálenost od její řídící přímky je menší než jeho vzdálenost od ohniska paraboly.

Důkaz. a) Nechť bod P patří do vnitřní oblasti paraboly. Jestliže leží na její ose o protínající řídící přímku v bodě D , pak je zřejmě $|PF| < |PD|$, ať bod P leží na prodloužení úsečky VF (V je vrchol, F ohnisko paraboly) nebo splývá s bodem F nebo je vnitřním bodem úsečky VF . Předpokládejme tedy, že bod P neleží na ose paraboly (obr. 1). Potom přímka $p \parallel o$ vedená bodem P protíná parabolu v jediném bodě T a přímku d v bodě Z ; přitom bod T leží uvnitř úsečky PZ . Úsečka PZ je grafickým součtem úseček PT , TZ ; přitom úsečky TZ , TF jsou shodné

(podle definice paraboly). Je tedy

$$|PZ| = |PT| + |TZ| = |PT| + |TF| > |PF|,$$

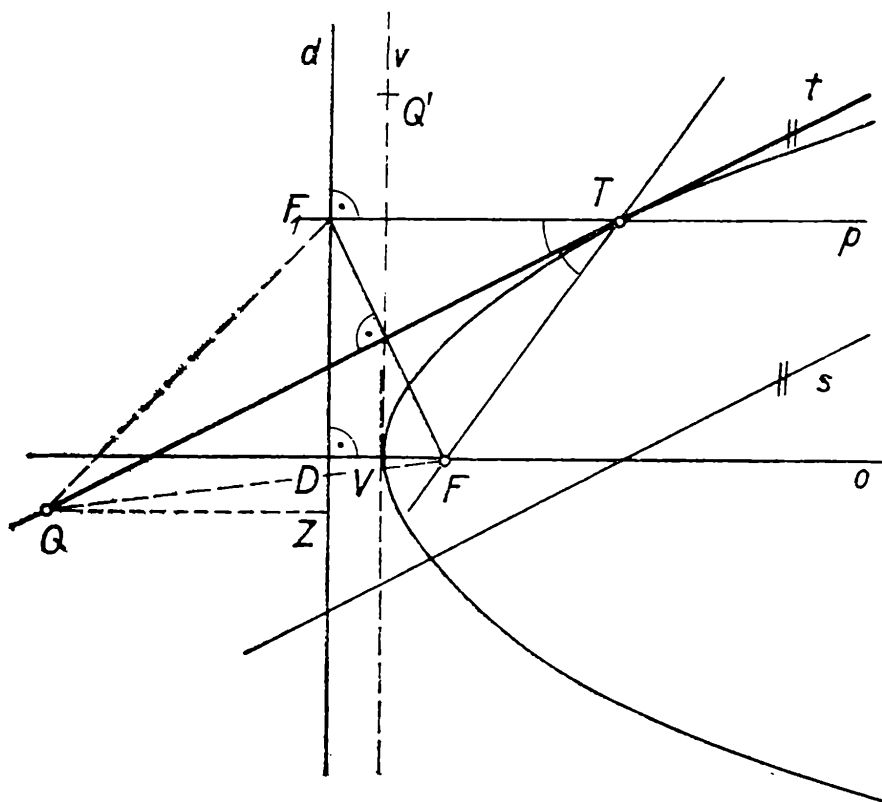
neboť součet dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí.

b) Nechť bod Q patří do vnější oblasti paraboly. Jestliže leží na ose paraboly, je zřejmě $|QF| > |QD|$, ať bod Q leží na prodloužení úsečky VD , nebo splývá s bodem D , nebo je vnitřním bodem úsečky VD . Jestliže bod Q neleží na ose paraboly, pak se provede důkaz zcela obdobně jako pro bod P v případě a).

Budiž T libovolný bod paraboly s ohniskem F a řídící přímkou d . Potom přímkou TF a kolmicí p vedenou k přímce d bodem T nazýváme *průvodiči bodu T* . Není-li T vrcholem paraboly, pak přímky TF a p rozdělí rovinu paraboly ve čtyři úhly. Dva vrcholové úhly z těchto čtyř úhlů nazýváme *vnějšími úhly průvodičů bodu T* ; jeden z nich je ten, jehož bodem je průsečík D řídící přímky s osou paraboly. Vnějšíším úhlem průvodičů vrcholu V rozumíme každý z přímých úhlů s rameny VF , VD .

Věta 2. Tečna paraboly sestrojená v jejím bodě T pŕl vnějšl ŕhlŕ
prŕvodičŕ bodu T .

¹ Důkaz. Není-li bod T vrcholem paraboly, protíná jeho průvodič $p \perp d$ řídící přímku d v bodě F_1 neležícím na ose o paraboly (obr. 2). Je-li F ohnisko paraboly, jsou úsečky TF , TF_1 shodné, takže trojúhelník FF_1T je rovnoramenný se základnou FF_1 . Přímka $t \perp FF_1$ vedená bodem T je osou úsečky FF_1 a pólí úhel $\sphericalangle F_1TF$. Dokážeme, že každý

**Obr. 2**

bod $Q \neq T$ přímky t patří do vnější oblasti paraboly; to znamená, že přímka t je tečnou paraboly v bodě T .

Pro průsečík přímek t , d je tvrzení zřejmé. Budiž tedy $Q \neq T$ libovolný bod přímky t neležící na řídicí přímce d . Vedme jím kolmici k přímce d a její patu označme Z . Protože je $Q \neq T$, je $Z \neq F_1$; z pravoúhlého trojúhelníka QZF_1 plyne, že je

$$|QZ| < |QF_1| \quad (1)$$

Protože přímka t je osou úsečky FF_1 , jsou úsečky QF_1 , QF shodné; podle (1) z toho plyne, že je $|QZ| < |QF|$. Podle věty 1b) patří bod Q do vnější oblasti paraboly.

Je-li $T = V$ (vrchol paraboly), je $t = v \parallel d$ a $F_1 = D$. Vzdálenost kteréhokoliv bodu $Q' \neq V$ přímky v od řídicí přímky d je rovna $|VD|$, a tedy je menší než $|Q'D| = |Q'F|$. Bod Q' patří proto do vnější oblasti paraboly.

Věta 3. Množina všech bodů souměrně sdružených s ohniskem podle tečen paraboly je její řídicí přímka.

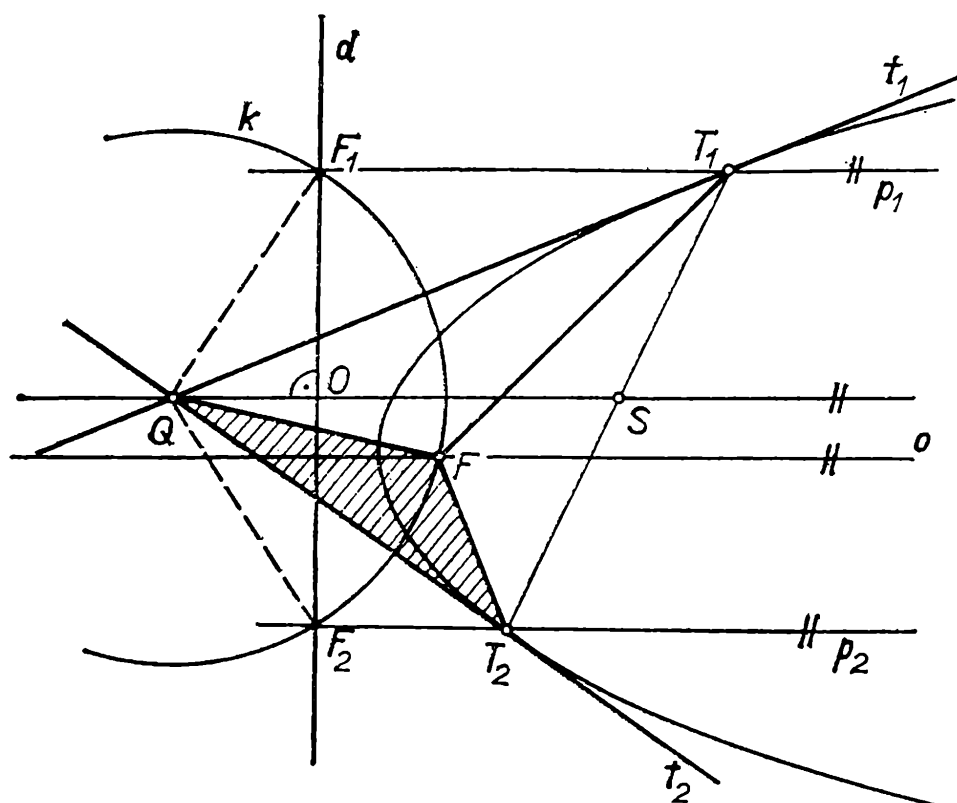
Důkaz. Je-li t libovolná tečna paraboly (obr. 2), pak podle věty 2 leží bod F_1 souměrně sdružený k ohnisku F podle tečny t na přímce $p \perp d$ vedené bodem T ; z toho plyne, že je $|TF_1| = |TF|$. Protože je ještě $TF_1 \perp d$, je F_1 bodem řídicí přímky d .

Obráceně, budiž F_1 libovolný bod řídicí přímky d , osa souměrnosti t úsečky FF_1 a přímka $p \perp d$ vedená bodem F_1 jsou různoběžky; jejich průsečík označme T . Ze souměrnosti podle přímky t plyne, že je $|TF_1| = |TF|$; protože je ještě $TF_1 \perp d$, je T bodem paraboly. Podle věty 2 je potom přímka t její tečnou v bodě T .

Věta 4. Nechť různoběžky t_1 , t_2 s průsečíkem Q jsou tečnami paraboly v bodech T_1 , T_2 a nechť F_1 , F_2 jsou souměrně sdružené body k ohnisku F paraboly podle tečen t_1 , t_2 . Potom přímka spojující bod Q se středem S úsečky T_1T_2 je rovnoběžná s osou paraboly a je osou úsečky F_1F_2 .

Důkaz. Podle věty 3 leží body F_1 , F_2 na řídicí přímce d paraboly; podle věty 2 jsou přímky $p_1 = T_1F_1$, $p_2 = T_2F_2$ rovnoběžné s osou o paraboly (obr. 3). Z konstrukce bodů F_1 , F_2 plyne, že úsečky QF_1 , QF , QF_2 jsou shodné; body F_1 , F_2 leží tedy na kružnici k opsané kolem středu Q . Proto kolmice k řídicí přímce d (čili rovnoběžka s osou o) vedená bodem Q protíná úsečku F_1F_2 v bodě O a je její osou; přímku T_1T_2 protíná tato kolmice v bodě S . Protože je $p_1 \parallel p_2 \parallel QS \parallel o$, jsou body T_1 , T_2 , S po řadě rovnoběžnými průměty bodů F_1 , F_2 , O ; protože bod O je středem úsečky F_1F_2 , je bod S středem úsečky T_1T_2 .

Věta 5 (první věta Ponceletova). Nechť různoběžky t_1 , t_2 s průsečíkem Q jsou tečnami paraboly v bodech T_1 , T_2 a nechť F je ohniskem této paraboly. Potom úhly $\sphericalangle QFT_1$, $\sphericalangle QFT_2$ jsou shodné.



Obr. 3

Důkaz. Parabola a její vnitřní oblast leží v polorovině t_1F a v polorovině t_2F , tj. v úhlu $\sphericalangle T_1QT_2$. Sestrojíme body F_1, F_2 po řadě souměrně sdružené k ohnisku F podle tečen t_1, t_2 (obr. 3). Ze souměrnosti podle přímky t_1 , resp. podle přímky t_2 plyne, že je

$$\sphericalangle QFT_1 = \sphericalangle QF_1T_1, \quad (2)$$

$$\sphericalangle QFT_2 = \sphericalangle QF_2T_2. \quad (3)$$

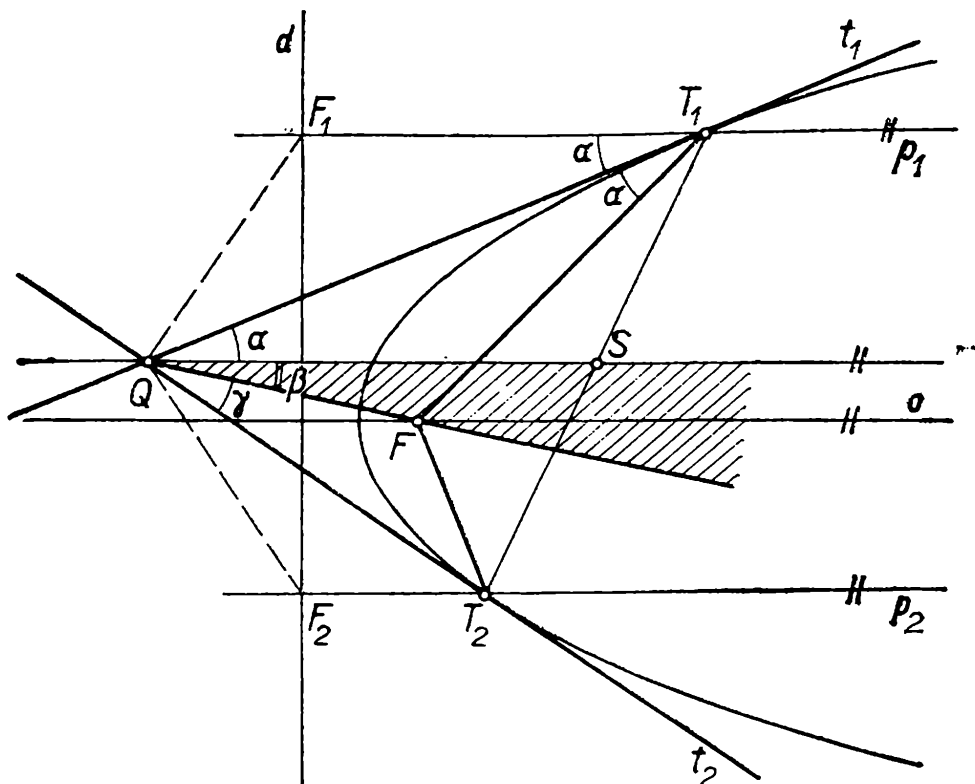
Podle věty 3 leží body F_1, F_2 na řídicí přímce d paraboly; podle věty 2 jsou přímky $p_1 = T_1F_1, p_2 = T_2F_2$ rovnoběžné s osou paraboly, s níž je podle věty 4 rovnoběžná také přímka QS , kde S je středem úsečky T_1T_2 . Podle téže věty je přímka QS osou úsečky F_1F_2 ; protože je $T_1F_1 \parallel QS \parallel T_2F_2$, jsou úhly $\sphericalangle QF_1T_1, \sphericalangle QF_2T_2$ souměrně sdružené podle přímky QS . Je tedy

$$\sphericalangle QF_1T_1 = \sphericalangle QF_2T_2.$$

Z toho podle (2) a (3) plyne, že úhly $\sphericalangle QFT_1, \sphericalangle QFT_2$ jsou shodné.

Věta 6 (druhá věta Ponceletova). Nechť různoběžky t_1, t_2 s průsečíkem Q jsou tečnami paraboly v bodech T_1, T_2 , F je ohniskem této paraboly a S středem úsečky T_1T_2 . Potom úhly $\sphericalangle SQT_1, \sphericalangle FQT_2$ jsou shodné.

Důkaz. Jestliže bod Q leží na ose paraboly, jsou tečny t_1, t_2 , body T_1, T_2 i úhly $\sphericalangle SQT_1, \sphericalangle FQT_2$ souměrně sdruženy podle osy $SQ = FQ$ paraboly; proto jsou tyto úhly shodné.



Obr. 4

Předpokládejme tedy, že bod Q neleží na ose paraboly. Podle věty 4 je přímka QS rovnoběžná s osou paraboly. Označení bodů T_1, T_2 volme tak, aby bod T_2 ležel uvnitř poloroviny QSF (obr. 4). Potom ohnisko F leží uvnitř úhlu $\sphericalangle SQT_2$, takže úhel $\sphericalangle T_1QT_2$ je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle SQT_1, \sphericalangle SQF, \sphericalangle FQT_2$.

Sestrojíme body F_1, F_2 po řadě souměrně sdružené k ohnisku F podle tečen t_1, t_2 . Podle věty 3 leží tyto body na řídící přímce d paraboly. Podle věty 4 je přímka QS (která je rovnoběžná s osou paraboly) osou úsečky F_1F_2 ; proto je

$$\sphericalangle SQF_1 = \sphericalangle SQF_2. \quad (4)$$

Avšak $\sphericalangle SQF_1$ je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle SQT_1, \sphericalangle F_1QT_1$. Ze souměrnosti úhlů $\sphericalangle F_1QT_1, \sphericalangle FQT_1$ podle tečny t_1 plyne, že jsou shodné, takže je

$$|\sphericalangle SQF_1| = |\sphericalangle SQT_1| + |\sphericalangle FQT_1|$$

Protože však úhel $\sphericalangle FQT_1$ je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle SQT_1, \sphericalangle SQF$, je konečně

$$|\sphericalangle SQF_1| = 2 |\sphericalangle SQT_1| + |\sphericalangle SQF|. \quad (5)$$

Zcela obdobně zjistíme, že je

$$|\sphericalangle SQF_2| = 2 |\sphericalangle FQT_2| + |\sphericalangle SQF|. \quad (6)$$

Je-li $|\sphericalangle SQT_1| = \alpha, |\sphericalangle SQF| = \beta, |\sphericalangle FQT_2| = \gamma$, dostáváme podle (4), (5) a (6) tento výsledek:

$$2\alpha + \beta = 2\gamma + \beta.$$

Z toho plyne, že je $\gamma = \alpha$, takže úhly $\sphericalangle FQT_2$, $\sphericalangle SQT_1$ jsou shodné.

Poznámka. Ze shodnosti úhlů $\sphericalangle SQT_1$, $\sphericalangle FQT_2$ plyne také shodnost úhlů $\sphericalangle SQT_2$, $\sphericalangle FQT_1$.

Věta 7 (důsledek vět Ponceletových). Nechť různoběžky t_1 , t_2 s průsečíkem Q jsou tečnami paraboly v bodech T_1 , T_2 ; ohnisko paraboly budiž F . Je-li $|\sphericalangle T_1QT_2| = \varphi$, je

$$|\sphericalangle QFT_1| = |\sphericalangle QFT_2| = \pi - \varphi.$$

Důkaz. Úhel $\sphericalangle T_1QT_2$ je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle T_1QF$, $\sphericalangle T_2QF$, takže pro jeho velikost φ platí:

$$\varphi = |\sphericalangle T_1QF| + |\sphericalangle T_2QF|. \quad (7)$$

Dokážeme, že úhel $\sphericalangle T_2QF$ je shodný s úhlem $\sphericalangle FT_1Q$.

Sestrojíme přímkou, která spojuje bod Q se středem S tětiny T_1T_2 ; podle věty 4 je přímka QS rovnoběžná s osou paraboly (obr. 4). Proto je také rovnoběžná s průvodičem $p_1 = T_1F_1$ bodu T_1 (F_1 je bodem řídicí přímky d). Podle věty o střídavých úhlech je

$$\sphericalangle SQT_1 = \sphericalangle F_1T_1Q; \quad (8)$$

podle věty 2 je

$$\sphericalangle F_1T_1Q = \sphericalangle FT_1Q. \quad (9)$$

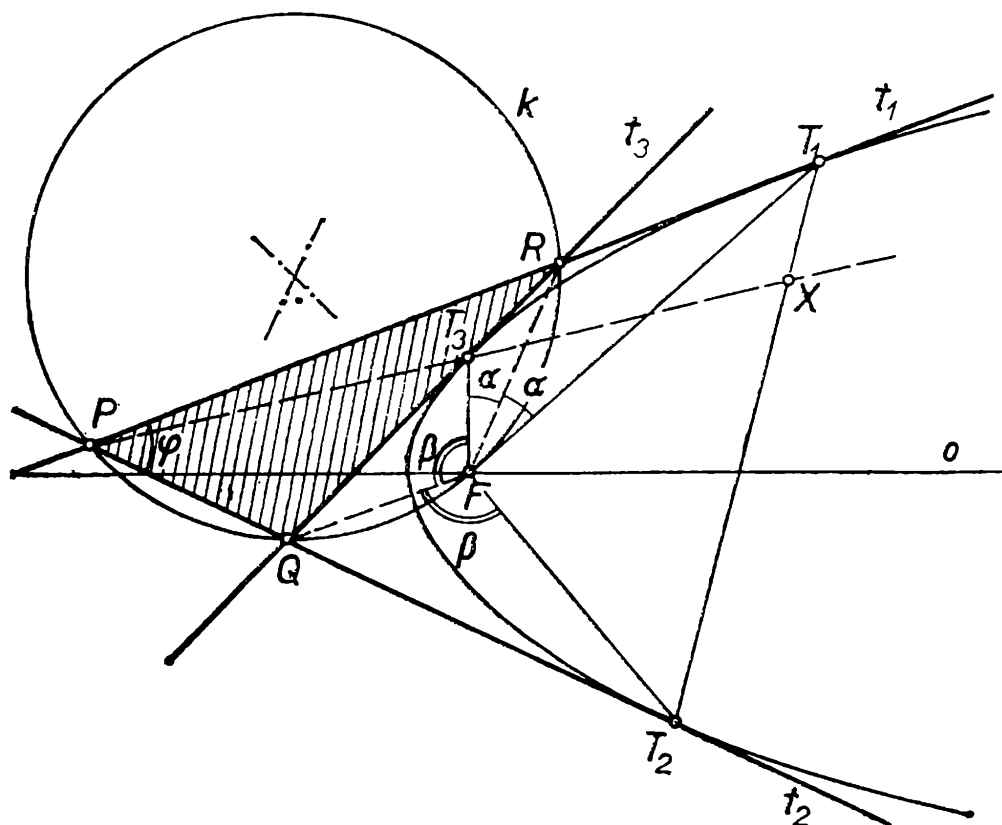
Podle druhé věty Ponceletovy je úhel $\sphericalangle T_2QF$ shodný s úhlem $\sphericalangle SQT_1$, a tedy podle (8) a (9) také s úhlem $\sphericalangle FT_1Q$; je tedy $|\sphericalangle T_2QF| = |\sphericalangle FT_1Q|$. Proto podle (7) je

$$\varphi = |\sphericalangle T_1QF| + |\sphericalangle FT_1Q|$$

Avšak úhly $\sphericalangle QFT_1$, $\sphericalangle T_1QF$, $\sphericalangle FT_1Q$ jsou vnitřními úhly trojúhelníku FQT_1 , takže je $|\sphericalangle QFT_1| = \pi - \varphi$. Podle první věty Ponceletovy je také $|\sphericalangle QFT_2| = \pi - \varphi$.

Podle výkladu uvedeného na počátku tohoto článku není žádná tečna paraboly rovnoběžná s její osou. Ke každé přímce s , která není rovnoběžná s osou paraboly, existuje právě jedna tečna paraboly $t \parallel s$ a sestrojí se takto (obr. 2): Bod F_1 souměrně sdružený k ohnisku F paraboly podle hledané tečny $t \parallel s$ leží na přímce $k \perp s$ (a tedy $k \perp t$) vedené bodem F ; podle věty 3 leží bod F_1 na řídicí přímce d paraboly. Při dané volbě přímky s existuje právě jeden bod $F_1 = k \cap d$, a tedy také právě jedna tečna $t \parallel s$; je to osa úsečky FF_1 . Z tohoto výkladu plyne, že žádné dvě různé tečny paraboly nejsou rovnoběžné.

Z věty 3 také plyne, že každým bodem Q , který patří do vnější oblasti paraboly, procházejí právě dvě tečny paraboly. Je-li totiž t tečna paraboly procházející tímto bodem Q , je bod F_1 souměrně sdružený k ohnisku F podle tečny t bodem řídicí přímky d paraboly; kromě toho jsou úsečky QF_1 , QF shodné (obr. 3). Bod F_1 je tedy společným bodem přímky d a kružnice $k = (Q; r = |QF|)$. Patří-li bod Q do vnější oblasti paraboly, má (podle věty 1b) od řídicí přímky d menší vzdálenost než od ohniska F .



Obr. 5

Proto přímka d a kružnice k mají společné právě dva různé body F_1, F_2 . Osy úseček FF_1, FF_2 jsou hledanými tečnami paraboly.

Pomocná věta. Na parabole s ohniskem F jsou dány libovolné tři navzájem různé body T_1, T_2, T_3 položené tak, že bod T_3 je vnitřním bodem oblouku T_1T_2 paraboly. Přímky t_1, t_2, t_3 jsou po řadě tečnami paraboly v bodech T_1, T_2, T_3 ; jejich průsečíky jsou $P = t_1 \cap t_2$, $Q = t_2 \cap t_3$, $R = t_3 \cap t_1$. Potom polorovina t_3P je opačná k polorovině t_3F (obr. 5).

Důkaz. Parabola a její vnitřní oblast leží v polorovině t_1F i v polorovině t_2F , a tedy v úhlu $\angle T_1PT_2$, který je průnikem uvedených polorovin. Bod T_3 leží uvnitř tohoto úhlu; proto polopřímka PT_3 protíná úsečku T_1T_2 v jejím vnitřním bodě X . Podle předpokladu leží bod T_3 uvnitř poloroviny T_1T_2P , tj. uvnitř úsečky PX . Protože bod X je vnitřním bodem poloroviny t_3F , je bod P vnitřním bodem poloroviny opačné k polorovině t_3F .

Věta 8 (Lambertova). Libovolné tři navzájem různé tečny paraboly omezují trojúhelník. Kružnice opsaná tomuto trojúhelníku prochází ohniskem F paraboly.

Důkaz. Dokázali jsme, že žádné dvě různé tečny paraboly nejsou rovnoběžné a žádné tři její navzájem různé tečny neprocházejí jedním bodem. Proto tři různé tečny paraboly omezují vždy trojúhelník.

Označme zvolené tři různé tečny paraboly, jejich body dotyku a jejich průsečíky způsobem popsáním v textu pomocné věty. Potom podle této

věty je polorovina t_3P opačná k polorovině t_3F (obr. 5). Je-li φ velikost úhlu $\sphericalangle T_1PT_2$, je podle věty 7

$$|\sphericalangle PFT_1| = |\sphericalangle PFT_2| = \pi - \varphi.$$

Grafický součet úhlů $\sphericalangle PFT_1$, $\sphericalangle PFT_2$ je úhel s rameny FT_1 , FT_2 (v případě znázorněném na obr. 5 to není úhel dutý), jehož velikost je tedy $2(\pi - \varphi)$. Avšak týž úhel je zároveň grafickým součtem úhlů $\sphericalangle RFT_1$, $\sphericalangle RFT_3$, $\sphericalangle QFT_3$, $\sphericalangle QFT_2$, takže je

$$|\sphericalangle RFT_1| + |\sphericalangle RFT_3| + |\sphericalangle QFT_3| + |\sphericalangle QFT_2| = 2(\pi - \varphi). \quad (10)$$

Podle první věty Ponceletovy jsou však úhly $\sphericalangle RFT_1$, $\sphericalangle RFT_3$ shodné; velikost každého z nich budiž α . Podle téže věty jsou také úhly $\sphericalangle QFT_3$, $\sphericalangle QFT_2$ shodné; velikost každého z nich budiž β . Podle (10) je tedy

$$2\alpha + 2\beta = 2(\pi - \varphi),$$

$$\alpha + \beta = \pi - \varphi.$$

Avšak $\alpha + \beta$ je velikost úhlu $\sphericalangle QFR$, který je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle RFT_3$, $\sphericalangle QFT_3$; je tedy

$$|\sphericalangle QFR| = \pi - \varphi.$$

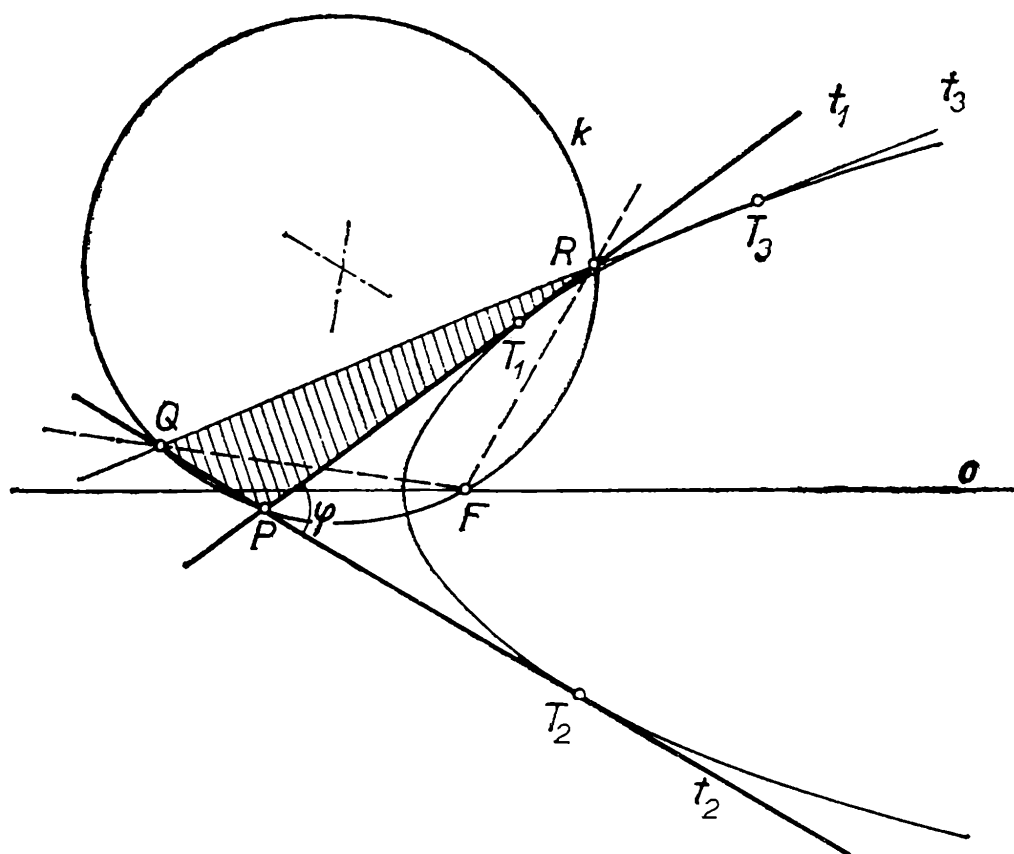
Protože polorovina t_3P je opačná k polorovině t_3F , uvnitř které leží body T_1 , T_2 , leží bod Q uvnitř úsečky PT_2 a bod R uvnitř úsečky PT_1 ; proto úhel $\sphericalangle T_1PT_2$ je totožný s úhlem $\sphericalangle QPR$. Úhel $\sphericalangle QPR$ má velikost φ , úhel $\sphericalangle QFR$ má velikost $\pi - \varphi$; přitom poloroviny QRP , QRF jsou navzájem opačné. Proto body P , F leží na kružnici, která prochází body Q , R a je tedy opsána trojúhelníku PQR .

Věta 9. Nechtě různoběžky t_1 , t_2 s průsečíkem P jsou pevně zvolenými tečnami paraboly v bodech T_1 , T_2 ; ohnisko paraboly budiž F a $|\sphericalangle T_1PT_2| = \varphi$. Potom každá další tečna t_3 paraboly protíná tečny t_1 , t_2 po řadě v bodech R , Q tak, že úhel $\sphericalangle QFR$ má konstantní velikost rovnou $\pi - \varphi$.

Důkaz. Podle věty 8 prochází kružnice k opsaná trojúhelníku PQR ohniskem F . Jestliže dotykový bod T_3 tečny t_3 leží uvnitř oblouku T_1T_2 paraboly (obr. 6), je podle výše uvedené pomocné věty polorovina t_3P opačná k polorovině t_3F . Protože body P , F leží na kružnici k procházející body Q , R a jsou odděleny přímkou $QR = t_3$, je

$$|\sphericalangle QFR| = \pi - \varphi. \quad (11)$$

Jestliže bod $T_3 \neq T_1$, $T_3 \neq T_2$ neleží uvnitř oblouků T_1T_2 , pak buď bod T_1 leží uvnitř oblouku T_2T_3 nebo bod T_2 leží uvnitř oblouku T_1T_3 . Protože jde v podstatě o týž případ, provedeme důkaz pro prvně uvedenou vzájemnou polohu bodů T_1 , T_2 , T_3 (obr. 6). V tomto případě je podle výše uvedené pomocné věty polorovina t_1Q opačná k polorovině t_1F , jejímž vnitřním bodem je bod T_2 ; proto bod $P = t_1 \cap t_2$ leží uvnitř úsečky



Obr. 6

QT_2 . Leží tedy bod P uvnitř poloroviny t_3T_2 , která splývá s polorovinou t_3F . Protože body P, F leží na kružnici procházející body Q, R , a to uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou QR , je $\sphericalangle QFR = \sphericalangle QPR$. Avšak úhel $\sphericalangle QPR$ je vedlejším úhlem k úhlu $\sphericalangle T_1PT_2$ o velikosti φ ; proto platí opět (11).

Cvičení.

1. Množina všech pat kolmic vedených ohniskem paraboly k jejím tečnám je vrcholová tečna paraboly. Dokažte.

2. Budiž F ohnisko a T bod paraboly, který není jejím vrcholem. Potom tečna paraboly sestrojená v bodě T protíná řídicí přímku paraboly v bodě P ; přitom úhel $\sphericalangle FPT$ je pravý. Dokažte. — *Návod*: Užijte věty 2 a 3.

3. Tečny t_1, t_2 paraboly se protínají na její řídicí přímce právě tehdy, jestliže přímka spojující jejich dotykové body T_1, T_2 prochází ohniskem paraboly. Dokažte. — *Návod*: Viz cvičení 2.

4. Tečny t_1, t_2 paraboly jsou vzájemně kolmé právě tehdy, jestliže přímka spojující jejich dotykové body T_1, T_2 prochází ohniskem paraboly. Dokažte.

5. Množina průsečíků všech vzájemně kolmých tečen paraboly je její řídicí přímka. Dokažte.

6. Necht' různoběžky t_1, t_2 s průsečíkem Q jsou tečnami paraboly v bodech T_1, T_2 . Potom kružnice, která se dotýká tečny t_1 (resp. t_2) v bodě Q a prochází bodem T_2 (resp. T_1), prochází také ohniskem paraboly. Dokažte. — *Návod*: Užijte věty 7 a toho, že úhel $\sphericalangle T_1QT_2$ je v uvedené kružnici úhlem úsekovým nad tětivou QT_2 .

Z teorie kuželoseček

STANISLAV HORÁK, Praha

V tomto článku si všimneme dvou málo známých vlastností středových kuželoseček.

I. Dva různé body dané středové kuželosečky, z nichž žádný není jejím vrcholem a které nejsou souměrně sdružené podle žádné osy kuželosečky ani podle jejího středu, průsečík normál sestrojených v těchto dvou bodech, střed dané kuželosečky a nevlastní body os dané kuželosečky leží na rovnosé hyperbole.

Poznámky. 1. Jestliže křivka prochází nevlastním bodem přímky p , je to totéž, jako když řekneme, že její asymptota je rovnoběžná s přímkou p .

2. Zajímavost věty tkví v tom, že středová kuželosečka je určena pěti různými body, které ještě musí vyhovovat nějakým podmínkám, zatímco rovnosá hyperbola z věty I. má procházet šesti různými a předem danými body.

Důkaz. Kartézskou soustavu souřadnic umístíme tak, aby rovnice středové kuželosečky byla

$$Ax^2 + By^2 = AB \quad (1)$$

Jde-li o elipsu, je $A > 0, B > 0$; jde-li o hyperbolu, je $A < 0, B > 0$ nebo $A > 0, B < 0$.

Hyperbola, která prochází nevlastními body obou os středové kuželosečky (tj. nevlastními body obou os souřadnic), má rovnici

$$xy + ax + by + c = 0. \quad (2)$$

Prochází-li hyperbola (2) počátkem $O = [0; 0]$, musí být $c = 0$. Rovnice (2) se zjednoduší:

$$xy + ax + by = 0, \quad (3)$$

kde $ab \neq 0$. Kdyby totiž např. $a = 0$, pak by rovnice (3) nabyla tvaru

$$y(x + b) = 0$$

a kuželosečka by se rozpadla ve dvě přímky $y = 0, x + b = 0$. Podobně by tomu bylo, kdyby $b = 0$.

Na hyperbole (3) leží paty dvou normál kuželosečky (1), což znamená, že na hyperbole (3) leží dva různé body kuželosečky (1). Tyto dva body jsou $[x_1; y_1], [x_2; y_2]$. To nás přivádí k soustavě rovnic (neznámé jsou a, b):

$$\begin{aligned}x_1 a + y_1 b &= -x_1 y_1, \\x_2 a + y_2 b &= -x_2 y_2.\end{aligned}$$

Řešením dostaneme

$$a = \frac{y_1 y_2 (x_2 - x_1)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad b = \frac{x_1 x_2 (y_2 - y_1)}{x_2 y_1 - x_1 y_2}$$

a rovnice hledané hyperboly má pak tvar

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) xy + y_1 y_2 (x_2 - x_1) x - x_1 x_2 (y_2 - y_1) y = 0. \quad (4)$$

To je konečný tvar rovnice hyperboly. V dalším musíme zjistit průsečík normál sestavených v bodech $[x_1; y_1], [x_2; y_2]$.

Směrnice normály kuželosečky (1) v jejím bodě $[x_1; y_1]$ je

$$k_n = \frac{B y_1}{A x_1},$$

potom rovnice normály v tomto bodě je

$$y - y_1 = \frac{B y_1}{A x_1} (x - x_1)$$

a rovnice normály v bodě $[x_2; y_2]$ je

$$y - y_2 = \frac{B y_2}{A x_2} (x - x_2).$$

Průsečík N těchto dvou normál je

$$N = \left[\frac{M x_1 x_2 (y_1 - y_2)}{B (x_1 y_2 - x_2 y_1)}; \frac{M y_1 y_2 (x_1 - x_2)}{A (x_1 y_2 - x_2 y_1)} \right],$$

kde $M = A - B$.

Znalost úprav a trocha trpělivosti stačí nyní k tomu, aby se dokázalo, že bod N leží na této kuželosečce a tím je důkaz vysloveného tvrzení proveden.

II. Na dané parabole zvolme tři různé body A, B, C . Jestliže normály paraboly v těchto bodech procházejí jedním bodem, pak těžiště trojúhelníka ABC leží na ose paraboly. Platí i obráceně: Jestliže těžiště trojúhelníka ABC — kde A, B, C jsou body paraboly — leží na ose paraboly, potom normály paraboly v těchto třech bodech procházejí jedním bodem.

Řešení. Zvolme kartézskou soustavu souřadnicovou tak, aby daná parabola měla rovnici

$$y^2 = 2px.$$

Potom dané tři body jsou

$$A = \left[\frac{a^2}{2p}; a \right], \quad B = \left[\frac{b^2}{2p}; b \right], \quad C = \left[\frac{c^2}{2p}; c \right].$$

Tečna paraboly v bodě A má rovnici

$$ay = p \left(x + \frac{a^2}{2p} \right).$$

Její směrnice je $k_1 = \frac{p}{a}$ a směrnice normály je $k_2 = -\frac{a}{p}$.

Podle toho rovnice normály v bodě A je

$$y - a = \frac{-a}{p} \left(x - \frac{a^2}{2p} \right)$$

a po úpravě

$$2apx + 2p^2y = 2ap^2 + a^3.$$

Rovnice normály v bodech B a C jsou pak postupně

$$2bpx + 2p^2y = 2bp^2 + b^3,$$

$$2cpx + 2p^2y = 2cp^2 + c^3.$$

Průsečík prvních dvou normál (druhých dvou normál) je tudíž

$$\left[\frac{2p^2 + a^2 + ab + b^2}{2p}; \frac{-a^2b - ab^2}{2p^2} \right], \text{ resp. } \left[\frac{2p^2 + b^2 + bc + c^2}{2p}; \frac{-b^2c - bc^2}{2p^2} \right].$$

Jestliže tyto dva body mají splynout, pak jejich souřadnice y si musí být rovny, tj.

$$\frac{-b^2c - bc^2}{2p^2} = \frac{-a^2b - ab^2}{2p^2}. \quad (1)$$

Budeme upravovat a přitom si uvědomíme, že a, b, c jsou vesměs různá čísla, neboť body A, B, C jsou vesměs různé body.

$$\begin{aligned} b^2c + bc^2 &= a^2b + ab^2, \\ bc - ab + c^2 - a^2 &= 0, \\ (c - a)(b + c + a) &= 0, \\ a + b + c &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Tím jsme první část úlohy skončili. Souřadnice y těžiště trojúhelníka

ABC je totiž $\frac{a + b + c}{3}$ a rovnice (2) ukazuje, že toto těžiště leží na ose x čili na ose paraboly.

Obráceně, platí-li rovnice (2), můžeme obrácením postupu dojít až k rovnici (1) a tím jsme s řešením předložené úlohy hotovi.

Cvičení

Ve větě I. jsme vyloučili některé zvláštní polohy daných bodů $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$. Všimněte si nyní, jak se změní rovnice (4) a souřadnice bodu N , jestliže dané body jsou:

- a) sousedními vrcholy elipsy;
- b) protějšími vrcholy kuželosečky;
- c) souměrně sdružené podle některé osy kuželosečky;
- d) jeden z daných bodů je vrchol středové kuželosečky.

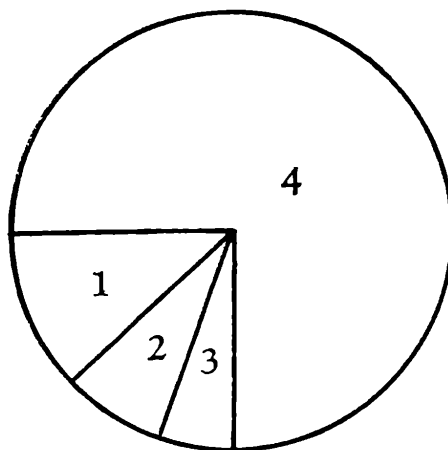
Poznámka. První příklad byl vzat ze staršího ročníku *Revue des mathématiques spéciales* a druhý z *Elemente der Mathematik*.

fyzika

Neutronová bomba a její účinky jako zbraně hromadného ničení

RNDr. RUDOLF TULAK, Vysoká vojenská velitelско-technická škola, Marti

V poslední době celý pokrokový svět je znepokojen úmyslem vlády Spojených států vyrábět novou zbraň hromadného ničení — neutronovou bombu. Široký protest vyvolává i záměr amerických úřadů vyzbrojit touto zbraní vojenské jednotky Spojených států v západní Evropě. Výrobou a rozmístěním kvalitativně nových systémů zbraní zesilují USA závody ve zbrojení a utvářejí další překážky jednání o omezení strategických útočných zbraní a dosažení smluv o zákazu jaderných zbraní a o odzbrojení.



Obr. 1. Rozdělení energií při výbuchu neutronové bomby:
1. - světelné záření, 2. - tlaková vlna, 3. - záření gama, 4. - neutronové záření

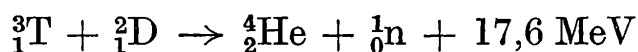
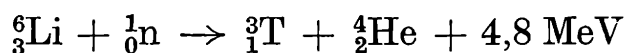
Ve snaze utišit rozhořčené veřejné mínění pokrokových lidí prohlašují militaristické kruhy Spojených států tuto kvalitativně novou zbraň za „čistou“, a dokonce za „humánní“. „Čistou“ je prý proto, že nemá vedlejší radioaktivní účinky, „humánní“, že ušetří umělecké a materiální hodnoty. Neutronová bomba ničí pouze živé organismy!

Podívejme se blíže z fyzikálního hlediska na tuto zbraň a provedme její klasifikaci z aspektu principu, na kterém je konstruována, i jejího účinku na živý, především lidský organismus.

Princip neutronové bomby

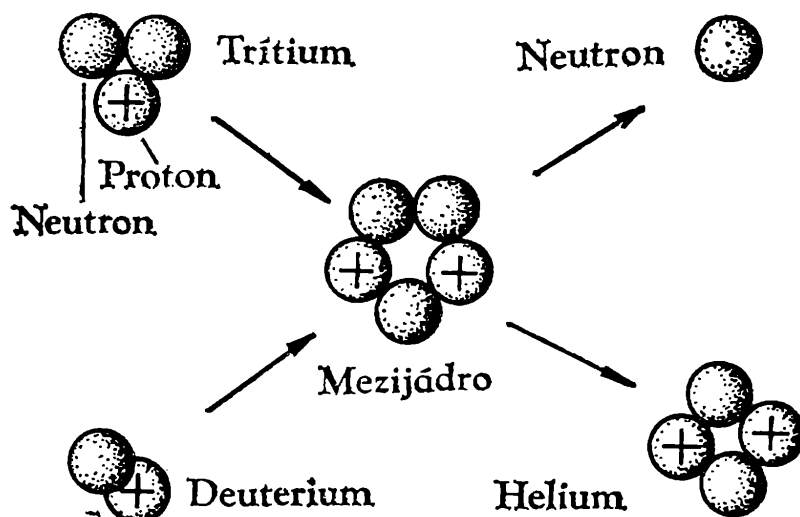
Doposud nebyl v dostupných pramenech zveřejněn princip neutronové bomby; má se za to, že se jedná o modifikaci vodíkové bomby malé či střední ráže, u které jsou vhodnou konstrukcí potlačeny dva ze tří účinků, a to tlakový (bořící) a tepelný (světelný) účinek, a naopak je zesílen účinek třetí — radiační, zejména neutronová radiace (viz. obr. 1). Při výbuchu uvedené bomby probíhá termonukleární syntetická reakce; konkrétně jde o přeměnu izotopu vodíku na hélium podle následující rovnice (viz. obr. 2):

Jelikož oba izotopy vodíku jsou v normálním stavu plyny, jako výchozí látky se používá tuhého deuteridu lithia LiD:



Celkové množství energie, které se při takové reakci uvolňuje, je asi 4x větší než při štěpení stejného množství uranu nebo plutonia.

Aby mohla nastat uvedená syntéza (splnutí), obě jádra se musí střetnout s tak vysokou relativní kinetickou energií, aby překonala odpudivou elektrickou sílu a přiblížila se k sobě na tak malou vzdálenost, že již začnou působit přitažlivé jaderné síly a obě jádra se „slijí“ v jedno. Tuto



Obr. 2. Schéma termonukleární reakce syntetické
 ${}^2_1\text{D} + {}^3_1\text{T} \rightarrow [{}^5_2\text{He}] \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 17,6 \text{ MeV}$

podmínku lze zatím splnit za nesmírně vysokých teplot řádu 10^7 až 10^8 °C (deset až sto milionů stupňů Celsia), proto se uvedená a další podobné transmutace nazývají *termonukleární čili teplojaderné reakce*.

Při vysokých teplotách oddělují se jádra atomů od obalu, vzniká směs „holých“ jader a elektronů, tzv. *plazma*. Proto „rozbuškou“ vodíkové zbraně byla až doposud vždy atomová bomba, která vyvine potřebnou teplotu a vytvoří nezbytné podmínky k průběhu teplojaderné reakce. V žádném případě nešlo u vodíkových bomb o „čistou“ zbraň, i když termonukleární výbuch sám o sobě není spojen se vznikem zhoubných radioaktivních produktů (když nepřihlížíme k indukované radioaktivitě vyvolané v atmosféře i na zemi). I když víme, že směs T a D má nejnižší zápalnou teplotu, řádově 10^7 °C a největší účinný průřez, je zatím zapálení této nálože jinak než atomovou bombou velmi nesnadné, ne-li zcela vyloučené. Teoreticky by bylo ještě možné zapálení uvedené směsi laserovým paprskem, avšak vzhledem k malým rozměrům nálože bude tento způsob málo pravděpodobný. Poslední prameny připouštějí dokonce možnost dosažení potřebné počáteční teploty a tlaku soustředěním (foksováním) energie výbuchu klasické výbušniny do místa termonukleární nálože.

Tok neutronů a jeho zvláštnosti

Výsledkem uvedené syntézy je nejen jádro hélia a uvolnění značné energie, ale i vyzáření rychlého neutronu s energií nad 1 MeV. Šíření neutronů v prostředí je doprovázeno specifickým tvořením iontů. Ráz a stupeň zasažení člověka neutrony se určuje stejným způsobem jako při působení záření gama, totiž koncentrací iontů, které se vytvoří při průchodu neutronů organismem člověka. Avšak proces tvoření iontů v tomto

případě má podstatně jiný ráz než při působení gama záření. K objasnění zvláštnosti procesu ionizace prostředí neutrony musíme si všimnout základních druhů vzájemného působení neutronů a látky prostředí.

První zvláštností neutronů je, že ze všech částic mají největší pronikavost. Ta se vysvětluje tím, že neutrony nemají elektrický náboj, takže na ně nepůsobí elektrické síly existující mezi jádry a elektrony atomu prostředí.

Druhá zvláštnost neutronů spočívá v jejich specifické *rozptylu a zachycení*.

Při zachycení neutronu se tvoří jádra těžších izotopů příslušného prvku nebo izotopy jiných prvků. Jádro, které zachytilo neutron, stává se zpravidla radioaktivním.

V případě rozptylu neutron při srážce s jádrem atomů odevzdá jim část své energie a změní směr svého pohybu, t.j. rozptýlí se. Při představě pružného rozptylu neutronů na atomových jádrech absorbujícího prostředí součet kinetických energií před srážkou a po srážce zůstává konstantní. Za předpokladu centrální pružné srážky ztráta energie neutronu (ΔE) se může vyjádřit vztahem

$$\Delta E = E_{dn} \frac{4m_j \cdot m_n}{(m_j + m_n)^2},$$

nebo jednodušeji

$$\Delta E = E_{dn} \frac{4A}{(A + 1)^2},$$

kde E_{dn} je energie dopadajícího neutronu,

m_n hmotnost neutronu,

m_j hmotnost atomového jádra rozptylujícího prostředí,

$A = \frac{m_j}{m_n}$ nukleonové číslo terčového atomu.

Energie rozptýleného neutronu (E_{rn}) tedy bude

$$E_{rn} = E_{dn} - \Delta E = E_{dn} \left(\frac{m_j - m_n}{m_j + m_n} \right)^2$$

nebo také

$$E_{rn} = E_{dn} \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2$$

Při pružné srážce neutronu s těžkými atomovými jádrem je přenesená energie zanedbatelná, neboť $A \gg 1$ a $E_{rn} \doteq E_{dn}$. Tedy neutrony se rozptylují, aniž jejich energie podstatně poklesne.

Podstatně jiný charakter má však srážka neutronu s lehkým jádrem. Za předpokladu, že $A = 1$, bude $E_{rn} = 0$ a $\Delta E = E_{dn}$. Energii dopadajícího neutronu přebere atomové jádro a neutron ztratí téměř veškerou

svoji kinetickou energii. Nejvíce se této podmínce přibližuje rozptyl neutronu v prostředí vodíku, neboť hmotnost neutronu a protonu je velmi blízká a při jejich vzájemné srážce ztráta kinetické energie neutronu se blíží hodnotě 100 %.

Chceme-li náš problém objasnit pomocí analogie z makrosvěta, pak lze říci, že neutron při srážce s těžkým jádrem od něho odskočí podobně jako pružný míč od stěny, přičemž nezmění svou energii. Při centrální srážce míčku se stejně hmotným tělesem dochází k vzájemnému předání energií. Právě na této vlastnosti neutronu jsou založeny účinky neutronové bomby.

Tak například, aby rychlý neutron s energií 2 MeV ztratil prakticky všechnu svou energii, postačí k tomu „pouhých“ 18 srážek s lehkým vodíkem, zatím co u těžkých prvků, jakými jsou kupř. olovo a uran, je zapotřebí 1 500 až 2 000 srážek k dosažení stejného účinku. Neutronové záření projde proto poměrně snadno cihlovou stěnou, pancířem a podobnými překážkami, aniž tyto materiály boří nebo jinak mění. Jestliže vrstva vody 2,7 cm silná zeslabí neutronové záření na polovinu, u pancíře je k tomu zapotřebí tloušťky 11,4 cm a u cihlové stěny 10 cm. Tyto údaje mají pouze orientační charakter, neboť tloušťky polovrstev různých materiálů závisí předně na energii neutronů. Ta může při výbuchu neutronové bomby dosahovat hodnoty 14 až 17 MeV

Prochází-li neutronové záření lidským organismem, dochází jednak ke zpomalování neutronů pružnými srážkami s atomovými jádry atomů živé tkáně, jednak k jejich absorpci. Neutrony pohlcuje především vodík, který je v lidském organismu značně obsažen. Tím se narušuje normální látková výměna a mění se životní činnost buněk, jednotlivých orgánů a systémů. Vzniká nemoc z ozáření.

V porovnání se známým gama zářením, které je hlavní složkou pronikavé radiace vyvolané výbuchem atomové bomby, způsobují neutrony v lidském organismu daleko zhoubnější následky (asi 10 až 20 x).

Z hlediska vojenského použití představují autoři neutronovou bombu jako zbraň taktického použití, kterou lze umístit do bojových hlavic taktických raket Lance s doletem 120 km. Perspektivně je počítáno i se zmenšenou náloží pro dělostřelecké granáty.

Při explozi této nálože, kterou Američané označují jako „hlavice se zeslabeným radiačním zářením a omezeným tepelným a výbušným efektem“, vzniká charakteristický mrak ve tvaru hříbu. Tlaková vlna a světelné záření mají ničivé účinky jen na ploše o poloměru (200 až 300) m od epicentra. Za touto hranicí už zůstávají všechny zděné objekty, bojová technika a jiné předměty nepoškozeny. Do vzdálenosti 800 m od epicentra je ozáření osob (expozice) smrtelné, ale ve vzdálenosti 1 400 metrů je již 20 krát nižší.

Podle velikosti expozice ozáření, kterému je lidský organismus vystaven, projevují se následky během několika minut, hodin nebo i dní.

Nejdříve se dostavuje nevolnost, slabost, závratě, pak se zhoršuje dýchání a nastupuje nechutenství. Během týdne vypadají zasažené osobě vlasy, dochází ke krvácení a ke ztrátě vědomí.

Přestože neutrony mají vysokou pronikavost, neznamená to, že není proti nim ochrany. Různé vrstvené materiály z lehkých prvků, které nabízí moderní chemie, jsou dostatečnou ochranou proti této zbrani.

Z fyzikálního pohledu na neutronovou bombu vidíme, že jde v podstatě o modifikaci vodíkové bomby, která je zdrojem intenzivního toku neutronového záření.

Svou fyzikální podstatou je tato bomba nebezpečnou jadernou zbraní hromadného ničení s nedozírnými účinky na lidský organismus. Použití tzv. „čisté bomby“ nemůže být v žádném případě ospravedlnováno tím, že neničí materiální hodnoty a kulturní památky. Výroba tzv. „čisté bomby“ může pouze „znečistit“ ovzduší mírového uvolnění v Evropě. Jde o zbraň namířenou proti všemu živému.

Použitá literatura :

1. Varga Š., Tolgyessy J.: Rádiochémia a radiačná chémia, Alfa, Bratislava, 1976.
2. Zápisník (Z'77), číslo 22, Magnet, Praha.
3. Atom, číslo 11/1977, Magnet, Praha.

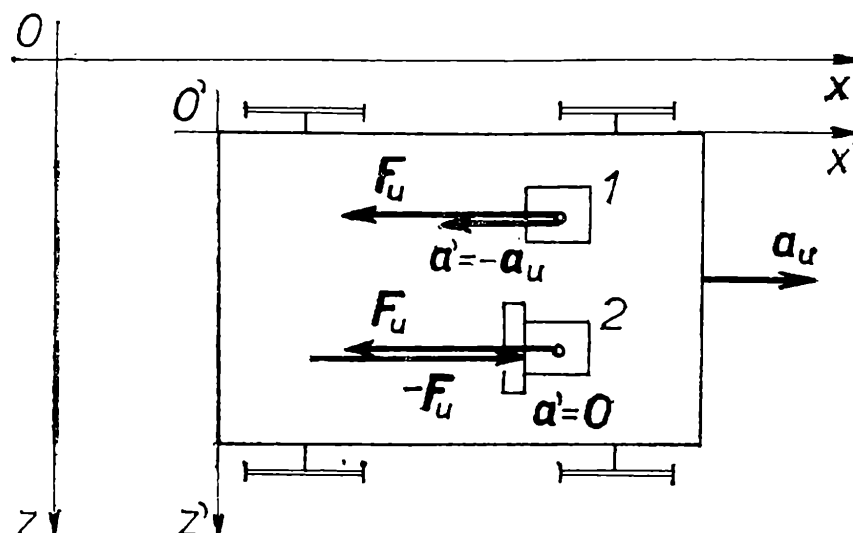
0 setrvačných silách

Doc. Ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., Vyškov

Se setrvačnými silami se setkáváme — obrazně řečeno — na každém kroku. Jde přitom o fyzikální jevy, které nejsou tak jednoduché, jak by se na první pohled zdálo. Vždyť se také probírají ve středoškolské fyzice jen povrchně. Cílem tohoto článku je hlouběji pojednat o setrvačných silách, a to nejen z hlediska jejich velikosti a projevů, ale i z hlediska jejich zdroje. Vlastní výklad problematiky je veden tak, aby byl zvládnutelný prostředky středoškolské matematiky a fyziky.

1. Unášivá setrvačná síla

Nejsnáze si vznik a působení setrvačné síly vysvětlíme na jednoduchém případě neinerciální vztažné soustavy $S' (x', y', z')$, která vzhledem k inerciální soustavě $S (x, y, z)$ koná přímočarý pohyb s unášivým zrychlením $\mathbf{a}_u$ tak, aby se zachovávala rovnoběžnost os obou soustav.



Obr. 1

Pro větší názornost si např. představme, že s počátkem O' neinerciální soustavy S' je spojen železniční vagón, který se uvedeným zrychlením $\mathbf{a}_u$ pohybuje po přímočarých vodorovných kolejnicích ve směru osy x (obr. 1). Mějme dvě stejná tělesa 1, 2, hmotnosti m , která se mohou pohybovat po podlaze vagónu bez tření.

Všimněme si nejprve tělesa 1, které je uloženo ve vagóně volně. Dá-li se vagón do pohybu se zrychlením $\mathbf{a}_u$, zůstává těleso 1 podle zákona setrvačnosti vzhledem k inerciální soustavě S v klidu. Jinak řečeno — těleso 1 bude vzhledem k pozorovateli na trati v klidu; vzhledem k druhému pozorovateli ve vagóně se bude pohybovat se zrychlením $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}_u$. Těleso zůstává vzhledem k pozorovateli na trati v klidu, protože na ně nepůsobí žádná skutečná síla. Avšak existenci pohybu tělesa vzhledem k vagónu se zrychlením $-\mathbf{a}_u$ přisoudí pozorovatel ve vagóně působení síly

$$\mathbf{F}_u = -m \mathbf{a}_u. \quad (1)$$

Tato síla je pro případ volného tělesa *silou zdánlivou (fiktivní)*; není silou skutečnou, která by tělesu udělila stejné zrychlení jako má v našem případě vagón. Je podmíněna setrvačností tělesa, která nutí těleso neměnit svůj pohybový stav vzhledem k inerciální soustavě, pokud na ně nepůsobí skutečná síla. Proto nese název *zdánlivá setrvačná síla* a k tomuto názvu se v případě síly (1) připojuje ještě přívlastek „*unášivá*“, protože souvisí s unášivým zrychlením soustavy S' v inerciální soustavě S .

Těleso 2 na obr. 1 je opřeno o zarážku na vagóně, která plní funkci *vazby* tělesa 2 s neinerciální soustavou S' . Těleso 2 je nuceno pohybovat se se stejným zrychlením $\mathbf{a}_u$ jako vagón a v důsledku setrvačnosti bude na ně působit *unášivá setrvačná síla* $\mathbf{F}_u = -m \mathbf{a}_u$. Touto silou se těleso brání změnit svůj pohybový stav, a proto se také někdy nazývá *setrvačný odpor*. Tato síla je — na rozdíl od síly působící na volné těleso 1 — sku-

tečná. Její velikost, směr a orientace je však stejná jako u zdánlivé setrvačné síly (1), a proto pro ni zavádíme stejné označení.

Skutečnou setrvačnou sílu pocituje každý cestující v dopravním prostředku při změně jeho rychlosti (silně např. při startu reaktivního letadla anebo při prudkém brzdění automobilu). Zdánlivou sílu bychom však nepocitovali. Představme si, že jsme jedním ze dvou kosmonautů v kosmické lodi konající setrvačný pohyb v kosmickém prostoru. Loď nechť sestává ze dvou částí (modulů), které se v určitém okamžiku rozpojí a kosmonaut ve druhé části zapne brzdicí raketové motory. Na kosmonauta v první (nebrzděné) části nepůsobí žádné síly; opožďování druhé části je v jeho inerciální soustavě způsobeno skutečnou vnější silou brzděného motoru. Na kosmonauta ve druhé části působí skutečná setrvačná síla a vzdalování první části ve své neinerciální soustavě přisoudí setrvačné síle, která je však zdánlivá (na první část lodi ve skutečnosti nepůsobí žádná síla).

Víme, že Newtonovy pohybové zákony říkají, jaký je pohyb bodu (tělesa), nepůsobí-li na něj síla, a jak se jeho pohyb změní působením síly. Tyto zákony platí v inerciálních soustavách a vzniká nyní otázka, jak se změní druhý pohybový zákon v naší neinerciální soustavě S' , která v inerciální soustavě S koná posuvný pohyb se zrychlením $\mathbf{a}_u$.

Označíme-li $\mathbf{a}$ zrychlení bodu v soustavě S a $\mathbf{a}'$ v soustavě S' , je zřejmé, že platí $\mathbf{a} = \mathbf{a}_u + \mathbf{a}'$. Z hlediska pozorovatele v inerciální soustavě S můžeme pro popis tohoto bodu použít druhý pohybový zákon, který v klasickém případě má tvar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Tedy $\mathbf{F} = m(\mathbf{a}_u + \mathbf{a}')$. Tento vztah můžeme psát též ve tvaru

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_u = m\mathbf{a}', \quad (2)$$

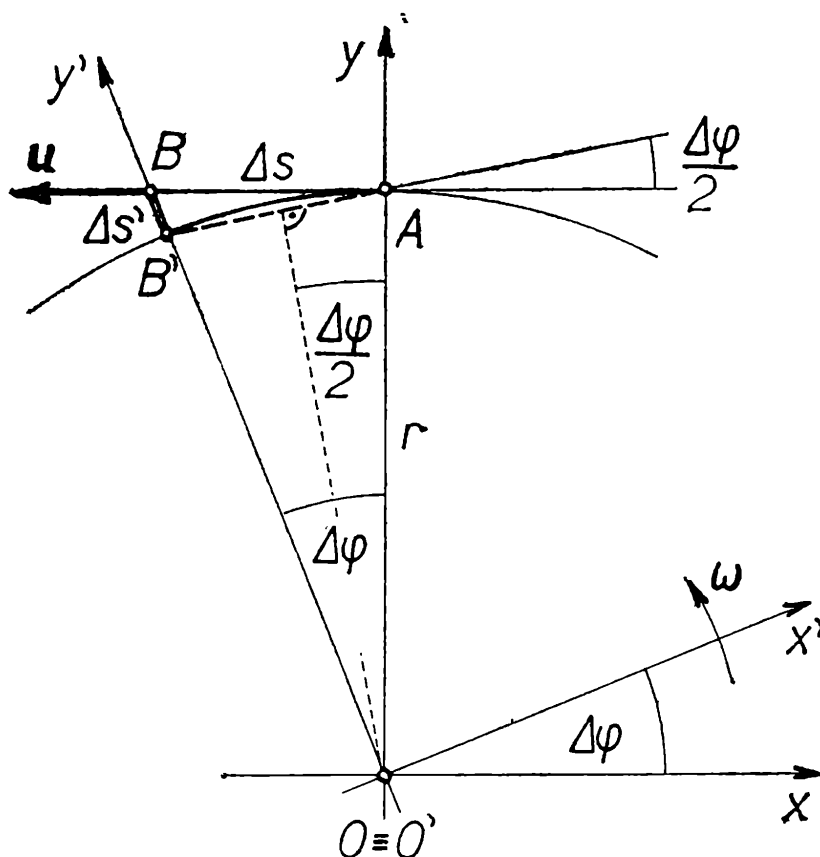
kde $\mathbf{F}_u$ je unášivá setrvačná síla (1). Abychom tedy v neinerciální soustavě dostali správný pohybový zákon, musíme připojit k vnější síle $\mathbf{F}$, působící v soustavě inerciální, ještě setrvačnou sílu $\mathbf{F}_u$.

2. Odstředivá síla

Nyní vyšetříme působení setrvačných sil v rovnoměrně rotujících neinerciálních soustavách. Nejprve se budeme zabývat odstředivou silou. Tato síla se nejčastěji zavádí jako reakce na sílu dostředivou. Budeme postupovat jinak a odvodíme ji kinematicky jako sílu zdánlivou.

Představme si, že volný hmotný bod hmotnosti m koná v inerciální soustavě S setrvačný pohyb rychlostí $\mathbf{u}$ tak, že jeho trajektorie je kolmá k ose y a prochází bodem A (obr. 2). Sledujme, jak se bude jevit pohyb tohoto bodu pozorovateli v neinerciální soustavě S' , konající rovnoměrný rotační pohyb úhlovou rychlostí $\omega = \frac{u}{r}$, kde r je vzdálenost

bodu A od středu otáčení $O \equiv O'$. V okamžiku, kdy obě soustavy splývají, nechť je pozorovatel i hmotný bod v bodě A (v tomto okamžiku je



Obr. 2

tedy hmotný bod vůči pozorovateli v relativním klidu, protože rychlost pozorovatele $u = \omega r$ zde splývá s rychlostí hmotného bodu). Za časový interval Δt se soustava S' pootočí o úhel $\Delta\varphi = \omega\Delta t$, hmotný bod se dostane do polohy B , kdežto pozorovatel do polohy B' . Přitom $\overline{AB} = \widehat{AB'} = \Delta s = r\Delta\varphi = u\Delta t$.

Pozorovateli v S' se hmotný bod vzdálí o $\overline{B'B} = \Delta s'$. Z obr. 2 je zřejmé, že pro Δt (resp. Δs) dostatečně malé můžeme $\Delta s'$ určit jako velikost „oblouku“ příslušného kružnici poloměru Δs a úhlu $\frac{\Delta\varphi}{2}$ (tento úhel svírá sečna AB' se směrem pohybu bodu). Tedy

$$\Delta s' = \Delta s \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{1}{2} r (\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r (\Delta t)^2$$

Porovnáme-li tento vztah se vztahem pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu

$$\Delta s' = \frac{1}{2} a_0 (\Delta t)^2,$$

vidíme, že pozorovateli se bude bod vzdalovat od středu $O \equiv O'$ se zrychlením

$$a_0 = \omega^2 r = \frac{u^2}{r}. \quad (3)$$

Vznik tohoto zrychleného pohybu přisoudí pozorovatel v neinerciální soustavě S' působení *setrvačné odstředivé síly*

$$F_0 = ma_0 = m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r}. \quad (4)$$

Tato síla je v uvažovaném případě silou zdánlivou, protože ve skutečnosti na hmotný bod nepůsobí žádná skutečná síla.

Jiná situace ovšem nastane, připojíme-li hmotný bod pevně do neinerciální soustavy S' . Pak odstředivá síla, která bude na bod působit, bude silou skutečnou. Tuto sílu pocítuje např. kosmonaut v odstředivém stroji pro nácvik přetížení organismu. Bod (těleso) se v těchto případech vzhledem k neinerciální soustavě nepohybuje proto, že vedle setrvačné síly zde působí reakce vazby (např. závěsu).

3. Coriolisova síla

Podobným způsobem, jako jsme odvodili odstředivou sílu, odvodíme nyní další setrvačnou sílu — sílu Coriolisovu.

V inerciální soustavě S nechť rovnoměrně rotuje úhlovou rychlostí ω neinerciální soustava S' tak, že počátky obou soustav jsou totožné (obr. 3). V počátečním okamžiku, kdy osy y, y' soustav splývají, nechť pozorovatel v bodě A neinerciální soustavy vrhne hmotný bod (těleso) rychlostí $\mathbf{v}$ ve směru osy $y' \equiv y$. Hmotný bod má vedle rychlosti $\mathbf{v}$ ještě unášivou rychlost bodu A soustavy S' ($\mathbf{u} = \omega r$).

Za časový interval Δt se soustava otočí o úhel $\Delta\varphi = \omega\Delta t$, pozorovatel se dostane do polohy B' a hmotný bod do polohy B , přičemž $\overline{BB'} = \Delta s = v\Delta t$. Protože hmotný bod si v důsledku setrvačnosti ponechává výslednou rychlost, jakou měl v bodě A , odchyluje se jeho trajektorie od osy y' . Lineární odchylku $\Delta s'$ za dostatečně krátký interval Δt můžeme určit z výrazu

$$\Delta s' = \Delta s \Delta\varphi = (v\Delta t)(\omega\Delta t) = \frac{1}{2} (2v\omega)(\Delta t)^2.$$

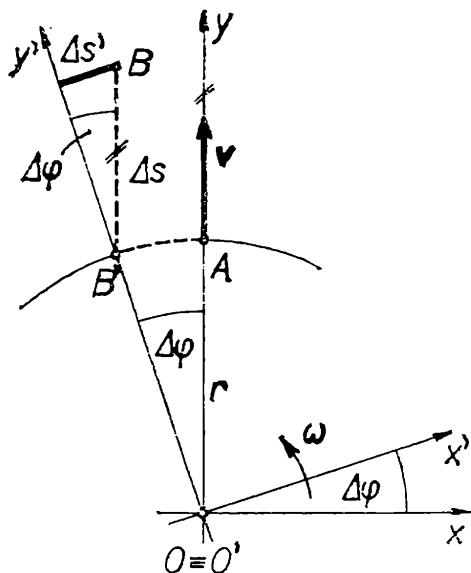
Výraz jsme opět upravili do tvaru pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu. Pozorovatel v neinerciální soustavě S' tedy zjistí, že se hmotný bod odchyluje od směru vrhu (od osy y') doprava (při kladné orientaci rotace soustavy S') se zrychlením

$$a_C = 2v\omega. \quad (5)$$

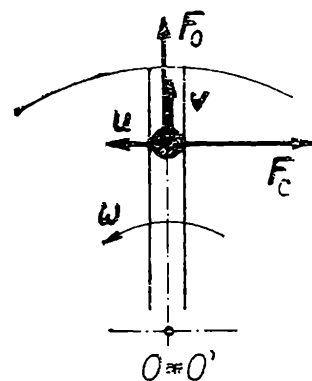
Toto zrychlení bylo na počest svého objevitele nazváno *Coriolisovo*. Vznik tohoto zrychlení přisoudí pozorovatel v soustavě S' působení setrvačné síly — *síly Coriolisovy*,

$$F_C = ma_C = 2mv\omega. \quad (6)$$

V uvažovaném případě jde o sílu zdánlivou.



Obr. 3



Obr. 4

Jako síla skutečná se Coriolisova síla projeví opět v případech, kdy je uskutečněna vazba hmotného bodu (tělesa) s neinerciální soustavou S' . Bude tomu např. při pohybu kuličky v radiální drážce rotující desky na obr. 4. Zde, stejně jako v případě pohybu hmotného bodu na obr. 3, se vedle Coriolisovy síly uplatňuje i síla odstředivá.

Jestliže se při pohybu hmotného bodu v orientaci od středu $O = O'$, hmotný bod opoždí vzhledem k bodům na průvodiči (resp. ose y'), bude naopak při pohybu směrem ke středu $O' = O$ hmotný bod předbíhat body na příslušném průvodiči. Vždy však vzniká v případě pravotočivé rotace soustavy S' odchylka pohybu bodu doprava od směru vrhu a v případě levotočivé rotace naopak odchylka doleva.

Coriolisova síla se uplatňuje při pohybu na Zemi, avšak ne v každé zeměpisné šířce φ stejně. Rozhodující je průmět vektoru úhlové rychlosti Země ω_z do vodorovné roviny, tedy $\omega = \omega_z \sin \varphi$. Tato síla ovlivňuje pohyb střel a raket při střelbě na velké vzdálenosti, směr větru, podemílání pravých břehů řek na severní polokouli (ať jde o řeku tekoucí k severu nebo k jihu) a levých břehů řek na jižní polokouli.

4. Zdroj setrvačných sil

Řešme nyní otázku zdroje skutečných setrvačných sil z hlediska základního materialistického postulátu, podle kterého *všechny fyzikální jevy mají původ v materiálních objektech*. Jak jsme si vysvětlili, skutečné setrvačné síly vznikají při zrychleném pohybu těles (resp. materiálních objektů) v inerciálních vztažných soustavách. Inerciální vztažné soustavy, tj. soustavy, vzhledem k nimž koná volný hmotný bod rovnoměrný přímočarý pohyb, nemůžeme definovat vzhledem k nějakému fixnímu „absolutnímu“ prostoru. Musíme je definovat ve vztahu k materiálním objektům (nebo jejich souborům) ve vesmíru.

Jednoduchou (i když ne zcela dokonalou) realizací inerciálních soustav je známá soustava spojená se „stálicemi“ naší Galaxie. Obecněji bychom museli definovat inerciální soustavy vzhledem k soustavě galaxií v metagalaxii, protože naše Galaxie se v této soustavě otáčí. Perioda této rotace je velmi dlouhá, avšak není stejná pro všechny části Galaxie — činí asi 10^8 roků v okolí Slunce. Z toho plyne, že se Galaxie pootočí za 100 let o pouhou úhlovou vteřinu. Vhodnou volbou „stálic“ lze však dosáhnout toho, aby se soustava spojená se „stálicemi“ neotáčela rychleji než několik tisícín úhlové vteřiny za 100 let.

Ideální realizací inerciální soustavy by byla vztažná soustava definovaná k vesmíru jako celku, tzv. *vesmírná vztažná soustava*. V této soustavě je potenciál gravitačního pole vesmíru konstantní a síla, která by působila na libovolný materiální objekt, je nulová. Tím je také dokonale splněn princip setrvačnosti. Samozřejmě vlastnosti inerciálních soustav splňují všechny soustavy, které se pohybují rovnoměrně přímočaře vzhledem k vesmírné vztažné soustavě.

V inerciálních vztažných soustavách se silové působení vesmírného gravitačního pole neprojevuje. Zrychleným pohybem materiálního objektu vzhledem k vesmírné vztažné soustavě však vznikají setrvačné síly. Zdroj setrvačných sil musíme proto hledat v materiálních objektech rozptýlených v celém vesmíru. Přesněji řečeno: *setrvačné síly vznikají (indukují se) při zrychleném pohybu materiálního objektu vzhledem ke gravitačnímu poli vesmíru*.

Podobně jako gravitační setrvačné síly vznikají i elektrické setrvačné síly v časově proměnném elektromagnetickém poli (tzv. akcelerační elektromagnetická indukce). S tímto jevem se setkáváme v transformátorech (zrychlený pohyb elektronů v primárním vinutí způsobuje zrychlený pohyb elektronů v sekundárním vinutí).

Podrobnější informace o vzniku setrvačných sil v gravitačním a elektrickém poli najde čtenář v literatuře [1, 2].

Literatura :

- [1] B. Vybíral: Fyzikální pole z hlediska teorie relativity. SPN, Praha 1976.
- [2] Z. Horák, F. Krupka: Fyzika. SNTL, Praha 1976.

Budou planety na jedné přímce?

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

V roce 1974 vyšel v časopise Newsweek článek, zabývající se situací která ve sluneční soustavě nastane v roce 1982. O tomto článku referovali i sovětský časopis *Za rubežom* a ve zkráceném znění se s ním seznámil i čtenáři našeho denního tisku. V článku je vyložena hypotéza dvou amerických astronomů, podle jejichž výpočtů by měly být v roce 1982 všechny planety sluneční soustavy na jedné přímce procházející Sluncem, a to na téže straně od Slunce. Tato konfigurace planet má mít podle hypotézy amerických astronomů velmi neblahé důsledky pro život na Zemi. Autoři hypotézy předpokládají, že vlivem gravitačních účinků planet bude vyvolána značná aktivita Slunce, magnetické bouře a erupce na Slunci pak způsobí prudké změny v cirkulaci horních vrstev zemské atmosféry, což povede ke změnám počasí; kromě toho vlivem tření ovzduší o povrch Země dojde ke změnám v rychlosti rotace Země, což povede ke vzniku zemětřesení. V závěru článku uvádějí sice autoři hypotézy, že uvedené důsledky nemusí nastat, přesto však článek vzbudil velkou pozornost a u mnoha čtenářů způsobil vážné znepokojení.

Ve druhém čísle časopisu *Zemlja i Vselennaja* z r. 1977 se touto problematikou znovu zabýval kandidát fyzikálně-matematických věd *V. G. Sokolov*, který na vědeckém základě ukázal naprostou neopodstatněnost hypotézy, otištěné v časopise Newsweek. Protože se domníváme, že tato otázka bude zajímat i naše čtenáře, přinášíme hlavní fakta z článku *V. G. Sokolova*.

Jak je všeobecně známo, pohybují se planety kolem Slunce po eliptických drahách s malou výstředností, přičemž oběžné roviny planet se příliš od sebe neliší. Výjimkou jsou nejbližší planeta Merkur, u něhož je excentricita dráhy $e = 0,21$ a sklon dráhy k rovině ekliptiky $i = 7^\circ$, a nejvzdálenější planeta Pluto, jejíž excentricita dráhy je $e = 0,25$, a sklon dráhy k rovině ekliptiky $i = 17,1^\circ$. U ostatních planet nepřevyšuje excentricita dráhy hodnotu $e = 0,1$, sklon hodnotu $i = 3,5^\circ$. Všechny planety obíhají kolem Slunce v témž směru, který se v astronomii nazývá přímý směr (ve stejném směru se také otáčí Slunce kolem své osy). Střední vzdálenosti planet od Slunce jsou od 0,387 astronomických jednotek (Merkur) do 39,5 astronomických jednotek (Pluto); oběžné doby, měřené vzhledem ke hvězdám, neboli siderické oběžné

doby, jsou od 0,241 roku u Merkura do 248,4 roku u Pluta. Kromě siderických oběžných dob se u planet udávají také synodické oběžné doby, což znamená doby, které uplynou mezi dvěma po sobě následujícími konjunkcemi nebo opozicemi planet se Sluncem, jinými slovy oběžné doby, jak se nám jeví ze Země. Je-li například vnější planeta v opozici se Sluncem, znamená to, že daná planeta a Země leží na přímce procházející Sluncem, přičemž obě tělesa jsou na téže straně od Slunce.

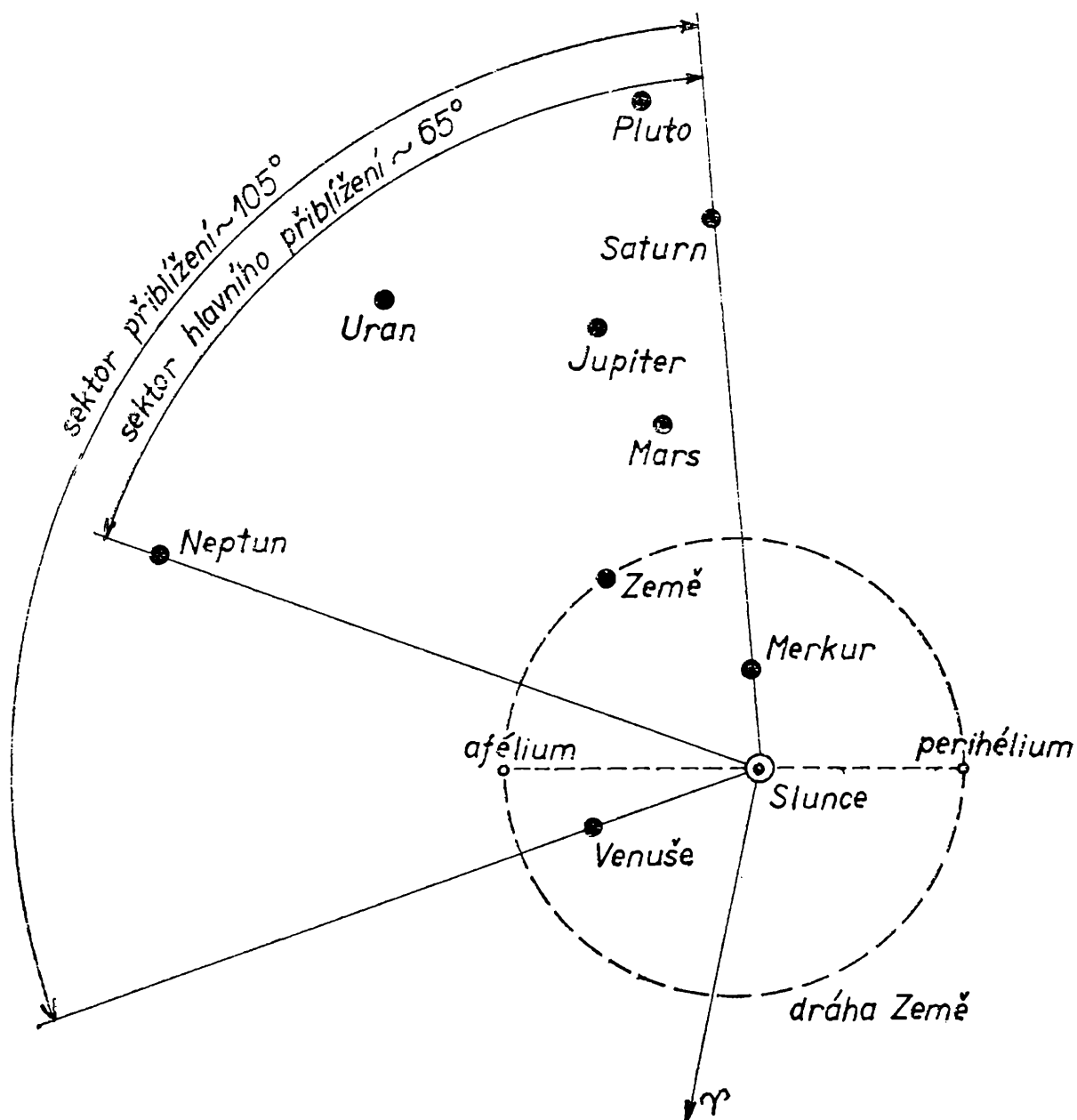
Podobná situace nastává periodicky u libovolné dvojice planet. Zanedbáme-li sklony drah planet, tj. budeme-li předpokládat, že všechny planety obíhají kolem Slunce v téže rovině, pak se u každé dvojice planet pravidelně opakuje situace, že obě planety leží na jedné přímce procházející Sluncem a jsou na téže straně od Slunce. Dobu, za níž se tato situace u dané dvojice planet opakuje, nazveme synodická perioda. Synodická perioda závisí na rozdílu úhlových rychlostí planet a lze ji vypočítat ze siderických oběžných dob podle vztahu

$$T = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2},$$

kde T_1 je siderická oběžná doba planety vzdálenější od Slunce, T_2 je oběžná doba planety bližší ke Slunci. Pro jednotlivé dvojice planet jsou synodické periody od 88 dní pro dvojici planet Merkur - Pluto (protože se Pluto pohybuje po dráze s malou úhlovou rychlostí, je tato doba jen asi o 2 hodiny delší než siderická oběžná doba Merkura) do 484 roků pro dvojici planet Neptun - Pluto.

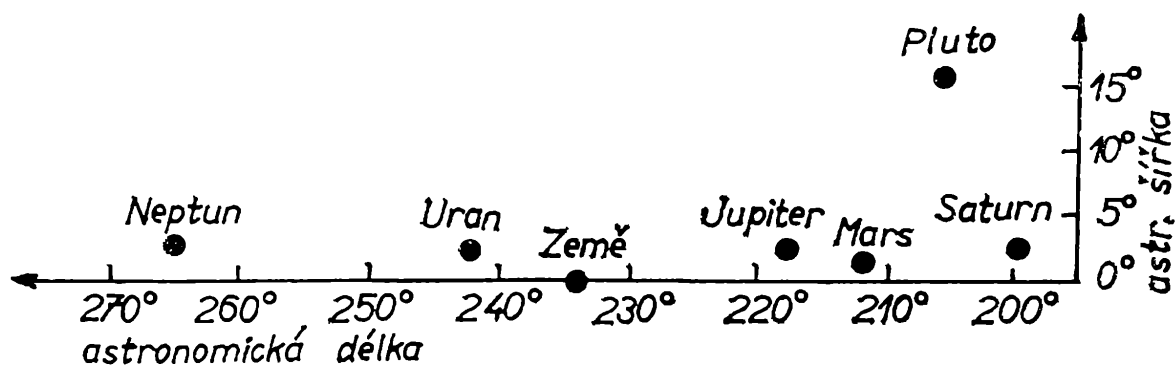
U tří planet se již situace, kdy jsou planety na téže přímce procházející Sluncem, nemůže pravidelně opakovat, ani když zanedbáme rozdíly ve sklonech drah; oběžné doby všech tří planet by totiž musely splňovat podmínku souměřitelnosti. Uvažujeme-li všech devět planet sluneční soustavy, pak můžeme říci, že prakticky nemůže nastat situace, kdy by planety ležely na téže přímce, a s největší pravděpodobností tato situace nenastala ani jednou za dobu existence sluneční soustavy a nenastane ani v budoucnu.

Planety tedy nemohou ležet na jediné přímce, může však nastat situace, při níž jsou planety v poměrně malých úhlových vzdálenostech od sebe. Právě taková situace nastane v roce 1982. Zavedme pojem *sektor přiblížení* planet a definujme jej jako projekci prostorového úhlu, obsahujícího všech devět planet, na rovinu ekliptiky. Přiblížením planet budeme rozumět situaci, kdy je tento úhel menší než 180° . Dále zavedeme analogicky pojem *sektor hlavního přiblížení* jako projekci prostorového úhlu, obsahujícího obří planety a Pluta, na rovinu ekliptiky. Sektor hlavního přiblížení tedy zahrnuje planety Jupitera, Saturna, Urana, Neptuna a Pluta — planety, jejichž úhlové rychlosti jsou podstatně menší než úhlové rychlosti planet zemské skupiny.



Obr. 1. Poloha planet v projekci na rovinu ekliptiky v polovině měsíce května 1982 při pohledu ze severního pólu ekliptiky. Vzdálenosti i velikosti planet nejsou znázorněny ve správném měřítku.

Sektor přiblížení dosáhne nejmenší hodnoty v polovině května 1982, kdy bude jeho hodnota 105° , sektor hlavního přiblížení bude mít v té době hodnotu 65° . Situace je znázorněna na obr. 1, na němž ovšem nemohly být znázorněny rozměry ani vzdálenosti planet ve skutečném měřítku. Z obrázku je patrné, že mimo sektor hlavního přiblížení je jen planeta Venuše. Obraťme nyní pozornost na okamžiky opozice vnějších planet, tj. na okamžiky, v nichž leží planety na jedné přímce se Zemí a Sluncem. Saturn bude v opozici se Sluncem koncem první třetiny dubna, Mars začátkem dubna, Pluto v polovině dubna, Jupiter koncem dubna a Uran koncem května.



Obr. 2. Poloha Země a vnějších planet v projekci na sféru v polovině května 1982, jak by se jevila pozorovateli na Slunci.

Planety zemské skupiny se současně vůbec neocitnou v hlavním sektoru přiblížení. Začátkem roku 1982 bude úhel hlavního sektoru přiblížení kolem 70° , avšak na začátku roku v něm nebude ani jedna z planet zemské skupiny (Merkur, Venuše, Země, Mars). Sektor přiblížení, zahrnující všechny planety, nabude minimální hodnoty 105° v polovině května. Hlavní sektor přiblížení bude mít minimální hodnotu kolem 60° , které dosáhne koncem roku 1982 (Saturn, který obíhá rychleji než Pluto, bude s Plutem a Sluncem na jedné přímce). Přibližně tutéž hodnotu bude mít úhel hlavního sektoru přiblížení až do března roku 1984, pak se začne rychle zvětšovat. V červenci 1984 vzroste na hodnotu 70° , tj. stejnou, jaká byla vypočtena pro začátek roku 1982, a pak se bude dále zvětšovat. Od začátku roku 1982 do července 1984 projdou planety zemské skupiny hlavním sektorem přiblížení několikrát — např. Země třikrát, přičemž však, jak již bylo uvedeno, nebudou v něm nikdy současně. Pro zajímavost připomeňme, že v polovině května 1982 bude Pluto v perihéliu, což znamená, že jeho vzdálenost od Slunce bude v té době o $93 \cdot 10^6$ km menší než vzdálenost Neptuna.

Úvahy o polohách planet tedy můžeme uzavřít konstatováním, že planety zdaleka nebudou na jedné přímce, ale budou v sektoru, jehož úhel v projekci na rovinu ekliptiky činí 105° , přičemž nejmenší hodnota úhlu, v němž se ocitnou obří planety, bude 60° . Planety nebudou přesně v jedné rovině; na obr. 2 je nakreslena poloha vnějších planet a Země, jak by se jevily v polovině května 1982 pozorovateli na Slunci.

Uvažujme nyní, jak dalece může mít popsaná konfigurace planet vliv na geofyzikální procesy. Podle mínění některých vědců má na sluneční činnost vliv slapové působení, vyvolávané na Slunci přitažlivostí planet, z nichž hlavní význam mají Merkur, Venuše, Země (planety poměrně blízké Slunci) a Jupiter (planeta s největší hmotností). Tato hypotéza pravděpodobně vznikla jako analogie s hypotézou o vlivu slapových jevů, způsobovaných na Zemi Měsícem a Sluncem, na seismickou činnost Země. Nebudeme se zde podrobněji zabývat touto hypotézou, jejíž

platnost je dosud předmětem zkoumání. Uvedme jen, že maximální výška přílivové vlny, způsobené současně Sluncem i Měsícem na Zemi, je kolem 60 cm. Ve srovnání s touto hodnotou je výška přílivové vlny, způsobená planetami na Slunci, velmi malá. Merkur způsobuje přílivovou vlnu o výšce asi 0,2 mm, Venuše 0,45 mm, Země 0,21 mm, Jupiter 0,47 mm. Vliv ostatních planet je zanedbatelný — přílivová vlna, způsobená Saturnem, je jen 0,02 mm, Marsem 0,01 a u ostatních, vzdálených planet jsou tyto hodnoty ještě menší. I kdyby byly planety v jedné přímce se Sluncem, dosáhla by přílivová vlna celkem jen výšky 1,36 mm, což je skutečně nepatrná hodnota, zvláště uvažíme-li, že Slunce má poloměr více než stokrát větší než je poloměr Země. Přílivová vlna, způsobená konfigurací planet v roce 1982, bude mít podle výpočtů výšku jen 0,5 mm. Vliv přílivových vln na činnost Slunce nemůže být výrazný; kdyby tomu tak bylo, byly by důsledky již dávno pozorovány, neboť dvě planety, mající na slapovou činnost největší vliv, tj. Venuše a Jupiter, leží na jedné přímce se Sluncem každých 237 dní (synodická perioda těchto dvou planet).

Vzrůst sluneční aktivity je obvykle doprovázen prudkými změnami v cirkulaci vzdušných proudů v horních vrstvách zemské atmosféry. Tyto změny skutečně mohou vést ke změnám úhlové rychlosti zemské rotace a tyto změny by mohly vést k zemětřesení; dosud však nebyla objevena žádná souvislost mezi silnými zemětřeseními a sluneční aktivitou. Na změny rotace Země mají největší vliv geologické procesy, probíhající v nitru Země. Ani meteorologické jevy nevykazují těsnou závislost na činnosti Slunce. Vcelku tedy můžeme říci, že konstelace planet, jejich „přiblížení“ v roce 1982, nebude pravděpodobně mít podstatný vliv na činnost Slunce a dále že činnost Slunce nemá prokazatelný vliv ani na vznik zemětřesení, ani na průběh počasí na Zemi.

Jediný vliv, který by na Zemi mohly planety v roce 1982 mít, spočívá v jejich gravitačním působení na Zemi. Vlivem tohoto působení se poněkud změní vzdálenost Země od Slunce — bude o 70 000 km větší, než by v daném bodě dráhy byla bez působení planet. Tím bude způsobeno, že záření, dopadající na Zemi ze Slunce, se zmenší o 0,1 ‰. Zde připomeňme, že následkem excentricity zemské dráhy se vzdálenost Země od Slunce mění od $147 \cdot 10^6$ km (Země v perihéliu) do $152 \cdot 10^6$ km (Země v aféliu), tedy v rozmezí $5 \cdot 10^6$ km, čímž jsou způsobovány změny v osvětlení Země padesátkrát větší, a přitom se to nijak neodráží na geofyzikálních procesech. Připomeňme, že Země je v perihéliu začátkem ledna, v aféliu začátkem července, čímž se vysvětluje skutečnost, že na jižní polokouli jsou v průměru větší rozdíly mezi letními a zimními středními teplotami. Změna množství záření o 0,1 ‰ se však na teplotách na Zemi nijak pozorovatelně neprojeví.

Závěrem poznamenejme, že vzájemné přiblížení planet, které nastane v roce 1982, není sice úkazem příliš častým, také však není ničím zvláště

výjimečným. V minulosti nastalo v roce 1805 a 1845, přičemž tyto konfigurace planet nevedly k žádným katastrofálním následkům na Zemi, a ani na Slunci nebyla pozorována zvýšená aktivita. V budoucnosti očekáváme další přiblížení planet až v roce 2357. Konfigurace planet v roce 1982 bude tedy z astronomického hlediska velmi zajímavým úkazem; podle současných vědeckých názorů není však důvodů k domněnce, že by tato konfigurace měla souvislost se změnami ve sluneční činnosti nebo s geofyzikálními procesy.

matematické a fyzikální zádavy

Studentská fyzika

KAREL MIŠOŇ, ČVUT Praha

V encyklopediích je učení definováno jako pozměňování činnosti a vlastností individuálními zkušenostmi. Učí-li se člověk, hraje významnou úlohu myšlenkové asociace a analogie: spojují nejrozmanitější poznatky či zážitky — často i bez sebemenší objektivní vnitřní souvislosti. Psychologické zákony myšlení ve svých bohatých variantách jsou pestrou a podnětnou základnou pro vytváření vesele laděných motivů v nejširší euforické paletě: počínaje jemným humorem přes taktní satiru, parodický popěvek a parafrázi až po tvorbu různých epigramů osobního ladění; o nechutných vulgárnostech nemluvě. Suše věcný odborný obsah školního učiva je s bravurním svérázem jásavé mládeže zpestřován veselými kontaminacemi. Ty pak nezřídka doprovázejí školní vzpomínky výrazněji než samotná poučka, metodická náplň nebo instruktivní pokus. Sledování jeho přípravy i průběhu leckdy přirozeně inspiruje podlaviční musu k čiperné interpretaci.

Vyšetřování rovnováhy na pákách vyvolává rozporné odezvy: Pohrdlivý despekt povýšeného nadhledu superkritického pána študáka: fyzika je divná věda, pro krávu je dobrá leda — může síly impulsem plašit mouchy ocasem. I konstruktivní respekt k životně prospěšné práci polidštěné opice. Mechanika v dávnověku sloužila už pračlověku. Když vydělal břemenem součin síly s ramenem, dostal dištanc k číhání s mamutem na utkání. Nejen pravěk, také moderní trampská doba si byla vědoma významu mechaniky v komplexním polytechnickém za-

měření. Celou šestici jednoduchých strojů, jež byly tehdy samostatně probírány, vyčerpává veršovačka z třicátých let: kladka, páka, kdo se fláká ve svátek*) a v neděli na kole na hřídeli, do kopce**) s ním v klínu lesním, toho šroubem nezvrtá ani fýza mrzutá. Vždy překoná kantora študákova letora!

Do tematiky jednoduchých strojů spadá mimořádně komplikovaný případ pensisty fingujícího mnohonásobné zranění při aplikaci kladky pevné. Jímavý rozmnožený dopis, oznamující pojistnou událost, koloval svého času po pražských pojišťovnách. Zůstáváme při této stručné zmínce — nejde o záležitost studentského původu; její připomínka při vhodné příležitosti však může být vítaným zpestřením učebního procesu.

Věhlas Archimédův nemá uměleckou odezvu jen v Čapkových Apokryfech. I středoškolský student zaujímá k jeho dějinnému významu výrazné stanovisko. Třeba v rétorické výzvě: Mám, ó bože, ó velký, pamatovat si takový cifer řad. Velký, slovutný Archimédes pomáhej trápenému... Jde o známou mnemotechnickou pomůcku k reprodukci Ludolfova čísla 3,14159265358979..., ve které počet písmen každého slova odpovídá číslici. Slavný výrok o pevném bodu jakožto dostatečné podmínce pro možnost pohnout planetou je interpretován čtyřverším: každý bod před Archimédem pečlivě se ukrýval, aby starý dědek na něm zeměkouli nehýbal. Roztržitost zaníceného vědce, který se po objevu nového zákona v lázních zapomněl obléknout, je podnětem ke starostlivé výzvě: Všeho s mírou! Hlavně k vědě přiměřený odstup měj, abys jako Archimédes nepobíhal nahatej! Přes veškerou úctu k novému objevu však zůstává téměř vyčítavý postesek nad jeho omezenou aplikabilitou: Do kapaliny ponořené těleso Archimédův slavný zákon zvládne, když však kantor ve třídě potopí eso, Archiméd ho z bryndy nevytáhne.

Školské anekdoty mají většinou jen význam místní. Jsou psychologickým odlehčením pro žáky, od nichž se vyžaduje kázeň a napjaté sledování výuky. Vytrženy ze školního prostředí, v němž vznikly, vyznívají často naslepo. Třeba papírek s výzvou: Přijměte uctivý pozdrav pana Archiméda a věnujte mu větší náklonnost! Koloval po třídě (probírán Archimédův šroub) zasmušile skleslé po neblahém výsledku mezinárodního sportovního utkání. Podobně vyzní i (rovněž skutečný) případ neškodně zákeřného „převozu“, který ve třídě vyvolal zasloužené veselí: Kdo ví, kdy asi žil Archimédes? — Prosíím, prosíím! — Světe div se, náš milý Blecha se hlásí. Tak kdy? — Sííím, soudruhu učiteli, mně je dočista špatně.

Newtonův génius dominuje v řadě učebních témat. Nepřekvapují proto tklivé verše studentských starostí s mírnou odezvou astrofyziky:

*) volné soboty nebyly!

**) patrně komparatum pro nakloněnou rovinu

Všecka moudrost Newtonova, byť zářila jako nova, není schopna vykoupit, co musí študácká hlava — zrzavá anebo plavá — kvůli němu podstoupit. Ale ani nesmrtelné Newtonovy objevy nejsou imunizovány proti neustálému rozvoji vědy, revizi, upřesňování, zobecňování přístupů. V tom ohledu posloužila Erbenova předloha k perspektivnímu zažehnutí nové éry: Okolo Země pole lán, hoj létá si v něm Newton pán, na gravitačním jede koni — vesele gé mu k tomu zvoní, však není tady sám. To Einstein za ním krok co krok, na gravitaci klop, klop, klop: Hola hej, pane, pamatuj, že vesmír není jenom tvůj...

Jedna z nejznámějších básní Vrchlického inspirovala k parafrázi fyzikálního úskalí studentského života: Hlas zvonku táhne v šaten kóje, kde v řevu mládí zaniká. Z fyziky dnes opáčko je a hrůza z toho veliká. Než prófa koukne do notesu, kéž by ho řídá pod nos kop! Tažený študák v bědném děsu neví, co je to gyroskop. O parostroji nemá zdání i druhy poloh neuměl, kdy Galilei žil neví ani. Všecko to rázem zapomněl, ač prý se včera mocně hustil. „Jste mi to ale holota, snad nechcete, abych vás pustil do praktického života!“ Člověk tu tone v školním moři, vzdech vhloubi srdce proniká — letošní štípků dávno hoří, ó fyzika, ó fyzika.

Předchozí rýmování končí chmurně pro studenta. Jiný interpret fyzikální učenosti — s patrným pozadím filosofické propedeutiky — se zaměřil k pikantně trpkému zážitku učitele: vědec si vyšel na procházku všemu se divil velice. Když viděl pejska bez provázku, snil tupě o své fyzice. To indeterminismus v tom je, pes letí, kam ho napadlo — ocas mu zjevně osciluje, to Machovo je kyvadlo. Metodu experimentální přijímal poštěk nevrle, o výzkumy nestál ani, když mu dal vědec cukrle. Když paraboly jeho skoků chtěl prověřovati více, čokl se na něj vrhl z boku a roztrhal mu střevíce.

Podobně jako loňské povídání*) uzavřeme i letošní rozvernost dvěma epitafy. Obecným, bez specifického ladění k určité aprobační skupině s kollárovským podtónem: Aj, zde leží kantor, k nebi svou obrátil bradu. Kdysi děs školních prostor, nyní už inventář hádu. A volným fyzikálním přetlumočením z fondu Wolkrova: Celou mou fyziku, pohyb i optiku, každíčkou z krás překonal Čas. Jenom to kyvadlo ve zvonu zůstalo. Slyš, jak s ním nade mnou šeptají bory: „Memento mori, memento mori“.

*) věnované matematice. Rozhledy 53, č. 7, str. 372

Magický šestiúhelník

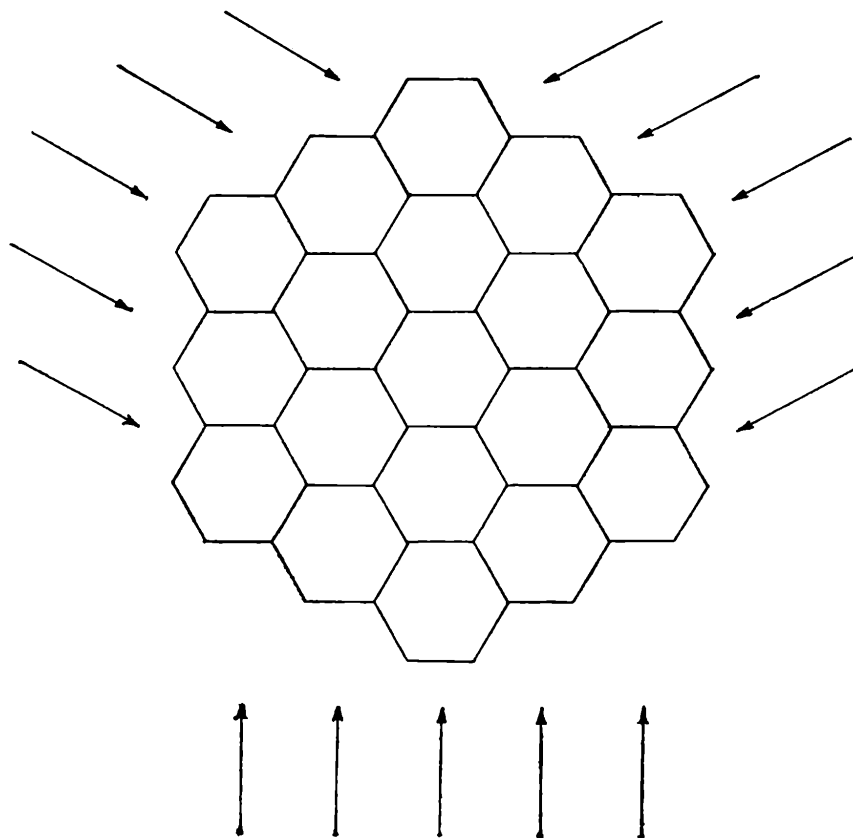
Doc. OTA SETZER, Praha

Tisíciletou tradici mají tzv. magické čtverce. Jsou to skupiny n^2 různých přirozených čísel $1, 2, 3, \dots, n^2$ uspořádaných do n sloupců a n řádků tak, aby součty ve všech n sloupcích, ve všech n řádcích i v obou úhlopříčkách vzniklého čtverce byly navzájem stejné.

O jejich zajímavých vlastnostech, konstrukcích i jejich historii píše B. A. Korděmskij v knize „Matematické prostocviky“ (v originále s názvem *Matematičeskaja smekalka*), vydané Mladou frontou roku 1957. V listopadovém čísle uveřejnil v r. 1977 holandský časopis *Pythagoras* magický čtverec dokonce pro $n = 31$, tj. pro čísla $1, 2, \dots, 961$ a dílčí součty 14911.

Magickým obrazcem však může být i jiný pravidelný mnohoúhelník, např. šestiúhelník. Mladým čtenářům předkládám v obr. 1 devatenáct pravidelných šestiúhelníků tvořících velký šestiúhelník s tím, aby se pokusili vepsat do jednotlivých dílčích šestiúhelníků čísla $1, 2, \dots, 18, 19$ — každé jen jednou — tak, aby součty ve směru šipek byly vždy stejné. K usnadnění tohoto úkolu prozradím čtenáři, že konstantní součet ve vyznačených směrech je vždy 38.

Jedno řešení tohoto magického šestiúhelníka najdete v některém z dalších čísel *Rozhledů*.



Řešení číselné křížovky z čísla 6 (po řádcích):

1. 121211 - 4 - 6 - - - 659
2. 3 - 4 - - 4 - 42208 - 1 - 9
3. 1 - 223144 - 3 - 702 - 8
4. 3 - 6 - 3 - 3 - - 9 - 4 - 771
5. 126 - 4 - 3 - 7757 - - - 3
6. - 0 - - 55455 - - 616 - -
7. 100243 - - 1540 - 591
8. - - - 3 - 3 - - 4 - 8 - - 2 - -
9. 7810 - 3366 - 478904
10. 0 - - 2 - - 4 - - - - - 7 - 8
11. 0 - 91880 - - 87733 - 8
12. 7 - 7 - - - 7000 - - 3 - - 8
13. 0 - 56070 - - 2 - 23952
14. 203 - 9 - 511136 - - 4 -
15. - - 1 - 9 - - 0 - - - 3 - - 8 -
16. 403 - 809977 - 27859

různé

Světový kongres matematiků 1978

Jednou za čtyři roky se matematikové scházejí na mezinárodním matematickém kongresu. Nejbližší takové setkání se připravuje na srpen 1978 a dějištěm budou Helsinky, hlavní město Finska. Mezinárodní matematický kongres známý pod zkratkou ICM (*International Congress of Mathematicians*) se bude konat od 15. do 23. srpna 1978 a sejdou se na něm matematikové všech zaměření. Předcházející ICM byl r. 1974 v Kanadě, ve Vancouveru, ještě předtím r. 1970 ve francouzské Nice, r. 1966 hostila kongres Moskva, r. 1962 se sešla světová matematika ve švédském Stockholmu atd.

V roce 1978 se v Helsinkách očekává velká účast a sekretariát kongresu na helsinské universitě už pilně pracuje. Na minulých ročnících ICM byla československá matematika vždy zastoupena a počítá se i s účastí našich odborníků v Helsinkách. Kongres jistě přispěje k utužení vědeckých styků a k rozvoji naší i světové matematiky.

Jiřina Sedláčková

Matematické soutěže ve Švýcarsku

Ve švýcarském kantonu *Bern* se stalo zvykem pořádat pro žáky vyšších středních škol matematické soutěže. Podle časopisu *Elemente der Mathematik* (roč. 1971) probíhala ve šk. r. 1969—70 soutěž takto.

Všichni účastníci soutěže museli doma vypracovat 3 skupiny úloh po 3 nebo 4 příkladech, při nichž se mohlo získat nejvýše 10 bodů. Nejlépe oklasifikovaných 16 žáků postoupilo do čtvrtfinále, kde je čekaly 3 příklady, každý s maximálním počtem 10 bodů. Do semifinále postoupilo již jen 8 studentů a zde každý dostal 3 příklady. Až dosud vypracovávali studenti všechno doma. Do finále se dostalo 6 studentů. Celé finále se skládalo ze 2 částí; v první části, ještě doma, každý vypracoval 2 úlohy a v druhé části pracovali studenti již pod dozorem. Každý finalista si tu mohl zvolit kterékoli z daných různě obodovaných příkladů s tím, aby získal co nejvíce bodů. Příklady, které tu uvádíme, jsou právě z této poslední fáze soutěže.

1. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo a je vždy splněna nerovnost $2a + \frac{1}{a^2} \geq 3$. (6 bodů)

2. Najděte všechny trojice přirozených čísel (x, y, k) , které splňují rovnici $x^2 + y^2 = 2^k$. (8 bodů)

3. Budiž $a_1, a_2, \dots, a_n$ libovolné uspořádání přirozených čísel $1, 2, \dots, n$. Ukažte, že

$$p = (a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$$

je sudé číslo, když n je číslo liché. (2 body)

4. k -tá cifra desetimístného desetinného čísla z udává, jak často se cifra $k-1$ v čísle z vyskytuje. $z = ?$ (4 body)

5. Může být v některé číselné soustavě symbol 276 úplným čtvercem? (6 bodů)

6. Kryptogram: $abcde \cdot 4 = edcba$. (4 body)

7. Konvexní n -úhelníková oblast je právě tehdy trojúhelník, jestliže $tP \cap P$ je podobná s P pro všechny translace t , pro něž P a tP mají společné vnitřní body. (8 bodů)

8. Osy dvou vnějších úhlů daného trojúhelníka ohraničují úhel, jehož velikost je polovina velikosti třetího vnějšího úhlu. (2 body)

S. H.

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

úhel při vrcholu	vertex angle
úhel zdvihu	angle of elevation
vedlejší úhly	adjacent angles
vrcholové úhly	vertical angles
výplňkové úhly	supplementary angles
výškový úhel	angle of elevation
zorný úhel	scope
úhloměr	protractor
úhlopříčka	diagonal
úhlový	angular
úloha	problem, exercise
úměra	proportion
postupná úměra	continued proportion
úměrné	proportional
úměrnost	variation
přímá úměrnost	direct variation
nepřímá úměrnost	indirect variation
umocněno na druhou	squared
umocnit	raise to a-power
umocnit na druhou	square
umocnit na třetí	cube
úplný	complete, entire
úplný čtverec	perfect square
úplný čtyřroh	harmonic quadrangle
úprava	conversion, transformation
určení	destination
určit	determine
určitý	certain, definite
určitý integrál	definite integral
úrok	interest
jednoduchý úrok	simple interest
složený úrok	compound interest
úsečka	segment
úsek	intercept
uskutečnit	carry out
usměrnění zlomku	rationalization of fraction

uspořádání
 uspořádaný
 částečně uspořádaný
 dobře uspořádaný
 lineárně uspořádaný
 uspořádaná n-tice
 uspořádat
 útvar
 uvažovat
 uvnitř
 úvod
 uzávěr
 uzavřený
 uzel
 výchozí úhel
 koncový uzel hrany

order
 ordered
 partially ordered
 well ordered
 linearly ordered
 ordered n-tuple
 order
 figure
 consider
 within
 introduction
 closure
 closed
 vertex, node, junction
 initial vertex
 terminal vertex of edge

V

váha
 válcový
 válcová plocha
 válec
 dutý válec
 kruhový válec
 rotační válec
 variace
 vázaný
 vážený průměr
 včetně
 vedlejší
 vedlejší kružnice
 vektor
 vektorový
 vektorový prostor
 vektorový součin
 veličina
 velikost
 skutečná velikost
 velký
 Vennův diagram
 vepsaný
 vepsaná kružnice
 ve smyslu hodinových ručiček
 vést (bodem)

weight
 cylindrical
 cylindrical surface
 cylinder
 hollow cylinder
 circular cylinder
 cylinder of revolution
 variation
 constrained
 weighted average
 inclusive
 minor
 small circle
 vector
 vector
 vector space
 vector product, cross product
 magnitude
 size
 true size
 large
 Venn diagram
 inscribed
 incircle
 clockwise
 lead, pass through

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

8

ROČNÍK 56, 1977-1978, DUBEN



ROČNÍK 56
DUBEN 1978

8

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, Ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., KU Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VUOS Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., CSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, Ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1978.

OBSAH

J. Sedláček: Pascalovské trojúhelníky .	337
Dr. J. Mída: O Morseově kódu .	340
K. Pavlas: Helijovy věty o obloucích kružnic	343
Dr. J. Šedivý: Co nelze sestrojít kružítkem a pravítkem	347
F. Hradecký: K některým vztahům ve čtyřúhelnících	355
Dr. P. Andrie, CSc., dr. V. Matas, CSc., dr. M. Židlichovský, CSc.: Poznámka k řešení některých transcendentních rovnic iterační metodou	361
S. Horák: K důkazu Pythagorovy věty .	365
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Jak je to dnes u nás s novými jednotkami?	367
Nejmladším čtenářům .	375
Ze zahraničních časopisů .	377
Recenze	378
Pokyny autorům	384
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

matematika

Pascalovské trojúhelníky

JAROSLAV SEDLÁČEK, Hradec Králové

Při umocňování dvojčlenu $a + b$ přirozeným mocnitelem získáme mnohočleny, jejichž koeficienty jsou kombinační čísla. Tento fakt znáte jako tzv. binomickou větu:

$$(a + b)^k = \binom{k}{0} a^k b^0 + \binom{k}{1} a^{k-1} b^1 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a^1 b^{k-1} + \binom{k}{k} a^0 b^k$$

Víte také, že k -tá mocnina dvojčlenu je vyjádřena $(k + 1)$ -členem a že při zvláštním způsobu „souměrného“ zápisu koeficientů získáváme Pascalovo trojúhelníkové schéma zvané stručně Pascalův trojúhelník:

$$\begin{array}{cccccccc} k = 0 & & \binom{0}{0} & & & & & 1 \\ k = 1 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & 1 \quad 1 \\ k = 2 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & 1 \quad 2 \quad 1 \\ k = 3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

Číselné hodnoty kombinačních čísel potvrzují známou skutečnost, že na „obvodu“ Pascalova trojúhelníku jsou zapsány jedničky a že na základě znalosti k -tého řádku můžeme zapsat $(k + 1)$ -ní řádek. Postačí, když jeho krajní jedničky zapíšeme do prodloužené šikmé linie obvodu a pak pod mezeru mezi sousedními čísly na k -tém řádku napíšeme na $(k + 1)$ -ní řádek jejich součet. Pokud jste binomickou větu ještě neprobírali, můžete se přesvědčit, že $(a + b)^4$ se rovná mnohočlenu s koeficienty 1, 4, 6, 4, 1; obdobně můžete předpovědět koeficienty dalších mocnin. Protože je každé číslo k -tého řádku zahrnuto ve dvou součtech zapsaných na $(k + 1)$ -ním řádku, je součet celého $(k + 1)$ -ního řádku dvojnásobkem součtu k -tého řádku. I tak lze zdůvodnit, že součet kombinačních čísel na k -tém řádku je roven 2^k .

Podívejme se však na vyjadřování součtů mocnin přirozených čísel pomocí kombinačních čísel (výklad jste mohli prostudovat v 5. čísle

tohoto ročníku). Všimněme si tentokrát vyjádření mocniny i^k pomocí kombinačních čísel:

Použijeme kombinačních čísel se stejnou dolní složkou. Píšeme

$$\begin{aligned}
 i^1 &= \binom{i}{1}, \\
 i^2 &= \frac{i}{1} \cdot \frac{(i+1) + (i-1)}{2} = \frac{(i+1)i}{2} + \frac{i(i-1)}{2} = \binom{i+1}{2} + \binom{i}{2}, \\
 i^3 &= \frac{i}{1} \cdot \frac{(i+1) + (i-1)}{2} \cdot \frac{(i+2) + i + (i-2)}{3} = \\
 &= \frac{(i+2)(i+1)i}{6} + \frac{i(i+1)i}{6} + \frac{i(i+1)(i-2)}{6} + \\
 &+ \frac{i(i-1)(i+2)}{6} + \frac{i(i-1)i}{6} + \frac{i(i-1)(i-2)}{6} = \\
 &= \binom{i+2}{3} + \frac{i(i+1)[i+i-2]}{6} + \frac{i(i-1)[i+2+i]}{6} + \binom{i}{3} = \\
 &= \binom{i+2}{3} + 4 \frac{i(i+1)(i-1)}{6} + \binom{i}{3} = \binom{i+2}{3} + 4 \binom{i+1}{3} + \binom{i}{3}.
 \end{aligned}$$

Vyjádření i^3 součinem zlomků zdůrazňuje „symetričnost“ každého čitatele „podle i “; v součtu zlomků se projevuje souměrnost ve výskytu $i+2$, $i-2$ a $i+1$, $i-1$; v konečném výrazu s kombinačními čísly jsou si „souměrné“ koeficienty rovny. Horní složky kombinačních čísel klesají od $(i+2)$ k i . Jmenovatelé zlomků v původním součinu dávají $3!$, toto číslo je pak jmenovatelem všech sčítaných zlomků; v důsledku toho mají kombinační čísla stejnou dolní složku.

Pokuste se zpracovat vyjádření

$$\begin{aligned}
 i^4 &= \frac{i}{1} \cdot \frac{(i+1) + (i-1)}{2} \cdot \frac{(i+2) + i + (i-2)}{3} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{(i+3) + (i+1) + (i-1) + (i-3)}{4}.
 \end{aligned}$$

na tvar
$$i^4 = \binom{i+3}{4} + 11 \binom{i+2}{4} + 11 \binom{i+1}{4} + \binom{i}{4}.$$

Obecně bychom vyjádřili

$$i^k = c_k \binom{i+k-1}{k} + c_{k-1} \binom{i+k-2}{k} + \dots + c_2 \binom{i+1}{k} + c_1 \binom{i}{k},$$

tj. k sčítanců, tedy k koeficientů, přitom $c_k = c_1$, $c_{k-1} = c_2$ atd.

Metodou popsanou v citovaném článku dostaneme

$$1 + 2 + \dots + i + \dots + n = \binom{n+1}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2 = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + i^3 + \dots + n^3 = \binom{n+3}{4} + 4\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + i^4 + \dots + n^4 = \binom{n+4}{5} + 11\binom{n+3}{5} + 11\binom{n+2}{5} + \binom{n+1}{5}$$

$$1^k + 2^k + \dots + i^k + \dots + n^k = c_k \binom{n+k}{k+1} + c_{k-1} \binom{n+k-1}{k+1} + c_2 \binom{n+2}{k+1} + c_1 \binom{n+1}{k+1}.$$

Zatímco v binomické větě kombinační čísla *byla* koeficienty členů mnohočlenu, zde sama kombinační čísla *mají* koeficienty. Zapišme tyto koeficienty pascalovským způsobem:

			1			
		1		1		
	1		4		1	
1		11		11		1
1	26		66		26	1

$$\begin{aligned}
 4 &= 1.2 + 2.1 \\
 11 &= 1.3 + 2.4 = 4.2 + 3.1 \\
 26 &= 1.4 + 2.11 = 11.2 + 4.1 \\
 66 &= 11.3 + 3.11.
 \end{aligned}$$

Přechod od k -tého řádku ke $(k+1)$ -nímu není tak průhledný jako v Pascalově trojúhelníku. „Obvod“ trojúhelníka vytvářejí opět jedničky, což je důsledek rozpisu i^k pomocí součinů (existuje tam jediný součin k největších čísel a jediný součin k nejmenších čísel). Na základě znalosti k -tého řádku můžeme zapsat $(k+1)$ -ní řádek. Postačí, když krajní jedničky zapišeme do prodloužené šikmé linie obvodu a pak pod mezeru mezi sousedními čísly na k -tém řádku napíšeme na $(k+1)$ -ní řádek součet jejich násobků (levé číslo násobíme jeho pořadovým číslem od pravého kraje řádku a pravé číslo násobíme jeho pořadovým číslem od levého kraje řádku).*) Tuto vlastnost čísel ve schématu lze dokázat poměrně obtížnou úvahou.

*) Tyto pomocné výpočty jsou zapsány vpravo vedle schématu s koeficienty kombinačních čísel.

Každé číslo k -tého řádku je zahrnuto ve dvou součtech zapsaných na $(k + 1)$ -ním řádku, součet jeho pořadových čísel od obou krajů je roven $k + 1$; z toho lze vyvodit, že součet $(k + 1)$ -ního řádku je $(k + 1)$ -násobkem součtu k -tého řádku. Odtud můžeme dokázat, že součet všech čísel na k -tém řádku je roven $k!$, přesvědčte se.

Jak vidno, klasický Pascalův trojúhelník má v kombinatorice obdoby, které můžeme nazvat pascalovské trojúhelníky. V článku jste poznali jen jeden další typ takových trojúhelníků, ale existuje jich mnoho, ne všechny jsou však symetrické.

0 Morseově kódu

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

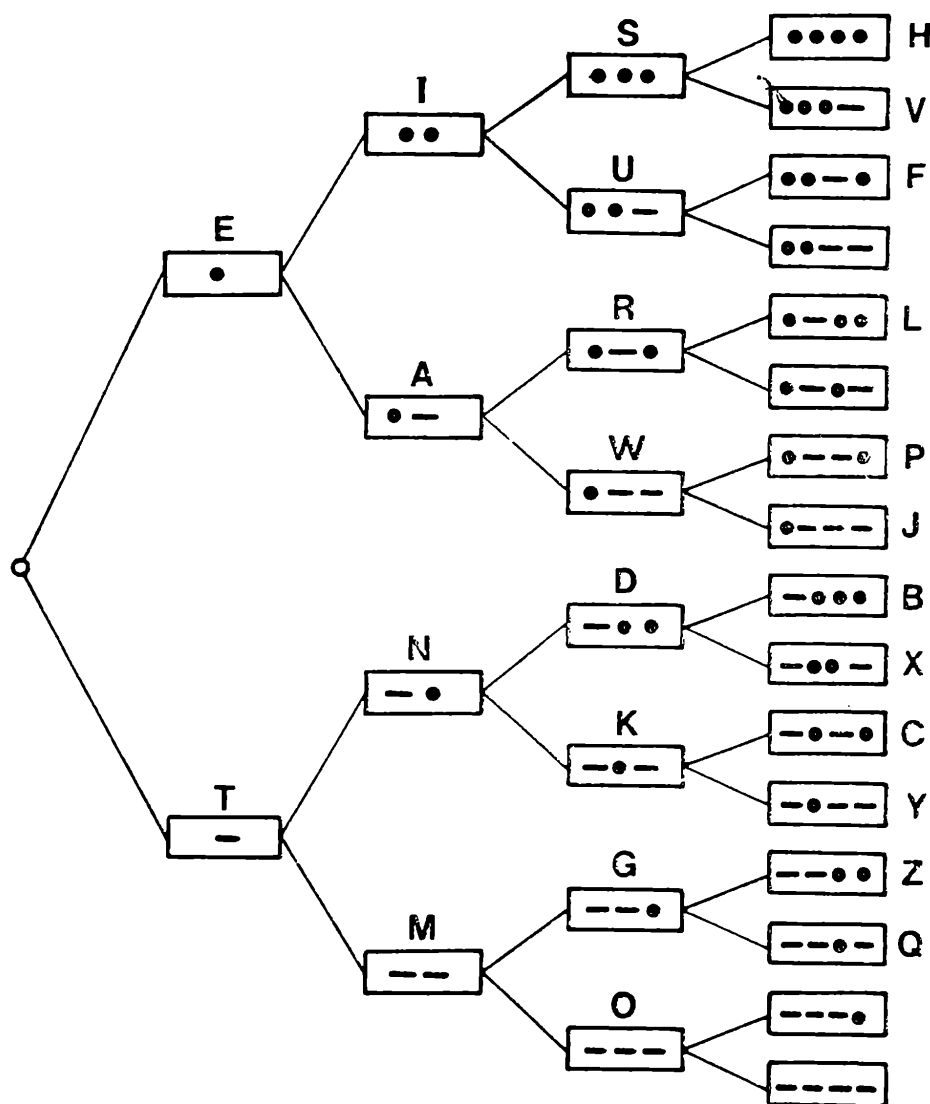
Morseův kód, nazývaný též Morseova abeceda nebo morseovka, zaslouhuje obdiv, neboť nezastaral ani po 140 letech. *Samuel Morse* (1791 až 1872) svůj způsob telegrafování po prvé předvedl na veřejnosti dne 4. září 1837. Morseův kód představoval nejen začátek na cestě k telekomunikačnímu propojení celého světa, ale dal lidstvu i nouzové volání SOS. Tato trojice písmen byla v roce 1912 mezinárodně přijata, neboť se v Morseově kódu velmi snadno vysílá i přijímá Zní totiž: . . . — — — . . . Teprve později se rozšířilo, že jde vlastně o zkratku anglické věty „Save our souls“ (česky „Spaste naše duše“).

Každého jistě napadne, co je vlastně základem trvalých předností Morseova kódu. Jeho autor vyhověl třem požadavkům, které lze vyjádřit stručně heslem: jednoduchá technická realizace, spolehlivost a dostatečná rychlost.

Z krátkodobých a dlouhodobých elektrických signálů, jež se graficky zaznamenávaly tečkami a čárkami (resp. kratšími a delšími čárkami), sestavil Samuel Morse konečné posloupnosti, které přiřadil jednotlivým písmenům, arabským číslicím a pomocným znakům (interpunkčním, znaménkům plus a minus aj.). Toto jím zavedené přiřazení se nazývá *Morseovým kódem*. Pro písmena jsou příslušné posloupnosti jednočlenné až čtyřčlenné.

Stromový graf na obr. 1 zachycuje všechny možné jednočlenné až čtyřčlenné posloupnosti, jejichž prvky jsou pouze tečky a čárky. K jednotlivým skupinám jsou podle Morseova kódu připsána písmena.

Zprávu, kterou chceme přenést, musíme mít zapsanu (resp. si představujeme, že ji máme zapsanu) latinkou a arabskými číslicemi. Text zprávy pak vyjadřujeme po jednotlivých písmenech, číslicích a dalších znacích



Obr. 1

podle Morseova kódu. Tento krok se nazývá *kódováním* zprávy. Po přenosu se přijatá zpráva *dekóduje*, tj. uvede se do tvaru, který měla před kódováním.

Jednočlenných až čtyřčlenných posloupností vytvořených pouze z teček a čárek je celkem $2 + 4 + 8 + 16 = 30$. Latinka má celkem 26 písmen. Jejím písmenům lze tedy uvažované posloupnosti přiřadit celkem

$$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{10}{8} \cdot 29! > 10^{31}$$

způsoby. V tabulkách [1] na str. 47 lze totiž zjistit, že $29! > 8 \cdot 10^{30}$. Pro latinku tedy mohlo vzniknout víc než 10^{31} různých morseovek. Při volbě jedné z možností bylo možno přihlídnout k požadavku, aby rychlost přenosu byla pokud možno co největší.

Rychlost přenosu se zvýší, jestliže častěji se vyskytující písmena budou kódována kratšími posloupnostmi teček a čárek než písmena užívaná méně často. Samuel Morse byl Američan, a proto jeho úvahy vycházely

z angličtiny. V knížce [2] je na str. 59 uvedena tabulka četností písmen v literární angličtině. Z ní plyne, že seřadíme-li písmena tak, aby jejich četnost klesala, dostáváme pořadí:

e, t, o, a, n, i, r, s, h, d, l, c, f, u, m, p, y, w, g, b, v, k, x, j, q, z .

Porovnáme-li toto pořadí s grafem na obr. 1, zjistíme, že dvě nejčastější písmena v angličtině jsou v morseovce vyjádřena jednočlennými posloupnostmi a že čtyřem nejméně často užívaným písmenům přísluší čtyřčlenné posloupnosti teček a čárek. Výjimky v ostatních případech lze snadno pochopit. Morseovka totiž vznikla už před 140 lety a nebyla určena k přenosu literárních děl, nýbrž obchodních, politických, vojenských a jiných zpráv. V první polovině 19. století také neexistovala matematická lingvistika, která se mimo jiné zabývá zjišťováním četností písmen v jednotlivých jazycích.

Abecedy některých jazyků mají větší počet písmen než latinka, např. česká abeceda jich má 42. Latinkou (obr. 1) neobsazené čtyři čtyřčlenné posloupnosti teček a čárek byly využity pro *ch* (— — — —) a písmena německé abecedy *ä* (. — —), *ü* (. — —) a *ö* (— — — .). Česká písmena označená čárkami, háčky a kroužkem se kódují v morseovce tak, jako kdyby žádná znaménka neměla.

Zatím jsme u Morseova kódu hovořili jenom o tečkách a čárkách. Při kódování se však užívá ještě mezer. Mezery jsou dokonce tří druhů. Nejmenší z nich oddělují tečky a čárky mezi sebou v posloupnostech vyjadřujících totéž písmeno, číslici nebo pomocný znak. Větší mezery jsou mezi posloupnostmi teček a čárek, kterými jsou kódována jednotlivá písmena, číslice a pomocné znaky. Největšími mezerami se kódují mezery mezi slovy a také mezi čísly. Dohodneme-li se, že ke každé tečce i čárce zcela automaticky přísluší po ní následující malá mezera a že mezera mezi zakódovanými slovy (číslly) je dvakrát větší než mezera mezi zakódovanými písmeny (čísllicemi) téhož slova (čísla), vystačíme s jedním druhem mezer. Morseovka má tedy tři *prvotní znaky*: tečku, čárku a mezeru. Při psaní rukou vyznačujeme mezery svislými čárkami — mezi zakódovanými písmeny jednou čárkou, mezi zakódovanými slovy dvěma; např.

|| | . — | — — | . . — | | . — . . || — — | — — — | . — . | | ||

Záznam se tak stane nejen přehlednějším, ale odstraní se i možnost omylů, které při psaní rukou mohou snadno vzniknout. O důležitosti zřetelně vyznačených mezer svědčí následující úloha:

V drogeriích se prodává prací prostředek SAM a čisticí prostředek ESO. Napište pomocí Morseovy abecedy názvy těchto dvou prostředků a nevyznačujte mezery. Oba zápisy porovnejte.

Na závěr uvedme ještě jednu úlohu. Doplňte čtvercovku:

V řádkách a sloupcích jsou následující slova:

a: . — . . — — — — —
 b: — — — —
 c: — — . — —

	a	b	c
a			
b			
c			

Mezery nejsou vyznačeny.

Literatura :

- [1] Mikulčák J. a kol.: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední všeobecně vzdělávací školy, SPN 1966
- [2] Dupač V., Hájek J.: Pravděpodobnost ve vědě a technice, NČSAV, Praha 1962

Hellyovy věty o obloucích kružnic

KAREL PAVLAS, gymnázium Třebíč

Známá Hellyova věta o konvexních útvech v rovině byla publikována rakouským matematikem *Eduardem Helly* (1884—1943) po první světové válce. Později byla pak objevena řada analogických vět o úsecích a obloucích kružnic. Nahlédneme do této novější problematiky, připomeňme si však i klasické věty s jejich důkazy. Hellyově větě je věnována část brožury *Konvexní útvary* (sv. 9 Školy mladých matematiků) od doc. J. Vyšína, CSc.

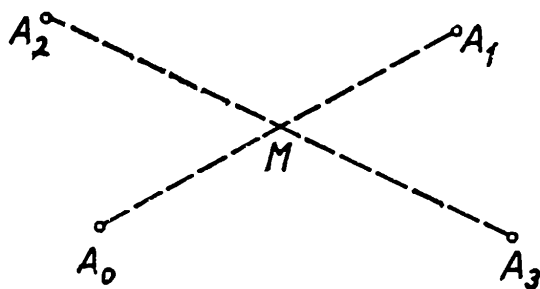
Pomocná věta. V rovině jsou dány čtyři konvexní útvary U_0, U_1, U_2, U_3 , z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod. Je-li splněna tato podmínka, pak všechny čtyři útvary mají aspoň jeden společný bod.

Důkaz. Protože každé tři útvary z daných čtyř konvexních útvarů U_0, U_1, U_2, U_3 obsahují aspoň jeden společný bod, můžeme označit $A_1 \in U_0 \cap U_2 \cap U_3$, $A_2 \in U_0 \cap U_1 \cap U_3$, $A_3 \in U_0 \cap U_1 \cap U_2$, $A_0 \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Vidíme dále, že v každém z daných čtyř útvarů leží trojúhelník, jehož vrcholy jsou příslušné tři body vybrané z bodů A_0, A_1, A_2, A_3 . Podrobně tyto trojúhelníky vypíšeme:

$$\triangle A_1 A_2 A_3 \subset U_0, \triangle A_0 A_2 A_3 \subset U_1, \triangle A_0 A_1 A_3 \subset U_2, \triangle A_0 A_1 A_2 \subset U_3.$$

Další úvaha spočívá v tom, že pro polohu bodu A_0 uvažujeme dvě možnosti:

a) Bod A_0 je bodem trojúhelníka $A_1 A_2 A_3$. Pak ale bod A_0 patří všem čtyřem útvarům U_0, U_1, U_2, U_3 , jak se čtenář snadno přesvědčí.



Obr. 1

b) Bod A_0 nepatří trojúhelníku $A_1A_2A_3$ (obr. 1). Body A_0, A_1, A_2, A_3 tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníka. Označme M průsečík úhlopříček tohoto čtyřúhelníka. Necht' je $M = A_0A_1 \cap A_2A_3$. Protože bod M leží na úhlopříčce A_0A_1 , náleží útvarům U_2, U_3 . Bod M dále leží na úhlopříčce A_2A_3 , a proto náleží útvarům U_0, U_1 . Útvary U_0, U_1, U_2, U_3 mají tedy bod M společný.

Tím je pomocná věta dokázána.

Hellyova věta. V rovině je dáno n konvexních útvarů $U_1, U_2, \dots, U_n$, kde $n \geq 4$, z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod. Potom všechny útvary mají aspoň jeden společný bod.

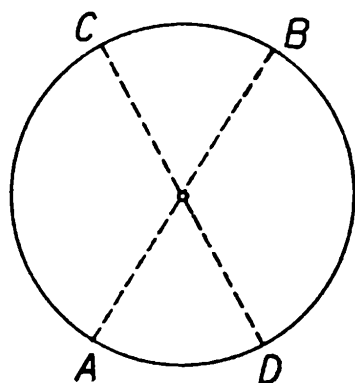
Důkaz matematickou indukcí.

1. Pro $n = 4$ je věta správná, jak bylo v pomocné větě dokázáno.
2. Předpokládejme, že věta je správná pro libovolný počet $n > 4$.
3. Dokážeme, že pro útvary $U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}$, z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod, je věta správná.

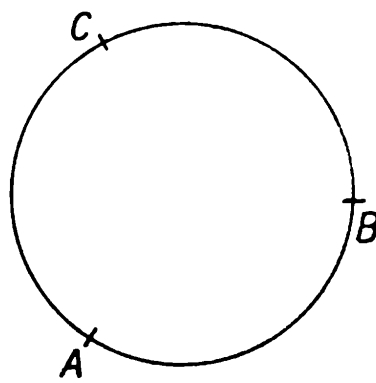
Má-li podle předpokladu n konvexních útvarů společný bod, mají tím spíše $n - 2$ útvarů společný bod. Průnik $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-2}$ je tedy neprázdný a označíme ho P_{n-2} . Uvažujme čtyři bodové množiny $P_{n-2}, U_{n-1}, U_n, U_{n+1}$, z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod. Podle pomocné věty mají všechny čtyři útvary společný bod, a proto útvary $U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}$ mají aspoň jeden společný bod. Věta je dokázána.

Úloha 1. Je dána soustava n úseček ležících na jedné přímce. Každé dvě úsečky soustavy mají aspoň jeden společný bod. Dokažte, že všechny úsečky soustavy mají aspoň jeden společný bod.

Řešení. Přímku, na níž leží soustava úseček, můžeme umístit vodorovně. Označme levé koncové body úseček písmeny $A_1, A_2, \dots, A_n$, pravé koncové body těchto úseček písmeny $B_1, B_2, \dots, B_n$. Uvažujme dvě libovolné úsečky, třeba A_1B_1, A_2B_2 , které mají společný bod. Bod A_2 leží nalevo od bodu B_1 (v krajním případě je $A_2 = B_1$). Označme A_0 některý bod, který leží napravo od všech levých koncových bodů všech úseček soustavy. Označme B_0 bod, který leží nalevo od všech pravých koncových bodů všech úseček soustavy. Bod A_0 nemůže ležet napravo od bodu B_0 . Jestliže v krajním případě je $A_0 = B_0$, potom je bod A_0 společným bodem všech úseček $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$. Jestliže je



Obr. 2



Obr. 3

$A_0 \neq B_0$, pak má soustava daných úseček společnou úsečku A_0B_0 , která je průnikem všech úseček soustavy. Tím je úloha rozřešena.

Dále následují celkem snadné, ale pěkné úlohy o obloucích téže kružnice. Aby bylo možno použít Hellyovu větu, která pojednává o konvexních útvech, je nutno oblouk, který není konvexním útvarem ve smyslu definice konvexního útvaru, nahradit kruhovou úsečí, kterou vytváří oblouk a tětiva kružnice spojující koncové body oblouku. Tato kruhová úseč je konvexním útvarem ve smyslu definice.

Úloha 2. Je dána soustava oblouků na jedné kružnici, kde každý oblouk má velikost menší než polokružnice. Každé tři oblouky této soustavy mají aspoň jeden společný bod. Dokažte, že pak všechny oblouky soustavy mají aspoň jeden společný bod.

Řešení. Tato úloha vyplývá z Hellyovy věty, neboť soustava oblouků, z nichž každý je menší než polokružnice, má společný bod právě tehdy, když soustava úsečí, která těmto obloukům odpovídá, má společný bod. Ale tato podmínka je zněním úlohy zajištěna.

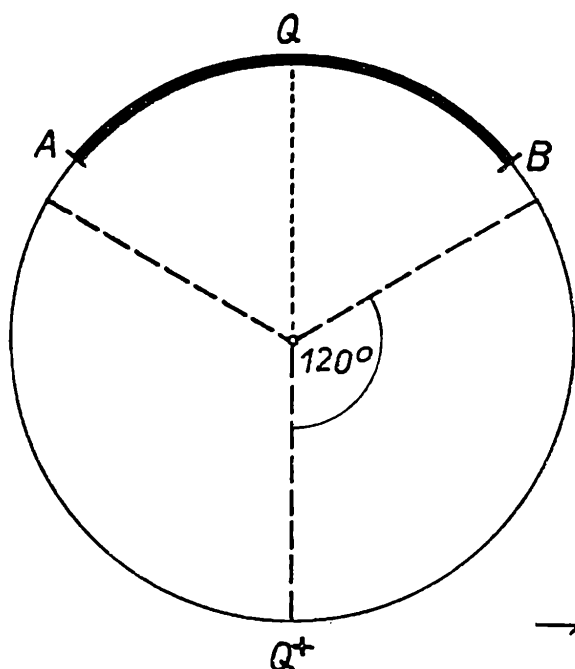
Podmínka v úloze 2, aby oblouky byly menší než polokružnice, je nutná, protože pro polokružnice úloha neplatí, jak je vidět na (obr. 2). Na kružnici jsou čtyři různé polokružnice (ohraničené dvojicemi bodů A, B a C, D , které jsou diametrálně protilehlé), z nichž každé tři mají společný bod, ale všechny čtyři nikoliv.

Rovněž musí být dodržena podmínka, že „každé tři oblouky soustavy mají společný bod“. Nestačilo by, aby každé dva oblouky soustavy měly společný bod, jak je patrné z obr. 3, kde třemi body A, B, C na kružnici jsou vytvořeny tři kruhové oblouky, z nichž každé dva mají společný bod, ale všechny tři nikoliv.

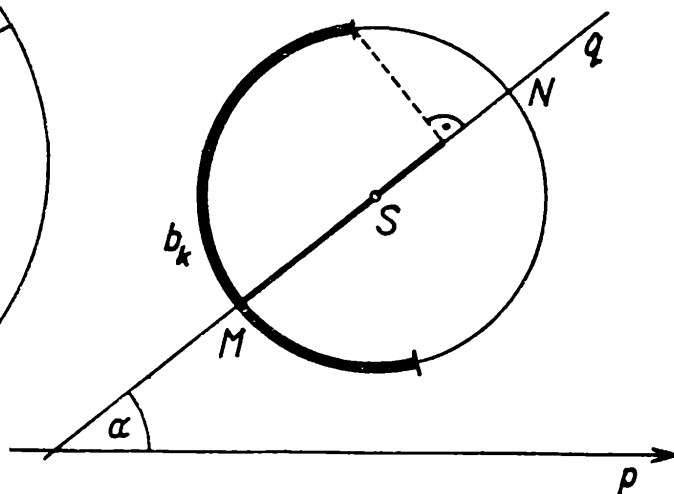
Tím zajímavější je následující úloha.

Úloha 3. Je dána soustava oblouků jedné kružnice a každý oblouk je menší než třetina kružnice. Každé dva oblouky soustavy mají aspoň jeden společný bod. Dokažte, že za těchto podmínek mají všechny oblouky soustavy aspoň jeden společný bod.

Řešení. Mezi úlohou 3. a 2. je rozdíl v předpokladech; zde každé dva oblouky mají společný bod. Řešení provedeme pomocí úlohy 1. Protože



Obr. 4



Obr. 5

všechny oblouky soustavy jsou menší než třetina kružnice a každý s každým má společný bod, existuje aspoň jeden bod Q^+ kružnice, např. bod diametrálně protilehlý ke středu Q libovolně zvoleného oblouku b soustavy, který nenáleží žádnému oblouku soustavy. [Středový úhel oblouku b je menší než 120° ; kdyby bod Q^+ náležel nějakému oblouku b^+ soustavy, pak by tento oblouk se středovým úhlem menším než 120° neměl s obloukem b společný bod, což není v souladu s předpokladem, že každé dva oblouky, tedy i oblouky b, b^+ , mají společný bod (viz obr. 4).]

V bodě Q^+ je možno kružnici rozdělit a rozvinout v úsečku velikosti $2\pi r$. Soustava oblouků přejde v soustavu úseček, z nichž každá má velikost menší než $\frac{2}{3}\pi r$. Každé dvě úsečky této soustavy mají společný bod, podle úlohy 1 mají všechny úsečky společný bod, a tudíž také všechny oblouky soustavy na kružnici mají společný bod.

Úloha 4. Je dána soustava $b_1, b_2, \dots, b_n$ oblouků na jedné kružnici k . Každé dva oblouky této soustavy mají aspoň jeden společný bod. Dokažte, že na kružnici k existují takové dva diametrálně protilehlé body Q, Q^+ , že na každém oblouku $b_1, b_2, \dots, b_n$ soustavy leží aspoň jeden z těchto dvou bodů.

Řešení. Na rozdíl od předcházejících úloh o obloucích z téže kružnice není v této úloze žádný předpoklad o velikosti uvažovaných oblouků. Naznačíme jen ideu důkazu, který je v konečné fázi dosti náročný.

Existenci bodů Q, Q^+ prokážeme jejich konstrukcí. V rovině kružnice zvolíme libovolnou přímku p a vyznačíme na ní kladný smysl (obr. 5).

Středem S kružnice k vedeme nějakou přímku q , která svírá s orientovanou přímkou p orientovaný úhel α , kde $-\pi \leq \alpha \leq \pi$. Průsečíky přímky q s kružnicí k označíme M, N . Všechny oblouky $b_1, b_2, \dots, b_n$ nyní pravouhle promítneme na přímku q do úseček, jejichž koncové body se promítají na úsečku MN . Protože podle předpokladu mají každé dva oblouky aspoň jeden společný bod, mají průměty těchto oblouků na přímku q rovněž jeden společný bod. Přitom se může stát (když velikost oblouku b_k je větší než polokružnice), že dva body oblouku b_k , které jsou souměrné podle přímky q , se promítají do jediného bodu úsečky MN . Tímto promítnutím přecházejí oblouky v soustavu úseček, které splňují předpoklady úlohy 1, a proto na úsečce MN existuje bod B , který je společný všem průmětům daných oblouků $b_1, b_2, \dots, b_n$. Bod B nemusí být bodem S , proto kolmice v B k přímce q nemusí být průměrem kružnice.

Snadno si však představíme, že při otáčení přímky q kolem bodu S se pohybuje bod B spojitě, až v jedné poloze přímky q splyne se středem S kružnice k . Označíme tuto přímku q_0 a příslušný bod $B_0 = S$. Jestliže v bodě B_0 vztyčíme kolmici na přímku q_0 , protíná tato kolmice kružnici k ve dvou bodech Q, Q^+ , které jsou diametrálně protilehlé a mají vlastnost, že na každém oblouku $b_1, b_2, \dots, b_n$ leží aspoň jeden z těchto bodů.

Poznali jste několik variant Hellyovy věty, v příštím článku se zaměříme na soustavy útvarů protínaných přímkami.

Co nelze sestrojít kružítkem a pravítkem

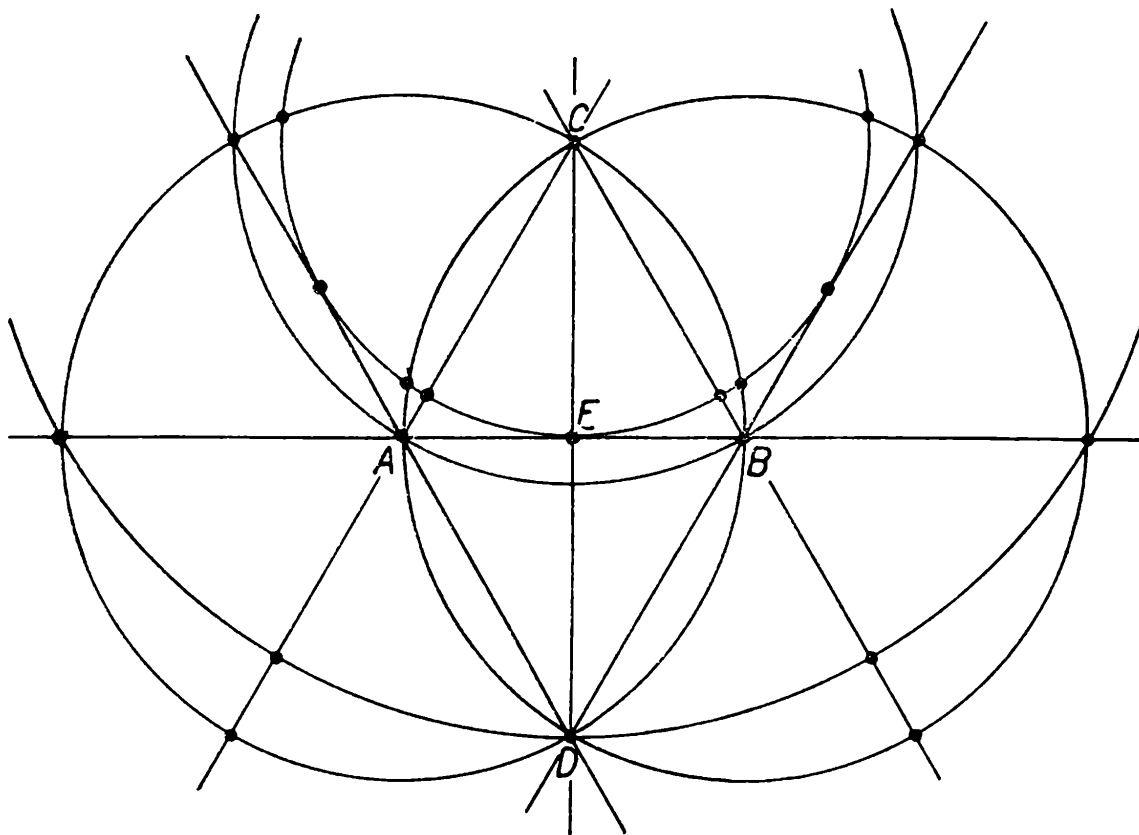
RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, UK Praha

V nedávné době se řada středoškolských studentů zaměřila na řešení geometrických konstrukčních úloh, o nichž se doslechla, že po dlouhá staletí nebyly rozřešeny (třetění neboli trisekce úhlů, sestrojování pravidelného sedmiúhelníku vepsaného do kružnice apod.). Řešitelé vycházeli z neúplných informací, protože navrhli přibližné konstrukce a vydávali je za přesné; přitom přesné konstrukce kružítkem a pravítkem nemohou existovat, jak je známo od poloviny 19. století. Proto se v tomto článku zaměříme na problematiku úloh neřešitelných kružítkem a pravítkem; v první části objasníme podstatu problému, ve druhé části podáme důkazy neřešitelnosti většího počtu úloh.

Vyjděme ze situace, kdy v rovině jsou dány dva různé body A, B (obr. 1a) a kdy máme k dispozici pravítko a kružítko. Které další body

Obr. 1a. °
A

°
B



Obr. 1b.

roviny můžeme pak sestrojít pravítkem a kružítkem? Nepochybně průsečíky kružnic $k_1(A, AB)$, $k_2(B, BA)$. Obrázek 1b ukazuje průsečíky C, D kružnic k_1, k_2 , jejich spojnici CD , průsečík E přímek AB, CD . Další body roviny sestrojíme jako společné body již sestrojených přímek a kružnic s dalšími, např. $k_3(C, CD)$, $k_4(C, CE)$, $k_5(C, CB)$ s přímkami BC, AC, AD, BD atd. atd.

[Vyznačte si sami větší počty takto sestrojených bodů, v obr. 1b jsou označeny černými kroužky.]

Uvědomte si, že jsme vyšli od dvou bodů A, B a že sestrojujeme:

- přímky určené dvěma sestrojenými body,
- kružnice, které mají střed v jednom sestrojeném bodě a procházejí dalším sestrojeným bodem,
- body, které patří dvěma již sestrojeným přímkám, dvěma sestrojeným kružnicím, resp. sestrojené přímce a sestrojené kružnici.
- Navíc považujeme za sestrojený i každý daný, resp. libovolně volitelný bod, přímku či kružnici.

Úmluvami a) — d) jsou vyčerpány všechny způsoby, jak sestrojujeme jednotlivé body, přímky a kružnice pomocí pravítka a kružítko.

Přitom jsme nuceni omezit se na konečný počet kroků konstrukce podle úmluv a) — d); z jediné dvojice daných bodů A, B (obr. 1a) můžeme tedy sestrojit jen ty body roviny, které získáme uplatněním konečně mnoha konstrukcí a) — c).

Množinu bodů považujeme za sestrojenou, je-li sestrojen každý její prvek; kružítkem a pravítkem můžeme sestrojit

- a) konečné množiny bodů,
- d) části přímky omezené konečně mnoha body (polopřímky, úsečky),
- c) části kružnice (oblouky).

Je tedy zřejmé, že kružítkem a pravítkem nemůžeme sestrojit všechny body elipsy, paraboly či hyperboly ani dalších křivek. Rýsování křivek podle křivítek je jen přibližná konstrukce těchto křivek na základě konečného počtu jejich sestrojených bodů. Ptejme se na sestrojitelnost množiny všech bodů roviny.

Zásadní otázka: Můžeme ze dvou různých bodů sestrojit libovolný bod roviny kružítkem a pravítkem?

Kladná odpověď by znamenala, že každý bod roviny lze získat konstrukcí složenou z konečně mnoha kroků podle a) — c). (Obrazně řečeno: ke každému bodu roviny lze „postavit lešení“ stojící na dvou daných bodech, přičemž stavebními prvky „lešení“ jsou přímky a kružnice.) Řekněme si hned

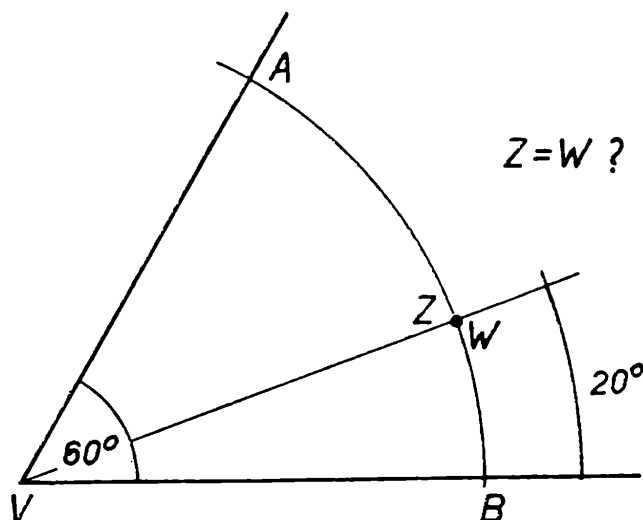
zásadní odpověď: Není to možné; existuje nekonečně mnoho bodů v rovině, které nelze sestrojit ze dvou daných bodů kružítkem a pravítkem.

Zdůvodnění této odpovědi nemůžeme podat ryze geometrickými prostředky, protože geometrie nedisponuje vlastním obecně použitelným postupem, jak rozhodnout, zda dva body, z nichž aspoň jeden byl získán konstrukcí, jsou různé či nikoliv. Zcela neprůkazné je rýsování obrázků; i při použití velmi tenkých čar nerozeznáme pouhým okem dva body vzdálené 0,01 mm. Mohli bychom pak považovat dva různé body za jeden bod a mylně tvrdit, že naše (přibližná) konstrukce dává přesný výsledek.

Příklad 1. Je dán úhel s velikostí 60° a chceme (kružítkem a pravítkem) sestrojit úhel s velikostí 20° , který je jeho částí a má s ním společné rameno.

To znamená, že máme dán oblouk AB kružnice se středem V (obr. 2), přičemž velikost úhlu AVB je 60° . Na oblouku AB existuje bod Z , pro který platí $\sphericalangle AVZ = 20^\circ$. Hledáme konečný počet konstrukčních kroků a) — c), který umožní sestrojit bod Z z bodů A, V, B kružítkem a pravítkem. Navrhne-li nějakou konstrukci, která vede k sestrojení bodu W „blízkého“ k bodu Z , budeme v pokusu považovat ji za řešení úlohy. Avšak optický dojem, že W splývá se Z , není matematickým důkazem správnosti konstrukce. Většina autorů podávajících své origi-

Obr. 2



nální řešení podléhá právě tomuto omylu; nacházejí přibližné konstrukce a považují je za přesné.

Jak tedy zdůvodníme negativní odpověď? Přejdeme do říše čísel, kde dovedeme rozlišit reálná čísla na základě jejich desetinných rozvojų. Místo konstrukcí bodů se budeme zabývat konstrukcemi čísel; zajistíme však přitom, že půjde o věrnou kopii geometrických konstrukcí kružítkem a pravítkem, které se skládají z kroků a), b), c). Číselné konstrukce budou spočívat na známých operacích sčítání, odčítání, násobení apod.

Další fázi úvah plně porozumějí ti čtenáři, kteří ovládají základy analytické geometrie; ale i ostatní pochopí jistě hlavní ideu úvahy. Probereme základní konstrukce kružítkem a pravítkem a jejich „překlad“ pomocí analytické geometrie v rovině. K tomu účelu zvolíme kartézský souřadnicový systém, přiřadíme v něm bodům souřadnice a přímám, resp. kružnicím rovnice typu

$$px + qy + r = 0, \quad \text{resp.} \quad (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

1. *Sestrojení přímky w procházející danými dvěma body A, B.* Po volbě systému souřadnic:

$$A \rightarrow [a_1, a_2]$$

$$\text{Známe } a_1, a_2, b_1, b_2,$$

$$B \rightarrow [b_1, b_2]$$

$$\text{máme sestrojit } p, q, r.$$

$$w \rightarrow px + qy + r = 0$$

Víme že přímka w má rovnici

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y + (b_1 - a_1)a_2 - (b_2 - a_2)a_1 = 0,$$

proto vypočítáme

$$p = b_2 - a_2, \quad q = -(b_1 - a_1), \quad r = (b_1 - a_1)a_2 - (b_2 - a_2)a_1.$$

Konstrukce čísel p, q, r tedy zahrnují jen odčítání a násobení reálných čísel.

2. *Sestrojení kružnice k, která má daný střed S a prochází daným bodem A.* Po volbě systému souřadnic:

$$A \rightarrow [a_1, a_2]$$

$$\text{Známe } a_1, a_2, m, n,$$

$$S \rightarrow [m, n]$$

$$\text{hledáme } r^2.$$

$$k \rightarrow (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Víme, že kružnice k má rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = (a_1 - m)^2 + (a_2 - n)^2,$$

proto

$$r^2 = (a_1 - m)^2 + (a_2 - n)^2.$$

Konstrukce čísla r^2 zahrnuje jen sčítání, odčítání a násobení reálných čísel (umocňování dvěma je násobení čísla týmž číslem).

3. *Sestrojení společného bodu P dvou daných přímek a, b .* Po volbě systému souřadnic:

$$\begin{array}{ll} a \rightarrow p_1x + q_1y + r_1 = 0 & \text{Známe } p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, \\ b \rightarrow p_2x + q_2y + r_2 = 0 & \text{hledáme } x_0, y_0. \\ P \rightarrow [x_0, y_0] \end{array}$$

Víme, že $[x_0, y_0]$ je řešením soustavy rovnic

$$\begin{array}{l} p_1x_0 + q_1y_0 + r_1 = 0 \\ p_2x_0 + q_2y_0 + r_2 = 0 \end{array} \quad \text{tj. } x_0 = \frac{-r_1q_2 + r_2q_1}{p_1q_2 - p_2q_1}, \quad y_0 = \frac{p_2r_1 - p_1r_2}{p_1q_2 - p_2q_1}$$

Konstrukce čísel x_0, y_0 zahrnuje jen sčítání, odčítání, násobení a dělení reálných čísel.

4. *Sestrojení společných bodů A, B dané přímky w a dané kružnice k .* Po volbě systému souřadnic:

$$\begin{array}{ll} w \rightarrow px + qy + s = 0 & \text{Známe } p, q, s, m, n, r, \\ k \rightarrow (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 & \text{hledáme } x_1, y_1, x_2, y_2. \\ A \rightarrow [x_1, y_1] \\ B \rightarrow [x_2, y_2] \end{array}$$

Víme, že $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ jsou řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{l} px + qy + s = 0, \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2. \end{array}$$

Postupujeme tak, že z první rovnice vyjádříme například y [pomocí sčítání, odčítání, dělení], dosadíme do druhé rovnice a získáme z ní kvadratickou rovnici s neznámou x . Při určování kořenů kvadratické rovnice potřebujeme operace sčítání, odčítání, násobení, dělení i odmocňování dvěma.

5. *Sestrojení společných bodů A, B daných kružnic k_1, k_2 .* Po volbě systému souřadnic

$$\begin{array}{ll} k_1 \rightarrow (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2 & \text{Známe } m_1, n_1, r_1, m_2, n_2, r_2, \\ k_2 \rightarrow (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2 & \text{hledáme } x_1, y_1, x_2, y_2. \\ A \rightarrow [x_1, y_1] \\ B \rightarrow [x_2, y_2] \end{array}$$

Víme, že $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ jsou řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{l} (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2, \\ (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2. \end{array}$$

Postupujeme tak, že odečteme druhou rovnici od první a po umocnění dvojčlenů získáme lineární rovnici; zbývá řešit soustavu

$$\begin{array}{l} 2(m_2 - m_1)x + 2(n_2 - n_1)y = r_1^2 - r_2^2, \\ (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2. \end{array}$$

Tím získáme úlohu předcházejícího typu; proto k určení čísel x_1, y_1, x_2, y_2 potřebujeme zase jen pět tam uvedených operací.

Úvahami v odstavci 1 až 5 jsme dokázali důležitou větu:

Mají-li dané body $A, B, \dots, W$ ve zvolené kartézské soustavě souřadnic přiřazeny souřadnice $[a_1, a_2], [b_1, b_2], \dots, [w_1, w_2]$, pak lze z bodů $A, B, \dots, W$ sestrojit kružítkem a pravítkem ty body X roviny, jejichž souřadnice $[x, y]$ lze vypočítat z čísel $a_1, a_2, \dots, w_1, w_2$ konečným počtem operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma.

Příklad 2. Zvolíme-li v obr. 1a souřadnicový systém tak, aby přiřadil $A \rightarrow [0, 0], B \rightarrow [1, 0]$, pak lze z bodů A, B sestrojit kružítkem a pravítkem nanejvýš ty body X roviny, jejichž souřadnice $[x, y]$ lze vypočítat z čísel 0 a 1 konečným počtem zmíněných pěti operací. Tak lze vypočítat všechna *přirozená* čísla $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots$, všechna *celá* čísla (kromě přirozených a nuly též $0 - 1, 0 - 1 - 1, \dots$), všechna *racionální* čísla (pomocí dělení celých čísel) i *druhé odmocniny* všech racionálních čísel. „Nasadíme-li“ odmocňování dvěma vícekrát za sebou, získáme i čtvrté, osmé, ... odmocniny racionálních čísel. Zdůvodněte, že reálná čísla

$$x = 12^6 - \sqrt[8]{4 + \sqrt{3,18}}, \quad y = (\sqrt[4]{6} - \sqrt{23}) (1 + \sqrt[16]{6} \quad (0,26)^3)$$

lze získat z čísel 0 a 1 konečným počtem operací pěti popsaných typů $+, -, \cdot, :, \sqrt{}$

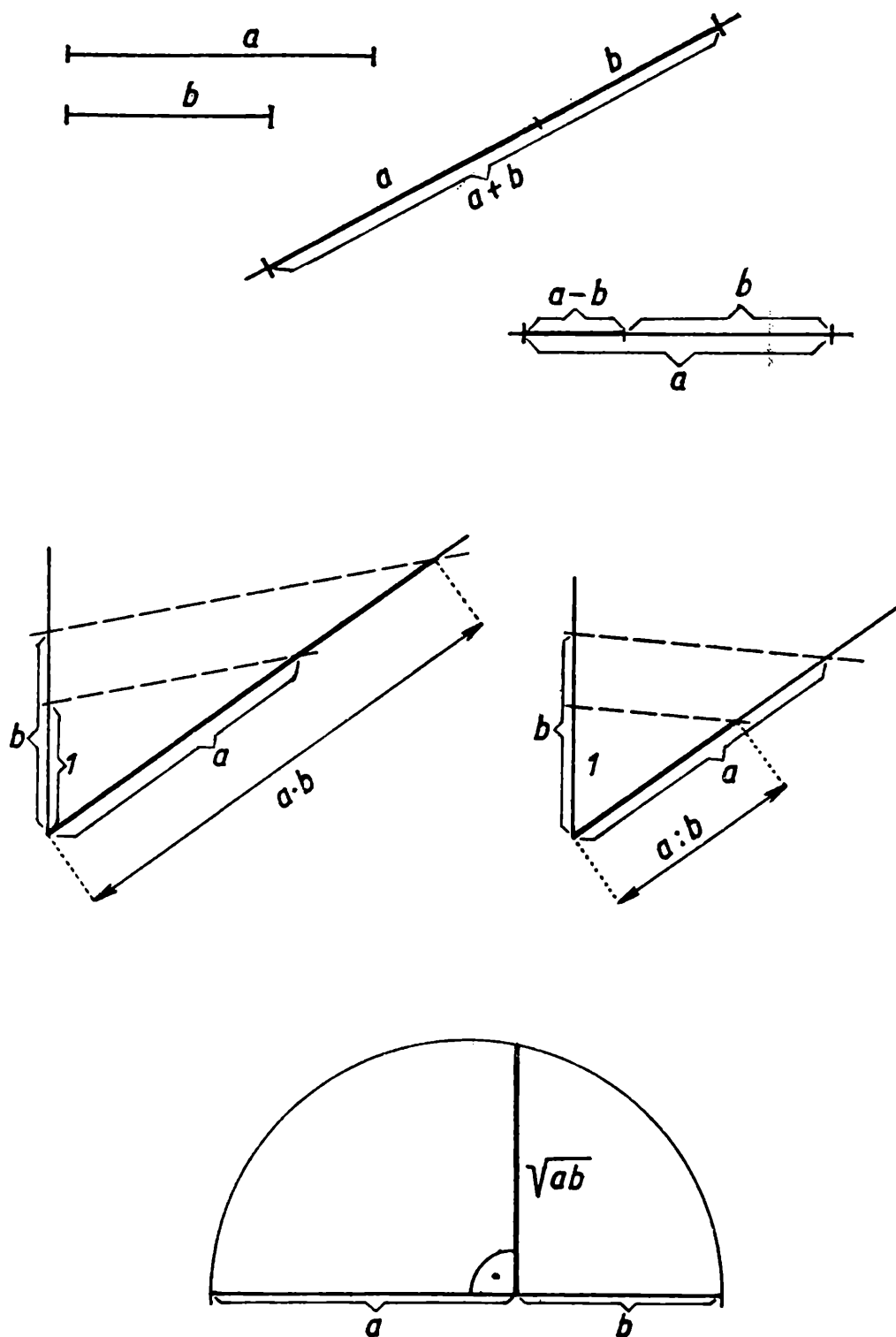
Přiblížili jsme se k závažným tvrzením o algebraické obdobě konstrukcí kružítkem a pravítkem. Zbývá nám ještě potvrdit, že existují konstrukce kružítkem a pravítkem, kterými lze sestrojit úsečky mající délky $a + b, a - b, a \cdot b, a : b, \sqrt{ab}$ pro všechna kladná reálná čísla $a, b, a > b$.

Žádané konstrukce jsou naznačeny v obr. 3, k zdůvodnění správnosti konstrukce $a \cdot b, a : b$ využijte podobnosti trojúhelníků, pro $\sqrt{ab}$ Euklidovy věty. Zdůvodněte, že přenášení úseček uskutečňujeme kružítkem; konstrukci rovnoběžek sice běžně realizujeme posunutím trojúhelníkového pravítka, ale lze ji provést i kružítkem a pravítkem (ukážte, jak); totéž platí o konstrukci kolmice k dané přímce.

Tím jsme podali důkaz věty, která má zásadní význam pro řešení našeho hlavního problému:

Z daných různých bodů $A, B, \dots, W$ lze kružítkem a pravítkem sestrojit právě ty body roviny, jejichž obě souřadnice lze vypočítat ze souřadnic bodů $A, B, \dots, W$ konečným počtem operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma.

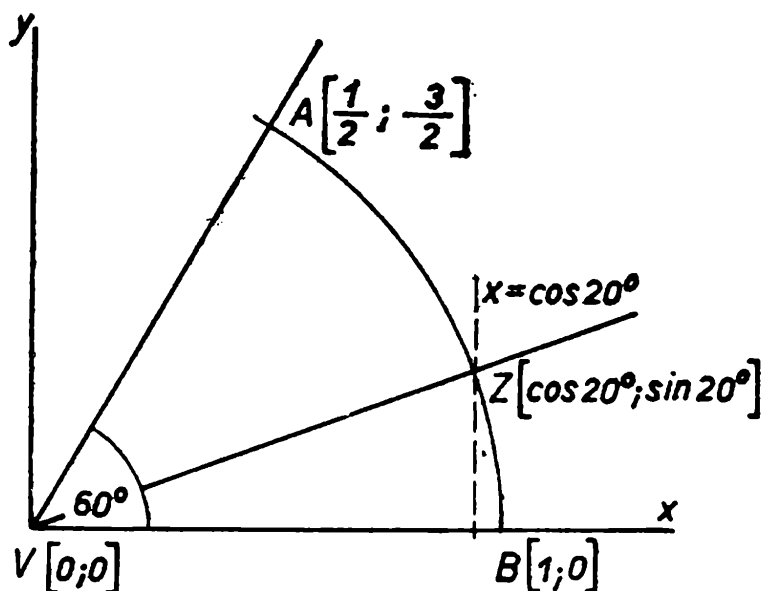
Tato obecná věta se nejčastěji aplikuje v případech, kdy souřadnice bodů $A, B, \dots, W$ jsou vesměs racionální, nebo jsou druhými odmocninami racionálních čísel. Konstrukční úloha s jedním neznámým bodem



Obr. 3

vede v takovém případě k rovnici s jednou neznámou a s racionálními či dokonce celočíselnými koeficienty.

Příklad 3. Mějme dán úhel AVB s velikostí 60° jako v příkladě 1. Požadavek sestavit úhel AVZ s velikostí 20° vede ke konstrukci bodu Z na oblouku AB . Při volbě kartézského systému souřadnic je výhodné umístit jeho počátek do bodu V a jednotkový bod osy x zvolit v B



Obr. 4

(obr. 4). K sestrojení bodu Z postačí pak vedle oblouku AB už jediná přímka s rovnicí $x = \cos 20^\circ$. Pomocí vzorce*)

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad \text{získáme při } \alpha = 20^\circ, \cos 20^\circ = x$$

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

$$0 = 8x^3 - 6x - 1,$$

tj. rovnici s celočíselnými koeficienty.

Vidíme, že problém, zda lze roztřít úhel 60° kružítkem a pravítkem je převeden na problém, zda lze kořeny rovnice $8x^3 - 6x - 1 = 0$ vypočítat z čísel $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ konečným počtem operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma.

V další části článku ukážeme, že rovnice 3. stupně s racionálními koeficienty a bez racionálních kořenů nemají kořeny, jež by bylo možno vypočítat z čísel 0 a 1 konečným počtem operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma. Takové rovnice jsou pak prostředkem k důkazu nesestrojitelnosti všech bodů roviny kružítkem a pravítkem, resp. neřešitelnosti mnohých konstrukčních úloh těmito prostředky.

(Pokračování)

*) Vzorec odvoďte z $\cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$, a to pomocí $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

K některým vztahům ve čtyřúhelnících

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

1. Jsou-li a, b, c, d délky stran, e, f délky úhlopříček a ω velikost ostrého úhlu těchto úhlopříček, pak v každém čtyřúhelníku platí

$$|a^2 + c^2 - (b^2 + d^2)| = 2ef \cos \omega.$$

Strany a úhlopříčky čtyřúhelníku určují vektory (viz jejich orientaci na obr. 1), pro které platí

$$\mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{e}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e} - \mathbf{a}.$$

Pro součty druhých mocnin dostaneme

$$a^2 + c^2 = a^2 + (\mathbf{d} - \mathbf{e})^2 = a^2 + d^2 + e^2 - 2\mathbf{d}\mathbf{e},$$

$$b^2 + d^2 = (\mathbf{e} - \mathbf{a})^2 + d^2 = a^2 + d^2 + e^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{e}.$$

Odečteme-li druhou rovnost od první, máme

$$a^2 + c^2 - (b^2 + d^2) = 2\mathbf{e}(\mathbf{a} - \mathbf{d}) = 2\mathbf{e}\mathbf{f},$$

neboť $\mathbf{a} - \mathbf{d} = \mathbf{f}$.

Užitím vlastnosti skalárního součinu $\mathbf{e}\mathbf{f} = ef \cos \omega$ docházíme k žádanému vztahu (za předpokladu, že ω je ostrý úhel):

$$|a^2 + c^2 - (b^2 + d^2)| = 2ef \cos \omega. \quad (1)$$

Jsou-li úhlopříčky ve čtyřúhelníku navzájem k sobě kolmé, platí vztah

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2. \quad (2)$$

Pro čtyřúhelník tečnový, v němž $a + c = b + d$, je

$$|ac - bd| = ef \cos \omega, \quad (1')$$

a jsou-li ještě v něm úhlopříčky navzájem k sobě kolmé, platí

$$ac = bd. \quad (2')$$

2. Označíme-li p, q délky úseček MN a PQ , které spojují středy protějších stran, platí vztah

$$|p^2 - q^2| = ef \cos \omega.$$

Vyjádříme-li vektory PQ a MN podle obr. 1, dostaneme

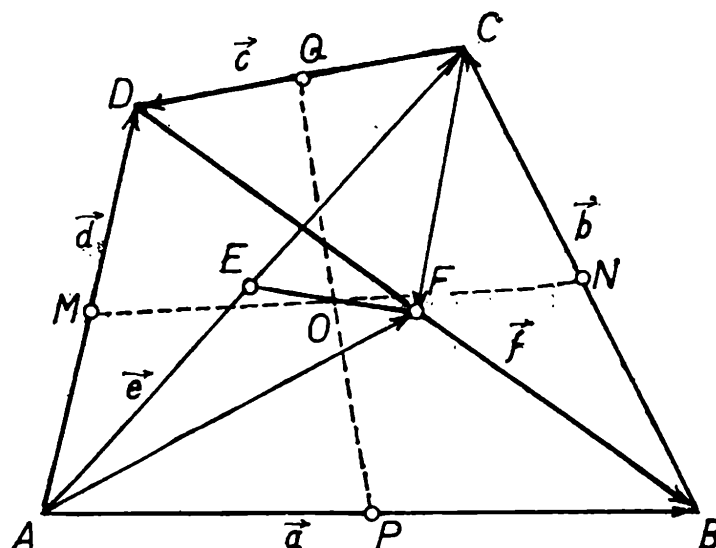
$$\mathbf{PQ} = \mathbf{AQ} - \mathbf{AP} = \frac{\mathbf{e} + \mathbf{d}}{2} - \frac{\mathbf{a}}{2} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} + \mathbf{d} - \mathbf{a}),$$

$$\mathbf{MN} = \mathbf{AN} - \mathbf{AM} = \frac{\mathbf{e} + \mathbf{a}}{2} - \frac{\mathbf{d}}{2} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} + \mathbf{a} - \mathbf{d})$$

a pro velikosti těchto vektorů

$$PQ^2 = \frac{1}{4}(a^2 + e^2 + d^2 + 2\mathbf{e}\mathbf{d} - 2\mathbf{a}\mathbf{e} - 2\mathbf{a}\mathbf{d}),$$

Obr. 1



$$MN^2 = \frac{1}{4} (a^2 + e^2 + d^2 + 2ae - 2ed - 2ad),$$

takže $MN^2 - PQ^2 = ae - ed = e(a - d) = ef = ef \cos \omega$, tj.

$$|p^2 - q^2| = ef \cos \omega. \quad (3)$$

Je-li $p = q$, je $\cos \omega = 0$, tj. $\omega = \frac{\pi}{2}$; je-li $\omega = \frac{\pi}{2}$, je $p = q$.

V každém čtyřúhelníku, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé, jsou jeho střední příčky stejně dlouhé. Ze vztahu (3) plyne i věta obrácená: Jsou-li ve čtyřúhelníku střední příčky stejně dlouhé, jsou jeho úhlopříčky k sobě kolmé.

3. Je-li EF délka úsečky spojující středy jeho úhlopříček, pak v každém čtyřúhelníku, jehož strany a úhlopříčky mají délky a, b, c, d, e, f , platí vztah

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + (2EF)^2. \quad (4)$$

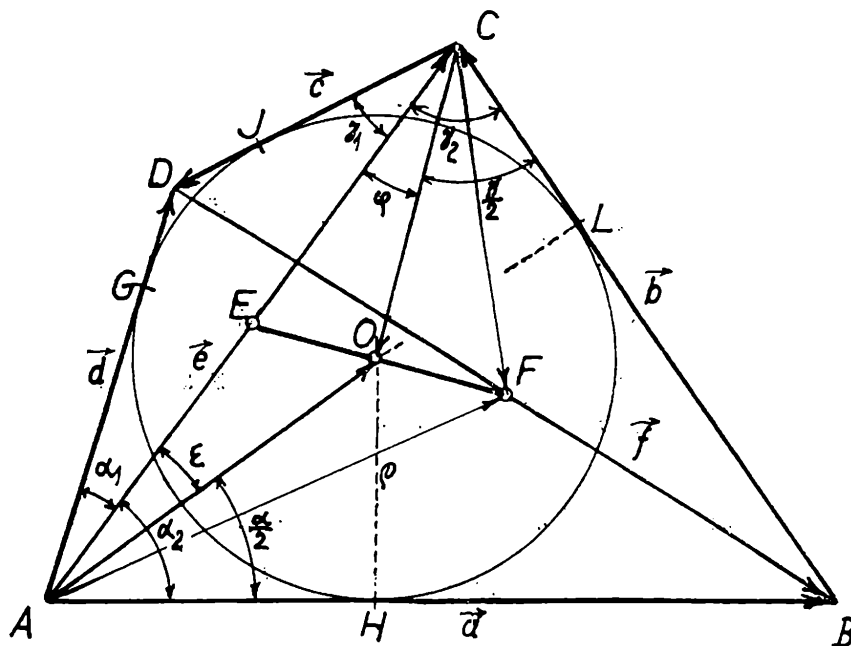
K odvození tohoto vztahu užijeme vzorce pro druhou mocninu délky těžnice v trojúhelníku. Při obvyklém označení je $t^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ (viz též článek Analogie v geometrii, Rozhledy r. 56, str. 70).

AF, CF jsou těžnice v $\triangle BDA$ a $\triangle BDC$ a EF těžnice v $\triangle ACF$. Platí pak

$$AF^2 = \frac{a^2 + d^2}{2} - \frac{f^2}{4},$$

$$CF^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{f^2}{4},$$

$$EF^2 = \frac{AF^2 + CF^2}{2} - \frac{e^2}{4}.$$



Dosazením z předcházejících rovností do této poslední rovnosti dostaneme

$$EF^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + d^2}{2} - \frac{f^2}{4} + \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{f^2}{4} \right) - \frac{e^2}{4}.$$

Po jednoduché úpravě dostaneme uvedený vztah (4).

Další část článku se bude týkat *čtyřúhelníku tečnového*, v němž součty délek protějších stran se sobě rovnají. Uvedeme napřed důkaz věty obrácené, kterou budeme potřebovat.

Ve čtyřúhelníku tečnovém $ABCD$ platí

$$AB + CD = BC + AD. \quad (x)$$

Na prodloužení strany CD za bod D zvolme libovolně bod D' a předpokládejme, že pro čtyřúhelník platí vztah (x), tj.

$$AB + CD' = BC + AD'. \quad (\text{Nechť si čtenář sám načrtne obrázek}).$$

Odečtením této rovnosti od rovnosti (x) dostaneme

$$CD' - CD = AD' - AD, \quad \text{přitom } CD' - CD = DD'.$$

Ale rozdíl dvou stran v každém trojúhelníku je menší než strana třetí (nemůže být roven straně třetí), docházíme tak ke sporu. Z toho plyne, že výchozí předpoklad nebyl správný. Aby nalezený vztah byl správný, musí $AD' = AD$ tj. $D' \equiv D$, a pak čtyřúhelník $ABCD'$ je *čtyřúhelníkem tečnovým*. Platí-li ve čtyřúhelníku, že součty délek protějších stran jsou si rovny, je čtyřúhelník tečnový.

4. Ve čtyřúhelníku tečnovém leží střed kružnice vepsané na úsečce spojující středy jeho úhlopříček.

Podle označení v obr. 2 je

$$AE = \frac{e}{2}, \quad AF = \frac{a + d}{2}, \quad EF = AF - AE = \frac{a + d - e}{2}.$$

Je-li O vnitřní bod úsečky EF , jehož dělicí poměr vzhledem ke krajním bodům E, F je $\frac{m}{n}$, pak pro vektor $\mathbf{AO}$ platí

$$\mathbf{AO} = \frac{n}{m+n} \mathbf{AE} + \frac{m}{m+n} \mathbf{AF}, \quad \text{tj.}$$

$$2(m+n) \mathbf{AO} = n\mathbf{e} + m(\mathbf{a} + \mathbf{d}). \quad (5)$$

Je-li O střed kružnice vepsané do čtyřúhelníku, je AO osou vnitřního úhlu α a jsou-li G, H dotykové body vepsané kružnice se stranami AD a AB , platí $AG = AH$.

Na základě vlastnosti skalárního součinu vektorů je

$$\mathbf{AO} \cdot \mathbf{d} = AG \cdot d = AH \cdot d$$

$$\mathbf{AO} \cdot \mathbf{a} = AH \cdot a,$$

takže

$$\mathbf{AO} \cdot \mathbf{d} \cdot a = \mathbf{AO} \cdot \mathbf{a} \cdot d. \quad (6)$$

Znásobíme-li (5) postupně vektory $\mathbf{ad}$, $\mathbf{da}$ a výsledky dosadíme do (6), dostaneme po zjednodušení

$$n\mathbf{eda} + m(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{da} = n\mathbf{ead} + m(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{ad}, \quad \text{tj.}$$

$$n(\mathbf{aed} - \mathbf{dea}) = m(a^2d - ad^2 - a\mathbf{ad} + d\mathbf{ad})$$

a odtud

$$\frac{m}{n} = \frac{\mathbf{aed} - \mathbf{dea}}{(a-d)(ad - \mathbf{ad})} = \frac{e(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{(a-d)(1 - \cos \alpha)};$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ jsou velikosti úhlů $\sphericalangle CAD, \sphericalangle BAC, \sphericalangle BAD$. Označíme-li dále $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \varepsilon$ a užijeme známých vzorců pro $\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2$ a pro

$\sin \frac{\alpha}{2}$, zní poslední rovnost

$$\frac{m}{n} = \frac{2e \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{(a-d) \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{e \sin \varepsilon}{(a-d) \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (7)$$

Vektor EF vyjádříme ještě pomocí vektorů

$$\mathbf{CE} = -\frac{\mathbf{e}}{2}, \quad \mathbf{CF} = \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{2}, \quad \text{tj.}$$

$$\mathbf{EF} = \mathbf{CF} - \mathbf{CE} = \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{e}}{2}.$$

Je-li O' průsečík osy úhlu $\sphericalangle DCB$ s úsečkou EF a $\frac{m'}{n'}$ jeho dělicí poměr vzhledem k bodům E, F , platí

$$\mathbf{CO}' = \frac{n'}{m' + n'} \mathbf{CE} + \frac{m'}{m' + n'} \mathbf{CF} \quad \text{tj.}$$

$$2(m' + n') \mathbf{CO}' = -n'\mathbf{e} + m'(\mathbf{c} - \mathbf{b}). \quad (5')$$

Znásobíme-li (5') postupně vektory $b\mathbf{c}$, $\mathbf{bc}$ a výsledek dosadíme do rovnosti $\mathbf{CO}' \cdot \mathbf{c} \cdot b = -\mathbf{CO}' \cdot \mathbf{b} \cdot c$ (změna orientace vektoru $\mathbf{b}$),

$$(6')$$

dostaneme

$$-n'\mathbf{ecb} + m'(c^2 - \mathbf{bc})b = n'\mathbf{bec} - m'(\mathbf{cb} - b^2)c$$

a odtud

$$\begin{aligned} \frac{m'}{n'} &= \frac{\mathbf{ceb} + \mathbf{bec}}{(c - b)(\mathbf{bc} + \mathbf{bc})} = \frac{e(\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)}{(c - b)(1 - \cos \gamma)} = \\ &= \frac{e \sin \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}}{(b - c) \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{e \cdot \sin \varphi}{(b - c) \sin \frac{\gamma}{2}}, \end{aligned} \quad (7')$$

kde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ jsou velikosti úhlů $\sphericalangle ACD, \sphericalangle ACB, \sphericalangle DCB$ a $\varphi = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$ velikost úhlu $\sphericalangle O'CA$.

Dokážeme nyní, že v tečnovém čtyřúhelníku, ve kterém je

$$a + c = b + d \quad \text{tj.} \quad a - d = b - c \quad \text{je} \quad \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}.$$

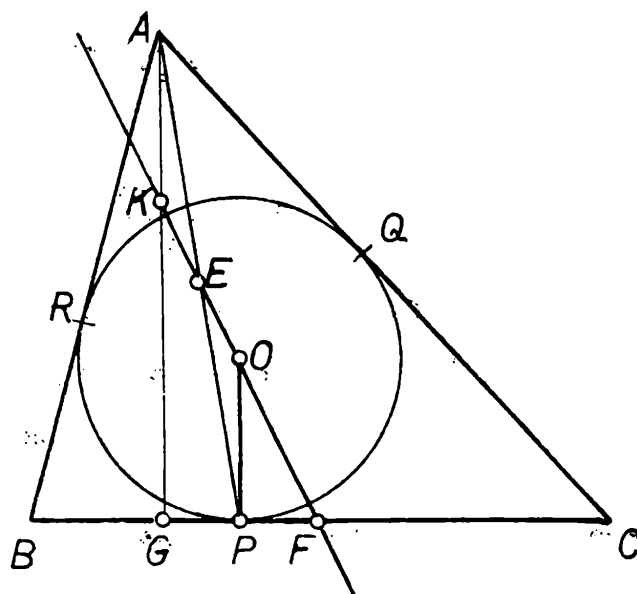
Předpokládejme, že osy vnitřních úhlů $\sphericalangle DAB$ a $\sphericalangle DCB$ se protínají v bodě $\bar{O}$. Z $\triangle A\bar{O}C$ podle *sinové věty* je $A\bar{O} : C\bar{O} = \sin \varphi : \sin \varepsilon$ a z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle A\bar{O}H$ a $\triangle C\bar{O}L$ plyne, je-li ϱ poloměr vepsané kružnice, $\varrho = \bar{OA} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, $\varrho = \bar{OC} \sin \frac{\gamma}{2}$, takže po dosazení do úměry dostaneme

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \quad (8)$$

Dosadíme-li $a - d = b - c$ ze vztahu (8) do (7) resp. (7') poznáváme, že tyto výsledky jsou totožné, což znamená, že bod $\bar{O} \equiv O \equiv O'$ a je skutečně vnitřním bodem úsečky EF . Tím je věta dokázána.

5. Užitím věty v odst. 4 odvodíme některé věty platné v každém trojúhelníku.

Obr. 3



Víme, že dotykové body vepsané kružnice do trojúhelníku ABC mají od jeho vrcholů A, B, C vzdálenosti $s - a, s - b, s - c$, kde $s = \frac{a + b + c}{2}$. Trojúhelník ABC (obr. 3) můžeme pokládat za *tečnový čtyřúhelník* $ABPC$, kde P je dotykový bod vepsané kružnice na straně BC . Strany BP, PC splynou s úhlopříčkou BC ; druhou úhlopříčkou čtyřúhelníka $ABPC$ je AP . Tento čtyřúhelník je tečnový, neboť podle *obrácené věty*, kterou jsme dokázali, platí

$$PC + AB = BP + AC, \quad \text{tj.} \quad (s - c) + c = (s - b) + b,$$

takže můžeme užít věty z odst. 4 na tento trojúhelník. Označíme-li E střed úsečky AP a F střed strany BC , pak úsečka EF prochází středem O vepsané kružnice.

Spojíme-li střed úsečky, která spojuje dotykový bod kružnice vepsané $\triangle ABC$ (na libovolné jeho straně) s protějším vrcholem, se středem této strany, prochází tato úsečka středem vepsané kružnice.

Určíme-li průsečík K přímky EF s výškou AG (viz obr. 3), pak ze shodných trojúhelníků $\triangle AKE \cong \triangle POE$ plyne $KA = OP = \rho$.

Každá přímka procházející středem strany trojúhelníka a středem kružnice jemu vepsané protíná výšku k této straně v bodě, který má od vrcholu, z něhož výška vychází, vzdálenost rovnou velikosti poloměru vepsané kružnice.

(Přímý důkaz této věty může najít čtenář v článku: *Konstrukce trojúhelníků, mezi jehož určovacími prvky jsou poloměry vepsané a opsané kružnice*, *Rozhledy* roč. 36 (1958–59) str. 433).

Cvičení:

1. Dokažte, že v každém tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí: $ad \cos \alpha = bc \cos \gamma$.

2. V $\triangle ABC$ (obr. 3) určete velikosti úseček PF a GF a pak dokažte věty v odst. 5 přímo bez použití věty z odst. 4.
3. Sestrojte trojúhelník, je-li dán poloměr vepsané kružnice ρ a dále
- rozdíl $a - b$, délka strany c ;
 - rozdíl $a - b$, délka výšky v_c ;
 - délka osy úhlu γ , tj. u_c , délka výšky v_c ;
 - délka výšky v_c a délka těžnice t_c .

Poznámka k řešení některých transcendentních rovnic iterační metodou

Dr. P. ANDRLE, CSc., Dr. V. MATAS, CSc., Dr. M. ŠIDLICHOVSKÝ, CSc.
ČSAV - Astronomický ústav, Praha

V současné epoše rozšíření kapesních elektronických minikalkulaček mezi studující mládeží jistě někteří jejich uživatelé si všimli, že pomocí nich lze snadno řešit i úlohy, které bychom na první pohled neočekávali, např. rovnici $x = \cos x$.

Zvolme libovolné číslo I_0 a aplikujme několikrát po sobě funkci kosinus, jejíž nezávisle proměnná je vyjádřena v radiánech, t. j. počítejme hodnoty $\cos I_0$, $\cos(\cos I_0)$, $\cos(\cos(\cos I_0))$ atd. Asi po padesáti krocích zjistíme, že display bude stále ukazovat touž hodnotu x_0 (rovnou přibližně 0,73908513), která je hledaným kořenem uvedené rovnice $x = \cos x$.

Platí tedy tvrzení, že posloupnost I_n , definovaná rekurentně vztahem

$$I_{n+1} = \cos I_n, \quad n \geq 0, \quad n \text{ celé}, \quad (1)$$

kde I_0 je libovolné reálné číslo, má za limitu x_0 , kde x_0 je kořenem rovnice $x = \cos x$.

Důkaz: A) Předpokládejme nejprve, že

$$I_0 \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle; \quad I_0 \neq x_0 \quad (2)$$

a všimněme si vybraných posloupností I_{2n} , I_{2n+1} ($n \geq 0$, n celé) z posloupnosti I_n . Dokážeme, že obě posloupnosti I_{2n} , I_{2n+1} jsou ryze monotónní, přičemž I_{2n} je rostoucí (klesající) právě tehdy, když I_{2n+1} je klesající (rostoucí). Z (1) plyne

$$\begin{aligned} I_{2n+2} &= \cos \cos I_{2n}, \quad n \geq 0, \\ I_{2n+1} &= \cos \cos I_{2n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Chceme tedy dokázat, že platí právě jedna z vlastností

$$\begin{aligned} I_{2n} &< I_{2n+2} \text{ pro všechna celá } n \geq 0, \\ I_{2n} &> I_{2n+2} \text{ pro všechna celá } n \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

a obdobně pro posloupnost I_{2n+1} .

Studujme funkci

$$f(x) = x - \cos \cos x \text{ v intervalu } \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Snadno nalézáme, že

$$f(0) = -\cos 1 < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0 \quad (6)$$

a

$$f'(x) = 1 - \sin x \cdot \sin \cos x > 0 \text{ pro } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle. \quad (7)$$

Funkce $f(x)$ je tudíž v $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ rostoucí a má tam jediný kořen, který je roven x_0 , jak dosazením snadno ověříme:

$$f(x_0) = x_0 - \cos \cos x_0 = x_0 - \cos x_0 = 0. \quad (8)$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} x - \cos \cos x &< 0 \quad \text{pro } x \in \langle 0, x_0 \rangle, \\ x - \cos \cos x &> 0 \quad \text{pro } x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Protože funkce $\cos x$ je klesající v $\langle 0, \pi/2 \rangle$, ihned vidíme, že platí implikace

$$I_0 > x_0 \Rightarrow I_1 = \cos I_0 < \cos x_0 = x_0, \quad (10)$$

$$I_0 < x_0 \Rightarrow I_1 > x_0 \quad (11)$$

($I_1 \in \langle 0, \pi/2 \rangle$). Zvolme libovolné I_0 , pro něž platí (2), (10).

Potom podle (9) jest

$$I_2 = \cos \cos I_0 < I_0. \quad (12)$$

Z (10) nalézáme dále (protože funkce $\cos x$ je v uvažovaném intervalu klesající)

$$I_2 = \cos \cos I_0 > \cos \cos x_0 = x_0. \quad (13)$$

Analogicky ze vztahu $I_{2n} > x_0$ plyne $x_0 < I_{2n+2} < I_{2n}$ pro všechna přirozená n . Vidíme, že za předpokladu (10) je posloupnost I_{2n} klesající a zdola omezená veličinou x_0 . Zcela obdobně odvodíme, že z předpokladu (11) vyplývá, že posloupnost I_{2n+1} je rostoucí a shora omezená horní závorou x_0 . Analogicky z předpokladu (11) plyne, že I_{2n} je rostoucí

a shora omezená číslem x_0 a I_{2n+1} je klesající a zdola omezená tímto kořenem x_0 . Jsou tudíž posloupnosti I_{2n} , I_{2n+1} konvergentní.

Označme

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n}, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+1}. \quad (14)$$

Ze vztahů (3) plyne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (I_{2n+2} - \cos \cos I_{2n}) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (I_{2n+1} - \cos \cos I_{2n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Ze (14) a (15) dostáváme

$$a - \cos \cos a = 0, \quad b - \cos \cos b = 0, \quad (16)$$

odkud plyne (viz též (2), (5), (8))

$$a = b = x_0. \quad (17)$$

K libovolnému $\varepsilon > 0$ existují tedy n_1, n_2 tak, že

$$\begin{aligned} \text{pro všechna přirozená } n > n_1 \text{ platí } |I_{2n} - x_0| &< \varepsilon \\ \text{a pro všechna přirozená } n > n_2 \text{ platí } |I_{2n+1} - x_0| &< \varepsilon. \end{aligned} \quad (18)$$

Označme

$$n_0 = \text{Max} (n_1, n_2). \quad (19)$$

Vidíme, že pro všechna přirozená $n > n_0$ jest

$$|I_n - x_0| < \varepsilon, \quad (20)$$

což je — vzhledem k libovolné volbě kladného čísla ε — ekvivalentní se zápisem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = x_0. \quad (21)$$

B) Je-li $I_0 = x_0$, potom též

$$I_n = x_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

a evidentně rovněž platí (21).

C) Předpokládejme nyní, že I_0 je libovolné reálné číslo. Potom nutně (viz (1))

$$I_1 = \cos I_0 \in \langle -1, 1 \rangle \quad (23)$$

a

$$I_2 = \cos I_1 \in (0, 1) \subset \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle. \quad (24)$$

Položme

$$I_n^* = I_{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Z posledních dvou vztahů plyne

$$I_{n+1}^* = I_{n+3} = \cos I_{n+2} = \cos I_n^*,$$

$$I_0^* = I_2 \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle. \quad (26)$$

Posloupnost (25) splňuje předpoklad (1), jakož i (2) nebo (22). Jest tedy podle *A* nebo *B*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^* = x_0. \quad (27)$$

Poněvadž posloupnost I_n^* vznikla z I_n vynecháním prvních dvou členů, platí též (21).

Obdobným způsobem bychom řešili obecnější rovnici

$$x = \cos \alpha x, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (28)$$

K tomu stačí dokázat, že posloupnost I_n zadaná rekurentně vztahem

$$I_{n+1} = \cos \alpha I_n, \quad n \geq 0, \quad n \text{ celé}, \quad (29)$$

má limitu x_1 , která je kořenem rovnice (28), bez ohledu na volbu reálné hodnoty I_0 . Postupovalo by se analogicky jako ve výše uvedeném důkazu konvergence posloupnosti (1) a čtenář si vše jistě snadno provede sám. (Návod: Studujte funkci $f(x) = x - \cos(\alpha \cos(\alpha x))$ v intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ a odvoďte, že posloupnosti I_{2n} , I_{2n+1} jsou monotonní a omezené.)

A nyní tedy nepřekvapí, že po přepnutí kalkulačky z radiánů na stupně po opakované aplikaci funkce kosinus bude display ukazovat opět stále stejnou hodnotu (tentokrát rovnou přibližně 0,99984774). Tato hodnota, jak je zřejmé, je kořenem rovnice

$$x = \cos \frac{\pi}{180} x. \quad (30)$$

Konvergence „jí příslušné“ posloupnosti I_n je mnohem rychlejší, než bylo v případě hledání kořene rovnice $x = \cos x$ a k uvedenému přibližnému výsledku byste dospěli už asi po pěti zmáčknutích tlačítka cos.

Článek jistě podnítl zvědavé čtenáře k podobným „výzkumům“ možností kalkulaček při opakované aplikaci různých funkčních tlačítek. Všimněte si např. posloupností

$$I_{n+1} = \sin I_n, \quad I_0 \text{ libovolné reálné číslo};$$

$$I_{n+1} = \operatorname{arctg} I_n, \quad I_0 \text{ libovolné reálné číslo}.$$

Na druhé straně však posuďte např. posloupnost

$$I_{n+1} = \ln I_n, \quad I_0 \text{ libovolné kladné číslo}.$$

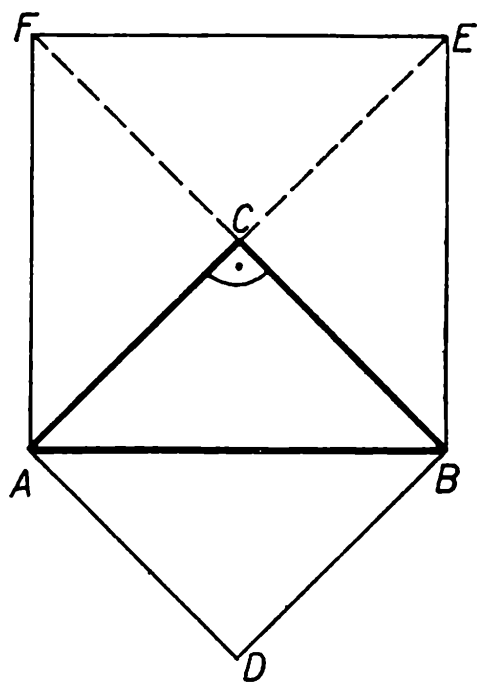
K důkazu Pythagorovy věty

STANISLAV HORÁK, Praha

1. Pojem pravoúhlého trojúhelníku je v každém vzdělaném člověku nerozlučně spojen s představou Pythagorovy věty. Existuje mnoho důkazů této věty a většina jich pochází z 2. poloviny 18. století a z 1. poloviny 19. století. Málokdo však ví, že platí tato zajímavá věta:

Jestliže Pythagorova věta platí pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, platí pro každý pravoúhlý trojúhelník.

Důkaz (obr. 1a). a) Pro pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník Pythagorova věta skutečně platí, jak vyplývá z obr. 1a. Tím se nebudeme podrobněji zabývat.



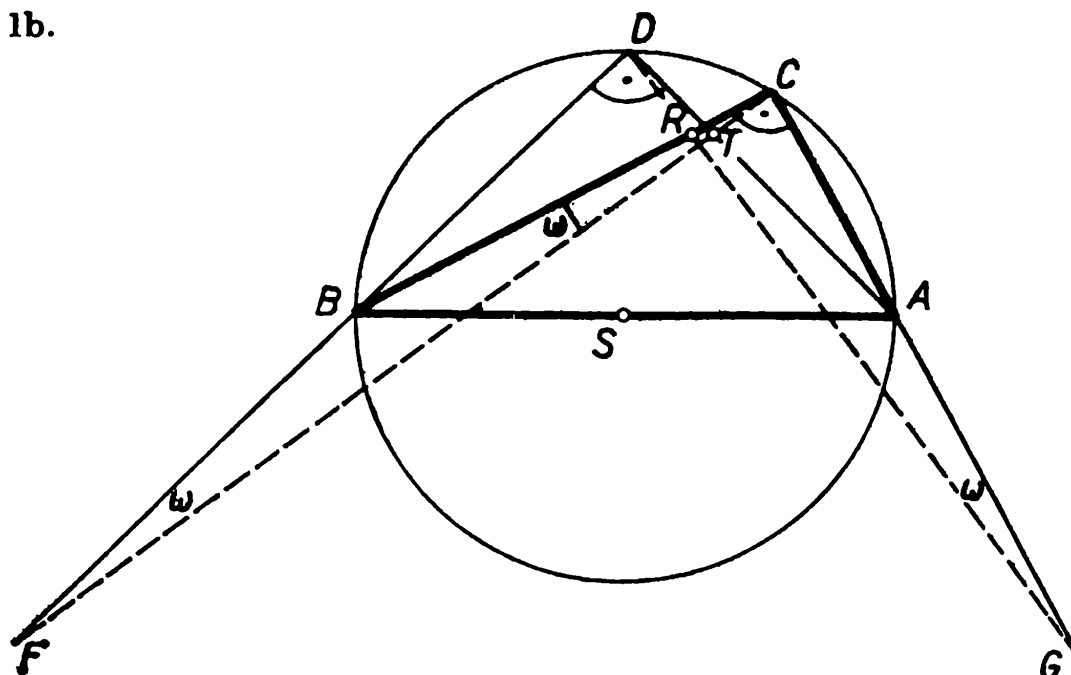
Obr. 1a.

b) Mějme nyní různostranný pravoúhlý trojúhelník ABC a označme v něm $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$. Nad jeho přeponou AB v polorovině ABC sestrojíme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABD . Na prodloužení úsečky BD za bod B sestrojíme bod F tak, aby $BF = BC$ a na prodloužení úsečky CA za bod A sestrojíme bod G tak, aby $AG = AD$ (obr. 1b). Trojúhelník ADG je rovnoramenný a velikost jeho úhlu ω při základně DG je

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right).$$

Touž velikost mají také úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka

Obr. 1b.



BFC . Z toho pak vyplývá, že $(R = BC \cap AD, T = AD \cap CF)$:

$$\triangle FDT \sim \triangle GCR \Rightarrow DT : DF = CR : CG. \quad (1)$$

Než budeme tuto úměru upravovat, všimněme si jiných trojúhelníků v obr. 1b. Snadno se dá spočítat, že

$$\sphericalangle BDR = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \pi - \alpha \right), \quad \sphericalangle BRD = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \pi - \alpha \right),$$

a proto trojúhelník BDR je rovnoramenný. Z toho máme

$$BD = BR.$$

Podobně se dokáže rovnost

$$\sphericalangle ACT = \sphericalangle ATC$$

a z toho vyplývá, že trojúhelník ACT je rovnoramenný, a tedy

$$AC = AT$$

Vraťme se nyní k úměře (1) a upravujme ji.

$$\begin{aligned} DT (DB + BF) &= CR (CA + AG), \\ DT [BR + (BR + CR)] &= CR [AT + (AT + DT)], \\ DT^2 + 2 \cdot DT \cdot AT &= CR^2 + 2 \cdot BR \cdot CR. \end{aligned} \quad (2)$$

Nyní počítejme dvojmo velikostí odvěsen v trojúhelníku ABC :

$$\begin{aligned} BC^2 &= (BR + CR)^2 = BR^2 + 2 \cdot BR \cdot CR + CR^2, \\ AC^2 &= AT^2 = (AD - TD)^2 = BD^2 - 2 \cdot AD \cdot DT + DT^2 = \\ &= BD^2 - 2 \cdot DT \cdot (AT + DT) + DT^2 = \end{aligned} \quad (3)$$

$$= BD^2 - 2 \cdot AT \cdot DT - DT^2. \quad (4)$$

S použitím vztahů (1), (2), (3) máme

$$AC^2 + BC^2 = BD^2 - 2 \cdot AT \cdot DT - DT^2 + BR^2 + 2 \cdot BR \cdot CR + CR^2 = AB^2.$$

Důkaz je proveden. Tato zajímavá drobnůstka pochází z 1. poloviny 19. stol. a svědčí o značné vynalézavosti jejího autora.

fyzika

Jak je to dnes u nás s novými jednotkami?

Ing. dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

Je možno se právem domnívat, že v současné době každý (nebo alespoň téměř každý) občan naší republiky ví o tom, že se u nás i v jiných státech zavádějí nové měřicí jednotky, že se dnes prakticky celosvětově pozvolna vžívá Mezinárodní soustava (měřicích) jednotek. Tuto soustavu známe také pod zkratkou SI, což jsou počáteční písmena francouzského názvu této soustavy (*Système International*, rozumí se *d'Unités*, tj. jednotek.) Mezinárodní soustava jednotek (SI) byla přijata na XI. Generální konferenci vah a měr (12. usnesením) konané v roce 1960 v Paříži a její struktura byla dále zpřesňována na následujících Generálních konferencích. V roce 1960 byl také přijat oficiálně název této soustavy a její mezinárodní zkratka „SI“. V roce 1970 vydává Mezinárodní úřad vah a měr v *Sèvres* (u Paříže) malou publikaci, v níž uvádí základní strukturu Mezinárodní soustavy jednotek a některé hlavní zásady jejího aplikování. Se zněním této publikace byli čtenáři našeho časopisu seznámeni sérií krátkých článků v letech 1971 a 1972. Protože od té doby uplynula již řada let, v nichž se zavedení SI v ČSSR cílevědomě a plánovitě uskutečňovalo, mnoho našich dnešních čtenářů již naše starší ročníky nemá k dispozici a zejména proto, že od té doby došlo v Mezinárodní soustavě k některým změnám a doplněním, bude účelné stručně zopakovat dosavadní znalosti o SI včetně některých novějších informací. Přitom je samozřejmé, že v následujících řádcích budou uplatněny také zkušenosti, které byly dosud získány pro zavádění SI do československého národního hospodářství.

Především si řekneme o současném významu SI. Ten spočívá v tom, že Mezinárodní soustava měřicích jednotek je dnes prakticky celosvětově jednotnou soustavou jednotek a že její použití je univerzální ve všech oblastech vědy a techniky. Jistě je každému známo, že pokusů o sjednocení jednotek fyzikálních veličin byla již dosud celá řada. Vzpomeňme na soustavu jednotek centimetr-gram-sekunda (CGS) nebo metr-tuna-sekunda (MTS), z nichž první existovala ve třech variantách, nebo na dosud dobře známou soustavu jednotek metr-kilogram-sekunda-ampér (MKSA), která proti dvěma předešlým byla již „čtyřrozměrná“ (tzn. měla čtyři základní jednotky). Takových soustav, které vycházely z prvního sjednocovacího pokusu novější doby, z metrické soustavy, mohli bychom uvést ještě více. To ovšem není naším záměrem. Postačí pouze na základě několika uvedených příkladů konstatovat, že právě koexistence více takových soustav, i když dobře míněných, dobře dokumentuje nejednotnost v měřicích jednotkách, a to zatím nejednotnost pouze v oblasti „metrické“. K tomu by přistoupila rozmanitost jednotek soustav britsko-amerických (např. yard-pound-second), případně dalších jednotek lokálních. Rozmanitost jednotek, zvláště u některých fyzikálních veličin, byla někdy velmi značná a zásadně tak odporovala základním organickým vlastnostem, které od měření požadujeme, tj. aby bylo jednotné a přesné. Takovou jednotnost v měřicích jednotkách, kterou nám může poskytnout soustava SI, dosud neposkytla žádná jiná soustava jednotek. Přitom je třeba si uvědomit, že soustava SI je výtvorem člověka a odrazem současných poznatků vědy a techniky, že ji tedy nelze pokládat za neměnné dogma, které již nelze zdokonalit. Jako vše bude se i SI postupně zdokonalovat, vyvíjet, doplňovat. To je ovšem otázkou času, v hlavních strukturálních rysech musíme SI pokládat za nadlouho stabilní.

V předešlých řádcích jsme se zmínili o přesnosti. Tou rozumíme sumární vlastnost měřidel a měření, jejímiž hlavními složkami jsou správnost a stálost (shodnost). Požadavky na přesnost měření neustále rostou, vědní a technický rozvoj postupně umožňuje tyto požadavky plnit. Zpravidla však úroveň požadavků poněkud předbíhá možnosti jejich realizace. Jsou stále hledány nové přesnější definice jednotek, zvláště základních, umožňující jejich přesnější realizaci a reprodukci. I po této stránce se nám musí jevit SI jako dosud nejdokonalejší soustava jednotek, protože definice základních jednotek jsou u ní relativně nejdokonalejší (např. definice metru, sekundy, kelvina aj.). V definicích základních jednotek a v metodice jejich realizace a reprodukce můžeme v budoucnu očekávat nejvíce změn.

Hovořili jsme o jednotnosti a stručně jsme se dotkli přesnosti. Zbývá ještě zmínit se o univerzálnosti. V některých vědních disciplínách se již dosud s nějakou neuniverzálností vůbec nesetkáme. Typické je to např. v elektřině, třeba u elektrického proudu, elektrického napětí aj. Zato

jinde, zejména v mechanice, a to ještě u některých veličin zvláště, byla rozmanitost jednotek a jejich specializace pro některé fyzikální (případně technické) disciplíny příliš velká, působila rušivě, když se zajišťovala jednotnost měření, umožňovala časté chyby a omyly atd. Zmíněná velká rozmanitost se ovšem rozumí v celosvětovém měřítku, avšak i v jediném státě byl počet používaných jednotek u jedné a téže veličiny nežádoucí. Jako příklad si uveďme jednotky energie (práce, včetně tepla), s nimiž se můžeme setkat v odborné literatuře, v dokumentaci apod. naší i zahraniční. Všimněme si tab. I.

Tabulka I. Přehled jednotek energie (práce, tepla), s nimiž se v odborné literatuře a v dokumentaci dosud můžeme setkat v širokém mezinárodním měřítku

Název jednotky (značka)	Převod na joule	Pozn.
joule (J)	$1 \text{ J} = (1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}) =$ $= 1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \text{ (z)}$	(SI)
erg (erg)	10^{-7} J	(CGS)
stenmetr (sn.m)	10^3 J	(MTS)
litratmosféra (fyz.) (l.atm)	$101,325 \text{ J}$ (přesně)	
litratmosféra (fyz.) (s původním litrem) (l.atm)	$101,328 \text{ J}$	
litratmosféra (techn.) (l.atm nebo 1 kp/cm^2)	$98,0665 \text{ J}$ (přesně)	
litratmosféra (techn.) (s původním litrem) (l.atm)	$98,0692 \text{ J}$	
litrapascal (l.Pa)		(z)
kalorie (mezinárodní tabulková) (cal nebo cal_{IT})	$4,1868 \text{ J}$	
kalorie absolutní (cal_{abs})	$4,186 \text{ 05 J}$	
kalorie čtyřstupňová (cal_4)	$4,2045 \text{ J}$	
kalorie dvacetistupňová (cal_{20})	$4,1816 \text{ J}$	
kalorie nulstupňová (cal_0)	$4,2174 \text{ J}$	
kalorie patnáctistupňová (cal_{15})	$4,1855 \text{ J}$	
termie (th)	$4185,5 \text{ J}$	
kalorie střední ($\text{cal}_{\text{stř}}$)	$4,1897 \text{ J}$	
kalorie termochemická (cal_{th})	$4,1840 \text{ J}$	
frigorie (záporná kalorie)	$-4,1855 \text{ J}$	
British thermal unit (pro 39°F) ($\text{Btu}_{39}^\circ \text{F}$)	$1059,52 \text{ J}$	
British thermal unit (pro 60°F) ($\text{Btu}_{60}^\circ \text{F}$)	$1054,54 \text{ J}$	

Název jednotky (značka)	Převod na joule	Pozn.
British thermal unit (tzv. střední, pro interval 32 °F až 212 °F) (Btu _{mean})	1055,79 J	
British thermal unit (mezinárodní tabulková) (Btu _{IT})	1055,07 J	
elektronvolt (eV)	1,602 19 · 10 ⁻¹⁹ J	(z)
rydberg (Ry)	2,1776 · 10 ⁻¹⁸ J	
watthodina (W.h)	3600 J	(z)
hodinový kůň (k.h)	2,647 80 · 10 ⁶ J	
horse power-hour (hp.h)	2,684 52 · 10 ⁶ J	
kilopondmetr (kp.m)	9,806 65 J (přesně)	
yard-pound-force (yd.lbf)	4,068 J	
foot-pound-force (ft.lbf)	1,35582 J	
foot-poundal (ft.pdl)	4,214 01 · 10 ⁻² J	
foot-ton-force (ft.tf)	3037,12 J	
inch-ounce-force (in.ozf)	7,062 · 10 ⁻⁴ J	
inch-pound-force (in.lbf)	0,1128 J	

V tabulce je v poznámce uvedeno, které jednotky jsou v ČSSR jednotkami zákonnými (z). Jednotek je v tabulce celkem 34 a připočteme-li další násobné nebo dílčí jednotky (pokud nemají samostatný název), jako je třeba kilokalorie, megakalorie, kilopondcentimetr aj., dojdeme bezmála k padesáti jednotkám, což je jistě počet neúnosný. Zavedením nových jednotek se tento počet celosvětově podstatně sníží.

Dosavadní neuniverzálnost lze také vysvětlit na předchozích jednotkách. Rozumí se ovšem neuniverzálnost jednotek, tzn. používání různých jednotek v různých doménách vědy a technické praxe. Tak z uvedených jednotek se ve fyzice používal nejčastěji erg, dále joule, případně elektronvolt a méně již rydberg. Přitom hovoříme jen o používání v zemích „metrických“, nikoliv v zemích aplikujících soustavu britsko-americkou. Ve fyzice se používala také jednotka tepla, kalorie, běžná jednotka z termiky. V technické mechanice se používal kilopondmetr spolu s litratmosférou převládající v hydrodynamice a částečně též používanou v aeromechanice. Akustika využívala zpravidla jednotky fyzikální. Již zmíněný elektronvolt se používá dosud běžně v elektronice a v atomové a jaderné fyzice a v navazujících aplikačních sférách. Elektrotechnika používá joule, wattsekundu, kilowatthodinu apod. Tato poslední jednotka se používá také pro vyjadřování hodnot elektrické práce. Naznačená rozmanitost spolu s určitou „specializací“ některých jednotek je jistě dosti markantní a rozhodně nemohla ani nemůže přispívat k zabezpečování jednotnosti a přesnosti měření v celostátním a dále též v mezinárodním měřítku.

Napříště se budou celosvětově používat jednotky tři: joule, kilowatt-hodina a elektronvolt, z nichž první je samozřejmě přednostní a svým použitím je zcela univerzální. Bylo-li by to zvláště žádoucí, mohl by se výjimečně použít litrpascal.

Přechodné období, v němž mají být u nás (a podle doporučení RVHP RS 3472-74 také v celém socialistickém společenství) nahrazeny některé měřicí jednotky dosud používané jinými zákonnými jednotkami, započalo 1. ledna 1975 a má skončit 31. prosince 1979. Po tomto datu se již tzv. dočasné jednotky (to jsou ty, které mají být nahrazeny) nemají nadále používat. Výjimku mohou tvořit některé oblasti činností v národním hospodářství, které jsou vázány na mezinárodní dohody v různých mezinárodních organizacích, pokud v nich nebude do té doby zavedení nových jednotek realizováno. Jedná se např. o konvence v mezinárodní dopravě železniční, letecké, lodní, v meteorologii, ve zdravotnictví apod. Výjimkou mohou být také stupnice unikátních a drahých měřidel, jejichž rekonstrukce na nové jednotky je velmi obtížná nebo dokonce neproveditelná, nebo dvojité stupnice (ve starých a nových jednotkách). Tuto výjimku uvádí základní dokument o měřicích jednotkách, ČSN 01 1300 „Zákonné měřicí jednotky“.

Tato státní technická norma řadí mezi zákonné jednotky jednak jednotky Mezinárodní soustavy jednotek (tzn. jednotky hlavní, koherentní SI spolu s jejich normálně tvořenými násobky a díly), jednak mimosoustavové jednotky vedlejší, které sice do SI nepatří, které však jsou oficiálně povoleny k časově neomezenému používání i po 1. lednu 1980. Jiné jednotky k zákonným nepatří, ani jednotky dočasné, ani jednotky staré nebo cizí, jež se již dnes u nás nepoužívají, ani jednotky speciální, jež se zatím používají a budou i dále používat, které však nebyly doposud mezinárodně kategorizovány. O nich se zmíníme ještě později. Všechny uvedené skupiny jednotek patří k jednotkám mimosoustavovým (tj. k takovým, které nepatří do SI). Jsou to tedy jednotky vedlejší, dočasné, speciální, staré a cizí.

Nejprve si probereme jednotky Mezinárodní soustavy jednotek a strukturu této soustavy. Mezinárodní soustava jednotek (SI) má tři hlavní třídy jednotek a jednu třídu násobků a dílů jednotek SI. První tři třídy jsou: Jednotky základní, jednotky doplňkové a jednotky odvozené (ty se odvozují z jednotek základních nebo též doplňkových). Všechny tři třídy obsahují pouze jednotky hlavní, jež jsou koherentní a jež se sumárně nazývají jednotkami SI. Je nutno znovu zdůraznit, že jednotkami SI jsou tedy pouze jednotky koherentní a nikoliv jednotky násobné nebo dílčí, protože ty svou povahou koherentní býti nemohou.

Jen pro úplnost si zde zopakujeme skutečnost, že v jednotkové rovnici koherentních jednotek jsou číselné faktory vesměs rovny jedné. Uvedme si několik příkladů.

Jednotky koherentní (v SI)	Jednotky nekoherentní (pro SI)
$[L] = 1 \text{ m}$	$1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$
$[\alpha] = 1 \text{ rad}$	$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$
$1 \text{ N} = 1 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N}$ (přesně)
$[m] = 1 \text{ kg}$	$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$
$[\omega] = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg}$

Přitom kilogram, i když jde o název obsahující předponu (kilo-) je jednotkou SI, je tedy koherentní, zatímco gram je jednotkou „dílčí“ a je nekoherentní. Patří sice do SI, ale výslovně jednotkou SI není. Tento termín byl jednoznačně mezinárodně dohodnut.

Často se o koherentnosti jednotek hovoří jen u jednotek odvozených, protože u jednotek základních a u jednotek doplňkových, u nichž byla volba prakticky libovolná, je koherentnost samozřejmá.

Nejprve se zastavíme u jednotek SI základních. Dnes je jich sedm a jejich pořadí je konvenční. V tomto pořadí jsou dále uvedeny jejich definice a některé další informace o nich v tabulce II.

Metr je délka rovnající se ve vakuu 1 650 763,73 vlnových délek záření, které odpovídá přechodu mezi hladinami $2p_{10}$ a $5d_5$ atomu kryptonu 86.

Poznámka k délce: Připravuje se nová definice základní jednotky délky, která by byla asi 1000krát přesnější při reprodukci. Pravděpodobně bude využito vhodného plynového laseru se stabilizací pomocí jódových par.

Kilogram je hmotnost mezinárodního prototypu kilogramu. Tento prototyp je od roku 1889 považován za ztělesnění jednotky hmotnosti a nikoliv váhy nebo síly.

Sekunda je doba trvání 9 192 631 770 period záření, které přísluší přechodu mezi dvěma velmi jemnými hladinami základního stavu atomu cézia 133.

Ampér je stálý elektrický proud, který procházel-li by dvěma rovnoběžnými vodiči přímými nekonečně dlouhými zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti 1 metru (od sebe), způsoboval by mezi těmito vodiči sílu rovnou $2 \cdot 10^{-7}$ newtonu na metr délky.

Kelvin, jednotka termodynamické teploty, je 273,16 část termodynamické teploty trojného bodu vody.

Poznámka k teplotě: Kromě termodynamické teploty (T) vyjadřované v kelvinech lze používat také Celsiovy teploty (t), definované rovnicí

$$t = T - T_0,$$

kde $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Celsiova teplota se zpravidla vyjadřuje v Celsiových stupních ($^\circ\text{C}$), které se co do jednotkového teplotního intervalu rovnají

Tabulka II. Přehled základních jednotek SI spolu s některými údaji o těchto jednotkách

Základní jednotka SI		Definice jednotky přijata na Generální konferenci vah a měr		Současná maximální přesnost reprodukce základní jednotky (řádově)	Pozn.
název	značka	v roce	která konference		
metr	m	1960	XI. CGPM (6. usnesení)	10^{-9}	do roku 1967 byla značka °K
kilogram	kg	1889 1901	I. CGPM III. CGPM (poznámka u definice)	10^{-9}	
sekunda	s	1967	XIII. CGPM	10^{-12}	
ampér	A	1948	IX. CGPM (2. usnesení)	10^{-6}	
kelvin	K	1954 1967	X. CGPM (4. usnesení) XIII. CGPM (3. usnesení; nová značka a použití též pro difference)	10^{-6}	
mol	mol	1971	XIV. CGPM	10^{-2}	
kandela	cd	1967	XIII. CGPM (5. usnesení)	10^{-2}	

Poznámky k tabulce II.:

¹⁾ CGPM = Conférence Générale des Poids et Mesures, Generální konference vah a měr, nejvyšší orgán Metrické konvence, vrcholné světové organizace pro otázky měření a měřicích jednotek.

²⁾ U definice kelvinu bylo uvedeno, že Celsiův stupeň (°C) lze používat pro Celsiovu teplotu stejně jako dosud.

³⁾ V ČSSR jsou základní jednotky stanoveny zákonem. Šest (vyjma molu) jich stanovuje zákon č. 35 z roku 1962 („O měrové službě“). Mol obsahuje zákon č. 57 z roku 1975, který předchází zákon doplňuje a u některých jednotek potřebně upravuje.

kelvinům. V Celsiových stupních je možno vyjadřovat také teplotní intervaly nebo obecné teplotní rozdíly.

Celsiův stupeň ($^{\circ}\text{C}$) byl v ČSN 01 1300 zařazen mezi vedlejší jednotky. Do budoucna se počítá, že nebude kategorizován jako jednotka vedlejší, ale jako jednotka v soustavě SI se zvláštním postavením.

Je nutno připomenout, že termodynamické měření teploty se pro praxi nehodí a proto byla vypracována a mezinárodně přijata tzv. Mezinárodní praktická teplotní stupnice, jejíž poslední znění je z roku 1968, poněkud upravené v roce 1975. V této stupnici jsou graduována, kalibrována a ověřována všechna teploměrná měřidla, používaná ve vědě i v technice, vyjma měřidla pro základní vědecké práce v oblasti teploty. O struktuře této teplotní stupnice si řekneme podrobněji někdy jindy. Aby se předešlo případným nedorozuměním, znovu si napíšme hodnoty dvou blízkých teplotních stavů:

teplotě 0°C (tj. bodu tuhnutí vody) přísluší termodynamická neboli Kelvinova teplota $273,15\text{ K}$,
trojnému bodu vody, který je základním definičním teplotním bodem, přísluší Celsiova teplota $+0,010^{\circ}\text{C}$, což odpovídá Kelvinově teplotě $273,16\text{ K}$.

Mol je látkové množství soustavy, která obsahuje právě tolik elementárních jedinců (entit), kolik je atomů v $0,012\text{ kg}$ izotopu uhlíku $^{12}_6\text{C}$.

Poznámka k definici molu: Používá-li se molu, mají být příslušní elementární jedinci (entity) blíže specifikováni; mohou jimi být atomy, molekuly, ionty, elektrony, jiné částice nebo jiná blíže určená seskupení těchto částic.

Kandela je svítivost černého tělesa v kolmém směru k povrchu, jehož velikost je $\frac{1}{600\,000}\text{ m}^2$ při teplotě tuhnutí platiny a při tlaku $101\,325$ pascalů (což je hodnota normálního barometrického tlaku).

Poznámka ke svítivosti: Vzhledem k poměrně nízké současné přesnosti reprodukce této základní jednotky uvažovalo se o nahrazení svítivosti jako jedné základní veličiny veličinou jinou, např. světelným tokem. Podle nejnovějších zpráv se svítivost pravděpodobně nadále ponechá jako základní fyzikální veličina, změní se však definice její hlavní jednotky.

V souvislosti ze základními jednotkami si připomeňme, že tyto jednotky u zvolených veličin je teoreticky možno volit zcela libovolně. Stejná libovolnost, i když pojem „celku“ je tam dán názorem, je také u jednotek doplňkových. Jsou-li však základní a u SI také doplňkové jednotky dány, jsou hlavní (tzn. koherentní) jednotky odvozených veličin, tzv. jednotky SI odvozené, jednoznačně určeny a jakákoliv libovolnost při jejich tvorbě nepřichází v úvahu.

(Pokračování)

Nejmladším čtenářům

1. Najděte tři různá dvojciferná čísla, která mají tyto vlastnosti:
a) jejich součet je 132, b) jejich největší společná míra je 12 a c) jejich nejmenší společný násobek je 240.

2. V holandském časopisu *Pythagoras* (roč. 1973–74, str. 102) je tato úloha (uvádím zde jinou formulaci): V roce 1974 připadl 1. leden na úterý a 31. prosinec připadne též na úterý. V kterém roce se bude tento jev opakovat?

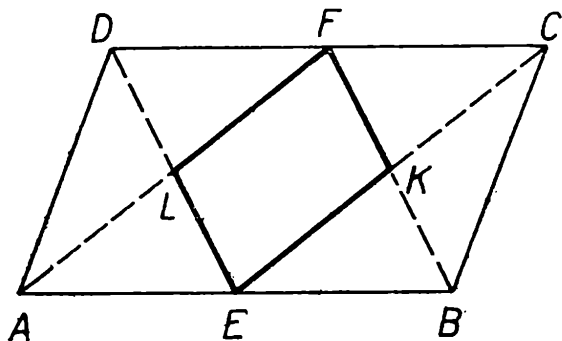
3. V obr. 1a je dán obdélník $ABCD$. Jeho úhlopříčky se protínají v bodě U . Středem K strany AB je vedena přímka $KL \parallel AC$. Ta protne úhlopříčku BD v bodě L . Pata kolmice z bodu L na stranu AB je M . Dokažte, že $4 \cdot LM = BC$.

4. V obr. 2a je $ABCDEF$ pravidelný šestiúhelník, jehož strana má délku 2. Šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ je též pravidelný a má své vrcholy na úhlopříčkách prvního; jeho strana má délku 1. Vypočítejte obsah šestiúhelníku $AB'C'DE'F'$.

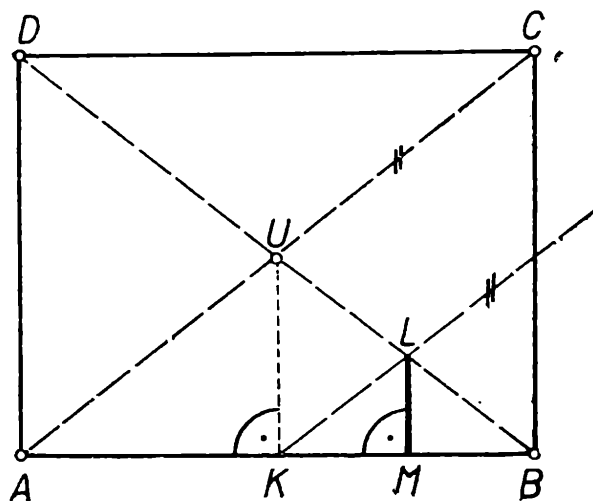
Řešení a výsledky. 1. 24, 48, 60. — 2. V r. 1985. — 3. ML je střední příčka v trojúhelníku BUK a KU je střední příčka v trojúhelníku BAD . — 4. $S = \frac{2}{5}\sqrt{3}$.

A teď věnujeme svou pozornost jen geometrii.

1. V obr. 1 je narysován rovnoběžník $ABCD$. Bod E (F) je střed strany AB (CD). Přímky EC , ED , FA , FB omezují rovnoběžník $EKFL$. Ukažte, že obsah rovnoběžníku $ABCD$ je čtyřnásobek obsahu rovnoběžníku $EKFL$.



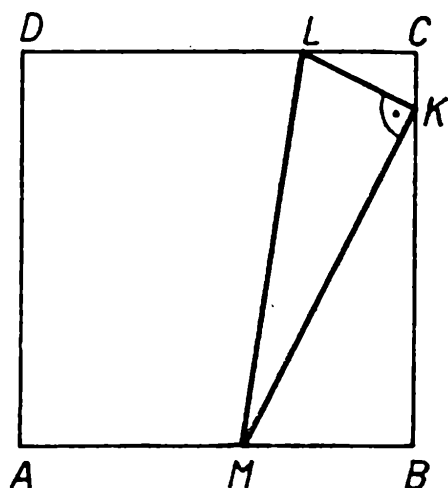
Obr. 1



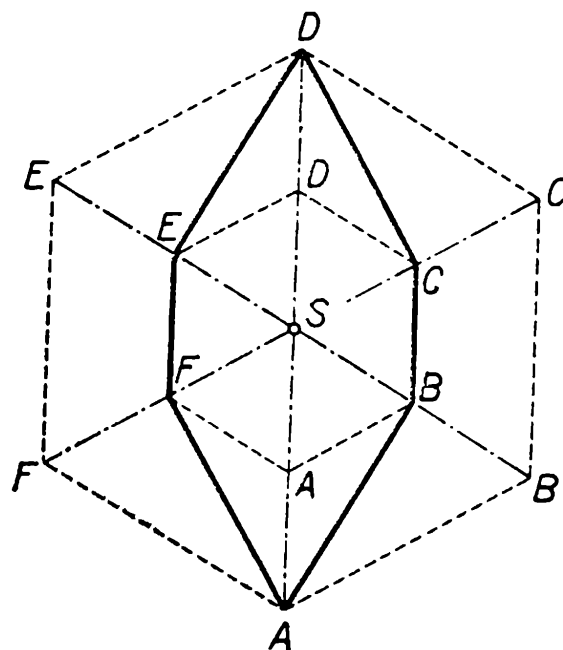
Obr. 1a

2. Je dán čtverec $ABCD$ (obr. 2). Bod K (L ; M) je vnitřním bodem strany BC (CD ; AB), a to tak, že

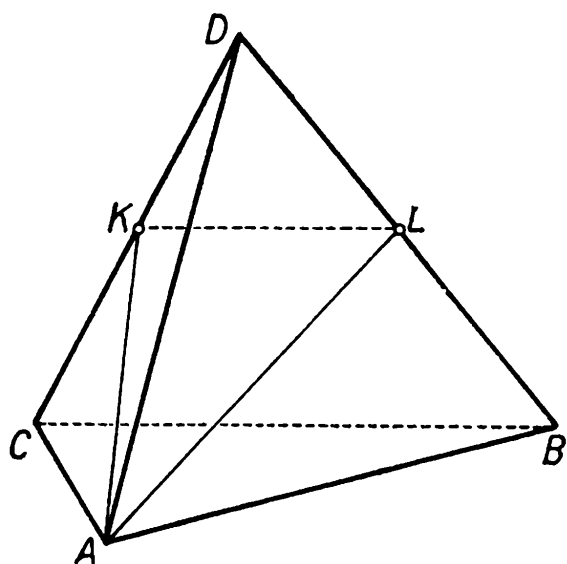
$$BM = 3 \cdot CK, \quad CL = 2 \cdot CK.$$



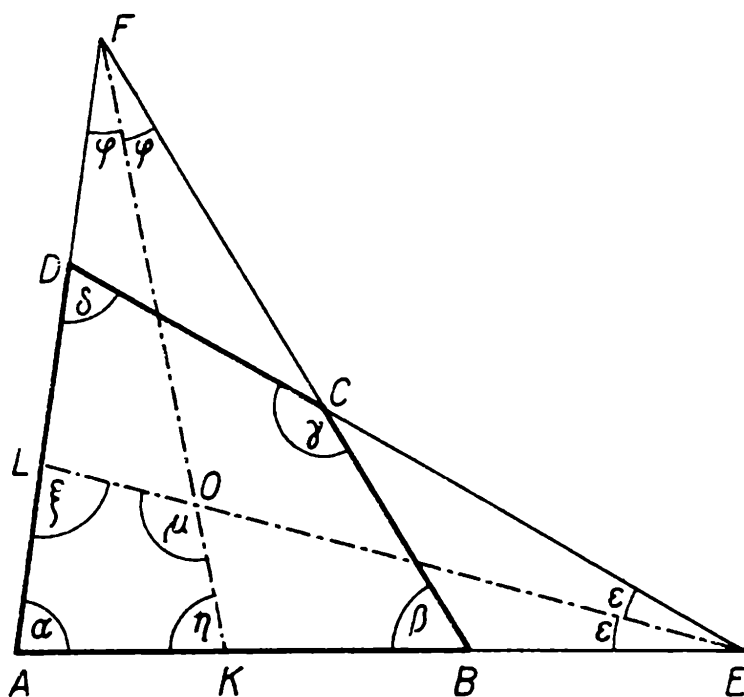
Obr. 2



Obr. 2a



Obr. 3



Obr. 4

Jakou velikost musí mít úsečka CK , aby $\sphericalangle KLM = 90^\circ$? $\left(CK = \frac{1}{7}BC\right)$

3. Obr. 3 představuje pravidelný čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany mají velikost a . Bod K (L) je střed hrany CD (BD). Vypočítejte obsah trojúhelníku AKL . $\left(\frac{1}{4}a^2\sqrt{13}\right)$.

4. Je dán různoběžník $ABCD$ (obr. 4). Strany AB , CD (AD , BC) se v prodloužení protnou v bodě E (F). Osy úhlů AED , AFB tvoří úhel μ , jehož velikost je rovna polovičnímu součtu úhlů α , γ .

Dokažte:

Pokyn. Tento příklad je poněkud obtížnější, a proto je tu návod, jak máte při řešení postupovat:

a) Zjistěte velikost úhlů ε, φ z trojúhelníků AED, ABF pomocí úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. b) Z trojúhelníků AEL, AKF určete velikosti úhlů ξ, η . c) Ze čtyřúhelníku $AKOL$ se dá pak vypočítat velikost úhlu μ .

S.H.

Ze zahraničních časopisů

Elemente der Mathematik je švýcarský časopis věnovaný matematice. Vychází šestkrát do roka a obsahuje články psané ponejvíce německy. Jsou tam také příspěvky v jazyce francouzském, anglickém i italském. Autoři článků jsou většinou známí matematici (Erdöss, Hadwiger, Mordell, Sierpiński a jiní). Články ovšem nejsou právě elementární. Na konci každého sešitu jsou jednak náročnější úlohy, věnované školeným matematikům, jednak „Úlohy pro školu“. A z této rubriky je zde několik příkladů.

I. Z rovnic

$$x^3 + y^3 = a^3, \quad x^2 + y^2 = b^2, \quad x + y = c$$

vylučte x, y .

Poněvadž to je příklad, jemuž podobné se na našich školách neřeší, uvedeme ve stručnosti jeho řešení. Doufám, že symbolice, uvedené před každou novou rovnicí, čtenář porozumí.

$$(3)^2 - (2)(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = c^2 - b^2,$$

$$xy = \frac{1}{2}(c^2 - b^2),$$

$$(2) \quad (3)(x^2 + y^2)(x + y) = b^2c.$$

Výsledek:

$$2a^3 - 3b^2c + c^3 = 0.$$

II. Ukažte, že rovnice

$$16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 8x - 1 = 0$$

má jeden kořen $x_1 = \cos 20^\circ$.

Řešení. Použijeme vztahu

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Jestliže $\alpha = 20^\circ$, potom $4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ = \frac{1}{2}$.

A nyní budeme upravovat naši rovnici:

$$4x(4x^3 - 3x) + 2(4x^3 - 3x) - 2x - 1 = 0.$$

Dosazením $x = \cos 20^\circ$ se přesvědčíme, že vyslovené tvrzení je správné.

Stanislav Horák

recenze

Hvězdářská ročenka 1978

Sestavili J. Bouška, Vl. Guth, B. Onderlička, Jar. Ruprecht a kol. ACADEMICA, Praha 1977, 260 str., 31 Kčs.

Jako v předchozích letech upozorňujeme i letos čtenáře na další (již padesátý čtvrtý) ročník Hvězdářské ročenky s tradičním členěním do pěti celkem samostatných částí: A. Kalendářní data, B. Efemeridy, C. Časové signály, D. Přehled pokroků v astronomii (v roce 1976), E. Umělé družice a kosmické sondy vypuštěné v r. 1976.

Pozorovatelé oblohy budou patrně průběžně po celý rok listovat v osmi oddílech části B a zvláště pak v přehledném měsíčním Kalendáři úkazů. Příliš potěšení nebudou, když v oddíle věnovaném zatmění se dovědí, že v roce 1978 budou u nás viditelná jen částečně dvě zatmění Měsíce. Bohaté informace jsou soustředěny do šestnácti oddílů části D. V oddílu věnova-

ném Slunci je komentován začátek nového jedenáctiletého cyklu s poučným grafem srovnávajícím poslední cykl s průměrným průběhem třinácti cyklů a s informací o maudnerovském minimu. Informuje se o otazníku slunečních neutronů a o pulsacích Slunce.

Ročenka jedná soustavně o rozborech měsíčních vzorků, o měřeních na Měsíci a o rozsahu výsledků získaných oběma kosmickými velmocemi při studiu chemického složení měsíčního povrchu. Jsou uvedeny nové číselné hodnoty planetárních poloměrů (kongres v Grenoblu 1976) a výsledky získané kosmickými sondami (Veněra 1, 2; Viking 1, 2) a radarem. Z dalších otázek vybíráme telegraficky alespoň některé: dvojhvězdy, hvězdné asociace, mezihvězdná hmota, Orionova mlhovina M 42 s otázkou vzniku hvězd, pulsary, neutronové hvězdy, kvasary atd. atd.

Již tento orientační a značně

neúplný výčet jistě postačí zájemci, aby po ročence dychtivě sáhl. Doporučujeme školním knihovnám!

Karel Mišoň

Bohdan Zelinka:

Rovinné grafy

Škola mladých matematiků, svazek 41, vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, Praha 1977, stran 136, obr. 71, cena brož. výt. Kčs 7,—

Ještě před třiceti léty o teorii grafů věděli jen zasvěcenci, dnes však vývoj pokročil tak, že se některé prvky z této moderní matematické discipliny zavádějí do matematického učiva i na gymnáziích. Tak je tomu u nás i v pedagogice zahraniční, a proto není na škodu, když studenti dostávají do rukou přístupné pojednání z tohoto oboru.

Ve starší matematice se žáci také učili o grafech, graficky znázorňovali různé funkce a to zůstává i v nynějším učivu. V teorii grafů jde však o jiný pojem a grafem se tu rozumí jistý útvar, jenž se často vyskytuje v teorii i v aplikacích. Útvar se skládá — zhruba řečeno — z elementů dvojího druhu, z uzlů a hran. Studium takových grafů se pak obvykle zařazuje do kombinatoriky a někteří čtenáři si asi vzpomenu, že i v Rozhledech vyšlo několik článků s grafově teoretickým námětem.

První kapitola Zelinkovy knížky navozuje atmosféru a pak přináší

dvě definice: v první se zavádí neorientovaný graf, ve druhé graf orientovaný. Kapitola druhá přichází s některými základními pojmy z teorie grafů, jež budou potřebné v dalším (stupeň uzlu, izolovaný uzel, pravidelný graf, úplný graf, podgraf, sled, souvislý graf atd.). Co je v kapitole třetí? Tu se autor dostává k pojmu rovinného grafu, jenž je hlavním předmětem zkoumaným v celé knížce. Graf se nazývá rovinný, dá-li se reprezentovat v rovině tak, že uzly jsou znázorněny jako body roviny, hrany jako oblouky a žádné dva z těchto oblouků se neprotínají. Je známo, že existují celkem jednoduché grafy, jež nejsou rovinné. Úloha o třech domech a třech studních skýtá jeden takový příklad a „muří noha“ (pětiúhelník se všemi úhlopříčkami) je druhý. Ve čtvrté kapitole se dočteme o dalších pojmech, jež mají vztah k rovinným grafům (oblasti rovinného grafu, duální graf) a kapitola pátá se věnuje speciálnímu typu rovinných grafů — triangulacím. Problém čtyř barev, na nějž se autor soustředí v kapitole šesté, poutá pozornost matematiků už od minulého století. Jde o to, zda každou zeměpisnou mapu můžeme obarvit čtyřmi barvami tak, že každý stát dostane jednu barvu a každé dva státy, jež mají společnou hranici, jsou obarveny různě. Tuto otázku lze ovšem vyjádřit též jako problém barvení uzlů rovinného grafu a existuje o ní velká literatura. Teprve nedávná doba ukázala, že odpověď je kladná (*W. Haken a K. Appel* 1976), při-

čomž se podstatne využilo počítačov. Sedmá kapitola sa zabýva špeciálnym typom rovinných grafov, jímž sa říká vnějškově rovinné. To jsou ty, v nichž při vhodné rovinné reprezentaci existuje oblast, jež inciduje se všemi uzly. Poslední, osmá kapitola ukazuje, jaký vztah mají rovinné grafy k teorii konvexních mnohostěnů a zvláštní pozornost se věnuje pravidelným konvexním mnohostěnům.

V knížce je dostatečný počet cvičení, jimiž by se měl čtenář zabývat samostatně. Je dobré, že na konci svazku autor uvádí také výsledky. Přehled použitých symbolů a seznam další literatury ukončuje tento zajímavý svazek.

Jiřina Sedláčková

Rényi, A.:

Dialógy o matematike

Vydala ALFA, n. p., Bratislava, v roku 1977, v edícii Epsilon, 1. vydanie, 144 strán, 8 obrázkov, brožované, 7,— Kčs

Do úst Sokrata a Hipokrata, Archiméda a Hierona, Galileiho, Torricelliho a Niccoliniovej vkladá v troch dialógoch svoje myšlienky o tom, čo je vlastne matematika, v čom spočívajú jej metódy a aký je vzťah matematiky k iným vedám, známy maďarský matematik *Alfréd Rényi*, autor u nás známej vysokoškolskej učebnice „Teória pravdepodobnosti“ (Academia, Praha 1972). Tento mladý matematik (zomrel vo veku 48 rokov

1. februára 1970) vynikal nielen v teórii pravdepodobnosti, teórii čísel, teórii informácií a teórii grafov, ale mal široký rozhľad v starej gréčtině, estetike i filozofii. Dialógmi chcel na historickom pozadí naznačiť pre široký okruh čitateľov, ktorí si chcú rozšíriť svoje všeobecné vzdelanie a rozvinúť intelektuálny obzor, odpovede na otázky o vzťahu matematiky a reálneho sveta, o aplikáciach matematiky a o matematickej reči prírodných vied.

V prvom dialógu autor sokratovskými otázkami vedie rozhovor k poznaniu, že „zaoberať sa matematikou vlastne znamená v zrkadle nášho myslenia pozorovať a študovať svet, v ktorom žijeme“. Na príklade s mapou, ktorá vystihuje podstatné veci, je ukázaný spôsob použitia matematiky pri pozorovaní skutočného sveta.

Dialóg o použití matematiky je rozhovorom *Archimeda*, prvého aplikovaného matematika, s vládcom mocných — *Hieronom*. Triumf rozumu nad silou je doporučený nielen do sféry vojen a násilí. Matematiku na tieto účely možno používať každodenne. Rényi cez Archiméda presadzuje názor, že „čistú matematiku a jej praktické použitie nemožno oddeliť od seba“, ako aj to, že „zmysel pre prax nikdy nemôže nahradiť nedostatok myšlienky“. Hľadanie zodpovedajúcich matematických modelov vedie k hlbšiemu pochopeniu skúmaných javov, núti k presnejším definíciám pojmov, vyžaduje logicky domyslieť všetky možnosti, upresňuje poznanie roz-

hodujúcich činiteľov. Kto chce dobre aplikovať, musí mať veľmi dôkladné a hlboké matematické poznatky. Naopak, úsilie o použitie matematiky môže podnietiť nové smery pri výzkuve v čistej matematike.

Záverečný rozhovor pod názvom „Jazyk knihy prírody“ je objasnením úlohy matematiky v prírodných vedách a cieľov pri vyučovaní matematiky. Na pozadí inkvizičného väzenia rozvíja Rényi niekoľko príkladov konkrétnych matematických pojmov a výsledkov zo života *Galileiho*, ktorý ako prvý v novoveku hlásal rozhodujúci význam matematických metód pri spoznávaní prírody.

Autor nasledoval v dialógoch historickú vernosť príhod a rozhovorov, ale snažil sa vystihnúť myšlienky, ku ktorým jeho hrdinovia mohli dôjsť, privlastňuje im znalosti a názory, ktoré v tej dobe sú historicky možné.

Knižka „Dialógy o matematike“ je zaujímavou a podnetnou ukážkou príspevku čínorodého matematika do oblasti osvetovej práce, do sféry motivácie a popularizácie matematickej kultúry. Rényi chcel, aby sa matematika stala organickou súčasťou života a slúžila spoločnému cieľu — pomáhať človeku spoznať seba samého a svet, v ktorom žije.

Dušan Jedinák

Miloš Jelínek: ČÍSELNÉ MNOŽINY

Vydalo SPN Praha 1977; 200 stran, 62 obrázků, brož. 7,— Kčs

Číselné množiny jsou dalším, v řadě již sedmým svazkem populární knihnice *Nové směry ve školské matematice*, která si klade za cíl seznámit veřejnost s pojmy a metodami používanými v současné školské matematice.

Již název knížky napoví, že jejím obsahem je studium jednoho ze základních matematických pojmů, pojem čísla. Kniha je rozdělena do šesti kapitol. V první je definováno přirozené číslo. Jsou zavedeny základní početní operace s přirozenými čísly a zkoumány jejich vlastnosti. Druhá kapitola se zabývá čísly celými. Další dvě kapitoly jsou věnovány racionálním číslům a operacím s nimi. Čísla iracionální a reálná tvoří obsah kapitoly šesté. V poslední kapitole autor stručně pojednává o odhadech chyb, vznikajících při numerických výpočtech.

Kniha je psána elementárním způsobem. Zavedené pojmy jsou vždy vysvětleny na několika příkladech a kde lze, jsou doprovázeny obrázky a diagramy. Každý paragraf je ukončen cvičeními, která autor předkládá čtenáři k vyřešení. Vzorová řešení jsou uvedena na konci knihy.

Myslím, že kniha splňuje úkol, který si autor klade v předmluvě: Dát nejširší veřejnosti příležitost spolehlivě porozumět základním pojmům a algoritmům aritmetiky a naučit se s nimi zacházet.

Anežka Wohlmuthová

Zdeněk Kukal a kol.:

Základy oceánografie

ACADEMIA, Praha 1977, váz.,
512 str., 73 Kčs.

Českému čtenáři se dostává do rukou naše první učebnice oceánografie. Nehledě jen k obecnému kulturnímu požadavku všeobecného rozhledu podtrhuje význam knihy naše úspěšná aktivní účast v náročném programu zemí RVHP, což zřetelně ovlivnilo nejednu pasáž knihy, členěné do třinácti kapitol: 1. Definice a rozdělení oceánografie, 2. Dějiny oceánografie, 3. Oceány, moře, jejich rozloha a dělení, 4. Morfologie dna světového oceánu, 5. Geologie moří a oceánů, 6. Mořská voda, 7. Pohyby mořské vody, 8. Vztahy mezi oceánem a atmosférou, 9. Biologie moře, 10. Oceánografický výzkum, 11. Mořské nerostné suroviny, 12. Člověk pod mořskou hladinou, 13. Námořní doprava.

Při své široké koncepci předpokládá kniha jen elementární znalosti z fyziky, matematiky a chemie. Mapové přílohy, zčásti geomorfologické, doplňují instruktivně text. Četné zeměpisné obrázky ze všech oceánů, snímky z družic, fotografie plavidel, průplavů, technických prostředků, flóry i fauny zvyšují poutavost díla. Nejednomu čtenáři se možná stane kniha přitažlivější, přečte-li si souběžně s předmluvou ihned beletristicky koncipovaný závěr.

Zájemci o fyziku získají z knihy úvodní elementární orientaci o mořském vlnění (velikost vln,

vlny volné, nucené, příbojové, vnitřní, stojaté; refrakce a energie vln). Samostatná část je věnována vlnám tsunami — pro zdůraznění jejich významu připomínáme, že v posledních letech bylo na našem knižním trhu několik sovětských publikací věnovaných výhradně této otázce. Zpracování mořského dmutí (příliv a odliv) je omezeno na popis jevu. Třináctiřádkový výklad vlivu Měsíce zvidavému čtenáři sotva postačí! U příležitosti historické připomínky odlišného dobrodružství Alexandra Velikého v řece Indu (když mu byli uprchlí ne dosti střežení průvodci) upozorňujeme čtenáře na český překlad obsáhlého poutavého líčení události z díla Q. Curtia Rufa uvedený ve starší české učebnici Strouhal - Kučera: Mechanika (1910).

Kniha informuje o profilování dna, užití fotografie a televize, měření mořských proudů, o odběru vzorků vody a jejich fyzikálních vlastnostech, o podmínkách pobytu člověka pod vodou, o vidění a o slunečním světle pod hladinou, o viskozitě vody. Připomínáme ještě stať věnovanou čs. námořní dopravě. Turistům i rekreantům mířícím k Černému moři doporučujeme pročtení příslušných pasáží knihy.

Orientaci v obsáhlém svazku usnadňují dva bohaté rejstříky: autorský a věcný, hlubšímu zájmu poslouží 279 literárních odkazů, z nichž nejeden se týká českých autorů.

V krátkém výběru z široké záslužné práce autorského kolektivu

jsme se omezili na tematiku spadající do náplně našeho časopisu. Vzhledem k celkovému zaměření knihy by se o ni mohly podílet kabinety fyziky a zeměpisu.

Karel Mišoň

Antonín Vrba:

Princip matematické indukce

Škola mladých matematiků, svazek 40, vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, Praha 1977, stran 132, obr. 27, cena brož. výt. Kčs 9,—

A. C. Doyle sotva tušil, že se jeho detektiv Sherlock Holmes a dr. Watson dostanou i na stránky matematické knížky. Stalo se tak v novém svazku A. Vrby, jenž se nedávno objevil u našich knihkupců. Autor vybírá úryvek z povídky A. C. Doylea Liga zrzavých, kde oba hrdinové právě rozmotávají jeden případ.

„Skvělá dedukce,“ vykřikne dr. Watson s neskrývaným obdivem nad kombinačními schopnostmi svého přítele Sherlocka Holmese. Detektiv výborně kombinoval a bystře vytvářel pravděpodobné domněnky, ale...

Ačkoliv dr. Watson tolik žasl nad Sherlockovými „dedukcemi“, nebyly to ve skutečnosti soudy deduktivní, neboť se nevyvozovaly z obecných principů speciálních závěrů. Šlo tedy jen o úvahy induktivní, jež i v matematice mají svou důležitost. Indukce se ovšem v matematice nepoužívá k důka-

zům, ale k vytváření nových domněnek.

Podívejme se teď na uspořádání nového svazku, jenž je tak trochu jubilejní, neboť Škola mladých matematiků jím dovršuje už čtyři desítky svých titulů. Knížka je rozvržena do šesti kapitol. První má název „Princip matematické indukce a jeho využití v důkazech“, druhá „Význam principu matematické indukce pro definici a konstrukce“. Obě kapitoly tvoří základ celého díla, popisuje se v nich několik variant matematické indukce a ukazuje se jejich význam pro důkazy matematických vět a pro rekurentní definici. Třetí kapitolu autor nazval „Poznámky a komentáře“, vysvětluje v ní rozdíl mezi indukcí a dedukcí a na jejích stránkách je i příběh o Sherlocku Holmesovi, jímž jsme začali tuto recenzi. Následuje kapitola čtvrtá s názvem „Ještě pětadvacet úloh“ a příklady zde rozřešené jsou zhruba na takové úrovni, jakou předpokládá matematická olympiáda.

Autor uvádí, že je většinou vybral ze zahraničních pramenů a seřadil podle tematické příbuznosti. První, druhá i třetí kapitola končí vždy několika cvičeními, jimiž by se měl student samostatně zabývat. Knížka mu v tom pomáhá tím, že v páté kapitole nazvané „Návody ke cvičením“ najdeme pomoc v případech, jež autor pokládal za zvláště složité. Závěrečná šestá kapitola s titulem „Řešení cvičení“ pak informuje o všech cvičeních, která byla v brožuře uložena.

Je to opravdu velmi užitečná

knížka, jež úzce navazuje na školskou matematiku i na matematickou olympiádu. Studenti, kteří se zajímají o matematiku, by ne-

měli tento nový svazek Školy mladých matematiků nechat bez povšimnutí.

Jiřina Sedláčková

Pokyny autorům

Rozhledy matematicko-fyzikální mohou otisknout jenom ty články, které byly zaslány redakci s úplným autorovým jménem, jeho akademickými a vědeckými tituly, s udáním pracoviště a bytové adresy autora. O otištění rozhoduje redakční rada nebo vedoucí redaktor po vyjádření recenzenta. Nevyžádané rukopisy se nevracejí.

Obsah: Rozhledy matematicko-fyzikální jsou určeny především studentům středních škol a středních odborných učilišť s maturitou. Jejich obsah i způsob podání má proto odpovídat tomuto poslání. Otištěné články musí být psány srozumitelně, pokud možno zajímavě a nemají být příliš dlouhé. Autoři se musí řídit pravidly českého nebo slovenského pravopisu, musí respektovat přijaté názvy a značky a (ve fyzice) zákonem stanovené jednotky a označení.

Úprava rukopisu: Nejprve je třeba uvést titul příspěvku (krátce a výstižně), potom jméno a působiště autora. Text je nutno psát na stroji (nikoliv však perličkou!), černou páskou, ob řádek, a to po jedné straně bílého papíru formátu A4. Na každé stránce má být nejvýše 30 řádků, z nichž každý obsahuje 60 úhozů. Nadpisy nebo zdůvodněná slova textu podtrhujte jenom obyčejnou (ne propisovací) tužkou. Poznámky pod čarou — pokud možno v minimálním počtu — je třeba v textu vyznačit postupně číslicemi v exponentu a psát je hned za řádek rukopisu, k němuž patří; od ostatního textu se oddělí vodorovnými čarami.

Matematické výrazy a vzorce se v textu doplňují ručně (velmi čitelně!) inkoustem, tuší nebo propisovací tužkou; zvláštní pozornost je třeba věnovat připisování indexů a exponentů. Vzorce se číslují v oblých závorkách na pravé straně, a to jenom tehdy, jestliže se na ně odvoláváme v dalším textu.

V odkazech na literaturu uvádíme (a to střídmo) jenom publikace dostupné čtenářům Rozhledů, tj. především literaturu psanou v českém nebo slovenském jazyce. Tyto odkazy je třeba v textu průběžně číslovat; číslice se píší do hranatých závorek. Odkaz obsahuje jméno autora, název knihy nebo článku (u časopisu ročník a stránku), vydavatele, místo a rok vydání.

Obrázky se rýsují tuší na pauzovací papír a popisují se normalizovaným písmem šablonou 5 mm; čáry musí být ostré a nerozpité. Očíslované texty k obrázkům se přikládají na konec rukopisu. Je třeba pamatovat na to, že se obrázky pro tisk zmenšují v poměru 1 : 2. Fotografie musí být ostré, kvalitní a zhotovené na lesklém bílém papíru.

Redakce

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

věta	theorem
pomocná věta	auxiliary theorem
věta o pokrytí	cover theorem
věta o střední hodnotě	mean value theorem
věta o úsekovém úhlu	alterante segment theorem
větev	branch
větší oblouk kružnice	major arc of circle
více	more
vícenásobný	multiple
vícerozměrová analýza	multivariate analysis
viditelnost	visibility
viditelný	visible
vlastní	proper, actual
vlastnost	property, quality
vně	without
vnější	outer, external
vnější bod	exterior point
vnější členy úměry	extremes
vnější úhel	exterior angle
vnitřek	interior
vnitřní	inner, internal
vnitřní bod	interior point
vnitřní členy úměry	means of proportion
vnitřní úhel	interior angle
vnoření	embedding
vodorovný	horizontal
volba	choice
volit	choose
volitelný	random, arbitrary

volný
volná grupa
vrchlík
vrchol
vrchol proti základně
úhel při vrcholu
vrcholové úhly
vrstevnice
vrstva (kulová)
všechny
vteřina
vyhovovat
vyhovující (podmínce)
vycházet
vyjádřit
výjimka
vyloučit
vymizet
vynechat
vyplývat
výpočet

vypočítat
vypustit
výraz
výrok
výrokový počet
vyřešit
výseč
kruhová výseč
kulová výseč
výsledek
shoda výsledků
výslednice
výstřednost
výška
výška stěny pravidelného jehlanu
vyšší
vytnout
vytvořit
výzkum
vyznačit
vzájemný
vzájemně
vzájemně jednoznačný
vzájemně se vylučující

tree
free group
cap
vertex, corner
apex
vertex angle
vertical angles
contour, level line
zone (of a sphere)
all
second
satisfy
subject to (the relation)
originate
express
exception
exclude
disappear
leave out
follow
calculation, evaluation, computation,
numeration
calculate, evaluate
leave out
expression, term
statement, proposition
propositional calculus
solve
sector
sector of a circle
sector of a sphere
result
agreement of results
resultant
eccentricity
height, altitude
slant height of pyramid
higher
intercept
generate
research
design
mutual
mutually, reciprocally
one(-to-) one
mutually exclusive

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

9

ROČNÍK 56, 1977-1978, KVĚTEN



ROČNÍK 56
KVĚTEN 1978

9

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., KU Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VÚOS Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1978.

OBSAH

Dr. J. Nečas: Pět Platonových těles .	385
Dr. J. Šedivý: Co nelze sestavit kružítkem a pravítkem	388
Prof. E. Kraemer: Základní určení paraboly	394
Ing. dr. V. Šindelář: Jak je to dnes u nás s novými jednotkami?	399
Dr. M. Šírká, dr. J. Šírký: Úplné zatmění Měsíce 16. září 1978 .	410
FO: Úlohy 1. kola FO XX. ročníku soutěže	413
Doc. O. Setzer: Magický šestúhelník .	429
Prof. E. Kraemer: Jubileum matematicko-fyzikální fakulty UK	430
Redakce hovoří	432
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický 3. a 4. str. obálky	

Pět Platonových těles

RNDr. JIŘÍ NEČAS, Ústředí výpočetní techniky dopravy Praha

Dříve než přistoupíme k vlastnímu předmětu našeho článku, uvedeme některé — většinou známé — pojmy a vyslovíme jednu důležitou větu.

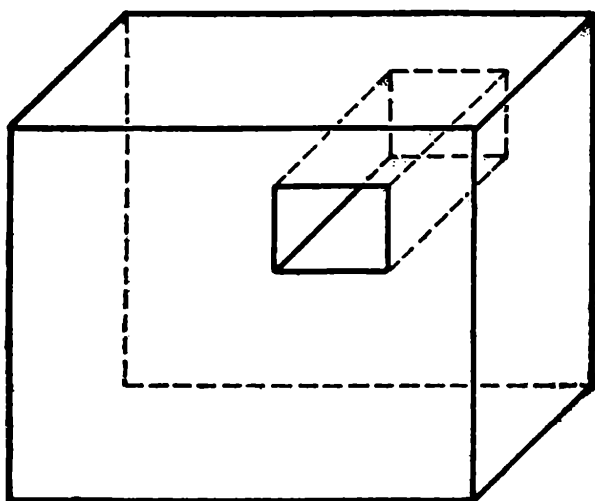
Konvexní množinou bodů v prostoru nazýváme takovou množinu bodů v prostoru, která s každými dvěma svými body X , Y obsahuje všechny body úsečky XY . Konvexním mnohostěnem je takový mnohostěn, který je zároveň konvexní množinou. Konvexní mnohostěny jsou např. kvádry a jehlany, příklady nekonvexních mnohostěnů jsou na obr. 1 a 2. Vztah mezi počtem v vrcholů, počtem h hran a počtem s stěn konvexního mnohostěnu vyjadřuje tzv. *Eulerova věta*:

$$v - h + s = 2. \quad (1)$$

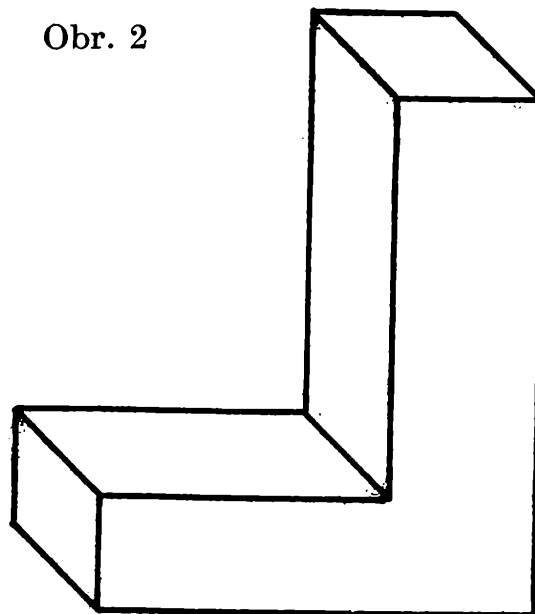
Dokazovat zde tuto větu nebudeme; doporučuji čtenáři, aby si ověřil, že pro známé konvexní mnohostěny platí, kdežto pro mnohostěn na obr. 1 neplatí. (Pozor, vztah (1) platí i pro některé nekonvexní mnohostěny, např. pro mnohostěn na obr. 2.)

Pravidelným mnohostěnem nazýváme takový konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou navzájem shodné pravidelné n -úhelníky a v je-

Obr. 1



Obr. 2



hož každém vrcholu se stýká týž počet p hran (o takovém vrcholu říkáme, že je p -valentní). Uspořádanou dvojici (n, p) čísel nazýváme *typem* pravidelného mnohostěnu.

Pravidelné mnohostěny lze považovat za prostorovou obdobu pravidelných mnohoúhelníků v rovině. Libovolné dva pravidelné mnohoúhelníky se stejným počtem stran jsou podobné. Analogické tvrzení platí o pravidelných mnohostěnech: Libovolné dva pravidelné mnohostěny téhož typu jsou podobné. Pro každé číslo $n \geq 3$ existuje pravidelný n -úhelník. Naskytá se otázka, zda platí analogické tvrzení pro pravidelné mnohostěny, popřípadě se lze ptát podrobněji, jak vypadá množina všech takových dvojic (n, p) kladných celých čísel, pro něž existuje pravidelný mnohostěn typu (n, p) .

Platón a jeho žáci znali pět typů pravidelných mnohostěnů: $(4,3)$ — krychli, $(3,3)$ — pravidelný čtyřstěn, $(3,4)$ — pravidelný osmistěn, $(3,5)$ — pravidelný dvacetistěn a $(5,3)$ — pravidelný dvanáctistěn. V těchto mnohostěnech (tzv. Platonových tělesech) viděli symboly čtyř živlů (země, ohně, vzduchu a vody) a — v posledním z nich, známém až později — symbol všeho jsoucna.

Více typů pravidelných mnohostěnů známo ve starověku nebylo. To, čím staří Řekové přispěli k řešení naší otázky týkající se typu pravidelných mnohostěnů, můžeme vyjádřit větou. Postačující podmínkou pro to, aby existoval pravidelný mnohostěn typu (n, p) , je platnost vztahu

$$(n, p) \in \{(3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5)\} \quad (2)$$

Eulerova věta nám umožní dokázat, že *více než oněch pět typů pravidelných mnohostěnů neexistuje*, tedy že platnost vztahu (2) je zároveň i nutnou podmínkou pro to, aby existoval pravidelný mnohostěn typu (n, p) . K rovnosti (1) přidáme další dvě rovnosti, plynoucí ze skutečnosti, že v každém vrcholu se stýká p hran a každá hrana spojuje dva vrcholy, a ze skutečnosti, že každá stěna je omezena n hranami, přičemž každá hrana patří dvěma stěnám:

$$vp = 2h, \quad (3)$$

$$sn = 2h. \quad (4)$$

Chceme určit, pro které dvojice (n, p) existuje pravidelný mnohostěn. Pro takovou dvojici musí existovat kladná celá čísla v , h , a s , která splňují vztahy (1), (3) a (4). Na vztahy (1), (3), (4) se tedy dívejme jako na soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých s celočíselnými parametry n a p , o nichž víme, že splňují nerovnosti $n \geq 3$, $p \geq 3$. Nutná podmínka pro to, aby existoval pravidelný mnohostěn typu (n, p) je: Řešení soustavy (1), (3), (4) jsou celá kladná čísla.

Vyřešíme-li soustavu rovnic (1), (3), (4) pro neznámé v , h , a s , dostaneme:

$$v = 4n/(2p + 2n - np), \quad (5)$$

$$h = 2np/(2p + 2n - np), \quad (6)$$

$$s = 4p/(2p + 2n - np). \quad (7)$$

Čitatele na pravých stranách (5) až (7) jsou kladná čísla; mají-li být zlomky kladné, musí být ve všech případech i jmenovatel kladný (požadavek celočíselnosti řešení zatím nesledujeme, hledáme nutnou podmínku pro existenci řešení s požadovanými vlastnostmi). Musí tedy platit

$$2n + 2p - np > 0. \quad (8)$$

Jestliže obě strany nerovnosti (8) vynásobíme -1 , pak k oběma stranám přičteme číslo 4 a konečně levou stranu rozložíme v součin, dostaneme

$$(n - 2)(p - 2) < 4. \quad (9)$$

Protože n i p jsou celá kladná čísla, $n \geq 3$, $p \geq 3$, splňují nerovnost (9) tyto uspořádané dvojice (n, p) : $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 3)$, $(3, 5)$. Dokázali jsme tak, že skutečně platí věta: Nutná podmínka k tomu, aby existoval pravidelný mnohostěn typu (n, p) , je $(n, p) \in \{(3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5)\}$. Tato podmínka je také postačující. Můžeme tedy shrnout:

Pravidelný mnohostěn typu (n, p) existuje, právě když uspořádaná dvojice (n, p) splňuje vztah (2). Existuje tedy právě pět typů pravidelných mnohostěnů.

Pokládat pravidelné mnohostěny za obdobu pravidelných mnohoúhelníků v rovině je celkem přirozené. Uvedli jsme příklad pravdivého tvrzení o pravidelných mnohostěnech, které je analogií určitého pravdivého tvrzení o pravidelných mnohoúhelnících. Analogie je pro matematiku velice cennou metodou, není to však metoda důkazu. Opírat se jen o analogii může vést na scestí, pomocí analogie se lze od pravdivého tvrzení dostat k tvrzení nepravdivému. To jsme si ukázali i v tomto článku. Zatímco existuje nekonečně mnoho typů pravidelných mnohoúhelníků (pro každé celé číslo $n \geq 3$ existuje pravidelný n -úhelník; jinými slovy můžeme říci: existuje nekonečně mnoho tříd navzájem podobných pravidelných mnohoúhelníků), pravidelných mnohostěnů existuje jen 5 typů (tedy existuje jen 5 tříd navzájem podobných pravidelných mnohostěnů).

Co nelze sestrojít kružítkem a pravítkem

(Dokončení)

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, UK Praha

V první části článku jsme poznali, že o sestrojitelnosti jedněch bodů kružítkem a pravítkem z jiných bodů lze rozhodovat jen na půdě *algebry*. Rozhodujeme tam pak o tom, zda kořeny algebraických rovnic

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

lze vypočítat z koeficientů $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ konečným počtem operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma.

Co víme o tomto problému?

Už v 1. ročníku střední školy jsme ovládli řešení rovnic 1. a 2. stupně. Víme, že rovnice $a_1 x + a_0 = 0$ se při $a_1 \neq 0$ vyřeší odčítáním a dělením koeficientů, že rovnice $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ se při $a_2 \neq 0$ řeší vzorcem, ve kterém se s koeficienty rovnice provádějí operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma. Získáváme tedy tento optimistický poznatek:

Všechny konstrukční úlohy, které vedou k rovnicím 1. a 2. stupně s koeficienty sestrojitelnými kružítkem a pravítkem, jsou řešitelné kružítkem a pravítkem.

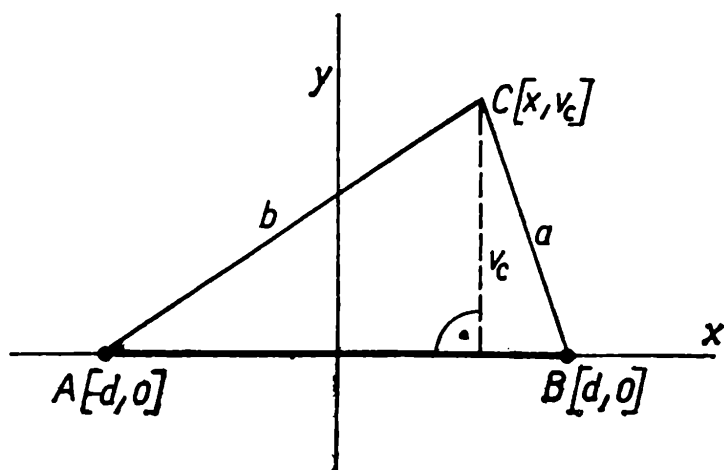
Jestliže tímto způsobem prokážeme řešitelnost některé úlohy kružítkem a pravítkem, jsme schopni navrhnout geometrickou konstrukci kořenů rovnice složenou z kroků znázorněných na obr. 3 v první části článku. Takový postup se však považuje za „nouzové řešení“, které nesvědčí o konstrukční zdatnosti řešitele. Nalézt elegantní geometrickou konstrukci nemusí být snadná záležitost, jak se přesvědčíte v následujících příkladech.

Příklad 4. Zvolme trojúhelník ABC (obr. 5), jeho vrcholy A, B považujeme za sestrojené a ptejme se, zda bod C lze z nich sestrojít kružítkem a pravítkem v případě, kdy známe jen výšku v a součet $a + b$ stran trojúhelníka.*)

Řešení. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, jak naznačuje obrázek. Využijme možnosti zvolit $c = 2d$, $A [-d; 0]$, $B [d; 0]$, $C [x, v_c]$ a v souřadnicích vyjádříme $AC + BC = a + b$:

$$\sqrt{(x+d)^2 + v^2} + \sqrt{(x-d)^2 + v^2} = a + b.$$

*) Jde o konstrukční úlohu, která bývá formulována v tomto znění: „Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno $c, v_c, a + b$.“ V našem textu je už zdůrazněna dvojice sestrojených vrcholů a problém eukleidovské sestrojitelnosti třetího vrcholu.



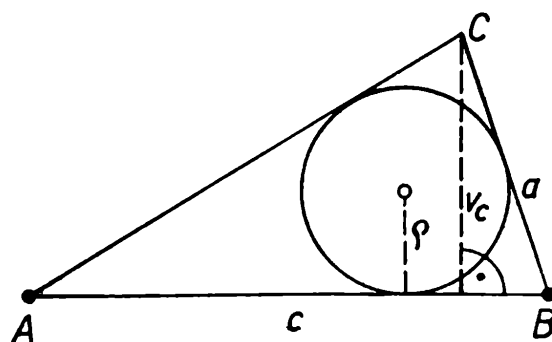
Obr. 5

Dostáváme rovnici s neznámou x pod odmocninou; snadnými úpravami rovnice dosáhneme

$$\begin{aligned}(x + d)^2 + v &= (a + b)^2 + (x - d)^2 + v - 2(a + b) \sqrt{(x - d)^2 + v_c^2}, \\ 4dx - (a + b)^2 &= -2(a + b) \sqrt{(x - d)^2 + v_c^2}, \\ 16d^2x^2 - 8d(a + b)^2x + (a + b)^4 &= 4(a + b)^2(x - d)^2 + \\ &+ 4(a + b)^2v_c^2.\end{aligned}$$

I bez dalších úprav nahlížíme, že vyjde rovnice typu $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, která je kvadratická nebo lineární a její koeficienty jsou sestrojitelné kružítkem a pravítkem z údajů $c, v_c, a + b$. Všechny kořeny původní rovnice jsou také kořeny poslední rovnice, proto bod C lze sestrojit kružítkem a pravítkem z bodů A, B a údajů $v_c, a + b$. Znáte takovou konstrukci?**)

Příklad 5. Zvolme trojúhelník ABC (obr. 6) a ptejme se, zda bod C lze sestrojit kružítkem a pravítkem v případě, když jsou sestrojeny body A, B a je dáno v_c, ρ . (Údaj ρ označuje poloměr vepsané kružnice.)



Obr. 7

**) Přesvědčte se, že dokonce vyjde rovnice typu $a_2x^2 + a_0 = 0$. Znáte-li definici elipsy, poznáváte jistě v zkoumané úloze otázku, zda lze eukleidovsky sestrojit průsečíky přímky s elipsou. Tento problém je zajímavý i tím, že elipsu *jako celek* nemůžeme sestrojit kružítkem a pravítkem, ale průsečíky přímky s nenarýsovanou elipsou ano. (Elipsa je dána ohnisky a délkou hlavní osy).

Řešení. Jsou-li sestrojeny body A, B , známe i údaj c . Trojice údajů c, v_c, ρ se od trojice $c, v_c, a + b$ v příkladě 4 liší jen v jediné složce; pokusme se tedy vyjádřit souvislost těchto trojic. Na str. 65 v tomto ročníku Rozhledů máte odvozen vzorec $S = s \cdot \rho$ pro obsah S trojúhelníka, přitom $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Protože $S = \frac{1}{2}cv_c$, můžeme napsat

$$(a + b + c) \cdot \rho = cv_c,$$

kde c, ρ, v_c známe; pro $z = a + b$ dostáváme tedy lineární rovnici $(z + c) \cdot \rho = c \cdot v_c$. To znamená že úsečku $z = a + b$ můžeme z údajů c, v_c, ρ sestrojit kružítkem a pravítkem; pak dostaneme úlohu z příkladu 4, kterou také lze rozřešit kružítkem a pravítkem. Znáte takovou konstrukci?

Postup, který jste poznali v příkladech 4 a 5, je dosti častou rozhodovací procedurou při zápasu se vzdorující konstrukční úlohou. Pokud nemůžeme během dlouhé doby nalézt eukleidovské řešení úlohy, začneme zkoumat, zda je vůbec řešitelná kružítkem a pravítkem. Pomocí souřadnic nebo vzorců s délkami úseček sestavíme rovnici s „klíčovou“ neznámou (tj. s neznámou souřadnicí význačného bodu či délkou význačné úsečky v hledaném útvaru). Získáme-li lineární nebo kvadratickou rovnici, musíme dále hledat eukleidovskou konstrukci.

Co můžeme říci o eukleidovské řešitelnosti konstrukční úlohy, která vede k rovnici vyššího než druhého stupně?

Nic jednoznačného, protože i rovnice těchto stupňů mohou být řešitelné pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma. Takové jsou například tyto rovnice 3. a 4. stupně:

$$(x - 1)(x^2 - 5x + 3) = 0, \quad (x^2 - 14x + 7)(x^2 + x - 3) = 0.$$

Rozložitelnost strany anulované rovnice na součin mnohočlenů 1. či 2. stupně zaručuje řešitelnost takové rovnice pěti uvedenými operacemi. Existují však i rovnice 3. a 4. stupně, které nejsou zmíněnými operacemi řešitelné.

Omezme se na rovnici 3. stupně s celočíselnými koeficienty a seznámme se s nejnútnejším teoretickým aparátom potrebným pro náš cíl. Ptejme se nejprve na racionální kořeny takových rovnic; připomeňme si, že tzv. základní tvar $\frac{p}{q}$ obsahuje celočíselná nesoudělná p, q , přitom $q \neq 0$.

Pro každé racionální číslo zapsané v základním tvaru $\frac{p}{q}$ platí: jestliže

číslo $\frac{p}{q}$ je kořenem rovnice $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ s celočíselnými koeficienty, pak p dělí a_0 a q dělí a_3 .

Důkaz. To, že zmíněné číslo je kořenem uvedené rovnice, znamená, že

$$a_3\left(\frac{p}{q}\right)^3 + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

a dále

$$a_3p^3 + a_2p^2q + a_1pq^2 + a_0q^3 = 0.$$

Odtud získáme

$$\text{jednak } p(a_3p^2 + a_2pq + a_1q^2) = -a_0q^3,$$

$$\text{jednak } a_3p^3 = q(-a_2p^2 - a_1pq - a_0q^2).$$

Protože p , resp. q , je dělitelem jedné strany rovnice, musí být dělitelem i druhé. Vzhledem k nesoudělnosti p, q z toho plyne, že

$$p \text{ dělí } a_0 \quad \text{a} \quad q \text{ dělí } a_3$$

Příklad 6. Rovnice $x^3 - 2 = 0$ má $a_3 = 1$, $a_0 = -2$; pro celočíselné dělitele p čísla (-2) jsou tedy možnosti $p = -2, -1, 1, 2$, pro celočíselné dělitele q čísla 1 jsou dvě možnosti, $q = 1, -1$. Prověříme všechny zlomky $\frac{p}{q}$, tj. skupinu

$$\frac{-2}{-1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{-1}, \frac{-1}{-1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{-1},$$

která obsahuje čísla $-2, -1, 1, 2$. Po dosazení do dané rovnice žádné z nich neanuluje levou stranu, proto rovnice $x^3 - 2 = 0$ nemá racionální kořen.

Příklad 7 Rovnice $8x^3 - 6x + 1 = 0$ z příkladu 3 také nemá žádný racionální kořen. Můžeme se o tom přesvědčit dvěma způsoby:

a) Podle dokázané věty vyhledáme všechny celočíselné dělitele p čísla 1, tj. $p = 1, -1$, a všechny celočíselné dělitele q čísla 8, tj. $q = -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$. Dosazením šestnácti zlomků $\frac{p}{q}$ se přesvědčíme, že žádný není zápisem kořenu rovnice.

b) Využijeme-li substituce $z = 2x$, upravíme danou rovnici na tvar $z^3 - 3z + 1 = 0$. Racionálními kořeny této rovnice mohou být jen čísla 1, -1 , ale žádné z nich není kořenem; proto žádné racionální číslo z není kořenem této rovnice. Potom ani žádné racionální x není kořenem původní rovnice.

K čemu nám bude užitečné, budeme-li znát řešení rovnice v oboru racionálních čísel? O tom hovoří tato věta:

Jestliže rovnice $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ s racionálními koeficienty nemá racionální kořen, pak žádný její kořen nelze vypočítat z koeficientů 1, a_2, a_1, a_0 pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma.

Důkaz. Předpokládejme, že jeden z kořenů uvažované rovnice lze vypočítat popsáním způsobem, tj. $x_1 = A + B\sqrt[3]{C}$ kde A, B, C jsou racionální čísla, $\sqrt[3]{C}$ je iracionální číslo. Potom platí:

$$(A + B\sqrt[3]{C})^3 + a_2(A + B\sqrt[3]{C})^2 + a_1(A + B\sqrt[3]{C}) + a_0 = 0$$

a po delší, eč nenáročné úpravě

$$(A^3 + 3AB^2C + a_2A^2 + a_2B^2C + a_1A + a_0) + \\ + \sqrt{C} \cdot (3A^2B + 2a_2AB + a_1B) = 0.$$

Obě závorky vyjadřují racionální čísla, součet na levé straně je racionální. Zapsaný násobek iracionální $\sqrt{C}$ musí být tedy nulový, proto obě závorky vyjadřují nulu.

Dosadíme-li do původní rovnice $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ číslo $x_2 = A - B\sqrt{C}$, snadno ověříme pomocí získaných závorek, že i ono je kořenem rovnice. (První závorka vyjde stejná, druhá s opačnými znaménky.) Známe tedy už dva kořeny zkoumané rovnice; pro třetí kořen x_3 musí na základě rovnosti

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + \\ + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

platit:

$$a_2 = -x_1 - x_2 - x_3,$$

$$x_3 = -a_2 - A - B\sqrt{C} - A + B\sqrt{C} = -a_2 - 2A$$

Tento výsledek však ukazuje, že x_3 je racionální číslo (a_2, A jsou racionální čísla!). Dokázali jsme tedy větu.

Jestliže aspoň jeden kořen rovnice $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ s racionálními koeficienty lze vypočítat z koeficientů 1, a_2, a_1, a_0 pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování dvěma, pak rovnice má racionální kořen.

To je však pouhá obměna věty, kterou jsme si předsevzali dokázat; protože obě mají stejnou pravdivostní hodnotu, je dokázána i původní věta.

Vraťme se konečně k hlavnímu tématu článku.

Postup při rozhodování o řešitelnosti konstrukčních úloh kružítkem a pravítkem:

1. Konstrukční úlohu převedeme na rovnici s jednou neznámou v oboru reálných čísel (využijeme buď kartézské soustavy souřadnic nebo vzorců pro délky úseček).
2. a) Je-li získaná rovnice lineární nebo kvadratická a její koeficienty lze eukleidovsky sestavit, jde o konstrukční úlohu *řešitelnou* kružítkem a pravítkem.
b) Je-li získaná rovnice třetího stupně s celočíselnými koeficienty a nemá racionální kořen, pak jde o konstrukční úlohu *neřešitelnou* kružítkem a pravítkem.

(Pro ostatní typy rovnic jsme žádný výsledek neodvodili.)

Ukažme ještě výsledek, který je skryt v řešeních příkladů 3 a 7 v tomto článku:

1. V příkladě 3 jsme úlohu „Sestrojte třetinu úhlu 60° “ vyjádřili rovnicí $8x^3 - 6x + 1 = 0$ v oboru reálných čísel.
2. V příkladě 7 jsme ukázali, že tato rovnice 3. stupně s celočíselnými koeficienty nemá racionální kořen; podle poslední věty to znamená, že třetinu úhlu 60° nelze sestavit kružítkem a pravítkem.

Pozor na skutečný obsah našeho tvrzení! Nedokázali jsme, že „(žád-ný) úhel nelze roztřídit“; našli jsme pouze příklad úhlu, který nelze roztřídit kružítkem a pravítkem. Náš výsledek ovšem znamená, že *je zbytečné hledat univerzální konstrukci třetění úhlů pomocí kružítka a pra-vítka*. Žádná navržená konstrukce nemůže být přesná, může být pouze přibližná.

Pokud jde o sestrojování trojúhelníků z předepsaných údajů (stran, úhlů, výšek atd.), rozhodování o možnosti či nemožnosti eukleidovské konstrukce, vyžaduje mnohdy náročnou práci. Nezbytnou výbavou k tomu jsou vzorce ukazující „vazby“ mezi délkami významných úseček v trojúhelníku. V článku F. Hradeckého *Analogie v geometrii* (Rozhledy č. 2) najdete odvození těchto vzorců:

$$S = \varrho \quad s, \quad S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \quad S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha,$$

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \quad 4t_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2,$$

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Sami z nich můžete odvodit další vzorce:

$$\varrho^2 s = (s-a)(s-b)(s-c), \quad 16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

a cyklické obměny,

$$9a^2 = 8t_b^2 + 8t_c^2 - 4t_a^2 \text{ a cyklické obměny,}$$

$$[a^2 - (b-c)^2] (v_a - 2\varrho) = 4v_a\varrho^2, \quad 4Sr = abc.$$

S touto výzbrojí lze už zdůvodnit, že kružítkem a pravítkem nelze některé trojúhelníky sestrojit z těchto údajů:

a, b, ϱ	a, t_b, ϱ	t_a, v_b, r
t_a, t_b, ϱ	t_a, t_b, r	t_a, r, ϱ
a, t_a, ϱ	v_a, v_b, r	t_a, β, ϱ .

To znamená, že pro některé trojice hodnot uvedených parametrů je za-ručena existence trojúhelníka, ale přitom ho nelze sestrojit kružítkem a pravítkem. Je však možné, že pro některé jiné trojice hodnot těchto parametrů lze takový trojúhelník sestrojit. *Hovoříme-li o neřešitelnosti typu úloh kružítkem a pravítkem, máme na mysli, že nelze nalézt eukleidovský postup konstrukce použitelný pro všechny úlohy tohoto typu, které vedou k existujícím trojúhelníkům.*

Tento článek měl podrobnějším výkladem přístupně objasnit, že ne-řešitelnost konstrukční úlohy kružítkem a pravítkem neodporuje podsta-tě geometrie. Existence bodu a jeho sestrojitelnost zvolenými prostředky jsou dvě různé věci. Rozlišujte také termíny „úloha neřešitelná (euklei-dovsky)“ a „úloha nerozřešená euklidovsky“. *Nevěnujte zbytečně energii vymýšlení eukleidovských řešení trisekce úhlu, duplikace krychle, sestrojení*

strany pravidelného sedmiúhelníka, devítiúhelníka apod. Objevíte jen přibližnou konstrukci, i když se vám bude třeba při stonásobném opakování zdát, že na obrázku, který rýsujete, vychází vše přesně. V geometrii není narysovaný obrázek žádným důkazem správnosti konstrukce.

Úlohy

1. V příkladě 6 je posuzována rovnice, ke které vede úloha požadující sestrojení hrany krychle s objemem dvojnásobným než má jednotková krychle. Vyslovte se o eukleidovské řešitelnosti úlohy.
2. Ověřte, že jsou eukleidovsky řešitelné všechny konstrukce trojúhelníků z údajů $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, t_a, t_b, t_c, v_a, v_b, v_c$. (Volíme vždy tři z těchto parametrů.)
3. Pokuste se s využitím vzorce $\varrho^2 s = (s - a)(s - b)(s - c)$ dokázat, že existuje trojúhelník ABC , který nelze euklidovsky sestrojit z údajů a, b, ϱ . (Směřujte k rovnici s neznámou c , zvolte $\varrho = 1, a = 4, b = 6$.)
4. Vyberte si některou z dalších trojic údajů, o kterých je v článku řečeno, že vedou k úlohám neřešitelným kružítkem a pravítkem; pokuste se dokázat taková tvrzení.

konstruktivní geometrie

Základní určení paraboly

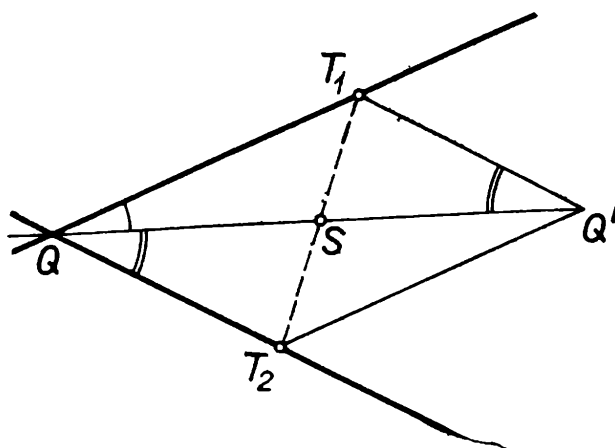
Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V učebnicích deskriptivní geometrie se také řešívaly některé konstrukční úlohy o kuželosečkách. Takovou úlohou je např. sestrojení paraboly dané dvěma tečnami s body dotyku; pro deskriptivní geometrii je to úloha (pokud jde o zobrazování kuželoseček) základní. Elementárním způsobem se tato úloha řeší tak, že se sestrojuje ohnisko paraboly jako průsečík průvodičů daných dvou bodů; jsou-li však dané tečny vzájemně kolmé, pak tato konstrukce selhává. I jinak je řádné řešení této úlohy (s rozbořem, důkazem konstrukce a s diskusí) dost náročné.*)

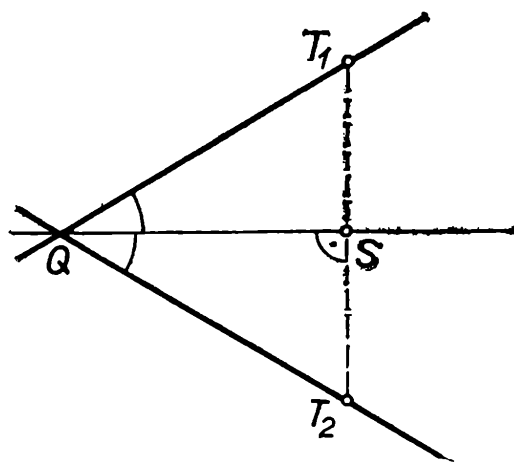
Uvedu proto jiné řešení, které lze vždy provést, a to přesněji než řešení právě připomenuté.

K porozumění dalšího výkladu stačí znát jenom ty vlastnosti paraboly, které jsou shrnuty v mém článku *Některé metrické vlastnosti paraboly*,

*) Viz autorův článek *Rovnoběžný průmět paraboly* v časopise Matematika ve škole, rok 1953, č. 9. str. 415 - 418.



Obr. 1



Obr. 2

otištěném v 7. čísle letošního ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních. Uvedu z něho čtyři věty, které budeme ve výkladu používat.

Věta 1. Tečna paraboly sestavená v jejím bodě T půlí vnější úhly průvodičů bodu T .

Věta 2. Množinou všech bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle tečen paraboly je její řídicí přímka.

Věta 3. Nechť různoběžky t_1, t_2 s průsečíkem Q jsou tečnami paraboly v bodech T_1, T_2 . Potom přímka spojující bod Q se středem S úsečky T_1T_2 je rovnoběžná s osou paraboly.

Věta 4 (Ponceletova). Nechť různoběžky t_1, t_2 s průsečíkem Q jsou tečnami paraboly v bodech $T_1 \neq Q, T_2 \neq Q$, F je ohniskem paraboly a S středem úsečky T_1T_2 . Potom úhly $\sphericalangle SQT_1, \sphericalangle T_2QF$ jsou shodné.

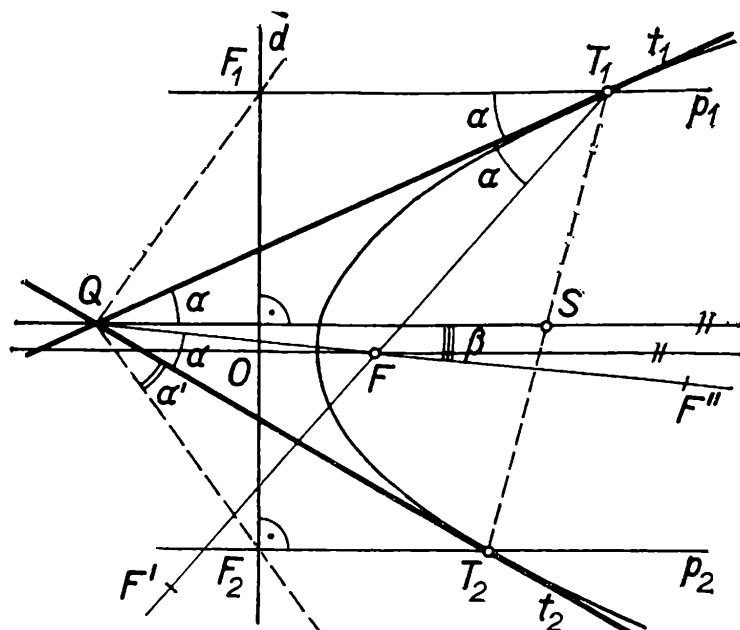
Kromě těchto vět užijeme ještě jednu pomocnou větu, kterou snadno dokážeme.

Pomocná věta. Nechť QT_1, QT_2 ($Q \neq T_1, Q \neq T_2$) jsou dvě různé přímky a S je středem úsečky T_1T_2 . Potom platí

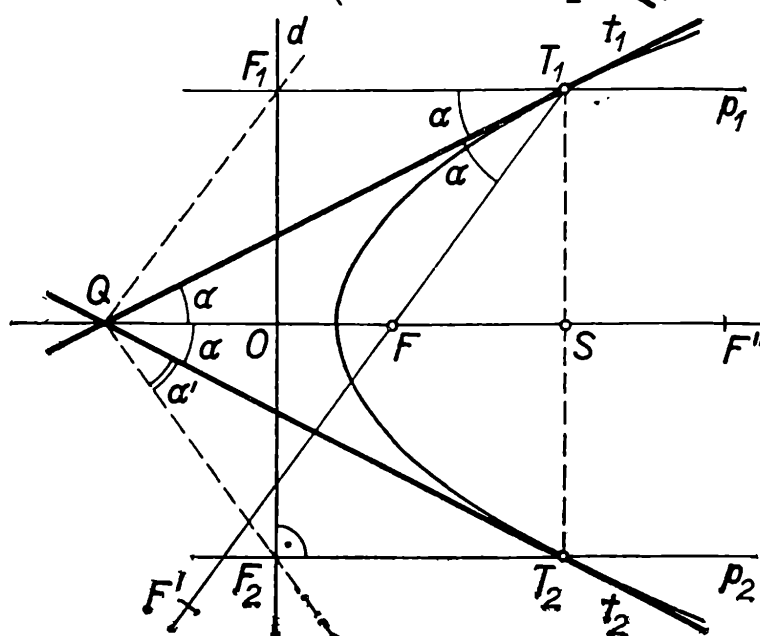
- a) Je-li $|QT_1| > |QT_2|$, je $|\sphericalangle SQT_1| < |\sphericalangle SQT_2|$;
- b) je-li $|QT_1| = |QT_2|$, je $|\sphericalangle SQT_1| = |\sphericalangle SQT_2|$;
- c) je-li $|QT_1| < |QT_2|$, je $|\sphericalangle SQT_1| > |\sphericalangle SQT_2|$.

Důkaz. Sestrojíme rovnoběžník $QT_1Q'T_2$ (obr. 1). Jeho protější strany jsou shodné, takže je také $|Q'T_1| = |QT_2|$. Úhel $\sphericalangle QQ'T_1$ je shodný s úhlem $\sphericalangle Q'QT_2$, jenž splývá s úhlem $\sphericalangle SQT_2$ (střídavé úhly s rovnoběžnými rameny). Potom tvrzení naší věty plyne z trojúhelníku QT_1Q' podle věty, že proti stejné (větší, menší) straně leží stejný (větší, menší) úhel. Na obr. 1 je případ, kdy je $|QT_1| > |QT_2|$, na obr. 2 je $|QT_1| = |QT_2|$; v tomto případě je $QS \perp T_1T_2$.

Věta 5. Jsou-li $t_1 = QT_1, t_2 = QT_2$ ($T_1 \neq Q, T_2 \neq Q$) různoběžky, potom existuje právě jedna parabola, která prochází body T_1, T_2 a má v nich tečny t_1, t_2 .



Obr. 3



Obr. 4

Důkaz provedeme tak, že parabolu sestojíme. Protože jde o konstrukční úlohu, musíme provést rozbor, konstrukci, důkaz konstrukce a diskusi.

a) Předpokládejme, že jsme parabolu sestojili. Její ohnisko označme F , řídící přímkou d a střed úsečky T_1T_2 označme S . Na obr. 3 jde o případ, kdy je $|QT_1| > |QT_2|$, na obr. 4 o případ, v němž je $|QT_1| = |QT_2|$. Parabola a její vnitřní oblast jsou částí poloroviny t_1S a poloroviny t_2S , tj. úhlu $\sphericalangle T_1QT_2$, který je průnikem těchto polorovin. Podle věty 4 (Ponceletovy) je

$$|\sphericalangle T_2QF| = |\sphericalangle SQT_1| = \alpha. \quad (1)$$

Vedme bodem T_1 přímkou p_1 rovnoběžnou s osou paraboly a sestojíme její průsečík F_1 s řídící přímkou d paraboly. Podle věty 3 je $T_1F_1 \parallel QS$;

úhly $\sphericalangle SQT_1$, $\sphericalangle F_1T_1Q$ jsou střídavé a mají rovnoběžná ramena QS , T_1F_1 . Proto je

$$\alpha = |\sphericalangle SQT_1| = |\sphericalangle F_1T_1Q|; \quad (2)$$

podle věty 1 je

$$\alpha = |\sphericalangle F_1T_1Q| = |\sphericalangle QT_1F|. \quad (3)$$

Podle věty 2 je bod F_1 souměrně sdružen k ohnisku F podle tečny t_1 . Podle (1), (2) a (3) je tedy

$$|\sphericalangle T_2QF| = |\sphericalangle QT_1F| = \alpha.$$

b) Z provedeného rozboru plyne tato konstrukce: Sestrojíme střed S úsečky T_1T_2 , přímku QS , v polorovině t_2S úhel $\sphericalangle T_2QF''$ a v polorovině t_1S úhel $\sphericalangle QT_1F'$ tak, aby

$$|\sphericalangle T_2QF''| = |\sphericalangle QT_1F'| = |\sphericalangle SQT_1| = \alpha. \quad (4)$$

Potom polopřímky T_1F' , QF'' se protnou v bodě F , který leží uvnitř úhlu $\sphericalangle T_1QT_2$ (dokážeme v diskusi). K bodu F sestrojíme bod F_1 souměrně sdružený podle přímky $t_1 = QT_1$ a bodem F_1 vedeme přímku $d \perp QS$. Dokážeme, že parabola, která má ohnisko F a řídicí přímku d , prochází body T_1 , T_2 a má v nich tečny $t_1 = QT_1$, $t_2 = QT_2$:

c) Bod F_1 je souměrně sdružen k bodu F podle přímky $t_1 = QT_1$; proto je

$$T_1F_1 = T_1F \quad (5)$$

a úhly $\sphericalangle F_1T_1Q$, $\sphericalangle QT_1F'$ jsou shodné. Podle (4) je tedy

$$|\sphericalangle F_1T_1Q| = |\sphericalangle QT_1F'| = |\sphericalangle SQT_1| = \alpha.$$

Střídavé úhly $\sphericalangle F_1T_1Q$, $\sphericalangle SQT_1$ jsou shodné; proto je $T_1F_1 \parallel QS$ čili $T_1F_1 \perp d$. Z toho podle (5) plyne, že bod T_1 je bodem paraboly, která má ohnisko F a řídicí přímku d . Přímka $t_1 = QT_1$ pólí vnější úhel $\sphericalangle F_1T_1F$ průvodičů bodu T_1 ; podle věty 1 je tedy tečnou uvedené paraboly v bodě T_1 .

Zbývá dokázat, že také bod T_2 je bodem a přímka $t_2 = QT_2$ tečnou sestrojené paraboly. Vedme bodem T_2 přímku $p_2 \parallel QS$ a sestrojíme její průsečík F_2 s řídicí přímkou d paraboly. Protože je $QS \perp d$, je také

$$T_2F_2 \perp d. \quad (6)$$

Průsečík přímky QS s řídicí přímkou d označme O . Protože body F_1 , F_2 , O jsou pravoúhlými průměty bodů T_1 , T_2 , S a bod S je středem úsečky T_1T_2 , je také bod O středem úsečky F_1F_2 ; body F_1 , F_2 jsou tedy souměrně sdruženy podle přímky QS . Z toho plyne, že je

$$|\sphericalangle SQF_2| = |\sphericalangle SQF_1|; \quad (7)$$

ze souměrnosti bodů F_1 , F_2 podle přímky QS a ze souměrnosti bodů F_1 , F podle přímky $t_1 = QT_1$ plyne, že je

$$|QF_2| = |QF_1| = |QF| \quad (8)$$

Úhel $\sphericalangle SQF_1$ je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle SQT_1$, $\sphericalangle F_1QT_1$; ze souměrnosti bodů F_1 , F podle přímky $t_1 = QT_1$ plyne, že úhly $\sphericalangle F_1QT_1$, $\sphericalangle FQT_1$ jsou shodné. Je tedy podle (4)

$$|\sphericalangle SQF_1| = |\sphericalangle SQT_1| + |\sphericalangle FQT_1| = \alpha + |\sphericalangle FQT_1|. \quad (9)$$

Úhel $\sphericalangle SQF_2$ je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle SQT_2$, $\sphericalangle F_2QT_2$; je-li α' velikost úhlu $\sphericalangle F_2QT_2$, je

$$|\sphericalangle SQF_2| = |\sphericalangle SQT_2| + \alpha' \quad (10)$$

Podle (7), (9) a (10) je tedy

$$|\sphericalangle SQT_2| + \alpha' = |\sphericalangle FQT_1| + \alpha. \quad (11)$$

Úhel $\sphericalangle T_2QF''$ splývá s úhlem $\sphericalangle T_2QF$, takže podle (4) je

$$|\sphericalangle T_2QF| = |\sphericalangle SQT_1| = \alpha. \quad (12)$$

A nyní jsou dvě možnosti podle toho, zda je $|QT_1| \neq |QT_2|$ nebo $|QT_1| = |QT_2|$. Nastane-li první případ, pak volme označení bodů T_1 , T_2 (obr. 3) tak, aby bylo $|QT_1| > |QT_2|$; podle pomocné věty je potom

$$\alpha = |\sphericalangle SQT_1| < |\sphericalangle SQT_2|.$$

Podle toho a podle (12) je $\alpha = |\sphericalangle T_2QF| < |\sphericalangle SQT_2|$. To znamená, že polopřímka QF rozděluje úhel $\sphericalangle SQT_2$ a polopřímka QS rozděluje úhel $\sphericalangle FQT_1$. Označíme-li β velikost úhlu $\sphericalangle SQF$, je

$$|\sphericalangle SQT_2| = |\sphericalangle SQF| + |\sphericalangle T_2QF| = \beta + \alpha,$$

$$|\sphericalangle FQT_1| = |\sphericalangle SQF| + |\sphericalangle SQT_1| = \beta + \alpha.$$

Podle toho a podle (11) je tedy

$$\beta + \alpha + \alpha' = \beta + \alpha + \alpha,$$

$$\alpha' = \alpha.$$

Jestliže je $|QT_1| = |QT_2|$, pak podle pomocné věty je $|\sphericalangle SQT_1| = |\sphericalangle SQT_2| = \alpha$, takže polopřímka QF'' čili QF splyne s polopřímkou QS (obr. 4); je tedy úhel $\sphericalangle FQT_1$ totožný s úhlem $\sphericalangle SQT_1$. Podle (11) vychází opět $\alpha' = \alpha$. To však znamená, že úhel $\sphericalangle F_2QT_2$ je shodný s úhlem $\sphericalangle FQT_2$; z toho podle (8) plyne, že bod F_2 je souměrně sdružen k bodu F podle přímky $t_2 = QT_2$. Je tedy $T_2F_2 = T_2F$, z čehož podle (6) plyne, že bod T_2 je bodem paraboly, která má ohnisko F a řídící přímku d . Přímka $t_2 = QT_2$ pólí vnější úhel $\sphericalangle F_2T_2F$ průvodičů bodu T_2 ; podle věty 1 je tedy tečnou paraboly v bodě T_2 .

d) Z konstrukce plyne, že je jediný bod S , jediná přímka QS a že dostaneme jedinou polopřímku QF'' a jedinou polopřímku T_1F' . Dále je

$$|\sphericalangle T_1QF''| = |\sphericalangle T_1QT_2| - |\sphericalangle T_2QF''| = |\sphericalangle T_1QT_2| - \alpha,$$

takže je

$$|\sphericalangle T_1QF''| + |\sphericalangle QT_1F'| = |\sphericalangle T_1QT_2| - \alpha + \alpha = |\sphericalangle T_1QT_2| < \pi.$$

Proto polopřímky T_1F' , QF'' mají společný vnitřní bod F ; protože je to bod polopřímky QF'' , leží uvnitř úhlu $\sphericalangle T_1QT_2$. K bodu F existuje

jediný souměrně sdružený bod F_1 podle přímky $t_1 = QT_1$ a jím lze vést jedinou přímku $d \perp QS$. Úloha má tedy vždy právě jedno řešení.

Cvičení.

Je dána přímka o a přímky t_1, t_2 , které jsou s přímkou o různoběžné a nejsou souměrně sdruženy podle přímky o . Sestrojte parabolu, která má osu o a tečny t_1, t_2

fyzika

Jak je to dnes u nás s novými jednotkami?

(Pokračování)

Ing. dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

Nyní přejdeme ke druhé třídě jednotek SI, k jednotkám doplňkovým. Ty jsou pouze dvě:

Radián je rovinný úhel sevřený dvěma poloměry, které vytínají na obvodu kruhu oblouk stejné délky, jako je poloměr.

Steradián je prostorový úhel, který s vrcholem ve středu koule vytíná na jejím povrchu plochu velikosti čtverce o straně rovné poloměru koule.

Poznámka: Obě definice jsou z doporučení ISO R 13, 1. část, 2. vydání, prosinec 1965.

Radián se značí rad, steradián sr. Kategorie doplňkových jednotek je v historii soustav jednotek ojedinělá a její vznik a přijetí CGPM naznačuje, že příznivců i odpůrců skutečnosti, že by úhly se dostaly mezi veličiny základní je zhruba asi stejný počet. O jejich definitivním zařazení rozhodne budoucnost. Z doplňkových jednotek SI se odvozují odvozené jednotky stejně jako z jednotek základních.

O jednotkách úhlu se také zmíníme u mimosoustavových jednotek vedlejších. Zde jen ještě poznamenáme, že radián se hodí velmi dobře pro teoretické úvahy a při výpočtech. Pro stupnice měřicích přístrojů a hodnoty úhlových měr se nehodí. Výjimečně jej lze použít u libel. Steradián se při praktickém měření nevyskytuje vůbec.

Třetí třídu jednotek SI tvoří jednotky odvozené. Těch je velmi mnoho, stejně jako fyzikálních veličin, kterým patří. My si dále uvedeme

jen ty odvozené jednotky, které mají samostatný název (a ovšem i značku). Jsou v tabulce III.

Tabulka III. Odvozené jednotky SI se samostatným názvem

Jednotka		Fyzikální veličina, které odvozená jednotka přísluší	Vztah jednotky k jednotkám základním a doplňkovým
název (v abecedním pořadí)	značka		
becquerel (čti bekerel)	Bq	aktivita	s^{-1}
coulomb (kulómb)	C	elektrický náboj	$A \cdot s$
farad	F	elektrická kapacita	$m^{-1} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
gray (grej)	Gy	dávka (záření)	$m^2 \cdot s^{-2}$
henry	H	indukčnost	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
hertz (hérc)	Hz	frekvence	s^{-1}
joule (džaul)	J	energie, práce, teplo	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
lumen	lm	světelný tok	$cd \cdot sr$
lux	lx	osvětlení	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$
newton (ňůtn)	N	síla, tíha	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
ohm (óm)	Ω	elektrický odpor	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
pascal (paskal)	Pa	tlak, mechanické napětí	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
siemens (símens)	S	elektrická vodivost	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
tesla	T	magnetická indukce	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
volt	V	elektrický potenciál, elektrické napětí	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
watt	W	výkon	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
weber (vébr)	Wb	magnetický indukční tok	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$

Poznámky k tab. III.:

1) V současné době je celkem 17 jednotek se samostatným názvem.

2) I když mají hertz a gray stejný vztah k základním jednotkám, je zásadní rozdíl v tom, že hertz je určen jen pro děje periodické, zatímco gray pro jevy stochastické.

3) Je snaha nahradit značku ohmu, která je řeckým omega a činí potíže při psaní na stroji, podobně jako předpona mikro-.

4) Jednotka tesla je maskulinum (tzn. „ten“ tesla).

⁵⁾ Značek odvozených jednotek se někdy používá také k vyznačení souvislostí mezi veličinami, např. J/s, N.m, V.s aj.

⁶⁾ I když by bylo výhodné, aby i nadále se pro některé odvozené veličiny volila samostatná pojmenování (např. pro metr krychlový jako jednotku objemu), Mezinárodní výbor vah a měr to nedoporučuje s poukazem na všeobecné přání odborníků, aby se SI pokud možno na delší dobu ustálila a aby nedocházelo ke změnám. Vzhledem ke stálému rozvoji vědy a techniky lze však splnění takového přání těžko očekávat.

⁷⁾ U některých veličin se někdy používají rozličná vyjádření téže jednotky, jako např. u mechanického napětí Pa a N/m², nebo u práce či energie J a W.s, nebo dokonce i N.m. Zde je zapotřebí zdůraznit, že přednost má vždy značka samostatného názvu, v jiných případech značka nejkratší. Jiná další značení jsou přípustná jen při vysvětlování a výuce, v jiných případech jen zcela výjimečně. Podobný případ je též u kilowatthodiny (viz dále). U elektrického výkonu se polooficiálně připouštějí tato značení: pro činný výkon W (watt), pro zdánlivý výkon V.A (voltampér) a pro jalový výkon var (var: dříve V.Ar, tj. voltampér reaktanční).

⁸⁾ Jednou ze zásad Mezinárodní organizace vah a měr je, že názvy jednotek se mají volit tak, aby byly v různých jazycích podobné a nelišily se tak jako u většiny vedlejších jednotek a aby značky jednotek byly zcela jednotné. Výjimka je možná jen vnitrostátně, ale nikoliv mezinárodně. Proto také podle připravovaného Standardu RVHP věnovaného jednotkám budou se při všech činnostech a ve všech dokumentech RVHP používat jen mezinárodní značky jednotek (psané latinkou). Interně v SSSR a v BLR mohou se ještě nadále používat značky psané ruskou abecedou (spolu s některými rozdíly v písmenech značek proti mezinárodnímu znění).

★

Potud o třech třídách jednotek SI. Zbývá se ještě zmínit o jakési čtvrté třídě jednotek soustavy SI, kterou tvoří násobky a díly hlavních jednotek dříve probíraných. Tyto násobky a díly jednotek, které někdy nazýváme násobnými resp. dílčími jednotkami, se vytvářejí z hlavních jednotek násobením nebo dělením faktorem 10³, 10⁶, ... až 10¹⁸ nebo v okolí hlavní jednotky násobením či dělením 10 a 100. Tento druhý způsob, i když odpovídá dohodnutým zásadám vytváření násobků resp. dílů, má být podle ustanovení ČSN 01 1300 co nejvíce omezen a má mít spíše charakter výjimečnosti.

Tak jako bylo mezinárodně usneseno, že všechny hlavní jednotky Mezinárodní soustavy jednotek se mají sumárně nazývat jednotkami SI, tak i všechny dohodnuté předpony se označují jako předpony SI. V následující tabulce si uvedeme všechny dosud přijaté předpony SI.

Tabulka IV. Předpony SI.

Činitel	Předpona	Značka	Činitel	Předpona	Značka
10^{18}	exa-	E-	(10^{-1}	deci-	d-)
10^{15}	peta-	P-	(10^{-2}	centi-	c-)
10^{12}	tera-	T-	10^{-3}	mili-	m-
10^9	giga-	G-	10^{-6}	mikro-	μ -
10^6	mega-	M-	10^{-9}	nano-	n-
10^3	kilo-	k-	10^{-12}	piko-	p-
(10^2	hekto-	h-)	10^{-15}	femto-	f-
(10^1	deka-	da-)	10^{-18}	atto-	a-

Poznámka k tabulce:

¹⁾ I když se všechny v tabulce uvedené předpony nazývají předponami SI, lze je používat i u některých jednotek vedlejších a dočasných, případně i jiných.

²⁾ Předpony v závorce mají se používat podle ustanovení ČSN 01 1300 méně běžně, většinou jen výjimečně. Tyto výjimky se zpravidla týkají některých dosud obvyklých násobků a dílů, např. ha, hl, dag — dosud běžněji známý na území bývalého Rakousko-Uherska, dalm — tj. dekalumen; dl, dg, dm², dm³ — samotný decimetr jako délková jednotka není povolen, dB; cm, cg, cm², cm³, cl a několik málo dalších.

³⁾ Mezi jednotkami SI je jedna výjimka ve tvorbě násobků a dílů. Je to u jednotky hmotnosti kilogramu, který, ač jednotka SI má z historických důvodů vývoje jednotek ve svém názvu předponu kilo-. Násobky a díly se vytváří z tzv. **výchozí jednotky**, kterou je gram, který ovšem má jinak charakter dílčí jednotky, ačkoliv předponu ve svém názvu nemá. Podobně tomu bylo též u kilopondu.

★

O některých dalších předpisech, týkajících se psaní jednotek, si poho-
voříme po mimosoustavových jednotkách.

Nejprve si uvedeme v tabulce V. výčet vedlejších jednotek podle ČSN 01 1300 (a doplňků k této normě). Vedlejšími jednotkami rozumíme takové mimosoustavové jednotky, které jsou jednotkami vysloveně zákonnými a lze je nadále používat bez časového omezení.

Tabulka V. Vedlejší jednotky v ČSSR

Vedlejší jednotky		Veličina	Vztah k jednotkám SI
název	značka		
den	d	čas	1 d = 24 h = 86 400 s
hodina	h		1 h = 60 min = 3600 s
minuta	min		1 min = 60 s
stupeň (úhlový)	1°	rovinný	1° = ($\pi/180$) rad
minuta (úhlová)	1'	úhel	1' = ($\pi/10\,800$) rad
vteřina	1''		1'' = ($\pi/648\,000$) rad
grad	1ḡ		1ḡ = ($\pi/200$) rad
tuna	t	tuna	1 t = 1000 kg
hektar	ha	plošný obsah	1 ha = 10 000 m ²
litr	l (ltr)	objem	1 l = 0,001 m ³
elektronvolt	eV	energie	1 eV = 1,602 19 · 10 ⁻¹⁹ J
atomová hmotnostní jednotka	u	hmotnost (atomů)	1 u = 1,660 53 · 10 ⁻²⁷ kg
parsek	pc	délka	1 pc = 3,086 · 10 ¹⁶ m
astronomická jednotka	UA		1 UA = 1,496 · 10 ¹¹ m

Poznámky k tabulce V.:

¹⁾ Jednotky času a první tři jednotky rovinného úhlu mají velmi starý původ (ze Sumeru). Značky jednotek času jsou z latiny: dies = den, hora = hodina. Minuta (tj. malá) pochází z latinského názvu dílčí jednotky hodiny: pars **minuta** prima (tj. první malá část), stejně jako sekunda pochází z názvu: pars minuta **secunda** (tj. druhá malá část). Název sekunda je mnohem starší (i u nás) nežli „zčeštěná“ vtorina = vteřina.

²⁾ Radián se pro praktická měření vůbec nehodí. Výjimkou může být jen měření malých úhlových výchylek, např. u libel. Důvodem je rozdělení plného kruhu na necelý počet dílů (na 2π). Jednotka grad (dříve nazývaná také nový stupeň, nebo setinový stupeň, protože jich je 100 na pravý úhel) se používá v geodézii. V německy mluvících státech se namísto grad používá název gon (se značkou gon). Odvození gradu jako setiny pravého úhlu je dáno povahou trigonometrických funkcí, jež se mění v jednotlivých kvadrantech.

³⁾ V zahraničí se tvoří z tuny také násobky a díly. Např. v NDR se používá

decituna (dt) = 100 kg. U nás to není obvyklé vyjma speciální techniku, kde se setkáme s megatunou (Mt) u výbušnin.

4) Hektar je povolen používat jen pro výměnu zemědělské půdy, lesů, vodních ploch apod. Pro stavební parcely se používá m^2 .

5) Protože někdy dochází k omylům u značky litru, uvažuje se o tom, povolit tam, kde by mohlo dojít k omylu, druhou značku ltr.

6) Uvedená hodnota elektronvoltage je podle novějších dokumentů RVHP a podle ISO. V ČSN 01 1300 je uvedena ještě starší hodnota, která je $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Hodnota elektronvoltage se bude v budoucnu upřesňovat.

7) Značka astronomické jednotky není mezinárodně jednotná. Protože jednacím řečí Mezinárodní konvence, vrcholné metrologické organizace, je francouzština, používá ČSN 01 1300 značku UA.

8) V připravovaném Standardu RVHP „Jednotky fyzikálních veličin“ uvažuje se ještě o dalších vedlejších jednotkách, které budou po schválení Standardu doplněny do nově revidované ČSN. Půjde zhruba o tyto jednotky: jedna, procento, promile, oktáva, dekáda, decibel, světelný rok, dioptrie.

9) Celsiův stupeň není zde mezi vedlejšími jednotkami uváděn, protože by již uveden v poznámce u definice kelvinu, jednotky termodynamické teploty, a bude tak uváděn i v revidované ČSN 01 1300.

★

Až potud jsme hovořili o měřicích jednotkách zákonných. Pokud se jednalo o tvorbu násobků a dílů, je možno ji aplikovat i na řadu mimosoustavových jednotek. Nyní si krátce probereme jednotky dočasné, kterými rozumíme takové mimosoustavové jednotky, jež mají být v určitém termínu opuštěny a nahrazeny jednotkami novými, zákonnými, především jednotkami SI nebo jejich násobky či díly. Tyto dočasné jednotky jsou sice v řadě zemí prakticky shodné, přece však mohou v některé zemi existovat některé malé odchylky proti zemi druhé, a proto zde budeme hovořit o dočasných jednotkách v ČSSR. Jsou uvedeny v přehledné tabulce VI.

Tabulka VI. Dočasné jednotky v ČSSR

Dočasná jednotka		Veličina	Vztah k jednotkám SI
název	značka		
ar	a	plošný obsah	$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$
barn	b		$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$
kilopond	kp	síla, tíha	$1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N}$ (přesně)

Pokračování tabulky VI.

Dočasná jednotka		Veličina	Vztah k jednotkám SI
název	značka		
kilopond na čtverečný metr	kp/m ²	tlak	1 kp/m ² = 9,80665 Pa (přesně)
kilopond na čtverečný centi- metr	kp/cm ²		1 kp/cm ² = = 0,098 0665 MPa (přesně)
torr	Torr		1 Torr = = (101 325/760) Pa
bar	bar		1 bar = 0,1 MPa
kilopond na čtverečný milimetr	kp/mm ²	mechanické napětí	1 kp/mm ² = = 9,80665 MPa (přesně)
kalorie	cal	tepelná energie (teplo)	1 cal = 4,1868 J (přesně)
gal	Gal	tíhové zrychlení	1 Gal = 1 cm/s ² = = 10 ⁻² m/s ²
poise (čti puáz)	P	dynamická viskozita	1 P = 0,1 Pa . s
stok	St	kinematická viskozita	1 St = 1 cm ² /s = = 10 ⁻⁴ m ² /s
gauss	G	magnetická indukce	1 G $\hat{=}$ 10 ⁻⁴ T
oersted	Oe	intenzita magnetického pole	1 Oe $\hat{=}$ $\hat{=}$ (1000/4 π) A . m ⁻¹
maxwell (čti mexvel)	M (Mx)	magnetický indukční tok	1 M $\hat{=}$ 10 ⁻⁸ Wb
rad	rad	dávka	1 rad = 10 ⁻² Gy
curie (čti kyri)	Ci	aktivita	1 Ci = 37 GBq (přesně)
rentgen	R	ozáření	1 R = = 2,58 . 10 ⁻⁴ C . kg ⁻¹ (přesně) = = 2,58 . 10 ⁻⁴ Gy . V ⁻¹ (přesně)

Poznámky k tabulce VI.:

1) V ČSN 01 1300 z r. 1974 byl mezi dočasnými jednotkami uveden také hektar. Ten je dnes mezi jednotkami vedlejšími.

2) V tabulce nejsou uvedeny běžně používané násobky resp. díly hlavních jednotek dočasných. Výjimkou je jednotka kilopond na čtverečný centimetr, zvaná dříve též technická atmosféra a kilopond na čtverečný milimetr, obě zcela specifické příslušným veličinám.

3) Tvorba násobků a dílů u kilopondu je analogická tvorbě týchž jednotek u kilogramu. Pond zde byl výchozí jednotkou, současně však byl jednotkou dílčí.

4) Jednotka barn je v ČSN 01 1300 uváděna proto, že ji obsahují mezinárodní dokumenty. Je to však jednotka používaná jen v úzkém specializovaném odvětví fyziky. Je to jednotka účinných průřezů jaderných interakcí.

5) Jednotka Torr je vlastně „normální“ dříve používaná jednotka tlaku: milimetr Hg. Je to patrně z číselných hodnot veličin vystupujících v převodním vztahu.

6) Jednotka bar je dnes dosti rozšířena, nejen pro vyjadřování barometrického tlaku, pro nějž byla původně určena, ale v některých zemích pro tlak vůbec. V zemích RVHP MLR a BLR má dokonce charakter spíše vedlejší nežli dočasné jednotky. Zatímco převážná část dočasných jednotek má být opuštěna do 31. prosince 1979, předpokládá se, že bar ještě tento termín o několik let přežije, a to proto, že jeho opuštění v některých oborech činnosti je vázáno na široké mezinárodní dohody, jež musí být změněny s ohledem na jednotky a podle nich se pak musí zavést nové jednotky prakticky současně ve všech zemích, jichž se dohoda týká. Tak je tomu např. v letecké nebo železniční dopravě, v meteorologii aj. Podle průzkumu, který v minulých letech uskutečnila mezinárodní normalizační společnost ISO, staví se většina technicky vyspělých zemí proti baru (např. SSSR, NDR, PLR, ČSSR, Francie, Velká Británie, USA aj.).

7) Jednotka N/mm^2 , která je stejně velká jako MPa, se pro mechanické napětí nemá používat, zejména z těchto důvodů:

— existuje-li pro nějakou veličinu samostatný název, pak má být tento samostatný název vždy zásadně preferován před jakoukoliv jinou transkripcí. Tedy jednotka Pa před N/m^2 a tedy i MPa před N/mm^2 ;

— kdyby se tento způsob připustil a neexistoval by důvod první, pak by např. ve stavebnictví měla mít stejné opodstatnění jednotka N/cm^2 , která by však odporovala zásadě odstupňování dílčích resp. násobných jednotek po třech dekadických řádech.

8) Jednotka kalorie rozumí se tzv. mezinárodní tabulková, značená také IT. Její hodnota je konvenčně přesná, podobně jako u kilopondu apod.

9) Gal byl jednotkou zrychlení (především tíhového) v bývalé soustavě CGS. Jeho opuštění bylo sice mezinárodně dohodnuto, avšak bude spojeno

s obtížemi, protože se z něho mnohem výhodněji tvořily díly, nežli z „delší“ jednotky, kterou je 1 m/s^2 .

¹⁰⁾ U magnetických jednotek je použito namísto rovnítka symbolu $\hat{=}$, což znamená „odpovídá“. Důvodem pro to je, že soustava CGS, z níž jsou staré jednotky, byla „třírozměrná“ (tj. vycházela při tvorbě odvozených jednotek ze tří jednotek základních), kdežto soustava MKSA, z níž vznikla prakticky soustava SI, byla „čtyřrozměrná“.

¹¹⁾ S opuštěním jednotky rentgen lze také očekávat určité obtíže, protože existuje velké množství rentgenometrů, přístrojů měřících ozáření, používaných nejen ve zdravotnictví, ale také v některých speciálních oblastech.

★

Zbývá nám ještě stručně pojednat o některých obecných zásadách týkajících se měřicích jednotek a platných pro jednotky zákonné, dočasné i některé speciální.

Názvy jednotek v ČSSR se píší na začátku s malým písmenem. Výjimkou je použití takového názvu na počátku věty. Tedy vždy jen kelvin, joule, kilogram, megawatt apod. Je-li však v názvu adjektivum vytvořené z vlastního jména, je počáteční písmeno velké, např. Celsiův stupeň, Englerův stupeň aj. Názvy složených jednotek píší se buď s mezerou, v cizině též s pomlčkou, nebo prostě dohromady: pascal sekunda, pascal-sekunda nebo pascalsekunda. Poslední způsob se zdá nejvýhodnější. V názvech se má vyjádřit i dělení mezi jednotkami nebo násobení ve jmenovateli, např. metr za sekundu, kilogram na metr krychlový, joule na kilogram a Celsiův stupeň apod. Názvy jednotek jsou sklonné. U některých jednotek existují dva nebo i více možných způsobů, jak je nazvat. Např. metr za sekundu, metr krát sekunda na minus první; jedna za sekundu (tj. 1 (s)), sekunda na minus první (s^{-1}), reciproká sekunda ($1/\text{s}$ i s^{-1}).

Značky jednotek se píší s velkými počátečními písmeny u jednotek, jejichž názvy se odvozují od vlastních jmen. Např. K, J, N, P, M, Torr, Gal aj. Značky jsou nesklonné a mezinárodně jednotné. Jsou jednopísmenové (N, l, W, Ω), dvoupísmenové (Pa, St, cd, Wb) nebo i vícepísmenové (mol, bar, Torr aj.). U násobků a dílů zvětšují počet písmen ještě předpony. Tyto předpony jsou také buď jednopísmenové (k-, M-, E-, h-, μ -), výjimečně dvoupísmenové (da-). Velkým písmenem se píší předpony SI pro násobky od 10^6 výše, ostatní se píší malými písmeny, jedna předpona řeckým mý (μ -).

Značky složených jednotek, daných součinem několika jednotek dílčích, mají být psány tak, aby nedošlo k omylu. Protože některé jednotky a předpony mají stejnou značku (metr m a mili m-, nebo tesla T a tera T-), má být součin dílčích jednotek vyznačen vždy násobicí tečkou. Tam, kde je omyl vyloučen, by sice postačilo vynechat mezi

značkami dvou dílčích jednotek mezeru, jednak by to však vedlo k ne-jednotnému psaní značek (někde s mezerou, jinde s násobicí tečkou), jednak lze přesněji rozeznat mezeru jen při tisku a nikoli při rukopise. Všeobecné používání tečky doporučila též ISO a používají ji všechna význačná metrologická pracoviště ve světě. Uvedme několik příkladů nejasného znění jednotky při vynechání násobicí tečky: m s^{-1} tj. metr krát sekunda na minus prvou lze zejména při ručním psaní zaměnit za ms^{-1} , což je milisekunda na minus prvou; v textu Mezinárodní praktické teplotní stupnice jsou mimo jiné používány dvě jednotky: milikelvin mK a metr krát kelvin $\text{m} \cdot \text{K}$, což při vynechání tečky snadno vede k záměně; v dimenzionálních rovnicích se setkáme s těmito dvěma značkami vedle sebe: $T \text{ m}$ tj. tesla krát metr a $T\text{m}$ je terametr, opět možnost omylu atd. Z důvodů mezinárodní jednotnosti a pro vyloučení omylů má být podle ČSN 01 1300 i podle připravovaného Standardu RVHP součin značek jednotek vždy vyznačen násobicí tečkou.

Obecně se jeví jako výhodnější používat namísto transkripce formou zlomků součinu značek se zápornými mocninami tam, kde je to potřeba. Např. $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$, $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = \text{J} (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$ apod.

Je-li složená jednotka psána formou zlomku, může být použita jak vodorovná, tak i šikmá zlomková čára (tato má při psaní na stroji výhodu), ale u jediné jednotky pouze jediná. Je-li ve jmenovateli více nežli jedna jednotka, má se celý jmenovatel vložit do okrouhlé závorky. Např. $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. Okrouhlá závorka se používá také pro číselnou hodnotu, je-li z nějakého důvodu vyjádřena zlomkem, za nímž je jednotka. Např. $1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$.

Značky jednotek mají při tisku vždy stojatou sazbu na rozdíl od značek veličin, které jsou kursivní. V běžném rukopise je zapotřebí rozlišit, aby nedošlo k omylu. Např. m je metr, mm je milimetr, m značí hmotnost. Jisté potíže jsou se značkou litru, která mnohdy vypadá jako jednička. Proto se uvažuje pro litr připustit také druhou značku (jak bylo již dříve uvedeno), a to ltr .

Závěrem připojíme několik informací o tom, jak probíhá v ČSSR přechod na nové zákonné jednotky. O vlastním popudu, který vyšel z Mezinárodní organizace vah a měr (metrické konvence) a který se rozšířil prakticky na celý svět, na velmi širokou akci zavádění Mezinárodní soustavy jednotek (SI) s ponecháním některých mimosystémových jednotek i nadále (u nás se nazývají jednotkami vedlejšími), jsme již hovořili na počátku. Nyní se zmíníme o tom, jaký postup byl volen v rámci RVHP, a tedy i u nás. V RVHP se dohodlo, že přechod na nové jednotky (tedy na SI) bude termínován od 1. ledna 1975 do 31. prosince 1979, že tedy bude pětiletý. Zásady přechodu a podrobněji plánované termíny byly obsaženy ve dvou dokumentech (v doporučení RVHP RS 3472-74 a v tzv. typovém programu). Některé země socialistického společenství neplnily přesně dohodnuté zásady a zejména termíny, a tak bohužel do-

šlo k tomu, že přechod neproběhl ve všech členských zemích současně, jak se původně předpokládalo, a že ČSSR, která ustanovení zmíněných dokumentů přesně plnila, dostala se nechtěně do čela, zatímco u jiných zemí je jednoletý a dvouletý časový skluz. ČSSR mohla takto předávat zkušenosti jiným a pomáhat, setkává se však na druhé straně s jistými obtížemi, např. při dovozu měřidel, kdy jsou obtíže při plnění logických požadavků na stupnici v nových jednotkách (např. u dynamometrů, manometrů aj.).

Na základě zmíněných dokumentů byla zřízena při Úradě pro normalizaci a měření Ústřední komise pro zavádění SI (ÚKSI), která celostátně metodicky řídí tuto akci v celém československém národním hospodářství, zabezpečuje poradenskou a konsultační činnost a potřebnou propagaci. V této komisi jsou zastoupeny všechny význačné československé resorty, jichž se přechod týká. Ty si vytvořily podobné komise nižší, tzv. resortní, a přenášejí celou problematiku dále na podobné útvary oborové nebo podnikové. Ústřední komise informovala vládu o významu přechodu na nové jednotky a o způsobu celého organizačního zajištění a na základě této informace vydala vláda ČSSR dne 17. ledna 1974 usnesení, č. 7, které stanovilo hlavní zásady, podle nichž se má přechod realizovat. Toto usnesení mimo jiného uložilo např. vypracování nového znění ČSN 01 1300 (Zákonné měřicí jednotky), plánovité zavádění nových jednotek do učebnic, skript, technické literatury, do technické dokumentace nejrůznějšího rázu, do výroby měřidel atd. Nové jednotky zvolna přecházejí i do denního tisku, časopisů, do masových sdělovacích prostředků apod.

Novým závazným dokumentem, týkajícím se jednotek, bude v rámci RVHP bude od příštího roku Standard RVHP (Jednotky fyzikálních veličin), o jehož některých článcích byla již v předešlém textu zmínka.

Celkově je nutno hodnotit široké mezinárodní zavádění Mezinárodní soustavy (SI), prakticky celosvětové, jako akci vědecky, technicky i politicky velmi významnou, odstraňující některé dosavadní nedostatky při vyjadřování hodnot naměřených veličin i při jejich měření nebo při stanovování některých kvantitativních parametrů fyzikálního charakteru, usnadňující mezinárodní spolupráci a umožňující vzájemné sbližování v oblasti vědy a techniky.

ČSSR se snaží ukončit tuto akci (samozřejmě v hlavních zásadních rysech) včas a co nejlépe. Vyskytnou-li se některé obtíže, je nutno je odstraňovat. Vcelku je možno dosavadní průběh hodnotit jako úspěšný a lze očekávat, že zavádění nových jednotek bude u nás zdárně dokončeno.

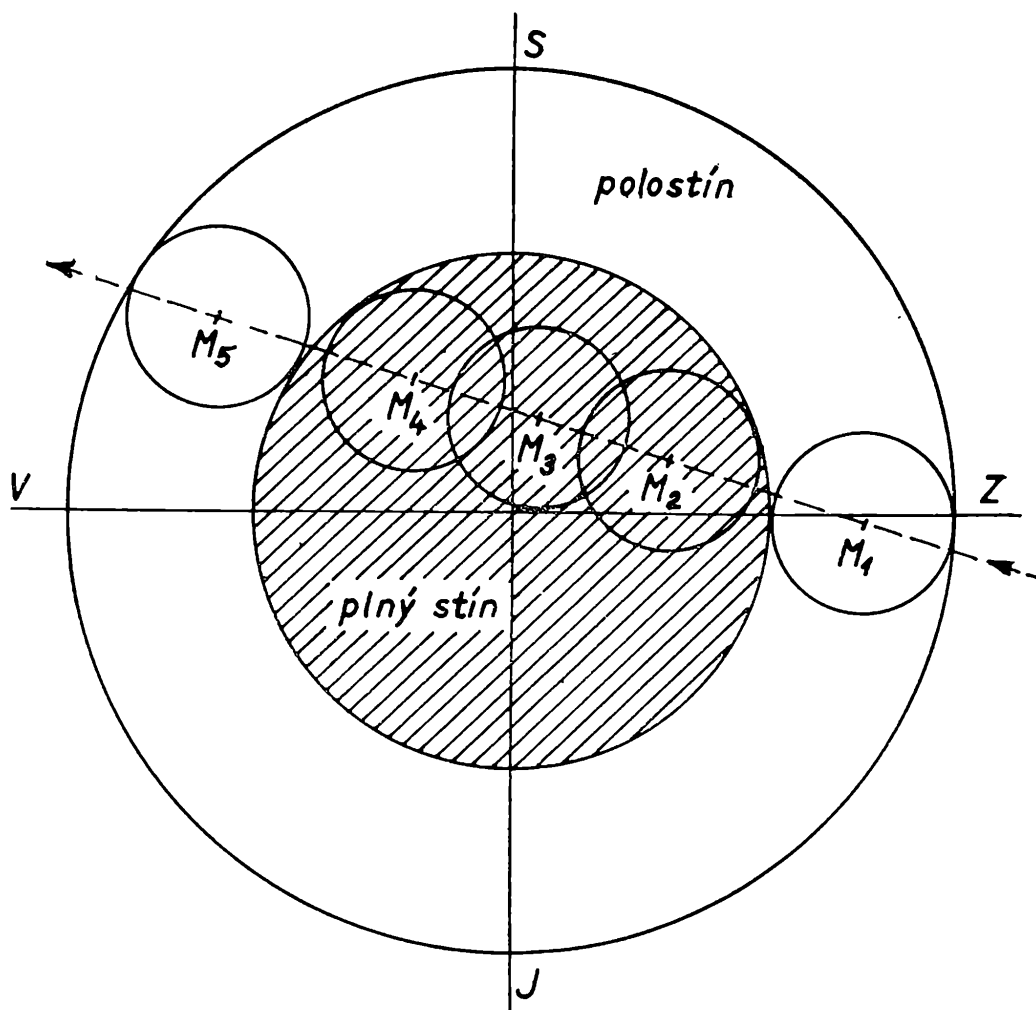
Úplné zatmění měsíce 16. září 1978

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ – RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Zatmění Slunce a Měsíce jsou úkazy velmi nápadné a poměrně vzácné. Odpověď na otázku, jak tato zatmění vznikají, je dnes snadná pro každého absolventa základní školy: k zatmění Slunce dojde tehdy, když na povrch Země dopadne stín, vrhaný do prostoru Měsícem, při zatmění Měsíce je Měsíc ve stínu vrhaném Zemí. Vznik a průběh zatmění tedy závisí na vzájemné poloze tří těles: Slunce, Země a Měsíce — středy těchto tří těles musí ležet téměř v jedné přímce, přičemž při zatmění Slunce je Měsíc mezi Sluncem a Zemí, při zatmění Měsíce pak je Země mezi Měsícem a Sluncem. Zatměním Slunce a Měsíce věnovali lidé velkou pozornost již v předhistorických dobách a snažili se předpovědět, kdy tyto události nastanou. Chaldejští hvězdáři vypožorovali již v šestém století před naším letopočtem určitou pravidelnost ve výskytu zatmění: zatmění Slunce a Měsíce se pravidelně opakují v určitém sledu v období asi 18 roků a 11 dní. Toto období bylo nazváno *saros*. V *saros*u nastává celkem 70 zatmění, z toho 41 slunečních a 29 měsíčních. Zatmění ovšem nemají stejný průběh; tak např. zatmění Měsíce je zprvu částečné, po několika periodách *saros*u úplné, později se stane opět částečným až konečně zanikne a je nahrazeno nově vznikajícím zatměním částečným.

V dnešní době jsou přesně známy jak elementy dráhy Země kolem Slunce, tak elementy dráhy Měsíce kolem Země, proto je možné na mnoho roků dopředu přesně vypočítat nejen vznik zatmění, ale i jeho průběh a oblast, v níž je zatmění pozorovatelné.

Pro rok 1978 bylo vypočteno, že nastanou dvě částečná zatmění Slunce a dvě úplná zatmění Měsíce. Obě zatmění Slunce, 7. dubna a 2. října 1978, nejsou pro naše čtenáře zajímavá, neboť nejsou na území našeho státu pozorovatelná. První ze zatmění Měsíce bylo dne 24. března 1978. Jak je známo, je zatmění Měsíce — na rozdíl od zatmění Slunce — pozorovatelné všude, kde je Měsíc v době zatmění nad obzorem, a má pro všechna pozorovací místa týž průběh. Dne 24. března byl začátek úplného zatmění v 16^h 36,7^{min} středoevropského času, střed zatmění (největší fáze) v 17^h 22,4^{min}, konec úplného zatmění v 18^h 8^{min}, konec částečného zatmění v 19^h 11,9^{min}. V tento den však u nás vycházel Měsíc v 18^h 17^{min}, tedy až po konci úplného zatmění. Pokud naši čtenáři toto zatmění pozorovali, mohli vidět jen závěrečné fáze zatmění — při východu Mě-



Obr. 1. Průběh úplného zatmění Měsíce 16. září 1978

síce částečné zatmění, které se postupně zmenšovalo; skončilo v době, kdy byl Měsíc ještě poměrně nízko nad obzorem a následující polostínové zatmění, které trvalo do 20^h 16^{min}, bylo již úkazem nepříliš zajímavým, neboť světlo Měsíce je při polostínovém zatmění jen poněkud zeslabeno.

Chtěli bychom naše čtenáře upozornit na druhé letošní úplné zatmění Měsíce, kdy budou pozorovací podmínky — ovšem za předpokladu bezmračné oblohy — mnohem lepší než byly v březnu. Zatmění Měsíce nastane v sobotu 16. září 1978. Tento den zapadá Slunce v 18^h 13^{min}, Měsíc vychází v 18^h 04^{min}, tedy ještě před západem Slunce. Měsíc vystupuje do polostínu v 17^h 20,7^{min}, při východu bude tedy již v polostínovém zatmění, které však vzhledem k pozorovacím podmínkám nebude možno postřehnout. Přesto doporučujeme zájemcům, aby Měsíc sledovali již od jeho východu, neboť v 18^h 20,2^{min} začne částečné zatmění Měsíce — Měsíc se začne nořit do plného stínu Země. Začátek úplného zatmění bude v 19^h 24,4^{min}. Střed zatmění, tj. jeho největší fáze, bude ve 20^h 04,2^{min}, konec úplného zatmění ve 20^h 43,9^{min}, konec částečného zatmění ve 21^h 48,1^{min}. Ve 22^h 47,6^{min} pak vystoupí Měsíc i z polostínu Země. Během zatmění bude Měsíc postupně vystupovat výše nad obzor; v polovině září začíná občanský soumrak (Slunce 6° pod obzorem) asi

v 18^h 45^{min}, astronomický soumrak (Slunce 18° pod obzorem) asi ve 20^h, pozorovací podmínky při úplném zatmění budou tedy poměrně dobré.

Na obr. 1 jsou nakresleny polohy Měsíce vzhledem k zemskému stínu při zatmění Měsíce dne 16. září 1978. Vyšrafovaný kruh představuje plný stín Země, vnější kruh pak polostín. Poloměr polostínu je 77,1', poloměr plného stínu 44,6', úhlový poloměr Měsíce 16,2'. Poloha Měsíce při začátku částečného zatmění je označena M_1 , při začátku úplného zatmění M_2 . Při poloze Měsíce M_3 nastává střed zatmění neboli jeho největší fáze. Velikost zatmění v jeho největší fázi je 1,33, což znamená, že okraj stínu přesahuje Měsíc o 0,33 měsíčního průměru. Můžeme si povšimnout, že v okamžiku největší fáze zasahuje měsíční kotouč téměř až do středu plného stínu. Čtenáře, kteří dosud neměli možnost pozorovat úplné zatmění Měsíce (poslední u nás pozorovatelné nastalo v nočních hodinách v listopadu 1975), upozornujeme na velmi zajímavou skutečnost: na začátku částečného zatmění se zdá zastíněná část zcela tmavá — je to však jen důsledek kontrastu mezi jasnou a zastíněnou částí Měsíce. Když z Měsíce zbývá již jen malý srpek, začíná se plný stín „vyjasňovat“. Při úplném zatmění Měsíc na obloze nezmizí. Intenzita jeho záření sice asi stokrát poklesne, Měsíc je však dobře pozorovatelný a má tmavočervené zabarvení. Jak se Měsíc postupně noří stále hlouběji do plného stínu, klesá intenzita jeho osvětlení a mění se jeho barva, po celou dobu zatmění je však pozorovatelný. Vysvětlení tohoto úkazu spočívá ve vlivu zemské atmosféry na průchod slunečních paprsků. V ní se sluneční paprsky lámou směrem dovnitř stínu, přičemž krátkovlnné (modré) paprsky jsou zemskou atmosférou pohlcovány mnohem více než paprsky dlouhovlnné (červené). Dne 16. září 1978 tedy budeme mít možnost pozorovat změny v osvětlení a zbarvení Měsíce při úplném zatmění po dobu téměř jedné hodiny a dvaceti minut, přičemž si můžeme všimnout i rozdílu v osvětlení části měsíčního kotouče v blízkosti stínu středu a v blízkosti okraje stínu. V poloze Měsíce, označené na obr. 1 písmenem M_4 , nastane konec úplného zatmění, okraj Měsíce začne vystupovat z úplného stínu. Poslední kontakt Měsíce s plným stínem Země neboli konec částečného zatmění je znázorněn polohou M_5 . Následující polostínové zatmění je již úkaz velmi málo nápadný.

Při zatmění Měsíce 16. září 1978 můžeme tedy pozorovat téměř celý průběh zatmění. Určitá nevýhoda spočívá v tom, že Měsíc bude poměrně nízko nad obzorem, pro naše čtenáře je však tato nevýhoda vyvážena skutečností, že zatmění proběhne již ve večerních hodinách.

olympiády

Úlohy pro 1. kolo fyzikální olympiády ve XX. ročníku soutěže (šk. rok 1978/1979)

Kategorie A

1. Stejné homogenní kuličky (obr. A-1) o středech $K_1, K_2, \dots, K_n$ bifilárně zavěšeny ve dvou bodech A, B vodorovné tyčky, souměrně sdružených podle svislé osy o tak, že $SK_1 = K_1K_2 = \dots = K_{n-1}K_n = d$.

Určete, jak se kuličky pohybují, když se vodorovná tyčka rovnoměrně otáčí s periodou T okolo osy o .

Odpor vzduchu zanedbáváme, závěsy považujeme za tuhé, ale připouštíme, že se středy kuliček mohou vychylovat od osy, kolem níž se vodorovná tyčka otáčí.

Řešte v neinerciální vztažné soustavě spojené s otáčející se tyčkou, a to nejprve obecně, potom pro $n = 6, d = 0,15 \text{ m}, T = 1,5 \text{ s}, g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

2. Kulička o poloměru r má černý povrch a je vyrobena z látky tepelně dokonale vodivé, jejíž hustota je ρ . Kulička padá z velké výšky ve vzduchu, jehož teplota T_0 je stálá. Stanovte teplotu T kuličky při jejím rovnoměrném pohybu a rovnovážném tepelném stavu, který je výsledkem těchto dějů:

- a) zvýšení teploty kuličky třením při pohybu ve vzduchu,
- b) přestup tepla z kuličky do vzduchu tepelnou výměnou,
- c) tepelné vyzařování z kuličky do okolí,
- d) tepelné vyzařování z okolí na kuličku.

Poznámky:

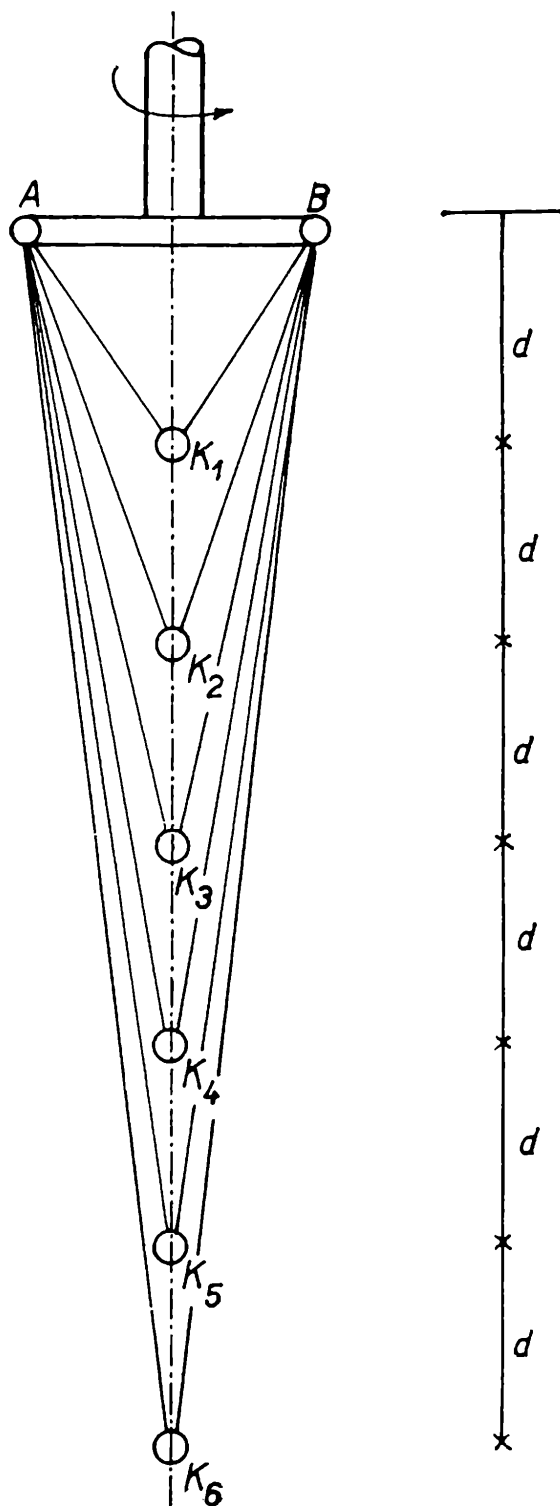
1. Předpokládáme, že odporová síla F_t , kterou vzduch působí proti pohybu kuličky, je dána Stokesovým vztahem

$$F_t = 6 \pi \eta r v,$$

kde η značí dynamickou viskozitu vzduchu, v rychlost kuličky.

2. Tepelný výkon odevzdávaný z kuličky do vzduchu je přímo úměrný obsahu S povrchu kuličky a teplotnímu rozdílu $\Delta T = T - T_0$; činitele úměrnosti označíme α .

3. U dějů c) a d) předpokládáme, že rozdíl ΔT je velmi malý.



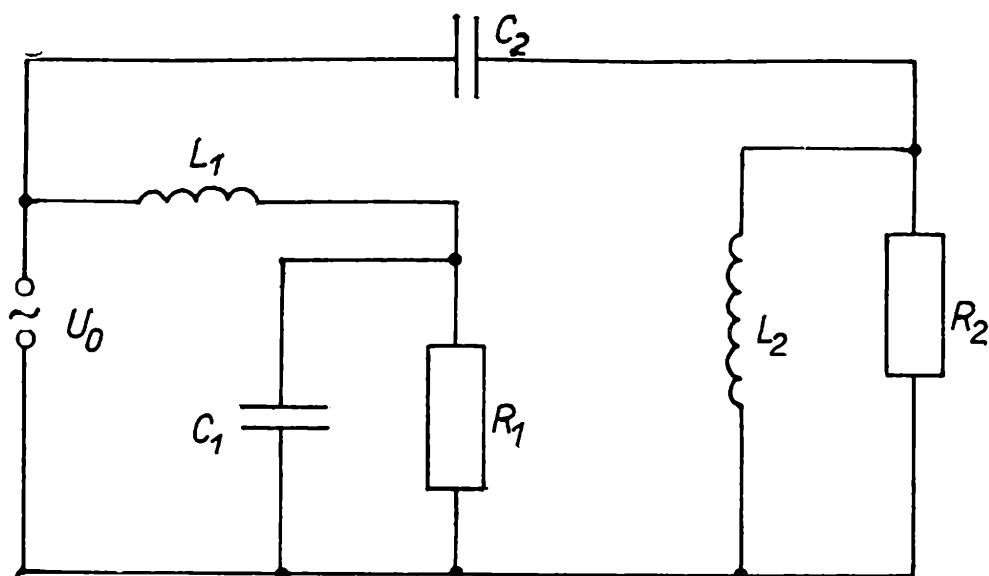
Obr. A - 1

4. Pro vyzařovaný tepelný výkon P_z platí zákon Stefanův-Boltzmannův

$$P_z = S\sigma T^4,$$

kde σ je konstanta Stefanova-Boltzmannova.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $r = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\rho = 5,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $\eta = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 50 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.



Obr. A - 2

3. V homogenním magnetickém poli o indukci $\mathbf{B}$ se otáčí vodivá tyč délky l kolem bodu O , jehož vzdálenost od osy tyče je y a pata A kolmice spuštěné z bodu O na tyč má od středu S tyče vzdálenost x . Tyč se otáčí stálou úhlovou rychlostí ω v rovině kolmé k $\mathbf{B}$ kolem osy, která je rovnoběžná s magnetickou indukcí $\mathbf{B}$.

Určete celkové napětí indukované na tyči.

Řešte nejprve obecně, potom pro $B = 0,10 \text{ T}$, $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, $l = 0,10 \text{ m}$, $x = 0,030 \text{ m}$, $y = 0,50 \text{ m}$.

4. Schéma na obr. A-2 představuje elektrickou výhybku, která slouží k připojení reproduktorové soustavy. Rezistor o odporu R_1 nahrazuje reproduktor pro nízké tóny, rezistor o odporu R_2 nahrazuje reproduktor pro vysoké tóny. Soustava je připojena ke zdroji harmonického střídavého napětí o efektivní hodnotě U_0 .

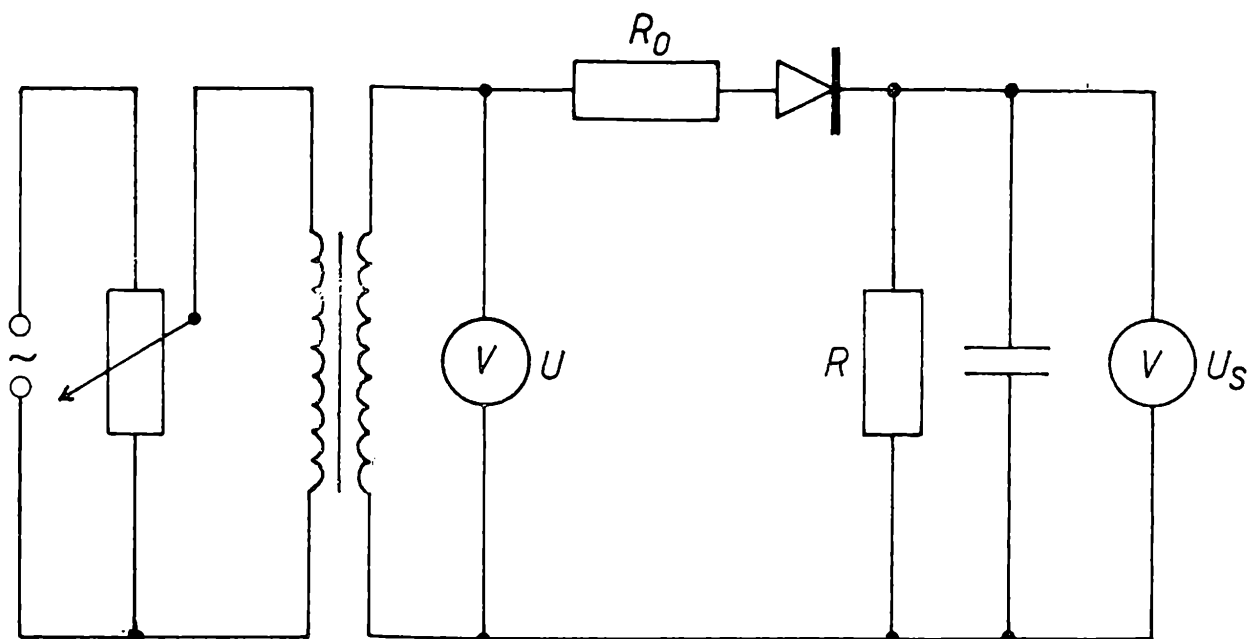
a) Vysvětlete činnost výhybky.

b) Stanovte indukčnosti L_1 , L_2 cívek a kapacity C_1 , C_2 kondenzátorů tak,

- aby při daném (dělicím) kmitočtu f_d dostával každý reproduktor polovinu toho příkonu, který by dostával, kdyby byl ke zdroji napětí připojen přímo,
- aby při dělicím kmitočtu f_d měla cívka o indukčnosti L_1 stejně velkou reaktanci jako kondenzátor o kapacitě C_1 a cívka o indukčnosti L_2 stejně velkou reaktanci jako kondenzátor o kapacitě C_2 .

Řešte nejprve obecně, potom pro $R_1 = 5,0 \Omega$, $R_2 = 15,0 \Omega$, $f_d = 5,0 \text{ kHz}$.

c) Označme P_1 , P_2 příkony reproduktorů při kmitočtu f , dále pak P_{1m} , P_{2m} příkony reproduktorů při jejich přímém připojení ke zdroji. Pro veličiny L_1 , C_1 , L_2 , C_2 , nalezené v části b), stanovte funkce $y_1 = F_1(x)$, $y_2 = F_2(x)$,



Obr. A - 3

kde

$$y_1 = \frac{P_1}{P_{1m}}, \quad y_2 = \frac{P_2}{P_{2m}}, \quad x = \frac{f}{fa}$$

a graficky je znázorněte. Stupnici pro x volte logaritmickou, funkční hodnoty počítejte pro $x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$.

5. Korunové sklo má pro světlo o délce vlny λ_1 index lomu n_B , pro světlo o délce vlny λ_2 index lomu n_G . Flintové sklo má pro uvažované délky vlny indexy lomu n'_B, n'_G .

Z těchto skel má být zhotovena tmelená ploskovypuklá spojná čočka, jejíž barevná vada je opravena tak, že ohnisková vzdálenost f pro světla s oběma uvažovanými délkami vlny je stejná. Stanovte poloměry křivosti kulových vrchlíků, jimiž jsou jednotlivé části achromatické čočky omezeny.

Základní úvahu proveďte obecně, pak řešte pro hodnoty $n_B = 1,50674$, $n_G = 1,52050$, $n'_B = 1,74452$, $n'_G = 1,79336$, $f = 0,500$ m.

Poznámka:

Indexy lomu n_B a n'_B odpovídají Fraunhoferově čáře B o délce vlny $\lambda_1 = 686,72$ nm, indexy lomu n_G , n'_G odpovídají Fraunhoferově čáře G o délce vlny $\lambda_2 = 430,78$ nm. Uvažte, zda existuje jedno řešení, nebo více řešení.

6. Experimentální úloha

Demodulační charakteristiky polovodičové diody — obr. A-3. V obvodu je zapojen zdroj střídavého napětí s kmitočtem 50 Hz o efektivní hodnotě nejvýše 24 V, transformátor (vyhoví školní rozkladný

transformátor s transformačním poměrem 1 : 1), voltmetr na střídavé napětí (jakéhokoli typu), polovodičová dioda (např. KY 705), ochranný rezistor o odporu R_0 řádově $10^1 \Omega$, elektrolytický kondenzátor s velkou kapacitou (nejméně $50 \mu\text{F}$), voltmetr na stejnosměrné napětí se zanedbatelným vlastním příkonem (např. avomet II), rezistor o odporu R . Demodulační charakteristika diody je definována jako funkce $U_s = f(U_m)$ při určitém odporu R rezistoru, kde U_s značí stejnosměrné napětí na rezistoru, U_m amplitudu střídavého napětí, jehož efektivní hodnotu U změříte.

Postup:

1. Sestavte zapojení podle obr. A-3.
2. Měřte demodulační charakteristiky s rezistory, jejichž odpory mají velikosti řádově $10^1 \Omega$, $10^2 \Omega$, $10^3 \Omega$ a popř. ještě $10^4 \Omega$, v oboru $0 \leq U_m \leq 30 \text{ V}$. Vhodné hodnoty napětí postupně nastavujte.
3. Charakteristiky zakreslete do téhož grafu, ke každé připište odpor R použitého rezistoru.
4. Z průběhů křivek usudte, jaký průběh by měla charakteristika pro $R \rightarrow \infty$; zakreslete ji čárkovaně.
5. Uvažte případ, že amplituda U_m napětí se mění v okolí nějaké střední hodnoty U_{m0} podle vztahu

$$U_m = U_{m0} + \Delta U_m \cdot \sin \omega t, \quad \Delta U_m < U_{m0}.$$

Zvolte nějaké hodnoty U_{m0} , ΔU_m (např. $U_{m0} = 10 \text{ V}$, $\Delta U_m = 8,0 \text{ V}$) a pro některou ze změřených demodulačních charakteristik sestrojte graf funkce $U_s = f(t)$.

Stanovte podmínku, při které stejnoměrné napětí U_s věrně reprodukuje časový průběh amplitud U_m .

7. Svislý žebřík délky l se skládá ze dvou tyčí, z nichž každá má hmotnost M , dále z n příček, z nichž každá má hmotnost m . Vzájemná vzdálenost sousedních příček je a . Nejnižší příčka je umístěna ve vzdálenosti $\frac{a}{2}$ od vodorovné podlahy.

Vychýlíme-li žebřík ze svislé polohy, kácí se k podlaze, přičemž po ní neklouže.

Předpokládáme, že tyče i příčky jsou homogenní a velmi tenké,

- a) Určete rychlost dopadu konce žebříku na podlahu,
 - b) Určete rychlost dopadu každé příčky na podlahu.
 - c) Určete velikost úhlového zrychlení žebříku při dopadu na podlahu.
- Řešte obecně, potom pro hodnoty $l = 6,0 \text{ m}$, $M = 10 \text{ kg}$, $n = 20$, $a = 0,30 \text{ m}$, $m = 0,30 \text{ kg}$.

Texty úloh F0 - XX - B - I

1. Nádoba tvaru kvádra je naplnená do výšky h kvapalinou hustoty ρ . Dno nádoby je vodorovné. Vypočítajte veľkosť sily, ktorou pôsobí kvapalina na bočnú stenu nádoby šírky s , a určte jej pôsobisko.

2. Skúmavka, dole zaťažaná, pláva v kvapaline hustoty ρ tak, že jej os je zvislá. Dĺžka ponorenej časti skúmavky je h . Ak skúmavku z kvapaliny povytiahneme o malú dĺžku a potom uvoľníme, koná kmitavý pohyb. Odpor prostredia a zmenu výšky hladiny pri kmitoch neuvažujeme.

a) Ukážte, že tento pohyb je harmonický, a určte jeho dobu kmitu T .

b) Skúmavku preniesieme do kvapaliny hustoty ρ' a uvedieme ju rovnakým spôsobom do kmitavého pohybu. Doba kmitu je T' . Určte pomer

$$p = \frac{T}{T'}.$$

3. Ve svislém válci pod pístem pevně spojeným s pružinou je uzavřen plyn (obr. B-1), jehož molární hmotnost je M_m a Poissonova konstanta κ . Tlak plynu měříme pomocí otevřeného rtuťového manometru. Válec je uložen v nádobě naplněné olejem. Obsah kruhového průřezu pístu je S . Nad pístem je vzduch, atmosférický tlak p_0 je stálý. Nádobu s olejem a válcem ohříváme pomocí kahanu.

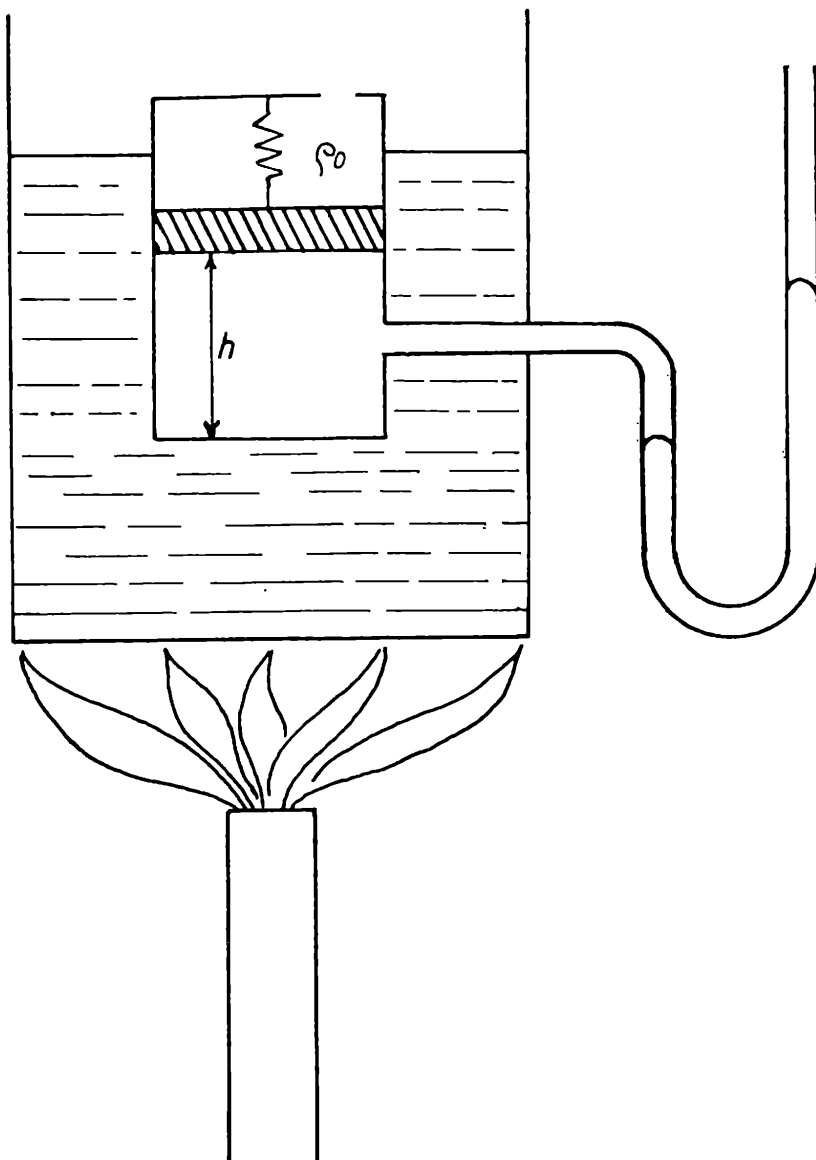
a) Popište, jak se mění vzdálenost h pístu od dolní rovinné vnitřní stěny válce v závislosti na tlaku p plynu. Určete funkci $h = f(p)$ a znázorněte ji graficky. Na začátku ohřívání nádoby je $h = h_0$, $p = p_0$.

b) Vypočítejte tuhost k pružiny, když po ohřátí plynu byly naměřeny tyto veličiny: $h = h_1 > h_0$, $p = p_1 > p_0$.

c) Za jaké podmínky vyhovuje bod $(0, 0)$ funkci $h = f(p)$? Při platnosti této podmínky stanovte tuhost k pružiny.

d) Při platnosti podmínky z bodu c) vypočítejte měrné teplo c plynu. Plyn považujte za ideální. Změny teploty a objemu plynu jsou malé v porovnání s teplotou a objemem plynu před jeho ohřátím. Píst se pohybuje ve válci bez tření a jeho tíha je velmi malá v porovnání s tlakovou silou pružiny. Objem trubice manometru je malý v porovnání s objemem plynu.

4. Elektronový lúč vstupuje medzi dve horizontálne dosky osciloskopu vo vodorovnom smere v strede medzi doskami. Rýchlosť v_0 elektrónov pri vstupe medzi dosky je stála a malá v porovnaní s rýchlosťou svetla vo vákuu. Vo vzdialenosti d od koncov dosiek je zvisle uložené rovinné tienidlo obrazovky osciloskopu. Dĺžka dosiek v smere kolmom na tienidlo je s , vzdialenosť medzi doskami je u .



Obr. B - 1

Na dosky osciloskopu pripojíme elektrické napätie. U .

a) Opíšte pohyb elektrónov od okamžiku vstupu medzi dosky až po ich dopadnutie na tienidlo. Určte rovnicu trajektórie elektrónov pri tomto pohybe vo vhodne zvolenej sústave súradníc.

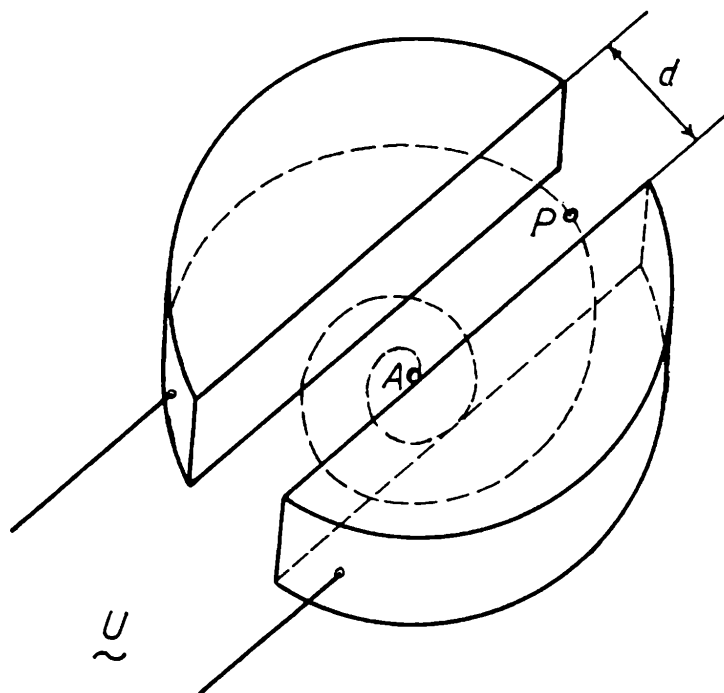
b) Určte rýchlosť v pohybu elektrónov v okamžiku, keď opúšťajú elektrické pole dosiek.

c) Určte výšku z tienidla tak, aby stopu elektrónového lúča bolo možné ešte zachytiť aj na dolnom a hornom okraji obrazovky.

d) Navrhните vhodnú metódu merania merného elektrického náboja $\frac{e}{m}$ elektrónu pomocou uvedeného zariadenia.

5. Cyklotrón sa používa na urýchľovanie elementárnych častíc s elektrickým nábojom. Pracuje na nasledovnom princípe:

Nízka valcová nádoba je rozdelená pozdĺž svojej geometrickej osi na dve časti (obr. B-2), tzv. duanty, a uložená vo vákuu. Duanty sú pripo-



Obr. B - 2

jené na zdroj vysokofrekvenčného elektrického poľa. Homogénne magnetické pole indukcie $\mathbf{B}$ je kolmé na polkruhové steny duantov. Približne v strede cyklotrónu (bod A) je uložený iónový zdroj. Ión v bode A má počiatočnú rýchlosť veľmi malú, elektrickým poľom medzi duantami je urýchlený, získava rýchlosť v , vstupuje do duantu, kde sa vplyvom magnetického poľa pohybuje po kružnicovej dráhe. Počas pohybu iónu v jednom z duantov zmení sa orientácia elektrického poľa medzi duantami a ión po príchode medzi duanty je znova urýchlený. Ión sa tak pohybuje po polkružnicových dráhach, ktorých polomer sa stále zväčšuje. Tento dej sa mnohokrát opakuje, až v mieste p dopadá ión vysokou rýchlosťou na terčik, pričom $AP = R$.

a) Dokážte, že doba T , za ktorú je potrebné zmeniť polaritu napätia na duantoch, nie je závislá od polomeru kružnicovej dráhy iónu.

b) Určte veľkosť $\mathbf{B}$ indukcie magnetického poľa cyklotrónu tak, aby ión o náboji Q a hmotnosti m získal celkovú energiu E .

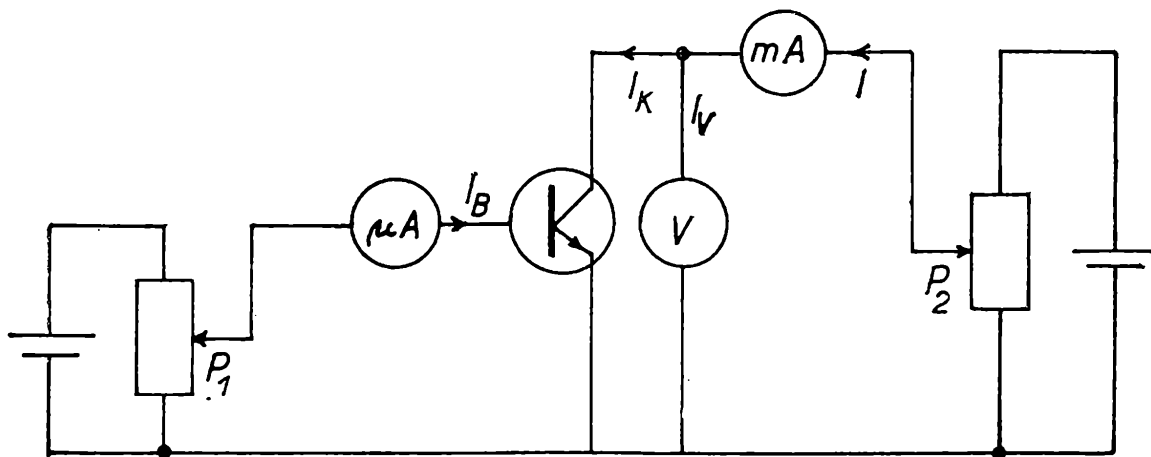
c) Stanovte celkový čas, ktorý uplynie od vzniku iónu až po zasiahnutie terčika, keď napätie medzi duantami počas preletu iónu medzerou má stálu hodnotu U . Ión má získať celkovú energiu E . Šírka medzery medzi duantami je d .

Relativistickú zmenu hmotnosti iónu neuvažujte.

Riešte najskôr všeobecne a potom otázky b) a c) pre protón, keď $E = 5,0 \text{ MeV}$, $R = 0,50 \text{ m}$, $U = 20 \text{ kV}$, $d = 1,0 \text{ cm}$.

6. Experimentálna úloha

Meranie prevodovej charakteristiky $I_K = f(I_B)$ a prúdového zosilňovacieho činiteľa β tranzistora zapojeného so spoločným emitorom.



Obr. B - 3

Cieľ úlohy: Nameranie veličín pre grafické znázornenie statických prevodových charakteristík $I_K = f(I_B)$ nízkofrekvenčného tranzistora KC 507, príp. KC 508, KC 509 alebo iného typu (pre napätie $U_{KE} = 3\text{ V}$, $U_{KE} = 4\text{ V}$), grafické znázornenie charakteristík, výpočet prúdového zosilňovacieho činiteľa β a znázornenie závislosti $\beta = f(I_K)$.

Pomôcky: Tranzistor, mikroampérmetr, dva avometry, dva potenciometre $30\text{ k}\Omega$, dve ploché batérie 4 V , spojovacie vodiče.

Postup:

1. Pred meraním sa zoznámime s princípom činnosti tranzistorov a so základnými zásadami zapojenia tranzistorov. Vhodná literatúra: *Bém, J. a kol.: Československé polovodičové součástky, SNTL, Praha 1971; Krempaský, J.: Otázky a odpovědi z polovodičů, Alfa, Bratislava 1973; Čermák, J. — Navrátil, J.: Tranzistorová technika, SNTL, Praha 1967 a pod.*

Pri práci s tranzistormi dbáme najmä na to, aby sme tranzistor ne-
správnym zapojením, resp. prekročením jeho medzných hodnôt nezničili.

Tranzistor KC 507 je nízkofrekvenčný kremíkový tranzistor typu NPN, vyrába sa modernou planárnou epitaxnou technológiou.

2. Meranie uskutočníme v zapojení prvkov podľa schémy na obr. B-3.

3. Oba potenciometre nastavíme na najmenšie hodnoty, až potom pripojíme tranzistor na zdroje napätia. Potenciometrom P_2 nastavíme žiadané napätie U_{KE} , ktoré počas merania udržíme konštantné. Prúdový zosilňovací činiteľ tranzistora KC 507 je pomerne veľký, jeho konkrétna hodnota je závislá od U_{KE} a I_K , preto pred začatím merania nastavíme potenciometrom P_1 prúd $I_K = 0\text{ mA}$.

4. Prúd I_B postupne zvyšujeme pomocou potenciometra P_1 , pričom potenciometrom P_2 vždy nastavíme zvolené konštantné napätie U_{KE} a odčítujeme prúd I na miliampérmetri v kolektorovom obvode. Tak postupujeme, až kým I_K nedosiahne hodnotu 60 mA , a potom znižujeme

prúd I_B až do hodnoty $I_K = 0$ mA. Prúdy I v kolektorovom obvode pri zvyšujúcom sa prúde I_B označíme I' , pri znižujúcom sa prúde I_B zase I'' . Prúd I_K vypočítame pomocou prúdov I a I_V ($I_V = \frac{U_{KE}}{R_V}$, kde R_V je vnútorný odpor voltmetra V).

5. Namerané a vypočítané hodnoty zapisujeme do tabuľky.

$U_{KE} =$

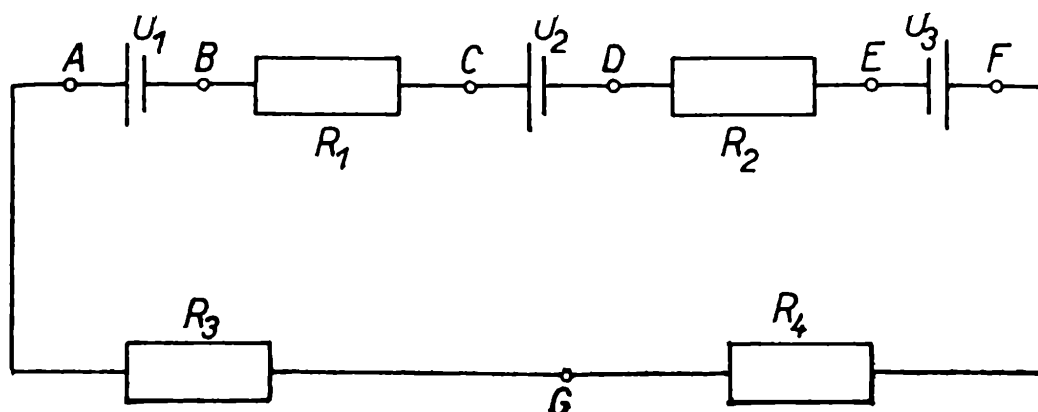
č.	$\frac{I_B}{\mu A}$	$\frac{I'}{mA}$	$\frac{I''}{mA}$	$\frac{I = \frac{1}{2}(I' + I'')}{mA}$	$\frac{I_K = I - I_V}{mA}$	$\frac{\Delta I_B}{mA}$	$\frac{\Delta I_K}{mA}$	$\beta = \frac{\Delta I_K}{\Delta I_B}$
1.								
2.								

6. Na milimetrový papier zostrojíme charakteristiky $I_K = f(I_B)$ pre obe napätia U_{KB} . Zostrojíme tiež závislosti $\beta = f(I_K)$ pre obe napätia U_{KE} .

7. Stručne vysvetlite výsledky merania. Uveďte možnosti praktického použitia tranzistora tak, aby boli využité jeho vlastnosti vyplývajúce z nameraných charakteristík.

7. V elektrickom obvode, ktorého schéma je na obr. B-4, sú spojené reálne zdroje elektromotorického napätia a rezistory. Reálny zdroj je ideálny zdroj sériovo spojený s rezistorom, ktorého odpor je rovný vnútornému odporu zdroja.

Obr. B - 4,



- a) Vypočítajte prúd I v obvode.
 - b) Určte potenciály $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, V_F$ v bodoch A, B, C, D, E, F keď potenciál V_G bodu G je nulový.
 - c) Pre číselné hodnoty navrhnete a nakreslite vhodný rovinný graf, ktorý znázorňuje závislosť potenciálu od polohy bodu v obvode.
 - d) Určte elektromotorické napätie U zdroja, ktorý chceme pripojiť k bodom B a E obvodu tak, aby týmto zdrojom netiekol žiadny prúd.
- Úlohy riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty:
 $U_1 = 12,0 \text{ V}$, $U_2 = 6,00 \text{ V}$, $U_3 = 8,00 \text{ V}$, $r_1 = 2,00 \Omega$, $r_2 = 1,00 \Omega$,
 $r_3 = 1,00 \Omega$ (U_i sú elektromotorické napätia zdrojov a r_i sú ich vnútorné odpory) $R_1 = 4,00 \Omega$, $R_2 = 6,00 \Omega$, $R_3 = 5,00 \Omega$, $R_4 = 8,00 \Omega$.

Texty úloh FO - XX - C - I

1. Sklená fľaška so sklenou zátkou má hmotnosť m a vnútorný objem V . Do fľašky nasypeme olovené guľôčky s priemerom d a fľašku uzavreme. Fľašku položíme na voľný povrch vody v nádobe.

a) Určte najmenší počet guľôčiek, pri ktorom sa fľaška potopí a klesne na dno nádoby.

b) Ako sa zmení výsledok, ak neuvažujete hmotnosť vzduchu vo fľaši?

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $m = 500 \text{ g}$, $V = 1000 \text{ ml}$, $d = 4,0 \text{ mm}$, hustota skla $\rho_1 = 2500 \text{ kg m}^{-3}$. Ostatné potrebné konštanty vyhľadajte v tabuľkách.

2. Ve vagóne, ktorý jede stálou rýchlosťou v_0 po vodorovnej priámej trati, je zaväzená v koncovom bode stejnorodá tyč dĺžky d , všude stejného prierezu. Tyč môže kývať vo svislej rovine rovnobežnej so smerom pohybu vagónu.

a) V určitom okamžiku vagón prejde z rovnomerného pohybu do rovnomerného zpomaleného pohybu a zastaví sa za dobu t_1 od tohoto okamžiku. Určte úhel, o ktorý sa tyč odkloní od svislej rovnovážnej polohy.

b) O jaký úhel sa odkloní tyč od svislej rovnovážnej polohy, zastaví-li sa vagón okamžite?

Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty: $v_0 = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $d = 2,0 \text{ m}$, $t_2 = 3,0 \text{ s}$.

3. Dusík určité hmotnosti má při tlaku $p_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ objem $V_1 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ a při tlaku $p_2 = 3,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ objem $V_2 = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

a) Přejed z stavu (1) do stavu (2) probíhá ve dvou dějích: první z nich je izobarický a druhý izochorický. Určte: vykonanou práci; teplo přijaté plynem; změnu vnitřní energie plynu.

b) Přechod ze stavu (1) do stavu (2) probíhá ve dvou dějích: první z nich je izochorický a druhý je izobarický. Určete postupně tytéž veličiny jako v úloze a).

c) Porovnejte výsledky dílčích úloh a) a b).

d) Děje probíhají v cyklu takto: ze stavu (1) do stavu (2) postupně v ději izobarickém a izochorickém, ze stavu (2) do stavu (1) postupně opět v ději izobarickém a izochorickém. Určete: práci vykonanou plynem; teplo přijaté plynem; změnu vnitřní energie plynu.

Dusík považujte za ideální plyn. Molární tepla jsou $C_V = \frac{5}{2} R_m$, $C_p = \frac{7}{2} R_m$, kde R_m je molární plynová konstanta.

4. V tepelně izolované a mechanicky odolné nádobě o objemu $V = 100$ litrů je vodík o hmotnosti $m_1 = 5,0$ g a kyslík o hmotnosti $m_2 = 12,0$ g při počáteční teplotě $t_0 = 20$ °C. Směs shoří.

Určete tlak a teplotu plynu v nádobě, jestliže při vzniku 1 molu vodní páry se uvolní teplo $Q_0 = 2,4 \cdot 10^5$ J. Měrné teplo vodíku při stálém objemu $c_{V1} = 14,3$ kJ · kg⁻¹ · K⁻¹; měrné teplo vodní páry při stálém objemu $c_{V2} = 2,1$ kJ · kg⁻¹ · K⁻¹.

5. Rozdíl délek Δd dvou homogenních tyčí z různých materiálů je při kterékoli teplotě stálý. Předpokládáme, že změna délky každé tyče je lineární funkcí teploty.

Určete délku tyčí při teplotě 0 °C, znáte-li součinitele délkové roztažnosti materiálů tyčí α_1 a α_2 .

Po obecném vyřešení úlohy řešte pro tyč měděnou ($\alpha_1 = 1,7 \cdot 10^{-5}$ K⁻¹) a ocelovou ($\alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5}$ K⁻¹), $\Delta d = 0,10$ m.

6. Určení teploty ocelového předmětu použitím kalorimetru

Pomůcky: Směšovací kalorimetr, teploměr do 100 °C se stupnicí 1 dílek $\hat{=}$ 1 °C, teploměr se stupnicí 1 dílek $\hat{=}$ 0,1 °C; stojan, nádoba na vodu, plynový hořák (nebo elektrický vařič s plotnou), ocelový válec, držák s háčkem k uchycení a přenášení válce, váhy, závaží, sada broků (nebo automatické váhy).

1. Přípravná úloha: Určení tepelné kapacity kalorimetru

a) Dokažte, že pro tepelnou kapacitu K kalorimetru platí vztah

$$K = \frac{m_2 c (t_2 - t)}{t - t_1} - m_1 c,$$

kde c je měrné teplo vody (tabulková hodnota), m_1 počáteční hmotnost vody o teplotě t_1 v kalorimetru, m_2 hmotnost přidané vody o teplotě t_2 , $t_2 > t_1$, t je výsledná teplota vody v kalorimetru.

b) Stanovte, které veličiny změříte; popište postup měření. Stanovte jednotku veličiny K v soustavě SI. (Praktická cvičení z fyziky, SNP 1971, úl. 2,25)

c) Provedte měření a příslušné výpočty. Zhodnoťte výsledek dílčí úlohy 1.

2. Přípravná úloha: Určení měrného tepla ocelového válce

a) Dokažte, že pro měrné teplo c_1 ocelového válce platí vztah

$$c_1 = \frac{(m_1 c + K)(t - t_1)}{m_2(t_2 - t)},$$

kde m_1 je počáteční hmotnost vody o teplotě t_1 v kalorimetru, m_2 je hmotnost ocelového válce, t_2 jeho počáteční teplota, $t_2 > t_1$, c je měrné teplo vody (tabulková hodnota).

b) Stanovte, které veličiny změříte a které převeźmete z 1. přípravné úlohy. Stanovte jednotku veličiny c_1 v soustavě SI. (Praktická cvičení z fyziky, SPN 1971, úl. 2,26)

c) Provedte měření a příslušné výpočty. Zhodnoťte výsledek 2. přípravné úlohy.

3. Určení teploty ocelového válce použitím kalorimetru

a) Do kalorimetru připravte vodu o hmotnosti m_1 a o teplotě t_1 . Válec o hmotnosti m_2 zavěšený na držáku zahřívajte v plameni plynového hořáku asi 5 min. Potom válec rychle přeneste do vody v kalorimetru a změřte výslednou teplotu t_2 vody a ocelového válce v kalorimetru.

b) Dokažte, že pro teplotu t válce přenášeného z plamene do vody v kalorimetru platí vztah

$$t = t_2 + \frac{(m_1 c + K)(t_2 - t_1)}{m_2 c_1}.$$

c) Stanovte, které veličiny změříte a které převeźmete z 1. a 2. přípravné úlohy. Provedte měření a příslušné výpočty. Zhodnoťte výsledek úlohy.

7. Umělá družice obíhá po eliptické dráze kolem Země. Její maximální vzdálenost od povrchu Země je H , minimální je h .

a) Určete rychlosti družice v perigeu, v apogeu a v koncovém bodě malé poloosy dráhy.

b) Kolikrát se musí zvětšit rychlost družice při průchodu perigeem, aby se od tohoto bodu dráhy pohybovala po parabolické dráze?

Texty úloh F0 - XX - D - I

1. Dva automobily vyjely současně z místa A a za dobu $t = 4$ min. dojely do místa B . Automobil Lada jel první polovinu dráhy stálou rychlostí $v_1 = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, druhou polovinu dráhy stálou rychlostí $v_2 = 45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Automobil Škoda 100 jel po celou dobu pohybem rovnoměrně zrychleným a počáteční rychlostí $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Určete průměrné rychlosti obou automobilů na trati.
- Určete vzdálenost místa A od místa B .
- Určete zrychlení automobilu Škoda 100 a jeho rychlost v místě B .
- Ve kterém okamžiku měly oba automobily stejnou rychlost?
- Nakreslete graf délky dráhy jako funkce času.
- Nakreslete graf rychlosti jako funkce času.
- Z grafů ověřte všechny vypočítané hodnoty.

2. Na přímé vodorovné trati je k lokomotivě připojeno $N = 20$ stejných vagónů, z nichž každý má hmotnost m . Vagóny jsou propojeny spoji ve tvaru řetězových ok. Jeden spoj je slabší a snese právě tahovou sílu $F_0 = 1,0 \cdot 10^4 \text{ N}$. Mezi které vagóny lze tento spoj umístit, jestliže lokomotiva působí na vlak silou $F = 4 F_0$? Třecí sílu zanedbáváme.

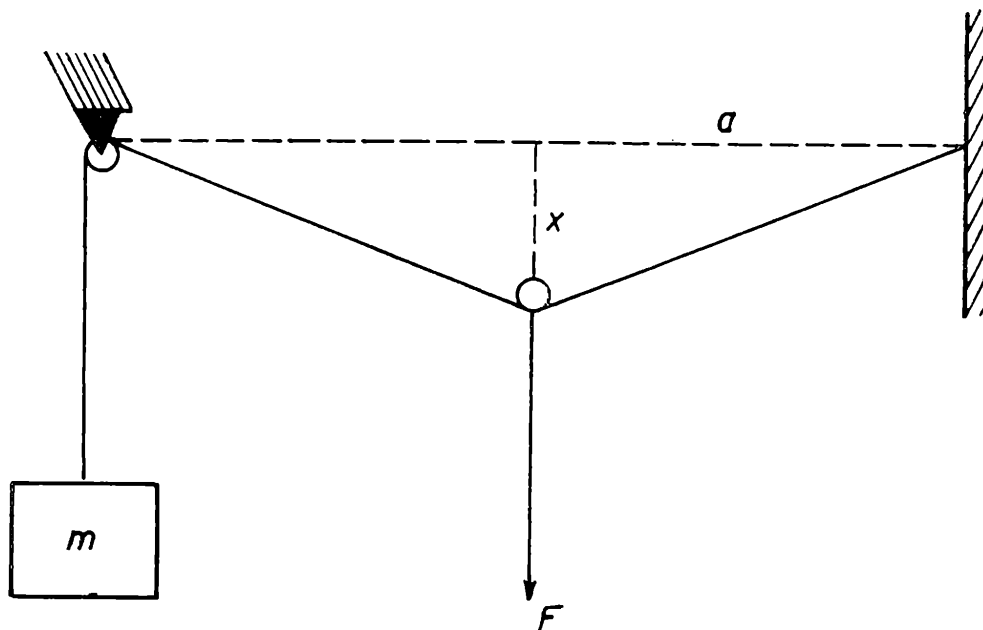
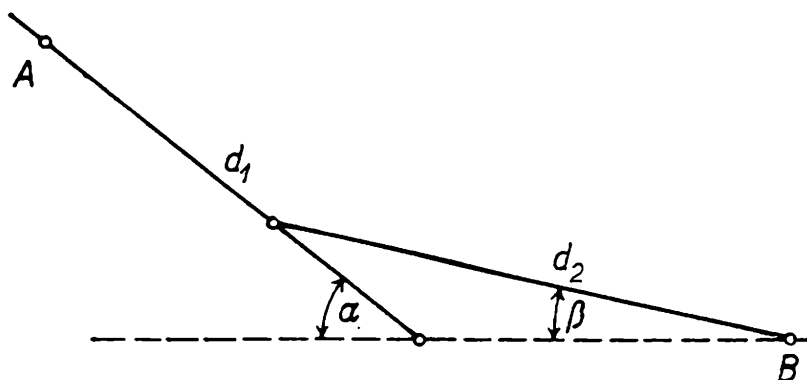
3. Lyžař sjíždí přímočaře po spádnicí s kopce a neodráží se holemi. Jeho dráha má úhel sklonu φ , součinitel smykového tření lyží o sníh je f . Proti pohybu lyžaře působí síla F_0 odporu vzduchu. Tato síla je přímo úměrná druhé mocnině rychlosti, $F_0 = kv^2$. Určete, jakou maximální rychlost získá při sjezdu lyžař o hmotnosti m . Řešte obecně, potom pro hodnoty: $\varphi = 30^\circ$, $f = 0,080$, $m = 80 \text{ kg}$, $k = 0,70 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4. Pro transport balíků byla vytvořena dráha A, B ze dvou nakloněných rovin (obr. D 1) s úhly sklonu α, β ($\alpha > \beta$). Balík byl položen do bodu A a s malým postrčením se dal do pohybu. Předpokládejme, že přechod na druhou rovinu byl plynulý. V bodě B se balík zastavil. Součinitel smykového tření f je pro obě roviny stejný. Určete poměr délek nakloněných rovin $d_2 : d_1$.

Řešte obecně, potom pro hodnoty: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $f = 0,20$.

5. Lano je na jednom konci upevněné o stenu a na druhom konci prevešené cez pevnú kladku (obr. D 2). Na voľnom konci lana je zavesené závažie hmotnosti m . Vzdialenosť pevnej kladky od bodu upevnenia lana je a . Lano medzi kladkou a bodom upevnenia má vodorovný smer. Do stredu vodorovnej časti lana položíme malú voľnú kladku. Na osi tejto kladky je upevnené voľne visiace ďalšie lano. Predpokladáme, že kladky i laná majú malú hmotnosť, kladky sú ľahko otáčateľné, a laná sú doko-

Obr. D - 1



Obr. D - 2

nale ohybné. Zvislé lano začneme ťahať zvisle nadol a ťaháme ho dovtedy, kým prieťah x pôvodne vodorovného lana nedosiahne hodnotu x_0 .

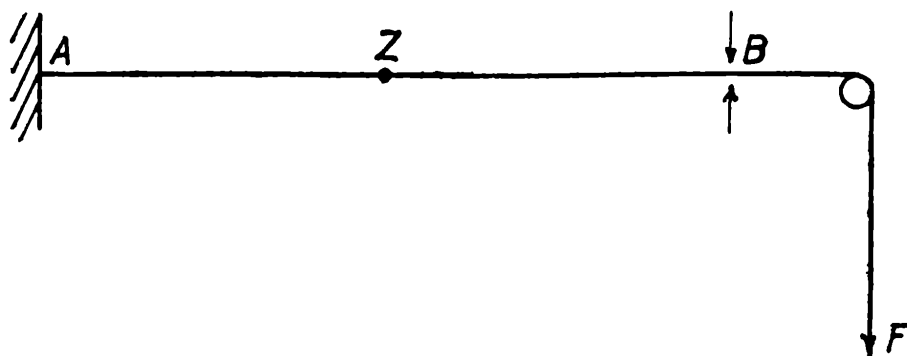
- Akou silou F pôsobíme na os voľnej kladky?
- Akú prácu pri tom vykonáme?
- Zostrojte graf sily F ako funkcie vzdialenosti x a vysvetlite jeho priebeh. Uvážte, pre aké hodnoty x možno túto funkčnú závislosť považovať za lineárnu.
- Uvážte, pre aké hodnoty x je táto sústava výhodná na dvíhanie predmetov. Odpoveď zdôvodnite.

Riešte najskôr všeobecne, potom pre hodnoty: $m = 50 \text{ kg}$, $a = 10 \text{ m}$, $x_0 = 1 \text{ m}$.

6. Výzkum fyzikální závislosti.

Pomůcky: modelářské gumové vlákno (průřez asi $3 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$), závaží (např. rybářská zátěž), 2 stojany (nebo jiné upevnění), siloměr, stopky, délkové měřítko.

Úkol: Stanovte funkční závislost doby kmitu T tělesa upevněného uprostřed vodorovného gumového vlákna na tahové síle F vlákna.



Obr. D - 3

Postup měření:

1. Z uvedených pomůcek sestavíte aparaturu k měření (obr. D 3). Délku $AB = d$ vlákna volte 2 až 5 m, závaží vyberte tak, aby bylo možno měřit dobu kmitu při jeho pohybu ve svislé rovině, např. $T > 1$ s. Doba kmitu je rovna době pro pohyb tělesa z jedné krajní polohy do druhé a zpět do výchozí polohy; stanovíte ji jako dobu mezi dvěma po sobě následujícími průchody závaží rovnovážnou polohou ve stejném směru.

2. Vlákno je pevně upevněno v bodech A, B . Před každým měřením je uvolněno v bodě B , abyste mohli změřit tahovou sílu F , která napíná vlákno. Závaží Z musí být při každém měření uprostřed vlákna.

3. Změříte dobu kmitu T závaží (nejlépe ze 20 či z 50 kmitů).

4. Měření provádíme pro 8 až 10 hodnot tahové síly F při konstantní vzdálenosti bodů upevnění. Dvojice (F_i, T_i) zapisujete do tabulky a vypočítáte veličiny $T^2, 1/F, T^2F$.

Vzor tabulky:

Č.	F	T	$1/F$	T^2	T^2F

5. Sestrojíte grafy funkcí $T = f_1(F)$, $T = f_2\left(\frac{1}{F}\right)$, $T^2 = f_3\left(\frac{1}{F}\right)$.

Uvažte, která z uvedených funkcí je nejjednodušší. Zdůvodněte.

6. Zvolte libovolnou hodnotu F v intervalu měřených hodnot a podle grafu přečtete přibližnou dobu kmitu závaží Z ; výsledek ověřte měřením.

7. Vyslovte závěr ze svého měření.

7. Bedna má tvar kvádru, jehož hrany mají délky $b = c = 1,0$ m $d = 2,0$ m. Bedna leží na plošině nákladního automobilu, který se začne rozjíždět se zrychlením $a = 2,4$ m $\cdot$ s⁻². Součinitel statického smykového tření mezi bednou a plošinou $f_0 = 0,20$. Zjistěte, zda bedna zůstane

vzhledem k plošině automobilu v klidu, začne klouzat, nebo se převrhne, jestliže

- a) leží na čtvercové stěně,
- b) leží na obdélníkové stěně.

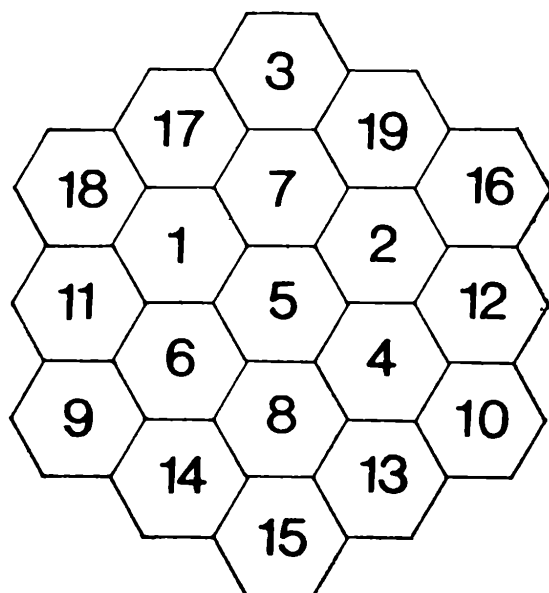
Předpokládáme, že čtyři stěny bedny jsou pokaždé rovnoběžné se směrem jízdy automobilu.

matematické zábavy

Magický šestiúhelník

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Přinášíme řešení úlohy o magickém šestiúhelníku, zadané v 7. čísle letošního ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních na str. 334.



různé

Jubileum matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy

Na staroslavné Karlově univerzitě se od jejího založení (r. 1348) pěstovala také matematika s astronomií, později i fyzika. Avšak podstatně lepší podmínky pro rozvoj těchto věd na Univerzitě Karlově vznikly teprve v polovině 19. století, a to tím, že bylo zavedeno povinné vysokoškolské vzdělání učitelů gymnázií, které bylo realizováno na nově zformované filosofické fakultě. Tak se umožnilo trvalé existenční zajištění pro větší počet absolventů této fakulty, z nichž potom vyrůstali i vědečtí pracovníci. V roce 1882 dochází k rozdělení pražské univerzity na českou a německou; tím získala česká věda své vlastní vysokoškolské katedry. Jejich rozvoj byl ovšem velmi pomalý, jak vidíme např. z toho, že druhá profesura matematiky byla na české univerzitě v Praze zřízena až roku 1903.

Podstatně lepší podmínky pro rozvoj matematiky, fyziky a přírodních věd na Univerzitě Karlově vznikly zřízením přírodovědecké fakulty (v roce 1920), na kterou bylo studium těchto oborů převedeno. Až na malý počet výjimek nalézali i absolventi přírodovědecké fakulty uplatnění jenom v učitelském působení na středních školách. Teprve po druhé světové válce, zejména však po roce 1948, se tento stav začal rychle měnit v důsledku stále rostoucí potřeby specialistů pro vědecké ústavy i pro průmyslová a jiná pracoviště. V souvislosti s tímto vývojem došlo v roce 1953 ke zřízení matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, která již po čtvrt století připravuje odborníky v matematice a fyzice, a to nejen středoškolské profesory. Od roku 1956 vychovala fakulta 931 absolventů matematiků, 795 absolventů fyziků a 651 absolventů učitelství matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie.

Na matematicko-fyzikální fakultě byly zpočátku dvě katedry mate-

matiky, jedna katedra fyziky a katedra astronomie, geofyziky a meteorologie. Postupně byly zřizovány další katedry, oddělení a vědecká pracoviště. Dnes má matematicko-fyzikální fakulta celkem 17 kateder, dva vědecké ústavy a další dvě vědecká pracoviště. Fakulta je významným centrem vědecké práce, která má v řadě oborů mezinárodní ohlas. Od podzimu 1977 se na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy realizuje studium v těchto třinácti specializacích: matematická analýza, přibližné a numerické metody, pravděpodobnost a matematická statistika, teoretická kybernetika a matematická informatika, teorie systémů, fyzika pevných látek, jaderná fyzika, fyzikální elektronika, biofyzika a chemická fyzika, optika, mezní obory, učitelství matematiky a fyziky, učitelství matematiky a deskriptivní geometrie. V blízké době se podstatně zlepší i vnější podmínky pro práci fakulty dostavbou první etapy areálu matematicko-fyzikálního učiliště v Troji, kde budou umístěny vývojové dílny a některá fyzikální dílny a některá fyzikální pracoviště.

Naši čtenáři, z nichž mnozí přijdou na matematicko-fyzikální fakultu studovat, přejí mladé jubilantce do příštích let mnoho úspěchů.

recenze

Z nových knih došlých do redakce

Rozhledy mají mnoho čtenářů i mimo rámec naší republiky a často přicházejí do redakce dopisy a zásilky i ze vzdálené ciziny. Vydavatelství Pitman Publishing nám z Londýna před nedávnem zaslalo dvě své nové matematické publikace, jež vyšly na sklonku roku 1976 v tamní edici Research Notes in Mathematics. Mají pořadová čísla 9 a 10 a zde jsou jejich autoři a názvy:

D. R. J. Chillingworth: *Differential topology with a view to applications.*

H. V. Pittie: *Characteristic classes of foliations.*

redakce hovoří

OPRAVA

V článku „Největší společný dělitel v oboru celých komplexních čísel“ z 6. čísla letošního ročníku Rozhledů MF došlo k nedopatření, které je nutno uvést na pravou míru.

1. Poznámka na str. 247 má znít takto:

Dá se dokázat, že kromě čísla $3 - i$ jsou největší společní dělitelé daných čísel též čísla $-3 + i$, $1 + 3i$, $-1 - 3i$ a že jiné největší společné dělitele uvedená čísla nemají.

2. Poslední věta celého článku má znít takto:

Podle poznámky v předešlém příkladu jsou největšími společnými děliteli daných čísel právě čísla: $1 + 2i$, $-2 + i$, $2 - i$, $-1 - 2i$.

3. Výsledek cvičení 2 má být:

(Výsledek: $3 - i$, $-3 + i$, $1 + 3i$, $-1 - 3i$).

SLOVNÍČEK

Na obálkách Rozhledů matematicko-fyzikálních bude redakce od příštího, tj. padesátého sedmého ročníku otiskovat *italsko-český* a potom *česko-italský* odborný slovníček.

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

vzdálenost
vzhledem k
vzor
vzorec
vzorek
vztah
vztyčit kolmici

distance
with respect to
source
formula (pl. formulae)
sample
relation (ship)
erect a perpendicular

Z

zachování úhlů
zachovat
zachovávající úhly
základ
 základ číselné soustavy
základna
základnice
základní
 základní množina
 základní operace
 základní početní výkony
zákon
zaměnit
zanedbatelný
zaostřit
zápor
záporný
zavedení
závěr

preservation of angles
hold
isogonal, angle preserving
foundation, base, ground
 radix
base
ground line
basic, fundamental
 universal set
} fundamental operations
law
interchange
negligible
focus
negation
negative
introduction
conclusion

závislost	dependence
závislý	dependent
závorka (kulatá, lomená, složená)	parenthesis, brackets, braces
zborcený	twisted, warped
zborcená přímková plocha	skew ruled surface
zbytek	remainder, residue
zdroj	source
zeměpisná délka	longitude
zhodnotit	evaluate
získat	gain
zjednodušit	simplify
zkoumat	investigate
zkouška	check, test
zkrátit	shorten
zkreslení	deformation
zlatý řez	golden section
poměr zlatého řezu	golden ratio
zlomek	fraction, fractional part
nepravý zlomek	improper fraction
pravý zlomek	proper fraction
složený zlomek	complex fraction
změna	change
zmenšit	lessen
zmizet	disappear
znak	sign
znalost	knowledge
znaménko	sign
známý	known
znázornit	illustrate
zobecnění	generalization
zobecněný	in generalized form
zobrazení	mapping, correspondence, transformation
vzájemně jednoznačné zobrazení	one-to-one transformation
zorný úhel	scope
zrcadlení	reflection
zrušit	cancel
zřejmý	apparent, evident
zvětšení	magnification
zvětšit	enlarge
zvláště	specially
zvláštní případ	special case

Ž

žádný	no, none
-------	----------

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

10

ROČNÍK 56, 1977-1978, ČERVEN



ROČNÍK 56
ČERVEN 1978

10

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, ing. Zdeněk Janout, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., KU Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VÚOŠ Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1978.

OBSAH

S. Horák: O jedné nerovnosti v trojúhelníku	433
Doc. ing. B. Vybíral, CSc.: Stabilita automobilu v zatáčce	437
Ing. dr. V. Šindelář: Jak vznikla metrická soustava	445
MO: Úlohy XXVIII. ročníku matematické olympiády	457
Dr. O. Pöss: Pred 100 rokmi zomrel Robert Mayer	463
J. Kotyk: Benjamin Thompson	467
Dr. V. Flajšinger: Univerzální žalobce	469
Dr. J. Sedláček: Jedno nové prvočíslo	472
Rezenze	473

0 jedné nerovnosti v trojúhelníku

STANISLAV HORÁK, Praha

Již jsme si zde jednou řekli, že v posledních letech se v matematických časopisech věnuje velká pozornost nerovnostem, které se týkají prvků trojúhelníka (a i jiných geometrických útvarů). Uvedeme si jednu nerovnost, která je převzata ze švýcarského časopisu *Elemente der Mathematik* a jejímž autorem je *L. Carlitz* z USA a jejíž důkaz provedl *F. Götze* z NDR. Toto řešení zde ukážeme. Budeme však potřebovat dvě pomocné věty, které se v původním textu považovaly za známé.

1. pomocná věta. Jestliže o úhlech α, β, γ platí

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad (1)$$

potom

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \quad (2)$$

Důkaz. Levou stranu vztahu (2) budeme postupně upravovat za použití vztahu (1).

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha + \beta) &= \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 = \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) - \\ &\quad - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = \\ &= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\ &= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) = \\ &= 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \end{aligned}$$

a důkaz je proveden.

2. pomocná věta. Jestliže o úhlech α, β, γ platí

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad (3)$$

pak

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \frac{1}{8}; \quad (4)$$

rovnost platí, právě když $\alpha = \beta = \gamma$.

Důkaz. Vzhledem k rovnosti (3) můžeme úhly α, β, γ považovat za úhly nějakého trojúhelníka. Vyjděme z kosinové věty pro trojúhelník a pravou stranu postupně upravujeme:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos \alpha) = \\ &= (b + c)^2 - 2bc \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ale víme, že

$$b + c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow (b + c)^2 \geq 4bc.$$

Přitom rovnost platí, právě když $b = c$, nebo jinak, když $\beta = \gamma$. Tohoto vztahu použijeme na naši upravenou kosinovou větu:

$$a^2 \geq 4bc - 4bc \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 4bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Odtud již máme

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}};$$

rovnost platí, právě když $\beta = \gamma$. Cyklicky dostaneme další dva vztahy:

$$\sin \frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ca}}, \text{ rovnost právě když } \gamma = \alpha;$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}, \text{ rovnost právě když } \alpha = \beta.$$

Z posledních tří nerovností dostáváme

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}; \quad (5)$$

rovnost zde platí, právě když $\alpha = \beta = \gamma$, tj. když daný trojúhelník je rovnostranný.

Ze vztahu (3) plyne

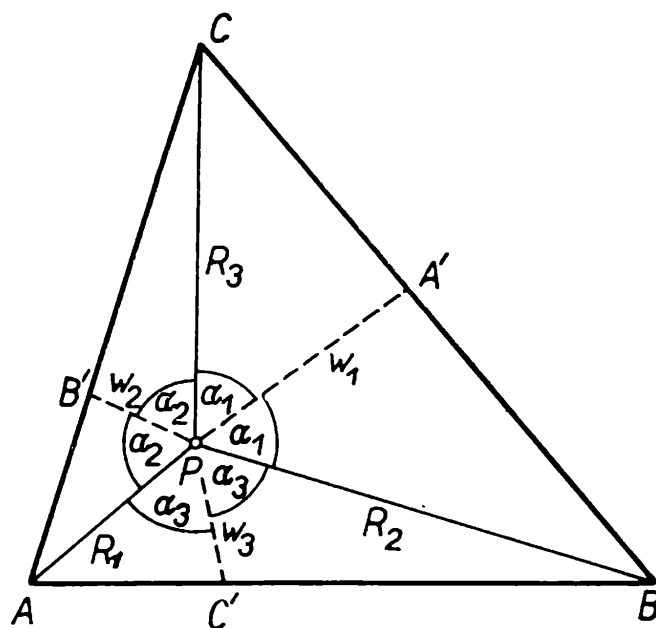
$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\pi}{2}.$$

Zavedme nyní nové úhly x, y, z substitucí

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - x, \quad \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - y, \quad \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - z. \quad (6)$$

Sečtením všech těchto rovnic dostaneme

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{3}{2}\pi - (x + y + z),$$



Obr. 1

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi - (x + y + z),$$

$$x + y + z = \pi,$$

Úhly, nově zavedené substitučními rovnicemi (6), splňují vztah (3). Ze vztahů (6) dosadíme do nerovnosti (5) a dojdeme k nerovnosti

$$\cos x \cos y \cos z \leq \frac{1}{8}.$$

čímž máme proveden důkaz 2. pomocné věty. Dodejme ještě, že rovnost nastane, právě když $\alpha = \beta = \gamma$, tj. když $x = y = z$, jak plyne z rovnic (6).

Nyní se již můžeme věnovat hlavní větě tohoto článku.

Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P . Označme $R_1 = PA$, $R_2 = PB$, $R_3 = PC$;

$$\sphericalangle BPC = 2\alpha_1, \quad \sphericalangle CPA = 2\alpha_2, \quad \sphericalangle APB = 2\alpha_3.$$

Osa úhlu $\sphericalangle BPC$ ($\sphericalangle CPA$; $\sphericalangle APB$) protne stranu BC (CA ; AB) v bodě A' (B' ; C'). Pro stručnost označme

$$w_1 = PA', \quad w_2 = PB', \quad w_3 = PC'$$

Potom platí :

$$R_1 w_1^2 + R_2 w_2^2 + R_3 w_3^2 + 12 w_1 w_2 w_3 \leq \frac{9}{4} R_1 R_2 R_3. \quad (7)$$

Rovnost platí, právě když daný trojúhelník je rovnostranný a zároveň bod P je jeho střed.

Důkaz (obr. 1). Obsah S_1 trojúhelníku BPC lze vypočítat dvěma různými způsoby:

$$S_1 = \frac{1}{2} R_2 R_3 \sin 2\alpha_1 = R_2 R_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} S_1 = S(BPA') + S(CPA') &= \frac{1}{2} R_2 w_1 \sin \alpha_1 + \frac{1}{2} R_3 w_1 \sin \alpha_1 = \\ &= \frac{1}{2} w_1 (R_2 + R_3) \sin \alpha_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Porovnáním výsledků (8) a (9) dojdeme k rovnici

$$R_2 R_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \frac{1}{2} w_1 (R_2 + R_3) \sin \alpha_1,$$

a tudíž

$$w_1 = \frac{2R_2 R_3}{R_2 + R_3} \cos \alpha_1.$$

Povaha úlohy vyžaduje, aby $R_2 > 0$, $R_3 > 0$, a proto platí

$$R_2 + R_3 \geq 2\sqrt{R_2 R_3},$$

přičemž rovnost platí, právě když $R_2 = R_3$. Použijeme-li této nerovnosti na vzorec pro w_1 , dojdeme po kratší úpravě k nerovnosti

$$w_1 \leq \sqrt{R_2 R_3} \cos \alpha_1,$$

kde rovnost platí právě pro $R_2 = R_3$. Cyklicky dostaneme další dva obdobné vztahy:

$$w_2 \leq \sqrt{R_3 R_1} \cos \alpha_2 \text{ (rovnost právě když } R_3 = R_1),$$

$$w_3 \leq \sqrt{R_1 R_2} \cos \alpha_3 \text{ (rovnost právě když } R_1 = R_2).$$

Podle toho výraz (používáme výsledku 1. pomocné věty)

$$\begin{aligned} R_1 w_1^2 + R_2 w_2^2 + R_3 w_3^2 + 12 w_1 w_2 w_3 &\leq \\ &\leq R_1 R_2 R_3 (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3) + 12 R_1 R_2 R_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 = \\ &= R_1 R_2 R_3 (1 - 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3) + 12 R_1 R_2 R_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 = \\ &= R_1 R_2 R_3 (1 + 10 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3), \end{aligned}$$

kde rovnost platí, právě když $R_1 = R_2 = R_3$.

Pro přehled si napíšeme, k čemu jsme došli.

$$R_1 w_1^2 + R_2 w_2^2 + R_3 w_3^2 + 12 w_1 w_2 w_3 \leq R_1 R_2 R_3 (1 + 10 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3).$$

Rovnost platí, právě když $R_1 = R_2 = R_3$. Nyní použijeme 2. pomocnou větu:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \leq \frac{1}{8},$$

kde rovnost platí, právě když $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Z této nerovnosti plyne

$$10R_1R_2R_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 \leq \frac{10}{8} R_1R_2R_3.$$

Sečtením této a předposlední nerovnosti dostaneme

$$R_1w_1^2 + R_2w_2^2 + R_3w_3^2 + 12w_1w_2w_3 \leq \\ R_1R_2R_3 + \frac{10}{8} R_1R_2R_3 = \frac{9}{4} R_1R_2R_3,$$

kde rovnost platí, právě když $R_1 = R_2 = R_3$ a zároveň $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Tím jsme s důkazem hotovi.

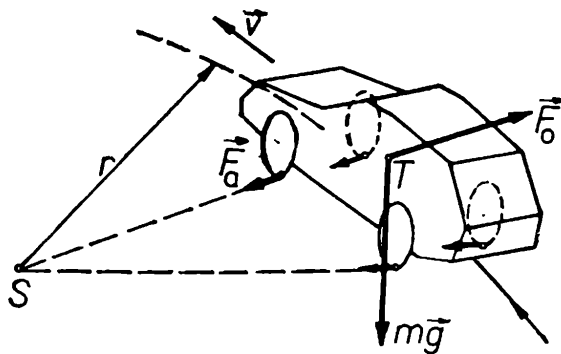
fyzika

Stabilita automobilu v zatáčce

Doc. Ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., Vysoká škola vojenská ve Vyškově

Na automobil působí při průjezdu zatáčkou odstředivá síla, která má tendenci udržet pohyb automobilu v původním směru. Tuto sílu zachycují pneumatiky svou adhezí o povrch vozovky. Avšak jen do určité míry — pak nastává smyk. Protože působíště výsledné odstředivé síly je nad vozovkou, vzniká vedle toho moment odstředivé síly, který má tendenci automobil v zatáčce převrátit. Tyto nepříznivé vlivy, které snižují stabilitu automobilu v zatáčce, lze alespoň částečně zmírnit vhodným klopením vozovky v zatáčce. Naopak se však můžeme setkat se zatáčkami (hlavně ve městech), které mají právě opačný sklon, tedy sklon, který stabilitu vozidla ještě snižuje! Vedle odstředivé síly má na stabilitu automobilu v zatáčce nepříznivý vliv také gyroskopický jev rotujících kol.

Jevy, které se uplatňují při změně směru jízdy automobilu, jsou nejen fyzikálně zajímavé, ale i velmi důležité z hlediska způsobu bezpečné jízdy. Řidič musí přizpůsobit rychlost v zatáčce tak, aby nedošlo k havárii. Toto „přizpůsobení“ závisí na řadě faktorů, z nichž jedna skupina souvisí s vozovkou (poloměr a sklon zatáčky, kvalita a stav vozovky) a druhá s automobilem (druh automobilu a jeho konstrukce, kvalita a stav pneumatik). Tento článek se zabývá uvedenými jevy především z fyzikálního hlediska, avšak uvádí také důležité závěry pro praktickou jízdu automobilu.



Obr. 1

1. Vznik příčného smyku v neklopené zatáčce

Projíždí-li automobil celkové hmotnosti m rychlostí $\mathbf{v}$ zatáčkou poloměru r , působí v jeho těžišti výslednice odstředivých sil o velikosti

$$F_o = m \frac{v^2}{r} \quad \vec{F}_o = m \frac{\mathbf{v}^2}{r} \cdot \vec{n} \quad (1)$$

Síla $\vec{F}_o$ působí ve směru kolmém na rychlost $\mathbf{v}$ a v orientaci od středu křivosti S (obr. 1). Tato síla je setrvačným odporem, který vzniká proto, že vozidlu vnucujeme konat křivočarý pohyb. Podmínkou pro bezpečný průjezd zatáčkou ovšem je, aby se odstředivá síla zachytila *adhezí* („lpěním“) pneumatik na vozovce.

Předpokládejme pro jednoduchost, že těžiště leží uprostřed mezi přední a zadní nápravou, že automobil má čtyři kola a jede po vodorovné vozovce. Pak každé kolo musí adhezí $\vec{F}_a$ zachytit čtvrtinu odstředivé síly (1), přičemž přítláčná síla je rovna čtvrtině tíhové síly $m\mathbf{g}$. Podmínkou stabilního průjezdu zatáčkou z hlediska smyku tedy je

$$\vec{n} \cdot \frac{1}{4} m \frac{v^2}{r} < \frac{m\mathbf{g}}{4} \mu_0, \quad \vec{n} \cdot \frac{1}{4} m \frac{v^2}{r} < \frac{m\mathbf{g}}{4} \mu_0$$

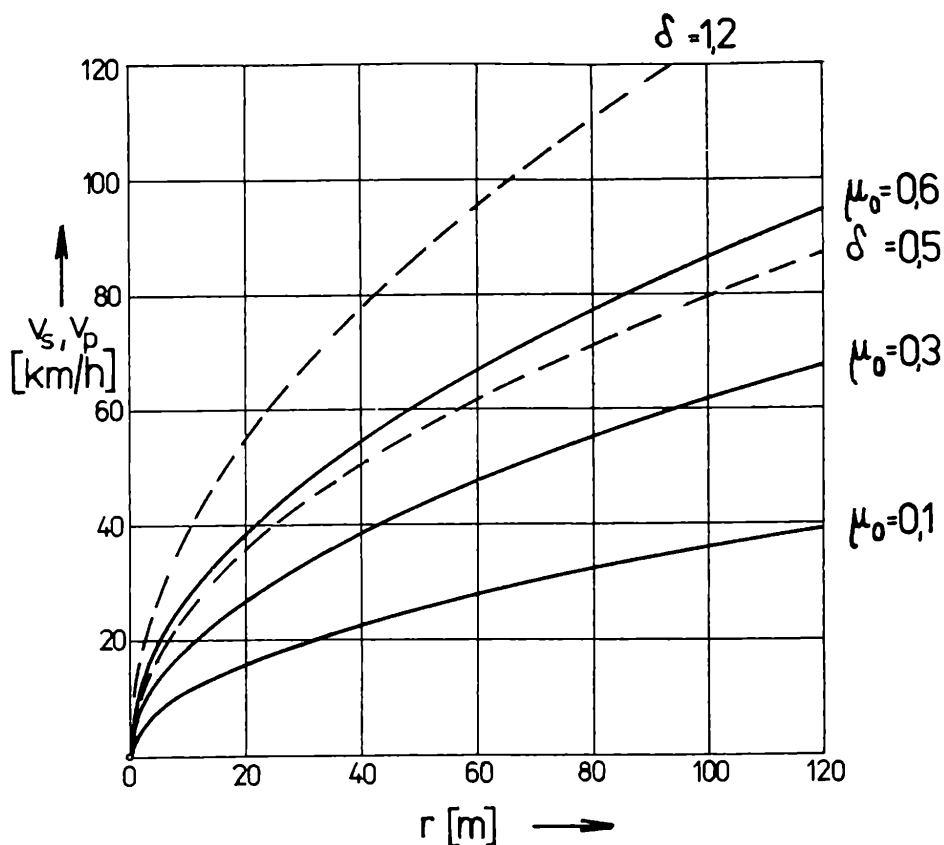
neboli

$$|\mathbf{v}| < \sqrt{g\mu_0 r}, \quad (2)$$

kde μ_0 je *součinitel adheze* (někdy se též nazývá součinitel statického smykového tření). Jeho hodnota pro málo opotřebované pneumatiky a suchou vozovku je $0,6 \div 0,9$, pro vlhkou a kluzkou vozovku $0,2 \div 0,4$ a pro zledovatělou vozovku $0,05 \div 0,15$. Je zřejmé, že *kritická rychlost pro vznik smyku* je

$$|\mathbf{v}_s| = \sqrt{g\mu_0 r} \quad (3)$$

Při překročení této rychlosti dochází k příčnému (bočnímu) smyku kol. Přitom statické tření (adheze) přechází na kinetické tření, které je charakterizováno menším součinitelem tření μ — podle druhu a drsnosti povrchu bývá $\mu \approx (0,8 \div 0,5)\mu_0$. Jakmile tedy pneumatika prosmykne,



Obr. 2

klesne skokem třecí síla a nevyrovnaná část odstředivé síly způsobí zrychlený pohyb vozidla v příčném směru. Proto se smyk nesnadno vyrovnává, zvláště v případech, kdy dojde k velkému skoku v hodnotě součinitele tření (např. olejová skvrna na vozovce, část vozovky zledovatělá).

Závislost kritické rychlosti (3) pro vznik smyku na poloměru zatáčky pro určité hodnoty součinitele adheze je vynešena plnými čarami na obr. 2. Hodnota součinitele adheze $\mu_o = 0,6$ odpovídá jízdě na suché vozovce, hodnota $\mu_o = 0,3$ na mokré vozovce a hodnota $\mu_o = 0,1$ na zledovatělé vozovce. Ve všech případech jde jen o hodnoty orientační, přičemž se předpokládá, že automobil má běžné neopotřeбенé a správně nahuštěné pneumatiky.

Z grafů můžeme zjistit, že kritická rychlost na mokré vozovce je asi o 30 % a na zledovatělé vozovce asi o 60 % menší než na suché vozovce (pro zatáčku stejného poloměru).

Dosud jsme předpokládali, že těžiště automobilu leží uprostřed mezi přední a zadní nápravou. U skutečných vozidel bývá však těžiště zpravidla posunuté — dozadu u automobilů s motorem vzadu a dopředu u automobilů s motorem vpředu. Tím se změní rozložení tíhových sil na jednotlivé nápravy, avšak ve stejném poměru se změní i rozložení odstředivých sil, takže by nemělo dojít ke změně dynamiky vozidla. Skutečnost je však jiná. Pneumatiky nejsou pružné jen v radiálním (svislém) směru, avšak i příčně (ve směru rotační osy). V důsledku toho kola více příčně

zatížené nápravy se valí s větším úhlem směrové úchylky než kola méně zatížené nápravy — za předpokladu stejných příčných tuhostí pneumatik (tuhost závisí na konstrukci, velikosti a huštění). Proto automobily s těžištěm posunutým dozadu jsou *přetáčivé* (mají tendenci zatáčet se na poloměru menším, než odpovídá natočení předních kol do rejdu) a naopak automobily s těžištěm posunutým dopředu jsou *nedotáčivé*. Automobily s těžištěm uprostřed se chovají neutrálně.

Dojde-li v zatáčce k příčnému smyku, nedojde zpravidla současně ke smyku obou náprav. Při smyku zadní nápravy se vozidlo chová jako silně přetáčivé, při smyku přední nápravy se naopak chová jako silně nedotáčivé. O tom, zda dojde ke smyku přední nebo zadní nápravy, rozhoduje velikost adheze mezi pneumatikou a vozovkou. Ta závisí na stavu pneumatik (vzorek, huštění) a také na jejich zatížení, přičemž při použití stejných pneumatik je ke smyku náchylnější více zatížená náprava.

V dosavadních úvahách a výpočtech jsme předpokládali, že pneumatiky v zatáčce zachycují jen odstředivou sílu $\mathbf{F}_0$. Budeme-li v zatáčce brzdít nebo naopak akcelarovat vozidlo, bude v obvodovém směru kola působit další síla $\mathbf{F}_b$. Pak adhezní síla pneumatik $\mathbf{F}_a$ musí být větší nebo v krajním případě rovna vektorovému součtu vzájemně kolmých sil $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_b$. Tedy

$$|\mathbf{F}_a| \geq \sqrt{F_0^2 + F_b^2}$$

Z toho plyne důležitý závěr: využijeme-li adhezní sílu plně pro zachycení odstředivé síly $\mathbf{F}_0$, nemáme již žádnou jinou možnost přenosu další síly $\mathbf{F}_b$ v obvodovém směru. Proto začneme-li v zatáčce při rychlosti vozidla blízké jeho kritické rychlosti (3) brzdít nebo „přidávat plyn“, můžeme očekávat smyk vozidla.

2. Převrácení automobilu v neklopené zatáčce

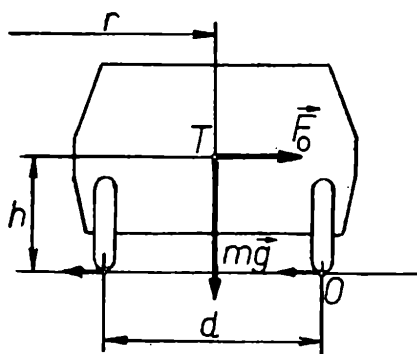
Aby nedošlo k převrácení (překlopení) vozidla v zatáčce, musí být stabilizační moment, vytvořený tíhou vozidla, větší než překlápěcí moment odstředivé síly (1). V další úvaze pro jednoduchost zanedbáme rozdílnou deformaci pružin pérování a pneumatik v zatáčce. Pak podle obr. 3 dostaneme podmínku stabilního průjezdu zatáčkou z hlediska převrácení ve tvaru

$$m|g|\frac{d}{2} < m\frac{v^2}{r}h,$$

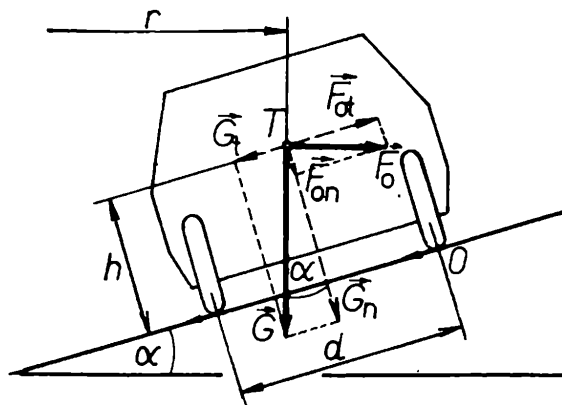
neboli

$$|v| < \sqrt{|g|\frac{d}{2h}}r,$$

kde h je vzdálenost těžiště zatíženého automobilu od vozovky a d rozchod kol. *Kritická rychlost pro převrácení vozidla* tedy je



Obr. 3



Obr. 4

$$v_p = \sqrt{g \frac{d}{2h} r} \quad (4)$$

Při této rychlosti je moment odstředivé síly F_0 vzhledem k bodu O roven momentu tíhové síly mg k témuž bodu. Koeficient

$$\frac{d}{2h} = \delta$$

závisí na druhu, konstrukci a zatížení vozidla. Pro osobní automobily bývá $\delta = 0,9 \div 1,4$, pro terénní osobní automobily $\delta = 0,8 \div 0,9$, pro nákladní automobily $\delta = 0,5 \div 0,8$.

Do obr. 2 je čárkovaně vynesena závislost kritické rychlosti (4) na poloměru zatáčky pro $\delta = 1,2$ (osobní automobil) a $\delta = 0,5$ (nákladní automobil s vysoko položeným nákladem).

Srovnáme-li výrazy (3) a (4) nebo plně a čárkovaně vynesené křivky na obr. 2, vidíme, že o tom, zda dojde v zatáčce k porušení stability spíše smykem nebo převrácením, rozhoduje, zda je menší součinitel adheze μ_0 nebo koeficient δ . Z uvedených hodnot μ_0 a δ je zřejmé, že osobní automobil ztratí stabilitu zpravidla v důsledku smyku. Nákladní automobil se na suché vozovce spíše převrátí, kdežto na suché či zledovatělé vozovce přejde do smyku.

3. Průjezd automobilu klopenou zatáčkou

Pro zmírnění nepříznivých účinků odstředivé síly se staví vozovka v zatáčce s příčným sklonem (obr. 4). Zvolíme-li určitou rychlost v_0 a poloměr zatáčky r , lze navrhnout sklon α_0 tak, aby tečnou složku F_{0t} odstředivé síly právě vyrovnala tečná složka G_t tíhové složky, tedy

$$m \frac{v_0^2}{r} \cos \alpha_0 = m g \sin \alpha_0.$$

Odtud

$$\alpha_0 = \arctg \frac{v_0^2}{rg}. \quad (6)$$

Např. pro $\mathbf{v}_0 = 60 \text{ km/h}$ a $r = 120 \text{ m}$ vychází $\alpha_0 = 13^\circ 17'$ Pro úhel α_0 je výsledná vnější síla $\mathbf{F} = \mathbf{G}_n + \mathbf{F}_{0n}$ kolmá na vozovku, a proto nemůže dojít ke smyku ani k převrácení automobilu.

Tento ideální stav však platí jen pro určitou rychlost $\mathbf{v}_0$. Pro jiné rychlosti $\mathbf{v}$, resp. pro jiný sklon $\alpha > 0$ je sice stabilita větší než pro případ neklopené zatáčky ($\alpha = 0$), avšak ke smyku či k převrácení může dojít.

Z obr. 4 je zřejmé, že podmínka stabilního průjezdu klopenou zatáčkou má tvar

$$\mathbf{F}_{0t} - \mathbf{G}_t < (\mathbf{G}_n + \mathbf{F}_{0n})\mu_0, \quad (7)$$

neboli

$$\mathbf{F}_0(\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha) < \mathbf{G}(\mu_0\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Odtud po dosazení za $\mathbf{F}_0$ a $\mathbf{G}$ vychází podmínka pro rychlost

$$\mathbf{v} < \sqrt{\mathbf{g}r \frac{\mu_0 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu_0\operatorname{tg}\alpha}}$$

Kritická rychlost pro vznik smyku v klopené zatáčce tedy je

$$\mathbf{v}_{s\alpha} = \sqrt{\mathbf{g}r \frac{\mu_0 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu_0\operatorname{tg}\alpha}} = \mathbf{v}_s k_s, \quad (8)$$

kde $\mathbf{v}_s$ je kritická rychlost pro $\alpha = 0$ daná výrazem (3) a

$$k_s = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu_0 \operatorname{tg}\alpha}} \quad (9)$$

Je zřejmé, že pro $\alpha = 0$ je $k_s = 1$. Pro $\mu_0 = 0$ dostáváme z (8)

$$\mathbf{v}_{s\alpha} = \sqrt{\mathbf{g}r \operatorname{tg}\alpha_0} = \mathbf{v}_0,$$

tedy řešení stejné s řešením (6). Vozidlo by tedy mohlo při parametrech splňujících rovnici (6) projet zatáčkou i bez adheze (prakticky na zledovatělé vozovce). Jde však o stav na hranici stability.

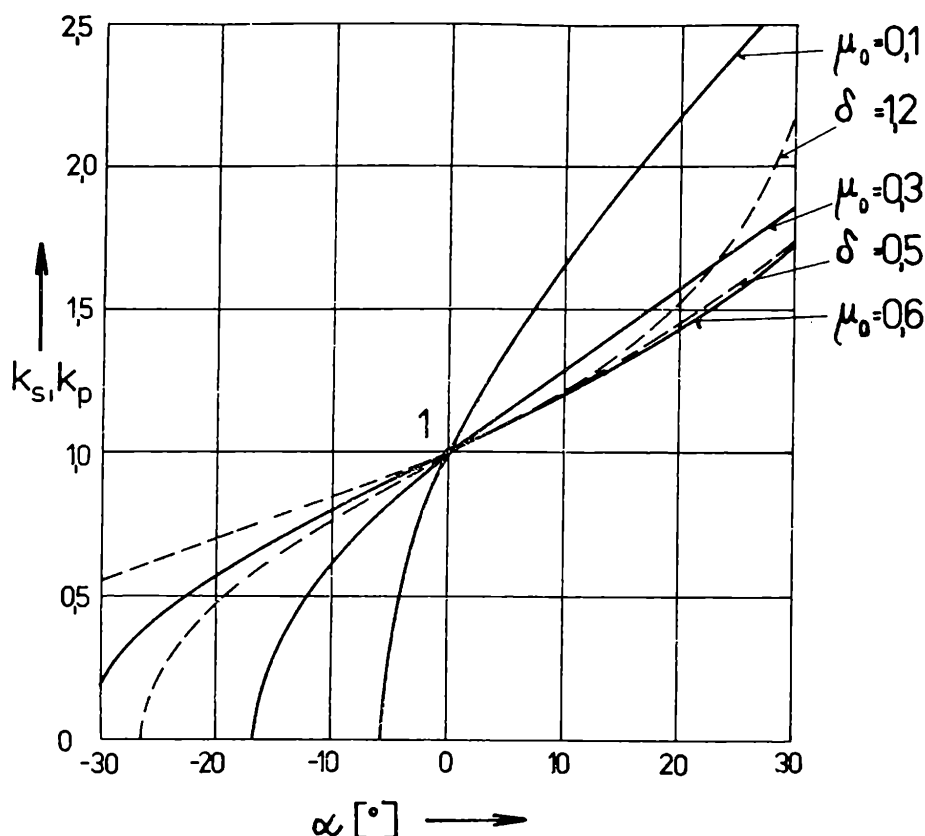
Koeficient k_s podle (9) koriguje kritickou rychlost (3) pro případ klopené zatáčky. Má význam pro kladné i záporné hodnoty úhlu α , pro které je výraz pod odmocninou kladný.

Pro $1 - \mu_0 \operatorname{tg}\alpha = 0$, tedy pro

$$\alpha_\infty = \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu_0}$$

vychází $k_s \rightarrow \infty$, $\mathbf{v}_{s\alpha} \rightarrow \infty$ a vozidlo může bezpečně projet rychlostí, jejíž velikost není omezena. Tento případ však nemá praktický význam, protože např. pro $\mu_0 = 0,60$ vychází $\alpha_\infty = 59^\circ$

Pro $\alpha < 0$ je $k_s < 1$. Koeficient $k_s = 0$ pro



Obr. 5

$$\alpha_s = -\arctg \mu_0 .$$

Při tomto záporném příčném sklonu vozovky dojde ke smyku při libovolně malé rychlosti. Např. na zledovatělé vozovce ($\mu_0 = 0,10$) je to při úhlu $\alpha_s = -5^\circ 40'$. Se záporným sklonem vozovky se můžeme často setkat na křižovatkách ve městech. Zvlášť nepříznivě působí, je-li křižovatka vydlážděna velkými vyboulenými kostkami („kočičími hlavami“), na kterých dosahuje úhel α lokálně velkých záporných hodnot. Jízda na takové vozovce, zvláště je-li vlhká, proto vyžaduje zvláštní opatrnost.

Věnujme nyní pozornost stabilnímu průjezdu klopenou zatáčkou z hlediska možnosti převrácení automobilu. Vyjádříme-li momenty normálových a tečných složek tíhové a odstředivé síly vzhledem k bodu O , dostaneme podmínku stability ve tvaru

$$(\mathbf{G}_n + \mathbf{F}_{0n}) \frac{d}{2} > (\mathbf{F}_{0t} - \mathbf{G}_t)h ,$$

neboli

$$\mathbf{F}_{0t} - \mathbf{G}_t < (\mathbf{G}_n + \mathbf{F}_{0n})\delta ,$$

kde $\delta = d/2h$. Srovnáme-li tuto podmínku s podmínkou (7), vidíme, že jde formálně o stejné podmínky. Kritická rychlost pro překlacení bude dána výrazy analogickými s (8), (9), jen místo μ_0 zde bude δ :

$$\mathbf{v}_{p\alpha} = \mathbf{v}_p k_p , \quad (10)$$

kde

$$v_p = \sqrt{g r \delta}$$

$$k_p = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\delta} \operatorname{tg} \alpha}{1 - \delta \operatorname{tg} \alpha}} \quad (11)$$

Je zřejmé, že pro $\alpha = 0$ je opět $k_p = 1$. Pro

$$\alpha_p = -\operatorname{arctg} \delta$$

je $k_p = 0$; v tomto případě se převrátí i stojící automobil. Pro $\delta = 0,50$ (nákladní automobil s vysoko položeným nákladem) vychází $\alpha_p = 26^\circ 30'$. Takové sklony vozovek se nevyskytují, avšak podobná situace může nastat při jízdě v terénu.

Závislost koeficientu k_s (9) na sklonu vozovky je znázorněna plnými čarami na obr. 5, a to pro součinitele adheze $\mu_0 = 0,1; 0,3$ a $0,6$. Čárkovane je zde zakreslen průběh koeficientu k_p (11) pro $\delta = 0,5; 1,2$.

4. Gyroskopické jevy v zatáčce

Kola automobilu představují z fyzikálního hlediska setrvačníky, které mají moment hybnosti $\mathbf{b} = I\omega$, kde I je celkový moment setrvačnosti

kola a $\omega = \frac{v}{r_k}$ úhlová rychlost kol poloměru r_k . Je známo (viz např. [1]),

že působením vnějšího momentu síly kolmého na moment $\mathbf{b}$ začne setrvačník vykonávat precesní pohyb. Když naopak budeme setrvačníku vnucovat rotaci (resp. precesi), bude na něj působit tzv. *gyroskopický moment*. Zde platí *Žuravského pravidlo* ([1], str. 32): Je-li setrvačník nucen vykonávat precesní pohyb úhlovou rychlostí ω_v , pak vzniká gyroskopický moment o velikosti

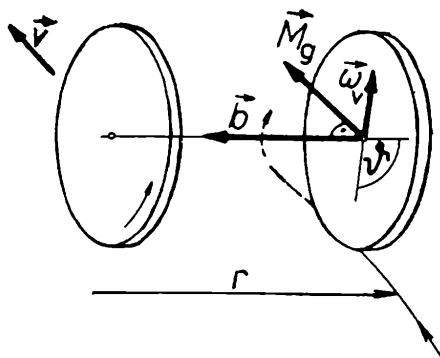
$$\mathbf{M}_g = \mathbf{b} \times \omega \sin \vartheta, \quad (12)$$

který se snaží nejkratší cestou otočit osu rotace setrvačníku (vektor $\mathbf{b}$) do směru osy vnuceného pohybu, přičemž ϑ je úhel, který svírají vektory $\mathbf{b}$, ω_v .

V případě automobilu v zatáčce poloměru r je $\omega_v = \frac{v}{r}$ a $\vartheta = 90^\circ$

Jedna náprava automobilu v levotočivé zatáčce je nakreslena na obr. 6. Ze Žuravského pravidla je zřejmé, že gyroskopický moment $\mathbf{M}_g$ vyklápí automobil ze zatáčky — zhoršuje tedy stabilitu dvojstopého vozidla (u jednostopých vozidel je naopak gyroskopický moment kol příznivý).

Pro kvantitativní vyjádření gyroskopického efektu je nutno připočíst gyroskopický moment (12) k momentu odstředivé síly. Budeme-li pro jednoduchost považovat kola automobilu za homogenní kruhové desky hmotnosti m_k a poloměru r_k a půjde-li o 4-kolový automobil, bude



Obr. 6

$$I = 4 \frac{1}{2} m_k r_k^2.$$

Řešením pak vychází pro kritickou rychlost v neklopené zatačce, při níž dojde k převrácení, výraz

$$v'_p = \sqrt{\frac{m g r d}{2 m h + 4 m_k r_k}} < v_p,$$

kde v_p je dáno výrazem (4).

Protože hmotnost kol je vzhledem k celkové hmotnosti automobilu malá, činí pokles kritické rychlosti v důsledku gyroskopického efektu jen asi 1 %.

Literatura :

- [1] Vybíral, B.: Setrvačníky. XVIII. ročník soutěže fyzikální olympiáda. SPN, Praha 1976.
- [2] Szabó, J.: Mechanika tuhých těles a kapalin. SNTL, Praha 1967.

Jak vznikla metrická soustava

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

I když dnešní věda a technika nemůže bez měření existovat (a ani běžný život kolem nás si bez měření nemůžeme dobře představit) a i když víme, že měření bez předem stanovených jednotek je nemyslitelné, přece bývá tato skutečnost tak samozřejmá, že si ji často ani nijak zvláště neuvědomujeme. V současné době se dostala otázka „měřicích jednotek“ poněkud do popředí, a to vzhledem k celosvětovému zavádění Mezinárodní soustavy měřicích jednotek (SI).

V roce 1975 jsme si krátkou poznámkou v našem časopise připomněli stoleté výročí podepsání a vzniku Metrické konvence, dohody o mezinárodním zavedení metrické soustavy a o zabezpečení její jednotnosti. Dnes si řekneme něco o tom, proč a jak metrická soustava vznikla, a o jejím dalším vývoji.

Až do doby *Ch. Huygense* (1629 až 1695) a *I. Newtona* (1643 až 1727) se pokládalo za jisté, že má Země kulový tvar a že postačí změřit libovolný oblouk jejího „obvodu“, aby se určil její poloměr. Pokud je známo, uskutečnil první takové měření řecký učenec *Eratosthenes* (276 až 176 př. Kr.). Eratosthenes použil k měření přístroj babylonského původu¹⁾, kterým bylo možno stanovit výšku Slunce (nebo Měsíce) nad obzorem. Ač měřil sám, uskutečnil důmyslným způsobem „současná“ měření na dvou místech, a to v Syeně (což je egyptské město v Asuánu) a v Alexandrii. Bylo mu totiž známo, že v Syeně v době letního slunovratu svítí Slunce v poledne přímo do studně²⁾, tzn. že leží na obratníku Raka, takže stačilo k uskutečnění celého záměru provést měření v Alexandrii. Tam zjistil, že Slunce bylo v poledne vzdáleno od zenitu o $1/50$ plného rovinného úhlu, což odpovídá $7^{\circ}12'$. Protože Syena leží zhruba na jih od Alexandrie, předpokládal zřejmě Eratosthenes, že obě města jsou na stejném poledníku. Vzdálenost Alexandrie a Syeny byla tehdy na 5000 stádií. Činila-li část (ideálního) poledníku mezi oběma městy zhruba $1/50$, pak délka celého poledníku měla odpovídat $50 \times 5000 = 250\,000$ stádií (stadiónů). Stádií je celá řada, nejznámější je attický stadión rovný asi 164 m. To by vedlo k hodnotě 41 000 000 m. Použil-li stadiónu egyptského, jehož hodnota je udána 157,7 m, došli bychom k nepřilíživé hodnotě 39 425 000 m. Obě hodnoty jsou obdivuhodně blízké hodnotám dnešním. Délka poledníku činí podle novodobých měření asi 40 009 152 m, a délka rovníku 40 076 592 m. Eratosthenes uvedený údaj 250 000 stadiónů zvětšil později dokonce na 252 000 stadiónů, aby jednomu úhlovému stupni příslušel na povrchu „dokonale kulové“ Země oblouk dlouhý 700 stadiónů (neboť $700 \times 360 = 252\,000$). Nověji se zjistilo, že Eratosthenes došel k výsledku celkem velmi blízkému skutečnosti také souhrou šťastných náhod. Ukázalo se totiž, že vzdálenost obou egyptských měst je větší, činí asi 5 346 stadiónů, ale protože obě města neleží na stejném poledníku, je rozdíl zeměpisné šířky obou míst zhruba roven 5000 stadií.

Aristoteles (384 až 322 př. Kr.) se ve svém díle věnovaném nebeským úkazům zmiňuje, že matematici, kteří se pokoušeli vypočítat velikost Země, tvrdí, že její obvod je 400 stadiónů. První údaj je zřejmě mnohem blíže skutečnosti nežli údaj Aristotelův. O určení délky odpovídající

¹⁾ Horský — Plavec: *Poznávání Vesmíru* (Malá moderní encyklopedie, Praha 1962).

²⁾ Prof. V. Guth upozorňuje na fotografii zmíněné studně, kterou v roce 1914 publikoval astronomický časopis „The Observatory“.

na povrchu Země jednomu úhlovému stupni se v průběhu staletí pokoušela řada vědců. Většina těchto snah se datuje až z novověku. Jedním z nich byl osobní lékař francouzského krále Jindřicha II. *J. F. Fernel*, který v roce 1525 část zemského povrchu měřil odvalováním kolečka „měřicího“ vozu na cestě z Paříže do Amiensu. Tento *Fernel* navrhl také mimo jiné krokoměr pro měření vzdáleností (přístroj se připnul na nohu kráčejícího chodce nebo koně). I když zmíněné měření uskutečnil otáčením kolečka, udával výsledky v krocích, na něž změřený počet otočení převedl. Pro poledníkový oblouk odpovídající jednomu úhlovému stupni uvádí hodnotu 68 096 dvoukroků, rovnou 57 070 francouzských sáhů.¹⁾ Tyto výsledky byly na svou dobu dosti dobré.

První přesnější hodnotu „stupňového oblouku“ získal r. 1615 Holanďan *W. Snellius van Roijen* (1591 až 1626). Naměřil 55 021 francouzských sáhů.¹⁾ I když se později uvedená hodnota upřesňovala, nelze upřít Snelliovi pionýrský čin v zeměměřičství.

V roce 1635 měřil vzdálenost z Londýna do Yorku *Norwood*, který přitom aplikoval svou novou úhloměrnou metodu. Přesto, že provedl údajně měření s krajní pečlivostí, lišila se jeho hodnota stupňového oblouku proti dnes známé hodnotě až o 400 sáhů. Další podobná měření provedl *Riccioli* (v první polovině 17. stol.) a *Picard* (v roce 1670). Z dosavadních měření vypočetli *Huygens* a *Newton* rozměry Země, zatím stále jako dokonalé koule. O tom byla zmínka již na počátku našeho pojednání. Teprve na základě neshod v měřeních, která uskutečnili *Dominique* a *Jacob D. Cassini* na dvou úsecích zemského povrchu (mezi Paříží a severní hranicí Francie a mezi Paříží a Dunquerque), se došlo k závěru, že Země je poněkud zploštělá a že vzdálenost mezi oběma jejími póly je menší, než kolik činí průměr rovníku.

Současně byla již vícekrát na mezinárodním fóru diskutována problematika *přirozené jednotky délky*. Koncem 17. století se začínal prosazovat ve fyzice nový směr exaktnějšího zkoumání různých přírodních jevů s potřebnou matematickou interpretací, která dosud činila někdy značné obtíže. *Huygens* i *Newton* jsou zakladateli nových matematických metod, infinitesimálního počtu, bez něhož je moderní matematika nemyslitelná. S matematikou vázaný, poněkud exaktnější přístup k fyzikálnímu poznání pochopitelně vedl také k úvahám oprostit se při popisu okolního světa od měřících jednotek (tehdy zvaných míry) tehdejšího, dosti primitivního rázu. Začaly se projevovat snahy o míry, které by nám přirozeným způsobem poskytovala příroda.

Huygens navrhl zvolit za jednotku délky délku sekundového kyvadla. Později svůj návrh upřesnil v tom smyslu, že doporučoval volit za jed-

¹⁾ Francouzský sáh činil asi dnešní 1,95 m. Šlo tedy o hodnoty 111 287 m, resp. 107 291 m. Dnes činí tento „stupňový oblouk“ (ve směru poledníku) asi 111 137 m.

notku délky (tzv. „časovou stopu“) třetinu délky sekundového kyvadla (pro střední slunečný čas). Nežli však tato nová „přirozená míra“ vstoupila v praktické uplatnění, prokázal *Richter* (1672 a 1673), že *Huygensem* definovaná jednotka délky je různá na různých místech povrchu Země, a tím celý návrh padl a neuskutečnil se.

Je zajímavé, že ve druhé polovině 17. století učinil francouzský fyzik a matematik *Mouton*, a to ještě před zmíněným návrhem *Huygensovým* (a předtím než se objevilo, že není dokonalý), zajímavý návrh na přírodní jednotku délky. Navrhoval totiž volit $1/60$ stupňového oblouku, tedy oblouk příslušející jedné úhlové minutě. Tato jednotka měla být jednotkou nového *decimálního* systému měr. Nazval ji „milliare“ I když svůj návrh neprosadil, zůstal přesto *autorem významné myšlenky*, která vedla později k realizování metrického systému. Po jistém zklamání, které se projevilo mezi přívrženci nových exaktnějších měr po *Richterově* důkazu o nevhodnosti volby sekundového kyvadla za míru délky, zůstal *Moutonův* návrh alespoň ve své podstatě jediným, o němž bylo možno v budoucnu uvažovat. Jak dále uvidíme, ani myšlenka sekundového kyvadla zcela nezapadla.

Na popud francouzské akademie vyslala francouzská vláda dvě expedice, aby proměřily stupňový oblouk zemského poledníku. V roce 1735 do Peru; té se zúčastnili *Bougnier*, *La Condamine* a *Godin* a v roce 1736 do Botnického zálivu v Laponsku. Jejimi členy byli *Maupertius*, *Clairaut*, *Lemmonier*, *Camus* a *Outhier*. Pro tato měření zhotovil *Langlois* (v r. 1735) podle tzv. Châteletskeho sáhu (*toise de Châtelet*) dvě míry, a to tzv. *peruánský sáh* a *severský sáh* (*toise de Pérou*, *toise du Nord*). Výsledky měření obou expedic prokázaly, že Země nemá kulový tvar, nýbrž že je na pólech zploštělým sféroidem. Významným mezníkem geodetických měření bylo též prvé použití základnového přístroje při těchto měřeních. Doposud se totiž používalo tzv. Jakobovy tyče (zvané latinsky *baculus geometricus*), jinak jednoduché, ale poměrně přesné geodetické pomůcky. Dalším měřením, které bylo provedeno po obou zmíněných, bylo měření uskutečněné r. 1756 *Lacaillem* na jihu Afriky. Ještě předtím (1739, akademií uveřejněno 1744) provedl *Lacaille* s *Cassinim* měření stupňového oblouku poblíže pólu a na rovníku. Výsledky těchto měření jednoznačně a výrazně potvrdily tézi o zploštělém tvaru Země. V měření stupňového oblouku se ovšem pokračovalo. Stanovení této veličiny provedli např. *Boskovich* ve Vatikánu, *Beccaria* v Piemontu, *Liesganig* v Rakousko-Uhersku, *Mason* a *Dixon* v Pennsylvanii apod.

Jak bylo naznačeno, měření se uskutečnila celá řada. A přece byl z mezinárodního hlediska v otázce rozměrů Země neuspokojivý stav a nesjednocený názor. Teprve francouzská revoluce to byla, která pomohla celou věc vyřešit a zejména která dala počátek jednotné míře v širokém měřítku.

Ve Francii a podobně i v některých vyspělejších zemích byl již dlouho pocítován velký nedostatek v nejednotnosti měr (tj. jednotek) především délkových, které se podle tehdejších názorů členů akademie věd mohly stát základem všech ostatních měr a měření, a také ve velkých rozdílech v jejich realizacích. Konkrétně ve Francii byla podána ve druhé polovině 18. století řada návrhů ministerstvu financí. I přes jistou snahu tehdejších ministrů a generálních inspektorů v tomto resortu byly všechny návrhy zamítnuty nebo dlouholetým „úřadováním“ upadly v zapomnutí. Teprve v roce 1788 se začalo o této záležitosti vážněji uvažovat, i když dosud jen v obecné poloze. Tuto skutečnost nadšeně přijali někteří francouzští vědci, kteří působili i na některé tehdejší politické činitele. Prvním reálným krokem byl návrh na sjednocení měr ministra zahraničních věcí Talleyranda³⁾ v r. 1790, který byl příznivě přijat tehdejším ústavodárným shromážděním. Toto shromáždění se 8. května 1790 usneslo, aby se jménem francouzského krále požádal král anglický, aby sněmovny obou zemí společně uvážily vyhlášení nové jednotky délky, kterou byla navrhována délka sekundového kyvadla na určitém místě Země, které by se dohodlo. Podle stanovené délky měly se pak zhotovit prototypy délky, které by tvořily základ všech měr a měření.

Závěrečné usnesení bylo 22. srpna 1790 schváleno. Akademie věd jmenovala k řádnému uvážení a zpracování celé problematiky komisi, jejímiž členy byli *Borda*, *Lagrange*, *Laplace*, *Peluse* a *Concordet*³⁾. Rozborová zpráva komise, datovaná 19. března 1791, ve svém závěru vyjadřovala nevhodnost použití sekundového kyvadla k definování jednotky délky, kterou jednak pokládala za základní veličinu, která by neměla

³⁾ Charles-Maurice de *Talleyrand-Périgord* (1745 až 1838), biskup v Autun, předseda Národního shromáždění 1790, ministr zahraničí za direktoria, konzulátu, císařství a restaurace.

Jean Charles rytíř de *Borda* (1733 až 1799) matematik, člen Akademie věd

Pierre Simon markýz de *Laplace* (1749 až 1827), astronom a matematik, člen Akademie věd

Gaspard *Monge* hrabě de *Péluse* (1746 až 1848), matematik, člen akademie věd

Antoine Nicolas Caritat markýz de *Concordet* (1743 až 1794), filosof, spisovatel, politik a matematik, člen Akademie věd

Joseph-Louis, hrabě de *Lagrange* (1736 až 1813), geometr, člen Akademie věd

Jean Baptista Joseph rytíř *Delambre* (1749 až 1822) astronom, od r. 1803 doživotní sekretář Akademie věd

Pierre Francois André *Méchain* (1744 až 1804) astronom, člen Akademie věd

César François *Cassini* (1714 až 1784) matematik, astronom a geodet, člen Akademie věd

Antoine Laur *Lavoisier* (1743 až 1794), chemik, člen Akademie věd, popraven za velké francouzské revoluce

Charles Auguste de *Coulomb* (1736 až 1806), inženýr, člen Akademie věd

Mathurin *Brisson* (1723 až 1806) fyzik a zoolog, člen Akademie věd

Adrien Marie *Legendre* (1752 až 1833) matematik, člen Akademie věd.

být definičně vázána na čas, jednak zdůrazňovala skutečnost, že sekunda je odvozována ze dne jako jeho 86 400tá část, což lze prý pokládat za nahodile zvolený díl. V našem pojednání se zaměřujeme na historický vývoj, avšak s mnohými tehdejšími vývody a důvody bychom možná dnes nesouhlasili, nebo alespoň zásadně polemizovali. To je však dáno tím, že „ex post“ je každý moudřejší než v okamžiku, kdy se na určitou činnost teprve chystá.

Vraťme se však ke zprávě zmíněné komise. Ta proti první definiční alternativě doporučovala uvážit druhou, při níž byla jednotka délky nezávislá (svou definicí) na jiné jednotce. Kromě toho byla, podle názoru komise, tato druhá definice (při které by byla jednotka délky odvozována z nějakého přírodního rozměru Země, třeba kvadrantu zemského) mnohem přirozenější (vzhledem k běžnému měření délek) nežli způsob první, kdy by se vycházelo z délky kyvadla. V závěru zprávy komise znovu doporučila druhou alternativu, chtěla jen rozhodnout, zda se má volit pro definici kvadrant poledníku nebo kvadrant rovníku Země. Kvadrant zemského poledníku se jevil „výhodnější“, protože na zemském poledníku žijí všechny národy (každý ovšem většinou na jiném), kdežto na rovníku žijí jen některé.

Jako nejvhodnější část kvadrantu poledníku Země byla doporučena desetimiliontá část. Přitom bylo ovšem upozorněno, že dřívější dělení oblouků na zemském povrchu na části příslušející úhlovým stupňům, minutám a vteřinám může být ponecháno nadále pro některé účely. Bylo ovšem zdůrazněno, že při koexistenci dvou návazností (tj. dekadické a šedesátkové úhlové) není možné, aby nějaké jednotce délky příslušela celistvá číselná hodnota pro oboje poddělení současně (tzv. jak ve stupních, tak v sázích). Z úhlového dělení se dlouho zachovávala (a prakticky dodnes existuje v námořní a letecké dopravě) míle.

Podle zásad obsažených v rozborové zprávě měla se v maximální míře omezit nahodilost, která při dosavadních definicích jednotek existovala. Také u jednotek váhy (tj. nynější hmotnosti) se měla dosavadní nahodilost definice usměrňovat jednak odvozením jednotky objemu z jednotky délky (pro vhodnou realizaci jednotky „váhy“), jednak volbou takové látky (použité pro tuto realizaci), která je homogenní a snadno dosažitelná. Navrhována byla destilovaná voda a už tehdy se měla hodnota této realizace jednotky „váhy“ redukovat na vakuum a na teplotu dnešních 0 °C.

Pro změření zemského povrchu se uvažovala jako nejvhodnější část zemského poledníku mezi Dunquerque a Barcelonou (u obou měst bylo možné zakončit měření „u hladiny moře“), která odpovídá 9 1/2° zeměpisné šířky. Celková potřebná měření byla rozdělena do šesti skupin. Na měření rozdílu zeměpisné šířky mezi Dunquerque a Barcelonou a na další potřebná astronomická měření (1), na změření bází, které byly použity ke stanovení stupňového oblouku a k pracím na mapování

Francie (2), na vytvoření nových trojúhelníkových řetězců pro změření délky poledníku a jejich prodloužení do Barcelony (3), na stanovení doby kyvu, s délkou rovnou desetimilionté části kvadrantu zemského poledníku, (aby bylo možno kdykoliv podle doby kyvu zpětně reprodukovat tuto délku) (4), na pečlivé stanovení „váhy“ (tj. dnešní hmotnosti) určeného objemu destilované vody ve vzduchoprázdnu při bodu tuhnutí vody (5) a na (redukční) přepočet současně v obchodě používaných délkových, plošných a dutých měr a vah na nové míry resp. váhy, aby byl po zavedení nových měr snadný přepočet a přechod na tyto nové míry (6).

V březnu 1791 byl přijat dekret, který obsahoval podstatné body rozborové zprávy zpracované komisí, jmenovanou akademií, jež jsme si naznačili v předchozích odstavcích tohoto článku. K zabezpečení úloh bylo zapotřebí vyrobit některé přístroje a zařízení (repetiční kruhy, platinové měřicí tyče, platinové měřítko pro měření s kyvadly, zlatou platinovou kouli pro kyvadla). Výrobou se zabýval mechanik *Lenoir*, měření roztažnosti platiny a mosazi provedli *Borda* a *Lavoisier*. V roce 1792 provedli *Cassini*³⁾ a *Borda* obsáhlá měření s kyvadly. Vyšlo také královo prohlášení, které mělo zabezpečit vlastní péči a ochranu vlády nad všemi zařízeními používanými k měření. Toto prohlášení se však většinou jevilo spíše jako přítěž, protože měřicí osoby zdržoval stále vyžadovaný kontakt se správními orgány. Měření poledníku prováděli *Méchain* (od r. 1792 věnoval této práci 1 1/2 roku) a *Delambre* (který začal s prací rovněž v roce 1792 a který později napsal celou historii vzniku metrické soustavy, v níž se zmínil o velké řadě potíží, které bylo nutno překonat). V roce 1793 byla akademie rozpuštěna, komise pro stanovení nové míry však byla dočasně ponechána.

Protokolem ze 3. nivôse⁴⁾ 2. roku republiky byla však i tato komise

⁴⁾ Uvedená data francouzského kalendáře značí:

3. nivôse 2. roku rep. = 23. prosince 1793

18. germinal 2. roku rep. = 7. dubna 1794

13. brumaire 3. roku rep. = 3. listopadu 1794.

Za francouzské revoluce byla zrušena éra po „narození Krista“ a dosavadní zvyklost začínat rok 1. lednem. Konvent rozhodl vést letopočty od okamžiku pádu královské moci a vyhlášení republiky, tedy od 22. září 1792 (což byl tehdy den podzimní rovnodennosti). Měsíců bylo ponecháno opět 12, avšak s novými jmény. Stará pojmenování spojená se jmény římských císařů a s mytologií byla odstraněna. Měsíce měly vesměs 30 dní, týdny se zrušily, zavedly se dekády (poslední den dekády byl určen odpočinku). Po dosažení shody kalendářního roku a roku slunečního přidávalo se na konec každého obyčejného roku pět a na konci přestupného roku 6 svátečních dní. Těmto svátkům se říkalo „sansculottidy“ (později „doplňkové dny“). Jména měsíců byla na podzim (od 22. září do 20. prosince) 1. vendémiaire (měsíc vinobraní), 2. brumaire (měsíc mlh), 3. frimaire (měsíc jinovatky), v zimě: 4. nivôse (m. sněhu), 5. pluviose (m. deště), 6. ventose (m. větru), na jaře: 7. germinal (m. rašení), 8. floréal (m. květů), 9. prairial (m. luk) a v létě: 10. messidor (m. žní), 11. thermidor (m. horka), 12. fructidor (m. plodů).

Výborem pro veřejné blaho zrušena (její složení bylo: *Borda*, *Lavoisier*, *Laplace*, *Coulomb*³, *Brisson*³ a *Delambre*³) a veškerý inventář, podkladový a spisovný materiál měl být odevzdán. *Delambre* se ve svém spise zmiňuje o tom, že v následující době byl on spolu s *Méchainem* pověřen generálem *Calonem*, členem konventu a ředitelem válečného skladu, aby pro možnost zmapování nových departmentů zpracovali trojúhelníkovou síť z geodetických měření poledníku. Zákonem z 18. germinalu⁴) 2. roku republiky byly stanoveny délkové míry s názvy téměř zcela jinými, nežli jaké byly původně uvažovány akademií. Tuto novou terminologii zásadně ovlivnila již zmíněná dočasná komise pro váhy a míry.

Zákon ze 13. brumairu⁴) uložil urychleně dokončit práce na nových vahách a mírách. Tento zákon zmocňoval občany *Méchaina* a *Delambra* jako zvláštní komisaře provádět úhlová, astronomická a další potřebná měření k celkovému stanovení délky poledníku. Takto již mohla být celá záležitost konečně přivedena ke zdárnému výsledku.

Dne 27. srpna 1796 změřil *Delambre* svůj poslední úhel v Rodezu a pokračoval ještě v dalších nutných měřeních. Koncem roku 1797 dokončil svoje měření také *Méchain*. Oba se pak vrátili do Paříže, kde byli již očekáváni zahraničními vědci, kteří sem byli přizváni francouzskou republikou. Byla totiž sledována snaha prosadit metr (tj. chystanou novou jednotku) do nejširšího mezinárodního používání. Přítomni byli *Aenea* a *van Swinden* z Batavie, *Balbo* ze Sardinie, později vyměněný *Eandim*, dále *Bugge* z Dánska, *Ciscar* a *Pédrayés* ze Španělska, *Fabroni* z Toskany, *Franchini* z Římské republiky, *Mascheroni* z Cisalpinské republiky, *Multedo* z Ligurské republiky a *Tralles* z tehdejší Helvétské republiky. Z těchto jmenovaných a z francouzských vědců byla vybrána užší komise ve složení *Tralles*, *van Swinden*, *Laplace* a *Legendre*³), která měla prověřit provedení celé astronomické a geodetické operace. Snad na první pohled zarazí, že ve sboru učenců nebyla řada jiných z dalších evropských států. Bylo to způsobeno současnou politickou situací.

Užší komise se přesvědčila o správnosti postupu při sestavování bází v Melunu a v Perpignanu, zkontrolovala všechny trojúhelníky a jejich řády. Pak se započalo s výpočty. Ty prováděli nezávisle všichni členové užší komise a pak je navzájem porovnali. Obdobným způsobem se posoudila měření azimutu (provedená na 4 místech). *Méchain* a *Delambre* předložili svá měření zeměpisné šířky uskutečněná v Dunquerque, Paříži, Evaux, Carcassone a v Montjoui. Určilo se zploštění Země a délka kvadrantu poledníku Země (jež činila údajně 5 130 740 toises de Pérou, tj. peruánských sáhů). Konečně byl stanoven metr jako nová délková jednotka s hodnotou 443,295 936 čárek (peruánského sáhu). Přitom se rovnal 1 sáh = 6 pařížských stop = 6' = 864 pařížských čárek = 864'' A dále platilo, že 1 pařížská stopa = 12 pařížských palců = 12''; 1 palec = 12 pařížských čárek = 12''' Přitom 1 „peruánský sáh“ se rovnal zhruba 1,95 metru.

Lenoir zhotovil podle udaných hodnot jeden platinový prototyp (ve tvaru tyče s obdélným průřezem $(25 \times 4,05 \text{ mm}^2)$) a pro všechny čtyři komisaře podobné prototypy ze železa. K jejich vzájemnému porovnání a vyhodnocení bylo ovšem zapotřebí přesnosti řádu tisíciny čárky (tj. asi $2,26 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$). *Lenoir* se ujal zhotovení potřebného komparátoru.

Potud tedy o historii vzniku nové jednotky metru. Je nutno obdivovat, jaká péče a jaký vědecký přístup byly věnovány zrodu této jednotky; metr žije jako jednotka dodnes, i když ovšem jeho definice prodělala svůj vývoj.

Prototyp metru byl uložen v r. 1797 do státního archívu Francie, který byl v Louvru. Od té doby se nazýval často „*mètre des archives*“. Metrický systém byl zaveden ve Francii zákonem ze dne 7. dubna 1795 doplňujícím zákonem z 10. prosince 1799. Tímto zákonem byla stanovena *definitivní převodní hodnota metru* (při teplotě 0°C).

1 metr = 443,295 938 (pařížských) čárek peruánského sáhu. Délka kvadrantu poledníku Země byla učena jako 5 130 740 peruánských sáhů (viz též dříve) a jedné 10^{-7} -té části této hodnoty (při teplotě $13^\circ \text{R} = 16,5^\circ \text{C}$) byl roven metr.

Název jednotky metr navrhl *Borda*, znění předpon dekadických násobků a dílů má za autora *van Swindena*.

Nedostatky původně ideálně zamýšleného odvození nové jednotky délky se ukazovaly postupně. Předně se zjistilo, že povrch Země a tím také obvod řezu jejího geoidu podléhá malým změnám, takže každé nově provedené měření se bude nutně od předchozích poněkud lišit. Kromě toho se vyvíjí měřicí technika a metodika, takže při vyšší přesnosti musí být výsledky opět poněkud jiné nežli dříve dosažené. Zavedení nových jednotek probíhalo v samotné Francii značně pomalu. Teprve od 1. ledna 1840 byly staré jednotky definitivně zakázány. V jiných zemích (vyjma Belgie, Holandsko a Luxembursko) zatím metrickou soustavu nezaváděli. Působila to určitá nedůvěra v přesnost a snad i v progresivnost nové jednotky. Dodnes existuje řada kritik metrické soustavy. Např. známý německý fyzik *Pohl* prohlásil, že metr je pro běžný život jednotkou příliš velkou, milimetr zase příliš malou. *Pohl* pokládal za nejvhodnější jednotkovou délku lokte nebo stopy a dělení doporučoval na 100 dílů. To je ovšem spíše otázka osobního názoru a vlastních zkušeností a někdy je to ovlivněno specializací kritika.

V bývalém Německu se začali otázkou aplikování metrického systému zabývat až ve druhé polovině šedesátých let minulého století. Severoněmecký svaz se r. 1868 připojil k metrické soustavě, současně však vyvolal pruský geodetický ústav jednání o nutné úpravě celého metrického systému. Po počátečním nesouhlasu Francie se uskutečnilo mezinárodní jednání o této otázce na zasedání pořádaném v Paříži 8. srpna 1870. Tam se také dohodl další postup.

V bývalém Německu byl metrický systém zaveden od roku 1872 zákonem (ze dne 16. dubna 1871 a 26. listopadu 1871).

V bývalém Rakousko-Uhersku, tzn. na našem území, došlo také ke sjednocení používaných měr, a to v průběhu 19. století. Zatímco ve Francii si již razila cestu progresivní soustava metrická, sjednotilo Rakousko-Uhersko své míry řadou nařízení a výnosů v letech 1855 až 1857 tím, že jednotně zavedlo dolnorakouské míry a váhy (v Čechách 18. července 1856). I zde, v bývalém Rakousko-Uhersku, se však ukázalo nezbytným přizpůsobit se novým pokrokovějším směrům v měření, jež si vyžadovaly již na počátku průmyslové revoluce solidní přístup v zabezpečování jeho jednotnosti a přesnosti. Pozdní proniknutí metru nelze dobře vysvětlit ničím jiným, než nedokonalou decentralizovanou metrologickou (tj. měrovou) službou, tehdy ještě neexistující technikou inspekce a kontrolou. Impulz k zavedení metrické soustavy, který se opožděně projevil v bývalém Německu, ovlivnil bezprostředně také postoj Rakousko-Uherska. Došlo přitom jednak k zásadní a rozsáhlé reorganizaci metrologické (tehdy cejchovní — původně cimentní) služby a metrická soustava byla konečně zavedena zákonem ze dne 23. července 1871 (R.G.B. — 1872, č. 16). 1. paragrafem zákona byly definovány dvě základní jednotky: metr a kilogram. U obou byly již definice novějšího znění, nikoliv původní, protože ty byly ještě před dříve zmíněným zasedáním v Paříži v r. 1870 upraveny podle současných zkušeností. Zejména se to týkalo definice metru, kde se od původní desetimilionté části kvadrantu Země přešlo ke vzdálenosti rysek na prototypu. Prototyp také prodělal svůj vývoj z původního obdélného průřezu na nesouměrný průřez tvaru X.

Konečně 20. května 1875 došlo (podle předchozích předběžných jednání) v Paříži k podepsání *Metrické konvence*, která měla zabezpečit náležitou jednotnost a přesnost v nových měřicích jednotkách. Podpisu se zúčastnilo 18. států: býv. Německo, býv. Rakousko-Uhersko, Belgie, Brazílie, Argentina, Dánsko, Španělsko, USA, Francie, Itálie, Peru, Portugalsko, býv. Rusko, Švédsko, Norsko, Švýcarsko, Turecko a Venezuela. Dohodu v následujících desetiletích podepisovaly další státy. Dnes má mezinárodní organizace, jejímž základem je Metrická konvence, více nežli čtyřicet členů. O dalších orgánech Metrické konvence se ještě v dalším stručně zmíníme. Velmi důležitým činem bylo, že Metrickou konvencí se zřídil *Mezinárodní úřad pro váhy a míry umístěný v pavilonu de Breteuil v Sèvres u Paříže, který 20. května 1975 oslavil 100. výročí svého založení*.

V bývalém Rakousko-Uhersku byla *Metrická konvence publikována v R.G.B.* (tj. Reichs-Gesetz-Blatt) z r. 1876, č. 20. Konvence podepsaná ve výše podepsaném datu v Paříži byla zde ratifikována „c. a k. apoštolským majestátem“ dne 31. prosince 1875 v Budapešti. Dřívější Československá



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 56, 1977-78

VEDOUcí REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER,

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Doc. Ota SETZER,

nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA: Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, dr. Jan Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, dr. Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., KU Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, VÚOŠ Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, dr. Ondřej Šedivý, PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha.

Vydává ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

OBSAH

Úvodníky

Faktorová Ladislava: Třicáté výročí únorového vítězství	241
Kraemer Emil: Podesát pět let našich Rozhledů	1
Wohlgemuthová Renáta: Velká říjnová soc. revoluce — odkaz a příklad .	49

Matematika

Anderle P., Matas V., Šidlichovský M.: Poznámka k řešení některých transcendentních rovnic iterační metodou	361
Bican Ladislav: O řešení Pellovy rovnice	193
Zobecněná Pellova rovnice	257
Calda Emil: Největší společný dělitel v oboru celých komplexních čísel	243
Drábek Karel: Základy kinematické geometrie v rovi	289
Horák Stanislav: K důkazu Pythagorovy věty	365
O jedné nerovnosti v trojúhelníku	433
Z geometrie trojúhelníka	247
Z teorie kuželoseček	311
Hradecký František: K některým vztahům ve čtyřúhelnících	355
Husová Helena: O přibližných řešeních minimalizace odpadu	2
Ilaš Štefan: Stromy a lesy v matematice	292
Kolafa Jiří: Výpočet elementárních funkcí na kapesních minipočítačkách	262
Kraemer Emil: Aritmetický a geometrický průměr	198, 251
Některé metrické vlastnosti paraboly	301
Výpočet velikosti pravoúhlého průmětu úhlu	107, 152

Mída Jiří: O Morseově kódu	340
Nečas Jiří: Pět Platónových těles	385
Pavlas Karel: Hellyovy věty o obloucích kružnic	343
Pšenička Jiří: Surdické výrazy	159
Sedláček Jaroslav: Částečné součty řad s polynomickými členy	206
Pascalovské trojúhelníky	337
Šedivý Jaroslav: Co nelze sestrojít kružítkem a pravítkem	347, 388
Prodlužování konečných posloupností prvočísel	211
Věty o stejných zbytcích	7
Trávníček Stanislav: Výplata n Kčs	97
Vrba Antonín: Historie problému o pokrytí obdélníka čtverci	105
Zelinka Bohdan: O matematických symbolech	16, 51
Kreslení obrázků jedním tahem	145

Konstruktivní geometrie

Drábek Karel: Styk dvou křivek	161
Horák Stanislav: Řezy rotační válcové plochy	15
Hradecký František: Analogie v geometrii	63
Další užití analogie	164
K rovinným řezům na rotační válcové a kuželové ploše	114
Kraemer Emil: Základní určení paraboly	394

Fyzika

Golab Frant., Procházka Josef: Josef Ressel	60
Mrázek Jiří: O některých aplikacích kosmonautiky	59
Patrovský Václav: Crookesův radiometr	213
Pospíšil Jaroslav: Optoelektronika	269
Vláknová optika	171, 216
Pöss Ondrej: Pred 200 rokmi zomrel Ján Andrej Segner	123
Šindelář Václav: Jak vznikla metrická soustava	445
Jak je to dnes u nás s novými jednotkami?	367, 399
Tulak Rudolf: Neutronová bomba a její účinky jako zbraně hromadného	
ničení	314
Rázová vlna — zvláštní druh akustické vlny	119
Veselá Eva: Dimenzionální analýza	25
Teorie podobnosti	20
Vybíral Bohumil: O setrvačných silách	20
Stabilita automobilu v zatáčce	437

Astronomie

Široká Miroslava, Široký Jaromír: Bílé trpasličí hvězdy	179
Budou planety na jedné přímce?	326
Objev Uranových prstenců	279
Obří a veleobří hvězdy	224
Úplné zatmění Měsíce 16. 1978	410

Naše soutěž

Úlohy k řešení	34, 128
Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	37, 76, 131, 181
Výsledky loňské soutěže Rozhledů	130

Olympiády

MO	95, 282, 457
FO	136, 413

Různé

Flajšinger Vlastimil: Universální žalobce	469
Ušlechtilý divoch	186
Horák Stanislav: Matematické soutěže ve Švýcarsku	336
Hrivňák Jiří: 80 let od zrodu elektráren v českých zemích	283
Kotyk Josef: Benjamin Thompson	467
Beseda čtenářů k 250. výročí Isaaca Newtona	140
Gaussova metoda vážení	74
Z počátků českého letectví	235
Kraemer Emil: Jubileum matem.-fyzikální fakulty UK	430
Malíšek Vladimír: Rozvoj fyziky v SSSR za 60 let	231
Mída Jiří: 250. výročí narození Jana Tesanky	286
Mrázek Jiří: Logické systémy kapesních kalkulátorů	46
Pöss Ondrej: Pred 100 rokmi zomrel Robert Mayer	463
Sedláček Jiří: Nezapomenutelné čtvrtstoletí	138
Sedláčková Jiřina: Světový kongres matematiků 1978	335

Matematicko-fyzikální zábavy	. 190, 238, 287, 331, 334, 429, 472
-------------------------------------	-------------------------------------

Recenze	144, 238, 378, 431, 473
----------------	-------------------------

Ze zahraničních časopisů	45, 229, 377
---------------------------------	--------------

republika nedlouho po svém vzniku potvrdila své členství v Metrické konvenci v r. 1923.

Původní znění Metrické konvence obsahovalo 14 článků vlastního textu a dále řád Mezinárodního úřadu a ustanovení o jeho zajištění, jakož i některá ustanovení. Vlastní *text Metrické konvence* se týkal zejména: vytvoření Mezinárodního úřadu pro váhy a míry (jako stálého, společně dotovaného vědeckého pracoviště se sídlem v Paříži, specializovaného na otázky měr), poskytnutí vhodné budovy pro tento Úřad od francouzské vlády, vedení, organizace a podřízenosti Úřadu a dohledu na něj, organizačních zásad konferencí a výboru (viz dále), hlavních úkolů Úřadu (to se týkalo zejména uchování prototypu metru a kilogramu, porovnávání nových prototypů i v mezinárodním měřítku, porovnávání s prototypy starých měr apod.), jeho hospodářského zabezpečení a v posledním článku data, kdy konvence vstupuje v život (měl to být 1. leden 1876). Konvence byla poněkud upravena v r. 1921.

Ve stručnosti se zmíníme o *orgánech Metrické konvence*, jež je významnou mezinárodní organizací pro měřicí jednotky. Bylo již řečeno, že Mezinárodní úřad pro váhy a míry (Bureau International des Poids et Mesures — BIPM) byl zřízen dne 20. května 1875. Tento úřad má sídlo v Sèvres na okraji Paříže na rozloze 4,4 ha, v pavilonu de Breteuil v parku de Saint-Claud, který mu byl dán k dispozici francouzskou vládou. Umístění je dosti podobné Nebozízku v areálu Petřína. Dnešní úkoly jsou poněkud jiné, nežli mu byly dány konvencí původně do vínku. Má zejména: zavádět základní etalony a stupnice význačných fyzikálních veličin a uchovávat mezinárodní prototypy, provádět porovnávání mezinárodních etalonů se státními etalony různých členských zemí, zabezpečovat koordinaci příslušné techniky měření a provádět a koordinovat stanovování fyzikálních konstant, které patří do primární metrologické činnosti.

Mezinárodní úřad pracuje pod výlučným dohledem *Mezinárodního výboru pro váhy a míry* (Comité International des Poids et Mesures), který sám podléhá *Generální konferenci pro váhy a míry* (Conférence Générale des Poids et Mesures), která se koná pravidelně v Paříži, v posledních letech jednou za 4 roky.

Generální konferenci tvoří delegáti všech členských států Konvence. Konferencím se předkládají zprávy Mezinárodního výboru o úkolech dokončených od posledního zasedání. Konference přijímají významná usnesení týkající se rozvoje metrické organizace a Úřadu, schvalují výsledky významných vědeckých prací základního metrologického významu, diskutují o možnostech rozvoje základní metrologie a o zdokonalování Mezinárodní soustavy jednotek (SI) a dávají podněty k nutným opatřením a úkolům.

Mezinárodní výbor pro váhy a míry má 18 členů, příslušníků různých států. Schází se častěji nežli konference, nejméně jednou za 2 roky.

Tabulka 1. *Přehled vývoje francouzských názvů metrických jednotek délky*

Francouzská akademie věd		Dočasná komise	Zákon z 18. germinalu II.	Výnos ze 13. brumairu III.	Hodnoty m
1. návrh	2. návrh				
dekáda					1 000 000
degré (stupeň)		degré nebo grade			100 000
poste				lieue	10 000
mille (míle)	millaire	millaire	myriamètre kilomètre hektomètre	mille	1 000
stade (stadion)			décamètre	perche	100
perche (tyč)			mètre	mètre	10
mètre	mètre	mètre	decimètre	palme	1
palme (dlaň)	decimètre	decimètre	centimètre	doigt	0,1
doigt (prst)	centimètre	centimètre	millimètre	trait	0,01
trait (čárka)	millimètre	millimètre			0,001

Mezinárodní úřad pro váhy a míry se původně omezoval na problémy měření délky a hmotnosti, jeho činnost se však postupně rozšiřovala na etalony pro měření elektrických veličin (1927), fotometrických veličin (1937) a ionizujícího záření (1960). Laboratoře byly proto příslušně rozšířeny a byly přistavěny dvě nové budovy. V laboratořích Úřadu pracuje dnes asi 30 fyziků a techniků.

S rozšiřováním odborné agendy Úřadu byly Mezinárodním výborem postupně zřizovány *poradní orgány* (Comités Consultatifs), které mohou dále zřizovat *odborné pracovní skupiny*. Poradní výbory jsou složeny ze specialistů pro některé význačné metrologické oblasti. V současné době je těchto poradních výborů sedm. Jsou to: poradní výbor pro elektřinu (1), pro fotometrii (2), pro termometrii (3), pro definici metru (4), pro definici sekundy (5), pro etalony z oblasti ionizujícího záření (6), který má 4 sekce, a poradní výbor pro jednotky (7).

Od původních racionálních myšlenek a návrhů ke skutečné realizaci nové jednotky délky bylo třeba urazit dlouhou a mnohdy i trnitou cestu. I když původní předpoklady kladené na novou míru se splnily jen z menší části, přesto byl celý popsán proces pokrokový a jeho kladné důsledky, i když v poněkud jemnější struktuře, mají dopad až do dneška, kdy zavádíme nejen my v ČSSR, ale prakticky celý technicky vyspělý svět Mezinárodní soustavu měřicích jednotek (SI), jejímž jedním ze základních kamenů byla právě metrická soustava.

I když se definice metru proti původnímu záměru a znění dodnes již dvakrát změnila a v blízké době lze čekat změnu další, zůstává tato jednotka délky nadále trvajícím základem moderní soustavy jednotek, jakou je Mezinárodní soustava jednotek, stručně značená SI. Metrická soustava je vlastně dodnes jádrem této soustavy jednotek, na svou dobu byla velmi pokroková, a to nejen z hlediska vědeckého či technického, ale i politického, protože byla jedním z prvních náznaků nutnosti širokého dorozumění mezi státy. Svědčí o tom i heslo charakterizující metrickou soustavu: *Pro všechny doby — pro všechny národy*.

olympiády

Úlohy XXVIII. ročníku Matematické olympiády

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

Kategorie A

1. Nech a_{jk} ($j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$) sú reálne čísla, pre ktoré je
- $$0 \leq a_{j1} \leq a_{j2} \leq \dots \leq a_{jm} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Dokážte nerovnosť

$$\left(\sum_{k=1}^m a_{1k} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{2k} \right) \dots \left(\sum_{k=1}^m a_{nk} \right) \leq m^{n-1} \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{nk}.$$

Kedy platí rovnosť?

2. Nájdite všetky hodnoty parametra p , pre ktoré funkcia

$$f(x) = x^2 + 4px - |x^2 - 2px + p^2 - 1|$$

nemá lokálny extrém.

3. V rovine je dán trojuholník ABC a priamka p . Sestrojte úsečku, jejích krajní body púli obvod trojuholníka ABC a jejích střed leží na přímce p .

4. Nech a, b, c sú veľkosti strán trojuholníka ABC a r je polomer jemu opísanej kružnice. Označme $V = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2$. Trojuholník ABC je ostrouhlý práve vtedy, keď $V > 0$, pravouhlý práve vtedy, keď $V = 0$ a tupouhlý práve vtedy, keď $V < 0$. Dokážte.

Kategorie B

1. Pre každé prirodzené číslo k existuje prirodzené číslo n také, že $12n + 5$ alebo $12n - 5$ je prvočíslo a je väčšie ako k .

2. V množině všech reálných čísel řešte soustavu rovnic o neznámých x, y

$$2x + py = 16$$

$$x - 2y = 1/2p^2$$

$$(p - 1)x + 2y = 12p - 6$$

Proveďte diskusi vzhledem k parametru p .

3. Ke každému ostrouhlému trojuholníku T o obsahu 1 existuje aspoň jeden takový pravouhlý trojuholník T' , že jeho obsah je nejvýše $\sqrt{3}$ a že platí $T \subset T'$. Dokážte.

4. Je dána úsečka AB a bod C jejího vnitřku tak, že platí $AC \geq BC$.

Ke každé kružnici k obsahující body A, C sestrojíme obě kružnice k' shodné s k , které obsahují body B, C . Vyšetřte množinu všech průsečíků dvojice k, k' .

Kategorie C

1. a) Vypíšte všechny uspořádané trojice x, y, z přirozených čísel, pro které platí

$$xyz = 50.$$

(Trojice, které se liší poradím hodnot, považujeme za různé.)

b) To isté vykonajte pre rovnicu $xyz = 12$.

c) Vysvetlite, prečo počet riešení je v oboch případoch rovnaký.

2. Je daný výraz

$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Dokážte, že je kladný vždy, keď je definovaný. Čo musí platiť o číslach a, b, c , aby daný výraz mal zmysel?

3. Do lichobežníka $ABCD$ sú vpísané kružnice k_1, k_2 , ktoré sa dotýkajú strán a, c, d a a, c, b . Pre dĺžky strán lichobežníka platí $a + c > b + d$.

Ak má výška lichobežníka dĺžku $\frac{1}{2}(a + c - b - d)$, potom majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk. Dokážte.

4. V rovine je dán trojuholník PCQ a uvnitř tohoto trojuholníka bod T .

Sestrojte trojuholník ABC tak, aby bod T byl jeho těžištěm, bod A ležel na polopřímce CP a bod B na polopřímce CQ .

Kategorie Z

1. Nejmenší přirozené číslo x , pro které je $1\,260x$ třetí mocninou přirozeného čísla, je

a) $1\,470$, b) $1\,260^2$, c) $7\,350$.

Rozhodněte, která z odpovědí a), b), c) je správná.

2. Na desce, na níž je narysován pravidelný desetiúhelník, jehož jeden vrchol je označen O , hrají dva hráči tuto hru:

Na vrchol O si nejprve postaví společnou jednu figurku a pak ji střídavě přemísťují podle vlastní úvahy buď o 3 nebo o 4 nebo o 5 vrcholů ve směru otáčení hodinových ručiček. Vyhraje hráč, který opět postaví figurku na vrchol O .

Popište, jak má postupovat hráč, který začíná, aby vyhrál nejpozději svým třetím tahem.

3. Je dán trojuholník ABC . Označme S střed strany AB . Dokažte, že je

$$CS < \frac{1}{2}(AC + BC)$$

4. V rovnostranném trojúhelníku ABC označíme S průsečík přímek AK a CM , kde M je střed strany AB a K střed strany BC . Dále označíme P střed úsečky AS a Q střed úsečky BS .

a) Dokažte, že čtyřúhelník $PKQM$ je rovnoramenný lichoběžník.

b) Vypočtete, jakou část obsahu $\triangle ABC$ je obsah lichoběžníka $PKQM$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

Kategorie A

1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prirodzených čísel, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla. Dokážte, že existujú indexy $i < j < k$ také, že $a_k - a_j = a_j - a_i$.

2. V rovině je dána ortonormální soustava souřadnic. Body, jejichž obě souřadnice jsou celočíselné, nazveme mřížovými body. Nechť M_n je množina všech mřížových bodů $[i, j]$, pro které je $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Označme $f(n)$ nejmenší přirozené číslo k s touto vlastností: v M_n existuje k bodů $P_1, P_2, \dots, P_k$ tak, že ke každému bodu $A \in M_n$ lze najít bod P_s ($1 \leq s \leq k$), jehož vzdálenost od bodu A je nejvýše rovna 1. Dokažte, že platí

$$\frac{n^2}{5} \leq f(n) \leq \frac{n^2 + 16n}{5}.$$

3. Nech $a_1, \dots, a_n$ sú nezáporné čísla, pre ktoré platí $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$. Pre každé reálne číslo x platí

$$x^2 + x \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + n^3 \sum_{i=1}^n a_i^4 > 0$$

Dokažte!

4. V rovině jsou dány body A, B o vzdálenosti $AB = c > 0$ a přímka $p \parallel AB$ ležící ve vzdálenosti $d > 0$ od přímky AB . Na přímce p sestrojte bod C tak, aby v trojúhelníku ABC byly velikosti výšky v_b a těžnice t_a stejné. Jaká je podmínka řešitelnosti?

5. V rovině je dána ortonormální soustava souřadnic. Dva mřížové body nazýváme sousedními, je-li jejich vzdálenost rovna jedné (každý mřížový bod má tedy 4 sousední mřížové body). V uvažované rovině je dán kruh K o poloměru $r \geq 2$, na hraniční kružnici kruhu K neleží žádný mřížový bod.

Mřížový bod A ležící uvnitř K nazveme „vnitřním okrajovým bodem“, jestliže aspoň jeden bod sousední s A leží vně K . Obdobně nazveme mřížový bod B ležící vně K „vnějším okrajovým bodem“, jestliže aspoň jeden bod sousední s B leží uvnitř K .

Dokažte, že počet vnějších okrajových bodů je o 4 větší než počet vnitřních okrajových bodů.

6. Dokažte, že v trojúhelníku o stranách a, b, c a úhlech α, β, γ (úhel α leží proti straně a , atd.) platí

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma > 0$$

Kategorie B

1. V textu této úlohy bude značit symbol $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ ($x_1 \neq 0$) dekadický zápis přirozeného čísla. Kolik je navzájem různých sedmiciferných čísel $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$, pro která platí

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = x_7 x_7 x_7 x_7 x_7 x_7 ?$$

2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y , pro které platí

$$x^y = y^{x-y}$$

3. V oboru a) všech racionálních čísel

b) všech celých čísel

řešte soustavu $(n+1)$ rovnic o $(n+1)$ neznámých

$$x_k x_0 + x_{k-1} x_1 + x_{k-2} x_2 + \dots + x_0 x_k = 2^k x_k$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

4. Jsou-li A_1, A_2, A_3 vrcholy ostroúhlého trojúhelníka, pak nejmenší kruh, který je obsahuje, je kruh omezený kružnicí opsanou trojúhelníku $A_1 A_2 A_3$. Nejsou-li body A_1, A_2, A_3 vrcholy ostroúhlého trojúhelníka a jsou-li aspoň dva z nich navzájem různé, pak nejmenší kruh, který obsahuje A_1, A_2, A_3 , je kruh omezený Thaletovou kružnicí nad nejdelší z úseček $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_1$. Dokažte.

5. V rovnostranném trojúhelníku ABC je D střed strany AC , E střed strany BC . Najděte množinu, kterou vytvoří těžiště všech rovnostranných trojúhelníků obsažených v trojúhelníku ABC tak, že mají s úsečkou DE neprázdný průnik.

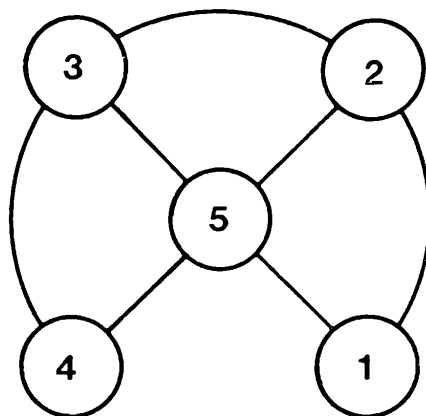
6. V rovině je dán čtverec Q , bod M a přímka p neprocházející bodem M . Sestrojte čtverec Q' tak, aby jeho strany byly rovnoběžné se stranami čtverce Q a aby bod M a dva průsečíky přímky p s hranicí čtverce Q' dělily tuto hranici na tři části téže délky.

Kategorie C

1. Najděte všechny uspořádané dvojice reálných čísel x, y , které vyhovují soustavě rovnic

$$xy - \frac{1}{x-y} + 1 = x + y + \frac{1}{y-x},$$

$$(x^3 + y^3 - 2)(x^2 + y^2 - 2)(x + y - 2)(x - 2)(y - 2) = 0$$



Obr. 1

2. Zistite počet všetkých usporiadaných trojíc prirodzených čísel x, y, z , ktoré vyhovujú rovnici

$$xyz = 1\,000\,000$$

3. V rovině je dána množina B o n bodech ($n \geq 3$), z nichž žádné tři neleží v přímce. Některé z bodů množiny B jsou spojeny úsečkami, které tvoří množinu U . Soustava $\{B, U\}$ má tyto vlastnosti:

(1) Z každého bodu množiny B vycházejí nejvýše tři úsečky množiny U .

(2) Každé dva body množiny B jsou spojeny buď úsečkou z U nebo lomenou čarou skládající se ze dvou úseček z U .

Zjistěte, jaké je největší možné číslo n a zda existuje soustava $\{B, U\}$ o maximálním n .

4. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ o stranách a, b, c, d . Nechť k_A, k_B, k_C, k_D jsou kružnice se středy v bodech A, B, C, D takové, že k_A a k_B , k_B a k_C , k_C a k_D , k_D a k_A mají vnější dotyk.

Kružnice uvedených vlastností existují, právě když

$$a + c = b + d;$$

dokažte.

5. V rovině jsou dány dvě různoběžky p, q a kladné číslo c .

Určete množinu všech bodů X dané roviny, jejichž součet vzdáleností od přímek p, q je roven c .

6. V rovině je dáno pět bodů čtvercové mříže. Z úseček jimi určených aspoň jedna má střed v některém mřížovém bodě; dokažte.

Kategorie Z

1. Nalezněte přirozená čísla x, y tak, aby platilo

$$28x^4 = 75y^3$$

a aby číslo x bylo nejmenší možné.

2. Na obr. 1 je znázorněn hrací plán *podkovy*, hry francouzských dětí. Obsahuje 5 polí označených čísly 1 až 5. Sousedními poli se nazývají dvě

pole spojená úsečkou alebo obloukom. Hru hrajú dva hráči, červený (Č) a modrý (M), z nichž každý má dva kameny svojej farby.

Počátečné postavenie zaujmú tak, že striedavo kladú po jednom kameni svojej farby na pole 1 až 5; jedno zostane voľné. Pri samotnej hre ťahnú hráči striedavo vždy jeden kameň na susedné voľné pole. Vyhráva hráč, ktorý znemožní svému protivníkovi ďalší ťah.

a) Koľko počátečných postavení má hra podkova?

b) Nájdite všetky postavenia, z nichž modrý nemôže ďalej ťahnúť.

c) Je dané postavenie Č 14, M 35, červený ťahne. Zapište ďalší priebeh hry, jestliže červený svým tretím ťahom vyhral.

3. V rovine je daná úsečka AB . Vyšetrite množinu vrcholů C všetkých trojuholníkov ABC , pre ktorých vnútorné uhly platí

$$\alpha \geq \beta > \gamma.$$

Dané sú dva rôzne body P a Q . Sestrojte čtverec K , ktorý obsahuje body P a Q a má najmenší možný obsah.

různé

Pred 100 rokmi zomrel Robert Mayer

RNDr. O N D R E J P Ö S S, Prírodovedecká fakulta UK Bratislava

Jedným zo základných zákonov prírody je zákon zachovania a premeny energie. Už dávnejšie pred objavom tohto univerzálneho zákona túžili ľudia jeho platnosť, avšak jeho univerzálny význam spoznal až lekár z Heilbronnu *Robert Mayer*.

Robert sa narodil 25. novembra 1814 ako najmladší z troch synov majiteľa lekárne „Pri ruži“ v Heilbronne. Na gymnáziu v rodnom meste nebol zvlášť usilovný. Určité potešenie mal len v matematike. Ako desaťročný sa pri hre pokúsil postaviť vodné koleso, ktoré by sa bez dodávania energie neustále otáčalo. História fyziky a techniky hovorí o viacerých nešťastných bádateľoch, ktorí premrhali svoje úsilie a majetok na stavbu takéhoto perpetua mobile. Mayerove chlapčenské pokusy neboli samozrejme úspešné, avšak nemožnosť stavby takéhoto stroja ukázal až svojím zákonom zachovania a premeny energie.

Po skončení gymnaziálnych štúdií r. 1832 šiel na otcovo prianie študovať medicínu na univerzitu do Tübingenu. Neskôr navštevoval ešte kli-

niky v Mníchove a vo Viedni a roku 1838* promoval ako doktor medicíny a chirurgie. Ako lekár sa usadil v rodnom Heilbronne, ale nebol tam spokojný.

Roku 1840 nastúpil ako lodný lekár na holandskú obchodnú loď „Jáva“, ktorá sa plavila z Rotterdamu na Jávu. Táto cesta mala v súvislosti s objavom zákona zachovania a premeny energie na Mayera rozhodujúci vplyv. 28 osôb, ktoré boli na lodi, sa tešilo veľmi dobrému zdraviu, takže lekár mal dostatok voľného času. Štyri mesiace na Jáve boli preňho veľmi kludným obdobím. 25. júla 1840 píše rodičom zo Surabaje: „Dni letia predom mnou ako hodiny a veľmi užitočne ich využívam štúdiom. Duševná činnosť a telesný pokoj mi v plnej miere vyhovujú“ V tom čase nastal u Mayera rozhodujúci obrat v úvahách, ktoré viedli k jeho objavu. Píše: „Počas stodňovej plavby som nemal žiadnu vážnejšiu prácu. Avšak v prístave v Batávii som musel jednému námorníkovi urýchlene otvoriť žilu ruky, pričom sa objavila svetlá krv, takže som si nebol istý, či som nenatrafil na tepnu.“ O dva mesiace urobil ten istý zákrok. Tentoraz však vytiekla zo žily normálna, tmavá krv. Mayer to vysvetlil takto:

„Rozdiel vo farbe krvi je vyjadrený veľkosťou látkovej spotreby alebo silou spaľovacieho procesu v ľudskom organizme. Časť prijatej energie sa spotrebuje na vyrovňovanie teploty s okolím, časť na pohyb svalov. Ak poznáme prácu vykonanú svalmi, tak poznáme aj energiu na tú prácu spotrebovanú. Ak však organizmus prijíma energiu a táto energia sa v rôznom pomere mení na tepelnú a mechanickú energiu, musí existovať ekvivalencia medzi týmito dvoma formami energie“. Tu ho napadlo aj pozorovanie kormidelníka z jeho lode, ktorý tvrdil, že voda vzbúrených vln je teplejšia ako kludná voda. Neskôr objavil, že toto tvrdenie nie je nové, nachádza sa už v Cicerovom spise „De natura deorum“ V tom čase Mayer uvažoval aj o nepružnom zraze dvoch gúl, pri ktorom sa mechanická energia mení na teplo. Týmito geniálnymi objasňujúcimi úvahami bol položený základ zákona zachovania a premeny energie.

Prvý príspevok o svojich poznatkoch zaslal Mayer roku 1841 *Poggendorffovi*, vydávateľovi „*Annalen der Physik*“ Tento ich však neuverejnil. Mayer sa preto obrátil na chemika *Liebiga*, ktorý článok s titulom „Poznámky o silách neživej prírody“ uverejnil v májovom čísle r. 1842 „*Annalen der Chemie und Pharmazie*“ Článok vedie k záveru: Pohyb sa mení na teplo a naopak teplo sa môže meniť na pohyb. Zákon zachovania a premeny energie sa dnes formuluje takto: Izolovaná sústava materiálnych objektov sa vyznačuje konštantnou celkovou energiou bez ohľadu na to, aké deje v sústave prebiehajú. Pri procesoch, ktoré v sústave prebiehajú, dochádza len k prechodu energie z jedných materiálnych objektov na druhé a k premene jedných foriem energie na iné formy energie a to vždy tak, že sa celková energia sústavy zachováva.



Roku 1845 vychádza jeho najdôležitejšie dielo „*Organický pohyb v súvisi s látkovou výmenou*“. Z tohto titulu sa nedá usudzovať na skutočný obsah diela, avšak v práci je dosiahnutý pre celú vedu základný princíp — zákon zachovania a premeny energie. Mayer odvádza číselný prevod medzi jednotkou mechanickej energie a jednotkou tepla. Toto odvodenie je príkladom hlbokého logického uvažovania, a preto ho uvedieme tak, ako ho podal Mayer. Z dnešného hľadiska nesprávne udávané jednotky Vás určite nepomýlia.

„Nech vo valcovej nádobe o priereze 1 cm^2 a objeme 1 dm^3 je vzduch uzavretý pohyblivým piestom. Tento piest musí byť 1 dm nad dnom nádoby. Za normálnych podmienok pôsobí na piest tlak vzduchu, ktorý spôsobí tlakovú silu $103,3 \text{ kg}$. Ak vzduch ohrejeme o 1 stupeň, tak piest

sa zodvihne o $\frac{1}{2730} \text{ m}$, pretože objem vzduchu sa pri ohriatí o 1 stupeň

zväčší o $\frac{1}{273}$ pôvodného objemu. Práca sa vykonáva proti tlaku vzdu-

chu po dráhe $\frac{1}{2730} \text{ m}$. Veľkosť tejto práce je: $103,3 \text{ kg} \cdot \frac{1}{2730} \text{ m} = 0,037849 \text{ m} \cdot \text{kg}$

Ak by uzavretý vzduch nemohol zväčšiť svoj objem, tak by na ohriatie o 1 stupeň bolo potrebné $0,000218$ kalórií. Avšak objem sa zväčšil a na ohriatie o 1 stupeň sme potrebovali $0,000307$ kalórií, teda o $0,000089$ kalórií viac. Týchto $0,000089$ kalórií sa spotrebovalo na prácu vykonanú pri posune piestu, teda na $0,037849 \text{ m} \cdot \text{kg}$. Z týchto úvah nám vyplýva,

že 0,000089 kalórií je ekvivalentných 0,037849 m.kg. Jedna kalória je ekvivalentná 425,3 m.kg. Dá sa aj povedať, že pri zdvíhaní 1 kg vody do výšky 425,2 m sa vykoná práca, ktorá je rovnaká ako práca potrebná na ohriatie vody rovnakého množstva o 1 stupeň. Podobne naopak, každý kilogram vody vodopádu 42,5 m vysokého sa pri dopade ohrieva o 1 stupeň.“*)

Táto Mayerova práca nevzbudila pozornosť vo vedeckom svete, to mu však neodobralo chuť do ďalšej práce. Už roku 1848 vydáva prácu s názvom „Príspevok k nebeskej mechanike“. Obnovuje Helmholtzom odstránovanú teóriu, ktorá tvrdí, že slnečná energia má pôvod v premene mechanickej energie dopadajúcich meteoritov na energiu tepelnú.

Mayer chcel upútať pozornosť fyzikov, a preto 14. mája 1849 uverejnil v *Allgemeine Zeitung* článok o svojich objavoch. Už o týždeň v tých istých novinách Mayera kritizovali a na túto kritiku mu neumožnili odpovedať. Jeho najbližšie okolie, ktoré ho ešte menej chápalo ako vedci, verilo, že trpí slávomamom. Objavujú sa uňho zdravotné ťažkosti a 28. mája 1850 upadol do delíria, v ktorom vypadol z okna a po dopade z 9 metrovej výšky si zlomil obe nohy. To ho poznačilo na celý ďalší život.

Ani ďalšia práca „*O mechanickom ekvivalente tepla*“ mu nepriniesla zaslúžené ocenenie. Objavujú sa uňho duševné poruchy, takže na odporúčanie príbuzných sa išiel liečiť do ústavu pre duševne chorých. Tam sa však dostal do rúk úplne nevzdelaným lekárom, ktorí verili, že majú pred sebou človeka postihnutého slávomamom. Zvieracia kazajka patrila k ich najobľúbenejším liečebným prostriedkom. Po prepustení z ústavu r. 1853 sa išiel ešte zotaviť do Švajčiarska, odkiaľ sa vrátil do rodného mesta. O tom, akú malú pozornosť mu venovali súčasníci, svedčí aj správa z r. 1857, ktorá oznamovala, že Mayer zomrel v ústave choromyselných.

V roku 1858 sa Mayer objavil na zasadaní prírodovedcov v Karlsruhe. Tam sa zoznámil s chemikom *Schonbeinom*, na návrh ktorého sa 10. novembra 1858 stal Členom korešpondentom Bazilejskej spoločnosti prírodovedeckého výskumu.

Keďže Mayerove práce zostávali dlho nepovšimnuté, mnohí fyzici považovali za prvého objaviteľa zákona zachovania a premeny energie anglického fyzika *J. P. Joula*, ktorý mal 21. augusta 1843 prednášku o experimentálnom určení mechanického ekvivalentu tepla. Mayer sa pokúšal brániť svoje prvenstvo, avšak tento spor sa r. 1848 prerušil bez uznania jeho priority. Prvý, kto riadne vyzdvihol Mayerove zásluhy, bol anglický fyzik *John Tyndall*, ktorý roku 1862 v prednáške „Hlavné výsledky nemeckého lekára“ priznal Mayerovo prvenstvo a poukázal na odlišnosť oboch bádateľských metód. To bol rozhodný obrat v Mayerov prospech a roku 1867 uverejnili všetky jeho práce.

*) Úmyslně jsou používány také staré jednotky, aby byla logická návaznost na text článku.

V posledných rokoch života sa venoval hlavne svojmu lekárskemu povolaniu. Z tohto obdobia pochádzajú len dve menej významné fyzikálne práce. Ako dôsledok prežitých útrap sa objavujú zdravotné ťažkosti, následkom ktorých Robert Mayer 20. marca 1878 v Heilbronne zomiera.

Literatúra :

1. H. TIMERDING: Robert Mayer und die Entdeckung des Energiegesetzes, Leipzig 1925
2. Kol.: Die berühmten Erfinder, Köln 1960

Benjamin Thompson (Rumford)

JOSEF KOTYK, Pardubice

Letošní 225. výročí narození slavného anglického fyzika amerického původu *Benamina Thompsona*, našim čtenářům známějšího pod jménem *Rumford*, je nám příležitostí, abychom stručně připomněli jeho záslušnou vědeckou činnost.

Benjamin Thompson se narodil dne 26. března 1753 v Rumfordu (Wobara) u Bostonu v chudých poměrech. Po studiích na koleji v blízké Cambridge působil zprvu jako učitel v Rumfordu, rušné události (bouře v Bostonu, uzavření jeho přístavu aj.) získaly jej však povolání vojenskému. Thompson se účastnil bojů, které měly zlomit odpor britských osad severoamerických proti anglickému panství. Již v březnu 1776 bylo však anglické vojsko nuceno opustit Boston, v červenci téhož roku došlo k památnému prohlášení úplné neodvislosti amerických osad a utvoření Spojených států amerických. Po válce přesídlil Thompson do Anglie, kde byl jmenován sirem. To mu však nepřekáželo v úmyslu nabídnout služby bavorskému kurfiřtu Karlu Theodorovi; od roku 1784 působil v různých vysokých funkcích (také jako ministr války) v Mnichově a roku 1790 dostal od kurfiřta titul *hraběte z Rumfordu*. Po kurfiřtově smrti vrátil se v roce 1798 do Anglie. Činně se podílel na založení Royal Institution v Londýně. Roku 1803 se stal také členem slavného Institutu de France. V té době měl už nový domov v Paříži; tam se v roce 1805 oženil s vdovou po věhlasném badateli Ant. L. Lavoisierovi.¹⁾ Zemřel dne 21. srpna 1814 v Auteuil u Paříže.

¹⁾ *Antoine Laurent Lavoisier* (1743—1794) položil základy chemii jako exaktní vědě založené na kvantitativních metodách měření a vážení. Za Velké francouzské buržoazní revoluce byl jako stoupenec monarchie popraven.

Benjamin Thompson — v dalším budeme však již stručně psát Rumford, jak bývá obvyklé — se po léta zabýval fyzikou. V době, o níž píš, byla však fyzika v zajetí fluid, jemných a neviditelných látek, které prý prolínají všechen svět. Tehdy vzniklo také učení o tepelné „tekutině“, o tzv. tepelném fluidu, které je domněle příčinou všech tepelných jevů. Rumford vážil těleso dvakrát, studené i teplé, a shledal, že jeho váha je v obou případech stejná; fluida byla považována za imponderabilia, látky nevažitelné. Jestliže se těleso při nějakém (fyzikálním nebo chemickém) ději zahřálo, muselo zde teplo — tak se předpokládalo — býti již dříve. Bylo někde, kde je svými smysly prý nepostřehneme; v průběhu některých dějů nasává se pak záhadné fluidum caloricum z okolí do jemných pórů, jimiž je každé těleso prostoupeno, přemístí se tak do tělesa, kde jsme již schopni svými smysly je vnímat, a činí těleso teplým. Při jiných dějích se tepelné fluidum z tělesa naopak vytlačuje a činí je chladným. Případy, kdy třením, údery apod. vznikalo teplo zdánlivě z ničeho, byly vysvětlovány změnou specifického tepla látky; že např. vrtáním se budí teplo, přičítalo se domněle menšímu specifickému teplu kovových pilin. Aby vyvrátil tuto hypotézu (domněnku), konal Rumford mnohá pozorování; poukazoval na známé zkušenosti, že pily, pilníky, nebozezy, brusy a j. se při práci rovněž zahřívají. Poznal také, že při výstřelu „naslepo“ se dělo zahřeje více než při výstřelu „naostro“; z toho usoudil, že v druhém případě se část tepla mění v práci. Pověřen v Mnichově dohledem na hotovení děl v místním arsenálu pozoroval s neutuchajícím zájmem neobyčejné zahřívání dělových rour při jejich vrtání, vrtáků i kovových třísek. O teple, které vzniká třením, podal roku 1798 zprávu Royal Society, v níž popisuje výsledky svých klasických pokusů. Aby tepelné fluidum nemohlo být přiváděno okolním vzduchem, ponořil kovový válec, v němž se vrtal dělový jícen, i nebozez, přiložený k dolní podstavě hlavně, do ledové vody (asi 13 kg); když uvedl nebozez koňským potahem do rotace, pozoroval, že válec se zahřívá; rovněž teplota vody stoupala a po 2 1/2 hodinovém vrtání se voda vařila. Poněvadž třísky i dělo měly totéž specifické teplo, mohlo zahřátí nastat jen tím, že teplo bylo buzeno jedině třením. Rumford shledal zároveň, že třením lze vyvinout jakékoli množství tepla. Zkoumaje zjištěný úzký vztah mezi prací a teplem podrobněji, stanovil zhruba také práci potřebnou k získání 1 kcal, tzv. mechanický ekvivalent tepla.

Památné pokusy Rumfordovy²⁾ učinily konec dosavadním nesprávným názorům o teple a přivodily pád hypotézy o tepelném fluidu, neboť odporovala zkušenosti. Daly podnět k rozsáhlému bádání, které vedlo ke vzniku kinetické teorie tepla.

Rumford sestrojil také vodní kalorimetr a podvojný thermoskop. Měřil spalné teplo látek a studoval vedení a sálání tepla; podle výsledků

²⁾ V téže době zabýval se experimenty tohoto druhu také *Humphrey Davy*, narozený právě před 200 lety dne 17. XII. 1778.

získaných těmito pracemi navrhl různá zlepšení kamen, komínů, vytápění kotlů aj.

Z fotometrů (přístrojů, jimiž se měří svítivost světelných zdrojů podle osvětlení, jež způsobují) je Rumfordův nejjednodušší. Sestává z bílé svislé stěny, před níž stojí tenká neprůhledná tyčinka osvětlená současně dvěma zdroji umístěnými tak, aby paprsky z nich dopadaly na stěnu skoro kolmo a oba stíny tyčinky byly na stěně téměř vedle sebe. Jeden zdroj pak vzdalujeme nebo přibližujeme, až jsou oba stíny stejně tmavé. Změříme-li vzdálenosti zdrojů od stěny a známe-li svítivost jednoho, můžeme určit svítivost druhého. Doporučuji čtenářům provést tuto úlohu prakticky jako zajímavou laboratorní práci.

Universální žalobce

(K 275. výročí úmrtí Roberta Hookea)

RNDr. VLASTIMIL FLAJŠINGR, SPŠS Gottwaldov

Robert Hooke, nazývaný Thomasem Youngem „největším ze všech filozofických mechaniků“, značí pro celé generace pouze připomínku základního zákona z oboru pevnosti a pružnosti, podle něhož pružná deformace je úměrná síle, která tuto deformaci vyvolává. V roce 1678 vyjádřil Robert Hooke tento zákon ve formě anagramu: *ceiinosssttuu*.*) (Takto se také často vyjadřoval i Hookeův velký současník a sok I. Newton, u obou měl anagram zajišťovat prioritu objevu.) Méně je už však známo, že Hooke zasáhl svou mimořádnou invencí, fantazií i experimentální zručností téměř do všech oblastí fyziky.

Narodil se 18. června 1635 ve Freshwateru, kde jeho otec byl farářem. Byl spíše neduživým dítětem a tato vlastnost mu v podstatě zůstala až do konce života. Měl se vyučit malířem, záhy však odešel studovat do Westminsteru, poté na Christ Church do Oxfordu. Zde už mj. asistoval *dr. Willisovi* při jeho chemických pokusech a Hookeova mechanická zručnost, kterou zde projevovat, mu pomohla zajistit stálé místo v kroužku významných oxfordských učenců jako např. *Willis, Boyle, Wren, Petty, Sprat* a j. Tím současně vznikalo jádro pozdější slavné Královské společnosti (Royal society). V plodné a klidné spolupráci s Boylem při řešení problémů stlačitelnosti vzduchu se již Hooke uplatnil při zlepšení Boyleovy vývěvy, pružinových hodin a některých astronomických pomůcek. Podle mnohých autorů [2] dokonce prvním objevitelem vztahu mezi tlakem rtuťového sloupce a objemem uzavřeného vzduchu, známého

*) Řešení anagramu: *Ut tensio sic vis*.

dnes jako Boyleův-Mariotteův zákon, není ani *Boyle*, *Mariotte* či *Townley* [3], ale právě Hooke. Na základě své úspěšné činnosti v Boyleově laboratoři byl Hooke v listopadu 1662 ustanoven jako experimentátor Královské společnosti. Vyvíjel zde mimořádné úsilí a Společnost by pravděpodobně nepřežila své počáteční těžké údobí, nebýt Hookeovy nevyčerpatelné řady pokusů, vynálezů a myšlenek z široké škály oborů od potápění, dynamiky, meteorologie až např. po rotaci Jupitera. Asi po roce mu byl za tuto činnost přiznán „plat“ 1 libry týdně, v podstatě pak stejnou nepatrnou odměnu získává za přednášky na Gresham College v Londýně, kde se stal v roce 1665 profesorem geometrie.

Jeho poslední přednáška se uskutečnila v červnu 1698, ale stále se zúčastňoval zasedání Společnosti. Publikoval ještě rok před svou smrtí, zemřel v březnu 1703.

Hooke nebyl zdravotně nikdy zcela v pořádku a možná i to ovlivňovalo jeho jednání, často velmi družné, ale přitom tajnůstkářské. Vzhledem k šíři svých zájmů své četné nápady zpravidla nedováděl až do konce, pak však měl spory o prioritě s každým, kdo se třeba jen těchto problémů pokoušel dotknout. Byl takto zneprátelen téměř se všemi svými současníky. Už jen proto tento „Univerzální žalobce“, jak mu bylo přezdíváno, většinu svých požadavků předem prohrával, i když byl mnohdy v právu.

Jeho první publikací bylo pojednání o kapilaritě z roku 1661. Výsledkem několikaleté práce bylo jeho klasické dílo *Mikrografie* z roku 1665. Podnětem pro její vydání byla Hookeova mikroskopická pozorování, která natolik zaujala členy Královské společnosti, že od roku 1663 je musel Hooke na každém zasedání předvádět. Hooke pomocí mikroskopu objevil buněčnou strukturu na vzorku korku a vůbec poprvé použil název buňka, do té doby byl používán termín pór. V této knize Hooke psal podrobně o hoření, teplo charakterizoval jako druh pohybu a světlo jako „velmi krátké příčné kmity vzhledem ke směru šíření v homogenním mediu“ s rychlostí „příliš velikou pro experimentální změření“. Cenná tvrzení o interferenci a ohybu světla a o barvách podložil Hooke experimenty, jeho úvahy o hoření byly ještě hodně hypotetické.

Během několika dalších let se Hooke stal velmi aktivním a uznávaným autorem. V *Domluvách* (1674) a v *Popisu helioskopů* (1676) rozebíral pokroky v astronomii. *Lampy* (1677) obsahovaly materiály o hoření, světle, barvách, tlaku v tekutinách, slunečních skvrnách a gravitaci. V *Kometě* (1678) uvedl řadu astronomických a mikroskopických pozorování a v *Lectures de Potentia Restitutiva* (1678) vyložil vlastnosti pružných těles.

Známý je jeho spor s Newtonem o původu gravitační teorie. Téměř všechny Hookeovy myšlenky z této oblasti je možno shrnout do tří bodů napsaných v roce 1666:

„1. všechna nebeská tělesa vykazují přitažlivost nejen vůči svému vlastnímu středu, ale i vůči ostatním nebeským tělesům.

2. všechna tělesa, která se začala pohybovat rovnoměrně přímočaře, se pohybují po přímce, pokud nejsou přinucena nějakou jinou silou opisovat kružnici, elipsu nebo jinou křivku.
3. přitažlivé síly jsou tím větší, čím jsou tělesa k sobě blíže. Co se týká způsobu, jak se tyto síly zmenšují se zvětšováním vzdálenosti, přiznávám, že jsem toto pokusy dosud neodhalil. Zanechávám to těm, kteří mají čas a dostatečné znalosti pro tento úkol.“

Přesto Hooke našel na tento problém odpověď, aniž by ho řešil, bezmála deset let před tím, než to učinil Newton ve svých *Principiích*. Začal opět uplatňovat prvenství svého objevu, zřejmě ne zcela neopodstatněně, což Newtona, který na *Principiích* pracoval po mnoho let, silně podráždilo. Jen zásah *E. Halleyho* způsobil, že se Hookeovo jméno objevilo aspoň v jednom z dodatků *Principií*. Přesto se Newton a Hooke nikdy zcela neshodli a všechny smířčí pokusy *H. Oldenburga*, sekretáře Společnosti, byly v podstatě marné.

Po velkém požáru Londýna se stal Hooke Wrenovým asistentem v novém budování města. Tomuto úkolu věnoval několik let. Rozpracoval teorii klenby, problém zaměstnávající lidského ducha po staletí, což bylo později významně oceněno Youngem. A tak i vznik Hookeova zákona byl zřejmě spíše důsledek inženýrských schopností autora než dílo čistě fyzikálního zkoumání. Z této oblasti pocházely i Hookeovy práce o kalení oceli, o její výrobě, o konstrukci podvodních kesonů, o výrobě nových druhů skla i o dalších nových směrech v architektuře.

Šíře činnosti Hookea byla obdivuhodná. Podílel se na rozvoji mnoha vědních oborů, a právem proto patří k největším osobnostem své doby. Rozsahem, nikoliv už hloubkou zpracování svých myšlenek zastiňuje i samotného Newtona.

Literatura

- [1] Baláž, P.: Význační fyzici, SPN Bratislava 1966
- [2] Deeson, E.: Hooke, *Physics Education*, 6, 1971, 3
- [3] Malíšek, V.: K 350. výročí narození Roberta Boylea, *Matematika a fyzika ve škole*, 4, 1976, 7
- [4] Nový, L. — Smolka, J.: Isaac Newton, *Orbis*, Praha 1969

matematické zábavy

Jedno nové prvočíslo

RNDr. JIŘÍ SEDLÁČEK, CSc.

Do kartotéky dosud známých velkých prvočísel přibylo před krátkým časem jedno, které prověřil *H. C. Williams* z university v Manitobě (Kanada) spolu se svým studentem *E. Seahem*.*) Jde o číslo, jež v desítkové soustavě má 317 číslic a všechny jsou jedničky. Dovedete si jistě snadno spočítat, kolik řádků by na této stránce zabíral desetinný zápis tohoto nově známého prvočísla.

Už delší dobu byla zkoumána prvočísla, jež se dají zapsat samými jedničkami (v angličtině se jim stručně říká rep-unit primes). Nejmenší z nich je zřejmě číslo 11.

Označme R_n přirozené číslo, jež je zapsáno n jedničkami. Je vidět, že platí

$$R_n = \frac{1}{9} (10^n - 1).$$

Snadno se přesvědčíme, že nutnou podmínkou, aby R_n bylo prvočíslo, je, aby n bylo též prvočíslo. Tato podmínka však není postačující, neboť např. R_3 je složené. Platí totiž

$$R_3 = 111 = 3 \cdot 37.$$

Podobně jsou i R_5 a R_7 složená, neboť

$$R_5 = 11\,111 = 41 \cdot 271, \quad R_7 = 1\,111\,111 = 239 \cdot 4649.$$

Zatím bylo známo, že R_2 , R_{19} a R_{23} jsou prvočísla. Důkaz, že R_{23} je prvočíslem, podal *M. Kraitchik*. Nyní tedy do této rodiny přistupuje čtvrtý člen — prvočíslo R_{317} . Není třeba zdůrazňovat, že se při jeho prověřování použilo počítačů. Další kandidát, který aspiruje na to, stát se členem pátým, je prý číslo R_{1031} .

Jak obtížný se nám na podkladě těchto zkušeností jeví problém, který počátkem šedesátých let uvádí *W. Sierpiński* v jedné své knížce: Je prvočísel R_n konečně nebo nekonečně mnoho?

*) Scientific American, Vol. 238 (1978), čís. 2, str. 89—90.

recenze

Orear, J.: **ZÁKLADY FYZIKY**

Vydala ALFA, n. p., Bratislava, v roku 1977 preklad z angličtiny, 550 strán, 340 obrázkov, 12 tabuliek, viaz. Kčs 43,—

U nás nemáme veľa pútavých a prehľadných kníh zo súčasnej fyziky. Jay Orear urobil pokus o moderný didaktický výklad, vložený do kontextu poznania roku 1966. V duchu svojho učiteľa Enrica Fermiho predstavuje „ducha a úchvatnosť fyziky“, kladie dôraz na hlavné princípy a nezabúda na hlboko filozofickú povahu fyzikálnych postupov. Bez použitia diferenciálneho a integrálneho počtu, vektorového aparátu, operátorov a matíc citlivo predkladá fyzikálnu podstatu i tých najnovších javov modernej fyziky. Ukazuje, že aj kvantovú mechaniku možno vysvetliť, dôkladne a ucelene, bez vyššej matematiky. Orearov výklad je založený na pedagogických skúsenostiach z cornellskej a columbijskej univerzity. Sled tém je podriadený požiadavke prísnej logickej výstavby s okamžitým najnovším vysvetlením. Zachycuje pravdivý stav súčasnej fyziky aj s istými nepresnosťami a približnosťami. V modernej fyzike ľudský rozum poznáva stále nové šokujúce prekvapenia, s ktorými sa treba vyporiadať.

„Základy fyziky“ sú rozdelené do 16 kapitol: Úvod, Kinematika, Dynamika, Gravitácia, Moment hybnosti a energia, Kinetická teória, Elektrostatika, Elektromagnetizmus, Aplikácie elektrických javov, Vlnenie a svetlo, Teória relativity, Kvantová teória, Atómová fyzika, Štruktúra látok, Jadrová fyzika, Elementárne častice. Každá z nich má 5—12 samostatných článkov. Ku každej kapitole patria v texte vyriešené príklady, kontrolné otázky s odpoveďou na nasledujúcej stránke knihy a úlohy na samostatné riešenie. V celej knihe je 340 obrázkov, napr. stroboskopické snímky pohybujúcich sa telies, fotografické snímky častíc v bublinovej komore, dvojfarebné grafy a náčrty. Čitateľ by mal pri štúdiu zodpovedať správne na 102 otázky kontrolného charakteru, ktoré majú zabezpečiť pochopenie látky. Môže vyriešiť 401 zadaných úloh, z ktorých výsledky párne očíslovaných úloh sú uvedené v závere knihy. V celej publikácii sa používa sústava SI.

Naznačme si aspoň niekoľkými poznámkami čo-to z obsahu niektorých kapitol. V kapitole o gravitácii je odvodenie druhého a tretieho Keplerovho zákona, zaujímavo sa hovorí o tiaži a stave beztiaže. V časti venovanej teórii relativity je zaradený Galileiho princíp relativity, rieši sa problém svetelného éteru a problematika Michelsonovho pokusu, vystihuje sa Einsteinov prínos fyzikálnej interpretácie, konštatujú sa dôsledky pre dilatáciu času a kontrakciu dĺžok. V závere sú poznámky o všeobecnej

relativite, Machovom princípe a kozmologických dôsledkoch relativistických úvah o vesmíre.

Po úvodnom zhodnotení klasickej mechaniky sa v kapitole „Kvantová teória“ opisuje fotoelektrický jav, podstata korpuskulárno-vlnového dualizmu. Vysvetlená je elektrónová difrakcia a Heisenbergov princíp neurčitosti s poznámkou o zásadných rozdieloch medzi kvantovou a klasickou teóriou v oblasti mikrosвета.

V kapitolách „Jadrová fyzika“ a „Elementárne častice“ sú pozorne vysvetlené základné vlastnosti silového pôsobenia v jadre, radioaktívny rozpad, difrakčný rozptyl zväzku častíc, štruktúra jadra a procesy s nimi, interakcia častíc a snahy o systemizáciu poznatkov z mikrosвета. Orear sa dotkne všetkých podstatných problémov a otvorených oblastí súčasnej fyziky. Spomenie a vysvetlí podstatu bublinovej komory, supratekutosť, lasery, prechod bariérou, kozmické žiarenie, antilátku, zákony zachovania a ich porušenie. Je presvedčený, že „či sa nám to páči alebo nie, základný fyzikálny výskum vplýva na čosi viac, ako je len naše pochopenie fyzikálneho sveta.“

Orearova knižka je hodnotným, pedagogicky premysleným podnetom na poli hlbšieho pochopenia a štúdia súčasnej fyziky medzi širokým okruhom záujemcov. Som presvedčený, že z tejto knihy sa dá dobre študovať každému čitateľovi so záujmom o modernú fyziku. Fotografie lyžujúceho sa N. Bohra či bubnujúceho R. P. Feymana mi pripadajú ako sympatický odkaz, že moderná fyzika môže byť pre ľudí nášho veku príťažlivá.

Nezabudnite si prelistovať „Základy fyziky“ od J. Oreara. Ostatné už bude zákonite nasledovať.

Dušan Jedinák

S. Fiorini — R. J. Wilson: **EDGE-COLOURINGS OF GRAPHS**

Pitman, London — San Francisco — Melbourne 1977, stran 154, obr. 56, cena neuvedena.

Když se v červnu 1974 konalo v Praze druhé československé symposium o teorii grafů, zúčastnilo se ho mnoho našich i zahraničních matematiků. Byl tehdy mezi nimi i anglický matematik *Robin J. Wilson*, kterého jsme znali z řady prací i z jeho pěkné knížky o teorii grafů (1972). V té době se R. J. Wilson zabýval problémem hranového barvení grafu a na toto téma též v Praze přednášel. Nyní přichází na náš redakční stůl další knížka, kterou napsal spolu s *S. Fiorinim* a jež námětově patří do stejného okruhu otázek. Protože teorie grafů v poslední době nabývá stále většího a většího významu a někteří naši studenti se s ní seznamují už na gymnáziích, povíme si zde něco o této nové publikaci i o tomto speciálním odvětví teorie grafů.

Asi znáte problém čtyř barev, jehož vznik se klade do poloviny minulého století. Je to otázka, zda každou zeměpisnou mapu (na kouli či v ro-

vině) je možno obarvit, jsou-li po ruce čtyři barvy. Přitom se žádá, aby každý stát dostal jednu barvu a aby dvě sousední území dostala vždy barvy různé. Zachoval se dopis, který r. 1852 napsal *A. de Morgan* svému příteli *W. R. Hamiltonovi*. Sděluje v něm, že spolu s jedním svým studentem přišli na výše zmíněný problém a nedovedou jej řešit. Tento pramen se pokládá za počátek tzv. chromatické teorie grafů. Představme si, že na mapě zvolíme v každém státě jeden bod (např. hlavní město) a tyto body pokládáme za uzly jistého grafu. Jsou-li dva státy sousední, spojíme příslušné uzly vždy obloukem — říkáme mu hrana grafu. Tím dostáváme strukturu složenou z uzlů a hran, které se obšírněji říká konečný neorientovaný graf. Je to vlastně jeho speciální případ — graf rovinný.

Ale nyní zpět k otázce barvení. Obarvení států je možno přenést na obarvení uzlů příslušného rovinného grafu a mluvit o chromatickém čísle tohoto grafu. Problém čtyř barev se pak dá vyslovit takto: chromatické číslo každého rovinného grafu se buď rovná číslu 4 nebo je menší. O důkaz se pokoušelo mnoho matematiků, první pokus publikoval *A. B. Kempe* r. 1879, ale vždycky se přišlo na chybu. Teprve r. 1976 oznámili *K. Appel* a *W. Haken*, že důkaz mají. Přitom podstatně použili počítačů a zdá se, že tento důkaz je opravdu bez závad.

Chromatická teorie grafů je však bohatší a kromě věty o čtyřech barvách obsahuje rozměrné oblasti s mnoha výsledky i s otevřenými problémy. Barvení hran místo uzlů je jeden námět, který upoutává pozornost. Přitom se žádá, aby žádné dvě hrany se společným uzlem nedostaly stejnou barvu a aby počet užitých barev byl co nejmenší. Hranové chromatické číslo je na světě! *V. G. Vizing* našel v šedesátých letech překvapivý výsledek, podle něhož každý graf — rovinný či nikoliv — má hranové chromatické číslo buď ρ nebo $\rho + 1$, kde ρ je maximální uzlový stupeň. Přitom stupněm uzlu se rozumí počet všech hran, jež jsou s ním incidentní. Kolem této Vizingovy věty se vlastně točí celá knížka, o které zde píšeme. Obecný problém, který graf náleží do třídy s hodnotou ρ a který do třídy s hodnotou $\rho + 1$, je dosud nerozřešen. Fiorini a Wilson se mu věnují na stránkách své monografie.

Autoři napsali pěknou knížku. Když jsme ji tak létmo prolistovali, pověděli jsme si i trochu o problémech barvení a o teorii grafů. Snad si někteří čtenáři najdou další prameny o této důležité matematické disciplíně a sáhnou pak možná i po této nové publikaci.

Jiří Sedláček

Alois Urban: **DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE I.**

SNTL Praha — ALFA Bratislava 1978, 2. vyd. revidované, 416 str., 476 obr., cena Kčs 29,— váz.

Tato učebnice deskriptivní geometrie je sice určena posluchačům fakult strojního inženýrství vysokých technických škol, ale vzhledem ke svému

obsahu je velmi vhodná pro zopakování deskriptivní geometrie pro nově přijaté posluchače jak strojních, tak stavebních fakult technických škol. Jedná se zvláště o část věnovanou doplňkům z planimetrie, kuželosečkám, základům stereometrie a z promítacích způsobů pak zejména Mongeovu promítání. V tomto druhu promítání, které je velmi jednoduché a je základem dalších úvah o deskriptivní geometrii, se ukazuje také např. sestrojování řezů na hranolech, příp. kruhových válcích a jehlanech, příp. kruhových kuželích. Z vlastností řezů roviny s hranolem, příp. jehlanem vyplývá pak důležitá příbuznost, tzv. afinita, příp. kolineace.

Zpravidla se předpokládá při zahájení přednášek z deskriptivní geometrie, že posluchač přijatý do 1. ročníku na základě přijímacího řízení se již s látkou výše uvedenou seznámil na střední škole. Všichni ti, kdo deskriptivní geometrii neměli na střední škole, nebo se s ní pouze letmo setkali (většinou proto, že jejich původní úmysl dalšího vysokoškolského studia se nesplnil, ale též i vlastní vinou), měli by si svou svízelnou situaci včas uvědomit a doplnit si svoje znalosti třeba z výše uvedené knihy. Je vskutku nežádoucí, aby třeba jen k vůli deskriptivní geometrii zanechávali studia na vysoké škole již během prvního semestru nebo po něm. Na druhé straně nelze již na vysoké škole z časových důvodů opakovat a doplňovat to, co posluchači v podstatě mají dobře znát.

Vedle základního Mongeova promítání jsou v učebnici vyloženy ještě ostatní promítací způsoby, které budoucí strojní (ale také stavební) inženýr musí dobře umět: kosoúhlé promítání, pravoúhlá axonometrie a základy středového promítání s praktickou aplikací v lineární perspektivě.

Zájemcům o deskriptivní geometrii doporučuji zejména poslední odstavec knihy, ve kterém je vyložena podstata obecné teorie lineárních zobrazení, zvláště pak základ teorie dvojobrazových zobrazení a jako ukázka jiných zobrazovacích způsobů potom princip dvojstopního zobrazení.

Pro opakování nastudované teorie jsou přímo do textu ve značném počtu vloženy řešené příklady a pro vlastní studium příklady pro cvičení. Tyto příklady a cvičení pro samostatnou práci jsou většinou okóтовány, ve složitějších případech jsou k nim uvedeny stručné návody pro postup řešení.

Učebnice je napsána na podkladě mnohaletých autorových zkušeností, po metodické stránce je skutečně velmi dobře zpracovaná. Jak samotný text, tak také zadané úlohy pro cvičení jsou sestaveny od jednoduchých úvah a úloh ke stále složitějším. Přísně logický postup pak láká k přečtení dalších stran, odstavců i kapitol knihy. Lze proto tuto knihu doporučit nejen těm, kterým je vlastně určena, ale — jak bylo výše řečeno — také všem zájemcům o deskriptivní geometrii nejen z nutnosti, ale též z vlastní záliby.

Karel Drábek, Praha

*Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních
přeje svým čtenářům z řad studentských
úspěšné ukončení školního roku
a studentům i učitelům
příjemné a radostné prožití
prázdninové dovolené*



*Těšíme se na další setkání
v novém školním roce*

Znám, Š.: TEÓRIA ČÍSEL

Vydala ALFA, n. p., Bratislava, v roku 1977, zaradené v edícii Epsilon, 202 strán, 1 obr., brož. Kčs 8,—

Ďalšou publikáciou, ktorá môže rozšíriť matematický obzor našich stredoškolákov, je zaujímavá a podnetná knižka docenta RNDr. Štefana Známa, CSc. Knižka je rozdelená na tri časti, ktorých náročnosť postupne stúpa. Autor naznačuje špecifické formy matematického myslenia, ktoré charakterizujú teóriu čísel. Matematická podstata je sústredená vo vetách a dôkazoch. Ich použitie je ukázané na príkladoch. V závere kapitoliek sú uvedené texty cvičení pre samostatné riešenie študujúcich. Na konci knihy sú výsledky niektorých z nich.

Prvá časť ukazuje základné pojmy a metódy teórie čísel: Euklidov algoritmus, deliteľnosť, základná veta aritmetiky, aritmetické funkcie, problematika prvočísel. Naučíme sa metódu riešenia lineárnych diofantických rovníc, niektoré vety o pytagorejských trojuholníkoch. Súčasťou kapitoly je výklad o číselných sústavách a deliteľnosti v nich. Skoro celú prvú časť môže stredoškolák študovať sám.

Druhá časť sa zaoberá základnými vlastnosťami kongruencií, algebrou zvyškových tried, riešením lineárnych kongruencií. Je tu zaradená kapitola o algebraických číslach, kvadratických telesách a Fibonacciho číslach. Táto časť rozširuje podstatne stredoškolské učivo. Je vhodná pre prácu matematických krúžkov, hlavne v príprave na MO.

V tretej časti autor spracoval niekoľko problémov z elementárnej teórie čísel. Sú určené pre čitateľov s vyhraneným záujmom.

Pre informáciu uvediem niektoré ďalšie publikácie pre stredoškolákov s problematikou teórie čísel:

Apfelbeck, A.: Kongruence. Praha, ÚV MO-Mladá fronta 1968. ŠMM sv. 21.

Davydov, U. S. - Znám, Š.: Teória čísel — základné pojmy a zbierka úloh. Bratislava, SPN 1972, 2. vyd.

Veselý, F.: O dělitelnosti čísel celých. Praha, ÚV MO-Mladá fronta, 1966. ŠMM sv. 14.

Sedláček, J.: Co víme o přirozených číslech. Praha, ÚV MO-Mladá fronta 1977, 3. vyd. ŠMM sv. 2.

Teória čísel je veľmi zaujímavá matematická disciplína s dlhou históriou. Skúste sa zahľbiť do jej problémov.

Dušan Jedinák